

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estudo de um modelo de movimento sob atração focal
num fluido raso com rotação:**

Análise Qualitativa

Rubem Castro Junqueira

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Coorientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 23 DE FEVEREIRO DE 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estudo de um modelo de movimento sob atração focal
num fluido raso com rotação:
Análise Qualitativa**

Rubem Castro Junqueira

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Coorientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

23 DE FEVEREIRO DE 2021

Dedico este trabalho a meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, que sempre acreditaram em mim e me apoiaram mesmo nos tempos mais difíceis. Sem eles, nada seria possível. Agradeço também a todos meus familiares que estiveram presentes durante os últimos dois anos.

Agradeço a todo o corpo docente do Programa de Mestrado em Matemática da UNIFEI, que sempre deu o suporte necessário para uma desejável formação acadêmica. Em especial, a meus orientadores Luis Fernando e Fabio Scalco. Deixo também um agradecimento especial ao professor Jaume Llibre, com quem tive a oportunidade de estudar por um breve, mas interessantíssimo, período.

Devo agradecer também a todos amigos e colegas que cruzaram meu caminho nesses últimos anos, ninguém chega a lugar algum sem boas companhias e amizades.

Agradeço também a CAPES pelo auxílio financeiro concedido ao longo desses dois anos.

“A Matemática é a honra do espírito humano.”

Wilhelm Leibniz.

Resumo

Este trabalho tem como motivação inicial o artigo “**On the motion under focal attraction in a rotating medium**”, de J. Sotomayor [9], que modela o seguinte problema de equações diferenciais planares presente, por exemplo, na biologia: Dentro de um recipiente circular raso, colocamos um líquido e diversas espécies de platelmintos que nadam com diferentes velocidades na direção de um ponto luminoso fixado na borda deste recipiente. O objetivo é submeter o líquido a uma rotação constante com o intuito de isolar cada uma das diferentes espécies presentes no experimento. Após este estudo inicial, foram feitas duas modificações no modelo de equações diferenciais, adicionando uma deriva radial ao sistema. Através destas modificações, estudamos o diagrama de bifurcações de cada um destes sistemas, que envolveram bifurcações dos tipos Bogdanov-Takens, Hopf e Selá-nó.

Palavras-chave: Bifurcação, Bogdanov-Takens, Hopf, Selá-nó.

Abstract

This work has its initial motivation in the article “**On the motion under focal attraction in a rotating medium**”, by J. Sotomayor [9], which models the following problem of planar differential equations present, for example, in biology: Inside a shallow circular container, we put a liquid and several species of flatworms that swim with different speeds in the direction of a luminous point fixed on the edge of this container. The objective is to subject the liquid to a constant rotation in order to isolate each of the different species present in the experiment. After this initial study, two modifications were made in the model of differential equations, adding a radial drift to the system. Through these modifications, we studied the bifurcation diagram of each of these systems, which involved bifurcations of Bogdanov-Takens, Hopf and Saddle-node types.

Keywords: Bifurcation, Bogdanov-Takens, Hopf, Saddle-node.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Sumário	vi
Lista de Figuras	viii
1 Estudo do modelo inicial	4
2 Modificação do modelo por uma deriva radial sem anulamento no bordo do disco D	21
2.1 A bifurcação do tipo Bogdanov-Takens	26
2.2 A bifurcação do tipo Sela-nó	30
2.3 A bifurcação do tipo Hopf	33
2.4 O ponto de equilíbrio P_1 passa de foco para nó	35
2.5 O diagrama de bifurcações do sistema (2.2)	36
2.6 Retratos de fase	38

3	Modificação do modelo por uma deriva radial com anulamento no bordo do disco D	50
3.1	Sistema dependente de μ e λ	51
3.2	O diagrama de bifurcações no quadrante $\mu \geq 0$ e $\lambda \geq 0$	53
3.3	A bifurcação do tipo Bogdanov-Takens	56
3.4	A bifurcação do tipo Hopf	58
3.5	A bifurcação do tipo Sela-nó	59
3.6	As bifurcações dos pontos singulares $O = (0, 0)$ e $F = (1, 0)$	63
3.7	O ponto de equilíbrio P_1 passa de foco para nó	67
3.8	Retratos de fase do sistema (3.2).	69
	Conclusões	78
	Bibliografia	81
	Apêndice I	83
	Apêndice II	91
	Apêndice III	99
	Apêndice IV	107
	Apêndice V	127
	Apêndice VI	132
	Apêndice VII	153
	Apêndice VIII	169
	Apêndice IX	188
	Apêndice X	200
	Apêndice XI	208
	Apêndice XII	216

Lista de Figuras

1	Modelo esquematizado de um disco D de raio R (Sotomayor).	2
1.1	Disco D de raio R	5
1.2	$W^s(F)$ e $W^u(F)$ quando $\omega > 1$	12
1.3	Esboços de $W^s(Q_2)$ e $W^u(Q_1)$ quando $\omega > 1$	14
1.4	Esboços de $W^s(Q_2)$ e $W^s(Q_1)$ quando $\omega < 1$	15
1.5	Retratos de fase dos pontos de equilíbrios semi-hiperbólicos.	16
1.6	Retrato de fase do sistema (1.4) quando $\omega = 1/2$	20
1.7	Retrato de fase do sistema (1.4) quando $\omega = 2$	20
2.1	Equilíbrios do sistema (2.3).	25
2.2	Diagrama de bifurcações de Bogdanov-Takens.	28
2.3	Diagrama de bifurcações relativo aos equilíbrios do sistema (2.2).	37
2.4	Esboço do diagrama de bifurcações relativo aos equilíbrios do sistema (2.2) obtido no MatCont.	38
2.5	Retrato de fase para parâmetros (μ, λ) pertencentes à região R_1	40
2.6	Retrato de fase para parâmetros (μ, λ) pertencentes à região R_2	40
2.7	Retrato de fase de uma vizinhança do equilíbrio tipo sela.	41
2.8	Retrato de fase de uma vizinhança do equilíbrio tipo foco.	41
2.9	Retrato de fase para parâmetros (μ, λ) pertencentes à região R_3	42

2.10	Retrato de fase para parâmetros (μ, λ) pertencentes à região R_4	42
2.11	Retrato de fase para parâmetros (μ, λ) pertencentes à região R_5	43
2.12	Retrato de fase de uma vizinhança do equilíbrio tipo sela.	43
2.13	Retrato de fase de uma vizinhança do equilíbrio tipo foco.	44
2.14	Retrato de fase para parâmetros $(\mu, \lambda) = (1, 2)$	44
2.15	Retrato de fase de uma vizinhança do ponto de equilíbrio do tipo Bogdanov-Takens.	45
2.16	Retrato de fase para parâmetros sobre a curva SN_1	45
2.17	Retrato de fase de uma vizinhança do equilíbrio do tipo Sela-nó para parâmetros em SN_1	46
2.18	Retrato de fase para parâmetros sobre a curva SN_2	46
2.19	Retrato de fase de uma vizinhança do equilíbrio do tipo Sela-nó para parâmetros em SN_2	47
2.20	Retrato de fase para parâmetros pertencentes à curva S_1	47
2.21	Retrato de fase para parâmetros pertencentes à curva S_2	48
2.22	Retrato de fase para parâmetros sobre a curva H_1	48
2.23	Retrato de fase para parâmetros sobre a curva H_2	49
3.1	Segunda modificação do modelo estudado (Sotomayor).	51
3.2	Retrato de fase quando $\mu > 0$ e $\lambda = 0$	53
3.3	Região do plano (x, y) tal que $\mu \geq 0$	54
3.4	Região do plano (x, y) tal que $\lambda \geq 0$	54
3.5	Interseção das regiões das Figuras 3.3 e 3.4.	54
3.6	Curvas obtidas no plano (x, y)	55
3.7	Equilíbrios do sistema (3.9) quando $\lambda > 1$	66
3.8	Equilíbrios do sistema (3.9) quando $\lambda < 1$	67

3.9	Diagrama de bifurcações relativo aos equilíbrios do sistema (3.2).	69
3.10	Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_1 \cup L_3 \cup L_6 \cup \{Q\}$	70
3.11	Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_2 \cup L_2$ suficientemente longe de H	70
3.12	Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_2 \cup L_2$ suficientemente próximo de H	71
3.13	Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_3 \cup L_5 \cup \{C\}$	71
3.14	Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_4 \cup L_4$	72
3.15	Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_5$ suficientemente longe da curva H	72
3.16	Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_5$ suficientemente próximo à curva H	73
3.17	Vizinhança de um equilíbrio do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_5$ suficientemente próximo à curva H	73
3.18	Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_6 \cup L_5 \cup H^+ \cup \{T\} \cup H^+$	74
3.19	Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_7 \cup H^-$	74
3.20	Vizinhança do equilíbrio do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_7$	75
3.21	Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in SN_1$	75
3.22	Vizinhança do equilíbrio do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in SN_1$	76
3.23	Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in SN_2$	76
3.24	Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) = BT$	77

Introdução

Neste trabalho, estudaremos o comportamento qualitativo de uma família de equações diferenciais motivada pelo Exercício 22 da página 264, proposto por Jorge Sotomayor em [8]. Este problema havia sido proposto inicialmente por H.K. Wilson em [10] e, segundo ele, o modelo inicial foi dado por L. Markus em um trabalho não publicado.

Este sistema provém de um experimento com platelmintos, organismos biológicos, e com ele, queremos ser capazes de isolar determinadas espécies imersas num fluido líquido raso no interior de um recipiente circular, que chamaremos de disco. Para isso, será colocada uma fonte de luz no bordo desse disco que atrairá todas as espécies, que se locomovem no líquido com diferentes velocidades. O que será mostrado ao longo deste trabalho é que ao submetemos o líquido a uma rotação com velocidade constante, poderemos isolar cada espécie em um determinado local do disco. Mais precisamente, o exercício proposto foi:

Um cientista tem uma amostra líquida que contém várias espécies de “minhocas fototrópicas”, isto é, “minhoquinhas”, que reagem à luz e nadam em direção a ela. Sabe-se que cada espécie nada a diferente velocidade. Para isolar e extrair aquela espécie de velocidade v , o cientista coloca o líquido num recipiente cilíndrico de cristal, com raio de R . Depois submete este recipiente à rotação, perto de uma fonte luminosa, com um velocidade angular $\omega > v/R$. Veja Figura 1. Os platelmintos nadam em direção à luz, contra o sentido de rotação do líquido. O cientista tem a esperança de que os platelmintos que ele procura, se acumulem em um ponto P do recipiente, quando $t \rightarrow +\infty$

(o experimento inicia com $t = 0$), de modo que possam ser retirados do recipiente, mergulhando uma colher nesse ponto. Prove que, com as condições acima especificadas, o ponto P existe.

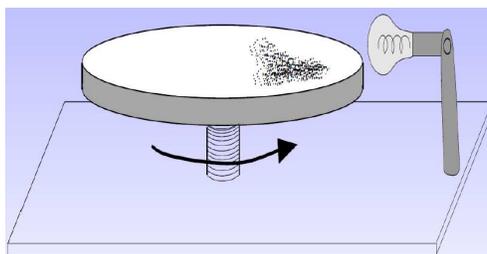


Figura 1: Modelo esquematizado de um disco D de raio R (Sotomayor).

Devemos ressaltar que ao longo do trabalho algumas definições serão omitidas por serem de conhecimento público, enquanto outras serão explicitadas para um melhor entendimento do leitor e algumas, no caso das bifurcações, estarão implícitas em seus respectivos teoremas. Todas essas definições podem ser encontradas em [2], [6], [7] e [8]. Devemos observar que ao longo deste trabalho, chamaremos de *ponto de equilíbrio* um ponto no qual o campo de vetores de uma equação diferencial ordinária seja nulo, e chamaremos de *ponto singular* um ponto para o qual o campo de vetores não esteja definido. Vale mencionar também que os retratos de fase que serão mostrados neste trabalho, foram elaborados através do software *Mathematica* e que, devido ao fato dos cálculos realizados nas demonstrações de teoremas serem muito complicados, na maioria das vezes, estes estarão presentes nos apêndices no final do trabalho. A intenção é simplificar e facilitar a compreensão em cada uma das situações.

No Capítulo 1, estudaremos o problema proposto inicialmente no exercício, nesse caso, nosso sistema de equações diferenciais ordinárias dependerá de um único parâmetro não negativo ω . Mostraremos que, de fato, o ponto P existe para as hipóteses do exercício e veremos também o comportamento do sistema quando a velocidade angular ω varia.

No Capítulo 2, faremos uma modificação no modelo apresentado no exercício, isto é, será adicionada uma deriva radial, o que pode ser interpretado como uma reinjeção do

fluido. Porém, neste capítulo a deriva radial não terá anulamento no bordo do disco, o que torna o problema fictício. A partir dessa modificação, teremos um sistema de equações diferenciais ordinárias que irá depender de dois parâmetros não negativos μ e λ . A partir daí, vamos estudar o diagrama de bifurcações deste sistema que irá envolver bifurcações do tipo Bogdanov-Takens, Hopf e Sela-nó.

No Capítulo 3, veremos uma outra modificação do modelo proposto. Essa modificação será obtida através de uma deriva radial com anulamento no bordo do disco. Assim como no Capítulo 2, teremos um sistema dependente de dois parâmetros não negativos μ e λ . Este modelo será mais complexo e, portanto, alguns dos resultados obtidos não serão analíticos. Apesar de alguns resultados deste capítulo não serem analíticos, tentaremos estudar, da forma mais detalhada possível, o diagrama de bifurcações desta nova família de equações diferenciais ordinárias.

Capítulo 1

Estudo do modelo inicial

Neste capítulo será analisado o comportamento do sistema de equações diferenciais mais simples obtido através das condições propostas por J. Sotomayor em [8]. O estudo propõe que consideremos certas espécies, que podem ser microorganismos ou partículas carregadas em um plano, com as seguintes propriedades:

- (i) As espécies se movem com velocidade constante v atraídas por um ponto $F = (R, 0)$, uma fonte de luz ou um pólo magnético, fixado a uma distância R da origem $O = (0, 0)$ do sistema de coordenadas no plano.
- (ii) As espécies estão em um meio, um fluido raso, que gira no sentido anti-horário em torno de O com velocidade angular ω .

Com essas hipóteses, temos que a velocidade total de uma partícula é dada por

$$V(x, y) = V_1(x, y) + V_2(x, y),$$

onde

$$V_1(x, y) = v \left(\frac{R - x}{\sqrt{(R - x)^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{(R - x)^2 + y^2}} \right),$$

representa o deslocamento em direção ao ponto F , e

$$V_2(x, y) = \omega(-y, x),$$

representa a velocidade angular do disco. Veja ilustração na Figura 1.1. Chamaremos de D o disco fechado centrado na origem de raio $R > 0$, isto é,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

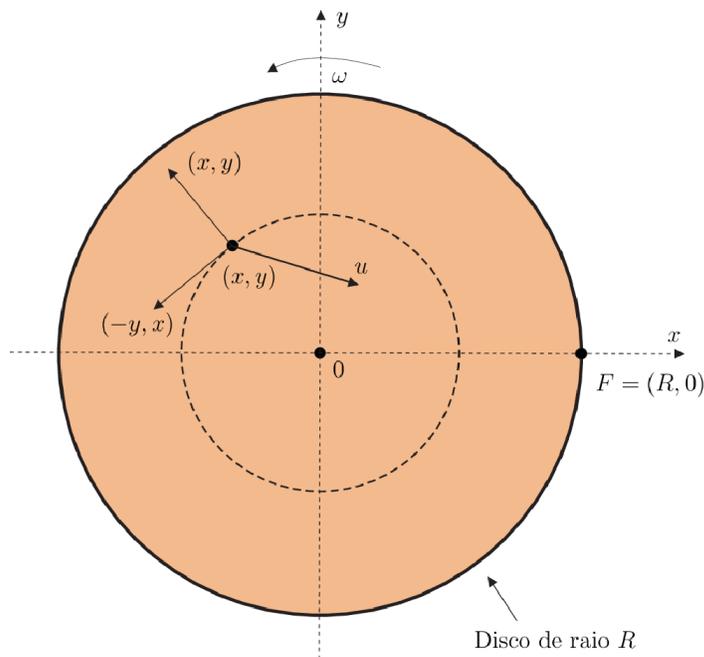


Figura 1.1: Disco D de raio R .

Sob essas hipóteses, podemos definir um modelo matemático dado pela seguinte família de equações diferenciais planares que dependem de três parâmetros positivos, o raio do disco, a velocidade de deslocamento das partículas e a velocidade angular, respectivamente, R , v e ω . Este modelo tem a forma

$$\begin{cases} x' = -\omega y + v \frac{R - x}{\sqrt{(R - x)^2 + y^2}}, \\ y' = \omega x - v \frac{y}{\sqrt{(R - x)^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Notação 1.1. Serão denotados por $m_+(p_0)$ e $m_-(p_0)$ os extremos direito e esquerdo do intervalo maximal das soluções de uma equação diferencial ordinária, respectivamente.

Definição 1.1. Denotaremos por $W^s(Q)$ a variedade estável de um ponto de equilíbrio ou ponto singular Q de uma equação diferencial ordinária. Esse é o conjunto de pontos p_0 tais que $\varphi(t, p_0) \rightarrow Q$ quando $t \rightarrow m_+(p_0)$. Analogamente, denotaremos por $W^u(Q)$ a variedade instável, isto é, o conjunto dos pontos p_0 tais que $\varphi(t, p_0) \rightarrow Q$ quando $t \rightarrow m_-(p_0)$, onde $\varphi(t, p_0)$ denota a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias que tem como condição inicial o ponto p_0 .

Note que para $Q = F$ a aproximação das órbitas de (1.1) para F acontece num tempo finito, isto é, $m_+(p_0)$ e $m_-(p_0)$ são finitos.

O nosso principal objetivo neste capítulo é demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 1.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) Se $0 < \omega \leq v/R$, então o ponto F é um atrator global do sistema (1.1).
- (ii) Se $\omega > v/R$, então o sistema (1.1) possui um único ponto de equilíbrio atrator, localizado em

$$P_{R,\omega,v} = \left(\frac{\left(\frac{v}{R}\right)^2}{R}, \sqrt{R^2 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2} \right) \in D, \quad (1.2)$$

cuja variedade estável é $W^s(P_{R,\omega,v}) = D \setminus F$.

Realizando uma mudança de variáveis, mudança de parâmetro e um reescalonamento da variável independente, a qual será chamada de tempo, isto é,

$$x = R\bar{x}, \quad y = R\bar{y}, \quad \omega = \frac{v\bar{\omega}}{R}, \quad t = \frac{R\bar{t}}{v}, \quad (1.3)$$

o sistema (1.1), após removermos as barras, pode ser escrito como

$$\begin{cases} x' = -\omega y + \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}, \\ y' = \omega x - \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Com as mudanças acima o sistema (1.1), agora (1.4), passa a depender apenas de um parâmetro positivo ω e o disco D passa a ter raio $R = 1$. Vale observar que como tomamos $t = R\bar{t}/v$ e $R/v > 0$, não teremos mudanças nas orientações das órbitas.

Dessa forma, o Teorema 1.1 passa a ter o seguinte enunciado.

Teorema 1.2. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se $0 < \omega \leq 1$, então o ponto F é um atrator global do sistema (1.4).*
- (ii) *Se $\omega > 1$, então o sistema (1.4) possui um único ponto de equilíbrio atrator, localizado em*

$$P_\omega = \left(\frac{1}{\omega^2}, \frac{1}{\omega} \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}} \right) \in D, \quad (1.5)$$

cuja variedade estável é $W^s(P_\omega) = D \setminus F$.

A demonstração do Teorema 1.2, bem como do Teorema 1.1, será consequência dos seguintes lemas.

Lema 1.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se $0 < \omega \leq 1$, então o sistema (1.4) não tem pontos de equilíbrio.*
- (ii) *Se $\omega > 1$, então os equilíbrios do sistema (1.4) são dados por (1.5).*

Demonstração: Escrevendo o sistema (1.4) em coordenadas polares centradas no ponto $F = (1, 0)$, ou seja, fazendo a mudança

$$x = 1 - r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

obtemos

$$\begin{cases} r' = r(\omega \sin \theta - 1), \\ \theta' = -\omega(r - \cos \theta). \end{cases} \quad (1.6)$$

Como $F = (1, 0)$ é um ponto singular do sistema (1.4), para termos um ponto de equilíbrio do sistema (1.4), devemos ter $r > 0$. Tomemos, então $0 < \omega < 1$. Para que $r' = 0$ devemos ter que $\sin \theta = 1/\omega > 1$, o que não ocorre pois $-1 \leq \sin \theta \leq 1$. Portanto, podemos ver que se $0 < \omega < 1$ o sistema (1.6) não tem equilíbrios, logo, o sistema (1.4) não tem equilíbrios. Agora, se $\omega = 1$, a única forma de termos $r' = 0$ e $\theta' = 0$ é considerando $r = 0$ e $\theta = \pi/2$, mas $r \neq 0$, logo, para $\omega = 1$ o sistema (1.4) não possui ponto de equilíbrio, provando o item (i) do Lema 1.1.

Tomando agora $\omega > 1$, o sistema (1.6) terá $r' = 0$ e $\theta' = 0$, ou seja, terá um equilíbrio (r_P, θ_P) quando

$$\omega \operatorname{sen} \theta_P = 1 \iff \operatorname{sen} \theta_P = \frac{1}{\omega},$$

e

$$r_P = \cos \theta_P = \sqrt{1 - (\operatorname{sen} \theta_P)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}}.$$

Assim, quando $\omega > 1$, temos que os pontos de equilíbrio (x_P, y_P) do sistema (1.4) são dados por

$$x_P = 1 - r_P \cos \theta_P = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega^2},$$

e

$$y_P = r_P \operatorname{sen} \theta_P = \left(\frac{1}{\omega}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}}.$$

Portanto, fica provado o item (ii), e assim, o Lema 1.1. \square

Dessa forma temos expressões para x_P e y_P que dependem do parâmetro ω . Podemos então calcular a distância dessas funções coordenadas para o ponto $(1/2, 0)$ e obter que

$$\operatorname{dist} \left((x_P, y_P), \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \right) = \frac{1}{2},$$

ou seja, o ponto de equilíbrio P sempre ficará localizado na semicircunferência centrada em $(1/2, 0)$ e com raio $r = 1/2$, o que pode ser facilmente verificado com a seguinte equação:

$$\left(x_P - \frac{1}{2} \right)^2 + y_P^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2, \quad y_P > 0.$$

Agora, vale lembrar que como foi provado que o ponto de equilíbrio do sistema (1.4) é dado por

$$P_\omega = (x_P, y_P) = \left(\frac{1}{\omega^2}, \frac{1}{\omega} \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}} \right) \in D,$$

basta voltar as barras e substituir as variáveis iniciais, utilizando a mudança dada em (1.3), para obter que o ponto de equilíbrio do sistema (1.1), existente para $\omega > v/R$, é dado por

$$P_{R,\omega,v} = \left(\frac{\left(\frac{v}{R}\right)^2}{R}, \sqrt{R^2 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2} \right) \in D.$$

Lema 1.2. *Para todo $\omega > 0$, o conjunto $D \setminus F$ é positivamente invariante.*

Demonstração: Considere

$$V(x, y) = \left(-\omega y + \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}, \omega x - \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \right)$$

o campo de vetores do sistema (1.4). Tomando o produto interno de $V(x, y)$ com o vetor posição $(x, y) \in \partial D \setminus F$ obtemos

$$V(x, y) \cdot (x, y) = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} \right].$$

Mas, como o primeiro termo é negativo e o segundo positivo, pois $(x, y) \in \partial D \setminus F$, segue que $V(x, y) \cdot (x, y) < 0$. Assim, terminamos a demonstração do Lema 1.2. \square

O Teorema de Bendixson a seguir será útil na demonstração do próximo lema.

