UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Atratores Pullback Fracos de Processos Multívocos

Yessica Yulieth Julio Pérez

Orientador: Prof^a. Dr^a. Mariza Stefanello Simsen

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 28 DE FEVEREIRO DE 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Atratores Pullback Fracos de Processos Multívocos

Yessica Yulieth Julio Pérez

Orientador: Prof^a. Dr^a. Mariza Stefanello Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

ITAJUBÁ – MG
28 DE FEVEREIRO DE 2020

Dedico este trabalho aos meus pais Xiomara e Edgar, a eles devo o presente da vida,

e ao meu parceiro de batalha Luis Fernando que lutou junto comigo por esta conquista.

Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus, que me deu saúde e força para alcançar esta conquista.

Aos meus pais e irmãos meu infinito agradecimento. Sempre acreditaram em minha capacidade.

Ao meu namorado, Luis Fernando, por me empurrar para ser uma pessoa melhor e sempre sonhar alto. Obrigada pelo amor incondicional!

Agradeço a minha orientadora, à Doutora Mariza Stefanello, pela paciência, apoio e suporte durante a orientação, os quais contribuíram muito na minha formação.

Aos Professores Melba e Osmin pelo apoio até hoje, sem eles não seria possível estar aqui realizando este sonho. Eles são meu modelo, meus pais acadêmicos.

Agradeço, também, à CAPES pelo apoio financeiro.

Finalmente, gostaria agradecer a UNIFEI por abrir as portas para que pessoas estrangeiras como eu possamos realizar este sonho. Proporcionou-me mais que a busca de conhecimento técnico e científico, uma lição de vida.

Yessica Yulieth Julio Pérez

A mathematician is a person who can find analogies between theorems, a better mathematician is one who can see analogies between proofs and the best mathematician can notice analogies between theories; one can imagine that the ultimate mathematician is one who can see analogies between analogies.

Stefan Banach.

Resumo

Este trabalho apresenta o estudo da teoria abstrata de atratores pullback fracos definidos para processos multívocos, comparando com o conceito de atrator pullback forte. A invariância e atração pullback são requeridos para ao menos uma trajetória em cada ponto inicial ao invés de todas as trajetórias. Posteriormente realiza–se a demonstração de alguns resultados relativos à teoria.

Palavras–chave: Processo multívoco, Atrator Pullback, Invariância fraca.

Abstract

This work presents the study of the abstract theory of weak pullback attractors defined for set-valued processes, comparing with the concept of strong pullback attractor. The invariance and pullback attraction are required only for at least one trajectory at each starting point rather than all trajectories. Subsequently, the demonstration is made of some results related to the theory.

Keywords: Set-valued processes, Pullback attraction, Weak invariance.

Sumário

Introdução

As funções de análise multívoca e de conjunto de atingibilidade são usadas para lidar com problemas decorrentes de equações diferenciais sem unicidade, inclusões diferenciais ou problemas decorrentes da teoria de controle, teoria de viabilidade, finanças e economia, entre outros, e foram amplamente estudadas por vários autores nas últimas décadas [8, 18, 19, 26, 27, 31].

Muitos sistemas interessantes são, na verdade não-autônomos, embora a maioria dos conceitos foi desenvolvido apenas na configuração conveniente de sistemas autônomos. É de importância prática, bem como de interesse intelectual, ver como generalizar tais conceitos para sistemas não-autônomos. Os atratores fornecem um importante meio de caracterizar o comportamento ao longo do tempo de sistemas dinâmicos. Eles têm sido extensivamente investigados, em particular, atratores globais, no caso autônomo e sua versão pullback para situações não-autônomas gerais, que são conhecidos como atratores fortes para sistemas multívocos. Vale a pena apontar que, diferente do caso autônomo, várias abordagens são possíveis a fim de fornecer condições suficientes e necessárias para a existência de atratores.

A proposta deste trabalho, baseado em [9], é o estudo de resultados abstratos sobre a teoria de processos multívocos, a qual é uma importante ferramenta para estudar o comportamento assintótico de soluções de equações ou inclusões diferenciais parciais não-autônomas. Focamos na situação multívoca, quando mais de uma solução pode corresponder a um mesmo dado inicial dado, além disso, no estudo das propriedades de estabilidade e invariância global (no sentido forte) e fraca, para isso é introduzido o conceito de atrator pullback.

Nesta ordem de ideias, é apresentada a teoria abstrata de atratores pullback fracos definidos para processos multívocos, comparando com o conceito de atrator pullback forte. Este último é negativamente invariante, compacto e é o minimal entre todos os atratores pullback fechados que atraem de forma pullback todos os limitados do espaço de fase. A principal diferença aqui é que no caso fraco, a invariância e atração pullback são requeridas para ao menos uma trajetória em cada ponto inicial ao invés de todas as trajetórias como no caso do atrator habitual (forte). Assim, um atrator pullback forte, quando existe, é também um atrator pullback fraco.

E assim, o objetivo de este trabalho é apresentar resultados que garantam a existência de um atrator pullback fraco para um processo multívoco dado, assim como a estrutura do mesmo. Um dos resultados importantes apresentados aqui prova que a existência de um atrator pullback fraco segue mais facilmente determinando uma família fracamente pullback absorvente de conjuntos.
É importante destacar que a unicidade e maximalidade de um atrator pullback fraco não podem ser entendidas no sentido usual, mas sim com respeito a uma família absorvente de conjuntos em discussão. Isto é uma propriedade intrínseca de atratores pulback fracos e não é contrariada pela existência de outros atratores pullback fracos com ou sem intersectar conjuntos de componentes, em relação as diferentes famílias.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: o Capítulo 1 conḿ notações, definições e alguns resultados de Análise Funcional e Espaços métricos, o Capítulo 2 está dividido em duas seções, na primeira é definido o conceito de processo multívoco e são enunciados alguns resultados desta teoria geral, a segunda, corresponde a definições e resultados da teoria de atrator pullback (forte); já no Capítulo 3 é definido o atrator pullback fraco de um processo multívoco e são apresentados alguns resultados sobre a estrutura do mesmo; no Capítulo 4 é enunciado e demonstrado o Teorema de Barbashin Generalizado, além disso, é apresentado um resultado sobre um tipo de comportamento semicontínuo superior produzido pela perturbação do modelo; no capítulo 5 é analisada a existência ou não de atratores pullback forte e fraco para determinados exemplos, além disso, é enunciado e provado um resultado que relaciona a existência de atrator pullback forte e fraco.

Capítulo 1

Preliminares

Nesta seção apresentamos algumas definições e resultados que utilizamos ao longo deste trabalho. As definições e resultados deste capítulo podem ser encontrados em [9, 15, 16, 24, 25]. Denotamos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definição 1. *Uma* ***métrica num conjunto*** X *é uma função* $\mathrm{dist} : X \times X \to \mathbb{R}$, *que associa a cada par ordenado de elementos* $x, y \in X$ *um número real* $\mathrm{dist}(x,y)$, *chamado distância de x a y, de modo que para quaisquer* $x, y, z \in X$, *vale*

1. $\mathrm{dist}(x,x) = 0$;

2. *Se* $x \neq y$, *então* $\mathrm{dist}(x,y) > 0$;

3. $\mathrm{dist}(x,y) = \mathrm{dist}(y,x)$;

4. $\mathrm{dist}(x,z) \leq \mathrm{dist}(x,y) + \mathrm{dist}(y,z)$.

Definição 2. *Um* ***espaço métrico*** *é um conjunto M munido de uma métrica* dist *e denotamos por* (M, dist), *ou simplesmente* M, *deixando subentendida qual a métrica* dist *está sendo considerada.*

Definição 3. *Uma* ***norma*** *num espaço vetorial V (real ou complexo) é uma aplicação*
$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *que satisfaz:*

1. $\|\xi\| \geq 0$ *para todo* $\xi \in V$, *e* $\|\xi\| = 0$ *se, e somente se,* $\xi = 0$.

2. $\|\alpha\xi\| = |\alpha|\|\xi\|$ *para todo* $\xi \in V$ *e qualquer* $\alpha \in \mathbb{F}$.

3. $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$ *para todos* $\xi, \eta \in V$.

Definição 4. *Um espaço métrico* (X, dist) *é* ***completo*** *se toda sequência de Cauchy converge a um elemento desse espaço.*

Definição 5. *Um espaço normado que é completo com a métrica induzida pela norma é chamado um* ***espaço de Banach.***

Definição 6. *Seja B um subconjunto de um espaço métrico X. Uma* ***cobertura*** *de B é uma coleção* $\mathscr{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de subconjuntos de X tal que* $B \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

Ela é chamada cobertura aberta de B se seus elementos são abertos em X.

Definição 7. *Um espaço topológico X é dito* ***compacto*** *se toda cobertura aberta* $\mathscr{A}$ *de X contém uma subcoleção finita que também cobre* X.

Proposição 8. *Um conjunto A em um espaço métrico* $(X, \|\cdot\|)$ *é* ***compacto*** *se, e somente se, toda sequência* $\{x_n\}$ *cujos elementos pertencem a A, tem uma subsequência convergindo para algum elemento de* A.

Em diante vamos considerar $(X, \|\cdot\|)$ um espaço geral de Banach e $\mathscr{K}(X)$ o espaço de subconjuntos compactos não–vazios de X.

Definição 9. *Sejam x um ponto e* $A \in \mathscr{K}(X)$. *Definimos a* ***distância do ponto x ao conjunto*** *A como o número real*

$$\mathrm{dist}(x, A) = \min_{a \in A} \|x - a\|.$$

Definição 10. *Um ponto* $x \in X$ *diz–se* ***aderente*** *a um subconjunto A de X quando* $\mathrm{dist}(x, A) = 0$, *isto é, para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $y \in A$ *tal que* $\mathrm{dist}(x, y) < \varepsilon$.

Definição 11. *O* ***fecho*** *de um conjunto A no espaço métrico X é o conjunto dos pontos de X que são aderentes a A e indicamos por* $\overline{A}$.

Definição 12. *Um subconjunto A do espaço métrico X chama–se* ***fechado*** *quando* $\overline{A} = A$.

Observação 13. *Dizer que um conjunto A no espaço métrico X é fechado, significa que, se $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, então $x \in A$.*

Definição 14. *Dados $A, B \in \mathscr{K}(X)$, definimos a **Separação de Hausdorff** de A, B por*

$$H^*(A,B) := \max_{a\in A} \operatorname{dist}(a,B) = \max_{a\in A} \min_{b\in B} \|a-b\|,$$

*enquanto a **Métrica de Hausdorff** no espaço $\mathscr{K}(X)$ de subconjuntos compactos não–vazios de X é definida por*

$$H(A,B) = \max\{H^*(A,B), H^*(B,A)\}.$$

Observação 15. *[16]*

a. $H^*(A,B) \geq 0$;

b. $H^*(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$;

c. $H^*(A,B) \leq H^*(A,C) + H^*(C,B)$.

Note que a Separação de Hausdorff não satisfaz a propriedade de simetria.
A Métrica de Hausdorff é uma construção sob a definição de distância entre um ponto e um conjunto compacto não–vazio, com isso, um novo espaço métrico completo é produzido.

