UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Funções Positivas Definidas sobre Espaço-temporal e a Classe de Gneiting

EDGAR RAMIRES LUNA

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES.

UNIFEI - ITAJUBÁ
Dezembro / 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EDGAR RAMIRES LUNA

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira

Funções Positivas Definidas sobre Espaço-temporal e a Classe de Gneiting

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Unifei como parte dos requisitos para obtenção do Título de **Mestre em Ciências Matemática.**

Área de Concentração: **Análise Funcional**

UNIFEI - ITAJUBÁ
Dezembro / 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Funções Positivas Definidas sobre Espaço-temporal e a Classe de Gneiting

Dissertação aprovada por banca examinadora em novembro de 2019, conferindo ao autor o Título de **Mestre em Ciências Matemática.**

Banca examinadora:
Prof. Dr. Sérgio Antônio Tozoni - UNICAMP
Prof. Dr. Maicon Sônego - UNIFEI
Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira - Orientador
DATA: 04 de dezembro de 2019 às 13:45 horas.
RESULTADO: APROVADO!
CONCEITO: A.

UNIFEI - ITAJUBÁ
Dezembro / 2019

Dedico este trabalho ao

Prof. Valdir Antonio Menegatto

por nos ensinar que o belo quase sempre se esconde por entre singelos teoremas.

Felicidades em sua merecida aposentadoria, meu caro!

Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar, por me conceder a vida e por ter mantido o meu ânimo que me permitiu finalizar este trabalho.

Ao Prof. Claudemir Pinheiro de Oliveira, expresso meu profundo respeito e admiração por ser um homem possuidor de conhecimento e paciência. Agradeço-o pela orientação em todas as etapas do processo elaborativo deste.

À minha família e, em especial, ao meu pai Evaristo e à minha mãe Onorata, pelo apoio, colaboração e sinceras orações.

À minha esposa Ruth Willma Choque por me dar a certeza de que a distância não é tão grande para o amor. Você, de várias maneiras, pode me tranquilizar nestes dois anos de intercaladas ausências.

Ao meu filho Alexander Ramires Choque, simplesmente por ele ser a razão de tantas realizações em minha vida. Este trabalho eu o dedico com amor.

Sou grato pela acolhida deste país, proporcionando-me esta importante etapa de minha formação acadêmica. De modo especial, agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo valioso apoio financeiro.

Muito obrigado!
EDGAR

Resumo

Neste trabalho, estudamos a positividade definida de funções, cujos domínios são ou $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}^n$, em que $\mathbb{S}^m$ é a esfera unitária de $\mathbb{R}^{m+1}$. Mais especificamente, três tipos de questões são investigadas:

- Encontrar condições necessárias e suficientes para que uma função seja positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.
- Encontrar condições suficientes para que a função da classe de Gneiting

$$(r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \mapsto G(r,t) = \frac{1}{h(t)^{m/2}} \varphi\left(\frac{r^2}{h(t)}\right)$$

  seja positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, em que h e φ são funções positivas convenientemente escolhidas.

- Encontrar condições necessárias e suficientes para que uma função definida em $[0,\pi] \times \mathbb{R}^n$ seja positiva definida sobre $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}^n$.

Os resultados obtidos foram melhorados em relação às fontes consultadas.

Palavras-chave e frases: Função positiva definida - Função condicionalmente negativa definida - Função completamente monótona - Função de Bernstein

Abstract

In this work we study the positive definiteness of functions on either $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ or $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}^n$, where $\mathbb{S}^m$ denotes the unit sphere in $\mathbb{R}^{m+1}$. The following three questions are investigated:

- To find necessary and sufficient conditions on a function C with domain $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ in order that it be positive definite on $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.
- To find sufficient conditions on a function

$$(r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \mapsto G(r,t) = \frac{1}{h(t)^{m/2}} \varphi\left(\frac{r^2}{h(t)}\right)$$

  from the well-established Gneiting class in order that it be positive definite on $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, where h and φ come from classes subject to our choice.
- To find necessary and sufficient conditions on a function C with domain $[0,\pi] \times \mathbb{R}^n$ on order that it be positive definite on $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}^n$, keeping isotropy with respect to the $\mathbb{S}^m$ component.

The results we obtain improve those in the main sources acessible in the literature that deals with similar problems.

Keywords and phrases: Positive definite function - Conditionally negative definite function-Completely monotone function - Bernstein's function

Índice

Símbolos e Notações

$\mathbb{R}$	Corpo dos números reais
$\mathbb{C}$	Corpo dos números complexos - **p. 4**
$\mathbb{C}^{m\times n}$	Espaço vetorial das matrizes de ordem m por n com entradas complexas - **p. 4**
A^*	Transposta conjugada da matriz A - **p. 4**
$\mathcal{N}$	Núcleos condicionalmente negativo definido - **p. 6**
$e^{-\sigma\|\cdot\|^2}$	Exponenciais gaussianas em $\mathbb{R}^m$ - **p. 9**
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	Produto interno usual de $\mathbb{R}^m$ - **p. 9**
$\|\cdot\|$	Norma em $\mathbb{R}^m$ induzida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - **p. 9**
$\mathbb{R}^m$	Espaço euclidiano real m-dimensional - **p. 10**
$L^1(\mathbb{R}^m)$	Espaço vetorial real de funções Lebesgue-integráveis em $\mathbb{R}^m$ - **p. 12**
$\mathbb{S}^m$	Esfera unitária de $\mathbb{R}^{m+1}$ centrada na origem - **p. 14**
d_m	Distância geodésica sobre $\mathbb{S}^m$ - **p. 14**
σ_m	Medida de Borel sobre $\mathbb{S}^m$ - **p. 14**
Γ	Função gama usual - **p. 14**
$a_m^k(f)$	Coeficientes de Schoenberg associados a função f - **p. 15**
P_k^m	Polinômio de Gegenbauer de grau k associado a esfera $\mathbb{S}^m$ - **p. 15**
$\delta_{k,l}$	Função delta de Kronecker - **p. 16**
φ	Função completamente monótona - **p. 18**
ψ	Função de Bernstein - **p. 19**
$\mathcal{F}\{f\}$	Transformada Fourrier da função f - **p. 24**
g_k	Elemento k-ésimo da sequência gaussiana suavizante - **p. 27**
$\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$	Espaço-temporal - **p. 29**
$\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$	Espaço-temporal generalizado - **p. 29**
G	Função da classe de Gneiting - **p. 31**
$\mathbb{S}^m\times\mathbb{R}$	Esfera-temporal - **p. 35**
$\mathcal{C}$	Funções positivas definidas sobre $\mathbb{S}^m\times\mathbb{R}$ - **p. 35**
Ω_m	Função de Bessel normalizada - **p. 41**
$\mathcal{F}_m\{g\}$	Transformada de Bessel-Fourier da função radial g - **p. 42**

Capítulo 1

Introdução

A família de funções positivas definidas estudadas na Análise Harmônica tem chamado a atenção de pesquisadores matemáticos a partir da formalização teórica do assunto devido a Aronszajn feita por volta de 1950 ([3]).

O estudo destas funções abrange os contextos reais, esféricos, complexos, espaços vetoriais e até grupos ([16, 22, 37, 40, 58]). Tantos quantos são os ambientes em que elas figuram, múltiplas são suas aplicações práticas. Elas se encaixam, por exemplo, como modelo ideal em muitas questões que aparecem em Processos Estocásticos, Geoestatística, Teoria da Aproximação, Análise de Fourier, Teoria da Aprendizagem, Espaço Hilbert de Reprodução, Teoria Probabilística, Estatística Espacial ([9, 11, 27, 31, 38, 48]).

A título de exemplo, sem contudo aprofundar nos temas, citamos a seguir algumas aplicações de tais funções. Na Teoria da Aprendizagem, elas aparecem em problemas envolvendo análise espectral fina de operadores integrais em situações em que espaços Hilbert de reprodução de funções entram na formulação dos problemas ([18]). Em Estatística Espacial ocorrem como correlação de campos aleatórios homogêneos e partículas aleatórias em forma de estrela ([29]). A aplicação matemática mais elementar dessas funções está relacionada ao problema de interpolação, onde uma subclasse das funções acima citadas são usadas para resolver de modo único os dados interpolantes. Como interpolação esférica é o primeiro passo para aproximação esférica, tais funções aparecem para compor as chamadas bases radiais que conduzem a resultados satisfatórios no estudo de aproximação de funções contínuas em domínios esféricos ([16]).

Nos últimos anos tem havido forte aumento na prevalência em escala continental de dados interpolantes contidos nos chamados espaço-temporal ou esfera-temporal, motivados pela necessidade de analisar imagens de satélites para previsão do comportamento climático sobre a superfície terrestre em redes de monitoramento ([23, 24, 25]). Como a Terra tem o formato elipsoidal, a esfera é o modelo mais próximo para ela. Então, com o objetivo de modelar dados de campos aleatórios em esferas, bem como em esfera-temporal, as pesquisas atuais têm tido acentuado crescimento nesta vertende de aplicação.

Os trabalhos de Gneiting se destacam como introdutórios de uma classe de funções de comprovado sucesso para a resolução de questões que envolvem espaço-temporal ([14, 23, 24, 25]).

Seguindo o modelo de Gneiting, pesquisas que fornecem uma visão abrangente desses tópicos, na atualidade, incluem Berg e Porcu ([10]), Jeong e Jun ([30]), Porcu et al. ([42]) e Alegría et al. ([45]).

Este trabalho propõe-se entender a positividade definida sobre espaço-temporal ou sobre esfera-temporal. Dentre os objetivos secundários, destacamos três questões principais que nortearão todo o estudo na investigação de:

1. ***Condições necessárias e suficientes a fim de que uma função seja positiva definida sobre*** $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

2. ***Condições suficientes para que a classe de Gneiting, assumindo a estrutura entrelaçada***

$$(r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \mapsto G(r,t) = \frac{1}{h(t)^{m/2}} \varphi\left(\frac{r^2}{h(t)}\right)$$

seja positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, ***sempre que*** φ ***é completamente monótona e*** h ***é condicionalmente negativa definida sobre*** $\mathbb{R}^m$.

3. ***Condições necessárias e suficientes para que a função*** $C : [0,\pi] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ***seja positiva definida sobre*** $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}^n$, ***em que*** $\mathbb{S}^m$ ***é a esfera unitária de*** $\mathbb{R}^{m+1}$.

Os artigos [17], [23] e [61] são os motivadores dessas questões.

O trabalho está organizado em dois capítulos, além desta introdução. No capítulo subsequente, introduziremos os conceitos fundamentais para o desenvolvimento das questões **(1)**, **(2)** e **(3)**. Portanto, faz parte do Capítulo 2, o Lema de Schur, passando pelo conceito de funções positivas definidas e funções radiais condicionalmente negativas definidas, discorrendo sobre conceitos, exemplos e propriedades dos assuntos acima elencados.

O Capítulo 3 é o principal, sendo dedicado ao estudo das três questões destacadas. Resquícios da teoria de Fourier serão ferramentas úteis neste estudo. Faz parte deste capítulo, o conceito de transformada de Bessel-Fourier, usado para se construir funções positivas definidas semelhantes àquelas da classe de Gneiting, isto é, aquelas funções que são radiais possuindo uma fórmula que provém de uma composição de outras funções.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

Este capítulo é dedicado aos conceitos básicos envolvidos no tema da dissertação. Muitas das propriedades aqui estudadas serão diretamente aplicadas na abordagem do trabalho, enquanto outras serão listadas apenas por questão de completude ou porque trarão maior entendimento ao assunto estudado.

A maioria das demonstrações serão exibidas e as demais serão substituídas por referências adequadas.

2.1 Lema de Schur

Recordamos, nesta seção, o Lema de Schur. Trata-se de um resultado básico relacionado às funções positivas definidas. Propriedades sobre matrizes envolvidas com esse lema serão listadas. As referências para esta parte do estudo são [16, 28].

Denotamos por $\mathbb{C}^{n\times m}$ o espaço vetorial formado pelas matrizes de ordem $n\times m$ com entradas em $\mathbb{C}$, o corpo dos números complexos. Introduzimos a seguir a família de matrizes com as quais lidaremos na seção posterior e em outros lugares. Escrevemos A^* para a matriz obtida de A via transposição, seguida de conjugação complexa. A matriz A é *hermitiana* quando $m=n$ e $A^*=A$.

Definição 2.1.1 *Seja A uma matriz de $\mathbb{C}^{n\times n}$. Dizemos que A é não negativa definida quando*

$$u^*Au \geq 0, \quad u \in \mathbb{C}^{n\times 1}.$$

Notamos que de modo mais explícito, a forma quadrática associada à matriz $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, aparecendo na definição acima se expressa como

$$u^*Au = \sum_{j,k=1}^{n} u_j\overline{u}_k A_{jk}, \quad u^t = (u_1 \ldots u_n) \in \mathbb{C}^{n\times 1}.$$

Uma condição necessária e suficiente para que uma matriz seja hermitiana é o assunto tratado a seguir.

Proposição 2.1.1 *Seja A uma matriz de $\mathbb{C}^{n\times n}$. São equivalentes:*

(1) *A é hermitiana.*

(2) *Se $u \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, então u^*Au é um escalar real.*

Demonstração: Assuma que A é hermitiana. Usando propriedades de transposta de matrizes, vemos que

$$\overline{u^*Au} = (u^*Au)^* = u^*(u^*A)^* = u^*A^*u = u^*Au, \quad u \in \mathbb{C}^{n\times 1}.$$

Portanto, u^*Au é um escalar real para todo $u \in \mathbb{C}$, revelando que **(1)** implica em **(2)**.
Para provar a recíproca, recordamos que A sendo uma matriz quadrada complexa, ela se decompõe unicamente na soma $A = B + iC$, em que

$$B = \frac{A+A^*}{2} \quad \text{e} \quad C = \frac{A-A^*}{2i}.$$

Então, $B^* = B$ e $C^* = C$ e, pela primeira parte da prova, u^*Bu, $u^*Cu \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Como $u^*Au \in \mathbb{R}$, a parte imaginária de u^*Au é nula, isto é, $u^*Cu = 0$. A arbitrariedade de u implica que $C = 0$. Portanto, a matriz A coincide com B e, por consequência, ela é hermitiana. ■

O Lema 2.1.1 é técnico e mostra que as matrizes que se encaixam na definição precedente decompõem-se num produto de outras duas matrizes. Para sua prova, recordamos que toda matriz hermitiana assume a forma U^*DU, em que U é unitária e D é diagonal ([28, p. 229]).

Lema 2.1.1 *A matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é não negativa definida se e somente se $A = B^*B$, para alguma $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

Demonstração: Suponhamos que A seja não negativa definida e considere que λ é um autovalor de A associado ao autovetor $v \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Então,

$$v^*Av = v^*\lambda v = \lambda\|v\|^2.$$

Usando que v é não nulo e a hipótese sobre A, vemos que λ é não negativo. Denotamos os autovalores de A, levando em conta a multiplicidade com que eles ocorrem, por $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Em adição, a Proposição 2.1.1 mostra que A é hermitiana. Logo, A é diagonalizável, ou seja, existem $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, cuja inversa é P^* tal que $A = P^*DP$, em que $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Em consequência, segue que a afirmação do lema ocorre para $B = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P$.
Como a recíproca é trivial, a prova está finalizada. ■

Observamos que a primeira parte da prova acima revela que o determinante de toda matriz não negativa definida é um escalar não negativo.

