

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

Uma Estrutura Alternativa para a
Parametrização no Controle Robusto \mathcal{H}_∞ em
Tempo Discreto

Luiz Felipe Pugliese

Itajubá, 27 de junho de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

Luiz Felipe Pugliese

Uma Estrutura Alternativa para a
Parametrização no Controle Robusto \mathcal{H}_∞ em
Tempo Discreto

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Itajubá como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Automação e Sistemas Elétricos Industriais

Orientador: Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Jeremias Barbosa Machado

27 de junho de 2019

Itajubá

Aos meus pais, Luiz e Rosângela.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por tudo.

Aos meus familiares, pelo carinho. Em especial, aos meus pais Luiz Carlos Pugliese e Rosângela Aparecida Gonçalves de Lima Pugliese por toda dedicação que tiveram e, principalmente, por todo esforço que fizeram para que eu obtivesse sucesso em tudo que ocorreu em minha vida. Sem eles, não seria ninguém.

À minha namorada, Carolina Sampaio Arraes, pelo carinho apoio e paciência durante todo esse tempo.

Aos amigos, pela ajuda, compreensão e companhia nos bons e maus momentos que vivi durante o doutorado. Em especial, ao meu grande amigo Pedro Henrique Ferreira Machado, pelas conversas e momentos compartilhados.

Aos colegas do Grupo de Microeletrônica e aos professores do *campus* de Itabira da Unifei por todos os momentos vivenciados.

Um agradecimento especial aos professores Luís Henrique e Jeremias, pela amizade, confiança, ajuda e orientação na realização de mais este trabalho.

À Capes pelo apoio financeiro.

*"Aqueles que se sentem satisfeitos sentam-se e nada fazem. Os insatisfeitos são os
únicos benfeitores do mundo."
(Walter Savage Landor)*

Resumo

Nesta tese de doutorado, apresenta-se uma estrutura alternativa para a parametrização de todos os controladores \mathcal{H}_∞ para plantas descritas por uma fatoração coprima à esquerda qualquer com uma metodologia generalizada para o caso em tempo discreto. Mostra-se que a partir do método genérico para a síntese dos controladores \mathcal{H}_∞ admissíveis, o controlador central não estritamente próprio e o controlador estritamente próprio podem ser obtidos. Demonstra-se também que, a partir da fatoração coprima à esquerda normalizada, sob a perspectiva do *framework* proposto neste trabalho, é possível (i) obter tanto o controlador central em tempo discreto como o controlador estritamente próprio baseado na solução de otimização de duas equações algébricas de Riccati; (ii) encontrar o valor de um limitante de robustez (γ_{min}) que se relaciona diretamente com a robustez dos controladores de forma a apresentar que o controlador não estritamente próprio se mostra mais robusto que o controlador estritamente próprio.

A metodologia de estabilização robusta \mathcal{H}_∞ de plantas representadas por uma descrição em fatores coprimos tem recebido particular interesse pela simplicidade em seu uso e pela natureza geral como representa a incerteza nesse contexto. É uma metodologia capaz de incorporar objetivos de desempenho e robustez às incertezas na abordagem de projeto.

Para investigar a aplicabilidade da tese proposta, a eficácia do *framework* desenvolvido e, conseqüentemente, do controlador em tempo discreto projetado, foram realizadas simulações e experimentos práticos na malha de controle de posição de uma esfera metálica de um modelo didático do levitador magnético fabricado pela empresa QUANSER.

Palavras-chaves: Controle robusto, controle \mathcal{H}_∞ , estabilidade robusta, fatoração coprima à esquerda.

Abstract

In this doctoral thesis, an alternative structure is presented for the parameterization of all \mathcal{H}_∞ controllers for plants described by any left coprime factorization with a generalized methodology for the discrete-time case. It is shown that from the generic method for the synthesis of the \mathcal{H}_∞ admissible controllers, the non-strictly proper central controller and the strictly proper controller are obtained. It is also demonstrated that, from the normalized left coprime factorization from the perspective of the proposed framework, it is possible (i) to obtain both the discrete-time central controller and the strictly proper controller based on the optimization solution of two algebraic Riccati equations; (ii) to find the value of the bound of robustness (γ_{min}) which is directly related to the robustness of the controllers in order to show that the non-strictly proper controller is more robust than the strictly proper controller.

The \mathcal{H}_∞ robust stabilization methodology of plants represented by a description in coprime factors has received particular interest by the simplicity in its use and by the general nature it represents the uncertainty in that context. It is a methodology able to incorporate performance and robustness objectives to the uncertainties in the design approach.

In order to investigate the applicability of the proposed thesis, the effectiveness of the developed framework and consequently of the designed discrete-time controller, simulations and practical experiments regarding the control of the position of metallic sphere of a prototype magnetic levitation designed by manufacturer QUANSER were carried out.

Key-words: Robust control, \mathcal{H}_∞ control, robust stability, left coprime factorization.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de blocos do sistema de controle.	22
Figura 2 – Diagrama de blocos do sistema perturbado por fatores coprimos.	23
Figura 3 – Resposta ao degrau unitário para o controlador central no tempo contínuo.	54
Figura 4 – Resposta ao degrau unitário para a aproximação de Tustin do controlador contínuo para $f = 50$ [Hz].	55
Figura 5 – Resposta ao degrau unitário para a aproximação de Tustin do controlador contínuo para $f = 10$ [Hz].	56
Figura 6 – Resposta ao degrau unitário para o controlador central no tempo discreto para $f = 50$ [Hz].	57
Figura 7 – Resposta ao degrau unitário para o controlador central no tempo discreto para $f = 10$ [Hz].	57
Figura 8 – Resposta ao degrau unitário para o controlador estritamente próprio para $f = 50$ [Hz].	58
Figura 9 – Resposta ao degrau unitário para o controlador estritamente próprio para $f = 10$ [Hz].	59
Figura 10 – Comparação das respostas para $f = 50$ [Hz].	60
Figura 11 – Comparação das respostas para $f = 10$ [Hz].	61
Figura 12 – Levitador Magnético.	63
Figura 13 – Esquemático da planta de levitação magnética.	64
Figura 14 – Conexão de sistemas em série.	65
Figura 15 – Simulação - Resposta para a primeira referência de entrada, caso contínuo.	67
Figura 16 – Simulação - Resposta para a segunda referência de entrada, caso contínuo.	68
Figura 17 – Ensaio - Resposta para a primeira referência de entrada, caso contínuo.	68
Figura 18 – Ensaio - Resposta para a segunda referência de entrada, caso contínuo.	69
Figura 19 – Simulação - Resposta para a primeira referência de entrada, aproximação de Tustin.	69
Figura 20 – Simulação - Resposta para a segunda referência de entrada, aproximação de Tustin.	70
Figura 21 – Ensaio - Resposta para a primeira referência de entrada, aproximação de Tustin.	70
Figura 22 – Ensaio - Resposta para a segunda referência de entrada, aproximação de Tustin.	71
Figura 23 – Simulação - Resposta para a primeira referência de entrada, controlador não estritamente próprio.	72

Figura 24 – Simulação - Resposta para a segunda referência de entrada, controlador não estritamente próprio.	72
Figura 25 – Ensaio - Resposta para a primeira referência de entrada, controlador não estritamente próprio.	73
Figura 26 – Ensaio - Resposta para a segunda referência de entrada, controlador não estritamente próprio.	73
Figura 27 – Simulação - Resposta para a primeira referência de entrada, controlador estritamente próprio.	74
Figura 28 – Simulação - Resposta para a segunda referência de entrada, controlador estritamente próprio.	75
Figura 29 – Ensaio - Resposta para a primeira referência de entrada, controlador estritamente próprio.	75
Figura 30 – Ensaio - Resposta para a segunda referência de entrada, controlador estritamente próprio.	76
Figura 31 – Ensaio real para a primeira referência de entrada - Comparação de diferentes controladores para a planta de levitação magnética. Contínuo: (a) posição da esfera de aço [mm], (b) corrente na bobina [A]; Não estritamente próprio: (c) posição da esfera de aço [mm], (d) corrente na bobina [A]; Estritamente próprio: (e) posição da esfera de aço [mm], (f) corrente na bobina [A].	77
Figura 32 – Ensaio real para a segunda referência de entrada - Comparação de diferentes controladores para a planta de levitação magnética. Contínuo: (a) posição da esfera de aço [mm], (b) corrente na bobina [A]; Não estritamente próprio: (c) posição da esfera de aço [mm], (d) corrente na bobina [A]; Estritamente próprio: (e) posição da esfera de aço [mm], (f) corrente na bobina [A].	77

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores de γ para síntese dos controladores com $f = 50$ [Hz].	60
Tabela 2 – Valores de γ para síntese dos controladores com $f = 10$ [Hz].	62
Tabela 3 – Valores de γ usado na síntese dos controladores para o levitador magnético.	76

Lista de abreviaturas e siglas

A/D	Analógico/Digital
D/A	Digital/Analógico
LCF	<i>Left Coprime Factorization</i>
LFT	<i>Linear Fractional Transformation</i>
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
NLCF	<i>Normalized Left Coprime Factorization</i>
PI	Proporcional-Integral
CT	<i>Continuous-time</i>
DT	<i>Discrete-time</i>
NSP	<i>Non-Strictly Proper</i>
SP	<i>Strictly Proper</i>

Lista de símbolos

sup	Supremo
max	Máximo
min	Mínimo
inf	Inferior
λ	Autovalor de uma matriz
σ	Valor singular de uma matriz
$'$	Matriz transposta
$*$	Matriz complexo-conjugada transposta
\times	Multiplicação de matrizes
> 0	Positiva definida
≥ 0	Positiva semidefinida
< 0	Negativa definida
≤ 0	Negativa semidefinida
Δ	Incerteza paramétrica
G	Matriz de transferência da planta de processo
G_{Δ}	Matriz de transferência da planta de processo com incerteza
$ \cdot $	Módulo
$\ \cdot\ $	Norma
$\ \cdot\ _2$	Norma \mathcal{H}_2
$\ \cdot\ _{\infty}$	Norma \mathcal{H}_{∞}
$\mathcal{X}_{-}(M)$	Subespaço invariante estável de uma matriz M
I	Matriz Identidade
P	Planta generalizada

K	Controlador
γ	Valor da norma \mathcal{H}_∞
\mathcal{F}_I	LFT inferior
\mathcal{F}_S	LFT superior
(A, B, C, D)	Representação de um sistema dinâmico em variáveis de estado
\mathcal{T}_{zw}	Matriz de transferência de malha fechada que relaciona a entrada w à saída z
x	Vetor de estados
u	Vetor de entradas
y	Vetor de saídas
w	Vetor de perturbações
z_u	Vetor de saídas auxiliares relacionadas às entradas
z_x	Vetor de saídas auxiliares relacionadas aos estados
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
X	Solução da Equação Algébrica de Riccati associada ao regulador de estados
Y	Solução da Equação Algébrica de Riccati associada ao observador de estados
K_C e \tilde{K}_C	Matriz de ganhos do regulador de estados
K_F	Matriz de ganhos do observador de estados
\mathcal{Q}	Solução da equação de Lyapunov
H_G	Matriz Hamiltoniana
H_S	Matriz Simplética
T	Tempo de amostragem
f	Frequência de amostragem
x_b	Posição da esfera de aço do sistema de levitação magnética
i_c	Corrente da bobina do sistema de levitação magnética

K_m	Constante de força eletromagnética do sistema de levitação magnética
M_b	Massa da esfera metálica do sistema de levitação magnética
g	Constante gravitacional
k_p	Ganho proporcional
k_i	Ganho integral

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Considerações Gerais	16
1.2	Justificativas	18
1.3	Objetivos	19
1.4	Organização do trabalho	19
2	CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_∞ A TEMPO CONTÍNUO	21
2.1	Estabilização Robusta de Fatores Coprimos	21
2.2	Controle Robusto \mathcal{H}_∞ a Tempo Contínuo	25
3	CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_∞ A TEMPO DISCRETO	31
3.1	Definições Iniciais	31
3.2	Estabilização Robusta e Controle Robusto \mathcal{H}_∞ a Tempo Discreto	33
4	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	52
4.1	Procedimento de Projeto	52
4.1.1	Controle \mathcal{H}_∞ a Tempo Contínuo	52
4.1.2	Controle \mathcal{H}_∞ a Tempo Discreto	52
4.1.2.1	Controlador Central Não Estritamente Próprio	52
4.1.2.2	Controlador Estritamente Próprio	53
4.2	Exemplo Ilustrativo	53
4.3	Sistema de Controle de Posição de uma Esfera de Aço de um Sistema de Levitação Magnética (MAGLEV)	63
4.3.1	Modelo do Levitador Magnético	63
4.3.2	Simulações da Malha de Controle	66
5	CONCLUSÕES	79
	REFERÊNCIAS	81

1 Introdução

1.1 Considerações Gerais

O objetivo principal de um engenheiro de controle é projetar controladores que são capazes de atuar sobre processos em situações reais de operação e funcionamento. Para que esse propósito seja cumprido, o modelo do processo em análise é de extrema importância e deve ser acessível ao engenheiro projetista para que seja possível sintetizar um controlador que apresente uma atuação satisfatória sobre o processo em questão (1). Usualmente, o modelo adotado para a representação do sistema em análise é obtido por meio de aproximações matemáticas dos fenômenos físicos que o representam, de maneira que qualquer que seja a representação matemática desse sistema, tal modelo poderá compreender suposições menos complexas. As não linearidades geralmente não são modeladas por serem desconhecidas porém, se são conhecidas e modeladas, podem ser inexploradas a fim de simplificar a análise (2). Nesse contexto, os controladores projetados que se mostram bem sucedidos perante a existência de imprecisões intrínsecas à modelagem nominal adotada, são chamados de robustos. Conseqüentemente, um projeto de um sistema de controle pode ser dito robusto, se peculiaridades, como a estabilidade e o desempenho, são características garantidas não apenas para o modelo nominal adotado, mas para uma família de modelos com incertezas.

A teoria de otimização é utilizada na teoria de controle moderno devido ao seu tratamento quantitativo de requisitos de robustez. Com a intenção de se obter uma solução para algum funcional de custo, critérios de desempenho muito utilizados na literatura fazem o uso de normas como a \mathcal{H}_2 e a \mathcal{H}_∞ (3, 4). Nesta tese, uma importância maior será dada à metodologia de projeto apontada como a de pior caso, conhecida na literatura como o problema de controle \mathcal{H}_∞ , que tem sido abundantemente explorada desde a década de 1980 quando foi introduzida por Zames em (5). A partir de 1984, os trabalhos sobre a teoria de controle \mathcal{H}_∞ utilizaram de uma mistura de técnicas no domínio do tempo e no domínio da frequência e podem ser vistos em (3, 6, 7, 8, 9, 10).

Desde a sua formulação, o problema de controle \mathcal{H}_∞ foi alvo de várias linhas de pesquisa, além de ter sido investigado por diferentes metodologias, o que gerou estruturas que variam entre domínio da frequência, do tempo e de jogos dinâmicos, conforme apresentadas nos trabalhos (4, 5, 11). Outras abordagens e metodologias para o problema \mathcal{H}_∞ também foram desenvolvidas e os resultados podem ser vistos em (12, 13, 14, 15). O método que trabalha no domínio do tempo foi o primeiro a utilizar soluções de equações algébricas de Riccati no controle \mathcal{H}_∞ , o que proporcionou um avanço importante (4, 16, 17, 18, 19, 20). O problema de controle com realimentação de saída baseado na

síntese \mathcal{H}_∞ também foi estendido para o caso em tempo discreto e há uma diferença significativa de tal problema quando comparado ao seu análogo em tempo contínuo, que é o fato de existirem duas estruturas para os observadores de estados em tempo discreto (21). Uma estrutura proporciona obter um controlador chamado não estritamente próprio e a outra proporciona obter um controlador dito estritamente próprio. Então, dependendo da estrutura a ser considerada e das suposições feitas na implementação física da solução de controle, a propriedade do controlador pode ser vista como uma questão primária. Por essa razão, algumas soluções subestimam ou não consideram o controlador central em tempo discreto, que é conhecido por ser um controlador não estritamente próprio (22, 23).

Neste trabalho a metodologia utilizada na síntese dos controladores baseou-se no desenvolvimento apresentado e consolidado na literatura por Zhou, Doyle e Glover em (24) e por Stoorvogel em (25), os quais tratam do desenvolvimento de controladores \mathcal{H}_∞ no tempo contínuo e no tempo discreto, respectivamente, a partir da composição e solução de uma otimização de equações algébricas de Riccati. Em especial para o caso discreto, foram elaboradas extensões do controle \mathcal{H}_∞ nas quais se destacam as abordagens baseadas em espaço de estados desenvolvidas por Stoorvogel (25) e na teoria dos jogos desenvolvida por Başar (11). Sob esses pressupostos e utilizando-se a abordagem no domínio do tempo, as condições necessárias e suficientes para a existência de controladores internamente estáveis, que tornam a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada inferior a um γ , são as soluções semidefinidas positivas de duas equações algébricas de Riccati, uma associada ao problema de regulação e outra associada ao problema de estimação, em que, o produto dessas duas matrizes deve ter um raio espectral menor do que γ^2 (25).

As pesquisas desenvolvidas na área de controle robusto se mostraram atrativas para a solução de problemas em que se necessita otimizar algum funcional de custo sobre determinadas incertezas, paramétricas ou não paramétricas (2). Uma metodologia que tem recebido particular interesse é a da estabilização robusta \mathcal{H}_∞ de plantas representadas por uma descrição em fatores coprimos, atratividade que pode ser explicada por sua facilidade de uso e pela natureza geral da representação da incerteza nesse contexto (26, 27, 28). É uma metodologia que propõe uma solução capaz de incorporar objetivos de desempenho e robustez às incertezas na abordagem de projeto, utilizando a síntese \mathcal{H}_∞ , além de garantir a estabilidade do sistema em malha fechada. Alguns exemplos dessa abordagem e suas aplicações podem ser vistos em (29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36).

A metodologia da estabilização robusta \mathcal{H}_∞ de plantas descritas por fatores coprimos foi desenvolvida inicialmente para o tempo contínuo e mais detalhes podem ser vistos em (37). Com base na abordagem de projeto proposta por McFarlane-Glover (27), Iglesias desenvolveu em (23) um controlador em tempo discreto com resultados semelhantes ao procedimento de projeto baseado na solução da fatoração coprime à esquerda normalizada, ou NLCF (*Normalized Left Coprime Factorization*).

Nesse contexto, enuncia-se o questionamento que levou à realização desta tese de doutorado:

É possível obter uma estrutura alternativa de projeto em tempo discreto capaz de parametrizar controladores \mathcal{H}_∞ que resolvam o problema da estabilização robusta para plantas descritas por fatores coprimos à esquerda por um método de projeto semelhante ao apresentado por Zhou e Doyle em tempo contínuo (37)?

1.2 Justificativas

Historicamente, o problema de controle \mathcal{H}_∞ padrão tem sido encontrar todos os controladores estáveis que proporcionam à norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada ser menor que um valor de γ limite. Tal problema foi extensivamente investigado nas últimas décadas por diversos autores, tanto no domínio do tempo contínuo como no domínio do tempo discreto, como pode ser visto nos trabalhos de Francis (6), Başar e Bernhard (11), Iglesias (23, 38), Storvoogel (25), Zhou e Doyle (37), Green e Limebeer (39) e nas referências contidas nesses trabalhos.

Primeiramente, abordou-se a metodologia em tempo contínuo (24). No entanto, para uma realização prática de controle e, como, na implementação de controladores, um computador digital é comumente utilizado, fizeram-se necessários outros métodos para obter o controlador diretamente no domínio discreto. Uma possível abordagem seria projetar o controlador em tempo contínuo e utilizar de aproximações matemáticas para discretizar esse controlador como a aproximação de Tustin, por exemplo. Entretanto, ao se projetar o controlador usando técnicas desenvolvidas para o tempo discreto, torna-se possível obter maior conhecimento das propriedades e características do sistema de controle resultante e, dessa maneira, o controlador projetado pode agir conforme originalmente especificado (22, 38, 40).

Para o caso discreto, vale ressaltar que a síntese de controladores \mathcal{H}_∞ possibilita o desenvolvimento de um controlador com a estrutura de um observador de estados preditivo chamado de controlador estritamente próprio, semelhante à estrutura obtida para o caso em tempo contínuo, e de um controlador com a estrutura de um observador de estados corrente chamado de controlador central em tempo discreto ou controlador não estritamente próprio (40). Iglesias em (23) desenvolveu um controlador fundamentado na abordagem de projeto apresentada por McFarlane-Glover em (27), baseando-se na solução da fatoração coprima à esquerda normalizada. Ficou demonstrado que as propriedades de desempenho e robustez só poderiam ser obtidas para o controlador estritamente próprio e que a mesma conclusão não poderia ser alcançada com a implementação do controlador central no tempo discreto. Neste trabalho, pretende-se utilizar de motivação semelhante para obter uma estrutura alternativa para a parametrização de controladores robustos

\mathcal{H}_∞ em tempo discreto com resultados análogos à solução \mathcal{H}_∞ no tempo contínuo desenvolvida por Zhou e Doyle em (37), mas, com a utilização de um formalismo matemático alternativo como apresentado por Stoorvogel (25).

1.3 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é obter uma estrutura alternativa para a caracterização de todos os controladores estabilizantes \mathcal{H}_∞ para plantas descritas por uma fatoração coprima à esquerda qualquer, e não necessariamente normalizada, com uma metodologia generalizada para o caso em tempo discreto, partindo-se da descrição de uma planta de processo por fatores coprimos apresentados por Zhou e Doyle em (37) e da parametrização de todos os controladores subótimos \mathcal{H}_∞ desenvolvidos por Stoorvogel em (25). Pretende-se demonstrar que, questões de implementação à parte (ou seja, se os conversores A/D e D/A e o dispositivo computacional são rápidos o suficiente para que os atrasos introduzidos por eles possam ser negligenciados), é possível obter tanto o controlador central em tempo discreto com sucesso a partir da estrutura apresentada bem como o controlador estritamente próprio. A partir da estrutura proposta para qualquer fatoração coprima à esquerda, também se pretende mostrar que, se a escolha da fatoração coprima da planta de processo for a normalizada, é possível obter soluções via otimização de duas equações algébricas de Riccati, proporcionando encontrar o valor de um limitante γ_{min} . Esse valor de γ_{min} está diretamente relacionado à especificação de robustez do sistema e, assim sendo, objetiva-se demonstrar ainda que o controlador central no tempo discreto apresenta-se com maior robustez quando comparado ao controlador estritamente próprio em tempo discreto.

Para verificar a utilidade da tese proposta e a eficácia dos controladores \mathcal{H}_∞ provenientes do *framework* proposto, foram realizadas simulações e ensaios práticos referentes à malha de controle de posição de uma esfera metálica de um modelo didático do levitador magnético fabricado pela empresa QUANSER. Esses ensaios vislumbram investigar a possibilidade da aplicação da metodologia proposta em um sistema real com significativa não linearidade e comparar o desempenho e a robustez dos controladores em tempo discreto sintetizados em um contexto prático.

1.4 Organização do trabalho

O restante desse trabalho está estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2 é dedicado a explicar os aspectos mais importantes e as definições básicas para realizar a descrição de uma planta de processo por fatores coprimos incertos e as definições básicas relacionadas à estabilização robusta de fatores coprimos. São apresentadas também as definições relacionadas à síntese do controlador robusto \mathcal{H}_∞ em tempo contínuo para o

problema da estabilização robusta de fatores coprimos. Essas definições são baseadas em uma formulação apresentada por Stoorvogel em (25) para o caso contínuo, mas obtendo-se as mesmas conclusões apresentadas por Zhou e Doyle em (37).

O Capítulo 3 apresenta a principal contribuição deste trabalho: o desenvolvimento de uma estrutura alternativa para a síntese de todos os controladores \mathcal{H}_∞ em tempo discreto por meio de uma descrição da planta por fatores coprimos à esquerda. De posse da estrutura, mostra-se que é possível obter o controlador central no tempo discreto bem como o controlador estritamente próprio, além de se apresentar o desenvolvimento dos mesmos controladores quando, para a descrição da planta, utiliza-se a fatoração coprima à esquerda normalizada explorada sob a perspectiva do *framework* proposto.

No Capítulo 4 está, de maneira direta, o procedimento de projeto para síntese dos controladores, além de exemplos de aplicação da metodologia proposta. Para efeito de comparação com os resultados obtidos em (23), são apresentados resultados de simulações da malha de controle utilizada no trabalho citado com a finalidade de verificar a aplicabilidade do controlador central \mathcal{H}_∞ no tempo discreto. Também são apresentados resultados de simulações e experimentos práticos referentes ao controle de posição de uma esfera metálica de um modelo didático de um levitador magnético produzido pela empresa QUANSER.

Por fim, no Capítulo 5 estão as conclusões finais e proposições para trabalhos futuros.