Definição 16.

1. *Uma **ε-vizinhança aberta** de $A \in \mathscr{K}(X)$ é definida por*

$$N_\varepsilon(A) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x,A) < \varepsilon\}.$$

2. *Uma **ε-vizinhança fechada** de A é definida por*

$$N_\varepsilon[A] = \{x \in X : \operatorname{dist}(x,A) \leq \varepsilon\}.$$

Definição 17.

1. *Uma aplicação* $F : X \to \mathscr{K}(X)$ *é semicontínua superior em* x_0 *se para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *tal que* $x \in N_\delta(\{x_0\}) \Rightarrow F(x) \subset N_\varepsilon(F(x_0))$ *ou alternativamente*

$$\lim_{x_n \to x_0} H^*(F(x_n), F(x_0)) = 0$$

   para toda sequência $x_n \to x_0$.

   F *é semicontínua inferior, se dado* $y \in F(x_0)$, $x_0 \in X$, *e uma sequência* $x_n \to x_0$, *existe* $y_n \in F(x_n)$ *tal que* $y_n \to y$.

   A aplicação F *é dita continua se é semicontínua superior e inferir.*

2. *Para qualquer* $A \in \mathscr{K}(X)$, *definimos* $F(A) := \cup_{a \in A} F(a)$.

3. *Definimos o conjunto de composição de duas funções* $F, G \colon X \to \mathscr{K}(X)$ *sendo* $F \circ G(x) := F(G(x))$ *para todo* $x \in X$.

4. *Se* F *e* G *são aplicações semicontínuas superior então* $F \circ G$ *é semicontínua superior.*

5. *Se* $A \in \mathscr{K}(X)$ *e* $G(A)$ *é compacto então* $F \circ G(A)$ *é compacto.*

Capítulo 2

Processos multívocos e atratores pullback

Neste capítulo, o qual foi baseado em [9, 14, 15, 29], apresentamos a teoria geral de processos multívocos assim como definições e alguns resultados da teoria de atrator pullback para processos multívocos; $(X, \|\cdot\|)$ denotará um espaço de Banach, $\mathscr{P}(X)$ a família de todos os subconjuntos não–vazios de X, $\mathscr{B}(X)$ a família de todos os subconjuntos limitados não–vazios de X e $\mathscr{K}(X)$ a família de todos os subconjuntos compactos não–vazios de X.

Barbashin [8] investigou sistemas dinâmicos multívocos gerais ou generalizados gerados por equações diferenciais ordinárias sem solução única. Roxin [27] mostrou que as equações contingentes ou de inclusão não–autônomas geram sistemas dinâmicos gerais não–autônomos o mesmo que os sistemas de controle diferencial ordinários não–autônomos em cujo caso ele chamou de o sistema gerado de um sistema de controle central [26]. Vide [18, 19].

Usaremos o nome processos multívocos para todos esses sistemas multívocos não–autônomos sem assumir extensão backwards no tempo.

2.1 Processos multívocos

As definições e resultados apresentados nesta secção podem ser encontrados em [9], [15] e [26].

Definição 18. *Um **processo multívoco** em um espaço de fase X é uma aplicação multívoca* $(t, t_0, x_0) \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$ *definida para todo* $t \geq t_0$ *em* $\mathbb{R}$ *e* $x_0 \in X$*, que satisfaz as seguintes pro-*

priedades:

1. *Compacidade:*

$\Phi(t,t_0,x_0)$ *é um subconjunto não–vazio compacto de* X *para todo* $t \geq t_0$ *em* $\mathbb{R}$ *e todo* $x_0 \in X$;

2. *Condição inicial:*

$\Phi(t_0,t_0,x_0) = \{x_0\}$ *para todo* $t_0 \in \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in X$;

3. *Evolução do tempo:*

$\Phi(t_2,t_0,x_0) = \Phi(t_2,t_1,\Phi(t_1,t_0,x_0))$ *para todo* $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ *em* $\mathbb{R}$ *e todo* $x_0 \in X$, *onde*

$$\Phi(t,t_0,A) = \bigcup_{y \in A} \Phi(t,t_0,y)$$

para $A \in \mathscr{P}(X)$ *e* $t \geq t_0$ *em* $\mathbb{R}$;

4. *Continuidade no tempo:*

$$\lim_{s \to t} H(\Phi(s,t_0,x_0),\Phi(t,t_0,x_0)) = 0$$

para todo $s,t \geq t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in X$;

5. *Semicontinuidade superior na condição inicial:*

$$\lim_{t_o^n \to t_0, x_o^n \to x_0} H^*(\Phi(t,t_o^n,x_o^n,),\Phi(t,t_0,x_0)) = 0$$

uniformemente em $t \in [T_0,T_1]$ *para qualquer* $T_0 < T_1 < \infty$ *com* $T_0 \geq t_0^n$*,* t_0 *e para todo* $t_0 \in \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in X$.

Observação 19. *[26] A aplicação multívoca* $\Phi(t,t_0,x)$ *é semicontínua superiormente em* (t,t_0,x)*. Isto segue diretamente da Definição 18 e da seguinte desigualdade:*

$$H^*(\Phi(t',t_0',x_0'),\Phi(t,t_0,x_0)) \leq H^*(\Phi(t',t_0',x_0'),\Phi(t',t_0,x_0)) + H(\Phi(t',t_0,x_0),\Phi(t,t_0,x_0)).$$

Exemplos simples de equações diferenciais sem unicidade provam que a condição 5 em geral não pode ser fortalecida com a continuidade nas variáveis iniciais, isto é, com a Métrica de Hausdorff H ao invés da semimétrica H^*. O seguinte exemplo pode ser encontrado em [19], Exemplo 1 da página 122:

Para $X = \mathbb{R}$, considere a equação diferencial ordinária

$$x' = \frac{1}{3}x^{2/3}$$

que tem solução não única $x = 0$. Para achar outra solução, considere a função $G : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{3} s^{-2/3}\, ds.$$

onde $\mathrm{I} = (-\infty, 0)$ ou $\mathrm{I} = (0, \infty)$; por integração elementar obtemos:

$$G(x) = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x} s^{-2/3}\, ds = x^{1/3} - x_0^{1/3}.$$

Escrevendo $t = x^{1/3} - x_0^{1/3}$ obtemos $G^{-1}(t) = (x_0^{1/3} + t)^3$, assim, para cada $t \in \mathbb{R}$ temos a solução

$$F(x,t) = \begin{cases} \{(x^{1/3} + t)^3\} & \text{se } x \neq 0, \\ [0, t^3] & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Logo, para $y \to 0^+$ e $s \to t > 0$,

$F(y,s) = \{(y^{1/3} + s)^3\} \to \{t^3\} \subsetneq [0, t^3] = F(0,t)$ então, F é semicontínua superior, mas não é continua.

Definição 20. *Uma* ***trajetória*** *de um processo multívoco Φ é uma função $\phi : [T_0, T_1] \to X$ tal que $\phi(t) \in \Phi(t, s, \phi(s))$ para todo $T_0 \leq s \leq t \leq T_1$ para qualquer $T_0 < T_1 \in \mathbb{R}$.*
Uma trajetória ϕ é chamada uma ***trajetória completa*** *se está definida para todo $\mathbb{R}$.*

O domínio de definição do processo multívoco $\Phi(t, t_0, x)$, $t \geq t_0$, pode ser estendido de forma natural para os valores $t < t_0$. Quase todas as propriedades básicas são mantidas; a única exceção é a condição de continuidade que não é satisfeita na forma forte da Propriedade 4 da Definição 18.

Para distinguir entre a função já definida e a extensão a ser definida agora, a notação $\Psi(t, t_0, x)$ será usada para a extensão.

Definição 21. *A aplicação* $\Psi(t,t_0,x)$*:* $\{x \in X; t_0 \in \mathbb{R}; t \in \mathbb{R}; t \leq t_0\} \longrightarrow \mathscr{P}(X)$ *é definida por*

$$y \in \Psi(t,t_0,x) \Longleftrightarrow x \in \Phi(t_0,t,y).$$

Note que a relação entre Φ e Ψ é recíproca, mas elas não são funções "inversas" uma da outra. (Vide propriedades da aplicação Ψ em [26]).
Para a demonstração do seguinte lema, o qual garante que as trajetórias são funções continuas, precisamos do seguinte resultado. Vide prova em [26, Teorema 5.2].

Teorema 22. *[26] Se a aplicação* $\Psi(\tau_0,t_0,x_0)$ *é compacta,* $t_0 \geq \tau_0$ *então a função* $\Psi(\tau,t_0,x_0)$ *é continua em* $\tau = \tau_0$*.*

Lema 23. *[26] Sejam* $\Phi(\tau,t,x)$ *e* $\Psi(t,\tau,x)$ *funções de atingibilidade de um sistema de controle generalizado e* $\phi : [T_0,T_1] \to X$ *uma função não necessariamente contínua tal que* $T_0 \leq t_a \leq t_b \leq T_1$ *implica* $\phi(t_b) \in \Phi(t_b,t_a,\phi(t_a))$ *então* $x = \phi(t)$ *é contínua.*

Demonstração. Seja t_a fixo e seja $t \to t_a$, com $t,t_a \in [T_0,T_1]$. Então

(i) Se $t > t_a$, $\phi(t) \in \Phi(t,t_a,\phi(t_a))$, logo, pela Propriedade 4 na definição 18 temos que $\phi(t) \to \phi(t_a)$.

(ii) Se $t < t_a$, $\phi(t) \in \Psi(t,t_a,\phi(t_a))$, segue pelo Teorema 22 que $\phi(t) \to \phi(t_a)$.

□

2.2 Atratores pullback de processos multívocos

Nesta seção apresentamos alguns conceitos equivalentes relacionados com a compacidade assintótica, além disso, é definido o atrator pullback e são enunciados teoremas que garantem a existência do mesmo. Estes resultados e conceitos podem ser encontrados em [14, 15, 29].

Definição 24. *Seja* $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ *uma família de subconjuntos de* X*.*

1. $\mathscr{A}$ *é **positivamente invariante** se* $\Phi(t,s,A_\tau) \subset A_t$ *para todo* $-\infty < s \leq \tau \leq t < \infty$*;*

2. $\mathscr{A}$ *é **negativamente invariante** se* $A_t \subset \Phi(t,s,A_\tau)$ *para todo* $-\infty < s \leq \tau \leq t < \infty$*;*

3. $\mathscr{A}$ é ***invariante*** se $\Phi(t,s,A_\tau) = A_t$ para todo $-\infty < s \leq \tau \leq t < \infty$;

4. $\mathscr{A}$ é dita ser **backward limitada** se os conjuntos $\bigcup_{t\leq\tau} A_t$ são limitados para todo $\tau \in \mathbb{R}$.

É claro que $\mathscr{A}$ é invariante se, e somente se, é positivamente e negativamente invariante.

Definição 25. *Uma família $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ é dita **fechada (compacta, limitada)** se todo conjunto A_t é fechado (compacto, limitado).*

Definição 26.

