

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Um Estudo Global de Sistemas do Tipo
Abel e Kukles com \mathbb{Z}_2 -simetrias**

Deysquele do Nascimento Ávila

Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

Durante parte do desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
CAPES

ITAJUBÁ, 10 DE JUNHO DE 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Um Estudo Global de Sistemas do Tipo Abel e Kukles com \mathbb{Z}_2 -simetrias

Deysquele do Nascimento Ávila

Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

10 DE JUNHO DE 2020

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus que sempre me guia e me levanta a cada obstáculo, estando comigo em cada momento. Tudo o que conquistei foi para honra e glória do Senhor.

Agradeço aos professores do PMAT pelo profissionalismo e comprometimento em ensinar. Agradeço aos professores Fábio Scalco, Jacson Simsen, Leandro Gustavo, Luis Fernando, Maicon Sônego, Mariza Simsen com os quais eu tive a honra de aprender um pouco mais desta área que me fascina, a Matemática.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Fábio Scalco Dias por ter acreditado em mim desde o primeiro momento em que demonstrei interesse em estudar com ele. Pela paciência em relação as minhas dificuldades e por todo auxílio e dedicação que teve comigo.

Agradeço à minha mãe Claudinea que sempre me ensinou que o bem mais precioso que podemos ter é a educação e nosso conhecimento. Que sempre me incentivou a estudar e nunca desistir. Pelo amor que ela me oferta todos os dias sempre me dando força em minhas batalhas diárias, mesmo que de longe, para concluir esta etapa. Agradeço ao meu pai Sebastião que sempre me apoiou e foi meu alicerce, me aconselhando e acalentando-me nos momentos difíceis. Também agradeço aos colegas do curso pela amizade e cumplicidade. Pelos amigos que fiz e levarei comigo sempre, em especial, Luana Carvalho, meu maior presente do curso.

Agradeço meu companheiro Henrique Baêta, que no último ano de curso foi minha base e força para conseguir concluir essa etapa. Pelo apoio e cumplicidade. Por sempre estar ao meu lado. Pelo amor, carinho e conforto perante os obstáculos.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

(CAPES) pelo auxílio financeiro durante parte do mestrado.

“ Uma equação não tem significado a não ser que expresse um pensamento de Deus. ”

(Srinivasa Ramanujan)

Resumo

Nesta dissertação, fornecemos as formas normais e todos os retratos da fase globais no disco de Poincaré de duas famílias de sistemas: os sistemas planares Kukles reduzidos de grau 3 com \mathbb{Z}_2 -simetria equivariante e as equações diferenciais polinomiais quadráticas de Abel do segundo tipo com \mathbb{Z}_2 -simetrias.

Palavras-chave: Sistemas Kukles, Sistemas de Abel, \mathbb{Z}_2 -simetrias, Retrato de Fase Global, Compactificação de Poincaré.

Abstract

In this dissertation we provide normal forms and all the global phase portraits on the Poincaré disk of two families of systems: reduced Kukles systems of degree 3 with \mathbb{Z}_2 -equivariant symmetry and of Abel quadratic polynomial differential equations of the second kind with \mathbb{Z}_2 -symmetries.

Keywords: Kukles Systems, Abel Systems, \mathbb{Z}_2 -symmetries, Global Phase Portrait, Poincaré Compactification.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
Introdução	1
1 Fundamentos da Teoria Qualitativa	4
1.1 Estrutura Local dos Pontos Singulares	4
1.2 Pontos Singulares Semi-Hiperbólicos e Nilpotentes	7
1.3 A Técnica de Blow-Up	11
1.4 Estabilidade Local Segundo Lyapunov	14
1.5 Coeficientes de Lyapunov e Valores Focais	15
1.6 Teoria de Integrabilidade de Darboux	22
1.7 A Compactificação de Poincaré	25
1.8 Separatriz e Região Canônica	30
2 Sistemas de Abel do segundo tipo.	32

2.1	Caracterização dos Sistemas de Abel	32
2.2	Tipos de \mathbb{Z}_2 -simetria	33
2.3	Sistemas de Abel do Segundo Tipo com \mathbb{Z}_2 -simetria	34
2.3.1	Sistema (2.9)	38
2.3.2	Sistema (2.10)	45
2.3.3	Sistema (2.11)	48
3	Sistemas Kukles	57
3.1	Problema Foco-centro para o sistema Kukles Reduzido	58
3.2	Sistemas Kukles reduzido \mathbb{Z}_2 -equivariantes	64
	Conclusões	74
	Bibliografia	75

Lista de Figuras

1.1	Comportamento topológico local de um ponto semi-hiperbólico de acordo com o Teorema 1.3. (i)	
1.2	Retrato de fase local dos pontos singulares nilpotentes.	11
1.3	Projeção central.	26
1.4	Setores de um ponto singular.	30
2.1	Retratos de fase globais de sistemas Abel do segundo tipo com \mathbb{Z}_2 -simetria.	37
2.2	<i>Blow-up</i> na origem da carta U_1 quando $a > 0$	41
2.3	<i>Blow-up</i> na origem da carta U_1 quando $a < 0$	41
3.1	Retratos de fase globais do sistema Kukles reduzido com \mathbb{Z}_2 -simetria equivariante.	66
3.2	Retrato de fase local da origem na carta local U_1 quando $a = 0$	68
3.3	Retrato de fase local da origem na carta local U_2 do sistema (IV.2).	70
3.4	Diagrama de bifurcação do sistema (IV.1).	72
3.5	Diagrama de bifurcação do sistema(IV.2).	73

Lista de Tabelas

2.1	Retratos de fase do sistema (2.9).	45
2.2	Retratos de fase do sistema (2.10).	48
2.3	Retratos de fase do sistema (2.11).	55
3.1	Pontos Singulares Infinitos na carta local U_1	70
3.2	Retratos de fase do sistema (3.8).	71

Introdução

No final do século XVII, Newton e Leibniz iniciaram o estudo das equações diferenciais ordinárias a partir dos métodos do Cálculo Diferencial e Integral, consolidando o estudo das Equações Diferenciais como um novo ramo da Matemática. Rapidamente essa teoria foi ganhando importância dentre os estudiosos e, no século XIX, as ponderações sobre o assunto voltaram-se para a questão da existência e unicidade de soluções satisfazendo dados iniciais, conhecido como o Problema de Cauchy.

Em 1881, Henri Poincaré revolucionou este estudo, lançando as bases da Teoria Qualitativa, sendo o pioneiro no estudo das propriedades geométricas gerais das Equações Diferenciais. Poincaré estudou a configuração global das soluções e os efeitos de pequenas perturbações nas condições iniciais. Seu estudo abrangeu o comportamento assintótico das soluções e, ainda, a estrutura de seus conjuntos limites. Poincaré introduziu a noção de ciclo limite no plano, dando abertura para estudos sobre as condições de existência destes, sendo mais um fator a ser estudado em relação ao comportamento das singularidades. Desta maneira, o estudo desse comportamento passou a ter grande relevância no meio acadêmico.

Existem diversas teorias e métodos utilizados para a análise do comportamento assintótico dos equilíbrios das EDO's, assim como técnicas para o estudo das propriedades geométricas dos campos vetoriais associados aos sistemas polinomiais. Neste trabalho, utilizamos algumas destas técnicas para abordar o comportamento das singularidades de dois sistemas específicos: sistemas do tipo Abel e sistemas Kukles reduzido.

Neils Henrick Abel, matemático nascido em 1802, dedicou seu estudo às equações integrais, onde definiu uma integral, conhecida atualmente como integral de Abel, desen-

volvendo métodos para resolvê-las. Sua pesquisa sobre equações integrais e suas soluções o levou a trabalhar em equações diferenciais, onde seu estudo da teoria das funções elípticas o envolveu na análise de equações diferenciais especiais, que passaram a ser conhecidas como equações diferenciais de Abel devido ao seu trabalho. Existem equações diferenciais de Abel do primeiro e do segundo tipo, estas são equações diferenciais não homogêneas de primeira ordem e são relacionadas entre si por uma substituição. Mais especificamente, nosso trabalho focou-se no estudo das equações de Abel do segundo tipo, dadas por

$$\begin{cases} \dot{x} = y(c_0 + c_1x) \\ \dot{y} = (a_0 + a_1x)y + b_0 + b_1x + b_2x^2, \end{cases} \quad (1)$$

onde $a_0, a_1, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

Cerca de um século depois, em 1944, Kukles estudou outro tipo de sistema, escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \end{cases} \quad (2)$$

onde os termos $a_{i,j} \in \mathbb{R}$. Nesse trabalho, Kukles propôs condições necessárias e suficientes para que o sistema (2) tivesse um centro na origem. Porém, Jin e Wang em 1990 [11] descreveram um exemplo que tem um centro na origem, mas não contemplava as condições apresentadas por Kukles. No mesmo ano, Christopher e Lloyd em [4] comprovaram a afirmação deste exemplo e estudaram a classe de sistemas (2) com $a_{03} = 0$, conhecido também como sistema Kukles reduzido, mostrando que, no máximo, cinco ciclos-limite se bifurcam a partir da origem. Além disto, encontraram condições necessárias e suficientes para que a origem seja um centro para esta classe de sistemas. Sob esta restrição, as condições de Kukles estão corretas. Finalmente, em 2010, Pearson e Lloyd [16], determinaram as condições necessárias e suficientes para que o sistema (2) tenha um centro na origem.

Como mencionado anteriormente, nossos objetos de estudo são basicamente os sistemas de Abel do segundo tipo e os sistemas do tipo Kukles reduzido. Para tornar viável nossa análise, visto que, o estudo se torna difícil conforme aumentamos o número de coeficientes independentes dos campos, utilizamos o conceito de \mathbb{Z}_2 -simetria, ou seja, estudamos, dentre os sistemas mencionados anteriormente os que apresentam determinadas simetrias.

Nesta direção, no trabalho [13], os autores estipularam as formas normais e todos os retratos de fase globais no disco de Poincaré das equações de Abel do segundo tipo dada em (1) com \mathbb{Z}_2 -simetrias. Da mesma forma, nos trabalhos [7] e [8], os autores estabeleceram as formas normais e todos os retratos de fase globais no disco de Poincaré para os sistemas Kukles (2) com \mathbb{Z}_2 -simetrias.

Afim de tornar mais esclarecedor a estruturação desta dissertação, os capítulos subsequentes encontram-se assim organizados:

✓ CAPÍTULO 1: Neste capítulo, apresentamos uma contextualização sobre alguns fundamentos da teoria qualitativa, os quais recorreremos durante o desenvolvimento de todo trabalho. Exploramos conceitos relacionados às singularidades de campos vetoriais associados a sistemas polinomiais, sejam elas hiperbólicas, elementares, semi-hiperbólicas, nilpotentes, ou degeneradas. Apresentamos também ferramentas importantes para o desenvolvimento deste trabalho, como compactificação de Poincaré e técnica de *blow-up*.

✓ CAPÍTULO 2: Neste capítulo, apresentamos os sistemas de Abel do segundo tipo, caracterizando as simetrias utilizadas para desenvolver nossa análise. Realizamos um estudo das singularidades finitas e infinitas para cada caso apresentado, empregando a compactificação de Poincaré e exibimos todos os retratos de fase globais no disco de Poincaré dos sistemas de Abel propostos.

✓ CAPÍTULO 3: Neste capítulo, apresentamos o sistema Kukles reduzido, realizando um estudo qualitativo sobre as singularidades finitas e infinitas, além da compactificação de Poincaré. Para tal, elucidamos o problema foco-centro, para o caso específico do sistema Kukles reduzido. Por fim, consolidamos todas as informações obtidas, para exibirmos todos os retratos de fase globais no disco de Poincaré para a classe destes sistemas propostos.

Para auxiliar na elaboração dos retratos de fase no disco de Poincaré, foi utilizado o *software* Polynomial Planar Phase Portraits (P4) [1].

Capítulo 1

Fundamentos da Teoria Qualitativa

Este capítulo é dedicado a quem possui um contato superficial com o contexto tratado neste trabalho, dando uma ideia inicial dos conceitos necessários da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Sendo assim, o leitor com familiaridade sobre tais assuntos pode iniciar sua leitura a partir do segundo capítulo. Mais especificamente, neste capítulo exibimos uma contextualização a cerca de alguns conceitos básicos e resultados importantes de sistemas diferenciais não lineares que serão utilizados ao longo desta dissertação.

1.1 Estrutura Local dos Pontos Singulares

Algumas definições iniciais fazem-se necessárias.

Seja \mathcal{U} um subconjunto aberto do \mathbb{R}^2 . Um campo de vetores polinomial $\mathcal{X} = (P, Q)$ definido em \mathcal{U} é uma aplicação que associa a cada ponto $(x, y) \in \mathcal{U}$ um vetor $\mathcal{X}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ em \mathbb{R}^2 , onde

$$P(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij}x^i y^j, \quad Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^n b_{ij}x^i y^j$$

, são polinômios em duas variáveis.

Definição 1.1. *O sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

é chamado de sistema diferencial associado ao campo de vetores $\mathcal{X} = (P(x, y), Q(x, y))$, onde $(x, y) \in \mathcal{U}$.

Definição 1.2. Considere $p \in \mathcal{U}$ um ponto dado tal que $\mathcal{X}(p) \neq (0, 0)$. Então, p é chamado um **ponto regular** de \mathcal{X} . Se $\mathcal{X}(p) = (0, 0)$, então p é um **ponto singular** ou uma **singularidade** ou **ponto de equilíbrio** ou, simplesmente, **equilíbrio** de \mathcal{X} .

Definição 1.3. Sejam $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ os fluxos gerados pelos campos $\mathcal{X}_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{X}_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, respectivamente. Dizemos que \mathcal{X}_1 é **topologicamente equivalente** a \mathcal{X}_2 quando existe um homeomorfismo $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ que leva órbita de \mathcal{X}_1 em órbita de \mathcal{X}_2 preservando ou revertendo a orientação.

Observe que esta definição estabelece uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de \mathbb{R}^2 . O homeomorfismo h chama-se **equivalência topológica** entre \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 .

Definição 1.4. Sejam $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ os fluxos gerados pelos campos $\mathcal{X}_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{X}_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, respectivamente. Dizemos que \mathcal{X}_1 é **topologicamente conjugado** a \mathcal{X}_2 quando existe um homeomorfismo $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ tal que $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}^2$.

A relação de conjugação é também uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de \mathbb{R}^2 . O teorema a seguir diz que, localmente, em torno de um ponto regular, todo campo se comporta como um campo constante.

Teorema 1.1. (Fluxo Tubular) Seja $p \in \mathbb{R}^2$ um ponto regular de um campo vetorial \mathcal{X} . Então existe um difeomorfismo que conjugua \mathcal{X} em uma vizinhança de p com o campo constante $\mathcal{Y} = (1, 0)$ restrito a uma vizinhança da origem $(0, 0)$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2], página 36.

Tendo em vista o Teorema do Fluxo Tubular, podemos considerar satisfatório o conhecimento qualitativo local das órbitas de um campo em torno de pontos regulares. Por outro lado, se p é uma singularidade, a situação é bem mais complexa. Começamos por definir os tipos de pontos singulares.

Definição 1.5. *Seja p um ponto singular do campo vetorial polinomial $\mathcal{X} = (P, Q)$. Dizemos que*

$$J(p) = \begin{pmatrix} P_x(p) & P_y(p) \\ Q_x(p) & Q_y(p) \end{pmatrix}$$

*é a **matriz Jacobiana** do campo \mathcal{X} no ponto singular p , $D(p) = P_x(p)Q_y(p) - P_y(p)Q_x(p)$ é o **determinante** da matriz Jacobiana e $T(p) = P_x(p) + Q_y(p)$ é o **traço** da matriz Jacobiana. Assim, os autovalores da matriz Jacobiana no ponto p satisfazem o polinômio característico:*

$$P(\lambda) = \lambda^2 - T(p)\lambda + D(p) = 0$$

e são dados por

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(T(p) + \sqrt{\Delta}) \quad e \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(T(p) - \sqrt{\Delta}),$$

onde $\Delta = T(p)^2 - 4D(p)$.

Desta forma, podemos obter um pouco de informação sobre o ponto p a partir de $T(p)$ e $D(p)$, sem calcular os autovalores da matriz Jacobiana:

*Dizemos que p é **elementar** se $D(p) \neq 0$.*

*Dizemos que p é **hiperbólico** se a parte real de cada autovalor de $J(p)$ for não nula.*

*Dizemos que p é **semi-hiperbólico** se $D(p) = 0$ e $T(p) \neq 0$.*

*Dizemos que p é **nilpotente** se $D(p) = T(p) = 0$, mas $J(p)$ não é a matriz nula.*

*Dizemos que p é **linearmente nulo** se $J(p)$ é a matriz nula.*

*Dizemos que p é **degenerado** se for uma singularidade nilpotente ou linearmente nulo.*

Podemos classificar os pontos singulares hiperbólicos a partir de $D(p)$ e $T(p)$, da seguinte maneira.

Definição 1.6. *Um ponto singular hiperbólico p de \mathcal{X} é chamado de um **nó** se $D(p) > 0$ e $\Delta > 0$. Se $T(p) < 0$, p é dito ser um **nó atrator** e se $T(p) > 0$, um **nó repulsor**.*

Definição 1.7. *Um ponto singular hiperbólico p de \mathcal{X} é chamado de um **sela** se $D(p) < 0$.*

Definição 1.8. Um ponto singular hiperbólico p de \mathcal{X} é chamado de um **foco** se $D(p) > 0$ e $\Delta < 0$. Se $T(p) < 0$ temos que p é um **foco atrator** e se $T(p) > 0$ temos que p é um **foco repulsor**.

Definição 1.9. Um ponto singular hiperbólico p de \mathcal{X} é chamado de **centro** se $T(p) = 0 < D(p)$. Podemos dizer ainda que p é centro, se existir uma vizinhança V_p de p totalmente preenchido por órbitas fechadas. Uma condição necessária para tal (mas não suficiente) é a matriz Jacobiana $\mathcal{D}\mathcal{X}(p)$ possuir os autovalores imaginários puros e não nulos.

O teorema a seguir nos garante que o comportamento de um ponto singular hiperbólico, numa vizinhança, sempre pode ser modelado por sua parte linear, ferramenta, esta, muito útil em nossas análises sobre o retrato de fase local dos nossos campos vetoriais.

Teorema 1.2. (Hartman-Grobman) Sejam $\mathcal{X} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ e p um ponto singular hiperbólico. Então, existem vizinhanças V de p em \mathcal{U} e W de 0 em \mathbb{R}^2 tais que $\mathcal{X}|_V$ é topologicamente conjugado ao campo $D\mathcal{X}(p)|_W$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2], página 129.

Com esses conceitos consolidados podemos passar para um estudo particularizado sobre as singularidades.

1.2 Pontos Singulares Semi-Hiperbólicos e Nilpotentes

A seguir apresentamos dois teoremas com resultados específicos, mas de suma importância para determinar o comportamento local numa vizinhança de um ponto singular semi-hiperbólico ou nilpotente, respectivamente. As demonstrações de ambos os teoremas podem ser encontradas em [9], página 74 e página 116, respectivamente.

Teorema 1.3. (Pontos Singulares Semi-Hiperbólicos) Seja $(0,0)$ um ponto singular isolado do campo vetorial \mathcal{X} dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x, y) \\ \dot{y} = \lambda y + B(x, y), \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $\lambda > 0$ e A e B são funções analíticas em uma vizinhança de $(0,0)$ com seus desenvolvimentos de Taylor, começando, pelo menos, com termos quadráticos em x e y . Seja $y = f(x)$ uma solução da equação $\lambda y + B(x, y) = 0$ em uma vizinhança do ponto $(0,0)$ e suponha que a função $g(x) = A(x, f(x))$ tem a forma $a_m x^m + O(x^m)$, onde $m \geq 0$ e $a_m \neq 0$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) Se m é ímpar e $a_m < 0$, então $(0,0)$ é topologicamente uma sela, veja Figura 1.1 (i).

