Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Densidade de funções contínuas em espaços de Sobolev com expoentes variáveis

Paulo Júnio de Paula

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Itajubá, 17 de março de 2020

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Densidade de funções contínuas em espaços de Sobolev com expoentes variáveis

Paulo Júnio de Paula

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

Itajubá – MG
17 de março de 2020

Dedico este trabalho aos meus pais, irmãos e irmãs.

Agradecimentos

Agradeço: • à Capes pelo apoio financeiro; • aos professores doutores Fábio Scaldo Dias, Jacson Simsen, Luis Fernando de Osório Melo, Maicon Sonego e Mariza Stefanello Simsen pelas disciplinas ministradas durante minha estadia na UNIFEI; • à professora Me. Gisele Leite da Silva pela oportunidade de estagiar em uma de suas turmas e acompanhar seu trabalho; • aos professores Gisele, Jacson, Luis Fernando e Mariza pela exemplar prática docente, principalmente no que diz respeito ao sistema avaliativo. Adotarei muito do que aprendi com vocês no exercer da minha profissão; • ao professor Dr. Jacson Simsen por me aceitar como orientando e por todo suporte na elaboração desta dissertação; • aos professores doutores João Biesdorf e Leandro Gustavo Gomes por aceitarem compor a banca examinadora; • aos colegas de curso Carlos Alexandre da Silva dos Santos Vieira, Cristian Fabian Loaiza Sierra, Daiane Lourenço Nogueira, Deysquele Ávila, Edgar Calizaya Chura, Edgar Ramires Luna, Gina Maritzell Colmenares Jimenez, Luana de Carvalho Maciel, Luis Filipe Mendes, Tiago Sousa Mota, Yessica Yulieth Julio Pérez e William Osnayder Clavijo Esquivel, que me acompanharam durante esta fase, pelas amizades iniciadas e pelos momentos de distração; • aos meus amigos Daiane Lourenço Nogueira, Expedito William Roquim e Lucas Manoel por me escutarem sempre que precisei, pelos conselhos e pela prontidão em ajudar quando necessário; • à Maria Stela Rodrigues de Paula, minha mãe, por acreditar nas minhas escolhas e pelo incentivo incondicional. Deixo a vocês o meu, sempre sincero, Muito Obrigado.

Resumo

Abordamos a densidade do espaço das funções contínuas no espaço de funções Riemann integráveis e no espaço das de quadrado Riemann integrável. Mostramos que o espaço $C_c(X)$ é denso no espaço das funções Lebesgue integráveis $L^p_\mu(X)$, onde $0 \leq p < \infty$, X Hausdorff, localmente compacto e μ como no teorema de representação de Riesz. Exploramos a densidade de $C_c(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, no espaço de Lebesgue generalizado $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, com $p(.)$ mensurável e essencialmente limitada. Considerando os espaços de Sobolev com expoente variável $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, discutimos condições sobre o expoente $p(.)$ que garantam a densidade do espaço das funções contínuas em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Um dos resultados mescla uma condição de monotonicidade e uma condição log-Höder contínua. Outro resultado discute tal densidade utilizando dois corolários, um onde o expoente $p(.)$ depende apenas da n-ésima coordenada de cada ponto de Ω e outro onde o expoente $p(.)$ depende apenas da distância do ponto até a origem.

Palavras–chave: espaços de Sobolev, expoente variável, densidade de funções contínuas, densidade de funções suaves.

Abstract

The approach analyzed the density of continuous functions in the integrable Riemann function and the space of square integrable Riemann function. The analysis shows that the $C_c(X)$ space is dense in the space of the integrable Lebesgue functions $L^p_\mu(X)$, where $0 \leq p < \infty$, X Hausdorff, locally compact and μ as in Riesz's representation theorem. We explore the density of $C_c(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, in the generalized Lebesgue spaces $L^{p(.)}(\Omega)$, with $p(.)$ measurable and essentially limited function. Considering Sobolev spaces with variable exponent $W^{1,p(.)}(\Omega)$, we discuss conditions about the exponent $p(.)$ that guarantee the density of continuous functions in $W^{1,p(.)}(\Omega)$. One result merges a monotonicity condition and a continuous log-Hölder condition. Another result discusses the density using two corollaries, $p(.)$ exponent depends only on the nth coordinate of each Ω point and another where the $p(.)$ exponent depends only on the distance from the point to the origin.

Keywords: Sobolev spaces, variable exponent, density of continuous functions, density of smooth functions.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

A principal justificativa do interesse em estudar espaços de Sobolev com espoentes variáveis é sua aplicabilidade em modelagens físicas. Materiais com heterogeneidade tais como fluídos eletroreológicos, aqueles que podem variar rápida e reversivelmente sua viscosidade aparente na presença de um campo elétrico aplicado, não são bem modelados pelos espaços clássicos de Lebesgue e Sobolev, todavia os espaços de Sobolev com expoentes variáveis atendem estes casos. A possibilidade de aplicação de tais materiais em novas tecnologias como transportes e robótica é um exemplo que sustenta estes estudos. Uma outra aplicabilidade está relacionada a restauração de imagens [7].

Neste trabalho estudamos condições sobre o expoente $p(.)$, no espaço de Sobolev com expoente variável $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, que permitem conclusões a respeito da densidade do espaço das funções contínuas (suaves, em alguns casos) em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Garantindo a densidade deste espaço, é possível inferir propriedades conhecidas dos espaços de Sobolev clássicos nos espaços de Sobolev com expoentes variáveis, utilizados em modelagens avançadas, onde nem os espaços clássicos de Lebesgue e Sobolev são suficientes para atender satisfatoriamente as especificidades envolvidas.

No Capítulo 2 apresentamos resultados de Análise Real, de Análise Funcional e de Teoria da Medida que foram utilizados e são necessários ao entendimento dos capítulos posteriores. Ao leitor experiente, já habituado com tais resultados, é indicado a leitura a partir do Capítulo 3.

No Capítulo 3 discutimos a densidade de funções contínuas nos espaços clássicos de Riemann e de Lebesgue e no espaço de Lebesgue generalizado $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

No capítulo 4 tratamos especificamente da densidade de funções contínuas no espaço de Sobolev. Na Seção 4.1 definimos este espaço e exemplificamos alguns resultados para espaços de Sobolev clássicos (com expoente constante). Na Seção 4.2 temos uma mescla de condições já conhecidas na literatura, de monotonicidade no sentido de Edmunds e Ráskosník [3] e log-Hölder contínua ((4.19), Teorema 67) em um único resultado que garante a densidade, mesmo que o expoente não seja monótono, contanto que não decresça mais que o permitido pela condição de continuidade log-Hölder. Na Seção 4.3 apresentamos um resultado que envolve a dependência do expoente variável $p(x)$ da n-ésima coordenada do ponto $x \in \Omega$ e outro que envolve a dependência da distância do ponto x até a origem, ou seja, de $|x|$. Ainda na Seção 4.3, o Teorema 78 é formulado e demonstrado utilizando estas duas dependências do expoente $p(.)$.

Capítulo 2

Pré-requisitos

Neste capítulo encontra-se a teoria básica necessária ao desenvolvimento e à discussão das ideias presentes nos capítulos posteriores. Baseia-se na apresentação de definições e de resultados importantes, que auxiliam na compreensão do proposto sem que seja necessário recorrer às referências a todo momento. O leitor mais experiente pode considerar a leitura a partir do Capítulo 3.

2.1 Integral de Riemann

Definição 1. *([10], pág. 120) Seja $[a, b]$ um intervalo na reta real. Uma partição $\mathscr{P}$ de $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos, onde $a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_{n-1} \leq x_n = b$.*

Denotemos $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$, para $i = 1, ..., n$.

Suponha que f é uma função real limitada em $[a, b]$. Para cada partição $\mathscr{P}$ de $[a, b]$, sejam $M_i = sup f(x)$ e $m_i = inf f(x)$ para $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, definimos as somas superior e inferior por

$$U(\mathscr{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

e

$$L(\mathscr{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

respectivamente, e finalmente as integrais de Riemann superior e inferior por

$$\overline{\int_a^b} f dx = inf U(\mathscr{P}, f) \tag{2.1}$$

e

$$\underline{\int_a^b} f dx = sup L(\mathscr{P}, f) \tag{2.2}$$

respectivamente, onde o ínfimo e o supremo são tomados sobre todas as partições $\mathscr{P}$ de $[a, b]$.

Definição 2. *([10], pág. 121) Se as integrais de Riemann superior e inferior da função f são iguais, dizemos que f é Riemann integrável em $[a, b]$ e denotamos este valor comum por*

$$\int_a^b f dx,$$

ou por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Definição 3. *([5], pág. 49) Diremos que $f \in \mathscr{L}^1$ se, e somente se, f e $|f|$ forem Riemann integráveis.*

Definição 4. *([5], pág. 60) Uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ será dita de quadrado integrável (denotado por $f \in \mathscr{L}^2$) se f e $|f|^2$ forem Riemann integráveis.*

2.2 Integração Abstrata

Definição 5. *([11], pág. 8) Uma coleção τ de subconjuntos de um conjunto X é dito ser uma topologia em X se valem as seguintes propriedades:*

(i) $\phi \in \tau$ e $X \in \tau$;

(ii) se $V_i \in \tau$ $i = 1, ..., n$ então $V_1 \bigcap V_2 \bigcap V_3 \bigcap ... \bigcap V_n \in \tau$;

(iii) se $\{V_\alpha\}$ é uma coleção arbitrária de membros de τ (finita, contável ou não-contável) então $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

Observação 6. *Se τ é uma topologia em X então (X, τ) é chamado de espaço topológico e os elementos de τ são ditos abertos.*

Definição 7. *([11], pág. 8) Uma coleção* $\mathscr{M}$ *de subconjuntos de um conjunto* X *é dito ser uma* σ*-ágebra em* X *se tem as seguintes propriedades:*

(i) $X \in \mathscr{M}$;

(ii) se $A \in \mathscr{M}$ *então* $A^C \in \mathscr{M}$;

(iii) se $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *e se* $A_n \in \mathscr{M}$ *para* $n = 1, 2, 3, ...$ *então* $A \in \mathscr{M}$.

Observação 8. *Se* $\mathscr{M}$ *é uma* σ*-ágebra em* X *então* $(X, \mathscr{M})$ *é chamado de espaço mensurável e os elementos de* $\mathscr{M}$ *são ditos conjuntos mensuráveis.*

Definição 9. *([11], pág. 8) Se* X *é um espaço mensurável,* Y *é um espaço topológico e* $f : X \to Y$ *é uma função, então* f *é dita mensurável se* $f^{-1}(V)$ *é um conjunto mensurável em* X *para cada conjunto aberto* V *em* Y.

Definição 10. *([11], pág. 11) Se* E *é um conjunto mensurável do espaço mensurável* X*, então a função* $\chi_E : X \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ \\ 0 & x \notin E \end{cases} \tag{2.3}$$

é chamada de função característica do conjunto E.

Teorema 11. *([11], pág. 12) Se* F *é qualquer coleção de subconjuntos de* X*, existe uma menor* σ*-ágebra* $\mathscr{M}^*$ *em* X *tal que* $F \in \mathscr{M}^*$*.(Esse* $\mathscr{M}^*$ *é chamado a* σ*-ágebra gerada por* F*.)*

Definição 12. *([11], pág. 12) Seja* X *um espaço topológico. Pelo Teorema 11 existe uma menor* σ*-ágebra* β *em* X *tal que todo aberto em* X *pertence a* β*. Os membros de* β *são chamados conjuntos de Borel ou borelianos de* X*.* β *é chamado a* σ*-ágebra de Borel.*

Observação 13. *(a) Conjuntos abertos em* X *são conjuntos de Borel;*

(b) conjuntos fechados em X *são conjuntos de Borel, já que são complementos de abertos;*

(c) união contável de conjuntos fechados em X *é um conjunto de Borel; (Esse tipo de conjunto é chamado de* F_σ*.)*

(d) interseção contável de conjuntos abertos em X é um conjunto de Borel. (Esse tipo de conjunto é chamado de G_δ.)

Observação 14. *Note que todo espaço topológico pode ser visto como um espaço mensurável considerando a σ-ágebra de Borel. Além disso, se $f : X \longrightarrow Y$ é contínua, em que Y é qualquer espaço topológico, então f é mensurável. Em outras palavras, toda função contínua é Borel mensurável.*

Definição 15. *([11], pág. 12) As funções Borel mensuráveis são chamadas de funções de Borel ou borelianas.*

2.2.1 Função Simples

Definição 16. *([11], pág. 15) Seja X um espaço mensurável. Uma função $s : X \rightarrow [0, +\infty)$ cuja imagem consiste de um número finito de pontos será chamada uma função simples.*

Observação 17. *Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ são os valores distintos de uma função simples s, e sendo*

$$A_i = \{x \in X : s(x) = \alpha_i\} \qquad i = 1, 2, 3, ..., n$$

então

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}. \tag{2.4}$$

Teorema 18. *([11], pág. 15) Seja $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ mensurável. Existem funções mensuráveis simples $s_1, s_2, s_3, ...$ em X, tais que:*

(i) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq ... \leq f$;

(ii) $s_n(x) \longrightarrow f(x)$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Demonstração. Para $n = 1$ defina $E_{1,1} = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$, $E_{1,2} = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right)\right)$ e $F_1 = f^{-1}([1, +\infty])$ e seja $s_1 = \sum_{i=1}^{2} \frac{i-1}{2} \chi_{E_{1,i}} + \chi_{F_1}$.

Para $n = 2$ defina $E_{2,1} = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{4}\right)\right)$, $E_{2,2} = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right)$, ..., $E_{2,8} = f^{-1}\left(\left[\frac{7}{4}, 2\right)\right)$ e $F_2 = f^{-1}([2, +\infty])$ e seja $s_2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{i-1}{4} \chi_{E_{2,i}} + 2\chi_{F_2}$.

Em geral para $n = 1, 2, 3, ...$ e para $1 \leq i \leq n2^n$ defina

$$E_{n,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right) \text{ e } F_n = f^{-1}([n, +\infty]) \tag{2.5}$$

e tome

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}. \tag{2.6}$$

Como f é mensurável e $\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$ e $[n, +\infty]$ são conjuntos de Borel em $[0, +\infty]$ segue que $E_{n,i}$ e F_n são conjuntos mensuráveis e assim s_n são funções mensuráveis simples.

(i) Mostraremos que $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq ... \leq f$.

Obviamente $s_n \geq 0 \ \forall n$.

Afirmação: $s_n \leq s_{n+1} \ \forall n$.

De fato, tome $x \in X$.

Se $x \in E_{n,i} \ \Rightarrow \ f(x) \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$

$\Rightarrow \ f(x) \in \left[\frac{2(i-1)}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}\right)$

$\Rightarrow \ f(x) \in \left[\frac{2i-2}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}\right)$

$\Rightarrow \ f(x) \in \left[\frac{2i-2}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}\right)$

$\Rightarrow \ x \in E_{n+1,2i-1} \cup E_{n+1,2i}$.

Assim $s_n(x) = \frac{i-1}{2^n} \leq \frac{2i-1}{2^{n+1}}$ e $\frac{2i-2}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x)$.

Se $x \in F_n \Rightarrow f(x) \in [n, +\infty]$.

No caso em que $f(x) \in [n, n+1)$ então $x \in E_{n+1,i}$. (Onde $n2^{n+1}+1 \leq i \leq (n+1)2^{n+1}$.)

Logo

$$\frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} \leq s_{n+1}(x) \leq \frac{(n+1)2^{n+1}-1}{2^{n+1}} = (n+1) - \frac{1}{2^{n+1}} \tag{2.7}$$

e

$$n = s_n(x) \leq s_{n+1}(x). \tag{2.8}$$

No caso em que $f(x) \in [n+1, \infty]$ então

$$s_n(x) = n \leq n+1 \leq s_{n+1}(x). \tag{2.9}$$

Segue de (2.5) que $s_n \leq f$ para todo n.

(ii) Mostraremos, agora, que $s_n(x) \longrightarrow f(x)$ quando $n \longrightarrow \infty$ para todo $x \in X$.

Fixe $x \in X$.

Se $f(x) < \infty$ tome n suficientemente grande tal que $x \in E_{n,i}$ para algum i, assim

$$\begin{aligned} \tfrac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \tfrac{i}{2^n} \quad &\Rightarrow \tfrac{i-1}{2^n} - \tfrac{1}{2^n} \leq f(x) - \tfrac{1}{2^n} < \tfrac{i}{2^n} - \tfrac{1}{2^n} \\ &\Rightarrow \tfrac{i-2}{2^n} \leq f(x) - \tfrac{1}{2^n} < \tfrac{i-1}{2^n} = s_n(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) \geq s_n(x) > f(x) - \frac{1}{2^n}, \tag{2.10}$$

e daí $s_n(x) \longrightarrow f(x)$.

Se $f(x) = \infty$ então $s_n(x) = n$ para todo n. Logo

$$s_n(x) \longrightarrow \infty = f(x). \tag{2.11}$$

$\square$

2.2.2 Integral de Lebesgue

Definição 19. *([11], pág. 16) (a) Uma medida positiva é uma função μ, definida em uma σ-ágebra $\mathscr{M}$, cuja imagem é $[0, +\infty]$ e que é aditiva contável, ou seja, se A_i é uma coleção contável disjunta de membros de $\mathscr{M}$ então*

$$\mu(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Além disso, assumimos que $\mu(A) < \infty$ para ao menos um $A \in \mathscr{M}$;
(b) um espaço de medida é um espaço mensurável que tem uma medida positiva definida na σ-ágebra de seus conjuntos mensuráveis;
(c) uma medida complexa é uma função aditiva contável de valores complexos definida em uma σ-ágebra.

Definição 20. *([11], pág. 19) (a) Se s é uma função simples mensurável em X, da forma apresentada em (2.4), onde que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ são os valores assumidos por s em A_i, e se $E \in \mathscr{M}$, definimos*

$$\int_E s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E); \tag{2.12}$$

(b) se $f : X \to [0, +\infty)$ é mensurável e $E \in \mathscr{M}$, definimos

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \left(\int_E s \, \mathrm{d}\mu \right) \tag{2.13}$$

que é chamada a integral de Lebesgue de f sobre E com respeito a medida μ.

Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida com μ positiva.