Definição 2.1.2 *Sejam $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. O produto Hadamard de A com B é a matriz $A \circ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definida como $(A\circ B)_{jk} = A_{jk}B_{jk}$.*

O resultado a seguir é conhecido como Lema de Schur, conforme foi mencionado é o objetivo desta seção.

Lema 2.1.2 *Sejam A e B elementos de $\mathbb{C}^{n\times n}$. Se A e B são não negativas definidas, então $A\circ B$ é não negativa definida.*

Demonstração: Suponha que A e B sejam como na hipótese. Pelo Lema 2.1.1, existem matrizes E e F tais que $A = E^*E$, $B = F^*F$. Logo, para $j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$,

$$(A\circ B)_{jk} = (E^*E)_{jk}(F^*F)_{jk} = \sum_{\mu=1}^{n} \overline{E}_{\mu j}E_{\mu k} \sum_{\nu=1}^{n} \overline{F}_{\nu j}F_{\nu k} = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} (\overline{E}_{\mu j}\overline{F}_{\nu j})(E_{\mu k}F_{\nu k}) = L_j^* L_k,$$

em que $L_j \in M_{1\times n^2}(\mathbb{C})$ é definida como

$$L_j^* := \begin{bmatrix} \overline{E}_{1j}\overline{F}_{1j} & \overline{E}_{1j}\overline{F}_{2j} & \cdots & \overline{E}_{1j}\overline{F}_{nj} & \overline{E}_{2j}\overline{F}_{1j} & \cdots & \overline{E}_{2j}\overline{F}_{nj} & \cdots & \overline{E}_{nj}\overline{F}_{1j} & \cdots & \overline{E}_{nj}\overline{F}_{nj} \end{bmatrix}, \; j = 1,\ldots,n.$$

Segue que $A\circ B = Q^*Q$, em que Q é uma matriz quadrada de ordem n^3, cuja primeira linha é $\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_n \end{bmatrix}$ e as demais são nulas. Agora, a conclusão da prova é consequência do Lema 2.1.1. ■

2.2 Núcleo positivo definido

A família de funções com as quais lidaremos na dissertação enquadra-se nos chamados núcleos positivos definidos. As consultas para esta parte do trabalho foram feitas em [13, 16].

Iniciamos com a definição formal dessa classe de funções, onde usamos a letra X para indicar um conjunto não vazio, desprovido de estrutura algébrica.

Definição 2.2.1 *Um núcleo sobre X é uma função da forma $K : X\times X \to \mathbb{C}$. Um núcleo K sobre X é positivo definido quando as matrizes*

$$x_1,\ldots,x_q \in X \mapsto (K(x_j,x_k)), \quad q = 1,\ldots$$

são não negativas definidas no sentido da Definição 2.1.1.

Vejamos, a seguir, exemplos de núcleos positivos definidos. Exemplos adicionais são encontrados abundantemente na literatura [3, 11, 16, 18, 20].

Exemplo 2.2.1 *Seja $f : X \to \mathbb{C}$ uma função. A função $K : X \times X \to \mathbb{C}$ dada por*

$$K(x,y) = f(x)\overline{f(y)}, \quad x,y \in X$$

é um núcleo positivo definido sobre X.

Averiguação: Segue da definição anterior. ■

O exemplo acima é extensível à soma de uma quantidade finita de parcelas de núcleos da forma

$$(x,y) \in X \times X \mapsto f(x)\overline{f(y)} \in \mathbb{C}.$$

A terminologia pré-Hilbert , doravante usada, refere-se a um espaço vetorial munido de produto interno sobre $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.2 *Sejam $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço pré-Hilbert e $\Phi : X \to \mathcal{V}$ uma função. O núcleo*

$$K : X \times X \to \mathbb{C}$$

dado por

$$K(x,y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle, \quad x,y \in X,$$

é positivo definido sobre X.

Averiguação: Um cálculo direto revela que

$$\sum_{j,k=1}^{q} c_j \bar{c}_k K(x_i, x_j) = \left\langle \sum_{j=1}^{q} c_j \Phi(x_j), \sum_{j=1}^{q} c_j \Phi(x_j) \right\rangle = \left\| \sum_{j=1}^{q} c_j \Phi(x_j) \right\|^2.$$

Assim, a afirmação do exemplo está provada. ■

O exemplo a seguir é um caso particular do anterior, onde $L^2([-1,1])$ refere-se ao espaço vetorial real das classes de funções Lebesgue-mensuráveis que são de quadrado-integráveis em relação a medida dt.

Exemplo 2.2.3 *Sejam $X = [0,1]$ e uma função $\Phi : X \to L^2([-1,1])$ tal que para cada $x \in X$, $\Phi(x) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ é*

$$\Phi(x)(t) = \cos(tx), \quad t \in [-1,1].$$

Segue que

$$K(x,y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \int_{-1}^{1} \cos(tx)\cos(ty)\,dt, \quad x,y \in X,$$

onde

$$K(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y} + \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{x-y}, & \text{se} \quad x \neq y \\ \\ 1 + \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{x}, & \text{se} \quad x = y, x \neq 0 \\ \\ 2, & \text{se} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

O Exemplo 2.2.3 faz parte de uma classe de núcleos específicos que dependem de um produto interno sobre um espaço de funções. Essa estrutura facilita a verificação da positividade definida do núcleo, enquanto que checar isso via a Definição 2.2.1, torna-se uma tarefa demasiadamente difícil.

Algumas propriedades de núcleos positivos definidos estão no próximo resultado, em que as operações envolvendo e escalares e funções são as usuais.

Teorema 2.2.1 *Seja* (K_l) *uma sequência de núcleos, em que* $K_l : X \times X \to \mathbb{C}$, $l = 1, \ldots$. *As seguintes propriedades valem:*

(1) *Se* K *é positivo definido sobre* X*, então* $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, $x,y \in X$.

(2) *Se* $K_1, \ldots, K_l$ *são positivas definidas sobre* X*, então* $\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_l K_l$ *também o é, sempre que* $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ *são constantes reais não negativas.*

(3) *Se cada* K_l *é positivo definido sobre* X *e* (K_l) *converge pontualmente para* K*, então* K *é um núcleo positivo definido sobre* X.

(4) *Se* K_1 *e* K_2 *são positivos definidos sobre* X*, então* $K_1 K_2$ *também o é.*

Demonstração: A primeira propriedade é recorrente. Desde que **(2)** e **(3)** são de verificações imediatas, provamos apenas a última afirmação. Assuma, então, que K_1 e K_2 são núcleos positivos definidos sobre X. Logo, as seguintes matrizes dependentes de uma quantidade arbitrária de pontos

$$x_1, \ldots, x_n \in X \mapsto (K_\mu(x_i, x_j)) \quad (\mu = 1, 2)$$

são não negativas definidas. Pelo Lema 2.1.2, a matriz

$$(x_1, \ldots, x_n) \in X \mapsto (K_1(x_i, x_j) K_2(x_i, x_j))$$

é não negativa definida. ■

O item **(2)** do teorema acima também ocorre para núcleos indexados por uma família arbitrária de índices da forma $(K_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{J}}$, $\mathcal{J}\subset\mathbb{R}$.

O corolário a seguir terá uso decisivo na seção seguinte, sendo de importância fundamental em muitos lugares do trabalho.

Corolário 2.2.1 *Se $K : X\times X\to\mathbb{C}$ é um núcleo positivo definido, então $(x,y)\in X\times X\mapsto e^{cK(x,y)}$ também o é, sempre que c é um escalar não negativo.*

Demonstração: Seja $c\geq 0$ e suponha que K seja como na hipótese. Logo,

$$e^{cK(x,y)} = \lim_{m\to\infty}\sum_{\nu=0}^{m}\frac{c^\nu}{\nu!}K^\nu(x,y), \quad x,y\in X.$$

Pelo teorema anterior, o núcleo exponencial do corolário é positivo definido sobre X. ∎

Para o próximo exemplo, recordamos que $\{\cos(k\pi x) : k=0,1,\ldots\}$ constitui um sistema ortonormal relativo ao produto interno usual de $L^2([-1,1])$.

Exemplo 2.2.4 *O núcleo*

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos(k\pi x)\cos(k\pi y), \quad x,y\in[-1,1]$$

é positivo definido sobre $[-1,1]$.

Averiguação: Pelo Exemplo 2.2.1, para cada inteiro positivo k, o núcleo

$$(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]\mapsto\frac{1}{k^2}\cos(k\pi x)\cos(k\pi y)$$

é positivo definido sobre $[-1,1]$. Portanto, pelo Teorema 2.2.1, o núcleo K dado pela soma do exemplo é positivo definido sobre $[-1,1]$. ∎

Encerramos esta seção, observando que os chamados núcleos gaussianos sobre $\mathbb{R}^m$ que ocorrem em Teoria da Probabilidade possuem séries absolutamente convergentes como no último exemplo. De fato, eles são da forma

$$e^{-\sigma\|v-w\|^2}, \quad v,w\in\mathbb{R}^m,$$

em que σ é um escalar positivo. Aqui $\|\cdot\|$ é a norma induzida pelo produto interno usual de $\mathbb{R}^m$, escrito como

$$\langle v,w\rangle = v_1w_1+\cdots+v_mw_m, \quad v,w\in\mathbb{R}^m.$$

A seção a seguir tratará mais amiúde desta classe de núcleos positivos definidos.

2.3 Núcleo condicionalmente negativo definido

Nesta seção, mostramos a interligação estreita entre as famílias de núcleos positivos definidos e núcleos condicionalmente negativos definidos. Isto é possível por meio de um resultado devido a Schoenberg.

Também aqui, X é um conjunto não vazio.

Definição 2.3.1 *Um núcleo $\mathcal{N} : X \times X \to \mathbb{C}$ é condicionalmente negativo definido quando $-\mathcal{N}$ é positivo definido no sentido da Definição 2.2.1, sempre que o conjunto de escalares associados à forma quadrática correspondente forem restringidos ao hiperplano*

$$\left\{(c_1, \ldots, c_q) \in \mathbb{C}^q \ : \ \sum_{j=1}^{q} c_j = 0\right\}, \quad q = 1, \ldots \cdot$$

Um exemplo de núcleo que se encaixa na definição acima é o quadrado da norma que provém de um produto interno.

Exemplo 2.3.1 *Seja $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço pré-Hilbert. A função $\mathcal{N} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{N}(x,y) = \|x-y\|^2$, $x, y \in \mathcal{V}$ é um núcleo condicionalmente negativo definido sobre $\mathcal{V}$.*

Averiguação: Sejam $x_1, \ldots, x_q \in X$ e $c_1, \ldots, c_q \in \mathbb{C}$. Usando propriedades de produto interno, chegamos a identidade

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{q} c_j \bar{c}_k \mathcal{N}(x_j, x_k) &= \left(\sum_{j=1}^{q} c_j \|x_j\|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{q} \bar{c}_j\right) + \left(\sum_{k=1}^{q} \bar{c}_k \|x_k\|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{q} c_j\right) \\ &- \sum_{j,k=1}^{q} c_j \bar{c}_k \langle x_j, x_k \rangle - \sum_{j,k=1}^{q} c_j \bar{c}_k \langle x_j, x_k \rangle.\end{aligned}$$

Agora a condição $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} c_j = 0$ revela que

$$\sum_{j,k=1}^{q} c_j \bar{c}_k \mathcal{N}(x_j, x_k) = -\left\|\sum_{j=1}^{q} c_j x_j\right\|^2 - \left\|\sum_{k=1}^{q} \bar{c}_k x_j\right\|^2,$$

provando a afirmação a respeito de $\mathcal{N}$. ■

Aproveitamos este contexto mais geral para introduzir as funções condicionalmente negativas definidas sobre $\mathbb{R}^m$.

Definição 2.3.2 *A função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ é condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^m$ quando o núcleo*

$$(v, w) \in \mathbb{R}^m \mapsto f(v-w)$$

o é sobre $\mathbb{R}^m$ no sentido da definição anterior quando $X = \mathbb{R}^m$.

A conexão comentada no início desta seção será provada agora. Trata-se de um teorema de 1938 devido a Schoenberg ([49]). Para uma investigação pormenorizada deste teorema contendo desdobramentos teóricos, o leitor é convidado a consultar os livros [8, p. 41] e [9, p. 73].

Teorema 2.3.1 *O núcleo $\mathcal{N} : X \times X \to \mathbb{R}$ é condicionalmente negativo definido se e somente se $(x,y) \in X \times X \mapsto e^{-t\mathcal{N}(x,y)}$ é um núcleo positivo definido, sempre que t é um escalar não negativo.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{N}$ como na hipótese, um ponto x_0 fixado em X e $c_1,\ldots,c_q \in \mathbb{R}$ e considere $c_0 = -\sum_{j=1}^{q} c_j$. Então, a forma quadrática relativa à $\mathcal{N}$, para os pontos $x_0,x_1,\ldots,x_q \in X$ e os escalares $c_0,c_1,\ldots,c_q \in \mathbb{R}$ assume a forma

$$\sum_{j,k=0}^{q} c_j c_k \mathcal{N}(x_j,x_k) = \sum_{j,k=1}^{q} c_j c_k \mathcal{N}(x_j,x_k) + c_0 \sum_{j=1}^{q} c_j \mathcal{N}(x_j,x_0) + c_0 \sum_{k=1}^{q} c_k \mathcal{N}(x_0,x_k) + c_0^2 \mathcal{N}(x_0,x_0).$$

Substituindo o valor da constante c_0, o segundo membro da igualdade anterior torna-se

$$-\left[-\sum_{j,k=1}^{q} c_j c_k \mathcal{N}(x_j,x_k) + \sum_{j,k=1}^{q} c_j c_k \mathcal{N}(x_j,x_0) + \sum_{j,k=1}^{q} c_j c_k \mathcal{N}(x_0,x_k) - c_0^2 \mathcal{N}(x_0,x_0) \right].$$

Equivalentemente,

$$\sum_{j,k=0}^{q} c_j c_k \mathcal{N}(x_j,x_k) = -\sum_{j,k=1}^{q} c_j c_k K(x_j,x_k),$$

em que

$$K(x,y) = -\mathcal{N}(x,y) + \mathcal{N}(x,x_0) + \mathcal{N}(x_0,y) - \mathcal{N}(x_0,x_0), \quad x,y \in X.$$

Desse modo, se $\mathcal{N}$ é condicionalmente negativo definido sobre X, então K é positivo definido sobre X. Como $e^{-t\mathcal{N}(x,y)} = e^{tK(x,y)} e^{-t\mathcal{N}(x,x_0)} e^{-t\mathcal{N}(x_0,y)} e^{t\mathcal{N}(x_0,x_0)}$, $x,y \in X$,

$$\sum_{j,k=1}^{q} c_j c_k e^{-t\mathcal{N}(x_j,x_k)} = e^{t\mathcal{N}(x_0,x_0)} \sum_{j,k=1}^{q} \left(c_j e^{-t\mathcal{N}(x_j,x_0)} \right) \left(c_k e^{-t\mathcal{N}(x_0,x_k)} \right) e^{tK(x_j,x_k)}.$$

Como $t \geq 0$, a conclusão segue do Corolário 2.2.1.