O sistema (1.2) é \mathcal{C}^∞ -conjugado à

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^m(1 + ax^{m-1}) \\ \dot{y} = \lambda y, \end{cases} \quad (1.3)$$

e \mathcal{C}^0 -conjugado à

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y. \end{cases} \quad (1.4)$$

(ii) Se m é ímpar e $a_m > 0$, então $(0,0)$ é topologicamente um **nó instável**, veja Figura 1.1 (ii). O sistema (1.2) é \mathcal{C}^∞ -conjugado à

$$\begin{cases} \dot{x} = x^m(1 + ax^{m-1}) \\ \dot{y} = \lambda y, \end{cases} \quad (1.5)$$

e \mathcal{C}^0 -conjugado à

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y. \end{cases} \quad (1.6)$$

(iii) Se m é par, então $(0,0)$ é uma **sela-nó**, ou seja, um ponto singular cuja vizinhança é a união de um setor parabólico e dois hiperbólicos, veja Figura 1.1 (iii). O sistema (1.2) é \mathcal{C}^∞ -conjugado à

$$\begin{cases} \dot{x} = x^m(1 + ax^{m-1}) \\ \dot{y} = \lambda y, \end{cases} \quad (1.7)$$

e \mathcal{C}^0 -conjugado à

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y. \end{cases} \quad (1.8)$$

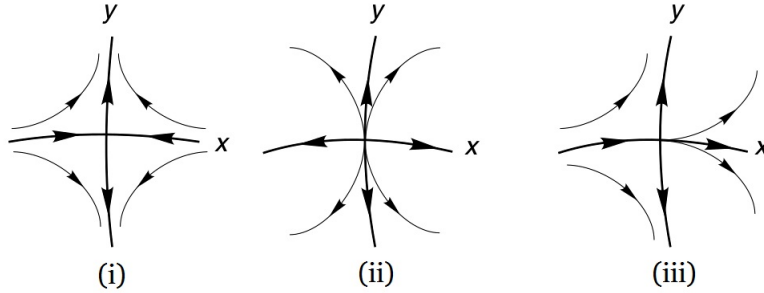


Figura 1.1: Comportamento topológico local de um ponto semi-hiperbólico de acordo com o Teorema 1.3

Semelhantemente ao teorema anterior, o Teorema 1.4 descreve o comportamento local das singularidades nilpotentes.

Teorema 1.4. (Pontos Singulares Nilpotentes) *Seja $(0, 0)$ um ponto singular isolado do campo vetorial \mathcal{X} dado por*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + A(x, y), \\ \dot{y} = B(x, y), \end{cases} \quad (1.9)$$

onde A e B são funções analíticas em uma vizinhança de $(0, 0)$ com seus desenvolvimentos de Taylor, começando, pelo menos, com termos quadráticos em x e y . Seja $y = f(x)$ uma solução da equação $y + A(x, y) = 0$ numa vizinhança de $(0, 0)$ e considere $F(x) = B(x, f(x))$ e $G(x) = (\partial A/\partial x + \partial B/\partial y)(x, f(x))$. As seguintes condições são satisfeitas:

- 1) Se $F(x) \equiv G(x) \equiv 0$, então o retrato de fase de \mathcal{X} é como na Figura 1.2 a.
- 2) Se $F(x) \equiv 0$ e $G(x) = bx^n + O(x^n)$, onde $O(x^n)$ são termos de ordem superior, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e $b \neq 0$, então o retrato de fase de \mathcal{X} é como na Figura 1.2 b ou c.
- 3) Se $G(x) \equiv 0$ e $F(x) = ax^m + O(x^m)$ com $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ e $a \neq 0$, então:
 - i) Se m for ímpar, então a origem será uma sela de \mathcal{X} se $a > 0$ como na Figura 1.2 d, ou um centro ou foco se $a < 0$ como na Figura 1.2 e-g;
 - ii) Se m for par, então a origem será uma cúspide de \mathcal{X} como na Figura 1.2 h.
- 4) Se $F(x) = ax^m + O(x^m)$ e $G(x) = bx^n + O(x^n)$ com $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 1$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então:

- i) *Se m é par*
- i1) *$m < 2n + 1$, então a origem será uma cúspide de \mathcal{X} como na Figura 1.2 h;*
 - i2) *$m > 2n + 1$, então a origem será uma sela-nó de \mathcal{X} como na Figura 1.2 i ou j;*
- ii) *Se m é ímpar e $a > 0$, então a origem será uma sela de \mathcal{X} como na Figura 1.2 d;*
- iii) *Se m é ímpar, $a < 0$ e*
- iii1) *ou $m < 2n + 1$, ou $m = 2n + 1$ e $b^2 + 4a(n + 1) < 0$, então a origem será um centro ou foco de \mathcal{X} como na Figura 1.2 e-g;*
 - iii2) *n é ímpar ou $m > 2n + 1$, ou $m = 2n + 1$ e $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$, então a origem é composta por um setor hiperbólico e um setor elíptico como na Figura 1.2 k;*
 - iii3) *n é par e ou $m > 2n + 1$, ou $m = 2n + 1$ e $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$, então a origem será um nó de \mathcal{X} como na Figura 1.2 l-m. O nó será atrator se $b > 0$ e repulsor se $b < 0$.*

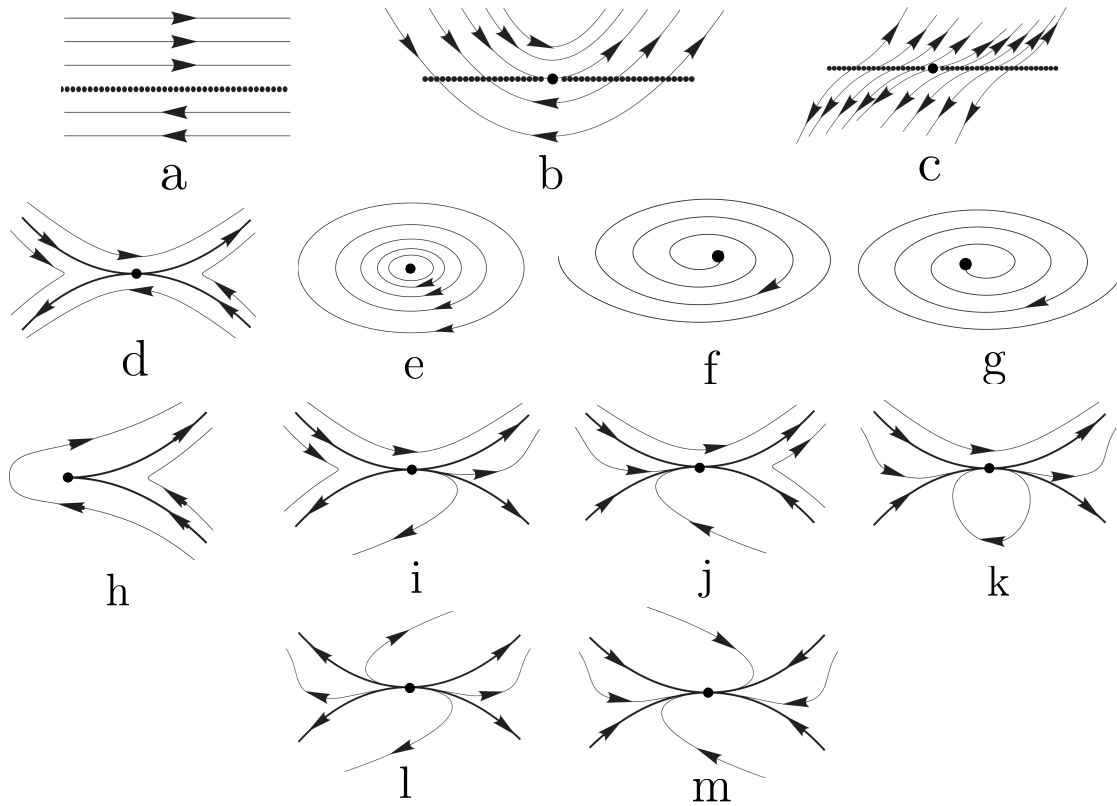


Figura 1.2: Retrato de fase local dos pontos singulares nilpotentes.

1.3 A Técnica de Blow-Up

Nas seções anteriores estudamos a estrutura local das singularidades hiperbólicas, semi-hiperbólicas e nilpotentes. Já as singularidades linearmente nulas são mais complexas e, dessa forma se faz necessário um estudo caso a caso. Para tal, a técnica de *blow-up*, descrita nesta seção, é uma técnica que permite tal análise.

A técnica consiste em “explodir” a singularidade por meio de uma mudança de variáveis, que não é um difeomorfismo, levando a singularidade para todo o eixo y . Após a mudança de coordenadas, cancelamos fatores em comum no campo e, então, o novo campo apresenta novas singularidades, no eixo y , que serão mais simples que a singularidade original. Se essas novas singularidades forem linearmente nulas, repete-se o processo

até obtermos singularidades elementares. As mudanças de variáveis que usamos são

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (u, w) \end{aligned} \tag{1.10}$$

tal que:

- na direção x , $x = u$ e $y = uw$;
- na direção y , $x = uw$ e $y = w$.

Ao longo desta seção, tomamos $\mathcal{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como um campo de vetores polinomial com uma singularidade na origem, ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1.11}$$

com $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$.

Proposição 1.1. *Seja $\mathcal{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como em (1.11). Então o campo após a mudança de coordenadas T como em (1.10), tem a seguinte expressão*

- na direção x ,

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, uw) \\ \dot{w} = \frac{Q(u, uw) - wP(u, uw)}{u}; \end{cases} \tag{1.12}$$

- na direção y ,

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{P(uw, w) - uQ(uw, w)}{w} \\ \dot{w} = Q(uw, w). \end{cases} \tag{1.13}$$

Demonstração. Mostramos apenas a expressão (1.12) para a direção x , já que na direção y a demonstração é análoga. Temos que $x = u$ e $y = uw$. Logo, $\dot{x} = \dot{u}$ e $\dot{y} = \dot{u}w + u\dot{w}$. Como $\dot{x} = P(x, y)$, segue que $\dot{u} = P(u, uw)$. Como $\dot{w} = (\dot{y} - \dot{u}w)/u$ e $\dot{y} = Q(x, y)$, segue que

$$\dot{w} = \frac{Q(u, uw) - wP(u, uw)}{u},$$

como queríamos. ■

As seguintes proposições mostram algumas propriedades dessas mudanças de variáveis.

Proposição 1.2. *Seja T como em (1.10), então na direção x valem as seguintes afirmações:*

- (i) T transforma a origem na reta $u = 0$;
- (ii) a reta $y = ax$, com exceção da origem, é levada na reta $w = a$, com exceção da reta $u = 0$;
- (iii) primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante;
- (iv) o quarto quadrante é levado no quarto quadrante;
- (v) o segundo quadrante é levado no terceiro quadrante;
- (vi) o terceiro quadrante é levado no segundo quadrante.

Demonstração. (i) Os pontos os quais a origem é levada satisfaz o sistema

$$\begin{cases} u = 0, \\ uw = 0. \end{cases}$$

cuja solução é a reta $u = 0$.

(ii) O conjunto de pontos $y = ax$ é levado em

$$uw = au.$$

Se $x \neq 0$, então $u \neq 0$, e daí

$$w = a$$

como queríamos.

(iii) Se $x > 0$ e $y > 0$, então $u > 0$ e $w > 0$ e, portanto, o primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante.

(iv) Se $x > 0$ e $y < 0$, então $u > 0$ e $w < 0$ e, portanto, o quarto quadrante é levado no quarto quadrante.

(v) Se $x < 0$ e $y > 0$, então $u < 0$ e $w < 0$ e, portanto, o segundo quadrante é levado no terceiro quadrante.

(vi) Se $x < 0$ e $y < 0$, então $u < 0$ e $w > 0$ e, portanto, o terceiro quadrante é levado no segundo quadrante. ■

Proposição 1.3. *Seja T como em (1.10), então na direção y valem as seguintes afirmações:*

- (i) T transforma a origem na reta $w = 0$;
- (ii) a reta $x = by$, com exceção da origem é levada na reta $u = b$, com exceção da reta $w = 0$;
- (iii) o primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante;
- (iv) o quarto quadrante é levado no terceiro quadrante;
- (v) o segundo quadrante é levado no segundo quadrante;
- (vi) o terceiro quadrante é levado no quarto quadrante.

Demonstração. A demonstração da Proposição 1.3 é análoga à da Proposição 1.2. ■

1.4 Estabilidade Local Segundo Lyapunov

Apresentamos um breve resumo sobre a estabilidade local segundo Lyapunov, como mecanismo importante para o estudo da estabilidade de uma singularidade.

Definição 1.10. *Dados $\mathcal{X} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial e $p \in \mathcal{U}$ uma singularidade de \mathcal{X} temos que:*

- (a) p é **estável** se dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $\|x - p\| < \delta$ implica $\|\phi(t, x) - p\| < \epsilon$, para todo $t > 0$;
- (b) p é **instável** se não for estável;
- (c) p é **assintoticamente estável** se p é estável e, além disto, existe $\epsilon > 0$, tal que $\|x - p\| < \epsilon$ implica $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = p$;

(d) p é **assintoticamente instável** se p é instável e, além disto, existe $\epsilon > 0$, tal que $\|x - p\| < \epsilon$ implica $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = p$.

Considerando um campo vetorial \mathcal{X} e $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , vamos definir a derivada de V na direção do campo \mathcal{X} no ponto $p \in \mathcal{U}$ pela derivada direcional

$$\dot{V}(p) = \nabla V(p) \cdot \mathcal{X}(p).$$

Definição 1.11. *Sejam \mathcal{X} um campo de vetores e uma função V , como definidos anteriormente. Considere $p \in \mathcal{U}$ um ponto singular de \mathcal{X} . Então temos que:*

- (a) V é uma **função de Lyapunov** para o campo \mathcal{X} se $V(x) \geq 0 \forall x \in \mathcal{U}$ e $V(x) = 0$ se, e somente se, $x = p$ e $\dot{V}(x, y) \leq 0, \forall x \in \mathcal{U}$;
- (b) V é uma **função de Lyapunov estrita** para o campo \mathcal{X} se $V(x)$ é uma função de Lyapunov e, além disso, $\dot{V}(x, y) < 0, \forall x \in \mathcal{U}$.

Teorema 1.5. (Critério de Lyapunov) *Seja p um ponto de equilíbrio isolado do campo \mathcal{X} . Se existir uma função de Lyapunov V definida em algum domínio $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ contendo p , então p é uma **singularidade estável**. Se V for uma função de Lyapunov estrita, então p será uma **singularidade assintoticamente estável**.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [19], página 272.

1.5 Coeficientes de Lyapunov e Valores Focais

Apresentamos, nesta seção, um método computacional, que permite calcular os coeficientes de Lyapunov, a fim de entendermos a estabilidade de uma singularidade.

Considere o campo de vetores $\tilde{\mathcal{X}}(x, y) = (\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y))$ e o sistema associado

$$\begin{cases} \tilde{x} = \tilde{P}(x, y) \\ \tilde{y} = \tilde{Q}(x, y) \end{cases} \quad (1.14)$$

onde $\tilde{P}(x, y)$ e $\tilde{Q}(x, y)$ são funções analíticas. Suponha que a origem $(0, 0)$ seja um ponto de equilíbrio isolado de $\tilde{\mathcal{X}}$ e que a matriz Jacobiana $J(0, 0) = \mathcal{D}\tilde{\mathcal{X}}(0, 0)$ tenha autovalores

complexos conjugados, o que garante que numa vizinhança suficientemente próxima da origem, as soluções de (1.14) circulam a origem. O problema foco–centro, sob tais hipóteses, trata-se em distinguir se a origem é um foco, seja ele atrator ou repulsor, ou um centro.

Nas condições descritas anteriormente, o sistema (1.14), pode ser reescrito, após uma mudança de variáveis adequada, como

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \lambda x + P(x, y) \\ \dot{y} = -x + \lambda y + Q(x, y), \end{cases} \quad (1.15)$$

onde P e Q são funções analíticas cujos desenvolvimentos de Taylor na origem começam com, pelo menos, termos quadráticos. Seja a função de Lyapunov

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nabla V \cdot \mathcal{X} = (x, y)(y + \lambda x + P, -x + \lambda y + Q) \\ &= \lambda x^2 + xP + \lambda y^2 + yQ \\ &= \lambda(x^2 + y^2) + xP + yQ, \end{aligned}$$

onde \mathcal{X} é o campo vetorial associado ao sistema (1.15).

Portanto, o sinal de \dot{V} , em uma vizinhança da origem, é dado pelo sinal de λ . Se $\lambda \neq 0$ dizemos que a origem é um foco forte. Pelo Teorema 1.5, se $\lambda < 0$ a origem é assintoticamente estável e se $\lambda > 0$ a origem é instável. Se $\lambda = 0$ dizemos que a origem é um foco fraco, ou um centro. Nosso trabalho então é estudar a estabilidade para o último caso ($\lambda = 0$), tornando o sistema (1.15) no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + P(x, y) \\ \dot{y} = -x + Q(x, y) \end{cases} \quad (1.16)$$

com

$$P(x, y) = \sum_{k=2}^m P_k(x, y) + O(\|(x, y)\|^{m+1})$$

e

$$Q(x, y) = \sum_{k=2}^m Q_k(x, y) + O(\|(x, y)\|^{m+1}),$$

Onde

$$P_k(x, y) = \sum_{j=0}^k p_{k-j,j} x^{k-j} y^j,$$

$$Q_k(x, y) = \sum_{j=0}^k q_{k-j,j} x^{k-j} y^j$$

e O denota a expansão em série de Taylor, em torno da origem, iniciando-se nos termos de ordem, no mínimo, $m + 1$.

Considere a candidata a função de Lyapunov dada por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{k=3}^{m+1} V_k(x, y) + O(\|(x, y)\|^{m+2}), \quad (1.17)$$

onde

$$V_k(x, y) = \sum_{j=0}^k V_{k-j,j} x^{k-j} y^j$$

são polinômios homogêneos de grau k , nas variáveis x e y . Realizando a expansão em série de Taylor com $m = 3$, o sistema (1.16) torna-se

$$\begin{cases} \dot{x} = x + P_2(x, y) + P_3(x, y) + O(\|(x, y)\|^4) \\ \dot{y} = -x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + O(\|(x, y)\|^4), \end{cases} \quad (1.18)$$

com

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2, \\ P_3(x, y) &= p_{30}x^3 + p_{21}x^2y + p_{12}xy^2 + p_{03}y^3, \\ Q_2(x, y) &= q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2, \\ P_3(x, y) &= q_{30}x^3 + q_{21}x^2y + q_{12}xy^2 + q_{03}y^3 \end{aligned}$$

e a função (1.17) torna-se

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y) + O(\|(x, y)\|^5), \quad (1.19)$$

com

$$\begin{aligned} V_3(x, y) &= V_{30}x^3 + V_{21}x^2y + V_{12}xy^2 + V_{03}y^3, \\ V_4(x, y) &= V_{40}x^4 + V_{31}x^3y + V_{22}x^2y^2 + V_{13}xy^3 + V_{04}y^4. \end{aligned}$$

Diferenciando (1.19) ao longo das órbitas do sistema (1.18) temos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= R_3(x, y) + \left(y \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y)\right) \\ &+ R_4(x, y) + \left(y \frac{\partial V_4}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial V_4}{\partial y}(x, y)\right) + O(\|(x, y)\|^5), \end{aligned} \quad (1.20)$$

com

$$\begin{aligned} R_3(x, y) &= xP_2(x, y) + yQ_2(x, y), \\ R_4(x, y) &= xP_3(x, y) + yQ_3(x, y) + P_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) + Q_2(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Considere agora os seguintes espaços vetoriais

$$\begin{aligned} P_n &= \left\{ p(x, y) = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} x^{n-j} y^j : \text{grau}(p(x, y)) < n + 1, a_{n-j,j} \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathbb{R}^{n+1} &= \left\{ u : u = \sum_{j=0}^n u_{n-j,j} e_{j+1}, u_{n-j,j} \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Os conjuntos $B_P^n = \{x_n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n\}$ e $B_{\mathbb{R}}^{n+1} = \{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ são bases para P_n e \mathbb{R}^{n+1} , respectivamente, sendo $B_{\mathbb{R}}^{n+1}$ a base canônica em \mathbb{R}^{n+1} . Então, podemos considerar a seguinte transformação linear de P_n em \mathbb{R}^{n+1}

$$\begin{aligned} S_n &= P_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ p(x, y) &= \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} x^{n-j} y^j \mapsto u = \sum_{j=0}^n a_{n-j,j} e_{j+1} \end{aligned}$$

Considere também a seguinte transformação linear

$$\begin{aligned} T_n : P_n &\rightarrow P_n \\ p(x, y) &\mapsto T_n(p(x, y)) = y \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial p}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Tomando as bases B_P^3 e B_P^3 para P_3 e P_4 , respectivamente, as matrizes A_3 e A_4 em consoante com as respectivas bases são,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposição 1.4. *Quando n é ímpar, a transformação linear T_n é um isomorfismo. Quando n é par, T_n possui um núcleo de dimensão um gerado por $\{(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}\}$.*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [3].