Teorema 1.3. *Considere $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto simplesmente conexo e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 . Se a divergência de X é negativa em U , então o campo X não admite órbita periódica em U .*

Demonstração: A prova será feita por contradição. Tomemos $X = (X_1, X_2)$ e considere o campo ortogonal a X , isto é, $X^\perp = (-X_2, X_1)$. Suponhamos então que exista uma órbita periódica de X de período L denotada por $\gamma : [0, L] \rightarrow U$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e seja S a região delimitada por esta órbita. Por um lado, usando a definição de integral de linha, temos que

$$\oint_\gamma X^\perp = \int_0^L X^\perp(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^L X^\perp(\gamma(t)) \cdot X(\gamma(t)) dt = 0.$$

Por outro lado, pelo Teorema de Green, segue que

$$\oint_\gamma X^\perp = \iint_S \underbrace{\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{\partial(-X_2)}{\partial y} \right)}_{\text{div} X < 0} dx dy < 0,$$

obtendo, assim, uma contradição. Logo, o campo X não admite órbita periódica em U . \square

Lema 1.3. *O sistema (1.4) não admite órbita periódica em $D \setminus F$.*

Demonstração: Primeiramente vejamos que a divergência de V é negativa em $D \setminus F$, isto é,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\omega y + \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\omega x - \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} < 0, \quad \forall (x, y) \in D \setminus F. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Bendixson podemos concluir que não existe órbita periódica do sistema (1.4) em $D \setminus F$ e o Lema 1.3 está demonstrado. \square

Definição 1.2. *Um ponto de equilíbrio Q de um sistema de equações diferenciais ordinárias é dito ser hiperbólico se a matriz Jacobiana calculada em Q for hiperbólica, isto é, se os autovalores da matriz Jacobiana tiverem partes reais não nulas.*

Lema 1.4. *Se $\omega > 1$, então o ponto de equilíbrio P_ω em (1.5) é hiperbólico, sendo um nó atrator ou um foco atrator.*

Demonstração: Lembremos que o campo $V(x, y)$ em coordenadas polares é dado por $W(r, \theta) = (r(\omega \operatorname{sen} \theta - 1), -\omega(r - \cos \theta))$. Assim, a matriz Jacobiana do campo W é dada por

$$DW(r, \theta) = \begin{bmatrix} \omega \operatorname{sen} \theta - 1 & r\omega \cos \theta \\ -\omega & -\omega \operatorname{sen} \theta \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Calculando essa matriz no ponto (r_P, θ_P) temos

$$DW(r_P, \theta_P) = \begin{bmatrix} 0 & \omega \left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right) \\ -\omega & -1 \end{bmatrix}.$$

Agora, como $\omega > 1$, temos que o traço de $DW(r_P, \theta_P)$ é negativo e o determinante de $DW(r_P, \theta_P)$ é positivo, isto é,

$$\operatorname{tr}(DW(r_P, \theta_P)) = -1 < 0, \quad \det(DW(r_P, \theta_P)) = \omega^2 - 1 > 0.$$

Como o determinante é positivo, os autovalores têm o mesmo sinal, e como o traço é negativo, segue que ambos os autovalores têm partes reais negativas, logo, o ponto de equilíbrio P_ω é hiperbólico, sendo um nó atrator ou um foco atrator, terminando a demonstração do Lema 1.4. \square

Lema 1.5. *Se $1 < \omega \leq \sqrt{5/4}$, então o ponto de equilíbrio do sistema (1.4), P_ω , é um nó atrator. Se $\omega > \sqrt{5/4}$, então o ponto de equilíbrio P_ω é um foco atrator.*

Demonstração: Para demonstrar este lema, basta calcularmos o polinômio característico de $DW(r_P, \theta_P)$, que é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + (\omega^2 - 1).$$

Assim, os autovalores são dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - 4\omega^2}}{2}.$$

Dessa forma, se $\omega \leq \sqrt{5/4}$, os autovalores são reais e o ponto de equilíbrio P_ω é um nó atrator. Se $\omega > \sqrt{5/4}$, então os autovalores têm partes complexas não nulas e o ponto de equilíbrio P_ω é um foco atrator. \square

Lema 1.6. *Se $\omega > 1$, então $W^s(F)$ e $W^u(F)$ são como na Figura 1.2 e os pontos de equilíbrio do sistema (1.6) são ambos selas hiperbólicas.*

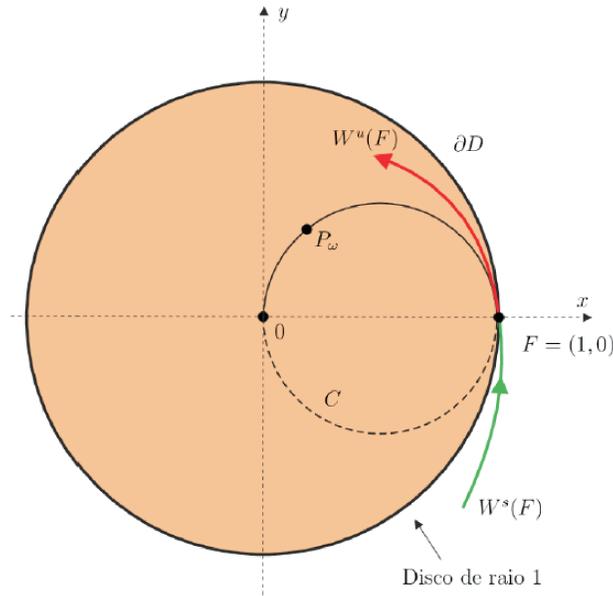


Figura 1.2: $W^s(F)$ e $W^u(F)$ quando $\omega > 1$.

Demonstração: Tomemos o campo associado ao sistema (1.6) com $\omega > 1$ da seguinte forma

$$W(r, \theta) = (r(\omega \sin \theta - 1), -\omega(r - \cos \theta)).$$

Temos então que os únicos pontos de equilíbrio do sistema (1.6) são dados por

$$Q_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad Q_2 = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right).$$

Calculando a matriz Jacobiana de W em Q_1 e Q_2 temos

$$DW(Q_1) = \begin{bmatrix} \omega - 1 & 0 \\ -\omega & -\omega \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad DW(Q_2) = \begin{bmatrix} -\omega - 1 & 0 \\ -\omega & \omega \end{bmatrix}.$$

Assim, os autovalores de $DW(Q_1)$ são

$$\lambda_1 = -\omega < 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \omega - 1 > 0$$

e os autovalores de $DW(Q_2)$ são

$$\tilde{\lambda}_1 = \omega > 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}_2 = -\omega - 1 < 0.$$

Dessa forma temos que os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_2$ são, respectivamente

$$V_1 = (0, 1), V_2 = \left(-2 + \frac{1}{\omega}, 1\right), \tilde{V}_1 = (0, 1) \quad \text{e} \quad \tilde{V}_2 = \left(2 + \frac{1}{\omega}, 1\right).$$

Portanto, temos que Q_1 é uma sela hiperbólica com a curva estável ao longo do eixo θ e a curva instável paralela à reta gerada pelo autovetor V_2 . Da mesma forma, podemos ver que o ponto Q_2 também é uma sela hiperbólica, mas com a curva estável paralela à reta gerada pelo autovetor \tilde{V}_2 e a curva instável ao longo do eixo θ .

Calculando a inclinação desses vetores com respeito ao eixo r segue que a inclinação de V_2 é dada por

$$m_{V_2} = \frac{\Delta r}{\Delta \theta} = -2 + \frac{1}{\omega}$$

e a inclinação de \tilde{V}_2 é dada por

$$m_{\tilde{V}_2} = \frac{\Delta r}{\Delta \theta} = 2 + \frac{1}{\omega}.$$

Tomemos $r = 2 \cos \theta$ e $r = \cos \theta$, respectivamente, as equações do bordo do disco D e da circunferência C no plano (r, θ) . Como a inclinação da reta tangente à curva $r = 2 \cos \theta$ no ponto Q_1 é -2 , a inclinação da reta tangente à curva $r = \cos \theta$ no ponto Q_1 é -1 e

$$-2 < -2 + \frac{1}{\omega} < -1,$$

segue que a curva instável da sela em Q_1 está no interior do disco D . Temos também que $m_{\tilde{V}_2} > 2$, e assim, a curva estável da sela em Q_2 está no exterior do disco D . Lembramos ao leitor que, para melhor compreensão, todos os gráficos elaborados dentro deste conceito seguem o padrão (θ, r) . Ver Figura 1.3.

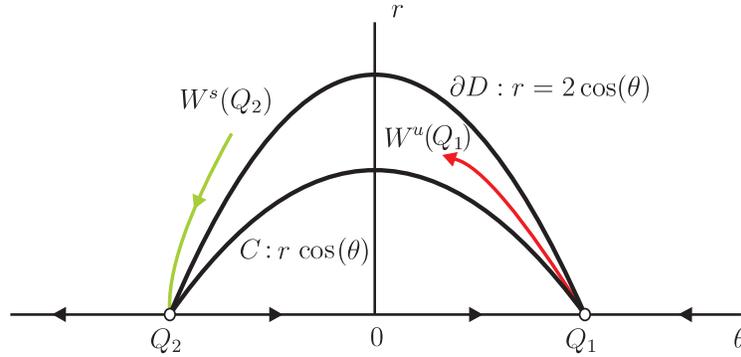


Figura 1.3: Esboços de $W^s(Q_2)$ e $W^u(Q_1)$ quando $\omega > 1$.

Como os pontos de equilíbrio Q_1 e Q_2 surgiram nas coordenadas (r, θ) , ao retornarmos para o plano (x, y) eles vão colapsar em um único ponto, ou seja, no ponto F . Assim temos que $W^s(F) \subset W^s(Q_2)$. Como foi visto que $W^s(Q_2)$ é externa ao disco D , temos que a variedade estável de F não intersecta o disco D , isto é, $W^s(F) \cap D = \emptyset$. Da mesma forma, podemos ver que $W^u(F) \subset W^u(Q_1)$, concluindo a demonstração do Lema 1.6. \square

Lema 1.7. *Se $0 < \omega < 1$, então os pontos de equilíbrio Q_1 e Q_2 do sistema (1.6) são hiperbólicos, com Q_1 um nó atrator e Q_2 uma sela. Sendo assim, F se comporta como um atrator global.*

Demonstração: Se $0 < \omega < 1$, então os pontos de equilíbrio de (1.6) são dados por

$$Q_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad Q_2 = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right).$$

Calculando a matriz Jacobiana $DW(r, \theta)$ neste ponto, temos que os dois autovalores de Q_1 são negativos, isto é, $\lambda_1 = \omega - 1$ e $\lambda_2 = -\omega$ e com isso, Q_1 é um nó atrator. Já quando calculamos a matriz Jacobiana $DW(r, \theta)$ no ponto Q_2 obtemos um autovalor positivo, $\tilde{\lambda}_1 = \omega$ e outro negativo, $\tilde{\lambda}_2 = -1 - \omega$, isto é, Q_2 é uma sela hiperbólica. Apenas com o que já foi obtido, ainda não podemos concluir que o ponto F se comporta como um atrator global, pois existem infinitas órbitas que, a princípio, não se aproximam de nenhum dos dois pontos de equilíbrio. Ver Figura 1.4.

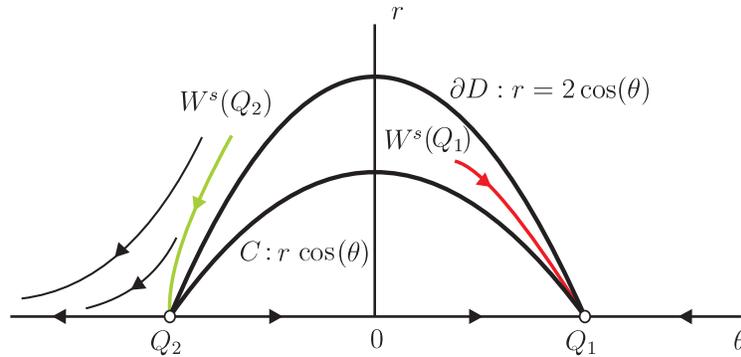


Figura 1.4: Esboços de $W^s(Q_2)$ e $W^s(Q_1)$ quando $\omega < 1$.

Mas como no eixo θ , $-\pi$ se associa com π , podemos ver que as órbitas destacadas acima tendem para o ponto de equilíbrio Q_1 . Portanto, os pontos de equilíbrio Q_1 e Q_2 atraem todas as órbitas e o ponto singular F se comporta como um atrator global. \square

Para analisarmos o caso $\omega = 1$ vamos utilizar o Teorema dos Pontos de Equilíbrio Semi-hiperbólicos, encontrado na página 74, de [4]. Devemos observar que aqui este teorema está adaptado para uma escrita mais compacta, apenas com os resultados que iremos utilizar. Caso o leitor tenha interesse na versão completa, basta consultar a referência citada anteriormente.

Teorema 1.4. *Considere $(0,0)$ um ponto de equilíbrio isolado do campo de vetores X dado por*

$$\begin{cases} x' = A(x, y), \\ y' = \lambda y + B(x, y), \end{cases} \quad (1.8)$$

onde A e B são analíticas em uma vizinhança da origem com $A(0,0) = B(0,0) = DA(0,0) = DB(0,0) = 0$ e $\lambda > 0$. Considere também $y = f(x)$ a solução da equação

$$\lambda y + B(x, y) = 0$$

em uma vizinhança do ponto $(0,0)$, e suponha que a função $g(x) = A(x, f(x))$ tem a expressão $g(x) = a_m x^m + o(x^m)$, onde $m \geq 2$ e $a_m \neq 0$. Então, sempre existe uma curva

invariante, chamada de variedade instável forte, tangente em 0 ao eixo y , no qual X é analiticamente conjugado a

$$y' = \lambda y;$$

ela tem um comportamento repulsor uma vez que $\lambda > 0$. Além disso, valem as seguintes afirmações.

- (i) Se m é ímpar e $a_m < 0$, então $(0, 0)$ é topologicamente uma sela. Veja (a) na Figura 1.5.
- (ii) Se m é ímpar e $a_m > 0$, então $(0, 0)$ é topologicamente um nó instável. Veja (b) na Figura 1.5.
- (iii) Se m é par, então $(0, 0)$ é uma sela-nó, isto é, um ponto de equilíbrio do qual a vizinhança é uma união de um setor parabólico e dois setores hiperbólico. Veja (c) na Figura 1.5.

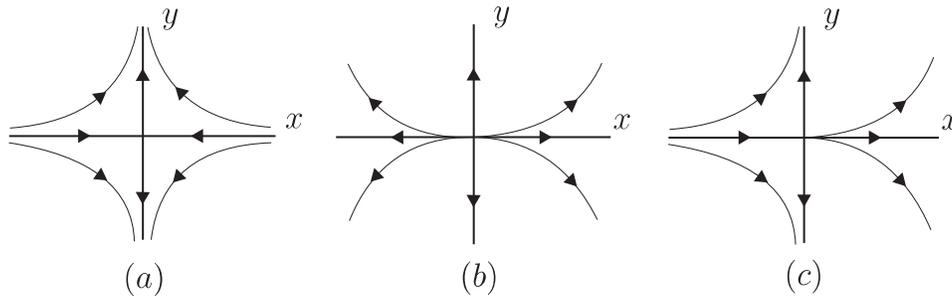


Figura 1.5: Retratos de fase dos pontos de equilíbrios semi-hiperbólicos.

Observação 1.1. No Teorema 1.4, o caso $\lambda < 0$ pode ser transformado em $\lambda > 0$ trocando o campo X pelo campo $-X$.

Lema 1.8. Se $\omega = 1$, então o ponto singular $F = (1, 0)$ do sistema (1.4) é um atrator global.

Demonstração: Para $\omega = 1$, temos que o sistema (1.6) é dado por

$$\begin{cases} r' = r(\sin\theta - 1), \\ \theta' = \cos\theta - r. \end{cases} \quad (1.9)$$

Podemos ver claramente que os únicos pontos de equilíbrio do sistema (1.9) são

$$Q_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad Q_2 = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right).$$

Para estudar a estabilidade do ponto Q_1 , tomemos a matriz Jacobiana (1.7) calculada neste ponto, isto é,

$$DW(Q_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculando seus autovalores e autovetores encontramos que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$ estão associados a vetores paralelos a $V_1 = (1, -1)$ e $V_2 = (0, 1)$, respectivamente. Sendo assim, podemos afirmar que o ponto de equilíbrio Q_1 é semi-hiperbólico. Dessa forma, utilizaremos o Teorema 1.4 para demonstrar que o ponto Q_1 é atrator.

Para satisfazer as hipóteses do Teorema 1.4, precisamos fazer uma translação do nosso campo, de forma que a origem $(0, 0)$ passe a ser um ponto de equilíbrio. Para isso, tomemos a seguinte mudança de variáveis:

$$R = r \quad \text{e} \quad \tilde{\theta} = \theta - \frac{\pi}{2}.$$

Assim, o sistema (1.6) é reescrito como

$$\begin{cases} R' = G_1 = R(\cos \tilde{\theta} - 1), \\ \tilde{\theta}' = G_2 = -\text{sen} \tilde{\theta} - R. \end{cases} \quad (1.10)$$

Podemos ver então que $(R, \tilde{\theta}) = (0, 0)$ é ponto de equilíbrio. Calculando agora a matriz Jacobiana do campo $G = (G_1, G_2)$ no ponto $(0, 0)$ obtemos

$$DG(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Precisamos agora realizar uma mudança de variáveis para que a matriz $DG(0, 0)$ esteja na forma normal do Teorema 1.4. Seja M a matriz formada pelos autovetores da matriz Jacobiana DG e M^{-1} sua inversa. Portanto,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considerando $(x, y) = M^{-1}(R, \tilde{\theta})$, segue que

$$R = x \quad \text{e} \quad \tilde{\theta} = y - x.$$

Temos agora que o campo de vetores é dado por $H = (H_1, H_2)$, onde

$$H_1 = x(\cos(y - x) - 1) \quad \text{e} \quad H_2 = -2x + x \cos(y - x) - \sin(y - x).$$

Claramente a origem é um equilíbrio do sistema definido pelo campo H , mas a matriz Jacobiana $DH(0, 0)$ ainda não está na forma normal, isto é,

$$DH(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, multiplicaremos o campo $H = (H_1, H_2)$ por -1 afim de satisfazer a hipótese do Teorema 1.4, o que fará com que o fluxo obtido no resultado final tenha sentido contrário ao do sistema (1.6). Dessa forma, a matriz Jacobiana do campo $-H$, que chamaremos de DH^- , calculada em $(0, 0)$ finalmente está na forma normal do Teorema 1.4, ou seja,

$$DH^-(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Após essas mudanças de variáveis, o sistema (1.9) pode ser escrito como

$$\begin{cases} x' = -x(\cos(x - y) - 1), \\ y' = 2x - x \cos(x - y) - \sin(x - y). \end{cases} \quad (1.11)$$

Comparando o sistema obtido em (1.11) e o sistema (1.8) temos que

$$A(x, y) = -x(\cos(x - y) - 1) \quad \text{e} \quad \tilde{B}(x, y) = 2x - x \cos(x - y) - \sin(x - y),$$

onde $\tilde{B}(x, y) = y + B(x, y)$ no Teorema 1.4. Agora precisamos obter $y = f(x)$ de tal forma que

$$\tilde{B}(x, y) = 0. \quad (1.12)$$

Para isso, faremos a expansão de Taylor de $y = f(x)$. Sendo assim, tomemos $\tilde{B}(x, f(x))$ quando $x = 0$, ou seja,

$$\tilde{B}(0, f(0)) = \sin(f(0)).$$

Dessa forma, tomando a curva de nível $\tilde{B} = 0$ podemos ver que $\tilde{B}(0, f(0)) = 0$ implica que $\text{sen}(f(0)) = 0$, ou seja, $f(0) = 0$. A partir daí, tomando a expansão de Taylor de $y = f(x)$ temos que

$$y = f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \dots .$$

Agora, já com $y = f(x)$ satisfazendo a equação (1.12) e substituindo em $A(x, f(x)) = g(x)$ obtemos que

$$g(x) = -x \left(-1 + \cos \left(x + \frac{2x^3}{3} \right) \right) .$$

Para concluir as hipóteses do Teorema 1.4, precisamos tomar a expansão de Taylor de $g(x)$, o que nos dá

$$g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \dots .$$

Por fim, na notação do Teorema 1.4, temos que,

$$m = 3 \quad \text{e} \quad a_m = \frac{1}{2}$$

e, portanto, estamos nas condições (ii), o que implica que o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ do sistema (1.11) é um nó repulsor. Contudo, uma vez que multiplicamos nosso campo por -1 , nossa conclusão final é que, voltando às coordenadas originais, o sistema (1.6) tem o ponto de equilíbrio Q_1 como um nó atrator.

Para analisarmos a estabilidade do ponto de equilíbrio Q_2 , vamos calcular a matriz Jacobiana no ponto Q_2 , assim, temos que os autovalores $\tilde{\lambda}_1 = 1$ e $\tilde{\lambda}_2 = -2$ estão associados aos autovetores $\tilde{V}_1 = (0, 1)$ e $\tilde{V}_2 = (3, 1)$, respectivamente, isto é, Q_2 é uma sela hiperbólica com a curva instável ao longo do eixo θ e a curva estável paralela à reta gerada pelo autovetor \tilde{V}_2 . Assim, o ponto de equilíbrio Q_2 não apresenta mudança de estabilidade e o ponto singular $F = (1, 0)$ se comporta como atrator. Logo, o Lema 1.8 está demonstrado. Mais detalhes dos cálculos realizados para esta demonstração podem ser encontrados no Apêndice I. □

Portanto, utilizando os Lemas 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.7 e 1.8, terminamos a prova do Teorema 1.2.

A seguir, podemos ver na Figura 1.6 o retrato de fase do sistema (1.4) quando $\omega = 1/2$ e na Figura 1.7 o retrato de fase quando $\omega = 2$. Assim, concluímos o estudo do modelo proposto no exercício por J. Sotomayor.

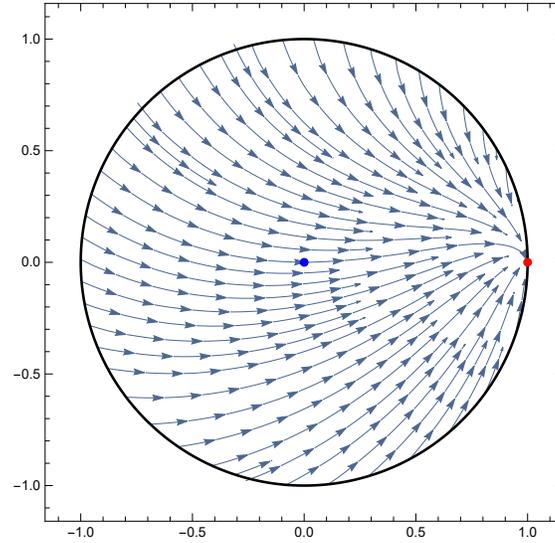


Figura 1.6: Retrato de fase do sistema (1.4) quando $\omega = 1/2$.

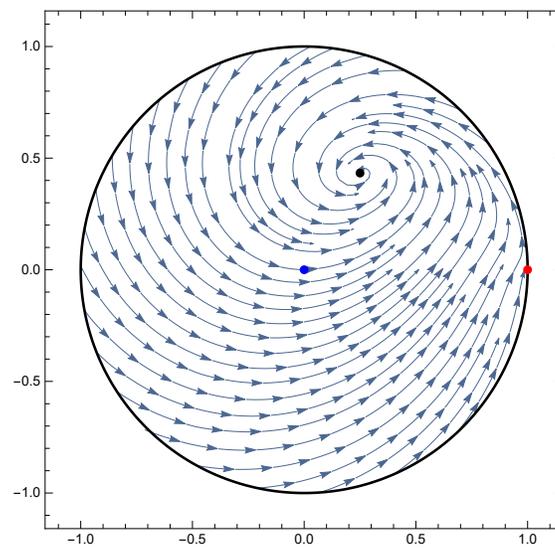


Figura 1.7: Retrato de fase do sistema (1.4) quando $\omega = 2$.

Capítulo 2

Modificação do modelo por uma deriva radial sem anulamento no bordo do disco D

Neste capítulo faremos o estudo de uma modificação do modelo inicial, também sugerida por Jorge Sotomayor. Esta modificação se dá através de uma deriva radial, o que pode ser interpretado como uma reinjeção do fluido. Vale ressaltar que esse modelo é, de certa forma, fictício, pois a deriva radial não apresenta anulamento no bordo do disco D . Apesar deste modelo ser fictício, nestas condições os resultados serão analíticos e mais simples de serem obtidos em relação ao caso com o anulamento no bordo. Este estudo nos servirá como base para o Capítulo 3, onde faremos a análise do caso mais complicado mencionado anteriormente.