Definição 21. *([11], pág. 24) Definimos o espaço das funções Lebesgue integráveis em X por*

$$L^1_\mu = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável: } \int_X |f| d\mu < \infty \right\}. \tag{2.14}$$

Definição 22. *([11], pág. 24) (i) Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f \in L^1_\mu$ definimos*

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu, \tag{2.15}$$

onde $f^+ := max\{f, 0\}$ e $f^- := -min\{f, 0\}$ são as partes positiva e negativa da função f respectivamente;

(ii) Se $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ e $f = u + iv$, em que $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ são mensuráveis e $f \in L^1_\mu$ definimos

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu = \int_X u^+ d\mu - \int_X u^- d\mu + i \int_X v^+ d\mu - i \int_X v^- d\mu. \tag{2.16}$$

Observação 23. *Note que se $E \subset X$ e*

(a) se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f \in L^1_\mu(X)$ então $\int_E f d\mu \in \mathbb{R}$;

(b) se $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ e $f \in L^1_\mu(X)$ então $\int_E f d\mu \in \mathbb{C}$.

2.3 Resultados de Teoria da Medida

Teorema 24. *([11], pág. 21)* ***Teorema da convergência monótona:*** *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis em X, e suponha que:*

(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq ... \leq \infty$ para todo $x \in X$;

(b) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ quando $n \longrightarrow \infty$, para todo $x \in X$.

Então f é mensurável e

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Teorema 25. *([11], pág. 26)* ***Teorema da convergência dominada:*** *Supoha que $\{f_n\}$ é uma sequência de funções complexas definidas em X, mensuráveis tal que $f(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)$ existe para cada $x \in X$. Se existe uma função $g \in L^1_\mu(X)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para $n = 1, 2, 3, ...$ e $x \in X$, então $f \in L^1_\mu(X)$,*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

e

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Lema 26. *([11], pág. 32, Exercício 12) Seja (X, η, μ) um espaço mensurável e suponha que $f \in L^1_\mu(X)$. Para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $\int_E |f| d\mu < \epsilon$ sempre que $\mu(E) < \delta$.*

Demonstração. Sejam $f \in L^1_\mu$ e $\epsilon > 0$. Como f é mensurável, então $g = |f|$ também o é. Além disso, $\int_X |f| d\mu < \infty$.

Seja

$$g_n(x) = \begin{cases} |f(x)|, \text{ se } |f(x)| \leq n; \\ n, \text{ se } |f(x)| > n. \end{cases}$$

Afirmação 01: g_n é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, basta mostrarmos que $g_n^{-1}(\alpha, \infty) \in \eta$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha \geq n$ então $g_n^{-1}(\alpha, \infty) = \{x \in X : g_n(x) > \alpha\} = \emptyset \in \eta$.

Se $0 \leq \alpha < n$ então $g_n^{-1}(\alpha, \infty) = \{x \in X : g_n(x) > \alpha\} = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$, donde segue que $g_n^{-1}(\alpha, \infty) \in \eta$, pois $g_n(x) \leq n$ para todo $x \in X$ e g é mensurável.

Se $\alpha < 0$, então $g_n^{-1}(\alpha, \infty) = \{x \in X : g_n(x) > \alpha\} = X \in \eta$.

Logo, $g_n(x)$ é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação 02: $g_n(x) \longrightarrow g(x)$ $\forall x \in X$.

Tome $x \in X$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq g(x)$ de modo que, se $n \geq N$ tem-se $|g_n(x) - g(x)| = |g(x) - g(x)| = 0 < \epsilon$.

Que $g_1(x) \geq 0$ e $g_n(x) < \infty$ segue da definição dos $g_n s$. Mostraremos que $g_n \leq g_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se x é tal que $|f(x)| \leq n$ então $g_n(x) = g_{n+1}(x) = |f(x)|$.

Se x é tal que $n < |f(x)| < n+1$ então $g_n(x) = n < |f(x)| = g_{n+1}(x)$.

Se x é tal que $|f(x)| > n+1$ então $g_n(x) = n < n+1 = g_{n+1}(x)$.

Assim, $g_n \leq g_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema da Convergência monótona

$$\int_X g_n d\mu \longrightarrow \int_X g d\mu.$$

Sendo assim, para $\epsilon > 0$ dado, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_1$,

$$\left| \int_X g_n d\mu - \int_X g d\mu \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $g_n \leq g$ então $\int_X g_n d\mu \leq \int_X g d\mu$, consequentemente,

$$\int_X g d\mu - \int_X g_n d\mu < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $n \geq N_1$.

Agora, se $\mu(E) < \delta = \frac{\epsilon}{2N_1}$ segue que

$$\begin{aligned}
\int_E |f| d\mu &= \int_E g d\mu = \int_E g - g_{N_1} + g_{N_1} d\mu \\
&= \int_E g - g_{N_1} d\mu + \int_E g_{N_1} d\mu < \int_X g - g_{N_1} d\mu + \int_E g_{N_1} d\mu \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \int_E N_1 d\mu = \frac{\epsilon}{2} + N_1 \int_E d\mu = \frac{\epsilon}{2} + N_1 \mu(E) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + N_1 \frac{\epsilon}{2N_1} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

o que conclui a prova do Lema.

$\square$

Definição 27. *([7], pág. 216) Uma função é dita suave se as derivadas clássicas de ordem arbitrária existem para todo ponto do domínio Ω. Denotaremos o conjunto das funções contínuas e suaves por $C(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$, respectivamente.*

Definição 28. *([11], pág. 38) O suporte de uma função complexa f em um espaço topológico X é o fecho do conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ e será denotado por supp f. A* *coleção de todas as funções contínuas complexas num espaço topológico X cujo suporte é compacto será denotada por $C_c(X)$.*

Observação 29. *A fim de padronizar as notações utilizadas em [11] e [7], usaremos a notação C_c^∞ para representar o conjunto das funções suaves com suporte compacto.*

Definição 30. *([11], pág. 36) Seja X um espaço topológico, então:*
(a) X é dito um espaço de Hausdorff se para todo $p, q \in X$ com $p \neq q$, existirem vizinhanças U de p e V de q tais que $U \cap V = \emptyset$;
(b) X é localmente compacto se todo ponto de X tem uma vizinhança cujo fecho é compacto.

A notação $K \prec f$, neste texto, significa que K é um subconjunto compacto de um conjunto X, que $f \in C_c(X)$, que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$, e que $f(x) = 1$ para todo $x \in K$. A notação $f \prec V$ significa que V é um aberto que $f \in C_c(X)$, que $0 \leq f(x) \leq 1$ e que o suporte de f está contido em V. A notação $K \prec f \prec V$ indica que valem as duas notações anteriores.

Lema 31. *([11], pág. 39)* ***Lema de Urysohn:*** *Sejam X um espaço de Hausdorff localmente compacto, V um aberto de X e K subconjunto compacto de V. Então existe uma função $f \in C_c(X)$ tal que $K \prec f \prec V$.*

Definição 32. *Uma transformação linear é uma aplicação $\Lambda : V \longrightarrow V_1$, com V e V_1 espaços vetoriais e que satisfaz*

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda x + \beta \Lambda y,$$

para todo $x, y \in V$ e para todo α e β escalares. No caso particular em que V_1 é o corpo dos escalares, Λ é chamado um funcional linear.

Teorema 33. *([11], pág. 40)* ***Teorema de representação de Riesz:*** *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto, e seja Λ um funcional linear positivo em $C_c(X)$. Então existe uma σ-álgebra $\mathscr{M}$ em X que contém todos os conjuntos de Borel de X, e existe uma única medida positiva μ em $\mathscr{M}$ que representa Λ no sentido que:*
(a) $\Lambda f = \Lambda(f) = \int_X f d\mu$ para todo $f \in C_c(X)$, e que tem as seguintes propriedades:

(b) $\mu(K) < \infty$ *para todo* $K \subset X$ *compacto,*

(c) para todo $E \in \mathscr{M}$*, temos* $\mu(E) = inf\{\mu(V), E \subset V, V \text{ aberto}\}$*,*

(d) a relação $\mu(E) = sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}$ *vale para todo subconjunto aberto* E*, e para todo* $E \in \mathscr{M}$ *com* $\mu(E) < \infty$*,*

(e) se $E \in \mathscr{M}$*,* $A \subset E$ *e* $\mu(E) < \infty$ *então* $A \in \mathscr{M}$*. Em outras palavras,* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *é um espaço de medida completo.*

Teorema 34. *([11], pág. 55)* ***Teorema de Lusin:*** *Seja* X *um espaço de Hausdorff localmente compacto e* μ *como no Teorema 33. Suponha* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *mensurável,* $\mu(A) < \infty$*,* $f(x) = 0$ *se* $x \notin A$ *e* $\epsilon > 0$*. Então existe* $g \in C_c(X)$ *tal que* $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon$*. Além disso, é possível escolher* g *de modo que* $sup_{x\in X}|g(x)| \leq sup_{x\in X}|f(x)|$*.*

Definição 35. *([11], pág. 70) (a) Dizemos que uma função complexa num espaço de Hausdorff localmente compacto* X *se anula no infinito se para cada* $\epsilon > 0$ *dado existir um conjunto compacto* $K \in X$ *tal que* $|f(x)| < \epsilon$ *para todo* $x \notin K$*.*

(b) A coleção de todas as funções contínuas em X *que se anulam no infinito é denotada por* $C_0(X)$*.*

Definição 36. *([11], pág. 146) Uma função complexa* f*, definida em um intervalo* $I = [a, b]$*, é dita ser absolutamente contínua em* I *se a cada* $\epsilon > 0$ *corresponde um* $\delta > 0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon$$

para qualquer n *e qualquer coleção disjunta de segmentos* $(\alpha_1, \beta_1), ..., (\alpha_n, \beta_n)$ *em* I *cujos comprimentos satisfazem*

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) < \delta.$$

Definição 37. *([11], pág. 50)*

(a) Se $E \subset \mathbb{R}^n$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$*, o transladado de* E *por* x *é o conjunto* $E + x = \{y + x : y \in E\}$*.*

(b) Seja $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n)$*. Um conjunto da forma* $W = \{x : \alpha_i < \xi_i < \beta_i,\ 1 \leq i \leq n\}$*, ou qualquer conjunto obtido trocando quaisquer dos sinais* $<$ *por* $\leq$ *em* W*, é chamado uma n-célula e seu volume é definido por* $vol(W) = \prod_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i)$*.*

Teorema 38. *([11], pág. 50) Existe uma medida positiva completa m definida em uma σ-álgebra η em $\mathbb{R}^n$ com as seguintes propriedades:*

(a) $m(W) = vol(W)$ para toda k-célula W;

(b) η contém todos conjuntos de Borel em $\mathbb{R}^n$; mais precisamente, $E \in \eta$ se, e somente se, existem conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que $A \subset E \subset B$, A é um F_σ, B é um G_δ, e $m(B - A) = 0$. Então , m é regular;

(c) m é invariantes por translação, i. é. (isto é), $m(E + x) = m(E)$ para todo $E \in \eta$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(d) Se μ é qualquer medida de Borel positiva e invariante por translação em $\mathbb{R}^n$ tal que $\mu(K) < \infty$ para todo conjunto compacto K, então existe uma constante c tal que $\mu(E) = cm(E)$ para todo conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}^n$;

(e) Para toda transformação linear T de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ corresponde um número real $\triangle(T)$ tal que $m(T(E)) = \triangle(T)m(E)$ para todo $E \in \eta$. Em particular, $m(T(E)) = m(E)$ quando T é uma rotação.

Definição 39. *([11], pág. 50) No Teorema 38, os membros de η são os conjuntos Lebesgue mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ e m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 40. *([11], pág. 146) Sejam $I = [a, b]$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e não decrescente. Então cada uma das três afirmações a seguir implica nas outras duas:*

(a) f é absolutamente contínua em I;

(b) f leva conjuntos de medida 0 em conjuntos de medida 0;

(c) f é diferenciável q.t.p. em I, $f' \in L^1$, e

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt \quad (a \leq x \leq b).$$

Teorema 41. *([11], pág. 148)* ***Teorema fundamental do cálculo para funções Lebesgue integráveis:*** *Se f é uma função complexa absolutamente contínua em $I = [a, b]$, então f é diferenciável q.t.p. em I, $f' \in L^1_m(I)$ e*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt \ (a \leq x \leq b).$$

No teorema a seguir, $|J_f|$ denota o Jacobiano da função f que é definido como

$$|J_f| = \triangle(f^{'}) = |detf^{'}|.$$

Teorema 42. *([11], pág. 153) Suponha que*

(i) $X \subset V \subset \mathbb{R}^n$, *$V$ é aberto e* $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é contínua;*

(ii) X é Lebesgue mensurável, f é bijetora em X, e f é diferenciável em X;

(iii) $m(f(V - X)) = 0$.

Então, chamando $Y = f(X)$,

$$\int_Y g \ dm = \int_X (g \circ f)|J_f| dm$$

para toda função mensurável $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty]$.

2.4 Os espaços $L^p_\mu(X)$

Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *um espaço de medida com μ positiva.*

Definição 43. *([11], pág. 65) Se* $0 < p < \infty$ *e* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *é uma função mensurável definimos*

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.17}$$

a norma L^p de f. Definimos também o espaço

$$L^p_\mu(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : ||f||_p < \infty\}. \tag{2.18}$$

Definição 44. *([11], pág. 65) Seja* $g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ *mensurável e considere* $S = \{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(g^{-1}((\alpha, \infty])) = 0\}$. *Se* $S = \phi$, *tome* $\beta = \infty$. *Se* $S \neq \phi$, *tome* $\beta = \inf S$. *Como* $g^{-1}((\beta, +\infty])) = \cup_{n=1}^{\infty} g^{-1}((\beta + \frac{1}{n}, +\infty])$ *e a união de conjuntos de medida nula tem medida nula, tem-se que* $\beta \in S$. *Define-se β como sendo o supremo essencial de g, denotado por* $\beta = sup\ ess\ g$.

Definição 45. *([11], pág. 65) Se* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *é mensurável definimos* $||f||_\infty$ *como o supremo essencial de* $|f|$, *ou seja,*

$$||f||_\infty = sup\ ess\ |f| \tag{2.19}$$

e

$$L^\infty_\mu(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : ||f||_\infty < \infty\} \tag{2.20}$$

é o espaço das funções essencialmente limitadas.

2.5 Mais alguns resultados

Teorema 46. *([10], pág. 251)* ***Partição da unidade:*** *Suponha que K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, e que $\{V_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de K. Então existem funções $\psi_1, ..., \psi_s \in C(\mathbb{R}^n)$ tais que:*

(a) $0 \leq \psi_i \leq 1$ para $1 \leq i \leq s$;

(b) cada ψ_i tem suporte compacto em algum V_α;

(c) $\psi_1(x) + ... + \psi_s(x) = 1$ para todo $x \in K$.

Por causa de (c), $\{\psi_i\}$ é chamada de partição da unidade, e por causa de (b) algumas vezes é dito que $\{\psi_i\}$ é subordinada a cobertura $\{V_\alpha\}$.

Teorema 47. *([11], pág.66)* ***Desigualdade de Hölder:*** *Seja $1 < p < \infty$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e sejam $f \in L^p_\mu(X)$ e $g \in L^q_\mu(X)$. Então $fg \in L^1_\mu(X)$ e*

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Se $p = q = 2$, a desigualdade acima é conhecida por desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Teorema 48. *([1], pág.312)* ***Desigualdade de Poincaré-Wirtinger:*** *Seja Ω um conjunto aberto, conexo e de classe C^1 e seja $1 \leq p \leq \infty$. Então existe uma constante C tal que*

$$||u - \tilde{u}||_p \leq C|| \bigtriangledown u||_p \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

sendo que $\tilde{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u$.

Definição 49. *([9], pág.192)* ***Espaço de Lindelöf:*** *Um espaço para o qual toda cobertura aberta contém uma subcobertura enumerável é chamado Espaço de Lindelöf.*

Exemplo 50. *([9], pág.192) $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, é um espaço de Lindelöf.*

Capítulo 3

Resultados de densidade para funções integráveis no sentido Riemann, Lebesgue e Lebesgue generalizado

Neste capítulo apresentamos alguns resultados sobre densidade de subespaços de funções contínuas nos espaços clássicos (de Riemann e de Lebesgue) e no espaço de Lebesgue generalizado $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

3.1 Espaços de funções Riemann integráveis

Teorema 51. *([5], pág. 50) Seja* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função em* $\mathscr{L}^1$*. Então dado* $\varepsilon > 0$ *existe uma função contínua* $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\int_a^b |f(x) - \psi(x)|dx < \varepsilon$ *e* $\psi(a) = \psi(b) = 0$.

Demonstração. Caso 01: f é limitada.

Seja $f \in \mathscr{L}^1$ limitada. Logo, dado $\epsilon > 0$ existe uma partição $a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^{k} m_j(x_j - x_{j-1}) < \frac{\epsilon}{2}, \tag{3.1}$$

onde $m_j = inf\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$. Agora defina a função

$$\chi(x) = m_j, \text{ para } x_{j-1} \leq x \ < x_j. \tag{3.2}$$

Então o somatório em (3.1) é a integral de $\chi(x)$ em $[a, b]$, e (3.1) pode ser escrito como

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \chi(x)dx = \int_a^b [f(x) - \chi(x)]dx < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.3}$$

Para prosseguir com a demonstração vamos explorar a ideia a ser utilizada por meio de dois gráficos simples. Suponha que a partição tenha quatro pontos, que a Figura 3.1 represente o gráfico de χ e que para cada n, a função ψ_n (representada pela Figura 3.2) é obtida substituindo-se na Figura 3.1 os retângulos por trapézios cujos lados tem inclinação $n^{\underline{o}}$ e $(180 - n)^{\underline{o}}$ nos retângulos que estão no semiplano $y > 0$ e por trapézios cujos lados tem inclinação $360^{\underline{o}}$-n e $180^{\underline{o}}$+n nos retângulos que estão no semiplano $y < 0$. Note que estas inclinações estão sendo consideradas no sentido usual (anti-horário) a partir do eixo x.

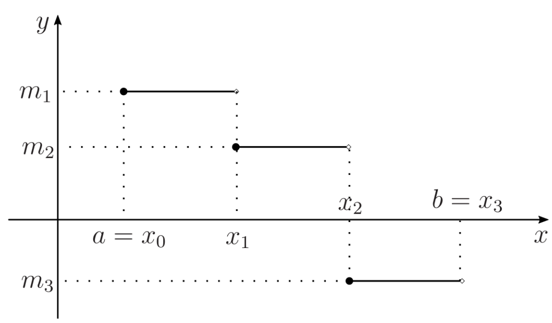

Figura 3.1: Gráfico de $\chi(x)$

Note que ψ_n é contínua e $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$.