1. *Um conjunto $A_t \subset X$ **pullback atrai** um conjunto $B \subset X$ no tempo t se*

$$H^*(\Phi(t,s,B),A_t) \to 0 \qquad \text{quando } s \to -\infty.$$

2. *Uma família $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ **pullback atrai conjuntos limitados** de X se $A_t \subset X$ pullback atrai todos os subconjuntos limitados em t, para cada $t \in \mathbb{R}$.*

3. *Um conjunto $A_t \subset X$ **pullback absorve subconjuntos limitados** de X se, para cada $B \in \mathscr{B}(X)$, existe $T = T(t,B) \leq t$ tal que $\Phi(t,s,B) \subset A_t$ para todo $s \leq T$.*

Definição 27. *Uma família $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ **pullback absorve subconjuntos limitados** de X se, A_t pullback absorve conjuntos limitados no tempo t, para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 28. *A família $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ é dita um **atrator pullback global** para o processo multívoco Φ se:*

1. *$\mathscr{A}$ é compacta;*

2. *$\mathscr{A}$ pullback atrai conjuntos limitados de X;*

3. *$\mathscr{A}$ é negativamente invariante;*

4. *$\mathscr{A}$ é minimal, isto é, se $\mathscr{A}' = \{A'_t : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família pulback atratora fechada, então $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$.*

Definição 29. *Um processo multívoco Φ é chamado **pullback assintoticamente compacto** se para todo $B \in \mathscr{B}(X)$, $t \in \mathbb{R}$ e qualquer sequência $\tau_n \to -\infty$ e $\xi_n \in \Phi(t,\tau_n,B)$, existe $\xi \in X$ e uma subsequência $\xi_{n_k} \to \xi$.*

Em diante, a família de conjuntos $\mathscr{A} = \{A_t \subset X : t \in \mathbb{R}\}$ será chamada de conjunto não–autônomo.

Definição 30. *Um processo multívoco Φ é chamado* ***pullback limitado dissipativo*** *se existe uma família $\mathscr{B}_0 = \{B_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$, com $B_0(t) \in \mathscr{B}(X)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ que pullback absorve subconjuntos limitados de X. Φ é dito* ***monotonicamente pullback limitado dissipativo*** *se, além disso, $B_0(s) \subset B_0(t)$ para cada $s \leq t$.*

Definição 31. *A órbita $\gamma^{\xi}(t,E)$ no tempo t para $E \subset X$ é definida por:*

$$\gamma^{\xi}(t,E) = \bigcup_{s \leq \xi} \Phi(t,s,E).$$

Definição 32. *O conjunto ω-limite $\omega(t,E)$ no tempo t para $E \subset X$ é definido por:*

$$\omega(t,E) = \bigcap_{\xi \leq t} \overline{\gamma^{\xi}(t,E)}.$$

Equivalentemente, para cada $t \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$\omega(t,B) = \{x \in X : x_n \to x \; para \; algum \; x_n \in \Phi(t,\tau_n,B), \tau_n \to -\infty\}. \tag{2.1}$$

Lema 33. *[29] Seja Φ um processo multívoco pullback assintoticamente compacto. Então para cada $B \in \mathscr{B}(X)$ e cada $t \in \mathbb{R}$, $\omega(t,B)$ é não–vazio, compacto e pullback atrai B no tempo t, isto é,*

$$\lim_{s \to -\infty} H^*(\Phi(t,s,B), \omega(t,B)) = 0.$$

O seguinte resultado fornece uma condição suficiente para a existência de um atrator pullback.

Teorema 34. *[29] Se existe uma família de conjuntos compactos pullback atratora D_t, então a família de conjuntos $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ definida por*

$$A_t = \overline{\bigcup_{B \in \mathscr{B}(X)} \omega(t,B)}$$

é um atrator pullback global para Φ. Mais ainda, os conjuntos A_t são compactos e $A_t \subset D_t$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Lema 35. *[29] Se Φ possui um atrator pullback global backward limitado $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$, então $\mathscr{A}$ é invariante.*

Lema 36. *[14] Seja Φ pullback assintoticamente compacto. Então para cada $B \in \mathscr{B}(X)$ e cada $t \in \mathbb{R}$, $\omega(t,B)$ é não–vazio e compacto. Mais ainda, o conjunto $\Omega(B) = \{\omega(t,B) : t \in \mathbb{R}\}$, onde para cada $t \in \mathbb{R}$ temos*

$$\omega(t,B) = \bigcap_{s \leq t} \bigcup_{\tau \leq s} \overline{\Phi(t,\tau,B)},$$

pullback atrai B no tempo t.

Teorema 37. *[14] Se Φ é assintoticamente compacto, então existe um conjunto minimal fechado que pullback atrai os conjuntos limitados no tempo t. Esse conjunto é dado por*

$$K_t = \overline{\bigcup_{B_0 \in \mathscr{B}(X)} \omega(t,B_0)}.$$

Como pelo Lema 36, o conjunto $\omega(t,B)$ é compacto, não–vazio e pullback atrai B no tempo t, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathscr{B}(X)$, só estaria faltando provar a minimidade de K_t. A ideia da prova é considerar um conjunto C fechado tal que para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{s \to -\infty} H^*(\Phi(t_0,s,B),C) = 0$ para todo $B \in \mathscr{B}(X)$ e mostrar que $K_{t_0} \subset C$.

Teorema 38. *[14] Φ é pullback assintoticamente compacto e monotonicamente dissipativo se, e somente se, Φ possui um único atrator pullback backward limitado minimal fechado.*

Os detalhes da prova do anterior Teorema podem ser encontrados em [14].

Teorema 39. *[29] O processo multívoco Φ é pullback assintoticamente compacto e monotonicamente pullback limitado dissipativo se, e somente se, possui o único atrator pullback backward limitado $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ definido por*

$$A_t = \bigcup_{B \in \mathscr{B}(X)} \omega(t,B).$$

Demonstração. Pelo Teorema anterior sabemos que $A_t = \overline{\bigcup_{B \in \mathscr{B}(X)} \omega(t,B)} = \omega(t,B_0(t))$. Então

$$A_t := \omega(t,B_0(t)) \subset \bigcup_{B \in \mathscr{B}(X)} \omega(t,B) \subset \overline{\bigcup_{B \in \mathscr{B}(X)} \omega(t,B)} = A_t,$$

assim a igualdade segue.

A ultima afirmação segue do Lema 35. $\square$

Teorema 40. *[14] Seja* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço métrico completo, e seja* Φ *um processo multívoco monotonamente pullback limitado dissipativo em X com um conjunto não–autônomo pullback absorvente limitado* $\mathscr{B}_0 = \{B_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$*. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) Φ *é pullback assintoticamente compacto.*

(2) *Para cada* $t \in \mathbb{R}$, $\omega(t, B_0(t))$ *é não–vazio, compacto e pullback atrai* $B_0(t)$.

(3) *Existe o atrator pullback backward limitado de* Φ.

Capítulo 3

Atratores pullback fracos de processos multívocos

Para os sistemas multívocos surgindo a partir de sistemas de controle, são de interesse frequente, aquelas situações onde apenas uma ou algumas ao invés de todas as trajetórias satisfazem uma determinada propriedade. Szegö e Treccani [31] introduziram conceitos de invariância fraca e atratores fracos para tais situações no caso autônomo.

Apresentaremos, nesse trabalho, com base no artigo [9], versões pullback desses conceitos fracos para processos multívocos. Tal como acontece com os conceitos fortes de invariância e atração também é menos restritivo aqui considerar famílias de conjuntos ao invés de conjuntos individuais.

Definição 41. *Uma família $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos compactos não–vazios de X é chamada* ***fracamente positivamente invariante*** *para um processo multívoco Φ em X se para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ e todo $x_0 \in A_{t_0}$ existe uma trajetória $\phi : [t_0, \infty) \to X$ de Φ com $\phi(t_0) = x_0$ tal que $\phi(t) \in A_t$ para todo $t \geq t_0$.*

$\mathscr{A}$ é chamada ***fracamente invariante*** *se, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ e todo $x_0 \in A_{t_0}$ existe uma trajetória completa ϕ com $\phi(t_0) = x_0$ e $\phi(t) \in A_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 42. *Uma família fracamente invariante $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos compactos não–vazios de X é chamada um* ***atrator pullback fraco*** *de um processo multívoco Φ em X se está atraindo pullback fracamente, i.e, para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}, D \subset X$ limitado não–vazio e* *toda sequência $d_n \in D$, existe uma sequência de números positivos $\tau_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e trajetórias $\phi_n : [t_0 - \tau_n, t_0] \to X$ de Φ com $\phi_n(t_0 - \tau_n) = d_n$ tal que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathrm{dist}(\phi_n(t_0), A_{t_0}) = 0. \tag{3.1}$$

Note que um atrator pullback forte, quando existe, é também um atrator pullback fraco. Agora, um dos nossos principais resultados será provar que a existência de um atrator pullback fraco segue mais facilmente determinando uma família fracamente pullback absorvente de conjuntos.

Definição 43. *Uma família fracamente positivamente invariante $\mathscr{B} = \{B_t : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos compactos não–vazios de X é chamada uma família **fracamente pullback absorvente** de um processo multívoco Φ em X, se para $t_0 \in \mathbb{R}$ e qualquer $D \in \mathscr{B}(X)$, existe um $T_{t_0,D} \in \mathbb{R}^+$ tal que para cada $\tau_n \geq T_{t_0,D}$ e $d_n \in D$, existe uma trajetória $\phi_n : [t_0 - \tau_n, t_0] \to X$ de Φ com $\phi_n(t_0 - \tau_n) = d_n$ e $\phi_n(t_0) \in B_{t_0}$.*

Note que pela invariância positiva fraca de $\mathscr{B}$, as trajetórias ϕ_n podem ser estendidas, usando a propriedade de concatenação dada pela Propriedade 3 na Definição 18, para permanecer em $\mathscr{B}$ para $t \geq t_0$, isto é, $\phi_n(t) \in B_t$ para cada $t \geq t_0$.

Barbashin [8] mostrou a existência de pelo menos uma trajetória $\phi : [t_0, t_1] \to X$ com $\phi(t_0) = x_0$ e $\phi(t_1) = x_1$ para qualquer x_0 e x_1 com $x_1 \in \Phi(t_1, t_0, x_0)$.Barbashin [8] também provou um resultado de compacidade das trajetórias de um processo multívoco Φ. A seguinte generalização é devida a Roxin [26] (vide também [18]).

Teorema 44. ***(Barbashin).****[26] Seja B um subconjunto compacto não–vazio de X e seja $\phi_n : [t_0, t_1] \to X$ uma sequência de trajetórias de um processo multívoco Φ com $\phi_n(t_0) \in B$, $t_0 < t_1 \in \mathbb{R}$. Então existe uma subsequência ϕ_{n_j} e uma trajetória $\overline{\phi} : [t_0, t_1] \to X$ de Φ com $\overline{\phi}(t_0) \in B$ tal que $\phi_{n_j}(t) \to \overline{\phi}(t)$ quando $n_j \to \infty$ uniformemente em $t \in [t_0, t_1]$.*

Também vamos enunciar, provar e usar outra generalização deste teorema para sequências de trajetórias que pertencem a uma sequência de processos multívocos semicontinuamente superiormente convergentes ; vide Teorema 53.

