

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Automorfismos Simbólicos em Dinâmica Complexa

Cristian Fabian Loaiza Sierra

Orientador: Prof. Dr. Juan Valentín Mendoza Mogollón

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 27 DE JUNHO DE 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Automorfismos Simbólicos em Dinâmica Complexa

Cristian Fabian Loaiza Sierra

Orientador: Prof. Dr. Juan Valentín Mendoza Mogollón

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração:

Topologia/Geometria

ITAJUBÁ – MG

27 DE JUNHO DE 2020

Dedicado a Verónica, Juan Camilo e Miguel Ángel.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que me ajudaram direta ou indiretamente na minha formação acadêmica e como pessoa. Agradeço especialmente a minha família e amigos por sua companhia e apoio, ao professor Valentín Mendoza por sua orientação nesta dissertação, aos professores do departamento de Matemática da UNIFEI por todo o conhecimento compartilhado e à CAPES pelo apoio financeiro necessário para a realização do Mestrado.

*“We live on a placid island of ignorance in the
midst of black seas of infinity, and it was not
meant that we should voyage far.”*
H.P. Lovecraft, The call of Cthulhu.

Resumo

Neste documento, estudamos a relação que existe entre a dinâmica complexa e a dinâmica simbólica. Em específico, descrevemos um método geométrico, com o qual, a partir da dinâmica de polinômios complexos de grau d , podemos encontrar um conjunto mínimo de automorfismos do shift que gera o grupo Aut_d .

Palavras-chave: Dinâmica Complexa, Dinâmica Simbólica, Automorfismo do Shift.

Abstract

In this document, we study the relationship that exists between complex dynamics and symbolic dynamics. Specifically, we describe a geometric method, with which, based on the complex polynomial dynamics of degree d , we can find a minimal set of shift automorphisms that generates the group Aut_d .

Keywords: Complex Dynamics, Symbolic Dynamics, Automorphism of the Shift.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Intrudução	viii
1 Conceitos Fundamentais	1
1.1 Funções Analíticas	1
1.2 O Plano Complexo Estendido \mathbb{C}_∞	3
1.3 Dinâmica Complexa Local	6
1.4 Famílias Normais	9
1.5 Quase-Conformidade	12
1.6 Dinâmica Simbólica	15
2 Dinâmica Global em \mathbb{C}_∞	19
2.1 Conjuntos de Fatou e Julia.	19
2.2 Conjugação Local	26
2.3 Dinâmica de Funções Polinomiais	31
2.4 O Espaço de Parâmetros	37

3 Automorfismo não Trivial Gerado pela Família Quadrática	39
3.1 Dinâmica da Família Quadrática	39
3.2 Girar o Valor Crítico de uma Função Quadrática	49
4 Automorfismos Gerados por Polinômios de Maior Grau.	55
4.1 Construção Giratória	55
4.2 Automorfismos de Permutação Cíclica	60
4.3 O Caso Cúbico	64
4.3.1 Alguns Exemplos	64
4.3.2 A Árvore no Conjunto Shift Locus Cúbico	69
4.3.3 Rotulação das Curvas Equipotenciais	73
4.3.4 Teorema Principal e uma Tabela de Marcadores Minimais	80
4.4 O caso de Maior Grau	81
Conclusões	84
Bibliografia	85

Introdução

A dinâmica complexa é, sem dúvida, uma área da Matemática intrigante e muito bonita. Seu início ocorreu no final do século XIX, com o estudo do comportamento local das iterações de funções analíticas, em vizinhanças de pontos fixos, por matemáticos como Kœnigs e Böttcher. No entanto, quase nada se sabia sobre o comportamento global dessas iterações, até que em 1906, Pierre Fatou estudando a função $z \mapsto z^2/(z^2 + 2)$, mostrou que quase todas as órbitas sob iteração convergem para zero, exceto para um conjunto de pontos excepcionais para os quais sua órbita permanece limitada longe de zero. O grande interesse que esse conjunto despertou resultou na abordagem em profundidade pelo mesmo Fatou e também por Gaston Julia e outros, como S. Lattés e J. F. Ritt. Esses conjuntos, agora conhecidos como *Conjuntos de Julia*, se tornaram um objeto de estudo importante devido à seu comportamento caótico. As contribuições fundamentais e incisivas foram as de Fatou, embora Julia tenha desenvolvido material muito estreitamente relacionado mais ou menos ao mesmo tempo no final da segunda década do século XX.

Na atualidade, a dinâmica complexa é uma área de estudo vigorosa e prolífera, graças às intermináveis contribuições do trabalho de matemáticos como Atela, Blanchard, Douady, Hubbard, Mandelbrot, Sullivan, entre muitos outros. Em particular, por exemplo, podemos estudar a topologia do espaço complexo de parâmetros \mathbb{C}^{d-1} para funções polinomiais de grau $d \geq 2$. Este espaço se divide em duas regiões distintas, uma das quais é o conjunto de parâmetros nos quais os polinômios têm todos seus pontos críticos com órbita convergindo para ∞ , conhecida como *Shift Locus*. A região complementar

consiste nos parâmetros para os quais um ou mais pontos críticos têm órbita limitada, chamada *Boundedness Locus*. Se o polinômio têm todos seus pontos críticos com órbita limitada, então o parâmetro está contido no conjunto conhecido como *Connectedness Locus*.

Para o caso quadrático, o conjunto de parâmetros connectedness locus coincide com o boundedness locus é o conhecido como conjunto de Mandelbrot, e seu complemento é o shift locus. Além disso, sob homotopias temos apenas uma curva fechada não trivial no shift locus. No caso de polinômios com maior grau, $d > 2$, no espaço de parâmetros, existem infinitas curvas topologicamente distintas na região shift locus. O qual implica que, a topologia do connectedness locus é muito mais complicada.

Quando consideramos parâmetros no shift locus, temos que o conjunto de Julia associado é homeomórfo a um conjunto Cantor e sua dinâmica é equivalente à função shift no espaço das sequências infinitas com d símbolos. A função shift é um objeto fundamental da dinâmica simbólica. Se seguimos esse conjunto de Cantor enquanto percorremos uma curva fechada na região shift locus, induzimos uma função no conjunto de Julia, chamada função monodromia. Se a curva fechada for homotopicamente trivial, a função induzida é a identidade. Mas se a curva fechada é não trivial, a função induzida é também não trivial no conjunto de Cantor. Mais importante, essa função induzida comuta com a função shift. O que resulta na obtenção dos chamados automorfismos do shift.

Um importante problema da dinâmica simbólica era dar uma descrição do grupo de todos os automorfismos do shift, até 1990, que foi resolvido, por Ashley [4] e Boyle, Franks e Kitchens [9]. Assim, o objetivo com este documento é estudar a interessante relação que existe entre a dinâmica complexa e a dinâmica simbólica. Em específico, baseado principalmente no artigo [7] de Blanchard, Devaney e Keen, mostrar como, fixando um ponto base P_0 no shift locus e uma conjugação topológica entre (P_0, J_{P_0}) e (σ, Σ_d) , toda curva fechada γ contida no shift locus começando e terminando em P_0 , induz um automorfismo do shift denotado $\Theta_d(\gamma)$. Como a região shift locus é conexa [11, Corolário 6.2],

então esse homomorfismo é independente do ponto base, a menos de um automorfismo em $\text{Aut}(\sigma, \Sigma_d)$. Mais precisamente, vamos mostrar o seguinte resultado:

Teorema. A função $\Theta_d : \pi_1(S_d) \rightarrow \text{Aut}_d$ é sobrejetora.

Para isso, duas construções devem ser descritas. A primeira construção permite girar o valor crítico com menor taxa de escape, em torno de sua curva equipotencial no espaço dinâmico, isso gera uma curva fechada na região shift locus, com a qual são produzidos os automorfismos do shift. A segunda construção, permite deformar polinômios através de diferentes curvas equipotenciais, e portanto, definir uma árvore no espaço de parâmetros, cujos vértices são polinômios aos quais a primeira construção é aplicada. Com este método, é possível descrever um conjunto mínimo de automorfismos que geram o grupo Aut_d .

Capítulo 1

Conceitos Fundamentais

Neste capítulo, apresentamos alguns dos conceitos mais fundamentais sobre a teoria das funções complexas, a dinâmica gerada pela iteração dessas funções, a teoria da quase conformidade e, finalmente, uma breve introdução à dinâmica simbólica. Para esse fim, usaremos todas as referências bibliográficas deste documento, principalmente de [1], [5], [6], [10], [12] e [17].

1.1 Funções Analíticas

O plano complexo é denotado por \mathbb{C} e cada ponto deste conjunto pelas coordenadas cartesianas (x, y) , coordenadas polares (r, θ) ou pelo número complexo $z = x + iy = re^{i\theta}$, dependendo de qual é mais conveniente. O módulo $|z|$ é denotado por r e o argumento $\arg(z)$ por θ , onde $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\arg(z) = \theta = \arctan(y/x)$. O plano complexo tem uma orientação: o argumento é positivo se a direção do eixo x para z for anti-horária e negativa, caso contrário. O conjugado complexo de z é $\bar{z} = x - iy$, tem o mesmo módulo que z e seu argumento tem o sinal oposto. O comprimento do vetor z é seu módulo e a distância entre dois pontos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ é o módulo de sua diferença

$$d_E(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Essa distância define a conhecida métrica euclidiana no plano complexo.

Definição 1.1. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa, com $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto. Dizemos que f é **diferenciável** em $z_0 \in U$ se o limite*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

*existe, o valor desse limite é denotado por $f'(z_0)$ e é chamado a **derivada** de f em z_0 . Se f é diferenciável em cada ponto de U , dizemos que f é diferenciável em U .*

Se f é diferenciável e a função $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, dizemos que f é *continuamente diferenciável*. Se f' é diferenciável então f é duas vezes diferenciável. Uma função diferenciável de modo que cada derivada sucessiva seja novamente diferenciável é chamada *infinitamente diferenciável*.

Definição 1.2. *Se U é um aberto em \mathbb{C} , uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é dita **analítica** se f é continuamente diferenciável.*

A soma e o produto de funções analíticas em um aberto U são funções analíticas. Além disso, se f e g são analíticas em U , e U' é o conjunto de pontos onde g não se cancela, então f/g é analítica em U' . Um sinônimo comumente usado é o de *função holomorfa*.

Definição 1.3. *Seja U um aberto em \mathbb{C} , $z_0 \in U$ e $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se existir uma função analítica $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ com $g(z_0) \neq 0$ e um inteiro não negativo n tal que $f(z) = g(z)/(z - z_0)^n$ para todo $z \in U \setminus \{z_0\}$, então dizemos que z_0 é um **polo** de f de ordem n . Uma função é dita **meromorfa** num aberto $U \subset \mathbb{C}$, se existe um conjunto discreto $\Gamma \subset U$ tal que f é analítica em $U \setminus \Gamma$, e os pontos de Γ são os polos de f .*

Teorema 1.1. (Regra da cadeia) *Sejam f e g analíticas em U e V respectivamente e suponha que $f(U) \subset V$. Então $g \circ f$ é analítica em U e para todo $z \in U$*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Um resultado importante é o seguinte. A parte real $u(x, y) = \operatorname{Re}f(x + iy)$ e a parte imaginária $v(x, y) = \operatorname{Im}f(x + iy)$ de uma função analítica $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, satisfazem as *equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Por outro lado, se as funções $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ têm derivadas parciais contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em Ω , então a função $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em Ω .

Definição 1.4. Se Ω e Ω' são domínios em \mathbb{C} . Uma função bijetiva $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ é chamada **homeomorfismo** se f e sua inversa f^{-1} são contínuas. Se f é um homeomorfismo, dizemos que f é um **difeomorfismo** se f e f^{-1} são diferenciáveis.

Definição 1.5. Um **caminho** em \mathbb{C} é uma função contínua $\gamma : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, os valores $\gamma(t)$ descrevem o conjunto de pontos em \mathbb{C} chamado **curva** descrita por γ . Dizemos que γ é uma **caminho diferenciável** se γ é diferenciável em $[0, 1]$, e que γ é uma **caminho fechada** quando $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Se $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ são dois caminhos diferenciáveis num domínio Ω , que se cruzam no ponto z_0 , o ângulo entre elas é definido como o ângulo medido entre a tangente de γ_1 até a tangente de γ_2 em z_0 . Se diz que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ preserva ângulos em $z_0 \in \Omega$, se para cada par de caminhos diferenciáveis γ_1 e γ_2 que se interceptam em z_0 , o ângulo entre γ_1 e γ_2 é igual ao ângulo entre os cominhos $f(\gamma_1)$ e $f(\gamma_2)$ em $f(z_0)$.

Teorema 1.2. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica, então f preserva ângulos em cada ponto $z_0 \in \Omega$ onde $f'(z_0) \neq 0$.

Definição 1.6. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ que preserva ângulos em z_0 e também que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

existe para cada $z_0 \in \Omega$, é chamada **função conforme** em Ω .

Se f é analítica e $f'(z) \neq 0$ para cada z , então f é conforme. As funções conformes no plano complexo são, por assim dizer, aquelas que não distorcem formas.

1.2 O Plano Complexo Estendido \mathbb{C}_∞

Definição 1.7. O **plano complexo estendido** é o conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Para obter uma métrica sobre \mathbb{C}_∞ identificamos o plano \mathbb{C} com o plano horizontal $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ em \mathbb{R}^3 , tomamos a esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$, e denotamos o ponto $(0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ por e_3 . A linha reta em \mathbb{R}^3 que passa pelo ponto $z \in \mathbb{C}$ e e_3 , cruza por \mathbb{S}^2 no ponto $w = (w_1, w_2, w_3)$ diferente de e_3 . A função $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$ definida por

$$\pi(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right),$$

é uma bijeção com função inversa $\psi : \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\psi(w) = \frac{w_1 + iw_2}{1 - w_3}.$$

Fazendo a correspondência $\pi(\infty) = e_3$ conseguimos uma bijeção de \mathbb{C}_∞ sobre \mathbb{S}^2 . Esta bijeção é conhecida como *Projeção Estereográfica* e o conjunto \mathbb{C}_∞ também é chamado *Esfera de Riemann*. O hemisfério sul de \mathbb{S}^2 corresponde ao disco unitário e o hemisfério norte ao exterior deste disco.

Definição 1.8. A *distância cordal* entre dois pontos $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ é definida como segue

$$d_C(z, w) = |\pi(z) - \pi(w)| = \begin{cases} \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, & \text{se } z, w \neq \infty. \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}, & \text{se } w = \infty. \end{cases}$$

A métrica que define d_C em \mathbb{C}_∞ é chamada **métrica cordal**.

Proposição 1.1. As métricas cordal d_C e euclidiana d_E induzem a mesma topologia em \mathbb{C} , isto é, definem os mesmos conjuntos abertos em \mathbb{C} . Além disso,

$$d_C(z_n, \infty) \mapsto 0 \text{ se e somente se } |z_n| \mapsto \infty.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, tomamos uma bola aberta $B_C(z, \epsilon)$ com centro em $z \in \mathbb{C}$ e raio ϵ na métrica cordal. Se $w \in B_C(z, \epsilon)$ então $d_C(z, w) = d_E(\pi(z), \pi(w)) < \epsilon$, isso implica que $\pi(w)$ pertence à bola aberta $B_E(\pi(z), \epsilon)$ no subespaço euclidiano $\mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$, como a função π é contínua em \mathbb{C} e ψ é contínua em $\mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$, então $\psi(B_E(\pi(z), \epsilon))$ é um conjunto aberto no subespaço euclidiano \mathbb{C} e $\pi(B_C(z, \epsilon))$ é um aberto em $\mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$. Como π e ψ são bijetivas temos que $B_C(z, \epsilon) \subset \psi(B_E(\pi(z), \epsilon))$ e $\psi(B_E(\pi(z), \epsilon)) \subset B_C(z, \epsilon)$, assim as bolas abertas B_C da métrica cordal estão contidas em conjuntos abertos da topologia

gerada pelas bolas abertas B_E em \mathbb{C} e as bolas B_E estão contidas em abertos da topologia gerada pelas bolas B_C em \mathbb{C} , portanto, podemos concluir que as métricas d_C e d_E induzem a mesma topologia em \mathbb{C} . Agora, seja z_n uma sequência em \mathbb{C} , tal que $|z_n| \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$, pela definição

$$d_C(z_n, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z_n|^2}},$$

segue que $d_C(z_n, \infty) \rightarrow 0$. Por outro lado, se $d_C(z_n, \infty) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, dado $\epsilon > 0$ existe N_ϵ , tal que se $n > N_\epsilon$, temos que $d_C(z_n, \infty) < \epsilon$ e portanto $|z_n| > \sqrt{4\epsilon^{-2} - 1}$. Dado $M > 0$, tomando ϵ tal que $M = \sqrt{4\epsilon^{-2} - 1}$ se obtem $|z_n| > M$, se $n > N_\epsilon$ e portanto $|z_n| \rightarrow \infty$. \square

Definição 1.9. Um conjunto aberto, conexo e não vazio em \mathbb{C}_∞ é chamado um **domínio**. Uma **componente** de um domínio é um subconjunto conexo de \mathbb{C}_∞ que não está contido em nenhum subconjunto conexo maior.

Definição 1.10. Um domínio Ω em \mathbb{C}_∞ é **simplesmente conexo** se cada curva fechada em Ω pode ser deformada a um ponto de Ω .

Definição 1.11. Um conjunto é **totalmente desconexo** se seus únicos subconjuntos conexos são os conjuntos de um único ponto.

Definição 1.12. Um subconjunto U em \mathbb{C}_∞ é **localmente conexo** em $z \in U$ se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um ϵ' tal que $0 < \epsilon' < \epsilon$ e $B(z, \epsilon') \cap U$ é um subconjunto de uma componente de $B(z, \epsilon) \cap U$.

Apresentamos abaixo alguns resultados topológicos de conjuntos conexos em \mathbb{C}_∞ , suas demonstrações são omitidas, mas podem ser encontradas em [1] ou [5].

Proposição 1.2. O fecho de um conjunto conexo é conexo.

Proposição 1.3. Um domínio Ω é simplesmente conexo em \mathbb{C}_∞ se, e somente se, seu complementar $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ é conexo.

Proposição 1.4. Um domínio Ω em \mathbb{C}_∞ é simplesmente conexo se e somente se sua fronteira $\partial\Omega$ é conexa.

Proposição 1.5. *Se U é um subconjunto aberto de \mathbb{C}_∞ . Então $\mathbb{C}_\infty \setminus U$ é conexo se e somente se, cada componente de U é simplesmente conexo.*

Para finalizar esta seção, introduzimos o conceito de conjunto de Cantor em espaços topológicos em geral. No entanto, neste trabalho, consideramos esses conjuntos apenas nos espaços \mathbb{C} e \mathbb{C}_∞ . Como será mostrado em capítulos posteriores, os conjuntos de Cantor desempenham um papel importante no estudo da dinâmica complexa e os automorfismos simbólicos.

Definição 1.13. *Seja X um espaço topológico. Um conjunto $K \subset X$ é dito de um **conjunto de Cantor** se é fechado, totalmente desconexo e um subconjunto perfeito de X . Um conjunto é perfeito se cada ponto é um ponto de acumulação ou ponto limite de outros pontos nesse conjunto.*

1.3 Dinâmica Complexa Local

Nesta seção, estudaremos o sistema dinâmico formado pela *iteração* (composição repetida) de uma função f definida em \mathbb{C}_∞ . Para isso, introduzimos a seguinte notação. O símbolo f^n denota a n -ésima composição de f consigo mesma, isto é, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$.

Definição 1.14. *Considere a função $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Dado um ponto z_0 em \mathbb{C}_∞ , o conjunto $O^+(z_0) = \{z_0, f(z_0), f^2(z_0), f^3(z_0), \dots\}$ é chamado **órbita para frente** de z_0 . Se f é um homeomorfismo, podemos definir a **órbita completa** de z_0 , $O(z_0)$, como o conjunto de pontos $f^n(z_0)$ para $n \in \mathbb{Z}$, e a **órbita para trás** de z_0 , como o conjunto de pontos $O^-(z_0) = \{z_0, f^{-1}(z_0), f^{-2}(z_0), f^{-3}(z_0), \dots\}$.*

Definição 1.15. *Se $f^n(z_0) = z_0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então z_0 é dito um **ponto periódico** e $O^+(z_0)$ é uma **órbita periódica**. Se n é o primeiro número natural tal que $f^n(z_0) = z_0$, então n é chamado o **período** da órbita. Se o período de uma órbita é 1, isto é, se $f(z_0) = z_0$, dizemos que z_0 é um **ponto fixo** da função f .*

Exemplo 1.1. *Considere a função $P_0(z) = z^2$ em \mathbb{C}_∞ . O comportamento das órbitas depende de onde o ponto z_0 está em relação ao círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}$. A órbita de*

qualquer ponto dentro do círculo se aproxima da origem, e a órbita de qualquer ponto fora do círculo se aproxima a ∞ . Além disso, $P_0(0) = 0$ e $P_0(\infty) = \infty$, logo 0 e ∞ são pontos fixos. Finalmente, precisamos descrever a dinâmica de P_0 em S^1 , mas sobre o círculo unitário temos que $P_0(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ e $P_0^n(e^{i\theta}) = e^{2^n i\theta}$ com $\theta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a dinâmica da função $P_0|_{S^1}$ não é trivial. Em [12] podemos encontrar que o conjunto de pontos periódicos é denso em S^1 . A distância angular entre dois pontos é dobrada após da iteração de P_0 , isto é, P_0 é sensível a condições iniciais. E que qualquer arco pequeno em S^1 é eventualmente expandido pela iteração de P_0 até cobrir tudo S^1 . Em outras palavras, a dinâmica de P_0 em S^1 é “caótica”.

Se $z_0 \in \Omega$ é um ponto fixo de uma função analítica $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ com $|f'(z_0)| < 1$, existe uma vizinhança aberta U de z_0 tal que se $z \in U$, então $f^n(z) \rightarrow z_0$, quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, se $|f'(z_0)| > 1$ existe uma vizinhança aberta U de z_0 , tal que, se $z \in U$ com $z \neq z_0$, então existe um inteiro positivo k tal que $f^k(z) \notin U$. Temos assim a seguinte classificação para pontos fixos.

Definição 1.16. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ uma função analítica. Suponha que z_0 é um ponto fixo de f . Então dizemos que z_0 é:*

1. *Super-atrator se $f'(z_0) = 0$,*
2. *Atrator se $0 < |f'(z_0)| < 1$,*
3. *Repulsor se $|f'(z_0)| > 1$,*
4. *Neutra se $|f'(z_0)| = 1$.*

Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ é uma função analítica e z_0 é um ponto periódico de f de período n . O ponto z_0 é dito *hiperbólico* se $|(f^n)'(z_0)| \neq 1$ e o número $(f^n)'(z_0)$ é chamado o *multiplicador* do ponto periódico. A órbita periódica $O^+(z_0)$ é um conjunto finito de pontos distintos $z_0, f(z_0), f^2(z_0), \dots, f^{n-1}(z_0)$. Podemos assumir que $O^+(z_0)$ não contém ∞ e escrever

$$z_m = f^m(z_0), \quad m = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Por n aplicações da regra da cadeia temos que

$$\begin{aligned} (f^n)'(z_m) &= f'(z_m) \cdot f'(f(z_m)) \cdot f'(f^2(z_m)) \cdots f'(f^{n-1}(z_m)) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(z_m)) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} f'(z_k). \end{aligned}$$

Este argumento mostra que a derivada $(f^n)'$ tem o mesmo valor em cada ponto z_m da órbita $O^+(z_0)$. Além disso, como $f^n(z_m) = z_{m+n} = z_m$, temos que z_m é um ponto fixo da função f^n , logo cada ponto z_m é classificado exatamente da mesma maneira que qualquer outro z_k na órbita. Assim podemos estender a classificação anterior para órbitas periódicas e falar naturalmente do multiplicador da órbita, órbitas atratoras e assim por diante.

Uma função racional $R : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ é uma função da forma $R(z) = P(z)/Q(z)$, onde P e Q são polinômios com coeficientes complexos e sem fatores comuns. O grau $\text{grau}(R)$ de R é definido por

$$\text{grau}(R) = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}.$$

Em [5] podemos achar que se R^n é a n -ésima iteração de R , então $\text{grau}(R^n) = [\text{grau}(R)]^n$. Isso decorre da relação mais geral $\text{grau}(R \circ S) = \text{grau}(R) \cdot \text{grau}(S)$, entre qualquer dois funções racionais não constantes R e S . Qualquer função analítica f em \mathbb{C}_∞ pode ser representada como uma função racional. Portanto, existe uma correspondência um a um entre as funções racionais e as funções analíticas em \mathbb{C}_∞ . Os polos de uma função racional são simplesmente os pontos de \mathbb{C}_∞ que são mapeados a infinito.

Definição 1.17. *Uma transformação de Möbius φ em \mathbb{C}_∞ é uma função da forma*

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}_\infty.$$

Se $c = 0$, então $\varphi(\infty) = \infty$ e se $c \neq 0$ então $\varphi(\infty) = a/c$ e $\varphi(-d/c) = \infty$.

O conjunto das transformações de Möbius constitui um grupo de homeomorfismos conformes de \mathbb{C}_∞ em si mesmo. Essas funções podem ser usadas para introduzir a relação de equivalência **conjugação** relevante na teoria de sistemas dinâmicos.

Definição 1.18. Se $R, S : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ são duas funções racionais. Nós dizemos que R e S são homeomorficamente **conjugadas** se e somente se existe alguma transformação de Möbius φ tal que $R \circ \varphi = \varphi \circ S$.

Exemplo 1.2. Se $Q(z) = az^2 + bz + d$ é um polinômio quadrático complexo arbitrário, com $a \neq 0$. Então Q é conjugado a um polinômio quadrático da forma $P_c(z) = z^2 + c$. De fato, seja φ uma transformação de Möbius da forma

$$\varphi(z) = \frac{2z - b}{2a},$$

temos que φ é uma bijeção contínua, com função inversa $\varphi^{-1}(z) = az + b/2$. Logo,

$$(\varphi^{-1} \circ Q \circ \varphi)(z) = a \left(a \left(\frac{2z - b}{2a} \right)^2 + b \left(\frac{2z - b}{2a} \right) + d \right) + \frac{b}{2} = z^2 + \frac{b(2 - b) + 4ad}{4}.$$

Assim, $Q \circ \varphi = \varphi \circ P_c$.

Observação 1.1. Se P e Q são conjugados por φ , então P^n e Q^n também são conjugados por φ , isto é, se $Q = \varphi \circ P \circ \varphi^{-1}$, então,

$$Q^n = (\varphi \circ P \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ P \circ \varphi^{-1}) \circ \dots \circ (\varphi \circ P \circ \varphi^{-1}) = \varphi \circ P^n \circ \varphi^{-1}.$$

O qual implica que a conjugação respeita a iteração. Similarmente, a conjugação respeita pontos fixos, explicitamente, se $Q = \varphi \circ P \circ \varphi^{-1}$, então Q fixa $\varphi(z)$ se e somente se P fixa z . Estas propriedades mostram que P e Q são homeomorficamente o “mesmo” sistema dinâmico. Portanto, a resposta para qualquer questão sobre a dinâmica do sistema gerado por Q pode ser obtida a partir da resposta à mesma pergunta aplicada a P , aplicando a transformação de Möbius φ .

1.4 Famílias Normais

Definição 1.19. Se (X, d_X) e (Y, d_Y) são dois espaços métricos. Uma família de funções $\mathcal{F} = \{f_i : X \rightarrow Y\}$ é **equicontínua** em $x_0 \in X$, se e somente se, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para $x \in X$, e para toda $f_i \in \mathcal{F}$,

$$d_X(x_0, x) < \delta \quad \text{implica} \quad d_Y(f_i(x_0), f_i(x)) < \epsilon.$$

\mathcal{F} é equicontínua em um subconjunto U de X se é equicontínua em cada ponto x_0 de U .