Usando essa ideia para uma função $\chi(x)$ qualquer, como a definida em (3.2), podemos afirmar que

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)|dx = \sum_{j=1}^{k} \frac{m_j^2}{tg(\theta_n)}. \tag{3.4}$$

De fato, a diferença entre a área de cada retângulo da Figura 3.1 com a área do respectivo trapézio da Figura 3.2 é igual a área dos dois triângulos retângaulos "retirados"

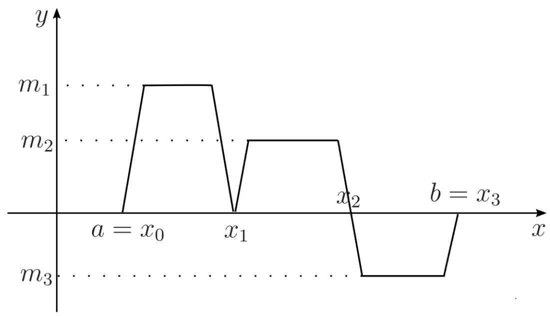

Figura 3.2: Gráfico de $\psi_n(x)$

do retângulo para formar o trapézio. Observe na Figura 3.3, que o triângulo retângulo a esquerda possui o ângulo entre a hipotenusa e o lado y_j alterno interno ao ângulo θ_n, consequentemente, eles são iguais. Da mesma forma, concluímos o valor θ_n indicado no triângulo retângulo a direita (cuja inclinação 180º-θ_n). Pelo caso "lado, ângulo, ângulo"(m_j, 90º, θ_n) de congruência de triângulos, segue que os dois triângulos retângulos são congruentes. Portanto, calcular a soma A_j de suas àreas equivale a calcular a àrea do retângulo de lados m_j e y_j:

$$A_j = m_j y_j = m_j y_j \frac{m_j}{m_j} = m_j^2 \frac{y_j}{m_j} = \frac{m_j^2}{\frac{m_j}{y_j}} = \frac{m_j^2}{tg(\theta_n)},$$

onde $1 \leq j \leq k$ e $k+1$ é o número de pontos da partição de $[a, b]$ considerada. Portanto vale a igualdade (3.4).

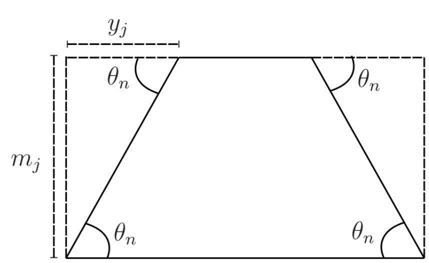

Figura 3.3: Área excedente ao inscrever um trapézio em um retângulo

Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$. Logo, de (3.4) temos

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx \leq \frac{kM^2}{tg(\theta_n)}. \tag{3.5}$$

Note que $tg(\theta_n) \longrightarrow \infty$ quando $\theta_n \longrightarrow 90^{\text{o}}$ e que k está fixado. Então existe n suficientemente grande, tal que $\dfrac{kM^2}{tg(\theta_n)} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, e asssim

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)|dx < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.6}$$

De (3.3) e (3.6) obtemos que, dado $\epsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$ tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|dx < \epsilon.$$

Essa função ψ_n é a função ψ do enunciado.

Caso 02: f não é limitada.

Seja $f \in \mathscr{L}^1$ não limitada, mas integrável e absolutamente integrável no sentido das integrais impróprias. Por simplicidade, suponhamos que f se torne ilimitada apenas numa vizinhança de a e b. O caso geral é demonstrado de maneira análoga. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_a^{a+\delta} |f(x)|dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|dx \right| = \left| \int_a^b |f(x)|dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)|dx \right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.7}$$

Como f é limitada e integrável em $[a+\delta, b-\delta]$, segue do *Caso 01* que existe uma função contínua $\psi : [a+\delta, b-\delta] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\psi(a+\delta) = \psi(b-\delta) = 0$ tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)|dx < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.8}$$

Considere a função $\tilde{\psi} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ assim definida:

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), \text{ se } a+\delta \leq x \leq b-\delta; \\ 0, \text{ se } a \leq x \leq a+\delta \text{ ou } b-\delta \leq x \leq b. \end{cases}$$

Note que $\tilde{\psi}(x)$ é contínua e $\tilde{\psi}(a) = \tilde{\psi}(b) = 0$.

Temos

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)|dx = \int_a^{a+\delta} |f(x)|dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)|dx$$

e usando (3.7) e (3.8) obtemos

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)|dx < \epsilon,$$

completando a demonstração.

□

Teorema 52. *([5], pág. 66) Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de quadrado Riemann integrável. Então existe uma sucessão de funções contínuas $\psi_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$, tal que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0$.*

Demonstração. Caso 01: f é limitada.

Como f é de quadrado integrável segue, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 47), que

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b 1|f(x)|dx \leq \left[\int_a^b 1^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = (b-a)^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}},$$

o que mostra que f é asolutamente integrável.

Pelo Teorema 51, dado $\epsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\psi(a) = \psi(b) = 0$ tal que $\int_a^b |f(x) - \psi(x)|dx < \epsilon$. Note que, pela construção de $\psi(x)$ na demonstração do Teorema 51, temos que $|\psi(x)| \leq M$ para M constante, onde $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$.

Agora,

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x) - \psi(x)|^2 dx &= \int_a^b |f(x) - \psi(x)||f(x) - \psi(x)|dx \leq \int_a^b (|f(x)| + |\psi(x)|)|f(x) - \psi(x)|dx \\ &\leq 2M \int_a^b |f(x) - \psi(x)|dx < 2M\epsilon,\end{aligned}$$

como queríamos.

Caso 02: f não é limitada.

Assim como feito no Teorema 51, basta considerarmos o caso onde f se torna limitada apenas nas vizinhanças de a e b. Dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta > 0$, tal que

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{3} \text{ e } \int_{b-\delta}^b |f(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

Usando o caso 01, podemos determinar uma função contínua $\psi : [a+\delta, b-\delta] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\psi(a+\delta) = \psi(b-\delta) = 0$ tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

Definindo $\tilde{\psi} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } a \leq x \leq a+\delta \\ \psi(x), \text{ se } a+\delta \leq x \leq b-\delta \\ 0, \text{ se } b-\delta \leq x \leq b, \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned} &\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx \\ &\quad = \textstyle\int_a^{a+\delta} |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx + \int_{b-\delta}^{b} |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx \\ &\quad = \textstyle\int_a^{a+\delta} |f(x)|^2 dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx + \int_{b-\delta}^{b} |f(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &\quad = \epsilon, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

3.2 Espaços de funções Lebesgue integráveis

Teorema 53. *([11], pág. 69). Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se S é o conjunto das funções s complexas simples mensuráveis em X tal que $\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$ e, se $1 \leq p < \infty$, então S é denso em L^p_μ.*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que $S \subset L^p_\mu$. De fato, seja $s \in S$, então

$$\begin{aligned} s : \; X &\longrightarrow \; \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \; s(x) = \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}, \end{aligned}$$

α_i *'s* distintos entre si, α_i *'s* $\neq 0$ e $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) < \infty$. Assim,

$$\int_X |s|^p d\mu = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \mu(A_i) < \infty,$$

donde concluímos que $S \subset L^p_\mu$.

Agora, se $f \geq 0$ e $f \in L^p_\mu$ considere $\{s_n\}$ como no Teorema 18. Como $0 \leq s_n \leq f$ temos que $s_n \in L^p_\mu$ e $s_n \in S$.

Além disso, $|f - s_n|^p \leq |f|^p \in L^1_\mu$ e pelo Teorema da Convergência Dominada aplicado a sequência $|f - s_n|^p$ obtemos

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_X |f - s_n|^p d\mu = 0 \Longrightarrow ||f - s_n||_p^p \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow ||f - s_n||_p \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Para $f \in L^p_\mu$ arbitrária escrevemos $f = u + iv$, onde u e v são funções reais. Em seguida escrevemos $u = u^+ - u^-$ e $v = v^+ - v^-$, com $u^+ \geq 0$, $u^- \geq 0$, $v^+ \geq 0$ e $v^- \geq 0$ e o resultado segue aplicando o caso anterior. □

Teorema 54. *([11], pág. 69) Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto e μ como no Teorema 33. Para $1 \leq p < \infty$, $C_c(X)$ é denso em $L^p_\mu(X)$.*

Demonstração. $C_c(X) \subset L^p_\mu(X)$.

De fato, se $f \in C_c(X)$ temos que f é contínua, consequentemente, f é limitada por uma constante K no compacto *supp* f e, limitada pela mesma constante fora de seu suporte. Então $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in X$. Logo,

$$\int_X |f(x)|^p d\mu = \int_{supp\ f} |f(x)|^p d\mu \leq K^p \mu(supp\ f) < \infty,$$

uma vez que $\mu(supp\ f) < \infty$ pelo Teorema 33.

Tome $f \in L^p_\mu(X)$ e $\varepsilon > 0$. Como o conjunto S definido no Teorema 53 é denso em L^p_μ, exite $s \in S$ tal que

$$||f - s||_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pelo Teorema de Lusin existe $g \in C_c(X)$ tal que $g(x) = s(x)$ exceto num conjunto A de medida menor que $\frac{1}{(2||s||_u)^p}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ e $||g||_u \leq ||s||_u$. Então,

$$\begin{aligned}
||g-s||_p &= \left(\int_X |g-s|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_A |g-s|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_A (|g|+|s|)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_A 2^{p-1}(|g|^p+|s|^p) d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_A 2^{p-1}(||g||_u^p+||s||_u^p) d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_A (2^p ||s||_u^p) d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = (2^p||s||_u^p \mu(A))^{\frac{1}{p}} \\
&< \left(2^p||s||_u^p \frac{1}{(2||s||_u)^p}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$||f-g||_p \leq ||f-s||_p + ||s-g||_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Como toda função Riemann integrável é Lebesgue integrável, segue que o Teorema 51 pode ser visto como um caso particuar do Teorema 54. Este resultado nos mostra que se $(X, \mathscr{M}, \mu)$ é um espaço de medida com $X = [a,b]$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e μ é uma medida positiva, então o conjunto das funções contínuas, cujo contradomínio é um subconjunto dos números reais, é denso no conjunto das funções em L^1.

Um outro resultado interessante de densidade em espaços de funções é o Teorema de Weierstrass, enunciado a seguir. Apesar de não estar relacionado com funções em $\mathscr{L}^1$ ou funções em L^1, é um resulltado importante no sentido de que é possível trabalhar com polinômios no lugar de uma função contínua qualquer, quando for conveniente.

Teorema 55. *([5], pág. 77) Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua, definida no intervalo $[a,b]$. Então existe uma sucessão de polinômios P_n que convergem uniformemente para f em $[a,b]$. O resultado continua válido se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.*

3.3 Espaços de Lebesgue generalizados $(L^{p(\cdot)}(\Omega))$

Definição 56. *([8], [6]) O espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é definido por*

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável}, \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty\right\}, \tag{3.9}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável e $p \in L^\infty(\Omega)$, com $p \geqslant 1$ para todo $x \in \Omega$.

Definição 57. *([8], [6]) Considere o conjunto*

$$L^\infty_+(\Omega) = \{p \in L^\infty(\Omega) : inf\ ess\ p \geq 1\}.$$

Para $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $p \in L^\infty_+(\Omega)$, definimos a função modular por

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx, \tag{3.10}$$

e denotemos por p^- o $inf\ ess\ p$ e por p^+ o $sup\ ess\ p$.

Teorema 58. *([8], [6]) $||u||_{p(.)} := inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\dfrac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$ é uma norma em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Teorema 59. *([8]) Se $p^+ < \infty$, então*

$$\rho(f_n) = \int_\Omega |f_n(x)|^{p(x)}dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow ||f_n(.)||_{p(.)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Teorema 60. *([8], pág. 603) Se $p^+ < \infty$ então o conjunto das funções mensuráveis e limitadas em Ω é denso em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Denotaremos a família de funções mensuráveis $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$ por $\mathscr{P}(\Omega)$.

Teorema 61. *([8])Seja $p \in \mathscr{P}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Então o conjunto $C_c(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é denso em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Se, além disso, Ω é aberto, então o conjunto $C^\infty_c(\Omega)$ é denso em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$. Como p é essencialmente limitada, segue do Teorema 60 que existe uma função limitada $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que

$$||f(x) - g(x)||_{p(.)} < \varepsilon. \tag{3.11}$$

Pelo Teorema de Lusin existe $h \in C_c(\Omega)$ e um conjunto $U = \{x \in \Omega : g(x) \neq h(x)\}$ tal que $|U| < min\left\{1, \left(\dfrac{\varepsilon}{2||g||_\infty}\right)^{p^+}\right\}$, $g(x) = h(x)$ para todo $x \in \Omega \setminus U$ e $\underset{\Omega\setminus U}{sup}|h(x)| \leq \underset{\Omega\setminus U}{sup}|g(x)| \leq ||g||_\infty$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{g-h}{\varepsilon}\right) &= \int_\Omega \left|\frac{g-h}{\varepsilon}\right|^{p(x)} dx = \int_{\Omega\setminus U} \left|\frac{g-h}{\varepsilon}\right|^{p(x)} dx + \int_U \left|\frac{g-h}{\varepsilon}\right|^{p(x)} dx \\
&= 0 + \int_U \left|\frac{g-h}{\varepsilon}\right|^{p(x)} dx \leq \int_U \left(\frac{|g|+|h|}{\varepsilon}\right)^{p(x)} dx \\
&\leq \int_U \left(\frac{2||g||_\infty}{\varepsilon}\right)^{p(x)} dx.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Temos duas situações. Se $\left(\frac{2||g||_\infty}{\varepsilon}\right) \geq 1$, então $|U| < \left(\frac{\varepsilon}{2||g||_\infty}\right)^{p^+} \leq 1$ e por (3.12) temos que

$$\rho\left(\frac{g-h}{\varepsilon}\right) \leq \int_U \left(\frac{2||g||_\infty}{\varepsilon}\right)^{p^+} dx = \left(\frac{2||g||_\infty}{\varepsilon}\right)^{p^+} |U| < 1. \tag{3.13}$$

Se $\left(\frac{2||g||_\infty}{\varepsilon}\right) < 1$, então $|U| < 1$ e por (3.12) temos que

$$\rho\left(\frac{g-h}{\varepsilon}\right) \leq \int_U \left(\frac{2||g||_\infty}{\varepsilon}\right)^{p(x)} dx < \int_U dx = |U| < 1. \tag{3.14}$$

Em ambos os casos concluímos em (3.13) e (3.14) que

$$\rho\left(\frac{g-h}{\varepsilon}\right) < 1,$$

isto é,

$$||g(x) - h(x)||_{p(.)} < \epsilon. \tag{3.15}$$

De (3.11) e (3.15) segue, pela desigualdade triangular, que

$$||f(x) - h(x)||_{p(.)} < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon, \tag{3.16}$$

como queríamos.

Suponha que, além disso, Ω é aberto. Como $p \in L^\infty(\Omega)$, temos que $C_c^\infty(\Omega) \subset L^{p(.)}(\Omega)$ e $\rho\left(\frac{h}{\epsilon}\right) < \infty$.

Afirmação 01: Existe um conjunto aberto e limitado $G \subset \Omega$ tal que $\rho\left(\frac{h\chi_{\Omega\backslash G}}{\epsilon}\right) \leq 1$, isto é, $||h\chi_{\Omega\backslash G}(x)||_{p(.)} \leq \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$.

De fato, seja $V = \{x \in \Omega : h(x) \neq 0\}$. Temos que V é compacto. Considere $A = \bigcup_{i\in I} B(x_i, \delta)$ $(\delta > 0)$ uma cobertura de Ω. Segue que A cobre V compacto, então existe uma subcobertura finita $B = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta) \subset A$ de V. Desta maneira, $G = B \cap \Omega$ é tal que $G \subset \Omega$, G é aberto e $h(x) = 0$ para todo $x \in \Omega\backslash G$. Logo,

$$\rho\left(\frac{h\chi_{\Omega\backslash G}}{\epsilon}\right) = \int_\Omega \left|\frac{h(x)\chi_{\Omega\backslash G}}{\epsilon}\right|^{p(x)} dx < \int_{\Omega\backslash G} \frac{|h(x)|^{p(x)}}{\epsilon^{p^+}} dx = \frac{1}{\epsilon^{p^+}} \int_{\Omega\backslash G} |h(x)|^{p(x)} dx = 0 \leq 1,$$

para todo $0 < \epsilon < 1$.

Afirmação 02: $(1-\chi_G)(x) = \chi_{\Omega\setminus G}(x)$.

De fato, se $x \in G$, então $(1-\chi_G)(x) = 1-1 = 0$ e $\chi_{\Omega\setminus G}(x) = 0$. Por outro lado, se $x \in \Omega \setminus G$ então $(1-\chi_G)(x) = 1-0 = 1$ e $\chi_{\Omega\setminus G}(x) = 1$. Portanto $(1-\chi_G)(x) = \chi_{\Omega\setminus G}(x)$.

Usando as afirmações 01 e 02, obtemos

$$||h(x) - h\chi_G(x)||_{p(.)} = ||h(x)(1-\chi_G)(x))||_{p(.)} = ||h(x)\chi_{\Omega\setminus G}(x)||_{p(.)} \leq \epsilon. \tag{3.17}$$

Pelo Teorema 55, podemos considerar m um polinômio satisfazendo $\underset{G}{sup}|h(x)-m(x)| < \epsilon\, min\{1, |G|^{-1}\}$. Então

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{h\chi_G - m\chi_G}{\epsilon}\right) &= \int_\Omega \left(\frac{h(x)\chi_G(x) - m(x)\chi_G(x)}{\epsilon}\right)^{p(x)} dx = \int_G \left(\frac{h(x)-m(x)}{\epsilon}\right)^{p(x)} dx \\ &< \int_G \left(\frac{\epsilon\, min\{1, |G|^{-1}\}}{\epsilon}\right)^{p(x)} dx \leq \int_G min\{1, |G|^{-1}\} dx \\ &= min\{1, |G|^{-1}\}|G| \leq 1,\end{aligned}$$

ou seja,

$$||h(x)\chi_G(x) - m(x)\chi_G(x)||_{p(.)} \leq \epsilon. \tag{3.18}$$

Com considerações similares às feitas para obtermos (3.17), conseguimos um número $a > 0$ suficientemente pequeno tal que o conjunto compacto $K_a = \{x \in G : dist(x, \partial G) \geq a\}$ satisfaz $||m(x)\chi_G - m(x)\chi_{K_a}||_{p(.)} \leq \epsilon$. Segue, pelo Lema 31 que existe $\varphi \in C_c^\infty(G)$ tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ se $x \in G$ e $\varphi(x) = 1$ se $x \in K_a$. Então,

$$||m(x)\chi_G(x) - m(x)\varphi(x)||_{p(.)} \leq ||m(x)\chi_G(x) - m(x)\chi_{K_a}||_{p(.)} \leq \epsilon. \tag{3.19}$$

De (3.16)-(3.19) concluímos que

$$||f(x) - m(x)\varphi(x)||_{p(.)} < 5\epsilon \tag{3.20}$$

e, além disso, temos $m(x)\varphi(x) \in C_c^\infty(\Omega)$. □

Capítulo 4

Densidade de funções contínuas no espaço de Sobolev ($W^{1,p(.)}(\Omega)$)

Neste capítulo tratamos, assim como no Capítulo 3, sobre densidade de funções contínuas. Porém, consideramos agora os espaços de Sobolev. Revisamos alguns resultados sobre o espaço de Sobolev clássico e exploraremos, de maneira detalhada, resultados sobre espaços de Sobolev generalizados, que é o foco deste trabalho.

