

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Dinâmica da equação de van der Pol
não autônoma**

Edgar Calizaya Chura

Orientador: Prof. Dr. Juan Valentín Mendoza Mogollón

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
CAPES/FAPEMIG

ITAJUBÁ, 2 DE DEZEMBRO DE 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Dinâmica da equação de van der Pol
não autônoma**

Edgar Calizaya Chura

Orientador: Prof. Dr. Juan Valentín Mendoza Mogollón

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

2 DE DEZEMBRO DE 2019

Dedico

*A meu pai Julian Calizaya Quispe e a meus irmãs(irmãos)
Flora, Rosa, Hugo, Cesar, Olga, Eliseo, Fredy, Aidee Victoria,
e adorável Alexander e Ruth Maria.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por cuidar sempre de mim, dar-me a força para superar as dificuldades, por iluminar minha mente e me guiar em seu caminho.

Aos meus pais Maria Chura Maita (em memória) , Julian Calizaya Quiste e, a meus irmãos(irmãs) família Calizaya Chura, por todo incentivo, pelo apoio, confiança e carinho em todo momento.

Ao professor Dr. Juan Valentín Mendoza Mogollón, pela orientação e por sua dedicação em toda a minha trajetória acadêmica e o mesmo tempo, pelo carinho e amizade.

Aos amigos da Unifei: José Humberto Bravo Vidarte e Nancy Carolina Chachapoyas Siésquen, Elard Juarez Hurtado, Gina Maritzell Colmenares Jimenez, que cada um fez por mim, pela amizade, por todo o apoio e incentivos.

Aos amigos da IASD-Itajubá: Ivo Batista Junior e Jéssica Carvalho Martins Batista, Luiz Carlos Lima e Eglys Fedel, Oliver A. Vilca Huayta, Reynaldo Capia Capia e em especial a minha amiga Claudia Mamani Pineda, que me apoiaram e me acompanharam durante este período.

A todos que contribuíram direta e indiretamente para que este trabalho fosse concretizado.

Agradeço a CAPES/FAPEMIG pelo apoio financeiro.

*O estudo da Matemática é o mais indicado para desenvolver as faculdades,
fortalecer o raciocínio e iluminar o espírito.
(Sócrates, Filósofo Grego).*

Resumo

A equação de van der Pol não autônoma é um dos primeiros exemplos de sistemas dinâmicos com comportamento caótico e complexo. Foi introduzida por van der Pol e extensivamente estudada por M. L. Cartwright e J. E. Littlewood os quais foram os primeiros a mostrar a existência de soluções singulares. Neste trabalho estudamos dois artigos em conjunto de Cartwright e Littlewood nos quais é demonstrado que existem órbitas de um certo período e que, devido à existência de uma região atratora, as particularidades da própria equação permitem esboçar a forma geométrica das soluções. Além disso, estudamos um trabalho de Levinson no qual, fazendo uma mudança que não altera substancialmente as soluções, pode-se mostrar que existem soluções singulares para cada sequência simbólica de dois símbolos.

Palavras-chave: equação de van der Pol, soluções singulares, dinâmica.

Abstract

The non autonomous van der Pol equation is one of first examples of dynamical systems with complex and chaotic behaviour. It was introduced by van der Pol and extensively studied by M. L. Cartwright and J. E. Littlewood who have showed the existence of singular solutions. In this work we study two joint papers due to Cartwright and Littlewood in which is proven that there exist orbits of a given period and, from the existence of an attractor region, its own particularities allow to sketch the geometry of the solutions. Moreover we study a paper by Levinson in which, by a change that does not modify substantially the solutions, we can prove that there exist singular solutions for any symbolic sequence of two symbols.

Keywords: van der Pol equation, singular solutions, dynamics.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
2 Preliminares	6
2.1 Desigualdade de Gronwall	7
2.2 Sistemas Bidimensionais Simples	9
2.3 Noções de estabilidade	12
2.4 Conjunto α -limite e ω -limite de uma órbita	13
2.5 Equação de Van der Pol	14
3 Sobre equações diferenciais não-lineares de segunda ordem	16
3.1 Fórmulas Padrão.	19
3.2 Um Lema Fundamental.	24
3.3 Equações de diferenças	26
3.4 Estabilidade de Soluções Periódicas.	29
3.5 O Método do Ponto Fixo.	37

3.6	Unicidade.	38
4	Oscilações forçadas em sistemas não lineares	41
4.1	Aplicação do Teorema 4.1	42
4.2	Prova do Teorema 4.1	46
5	Uma equação diferencial de segunda ordem com soluções singulares	61
5.1	Descrição da equação	63
5.2	Construção dos intervalos base	70
5.3	Provas dos Lemas 5.1, 5.2 e 5.3.	81
	Conclusões	87
	Bibliografia	88

Lista de Figuras

1.1	Esboço das soluções de (1.3).	3
1.2	Esboço das soluções da equação de Levinson (1.6).	4
2.1	Circuito oscilatório associado à equação de van der Pol.	15
4.1	Gráfico da função $F(X)$	43
4.2	Aproximação das soluções.	44
4.3	45
4.4	Comportamento das soluções de (4.1).	46
4.5	49
4.6	52
5.1	Soluções que saem de um intervalo ímpar.	69

Capítulo 1

Introdução

Em 1927, Balthasar van der Pol estudou a equação diferencial não-linear

$$x'' - k(1 - x^2)x' + x = 0, \tag{1.1}$$

em que k é um parâmetro, a qual provém de problemas em engenharia elétrica. Como mencionado por Ginoux e Letellier, essa equação já tinha sido introduzida por outros autores [9]. Uma dedução desta equação a partir de um circuito elétrico pode ser encontrada no artigo de Appleton [3] a qual reproduzimos na seção 2.5. O termo $-k(1 - x^2)$ representa o amortecimento e é claro que, se $k > 0$, o amortecimento é negativo para $|x| < 1$ e positivo para $|x| > 1$. B. van der Pol obteve soluções gráficas para os valores $k = 0.1$, $k = 1$ e $k = 10$ as quais pareciam convergir rapidamente, quando t tende ao $+\infty$, para uma solução periódica com amplitude igual a 2 nos três casos [21]. Em [16] Liénard generaliza esse resultado ao caso em que o amortecimento é substituído por $f(x)x$, onde $f(x)$ satisfaz certas condições, e em [13], Norman Levinson e Oliver K. Smith estudaram a equação

$$x'' + f(x, x')x' + g(x) = 0 \tag{1.2}$$

provando que existem soluções periódicas se $xg(x)$ é não negativa para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(x, v)$ é positiva para valores de $|x|$ grandes e negativa para $|x|$ e $|v|$ pequenos. Neste caso a unicidade requer mais condições sobre $g(x)$ e $f(x, v)$.

Os trabalhos de van der Pol chamaram a atenção dos matemáticos de Cambridge,

Mary Lucy Cartwright e John Edensor Littlewood, e do Massachusetts Institute of Technology, Norman Levinson. Esta dissertação está orientada ao estudo de dois trabalhos em conjunto de M. L. Cartwright e J. E. Littlewood, em relação à equação de van der Pol, e de um célebre trabalho de N. Levinson, que agora passamos a descrever.

Como mencionado por MacMurrin e Tattersall em [19], Cartwright e Littlewood se focaram em estudar a equação de van der Pol com um amortecimento oscilatório da forma

$$x'' - k(1 - x^2)x' + x = bk\lambda \cos \lambda t \quad (1.3)$$

e dedicaram-se a encontrar condições para as quais a equação (1.3) tem duas soluções periódicas estáveis com diferentes períodos. De fato no artigo [7], que será estudado no capítulo 3, eles provaram que para certos valores dos parâmetros a equação (1.3) tem soluções de período $2\pi/\lambda$ assumindo que a variação da amplitude das soluções é muito pequena. Mais precisamente, trabalhando com a equação

$$v'' - (\alpha - \gamma v^2)v' + \omega^2 v = E\omega_1^2 \sin \omega_1 t \quad (1.4)$$

foi provado em [7] que, se $\frac{16}{27} < p^2 < \frac{32}{27}$, $\frac{1}{4} < \frac{|1 - \lambda|}{k} < \frac{\sqrt{3}}{6}$ e k e $|1 - \lambda|$ são pequenos, então existem soluções periódicas de período $2\pi/\omega_1$. No artigo [4] de 1945 eles anunciaram que, para certos parâmetros, existem soluções que, na linguagem atual, são caóticas, mas a prova de tal afirmação só foi publicada no artigo [17] de 1950. Segundo Moser, as provas contidas em [4] e nos trabalhos subsequentes foram incompletas e realmente complicadas como o próprio Littlewood publicamente admitiu [1]. Assim, Cartwright escreveu o artigo [8] no qual, a partir de um teorema geral sobre a existência de uma região atratora pode-se esboçar o gráfico das soluções da equação (1.3). De fato, em [8] é provado o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Se $x(t) = x(t, x_0, x'_0)$ é a solução de (1.3) para a qual $x(0) = x_0$ e $x'(0) = x'_0$, então*

$$|x(t)| < B, \quad |x'(t)| < Bk, \quad (1.5)$$

em que B é uma constante independente de k e t , para $k \geq 1$, $t > t_0(x_0, x'_0)$.

No capítulo 4 apresentamos a prova completa deste Teorema. Assumindo o Teorema 1.1, Cartwright passa a esboçar as soluções de (1.3) concluindo que elas têm a forma apresentada na Figura 1.1:

- (C1) Se a solução começa em $t = 0$ acima de uma pequena faixa $|1 - x^2| < \delta$ ao redor da reta $x = 1$ então, essa solução decresce no tempo $t = 2\pi/\lambda$, assim a solução mostrará ondas decrescentes até atingir a faixa dada;
- (C2) perto de $x = 1$ a solução tem um comportamento complicado, mas eventualmente, elas saem pela parte inferior desta faixa, ou seja, pela reta $x = \sqrt{1 - \delta}$;
- (C3) ao sair da faixa elas decrescem até chegar abaixo da faixa $|1 - x^2| < \delta$ ao redor de $x = -1$;
- (C4) uma vez que a solução está abaixo de $x = -1$, ela apresenta o um comportamento análogo em sentido invertido ao descrito nos itens (C1), (C2) e (C3), e assim repete-se o gráfico de forma similar.

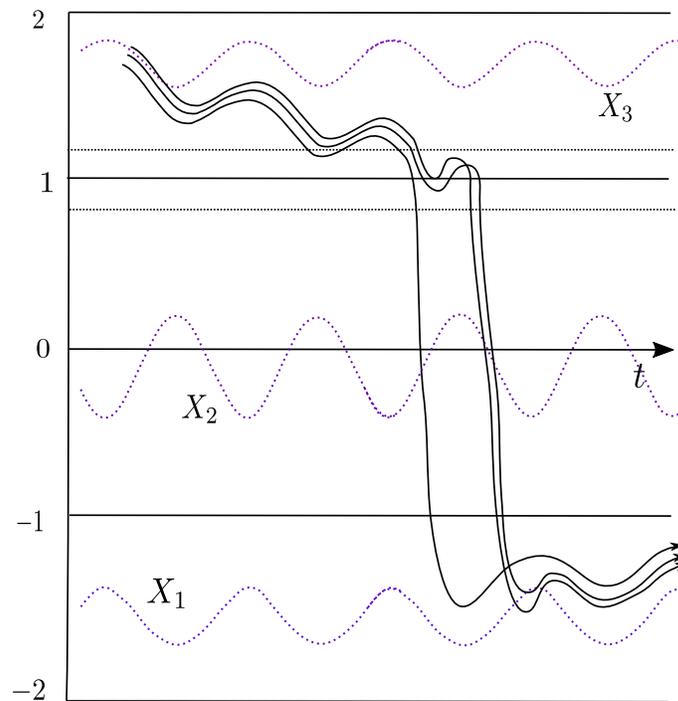


Figura 1.1: Esboço das soluções de (1.3).

O artigo [4] provocou o interesse do N. Levinson no assunto o que deu origem ao artigo [15] que será estudado no Capítulo 5. A equação que ele estudou é essencialmente (1.3) na qual o termo não linear é trocado por um termo linear por partes. Mais precisamente, a equação

$$\epsilon y'' + \phi(y)y' + \epsilon y = b \sin t \quad (1.6)$$

em que $\epsilon > 0$ é uma constante pequena e $\phi(t) = 1, |x| > 1, \phi(t) = -1, |x| < 1$. A constante b deve ser escolhida de um certo conjunto formado por subintervalos do intervalo $(0, 1)$. Ele afirmou que a equação modificada (1.6) exhibe o mesmo comportamento singular que a equação original (1.3), no entanto é muito mais fácil de analisar. De fato, Levinson

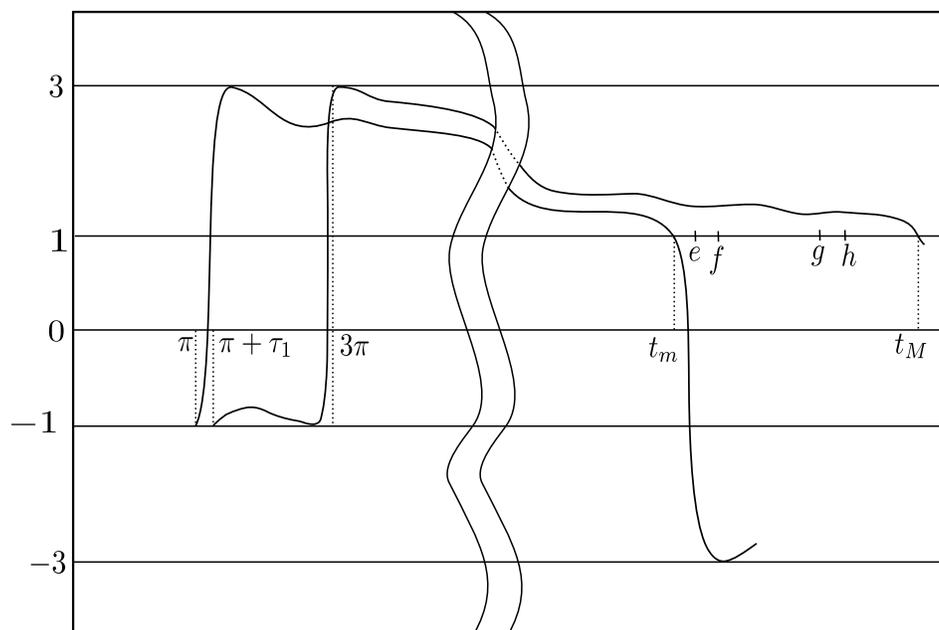


Figura 1.2: Esboço das soluções da equação de Levinson (1.6).

primeiro chamou de **pontos de cruzamento par** os pontos em que as soluções cruzam a reta $y = 1$ de cima para baixo, e de **pontos de cruzamento ímpar** os pontos em que as soluções cruzam a reta $y = -1$ de baixo para cima. Além disso chamou de **intervalos de base par** os intervalos da forma $t = \tau \bmod 2\pi, 0 < \tau < \tau_1 < 1/10$, e de **intervalos de base ímpar** os intervalos da forma $t = \pi + \tau \bmod 2\pi, 0 < \tau < \tau_1 < 1/10$, para um certo τ_1 escolhido previamente. Logo Levinson passou a provar que associado à equação (1.6) existe um inteiro n e uma família de soluções \mathcal{F} satisfazendo as seguintes condições:

- (1) o espaçamento entre os sucessivos intervalos de base nos quais estão os pontos de cruzamento de uma solução em \mathcal{F} é ou $(2n - 1)\pi$ ou $(2n + 1)\pi$;
- (2) para cada sequência arbitrária $\{d_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, em que d_k é $(2n - 1)\pi$ ou $(2n + 1)\pi$ existe uma solução $y(t)$ em \mathcal{F} cujos pontos de cruzamentos pertencem a intervalos de base com sucessivos espaçamentos iguais a d_k . Além disso, não existem outros cruzamentos.

Um esboço das soluções é apresentado na figura (1.2). Fazendo a associação $(2n-1)\pi \iff 0$ e $(2n+1)\pi \iff 1$, vemos então que o resultado de Levinson prova que existe uma correspondência entre o conjunto de soluções \mathcal{F} e o espaço de Cantor de sequências simbólicas $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, o qual é um dos espaços paradigmáticos na teoria do caos que surgiu posteriormente.

O artigo de Levinson forneceu a inspiração para Stephen Smale quando ele introduziu a ferradura de Smale em [20]. Em palavras de Smale *a ferradura é uma consequência natural da forma geométrica de visualizar as equações de Cartwright-Littlewood e Levinson*. Além de sua importância histórica, a equação de van der Pol converteu-se num exemplo típico de um sistema oscilatório com amortecimento e ao longo dos anos tem sido um modelo para uma ampla gama de fenômenos. Finalmente no ano 2009 R. Haiduc [11] provou que a equação de van der Pol (1.3) tem um conjunto de soluções análogo ao que possui a equação (1.6).

Capítulo 2

Preliminares

Veremos neste presente capítulo uma revisão básica de conceitos e teoremas principais da teoria matemática necessária para trabalharmos com o tema principal a ser estudado nesta dissertação.

Na seguinte definição e teorema utilizaremos [22].

Definição 2.1. *Uma função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ chama-se solução da equação*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2.1}$$

no intervalo I se:

- (i) o gráfico de φ em I , isto é, $\{(t, \varphi(t)) : t \in I\}$ está contido em $\Omega = I \times \mathbb{R}^2$ e
- (ii) $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$. Se t é um ponto extremo do intervalo, a derivada é a derivada lateral respectiva.

Teorema 2.1. (Teorema de Picard.) *Seja f contínua e Lipschitziana com relação à segunda variável em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t : |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x : |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω , existe uma única solução de*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

em I_α , onde $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

2.1 Desigualdade de Gronwall

Nesta apresentamos a desigualdade de Gronwall que é um teorema bem conhecido em equações diferenciais [10]. Uma prova da versão geral da desigualdade de Gronwall pode ser encontrada em [12].

Teorema 2.2. (A desigualdade de Gronwall.) *Seja X um espaço de Banach e $U \subset X$ um conjunto aberto em X . Sejam $f, g : [a; b] \rightarrow U \subset X$ funções contínuas e sejam $y, z : [a; b] \rightarrow U$ satisfazendo os problemas de valor inicial*

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_0. \quad (2.2)$$

$$z'(t) = g(t, z(t)), \quad z(a) = z_0. \quad (2.3)$$

Suponha também que exista uma constante $C \geq 0$, de modo que

$$|g(t, x_2) - g(t, x_1)| \leq C|x_2 - x_1|. \quad (2.4)$$

e uma função contínua $\varphi : [a; b] \rightarrow [0; \infty)$ tal que

$$|f(t, y(t)) - g(t, y(t))| \leq \varphi(t). \quad (2.5)$$

Então para $t \in [a; b]$

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{C|t-a|}|y_0 - z_0| + e^{C|t-a|} \int_a^t e^{-C|s-a|} \varphi(s) ds. \quad (2.6)$$

A desigualdade (2.5) é um pouco estranha, pois envolve uma desigualdade ao longo da solução $y(t)$ que talvez não conheçamos. Mas podemos substituir (2.5) pela hipótese mais forte

$$|f(t, x) - g(t, x)| \leq \varphi(t). \quad \text{para todo } t, \text{ e para todo } x \in U. \quad (2.7)$$

(o que implica claramente (2.5)) e obtemos o mesmo resultado. É claro que isso pode significar usar uma hipótese que é mais forte do que o necessário em (2.5). Observe que não estamos assumindo que esta é uma condição de Lipschitz e, portanto, o problema de valor inicial

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_0$$

não precisa ter solução única. Nesse caso, a desigualdade pode ser usada para estimar $y(t)$ comparando-a com a solução de

$$z'(t) = g(t, z(t)), \quad z(a) = y_0$$

com a mesma condição inicial. Nesse caso, a desigualdade se torna

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{C|t-a|} \int_a^t e^{-C|s-a|} \varphi(s) ds.$$

Se assumirmos que a desigualdade (2.7) se mantém ainda que

$$y_1'(t) = f(t, y_1(t)), \quad y_1(a) = y_1$$

usando a inequação óbvia

$$|y(t) - y_1(t)| \leq |y(t) - z(t)| + |z(t) - y_1(t)|$$

onde

$$z'(t) = g(t, z(t)), \quad z(a) = y_0$$

temos o desigualdade

$$|y(t) - y_1(t)| \leq e^{C|t-a|} |y_0 - y_1| + 2e^{C|t-a|} \int_a^t e^{-C|s-a|} \varphi(s) ds.$$

Isso fornece uma versão da desigualdade de Gronwall para equações diferenciais que não satisfazem uma condição de Lipschitz em termos da constante de Lipschitz de uma equação diferencial próxima (onde a proximidade é medida pelo tamanho de φ).

Demonstração. (**Demonstração do Teorema 2.2.**) Vamos usar a desigualdade

$$\frac{d}{dt} |x(t)| \leq |x'(t)|$$

que é mostrado para as funções C^1 , $x : [a; b] \rightarrow X$. Então, usando as premissas (2.5) e (2.4),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |y(t) - z(t)| &\leq |y'(t) - z'(t)| \\ &= |f(t, y(t)) - g(t, z(t))| \\ &\leq |f(t, y(t)) - g(t, y(t))| + |g(t, y(t)) - g(t, z(t))| \\ &\leq \varphi(t) + C|y(t) - z(t)|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}|y(t) - z(t)| - C|y(t) - z(t)| \leq \varphi(t).$$

Logo, multiplicando pelo fator de integração e^{-Ct} produz

$$\frac{d}{dt} (e^{-Ct}|y(t) - z(t)|) \leq e^{-Ct}\varphi(t).$$

Integrando a desigualdade de a até t , obtemos

$$e^{-Ct}|y(t) - z(t)| - e^{-Ca}|y_0 - z_0| \leq \int_a^t e^{-Cs}\varphi(s)ds.$$

Isso é equivalente a (2.6). □

2.2 Sistemas Bidimensionais Simples

Nesta seção utilizaremos [22]. Consideremos agora sistemas reais da forma

$$\begin{cases} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad (2.8)$$

com $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Equivalentemente consideremos equações lineares homogêneas do tipo

$$x' = Ax, \quad \text{com } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ e } \det A \neq 0. \quad (2.9)$$

em que $x = (x_1, x_2)^t$. Estas equações são associadas a campos vetoriais lineares A em \mathbb{R}^2 . A condição $\det A \neq 0$ é equivalente à condição de que a origem $0 \in \mathbb{R}^2$ seja o único ponto onde A se anula, ou seja, o único ponto fixo do fluxo linear $\varphi(t, x) = e^{tA}x$. Este ponto fixo, ou todo o sistema, chama-se *simples* se $\det A \neq 0$.

O polinômio característico de A é $\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A$. Logo, os valores próprios são

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\text{tr } A \pm \sqrt{(\text{tr } A)^2 - 4 \det A}}{2}.$$

Distinguímos os seguintes casos:

- (a) Os valores próprios λ_1, λ_2 de A são reais e distintos. Necessariamente, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

(b) Os valores próprios são complexos conjugados: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$, com $\beta \neq 0$.

(c) Os valores próprios são reais e iguais: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

Caso (a) Sejam v_1 , v_2 vetores próprios correspondentes aos valores próprios λ_1 , λ_2 . Denotemos por E_1 , E_2 as retas geradas por estes vetores. A solução de (2.9) pode ser escrita na forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2.$$

Caso (a_1). $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, nó atrator. Toda trajetória tende a 0, quando $t \rightarrow +\infty$; exceto a origem que permanece fixa, toda a trajetória tende a ∞ , quando $t \rightarrow -\infty$. Se $c_1 \neq 0$, a reta tangente à trajetória tende à reta E_1 , quando $t \rightarrow +\infty$. De fato, se $t \rightarrow +\infty$,

$$\frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_2}{c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0,$$

pois $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$. Se $c_1 = 0$, as soluções são semiretas de E_2 .

Caso (a_2). $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, nó instável (fonte).

Discussão similar ao caso anterior, mudando o sentido das setas.

Caso (a_3). $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$, sela.

As trajetórias que passam por pontos de E_1 ($c_2 = 0$) (ou de E_2 ($c_1 = 0$)) permanecem nesta reta e tendem para 0, quando $t \rightarrow +\infty$ (ou $t \rightarrow -\infty$). Se $c_1, c_2 \neq 0$, as soluções tendem a ∞ , quando $t \rightarrow \pm\infty$. A componente segundo E_1 (respectivamente, E_2) tende a 0 (respectivamente, ∞), quando $t \rightarrow +\infty$, a componente segundo E_2 (respectivamente, E_1) tende a 0 (respectivamente, ∞).

Caso (b) Segue que toda solução de (2.8) pode ser escrita na forma

$$\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t), \quad \text{onde}$$

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t} [\cos \beta t v_1 - \sin \beta t v_2] \quad \text{e} \quad \varphi_2(t) = e^{\alpha t} [\sin \beta t v_1 - \cos \beta t v_2].$$

em que v_1 e v_2 são autovetores de A . Escrevendo $c_1 = \rho \cos \omega$, $c_2 = \rho \sin \omega$, temos

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= e^{\alpha t} \rho [(\cos \omega \cos \beta t + \sin \omega \sin \beta t)v_1 + (\sin \omega \cos \beta t - \cos \omega \sin \beta t)v_2] \\ &= e^{\alpha t} \rho [\cos(\omega - \beta t)v_1 + \sin(\omega - \beta t)v_2].\end{aligned}$$

Caso (b_1). $\alpha = 0$. Centro.

Todas as soluções, exceto a solução nula, são elipses.

Caso (b_2). $\alpha < 0$, foco atrator.

Toda solução tende para 0 espiralando em torno da origem quando $t \rightarrow +\infty$. Isto é, $|\varphi(t)| \rightarrow 0$ e $\omega - t\beta$, ângulo entre $\varphi(t)$ e E_1 , tende para $+\infty$ ou $-\infty$, segundo β seja negativo ($\beta < 0$) ou positivo ($\beta > 0$).

Caso (b_3). $\alpha > 0$, foco instável.

Toda solução tende para 0 espiralando em torno da origem, quando $t \rightarrow -\infty$.

Caso (c). Nó impróprio. Distinguimos dois casos.

Caso (c_1). Nó estrelado.

O núcleo de $A - \lambda E$ é bidimensional. Em outros termos, λ tem vetores próprios v_1 , v_2 linearmente independentes. Toda solução de (2.8) pode ser escrita na forma

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2).$$

Todas as órbitas, exceto a solução nula, são semiretas.

Caso (c_2) O núcleo, E_1 , de $A - \lambda I$ é unidimensional. Seja v um gerador de E_1 e ω um vetor não colinear com v . A matriz do operador $x \rightarrow Ax$ na base $\{v, \omega\}$ é da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0,$$

pois $Av = \lambda v$, $A\omega = \mu\omega + \alpha v$. Os valores próprios desta matriz são λ e μ . Logo, $\lambda = \mu$. Definindo $v_1 = \alpha v$ e $v_2 = \omega$, temos

$$Av_1 = \lambda v_1, \quad Av_2 = \lambda v_2 + v_1.$$

Usando estas propriedades da base $\{v_1, v_2\}$, verifica-se, por substituição direta, que

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}[(c_1 + tc_2)v_1 + c_2v_2]$$

é a solução de (2.8) por $\varphi(0) = c_1v_1 + c_2v_2$.