2 Controle Robusto \mathcal{H}_∞ a Tempo Contínuo

Este capítulo é dedicado a explicar, em um contexto simplificado, os aspectos mais importantes e as definições básicas para a descrição de uma planta de processo por fatores coprimos incertos e as definições básicas relacionadas à estabilização robusta de fatores coprimos. Por conveniência, a discussão é limitada ao tempo contínuo. Por fim, a síntese do controlador robusto \mathcal{H}_∞ em tempo contínuo para o problema da estabilização robusta de fatores coprimos é apresentada como em (37) utilizando-se do formalismo apresentado por Stoorvogel em (25) para o caso em tempo contínuo, obtendo as mesmas conclusões apresentadas por Zhou e Doyle. Tal reformulação é conveniente, pois expõe as motivações para o desenvolvimento do trabalho.

2.1 Estabilização Robusta de Fatores Coprimos

Considere que o sistema dinâmico a ser controlado seja representado por

$$G := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (2.1)$$

ou por sua matriz de transferência dada por

$$G(s) = C\Phi(s)B, \quad (2.2)$$

com

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (2.3)$$

em que o par (A, B) é estabilizável e o par (A, C) é detectável. Dessa forma, se existe uma matriz K_F que torna $A + K_FC$ estável, o sistema representado por (2.1) possui fatorações coprimas à esquerda $G = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ dadas por

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{N} & \tilde{M} \end{array} \right] := \left[\begin{array}{cc|cc} A + K_FC & B & K_F & \\ \hline WC & 0 & W & \end{array} \right], \quad (2.4)$$

em que W pode ser qualquer matriz não singular (37). A planta padrão associada à incerteza descrita por fatores coprimos, ou seja, a descrição do sistema com a planta de processo mais os parâmetros de ponderação das entradas e saídas exógenas, pode ser

representada por um sistema dinâmico linear, invariante no tempo e de dimensão finita definida em um formato matricial conveniente dado por (25)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z_u(t) \\ z_x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

com

$$P := \left[\begin{array}{c|cc} A & -K_F W^{-1} & B \\ \hline 0 & 0 & I \\ C & W^{-1} & 0 \\ \hline C & W^{-1} & 0 \end{array} \right], \quad (2.6)$$

considerando $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ como o vetor de estados do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de entradas de comando, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de saídas medidas, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ o vetor de entradas exógenas às quais podem ser inclusos o distúrbio, ruídos de medidas e sinais de referência, $z_x(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ o vetor de saídas auxiliares relacionadas aos estados do sistema e $z_u(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ um vetor de saídas auxiliares relacionadas às entradas da planta.

Um sistema de controle pode ser representado de forma geral como na Figura 1 em que K é um controlador admissível real-racional e próprio, P é a planta generalizada real-racional e própria, w é o sinal de entradas exógenas, z é o sinal de respostas auxiliares, y contém as saídas medidas e o sinal u corresponde às entradas de comando da planta.

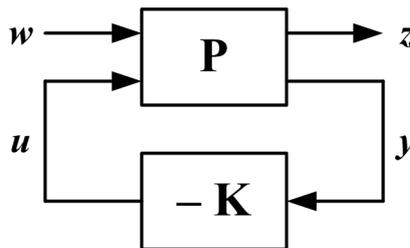


Figura 1 – Diagrama de blocos do sistema de controle.

A matriz de transferência de w para z é denotada por $\mathcal{T}_{zw}(s)$ e pode ser encontrada pela LFT (*Linear Fractional Transformation*) inferior de P para K como parâmetro (24). O problema de controle pode, então, ser definido como o de encontrar um controlador que diminua a influência do vetor w sobre z por meio da minimização da matriz de transferência $\mathcal{T}_{zw}(s)$. A norma \mathcal{H}_∞ é utilizada então na realização dessa minimização e é definida como (24, 25)

$$\|\mathcal{T}_{zw}(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{max}(\mathcal{T}_{zw}(j\omega)) . \quad (2.7)$$

Estabilidade robusta é a capacidade que um processo controlado apresenta de permanecer estável quando uma incerteza está presente, ou seja, um controlador é dito robusto se ele é capaz de estabilizar qualquer modelo perturbado G_Δ , que é a combinação entre a planta nominal e a incerteza do sistema em questão. Assim, se as condições estabelecidas forem cumpridas, é possível encontrar um controlador K que estabiliza de maneira robusta a planta de processo G . Assim, a síntese \mathcal{H}_∞ pode ser explorada para gerar controladores que garantam um nível de estabilidade robusta para um sistema em malha fechada.

Nesse cenário, a síntese de controle \mathcal{H}_∞ pode ser utilizada para resolver o problema da estabilização robusta de uma planta perturbada por fatores coprimos à esquerda dada por

$$G_\Delta = (\tilde{M} + \Delta\tilde{M})^{-1}(\tilde{N} + \Delta\tilde{N}), \quad (2.8)$$

como mostrado na Figura 2, com \tilde{M} , \tilde{N} , $\Delta\tilde{M}$, $\Delta\tilde{N}$ pertencentes ao subespaço \mathcal{H}_∞ próprio, real, racional, estável com

$$\|[\Delta\tilde{M} \quad \Delta\tilde{N}]\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}, \quad (2.9)$$

de forma que as matrizes de transferência (\tilde{M}, \tilde{N}) são assumidas como uma fatoração coprima à esquerda de G e K estabiliza internamente o sistema em malha fechada (37).

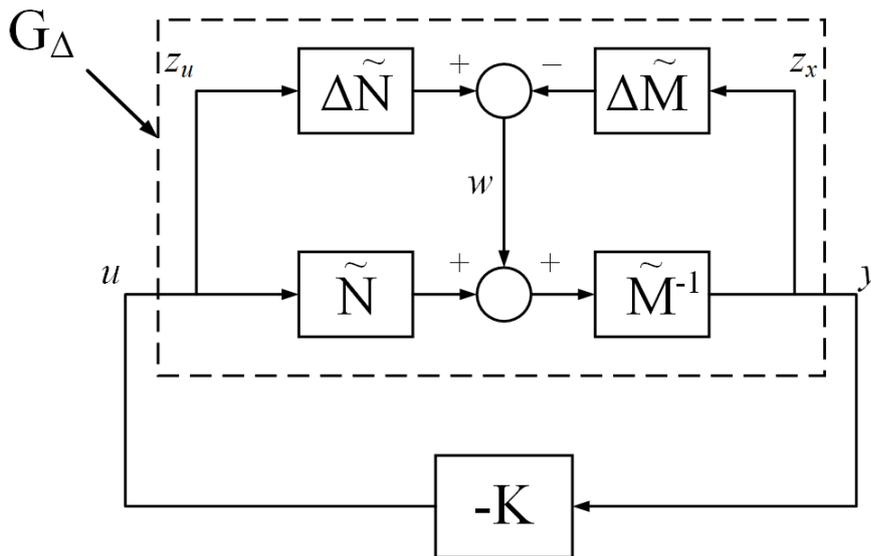


Figura 2 – Diagrama de blocos do sistema perturbado por fatores coprimos.

Os fatores coprimos da planta nominal e da planta perturbada podem ser escolhidos arbitrariamente, desde que sejam coprimos. É importante notar que as perturbações $\Delta\tilde{N}$, $\Delta\tilde{M}$ serão estáveis desde que os fatores coprimos da planta nominal e da planta perturbada sejam estáveis pela definição de fatores coprimos. Na análise de estabilidade

robusta, os fatores coprimos incertos permitem a consideração de uma classe geral de erros e têm recebido atenção devido ao desenvolvimento de técnicas robustas de projeto, como a síntese \mathcal{H}_∞ , por exemplo (41).

Devido à estrutura da planta (2.6), basta que os pares (A, B) e (A, K_F) sejam estabilizáveis e o par (A, C) seja detectável para que a planta P possa ser submetida à otimização \mathcal{H}_∞ (17). Dessa forma, a partir do diagrama de blocos geral de um sistema de controle para o problema \mathcal{H}_∞ , como apresentado na Figura 1, e considerando uma planta generalizada P , representada por (2.6), é possível utilizar a norma \mathcal{H}_∞ para garantir a existência de um controlador internamente estabilizante. A síntese de controladores \mathcal{H}_∞ consiste em encontrar um controlador K de forma a satisfazer $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$, sendo $T_{zw}(s)$ o sistema em malha fechada que representa a relação do distúrbio w para a saída controlada z e γ um parâmetro designado pelo projetista que deve ser maior que um parâmetro mínimo γ_{min} . Vale ressaltar que o problema de controle \mathcal{H}_∞ determina um controlador que não é único, diferentemente da síntese via norma \mathcal{H}_2 (24).

Para o caso deste trabalho, considerando que as incertezas da planta são descritas por fatores coprimos à esquerda, o sistema a ser controlado é representado por (2.1) com uma fatoração coprima à esquerda da planta de processo dada por (2.4) e a planta generalizada é reescrita sob uma forma LFT como apresentada em (2.6) e por meio do diagrama de blocos da Figura 2. Dessa maneira, existe um controlador K projetado com base em G que garante a estabilidade interna do sistema em malha fechada para uma família de plantas incertas, buscando satisfazer $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$, que, nesse caso, significa satisfazer (37)

$$\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} [I + GK]^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_\infty < \gamma. \quad (2.10)$$

Assim, o problema da estabilização robusta pode ser reescrito como um problema de otimização \mathcal{H}_∞ em que o controlador K é escolhido para minimizar a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência do sistema em malha fechada, sob a restrição de que também precisa estabilizar a planta nominal.

Além da estabilidade robusta, uma outra propriedade da norma \mathcal{H}_∞ é que a norma de uma matriz de uma função de transferência representa a máxima energia do sinal de saída daquela função de transferência devido a qualquer entrada de energia unitária. Consequentemente, minimizar a norma \mathcal{H}_∞ de uma função de transferência é equivalente a minimizar a energia do sinal de saída devido a uma entrada de energia unitária. Para sistemas em malha fechada, essa propriedade pode ser aplicada em problemas comuns de desempenho, como rejeição de distúrbios ou minimização de erros de rastreamento. Ao minimizar a norma \mathcal{H}_∞ de uma função de transferência em malha fechada, um nível de desempenho pode ser garantido. Dessa forma, então é possível reescrever problemas de

minimização em uma estrutura padrão, em que se pretende encontrar um controlador que satisfaça (2.10). Nesse contexto, é possível representar tanto a estabilidade robusta como os objetivos de desempenho a partir da mesma estrutura de minimização \mathcal{H}_∞ .

2.2 Controle Robusto \mathcal{H}_∞ a Tempo Contínuo

A síntese de um controlador \mathcal{H}_∞ no tempo contínuo foi explorada por vários pesquisadores, tais como Glover e Doyle (17), Duncan e McFarlane (26), Zhou e Doyle (37), Glover e McFarlane (42) e Engelken e Lanzon (43). Nos trabalhos citados anteriormente, dado um sistema linear, é mostrado que a parametrização de todos os controladores estabilizantes é realizada de maneira que a função de transferência em malha fechada possua uma norma \mathcal{H}_∞ menor que um escalar pré-definido. Essa caracterização envolve a solução ótima de duas equações algébricas de Riccati no tempo contínuo.

Esta seção apresenta uma formulação padrão de controle \mathcal{H}_∞ em tempo contínuo, via formalismo apresentado por Stoorvogel em (25). O desenvolvimento dessa estrutura no tempo contínuo tem como objetivo servir de base para a comparação com a estrutura desenvolvida para o caso em tempo discreto que será apresentado no próximo capítulo, além de mostrar que é possível obter resultados análogos aos apresentados por Zhou e Doyle em (37). Vale ressaltar que as primeiras condições de existência para um controlador \mathcal{H}_∞ foram apresentadas por Doyle em (4) em termos de duas equações de Riccati e por meio de raio espectral, em que as soluções por equações de Riccati fornecem resultados satisfatórios.

Utilizando-se do formalismo apresentado por Stoorvogel em (25) e da descrição da planta por fatores coprimos à esquerda, pode-se determinar a parametrização de todos os controladores que resolvem o problema da estabilização robusta (2.10). Nesse contexto, os controladores existem, se e somente se, a condição

$$0 < \gamma^2 W'W - I \quad (2.11)$$

for satisfeita e ainda exista uma solução estabilizante $X_\infty = X'_\infty \geq 0$ da equação algébrica de Riccati em tempo contínuo

$$\begin{aligned} & [A - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}C]'X_\infty + X_\infty[A - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}C] \\ & - X_\infty[BB' - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}K_F]X_\infty + \gamma^2 C'(\gamma^2 W'W - I)^{-1}W'WC = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Além disso, se as condições acima forem válidas e mantidas, o conjunto de todos os controladores estabilizantes que resolvem o problema da estabilização robusta é dado

pela LFT inferior realizada entre $M(s)$ e $Q(s)$

$$K(s) = -\mathcal{F}_l(M(s), Q(s)) \quad (2.13)$$

em que $M(s)$ é obtido por

$$M(s) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} A + BK_C + K_F C & -K_F & B \\ \hline K_C & 0 & I \\ \hline K_M & I & 0 \end{array} \right] \quad (2.14)$$

com K_C e K_M definidos, respectivamente, por

$$K_C = -B' X_\infty \quad (2.15)$$

e

$$K_M = -(\gamma^2 W' W - I)^{-1} (\gamma^2 W' W C - K_C' X_\infty), \quad (2.16)$$

e $Q(s)$ da parametrização de Youla é definido de tal forma que satisfaça a condição

$$Q(j\omega)^* Q(j\omega) < \gamma^2 W' W - I. \quad (2.17)$$

Partindo-se do formalismo apresentado no Teorema 5.10 em (25) define-se a estrutura para $M(s)$. Utilizando simplificações matriciais e manipulações algébricas apropriadas, quando se considera a planta de processo descrita por uma fatoração coprima à esquerda como apresentada em (2.4), é possível obter $M(s)$ conforme (2.14) a partir do mesmo procedimento utilizado para o caso específico da fatoração coprima à esquerda normalizada, ou seja, considerando W igual à matriz identidade proposta por Zhou e Doyle em (37). Assim, é possível parametrizar todos os controladores admissíveis para o caso regular do problema de controle \mathcal{H}_∞ em que, para um determinado $\gamma > 0$ existem soluções semidefinidas positivas de duas equações algébricas de Riccati em tempo contínuo.

Para o caso particular $Q(s) = 0$, aplicando a LFT inferior em $M(s)$ como em (2.13), tem-se como resultado o controlador central estritamente próprio em tempo contínuo representado por

$$K(s) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A + BK_C + K_F C & K_F \\ \hline K_C & 0 \end{array} \right], \quad (2.18)$$

que pode ser reescrito na forma de um observador de estados

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_F [C\hat{x}(t) - y(t)] \quad (2.19)$$

com a lei de controle

$$u(t) = K_C \hat{x}(t) , \quad (2.20)$$

em que $\hat{x}(t)$ é o vetor de estados estimados do sistema observado com K_C definido pela equação (2.15) e K_F definido pelo projetista de tal maneira que $A + K_F C$ seja estável, ou seja, a existência da estabilização robusta de um controlador depende da escolha estabilizante da matriz K_F que, no caso, é a escolha da fatoração coprima. Portanto, é possível obter uma estrutura geral para a parametrização de todos os controladores admissíveis que resolvem o problema da estabilização robusta, utilizando a síntese \mathcal{H}_∞ , bem como obter o controlador central capaz de estabilizar uma família de plantas formatadas e descritas por fatores coprimos incertos.

Considerando a fatoração coprima à esquerda normalizada, ou seja, fazendo W igual à matriz identidade em (2.6), tem-se que a fatoração coprima à esquerda deve satisfazer

$$\tilde{N}(j\omega)\tilde{N}(j\omega)^* + \tilde{M}(j\omega)\tilde{M}(j\omega)^* = I , \quad (2.21)$$

resultando em uma matriz K_F dada por

$$K_F = -YC' , \quad (2.22)$$

em que $Y = Y' \geq 0$ é a única solução estabilizante da equação algébrica de Riccati

$$AY + YA - YC'CY + BB' = 0 . \quad (2.23)$$

Nesse contexto, partindo-se da estrutura apresentada anteriormente na parametrização de todos os controladores admissíveis em tempo contínuo, um controlador $K(s)$ que resolve o problema da estabilização robusta (2.10) existe para um $\gamma > 1$ se existir uma solução estabilizante $X_\infty = X'_\infty \geq 0$ da equação algébrica de Riccati em tempo contínuo

$$\left(A - \frac{K_F C}{\gamma^2 - 1}\right)' X_\infty + X_\infty \left(A - \frac{K_F C}{\gamma^2 - 1}\right) - X_\infty \left(BB' - \frac{K_F K'_F}{\gamma^2 - 1}\right) X_\infty + \frac{\gamma^2 C' C}{\gamma^2 - 1} = 0 , \quad (2.24)$$

que é obtida substituindo $W = I$ em (2.12). Se as condições acima forem satisfeitas e mantidas, o controlador central estritamente próprio (2.18) é o mesmo controlador apresentado por Zhou e Doyle em (37).

Uma característica útil da fatoração coprima à esquerda normalizada é que um valor de γ_{min} pode ser escrito de maneira explícita. Para isso, considere o seguinte teorema formulado por Zhou e Doyle em (37).

Teorema 1 *Seja a estabilização robusta da planta $G(s)$ que tem uma fatoração coprima à esquerda normalizada com W igual à matriz identidade. Então, existe um controlador $K(s)$ tal que*

$$\gamma_{min} = \inf_K \left\| \begin{bmatrix} K(s) \\ I \end{bmatrix} [I + G(s)K(s)]^{-1} \tilde{M}(s)^{-1} \right\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_{max}(Y\mathcal{Q})}} \quad (2.25)$$

em que λ_{max} é o autovalor máximo do resultado do produto $Y\mathcal{Q}$ sendo \mathcal{Q} a solução da seguinte equação de Lyapunov

$$(A - YC'C)' \mathcal{Q} + \mathcal{Q}(A - YC'C) + C'C = 0 \quad (2.26)$$

e, para qualquer $\gamma > \gamma_{min}$, uma solução estabilizante X_∞ de (2.24) existe e é dada por

$$X_\infty = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \mathcal{Q} \left(I - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} Y\mathcal{Q} \right)^{-1}. \quad (2.27)$$

A prova do Teorema 1 faz uso da matriz Hamiltoniana associada com X_∞ da equação (2.24) e mais detalhes do desenvolvimento dessa prova podem ser encontrados em (37).

Corolário 1 *Seja $G(s) = \tilde{M}(s)^{-1} \tilde{N}(s)$ uma fatoração coprima à esquerda normalizada e*

$$G_\Delta(s) = (\tilde{M}(s) + \Delta\tilde{M}(s))^{-1} (\tilde{N}(s) + \Delta\tilde{N}(s)) \quad (2.28)$$

com

$$\left\| \begin{bmatrix} \Delta\tilde{N}(s) & \Delta\tilde{M}(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty < \frac{1}{\gamma} = \epsilon. \quad (2.29)$$

Então, existe um controlador estabilizante robusto para $G_\Delta(s)$ se e somente se

$$\epsilon \leq \sqrt{1 - \lambda_{max}(Y\mathcal{Q})}. \quad (2.30)$$

Do Corolário 1 apresentado por Zhou e Doyle em (37), tem-se que as soluções para o problema da estabilização robusta da fatoração coprima à esquerda normalizada também são soluções relacionadas ao problema \mathcal{H}_∞ conforme apresentado na seção 2.1. Além disso, um limitante de robustez pode ser obtido relacionando-se com o problema da estabilização robusta de plantas descritas por fatores coprimos à esquerda.

A solução \mathcal{Q} para a equação de Lyapunov em (2.26) pode ser obtida de outras maneiras. Considerando $X \geq 0$ a solução estabilizante para

$$A'X + XA - XBB'X + C'C = 0 \quad (2.31)$$

tem-se que

$$\mathcal{Q} = (I + XY)^{-1}X \quad (2.32)$$

e, substituindo-se (2.32) em (2.27), tem-se que a solução X_∞ resulta em

$$X_\infty = \gamma^2 X [(\gamma^2 - 1)I - YX]^{-1} \quad (2.33)$$

e, conseqüentemente, é possível obter uma expressão explícita para se calcular o valor de γ_{min} que é dada por

$$\gamma_{min} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_{max}(Y\mathcal{Q})}} = \sqrt{1 + \lambda_{max}(XY)} . \quad (2.34)$$

Se a fatoração coprime for escolhida como a normalizada, não importa se a planta for descrita por uma fatoração coprime à esquerda ou à direita, é possível obter uma metodologia capaz de se relacionar com o problema da estabilização robusta de maneira a encontrar um $\gamma > \gamma_{min}$ que é solução do problema apresentado em (2.9), conforme apresentado em (37).

Do desenvolvimento apresentado anteriormente, é possível reescrever o controlador central estritamente próprio no tempo contínuo (2.18) obtendo-se, assim, o mesmo controlador apresentado por Zhou e Doyle em (37) e, então, o seguinte teorema é formulado.

Teorema 2 *O problema da fatoração coprime à esquerda normalizada tem uma solução desde que exista um $\gamma > \gamma_{min}$, em que γ_{min} é definido em (2.34) com Y e X sendo soluções de (2.23) e (2.31), respectivamente. Além disso, se as condições anteriores são satisfeitas e mantidas, um controlador central estritamente próprio no tempo contínuo como apresentado em (2.18) pode ser determinado, com K_F igual a (2.22) e K_C dado por*

$$K_C = -\gamma^2 B'X [(\gamma^2 - 1)I - YX]^{-1} . \quad (2.35)$$

Portanto, a partir do problema da estabilização robusta de plantas descritas por fatores coprimos à esquerda e da reformulação desse problema a partir do equacionamento apresentado por Stoorvogel, é possível obter um controlador capaz de solucionar o problema da estabilização robusta bem como o problema \mathcal{H}_∞ , conforme apresentado

nesta seção. A partir do teorema do ganho pequeno (24), o sistema em malha fechada permanecerá estável se as incertezas não paramétricas atenderem (2.9). Assim, se (A, B) e (A, K_F) são estabilizáveis, (A, C) é detectável e existe um valor de $\gamma > \gamma_{min}$ capaz de resolver o problema da estabilização robusta de fatores coprimos à esquerda; então, a estabilidade robusta é garantida em malha fechada e um controlador robusto \mathcal{H}_∞ pode ser desenvolvido por um procedimento semelhante ao apresentado por Zhou e Doyle em (37).

3 Controle Robusto \mathcal{H}_∞ a Tempo Discreto

Este capítulo apresenta a contribuição desse trabalho: o desenvolvimento de uma estrutura alternativa para a parametrização de todos os controladores \mathcal{H}_∞ admissíveis para o caso em tempo discreto por meio de uma descrição da planta por fatores coprimos à esquerda. O objetivo é obter um *framework* padrão que possa ser utilizado na síntese de controladores \mathcal{H}_∞ no tempo discreto a partir de uma estruturação semelhante à apresentada na seção anterior para o caso em tempo contínuo. O *framework*, além de permitir obter todos os controladores estabilizantes, possibilita a obtenção de um controlador central no tempo discreto dito não estritamente próprio e um controlador dito estritamente próprio. Da estrutura alternativa proposta, demonstra-se que se a escolha da fatoração coprima à esquerda for normalizada, é possível determinar um limitante de robustez γ_{min} que está diretamente relacionado à especificação de robustez do sistema. Além disso, mostra-se que o γ_{min} é obtido a partir de soluções de duas equações algébricas de Riccati em tempo discreto, uma relacionada ao problema de regulação e outra ao problema de estimação.

3.1 Definições Iniciais

Suponha que o sistema a ser controlado seja representado por

$$G(z) \stackrel{z}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (3.1)$$

ou por sua matriz de transferência dada por

$$G(z) = C\Phi(z)B, \quad (3.2)$$

com

$$\Phi(z) = (zI - A)^{-1}, \quad (3.3)$$

em que o par (A, B) é estabilizável e o par (A, C) é detectável. Dessa forma, se existe uma matriz K_F que torna $A + K_F C$ estável, o sistema representado por (3.1) possui fatorações coprimas à esquerda $G(z) = \tilde{M}(z)^{-1}\tilde{N}(z)$ dadas por

$$\left[\begin{array}{cc} \tilde{N}(z) & \tilde{M}(z) \end{array} \right] \stackrel{z}{=} \left[\begin{array}{cc|cc} A + K_F C & B & K_F & \\ \hline WC & 0 & W & \end{array} \right], \quad (3.4)$$

em que W pode ser qualquer matriz não singular (37). A planta padrão associada à incerteza descrita por fatores coprimos, ou seja, a descrição do sistema com a planta de processo mais os parâmetros de ponderação das entradas e saídas exógenas, pode ser representada por um sistema dinâmico em tempo discreto, linear, invariante no tempo e de dimensão finita definida em um formato matricial conveniente dado por

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ z_u(k) \\ z_x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

em que

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} A & -K_F W^{-1} & B \\ \hline 0 & 0 & I \\ C & W^{-1} & 0 \\ \hline C & W^{-1} & 0 \end{array} \right], \quad (3.6)$$

considerando $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ como o vetor de estados do sistema, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de entradas de comando, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de saídas medidas, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ o vetor de entradas exógenas às quais podem inclusos o distúrbio, ruídos de medidas e sinais de referência, $z_x(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ o vetor de saídas auxiliares relacionados aos estados do sistema e $z_u(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ um vetor de saídas auxiliares relacionadas às entradas da planta.