A proposição anterior é essencial, pois ela garante que $V_3(x, y)$ pode ser escolhido de maneira única de modo que conseguimos cancelar os termos de grau 3 de (1.20), resolvendo o sistema linear

$$A_3 S_3(V_3(x, y)) = -S_3(xP_2(x, y) + yQ_2(x, y)),$$

onde

$$\begin{aligned} S_3(V_3(x, y)) &= (V_{30}, V_{21}, V_{12}, V_{03}), \\ S_3(xP_2(x, y) + yQ_2(x, y)) &= (p_{20}, p_{11} + q_{20}, p_{02} + q_{11}, q_{02}). \end{aligned}$$

Resulta que a solução é

$$(V_{30}, V_{21}, V_{12}, V_{03}) = \left(-\frac{1}{3}(p_{11} + q_{20} + 2q_{02}), p_{20}, -q_{02}, \frac{1}{3}(p_{02}, 2p_{20} + q_{11})\right)$$

O mesmo processo não pode ser utilizado para escolha dos coeficientes de $V_4(x, y)$, pois T_4 não é um isomorfismo. Contudo, T_4 pode ser escolhido de forma que $\dot{V}(x, y)$ tenha um sinal bem definido. Isto pode ser feito impondo que os termos de ordem 4 de (1.20) pertençam ao núcleo de T_4 . Assim, os coeficientes de T_4 podem ser obtidos aplicando

$$A_4(S_4(xP_3(x, y) + yQ_3(x, y) + P_2(x, y)\frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) + Q_2(x, y)\frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y)) + A_4 S_4(V_4(x, y))) = 0,$$

onde

$$S_4(V_4(x, y)) = (V_{40}, V_{31}, V_{22}, V_{13}, V_{04}),$$

$$S_4((xP_3(x, y) + yQ_3(x, y) + P_2(x, y)\frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y) + Q_2(x, y)\frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y)) + A_4 S_4(V_4(x, y))) = (s_{40}, s_{31}, s_{22}, s_{13}, s_{04}),$$

com

$$s_{40} = -p_{11}p_{20} + p_{30} - 2p_{20}q_{02}$$

$$s_{31} = -p_{11}^2 + 2p_{20}^2 + p_{21} + p_{20}q_{11} - 2q_{20}q_{02} - p_{11}(q_{20} + 2q_{02}) + q_{30},$$

$$s_{22} = p_{12} + 2p_{20}p_{11} - p_{02}(p_{11} + 2q_{02}) - 2q_{11}q_{02} - 2p_{20}q_{02} + q_{11}q_{20} + q_{21},$$

$$s_{13} = p_{03} - p_{11}q_{02} - 2q_{02}^2 + 2p_{20}q_{11} + q_{11}^2 + p_{02}(2p_{02} + q_{11} + q_{12}),$$

$$s_{04} = 2p_{20}q_{02} + q_{11}q_{02} + q_{03}.$$

Logo,

$$V_{40} = \frac{1}{4}(2q_{02}q_{20} - q_{12} - 3p_{20}q_{11} - q_{30} - 2p_{20}^2 + p_{11}^2 + 3q_{02}p_{11} + p_{11}q_{20} - p_{21} + 2q_{02}^2 - q_{11}p_{02} - q_{11}^2 - p_{30} - 2p_{20}p_{02}) + 1,$$

$$V_{31} = \frac{1}{8}(5p_{30} - 7p_{20}p_{11} - 16q_{02}p_{20} - 3q_{03} - q_{21} - q_{02}q_{11} + 2p_{20}q_{20} - q_{20}q_{11} + p_{02}p_{11} + 2q_{02}p_{02} - p_{12}),$$

$$V_{22} = \frac{1}{2}(2q_{02}^2 - q_{11}p_{02} - 2p_{20}q_{11} - q_{11}^2 + q_{02}p_{11} - q_{12} - p_{03} - 2p_{20}p_{02}) + 2,$$

$$V_{13} = \frac{1}{8}(3p_{30} - p_{20}p_{11} - 16q_{02}p_{20} - q_{03} + q_{21} - 7q_{02}q_{11} - 2p_{20}q_{20} - p_{02}p_{11} + q_{20}q_{11} - 2q_{02}p_{02} + p_{12}),$$

$$V_{04} = 1.$$

Com estas escolhas feitas para $V_3(x, y)$ e $V_4(x, y)$, segue que

$$\dot{V}(x, y) = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + O(\|(x, y)\|^5), \quad (1.21)$$

com

$$\eta_4 = \frac{1}{8}(3q_{03} - p_{20}p_{11} + 3p_{30} + q_{21} + q_{02}q_{11} + 2p_{20}q_{20} + q_{20}q_{11} - p_{02}p_{11} - 2q_{02}p_{02} + p_{12}).$$

A equação (1.21) determina a estabilidade da origem. De fato, a função

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y)$$

é uma função de Lyapunov em alguma vizinhança da origem. Assim, pelo Teorema 1.5 obtemos que se $\eta_4 < 0$, então a singularidade é assintoticamente estável. Se $\eta_4 > 0$, então a singularidade é instável. Quando $\eta_4 = 0$ ainda não podemos determinar a estabilidade da origem. Contudo, podemos proceder de forma análoga ao que já fizemos para obter η_4 e produzir uma nova série V , garantida pela Proposição 1.4 tal que o termo líder da expressão para \dot{V} é $\eta_6(x^2 + y^2)^3$ e, assim, sucessivamente. Resumidamente, V pode ser escolhida de tal forma que

$$\dot{V} = \eta_4(x^2 + y^2)^2 + \eta_6(x^2 + y^2)^3 + \cdots + \eta_{2k}(x^2 + y^2)^k + \cdots$$

Posto isto, são exibidos resultados de suma importância para realizarmos a análise da estabilidade a partir do Critério de Lyapunov.

Teorema 1.6. *Se $\eta_{2k} = 0$, $k = 2, \dots, N$, mas $\eta_{2N+2} \neq 0$, então a singularidade na origem é um foco topológico:*

- 1) *Se $\eta_{2N+2} < 0$, então a singularidade é assintoticamente estável;*
- 2) *Se $\eta_{2N+2} > 0$, então a singularidade é instável.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [18].

Teorema 1.7. (Critério de Lyapunov) *Se o campo vetorial \mathcal{X} é analítico e $\eta_{2k} = 0$ para $k = 2, \dots, \infty$, então a origem é um centro. Além disto, a série que define V é convergente numa vizinhança da origem e representa uma função cujos conjuntos de nível contém as órbitas do sistema correspondente ao campo \mathcal{X} .*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [18].

Os coeficientes η_{2k} são os **valores focais**. Estes são funções polinomiais dos coeficientes de \tilde{P} . O ideal gerado por η_{2k} tem uma base finita no anel de polinômios nos coeficientes de \tilde{P} , chamada de base focal. É de nosso interesse quando $\eta_{2l} = 0$ para todo $l < k$, então vamos tomar $\eta_2 = \eta_4 = \cdots = \eta_{2k-2} = 0$ na expressão η_{2k} . Os valores obtidos assim são chamados **coeficientes de Lyapunov** e são indicadas por $L_j = \eta_{2j+2}$, para

$j = 0, 1, 2, \dots, k$. Convencionalmente, fatores multiplicativos diferentes de zero podem ser omitidos das expressões obtidas para os coeficientes de Lyapunov, quando estamos interessados apenas em saber se são nulos ou não.

Quando trabalhamos com \tilde{P} e \tilde{Q} polinômios, segue do Teorema da Base de Hilbert que existe uma constante m tal que $L_j = 0$ se $j \leq m$, a base $B = \{L_0, L_1, L_2, \dots, L_m\}$, chamada de **base focal**. Assim, podemos calcular apenas um número finito de coeficientes de Lyapunov, mesmo que a priori não saibamos quantos coeficientes precisaremos calcular para encontrarmos a base focal.

Dispondo destas ferramentas, é possível analisar as estabilidades das singularidades de campos vetoriais associados aos sistemas polinomiais. Vamos requerer tais ferramentas especificamente para estudar a estabilidade de sistemas Kukles reduzido no Capítulo 3.

1.6 Teoria de Integrabilidade de Darboux

A ideia desta seção é apresentar a relação entre a existência de fatores integrantes ou integrais primeiras como condição necessária para que um sistema possua um centro. Esse material será utilizado no problema foco-centro para os sistemas Kukles reduzido no Capítulo 3.

Definição 1.12. *O grau do sistema (1.1) é o número máximo entre os graus dos polinômios P e Q , ou seja, $n = \max \{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$.*

Definição 1.13. *O sistema (1.1) é **integrável** em um aberto \mathcal{U} de \mathbb{C}^2 se existe uma função não constante $\mathcal{H}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$, chamada **integral primeira** do sistema em \mathcal{U} , que é constante em todas as curvas soluções $(x(t), y(t))$ do sistema (1.1) contidas em \mathcal{U} .*

Observação 1.1. *Seja \mathcal{H} como na definição anterior, então $\mathcal{H}(x(t), y(t))$ é constante para todos os valores de t para os quais a solução $(x(t), y(t))$ está definida e contida em \mathcal{U} . Portanto, \mathcal{H} é uma integral primeira para o sistema (1.1) se, e somente se,*

$$\mathcal{X}\mathcal{H} = P\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} + Q\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y} = 0 \text{ em } \mathcal{U}.$$

Considerando o sistema (1.1) com coeficientes reais, a existência de uma integral primeira determina, imediatamente, seu retrato de fase, visto que as curvas de nível

$$\{(x, y); \mathcal{H}(x, y) = h\} \subseteq \mathcal{U},$$

contém as órbitas do sistema em \mathcal{U} .

Em seguida, apresentamos dois teoremas que auxiliam na prova da existência de um centro em um sistema analítico planar.

Teorema 1.8. (Teorema de Poincaré-Lyapunov) *O sistema analítico planar*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + F_1(x, y) \\ \dot{y} = x + F_2(x, y), \end{cases} \quad (1.22)$$

onde F_1 e F_2 são funções analíticas com desenvolvimentos de Taylor na origem, começando com pelo menos termos quadráticos, possui um centro na origem se, e somente se, admite uma integral primeira da forma

$$\mathcal{H}(x, y) = x^2 + y^2 + \dots$$

em uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^2 , onde os três pontos significam termos de ordem superior.

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [18].

Definição 1.14. *Um sistema diferencial polinomial dado em (1.1) é do tipo **tempo-reversível** se existe uma aplicação $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que*

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{R}(z)) = -f(\mathcal{R}(z))$$

onde $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(z) = dz/dt$.

Exemplo 1.1. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy \\ \dot{y} = x - y^2. \end{cases}$$

Tomando $R(x, y) = (x, -y)$ é fácil ver que $d(R(x, y))/dt = -f(R(x, y))$ e, portanto, este sistema é do tipo tempo-reversível.

Teorema 1.9. *Todo sistema diferencial polinomial da forma (1.1) do tipo **tempo-reversível** tem um centro na origem.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [18].

Vamos elucidar conceitos necessários para a compreensão do método de Darboux, afim de determinar se o sistema diferencial estudado possui uma integral primeira e, assim, um centro.

Definição 1.15. *Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$, f não identicamente nula. A curva algébrica $f = 0$ é uma **curva algébrica invariante** para \mathcal{X} se para algum polinômio $\mathbf{K} \in \mathbb{C}[x, y]$ temos*

$$\mathcal{X}f = P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{K}f.$$

O polinômio \mathbf{K} é chamado **cofator** para a curva algébrica invariante $f = 0$.

É importante destacar que dado um sistema polinomial de grau n , seu cofator tem, no máximo, grau $n - 1$.

Definição 1.16. *Seja $I : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica que não é identicamente nula em \mathcal{U} . Uma função I é um **fator integrante** para o sistema (1.1) em \mathcal{U} se uma das seguintes condições (equivalentes) for verdadeira em \mathcal{U} :*

- (i) $\frac{\partial}{\partial x}(IP) = -\frac{\partial}{\partial y}(IQ)$;
- (ii) $\text{div}(IP, IQ) = 0$;
- (iii) $\mathcal{X}I = -\text{div}(P, Q)I$.

Proposição 1.5. *Uma integral primeira \mathcal{H} associada ao fator integrante I é dada por*

$$\mathcal{H} = \int I(x, y)P(x, y)dy + h(x)$$

em que $h(x)$ é escolhido de forma que $\partial\mathcal{H}/\partial x = -IQ$ e o domínio de integração \mathcal{U} esteja bem definido. Então,

$$x' = IP = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}, \quad y' = IQ = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}.$$

1.7 A Compactificação de Poincaré

Nesta seção apresentamos a compactificação de Poincaré, que é utilizada para o estudo do comportamento de campos polinomiais no infinito e não somente em vizinhanças de pontos singulares. Para isso, foi utilizada a projeção central, que tem a vantagem de que as singularidades no infinito estão ao longo do equador da esfera de Poincaré. Assim, o comportamento de trajetórias “longe” da origem poderá ser entendido através do estudo de trajetórias próximas de “pontos no infinito”, isto é, no equador da esfera de Poincaré. Considere a esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\},$$

a qual denominamos por **Esfera de Poincaré**, e o plano

$$T_{P_N}\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\}$$

que é tangente à esfera \mathbb{S}^2 em $P_N = (0, 0, 1)$. Nesta seção convencionamos que as coordenadas y_i se referem à esfera \mathbb{S}^2 e as coordenadas x_i ao plano $T_{P_N}\mathbb{S}^2$, $i = 1, 2, 3$.

Definição 1.17. *Definimos*

$$H_+ = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$$

como sendo o hemisfério norte,

$$H_- = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}$$

como sendo hemisfério sul e

$$\mathbb{S}^1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$$

como sendo o equador.

A compactificação de Poincaré de \mathcal{X} consiste em fazer duas cópias do fluxo de \mathcal{X} , uma sobre H_+ e outra sobre H_- , usando a projeção central. Para isso, vamos considerar uma reta $L(t)$ que une a origem a um ponto do plano $T_{P_N}\mathbb{S}^2$,

$$L(t) = (0, 0, 0) + t(x_1, x_2, 1) = t(x_1, x_2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

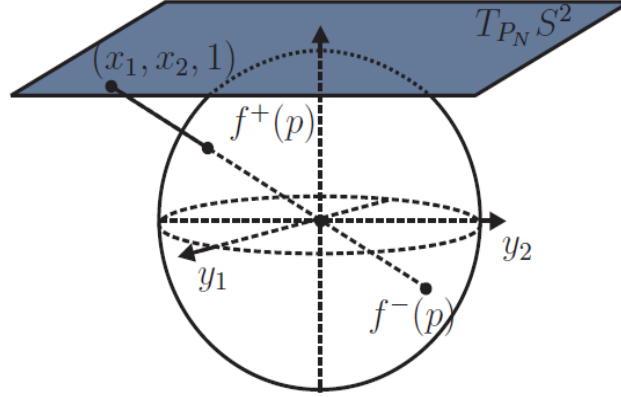


Figura 1.3: Projeção central.

Esta reta intercepta a esfera \mathbb{S}^2 em dois pontos, um no hemisfério norte e o outro no hemisfério sul. Veja a Figura 1.3.

Agora, considerando a projeção do campo vetorial \mathcal{X} de $\mathbb{R}^2 \approx T_{P_N}\mathbb{S}^2$ para \mathbb{S}^2 dada pelas projeções centrais, temos dois difeomorfismos

$$f^+ : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow H_+ \quad \text{e} \quad f^- : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow H_-,$$

isto é, $f^+(p)$ (resp. $f^-(p)$) é a intersecção da reta que passa pelo ponto $p = (x_1, x_2, 1)$ ligando a origem com o hemisfério norte (resp. sul) de \mathbb{S}^2 , cujas expressões são dadas por

$$f^+(x_1, x_2, 1) = \frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)} \quad \text{e} \quad f^-(x_1, x_2, 1) = -\frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)},$$

onde $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar o campo \mathcal{X} definido no plano tangente à esfera, isto é, $\mathcal{X} : T_{P_N}\mathbb{S}^2 \rightarrow T_{P_N}\mathbb{S}^2$ e, assim, é possível definir um novo campo em \mathbb{S}^2 . O campo $\tilde{\mathcal{X}}$ induzido em \mathbb{S}^2 , a partir de \mathcal{X} , através dos difeomorfismos f^+ e f^- será dado por

$$\tilde{\mathcal{X}}(y) = Df^+(x)\mathcal{X}(x) \quad \text{se} \quad y = f^+(x) \in H^+$$

e

$$\tilde{\mathcal{X}}(y) = Df^-(x)\mathcal{X}(x) \quad \text{se} \quad y = f^-(x) \in H^-,$$

respectivamente.

Destacamos que $\tilde{\mathcal{X}}$ é um campo vetorial em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$, que é tangente à esfera. Para estudar o comportamento assintótico das órbitas não limitadas de \mathcal{X} , analisando $\tilde{\mathcal{X}}$, é necessário estender $\tilde{\mathcal{X}}$ para o equador \mathbb{S}^1 obtendo, assim, um campo na esfera.

O estudo de $\tilde{\mathcal{X}}$ em uma vizinhança do equador nos dará informações sobre o comportamento do campo \mathcal{X} no infinito. Entretanto, nem sempre é possível estender $\tilde{\mathcal{X}}$ ao equador. Veremos adiante que, quando \mathcal{X} for um campo polinomial, podemos estender $\tilde{\mathcal{X}}$ analiticamente ao equador. Antes de estudar a extensão de $\tilde{\mathcal{X}}$ ao equador, vamos escolher um sistema de coordenadas conveniente para \mathbb{S}^2 e calcular a expressão de $\tilde{\mathcal{X}}$ nessas coordenadas.

Para \mathbb{S}^2 usamos seis cartas locais dadas por

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\}, \quad V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\},$$

para $k = 1, 2, 3$. As aplicações locais correspondentes são dadas por $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ e definidas como

$$\phi_k(y) = -\psi_k(y) = \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right),$$

para $m < n$ e $m, n \neq k$.