As órbitas que passam por E_1 ($c_2 = 0$), exceto a origem que é ponto fixo, são semiretas. Para toda outra órbita ($c_2 \neq 0$), a sua reta tangente tende a E_1 , quando $t \rightarrow \pm\infty$, pois

$$\frac{c_2e^{\lambda t}}{(c_1 + tc_2)e^{\lambda t}} = \frac{1}{\frac{c_1}{c_2} + t} \rightarrow 0.$$

Se $\lambda < 0$ (respectivamente, $\lambda > 0$), toda trajetória tende a 0, quando $t \rightarrow +\infty$ (respectivamente, $-\infty$).

2.3 Noções de estabilidade

Nesta seção utilizaremos [23]. Dada uma função contínua $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ num aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, consideramos a equação

$$x' = f(t, x) \tag{2.10}$$

e supomos que para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe uma solução única $x(t, t_0, x_0)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Definição 2.2. *Uma solução $x(t, t_0, \bar{x}_0)$ da equação (2.10) definida para $t > t_0$ diz-se estável se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta$, então:*

- a) a solução $x(t, t_0, x_0)$ está definida para $t > t_0$;
- b) $\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, \bar{x}_0)\| < \varepsilon$ para $t > t_0$.

Caso contrário, a solução $x(t, t_0, \bar{x}_0)$ diz-se instável.

Dizemos que um ponto crítico $x_0 \in \mathbb{R}^2$ de um campo vetorial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é **hiperbólico** se os autovalores da matriz jacobiana $Df(x_0)$ tem **parte real distinta de 0**.

Teorema 2.3. (Teorema de Grobman-Hartman.) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto crítico hiperbólico de $x' = f(x)$. Se $\psi_t(z)$ e $\varphi_t(z)$ são respectivamente as soluções dos problemas de valor inicial em*

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = z. \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y' = d_{x_0} f y, \\ y(0) = z. \end{cases}$$

então existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$, onde U e $V = h(U)$ são respectivamente vizinhanças de x_0 e 0 , tal que $h(x_0) = 0$ e

$$h(\psi_t(z)) = \varphi_t(h(z))$$

sempre que $z, \psi_t(z) \in U$.

2.4 Conjunto α -limite e ω -limite de uma órbita

Nesta seção utilizaremos [22]. Sejam Δ um subconjunto aberto do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n e $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$.

Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ a curva integral de X passando pelo ponto p , definida no seu intervalo máximo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_+(p) = \infty$, define-se o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in \Delta; \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Analogamente, se $\omega_-(p) = -\infty$, define-se o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta; \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados, respectivamente, de *conjunto ω -limite* e *conjunto α -limite* de p .

Observação 2.1. (a) *Se p é qualquer ponto singular do campo X , então $\alpha(p), \omega(p) = \{p\}$, pois neste caso $\varphi(t) = p$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

(b) *Se γ_p é a órbita de X pelo ponto p e $q \in \gamma_p$, então $\omega(p) = \omega(q)$. Com efeito, se $q \in \gamma_p$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, p) = \varphi(t + c, q)$. Analogamente, $\alpha(p) = \alpha(q)$.*

Em virtude da observação (b), podemos definir

Definição 2.3. *O conjunto ω -limite de uma órbita γ , que denotaremos por $\omega(\gamma)$, é o conjunto $\omega(p)$, para qualquer $p \in \gamma$. O conjunto α -limite de uma órbita γ , que denotaremos por $\alpha(\gamma)$, é o conjunto $\alpha(p)$, para qualquer $p \in \gamma$.*

Teorema 2.4. (Poincaré-Bendixson) *Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma curva integral de X , definida para todo $t \geq 0$, tal que γ_p^+ esteja contida num compacto $K \subset \Delta$.*

Suponha que o campo X possua um número finito de singularidades em $\omega(p)$. Tem-se as seguintes alternativas:

- (a) *Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.*
- (b) *Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando $t \rightarrow \pm\infty$.*
- (c) *Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.*

2.5 Equação de Van der Pol

Nesta seção deduziremos a equação diferencial de van der Pol a partir das equações de um oscilador, considerando-o como sendo equivalente a o circuito oscilatório mostrado na Figura 2.1. Seguiremos a abordagem dada no artigo [3]. Suponha que a capacitância é desviada por um condutor para o qual a relação entre a corrente i e a diferença de potencial v pode ser escrita na forma

$$i = \psi(v) = -\alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3.$$

Vamos supor que a força eletromotriz impressa na bobina (espiral na Figura 2.1) por um oscilador externo é V , em que $V = E_0 \sin \omega_1 t$. Pelas leis de Kirchhoff para o circuito temos

$$L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 - V = \int \frac{i_2}{C} dt = -v \quad (2.11)$$

com $i_1 + i_2 = \psi(v)$. Estas equações levam à seguinte expressão

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{C} \frac{d\psi(v)}{dt} + \frac{1}{CL} (v + Ri) = \frac{1}{CL} V. \quad (2.12)$$

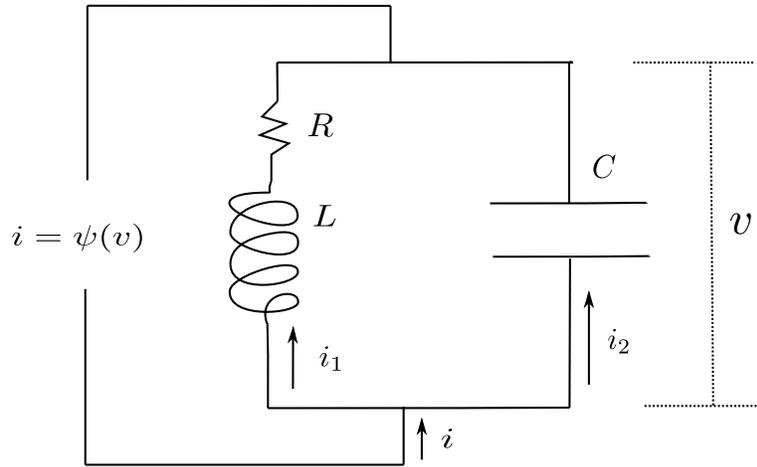


Figura 2.1: Circuito oscilatório associado à equação de van der Pol.

Agora, na prática Ri é muito pequeno comparado com v e assim a equação anterior reduz-se a

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{C} \frac{d\psi(v)}{dt} + \omega_0^2 v = E_0 \omega_0^2 \sin \omega_1 t, \quad (2.13)$$

em que $\omega_0^2 = \frac{1}{CL}$. Desse modo

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{C} (-\alpha + 2\beta v + 3\gamma v^2) \right) \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = E_0 \omega_0^2 \sin \omega_1 t. \quad (2.14)$$

Por considerações de simetria, van der Pol propõe que $\beta = 0$, e assim obtemos a equação de van der Pol não autônoma que será estudada nesta dissertação:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{C} \alpha + \frac{3\gamma}{C} v^2 \right) \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = E_0 \omega_0^2 \sin \omega_1 t. \quad (2.15)$$

Capítulo 3

Sobre equações diferenciais não-lineares de segunda ordem

Neste Capítulo estudaremos o artigo [7] intitulado *On non-linear differential equations of the second order III* de M. L. Cartwright e J. E. Littlewood publicado em 1949 que trata sobre o estudo da equação de van der Pol não autônoma da forma que aparece no problema da sincronização automática de osciladores em tríodos estudada por E. V. Appleton [3] e B. van der Pol [2].

Este problema dá origem à equação diferencial

$$v'' - (\alpha - \gamma v^2)v' + \omega^2 v = E\omega_1^2 \sin \omega_1 t \quad (3.1)$$

onde α , γ , ω , E , ω_1 são constantes positivas tais que $\frac{\alpha}{\omega}$, $\frac{\gamma}{\omega}$, $\frac{\omega - \omega_1}{\omega}$ são pequenas. Quando estas condições são satisfeitas, é fácil ver que

$$v = b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \cos \omega_1 t \quad (3.2)$$

é uma solução aproximada ao longo de um tempo limitado para quaisquer b_1 , b_2 escolhidos para ajustar as condições iniciais em v e v' , desde que v e v' não sejam muito grandes. Se for assumido que b_1 e b_2 variam lentamente em comparação com $\omega_1 t$ de modo que b_1'' , b_2'' pode ser desprezado, e b_1' , b_2' são comparativamente pequenos.

Logo, a equação (3.1) com $v' \simeq 0$ é da forma

$$v'' + \omega^2 v = E\omega_1^2 \sin \omega_1 t. \quad (3.3)$$

Daí, a solução de (3.3) é $v = v_h + v_p$, com

$$\begin{aligned} v_h &= c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \\ v_p &= b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \cos \omega_1 t. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} v'_p &= b'_1 \sin \omega_1 t + b_1 \omega_1 \cos \omega_1 t + b'_2 \cos \omega_1 t - b_2 \omega_1 \sin \omega_1 t \\ &= (b'_1 - b_2 \omega_1) \sin \omega_1 t + (b_1 \omega_1 + b'_2) \cos \omega_1 t. \\ v''_p &= b''_1 \sin \omega_1 t + b'_1 \omega_1 \cos \omega_1 t + b'_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - b_1 \omega_1^2 \sin \omega_1 t \\ &\quad + b''_2 \cos \omega_1 t - b'_2 \omega_1 \sin \omega_1 t - b'_2 \omega_1 \sin \omega_1 t - b_2 \omega_1^2 \cos \omega_1 t. \end{aligned}$$

Tome $b''_1 = b''_2 = 0$. Logo

$$v''_p = 2b'_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - b_1 \omega_1^2 \sin \omega_1 t - 2b'_2 \omega_1 \sin \omega_1 t - b_2 \omega_1^2 \cos \omega_1 t.$$

Agora, substituindo valores de v_p , v'_p e v''_p em (3.1), temos

$$\begin{aligned} &2b'_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - b_1 \omega_1^2 \sin \omega_1 t - 2b'_2 \omega_1 \sin \omega_1 t - b_2 \omega_1^2 \cos \omega_1 t \\ &- [\alpha - \gamma(b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \cos \omega_1 t)^2] [(b'_1 - b_2 \omega_1) \sin \omega_1 t + (b_1 \omega_1 + b'_2) \cos \omega_1 t] \\ &\quad + \omega^2(b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \cos \omega_1 t) = E\omega_1^2 \sin \omega_1 t \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado e substituindo $\cos^2 \omega_1 t = 1 - \sin^2 \omega_1 t$ e $\sin^2 \omega_1 t = 1 - \cos^2 \omega_1 t$

$$\begin{aligned} &2b'_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - b_1 \omega_1^2 \sin \omega_1 t - 2b'_2 \omega_1 \sin \omega_1 t - b_2 \omega_1^2 \cos \omega_1 t \\ &\quad - \alpha(b'_1 - b_2 \omega_1) \sin \omega_1 t - \alpha(b_1 \omega_1 + b'_2) \cos \omega_1 t + \\ &\gamma [b_1^2(1 - \cos^2 \omega_1 t) + b_2^2(1 - \sin^2 \omega_1 t) + 2b_1 b_2 \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t] [(b'_1 - b_2 \omega_1) \sin \omega_1 t + (b_1 \omega_1 + b'_2) \cos \omega_1 t] \\ &\quad + \omega^2(b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \cos \omega_1 t) = E\omega_1^2 \sin \omega_1 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2b'_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - b_1 \omega_1^2 \sin \omega_1 t - 2b'_2 \omega_1 \sin \omega_1 t - b_2 \omega_1^2 \cos \omega_1 t \\ &\quad - \alpha(b'_1 - b_2 \omega_1) \sin \omega_1 t - \alpha(b_1 \omega_1 + b'_2) \cos \omega_1 t + \\ &\gamma [b_1^2 + b_2^2 - b_1^2 \cos^2 \omega_1 t - b_2^2 \sin^2 \omega_1 t + 2b_1 b_2 \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t] [(b'_1 - b_2 \omega_1) \sin \omega_1 t + (b_1 \omega_1 + b'_2) \cos \omega_1 t] \\ &\quad + \omega^2(b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \cos \omega_1 t) = E\omega_1^2 \sin \omega_1 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[2b'_1 \omega_1 - b_2 \omega_1^2 - \alpha(b_1 \omega_1 + b'_2) + \gamma(b^2 + M)(b_1 \omega_1 + b'_2)] \cos \omega_1 t + \omega^2 b_2 \cos \omega_1 t \\ &\quad + [-2b'_2 \omega_1 - b_1 \omega_1^2 - \alpha(b'_1 - b_2 \omega_1) + \gamma(b^2 + M)(b'_1 - b_2 \omega_1)] \sin \omega_1 t \\ &\quad + \omega^2 b_1 \sin \omega_1 t = 0. \cos \omega_1 t + E\omega_1^2 \sin \omega_1 t. \end{aligned}$$

com

$$b^2 = b_1^2 + b_2^2 \quad \text{e} \quad M = -b_1^2 \cos^2 \omega_1 t - b_2^2 \sin^2 \omega_1 t + 2b_1 b_2 \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t.$$

Logo, temos o sistema

$$\begin{cases} 2b_1' \omega_1 - b_2 \omega_1^2 - \alpha(b_1 \omega_1 + b_2') + \gamma(b^2 + M)(b_1 \omega_1 + b_2') + \omega^2 b_2 & = 0 \\ -2b_2' \omega_1 - b_1 \omega_1^2 - \alpha(b_1' - b_2 \omega_1) + \gamma(b^2 + M)(b_1' - b_2 \omega_1) + \omega^2 b_1 & = E \omega_1^2. \end{cases}$$

Da primeira equação do sistema

$$\begin{aligned} 2b_1' \omega_1 + (\omega^2 - \omega_1^2) b_2 - \alpha b_2' - \alpha b_1 \omega_1 + \gamma b^2 b_1 \omega_1 + \gamma M b_1 \omega_1 + (\gamma b^2 + \gamma M) b_2' & = 0 \\ 2b_1' \omega_1 + (\omega^2 - \omega_1^2) b_2 + (\gamma b^2 + \gamma M - \alpha) b_2' - (\alpha \omega_1 - \gamma b^2 \omega_1 - \gamma M \omega_1) b_1 & = 0 \\ 2b_1' + \left(\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega_1} \right) b_2 - \alpha \left(1 - \frac{\gamma b^2}{\alpha} - \frac{\gamma M}{\alpha} \right) b_1 & = 0 \\ 2b_1' + z b_2 - \alpha b_1 \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} (b^2 + M) \right) & = 0 \\ 2b_1' + z b_2 - \alpha b_1 \left(1 - \frac{b^2}{\frac{\alpha}{\gamma}} \right) & = 0. \end{aligned}$$

Da segunda equação do sistema, temos

$$\begin{aligned} -2b_2' \omega_1 + (\omega^2 - \omega_1^2) b_1 - \alpha b_1' + \alpha b_2 \omega_1 + (\gamma b^2 + \gamma M) b_1' - \gamma (b^2 + M) b_2 \omega_1 & = \omega_1^2 E \\ 2b_2' - \left(\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega_1} \right) b_1 - \alpha b_2 \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} (b^2 + M) \right) - [\gamma (b^2 + M) - \alpha] \frac{b_1'}{\omega_1} & = -\omega_1 E \\ 2b_2' - z b_1 - \alpha b_2 \left(1 - \frac{b^2}{\frac{\alpha}{\gamma}} \right) & = -\omega_1 E. \end{aligned}$$

Suponha que $a_0^2 = \frac{\alpha}{\gamma}$. Assim,

$$2b_2' - z b_1 - \alpha b_2 \left(1 - \frac{b^2}{a_0^2} \right) = -\omega_1 E.$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2b_1' + z b_2 - \alpha b_1 \left(1 - \frac{b^2}{a_0^2} \right) & = 0, \\ 2b_2' - z b_1 - \alpha b_2 \left(1 - \frac{b^2}{a_0^2} \right) & = -\omega_1 E, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde

$$b^2 = b_1^2 + b_2^2, \quad a_0^2 = \frac{4\alpha}{\gamma}, \quad z = \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{\omega} \sim 2(\omega - \omega_1),$$

são obtidos. Estas aproximações são suficientemente precisas para a discussão da maioria dos fenômenos físicos, e foram usados nesta forma por vários autores. Por exemplo, no

artigo [6], M. L. Cartwright obtém aproximadamente soluções de (3.1), com período $\frac{2\pi}{\omega_1}$, colocando $b'_1 = b'_2 = 0$ em (3.4). Isto é considerando que b_1 e b_2 são constantes em relação ao tempo. Dessa forma obtemos

$$\frac{b^2}{a_0^2} \left[\frac{z^2}{\alpha^2} + \left(1 - \frac{b^2}{a_0^2} \right)^2 \right] = \frac{\omega_1^2 E^2}{\alpha^2 a_0^2} := E_1^2. \quad (3.5)$$

As soluções de estado estacionário de (3.1) que não aquelas com período $\frac{2\pi}{\omega_1}$ correspondem a soluções periódicas de (3.4).

No trabalho [6] não há prova formal da existência de soluções de (3.1) com o período $\frac{2\pi}{\omega_1}$ correspondendo a soluções de (3.4) para as quais $b'_1 = b'_2 = 0$ nem qualquer discussão sobre a forma precisa do erro envolvido no uso de (3.4), mas a autora menciona que vários autores russos deram métodos muito gerais de estabelecer a existência de soluções periódicas, ou quase periódicas, de uma classe de equações que inclui (3.1). Esses métodos geralmente envolvem a transformação da equação em um par de equações e uma boa dose de manipulação; os métodos dependem da teoria geral das equações diferenciais, incluindo a teoria de Poincaré das soluções em séries de potências de um pequeno parâmetro. Portanto, a tarefa de extrair informações detalhadas sobre uma determinada equação a partir dos resultados gerais é um pouco complicada e bastante entediante. Além disso, as discussões existentes sobre estabilidade, até onde eram conhecidas na época, estavam confinadas ao caso de soluções completamente estáveis.

O principal objetivo do artigo [7] é ilustrar um método mais direto usando-o para estabelecer a existência de soluções de (3.1) de período $\frac{2\pi}{\omega_1}$ de tipos correspondentes a todos os tipos padrão das soluções de (3.4) para as quais $b'_1 = b'_2 = 0$. O método é fácil de justificar e fornece limites claramente definidos para o erro.

3.1 Fórmulas Padrão.

Primeiro padronizamos (3.1) colocando

$$v = \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} x, \quad \lambda = \frac{\omega_1}{\omega}, \quad k = \frac{\alpha}{\omega}, \quad pk = \frac{2E\lambda}{a_0} \quad \text{e} \quad \omega t = t' + \frac{\pi}{\lambda}.$$

Daí, como

$$v' = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} x' \quad \text{e} \quad v'' = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} x''$$

em (3.1) temos:

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} x'' - \left[\alpha - \gamma \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) x^2 \right] \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} x' + \omega^2 \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} x = E\omega_1^2 \sin \omega_1 t$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} (x'' - \alpha(1-x^2)x' + \omega^2 x) &= E\omega_1^2 \sin \omega_1 t \\ \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} (x'' - k\omega(1-x^2)x' + \omega^2 x) &= E\omega_1^2 \sin \left[\frac{\omega_1}{\omega} (t' + \frac{\pi}{2\lambda}) \right] \\ \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} (x'' - k\omega(1-x^2)x' + \omega^2 x) &= E\omega_1^2 \sin (\lambda t' + \frac{\pi}{2}) \\ \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} (x'' - k\omega(1-x^2)x' + \omega^2 x) &= E\omega_1^2 \cos \lambda t'. \end{aligned}$$

Se $a_0^2 = \frac{\alpha}{\gamma} \Rightarrow a_0 = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Fazendo a mudança para o tempo t' temos $\frac{dx}{dt} = \omega \frac{dx}{dt'}$ e $\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2x}{dt'^2}$, logo

$$\begin{aligned} \omega^2 (x'' - k(1-x^2)x' + x) &= \frac{E\omega_1^2}{a_0} \cos \lambda t \\ x'' - k(1-x^2)x' + x &= \frac{E\omega_1^2}{a_0\omega^2} \cos \lambda t. \end{aligned}$$

Tomando $pk\lambda = \frac{E\omega_1^2}{a_0\omega^2}$, temos

$$x'' - k(1-x^2)x' + x = pk\lambda \cos \lambda t, \quad (3.6)$$

onde k é pequeno e λ próximo de 1. Nesta forma, os casos mais interessantes situam-se nas faixas

$$\frac{16}{27} < p^2 < \frac{32}{27}, \quad \frac{1}{4} < \frac{|1-\lambda|}{k} < \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Assumimos que k e $|1-\lambda|$ são pequenos, e que p é independente de k , e em seções posteriores assumimos que $\frac{|1-\lambda|}{k}$ é limitado. Usamos M e N para denotar constantes independentes de t , k e λ (não necessariamente o mesmo em cada lugar) a menos que o mesmo sufixo seja anexado, estas constantes muitas vezes dependem de p e das condições iniciais satisfeitas pela solução. As equações para (3.6) correspondentes a (3.4) são, em forma polar com $x = b \sin(\lambda t - \alpha)$

$$\begin{cases} \frac{2}{k} \frac{db}{dt} = p \cos \alpha + b \left(1 - \frac{1}{4}b^2\right) = \mathcal{B}(b, \alpha), \\ \frac{2}{k} \frac{d\alpha}{dt} = 2\rho - \frac{p}{b} \sin \alpha = \mathcal{A}(b, \alpha), \quad \rho = \frac{\lambda - 1}{k}. \end{cases} \quad (3.7)$$

No célebre artigo [5], Cartwright e Littlewood provaram que todas as soluções de (3.6) são limitadas quando $t \rightarrow \infty$, e que elas cruzam o eixo uma infinidade de vezes com $0 < x' < K$, onde K depende de k . Além disso, provaremos um teorema geral que mostre que, para todos os t suficientemente grandes, cada solução satisfaz

$$|x| < M, \quad |x'| < M,$$

onde M é independente de k , para $k \leq 1$. Assim, para o propósito de discutir qualquer tipo de solução periódica ou quase periódica, e qualquer tipo de solução de estado estacionário, é suficiente considerar a solução de (3.6) para a qual

$$x = 0, \quad x' = b \geq 0 \quad \text{quando} \quad t = \frac{\alpha}{\lambda},$$

e suponha que $b \leq M$. Alterando a origem de t para $\frac{\alpha}{\lambda}$, escrevemos a solução de

$$x'' - k(1 - x^2)x' + x = p\lambda k \cos(\lambda t + \alpha), \quad (3.8)$$

para o qual $x = 0$, $x' = b \geq 0$ em $t = 0$ na forma

$$x = b \sin t + k\xi_1; \quad (3.9)$$

Derivando (3.9) com respeito a t , temos

$$\begin{aligned} x' &= b \cos t + k\xi_1', \\ x'' &= -b \sin t + k\xi_1''. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Logo, substituindo as equações em (3.10) e (3.9) em (3.8) temos

$$\begin{aligned} -b \sin t + k\xi_1'' - k[1 - (b \sin t + k\xi_1)^2](b \cos t + k\xi_1') + b \sin t + k\xi_1 &= p\lambda k \cos(\lambda t + \alpha) \\ k\xi_1'' - k[1 - (b \sin t + k\xi_1)^2](b \cos t + k\xi_1') + k\xi_1 &= p\lambda k \cos(\lambda t + \alpha) \\ \xi_1'' - [1 - (b \sin t + k\xi_1)^2](b \cos t + k\xi_1') + \xi_1 &= p\lambda \cos(\lambda t + \alpha). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\xi_1'' + \xi_1 &= p\lambda \cos(\lambda t + \alpha) + [1 - (b \sin t + k\xi_1)^2] (b \cos t + k\xi_1') \\
&= p\lambda \cos(\lambda t + \alpha) + [1 - (b^2 \sin^2 t + 2bk\xi_1 \sin t + k^2\xi_1^2)] (b \cos t + k\xi_1') \\
&= p\lambda \cos(\lambda t + \alpha) + [1 - b^2 \sin^2 t - 2bk\xi_1 \sin t - k^2\xi_1^2] (b \cos t + k\xi_1') \\
&= p\lambda \cos(\lambda t + \alpha) + b \cos t(1 - b^2 \sin^2 t) - 2b^2 k\xi_1 \sin t \cos t - bk^2\xi_1^2 \cos t \\
&\quad + (1 - b^2 \sin^2 t)k\xi_1' - 2bk^2\xi_1\xi_1' \sin t - k^3\xi_1^2\xi_1' \\
&= p\lambda \cos(\lambda t + \alpha) + b \cos t(1 - b^2 \sin^2 t) + k\{(1 - b^2 \sin^2 t)\xi_1' \\
&\quad - 2b^2 \sin t \cos t\xi_1 - 2kb \sin t\xi_1\xi_1' - kb \cos t\xi_1^2 - k^2\xi_1^2\xi_1'\}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\xi_1'' + \xi_1 = \psi(t, p, b, \alpha, \lambda) + k\phi(\xi_1, \xi_1', t, k, b), \quad (3.11)$$

com

$$\begin{aligned}
\psi(t, p, b, \alpha, \lambda) &= p\lambda \cos(\lambda t + \alpha) + b \cos t(1 - b^2 \sin^2 t) \quad e \\
\phi(\xi_1, \xi_1', t, k, b) &= (1 - b^2 \sin^2 t)\xi_1' - 2b^2 \sin t \cos t\xi_1 - 2kb \sin t\xi_1\xi_1' - kb \cos t\xi_1^2 - k^2\xi_1^2\xi_1'.
\end{aligned}$$

Para todos a e b , existem constantes $M_1 = M_1(p, b)$, $N_1 = N_1(a, b)$, tais que para todo t

$$|\psi(t, p, b, \alpha)| \leq M_1, \quad |\phi(\xi, \eta, t, k, b)| \leq N_1(|\xi| + |\eta|), \quad |\xi| \leq a, \quad |\eta| \leq a. \quad (3.12)$$

Seja $X = X(t, b, \alpha)$, a solução de

$$x'' + x = \psi(t, p, b, \alpha) = p\lambda \cos \alpha \cos \lambda t - p\lambda \sin \alpha \sin \lambda t + b \left(1 - \frac{1}{4}b^2\right) \cos t + \frac{1}{4}b^3 \cos 3t, \quad (3.13)$$

para o qual $X(0) = X'(0) = 0$, de modo que

$$\begin{aligned}
X &= \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha (\cos t - \cos \lambda t) + \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \sin \alpha (\sin \lambda t - \lambda \sin t) \\
&\quad + \frac{1}{2}b \left(1 - \frac{1}{4}b^2\right) t \sin t + \frac{b^3}{32} (\cos t - \cos 3t).
\end{aligned} \quad (3.14)$$

De fato, a equação homogênea $x'' + x = 0$ tem como equação característica $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$. Assim, a solução homogênea é

$$x_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

A solução particular está dado por:

$$x_p(t) = A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t) + Ct \cos t + Dt \sin t + E \cos(3t) + F \sin(3t).$$

Logo, derivando com respeito a t temos

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -A\lambda \sin(\lambda t) + B\lambda \cos(\lambda t) + C \cdot \cos t - C \cdot t \sin t + D \sin t + D \cdot t \cos t \\ &\quad - 3E \sin(3t) + 3F \cos(3t) \\ x_p''(t) &= -A\lambda^2 \cos(\lambda t) - B\lambda^2 \sin(\lambda t) - C \cdot \sin t - C \sin t - C \cdot t \cos t + D \cos t \\ &\quad + D \cos t - D \cdot t \sin t - 9E \cos(3t) - 9F \sin(3t) \\ &= -A\lambda^2 \cos(\lambda t) - B\lambda^2 \sin(\lambda t) - 2C \cdot \sin t - C \cdot t \cos t + 2D \cos t - D \cdot t \sin t \\ &\quad - 9E \cos(3t) - 9F \sin(3t). \end{aligned}$$

Assim,

$$x_p''(t) + x_p(t) = A(1 - \lambda^2) \cos(\lambda t) + B(1 - \lambda^2) \sin(\lambda t) - 2C \sin t + 2D \cos t - 8E \cos(3t) - 8F \sin(3t). \quad (3.15)$$

De (3.13) e (3.15), temos

$$A = -\frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha, \quad B = \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \sin \alpha, \quad C = 0, \quad D = \frac{b}{2} \left(1 - \frac{b^2}{4}\right), \quad E = -\frac{b^3}{32} \quad \text{e} \quad F = 0.$$

Agora, a solução particular é

$$x_p(t) = -\frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha \cos(\lambda t) + \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \sin \alpha \sin(\lambda t) + \frac{b}{2} \left(1 - \frac{b^2}{4}\right) t \sin t - \frac{b^3}{32} \cos(3t).$$

Portanto, a solução geral é

$$\begin{aligned} X(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ X(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha \cos(\lambda t) + \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \sin \alpha \sin(\lambda t) \\ &\quad + \frac{b}{2} \left(1 - \frac{b^2}{4}\right) t \sin t - \frac{b^3}{32} \cos(3t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Derivando esta equação, temos

$$\begin{aligned} X'(t) &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{p\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha \sin(\lambda t) + \frac{p\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \sin \alpha \cos(\lambda t) \\ &\quad + \frac{b}{2} \left(1 - \frac{b^2}{4}\right) \sin t + \frac{b}{2} \left(1 - \frac{b^2}{4}\right) t \cos t + \frac{3b^3}{32} \sin(3t). \end{aligned} \quad (2) \quad (3.17)$$

Para $t = 0$ em (3.16):

$$0 = X(0) = C_1 - \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha - \frac{b^3}{32} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha + \frac{b^3}{32}.$$

Para $t = 0$ em (3.17):

$$0 = X'(0) = C_2 + \frac{p\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{p\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \sin \alpha.$$

Agora, substituindo os valores de C_1 e C_2 em (3.16), temos

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha \cos t + \frac{b^3}{32} \cos t - \frac{p\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \sin \alpha \sin t - \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha \cos(\lambda t) \\ &\quad + \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \sin \alpha \sin(\lambda t) + \frac{b}{2} \left(1 - \frac{b^2}{4}\right) t \sin t - \frac{b^3}{32} \cos(3t) \\ &= \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha (\cos t - \cos \lambda t) + \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \sin \alpha (\sin \lambda t - \lambda \sin t) \\ &\quad + \frac{1}{2} b \left(1 - \frac{1}{4} b^2\right) t \sin t + \frac{b^3}{32} (\cos t - \cos 3t). \end{aligned}$$

Portanto, $X = X(t, b, \alpha)$ é uma solução de (3.13).