O sistema de controle pode ser representado de forma geral como na Figura 1 em que K é um controlador admissível real-racional, P é a planta generalizada real-racional e própria, w é o vetor de entradas exógenas ao qual podem ser inclusos distúrbio, ruídos de medidas e sinais de referência, z é o vetor de saídas auxiliares relacionadas aos estados do sistema e às entradas da planta, y contém as saídas medidas e o sinal u corresponde às entradas de comando da planta.

Note que, a fim de facilitar uma comparação com o caso contínuo, a notação da representação em espaço de estados foi mantida igual à do capítulo anterior. Entretanto, as matrizes tratadas neste capítulo são versões discretizadas das matrizes do capítulo anterior.

A matriz de transferência de w para z é denotada por $\mathcal{T}_{zw}(z)$ e pode ser encontrada pela LFT inferior de P para K como parâmetro (24). O problema de controle pode, então, ser definido como o de encontrar um controlador K que diminua a influência do vetor w sobre z por meio da minimização da matriz de transferência $\mathcal{T}_{zw}(z)$. Uma norma com interpretação interessante para se realizar essa minimização é a norma \mathcal{H}_∞ , definida no

domínio da frequência como (25)

$$\|T_{zw}(z)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{max}(T_{zw}(e^{j\omega T})) . \quad (3.7)$$

Devido à estrutura da planta (3.6), basta que os pares (A, B) e (A, K_F) sejam estabilizáveis e o par (A, C) seja detectável para que a planta P possa ser submetida à otimização \mathcal{H}_∞ (17). Dessa forma, a partir do diagrama de blocos geral de um sistema de controle para o problema \mathcal{H}_∞ , como apresentado na Figura 1, e considerando uma planta generalizada P representada por (3.6), é possível utilizar a norma \mathcal{H}_∞ para garantir a existência de um controlador internamente estabilizante. A síntese de controladores \mathcal{H}_∞ em tempo discreto também consiste em encontrar um controlador K de forma a satisfazer $\|T_{zw}(z)\|_\infty \leq \gamma$, sendo $T_{zw}(z)$ o sistema em malha fechada que representa a relação do distúrbio w para a saída controlada z e γ um parâmetro designado pelo projetista que deve ser maior que um parâmetro mínimo γ_{min} .

O problema de controle com realimentação de saída em tempo discreto apresenta uma diferença considerável quando comparado ao problema análogo em caso contínuo: a existência de duas estruturas para os observadores de estados (21).

A primeira estrutura refere-se ao observador preditivo, que condiz com a estrutura do controlador estritamente próprio, em que a estimação dos estados no instante atual depende das saídas medidas apenas nos instantes anteriores. Dessa forma, a informação que é utilizada na saída pelo regulador de estados não é a mais recente. O atraso existente entre o instante de medição e a atuação pode ser usado na computação do algoritmo de controle, principalmente nos sistemas que possuem ordem elevada ou com capacidade computacional restrita. Em vista disso, os observadores de estados preditivos são usados preferivelmente quando o tempo de computação do algoritmo de controle se mostra significativo quando comparado ao intervalo entre as medições na saída (44).

A segunda estrutura já se refere ao observador corrente (do inglês *current*, também encontrado nas bibliografias como *filtering*), que condiz com a estrutura do controlador não estritamente próprio, em que a estimação dos estados no instante atual depende das saídas medidas nos instantes atuais. Em vista disso, esse tipo de observador de estados é preferivelmente usado quando o tempo de computação do algoritmo de controle se mostra ínfimo ao ser comparado ao intervalo entre as medições na saída (44).

3.2 Estabilização Robusta e Controle Robusto \mathcal{H}_∞ a Tempo Discreto

A síntese de controladores \mathcal{H}_∞ em tempo discreto vem sendo explorada por vários pesquisadores, tais como Iglesias e Glover (38), Stoorvogel (25, 45), Iglesias (23) e Guaracy

e Ferreira (40). Nos trabalhos, dado um sistema linear, a parametrização de controladores estabilizantes \mathcal{H}_∞ no tempo discreto é feita de maneira que a função de transferência do sistema em malha fechada apresenta uma norma \mathcal{H}_∞ menor que um determinado escalar. Além disso, essa caracterização é feita a partir da solução de duas equações algébricas de Riccati no tempo discreto, uma que se relaciona ao problema de regulação e outra que se relaciona ao problema de estimação.

Uma vez que, no capítulo anterior, foi realizada uma reestruturação do equacionamento apresentado por Stoorvogel em (25) para o caso em tempo contínuo e mostrou-se que é possível obter, como resultado, as mesmas conclusões de Zhou e Doyle em (37), objetiva-se utilizar uma metodologia de projeto semelhante para obter uma estrutura alternativa padrão para o caso em tempo discreto, fazendo uso de uma ferramenta que proporciona parametrizar controladores no tempo discreto.

Conforme já mencionado, uma diferença significativa do problema de controle com realimentação de saída em tempo discreto, em comparação ao caso contínuo, é o fato de existirem duas estruturas possíveis para os observadores de estados, o que permite obter duas estruturas para controladores. A aplicação dessas duas estruturas no controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto será determinada a partir do desenvolvimento de todos os controladores admissíveis, pois, da estrutura geral obtida dependendo da escolha feita para $Q(z)$ na parametrização de Youla, será possível alcançar a estrutura de um controlador central não estritamente próprio bem como a estrutura de um controlador estritamente próprio, correspondendo às duas estruturas possíveis para os observadores de estados em tempo discreto (44).

Para o caso deste trabalho, as incertezas da planta são descritas por fatores coprimos à esquerda. O sistema a ser controlado é representado por (3.1) com uma fatoração coprime à esquerda da planta de processo dada por (3.4) e a planta generalizada é dada por (3.6). Dessa maneira, é possível obter um controlador $K(z)$ projetado baseado em $G(z)$ que garante a estabilidade interna do sistema em malha fechada para uma família de plantas incertas buscando satisfazer $\|\mathcal{T}_{zw}(z)\|_\infty \leq \gamma$, que, neste caso, significa satisfazer (37)

$$\left\| \begin{bmatrix} K(z) \\ I \end{bmatrix} [I + G(z)K(z)]^{-1} \tilde{M}(z)^{-1} \right\|_\infty < \gamma, \quad (3.8)$$

considerado o problema da estabilização robusta de fatores coprimos para o caso em tempo discreto. Se os pares (A, B) e (A, K_F) são estabilizáveis e o par (A, C) é detectável, a planta de processo pode ser submetida à otimização da norma \mathcal{H}_∞ . A seguir, uma estrutura alternativa para parametrizar todos os controladores admissíveis em tempo discreto será obtida partindo-se da descrição de uma planta por fatores coprimos, utilizando da mesma metodologia apresentada no capítulo anterior para o caso contínuo. De posse

dessa estrutura geral, será mostrado que, com base na escolha de $Q(z)$, é possível obter o controlador central não estritamente próprio bem como o controlador estritamente próprio.

O teorema a seguir estabelece as condições necessárias para a existência e a caracterização de todos os controladores que resolvam o problema da estabilização robusta para o caso em tempo discreto apresentado em (3.8).

Teorema 3 *Os controladores que resolvem o problema da estabilização robusta para o caso em tempo discreto dado por (3.8) existem se, e somente se, a condição*

$$0 < \gamma^2 W'W - I \quad (3.9)$$

for satisfeita e ainda, exista uma solução estabilizante $X_\infty = X'_\infty \geq 0$ da equação algébrica de Riccati em tempo discreto

$$X_\infty = [A - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}C]'X_\infty \times [I + BB'X_\infty - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}K'_F X_\infty]^{-1} \\ \times [A - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}C] + \gamma^2 C'(\gamma^2 W'W - I)^{-1}W'WC. \quad (3.10)$$

Além disso, se as condições acima forem válidas e mantidas, o conjunto de todos os controladores estabilizantes em tempo discreto que resolvem o problema da estabilização robusta em tempo discreto é dado pela LFT inferior realizada entre $M(z)$ e $Q(z)$ dado por

$$K(z) = -\mathcal{F}_l(M(z), Q(z)) \quad (3.11)$$

em que $M(z)$ é obtido a partir de

$$M(z) \stackrel{z}{=} \left[\begin{array}{c|cc} (I + BK_C)(A + K_F C) & -(I + BK_C)K_F & B \\ \hline K_C(A + K_F C) & -K_C K_F & I \\ \hline K_M & I & 0 \end{array} \right], \quad (3.12)$$

com K_C e K_M definidos, respectivamente, por

$$K_C = -B'X_\infty(I + BB'X_\infty)^{-1} \quad (3.13)$$

e

$$K_M = -[\gamma^2 W'W - I - K'_F X_\infty(I + BB'X_\infty)^{-1}K_F]^{-1} \\ \times [\gamma^2 W'WC - K'_F X_\infty(I + BB'X_\infty)^{-1}(A + K_F C)], \quad (3.14)$$

e $Q(z)$ da parametrização de Youla é definido de tal forma que satisfaça a condição

$$Q(e^{j\omega T})^*(I + B'X_\infty B)Q(e^{j\omega T}) < \gamma^2 W'W - I - K_F'X_\infty(I + BB'X_\infty)^{-1}K_F. \quad (3.15)$$

Demonstração. A prova do Teorema 3 segue a mesma linha de raciocínio para o desenvolvimento apresentado na parametrização de todos os controladores admissíveis para o caso em tempo contínuo, conforme a reformulação apresentada no início da seção 2.2. Partindo de particularizações das equações gerais desenvolvidas por Stoorvogel em (25), que fornecem a caracterização completa de todos os controladores admissíveis para o caso em tempo discreto e de um procedimento similar quando se considera a planta descrita por fatores coprimos à esquerda como apresentado por Zhou e Doyle em (37), obtém-se a estrutura que possibilita parametrizar todos os controladores admissíveis no tempo discreto para o caso regular do problema de controle \mathcal{H}_∞ .

Primeiramente, considera-se o sistema dinâmico representado pela planta generalizada em (3.6) e as características particulares do sistema (3.5) no que diz respeito à injeção, sobrejeção, ortogonalidade e não singularidade das matrizes que o compõe. Em um segundo momento, considera-se que, para um $\gamma > 0$, existem soluções semidefinidas positivas $X_\infty \geq 0$ e $Y_\infty \geq 0$ de equações algébricas de Riccati em tempo discreto que satisfazem a condição do raio espectral ser menor que γ^2 , ou seja, $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$. Define-se então, $H(Y_\infty)$ invertível dado por

$$H(Y_\infty) = \begin{bmatrix} (W^{-1})(W^{-1})' & 0 & (W^{-1})(W^{-1})' \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ (W^{-1})(W^{-1})' & 0 & (W^{-1})(W^{-1})' - \gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ 0 \\ C \end{bmatrix} Y_\infty \begin{bmatrix} C \\ 0 \\ C \end{bmatrix}', \quad (3.16)$$

em que Y_∞ satisfaz a seguinte equação algébrica de Riccati em tempo discreto

$$Y_\infty = AY_\infty A' - (AY_\infty C' - K_F(W^{-1})(W^{-1})') \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ I \end{bmatrix}' H^{-1}(Y_\infty) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \\ \times (CY_\infty A' - (W^{-1})(W^{-1})' K_F') + K_F(W^{-1})(W^{-1})' K_F', \quad (3.17)$$

que pode ser simplificada para

$$Y_\infty = AY_\infty A' - (AY_\infty C' - K_F(W^{-1})(W^{-1})') (CY_\infty C' + (W^{-1})(W^{-1})')^{-1} \\ \times (CY_\infty A' - (W^{-1})(W^{-1})' K_F') + K_F(W^{-1})(W^{-1})' K_F'. \quad (3.18)$$

Então, se a descrição da planta por fatores coprimos à esquerda for dada por (3.4), e o sistema for representado por (3.6), uma solução possível para a equação (3.18) é $Y_\infty = 0$ e, portanto, pode-se estender a mesma análise para a sua versão dual que é encontrar a solução X_∞ da equação algébrica de Riccati em tempo discreto

$$X_\infty = A'X_\infty A - \begin{bmatrix} B'X_\infty A \\ (W^{-1})'(C - K'_F X_\infty A) \end{bmatrix}' G^{-1}(X_\infty) \begin{bmatrix} B'X_\infty A \\ (W^{-1})'(C - K'_F X_\infty A) \end{bmatrix} + C'C, \quad (3.19)$$

em que $G(X_\infty)$ é invertível e é dado por

$$G(X_\infty) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (W^{-1})'(W^{-1}) - \gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B' \\ -(W^{-1})'K'_F \end{bmatrix} X_\infty \begin{bmatrix} B' \\ -(W^{-1})'K'_F \end{bmatrix}', \quad (3.20)$$

que pode ser reescrita como

$$G(X_\infty) = \begin{bmatrix} I + B'X_\infty B & -B'X_\infty K_F(W^{-1}) \\ -(W^{-1})'K'_F X_\infty B & (W^{-1})'(W^{-1}) - \gamma^2 I + (W^{-1})'K'_F X_\infty K_F(W^{-1}) \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Considere agora $V > 0$ e $R > 0$ definidos, respectivamente, por

$$V = I + B'X_\infty B \quad (3.22)$$

e

$$R = \gamma^2 I - (W^{-1})'(W^{-1}) - (W^{-1})'K'_F X_\infty (I + BB'X_\infty)^{-1} K_F(W^{-1}). \quad (3.23)$$

Com V e R definidos em (3.22) e (3.23), respectivamente, é possível encontrar a inversa de $G(X_\infty)$, que pode ser simplificada por

$$G^{-1}(X_\infty) = \begin{bmatrix} V^{-1} - V^{-1}B'X_\infty K_F(W^{-1})R^{-1}(W^{-1})'K'_F X_\infty B V^{-1} & -V^{-1}B'X_\infty K_F(W^{-1})R^{-1} \\ -R^{-1}(W^{-1})'K'_F X_\infty B V^{-1} & -R^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

e pode ser substituída na equação (3.19) de maneira que, após algumas simplificações algébricas e desenvolvimentos matriciais, a equação (3.19) resulta em

$$X_\infty = [A - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}C]' X_\infty [I + BB'X_\infty - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}K'_F X_\infty]^{-1} \\ \times [A - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}C] + \gamma^2 C'(\gamma^2 W'W - I)^{-1}W'WC, \quad (3.25)$$

obtendo, assim, que a solução X_∞ existe e é dada pela solução da equação (3.25) satisfazendo, portanto, as condições do Teorema 10.1 apresentado em (25). Se essas condições forem comparadas às condições do caso em tempo contínuo, como podem ser vistas nos trabalhos de Doyle (4) e Stoorvogel e Trentelman (46), é possível notar que as equações de Riccati são acopladas. Nos trabalhos de Iglesias (38) e Walker (47) é mostrado que, se o sistema (3.5) respeita as características de injeção e sobrejeção, então as condições apresentadas anteriormente são equivalentes à existência de uma matriz Y_∞ que é dual à X_∞ no sentido de que Y_∞ satisfaz as mesmas condições que X_∞ tal que $\rho(Y_\infty X_\infty) < \gamma^2$.

Conseqüentemente, se as condições apresentadas acima forem válidas e satisfeitas, é possível obter a caracterização de todos os sistemas em malha fechada em tempo discreto admissíveis que têm norma \mathcal{H}_∞ estritamente menor que γ e resolvem o problema da estabilização robusta para o tempo discreto. Então, do formalismo apresentado em Stoorvogel, define-se a estrutura de $M(z)$ que, após substituições das variáveis da planta generalizada (3.6), resulta em

$$M(z) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \vdots B \\ \hat{C} & \hat{D} \vdots I \\ \hline K_M & I \vdots 0 \end{array} \right], \quad (3.26)$$

em que \hat{A} é definido por

$$\begin{aligned} \hat{A} = & A - K_F(W^{-1})R^{-1}Z - BV^{-1}B'X_\infty(A - K_F(W^{-1})R^{-1}Z) \\ & + (I - BV^{-1}B'X_\infty)K_F(C + (W^{-1})R^{-1}Z), \end{aligned} \quad (3.27)$$

com

$$Z = (W^{-1})'(C - K_F'X_\infty A + K_F'X_\infty BV^{-1}B'X_\infty A). \quad (3.28)$$

Substituindo (3.22), (3.23) e (3.28) em (3.27), após reorganização dos termos, \hat{A} resulta em

$$\hat{A} = (I - BB'X_\infty(I + BB'X_\infty)^{-1})(A + K_F C). \quad (3.29)$$

De maneira análoga, \hat{B} é definido por

$$\begin{aligned} \hat{B} = & -B \left[-V^{-1}B'X_\infty K_F(W^{-1})R^{-1/2}[(W^{-1})R^{-1/2}]^{-1} \right] \\ & - (K_F(W^{-1})R^{-1/2})[(W^{-1})R^{-1/2}]^{-1} \end{aligned} \quad (3.30)$$

e como $(W^{-1})R^{-1/2}((W^{-1})R^{-1/2})^{-1}$ é igual à matriz identidade, colocando -1 em evidência pela esquerda e o termo K_F em evidência pela direita, após reorganização dos termos de (3.30), \hat{B} resulta em

$$\hat{B} = -(I - BB'X_\infty(I + BB'X_\infty)^{-1})K_F. \quad (3.31)$$

Continuando, \hat{C} é definido por

$$\hat{C} = - \left[V^{-1}B'X_\infty(A - K_F(W^{-1})R^{-1}Z) + V^{-1}B'X_\infty K_F(C + (W^{-1})R^{-1}Z) \right], \quad (3.32)$$

de maneira que substituindo (3.22), (3.23) e (3.28) em (3.32), \hat{C} resulta em

$$\hat{C} = -B'X_\infty(I + BB'X_\infty)^{-1}(A + K_FC). \quad (3.33)$$

O termo \hat{D} é, então, definido por

$$\hat{D} = - \left[-V^{-1}B'X_\infty K_F(W^{-1})R^{-1/2}[(W^{-1})R^{-1/2}]^{-1} \right], \quad (3.34)$$

em que, substituindo (3.22) e (3.23) em (3.34) tem-se, após reorganização dos termos, que \hat{D} resulta em

$$\hat{D} = - \left[-B'X_\infty(I + BB'X_\infty)^{-1}K_F \right]. \quad (3.35)$$

Por fim, o termo K_M é definido por

$$K_M = -(C + W^{-1}R^{-1}Z), \quad (3.36)$$

de maneira que, substituindo a equação (3.23) e (3.28) em (3.36), o termo K_M resulta como apresentado em (3.14). E se for definido K_C como em (3.13), os termos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} podem ser simplificados e $M(z)$ resulta em (3.12). Dessa maneira, $M(z)$ pode ser utilizado para calcular (3.11) e $Q(z)$ pode ser escolhido de forma a atender (3.15) satisfazendo o Teorema 10.7 apresentado por Stoorvogel em (25), que fornece uma caracterização completa de todos os controladores e de todos os sistemas em malha fechada admissíveis que têm uma norma \mathcal{H}_∞ estritamente menor que um γ que resolvem o problema da estabilização robusta no tempo discreto. Com isso, finaliza-se a demonstração a ser realizada para o Teorema 3.

Em vista disso, a caracterização de todos os controladores estabilizantes no tempo discreto para planta descritas por fatores coprimos à esquerda pode ser realizada por uma estrutura semelhante à utilizada para a obtenção de todos os controladores estabilizantes

no tempo contínuo. Para o caso regular do problema \mathcal{H}_∞ em tempo discreto, técnicas utilizadas para o caso em tempo contínuo podem ser aplicadas e tal problema pode ser resolvido diretamente no tempo discreto, sem a necessidade de se obter resultados em tempo contínuo e discretizá-los por alguma aproximação matemática com o objetivo de se realizar uma implementação prática.

A partir do desenvolvimento do *framework* que fornece a caracterização de todos os controladores que garantem a estabilidade interna, satisfazendo a norma \mathcal{H}_∞ menor que um γ pré-definido, é factível, segundo a escolha de $Q(z)$, obter duas estruturas para os controladores robustos \mathcal{H}_∞ em tempo discreto, chamados de controlador central não estritamente próprio e de controlador estritamente próprio. Portanto, a escolha de $Q(z)$ na realização de (3.11) possibilita obter uma estrutura para o controlador que pode ser reescrita sob a forma de um observador de estados corrente e outra estrutura para o controlador que pode ser reescrita sob a forma de um observador de estados preditivo.

Para o caso particular em que $Q(z)$ na parametrização de Youla for escolhido igual a zero, aplicando-se a LFT inferior em $M(z)$, tem-se que o controlador central não estritamente próprio é dado por

$$K(z) \stackrel{z}{=} \left[\begin{array}{c|c} (I + BK_C)(A + K_FC) & (I + BK_C)K_F \\ \hline K_C(A + K_FC) & K_C K_F \end{array} \right], \quad (3.37)$$

que pode ser reescrito na forma de um observador de estados corrente

$$\tilde{\hat{x}}(k+1) = A\tilde{\hat{x}}(k) + Bu(k) + K_F[C\tilde{\hat{x}}(k) - y(k)] \quad (3.38)$$

$$\hat{x}(k) = A\tilde{\hat{x}}(k) + K_F[C\tilde{\hat{x}}(k) - y(k)] \quad (3.39)$$

com a lei de controle

$$u(k) = K_C\hat{x}(k), \quad (3.40)$$

em que $\tilde{\hat{x}}(k)$ e $\hat{x}(k)$ são, respectivamente, os vetores de estados previstos e reais estimados do sistema observado, com K_C definido pela equação (3.13) e K_F definido de tal maneira que $A + K_FC$ seja estável, ou seja, a existência da estabilização robusta de um controlador depende da escolha estabilizante de K_F que, no caso específico, refere-se à escolha da fatoração coprima.

Uma outra escolha possível para $Q(z)$ na parametrização de Youla, é fazer $Q(z) = K_C K_F$ e, com isso, $Q(z)$ escolhido tem que satisfazer a condição de que o contro-

lador resultante tenha uma norma \mathcal{H}_∞ menor que um γ capaz de resolver o problema da estabilização robusta. Para esse caso, a condição (3.15) resulta em

$$(K_C K_F)'(I + B'X_\infty B)K_C K_F < \gamma^2 W'W - I - K_F' X_\infty (I + BB'X_\infty)^{-1} K_F, \quad (3.41)$$

que pode ser reescrita por

$$K_F' K_C' (I + B'X_\infty B) K_C K_F < \gamma^2 W'W - I - K_F' X_\infty (I + BB'X_\infty)^{-1} K_F \quad (3.42)$$

e como K_C é dado por (3.13); substituindo K_C em (3.42) tem-se

$$K_F' \left[-B'X_\infty (I + BB'X_\infty)^{-1} \right]' (I + B'X_\infty B) \left[-B'X_\infty (I + BB'X_\infty)^{-1} \right] K_F < \gamma^2 W'W - I - K_F' X_\infty (I + BB'X_\infty)^{-1} K_F, \quad (3.43)$$

que pode ser simplificada para

$$K_F' X_\infty B (I + B'X_\infty B)^{-1} (I + B'X_\infty B) B'X_\infty (I + BB'X_\infty)^{-1} K_F < \gamma^2 W'W - I - K_F' X_\infty (I + BB'X_\infty)^{-1} K_F. \quad (3.44)$$

Como o termo $(I + B'X_\infty B)^{-1} (I + B'X_\infty B)$ é igual à matriz identidade, a equação (3.44) fica

$$K_F' X_\infty BB'X_\infty (I + BB'X_\infty)^{-1} K_F + K_F' X_\infty (I + BB'X_\infty)^{-1} K_F < \gamma^2 W'W - I \quad (3.45)$$

e, colocando-se em evidência pela esquerda o termo $K_F' X_\infty$ e pela direita o termo K_F tem-se

$$K_F' X_\infty (BB'X_\infty + I) (I + BB'X_\infty)^{-1} K_F < \gamma^2 W'W - I, \quad (3.46)$$

que pode ser reorganizada, resultando em

$$0 < \gamma^2 W'W - I - K_F' X_\infty K_F. \quad (3.47)$$

Dessa forma, se a condição dada pelo resultado apresentado em (3.47) for satisfeita, é possível obter um controlador estritamente próprio no tempo discreto dado por

$$K(z) \stackrel{z}{=} \left[\begin{array}{c|c} A + B\tilde{K}_C + K_F C & K_F \\ \hline \tilde{K}_C & 0 \end{array} \right], \quad (3.48)$$

com

$$\tilde{K}_C = -B'X_\infty[I + BB'X_\infty - K_F(\gamma^2W'W - I)^{-1}K_F'X_\infty]^{-1}[A - K_F(\gamma^2W'W - I)^{-1}C], \quad (3.49)$$

que pode ser reescrito na forma de um observador de estados preditivo

$$\tilde{\hat{x}}(k+1) = A\tilde{\hat{x}}(k) + Bu(k) + K_F[C\tilde{\hat{x}}(k) - y(k)], \quad (3.50)$$

com a lei de controle

$$u(k) = \tilde{K}_C\tilde{\hat{x}}(k), \quad (3.51)$$

assemelhando-se à estrutura do controlador central estritamente próprio no tempo contínuo apresentado no capítulo anterior dado por (2.18).

