

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Considerações sobre espaços-tempos LRS Bianchi-I

William Osnyder Clavijo Esquivel

Orientador: Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 1 DE JUNHO DE 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Considerações sobre espaços-tempos LRS Bianchi-I

**William Osnyder Clavijo Esquivel**

**Orientador: Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração:

Geometria e Topologia

ITAJUBÁ - MG

1 DE JUNHO DE 2020

*Dedico este trabalho aos meus pais, Ferney Clavijo e Maria Esquivel.*

# Agradecimentos

Antes de tudo, quero agradecer ao professor Leandro Gomes por ter paciência suficiente e aceitar o desafio de colaborar comigo por meio da orientação neste trabalho. Agradeço aos meus pais que forneceram apoio incondicional e companhia nessa árdua jornada. Também, quero agradecer a todos os meus colegas e amigos que, direta ou indiretamente, me ajudaram neste processo. Por último, e mais importante, agradeço a Natalia Saavedra, sem ela não poderia ter atingido este logro de minha vida.



# Resumo

Neste texto estudamos as equações de Einstein em espaços-tempos espacialmente planos (Bianchi-I) que são dotados de uma simetria extra, a saber, localmente rotacional (LRS). Desenvolvemos uma nova representação local de coordenadas na qual usamos as componentes do tensor de energia-momento diretamente na métrica, sendo a densidade de energia  $\rho$  a coordenada tipo "tempo". Como aplicação, são obtidas classes gerais de soluções exatas, que são de interesses físico e matemático. Em particular, é fornecida a solução geral com um fluido perfeito barotrópico,  $p = p(\rho)$ .

**Palavras-chave:** Equações de Einstein, soluções exatas, Espaços-tempos Bianchi-I.

# Abstract

In this text we study the Einstein equations in the spatially flat spacetimes (Bianchi-I) which are endowed with an extra locally rotational symmetry (LRS). We develop a new local coordinate representation where we use the components of the energy-momentum tensor directly in the metric, the energy density  $\rho$  being the "time" coordinate. As an application, some general classes of exact solutions are obtained which are of physical and mathematical interest. In particular, the general barotropic perfect fluid solution is given,  $p = p(\rho)$ .

**Keywords:** Einstein's equations, exact solution, Bianchi-I spacetimes.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Índice</b>	<b>vi</b>
<b>Introdução</b>	<b>viii</b>
<b>1 Conceitos iniciais</b>	<b>1</b>
1.1 Alguns aspectos de álgebra multilinear . . . . .	1
1.1.1 Espaços com produto escalar . . . . .	1
1.2 Campos tensoriais . . . . .	3
1.2.1 Derivada de Lie de campos tensoriais . . . . .	7
1.3 Elementos de Geometria diferencial . . . . .	8
1.3.1 Conexão de Levi-Civita . . . . .	9
1.3.2 Curvatura . . . . .	10
<b>2 Espaços homogêneos</b>	<b>12</b>
2.1 Grupos e álgebras de Lie . . . . .	12
2.2 Grupo de isometrias . . . . .	16
2.3 Espaços homogêneos . . . . .	18



<b>3</b>	<b>As equações de Einstein nos espaços do tipo LRS Bianchi-I</b>	<b>21</b>
3.1	Espaços-tempos do tipo LRS Bianchi-I . . . . .	21
3.2	Equações de Einstein para LRS Bianchi I . . . . .	27
3.3	Soluções exatas para fluidos lineares . . . . .	34
3.3.1	O fluido perfeito linear . . . . .	35
	<b>Conclusões</b>	<b>37</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>38</b>

# Introdução

Em 1915, Albert Einstein divulgou seu trabalho seminal sobre os fundamentos de uma nova teoria da Gravitação, a Relatividade Geral, lançando as bases para a cosmologia moderna. Nele aparece o tensor de Einstein, que relaciona o tensor de curvatura do espaço-tempo com o tensor de energia-momento, ou seja, uma relação entre a curvatura do espaço e a matéria que ele admite. Dessa forma podemos estudar o espaço-tempo em questão sob os dois pontos de vista: o geométrico, dado pelo estudo da curvatura, e o físico, dado pelo estudo da matéria ([9]).

O espaço-tempo  $(M, g)$  é uma variedade Lorentziana que admite um 2-tensor simétrico, denominado o tensor de energia-momento  $T_\nu^\mu$ , que satisfaz a equação de conservação

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0. \quad (1)$$

O tensor de Einstein  $G_\nu^\mu$  é formado pelas componentes do tensor de curvatura de  $g$  e também é simétrico e satisfaz a equação de conservação acima. As equações de Einstein são expressas na forma

$$G_\nu^\mu = T_\nu^\mu. \quad (2)$$

Se associarmos cada um deles a matrizes  $m \times m$  simétricas, onde  $m$  é a dimensão do espaço-tempo, podemos ter no máximo  $\frac{m(m+1)}{2}$  equações independentes ([9], [8], [6]).

Essas equações de Einstein apresentam alto grau de não-linearidade, o que dificulta o trabalho com elas. Porém, existem alguns métodos que permitem reduzir essa dificuldade, sendo um deles a exigência de um alto grau de simetria do espaço-tempo, como por exemplo, da existência de folheações por hiper-superfícies tipo-espaço homogêneas, pilar

da Cosmologia moderna. Desta forma, somos capazes de diminuir o número de equações e até classificar os tipos de espaços-tempos possíveis: Robertson-Walker (RW), Kantowski-Sachs (K-S), modelos de Bianchi, etc ([9], [8], [6]).

Neste trabalho, nosso interesse recai sobre um tipo especial de espaço-tempo do tipo Bianchi I, que admite uma folheação por hipersuperfícies tipo-espaço planas e uma simetria rotacional local, denominado espaço-tempo LRS Bianchi I ("Locally Rotational Symmetric"). Desta forma, partimos do ponto de vista matemático, apresentando uma revisão de conceitos e resultados necessários e suficientes da geometria semi-Riemanniana e da teoria de grupos de Lie, tratados nos capítulos 1 e 2, respectivamente. No capítulo 3, que é o mais importante, apresentamos algumas considerações sobre a representação local da métrica nesses espaços, suas equações de Einstein e algumas soluções particulares. Estas considerações contêm abordagens e fatos novos. Neste sentido, fazemos uma apresentação completa e pouco comum dos espaços-tempos LRS Bianchi-I. Começamos com sua definição mais geral, que necessita da classificação das álgebras de Lie de dimensão 4 com uma subálgebra isomorfa à álgebra de isometrias do plano Euclidiano. Com isso, conseguimos provar a existência de um sistema de coordenadas adaptados às suas simetrias. Depois apresentamos um novo teorema que nos permite encontrar várias classes novas de soluções das Equações de Einstein nesses espaços, todas de interesse nas aplicações à Cosmologia. Por último, apresentamos pela primeira vez as soluções exatas para fluidos que satisfazem uma equação de estado linear.

# Capítulo 1

## Conceitos iniciais

Para iniciar nosso estudo relacionado ao espaço-tempo LRS Bianchi-I, precisamos de alguns elementos teóricos essenciais para o desenvolvimento dos outros capítulos. Portanto este capítulo inicial visa fornecer ao leitor os resultados e definições necessários da geometria diferencial. Tomaremos as referências básicas [6], [2], [8].

### 1.1 Alguns aspectos de álgebra multilinear

Seja  $E$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$ . A função  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada funcional linear, o conjunto dos funcionais lineares é chamado espaço dual de  $E$  e denotado por  $E^*$ . Normalmente o dual do espaço dual de um espaço é o mesmo espaço, i.e,  $(E^*)^* = E$ .

inteiros  $r \geq 0$ ,  $s \geq 0$  ambos não sendo iguais a zero ao mesmo tempo. Uma função  $\mathbb{R}$ -multilinear  $A : (E^*)^r \times E^s \rightarrow \mathbb{R}$  é chamado de tensor do tipo  $(r, s)$  sobre  $E$ , denotaremos por  $T_s^r(E)$  ao conjunto de todos os tensores do tipo  $(r, s)$  sobre  $E$ . Em particular, não é necessário ter o campo  $\mathbb{R}$  basta com um anel  $K$ , assim, uma função  $K$ -multilinear  $A : (E^*)^r \times E^s \rightarrow K$  também é um tensor.

#### 1.1.1 Espaços com produto escalar

Seja  $E$  um espaço vetorial. Uma função  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de forma bilinear se satisfaz as seguintes propriedades:

(i)  $b(\lambda u + v, w) = \lambda b(u, w) + b(v, w)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $u, v, w \in E$ .

(ii)  $b(u, \lambda v + w) = \lambda b(u, v) + b(u, w)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $u, v, w \in E$ .

Uma forma bilinear simétrica  $b$ , i.e.,  $b(u, v) = b(v, u)$  para todo  $u, v \in E$  é:

(a) definida positiva, se para  $v \neq 0$  se tenha  $b(v, v) > 0$ .

(b) definida negativa, se para  $v \neq 0$  se tenha  $b(v, v) < 0$ .

(c) semi-definida positiva, se  $b(v, v) \geq 0$  para todo  $v \in E$ .

(d) semi-definida negativa, se  $b(v, v) \leq 0$  para todo  $v \in E$ .

(e) não degenerada, se  $b(v, w) = 0$  para todo  $w \in E$  implique  $v = 0$ .

**Definição 1.1.1.** *O índice  $\nu$  de uma forma bilinear simétrica  $b$  em  $E$  é o maior número inteiro que é a dimensão de um subespaço  $W \subset E$  no qual  $b$  é definida negativa.*

**Definição 1.1.2.** *Um produto escalar  $g$  em um espaço vetorial  $E$  é uma forma bilinear simétrica não degenerada em  $E$ .*

**Proposição 1.1.1.** *Uma forma bilinear simétrica é não degenerada se, e somente se, sua matriz em relação a uma base for invertível.*

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no lema 19 na página 47 de [6]. □

Seja  $V$  um espaço vetorial e  $g$  uma forma bilinear simétrica. Se  $g$  é não degenerada em  $V$  dizemos que  $V$  é um espaço com produto escalar.

Um produto interno é um produto escalar definido positivo. Vetores  $v, w \in V$  são ortogonais se  $g(v, w) = 0$ , e denota-se  $v \perp w$ . Se  $W$  é um subespaço de  $V$ , considere  $W^\perp = \{v \in V : v \perp w, \text{ para todo } w \in W\}$ ,  $W^\perp$  é um subespaço de  $V$  chamado complemento ortogonal.

## 1.2 Campos tensoriais

Considere  $M$  uma variedade de dimensão  $m$  e  $T_pM$  seu espaço tangente em  $p \in M$ , denotaremos ao conjunto dos espaços tangentes como  $TM$  o qual é chamado fibrado tangente. Um campo vetorial em  $M$  é uma função da variedade em seu fibrado tangente, ou seja,  $X : M \rightarrow TM$ , tal que para todo  $p \in M$ ,  $X(p) \in T_pM$ , em outras palavras, a cada ponto  $p \in M$  associa um vetor tangente a  $p$  o qual mora no seu espaço tangente. Denotaremos o conjunto dos campos vetoriais em  $M$  por  $\mathfrak{X}(M)$ . O campo é diferenciável se a aplicação  $X : M \rightarrow TM$  é diferenciável.

Seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , sua representação no ponto  $p$  num sistema de coordenadas  $\xi = (x_1, \dots, x_m)$  em uma vizinhança  $U \subset M$  do ponto  $p$  é dada por

$$X(p) = \sum_{i=1}^m a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

onde cada  $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função em  $U$  e  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$  é uma base para  $T_pM$  associada ao sistema de coordenadas  $\xi$ . Desta forma  $X$  é diferenciável se e só se as funções  $a_i$  são diferenciáveis para algum sistema de coordenadas. para cada  $1 \leq i \leq m$ . O campo vetorial  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  em  $U$  enviando cada  $p$  para  $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$  é chamado de  $i$ -ésima coordenadas do campo vetorial no sistema de coordenadas  $\xi$ .

Vamos a denotar por  $f(M)$  as funções definidas na variedade  $M$  e por  $\mathfrak{F}(M)$  as funções diferenciáveis definidas na variedade  $M$ . Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in \mathfrak{F}(M)$ , então  $Xf$  denota a função de valores reais dada por

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^m a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

para todo  $p \in M$ . Diz-se que  $X$  é campo diferenciável se  $Xf$  é diferenciável para toda  $f \in \mathfrak{F}(M)$ . Denotaremos o conjunto de campos diferenciáveis por  $\mathfrak{X}(M)$ , sob este podemos definir as seguintes operações:

- (i) multiplicação: se  $f \in \mathfrak{F}(M)$  então  $(fX)(p) = f(p)X(p)$ .
- (ii) soma: se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  então  $(X + Y)(p) = X(p) + Y(p)$ .

Desta forma, se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , então  $fX \in \mathfrak{X}(M)$  e  $X + Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Isto faz a  $\mathfrak{X}(M)$  um módulo sobre  $\mathfrak{F}(M)$ . Consideremos um sistema de coordenadas  $\xi = (x_1, \dots, x_m)$  em uma vizinhança  $U \subset M$  do ponto  $p$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , as representações de  $X$  e  $Y$  estão dadas por

$$X = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y = \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Vamos a considerar o que seria um campos avaliado em um outro campo da seguinte maneira,

$$X(Yf) = X \left( \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^m a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^m a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

$$Y(Xf) = Y \left( \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j=1}^m b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^m a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Neste caso, podemos ver que  $X(Yf)$  e  $Y(Xf)$  não pertencem ao espaço tangente, assim, se  $X, Y \in M$  temos que  $XY \notin \mathfrak{X}(M)$  e  $YX \notin \mathfrak{X}(M)$ , mas continuação apresentamos um resultado no qual fazendo uma operação entre  $X(Yf)$  e  $Y(Xf)$  podemos obter um campo em  $M$ .

**Proposição 1.2.1.** *Considere  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , então existe um único campos vetorial  $Z$ , chamado colchete de Lie ou comutador, tal que para todo  $f \in \mathfrak{F}(M)$ ,  $Zf = (XY - YX)f$ .*

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no lema 5.2 na página 23 de [2]. □

**Proposição 1.2.2.** *O colchete de Lie tem as seguintes propriedades:*

(i)  *$\mathbb{R}$ -bilinear:*  $[aX + bY, Z] = [aX, Z] + [bY, Z]$

(ii) *Anti simétrica:*  $[X, Y] = -[Y, X]$

(iii) *Identidade de Jacobi:*  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no lema 18 na página 13 de [6]. □

Para cada  $p \in M$ , podemos definir o espaço dual  $T_p(M)^*$  do espaço tangente  $T_p(M)$  é chamado espaço cotangente de  $p \in M$ . As um-formas  $\omega$  em uma variedade diferencial  $M$  são os objetos no espaço cotangente, neste sentido dizemos que uma um-forma é o

dual de um campo vetorial. Assim, no sistema de coordenadas  $\xi = (x_1, \dots, x_m)$  em uma vizinhança  $U \subset M$  do ponto  $p$  temos uma base associado ao espaço tangente dada por os campos coordenados  $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}$  e uma base dual associada dada por  $\{dx_i\}$ , tal que,

$$dx_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}.$$

Considere  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ , temos que

$$\theta \cdot (X) = a_i \theta_i, \text{ onde } \theta_i = \theta \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Um campo tensorial  $A$  em uma variedade  $M$  é um tensor sobre o conjunto de campos diferenciáveis,  $X(M)$ , denotaremos o conjunto de campos tensoriais em  $M$  por  $\mathfrak{T}(M)$ . Desta forma, considere  $A \in \mathfrak{T}(M)$ , então é um campo tensorial do tipo  $(r, s)$  se é uma função  $\mathfrak{F}(M)$ -multilinear  $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ . Neste sentido, podemos pensar um campo vetorial sendo um campo tensorial do tipo  $(0, 1)$ . Se pode considerar  $A \in \mathfrak{T}(M)$  como uma máquina multilinear que quando é alimentada de  $r$  um-formas  $\theta^1, \dots, \theta^r$  e  $s$  campos vetoriais  $X_1, \dots, X_s$  produz uma função a valores reais

$$f = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \in f(M).$$

Existe varias maneiras de produzir novos tipos de tensores a partir de alguns dados, nesse sentido, definiremos o produto entre dois tensores cujo resultado também é um tensor. Assim, considere  $A \in \mathfrak{T}(M)_s^r$  um tensor do tipo  $(r, s)$  e  $B \in \mathfrak{T}(M)_{s'}^{r'}$  um tensor do tipo  $(r', s')$ , o produto tensorial de  $A$  e  $B$  é uma função  $\mathfrak{F}(M)$ -multilinear  $A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \rightarrow f(M)$ , onde

$$(A \otimes B)(\theta^1, \dots, \theta^{r+r}, X_1, \dots, X_{s+s}) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)B(\theta^{r+1}, \dots, \theta^{r+r}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s}),$$

Desta forma,  $A \otimes B \in \mathfrak{T}(M)$  é um tensor do tipo  $(r + r', s + s')$ . Existe uma operação notável chamada contração que reduz os tensores do tipo  $(r, s)$  para os tensores do tipo  $(r - 1, s - 1)$ .

**Proposição 1.2.3.** *Existe uma única função  $f(M)$ -linear  $C : \mathfrak{T}(M)_1^1 \rightarrow f(M)$ , chamada contração do tipo  $(1, 1)$ , tal que  $C(X \otimes \theta) = \theta \cdot X$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ .*



*Demonstração.* Este resultado é apresentado no lema 6 na página 40 de [6].  $\square$

**Definição 1.2.1.** *Se  $A \in \mathfrak{J}(M)_s^r$ , então o valor de  $|_b^a A \in \mathfrak{J}(M)_{s+1}^{r-1}$  sobre arbitrárias um-formas e campos vectoriais é definido por*

$$(|_b^a A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}) = A(\theta^1, \dots, X_b^*, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{s+1})$$

de onde  $X_b^*$  é a um-forma metricamente equivalente a  $X_b$ . A operação  $|_b^a : \mathfrak{J}(M)_s^r \rightarrow \mathfrak{J}(M)_{s+1}^{r-1}$  é conhecida como baixamento de índice.

Uma noção muito importante é aquela de comparar vetores, neste caso, a ideia é dotar a variedade de alguma forma de comparar os vetores pertencentes ao espaço tangente, ou seja, uma forma de fazer medições na variedade, desta maneira se faz uso de formas bilineares como uma ferramenta para definir uma estrutura adicional da estrutura diferenciável da variedade.

Considere  $g \in \mathfrak{T}(M)$  um campo tensorial do tipo  $(0, 2)$ , se  $g$  é simétrico e não degenerado em  $M$  cujo índice é constante então  $g$  é chamado tensor métrico em  $M$ , assim,  $g$  faz corresponder um produto escalar em  $T_p(M)$  para cada  $p \in M$ , e o índice de  $g_p$  é o mesmo para todo  $p \in M$ . Uma variedade  $M$  dotada de um tensor métrico  $g$  é denominada variedade semi-Riemanniana. Vamos a denotar por  $v$  o índice do tensor métrico,  $g$ , da variedade semi-Riemanniana  $M$ . Assim, temos que  $0 \leq v \leq m = \dim M$ .

Se o índice igual a zero,  $v = 0$ , temos  $M$  é chamada variedade Riemanniana. Em particular, o fato de  $v = 0$  nos diz que seu tensor métrico  $g$  é definido positivo, i.e., que  $g$  é um produto interno nos espaços tangentes da variedade.

Se o índice é igual a  $v = 1$  ou  $v = m - 1$ , com  $n \geq 2$ , então diz-se que  $M$  é uma variedade Lorentziana.

Considere um sistema de coordenadas  $\xi = (x_1, \dots, x_m)$  em uma vizinhança  $U \subset M$  do ponto  $p$ , fazendo uso dos campos coordenados podemos definir as componentes do tensor métrico  $g$  em  $u$  por  $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$  para  $(1 \leq i, j \leq m)$ . Desta forma os  $g_{ij}$  são as componentes da matriz associada ao tensor métrico  $g$ . Devido a que o tensor métrico  $g$  é não degenerado, em cada ponto  $p \in U$  a matriz  $(g_{ij}(p))$  é invertível  $(g^{ij}(p))$ . Além disso, o tensor métrico  $g$  é simétrico, i.e.,  $g_{ij} = g_{ji}$ , portanto  $g^{ij} = g^{ji}$  para  $1 \leq i, j \leq m$ .

Consideremos um sistema de coordenadas  $\xi = (x_1, \dots, x_m)$  em uma vizinhança  $U \subset M$  do ponto  $p$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , assim,

$$X = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y = \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Para os campos  $X$  e  $Y$  temos que o tensor métrico  $g$  avaliado em eles vai ter o seguinte formato

$$g(X, Y) = \sum_{i,j=1}^m a_i b_j g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j=1}^m a_i b_j g_{ij}.$$

Podemos pensar ao tensor métrico  $g$  sendo um funcional linear do espaço  $T_p M \times T_p M$ . Tomando uma base deste espaço como o produto de campos coordenados  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\} \otimes \{\frac{\partial}{\partial x_j}\}$  teremos associada uma base no seu espaço dual dada por  $dx_i \otimes dx_j$ . Assim, o tensor métrico pode ser escrito como

$$g = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

**Definição 1.2.2.** *Seja  $p \in M$  e  $v$  um vetor tangente do espaço tangente em  $p$ , ou seja,  $v \in T_p M$ . Dizemos que  $v$  é*

- (i) *tipo espaço se  $g(v, v) > 0$  ou  $v = 0$ .*
- (ii) *nulo se  $g(v, v) = 0$  e  $v \neq 0$ .*
- (iii) *tipo tempo se  $g(v, v) < 0$ .*

### 1.2.1 Derivada de Lie de campos tensoriais

**Definição 1.2.3.** *Seja  $\phi : M \rightarrow N$  um mapeamento suave. Se  $A \in \mathfrak{J}(M)_s^0(N)$  com  $s \geq 1$ , deixe  $(\phi^* A)(v_1, \dots, v_s) = A(d\phi v_1, \dots, d\phi v_s)$  para todo  $v_i \in T_p(M)$ ,  $p \in M$ . Assim,  $\phi^* A$  é chamado o pullback de  $A$  por  $\phi$ .*

**Definição 1.2.4.** *Considere  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , o tensor derivação  $\mathfrak{L}$  tal que*

- (a)  $\mathfrak{L}_X f = Xf$  para todo  $f$ .
- (b)  $\mathfrak{L}_X Y = [X, Y]$  para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

*é chamado derivada de Lie relativa a  $X$ .*

### 1.3 Elementos de Geometria diferencial

Considere  $M$  uma variedade semi-Riemanniana,  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ . Uma conexão afim  $\nabla$  em  $M$  é uma aplicação  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $\mathfrak{F}(M)$ -linear em  $X$  :  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$ ,
- (ii)  $\mathbb{R}$ -linear em  $Y$  :  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$ ,
- (iii)  $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$ .