Seja $\xi_1 = X(t) + k\xi_2(t)$, tal que

$$x = b \sin t + kX(t) + k^2\xi_2(t) \quad (3.18)$$

é uma solução de (3.8). Para progredir mais, temos que mostrar que ξ_2 permanece limitada quando $k \rightarrow 0$ para $0 \leq t \leq 3\pi$, ou algum resultado desse tipo, o que nos permitirá negligenciar $k^2\xi_2$ em comparação com $b \sin t$ e $kX(t)$.

3.2 Um Lema Fundamental.

Obteremos toda a informação necessária sobre o valor de ξ_2 do seguinte lema:

Lema 3.1. *Seja $F(x, y, t, k)$ uma função contínua de t com derivadas parciais contínuas em relação a x e y , tal que*

$$|F(x, y, t, k)| \leq M + |x| + |y|, \quad (3.19)$$

para $|x| \leq a$, $|y| \leq a$, $|t| \leq 3\pi$, $k \leq k_0$, M sendo independente de x , y , t , k . Então a solução da equação

$$x'' + x = F(x, x', t, k), \quad (3.20)$$

para o qual $x = 0$, $x' = 0$ quando $t = 0$ satisfaz

$$|x| \leq \frac{1}{4}M(e^{2t} - 1 - 2t), \quad |x'| \leq \frac{1}{2}M(e^{2t} - 1), \quad (3.21)$$

desde que $k < k_0$, $M(e^{6\pi} - 1) < 2a$, $0 \leq t \leq 3\pi$.

Demonstração. Como F é contínuo em t e tem derivadas parciais contínuas em relação a x e y , existe uma solução única e continua a existir enquanto $|x|$ e $|x'|$ permanecem menor ou igual a a . Escrevendo $x' = y$, $y' = -x + F$, nós temos

$$|x'| + |y'| = |y| + |-x + F| \leq |y| + |x| + |F| \leq |y| + |x| + M + |x| + |y|,$$

ou seja,

$$|x'| + |y'| \leq M + 2(|x| + |y|). \quad (3.22)$$

Para x' , y' , x e y positivos, temos $\psi(t) = |x| + |y| = x + y$. Logo

$$\begin{aligned} \psi'(t) &\leq M + 2\psi(t) \\ [\psi'(t) - 2\psi(t)]e^{-2t} &\leq Me^{-2t} \\ \frac{d}{dt}[\psi(t)e^{-2t}] &\leq Me^{-2t}, \end{aligned}$$

integrando

$$\psi(t)e^{-2t} \leq M \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = M \left[\frac{e^{-2\tau}}{-2} \right]_0^t = M \left[-\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{1}{2} \right].$$

Ou seja,

$$\psi(t) \leq \frac{M}{2} [e^{2t} - 1].$$

Portanto,

$$|x| + |y| \leq \frac{1}{2}M(e^{2t} - 1). \quad (3.23)$$

com $|x| \leq a$, $|y| \leq a$, $|t| \leq 3\pi$ desde $x(0) = y(0) = 0$.

Então, se $M(e^{6\pi} - 1) < 2a$,

$$|x'| = |y| \leq |x| + |y| \leq \frac{1}{2}M(e^{2t} - 1) \quad (0 \leq t \leq 3\pi),$$

ou seja, $x' = |x'| \leq \frac{1}{2}M(e^{2t} - 1)$, logo integrando temos

$$x(t) \leq \frac{M}{2} \left(\int_0^t e^{2\tau} d\tau - \int_0^t d\tau \right) = \frac{M}{2} \left(\frac{e^{2\tau}}{2} \Big|_0^t - t \right).$$

Portanto,

$$|x| \leq \frac{1}{4}M(e^{2t} - 1 - 2t) \quad (0 \leq t \leq 3\pi).$$

□

3.3 Equações de diferenças

Nesta seção encontraremos a expressão aproximada da aplicação de primeiro retorno no tempo $t = \frac{2\pi}{\lambda}$. Segue-se do Lema 3.1 que

$$|\xi_1| \leq \frac{1}{4}M_1(e^{6\pi} - 1), \quad |\xi'_1| \leq \frac{1}{2}M_1(e^{6\pi} - 1), \quad (3.24)$$

onde $M_1 = M_1(p, b)$ depende apenas de p e b , desde que $k < k_0(p, b)$. De fato, se escolhermos $a = M_1(p, b)(e^{6\pi} - 1)$ em (3.12) as hipóteses do lema são satisfeitas para $k < k_0 = k_0(N_1(a, b))$ e, assim, o resultado é válido para $k < k_0(p, b)$. Por (3.18), ξ_2 satisfaz uma equação da forma

$$\xi_2'' + \xi_2 = \psi_1(t) + k\phi_1(\xi_2, \xi'_2, t, k).$$

Além disso, desde $|X| \leq \frac{1}{4}M_1(e^{6\pi} - 1)$, $|X'| \leq \frac{1}{2}M_1(e^{6\pi} - 1)$, para $0 \leq t \leq 3\pi$, e $|\phi| \leq 2N_1(a, b)|a|$, temos

$$|\psi_1| \leq M_2(p, b),$$

desde que $k < k_0(p, b)$, e é fácil ver que

$$|\phi_1| < N_2\{|\xi_2| + |\xi'_2|\}, \quad N_2 = N_2(p, b, a)$$

para $|\xi_2| \leq a$, $|\xi'_2| \leq a$, $|t| \leq 3\pi$, $k < k_0(p, b)$.

Portanto, para $0 \leq t \leq 3\pi$,

$$|\xi_2| \leq \frac{1}{4}M_2(p, b)(e^{6\pi} - 1), \quad |\xi'_2| \leq \frac{1}{2}M_2(p, b)(e^{6\pi} - 1). \quad (3.25)$$

Agora, usando (3.9), com (3.24), achamos que x muda de sinal de negativo para positivo em $t = 2\pi + k\tau$, onde $|\tau| \leq M_3(p, b)$. Como $\cos(\lambda t + \alpha)$ tem o período $\frac{2\pi}{\lambda}$, essa solução satisfaz (3.8) com $x = 0$, $x' = \tilde{b}$ em $t = 0$, desde que α seja substituída por

$$\tilde{\alpha} = \alpha + 2\pi(\lambda - 1) + k\lambda\tau \quad (3.26)$$

e \tilde{b} é escolhido apropriadamente. Por (3.14), (3.18) e (3.25)

$$x = b \sin t + k\xi_1, \quad \text{com} \quad \xi_1 = X(t) + k\xi_2 \quad \text{e} \quad t = 2\pi + k\tau.$$

$$\begin{aligned} 0 &= b \sin(2\pi + k\tau) + kX(2\pi + k\tau) + k^2\xi_2(2\pi + k\tau) \\ 0 &= b \sin(2\pi + k\tau) + kX(2\pi + k\tau) + O(k^2), \end{aligned}$$

e, usando pela primeira vez o fato de que λ está próximo de 1, temos

$$0 = b\tau + p\pi \sin \alpha + O(k) + O(\lambda - 1). \quad (3.27)$$

Daí,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{p\pi \sin \alpha}{-b} + O\left(\frac{k}{-b}\right) + O\left(\frac{\lambda - 1}{-b}\right) \\ \tau &= -\frac{p\pi \sin \alpha}{b} + O(k) + O(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Logo, em (3.26), temos

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} - \alpha &= 2\pi(\lambda - 1) - \frac{kp\pi \sin \alpha}{b} + kO(k) + kO(\lambda - 1) \\ \frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{k\pi} &= 2\left(\frac{\lambda - 1}{k}\right) - \frac{p \sin \alpha}{b} + O(k) + O(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Diferenciando (3.18) e usando (3.14) e (3.25), temos

$$\begin{aligned} x &= b \sin t + kX(t) + k^2\xi_2(t) \\ x' &= b \cos t + kX'(t) + k^2\xi_2'(t) \\ \tilde{b} &= b \cos(2\pi + k\tau) + kX'(2\pi + k\tau) + k^2\xi_2'(2\pi + k\tau). \end{aligned}$$

A derivada de $X(t)$ é:

$$\begin{aligned} X'(t) &= \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha (\lambda \sin \lambda t - \sin t) + \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \sin \alpha (\lambda \cos \lambda t - \lambda \cos t) \\ &\quad + \frac{1}{2}b \left(1 - \frac{1}{4}b^2\right) (\sin t + t \cos t) t \sin t + \frac{b^3}{32} (3 \sin 3t - \sin t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X'(2\pi + k\tau) &= \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha \left[\underbrace{\lambda \sin(\lambda 2\pi + \lambda k\tau) - \sin(2\pi + k\tau)}_I \right] \\
&+ \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \sin \alpha \left[\underbrace{\lambda \cos(\lambda 2\pi + \lambda k\tau) - \lambda \cos(2\pi + k\tau)}_{II} \right] \\
&+ \frac{1}{2}b \left(1 - \frac{1}{4}b^2 \right) \left[\underbrace{\sin(2\pi + k\tau) + (2\pi + k\tau) \cos(2\pi + k\tau)}_{III} \right] \\
&+ \frac{b^3}{32} \left[\underbrace{3 \sin(6\pi + 3k\tau) - \sin(2\pi + k\tau)}_{IV} \right].
\end{aligned}$$

Logo, para $\lambda \simeq 1$ e $\tau \simeq 0$. Temos os seguintes valores de I , II , III , e IV :

$$\begin{aligned}
I &= \lambda \sin(\lambda 2\pi + \lambda k\tau) - \sin(2\pi + k\tau) \\
&= \frac{\lambda^2 \sin(\lambda 2\pi + \lambda k\tau)}{\lambda^2} - \sin(2\pi + k\tau) \\
&= \frac{2\lambda \sin(\lambda 2\pi + \lambda k\tau) + \lambda^2(2\pi + k\tau) \cos(\lambda 2\pi + \lambda k\tau)}{1} - \sin(2\pi + k\tau) \\
&= 2 \sin(2\pi) + (2\pi) \cos(2\pi) - \sin(2\pi) \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
II &= \lambda \cos(\lambda 2\pi + \lambda k\tau) - \lambda \cos(2\pi + k\tau) \\
&= \cos(2\pi) - \cos(2\pi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
III &= \sin(2\pi + k\tau) + (2\pi + k\tau) \cos(2\pi + k\tau) \\
&= \sin(2\pi) + (2\pi) \cos(2\pi) \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
IV &= 3 \sin(6\pi + 3k\tau) - \sin(2\pi + k\tau) \\
&= 3 \sin(6\pi) - \sin(2\pi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} X'(2\pi + k\tau) &= \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha [2\pi] + \frac{p\lambda}{\lambda^2 - 1} \sin \alpha [0] \\ &\quad + \frac{1}{2}b \left(1 - \frac{1}{4}b^2\right) [2\pi] + \frac{b^3}{32} [0] \\ &= \frac{2\pi p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha + \frac{2\pi b}{2} \left(1 - \frac{1}{4}b^2\right) + O(k). \end{aligned}$$

Tome $k^2\xi'_2(2\pi + k\tau) = O(k^2) + O\{k(\lambda - 1)\}$. Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= b \cos(2\pi + k\tau) + kX'(2\pi + k\tau) + k^2\xi'_2(2\pi + k\tau) \\ &= b \cos(2\pi) + k \left[\frac{2\pi p\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \alpha + \frac{2\pi b}{2} \left(1 - \frac{1}{4}b^2\right) \right] + O(k^2) + O\{k(\lambda - 1)\} \\ &= b + k \left[\frac{2\pi p}{2\lambda} \cos \alpha + \pi b \left(1 - \frac{1}{4}b^2\right) \right] + O(k^2) + O\{k(\lambda - 1)\} \\ &= b + k\pi p \cos \alpha + k\pi b \left(1 - \frac{1}{4}b^2\right) + O(k^2) + O\{k(\lambda - 1)\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{b} = b + p\pi k \cos \alpha + \pi k b \left(1 - \frac{1}{4}b^2\right) + O(k^2) + O(k(\lambda - 1)). \quad (3.28)$$

As constantes implicadas nos O 's dependem apenas de p e b . De (3.27) e (3.28) obtemos equações de diferença que correspondem a (3.7), a saber,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{b} - b}{\pi k} = p \cos \alpha + b \left(1 - \frac{1}{4}b^2\right) + O(k) + O(\lambda - 1) \\ \quad = \mathcal{B}(b, \alpha) + O(k) + O(\lambda - 1), \\ \frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{\pi k} = 2\rho - \frac{p \sin \alpha}{b} + O(k) + O(\lambda - 1) \\ \quad = \mathcal{A}(b, \alpha) + O(k) + O(\lambda - 1), \quad \rho = \frac{\lambda - 1}{k}. \end{array} \right. \quad (3.29)$$

As soluções de (3.8) estabelecem uma transformação contínua injetora do ponto (b, α) no ponto $(\tilde{b}, \tilde{\alpha})$, desde que $0 \leq b \leq M(p)$, e no que segue nós devemos considerar principalmente (3.29) como equações aproximadas para a transformação de Poincaré de primeiro retorno no tempo $\frac{2\pi}{\lambda}$.

3.4 Estabilidade de Soluções Periódicas.

Se a solução de (3.8) para a qual $x = 0$, $x' = b$ em $t = \alpha$ tem o período $\frac{2\pi}{\lambda}$, $\tilde{b} = b$ e $\tilde{\alpha} = \alpha$, para que as soluções com o período $\frac{2\pi}{\lambda}$ sejam dadas pelos pontos fixos da

transformação $(b, \alpha) \longrightarrow (\tilde{b}, \tilde{\alpha})$. Por (3.29) estes são aproximadamente (b_0, α_0) , onde

$$\mathcal{B}(b_0, \alpha_0) = \mathcal{A}(b_0, \alpha_0) = 0. \quad (3.30)$$

A partir de agora assumimos que $\lambda - 1 = O(k)$, de modo que $\rho = O(1)$ quando $k \longrightarrow 0$ em (3.29). (Isso, é claro, significa que a escolha de k menor pode exigir tornar λ mais próximo de 1.)

Para discutir a estabilidade das soluções com o período $\frac{2\pi}{\lambda}$, colocamos

$$b = b_0 + c, \quad \alpha = \alpha_0 + \beta, \quad \tilde{b} = b_0 + \tilde{c}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha_0 + \tilde{\beta},$$

onde b_0, α_0 satisfazem (3.30), e suponha que c e β são pequenos, mas não ambos 0. No início, supomos que termos da forma $O(k)$ são pequenos em comparação com o maior de c e β .

Da primeira equação de (3.29), temos

$$\begin{aligned} \tilde{b} - b &= \pi k p \cos \alpha + \pi k b \left(1 - \frac{1}{4}b^2\right) + \pi k O(k) + \pi k O(\lambda - 1) \\ b_0 + \tilde{c} - b_0 - c &= \pi k p \cos(\alpha_0 + \beta) + \pi k (b_0 + c) \left(1 - \frac{(b_0 + c)^2}{4}\right) + O(k^2) + O(k(\lambda - 1)) \\ \tilde{c} &= c + \pi k p [\cos \alpha_0 \cos \beta - \sin \alpha_0 \sin \beta] + \pi k (b_0 + c) - \frac{\pi k (b_0 + c)^3}{4} \\ &\quad + O(k^2) + O(k(\lambda - 1)) \\ \tilde{c} &= c + \pi k p [\cos \alpha_0 \cos \beta - \sin \alpha_0 \sin \beta] + \pi k b_0 + \pi k c - \frac{\pi k (b_0^3 + 3b_0^2 c + 3b_0 c^2 + c^3)}{4} \\ &\quad + O(k^2) + O(k(\lambda - 1)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= c + \pi k c - \frac{3\pi k b_0^2 c}{4} + \pi k p \cos \alpha_0 \cos \beta - \pi k p \sin \alpha_0 \sin \beta + \pi k b_0 \\ &\quad - \frac{\pi k (b_0^3 + 3b_0 c^2 + c^3)}{4} + O(k^2) + O(k(\lambda - 1)) \\ \tilde{c} &= \left[1 + \pi k \left(1 - \frac{3b_0^2}{4}\right)\right] c + \pi k p \cos \alpha_0 \cos \beta - \pi k p \sin \alpha_0 \sin \beta + \pi k b_0 \\ &\quad - \frac{\pi k (b_0^3 + 3b_0 c^2 + c^3)}{4} + O(k^2) + O(k(\lambda - 1)) \\ \tilde{c} &= \left[1 + \pi k \left(1 - \frac{3b_0^2}{4}\right)\right] c - \pi k p \sin \alpha_0 \sin \beta + \pi k p \cos \alpha_0 \cos \beta + \pi k b_0 \\ &\quad - \frac{\pi k (b_0^3 + 3b_0 c^2 + c^3)}{4} + O(k^2) + O(k(\lambda - 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c} &= \left[1 + \pi k \left(1 - \frac{3b_0^2}{4}\right)\right] c - \pi k p \sin \alpha_0 \cdot \beta + O(k^2) \\ &\quad + \pi k p \cos \alpha_0 \cos \beta + \pi k b_0 - \frac{\pi k (b_0^3 + 3b_0 c^2 + c^3)}{4} + O(k(\lambda - 1)) \\ \tilde{c} &= \left[1 + \pi k \left(1 - \frac{3b_0^2}{4}\right)\right] c - \pi k p \sin \alpha_0 \cdot \beta + O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\}.\end{aligned}$$

Da segunda equação de (3.29), temos

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} - \alpha &= 2\pi k \rho - \frac{\pi k p \sin \alpha}{b} + \pi k O(k) + \pi k O(\lambda - 1) \\ \alpha_0 + \tilde{\beta} - \alpha_0 - \beta &= 2\pi k \rho - \frac{\pi k p \sin(\alpha_0 + \beta)}{b_0} + O(k^2) + O\{k(\lambda - 1)\} \\ \tilde{\beta} - \beta &= 2\pi k \rho - \frac{\pi k p [\cos \beta \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 \sin \beta]}{b_0} + O(k^2) + O\{k(\lambda - 1)\} \\ \tilde{\beta} &= \beta + 2\pi k \rho - \frac{\pi k p \cos \beta \sin \alpha_0}{b_0} - \frac{\pi k p \cos \alpha_0 \sin \beta}{b_0} + O(k^2) + O\{k(\lambda - 1)\} \\ \tilde{\beta} &= 2\pi k \rho + \beta - \frac{\pi k p \cos \alpha_0}{b_0} \cdot \beta + O(k^2) - \frac{\pi k p \cos \beta \sin \alpha_0}{b_0} + O\{k(\lambda - 1)\} \\ \tilde{\beta} &= \frac{2\pi k \rho}{b_0} \cdot c + \left[1 - \frac{\pi k p \cos \alpha_0}{b_0}\right] \cdot \beta + O(k^2) + O\{k(\lambda - 1)\} - \frac{\pi k p \cos \beta \sin \alpha_0}{b_0} \\ \tilde{\beta} &= \frac{2\pi k \rho}{b_0} \cdot c + \left[1 - \frac{\pi k p \cos \alpha_0}{b_0}\right] \cdot \beta + O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\}.\end{aligned}$$

Assim, temos o sistema

$$\begin{cases} \tilde{c} = A c + B \beta + O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\}, \\ \tilde{\beta} = C c + D \beta + O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\}, \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}\text{onde } A &= 1 + \pi k \left(1 - \frac{3}{4} b_0^2\right), \quad B = -\pi k p \sin \alpha_0 = -2\rho b_0 \pi k, \\ C &= \frac{2\rho \pi k}{b_0}, \quad D = 1 - \frac{\pi k p \cos \alpha_0}{b_0} = 1 + \pi k \left(1 - \frac{1}{4} b_0^2\right).\end{aligned}$$

A estabilidade das soluções de (3.7) depende das raízes $1 + k\mu_1$, $1 + k\mu_2$ da equação

$$\begin{vmatrix} A - x & B \\ C & D - x \end{vmatrix} = 0.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}(A - x)(D - x) - BC &= 0 \\ x^2 - (A + D)x &= BC - AD \\ x^2 - (A + D)x + \frac{(A + D)^2}{4} &= BC - AD + \frac{(A + D)^2}{4}\end{aligned}$$

$$[x - (A + D)]^2 = BC + \frac{(A - D)^2}{4}$$

$$x = A + D \pm \sqrt{BC + \frac{(A - D)^2}{4}}.$$

Assim,

$$x_1 = A + D + \sqrt{BC + \frac{(A - D)^2}{4}} \quad \text{e} \quad x_2 = A + D - \sqrt{BC + \frac{(A - D)^2}{4}}.$$

Substituindo os valores de A , B , C e D em x_1 temos:

$$x_1 = 1 + \pi k \left(1 - \frac{3}{4}b_0^2\right) + 1 + \pi k \left(1 - \frac{1}{4}b_0^2\right)$$

$$+ \left[-4\pi^2 k^2 \rho^2 + \frac{\left(1 + \pi k \left(1 - \frac{3}{4}b_0^2\right) - 1 - \pi k \left(1 - \frac{1}{4}b_0^2\right)\right)^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = 2 + 2\pi k - \frac{3\pi k b_0^2}{4} - \frac{\pi k b_0^2}{4} + \left[-4\pi^2 k^2 \rho^2 + \frac{\left(-\frac{3\pi k b_0^2}{4} + \frac{\pi k b_0^2}{4}\right)^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = 2 + 2\pi k - \pi k b_0^2 + \left[-4\pi^2 k^2 \rho^2 + \frac{\left(-\frac{\pi k b_0^2}{2}\right)^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = 2 + 2\pi k - \pi k b_0^2 + \left[\frac{\pi^2 k^2 b_0^4}{16} - \frac{64\pi^2 k^2 \rho^2}{16} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x_1 - 2}{2k} = \pi - \frac{\pi b_0^2}{2} + \frac{\pi}{8} [b_0^4 - 64\rho^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Assim

$$\frac{x_1 - 2}{2k} = \pi \left\{ 1 - \frac{b_0^2}{2} + \frac{1}{8} [b_0^4 - 64\rho^2]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Similarmente para x_2 temos:

$$x_2 = 1 + \pi k \left(1 - \frac{3}{4}b_0^2\right) + 1 + \pi k \left(1 - \frac{1}{4}b_0^2\right)$$

$$- \left[-4\pi^2 k^2 \rho^2 + \frac{\left(1 + \pi k \left(1 - \frac{3}{4}b_0^2\right) - 1 - \pi k \left(1 - \frac{1}{4}b_0^2\right)\right)^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = 2 + 2\pi k - \frac{3\pi k b_0^2}{4} - \frac{\pi k b_0^2}{4} - \left[-4\pi^2 k^2 \rho^2 + \frac{\left(-\frac{3\pi k b_0^2}{4} + \frac{\pi k b_0^2}{4}\right)^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = 2 + 2\pi k - \pi k b_0^2 - \left[-4\pi^2 k^2 \rho^2 + \frac{\left(-\frac{\pi k b_0^2}{2}\right)^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 + 2\pi k - \pi k b_0^2 - \left[\frac{\pi^2 k^2 b_0^4}{16} - \frac{64\pi^2 k^2 \rho^2}{16} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{x_2 - 2}{2k} &= \pi - \frac{\pi b_0^2}{2} - \frac{\pi}{8} [b_0^4 - 64\rho^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{x_2 - 2}{2k} = \pi \left\{ 1 - \frac{b_0^2}{2} - \frac{1}{8} [b_0^4 - 64\rho^2]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Tomando

$$\mu_1 = \frac{x_1 - 2}{2k} \quad \text{e} \quad \mu_2 = \frac{x_2 - 2}{2k},$$

temos

$$\mu_1 = \pi \left\{ 1 - \frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{4} (b_0^4 - 64\rho^2)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad \mu_2 = \pi \left\{ 1 - \frac{1}{2} b_0 - \frac{1}{4} (b_0^4 - 64\rho^2)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

De (3.31), temos

$$\begin{bmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \\ O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Daí, temos os seguintes casos:

Caso 1. Se $b_0^4 > 64\rho^2$, então μ_1 e μ_2 são reais e, existe uma matriz inversível R , tal que a forma de Jordan é:

$$J = R^{-1}QR = \begin{bmatrix} 1 + k\mu_1 & 0 \\ 0 & 1 + k\mu_2 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Em (3.32) fazendo a mudança:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} c \\ \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c \\ \beta \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} c_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
R \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} &= QR \begin{bmatrix} c_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \\ O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} &= R^{-1}QR \begin{bmatrix} c_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R^{-1} \begin{bmatrix} O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \\ O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + k\mu_1 & 0 \\ 0 & 1 + k\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \\ O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 + kc_1\mu_1 \\ \beta_1 + k\beta_2\mu_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \\ O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} \tilde{c}_1 - c_1 &= k\mu_1 c_1 + O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\}, \\ \tilde{\beta}_1 - \beta_1 &= k\mu_2 \beta_1 + O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\}. \end{cases} \quad (3.33)$$

Caso 2. Se $b_0^4 = 64\rho^2$, então $\mu_1 = \mu_2$ e a forma de Jordan é:

$$J = R^{-1}QR = \begin{bmatrix} 1 + k\mu_1 & 0 \\ k & 1 + k\mu_1 \end{bmatrix}, \quad \text{com } Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Similarmente ao Caso 1. temos:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + k\mu_1 & 0 \\ k & 1 + k\mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \\ O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 + kc_1\mu_1 \\ kc_1 + \beta_1 + k\beta_1\mu_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \\ O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \tilde{c}_1 - c_1 &= k\mu_1 c_1 + O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\}, \\ \tilde{\beta}_1 - \beta_1 &= k\mu_3 c_1 + k\mu_1 \beta_1 + O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\}, \end{cases} \quad (3.34)$$

onde $\mu_3 = O(1)$.