Do desenvolvimento discutido e apresentado anteriormente, nota-se que é possível obter uma estrutura alternativa para determinar todos os controladores \mathcal{H}_∞ em tempo discreto por uma formulação semelhante ao caso em tempo contínuo para uma descrição da planta por fatores coprimos à esquerda. De posse de todos os controladores admissíveis, dependendo da escolha para $Q(z)$, é possível verificar que o controlador central não estritamente próprio no tempo discreto pode ser obtido assim como o controlador estritamente próprio em tempo discreto. Portanto, um formalismo mais transparente pode ser obtido para a caracterização de todos os controladores estabilizantes, um central não estritamente próprio, além do controlador estritamente próprio com base em uma estrutura semelhante à estrutura apresentada no capítulo anterior para o caso em tempo contínuo.

Iglesias (23) mostrou que as propriedades do controle \mathcal{H}_∞ baseado na solução da fatoração coprima à esquerda normalizada desenvolvida por McFarlane e Glover (27) podem ser recuperadas apenas com o uso do observador de estados preditivo (ou, equivalentemente, com o controlador estritamente próprio). Por outro lado, nesta seção foi demonstrado que a estrutura alternativa para a parametrização de todos os controladores admissíveis no tempo discreto também permite parametrizar os controladores que pode ser reescritos pelas estruturas de observadores de estados; porém, com base na descrição da planta por uma fatoração coprima à esquerda qualquer.

Nesse contexto, também há a possibilidade de explorar o *framework* proposto para o caso discreto baseado na descrição da planta por uma fatoração coprima à esquerda normalizada e, com isso, obter a determinação de um γ_{min} que está diretamente relacionado à especificação de robustez do sistema bem como sintetizar os controladores em tempo discreto apresentados anteriormente sob essa especificação. Considerando a fatoração coprima à esquerda normalizada que, para o caso discreto, significa fazer

$W = (I + CYC')^{-1/2}$ em (3.6), tem-se que a fatoração coprima à esquerda em (3.4) deve satisfazer

$$\tilde{N}(e^{j\omega T})\tilde{N}(e^{j\omega T})^* + \tilde{M}(e^{j\omega T})\tilde{M}(e^{j\omega T})^* = I, \quad (3.52)$$

resultando em uma matriz K_F dada por

$$K_F = -A(I + YC'C)^{-1}YC', \quad (3.53)$$

em que $Y = Y' \geq 0$ é a única solução estabilizante da equação algébrica de Riccati no tempo discreto

$$AYA' - Y - AYC'(I + CYC')^{-1}CYA' + BB' = 0, \quad (3.54)$$

que também pode ser reescrita como

$$Y = A(I + YC'C)^{-1}YA' + BB'. \quad (3.55)$$

Assim como para o caso em tempo contínuo, uma característica útil da fatoração coprima à esquerda normalizada é que o valor de γ_{min} pode ser escrito de maneira explícita também para o caso em tempo discreto. Para isso, considera-se o seguinte teorema.

Teorema 4 *Seja a estabilização robusta da planta $G(z)$ que tem uma fatoração coprima à esquerda normalizada com $W = (I + CYC')^{-1/2}$. Então, existe um controlador $K(z)$ tal que*

$$\gamma_{min} = \inf_K \left\| \begin{bmatrix} K(z) \\ I \end{bmatrix} [I + G(z)K(z)]^{-1} \tilde{M}(z)^{-1} \right\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_{max}(YQ)}}, \quad (3.56)$$

em que λ_{max} é o autovalor máximo do resultado do produto YQ sendo Q a solução da seguinte equação de Lyapunov

$$Q = [A(I + YC'C)^{-1}]' QA(I + YC'C)^{-1} + C'C(I + YC'C)^{-1} \quad (3.57)$$

e, para qualquer $\gamma > \gamma_{min}$, uma solução estabilizante X_∞ de (3.10) existe e é dada por

$$X_\infty = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} Q \left(I - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} YQ \right)^{-1}. \quad (3.58)$$

Demonstração. A prova do Teorema 4 faz uso da matriz simplética S (24, 25, 48) associada à X_∞ da equação algébrica de Riccati (3.10) definida por

$$S = \begin{bmatrix} \tilde{A} + \tilde{B}(\tilde{A}')^{-1}\tilde{C} & -\tilde{B}(\tilde{A}')^{-1} \\ -(\tilde{A}')^{-1}\tilde{C} & (\tilde{A}')^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

em que

$$\tilde{A} = A - \begin{bmatrix} B & -K_F(W^{-1}) \end{bmatrix} I_S^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & (W^{-1})' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & -K_F(W^{-1}) \end{bmatrix} I_S^{-1} \begin{bmatrix} B' \\ -(W^{-1})'K_F' \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

e

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & C' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & C' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (W^{-1}) \end{bmatrix} I_S^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (W^{-1})' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

com I_S definido por

$$I_S = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ W^{-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & (W^{-1})' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & (W^{-1})' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (W^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} - \gamma^2 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & [(W^{-1})'(W^{-1}) - \gamma^2 I] \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

conforme Lema 9.18 definido por Stoorvogel em (25) e considerando a planta generalizada P em (3.6) para caracterização dos termos definidos anteriormente.

Como a matriz inversa de I_S é dada por

$$I_S^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & [(W^{-1})'(W^{-1}) - \gamma^2 I]^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

substituindo (3.64) em (3.60), (3.61) e (3.62) os termos \tilde{A} , \tilde{B} e \tilde{C} , após simplificações, resultam, respectivamente, em

$$\tilde{A} = A - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}C, \quad (3.65)$$

$$\tilde{B} = BB' - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}K_F', \quad (3.66)$$

$$\tilde{C} = \gamma^2 C'(\gamma^2 W'W - I)^{-1}W'WC. \quad (3.67)$$

A matriz simplética S pode ser reescrita como

$$S = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ -I \end{bmatrix} (\tilde{A}')^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{C} & -I \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

e, dessa maneira, substituindo (3.65), (3.66) e (3.67) em (3.68), S resulta em

$$S = \begin{bmatrix} A - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BB' - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}K_F' \\ -I \end{bmatrix} \\ \times \left[(A - K_F(\gamma^2 W'W - I)^{-1}C)' \right]^{-1} \begin{bmatrix} \gamma^2 C'(\gamma^2 W'W - I)^{-1}W'WC & -I \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Substituindo e considerando $W = (I + CYC')^{-1/2}$, K_F representado pela equação (3.53) e Y representado por (3.55), é possível obter S após algumas simplificações algébricas resultando em

$$S = \begin{bmatrix} A[I + (1 - \gamma^2)^{-1}YC'C]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y + A(I + YC'C)^{-1}YA'[I + (1 - \gamma^2)^{-1}YC'C]^{-1} \\ I \end{bmatrix} \\ \times \left[(A(I + (1 - \gamma^2)^{-1}YC'C)^{-1})' \right]^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}C'[I + (1 - \gamma^2)^{-1}CYC']^{-1}C & I \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

e, após desenvolvimento, cálculos e simplificações matriciais, a equação (3.70), pode ser reduzida para

$$S = \begin{bmatrix} A(I + YC'C)^{-1} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}Y(A^{-1})'C'C & A(I + YC'C)^{-1}Y - Y(A^{-1})' + \frac{1}{\gamma^2 - 1}Y(A^{-1})'C'CY \\ -\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}(A^{-1})'C'C & (A^{-1})' - \frac{1}{\gamma^2 - 1}(A^{-1})'C'CY \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Manipulando os termos da equação (3.71), é possível reescrever S como

$$S = \begin{bmatrix} A(I + YC'C)^{-1} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}Y(A^{-1})'C'C & -\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}Y(A^{-1})'(I + C'CY) \\ -\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}(A^{-1})'C'C & \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}(A^{-1})'(I + C'CY) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}I \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

que ainda pode ser reduzida para

$$S = \begin{bmatrix} I & -\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}Y \\ 0 & \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(I + YC'C)^{-1} & 0 \\ -(A^{-1})'C'C & (A^{-1})'(I + C'CY) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}I \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

e, como a inversa do termo à direita na equação (3.73) é dado por

$$\begin{bmatrix} I & -\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}Y \\ 0 & \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}I \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

a matriz simplética resultante (3.73) associada à X_∞ na equação (3.10) pode ser fatorada como

$$S = \begin{bmatrix} I & -\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}Y \\ 0 & \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}I \end{bmatrix} H_{\mathcal{Q}} \begin{bmatrix} I & -\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}Y \\ 0 & \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}I \end{bmatrix}^{-1}, \quad (3.75)$$

com $H_{\mathcal{Q}}$ sendo o termo central da equação (3.73) dado por

$$H_{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} A(I + YC'C)^{-1} & 0 \\ -(A^{-1})'C'C & (A^{-1})'(I + C'CY) \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$

em que $H_{\mathcal{Q}}$ é a matriz simplética associada com \mathcal{Q} da equação (3.57).

Considerando o subespaço invariante estável de $H_{\mathcal{Q}}$ dado por

$$\mathcal{X}_-(H_{\mathcal{Q}}) = \text{Im} \begin{bmatrix} I \\ \mathcal{Q} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

e o subespaço invariante estável de S dado por

$$\mathcal{X}_-(S) = \begin{bmatrix} I & -\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}Y \\ 0 & \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}I \end{bmatrix} \mathcal{X}_-(H_{\mathcal{Q}}) = \text{Im} \begin{bmatrix} I - \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}Y\mathcal{Q} \\ \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}\mathcal{Q} \end{bmatrix}, \quad (3.78)$$

existe uma solução estabilizante para a equação algébrica de Riccati no tempo discreto (3.10) se e somente se

$$I - \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}Y\mathcal{Q} > 0 \iff \gamma^2(I - Y\mathcal{Q}) > I. \quad (3.79)$$

Como $\sqrt{\lambda_{\max}(Y\mathcal{Q})}$ é norma Hankel dos fatores coprimos $\begin{bmatrix} \tilde{N}(z) & \tilde{M}(z) \end{bmatrix}$, então, a equação (3.79) pode ser reescrita resultando em

$$\gamma > \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_{\max}(Y\mathcal{Q})}}, \quad (3.80)$$

sendo essa a condição para a existência da solução X_∞ que, se existir, é dada pelo resultado da equação (3.58) (24).

Nesse contexto, assim como para o caso em tempo contínuo, do Corolário 1, tem-se que as soluções para o problema da estabilização robusta da fatoração coprima à esquerda normalizada também são soluções relacionadas ao problema \mathcal{H}_∞ apresentado na seção 2.1. Além disso, também para o caso em tempo discreto, um limitante de robustez pode ser

obtido relacionando-se com o problema da estabilização robusta de plantas descritas por fatores coprimos à esquerda.

A solução de \mathcal{Q} para a equação de Lyapunov em (3.57) pode ser obtida de outras maneiras. Considerando $X \geq 0$ a solução estabilizante para

$$A'XA - X - A'XB(I + B'XB)^{-1}B'XA + C'C = 0, \quad (3.81)$$

tem-se que

$$\mathcal{Q} = (I + XY)^{-1}X \quad (3.82)$$

e, substituindo a equação (3.82) em (3.58), tem-se que a solução X_∞ é dada por

$$X_\infty = \gamma^2 X [(\gamma^2 - 1)I - YX]^{-1}. \quad (3.83)$$

Consequentemente, considerando \mathcal{Q} em (3.82), substituindo no termo a direita na equação (3.80), tem-se

$$\gamma_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_{\max}(Y(I + XY)^{-1}X)}}, \quad (3.84)$$

que pode ser reescrita como

$$\gamma_{\min}^2 = \frac{1}{\lambda_{\max}(I - Y(I + XY)^{-1}X)}. \quad (3.85)$$

O termo $I - Y(I + XY)^{-1}X$ pode ser simplificado para $(I + YX)^{-1}$ e, então a equação (3.85) é dada por

$$\gamma_{\min}^2 = \frac{1}{\lambda_{\max}(I + YX)^{-1}} = \sqrt{1 + \lambda_{\max}(YX)}, \quad (3.86)$$

sendo possível encontrar um valor de γ_{\min} , similar ao caso contínuo, capaz de limitar a escolha de γ de maneira que exista uma solução estabilizante X_∞ em (3.58). Apesar do cálculo ser semelhante ao caso contínuo, vale ressaltar que as soluções Y e X são soluções das equações algébricas de Riccati (3.54) e (3.81), respectivamente.

Portanto, se a fatoração coprime for escolhida como a normalizada, não importa se a planta é descrita por uma fatoração coprime à esquerda ou à direita, pois, como Y e X são as soluções estabilizantes de duas equações algébricas de Riccati no tempo discreto que satisfaz a dualidade

$$A(I + YC'C)^{-1}(I + YX) = (I + YX)(I + BB'X)^{-1}A \quad (3.87)$$

sendo possível obter uma metodologia e que seja capaz de se relacionar com o problema da estabilização robusta de forma a encontrar um $\gamma > \gamma_{min}$ capaz de solucionar o problema da estabilização robusta para o caso em tempo discreto apresentado em (3.8). Com isso, finaliza-se a demonstração a ser realizada para o Teorema 4.

Utilizando-se do desenvolvimento apresentado anteriormente para a descrição da planta por uma fatoração coprima à esquerda normalizada e das estruturas para os controladores em tempo discreto, é possível reescrever o controlador central não estritamente próprio (3.37) sob a especificação do γ_{min} e, então, o seguinte teorema é apresentado.

Teorema 5 *O problema da fatoração coprima à esquerda normalizada tem uma solução desde que exista um valor de $\gamma > \gamma_{min}$, em que γ_{min} é calculado por (3.86) com Y e X soluções das equações algébricas de Riccati no tempo discreto (3.54) e (3.81), respectivamente.*

Além disso, se as condições acima são satisfeitas e mantidas, um controlador central não estritamente próprio no tempo discreto dado por (3.37) é obtido com ganho de estimação K_F igual a (3.53) e ganho de regulação K_C dado por

$$K_C = -\gamma^2 B' X [(\gamma^2 - 1)I - YX + \gamma^2 BB' X]^{-1}. \quad (3.88)$$

Demonstração. A prova do Teorema 5 vem do resultado obtido para o Teorema 4 e, substituindo (3.83) em K_C (3.13), tem-se

$$\begin{aligned} K_C &= -B' \left\{ \gamma^2 X [(\gamma^2 - 1)I - YX]^{-1} \right\} \left\{ I + BB' \left[\gamma^2 X ((\gamma^2 - 1)I - YX)^{-1} \right] \right\}^{-1} = \\ &= -\gamma^2 B' X [(\gamma^2 - 1)I - YX]^{-1} \left\{ I + \gamma^2 BB' X [(\gamma^2 - 1)I - YX]^{-1} \right\}^{-1} = \\ &= -\gamma^2 B' X \left\{ \left[I + \gamma^2 BB' X ((\gamma^2 - 1)I - YX)^{-1} \right] [(\gamma^2 - 1)I - YX] \right\}^{-1} = \\ &= -\gamma^2 B' X [(\gamma^2 - 1)I - YX + \gamma^2 BB' X]^{-1}, \quad (3.89) \end{aligned}$$

que é a equação (3.88).

Utilizando-se do desenvolvimento apresentado anteriormente para a descrição da planta por uma fatoração coprima à esquerda normalizada e das estruturas para os controladores em tempo discreto, é possível também reescrever o controlador estritamente próprio (3.48) sob a especificação do γ_{min} assim como Iglesias determinou em (23), e, então, o seguinte teorema é apresentado análogo ao procedimento descrito por Iglesias.

Teorema 6 *O problema da fatoração coprima à esquerda normalizada tem uma solução desde que exista um valor de $\gamma > \gamma_{min}$, tal que*

$$\lambda_{\max} \left[K_F (\gamma^2 W' W - I)^{-1} K_F' X_\infty \right] < 1 \quad (3.90)$$

ou, equivalentemente,

$$\gamma_{min} := \lambda_{\max} \begin{bmatrix} \left(I + CYC' + \frac{1}{4} \mathcal{V} \mathcal{V}' \right)^{1/2} & -\frac{1}{2} \mathcal{V} \\ -\frac{1}{2} \mathcal{V}' & \left(I + X^{1/2} Y X^{1/2} + \frac{1}{4} \mathcal{V}' \mathcal{V} \right)^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (3.91)$$

em que

$$\mathcal{V} = (I + CYC')^{-1/2} CYA' X^{1/2}, \quad (3.92)$$

com Y e X soluções das equações algébricas de Riccati no tempo discreto (3.54) e (3.81), respectivamente.

Além disso, se as condições acima são satisfeitas e mantidas, um controlador estritamente próprio no tempo discreto dado por (3.48) é obtido com ganho de estimação K_F igual a (3.53) e ganho de regulação \tilde{K}_C dado por

$$\tilde{K}_C = -\gamma^2 B' X (I + BB' X)^{-1} A [(\gamma^2 - 1)I - YX]^{-1}. \quad (3.93)$$

Demonstração. A prova do Teorema 6 vem do resultado obtido para o Teorema 4, da metodologia apresentada por Iglesias em (23) e da condição apresentada em (3.48), que pode ser reescrita como

$$0 < \gamma^2 I - (W')^{-1} W^{-1} - (W')^{-1} K_F' X_\infty K_F W^{-1} \quad (3.94)$$

e como W é uma matriz simétrica positiva semidefinida, após uma reorganização dos termos, a equação (3.94) resulta em

$$W^{-1} (I + K_F' X_\infty K_F) W^{-1} < \gamma^2 I. \quad (3.95)$$

Como W é dado por $W = (I + CYC')^{-1/2}$, K_F é dado como mostra a equação (3.53) e do Teorema 4 tem-se que X_∞ é como mostrado em (3.83), substituindo W , K_F e X_∞ em (3.95), após uma reorganização dos termos, tem-se que (3.95) resulta em

$$0 < \gamma^2 I - (I + CYC') - (I + CYC')^{-1/2} CYA' X (I - \gamma^{-2} (I + YX))^{-1} AY C' (I + CYC')^{-1/2}, \quad (3.96)$$

que é uma expressão semelhante como apresentada na seção III.B de (23). Dessa maneira, utilizando do mesmo procedimento demonstrado no artigo citado, é possível obter o cálculo de γ_{min} como apresentado em (3.91). Além disso, substituindo W , K_F e BB' da equação (3.55) na equação de \tilde{K}_C em (3.49), tem-se

$$\tilde{K}_C = -B'X_\infty \left\{ \left[I + (1 - \gamma^2)^{-1}YC'C \right] A^{-1} + \left[I + (1 - \gamma^2)^{-1}YC'C \right] A^{-1}YX_\infty - (I + YC'C)^{-1}YA'X_\infty \right\}^{-1}, \quad (3.97)$$

como X_∞ é dado por (3.83), substituindo-o em (3.97) e reorganizando os termos, obtém-se como resultado

$$\tilde{K}_C = -\gamma^2 B'X \left\{ (\gamma^2 - 1)A^{-1} + (\gamma^2 - 1)A^{-1}YX - YC'CA^{-1} - YC'CA^{-1}YX - \gamma^2(I + YC'C)^{-1}YA'X \right\}^{-1}. \quad (3.98)$$

Como a equação (3.81) pode ser reescrita como

$$X = A'X(I + BB'X)^{-1}A + C'C, \quad (3.99)$$

é possível isolar o termo $C'C$, então, substituindo o termo $C'C$ em dois termos da equação (3.98), após simplificações algébricas e reorganização dos termos, tem-se

$$\tilde{K}_C = -\gamma^2 B'X \left\{ (\gamma^2 - 1)A^{-1} + (\gamma^2 - 1)A^{-1}YX - YXA^{-1} - YXA^{-1}YX + A^{-1} \left[(I + YX)(I + BB'X)^{-1}A \right] YA'X - \gamma^2(I + YC'C)^{-1}YA'X \right\}^{-1} \quad (3.100)$$

e, aplicando a dualidade (3.87) em (3.100), obtém-se

$$\tilde{K}_C = -\gamma^2 B'X \left\{ \left[\gamma^2 A^{-1} - A^{-1} - A^{-1}YX \right] \left[I + YX - A(I + YC'C)^{-1}YA'X \right] \right\}^{-1} = -\gamma^2 B'X \left\{ \left[\gamma^2 I - I - YX \right] A^{-1} \left[I + (Y - A(I + YC'C)^{-1}YA')X \right] \right\}^{-1}. \quad (3.101)$$

Como BB' em (3.55) é dado por $BB' = Y - A(I + YC'C)^{-1}YA'$, e considerando $W = \gamma^2 I - I - YX$, a equação (3.101) resulta em

$$\tilde{K}_C = -\gamma^2 B'X \left[WA^{-1}(I + BB'X) \right]^{-1} = -\gamma^2 B'X(I + BB'X)^{-1}AW^{-1}, \quad (3.102)$$

que é a equação dada em (3.93).

Com isso, mostra-se que é possível determinar um *framework* análogo ao procedimento em tempo contínuo para a parametrização de todos os controladores estabilizantes admissíveis no tempo discreto. A estrutura alternativa se apresenta factível na caracterização de duas estruturas para os controladores em tempo discreto devido a escolha de $Q(z)$. Também apresenta-se que, a partir da descrição da planta por uma fatoração coprima à esquerda normalizada sob a perspectiva do *framework* proposto, é possível obter um valor de γ_{min} relacionado diretamente com a robustez do sistema e, conseqüentemente, as duas estruturas para os controladores em tempo discreto podem ser obtidas com base na escolha de um γ_{min} que depende diretamente do resultado de duas equações algébricas de Riccati em tempo discreto.

Desse modo, encerram-se os desenvolvimentos teóricos dessa tese de doutorado. O próximo capítulo apresenta exemplos da aplicação da metodologia proposta.

4 Exemplos de Aplicação

Este capítulo apresenta, de maneira direta, o procedimento de projeto para síntese dos controladores, além dos exemplos de aplicação do controle robusto \mathcal{H}_∞ em tempo discreto na planta utilizada por Iglesias em (23) e na malha de controle de posição de uma esfera metálica de um modelo didático de um levitador magnético fabricado pela empresa QUANSER. O objetivo é mostrar as características de desempenho e a robustez associada a cada controlador a partir da síntese \mathcal{H}_∞ e da descrição da planta por uma fatoração coprima à esquerda normalizada a partir do *framework* proposto.

4.1 Procedimento de Projeto

4.1.1 Controle \mathcal{H}_∞ a Tempo Contínuo

O procedimento para o projeto do controlador central no tempo contínuo fornecido pela estrutura apresentada em (2.18) é dado por

- A partir da matriz de estado do sistema (2.1) obter a solução das equações algébricas de Riccati em tempo contínuo (2.23) e (2.31);
- Calcular γ_{min} como apresentado em (2.34);
- Escolha de um $\gamma > \gamma_{min}$ para calcular o ganho de regulação do controlador;
- Calcular os ganhos de estimação K_F e regulação K_C em (2.22) e (2.35), respectivamente;
- Por fim, obter $K(s)$ em (2.18).

4.1.2 Controle \mathcal{H}_∞ a Tempo Discreto

4.1.2.1 Controlador Central Não Estritamente Próprio

O procedimento para o projeto do controlador central não estritamente próprio no tempo discreto fornecido pela estrutura apresentada em (3.37) é dado por

- A partir da matriz de estado do sistema (3.1) obter a solução das equações algébricas de Riccati em tempo discreto (3.54) e (3.81);
- Calcular γ_{min} como apresentado em (3.86);
- Escolher um $\gamma > \gamma_{min}$ para calcular o ganho de regulação do controlador;

- Calcular os ganhos de estimação K_F e regulação K_C em (3.53) e (3.88), respectivamente;
- Por fim, obter $K(z)$ em (3.37).

4.1.2.2 Controlador Estritamente Próprio

O procedimento para o projeto do controlador estritamente próprio no tempo discreto fornecido pela estrutura apresentada em (3.48) é dado por

- A partir da matriz de estado do sistema (3.1) obter a solução das equações algébricas de Riccati em tempo discreto (3.54) e (3.81);
- Calcular γ_{min} como apresentado em (3.91);
- Escolher um $\gamma > \gamma_{min}$ para calcular o ganho de regulação do controlador;
- Calcular os ganhos de estimação K_F e regulação \tilde{K}_C em (3.53) e (3.93), respectivamente;
- Por fim, obter $K(z)$ em (3.48).

4.2 Exemplo Ilustrativo

Em (23), Iglesias, a partir de um controlador central em tempo discreto não estritamente próprio, desenvolvido por uma fatoração coprima à esquerda normalizada, propõe um controlador em tempo discreto estritamente próprio e realiza uma comparação entre o controlador em tempo contínuo e os controladores em tempo discreto não estritamente próprio, estritamente próprio e um obtido por uma aproximação de Tustin. Neste trabalho, uma comparação semelhante é abordada com o objetivo de mostrar o desempenho e robustez associados aos controladores em tempo discreto, partindo-se da estrutura alternativa apresentada para a síntese dos controladores.