O valor em cada ponto  $p$  é a taxa de variação vetorial da direção, um resultado que liga estas ideias é apresentado a seguir.

**Proposição 1.3.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferencial com uma conexão afim  $\nabla$ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial  $X$  ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  um outro campo vetorial  $\frac{DX}{dt}$  ao longo de  $c$ , denominado derivada covariante de  $X$  ao longo de  $c$  tal que:*

(a)  $\frac{D}{dt}(X + Y) = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$ , onde  $Y$  é um campo de vetores ao longo de  $c$ .

(b)  $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{Df}{dt}X + f\frac{DX}{dt}$ , onde  $f$  é uma função diferenciável em  $I$ .

(c) Se  $X$  é induzido por  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , i.e.,  $X(t) = Y(c(t))$ , então  $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$ .

*Demonstração.* Este resultado é apresentado na proposição 2.2 na página 55 de [2].  $\square$

**Proposição 1.3.2.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. Uma conexão  $\nabla$  em  $M$  é compatível com a métrica se, e só se, para todo par  $V$  e  $W$  de campos de vetores ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  tem-se*

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right), t \in I.$$

*Demonstração.* Este resultado é apresentado na proposição 3.2 na página 59 de [2].  $\square$

### 1.3.1 Conexão de Levi-Civita

Considere uma variedade semi-Riemanniana  $M$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Uma conexão afim  $\nabla$  em  $M$  é dita simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Uma conexão afim  $\nabla$  é dita compatível com a métrica quando

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Neste caso  $\nabla_X Y$  faz referencia a derivada covariante.

O seguinte resultado é considerado como o milagre da geometria semi-Riemanniana.

**Teorema 1.3.1.** *Dada uma variedade semi-Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  satisfazendo as condições:*

(a)  $\nabla$  é simétrica.

(b)  $\nabla$  é compatível com a métrica Riemanniana.

Assim,  $\nabla$  é chamada conexão de Levi-Civita da variedade.

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no teorema 11 na página 61 de [6].  $\square$

Seja  $M$  uma variedade semi-Riemanniana e  $\xi = (x_1, \dots, x_n)$  um sistema de coordenadas numa vizinhança  $U$  de  $M$ , definimos como símbolos de Christoffel para  $\xi$  a função real  $\Gamma_{ij}^k$  em  $U$  tal que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Já que  $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$  e pela condição de simetria da conexão de Levi-Civita temos que  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

**Proposição 1.3.3.** *Considere  $\xi = (x_1, \dots, x_n)$  um sistema de coordenada de  $U$  em  $p \in M$  e  $\nabla$  sua conexão de Levi-Civita, então*

(i) Os símbolos de Christoffel estão definidos por:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m g^{kn} \left( \frac{\partial g_{jn}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{in}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_n} \right).$$

(ii)

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left( \sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial a_k}{\partial x_i} + \Gamma_{ij}^k a_j \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

*Demonstração.* Este resultado é apresentado na proposição 13 na página 62 de [6].  $\square$

### 1.3.2 Curvatura

**Proposição 1.3.4.** *Seja  $M$  uma variedade semi-Riemanniana com sua respectiva conexão de Levi-Civita  $\nabla$ . A função  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por:*

$$R_{XY}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z \quad (1.1)$$

é um campo tensorial definido sobre  $M$  de tipo  $(1, 3)$  chamado tensor Curvatura Riemanniana de  $M$ .

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no lema 35 na página 74 de [6].  $\square$

**Proposição 1.3.5.** *Seja  $M$  uma variedade semi-Riemanniana e  $\xi$  um sistema de coordenadas. As componentes do tensor de curvatura  $R$  de  $M$  em  $\xi$  são*

$$R_{ijk}^l = \sum_{r=1}^m (\Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^l - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l) + \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j}. \quad (1.2)$$

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no lema 38 na página 76 de [6].  $\square$

**Proposição 1.3.6.** *Se  $x, y, z, v, w \in T_p(M)$ , então*

(i)  $R_{xy} = -R_{yx}$ .

(ii)  $\langle R_{xy}v, w \rangle = -\langle R_{xy}w, v \rangle$ .

(iii)  $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$  primeira identidade de Bianchi.

(iv)  $\langle R_{xy}v, w \rangle = \langle R_{vw}x, y \rangle$ .

*Demonstração.* Este resultado é apresentado na proposição 36 na página 75 de [6].  $\square$

**Definição 1.3.1.** *Seja  $R$  o tensor de curvatura Riemanniano de  $M$ . O tensor de curvatura Ricci,  $RIC$ , de  $M$  é a contração  $C_3^1(R) \in T_2^0(M)$  cujos componentes relativos a um sistema de coordenadas são  $R_{ij} = R_{ijm}^m$ .*

**Definição 1.3.2.** *O escalar de curvatura  $R$  de  $M$  é a contração  $C(RIC) \in f(M)$  do seu tensor de Ricci, em coordenadas  $R = g^{ij}R_{ij} = g^{ij}R_{ijk}^k$ .*

Existem muitas maneiras de escolher uma expressão que dependa do tensor de curvatura e o tensor energia-momento, mas foi o Einstein que conseguiu uma relação razoável para isto, nesta forma ele fez a seguinte consideração.

**Definição 1.3.3.** *Considere uma variedade  $M$ , definimos o tensor de Einstein como*

$$G_{ab} = R_{ab} - (1/2)Rg_{ab}.$$

# Capítulo 2

## Espaços homogêneos

No século passado houve um grande salto na compreensão do nosso universo. Isso gerou a criação de diferentes modelos cosmológicos que poderiam descrever suas características em larga escala, consolidando assim as bases da cosmologia moderna, e em particular, destacando-se o agora nomeado modelo padrão da Cosmologia. Ele procura replicar duas propriedades observadas em larga escala: homogeneidade e isotropia. Isto implica que as mesmas propriedades físicas podem ser observadas em qualquer lugar e direção no espaço. Com base nisto, neste capítulo focalizaremos o estudo na parte matemática que descreve essas simetrias físicas, a saber, conceitos envolvendo grupos de Lie, suas álgebras de Lie, suas ações em variedades semi-Riemannianas, grupos de isometrias e espaços homogêneos. São eles necessários para entender e desenvolver os fundamentos matemáticos por trás dos modelos cosmológicos mais usuais. Tomamos aqui as referências básicas [2], [6], [8].

### 2.1 Grupos e álgebras de Lie

Considere  $(G, \cdot)$  um grupo com  $G$  uma variedade diferenciável. Neste caso " $\cdot$ " faz referência a sua operação de grupo. Para nosso interesse, sob sua estrutura algébrica podemos definir as seguintes aplicações:

- (i) Multiplicação:  $\varphi : G \times G \longrightarrow G$  com  $(a, b) \longrightarrow \varphi(a, b) = a \cdot b = ab$ .
- (ii) Inversa de um elemento:  $\zeta : G \longrightarrow G$  com  $a \longrightarrow \zeta(a) = a^{-1}$ .

Como  $G$  é uma variedade, podemos perguntar se as aplicações  $\varphi$  e  $\zeta$  são diferenciáveis. Se isto ocorrer, dizemos que o grupo é um grupo de Lie.

No que se segue,  $(G, \cdot)$  será sempre um grupo de Lie e, de forma mais enxuta, será designado por  $G$  apenas. Para todo  $a \in G$ , defina as seguintes aplicações diferenciáveis:

- (a) Traslações à esquerda:  $L_a : G \longrightarrow G$  com  $b \longrightarrow L_a(b) = \varphi(a, b) = ab$ .
- (b) Traslações à direita:  $R_a : G \longrightarrow G$  com  $b \longrightarrow R_a(b) = \varphi(b, a) = ba$ .
- (c) Conjugação  $C_a : G \longrightarrow G$  com  $b \longrightarrow C_a(b) = L_a \circ R_{a^{-1}} = \varphi(a, \varphi(b, a^{-1})) = aba^{-1}$ .

Note que, a translação à esquerda satisfaz  $L_a \circ L_b = L_{ab}$  para quaisquer elementos  $a, b \in G$ . Em particular, tomando o elemento neutro do grupo  $e \in G$ , ele tem a característica de que para todo  $a \in G$  vale  $\varphi(e, a) = ea = a$ , isto é, temos que  $L_e = Id_G$ . Além disso, para cada  $a \in G$  sua inversa  $a^{-1}$  satisfaz  $\varphi(a^{-1}, a) = a^{-1}a = e$ , isto é,  $L_a$  tem uma inversa dada por  $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ , já que  $L_{a^{-1}} \circ L_a = Id_G = L_e$ . Como ela é diferenciável, desta forma  $L_a$  é um difeomorfismo de  $G$ . Analogamente  $R_a$  e  $C_a$  também são difeomorfismos e satisfazem propriedades análogas.

Como  $G$  é uma variedade, para cada  $a \in G$  podemos associar um espaço tangente, denotado por  $T_a G$ . Em particular, focalizaremos no espaço tangente do elemento neutro,  $T_e G$ , que possui propriedades muito interessantes, a serem discutidas abaixo. Para tal, precisaremos da seguinte noção:

**Definição 2.1.1.** *Uma álgebra de Lie sobre  $\mathbb{R}$  é um espaço vetorial real  $\mathfrak{g}$  munido com uma função bilinear  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ , chamada colchete de Lie, tal que para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$*

$$(i) [X, Y] = -[Y, X].$$

$$(ii) [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \text{ (identidade de Jacobi).}$$

Um exemplo clássico de álgebra de Lie é dado pelo espaço vetorial de todos os campos vetoriais em  $G$ ,  $\mathfrak{X}(G)$ , munido do comutador de campos vetoriais, unicamente caracterizado por

$$[X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f),$$

sendo  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $X \cdot f := df \cdot X$ .



**Definição 2.1.2.** *Um campo vetorial  $X$  em um grupo de Lie  $G$  é invariante à esquerda quando  $dL_a(b) \cdot X(b) = X(ab)$ , para todo  $a, b \in G$ .*

Denote por  $\mathfrak{X}_L(G)$  o conjunto de todos os campos vetoriais invariantes a esquerda em um grupo de Lie  $G$ .  $\mathfrak{X}_L(G)$  é fechado pelo comutador de campos vetoriais, e portanto forma uma álgebra de Lie, chamada de a álgebra de Lie de  $G$ , que denotaremos por  $\mathfrak{g}$ . A função  $\mathfrak{g} \rightarrow T_e G$  que envia cada  $X \in \mathfrak{g}$  ao seu valor  $X(e) \in T_e G$  é um isomorfismo linear. Desta forma, podemos identificar naturalmente a álgebra de Lie do grupo  $G$  como sendo seu espaço tangente na identidade. Assim, existe uma álgebra de Lie canonicamente associada a cada grupo de Lie. Muito da teoria dos grupos de Lie é obtido ao estudá-los em termos de suas álgebras de Lie.

Dado um grupo de Lie  $G$  e  $H \subset G$  um subgrupo algébrico, se além disto  $H$  é uma subvariedade imersa em  $G$ , dizemos que  $H$  é um subgrupo de Lie. Em particular,  $H$  por si mesmo é um grupo de Lie e, neste sentido, tem associada uma álgebra de Lie canônica,  $\mathfrak{h} = T_e H$ . Como subespaço da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ ,  $\mathfrak{h}$  é fechada para o colchete de Lie, o que a faz uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$ .