Para modificar o sistema inicial desta forma, basta acrescentarmos uma velocidade radial representada pelo vetor $b(x, y)$, com $b > 0$. Dessa forma, o sistema (1.1) apresentado no Capítulo 1 passa a ter a seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = bx - \omega y + v \frac{R - x}{\sqrt{(R - x)^2 + y^2}}, \\ y' = by + \omega x - v \frac{y}{\sqrt{(R - x)^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Com esta modificação, teremos bifurcações que não foram vistas no caso do Capítulo 1. Para começarmos o estudo desse sistema, vamos fazer uma mudança de variáveis de forma que passemos de um sistema dependente de quatro parâmetros, b , ω , v e R , para um sistema que dependerá apenas de dois parâmetros não negativos, μ e λ .

Consideremos então a seguinte mudança de variáveis:

$$x = R\bar{x}, \quad y = R\bar{y}, \quad \mu = \frac{b}{\omega}, \quad \lambda = \frac{v}{R\omega} \quad \text{e} \quad t = \frac{\bar{t}}{\omega}.$$

Assim, podemos reescrever o sistema (2.1) como vemos a seguir

$$\begin{cases} x' = \mu x - y + \lambda \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}, \\ y' = \mu y + x - \lambda \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (2.2)$$

O nosso objetivo neste capítulo é estudar o diagrama de bifurcações do sistema (2.2). Para isso, vamos começar demonstrando um teorema que trata da quantidade de pontos de equilíbrio que o sistema (2.2) admite em função dos parâmetros (μ, λ) .

Teorema 2.1. *O sistema (2.2) tem:*

- (i) *Um ponto de equilíbrio em P_1 , se $0 < \lambda \leq \sqrt{1 + \mu^2}$;*
- (ii) *Dois pontos de equilíbrio em P_1 e P_2 , se $\sqrt{1 + \mu^2} < \lambda < 1 + \mu^2$;*
- (iii) *Um ponto de equilíbrio em $P_1 = P_2 = (1, \mu)$, se $\lambda = 1 + \mu^2$;*
- (iv) *Nenhum ponto de equilíbrio se $\lambda > 1 + \mu^2$ e o ponto $F = (1, 0)$ se comportará como um nó atrator.*

Os pontos de equilíbrio $P_1(\mu, \lambda)$ e $P_2(\mu, \lambda)$ são dados por

$$P_1 = \left(\frac{\lambda(\lambda - \sigma\mu)}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{\lambda(\mu\lambda + \sigma)}{(1 + \mu^2)^2} \right), \quad P_2 = \left(\frac{\lambda(\lambda + \sigma\mu)}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{\lambda(\mu\lambda - \sigma)}{(1 + \mu^2)^2} \right),$$

$$\text{e } \sigma = \sqrt{(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2}.$$

Demonstração: Primeiramente, vamos escrever o sistema (2.2) em coordenadas polares centradas em $F = (1, 0)$, isto é, considerando a mudança $x = 1 - r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Dessa forma teremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} r' = r(\sin \theta - \lambda + \mu(r - \cos \theta)), \\ \theta' = -r + \cos \theta + \mu \sin \theta. \end{cases} \quad (2.3)$$

Os equilíbrios do sistema (2.3) são dados por (r_e, θ_e) , onde

$$r_e = \frac{\mu\lambda \pm \sqrt{(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2}}{1 + \mu^2}, \quad \sin \theta_e = \frac{\lambda}{1 + \mu^2} \quad \text{e} \quad \cos \theta_e = \frac{\pm \sqrt{(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2}}{1 + \mu^2}.$$

Voltando para as coordenadas iniciais temos que x_e e y_e são dados por

$$x_e = \frac{\lambda(\lambda \pm \mu\sqrt{(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2})}{(1 + \mu^2)^2} \quad \text{e} \quad y_e = \frac{\lambda(\mu\lambda \pm \sqrt{(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2})}{(1 + \mu^2)^2}.$$

Dessa forma, tomando $x' = F_1(x, y) = 0$ e $y' = F_2(x, y) = 0$ temos que

$$x(F_2(x, y)) - y(F_1(x, y)) = 0,$$

o que implica que

$$y = \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{((1 - x)^2 + y^2)}}{\lambda},$$

ou seja, a coordenada y dos pontos de equilíbrio será sempre não negativa. Como $\sigma = \sqrt{(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2}$, teremos que os equilíbrios do sistema serão dados por

$$P_1 = \left(\frac{\lambda(\lambda - \sigma\mu)}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{\lambda(\mu\lambda + \sigma)}{(1 + \mu^2)^2} \right), \quad P_2 = \left(\frac{\lambda(\lambda + \sigma\mu)}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{\lambda(\mu\lambda - \sigma)}{(1 + \mu^2)^2} \right).$$

Devemos observar, então, que as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- (i) $r_e > 0$;
- (ii) $(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2 \geq 0$.

Analisando as condições acima podemos ver que P_1 não existe para valores dos parâmetros tais que $\lambda > 1 + \mu^2$ e P_2 existe apenas para valores dos parâmetros tais que $\sqrt{1 + \mu^2} < \lambda \leq 1 + \mu^2$, uma vez que para $\lambda < \sqrt{1 + \mu^2}$ a coordenada y do ponto P_2 é negativa,

isto é, quando $\lambda < \sqrt{1 + \mu^2}$, teremos um único ponto de equilíbrio, P_1 . Quando $\lambda \in (\sqrt{1 + \mu^2}, 1 + \mu^2)$, as duas condições acima são satisfeitas e o sistema (2.2) possui dois pontos de equilíbrio, P_1 e P_2 . Ao tomarmos $\lambda = 1 + \mu^2$ as duas condições serão satisfeitas, mas teremos também que $P_1 = P_2$, isto é, o sistema (2.2) terá um único ponto de equilíbrio. Se $\lambda > 1 + \mu^2$, as condições em (i) e (ii) não se verificam, logo o sistema (2.2) não possui nenhum ponto de equilíbrio.

Consideremos, então, $\lambda > 1 + \mu^2$. Desta forma, como o sistema não possui pontos de equilíbrio, queremos mostrar que o ponto F se comporta como um nó atrator. Para isso, tomemos o sistema (2.3), isto é, o sistema (2.2) escrito em coordenadas polares e centrado no ponto F . Os equilíbrios que nos interessam para a análise da estabilidade de F se encontram em $r = 0$, ou seja,

$$Q_1(\theta, r) = (\theta, 0), \quad \text{com} \quad \text{sen} \theta = \frac{-1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \text{e} \quad \text{cos} \theta = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \text{e}$$

$$Q_2(\theta, r) = (\theta, 0), \quad \text{com} \quad \text{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \text{e} \quad \text{cos} \theta = \frac{-\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Com estas condições é fácil perceber que

$$\theta_{Q_1} \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad \theta_{Q_2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Neste caso, como a matriz Jacobiana do sistema (2.3) calculada em Q_1 possui autovalores dados por $s_1 = \sqrt{1 + \mu^2}$ e $s_2 = -\lambda - \sqrt{1 + \mu^2}$, temos que Q_1 é sempre uma sela com a curva instável sobre o eixo θ e curva estável paralela ao autovetor dado por $(\lambda + 2\sqrt{1 + \mu^2}, 1)$. Calculando a matriz Jacobiana em Q_2 , temos que seus autovalores são dados por $s_1 = -\sqrt{1 + \mu^2}$ e $s_2 = -\lambda + \sqrt{1 + \mu^2}$, ou seja, como estamos no caso $\lambda > 1 + \mu^2$, s_1 e s_2 são negativos, logo, Q_2 é um nó atrator.

A princípio, ainda não podemos afirmar que F é um nó atrator pois, para $r > 0$ temos infinitas órbitas que se afastam dos equilíbrios Q_1 e Q_2 , conforme Figura 2.1.

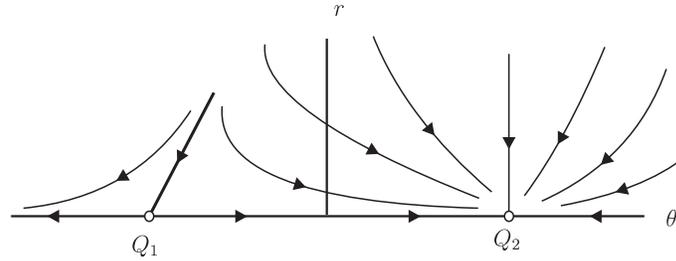


Figura 2.1: Equilíbrios do sistema (2.3).

Mas como no plano (θ, r) , $-\pi$ se identifica com π , temos que as duas órbitas que se afastam de Q_1 , estão na verdade, se aproximando de Q_2 . Portanto, os dois pontos de equilíbrio atraem todas as órbitas do sistema, isto é, o ponto F no plano (x, y) se comporta como um nó atrator. \square

Notemos que considerando a equação

$$yF_1(x, y) + (1 - x)F_2(x, y) = 0,$$

obtemos que

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\mu}{2}\right)^2 = \frac{1 + \mu^2}{4}.$$

Dessa forma, temos que quando o sistema (2.2) admite pontos de equilíbrio, estes estarão localizados num círculo centrado em $(1/2, \mu/2)$ e raio $\sqrt{1 + \mu^2}/2$. Vale observar também que o ponto $F = (1, 0)$ pertence à esse círculo.

Tendo conhecimento do Teorema 2.1, podemos perceber que o sistema (2.2) possui diversas bifurcações que serão tratadas nas seções seguintes. Como será visto, as curvas encontradas anteriormente não são as únicas condições para que tenhamos uma bifurcação em nosso sistema.

Consideremos $T(x, y)$ e $D(x, y)$ como sendo, respectivamente, o traço e o determinante da matriz Jacobiana de um sistema, calculada no ponto (x, y) . Agora, para analisar os pontos de equilíbrio do sistema (2.2), candidatos a serem do tipo Hopf, Sela-nó ou Bogdanov-Takens, precisamos satisfazer, respectivamente, as três seguintes condições:

- (i) Candidatos a ponto de Hopf: Estes são os pontos de equilíbrio do sistema (2.2), de modo que a matriz Jacobiana avaliada nesses pontos tem $T(x, y) = 0$ e $D(x, y) > 0$.
- (ii) Candidatos a ponto de Sela-nó: São os pontos de equilíbrio do sistema (2.2), de modo que a matriz Jacobiana avaliada nesses pontos tem $T(x, y) \neq 0$ e $D(x, y) = 0$.
- (iii) Candidatos a ponto de Bogdanov-Takens: Estes são os pontos de equilíbrio do sistema (2.2) de modo que a matriz Jacobiana avaliada nesses pontos tem $T(x, y) = 0$ e $D(x, y) = 0$.

2.1 A bifurcação do tipo Bogdanov-Takens

Nesta seção veremos que as bifurcações do sistema (2.2) estão todas relacionadas a um único ponto $BT = (\mu_0, \lambda_0)$ no plano de parâmetros, isto é, ao tomarmos uma vizinhança U tal que $BT \in U$, existirão curvas de pontos de equilíbrio dos tipos Hopf e Sela-nó.

Considere um sistema

$$X' = F(X, \mu, \lambda), \quad X \in \mathbb{R}^2, \quad (\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2$$

e suponha que para $(\mu, \lambda) = (\mu_0, \lambda_0)$ exista um ponto de equilíbrio $X = X_0 = (x_0, y_0)$ tal que a matriz Jacobiana DF de F em X_0 tenha um par de autovalores nulos. Denotando a variável $X - X_0$ por X , podemos escrever

$$F(X) = DF X + \frac{1}{2} B(X, X) + \mathcal{O}(3),$$

sendo, para $i = 1, 2$,

$$B_i(X, Y) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k. \quad (2.4)$$

Consideremos agora $q_0, q_1, p_0, p_1 \in \mathbb{R}^2$ vetores tais que

$$DF q_0 = 0, \quad DF q_1 = q_0, \quad DF^\top p_1 = 0 \quad \text{e} \quad DF^\top p_0 = p_1, \quad (2.5)$$

e satisfazendo

$$\langle q_0, p_1 \rangle = 0, \quad \langle q_1, p_0 \rangle = 0, \quad \langle q_0, p_0 \rangle = 1, \quad \langle q_1, p_1 \rangle = 1,$$

sendo DF^\top a matriz transposta de DF .

Para demonstrar o teorema que diz respeito à existência de uma bifurcação do tipo Bogdanov-Takens no sistema (2.2), iremos utilizar o seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Consideremos a seguinte família a dois parâmetros de equações diferenciais planares*

$$X' = F(X, \mu, \lambda), \quad X \in \mathbb{R}^2, \quad (\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2,$$

sendo $F \in C^\infty$. Suponha que em $(\mu, \lambda) = (\mu_0, \lambda_0)$, a matriz Jacobiana de F no ponto de equilíbrio X_0 tenha um par de autovalores nulos. Suponha ainda que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (i) (Não degenerescência) A matriz Jacobiana $DF \neq 0$.
- (ii) (Não degenerescência) $a = \langle p_1, B(q_0, q_0) \rangle \neq 0$.
- (iii) (Não degenerescência) $b = \langle p_0, B(q_0, q_0) \rangle + \langle p_1, B(q_0, q_1) \rangle \neq 0$.
- (iv) (Transversalidade) A aplicação

$$\phi : (X, \mu, \lambda) \rightarrow (F(X, \mu, \lambda), \text{tr}DF(X, \mu, \lambda), \det DF(X, \mu, \lambda))$$

é regular em $(X_0, 0, 0)$.

Então, esta família pode ser reduzida a

$$\begin{cases} \eta_1' = \eta_2, \\ \eta_2' = \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 + s\eta_1\eta_2 + \mathcal{O}(3). \end{cases} \quad (2.6)$$

sendo $s = \text{sinal}(ab) = \pm 1$.

O Teorema 2.2, bem como sua demonstração, pode ser encontrado na página 321 de [7]. Este teorema nos diz que se for possível reduzir um sistema de equações diferenciais ordinárias às equações vistas em (2.6), então tal sistema possui, em uma vizinhança do ponto (μ_0, λ_0) um diagrama de bifurcações como pode ser visto a seguir na Figura 2.2¹.

¹http://www.scholarpedia.org/article/Bogdanov-Takens_bifurcation

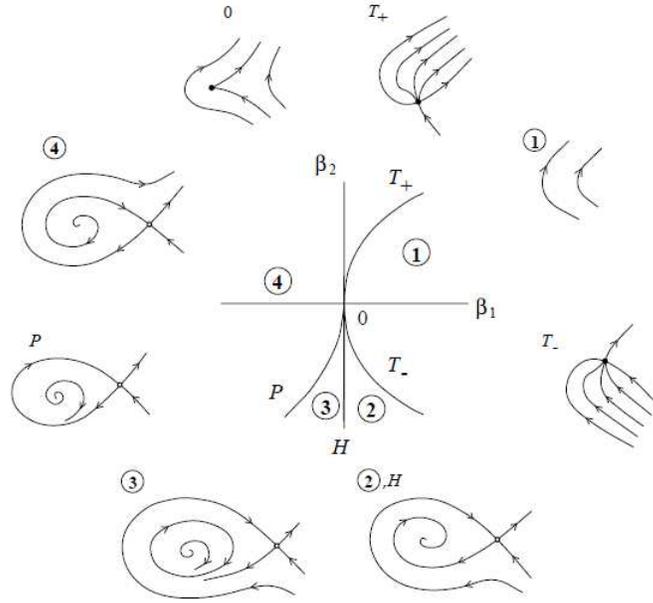


Figura 2.2: Diagrama de bifurcações de Bogdanov-Takens.

Na Figura 2.2, o ponto de bifurcação de Bogdanov-Takens é representado pelo ponto O , T_+ é uma curva de bifurcação do tipo Sela-nó com parte nodal repulsora, T_- é uma curva de bifurcação do tipo Sela-nó com parte nodal atratora, H é uma curva de bifurcação do tipo Hopf e P é uma curva de laços homoclínicos. Vale observar que nas seções a seguir mostraremos que no nosso diagrama de bifurcações teremos que $O = (1, 2)$, a curva T_+ é dada por $\lambda = 1 + \mu^2$, onde $\mu > 1$, a curva T_- é dada por $\lambda = 1 + \mu^2$, onde $0 < \mu < 1$, e a curva H é dada por $\lambda = 2\mu$ onde $0 < \mu < 1$.

O que faremos no teorema a seguir é demonstrar que o sistema (2.2) de fato satisfaz todas as hipóteses do Teorema 2.2.

Teorema 2.3. *O sistema (2.2) tem uma bifurcação do tipo Bogdanov-Takens no ponto $BT = (\mu_0, \lambda_0) = (1, 2)$.*

Demonstração: Primeiramente, devemos ressaltar que os cálculos desta demonstração podem ser encontrados no Apêndice II. Consideremos agora $V(x, y)$ como sendo o campo de vetores do sistema (2.2). Agora, resolvendo $x' = 0$ e $y' = 0$ para μ e λ em função de

(x, y) e como estamos interessados apenas em parâmetros não negativos, segue que $y > 0$. Assim, para cada par $(x_0, y_0) \in U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ existe um par (μ_e, λ_e) no plano dos parâmetros tal que (x_0, y_0) é equilíbrio do sistema (2.2), onde

$$\mu_e = \frac{x(x-1) + y^2}{y} \quad \text{e} \quad \lambda_e = \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}{y}. \quad (2.7)$$

Queremos encontrar um ponto de equilíbrio $X_0 = (x_0, y_0)$ tal que a matriz Jacobiana $DV(X_0)$ tenha um par de autovalores nulos, isto é, $\text{tr}DV(X_0) = 0$ e $\det DV(X_0) = 0$. Resolvendo as duas equações temos que $X_0 = (1, 1)$, ou seja, o ponto $(x, y) = (1, 1) \in U$ é um ponto de equilíbrio candidato a ser um ponto de Bogdanov-Takens. Dessa forma, $(\mu_e, \lambda_e) = (1, 2)$ é um candidato a ponto de bifurcação de Bogdanov-Takens no plano dos parâmetros.

Devemos, então, mostrar que para o ponto de equilíbrio $(x_0, y_0) = (1, 1)$ todas as condições do Teorema 2.2 são satisfeitas. Obviamente a primeira condição de não degenerescência é satisfeita pois

$$DV(1, 1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Calculando os vetores $q_0, q_1, p_0, p_1 \in \mathbb{R}^2$ do Teorema 2.2, temos que

$$q_0 = (1, -1), \quad q_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), \quad p_0 = (-1, -1) \quad \text{e} \quad p_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Temos também que a função $B_i(X, Y)$, com $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$ em (2.4), é dada por

$$B(X, Y) = (2x_2y_1 + 2x_1y_2, 2x_1y_1).$$

Portanto,

$$a = 2 \quad \text{e} \quad b = -2,$$

e, assim, as condições (ii) e (iii) de não degenerescência são satisfeitas. Observe que $\text{sinal}(ab) = -1$.

Agora nos resta mostrar a condição de transversalidade, isto é, precisamos mostrar que a aplicação $\phi(x, y, \mu, \lambda) = (x', y', \text{tr}DV, \det DV)$ é regular em $(1, 1, 1, 2)$, isto é, que o

determinante da matriz Jacobiana de V em $(1, 1, 1, 2)$ é não nulo. De fato, como a matriz Jacobiana de V no ponto $(1, 1, 1, 2)$ é dada por

$$DV(1, 1, 1, 2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

segue que $\det DV(1, 1, 1, 2) = -4$. Portanto, todas as condições do Teorema 2.2 são satisfeitas e o sistema (2.2) apresenta uma bifurcação de Bogdanov-Takens no ponto $(\mu, \lambda) = (1, 2)$. \square

2.2 A bifurcação do tipo Sela-nó

Já tendo provado que o ponto $(\mu, \lambda) = (1, 2)$ no plano de parâmetros nos dá um ponto de equilíbrio do tipo Bogdanov-Takens para o sistema (2.2), queremos agora encontrar as curvas de equilíbrios do tipo Sela-nó dadas na Figura 2.2. Para demonstrar que de fato teremos uma curva de pontos de equilíbrio do tipo Sela-nó iremos utilizar o seguinte teorema.

Teorema 2.4. *Considere $X' = F(X, \alpha)$ uma família de equações diferenciais em \mathbb{R}^2 dependendo de um parâmetro α , sendo $F \in C^\infty$. Suponhamos que, em $\alpha = \alpha_0$, exista um ponto de equilíbrio P_0 satisfazendo:*

- (i) *A matriz Jacobiana de F em (P_0, α_0) tem um único autovalor nulo com autovetores à direita e à esquerda V_0 e W_0 , respectivamente, ou seja, os vetores q_0 e p_1 , como vistos em (2.5).*
- (ii) *(Transversalidade) $W_0 \cdot \frac{d}{d\alpha} F(P_0, \alpha_0) \neq 0$.*
- (iii) *(Não degenerescência) $W_0 \cdot D_X^2 F(P_0, \alpha_0)(V_0, V_0) \neq 0$.*

Então, existe uma curva suave de pontos de equilíbrio em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ passando por (P_0, α_0) . Dependendo dos sinais das expressões nos itens (ii) e (iii) acima, não existe ponto de equilíbrio próximo de (P_0, α_0) quando $\alpha > \alpha_0$, e dois pontos de equilíbrio hiperbólicos próximos de (P_0, α_0) quando $\alpha < \alpha_0$. Esses dois pontos de equilíbrio colidem quando $\alpha = \alpha_0$.

Este teorema encontra-se enunciado e demonstrado em [5], página 148. Agora podemos provar o seguinte teorema sobre os equilíbrios do tipo Sela-nó do sistema (2.2).

Teorema 2.5. Para $\lambda = 1 + \mu^2$, o sistema (2.2) tem:

- (i) Um ponto de equilíbrio do tipo Sela-nó com parte nodal atratora quando $\mu \in (0, 1)$;
- (ii) Um ponto de equilíbrio do tipo Sela-nó com parte nodal repulsora quando $\mu > 1$.

Demonstração: Mais detalhes dos cálculos realizados nesta demonstração podem ser encontrados no Apêndice III. Considere agora o sistema (2.2) como

$$X' = F(X, \alpha),$$

onde $\alpha = (\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ e, com as notações do Teorema 2.4, $\alpha_0 = (\mu, 1 + \mu^2)$. Primeiramente, devemos mostrar que para parâmetros sobre a curva $\lambda = 1 + \mu^2$ teremos um ponto de equilíbrio candidato a ser ponto de Sela-nó. Para isto, precisamos encontrar um ponto de equilíbrio $X_0 = (x_0, y_0)$ tal que a matriz Jacobiana em X_0 tenha um único autovalor nulo, isto é, $\det DF(X_0) = 0$ e $\text{tr} DF(X_0) \neq 0$. Temos então que todo par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x = 1$ e $y \neq 1$ satisfaz ambas as condições. Tomando $x = 1$ vamos obter que, para termos um ponto de equilíbrio candidato a ponto de Sela-nó, o par de parâmetros deve ser dado por

$$(\mu, \lambda) = (\mu, 1 + \mu^2), \quad \text{com } \mu \neq 1.$$

Substituindo $\lambda = 1 + \mu^2$ em

$$P_1 = \left(\frac{\lambda(\lambda - \sigma\mu)}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{\lambda(\mu\lambda + \sigma)}{(1 + \mu^2)^2} \right), \quad P_2 = \left(\frac{\lambda(\lambda + \sigma\mu)}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{\lambda(\mu\lambda - \sigma)}{(1 + \mu^2)^2} \right)$$

temos que o sistema (2.2) tem um único ponto de equilíbrio dado por $P_1 = P_2 = (1, \mu)$. Dessa forma, temos que a matriz Jacobiana calculada neste ponto de equilíbrio $(x_0, y_0) = (1, \mu)$ é dada por

$$DF(1, \mu) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu} & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix},$$

e seus autovalores são dados por

$$s_1 = 0 \quad \text{e} \quad s_2 = \frac{-1 + \mu^2}{\mu}, \quad (2.9)$$

o que, de fato, satisfaz $\det DF(1, \mu) = 0$ e $\text{tr} DF(1, \mu) \neq 0$. Portanto, calculando os autovetores à direita e à esquerda, V_0 e W_0 , respectivamente, temos que

$$V_0 = (-\mu, 1) \quad \text{e} \quad W_0 = (\mu, 1).$$

Devemos observar que, como

$$W_0 \cdot \frac{d}{d\alpha} F(P_1, \alpha_0) = -1 \neq 0,$$

segue que a condição de transversalidade é satisfeita.