Queremos agora encontrar a expressão do campo na carta local (U_1, ϕ_1) . Seja $y \in U_1 \cap H_+$, então $y = f^+(x)$, $x \in T_{P_N}\mathbb{S}^2$, e

$$\begin{aligned} (\phi_1 \circ f^+)(x) &= \phi_1(f^+(x)) = \phi_1 \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \\ &= \left(\frac{x_2}{\Delta(x)} \frac{\Delta(x)}{x_1}, \frac{1}{\Delta(x)} \frac{\Delta(x)}{x_1} \right) \\ &= \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right). \end{aligned}$$

Portanto $\phi_1(x_1, x_2, 1) = (u, v)$, onde $u = x_2/x_1$ e $v = 1/x_1$. Observe que como $y \in U_1 \cap H_+$, então $x_1 \neq 0$. Como $\tilde{\mathcal{X}}(y) = Df^+(x)\mathcal{X}(x)$, quando $y = f^+(x)$, segue que

$$\begin{aligned} D\phi_1(y)\tilde{\mathcal{X}}(y) &= D\phi_1(y) \circ Df^+(x)\mathcal{X}(x) \\ &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)\mathcal{X}(x). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Seja $\tilde{\mathcal{X}}(y)|_{U_1 \cap H_+}$ denotando o sistema de coordenadas definido como $D\phi_1(y)\tilde{\mathcal{X}}(y)$ e, portanto, segue da equação (1.23) que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}(y)|_{U_1 \cap H_+} = D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x) &= \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2} (-x_2 P(x_1, x_2) + x_1 Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Esta é a expressão de $\tilde{\mathcal{X}}$ em $U_1 \cap H_+$ nas coordenadas ϕ_1 . Vamos colocá-las em função de u e v para facilitar a análise. Denotando $x_1 = 1/v$, $x_2 = u/v$ e substituindo em (1.24), temos

$$\tilde{\mathcal{X}}(y)|_{U_1 \cap H_+} = \left[-uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right].$$

Em geral, $\tilde{\mathcal{X}}$ não permanece limitado quando nos aproximamos de \mathbb{S}^1 . Mas, se multiplicarmos o campo por um fator $\rho(y) = y_3^{d-1}$, onde d é o grau do campo \mathcal{X} , a extensão se torna possível. Então,

$$\rho(f^+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}},$$

onde $z = (u, v)$. Assim, $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ nas coordenadas (u, v) é dado por

$$\begin{aligned} \rho\tilde{\mathcal{X}}(u, v) &= \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} \left(-uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right) \\ &= \frac{v^d}{\Delta(z)^{d-1}} \left(-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -vP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Logo, (1.25) é a expressão do campo em $U_1 \setminus \mathbb{S}^1$. Verifica-se, facilmente que se $y \in U_1 \cap H_-$, obtém-se a mesma expressão.

Seguem algumas considerações a respeito do que foi apresentado. Inicialmente observamos que os pontos do equador $\mathbb{S}^1 \cap U_1$ são representados por $v = 0$ nas coordenadas ϕ_1 . Por outro lado, estes pontos correspondem ao infinito do plano $T_{P_N}\mathbb{S}^2$. Observe também, que é possível fazer $v = 0$ na expressão (1.25), resultando em

$$\rho\tilde{\mathcal{X}}(u, 0) = (-ua_d + b_d, 0),$$

onde a_d e b_d são os termos de maior grau em P e Q , respectivamente. No vetor $\rho\tilde{\mathcal{X}}(u, 0)$ temos a segunda componente igual a zero. Isto significa que este vetor tangente ao equador quando olhado na esfera \mathbb{S}^2 . Podemos concluir, então, que o equador $\mathbb{S}^1 \cap U_1$ é invariante pelo campo $\rho\tilde{\mathcal{X}}$. Não é difícil remover o fator $\frac{1}{\Delta(z)^{d-1}}$ de (1.25) por uma parametrização do tempo. Assim, a expressão para o campo $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ na carta local (U_1, ϕ_1) é dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left[-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right], \\ \dot{v} = -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right). \end{cases} \quad (1.26)$$

Calculamos de maneira análoga a expressão do campo $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ na carta (U_2, ϕ_2) que será dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left[P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right], \\ \dot{v} = -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right). \end{cases} \quad (1.27)$$

Finalmente a expressão do campo $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ na carta (U_3, ϕ_3) é dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, v), \\ \dot{v} = Q(u, v). \end{cases} \quad (1.28)$$

Observação 1.2. *As expressões para $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ nas cartas (V_1, ψ_1) , (V_2, ψ_2) e (V_3, ψ_3) têm, respectivamente, as mesmas expressões que (1.26), (1.27) e (1.28) multiplicadas por $(-1)^{d-1}$. Observe que o fator $(-1)^{d-1}$ desempenha um papel fundamental no estudo das estabilidades das singularidades em \mathbb{S}^1 . Assim, para conhecermos o comportamento dos pontos do infinito, basta olharmos as cartas (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) .*

Proposição 1.6. *Seja \mathcal{X} um campo polinomial em \mathbb{R}^2 de grau d . Sejam $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(y) = y_3^{d-1}$, e $\tilde{\mathcal{X}}$ o campo induzido em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ através de f^+ e f^- como definido acima. Então $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ pode ser estendido a um campo analítico de \mathbb{S}^2 com equador invariante.*

Demonstração. Acima, são apresentadas as expressões de $\rho\tilde{\mathcal{X}}$ nas cartas (U_1, ϕ_1) , (V_1, ψ_1) , (U_2, ϕ_2) e (V_2, ψ_2) , estas são dadas por (1.26) e (1.27), respectivamente, onde podemos ainda multiplicar pelo fator $(-1)^{d-1}$ quando for o caso. Vê-se que as expressões (1.26) e

(1.27) são perfeitamente definidas para $v = 0$, isto é, no equador \mathbb{S}^1 e, como tais expressões são analíticas, podemos estendê-las analiticamente ao equador. Fazendo $v = 0$ em (1.26) e (1.27) obtemos, respectivamente,

$$\rho\tilde{\mathcal{X}}(u, 0) = (-ua_d + b_d, 0) \quad \text{e} \quad \rho\tilde{\mathcal{X}}(u, 0) = (a_d, 0)$$

e concluímos que o equador será invariante por $\tilde{\mathcal{X}}$. ■

Definição 1.18. *O campo vetorial estendido na esfera \mathbb{S}^2 , pelas cartas locais (U_k, ϕ_k) e (V_k, ψ_k) , chama-se **compactificação de Poincaré de \mathcal{X}** e será indicado por $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.*

1.8 Separatriz e Região Canônica

Iniciamos esta seção abordando o conceito de setores de um ponto singular, mas sem entrar em muitos detalhes. Chamamos de **setor elíptico**, **setor parabólico** e **setor hiperbólico** um setor que é topologicamente equivalente ao setor mostrado na Figura 1.4, (1), (2) e (3), respectivamente.

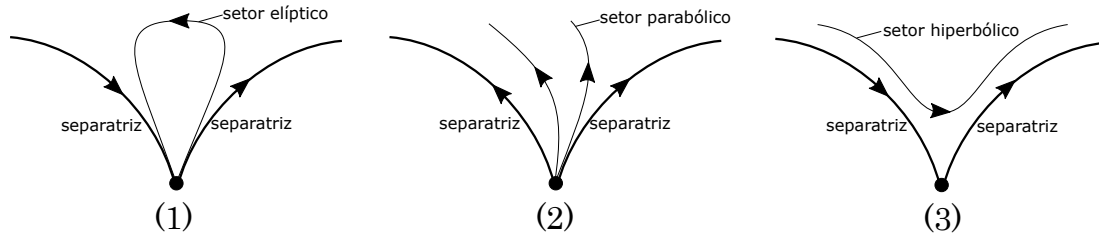


Figura 1.4: Setores de um ponto singular.

Diz-se que um campo vetorial tem a propriedade da **decomposição setorial finita** em um ponto singular p se p é um centro, foco ou um nó, ou tem uma vizinhança que consiste em uma união finita de setores parabólicos, setores hiperbólicos ou setores elípticos.

Observamos que todos os pontos singulares isolados de um sistema diferencial polinomial satisfazem a propriedade de decomposição setorial finita. Em alguns casos mais complicados podemos ter um número infinito de setores, com um único ponto singular. Para mais detalhes ver página 17 de [9]. De agora em diante assumiremos apenas pontos singulares isolados com um número finito de setores.

Chamamos de **separatriz** de \mathcal{X} uma trajetória que fica no limite de um setor hiperbólico de um ponto singular finito ou infinito.

Dado $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ a compactificação de Poincaré, veja Seção 1.7, no disco \mathcal{D} e o fluxo (\mathcal{U}, ϕ) em um conjunto invariante \mathcal{U} , as separatrizes do campo vetorial $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ no disco \mathcal{D} são:

- todas as órbitas de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ que estão no limite de \mathbb{S}^1 no disco de Poincaré;
- todos os pontos singulares de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$;
- todos os ciclos limites de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$;
- todas as separatrizes dos setores hiperbólicos dos pontos singulares (finitos e infinitos) de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Cada campo de vetores $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ possui inúmeras separatrizes finitas, então, denotaremos por $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$ o conjunto formado por todas as separatrizes do fluxo (\mathcal{D}, ϕ) definidas por $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ no disco de Poincaré. $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$ é um conjunto fechado invariante. Se \mathcal{N} é a conexão dos componentes de $\mathcal{D} \setminus \mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$, então \mathcal{N} é também um conjunto invariante sob o fluxo ϕ de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ e chamaremos o fluxo (\mathcal{N}, ϕ) uma **região canônica** de (\mathcal{D}, ϕ) .

Definição 1.19. *Dizemos que dois campos vetoriais polinomiais \mathcal{X} e \mathcal{Y} são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo de \mathbb{S}^1 em \mathbb{S}^1 preservando o infinito e levando órbitas do fluxo induzido de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ em órbitas do fluxo induzido em $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$, preservando ou invertendo simultaneamente o sentido de todas as órbitas.*

De forma análoga definimos a equivalência topológica entre $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$ e $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{Y}))$.

O seguinte teorema é devido a Markus [14], Neumann [15] e Peixoto [17].

Teorema 1.10. *Os retratos de fase no disco de Poincaré de dois sistemas diferenciais polinomiais compactificados $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ e $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$, com pontos singulares isolados, são topologicamente equivalentes se, e somente se, suas configurações de separatrizes $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$ e $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{Y}))$ são topologicamente equivalentes.*

Segue do Teorema 1.10 que para a classificação dos retratos de fase no disco de Poincaré de um sistema polinomial no plano com finitas ou infinitas separatrizes, basta descrever a configuração da separatriz $\mathcal{S}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$.

Capítulo 2

Sistemas de Abel do segundo tipo.

Neste capítulo apresentamos as formas normais e todos os retratos de fase globais no disco de Poincaré para os sistemas diferenciais polinomiais quadráticos de Abel do segundo tipo com \mathbb{Z}_2 -simetria. Este estudo foi obtido por C. Valls, J. Llibre, em 2018, ver [13]. Destacamos aqui que a classificação para sistemas de Abel do segundo tipo sem simetria tem sido feito em [10], mas as técnicas envolvidas fogem do contexto desta dissertação.

2.1 Caracterização dos Sistemas de Abel

Nosso foco, aqui, está direcionado a caracterizar todos os retratos de fase globais no disco de Poincaré relativos aos sistemas de Abel do segundo tipo com simetrias. Uma equação diferencial de Abel do segundo tipo é dada por

$$y \frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x), \quad (2.1)$$

onde $A(x)$ e $B(x)$ são funções não nulas. Esta equação pode ser escrita equivalentemente como um sistema diferencial polinomial da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = yc(x) \\ \dot{y} = a(x)y + b(x), \end{cases}$$

onde $A(x) = a(x)/c(x)$ e $B(x) = b(x)/c(x)$, com $c(x) \neq 0$. Temos ainda que $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Neste trabalho estudamos sistemas diferenciais polinomiais de Abel quadráticos, ou seja, consideramos em todo este capítulo, sistemas diferenciais polinomiais de Abel da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = yc(x) := y(c_0 + c_1x) \\ \dot{y} = a(x)y + b(x) := (a_0 + a_1x)y + b_0 + b_1x + b_2x^2, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $a_0, a_1, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

Condicionamos $c_0^2 + c_1^2 \neq 0$, pois caso contrário o sistema é trivial. Assumimos também que o sistema (2.2) não tem um fator comum, ou seja, depois de alguns cálculos obtemos que

(i) $b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 \neq 0$, ou

(ii) $c_0(a_1c_0 - a_0c_1) \neq 0$ e $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$, ou

(iii) $c_0(b_2c_0^2 - b_1c_0c_1 + b_0c_1^2) \neq 0$ e $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$, ou

(iv) $c_0 = 0$ e $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$.

Em nosso caso, sempre temos $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$, caso contrário o sistema (2.2) não seria um sistema de Abel do segundo tipo. Ainda, como queremos um sistema quadrático, consideramos sempre $a_1^2 + b_2^2 + c_1^2 \neq 0$.

Podemos notar que o sistema (2.2) apresenta sete parâmetros. Como já dissemos na introdução deste capítulo, restringimos nosso estudo para os sistemas de Abel (2.2) que apresentam \mathbb{Z}_2 -simetrias.

2.2 Tipos de \mathbb{Z}_2 -simetria

Nesta seção descrevemos os tipos de simetria para os sistemas estudados. Existem dois tipos de \mathbb{Z}_2 -simetrias: a equivariante e a reversível.

Primeiramente, consideramos $\mathcal{X} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, o campo de vetores associado ao sistema (2.2) e a matriz M dada por

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos, então, definir as \mathbb{Z}_2 -simetrias da seguinte maneira.

Definição 2.1. Dizemos que o sistema (2.2) é \mathbb{Z}_2 -equivariante se, pelo menos uma das seguintes condições, é válida:

$$M\mathcal{X}(x, y) = \mathcal{X}(-x, y); \quad (2.3)$$

$$-M\mathcal{X}(x, y) = \mathcal{X}(x, -y); \quad (2.4)$$

$$-\mathcal{X}(x, y) = \mathcal{X}(-x, -y). \quad (2.5)$$

Definição 2.2. Dizemos que o sistema (2.2) é \mathbb{Z}_2 -reversível se, pelo menos uma das seguintes condições, é válida:

$$M\mathcal{X}(x, y) = -\mathcal{X}(-x, y); \quad (2.6)$$

$$-M\mathcal{X}(x, y) = -\mathcal{X}(x, -y); \quad (2.7)$$

$$\mathcal{X}(x, y) = \mathcal{X}(-x, -y). \quad (2.8)$$

2.3 Sistemas de Abel do Segundo Tipo com \mathbb{Z}_2 -simetria

Iniciamos esta seção encontrando os sistemas de Abel (2.2) que apresentam \mathbb{Z}_2 -simetrias. A proposição a seguir caracteriza cada um destes sistemas.

Proposição 2.1. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) O sistema (2.2) satisfazendo (2.3) torna-se

$$\begin{cases} \dot{x} = c_1xy, \\ \dot{y} = b_0 + a_0y + b_2x^2, \end{cases} \quad (2.9)$$

com $a_0c_1 \neq 0$ e $b_0^2 + b_2^2 \neq 0$;

(ii) O sistema (2.2) satisfazendo (2.6) torna-se:

$$\begin{cases} \dot{x} = c_0y, \\ \dot{y} = b_1x + a_1xy, \end{cases} \quad (2.10)$$

com $a_1b_1c_0 \neq 0$;

(iii) o sistema (2.2) satisfazendo (2.8) torna-se:

$$\begin{cases} \dot{x} = c_1xy, \\ \dot{y} = b_0x + b_2x^2 + a_1xy, \end{cases} \quad (2.11)$$

com $a_1b_0c_1 \neq 0$;

(iv) O sistema (2.2) satisfazendo (2.4), (2.5) ou (2.7) não são sistemas do tipo Abel \mathbb{Z}_2 -simétricos.

Demonstração. O sistema (2.2) satisfaz (2.3) se, e somente se,

$$\begin{aligned} M\mathcal{X}(x, y) &= \mathcal{X}(-x, y) \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P(-x, y) \\ Q(-x, y) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} -P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P(-x, y) \\ Q(-x, y) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} -y(c_0 + c_1x) \\ y(a_0 + a_1x) + b_0 + b_1x + b_2x^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y(c_0 - c_1x) \\ y(a_0 - a_1x) + b_0 - b_1x + b_2x^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta última igualdade temos que $c_0 = a_1 = b_1 = 0$. Portanto,

$$\begin{cases} \dot{x} = c_1xy, \\ \dot{y} = b_0 + a_0y + b_2x^2. \end{cases}$$

Assim o item (i) está demonstrado.

De forma análoga é possível demonstrar os itens (ii), (iii) e (iv). Para este último, é importante destacar que o sistema (2.2) satisfaz (2.4) se, e somente se, $b_0 = b_1 = b_2 = c_0 = c_1 = 0$, o que o tornaria um sistema linear. Ainda, o sistema (2.2) satisfaz (2.5) se, e somente se, $a_1 = b_0 = b_2 = c_1 = 0$, o que tornaria nosso sistema linear. Finalmente, o sistema (2.2) satisfaz (2.7) se, e somente se, $a_0 = a_1 = c_1 = 0$ e, assim, nosso sistema não seria do tipo de Abel. ■

Caracterizados os sistemas que vamos estudar, podemos enunciar o principal teorema deste capítulo.

Teorema 2.1. *Considere um sistema de Abel do segundo tipo com \mathbb{Z}_2 -simetria. Então, seu retrato de fase global é topologicamente equivalente a um dos seguintes retratos de fase, apresentados na Figura 2.1.*

Para a demonstração do Teorema 2.1 vamos realizar um estudo detalhado para cada sistema apresentado na Proposição 2.1. Utilizamos os fundamentos da teoria qualitativa apresentada no Capítulo 1 para demonstrar os resultados a seguir e, por fim, exibir os retratos de fase dos sistemas (2.9), (2.10) e (2.11).

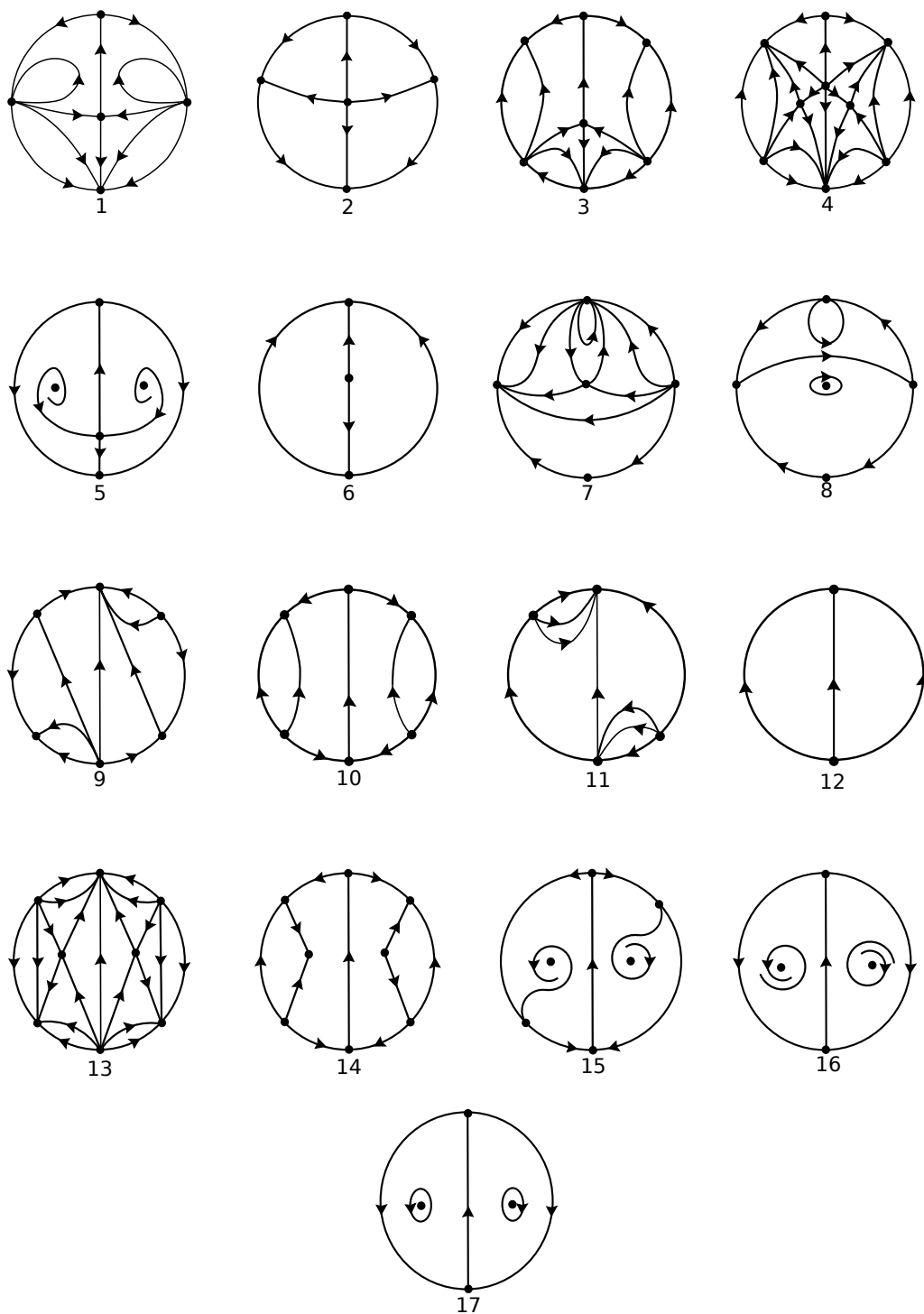


Figura 2.1: Retratos de fase globais de sistemas Abel do segundo tipo com \mathbb{Z}_2 -simetria.