Para a recíproca, assuma a hipótese sobre $(x,y) \in X \times X \mapsto e^{-t\mathcal{N}(x,y)}$. Primeiro, notamos que os núcleos

$$(x,y) \in X \times X \mapsto \frac{1 - e^{-t\mathcal{N}(x,y)}}{t}, \quad t > 0$$

são condicionalmente negativos definidos sobre X. Pelo Teorema 2.2.1, o núcleo

$$-\mathcal{N}(x,y) = -\lim_{t\to 0^+} \frac{1-e^{-t\mathcal{N}(x,y)}}{t}, \quad x,y \in X$$

é positivo definido sobre X, sempre que o conjunto de escalares associados à forma quadrática de $-\mathcal{N}$ forem escolhidos no conjunto dado como na Definição 2.3.1. ■

2.4 Positividade definida sobre $\mathbb{R}^m$

Nesta seção, estudamos funções positivas definidas sobre $\mathbb{R}^m$, o espaço euclidiano real m-dimensional. Os resultados que destacaremos aqui vêm das referências [7] e [16].

Definição 2.4.1 *Uma função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$ quando o núcleo*

$$(v,w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto f(v-w)$$

o é sobre $\mathbb{R}^m$ no sentido da Definição 2.2.1.

Abaixo listamos duas propriedades das funções aqui introduzidas que normalmente estão em textos científicos que abordam o assunto, apresentando uso frequente.

Proposição 2.4.1 *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ uma função positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$. Valem:*

(1) $f(-v) = \overline{f(v)}$, $v \in \mathbb{R}^m$.

(2) $|f(v)| \leq f(0)$, $v \in \mathbb{R}^m$.

Demonstração: A prova de ambos itens depende da matriz $(f(v_j - v_k)) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, em que $v_1 = v$, $v_2 = 0 \in \mathbb{R}^m$. Como f é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$, pela Proposicão 2.1.1, a matriz $(f(v_j - v_k))$ é hermitiana, provando **(1)**.
Por outro lado, usamos o Lema 2.1.1 para ver que o determinante da matriz $(f(v_j - v_k))$ é não negativo, isto é, $0 \leq f(0)^2 - |f(v)|^2$, implicando em **(2)**. ■

Do item **(2)**, temos que toda função contínua e positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$ é limitada por $f(0)$. Em adição, segue também que toda função positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$ que anula-se na origem é identicamente nula.

A proposição a seguir é particularmente do nosso interesse, uma vez que se enquadra entre os tipos de funções positivas definidas que usaremos neste trabalho.

O termo 'integrável' sistematicamente empregado daqui por diante, refere-se a uma função da forma $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ que seja Lebesgue-mensurável e tal que a integral

$$\int_{\mathbb{R}^m}|f(v)|dv$$

é finita. O espaço vetorial destas funções será denotado por $L^1(\mathbb{R}^m)$.

Proposição 2.4.2 *Seja f uma função integrável em $\mathbb{R}^m$. Se f é não negativa, então a função*

$$v\in\mathbb{R}^m\mapsto\int_{\mathbb{R}^m}e^{i\langle v,w\rangle}f(w)dw$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$.

Demonstração: Para cada $w\in\mathbb{R}^m$, defina $g_w(v)=e^{i\langle v,w\rangle}$, $v\in\mathbb{R}^m$. Como

$$e^{i\langle\xi-\eta,w\rangle}=g_w(\xi)\overline{g_w(\eta)},\quad \xi,\eta\in\mathbb{R}^m,$$

a afirmação da proposição é evidente a partir do Exemplo 2.2.1. ■

Sob as condições assumidas para a função f da proposição anterior, concluímos que a medida de Borel dada por

$$\mu(B)=\int_B f(w)dw,\quad B\subset\mathbb{R}^m$$

é positiva e finita. Desta forma, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^m}e^{i\langle v,w\rangle}f(w)dw=\int_{\mathbb{R}^m}e^{i\langle v,w\rangle}d\mu(w).$$

A representação acima, gerando uma função positiva definida a partir de μ, está inserida em um resultado mais geral de caracterização dessa classe de funções. Trata-se do celebrado Teorema de Bochner publicado em 1932. Uma versão bem geral para grupo topológico abeliano está em [27, p.106]. A que usaremos é a versão para o grupo aditivo $\mathbb{R}^m$.

Teorema 2.4.1 (Bochner) *A função contínua $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$ é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$ se e somente se*

$$f(v)=\int_{\mathbb{R}^m}e^{i\langle v,w\rangle}d\mu(w),\quad v\in\mathbb{R}^m,$$

em que μ é uma medida de Borel finita e positiva sobre $\mathbb{R}^m$.

Demonstração: Suponha que a função complexa f seja representada como integral do enunciado do teorema. Devido as propriedades de μ, a positividade definida de f segue como procedido no Exemplo 2.2.1. Para a continuidade de f, fixamos $v\in\mathbb{R}^m$ e notemos que

$$|f(v+h)-f(v)|\le\int_{\mathbb{R}^m}|e^{i\langle h,w\rangle}-1|d\mu(w),$$

em que $|e^{i\langle h,w\rangle}-1|\leq 2$, $h\in\mathbb{R}^m$. Como μ é finita, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [2, p. 172],

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^m}|e^{i\langle h,w\rangle}-1|d\mu(w)=0.$$

Como o último limite independe de v, a função integral f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^m$. A prova da recíproca é encontrada em [58, p.70]. ■

Notamos que a condição sobre a continuidade da função não pode ser suprimida do Teorema de Bochner, uma vez que positividade definida não implica em continuidade, hipótese fundamental na prova da parte direta do teorema.

Elencamos a seguir observações sobre o Teorema de Bochner.

- Na representação integral do teorema, a exponencial $e^{-i\langle v,w\rangle}$ também pode ser usada. Essa escolha é convencional e irrelevante. Em geral, em abordagens analíticas prefere-se $e^{i\langle v,w\rangle}$, enquanto que em abordagem probabilística é utilizado $e^{-i\langle v,w\rangle}$.
- Também é convencional, o uso da constante $(2\pi)^{-m/2}$ multiplicando a integral do teorema.
- Notamos com que facilidade verificamos, na prova acima, que f é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$, sempre que a representação integral do teorema vale para f. Consequentemente, o Teorema de Bochner é uma via interessante para verificar a positividade definida de funções, principalmente, naqueles casos em que usar a Definição 2.4.1 torna-se demasiadamente trabalhoso e complicado.

2.5 Positividade definida no contexto esférico

Esta seção será dedicada ao estudo das funções positivas definidas sobre esferas reais. Este contexto é ligeiramente distinto dos abordados anteriomente, uma vez que necessita de uma estrutura métrica sobre a esfera.

A *esfera unitária* de $\mathbb{R}^{m+1}$ é

$$\mathbb{S}^m=\left\{v\in\mathbb{R}^{m+1}:\langle v,v\rangle=1\right\},\quad m=1,\ldots.$$

Quando necessário, denotamos por σ_m a única medida de Borel positiva de S^m normalizada pela integral ([19, Fórmula 1.1.2])

$$\sigma_m(\mathbb{S}^m)=\int_{\mathbb{S}^m}d\sigma_m(v)=\frac{2\pi^{(m+1)/2}}{\Gamma((m+1)/2)},$$

em que Γ é a *função gama* definida pela integral ([1, p. 255])

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

O conjunto $\mathbb{S}^m$ torna-se um espaço métrico quando munido da distância geodésica

$$d_m(v,w) = \arccos\langle v,w\rangle, \quad v,w \in \mathbb{S}^m. \tag{2.1}$$

Introduzimos formalmente, a classe de funções mencionadas no título desta seção.

Definição 2.5.1 *Uma função $f : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ é positiva definida sobre $\mathbb{S}^m$ quando o núcleo radial*

$$(v,w) \in \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^m \mapsto (f \circ d_m)(v,w)$$

é positivo definido sobre $\mathbb{S}^m$ no sentido da Definição 2.2.1.

A denominação *núcleo isotrópico* também é usada para os tipos de núcleos desta definição, referindo-se à propriedade que tais núcleos são invariantes mediante rotações de $\mathbb{R}^{m+1}$.

Citamos a seguir o exemplo mais elementar desta família de funções.

Exemplo 2.5.1 *A função $\theta \in [0,\pi] \mapsto \cos\theta$ é positiva definida sobre $\mathbb{S}^m$.*

Averiguação: Segue da aplicação direta da Definição 2.5.1. ■

A contraparte do Corolário 2.2.1 para a estrutura $(\mathbb{S}^m, d_m)$ é o assunto tratado a seguir.

Proposição 2.5.1 *Se a função $g : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ é positiva definida sobre $\mathbb{S}^m$, então o núcleo*

$$(v,w) \in \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^m \mapsto e^{cg(d_m(v,w))}$$

é positivo definido sobre $\mathbb{S}^m$, sempre que c é um escalar não negativo.

Muitos são os trabalhos produzidos envolvendo as funções aqui tratadas ([5, 12, 15, 34, 35, 36, 37, 38, 47, 51, 55, 62, 63]), entre outros. Todos estes artigos citam ou usam decisivamente o mais importante resultado neste contexto, o Teorema de Schoenberg publicado em 1942 ([50]). Tal teorema caracteriza a classe das funções positivas definida sobre a esfera.

Teorema 2.5.1 *Seja $f : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Então, a função f é positiva definida sobre $\mathbb{S}^m$ se e somente se*

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^m(f) \mathcal{G}_k^m(\cos\theta), \quad a_k^m(f) \geq 0, \quad f(0) < \infty.$$

Uma consequência é o fato que as funções $\theta \in [0,\pi] \mapsto \mathcal{G}_k^m(\cos\theta)$ são positivas definidas sobre $\mathbb{S}^m$. Estas são os polinômios de Gegenbauer associados à esfera $\mathbb{S}^m$ multiplicados por certas constantes. Boas fontes de consulta para obtenção de propriedades de tais polinômios são [1, 4, 19, 56].

Definição 2.5.2 *Os polinômios de Gegenbauer são definidos intrinsecamente pelas expansões*

$$\frac{1}{(1-2tx+x^2)^\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^m(t)x^k, \quad \lambda = \frac{m-1}{2} > 0, \quad |x|<1, \quad |t| \le 1$$

e

$$\frac{1-tx}{1-2tx+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2} P_k^1(t)x^k, \quad |x|<1, \quad |t|\le 1.$$

É conhecido que $P_k^1(t) = \cos(k \arccos t)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. No livro do Szëgo ([56, Section 4.7]) e nas tabelas de Abramowitz ([1]), assumem-se que estes polinômios são normalizados por

$$P_k^m(1) = \frac{(m-1)_k}{k!}.$$

A notação $(a)_k$ é o símbolo Pochhammer definido por

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1), \quad k = 1,2,\ldots,$$

Finalmente, os polinômios $\mathcal{G}_k^m$ que aparecem no Teorema 2.5.1 são

$$\mathcal{G}_k^m(\cos\theta) = \frac{P_k^m(\cos\theta)}{P_k^\lambda(1)}, \quad \lambda = \frac{m-1}{2} \ge 0,\ k = 0,1,\ldots. \tag{2.2}$$

Na próxima proposição, destacamos três propriedades dos polinômios de Gegenbauer.

Proposição 2.5.2 *Valem:*

(1) $P_k^m(1)(m+2k-1)\Gamma((m+1)/2)\int_0^\pi \mathcal{G}_k^m(\cos\theta)\mathcal{G}_l^m(\cos\theta)\mathrm{sen}^{m-1}\theta\, d\theta = \sqrt{\pi}(m-1)\Gamma(m/2)\delta_{kl}$.

(2) *A função* $\theta \in [0,\pi] \mapsto \mathcal{G}_k^m(\cos\theta)$ *é positiva definida sobre* $\mathbb{S}^m$.

(3) *Se* $k = 0,1,\ldots$, *então* $\left|\mathcal{G}_k^m(\cos\theta)\right| \le 1$, $\theta \in [0,\pi]$.

Demonstração: O item **(1)** é encontrado em [19, Corollary 1.2.8], o segundo item provém de [16], enquanto que a última afirmação é confirmada seguindo os passos da prova da Proposição 2.2.1 - (2). ■

Auxiliados pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, agora é evidente que os coeficientes da expanção do Teorema 3.4.1 são dados pela identidade

$$a_k^m(f) = \frac{(m+2k-1)P_k^m(1)\Gamma((m+1)/2)}{\sqrt{\pi}(m-1)\Gamma(m/2)} \int_0^\pi f(\theta)\, \mathcal{G}_k^m(\cos\theta)\mathrm{sen}^{m-1}\theta\, d\theta.$$

2.6 Condicionalidade negativa definida de função radial

Reservamos para esta seção, uma classe especial dentro da teoria de funções positivas definidas. Trata-se das funções do tipo radial, isto é, aquelas que assumem valor constante nos vetores que mantém a mesma distância da origem. Estas destacam-se na Análise Harmônica, conforme pode ser constatado consultando [6, 16, 58].

Definição 2.6.1 *A função contínua $h : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ é condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^m$ quando o núcleo radial $(w,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto h(\|v-w\|)$ o é sobre $\mathbb{R}^m$.*

Exemplo 2.6.1 *A função $h(u) = u^2$, $u \geq 0$ é condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^m$.*

Averiguação: Segue do Exemplo 2.3.1. ■

A seguir está a contraparte do Teorema 2.3.1 para funções radiais.

Teorema 2.6.1 *A função $h : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ é condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^m$ se e somente se $(v,w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto e^{-ch(\|v-w\|)}$ é um núcleo positivo definido, sempre que c é um escalar não negativo.*

Este teorema revela que as funções $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ condicionalmente negativas definidas estão em correspondência biunívoca com os núcleos radiais da forma e^{-ch} $(c > 0)$ que são positivos definidos.

Tiramos a seguinte consequência do teorema acima.

Corolário 2.6.1 *As funções de Gauss*

$$v \in \mathbb{R}^m \mapsto e^{-c\|v\|^2}$$

são positivas definidas sobre $\mathbb{R}^m$, sempre que c é um escalar não negativo.

Encerramos a seção introduzindo formalmente as funções positivas definidas do tipo radial.

Definição 2.6.2 *A função contínua $h : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$ quando o núcleo radial*

$$(v,w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto h(\|v-w\|)$$

o é sobre $\mathbb{R}^m$.