Como resultado de seu trabalho, Iglesias concluiu que o controlador estritamente próprio em tempo discreto tem solução exata e que somente esse controlador pode ser implementado em sistemas controlados por computador devido a natureza da estrutura do controlador. Além disso, há a semelhança entre o desempenho na saída do controlador estritamente próprio e o controlador contínuo para o mesmo sinal de comando aplicado.

Para ilustrar a aplicabilidade da estrutura descrita, considera-se o mesmo exemplo apresentado em (23), cujos resultados também serão utilizados na discussão. O propósito é mostrar o desempenho dos controladores, utilizando o formalismo proposto neste trabalho,

para os casos em tempo discreto comparando-os com o caso em tempo contínuo. A função de transferência da planta utilizada é dada por

$$G(s) = \frac{s + 10}{s^2}, \quad (4.1)$$

que é utilizada para desenvolvimento do controlador em tempo contínuo e que, para o caso em tempo discreto, é discretizada pelo retentor de ordem zero (ZOH) para duas frequências de amostragem. Além disso, será considerada a descrição da planta por uma fatoração coprima à esquerda normalizada. Para esse fim, particularizou-se a solução de controle geral da estrutura desenvolvida para esse caso em específico conforme apresentada na seção anterior.

Para o desenvolvimento no tempo contínuo, em uma comparação fiel com os resultados obtidos por Iglesias em (23), um $\gamma = 2,32$ foi utilizado na síntese do controlador central estritamente próprio no tempo contínuo. Com esse valor de γ escolhido, o ganho K_F calculado por (2.22) e K_C calculado por (2.35), resultam, respectivamente em

$$K_F = \begin{bmatrix} -1,0000 \\ -0,3583 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

e

$$K_C = \begin{bmatrix} -44,9129 & -118,3390 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

e o resultado da resposta ao degrau unitário pode ser visto como mostra a Figura 3.

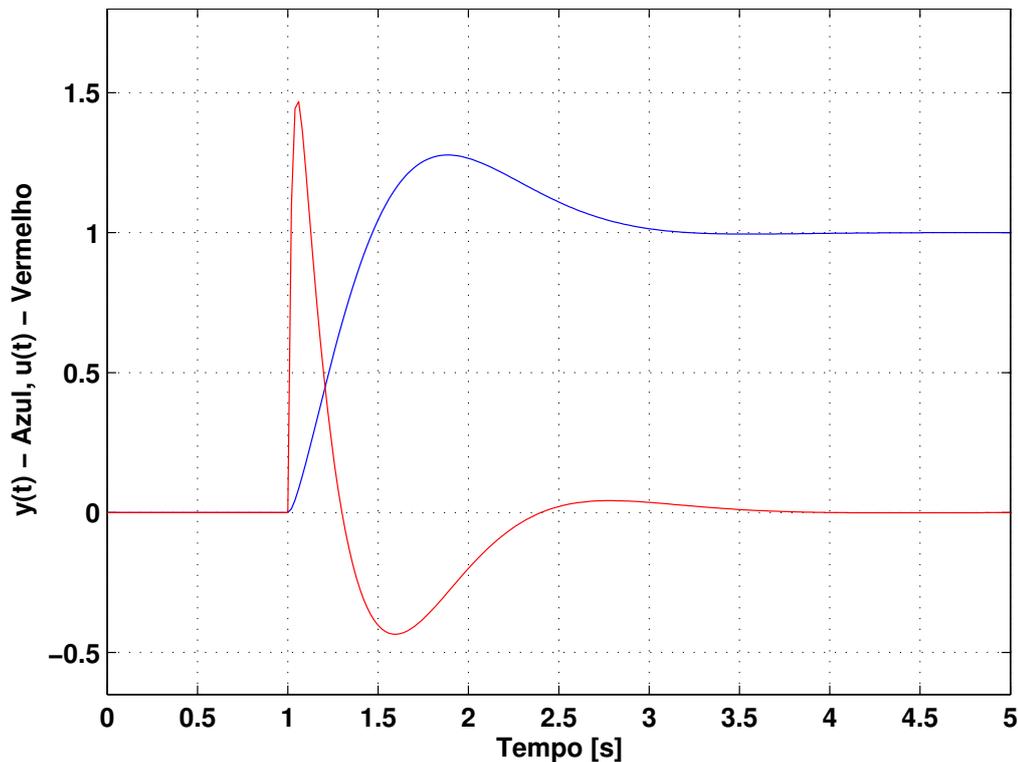


Figura 3 – Resposta ao degrau unitário para o controlador central no tempo contínuo.

Como pode ser visto na Figura 3, a resposta do sistema para um degrau unitário apresenta um rastreamento satisfatório. Dessa maneira, o controlador central \mathcal{H}_∞ no tempo contínuo pode ser sintetizado pela descrição da planta por uma fatoraçoão coprima à esquerda normalizada conforme apresentado na seção 2.2.

Para o caso em tempo discreto, em um primeiro momento, obteve-se a aproximação de Tustin do controlador em tempo contínuo desenvolvido utilizando-se um $\gamma = 2,40$ para uma frequência de amostragem de $f = 50 [Hz]$ e um $\gamma = 2,88$ para uma frequência de amostragem de $f = 10 [Hz]$ e os resultados das respostas ao degrau podem ser vistos na Figura 4 e na Figura 5, respectivamente. Vale ressaltar que os valores de γ escolhidos são os mesmos como em (23).

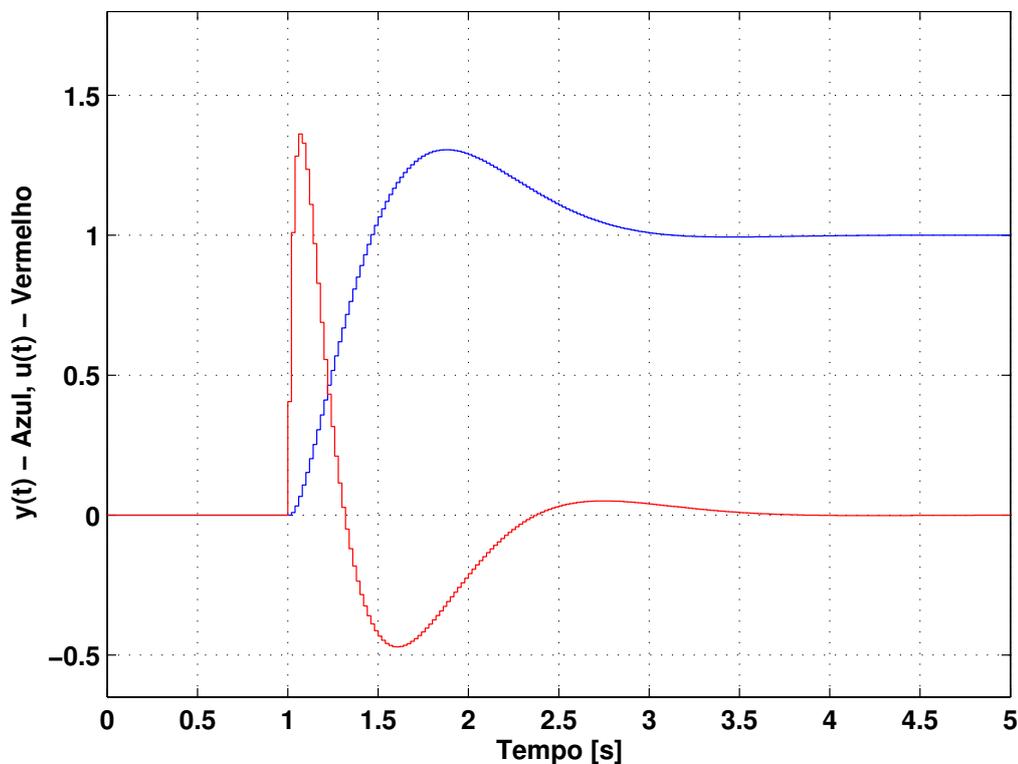


Figura 4 – Resposta ao degrau unitário para a aproximação de Tustin do controlador contínuo para $f = 50 [Hz]$.

Como pode ser visto nas Figuras 4 e 5, a resposta do sistema para a frequência de amostragem de $50 [Hz]$, para um degrau unitário, apresenta um rastreamento satisfatório semelhante ao caso contínuo. Entretanto, quando se altera a frequência de amostragem para $f = 10 [Hz]$, o sinal de controle começa a se diferenciar apesar de o rastreamento ainda ser mantido.

Para o caso discreto, em um segundo momento, a mesma análise é realizada para o controlador central não estritamente próprio. Utilizam-se também, diferentes frequências de amostragem na discretização da planta, as mesmas utilizadas no trabalho desenvolvido por Iglesias. Para uma frequência de amostragem de $50 [Hz]$, em comparação com o

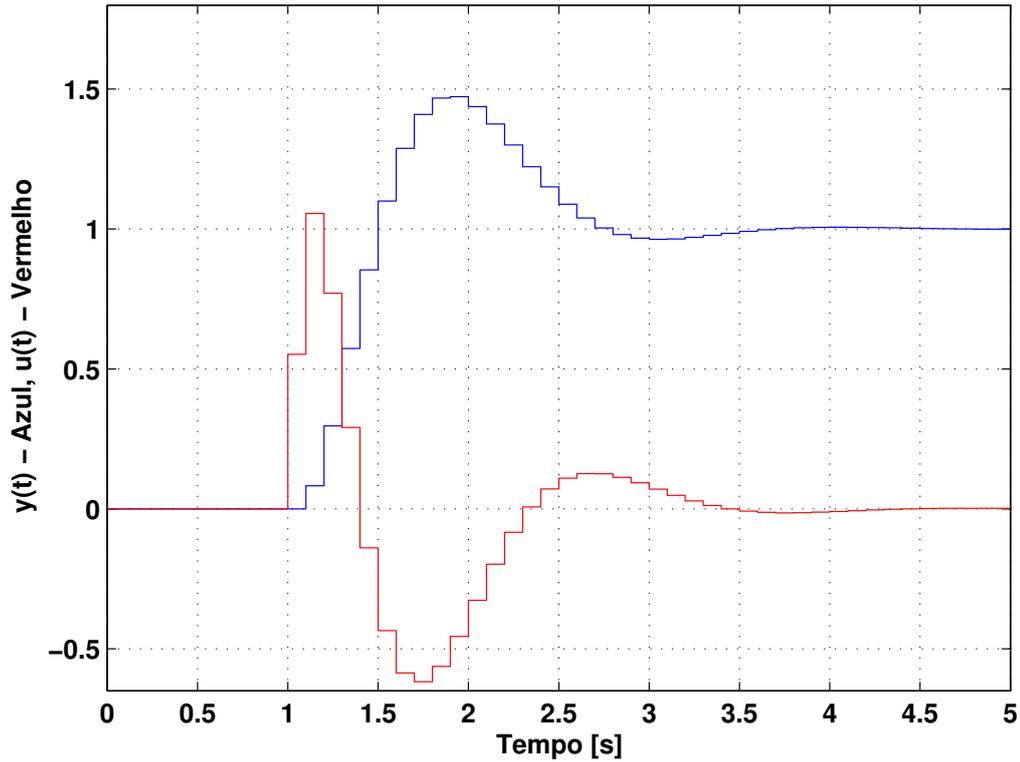


Figura 5 – Resposta ao degrau unitário para a aproximação de Tustin do controlador contínuo para $f = 10$ [Hz].

controlador contínuo, foi escolhido um $\gamma = 2,33$ para a síntese do controlador central no tempo discreto, uma vez que esse valor de γ permite uma mesma amplitude no sinal de comando quando comparado ao controlador contínuo. Com esse valor de γ , o ganho K_F calculado por (3.53) e K_C calculado por (3.88), resultam, respectivamente em

$$K_F = \begin{bmatrix} -0,0191 \\ -0,0072 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

e

$$K_C = \begin{bmatrix} -28,4537 & -76,8191 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

e o resultado da resposta ao degrau unitário pode ser visto na Figura 6.

Para uma frequência de amostragem de 10 [Hz], o valor de $\gamma = 2,44$ é o valor de γ que será utilizado na síntese do controlador central não estritamente próprio. Com esse valor de γ , o ganho K_F calculado por (3.53) e K_C calculado por (3.88), resultam, respectivamente em

$$K_F = \begin{bmatrix} -0,0796 \\ -0,0367 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

e

$$K_C = \begin{bmatrix} -9,0722 & -26,6206 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

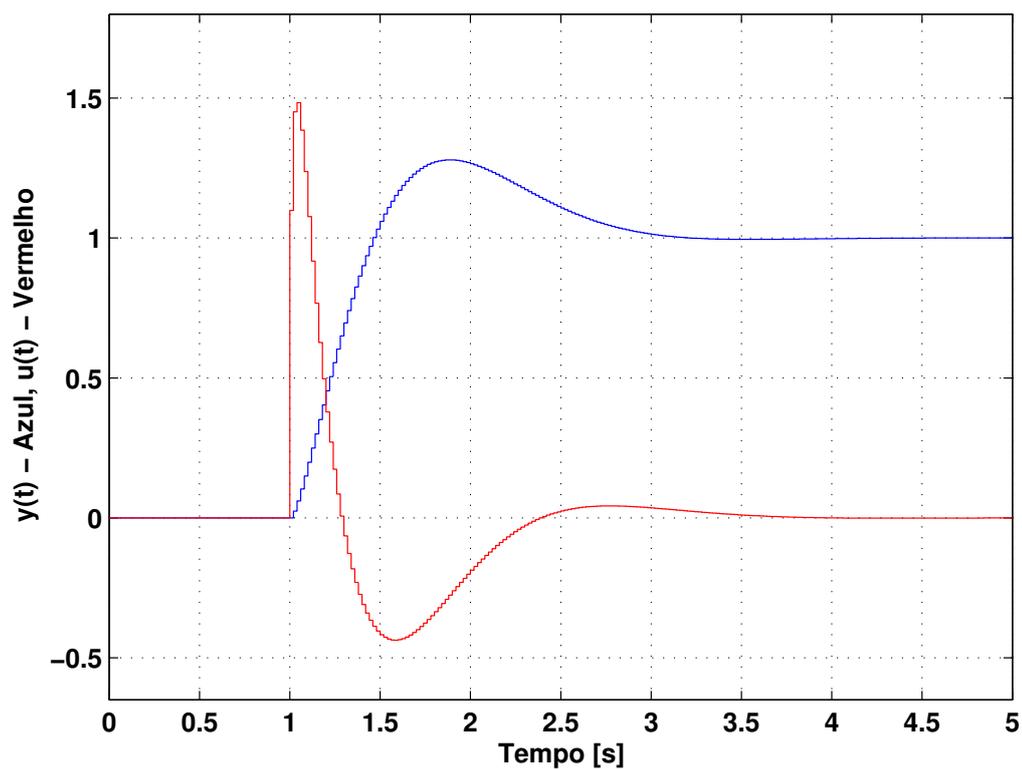


Figura 6 – Resposta ao degrau unitário para o controlador central no tempo discreto para $f = 50$ [Hz].

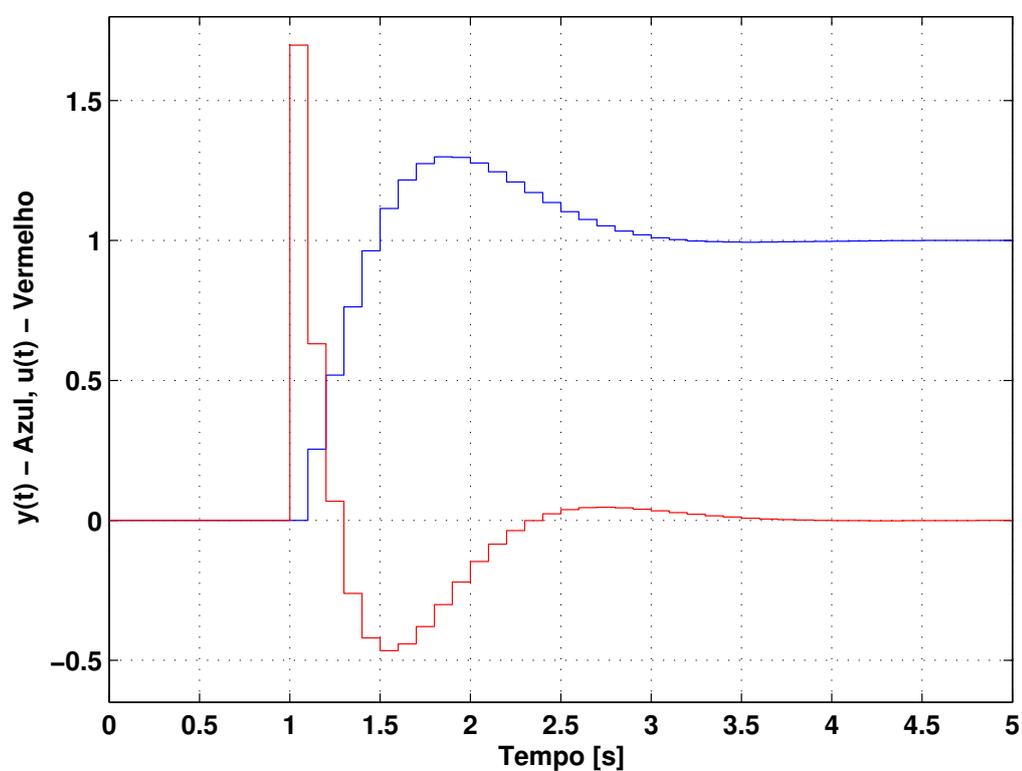


Figura 7 – Resposta ao degrau unitário para o controlador central no tempo discreto para $f = 10$ [Hz].

e o resultado da resposta ao degrau unitário pode ser visto na Figura 7.

Como pode ser visto nas Figuras 6 e 7, as respostas do sistema, para um degrau unitário, também apresentam um rastreamento satisfatório. Dessa maneira, pode-se afirmar que um controlador central não estritamente próprio pode ser determinado a partir de uma fatoração coprima à esquerda normalizada e é possível assegurar que as dinâmicas apresentadas pelos controladores são análogas, pois, mesmo com uma alteração na frequência de amostragem utilizada na discretização da planta, a semelhança é mantida.

Ainda para o caso discreto, a mesma análise é feita para a síntese do controlador estritamente próprio. Utilizam-se também as mesmas frequências de amostragem. Para uma frequência de amostragem de $50 [Hz]$, um $\gamma = 2,46$ é utilizado na síntese do controlador, sendo este o mesmo valor de γ utilizado no trabalho de Iglesias para o mesmo controlador. Com esse valor de γ , o ganho K_F calculado por (3.53) e \tilde{K}_C calculado por (3.93), resultam, respectivamente em

$$K_F = \begin{bmatrix} -0,0191 \\ -0,0072 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

e

$$\tilde{K}_C = \begin{bmatrix} -25,8431 & -67,5781 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

e o resultado da resposta ao degrau unitário pode ser visto na Figura 8.

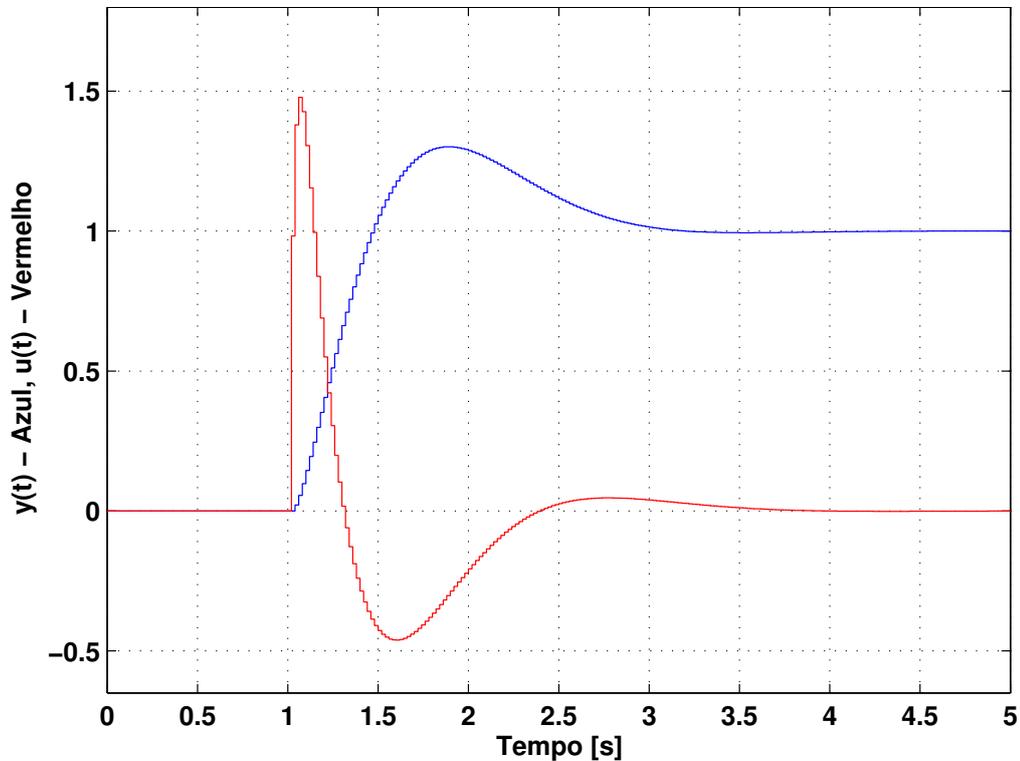


Figura 8 – Resposta ao degrau unitário para o controlador estritamente próprio para $f = 50 [Hz]$.

Para uma frequência de amostragem de $10 [Hz]$, o valor de $\gamma = 3,11$ é o valor de γ que será utilizado na síntese do controlador estritamente próprio. Com esse valor de γ ,

o ganho K_F calculado por (3.53) e \tilde{K}_C calculado por (3.93), resultam, respectivamente em

$$K_F = \begin{bmatrix} -0,0796 \\ -0,0367 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

e

$$\tilde{K}_C = \begin{bmatrix} -9,9856 & -24,7220 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

e o resultado da resposta ao degrau unitário pode ser visto na Figura 9.

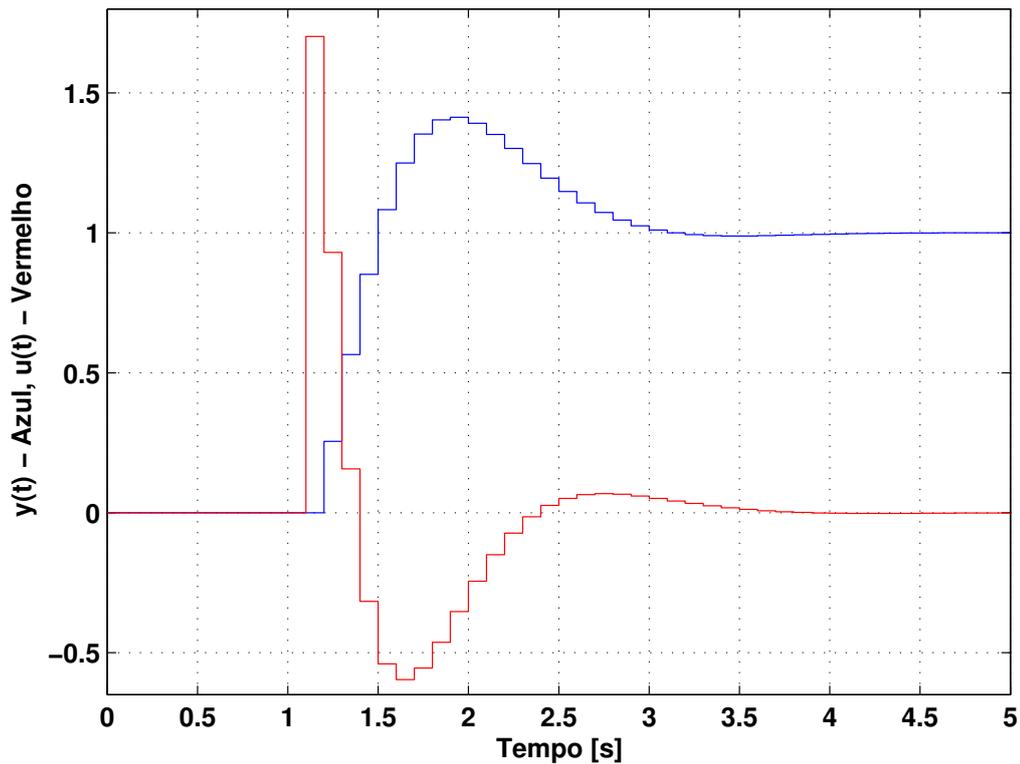


Figura 9 – Resposta ao degrau unitário para o controlador estritamente próprio para $f = 10$ [Hz].

Como pode ser visto nas Figuras 8 e 9, as respostas do sistema para um degrau unitário também apresentam um rastreamento satisfatório. Dessa maneira, pode-se afirmar que um controlador estritamente próprio pode ser determinado a partir de uma fatoração coprima à esquerda normalizada e é possível assegurar que as dinâmicas apresentadas pelos controladores são análogas, pois, mesmo com uma alteração na frequência de amostragem utilizada na discretização da planta, a semelhança é mantida.