Para verificarmos a condição de não degenerescência devemos observar que a matriz Hessiana da primeira e segunda componente do campo em (2.1) são dadas por

$$H_1(1, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1 + \mu^2}{\mu^2} \\ \frac{1 + \mu^2}{\mu^2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_2(1, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{1 + \mu^2}{\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Assim, calculando a expressão em (iii) temos que

$$W_0 \cdot D_X^2 F(P_1, \alpha_0)(V_0, V_0) = -1 - \mu^2 \neq 0$$

para todo $\mu \neq 1$. Dessa forma, as condições do Teorema 2.4 são satisfeitas e, portanto, quando $\lambda = 1 + \mu^2$ o ponto de equilíbrio P_1 é um ponto de Sela-nó. Por fim, observando que o autovalor não nulo s_2 em (2.9), é negativo para $\mu \in (0, 1)$ e positivo para $\mu > 1$, logo, segue que a Sela-nó é atratora para $\mu \in (0, 1)$ e repulsora para $\mu > 1$. \square

2.3 A bifurcação do tipo Hopf

Nesta seção iremos demonstrar que existe uma curva H no plano de parâmetros tal que para $(\mu, \lambda) \in H$, teremos equilíbrios do tipo Hopf para o sistema (2.2). Para provar que tal curva existe, faremos uso do seguinte teorema.

Teorema 2.6. *Considere $X' = F(X, \alpha)$ uma família de equações diferenciais em \mathbb{R}^2 dependendo de um parâmetro α , sendo $F \in C^\infty$. Suponha que, para todo α próximo de α_0 , exista um ponto de equilíbrio P_α tal que a matriz Jacobiana de F em (P_α, α) possua autovalores*

$$s_{1,2} = \gamma(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

sendo que $\gamma(\alpha_0) = 0$ e $\omega(\alpha_0) > 0$. Suponha ainda que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (i) (Transversalidade) $\gamma'(\alpha_0) \neq 0$.
- (ii) (Não degenerescência) $l_1(P_{\alpha_0}) \neq 0$.

Suponha também que $\gamma(\alpha) < 0$ para $\alpha > \alpha_0$, e que $\gamma(\alpha) > 0$ para $\alpha < \alpha_0$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Se $l_1(P_{\alpha_0}) < 0$, então o ponto de equilíbrio P_{α_0} é assintoticamente estável e para cada $\alpha < \alpha_0$, porém suficientemente próximo deste, existe um único ciclo limite estável próximo do ponto de equilíbrio instável P_α .
- (ii) Se $l_1(P_{\alpha_0}) > 0$, então o ponto de equilíbrio P_{α_0} é instável e para cada $\alpha > \alpha_0$, porém suficientemente próximo deste, existe um único ciclo limite instável próximo do ponto de equilíbrio estável P_α .

O Teorema 2.6 encontra-se demonstrado em [7]. Com isso, podemos enunciar e provar o seguinte teorema.

Teorema 2.7. *Se $\lambda = 2\mu$, quando $0 < \mu < 1$, então o ponto de equilíbrio P_1 do sistema (2.2), dado por*

$$P_1 = \left(\frac{2\mu^2}{1 + \mu^2}, \frac{2\mu}{1 + \mu^2} \right),$$

é um ponto de equilíbrio do tipo Hopf.

Demonstração: Todos os cálculos realizados nesta demonstração estão presentes no Apêndice IV. Como já vimos no Teorema 2.1, o ponto de equilíbrio P_2 , quando existe, é uma sela, logo, para este teorema, estaremos interessados apenas no ponto de equilíbrio P_1 . Antes de mais nada, mostremos que para os valores de parâmetros $(\mu, 2\mu)$, o ponto de equilíbrio P_1 é um candidato a ponto de equilíbrio de Hopf. Para isto, precisamos mostrar que a matriz Jacobiana do sistema (2.2) calculada em P_1 possui autovalores complexos conjugados com partes reais nulas, ou seja, devemos ter que $\text{tr}DF(P_1) = 0$ e $\det DF(P_1) \neq 0$. Temos, então, que para parâmetros sobre a curva $\alpha_0 = \lambda = 2\mu$, com $0 < \mu < 1$, a matriz Jacobiana do campo $F = (F_1, F_2)$ calculada no ponto de equilíbrio P_1 é dada por

$$DF(P_1) = \begin{bmatrix} \frac{\mu(1 - 6\mu^2 + \mu^4)}{(1 + \mu^2)^2} & \frac{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4}{(1 + \mu^2)^2} \\ \frac{1 - 2\mu^2 + 5\mu^4}{(1 + \mu^2)^2} & -\frac{\mu(1 - 6\mu^2 + \mu^4)}{(1 + \mu^2)^2} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, os autovalores de DF são dados por $s_1 = -\sqrt{-1 + \mu^2}$ e $s_2 = \sqrt{-1 + \mu^2}$. Como $0 < \mu < 1$, segue que $-1 + \mu^2 < 0$ e isto implica que s_1 e s_2 são complexos conjugados com partes reais nulas. Assim, os pontos de equilíbrio existentes quando tomamos parâmetros sobre a curva $\lambda = 2\mu$ são candidatos a serem pontos de equilíbrio do tipo Hopf.

Para verificarmos a condição de transversalidade, basta observarmos que

$$\gamma'(\alpha_0) = \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2} \neq 0.$$

Podemos ver também, que o primeiro coeficiente de Lyapunov é dado por

$$l_1(P_1) = \frac{\mu((1 + \mu^2)^2(1 - \mu^4))}{2\sqrt{1 - \mu^2}(-1 + \mu^2)^2(-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4)} < 0.$$

Portanto, pelo Teorema 2.6, o ponto de equilíbrio P_1 é assintoticamente estável e para cada $\lambda \neq 2\mu$, porém suficientemente próximo deste, mas com $\lambda > 2\mu$, existe um único ciclo limite estável próximo do ponto de equilíbrio instável P_1 . \square

2.4 O ponto de equilíbrio P_1 passa de foco para nó

O que iremos ver nesta seção é a existência de uma curva $\lambda_0 = \lambda(\mu)$ no plano de parâmetros tal que, ao cruzarmos esta curva, o ponto de equilíbrio do sistema (2.2) passa de foco para nó. Para isso, consideremos o seguinte lema.

Lema 2.1. *Considere P_1 o ponto de equilíbrio do sistema (2.2) dado por*

$$P_1(\mu, \lambda) = \left(\frac{\lambda(\lambda - \mu\sqrt{(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2})}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{\lambda(\mu\lambda + \sqrt{(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2})}{(1 + \mu^2)^2} \right)$$

e

$$\lambda_0 = 2\sqrt{\frac{1 + \mu^2}{5 - 4\mu + \mu^2}}.$$

Então valem as seguintes afirmações:

- (i) *Se $\lambda < \lambda_0$, então o ponto de equilíbrio P_1 é um foco.*
- (ii) *Se $\lambda_0 \leq \lambda < 1 + \mu^2$, então o ponto de equilíbrio P_1 é um nó.*

Demonstração: Alguns detalhes dos cálculos feitos nesta demonstração podem ser encontrados no Apêndice V. Primeiramente, vamos observar que para $\lambda = \lambda_0$, temos que $\lambda < 1 + \mu^2$ para todo $\mu > 0$ e, assim, o ponto de equilíbrio P_1 sempre existe. Dessa forma, seja Δ o discriminante do polinômio característico da matriz Jacobiana do sistema (2.2) aplicada em P_1 . Assim, temos que

$$\Delta = \frac{-4(1 + \mu^2)^2 + \lambda^2(5 - 2\mu^2 + \mu^4) - 8\lambda\mu\sqrt{-\lambda^2 + (1 + \mu^2)^2}}{\lambda^2(-1 + \mu^2) + (1 + \mu^2)^2 + 2\lambda\mu\sqrt{-\lambda^2 + (1 + \mu^2)^2}}.$$

Como o denominador de Δ é sempre positivo para $\lambda < 1 + \mu^2$, para saber qual é o sinal de Δ , basta analisar o sinal do numerador. Assim, temos que:

- (i) $\Delta < 0$, se $-4(1 + \mu^2)^2 + \lambda^2(5 - 2\mu^2 + \mu^4) - 8\lambda\mu\sqrt{-\lambda^2 + (1 + \mu^2)^2} < 0$,
- (ii) $\Delta = 0$, se $-4(1 + \mu^2)^2 + \lambda^2(5 - 2\mu^2 + \mu^4) - 8\lambda\mu\sqrt{-\lambda^2 + (1 + \mu^2)^2} = 0$,
- (iii) $\Delta > 0$, se $-4(1 + \mu^2)^2 + \lambda^2(5 - 2\mu^2 + \mu^4) - 8\lambda\mu\sqrt{-\lambda^2 + (1 + \mu^2)^2} > 0$.

Dessa forma, para que $\Delta < 0$, precisamos que

$$\lambda < 2\sqrt{\frac{1 + \mu^2}{5 - 4\mu + \mu^2}},$$

isto é, se $\lambda < \lambda_0$, então o discriminante do polinômio característico é negativo e, portanto, a matriz Jacobiana calculada em P_1 tem dois autovalores complexos conjugados e o ponto de equilíbrio P_1 é um foco. Agora, para que tenhamos $\Delta = 0$, devemos ter que

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{1 + \mu^2}{5 - 4\mu + \mu^2}},$$

ou seja, $\lambda = \lambda_0$. Mas, se o discriminante é zero, a matriz Jacobiana aplicada em P_1 tem dois autovalores reais e iguais, logo, o ponto de equilíbrio P_1 é um nó. Por fim, para que $\Delta > 0$, precisamos que

$$\lambda > 2\sqrt{\frac{1 + \mu^2}{5 - 4\mu + \mu^2}},$$

o que ocorre quando $\lambda > \lambda_0$. Mas para que P_1 exista, a condição $\lambda < 1 + \mu^2$ deve ser satisfeita, ou seja, para que $\Delta > 0$, temos que considerar $\lambda_0 < \lambda < 1 + \mu^2$. Dessa forma, o discriminante é positivo, o que significa que a matriz Jacobiana calculada em P_1 tem dois autovalores reais e distintos e, portanto, o ponto de equilíbrio P_1 é um nó. \square

2.5 O diagrama de bifurcações do sistema (2.2)

Nesta seção, concluiremos a construção do diagrama de bifurcações do sistema (2.2). Para isto, vamos utilizar todos os resultados obtidos nas seções anteriores deste capítulo. Desta forma, temos que o sistema (2.2) possui o seguinte diagrama de bifurcações no plano (μ, λ) . Veja Figura 2.3.

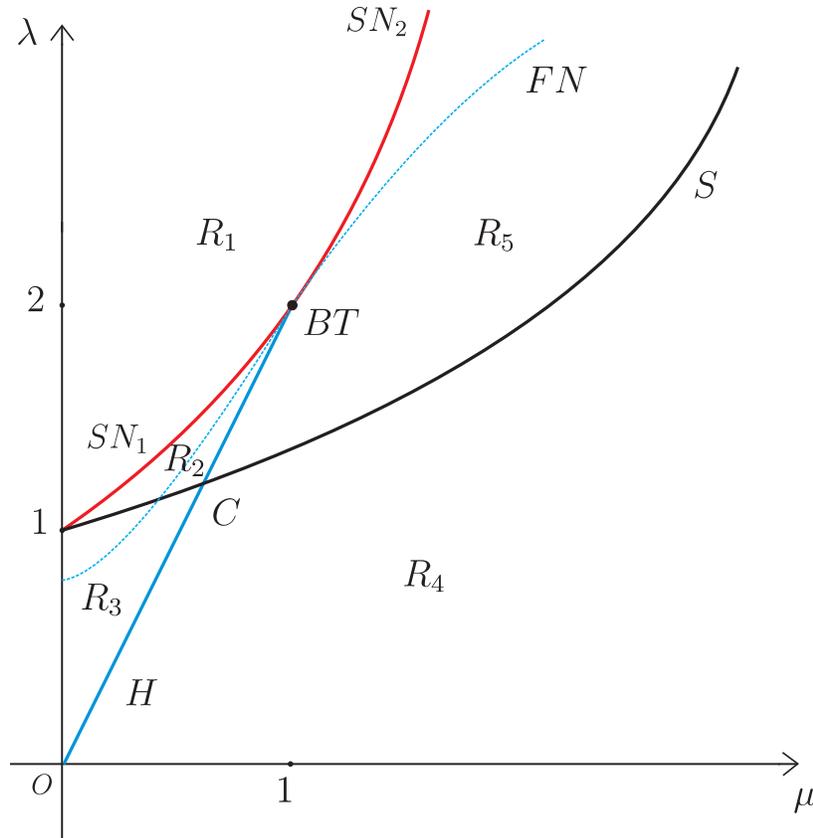


Figura 2.3: Diagrama de bifurcações relativo aos equilíbrios do sistema (2.2).

Sendo assim, temos, no diagrama de bifurcações do sistema (2.2), as seguintes representações. O ponto $BT = (1, 2)$ é o ponto no plano de parâmetros tal que quando substituído no sistema (2.2), temos um único ponto de equilíbrio do tipo Bogdanov-Takens. As curvas SN_1, SN_2 representam as curvas de parâmetros para os quais os pontos de equilíbrio do sistema (2.2) são do tipo Sela-nó, com SN_1 contendo os pontos cuja parte nodal da Sela-nó é atratora e SN_2 contendo os pontos cuja parte nodal da Sela-nó é repulsora e a curva H é a curva dada pelos parâmetros para os quais os pontos de equilíbrio do sistema (2.2) são do tipo Hopf. Temos também a existência de uma curva S que representa os pontos para os quais o sistema (2.2) deixa de ter dois equilíbrios, uma sela e um nó (ou foco), e passa a ter apenas um nó (ou foco). O que nos diz se um dos equilíbrios será foco ou nó, é a posição de um ponto (μ, λ) com relação à curva FN . O Teorema 2.3 também nos garante que o sistema (2.2) possui um diagrama de bifurcações como na Figura 2.2.

Dessa forma, sabemos que existirá uma curva de laços homoclínicos, L , no diagrama de bifurcações do nosso sistema. Como não é possível obter uma expressão analítica para esta curva, apenas podemos encontrá-la com o auxílio do software *MatCont*. Veja Figura 2.4.

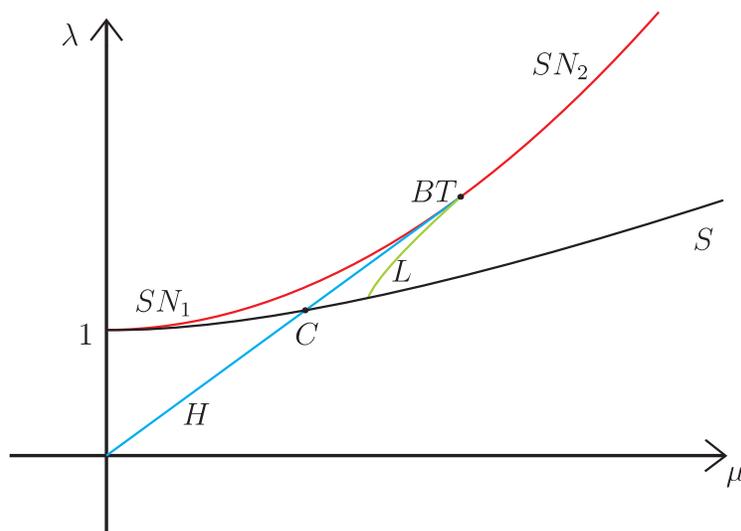


Figura 2.4: Esboço do diagrama de bifurcações relativo aos equilíbrios do sistema (2.2) obtido no MatCont.

Devemos observar, então, que os diagramas (2.3) e (2.2) são os mesmos a menos de um homeomorfismo que leva o ponto BT na origem, a curva $\lambda = 1 + \mu^2$, com $\mu > 1$, em T_+ , a curva $\lambda = 1 + \mu^2$, com $0 < \mu < 1$, em T_- e a curva $\lambda = 2\mu$, com $0 < \mu < 1$, na curva H .

2.6 Retratos de fase

Para finalizar este capítulo, vamos exemplificar os retratos de fase típicos de cada uma das regiões abertas no plano de parâmetros visto na Figura 2.3, bem como os retratos de fase para parâmetros (μ, λ) sobre cada uma das curvas.

Nesses retratos de fase, pontos de equilíbrio serão representados por pontos pretos, a origem sempre será representada por um ponto azul e o ponto $F = (1, 0)$, quando for

singular, será representado por um ponto vermelho. Vamos, então, definir as seguintes regiões, curvas e pontos:

a) $BT = (1, 2)$.

b) $C = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$.

c) H_1 é o segmento de reta com extremidades na origem e no ponto C , considerando C incluído.

d) H_2 é o segmento de reta com extremidades em C e BT , ambos não incluídos.

e) $SN_1 = \{(\mu, 1 + \mu^2) : 0 < \mu < 1\}$.

f) $SN_2 = \{(\mu, 1 + \mu^2) : 1 < \mu\}$.

g) $S_1 = \{(\mu, \sqrt{1 + \mu^2}) : 0 \leq \mu < \frac{\sqrt{3}}{3}\}$.

h) $S_2 = \{(\mu, \sqrt{1 + \mu^2}) : \frac{\sqrt{3}}{3} < \mu\}$.

i) R_1 é o aberto cujo bordo é $\mu = 0$, SN_1 , BT e SN_2 .

j) R_2 é o aberto cujo bordo é S_1 , C , H_2 , BT e SN_1 .

k) R_3 é o aberto cujo bordo é $\mu = 0$, H_1 , C e S_1 .

l) R_4 é o aberto cujo bordo é $\lambda = 0$, H_1 , C e S_2 .

m) R_5 é o aberto cujo bordo é SN_2 , BT , H_2 , C e S_2 .

Vamos começar, então, pelas regiões abertas R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 , lembrando que todos os comportamentos para o sistema (2.2) foram obtidos analiticamente através dos Teoremas 2.1, 2.3, 2.5, 2.7 e do Lema 2.1 demonstrados nas seções anteriores e os retratos de fase obtidos através do software *Mathematica*.

Assim, para parâmetros (μ, λ) contidos na região R_1 , o sistema não apresenta nenhum ponto de equilíbrio e o ponto singular $F = (1, 0)$ se comporta como um atrator global. Veja Figura 2.5.

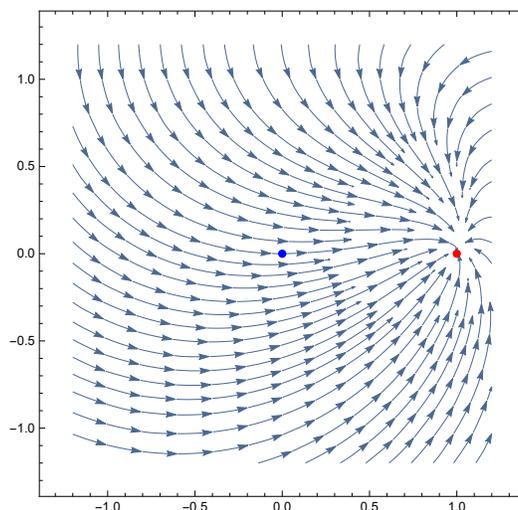


Figura 2.5: Retrato de fase para parâmetros (μ, λ) pertencentes à região R_1 .

Para parâmetros contidos na região R_2 , o sistema possui dois pontos de equilíbrio, sendo uma sela e um foco (ou nó) atrator e, neste caso, o ponto singular $F = (1, 0)$ se comporta como um nó atrator local. Um retrato de fase para parâmetros nesta região pode ser visto na Figura 2.6.

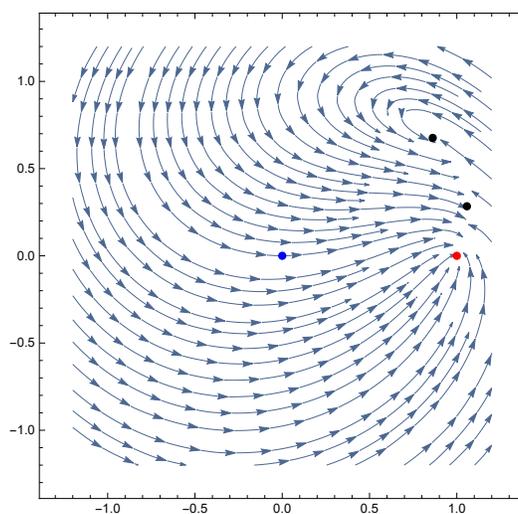


Figura 2.6: Retrato de fase para parâmetros (μ, λ) pertencentes à região R_2 .

Como podemos ver nas Figuras 2.7 e 2.8, o sistema (2.2) possui dois pontos de equilíbrio, sendo o primeiro uma sela, e o outro um foco (ou nó) atrator.

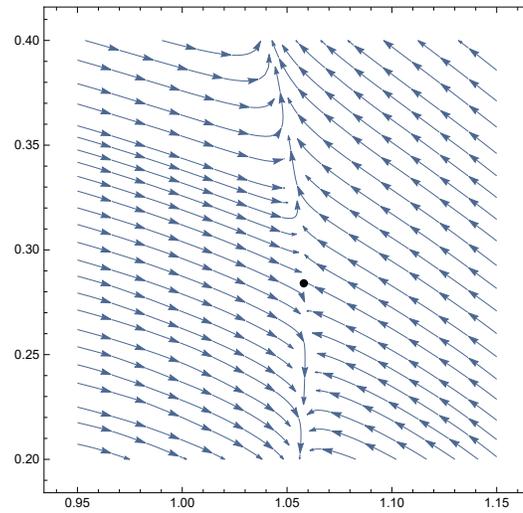


Figura 2.7: Retrato de fase de uma vizinhança do equilíbrio tipo sela.

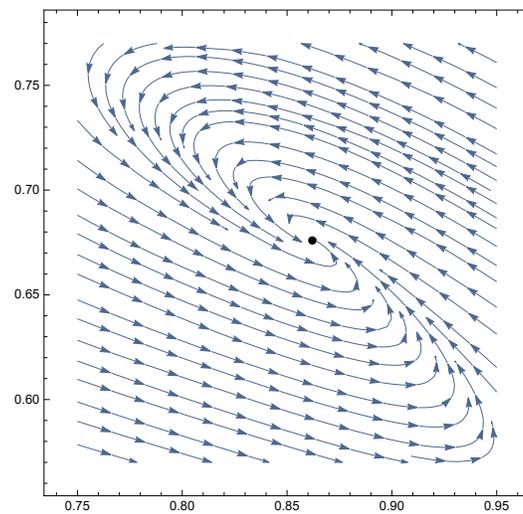


Figura 2.8: Retrato de fase de uma vizinhança do equilíbrio tipo foco.

Considere agora (μ, λ) pertencentes à região R_3 . Dessa forma, como o parâmetro $\lambda < \sqrt{1 + \mu^2}$, temos que o equilíbrio do tipo sela, que existia, desapareceu e, portanto, o sistema possui apenas um ponto de equilíbrio, que independentemente de ser um foco ou nó, será atrator. Veja Figura 2.9.

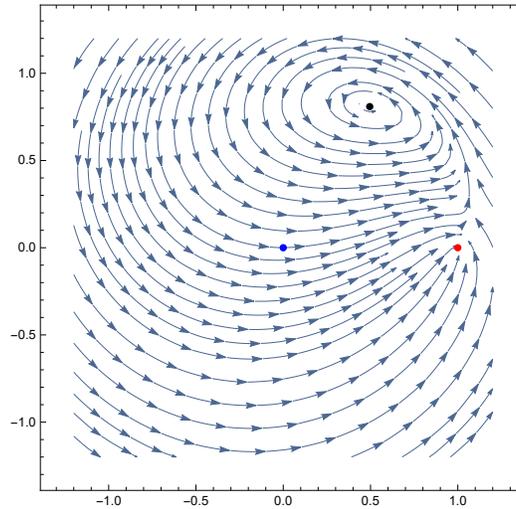


Figura 2.9: Retrato de fase para parâmetros (μ, λ) pertencentes à região R_3 .