Caso 3. Se $b_0^4 < 64\rho^2$, então μ_1 e μ_2 não são ambos reais, eles são números complexos conjugados, e existe uma transformação similar por meio da qual (3.31) pode ser expressa em coordenadas polares (r, θ) tal que $r = 0$ se, e somente se, $c = \beta = 0$.

Os autovalores da matriz Q de (3.32), isto é:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 + k\mu_1, \\ \lambda_2 = 1 + k\mu_2. \end{cases}, \quad \text{com} \quad \begin{cases} \mu_1 = a + ib, \\ \mu_2 = a - ib. \end{cases} \quad (3.35)$$

Como $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, então

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 + ka + ikb = \alpha + i\gamma, \\ \lambda_2 = 1 + ka - ikb = \alpha - i\gamma. \end{cases}, \quad \text{com} \quad \begin{cases} \alpha = 1 + ka, \\ \gamma = kb. \end{cases} \quad (3.36)$$

Agora, em forma análoga ao Caso 1. de (3.32) fazendo a mudança,

$$\begin{bmatrix} c \\ \beta \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} c_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Similarmente ao Caso 1. temos:

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} = R^{-1}QR \begin{bmatrix} c_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R^{-1} \begin{bmatrix} O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \\ O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \\ O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha c_1 + \gamma \beta_1 \\ -\gamma c_1 + \alpha \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \\ O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{cases} \tilde{c}_1 = \alpha c_1 + \gamma \beta_1 + n, \\ \tilde{\beta}_1 = -\gamma c_1 + \alpha \beta_1 + n, \end{cases}, \quad \text{com} \quad n = O(k^2) + O\{k(|c| + |\beta|)^2\}.$$

Em coordenadas polares, fazendo
$$\begin{cases} c_1 = r \cos \theta, \\ \beta_1 = r \sin \theta. \end{cases}$$

Se $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$ é o ponto correspondente a $(\tilde{c}_1, \tilde{\beta}_1)$, então
$$\begin{cases} \tilde{c}_1 = \tilde{r} \cos \tilde{\theta}, \\ \tilde{\beta}_1 = \tilde{r} \sin \tilde{\theta}. \end{cases} \quad \text{Logo,}$$

$$\begin{cases} \tilde{r} \cos \tilde{\theta} = \alpha r \cos \theta + \gamma r \sin \theta + n, \\ \tilde{r} \sin \tilde{\theta} = -\gamma r \cos \theta + \alpha r \sin \theta + n. \end{cases}$$

Daí, do sistema de equações temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \tilde{r}^2 &= (\alpha r \cos \theta + \gamma r \sin \theta + n)^2 + (-\gamma r \cos \theta + \alpha r \sin \theta + n)^2 \\ \tilde{r}^2 &= (\alpha^2 + \gamma^2)r^2 + 2n^2 + 2[(\alpha - \gamma)nr \cos \theta + (\gamma + \alpha)nr \sin \theta] \\ \tilde{r}^2 &= ((1 + ka)^2 + (kb)^2)r^2 + 2n^2 + 2[i2bnr \cos \theta + 2anr \sin \theta] \\ \tilde{r}^2 &= ((1 + ka)^2 + (kb)^2)r^2 + 2n^2 + 4nr [a \sin \theta + ib \cos \theta] \\ \tilde{r}^2 &= |1 + k\mu_1|^2 r^2 + 2n^2 + 4nr [a \sin \theta + ib \cos \theta]. \end{aligned}$$

$$\text{Pois, } |1 + k\mu_1| = |1 + k(a + ib)| = |(1 + ka) + ikb| = (1 + ka)^2 + (kb)^2.$$

Portanto,

$$\tilde{r} = |1 + k\mu_1|r + O(k^2) + O(kr^2),$$

e podemos escrever (3.31) na forma

$$\begin{cases} \tilde{r} - r = k\Re(\mu_1)r + O(k^2) + O(kr^2), \\ \tilde{\theta} - \theta = k\Im(\mu_1) + O(k^2) + O(kr^2). \end{cases} \quad (3.38)$$

É fácil ver a partir de (3.33), (3.34), e (3.38) que enquanto c e β são suficientemente pequenos, mas não ambos $O(k)$, o ponto (b, α) se move para ou longe de (b_0, α_0) conforme a solução correspondente de (3.7) se move em direção ou para longe de (b_0, α_0) conforme t aumenta, desde que $\Re(\mu_1) \neq 0$, $\Re(\mu_2) \neq 0$, e também, no caso $\mu_1 > 0$, $\mu_2 < 0$, que o ponto (b, α) não está em certos ângulos críticos. Existem três casos padrão

- $\Re(\mu_1) < 0$, $\Re(\mu_2) < 0$, um ponto estável,
- $\Re(\mu_1) > 0$, $\Re(\mu_2) > 0$, um ponto completamente instável,

- μ_1, μ_2 real e $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$, um ponto de sela.

Os outros casos são, em algum sentido, críticos, no caso em que μ_1 e μ_2 são puramente imaginários não podemos determinar se o ponto é estável ou instável, mas a transformação (3.38) obviamente gira numa vizinhança de (b_0, α_0) através de um ângulo $\Im(\mu_1)$ aproximadamente. Os casos restantes em que $\mu_1 = 0$ ou $\mu_2 = 0$ podem ser considerados como correspondentes a um ponto fixo múltiplo formado por um par de pontos fundidos, um ponto estável e um ponto de sela, ou um ponto completamente instável e um ponto de sela.

3.5 O Método do Ponto Fixo.

Seja P um ponto com coordenadas (b, α) perto a (b_0, α_0) , seja \tilde{P} o ponto correspondente $(\tilde{b}, \tilde{\alpha})$, e seja $\tilde{\tilde{P}}$ o ponto obtido ignorando os termos

$$O(k^2), O\{k(|c| + |\beta|)^2\}, O(kr^2) \text{ em (3.33), (3.34) e (3.38).}$$

Temos:

$$\begin{cases} \tilde{c}_1 = (1 + k\mu_1)c_1 \\ \tilde{\beta}_1 = (1 + k\mu_2)\beta_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \tilde{c}_1 = (1 + k\mu_1)c_1 \\ \tilde{\beta}_1 = (1 + k\mu_1)\beta_1 + k\mu_3c_1 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$\begin{cases} \tilde{r} = (1 + k\Re(\mu_1))r, \\ \tilde{\theta} = \theta + k\Im(\mu_1), \end{cases}.$$

É bem conhecido (e fácil de ver) que o vetor $P\tilde{\tilde{P}}$ gira num ângulo de $\pm 2\pi$ quando P descreve no sentido anti-horário um círculo Γ com centro (b_0, α_0) e raio

$$R < r_0(b_0, \alpha_0) = r_0(\mu_1, \mu_2, p, \rho)$$

, desde que $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$.

Suponha que isso seja assim. Decorre de (3.33), (3.34) e (3.38) que se $k \leq 1$ o ângulo entre os vetores $P\tilde{P}$ e $P\tilde{\tilde{P}}$ é menor que

$$\arctan \left\{ \frac{M_4k^2 + M_5kR^2}{M_6kR} \right\} = \arctan \left\{ \frac{M_4k + M_5R^2}{M_6R} \right\} < \frac{1}{4}\pi, \quad (3.39)$$

desde que $R < R_0(M_4, M_5, M_6)$ e $k < k_0(R)$. Assim, o vetor $P\tilde{P}$ que varia continuamente e retorna à sua posição inicial também gira através de um ângulo $\pm 2\pi$. É bem conhecido (e fácil de ver, deformando Γ em um ponto) que isso implica que existe um ponto fixo (b_0^*, α_0^*) da transformação $P \rightarrow \tilde{P}$ dentro de Γ e, portanto, uma solução correspondente de (3.6) com o período $\frac{2\pi}{\lambda}$ exatamente.

3.6 Unicidade.

Resta estabelecer que, no caso que acabamos de considerar, há apenas um ponto fixo (b_0^*, α_0^*) dentro de Γ para $r < r_0(\mu_1, \mu_2)$, $k < k_0(p, \mu_1, \mu_2)$.

Seja

$$x = b_0^* \sin t + kX^*(t), \quad (3.40)$$

a solução exatamente periódica de (3.8):

$$x'' - k(1 - x^2)x' + x = p\lambda k \cos(\lambda t + \alpha),$$

com $\alpha = \alpha_0^*$ para o qual $x = 0$, $x' = b_0^*$ em $t = 0$.

Agora, como $x = b_0^* \sin t + kX^*(t)$, então $x' = b_0^* \cos t + kX^{*'}(t)$. Para $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= b_0^* \sin(0) + kX^*(0) &\Rightarrow X^*(0) &= 0, \\ b_0^* &= b_0^* \cos(0) + kX^{*'}(0) &\Rightarrow X^{*'}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Seja $x = (b_0^* + c^*) \sin t + kX_1^*(t, c^*, \beta^*)$ a solução de (3.8): com $\alpha = \alpha_0^* + \beta^*$ para a qual $x = 0$, $x' = b_0^* + c^*$ em $t = 0$.

Agora, como $x = (b_0^* + c^*) \sin t + kX_1^*(t, c^*, \beta^*)$ então $x' = (b_0^* + c^*) \cos t + kX_1^{*'}(t, c^*, \beta^*)$.

Para $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= (b_0^* + c^*) \sin(0) + kX_1^*(0, c^*, \beta^*) &\Rightarrow X_1^*(0, c^*, \beta^*) &= 0, \\ (b_0^* + c^*) &= (b_0^* + c^*) \cos(0) + kX_1^{*'}(0, c^*, \beta^*) &\Rightarrow X_1^{*'}(0, c^*, \beta^*) &= 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Portanto, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} X^{*''} + X^* &= \psi(t, p, b_0^*, \alpha_0^*) + k\phi(X^*, X^{*'}, t, k, b_0^*, \alpha_0^*), \\ X_1^{*''} + X_1^* &= \psi(t, p, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*) + k\phi(X_1^*, X_1^{*'}, t, k, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*). \end{cases} \quad (3.42)$$

Do sistema, subtraindo as equações, temos

$$\begin{aligned}
(X_1^{*''} - X^{*''}) + (X_1^* - X^*) &= \psi(t, p, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*) - \psi(t, p, b_0^*, \alpha_0^*) \\
&\quad + k \{ \phi(X_1^*, X_1^{*'}, t, k, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*) - \phi(X^*, X^{*'}, t, k, b_0^*, \alpha_0^*) \}, \\
(X_1^* - X^*)'' + (X_1^* - X^*) &= \psi(t, p, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*) - \psi(t, p, b_0^*, \alpha_0^*) \\
&\quad + k \{ \phi(X_1^*, X_1^{*'}, t, k, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*) - \phi(X^*, X^{*'}, t, k, b_0^*, \alpha_0^*) \}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Seja $X_1^* - X^* = Z_0^* - Z_1^*$, onde $Z_0^*(0) = Z_1^*(0) = 0$, e

$$Z_0^{*''} + Z_0^* = \psi(t, p, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*) - \psi(t, p, b_0^*, \alpha_0^*) = \psi^*(t). \tag{3.44}$$

Pois,

$$\begin{aligned}
(Z_0^* - Z_1^*)'' + (Z_0^* - Z_1^*) &= \psi(t, p, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*) - \psi(t, p, b_0^*, \alpha_0^*) \\
&\quad + k \{ \phi(X_1^*, X_1^{*'}, t, k, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*) - \phi(X^*, X^{*'}, t, k, b_0^*, \alpha_0^*) \}, \\
Z_0^{*''} - Z_1^{*''} + Z_0^* - Z_1^* &= \psi(t, p, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*) - \psi(t, p, b_0^*, \alpha_0^*) \\
&\quad + k \{ \phi(X_1^*, X_1^{*'}, t, k, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*) - \phi(X^*, X^{*'}, t, k, b_0^*, \alpha_0^*) \}, \\
(Z_0^{*''} + Z_0^*) - (Z_1^{*''} + Z_1^*) &= \psi(t, p, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*) - \psi(t, p, b_0^*, \alpha_0^*) \\
&\quad + k \{ \phi(X_1^*, X_1^{*'}, t, k, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*) - \phi(X^*, X^{*'}, t, k, b_0^*, \alpha_0^*) \}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

De modo que Z_1^* representa a diferença obtida tomando X^* e X_1^* em vez dos valores correspondentes da função X definida por (3.14) com (b_0^*, α_0^*) e $(b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*)$ respectivamente para (b, α) . Em seguida, subtraindo as equações (3.42) e usando (3.44), temos

$$Z_1^{*''} + Z_1^* = k \{ \phi(X_1^*, X_1^{*'}, t, k, b_0^* + c^*, \alpha_0^* + \beta^*) - \phi(X^*, X^{*'}, t, k, b_0^*, \alpha_0^*) \} = k\phi^*(t), \tag{3.46}$$

onde

$$\begin{aligned}
|\phi^*| &\leq M_1^* \{ |X_1^* - X^*| + |X_1^{*'} - X^{*'}| + |c^*| + |\beta^*| \} \\
&= M_1^* \{ |Z_0^* - Z_1^*| + |Z_0^{*'} - Z_1^{*'}| + |c^*| + |\beta^*| \} \\
&\leq M_1^* \{ |Z_0^*| + |Z_1^*| + |Z_0^{*'}| + |Z_1^{*'}| + |c^*| + |\beta^*| \}.
\end{aligned}$$

Mas em (3.44) $|\psi^*| \leq M_8^* \{ |c^*| + |\beta^*| \}$, e assim, pelo Lema 3.1,

$$M_9^* (|c^*| + |\beta^*|) > \begin{cases} |Z_0^*| \\ |Z_0^{*'}| \end{cases}.$$

Já que $|\phi^*| \leq M_{10}^*(|c^*| + |\beta^*|) + M_{11}^*(|Z_1^*| + |Z_1'^*|)$, e assim, por (3.46) e o Lema 3.1,

$$kM_{12}^*(|c^*| + |\beta^*|) > \begin{cases} |Z_1^*| \\ |Z_1'^*| \end{cases}.$$

Segue-se que, em vez das equações (3.31), temos

$$\begin{aligned} \tilde{c}^* &= Ac^* + B\beta^* + O\{k^2(|c^*| + |\beta^*|)\} + O\{k(|c^*| + |\beta^*|)^2\}, \\ \tilde{\beta}^* &= Cc^* + D\beta^* + O\{k^2(|c^*| + |\beta^*|)\} + O\{k(|c^*| + |\beta^*|)^2\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Destas derivamos equações correspondentes a (3.33), (3.34) e (3.38), e denotamos por P , \tilde{P} , $\tilde{\tilde{P}}$, um ponto (b, α) perto de (b^*, α^*) e suas transformações com e sem os termos em

$$O\{k^2|c^*| + |\beta^*|\}, \quad O\{k(|c^*| + |\beta^*|)^2\}$$

nas fórmulas correspondentes a (3.33), (3.34) e (3.38). Seja Γ^* um círculo com centro (b_0^*, α_0^*) e raio R^* em Γ . Então, como P descreve Γ^* no sentido anti-horário, o vetor $P\tilde{\tilde{P}}$ gira através de um ângulo $\pm 2\pi$ de acordo com o que fez para P em Γ . O ângulo entre os vetores $P\tilde{\tilde{P}}$ e $P\tilde{P}$ é menor que

$$\arctan \left\{ \frac{M_{13}k^2R^* + M_{14}kR^{*2}}{M_{15}kR^*} \right\} = \arctan \left\{ \frac{M_{13}k + M_{14}R^*}{M_{15}} \right\} < \frac{1}{4}\pi,$$

desde que

$$R^* < R_0^*(M_{13}, M_{14}, M_{15}) = R_0^*(b_0, \alpha_0, p, \rho) \quad \text{e} \quad k < k_0(b_0, \alpha_0, p, \rho)$$

independente de R^* . Assim, o vetor $P\tilde{\tilde{P}}$ também gira por um ângulo $\pm 2\pi$ como P descreve Γ^* no sentido anti-horário, não importa quão pequeno seja R^* , desde que $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$. Segue como antes que existe um ponto fixo dentro de Γ^* . Agora Γ^* é dito ter o número de índice ± 1 de acordo com o ângulo $\pm 2\pi$, e como isso é verdadeiro para cada círculo Γ^* pequeno com centro em um ponto fixo (b_0^*, α_0^*) dentro de Γ , existe apenas um tal ponto. Para o número de índice de Γ em si é ± 1 de acordo com o ângulo é $\pm 2\pi$, e é bem conhecido que o número de índice de Γ é igual à soma dos números de índice dos círculos Γ^* . Como os números de índice são todos iguais, isso será numericamente maior que 1 se houver mais de um ponto fixo o que leva a uma contradição.

Capítulo 4

Oscilações forçadas em sistemas não lineares

Neste Capítulo estudaremos o artigo [8] intitulado *Forced oscillations in nonlinear systems*, da M. L. Cartwright publicado em 1950 no Journal of Research of the National Bureau of Standards. Este artigo é um trabalho conjunto da M. L. Cartwright e J. E. Littlewood no qual se propuseram estudar a equação de van der Pol dada por

$$x'' = k(1 - x^2)x' - x + bk\lambda \cos(\lambda t + \alpha), \quad (4.1)$$

para valores de k grandes e $0 < b < 2/3$. No artigo Cartwright afirma sem prova que para certos valores de b existem duas soluções estáveis periódicas de períodos $(2n \pm 1)2\pi/\lambda$. Neste artigo ela se propõe demonstrar como a forma aproximada das soluções pode ser obtida do Teorema 4.1 abaixo e fornecer uma prova do mesmo em detalhes. Vamos assumir que $k \geq 1$ é sempre grande o bastante. Observemos que o valor α em (4.1) é inserido por conveniência: esse valor permite escolher a origem de t como desejamos. Escreveremos x_0 e x'_0 para os valores de $x(0)$ e $x'(0)$.

Existem duas ferramentas para estudarmos a equação (4.1). A primeira é a **equação integrada**

$$x' - x'_0 + k\left(\frac{x^3}{3} - x - \frac{x_0^3}{3} + x_0\right) + \int_0^t x dt = bk\left(\sin(\lambda t + \alpha) - \sin \alpha\right); \quad (4.2)$$

e a segunda é a **equação da energia**, a qual é obtida multiplicando a (4.1) por $2x'$ e depois integrando,

$$x'^2 - x_0'^2 + 2k \int_0^t (x^2 - 1)x'^2 dt + x^2 - x_0^2 = 2bk\lambda \int_0^t x' \cos(\lambda t + \alpha) dt. \quad (4.3)$$

Substituindo $x' = y$ e $x'_0 = y_0$ na equação da energia, obtemos

$$x^2 + y^2 - (x_0^2 + y_0^2) = 2k \int_0^t \left(b\lambda x' \cos(\lambda t + \alpha) - (x^2 - 1)x'^2 \right) dt. \quad (4.4)$$

O lado direito de (4.4) será dominado pelo termo $x^2 x'^2$ quando x é grande, a menos que x' seja pequeno, mas parece improvável que x' possa ser pequeno para a maior parte do tempo que x é grande. Isto sugere que $x^2 + y^2$ decresce rapidamente sobre todo intervalo para o qual x é grande, e portanto, que x é limitado para t grande. O resultado geral que será provado neste capítulo é:

Teorema 4.1. *Se $x = x(t, x_0, x'_0)$ é qualquer solução de equação (4.1) para a qual $x = x_0$, $x' = x'_0$, quando $t = 0$, então*

$$|x| < B, \quad |x'| < Bk \quad (4.5)$$

onde B é uma constante independente de k e t , $\forall k \geq 1$, $t > t_0(x_0, x'_0)$.

4.1 Aplicação do Teorema 4.1

Supondo que as conclusões do Teorema 4.1 são verdadeiras, M. L. Cartwright passa a esboçar as soluções da equação (4.1) da seguinte forma: a equação integrada (4.2) pode ser rearranjada da seguinte forma:

$$\frac{x^3}{3} - x = b \sin(\lambda t + \alpha) + C - \frac{x'}{k} - \frac{1}{k} \int_0^t x dt, \quad (4.6)$$

em que $C = \frac{x_0^3}{3} - x_0 - b \sin \alpha + \frac{x'_0}{k}$, e pelo Teorema 4.1 o último termo é de ordem $O(1/k)$ para valores grandes de k e $0 \leq t \leq 2\pi/\lambda$. Portanto existem duas possibilidades:

- (i) ou x' é comparável com k ,

(ii) ou x é dado aproximadamente pela equação $x = X$ em que

$$F(X) = \frac{X^3}{3} - X = b \sin(\lambda t + \alpha) + C. \quad (4.7)$$

Ambas estas duas possibilidades podem ocorrer para valores arbitrariamente grandes de t , e também existem transições de um caso para o outro.

No caso (ii), para valores fixos de t , b e C tais que $-2/3 < b \sin(\lambda t + \alpha) + C < 2/3$, a equação (4.7) tem três raízes

$$X_1 < -1 < X_2 < 1 < X_3 = X_3(t, C) \quad (4.8)$$

como é mostrado na Figura 4.1.

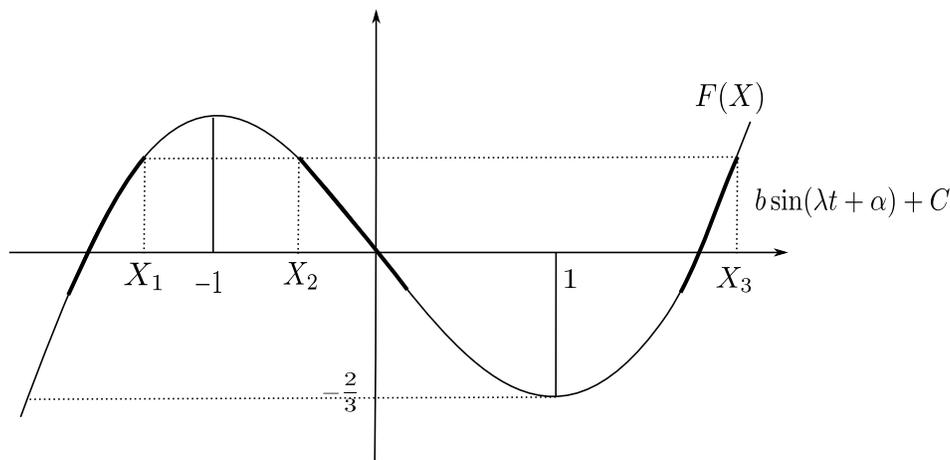


Figura 4.1: Gráfico da função $F(X)$.

Se $b > 2/3$, $b \sin(\lambda t + \alpha) + C$ atinge valores fora do intervalo $[-2/3, 2/3]$ para algum valor de t em cada período. Vamos supor que $0 < b < 2/3$ que é o caso mais interessante. Pode ser observado que se X_1 e X_3 são crescentes com t , então X_2 é decrescente com t , e vice-versa. Portanto as soluções sobre $0 \leq t \leq 2\pi/\lambda$ são aproximadamente como mostrado na Figura 4.2, desde que $|x'| \leq B$.

Observe que integrando em (4.6) entre $0 \leq t \leq 2\pi/\lambda$ teremos atingido um ponto $(\hat{x}, \hat{x}') = (x(2\pi/\lambda), x'(2\pi/\lambda))$ tal que

$$\frac{\hat{x}^3}{3} - \hat{x} = b \sin(\lambda t + \alpha) + C - \frac{\hat{x}'}{k} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi/\lambda} x dt, \quad (4.9)$$

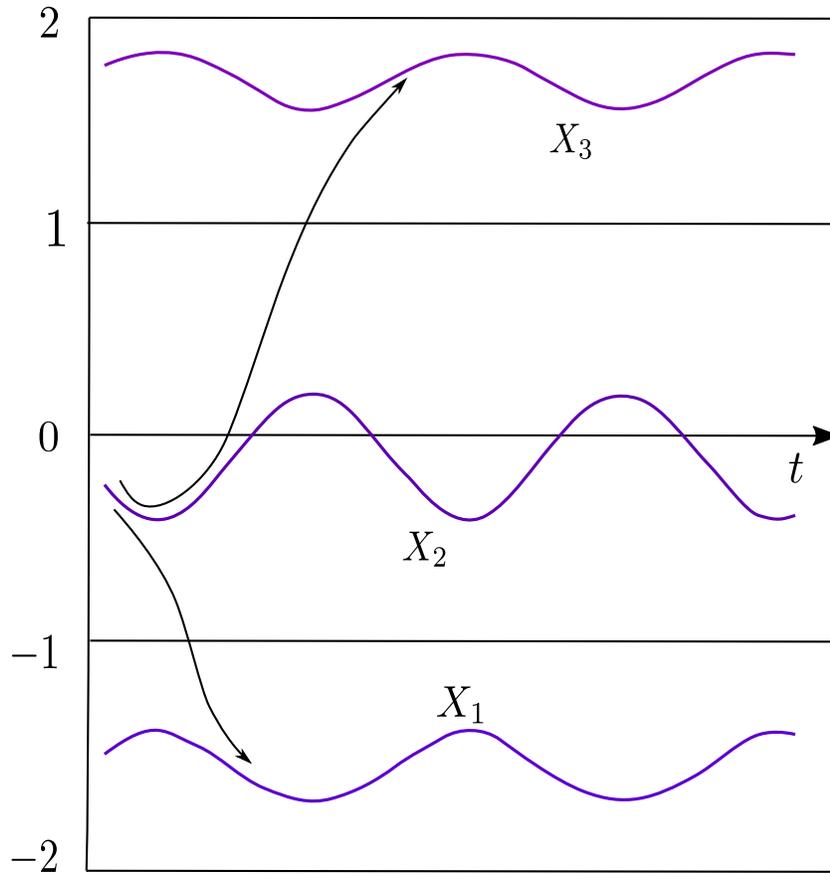


Figura 4.2: Aproximação das soluções.

em que \hat{x} satisfaz uma equação do tipo (4.6) com

$$C' = C - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi/\lambda} x dt. \quad (4.10)$$

Se ainda x' é pequeno comparável com k então \hat{x} terá o mesmo sinal que $X_1(t, C)$ ou que $X_3(t, C)$, assim a segunda onda será menor que a primeira no caso de X_3 , e será maior que a primeira no caso de X_1 . Já no caso de X_2 pode ser maior ou menor. De fato, existirá uma solução periódica no caso de X_2 se $C = C'$, ou equivalentemente,

$$\int_0^{2\pi/\lambda} x dt = 0. \quad (4.11)$$

Retornando agora ao caso (i) em que $|x'|$ é comparável com k , podemos primeiro supor que $x' > \delta k$, com $\delta > 0$, durante um tempo de comprimento D/k .