Existem algumas caracterizações para decidirmos se um dado subgrupo é subgrupo de Lie que podem ser úteis. Uma destas é a seguinte:

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $H \subset G$  e  $G$  um grupo de Lie. Se  $H$  é fechado (topologicamente) em  $G$ , i.e.,  $H = \bar{H}$  e além disso  $H$  é um subgrupo de  $G$ , então  $H$  é uma subvariedade mergulhada de  $G$  e portanto um subgrupo de Lie.*

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no teorema 3 na página 447 de [6]. □

Uma classe importante de subgrupos de Lie de  $G$  é a seguinte:

**Definição 2.1.3.** *Um subgrupo a um parâmetro em um grupo de Lie  $G$  é um homomorfismo diferenciável  $\alpha$  de  $\mathbb{R}$  (sob adição) em  $G$ .*

Assim  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G$  é uma curva tal que  $\alpha(s+t) = \alpha(s)\alpha(t)$  para todo  $s, t$ . Portanto,  $\alpha(0) = e$ ,  $\alpha(-t) = \alpha(t)^{-1}$  e  $\alpha(s)\alpha(t) = \alpha(t)\alpha(s)$  para todo  $s, t \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 2.1.1.** *Os subgrupos a um parâmetro de  $G$  são exatamente as curvas integrais, começando em  $e$ , dos campos vetoriais invariantes a esquerda em  $G$ , i.e., dos elementos de sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .*

*Demonstração.* Este resultado é apresentado na proposição 10 na página 449 de [6].  $\square$

Assim, podemos agora definir o mapeamento exponencial, que liga os elementos da álgebra de Lie ao seu grupo de Lie.

**Definição 2.1.4.** *Seja  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie do grupo de Lie  $G$ . O mapeamento exponencial  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  é definido por  $X \mapsto \alpha_X(1)$ , onde  $\alpha_X$  é o subgrupo a um parâmetro definido por  $X \in \mathfrak{g}$ . Em particular, denotaremos  $e^{tX} := \alpha_X(t)$ .*

Dada a definição acima, temos:

$$e^{(t+s)X} = e^{tX} e^{sX} \quad \text{e} \quad e^{-tX} = (e^{tX})^{-1}. \quad (2.1)$$

Considere  $G$  um grupo de Lie e  $M$  uma variedade qualquer. Uma ação à esquerda de  $G$  sobre  $M$  é uma aplicação diferenciável  $\phi : G \times M \rightarrow M$  com  $(a, p) \rightarrow \phi(a, p) = a \cdot p$  tal que cumpre as seguintes propriedades:

- (i) associativa:  $\phi(a, \phi(b, p)) = a \cdot (b \cdot p) = (ab) \cdot p = \phi(ab, p)$  para todo  $a, b \in G$  e  $p \in M$ .
- (ii) neutro:  $\phi(e, p) = e \cdot p = p$  para todo  $p \in M$ .

Considere  $p \in M$  qualquer,  $\Sigma_p^G$  é a órbita de  $G$  em  $p$ , isto é, o conjunto de todos os pontos da forma  $\phi(a, p)$  com  $a \in G$ . Em particular a órbita de  $G$  em  $p$ ,  $\Sigma_p^G$ , é uma subvariedade imersa de  $M$ .  $H_p$  é o subgrupo de isotropia de  $p$ , isto é, o conjunto de todos os elementos de  $G$  tal que  $\phi(a, p) = p$ . Em particular, o grupo de isotropia é um subgrupo algébrico topologicamente fechado em  $G$ , e portanto, de acordo com o Teorema 2.1.1, é um subgrupo de Lie mergulhado em  $G$ .

Um outro conceito que segue da ação de um grupo de Lie é o de campo fundamental  $X_M \in \mathfrak{X}(M)$  associado a  $X \in \mathfrak{g}$ :

$$X_M(p) := \frac{d}{dt} (e^{tX} \cdot p)_{t=0}. \quad (2.2)$$

Isto implica, em particular, que ele é caracterizado pelo fluxo  $F_{X_M}^t(p) = e^{tX} \cdot p$ . A aplicação  $X \mapsto X_M$  é um anti-homomorfismo de álgebras de Lie:

$$[X, Y]_M = -[X_M, Y_M]. \quad (2.3)$$

As ações de grupo de Lie tem um papel fundamental na implementação do conceito de simetria, e portanto, nas aplicações à Cosmologia e à Relatividade Geral.

## 2.2 Grupo de isometrias

Considere  $(M_1, g_1)$  e  $(M_2, g_2)$  variedades semi-Riemannianas. Podemos comparar as estruturas semi-Riemannianas de  $M_1$  e  $M_2$  mediante um difeomorfismo, caso exista. Neste sentido, diremos que um difeomorfismo  $\phi : M_1 \rightarrow M_2$  é uma isometria se

$$g_1 = \phi^* g_2,$$

onde o pull-back é definido por

$$(\phi^* g_2)(u, v)_p = g_2(d\phi_p(u), d\phi_p(v))_{\phi(p)}, \quad \text{para todo } p \in M_1, u, v \in T_p M_1.$$

Assim, podemos considerar o conjunto das isometrias  $\phi : M \rightarrow M$  de uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$ , que denotaremos por  $I(M)$ , e que forma um grupo sob a composição de mapeamentos. Em geral,  $I(M) \neq \emptyset$ , já que a identidade é uma isometria. Se  $\phi \in I(M)$  e  $p \in M$  podemos definir  $\phi(p)$  como a ação natural de  $I(M)$  sobre  $M$ , i.e.,  $\varphi : I(M) \times M \rightarrow M$  com  $\varphi(\phi, p) = \phi(p)$ .

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $M$  uma variedade semi-Riemanniana. O conjunto das isometrias de  $M$ , denotado por  $I(M)$ , cumpre as seguintes propriedades:*

- (i) *É um grupo de Lie de dimensão finita.*
- (ii) *A ação natural  $\varphi : I(M) \times M \rightarrow M$  é diferenciável.*

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no Teorema 32 na página 255 de [6].  $\square$

Com este resultado podemos associar ao grupo Lie  $I(M)$  uma álgebra de Lie que denotaremos por  $\mathcal{J}(M)$ . Considere  $X \in \mathcal{J}(M)$ , então seu campo fundamental  $X_M$  em

$M$  é um campo de Killing de  $g$ , i.e., a derivada de Lie da métrica ao longo de  $X_M$  é igual a zero:

$$\mathfrak{L}_{X_M}g = \frac{d}{dt} ((F_{X_M}^t)^*g)_{t=0} = 0, \quad (2.4)$$

onde  $F_{X_M}^t$  é o fluxo do campo  $X_M$ . Em outras palavras,  $F_{X_M}^t$  é um grupo a um parâmetro de isometrias.

**Proposição 2.2.1.**  *$X$  é um campo de Killing se, e somente se, para todo  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  se tem*

$$X(g(V, W)) = g([X, V], W) + g(V, [X, W]).$$

*Demonstração.* Este resultado é apresentado na Proposição 25 na página 251 de [6].  $\square$

Utilizando esta proposição é direto mostrar que o colchete de dois campos de Killing é um campo de Killing. Desta forma, o conjunto desses campos forma uma subálgebra  $\mathfrak{i}(M)$  de  $\mathfrak{X}(M)$ . Segue um resultado importante:

**Teorema 2.2.2.** *Considere  $M$  uma variedade semi-Riemanniana. O conjunto dos campos de Killing de  $M$ , denotado por  $\mathfrak{i}(M)$ , é uma álgebra de Lie com o colchete de campos vetoriais. Se  $\dim M = m$ , então  $\dim \mathfrak{i}(M) \leq \frac{m(m+1)}{2}$ .*

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no Lema 28 na página 253 de [6].  $\square$

Desta forma obtemos a relação entre os campos de Killing e o grupo das isometrias:

**Teorema 2.2.3.** *Seja  $M$  uma variedade semi-Riemanniana,  $\mathcal{J}(M)$  a álgebra de Lie de seu grupo de isometrias e  $\mathfrak{i}(M)$  a álgebra dos campos de Killing. Então:*

- (i) *O conjunto dos campos de Killing completos,  $ci(M)$ , é uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{i}(M)$ .*
- (ii) *A aplicação  $\varphi : \mathcal{J}(M) \rightarrow ci(M)$  com  $\varphi(X) = X_M$  é um anti-isomorfismo, i.e., um isomorfismo linear tal que para todo  $X, Y \in \mathcal{J}(M)$ ,  $[X_M, Y_M] = -[X, Y]_M$ . Em particular, teremos que  $\dim I(M) \leq \frac{m(m+1)}{2}$ .*

*Demonstração.* Este resultado é apresentado na Proposição 33 na página 255 de [6].  $\square$

**Teorema 2.2.4.** *Seja  $M$  uma variedade semi-Riemanniana de dimensão  $\dim M = m$  e  $I(M)$  seu grupo de isometrias. Se  $\dim I(M) = \frac{m(m+1)}{2}$ , então  $M$  é uma variedade simplesmente conexa com curvatura constante.*

Antes de seguirmos para o próximo teorema, relembremos que o plano Euclidiano  $\mathbb{R}^m$  ( $\kappa = 0$ ), a esfera  $S^m$  ( $\kappa > 0$ ) e o espaço hiperbólico  $H^m$  ( $\kappa < 0$ ) são localmente descritos pelas coordenadas estereográficas, onde suas respectivas métricas assumem a forma

$$g = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_m^2}{\left(1 + \frac{\kappa}{4}(x_1^2 + \cdots + x_m^2)\right)}. \quad (2.5)$$

**Teorema 2.2.5.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $\dim M = m$  e  $I(M)$  seu grupo de isometrias. Se  $\dim I(M) = \frac{m(m+1)}{2}$ , então  $M$  é isométrica ao plano Euclidiano  $\mathbb{R}^m$  ou à esfera  $S^m$  ou ao espaço hiperbólico  $H^m$ .*

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no Teorema 8.13 na página 102 de [8].  $\square$

**Teorema 2.2.6.** *Considere  $M$  uma variedade Riemanniana e  $I(M)$  seu grupo de isometrias. Se  $\dim M = m \geq 2$ , então  $\dim I(M) \neq \frac{m(m+1)}{2} - 1$ .*

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no Teorema 8.18 na página 104 de [8].  $\square$

## 2.3 Espaços homogêneos

Seja  $M$  uma variedade semi-Riemanniana,  $G$  seu grupo de isometrias e  $\phi$  a ação de  $G$  sobre  $M$ . Dizemos que  $M$  é um espaço homogêneo se  $\phi$  é transitiva, i.e., para cada  $p, q \in M$  existe  $a \in G$  tal que  $\phi(a, p) = a \cdot p = q$ . Em outras palavras, qualquer propriedade geometria em torno de um ponto  $p \in M$  estende-se para qualquer outro ponto da variedade. Em particular, se  $M$  é uma variedade Riemanniana, então dizemos que  $M$  é um espaço homogêneo Riemanniano.

**Teorema 2.3.1.** *Considere  $M$  um espaço homogêneo,  $G$  o grupo que age transitivamente sobre  $M$  e, para cada  $p \in M$ ,  $H_p$  o subgrupo de isotropia de  $p$ . Então:*

(a) *Se  $a \cdot p = q$ , então  $H_q = aH_p a^{-1}$ ;*

(b) Fixado  $p \in M$  qualquer, a aplicação  $\varphi : G/H_p \rightarrow M$ ,  $\varphi(a \cdot H_p) = a \cdot p$  está bem definida e é um difeomorfismo.