Considerando valores de μ e λ pertencentes à região R_4 , assim como na região R_3 , temos que $\lambda < \sqrt{1 + \mu^2}$. Logo, o ponto de equilíbrio do tipo sela não existe mais. A diferença neste caso é a estabilidade do outro ponto de equilíbrio. Como visto anteriormente, sendo foco ou nó, ele seria atrator, mas na região R_4 , este ponto de equilíbrio passa a ser um foco repulsor. Isso ocorre devido ao fato de que, para passarmos da região R_3 para a região R_4 , os parâmetros devem cruzar a curva de Hopf dada por H . Assim, o retrato de fase para a região R_4 é como o visto na Figura 2.10.

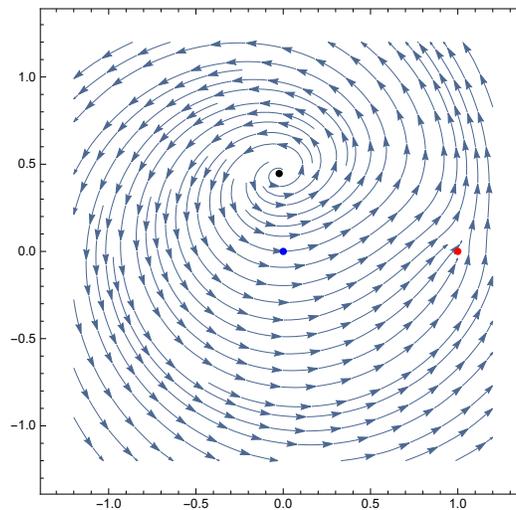


Figura 2.10: Retrato de fase para parâmetros (μ, λ) pertencentes à região R_4 .

Já na região R_5 , temos que $\sqrt{1 + \mu^2} < \lambda < 1 + \mu^2$, ou seja, o sistema possui dois pontos de equilíbrio, uma sela, e um foco (ou nó) repulsor. Lembrando que a mudança de estabilidade do foco existente na região R_2 se dá no momento em que os parâmetros μ e λ cruzam a curva H . Um retrato de fase para parâmetros nesta região pode ser visto na Figura 2.11.

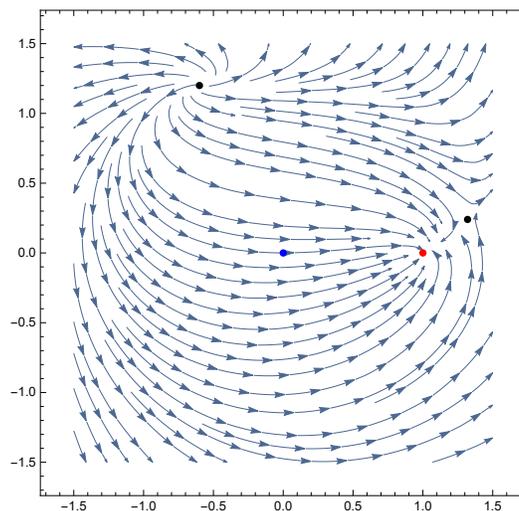


Figura 2.11: Retrato de fase para parâmetros (μ, λ) pertencentes à região R_5 .

Localmente, retratos de fase em vizinhanças dos dois pontos de equilíbrio podem ser vistos nas Figuras 2.12 e 2.13.

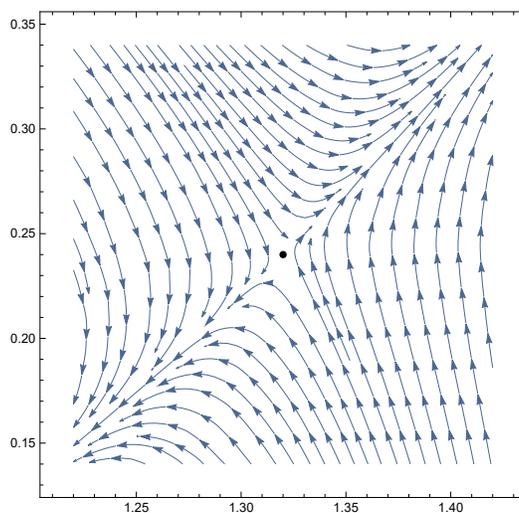


Figura 2.12: Retrato de fase de uma vizinhança do equilíbrio tipo sela.

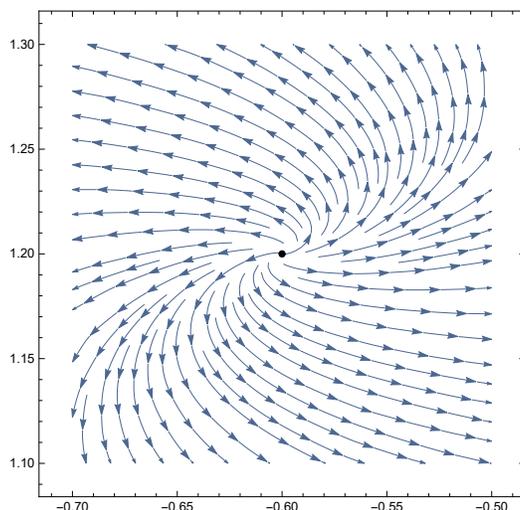


Figura 2.13: Retrato de fase de uma vizinhança do equilíbrio tipo foco.

Daqui pra frente, vamos ver alguns retratos de fase para parâmetros sobre as curvas SN_1, SN_2, S, H e para $(\mu, \lambda) = BT = (1, 2)$. Para isso, vamos lembrar que a curva SN_1 é dada por $\lambda = 1 + \mu^2$, com $0 < \mu < 1$, e a curva SN_2 por $\lambda = 1 + \mu^2$, com $\mu > 1$, a curva S é dada por $\lambda = \sqrt{1 + \mu^2}$ e a curva H é descrita por $\lambda = 2\mu$, com $0 < \mu < 1$.

Primeiramente, vamos ver o retrato de fase para o ponto $(\mu, \lambda) = BT = (1, 2)$. Como já vimos no Teorema 2.2, esses valores de μ e λ fazem com que o sistema (2.1) possua um único ponto de equilíbrio do tipo Bogdanov-Takens. Veja Figuras 2.14 e 2.15.

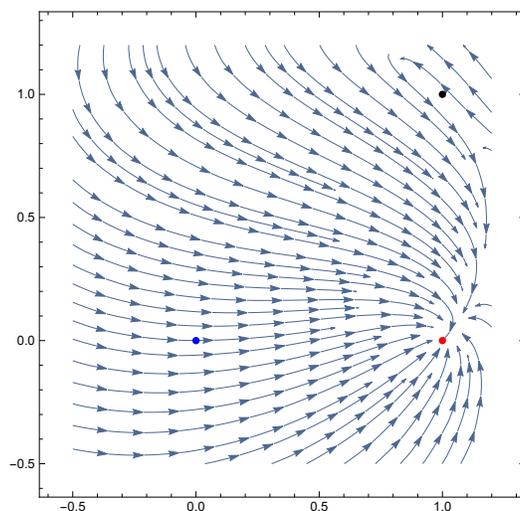


Figura 2.14: Retrato de fase para parâmetros $(\mu, \lambda) = (1, 2)$.

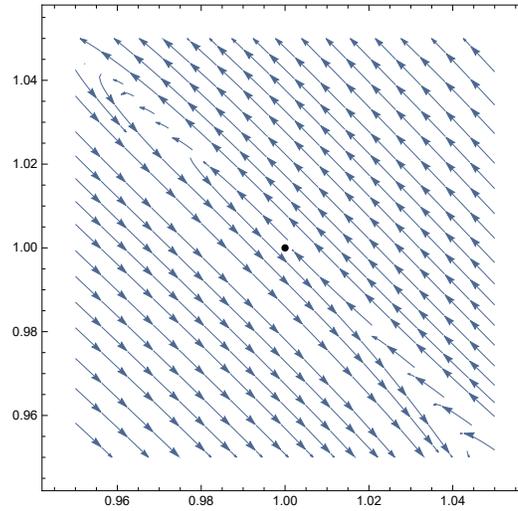


Figura 2.15: Retrato de fase de uma vizinhança do ponto de equilíbrio do tipo Bogdanov-Takens.

Consideremos agora parâmetros (μ, λ) pertencentes à curva SN_1 . Como foi visto no Teorema 2.3, para estes parâmetros, o sistema (2.1) possui um único ponto de equilíbrio que é do tipo Sela-nó e possui parte nodal atratora. Veja Figuras 2.16 e 2.17.

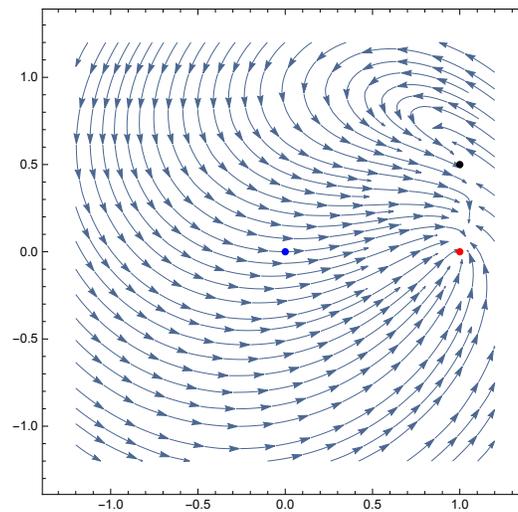


Figura 2.16: Retrato de fase para parâmetros sobre a curva SN_1 .

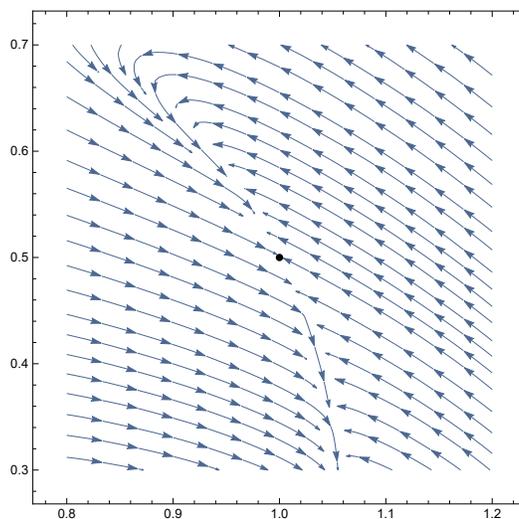


Figura 2.17: Retrato de fase de uma vizinhança do equilíbrio do tipo Sela-nó para parâmetros em SN_1 .

Para valores de (μ, λ) sobre SN_2 , ainda pelo Teorema 2.3, o sistema possui um único ponto de equilíbrio que é do tipo Sela-nó, mas agora sua parte nodal é repulsora. Veja Figuras 2.18 e 2.19.

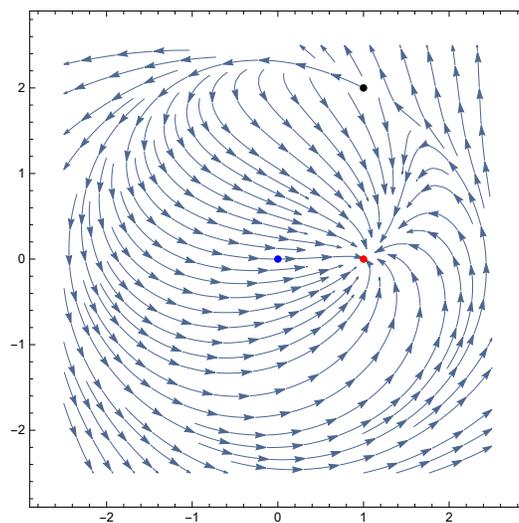


Figura 2.18: Retrato de fase para parâmetros sobre a curva SN_2 .

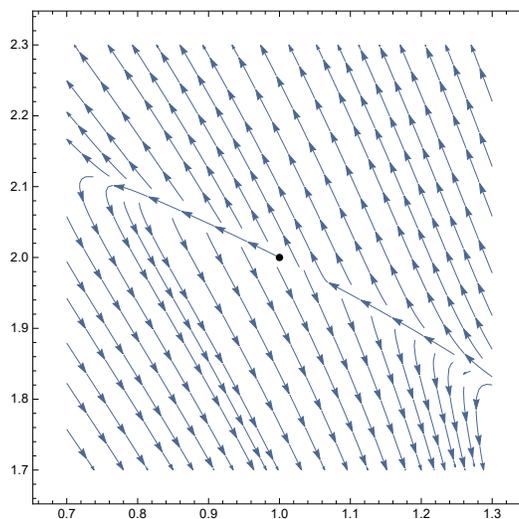


Figura 2.19: Retrato de fase de uma vizinhança do equilíbrio do tipo Sela-nó para parâmetros em SN_2 .

Vamos considerar agora parâmetros sobre a curva S . Como já foi observado acima, esta curva está dividida em dois setores, S_1 e S_2 . Para (μ, λ) pertencentes à S_1 o sistema (2.2) possui um único ponto de equilíbrio que é um foco (ou nó) atrator. Veja Figura 2.20.

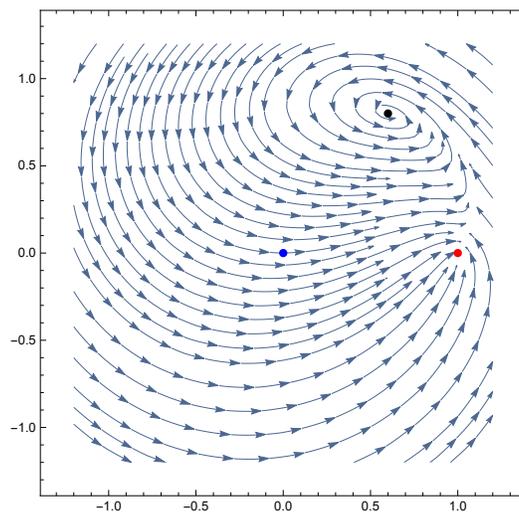


Figura 2.20: Retrato de fase para parâmetros pertencentes à curva S_1 .

Já para (μ, λ) pertencentes à curva S_2 o sistema ainda possui apenas um ponto de

equilíbrio, mas agora este é um foco (ou nó) repulsor. Veja Figura 2.21.

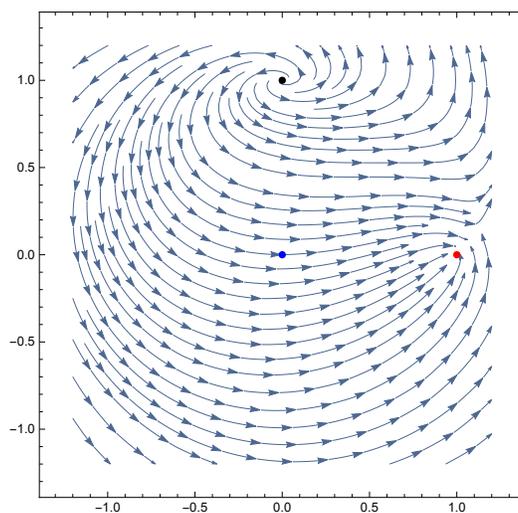


Figura 2.21: Retrato de fase para parâmetros pertencentes à curva S_2 .

Nos resta exibir os retratos de fase obtidos para valores de (μ, λ) em H_1 e H_2 . Em ambas as curvas, o sistema (2.1) possui um ponto de equilíbrio que é um foco fraco. A diferença entre elas é a existência de um segundo ponto de equilíbrio do tipo sela, uma vez que H_1 está abaixo da curva S , isto é, os parâmetros em H_1 tem $\lambda < \sqrt{1 + \mu^2}$, e H_2 está acima da curva S , ou seja, os parâmetros em H_2 tem $\lambda > \sqrt{1 + \mu^2}$. Veja Figuras 2.22 e 2.23.

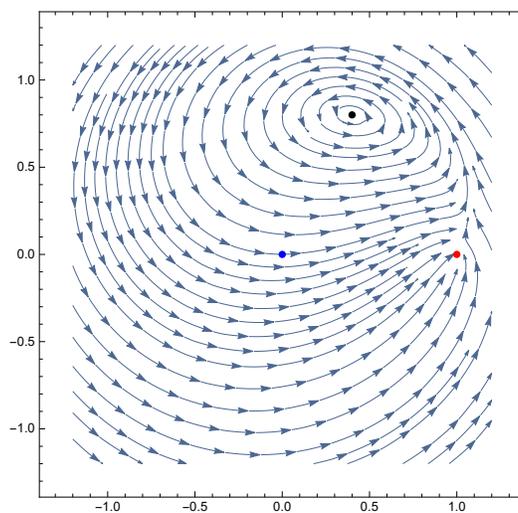


Figura 2.22: Retrato de fase para parâmetros sobre a curva H_1 .

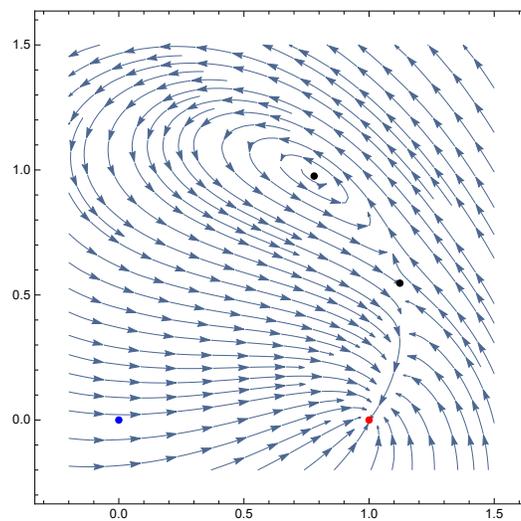


Figura 2.23: Retrato de fase para parâmetros sobre a curva H_2 .

Capítulo 3

Modificação do modelo por uma deriva radial com anulamento no bordo do disco D

Neste capítulo nosso objetivo é fazer uma modificação no sistema (1.1) e, dentre várias possibilidades para definir esse novo termo no sistema, foi escolhido um com deriva radial e anulamento no bordo do disco. Assim como no Capítulo 2, esta modificação pode ser interpretada como uma reinjeção de fluido no sistema, porém como neste caso temos anulamento no bordo do disco, a modificação não é fictícia como no capítulo anterior. Uma esquematização para este modelo pode ser visto abaixo na Figura 3.1.

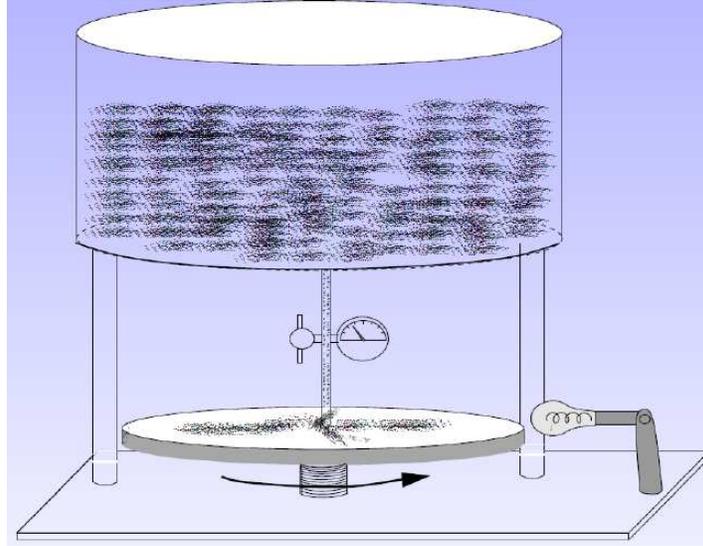


Figura 3.1: Segunda modificação do modelo estudado (Sotomayor).

Sob essas novas hipóteses, obtemos um novo modelo com a seguinte família de equações diferenciais ordinárias, dependendo de quatro parâmetros não negativos, R , v , ω e δ ,

$$\begin{cases} x' = -\omega y + v \frac{R-x}{\sqrt{(R-x)^2 + y^2}} + \delta \frac{(R^2 - (x^2 + y^2))x}{R^2 \sqrt{x^2 + y^2}}, \\ y' = \omega x - v \frac{y}{\sqrt{(R-x)^2 + y^2}} + \delta \frac{(R^2 - (x^2 + y^2))y}{R^2 \sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Vale ressaltar que, assumindo $\delta = 0$, a função que controla a deriva é cancelada e, então, voltamos ao sistema inicial (1.1). Com isso em mente, faremos uma simples mudança de variáveis que transformará nosso sistema que depende dos quatro parâmetros R , v , ω e δ , em um sistema que depende apenas de dois parâmetros não negativos μ e λ .

3.1 Sistema dependente de μ e λ

Conforme foi dito no início deste capítulo, para obter um sistema que depende de dois parâmetros μ e λ , devemos fazer uma mudança de variáveis e um reescalonamento da

variável independente, que será chamada de tempo. Faremos a seguinte mudança de variáveis

$$x = R\bar{x}, \quad y = R\bar{y}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\omega}, \quad \omega = \frac{v\bar{\omega}}{R}, \quad \delta = \frac{v\bar{\delta}}{R}, \quad \mu = \frac{\delta}{R\omega} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{v}{R\omega}.$$

Depois de algumas contas simples, o sistema (3.1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} x' = -y + \lambda \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \mu \frac{(1-x^2-y^2)x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ y' = x - \lambda \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \mu \frac{(1-x^2-y^2)y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{cases} \quad (3.2)$$

com $\mu \geq 0$ e $\lambda \geq 0$. Podemos ver que o sistema (3.2) tem dois pontos singulares no plano \mathbb{R}^2 , a saber $O = (0, 0)$ e $F = (1, 0)$, ou seja, dois pontos em que o sistema não está definido.

Agora podemos começar o estudo do comportamento qualitativo do sistema (3.2) quando os parâmetros μ e λ variam, o que envolverá uma maior compreensão do diagrama de bifurcações deste sistema.

Para isso, devemos observar dois casos particulares:

(i) $\mu = 0$ e $\lambda > 0$.

(ii) $\mu > 0$ e $\lambda = 0$.

No caso (i) não temos a deriva radial, e o sistema é exatamente o caso do exercício proposto visto no Capítulo 1.

No caso (ii) as partículas não têm velocidade, ou seja, $v = 0$, assim todas elas se acumulam no bordo do disco D . Neste caso, como o sistema (3.2) passa a ter a forma

$$\begin{cases} x' = -y + \mu \frac{(1-x^2-y^2)x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ y' = x + \mu \frac{(1-x^2-y^2)y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{cases} \quad (3.3)$$

o ponto $F = (1, 0)$ não é ponto singular do sistema (3.2). Assim, podemos reescrever o sistema (3.2) em coordenadas polares centradas na origem e obter

$$\begin{cases} \theta' = 1, \\ r' = \mu(1 - r^2). \end{cases} \quad (3.4)$$

Portanto, temos que $r' = 0$ se, e somente se, $r = 1$, o que significa que o círculo centrado em $O = (0, 0)$ de raio 1, que denotamos por S , é uma órbita periódica. Para $r < 1$, segue que $r' > 0$ e as órbitas espiralam em direção à órbita periódica. Finalmente, para $r > 1$, temos que $r' < 0$, e as soluções também espiralam em direção à órbita periódica, o que significa que S é um ciclo limite estável. Veja Figura 3.2.

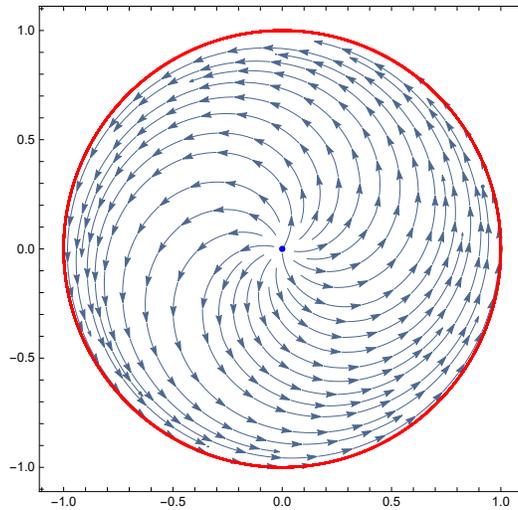


Figura 3.2: Retrato de fase quando $\mu > 0$ e $\lambda = 0$.

3.2 O diagrama de bifurcações no quadrante $\mu \geq 0$ e $\lambda \geq 0$

Consideremos agora $F = (F_1, F_2)$ o campo de vetores do sistema (3.2), queremos analisar o diagrama de bifurcações deste sistema quando os parâmetros μ e λ variam. Primeiro, calculamos as funções $\mu(x, y)$ e $\lambda(x, y)$ satisfazendo $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$, e obtemos

$$\mu_e(x, y) = \frac{(x - x^2 - y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{y(-1 + x^2 + y^2)}, \quad \lambda_e(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}{y}. \quad (3.5)$$

Portanto, queremos saber os valores de (x, y) para os quais μ_e e λ_e são parâmetros não negativos, ou seja, $\mu_e \geq 0$ e $\lambda_e \geq 0$. Esses valores correspondem às regiões destacadas nas Figuras 3.3, 3.4 e 3.5.