Uma vez que foi mostrado que é possível obter resultados semelhantes com uma fatoração coprima à esquerda normalizada, tanto para o caso contínuo como para o caso discreto (não estritamente próprio e estritamente próprio), uma nova comparação será realizada. Seguindo a mesma ideia de análise apresentada por Iglesias em (23), uma comparação entre o controlador central no tempo contínuo e os controladores no tempo discreto

(aproximação por Tustin, central não estritamente próprio e estritamente próprio) será realizada.

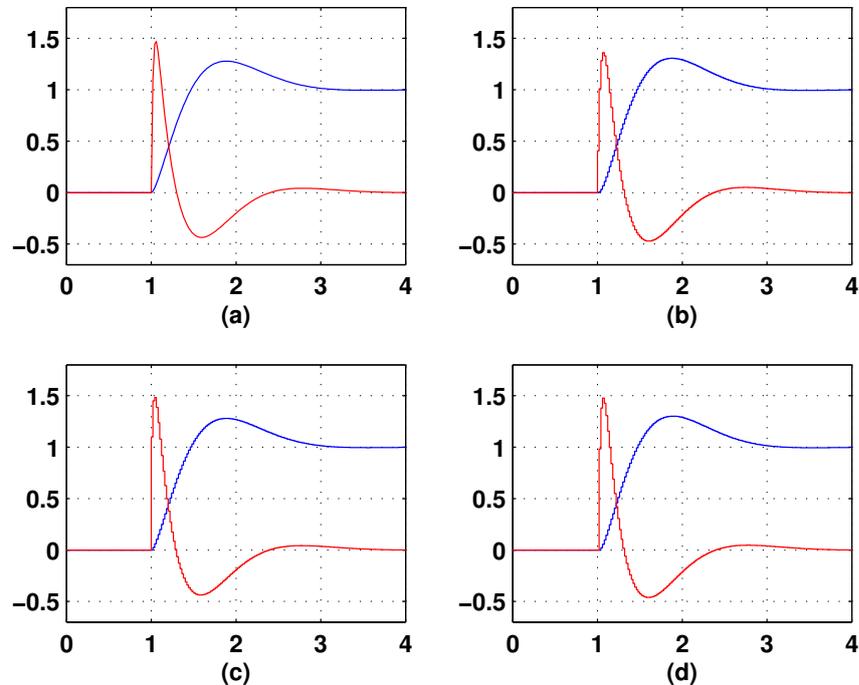


Figura 10 – Comparação das respostas para $f = 50$ [Hz].

A Figura 10 mostra a resposta ao degrau com (a) o controlador central em tempo contínuo, (b) a aproximação de Tustin do controlador em tempo contínuo, (c) o controlador central em tempo discreto e (d) o controlador estritamente próprio. A resposta em tempo contínuo é utilizada como base de comparação para os resultados em tempo discreto, que são obtidos, primeiramente, considerando uma frequência de amostragem de 50 [Hz]. Os valores de γ para os controladores no tempo contínuo, aproximação de Tustin e em tempo discreto estritamente próprio foram escolhidos como em (23). Como o controlador central não estritamente próprio em tempo discreto apresenta um desempenho claramente inferior quando comparado a essas duas abordagens no artigo citado, foi escolhido um valor diferente de γ para a simulação, com o objetivo de tornar as respostas qualitativamente próximas àquelas do caso em tempo contínuo. Os valores de γ utilizados na síntese dos controladores são escolhidos conforme Tabela 1.

Tabela 1 – Valores de γ para síntese dos controladores com $f = 50$ [Hz].

	γ
Central contínuo	2,32
Aproximação de Tustin	2,40
Central discreto	2,33
Estritamente próprio	2,46

Nota-se que é possível obter respostas próximas à resposta em tempo contínuo em ambas as abordagens no tempo discreto, com a observação adicional de que nessa estrutura alternativa, o controlador central não estritamente próprio em tempo discreto não é apenas viável, mas sua resposta foi alcançada com maior robustez (ou seja, com um valor de γ menor) quando comparado ao controlador estritamente próprio em tempo discreto. Observa-se também que o valor de γ usado no controlador não estritamente próprio é muito próximo do valor usado no caso em tempo contínuo.

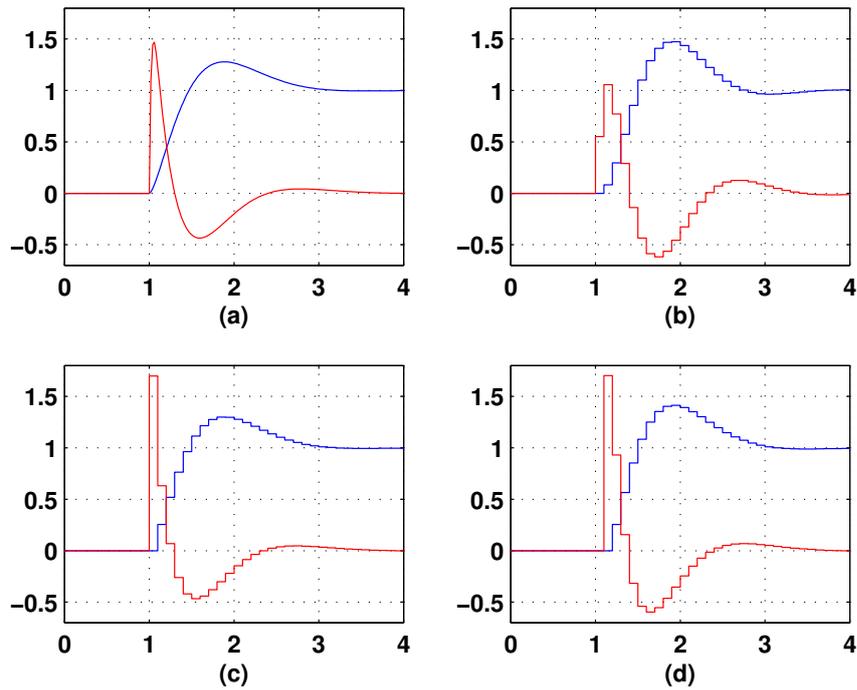


Figura 11 – Comparação das respostas para $f = 10$ [Hz].

A Figura 11 mostra a resposta ao degrau com (a) o controlador central em tempo contínuo, (b) a aproximação de Tustin do controlador em tempo contínuo, (c) o controlador central em tempo discreto e (d) o controlador estritamente próprio. A resposta em tempo contínuo é utilizada como base de comparação para os resultados em tempo discreto que são obtidos considerando agora uma frequência de amostragem de 10 [Hz]. Os valores de γ para os controladores no tempo contínuo, aproximação de Tustin e em tempo discreto estritamente próprio foram escolhidos como em (23). Como a resposta dos controladores em tempo discreto com essa frequência de amostragem começa a ficar consideravelmente diferente do controlador em tempo contínuo, foi escolhido um valor de γ para o controlador central não estritamente próprio em tempo discreto com o objetivo de fazer o valor máximo da entrada de comando ter aproximadamente o mesmo nível para ambas as abordagens em tempo discreto. Os valores de γ utilizados na síntese dos controladores são escolhidos conforme Tabela 2.

Tabela 2 – Valores de γ para síntese dos controladores com $f = 10$ [Hz].

	γ
Central contínuo	2,32
Aproximação de Tustin	2,88
Central discreto	2,44
Estritamente próprio	3,11

Observa-se que, enquanto o desempenho entre os diferentes controladores começa a se desviar, ambos os controladores em tempo discreto continuam sendo abordagens viáveis. Novamente, a resposta do controlador em tempo discreto não estritamente próprio foi obtida com maior robustez quando comparada a do controlador em tempo discreto estritamente próprio e foi capaz de recuperar melhor o comportamento do caso em tempo contínuo.

Nota-se também que as respostas em tempo contínuo e em tempo discreto estritamente próprio obtidas na Figura 10 e na Figura 11 são as mesmas respostas obtidas em (23), sendo a diferença, então, a resposta em tempo discreto não estritamente próprio e pela aproximação de Tustin. Assim, ao contrário do que é apresentado em (23), nesse exemplo, utiliza-se a abordagem proposta para alcançar um controlador em tempo discreto que supera o controlador estritamente próprio em tempo discreto pois o primeiro apresenta-se mais robusto quando comparado ao segundo.

4.3 Sistema de Controle de Posição de uma Esfera de Aço de um Sistema de Levitação Magnética (MAGLEV)

Essa seção apresenta uma aplicação prática tanto no tempo contínuo como no tempo discreto, partindo da metodologia proposta para verificar os resultados apresentados até o momento em um sistema com significativa não linearidade: na malha de controle da posição de uma esfera de um sistema de levitação magnética. As mesmas comparações apresentadas anteriormente serão realizadas para o modelo do sistema de levitação magnética desenvolvido pela empresa canadense Quanser (49). A Figura 12 mostra a planta de levitação magnética que se encontra no laboratório de controle da Universidade Federal de Itajubá *campus* de Itabira.



Figura 12 – Levitador Magnético.

4.3.1 Modelo do Levitador Magnético

Na Figura 13 é mostrado o esquemático elétrico da planta de levitação magnética (MAGLEV), em que a direção positiva do deslocamento é para baixo, com a origem das coordenadas globais posicionadas na face plana do eletroímã. Embora a esfera de aço tenha seis graus de liberdade, apenas o eixo vertical x é controlado. Também vale a pena notar que o MAGLEV consiste em dois sistemas principais: um elétrico e um eletromecânico. Pode se ver na Figura 13 que o MAGLEV possui uma indutância da bobina L_c e uma resistência R_c . Além disso, o sistema atual está equipado com uma resistência R_s em série com a bobina e é usada para indicar o sentido da corrente. A tensão V_s é usada para

medir a corrente da bobina I_c e V_c é a tensão aplicada na bobina. Todos esses componentes constituem o sistema elétrico.

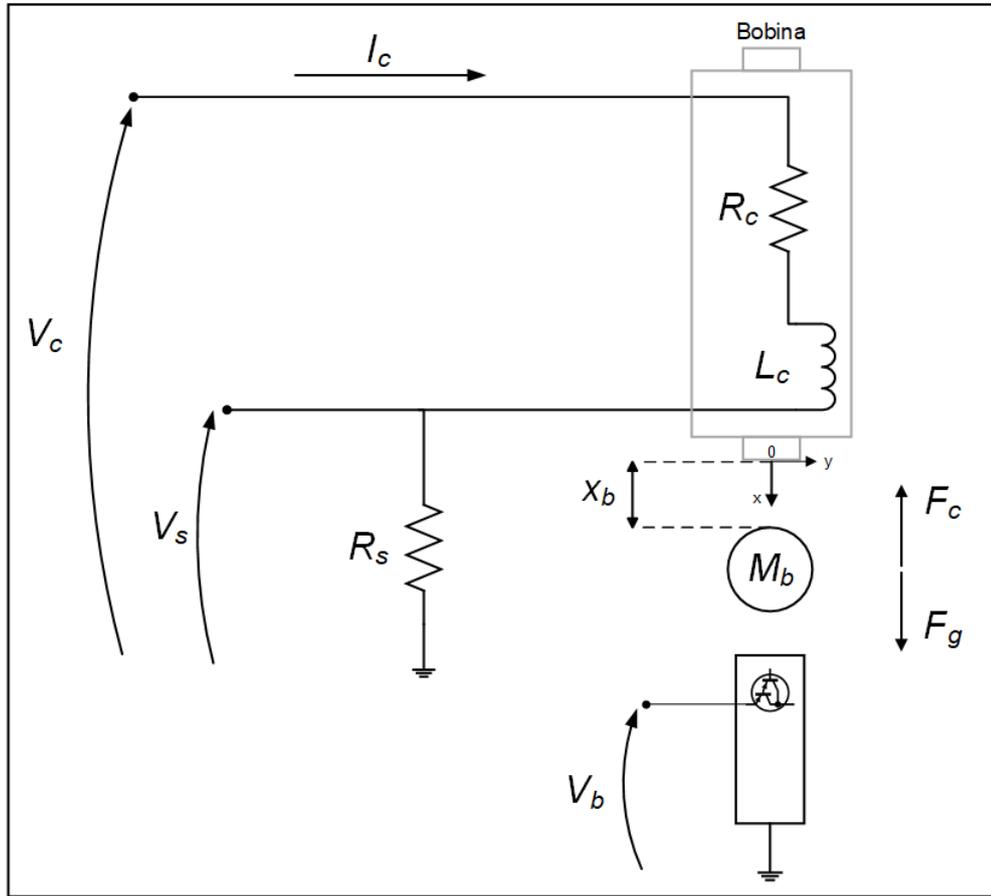


Figura 13 – Esquemático da planta de levitação magnética.

Usando as notações e as convenções dadas na Figura 13 tem-se que, para levitar a esfera de aço, é necessário que a força de atração gerada pelo eletroímã que atua sobre a esfera de aço deve ser de igual intensidade à força da gravidade aplicada sobre a esfera de aço. Do somatório das forças que atuam na esfera de aço, aplica-se a segunda lei de movimento de Newton, e, então, obtém-se a equação não linear que representa o sistema eletromecânico e sua equação de movimento é dada por

$$\ddot{x}_b(t) = -\frac{K_m i_c(t)^2}{2M_b x_b(t)^2} + g, \quad (4.12)$$

em que $x_b(t)$ é a distância entre a base do eletroímã e a esfera de aço, K_m é a constante da força eletromagnética, $i_c(t)$ é a corrente da bobina, M_b é a massa da esfera de aço e g é a constante gravitacional (50).

Inicialmente, para todos os casos, o modelo não linear é linearizado para o ponto de operação de $x_b = 6 [mm]$ por meio de uma aproximação de Taylor de primeira ordem

e a representação em espaço de estados do modelo linearizado é dada por (51)

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3270 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -22,71 \end{bmatrix}, \quad C_p = [1 \quad 0], \quad D_p = 0. \quad (4.13)$$

Para o caso em tempo discreto, o tempo de amostragem de $T = 0,002 [s]$ é utilizado na discretização da planta e sua realização em espaço de estados é dada por

$$A_z = \begin{bmatrix} 1,0065 & 0,0020 \\ 6,5543 & 1,0065 \end{bmatrix}, \quad B_z = \begin{bmatrix} -4,5470 \cdot 10^{-5} \\ -0,0455 \end{bmatrix}, \quad C_z = [1 \quad 0], \quad D_z = 0. \quad (4.14)$$

Com o objetivo de eliminar o erro em regime permanente para uma entrada do tipo degrau e auxiliar na obtenção de um bom desempenho na saída, faz-se necessário incluir integradores na malha de controle.

No caso contínuo, um integrador é definido unicamente por um polo na origem. No caso discreto, a definição do integrador depende do método numérico utilizado na aproximação da integral e, para o caso em questão, o método *backward* Euler foi utilizado. Desse modo, sejam $G_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ e $G_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)$ dois subsistemas com representações no espaço de estados dadas por

$$G_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right], \quad G_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right]. \quad (4.15)$$

A conexão em série desses dois subsistemas, conforme ilustrado na Figura 14, resulta na representação em espaço de estados $G_2G_1 = (A, B, C, D)$ dada por

$$G_2G_1 = \left[\begin{array}{cc|c} A_2 & B_2C_1 & B_2D_1 \\ 0 & A_1 & B_1 \\ \hline C_2 & D_2C_1 & D_2D_1 \end{array} \right]. \quad (4.16)$$

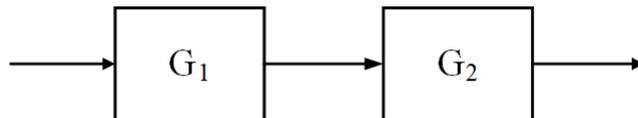


Figura 14 – Conexão de sistemas em série.

No caso específico, para se obter uma boa relação entre desempenho de saída, consumo de energia e estabilidade robusta, um PI foi utilizado na expansão da planta tanto para o caso contínuo como para o caso discreto. Para a aplicação, considera-se que G_2 corresponde a uma representação de uma planta de processo estritamente própria

descrita em espaço de estados por $G_2 = (A_P, B_P, C_P, 0)$ e G_1 é dado por um PI tanto no tempo contínuo como no tempo discreto (40).

Com o sistema linearizado tanto para o tempo contínuo como para o tempo discreto, a planta de levitação magnética é expandida por um pré-compensador com a estrutura de um modelo PI. Essa expansão permite que a dinâmica expandida seja incorporada à dinâmica do controlador, além de proporcionar o rastreamento do sistema. Para o caso discreto, um integrador *backward* Euler foi utilizado para compor essa estrutura. Desse modo, a estrutura resultante é como mostrado em (4.16). Determinou-se como ganho proporcional $k_p = 500$ e como ganho da parcela integral $k_i = 3000$ por esses valores proporcionarem sucesso na implementação das simulações computacionais realizadas e dos experimentos reais feitos no levitador magnético em laboratório. Métodos para selecionar o pré-compensador podem ser encontrados com mais detalhes em (52).

Com todos os controladores desenvolvidos, tanto as simulações computacionais como os experimentos práticos são feitos para dois tipos de referência na entrada. A primeira aplica uma variação de 1 [mm] ao redor do ponto de operação a fim de se verificar o comportamento da resposta na saída do sistema de levitação magnética, bem como o sinal de controle do sistema para essas mudanças na referência de entrada. Já a segunda referência de entrada aplica variações crescentes de 0,5 [mm] ao redor do ponto de operação. Partindo do ponto de operação de 6 [mm], são aplicadas variações crescentes de 0,5 [mm] a fim de se verificar o comportamento da resposta na saída do sistema para regiões que se encontram fora do ponto de operação linearizado com o intuito de mostrar a atuação dos controladores sobre pontos de operação que simulam modelos com incertezas, sendo, neste caso, a posição da esfera de aço o parâmetro variante no tempo capaz de dar esse entendimento.

4.3.2 Simulações da Malha de Controle

Para a determinação do controlador em tempo contínuo, é possível perceber que a expansão dessa planta por um PI não afeta a observabilidade e a controlabilidade do modelo em questão. Nesse exemplo, o valor de $\gamma_{min} = 3,2445$ é obtido por meio do cálculo da equação (2.34). Foi escolhido um $\gamma = 3,55$ na síntese do controlador e a matriz K_F estabilizante conforme calculada por (2.22) é dada por

$$K_F = \begin{bmatrix} -179,3270 \\ -16079,0817 \\ 1,0000 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

O ganho K_C , conforme calculado por (2.35), é dado por

$$K_C = \begin{bmatrix} 8,9417 & 0,0853 & -27,0173 \end{bmatrix} . \quad (4.18)$$

A resposta para a simulação computacional para as variações impostas na referência de entrada bem como o sinal de controle correspondente são mostrados nas Figuras 15 e 16. Já as Figuras 17 e 18 mostram a resposta para o experimento real para as variações impostas na referência de entrada bem como o sinal de controle correspondente.

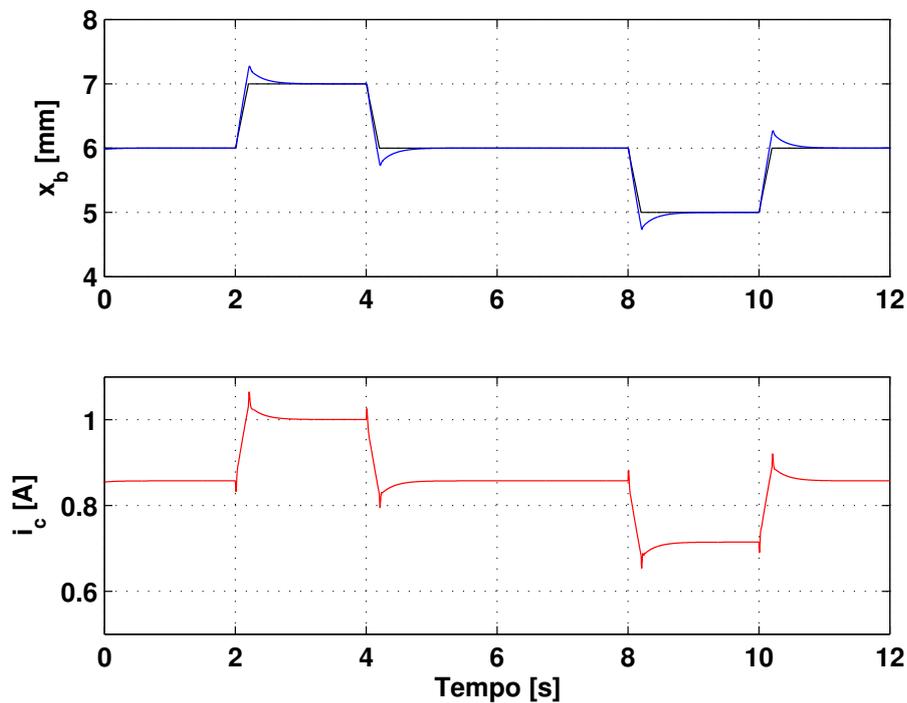


Figura 15 – Simulação - Resposta para a primeira referência de entrada, caso contínuo.

Para a determinação do controlador em tempo discreto, também é possível notar que a expansão da planta por um PI discretizado não afeta a observabilidade e a controlabilidade do modelo em estudo. Primeiramente, obteve-se o controlador pela aproximação de Tustin do controlador em tempo contínuo desenvolvido anteriormente, para um tempo de amostragem de $T = 0,002$ [s]. Dessa maneira, a resposta para a simulação computacional para as variações impostas na referência de entrada bem como o sinal de controle correspondente são mostrados nas Figuras 19 e 20. Já as Figuras 21 e 22 mostram a resposta para o experimento real para as variações impostas na referência de entrada bem como o sinal de controle correspondente.

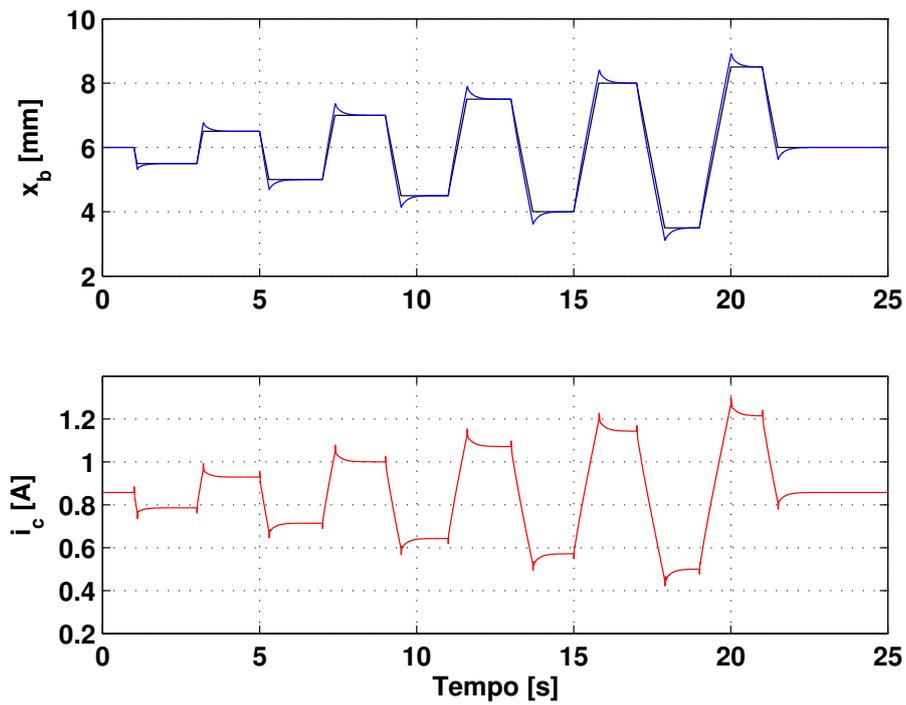


Figura 16 – Simulação - Resposta para a segunda referência de entrada, caso contínuo.

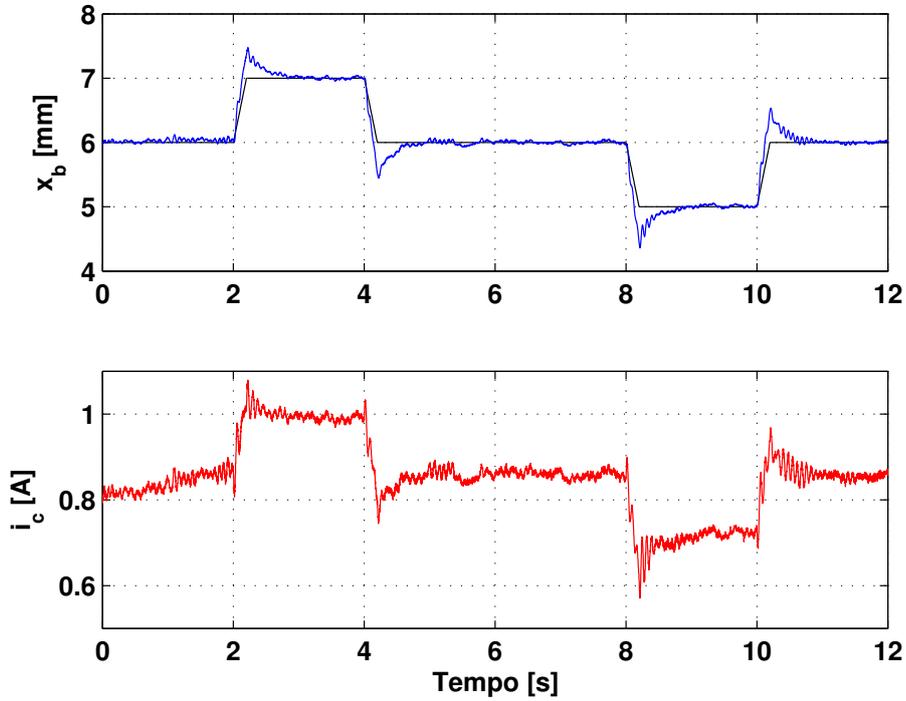


Figura 17 – Ensaio - Resposta para a primeira referência de entrada, caso contínuo.