Se a família de funções \mathcal{F} é equicontínua em cada subconjunto U_i do espaço métrico X , então \mathcal{F} é equicontínua sobre a união $\bigcup U_i$. Considerando a coleção $\{U_i\}$ como a classe de todos os subconjuntos abertos de X nos quais \mathcal{F} é equicontínua, temos que existe um subconjunto maximal aberto de X sobre o qual \mathcal{F} é equicontínua. Em particular, se f é uma função de X em si mesmo, então existe um subconjunto maximal aberto sobre o qual a família de iterações $\{f^n\}$ é equicontínua.

Definição 1.20. *Se (X, d_X) e (Y, d_Y) são dois espaços métricos. Uma família de funções $\mathcal{F} = \{f_i : X \rightarrow Y\}$ é dita **normal** em X , se cada sequência infinita de funções $f_n \in \mathcal{F}$ contém uma subsequência f_{n_k} que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de X .*

As definições acima são formulações para espaços métricos gerais, mas estamos interessados apenas em funções definidas em domínios da esfera complexa com a métrica cordal ou no plano complexo com a métrica euclidiana. Para isso, precisamos dos seguintes teoremas, as provas são omitidas, mas podem ser encontradas em [1] e [5].

Teorema 1.3. (Teorema de Arzelà-Ascoli) *Se Ω é um domínio de \mathbb{C}_∞ , a família de funções contínuas $\mathcal{F} = \{f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty\}$ é equicontínua em Ω , se e somente se, é uma família normal em Ω .*

Teorema 1.4. (Teorema de Vitali) *Suponha que a família de funções analíticas $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ é normal num domínio Ω de \mathbb{C}_∞ , e que f_n converge pontualmente para uma função f em algum subconjunto aberto não vazio U de Ω . Então f se estende a uma função F que é analítica em Ω . Além disso, f_n converge uniformemente a F em cada subconjunto compacto de Ω .*

Teorema 1.5. (Teorema de Montel) *Seja $\mathcal{F} = \{f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty\}$ uma família de funções analíticas num domínio Ω . Se existem $a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$ tais que $\left[\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(\Omega)\right] \cap \{a, b, c\} = \emptyset$, então \mathcal{F} é uma família normal em Ω .*

Teorema 1.6. *Uma família de funções analíticas $\mathcal{F} = \{f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}\}$ é normal num domínio Ω , se e somente se, as funções de \mathcal{F} são uniformemente limitadas em cada subconjunto compacto de Ω .*

Demonstração. *Sejam D um disco fechado de raio r contido em Ω e z, z_0 elementos do interior de D , pela Fórmula Integral de Cauchy temos que para cada $f \in \mathcal{F}$*

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) f(\zeta) d\zeta = \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}.$$

Como as funções de \mathcal{F} são uniformemente limitadas em ∂D , existe $M > 0$ tal que para todo $\zeta \in \partial D$ e cada $f \in \mathcal{F}$, temos que $|f(\zeta)| \leq M$. Se restringirmos z e z_0 ao disco concêntrico menor de raio $r/2$, segue-se que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \right| \\ &\leq \frac{|z - z_0|}{2\pi} \int_{\partial D} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \right| d\zeta \\ &\leq \frac{|z - z_0|}{2\pi} \cdot \frac{4M}{r} \int_0^{2\pi} d\zeta \\ &= \frac{4M|z - z_0|}{r}. \end{aligned}$$

Isso prova que \mathcal{F} é equicontínua em Ω , e pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, \mathcal{F} é uma família normal em Ω . Por outro lado, Se C é um subconjunto compacto de Ω . Cada ponto de C é o centro de um disco com raio r , como acima. Os discos abertos de raio $r/4$ formam uma cobertura aberta de C . Agora selecionamos uma subcobertura finita e denotamos os centros, raios e limites correspondentes por ζ_k, r_k, M_k . Se tomando r como o menor dos raios r_k e M como o máximo entre os M_k , para um $\epsilon > 0$ dado, seja δ o menor entre $r/4$ e $\epsilon r/4M$. Se $|z - z_0| < \delta$ e $|z_0 - \zeta_k| < r_k/4$ segue que

$$|z - \zeta_k| \leq |z - z_0| + |z_0 - \zeta_k| < \delta + r_k/4 \leq r_k/2.$$

Logo para cada $f \in \mathcal{F}$ encontramos que

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{4M_k|z - z_0|}{r_k} \leq \frac{4M\delta}{r} \leq \epsilon.$$

Concluindo assim que as funções de \mathcal{F} são uniformemente limitadas em C . \square

Os teoremas acima fornecem condições que garantem a normalidade de famílias de funções analíticas em \mathbb{C}_∞ . No próximo capítulo, estudaremos a dinâmica gerada pelas famílias normais compostas pelas iterações de funções racionais em \mathbb{C}_∞ .

1.5 Quase-Conformidade

Nesta seção, apresentamos algumas definições e Teoremas sem demonstrações da teoria das funções quase-conformes no plano complexo até chegarmos ao Teorema da Aplicação de Reimann Mensuravel, tomando como referência [1], [5], [6] e [18].

Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um difeomorfismo que preserva orientação. Podemos expandir f como

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + O(|z - z_0|),$$

onde

$$f_z(z_0) = \frac{1}{2}[f_x(z_0) - if_y(z_0)] \quad e \quad f_{\bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}[f_x(z_0) + if_y(z_0)].$$

Das equações de Cauchy-Riemann temos que se f é analítica em z_0 então $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$. Definimos a *dilatação* $D_f(z_0)$ de f em z_0 como o quociente

$$D_f(z_0) = \frac{|f_z(z_0)| + |f_{\bar{z}}(z_0)|}{|f_z(z_0)| - |f_{\bar{z}}(z_0)|}.$$

Essa quantidade pode ser interpretada geometricamente da seguinte maneira. A derivada $df(z_0)$ leva um círculo no espaço tangente de \mathbb{C} em z_0 a uma elipse no espaço tangente de \mathbb{C} em $f(z_0)$. A dilatação é uma medida dessa distorção porque o quociente $D_f(z_0)$ é a relação entre o eixo maior e o eixo menor da elipse $\{w \in \mathbb{C} : w = df(z_0) \cdot u, \text{ com } |u| = 1\}$.

Definição 1.21. *Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um difeomorfismo que preserva a orientação. A **dilatação máxima** de f em \mathbb{C} é a quantidade*

$$K_f = \sup_{z \in \mathbb{C}} D_f(z).$$

A função f é chamada **quase-conforme** se $K_f < \infty$.

Note que f é uma função conforme se e somente se, $K_f = 1$. A definição de dilatação de um homeomorfismo é muito mais complicada e não está claro de imediato que concorda com D_f no caso diferenciável. As duas noções são relacionadas pelo Teorema 1.7. A seguir consideramos apenas homeomorfismos que preservam orientação em \mathbb{C} . Dizemos que dois conjuntos abertos U e U' em \mathbb{C} são *analiticamente equivalentes* se existir um

homeomorfismo analítico $f : U \rightarrow U'$. Um conjunto aberto A em \mathbb{C} é dito um *Anel* se é analiticamente equivalente a um só dos seguintes conjuntos:

1. $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$,
2. $D^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$,
3. $A_{r_1, r_2} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < r_1 < |z| < r_2 < \infty\}$.

Definição 1.22. Se A é um anel em \mathbb{C} , o **módulo de conformidade** de A é o valor $M(A)$ definido por

$$M(A) = \begin{cases} \log \frac{r_2}{r_1} & \text{se } A \text{ equivalente a } A_{r_1, r_2}, \\ \infty & \text{se } A \text{ equivalente a } \mathbb{C}^* \text{ ou } D^*. \end{cases}$$

Definição 1.23. Se $f : U \rightarrow U'$ é um homeomorfismo entre dois abertos de \mathbb{C} . Dizemos que f é **K -quase-conforme** em Ω se

$$K_f = \sup \frac{M(f(A))}{M(A)} < \infty$$

onde o supremo é considerado sobre todos os anéis $A \subset U$ com módulo de conformidade finito. A quantidade K_f é dita a **dilatação** de f em U . Se f é K -quase-conforme para algum $K \in \mathbb{R}$, dizemos que a função f é um homeomorfismo **quase-conforme**.

Se $f : U \rightarrow U'$ é um homeomorfismo conforme, então $M(A) = M(f(A))$ para todo anel $A \subset U$. Além disso, temos que $K_f = 1$ se f é conforme, e se f é quase-conforme mas não é conforme, então $K_f > 1$. Assim K_f é uma medida de quanto f deixa de ser conforme.

Teorema 1.7. Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um homeomorfismo quase-conforme com dilatação K , então f é diferenciável em quase todo ponto, e $D_f(z_0) \leq K$ em cada $z_0 \in \mathbb{C}$ onde f é diferenciável.

Definição 1.24. Uma **estrutura** (mensurável) **complexa** em um aberto U de \mathbb{C} é uma função mensurável $\mu \in L_\infty(U, \mathbb{C})$ tal que $|\mu(z)| < 1$ em quase todo ponto.

Geometricamente, estamos considerando o *campo de elipses* em quase todo ponto $z \in U$ gerado pela elipse $e^{i\theta} + \mu(z)e^{i\theta}$ e seus equivalentes homotéticos com excentricidade $(1 + |\mu(z)|)/(1 - |\mu(z)|)$.

Exemplo 1.3. Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um difeomorfismo, considere a função

$$\mu_f(z) = \frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)},$$

em quase todo ponto $z \in \mathbb{C}$. Observe que

$$|\mu_f(z)| = \frac{D_f(z) - 1}{D_f(z) + 1} < 1.$$

Se f é quase-conforme, então em quase todo ponto $z \in \mathbb{C}$ temos que

$$|\mu_f(z)| \leq \frac{K_f(z) - 1}{K_f(z) + 1} < 1.$$

A equação diferencial

$$f_{\bar{z}} = (\mu_f) f_z$$

é chamada a **equação de Beltrami**. As soluções são homeomorfismos quase-conformes sempre que μ_f for uma função mensurável com $\|\mu_f\|_\infty < 1$.

Definição 1.25. Se $\|\mu\|_\infty < 1$, dizemos que μ é uma **estrutura quase-conforme** em U .

Exemplo 1.4. A **estrutura estândar** μ_* num aberto U de \mathbb{C} é o campo de elipses com excentricidade nula, isto, é, cada elipse é um círculo. Note que uma função analítica preserva μ_* no sentido de que a derivada desta função leva círculos no plano tangente para círculos no plano tangente da imagem.

Exemplo 1.5. Considere o anel fechado A em \mathbb{C} da forma

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < r_1 \leq |z| \leq r_2\}$$

com $r_1 < r_2$. A função **Dehn twist** T em A é definida por

$$T(re^{2\pi it}) = r \exp\left(2\pi i\left(t + \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right)\right).$$

T é a função identidade na fronteira de A e T gira cada círculo $|z| = r$ com $r_1 < r < r_2$ no sentido anti-horário por um ângulo que aumenta de 0 a 2π quando r aumenta de r_1 para r_2 . Definimos a estrutura complexa distorcida em \mathbb{C} como a estrutura estândar μ_* fora de A e a imagem de μ_* sob a derivada DT em A .

Definição 1.26. Um homeomorfismo $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciável em quase todo ponto, diz-se que *endireita* a estrutura complexa μ se $DF(\mu) = \mu_*$ em quase todo ponto.

Podemos endireitar a estrutura complexa distorcida por meio de uma função que é a identidade fora de A e igual à função inversa de T em A . Se $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um homeomorfismo que endireita uma estrutura complexa, então F é um homeomorfismo quase-conforme. A seguir enunciamos o *Teorema da Aplicação de Riemann Mensurável* (MRMT). Esse Teorema é comumente conhecido como o *Teorema da Existência* dentro da teoria de homeomorfismos quase-conformes foi provado em 1960 por Lars Ahlfors e Lipman Bers.

Teorema 1.8. (MRMT): Seja $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função mensurável com $\|\mu\|_\infty < 1$. Então existe um homeomorfismo quase-conforme em \mathbb{C} , cuja dilatação concorda com μ em quase todo ponto.

Em [7] encontramos o MRMT com a seguinte representação.

Teorema 1.9. Suponha que μ é um campo de elipses em \mathbb{C} , com excentricidade finita. Então existe um homeomorfismo F em \mathbb{C} que endireita a μ . Além disso, se especificarmos dois valores de F , então F será único.

Usaremos o MRMT da seguinte maneira. Suponha que $Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função racional que preserva a estrutura complexa μ e F uma função que endireita a μ . Então $P = F \circ Q \circ F^{-1}$ é uma função em \mathbb{C} que preserva a estrutura estandar μ_* . Pela regra da cadeia temos que P é uma função analítica. Em particular, se sabemos que Q tem grau finito, então P é um polinômio. Nesse caso, dizemos que Q é *quase-conforme conjugado* ao polinômio P .

1.6 Dinâmica Simbólica

Definição 1.27. Se d é um número inteiro positivo. O conjunto

$$\Sigma_d = \left\{ s = \{s_i\}_{i=0}^\infty = (s_0 s_1 s_2 \dots) : s_j \in \{0, \dots, d-1\} \right\},$$

é chamado o espaço das sequências com d símbolos; isto é, o conjunto Σ_d consiste em sequências infinitas de números inteiros entre 0 e $d - 1$. Se $s = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ e $t = \{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ são dois elementos do conjunto Σ_d , então a distância entre eles se define por

$$d(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{d^i}.$$

Observe que $d(s, t) \geq 0$ para todo $s, t \in \Sigma_d$. Se $d(s, t) = 0$ então $s_i = t_i$ para todo i . Como $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$ segue que $d(s, t) = d(t, s)$. Finalmente, se s, t e r pertencem a Σ_d , então $|s_i - t_i| \leq |s_i - r_i| + |r_i - t_i|$ para todo i , do qual deduzimos que $d(s, t) \leq d(s, r) + d(r, t)$. O Conjunto Σ_d é um conjunto de Cantor com relação à topologia produto.

Definição 1.28. A *função d -shift* $\sigma : \Sigma_d \rightarrow \Sigma_d$ é definida por $\sigma(s_0s_1s_2\dots) = (s_1s_2s_3\dots)$.

Proposição 1.6. Sejam s, t são dois elementos de Σ_d . Se $s_i = t_i$ para $i \leq n$, então $d(s, t) \leq 1/d^n$. Reciprocamente, se $d(s, t) \leq 1/d^n$, então $s_i = t_i$, para $i \leq n$.

Demonstração. Se $s_i = t_i$ para $i \leq n$, então

$$d(s, t) = \sum_{i=1}^n \frac{|s_i - t_i|}{d^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{d^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{d^i} = \frac{1}{d^n}.$$

Por outro lado, se $s_j \neq t_j$ para algum j , então devemos ter

$$d(s, t) \geq \frac{1}{d^j} \geq \frac{1}{d^n}$$

consequentemente, se $d(s, t) < 1/d^n$, então $s_i = t_i$ para $i \leq n$. □

Proposição 1.7. A *função d -shift* $\sigma : \Sigma_d \rightarrow \Sigma_d$ é contínua.

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$ e $s \in \Sigma_d$. Escolha n tal que $1/d^n < \epsilon$, e tome $\delta = 1/d^{n+1}$. Se $t \in \Sigma_d$ satisfaz $d(s, t) < \delta$, então pela proposição anterior temos que $s_i = t_i$ para $i \leq n + 1$. Por tanto as primeiras i -ésimas entradas de $\sigma(s)$ e $\sigma(t)$ coincidem para $i \leq n$. Assim $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq 1/d^n < \epsilon$. □

Definição 1.29. Um automorfismo do *d -shift* é um homeomorfismo $\theta : \Sigma_d \rightarrow \Sigma_d$ que comuta com σ , isto é, $\theta \circ \sigma = \sigma \circ \theta$.

A dinâmica “caótica” gerada por σ em Σ_d pode ser consultada em [12]. O conjunto de todos os automorfismos do d -shift, Aut_d , é claramente um grupo. Em [14] Hedlund provou que o único automorfismo não trivial de 2-shift é o automorfismo θ em Σ_2 que permuta os símbolos 0 e 1 independentemente de sua posição na sequência. De forma similar a transformação gerada por uma permutação dos d símbolos $0, 1, \dots, d-1$, define um automorfismo de Σ_d , mas não todo automorfismo em Aut_d pode ser obtido desta maneira.

Exemplo 1.6. *Considere a função $\theta_0 : \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3$, da seguinte maneira. Dada uma sequência $s = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ em Σ_3 , se $s_{i+1} = 0$, a função θ_0 troca 1 e 2 se esses dígitos aparecerem no i -ésimo termo da sequência. Se $s_i = 0$, nada acontece. Por exemplo*

$$\theta_0(10120012100\dots) = (20110012200\dots)$$

A função θ_0 é um automorfismo de Σ_3 . O dígito 0 é chamado de **marcador** e a função θ_0 de **automorfismo marcador**.

Exemplo 1.7. *Novamente em Σ_3 , deixamos $\bar{0}$ representar o dígito “não 0”, ou seja, $\bar{0}$ representa 1 ou 2. A função $\theta_{\bar{0}} : \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3$ intercambia 1 e 2 sempre que 1 ou 2 for seguido por $\bar{0}$. Por exemplo*

$$\theta_{\bar{0}}(11200102100\dots) = (22200101100\dots).$$

Como antes, a função $\theta_{\bar{0}}$ é um automorfismo marcador de Σ_3 .

Exemplo 1.8. *A função θ_1 definida em Σ_3 por “intercâmbio de 1 e 2” sempre que esses dígitos forem seguidos por 1 não é um automorfismo de Σ_3 , pois*

$$\theta_1(111\dots) = (222\dots) = \theta_1(222\dots),$$

logo θ_1 não é injetiva.

Exemplo 1.9. *Existem muitos blocos de símbolos que podem servir como marcadores e, assim, gerar automorfismos marcador em Σ_3 . Por exemplo, o bloco 220 gera o automorfismo marcador θ_{220} que intercambia 1 e 2 sempre que esses dígitos são seguidos por 220. Por exemplo*

$$\theta_{220}(122022021220\dots) = (222022022220\dots).$$

Boyle, Franks e Kitchens em [9] descrevem o procedimento para determinar o conjunto de marcadores que geram o grupo Aut_d , e Ashley em [4] refina esses resultados fornecendo um conjunto gerador mínimo de automorfismos marcador. Em particular, para Aut_3 , definiu um algoritmo para determinar uma lista infinita de blocos com símbolos no alfabeto $\{0, \bar{0}, 1, 2\}$ usando *state splitting*. Também chamo *automorfismos marcador minimais* aos automorfismos definidos pela troca dos símbolos 1 e 2 sempre que são seguidos por um desses blocos. Se um bloco da lista contiver o símbolo $\bar{0}$, o conjunto de marcadores correspondente consistirá em todos os marcadores obtidos substituindo $\bar{0}$ pelos símbolos 1 e 2. O seguinte resultado é tomado de [9].

Teorema 1.10. *Aut_d é gerado pela união de*

1. *Automorfismos que surgem das permutações dos símbolos, e*
2. *Um conjunto contável de automorfismos dados por marcadores ou conjuntos de marcadores.*

A intenção dos dois últimos capítulos é mostrar o método geométrico para construir esse conjunto mínimo de automorfismos marcador geradores, desenvolvido por Blanchard, Devaney e Keen em [7].

Capítulo 2

Dinâmica Global em \mathbb{C}_∞

Continuamos com a revisão teórica necessária para abordar as ideias principais deste documento. Neste capítulo, apresentamos os aspectos globais da dinâmica complexa, para isso estudamos algumas das principais propriedades dos conjuntos de Fatou e Julia associados a uma função racional. Introduzimos os Teoremas necessários para garantir uma relação de conjugação que nos ajudará a estudar a dinâmica dessas funções racionais em vizinhanças de pontos fixos. Finalmente, concentramos nossa atenção na dinâmica das funções polinomiais, nas coordenadas de Böttcher e nos conjuntos *connectedness locus* e *shift locus* do espaço \mathbb{C}^{d-1} dos parâmetros associados a polinômios mônicos, centrados de grau d . Usamos como referências principais [5], [6], [13] e [18].

2.1 Conjuntos de Fatou e Julia.

Definição 2.1. *Seja $R : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ uma função racional. Um ponto $z \in \mathbb{C}_\infty$ é um elemento do **conjunto de Fatou** (ou conjunto Normal) F_R de R se existe uma vizinhança U de z tal que a família de iterações $\{R^n|U\}$ é uma família normal. O **conjunto de Julia** J_R de R é o complemento do conjunto de Fatou em \mathbb{C}_∞ .*

Exemplo 2.1. *Seja $P_0 : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida por $P_0(z) = z^2$. Se z_0 pertence ao interior do disco unitário D , então existe uma vizinhança U de z_0 tal que as iterações sucessivas de P_0 em cada subconjunto compacto de U convergem uniformemente para a função*

constante $C(z) = 0$ para todo $z \in U$. Logo o interior do disco unitário está contido no conjunto de Fatou de P_0 . Da mesma forma, o exterior do disco unitário é um subconjunto do conjunto de Fatou, embora a função limite é a função constante $C(z) = \infty$ no exterior de D . Por outro lado, se z_0 pertence ao círculo unitário, em qualquer vizinhança de z_0 , o limite das iterações de P_0 necessariamente terá uma descontinuidade à medida que cruza o círculo unitário. Isso mostra que o conjunto de Julia de J_{P_0} é exatamente igual ao círculo unitário.

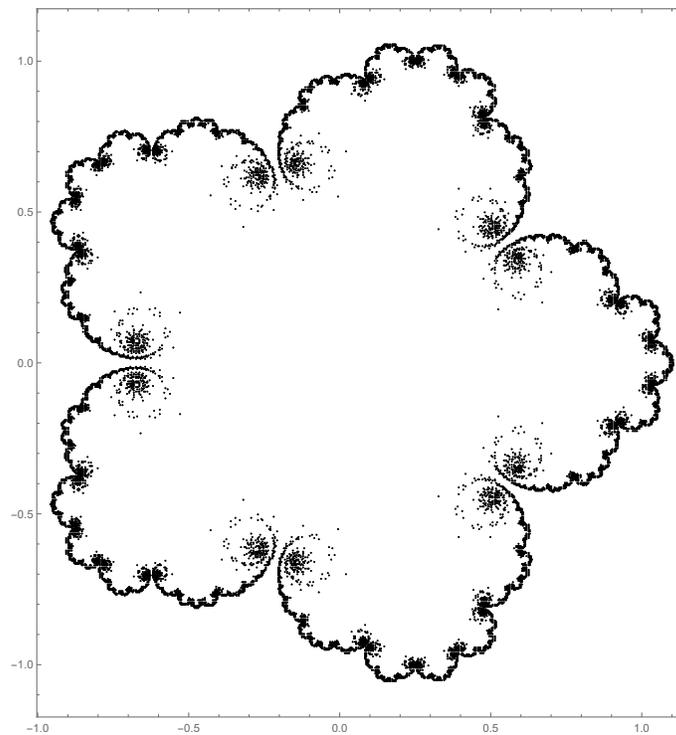


Figura 2.1: Conjunto J_P para $P(z) = z^5 - 0.55$.

Por definição F_R é um conjunto aberto e J_R é um conjunto compacto em \mathbb{C}_∞ . A seguir, apresentamos algumas propriedades dos conjuntos de Fatou e Julia para funções racionais $R : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ com $\text{grau}(R) \geq 2$, que serão necessárias para o nosso estudo, algumas demonstrações serão omitidas, mas podem ser encontradas em [5], [6] e [17]. Na Figura 2.1 é mostrado o conjunto de Julia da função polinomial $P(z) = z^5 - 0.55$, este conjunto é de Cantor como mostraremos no final deste Capítulo.

Teorema 2.1. *O conjunto Julia J_R é não vazio.*

Demonstração. *Suponha que J_R é vazio. Temos que $F_R = \mathbb{C}_\infty$ e portanto a família de iterações $\{R^n\}$ é normal em \mathbb{C}_∞ . Assim qualquer subsequência R^{n_j} converge uniformemente em todo \mathbb{C}_∞ a uma função analítica $Q : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Se o grau de R é d , o grau de R^{n_j} é igual ao grau de Q para um j suficientemente grande. Mas o grau de R^n é igual a d^n , que diverge para o infinito quando $n \rightarrow \infty$. O que é uma contradição considerando o grau topológico de Q que é finito. \square*

Teorema 2.2. *$J_R = \mathbb{C}_\infty$ ou J_R tem interior vazio.*

Teorema 2.3. *Para qualquer número inteiro positivo n , $J_{R^n} = J_R$ e $F_{R^n} = F_R$.*

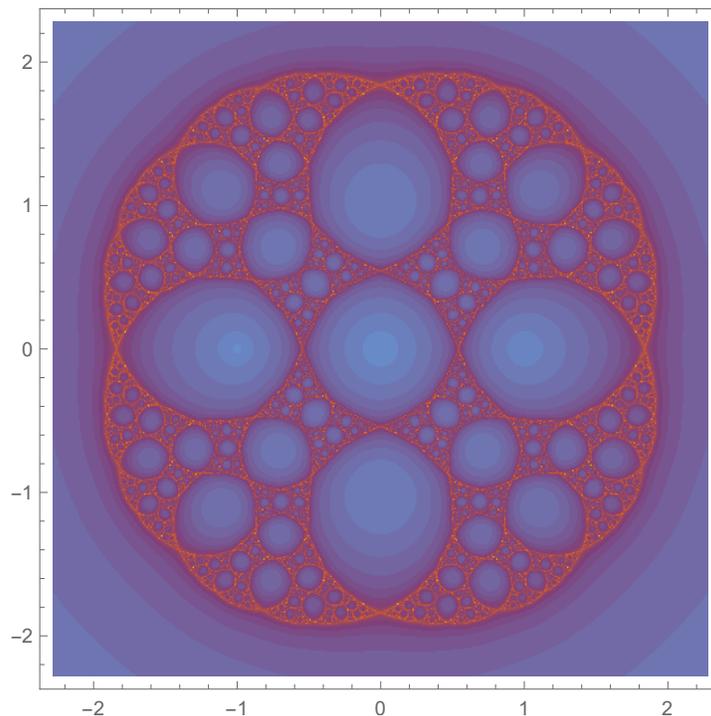


Figura 2.2: Conjunto J_R para $R(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1}$.

Teorema 2.4. *Se $O^+(z_0) = \{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$ é uma órbita periódica (super)atratora, então está contida no conjunto F_R .*

Demonstração. Se $O^+(z_0)$ é (super) atratora. Para qualquer z_i com $i = 0, 1, \dots, k - 1$, temos que $|(R^k)'(z_i)| < 1$, logo existe número λ com $|(R^k)'(z_i)| < \lambda < 1$ e uma vizinhança U de z_i tal que para $z \in U$, pela desigualdade do valor médio

$$|R^k(z) - z_i| = |R^k(z) - R^k(z_i)| < \lambda|z - z_i| < |z - z_i|.$$

Isso mostra que $R^k(z)$ está contido em U e, de fato, está mais perto de z_i que z . Pelo mesmo argumento

$$|(R^k)^n(z) - z_i| < \lambda^n|z - z_i|$$

logo cada iteração de R^k leva U em si mesmo. Assim $(R^k)^n \rightarrow z_i$ uniformemente em U quando $n \rightarrow \infty$ e U está contido em F_{R^k} . Pelo Teorema de Vitali 1.4, $(R^k)^n$ converge uniformemente a z_i em cada subconjunto compacto da componente de F_{R^k} que contém z_i . Como para qualquer iteração R^k de R temos que $F_{R^k} = F_R$, segue o Teorema. \square

Teorema 2.5. Uma função racional R com $\text{grau}(R) = d \geq 2$, tem no máximo um número finito de órbitas periódicas que são atratoras ou neutras.