4.1 Espaços de Sobolev

O espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(.)}(\Omega)$, com $p^- \geq 1$, é definido por

$$W^{1,p(.)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(.)}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(.)}(\Omega), j = 1, ..., N \right\},$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio e, para cada $u \in W^{1,p(.)}(\Omega)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a j-ésima derivada fraca de u, ou seja,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Em $W^{1,p(.)}(\Omega)$ temos a seguinte norma:

$$||u||_* = ||u||_{p(.)} + \sum_{j=1}^{N} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|\right|_{p(.)}.$$

Para cada $u \in W^{1,p(.)}(\Omega)$*, definimos*

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Sendo assim, podemos escrever o espaço $W^{1,p(.)}(\Omega)$ *como*

$$W^{1,p(.)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(.)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(.)}(\Omega) \right\} \tag{4.1}$$

e utilizar a norma equivalente

$$||u||_{1,p(.)} = ||u||_{p(.)} + ||\nabla u||_{p(.)}. \tag{4.2}$$

Quando o expoente é constante, i. é., $p(.) \equiv p$*, estamos nos espaços de Sobolev clássicos. A seguir, enunciamos alguns dos resultados sobre densidade de funções contínuas em espaços de Sobolev clássicos, presentes na literatura.*

Teorema 62. *([2], pág. 97)* ***Friedrichs:*** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto genérico e* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *com* $1 \leq p < +\infty$*. Então existe uma sequência* $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *de* $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *tal que*

$$u_j \mid_\Omega \longrightarrow u \text{ em } L^p(\Omega)$$

e

$$\triangledown u_j \mid_\omega \longrightarrow \triangledown u \mid_\omega \text{ em } [L^p(\Omega)]^N, \forall\, \omega \subset\subset \Omega,$$

com $\omega \subset\subset \Omega$ *significando que* ω *é um aberto tal que* $\overline{\omega} \subset \Omega$ *e* $\overline{\omega}$ *é compacto.*

Dadas duas funções: f *qualquer e* $g \in C_c^\infty$*, entenderemos por convolução de* f *com* g *um operador linear que faz uma média entre elas, resultando numa terceira, mais regular que* f*, porém próxima dela. Usaremos a notação* $f * g$ *para denotar a convolução* f *com* g*.*

Teorema 63. *([4], pág. 250)* ***Aproximação local por funções suaves:*** *Considere* $U_\epsilon := \{x \in U; dist(x, \partial U) > \epsilon\}$ *e* $\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^N}\gamma\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$*, sendo*

$$\gamma(x) := \begin{cases} c\ exp\left(\frac{1}{|x|^2} - 1\right) \ \ se\ |x| < 1 \\ o\ se\ |x| \geq 1, \end{cases}$$

com $c > 0$ escolhido de modo que $\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(x)dx = 1$. Suponha que $u \in W^{k,p}(U)$ para algum $1 \leq p < \infty$, e seja

$$u^\epsilon = \eta_\epsilon * u \text{ em } U_\epsilon.$$

Então:

(i) $u^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$ para cada $\epsilon > 0$;

(ii) $u^\epsilon \longrightarrow u$ em $W^{k,p}_{loc}(U)$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$.

Teorema 64. *([4], pág. 251)* ***Aproximação global por funções suaves:*** *Seja U limitado e suponha que $u \in W^{k,p}(U)$ para algum $1 \leq p < \infty$. Então existem funções $u_m \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ tais que*

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } W^{k,p}(U).$$

Teorema 65. *([4], pág. 251)* ***Aproximação global por funções suaves definidas no fecho:*** *Sejam U limitado e ∂U de classe C^1. Suponha que $u \in W^{k,p}(U)$ para algum $1 \leq p < \infty$. Então existem funções $u_m \in C^\infty(\overline{U})$ tais que*

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } W^{k,p}(U).$$

Apresentaremos abaixo algumas notações utilizadas.

Usamos a notação $B^n(x,r)$ para representar uma bola aberta no $\mathbb{R}^n$ centrada no ponto x e de raio r. Já a notação $\overline{B^n(x,r)}$ uma bola fechada no $\mathbb{R}^n$ centrada no ponto x e de raio r. Para simplificar utilizamos, abreviadamente, B^n para a bola aberta centrada em 0 cujo raio é 1 e $\overline{B^n}$ para a bola fechada centrada em 0 cujo raio é 1. A desigualdade $u \lesssim v$ representa a existência de uma constante K tal que $u \leq Kv$, i.é., significa desigualdade a menos de uma constante. Para uma função Lebesgue integrável definida em um conjunto A mensurável de medida finita e não nula, denotamos $⨍_A u(x)dx = \frac{1}{|A|}\int_A u(x)dx$.

4.2 Uma mescla de resultados antigos

O Corolário 69 mostra que o expoente não precisa ser necessariamente monótono no sentido de Edmunds-Ráskosník [3], contanto que não decresça mais do que o permitido pela condição log-Hölder de continuidade (definida em (4.19), no Teorema 67).

No que segue, usaremos a notação log representando o logaritmo Neperiano no lugar de ℓn, da mesma maneira que [7]. Esta escolha visa preservar a relação da expressão que define a condição de continuidade "log-Hölder"(definida em (4.19) no Teorema 67) com seu nome.

Lema 66. *[7] Suponha que o expoente variável limitado p está definido em $\Omega = B^n\left(0, \frac{7}{6}\right)$ e seja $k \geq 0$. Suponha que exista $r \in \left(0, \frac{1}{12}\right)$ e $h \in (0,1)$ tais que para todo $x \in B^n$ temos*

$$p(y) - p(x) \geq -\frac{k}{log\left(\frac{1}{|x-y|}\right)}$$

para todo y no cone

$$\bigcup_{0<t\leq r} B^n(x+te_1, ht).$$

Então $C^\infty(B^n) \cap W^{1,p(.)}(B^n)$ é denso em $W^{1,p(.)}(B^n)$.

Demonstração. Seja $\phi \in C_c^\infty(B^n)$ uma função não negativa de integral unitária e fixe $\epsilon > 0$. Para uma função integrável $u : B^n\left(0, \frac{7}{6}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\delta \in (0, r)$ definimos

$$R_\delta u(x) = \int_{B^n} u(x + \delta(hz + e_1))\phi(z)dz. \tag{4.3}$$

Afirmação 01: A função em (4.3) é uma função suave.

Note que $0 < \delta < \frac{1}{12}$, que $0 < h < 1$ e que $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$. Então para todo $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in B^n$ e para todo $z = (z_1, z_2, z_3, ..., z_n) \in B^n$ temos que

$$\begin{aligned}
|(x + \delta(hz + e_1))| &< \left|(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + \frac{1}{12}\left[1(z_1, z_2, z_3, ..., z_n) + (1, 0, 0, ..., 0)\right]\right| \\
&= \left|(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + \frac{1}{12}\left(z_1 + 1, z_2, z_3, ..., z_n\right)\right| \\
&= \left|(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + \left(\frac{z_1}{12} + \frac{1}{12}, \frac{z_2}{12}, \frac{z_3}{12}, ..., \frac{z_n}{12}\right)\right| \\
&< \left|(1, 1, 1, ..., 1) + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, ..., \frac{1}{12}\right)\right| \\
&= \left|\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}, 1 + \frac{1}{12}, 1 + \frac{1}{12}, ..., 1 + \frac{1}{12}\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{14}{12}, \frac{13}{12}, \frac{13}{12}, ..., \frac{13}{12}\right)\right| < \left|\left(\frac{14}{12}, \frac{14}{12}, \frac{14}{12}, ..., \frac{14}{12}\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{6}, ..., \frac{7}{6}\right)\right|,
\end{aligned}$$

ou seja, cada coordenada do vetor $(x+\delta(hz+e_1))$ é estritamente menor que sua correspondente coordenada do vetor $\left(\frac{7}{6},\frac{7}{6},\frac{7}{6},...,\frac{7}{6}\right)$. Logo, $(x+\delta(hz+e_1)) \in B^n\left(0,\frac{7}{6}\right)$. Isto mais a hipótese que $\phi : B^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tem suporte compacto em B^n, consequentemente em $B^n\left(0,\frac{7}{6}\right)$, permite escrevermos

$$R_\delta u(x) = \int_{B^n} u(x+\delta(hz+e_1))\phi(z)dz = \int_{B^n\left(0,\frac{7}{6}\right)} u(z)\phi(x+\delta(hz+e_1))dz. \tag{4.4}$$

Temos ainda, que $R_\delta u(x)$ é uma convolução de u com ϕ.

Fixe $i \in \{1,2,3,...,n\}$ e tome k pequeno de forma que

$$0 < dist\left(x+\delta(hz+e_1)+ke_i, \partial B^n\left(0,\frac{7}{6}\right)\right) < dist\left(x+\delta(hz+e_1), \partial B^n\left(0,\frac{7}{6}\right)\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\frac{R_\delta u(x+ke_i)-R_\delta u(x)}{k} = \\
&= \int_{B^n\left(0,\frac{7}{6}\right)} \frac{[\phi(x+\delta(hz+e_1)+ke_i)-\phi(x+\delta(hz+e_1))]}{k}u(z)dz \\
&= \int_{supp\phi} \frac{[\phi(x+\delta(hz+e_1)+ke_i)-\phi(x+\delta(hz+e_1))]}{k}u(z)dz
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Agora,

$$\lim_{k\longrightarrow 0}\frac{\phi(x+\delta(hz+e_1)+ke_i)-\phi(x+\delta(hz+e_1))}{k} = \frac{\partial\phi(x+\delta(hz+e_1))}{\partial x_i}.$$

Como a integral (4.5) é tomada no compacto $supp\phi$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u*\phi)}{\partial x_i} &= \frac{\partial R_\delta u(x)}{\partial x_i} \\
&= \lim_{k\longrightarrow 0}\frac{R_\delta u(x+ke_i)-R_\delta u(x)}{k} \\
&= \lim_{k\longrightarrow 0}\int_{supp\phi}\frac{[\phi(x+\delta(hz+e_1)+ke_i)-\phi(x+\delta(hz+e_1))]}{k}u(z)dz \\
&= \int_{supp\phi}\lim_{k\longrightarrow 0}\frac{[\phi(x+\delta(hz+e_1)+ke_i)-\phi(x+\delta(hz+e_1))]}{k}u(z)dz \\
&= \int_{supp\phi}\frac{\partial\phi(x+\delta(hz+e_1))}{\partial x_i}u(z)dz \\
&= \int_{B^n\left(0,\frac{7}{6}\right)}\frac{\partial\phi(x+\delta(hz+e_1))}{\partial x_i}u(z)dz \\
&= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}*u\right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Procedendo por indução e sabendo que $\phi(z)$ é contínua, segue que para cada índice α,

$$\frac{\partial^\alpha(u*\phi)}{\partial^\alpha x_i} = \frac{\partial^\alpha R_\delta u(x)}{\partial^\alpha x_i} = \left(\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial^\alpha x_i} * u\right).$$

Em particular, temos que $R_\delta u(x) \in C^\infty(B^n)$, como queríamos.

Seja $u \in L^{p(.)}(\Omega)$. Mostraremos que $||R_\delta u - u||_{p(.)} \longrightarrow 0$. Pelo Teorema 59, é suficiente mostrar que $\rho_{p(.)}(R_\delta u - u) \longrightarrow 0$. Como ϕ é limitado temos

$$\begin{aligned}
\rho_{p(.)}(R_\delta u - u) &= \int_{B^n}\left|\int_{B^n} u(x+\delta(hz+e_1))\phi(z)dz - u(x)\right|^{p(x)} dx \\
&= \int_{B^n}\left|\int_{B^n} u(x+\delta(hz+e_1))\phi(z)dz - u(x).1\right|^{p(x)} dx \\
&= \int_{B^n}\left|\int_{B^n} u(x+\delta(hz+e_1))\phi(z)dz - u(x).\int_{B^n}\phi(z)dz\right|^{p(x)} dx \\
&= \int_{B^n}\left|\int_{B^n} u(x+\delta(hz+e_1))\phi(z)dz - \int_{B^n} u(x)\phi(z)dz\right|^{p(x)} dx \\
&= \int_{B^n}\left|\int_{B^n} [u(x+\delta(hz+e_1) - u(x)]\phi(z)dz\right|^{p(x)} dx \\
&\leq \int_{B^n}\left(\int_{B^n} |[u(x+\delta(hz+e_1) - u(x)]\phi(z)|\, dz\right)^{p(x)} dx \\
&\lesssim \int_{B^n}\left(\int_{B^n} |u(x+\delta(hz+e_1)) - u(x)|\, dz\right)^{p(x)} dx \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Denote $B = B^n(x+\delta e_1, h\delta)$. Então,

$$\begin{aligned}
\rho_{p(.)}(R_\delta u - u) &\lesssim \int_{B^n}\left(\int_{B^n} |u(x+\delta(hz+e_1)) - u(x)|\, dz\right)^{p(x)} dx \\
&= \int_{B^n}\left(|B| \fint_B |u(z) - u(x)|\, dz\right)^{p(x)} dx \\
&\lesssim \int_{B^n}\left(\fint_B |u(z) - u(x)|\, dz\right)^{p(x)} dx \\
&= \int_{B^n}\left(\fint_B 1.\, |u(z) - u(x)|\, dz\right)^{p(x)} dx \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Agora considere o expoente p_B^- e sejam a e p_B^- expoentes conjugados. Usando o Teorema 47 (Desigualdade de Hölder), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\rho_{p(.)}(R_\delta u - u) &\lesssim \int_{B^n}\left(\fint_B 1.\left|u(z)-u(x)\right| dz\right)^{p(x)} dx\\
&\lesssim \int_{B^n}\left(\frac{1}{|B|}\int_B 1.\left|u(z)-u(x)\right| dz\right)^{p(x)} dx\\
&\leq \int_{B^n}\left[\frac{1}{|B|}\left(\int_B |1|^a dx\right)^{\frac{1}{a}}\left(\int_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-} dz\right)^{\frac{1}{p_B^-}}\right]^{p(x)} dx\\
&= \int_{B^n}\left[\frac{1}{|B|}|B|^{\frac{1}{a}}\left(\int_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-} dz\right)^{\frac{1}{p_B^-}}\right]^{p(x)} dx\\
&\lesssim \int_{B^n}\left[\frac{1}{|B|}\left(\int_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-} dz\right)^{\frac{1}{p_B^-}}\right]^{p(x)} dx\\
&\lesssim \int_{B^n}\left[\left(\frac{1}{|B|}\int_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-} dz\right)^{\frac{1}{p_B^-}}\right]^{p(x)} dx\\
&= \int_{B^n}\left(\fint_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-} dz\right)^{\frac{p(x)}{p_B^-}} dx\\
&= \int_{B^n}\left(\frac{1}{|B|}\right)^{\frac{p(x)}{p_B^-}}\left(\int_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-} dz\right)^{\frac{p(x)}{p_B^-}} dx \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Note que se tomarmos δ suficientemente pequeno, $u(z)$ fica tão próximo de $u(x)$ quanto necessário. Assim, podemos escolher δ uniformemente de modo que

$$\int_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-} dz \leq 1.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\rho_{p(.)}(R_\delta u - u) &\lesssim \int_{B^n}\left(\frac{1}{|B|}\right)^{\frac{p(x)}{p_B^-}}\left(\int_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-} dz\right)^{\frac{p(x)}{p_B^-}} dx\\
&\leq \int_{B^n}\left(\frac{1}{|B|}\right)^{\frac{p(x)}{p_B^-}} 1^{\frac{p(x)}{p_B^-}} dx\\
&\lesssim \int_{B^n}\left(\frac{1}{|B|}\right)^{\frac{p(x)}{p_B^-}} dx\\
&\lesssim \int_{B^n}\left(\frac{1}{|B|}\right)^{\frac{p(x)}{p_B^-}} \int_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-} dzdx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \int_{B^n} \left(\frac{1}{(h\delta)^n}\right)^{\frac{p(x)}{p_B^-}} \int_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-}\, dzdx \\
&= \int_{B^n} (h\delta)^{-n\frac{p(x)}{p_B^-}} \int_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-}\, dzdx \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Por hipótese temos que

$$
p(y)-p(x) \geq -\frac{k}{log\left(\frac{1}{|x-y|}\right)}, \ \forall y \in B,
$$

o que significa que p é "log-Hölder contínua" com respeito a x.

Afirmação 02: Suponha que $\delta \leq \frac{1}{|x-y_0|}$, onde $y_0 \in \overline{B}$ é tal que $p(y_0)=p_B^-$. Então $\delta^{\frac{p_B^- - p(x)}{p_B-}}$ é limitado por uma constante C que não depende nem de δ nem de x.

De fato, note que vale $p_B^- - p(x) \geq \frac{k}{log\delta}$, pois $p_B^- - p(x) \geq -\frac{k}{log\delta}$ e $log\delta < 0$. Então,

$$
\begin{aligned}
p_B^- - p(x) \geq \frac{k}{log\delta} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(p_B^- - p(x)\right) log\delta \leq k \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{p_B^- - p(x)}{p_B^-}\right) log\delta \leq \frac{k}{p_B^-} \\
&\Leftrightarrow \quad log\delta^{\frac{p_B^- - p(x)}{p_B^-}} \leq \frac{k}{p_B^-} \\
&\Leftrightarrow \quad \delta^{\frac{p_B^- - p(x)}{p_B^-}} \leq e^{\frac{k}{p_B^-}}. \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Tome $C = e^{\frac{k}{p_B^-}}$ e a Afirmação 02 está provada.