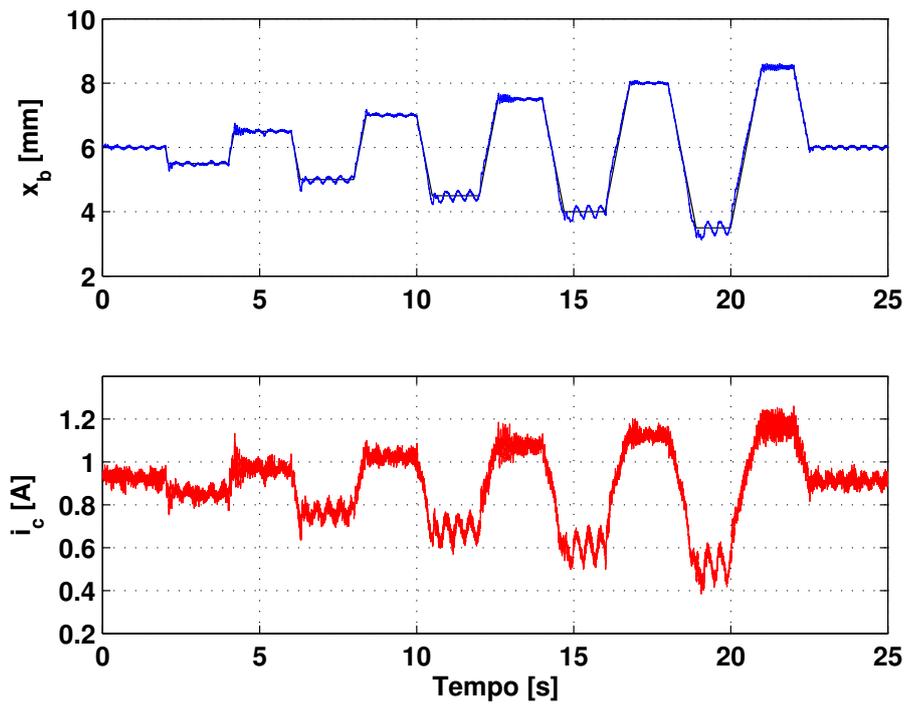


Figura 18 – Ensaio - Resposta para a segunda referência de entrada, caso contínuo.

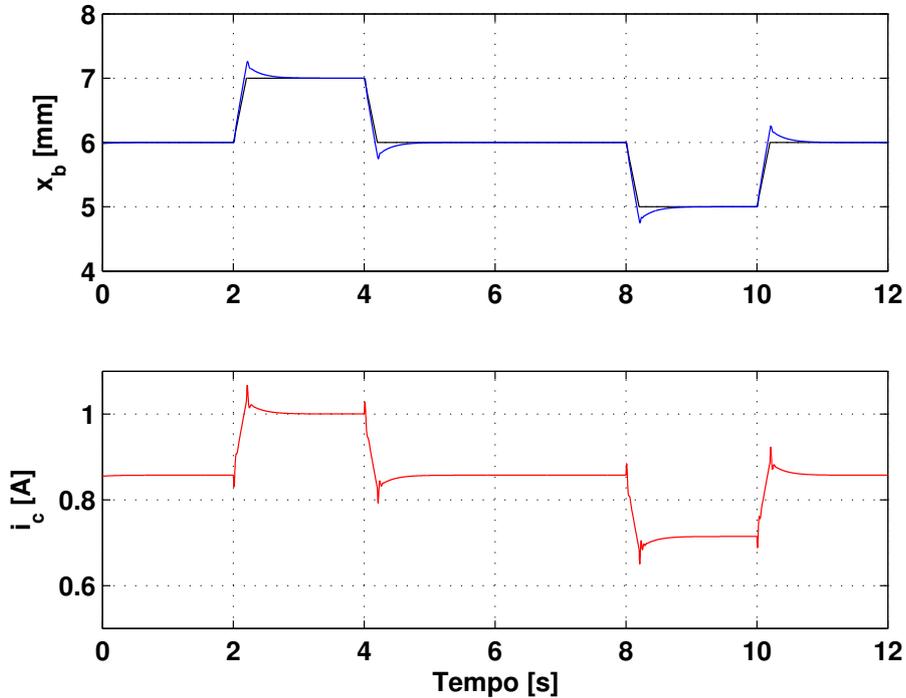


Figura 19 – Simulação - Resposta para a primeira referência de entrada, aproximação de Tustin.

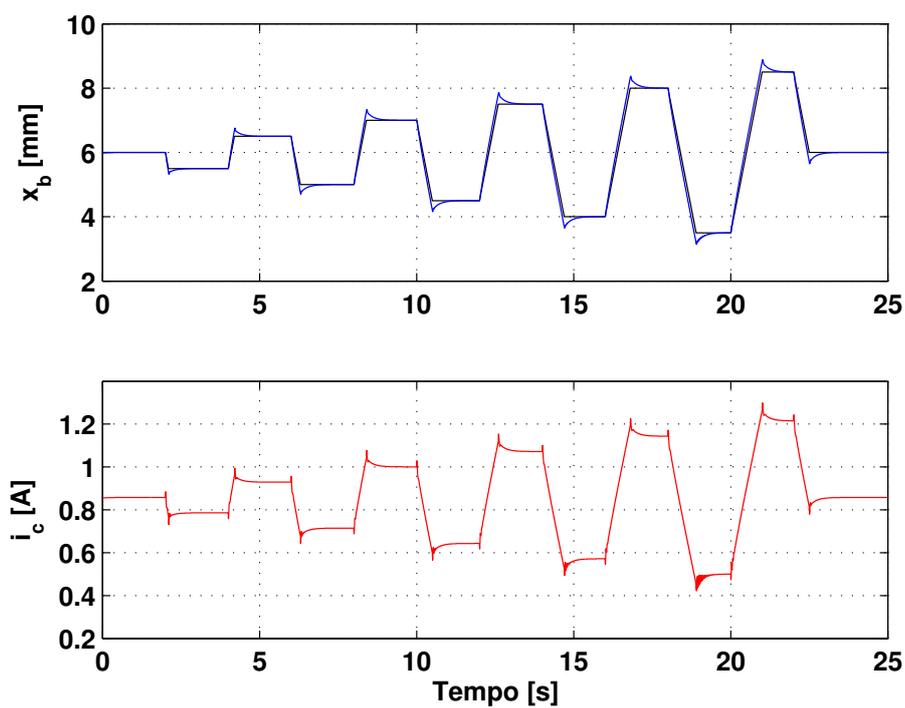


Figura 20 – Simulação - Resposta para a segunda referência de entrada, aproximação de Tustin.

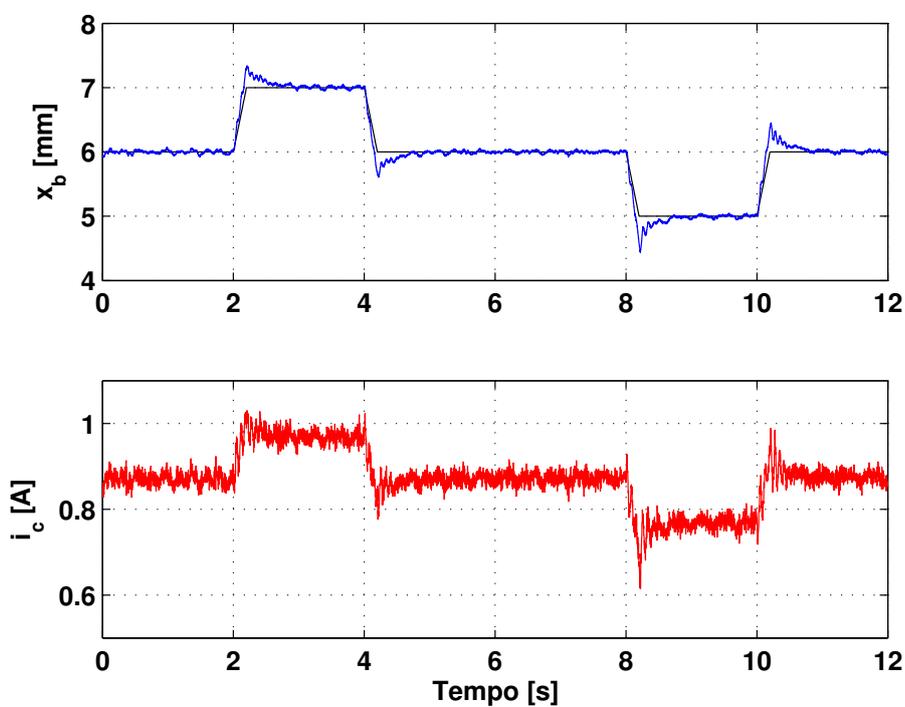


Figura 21 – Ensaio - Resposta para a primeira referência de entrada, aproximação de Tustin.

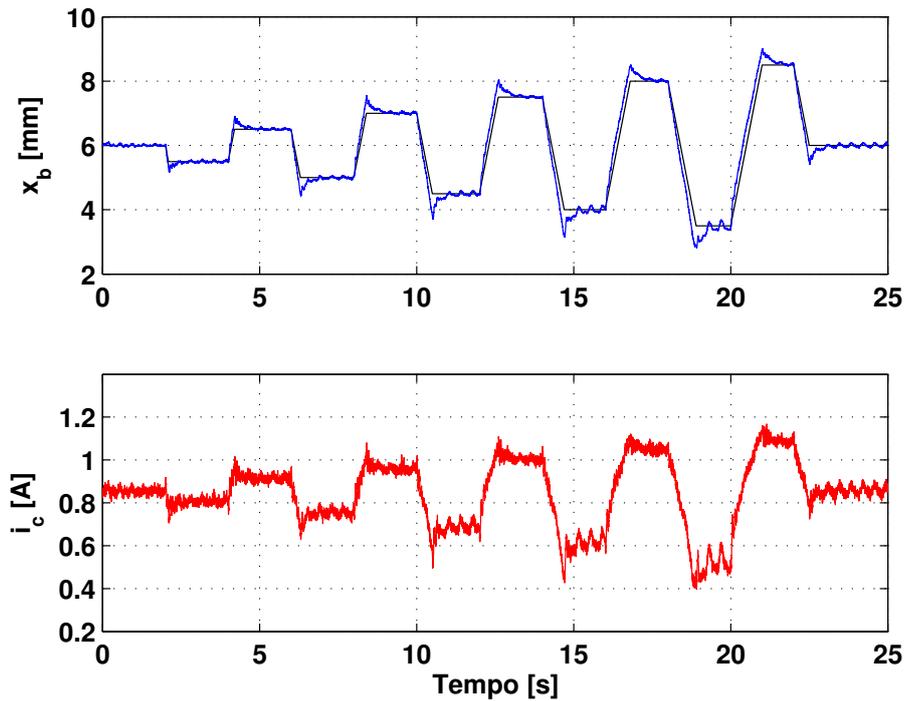


Figura 22 – Ensaio - Resposta para a segunda referência de entrada, aproximação de Tustin.

Posteriormente, é realizado o desenvolvimento do controlador central não estritamente próprio e o tempo de amostragem utilizado tanto na discretização da planta como do pré-compensador PI é de $T = 0,002$ [s]. Para o controlador central não estritamente próprio, o valor de $\gamma_{min} = 3,5324$ é obtido pelo cálculo da equação (3.86) e, por consequência, um $\gamma = 3,55$ é utilizado para a síntese do controlador com a matriz K_F calculada por (3.53) e dada por

$$K_F = \begin{bmatrix} -0,3567 \\ -29,2265 \\ 1,6725 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

O ganho K_C , conforme calculado por (3.88), é dado por

$$K_C = \begin{bmatrix} 4,1300 & 0,0367 & -0,0104 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

A resposta para a simulação computacional para as variações impostas na referência de entrada bem como o sinal de controle correspondente são mostrados nas Figuras 23 e 24. Já as Figuras 25 e 26 mostram a resposta para o experimento real para as variações impostas na referência de entrada bem como o sinal de controle correspondente.

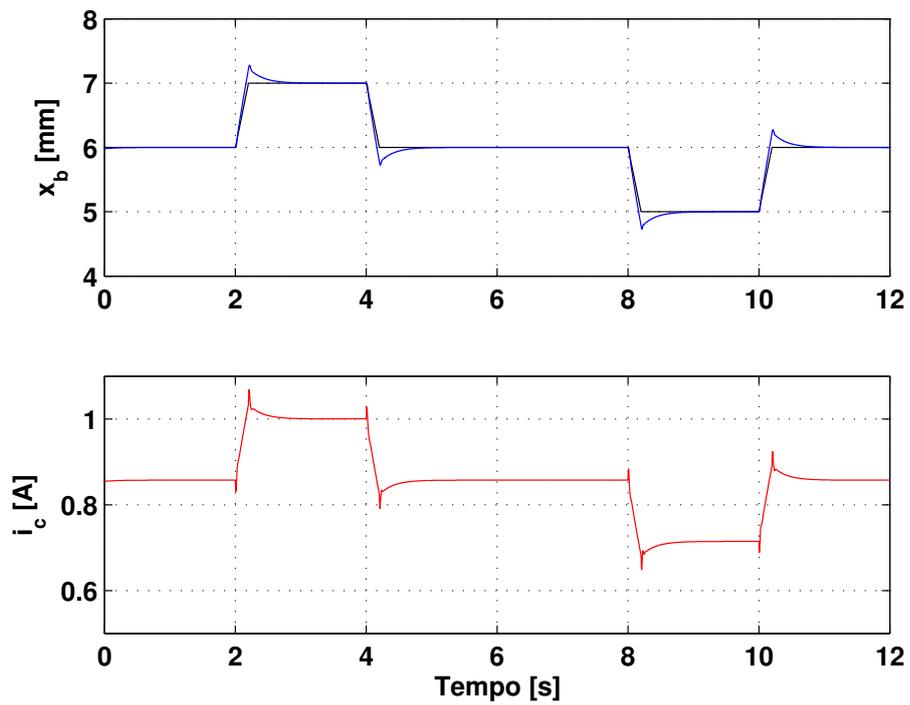


Figura 23 – Simulação - Resposta para a primeira referência de entrada, controlador não estritamente próprio.

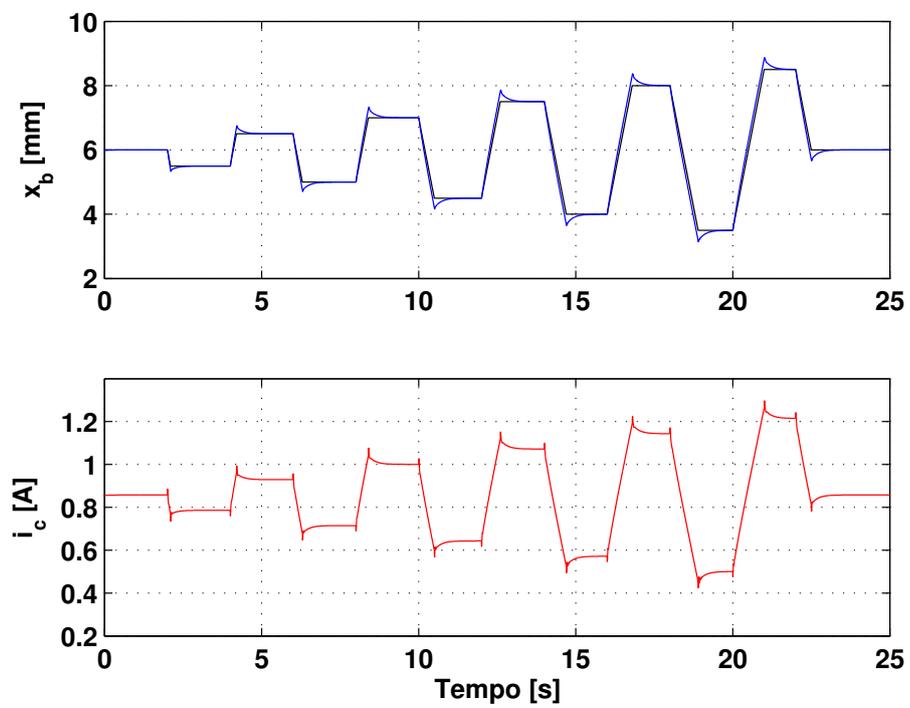


Figura 24 – Simulação - Resposta para a segunda referência de entrada, controlador não estritamente próprio.

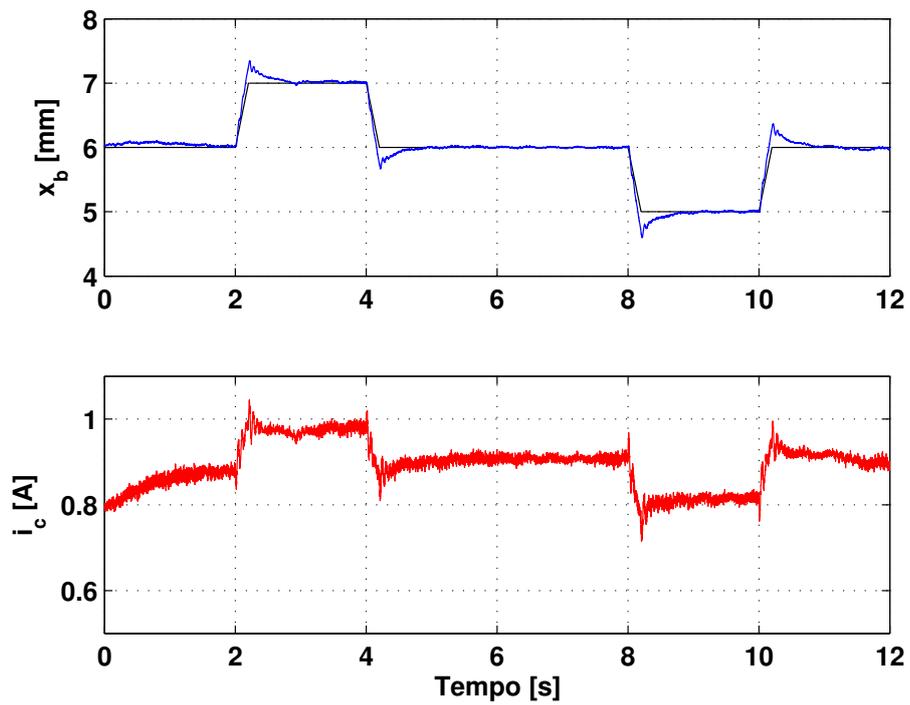


Figura 25 – Ensaio - Resposta para a primeira referência de entrada, controlador não estritamente próprio.

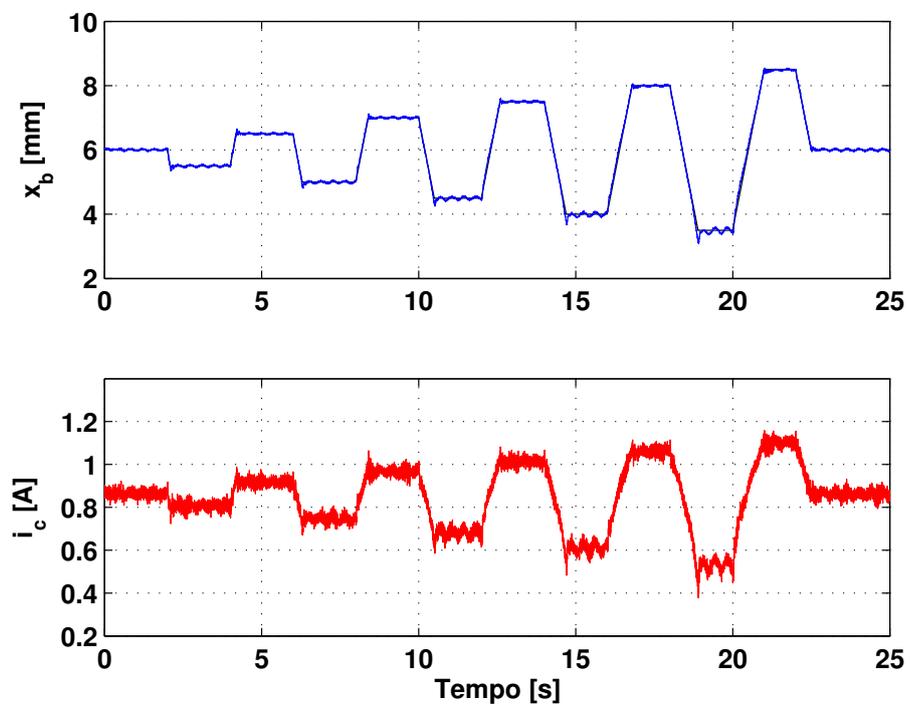


Figura 26 – Ensaio - Resposta para a segunda referência de entrada, controlador não estritamente próprio.

Ainda em tempo discreto, é realizado o desenvolvimento do controlador estritamente próprio e o tempo de amostragem utilizado tanto na discretização da planta como do pré-compensador PI também é de $T = 0,002$ [s]. Para o controlador estritamente próprio, o valor de $\gamma_{min} = 4,0852$ é obtido pela equação (3.91) e, dessa forma, escolheu-se um $\gamma = 4,10$ para a síntese do controlador e a matriz K_F , conforme calculado por (3.53), é dada por

$$K_F = \begin{bmatrix} -0,3567 \\ -29,2265 \\ 1,6725 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

O ganho \tilde{K}_C , conforme calculado por (3.93), é dado por

$$\tilde{K}_C = \begin{bmatrix} 6,0042 & 0,0571 & -0,0190 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

A resposta para a simulação computacional para as variações impostas na referência de entrada bem como o sinal de controle correspondente são mostrados nas Figuras 27 e 28. Já as Figuras 29 e 30 mostram a resposta para o experimento real para as variações impostas na referência de entrada bem como o sinal de controle correspondente.

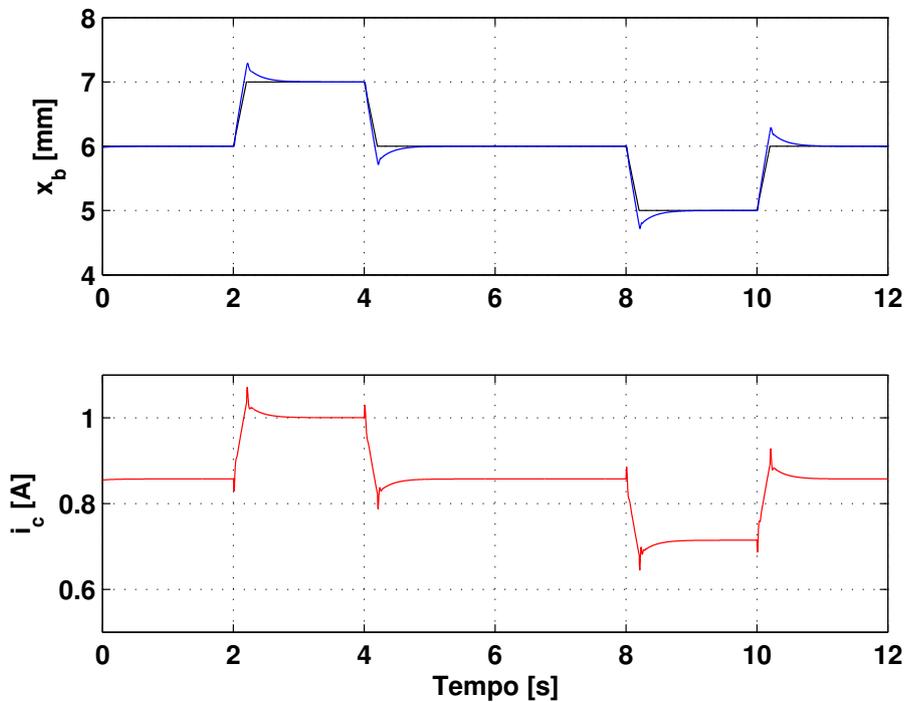


Figura 27 – Simulação - Resposta para a primeira referência de entrada, controlador estritamente próprio.