Exemplo 2.6.2 *A função $r \in [0,\infty) \mapsto \cos r$ é positiva definida sobre $\mathbb{R}$.*

Averiguação: Segue da identidade $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ e da paridade da função cosseno. ■

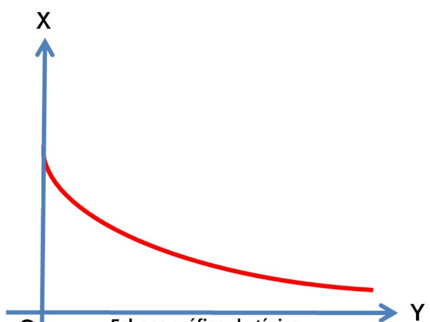
2.7 Positividade definida via função monótona

Relacionado ao estudo das funções positivas definidas, estão as funções completamente monótonas e, por consequência, as funções de Bernstein. Esta seção é dedicada ao estudo dessas duas classes de funções e a ligação destas com o tema da dissertação. As informações que transcrevemos aqui foram coletadas de [6, 16, 32, 53, 58].

Definição 2.7.1 *A função $\varphi : (0,\infty) \to [0,\infty)$ é completamente monótona quando as seguintes condições ocorrem:*

(1) $\varphi \in C^{\infty}(0,\infty)$.

(2) $(-1)^n \varphi^{(n)}(s) \geq 0, \quad n = 0,1,\ldots, s > 0.$



Esboço gráfico de típica função completamente monótona

Dependendo do contexto adotado, esta definição é feita considerando-se $\varphi(s) > 0$, $s \geq 0$. Neste trabalho, as imagens são sempre não negativas. É imediato que uma função completamente monótona é:

(1) contínua em $(0,\infty)$.

(2) monótona não crescente.

(3) convexa, isto é, $(-1)^n \varphi^{(n)}(s) \geq 0, \quad n = 0,1,\ldots, s > 0.$

Algumas exemplos estão a seguir.

Exemplo 2.7.1 *Sejam a e b escalares positivo e não negativo, respectivamente. As seguintes funções são completamente monótonas:*

(1) $\varphi(s) = (a+s)^{-b}$.

(2) $\varphi(s) = e^{-as^{\alpha}}$, $0 < \alpha \leq 1$.

(3) $\varphi(s) = (1+as^{\alpha})^{-(1+b)}$, $0 < \alpha \leq 1$.

(4) $\varphi(s) = s^{-a}$.

A caracterização da família de funções completamente monótonas decorre do Teorema de Bernstein -Widder ([58, p. 91]) ou ([59, p. 161]).

Teorema 2.7.1 (Bernstein -Widder) *A função* $\varphi : (0,\infty) \to [0,\infty)$ *é completamente monótona se e somente se*

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\mu(t), \quad s > 0,$$

em que μ *é uma medida positiva sobre* $[0,\infty)$.

Seguem observações relevantes da classe de funções do teorema precedente:

- Para uma função completamente monótona, a medida μ é unicamente determinada e dizemos que φ está associada a μ.
- Segue deste teorema que se φ é completamente monótona sobre $(0,\infty)$ associada a μ, então
$$\lim_{s\to 0^+} \varphi(s) = \mu([0,\infty)) \leq \infty.$$
- Além disso, se $\lim_{s\to 0^+} \varphi(s)$ é finito se e somente se μ é finita. Isto ocorre no caso em que φ tem domínio $[0,\infty)$ ou que φ é limitada. Este é o tipo de função completamente monótona que usaremos no trabalho.

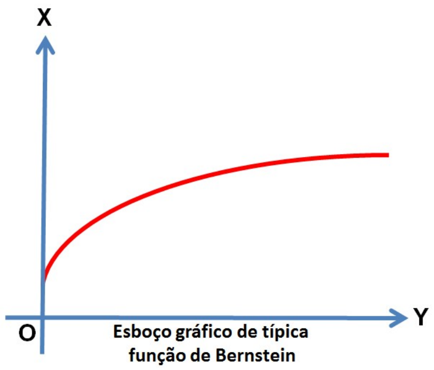
Introduzimos também, a outra classe de funções que mencionamos no início da seção.

Definição 2.7.2 *A função* $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *é de Bernstein quando as seguintes propriedades valem:*

(1) $\psi \in \mathrm{C}[0,\infty)$.

(2) $\psi \in \mathrm{C}^{\infty}(0,\infty)$.

(3) $(-1)^n \psi^{(n)}(s) \leq 0, \quad n = 1,\ldots, s > 0.$



Segue que uma função é de Bernstein se e somente se ela é não negativa e sua função derivada é completamente monótona. Adicionalmente, a função constante é a única função que é, ao mesmo tempo, completamente monótona e de Bernstein.

Paralelamente ao Teorema de Bernstein-Widder, as funções de Bernstein podem ser representadas de forma semelhante às funções completamente monótonas.

Teorema 2.7.2 *A função $\psi : (0,\infty) \to [0,\infty)$ é de Bernstein se e somente se existem constantes a e b não negativas tais que*

$$\psi(s) = a + bs + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-st}) d\nu(t), \quad s > 0,$$

em que ν é medida positiva sobre $(0,\infty)$ satisfazendo

$$\int_{(0,\infty)} \frac{t}{1+t} d\nu(t) < \infty.$$

Demonstração: Assumimos que ψ é uma função de Bernstein. Então, ψ' é completamente monótona sobre $(0,\infty)$. Pelo Teorema de Bernstein-Widder, existe uma medida μ positiva sobre $[0,\infty)$ tal que

$$\psi'(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\mu(t), \quad s > 0.$$

Como ψ é não negativa e crescente, $0 \leq a = \lim_{s \to 0^+} \psi(s) \in \mathbb{R}$. Consequentemente,

$$\psi(s) = a + \int_0^s \psi'(u) du = a + \int_0^s \left[b + \int_{(0,\infty)} e^{-ut} d\widetilde{\mu}(t) \right] du, \quad s > 0,$$

onde escrevemos $\mu = b + \widetilde{\mu}$, com $b = \mu(\{0\}) \geq 0$ e $\widetilde{\mu}$ sendo a restrição de μ sobre $(0,\infty)$, isto é,

$$\psi(s) = a + bs + \int_0^s \left[\int_{(0,\infty)} e^{-ut} d\widetilde{\mu}(t) \right] du, \quad s > 0.$$

Então, encontramos

$$\psi(s) = a + bs + \int_{(0,\infty)} \left[\int_0^s e^{-ut} du \right] d\widetilde{\mu}(t) = a + bs + \int_{(0,\infty)} \frac{1 - e^{-st}}{t} d\widetilde{\mu}(t), \quad s > 0.$$

Logo, a primeira afirmação do teorema ocorre para a medida ν definida nos subconjuntos J mensuráveis de $(0,\infty)$ por

$$\nu(J) = \int_J \frac{d\widetilde{\mu}(t)}{t}.$$

Para verificar a segunda afirmação, usamos a desigualdade

$$1-\frac{1}{e} \leq 1-\frac{1}{e^t}, \quad t \geq 1$$

e a positividade de ν para ver que

$$\int_1^\infty \left(1-\frac{1}{e}\right) d\nu(t) \leq \int_1^\infty \left(1-\frac{1}{e^t}\right) d\nu(t) \leq \int_{(0,\infty)} \left(1-e^{-t}\right) d\nu(t) = \psi(1)-a-b.$$

Em consequência,

$$\int_1^\infty \frac{t}{1+t} d\nu(t) \leq \int_1^\infty d\nu(t) < \infty.$$

Por outro lado,

$$\int_{(0,1]} \frac{t}{1+t} d\nu(t) \leq \int_{(0,1]} t d\nu(t) = \int_{(0,1]} d\widetilde{\mu}(t) \leq \int_{(0,\infty)} d\widetilde{\mu}(t) < \infty.$$

Assim,

$$\int_{(0,\infty)} \frac{t}{1+t} d\nu(t) < \infty,$$

que é a segunda afirmação do teorema.
A seguir, suponhamos que

$$\psi(s) = a+bs+\int_{(0,\infty)} (1-e^{-st}) d\nu(t), \quad s>0,$$

em que ν é uma medida positiva de Borel em $(0,\infty)$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $\int_0^\infty t(1+t)^{-1} d\nu(t) < \infty$. Afirmamos que $\int_{(0,1)} t\, d\nu(t) < \infty$ e $\int_{(1,\infty)} d\nu(t) < \infty$. De fato, se a primeira integral não for finita, então

$$\int_{(0,\infty)} \frac{t}{1+t} d\nu(t) \geq \int_{(0,1)} \frac{t}{1+t} d\nu(t) \geq \frac{1}{2} \int_{(0,1)} t d\nu(t) = \infty,$$

uma contradição. Se a segunda integral não for finita, então

$$\int_{(0,\infty)} \frac{t}{1+t} d\nu(t) \geq \int_{(1,\infty)} \frac{t}{1+t} d\nu(t) \geq \frac{1}{2} \int_{(1,\infty)} d\nu(t) = \infty,$$

outra contradição. Como

$$1-e^{-st} \leq \begin{cases} st, & 0<s\leq 1 \\ 1, & 1 \leq s < \infty, \end{cases}$$

a função g definida como

$$g(s) := \int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-st}\right) d\nu(t), \quad s > 0$$

está bem definida. Segue que

$$\frac{g(s+h) - g(s)}{h} = \int_{(0,\infty)} \frac{e^{-st}}{h} \left(1 - \frac{1}{e^{th}}\right) d\nu(t), \quad s > 0, \quad h > 0.$$

A estimativa

$$\left| \frac{e^{-st}}{h} \left(1 - \frac{1}{e^{th}}\right) \right| \leq \frac{e^{-st}}{h} th = te^{-st},$$

mostra que o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue ([21, p. 54]) pode ser usado para justificar a igualdade

$$\lim_{h \to 0^+} \int_{(0,\infty)} \frac{e^{-st}}{h} \left(1 - \frac{1}{e^{th}}\right) d\nu(t) = \int_{(0,\infty)} te^{-st} d\nu(t).$$

Um argumento análogo mostra que o mesmo vale para o outro limite lateral. Portanto, g é diferenciável e

$$g'(s) = \int_{(0,\infty)} te^{-st} d\nu(t), \quad s > 0.$$

Segue do Teorema de Bernstein que g' é completamente monótona, revelando que g é uma função de Bernstein. Como g é não negativa, a função $s \in (0,\infty) \mapsto \psi(s) = a + bs + g(s)$ é de Bernstein, o que completa a prova do teorema. ■

Corolário 2.7.1 *A função* $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *é de Bernstein se e somente se existe uma constante* $a \geq 0$ *tal que*

$$\psi(s) = a + \int_0^\infty (1 - e^{-st}) d\nu(t), \quad s > 0,$$

em que ν *é medida positiva sobre* $[0,\infty)$ *satisfazendo*

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t} d\nu(t) < \infty.$$

Neste teorema do final do capítulo, a positividade definida de e^{-cf} será destacada para certas funções f, incluindo as de Bernstein.

Teorema 2.7.3 *Valem as propriedades:*

(1) *Se* $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *é função condicionalmente negativa definida e* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *é completamente monótona, então* $\varphi \circ h$ *é positiva definida sobre* $\mathbb{R}^m$.

(2) *A função $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^m$ se e somente se $v \in \mathbb{R}^m \mapsto e^{-ch(\|v\|)}$ é positiva definida, sempre que c é um escalar não negativo.*

(3) **(Teorema de Micchelli)** *Se ψ é função de Bernstein, então $t \in \mathbb{R} \mapsto \psi(t^2)$ é condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^m$.*

(4) *Se ψ é função de Bernstein, então $v \in \mathbb{R}^m \mapsto e^{-c\psi(\|v\|^2)}$ é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$.*

Demonstração: Seja φ como na hipótese e usamos o Teorema de Bernstein-Widder para expressar

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\mu(t), \quad s \geq 0,$$

em que μ é uma medida de Borel, positiva e finita sobre $[0,\infty)$. Deste modo, o primeiro item é consequência do Teorema 2.3.1 e como a exponencial $s \in [0,\infty) \mapsto e^{-cs}$ $(c > 0)$ é completamente monótona, o segundo provém do primeiro.
Para a prova do terceiro item, notamos que pelo Teorema 2.3.1, a exponencial $v \in \mathbb{R}^m \mapsto e^{-t\|v\|^2}$ é positiva definida, mostrando que $v \in \mathbb{R}^m \mapsto 1 - e^{-t\|v\|^2}$ é condicionalmente negativa definida. Deste modo, a representação integral de ψ garantida pelo Corolário 2.7.1, prova a afirmação. Como o último item é consequência de **(2)** e **(3)**,, a prova está finalizada. ■

Este é o ponto do trabalho em que chamamos a atenção para o fato que o teorema precedente revela que dois tipos distintos de funções $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ podem ser usadas para produzir funções positivas definidas da forma exponencial e^{-cf} $(c > 0)$:

(1) Se h é condicionalmente negativa definida, então $v \in \mathbb{R}^m \mapsto e^{-ch(\|v\|)}$ é positiva definida.

(2) Se ψ é de Bernstein, então $v \in \mathbb{R}^m \mapsto e^{-c\psi(\|v\|^2)}$ é positiva definida.

Portanto, a primeira classes de funções é mais geral, uma vez que as composições

$$t \in [0,\infty) \mapsto \psi(t^2)$$

é uma subclasse da classe das funções condicionalmente negativas definidas.

Auxiliados pelo Exemplo 2.7.1 e pelo item **(1)** do teorema anterior, listamos funções positivas definidas sobre $\mathbb{R}^m$, finalizando esta seção.

Exemplo 2.7.2 *Sejam a e b escalares positivo e não negativo, respectivamente. As seguintes funções são positivas definidas sobre $\mathbb{R}^m$:*

(1) $f(v) = (\|v\|^2 + a)^{-b}$.

(2) $f(v) = e^{-a\|v\|^{2\alpha}}$, $0 < \alpha \leq 1$.

(3) $f(v) = (1 + a\|v\|^{2\alpha})^{-(1+b)}$, $0 < \alpha \leq 1$.

Capítulo 3

Funções Positivas Definidas sobre Espaço-temporal

Este é o capítulo principal do trabalho, no qual serão estudados os três problemas propostos na Introdução. As referências principais que servirão de ponto de partida à composição desta parte da pesquisa são [17, 23, 61].

3.1 Positividade definida via transformada de Fourier

Estudamos aqui a conexão entre função positiva definida e a transformada Fourier de uma função.

A estrutura da representação integral do Teorema de Bochner (Teorema 2.4.1) revela que toda função contínua positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$ é a transformada Fourier de alguma medida de Borel sobre $\mathbb{R}^m$, o que nos motiva explorar outras interligações de tranformadas de Fourier, introduzida a seguir, com função positiva definida.

Definição 3.1.1 *A transformada Fourier de uma função f integrável em $\mathbb{R}^m$ é a função*

$$\mathcal{F}\{f\}(v) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle v,w\rangle} f(w)dw, \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

Observamos que a constante multiplicando esta integral desaparece quando, opcionalmente, 2π é colocado antes do produto interno da exponencial da definição. Optamos por usar a transfomada como acima.