2.3.1 Sistema (2.9)

Nesta seção estudamos as singularidades finitas e infinitas do sistema (2.9). Finalizamos esta seção apresentando a Tabela 2.1 explicitando os resultados obtidos e os retratos de fase para cada sistema considerando os valores dos parâmetros. A proposição a seguir nos fornece os sistemas obtidos a partir de mudanças de variáveis no sistema (2.9).

Proposição 2.2. *Considere o sistema (2.9). Após uma mudança das variáveis e um reescalonamento da variável independente t , podemos reescrevê-lo como um dos seguintes sistemas, onde $a \in \mathbb{R}$:*

$$(I.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = a + y, \quad a \neq 0; \end{cases}$$

$$(I.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = a + y + x^2; \end{cases}$$

$$(I.3) \quad \begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = a + y - x^2; \end{cases}$$

Demonstração. Dado o sistema (2.9), considere a seguinte mudança de variáveis e reescalonamento da variável independente t

$$x \rightarrow \alpha X, \quad y \rightarrow \beta Y, \quad t \rightarrow \gamma T,$$

com $\alpha\beta\gamma \neq 0$. Por hipótese $a_0c_1 \neq 0$ e escolhendo

$$\gamma = \frac{1}{c_1\beta} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{a_0}{c_1}.$$

Segue que para todo valor de α , o novo sistema é dado por

$$X' = XY, \quad Y' = \frac{b_0c_1}{a_0^2} + Y + \frac{b_2c_1\alpha^2}{a_0^2}X^2.$$

Se $b_2 = 0$, fazendo $b_0c_1/a_0^2 = a$, obtemos o sistema $X' = XY$, $Y' = a + Y$ onde $a \neq 0$. Portanto, temos o sistema (I.1). Por outro lado, se $b_2 \neq 0$, podemos tomar $\alpha = \sqrt{|a_0^2/b_2c_1|}$ e, com isso, obtemos o sistema $X' = XY$, $Y' = a + Y + \mu X^2$ com $\mu = \{-1, 1\}$, o que nos fornece os sistemas (I.2) e (I.3), dependendo do sinal de μ .

■

Vamos estudar, separadamente, cada um dos sistemas obtidos na Proposição 2.2.

Sistema (I.1)

Considere o sistema (I.1), ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = a + y, \end{cases} \quad (2.12)$$

onde $a \neq 0$. Segue diretamente, que seu único ponto singular finito é $P_0 = (0, -a)$. Fundamentado no Teorema 1.2 (**Hartman-Grobman**), vamos analisar a matriz Jacobiana do sistema (2.12), que é dada por

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz Jacobiana é triangular superior, os autovalores, no ponto singular P_0 , são dados por $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -a$. Lembrando que, por hipótese, temos $a \neq 0$. Temos assim que, quando $a > 0$, P_0 é uma sela, conforme a Definição 1.7. Por outro lado, quando $a < 0$, P_0 é um nó instável, segundo a Definição 1.6.

Mediante a compactificação de Poincaré, descrita na Seção 1.7, apresentamos agora um estudo sobre o comportamento das singularidades no infinito. Posto isto, o sistema (2.12) na carta local U_1 , se escreve como

$$\begin{cases} \dot{u} = -u^2 + av^2 + uv \\ \dot{v} = -vu. \end{cases} \quad (2.13)$$

Quando $v = 0$, a origem é a única singularidade, e esta é degenerada de acordo com a Definição 1.5. Desta forma, precisamos fazer uso da técnica de *blow-up* apresentada na seção 1.3, para entendermos o comportamento local desta singularidade.

Com um *blow-up* no sistema (2.13) na direção v através da mudança de variáveis $(u, v) \mapsto (w, v)$, onde $w = u/v$, obtemos, depois de eliminar o fator comum v , um novo sistema dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = a + u \\ \dot{v} = -uv. \end{cases} \quad (2.14)$$

Como $a \neq 0$, este sistema não apresenta ponto singular. Por outro lado, por um *blow-up* no sistema (2.13) na direção u , através da mudança de variáveis $(u, v) \mapsto (u, w)$ onde $w = v/u$ obtemos, depois de eliminar o fator comum u , um novo sistema dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = (av^2 + v - 1)u \\ \dot{v} = -v^2(av + 1). \end{cases} \quad (2.15)$$

Desta forma, quando $u = 0$, o sistema (2.15) apresenta duas singularidades, a origem e $(0, -1/a)$. A matriz Jacobiana do sistema (2.15), aplicada em $(0, -1/a)$, se escreve como

$$J(0, -1/a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix}.$$

Assim, esta singularidade é uma sela, se $a < 0$ e um nó estável, se $a > 0$. Por outro lado, a matriz Jacobiana do sistema (2.15), aplicada na origem, se escreve como

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos assim que a origem é uma singularidade semi-hiperbólica. A fim de nos adequarmos as condições do Teorema 1.3, das singularidades semi-hiperbólicas, consideramos $u = y$, $v = x$ e multiplicamos o sistema (2.15) por -1 . Portando o sistema (2.15) passa a ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x, y) \\ \dot{y} = y + B(x, y), \end{cases} \quad (2.16)$$

onde $A(x, y) = ax^3 + x^2$ e $B(x, y) = -xy - ax^2y$. Nas notações do Teorema 1.3 é fácil ver que $f(x) = 0$ é solução de $y + B(x, y)$. Logo, $g(x) = A(x, f(x)) = x^2 + ax^3$. Concluimos assim que $m = 2$ e $a_2 = 1$. Pelo Teorema 1.3(iii) obtemos que a origem do sistema (2.15) é uma sela-nó.

Finalmente, voltando com as mudanças de variáveis em cada caso, até o sistema (2.13), como mostram as Figuras 2.2 e 2.3, obtemos que o retrato de fase local da origem na carta U_1 é formada por dois setores elípticos e dois setores parabólicos, se $a > 0$, separados pelo infinito, e a origem é formada por dois setores hiperbólicos e dois setores parabólicos, se $a < 0$, também separados pelo infinito.

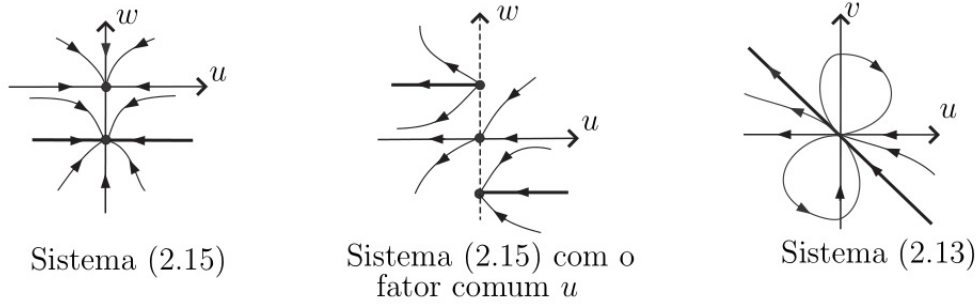


Figura 2.2: *Blow-up* na origem da carta U_1 quando $a > 0$.

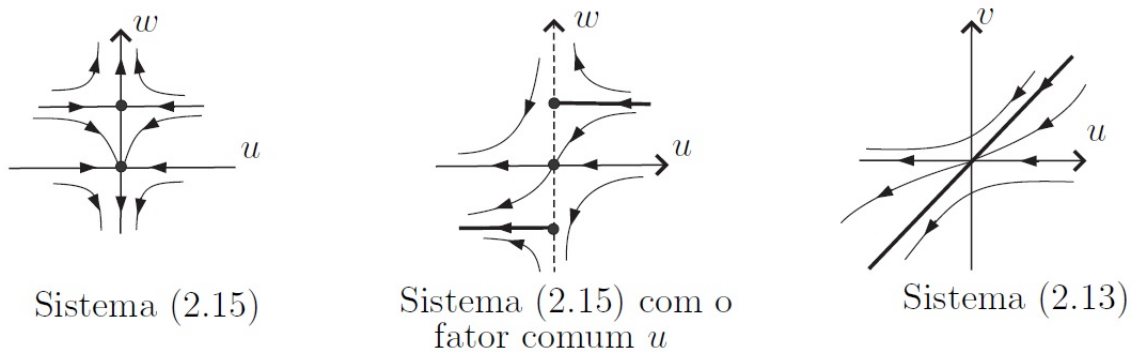


Figura 2.3: *Blow-up* na origem da carta U_1 quando $a < 0$.

Na carta local U_2 , o sistema (2.12), torna-se

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - av^2 - v) \\ \dot{v} = -v^2(av + 1). \end{cases} \quad (2.17)$$

Claramente a origem é uma singularidade. Além disso, a matriz Jacobiana do sistema (2.17), na origem, é dado por

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, a origem é um ponto singular semi-hiperbólico. Usando o Teorema 1.3, temos que a origem é uma sela-nó.

Sistema (I.2)

Considere o sistema (I.2), ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = a + y + x^2. \end{cases} \quad (2.18)$$

Prontamente constatamos que os candidatos a pontos singulares finitos do sistema (2.18) são

$$P_0 = (0, -a), \quad P_1 = (\sqrt{-a}, 0) \quad \text{e} \quad P_2 = (-\sqrt{-a}, 0).$$

Posto isto, temos que:

- Quando $a > 0$, P_0 é a única singularidade, a qual é uma sela, já que os autovalores da matriz Jacobiana, no ponto P_0 , associada ao sistema (2.18) são $\lambda_1 = 1 > 0$ e $\lambda_2 = -a < 0$.
- Quando $a = 0$, $P_0 = P_1 = P_2 = (0, 0)$ é a única singularidade. Além disto, esta é semi-hiperbólica. Segue do Teorema 1.3 que esta singularidade é uma sela.
- Finalmente, quando $a < 0$, P_0 , P_1 e P_2 são singularidades, sendo P_0 um nó instável, já que os autovalores da matriz Jacobiana, neste ponto, são positivos. Por outro lado P_1 e P_2 são selas, visto que o determinante da matriz Jacobiana, neste pontos, é negativo, vide Definição 1.7.

A seguir, é descrito o estudo das singularidades infinitas.

O sistema (2.18), na carta local U_1 é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = -u^2 + av^2 + uv + 1 \\ \dot{v} = -vu. \end{cases} \quad (2.19)$$

Quando $v = 0$, temos que $u = \pm 1$, ou seja, $w_1 = (1, 0)$ e $w_2 = (-1, 0)$ são singularidades. Temos que w_1 é um nó hiperbólico estável, pois os autovalores da matriz Jacobiana do sistema (2.19), aplicada em w_1 são -2 e -1 . Por outro lado, w_2 é um nó hiperbólico instável, já que os autovalores da matriz Jacobiana aplicada neste ponto são 2 e 1 .

Na carta local U_2 , o sistema (2.18) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - av^2 - v - u^2) \\ \dot{v} = -v(v + u^2 + av^2) \end{cases} \quad (2.20)$$

e, claramente, a origem é um ponto singular. Além disso, a matriz Jacobiana na origem é

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto, a origem é semi-hiperbólica. Usando o Teorema 1.3, temos que a singularidade é uma sela-nó.

Sistema (I.3)

Considere o sistema (I.3), ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = a + y - x^2. \end{cases} \quad (2.21)$$

Os candidatos a pontos singulares finitos do sistema (2.21) são

$$P_0 = (0, -a), \quad P_1 = (\sqrt{a}, 0) \quad \text{e} \quad P_2 = (-\sqrt{a}, 0).$$

Sendo assim, P_1 e P_2 são singularidades reais apenas se $a \geq 0$. Portanto:

- Quando $a < 0$, P_0 é a única singularidade. Como os autovalores da matriz Jacobiana em P_0 são $\lambda_1 = -a$ e $\lambda_2 = -1$, P_0 é um nó instável;
- Quando $a = 0$, temos $P_0 = P_1 = P_2 = (0, 0)$. Esta é uma singularidade semi-hiperbólica e pelo Teorema 1.3 segue que ela é um nó instável.
- Quando $a > 0$, P_0 é uma sela, já que os autovalores da matriz Jacobiana são $-a$ e 1 .

Entretanto, os autovalores da matriz Jacobiana em P_1 e P_2 são dados por

$$\lambda_1 = \frac{(1 + \sqrt{1 - 8a})}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{(1 - \sqrt{1 - 8a})}{2},$$

tornando-os focos instáveis se $a > 1/8$ e nós instáveis se $a \in (0, 1/8]$.

Analisando as singularidades infinitas, na carta local U_1 , o sistema (2.21) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = -1 - u^2 + uv + av^2 \\ \dot{v} = -vu. \end{cases} \quad (2.22)$$

Consequentemente, não há singularidade na carta U_1 .

Na carta local U_2 , o sistema (2.21) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = u(u^2 - av^2 - v + 1) \\ \dot{v} = v(-v + u^2 - av^2) \end{cases} \quad (2.23)$$

e, claramente, a origem é uma singularidade. Além disso, os autovalores da matriz Jacobiana na singularidade são 1 e 0, portanto a origem é semi-hiperbólica. Usando o Teorema 1.3, concluímos que a singularidade é uma sela-nó.

Retratos de fase dos sistemas (I.1), (I.2) e (I.3)

Primeiramente, vamos destacar que os sistemas (I.1) a (I.3) têm uma reta invariante dada por $x = 0$. De acordo com [5], um sistema polinomial quadrático que possua uma reta invariante tem um centro ou tem no máximo uma órbita periódica. Além disso, se existe uma única órbita periódica, esta é um ciclo limite hiperbólico. Portanto, os sistemas dados não possuem ciclos limites ou possuem no máximo um ciclo. Vamos supor que exista um ciclo limite nos sistemas apresentados. Mas isto é um absurdo, já que estes possuem \mathbb{Z}_2 -simetria e portanto o ciclo limite, como é único, contém a origem em seu interior, mas a reta invariante de cada sistema é dada por $x = 0$. Logo, os sistemas (I.1) ao (I.3) não possuem ciclos limites.

Em resumo, a Tabela 2.1 apresenta as informações dos sistemas (I.1), (I.2) e (I.3), obtidas anteriormente, indicando seus respectivos retratos de fase, apresentados na Figura 2.1, consoante com seus parâmetros.

Observamos que a Tabela 2.1 usa as seguintes notações: PSF (pontos singulares finitos), PSI (pontos singulares infinitos), RF (Retrato de Fase), S (sela), NI (nó instável), NE (nó estável), FI (foco instável), 2E2P (dois setores elípticos e dois setores parabólicos separados pelo infinito), 2H2P (dois setores hiperbólicos e dois setores parabólicos separados pelo infinito) e S-N (sela-nó).

Podemos condensar estas informações com o estudo das singularidades e enunciar o seguinte teorema.

Família	Parâmetro	PSF	PSI	RF
(I.1)	$a > 0$	S	2E2P S-N	1
(I.1)	$a < 0$	NI	2H2P S-N	2
(I.2)	$a \geq 0$	S	NE NI S-N	3
(I.2)	$a < 0$	NI 2 S	NE NI S-N	4
(I.3)	$a > 1/8$	S 2 FI	S-N	5
(I.3)	$a \in (0, 1/8]$	S 2 NI	S-N	5
(I.3)	$a \leq 0$	NI	S-N	6

Tabela 2.1: Retratos de fase do sistema (2.9).

Teorema 2.2. *Os sistemas (2.9) possuem 6 retratos de fase globais, topologicamente não equivalentes, distribuídos nas famílias da Proposição 2.2 da seguinte maneira, como mostra a Figura 2.1,:*

- (i) Na família (I.1), temos o retrato de fase 1 se $a > 0$ e 2 se $a < 0$,
- (ii) Na família (I.2), temos o retrato de fase 3 se $a \geq 0$ e 4 se $a < 0$,
- (iii) Na família (I.3), temos o retrato de fase 5 se $a > 0$ e 6 se $a \leq 0$,

2.3.2 Sistema (2.10)

A proposição a seguir nos fornece os sistemas obtidos a partir de uma mudança de variáveis no sistema (2.10).

Proposição 2.3. *Considere o sistema (2.10). Após uma mudança de variáveis e um reescalamento de sua variável independente t , podemos reescrevê-lo como um dos seguintes sistemas:*

$$(II.1) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x(y + 1); \end{cases}$$

$$(II.2) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x(y - 1). \end{cases}$$

Demonstração. A demonstração desta proposição é análoga à da Proposição 2.2 e, portanto, será omitida. ■

A seguir é apresentado um estudo do comportamento dos pontos singulares finitos e infinitos dos sistemas (II.1) e (II.2).

Sistema (II.1)

Analisando os pontos singulares finitos do sistema (II.1), dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x(y + 1), \end{cases} \quad (2.24)$$

temos que $P_0 = (0, 0)$ é a única singularidade. Note que a matriz Jacobiana do sistema (2.24) em P_0 tem como autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e, portanto, a origem é uma sela hiperbólica.

Agora, para os pontos singulares infinitos, o sistema (2.24) na carta local U_1 é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = -u^2v + u + v \\ \dot{v} = -uv^2. \end{cases} \quad (2.25)$$

Quando $v = 0$ a origem é o único ponto singular. Calculando a matriz Jacobiana na origem, temos que seus autovalores são 1 e 0 e, assim, a singularidade é semi-hiperbólica. Pelo Teorema 1.3, a origem é um nó instável.

Na carta local U_2 , o sistema (2.24) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = -u^2 - u^2v + v \\ \dot{v} = -uv(1 + v) \end{cases} \quad (2.26)$$

e facilmente vemos que a origem é singularidade nilpotente. Portanto, pelas condições do Teorema 1.4, a origem é formada por um setor elíptico, dois parabólicos e um hiperbólico.

Sistema (II.2)

Estudando os pontos singulares finitos do sistema (II.2), dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x(y - 1). \end{cases} \quad (2.27)$$

Novamente, temos que a origem é a única singularidade. Além disto, a matriz Jacobiana na origem tem autovalores i , $-i$. Como o sistema é não linear, necessitamos de uma análise mais aprofundada para entender o que acontece em uma vizinhança da origem (neste caso, podemos ter centro ou foco).

Destacamos que o sistema (2.27), além de ser do tipo Abel, também é do tipo Kukles reduzido, segundo a teoria apresentada no Capítulo 3. Portanto, utilizamos o Teorema 3.1 para determinar a estabilidade da origem. Como o sistema (2.27) satisfaz, por exemplo, o item (ii) do Teorema 3.1, concluímos que a origem é um centro.

Analisando as singularidades infinitas, obtemos que o sistema (2.27) na carta local U_1 , é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = u - v - uv^2 \\ \dot{v} = -uv^2. \end{cases} \quad (2.28)$$

Quando $v = 0$, a origem é o único ponto singular. Os autovalores da matriz Jacobiana neste ponto são 1 e 0 e, assim, temos que a singularidade é semi-hiperbólica. Então, pelo Teorema 1.3, é uma sela.

Na carta local U_2 , o sistema (2.27) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = v - u^2 + u^2v \\ \dot{v} = uv^2 - uv, \end{cases} \quad (2.29)$$

e, portanto, a origem é ponto singular nilpotente. Usando o Teorema 1.4 temos que esta singularidade é a união de um setor elíptico e um setor hiperbólico, ambos separados pelo infinito.

Retratos de fase dos sistemas (II.1) e (II.2)

A família de sistemas (II.1) possui uma reta invariante dada por $y = -1$ e a família de sistemas (II.2) possui uma reta invariante dada por $y = 1$. Então, de maneira análoga ao que fizemos para os sistemas (I.1) ao (I.3), por [5], concluímos que estes sistemas não têm ciclo limites, pois possuem \mathbb{Z}_2 -simetria.