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no Proposição 13 na página 307 de [6].  $\square$

Na seção anterior definimos a conjugação por um grupo de Lie, denotada por  $C_a$ , onde  $a \in G$ . Sua derivada na identidade é chamada de representação adjunta de  $G$ ,  $Ad_a$ :

$$Ad_a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad Ad_a \cdot X := \frac{d}{dt} (ae^{tX}a^{-1})_{t=0}. \quad (2.6)$$

**Proposição 2.3.1.** *Se  $X, Y \in \mathfrak{g}$  então  $[X, Y] = \frac{d}{dt}|_{t=0}(C_{\alpha(t)})^*Y$  onde  $\alpha(t) = e^{tX}$  é o subgrupo a um-parâmetro de  $X$*

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no Corolário 2 na página 301 de [6].  $\square$

Seja  $H < G$  subgrupo de Lie, uma forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  é  $Ad(H)$ -invariante se for preservada por  $Ad_h : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  para todo  $h \in H$ , i.e.,

$$\langle Ad(h) \cdot X, Ad(h) \cdot Y \rangle = \langle X, Y \rangle. \quad (2.7)$$

Em particular, se  $Z \in \mathfrak{h}$  então

$$\langle Ad(e^{tZ}) \cdot X, Ad(e^{tZ}) \cdot Y \rangle = \langle X, Y \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Derivando esta relação e utilizando a Proposição 2.3.1, obtemos sua formulação infinitesimal

$$\langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle = 0 \quad \forall Z \in \mathfrak{h}. \quad (2.9)$$

Um espaço homogêneo é chamado reductivo se existe um subespaço  $Ad(H)$ -invariante  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{g}$  tal que seja complementar a  $\mathfrak{h}$  em  $\mathfrak{g}$ . Em particular, todo espaço homogêneo Riemanniano é reductivo, uma prova desta afirmação é apresentada em [5]. Os espaços homogêneos reductivos cumprem com a propriedade dada na equação (2.9). Na continuação apresentamos um resultado útil para nosso trabalho que faz uma caracterização de um espaço homogêneo Riemanniano reductivo.

**Teorema 2.3.2.** *Seja  $M$  é um espaço homogêneo Riemanniano e  $H$  subgrupo de seu grupo de isometrias  $G$  tal que  $M \sim G/H$ . Então:*

(i) A álgebra de Lie de  $G$  se decompõe como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

com  $\mathfrak{h}$  a álgebra de  $H$  e  $\mathfrak{m}$  subespaço invariante por  $\text{ad}(\mathfrak{h})$ , i.e., se  $X \in \mathfrak{h}$  e  $Y \in \mathfrak{m}$  então  $[X, Y] \in \mathfrak{m}$ .

(ii) Se  $X, Y \in \mathfrak{m}$  e  $Z \in \mathfrak{h}$ , então

$$g([Z_M, X_M], Y_M) + g(X_M, [Z_M, Y_M]) = 0. \quad (2.10)$$

*Demonstração.* Este resultado é apresentado no Lema 3 na página 302 de [6].  $\square$

# Capítulo 3

## As equações de Einstein nos espaços do tipo LRS Bianchi-I

Neste capítulo todas as seções contém abordagens ou fatos novos. Na primeira seção fazemos uma abordagem bastante completa e incomum dos espaços-tempos LRS Bianchi-I. Começamos com sua definição mais geral, que necessita da classificação das álgebras de Lie de dimensão 4 com uma subálgebra isomorfa à álgebra de isometrias do plano Euclidiano (Teorema 3.1.1). Com isso, conseguimos provar a existência de um sistema de coordenadas adaptados às suas simetrias (Teorema 3.1.2). Na segunda seção apresentamos um novo teorema (Teorema 3.2.3) que nos permite encontrar várias classes novas de soluções das Equações de Einstein nesses espaços, todas de interesse nas aplicações à Cosmologia. Na última seção escrevemos explicitamente as soluções exatas para fluidos que satisfazem uma equação de estado linear.

### 3.1 Espaços-tempos do tipo LRS Bianchi-I

Seja  $M$  uma variedade Lorentziana de dimensão 4 e  $G$  seu grupo de isometrias. Assumimos que as órbitas de  $G$  em  $M$  são hipersuperfícies tipo espaço. Neste sentido, dizemos que  $M$  é uma variedade Lorentziana (espaço-tempo) espacialmente homogênea. Vamos denotar as órbitas de  $G$  em  $M$  por  $\Sigma_p^G$ ,  $\dim \Sigma_p^G = 3$ . Segundo os teoremas 2.2.5 e 2.2.6, aplicados



às variedades 3-dimensionais  $\Sigma_p^G$ , temos apenas as possibilidades  $\dim G = 6, 4, 3$ :

- (a)  $\dim G = 6$ : Neste caso, temos os modelos isotrópicos de Robertson-Walker, este é o caso em que o grupo de isotropia tem dimensão 3, sendo cada órbita espacial isométrica a uma única das seguintes variedades Riemannianas homogêneas: o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  ou a esfera  $S^3$  ou o espaço hiperbólico  $H^3$ .
- (b)  $\dim G = 3$ : Este é o caso em que o grupo de isotropia é discreto, e portanto tem dimensão nula. Neste sentido, ele é anisotrópico, conforme denominação de Kantowski em [7]. É possível mostrar que existem nove classes desses espaços, cada uma associada com uma álgebra de Lie de dimensão 3, como se pode ver em [4]. Como as variedades Riemannianas homogêneas de dimensão 3 foram primeiramente estudadas pelo matemático Luigi Bianchi, esses recebem o nome de modelos de Bianchi, ou espaços-tempos de Bianchi. Em particular, quando as seções espaciais são Euclidianas, i.e.,  $G$  é um grupo abeliano, dizemos que o espaço-tempo é tipo Bianchi-I.
- (c)  $\dim G = 4$ : Este é o caso em que o grupo de isotropia tem dimensão 1, que foi chamado por Kantowski de parcialmente anisotrópico em [7]. As variedades deste tipo foram estudadas por Ronald Kantowski na sua tese intitulada "Some relativistic cosmological models". Normalmente esses tipos de variedades são chamados de Kantowski-Sachs, exceto quando as órbitas são espaços planos. Neste último caso, elas são denominadas espaços-tempos LRS Bianchi-I, onde LRS significa "Locally Rotationally Symmetric", i.e., localmente rotacionalmente simétrica. Este é o caso de nosso interesse e faremos comentários mais extensos no que se segue.

A partir de agora, tomemos  $\dim G = 4$ . Considere  $H < G$  subgrupo de Lie. Temos que as órbitas de  $H$  e  $G$  satisfazem  $\dim \Sigma_p^H \leq \dim \Sigma_p^G = 3$ . Assim, se  $\dim H = 3$ , então  $\dim \Sigma_p^H \geq 2$ , pois não existe subgrupo de dimensão 3 cuja órbita seja de dimensão 1, pois neste caso a órbita de  $G$  seria no máximo de dimensão 2, já que  $\dim G = 4$ , contrariando a hipótese. Resumindo:

$$H < G : \quad \dim H = 3 \quad \Rightarrow \quad \dim \Sigma_p^H \geq 2. \quad (3.1)$$

Logo, nos restam as seguintes possibilidades para um subgrupo  $H$  de  $G$  com  $\dim H \geq 3$  (os itens abaixo não são necessariamente excludentes entre si):

- (a)  $\dim H = 4$ :  $G$  e  $H$  tem as mesmas componentes conexas na identidade. Sem perda de generalidade, para os nossos propósitos, podemos assumir

$$H < G : \quad \dim H = 4 \quad \Rightarrow \quad G = H . \quad (3.2)$$

- (b)  $\dim H = 3$  e  $\dim \Sigma^H = 3$ : Sem perda de generalidade, tomamos  $G = H$  e temos novamente os espaços-tempos de Bianchi, com  $\dim G = 3$ , discutidos acima.

- (c)  $\dim H = 3$  e  $\dim \Sigma^H = 2$ : a órbita de  $H < G$  é bidimensional para todo ponto  $p \in M$ . Neste caso  $\Sigma_p^H$  é, pelo teorema 2.2.5, isométrico ao plano Euclidiano ou a esfera  $S^2$  ou ao plano hiperbólico  $H^2$ . Nos interessa aqui o caso plano com  $H$  não-abeliano, chamado de LRS Bianchi-I.

Seja  $(M, g)$  uma variedade Lorentziana espacialmente plana, i.e., seu grupo de isometria  $G$  age com órbitas que são hypersuperfícies tipo espaço  $\Sigma^G$  cuja métrica induzida de  $g$ ,  $\gamma$ , tem curvatura nula, i.e.,  $(\Sigma^G, \gamma)$  é variedade Riemanniana plana de codimensão 1 em  $M$ . Se, além disto, tivermos  $\dim M = \dim G = 4$ ,  $G$  não abeliano, com um subgrupo de dimensão 3 gerando órbitas bidimensionais, dizemos que  $(M, g)$  é um espaço-tempo LRS Bianchi-I. Neste caso, a álgebra de Lie do grupo de isometrias,  $\mathfrak{g}$ , possui uma subálgebra  $\mathfrak{h}$  isomorfa à álgebra  $so(2) \times \mathbb{R}^2$  das isometrias do plano Euclidiano, i.e., ela é gerada por  $R, Y, Z$  com

$$[Y, Z] = 0, \quad [R, Y] = Z, \quad [R, Z] = -Y . \quad (3.3)$$

Sobre esses tipos de álgebra de Lie podemos dizer o seguinte:

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie com dimensão 4. Suponha que exista uma subálgebra de Lie  $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$  isomorfa à álgebra das isometrias do plano Euclidiano,  $so(2) \times \mathbb{R}^2$ , i.e.,  $R, Y, Z$  geram  $\mathfrak{h}$  e satisfazem (3.3). Se  $X \in \mathfrak{g}$  com  $X \notin \mathfrak{h}$ , temos que  $\mathfrak{g}$ , a menos de um isomorfismo de álgebras de Lie, é uma, e somente uma, das seguintes álgebras:*

(i)  $[X, R] = [X, Y] = [X, Z] = 0$ .

$$(ii) [X, R] = 0, \quad [X, Y] = Y \quad e \quad [X, Z] = Z.$$

$$(iii) [R, X] = \lambda X \neq 0, \quad [X, Y] = [X, Z] = 0.$$

No caso (ii) não é possível a existência de uma subálgebra comutativa de dimensão 3.