Para futura referência, calculamos a seguir, a transformada Fourier das gaussianas

$$w \in \mathbb{R}^m \mapsto e^{-\sigma\|w\|^2}\ (\sigma > 0),$$

em que constatamos que suas transformadas tornam-se também radiais. Recordamos que é uma propriedade geral que transformada Fourier de função radial é também radial ([58]).

Proposição 3.1.1 *Se σ é um escalar positivo, então*

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle v,w\rangle} e^{-\sigma\|v\|^2} dv = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{m/2} e^{-\|w\|^2/(4\sigma)}, \quad w \in \mathbb{R}^m.$$

Demonstração: No primeiro passo da prova, assumimos que $m = 1$ e consideramos a função $f(v) = e^{-\sigma v^2}$, $v \in \mathbb{R}$ $(\sigma > 0)$. Um cálculo direto revela que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}'(w) &= \frac{i}{2\sigma(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} -2\sigma v f(v) e^{-ivw} dv \\
&= \frac{i}{2\sigma(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ivw} f'(v) dv = -\frac{w}{2\sigma} \mathcal{F}\{f\}(w), \quad w \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

implicando em

$$\frac{d}{dw}\left(e^{w^2/(4\sigma)} \mathcal{F}\{f\}(w)\right) = e^{w^2/(4\sigma)} \left[\frac{w}{2\sigma} \mathcal{F}\{f\}(w) + \mathcal{F}\{f\}'(w)\right] = 0, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, usando o fato que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma v^2} dv = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{1/2},$$

segue que

$$\mathcal{F}\{f\}(w) = e^{-w^2/(4\sigma)} \mathcal{F}\{f\}(0) = \frac{1}{(2\sigma)^{1/2}} e^{-w^2/(4\sigma)}, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Assim, para $m = 1$, a fórmula da proposição é

$$(2\pi)^{1/2} \mathcal{F}\{f\}(w) = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{1/2} e^{-w^2/(4\sigma)}, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Para o caso m-dimensional, seja $F(v) = e^{-\sigma\|v\|^2}$, $v \in \mathbb{R}^m$. Utilizando o caso unidimensional, vemos que para todo $v \in \mathbb{R}^m$,

$$(2\pi)^{m/2} \mathcal{F}\{f\}(w) = \prod_{j=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\sigma v_j^2} e^{-iw_j v_j} dv_j = \prod_{j=1}^{m} \left[\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{1/2} e^{-w_j^2/(4\sigma)}\right].$$

Portanto, a proposição segue. ■

A conexão da Proposição 3.1.1 com a Seção 2.6, onde estudamos função positiva do tipo radial é agora óbvia. De fato, o Teorema 2.6.1 mostra que o lado direito da igualdade da proposição anterior é uma função positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$ to tipo radial. Por outro lado, isto é confirmado pela Proposição 2.4.2 que mostra que a função

$$w \in \mathbb{R}^m \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle v,w\rangle} e^{-\sigma\|v\|^2} dv$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$.

Dando continuidade, quando $C : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é uma função, usaremos a identificação

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} C(v,w)d(v,w) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} C(v,w)dv \right) dw.$$

Ainda, para w em $\mathbb{R}^n$, denotamos por $C^w : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ a w-seção à direita da função C e é definida como

$$C^w(v) = C(v,w), \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

Quando cada C^w for integrável, definimos $\eta \in \mathbb{R}^m \mapsto F_\eta$ como sendo

$$F_\eta(w) = \mathcal{F}\{C^w\}(\eta), \quad w \in \mathbb{R}^n.$$

As transformadas Fourier de F_η e C estão relacionadas como vemos a seguir.

Proposição 3.1.2 *Se $C : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é contínua e integrável, então*

$$\mathcal{F}\{C\}(\eta,u) = \mathcal{F}\{F_\eta\}(u), \quad (\eta,u) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Inicialmente, fixamos $(\eta,u) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ e assumimos que C é contínua e integrável em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Então, pelo Teorema de Fubini-Tonelli, a função C^w é integrável em $\mathbb{R}^m$, enquanto a integrabilidade de F_η é garantida pela desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F_\eta(w)|dw = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle v,\eta\rangle} C(v,w)dv \right| dw \leq \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} |C(v,w)|d(v,w).$$

Assim, as igualdades

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{C\}(\eta,u) &= \frac{1}{(2\pi)^{(m+n)/2}} \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} e^{-i(\langle \eta,v\rangle + \langle u,w\rangle)} C(v,w)d(v,w) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle u,w\rangle} \left(\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle \eta,v\rangle} C^w(v)dv \right) dw \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle u,w\rangle} F_\eta(w)dw \end{aligned}$$

fazem sentido e implicam na afirmação da proposição. ■

Colecionamos as propriedades recorrentes da transforma Fourier que nos serão úteis.

Proposição 3.1.3 *Sejam $f,g \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Valem:*

(1) *$\mathcal{F}\{f\}$ é contínua em $\mathbb{R}^m$.*

(2) *$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}\{f\}(w)g(w)dw = \int_{\mathbb{R}^m} f(w)\mathcal{F}\{g\}(w)dw$.*

(3) *$\mathcal{F}\{f(\cdot - v)\}(w) = e^{-i\langle w,v\rangle}\mathcal{F}\{f\}(w)$, $v,w \in \mathbb{R}^m$.*

Demonstração: As provas estão em [21, p. 249-251]. ■

Para efeitos da Proposição 3.1.4, a k-ésima função da sequência (g_k) é definida pela Gaussiana normalizada $g_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_k(v) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{m/2} e^{-k\|v\|^2}, \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

Recordamos também que uma função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é *suavemente decrescente* quando existir um escalar M e um inteiro não negativo l tal

$$|f(v)| \leq M\|v\|^l \quad \text{quando} \quad \|v\| \to \infty.$$

Destacamos as propriedades requeridas para (g_k) para alçarmos nosso objetivo.

Proposição 3.1.4 *As seguintes propriedades valem para (g_k):*

(1) *Cada g_k é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$.*

(2) *$\|g_k\|_1 = 1$, $k = 1, \ldots$.*

(3) *$\mathcal{F}\{g_k\} = (2\pi)^{-m/2}e^{-\|\cdot\|^2/(4k)}$, $k = 1, \ldots$.*

(4) *$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{g_k\}\} = g_k$, $k = 1, \ldots$.*

(5) *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, então $\mathcal{F}\{f\}$ é suavemente decrescente.*

(6) *Se f é contínua em $\mathbb{R}^m$ e suavemente decrescente, então $f(w) = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f(v)g_k(v-w)dv$, $w \in \mathbb{R}^m$.*

Demonstração: A propriedade **(1)** provém do Exemplo 2.3.1 e do Teorema 2.6.1. A segunda segue da Proposição 3.1.1. Os itens **(3)** e **(4)** são obtidos da Proposição 3.1.1. A afirmação **(5)** está em [21, p. 249] e a sexta em [58, p. 56-57]. ■

Sob condições apropriadas, obtém-se a função original a partir da sua transformada por meio da transformada inversa.

Proposição 3.1.5 *Seja f uma função contínua de $L^1(\mathbb{R}^m)$. Valem:*

(1) *Se $\mathcal{F}\{f\} \in L^1(\mathbb{R}^m)$, então*

$$f(v) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}\{f\}(w) e^{i\langle v,w\rangle} dw, \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

(2) *Se $\mathcal{F}\{f\}$ é não negativa, então $\mathcal{F}\{f\} \in L^1(\mathbb{R}^m)$ e f é dada pela integral acima.*

Demonstração: A prova de **(1)** é encontrada em [22, p. 111], enquanto que a prova do segundo item é encontrado em [54, p. 15]. ■

Uma observação importante é o fato que sob a hipótese **(2)**, a função f é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$, conforme a Proposição 2.4.2.

O teorema a seguir é de suma importância para este trabalho. Ele exibe uma classe de funções positivas definidas que possuem transformada Fourier não negativa e reciprocamente. A prova será exibida, uma vez que não a encontramos na literatura. Portanto, trata-se de uma contribuição. O lema seguinte servirá de auxílio.

Lema 3.1.1 *Se μ é uma medida de Borel e finita sobre $\mathbb{R}^m$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle v,\eta\rangle} e^{-i\langle v,w\rangle} e^{-\sigma\|v\|^2} d\mu(\eta) dv = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle v,\eta\rangle} e^{-i\langle v,w\rangle} e^{-\sigma\|v\|^2} dv d\mu(\eta)\, (\sigma > 0),\, w \in \mathbb{R}^m.$$

Demonstração: Assuma que μ é como na hipótese. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} \left| e^{i\langle v,\eta\rangle} e^{-i\langle v,w\rangle} e^{-\sigma\|v\|^2} \right| d\mu(\eta) dv = \mu(\mathbb{R}^m) \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\sigma\|v\|^2} dv,$$

onde $\mu(\mathbb{R}^m)$ é finita. Agora, usando a Proposição 3.1.1, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} \left| e^{i\langle v,\eta\rangle} e^{-i\langle v,w\rangle} e^{-\sigma\|v\|^2} \right| d\mu(\eta) dv = \mu(\mathbb{R}^m) \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{m/2}.$$

Portanto, o lema segue do Teorema de Fubini-Tonelli. ■

Teorema 3.1.1 *Seja f uma função contínua e integrável em $\mathbb{R}^m$. Então, a função f é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$ se e somente se $\mathcal{F}\{f\}$ é não negativa.*

Demonstração: Assuma que f é contínua e positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$. Então, invocamos o Teorema de Bochner para expressar

$$f(v) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle v,\eta\rangle} d\mu(\eta), \quad v \in \mathbb{R}^m,$$

onde μ é uma medida de Borel, finita e positiva sobre $\mathbb{R}^m$. Como a continuidade de $\mathcal{F}\{f\}$ é garantida pela Proposição 3.1.3, pelos itens **(5)** e **(6)** da Proposição 3.1.4, a sequência (g_k) pode ser usada para deduzir que

$$\mathcal{F}\{f\}(w) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}\{f\}(v) g_k(v-w)dv, \quad w \in \mathbb{R}^m.$$

Agora, os itens **(2)** e **(3)** da Proposição 3.1.3 justificam as igualdades

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}(w) &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f(v)\mathcal{F}\{g_k(\cdot - w)\}(v)dv \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f(v)\mathcal{F}\{g_k\}(v)e^{-i\langle v,w\rangle}dv \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle v,\eta\rangle}e^{-i\langle v,w\rangle}\mathcal{F}\{g_k\}(v)d\mu(\eta)dv, \quad w \in \mathbb{R}^m.
\end{aligned}$$

Usamos a Proposição 3.1.4 -**(3)** para ver que $\mathcal{F}\{g_k\} = (2\pi)^{-m/2}e^{-\|\cdot\|^2/(4k)}$ e, em seguida o Lema 3.1.1 para inverter a ordem de integração da última integral dupla, obtendo

$$\mathcal{F}\{f\}(w) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle v,w-\eta\rangle}\mathcal{F}\{g_k\}(v)dv\right] d\mu(\eta), \quad w \in \mathbb{R}^m.$$

Recordando a definição de $\mathcal{F}$ e auxiliados pela Proposição 3.1.4 -**(4)**, vemos que

$$(2\pi)^{-m/2}\mathcal{F}\{f\}(w) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{g_k\}\}(w-\eta)d\mu(\eta) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_k(w-\eta)d\mu(\eta), w \in \mathbb{R}^m.$$

Como as funções g_k são não negativas e μ é positiva, a afirmação sobre $\mathcal{F}\{f\}$ ocorre.

Reciprocamente, suponha que f é contínua, integrável em $\mathbb{R}^m$ e $\mathcal{F}\{f\} \geq 0$. Então, a Proposição 3.1.5 mostra que $\mathcal{F}\{f\} \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Pela mesma proposição

$$f(v) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}\{f\}(w)e^{i\langle v,w\rangle}dw, \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

Agora, a positividade definida de f segue da Proposição 2.4.2. Portanto, a prova do teorema está finalizada. ■

3.2 Positividade definida sobre espaço-temporal

Os assuntos tratados nas próximas seções, autorelacionam-se e constituem a parte principal deste trabalho. Portanto, todas as seções precedentes foram preparatórias para o que virá na direção do fechamento da dissertação.

Nesta seção, investigamos o principal resultado do artigo [17] datado de 1999 devido a Cressie-Huang, contando com mais de 696 citações em trabalhos publicados. A nomenclatura 'espaço-temporal' que usamos, refere-se ao produto cartesiano

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R} = \{(v,t) \,:\, v \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R}\}$$

ou mais geralmente,

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \{(v,w) \,:\, v \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n\}.$$

Mais uma vez a identificação

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} C(v,w)d(v,w) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} C(v,w)dv \right) dw$$

será usada. A notação C para as funções tratadas aqui é inspirada na Teoria Probabilística, onde a classe de funções que lidaremos nesta parte, lá servem de modelo em processos de random, onde normalmente C é denominada *função de covariância*.

A versão da Definição 2.2.1 quando $X = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ vem a seguir.

Definição 3.2.1 *A função $C : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é positiva definida quando o núcleo*

$$(v,w,v',w') \in (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \mapsto C(v-v', w-w')$$

é positivo definido sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

O Teorema Cressie-Huang estabelece uma correspondência biunívoca entre a classe de funções acima introduzidas com certas funções positivas definidas com representação integral. Chamamos a atenção para o fato que a versão do teorema que provaremos não é encontrada na literatura. Nosso teorema é mais geral do que a versão cotada por Gneiting, sendo nossa prova comparativamente mais simples ([23]). Para tanto, recordamos que

$$F_\eta(w) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle \eta, v\rangle} C(v,w)dv, \quad (\eta, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

Teorema 3.2.1 *Seja $C : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma função contínua e integrável. São equivalentes:*

(**1**) *A função C é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.*

(**2**) $\mathcal{F}(C)(\eta,u) \geq 0$, $(\eta,u) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

(**3**) *Para cada $\eta \in \mathbb{R}^m$, F_η é positiva definida sobre $\mathbb{R}^n$.*

(**4**) *Para cada $\eta \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}\{F_\eta\}(u) \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Fixemos $(\eta,u) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e começamos usando a Proposição 3.1.2 para ver que as funções F_η são integráveis em $\mathbb{R}^n$ e a igualdade

$$\mathcal{F}\{C\}(\eta,u) = \mathcal{F}\{F_\eta\}(u), \quad (\eta,u) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

ocorre. Como, para cada $w \in \mathbb{R}^n$, a função $v \in \mathbb{R}^m \mapsto e^{-i\langle \eta, v\rangle} C(v,w)$ é dominada por $C(\cdot, w) \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{w \in w_0} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle \eta, v\rangle} C(v,w) dv = (2\pi)^{m/2} F_\eta(w_0),$$

para w_0 arbitrariamente fixado em $\mathbb{R}^n$. Logo, as funções F_η são contínuas em $\mathbb{R}^n$. Portanto, as equivalências entre os itens do enunciado são consequências do Teorema 3.1.1 e da igualdade do início da prova. ■

Esta caracterização é um ponto crucial em muitos resultados importantes dentro de contextos em que as funções requerem domínios do tipo espaço-temporal. Os exemplos mais significativos são as modelagens que ocorrem para a resolução de problemas em Teoria Estocástica. Entretanto, não abordamos este tipo de exemplo para não desfocar dos objetivos desta investigação.