A Tabela 2.2 apresenta todas as informações dos sistemas (II.1) e (II.2) indicando seus retratos de fase consoante com seus parâmetros.

Sistema	PSF	PSI	RF
(II.1)	S	NI 1E2P1H	7
(II.2)	C	S 1E1H	8

Tabela 2.2: Retratos de fase do sistema (2.10).

A Tabela 2.2 tem as seguintes notações: PSF (ponto singular finito), PSI (ponto singular infinito), S (sela), C (centro), NI (nó instável), 1E2P1H (um setor elíptico, dois setores parabólicos e um hiperbólico) e 1E1H (um setor elíptico e um hiperbólico).

Com estas informações e com o estudo das singularidades podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.3. *Os retratos de fase globais dos sistemas (II.1) e (II.2) são topologicamente equivalentes aos sistemas 7 e 8 da Figura 2.1, respectivamente. Além disto, estes sistemas não possuem ciclo limites.*

2.3.3 Sistema (2.11)

A proposição a seguir nos fornece os sistemas obtidos a partir de uma mudança de variáveis no sistema (2.11).

Proposição 2.4. *Considere o sistema (2.11). Após uma mudança de variáveis e um reescalonamento de sua variável independente t , podemos reescrevê-lo como um dos seguintes sistemas, tal que $a \in \mathbb{R}$:*

$$(III.1) \begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = \mu + xy, \end{cases} \quad \mu \in \{-1, 1\};$$

$$(III.2) \begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = 1 + x^2 + axy; \end{cases}$$

$$(III.3) \begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -1 - x^2 + axy; \end{cases}$$

$$(III.4) \begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -1 + x^2 + axy; \end{cases}$$

$$(III.5) \begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = 1 - x^2 + axy. \end{cases}$$

Demonstração. A demonstração desta proposição é análoga à da Proposição 2.2. ■

A seguir estudamos os pontos singulares finitos e infinitos dos sistemas (III.1) ao (III.5), descrevendo seus comportamentos assintóticos.

Sistema (III.1)

O sistema (III.1) é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = \mu + xy. \end{cases} \quad (2.30)$$

É fácil ver que este sistema não possui pontos singulares finitos e, portanto, estudaremos os pontos singulares infinitos.

Na carta local U_1 , o sistema (2.30) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = u - u^2 + \mu v^2 \\ \dot{v} = -uv. \end{cases} \quad (2.31)$$

Quando $v = 0$, temos que $w_0 = (0, 0)$ e $w_1 = (1, 0)$ são os pontos singulares de U_1 . Calculando a matriz Jacobiana em cada ponto singular temos que os autovalores em w_0 são dados por 1 e 0 e em w_1 são $\lambda_{1,2} = -1$. Logo, w_1 é um ponto singular hiperbólico cujos autovalores são reais negativos e, portanto, um nó estável. Por outro lado, w_0 é semi-hiperbólico e, depois de uma mudança de variáveis, nos adequando as condições do Teorema 1.3, temos que w_0 é uma sela, se $\mu = -1$, ou um nó instável, se $\mu = 1$.

Na carta local U_2 o sistema (2.30) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - u - \mu v^2) \\ \dot{v} = -v(u + \mu v^2). \end{cases} \quad (2.32)$$

Claramente a origem é singular e semi-hiperbólica, já que os autovalores da matriz Jacobiana neste ponto são 0 e 1. Usando o Teorema 1.3, temos que a origem é uma sela quando $\mu = 1$ e um nó instável quando $\mu = -1$.

Sistema (III.2)

O sistema (III.2), dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = 1 + x^2 + axy, \end{cases} \quad (2.33)$$

não possui pontos singulares finitos, resta-nos o estudo dos pontos singulares infinitos.

Na carta local U_1 , o sistema (2.33) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = au - u^2 + v^2 + 1 \\ \dot{v} = -uv. \end{cases} \quad (2.34)$$

Portanto, possui dois candidatos a pontos singulares, a saber;

$$w_1 = \left(\frac{(a + \sqrt{4 + a^2})}{2}, 0 \right) \quad \text{e} \quad w_2 = \left(\frac{(a - \sqrt{4 + a^2})}{2}, 0 \right),$$

ambos hiperbólicos. Estes são um nó estável e um nó instável, respectivamente.

Na carta local U_2 , o sistema (2.33), é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - au - u^2 - v^2) \\ \dot{v} = -v(au + v^2 + u^2) \end{cases} \quad (2.35)$$

e, portanto, a origem é singular. Visto que os autovalores da matriz Jacobiana na origem são 1 e 0, temos uma singularidade semi-hiperbólica. Recorrendo ao Teorema 1.3, esta é uma sela.

Sistema (III.3)

O sistema (III.3), dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -1 - x^2 + axy, \end{cases} \quad (2.36)$$

não possui pontos singulares finitos e, assim, iniciamos então o estudo dos pontos singulares infinitos.

Na carta local U_1 , o sistema (2.36) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = -1 + au - u^2 - v^2 \\ \dot{v} = -uv. \end{cases} \quad (2.37)$$

Quando $v = 0$, temos singularidades apenas quando $|a| \geq 2$. Se $|a| > 2$, então existem dois pontos singulares

$$w_1 = \left(\frac{(a + \sqrt{a^2 - 4})}{2}, 0 \right) \quad \text{e} \quad w_2 = \left(\frac{(a - \sqrt{a^2 - 4})}{2}, 0 \right).$$

Analisando a matriz Jacobiana em w_1 temos os autovalores $\lambda_1 = -\sqrt{a^2 - 4}$ e $\lambda_2 = -(a + \sqrt{a^2 - 4})/2$, portanto, quando $a < 0$, w_1 é uma sela hiperbólica e um nó estável hiperbólico, quando $a > 0$. Em contrapartida, os autovalores da matriz Jacobiana em w_2 são $\lambda_1 = \sqrt{a^2 - 4}$ e $\lambda_2 = -(a - \sqrt{a^2 - 4})/2$, portanto a matriz é hiperbólica. Assim, w_2 é uma sela hiperbólica quando $a > 0$ e um nó instável se $a < 0$. Quando $|a| = 2$ existe um único ponto singular $w = (a/2, 0)$. Suponha que $a = 2$ (analogamente quando $a = -2$), neste caso temos

$$\begin{cases} \dot{u} = -1 + 2u - u^2 - v^2 \\ \dot{v} = -uv, \end{cases} \quad (2.38)$$

logo a singularidade é semi-hiperbólica.

Substituindo $u = x + 1$ (ou resp. $u = x - 1$) e $v = y$, para transladar o ponto de equilíbrio w para a origem, obtemos

$$\begin{cases} \dot{u} = -x^2 - y^2 \\ \dot{v} = y(1 + x), \end{cases} \quad (2.39)$$

nos adequando as condições do Teorema 1.3 e, portanto, temos que w é uma sela-nó.

Na carta local U_2 o sistema (2.36) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - au + u^2 + v^2) \\ \dot{v} = -v(au - u^2 - v^2). \end{cases} \quad (2.40)$$

Claramente a origem é singular, cuja matriz Jacobiana tem autovalores 1 e 0. Assim, a origem é semi-hiperbólica e pelo Teorema 1.3, um nó instável.

Sistema (III.4)

O sistema (III.4), dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -1 + x^2 + axy, \end{cases} \quad (2.41)$$

tem como pontos singulares finitos $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (-1, 0)$. A matriz Jacobiana em P_1 tem autovalores $\lambda_{1,2} = (a \pm \sqrt{a^2 + 8})/2$. Desta maneira, P_1 é uma sela hiperbólica, para todo $a \in \mathbb{R}$. A matriz Jacobiana em P_2 tem autovalores $\lambda_{1,2} = (-a \pm \sqrt{a^2 + 8})/2$. Desta forma, P_2 é uma sela hiperbólica, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Estudando os pontos singulares infinitos, temos que o sistema (2.41) na carta local U_1 é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = au - v^2 - u^2 + 1 \\ \dot{v} = -uv. \end{cases} \quad (2.42)$$

Logo, existem dois pontos singulares, $w_1 = ((a + \sqrt{a^2 + 4})/2, 0)$ e $w_2 = ((a - \sqrt{a^2 + 4})/2, 0)$. Facilmente observamos que estas singularidades são hiperbólicas, uma vez que os autovalores da matriz Jacobina no ponto w_1 são $-\sqrt{4 + a^2}$ e $-(a + \sqrt{4 + a^2})/2$. Por outro lado, os autovalores da matriz Jacobina no ponto w_2 é $\sqrt{4 + a^2}$ e $-(a - \sqrt{4 + a^2})/2$. Posto isto, concluímos que w_1 é um nó estável e w_2 é um nó instável.

Na carta local U_2 o sistema (2.41) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - au - u^2 + v^2) \\ \dot{v} = -v(au + u^2 - v^2). \end{cases} \quad (2.43)$$

Claramente a origem é singular. Como os autovalores da matriz Jacobiana na origem são 1 e 0, concluímos que a singularidade é semi-hiperbólica. Utilizando o Teorema 1.3, temos que esta é um nó instável.

Sistema (III.5)

O sistema (III.5), ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = 1 - x^2 + axy \end{cases} \quad (2.44)$$

tem como pontos singulares finitos $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (-1, 0)$. A matriz Jacobiana em P_1 tem autovalores $\lambda_{1,2} = (a \pm \sqrt{a^2 - 8})/2$ e em P_2 tem autovalores $\lambda_{1,2} = (-a \pm \sqrt{a^2 - 8})/2$. Verificando os valores do parâmetro, constatamos que, se $a \neq 0$, temos que:

- $a^2 \geq 8$: Neste caso, P_1 é um nó estável hiperbólico e P_2 um nó instável hiperbólico, quando $a < 0$. Por outro lado, quando $a > 0$ temos que P_1 é um nó instável hiperbólico e P_2 um nó estável hiperbólico;
- $a^2 < 8$: Neste caso P_1 é um foco estável e P_2 um foco instável, quando $a < 0$. Quando $a > 0$ temos que P_1 é um foco instável e P_2 um foco estável hiperbólico.

Por outro lado, se $a = 0$ o sistema (2.44) tem uma integral primeira dada por

$$\mathcal{H} = x^2 e^{-(x^2 + y^2)}.$$

Logo, P_1 e P_2 são centros, vide Teorema de Poincaré-Lyapunov 1.8. É importante ressaltar que não é nada trivial estabelecer tal integral primeira, que geralmente é determinada por meios computacionais.

Com relação aos pontos singulares infinitos, temos que na carta U_1 o sistema (2.44) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = au - u^2 + v^2 - 1 \\ \dot{v} = -vu. \end{cases} \quad (2.45)$$

Neste caso, existem dois candidatos a singularidade quando $|a| > 2$, dados por

$$w_1 = \left(\frac{(a + \sqrt{a^2 - 4})}{2}, 0 \right) \quad \text{e} \quad w_2 = \left(\frac{(a - \sqrt{a^2 - 4})}{2}, 0 \right).$$

Existe uma única singularidade, dada por $w = (a/2, 0)$, quando $|a| = 2$. Perscrutando sobre o comportamento das singularidades temos que:

Para $|a| > 2$

- Os autovalores da matriz Jacobiana em w_1 são $\lambda_1 = (-\sqrt{a^2 - 4})$, $\lambda_2 = (-a + \sqrt{a^2 - 4})$. Assim, quando $a < 0$, w_1 é uma sela hiperbólica. Quando $a > 0$, w_1 é um nó estável.
- Os autovalores da matriz Jacobiana em w_2 são $\lambda_1 = \sqrt{a^2 - 4}$, $\lambda_2 = (-a + \sqrt{a^2 - 4})$. Assim, quando $a < 0$, w_2 é um nó instável. Quando $a > 0$, w_2 é uma sela.

Para $|a| = 2$

- Os autovalores da matriz Jacobiana em w são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. Assim, w é uma singularidade semi-hiperbólica. Depois de uma mudança de variável, podemos utilizar o Teorema 1.3 e concluir que w é uma sela-nó.

Na carta local U_2 , o sistema (2.44) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - au + u^2 - v^2) \\ \dot{v} = v(u^2 - au - v^2). \end{cases} \quad (2.46)$$

Claramente a origem é singularidade semi-hiperbólica. Utilizando então o Teorema 1.3, temos que a origem é uma sela.

Retratos de fase dos sistemas (III.1) à (III.5)

As famílias dos sistemas (III.1) à (III.5) possuem uma reta invariante dada por $x = 0$. Portanto, analogamente aos casos anteriores, eles não possuem ciclo limite. Além disto, sempre que o retrato de fase local tem dois focos, ele não possui ciclos limites devido à simetria em relação à origem.

A Tabela 2.3 apresenta as informações dos sistemas (III.1) ao (III.5) indicando seus retratos de fase consoante com seus parâmetros.

Família	Parâmetro	PSF	PSI	RF
(III.1)	$\mu = -1$	\emptyset	S NE NI	9
(III.1)	$\mu = 1$	\emptyset	NI NE S	10
(III.2)	$a \in \mathbb{R}$	\emptyset	NE NI S	10
(III.3)	$a > 2$	\emptyset	NE S NI	9
(III.3)	$a = \pm 2$	\emptyset	S-N NI	11
(III.3)	$a \in (-2, 2)$	\emptyset	NI	12
(III.3)	$a < -2$	\emptyset	S NE NI	9
(III.4)	$a \in \mathbb{R}$	2 S	NE 2 NI	13
(III.5)	$a \geq 2\sqrt{2}$	NI NE	NE 2 S	14
(III.5)	$a \in (2, 2\sqrt{2})$	FI FE	NE 2 S	14
(III.5)	$a = 2$	FI FE	S-N S	15
(III.5)	$a \in (0, 2)$	FI FE	S	16
(III.5)	$a = 0$	2 C	S	17
(III.5)	$a \in (-2, 0)$	FE FI	S	16
(III.5)	$a = -2$	FE FI	S-N S	15
(III.5)	$a \in (-2\sqrt{2}, -2)$	FE FI	NI 2 S	14
(III.5)	$a \leq -2\sqrt{2}$	NE NI	NI 2S	14

Tabela 2.3: Retratos de fase do sistema (2.11).

Note que a Tabela 2.3 usa as seguintes notações: PSF (pontos singulares finitos), PSI (pontos singulares infinitos), RF (Retrato de Fase), S (sela), NI (nó instável), NE (nó estável), FI (foco instável), C (centro) e S-N (sela-nó).

Podemos condensar estas informações com o estudo das singularidades e enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.4. *As famílias de sistemas (2.11) possuem 8 retratos de fase, topologicamente não equivalentes, mostrado na Figura 2.1 e distribuídos nas famílias da Proposição 2.4 da seguinte maneira:*

- (i) para o sistema (III.1) temos o retrato de fase 9 se $\mu = -1$ e 10 se $\mu = 1$;

- (ii) para o sistema (III.2) temos o retrato de fase 10;
- (iii) para o sistema (III.3) temos o retrato de fase 9 se $|a| > 2$, 11 se $|a| = 2$ e 12 se $a \in (-2, 2)$;
- (iv) para o sistema (III.4) temos o retrato de fase 13;
- (v) para o sistema (III.5) temos o retrato de fase 14 se $|a| > 2\sqrt{2}$, 15 se $|a| = 2$, 16 se $0 < |a| < 2$ e $a \neq 0$ e 17 se $a = 0$.

Capítulo 3

Sistemas Kukles

Neste capítulo, primeiramente, apresentamos os sistemas da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + Q(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $Q(x, y)$ é um polinômio de grau n , tal que $n > 1$. Tais sistemas são conhecidos na literatura como Sistemas Kukles. Kukles em 1944, em [12], propôs condições necessárias e suficientes, para que a origem desses sistemas seja um centro, quando

$$Q(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{30}y^3,$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{30}y^3. \end{cases} \quad (3.2)$$

Porém, em 1990, Jin e Wang, em [11], descreveram um exemplo em que a origem era um centro, mas não satisfazia as condições propostas por Kukles. Neste mesmo ano, Christopher e Lloyd [4] comprovaram tal exemplo e consideraram a classe de sistemas (3.2) com $a_{30} = 0$, conhecido como sistema Kukles reduzido, determinando as condições necessárias e suficientes para que este possua um centro na origem.

Em 2010, Pearson e Lloyd [16] consideraram as condições necessárias e suficientes para que os sistemas do tipo (3.2) tenha um centro na origem.

Neste trabalho iremos estudar o sistema Kukles reduzido, dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Mais especificamente, classificamos todos os retratos de fase globais no disco de Poincaré dos sistemas Kukles reduzido de ordem 3 com \mathbb{Z}_2 - simetria equivariante.

Primeiramente, realizamos um estudo discriminado do problema foco-centro para o caso do sistema Kukles reduzido. Utilizando a contextualização disposta no Capítulo 1, podemos apresentar e demonstrar o teorema a seguir.

3.1 Problema Foco-centro para o sistema Kukles Reduzido

Nesta seção resolvemos o problema foco-centro para o sistema Kukles reduzido. Mais especificamente, o teorema a seguir determina as condições necessárias e suficientes para que o sistema Kukles reduzido tenha um centro na origem, apresentado em [4].

Teorema 3.1. *O sistema Kukles reduzido (3.3) apresenta um centro na origem se, e somente se, pelo menos uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (i) $a_{21} = a_{11} = 0$;
- (ii) $a_{21} = a_{30} = a_{12} = a_{02} + a_{20} = 0$;
- (iii) $a_{02} = a_{20} = a_{21} = 0$;
- (iv) $a_{30} = a_{02}a_{20} + a_{02}^2$; $a_{21} = -a_{11}(a_{20} + a_{02})$ e $a_{02}^2(a_{20} + a_{02}) + a_{12}(2a_{02} + a_{20}) = 0$.