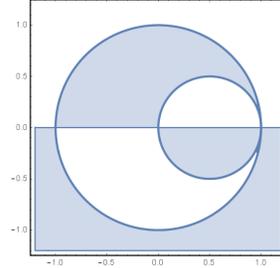


Figura 3.3: Região do plano (x, y) tal que $\mu \geq 0$.

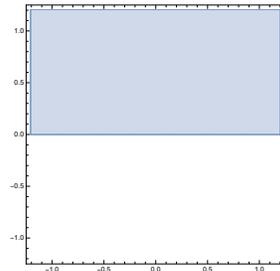


Figura 3.4: Região do plano (x, y) tal que $\lambda \geq 0$.

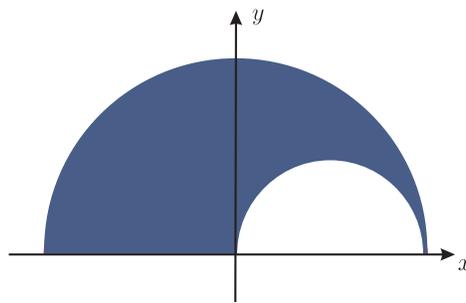


Figura 3.5: Interseção das regiões das Figuras 3.3 e 3.4.

Assim, denotaremos a região da Figura 3.5 por U , ou seja,

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, \quad (x - 1/2)^2 + y^2 \geq 1/4, \quad y > 0\}.$$

Agora, podemos começar a analisar os pontos (x, y) na região U , que são candidatos a serem pontos de equilíbrio do tipo Hopf, Sela-nó ou Bogdanov-Takens, usando o traço e o determinante da matriz jacobiana DF do sistema (3.2).

Calculando o traço e o determinante de DF e substituindo os valores de μ_e e λ_e obtidos em (3.5) nessas expressões, obtemos que o traço T e o determinante D de DF em um ponto (x, y) são dados por

$$T(x, y) = \frac{3x^2 - 2x^4 - 4x^2y^2 + 3xy^2 - 2y^4 - x}{y(-1 + x^2 + y^2)},$$

$$D(x, y) = \frac{(-1 + x)(y^2 - (x^2 + y^2)(y^2 + 2((-1 + x)x + y^2)^2))}{y^2((-1 + x)^2 + y^2)(-1 + x^2 + y^2)}.$$

Através dos cálculos realizados no Apêndice VI, satisfazendo as condições necessárias, obtemos três curvas e um ponto, como mostra a Figura 3.6. Nesta figura, a curva H^* representa a curva em que o traço é zero e o determinante é positivo. A curva S_1^* é a curva dos pontos (x, y) tal que o determinante é zero e o traço é positivo. Já S_2^* tem os valores de (x, y) para os quais o determinante é zero e o traço é negativo. Finalmente, no ponto BT^* , o traço e o determinante são iguais a zero.

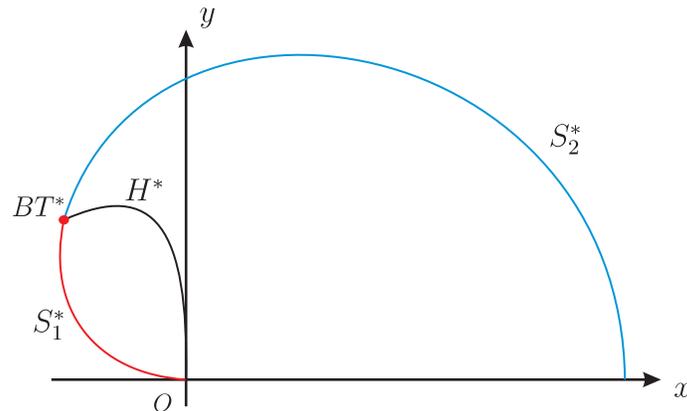


Figura 3.6: Curvas obtidas no plano (x, y) .

Vamos, então, definir a função

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad (x, y) \mapsto \phi(x, y) = (\mu_e, \lambda_e).$$

Agora, definimos o ponto BT e as curvas H , SN_1 e SN_2 no quadrante $\mu \geq 0$ e $\lambda \geq 0$ do plano dos parâmetros (μ, λ) da seguinte maneira:

$$\phi(BT^*) = BT, \quad \phi(H^*) = H, \quad \phi(S_1^*) = SN_1 \quad \text{e} \quad \phi(S_2^*) = SN_2. \quad (3.6)$$

Observação 3.1. *Todas estas curvas obtidas no plano (μ, λ) através da função ϕ foram parametrizadas no Apêndice VI. Devido à complexidade dos termos presentes na parametrização da curva SN_1 , não é possível calcular exatamente qual o limite quando y tende a zero. Entretanto, podemos ter uma ideia numérica de que este limite é o ponto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Veja Tabela 3.1.*

y	μ_e	λ_e
10^{-1}	0.72907346904558767431	0.72778822338827575678
10^{-2}	0.70943969437748755080	0.70942440157619834906
10^{-4}	0.70713157575993690340	0.70713157402122417405
10^{-8}	0.70710678368633750335	0.70710678368633761437
10^{-16}	0.70710678118654768376	0.70710678118654757274
10^{-32}	0.70710678118654735069	0.70710678118654735069
10^{-64}	0.70710678118654746172	0.70710678118654746172

Tabela 3.1: Tabela de valores de μ e λ em função de y .

3.3 A bifurcação do tipo Bogdanov-Takens

O que será demonstrado nos teoremas a seguir, é que de fato, o ponto BT é o ponto no plano dos parâmetros que faz com que o sistema (3.2) tenha um ponto de equilíbrio do tipo Bogdanov-Takens, e que as curvas H , SN_1 e SN_2 são curvas de parâmetros para os quais o sistema (3.2) admite pontos de equilíbrio dos tipos Hopf e Sela-nó, respectivamente.

Teorema 3.1. *Considere*

$$BT = \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{17}-1}}, \frac{\sqrt{17}-1}{4} \right).$$

Então, para parâmetros $(\mu, \lambda) = BT$ o sistema (3.2) admite um ponto de equilíbrio do tipo Bogdanov-Takens.

Demonstração: Para demonstrar este teorema, utilizaremos o Teorema 2.2 e os cálculos que podem ser encontrados no Apêndice VII. Consideremos então $F = (F_1, F_2)$ o campo de vetores do sistema (3.2). Primeiramente, devemos observar que para $(\mu, \lambda) = BT$ o sistema apresenta um único ponto de equilíbrio

$$P_1 = \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{4}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 3}{2}} \right).$$

Assim, temos que a matriz Jacobiana DF calculada, para parâmetros $(\mu, \lambda) = BT$, no ponto de equilíbrio P_1 é dada por

$$DF(P_1) = \begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{109 + 27\sqrt{17}}} & \frac{-13 + 3\sqrt{17}}{4} \\ \frac{-5 + 3\sqrt{17}}{4} & -\sqrt{\frac{27\sqrt{17} - 109}{8}} \end{bmatrix} \neq 0. \quad (3.7)$$

Primeiramente, devemos observar que a matriz $DF(P_1)$ possui traço e determinante nulos, isto é, o ponto de equilíbrio P_1 é um candidato a ser do tipo Bogdanov-Takens. Agora, como a matriz $DF(P_1)$ é não nula, a condição (i) do Teorema 2.2 está verificada. As condições (ii) e (iii) de não degenerescência são satisfeitas, pois

$$a = \frac{5 - 3\sqrt{17}}{4} \neq 0 \quad \text{e} \quad b = -\sqrt{\frac{165 + 41\sqrt{17}}{2}} \neq 0.$$

Por fim, precisamos mostrar que a aplicação

$$\phi : (X, \mu, \lambda) \rightarrow (F(X, \mu, \lambda), \text{tr}DF(X, \mu, \lambda), \det DF(X, \mu, \lambda))$$

é regular em (P_1, BT) . De fato, basta observarmos que o determinante da matriz Jacobiana de F calculada em (P_1, BT) é dado por

$$\det DF(P_1, BT) = -\sqrt{\frac{17(23 - \sqrt{17})}{2}} \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema 2.2, segue que o ponto BT é um ponto no plano de parâmetros para o qual o sistema (3.2) admite um ponto de equilíbrio do tipo Bogdanov-Takens. \square

3.4 A bifurcação do tipo Hopf

Teorema 3.2. *Para parâmetros (μ, λ) sobre a curva H , o sistema (3.2) admite um ponto de equilíbrio P_1 com o primeiro coeficiente de Lyapunov positivo, ou seja, o ponto P_1 é um equilíbrio do tipo Hopf.*

Demonstração: Primeiramente devemos observar que todos os cálculos feitos para a demonstração deste teorema podem ser encontrados no Apêndice VIII. Estes cálculos, necessários para encontrar o primeiro coeficiente de Lyapunov, foram baseados em um método proposto em [1]. Agora, como foi feito no Teorema 2.7, precisamos mostrar que para qualquer par de parâmetros sobre a curva H os pontos de equilíbrio do sistema (3.2) serão candidatos a pontos de equilíbrio do tipo Hopf. Para isso, basta tomarmos a curva H^* e observar que ela é obtida tomando o traço e determinante da matriz Jacobiana do sistema (3.2) de tal forma que $T(x, y) = 0$ e $D(x, y) > 0$. Agora, como a curva H^* na Figura 3.6 pode ser parametrizada por

$$H^*(t) = \left(t, \frac{\sqrt{(3-4t)t + \alpha}}{2} \right),$$

onde $\alpha = \sqrt{t(-8+9t)}$ e $t \in ((3 - \sqrt{17})/4, 0)$, temos que cada ponto de equilíbrio candidato a ser um ponto do tipo Hopf é dado por

$$P_1(x(t), y(t)) = \left(t, \frac{\sqrt{(3-4t)t + \alpha}}{2} \right).$$

Assim, substituindo $x(t)$ e $y(t)$ nas equações de μ_e e λ_e vistas em (3.5) temos que a curva H pode ser parametrizada por

$$H(\mu(t), \lambda(t)) = \left(-\frac{2t}{\sqrt{3t + \alpha}\sqrt{(3-4t)t + \alpha}}, \frac{\sqrt{4-5t + \alpha}(3t + \alpha)}{4\sqrt{(3-4t)t + \alpha}} \right),$$

com $t \in ((3 - \sqrt{17})/4, 0)$. Dessa forma, calculando o primeiro coeficiente de Lyapunov para qualquer ponto de equilíbrio pertencente à curva H^* , isto é, equilíbrios do sistema (3.2) quando tomamos parâmetros sobre a curva H temos que $l_1(P_1) > 0$. Portanto, pelo Teorema 2.6, temos que o ponto de equilíbrio P_1 é instável e para cada par de parâmetros (μ, λ) acima da curva H , porém suficientemente próximo desta, existirá um único ciclo limite instável próximo de um ponto de equilíbrio estável. \square

3.5 A bifurcação do tipo Sela-nó

Teorema 3.3. *Considere as curvas SN_1 e SN_2 como em (3.6). Então, para qualquer par de parâmetros $(\mu, \lambda) \in SN_1$ ou $(\mu, \lambda) \in SN_2$, o sistema (3.2) possui um ponto de equilíbrio do tipo Sela-nó. Além disso, se os parâmetros pertencem à curva SN_1 , a parte nodal do equilíbrio é repulsora e se os parâmetros pertencem à curva SN_2 , a parte nodal do equilíbrio é atratora.*

Devido à grande complexidade do sistema estudado, não é possível realizar os cálculos necessários para aplicar o Teorema 2.4 neste caso. Devemos ressaltar que ao longo de todo o estudo, foi possível perceber que o Teorema 3.3 é verdadeiro. Sendo assim, enunciaremos e daremos a prova de dois lemas a seguir que servem para nos dar a ideia de que a afirmação acima é verdadeira. Vale observar que os cálculos para as demonstrações dos dois lemas a seguir foram realizados no software *Mathematica* com uma precisão de trinta casas decimais, conforme Apêndice IX. Entretanto, para simplificar a leitura deste trabalho, vamos utilizar apenas cinco casas decimais.

Lema 3.1. *Considere*

$$S_{11} = (0.75, 0.74535) \quad e \quad S_{12} = (0.8, 0.78062).$$

Então, para parâmetros $(\mu, \lambda) = S_{11}$ ou $(\mu, \lambda) = S_{12}$, o sistema (3.2) admite um ponto de equilíbrio do tipo Sela-nó com parte nodal repulsora.

Demonstração: Para esta prova iremos utilizar o Teorema 2.4. Vamos começar então mostrando que se $(\mu, \lambda) = S_{11}$, então o ponto de equilíbrio do sistema (3.2) é candidato a ser um ponto do tipo Sela-nó. De fato, tomando tais parâmetros, temos que o sistema (3.2) apresenta um único ponto de equilíbrio dado por

$$P_1 = (-0.27258, 0.19184).$$

Basta, então, calcular a matriz Jacobiana do sistema (3.2) em P_1 . Assim, temos que seus autovalores são dados por $s_1 = 0.92084$ e $s_2 = 0$. Dessa forma, temos que $T(x, y) \neq 0$

e $D(x, y) = 0$ e o ponto de equilíbrio P_1 é um candidato a equilíbrio do tipo Sela-nó. Calculando os autovetores à direita e à esquerda, V_0 e W_0 , respectivamente obtemos

$$V_0 = (-0.27814, 0.96054) \quad \text{e} \quad W_0 = (-0.98882, 0.14907).$$

Para verificarmos que o ponto P_1 satisfaz a condição de não degenerescência, devemos calcular a matriz Hessiana das duas componentes do campo em P_1 , assim, temos que

$$H_1(P_1) = \begin{bmatrix} 6.88570 & 3.63646 \\ 3.63646 & 0.02920 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_2(P_1) = \begin{bmatrix} 3.63646 & 0.02920 \\ 0.02920 & -8.74933 \end{bmatrix}.$$

Agora, calculando o produto em (iii) temos que

$$W_0 \cdot D_X^2 F(P_1)(V_0, V_0) = 0.20421 \neq 0.$$

Assim, as condições do Teorema 2.4 são satisfeitas. Logo, se $(\mu, \lambda) = S_{11}$, então o ponto de equilíbrio P_1 é um ponto de equilíbrio do tipo Sela-nó. Por fim, observando que o autovalor não nulo s_1 é positivo segue que a parte nodal da Sela-nó é repulsora.

Vamos agora fazer a demonstração para o ponto S_{12} . Primeiramente, vamos observar que quando tomamos $(\mu, \lambda) = S_{12}$ o sistema (3.2) apresenta um único ponto de equilíbrio dado por

$$P_2 = (-0.28093, 0.37393).$$

Devemos mostrar que um dos autovalores da matriz Jacobiana calculada em P_2 é nulo para que este ponto seja um candidato à equilíbrio do tipo Sela-nó, o que, de fato, ocorre, uma vez que os autovalores são dados por $t_1 = 0.00297$ e $t_2 = 0$. Sabendo que o ponto P_2 é um candidato a Sela-nó, prosseguiremos de forma análoga ao caso anterior. Temos então que os autovetores à direita V_0 e à esquerda W_0 são dados por

$$V_0 = (0.27879, 0.96035) \quad \text{e} \quad W_0 = (-0.95993, 0.28022).$$

Calculando a matriz Hessiana das componentes do campo do sistema (3.2) em P_2 temos que

$$H_1(P_2) = \begin{bmatrix} 5.38151 & -0.38464 \\ -0.38464 & -2.16402 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_2(P_2) = \begin{bmatrix} -0.38464 & -2.16402 \\ -2.16402 & -4.33518 \end{bmatrix}.$$

Por fim, o produto em (iii) é dado por

$$W_0 \cdot D_X^2 F(P_1)(V_0, V_0) = 0.25854 \neq 0.$$

Desta forma, as condições do Teorema 2.4 são satisfeitas e, logo, se $(\mu, \lambda) = S_{12}$, então o ponto de equilíbrio P_2 é um ponto de Sela-nó. Agora, observando que o autovalor não nulo t_1 é positivo segue que a parte nodal da Sela-nó é repulsora.

Lema 3.2. *Considere*

$$S_{21} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad e \quad S_{22} = \left(\sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{17}}{8}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7 + \sqrt{17}}{3}}\right).$$

Então, para parâmetros $(\mu, \lambda) = S_{21}$ ou $(\mu, \lambda) = S_{22}$, o sistema (3.2) admite um ponto de equilíbrio do tipo Sela-nó com parte nodal atratora.

Demonstração: Assim como no Lema 3.1 vamos utilizar o Teorema 2.4. Antes de mais nada, devemos mostrar que para o par de parâmetros S_{21} o ponto de equilíbrio do sistema (3.2) é um candidato a ponto de equilíbrio do tipo Sela-nó. Para isso, vamos observar que substituindo S_{21} em (3.2) temos um único equilíbrio dado por

$$P_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Agora, basta ver que a matriz Jacobiana do sistema (3.2) calculada no ponto de equilíbrio P_1 é dada por

$$DF(P_1) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, os autovalores de $DF(P_1)$ são dados por $s_1 = -\sqrt{2}$ e $s_2 = 0$, o que implica em $T(x, y) \neq 0$ e $D(x, y) = 0$. Logo, o ponto de equilíbrio P_1 é candidato a equilíbrio do tipo Sela-nó. Agora, calculando os autovetores à direita e à esquerda, V_0 e W_0 , respectivamente, obtemos

$$V_0 = (2\sqrt{2}, 1) \quad e \quad W_0 = (-\sqrt{2}, 1).$$

Para a condição de não degenerescência do Teorema 2.4 devemos calcular as matrizes Hessianas das duas componentes do campo em (3.2), obtendo

$$H_1(P_1) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{10}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_2(P_1) = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Assim, calculando a expressão em (iii) temos que

$$W_0 \cdot D_X^2 F(P_1)(V_0, V_0) = 4 \neq 0.$$

Desta forma, as condições do Teorema 2.4 são satisfeitas, e portanto, quando $(\mu, \lambda) = S_{21}$ o ponto de equilíbrio P_1 é um ponto de Sela-nó. Por fim, observando que o autovalor não nulo s_1 é negativo segue que a Sela-nó é atratora.

Consideremos agora o ponto S_{22} . Prosseguindo de forma análoga ao que foi feito para o ponto S_{21} temos que o sistema (3.2) tem um único equilíbrio dado por

$$P_2 = \left(\frac{2}{3}, \sqrt{\frac{3\sqrt{17}-5}{18}} \right).$$

Agora basta ver que os autovalores da matriz Jacobiana do sistema (3.2) calculada no ponto de equilíbrio P_2 são dados por

$$s_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{141 + 43\sqrt{17}} \quad \text{e} \quad s_2 = 0,$$

o que implica em $T(x, y) \neq 0$ e $D(x, y) = 0$. Logo, o ponto de equilíbrio P_2 também é candidato a equilíbrio do tipo Sela-nó. Agora, calculando os autovetores à direita e à esquerda, V_0 e W_0 , respectivamente, obtemos

$$V_0 = \left(-\frac{1}{64}\sqrt{-3355 + 2403\sqrt{17}}, 1 \right) \quad \text{e} \quad W_0 = \left(-\frac{1}{8}\sqrt{5 + 3\sqrt{17}}, 1 \right).$$

Para a condição de não degenerescência do Teorema 2.4 devemos calcular as matrizes Hessianas das duas componentes do campo em (3.2), obtendo

$$H_1(P_2) = \begin{bmatrix} -\frac{7}{48}\sqrt{\frac{17(107 + 51\sqrt{17})}{2}} & \frac{45\sqrt{17} - 107}{96} \\ \frac{45\sqrt{17} - 107}{96} & \frac{1}{48}\sqrt{\frac{13011\sqrt{17} - 47525}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$H_2(P_1) = \begin{bmatrix} \frac{45\sqrt{17} - 107}{96} & \frac{1}{48} \sqrt{\frac{13011\sqrt{17} - 47525}{2}} \\ \frac{1}{48} \sqrt{\frac{13011\sqrt{17} - 47525}{2}} & -\frac{105\sqrt{17} + 1}{96} \end{bmatrix}.$$

Assim, calculando a expressão em (iii) temos que

$$W_0 \cdot D_X^2 F(P_2)(V_0, V_0) = \frac{9(89 + 15\sqrt{17})}{2048} \neq 0.$$

Dessa forma, as condições do Teorema 2.4 são satisfeitas, e portanto, quando $(\mu, \lambda) = S_{22}$ o ponto de equilíbrio P_2 é um ponto de Sela-nó. Por fim, observando que o autovalor não nulo s_1 é negativo segue que a Sela-nó é atratora. \square

3.6 As bifurcações dos pontos singulares $O = (0, 0)$ e $F = (1, 0)$

Teorema 3.4. *Para parâmetros (μ_0, λ_0) sobre a curva $\mu = \lambda$, o ponto singular O apresenta uma bifurcação Transcrítica e valem as seguintes afirmações:*

- (i) *Se $\mu_0 = \lambda_0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, então para parâmetros (μ, λ) , com $\lambda > \lambda_0$, suficientemente próximo deste, o sistema (3.2) admite um único ponto de equilíbrio e para parâmetros (μ, λ) , com $\lambda < \lambda_0$, suficientemente próximo deste, o sistema (3.2) não possui pontos de equilíbrio.*
- (ii) *Se $\frac{1}{\sqrt{2}} < \mu_0 = \lambda_0 < 1$, então para parâmetros (μ, λ) , com $\lambda > \lambda_0$, suficientemente próximo deste, o sistema (3.2) admite um único ponto de equilíbrio e para parâmetros (μ, λ) , com $\lambda < \lambda_0$, suficientemente próximo deste, o sistema (3.2) possui dois pontos de equilíbrio.*
- (iii) *Se $\mu_0 = \lambda_0 \geq 1$, então para parâmetros (μ, λ) , com $\lambda > \lambda_0$, suficientemente próximo deste, o sistema (3.2) não possui pontos de equilíbrio e para parâmetros (μ, λ) , com $\lambda < \lambda_0$, suficientemente próximo deste, o sistema (3.2) possui um único ponto de equilíbrio.*

Temos também que o ponto singular $O = (0, 0)$ apresenta uma mudança de estabilidade, isto é, para parâmetros onde $\lambda < \mu$ o ponto singular O se comporta como um nó repulsor e para parâmetros onde $\lambda \geq \mu$ o ponto singular O deixa de se comportar como um nó repulsor.

Demonstração: Como queremos estudar o comportamento do ponto singular $O = (0, 0)$, vamos escrever o sistema (3.2) em coordenadas polares centradas em O como a seguir

$$\begin{cases} r' = r \left((1 - r^2)\mu + \frac{\lambda(\cos \theta - r)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}} \right), \\ \theta' = r - \frac{\lambda \sin \theta}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Tomando, então, $r = 0$ segue que os equilíbrios do sistema (3.8) são dados por

$$Q_1(\theta, r) = (0, 0) \quad \text{e} \quad Q_2(\theta, r) = (\pi, 0).$$

A matriz Jacobiana do sistema (3.8), calculada em Q_1 , tem seus autovalores e autovetores dados por $s_1 = -\lambda$ e $s_2 = \mu + \lambda$ com $V_1 = (0, 1)$ e $V_2 = (2\lambda + \mu, 1)$. Isto significa que Q_1 é sempre um ponto de sela com a curva estável paralela ao eixo θ e curva instável paralela ao vetor V_2 . Agora, a matriz Jacobiana calculada no ponto Q_2 tem autovalores $t_1 = \lambda$ e $t_2 = \mu - \lambda$, com autovetores $T_1 = (0, 1)$ e $T_2 = (-2\lambda + \mu, 1)$. Desta forma, podemos ver que se $\lambda < \mu$, o equilíbrio Q_2 é um nó repulsor, e como a curva instável da sela Q_1 aponta para $r > 0$, temos que a origem se comporta como um nó repulsor.