A seguir reescrevemos a última expressão em (4.10) e, no que segue, utilizamos a Afirmação 02.

$$
\begin{aligned}
\rho_{p(.)}(R_\delta u - u) &\lesssim \int_{B^n} (h\delta)^{-n\frac{p(x)}{p_B^-}} \int_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-}\, dzdx \\
&= \int_{B^n} (h\delta)^{-n\frac{p(x)}{p_B^-}} |B| ⨍_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-}\, dzdx \\
&= \int_{B^n} (h\delta)^{-n\frac{p(x)}{p_B^-}} (h\delta)^n ⨍_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-}\, dzdx \\
&= \int_{B^n} (h\delta)^{-n\frac{p(x)}{p_B^-}+n} ⨍_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-}\, dzdx \\
&= \int_{B^n} (h\delta)^{-n\frac{p(x)}{p_B^-}+n\frac{p_B^-}{p_B^-}} ⨍_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-}\, dzdx \\
&= \int_{B^n} (h\delta)^{n\frac{p_B^- - p(x)}{p_B^-}} ⨍_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-}\, dzdx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \int_{B^n} \fint_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-}\, dzdx \\
&= \int_{B^n} \frac{1}{|B|} \int_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-}\, dzdx \\
&\lesssim \int_{B^n} \int_B |u(z)-u(x)|^{p_B^-}\, dzdx \\
&= \int_{B^n} \int_{B^n} |u(x+\delta(hz+e_1))-u(x)|^{p_B^-}\, dzdx \\
&= \int_{B^n} \int_{B^n} |u(x+\delta(hz+e_1))-u(x)|^{p_B^-}\, dxdz
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Como $1+|u(x)|^{p(x)}$ é uma função Lebesgue integrável, podemos escolher $\tau > 0$ tal que

$$
\int_V 1+|u(x)|^{p(x)}dx < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } V \subset B^n \text{ com } |V| < \tau. \tag{4.13}
$$

Para $z \in B^n$ fixo, a desigualdade em (4.13) continua válida, i. é.,

$$
\int_V 1+|u(x+\delta(hz+e_1))|^{p(x+\delta(hz+e_1))}dx < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.14}
$$

O que é verdade pois o transladado de V também satisfaz $|V+\delta(hz+e_1)| < \tau$.

Somando as desigualdades (4.13) e (4.14) obtemos

$$
\int_V 2+|u(x+\delta(hz+e_1))|^{p(x+\delta(hz+e_1))}+|u(x)|^{p(x)}dx < \epsilon. \tag{4.15}
$$

Como u é mensurável, pelo Teorema 34 existe um conjunto $U \subset B^n\left(0,\frac{7}{6}\right)$ tal que u é contínua em $B^n\left(0,\frac{7}{6}\right)\backslash U$ e $|U| < \frac{\tau}{2}$. Agora, para δ suficientemente pequeno temos que se $x, y \in \overline{B^n}\backslash U$ com $|x-y| < \delta$ então $|u(y)-u(x)| < \epsilon$. Para $z \in B^n$ denotamos por U_z o conjunto dos pontos $x \in B^n$ para os quais $x \in U$ ou $x+\delta(hz+e_1) \in U$. Note que $|U_z| < \tau$ para todo z. Com estas informações, continuamos com os cálculos pausados em (4.12):

$$
\begin{aligned}
\rho_{p(.)}(R_\delta u - u) &\lesssim \int_{B^n}\int_{B^n} |u(x+\delta(hz+e_1))-u(x)|^{p_B^-}\, dxdz \\
&\leq \int_{B^n}\int_{B^n\backslash U_z} \epsilon^{p_B^-} dxdz \\
&\quad + \int_{B^n}\int_{U_z} |u(x+\delta(hz+e_1))-u(x)|^{p_B^-}\, dxdz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{B^n}\int_{B^n\backslash U_z} max\{\epsilon, \epsilon^{p^+}\}dxd \\
&\quad + \int_{B^n}\int_{U_z}(|u(x+\delta(hz+e_1))|+|u(x)|)^{p_B^-}dxdz \\
&= max\{\epsilon, \epsilon^{p^+}\}|B^n\backslash U||B^n| \\
&\quad + \int_{B^n}\int_{U_z}(|u(x+\delta(hz+e_1))|+|u(x)|)^{p_B^-}dxdz \\
&\lesssim max\{\epsilon, \epsilon^{p^+}\} \\
&\quad + \int_{B^n}\int_{U_z}|u(x+\delta(hz+e_1))|^{p_B^-}+|u(x)|^{p_B^-}\,dxdz. \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

Afirmação 03: $|u(x)|^{p_B^-} \leq 1 + |u(x)|^{p(x)}$.

De fato, se $|u(x)| \geq 1$ não há o que mostrar, pois $p_B^- \leq p(x)$. Se $|u(x)| < 1$ e sabendo que $p_B^- \geq 1$ segue que $|u(x)|^{p_B^-} < 1^{p_B^-} = 1 \Rightarrow |u(x)|^{p_B^-} \leq 1 + |u(x)|^{p(x)}$, como queríamos.

Afirmação 04: $|u(x+\delta(hz+e_1))|^{p_B^-} \leq 1 + |u(x+\delta(hz+e_1))|^{p(x+\delta(hz+e_1))}$.

A demonstração da Afirmação 04 é análoga à da Afirmação 03, por este motivo está omitida.

Agora continuamos os cálculos em (4.16) usando as afirmações 03 e 04 e em seguida a desigualdade (4.15):

$$
\begin{aligned}
\rho_{p(.)}(R_\delta u - u) &\lesssim max\{\epsilon, \epsilon^{p^+}\} + \int_{B^n}\int_{U_z}|u(x+\delta(hz+e_1))|^{p_B^-}+|u(x)|^{p_B^-}\,dxdz \\
&\leq max\{\epsilon, \epsilon^{p^+}\} \\
&\quad + \int_{B^n}\int_{U_z} 1+|u(x+\delta(hz+e_1))|^{p(x+\delta(hz+e_1))}+1+|u(x)|^{p(x)}\,dxdz \\
&= max\{\epsilon, \epsilon^{p^+}\} \\
&\quad + \int_{B^n}\int_{U_z} 2+|u(x+\delta(hz+e_1))|^{p(x+\delta(hz+e_1))}+|u(x)|^{p(x)}\,dxdz \\
&\leq max\{\epsilon, \epsilon^{p^+}\} + \int_{B^n}\epsilon dz. \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Donde concluímos que

$$
\rho_{p(.)}(R_\delta u - u) \lesssim max\{\epsilon, \epsilon^{p^+}\} + \int_{B^n}\epsilon dz, \qquad (4.18)
$$

i.é., $\rho_{p(.)}(R_\delta u - u)$ tende a zero se fizermos $\delta \longrightarrow 0$ (Vale ressaltar que a demonstração vale qualquer que seja $\epsilon > 0$ arbitrariamente escolhido). Isto prova que, nas condições dadas, $C^\infty(B^n) \cap L^{p(.)}(\Omega)$ é denso em $u \in L^{p(.)}(\Omega)$.

Para completar a prova ainda precisamos mostrar ue $||R_\delta u - u||_{1,p(.)} \longrightarrow 0$ para uma função u no espaço de Sobolev.

Usando (4.4) e (4.6) mostramos que $\partial_i[R_\delta u] = R_\delta[\partial_i u]$, onde ∂_i representa a diferenciação com respeito a i-ésima coordenada.

Assim o resultado demonstrado para funções em $L^{p(.)}(\Omega)$ é aplicável a cada $\partial_i u$ e, portanto, $|\bigtriangledown u| \in L^{p(.)}(\Omega)$. Donde concluímos que $||R_\delta u - u||_{1,p(.)} \longrightarrow 0$, como queríamos.

$\square$

Teorema 67. *[7] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que para cada ponto $x \in \Omega$ existam quatro quantidades: $r_x \in \left(0, \frac{1}{2}min\{1, d(x, \partial\Omega)\}\right)$, $h_x \in (0,1)$, $\xi_x \in S^{n-1}$ e $K_x \in [0, \infty)$, tais que para todo $y \in B^n(x, r_x)$ temos*

$$p(z) - p(y) \geq -\frac{K_x}{log\left(\frac{1}{|y-z|}\right)} \tag{4.19}$$

para todos pontos z no cone

$$C(y) = \bigcup_{0 \leq t \leq r_x} B^n(y + t\xi_x, h_x t).$$

Então $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p(.)}(\Omega)$ é denso em $W^{1,p(.)}(\Omega)$.

Demonstração. Seja $B_x = B\left(x, \frac{r_x}{10}\right)$. Para cada $x_i \in \Omega$ defina $B_i^{'} = B_{x_i}$. Como $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Lindelof e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ então se tomarmos $\{5B_i^{'} : \forall i \in \Omega\}$ uma cobertura de Ω de modo que as bolas $B_i^{'}s$ são disjuntas entre si, existe uma subcobertura enumerável $\bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i^{'} = \Omega$. Defina $B_i = 6B_i^{'}$ e $B_i^* = 7B_i^{'}$. Note que $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B_i^*} = \Omega$. Pela disjunção das bolas $B_i^{'}$, segue que qualquer ponto $x \in \Omega$ está contido em no máximo θ bolas B_i^*. Então existe uma partição da unidade por funções suaves ϕ_i, $1 \leq i \leq s$, tais que ϕ_i tem suporte em B_i e $|\bigtriangledown \phi_i|$ é limitado por $L_i \geqslant 1$.

Fixe $u \in W^{1,p(.)}(\Omega)$ e $\epsilon > 0$. Pelo Lema 66 podemos escolher $v_i \in W^{1,p(.)}(B_i) \cap C^\infty(B_i)$ tal que

$$||u - v_i||_{W^{1,p(.)}(B_i)} < 2^{-i}\frac{\epsilon}{L_i}.$$

Defina $v = \sum_{i=1}^{s} \phi_i v_i$. Como no máximo finitos ϕ_i são não nulos na vizinhança de qualquer ponto, vemos que v é suave. Para $i > s$ considere L_i constante. Logo,

$$\begin{aligned}
||u-v||_{W^{1,p(.)}(B_i)} &= \left|\left|\sum_{i=1}^{s} \phi_i u - \sum_{i=1}^{s} \phi_i v_i\right|\right|_{W^{1,p(.)}(B_i)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{s} ||\phi_i(u-v_i)||_{W^{1,p(.)}(B_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{s} ||\phi_i||_{W^{1,p(.)}(B_i)} ||(u-v_i)||_{W^{1,p(.)}(B_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{s} \left(||\phi_i||_{L^{p(.)}(B_i)} + ||\bigtriangledown \phi_i||_{L^{p(.)}(B_i)}\right) ||(u-v_i)||_{W^{1,p(.)}(B_i)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{s} (1+L_i)\, ||(u-v_i)||_{W^{1,p(.)}(B_i)} \\
&< \sum_{i=1}^{\infty} (1+L_i)\, 2^{-i} \frac{\epsilon}{L_i} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\epsilon}{L_i} + 2^{-i}\epsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\epsilon + 2^{-i}\epsilon \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} + \frac{\epsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^i} = 2\epsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2\epsilon \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}\right) - 1\right] \\
&= 2\epsilon(2-1) = 2\epsilon.
\end{aligned}$$

□

Observação 68. *Se usarmos $K_x \equiv 0$ no Teorema 67, recupera-se o resultado de Edmunds e Ráskosník [3].*

Corolário 69. *[7] Seja $r \geqslant 0$ e monótono no sentido de Edmunds-Rákosnik (i.é., satisfaz o Teorema 67 para o caso $K_x \equiv 0$), e seja q uma função log-Hölder contínua, ambas definidas em Ω e tal que $p = q + r \geqslant 1$. Então $C^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,p(.)}(\Omega)$ é denso em $W^{1,p(.)}(\Omega)$.*

Demonstração. Como q é log-Hölder contínua, segue que

$$|q(x) - q(y)| \leq \frac{C}{-log|x-y|},\ |x-y| \leq \frac{1}{2}. \tag{4.20}$$

Como $r \geq 0$ é monótono no sentido de Edmunds-Rákosnik então para todo $x \in \Omega$, $r_x \in \left(0, \frac{1}{2}min\{1, d(x, \partial\Omega)\}\right)$, $h_x \in (0,1)$ e $\xi_x \in S^{n-1}$ satisfazendo que para todo $y \in B^n(x, r_x)$

temos

$$r(z) - r(y) \geq 0$$

para todo ponto z no cone

$$C(y) = \bigcup_{0<t\leq r_x} B^n(y + t\xi_x, h_x t).$$

Afirmação 01: $|z - y| < \frac{1}{2}$, $\forall z \in C(y)$.

De fato, tome $z \in C(y)$ arbitrário. Temos $z \in B^n(y + t\xi_x, h_x t)$, para todo $0 < t \leq r_x$. Ou seja,

$$|z - (y + t\xi_x)| < h_x t, \ \forall \ 0 < t \leq r_x.$$

Além disso, $h_x t < r_x < \frac{1}{2}$ para todo $h_x \in (0,1)$ e $0 < t \leq r_x$. Logo,

$$|z - y - t\xi_x)| < \frac{1}{2},$$

qualquer que seja $0 < t \leq r_x$. Daí,

$$\lim_{t\longrightarrow 0} |z - y - t\xi_x)| < \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ |z - y| < \frac{1}{2}.$$

Disto mais (4.20), concluímos

$$|q(z) - q(y)| \leq \frac{C}{-log|z-y|}.$$

Assim, para todo $y \in B^N(x, r_x)$ e $z \in C(y)$:

$$\begin{aligned} p(z) - p(y) &= [q(z) + r(z)] - [q(y) + r(y)] = [q(z) - q(y)] + [r(z) - r(y)] \\ &\geq \frac{-C}{-log|z-y|} + [r(z) - r(y)] \geq \frac{-C}{-log|z-y|} = \frac{-C}{log\left(\frac{1}{|y-z|}\right)}. \end{aligned}$$

Tome $K_x = C$ e o resultado segue do Teorema 67. $\square$

Exemplo 70. *[7] Considere o quadrado unitário $Q = [-1,1]\times[-1,1]$ e para $x = (x_1, x_2) \in Q$, defina as funções:*

$$\begin{array}{rcl} r: & Q \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \longmapsto & r(x) = \chi_{\{x\in Q: x_1<0\}} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} q: & Q \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \longmapsto & q(x) = 1 + x_1 + |x_2|. \end{array}.$$

Temos que r é monótona no sentido de Edmunds e

Afirmação 01: q é uma função log-Hölder contínua.

De fato, tome $|x-y| \leq \frac{1}{2}$. Note que $log|x-y| < 0 \Rightarrow -log|x-y| > 0$, então

$$\begin{aligned} |q(x)-q(y)| &= |1+x_1+|x_2|-1-y_1-|y_2|| = |x_1-y_1+|x_2|-|y_2|| \\ &\leq |x_1-y_1|+||x_2|-|y_2|| \leq |x_1-y_1|+|x_2-y_2| \leq |x-y| \leq \frac{1}{2} \leq \frac{C}{-log|x-y|} \end{aligned}$$

para uma constante $C > 0$ suficientemente grande.

Além disso sabemos que $r \geq 0$ por definição e que

$$q+r = 1+x_1+|x_2|+\chi_{\{x\in Q: x_1<0\}} = \begin{cases} x_1+\chi_{\{x\in Q:x_1<0\}}+1+|x_2| = x_1+2+|x_2| > 1 \ se\ x_1 < 0; \\ 1+x_1+|x_2|+\chi_{\{x\in Q:x_1<0\}} > 1 \ se\ x_1 \geq 0, \end{cases}$$

i. é., $q+r \geq 1$.

Isto implica que estamos dentro das hipóteses do Colorário 69 e, consequentemente, $C^\infty(\Omega)\cap W^{1,p(.)}(\Omega)$ é denso em $W^{1,p(.)}(\Omega)$.

4.3 Um novo tipo de condição

Nesta seção apresentamos resultados envolvendo a dependência exclusiva do expoente p da n-ésima coordenada dos pontos de Ω e da distancia do ponto até a origem (i.é., de $|x|$). Estes resultados são combinados no Teorema 78.

Lema 71. *[7] Seja $Q = (-1,1)^n$ e $p_Q^+ < \infty$ o sup ess de p em Q. Suponha que o expoente p depende apenas da n-ésima coordenada. Então $C(Q)\cap W^{1,p(.)}(Q)$ é denso em $W^{1,p(.)}(Q)$.*

Demonstração. Denotaremos por dx, $dm_{n-1}(x)$ e $dm_1(x)$ a integração com respeito às medidas de Lebesgue n, $(n-1)$ e 1-dimensional, respectivamente. Representaremos a n-ésima coordenada de $x \in \mathbb{R}^n$ por x_n. Usaremos $B = B^n(0,1)\cap\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ para denotar a bola (n-1)-dimensional que está no "plano" $x_n = 0$.

Primeiramente faremos a demonstração para o caso em que $u \in W^{1,p(.)}(Q)$ tem suporte compacto em Q. Neste caso, considere ϵ pequeno menor que a distância entre o suporte de u e ∂Q. Seja $\phi : B \longrightarrow [0, \infty)$ suave de suporte compacto com

$$\int_B \phi dm_{n-1} = 1.$$

Defina uma convolução (n-1)-dimensional por

$$u_\epsilon(x) = \int_B u(x + \epsilon y)\phi(y)dm_{n-1}(y).$$

Note que para todo $y \in B$ temos $y_i < 1$, então $y_i\epsilon < \epsilon$ para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Então calcular uma integral da função $u(x+\epsilon y)$ é equivalente a calcular a mesma integral para $u(x)$ pois para cada $y \in B$, fazer $x+\epsilon y$ para todo $x \in Q$ apenas translada Q em uma escala que não afeta o suporte da função u. Para isso bata definir u' por $u'(x + \epsilon y)|_Q = u(x + \epsilon y)$ e $u'(x + \epsilon y) = 0$ para pontos $(x + \epsilon y) \notin Q$. Para facilitar, chamaremos u' de u mesmo. Então a convolução acima está bem definida.

Afirmação 01: u_ϵ é contínua (suave) no "plano" ortogonal ao eixo x_n.

A demonstração da Afirmação 01 esta omitida pois usa um argumento análogo à demonstração da Afirmação 01 do Lema 66.

Afirmação 02: u é absolutamente contínua em quase todas linhas paralelas aos eixos de coordenadas.

Como $u \in W^{1,p(.)}(Q)$ então u tem derivadas fracas $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p(.)}$, em particular temos que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1$. Assim, a Afirmação 02 segue diretamente do Teorema 40.