Demonstração. Seguindo o processo de Lyapunov descrito na Subseção 1.5 obtemos, com cálculos realizados no programa computacional Maple, os cinco primeiros coeficientes de Lyapunov. Omitiremos L_3, L_4 e L_5 pelas suas extensões. Eles são compostos, respectivamente, por 53, 136 e 298 termos. O primeiro e segundo coeficientes de Lyapunov do

sistema (3.3), na origem, são dados por:

$$\begin{aligned}
L_1 = \eta_4 &= \frac{1}{8}(a_{21} + a_{11}a_{20} + a_{02}a_{11}), \\
L_2 = \eta_6 &= \frac{37}{192}a_{02}a_{11}a_{30} + \frac{23}{192}a_{02}a_{11}a_{12} - \frac{47}{96}a_{02}a_{20}a_{21} - \frac{119}{96}a_{20}a_{02}^2a_{11} + \\
&+ \frac{19}{192}a_{12}a_{11}a_{20} - \frac{31}{48}a_{02}a_{11}a_{20}^2 + \frac{41}{192}a_{30}a_{11}a_{20} - \frac{7}{12}a_{02}^2a_{21} - \frac{31}{48}a_{11}a_{02}^3 + \\
&+ \frac{1}{192}a_{02}a_{11}^3 - \frac{5}{96}a_{20}^2a_{21} - \frac{5}{96}a_{11}a_{20}^3 + \frac{7}{64}a_{30}a_{21} + \frac{5}{64}a_{21}a_{12} + \frac{1}{192}a_{21}a_{11}^2 + \\
&+ \frac{1}{192}a_{20}a_{11}^3.
\end{aligned}$$

A ideia central da prova deste teorema é mostrar que o conjunto $B = \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$ é uma base focal do sistema (3.3). Com esses coeficientes em mãos, calculamos a base de Groebner do ideal gerado por eles. Para tais cálculos, utilizamos o programa Maple. Em resumo, a base de Groebner do ideal gerado pelos cinco primeiros coeficientes de Lyapunov do sistema Kukles reduzido é dada por B_1, B_2, \dots, B_k com $k = 1, \dots, 12$, onde os elementos desta base são:

$$B_1 = a_{11}a_{02}^5(a_{02} + a_{20})^3(a_{02}^3 + a_{02}^2a_{20} + 2a_{02}a_{12} + a_{20}a_{12});$$

$$B_2 = -a_{11}a_{02}^4(5a_{02} - a_{20})(a_{02} + a_{20})^3(a_{02}^3 + a_{02}^2a_{20} + 2a_{02}a_{12} + a_{20}a_{12});$$

$$B_3 = a_{11}a_{02}^2(201345a_{02}^2 + 336882a_{02}a_{20} + 140105a_{20}^2)(a_{02} + a_{20})^3(a_{02}^3 + a_{02}^2a_{20} + 2a_{02}a_{12} + a_{20}a_{12});$$

$$B_4 = a_{11}(2285289a_{02}^3 + 5315985a_{02}^2a_{20} + 4082385a_{02}a_{20}^2 + 1035245a_{20}^3)(a_{02} + a_{20})^3(a_{02}^3 + a_{02}^2a_{20} + 2a_{02}a_{12} + a_{20}a_{12});$$

$$B_5 = -a_{02}a_{11}(a_{02}^3 + a_{02}^2a_{20} + 2a_{02}a_{12} + a_{20}a_{12})(37649163a_{02}^5 + 180232913a_{02}^4a_{20} - 13358a_{12}a_{02}^3 + 344716079a_{02}^3a_{20}^2 + 329242389a_{02}^2a_{20}^3 + 157009020a_{02}a_{20}^4 + 29898960a_{20}^5);$$

$$B_6 = -a_{11}(a_{02}^3 + a_{02}^2a_{20} + 2a_{02}a_{12} + a_{20}a_{12})(33a_{02}^3 + 103a_{02}^2a_{20} + 105a_{02}a_{20}^2 - 10a_{02}a_{12} + 35a_{20}^3 - 8a_{20}a_{12});$$

$$B_7 = -a_{11}(a_{02}^3 + a_{02}^2a_{20} + 2a_{02}a_{12} + a_{20}a_{12})(89337a_{02}^5 + 412667a_{02}^4a_{20} + 754565a_{02}^3a_{20}^2 + 262a_{12}a_{02}^3 + 680295a_{02}^2a_{20}^3 - 768a_{02}a_{20}^2 + 301140a_{02}a_{20}^4 + 52080a_{20}^5);$$

$$B_8 = -a_{11} (a_{02}^3 + a_{02}^2 a_{20} + 2 a_{02} a_{12} + a_{20} a_{12}) (977780424 a_{02}^6 + 4673203859 a_{02}^5 a_{20} + 8923932273 a_{02}^4 a_{20}^2 - 414098 a_{12} a_{02}^4 + 8510792003 a_{02}^3 a_{20}^3 + 4053286405 a_{02}^2 a_{20}^4 + 414098 a_{02}^2 a_{12}^2 + 771003240 a_{02} a_{20}^5 - 414098 a_{12}^3);$$

$$B_9 = -a_{11} (3024429 a_{02}^7 + 12179764 a_{20} a_{02}^6 + 19219760 a_{02}^5 a_{20}^2 + 5997464 a_{12} a_{02}^5 + 14650300 a_{02}^4 a_{20}^3 + 21298777 a_{20} a_{12} a_{02}^4 + 5268375 a_{02}^3 a_{20}^4 + 29284185 a_{12} a_{02}^3 a_{20}^2 + 17500 a_{02}^3 a_{12}^2 + 682500 a_{02}^2 a_{20}^5 + 19236175 a_{02}^2 a_{20}^3 a_{12} + 38750 a_{20} a_{02}^2 a_{12}^2 + 5950875 a_{12} a_{02} a_{20}^4 + 120000 a_{02} a_{12}^3 + 682500 a_{20}^5 a_{12} + 60000 a_{20} a_{12}^3 - 15072 a_{30} a_{02}^5);$$

$$B_{10} = -a_{11} (5 a_{02} a_{20}^2 + 8 a_{02}^2 a_{20} + 3 a_{02}^3 - 4 a_{02} a_{30} - 2 a_{02} a_{12} - 5 a_{20} a_{30} - a_{20} a_{12});$$

$$B_{11} = a_{11} (847 a_{12} a_{02}^2 a_{20} + 90 a_{02} a_{12} a_{30} + 735 a_{02} a_{20}^2 a_{12} + 560 a_{02}^3 a_{20}^2 + 589 a_{02}^4 a_{20} + 204 a_{02}^5 + 3 a_{02}^3 a_{30} + 284 a_{12} a_{02}^3 - 80 a_{02} a_{12}^2 + 175 a_{02}^2 a_{20}^3 + 175 a_{20}^3 a_{12} - 40 a_{20} a_{12}^2);$$

$$B_{12} = a_{21} + a_{11} a_{20} + a_{02} a_{11}.$$

Segue da Teoria das Bases de Groebner [6], que o conjunto de pontos que anula o conjunto B é equivalente ao conjunto de pontos que anula a base de Groebner $\beta = \{B_1, \dots, B_{12}\}$. Desta forma vamos analisar os zeros da base β . Iniciamos com o polinômio B_1 , primeiramente observamos que B_1 é produto dos seguintes fatores

$$a_{11}, \quad a_{02}, \quad a_{02} + a_{20} \quad \text{e} \quad a_{02}^3 + a_{02}^2 a_{20} + 2 a_{02} a_{12} + a_{20} a_{12}.$$

Assim $B_1 = 0$ se, e somente se, cada um desses fatores se anula.

Daqui em diante consideraremos os seguintes conjuntos

$$\beta_1 = \{a_{11}, B_2, \dots, B_{12}\},$$

$$\beta_2 = \{a_{02}, B_2, \dots, B_{12}\},$$

$$\beta_3 = \{a_{02} + a_{20}, B_2, \dots, B_{12}\},$$

$$\beta_4 = \{a_{02}^3 + a_{02}^2 a_{20} + 2 a_{02} a_{12} + a_{20} a_{12}, B_2, \dots, B_{12}\}.$$

Calculando a base de Groebner de β_1 obtemos exatamente $a_{21} = a_{11} = 0$ que é a condição (i) do teorema. Em seguida calculamos a base de Groebner de β_2 , esta é dada por:

$$\{a_{02}, \quad a_{12} a_{11} a_{20}^5, \quad a_{12} a_{11} a_{20} (-35 a_{20}^2 + 8 a_{12}), \quad a_{11} a_{20} (5 a_{30} + a_{12}), \quad a_{11} a_{20} + a_{21}\}.$$

Como queremos encontrar os zeros dos polinômios que geram esta base, passamos a estudar os zeros comuns dos seguintes polinômios denotados por P_i , $i = 1, \dots, 5$:

$$P_1 = a_{02}, \quad P_2 = a_{12} a_{11} a_{20}^5, \quad P_3 = a_{12} a_{11} a_{20} (-35 a_{20}^2 + 8 a_{12}),$$

$$P_4 = a_{11} a_{20} (5 a_{30} + a_{12}), \quad P_5 = a_{11} a_{20} + a_{21}.$$

De P_1 obtemos $a_{02} = 0$. Em seguida, devemos impor que P_2 seja o polinômio nulo. Para que isso ocorra temos que considerar os seguintes casos:

CASO 1) A primeira possibilidade é $a_{20} = 0$, quando isso ocorre, implica de imediato que $P_2 = P_3 = P_4 = 0$ e $P_5 = a_{21}$. Para anular também P_5 basta impor que $a_{21} = 0$. Logo, concluímos que uma condição para o anulamento de todos P_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ é $a_{02} = a_{20} = a_{21} = 0$, o que prova o item (iii).

CASO 2) A segunda possibilidade é considerar $a_{11} = 0$. Novamente, neste caso, temos de imediato que $P_2 = P_3 = P_4 = 0$ e $P_5 = a_{21}$, para anular P_5 basta impormos que $a_{21} = 0$. Então, concluímos que uma condição para o anulamento é $a_{21} = a_{11} = 0$ que é o caso (i) já analisado.

CASO 3) A terceira possibilidade é $a_{12} = 0$, neste caso temos

$$P_2 = P_3 = 0, \quad P_4 = 5 a_{30} a_{11} a_{20} \quad \text{e} \quad P_5 = a_{11} a_{20} + a_{21}.$$

Logo, devemos impor que $P_4 = 0$. Desta forma, temos alguns casos a analisar:

- 3.1) Se $a_{11} = 0$, então $P_5 = a_{21}$. Assim, $a_{21} = 0$, que novamente nos dá o item (i), já demonstrado.
- 3.2) Se $a_{20} = 0$, então $P_5 = a_{21}$. Assim, $a_{21} = 0$, que novamente nos dá o item (iii), já demonstrado.
- 3.3) Finalmente, se $a_{30} = 0$, temos $P_5 = a_{11} a_{20} + a_{21} = 0$, que juntamente com as condições $a_{02} = a_{12} = 0$ é um caso particular do item (iv) do teorema.

Passamos agora para a análise do conjunto β_3 . A base de Groebner de β_3 é dada por

$$\{a_{02} + a_{20}, \quad a_{02} a_{11} a_{12}^2, \quad -a_{02} a_{11} (-a_{30} + a_{12}), \quad a_{21}\}.$$

Novamente, como queremos encontrar os zeros dos polinômios que geram essa base, pasamos a estudar os zeros dos seguinte polinômios:

$$\begin{aligned} M_1 &= a_{02} + a_{20}; & M_2 &= a_{02} a_{11} a_{12}^2; \\ M_3 &= -a_{02} a_{11} (-a_{30} + a_{12}); & M_4 &= a_{21}. \end{aligned}$$

Com cálculos análogos ao que fizemos para as bases anteriores, obtemos, neste caso, os itens (i), (ii) e (iii) do teorema.

Finalmente, resta calcular a base de Groebner do conjunto β_4 . Esta base é dada por:

$$\begin{aligned} W = \{ & a_{02}^3 + a_{02}^2 a_{20} + 2 a_{02} a_{12} + a_{20} a_{12}, & -a_{11} (4 a_{02} + 5 a_{20}) (a_{02}^2 + a_{02} a_{20} - a_{30}), \\ & -a_{11} a_{02}^3 (a_{02}^2 + a_{02} a_{20} - a_{30}), & a_{02} a_{11} (a_{12} a_{30} + a_{02}^4 + a_{02}^3 a_{20} + a_{12} a_{02}^2), \\ & a_{21} + a_{11} a_{20} + a_{02} a_{11} \}. \end{aligned}$$

Vemos que 3 polinômios desta base possuem os fatores a_{11} ou a_{02} . Desta forma, podemos calcular a base Groebner do conjunto obtido de β_4 , removendo os fatores a_{11} ou a_{02} nos respectivos polinômios. Essa nova base de Groebner, a qual denotamos por Q , é dada por:

$$Q = \{ a_{02}^3 + a_{02}^2 a_{20} + 2 a_{02} a_{12} + a_{20} a_{12}, \quad a_{30} - a_{02}^2 - a_{02} a_{20}, \quad a_{21} + a_{11} a_{20} + a_{02} a_{11} \}.$$

Encontrando os zeros comuns desta base, obtemos exatamente o item (iv) do teorema. Com isso demonstramos a primeira parte do teorema, ou seja, que se L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 são nulos, então, pelo menos um dos itens (i), (ii), (iii) ou (iv) ocorrem.

Passamos agora à segunda parte da prova do teorema, isto é, queremos mostrar que assumindo os itens (i), (ii), (iii) ou (iv) os respectivos sistemas terão um centro na origem. Para provar este fato dividiremos nosso estudo nos seguintes casos:

Caso i) $a_{21} = a_{11} = 0$.

Substituindo esses valores de parâmetros no sistema (3.3) obtemos o seguinte novo sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{12}xy^2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Tal sistema é do tipo tempo-reversível. De fato, definindo $R(x, y) = (x, -y)$ e sendo $\mathcal{X}(x, y)$ o campo associado ao sistema (3.4), então temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(R(x, y)) &= (x', -y') \\ &= (y, x - a_{20}x^2 - a_{02}y^2 - a_{30}x^3 - a_{12}xy^2) \\ &= -(-y, -x + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{12}xy^2) \\ &= -\mathcal{X}(R(x, y)). \end{aligned}$$

Logo segue do Teorema 1.9 que a origem é um centro.

Caso ii) $a_{21} = a_{30} = a_{12} = a_{02} + a_{20} = 0$.

Substituindo esses valores de parâmetros no sistema (3.3) obtemos o seguinte novo sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + a_{20}x^2 + a_{11}xy - a_{20}y^2. \end{cases} \quad (3.5)$$

É fácil ver que (3.5) é, novamente, do tipo tempo-reversível. Assim, pelo Teorema 1.9, a origem é um centro.

Caso iii) $a_{02} = a_{20} = a_{21} = 0$.

Substituindo esses valores de parâmetros no sistema (3.3) obtemos o novo seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{12}xy^2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Esse sistema também é do tipo tempo-reversível, logo a origem é um centro.

Caso iv) $a_{30} = a_{02}(a_{20} + a_{02})$, $a_{21} = -a_{11}(a_{20} + a_{02})$ e $a_{02}^2(a_{20} + a_{02}) + a_{12}(2a_{02} + a_{20}) = 0$.

Substituindo esses valores de parâmetros no sistema (3.3) obtemos o sistema

$$\begin{cases} x' = P(x, y) = y, \\ y' = Q(x, y) = -x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + (a_{02}a_{20} + a_{02}^2)x^3 - a_{11}(a_{20} + a_{02})x^2y \\ \quad - \frac{a_{02}^2(a_{20} + a_{02})}{2a_{02} + a_{20}}xy^2. \end{cases} \quad (3.7)$$

Fixando a seguinte notação

$$k = a_{20} + a_{02}, \quad \lambda = k^{-1}a_{02} \quad \text{e} \quad \mu = \lambda^2(1 + \lambda)^{-1},$$

depois de alguns cálculos, verificamos que

$$\frac{\partial}{\partial x}(IP) = -\frac{\partial}{\partial y}(IQ),$$

onde

$$I(x, y) = \frac{1}{\lambda^2 k^2 x^2 - \lambda k a_{11} x y - \lambda \mu k^2 y^2 + 2\lambda k x - a_{11} y + 1}.$$

Portanto, o sistema (3.7) tem um fator integrante. Segue da Proposição 1.5 que podemos definir um integral primeira para o sistema (3.7) cuja expansão de Taylor na origem (depois de uma mudança de coordenadas adequada) tem a forma

$$H(x, y) = x^2 + y^2 + \dots .$$

Logo, pelo Teorema 1.8, a origem é um centro. ■

3.2 Sistemas Kukles reduzido \mathbb{Z}_2 -equivariantes

Considere o sistema Kukles reduzido (3.3) e observe que tal sistema possui seis parâmetros e, atualmente, podemos considerar a classificação completa de seus retratos de fase uma tarefa bem complexa. Então, nesta seção, vamos nos restringir àqueles que possuem \mathbb{Z}_2 -simetria equivariante, conforme a Definição 2.1. A classificação completa dos sistemas Kukles com \mathbb{Z}_2 -simetrias pode ser encontrada no artigo [7] e no preprint [8].

A proposição a seguir caracteriza todos os sistemas Kukles reduzido \mathbb{Z}_2 -equivariantes.

Proposição 3.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

(i) *O sistema (3.3), satisfazendo (2.5), torna-se*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2, \end{cases} \quad (3.8)$$

com $a_{30}, a_{21}, a_{12} \in \mathbb{R}$;

(ii) O sistema (3.3), satisfazendo (2.3) ou (2.4), não é \mathbb{Z}_2 -equivariante.

Demonstração. A prova desta proposição é análoga à da Proposição (2.1) e, portando, a omitimos. ■

Iniciamos a demonstração do Teorema 3.2 dividindo o sistema (3.8) em dois novos sistemas como mostra a proposição a seguir.

Proposição 3.2. *Considere o sistema (3.8). Após uma mudança linear de variáveis e reescalonamento da variável independente t , podemos reescrevê-lo como um dos seguintes sistemas:*

$$(IV.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + ax^3 + bxy^2; \end{cases}$$

$$(IV.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^2y + ax^3 + bxy^2 \end{cases}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

Demonstração. A demonstração é análoga à da Proposição 2.2. ■

Abaixo segue o principal resultado desta seção.

Teorema 3.2. *As famílias dos sistemas (3.8) tem 17 retratos de fase não topologicamente equivalentes, distribuídos dentro das famílias da Proposição 3.2 como segue:*

(i) *A família (IV.1) tem 7 retratos de fase não topologicamente equivalentes, os quais são os retratos 1-7 da Figura 3.1;*

(ii) *A família (IV.2) tem 10 retratos de fase não topologicamente equivalentes, os quais são os retratos 8-17 da Figura 3.1.*

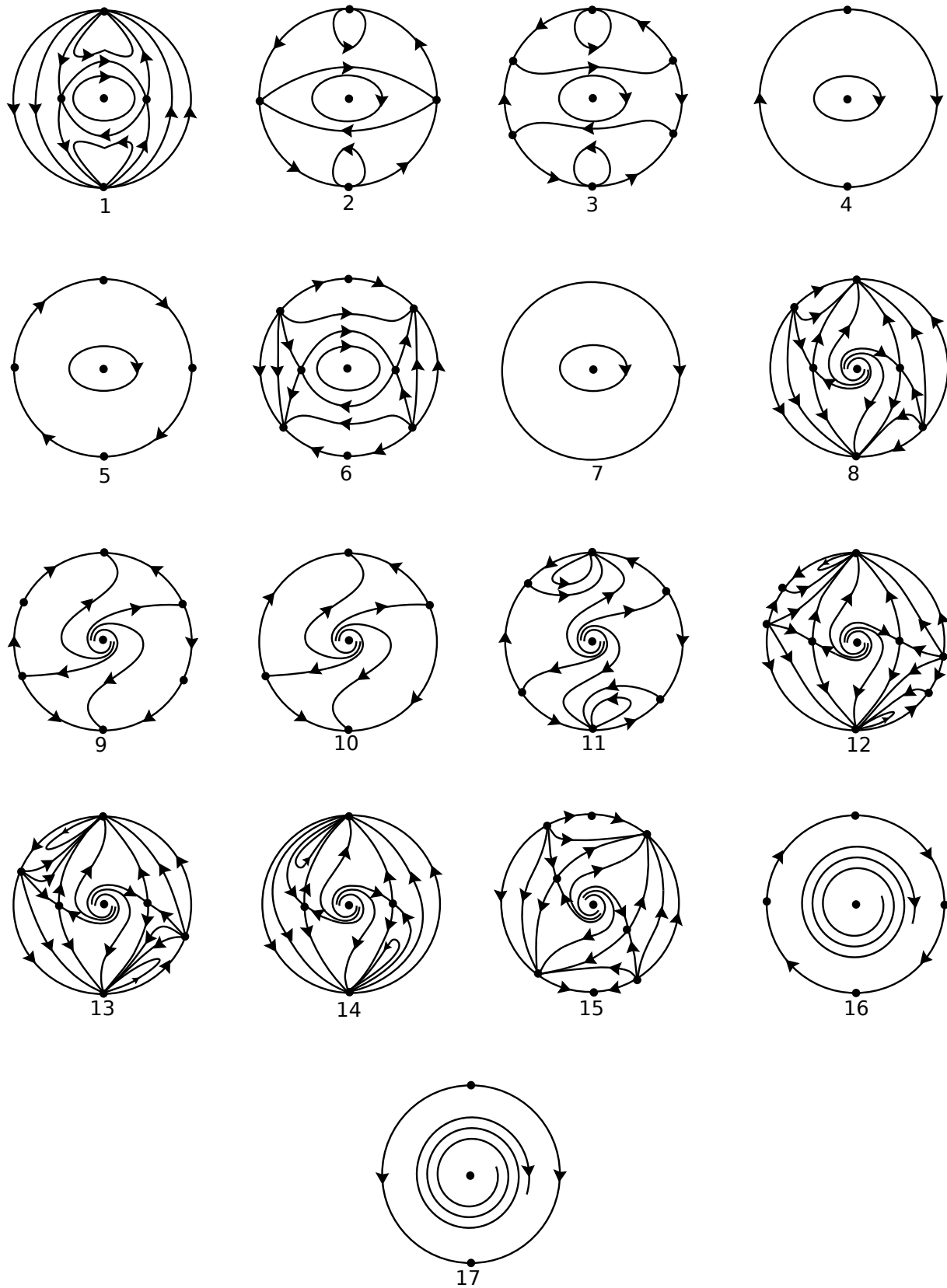


Figura 3.1: Retratos de fase globais do sistema Kukles reduzido com \mathbb{Z}_2 -simetria equivariante.