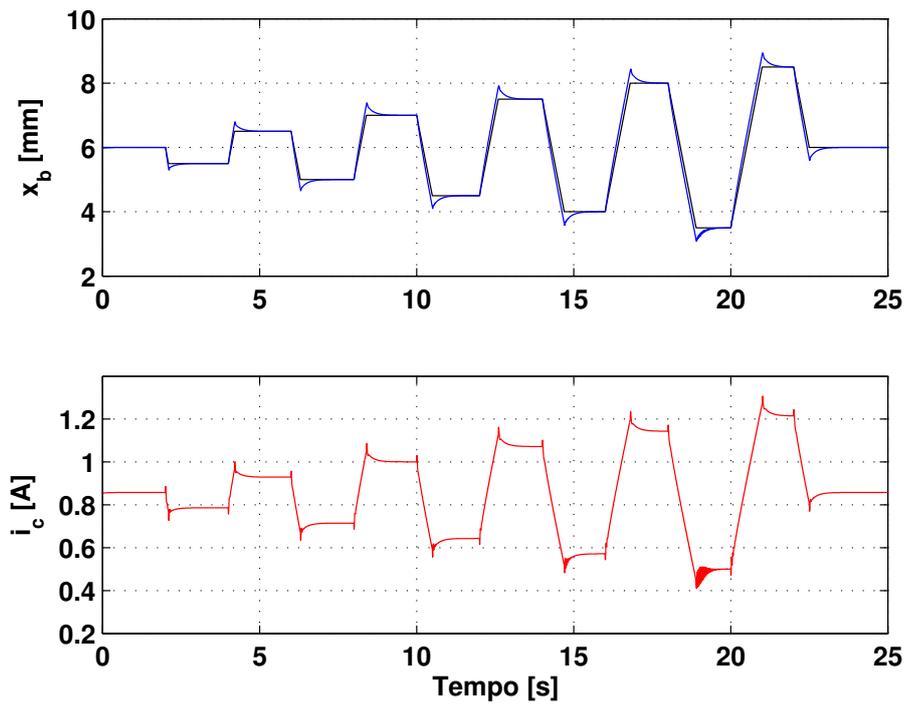


Figura 28 – Simulação - Resposta para a segunda referência de entrada, controlador estritamente próprio.

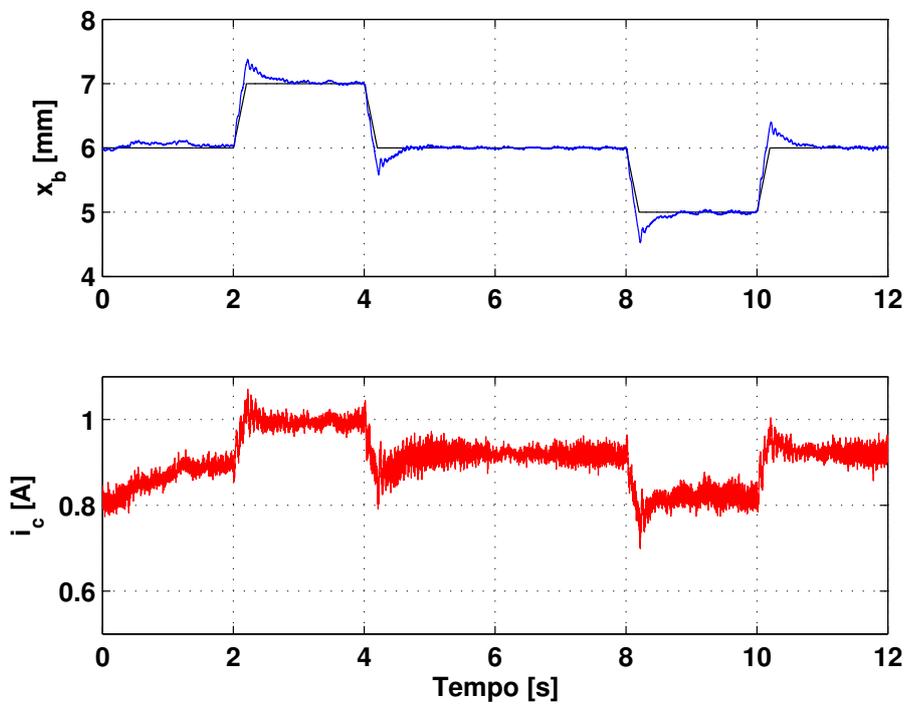


Figura 29 – Ensaio - Resposta para a primeira referência de entrada, controlador estritamente próprio.

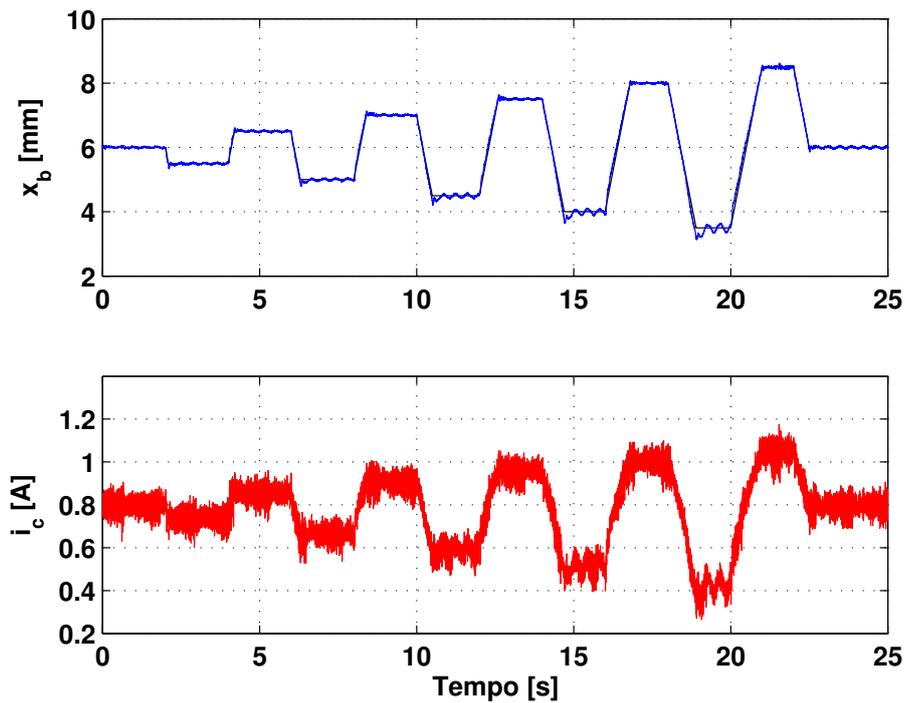


Figura 30 – Ensaio - Resposta para a segunda referência de entrada, controlador estritamente próprio.

As Figuras 31 e 32 resumem os resultados apresentados anteriormente em gráficos únicos para efeito de comparação entre os controladores e mostram, para o modelo não linear da planta de levitação magnética, os ensaios práticos realizados para a primeira referência de entrada e para a segunda referência de entrada, respectivamente. A comparação é realizada somente entre o controlador em tempo contínuo, o controlador central não estritamente próprio e o controlador estritamente próprio. Para cada controlador, um valor diferente de γ é usado na síntese de projeto do controlador conforme Tabela 3.

Tabela 3 – Valores de γ usado na síntese dos controladores para o levitador magnético.

	γ
Central Contínuo	3,55
Central Discreto	3,55
Estritamente Próprio	4,10

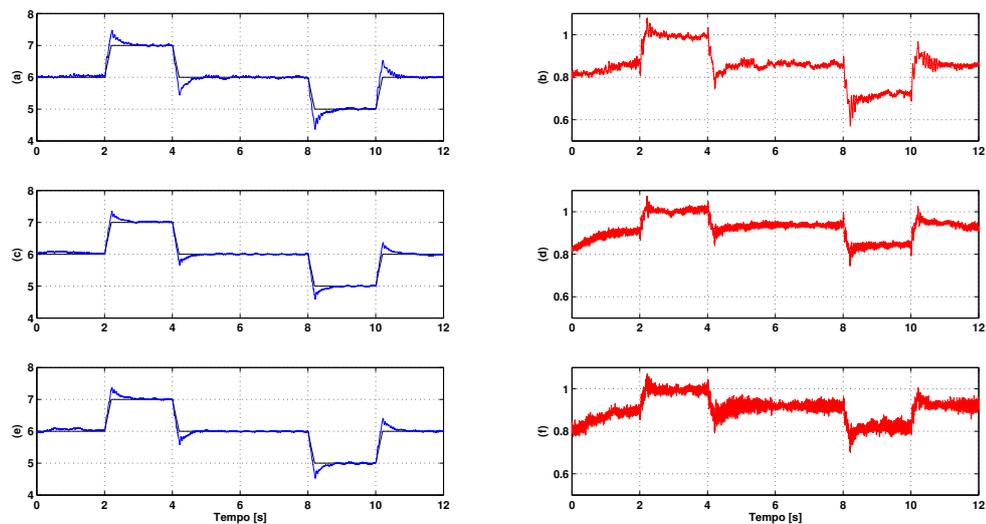


Figura 31 – Ensaio real para a primeira referência de entrada - Comparação de diferentes controladores para a planta de levitação magnética. Contínuo: (a) posição da esfera de aço [mm], (b) corrente na bobina [A]; Não estritamente próprio: (c) posição da esfera de aço [mm], (d) corrente na bobina [A]; Estritamente próprio: (e) posição da esfera de aço [mm], (f) corrente na bobina [A].

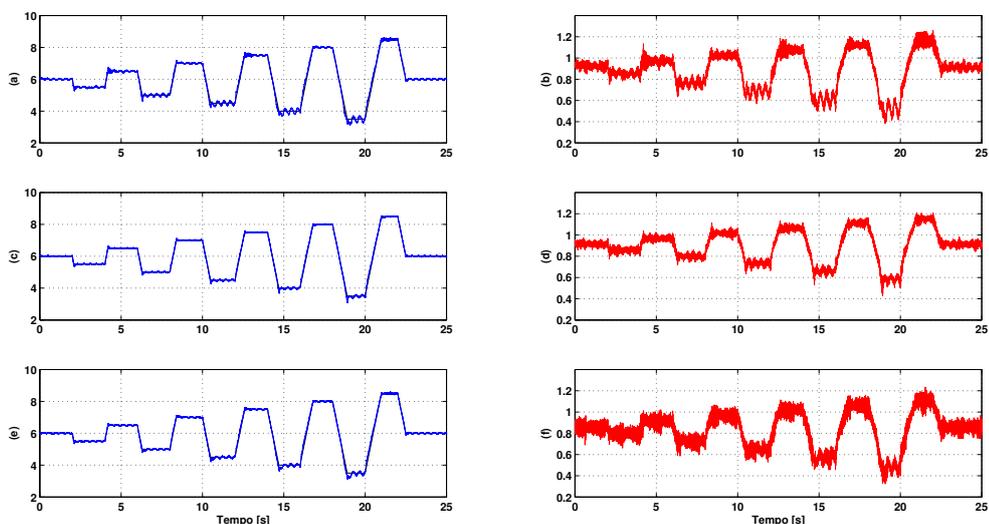


Figura 32 – Ensaio real para a segunda referência de entrada - Comparação de diferentes controladores para a planta de levitação magnética. Contínuo: (a) posição da esfera de aço [mm], (b) corrente na bobina [A]; Não estritamente próprio: (c) posição da esfera de aço [mm], (d) corrente na bobina [A]; Estritamente próprio: (e) posição da esfera de aço [mm], (f) corrente na bobina [A].

Pode-se verificar a partir das Figuras 31(b), 31(d), 31(f) e Figuras 32(b), 32(d), 32(f), que o sinal de controle de entrada representado pela corrente da bobina apresenta o mesmo padrão para todos os controladores para ambos os casos. Isso implica que o

consumo de energia é semelhante perante a atuação dos controladores, assim como o desempenho na saída também se apresenta semelhante para os três casos. Vale ressaltar que o valor de γ usado na síntese do controlador central não estritamente próprio é menor que o valor de γ usado na síntese do controlador estritamente próprio. Portanto, é possível concluir que o primeiro controlador apresenta maior robustez que o segundo controlador. Além disso, o cálculo do valor de γ_{min} para o controlador central também é menor quando comparado ao valor de γ_{min} calculado para o controlador estritamente próprio.

Outra observação que pode ser feita é, que o γ usado na síntese do controlador central não estritamente próprio é igual ao valor de γ usado na síntese do controlador em tempo contínuo. Esses resultados mostram que o controlador não estritamente próprio possui características de desempenho semelhantes ao controlador em tempo contínuo.

5 Conclusões

Neste trabalho foi obtida uma estrutura alternativa para a parametrização de todos os controladores \mathcal{H}_∞ robustos admissíveis em tempo discreto por uma formulação análoga ao caso em tempo contínuo. O *framework* proposto nessa tese é desenvolvido com base na descrição da planta de processo por fatores coprimos à esquerda e utiliza a síntese \mathcal{H}_∞ para obtenção de todos os controladores estabilizantes. Do *framework* proposto, mostrou-se que, da estrutura geral para determinação de todos os controladores admissíveis, é possível obter um controlador central não estritamente próprio bem como um controlador estritamente próprio no tempo discreto, ou seja, a escolha de $Q(z)$ realizada na parametrização de Youla possibilita a obtenção dessas duas estruturas de controladores. Dessa forma, pode-se afirmar que a escolha de $Q(z)$ possibilita a obtenção de outras estruturas para controladores.

A estrutura desenvolvida por este trabalho possibilita realizar também uma escolha para a fatoração coprima a ser utilizada, pois uma vez que se encontra um ganho K_F que torne $A+K_FC$ estável, é possível obter essa condição a partir de diferentes estratégias. Neste trabalho, porém, somente a fatoração coprima à esquerda normalizada foi tratada. A escolha de descrever a planta por uma fatoração coprima à esquerda normalizada proporciona a obtenção de um cálculo para γ_{min} e, conseqüentemente, de um limitante de robustez. Além disso, a partir desse limitante, é possível sintetizar os controladores não estritamente próprio e estritamente próprio em tempo discreto sob essa perspectiva.

A fim de ilustrar a aplicabilidade do método proposto comparando com os resultados encontrados por Iglesias em (23), foi apresentado um exemplo que, sob a estrutura alternativa proposta, mostra que o controlador central em tempo discreto não é apenas viável mas também capaz de superar o controlador em tempo discreto estritamente próprio, uma característica que não é vista em outras abordagens semelhantes. A partir de simulações computacionais para uma aplicação na planta de processo utilizada como estudo por Iglesias, mostrou-se que o controlador central não estritamente próprio \mathcal{H}_∞ em tempo discreto apresenta maior robustez do que o controlador estritamente próprio, pois menores valores de γ resultam em desempenhos semelhantes na saída e o valor de γ usado na parametrização do primeiro controlador mencionado é menor que o valor de γ utilizado na síntese do segundo controlador. Essa conclusão baseia-se na análise do sinal de controle, uma vez que, pela comparação entre os controladores, observa-se uma semelhança no sinal de controle para os casos, ou seja, o mesmo consumo de energia é usado para obter desempenhos semelhantes de saída, como pode ser visto nos resultados obtidos.

De forma a obter uma aplicação mais diretamente ligada a uma planta real, as

mesmas conclusões são obtidas para a malha de controle de posição de uma esfera de aço de um sistema de levitação magnética. Em especial, para o sistema de levitação magnética, dois tipos de ensaios foram realizados para duas referências de entradas distintas. Dos ensaios, é possível concluir que os controladores apresentam a característica de robustez, pois o sistema nominal é linearizado para uma posição de 6 [mm], e os controladores projetados apresentam um desempenho satisfatório para diferentes pontos de operação que podem ser considerados como incertezas intrínsecas ao sistema. Além disso, é possível concluir, em especial para o tempo discreto, que o controlador central não estritamente próprio apresenta maior robustez quando comparado ao controlador estritamente próprio.

Como trabalhos futuros, são propostos a realização de estudos para a apresentação de condições análogas às condições de LTR sobre a fatoração coprima à esquerda de maneira a encontrar K_F estabilizante em que seja possível aplicar tal condição e apresentar quais propriedades podem ser obtidas a partir de tal análise. São previstos também estudos acerca das possíveis escolhas de $Q(z)$ na parametrização de Youla, possibilitando obter estruturas distintas de controladores como um controlador robusto estático. Também são previstos estudos da metodologia apresentada para o tempo discreto perante a formulação a quatro blocos.

Referências

- 1 DORATO, P.; TEMPO, R.; MUSCATO, G. Bibliography on Robust Control. *Automatica*, Elsevier, v. 29, n. 1, p. 201–213, 1993.
- 2 PEREIRA, R. L. *Projeto LMI de Controladores \mathcal{H}_∞ com Formatação de Malha para Sistemas com Incertezas Limitadas em Norma e Politópicas*. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico da Aeronáutica, 2014.
- 3 DOYLE, J. C.; STEIN, G. *Lecture notes in advances in multivariable control*, ONR. Minneapolis: Honeywell Workshop, 1984.
- 4 DOYLE, J. C. et al. State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989.
- 5 ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, n. 2, p. 301–320, 1981. ISSN 0018-9286.
- 6 FRANCIS, B. A. *A Course in \mathcal{H}_∞ Control Theory*. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1987.
- 7 GLOVER, K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ -error bounds. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 39, n. 6, p. 1115–1193, 1984.
- 8 GLOVER, K. et al. A characterization of all solutions to the four block general distance problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 29, n. 2, p. 283–324, 1991.
- 9 LIMEBEER, D. J. N.; HUNG, Y. S. An analysis of the pole-zero cancellations in \mathcal{H}_∞ -optimal control problems of the first kind. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 25, n. 6, p. 1457–1493, 1987.
- 10 LIMEBEER, D. J. N.; HALIKIAS, G. D. A controller degree bound for \mathcal{H}_∞ -optimal control problems of the second kind. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 26, n. 3, p. 646–677, 1988.
- 11 BAŞAR, T.; BERNHARD, P. *\mathcal{H}_∞ -Optimal control and related minimax design problems*. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1995.
- 12 ZAMES, G.; FRANCIS, B. Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 28, n. 5, p. 585–601, 1983.
- 13 KHARGONEKAR, P.; TANNENBAUM, A. Non-euclidian metrics and the robust stabilization of systems with parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 30, n. 10, p. 1005–1013, 1985.
- 14 LIMEBEER, D.; ANDERSON, B. An interpolation theory approach to \mathcal{H}_∞ controller degree bounds. *Linear Algebra and its applications*, Elsevier, v. 98, p. 347–386, 1988.

- 15 GREEN, M.; LIMEBEER, D. J. N. Vector interpolation, \mathcal{H}_∞ control and model reduction. In: *Robust control of linear systems and nonlinear control*. Boston; Basel; Berlin: Springer, 1990. p. 285–292.
- 16 PETERSEN, I. R.; HOLLOT, C. V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. *Automatica*, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 397–411, 1986.
- 17 GLOVER, K.; DOYLE, J. C. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an \mathcal{H}_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 11, n. 3, p. 167–172, 1988.
- 18 KHARGONEKAR, P. P.; PETERSEN, I. R.; ROTEA, M. A. \mathcal{H}_∞ -optimal control with state-feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 33, n. 8, p. 786–788, 1988.
- 19 TADMOR, G. Worst-case design in the time domain: The maximum principle and the standard \mathcal{H}_∞ problem. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, Springer, v. 3, n. 4, p. 301–324, 1990.
- 20 KHARGONEKAR, P. State-space \mathcal{H}_∞ control theory and the LQG problem. In: *Mathematical System Theory*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1991. p. 159–176.
- 21 FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. *Digital control of dynamic systems*. Menlo Park: Addison-wesley, 1998. v. 3.
- 22 MIRKIN, L. On discrete-time \mathcal{H}_∞ problem with a strictly proper controller. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 66, n. 5, p. 747–766, 1997.
- 23 IGLESIAS, P. A. The strictly proper discrete-time controller for the normalized left-coprime factorization robust stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 45, n. 3, p. 516–520, 2000.
- 24 ZHOU, K.; DOYLE, J.; GLOVER, K. *Robust and optimal control*. New Jersey: Prentice Hall, 1996. v. 40.
- 25 STOORVOGEL, A. A. *The \mathcal{H}_∞ Control Problem: A State Space Approach*. New Jersey: Prentice Hall, 1992.
- 26 MCFARLANE, D. C.; GLOVER, K. *Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions*. Berlin: Springer, 1990.
- 27 MCFARLANE, D.; GLOVER, K. A loop-shaping design procedure using \mathcal{H}_∞ synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 37, n. 6, p. 759–769, 1992.
- 28 SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. New York: Wiley, 2007. v. 2.
- 29 FARRET, D.; DUC, G.; HARCAUT, J. Multirate \mathcal{H}_∞ control: A loop-shaping LMI-based approach application to the control of a missile. In: *IEEE. Control Conference (ECC), 2001 European*. Portugal, 2001. p. 1192–1197.
- 30 PREMPAIN, E.; POSTLETHWAITE, I. Static \mathcal{H}_∞ loop shaping control of a fly-by-wire helicopter. *Automatica*, Elsevier, v. 41, n. 9, p. 1517–1528, 2005.

- 31 HYDE, R. A. \mathcal{H}_∞ aerospace control design: A VSTOL flight application. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013.
- 32 PEREIRA, R. L.; KIENITZ, K. H. A practical investigation of \mathcal{H}_∞ loop shaping controllers using the LMI framework for a hover system. In: *22nd International Congress of Mechanical Engineering*. Ribeirão Preto: Proceedings of COBEM, 2013. p. 4525–4532.
- 33 PEREIRA, R. L.; KIENITZ, K. H. Tight formation flight control based on \mathcal{H}_∞ approach. In: IEEE. *2016 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. Athenas, 2016. p. 268–274.
- 34 HU, J. et al. Robust yaw stability control for in-wheel motor electric vehicles. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 22, n. 3, p. 1360–1370, 2017.
- 35 SUNG, Y.-C.; PATIL, S. V.; SAFONOV, M. G. Data-driven \mathcal{H}_∞ loop-shaping controller design. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 28, n. 12, p. 3678–3693, 2018.
- 36 TUDOR, S. F.; OARĂ, C. Robust stabilization of discrete generalized systems. *Automatica*, Elsevier, v. 94, p. 334–340, 2018.
- 37 ZHOU, K.; DOYLE, J. C. *Essentials of robust control*. New Jersey: Prentice Hall, 1998. v. 104.
- 38 IGLESIAS, P. A.; GLOVER, K. State-space approach to discrete-time \mathcal{H}_∞ control. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 54, n. 5, p. 1031–1073, 1991.
- 39 LIMEBEER, M.; GREEN, M. Linear robust control. *Ed. Prentice Hall*, 1995.
- 40 GUARACY, F.; FERREIRA, L.; PINHEIRO, C. A. The discrete-time controller for the \mathcal{H}_∞ /LTR problem with mixed-sensitivity properties. *Automatica*, Elsevier, v. 58, p. 28–31, 2015.
- 41 MCFARLANE, D.; GLOVER, K. *Lecture notes in control and information sciences*. Berlin: Springer-Verlag Berlin, 1989. 24–50 p.
- 42 GLOVER, K.; MCFARLANE, D. Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with \mathcal{H}_∞ -bounded uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, n. 8, p. 821–830, 1989.
- 43 ENGELKEN, S.; LANZON, A. Revisiting robust stabilization of coprime factors: The general case. In: IEEE. *IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control (CDC)*. Hawaii, 2012. p. 1542–1547.
- 44 GUARACY, F. H. D. *Princípio de Recuperação da Malha Objetivo aplicado ao Controle \mathcal{H}_∞ em Tempo Discreto*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Itajubá, 2015.
- 45 STOORVOGEL, A. A.; SABERI, A.; CHEN, B. M. The discrete-time \mathcal{H}_∞ control problem with strictly proper measurement feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 9, p. 1936–1939, 1994.
- 46 STOORVOGEL, A. A.; TRENTELMAN, H. L. The quadratic matrix inequality in singular \mathcal{H}_∞ control with state feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, SIAM, v. 28, n. 5, p. 1190–1208, 1990.

-
- 47 WALKER, D. Relationship between three discrete-time \mathcal{H}_∞ algebraic riccati equation solutions. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 52, n. 4, p. 801–809, 1990.
- 48 LAUB, A. A Schur method for solving algebraic Riccati equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 24, n. 6, p. 913–921, 1979.
- 49 QUANSER. *Magnetic Levitation Workbook - Instructor Version*. Canada: Quanser, 2012.
- 50 PUGLIESE, L.; FERREIRA, L.; MACHADO, J. A discrete-time LQG/LTR control strategy for magnetic levitation application. In: MAGLEV. *The 22nd International Conference on Magnetically Levitated Systems and Linear Drives*. Rio de Janeiro-RJ, 2014. p. 1–11.
- 51 PUGLIESE, L. F. *Uma Estratégia de Controle Multi-Modelo LQG/LTR Aplicada a um Sistema Não Linear de Levitação Magnética*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá - MG, 2015.
- 52 ALMEIDA, A. X. C.; FILHO, A. A. Algorithmic design for a robust control benchmark problem. In: ABCM. *Symposium Series in Mechatronics – Vol. 5*. Rio de Janeiro - RJ, 2012. p. 494–503.