Teorema 45. *[9] Seja Φ um processo multívoco com uma família fracamente pullback absorvente $\mathscr{B} = \{B_t : t \in \mathbb{R}\}$. Então Φ tem um atrator pullback fraco maximal $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ relativo a $\mathscr{B} = \{B_t : t \in \mathbb{R}\}$, que é unicamente determinado por*

$$\begin{aligned} A_{t_0} = & \{a_0 \in X;\ existe\ \tau_n \to \infty\ quando\ n \to \infty,\ e\ trajetórias\ \phi_n : [t_0 - \tau_n, t_0] \to X \\ & com\ \phi_n(t) \in B_t\ para\ t \in [t_0 - \tau_n, t_0]\ e\ \lim_{n\to\infty} \phi_n(t_0) = a_0\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

para cada $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

Vamos fazer a demonstração em quatro partes.

Existência e compacidade.

Fixe $t_0 \in \mathbb{R}$ e tome uma sequência $\tau_n \to +\infty$ quando $n \to \infty$. Como $\mathscr{B}$ é uma família fracamente pullback absorvente segue da definição que $\mathscr{B}$ é fracamente positivamente invariante, disso, dado $b_n \in B_{\tau_n}$ existem trajetórias $\phi_n : [t_0 - \tau_n, t_0] \to X$ com $\phi_n(\tau_n) = b_n$ e $\phi_n(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - \tau_n, t_0]$ e todo $n \in \mathbb{Z}^+$, em particular

$$\phi_n(t_0) \in B_{t_0} \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Como B_{t_0} é compacto, pelo Teorema de Barbashin, existe uma subsequência convergente $\phi_{n_j}(t_0) \to a_0 \in B_{t_0}$. Tomando esta subsequência sendo a sequência original em (3.2), temos que $a_0 \in A_{t_0}$, assim A_{t_0} é não–vazio.

Agora, para mostrar a compacidade de A_{t_0} só precisamos mostrar que A_{t_0} é fechado pois $A_{t_0} \subset B_{t_0}$ e B_{t_0} é compacto.

Suponha que $a_k \in A_{t_0}$ *e* $a_k \to a^*$ quando $k \to \infty$. Então para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existem subsequências $t_{k,n} \to \infty$ quando $n \to \infty$ e trajetórias $\phi_{k,n} : [t_0 - t_{k,n}, t_0] \to X$ com $\phi_{k,n}(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - t_{k,n}, t_0]$ *e* $n \in \mathbb{Z}^+$ tais que $\lim_{k\to\infty} \phi_{k,n}(t_0) = a_k$. Tome n_k tal que

$$\|\phi_{k,n_k}(t_0) - a_k\| \leq \frac{1}{k} \ e \ t_{k+1,n_{k+1}} \geq t_{k,n_k} + 1 \text{ para cada } k \in \mathbb{Z}^+.$$

Então

$$\|\phi_{k,n_k}(t_0) - a^*\| \leq \|\phi_{k,n_k}(t_0) - a_k\| + \|a_k - a^*\| \leq \frac{1}{k} + \|a_k - a^*\| \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

Escrevemos $\overline{\phi_k} \equiv \phi_{k,n_k}$ *e* $\overline{t_k} \equiv t_{k,n_k}$ então $\overline{\phi_k} : [t_0 - \overline{t_k}, t_0] \to X$ com $\overline{\phi_k}(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - \overline{t_k}, t_0]$ *e* $k \in \mathbb{Z}^+$. Além disso, $\overline{t_k} \to +\infty$ quando $k \to \infty$ com $\overline{\phi_k}(t_0) \to a^*$ quando $k \to \infty$. Assim $a^* \in A_{t_0}$, portanto A_{t_0} é fechado e logo compacto.

Invariância positiva fraca.

Fixe $t_0 \in \mathbb{R}$ e tome $a_0 \in A_{t_0}$, então existem $\tau_n \to \infty$ e trajetórias $\phi_n : [t_0 - \tau_n, t_0] \to X$ com $\phi_n(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - \tau_n, t_0]$ e tal que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \phi_n(t_0) = a_0$. Como $\mathscr{B}$ é fracamente positivamente invariante, cada trajetória ϕ_n pode ser estendida a $[t_0 - \tau_n, \infty)$ tal que $\phi_n(t) \in B_t$ para todo $t \geq t_0$. Pelo Teorema 44, aplicado sucessivamente nos intervalos da forma $[t_0 + N, t_0 + N + 1]$, podemos encontrar uma subsequência (diagonal) $n'_k \to \infty$ quando $k \to \infty$ e (por concatenação) uma trajetória $\overline{\phi}$ de Φ tal que $\phi_{n'_k}(t) \to \overline{\phi}(t) \in B_t$ para cada $t \geq t_0$. Claramente $\overline{\phi}(t_0) = a_0 \in A_{t_0}$ pois a subsequência original (que existe como consequência do Teorema 44) $\phi_{n_k}(t_0) \to a_0$. Pela construção, $\overline{\phi}(t) \in A_t$ para todo $t \geq t_0$. Agora, como $t_0 \in \mathbb{R}$ é arbitrário, $\{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ é fracamente positivamente invariante.

Invariância negativa fraca.

Para provar a propriedade de invariância negativa, usamos um argumento semelhante com um pouco mais de cuidado para todo $t \leq t_0$.

Fixe $N \in \mathbb{Z}^+$ e tome k suficientemente grande tal que para $\tau_{n_k} \geq N$ na subsequência de trajetórias acima ϕ_{n_k} em $\mathscr{B}$ com $\phi_{n_k}(t_0) \to a_0$ que agora restringimos ao intervalo de definição comun $[t_0 - N, t_0] \subset [t_0 - \tau_{n_k}, t_0]$. Como $B_{t_0 - N}$ é compacto, pelo Teorema 44 existe uma subsequência convergente $\phi_{n'_k}(t) \to \overline{\phi}(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - N, t_0]$, em que $\overline{\phi}(t)$ é uma trajetória de Φ. Claramente $\overline{\phi}(t_0) = a_0$. Por um argumento de subsequência diagonal, nós temos uma subsequência tal que $\phi_{n'_k}(t) \to \overline{\phi}(t) \in B_t$ para todo $t \leq t_0$. Disso, como acima, segue que $\overline{\phi}(t) \in A_t$ para todo $t \leq t_0$. Concatenando as duas partes de $\overline{\phi}$ obtemos uma trajetória completa ϕ do processo multívoco Φ com $\phi(t) \in A_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim $\{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ é fracamente invariante.

Atração pullback fraca.

Fixe $t_0 \in \mathbb{R}$ e $D \subset X$ limitado. Como $\mathscr{B}$ é fracamente pullback absorvente para o processo multívoco Φ em X, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ existe $T_{t_0-n,D} \in \mathbb{R}^+$ tal que para cada $k \geq T_{t_0-n,D}$ e $d_n \in D$ existe uma trajetória $\phi_{k,n}$ de Φ em $[t_0-k-n, t_0]$ com $\phi_{k,n}(t_0-k-n) = d_n$ e $b_{k,n} = \phi_{k,n}(t_0-n) \in B_{t_0-n}$ para todo $k \geq T_{t_0-n,D}$ e $n \in \mathbb{Z}^+$. Como $\mathscr{B}$ é por definição fracamente positivamente invariante, cada $\phi_{k,n}$ pode ser estendido indefinidamente para que $\phi_{k,n}(t) \in B_t$ para cada $t \geq t_0 - n$. Em particular, $\phi_{k,n}(t_0) \in B_{t_0}$ que é compacto, assim, existe uma subsequência $k_n < k_{n+1} \to \infty$ quando $n \to \infty$ com $k_n \geq T_{t_0-n,D}$ e $k_{n+1} \geq T_{t_0-n-1,D}$ tal que $\phi_{k_n,n}(t_0) \to a^* \in B_{t_0}$ quando $n \to \infty$. Escrevemos $\overline{\phi_n} \equiv \phi_{k_n,n}$ e $\tau_n \equiv k_n + n$, então $\overline{\phi_n}$ está definida em $[t_0-\tau_n, \infty)$ com $\overline{\phi_n}(t_0-\tau_n) = d_n \in D$ e $\overline{\phi_n}(t_0) \to a^*$ quando $n \to \infty$. Por construção $a^* \in A_{t_0,}$ assim

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\overline{\phi_n}(t_0), A_{t_0}) = 0$$

que é a Propriedade 3.1 na Definição 42. Assim $\{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ está atraindo pullback fracamente com a família fracamente pullback absorvente $\mathscr{B}$. Portanto $\mathscr{A}$ é um atrator pullback fraco relativo a $\mathscr{B}$. $\square$

Observação 46. *Um atrator pullback fraco consiste de trajetórias que existem e permanecem em $\mathscr{B}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, mas não necessariamente contém todas essas trajetórias. Veja Lema 50.*

Observação 47. *Além de ser fracamente invariante, um atrator pullback fraco também é negativamente fortemente invariante, isto é, satisfaz $A_t \subset \Phi(t, t_0, A_{t_0})$ para todo $t \geq t_0$ e $t_o \in \mathbb{R}$.*

Observação 48. *A unicidade e maximalidade de um atrator pullback fraco não podem ser entendidas no sentido usual, mas sim com respeito a uma família absorvente $\mathscr{B}$ de conjuntos em discussão . Isto é uma propriedade intrínseca de atratores pulback fracos e não é contrariada pela existência de outros atratores pullback fracos com ou sem intersectar conjuntos de componentes, em relação as diferentes famílias $\mathscr{B}$. Esse fato é claro nos exemplos de atratores pullback fracos para equações diferenciais não–autônomas em [20, 21]. Um exemplo semelhante para processos multívocos será apresentado no Capítulo 5.*

A prova da seguinte propriedade básica de continuidade de um atrator pullback fraco não é como consequência imediata de definições como no caso forte.