*Demonstração.* Vamos considerar a aplicação  $Ad_R$  (adjunta de  $R$ ). É fácil ver que  $0, \pm i$  são autovalores de  $Ad_R$ . Desta forma, seu quarto autovalor é real,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Considere  $X \in \mathfrak{g}$  o autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ , i.e.,  $[R, X] = \lambda X$  e

$$[X, Y] = a_1 R + b_1 X + c_1 Y + d_1 Z, \quad (3.4)$$

$$[X, Z] = a_2 R + b_2 X + c_2 Y + d_2 Z. \quad (3.5)$$

Pela identidade de Jacobi e utilizando (3.3), obtemos as seguintes equações

$$[X, Z] + [\lambda X, Y] - [R, [X, Y]] = 0, \quad (3.6)$$

$$[\lambda X, Z] - [X, Y] - [R, [X, Z]] = 0. \quad (3.7)$$

Utilizando as equações acima, obtemos

$$a_2 = -\lambda a_1, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = -\lambda c_1 - d_1, \quad d_2 = c_1 - \lambda d_1, \quad (3.8)$$

$$a_1 = \lambda a_2, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = \lambda c_2 + d_2, \quad d_1 = -c_2 + \lambda d_2. \quad (3.9)$$

Assim, temos

$$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0, \quad \lambda c_1 = 0 \quad e \quad \lambda^2 d_1 = 2\lambda c_1, \quad (3.10)$$

com

$$c_1 = \lambda c_2 + d_2 \quad e \quad d_1 = -c_2 + \lambda d_2. \quad (3.11)$$

Se  $\lambda = 0$ , temos que  $c_2 = -d_1$  e  $d_2 = c_1$ . Assim, obtemos

$$[X, R] = 0, \quad (3.12)$$

$$[X, Y] = c_1 Y + d_1 Z, \quad (3.13)$$

$$[X, Z] = -d_1 Y + c_1 Z. \quad (3.14)$$

Se consideramos  $c_1 = 0$  obtemos, após a troca  $X \rightarrow X - d_1 R$ , o primeiro caso:

$$[X, R] = 0, \quad [X, Y] = 0 \quad \text{e} \quad [X, Z] = 0.$$

Se consideramos  $c_1 \neq 0$  obtemos, após a troca  $X \rightarrow \frac{1}{c_1} X - \frac{d_1}{c_1} R$ , o segundo caso:

$$[X, R] = 0, \quad [X, Y] = Y \quad \text{e} \quad [X, Z] = Z.$$

Se  $\lambda \neq 0$  temos que  $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0$ , e assim obtemos

$$[R, X] = \lambda X \quad \text{e} \quad [X, Y] = [X, Z] = 0. \quad (3.15)$$

No caso (ii), a interseção de qualquer subálgebra comutativa  $\mathfrak{h}_1$  de dimensão 3 com a subálgebra  $\mathfrak{h}_2$  gerada por  $X, Y, Z$  tem dimensão pelo menos 2, pois se trata da interseção de dois hiperplanos em um espaço de dimensão 4. Logo, como ela é uma subálgebra comutativa de  $\mathfrak{h}_2$ , então deve, necessariamente, conter  $Y$  e  $Z$ , i.e.,  $Y, Z \in \mathfrak{h}_1$ . Mas, é direto ver que não existe outro elemento que comute com  $Y$  e  $Z$  e que não seja combinação linear dos dois. Logo,  $\mathfrak{h}_1$  tem que ter dimensão 2, contradizendo a hipótese. Concluimos que tal subálgebra tridimensional não existe.  $\square$

Nos espaços LRS Bianchi-I, os campos fundamentais  $R_M, X_M, Y_M, Z_M$  são campos de Killing que satisfazem uma das regras de comutação do Teorema 3.1.1, com a álgebra de isotropia em um ponto fixo  $p \in M$  identificada como sendo gerada por  $R$ . Porém, o segundo caso não admite uma subálgebra comutativa de dimensão 3, necessária entre os campos de Killing de um espaço plano tridimensional. Logo, ele deve ser desconsiderado. Assim, obtemos duas possíveis álgebras para nosso espaço, dadas pelo primeiro e terceiro casos expostos no Teorema 3.1.1. Desta forma, como nossas seções espaciais são homogêneas Riemannianas, e portanto espaços homogêneos redutivos, temos que, a  $\text{Ad}(\text{H})$ -invariância necessária neste tipos de espaços (veja equação (2.10)) implica que para todos  $U, V$  que são combinações lineares a coeficientes constantes de  $X_M, Y_M, Z_M$ , temos

$$g([R_M, U], V) + g(U, [R_M, V]) = 0. \quad (3.16)$$

Mas, o terceiro caso do Teorema 3.1.1 não cumpre esta propriedade, pois

$$2\lambda \|X_M\|^2 = g([R_M, X_M], X_M) + g(X_M, [R_M, X_M]) = 0. \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0. \quad (3.17)$$

De maneira intuitiva,  $Ad(R)$  não é "anti-simétrica" exceto se  $\lambda = 0$ . Logo, nos resta apenas o primeiro caso: a álgebra de Lie do grupo de isometrias de um espaço LRS Bianchi-I satisfaz

$$[X_M, Y_M] = [X_M, Z_M] = [Z_M, Y_M] = 0, \quad [R_M, Y_M] = Z_M, \quad [R_M, Z_M] = -Y_M. \quad (3.18)$$

Agora podemos encontrar a forma local dos espaços LRS Bianchi-I:

**Teorema 3.1.2.** *Seja  $M$  um espaço-tempo tipo Bianchi-I com métrica  $g$ . Em torno de qualquer ponto de  $M$  existe um sistema de coordenadas  $(t, x^1, x^2, x^3)$  tal que*

$$g = -dt^2 + \gamma_{ij}(t) dx^i dx^j, \quad (3.19)$$

com  $\gamma_{ij}(t)$  dependendo somente de  $t$ . No caso LRS temos

$$g = -dt^2 + a_{\perp}(t)^2 dx^2 + a_{\parallel}(t)^2 (dy^2 + dz^2), \quad (3.20)$$

onde  $x = x^1$ ,  $y = x^2$  e  $z = x^3$ . Se  $\dim G = 6$  temos o espaço-tempo de Robertson-Walker (RW) plano, que neste sistema de coordenadas toma a forma  $a(t) = a_{\perp}(t) = a_{\parallel}(t)$ :

$$g = -dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.21)$$

*Demonstração.* Fixado  $p \in M$ , como todo espaço plano é localmente isométrico ao espaço Euclidiano, existem 3 campos de Killing que comutam entre si e estão definidos em uma vizinhança de  $p$  em  $M$ ,  $X_M, Y_M$  e  $Z_M$ , e em cada ponto L.I.. Defina  $W$  como o único campo ortogonal à distribuição gerada por  $\{X_M, Y_M, Z_M\}$  e tal que  $g(W, W) = W^2 = -1$ , que existe uma vez que  $\text{span}(X_M(p), Y_M(p), Z_M(p))$  é tipo espaço. Temos que tomando  $V = X_M$  ou  $Y_M$  ou  $Z_M$

$$g([X_M, W], V) = \mathfrak{L}_{X_M}(g(W, V)) - (\mathfrak{L}_{X_M}g)(W, V) - g(W, [X_M, V]) = 0. \quad (3.22)$$

Ainda,

$$2g([X_M, W], W) = \mathfrak{L}_{X_M}(g(W, W)) - (\mathfrak{L}_{X_M}g)(W, W) = 0. \quad (3.23)$$

Logo,  $[X_M, W] = 0$ . Analogamente,  $[Y_M, W] = [Z_M, W] = 0$ . Portanto, existe um sistema de coordenadas  $(t, x, y, z)$  tal que

$$W = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_M = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_M = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{e} \quad Z_M = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.24)$$

Essas coordenadas nos dão a métrica (3.19). Para o caso LRS, a equação (3.16) nos diz que podemos escolher  $X_M$  ortogonal a  $Y_M$  e  $Z_M$ , o que implica  $\gamma_{12} = \gamma_{13} = 0$ . Sem perda de generalidade, o quarto campo de Killing  $R_M$  tem a forma

$$R_M = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}.$$

Isto implica que

$$\mathfrak{L}_{R_M} g = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{22} = \gamma_{33} \quad \gamma_{23} = 0.$$

Assim, tomando

$$g(Y_M, Y_M) = g(Z_M, Z_M) = a_{||}(t) \quad \text{e} \quad \gamma_{22} = g(X_M, X_M) = a_{\perp}(t) \quad (3.25)$$

temos a métrica (3.20). De forma análoga, no caso de RW podemos trocar o papel de  $x$  com  $y$  e obtermos a métrica (3.21).  $\square$

## 3.2 Equações de Einstein para LRS Bianchi I

A partir de agora vamos considerar apenas o caso LRS Bianchi-I com a métrica dada nas coordenadas adaptadas da equação (3.20). Neste caso temos que o elemento de volume da parte espacial é dado por  $\sqrt{\det(\gamma_{ij}(t))} = a_{\perp}(t)a_{||}(t)^2$ . Desta forma, consideramos que  $a_{||}(t)$  representa o fator de escala no plano de simetria  $yz$  e  $a_{\perp}(t)$  é o fator de escala do espaço na direção perpendicular a este plano. Cada um deles gera um fator de expansão de Hubble, denotados como

$$H_{\perp}(t) = \frac{d}{dt}(\ln a_{\perp}(t)) \quad \text{e} \quad H_{||}(t) = \frac{d}{dt}(\ln a_{||}(t)), \quad (3.26)$$

respectivamente. A parte isotrópica é dada pelo fator de escala isotrópico e a função de Hubble como

$$a = (a_{\perp} a_{||}^2)^{\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad H = \frac{d}{dt}(\ln a) = \frac{1}{3}(H_{\perp} + 2H_{||}). \quad (3.27)$$

Também definimos o parâmetro  $\lambda$ , que representa o desvio da taxa de expansão de seu valor médio, como

$$\lambda = \frac{H_{\perp} - H}{H}. \quad (3.28)$$

Como anteriormente definido, é fácil ver que a métrica para LRS Bianchi-I, dada no Teorema 3.1.2 nas coordenadas dos observadores em queda livre, é equivalente a

$$g = -dt^2 + a^2 e^{-4A} dx^2 + a^2 e^{2A} (dy^2 + dz^2) \quad (3.29)$$

com

$$a_{\perp} = a e^{-2A} \quad \text{e} \quad a_{\parallel} = a e^A, \quad (3.30)$$

sendo que

$$A(t) := -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \lambda(s) H(s) ds. \quad (3.31)$$

A matéria que preenche o espaço-tempo é um fluido qualquer, desde que seja compatível com as mesmas simetrias do tensor de Einstein. A densidade de energia é indicada por  $\rho$ , a pressão isotrópica por  $p$  e a componente anisotrópica da pressão por  $\delta p$ . Assim, esse tensor de energia-momento mais geral é dado por

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}\{ -\rho, p - 2\delta p, p + \delta p, p + \delta p \}, \quad (3.32)$$

sendo cada uma dessas funções apenas da variável  $t$ . As equações de Einstein conectam esse tensor ao tensor de Einstein:

$$G_{\nu}^{\mu} = R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} R \delta_{\nu}^{\mu} = T_{\nu}^{\mu}. \quad (3.33)$$

**Teorema 3.2.1.** *Nas coordenadas adaptadas para os espaços LRS Bianchi-I, conforme o Teorema 3.1.2, as equações de Einstein  $G_{\nu}^{\mu} = T_{\nu}^{\mu}$  aparecem como*

$$3H^2(4 - \lambda^2) = 4\rho, \quad (3.34)$$

$$\frac{d}{dt}(H(\lambda - 2)) - \frac{3}{4}H^2(\lambda - 2)^2 = p - 2\delta p, \quad (3.35)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(H(\lambda + 4)) - \frac{3}{4}H^2((\lambda - 2)^2 + 6\lambda) = p + \delta p. \quad (3.36)$$

A conservação de energia segue das equações acima e é dada por

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0 \quad \iff \quad \frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + p - \lambda\delta p). \quad (3.37)$$