Lema 4.1. $D \leq 2B/\delta$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.1,

$$2B \geq |x(t + D/k) - x(t)| \geq \int_t^{t+D/k} |x'| dt \geq \delta k \cdot D/k = \delta D.$$

□

Observe que se $|1 - x^2| > \delta > 0$ e $|x'|$ é grande, o segundo termo da equação (4.1) é mais importante que x ou que $bk\lambda \cos(\lambda t + \alpha)$ e assim

- (1) x'' tem o mesmo sinal que x' se $|x| < 1 - \delta$, e
- (2) x'' tem sinal oposto ao de x' se $|x| > 1 + \delta$ e k é grande.

Portanto um pequeno mas significativo desvio de X_1 ou de X_3 é ao menos corrigido, entanto que uma pequena desviação de X_2 causa $|x'|$ aumente rapidamente. Veja a Figura 4.3.

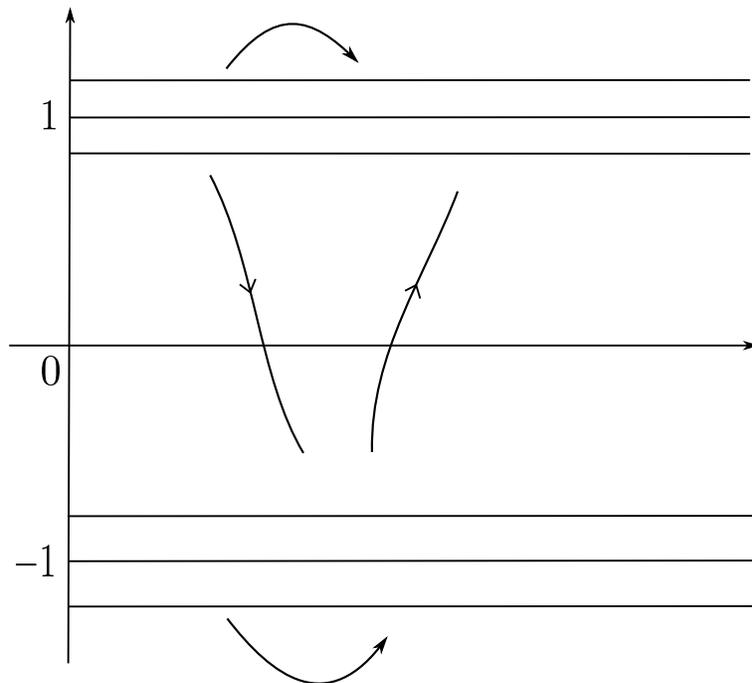


Figura 4.3:

Finalmente perto de $x = \pm 1$, o termo $bk\lambda \cos(\lambda t + \alpha)$ domina exceto quando $\lambda t + \alpha$ está perto de $n\pi + \pi/2$. Assim as depressões de X_3 em direção de $x = 1$ e os cumes de

X_1 em direção de $x = -1$ de fato ocorrem neste intervalo, e uma teoria completa das soluções perto destes pontos é muito complicada. Porém, apesar disto, podemos formar uma figura razoavelmente real do comportamento das soluções. Veja Figura 4.4. Todas

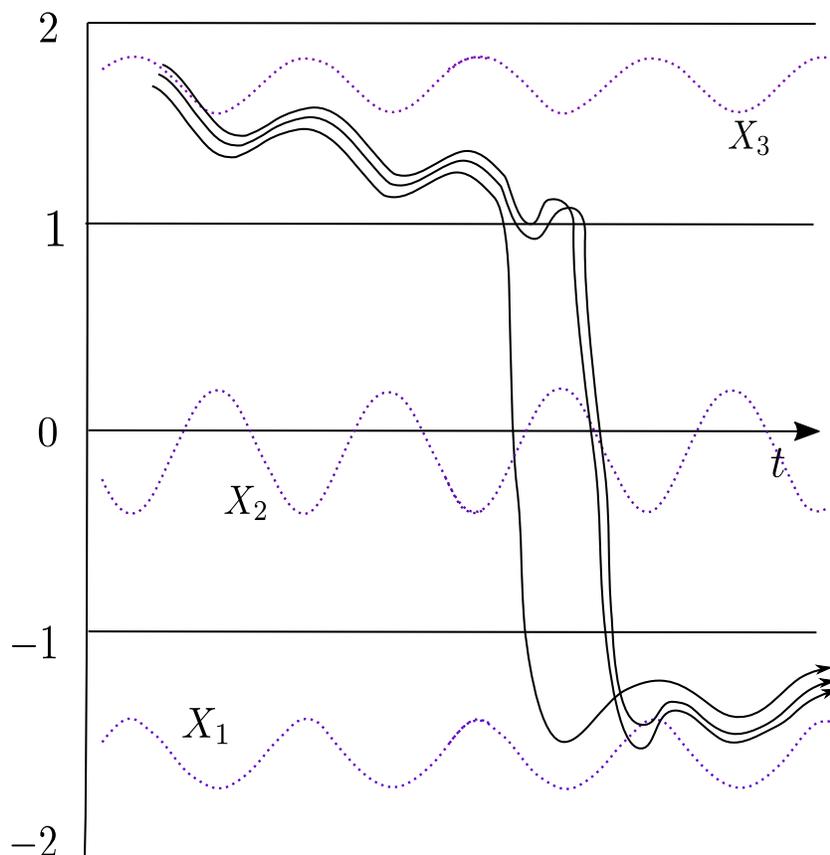


Figura 4.4: Comportamento das soluções de (4.1).

afirmações dadas nesta seção foram provadas no artigo [17] de Cartwright e Littlewood publicado no Acta Mathematica no ano 1957, o que comprova que os autores já sabiam a forma das soluções da equação de van der Pol desde o ano 1950.

4.2 Prova do Teorema 4.1

Nesta seção faremos a prova do teorema 4.1 com detalhes.

Lema 4.2. *Uma solução da equação (4.1) não pode ter um valor absoluto maior que $\sqrt{3}$ para todo grande t .*

Demonstração. Suponha que isso não seja assim, e que $x \geq \sqrt{3}$, $\forall t \geq t_1$ integrando a equação

$$x'' = k(1 - x^2)x' - x + bk\lambda \cos(\lambda t + \alpha)$$

de t_1 até t , onde $x = x_1$ e $x' = x'_1$.

Daí

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^t x'' dt &= k \int_{t_1}^t (1 - x^2)x' dt - \int_{t_1}^t x dt + bk\lambda \int_{t_1}^t \cos(\lambda t + \alpha) dt \\ \int_{t_1}^t \frac{dx'}{dt} dt &= k \int_{t_1}^t (1 - x^2) \frac{dx}{dt} dt - \int_{t_1}^t x dt + bk\lambda \frac{\sin(\lambda t + \alpha)}{\lambda} \Big|_{t_1}^t \\ x'(t) - x'(t_1) &= k \left[x(t) - \frac{x^3(t)}{3} - x(t_1) + \frac{x^3(t_1)}{3} \right] - \int_{t_1}^t x dt + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\lambda t_1 + \alpha)] \\ x' - x'_1 &= k \left[x - \frac{x^3}{3} - x_1 + \frac{x_1^3}{3} \right] - \int_{t_1}^t x dt + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\lambda t_1 + \alpha)], \end{aligned}$$

ou seja,

$$x' - x'_1 + k \left[-x + \frac{x^3}{3} + x_1 - \frac{x_1^3}{3} \right] + \int_{t_1}^t x dt = bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\lambda t_1 + \alpha)] \quad (4.12)$$

Como $x \geq \sqrt{3}$, então

$$\int_{t_1}^t x dt \geq \sqrt{3} \int_{t_1}^t dt = \sqrt{3}(t - t_1),$$

ou seja,

$$\int_{t_1}^t x dt \geq \sqrt{3}(t - t_1). \quad (4.13)$$

De (4.12),

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^t x dt &= x'_1 - x' + k \left[x - \frac{x^3}{3} - x_1 + \frac{x_1^3}{3} \right] + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\lambda t_1 + \alpha)] \\ &= -x' + kx \left(1 - \frac{x^2}{3} \right) + \underbrace{x'_1 + kx_1 \left(\frac{x_1^2}{3} - 1 \right) + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\lambda t_1 + \alpha)]}_{O(1)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{t_1}^t x dt = -x' + kx \left(1 - \frac{x^2}{3} \right) + O(1).$$

Logo, pelo (4.13)

$$\sqrt{3}(t - t_1) \leq \int_{t_1}^t x dt = -x' + kx \left(1 - \frac{x^2}{3} \right) + O(1).$$

Como $t \rightarrow \infty$, onde a constante implicada depende de k . O lado esquerdo tende para $+\infty$, e então $x \rightarrow -\infty$ mas isso implica que $x \rightarrow -\infty$ que contradiz $x \geq \sqrt{3}$.

Portanto, $x \leq \sqrt{3}$ para t arbitrariamente grande, e similarmente $x \geq -\sqrt{3}$ para t grande. \square

Em seguida, estabeleceremos que, enquanto $|x|$ não for muito grande, o valor de $|x'|$ não pode aumentar demais.

Lema 4.3. *Se $|x| \leq \sqrt{3}$ em um arco de solução PQ , então*

$$|x'_Q| < |x'_P| + B_1 k,$$

e, se o arco dura um tempo maior que $\frac{4}{k} \leq 4$, então $|x'_Q| \leq 2$. Mais geralmente se $|x| \leq b_0$ em um arco PQ , então

$$|x'_Q| < |x'_P| + B_1(b_0)k.$$

Demonstração. Seja $|x| \leq \sqrt{3}$ e $x' > k$, com $k \geq 1$, em um arco, só pode durar no máximo

$$\frac{2\sqrt{3}}{k} < \frac{4}{k},$$

pois se durar mais tempo, a solução percorre uma distância superior a $2\sqrt{3}$ e, portanto, não pode permanecer na faixa.

O mesmo acontece se $x' < -k$ em um arco, em $|x| \leq \sqrt{3}$. Seja P_1 o último ponto antes de Q em que $|x'| \leq k$, ou P propriamente dito, o que for o mais recente. Suponha primeiro que $x'_{P_1} > 0$ então $x' > 0$ no arco P_1Q . Caso não fosse, teríamos $x' = 0$ em algum ponto de P_1Q e P_1 não seria o último ponto em que $|x'| \leq k$. Pela equação integrada, desde que

$$|x_Q| < \sqrt{3}, \quad |x_{P_1}| < \sqrt{3},$$

integrando a equação (4.1) a partir do ponto P_1 até Q , com relação a s ,

$$\begin{aligned} \int_0^t x'' ds &= k \int_0^t (1-x^2)x' ds - \int_0^t x ds + bk\lambda \int_0^t \cos(\lambda s + \alpha) ds \\ \int_0^t \frac{dx'}{ds} ds &= k \int_0^t (1-x^2) \frac{dx}{ds} ds - \int_0^t x ds + bk\lambda \left. \frac{\sin(\lambda s + \alpha)}{\lambda} \right|_0^t \\ \int_0^t \frac{dx'}{ds} ds &= k \int_0^t (1-x^2) dx - \int_0^t x ds + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] \\ x'(s)|_0^t &= k \left(x(s) - \frac{x^3(s)}{3} \right) \Big|_0^t - \int_0^t x ds + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] \end{aligned}$$

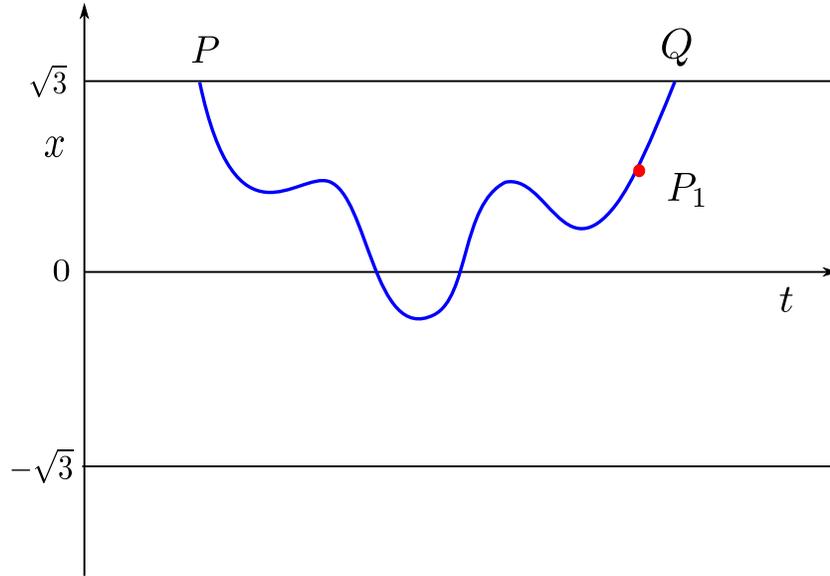


Figura 4.5:

$$\begin{aligned}
 x'(t) - x'(0) &= k \left(x(t) - \frac{x^3(t)}{3} - x(0) + \frac{x^3(0)}{3} \right) - \int_0^t x ds + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] \\
 x'_Q - x'_{P_1} &= k \left(x_Q - \frac{x_Q^3}{3} - x_{P_1} + \frac{x_{P_1}^3}{3} \right) + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] - \int_0^t x ds \\
 &= kx_Q \left(1 - \frac{x_Q^2}{3} \right) + kx_{P_1} \left(\frac{x_{P_1}^2}{3} - 1 \right) + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] - \int_0^t x ds \\
 &\leq kx_Q \left(1 - \frac{x_Q^2}{3} \right) + kx_{P_1} \left(\frac{x_{P_1}^2}{3} - 1 \right) + bk [|\sin(\lambda t + \alpha)| + |\sin(\alpha)|] - \int_0^t x ds \\
 &\leq k \left[x_Q \left(1 - \frac{x_Q^2}{3} \right) + x_{P_1} \left(\frac{x_{P_1}^2}{3} - 1 \right) + 2b \right] - \int_0^t x ds
 \end{aligned}$$

Seja $B_1 := x_Q \left(1 - \frac{x_Q^2}{3} \right) + x_{P_1} \left(\frac{x_{P_1}^2}{3} - 1 \right) + 2b$, daí

$$x'_Q - x'_{P_1} \leq kB_1 - \int_0^t x ds \leq B_1 k, \quad \text{com } B_1 \geq 1,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 x'_Q \leq x'_{P_1} + kB_1 &\Rightarrow |x'_Q| \leq |x'_{P_1} + kB_1| \leq |x'_{P_1}| + |kB_1| \\
 &\leq |x'_{P_1}| + kB_1.
 \end{aligned}$$

Portanto, para $|x'_{P_1}| \leq |x'_P|$, temos $|x'_Q| \leq |x'_P| + kB_1$.

Similarmente, se $x'_{P_1} < 0$, temos

$$x'_{P_1} - x'_Q \leq B_1 k.$$

Se o tempo for maior que $4k$, $|x'_{P_1}| \leq k$, e nós temos a segunda forma do resultado. O resultado para $|x| \leq b_0$ segue pelo mesmo método. \square

Os próximos dois lemas mostram que a altura de um arco QR fora da faixa $|x| \leq \sqrt{3}$, e o tempo necessário para descrevê-lo são limitados por números, dependendo de x'_Q ; em outras palavras, a velocidade com a qual ela surge da faixa.

Lema 4.4. *Se o arco QR estiver acima de $x = \sqrt{3}$ e começar em Q em $x = \sqrt{3}$, a maior altura h satisfaz*

$$h < \frac{x'_Q}{2k} + B_2.$$

Demonstração. Sejam $x = h = \sqrt{3} + h_1$ e $x' = 0$. Como

$$x'' = k(1 - x^2)x' - x + bk\lambda \cos(\lambda t + \alpha),$$

logo, integrando a partir do ponto Q para o ponto H em que $x = h$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t x'' dt &= k \int_0^t (1 - x^2)x' dt - \int_0^t x dt + bk\lambda \int_0^t \cos(\lambda t + \alpha) dt \\ \int_0^t \frac{dx'}{dt} dt &= k \int_0^t (1 - x^2) \frac{dx}{dt} dt - \int_0^t x dt + bk\lambda \left. \frac{\sin(\lambda t + \alpha)}{\lambda} \right|_0^t \\ \int_0^t dx'(t) &= k \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+h_1} (1 - x^2) dx - \int_0^t x dt + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] \\ x'(t)|_0^t &= k \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+h_1} (1 - x^2) dx - \int_0^t x dt + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] \end{aligned}$$

Como $x'(t)|_0^t = x'(t) - x'(0) = x'_H - x'_Q$ e $x'_H = 0$. Daí,

$$0 = x'_Q + k \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+h_1} (1 - x^2) dx - \int_0^t x dt + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] \quad (4.14)$$

Como $x^2 - 1 \geq 2$ em QR , então

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+h_1} (x^2 - 1) dx \geq 2 \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+h_1} dx = 2h_1 \Rightarrow -2h_1 \geq \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+h_1} (1 - x^2) dx.$$

De (4.14) temos,

$$\begin{aligned} 0 &= x'_Q + k \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+h_1} (1 - x^2) dx - \int_0^t x dt + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] \\ &\leq x'_Q - 2kh_1 - \int_0^t x dt + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] \end{aligned}$$

Para $k > 1$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq x'_Q - 2kh_1 + \left\{ bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] - \int_0^t x dt \right\} \\
&\leq x'_Q - 2kh_1 + \left| bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] - \int_0^t x dt \right| \\
&\leq x'_Q - 2kh_1 + \left\{ bk [|\sin(\lambda t + \alpha)| + |\sin(\alpha)|] + \left| \int_0^t x dt \right| \right\} \\
&\leq x'_Q - 2kh_1 + \left\{ bk[2] + \left| \int_0^t x dt \right| \right\} \\
&< x'_Q - 2kh_1 + k \left\{ bk[2] + \left| \int_0^t x dt \right| \right\}.
\end{aligned}$$

Suponha que $\left| \int_0^t x dt \right| \leq c$. Logo

$$0 < x'_Q - 2kh_1 + k\{2bk + c\}.$$

Seja $B_1 = 2bk + c$. Daí

$$\begin{aligned}
0 < x'_Q - 2kh_1 + B_1k &\Rightarrow 2kh_1 < x'_Q + B_1k \\
&\Rightarrow h_1 < \frac{x'_Q}{2k} + \frac{B_1}{2}
\end{aligned}$$

Como $h = \sqrt{3} + h_1 \Rightarrow h_1 = h - \sqrt{3}$. Logo

$$h - \sqrt{3} = h_1 < \frac{x'_Q}{2k} + \frac{B_1}{2} \Rightarrow h < \frac{x'_Q}{2k} + \frac{B_1}{2} + \sqrt{3}.$$

Portanto,

$$h < \frac{x'_Q}{2k} + B_2 \quad \text{com} \quad B_2 = \frac{B_1 + 2\sqrt{3}}{2}.$$

□

Lema 4.5. Se QR é um arco acima de $x = \sqrt{3}$ começando em Q em $x = \sqrt{3}$, então o tempo t levado para descrever QR é menor que $B_3x'_Q$, desde que $x'_Q > k$.

Demonstração. Suponha que $x'_Q > k$ e que R está em $x = \sqrt{3}$, de modo que

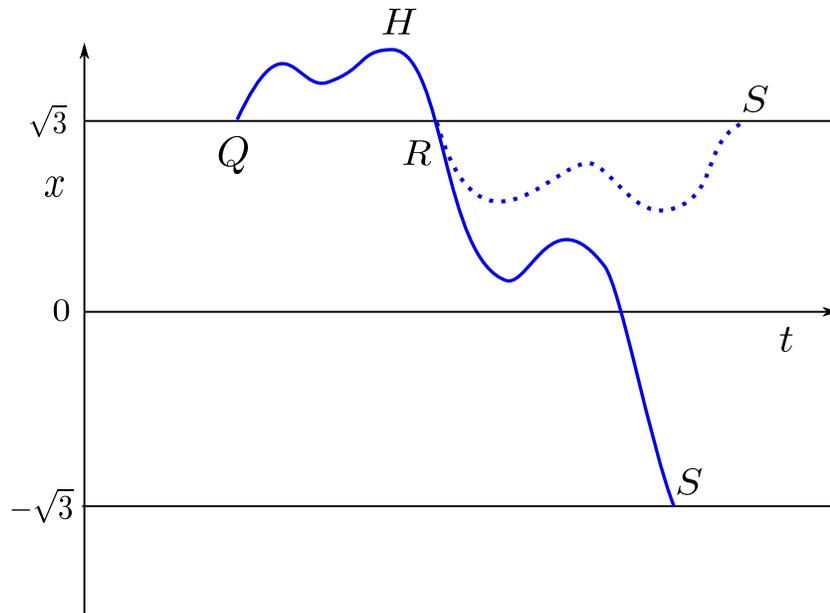


Figura 4.6:

$x_Q = x_R = \sqrt{3}$. Integrando a equação (4.1) de Q , temos

$$\begin{aligned} \int_0^t x'' dt &= k \int_0^t (1-x^2)x' dt - \int_0^t x dt + bk\lambda \int_0^t \cos(\lambda t + \alpha) dt \\ \int_0^t \frac{dx'}{dt} dt &= k \int_0^t (1-x^2) \frac{dx}{dt} dt - \int_0^t x dt + bk\lambda \left. \frac{\sin(\lambda t + \alpha)}{\lambda} \right|_0^t \\ \int_0^t dx'(t) &= k \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+h_1} (1-x^2) dx - \int_0^t x dt + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] \\ x'(t)|_0^t &= k \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+h_1} (1-x^2) dx - \int_0^t x dt + bk [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] \\ x'(t) - x'(0) &= k \left\{ \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+h_1} (1-x^2) dx + b [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] \right\} - \int_0^t x dt. \end{aligned}$$

Tome $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+h_1} (1-x^2) dx + b [\sin(\lambda t + \alpha) - \sin(\alpha)] < B$. Logo

$$x'_H - x'_Q = x'(t) - x'(0) < Bk - \int_0^t x dt,$$

ou seja,

$$x'_H < x'_Q + Bk - \int_0^t x dt$$

Se $x = \sqrt{3} \Rightarrow x' = 0$ e $x'_H = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &< x'_Q + Bk - \int_0^t x dt \\ x' &< x'_Q + Bk - \int_0^t x dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

Se $x = \sqrt{3}$, então $\int_0^t x dt = \sqrt{3} \int_0^t dt = \sqrt{3}t$. Assim

$$- \int_0^t x dt = -\sqrt{3}t.$$

Logo, por (4.15), temos

$$x' < x'_Q + Bk - \int_0^t x dt = x'_Q + Bk - \sqrt{3}t.$$

Agora, como $k < x'_Q$, então

$$x' < x'_Q + Bx'_Q - \sqrt{3}t = x'_Q(1 + B) - \sqrt{3}t \Rightarrow x' < B_2x'_Q - \sqrt{3}t, \text{ com } B_2 = 1 + B.$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int_0^t x' dt &< B_2x'_Q \int_0^t dt - \sqrt{3} \int_0^t t dt \\ \int_0^t \frac{dx}{dt} dt &< B_2x'_Qt - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 \\ \int_0^t dx &< B_2x'_Qt - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 \\ x(t) - x(0) &< B_2x'_Qt - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 \\ x_R - x_Q &< B_2x'_Qt - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2. \end{aligned}$$

Como $x_R - x_Q = 0$, então $0 < B_2x'_Qt - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2$. Daí

$$\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 < B_2x'_Qt \Rightarrow t < \frac{2}{\sqrt{3}}B_2x'_Q.$$

Portanto,

$$t < B_3x'_Q, \text{ com } B_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}B_2.$$

□

Lema 4.6. *Se QR é um arco acima de $x = \sqrt{3}$ começando em Q em $x = \sqrt{3}$ e terminando em R em $x = \sqrt{3}$, para um dado $B_1 \geq 1$ existe um $B_4 \geq B_1 \geq 1$ tal que se $x'_Q > B_4k$, então $x'_R < x'_Q - 4B_1kx'_Q$.*

Demonstração. Seja

$$x'' = k(1 - x^2)x' - x + bk\lambda \cos(\lambda t + \alpha).$$

Logo, multiplicando por $2x'$ nesta equação, temos

$$2x'x'' = 2k(1 - x^2)(x')^2 - 2xx' + 2bkx'\lambda \cos(\lambda t + \alpha), \quad (1)$$

integrando com respeito a t de 0 até t ,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t x'x'' dt + 2k \int_0^t (x^2 - 1)(x')^2 dt + 2 \int_0^t xx' dt &= 2bk\lambda \int_0^t x' \cos(\lambda t + \alpha) dt \\ 2 \int_0^t x' \frac{dx'}{dt} dt + 2k \int_0^t (x^2 - 1)(x')^2 dt + 2 \int_0^t x \frac{dx}{dt} dt &= 2bk\lambda \int_0^t x' \cos(\lambda t + \alpha) dt \\ 2 \int_0^t \frac{d(x')^2}{2} + 2k \int_0^t (x^2 - 1)(x')^2 dt + 2 \int_0^t \frac{d(x^2)}{2} &= 2bk\lambda \int_0^t x' \cos(\lambda t + \alpha) dt \\ \int_0^t d(x')^2 + 2k \int_0^t (x^2 - 1)(x')^2 dt + \int_0^t d(x^2) &= 2bk\lambda \int_0^t x' \cos(\lambda t + \alpha) dt \\ x'^2(t)|_0^t + 2k \int_0^t (x^2 - 1)(x')^2 dt + x^2(t)|_0^t &= 2bk\lambda \int_0^t x' \cos(\lambda t + \alpha) dt \\ x'^2(t) - x'^2(0) + 2k \int_0^t (x^2 - 1)(x')^2 dt + x^2(t) - x^2(0) &= 2bk\lambda \int_0^t x' \cos(\lambda t + \alpha) dt. \end{aligned}$$

Sejam $x'(t) = x'$, $x'(0) = x'_0$, $x(t) = x$, e $x(0) = x_0$. Daí, temos a equação da energia

$$x'^2 - x'^2_0 + 2k \int_0^t (x^2 - 1)(x')^2 dt + x^2 - x^2_0 = 2bk\lambda \int_0^t x' \cos(\lambda t + \alpha) dt.$$

Para o arco QR é,

$$x'^2_R - x'^2_Q + 2k \int_0^t (x^2 - 1)(x')^2 dt + x^2_R - x^2_Q = 2bk\lambda \int_0^t x' \cos(\lambda t + \alpha) dt.$$

Como $x^2_R - x^2_Q = 0$, então

$$x'^2_R - x'^2_Q = -2k \int_0^t (x^2 - 1)(x')^2 dt + 2bk\lambda \int_0^t x' \cos(\lambda t + \alpha) dt.$$

Seja

$$J = k \int_0^t (x^2 - 1)(x')^2 dt \geq k \int_0^t (x')^2 dt, \quad (2)$$

onde $x^2 - 1 \geq 1$. Então

$$\begin{aligned}
 x'_R{}^2 - x'_Q{}^2 &= -2k \int_0^t (x^2 - 1)(x')^2 dt + 2bk\lambda \int_0^t x' \cos(\lambda t + \alpha) dt \\
 &= -2J + 2bk\lambda \int_0^t x' \cos(\lambda t + \alpha) dt \\
 &\leq -2J + 2bk\lambda \int_0^t |x'| |\cos(\lambda t + \alpha)| dt \\
 &\leq -2J + 2bk\lambda \int_0^t |x'| dt.
 \end{aligned}$$

Como a Desigualdade de Cauchy é:

$$\int_0^t f(u)g(u)du \leq \left(\int_a^b f(u)^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g(u)^2 du \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Daí,

$$\int_0^t |x'| dt = \int_0^t 1 \cdot |x'| dt \leq \left(\int_0^t 1^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^t |x'|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |x'|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$\int_0^t |x'| dt \leq t^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |x'|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 x'_R{}^2 - x'_Q{}^2 &\leq -2J + 2bk\lambda t^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |x'|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq -2J + 2bk\lambda t^{\frac{1}{2}} \left(\frac{J}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{por (2)} \\
 &= -2J + 2b\lambda k^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.5. $B_3 x'_Q > t$, daí

$$x'_R{}^2 - x'_Q{}^2 < -2J + 2b\lambda k^{\frac{1}{2}} B_3^{\frac{1}{2}} x'_Q{}^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}}$$

Tomando $B_5 = 2b\lambda B_3^{\frac{1}{2}}$, tem-se

$$\begin{aligned}
 x'_R{}^2 - x'_Q{}^2 &< -2J + B_5 k^{\frac{1}{2}} x'_Q{}^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}} \\
 &= -2J + B_5 k^{\frac{1}{2}} x'_Q{}^{\frac{1}{2}} \frac{2J}{2J^{\frac{1}{2}}} \\
 &= -2J \left[1 - \frac{B_5}{2} \left(\frac{kx'_Q}{J} \right)^{\frac{1}{2}} \right],
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$x'_R{}^2 - x'_Q{}^2 < -2J \left[1 - \frac{B_5}{2} \left(\frac{kx'_Q}{J} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (3)$$

Desde que

$$J > B_5^2 kx'_Q, \quad (4)$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_5^2} > \frac{kx'_Q}{J} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{B_5}{2} \left(\frac{kx'_Q}{J} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} > \frac{B_5}{2} \left(\frac{kx'_Q}{J} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{B_5}{2} \left(\frac{kx'_Q}{J} \right)^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2 \left[1 - \frac{B_5}{2} \left(\frac{kx'_Q}{J} \right)^{\frac{1}{2}} \right] > 1 \\ &\Leftrightarrow -2 \left[1 - \frac{B_5}{2} \left(\frac{kx'_Q}{J} \right)^{\frac{1}{2}} \right] < -1 \\ &\Leftrightarrow -2J \left[1 - \frac{B_5}{2} \left(\frac{kx'_Q}{J} \right)^{\frac{1}{2}} \right] < -J, \quad (5) \end{aligned}$$

onde $J > 1$ e de (4) temos

$$-J < -B_5^2 kx'_Q. \quad (6)$$

Portanto de (3), (5) e (6):

$$x'_R{}^2 - x'_Q{}^2 < -2J \left[1 - \frac{B_5}{2} \left(\frac{kx'_Q}{J} \right)^{\frac{1}{2}} \right] < -J < -B_5^2 kx'_Q,$$

onde B_5 depende de B_3 e $x'_Q > k$.