Proposição 49. *[9] Seja $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ um atrator pulback fraco. Então a aplicação multívoca $t \to A_t$ é continua.*

Demonstração. Seja $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ um atrator pullback fraco. Em primeiro lugar, considere o limite

$$H^*(A_t, A_s) \to 0 \qquad \text{quando} \qquad s \to t.$$

Se isso não fosse verdade, existiria um $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $s_n \to t$ tal que

$$\varepsilon_0 \leq H^*(A_t, A_{s_n}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Vamos mostrar que isso leva a uma contradição.
Como A_t é compacto, existe $a_n \in A_t$ tal que

$$H^*(A_t, A_{s_n}) = \operatorname{dist}(a_n, A_{s_n}) \leq \operatorname{dist}(a_n, a_{s_n}) \qquad \text{para} \quad \text{todo} \;\; a_{s_n} \in A_{s_n}.$$

Pela invariância fraca de $\mathscr{A}$, existe uma trajetória ϕ_n com $\phi_n(t) = a_n$ e $\phi_n(s) \in A_s$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$H^*(A_t, A_{s_n}) \leq \operatorname{dist}(\phi_n(t), \phi_n(s_n)), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Novamente pela compacidade de A_t e pelo Teorema 44 existe uma subsequência de trajetórias ϕ_{n_j}, que converge a uma trajetória $\bar{\phi}$ uniformemente no intervalo $[t-1, t+1]$. Assim temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 \leq H^*(A_t, A_{s_{n_j}}) &\leq \operatorname{dist}(\phi_{n_j}(t), \phi_{n_j}(s_{n_j})) \\
&\leq \operatorname{dist}(\phi_{n_j}(t), \bar{\phi}(t)) + \operatorname{dist}(\bar{\phi}(t), \bar{\phi}(s_{n_j})) + \operatorname{dist}(\bar{\phi}(s_{n_j}), \phi_{n_j}(s_{n_j})) \\
&\leq \operatorname{dist}(\phi_{n_j}(t), \bar{\phi}(t)) + \operatorname{dist}(\bar{\phi}(t), \bar{\phi}(s_{n_j})) + \sup_{t-1 \leq s \leq t+1} \operatorname{dist}(\bar{\phi}(s), \phi_{n_j}(s)) \to 0
\end{aligned}$$

quando $j \to \infty$ pela convergência uniforme da subsequência no primeiro e terceiro termos e a continuidade de $\overline{\phi}$ no segundo termo. Mas isso é uma contradição. Portanto $H^*(A_t, A_s) \to 0$ quando $s \to t$.

Em segundo lugar considere o limite $H^*(A_s, A_t) \to 0$ quando $s \to t$. Se isso não for verdade, existiria um $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $s_n \to t$ tal que

$$\varepsilon_0 \leq H^*(A_{s_n}, A_t), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Vamos mostrar que isso leva a uma contradição.
Como A_{s_n} é compacto, existe um $a_n \in A_{s_n}$ tal que

$$H^*(A_{s_n}, A_t) = \operatorname{dist}(a_n, A_t) \leq \operatorname{dist}(a_n, a) \qquad \text{para todo } a \in A_t.$$

Pela invariância fraca de $\mathscr{A}$, existe uma trajetória ϕ_n com $\phi_n(s_n) = a_n$ e $\phi_n(s) \in A_s$ para todo $s \in \mathbb{R} e n \in \mathbb{N}$. Assim

$$H^*(A_{s_n}, A_t) \leq \operatorname{dist}(\phi_n(s_n), \phi_n(t)), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Agora, pela invariância negativa forte do atrator pullback fraco (veja Observação 47)

$$a_n \in A_{s_n} \subset \Phi([t-1, t+1], t-1, A_{t-1}) \qquad \text{que é compacto.}$$

Assim, podemos aplicar o Teorema de Barbashin (Teorema 44) para obter a existência de uma sequência de trajetórias ϕ_{n_j} que converge para uma trajetória $\bar{\phi}$ uniformemente no intervalo $[t-1, t+1]$. Portanto temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 \leq H^*(A_{s_{n_j}}, A_t) &\leq \operatorname{dist}(\phi_{n_j}(s_{n_j}), \phi_{n_j}(t)) \\
&\leq \operatorname{dist}(\phi_{n_j}(s_{n_j}), \overline{\phi}(s_{n_j})) + \operatorname{dist}(\overline{\phi}(s_{n_j}), \overline{\phi}(t)) \\
&\leq \sup_{t-1 \leq s \leq t+1} \operatorname{dist}(\phi_{n_j}(s), \overline{\phi}(s)) + \operatorname{dist}(\overline{\phi}(s_{n_j}), \overline{\phi}(t)) \to 0
\end{aligned}$$

quando $j \to \infty$ pela convergência uniforme da subsequência no primeiro termo e a continuidade da trajetória $\overline{\phi}$ no segundo termo. Mas isso é uma contradição portanto devemos ter

$$H^*(A_s, A_t) \to 0 \qquad \text{quando } s \to t.$$

A combinação dos dois casos dá o resultado desejado, i.e,

$$H(A_s, A_t) \to 0 \qquad \text{quando } s \to t.$$

□

Capítulo 4

Pertubação de processos multívocos

Apresentaremos agora alguns resultados sobre a estrutura de atratores pullback fracos para processos multívocos. O Teorema 54 mostra um tipo de comportamento semicontínuo superior produzido pela perturbação no modelo.

Vamos precisar os seguintes resultados na prova do Teorema 54.

Lema 50. *[9] Suponha que um processo multívoco Φ tem uma família fracamente pullback absorvente $\mathscr{B} = \{B_t : t \in \mathbb{R}\}$ e um atrator pullback fraco $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ relativo a $\mathscr{B}$ em que A_{t_0} é definido como em (3.2). Então uma trajetória completa ϕ de Φ satisfaz $\phi(t) \in B_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$ se, e somente se $\phi(t) \in A_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja ϕ uma trajetória completa com $\phi(t) \in B_t$ para cada $t \in \mathbb{R}$.
Fixe $t_0 \in \mathbb{R}$, então existe uma sequência de trajetórias $\phi_n : [t_0 - n, t_0] \to X$, *a saber* $\phi_n \equiv \phi$, com $\phi_n(t) = \phi(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - n, t_0]$. Em particular, $\phi_n(t_0) \equiv \phi(t_0) \to \phi(t_0)$ quando $n \to \infty$; segue por (3.2) que $\phi(t_0) \in A_{t_0}$. Como t_0 é arbitrário, temos que $\phi(t) \in A_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
Reciprocamente, fixe $t_0 \in \mathbb{R}$, e suponha que $a_0 \in A_{t_0}$ então por definição existe $\tau_n \to \infty$ e trajetórias $\phi_n : [t_0 - \tau_n, t_0] \to X$ com $\phi_n(t) \in B_t$ para $t \in [t_0 - \tau_n, t_0]$ e

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t_0) = a_0$$

e como B_t é compacto, $a_0 \in B_t$, $t \in [t_0 - \tau_n, t_0]$ e o resultado segue pela arbitrariedade de t_0. $\square$

Lema 51. *[21] Suponha que $H^*(B_n,B) \to 0$ quando $n \to \infty$ para subconjuntos compactos não–vazios $B, B_1, B_2, \ldots$. Então para qualquer sequência $b_n \in B_n, n \in \mathbb{Z}^+$, existe uma subsequência $b_{n_j} \to b^* \in B$ quando $n_j \to \infty$.*

Demonstração. Seja $\{b_n\}$ uma sequência em B_n, claramente, pela definição de Separação de Hausdorff temos que

$$\text{dist}(b_n,B) \le H^*(B_n,B) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^+$$

e como B é compacto, existe $b_n^* \in B$ tal que

$$\text{dist}(b_n,B) = \|b_n - b_n^*\|.$$

Novamente pela compacidade de B, existe uma subsequência convergente

$$b_{n_j}^* \to b^* \in B \quad \text{quando} \quad n_j \to \infty$$

logo como

$$\|b_{n_j} - b^*\| \le \|b_{n_j} - b_{n_j}^*\| + \|b_{n_j}^* - b^*\| = \text{dist}(b_{n_j},B) + \|b_{n_j}^* - b^*\|$$

para todo $n_j \in \mathbb{Z}^+$, então $b_{n_j} \to b^*$. □

Lema 52. *[21] Suponha que $F, F^\varepsilon : X \to \mathscr{K}(X)$ com $\varepsilon > 0$ são semicontínuas superiormente e tais que*

$$F^\varepsilon(x) \subset N_\varepsilon(F(x)) \quad \textit{para todo } x \in X,$$

então

$$H^*(F^{\varepsilon_n}(x_n), F(x^*)) \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty$$

para quaisquer sequências convergentes $x_n \to x^*$ em X e $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Demonstração. Como $x_n \to x^*$ em X, para $\nu > 0$ dado existe $k_\nu \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\|x_n - x^*\| < \frac{\nu}{2} \;\; e \;\; 0 < \varepsilon_n < \frac{\nu}{2} \quad \text{para todo } n \ge k_\nu.$$

Assim,

$$x_n \in N_{\nu/2}(x^*) \;\; \text{e} \;\; F^{\varepsilon_n}(x_n) \subset N_{\varepsilon_n}(F(x_n)) \subset N_{\nu/2}(F(x_n)) \quad \text{para todo } n \ge k_\nu.$$

Agora, como F é semicontínua superiormente, existe $\delta(\nu/2,x^*)>0$ tal que para todo x_n com $\|x_n-x^*\|<\delta(\nu/2,x^*)$ tem–se $F(x_n)\subset N_{\nu/2}(F(x^*))$. Assim

$$F^{\varepsilon_n}(x_n)\subset N_{\varepsilon_n}(F(x_n))\subset N_{\nu/2}(F(x_n))\subset N_{\nu/2}(N_{\nu/2}(F(x^*)))=N_\nu(F(x^*))$$

para todo $n\geq \max\{k_{\nu/2},k_{\delta(\nu/2,x^*)}\}$. □

Teorema 53. ***(Teorema de Barbashin Generalizado).****[9]*
Suponha que uma sequência de processos multívocos Φ^ε converge semicontinuamente superior a um processo multívoco Φ, no sentido que,

$$\max_{0\leq\delta\leq 1} H^*(\Phi^\varepsilon(t+\delta,t,x),\Phi(t+\delta,t,x))\leq\varepsilon \;\; para\, todo\, t\in\mathbb{R},x\in X. \tag{4.1}$$

e seja ϕ^{ε_j} uma trajetória de Φ^{ε_j} em $[t_0,t_1]$ tal que $\phi^{\varepsilon_j}(t_0)=x_{0,j}\to x_0$ quando $\varepsilon_j\to 0$. Então existe uma trajetória ϕ de Φ em $[t_0,t_1]$ com $\phi(t_0)=x_0$ e uma subsequência convergente $\phi^{\varepsilon_j'}(t)\to \phi(t)\;\; quando\;\; \varepsilon_j'\to 0\;\; uniformemente\, em\;\; [t_0,t_1]$.

Demonstração. Por conveniência, consideraremos sem perda de generalidade o intervalo $[0,1]$, ao invés de $[t_0,t_1]$.
Temos por hipótese que existe uma sequência de trajetórias ϕ^{ε_j} de Φ^{ε_j} em $[0,1]$ com $\phi^{\varepsilon_j}(0)=x_{0,j}\to x_0$ quando $\varepsilon_j\to 0$. Escrevemos $\phi(0)=x_0$, logo pela convergência semicontínua superior dada por (4.1) e a semicontinuidade superior de $\Phi(t,0,\cdot)$ uniformemente em $t\in[0,1]$ (Propriedade 5 na Definição18), tem–se

$$\begin{aligned} H^*(\Phi^{\varepsilon_j}(t,0,x_{0,j}),\Phi(t,0,x_0)) \leq & H^*(\Phi^{\varepsilon_j}(t,0,x_{0,j}),\Phi(t,0,x_{0,j}))+H^*(\Phi(t,0,x_{0,j}),\Phi(t,0,x_0)) \\ \leq & \varepsilon_j+H^*(\Phi(t,0,x_{0,j}),\Phi(t,0,x_0))\to 0 \qquad \text{quando } \varepsilon_j\to 0 \end{aligned}$$

uniformemente em $t\in[0,1]$. Daí, para cada $\varepsilon>0$ e tomando ε_j suficientemente pequeno tem–se

$$\Phi^{\varepsilon_j}(t,0,x_{0,j})\subset N_\varepsilon[\Phi([0,1],0,x_0)],$$

para todo $t\in[0,1]$. O conjunto $\Phi([0,1],0,x_0)$ é compacto pela continuidade de $\Phi(\cdot,0,x)$ (isso segue das Propriedades 1 e 4 na Definição 18), assim, a partir de $\phi^{\varepsilon_j}(1)\in\Phi^{\varepsilon_j}([0,1],0,x_0)$ existe uma subsequência convergente $\phi^{\varepsilon_j'}(1)=x_{1,j}\to x_1\in\Phi([0,1],0,x_0)$ quando $\varepsilon_j'\to 0$.
Escrevemos $\phi(1)=x_1$.