*Demonstração.* Procedemos diretamente com o cálculo do tensor de Einstein para a métrica. As componentes da conexão Levi-civita que não se anulam são:

$$\Gamma_{xx}^t = a^2 e^{-4A} (H + \lambda H), \quad (3.38)$$

$$\Gamma_{yy}^t = \Gamma_{zz}^t, = a^2 e^{2A} (H - \frac{1}{2} \lambda H), \quad (3.39)$$

$$\Gamma_{tx}^x = H + \lambda H, \quad (3.40)$$

$$\Gamma_{ty}^y = \Gamma_{tz}^z, = H - \frac{1}{2} \lambda H. \quad (3.41)$$

Com isto, montamos as equações de conservação, sendo que a única não nula é

$$\nabla_{\mu} T_t^{\mu} = \partial_t T_t^t + \Gamma_{tx}^x (T_t^t - T_x^x) + 2\Gamma_{ty}^y (T_t^t - T_y^y) = 0,$$

que é equivalente à equação (3.37). As componentes independentes do tensor de curvatura são:

$$R_{xt}^{xt} = \frac{d}{dt} (H(\lambda + 1)) + H^2 (\lambda + 1)^2, \quad (3.42)$$

$$R_{yt}^{yt} = R_{zt}^{zt} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (H(\lambda - 2)) + \frac{1}{4} H^2 (\lambda - 2)^2, \quad (3.43)$$

$$R_{xy}^{xy} = R_{xz}^{xz} = -\frac{1}{2} H^2 (\lambda - 2) (\lambda + 1), \quad (3.44)$$

$$R_{zy}^{zy} = \frac{1}{4} H^2 (\lambda - 2)^2. \quad (3.45)$$

Para o tensor de Ricci e a curvatura escalar temos:  $R_{\nu}^{\mu} = 0$  se  $\mu \neq \nu$  e

$$R_t^t = 3 \frac{d}{dt} (H) + \frac{3}{2} H^2 (\lambda^2 + 2), \quad (3.46)$$

$$R_x^x = \frac{d}{dt} (H(\lambda + 1)) + 3H^2 (\lambda + 1), \quad (3.47)$$

$$R_y^y = R_z^z = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (H(\lambda - 2)) - \frac{3}{2} H^2 (\lambda - 2), \quad (3.48)$$

$$R = 6 \frac{d}{dt} (H) + \frac{3}{2} H^2 (\lambda^2 + 8). \quad (3.49)$$

Dessas relações seguem as equações de Einstein diretamente.  $\square$

Note que das equações de Einstein (3.35) e (3.36) obtemos a seguinte expressão

$$\delta p = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (H\lambda) - \frac{3}{2} H^2 \lambda. \quad (3.50)$$



Logo, sob as considerações feitas acima, temos que o espaço-tempo LRS Bianchi-I se transforma no espaço isotrópico plano de Robertson-Walker se, e somente se, o desvio  $\lambda$  se anula, pois neste caso  $\delta p = 0$  por (3.50). Assim:

$$\lambda = 0 \iff \text{O espaço-tempo é RW plano.} \quad (3.51)$$

Partimos agora para as soluções exatas. Temos dois casos:  $\dot{\rho} = 0$  e  $\dot{\rho} \neq 0$ .

**Teorema 3.2.2.** *Considere  $p$  e  $\delta p$  funções quaisquer da variável  $t$  e  $\rho = \rho_0$  constante. Temos exatamente duas possibilidades:*

(i)  $H = 0$ . Neste caso o espaço-tempo é localmente isométrico ao espaço-tempo de Minkowski.

(ii)  $H \neq 0$  e  $\lambda \delta p = p + \rho_0$ . Neste caso as equações de Einstein se reduzem a única equação dada por

$$\frac{d}{dt}H + 3H^2 = \frac{1}{2}(\rho_0 - p). \quad (3.52)$$

*Demonstração.* Na equação da conservação de energia dada no teorema 3.2.1, vamos ter duas possibilidades:

(i) Como  $H = 0$  temos que  $a = a_0$  e  $A(t) = 0$ , além disso por (3.34) e (3.35) temos que  $\rho = p = \delta p = 0$ . A métrica neste caso é dada, sem perda de generalidade, com  $a_0 = 1$  e  $g = -dt^2 + (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ , que é a métrica de Minkowski.

(ii)  $\lambda \delta p = p + \rho_0$ . Utilizando o fato de que  $\rho = \rho_0$  na equação (3.34) e derivando a equação (3.50), obtemos

$$\frac{d}{dt}(\lambda) = \frac{d}{dt}(H) \frac{(4 - \lambda^2)}{H}. \quad (3.53)$$

Aplicando a equação (3.53) na expressão obtida das equações de Einstein (3.50) obtemos

$$\lambda \delta p = -2 \frac{d}{dt}(H) + 6H^2 + 2\rho_0. \quad (3.54)$$

Substituindo na equação (3.54) a relação  $\lambda \delta p = p + \rho_0$ , segue o resultado.

□

**Corolário 3.2.1.** *Se  $\rho = \rho_0$  e  $\delta p = \frac{\delta p_0}{\lambda}$ , então  $p = \delta p_0 - \rho_0$  e as soluções das equações de Einstein correspondem ao vácuo com constante cosmológica  $\Lambda = \frac{1}{2}(2\rho_0 - \delta p_0)$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.2.2 temos que quando  $\lambda\delta p = p + \rho_0$  obtemos a equação diferencial  $\frac{d}{dt}(H) + 3H^2 = \frac{1}{2}(\rho_0 - p)$  que precisa de uma equação de estado extra para ter uma solução. Neste caso, consideramos a seguinte equação de estado  $\delta p = \frac{\delta p_0}{\lambda}$ , assim temos que  $p = \delta p_0 - \rho_0$  fazendo que a equação diferencial em termos de  $H$  tenha a seguinte solução

$$H = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \coth [\sqrt{3\Lambda}(t - t_0) + C] & \Lambda > 0, \\ \frac{1}{3(t-t_0)+C} & \Lambda = 0, \\ \sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} \cot [\sqrt{3|\Lambda|}(t - t_0) + C] & \Lambda < 0. \end{cases} \quad (3.55)$$

onde definimos  $\Lambda = \rho_0 - \frac{1}{2}\delta p_0$ , assim

$$a = \begin{cases} a_0 [\sinh \sqrt{3\Lambda}(t - t_0) + C]^{\frac{1}{3}} & \Lambda > 0, \\ a_0 [3(t - t_0) + C]^{\frac{1}{3}} & \Lambda = 0, \\ a_0 [\sin \sqrt{3|\Lambda|}(t - t_0) + C]^{\frac{1}{3}} & \Lambda < 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

□

**Corolário 3.2.2.** *Se  $\dot{\rho} = 0$  e  $\delta p = 0$ , então  $p = -\rho_0$  e obtemos a solução do vácuo com constante cosmológica  $\Lambda = \rho_0$ .*

Este tipo de soluções no vácuo com constante cosmológica podem ser vistos em [1]. Agora partimos para as soluções que satisfazem  $\dot{\rho} \neq 0$ . Isso implica que podemos usar a densidade de energia como uma coordenada tipo "tempo". O seguinte teorema abrange este caso mais geral:

**Teorema 3.2.3.** *Assuma que  $\dot{\rho}(t_0) \neq 0$ . Na representação com a coordenada  $\rho$ , tomando*

$$g = -\frac{(4 - \lambda^2) d\rho^2}{12\rho(\rho + p - \lambda\delta p)^2} + a^2 e^{-4A} dx^2 + a^2 e^{2A} (dy^2 + dz^2), \quad (3.57)$$

onde  $a(\rho)$  satisfaz a equação

$$a = a_0 \exp\left(-\frac{1}{3} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' + p(\rho') - \lambda(\rho') \delta p(\rho')}\right) \quad (3.58)$$

e  $A$  é dado por

$$A(\rho) := \frac{1}{6} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\lambda(\rho') d\rho'}{\rho' + p(\rho') - \lambda(\rho') \delta p(\rho')} \quad (3.59)$$

temos que as equações de Einstein são satisfeitas, i.e., o tensor de Einstein da métrica (3.57) satisfaz

$$G_{\nu}^{\mu} = \text{diag}\{ -\rho, p - 2\delta p, p + \delta p, p + \delta p \} \quad (3.60)$$

se, e somente se, a equação de conservação é satisfeita, i.e.,  $\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0$  o que é equivalente a seguinte equação

$$\frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{(4 - \lambda^2)}{8\rho} \left[ \frac{(\rho - p)\lambda + 4\delta p}{\rho + p - \lambda\delta p} \right]. \quad (3.61)$$

*Demonstração.* Procedemos diretamente com o cálculo do tensor de Einstein para a métrica. As componentes da conexão Levi-civita que não se anulam são:

$$\Gamma_{\rho\rho}^{\rho} = -\frac{\lambda\lambda'}{4 - \lambda^2} - \frac{1}{2\rho} - \frac{1 + p' - (\lambda\delta p)'}{\rho + p - \lambda\delta p}, \quad (3.62)$$

$$\Gamma_{xx}^{\rho} = -4a^2 e^{-4A} \rho(\rho + p - \lambda\delta p) \frac{\lambda + 1}{4 - \lambda^2}, \quad (3.63)$$

$$\Gamma_{yy}^{\rho} = \Gamma_{zz}^{\rho} = 2a^2 e^{2A} \rho(\rho + p - \lambda\delta p) \frac{\lambda - 2}{4 - \lambda^2}, \quad (3.64)$$

$$\Gamma_{x\rho}^x = -\frac{\lambda + 1}{3(\rho + p - \lambda\delta p)}, \quad (3.65)$$

$$\Gamma_{y\rho}^y = \Gamma_{z\rho}^z = \frac{\lambda - 2}{6(\rho + p - \lambda\delta p)}, \quad (3.66)$$

onde  $\lambda' = \frac{d\lambda}{d\rho}$ ,  $p' = \frac{dp}{d\rho}$ ,  $(\lambda\delta p)' = \frac{d}{d\rho}(\lambda\delta p)$ . Para o resto de nossa prova precisamos utilizar a conservação do tensor energia-momento enunciada no teorema 3.2.3 e que é correspondente a seguinte equação

$$\frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{(4 - \lambda^2)}{8\rho} \left[ \frac{(\rho - p)\lambda + 4\delta p}{\rho + p - \lambda\delta p} \right]. \quad (3.67)$$

Para o cálculo do tensor de curvatura aplicamos a equação da conservação do tensor energia-momento dada em (3.61). As componentes independentes do tensor de curvatura

são:

$$R_{x\rho}^{x\rho} = -\frac{\rho(2+5\lambda)}{6(2+\lambda)} - \frac{1}{2}(p+4\delta p), \quad (3.68)$$

$$R_{y\rho}^{y\rho} = R_{z\rho}^{z\rho} = -\frac{\rho(2-\lambda)}{6(2+\lambda)} - \frac{1}{2}(p-2\delta p), \quad (3.69)$$

$$R_{xy}^{xy} = R_{xz}^{xz} = \frac{2\rho(1+\lambda)}{3(2+\lambda)}, \quad (3.70)$$

$$R_{yz}^{yz} = \frac{\rho(2-\lambda)}{3(2+\lambda)}. \quad (3.71)$$

Para o tensor de Ricci e a curvatura escalar temos:  $R_{\nu}^{\mu} = 0$  se  $\mu \neq \nu$  e

$$R_{\rho}^{\rho} = -\frac{1}{2}(\rho+3p), \quad (3.72)$$

$$R_x^x = -\frac{1}{2}(-\rho+p+4\delta p), \quad (3.73)$$

$$R_y^y = R_z^z = \frac{1}{2}(\rho-p+2\delta p), \quad (3.74)$$

$$R = \rho - 3p, \quad (3.75)$$

portanto, as equações de Einstein são satisfeitas para  $g$ , como pode ser facilmente verificado.  $\square$