Podemos obviamente escolher

$$B_5^2 > 4B_1, \text{ com } B_1 \geq 1,$$

e temos o resultado, exceto no caso em que

$$J < B_5^2 kx'_Q.$$

Suponha agora que

$$J < B_5^2 kx'_Q,$$

e integre desde Q até

$$x' = \frac{1}{2}x'_Q \quad \text{ou} \quad x = 2B_5^2 + \sqrt{3}$$

o que acontecer primeiro. Então

$$x' \geq \frac{1}{2}x'_Q > 0.$$

Daí, x é crescente neste arco e

$$\begin{aligned} \int_0^t \cos(\lambda t + \alpha)x' dt &= \int_0^t \cos(\lambda t + \alpha) \frac{dx}{dt} dt = \int_{\sqrt{3}}^x \cos(\lambda t + \alpha) dx \\ &\leq \int_{\sqrt{3}}^x |\cos(\lambda t + \alpha)| dx \\ &\leq \int_{\sqrt{3}}^x dx \\ &= x - \sqrt{3} = 2B_5^2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^t \cos(\lambda t + \alpha)x' dt \leq 2B_5^2.$$

De (1) :

$$2x'x'' = 2k(1 - x^2)(x')^2 - 2xx' + 2bkx'\lambda \cos(\lambda t + \alpha)$$

e integrando de Q até

$$x' = \frac{1}{2}x'_Q \quad \text{ou} \quad x = 2B_5^2 + \sqrt{3}$$

temos

$$\begin{aligned} x'^2 - x'^2_Q &= 2k \int_0^t (1 - x^2)(x')^2 dt - 2 \int_0^t x \frac{dx}{dt} dt + 2bk \int_0^t x' \lambda \cos(\lambda t + \alpha) dt \\ &= 2k \int_0^t (1 - x^2)(x')^2 dt - 2 \int_{\sqrt{3}}^x \frac{d(x^2)}{2} + 2bk \int_0^t \lambda \cos(\lambda t + \alpha) \frac{dx}{dt} dt \\ &= 2k \int_0^t (1 - x^2)(x')^2 dt - [x^2 - (\sqrt{3})^2] + 2bk \int_{\sqrt{3}}^x \lambda \cos(\lambda t + \alpha) dx \\ &= 2k \int_0^t (1 - x^2)(x')^2 dt + 2bk\lambda \int_{\sqrt{3}}^x \cos(\lambda t + \alpha) dx - [(2B_5^2 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2] \\ &= 2k \int_0^t (1 - x^2)(x')^2 dt + 2bk\lambda \int_{\sqrt{3}}^x \cos(\lambda t + \alpha) dx - [4B_5^4 + 4B_5^2\sqrt{3}], \end{aligned}$$

ou seja, tomando $B = 4B_5^4 + 4\sqrt{3}B_5^2$, temos

$$x'^2 - x'^2_Q = 2k \int_0^t (1 - x^2)(x')^2 dt + 2bk\lambda \int_{\sqrt{3}}^x \cos(\lambda t + \alpha) dx - B \quad (7)$$

Logo, como $J = k \int_0^t (x^2 - 1)(x')^2 dt \geq k \int_0^t x'^2 dt$, então a equação (7) é

$$\begin{aligned}
 x'^2 - x'^2_Q &= -2J + 2kb\lambda \int_{\sqrt{3}}^x \cos(\lambda t + \alpha) dx - B \\
 &\geq -2J - 2kb\lambda \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx - B \\
 &= -2J - 2kb\lambda(x - \sqrt{3}) - B \\
 &= -2J - 2kb\lambda(2B_5^2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}) - B \\
 &= -2J - kb\lambda 4B_5^2 - B \\
 &= -2J - kB_6 B_5^2 - B,
 \end{aligned}$$

com $B_6 = 4b\lambda$ e, como $J < B_5^2 k x'_Q$ então $-2J > -2B_5^2 k x'_Q$ e

$$B \leq kB, \text{ com } k \geq 1, \text{ então } -kB \leq -B.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 x'^2 - x'^2_Q &\geq -2J - kB_6 B_5^2 - B \\
 &> -2B_5^2 k x'_Q - kB_6 B_5^2 - kB \\
 &\geq -2B_5^2 k x'_Q - kB \\
 &\geq -\frac{3}{4} x'^2_Q
 \end{aligned}$$

desde que $x'_Q > kB_4$.

Como $x'^2 - x'^2_Q > -\frac{3}{4} x'^2_Q \Rightarrow x'^2 > x'^2_Q - \frac{3}{4} x'^2_Q$, ou seja,

$$x'^2 > \frac{1}{4} x'^2_Q,$$

e, portanto,

$$x' > \frac{1}{2} x'_Q$$

de modo que x atinja $2B_5^2 + \sqrt{3}$ primeiro.

Agora, desde $x^2 - 1 \geq 2$ no arco,

$$\begin{aligned}
 J &= k \int_0^t (x^2 - 1)(x')^2 dt \geq k \int_0^t (x')^2 dt = k \int_0^t x' \frac{dx}{dt} dt = k \int_0^t x' dx \\
 &> k \int_0^t \frac{x'_Q}{2} dx = \frac{kx'_Q}{2} \int_{\sqrt{3}}^x dx = \frac{kx'_Q}{2} [x - \sqrt{3}] \\
 &= \frac{kx'_Q}{2} (2B_5^2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}) \\
 &= kx'_Q B_5^2.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$J > B_5^2 k x'_Q,$$

e nós temos uma contradição. \square

Lema 4.7. *Se Q é um ponto em $x = \sqrt{3}$ tal que $x'_Q > B_4 k > 0$, então a solução retorna para a faixa $|x| \leq \sqrt{3}$ em R e emerge novamente em S com*

$$|x'_S| < |x'_Q| - B_1 k.$$

Demonstração. De Lema 4.3 temos

$$|x'_Q| < |x'_P| + B_1 k.$$

Logo, com R e S no lugar de P e Q , isto é,

$$\begin{aligned} |x'_S| &< |x'_R| + B_1 k \\ \Leftrightarrow |x'_S|^2 &< (|x'_R| + B_1 k)^2 = |x'_R|^2 + 2k B_1 |x'_R| + B_1^2 k^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|x'_S|^2 < |x'_R|^2 + 2k B_1 |x'_R| + B_1^2 k^2.$$

Usando o Lema 4.6:

$$|x'_R|^2 < |x'_Q|^2 - 4B_1 k |x'_Q|, \quad \text{com } x'_Q > B_4 k \geq B_1 k \geq 1$$

na forma indicada e também no mais fraco de $|x'_R| \leq |x'_Q|$ temos

$$\begin{aligned} |x'_S|^2 &< |x'_R|^2 + 2k B_1 |x'_R| + B_1^2 k^2 \\ &< |x'_Q|^2 - 4B_1 k |x'_Q| + 2k B_1 |x'_R| + B_1^2 k^2 \\ &\leq |x'_Q|^2 - 4B_1 k |x'_Q| + 2k B_1 |x'_Q| + B_1^2 k^2 \\ &= |x'_Q|^2 - 2B_1 k |x'_Q| + B_1^2 k^2 \\ &= (|x'_Q| - B_1 k)^2, \end{aligned}$$

Portanto, $|x'_S| < |x'_Q| - B_1 k$. \square

Demonstração. (Teorema 4.1) Pelo Lema 4.2 a solução deve entrar na faixa $|x| \leq \sqrt{3}$, e pela segunda parte do Lema 4.3 $|x'| \leq B_1 k$, se ficar na faixa. Por outro lado, se sai da

faixa em Q com $|x'_Q| \leq B_4k$, a altura (ou profundidade) do arco subsequente fora da faixa será menor que $B_4 + B_2$.

Por simetria todos os lemas para $x \geq -\sqrt{3}$ têm formas estritamente correspondentes para $x \leq -\sqrt{3}$. Mas, pelo Lema 4.7, se $|x'_Q| > B_4k$, a solução surge na próxima vez em S com $|x'_S| < |x'_Q| - B_1k$, de modo que ela deve ficar na faixa ou emergir eventualmente com $|x'_Q| \leq B_4k$ e a segunda parte do Lema 4.3, $|x| \leq B_4 + B_2$. Para todos os subsequentes t . □

Capítulo 5

Uma equação diferencial de segunda ordem com soluções singulares

Neste capítulo estudaremos o artigo [15] intitulado *A second order differential equation with singular solutions* escrito pelo Norman Levinson na revista *Annals of Mathematics* no ano 1949. Neste artigo Levinson começa mencionando que Cartwright e Littlewood anunciaram em [4] alguns resultados notáveis para a equação diferencial

$$x'' + k(x^2 - 1)x' + x = b\lambda k \cos \lambda t \quad (5.1)$$

onde k é uma grande constante e b e λ são constantes. Enquanto apenas um esboço do método de Cartwright e Littlewood apareceu como visto no artigo de 1950, os autores afirmam que sua prova é difícil. De fato, eles só publicaram as suas provas no artigo [17] de 1957.

No seu próprio artigo, Levinson considera uma equação que exibe o mesmo comportamento singular, mas para a qual a prova é consideravelmente simplificada por um artifício (descrito na seção 5.1). Um resumo destes resultados de Levinson já tinha aparecido em [14].

A equação diferencial considerada por Levinson é

$$y'' + p(y)y' + y = c \sin t \quad (5.2)$$

em que $p(y)$ é um certo polinômio e c é uma constante restrita a pertencer a um determinado conjunto de intervalos.

Entre as soluções de (5.2) existe uma família F de estrutura notavelmente singular. Soluções, $y(t)$, de F têm um valor máximo de aproximadamente 3. Se o máximo ocorre em $t = t_1$ então para $t > t_1$ e enquanto $y > 1$, y é aproximadamente da forma

$$(3 - b)e^{-\rho(t-t_1)} - b \cos t \quad (5.3)$$

onde b é uma constante, $0 < b < 1$, e a constante $\rho > 0$ é pequena. Assim, para $t > t_1$, y além do termo cosseno, diminui lentamente. Quando y atinge o valor 1, ele cai dentro de um intervalo de t de no máximo 2π de comprimento, ao seu valor mínimo de aproximadamente -3 . Repete então o seu comportamento, com o sinal oposto, subindo lentamente para $y = -1$ e a partir daí atingindo rapidamente um máximo próximo de 3 novamente. Esse padrão geral é repetido várias vezes.

Denotamos o valor de t onde uma solução de F , $y(t)$, descendendo do seu máximo de aproximadamente 3 primeiro cruza $y = 1$ como um ponto de *cruzamento par*. Denotamos t onde $y(t)$ ascendendo do seu mínimo de aproximadamente -3 primeiro cruza $y = -1$ como um ponto de *cruzamento ímpar*. Para qualquer solução de F , os pontos de cruzamento pares e ímpares alternam conforme t aumenta. (Note que se $y = 1$, $y' < 0$ ocorre somente em pontos de cruzamento pares e se $y = -1$, $y' > 0$ ocorre somente em pontos de cruzamento ímpares para as soluções de F .)

Um ponto de cruzamento par está sempre em um pequeno intervalo

$$t = \tau \pmod{2\pi}, \quad 0 < \tau < \tau_1 < \frac{1}{10},$$

que chamaremos de um *intervalo de base par*. Um ponto de cruzamento ímpar sempre se encontra em um pequeno intervalo

$$t = \pi + \tau \pmod{2\pi}, \quad 0 < \tau < \tau_1 < \frac{1}{10},$$

que chamaremos de *intervalo de base ímpar*. Por *ponto de cruzamento*, queremos dizer um ponto de cruzamento par ou ímpar. Assim Levinson prova o seguinte resultado:

Teorema 5.1. *Associado a (5.2) existe um número inteiro n grande. O espaçamento entre os sucessivos intervalos de base nos quais os pontos de cruzamento de uma solução de F é $(2n-1)\pi$ ou $(2n+1)\pi$. Além disso, dada qualquer sequência arbitrária $\{d_k\}$, $-\infty < k < \infty$, onde d_k é $(2n-1)\pi$ ou $(2n+1)\pi$ existe uma solução de F com pontos de cruzamento que se encontram em intervalos de base com espaçamento sucessivo d_k , $-\infty < k < \infty$. Além disso, a solução não tem outros pontos de cruzamento.*

Como a sequência $\{d_k\}$ envolve um número infinito de escolhas ± 1 vemos que o conjunto das sequências tem a potência do contínuo. A maioria das soluções de F certamente não são periódicas, já que a maioria das sequências $\{d_k\}$ não são periódicas. Do continuum de sequências $\{d_k\}$ existe uma infinidade contável de sequências periódicas. A cada uma dessas sequências periódicas pode ser mostrado que há pelo menos uma solução periódica de F cujos pontos de cruzamento estão em intervalos de base tendo o espaçamento periódico designado. O conjunto destas soluções periódicas será denotado por Σ .

Entre as soluções de (5.2), existem duas soluções periódicas completamente estáveis Γ_1 de menor período $(2n-1)2\pi$ e Γ_2 de menor período $(2n+1)2\pi$ e uma solução periódica completamente instável Pu do período 2π . As soluções Γ_1 e Γ_2 são de interesse físico, pois são soluções completamente estáveis.

Vemos então que a simples equação diferencial (5.2) oferece exemplos de vários fenômenos extraordinariamente singulares.

5.1 Descrição da equação

O dispositivo usado aqui para obter o exemplo (5.2) é considerar primeiro a equação

$$\epsilon x'' + \phi(x)x' + \epsilon x = b \sin t \quad (5.4)$$

onde $\epsilon > 0$ é uma constante pequena e

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } |x| > 1, \\ -1, & \text{para } |x| < 1. \end{cases}$$

A constante b , como veremos, deve ser escolhida a partir de um determinado conjunto de intervalos no intervalo $(0, 1)$. Agora acontece que o comportamento das soluções de (5.4) em um certo intervalo finito de t e com $|x| < 4$ determina o comportamento para $-\infty < t < \infty$ grande. O fato de o intervalo de t ser finito é decisivo.

Considere o sistema

$$\begin{cases} \epsilon \frac{dx_1}{dt} = x_2 - \Phi(x_1), \\ \frac{dx_2}{dt} = -\epsilon x_1 + b \sin t. \end{cases} \quad (5.5)$$

com

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(x) dx = \begin{cases} -x - 2, & \text{para } x < -1, \\ x, & \text{para } |x| \leq 1 \\ -x + 2, & \text{para } x > 1. \end{cases}$$

O sistema (5.5) é equivalente à equação (5.4) pois, tomando $x_1 = x$ e $x_2 = \epsilon x'_1 + \Phi(x_1)$, temos

$$\begin{aligned} x'_2 &= \epsilon x''_1 + \Phi'(x_1)x'_1 \\ &= b \sin t - \phi(x_1)x'_1 - \epsilon x_1 + \phi(x_1)x'_1, \quad \text{com } \Phi'(x_1) = \phi(x_1) \\ &= b \sin t - \epsilon x_1. \end{aligned}$$

Então x_1 é x de (5.4) como pode ser visto eliminando x_2 . Também

$$x' = \frac{x_2 - \Phi(x_1)}{\epsilon}.$$

Agora, seja $P(x)$ um polinômio tal que

$$|P(x) - \Phi(x)| \leq \Delta, \quad \text{para } |x| \leq 5$$

onde Δ é pequeno. Isso é possível, já que $\Phi(x)$ é contínuo.

Considere o sistema

$$\begin{cases} \epsilon \frac{dy_1}{dt} = y_2 - P(y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} = -\epsilon y_1 + b \sin t. \end{cases} \quad (5.6)$$

Se $y = y_1$, então

$$\begin{aligned} y_2 &= \epsilon y'_1 + P(y_1) \\ y'_2 &= \epsilon y''_1 + P'(y_1)y'_1 \\ -\epsilon y_1 + b \sin t &= \epsilon y''_1 + P'(y_1)y'_1 \\ \epsilon y''_1 + P'(y_1)y'_1 + \epsilon y_1 &= b \sin t. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\epsilon y'' + P'(y)y' + \epsilon y = b \sin t \quad (5.7)$$

que pode ser reescrito como (5.2).

A primeira equação de (5.6) pode ser reescrita como

$$\epsilon \frac{dy_1}{dt} = y_2 - \Phi(y_1) + \omega, \quad |\omega| \leq \Delta, \quad \text{para } |y_1| \leq 5$$

A segunda equação é deixada como está. Comparando com (5.5) e observando que $\Phi(x)$ satisfaz uma condição de Lipschitz, com constante 1, temos que se $y_i(t_0) = x_i(t_0)$, $i = 1, 2$, então

$$\begin{aligned} |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| &= \left| \frac{1}{\epsilon} \int (y_2 - P(y_1)) dt - \frac{1}{\epsilon} \int (x_2 - \Phi(x_1)) dt \right| \\ &\quad + \left| \int (-\epsilon y_1 + b \sin t) dt - \int (-\epsilon x_1 + b \sin t) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{\epsilon} \int (y_2 - \Phi(y_1) + \omega - x_2 + \Phi(x_1)) dt \right| + \left| \int \epsilon(x_1 - y_1) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \left| \int (\Phi(x_1) - \Phi(y_1) + \omega) dt \right| + \frac{1}{\epsilon} \left| \int (y_2 - x_2) dt \right| + \epsilon \left| \int (x_1 - y_1) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \int |\Phi(y_1) - \Phi(x_1) - \omega| dt + \frac{1}{\epsilon} \int |y_2 - x_2| dt + \epsilon \int |y_1 - x_1| dt \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \int |\Phi(y_1) - \Phi(x_1) + \Delta| dt + \frac{1}{\epsilon} \int |y_2 - x_2| dt + \epsilon \int |y_1 - x_1| dt \end{aligned}$$

como $\frac{1}{\epsilon} \leq \frac{1}{\epsilon} + \epsilon$ e $\epsilon \leq \frac{1}{\epsilon} + \epsilon$ temos,

$$|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| \leq \frac{1}{\epsilon} \int |\Phi(y_1) - \Phi(x_1) + \Delta| dt + \left(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon \right) \int (|y_2 - x_2| + |y_1 - x_1|) dt$$

Pela desigualdade de Gronwall, desde que

$$|f(t, y(t)) - g(t, y(t))| = |(0, \omega)| \leq \Delta = \varphi(t)$$

$$\begin{aligned}
|g(t, x_1) - g(t, y_2)| &= \left| \left(\frac{x_2}{\epsilon} - \frac{\phi(x_1)}{\epsilon} - \frac{y_2}{\epsilon} - \frac{\phi(y_1)}{\epsilon}, -\epsilon x_2 + \epsilon y_2 \right) \right| \\
&\leq \left| \frac{x_1 - x_2}{\epsilon} \right| + \frac{1}{\epsilon} |y_2 - x_2| + |y_2 - x_2| \\
&\leq \left(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon \right) |y_2 - x_2|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| &\leq e^{(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon)(t-t_0)} \left[\int e^{-(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon)(s-t_0)} \Delta ds \right] \\
&= \Delta e^{(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon)(t-t_0)} \left[\frac{1}{-\left(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon\right)} e^{-(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon)(s-t_0)} \Big|_{t_0}^t \right] \\
&\leq \frac{\Delta \epsilon}{1 + \epsilon^2} \left[1 - e^{-(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon)(t-t_0)} \right] e^{(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon)(t-t_0)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|y_1(t) - x_1(t)| + |y_2(t) - x_2(t)| \leq \frac{\Delta}{1 + \epsilon^2} \left[e^{((\frac{1}{\epsilon} + \epsilon)|t-t_0|} - 1 \right] \quad (5.8)$$

desde que seja $|y_1| \leq 5$.

Tomando Δ pequeno o suficiente podemos fazer

$$|y_1 - x_1| \text{ e } |y_2 - x_2|$$

tão pequeno quanto quisermos em qualquer intervalo fixo de t . Assim, $|y - x|$ e $|y' - x'|$ podem ser feitos tão pequeno quanto quisermos. Dessa maneira, o comportamento de y e y' é determinado por x e x' . Finalmente, o comportamento de y e y' em um intervalo finito será mostrado para determinar o comportamento de $-\infty < t < \infty$. Pelo uso de (5.8), então estamos habilitados para trabalhar com (5.4) ao invés de diretamente com (5.2).

As soluções de (5.4) podem ser dadas explicitamente. Para $x \neq \pm 1$, a equação é linear com coeficientes constantes.

Para $|x| < 1$, a equação (5.4) fica

$$\epsilon x'' - x' + \epsilon x = b \sin t.$$

Sejam ρ a raiz menor da equação característica $\epsilon\rho^2 - \rho + \epsilon = 0$, e, a equação homogênea $\epsilon x'' - x' + \epsilon x = 0$. Então

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon^2}}{2\epsilon} = \epsilon + \epsilon^2 + \dots, \quad \epsilon = \frac{\rho}{1 + \rho^2}. \quad (5.9)$$

Seja ρ_1 a outra solução, então

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon^2}}{2\epsilon} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon^2}}{2\epsilon} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon^2}}{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon^2}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon^2}}{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon^2}} = \frac{1}{\frac{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon^2}}{2\epsilon}} = \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Logo a solução de $\epsilon x'' - x' + \epsilon x = 0$, isto é,

$$x_h = B_1 e^{\frac{(t-t_0)}{\rho}} + B_2 e^{(t-t_0)\rho}.$$

Para a solução particular temos, $x_p = D_1 \cos t + D_2 \sin t$, daí

$$\begin{aligned} x'_p &= -D_1 \sin t + D_2 \cos t, \\ x''_p &= -D_1 \cos t - D_2 \sin t. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \epsilon(-D_1 \cos t - D_2 \sin t) - (-D_1 \sin t + D_2 \cos t) + \epsilon(D_1 \cos t + D_2 \sin t) &= b \sin t \\ (-\epsilon D_1 - D_2 + \epsilon D_1) \cos t + (-\epsilon D_2 + D_1 + \epsilon D_2) \sin t &= b \sin t. \end{aligned}$$

Daí, temos: $D_1 = b$ e $D_2 = 0$, então $x_p = b \cos t$. Se a solução geral é $x = x_h + x_p$ e, como ϵ é pequeno, vemos que ρ também é pequeno. Portanto, as soluções de (5.4) são dadas por

$$x = B_1 e^{\frac{(t-t_0)}{\rho}} + B_2 e^{(t-t_0)\rho} + b \cos t, \quad \text{para } |x| < 1, \quad (5.10)$$

onde B_1 , B_2 , e t_0 são constantes. Similarmente

$$x = A_1 e^{-\frac{(t-t_0)}{\rho}} + A_2 e^{-(t-t_0)\rho} - b \cos t, \quad \text{para } |x| > 1, \quad (5.11)$$

onde A_1 , A_2 , e t_0 são constantes.

Para demonstrar a existência da família F contendo pelo menos uma solução correspondente a qualquer sequência $\{d_k\}$, estabeleceremos um certo teorema de transformação

para os intervalos de base. Aqui vamos discutir essa transformação para (5.4). Usando (5.8), mostramos que o resultado da transformação é válido também para (5.7).

Consideramos uma família contínua de soluções de (5.4) começando no intervalo de base ímpar com as condições iniciais

$$x_0 = -1, \quad x'_0 = \rho(1 + b \cos \tau) - b \sin \tau + E, \quad t_0 = \pi + \tau \quad (5.12)$$

onde

$$0 \leq \tau \leq \tau_1 < \frac{1}{10} \quad \text{e} \quad |E| < e^{-\frac{10}{\rho}}.$$

Esta família nós chamaremos uma *família de base ímpar*. Veremos que as soluções da família de base ímpar são aproximadamente iguais a 3 para $t = 3\pi$. De fato, para $t > 3\pi$ as soluções são dadas por (5.11) com o primeiro termo desprezível. Assim eles são quase da forma

$$x = Ae^{-\rho(t-3\pi)} - b \cos t \quad (5.13)$$

onde A é aproximadamente $3 - b$, $0 < b < 1$ e lembramos que $0 < \rho$ é pequeno. Para uma família de base ímpar, veremos que A em (5.13) assume todos os valores acima da faixa dada essencialmente por

$$3 - b - 2\pi(3 - b)\rho \leq A \leq 3 - b + 2\pi(1 - b)\rho. \quad (5.14)$$

As soluções (5.13) diminuem de forma oscilatória e eventualmente atingem o valor $x = 1$ em um conjunto de pontos de cruzamento pares. Que esse x primeiro se torna 1 para algum valor de t próximo de $2m\pi$ onde m é um inteiro segue facilmente de (5.13) pois $\cos t$ deve ser próximo de 1. Quanto maior é A , maior é o tempo que leva a solução (5.13) para atingir $x = 1$. Para os valores de A dados por (5.14), o ponto de cruzamento par t_M associado ao valor máximo de A estará ao redor de 4π à direita do ponto de cruzamento par t_m associado ao valor mínimo de A , pelo menos se b for bem escolhido, simplesmente porque a solução para o valor máximo de A tem mais a cair leva mais tempo para chegar a $x = 1$. A partir de considerações de continuidade isso leva, como veremos, ao fato de que o conjunto de pontos de cruzamento pares da base ímpar original família (5.12) inclui dois intervalos base pares em $x = 1$. Eles ocorrem no intervalo (t_m, t_M) e são dados por

$$t = 2n\pi + \tau \quad \text{e} \quad t = 2(n+1)\pi + \tau, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_1$$

onde n é um inteiro grande que depende apenas de b e p . Na Figura 5.1, as duas soluções que começam em $t = \pi$ e $t = \pi + \tau_1$ são mostradas. O intervalo base par $[e, f]$ está a $(2n - 1)\pi$ do intervalo inicial $(\pi, \pi + \tau_1)$ e o intervalo base $[g, h]$ é 2π além de $[e, f]$. Nos intervalos de base pares, uma relação análoga a (5.12) mantém-se com $|E| < \frac{1}{2}e^{-\frac{10}{p}}$.