Para finalizar a seção, destacamos os pontos em que a versão do Teorema de Cressie-Huang aqui provado difere da versão provada por Gneiting.

Teorema 3.2.2 *Seja $C : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua, limitada, simétrica e integrável. Então, a função C é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ se e somente se, para quase todo $\eta \in \mathbb{R}^m$, a função $u \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{F}\{F_\eta\}(u)$ é positiva definida.*

3.3 Positividade definida da classe Gneiting

Nesta seção, estudamos a positividade definida da classe Gneiting, isto é, das funções radiais possuindo a representação entrelaçada

$$G(r,t) = \frac{1}{g(t)^p} f\left(\frac{r^2}{g(t)}\right), \quad r,t \geq 0.$$

A princípio, as funções f e g são contínuas e positivas no domínio $[0, \infty)$. Esta classe mista foi introduzida por Gneiting em [23] e, recentemente, tem se tornado popular devido sua aplicabilidade à resolução de questões em Geoestatística que frequentemente fazem uso dessa classe e, por isso, vem chamando a atenção de muitos pesquisadores ([24, 25, 42, 43, 44, 46, 52]). Objetivamente, eles têm evidado esforços para responder a questão:

Para quais f e g e quais potências p, a função de Gneiting é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$?

Nosso objetivo não é o de investigar profundamente este problema, uma vez se tratar de um assunto em plena expansão com geração de muitos trabalhos na atualidade ([39, 41, 57]).

Por isso, vamos nos ater tão simplesmente a esta classe como foi originalmente introduzida por Gneiting.

A definição de função positiva definida no sentido radial está a seguir.

Definição 3.3.1 *A função contínua* $H : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *é positiva definida sobre* $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ *quando o núcleo radial* $(v,w,v',w') \in (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \mapsto H(\|v-v'\|,\|w\|)$ *o é.*

Frisamos que nossa apresentada para o teorema a seguir é mais simples, uma vez que as funções da prova de Gneiting são construídas de modo intrínseco.

Teorema 3.3.1 *Se* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *é completamente monótona e* $h : [0,\infty) \to (0,\infty)$ *é condicionalmente negativa definida sobre* $\mathbb{R}$*, então*

$$G(r,t) = \frac{1}{h(t)^{m/2}}\varphi\left(\frac{r^2}{h(t)}\right), \quad (r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$*.*

Demonstração: Inicialmente, usamos o Teorema 2.6.1 para ver que a função

$$r \in [0,\infty) \mapsto \frac{e^{-r^2/\sigma}}{\sigma^{m/2}}\,(\sigma > 0)$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$. Em particular, cada função

$$r \in [0,\infty) \mapsto \frac{e^{-sr^2/h(t)}}{h(t)^{m/2}} \quad s > 0, t \geq 0$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$, para toda função $h : [0,\infty) \to (0,\infty)$. Por outro lado, a Proposição 3.1.1 nos conduz a representação integral

$$\frac{e^{-s\|v\|^2/h(t)}}{h(t)^{m/2}} = \frac{1}{2^m(\pi s)^{m/2}}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle w,v\rangle} e^{-\|w\|^2 h(t)/(4s)} dw, \quad s > 0,\, (v,t) \in \mathbb{R}^m \times [0,\infty).$$

Agora, para cada $w \in \mathbb{R}^m$, o núcleo $(v,v') \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto e^{-i\langle w,v-v'\rangle}$ é positivo definido. Por outro lado, se h é condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}$, então pelo Teorema 2.7.3, a função radial $t \in [0,\infty) \mapsto e^{-\|w\|^2 h(t)/(4s)}$ é positiva definida sobre $\mathbb{R}$, sempre que $s > 0$ e $w \in \mathbb{R}^m$. Então, do Lema 2.1.2, inferimos que as funções

$$(v,t) \in \mathbb{R}^m \times [0,\infty] \mapsto e^{-i\langle w,v\rangle} e^{-\|w\|^2 h(t)/(4s)}, \quad s > 0$$

são positivas definidas sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. Equivalentemente, as funções

$$(r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \mapsto \frac{e^{-sr^2/h(t)}}{h(t)^{m/2}}, \quad s > 0$$

são positivas definidas sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. Portanto, assumindo que φ é completamente monótona, vemos que a função

$$(r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \mapsto \frac{1}{h(t)^{m/2}} \varphi\left(\frac{r^2}{h(t)}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-sr^2/h(t)}}{h(t)^{m/2}} d\mu(s)$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, onde μ é como no Teorema de Bernstein. ■

Imitando os passos da prova anterior, estendemos à classe de Gneiting sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3.2 *Se a função $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é completamente monótona e $h : [0,\infty) \to (0,\infty)$ é condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^n$, então*

$$G(r,t) = \frac{1}{h(t)^{m/2}} \varphi\left(\frac{r^2}{h(t)}\right), \quad (v,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Agora, comparamos o teorema acima com a versão de Gneiting. De fato, observando-se o comentário que segue o Teorema 2.7.3, a classe introduzida por Gneiting vem a seguir. Na verdade, ela consiste em substituir h da versão anterior por uma função de Bernstein composta com t^2, sendo uma classe mais restrita que as h que são condicionalmente negativas definidas, conforme destacado no fim do Capítulo 2.

Teorema 3.3.3 *Se $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é completamente monótona e $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ é uma função de Bernstein, então*

$$G(r,t) = \frac{1}{\psi(t^2)^{m/2}} \varphi\left(\frac{r^2}{\psi(t^2)}\right), \quad (r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Segue diretamente do teorema anterior, uma vez que $t \in [0,\infty) \mapsto \psi(t^2)$ é condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^n$. ■

Encerramos a seção exibindo uma prova alternativa da classe de Gneiting, em que o Teorema de Cressie-Huang é o ingrediente essencial.

Teorema 3.3.4 *Se $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é completamente monótona e $h : [0,\infty) \to (0,\infty)$ é condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^n$, então*

$$G(r,t) = \frac{1}{h(t)^{m/2}} \varphi\left(\frac{r^2}{h(t)}\right), \quad (r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Consideremos, para cada $a > 0$, a função

$$(r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \mapsto H(r,t) = e^{-at^2} \frac{e^{-\frac{r^2}{h(t)}s}}{h(t)^{m/2}}, \quad s \geq 0.$$

Obviamente H é contínua em todo seu domínio. A seguir, usamos a Proposição 3.1.1 para ver que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{e^{-\frac{\|u\|^2}{h(t)}s}}{h(t)^{m/2}} du = \frac{\pi^{m/2}}{s^{m/2}}, \quad s > 0.$$

Pela mesma proposição,

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} H(\|u\|, \|v\|) d(u,v) = \frac{\pi^{m/2}}{s^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|v\|^2} dv = \frac{\pi^{(m+n)/2}}{s^{m/2} a^{n/2}},$$

mostrando que $(u,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto H(\|u\|, \|v\|)$ é integrável, sempre que $s > 0$. Na sequência, utilizamos uma vez mais a Proposição 3.1.1 para expressar

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle u,w \rangle} H(\|u\|, t) du = \frac{\pi^{m/2}}{s^{m/2}} e^{-at^2} e^{-\|w\|^2 \frac{h(t)}{4s}}, \quad s > 0, \, (w,t) \in \mathbb{R}^m \times [0,\infty).$$

Pelo Teorema 2.7.3, para cada $s > 0$ e $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^n$, as funções $v \in \mathbb{R}^n \mapsto e^{-h(\|v\|)\frac{\|w\|^2}{4s}}$ e $v \in \mathbb{R}^n \mapsto e^{-a\|v\|^2}$ são funções positivas definidas, implicando, pelo Lema de Schur, que

$$v \in \mathbb{R}^n \mapsto e^{-h(\|v\|)\frac{\|w\|^2}{4s}} e^{-a\|v\|^2}$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^n$, quando $s > 0$ e $w \in \mathbb{R}^m$. Pelo Teorema 3.2.1, concluimos que a função $(u,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto H(\|u\|, \|v\|)$ é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Então, recordando o Teorema 2.2.1, vemos que

$$(r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \mapsto \frac{e^{-\frac{r^2}{h(t)}s}}{h(t)^{m/2}}, \quad s \geq 0$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Como integração em s preserva positividade definida, se ν é a medida finita e positiva em $[0,\infty)$ que representa a função completamente monótona $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, garantida pelo Teorema 2.7.1, então

$$\int_0^\infty \frac{1}{h(t)^{m/2}} e^{-\frac{r^2}{h(t)}s} d\nu(s) = \frac{1}{h(t)^{m/2}} \varphi\left(\frac{r^2}{h(t)}\right), \quad (r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Assim, a prova está finalizada. ■

A seguinte questão chamou nossa atenção durante a pesquisa, cuja resposta não sabemos:

A posividade definida de G ocorre quando r^2 for substituída por uma função condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^n$?

Corolário 3.3.1 *Let X and Y be nonempty sets, $\phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ a bounded and completely monotone function, $g : X \times X \to (0,\infty)$ a kernel in $CND_1(X)$, and $h : Y \times Y \to \mathbb{R}$ an exponentially positive definite function. If $r \geq 1/2$, then the kernel $G : (X \times Y)^2 \to \mathbb{R}$ given by*

$$G((x,y),(x',y')) = \frac{1}{g(x,x')^r}\phi\left(\frac{h(y,y')^2}{g(x,x')}\right),$$

belong to $PD_1(X \times Y)$.

Para encerrar a seção, citamos um exemplo que é justificado pelo teorema anterior, auxiliado pelo Exemplo 2.7.1 - (1).

Exemplo 3.3.1 *A função radial*

$$G(r,t) = \frac{1}{t^{m-1}\sqrt{r^2+t^2}}, \quad (r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Averiguação: Basta notar que

$$G(r,t) = \frac{1}{h(t)^{m/2}}\varphi\left(\frac{r^2}{h(t)}\right), \quad (r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty),$$

em que $h(t) = t^2$ é condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^n$ e $\varphi(s) = (1+s)^{-1/2}$, $s \geq 0$ é completamente monótona. ■

3.4 Positividade definida sobre esfera-temporal

Da mesma forma que positividade definida foi estudada sobre espaço-temporal, na seção anterior, aqui o mesmo será feito para esfera-temporal. A motivação para o estudo apresentado nesta parte do trabalho vem de White e Porcu ([61]).

A nomenclatura 'esfera-temporal' refere-se ao produto cartesiano

$$\mathbb{S}^m \times \mathbb{R} = \{(\eta,u) : \eta \in \mathbb{S}^m, u \in \mathbb{R}\}$$

ou mais geralmente,

$$\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}^n = \{(\eta, v) : \eta \in \mathbb{S}^m, v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Consequentemente, o conjunto $[0,\pi] \times \mathbb{R}$, também, é frequente nesta seção.

Quando $\mathcal{C} : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função e θ está fixado em $[0,\pi]$, escrevemos $\mathcal{C}_\theta$ para a função θ-seção $\mathcal{C}_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\mathcal{C}_\theta(u) = \mathcal{C}(\theta, u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

A versão da Definição 2.2.1 quando $X = \mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ vem a seguir, onde d_m é a distância geodésica sobre a esfera como em (2.1).

Definição 3.4.1 *A função $\mathcal{C} : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é positiva definida quando o núcleo*

$$(v, u, v', u') \in (\mathbb{S}^m \times \mathbb{R})^2 \mapsto \mathcal{C}(d_m(v, v'), u - u')$$

é positivo definido sobre $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$.

Uma extensão do Teorema de Shoenberg (Teorema 2.5.1) como transcrito na sequência foi recentemente provada por Berg e Porcu ([10]).

Teorema 3.4.1 *Seja $\mathcal{C} : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Então, a função $\mathcal{C}$ é positiva definida sobre $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ se e somente se*

$$\mathcal{C}(\theta, u) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^m(u) \mathcal{G}_k^m(\cos\theta), \quad \mathcal{C}(0,0) < \infty,$$

onde as funções f_k^m são positivas definidas sobre $\mathbb{R}$.

Auxiliados pela Proposição 2.5.2, inferimos que as funções f_k^m da expansão acima possuem a representação integral

$$f_k^m(u) = \frac{(m+2k-1)P_k^m(1)\Gamma((m+1)/2)}{\sqrt{\pi}(m-1)\Gamma(m/2)} \int_0^\pi \mathcal{C}(\theta, u) \mathcal{G}_k^m(\cos\theta) \operatorname{sen}^{m-1}\theta \, d\theta, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Frisamos que as funções definidas por esta integral serão sistematicamente usadas nesta seção, sem mencioná-la.

Registramos duas consequências imediatas do teorema precedente.

Corolário 3.4.1 *Seja $\mathcal{C} : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função contínua e positiva definida sobre $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$. Valem:*

(1) *As funções f_k^m são contínuas em $\mathbb{R}$.*

(2) $|C(\theta,u)| < \infty$, $(\theta,u) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}$.

A partir da positividade definida de $\mathcal{C}$, exibimos uma condição suficiente para que as funções $\theta \in [0,\pi] \mapsto \mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(\tau)$ sejam positivas definidas sobre $\mathbb{S}^m$.

Teorema 3.4.2 *Seja $\mathcal{C} : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função contínua e positiva definida. Se $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k^m|$ é integrável em $\mathbb{R}$, então as funções*

$$\theta \in [0,\pi] \mapsto \mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}$$

são limitadas e positivas definidas sobre $\mathbb{S}^m$.

Demonstração: Assuma a hipótese sobre $\mathcal{C}$. Então, as funções f_k^m são positivas definidas sobre $\mathbb{R}$. Além disso, se

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} |f_k^m(u)|\, du < \infty,$$

então $\mathcal{C}_\theta$ e cada f_k^m são integráveis em $\mathbb{R}$. Para continuar a prova, fixamos $\tau \in \mathbb{R}$ e notamos que, para todo inteiro não negativo n,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} e^{-i\tau u} f_k^m(u)\, \mathcal{G}_k^m(\cos\theta) \right| \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{\infty} |f_k^m(u)|, \quad (\theta,u) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}.$$

A hipótese de integrabilidade do início da prova nos permite usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para justificar que

$$\mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau u} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k^m(u)\, \mathcal{G}_k^m(\cos\theta) \right] du = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}\{f_k^m\}(\tau)\, \mathcal{G}_k^m(\cos\theta), \quad \theta \in [0,\pi].$$

Logo,

$$|\mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(\tau)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} |f_k^m(u)| du < \infty, \quad \theta \in [0,\pi],$$

provando a primeira afirmação do teorema. Agora, com auxílio do corolário anterior, vemos que as funções f_k^m são contínuas, integráveis e positivas definidas sobre $\mathbb{R}$. Consequentemente, pelo Teorema 3.1.1, as transformadas $\mathcal{F}\{f_k^m\}$ são não negativas. Portanto, a segunda afirmação do teorema segue do clássico Teorema de Schoenberg para $\mathbb{S}^m$. ■

Notamos que o Lema de Fatou ([21, p. 52]) implica na veracidade da afirmação

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} |f_k^m(u)|\, du < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{k=0}^{\infty} |f_k^m(u)|\, du < \infty.$$

No entanto, a recíproca dessa afirmação não ocorre, revelando que a hipótese de integrabilidade do teorema anterior é mais fraca que a do seguinte teorema.