Afirmação: $\phi(1) \in \Phi(1,0,x_0)$.

De fato,

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\phi(1),\Phi(1,0,\phi(0))) \leq& \|\phi(1)-\phi^{\varepsilon'_j}(1)\| + \operatorname{dist}(\phi^{\varepsilon'_j}(1),\Phi^{\varepsilon'_j}(1,0,\phi^{\varepsilon'_j}(0)))\\ &+H^*(\Phi^{\varepsilon'_j}(1,0,\phi^{\varepsilon'_j}(0)),\Phi(1,0,\phi(0)))\\ =&\|\phi(1)-\phi^{\varepsilon'_j}(1)\|+H^*(\Phi^{\varepsilon'_j}(1,0,\phi^{\varepsilon'_j}(0)),\Phi(1,0,\phi(0))),\end{aligned}$$

pois $\phi^{\varepsilon'_j}(1) \in \Phi^{\varepsilon'_j}(1,0,\phi^{\varepsilon'_j}(0))$ para trajetórias $\phi^{\varepsilon'_j}$ de $\Phi^{\varepsilon'_j}$. Sabe–se que, $\phi^{\varepsilon'_j}(1) \to \phi(1), \phi^{\varepsilon'_j}(0) \to \phi(0)$ quando $\varepsilon'_j \to 0$. Além disso, como as aplicações multívocas $\Phi^{\varepsilon'_j}(1,0,\cdot)$ e $\Phi(1,0,\cdot)$ são semicontínuas superiormente e $\Phi^{\varepsilon'_j}(1,0,\cdot)$ converge semicontinuamente superiormente a $\Phi(1,0,\cdot)$ devido a (4.1), segue pelo Lema 52 que

$$H^*(\Phi^{\varepsilon'_j}(1,0,\phi^{\varepsilon'_j}(0)),\Phi(1,0,\phi(0))) \to 0 \qquad \text{quando } \varepsilon'_j \to 0.$$

Assim, $\operatorname{dist}(\phi(1),\Phi(1,0,\phi(0))) = 0$, i.e, $\phi(1) \in \Phi(1,0,\phi(0))$.

Considere o instante de tempo $t = 1/2$. Repetimos o argumento acima no intervalo $[0,1/2]$, para construir $\phi(1/2) \in \Phi(1/2,0,\phi(0))$ usando a subsequência como acima que converge em $t = 1/2$, isto é, $\phi^{\varepsilon'_j}(1/2) = x_{1/2,j} \to x_2 \in \Phi([0,1],0,x_0)$ quando $\varepsilon'_j \to 0$ como também em $t = 0$ e $t = 1$.

Usando esta mesma sequência no intervalo $[1/2,1]$, também obtemos $\phi(1) \in \Phi(1,1/2,\phi(1/2))$. A construção de $\phi(t)$ para diádico, isto é, $t \in \cup_{q=0,1,2,...}\{p/2^q : p = 0,1,2,...,q\}$, segue recursivamente, tomando subsequências das anteriores que também convergem para os novos pontos em consideração. Suponha que para um determinado q, construímos todas as trajetórias $\phi(p/2^q)$ tal que

$$\phi\left(\frac{p+1}{2^q}\right) \in \Phi\left(\frac{p+1}{2^q},\frac{p}{2^q},\phi\left(\frac{p}{2^q}\right)\right), \qquad p = 0,1,2,...,q-1. \tag{4.2}$$

Considere $t = \frac{2p+1}{2^{q+1}}$ que é o ponto médio do intervalo $\left[\frac{p}{2^q},\frac{p+1}{2^q}\right]$.

A construção de $\phi((2p+1)/2^{q+1})$ com

$$\phi\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right) \in \Phi\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}},\frac{p}{2^q},\phi\left(\frac{p}{2^q}\right)\right) \;\; e \;\; \phi\left(\frac{p+1}{2^q}\right) \in \Phi\left(\frac{p+1}{2^q},\frac{2p+1}{2^{q+1}},\phi\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)\right)$$

segue exatamente como no caso $p = 0$ e $q = 1$, i.e, para $\phi(1/2)$ de $\phi(0)$ e $\phi(1)$. Segue da Propriedade 3 na Definição 18 e da inclusão (4.2), que temos $\phi(t) \in \Phi(t,s,\phi(s))$ para todos os diádicos $s,t \in [0,1]$ com $s \leq t$. Assim, o teorema é verdadeiro para o subconjunto denso mencionado acima.

Para o caso geral suponha, por contradição, que para alguma subsequência $\phi^{\varepsilon'_j}$ e um correspondente valor $t_j \in [0,1]$ $(j = 1,2,3,...)$ tal que $t_j \to t_0$ e $\phi^{\varepsilon'_j}(t_j) \to y \neq \phi(t_0)$ quando $\varepsilon'_j \to 0$.

Se $t_0 < 1$, tomamos τ fixado, $t_0 < \tau \leq 1$; se $t_0 = 1$, tomamos $\tau = 1$.

Desconsiderando um número finito de termos, podemos assumir que $t_j < \tau$. Assim, $\phi(\tau) \in \Phi(\tau, t_j, \phi^{\varepsilon'_j}(t_j))$ e pela semicontinuidade superior de Φ temos que

$$\phi(\tau) \in \Phi(\tau, t_0, y),$$

e portanto tem-se

$$\phi(t_0) = \lim_{\tau \to t_0} \phi(\tau) = \lim_{\tau \to t_0} \Phi(\tau, t_0, y) = y,$$

o que contradiz nosso suposto.

Assim a função ϕ é uma trajetória de Φ com as propriedades requeridas. Em particular, a função $t \mapsto \phi(t)$ é contínua já que $\phi(t)$ é uma trajetória.

□

Teorema 54. *[9] Suponha que o processo multívoco Φ tem uma família fracamente pullback absorvente $\mathscr{B} = \{B_t : t \in \mathbb{R}\}$ e suponha que cada processo multívoco perturbado Φ^ε tem uma família fracamente pullback absorvente $\mathscr{B}^\varepsilon = \{B_t^\varepsilon : t \in \mathbb{R}\}$ para $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\max_{0 \leq \delta \leq 1} H^*(\Phi^\varepsilon(t+\delta, t, x), \Phi(t+\delta, t, x)) \leq \varepsilon \ \ \textit{para todo}\ t \in \mathbb{R}, x \in X. \tag{4.3}$$

e

$$H^*(B_{t_0}^\varepsilon, B_{t_0}) \leq \varepsilon \ \ \textit{para todo}\ t_0 \in \mathbb{R} \tag{4.4}$$

então o atrator pullback fraco maximal $\mathscr{A}^\varepsilon = \{A_t^\varepsilon : t \in \mathbb{R}\}$ em relação a $\mathscr{B}^\varepsilon$ do processo perturbado Φ^ε converge semicontinuamente superior ao atrator pullback fraco maximal $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ em relação a $\mathscr{B}$ de Φ, no sentido que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H^*(A_{t_0}^\varepsilon, A_{t_0}) = 0 \ \ \textit{para cada}\ t_0 \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Demonstração. Seja $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ o atrator pullback fraco relativo a $\mathscr{B}$ dado por (3.2) no Teorema 45 para o processo multívoco Φ e seja $\mathscr{A}^\varepsilon = \{A_t^\varepsilon : t \in \mathbb{R}\}$ o atrator pullback fraco relativo a $\mathscr{B}^{\varepsilon}$ para o processo multívoco perturbado Φ^{ε}.

Suponha que para algum $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H^*(A^{\varepsilon}_{t_0}, A_{t_0}) \neq 0.$$

Logo, existe um $\eta_0 > 0$ e uma subsequência $\varepsilon_j \to 0$ quando $j \to \infty$ tal que

$$H^*(A^{\varepsilon_j}_{t_0}, A_{t_0}) \geq \eta_0 \qquad \text{para} \quad \text{todo} \;\; j \in \mathbb{Z}^+. \tag{4.6}$$

Vamos mostrar que isso leva a uma contradição.

Seja $a^{\varepsilon_j} \in A^{\varepsilon_j}_{t_0}$ tal que $\operatorname{dist}(a^{\varepsilon_j}, A_{t_0}) = H^*(A^{\varepsilon_j}_{t_0}, A_{t_0})$, então $\operatorname{dist}(a^{\varepsilon_j}, A_{t_0}) \geq \eta_0$ para $j \in \mathbb{Z}^+$. Isso é possível pois $A^{\varepsilon_j}_{t_0}$ é compacto. Pelo Lema 50 existe uma trajetória completa ϕ^{ε_j} do processo multívoco perturbado Φ^{ε_j} tal que $\phi^{\varepsilon_j}(t) \in A^{\varepsilon_j}_t \subset B^{\varepsilon_j}_t$ para cada $t \in \mathbb{R}$ com $\phi^{\varepsilon_j}(t_0) = a^{\varepsilon_j}$.

Como $B^{\varepsilon_j}_{t_0}$ e B_{t_0} são compactos e por (4.4) $H^*(B^{\varepsilon_j}_{t_0}, B_{t_0}) \to 0$ quando $\varepsilon_j \to 0$, segue pelo Lema 51 que existe uma subsequência convergente

$$a^{\varepsilon'_j} = \phi^{\varepsilon'_j}(t_0) \to \bar{a}_0 \in B_{t_0} \qquad \text{quando} \qquad \varepsilon'_j \to 0.$$

De (4.6) tem–se que

$$\operatorname{dist}(\bar{a}_0, A_{t_0}) \geq \eta_0/2. \tag{4.7}$$

Pelo Teorema 53 (Teorema Generalizado de Barbashin) aplicado ao intervalo $[t_0, t_0+1]$, existe uma trajetória $\bar{\phi}$ de Φ em $[t_0, t_0+1]$ com $\bar{\phi}(t_0) = \bar{a}_0$ e uma subsequência $\phi^{\varepsilon''_j}$ com $\phi^{\varepsilon''_j}(t) \to \bar{\phi}(t)$ quando $\varepsilon''_j \to 0$ uniformemente para $t \in [t_0, t_0+1]$. Além disso, pelo Lema 51 $\bar{\phi}(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0, t_0+1]$. Repetimos esta construção em sucessivos subintervalos $[t_0+n, t_0+n+1], n = 1, 2, 3, \cdots$ para obter uma trajetória $\bar{\phi}$ de Φ em $[t_0, \infty)$ e uma subsequência diagonal (denotada como antes) $\phi^{\varepsilon''_j}$ com $\phi^{\varepsilon''_j}(t) \to \bar{\phi}(t) \in B_t$ quando $\varepsilon''_j \to 0$ para todo $t \in [t_0, \infty)$.