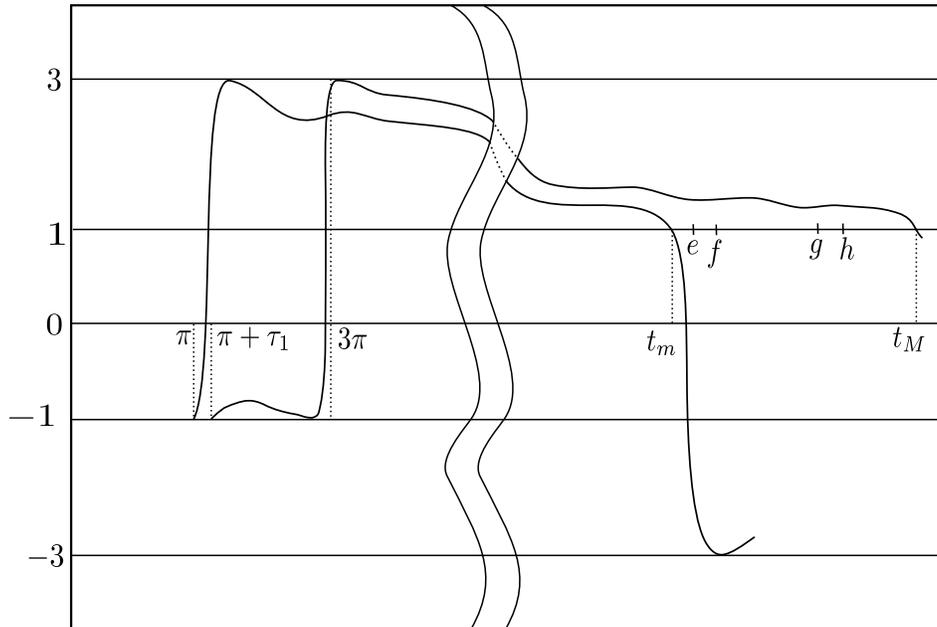


Figura 5.1: Soluções que saem de um intervalo ímpar.

Se considerarmos as trajetórias da família de base ímpar original como determinantes de um mapeamento do intervalo de base ímpar original em um conjunto de pontos de cruzamento pares em $x = 1$, então vemos que o mapa inclui dois intervalos de bases pares. Assim, a família original de trajetórias contém duas subfamílias, cada uma das quais flui através de $x = 1$, $x < 0$, de modo a cobrir completamente um intervalo base uniforme, sendo um intervalo $t = 2n\pi + \tau$ e o outro $t = 2(n + 1)\pi + \tau$. A mesma análise mostra então que cada fluxo de trajetórias de cada intervalo de base uniforme cruza $x = -1$, $x' > 0$, de modo a cobrir completamente dois intervalos de base ímpares, etc., etc. O espaçamento entre um intervalo e os dois intervalos que o mapa inclui é

$$(2n - 1)\pi \quad \text{e} \quad (2n + 1)\pi.$$

Considere uma sequência de intervalos de base com espaçamentos sucessivos dada por uma sequência arbitrária $\{d_k\}$, $-\infty < k < \infty$ onde cada d_k é $(2n-1)\pi$ ou $(2n+1)\pi$. Então, da natureza da transformação de uma família base para cada uma das duas famílias de base $(2n-1)\pi$ e $(2n+1)\pi$, é bem fácil mostrar que há pelo menos uma solução de (5.7) com sucessivos pontos de cruzamento situados nos intervalos de base com o espaçamento prescrito.

5.2 Construção dos intervalos base

Agora estabelecemos o mapeamento de um intervalo de base em dois intervalos de base e provamos a existência da família F . Partimos de um intervalo de base ímpar dado por

$$t = \pi + \tau, \quad \text{e} \quad 0 \leq \tau \leq \tau_1$$

onde $\tau_1 < \frac{1}{10}$ é dado por

$$\sin \tau_1 = \frac{\rho}{b} - \frac{q}{\epsilon}, \quad q = \exp\left(-\frac{2\pi}{\rho} + 2\rho^{-\frac{3}{4}}\right). \quad (5.15)$$

A escolha acima de τ_1 é conveniente, embora a razão para isto não seja evidente até que provemos os Lemas 5.2 e 5.3 abaixo.

A fórmula para x_0 dada por (5.12) é uma consequência de (5.11) como veremos. Pois se diferenciarmos (5.11) e eliminarmos A_2 entre as equações para x e x' , isto é,

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{-\frac{(t-t_0)}{\rho}} + A_2 e^{-(t-t_0)\rho} - b \cos t, \quad \text{para } |x| > 1, \\ x' &= -\frac{A_1}{\rho} e^{-\frac{(t-t_0)}{\rho}} - \rho A_2 e^{-(t-t_0)\rho} + b \sin t. \end{aligned}$$

Como $A_2 = \frac{x - A_1 e^{-\frac{(t-t_0)}{\rho}} + b \cos t}{e^{-(t-t_0)\rho}}$, daí temos

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{A_1}{\rho} e^{-\frac{(t-t_0)}{\rho}} - \rho \left(\frac{x - A_1 e^{-\frac{(t-t_0)}{\rho}} + b \cos t}{e^{-(t-t_0)\rho}} \right) e^{-(t-t_0)\rho} + b \sin t, \\ x' &= -\frac{A_1}{\rho} e^{-\frac{(t-t_0)}{\rho}} - \rho x + \rho A_1 e^{-\frac{(t-t_0)}{\rho}} - \rho b \cos t + b \sin t \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$x' = -\rho(x + b \cos t) + b \sin t - \left(\frac{1}{\rho} - \rho\right) A_1 e^{-\frac{(t-t_0)}{\rho}}. \quad (5.16)$$

Se agora definirmos $x = -1$ e $t = \pi + \tau$, verificamos que de fato obtemos o resultado de (5.12) com E levando em conta o termo exponencial muito pequeno quando $t - t_0$ é grande.

Para $|x| > 1$, da equação (5.4) fica na forma

$$\epsilon x'' + x' + \epsilon x = b \sin t.$$

Assim, sua solução geral é

$$x = A_1 e^{-\frac{(t-t_0)}{\rho}} + A_2 e^{-\rho(t-t_0)} - b \cos t. \quad (5.17)$$

onde A_1 , A_2 e t_0 são constantes. Logo, derivando a equação (5.17) temos

$$x' = -\frac{A_1}{\rho} e^{-\frac{(t-t_0)}{\rho}} - \rho A_2 e^{-\rho(t-t_0)} + b \sin t.$$

Se $x = x_0$ e $x' = x'_0$ em $t = t_0$ então

$$\begin{aligned} x_0 &= A_1 + A_2 - b \cos t_0 & \text{e} \\ x'_0 &= -\frac{A_1}{\rho} - \rho A_2 + b \sin t_0. \end{aligned}$$

Como $A_2 = x_0 + b \cos t_0 - A_1$, daí

$$\begin{aligned} x'_0 &= -\frac{A_1}{\rho} - \rho(x_0 + b \cos t_0) + \rho A_1 + b \sin t_0 \\ A_1 \left(\frac{1}{\rho} - \rho\right) &= -\rho(x_0 + b \cos t_0) - x'_0 + b \sin t_0 \\ A_1 &= \frac{-\rho(x_0 + b \cos t_0) - x'_0 + b \sin t_0}{\frac{1-\rho^2}{\rho}} \\ A_1 &= \frac{-\epsilon \rho(x_0 + b \cos t_0) - \epsilon x'_0 + \epsilon b \sin t_0}{\frac{\epsilon(1-\rho^2)}{\rho}} \end{aligned}$$

Sabe-se que $\epsilon = \frac{\rho}{1+\rho^2}$, daí $(1+\rho^2)\epsilon = \rho$ e $\frac{\epsilon(1-\rho^2)}{\rho} = 1 - 2\epsilon\rho$. Portanto,

$$A_1 = \frac{-\epsilon \rho(x_0 + b \cos t_0) - \epsilon x'_0 + \epsilon b \sin t_0}{1 - 2\epsilon\rho}. \quad (5.18)$$

Agora, como $A_1 = x_0 + b \cos t_0 - A_2$,

$$\begin{aligned} x'_0 &= -\frac{A_1}{\rho} - \rho A_2 + b \sin t_0 \\ x'_0 &= -\frac{x_0 + b \cos t_0 - A_2}{\rho} - \rho A_2 + b \sin t_0 \\ A_2 &= \frac{x_0 + b \cos t_0}{1 - \rho^2} + \frac{x'_0 - b \sin t_0}{\frac{1 - \rho^2}{\rho}} \\ A_2 &= \frac{x_0 + b \cos t_0}{1 - \rho^2} + \frac{\epsilon x'_0 - \epsilon b \sin t_0}{\frac{\epsilon(1 - \rho^2)}{\rho}} \\ A_2 &= \frac{x_0 + b \cos t_0}{1 - \rho^2} + \frac{\epsilon x'_0 - \epsilon b \sin t_0}{1 - 2\epsilon\rho}. \end{aligned}$$

Sabe-se que $\epsilon\rho + \epsilon\rho^3 = \rho^2$ daí $-\epsilon\rho + \epsilon\rho^3 - \rho^2 + 1 = 1 - 2\epsilon\rho$ e, assim, $1 - \rho^2 = \frac{1 - 2\epsilon\rho}{1 - \epsilon\rho}$.

Portanto,

$$A_2 = \frac{(1 - \epsilon\rho)(x_0 + b \cos t_0) + \epsilon x'_0 - \epsilon b \sin t_0}{1 - 2\epsilon\rho} \quad (5.19)$$

Para $|x| < 1$, da equação (5.4), temos

$$\epsilon x'' - x' + \epsilon x = b \sin t.$$

Assim, sua solução geral é

$$x = B_1 e^{\frac{t-t_0}{\rho}} + B_2 e^{\rho(t-t_0)} + b \cos t. \quad (5.20)$$

onde B_1 , B_2 e t_0 são constantes. Similarmente ao A_1 e A_2 , obtemos os valores de B_1 e B_2 , isto é,

$$B_1 = \frac{-\epsilon\rho(x_0 - b \cos t_0) + \epsilon x'_0 + \epsilon b \sin t_0}{1 - 2\epsilon\rho} \quad (5.21)$$

e

$$B_2 = \frac{(1 - \epsilon\rho)(x_0 - b \cos t_0) - \epsilon x'_0 - \epsilon b \sin t_0}{1 - 2\epsilon\rho} \quad (5.22)$$

Lembramos que ϵ e, portanto ρ , são pequenos números positivos e que $0 < b < 1$, mas não está muito próximo (dependendo de ϵ) a 0 ou 1. Por conveniência, devemos tomar $0.1 < b < 0.9$. Ficará claro que todas as etapas da prova serão válidas se ϵ for pequeno o suficiente. Nós agora precisamos dos seguintes lemas:

Lema 5.1. *Uma solução de (5.4) começando no ponto final esquerdo do intervalo de base ímpar, $t = \pi$, sujeita a $x'_0 = \rho(1 + b) + E$ onde nos lembramos $|E| < e^{-\frac{10}{\rho}}$, satisfaz*

$$x \leq 3 - 2\pi(3 - b)\rho + \rho^{\frac{6}{5}} \quad \text{em } t = 3\pi.$$

Lema 5.2. *Uma solução começando no ponto final direito do intervalo base ímpar, $t = \pi + \tau_1$, e satisfazendo (5.12) com $\tau = \tau_1$, satisfaz*

$$x \geq 3 + 2\pi(1 - b)\rho - \rho^{\frac{6}{5}} \quad \text{em } t = 3\pi.$$

Lema 5.3. *Todas as soluções começando do intervalo de base ímpar $t = \pi + \tau$ e satisfazendo (5.12) satisfazem*

$$|x'(3\pi)| \leq \gamma\rho \tag{5.23}$$

onde γ é menor que uma constante absoluta para ρ pequeno. Também para $\pi + \tau < t < 3\pi$,

$$-1 < x < 3.1.$$

Além disso,

$$x' > \frac{1}{2}b\rho, \quad \text{para } \pi + \tau \leq t < \frac{5\pi}{4}, \quad e \quad x > -1 + \frac{b\rho^{\frac{1}{2}}}{10} \quad \text{para } \frac{5\pi}{4} \leq t \leq 3\pi.$$

(Também cada solução cruza $x = 1$ de baixo para cima [não um ponto de cruzamento] apenas uma vez para alguns t , $\pi + \tau < t < 3\pi - \frac{1}{2}\rho^{\frac{1}{4}}$ e depois a solução permanece acima de $x = 1$ até $t = 3\pi$.)

Adiamos as provas destes lemas para o final deste capítulo.

Já observamos (mas ainda não provamos) que para $t \geq 3\pi$ as soluções da família de base ímpar são dadas aproximadamente por

$$x = (3 - b)e^{-(t-3\pi)\rho} - b \cos t.$$

Claramente, primeiro obtemos $x = 1$ para o valor de t no qual

$$(3 - b)e^{-(t-3\pi)\rho}$$

é quase igual a $1 + b$. Em outras palavras, o valor de t depende de

$$\frac{1}{\rho} \log \left(\frac{3 - b}{1 + b} \right).$$

Para formular o próximo lema, introduzimos o inteiro n determinado por

$$\frac{1}{\rho} \log \left(\frac{3 - b}{1 + b} \right) = (2n - 1)\pi - \delta \tag{5.24}$$

onde $0 \leq \delta < 2\pi$. Como ρ é pequeno, vemos que n é grande. Além disso, variando ligeiramente o parâmetro b , podemos obter $0 < \delta < \frac{2\pi(1-b)}{3-b}$. Na verdade, será mais conveniente assumir

$$\rho^{\frac{1}{10}} \leq \delta \leq \frac{2\pi(1-b)}{3-b} - \rho^{\frac{1}{10}}. \quad (5.25)$$

É a condição (5.25) que nos dá valores de b que resultam em uma transformação de um intervalo de base em dois intervalos base com espaçamento $(2n-1)\pi$ e $(2n+1)\pi$ do primeiro.

Desde que assumimos que $0.1 < b < 0.9$ é claro que podemos selecionar b de modo que n tenha qualquer valor dado por

$$1 + \frac{1}{2\pi\rho} \log \frac{2.1}{1.9} < n < \frac{1}{2\pi\rho} \log \frac{2.9}{1.1}. \quad (5.26)$$

Dado qualquer inteiro n sujeito à desigualdade acima, há um intervalo fechado $I_n(\rho)$ dentro de $(0.1, 0.9)$ de modo que, se b estiver em $I_n(\rho)$, então (5.24) e (5.25) serão satisfeitos.

Ao lidar com $y(t)$, acharemos conveniente tornar mais precisa a noção de uma família base contínua. Seja θ um parâmetro e sejam $\tau(\theta)$ e $E(\theta)$ funções contínuas de θ para os quais

$$\begin{aligned} \theta_0 &\leq \theta \leq \theta_1 \quad \text{onde } \tau(\theta_0) = 0, \quad \tau(\theta_1) = \tau_1, \\ 0 &< \tau(\theta) < \tau_1 \quad \text{quando } \theta_0 < \theta < \theta_1, \quad |E(\theta)| \leq e^{-\frac{10}{\rho}}. \end{aligned}$$

Então, *uma família de base ímpar contínua* é uma família de soluções de (5.7), $y(t, \theta)$ satisfazendo as condições iniciais

$$y_0 = -1, \quad y'_0 = \rho(1 + b \cos \tau(\theta)) - b \sin \tau(\theta) + E(\theta), \quad t_0 = (2m+1)\pi + \tau(\theta)$$

onde m é um número inteiro e $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$. Uma definição semelhante vale para uma *família de base par contínua*.

Consideramos agora as soluções $y(t)$ de (5.7). Correspondente a um ϵ suficientemente pequeno, suponha que n satisfaz (5.26). Nós assumimos daqui em diante que b está em $I_n(\rho)$. Nós apresentamos agora o seguinte resultado fundamental.

Lema 5.4. *Seja $y(t, \theta)$, com $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, uma família de base ímpar contínua no intervalo ímpar de base ímpar $t = \pi + \tau(\theta)$. Então há dois intervalos abertos separados*

Θ_1 e Θ_2 no interior de (θ_0, θ_1) tais que as soluções $y(t, \theta)$ partindo de Θ_1 primeiro cruzam $y = 1$, $y' < 0$, no intervalo de base par

$$t = 2n\pi + \tau, \quad \text{com } 0 < \tau < \tau_1$$

e, além disso, formam uma família de base par contínua neste intervalo. As soluções que partem de Θ_2 formam, de modo semelhante, uma família de base par contínua no intervalo de base par

$$t = 2(n+1)\pi + \tau, \quad \text{com } 0 < \tau < \tau_1.$$

De modo semelhante, uma família de base par contínua tem duas subfamílias disjuntas, cada uma das quais forma uma família de base ímpar contínua em intervalos de base ímpares $(2n-1)\pi$ e $(2n+1)\pi$ respectivamente do original.

Provaremos este lema usando os Lemas 5.1, 5.2 e 5.3, que envolvem apenas a equação simples (5.4). Para fins posteriores, é conveniente notar que $E(\theta)$ para a família mapeada satisfaz $|E| \leq \frac{1}{5}e^{-\frac{10}{\rho}}$. Também $|y| < 4$, e $y(t) > -1$ para $\pi + \tau < t < 3\pi$.

Demonstração. Consideramos a família de soluções de (5.4), $x(t, \theta)$ que assume, para cada θ , precisamente os mesmos valores iniciais de $y(t, \theta)$ no intervalo de base ímpar $t = \pi + \tau$. Primeiro escolhemos Δ em (5.8) suficientemente pequeno para que (5.8) possa ser utilizado sobre $|t - \pi| < (2n+2)\pi$. Nós tomamos

$$\Delta \leq e^{-\frac{11}{\rho}} e^{-\frac{(2n+3)\pi}{\epsilon}}.$$

Assim, se $|x| \leq 5$ e $|y| \leq 5$, temos de (5.8)

$$|y(t) - x(t)| \leq e^{-\frac{11}{\rho}}, \quad |t - \pi| \leq (2n+2)\pi. \quad (5.27)$$

Desde que $\epsilon y' = y_2 - P(y_1)$, e da mesma forma para $\epsilon x'$, temos

$$\begin{aligned}
\epsilon|y' - x'| &= |\epsilon y' - \epsilon x'| \\
&= |y_2 - P(y_1) - (x_2 - \Phi(x_1))| \\
&= |(y_2 - x_2) - (P(y_1) - \Phi(x_1))| \\
&\leq |y_2(t) - x_2(t)| + |P(y_1) - \Phi(x_1)| \\
&= |y_2(t) - x_2(t)| + |(P(y_1) - \Phi(y_1)) + (\Phi(y_1) - \Phi(x_1))| \\
&\leq |y_2 - x_2| + |P(y_1) - \Phi(y_1)| + |\Phi(y_1) - \Phi(x_1)| \\
&= |y_2 - x_2| + \Delta + |y_1 - x_1| \\
&\leq 2e^{-\frac{11}{\rho}},
\end{aligned}$$

logo

$$|y'(t) - x'(t)| \leq \frac{1}{20}e^{-\frac{10}{\rho}}, \quad |t - \pi| \leq (2n + 2)\pi. \quad (5.28)$$

Segue do Lema 5.3 que $|x| < 3.1$ para $\pi + \tau \leq t \leq 3\pi$. Assim, por (5.27) é certamente verdade que $|y| < 4$ neste intervalo. Também pelo Lema 5.3 e (5.27) e (5.28) vemos que $y(t) > -1$ para $\pi + \tau < t < 3\pi$. Considere $x(t, \tau)$ para $t \geq 3\pi$. Então, por (5.17) definindo para $t_0 = 3\pi$, temos

$$x(t, \theta) = A_1 e^{-\frac{(t-3\pi)}{\rho}} + A_2 e^{-(t-3\pi)\rho} - b \cos t \quad (5.29)$$

onde usando o Lema 5.3 encontramos $|A_1| \leq \rho$. De (5.5) fica claro que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são funções contínuas de seus valores iniciais. Assim, o mesmo é verdade para $x(t)$ e $x'(t)$. Em particular, $x(3\pi, \theta)$ e $x'(3\pi, \theta)$ são funções contínuas dos valores iniciais em $x = -1$ e, portanto, funções contínuas de θ . Assim, $A_2(\theta)$ é uma função contínua de θ e como mostramos $|A_1| < \rho$.

Temos de (5.27), (5.28) e (5.29) para $t > 7\pi$,

$$y(t, \theta) = A_2(\theta)e^{-\rho(t-3\pi)} - b \cos t + \frac{1}{10}G(\theta, t). \quad (5.30)$$

Logo, derivando esta equação, temos

$$y'(t, \theta) = -\rho A_2(\theta)e^{-\rho(t-3\pi)} + b \sin t + \frac{1}{10}G(\theta, t) \quad (5.31)$$

onde em cada caso $|G(\theta, t)| \leq e^{-\frac{10}{\rho}}$. De (5.30), temos

$$A_2(\theta) = y(t, \theta)e^{\rho(t-3\pi)} + be^{\rho(t-3\pi)} \cos t - \frac{1}{10}G(\theta, t).e^{\rho(t-3\pi)}.$$

Daí, substituindo o valor de $A_2(\theta)$ em (5.31), vemos que

$$\begin{aligned} y'(t, \theta) &= -\rho \left(y(t, \theta)e^{\rho(t-3\pi)} + be^{\rho(t-3\pi)} \cos t - \frac{1}{10}G(\theta, t).e^{\rho(t-3\pi)} \right) e^{-\rho(t-3\pi)} \\ &\quad + b \sin t + \frac{1}{10}G(\theta, t) \\ &= -\rho y(t, \theta) - \rho b \cos t + \frac{\rho}{10}G(\theta, t) + b \sin t + \frac{1}{10}G(\theta, t) \\ &= -\rho y(t, \theta) - \rho b \cos t + b \sin t + \frac{1}{10}G(\theta, t) + \frac{1}{10}G(\theta, t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$y'(t, \theta) = -\rho y(t, \theta) - \rho b \cos t + b \sin t + \frac{1}{5}G(\theta, t). \quad (5.32)$$

Usando os Lemas 5.1, 5.2 e 5.3 em (5.19), com $t_0 = 3\pi$, encontramos

$$\begin{aligned} A_2(\theta_0) &\leq 3 - b - 2\pi(3 - b)\rho + 2\rho^{\frac{6}{5}} \\ A_2(\theta_1) &\geq 3 - b + 2\pi(1 - b)\rho - 2\rho^{\frac{6}{5}}. \end{aligned}$$

Definindo $A_2(\theta) = 3 - b + r(\theta)$, temos que $r(\theta)$ é uma função contínua de θ e que a sua imagem em algum subintervalo de (θ_0, θ_1) é dada por

$$-2\pi(3 - b)\rho + 2\rho^{\frac{6}{5}} \leq r(\theta) \leq 2\pi(1 - b)\rho - 2\rho^{\frac{6}{5}} \quad (5.33)$$

onde r realmente assume os valores extremos indicados.

De (5.24), temos:

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{3 - b}{1 + b} \right) &= (2n - 1)\pi\rho - \delta\rho \\ \frac{3 - b}{1 + b} &= e^{(2n-1)\pi\rho - \delta\rho} \\ 3 - b &= (1 + b)e^{2n\pi\rho - \pi\rho - \delta\rho}. \end{aligned}$$

Logo, também

$$\begin{aligned} e^{-2n\pi\rho + \pi\rho + \delta\rho} &= \frac{1 + b}{3 - b} \\ e^{-2n\pi\rho - \rho\sigma + 3\pi\rho + (\rho\sigma - 3\pi\rho + \pi\rho + \delta\rho)} &= \frac{1 + b}{3 - b} \\ e^{-\rho(2n\pi + \sigma - 3\pi)} &= \frac{1 + b}{3 - b} e^{-\rho(\sigma + \delta - 2\pi)}. \end{aligned}$$

Assim, em (5.30) substituímos A_2 por $3 - b + r$ e definimos $t = 2n\pi + \sigma$.

$$\begin{aligned}
y(t, \theta) &= A_2(\theta)e^{-\rho(t-3\pi)} - b \cos t + \frac{1}{10}G(\theta, t) \\
&= (3 - b + r(\theta))e^{-\rho(2n\pi+\sigma-3\pi)} - b \cos(2n\pi + \sigma) + \frac{1}{10}G(\theta, t) \\
&= (3 - b)e^{-\rho(2n\pi+\sigma-3\pi)} + r(\theta)e^{-\rho(2n\pi+\sigma-3\pi)} - b \cos \sigma + \frac{1}{10}G(\theta, t) \\
&= (1 + b)e^{2n\pi\rho - \pi\rho - \delta\rho} \cdot e^{-\rho(2n\pi+\sigma-3\pi)} + r(\theta)e^{-\rho(2n\pi+\sigma-3\pi)} - b \cos \sigma + \frac{1}{10}G(\theta, t) \\
&= (1 + b)e^{-\rho\sigma - \rho\delta + 2\pi\rho} + r(\theta)e^{-\rho(2n\pi+\sigma-3\pi)} - b \cos \sigma + \frac{1}{10}G(\theta, t) \\
&= (1 + b)e^{-\rho(\sigma+\delta-2\pi)} + r(\theta) \left(\frac{1+b}{3-b} \right) e^{-\rho(\sigma+\delta-2\pi)} - b \cos \sigma + \frac{1}{10}G(\theta, t).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$y(t, \theta) = (1 + b)e^{-\rho(\sigma+\delta-2\pi)} + r(\theta) \left(\frac{1+b}{3-b} \right) e^{-\rho(\sigma+\delta-2\pi)} - b \cos \sigma + \frac{1}{10}G.$$

Claramente se (5.33) for satisfeito, temos $y > 1$ para $\sigma < -10\pi$. Expandindo as funções exponenciais da última expressão em série de potências temos que, para $|\sigma| \leq 10\pi$,

$$y(t, \theta) = (1+b)(1 - \rho(\sigma+\delta-2\pi) + O(\rho^2)) + r(\theta) \left(\frac{1+b}{3-b} \right) (1 - \rho(\sigma+\delta-2\pi) + O(\rho^2)) - b \cos \sigma + \frac{1}{10}G.$$

$$y(t, \theta) = (1+b) - (1+b)\rho(\sigma+\delta-2\pi) + r(\theta) \left(\frac{1+b}{3-b} \right) (1 - \rho(\sigma+\delta-2\pi)) + O(\rho^2) - b \cos \sigma + \frac{1}{10}G.$$

$$y(t, \theta) = 1 + b - b \cos \sigma - \left[\rho(1+b)(\sigma + \delta - 2\pi) - r(\theta) \frac{1+b}{3-b} \right] + \gamma\rho^2 \quad (5.34)$$

onde $|\gamma|$ é menor que alguma constante absoluta para ρ pequeno.