O Matemático Mitsuhiro Shishikura deu o limite superior acentuado de $2d - 2$ para o número de órbitas periódicas atratoras ou neutras, usando métodos refinados de funções quase-conformes. Uma prova clássica, apresentada em [17], mostra apenas que esse número é menor ou igual a $6d - 6$ e que, sempre existem infinitas órbitas periódicas repulsoras.

Teorema 2.6. Os conjuntos J_R e F_R de uma função racional R são completamente invariantes, isto é, $R(J_R) = J_R = R^{-1}(J_R)$ e $R(F_R) = F_R = R^{-1}(F_R)$.

Definição 2.2. Se z_0 é um ponto fixo (super)atrator de uma função racional R em \mathbb{C}_∞ . A **bacia de atração** (conjunto estável) de z_0 é o conjunto

$$W^s(z_0) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : R^n(z) \rightarrow z_0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

A **bacia de atração local** $A(z_0)$ de z_0 é o domínio máximo contendo z_0 no qual a família $\{R^n\}$ é normal, isto é, a componente de F_R que contém z_0 .

Segue que $R^n(z)$ converge para z_0 exatamente quando z está em alguma imagem inversa $R^{-m}(A(z_0))$ da bacia local $A(z_0)$, com $m \geq 0$. Logo temos que o conjunto $A(z_0)$ é a componente de $W^s(z_0)$ que contém z_0 . De forma geral, a bacia local de uma órbita periódica super(atratora) é a união das componentes do conjunto de Fatou F_R que contém os pontos da órbita, e o conjunto estável da órbita é a união da bacia local e todas as suas imagens inversas. Além disso, o Corolário 2.2 mostra que a fronteira de $A(z_0)$ está contida em J_R e a fronteira de $W^s(z_0)$ está contida em J_R .

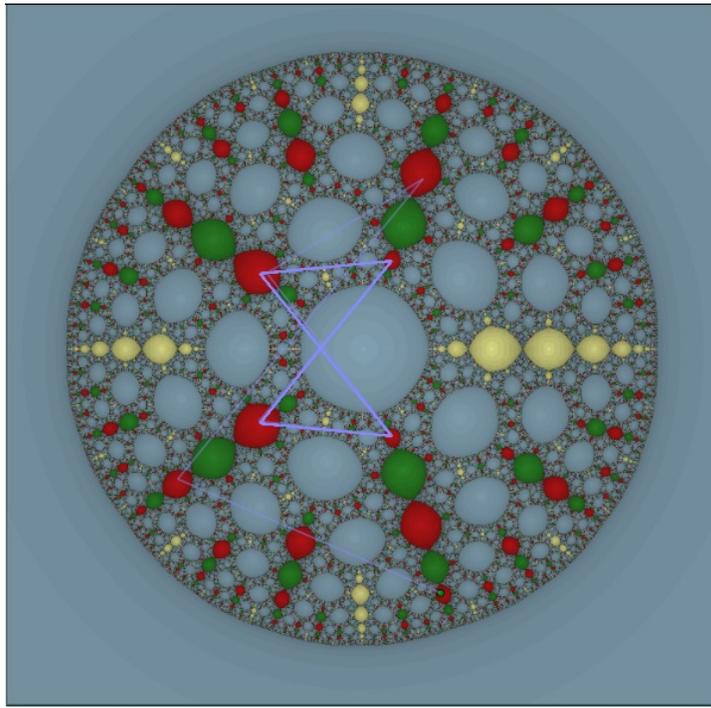


Figura 2.3: Bacias de atração da função $R(z) = \frac{z^5+0.01}{z^3}$.

Na figura 2.3, existem quatro cores, uma por cada bacia de atração, incluindo a bacia do infinito. As órbitas no interior de dessas bacias são eventualmente periódicas. O próximo Teorema é conhecido como o *Teorema das componentes não errantes de Sullivan*.

Teorema 2.7. *Cada componente de F_R é eventualmente periódica. Isto é, se U é uma componentes de F_R , então, existen $n, m \in \mathbb{N}$ com $m > 0$, tal que $R^{n+i}(U) = R^i(U)$ para cada $i \geq m$. Neste caso U é eventualmente periódica de período n .*

Teorema 2.8. *Cada órbita periódica repulsora de R pertence a J_R .*

Demonstração. Primeiro, suponha que a origem seja um ponto fixo repulsor de R . Em uma vizinhança da origem, a função R pode ser expressa na forma

$$R(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

onde λ é o multiplicador do ponto fixo 0 , com $|\lambda| > 1$. Consequentemente, quando $n \rightarrow \infty$,

$$(R^n)'(0) = \lambda^n \rightarrow \infty.$$

Suponha agora que 0 pertence ao conjunto F_R . Então a família $\{R^n\}$ é normal em alguma vizinhança U de 0 , e assim alguma subsequência de iterações de R^n converge uniformemente em U a alguma função analítica Q . Como $Q(0) = 0$, então $Q'(0)$ é finito. Por outro lado, a convergência uniforme implica que, para a sequência dada, temos

$$Q'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (R^n)'(0) = \infty,$$

o que é uma contradição. Deduzimos então que o ponto fixo repulsor 0 pertence a J_R . Por conjugação isso implica que cada ponto fixo repulsor de R pertence a J_R . Se $\{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$ é uma órbita periódica repulsora de R , então cada ponto z_i pertence a J_{R^k} , e como $J_{R^k} = J_R$, a prova está completa. \square

Teorema 2.9. J_R é um subconjunto perfeito de \mathbb{C}_∞ e, portanto, é incontável.

O conjunto de Julia J_R de uma função racional R tem várias outras definições que são equivalentes, abaixo apresentamos um Teorema que foi provado de forma independente por Pierre Fatou e Gaston Julia. As demonstrações são interessantes e diferentes, em [17] podemos encontrar as duas provas, abaixo apresentamos a realizada por Fatou.

Teorema 2.10. O conjunto J_R de uma função racional $R : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ com $\text{grau}(R) \geq 2$ é igual ao fecho do conjunto dos pontos periódicos repulsores de R .

Demonstração. Sendo J_R um conjunto perfeito, não tem pontos isolados. Portanto, podemos excluir finitos pontos de J_R sem afetar o argumento. Seja z_0 qualquer ponto de J_R que não seja um ponto fixo nem um valor crítico. Em outras palavras, assumimos que existem d pré-imagens z_1, z_2, \dots, z_d que são distintas entre si e de z_0 , onde $d \geq 2$ é

o grau de R . Pelo Teorema da Função Inversa, podemos encontrar d funções analíticas $z \mapsto \varphi_i(z)$ que são definidas em alguma vizinhança U de z_0 e que satisfazem $R(\varphi_i(z)) = z$, com $\varphi_i(z_0) = z_i$. Afirmamos que, para algum $n > 0$ e para algum $z \in U$, a função $R^n(z)$ deve assumir um dos três valores z , $\varphi_1(z)$ ou $\varphi_2(z)$. Caso contrário, a família de funções racionais

$$Q_n(z) = \frac{(R^n(z) - \varphi_1(z))(z - \varphi_2(z))}{(R^n(z) - \varphi_2(z))(z - \varphi_1(z))}$$

em U evitaria os três valores 0 , 1 e ∞ , portanto, pelo Teorema de Montel 1.5 é uma família normal. Logo se seguiria facilmente que a família $\{R^n|U\}$ é normal, contradizendo a hipótese de que U intersecta o conjunto de Julia J_R . Assim, podemos encontrar um $z \in U$ satisfazendo $R^n(z) = z$ ou $R^n(z) = \varphi_i(z)$. Claramente, segue-se que z é um ponto periódico de período n ou $n + 1$, respectivamente. Isso mostra que cada ponto de J_R pode ser aproximado arbitrariamente por pontos periódicos. Como todos esses pontos periódicos, com exceção de finitos, devem ser repulsores, isso completa a prova. \square

Corolário 2.1. *Se U é um conjunto aberto que intersecta o conjunto de Julia J_R de R , então para algum n suficientemente grande a imagem $R^n(U \cap J_R)$ é igual a todo o conjunto de Julia J_R .*

Demonstração. *Como U intersecta a J_R , U contém um ponto periódico repulsor z_0 de período k . Assim z_0 é um ponto fixo de R^k . Vamos escolher uma vizinhança $V \subset U$ de z_0 com a propriedade que $V \subset R^k(V)$. Então, temos que $V \subset R^k(V) \subset R^{2k}(V) \cdots$. Mas a união dos conjuntos abertos $R^{nk}(V)$ contém todo o conjunto de Julia $J_R = J_{R^k}$. Sendo J_R compacto, implica que $J_R \subset R^{nk}(V) \subset R^{nk}(U)$ para algum n suficientemente grande, e a afirmação correspondente para R segue. \square*

Corolário 2.2. *Se A é a bacia de atração local de uma órbita periódica (super)atratora de uma função racional R em \mathbb{C}_∞ , então a fronteira $\partial A = \bar{A} \setminus A$ é igual ao conjunto de Julia J_R . Cada componente do conjunto de Fatou F_R ou coincide com alguma componente conexa da bacia A ou é disjunta de A .*

Demonstração. *Se U é uma vizinhança de um ponto do conjunto J_R , então $R^k(U)$ intercepta a bacia A para k suficientemente grande. Sendo J_R totalmente invariante, U*

intercepta a A , e assim $J_R \subset \bar{A}$. Mas como A é uma componente de F_R , temos que J_R é disjunto de A , logo $J \subset \partial A$. Por outro lado, se U é uma vizinhança de um ponto de ∂A então a família de iterações $\{R^n(U)\}$ não é normal, assim $\partial A \subset J_R$. Finalmente, se uma componente conexa do conjunto F_R intercepta a bacia A , uma vez que não pode interceptar a fronteira de A , deve coincidir com alguma componente de A . Logo segue o resultado. \square

Teorema 2.11. *O conjunto J_R é conexo se e somente se cada componente de F_R é simplesmente conexa.*

Teorema 2.12. *Se $\overline{O^+(C)}$ denota o fecho das órbitas para frente dos pontos críticos de uma função racional R em \mathbb{C}_∞ . Se $\overline{O^+(C)} \cap J_R = \emptyset$, então, dado $K > 1$, existe um número inteiro positivo N tal que $|(R^n)'(z)| > K$, se $n \geq N$ e $z \in J_R$.*

Esse Teorema é uma condição para a expansão da função R no conjunto J_R . Em [6] você encontrará mais detalhes sobre esses conceitos. Mais tarde será muito útil para caracterizar o conjunto J_R sob certas condições.

2.2 Conjugação Local

Considere a função $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ e z_0 um ponto fixo atrator de f . Suponha que f é analítica em alguma vizinhança U de z_0 , e podemos assumir que $f(U) \subset U$. Agora, seja ϕ qualquer função que seja analítica em U com $\phi(z_0) = 0$ e seja $F = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$. Então F é uma função definida e analítica na vizinhança $\phi(U)$ da origem, e como $F'(0) = f'(z_0)$, vemos que 0 é um ponto fixo atrator de F . Chamamos a F um *conjugado local* de f e perguntamos se, escolhendo a ϕ adequadamente, podemos encontrar uma função F que seja consideravelmente mais simples que f . A escolha de ϕ nos ajudará a entender melhor a dinâmica de f em uma vizinhança de z_0 dependendo de quão simples seja F . Nesse caso, as iterações de f próximas a z_0 serão refletidas no comportamento das iterações de F , com $F^n = \phi \circ f^n \circ \phi^{-1}$.

Suponha que $z_0 = 0$ é um ponto fixo atrator de uma função analítica f numa vizinhança da origem, com multiplicador $f'(z_0) = \lambda$, por simplicidade. Um resultado final para qualquer ponto fixo z_0 pode ser obtido por conjugação. A função f tem expansão de Taylor em 0 da forma

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \text{ com } 0 < |\lambda| < 1,$$

como $F'(0) = f'(z_0)$, a função que estamos procurando tem a forma

$$F(w) = \lambda w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots.$$

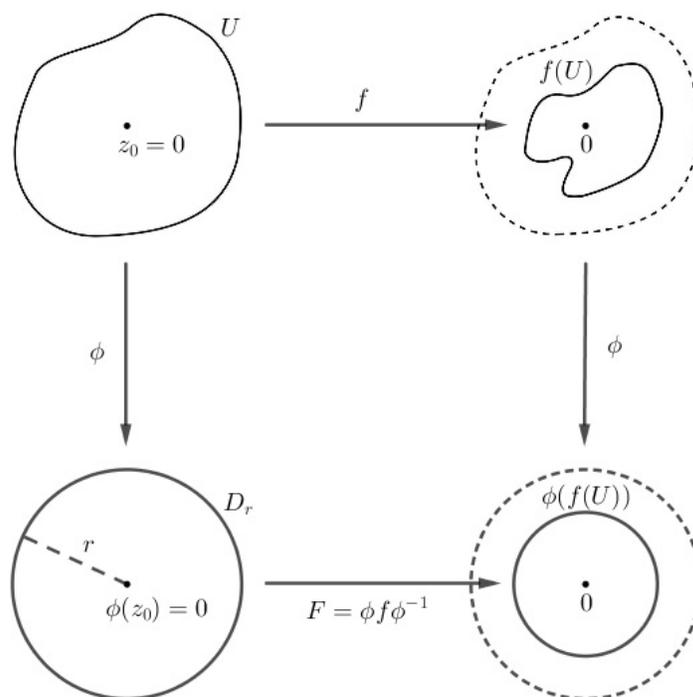


Figura 2.4: Conjugação Local.

Mostraremos agora que, escolhendo um ϕ adequado, podemos obter a maior simplificação possível, a saber, cada b_i é igual a zero e F é uma função da forma $z \mapsto \lambda z$. Primeiro, consideramos o caso em que $|\lambda| \neq 0, 1$, ou seja, quando o ponto fixo é atrator ou repulsor. O seguinte Teorema é conhecido como **Teorema de Linearização de Kœnigs** [17].

Teorema 2.13. *Suponha que $f : U \rightarrow U$ é uma função analítica numa vizinhança U da origem, de forma que $f(0) = 0$ e $f'(0) = \lambda$ onde $|\lambda| \neq 0, 1$. Então existe um único homeomorfismo analítico $\phi : U \rightarrow D_r$, com $\phi(z) = w$ e $D_r = \{w \in \mathbb{C} : |w| < r\}$. De modo que $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$, e a função $F : D_r \rightarrow D_r$ satisfaz $F(w) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = \lambda w$ para todo w suficientemente próximo da origem.*

Demonstração. (Unicidade): *Se houvesse duas dessas funções ϕ e ψ , então considere a composição*

$$\psi(\phi^{-1}(w)) = b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots .$$

Como $F(\psi(\phi^{-1}(w))) = \psi(f(\phi^{-1}(w))) = \psi(\phi^{-1}(F(w)))$ para w próximo da origem, a função F comuta com $\psi \circ \phi^{-1}$, e temos que

$$\psi(\phi^{-1}(F(w))) = \psi(\phi^{-1}(\lambda w)) = (b_1 \lambda)w + (b_2 \lambda^2)w^2 + (b_3 \lambda^3)w^3 + \dots ,$$

$$F(\psi(\phi^{-1}(w))) = \lambda(\psi(\phi^{-1}(w))) = (\lambda b_1)w + (\lambda b_2)w^2 + (\lambda b_3)w^3 + \dots .$$

Comparando os coeficientes dessas séries de potência vemos que $\lambda b_n = b_n \lambda^n$ para todo n . Como λ não é zero ou a raiz da unidade, isso implica que $b_1 = b_2 = b_3 \dots = 0$. Logo $\psi(\phi^{-1}(w)) = b_1 w$, ou em outros termos $\psi(z) = b_1 \phi(z)$, e assim, ϕ é único a menos de multiplicação por uma constante diferente de zero.

(Existência): *Primeiro suponha que $0 < |\lambda| < 1$. Escolha uma constante $c < 1$ tal que $c^2 < |\lambda| < c$, e escolha um disco aberto D_r com centro na origem e raio $r > 0$ tal que $|f(z)| \leq c|z|$ para todo $z \in D_r$. Assim, a órbita $O^+(z_0) = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ gerada pela iteração de f em qualquer ponto de partida $z_0 \in D_r$, converge geometricamente para a origem, com $|z_n| \leq rc^n$. Pelo Teorema de Taylor,*

$$|f(z) - \lambda z| = |a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots| = |z^2(a_2 + a_3 z + \dots)| \leq k|z^2|$$

para alguma constante k e para todo $z \in D_r$, portanto

$$\begin{aligned} |z_{n+1} - \lambda z_n| &= |f^n(z_0) - \lambda f^{n-1}(z_0)| = |f(f^{n-1}(z_0)) - \lambda f^{n-1}(z_0)| \\ &\leq k|(f^{n-1}(z_0))^2| = k|z_n|^2 \leq kr^2 c^{2n}. \end{aligned}$$

Segue-se que os números $w_n = z_n/\lambda^n$ satisfazem

$$|w_{n+1} - w_n| = \frac{|z_{n+1} - \lambda z_n|}{|\lambda^{n+1}|} \leq \frac{kr^2c^{2n}}{|\lambda^{n+1}|} = \frac{kr^2}{|\lambda|} \left(\frac{c^2}{|\lambda|} \right)^n.$$

Essas diferenças convergem uniformemente e geometricamente a zero. Assim as funções analíticas $\phi_n(z_0) = f^{n-1}(z_0)/\lambda^n$ convergem uniformemente ao longo de D_r , para uma função analítica limite

$$\phi(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{n-1}(z_0)}{\lambda^n}.$$

Segue imediatamente a identidade requerida para $z \in D_r$,

$$\phi(f(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{n-1}(f(z))}{\lambda^n} = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(z)}{\lambda^{n+1}} = \lambda \phi(z).$$

Um argumento semelhante mostra que $|\phi(z) - z|$ é menor ou igual a alguns tempos constantes $|z^2|$, portanto ϕ tem derivada $\phi'(0) = 1$. Se $|\lambda| > 1$, como $\lambda \neq 0$, a função inversa f^{-1} é definida e analítica numa vizinhança, tendo a origem como um ponto fixo atrator com multiplicador λ^{-1} . Aplicando o mesmo argumento para f^{-1} , a conclusão segue. \square

A seguir, consideramos o caso para pontos fixos superatratores. As funções analíticas com esses pontos também podem ser conjugadas localmente com funções simples e sua dinâmica é mais interessante. O teorema a seguir foi provado por primeira vez por L. E. Böttcher em 1904. Em seguida, apresentaremos uma demonstração tomada de [5], outras demonstrações podem ser encontradas em [6] e [17].

Lema 2.1. *Suponha que $n \geq 2$, considere o conjunto $W = \{w : |w - 1| < 1/2\}$, e seja $z^{1/n}$ o ramo principal da raiz n -ésima de z em W . Então*

$$|z^{1/n} - 1| < 2|z - 1|/n < 1/n.$$

Teorema 2.14. (Teorema de Böttcher) *Suponha que a função $f : U \rightarrow U$, da forma*

$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots,$$

é uma função analítica numa vizinhança U da origem, com $a_k \neq 0$ e $k \geq 2$. Então existe um único homeomorfismo analítico $\phi : U \rightarrow D_r$, com $\phi(z) = w$ e $D_r = \{w \in \mathbb{C} : |w| < r\}$, tal que $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$ e que a função $F : D_r \rightarrow D_r$ satisfaz $F(w) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = w^k$ para todo w próximo da origem.

Demonstração. *Primeiro, conjugamos f pela função $\varphi(z) = \lambda z$, onde $(a_k)^{-1} = \lambda^{k-1}$, para que possamos assumir que $a_k = 1$. Obtemos uma função da forma*

$$f(z) = z^k + \lambda_{k+1}z^{k+1} + \dots = z^k(1 + h(z)),$$

então $h(0) = 0$, e existem números positivos R e L tais que

$$|h(z)| \leq L|z|, \text{ quando } |z| \leq R.$$

Em seguida, escolhemos qualquer r positivo que satisfaça

$$r < \min\{1/4, R, 1/2L\},$$

e seja $D_r = \{z : |z| < r\}$. Se $z \in D_r$, então

$$|f(z)| \leq |z|r^{k-1}(1 + Lr) < |z|/2,$$

então f mapeia D_r em se mesmo, e para $z \in D_r$,

$$|f^n(z)| \leq |z|/2^n.$$

Para $n \geq 0$, e $z \in D_r$, temos que

$$f^{n+1}(z) = f(f^n(z)) = [f^n(z)]^k[1 + h(f^n(z))],$$

onde

$$|h(f^n(z))| \leq L|f^n(z)| \leq L|z|/2^n < 1/2.$$

Isso mostra que $1 + h(f^n(z))$ está no disco W (no Lema 2.1), portanto, podemos encontrar a k^{n+1} -ésima raiz, digamos $h_{n+1}(z)$ de $1 + h(f^n(z))$ em D_r com

$$|h_{n+1}(z) - 1| < 2/k^{n+1}.$$

Deduzimos que o produto infinito

$$\phi(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} h_n(z)$$

converge uniformemente para cada $z \in D_r$, então ϕ é analítica em D_r com $\phi(0) = 0$ e $\phi'(0) = 1$. Finalmente

$$[h_{n+1}(f(z))]^{k^{n+1}} = 1 + h(f^{n+1}(z)) = [h_{n+2}(z)^k]^{k^{n+1}}$$

e então

$$h_{n+1}(f(z)) = h_{n+2}(z)^k$$

porque sua razão é a raiz da unidade e as duas funções são iguais quando $z = 0$. Para $z \in D_r$ segue que se

$$\phi_n(z) = zh_1(z) \cdots h_n(z),$$

então

$$\phi_n(f(z)) = f(z)[h_2(z) \cdots h_{n+1}(z)]^k = \phi_{n+1}(z)^k,$$

e fazendo que $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$\phi(f(z)) = \phi(z)^k$$

conforme necessário. □

Assim, se $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ é uma função analítica numa vizinhança U de um ponto fixo super-atrator z_0 , então f é analiticamente conjugada a uma função da forma

$$F = \phi \circ f \circ \phi^{-1} : w \mapsto w^k, \quad \text{com } k \neq 1.$$

A função ϕ é conhecida como a *função de Böttcher*. O Teorema anterior é frequentemente aplicado em funções polinomiais de grau maior ou igual a dois, como veremos a seguir.

2.3 Dinâmica de Funções Polinomiais

Seja $P : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ uma função polinomial de grau $d \geq 2$, da forma

$$P(z) = a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0, \quad \text{com } a_d \neq 0.$$

A função P tem um ponto fixo super-atrator no infinito. Pelo Teorema 2.4 isso implica que o conjunto de Fatou F_P é sempre diferente de vazio, e o conjunto de Julia J_P está

contido em um subconjunto limitado do plano complexo \mathbb{C} . Em particular, existe uma constante c_P de modo que qualquer $z \in \mathbb{C}$ com $|z| > c_P$, z pertence à bacia de atração do infinito. Além disso, de acordo com a definição 2.2 a bacia de atração de infinito $W^s(\infty)$ é igual à bacia local $A(\infty)$.

Definição 2.3. *O complemento K_P da bacia de atração de infinito é o conjunto de todos os pontos $z \in \mathbb{C}$ com órbita limitada sob P , isto é,*

$$K_P = \{z \in \mathbb{C} : P^n(z) \not\rightarrow \infty\},$$

este conjunto é chamado **Julia cheio**.

Exemplo 2.2. *Considere a função quadrática $P_4(z) = z^2 + 4$. Se $|z| \geq 4$ temos que*

$$\begin{aligned} |z^2 + 4| &\geq |z|^2 - 4 \geq |z|^2 - |z| \\ &\geq (|z| - 1)|z| \\ &\geq 3|z|. \end{aligned}$$

Então $P_4^n(z) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim o conjunto Julia cheio K_4 de P_4 está contido no disco fechado D_4 do raio 4 centrado na origem.

Proposição 2.1. *O conjunto Julia cheio K_P de uma função polinomial P de grau $d \geq 2$ em \mathbb{C}_∞ , é um conjunto compacto que consiste no conjunto de Julia J_P unido com todas as componentes limitadas do conjunto de Fatou F_P . Se esses componentes limitadas existirem, todas serão simplesmente conexas. O conjunto de Julia é igual na fronteira ∂K_P .*

A função de Böttcher $\phi : U \rightarrow D_r$ do Teorema 2.14, para uma função polinomial P de grau $d \geq 2$, numa vizinhança U de infinito é da forma

$$\phi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P^n(z))^{1/d^n}.$$

Observe que ϕ é analítica em U , $\phi(z) \rightarrow \infty$ quando $z \rightarrow \infty$, e que satisfaz

$$\phi(P(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P^n(P(z)))^{1/d^n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (P^{n+1}(z))^{1/d^{n+1}} \right)^d = (\phi(z))^d.$$

Definimos a *função potencial* ou *taxa de escape* $h_P : U \rightarrow \mathbb{R}$ do conjunto K_P por

$$h_P(z) = \log |\phi(z)|.$$

Note que

$$h_P(P(z)) = \log |\phi(P(z))| = \log |(\phi(z))^d| = d \log |\phi(z)| = dh_P(z).$$

A função h_P é definida apenas em uma vizinhança de infinito, mas existe uma extensão para todo \mathbb{C} , que é contínua e satisfaz a identidade $h_P(z) = h_P(P(z))/d$. De fato, defina

$$h_P(z) = \begin{cases} \log |\phi(P^n(z))|/d^n & , \text{ para } z \in A(\infty), \\ 0 & , \text{ para } z \in K_P. \end{cases}$$

Onde n é suficientemente grande para que $|P^n(z)| > c_P$. Como alternativa, definimos simplesmente $h_P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ da forma

$$h_P(z) = \log_+ |\phi(z)|,$$

onde $\log_+ |w| = \log |w|$ para $|w| \geq 1$ e $\log_+ |w| = 0$ para $0 \leq |w| \leq 1$. A função h_P é analítica fora do conjunto J_P , mas é contínua em pontos de J_P .

Para constantes $c > 0$, os conjuntos $\{z : z = h_P^{-1}(c)\}$ são chamados *curvas equipotenciais* ou *curvas de nível* de K_P , e para cada $r > 1$, seja Γ_r a região compacta e limitada definida por

$$\Gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : h_P(z) \leq \log(r)\}.$$

A fronteira $\partial\Gamma_r$ é exatamente a curva equipotencial $\{z \in \mathbb{C} : h_P(z) = \log(r)\}$. As trajetórias ortogonais das curvas equipotenciais, ou seja, as imagens sob $\phi^{-1} : D_r \rightarrow U$ das linhas radiais $\{re^{2\pi i\theta} : r > 1\}$ que se estende desde infinito até a fronteira de U são chamadas *raios externos* da função polinomial P . Isto é, um raio externo R_θ de ângulo θ em U é o conjunto dado por $\phi^{-1}(re^{2\pi i\theta})$ para cada $r > 1$. Os ângulos são elementos de \mathbb{R}/\mathbb{Z} , medidos em frações de uma volta e não em radianos. O comportamento de um raio externo para um ângulo θ irracional qualquer ainda é uma questão aberta. Ambas famílias de curvas são suaves, exceto nos pontos críticos de h_P e formam um sistema de

coordenadas ortogonais em uma vizinhança no infinito. Este sistema é conhecido como *coordenadas de Böttcher*.

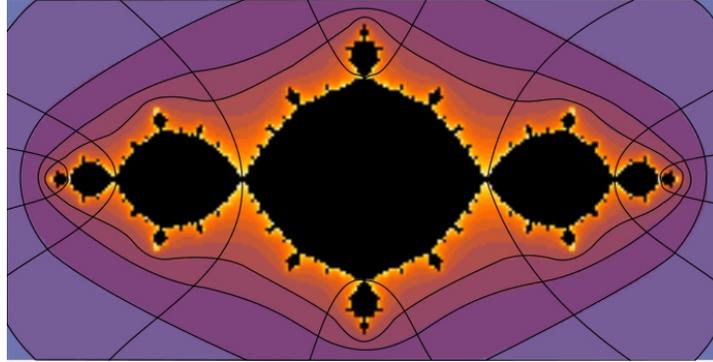


Figura 2.5: Curvas equipotenciais e raios externos de K_P , com $P(z) = z^2 - 1$.