Considere dois pontos diferentes na coordenada x_n. Então,

$$\begin{aligned}
|u_\epsilon(x) - u_\epsilon(x + \delta e_n)| &= \left| \int_B u(x + \epsilon y)\phi(y)dm_{n-1}(y) - \int_B u(x + \delta e_n + \epsilon y)\phi(y)d_{m_{n-1}}(y) \right| \\
&= \left| \int_B [u(x + \epsilon y) - u(x + \delta e_n + \epsilon y)]\, \phi(y)dm_{n-1}(y) \right| \\
&\leq \int_B |[u(x + \epsilon y) - u(x + \delta e_n + \epsilon y)]\, \phi(y)|\, dm_{n-1}(y) \\
&\lesssim \int_B |u(x + \epsilon y) - u(x + \delta e_n + \epsilon y)|\, dm_{n-1}(y) \\
&= \int_B |u(x + \delta e_n + \epsilon y) - u(x + \epsilon y)|\, dm_{n-1}(y). \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 41 segue que

$$
\begin{aligned}
|u_\epsilon(x) - u_\epsilon(x+\delta e_n)| &\lesssim \int_B |u(x+\delta e_n+\epsilon y) - u(x+\epsilon y)|\, dm_{n-1}(y) \\
&= \int_B \left| \int_0^\delta \bigtriangledown u(x+\epsilon y+te_n) d_{m_1}(t) \right| dm_{n-1}(y) \\
&= \int_B \left| \int_0^\delta \bigtriangledown u(x+\epsilon y+te_n) d_{m_1}(t) \right| dm_{n-1}(y) \\
&\leq \int_B \int_0^\delta |\bigtriangledown u(x+\epsilon y+te_n)|\, d_{m_1}(t) dm_{n-1}(y) \\
&= \int_{B\times[0,\frac{\delta}{\epsilon}]} |\bigtriangledown u(x+\epsilon y)| dy. \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Como $\bigtriangledown u \in L^1(Q)$, a última integral tende a zero quando $\delta \longrightarrow 0$. Portanto u_ϵ é uniformemente contínua na direção de e_n e, consequentemente, também é em todo Q.

Resta mostrar que $u_\epsilon \longrightarrow u$ no espaço de Sobolev. Defina

$$v_x(y) = u(x+\epsilon y) - u(x) \text{ e } M_\epsilon(x) = \int_B |v_x(y)|^{p(x)} dm_{n-1}(y).$$

Para cada $x \in Q$ fixado segue que

$$
\begin{aligned}
\int_Q M_\epsilon(x)dx &= \int_Q \int_B |u(x+\epsilon y) - u(x)|^{p(x)} dm_{n-1}(y)dx \\
&= \int_Q \int_B |u(x+\epsilon y) + (-u(x))|^{p(x)} dm_{n-1}(y)dx \\
&\leq \int_Q \int_B 2^{p(x)-1} |u(x+\epsilon y)|^{p(x)} + |-u(x)|^{p(x)} dm_{n-1}(y)dx \\
&\lesssim \int_Q \int_B |u(x+\epsilon y)|^{p(x)} + |-u(x)|^{p(x)} dm_{n-1}(y)dx \\
&= \int_Q \int_B |u(x+\epsilon y)|^{p(x)} + |u(x)|^{p(x)} dm_{n-1}(y)dx \\
&= \int_Q \int_B |u(x+\epsilon y)|^{p(x)} dm_{n-1}(y)dx + \int_Q \int_B |u(x)|^{p(x)} dm_{n-1}(y)dx \\
&= \int_Q \int_B |u(x+\epsilon y)|^{p(x)} dm_{n-1}(y)dx + \int_Q |u(x)|^{p(x)} dx \int_B dm_{n-1}(y) \\
&= \int_B \int_Q |u(x+\epsilon y)|^{p(x)} dx dm_{n-1}(y) + \int_Q |u(x)|^{p(x)} dx \int_B dm_{n-1}(y) \\
&= \int_B \rho_{p(.)}(u) dm_{n-1}(y) + \rho_{p(.)}(u) \int_B dm_{n-1}(y) \\
&= \rho_{p(.)}(u) \int_B dm_{n-1}(y) + \rho_{p(.)}(u) \int_B dm_{n-1}(y)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \rho_{p(.)}(u)m_{n-1}(B) + \rho_{p(.)}(u)m_{n-1}(B) \\ &= 2m_{n-1}(B)\rho_{p(.)}(u). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Assim, $M_\epsilon \in L^1(Q)$. Para M>0 seja $E_M \subset$ Q o conjunto de todos $x \in Q$ para os quais $M_\epsilon(x) > M$.

Afirmação 03: $|E_M| \leq \frac{C}{M}$.

De fato, por (4.23),

$$M|E_M| = \int_{E_M} M dx < \int_{E_M} M_\epsilon dx < C \Rightarrow |E_M| \leq \frac{C}{M}.$$

Para o $\epsilon > 0$ fixado no início podemos, pelo Lema 26, escolher $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que se tomarmos M suficientemente grande na Afirmação 03 de forma que $|E_M| < \delta$ então

$$\int_{E_M} M_\epsilon dx < \epsilon. \tag{4.24}$$

Afirmação 04: $v_x \in L^{p(.)}_{m_{n-1}}(B)$ para q.t.p. (quase todos os pontos) x.

De fato,

$$\begin{aligned} \int_B |v_x(y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y) &= \int_B |u(x+\epsilon y) - u(x)|^{p(y)} dm_{n-1}(y) \\ &\leq \int_B \left(|u(x+\epsilon y)| + |-u(x)|\right)^{p(y)} dm_{n-1}(y) \\ &= \int_B \left(|u(x+\epsilon y)| + |u(x)|\right)^{p(y)} dm_{n-1}(y) \\ &\leq \int_B 2^{p_B^+ - 1}\left(|u(x+\epsilon y)|^{p(y)} + |u(x)|^{p(y)}\right) dm_{n-1}(y) \\ &\lesssim \int_B \left(|u(x+\epsilon y)|^{p(y)} + |u(x)|^{p(y)}\right) dm_{n-1}(y) \\ &= \int_B |u(x+\epsilon y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y) + \int_B |u(x)|^{p(y)} dm_{n-1}(y) \\ &< \infty, \end{aligned} \tag{4.25}$$

pois $u \in W^{1,p(.)}(Q)$ implica que as integrais $\int_Q |u(x+\epsilon y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y)$ e $\int_Q |u(x)|^{p(y)} dm_{n-1}(y)$ são finitas e, como $B \subset Q$, também o são $\int_B |u(x+\epsilon y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y)$ e $\int_B |u(x)|^{p(y)} dm_{n-1}(y)$.

Segue que

$$\int_Q |u_\epsilon(x) - u(x)|^{p(x)} dx \leq \int_Q \left| \int_B u(x+\epsilon y)\phi(y) dm_{n-1}(y) - u(x) \right|^{p(x)} dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_Q \left| \int_B u(x+\epsilon y)\phi(y)dm_{n-1}(y) - u(x)\int_B \phi(y)dm_{n-1}(y) \right|^{p(x)} dx \\
&= \int_Q \left| \int_B u(x+\epsilon y)\phi(y)dm_{n-1}(y) - \int_B u(x)\phi(y)dm_{n-1}(y) \right|^{p(x)} dx \\
&= \int_Q \left| \int_B [u(x+\epsilon y) - u(x)]\phi(y)dm_{n-1}(y) \right|^{p(x)} dx \\
&= \int_Q \left| \int_B v_x(y)\phi(y)dm_{n-1}(y) \right|^{p(x)} dx \\
&\leq \int_Q \left(\int_B |v_x(y)\phi(y)|dm_{n-1}(y) \right)^{p(x)} dx.
\end{aligned}
$$

Observe que na expressão $\left(\int_B |v_x(y)\phi(y)|dm_{n-1}(y)\right)^{p(x)}$, $p(x)$ é constante. Tome $\frac{1}{p(x)}$ e $\frac{1}{q(x)}$ expoentes conjugados e então

$$
\begin{aligned}
\int_Q |u_\epsilon(x) - u(x)|^{p(x)} dx &\leq \int_Q \left[\left(\int_B |v_x(y)|^{p(x)} dm_{n-1}(y) \right)^{\frac{1}{p(x)}} \right. \\
&\qquad \left. \left(\int_B |\phi(y)|^{q(x)} |dm_{n-1}(y) \right)^{\frac{1}{q(x)}} \right] dx \\
&\lesssim \int_Q \int_B |v_x(y)|^{p(x)} dm_{n-1}(y) dx, \\
&= \int_Q M_\epsilon(x) dx \\
&= \int_{E_M} M_\epsilon(x) dx + \int_{Q \backslash E_M} M_\epsilon(x) dx,
\end{aligned}
$$

e usando (4.24) concluímos que

$$
\int_Q |u_\epsilon(x) - u(x)|^{p(x)} \lesssim \epsilon + \int_{Q \backslash E_M} M_\epsilon(x) dx. \tag{4.26}
$$

Para $x \in Q \backslash E_M$ temos que $||v_x||_{L^{p(\cdot)}_{m_{n-1}}(B)}$ é uniformemente limitado.
De fato, para $x \in Q \backslash E_M$ temos que $M_\epsilon(x) \leq M$.

Como o operador "shift" é contínuo, segue que

$$
||u(x+\epsilon y) - u(x)||_{L^{p(y)}_{m_{n-1}}(B)} \longrightarrow 0
$$

uniformemente em $Q \backslash E_M$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$. Assim, o segundo termo em (4.26) tende a zero quando $\epsilon \longrightarrow 0$. Portanto, $u_\epsilon \longrightarrow u$ em $L^{p(\cdot)}(Q)$.

Afirmação 05: $\partial_i u_\epsilon(x) = \int_B [\partial_i u(x+\epsilon y)]\phi(y) dm_{n-1}(y)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\epsilon(x)}{\partial x_i} &= \lim_{k\longrightarrow 0} \frac{u_\epsilon(x+ke_i)-u_\epsilon(x)}{k} \\
&= \lim_{k\longrightarrow 0} \int_B \frac{u(x+ke_i+\epsilon y)-u(x+\epsilon y)}{k}\phi(y))dm_{n-1}(y) \\
&= \int_B \lim_{k\longrightarrow 0} \frac{u(x+ke_i+\epsilon y)-u(x+\epsilon y)}{k}\phi(y))dm_{n-1}(y) \\
&= \int_B \frac{\partial u(x+\epsilon y)}{\partial x_i}\phi(y)dm_{n-1}(y), \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

como queríamos.

A identidade (4.27) garante que o argumento anterior aplica-se a todas as funções coordenadas do $\bigtriangledown u$, e então $|| \bigtriangledown (u-u_\epsilon)||_{p(.)} \longrightarrow 0$ com $\epsilon \longrightarrow 0$ e, consequentemente,

$$||u-u_\epsilon||_{1,p(.)} = ||u-u_\epsilon||_{p(.)} + \sum_{i=1}^{n} ||\partial_i u - \partial_i u_\epsilon||_{p(.)} \longrightarrow 0, \qquad (4.28)$$

quando $\epsilon \longrightarrow 0$. Assim, $u_\epsilon \in W^{1,p(.)}(Q) \cap C(Q)$ é a aproximação da função de suporte compacto u.

Faremos agora a demonstração para o caso em que $u \in W^{1,p(.)}(Q)$ não é de suporte compacto.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ seja Q_i o cubo centrado na origem cujos lados medem $2-2^{1-i}$, i. é.: Q_1 tem lados de comprimento 1, Q_2 tem lados de comprimento $\frac{3}{2}$, Q_3 tem lados de comprimento $\frac{7}{4}$, Q_4 tem lados de comprimento $\frac{15}{8}$ e assim sucessivamente. Defina $A_2 = Q_2$ e $A_i = Q_i \backslash Q_{i-2}$ para $i > 2$, i. é.: $A_2 = Q_2$, $A_3 = Q_3 \backslash Q_1$, $A_4 = Q_4 \backslash Q_2$ e assim sucessivamente.

Considere agora uma partição da unidade por funções ϕ_i com suporte compacto em A_i. Note que a função $\phi_i u$ tem suporte compacto em A_i, então o argumento usado para o caso de funções com suporte compacto é válido. Isto implica que existem $v_i \in Q$ com suporte em A_i tais que $||\phi_i u - v_i||_{1,p(.)} \leq 2^{1-i}\epsilon$. Considere a função contínua $v = \sum_{i=2}^{\infty} v_i$, então

$$||u-v||_{1,p(.)} \leq \left|\left| u\sum_{i=2}^{\infty}\phi_i - \sum_{i=2}^{\infty} v_i \right|\right|_{1,p(.)} \leq \left|\left| \sum_{i=2}^{\infty}\phi_i u - v_i \right|\right|_{1,p(.)} \leq \sum_{i=2}^{\infty} ||\phi_i u - v_i||_{1,p(.)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=2}^{\infty} 2^{1-i}\epsilon \leq 2\epsilon \sum_{i=2}^{\infty} 2^{-i} = 2\epsilon \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2\epsilon \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \right) - 1 - \frac{1}{2} \right] \\
&= 2\epsilon \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \right) = 2\epsilon \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \right) = 2\epsilon \left(2 - \frac{3}{2} \right) = 2\epsilon \frac{1}{2} = \epsilon. \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

$\square$

Definição 72. *[7] Uma aplicação $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser L-bilipschitz se existe uma constante $L > 0$ tal que*

$$\frac{1}{L}|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|,$$

para todo $x, y \in Q$.

Lema 73. *Uma função $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ L-bilipschitz satisfaz:*

(i) é bijetora sobre sua imagem.

De fato, se $f(x) = f(y)$ então

$$0 \leq |x-y| \leq L|f(x) - f(y)| = 0 \Rightarrow x = y,$$

o que mostra a injetividade. Além disso, para cada $z \in f(Q)$, é imediato que existe um $x \in Q$ tal que $f(x) = z$, o que mostra a sobrejetividade. Portanto f é bijetora sobre sua imagem.

(ii) sua inversa também é uma função Lipschitz.

De fato, tome $f(x), f(y) \in f(Q)$, então $|f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(y))| = |x-y|$. Basta tomar $L = 1$.

Corolário 74. *[7] Seja $Q = (-1,1)^n$ e seja $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função L-bilipschitz e diferenciável. Seja $p' : Q \longrightarrow [1,\infty)$ um expoente variável limitado que depende apenas da n-ésima coordenada. Defina $\Omega = f(Q)$ e $p = p' \circ f^{-1}$. Então $C(\Omega) \cap W^{1,p(.)}(\Omega)$ é denso em $W^{1,p(.)}(\Omega)$.*

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$, $u \in W^{1,p(.)}(\Omega)$ e defina $u' = u \circ f$.

Note que

(i) $Q \subset Q \subset \mathbb{R}^n$, Q é aberto, $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua;

(ii) Q é Lebesgue mensurável, $f : Q \longrightarrow f(Q) \subset \mathbb{R}^n$ é bijetora e diferenciável;

(iii) $m(f(Q - Q)) = m(f(\emptyset)) = m(\emptyset) = 0$.

Além disso, definimos $\Omega = f(Q)$. Logo, fazendo $X = Q$ e $Y = \Omega$ no Teorema 42, segue que

$$\int_Q \left(|u'(y)|^{p'(y)} + |\bigtriangledown u'(y)|^{p'(y)}\right) |J_f| dy = \int_\Omega |u(y)|^{p(y)} + |\bigtriangledown u(y)|^{p(y)} dy.$$

Isto implica que

$$\int_Q \left(|u'(y)|^{p'(y)} + |\bigtriangledown u'(y)|^{p'(y)}\right) dy = \frac{1}{|J_f|} \int_\Omega |u(y)|^{p(y)} + |\bigtriangledown u(y)|^{p(y)} dy,$$

e como

$$\rho_{1,p'(.)}(u') = \int_Q \left(|u'(y)|^{p'(y)} + |\bigtriangledown u'(y)|^{p'(y)}\right) dy,$$

segue que

$$\rho_{1,p'(.)}(u') = \frac{1}{|J_f|} \int_\Omega |u(y)|^{p(y)} + |\bigtriangledown u(y)|^{p(y)} dy = \frac{1}{|J_f|} \rho_{1,p(.)}(u),$$

de modo que $u' \in W^{1,p^{'}(.)}(Q)$. Pelo Lema 71 temos que existe $v' \in C(Q) \cap W^{1,p'(.)}(Q)$ tal que $\rho_{1,p'(.)(u'-v')} < \epsilon$. Defina $v = v' \circ f^{-1} \in C(\Omega) \cap W^{1,p(.)}(\Omega)$. Temos

$$\begin{aligned} \rho_{1,p(.)}(u - v) &= \int_\Omega |u(x) - v(x)|^{p(x)} + |\bigtriangledown (u(x) - v(x))|^{p(x)} dx \\ &= |J_f| \int_Q \left(|u'(x) - v'(x)|^{p'(x)} + |\bigtriangledown (u'(x) - v'(x))|^{p'(x)}\right) dx \\ &= |J_f| \rho_{1,p'(.)}(u' - v') \\ &< \epsilon |J_f|. \end{aligned} \tag{4.30}$$

$\square$

Exemplo 75. *[7] Seja $Q = (-1, 1)^2$, considere $a > 1$ e defina*

$$p(x) = 2 - \left(log \left(\frac{100}{|x_2|}\right)\right)^{-a}.$$

O Lema 71 pode ser aplicado para concluir que o espaço das funções contínuas é denso em $W^{1,p(.)}(Q)$, enquanto que o Teorema 67 não pode ser usado.

Lema 76. *[7] Suponha que o expoente limitado p dependa apenas de $|x|$ em B^n. Então $C(B^n) \cap W^{1,p(.)}(B^n)$ é denso em $W^{1,p(.)}(B^n)$.*

Demonstração. Seja $u \in W^{1,p(.)}(B^n)$ e defina

$$v(x) = \fint_{S(|x|)} u(y)dm_{n-1}(y),$$

em que $S(|x|) = \partial B^n(0,|x|)$.