Por outro lado, se $\lambda > \mu$, o ponto Q_2 é uma sela com a curva instável ao longo do eixo θ e curva estável paralela ao vetor T_2 . Dessa forma, temos um conjunto de condições iniciais $U \in D$ tais que o ω -limite de qualquer condição inicial pertencente ao conjunto U é exatamente o equilíbrio Q_2 , ou seja, o ponto singular $O = (0, 0)$. Portanto, podemos afirmar que o ponto O não é mais um nó repulsor.

Vamos agora analisar o comportamento do ponto Q_2 quando $\lambda = \mu$. Primeiramente devemos observar que $t_2 = 0$ e, portanto, Q_2 é um equilíbrio semi-hiperbólico. Para estudarmos sua estabilidade, vamos utilizar o Teorema 1.4. Através dos cálculos presentes no Apêndice X, concluímos que a função $g(x)$ do Teorema 1.4 é dada por

$$g(x) = -\frac{\mu(-1 + 2\mu^2)x^3}{2} + \dots$$

Assim, temos que $g(x) > 0$, se $0 < \mu < 1/\sqrt{2}$ e, portanto, o ponto de equilíbrio Q_2 é um nó instável. Por outro lado, $g(x) < 0$, se $\mu > 1/\sqrt{2}$ e o ponto de equilíbrio Q_2 é uma sela com curva estável paralela ao vetor $T_2 = (-2\lambda + \mu, 1)$. Finalmente, devemos observar que para $\mu = \lambda = 1/\sqrt{2}$, temos $g(x) = 0$ e, portanto, devemos continuar a expansão de Taylor, obtendo assim que

$$g(x) = -\frac{x^5}{24\sqrt{2}} + \dots,$$

ou seja, o ponto de equilíbrio Q_2 é uma sela, assim como no caso em que $\mu > 1/\sqrt{2}$. Portanto, o ponto singular $O = (0, 0)$ apresenta uma bifurcação Transcrítica quando $\lambda = \mu$ e o teorema está provado. Para mais detalhes sobre este tipo de bifurcação, consulte [3]. \square

Teorema 3.5. *Para parâmetros sobre a curva $\lambda = 1$ o sistema (3.2) apresenta uma bifurcação Transcrítica no ponto singular $F = (1, 0)$. Em outras palavras, se $\lambda \geq 1$, então o ponto singular F se comporta localmente como um nó atrator e se $\lambda < 1$ o ponto singular F não é localmente atrator.*

Demonstração: Para analisar a estabilidade do ponto F , vamos reescrever o sistema (3.2) em coordenadas polares como a seguir

$$\begin{cases} r' = r \left(-\lambda - \frac{r\mu(r^2 + \cos\theta(3r - 2\cos\theta))}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} \right), \\ \theta' = \cos\theta - \frac{r(\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta} + r\mu\sin\theta - \mu\sin 2\theta)}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Dessa forma, tomando $r = 0$ vamos encontrar que os equilíbrios do sistema (3.9) são dados por

$$Q_1(\theta, r) = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad Q_2(\theta, r) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Agora, calculando a matriz Jacobiana do sistema (3.9) no ponto Q_1 obtemos os autovalores $s_1 = 1$ e $s_2 = -1 - \lambda$ com autovetores

$$V_1 = (1, 0) \quad \text{e} \quad V_2 = \left(\frac{1}{2+\lambda}, 1\right).$$

Portanto, temos que o ponto de equilíbrio Q_1 é sempre uma sela, com curva instável ao longo do eixo θ e curva estável paralela ao vetor V_2 . Devemos observar que esta curva

estável tem inclinação dada por $2 + \lambda > 2$, ou seja, as condições iniciais que tem o ponto Q_1 como ω -limite não estão contidas no disco D , uma vez que a reta tangente ao disco no ponto Q_1 tem inclinação 2, como visto no Lema 1.6 .

Olhando agora para a matriz Jacobiana calculada no ponto Q_2 temos os autovalores $t_1 = -1$ e $t_2 = 1 - \lambda$ com autovetores

$$T_1 = (1, 0) \quad \text{e} \quad T_2 = \left(\frac{1}{\lambda - 2}, 1 \right),$$

ou seja, para $\lambda > 1$, o ponto de equilíbrio Q_2 é um nó atrator. Vale observar que as órbitas que se afastam do equilíbrio Q_1 , que é uma sela, na verdade se aproximam do equilíbrio Q_2 uma vez que $-\pi$ se identifica com π no plano (θ, r) . Desta forma, quando $\lambda > 1$, o ponto singular F se comporta localmente como um nó atrator, conforme a Figura 3.7.

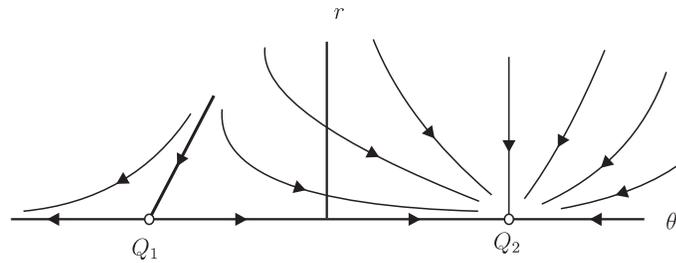


Figura 3.7: Equilíbrios do sistema (3.9) quando $\lambda > 1$.

Por outro lado, para $\lambda < 1$ o equilíbrio Q_2 é uma sela com curva estável ao longo do eixo θ e curva instável paralela ao vetor T_2 , de onde podemos concluir que o conjunto de condições iniciais que têm o ponto Q_2 como ω -limite pertence à reta $r = 0$. Portanto, para qualquer vizinhança do equilíbrio Q_2 , onde $r > 0$, existem condições iniciais que se afastam de Q_2 . Assim, para qualquer vizinhança de F no plano (x, y) , existem condições iniciais que se afastam de F . Portanto, o ponto F não se comporta localmente como um nó atrator. Veja Figura 3.8.

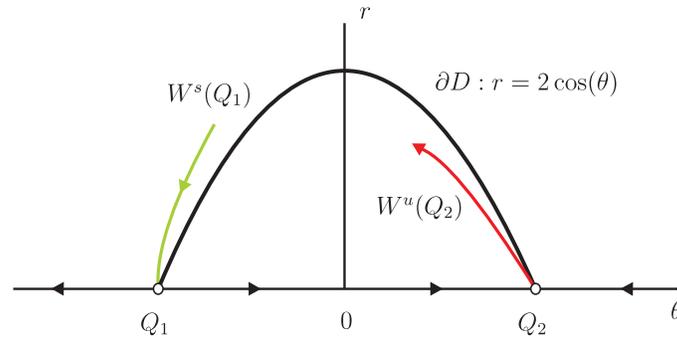


Figura 3.8: Equilíbrios do sistema (3.9) quando $\lambda < 1$.

Falta agora analisar o comportamento do equilíbrio Q_2 quando $\lambda = 1$. Com essa condição, o autovalor t_2 é nulo e, portanto, o equilíbrio Q_2 é semi-hiperbólico. Utilizando mais uma vez o Teorema 1.4 podemos concluir, pelos cálculos presentes no Apêndice XI que o equilíbrio Q_2 é um nó atrator, o que implica que o comportamento é o mesmo do caso $\lambda > 1$ e a prova está concluída. \square

3.7 O ponto de equilíbrio P_1 passa de foco para nó

Lema 3.3. *Considere Δ o discriminante do polinômio característico da matriz Jacobiana do sistema (3.2). Então, para parâmetros sobre a curva FN , $\Delta = 0$ e, portanto, o equilíbrio do sistema muda de um foco para um nó.*

Demonstração: A demonstração deste lema será omitida por conter muitas expressões complicadas. Entretanto, ela está presente no Apêndice XII.

Para terminar a construção do diagrama de bifurcações do sistema (3.2) vamos definir os seguintes pontos:

- 1) $BT = \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{17}-1}}, \frac{\sqrt{17}-1}{4} \right)$.
- 2) $C = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

3) $T = \{(\mu, \lambda) \in H : \lambda = \mu\}$.

4) $Q = (1, 1)$.

5) $O = (0, 0)$.

Devemos definir também as seguintes curvas e regiões:

a) $H^+ = \{(\mu, \lambda) \in H : \lambda > \mu\}$.

b) $H^- = \{(\mu, \lambda) \in H : \lambda < \mu\}$.

c) L_1 é o segmento de reta sobre $\lambda = \mu$ cujos extremos são O e C , ambos não incluídos.

d) L_2 é o segmento de reta sobre $\lambda = \mu$ cujos extremos são T e Q , ambos não incluídos.

e) L_3 é o segmento de reta sobre $\lambda = 1$, com $0 < \mu < 1$.

f) L_4 é a semi reta sobre $\lambda = 1$, com $\mu > 1$.

g) L_5 é o segmento de reta sobre $\lambda = \mu$ cujos extremos são C e T , ambos não incluídos.

h) L_6 é a semi reta sobre $\lambda = \mu$, com $\mu > 1$.

i) R_1 é o aberto cujo bordo é dado por $\mu = 0$, L_3 , Q e L_6 .

j) R_2 é o aberto cujo bordo é dado por $\mu = 0$, H^+ , T , L_2 , Q e L_3 .

k) R_3 é o aberto cujo bordo é dado por $\lambda = 0$, L_1 , SN_1 , BT e SN_2 .

l) R_4 é o aberto cujo bordo é dado por L_6 , Q e L_4 .

m) R_5 é o aberto cujo bordo é dado por L_4 , Q , L_2 , T , H^- , BT e SN_2 .

n) R_6 é o aberto cujo bordo é dado por H^+ , O , L_1 , C , L_5 , e T .

o) R_7 é o aberto cujo bordo é dado por L_5 , C , SN_1 , BT , H^- e T .

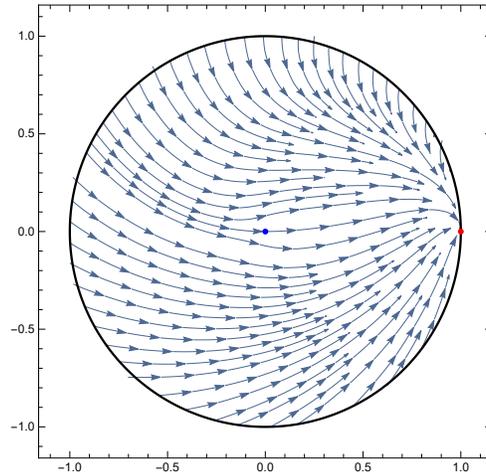


Figura 3.10: Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_1 \cup L_3 \cup L_6 \cup \{Q\}$.

Se $(\mu, \lambda) \in R_2 \cup L_2$, com o par de parâmetros suficientemente longe da curva H , então o sistema (3.2) possui um ponto de equilíbrio. Para esses valores de μ e λ , o ponto de equilíbrio P é um nó ou foco atrator. Veja Figura 3.11.

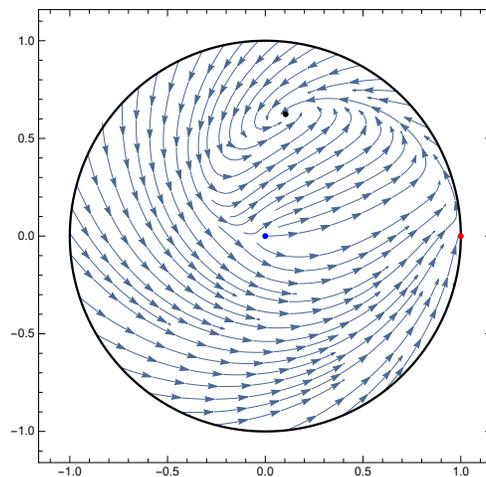


Figura 3.11: Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_2 \cup L_2$ suficientemente longe de H .

Se $(\mu, \lambda) \in R_2 \cup L_2$, com o par de parâmetros suficientemente próximo da curva H , então o sistema (3.2) possui um ponto de equilíbrio, um foco atrator, e também dois ciclos limites, o maior estável, e o menor instável. Veja Figura 3.12.

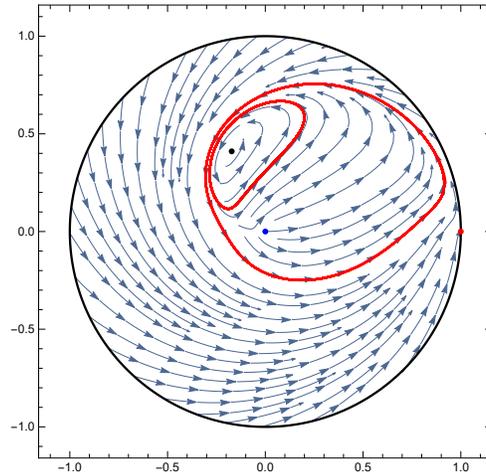


Figura 3.12: Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_2 \cup L_2$ suficientemente próximo de H .

Se $(\mu, \lambda) \in R_3 \cup L_1 \cup \{C\}$, o sistema (3.2) não possui pontos de equilíbrio e, para esses valores de μ e λ , o ponto singular O se comporta como um nó repulsor, e existe um ciclo limite estável. Veja Figura 3.13.

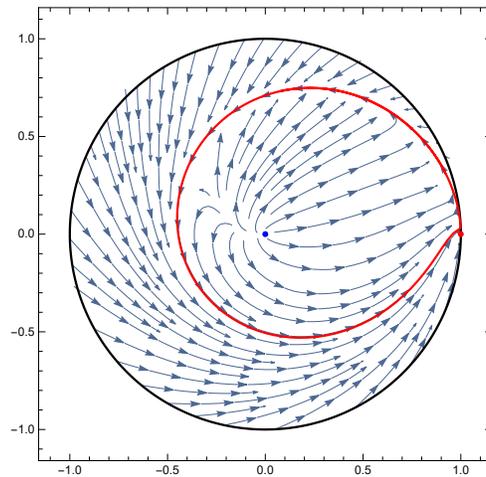


Figura 3.13: Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_3 \cup L_5 \cup \{C\}$.

Se $(\mu, \lambda) \in R_4 \cup L_4$, o sistema (3.2) tem um ponto de equilíbrio. Para esses valores de μ e λ , o ponto singular $O = (0, 0)$ se comporta como um nó repulsor, o ponto singular

$F = (1, 0)$ se comporta localmente como um nó atrator e o ponto de equilíbrio P é uma sela. Veja Figura 3.14.

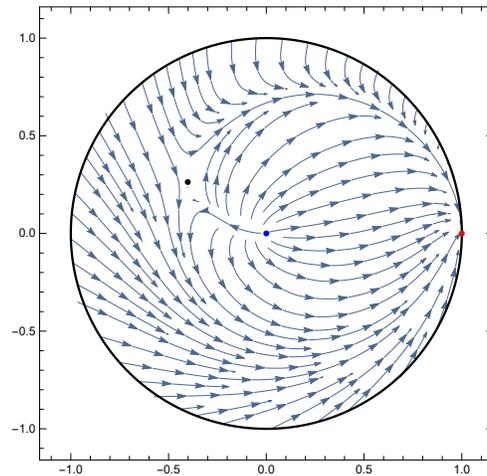


Figura 3.14: Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_4 \cup L_4$.

Se $(\mu, \lambda) \in R_5$, o sistema (3.2) possui dois pontos de equilíbrio. Para valores de μ e λ suficientemente longe da curva H , o ponto singular $O = (0, 0)$ se comporta como um nó repulsor. Em relação aos pontos de equilíbrio, temos um nó atrator e uma sela. Vale a pena notar que neste caso não há ciclos limite. Veja Figura 3.15.

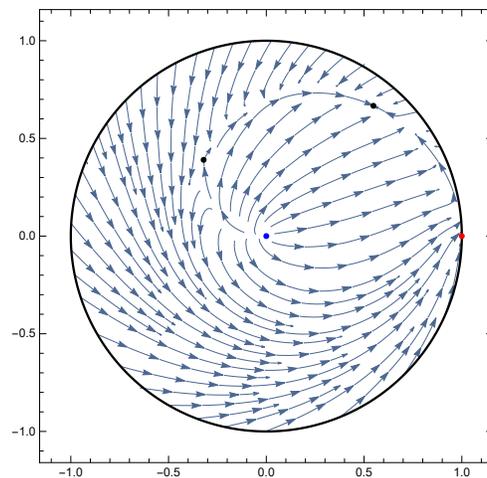


Figura 3.15: Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_5$ suficientemente longe da curva H .

Agora, para valores de μ e $\lambda \in R_5$ suficientemente próximos da curva H , o sistema ainda apresenta dois pontos de equilíbrio, mas neste caso, um deles é um foco atrator, o outro equilíbrio é uma sela, e agora passamos a ter dois ciclos limites, o maior deles estável, e o menor instável. Veja Figuras 3.16 e 3.17.

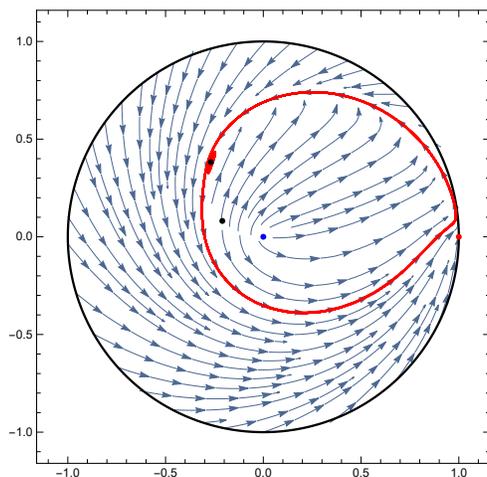


Figura 3.16: Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_5$ suficientemente próximo à curva H .

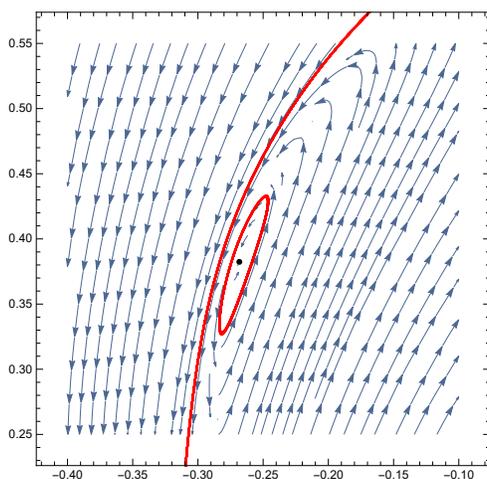


Figura 3.17: Vizinhança de um equilíbrio do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_5$ suficientemente próximo à curva H .

Se $(\mu, \lambda) \in R_6 \cup L_1 \cup L_5 \cup H^+ \cup \{T\}$, o sistema (3.2) possui um ponto de equilíbrio.

Neste caso, o ponto de equilíbrio P é um nó ou foco repulsor, e existe um ciclo limite estável como na Figura 3.18.

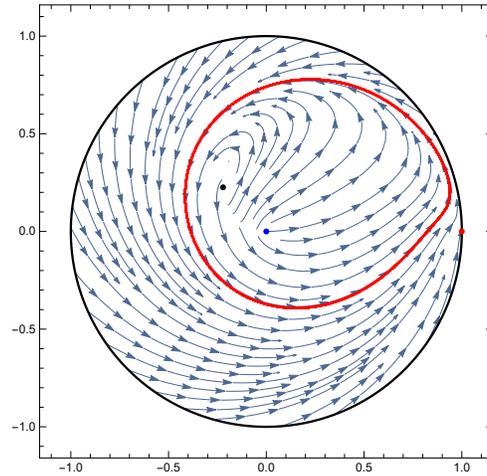


Figura 3.18: Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_6 \cup L_5 \cup H^+ \cup \{T\} \cup H^+$.

Se $(\mu, \lambda) \in R_7 \cup H^-$, o sistema (3.2) possui dois pontos de equilíbrio. Para esses valores de μ e λ , o ponto singular $O = (0, 0)$ se comporta como um nó repulsor. Olhando para os pontos de equilíbrio temos que um deles é um nó repulsor e o outro é uma sela. Neste caso, existe também um ciclo limite estável. Veja Figura 3.19.

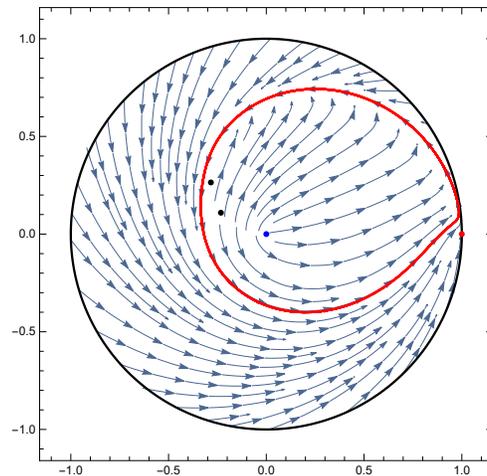


Figura 3.19: Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_7 \cup H^-$.

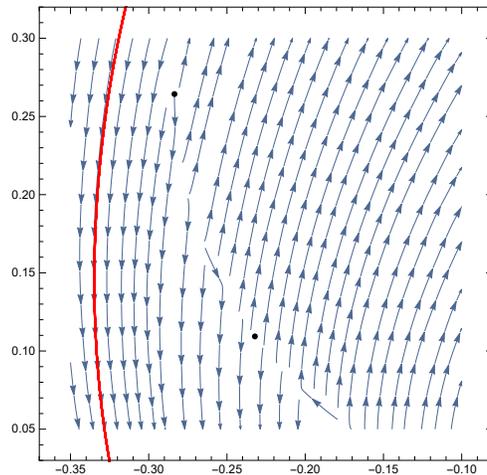


Figura 3.20: Vizinhança do equilíbrio do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in R_7$.

Se $(\mu, \lambda) \in SN_1$, o sistema (3.2) possui apenas um ponto de equilíbrio. Para esses valores de μ e λ , o ponto singular $O = (0, 0)$ se comporta como um nó repulsor. De acordo com o Teorema 1.4, o ponto de equilíbrio P é do tipo Sela-nó, com parte nodal repulsora. Veja Figura 3.21.

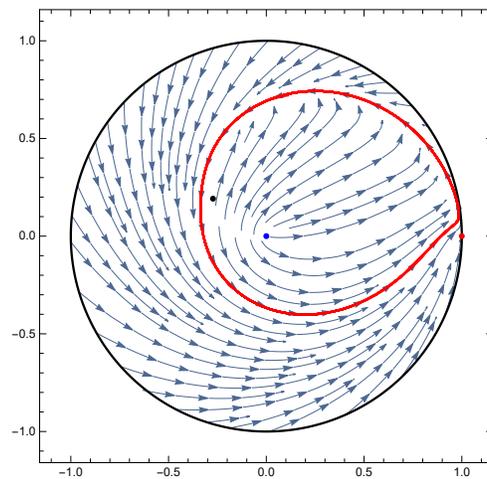


Figura 3.21: Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in SN_1$.

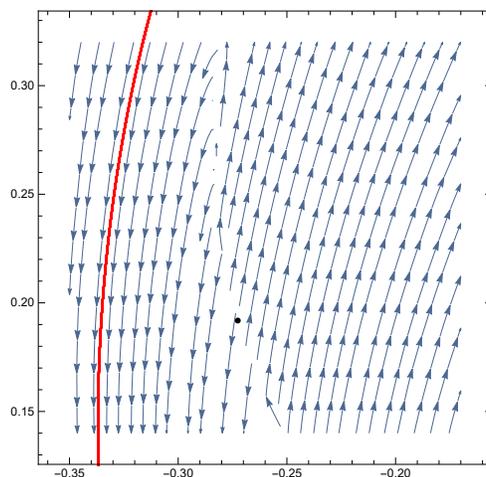


Figura 3.22: Vizinhança do equilíbrio do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in SN_1$.

Se $(\mu, \lambda) \in SN_2$, o sistema (3.2) tem apenas um equilíbrio. Para esses valores de μ e λ o ponto singular $O = (0, 0)$ se comporta como um nó repulsor. O ponto de equilíbrio, novamente pelo Teorema 1.4, é um equilíbrio do tipo Sela-nó com parte nodal atratora. Veja Figura 3.23.