Denote o menor valor de $t > 3\pi$ para o qual $y(t, \theta) = 1$ por $t(\theta)$. Considere o membro direito de (5.34) para $0 \leq \sigma \leq \tau_1$. Quando

$$r = r_1 = -(3 - b)(2\pi - \delta + \rho^{\frac{1}{2}})\rho$$

nós vemos que o membro direito é menor que 1. Isto significa que se $\theta = \theta_{10}$ é uma raiz de $r(\theta) = r_1$ então

$$y(t, \theta) = (1 + b)(1 - \rho(\sigma + \rho^{1/2})) - b \cos \sigma + \gamma\rho^2 = 1 \quad (5.35)$$

ou seja,

$$1 - \rho(\sigma + \rho^{1/2}) = \frac{1 + b \cos \sigma}{a + b} - \frac{\gamma\rho^2}{1 + b} \sim 1 - \gamma\rho^2 \quad (5.36)$$

e por tanto $\sigma + \rho^{1/2} \sim \gamma\rho$. Assim, $\sigma < 0$ e logo $t(\theta_{10}) < 2n\pi$. Da mesma forma, se

$$r = r_2 = -(3 - b)(2\pi - \delta - \rho^{1/2})\rho$$

e se $r(\theta_{20}) = r_2$, então $t(\theta_{20}) > 2n\pi + \tau_1$. Como r_1 e r_2 estão dentro do intervalo (5.33), vemos que θ_{10} e θ_{20} podem ser levados para o interior de (θ_0, θ_1) . Também desde que $r(\theta)$ é uma função contínua e desde que $r(\theta_1) > r(\theta_{20}) > r(\theta_{10}) > r(\theta_0)$ nós podemos escolher $\theta_{10} < \theta_{20}$ e além disso $r_1 < r(\theta) < r_2$ para $\theta_{10} < \theta < \theta_{20}$.

Desde $r_1 \leq r \leq r_2$ temos facilmente de (5.34) que $y > 1$, $\sigma < -\frac{1}{4}\pi$. Assim

$$t(\theta) > 2n\pi - \frac{1}{4}\pi \quad \text{para } \theta_{10} \leq \theta \leq \theta_{20}.$$

Como $t(\theta_{10}) < 2n\pi$ e desde que

$$y'(t(\theta), \theta) < -\frac{1}{4}b\rho \quad \text{para } 2n\pi - \frac{1}{4}\pi \leq t(\theta) \leq 2n\pi + \tau_1 + \frac{1}{4}b\rho$$

por (5.32) vemos que como θ aumenta, $t(\theta)$ é uma função contínua de θ , enquanto

$$2n\pi - \frac{1}{4}\pi \leq t(\theta) \leq 2n\pi + \tau_1 + \frac{1}{4}b\rho.$$

Como $t(\theta_{20}) > 2n\pi + \tau_1$ devemos ter valores de θ , θ_{11} e θ_{12} , $\theta_{10} < \theta_{11} < \theta_{12} < \theta_{20}$ tais que

$$t(\theta_{11}) = 2n\pi, \quad t(\theta_{12}) = 2n\pi + \tau_1 \quad \text{e} \quad t(\theta_{11}) < t(\theta) < t(\theta_{12}), \quad \theta_{11} < \theta < \theta_{12}.$$

Assim, vemos que $(\theta_{11}, \theta_{12})$ é de fato o intervalo Θ_1 no enunciado deste lema.

Da mesma forma, escolhendo

$$r_3 = (3 - b)(\delta - \rho^{1/2})\rho \quad \text{e} \quad r_4 = (3 - b)(\delta + \rho^{1/2})\rho$$

estabelecemos a existência de Θ_2 .

O fato que $|E| < \frac{1}{5}e^{-\frac{10}{\rho}}$ ser satisfeito nos intervalos de base pares

$$t = 2n\pi + \tau \quad \text{e} \quad t = 2(n + 1)\pi + \tau$$

segue de (5.32). O lemma para uma família base par é provado exatamente da mesma maneira. □

Nós agora provamos a existência da família F .

Teorema 5.2. *Dada qualquer sequência $\{d_k\}$, com $-\infty < k < \infty$, onde d_k é $(2n-1)\pi$ ou $(2n+1)\pi$, então há uma solução $y(t)$ de (5.7) com pontos de cruzamento que estão nos intervalos de base com espaçamento sucessivo d_k , $-\infty < k < \infty$. Além disso, a solução não tem outros pontos de cruzamento.*

Demonstração. Considere a subseqüência de intervalos de base com espaçamento d_k para $-N \leq k \leq N$, onde N é um inteiro positivo. Pelo Lema 5.4 uma família de base contínua no intervalo de base mais à esquerda tem uma subfamília que é uma família de base contínua no próximo intervalo de base especificado. Esta família, por sua vez, tem uma subfamília que é uma família base contínua no próximo intervalo base especificado, etc. Assim, há uma subfamília no intervalo base mais à esquerda que tem seus pontos base nos intervalos base com espaçamento d_k , $-N \leq k \leq N$.

Considere a totalidade das soluções $S(N)$ que têm pontos de cruzamento em cada intervalo base especificado, $0 < \tau < \tau_1$, com espaçamento d_k , $-N \leq k \leq N$, da equação (5.32)

$$y'(t, \theta) = -\rho y(t, \theta) - \rho b \cos t + b \sin t + \frac{1}{5}G(\theta, t),$$

e tal que

$$\begin{aligned} |y' + \rho y + \rho b \cos t - b \sin t| &= \frac{1}{5}|G(\theta, t)| \\ &\leq e^{-\frac{10}{\rho}} \end{aligned}$$

em cada ponto de cruzamento e, além disso, tal que $|y| < 4$. Com o uso do Lema 5.4, acabamos de mostrar que $S(N)$ não está vazio.

Sem restrição podemos assumir que $t = \pi + \tau$ é um dos intervalos de base ímpares especificados. Representa cada solução de $S(N)$ por um ponto no plano (v, t) onde $t = \pi + \tau$, $0 < \tau < \tau_1$, é o ponto de cruzamento da solução neste intervalo de base ímpar e $v = y'$ é o declive neste ponto de passagem. Então, por continuidade, os pontos que representam $S(N)$ formam um conjunto de pontos abertos (que, como dissemos, não está vazio). Considere o próximo $S(N+p)$, $p > 0$. Claramente, o conjunto de pontos correspondente a $S(N+p)$ está contido no $S(N)$. Assim, existe o conjunto limitante

interno correspondente a $S(\infty)$. Obviamente, uma solução de $S(\infty)$ está contida em $S(N)$ para qualquer N e, assim, satisfaz os requisitos do Teorema 5.2. \square

5.3 Provas dos Lemas 5.1, 5.2 e 5.3.

Demonstração. (Demonstração do Lema 5.1.)

Consideramos a solução de (5.4) começando no ponto final esquerdo como descrito. Como $x'_0 > 0$ temos $x > -1$ imediatamente à direita de $t = \pi$. Assim usando (5.20) temos

$$\begin{aligned} x &= B_1 e^{\frac{t-\pi}{\rho}} + B_2 e^{\rho(t-\pi)} + b \cos t \\ x' &= \frac{B_1}{\rho} e^{\frac{t-\pi}{\rho}} + \rho B_2 e^{\rho(t-\pi)} - b \sin t \\ x'' &= \frac{1}{\rho^2} B_1 e^{\frac{t-\pi}{\rho}} + \rho^2 B_2 e^{\rho(t-\pi)} - b \cos t. \end{aligned}$$

Usando os valores iniciais para x'_0 e x_0 encontramos B_1 e B_2 de (5.21) e (5.22), isto é,

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{-\epsilon\rho(x_0 - b \cos t_0) + \epsilon x'_0 + \epsilon b \sin t_0}{1 - 2\epsilon\rho} \\ &= \frac{-\epsilon\rho(-1 - b \cos \pi) + \epsilon(\rho(1 + b) + E) + \epsilon b \sin \pi}{1 - 2\epsilon\rho} \\ &= \frac{-\epsilon\rho(-1 + b) + \epsilon(\rho(1 + b) + E)}{1 - 2\epsilon\rho} \\ &= \frac{2\epsilon\rho + \epsilon E}{1 - 2\epsilon\rho} \\ &= \epsilon\rho \cdot \frac{2 + \frac{E}{\rho}}{1 - 2\epsilon\rho}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{(1 - \epsilon\rho)(x_0 - b \cos t_0) - \epsilon x'_0 - \epsilon b \sin t_0}{1 - 2\epsilon\rho} \\ &= \frac{(1 - \epsilon\rho)(-1 - b \cos \pi) - \epsilon(\rho(1 + b) + E) - \epsilon b \sin \pi}{1 - 2\epsilon\rho} \\ &= \frac{b - 1 - 2\epsilon\rho b - \epsilon E}{1 - 2\epsilon\rho} \\ &= b - \frac{1 + \epsilon E}{1 - 2\epsilon\rho}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{1}{\rho^2} B_1 e^{\frac{t-\pi}{\rho}} + \rho^2 B_2 e^{\rho(t-\pi)} - b \cos t \\ &= \frac{1}{\rho^2} \left(\epsilon\rho \cdot \frac{2 + \frac{E}{\rho}}{1 - 2\epsilon\rho} \right) e^{\frac{t-\pi}{\rho}} + \rho^2 \left(b - \frac{1 + \epsilon E}{1 - 2\epsilon\rho} \right) e^{\rho(t-\pi)} - b \cos t. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x'' = \frac{\epsilon}{\rho} \frac{2 + \frac{E}{\rho}}{1 - 2\epsilon\rho} e^{\frac{(t-\pi)}{\rho}} + D(\rho)e^{\rho(t-\pi)} - b \cos t,$$

com $D(\rho) = \rho^2 \left(b - \frac{1 + \epsilon E}{1 - 2\epsilon\rho} \right)$, onde $|D(\rho)| \leq 2\rho^2$. Uma vez que o coeficiente do primeiro termo acima é positivo, vemos que

$$x'' > \frac{1}{2}b, \quad \text{desde que } |x| < 1 \quad \text{e} \quad \pi < t < \frac{5\pi}{4}.$$

Já que $x'_0 > 0$ vemos então que $x' > 0$. Além disso

$$x'' > \frac{3}{2}e^{\frac{(t-\pi)}{\rho}} \quad \text{enquanto } |x| < 1.$$

Logo

$$x'(t) > \frac{3\rho}{2} e^{\frac{t-\pi}{\rho}} \Big|_{\pi}^t = \frac{3\rho}{2} e^{\frac{t-\pi}{\rho}} - \frac{3\rho}{2} \quad (5.37)$$

Integrando novamente

$$x(t) > \frac{3\rho^2}{2} e^{\frac{t-\pi}{\rho}} - \frac{3\rho}{2} t \Big|_{\pi}^t = \frac{3\rho^2}{2} e^{\frac{t-\pi}{\rho}} - \frac{3\rho t}{2} - \frac{3\rho^2}{2} + \frac{3\rho\pi}{2} - 1 \quad (5.38)$$

Se $t = \pi + \rho \log(1/\rho)$ temos

$$x(t) > \frac{3}{2\rho} - \frac{3\rho^2}{2} \log(1/\rho) - \frac{3\rho^2}{2} - 1 \quad (5.39)$$

Se ρ é pequeno então x é maior que 1 antes de t é $\pi + 3\rho \log(1/\rho)$.

Se integrarmos a equação diferencial (5.4) e denotarmos momentaneamente o ponto em que x primeiro se torna 1 pelo subíndice 1 obtemos

$$\epsilon x'_1 - 2 + \epsilon \int_{t_0}^{t_1} x dt = -b \cos t_1 + b \cos t_0 + \epsilon x'_0. \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \epsilon x'_1 - 2 + \epsilon \int_{\pi}^{t_1} x dt &= -b \cos t_1 + b \cos \pi + \epsilon x'_0 \\ \epsilon x'_1 + b \cos t_1 &= 2 - b - \epsilon \int_{\pi}^{t_1} x dt + \epsilon x'_0 \\ \epsilon x'_1 + b \cos t_1 &= 2 - b + \epsilon \left(x'_0 - \int_{\pi}^{t_1} x dt \right) \end{aligned}$$

Desde $t_0 = \pi < t_1 < \pi + 3\rho \log \frac{1}{\rho}$, $|x'_0| < 2\rho$ e $|x| \leq 1$ temos $x'_0 - \int_{\pi}^{t_1} x dt = \gamma\rho \log \frac{1}{\rho}$, portanto,

$$\epsilon x'_1 + b \cos t_1 = 2 - b + \gamma\epsilon\rho \log \frac{1}{\rho}. \quad (5.41)$$

(Lembramos que γ é uma quantidade que é limitada quando $\epsilon \rightarrow 0$). Nós vemos facilmente que $x'_1 > 0$. Assim, para seguir a solução, usamos (5.17) e obtemos A_1 e A_2 de (5.18) e (5.19) no ponto t_1 fazendo uso de (5.41). Nós temos, desde que $x > 1$ para $t_1 < t \leq 3\pi$ como é mostrado no final da prova do Lema 5.3,

$$x = \gamma e^{-\frac{(t-t_1)}{\rho}} + (3-b)e^{-\rho(t-\pi)} - b \cos t + \gamma \epsilon \rho \log \frac{1}{\rho}.$$

Em particular em $t = 3\pi$ temos o resultado do Lema 5.1. \square

Demonstração. (Demonstração do Lema 5.2.)

Ao provar este lema, mostraremos também que

$$x > -1 + \frac{1}{3}b\rho^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para } \frac{5\pi}{4} < t < 3\pi.$$

Consideramos a solução começando em $t_0 = \pi + \tau_1$ onde nos lembramos

$$\sin \tau_1 = \frac{\rho}{b} - \frac{q}{\epsilon}, \quad q = \exp\left(-\frac{2\pi}{\rho} + 2\rho^{-\frac{3}{4}}\right). \quad (5.42)$$

Como por (5.12), x'_0 , usamos (5.20) para obter x . A condição (5.42) assegura que B_1 é pequeno. Na verdade nós temos

$$B_1 = \frac{2bq + \epsilon E}{1 - 2\epsilon\rho}, \quad B_2 = -(1 - b + \gamma\rho^2) \quad (5.43)$$

Assim,

$$x = \frac{2bq + \epsilon E}{1 - 2\epsilon\rho} e^{\frac{(t-\pi-\tau_1)}{\rho}} - (1 - b + \gamma\rho^2)e^{(t-\pi-\tau_1)\rho} + b \cos t \quad (5.44)$$

e claramente

$$x'' = \frac{2bq + \epsilon E}{\rho^2(1 - 2\epsilon\rho)} e^{\frac{(t-\pi-\tau_1)}{\rho}} - \rho^2(1 - b + \gamma\rho^2)e^{(t-\pi-\tau_1)\rho} - b \cos t$$

o que implica

$$x'' = D_1(\rho) - b \cos t \quad (5.45)$$

onde $D_1(\rho) > -3\rho^2$ para $\pi + \tau_1 \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$. Assim $x'' > \frac{1}{2}b > 0$ neste intervalo. Desde $x'_0 > 0$ temos $x > -1$ até $t = \frac{5\pi}{4}$.

Enquanto $\pi + \tau_1 < t < 3\pi - 3\rho^{\frac{1}{4}}$, vemos que o primeiro termo em (5.44) é pequeno por causa das restrições em q e E . Assim, neste intervalo de t

$$x = -1 + b + b \cos t + \gamma\rho. \quad (5.46)$$

Em particular,

$$1 > x > -1 + b\rho^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para } \frac{5\pi}{4} < t < 3\pi - 3\rho^{\frac{1}{4}}.$$

Para prosseguir, definimos $t = 3\pi - s$ em (5.44). Nós temos para $\rho^{\frac{1}{4}} < s < 3\rho^{\frac{1}{4}}$ enquanto $|x| < 1$,

$$x = -1 + \frac{2b}{1 - 2\epsilon\rho} e^{-\frac{\tau_1}{\rho}} \exp\left(2\rho^{-\frac{3}{4}} - \frac{s}{\rho}\right) + \frac{1}{2}bs^2 + \gamma\rho. \quad (5.47)$$

A partir de (5.47), enquanto $|x| < 1$, vemos que no intervalo dado de s , $x > -1 + \frac{1}{3}b\rho^{\frac{1}{2}}$. Vemos então que $x > -1$ neste intervalo em qualquer caso. Além disso, para $s = \rho^{\frac{1}{4}}$, vemos que o segundo termo do lado direito de (5.47) é grande. Assim, x torna-se maior que 1 para alguns s , $\rho^{\frac{1}{4}} < s < 3\rho^{\frac{1}{4}}$.

Agora diferenciamos (5.44) e eliminamos o termo B_1 , ou seja,

$$\begin{aligned} x &= \frac{2bq + \epsilon E}{1 - 2\epsilon\rho} e^{\frac{(t-\pi-\tau_1)}{\rho}} - (1 - b + \gamma\rho^2)e^{(t-\pi-\tau_1)\rho} + b \cos t \\ x' &= \frac{1}{\rho} \frac{2bq + \epsilon E}{1 - 2\epsilon\rho} e^{\frac{(t-\pi-\tau_1)}{\rho}} - \rho \cdot (1 - b + \gamma\rho^2)e^{(t-\pi-\tau_1)\rho} - b \sin t. \end{aligned}$$

Assim, entre x e x' encontramos

$$\rho x' = x - \rho b \sin t - b \cos t + (1 - \rho^2)(1 - b + \gamma\rho^2)e^{(t-\pi-\tau_1)\rho}. \quad (5.48)$$

Agora seja $t = t_1$ o ponto onde $x = 1$. Então $\rho^{\frac{1}{4}} < 3\pi - t_1 < 3\rho^{\frac{1}{4}}$. Assim (5.48) torna-se

$$\rho x'_1 + b \cos t_1 = 2 - b + 2\pi(1 - b)\rho + \gamma\epsilon^{\frac{5}{4}}. \quad (5.49)$$

Em particular, $x'_1 > 0$. Assim, usamos (5.17) e encontramos, usando (5.49), obtendo A_1 e A_2 ,

$$x = -(2 + \gamma\rho^{\frac{1}{2}})e^{-\frac{(t-t_1)}{\rho}} + \left[(3 - b) + 2\pi(1 - b)\rho + \gamma\rho^{\frac{5}{4}}\right] e^{-(t-t_1)\rho} - b \cos t$$

enquanto $x > 1$. Como será mostrado no final da prova do próximo lema $x > 1$ para $t_1 < t \leq 3\pi$. Definindo $t = 3\pi$, obtemos o Lema 5.2. \square

Demonstração. (**Demonstração do Lema 5.3.**)

Seja

$$x = \frac{2bq + \epsilon E}{1 - 2\epsilon\rho} e^{\frac{(t-\pi-\tau_1)}{\rho}} - (1 - b + \gamma\rho^2)e^{(t-\pi-\tau_1)\rho} + b \cos t$$

com $q = \exp\left(-\frac{2\pi}{\rho} + 2\rho^{-\frac{3}{4}}\right)$ substituído por uma quantidade maior e τ_1 , substituído por τ . Considerando x'' tanto como em $x'' = D_1(\rho) - b \cos t$, vemos que

$$x'' > 0, \quad \text{para } \pi + \tau < t < \frac{5\pi}{4}.$$

Assim, $x' > x'_0 > \frac{b\rho}{2}$ neste intervalo e, portanto, ou $x = 1$ para algum t neste intervalo ou então (5.44) ainda é válido com q substituído por uma quantidade maior e τ_1 por τ . Neste último caso, então $x(t)$ está agora acima de x , dado por (5.44), exceto por um termo $\gamma\epsilon^2$.

Assim

$$x = 1 - \gamma\epsilon^2 \quad \text{para algum } t < 3\pi - \rho^{\frac{1}{4}}.$$

Integrando a equação diferencial (5.4) tanto quanto em (5.40):

$$\epsilon x'_1 - 2 + \epsilon \int_{t_0}^{t_1} x dt = -b \cos t_1 + b \cos t_0 + \epsilon x'_0$$

de $t_0 = \pi + \tau$ para t nós achamos que para $\frac{9}{10} < x \leq 1$, $\epsilon x' > 1$. Assim, vemos que de fato

$$x = 1 \quad \text{para alguns } t = t_1 < 3\pi - \frac{1}{2}\rho^{\frac{1}{4}}.$$

Como $x(t)$ está acima de x como dado por (5.44), exceto pelo termo $\gamma\epsilon^2$, vemos que também temos aqui

$$x(t) > -1 + \frac{1}{4}b\rho^{\frac{1}{2}} \quad \text{para } \frac{5\pi}{4} \leq t \quad \text{e enquanto } x \leq 1.$$

Em cada caso, então x se torna 1. Vamos denotar o lugar onde isso acontece primeiro pelo subíndice 1. Então $t_1 < 3\pi - \frac{1}{2}\rho^{\frac{1}{4}}$. Se usarmos (5.48), o que é válido aqui, e definir $x = 1$, $t = t_1$ nós encontramos

$$\rho x'_1 = 2 - b - b \cos t_1 + \gamma\rho. \tag{5.50}$$

Usando isso para encontrar A_1 e A_2 , encontramos $-3 < A_1 < 0$ e $A_2 = 3 - b + \gamma\rho$.
Nós usamos esses valores em

$$x = A_1 e^{-\frac{(t-t_1)}{\rho}} + A_2 e^{-(t-t_1)\rho} - b \cos t, \quad x \geq 1. \quad (5.51)$$

Nós vemos disto que

$$x' = -\frac{A_1}{\rho} e^{-\frac{(t-t_1)}{\rho}} - \rho A_2 e^{-(t-t_1)\rho} + b \sin t.$$

Agora, já que $t_1 < 3\pi - \frac{1}{2}\rho^{\frac{1}{4}}$, vemos que se $x \geq 1$ até 3π , de fato temos $x' = \gamma\rho$ em $t = 3\pi$.

Para mostrar que $x > 1$ para $t_1 < t \leq 3\pi$ assumimos $x = 1$ novamente pela primeira vez em $t = t_2$, $t_1 < t_2 < 3\pi$. Integrando a equação diferencial de t_1 a t_2 obtemos

$$\epsilon x'_2 = \epsilon x'_1 - \epsilon \int_{t_1}^{t_2} x dt + b \int_{t_1}^{t_2} \sin t dt. \quad (5.52)$$

De (5.51) vemos facilmente que $x < 3.1$. Usando (5.50) obtemos de (5.52) que $\epsilon x'_2 > 2 - 2b + \gamma\rho > 0$. Mas isso é impossível, pois em t_2 devemos ter $x'_2 \leq 0$. \square

Conclusões

Nesta dissertação estudamos a equação de van der Pol não autônoma que surge no estudo de oscilações elétricas. Cartwright e Littlewood fizeram vários aportes iniciais ao entendimento desta equação. Inicialmente provaram que ela tem órbitas periódicas, e depois demonstraram, no complicado e famoso artigo de 1950, que ela tem soluções singulares, as quais hoje estão relacionadas com comportamentos caóticos. Desse modo, no artigo [8] a partir de um teorema geral sobre a existência de uma região atratora, eles esboçaram a geometria das soluções evidenciando a sua alta complexidade.

Devido a esses fatos, Levinson propôs uma equação diferencial similar à de van der Pol na qual finalmente conseguiu mostrar a existência das mencionadas soluções singulares. Mais precisamente, ele provou que existem parâmetros para os quais existe um conjunto de soluções \mathcal{F} o qual está em correspondência biunívoca com o conjunto de Cantor $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ de sequências simbólicas que é perfeito e não enumerável. Desse modo, Levinson foi um dos primeiros a exibir um conjunto que, na linguagem atual, tem natureza caótica.

Referências Bibliográficas

- [1] D.G. Aronson, *Biographical memory: Norman Levinson*, National Academy of Sciences (2013).
- [2] E. V. Appleton, e B. Van der Pol, *On the form of free triode vibrations*, Phil Mag. **42** (1921)201–220.
- [3] E. V. Appleton, *The automatic synchronization of triode oscillators*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **21** (1922) 231–248.
- [4] M. L. Cartwright, J. E. Littlewood, *On non-linear differential equations of the second order I. The equation $y'' - k(1 - y^2)y' + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$, $k > \text{large}$* , J. London Math. soc. **20**, (1945) 180–189.
- [5] M. L. Cartwright, J. E. Littlewood, *On non-linear differential equations of the second order II. The equation $y'' + kf(y)y' + g(y, k) = p(t) = p_1(t) + kp_2(t)$, $k > 0, f(y) \geq 1$* , Annals of Mathematics, **48(2)** (1947) 472–494.
- [6] M. L. Cartwright, *Forced Oscillations in Nearly Sinusoidal Systems*, J. Instn. Elect. Engrs. **95(34)** (1948) 88–96.
- [7] M.L. Cartwright, *On non-linear differential equations of the second order III. The equation $x'' - k(1 - x^2)x' + x = pk\lambda \cos(\lambda t + \alpha)$, $k \text{ small and } \lambda \text{ near } 1$* , Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., **45(4)** (1949) 495–501.
- [8] M. L. Cartwright, *Forced oscillations in nonlinear systems*, J. Res. Natl. Bur. Stand., **45(6)** (1950) 514–518.

- [9] Jean-Marc Ginoux, Christophe Letellier. *Van der Pol and the history of relaxation oscillations: toward the emergence of a concept*. Chaos, American Institute of Physics, 2012, 22, pp.023120.
- [10] T. H. Gronwall, *Note on the Derivatives with Respect to a Parameter of the Solutions of a System of Differential Equations*, Annals of Mathematics, Second Series, **20(4)** (Jul., 1919), pp. 292-296
- [11] R. Haiduc, *Horseshoes in the forced van der Pol system*, Nonlinearity **22** (2009) 213–237.
- [12] R. Howard. *The Gronwall inequality*, disponível em <http://people.math.sc.edu/howard/>
- [13] N. Levinson e O. K. Smith, *A general equation for relaxation oscillations*, Duke Math. J. **9** (1942) 382–403.
- [14] N. Levinson, *A simple second order differential equation with singular motions*, Proc. Nat. Acad. of Sciences **34** (1948) 13–15.
- [15] N. Levinson, *A second order differential equation with singular solutions*, Annals of Mathematics **50(1)** (1949) 127–153.
- [16] A. Liénard. *Etude des oscillations entretenues*. Revue Gén. de l'Electricité. **33** (1928) 901–946.
- [17] J. E. Littlewood, *On non-linear differential equations of the second order III: The equation $y'' - k(1 - y^2)y' + y = b\mu k \cos(\mu t + \alpha)$ for large k , and its generalizations*. Acta Math. **97** (1957) 267–308.
- [18] N. Lloyd, *On the non-autonomous van de Pol equation with large parameter*, Proc. Camb. Phil. Soc. **72** (1972) 213–227.
- [19] S. L. MacMurrán, J. J. Tattersall, *The mathematical collaboration of M. L. Cartwright and J. E. Littlewood*, The American Mathematical Monthly, **103(10)** (1996) 833–845.

- [20] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 747–817 (1967).
- [21] B. van der Pol, *The nonlinear theory of electric oscillations*, Proc. Inst. Radio Eng. **22** (1934) 1051–1086.
- [22] Sotomayor, J. *Equações diferenciais ordinárias*. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- [23] L. Barreira e Claudia V. *Equações diferenciais ordinárias: Teoria Qualitativa*. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.