Teorema 3.4.3 *Seja $C : [0,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ uma função contínua e positiva definida sobre $\mathbb{S}^m\times\mathbb{R}$. Se $\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_k^m(u)|\,du$ é finita, então as funções*

$$\theta\in[0,\pi]\mapsto \mathcal{F}\{C_\theta\}(\tau),\quad \tau\in\mathbb{R}$$

são limitadas e positivas definidas sobre $\mathbb{S}^m$.

A recíproca do Teorema 3.4.2 é o assunto tratado na sequência.

Teorema 3.4.4 *Seja $C : [0,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ uma função contínua tal que as funções C_θ pertencem a $L^1(\mathbb{R})$. Se as funções*

$$\theta\in[0,\pi]\mapsto \mathcal{F}\{C_\theta\}(u),\quad u\in\mathbb{R}$$

são positivas definidas sobre $\mathbb{S}^m$, então C é positiva definida sobre $\mathbb{S}^m\times\mathbb{R}$.

Demonstração: Suponhamos que as funções $\theta\in[0,\pi]\mapsto\mathcal{F}\{C_\theta\}(u)$ são positivas definidas sobre $\mathbb{S}^m$. Logo, pelo Teorema de Schoenberg,

$$\mathcal{F}\{C_\theta\}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k^m(u)\,\mathcal{G}_k^m(\cos\theta),\, g_k^m(u)\geq 0,\, \mathcal{F}\{C_0\}(u)<\infty,\quad (\theta,u)\in[0,\pi]\times\mathbb{R},$$

onde

$$|e^{iuv}g_k^m(v)\,\mathcal{G}_k^m(\cos\theta)|\leq g_k^m(v)\leq\mathcal{F}\{C_0\}(v)$$

e

$$\left|\sum_{k=0}^{n}e^{i\tau v}g_k^m(v)\,\mathcal{G}_k^m(\cos\theta)\right|\leq\mathcal{F}\{C_0\}(v),\quad n=0,1,\ldots.$$

Como $\mathcal{F}\{C_0\}$ é não negativa, pela Proposição 3.1.5, a função $\mathcal{F}\{C_0\}$ é integrável em $\mathbb{R}$. Consequentemente, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue justifica a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}}e^{iuv}\mathcal{F}\{C_\theta\}(v)dv=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\mathbb{R}}e^{iuv}g_k^m(v)dv\right]\mathcal{G}_k^m(\cos\theta),\quad(\theta,u)\in[0,\pi]\times\mathbb{R}.$$

Desde que a integrabilidade de $\mathcal{F}\{C_0\}$ implica na de $\mathcal{F}\{C_\theta\}$, pela mesma proposição

$$C(\theta,u)=C_\theta(u)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\mathbb{R}}e^{iuv}g_k^m(v)dv\right]\mathcal{G}_k^m(\cos\theta),\quad(\theta,u)\in[0,\pi]\times\mathbb{R}.$$

Como g_k^m é não negativa, pela Proposição 2.4.2, os coeficientes da expansão anterior são funções positivas definidas sobre $\mathbb{R}$. A convergência de

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\mathbb{R}}e^{iuv}g_k^m(v)dv\right]$$

é clara. Portanto, o resultado agora segue do Teorema 3.4.1. ■

A seguir está uma condição suficiente para que as funções f_k^m sejam positivas definidas.

Teorema 3.4.5 *Seja $\mathcal{C}:[0,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ uma função contínua tal que $\mathcal{C}_\theta$ é integrável em $\mathbb{R}$. Se as funções*

$$\theta\in[0,\pi]\mapsto \mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(u),\quad u\in\mathbb{R}$$

são positivas definidas sobre $\mathbb{S}^m$, então as funções f_k^m são positivas definidas sobre $\mathbb{R}$.

Demonstração: Suponhamos que $\theta\in[0,\pi]\mapsto\mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(u)$ $(u\in\mathbb{R})$ é positiva definida sobre $\mathbb{S}^m$ e $\mathcal{F}\{\mathcal{C}_0\}\in L^1(\mathbb{R})$. Logo, para cada $u\in\mathbb{R}$, pelo Teorema 2.5.1,

$$\mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k^m(u)\,\mathcal{G}_k^m(\cos\theta),\quad g_k^m(u)\geq 0,\ \mathcal{F}\{\mathcal{C}_0\}(u)<\infty,\ \theta\in[0,\pi],$$

onde

$$g_k^m(u)=\frac{(m+2k-1)P_k^m(1)\Gamma((m+1)/2)}{\sqrt{\pi}(m-1)\Gamma(m/2)}\int_0^\pi\mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(u)\,\mathcal{G}_k^m(\cos\theta)\,\mathrm{sen}^{m-1}\theta\,d\theta,\quad u\in\mathbb{R}.$$

Como na prova anterior, as funções $\mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}$ são integráveis em $\mathbb{R}$. Então, pela Proposição 3.1.5,

$$\mathcal{C}(\theta,u)=\frac{1}{(2)\pi)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}}e^{iuv}\mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(v)dv,\quad(\theta,u)\in[0,\pi]\times\mathbb{R}.$$

Logo, o Teorema de Fubini-Tonelli e a definição de f_k^m como em (3.1) mostram que, para cada $u\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_l^m(u) &= \frac{(m+2l-1)P_l^m(1)\Gamma((m+1)/2)}{\pi(m-1)\Gamma(m/2)\sqrt{2}}\int_0^\pi\left[\int_{\mathbb{R}}e^{iuv}\mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(v)dv\right]\mathcal{G}_l^m(\cos\theta)\mathrm{sen}^{m-1}\theta\,d\theta\\
&= \frac{(m+2l-1)P_l^m(1)\Gamma((m+1)/2)}{\pi(m-1)\Gamma(m/2)\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}}e^{iuv}\left[\int_0^\pi\mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(v)\,\mathcal{G}_l^m(\cos\theta)\mathrm{sen}^{m-1}\theta\,d\theta\right]dv.
\end{aligned}$$

Empregando a soma do início da prova, obtemos, então a igualdade

$$\int_0^\pi\mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(v)\,\mathcal{G}_l^m(\cos\theta)\mathrm{sen}^{m-1}\theta\,d\theta=\int_0^\pi\sum_{k=0}^{\infty}g_k^m(v)\,\mathcal{G}_k^m(\cos\theta)\,\mathcal{G}_l^m(\cos\theta)\mathrm{sen}^{m-1}\theta\,d\theta.$$

que mediante o uso do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, torna-se

$$\int_0^\pi\mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(v)\,\mathcal{G}_l^m(\cos\theta)\mathrm{sen}^{m-1}\theta\,d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}g_k^m(v)\int_0^\pi\mathcal{G}_k^m(\cos\theta)\,\mathcal{G}_l^m(\cos\theta)\mathrm{sen}^{m-1}\theta\,d\theta.$$

Agora, a ortogonalidade dos polinômios de $\mathcal{G}_k^m$ garantida pela Proposição 2.5.2, implica em

$$\int_0^{\pi} \mathcal{F}\{C_\theta\}(v)\,\mathcal{G}_l^m(\cos\theta)\mathrm{sen}^{m-1}\theta\,d\theta = \frac{\sqrt{\pi}(m-1)\Gamma(m/2)}{(m+2l-1)P_l^m(1)\Gamma((m+1)/2)}g_l^m(v).$$

Em consequência,

$$f_l^m(u) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} e^{iuv}g_l(v)dv.$$

Agora, segue do Teorema 3.1.1 que $\mathcal{F}\{C_\theta\}$ é não negativa. Assim, pela Proposição 2.4.2, cada f_k^m é positiva definida sobre $\mathbb{R}$. ■

Finalmente, os resultados obtidos nesta seção estão sintetizados no teorema a seguir, exibindo condições necessárias e suficientes para que C seja positiva definida.

Teorema 3.4.6 *Seja $C : [0,\pi]\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função contínua tal que C_θ e $\sum_{k=0}^{\infty}|f_k^m|$ são integráveis em $\mathbb{R}$. São equivalentes:*

(1) *C é positiva definida sobre $\mathbb{S}^m\times\mathbb{R}$.*

(2) *As funções $\theta\in[0,\pi]\mapsto\mathcal{F}\{C_\theta\}(u)$, $u\in\mathbb{R}$ são positivas definidas sobre $\mathbb{S}^m$.*

(3) *As funções f_k^m são contínuas, positivas definidas sobre $\mathbb{R}$ e a soma, cujo termo geral é $f_k^m(0)$, é convergente.*

Demonstração: A implicação de **(1)** para **(2)** é o Teorema 3.4.2, enquanto que de **(2)** para **(1)** segue do Teorema 3.4.4. Como a equivalência entre **(1)** e **(3)** é o Teorema 3.4.1, a demonstração está concluída. ■

As provas acima podem ser adaptadas substituindo $\mathbb{S}^m\times\mathbb{R}$ por $\mathbb{S}^m\times\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.4.7 *Seja $C : [0,\pi]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ uma função contínua tal que C_θ é integrável em $\mathbb{R}$. Considere que a sequência das funções F_k^m definidas por*

$$F_k^m(u) = \frac{(m+2k-1)P_k^m(1)\Gamma((m+1)/2)}{\sqrt{\pi}(m-1)\Gamma(m/2)}\int_0^{\pi} C(\theta,u)\,\mathcal{G}_k^m(\cos\theta)\,sen^{m-1}\theta\,d\theta, \quad u\in\mathbb{R}^n$$

são tais que $\sum_{k=0}^{\infty}|F_k^m|$ é integrável em $\mathbb{R}^n$. São equivalentes:

(1) *C é positiva definida sobre $\mathbb{S}^m\times\mathbb{R}^n$.*

(2) *As funções $\theta\in[0,\pi]\mapsto\mathcal{F}\{C_\theta\}(u)$, $u\in\mathbb{R}^n$ são positivas definidas sobre $\mathbb{S}^m$.*

(3) *As funções F_k^m são contínuas, positivas definidas sobre $\mathbb{R}^n$ e a soma, cujo termo geral é $F_k^m(0)$, é convergente.*

Agora, comparamos o Teorema 3.4.6 com outras duas versões distintas presentes na literatura que nos serviram de motivação para esta ultima seção. A versão a seguir é devido a White e Porcu ([61, (2019)Theorem 1]).

Teorema 3.4.8 (White-Porcu) *Seja* $\mathcal{C} : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *uma função contínua e limitada tal que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} |f_k^m(u)|\, du < \infty$. *São equivalentes:*

(**1**) $\mathcal{C}$ *é positiva definida sobre* $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$.

(**2**) *Para quase todo* $u \in \mathbb{R}$, *a função* $\theta \in [0,\pi] \mapsto \mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(u)$ *é positiva definida sobre* $\mathbb{S}^m$.

(**3**) *As funções* f_k^m *são contínuas, positivas definidas sobre* $\mathbb{R}$ *e a soma, cujo termo geral é* $f_k^m(0)$, *é convergente.*

Uma versão mais geral do Teorema 3.4.7 substitui $[0,\pi] \times \mathbb{R}^n$ por $[0,\pi] \times G$, em que G é um grupo abeliano foi provado em [40, Theorem 1.1]. Entretanto, sua forma adaptada para grupo aditivo $\mathbb{R}$ torna-se uma versão mais fraca do Teorema 3.4.6.

Teorema 3.4.9 (Menegatto-Oliveira) *Seja* $\mathcal{C} : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *uma função contínua tal que as funções* $\mathcal{C}_\theta$, $\mathcal{F}\{\mathcal{C}_0\}$ *e* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |f_k^m|$ *pertencem a* $L^1(\mathbb{R})$. *São equivalentes:*

(**1**) $\mathcal{C}$ *é positiva definida sobre* $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$.

(**2**) *As funções* $\theta \in [0,\pi] \mapsto \mathcal{F}\{\mathcal{C}_\theta\}(u)$, $u \in \mathbb{R}$ *são positivas definidas sobre* $\mathbb{S}^m$.

(**3**) *As funções* f_k^m *são contínuas, positivas definidas sobre* $\mathbb{R}$ *e a soma, cujo termo geral é* $f_k^m(0)$, *é convergente.*

Portanto, a conclusão nos três versões citadas coincidem, entretanto o conjunto de hipóteses em cada versão é distinto. A versão de White e Porcu não pressupõe a integrabilidade de $\mathcal{C}_\theta$, mas não compreendemos a prova que eles exibem.

3.5 Positividade definida via transformada de Bessel

O objetivo desta seção é o de construir funções positivas definidas que também possuem fórmula entrelaçada como aquelas da classe de Gneiting, mas diferentes destas. Isto é possível pela transformada de Bessel. As referências básicas aqui são [33, 41].

Iniciamos, introduzindo formalmente um tipo especial de funções radiais. A *função de Bessel* de primeira espécie associada à esfera $\mathbb{S}^{m-1}$ ou de ordem $(m-2)/2$ $(m > 1)$ dada pela integral

$$J_{(m-2)/2}(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \left(\frac{r}{2}\right)^{(m-2)/2} \int_0^1 \cos(rs)(1-s^2)^{(m-3)/2} ds, \quad r > 0.$$

Definição 3.5.1 *A função de Bessel normalizada de índice $m > 1$ é definida por*

$$\Omega_m(r) = \begin{cases} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{2}{r}\right)^{(m-2)/2} J_{(m-2)/2}(r), & r > 0, \\ \\ 1, & r = 0. \end{cases}$$

Observamos que quando $m = 1$, a função anterior também tem sentido. Neste caso, $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ e $\Omega_1(r) = \cos r$, $r \geq 0$ ([60]). O lema técnico a seguir será útil para a prova da proposição subsequente.

Lema 3.5.1 *Seja m um inteiro maior que 1. Se $w \in \mathbb{R}^m$, então*

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}} f(\langle v, w\rangle) d\sigma_{m-1}(v) = \frac{2\pi^{(m-1)/2}}{\Gamma((m-1)/2)} \int_{-1}^{1} f(\|w\|s)(1-s^2)^{(m-3)/2} ds,$$

para toda função f tais que estas integrais convirjam.

Demonstração: É o Lemma A.5.2 em [19]. ■

Note que é consequêcia imediate deste lema, a igualdade

$$J_{(m-2)/2}(\|w\|) = \frac{1}{2\pi^{m/2}} \left(\frac{\|w\|}{2}\right)^{(m-2)/2} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} e^{-i\langle v, w\rangle} d\sigma_{m-1}(v), \quad w \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\},$$

motivando a proposição a seguir.