Teorema 2.15. *Para uma função polinomial $P : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ de grau $d \geq 2$, as seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *A função $P|_{A(\infty)}$ é analiticamente conjugada com a função $z \mapsto z^d$ restrita ao exterior do círculo unitário.*
2. *O conjunto $A(\infty)$ é simplesmente conexo.*
3. *O conjunto de Julia J_P é conexo.*
4. *A bacia local do infinito $A(\infty)$ não contém pontos críticos finitos de P .*

Demonstração. 1. \Rightarrow 2. *A função de Böttcher $\phi : A(\infty) \rightarrow D_r$ para a função P é um homeomorfismo, sendo D_r simplesmente conexo para algum $r > 1$, segue que $A(\infty)$ é simplesmente conexo.*

2. \Rightarrow 3. *Da Proposição 2.1 temos que $\partial A(\infty) = \partial K_P = J_P$. Pela Proposição 1.4 temos que um subconjunto de \mathbb{C}_∞ é simplesmente conexo se e somente se sua fronteira é conexa.*

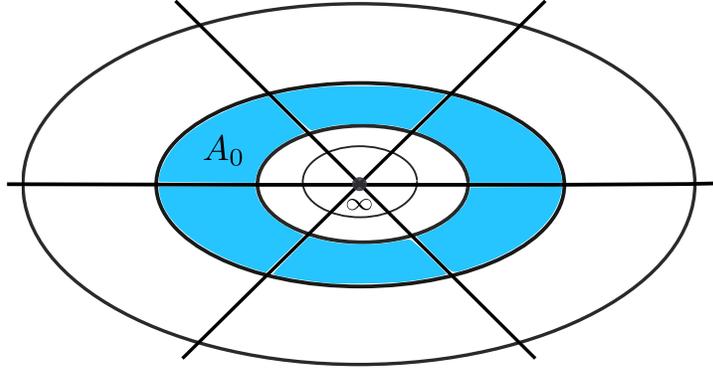


Figura 2.6: Coordenadas de Böttcher em U e o anel A_0 .

3. \Rightarrow 4. Vamos mostrar que se $A(\infty)$ contém algum ponto crítico finito de P , então J_P é desconexo. Seja $\phi : U \rightarrow D_r$ a função de Böttcher que conjuga P com a função $F(z) = z^d$ em uma vizinhança U de ∞ , e seja A_0 o anel $\phi^{-1}(D_{r,d} - D_r)$. Estendemos a função ϕ tomando imagens inversas de P . Considere o conjunto $A_{-1} = P^{-1}(A_0)$, se $P(c) \notin A_0$, para cada ponto crítico finito c de P , então a função $P : A_{-1} \rightarrow A_0$ é uma d -dobra que cobre o espaço e A_{-1} é um anel. Portanto, podemos puxar as coordenadas de Böttcher e definir a função $\phi : A_{-1} \rightarrow D_{r^{1/d}}$. Repetindo o processo indutivamente, definimos $A_{-k} = P^{-1}(A_{-k+1})$ sempre que $P(z_c) \notin A_{-k+1}$ para cada ponto crítico finito c de P . Por hipótese $A(\infty)$ contém algum ponto crítico finito c de P , isso implica que existe um inteiro N tal que $P(c) \in A_N$. Neste caso a função $P : P^{-1}(A_N) \rightarrow A_N$ não cobre o espaço, mas é uma cobertura ramificada. Se γ é uma curva de Jordan que passa por $P(c)$, então a imagem inversa $P^{-1}(\gamma)$ é uma curva comprimida que limita pelo menos dois (finitos) conjuntos abertos, e esses conjuntos desconectam a J_P .

4. \Rightarrow 1. Usando as mesmas observações da prova acima. Por hipótese $A(\infty)$ não contém nenhum ponto crítico finito de P , isso implica que $P : A_{-k} \rightarrow A_{-k+1}$ é uma d -dobra que cobre o espaço para cada k , assim $A(\infty) = U \cup (\cup_{k=1}^{\infty} A_{-k})$. Por outro lado podemos puxar a função $\phi : A_{-k} \rightarrow D_{1/d^k}$ para cada k . Como $r \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow \infty$, podemos definir a função de Böttcher $\phi : A(\infty) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{D}$ que conjuga a função $P|_{A(\infty)}$.

□

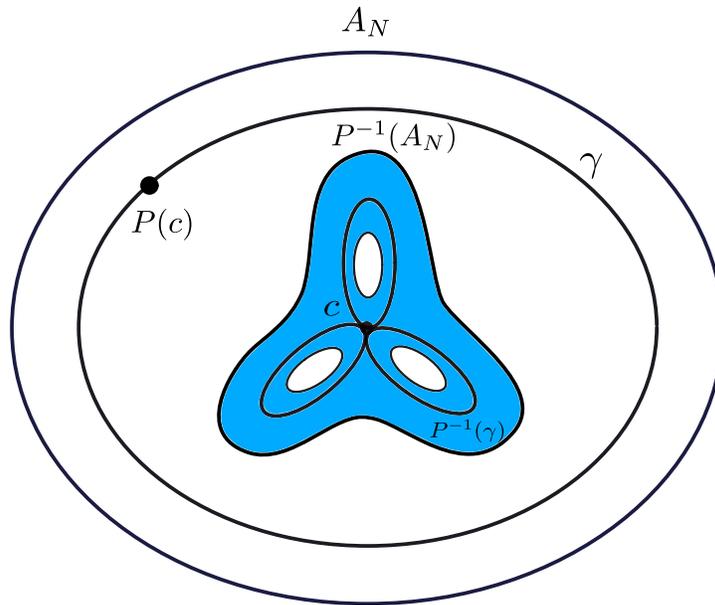


Figura 2.7: Conjuntos A_N e $P^{-1}(A_N)$.

Por outro lado, se todos os pontos críticos finitos têm órbitas ilimitadas, isto é, se pertencem à bacia de atração de infinito, o comportamento do conjunto de Julia é bem diferente do tipo descrito acima. O teorema a seguir mostra que nessas condições, o conjunto de Julia é totalmente desconexo, com o qual podemos dar uma descrição topológica mais completa do conjunto de Julia e da dinâmica dos pontos neste conjunto.

Teorema 2.16. *Para uma função polinomial P de grau $d \geq 2$, se $A(\infty)$ contém todos os pontos críticos finitos de P , então o conjunto J_P é totalmente desconexo e a função $P|_{J_P}$ é topologicamente conjugado ao d -shift.*

A prova desse Teorema será omitida no caso geral, mas no próximo capítulo será demonstrado para o caso dos polinômios quadráticos. Esse Teorema implica que se a bacia de atração de infinito $A(\infty)$ contém todos os pontos críticos finitos de P , então o conjunto de J_P é um conjunto de Cantor, e que existe um homeomorfismo $\varphi_P : J_P \rightarrow \Sigma_d$ chamado “codificação de J_P ”, tal que $\varphi_P \circ P|_{J_P} = \sigma \circ \varphi_P$, assim P é topologicamente conjugado a σ em J_P o que implica que suas dinâmicas são completamente equivalentes.

2.4 O Espaço de Parâmetros

Consideramos o espaço X_d de polinômios complexos mônicos centrados de grau $d \geq 2$, isto é, os polinômios da forma

$$P(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + a_{d-3}z^{d-3} + \cdots + a_1z + a_0, \quad \text{com } z \in \mathbb{C}_\infty.$$

Todo polinômio complexo de grau d é homeomorficamente conjugado com um polinômio do conjunto X_d (a conjugação não necessariamente é única). A cada polinômio de X_d podemos associar um elemento $a = (a_0, a_1, \dots, a_{d-3}, a_{d-2})$ do espaço de parâmetros \mathbb{C}^{d-1} . O subconjunto *Connectedness Locus* de \mathbb{C}^{d-1} é constituído por todos os parâmetros, para os quais o polinômio associado P , têm todos seus pontos críticos finitos contidos em K_P , ou simplesmente onde o conjunto J_P é conexo. O outro extremo é o subconjunto chamado *Shift Locus* que consiste em parâmetros para os quais os polinômios associados, têm todos seus pontos críticos fora de K_P . Pelo Teorema 2.16, o conjunto K_P desses polinômios é um conjunto de Cantor topologicamente conjugado a um d -shift, esses polinômios são chamados de *Shift-like*. Observe que se $d > 2$ existem muitos polinômios que não estão no conjunto Connectedness Locus ou no conjunto Shift Locus.

Apresentamos brevemente o conceito de grupo fundamental para o caso particular do espaço complexo de parâmetros \mathbb{C}^{d-1} com a topologia produto. Esse conceito será importante para entender os tipos de curvas que consideramos para gerar os automorfismos do shift nos próximos capítulos. As definições e afirmações são tomadas de [15].

Definição 2.4. Se $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^{d-1}$ são dois cominhos tais que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ e $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = z_1$. Uma **homotopia** entre γ_1 e γ_2 é uma família de funções contínuas $f_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^{d-1}$ a um parâmetro $t \in [0, 1]$ tal que

1. Os pontos $f_t(0) = z_0$ e $f_t(1) = z_1$ são independentes de t .
2. A função associada $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^{d-1}$ definida por $H(s, t) = f_t(s)$ é contínua.

Os cominhos γ_1 e γ_2 são ditos **homotóticos** se existe uma homotopia entre γ_1 e γ_2 e denotamos por $\gamma_1 \simeq \gamma_2$.

Em particular, dois cominhos fechados $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^{d-1}$ com $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ são homotópicos quando existe uma função contínua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^{d-1}$ tal que para quaisquer $s, t \in [0, 1]$, tem-se

$$H(s, 0) = \gamma_1(s); \quad H(s, 1) = \gamma_2(s); \quad H(0, t) = H(1, t) = z_0.$$

A relação de homotopia satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, o qual implica que é uma relação de equivalência. Denotamos por $[\gamma]$ a classe de homotopia do caminho γ , isto é, o conjunto de todos os caminhos em \mathbb{C}^{d-1} que possuem as mesmas extremidades que γ e que são homotópicos a γ com extremos fixos durante a homotopia.

Definição 2.5. *Sejam γ_1 e γ_2 dois caminhos em \mathbb{C}^{d-1} tais que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, existe um produto $\gamma_1 * \gamma_2$ de γ_1 e γ_2 como sendo o caminho que consiste em percorrer primeiro γ_1 e depois γ_2 , tal caminho é definido pela função*

$$\gamma_1 * \gamma_2(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma_2(2s - 1) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

O cominho $\gamma_1 * \gamma_2$ está bem definido e é contínuo. O produto de caminhos induz uma operação \cdot nas classes de homotopias de caminhos, definida por $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2]$, para os pares γ_1 e γ_2 tais que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$.

Se fixamos um ponto z_0 em \mathbb{C}^{d-1} e consideramos apenas caminhos fechados que começam e terminam em z_0 , o conjunto das classes de homotopias para tais caminhos formará um grupo com a operação \cdot . O ponto z_0 é chamado base do grupo.

Definição 2.6. *Seja z_0 um ponto fixo em \mathbb{C}^{d-1} . O conjunto das classes de homotopias de caminhos fechados com base em z_0 , com a operação \cdot , é chamado **grupo fundamental** de \mathbb{C}^{d-1} relativo ao ponto base z_0 e denotado por $\pi_1(\mathbb{C}^{d-1}, z_0)$.*

A escolha do ponto base não afeta a estrutura do grupo fundamental.

Proposição 2.2. *Se z_0 e z_1 pertencem à mesma componente conexa por caminhos de \mathbb{C}^{d-1} , então $\pi_1(\mathbb{C}^{d-1}, z_0)$ e $\pi_1(\mathbb{C}^{d-1}, z_1)$ são isomorfos. Mais precisamente, cada classe de homotopia $[\gamma]$ de caminhos que ligam os pontos z_0 e z_1 induz um isomorfismo de grupos $\bar{\gamma} : \pi_1(\mathbb{C}^{d-1}, z_1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^{d-1}, z_0)$, dado por $\bar{\gamma}([\alpha]) = [\gamma] \cdot [\alpha] \cdot [\gamma]^{-1} = [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]$.*

Capítulo 3

Automorfismo não Trivial Gerado pela Família Quadrática

Em [14] podemos encontrar que o grupo Aut_2 consiste em apenas dois elementos, isto é, existem apenas dois automorfismos do 2-shift, a identidade e o automorfismo que troca cada símbolo. Neste capítulo, apresentamos a construção desse automorfismo do 2-shift não trivial através da dinâmica complexa da família quadrática. Para isso, usamos as seguintes referências bibliográficas [3], [6] e [8].

3.1 Dinâmica da Família Quadrática

Se consideramos a família $P_c : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ dos polinômios quadráticos a um parâmetro complexo c da forma $P_c(z) = z^2 + c$. No Capítulo 1 foi mostrado que qualquer polinômio quadrático é conjugado por meio de uma transformação de Möbius a um único elemento da família P_c . Para cada c , temos que o polinômio $P_c(z)$ tem um ponto fixo super-atrator em ∞ e um único ponto crítico em 0 com valor crítico $P_c(0) = c$. Trabalharemos de duas maneiras diferentes em \mathbb{C} . A primeira será o espaço onde tomamos os parâmetros c , e a outra será como nosso espaço dinâmico, neste plano estudamos a dinâmica da órbita de um ponto z gerada pela iteração de P_c . Neste contexto, denotamos K_c e J_c como os conjuntos Julia cheio e Julia da função P_c respectivamente.

Pelos Teoremas 2.15 e 2.16, temos que existe uma dicotomia útil entre os parâmetros complexos c da família quadrática P_c . Se $0 \in A(\infty)$, ou equivalentemente, se a órbita $\{P_c^n(0)\} = \{0, c, c^2+c, (c^2+c)^2+c, \dots\}$ converge a infinito, então J_c é totalmente desconexo e $P_c|_{J_c}$ é um 2-shift. Por outro lado, se $0 \notin A(\infty)$, então $A(\infty)$ é simplesmente conexo e J_c é conexo (Figura 3.2). O Matemático Benoît Mandelbrot investigou essa dicotomia e descobriu que o subconjunto connectedness locus no espaço dos parâmetros resultou em uma figura fractal incomum. Veja a Figura 3.1.

Definição 3.1. *Seja M o conjunto do espaço de parâmetros \mathbb{C} da família P_c definido por*

$$M := \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ é conexo}\}.$$

*M é conhecido como **conjunto de Mandelbrot**.*

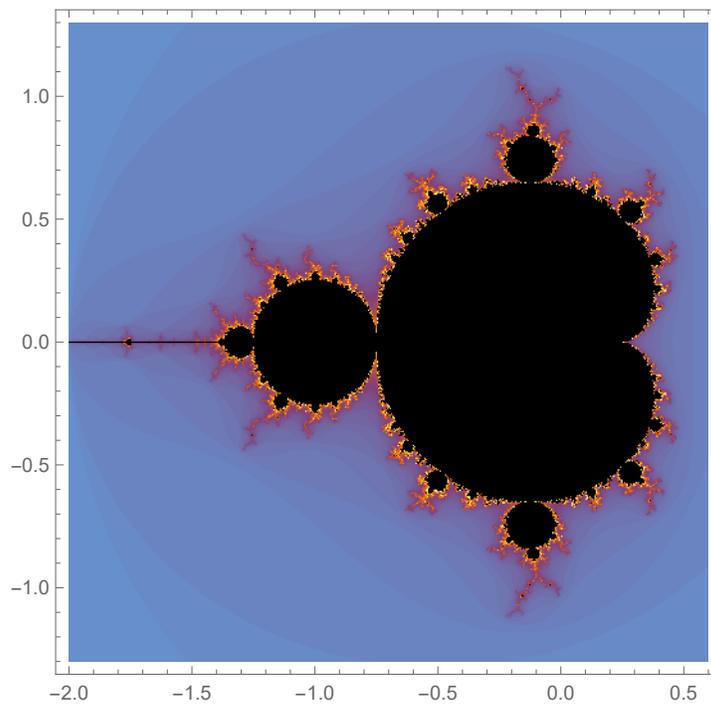


Figura 3.1: Conjunto de Mandelbrot.

O conjunto M é fechado e está contido no disco $\{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}$. Os Matemáticos A. Douady e J. Hubbard demonstraram em [13] que o conjunto de Mandelbrot é conexo.

Usando dinâmica, por construção de um homeomorfismo conforme $\phi : \mathbb{C}_\infty \setminus D_1 \rightarrow \mathbb{C}_\infty \setminus M$, provaram a que o complemento de M em \mathbb{C}_∞ é conformemente equivalente ao disco unitário de uma maneira dinamicamente natural. Eles também analisaram as componentes do interior de M . Seja

$$H := \{c \in \mathbb{C} : P_c \text{ tem uma órbita periódica (super) atratora finita}\}.$$

Este conjunto é aberto e está contido no interior de M . Se $c \in H$, então J_P é localmente conexo [6]. No momento, existem dois problemas abertos sobre esses conjuntos. M é localmente conexo? e $H = \text{int}(M)$?

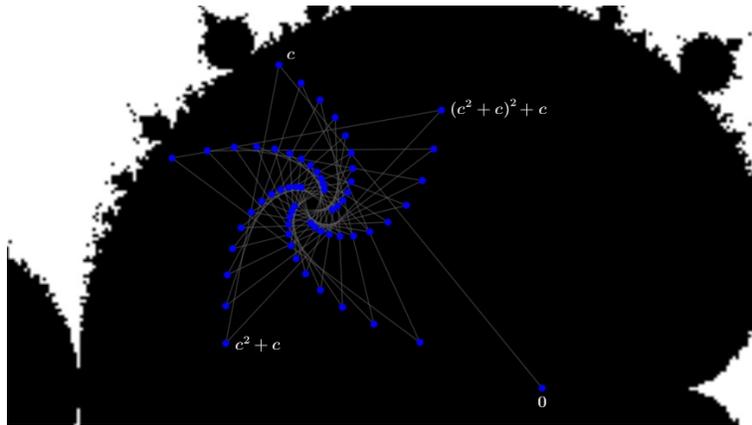


Figura 3.2: Órbita $\{P_c^n(0)\}$ com $c = -0.43 + 0.52i \in M$.

Considerando a função $P_c(z) = z^2 + c$, para cada parâmetro c . Sendo ∞ um ponto fixo super-atrator pelo Teorema 2.14 existe uma única função $\phi_c : U \rightarrow D_r$ definida numa vizinhança U do infinito, tal que P_c é conjugada com a função $P_0 = \phi_c \circ P_c \circ \phi_c^{-1} : z \mapsto z^2$, isto é, P_c se comporta como P_0 em uma vizinhança do infinito. Pelo Teorema 2.15, se a órbita $\{P_c^n(0)\}$ é limitada, então os conjunto K_c e J_c são conexos. Além disso, a função de Böttcher ϕ_c pode ser estendida, puxando sucessivamente P_c a um homeomorfismo analítico $\phi_c : \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus D_1$.

Teorema 3.1. *Se $P_c^n(0) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, então J_c esgota K_c e é um conjunto de Cantor que é homeomorfo a Σ_2 . Além disso, $P_c|_{J_c}$ é topologicamente conjugado ao 2-shift.*

Demonstração. Se $P_c^n(0) \rightarrow \infty$, as pré-imagens sucessivas sob P_c de uma vizinhança de ∞ , eventualmente atingiram o valor crítico c . A próxima pré-imagem de uma curva fechada simples γ que contém o parâmetro c é uma curva em forma de oito contida no interior de γ , isto é, $L_c = P_c^{-1}(\gamma)$ é uma cunha de duas curvas fechadas simples que se encontram em 0 . Portanto, podemos assumir que a função de Böttcher pode ser estendida a um homeomorfismo analítico $\phi_c : \mathbb{C}_\infty \setminus U_L \rightarrow \mathbb{C}_\infty \setminus D_R$, onde D_R é o disco fechado de raio $R > 1$, e U_L é o conjunto compacto cuja fronteira é uma curva L_c homeomorfa a uma lemniscata. O conjunto U_L tem dois componentes que serão rotuladas arbitrariamente por U_0 e U_1 . O conjunto de Julia J_c está contido no interior de U_L e o valor crítico $c \notin U_L$. Veja Figura 3.3. Mostramos primeiro que J_c é totalmente desconexo.

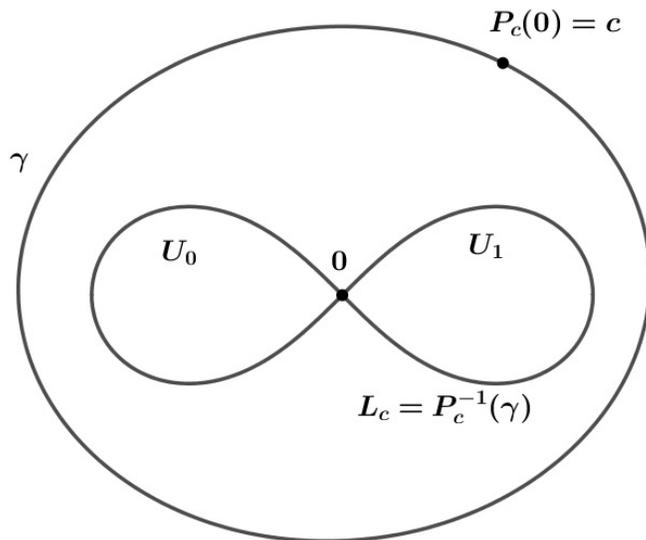


Figura 3.3: ϕ_c se estende para o exterior de L_c .

Pelo Teorema 2.12, como $P_c^n(0) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, para $K > 1$ existe um inteiro positivo N tal que $|(P_c^n)'(z)| > K$ para cada $n \geq N$ e $z \in J_c$. Pela regra da cadeia, segue que $|(P_c^{nm})'(z)| > K^m$ para cada m . Suponha que existe uma componente conexa U contida em J_c com mais de dois pontos. Sejam $z, w \in U \subset J_c$ com $z \neq w$. Mas então, $|(P_c^{nm})'(\xi)| > K^m$ para todo $\xi \in U$. Escolha m tal que $K^m|z - w| > 1$. Pela desigualdade do valor médio, segue que $|P_c^{nm}(z) - P_c^{nm}(w)| \geq K^m|z - w| > 1$, o que implica que eventualmente por iteração de P_c pelo menos um $P_c^{nm}(z)$ ou $P_c^{nm}(w)$ esteja fora de U_L . Isso

é uma contradição e, portanto, as únicas componentes conexas de J_c são os conjuntos que consistem em um único ponto, logo J_c é totalmente desconexo e portanto, J_c é um conjunto de Cantor.

A primeira pré-imagem de L_c sob P_c consiste em duas outras curvas lemniscatas, uma em cada componente U_0 e U_1 . Veja a Figura 3.4. Essas duas curvas limitam quatro componentes compactas que rotularemos novamente de acordo com a imagem deles sob P_c . Isto é, rotulamos $U_{a_0a_1}$ com $a_0, a_1 \in \{0, 1\}$ de acordo com a regra

$$U_{a_0a_1} \subset U_{a_0}, \quad P_c(U_{a_0a_1}) = U_{a_1}.$$

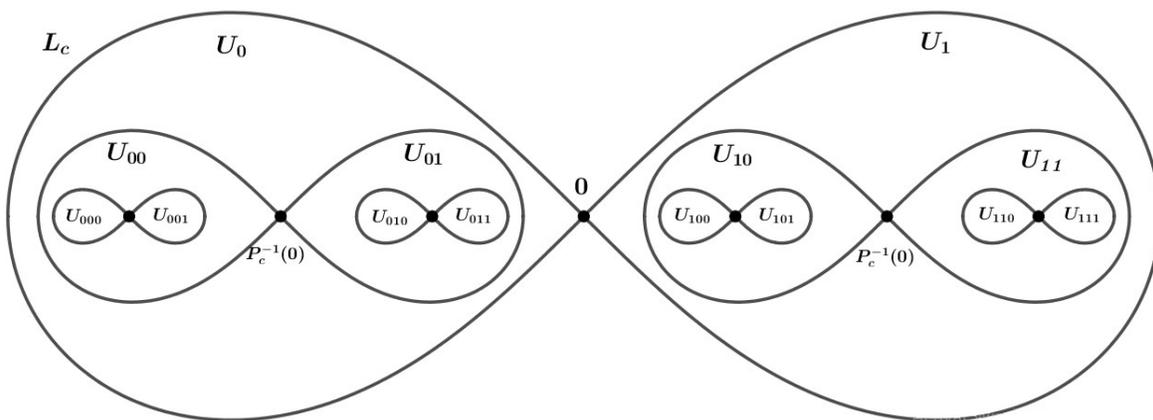


Figura 3.4: Codificação de J_c .

Procedendo por indução, é possível continuar rotulando 2^{n+1} componentes na n -ésima etapa do processo. Cada um desses componentes será rotulada como $U_{a_0a_1a_2\cdots a_n}$, com $a_i \in \{0, 1\}$, novamente de acordo com a regra

$$U_{a_0a_1\cdots a_n} \subset U_{a_0a_1\cdots a_{n-1}}, \quad P_c(U_{a_0a_1\cdots a_n}) = U_{a_1\cdots a_n}.$$

Uma observação importante é que todo ponto fora dessas 2^{n+1} componentes converge a ∞ sob iteração de P_c . Portanto o conjunto de Julia J_c fica confinado no interior desses componentes. Por outro lado, as componentes rotuladas eventualmente se limitam a pontos únicos no conjunto J_c , que é completamente invariante sob P_c . Isto é, para $z \in J_c$ temos

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} U_{a_0a_1a_2\cdots a_n} = \{z\}.$$

Portanto, a cada ponto $z \in J_c$ é associada uma única sequência $\{a_i\} \in \Sigma_2$. Começamos a “codificar” o conjunto J_c por meio da seguinte função. Seja $\varphi_c : J_c \rightarrow \Sigma_2$ definida por

$$\varphi_c(z) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} \iff \forall i, P_c^i(z) \in U_{a_i}.$$

Como J_c é totalmente desconexo e invariante sob P_c , a função φ_c está bem definida. Em seguida, mostraremos que φ_c é um homeomorfismo.

Primeiro vamos mostrar que φ_c é injetora. Sejam $z, w \in J_c$ com $z \neq w$, e suponha que $\varphi_c(z) = \varphi_c(w)$. Então, para cada n , $P_c^n(z)$ e $P_c^n(w)$ pertencem à mesma componente do interior de L_c . O qual implica que P_c é monótona na componente que contém $P_c^n(z)$ e $P_c^n(w)$. Portanto, todos os pontos dessa componente permanecem em $U_0 \cup U_1$. Isso contradiz o fato de que J_c é totalmente desconexo.