Considere $r \in (0,1)$, então

$$\begin{aligned} \int_{S(r)} |v(y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y) &= \int_{S(r)} \left| \fint_{S(|y|)} u(w)dm_{n-1}(w) \right|^{p(y)} dm_{n-1}(y) \\ &\leq \int_{S(r)} \left(\fint_{S(|y|)} |u(w)|dm_{n-1}(w) \right)^{p(y)} dm_{n-1}(y). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Note que na expressão

$$\left(\fint_{S(|y|)} |u(w)|dm_{n-1}(w) \right)^{p(y)},$$

$p(y)$ é fixo. Considere os expoentes conjugados $p(y)$ e $q(y)$, i. é., $1 - \frac{1}{p(y)} = \frac{1}{q(y)}$. Então $q(y) = \frac{p(y)}{p(y)-1}$ e daí,

$$\begin{aligned} \fint_{S(|y|)} |u(w)|dm_{n-1}(w) &= \fint_{S(|y|)} |1 \cdot u(w)|dm_{n-1}(w) \\ &= \frac{1}{m_{n-1}(S(|y|))} \left[\int_{S(|y|)} |1 \cdot u(w)|dm_{n-1}(w) \right] \\ &\leq \frac{1}{m_{n-1}(S(|y|))} \\ &\quad \left[\left(\int_{S(|y|)} 1^{q(y)} dm_{n-1}(w) \right)^{\frac{1}{q(y)}} \left(\int_{S(|y|)} |u(w)|^{p(y)} dm_{n-1}(w) \right)^{\frac{1}{p(y)}} \right] \\ &= \frac{1}{m_{n-1}(S(|y|))} \\ &\quad \left[\left(\int_{S(|y|)} 1 dm_{n-1}(w) \right)^{\frac{1}{q(y)}} \left(\int_{S(|y|)} |u(w)|^{p(y)} dm_{n-1}(w) \right)^{\frac{1}{p(y)}} \right] \\ &= \frac{1}{m_{n-1}(S(|y|))} \\ &\quad \left[(m_{n-1(S(|y|))})^{\frac{1}{q(y)}} \left(\int_{S(|y|)} |u(w)|^{p(y)} dm_{n-1}(w) \right)^{\frac{1}{p(y)}} \right] \\ &= \frac{1}{[m_{n-1}(S(|y|))]^{1-\frac{1}{q(y)}}} \left(\int_{S(|y|)} |u(w)|^{p(y)} dm_{n-1}(w) \right)^{\frac{1}{p(y)}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{[m_{n-1}(S(|y|))]^{\frac{1}{p(y)}}}\left(\int_{S(|y|)} |u(w)|^{p(y)} dm_{n-1}(w)\right)^{\frac{1}{p(y)}} \\
&\lesssim \left(\int_{S(|y|)} |u(w)|^{p(y)} dm_{n-1}(w)\right)^{\frac{1}{p(y)}}. \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

Substituindo (4.32) em (4.31) temos

$$
\begin{aligned}
\int_{S(r)} |v(y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y) &\lesssim \int_{S(r)} \left[\left(\int_{S(|y|)} |u(w)|^{p(y)} dm_{n-1}(w)\right)^{\frac{1}{p(y)}}\right]^{p(y)} dm_{n-1}(y) \\
&= \int_{S(r)} \left(\int_{S(|y|)} |u(w)|^{p(y)} dm_{n-1}(w)\right) dm_{n-1}(y). \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

Afirmação 01:

$$
\int_{S(r)} \left(\int_{S(|y|)} |u(w)|^{p(y)} dm_{n-1}(w)\right) dm_{n-1}(y) \lesssim \int_{S(r)} |u(y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y)
$$

De fato, como $y \in S(r)$ segue que

$$
\begin{aligned}
\int_{S(r)} \left(\int_{S(|y|)} |u(w)|^{p(y)} dm_{n-1}(w)\right) dm_{n-1}(y) &= \int_{S(r)} \left(\int_{S(r)} |u(y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y)\right) dm_{n-1}(y) \\
&= \int_{S(r)} |u(y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y) \left(\int_{S(r)} dm_{n-1}(y)\right) \\
&\lesssim \int_{S(r)} |u(y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y),
\end{aligned}
$$

o que conclui a prova da Afirmação 01.

Portanto,

$$
\int_{S(r)} |v(y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y) \lesssim \int_{S(r)} |u(y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y).
$$

Integrando a expressão anterior sobre r de 0 a 1:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{S(r)} |v(y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y) dm_1(r) &\lesssim \int_0^1 \int_{S(r)} |u(y)|^{p(y)} dm_{n-1}(y) dm_1(r) \\
\Longrightarrow \int_{B^n} |v(x)|^{p(x)} dx &\lesssim \int_{B^n} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty,
\end{aligned}
$$

logo $v \in L^{p(.)}(B^n)$.

Note que

$$
\begin{aligned}
\triangledown v(x) &= \triangledown \left(\fint_{S(|x|)} u(y) dm_{n-1}(y)\right) \\
&= \fint_{S(|x|)} \triangledown u(y) \cdot \frac{y}{|y|} dm_{n-1}. \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

Assim, para $r \in (0,1)$ temos que

$$\int_{S(r)} |\bigtriangledown v(x)|^{p(x)} dm_{n-1}(x) \lesssim \int_{S(r)} \left(⨍_{S(|x|)} |\bigtriangledown u(y)| dm_{n-1}(y) \right)^{p(x)} dm_{n-1}(x), \tag{4.35}$$

com $p(x)$ fixo na expressão

$$\left(⨍_{S(|x|)} |\bigtriangledown u(y)| dm_{n-1}(y) \right)^{p(x)}.$$

Considere os expoentes conjugados $p(x)$ e $q(x)$, i.é, $1 - \frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)}$. Então,

$$\begin{aligned}
⨍_{S(|x|)} |\bigtriangledown u(y)| dm_{n-1}(y) &= \frac{1}{m_{n-1}(S(|x|))} \int_{S(|x|)} |1 \cdot \bigtriangledown u(y)| dm_{n-1}(y) \\
&\leq \frac{1}{m_{n-1}(S(|x|))} \left[\left(\int_{S(|x|)} 1^{q(x)} dm_{n-1}(y) \right)^{\frac{1}{q(x)}} \right. \\
&\quad \left. \left(\int_{S(|x|)} |\bigtriangledown u(y)|^{p(x)} dm_{n-1}(y) \right)^{\frac{1}{p(x)}} \right] \\
&= \frac{1}{m_{n-1}(S(|x|))} \left[[m_{n-1}(S(|x|))]^{\frac{1}{q(x)}} \right. \\
&\quad \left. \left(\int_{S(|x|)} |\bigtriangledown u(y)|^{p(x)} dm_{n-1}(y) \right)^{\frac{1}{p(x)}} \right] \\
&= \frac{1}{[m_{n-1}(S(|x|))]^{1-\frac{1}{q(x)}}} \left(\int_{S(|x|)} |\bigtriangledown u(y)|^{p(x)} dm_{n-1}(y) \right)^{\frac{1}{p(x)}} \\
&= \frac{1}{[m_{n-1}(S(|x|))]^{\frac{1}{p(x)}}} \left(\int_{S(|x|)} |\bigtriangledown u(y)|^{p(x)} dm_{n-1}(y) \right)^{\frac{1}{p(x)}} \\
&\lesssim \left(\int_{S(|x|)} |\bigtriangledown u(y)|^{p(x)} dm_{n-1}(y) \right)^{\frac{1}{p(x)}}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Substituindo (4.36) em (4.35) temos

$$\begin{aligned}
\int_{S(r)} |\bigtriangledown v(x)|^{p(x)} dm_{n-1}(x) &\lesssim \int_{S(r)} \left[\left(\int_{S(|x|)} |\bigtriangledown u(y)|^{p(x)} dm_{n-1}(y) \right)^{\frac{1}{p(x)}} \right]^{p(x)} dm_{n-1}(x) \\
&\lesssim \int_{S(r)} \left(\int_{S(|x|)} |\bigtriangledown u(y)|^{p(x)} dm_{n-1}(y) \right) dm_{n-1}(x).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Afirmação 02:

$$\int_{S(r)} \left(\int_{S(|x|)} |\bigtriangledown u(y)|^{p(x)} dm_{n-1}(y) \right) dm_{n-1}(x) = \int_{S(r)} |\bigtriangledown u(x)|^{p(x)} dm_{n-1}(x).$$

A prova da Afirmação 02 está omitida pois usa um argumento análogo ao feito na Afirmação 01.

Portanto,

$$\int_{S(r)} |\bigtriangledown v(x)|^{p(x)} dm_{n-1}(x) \lesssim \int_{S(r)} |\bigtriangledown u(x)|^{p(x)} dm_{n-1}(x).$$

Integrando sobre r de 0 a 1:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{S(r)} |\bigtriangledown v(x)|^{p(x)} dm_{n-1}(x) dm_1(r) &\lesssim \int_0^1 \int_{S(r)} |\bigtriangledown u(x)|^{p(x)} dm_{n-1}(x) dm_1(r) \\ \Longrightarrow \int_{B^n} |\bigtriangledown v(x)|^{p(x)} dx &\lesssim \int_{B^n} |\bigtriangledown u(x)|^{p(x)} dx < \infty, \end{aligned}$$

donde concluímos que $|\bigtriangledown v| \in L^{p(.)}(B^n)$.

Como $v, |\bigtriangledown v| \in L^{p(.)}(B^n)$ segue que $v \in W^{1,p(.)}(B^n)$.

Fixe $\epsilon \in (0,1)$ e escolha $r < 1$ tão pequeno que (pelo Lema 26) $\rho_{W^{1,p(.)}(B^n(0,r))}(u) < \epsilon$ e $\rho_{W^{1,p(.)}(B^n(0,r))}(v) < \epsilon$.

Considere o domínio $D = B^n \backslash \overline{B^n(0, \frac{r}{2})}$ e denote

$$H_i^+ = \{x \in D : x_i > 0\} \quad \text{e} \quad H_i^- = \{x \in D : x_i < 0\},$$

com x_i representando a i-ésima coordenada de x.

Cada $H_i^\pm$ escolhido, satisfaz as condições do Corolário 74. Com isso temos que $C(H_i^\pm) \bigcap W^{1,p(.)}(H_i^\pm)$ é denso em $W^{1,p(.)}(H_i^\pm)$. Logo existem $w_i^\pm \in C(H_i^\pm) \bigcap W^{1,p(.)}(H_i^\pm)$ tais que

$$||u - w_i^+||_{W^{1,p(.)}(H_i^+)} < \epsilon r \quad \text{e} \quad ||u - w_i^-||_{W^{1,p(.)}(H_i^-)} < \epsilon r. \tag{4.38}$$

Seja ϕ uma função Lipschitziana com constante de Lipschitz $\frac{c}{r}$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 1$ em $B^n(0, \frac{r}{2})$ e $\phi = 0$ em $B^n \backslash B^n(0,r)$. Sejam $\phi_i^\pm$ funções Lipschitzianas com constantes de Lipschitz $\frac{c}{r}$ e suporte em $H_i^\pm$, tais que $\{\phi, \phi_1^+, \phi_2^+, ..., \phi_n, \phi_1^-, \phi_2^-, ..., \phi_n^-\}$ é uma partição da unidade em B^n. Defina

$$f = \phi v + \sum_{i=1}^{n} (\phi_i^+ w_i^+ + \phi_i^- w_i^-).$$

Mostraremos que $f \longrightarrow u$ em $W^{1,p(.)}(B^n)$.

$$\begin{aligned}
||f-u||_{1,p(.)} &= \left|\left|\phi v + \sum_{i=1}^{n}(\phi_i^+ w_i^+ + \phi_i^- w_i^-) - u\right|\right|_{1,p(.)}\\
&= \left|\left|\phi v - u + \sum_{i=1}^{n}(\phi_i^+ w_i^+ + \phi_i^- w_i^-)\right|\right|_{1,p(.)}\\
&= \left|\left|\phi v - u\left(\phi + \sum_{i=1}^{n}\phi_i^+ + \sum_{i=1}^{n}\phi_i^-\right) + \sum_{i=1}^{n}(\phi_i^+ w_i^+ + \phi_i^- w_i^-)\right|\right|_{1,p(.)}\\
&= \left|\left|\phi v - u\phi - u\sum_{i=1}^{n}\phi_i^+ - u\sum_{i=1}^{n}\phi_i^- + \sum_{i=1}^{n}(\phi_i^+ w_i^+ + \phi_i^- w_i^-)\right|\right|_{1,p(.)}\\
&= \left|\left|\phi(v-u) + \sum_{i=1}^{n}(\phi_i^+ w_i^+ + \phi_i^- w_i^- - u\phi_i^+ - u\phi_i^-)\right|\right|_{1,p(.)}\\
&= \left|\left|\phi(v-u) + \sum_{i=1}^{n}[\phi_i^+(w_i^+ - u) + \phi_i^-(w_i^- - u)]\right|\right|_{1,p(.)}\\
&\leq ||\phi(v-u)||_{1,p(.)} + \left|\left|\sum_{i=1}^{n}[\phi_i^+(w_i^+ - u) + \phi_i^-(w_i^- - u)]\right|\right|_{1,p(.)}\\
&\leq ||\phi(v-u)||_{1,p(.)} + \sum_{i=1}^{n}||\phi_i^+(w_i^+ - u) + \phi_i^-(w_i^- - u)||_{1,p(.)}\\
&\leq ||\phi(v-u)||_{1,p(.)} + \sum_{i=1}^{n}(||\phi_i^+(w_i^+ - u)||_{1,p(.)} + ||\phi_i^-(w_i^- - u)||_{1,p(.)}) \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

Para os termos do somatório em (4.39) temos

$$\begin{aligned}
||\phi_i^\pm(w_i^\pm - u)||_{1,p(.)} &= ||\phi_i^\pm(w_i^\pm - u)||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)} + ||\bigtriangledown[\phi_i^\pm(w_i^\pm - u)]||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)}\\
&\leq ||w_i^\pm - u||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)} + ||\bigtriangledown[\phi_i^\pm(w_i^\pm - u)]||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)}\\
&= ||w_i^\pm - u||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)} + ||(\bigtriangledown\phi_i^\pm)(w_i^\pm - u) + \phi_i^\pm[\bigtriangledown(w_i^\pm - u)]||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)}\\
&\leq ||w_i^\pm - u||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)} + ||(\bigtriangledown\phi_i^\pm)(w_i^\pm - u)||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)}\\
&\quad + ||\phi_i^\pm[\bigtriangledown(w_i^\pm - u)]||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)}\\
&\leq ||w_i^\pm - u||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)} + ||(\bigtriangledown\phi_i^\pm)(w_i^\pm - u)||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)}\\
&\quad + ||\bigtriangledown(w_i^\pm - u)||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)}\\
&= ||w_i^\pm - u||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)} + ||\bigtriangledown(w_i^\pm - u)||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)}\\
&\quad + ||(\bigtriangledown\phi_i^\pm)(w_i^\pm - u)||_{L^{p(.)}(H_i^\pm)}
\end{aligned}$$

$$= \quad ||w_i^{\pm}-u||_{W^{1,p(.)}(H_i^{\pm})}+||(\bigtriangledown\phi_i^{\pm})(w_i^{\pm}-u)||_{L^{p(.)}(H_i^{\pm})} \tag{4.40}$$

Afirmação 04:

$$||(\bigtriangledown\phi_i^{\pm})(w_i^{\pm}-u)||_{L^{p(.)}(H_i^{\pm})}\leq \frac{c}{r}||w_i^{\pm}-u||_{L^{p(.)}(H_i^{\pm})}.$$

De fato, tome $h>0$ então usando que ϕ_i é de Lipschitziana com constante de Lipschitz $\frac{c}{r}$, segue que

$$\begin{aligned}
\left|\bigtriangledown\phi_i^{\pm}\right| &= \left|\left(\frac{\partial\phi_i^{\pm}}{\partial x_1},\frac{\partial\phi_i^{\pm}}{\partial x_2},...,\frac{\partial\phi_i^{\pm}}{\partial x_n}\right)\right| \\
&= \left|\left(\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\phi_i^{\pm}(x+he_1)-\phi_i^{\pm}(x)}{h},\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\phi_i^{\pm}(x+he_2)-\phi_i^{\pm}(x)}{h},...,\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\phi_i^{\pm}(x+he_n)-\phi_i^{\pm}(x)}{h}\right)\right| \\
&< \left|\left(\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}\frac{|x+he_1-x|}{h},\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}\frac{|x+he_2-x|}{h},...,\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}\frac{|x+he_n-x|}{h}\right)\right| \\
&= \left|\left(\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}\frac{|he_1|}{h},\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}\frac{|he_2|}{h},...,\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}\frac{|he_n|}{h}\right)\right| \\
&= \left|\left(\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}\frac{|h||e_1|}{h},\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}\frac{|h||e_2|}{h},...,\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}\frac{|h||e_n|}{h}\right)\right| \\
&= \left|\left(\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}\frac{h|e_1|}{h},\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}\frac{h|e_2|}{h},...,\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}\frac{h|e_n|}{h}\right)\right| \\
&= \left|\left(\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}|e_1|,\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}|e_2|,...,\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{c}{r}|e_n|\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{c}{r}1,\frac{c}{r}1,...,\frac{c}{r}1\right)\right| = \left|\left(\frac{c}{r},\frac{c}{r},...,\frac{c}{r}\right)\right| = \frac{c}{r}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
||(\bigtriangledown\phi_i^{\pm})(w_i^{\pm}-u)||_{L^{p(.)}(H_i^{\pm})} &= |\bigtriangledown\phi_i^{\pm}|\;||w_i^{\pm}-u||_{L^{p(.)}(H_i^{\pm})} \\
&\leq \frac{c}{r}\left|\left|w_i^{\pm}-u\right|\right|_{L^{p(.)}(H_i^{\pm})},
\end{aligned}$$

como queríamos.