Iniciamos na subsecção seguinte nosso estudo do sistema (IV.1).

Sistema (IV.1)

Considere o sistema (IV.1), ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + ax^3 + bxy^2. \end{cases} \quad (3.9)$$

Primeiramente, se $a > 0$, então, temos três singularidades

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (1/\sqrt{a}, 0) \quad \text{e} \quad P_2 = (-1/\sqrt{a}, 0).$$

Neste caso, temos que P_1 e P_2 são singularidades hiperbólicas, cujos autovalores da matriz Jacobiana são $\pm\sqrt{2}$, portanto ambos são selas. Agora, a matriz Jacobiana em P_0 tem autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i$. Como o sistema é não linear, devemos determinar se a origem é um foco ou um centro. O sistema (3.9) satisfaz, por exemplo, o item (i), do Teorema 3.1, o que nos garante que P_0 é um centro para qualquer valor de a . Vamos admitir, agora, que $a \leq 0$, então o sistema (3.9) tem uma única singularidade, a origem, que, como anteriormente, é um centro.

Quando $a = b = 0$ o sistema (3.9) torna-se linear, sendo a origem a única singularidade e, pela Definição 1.9, esta é um centro.

Passando nosso estudo para os pontos singulares infinitos, novamente, nos embasando no ferramental da compactificação de Poincaré. O sistema (3.9) na carta local U_1 é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = a + bu^2 - v^2(u^2 + 1) \\ \dot{v} = -v^3u. \end{cases} \quad (3.10)$$

Podemos notar que os pontos singulares do sistema (3.10) são $(w, 0)$, onde w são as raízes do polinômio $bu^2 + a$. Portanto, só há pontos singulares quando $ab \leq 0$ e $b \neq 0$. Neste caso, $w_1 = (\sqrt{-a/b}, 0)$ e $w_2 = (-\sqrt{-a/b}, 0)$.

Se $ab < 0$, então os pontos w_1 e w_2 serão semi-hiperbólicos e utilizando o Teorema 1.3, concluímos que:

- w_1 e w_2 são selas, quando $a < 0$;
- w_1 é um nó estável e w_2 é um nó instável, quando $a > 0$;

Se $a = 0$ temos que a origem é o único ponto singular, cuja matriz Jacobiana é identicamente nula. Aplicando a técnica de *blow-up* temos que a origem possui seis setores hiperbólicos, se $b > 0$, e dois setores hiperbólicos, se $b < 0$, como mostrado na Figura 3.2.

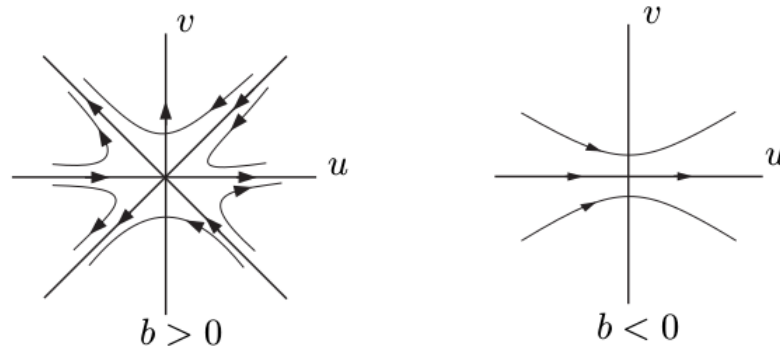


Figura 3.2: Retrato de fase local da origem na carta local U_1 quando $a = 0$.

O sistema (3.9) na carta local U_2 é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = -au^3 - bu^2 + v^2(u^2 + 1) \\ \dot{v} = -vu(b + au^2 - v^2). \end{cases} \quad (3.11)$$

Claramente a origem é singular, cuja parte linear é zero. Usando as técnicas do *blow-up*, depois de alguns cálculos fáceis, porém longos, obtemos que se:

- $b > 0$ a origem é composta por dois setores elípticos;
- $b < 0$ a origem é composta por dois setores hiperbólicos;
- $b = 0$ e $a > 0$ temos que a origem é composta por dois setores elípticos;
- $b = 0$ e $a < 0$ a origem é composta por dois setores hiperbólicos.
- $a = b = 0$ a origem não é ponto singular.

Sistema (IV.2)

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^2y + ax^3 + bxy^2. \end{cases} \quad (3.12)$$

É fácil ver que os candidatos a pontos singulares do sistema (3.12) são

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (1/\sqrt{a}, 0) \quad \text{e} \quad P_2 = (-1/\sqrt{a}, 0).$$

Quando $a \leq 0$ temos que o sistema (3.12) tem apenas a origem como singularidade. A matriz Jacobiana aplicada na origem tem como autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i$. Fazendo as adaptações dos coeficientes, nos cálculos dos coeficientes de Lyapunov, apresentada na prova do Teorema 3.1, obtemos que $L_1 = 1/8$. Portanto, pelo Teorema 1.6, a origem é um foco instável.

Quando $a > 0$, a matriz Jacobiana nos pontos P_1 e P_2 tem como autovalores

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{8a^2 + 1}}{2a}.$$

Portanto ambos são selas hiperbólicas.

Passando para análise dos pontos singulares infinitos, temos que na carta local U_1 , o sistema (3.12) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = -v^2u^2 - v^2 + u + a + bu^2 \\ \dot{v} = -v^3u. \end{cases} \quad (3.13)$$

Quando $v = 0$ e supondo $b \neq 0$, temos

$$w_1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - 4ab}}{2b}, 0 \right) \quad \text{e} \quad w_2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{1 - 4ab}}{2b}, 0 \right)$$

como singularidades. Por outro lado, se $b = 0$, o sistema (3.13) tem apenas $(-a, 0)$ como singularidade. O estudo destas singularidades segue de forma similar aos casos estudados anteriormente. Assim, apresentamos o resultado final na Tabela 3.1.

Parâmetros		Pontos Singulares Infinitos
$b > 0$	$ab \leq 0$	2 S
	$0 < ab < 1/4$	NI S
	$ab = 1/4$	2P2H
	$ab > 1/4$	\emptyset
$b < 0$	$ab < 0$	NE NI
	$0 \leq ab < 1/4$	NI S
	$ab = 1/4$	2H
	$ab > 1/4$	\emptyset
$b = 0$	$a > 0$	NI
	$a \leq 0$	S

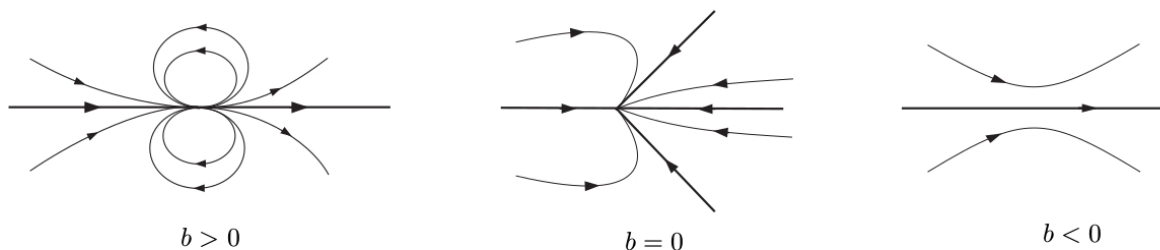
Tabela 3.1: Pontos Singulares Infinitos na carta local U_1 .

A Tabela 3.1 tem a seguinte notação: NI (nó instável), NE (nó estável), S (sela), 2P2H (dois setores parabólicos e dois setores hiperbólicos) e 2H (dois setores hiperbólicos).

Na carta U_2 , o sistema (3.12) é dado por

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2(v^2 - u - au^2 - b) + v^2 \\ \dot{v} = -vu(u + au^2 + b - v^2). \end{cases} \quad (3.14)$$

Claramente a origem é uma singularidade e esta é degenerada. Utilizando a técnica de *blow-up*, depois de alguns cálculos, concluímos que a origem é um nó estável, quando $b = 0$, possui dois setores elípticos e dois setores parabólicos, quando $b > 0$ e apresenta dois setores hiperbólicos, quando $b < 0$, como mostrado na Figura 3.3.

Figura 3.3: Retrato de fase local da origem na carta local U_2 do sistema (IV.2).

Retrato de fases do sistema (IV.1) e (IV.2)

As informações acerca das singularidades do sistema (3.8) e suas famílias listadas na Proposição 3.2, levando em consideração seus parâmetros e os respectivos retratos de fase estão apresentados na Tabela 3.2.

Família	Parâmetro	PSF	PSI	RF
(IV.1)	$a > 0, b \geq 0$	C 2S	2E	1
(IV.1)	$a = 0, b > 0$	C	6H 2E	2
(IV.1)	$a < 0, b > 0$	C	2S 2E	3
(IV.1)	$a < 0, b \leq 0$	C	2H	4
(IV.1)	$a = 0, b < 1$	C	2H 2H	5
(IV.1)	$a > 0, b < 0$	C 2S	NE NI 2H	6
(IV.1)	$a > 1, b = 0$	C 2S	2E	1
(IV.1)	$a = 0, b = 0$	C	\emptyset	7
(IV.2)	$a \leq 0, b > 0$	FI	2S 2E2P	11
(IV.2)	$0 < ab < 1/4, b > 0$	FI 2S	NI 2E2P	12
(IV.2)	$ab = 1/4, b > 0$	FI 2S	2H2P 2E2P	13
(IV.2)	$ab > 1/4, b > 0$	FI 2S	2E2P	14
(IV.2)	$a > 0, b < 0$	FI 2S	NI S-N 2H	15
(IV.2)	$0 \leq ab < 1/4, b < 0$	FI	S-N S 2H	9
(IV.2)	$ab = 1/4, b < 0$	FI	2H	16
(IV.2)	$ab > 1/4, b < 0$	FI	2H	17
(IV.2)	$a > 0, b = 0$	FI S	NI S-N	8
(IV.2)	$a \leq 0, b = 0$	FI	S S-N	10

Tabela 3.2: Retratos de fase do sistema (3.8).

A notação utilizada na Tabela 3.2 é a seguinte: PSF (ponto singular finito), PSI (ponto singular infinito), C (centro), S (sela), 2E (dois setores elípticos), 6H (seis setores hiperbólicos), 2H (dois setores hiperbólicos), NI (nó instável), NE (nó estável), FI (foco instável), FE (Foco estável), 2E2P (dois setores elípticos e dois parabólicos) e S-N (Sela-nó).

No que segue apresentamos os diagramas de bifurcação dos sistemas (IV.1) e (IV.2).

Para a análise do diagrama de bifurcação e os respectivos retratos da fase globais

no disco de Poincaré do sistema (IV.1) consideramos as seguintes curvas e regiões de bifurcação, conforme Figura 3.4, encontradas a partir dos valores de seus parâmetros.

$$C_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0, b > 0\}; \quad C_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a < 0, b = 0\};$$

$$C_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0, b < 0\}; \quad C_4 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0, b = 0\}.$$

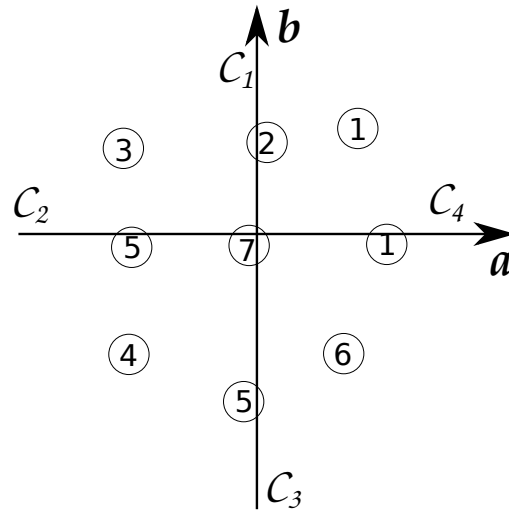


Figura 3.4: Diagrama de bifurcação do sistema (IV.1).

Para a análise do diagrama de bifurcação e os respectivos retratos da fase globais no disco de Poincaré do sistema (IV.2), consideramos as seguintes curvas e regiões de bifurcação, encontradas a partir dos valores da variação dos parâmetros, como mostrado na Figura 3.5.

$$C_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0, b > 0\}; \quad C_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = 1/4, b > 0\};$$

$$C_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0, b = 0\}; \quad C_4 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0, b < 0\}$$

$$C_5 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = 1/4, b < 0\}; \quad C_6 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a < 0, b = 0\}.$$

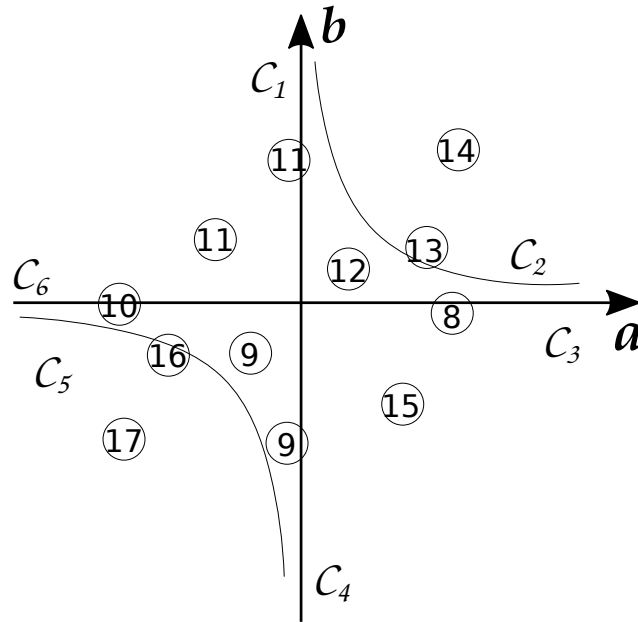


Figura 3.5: Diagrama de bifurcação do sistema(IV.2).

Usando as informações sobre os retratos de fase locais descritos anteriormente, a simetria dos sistemas (IV.1) e (IV.2) em relação à origem e os diagramas de bifurcação dos respectivos sistemas, podemos organizar todos os retratos de fase globais do sistema (3.8), no seguinte teorema.

Teorema 3.3. *As famílias do sistema (3.8) possuem 17 retratos de fase globais, não topologicamente equivalentes, distribuídos nas famílias da Proposição 3.2 da seguinte maneira:*

(i) *Para o sistema (IV.1) temos:*

- (i1) *o retrato de fase 1 se $a > 0$ e $b \geq 0$ ou se $a > 1$ e $b = 0$;*
- (i2) *o retrato de fase 2 se $a = 0$ e $b > 0$;*
- (i3) *o retrato de fase 3 se $a < 0$ e $b > 0$;*
- (i4) *o retrato de fase 4 se $a < 0$ e $b \leq 0$;*
- (i5) *o retrato de fase 5 se $a = 0$ e $b < 1$;*
- (i6) *o retrato de fase 6 se $a > 0$ e $b < 0$;*
- (i7) *o retrato de fase 7 se $a = b = 0$.*

(ii) Para o sistema (IV.2) temos:

(ii1) o retrato de fase 8 se $a > 0$ e $b = 0$;

(ii2) o retrato de fase 9 se $0 \leq ab < 1/4$ e $b < 0$;

(ii3) o retrato de fase 10 se $a \geq 0$ e $b = 0$;

(ii4) o retrato de fase 11 se $a \leq 0$ e $b > 0$;

(ii5) o retrato de fase 12 se $0 < ab < 1/4$ e $b > 0$;

(ii6) o retrato de fase 13 se $ab = 1/4$ e $b > 0$;

(ii7) o retrato de fase 14 se $ab > 1/4$ e $b > 0$;

(ii8) o retrato de fase 15 se $a > 0$ e $b < 0$;

(ii9) o retrato de fase 16 se $ab = 1/4$ e $b < 0$;

(ii10) o retrato de fase 17 se $ab > 1/4$ e $b < 0$.

Como apresentado na Figura 3.1.

Conclusões

Neste trabalho realizou-se uma análise qualitativa acerca de sistemas diferenciais polinomiais de dois tipos específicos, Abel e Kukles. Mais especificamente, estudamos os sistemas diferenciais polinomiais quadráticos de Abel e os sistemas Kukles reduzido, ambos apresentando \mathbb{Z}_2 -simetrias.

Toda análise desenvolvida transcorreu um caminho de entendimento qualitativo dos pontos singulares hiperbólicos, semi-hiperbólicos, nilpotentes e degenerados. Transitou-se por conhecimentos envolvendo o problema foco-centro para sistemas planares, sobre coeficientes de Lyapunov, integral primeira e fator integrante, dentre outros conteúdos necessários para abordar as questões que envolveram os sistemas analisados.

Esta dissertação enriqueceu o conhecimento sobre o estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias, além de proporcionar um contato mais profundo com *softwares* matemáticos essenciais na área.

Nosso estudo findou-se na elaboração de todos os retratos de fase globais para os dois sistemas citados acima, com simetrias e de acordo com a variação de seus parâmetros.

Referências Bibliográficas

- [1] Artés, J. C., Llibre, J., Dumortier, F., Herssens, C., De Maesschalck, P., *Computer program P4 to study Phase Portraits of Planar Polynomial differential equations*.
- [2] Barreira, L., Valls, C., *Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory*, tradução realizada pelos professores da Graduate Studies in Mathematics, 137. American Mathematical Society Providence, Rhode Island. 2010.
- [3] Chicone, C., *Ordinary Differential Equations with Applications*, Applied Mathematical, Springer-Verlag, New York. 1999.
- [4] Christopher, C., J. Lloyd, N. G., *On the paper of Jin and Wang concerning the conditions for a centre in certain cubic systems*, Bull. London Math. Soc. 22, 5–12. 1990.
- [5] Coppel W. A., *Some Quadratic Systems with at most One Limit Cycle*. In: Kirchgaber U., Walther H.O. (eds) Dynamics Reported. Dynamics Reported, 2. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden. 1989.
- [6] Cox, D., Little, J., OShea, D., *Ideal, Varieties, and Algorithms*. Springer-Verlag. 1992.
- [7] Dias, F. S., Ribeiro, R. M., Valls, C., *Global Phase Portraits for a planar \mathbb{Z}_2 -equivariant Kukles systems of degree 3*. Aceito em Int. J. Bifurcation and Chaos. 2020.
- [8] Dias, F. S., Ribeiro, R. M., Valls, C., *Global Phase Portraits for the Kukles Systems of degree 3 with \mathbb{Z}_2 -Reversible Symmetries*. Preprint. 2020.

- [9] Dumortier, F., Llibre, J., Artés, J. C., *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer Verlag, New York. 2006.
- [10] Ferragut A., Valls C., *Phase Portraits of Abel Quadratic Differential Systems of Second Kind*, Dynamical Systems An International Journal 33. 2017.
- [11] Jin, X., Wang, D., *On the conditions of Kukles for the existence of a center*, Bull. London Math. Soc. 22, 1–4. 1990.
- [12] Kukles, I. S. *Sur quelques cas de distinction entre un foyer et un centre*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 42, 208–211. 1944.
- [13] Llibre, J., Valls, C., *Global phase portraits for the Abel quadratic polynomial differential equations of the second kind with \mathbb{Z}_2 -symmetries*, Canad. Math. Bull. 61, 149–165. 2018.
- [14] Markus, L., *Global structure of ordinary differential equations in the plane*, Trans. Amer. Math Soc. 76 , 127–148. 1954.
- [15] Neumann, D. A., *Classification of continuous flows on 2-manifolds*. Proc. Amer. Math. Soc. 48, 73–81. 1975.
- [16] Pearson, J. M., Lloyd, N. G., *Kukles revisited: Advances in computing techniques*, Computers and Mathematics with Applications. 60, 2797–2805. 2010.
- [17] Peixoto M. M., *Dynamical Systems. Proceedings of a Symposium*, held at the University of Bahia, Acad. Press, New York, 389–420. 1973.
- [18] Romanovski, V.G., Shafer, D.S., *The Center and Cyclicity Problems: A Computational Algebra Approach*, Boston-Basel-Berlin, Birkhauser. 2009.
- [19] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro. 1979.