φ_c é sobrejetora, sendo J_c um subconjunto compacto de \mathbb{C} , podemos introduzir a seguinte notação. Seja $P_c^{-n}(J_c) = \{z \in U_L : P_c^n(z) \in J_c\}$. Em particular, $P_c^{-1}(J_c)$ denota a préimagem de J_c , consistindo em dois subconjuntos compactos, um em U_0 e outro em U_1 . Agora seja $a = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} \in \Sigma_2$. Devemos encontrar um $z \in J_c$ tal que $\varphi_c(z) = a$. Para esse fim, por construção temos que

$$\begin{aligned} U_{a_0 a_1 \dots a_n} &= \{z \in U_L : z \in U_{a_0}, P_c(z) \in U_{a_1}, \dots, P_c^n(z) \in U_{a_n}\} \\ &= U_{a_0} \cap P_c^{-1}(U_{a_1}) \cap \dots \cap P_c^{-n}(U_{a_n}) \\ &= U_{a_0 a_1} \cap P_c^{-2}(U_{a_2}) \cap \dots \cap P_c^{-n}(U_{a_n}) \\ &= U_{a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \cap P_c^{-n}(U_{a_n}). \end{aligned}$$

Temos que $U_{a_0 \dots a_n}$ forma uma sequência aninhada de componentes fechadas não vazias quando $n \rightarrow \infty$. Observe que

$$U_{a_0 a_1 \dots a_n} = U_{a_0} \cap P_c^{-1}(U_{a_1 \dots a_n}).$$

Por indução, podemos supor que $U_{a_1 \dots a_n}$ é uma componente fechada não vazia, de modo que, pela observação acima, $P_c^{-1}(U_{a_1 \dots a_n})$ consiste em duas componentes fechadas, uma

em U_0 e outra em U_1 . Portanto, $U_{a_0} \cap P_c^{-1}(U_{a_1 \dots a_n})$ é uma única componente fechada. Além disso, as componentes estão aninhadas porque

$$U_{a_0 a_1 \dots a_n} = U_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}} \cap P_c^{-n}(U_{a_n}) \subset U_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}}.$$

Portanto, concluímos que

$$U = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_{a_0 a_1 \dots a_n}$$

é um conjunto não vazio. Para $z \in U$, temos que $z \in U_{a_0}$, $P_c(z) \in U_{a_1}$, ..., $P_c^n(z) \in U_{a_n}$, Assim $\varphi_c(z) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} = a \in \Sigma_2$ e φ_c é sobrejetora.

Para provar a continuidade de φ_c , seja $z \in J_c$ e suponha que $\varphi_c(z) = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Dado $\epsilon > 0$ escolha n tal que $1/2^n < \epsilon$. Considerando a componente compacta $U_{a_0 a_1 \dots a_n}$ definida para todas as combinações possíveis de $a_0 a_1 \dots a_n$. Por construção, essas 2^{n+1} componentes são todas disjuntas e J_c está contido em sua união. Portanto, podemos escolher uma vizinhança U de z de modo que se $w \in U \cap J_c$ temos então que $w \in U_{a_0 a_1 \dots a_n}$. Logo $\varphi_c(w)$ concorda com $\varphi_c(z)$ nos primeiros $n+1$ termos. Assim, pela Proposição 1.6,

$$d(\varphi_c(z), \varphi_c(w)) < 1/2^n < \epsilon.$$

Isso prova a continuidade de φ_c . Usando as mesmas idéias podemos provar que φ_c^{-1} também é contínua. Assim, concluímos que φ_c é um homeomorfismo entre J_c e Σ_2 .

Finalmente, devemos mostrar que $P_c|_{J_c}$ é topologicamente conjugada ao 2-shift, isto é,

$$\varphi_c \circ P_c|_{J_c} = \sigma \circ \varphi_c.$$

Um ponto $z \in J_c$ pode ser definido exclusivamente pela sequência aninhada de componentes fechadas

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} U_{a_0 a_1 \dots a_n},$$

determinada pela codificação $\varphi_c(z)$. Por construção $P_c(U_{a_0 a_1 \dots a_n}) = U_{a_1 a_2 \dots a_n}$, sendo

$P_c(U_{a_0}) = U_L$. Portanto, para $z \in J_c$ temos que

$$\begin{aligned} \varphi_c \circ P_c(z) &= \varphi_c \circ P_c(\bigcap_{n=0}^{\infty} U_{a_0 a_1 \dots a_n}) \\ &= \varphi_c(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{a_1 a_2 \dots a_n}) \\ &= \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \\ &= \sigma \circ \varphi_c(z). \end{aligned}$$

□

Pelo Teorema 3.1 vemos que, para polinômios de grau 2, o shift locus coincide com o complementar do conjunto de Mandelbrot. Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus M$ descreve uma curva fechada contida no shift locus, denotamos por J_t a cada conjunto de Julia da função $P_t(z) = z^2 + \gamma(t)$, para cada $\gamma(t) \in \mathbb{C} \setminus M$. Pelo Teorema 3.1, para cada t temos que J_t é um conjunto de Cantor que é homeomorfo a Σ_2 . Portanto pelo Teorema 2.12, a função P_t está expandindo em J_t e J_t depende continuamente de $\gamma(t) \in \mathbb{C} \setminus M$. Sendo J_t totalmente desconexo, os pontos no conjunto de Julia estarão se movendo continuamente sem colidir, e cada ponto descrevendo um caminho no espaço dinâmico. Assim obtemos uma família de funções a um parâmetro que varia continuamente.

Para cada $t \in [0, 1]$, se considerarmos duas codificações quaisquer $\varphi_0 : J_0 \rightarrow \Sigma_2$ e $\varphi_t : J_t \rightarrow \Sigma_2$ dos conjuntos J_0 e J_t respectivamente, então podemos induzir a família a um parâmetro de homeomorfismos

$$\psi_t = \varphi_0^{-1} \circ \varphi_t : J_t \rightarrow J_0.$$

Veja a Figura 3.5. Sendo γ uma curva fechada temos que $J_0 = J_1$, e a função

$$\psi_1 = \varphi_0^{-1} \circ \varphi_1 : J_0 \rightarrow J_0,$$

é um automorfismo em J_0 . Observe que para cada $t \in [0, 1]$ temos que

$$\begin{aligned} \psi_t \circ P_t &= \varphi_0^{-1} \circ \varphi_t \circ \varphi_t^{-1} \circ \sigma \circ \varphi_t \\ &= \varphi_0^{-1} \circ \sigma \circ \varphi_t \\ &= \varphi_0^{-1} \circ \varphi_0 \circ P_0 \circ \varphi_0^{-1} \circ \varphi_t \\ &= P_0 \circ \psi_t. \end{aligned}$$

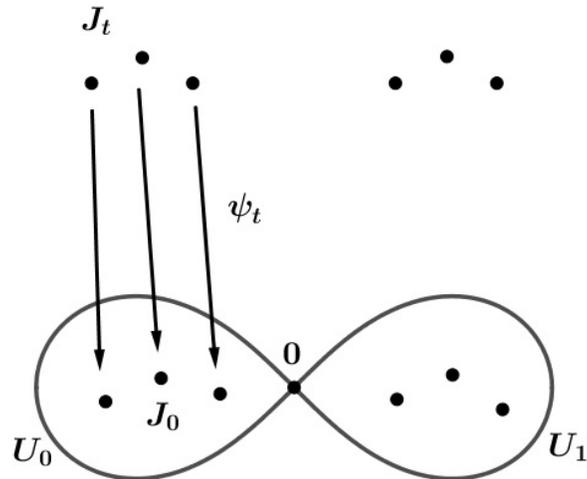


Figura 3.5: Função $\psi_t : J_t \rightarrow J_0$.

Em particular o automorfismos ψ_1 comuta com P_0 . ψ_1 é chamada *função monodromia* associada à curva γ . Se fixamos uma codificação $\varphi : J_0 \rightarrow \Sigma_2$ para o conjunto J_0 , isto é, fixamos uma coleção de rotulações para os pontos no conjunto J_0 contidos em U_0 e U_1 , então as composições

$$\varphi^* = \varphi \circ \psi_1 : J_0 \rightarrow \Sigma_2, \quad \varphi \circ \psi_t : J_t \rightarrow \Sigma_2$$

são duas outras codificações dos conjuntos J_0 e J_t respectivamente. Em particular, agora temos duas codificações φ e φ^* do conjunto de Julia inicial J_0 . Consideramos em Σ_2 o homeomorfismo

$$\theta = \varphi^* \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \psi_1 \circ \varphi^{-1} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2.$$

Temos que θ comuta com a função 2-shift σ , sendo que

$$\begin{aligned} \theta \circ \sigma &= \varphi \circ \psi_1 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ P_0 \circ \varphi^{-1} \\ &= \varphi \circ P_0 \circ \psi_1 \circ \varphi^{-1} \\ &= \varphi \circ P_0 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi_1 \circ \varphi^{-1} \\ &= \sigma \circ \theta. \end{aligned}$$

Portanto, θ é um automorfismo do 2-shift em Σ_2 .

Teorema 3.2. *Suponha que θ seja um automorfismo do 2-shift induzido pela monodromia associada a uma curva fechada que enrola uma vez em torno de M em $\mathbb{C} \setminus M$. Então θ troca zeros e uns em Σ_2 .*

Demonstração. *Temos que θ é um automorfismo invariante sob homotopias em $\mathbb{C} \setminus M$, então é suficiente considerar apenas um caminho fechado $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus M$, da forma $\gamma(t) = \rho(\cos t + i \sin t)$, onde $\rho > 2$. Suponha que $|z| \geq \rho$, então*

$$\begin{aligned} |P_t(z)| = |z^2 + \gamma(t)| &\geq |z^2| - \rho \\ &\geq |z|^2 - |z| \\ &= (|z| - 1)|z| \\ &> |z|. \end{aligned}$$

Portanto, se $|z| \geq \rho$ temos que $|P_t^n(z)| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim podemos usar a γ como a curva no Teorema 3.1 cuja pré-imagem sob P_t define as componentes U_0 e U_1 . Ou seja, para cada $t \in [0, 1]$, sejam $U_0(t)$ e $U_1(t)$ as duas componentes do interior da lemniscata dada por

$$P_t^{-1}(\gamma).$$

Podemos escolher os índices 0 e 1 para que $U_0(t)$ e $U_1(t)$ variem continuamente com t . De fato, $U_0(t)$ e $U_1(t)$ são dados pelos dois ramos de $\sqrt{w - \gamma(t)}$ quando w varia sobre $|w| < \rho$. Portanto, à medida que $\gamma(t)$ varia sobre o círculo de raio ρ , obtemos as funções $\psi_t : J_t \rightarrow J_0$ usando a função codificação. Note que as duas componentes $U_0(t)$ e $U_1(t)$ são trocadas quando retornamos a P_0 , ou seja, $U_0(1) = U_1(0)$ e $U_1(1) = U_0(0)$. Daqui resulta que θ troca 0 e 1 na primeira entrada de qualquer sequência em Σ_2 . Além disso, pode-se ver que θ troca zeros e uns na j -ésima entrada de qualquer sequência, observando por indução que

$$\psi_1 \circ P_1^j = P_0^j \circ \psi_1.$$

Assim, θ é um automorfismo do 2-shift não trivial em Σ_2 . □

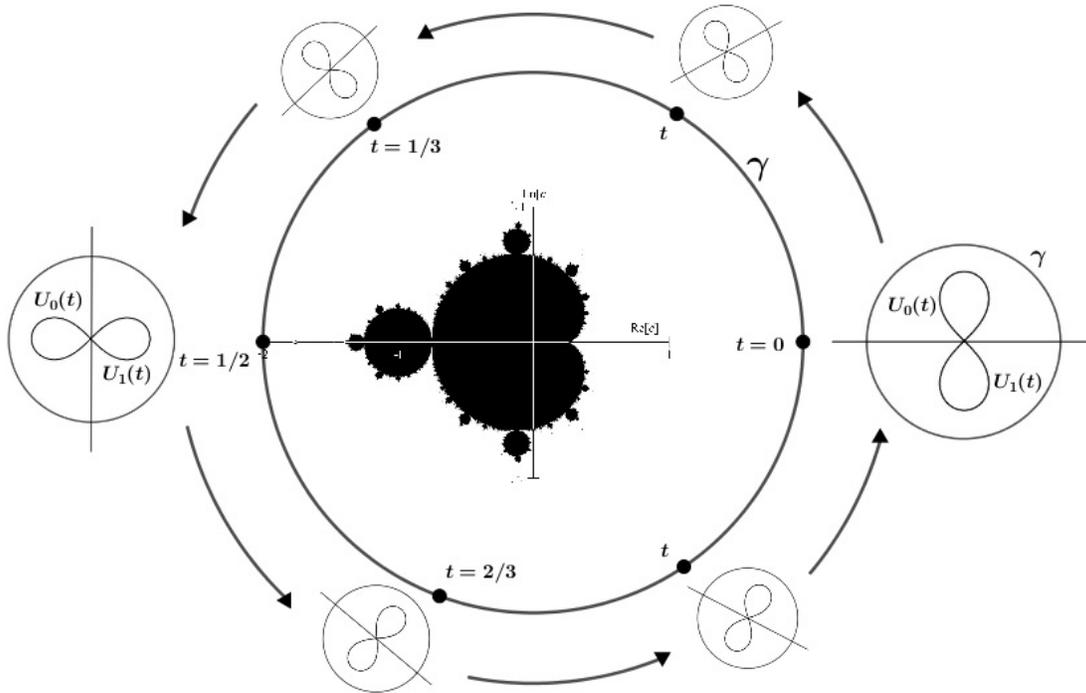


Figura 3.6: Automorfismo induzido pela monodromia associada a γ .

3.2 Girar o Valor Crítico de uma Função Quadrática

Nesta seção, apresentamos um método para produzir de novo o automorfismo não trivial do 2-shift. Esta técnica se tornará uma operação básica para obter automorfismos do d -shift não triviais no próximo capítulo. Para desenvolver esses conceitos, tomamos como referência principal os artigos [7] ou [8].

A ideia é construir uma família a um parâmetro de homeomorfismos F_t com $t \in [0, 1]$, e através da teoria de quase-conformidade provar que cada elemento dessa família é quase-conforme conjugado a uma função polinomial da forma $z^2 + c(t)$, onde a função $c(t)$ é contínua e gira uma vez ao redor do conjunto de Mandelbrot. Consideramos um parâmetro fixo $c = c(0) \notin M$ e a função quadrática $P_c(z) = z^2 + c$. Seja $\phi_c : U \rightarrow D_r$ a função de Böttcher associada a P_c numa vizinhança U do infinito. Da seção 2.3 temos que a função

potencial $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ de P_c , é dada por

$$h(z) = \log_+ |\phi_c(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_+ |P_c^n(z)|}{2^n}.$$

A função h é contínua em \mathbb{C} e por definição temos que $h(P_c(z)) = 2h(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Se considerarmos o conjunto

$$\Gamma_c = \{z \in \mathbb{C}_\infty : h(z) > h(0)\}.$$

Do Teorema 3.1 existe uma única extensão de ϕ_c a um homeomorfismo analítico

$$\phi_c : \Gamma_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus D_R,$$

que conjuga a P_c em Γ_c com $z \mapsto z^2$ em $\mathbb{C} \setminus D_R$, onde $R = \exp(h(0))$. Se $r > R$ a função ϕ_c transforma a curva equipotencial $h(z) = \log(r)$ para o círculo $|z| = r$. O raio externo R_θ de ângulo θ para a função P_c , é a pré-imagem sob ϕ_c do raio $r \mapsto r \exp(2\pi i\theta)$, com $r > R$. A função potencial h , as curvas equipotenciais e os raios externos definem as coordenadas de Böttcher em Γ_c para a função P_c . Como o valor crítico c pertence a Γ_c , o valor complexo $\phi_c(c)$ tem um papel importante na dinâmica complexa. O valor real $\log |\phi_c(c)|$ é chamado taxa de escape do valor crítico e $Arg(\phi_c(c))$ seu ângulo externo.

Começamos a construção giratória. Escolha dois valores reais ρ_1 e ρ_2 tais que

$$h(c) < \rho_1 < \rho_2 < 2h(c).$$

Agora considerarmos os valores $r_1 = e^{\rho_1}$ e $r_2 = e^{\rho_2}$, além as regiões anulares

$$A = \{z \in \Gamma_c : \rho_1 \leq h(z) \leq \rho_2\},$$

$$A' = \{z \in \mathbb{C} \setminus D_R : r_1 \leq |z| \leq r_2\}.$$

Note que a função ϕ_c mapeia A para A' . Definimos em A' a função Dehn twist T como no Exemplo 1.5, isto é, a função $T : A' \rightarrow A'$ da forma

$$T(re^{2\pi it}) = r \exp\left(2\pi i\left(t + \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right)\right).$$

Assim, definimos para o conjunto A a função Dehn twist $\tau : A \rightarrow A$ por

$$\tau(z) = \phi_c^{-1} \circ T \circ \phi_c(z).$$

A função τ não é conforme, porém, τ é um homeomorfismo quase-conforme em A . Como a região anular A fica entre as curvas equipotenciais que contêm os valores c e $P_c(c)$, segue-se que a imagem inversa $P_c^{-1}(A)$ é uma região anular que fica entre as curvas equipotenciais de 0 e c . Veja figura 3.7.

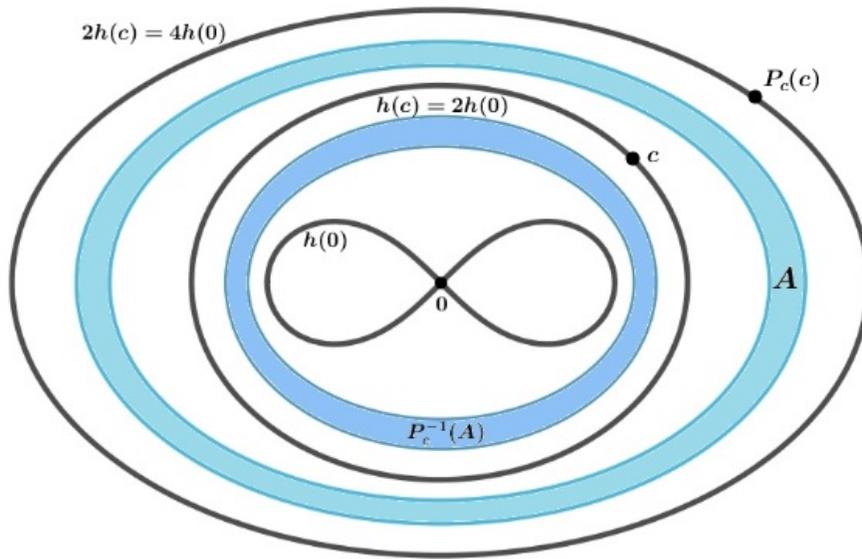


Figura 3.7: Conjuntos A e $P_c^{-1}(A)$.

Definimos a função $F : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ por

$$F(z) = \begin{cases} P_c(z) & \text{se } z \notin P_c^{-1}(A), \\ \tau \circ P_c(z) & \text{se } z \in P_c^{-1}(A). \end{cases}$$

Temos que F é uma cobertura ramificada de grau dois que difere de P_c apenas em $P_c^{-1}(A)$. Embora a função F não seja um polinômio, o Teorema da Aplicação de Riemann Mensurável garante que é quase-conforme conjugada a um polinômio, de fato a P_c .

Proposição 3.1. *A função F é quase-conforme conjugada a P_c .*

Demonstração. *Definimos uma nova estrutura complexa conforme μ em \mathbb{C}_∞ que é preservada por F da seguinte maneira. Para $z \in \mathbb{C}_\infty$ com $h(z) \geq h(c)$, definimos*

$\mu(z) = \mu_*(z)$, onde μ_* denota a estrutura estândar do Exemplo 1.4. Usamos F para puxar μ para $\mathbb{C}_\infty \setminus J_c$. Isso é, se $h(0) \leq h(z) < h(c)$, definimos $\mu(z) = DF^{-1}(\mu(F(z)))$. Observe que $\mu = \mu_*$ em toda parte nesta região, exceto em $P_c^{-1}(A)$. Continuando dessa maneira, podemos definir a estrutura complexa μ para todo $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus J_c$. Por construção, a função F preserva a estrutura μ . Como μ é a retração de uma estrutura complexa com dilatação finita (a excentricidade do campo de elipses é finito) por uma função analítica exceto em $P_c^{-1}(A)$, segue que a estrutura μ tem dilatação finita em $\mathbb{C}_\infty \setminus J_c$. Finalmente estendemos μ para todo \mathbb{C}_∞ definindo $\mu(z) = \mu_*(z)$ para cada $z \in J_c$.

Aplicamos o MRMT para obter um homeomorfismo quase-conforme f que endireita a estrutura μ em quase todo ponto de \mathbb{C}_∞ . Segue que a função

$$Q = f \circ F \circ f^{-1}$$

preserva a estrutura estândar μ_* , o qual implica que é analítica em \mathbb{C}_∞ . Afirmamos que Q é um polinômio quadrático que é homeomorficamente conjugado a P_c . Para isso, podemos normalizar a função f para que $f(\infty) = \infty$ e $f(0) = 0$. Assim, f é analítica em uma vizinhança de ∞ , e se fazemos que $f'(\infty) = 1$ temos que Q é uma função de grau dois que fixa ∞ . Como Q preserva a estrutura μ_* , Q é analítica em \mathbb{C}_∞ . Segue que Q é um polinômio de grau dois. Agora temos que $F = P_c$ em Γ_c e a função f leva a órbita do valor crítico de F à de Q . Portanto, os ângulos externos e as taxas de escape dos valores críticos de P_c e Q coincidem. Assim, P_c e Q são iguais em \mathbb{C}_∞ . \square

Definimos a família a um parâmetro de regiões anulares A_t para cada $t \in [0, 1]$ da seguinte maneira. Considere os valores $\eta_1(t) = (1 - \frac{1}{2}t)\rho_1$ e $\eta_0(t) = (1 - \frac{1}{2}t)\rho_2$. Seja A_t o conjunto dado por

$$A_t = \{z \in \Gamma_c : \eta_1(t) \leq h(z) \leq \eta_0(t)\}.$$

Isto é, para cada $t \in [0, 1]$ o conjunto A_t é uma região anular cuja fronteira são as curvas equipotenciais $\eta_1(t)$ e $\eta_0(t)$. Note que $A_0 = A = \{z : \rho_1 \leq h(z) \leq \rho_2\}$ como acima, e o conjunto A_1 está contido entre as curvas equipotenciais $h(0) = \frac{1}{2}h(c)$ e $h(c)$. Para cada $t \in [0, 1]$ definimos a função Dehn twist $\tau_t : A_t \rightarrow A_t$ exatamente como definimos a função

τ em A . Em seguida, consideramos a função $F_t : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, para cada $t \in [0, 1]$ da forma

$$F_t(z) = \begin{cases} P_c(z) & \text{se } z \notin P_c^{-1}(A_t), \\ \tau_t \circ P_c(z) & \text{se } z \in P_c^{-1}(A_t). \end{cases}$$

Observe que a função $F_0 = F$ como acima, também existe um intervalo de t -valores para o qual o valor crítico $c = P_c(0) \in A_t$. Além disso, à medida que t aumenta, temos que o valor crítico $F_t(0) = \tau_t \circ P_c(0)$ é girado ao redor da curva equipotencial $h(c)$. Quando $t = 1$, o valor crítico retorna à sua localização original, isto é, $F_1(0) = c$.

Proposição 3.2. *A função F_1 é quase-conformemente conjugada a P_c .*

Demonstração. *A prova é a mesma que na Proposição anterior. Primeiro definimos uma nova estrutura complexa μ que é preservada pela função F_1 . Logo usamos o MRMT com as mesmas normalizações para obter um homeomorfismo quase-conforme f_1 que endireita a estrutura complexa μ . Assim, a função $f_1 \circ F_1 \circ f_1^{-1}$ é um polinômio de grau dois. Note que f_1 é analítica em Γ_c e preserva a órbita do valor crítico. Portanto, a função $f_1 \circ F_1 \circ f_1^{-1}$ é quase-conforme conjugada a P_c . \square*

Proposição 3.3. *Existe uma função contínua $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus M$ tal que*

1. F_t é quase-conforme conjugado a $z^2 + c(t)$, para cada t ,
2. $h(c(t))$ é constante,
3. O argumento externo de $c(t)$ aumenta monotonamente de 0 a 1 quando t aumenta de 0 a 1.

Demonstração. *Pela construção de F_t , temos que os raios externos para P_c coincidem aos de F_t no exterior de $P_c^{-1}(A_t)$. No entanto, a localização do valor crítico $\tau_t \circ P_c(0)$ em relação a esses raios externos muda. De fato, $\tau_t \circ P_c(0)$ passa por cada raio exatamente uma vez quando t varia de 0 a 1. Portanto podemos usar os argumentos anteriores para provar que F_t é quase-conforme conjugado a $z^2 + c(t)$ onde $c(t)$ satisfaz 2. e 3. \square*

Consequentemente, os polinômios que são conjugados com F_t estão em uma curva fechada que enrola uma vez o conjunto de Mandelbrot. Como na seção anterior, a função monodromia associada a esta curva induz o automorfismo do 2-shift não trivial em Σ_2 .

Para finalizar este capítulo, destacamos que no espaço dos parâmetros, a curva fechada que consideramos para a construção do automorfismo do 2-shift não trivial em Σ_2 , está totalmente contida no complemento do conjunto de Mandelbrot. No entanto, também é importante notar que podemos considerar curvas fechadas que cruzam o conjunto M em um único ponto de bifurcação, circundando uma componente de M ligada ao cardióide principal, e estudar o automorfismo do 2-shift determinado por essa curva fechada. Veja Figura 3.8. Em [3], Pau Atela desenvolve de maneira satisfatória essas idéias.

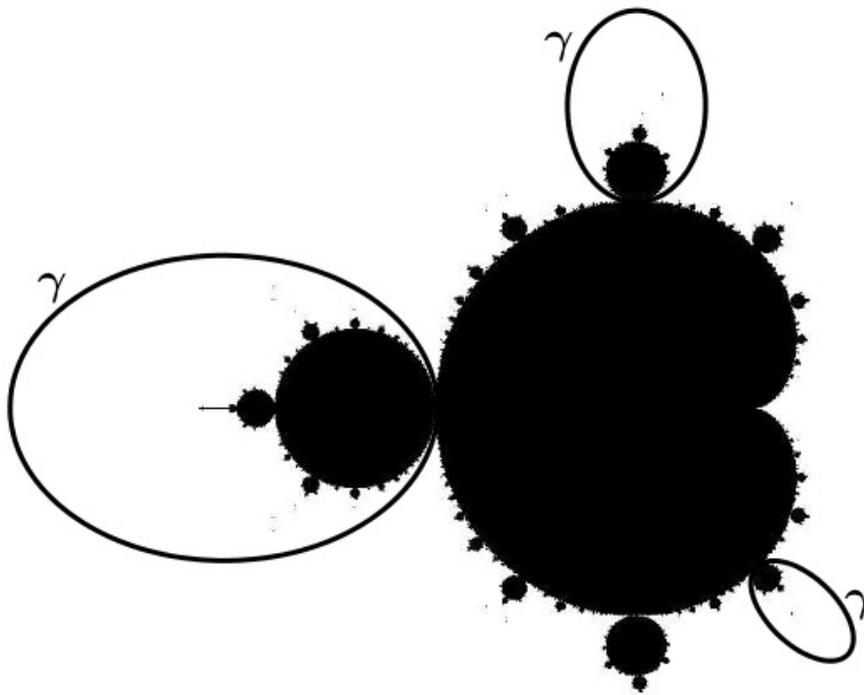


Figura 3.8: Curvas que interceptam a M em um ponto.

Capítulo 4

Automorfismos Gerados por Polinômios de Maior Grau.

Com base no artigo [7] intitulado *The dynamics of complex polynomials and automorphisms of the shift* devido a Paul Blanchard, Robert Devaney e Linda Keen, descrevemos como surgem os automorfismos do d -shift via função monodromia associada a uma curva fechada no shift locus do espaço de parâmetros para polinômios de grau d . Para isso, primeiro apresentamos a construção necessária para poder girar o valor crítico com menor taxa de escape em torno a uma curva fechada simples. Em seguida, mostramos uma generalização do conjunto de Mandelbrot e descrevemos a obtenção de automorfismos de permutação cíclica. Posteriormente, focamos nosso estudo no caso $d = 3$, definindo uma árvore no conjunto shift locus, o que nos ajudará a obter todos os automorfismos do 3-shift. Finalmente, discutimos como gerar automorfismos do d -shift em geral.

4.1 Construção Giratória

No final do Capítulo 2, denotamos por X_d o conjunto dos polinômios complexos mônicos centrados de grau d . Seja S_d o subconjunto de X_d consistindo dos polinômios *Shift-like*, cujos pontos críticos escapam para infinito sob iteração. Portanto podemos associar ao conjunto *Shift Locus* no espaço dos parâmetros \mathbb{C}^{d-1} o conjunto S_d em X_d .