Proposição 3.5.1 *Se m é um inteiro positivo, então Ω_m é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$.*

Demonstração: Primeiro, notamos que $\Omega_1(r) = \cos r$ é positiva definida sobre $\mathbb{R}$, conforme o Exemplo 2.6.2. Então, assumimos que $m > 1$ e usamos a representação integral de $J_{(m-2)/2}$ para expressar

$$\Omega_m(r) = \frac{\Gamma(m/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((m-1)/2)} \int_{-1}^{1} e^{irs}(1-s^2)^{(m-3)/2} ds, \quad r \geq 0.$$

Pelo lema precedente,

$$\begin{aligned} \Omega_m(\|v-w\|) &= \frac{\Gamma(m/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((m-1)/2)} \int_{-1}^{1} e^{i\|v-w\|s}(1-s^2)^{(m-3)/2} ds \\ &= \frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{m/2}} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} e^{i\langle v-w, \eta\rangle t} d\sigma_{m-1}(\eta), \quad v, w \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

A afirmação da proposição, agora, é evidente. ■

Recordamos que pela Proposição 2.4.1,

$$|f(r)| \leq f(0), \quad r \geq 0,$$

sempre que $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$. Em particular, sem perda de generalidade, consideramos $f(0) = 1$, sempre que f é uma função não identicamente nula, nesta classe.

A conexão entre as duas classes de funções definidas acima é o assunto do próximo resultado que é devido a Schoenberg ([49, 1938]).

Teorema 3.5.1 *A função contínua $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 1$ é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$ se e somente se*

$$f(r) = \int_0^\infty \Omega_m(rs)d\nu(s), \quad r \geq 0,$$

onde ν é uma medida de probabilidade sobre $[0,\infty)$.

O Teorema 3.5.1 motiva a definição subsequente, onde denotamos por $L^1_m(\mathbb{R})$ a classe das funções $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tais que

$$\int_0^\infty |g(r)|r^{m-1}dr < \infty.$$

Definição 3.5.2 *A transformada Fourier-Bessel de ordem $(m-2)/2$ da função $g \in L^1_m(\mathbb{R})$ é a função*

$$\mathcal{F}_m\{g\}(r) = \int_0^\infty \Omega_m(sr)g(s)s^{m-1}ds, \quad r \geq 0.$$

O título desta seção é justificado pela proposição a seguir que consiste de um procedimento para se construir funções positivas definidas.

Proposição 3.5.2 *Se $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função de $L^1_m(\mathbb{R})$, então $\mathcal{F}_m(g)$ é uma função positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$.*

Demonstração: É consequência da Proposição 3.5.1. ■

Fechamos a seção exibindo uma função positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, possuindo fórmula entrelaçada como na classe de Gneiting. No entanto, notamos que o teorema anterior não se aplica a ela, uma vez que a função g que surgirá depende de um parâmetro σ. O exemplo abaixo foi extraído de [41].

Exemplo 3.5.1 *Se $h : [0,\infty) \to (0,\infty)$ é condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^n$, então a função*

$$(r,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \mapsto \frac{e^{-r\sqrt{h(t)}}}{\sqrt{h(t)}}$$

é positiva definida sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Averiguação: A princípio, usamos a fórmula 3 de [26, p. 678] com $2\nu = m-2$ para justificar a identidade

$$\int_0^\infty J_{(m-2)/2}(sr)g_\sigma(s)s^{m/2}ds = \frac{\sqrt{\pi}\, r^{(m-2)/2}}{2^{m/2}\Gamma((m+1)/2)}\frac{e^{-\sigma r}}{\sigma}, \quad r>0,$$

onde $g_\sigma(s) = (\sigma^2+s^2)^{-(m+1)/2}$ $(\sigma>0)$. Logo,

$$\mathcal{F}_m\{g_\sigma\}(r) = \int_0^\infty \Omega_m(sr)(\sigma^2+s^2)^{-(m+1)/2}s^{m-1}ds = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m/2)}{2\Gamma((m+1)/2)}\frac{e^{-\sigma r}}{\sigma}, \quad \sigma, r>0.$$

Fazendo $r\to 0^+$ na igualdade anterior, concluímos que $g_\sigma \in L^1_m(\mathbb{R})$, para cada $\sigma>0$. Agora, pelo Exemplo 2.7.1, as funções $t\in[0,\infty)\mapsto g_{\sqrt{t}}(s)$ são completamente monótonas. Então, pelo Teorema 2.7.3, a composição $t\in[0,\infty)\mapsto g_{\sqrt{h(t)}}(s) = (h(t)+s^2)^{-(m+1)/2}$ é positiva definida sobre $\mathbb{R}^n$, sempre que $h:[0,\infty)\to(0,\infty)$ é condicionalmente negativa definida sobre $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, pela Proposição 3.5.1, as funções $r\in[0,\infty)\mapsto\Omega_m(rs)$ são positivas definidas sobre $\mathbb{R}^m$. Logo, invocando o Lema 2.1.2, vemos que as funções

$$(r,t)\mapsto \Omega_m(sr)(h(t)+s^2)^{-(m+1)/2}, \quad s\geq 0$$

são positivas definidas sobre $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$. Como a integração em s não afeta positividade definida, o exemplo segue. ■

A referência [26] exibe tabelas de integrais em termos da função de Bessel, como a utilizada no início da averiguação acima. Consequentemente, outras funções positivas definidas podem ser construídas ou sobre $\mathbb{R}^m$ ou sobre $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$. No primeiro caso, a Proposição 3.5.2 torna-se um ingrediente útil, enquanto que no segundo, a construção é feita como no exemplo acima.

Bibliografia

[1] Abramowitz, M; Stegun, IA. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1972.

[2] Aliprantis, CD; Burkinshaw, O. *Principles of Real Analysis*. Academic Press, 3rd Ed., Oval Road, San Diego -London-Boston-New York-Sydney-Tokyo-Toronto, 1998.

[3] Aronszajn, N. Theory of reproducing kernels. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 68, no. 3, pp. 337-404, 1950.

[4] Askey, R. *Orthogonal Polynomials and Special Functions.* Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, Pennsylvania, 1975.

[5] Barbosa, VS; Menegatto, VA. Strictly positive definite kernels on two-point compact homogeneous spaces. Math. Ineq. Appl., Vol. 19, no. 2, pp. 743-756, 2016.

[6] Bell, J. *Positive definite function, completely monotone functions, the Bernstein-Widder theorem, and Schoenberg theorem*. Department of Mathematics, University of Toronto, jube 26, 2015.

[7] Bell, J. *Gaussian measures and Bochner's theorem*. Department of Mathematics, University of Toronto, april 30, 2015.

[8] Berg, C; Christensen, JPR; Ressel, P. *Harmonic Analysis on Semigroups: Theory of positive definite and related functions.* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[9] Berg, C; Forst, G. *Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups.* Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[10] Berg, C; Porcu, E. From Shoenberg coefficients to Schoenberg funcions. Constr Approx, Vol. 45, pp. 217-241, 2017.

[11] Bhatia, R. *Positive Definite Matrices*. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2007.

[12] Bingham, NH. *Positive Definite Functions on Spheres*. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 73, pp. 145-156, 1973.

[13] Bisgaard, TM; Sásvari, Z. *Characteristic Functions and Moment Sequences: Positive Definiteness in Probability*. Nova Science Pub Incorporated, 2000.

[14] Castruccio, S; Stein, ML. Global Space-Time Models for Climate Ensembles. Ann. Appl. Statist., Vol. 7, pp. 1593-1611, 2003.

[15] Chen, D; Menegatto, VA; Sun, X. A necessary and sufficient condition for strictly positive definite functions on spheres. Proc. Amer. Math. Soc, Vol.131, no. 9, 2003, pp. 2733-2740.

[16] Cheney, EW; Light, W. *A Course in Approximation Theory.* Reprint of the 2000 original. Graduate Studies in Mathematics, 101, Americam Mathematical Socity, Providence, 2009.

[17] Cressie, N; Huang, HC. Classes of nonseparable, spatio-temporal stationary covariance functions. J. Am. Stat. Assoc., Issue 94, pp. 1330-1340, 1999.

[18] Cucker, F; Zhou, DX. *Learning theory: an Aproximation Theory Viewpoint with a Foreword by Stephen Smale.* Cambridge Monographs on Applied and Computaional Mathematics. Cambridge Univesity Press, Cambridge, 2007.

[19] Dai, F; Xu, Y. *Approximation Theory and Harmonic Analysis on Spheres and Balls*. Springer Monographs in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 2013.

[20] Donoghue, WF. *Distributions and Fourier transforms*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1969.

[21] Folland, GB. *Real Analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley and Sons, 2013.

[22] Folland, GB. *A course in abstract harmonic analysis*. Second edition. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, 2016.

[23] Gneiting, T. Nonseparable stationary covariance functions for space-time data. Journal of the American Statistical Association, Vol. 97, pp. 590-600, 2002.

[24] Gneiting, T; Genton, M; Guttorp, P. Geostatistical space-time models, stationarity, separability and full symmetry. Finkenstaedt, B., Held, L. and Isham, V. (eds.), Statistics of Spatio-Temporal Systems, Chapman & Hall/CRC Press, pp. 151-175, 2007.

[25] Gneiting, T. Strictly and no-strictly positive definite functions on spheres. Bernoulli, Vol. 19, no. 4, 2013, pp. 1327-1349, 2013.

[26] Gradshteyn, IS; Ryzhik, I. Table of integrals, series, and products. Fourth edition, Translated from the Russian by Scripta Technica, Inc., Translation edited by Alan Jeffrey Academic Press, New York-London, 1965.

[27] Havin, VP; Nikolski, NK. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences: Commutative Harmonic Analysis II*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

[28] Horn, RA; Johnson, CR. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1985.

[29] Huang, C; Zhang, H; Robeson, SM. On the validity of commonly used covariance and variogram functions on the sphere. Math. Geosci, Vol. 43, no. 6, 2011, pp. 721-733.

[30] Jeong, J; Jun, M. A class of matern-like covariance functions for smooth processes on a Sphere. Spatial Statistics, Vol.11, pp. 1-18, 2015.

[31] Jorgensena, PET; Niedzialomski, R. Extension of positive definite functions. J. Math. Anal. Appl., Vol. 422, no. 1, 2015, pp. 712-740.

[32] Koumandos, S; Pedersen, HL. Completely monotonic functions of positive order and asymptotic expansions of the logarithm of Barnes double gamma function and Euler's gamma function. J. Math. Aanal. Appl., Vol. 355, Issue 1, pp. 33-40, 2009.

[33] Kamel, JE; Mehrez, K. A function class of strictly positive definite and logarithmically completely monotonic functions related to the modified Bessel functions. Positivity, Vol. 22, pp. 1403-1417, 2018.

[34] Kendall, A; Weimin, H. *Spherical harmonics and approximations on the unit sphere: an introduction*. Springer Science and Business Media, Vol. 2044, 2012.

[35] Menegatto, VA. Stricty positive definite kernels on the Hilbert sphere. Appl. Anal., v. 55, n. 1-2, 1994, pp. 91-101.

[36] Menegatto, VA. Strict positive definiteness on spheres. Analysis, Vol. 19, 1999, pp. 217-233.

[37] Menegatto, VA; Peron, AP. Positive definite kernels on complex spheres. J. Math. Anal. Appl, Vol. 254, no. 1, 2001, pp. 219-232.

[38] Menegatto, VA; Oliveira, CP; Peron, A.P. Differentiable positive definite kernels on spheres. J. Appl. Anal., Vol. 15, no. 1, 2009, pp. 101-117.

[39] Menegatto, VA. Positive definite functions on products of quasi-metric spaces via generalized Stieltjes functions, Preprint, 2019.

[40] Menegatto, VA; Oliveira, CP. Positive definiteness on products of compact two-point homogeneous spaces and locally compact abelian groups, Preprint, 2019.

[41] Menegatto, VA; Oliveira, CP; Porcu, E. Gneiting class, semi-metric spaces, and isometric embeddings, Preprint, 2019.

[42] Porcu, E, Bevilacqua, M; Genton, M. Spatio-temporal covariance and cross-covariance functions of the great circle distance on a sphere. Journal of the American Statistical Association, Vol. 97, pp. 590-600, 2016.

[43] Porcu, E; Gregori, P; Mateu, J. Nonseparable stationary anisotropic space-time covariance functions. Stochastic Environmental Research Risk Assessment, Vol. 21, pp. 113-122, 2006.

[44] Porcu, E; Mateu, J. Mixture-based modeling for space-time data. Environmetrics, Vol. 18, pp. 285-302, 2007.

[45] Porcu, E; Alegría, A; Furrer, R. Modeling Temporally Evolving and Spatially Globally Dependent Data. Int. Stat. Rev., Vol. 86, pp. 344-377, 2018.

[46] Porcu, E; Mateu, J; Christakos, G. Quasi-arithmetic means of covariance functions with potential applications to space-time data. Journal of Multivariate Analysis, Vol. 100, pp. 1830-1844, 2009.

[47] Ron, A; Sun, X. Strictly positive definite functions on spheres in euclidean spaces. Math. Comp., Vol. 65, no. 216, 1996, pp. 1513-1530.

[48] Sasvári, Z. *Positive Definite and Definitizable Functions, Mathematical Topics*. Vol. 2, Akademie Verlag, Berlin, 1994.

[49] Schoenberg, IJ. Metric spaces and positive definite functions. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 44, no. 3, pp. 522-536, 1938.

[50] Schoenberg, IJ. Positive definite functions on spheres. Duke Mathematical Journal, Duke University Press, Vol. 9, no. 1, pp. 96-108, 1942.

[51] Schreiner, M. On a new condition for strictly positive definite functions on spheres. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 125, no. 2, 1997, pp. 531-539.

[52] Schlather, M. Some covariance models based on normal scale mixtures. Bernoulli, Vol. 16, pp. 780-797, 2010.

[53] Shan, S. *Completely monotone and Bernstein functions with convexity properties on their measures*. Western University, Scholarship@Western, 2015.

[54] Stein, EM; Weiss, G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Space*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[55] Sun, X; Menegatto, VA. Strictly positive definite functions on the complex Hilbert sphere. Adv. Comput. Math., Vol. 11, 1999, pp. 105-119.

[56] Szegö, G. *Orthogonal polynomials*. Vol. 23, 4th ed., Amer. Math. Soc., Colloq. Publ., Providence, RI, 1975.

[57] Zastavnyi, V; Porcu, E. Characterization theorems for the Gneiting class of spase-time covariances. Bernoulli, Vol. 17, no. 1, pp. 456-465, 2011.

[58] Wendland, H. Scattered data approximation. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. 17. Cambridge University Press, p. 348, Cambridge, Inspirations S., 2005.

[59] Widder, DV. *The Laplace transform.* Princeton University Press, Princeton, 1946.

[60] Wells, JH; Williams, LR. *Embeddings and extensions in analysis. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Band 84., Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[61] White, P; Porcu, E. Towards a complete picture of covariance functions on spheres cross time, Electron. J. Stat., Vol. 13, no. 2, pp. 2566-2594, 2019.

[62] Xu, Y. Positive definite functions on the unit sphere and integrals of Jacobi polynomials. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 146, pp. 2039-2048, 2018.

[63] Xu, Y; Cheney, EW. Strictly positive definite functions on spheres. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 116, no. 4, pp. 977-981, 1992.

Índice