Também podemos trabalhar backwards no tempo em sucessivos subintervalos

$[t_0-n-1, t_0-n] \qquad para \;\; n = 1, 2, 3, \cdots$ para obter uma trajetória $\bar{\phi}$ de Φ em $(-\infty, t_0]$ com $\bar{\phi}(t_0) = \bar{a}_0$ e ainda mais uma subsequência diagonal (denotada como antes) $\phi^{\varepsilon''_j}$ com $\phi^{\varepsilon''_j}(t) \to \bar{\phi}(t) \in B_t$ quando $\varepsilon''_j \to 0$ para todo $t \in (-\infty, t_0]$.

Assim $\bar{\phi}$ é uma trajetória completa do processo multívoco sem perturbação Φ com $\bar{\phi}(t) \in B_t$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Pelo Lema 50 segue que $\bar{\phi}(t) \in A_t$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Em particular $\bar{\phi}(t_0) \in A_{t_0}$. No entanto, isso é uma contradição com (4.6) e (4.7). Portanto A^{ε}_t converge semicontinuamente superiormente a A_t, i.e,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H^*(A_{t_0}^{\varepsilon}, A_{t_0}) = 0 \qquad \text{para cada } t_0 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

A seguinte condição estrutural no processo multívoco não perturbado Φ fornece uma condição simples para $X = \mathbb{R}^d$ assegurando a existência de uma proximidade uniforme da família fracamente pullback absorvente.

Suponha que $\mathscr{B} = \{B_t : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família de subconjuntos compactos não–vazios de $\mathbb{R}^d$ e que existe $\gamma : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ tal que

$$\min_{y\in\Phi(t,t_0,x)} \operatorname{dist}(y, B_t) \leq \gamma(t-t_0) \operatorname{dist}(x, B_{t_0}) \ \text{ para } \ \text{ todo } \ x \in \mathbb{R}^d \ \ t \geq t_0 \ \ em \ \mathbb{R},$$

e que para todo conjunto D limitado e todo tempo t fixado

$$\lim_{t_0\to-\infty} \gamma(t-t_0) \sup_{x\in D} \operatorname{dist}(x, B_{t_0}) = 0.$$

Podemos pegar $N_\varepsilon[B_t] := \{x \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(x, B_t) \leq \varepsilon\}$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Então a família $N_\varepsilon[B_t]$ é fracamente positivamente invariante e fracamente pullback absorvente.

Capítulo 5

Exemplos

5.1 Exemplos

Os seguintes exemplos podem ser encontrados em [9].

Exemplo 1:

Nosso primeiro exemplo envolve um processo multívoco não–autônomo gerado pela inclusão diferencial não–autônoma

$$x' \in F(t,x) := \begin{cases} \{-x\} & \text{se } t < 0, \\ \{-x, 0\} & \text{se } t \geq 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}.$$

O processo multívoco aqui é dado por

$$\Phi(t,t_0,x_0) := \begin{cases} x_0 e^{-(t-t_0)} & \text{se } t_0 \leq t \leq 0,\ x_0 \in \mathbb{R}, \\ [x_0 e^{-(t-t_0)}, x_0] & \text{se } 0 \leq t_0 \leq t,\ x_0 \geq 0, \\ [x_0, x_0 e^{-(t-t_0)}] & \text{se } 0 \leq t_0 \leq t,\ x_0 \leq 0, \end{cases}$$

e a composição destes casos. A família $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ com $A_t \equiv \{0\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é fortemente invariante, logo fracamente invariante. Alem disso, $\mathscr{A}$ é um atrator pullback fraco relativo a qualquer família absorvente $\mathscr{B} = \{B_t : t \in \mathbb{R}\}$ com conjuntos componentes $B_t \equiv [-R, R]$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e qualquer $R \geq 0$.

De fato, dado $R \geq 0$, temos que para cada $t \in \mathbb{R}$, $A_t \subset B_t$. Por outro lado, podemos achar uma sequência $\tau_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e trajetórias $\phi_n : [t_0 - \tau_n, t_0] \to X$ tais que $\phi_n \in [-R, R]$ (pois $\phi_n(t) \in \Phi(t, s, \phi(s))$) para $t \in [t_0 - \tau_n, t_0]$ e $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t_0) = 0$ para cada $t_0 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2:

Como um segundo exemplo, consideramos o processo multívoco não–autônomo gerado pela inclusão diferencial

$$x' \in F(t,x) := \begin{cases} \{-x\} & \text{se } t < 0, \\ \{-x, 1\} & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

O processo multívoco aqui é dado por

$$\Phi(t, t_0, x_0) := \begin{cases} \{x_0 e^{-(t-t_0)}\} & \text{se } t_0 \leq t \leq 0, \\ \{x_0\} & \text{se } 0 \leq t_0 = t, \\ [x_0 e^{-(t-t_0)}, x_0 + t - t_0] & \text{se } 0 \leq t_0 < t,\ x_0 \geq \frac{t-t_0}{e^{t_0-t}-1}, \\ [x_0 + t - t_0, x_0 e^{-(t-t_0)}] & \text{se } 0 \leq t_0 < t, x_0 \leq \frac{t-t_0}{e^{t_0-t}-1}, \end{cases}$$

e a composição desses casos. A família $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ com $A_t \equiv \{0\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é fracamente invariante pois para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ é possível achar uma trajetória completa ϕ tal que $\phi(t_0) = 0$, mas, neste caso, $\mathscr{A}$ não é fortemente invariante porque $\Phi(t, t_0, 0) \neq 0$ se $0 \leq t_0 < t$. Por outro lado, $\mathscr{A}$ é um atrator pullback fraco relativo a qualquer família absorvente $\mathscr{B} = \{B_t : t \in \mathbb{R}\}$ com conjuntos componentes $B_t \equiv [-R, R]$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e qualquer $0 \leq R \leq 1$. Este fato segue análogo ao feito no Exemplo 1.

Exemplo 3:

Nosso terceiro exemplo ilustra a ambiguidade quanto à existência e unicidade de atratores pullback fracos aludidos na Observação 48. Ele é baseado na inclusão diferencial não–autônoma

$$x' \in F(t,x) := [-1, 1], \qquad x \in \mathbb{R},$$

e o processo multívoco associado

$$\Phi(t,t_0,x_0) = [x_0 - t + t_0, x_0 + t - t_0], \qquad t_0 \leq t,\ x_0 \in \mathbb{R}.$$

Aqui cada família $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ com $A_t \equiv [R_1, R_2]$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é fracamente mas não fortemente invariante para qualquer $R_1 \leq R_2$ em $\mathbb{R}$, isto é claro porque dado $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in [R_1, R_2]$ podemos achar uma trajetória definida em todo $\mathbb{R}$ tal que $\phi(t_0) = x_0$ e $\phi(t) \in [R_1, R_2]$ para todo $t \in \mathbb{R}$ já que $\Phi(t,t_0,x_0) \bigcap [R_1, R_2]$ é não–vazio, más evidentemente $\Phi(t,t_0,[R_1,R_2]) \neq [R_1,R_2]$ para $t \neq t_0$.

A família $\mathscr{A}$ é um atrator pullback fraco com respeito a uma família absorvente definida igual a si mesma, i.e, $\mathscr{B} = \{B_t : t \in \mathbb{R}\}$ com conjuntos componentes $B_t \equiv A_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$,
isto segue diretamente da Definição 3.2 no Teorema 45 e do fato $\Phi(t,t_0,x_0) \bigcap [R_1, R_2]$ ser não–vazio.

Exemplo 4:

Um quarto exemplo mostra uma família atratora dependendo do tempo com um atrator pullback fraco no tempo. Considere a inclusão diferencial

$$x' \in F(t,x) := \begin{cases} \{-x+t\} & \text{se } t < 0, \\ \{-x+t, -x\} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$

Assim

$$\Phi(t,t_0,x_0) := \begin{cases} \{(x_0+1-t_0)e^{-(t-t_0)} + t - 1\} & \text{se } t_0 \leq t \leq 0, \\ [x_0 e^{-(t-t_0)}, (x_0+1-t_0)e^{-(t-t_0)} + t - 1] & \text{se } 0 \leq t_0 \leq t, \\ [((x_0+1-t_0)e^{t_0} - 1)e^{-t}, (x_0+1-t_0)e^{t_0}e^{-t} + t - 1] & \text{se } t_0 \leq 0 \leq t, \end{cases}$$

Observe que a família $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ com $A_t \equiv \{t-1\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ claramente é fracamente invariante pela definição de Φ, mas não é fortemente invariante pois $\Phi(t,t_0,t_0-1) \neq t-1$ para $t \neq t_0$.

$\mathscr{A}$ e um atrator pullback fraco.

De fato, sejam $t_0 \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ limitado e $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em D. Como para cada $n \in \mathbb{N}$,

$d_n \in \mathbb{R}$ e como $\phi_n(t) \in \Phi(t,s,\phi_n(s))$, podemos definir $\phi_n : [t_0-\tau_n, t_0] \to \mathbb{R}$, $\tau_n \to \infty$ tal que $\phi_n(t_0-\tau_n) = d_n$, além disso, como $\mathrm{dist}(t_0-1, \Phi(t_0,s,0)) \to 0$ quando $s \to t_0$ o resultado segue.

Exemplo 5:

Nosso quinto exemplo baseia–se na inclusão diferencial não–autônoma

$$x' \in F(t,x) := \begin{cases} \{2tx\} & \text{se } t < 0, \\ \{2tx, 4tx\} & \text{se } t \geq 0. \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}.$$

O processo multívoco associado

$$\Phi(t,t_0,x_0) := \begin{cases} \{x_0 e^{(t^2-t_0^2)}\} & \text{se } t_0 \leq t \leq 0, \\ [x_0 e^{2(t^2-t_0^2)}, x_0 e^{(t^2-t_0^2)}] & \text{se } 0 \leq t_0 \leq t,\ x_0 \leq 0, \\ [x_0 e^{(t^2-t_0^2)}, x_0 e^{2(t^2-t_0^2)}] & \text{se } 0 \leq t_0 \leq t,\ x_0 \geq 0, \end{cases}$$

e a composição destes casos. Aqui cada família $\mathscr{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ com $A_t \equiv \{0\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é fortemente e logo fracamente invariante porque $\Phi(t,t_0,0) = 0$ para cada $t_0 \leq t$. Além disso, $\mathscr{A}$ é um atrator pullback fraco global, isto segue usando um argumento semelhante ao do Exemplo 4 já que $\lim_{t_0 \to t} \mathrm{dist}(0, \Phi(t,t_0,0)) = 0$.