Para cada $P \in X_d$, existe uma vizinhança U de infinito e um único homeomorfismo analítico $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}_\infty \setminus \bar{D}_r$ tal que $\phi(P(z)) = (\phi(z))^d$. Além disso, para cada $z \in U$ definimos a função potencial da forma

$$h_P(z) = \log_+ |\phi(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_+ |P^n(z)|}{d^n}.$$

Se c_1, c_2, \dots, c_{d-1} são os pontos críticos finitos de P e v_1, v_2, \dots, v_{d-1} seus valores críticos correspondentes, sempre assumiremos que c_1 é o ponto crítico com a menor taxa de escape, isto é, $h_P(c_1) \leq h_P(c_j)$ para $j = 2, \dots, d-1$. Como temos que

$$h_P(P(c_i)) = h_P(v_i) = d \cdot h_P(c_i)$$

para cada $i = 1, \dots, d-1$. O conjunto $S_d \subset X_d$ pode ser caracterizado da forma

$$S_d = \{P \in X_d : h_P(c_i) = \frac{1}{d} h_P(v_i) > 0, \forall i = 1, \dots, d-1\}.$$

Se P_1 e P_2 são dois polinômios em S_d , consideramos os conjuntos

$$U_i = \{z : h_i(z) \geq h_i(c_1)\}$$

onde h_i e c_1 são os correspondentes potenciais e os pontos críticos com taxa de escape mais lenta para P_i com $i = 1, 2$. Suponha que existe um homeomorfismo quase-conforme

$$f : U_1 \rightarrow U_2$$

que conjuga as funções polinomiais P_1 e P_2 . Os próximos dois Lemas mostram que f pode ser estendido a uma conjugação quase-conforme em todo \mathbb{C}_∞ .

Lema 4.1. *Sejam P_1 e P_2 dois polinômios em S_d . Se $f : U_1 \rightarrow U_2$ é uma conjugação topológica entre P_1 e P_2 , então f pode ser estendida a uma conjugação em $\mathbb{C}_\infty \setminus J_{P_1}$. Além disso, se $f : U_1 \rightarrow U_2$ é K -quase-conforme, então sua extensão também será K -quase-conforme.*

Lema 4.2. *Suponha que P_1 e P_2 são dois polinômios em S_d . Se $f : \mathbb{C}_\infty \setminus J_{P_1} \rightarrow \mathbb{C}_\infty \setminus J_{P_2}$ é uma conjugação quase-conforme, então f se estende a uma conjugação quase-conforme em todo \mathbb{C} . Em particular, se f é conforme em $\mathbb{C}_\infty \setminus J_{P_1}$, então P_1 e P_2 são afim conjugados.*

Começamos a construção giratória. Seja P um polinômio em S_d e seja h sua função potencial. Suponha que $h(c_1) < h(c_j)$ para cada $j = 2, \dots, d-1$. Assim existe um $\varepsilon > 0$ tal que c_1 é o único ponto crítico de P na região $\{z : h(z) \leq h(c_1) + \varepsilon\}$. Também assumimos que $d^n h(c_1) \neq h(c_j)$ para todo $j > 1$ e todo n . Essas duas suposições servem para isolar os conjuntos limitados pelas curvas equipotenciais correspondentes à órbita de c_1 de todos os outros conjuntos de nível de h . Como esses conjuntos de nível são invariantes dinâmicos, isso por sua vez garante a existência de uma conjugação quase-conforme durante a construção giratória.

Se γ denota a componente de $h^{-1}(h(v_1))$ que contém o valor crítico v_1 . Existem $d-1$ componentes de $P^{-1}(\gamma)$, denotadas por $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$. Assumimos que α_1 é a componente que contém o ponto crítico c_1 . Assim, α_1 tem forma de oito, e os restantes α_j são curvas fechadas simples. Escolhemos um $\varepsilon > 0$ o suficientemente pequeno para que a região

$$N = \{z : h(v_1) - \varepsilon \leq h(z) \leq h(v_1) + \varepsilon\}$$

seja disjunta de todas as outras curvas equipotenciais críticas

$$\left\{ z : h(z) = \frac{1}{d^m} h(v_k) \right\}, \quad k = 2, \dots, d-1, \quad m = 1, 2, \dots$$

Seja N_1 a componente de N que contém v_1 (e portanto a γ), segue que N_1 é uma região anular. Seja M a componente de $P^{-1}(N_1)$ que contém c_1 . Veja Figura 4.1.

A seguir modificaremos o polinômio P em M de forma análoga à construção no caso quadrático da Seção 3.2. Para cada $t \in [0, 1]$, seja A_t a região anular definida por

$$A_t = \{z \in N_1 : h(v_1) - \varepsilon t \leq h(z) \leq h(v_1) + \varepsilon(1-t)\}.$$

Note que a região A_1 é delimitada por γ do lado de fora, enquanto A_0 é delimitada por γ do lado de dentro. Como na Seção 3.2, existem homeomorfismos ϕ_t que levam de maneira conforme cada A_t a um anel da forma $A'_t = \{z : 1 \leq |z| \leq r_0(t)\}$, é possível escolher ϕ_t para que as funções dependam continuamente de t . Agora consideramos a função Dehn-torção $T_t : A'_t \rightarrow A'_t$ da forma

$$T_t(re^{2\pi i\theta}) = r \exp \left(2\pi i \left(\theta + \frac{r-1}{r_0-1} \right) \right).$$

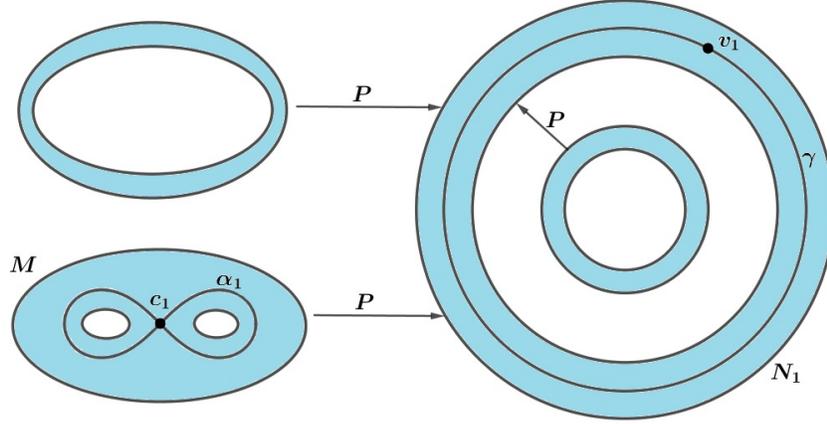


Figura 4.1: Componentes de $P^{-1}(N_1)$, M , N_1 .

Para cada $t \in [0, 1]$ definimos em A_t a função Dehn-torção $\tau_t : A_t \rightarrow A_t$ por

$$\tau_t = \phi_t^{-1} \circ T_t \circ \phi_t.$$

Assim, definimos a função $F_t : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ por

$$F_t(z) = \begin{cases} P(z) & \text{se } z \notin M \cap P^{-1}(A_t), \\ \tau_t \circ P(z) & \text{se } z \in M \cap P^{-1}(A_t). \end{cases}$$

Proposição 4.1. *Para cada $t \in [0, 1]$, existe um polinômio Q_t tal que Q_t é quase-conforme conjugado a F_t .*

Demonstração. *Como na Proposição 3.1, definimos uma nova estrutura conforme μ_t em \mathbb{C}_∞ que é preservada por F_t . Para $z \in \mathbb{C}_\infty$ com $h(z) > h(v_1) - \varepsilon$, definimos $\mu_t(z) = \mu_*(z)$, onde μ_* denota a estrutura complexa estândar. Se $\mu_t(z) = DF_t^{-1}(\mu_t(F_t(z)))$, isso define a estrutura complexa μ_t em todo \mathbb{C}_∞ exceto em J_P . Por definição, F_t preserva μ_t . Para $z \in J_P$ definimos $\mu_t(z) = \mu_*(z)$. Portanto, como μ_t é dada puxando uma estrutura complexa com dilatação finita por um polinômio, segue que μ_t também é uma estrutura complexa com dilatação finita.*

Aplicando o MRMT obtemos um homeomorfismo quase-conforme f_t que endireita μ_t . Podemos normalizar f_t para que $f_t(\infty) = \infty$. Assim, temos que $Q_t = f_t \circ F_t \circ f_t^{-1}$ é uma função analítica de grau d que possui um ponto fixo super-atrator em ∞ . Portanto, Q_t

é um polinômio. Se normalizarmos ainda mais para que $f_t(0) = 0$ e $f_t'(\infty) = 1$, então segue que Q_t é mônico e centrado. \square

Proposição 4.2. *Na construção acima, $Q_0 = Q_1 = P$.*

Demonstração. *A prova é feita escrevendo de maneira explícita as conjugações g_i entre F_i e P para $i = 0, 1$. As conjugações serão quase-conformes, desaparecerão em 0 e serão iguais à função identidade em uma vizinhança de ∞ . Assim, são as conjugações obtidas pelo MRMT no argumento acima.*

Começamos com F_0 . Considere o conjunto $\Gamma_r = \{z : h(z) > r\}$ e defina g_0 como a função identidade em $\Gamma_{h(c_1)+\varepsilon}$, temos que $g_0 \circ F_0 = P \circ g_0$ nessa região. Seja $B \subset M$ a componente de $P^{-1}(A_0)$ que contém o ponto crítico c_1 . O interior de B é um anel aberto. Existem duas funções suaves $\zeta_i : B \rightarrow B$, $i = 1, 2$, que satisfazem $P \circ \zeta_i = \tau_0 \circ P$. Cada um das funções ζ_i fixa uma das curvas limite de A_0 e gira a outra meia volta. Escolhemos τ_0 de tal forma que ζ_i fixe o limite externo de A_0 . Defina $g_0 = \tau_0'$ em B e g_0 como a identidade em $\Gamma_{h(c_1)} \setminus B$, assim segue que $P \circ g_0 = g_0 \circ F_0$. Agora estendemos g_0 nos h -níveis mais baixos. Se z satisfaz

$$\frac{1}{d}h(c_1) \leq h(z) < h(c_1)$$

definimos $g_0(z) = P^{-1} \circ g_0 \circ F_0(z)$ onde escolhemos o ramo apropriado da função inversa P^{-1} para fazer g_0 contínua. É importante notar que $P^{-1} \circ F_0$ não é a identidade nas duas componentes do interior da componente em forma de oito α_1 . De fato, g_0 intercambia essas duas componentes enquanto preserva o interior de todas as outras componentes.

Agora continuamos como no caso quadrático. O Lema 4.1 garante a existência de um homeomorfismo quase-conforme em $\mathbb{C} \setminus J_P$ que se estende de maneira quase-conforme a todo \mathbb{C}_∞ pelo Lema 4.2. Portanto, P é quase-conforme conjugado a F_0 por meio de uma conjugação que é a identidade em uma vizinhança de ∞ . Além disso, g_0 fixa os pontos críticos de P . Assim $P = Q_0$.

Passamos agora a Q_1 . Pela Proposição 4.1 temos que Q_1 é afim conjugado a P , portanto

f_1 é conforme em $\Gamma_{h(c_1)}$. Para propósitos posteriores, vamos construir f_1 diretamente. Para isso, definimos g_1 como a função identidade em $\Gamma_{h(c_1)}$. Seja B a componente de $P^{-1}(A_1)$ que contém c_1 . Observe que, ao contrário do caso anterior, o interior de B consiste em dois anéis disjuntos, cada um mapeado isomorficamente em B por P . Podemos escolher uma função τ'_1 em cada um dessas componentes para que $P \circ \tau'_1 = \tau_1 \circ P$, pois P é um isomorfismo em cada componente, assim definimos $g_1 = \tau'_1$ em B . Defina g_1 como a identidade em $\Gamma_{h(c_1)-\varepsilon} \setminus B$ e continue como antes. Segue-se novamente que g_1 é um homeomorfismo quase-conforme que conjuga P e Q_1 . Observe que, em contraste com o caso anterior, g_1 preserva todas as componentes de $\mathbb{C} \setminus \Gamma_{h(c_1)-\varepsilon}$. \square

Corolário 4.1. À medida que t decresce de 1 para 0, as componentes do interior de $h_{Q_t}^{-1}(h(c_1))$ contendo c_1 são trocadas.

4.2 Automorfismos de Permutação Cíclica

Para polinômios de maior grau, isto é, para polinômios de grau $d > 2$, sabemos que estudar o espaço dos parâmetros \mathbb{C}^{d-1} é muito mais complicado que o caso quadrático visto no capítulo anterior. Como o espaço de parâmetros depende de quantos pontos críticos finitos possuem os polinômios, podemos considerar famílias de polinômios de maior grau com um único ponto crítico, e assim trabalhar no espaço dos parâmetros \mathbb{C} de maneira semelhante ao caso $d = 2$.

Se $d \geq 2$ é um inteiro positivo fixo, seja $P_c : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ uma família de polinômios complexos, unicríticos, a um parâmetro complexo c da forma $P_c(z) = z^d + c$. Temos que cada elemento dessa família tem o ponto crítico em 0 com valor crítico $P_c(0) = c$. Pelo Teorema 2.16, para qualquer $d > 2$, temos a mesma dicotomia entre os parâmetros complexos da família P_c , que o caso quadrático. Se 0 não pertence à bacia de atração do infinito ($0 \notin A(\infty)$), ou equivalentemente, se a órbita $\{P_c^n(0)\} = \{0, c, c^d + c, (c^d + c)^d + c, \dots\}$ é limitada, então o conjunto de Julia J_c é conexo. Por outro lado, se $0 \in A(\infty)$, ou equivalentemente, se a órbita $\{P_c^n(0)\}$ converge para o infinito, então o conjunto J_c é totalmente

desconexo e o polinômio $P_c|_{J_c}$ é topologicamente conjugado à função d -shift. Isso nos permite fazer uma pequena generalização do conjunto de Mandelbrot e o automorfismo do shift associado a uma curva fechada no complemento deste conjunto.

Definição 4.1. *O conjunto **Multibrot** M_d de grau $d \geq 2$ é um subconjunto do espaço complexo dos parâmetros c para o qual o conjunto de Julia da função $z^d + c$ é conexo.*

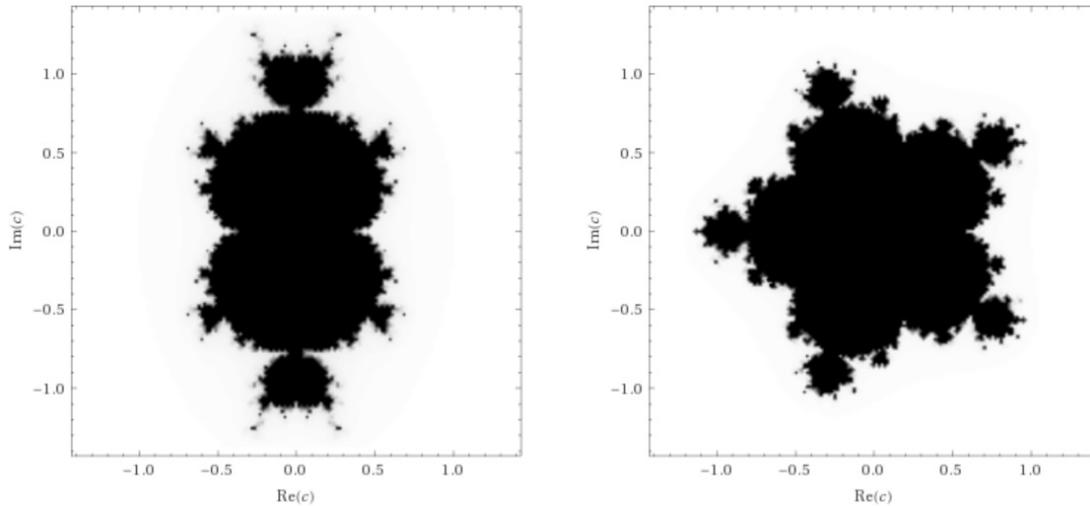


Figura 4.2: Conjuntos Multibrot M_3 e M_6 .

Para qualquer $d \geq 2$ fixo, temos que o espaço complexo de parâmetros da família P_c , tem uma divisão relativamente simples, que é muito útil para nossos propósitos. Veja a Figura 4.2. O conjunto connectedness locus coincide com M_d , que está contido no disco $\{c : |c| \leq 2\}$. E no complemento, o conjunto shift locus, sob homotopias, temos apenas uma curva fechada não trivial. Para cada c , seja $\phi_c : U \rightarrow D_R$ a função de Böttcher associada a $P_c(z)$, e $h_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sua função potencial. Se $c \in M_d$, então $P_c^n(z)$ se encontra em K_c para cada n , e ϕ_c se estende a um homeomorfismo analítico $\phi_c : \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus D_1$.

Se $c \notin M_d$, a função P_c é um polinômio Shift-like, e o conjunto de Julia J_c de P_c é totalmente desconexo. No espaço dinâmico temos que as pré-imagens sucessivas sob $P_c(z)$ de uma vizinhança do infinito, eventualmente atingirão o valor crítico c . Se tomamos uma

curva fechada simples γ contendo c , a pré-imagem dessa curva é mapeada de maneira d -a-1 para essa curva, excepto no ponto crítico 0 , que é apenas a pré-imagem de c . Assim, a pré-imagem $\alpha = P_c^{-1}(\gamma)$ é uma curva com d lóbulos comprimidos em 0 , contida no interior de γ . Se U_α é a união das d componentes compactas limitadas pela curva α , temos que o conjunto J_c está contido no interior de U_α e o valor crítico $c \notin U_\alpha$.

Como para cada parâmetro $c \notin M_d$, a função ϕ_c se estende a um homeomorfismo analítico $\phi_c : \mathbb{C} \setminus U_\alpha \rightarrow \mathbb{C} \setminus D_R$ com $R > 1$. Podemos fazer uso das curvas equipotenciais de h_c e através da construção giratória gerar o automorfismo desejado. Seja $\gamma = h_c^{-1}(h_c(c))$ a curva fechada simples que contém o valor crítico c e $U_\alpha = \{z : h_c(z) \leq h_c(0)\}$ o conjunto com d componentes limitadas pela curva $\alpha = h_c^{-1}(h_c(0))$. Rotulamos arbitrariamente cada componente de U_α por $U_0, U_1, U_2, \dots, U_{d-1}$ e codificamos o conjunto $J_c \subset U_\alpha$ por meio da função $\varphi_c : J_c \rightarrow \Sigma_d$ definida por

$$[\varphi_c(z)]_j = i_j, \text{ se } P_c^j(z) \in U_i.$$

Isto é, a cada $z \in J_c$ associamos uma sequência infinita em Σ_d , cujo j -ésimo termo é o símbolo i se a j -ésima iteração de z sob P_c está contida na componente U_i , com $i = 1, 2, \dots, d-1$ e para todo j . Sendo J_c totalmente desconexo e invariante sob P_c , a função φ_c está bem definida. De forma quase análoga ao caso quadrático do Capítulo 3 podemos demonstrar que φ_c é um homeomorfismo que conjuga o polinômio $P_c|_{J_c}$ com a função d -shift, ou seja, $\varphi_c \circ P_c|_{J_c} = \sigma \circ \varphi_c$.

Podemos continuar descrevendo a construção típica para a geração de um automorfismo associado a partir de uma função monodromia como no caso quadrático. Ou seja, à curva γ , associamos uma curva fechada simples $\gamma' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus M_d$ que enrola uma vez em torno de M_d no espaço de parâmetros. Pela Proposição 4.1, à medida que girarmos o valor crítico do polinômio P_c em torno da curva γ , descrevemos a família a um parâmetro da forma $P_t(z) = z^d + \gamma'(t)$. Sendo que para cada $t \in [0, 1]$, o conjunto de Julia J_t é um conjunto de Cantor que é conjugado a Σ_d , junto com a propriedade de hiperbolicidade mencionada no Teorema 2.12 podemos definir uma família a um parâmetro $\psi_t : J_t \rightarrow J_0$

de homeomorfismos que variam continuamente e tal que $\psi_t \circ P_t = P_0 \circ \psi_t$. Como γ' é uma curva fechada, obtemos o automorfismo $\psi_1 : J_0 \rightarrow J_0$ que comuta com P_0 , o qual é a função monodromia desejada.

Fixando uma codificação $\varphi : J_0 \rightarrow \Sigma_d$ do conjunto inicial J_0 , obtemos o homeomorfismo

$$\theta = \varphi \circ \psi_1 \circ \varphi^{-1} : \Sigma_d \rightarrow \Sigma_d$$

associado à função monodromia. Observe que $\theta \circ \sigma = \sigma \circ \theta$, o qual implica que θ é um automorfismo do d -shift em Σ_d . De forma análoga ao Teorema 3.2 podemos demonstrar que θ é o automorfismo que permuta os símbolos.

Em conclusão e de forma abreviada, para um polinômio da forma $P_c(z) = z^d + c$, com $c \notin M_d$, se aplicarmos a construção giratória para girar o valor crítico em torno da curva $\gamma = h_c^{-1}(h_c(c))$, então induzimos $1/d$ de volta nos lóbulos da curva $\alpha = h_c^{-1}(h_c(0))$, e isso produzirá o automorfismo que permuta ciclicamente os símbolos.

Exemplo 4.1. *Considere o polinômio cúbico $P_c(z) = z^3 + c$, com $c \notin M_3$. Na Figura 4.3 são mostradas as componentes limitadas pelas curvas equipotenciais críticas de h .*

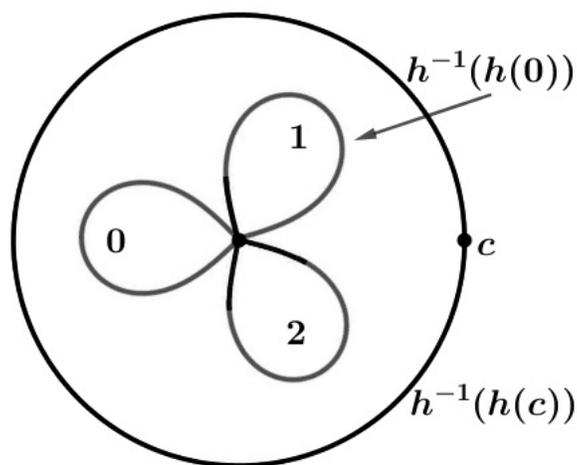


Figura 4.3: Curvas equipotenciais para $P_c(z) = z^3 + c$, com $c \notin M_3$.

As três componentes de $h(z) < h(0)$ são rotuladas de maneira arbitrária por 0, 1 e 2 respectivamente. Se giramos o valor crítico em torno de $h_0^{-1}(h_0(c))$, então induzimos um terço de volta nos lóbulos de $h_0^{-1}(h_0(0))$, o qual implica que, quando c retorna a sua posição inicial, o lóbulo rotulado com 0 assume a posição do rotulado com 1, o lóbulo 1 assume a posição do 2 e o 2 assume a de 0. Isto é gera o automorfismo que permuta ciclicamente os símbolos.

4.3 O Caso Cúbico

Discutiremos a geração de todos os automorfismos do 3-shift via função monodromia no subconjunto shift locus do espaço de parâmetros para polinômios cúbicos. Para isso, consideramos apenas polinômios cujos dois pontos críticos têm órbitas que divergem.

4.3.1 Alguns Exemplos

Os exemplos a seguir ilustram a geração de automorfismos associados a polinômios cúbicos aplicando a construção giratória. Esses exemplos nos ajudarão nas subseções seguintes a gerar todos os automorfismos do 3-shift. Os polinômios que vamos considerar pertencem à família de polinômios complexos $P_a : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ a um parâmetro real a , da forma

$$P_a(z) = z^3 - 3a^2z + 5.$$

Esta família foi considerada por Branner e Hubbard em 1988 para estudar de maneira global a topologia do espaço de parâmetros para polinômios cúbicos. Para os próximos quatro exemplos consideramos apenas o parâmetro a no intervalo $(-1.55, -1.10)$. Os pontos críticos de P_a são os valores reais $\pm a$. Quando temos um único ponto crítico em $a = 0$, o polinômio $P_0(z) = z^3 + 5$ gera o automorfismo que permuta ciclicamente os símbolos visto na seção anterior. Isto é, usamos a construção giratória para girar o valor crítico $v = 5$ em torno da curva equipotencial $\gamma = h_0^{-1}(h_0(5))$, induzindo um terço de volta dos lóbulos de $\alpha = h_0^{-1}(h_0(0))$. A Figura 4.4 ilustra os gráficos da função P_a determinados pelos diferentes valores de a . A correspondente função potencial é denotada por h_a .

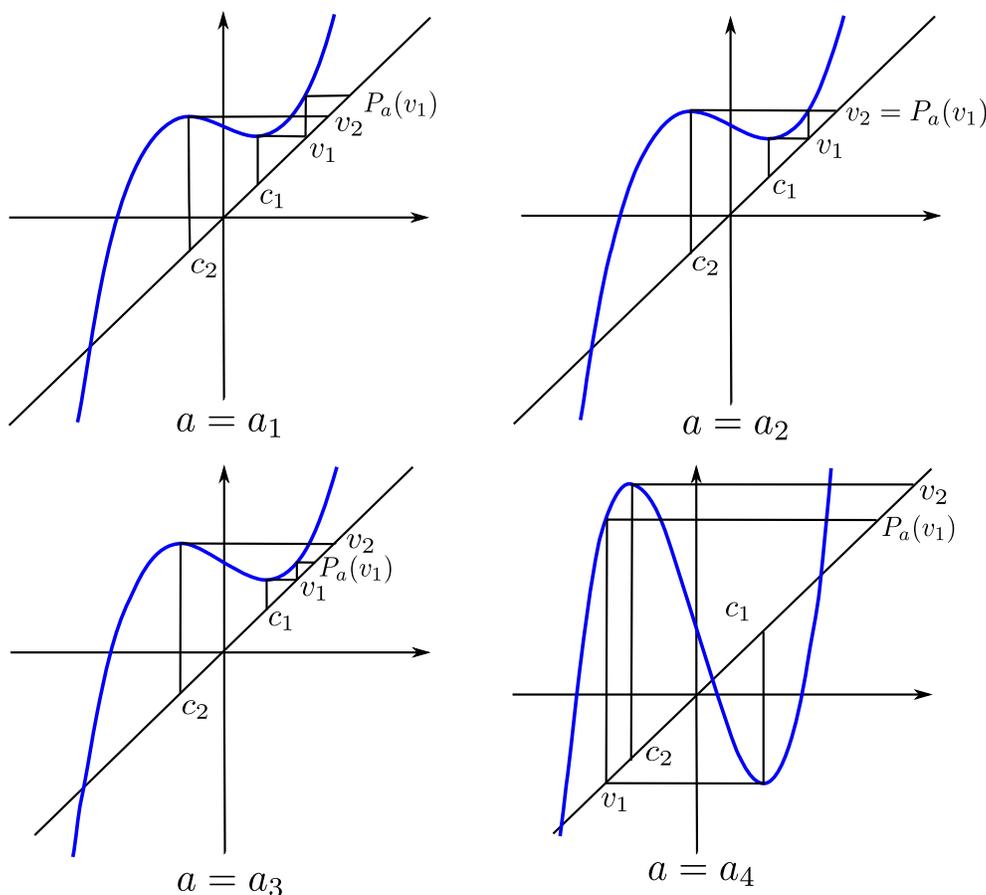


Figura 4.4: Gráficos de P_a .