**Corolário 3.2.3.** *Considere que a pressão isotrópica  $p$  e a componente anisotrópica da pressão  $\delta p$  satisfazem as seguintes equações de estado:  $p = p(a, \rho)$  e  $\delta p = \delta p(a, \rho)$ , respectivamente, sendo funções diferenciáveis nas variáveis  $a$  e  $\rho$ . Então, as equações de Einstein tem uma única solução satisfazendo as condições iniciais  $a(t_0) = a_0$ ,  $\rho(t_0) = \rho_0$ ,  $\lambda(t_0) = \lambda_0$ , que é obtida segundo o Teorema 3.2.3.*

*Demonstração.* Isso segue da existência e unicidade do sistema de equações no Teorema 3.2.1.  $\square$

**Observação 3.2.1.** *Pelo corolário anterior temos que a solução é única. Dessa forma, a solução dada no Teorema 3.2.3 é a única que satisfaz as equações de Einstein.*

### 3.3 Soluções exatas para fluidos lineares

Vamos considerar o caso de fluido com equação de estado linear

$$p = \gamma\rho \quad \text{e} \quad \delta p = \epsilon\rho, \quad (3.76)$$

onde  $\gamma$  e  $\epsilon$  são constantes. Substituindo as equações de estado na equação de conservação dada pela equação (3.61) obtemos

$$\frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{(4 - \lambda^2)}{8\rho} \left[ \frac{4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda}{\gamma + 1 - \epsilon\lambda} \right]. \quad (3.77)$$

Assim, temos uma relação entre  $\rho$  e  $\lambda$ , que pode ser invertida e considerada a última como variável independente. Neste caso, ao resolver esta equação obtemos a seguinte expressão

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{2 - \lambda}{2 - \lambda_0} \right)^{\left(\frac{\gamma+1-2\epsilon}{\gamma-1-2\epsilon}\right)} \left( \frac{2 + \lambda}{2 + \lambda_0} \right)^{\left(\frac{\gamma+1+2\epsilon}{\gamma-1+2\epsilon}\right)} \left( \frac{4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda}{4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda_0} \right)^{-2\left(\frac{\gamma^2-1-4\epsilon^2}{(\gamma-1)^2-4\epsilon^2}\right)}. \quad (3.78)$$

Agora vamos a considerar todas as formulas na variável  $\lambda$ . Assim  $a(\lambda)$  satisfaz a equação

$$a = a_0 \exp\left(-\frac{8}{3} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{(4 - \lambda'^2)(4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda')}\right). \quad (3.79)$$

Resolvendo esta integral

$$\frac{a}{a_0} = \left( \frac{2 - \lambda}{2 - \lambda_0} \right)^{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma-1-2\epsilon}\right)} \left( \frac{2 + \lambda}{2 + \lambda_0} \right)^{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma-1+2\epsilon}\right)} \left( \frac{4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda}{4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda_0} \right)^{\frac{2}{3}\left(\frac{\gamma-1}{(\gamma-1)^2-4\epsilon^2}\right)} \quad (3.80)$$

e  $A$  é dado por

$$A(\rho) := \frac{4}{3} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda' d\lambda'}{(4 - \lambda'^2)(4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda')}, \quad (3.81)$$

ou seja,

$$e^A = \left( \frac{2 - \lambda}{2 - \lambda_0} \right)^{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma-1-2\epsilon}\right)} \left( \frac{2 + \lambda}{2 + \lambda_0} \right)^{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma-1+2\epsilon}\right)} \left( \frac{4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda}{4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda_0} \right)^{-\frac{4}{3}\left(\frac{\epsilon}{(\gamma-1)^2-4\epsilon^2}\right)}. \quad (3.82)$$

Substituindo estas equações na métrica, obtemos a solução geral para o caso linear com  $\epsilon \neq 0$  ou  $\gamma \neq \pm 1$ :

$$g = -\frac{16 d\lambda^2}{3\rho(4 - \lambda^2)(4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda)^2} + a_{\perp}(t)^2 dx^2 + a_{\parallel}(t)^2 (dy^2 + dz^2), \quad (3.83)$$

onde

$$a_{\perp}(t) = a_0 \left( \frac{2 - \lambda}{2 - \lambda_0} \right)^{-\left(\frac{1}{\gamma-1-2\epsilon}\right)} \left( \frac{2 + \lambda}{2 + \lambda_0} \right)^{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma-1+2\epsilon}\right)} \left( \frac{4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda}{4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda_0} \right)^{\frac{10}{3}\left(\frac{\gamma-1}{(\gamma-1)^2-4\epsilon^2}\right)} \quad (3.84)$$

e

$$a_{\parallel}(t) = a_0 \left( \frac{2 + \lambda}{2 + \lambda_0} \right)^{-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\gamma-1+2\epsilon}\right)} \left( \frac{4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda}{4\epsilon - (\gamma - 1)\lambda_0} \right)^{-\frac{2}{3}\left(\frac{\gamma-1}{(\gamma-1)^2-4\epsilon^2}\right)}. \quad (3.85)$$

### 3.3.1 O fluido perfeito linear

Vamos considerar o caso de um fluido perfeito linear, que quer dizer que nossas equações de estado teriam a mesma forma já estudada na seção anterior, com a particularidade  $\delta p = 0$ , i.e.,  $\epsilon = 0$ . Desta forma nossa equação de conservação vai nos dar

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{4 - \lambda^2}{4 - \lambda_0^2} \right)^\mu \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{-2\mu} \quad \text{onde} \quad \mu = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (3.86)$$

ou, equivalentemente,

$$\lambda^2 = \frac{4b_0}{b_0 + (4 - \lambda_0^2)\rho^{\frac{1}{\mu}}} \quad \text{onde} \quad b_0 = \lambda_0^2 \rho_0^{\frac{1}{\mu}}. \quad (3.87)$$

Assim temos que

$$\frac{a}{a_0} = \left( \frac{4 - \lambda^2}{4 - \lambda_0^2} \right)^{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)} \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)} \quad (3.88)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{a}{a_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{1}{3(\gamma+1)}}. \quad (3.89)$$

Neste caso obtemos que

$$A = \frac{1}{3(\gamma - 1)} \ln \left| \left( \frac{2 + \lambda_0}{2 - \lambda_0} \right) \left( \frac{2 - \lambda}{2 + \lambda} \right) \right| \quad (3.90)$$

ou, equivalentemente,

$$A(\rho) = \frac{1}{3(\gamma - 1)} \ln \left( \left( \frac{\lambda_0 + 2}{\lambda_0 - 2} \right) \left( \frac{b_0^{\frac{1}{2}} - \sqrt{b_0 + (4 - \lambda_0^2)\rho^\mu}}{b_0^{\frac{1}{2}} + \sqrt{b_0 + (4 - \lambda_0^2)\rho^\mu}} \right) \right). \quad (3.91)$$

A métrica toma a forma

$$g = g_{00} d\lambda^2 + a_\perp(t)^2 dx^2 + a_\parallel(t)^2 (dy^2 + dz^2), \quad (3.92)$$

com

$$g_{00} = -\frac{16}{3(\gamma - 1)^2} \left( \frac{4 - \lambda_0^2}{\lambda_0^2} \right)^{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)} \left( \frac{4 - \lambda^2}{\lambda^{\frac{2}{\gamma}}} \right)^{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)}, \quad (3.93)$$

$$a_\perp(t) = a_0 \left( \frac{2 - \lambda}{2 - \lambda_0} \right)^{-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)} \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)} \quad (3.94)$$

e

$$a_\parallel(t) = a_0 \left( \frac{2 + \lambda}{2 + \lambda_0} \right)^{-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)} \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)}. \quad (3.95)$$

Essas fórmulas são válidas para as equações de estado

$$p = \gamma\rho \quad \text{para todo } \gamma \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}. \quad (3.96)$$

Os casos onde  $\gamma = 0, \frac{1}{3}, 1$ , forem estudados pelo astrofísico teórico Andrei Georgievich Doroshkevich em ([3]). O caso onde  $0 \leq \gamma \leq 1$  foi estudado pelos físicos Peter Vajk e Peter Eltgroth em ([10]).

O caso onde  $\gamma = -1$  já foi estudado como as soluções de vácuo com constante cosmológica, discutidas nos corolários do Teorema 3.2.2. Resta-nos então o caso  $\gamma = 1$ . Da equação de conservação, segue que

$$a = a_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{1}{6}}. \quad (3.97)$$

Voltando à equação de Friedmann, obtemos

$$\lambda = \lambda_0. \quad (3.98)$$

Assim

$$A(\rho) = \frac{\lambda_0}{6} \ln \left| \frac{\rho}{\rho_0} \right| \quad (3.99)$$

e a métrica fica na forma

$$g = - \frac{(4 - \lambda_0^2) d\rho^2}{48 \rho^3} + a_0^2 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{2\lambda_0+1}{3}} dx^2 + a_0^2 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\lambda_0-1}{3}} (dy^2 + dz^2). \quad (3.100)$$

# Conclusões

Nesta dissertação nosso objetivo foi a busca de novas soluções das equações de Einstein para os espaços-tempos LRS Bianchi-I. Portanto, partimos de um ponto de vista geométrico, desenvolvendo sua representação local desde hipóteses mais gerais. O principal (e inédito) resultado foi colocado no Teorema 3.2.3, onde apresentamos uma nova representação local para a métrica, fornecida em termos das componentes do tensor energia-momento, e assim permitindo-nos obter facilmente várias soluções de interesse na Cosmologia. Em particular, apresentamos os casos de fluidos lineares que satisfazem as equações de estado  $p = \gamma\rho$  e  $\delta p = \epsilon\rho$ ,  $\gamma, \epsilon \in \mathbb{R}$ . Como exemplo do potencial do Teorema 3.2.3, a classe com  $\epsilon \neq 0$  tem sua primeira aparição neste trabalho.



# Referências Bibliográficas

- [1] BITTENCOURT. E; GOMES. L; KLIPPERT. R. Bianchi-I Cosmology From Causal Thermodynamics. Classical and Quantum Gravity. 2017
- [2] DO CARMO. M. Geometria Riemanniana. Quinta Edição Segunda Impressão. Instituto Nacional De Matemática Pura e Aplicada. 2015.
- [3] DOROSHKEVICH. A. G. Model of a Universe With a Uniform Magnetic Field. Astrophysics, Volume 1, Number 3, 1965.
- [4] ELLIS. G; MAARTENS. R; MACCALLUM. M. Relativistic Cosmology. Cambridge University Press. New York. 2012.
- [5] KOWALSKI. O; SZENTHE. J. On the existence of Homogeneous geodesics in homogeneous Riemannian Manifolds. Geom. Ded. 81 (2000), 209-214; Erratum: 84 (2001), 331-332.
- [6] O'NEILL. B. Semi-Riemannian Geometry With Applications To Relativity. Department of Mathematics University of California. Academic Press. 1983.
- [7] KANTOWSKI. R. Some Relativist Cosmological Models. University of Texas. 1966.
- [8] STEPHANI. H; KRAMER. D; MACCALLUM. M; HOENSELAERS. C; HERLT. E; Exact Solutions to Einsteins Field Equations. Second Edition. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press. 2003.
- [9] TORRETI. R. La Geometria Del Universo y Otros Ensayos de Filosofia Natural. Universidad de los Andes. Consejo de publicaciones. Merida, Venezuela. 1994.

- [10] VAJK. P; ELTGROTH. P; Spatially Homogeneous Anisotropic Cosmological Models Containing Relativistic Fluid and Magnetic Field. Journal of Mathematical Physics. Volume II, Number 7, July 1970.