Exemplo 6:

Nós finalizamos com um exemplo envolvendo oscilações peneperiódicas (vide [13]), que pode ser encontrado em Krasnosel'skii et al. [23](cf. capítulos 10.5 e 11.7). Em particular, este exemplo ilustra num contexto não–autônomo como se pode achar sistemas em que o comportamento assimptótico não é só determinado por um conjunto invariante compacto que atrai todos os subconjuntos limitados do espaço fase e que é independente do tempo (o atrator global usual). Ao invés, este comportamento limite precisa ser determinado por uma família de conjuntos dependente do tempo (ou seja, um atrator fraco tal como foi introduzido na nossa teoria) que são construídos utilizando uma técnica pullback.

Este exemplo é apresentado para mostrar uma aplicação da teoria desenvolvida e os detalhes podem ser encontrados em [9]. Seja K um cone fixado dado de $\mathbb{R}^d$ e considere a família de problemas

$$\frac{dx}{dt} + A(t,\mu)x = g(t,x), \qquad \mu \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

onde assumimos que $A(\cdot,\cdot)$ é contínuo em ambas variáveis, e para cada parâmetro μ fixado, $A(\cdot,\mu)$ é peneperiódico e não–negativo em relação ao cone K, e g é uniformemente côncava em K com $g(t,0) = 0$.

Se para certos valores de μ, a função de Green associada ao operador $d/dt + A(\cdot,\mu)$ é fortemente positiva ou fortemente negativa em relação a K e existem sub e super soluções não nulas limitadas peneperiódicas, então existe por [23, teorema 10.6] uma única solução peneperiódica x_μ^* entre essas sub e super soluções.

Além disso, por [23, Teorema 11.7] esta solução é assintoticamente estável no cone, i.e, a solução $x_\mu(t,t_0,x_0)$ de (5.1) a partir de $x_0 \in \operatorname{int} K$ no tempo t_0 é atraída por x_μ^* no sentido forward

$$\lim_{t\to\infty} |x_\mu(t,t_0,x_0) - x_\mu^*(t)| = 0.$$

De fato, a solução x_μ^* é construída em termos de atração pullback

$$\lim_{t\to-\infty} |x_\mu(t,t_0,x_0) - x_\mu^*(t)| = 0, \qquad \text{para} \quad \text{cada}\, t\ fixado.$$

Agora suponha I^* sendo o conjunto compacto maximal de parâmetros tal que para $\mu \in I^*$ a equação (5.1) possui uma solução peneperiódica x_μ^* como nos indicamos anteriormente e seja I um conjunto compacto tal que para $\mu \in I - I^*$ não existe tal solução peneperiódica.

Agora considere a seguinte inclusão diferencial que surge de problemas de incerteza paramétrica

$$\frac{dx}{dt} \in F(t,x), \tag{5.2}$$

onde $F(t,x) = \cup_{\mu\in I}\{A(\mu,t)x + g(t,x)\}$ e considere a aplicação de atingibilidade definida como de costume, por

$\Phi(t,t_0,x_0) = \{x(t)|x(\cdot)$ é uma solução de (5.2) tal que $x(t_0) = x_0\}$.

A família de conjuntos compactos não vazia $A_t = \cup_{\mu\in I}\{x_\mu^*(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$ é invariante fracamente e atrai pullback fracamente para o processo multívoco Φ. No entanto, vale a pena mencionar que esta família não pode dar uma descrição de toda a dinâmica.

5.2 Uma relação entre atratores forte e fraco

Nesta secção, que foi baseada em [22], consideramos a relação entre atratores globais (no sentido forte) e atratores fracos.

Definição 55. *Um processo multívoco Θ **está contido** num outro processo multívoco Φ se*

$$\Theta(t,t_0,x_0) \subset \Phi(t,t_0,x_0)$$

para todo $t \geq t_0$ em $\mathbb{R}$ e todo $x_0 \in X$.

Lema 56. *[22] Se $\mathscr{A}$ é um atrator pullback global estritamente invariante compacto para o processo Θ e se Θ está contido no processo multívoco Φ, então $\mathscr{A}$ é um atrator pullback fraco para Φ.*

Demonstração. Seja D um conjunto limitado, como por hipótese $\mathscr{A}$ é um atrator pullback global para o processo multívoco Θ, então

$$H^*(\Theta(t,s,D),\mathscr{A}) \to 0 \qquad \textit{quando } s \to -\infty.$$

Logo para cada sequência $d_n \in D$ existe uma sequência de números positivos $\tau_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e trajetórias $\phi_n : [t_0 - \tau_n, t_0] \to X$ de Θ (e logo de Φ) com $\phi_n(t_0 - \tau_n) = d_n$ tal que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \operatorname{dist}(\phi_n(t),\mathscr{A}) = 0.$$

Assim, $\mathscr{A}$ está atraindo pullback fracamente. Agora falta provar que $\mathscr{A}$ é fracamente invariante. Como $\mathscr{A}$ é estritamente invariante com respeito a Θ, para qualquer $x_0 \in \mathscr{A}$ podemos escolher $y_{-k}, y_k \in \mathscr{A}$ para cada $k \geq 1$ tal que $x_0 \in \Theta(t,1,y_{-1}) \subset \Phi(t,1,y_{-1})$, $y_1 \in \Theta(t,1,x_0) \subset \Phi(t,1,x_0)$ e $y_{-k+1} \in \Theta(t,1,y_{-k}) \subset \Phi(t,1,y_{-k})$, $y_k \in \Theta(t,1,y_{k-1}) \subset \Phi(t,1,y_{k-1})$ para cada $k \geq 2$.
Assim, existem trajetórias $\phi_{-k}(t)$ e $\phi_k(t)$ de Φ nos intervalos $[-k,-k+1]$ e $[k-1,k]$ respectivamente para $k \geq 1$. Concatenando estas trajetórias obtemos uma função $\phi(t)$ definida em $\mathbb{R}$ que pela Propriedade 3 na Definição 18 claramente ϕ é uma trajetória de Φ. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] ATTOUCH, H.; COMINETTI, R. A dynamical approach to convex minimization coupling approximation with the steepest descent method, J. Differential Equations 128 (1996) 519-540.

[2] ATTOUCH, H.; CZARNECKI, M.O. Asymptotic control and stabilization of nonlinear oscillators with non-isolated equilibria, J. Differential Equations 179 (2002) 278-310.

[3] AUBIN, J.P. Viability Theory, Birkhäuser, Basel, 1991.

[4] AUBIN, J.P. Viability kernels and capture basins of sets under differential inclusions. SIAM Journal on Control and Optimization, 2001, vol. 40, no 3, p. 853-881.

[5] AUBIN, J.P.; CELLINA, A. Differential Inclusions, Set-Valued Maps and Viability Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[6] AUBIN, J.P.; FRANKOWSKA, H. Set-Valued Analysis Birkhauser. Systems and Control: Foundations and Applications, 1990.

[7] AUBIN, J.P.; FRANKOWSKA, H. The viability kernel algorithm for computing value functions of infinite horizon optimal control problems. Journal of mathematical analysis and applications, 1996, vol. 201, no 2, p. 555-576.

[8] BARBASHIN, E.A. On the theory of generalized dynamical systems, Uchen. Zap. Moskov. Gos. Univ. 135 (1949) 110-133.

[9] CARABALLO, T.; KLOEDEN, P.E.; MARÍN-RUBIO, P. Weak pullback attractors of setvalued processes. Journal of mathematical analysis and applications, 2003, vol. 288, no 2, p. 692-707.

[10] CARABALLO, T., et al. Existence of pullback attractors for pullback asymptotically compact processes. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2010, vol. 72, no 3-4, p. 1967-1976.

[11] CHEBAN, D.; KLOEDEN, P.; SCHMALFUSS, B. The relationship between pullback, forwards and global attractors of nonautonomous dynamical systems, Nonlinear Dynam. Systems Theory 2 (2002) 9-28.

[12] CHEN, J.W.; CHENG, J.S.; HSIEH, J.G. Tracking control for uncertain nonlinear dynamical systems described by differential inclusions. Journal of mathematical analysis and applications, 1999, vol. 236, no 2, p. 463-479.

[13] CORDUNEANU, C. Almost periodic functions. Chelsea Publishing Company, 1989.

[14] COTI ZELATI, M; KALITA, P. Minimality properties of set-valued processes and their pullback attractors. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2015, vol. 47, no 2, p. 1530-1561.

[15] FERREIRA, T. Estudo teórico de processo multívocos gerados por procesos generalizados exatos.2017. Universidade Federal de Itajubá. Itajubá, 2017.

[16] GRIJALVA, V. Métrica de Hausdorff.2013. Trabalho de conclusão (Licenciatura em Matemáticas Aplicadas), Universidad Tecnológica de la Mixteca. México, 2013.

[17] JOHNSON, R.; NERURKAR, M. Controllability, stabilization, and the regulator problem for random differential systems, 1998. Memoirs of the American Mathematical Society, 1998, vol. 136, no 651, p. 646-646.

[18] KLOEDEN,P.E. General control systems without backwards extension, in: E. Roxin, P. Liu, R. Sternberg (Eds.), Differential Games and Control Theory, Marcel Dekker, New York, 1974, pp. 49-58.

[19] KLOEDEN, P.E. General control systems, in: W.A. Coppel (Ed.), Mathematical Control Theory, in: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 680, Springer-Verlag, 1978, pp. 119-138.

[20] KLOEDEN, P.E. Pullback attractors in nonautonomous difference equations. Journal of Difference Equations and Applications, 2000, vol. 6, no 1, p. 33-52.

[21] KLOEDEN, P.E.; MARÍN-RUBIO, P. Weak pullback attractors of non-autonomous difference inclusions. Journal of Difference Equations and Applications, 2003, vol. 9, no 5, p. 489-502.

[22] KLOEDEN, P.E.; VALERO, J. Attractors of weakly asymptotically compact set-valued dynamical systems. Set-Valued Analysis, 2005, vol. 13, no 4, p. 381-404.

[23] KRASNOSEL'SKII, M.A.; BURD, V.SH.; KOLESOV ,YU.S. Nonlinear Almost Periodic Oscillations, Halsted Press, New York, 1973.

[24] LIMA, E.L, Espaços métricos, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2011.

[25] OLIVEIRA, C.R, Introdução a análise funcional, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[26] ROXIN, E. Stability in general control systems. Journal of Differential Equations, 1965, vol. 1, no 2, p. 115-150.

[27] ROXIN, E. On generalized dynamical systems defined by contingent equations, Journal of Differential Equations 1, 1965, 188-205.

[28] SAINT-PIERRE, P. Equilibria and stability in set-valued analysis: a viability approach. Banach Center Publications, 1996, vol. 35, p. 243-255.

[29] SIMSEN, J; VALERO, J. Characterization of pullback attractors for multivalued nonautonomous dynamical systems. in: Advances in Dynamical Systems and Control. Springer, Cham, 2016. p. 179-195.

[30] SMIRNOV, G.V. Introduction to the Theory of Differential Inclusions, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[31] SZEGÖ, G.P.; TRECCANI,G. Semigruppi di Trasformazioni Multivoche, in: Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. 101, 1969.

[32] VUILLERMOT, P.A. Almost-periodic attractors for a class of nonautonomous reaction-diffusion equations on RN. I. Global stabilization processes. Journal of differential equations, 1991, vol. 94, no 2, p. 228-253.