Exemplo 4.2. $a = a_1$. De acordo com o gráfico de P_{a_1} na figura 4.4, a órbita de c_1 escapa um pouco mais lentamente do que a órbita de c_2 . Mais precisamente, vemos que

$$h_a(c_1) < h_a(c_2) < h_a(v_1) < h_a(v_2).$$

As componentes limitadas pelas curvas equipotenciais que passam pelos pontos e valores críticos são mostrados na Figura 4.5. Os valores críticos estão em diferentes curvas equipotenciais, cada um das quais é uma curva fechada simples. As pré-imagens das curvas equipotenciais para as quais $h_a(z) > h_a(v_2)$ são curvas fechadas simples. Quando o valor da função potencial atinge $h_a(v_2)$, a pré-ímage é torcida no ponto crítico c_2 . Um dos lóbulos dentro dessa curva é mapeado de maneira dois-a-um para $h_a(z) \leq h_a(c_2)$. Isso corresponde a uma região que contém dois dos símbolos, digamos 1 e 2. Assim, denotamos essa curva por $\bar{0}$ e esse é o lóbulo que contém o ponto crítico c_1 . O outro lóbulo é mapeado

de maneira um-a-um para $h_a(z) \leq h_a(c_2)$ e denotamos esse lóbulo por 0 .

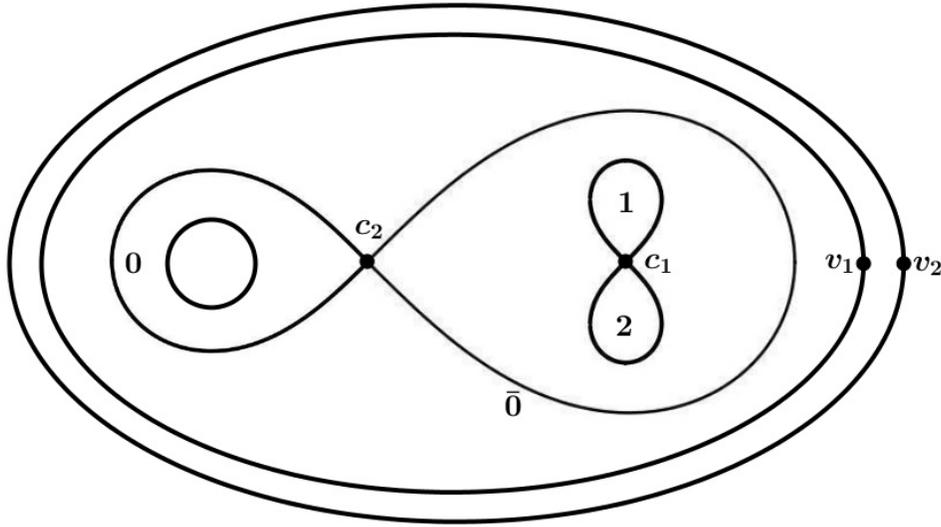


Figura 4.5: Curvas equipotenciais para $a = a_1$.

A pré-imagem da curva equipotencial que contém v_1 consiste em duas curvas distintas. Uma curva em forma de oito contendo o ponto crítico c_1 e está em $\bar{0}$, a outra é uma curva fechada simples em 0 . A região $\{z : h_a(z) < h_a(c_1)\}$ pode ser usada para descrever a dinâmica simbólica no conjunto de Julia da função P_{a_1} . Em analogia com o caso da família quadrática do Capítulo 3, essa rotulação indica a existência de um homeomorfismo entre o conjunto de Julia $J_{P_{a_1}}$ e Σ_3 , onde cada ponto de $J_{P_{a_1}}$ contido na componente rotulada 0 , 1 ou 2 é codificado com uma sequência iniciando com o símbolo 0 , 1 ou 2 respectivamente. Se girarmos o valor crítico v_1 em torno da curva $\gamma = h_a^{-1}(h_a(v_1))$, o automorfismo resultante deixará 0 fixo e trocará cada 1 e 2 .

Exemplo 4.3. $a = a_2$. Este é o caso especial onde $v_2 = P_{a_2}(v_1)$ e

$$h_a(c_1) < h_a(c_2) = h_a(v_1) < h_a(v_2).$$

Como acima, a curva equipotencial $h_a(c_2)$ é uma curva em forma de oito com um lóbulo chamado $\bar{0}$ e o outro chamado 0 como na figura 4.6. Por suposição, v_1 está nessa curva, mas não é c_2 . De acordo com o gráfico de P_{a_2} , podemos assumir que v_1 está na fronteira do lóbulo que contém c_1 , isso força uma torção adicional na curva equipotencial $h_a(c_1)$, temos

uma torção em c_1 , bem como nas duas pré-imagens de c_2 . Isto é, a região $h_a(z) \leq h_a(c_1)$ agora consiste em quatro lóbulos em $\bar{0}$. Dois desses lóbulos são mapeados para 0, que denotamos por 10 e 20 , os outros dois lóbulos são mapeados para $\bar{0}$, que denotamos por $1\bar{0}$ e $2\bar{0}$. Na região 0, a préimagem de $h_a(c_2)$ é uma curva em forma de oito que é mapeada de maneira um-a-um para $h_a(c_2)$. Assim, um desses lóbulos é denotado por 00 , enquanto o outro (o lóbulo mapeado para $\bar{0}$) é denotado por $0\bar{0}$. Não podemos girar

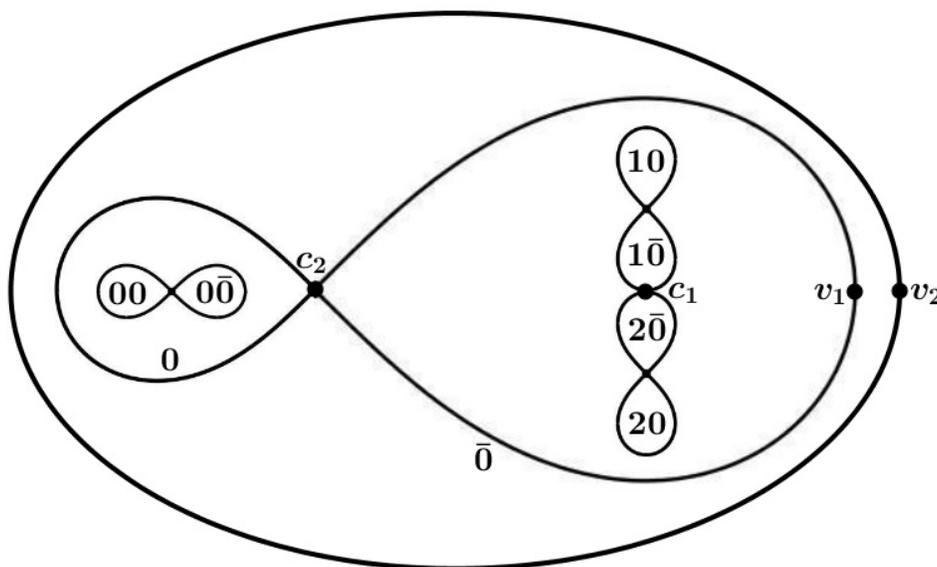


Figura 4.6: Curvas equipotenciais para $a = a_2$.

o valor crítico v_1 , pois esse valor crítico não está em uma curva equipotencial simples. No entanto, observe que as pré-imagens de c_2 em $h_a^{-1}(h_a(c_1))$ agora separam a parte do conjunto de Julia de P_{a_2} rotuladas com s ($s = 0, 1, 2$) em duas partes, uma rotulada $s0$ e a outra rotulada $s\bar{0}$.

Exemplo 4.4. $a = a_3$. O parâmetro a é alterado para que

$$h_a(v_1) < h_a(c_2) < h_a(P_{a_3}(v_1)) < h_a(v_2).$$

A Figura 4.7 mostra que v_1 agora está levemente dentro da curva equipotencial que contém c_2 . A curva equipotencial $h_a(v_1)$ agora consiste em duas curvas fechadas simples, uma dentro de cada lóbulo de $h_a(c_2)$. Dentro de $\bar{0}$, temos uma curva em forma de oito contendo

c_1 que limita as regiões $\bar{10}$ e $\bar{20}$. Essas regiões são mapeadas para a componente limitada pela curva que contém v_1 . Existem outras duas pré-imagens dentro de $\bar{0}$, a saber 10 e 20 , elas são mapeadas na outra componente de $h_a(v_1)$, especificamente na região 0 .

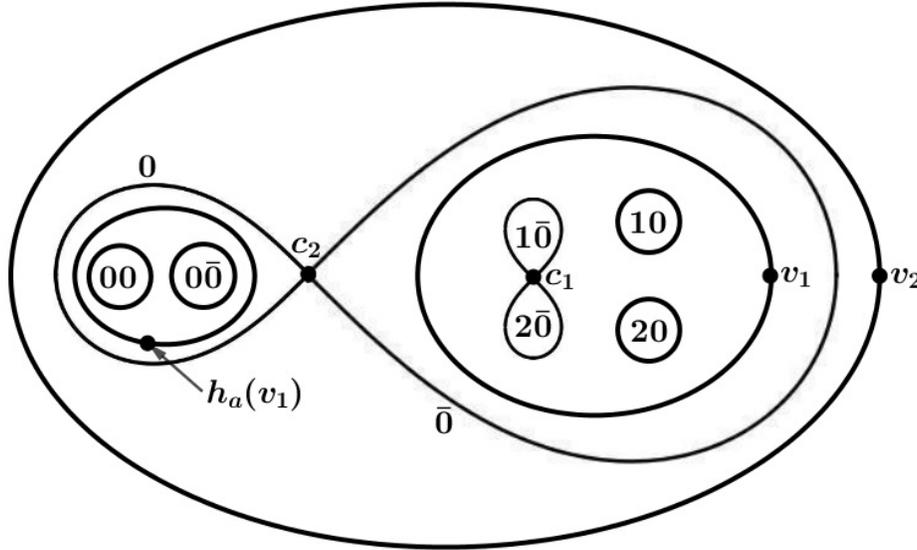


Figura 4.7: Curvas equipotenciais para $a = a_3$.

Se girarmos o valor crítico v_1 em torno de sua curva equipotencial, as componentes do conjunto de Julia rotuladas por $\bar{10}$ e $\bar{20}$ serão trocadas, e as componentes rotuladas por 10 e 20 permanecerão fixas. Assim, a rotação induz o automorfismo dado pelo marcador $\bar{0}$: troca 1 e 2 sempre que esteja seguido por 1 ou 2 .

Exemplo 4.5. $a = a_4$. Como acima, a função potencial satisfaz as desigualdades

$$h_a(v_1) < h_a(c_2) < h_a(P_{a_3}(v_1)) < h_a(v_2).$$

No entanto, o valor crítico v_1 está agora na outra componente da curva $h_a(v_1)$. Como se mostra na Figura 4.8, os conjuntos limitados pelas curvas equipotenciais $h_a(z)$ herdam uma rotulação diferente nesse caso.

Quando aplicarmos a construção giratória na curva equipotencial que contém o valor crítico v_1 , troca as componentes rotuladas por 10 e 20 , ou seja, induz o automorfismo marcador 0 .

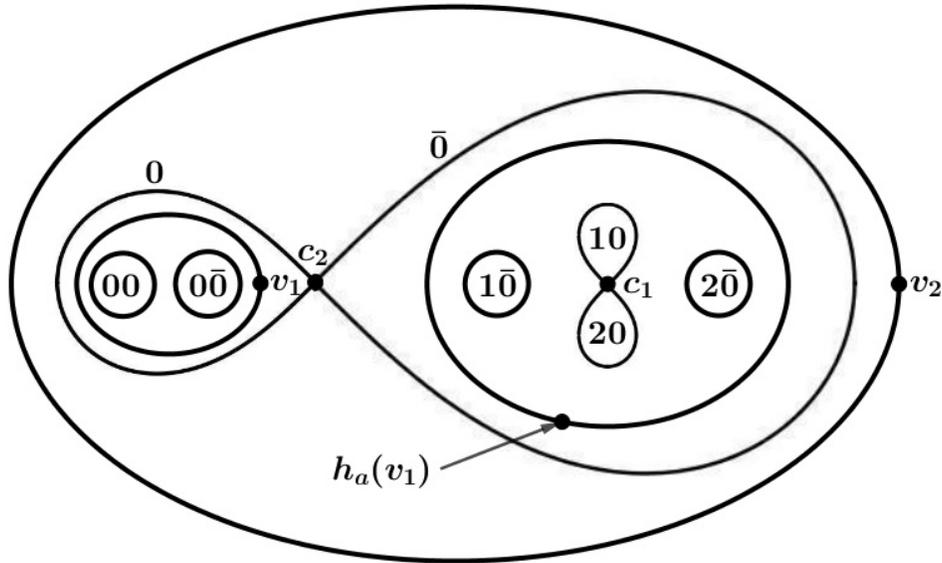


Figura 4.8: Curvas equipotenciais para $a = a_4$.

4.3.2 A Árvore no Conjunto Shift Locus Cúbico

Nos exemplos anteriores, puxamos o valor crítico v_1 através da curva equipotencial $h_a(c_2)$ quando o parâmetro a passa de a_1 para a_3 . Essa é uma segunda construção que envolve o MRMT e nos permite criar uma árvore T no espaço de parâmetros para polinômios cúbicos. A árvore é um gráfico conexo, direcionado, com um único vértice inicial e que possui muitos vértices.

Os vértices de T correspondem a automorfismos marcadores minimais. Ou seja, dado um automorfismo minimal θ , existe um único vértice P_θ de T , tal que a aplicação da construção giratória em P_θ gera θ . Realmente, a construção de T será de modo que suas arestas direcionadas correspondem a valores decrescentes de $h(c_1)$. Em outras palavras, se $\beta(t) : [0, 1] \rightarrow T$ é um caminho cuja direção concorda com a de T , então

$$\frac{dh(c_1)}{dt} < 0.$$

Definimos a árvore T indutivamente sobre k .

Vértice inicial $k = 1$: Usamos um polinômio cujos pontos críticos e valores críticos

correspondentes satisfazem as desigualdades

$$h(c_2) < h(v_1) < h(v_2).$$

Um desses polinômios é P_{a_1} mostrado no Exemplo 4.2.

Passo indutivo: Cada vértice de T no k -ésimo nível corresponde a um polinômio P cujos pontos críticos e valores críticos satisfazem a equação

$$h(c_2) < 3^k h(c_1) < h(v_2).$$

Suponha que r é um número real positivo que satisfaz

$$h(v_1) < r < \frac{h(v_2)}{3^{k-1}}.$$

A curva equipotencial $h^{-1}(r)$ é um conjunto de curvas fechadas simples disjuntas $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, e $h^{-1}(r/3)$ consiste das curvas $\alpha_1, \dots, \alpha_{3m-1}$. O polinômio P mapeia todas essas curvas, exceto uma α_i , de forma injetiva para alguns γ_j , e uma α_i (denotada por α_1) é mapeada para algum γ_j (denotada por γ_1) de maneira dois-a-um. Seja S a superfície de Riemann que é a componente do conjunto $h^{-1}([r/3, r])$ que contem v_1 , temos que γ_1 é uma das curvas limite de S . Por exemplo, se r é escolhido de tal maneira que $h(v_1) < r < h(v_2)$, então para o polinômio P_{a_1} do Exemplo 4.2, obtemos a superfície de Riemann da figura 4.9.

O passo indutivo é baseado na seguinte construção (referida como deformação). Dado um homeomorfismo quase-conforme $f : S \rightarrow S$ que restringe a função identidade em ∂S , usaremos o MRMT para construir outro polinômio P_f . Primeiro construímos um endomorfismo F em \mathbb{C}_∞ . Seja S' a componente de $P^{-1}(S)$ que contem c_1 e defina

$$F(z) = \begin{cases} P(z) & \text{se } z \in \mathbb{C}_\infty \setminus S', \\ f \circ P(z) & \text{se } z \in S'. \end{cases}$$

Temos que $F(z)$ é conforme fora de S' . Definimos a estrutura quase-conforme invariante sob F em \mathbb{C}_∞ , começando com a estrutura estândar em $h^{-1}([r/3, \infty])$. Logo puxamos essa estrutura para $\mathbb{C}_\infty \setminus J_P$ usando F , e finalmente estendemos a estrutura para todo \mathbb{C}_∞

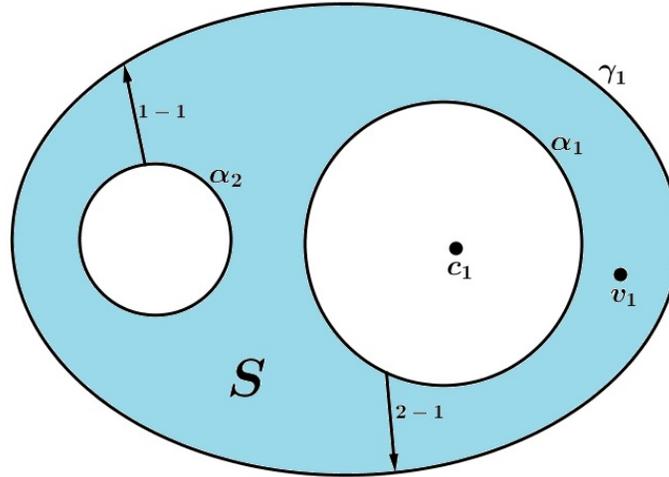


Figura 4.9: Superfície de Riemann S para P_{a_1} .

definindo-a como a estrutura estândar em J_P . Essa estrutura tem distorção finita, assim F é conforme exceto em S' e o recuo de S para S' introduz apenas uma quantidade finita de distorção. Aplicando o MRMT a essa nova estrutura obtemos um homeomorfismo quase-conforme $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ tal que $P_f = f^{-1} \circ F \circ f$ é o polinômio desejado.

É importante notar que a construção acima é analítica em seus parâmetros, veja por exemplo [2]. Se por exemplo, aplicarmos a construção a uma família de funções a um parâmetro f_t que varia analiticamente em t , os polinômios resultantes P_{f_t} também variam analiticamente em t . Em essência, a construção acima nos permite deformar o polinômio usando uma deformação quase-conforme da superfície de Riemann S .

Para estabelecer o passo indutivo, aplicamos a versão parametrizada da construção de deformação ao vértice P de T , usando escolhas especiais de famílias f_t . Dado P , seja S a superfície de Riemann definida acima. Correspondendo a qualquer caminho suave $\beta(t)$ em S que começa em v_1 , podemos encontrar uma família a um parâmetro de homeomorfismos quase-conformes $f_t : S \rightarrow S$ tais que $f_t(v_1) = \beta(t)$. A topologia de S determina o número de tais caminhos $\beta(t)$ que usamos e, portanto, o número de arestas de T que deixam P .

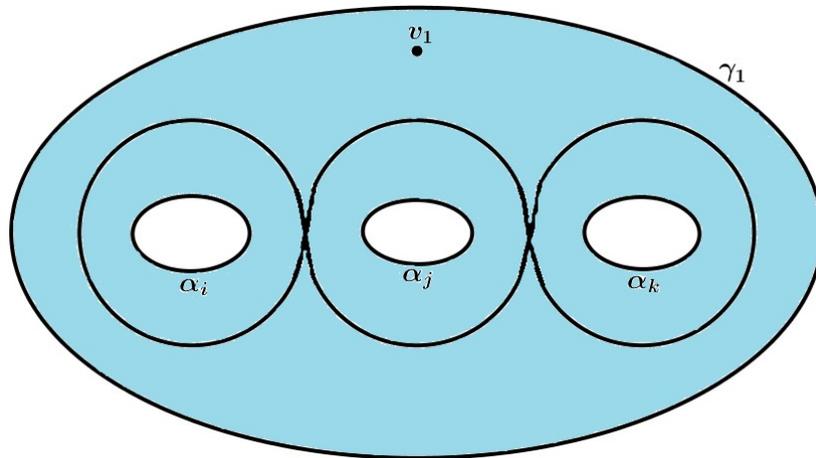


Figura 4.10: Curva torcida duas vezes em S que é a parte da curva $h^{-1}(h(v_2)/3^k)$.

Uma componente do conjunto limitado pela curva equipotencial $h(v_2)/3^k$ está dentro da superfície S e separa γ_1 das α -curvas em ∂S . Veja figura 4.10. Para cada α -curva in ∂S , construímos uma aresta de T deixando P . De fato, seja α_i uma das α -curvas in ∂S . Escolha um ponto v_{α_i} na componente de

$$\{z : h(z) < h(v_2)/3^k\} \cap (S \setminus \alpha_i)$$

limitada por α_i . Conectamos v_1 a v_{α_i} por meio de uma curva simples $\beta(t)$ e aplicamos a construção de deformação com $f_t(v_1) = \beta(t)$, assim obtemos uma aresta de T deixando P . Veja figura 4.11. A etapa indutiva é concluída depois de aplicar o mesmo argumento a cada α -curva em ∂S usando caminhos disjuntos $\beta(t)$. Quando a superfície S é um disco com menos três orifícios, como na Figura 4.11, obtemos três arestas deixando P e três novos vértices no $(k+t)$ -ésimo nível da árvore T como na figura 4.12.

Se tomamos cuidado para escolher os caminhos $\beta(t)$ tal maneira que

$$\frac{dh_p(\beta(t))}{dt} \leq 0$$

então podemos garantir a condição mencionada no início da seção

$$\frac{dh(c_1)}{dt} \leq 0.$$

Observe que se o valor crítico v_1 está conetado à curva $\gamma = h^{-1}(r)$ por um caminho $\beta(t)$, então a pré-imagem de este caminho divide a componentes que contém o ponto crítico c_1 .

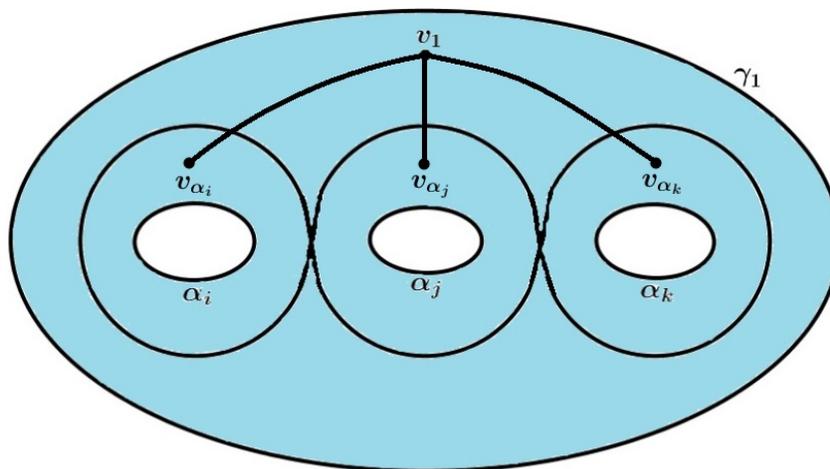


Figura 4.11: O passo indutivo aplicado à superfície S mostrada na Figura 4.10.

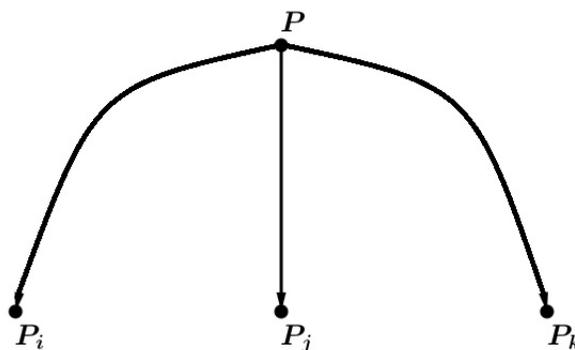


Figura 4.12: Ramos resultantes da Figura 4.11.

Além disso, é importante notar que o passo indutivo não é canônico, portanto, a árvore T depende fortemente das escolhas dos caminhos $\beta(t)$ usados na construção. No entanto, a falta de unicidade nos caminhos não é significativa, mas causa ambiguidade na rotulação introduzida a seguir.

4.3.3 Rotulação das Curvas Equipotenciais

Estabelecida a árvore T no espaço de parâmetros para polinômios cúbicos, podemos ser mais precisos na rotulação das curvas equipotenciais mencionadas brevemente nos exemplos da Subseção 4.3.1. Primeiro descrevemos a rotulação para o vértice inicial da árvore T , e logo, mostramos que a rotulação varia à medida que avançamos mais abaixo na árvore.

Rotulação do vértice inicial $P = P_{a_1} \in T$: Para começar tomamos o polinômio P_{a_1} do Exemplo 4.2 e rotulamos apenas curvas específicas de $h(z)$. Logo, estendemos o esquema de rotulação para incluir todas as curvas equipotenciais menores que $h(c_2)$. Seja r um número real positivo tal que

$$h(c_2) < r < h(v_1).$$

Temos que $\gamma = h^{-1}(r)$ é uma curva fechada simples, e $h^{-1}(r/3)$ consiste em três curvas fechadas simples, denotadas por α_0, α_1 e α_2 . Denotamos por D_i os discos limitados por α_i . Pelo Teorema 2.16 e como no Teorema 3.1, definimos uma conjugação (o homeomorfismo codificação) $\varphi : J_P \rightarrow \Sigma_3$ tal que $\varphi \circ P = \sigma \circ \varphi$ por

$$[\varphi(z)]_j = i, \text{ se } P^j(z) \in D_i.$$

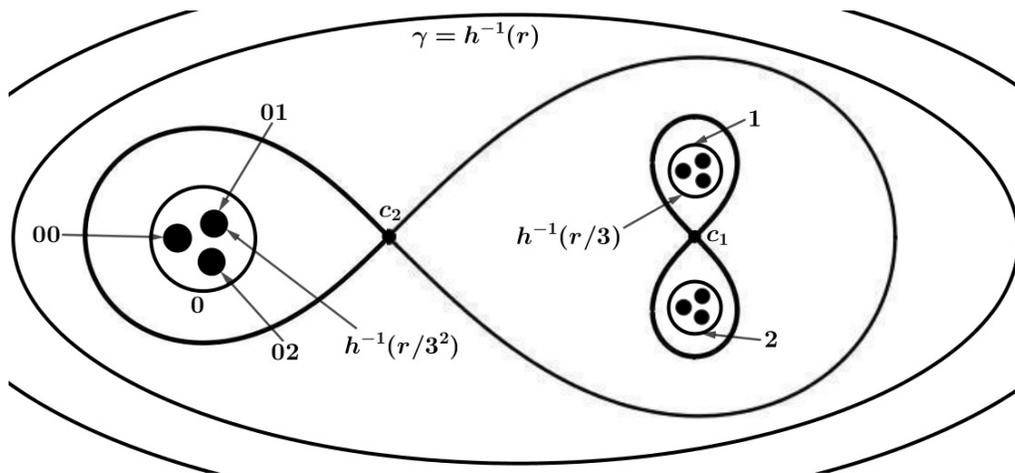


Figura 4.13: Rotulação preliminar para P_{a_1} .

Nós nos referimos a isso como rotulação das curvas α_0, α_1 e α_2 por os rótulos 0, 1 e 2 respectivamente. De fato, podemos rotular as 3^k curvas fechadas simples de $h^{-1}(r/3^k)$ pelos “ k -blocos” $(i_0, i_1, \dots, i_{k-1})$ de modo que todos os pontos $z \in J_P$ contidos na curva com rotulação $(i_0, i_1, \dots, i_{k-1})$ satisfazem as equações

$$[\varphi(z)]_j = i_j \text{ para } j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (4.1)$$

Suponha que nosso conjunto inicial de símbolos esta determinado para que os blocos que começam com 1 ou 2 estejam na mesma componente de $h^{-1}([0, h(c_2)])$. Veja a figura 4.13.

Adicionamos um novo símbolo $\bar{0}$ para representar a união dos símbolos 1 e 2, e estendemos esse esquema de rotulação a todas as curvas equipotenciais $h^{-1}(r)$ quando $0 < r < h(c_1)$ é um valor regular da função h . Assim uma curva fechada simples $\alpha \subset h^{-1}(r)$, é rotulada por um bloco de comprimento k , onde k é determinado por

$$\frac{h(c_2)}{3} < 3^{k-1}r < h(c_2)$$

e onde os símbolos são tomados de $\{0, 1, 2, \bar{0}\}$. Seja D_α o disco em \mathbb{C} limitado pela curva α . Para cada z no disco D_α , os símbolos i_j no k -bloco são escolhidos para que satisfaça as equações (4.1) de acima, e onde se entende que $\bar{0}$ representa os símbolos 1 e 2. Além disso, empregamos apenas o símbolo $\bar{0}$ quando existe um $z \in D_\alpha$ com $[\varphi(z)]_j = 1$ e outro $z \in D_\alpha$ com $[\varphi(z)]_j = 2$. Isso é útil para notar que estamos realmente rotulando o disco D_α e a curva α , o qual facilita ver a rotulação das curvas críticas de $h(z)$.