Usando (4.38) e a Afirmação 04 em (4.40) temos que

$$||\phi_i^{\pm}(w_i^{\pm}-u)||_{1,p(.)}\leq \epsilon r+\frac{c}{r}\epsilon r=\epsilon(r+c)\lesssim\epsilon. \tag{4.41}$$

Estimaremos, agora, $||\phi(v-u)||_{1,p(.)}$ em (4.39):

$$\begin{aligned}
||\phi(v-u)||_{p(.)} &\leq \int_{B^n(r)}|v(x)-u(x)|^{p(x)}dx \\
&\leq \int_{B^n(r)}(|v(x)|+|u(x)|)^{p(x)}dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{B^n(r)} 2^{p^+-1}(|v(x)|^{p(x)} + |u(x)|^{p(x)})dx \\
&\leq \int_{B^n(r)} 2^{p^+-1}(|v(x)|^{p(x)} + |u(x)|^{p(x)})dx \\
&\leq 2^{p^+-1}\left(\int_{B^n(r)}(|v(x)|^{p(x)}dx + \int_{B^n(r)}|u(x)|^{p(x)})dx\right) \\
&\leq 2^{p^+-1}\left[\rho_{L^{p(.)}(B^n(r))}(v) + \rho_{L^{p(.)}(B^n(r))}(u)\right] \\
&\leq 2^{p^+-1}\left[\rho_{W^{1,p(.)}(B^n(r))}(v) + \rho_{W^{1,p(.)}(B^n(r))}(u)\right] \\
&< 2^{p^+-1}(\epsilon + \epsilon) \\
&< 2^{p^+}\frac{1}{2}(2\epsilon) \\
&= 2^{p^+}\epsilon. \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

Isto mostra que

$$\rho_{p(.)}(\phi(v-u)) \lesssim \epsilon. \qquad (4.43)$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
&\int_{B^n(r)} |\bigtriangledown[\phi(x)(v(x)-u(x))]|^{p(x)}dx \\
\leq &\int_{B^n(r)} |[\bigtriangledown\phi(x)](v(x)-u(x)) + \phi(x)[\bigtriangledown(v(x)-u(x))]|^{p(x)}\,dx \\
\leq &\int_{B^n(r)} (|\bigtriangledown\phi(x)||v(x)-u(x)| + |\phi(x)||\bigtriangledown(v(x)-u(x))|)^{p(x)}\,dx \\
\leq &\int_{B^n(r)} 2^{p(x)-1}(|\bigtriangledown\phi(x)||v(x)-u(x)|)^{p(x)} + (|\phi(x)||\bigtriangledown(v(x)-u(x))|)^{p(x)}dx \\
\leq &\int_{B^n(r)} 2^{p^+-1}(|\bigtriangledown\phi(x)||v(x)-u(x)|)^{p(x)} + (|\phi(x)||\bigtriangledown(v(x)-u(x))|)^{p(x)}dx \\
\lesssim &\int_{B^n(r)}(|\bigtriangledown\phi(x)||v(x)-u(x)|)^{p(x)}dx + \int_{B^n(r)}|\bigtriangledown(v(x)-u(x))|^{p(x)}dx \\
\leq &\int_{B^n(r)}(|\bigtriangledown\phi(x)||v(x)-u(x)|)^{p(x)}dx + \int_{B^n(r)}(|\bigtriangledown v(x)| - |\bigtriangledown u(x)|)^{p(x)}dx \\
= &\int_{B^n(r)}(|\bigtriangledown\phi(x)||v(x)-u(x)|)^{p(x)}dx + \int_{B^n(r)}2^{p(x)-1}(|\bigtriangledown v(x)|^{p(x)} + |\bigtriangledown u(x)|^{p(x)})dx \\
\leq &\int_{B^n(r)}(|\bigtriangledown\phi(x)||v(x)-u(x)|)^{p(x)}dx + \int_{B^n(r)}2^{p^+-1}(|\bigtriangledown v(x)|^{p(x)} + |\bigtriangledown u(x)|^{p(x)})dx \\
\lesssim &\int_{B^n(r)}(|\bigtriangledown\phi(x)||v(x)-u(x)|)^{p(x)}dx + \int_{B^n(r)}|\bigtriangledown v(x)|^{p(x)}dx + \int_{B^n(r)}|\bigtriangledown u(x)|^{p(x)}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{B^n(r)} (|\bigtriangledown \phi(x)||v(x)-u(x)|)^{p(x)}dx + \rho_{L^{p(.)}(B^n(r))}(|\bigtriangledown v(x)|) + \rho_{L^{p(.)}(B^n(r))}(|\bigtriangledown u(x)|) \\
&\leq \int_{B^n(r)} \frac{2}{r}|v(x)-u(x)|^{p(x)}dx + \epsilon + \epsilon \\
&\leq \int_{B^n(r)} \frac{2}{r}|v(x)-u(x)|^{p(x)}dx + 2\epsilon. \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

Considere, agora, a esfera S $(n-1)$-dimensional e o expoente fixo q. Temos que:

$$
\begin{aligned}
\left(\int_S \left(\frac{1}{diamS}|u-u_S|\right)^q dm_{n-1}\right)^{\frac{1}{q}} &= \frac{1}{diamS}\left(\int_S |u-u_S|^q dm_{n-1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{diamS}||u-u_S||_{L^q_{m_{n-1}}}(S),
\end{aligned}
$$

e usando a desigualdade apresentada no Teorema 48 (Poincaré-Wirtinger) temos que

$$
\left(\int_S \left(\frac{1}{diamS}|u-u_S|\right)^q dm_{n-1}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{diamS}||\bigtriangledown u||_{L^q_{m_{n-1}}}(S),
$$

sendo que $u_S = \fint_S u(y)dm_{n-1}(y)$.

Denotemos por $\bigtriangledown_S$ o gradiente não radial. Observe que $\bigtriangledown_S = 0$, pois v é radial.

Usando a desigualdade de Poincaré-Wirtinger (Lema48) na integral do segundo membro da desigualdade (4.44), temos

$$
\begin{aligned}
\int_{B^n(r)} \frac{2}{r}|v(x)-u(x)|^{p(x)}dx &\lesssim \int_0^r \int_{S(t)} \frac{1}{t}|v(y)-u(y)|^{p(t)}dm_{n-1}(y)dm_1(t) \\
&\lesssim \int_0^r \int_{S(t)} |\bigtriangledown_S (v(y)-u(y))|^{p(t)}dm_{n-1}(y)dm_1(t) \\
&\leq \int_0^r \int_{S(t)} |\bigtriangledown (v(y)-u(y))|^{p(t)}dm_{n-1}(y)dm_1(t) \\
&= \int_{B^n(0,r)} |\bigtriangledown (v(x)-u(x))|^{p(x)}dx \\
&\lesssim \epsilon. \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

Substituindo (4.45) em (4.44) obtemos

$$
\int_{B^n(r)} |\bigtriangledown [\phi(x)(v(x)-u(x))]|^{p(x)}dx \lesssim \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon \lesssim \epsilon,
$$

ou seja,

$$
\rho_{p(.)}(\bigtriangledown(\phi(v-u))) \lesssim \epsilon. \qquad (4.46)
$$

De (4.43) e (4.46) concluímos pelo Teorema 59 que

$$||\phi(v-u)||_{1,p(.)} = ||\phi(v-u)||_{p(.)} + ||\bigtriangledown(\phi(v-u))||_{p(.)} \longrightarrow 0. \tag{4.47}$$

Usando (4.41) e (4.47) em (4.39) obtemos

$$||f-u||_{1,p(.)} \longrightarrow 0,$$

i.é., $f \longrightarrow u$ em $W^{1,p(.)}(B^n)$.

Mostremos agora que f é contínua. Isto será feito mostrando que f pode ser aproximada por funções contínuas. Como ϕ é Lipschitz, então ϕ é contínua. Além disso, cada $w_i^{\pm}$ é contínua. Assim, $\sum_{i=1}^{n}(\phi_i^+ w_i^+ + \phi_i^- w_i^-)$ é contínua. Como $f = \phi v + \sum_{i=1}^{n}(\phi_i^+ w_i^+ + \phi_i^- w_i^-)$, precisaríamos garantir a continuidade de v para termos f contínua.

Como v é radial e pertence a $W^{1,p(.)}(B^n)$, segue que v se comporta como uma função unidimensional no espaço de Sobolev fora da origem. Então para todo $0 < s < t < 1$ temos

$$\begin{aligned}
|v(se_1) - v(te_1)| &= \left|\int_s^t \bigtriangledown v(re_1)dr\right| \\
&\leq \int_s^t |\bigtriangledown v(re_1)|dr \\
&= \int_s^t |\bigtriangledown v(re_1)|\frac{r^{n-1}}{r^{n-1}}dr \\
&\leq \int_s^t |\bigtriangledown v(re_1)|\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}}dr \\
&= \frac{1}{s^{n-1}}\int_s^t |\bigtriangledown v(re_1)|r^{n-1}dr \\
&= \frac{C}{s^{n-1}}\int_{B^n(0,t)\setminus B^n(0,s)} |\bigtriangledown v(x)|dx. \qquad (4.48)
\end{aligned}$$

Isto significa que dado $\epsilon > 0$, existe δ suficientemente pequeno tal que se $|s-t| < \delta$ a integral em (4.48) assume um valor tão pequeno de modo que $|v(se_1) - v(te_1)| \leq \epsilon$. Ou seja, v é contínua exceto, possivelmente, na origem. Como não podemos garantir continuidade na origem para a função v, basta definirmos novas funções como segue. Seja $\gamma > 0$ e defina

$$v_\gamma(x) = \begin{cases} v(x), \text{ se } x \in B^n \setminus \overline{B^n(0,\gamma)} \\ v(\gamma e_1), \text{ se } x \in B^n(\gamma). \end{cases}$$

Desta maneira, temos uma sequencia de funções contínuas em B^n

$$f_\gamma = \phi v_\gamma + \sum_{i=1}^{n} (\phi_i^+ w_i^+ + \phi_i^- w_i^-),$$

tais que $f_\gamma \longrightarrow f$ quando $\gamma \longrightarrow 0$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Corolário 77. *[7] Seja $f : B^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ L-bilipschitz e diferenciável. Seja $p' : B^n \longrightarrow [1, \infty)$ um expoente limitado que depende apenas de $|x|$. Defina $\Omega = f(B^n)$ e $p = p' \circ f^{-1}$. Então $C(\Omega) \cap W^{1,p(.)}(\Omega)$ é denso em $W^{1,p(.)}(\Omega)$.*

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$, $u \in W^{1,p(.)(\Omega)}$ e defina $u' = u \circ f$.

Note que

(i) $B^n \subset B^n \subset \mathbb{R}^n$, B^n é aberto, $f : B^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua;

(ii) B^n é Lebesgue mensurável, $f : B^n \longrightarrow f(B^n) \subset \mathbb{R}^n$ é bijetora e diferenciável;

(iii) $m(f(B^n - B^n)) = m(f(\emptyset)) = m(\emptyset) = 0$.

Além disso, definimos $\Omega = f(B^n)$. Logo, fazendo $X = B^n$ e $Y = \Omega$ no Teorema 42, segue que

$$\int_{B^n} \left(|u'(y)|^{p'(y)} + |\bigtriangledown u'(y)|^{p'(y)} \right) |J_f| dy = \int_\Omega |u(y)|^{p(y)} + |\bigtriangledown u(y)|^{p(y)} dy.$$

Isto implica que

$$\int_{B^n} \left(|u'(y)|^{p'(y)} + |\bigtriangledown u'(y)|^{p'(y)} \right) dy = \frac{1}{|J_f|} \int_\Omega |u(y)|^{p(y)} + |\bigtriangledown u(y)|^{p(y)} dy,$$

e como

$$\rho_{1,p'(.)}(u') = \int_{B^n} \left(|u'(y)|^{p'(y)} + |\bigtriangledown u'(y)|^{p'(y)} \right) dy,$$

segue que

$$\rho_{1,p'(.)}(u') = \frac{1}{|J_f|} \int_\Omega |u(y)|^{p(y)} + |\bigtriangledown u(y)|^{p(y)} dy = \frac{1}{|J_f|} \rho_{1,p(.)}(u),$$

de modo que $u' \in W^{1,p(.)}(B^n)$. Pelo Lema 76 temos que existe $v' \in C(B^n) \cap W^{1,p'(.)}(B^n)$ tal que $\rho_{1,p'(.)(u'-v')} < \epsilon$. Defina $v = v' \circ f^{-1} \in C(\Omega) \cap W^{1,p(.)}(\Omega)$. Temos

$$\begin{aligned} \rho_{1,p(.)}(u - v) &= \int_\Omega |u(x) - v(x)|^{p(x)} + |\bigtriangledown (u(x) - v(x))|^{p(x)} dx \\ &= |J_f| \int_{B^n} \left(|u'(x) - v'(x)|^{p'(x)} + |\bigtriangledown (u'(x) - v'(x))|^{p'(x)} \right) dx \\ &= |J_f| \rho_{1,p'(.)}(u' - v') \\ &< \epsilon |J_f|. \end{aligned} \tag{4.49}$$

□

Apresentamos a seguir um último resultado que combina os resultados dos corolários 74 e 77. Para isto, o domínio é dividido em subconjuntos regulares com sobreposição suficiente e de modo que o resultado em cada subconjunto venha de um destes dois corolários.

Teorema 78. *[7] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e seja $\{\Omega_i\}$ uma cobertura de Ω com uma partição da unidade subordinada por funções bilipschitz e diferenciáveis ϕ_i tal que ϕ_i é localmente limitada nos Ω_i onde $\phi_i > 0$. Suponha que para cada i, Ω_i satisfaz as condições do Corolário 74 ou do Corolário 77, então $C(\Omega) \cap W^{1,p(.)}(\Omega)$ é denso em $W^{1,p(.)}(\Omega)$.*

Demonstração. Denote a constante bilipschitz de ϕ_i por L_i e, sem perda de generalidade, suponha $L_i \geq 1$. Fixe $u \in W^{1,p(.)}(\Omega)$ e $\epsilon > 0$. Pelo Corolário 74 ou pelo Corolário 77 concluímos que $C(\Omega_i) \cap W^{1,p(.)}(\Omega_i)$ é denso em $W^{1,p(.)}(\Omega_i)$. Portanto podemos escolher $v_i \in C(\Omega_i) \cap W^{1,p(.)}(\Omega_i)$ tal que

$$||u - v_i||_{W^{1,p(.)}(\Omega_i)} \leq \epsilon \frac{2^{-i}}{L_i}.$$

Então $v = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i v_i$ é contínua e satisfaz

$$\begin{aligned}
||u - v||_{W^{1,p(.)}(\Omega)} &= \left|\left| u - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i v_i \right|\right|_{W^{1,p(.)}(\Omega)} = \left|\left| u \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i v_i \right|\right|_{W^{1,p(.)}(\Omega)} \\
&= \left|\left| \sum_{i=1}^{\infty} u\phi_i - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i v_i \right|\right|_{W^{1,p(.)}(\Omega)} = \left|\left| \sum_{i=1}^{\infty} u\phi_i - \phi_i v_i \right|\right|_{W^{1,p(.)}(\Omega)} \\
&= \left|\left| \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i (u - v_i) \right|\right|_{W^{1,p(.)}(\Omega)} \leq \left|\left| \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i (u - v_i) \right|\right|_{W^{1,p(.)}(\Omega_i)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} ||\phi_i (u - v_i)||_{W^{1,p(.)}(\Omega_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} ||\phi_i||_{W^{1,p(.)}(\Omega_i)} \, ||u - v_i||_{W^{1,p(.)}(\Omega_i)} \,. \qquad (4.50)
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
||\phi_i(.)||_{W^{1,p(.)}(\Omega_i)} &= ||\phi_i(x) - \phi_i(0) + \phi_i(0)||_{W^{1,p(.)}(\Omega_i)} \\
&\leq ||\phi_i(x) - \phi_i(0)||_{W^{1,p(.)}(\Omega_i)} + ||\phi_i(0)||_{W^{1,p(.)}(\Omega_i)} \\
&\leq L_i|x - 0| + ||1||_{W^{1,p(.)}(\Omega_i)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq L_i|x| + inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq 1\right\} + inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{0}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\
&\leq L_i|x| + inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\Omega_i}\left|\frac{1}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\} + 0 \\
&\leq L_i|x| + inf\left\{\lambda > 0 : \frac{|\Omega_i|}{\lambda^{p^-}} \leq 1\right\} \\
&\leq L_i|x| + inf\left\{\lambda > 0 : \frac{|\Omega_i|}{\lambda} \leq 1\right\} \\
&\leq L_i|x| + |\Omega| \\
&\lesssim 1 + L_i. \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

Substituindo (4.51) em (4.50) temos

$$
\begin{aligned}
||u - v||_{W^{1,p(.)}(\Omega)} &\lesssim \sum_{i=1}^{\infty}(1 + L_i)||u - v_i||_{W^{1,p(.)}(\Omega_i)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}(1 + L_i)\epsilon\frac{2^{-i}}{L_i} = \sum_{i=1}^{\infty}\epsilon\frac{2^{-i}}{L_i} + L_i\epsilon\frac{2^{-i}}{L_i} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\epsilon\frac{2^{-i}}{L_i} + \epsilon 2^{-i} \leq 2\sum_{i=1}^{\infty}\epsilon 2^{-i} = 2\epsilon\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&= 2\epsilon\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1\right) = 2\epsilon(2 - 1) = 2\epsilon, \qquad (4.52)
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração.

□

4.4 Considerações finais

Percebe-se que o empenho na melhora e/ou elaboração de condições sobre os expoentes variáveis que tornam o espaço das funções contínuas e até mesmo o das funções suaves em alguns casos, denso no espaço de Sobolev generalizado, está pautado em fornecer um conteúdo teórico a ser aplicado em equações diferenciais que modelam problemas físicos que não podem ser elaborados de maneira satisfatória com os espaços de Lebesgue e Sobolev clássicos.

Estudando os resultados apresentados neste trabalho foi possível observar que técnicas de demonstração pautadas na criação de convoluções adequadas, majorações e uso *de desigualdades como a de Hölder são ferramentas que funcionam bem na tentativa de verificar possíveis conjecturas sobre condições no expoente* $p(.)$ *que garantam a densidade desejada.*

Percebe-se, também, que é uma área ainda sendo explorada, passível de resultados inéditos que devem surgir conforme a demanda por modelos matemáticos que usam os espaços de Sobolev com expoentes variáveis aumenta e mais pessoas se interessem em aprofundar seus estudos, visto que aplicações de tais modelos no desenvolvimento de tecnologias se tornam cada vez mais corriqueiras.

Referências Bibliográficas

[1] *BREZIS, H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, New York, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, First Edition, 2011.*

[2] *CAVALCANTI, M. M. e CAVALCANTI V. N. D., Teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev, Maringá, UEM, 2009.*

[3] *EDMUNDS, D. E. e Rákosník, J., Density of smooth functions in* $W^{k,p(x)}(\Omega)$*. Proc Roy. Soc. London Ser. A 437 (1992), 229-236. 41(116). (1991) 592–618.*

[4] *EVANS, L C., Graduate Studies in Mathematics, Berkeley, University of California, Volume 19, 1998.*

[5] *FIGUEIREDO, D. G., Análise de Fourier e equações diferenciais parciais (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.*

[6] *GUIMARÃES C. J., Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o p(x)-Laplaciano. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande-PB, 2006.*

[7] *HÄSTÖ P. A., On the density of continuous functions in variable exponent Sobolev space, Rev. Mat. Iberoamericana 23(2007), nº1, 213–234.*

[8] *KOVÁCIK, O.; ZILINA and RÁKOSNÍK J., On Spaces* $L^{p(x)}$ *and* $W^{k,p(x)}$*, Czechoslovak Mathematical Journal. 41(116). (1991) 592–618.*

[9] MUNKRES, J. R., Topology, Upper Saddle River, Prentice Hall, Second Edition, 2000.

[10] RUDIN, W., Principles of Mathematical Analysis, New York-Auckland-Düsseldorf, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill Book Co, Thrid Edition, 1976.

[11] RUDIN W., Real and Complex Analysis, New York, McGraw-Hill Book Co, Thrid Edition, 1987.