Se s é uma curva de nível crítica de $h(z)$, quando uma componente de $h^{-1}(s)$ tem n pontos de auto-interseção, associamos $n + 1$ rotulações distintas a essa componente. Se $n = 0$, então seguimos o procedimento para curvas regulares. No entanto, se $n > 0$, essa componente limita os $n + 1$ discos D_1, D_2, \dots, D_{n+1} em \mathbb{C} . Rotulamos as curvas ∂D_i (desconsiderando os pontos de auto-interseção) com o rótulo atribuído a componente $h^{-1}(s - \varepsilon)$ contida em D_i (onde ε é suficientemente pequeno). Os pontos em $J_P \cap D_i$ satisfazem as equações (4.1), enfatizando que é útil pensar na rotulação como um rótulo atribuído ao disco D_i , bem como à curva equipotencial $h(z)$. O resultado é mostrado na Figura 4.14.

Rotulação de todos os polinômios $P \in T$:

Modificamos o esquema de rotulação para obter um rotulagem para cada vértice da árvore T , os rótulos especificaram qual automorfismo obteremos quando aplicarmos a construção giratória ao vértice determinado. A propriedade chave que precisamos são as equações (4.1), por isso, devemos começar com uma conjugação de Σ_3 . Na rotulação de P_{a_1} , de-

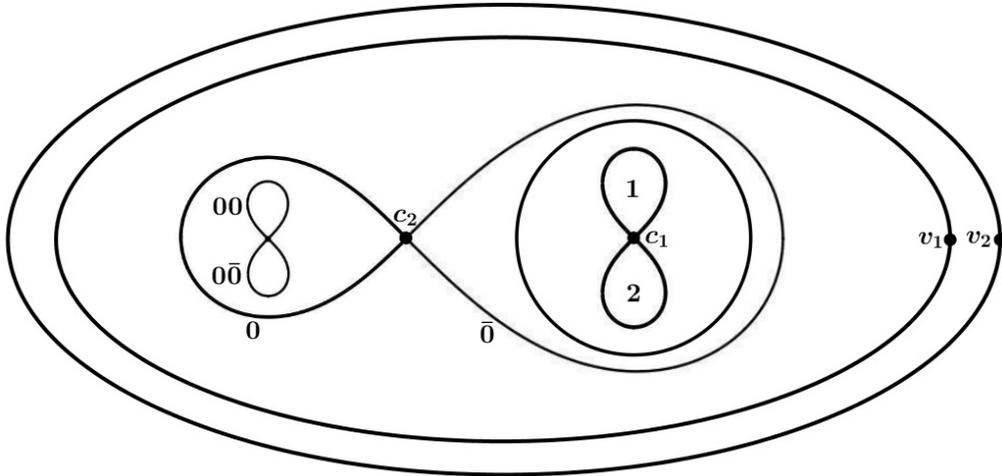


Figura 4.14: Esquema completo de rotulação para P_{a_1} .

finimos uma conjugação φ usando as curvas equipotenciais de $h(z)$. Vamos usar essa conjugação para definir as outras conjugações que empregamos. É de importância notar que, à medida que avançamos pela árvore, os polinômios sempre se expandem em seus conjuntos de Julia (Teorema 2.12.). Como resultado, os pontos do conjunto de Julia não nascem, nem desaparecem ou colidem. Dado um caminho Q_t de polinômios em T tal que $Q_0 = P_{a_1}$, estendemos a conjugação $\varphi : J_{Q_0} \rightarrow \Sigma_3$ a uma família a um parâmetro de conjugações $\varphi_t : J_{Q_t} \rightarrow \Sigma_3$ usando essa propriedade de hiperbolicidade dos conjuntos de Julia. Uma vez fixada a conjugação φ_t , o esquema de rotulação descrito acima se estende a Q_t de modo que as equações (4.1) são mantidas. Esse fato se torna mais evidente quando abaixo é indicado como os rótulos mudam à medida que se avança pela curva Q_t .

Primeiro, descrevemos a transição da rotulação à medida que passamos do primeiro para o segundo nível de T . Existem duas arestas de T que deixam P_{a_1} correspondendo ao fato de que a superfície de Riemann S para P_{a_1} é um disco menos dois orifícios (Figura 4.9), e indicamos como as rotulações mudam à medida que atravessamos um das arestas.

Aresta 1. Para $t \in [0, 1]$, seja Q_t o caminho em T que vai de P_{a_1} para P_{a_3} . Nos Exemplos 4.2–4.4 é indicado como varia a rotulação nas Figuras 4.5 e 4.7. A Figura

4.15 abaixo é uma ampliação da metade $\bar{0}$ da curva equipotencial que passa por c_2 para Q_1 . Este exemplo é enganador porque não indica a ambiguidade que pode surgir devido ao fato de que, na construção da árvore T não foi especificado uma maneira canônica de escolher as curvas $\beta(t)$ e, portanto, os ramos de T não são escolhidos canonicamente. Como estamos apenas seguindo o parâmetro a no eixo real, qualquer ambiguidade nos rótulos fica oculta por essa escolha.

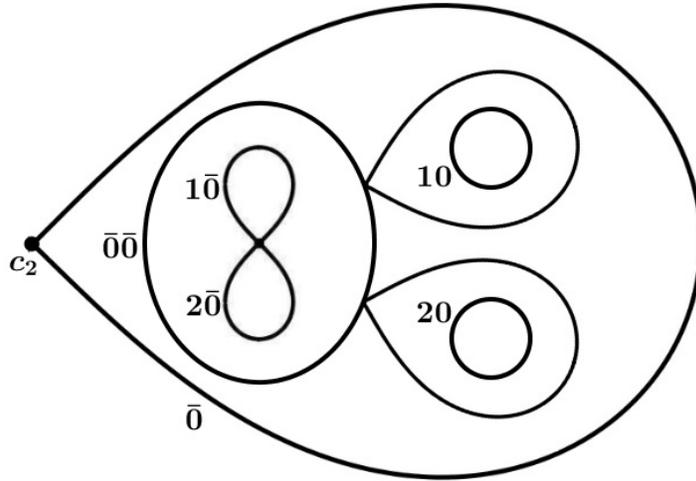


Figura 4.15: Uma análise de algumas curvas para P_{a_3} .

Aresta 2. Seja Q_t a outra aresta em T que começa em P_{a_1} e termina em um polinômio cujas curvas equipotenciais são como as de P_{a_4} no Exemplo 4.5. Nesse caso a ambiguidade mencionada acima não pode ser evitada. A rotulação dos pares, $1\bar{0}$, $2\bar{0}$ e 10 , 20 depende do caminho que Q_t tome no espaço de parâmetros. No entanto, a curva em forma de oito que contem c_1 na Figura 4.8 está sempre rotulada com o par 10 e 20 . Esse é o par de rótulos que indica qual automorfismo obtemos aplicando a construção giratória a P_{a_4} .

Agora descrevemos como a rotulação muda em geral à medida que passamos de um vértice Q_k no k -ésimo nível para um vértice Q_{k+1} no nível $k + 1$. Para Q_k temos que

$$h(c_2) < 3^k h(c_1) < h(v_2).$$

Quando avançamos de $Q_k(z)$ a $Q_{k+1}(z)$, temos que a rotulação determinada para $Q_k(z)$ em $h_{Q_k}^{-1}\{(h_{Q_k}(c_1), \infty]\}$ é herdada por $Q_{k+1}(z)$. Assim, somente precisamos descrever como

a rotulação muda para as curvas entre $h_{Q_k}(c_1)$ e $h_{Q_{k+1}}(c_1)$.

Nesse intervalo a maioria das curvas herdam os mesmos rótulos. Mais precisamente, se α é a componente da curva equipotencial $h_{Q_k}^{-1}(h_{Q_k}(c_1) + \varepsilon)$ que contém c_1 . Então a rotulação muda apenas para curvas dentro de α e, de fato, essas alterações acontecem quando $h(v_1)$ se move através do valor $h(v_2)/3^k$. Parametrizamos a aresta dada de T como Q_t onde $t \in [k, k + 1]$ e assumimos que t_0 é o valor do parâmetro onde $h(v_1) = h(v_2)/3^k$. Descrevemos a rotulação para três casos diferentes:

Caso 1: $t < t_0$. A rotulação é a mesma que para Q_k . Veja a Figura 4.16.

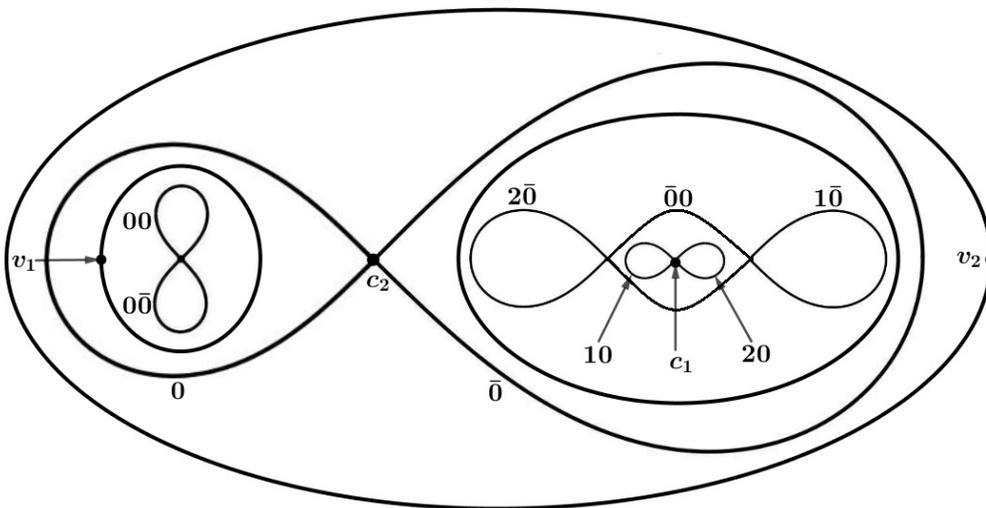


Figura 4.16: Rotulação típica para Q_k .

Caso 2: $t = t_0$. O valor crítico v_1 está em uma curva equipotencial crítica de $h(z)$, e a componente γ que contém v_1 é uma curva com auto-interseções com m pontos de auto-interseção. Logo, a curva γ é rotulada com $m + 1$ k -blocos, denotados por B_1, B_2, \dots, B_{m+1} . Seja B_1 o bloco que corresponde à parte de γ que contém v_1 . A componente γ' de $Q_{t_0}^{-1}(\gamma)$ contendo c_1 tem $2m + 1$ pontos de torção. A componente é rotulada com os $(k + 1)$ -blocos $1B_1, \dots, 1B_{m+1}, 2B_1, \dots, 2B_{m+1}$, e onde os dois lóbulos unidos em c_1 têm os rótulos $1B_1$ e $2B_1$. Veja a Figura 4.17.

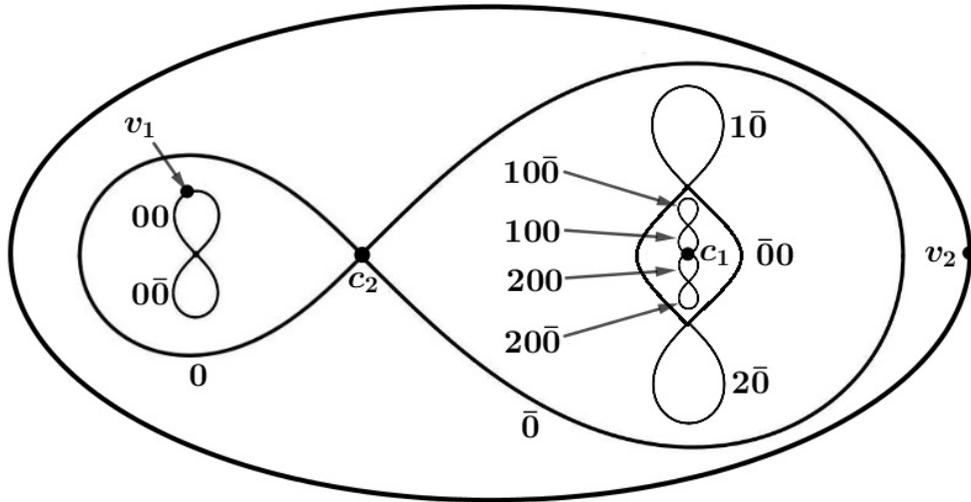


Figura 4.17: Rotulação para Q_{t_0} .

Caso 3: $t > t_0$. A curva γ' no Caso 2 é substituída pela curva equipotencial que possui $2m$ pontos de torção e é rotulada com os $(k + 1)$ -blocos $\bar{0}B_1, 1B_2, \dots, 1B_{m+1}, 2B_2, \dots, 2B_{m+1}$. O ponto crítico c_1 está dentro do lóbulo rotulado com $\bar{0}B_1$ em uma curva em forma de oito. Essa curva é rotulada com os rótulos $1B_1$ e $2B_1$. Veja a Figura 4.18.

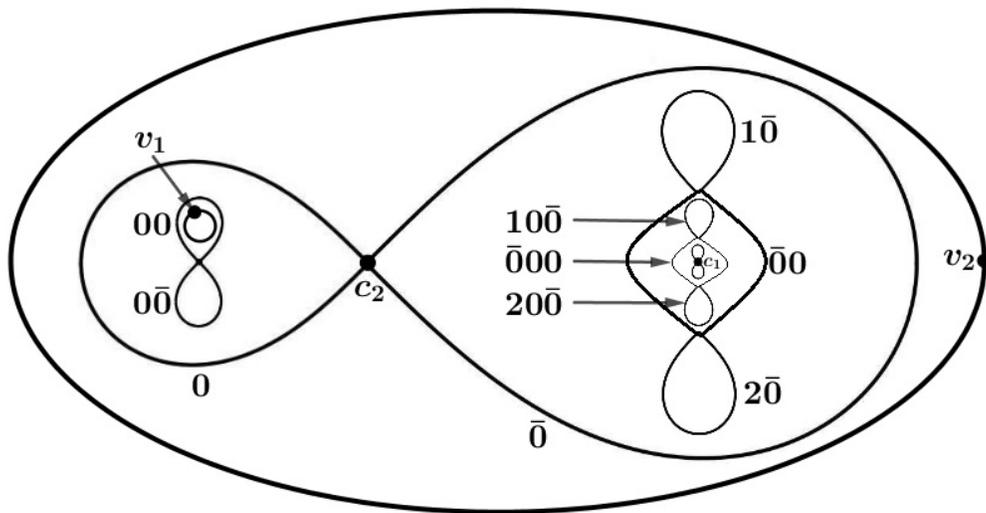


Figura 4.18: Rotulação para Q_{k+1} .

Concluimos assim, que dado qualquer caminho Q_t do vértice inicial $Q_0 = P_{a_1}$ de T até um vértice Q_k no k -ésimo nível de T , podemos usar as observações acima para descrever

a rotulação das curvas equipotenciais de $h_{Q_k}(z)$ que satisfazem as equações (4.1).

Proposição 4.3. *Se M_k denota o número de vértices da árvore T no k -ésimo nível, então $M_1 = 2$ e $M_{k+1} = 3M_k - 1$.*

4.3.4 Teorema Principal e uma Tabela de Marcadores Minimais

Na construção da árvore acima, se mostrou que para cada vértice de T , existe uma curva fechada simples no espaço de parâmetros para polinômios cúbicos. Essa curva é dada da seguinte maneira: começamos no polinômio $P_0(z) = z^3 + 5$, passamos para o vértice por meio da construção de deformação, aplicamos a construção giratória, e depois retornamos para P_0 . Se escolhermos o vértice inicial P_0 da árvore T como ponto base, obtemos uma sequência de curvas fechadas simples, δ_T , no espaço de parâmetros. Esta sequência de curvas determina um subconjunto do grupo fundamental $\pi_1(X_3, P_0)$. Incluindo em δ_T a curva δ_0 para o polinômio P_0 descrita na seção 4.2.

Complementando as observações expostas no final do Capítulo 1, Ashley em [4] provou que o algoritmo acima para definir a árvore, gera a mesma lista infinita de marcadores minimais. Portanto, sabemos que cada elemento de $\pi_1(X_3, P_0)$, induz um elemento do conjunto Aut_3 , e assim define uma função monodromia

$$\Theta_3 : \pi_1(X_3, P_0) \rightarrow \text{Aut}_3.$$

Vale ressaltar que essa função monodromia depende da escolha do ponto base e do homeomorfismo de codificação φ do conjunto de Julia.

Teorema Principal para Polinômios Cúbicos: A função Θ_3 é sobrejetora. Além disso, o conjunto δ_T é mapeado para um conjunto completo de geradores de Aut_3 .

A tabela a seguir lista marcadores minimais e conjuntos de marcadores de comprimento j para $j = 1, 2, 3, 4$. Correspondentes aos vértices de T no j -ésimo nível.

Comprimento 1:	0	$\bar{0}$				
Comprimento 2:	00	$0\bar{0}$	10	20	$\bar{0}\bar{0}$	
Comprimento 3:	000	$00\bar{0}$	$0\bar{0}0$	$01\bar{0}$	$02\bar{0}$	100
	$10\bar{0}$	200	$20\bar{0}$	110	120	210
Comprimento 4:	220	$\bar{0}\bar{0}\bar{0}$				
	0000	$000\bar{0}$	$00\bar{0}0$	$002\bar{0}$	$001\bar{0}$	0100
	0200	$0\bar{0}0\bar{0}$	$01\bar{0}0$	$011\bar{0}$	$012\bar{0}$	$02\bar{0}0$
	$021\bar{0}$	$022\bar{0}$	1000	$100\bar{0}$	1010	1020
	$10\bar{0}\bar{0}$	2000	$200\bar{0}$	2010	2020	$20\bar{0}\bar{0}$
	1100	$110\bar{0}$	1200	$120\bar{0}$	2100	$210\bar{0}$
	2200	$220\bar{0}$	1110	1210	2110	2210
	1120	2120	1220	2220	$\bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{0}$	

Tabela 4.1. Marcadores minimais de comprimento $j = 1, 2, 3, 4$.

4.4 O caso de Maior Grau

Como foi mostrado no início do capítulo, a construção giratória funciona para polinômios de qualquer grau. A partir das observações finais para o caso cúbico, se pode generalizar e garantir a existência de uma função monodromia bem definida

$$\Theta_d : \pi_1(X_d, P_0) \rightarrow \text{Aut}_d.$$

Essa função depende da escolha do ponto base e do homeomorfismo codificação. Usando argumentos similares do caso cúbico, se define uma árvore T^d no espaço de parâmetros, e a partir dessa árvore, construir uma sequência de curvas fechadas simples em $\pi_1(X_d, P_0)$. Essas curvas, junto com a curva obtida girando o valor crítico do polinômio $P_0(z) = z^d + 5$, formam o conjunto δ_{T^d} .

Teorema 4.1. *A função monodromia Θ_d é sobrejetora. Além disso, o conjunto δ_{T^d} é mapeado para um conjunto completo de geradores de Aut_d .*

Na seção 4.2 vimos que os polinômios da forma $P_0(z) = z^d + 5$ geram os automorfismos que permutam ciclicamente os símbolos. Girando o único valor crítico $v = 5$ sobre a curva $\gamma = h^{-1}(h(5))$, induz uma $1/d$ rotação dos d lóbulos da curva $\alpha = h^{-1}(h(0))$. Como vimos até agora, esses polinômios desempenham um papel especial nessa teoria.

Os automorfismos marcadores minimais de Aut_d consistem em uma lista infinita de blocos com símbolos no alfabeto $\{\bar{0}, 0, 1, 2, 3, \dots, d-1\}$, onde, seguindo a notação de Ashley, o símbolo $\bar{0}$ significa 1 ou 2 e não significa “ não 0 ”. A árvore T^d para polinômios de grau d , tem vértices correspondentes aos blocos desse alfabeto. O algoritmo *state splitting* de Ashley para $d > 3$ difere apenas na inicialização e, novamente fornece uma lista infinita de blocos de símbolos que determinam o conjunto minimal gerador de automorfismos marcador. Para qualquer grau, o algoritmo geométrico exposto acima para definir a árvore no espaço de parâmetros produzirá a mesma lista que o algoritmo de Ashley.

Tomamos como ponto base da árvore T^d o polinômio P_0 , e tendo em conta as seguintes propriedades das curvas equipotenciais:

- (1.) Todos os pontos críticos c_j , $j = 2, 3, \dots, d-1$ são iguais.
- (2.) Os pontos críticos são rotulados para que suas taxas de escape estejam em ordem crescente, isto é, c_1 tem a taxa de escape mais lenta do que c_2
- (3.) Os níveis críticos satisfazem as desigualdades:

$$h_{P_0}(c_1) < h_{P_0}(c_2) < h_{P_0}(v_1) < h_{P_0}(v_2).$$

Usando essencialmente o mesmo procedimento indutivo descrito em 4.3.2 para completar a árvore, de modo que as h-curvas relativas a v_1 variem em relação as de v_2 . Ou seja, na primeira etapa, usamos a construção de deformação em P_0 , para empurrar o valor crítico para dentro de qualquer um dos $d-1$ lóbulos da curva $\alpha = h^{-1}(h(0))$. Girarmos o valor crítico em torno de sua curva equipotencial, o que resulta determinando o primeiro nível da árvore. Os vértices são rotulados $\{\bar{0}, 0, 3, 4, \dots, d-1\}$.

O argumento no k -ésimo nível é similar do passo indutivo em 4.3.2, as únicas alterações

são substituir toda precisão do número 3 pelo número d e substituir o alfabeto para que o esquema de rotulação seja tomado de $\{\bar{0}, 0, 1, 2, \dots, d-1\}$

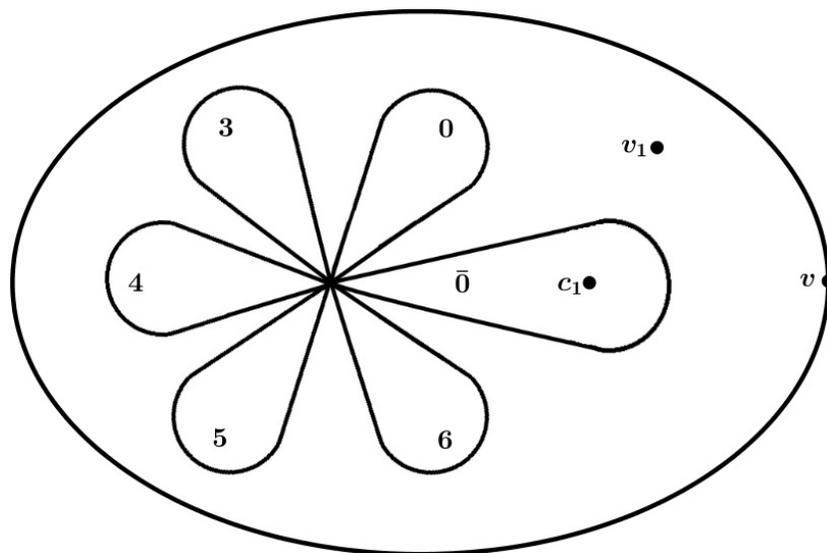


Figura 4.1. *Curvas equipotenciais de P_0 .*

O argumento no k -ésimo nível é similar do passo indutivo em 4.3.2, as únicas alterações são substituir toda precisão do número 3 pelo número d e substituir o alfabeto para que o esquema de rotulação seja tomado de $\{\bar{0}, 0, 1, 2, \dots, d-1\}$.

A prova de que automorfismos marcadores minimais estão em correspondência um-a-um com os vértices da árvore T^d , é igual como no caso cúbico. Assim, girando o menor valor crítico dos polinômios de grau $d \geq 3$, obtemos todos os automorfismos marcador minimais. Junto com o automorfismo de permutação cíclica, concluímos que a função monodromia Θ_d é sobrejetora. Como se assume que $v_1 = v_2 = \dots = v_{d-1}$, é importante observar que a construção acima não produz todos os geradores de π_1 .

Conclusões

Neste documento, descrevemos o método geométrico para obter um conjunto mínimo de automorfismos do shift que geram o grupo Aut_d , desenvolvido por P. Blanchard, R. Devaney e L. Keen em [7]. Para isso mostramos, em particular, três resultados necessários:

1. Girando o valor crítico com menor taxa de escape, de um polinômio shift-like P_0 , em torno de sua curva equipotencial podemos gerar uma curva fechada γ no shift locus que começa e termina em P_0 .
2. Fixando P_0 e uma conjugação topológica entre (P_0, J_{P_0}) e (σ, Σ_d) , a curva fechada γ induz um automorfismo do shift $\Theta(\gamma)$.
3. Deformando o polinômio P_0 definimos uma árvore no shift locus, cujos vértices são polinômios P_k com os quais obtemos novos automorfismos do shift.

Este método é uma relação interessante entre dinâmica complexa e dinâmica simbólica, que depende fortemente da teoria de funções quase-conformes e em específico do Teorema da Aplicação de Riemann Mensurável.

Finalmente, devo mencionar que a elaboração deste documento foi uma tarefa muito interessante e satisfatória, que me permitiu ampliar meus conhecimentos dessa teoria, além de melhorar minhas habilidades de pesquisa e comunicação da Matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] AHLFORS, L. V. Complex Analysis. Ed. 3. McGraw-Hiill. 1979.
- [2] AHLFORS, L.; BERS, L. The Riemann mapping theorem for variable metrics. Ann. Math. II, Ser. 72-2, 385–404. 1960.
- [3] ATELA, P. The Mandelbrot Set and σ -Automorphisms of Quotients of the Shift. Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 335, Number 2. February 1993.
- [4] ASHLEY, J. Marker Automorphisms of the One-sided d -shift. Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1990), 10, 247-262.
- [5] BEARDON, A. F. Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems. Springer-Verlag New York. 1991.
- [6] BLANCHARD, P. Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society. Vol. 11, Number 1. July 1984.
- [7] BLANCHARD, P.; DEVANEY, R.; KEEN L. The Dynamics of the Complex Polynomials and Automorphisms of the Shift. Inventiones Mathematicae. 104, 545-580. 1991.
- [8] BLANCHARD, P.; DEVANEY, R.; KEEN L. Complex Dynamics and Symbolic Dynamics. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. Vol. 60. 2004.
- [9] BOYLE, M.; FRANKS, J.; KITCHENS, B. Automorphisms of One-sided Subshifts of Finite Type. Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1990), 10, 421-449.

- [10] CONWAY, J. Functions of One Complex Variable. Ed. 2. Springer-Verlag New York. 1978.
- [11] L. DEMARCO, L. e PILGRIM, K. Polynomial basins of infinity. Geometric and Functional Analysis volume 21, Article number: 920 (2011).
- [12] DEVANEY, R. L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Ed. 2. Department of Mathematics Boston University. Perseus Books. 1948.
- [13] DOUADY, A.; HUBBARD, J. Itération des Polynômes Quadratiques Complexes. C. R. Acad. Sci. Paris 294, 123-126. 1982.
- [14] HEDLUND, G. Endomorphisms and Automorphisms of the Shift Dynamical System. Math. Syst. Theory 3. 1969.
- [15] LIMA, E. L. Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, IMPA. RJ. Projeto Euclides, 1993.
- [16] KEEN, L. Hyperbolic Geometry from a Local Viewpoint. London Mathematical Society Student Texts 68. Cambridge University Press. January 2010.
- [17] MILNOR, J. Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures. Ed. 2. University of Michigan. Vieweg+Teubner Verlag. 2000.
- [18] SAD, P. Introdução à Dinâmica das Funções Racionais na Esfera de Riemann. IMPA. RJ. 1983.