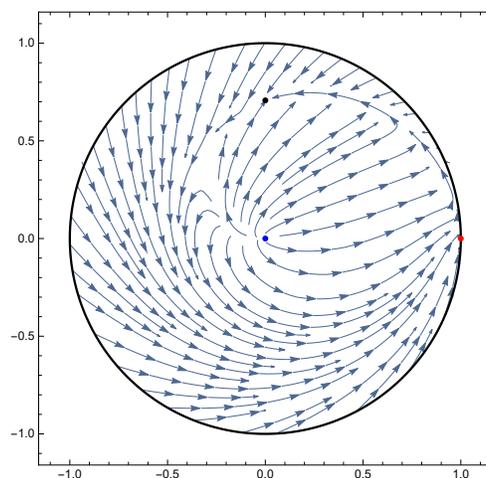


Figura 3.23: Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) \in SN_2$.

Se $(\mu, \lambda) = BT$ o sistema (3.2) possui um ponto de equilíbrio. Para esse valor de μ e λ , o ponto singular $O = (0, 0)$ se comporta como um nó repulsor. Quando olhamos para as soluções, vemos que existe um ciclo limite estável e que todas as condições iniciais em

D espiralam em direção ao ciclo limite, exceto por uma, a solução que inicia no ponto singular $O = (0, 0)$ e termina no ponto de equilíbrio. Veja Figura 3.24.

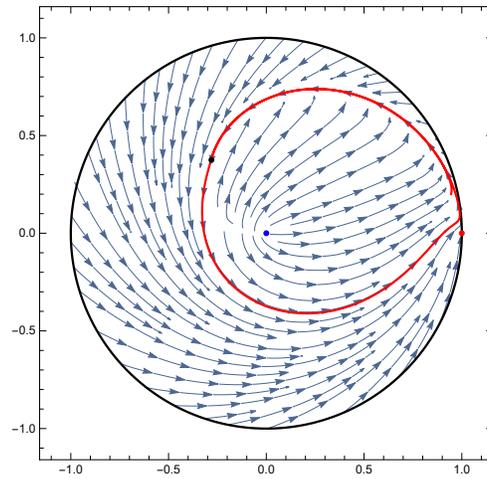


Figura 3.24: Retrato de fase do sistema (3.2) quando $(\mu, \lambda) = BT$.

Conclusões

Ao longo deste trabalho estudamos uma importante área da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, para ser mais específico, as bifurcações locais de um modelo biológico. Para entendermos todos os três casos, foi necessário revisitar alguns conceitos básicos desta área da matemática, além de aprofundar um pouco mais em alguns conceitos não muito abordados em disciplinas iniciais.

O resultado desta dissertação se deu como esperado, foi possível introduzir o modelo inicial tido como motivação e realizar duas mudanças para um estudo mais detalhado de alguns elementos. O estudo do modelo inicial foi muito bem amparado pelo artigo [9], e as modificações a seguir foram construídas a partir de uma modificação fictícia e outra com caráter mais real.

No Capítulo 1, foi estudado um sistema simples dependente de um parâmetro não negativo ω . A partir deste estudo foi possível encontrar condições sobre ω para que todas as soluções iniciais tendessem para um único ponto e, assim, determinar uma localização no disco D para que as partículas permaneçam em um estado de equilíbrio.

A análise realizada sobre o caso fictício dependente de dois parâmetros não negativos no Capítulo 2 se deu de forma direta. Enunciando e provando alguns teoremas, conseguimos construir um diagrama de bifurcações, o que nos ajudou a compreender melhor a última modificação. Aqui devemos ressaltar que foram encontradas bifurcações dos tipos de Bogdanov-Takens, Hopf e Sela-nó.

Já no último caso, visto no Capítulo 3, também foi possível construir um diagrama de bifurcações, mas como as expressões eram mais complicadas, foram encontrados alguns problemas como a seguir:

Problema 1. *Demonstrar um teorema que prova a existência de uma curva algébrica, SN , no plano de parâmetros de tal forma que para cada par de parâmetros pertencente à curva SN , o sistema (3.2) possua um ponto de equilíbrio do tipo Sela-nó.*

Devemos mencionar que este teorema não foi demonstrado graças ao fato das expressões em (3.2) serem complicadas para um simples computador operar. Basta observarmos que no Capítulo 2, onde as expressões eram mais simples, um resultado equivalente foi demonstrado.

Problema 2. *Encontrar explicitamente a curva L no plano de parâmetros, dada pelos pares (μ, λ) , para os quais o sistema (3.2) possua laços homoclínicos.*

No Teorema 2.2 vimos que a existência da curva L é garantida. Portanto, o que podemos encontrar são apenas pares de parâmetros isolados para os quais o sistema (3.2) admite laços homoclínicos, o que não é suficiente para a encontrarmos de fato, uma expressão que define a curva L .

Como uma observação final, vale lembrar que estes modelos estudados neste trabalho ainda podem ser modificados, gerando estudos futuros. Uma modificação que poderia ser interessante é tratar qualquer um dos três modelos com a adição de uma terceira dimensão. Uma ideia simples para tal modificação é apenas acrescentar uma força agindo na dimensão dada pelo eixo z , considerando apenas $z \geq 0$. Poderíamos considerar, por exemplo os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} x' = -\omega y + v \frac{R-x}{\sqrt{(R-x)^2 + y^2}}, \\ y' = \omega x - v \frac{y}{\sqrt{(R-x)^2 + y^2}}, \\ z' = -z. \end{cases} \quad (3.10)$$

No caso do sistema (3.10), podemos ver, por exemplo, um modelo em que no plano (x, y) o comportamento se dá de forma semelhante ao visto no Capítulo 1, mas aqui, temos uma aceleração das partículas com direção ao plano $z = 0$, que pode ser interpretado como o fundo de um tubo cilíndrico.

$$\begin{cases} x' = bx - \omega y + v \frac{R - x}{\sqrt{(R - x)^2 + y^2}}, \\ y' = by + \omega x - v \frac{y}{\sqrt{(R - x)^2 + y^2}}, \\ z' = -\frac{z}{g}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Agora, em (3.11) teremos um comportamento semelhante ao do Capítulo 2 quando $z = 0$ e, fora deste plano, uma aceleração que leva as partículas a este plano, dependendo de uma constante g , que pode ser interpretada como a densidade do líquido. Modificações como estas podem ser consideradas em possíveis estudos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] A. A. ANDRONOV, E. A. LEONTOVICH, I. I. GORDON, A. G. MAIER, *Theory of Bifurcation of Dynamic Systems on a Plane*, Halsted Press [A division of John Wiley & Sons], New York-Toronto, Ont.; Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem-London, 1973.
- [2] L. BARREIRA, C. VALLS, *Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory*, American Mathematical Society, Providence, 2012.
- [3] P. CARDIN, J. LLIBRE, *Transcritical and zero-Hopf bifurcations in the Genesio system*, *Nonlinear Dynam.*, 88 (2017), 547-553.
- [4] F. DUMORTIER, J. LLIBRE, J. C. ARTÉS, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [5] J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [6] M. HIRSH, S. SMALE, R. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004.
- [7] Y. A. KUZNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [8] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.

- [9] J. SOTOMAYOR, *On the motion under focal attraction in a rotating medium*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 15 (2008), 921-925.
- [10] H. K. WILSON, *Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley, Reading, 1971.

Apêndice I

Campo de Vetores do sistema (1.6) quando $\omega=1$.

$$F1 = r (\text{Sin}[\theta] - 1)$$

$$F2 = -r + \text{Cos}[\theta]$$

$$r (-1 + \text{Sin}[\theta])$$

$$-r + \text{Cos}[\theta]$$

Pontos de Equilíbrio.

$$P2 = \left\{ \theta, -\frac{\pi}{2} \right\};$$

$$P1 = \left\{ \theta, \frac{\pi}{2} \right\};$$

Matriz Jacobiana DF

$$DF = \{ \{D[F1, r], D[F1, \theta]\}, \{D[F2, r], D[F2, \theta]\} \}$$

$$\{ \{-1 + \text{Sin}[\theta], r \text{Cos}[\theta]\}, \{-1, -\text{Sin}[\theta]\} \}$$

Matriz Jacobiana calculada em Q2

$$J2 = DF /. \{r \rightarrow \theta, \theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}\}$$

$$\{ \{-2, \theta\}, \{-1, 1\} \}$$

Eigensystem[J2]

[autovalores e autovetores]

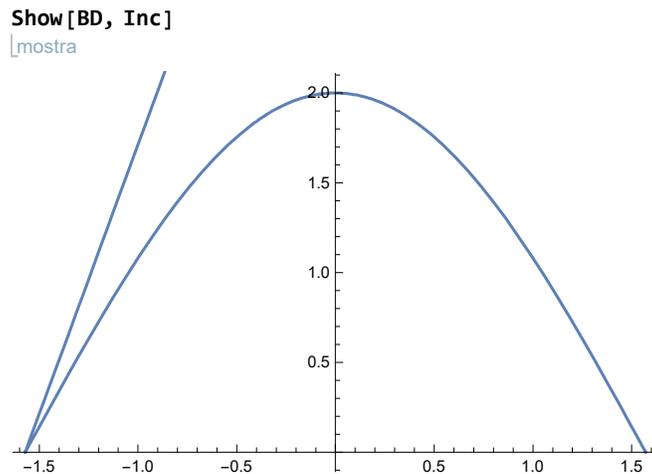
$$\{ \{-2, 1\}, \{3, 1\}, \{0, 1\} \}$$

Q2 é uma sela com curva instável no eixo θ e curva estável “fora” do disco D.

$$BD = \text{Plot} \left[2 \text{Cos}[\theta], \left\{ \theta, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\} \right];$$

$$\text{Inc} = \text{Plot} \left[3 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right), \{ \theta, -\frac{\pi}{2}, \theta \} \right];$$

Gráfico do bordo de D e da curva estável no plano (θ, r)



Matriz Jacobiana calculada em Q1

$$J1 = DF /. \{r \rightarrow \theta, \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}\}$$

$$\{\{\theta, \theta\}, \{-1, -1\}\}$$

Eigensystem[J1]

[autovalores e autovetores]

$$\{\{-1, \theta\}, \{\theta, 1\}, \{-1, 1\}\}$$

Q1 é semi-hiperbólico e para estudarmos sua estabilidade, vamos utilizar o Teorema 1.4.

Translação do campo $(F1, F2)$ de $(0, \frac{\pi}{2})$ para $(0, 0)$.

$$G1 = r (\text{Cos}[\theta] - 1)$$

$$G2 = -r - \text{Sin}[\theta]$$

$$r (-1 + \text{Cos}[\theta])$$

$$-r - \text{Sin}[\theta]$$

Matriz Jacobiana do campo G

$$DG = \{\{D[G1, r], D[G1, \theta]\}, \{D[G2, r], D[G2, \theta]\}\}$$

$$\{\{-1 + \text{Cos}[\theta], -r \text{Sin}[\theta]\}, \{-1, -\text{Cos}[\theta]\}\}$$

Matriz Jacobiana do campo G no novo Q1 = (0,0)

$$DG1 = DG /. \{r \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0\}$$

$$\{\{0, 0\}, \{-1, -1\}\}$$

$$\text{Eigensystem}[DG1]$$

[autovalores e autovetores]

$$\{\{-1, 0\}, \{\{0, 1\}, \{-1, 1\}\}\}$$

Matriz de mudança de variáveis, formada pelos autovetores de DG1.

$$M = \{\{1, 0\}, \{-1, 1\}\}$$

$$\{\{1, 0\}, \{-1, 1\}\}$$

$$M1 = \text{Inverse}[M]$$

[matriz inversa]

$$\{\{1, 0\}, \{1, 1\}\}$$

Tomando $(u,v) = M1(r,\theta)$, temos que $x = r$ e $y = x+\theta$, de onde $r = x$ e $\theta = y-x$ e multiplicando o campo por -1 para estar nas hipóteses de Dumortier et al segue que

$$H1 = -x (\text{Cos}[y - x] - 1)$$

[cosseno]

$$-x (-1 + \text{Cos}[x - y])$$

$$H2 = -(-2x + x \text{Cos}[y - x] - \text{Sin}[y - x])$$

[cosseno] [seno]

$$2x - x \text{Cos}[x - y] - \text{Sin}[x - y]$$

Mostrando que a origem é equilíbrio

$$H1 /. \{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\}$$

$$0$$

$$H2 /. \{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\}$$

$$0$$

Matriz Jacobiana de H

$$JL = \{\{D[H1, x], D[H1, y]\}, \{D[H2, x], D[H2, y]\}\}$$

[derivada] [derivada] [derivada] [derivada]

$$\{\{1 - \text{Cos}[x - y] + x \text{Sin}[x - y], -x \text{Sin}[x - y]\},$$

$$\{2 - 2 \text{Cos}[x - y] + x \text{Sin}[x - y], \text{Cos}[x - y] - x \text{Sin}[x - y]\}\}$$

Matriz Jacobiana de H na origem

$$JL_{\theta} = JL / . \{x \rightarrow \theta, y \rightarrow \theta\}$$

$$\{\{\theta, \theta\}, \{\theta, 1\}\}$$

Função A de do Teorema 1.4.

$$A = -x (-1 + \text{Cos}[x - y])$$

[cosseno]

$$-x (-1 + \text{Cos}[x - y])$$

A nossa função B é a função $\lambda y + B(x,y)$ do Teorema 1.4.

$$B = 2x - x \text{Cos}[x - y] - \text{Sin}[x - y]$$

[cosseno] [seno]

$$2x - x \text{Cos}[x - y] - \text{Sin}[x - y]$$

Resolvendo $B = 0$ para y em função de x

Definição de B, tomando $y = f(x)$

$$B = 2x - x \text{Cos}[x - f[x]] - \text{Sin}[x - f[x]]$$

[cosseno] [seno]

$$2x - x \text{Cos}[x - f[x]] - \text{Sin}[x - f[x]]$$

$$B / . x \rightarrow \theta$$

$$\text{Sin}[f[\theta]]$$

Como queremos $B(0, f(0)) = 0$, devemos ter que $\text{Sin}[f[0]] = 0$, de onde $f[0] = 0$.

$$f[\theta] = \theta$$

$$\theta$$

Derivando ambos os membros de $B = 0$ em relação a x

$$B1 = D[B, x]$$

[derivada]

$$2 - \text{Cos}[x - f[x]] - \text{Cos}[x - f[x]] (1 - f'[x]) + x \text{Sin}[x - f[x]] (1 - f'[x])$$

Aplicando em $x = 0$ e igualando a zero

$$B1 / . x \rightarrow \theta$$

$$f'[\theta]$$

Temos então que $f' [0] = 0$

$$f' [0] = 0$$

$$0$$

Derivando de novo em relação a x

$$B2 = D[B1, x]$$

[derivada]

$$2 \sin[x - f[x]] (1 - f'[x]) + x \cos[x - f[x]] (1 - f'[x])^2 + \\ \sin[x - f[x]] (1 - f'[x])^2 + \cos[x - f[x]] f''[x] - x \sin[x - f[x]] f''[x]$$

Aplicando em $x = 0$ e igualando a zero

$$B2 / . x \rightarrow 0$$

$$f'' [0]$$

Temos então que $f'' [0] = 0$

$$f'' [0] = 0$$

$$0$$

Derivando de novo com relação a x

$$B3 = D[B2, x]$$

[derivada]

$$3 \cos[x - f[x]] (1 - f'[x])^2 + \cos[x - f[x]] (1 - f'[x])^3 - \\ x \sin[x - f[x]] (1 - f'[x])^3 - 3 \sin[x - f[x]] f''[x] - 3 x \cos[x - f[x]] (1 - f'[x]) f''[x] - \\ 3 \sin[x - f[x]] (1 - f'[x]) f''[x] + \cos[x - f[x]] f^{(3)}[x] - x \sin[x - f[x]] f^{(3)}[x]$$

Aplicando em $x = 0$ e igualando a zero

$$B3 / . x \rightarrow 0$$

$$4 + f^{(3)} [0]$$

Temos que $f^{(3)} [0] = -4$ e com isso $y = f(x) = -\frac{2}{3} x^3 + \dots$

Substituindo em A e tomando a expansão de Taylor para encontrar a função $g(x)$.

$$A = -x (-1 + \cos[x - y]) / . y \rightarrow -\frac{2}{3} x^3$$

[cosseno]

$$-x \left(-1 + \cos \left[x + \frac{2x^3}{3} \right] \right)$$

Aplicando em $x = 0$

$$A / . x \rightarrow 0$$

$$0$$

Derivando em relação a x

$$A1 = D[A, x]$$

[derivada]

$$1 - \cos\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] + x(1 + 2x^2) \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right]$$

Aplicando em $x = 0$

$$A1 / . x \rightarrow 0$$

$$0$$

Derivando de novo

$$A2 = D[A1, x]$$

[derivada]

$$x(1 + 2x^2)^2 \cos\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] + 4x^2 \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] + 2(1 + 2x^2) \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right]$$

Aplicando em $x = 0$

$$A2 / . x \rightarrow 0$$

$$0$$

Derivando de novo

$$A3 = D[A2, x]$$

[derivada]

$$12x^2(1 + 2x^2) \cos\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] + 3(1 + 2x^2)^2 \cos\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] +$$

$$16x \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] - x(1 + 2x^2)^3 \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right]$$

Aplicando em $x = 0$

$$A3 / . x \rightarrow 0$$

$$3$$

Portando, temos que $g(x) = A(x, f(x)) = \frac{1}{2} x^3 + \dots$

$$\theta_1 = -r + \text{Cos}[\theta]$$

[cosseno]

$$r_1 = r (\text{Sin}[\theta] - 1)$$

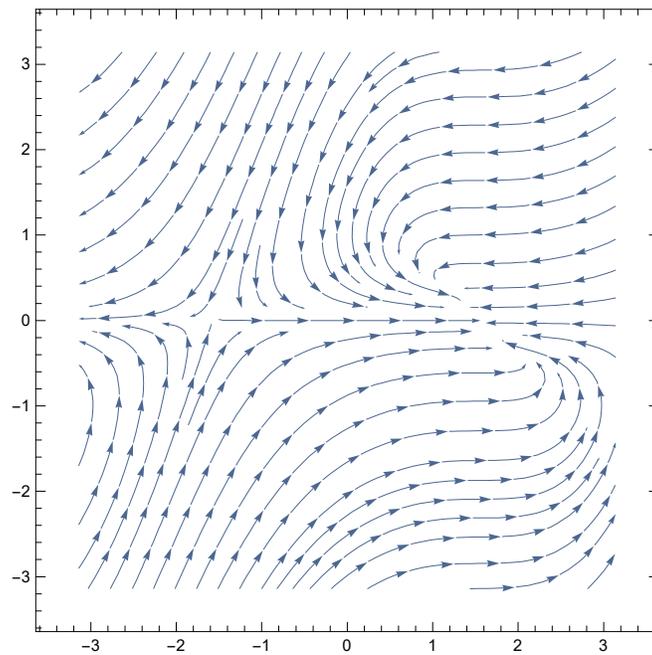
[seno]

$$-r + \text{Cos}[\theta]$$

$$r (-1 + \text{Sin}[\theta])$$

StreamPlot[{ θ_1 , r_1 }, { θ , $-\pi$, π }, { r , $-\pi$, π }]

[gráfico de fluxo]



Apêndice II

Campo de Vetores do sistema (1.6) quando $\omega=1$.

$$F1 = r (\text{Sin}[\theta] - 1)$$

$$F2 = -r + \text{Cos}[\theta]$$

$$r (-1 + \text{Sin}[\theta])$$

$$-r + \text{Cos}[\theta]$$

Pontos de Equilíbrio.

$$P2 = \left\{ \theta, -\frac{\pi}{2} \right\};$$

$$P1 = \left\{ \theta, \frac{\pi}{2} \right\};$$

Matriz Jacobiana DF

$$DF = \{ \{ D[F1, r], D[F1, \theta] \}, \{ D[F2, r], D[F2, \theta] \} \}$$

$$\{ \{-1 + \text{Sin}[\theta], r \text{Cos}[\theta]\}, \{-1, -\text{Sin}[\theta]\} \}$$

Matriz Jacobiana calculada em Q2

$$J2 = DF /. \{ r \rightarrow \theta, \theta \rightarrow -\frac{\pi}{2} \}$$

$$\{ \{-2, \theta\}, \{-1, 1\} \}$$

Eigensystem[J2]

[autovalores e autovetores]

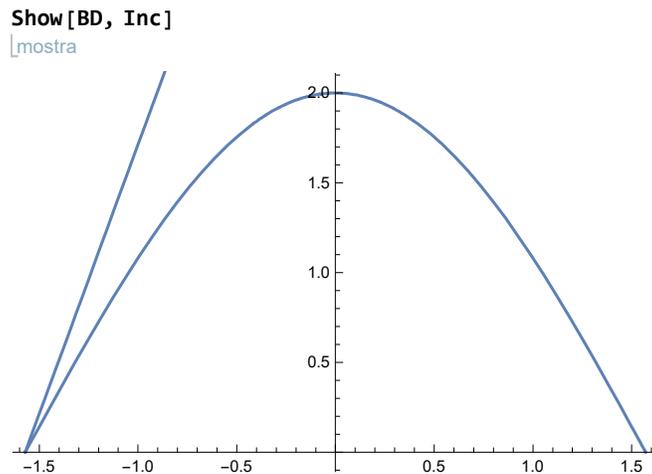
$$\{ \{-2, 1\}, \{ \{3, 1\}, \{ \theta, 1 \} \} \}$$

Q2 é uma sela com curva instável no eixo θ e curva estável “fora” do disco D.

$$BD = \text{Plot} \left[2 \text{Cos}[\theta], \left\{ \theta, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\} \right];$$

$$\text{Inc} = \text{Plot} \left[3 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right), \{ \theta, -\frac{\pi}{2}, \theta \} \right];$$

Gráfico do bordo de D e da curva estável no plano (θ, r)



Matriz Jacobiana calculada em Q1

$$J1 = DF /. \{r \rightarrow \theta, \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}\}$$

{{0, 0}, {-1, -1}}

Eigensystem[J1]

[autovalores e autovetores]

{{-1, 0}, {{0, 1}, {-1, 1}}}

Q1 é semi-hiperbólico e para estudarmos sua estabilidade, vamos utilizar o Teorema 1.4.

Translação do campo $(F1, F2)$ de $(0, \frac{\pi}{2})$ para $(0, 0)$.

$$G1 = r (\text{Cos}[\theta] - 1)$$

$$G2 = -r - \text{Sin}[\theta]$$

$$r (-1 + \text{Cos}[\theta])$$

$$-r - \text{Sin}[\theta]$$

Matriz Jacobiana do campo G

$$DG = \{\{D[G1, r], D[G1, \theta]\}, \{D[G2, r], D[G2, \theta]\}\}$$

{{-1 + Cos[theta], -r Sin[theta]}, {-1, -Cos[theta]}}

Matriz Jacobiana do campo G no novo Q1 = (0,0)

$$DG1 = DG /. \{r \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0\}$$

$$\{\{0, 0\}, \{-1, -1\}\}$$

$$\text{Eigensystem}[DG1]$$

[autovalores e autovetores]

$$\{\{-1, 0\}, \{\{0, 1\}, \{-1, 1\}\}\}$$

Matriz de mudança de variáveis, formada pelos autovetores de DG1.

$$M = \{\{1, 0\}, \{-1, 1\}\}$$

$$\{\{1, 0\}, \{-1, 1\}\}$$

$$M1 = \text{Inverse}[M]$$

[matriz inversa]

$$\{\{1, 0\}, \{1, 1\}\}$$

Tomando $(u,v) = M1(r,\theta)$, temos que $x = r$ e $y = x+\theta$, de onde $r = x$ e $\theta = y-x$ e multiplicando o campo por -1 para estar nas hipóteses de Dumortier et al segue que

$$H1 = -x (\text{Cos}[y - x] - 1)$$

[cosseno]

$$-x (-1 + \text{Cos}[x - y])$$

$$H2 = -(-2x + x \text{Cos}[y - x] - \text{Sin}[y - x])$$

[cosseno]

[seno]

$$2x - x \text{Cos}[x - y] - \text{Sin}[x - y]$$

Mostrando que a origem é equilíbrio

$$H1 /. \{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\}$$

$$0$$

$$H2 /. \{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\}$$

$$0$$

Matriz Jacobiana de H

$$JL = \{\{D[H1, x], D[H1, y]\}, \{D[H2, x], D[H2, y]\}\}$$

[derivada]

[derivada]

[derivada]

[derivada]

$$\{\{1 - \text{Cos}[x - y] + x \text{Sin}[x - y], -x \text{Sin}[x - y]\},$$

$$\{2 - 2 \text{Cos}[x - y] + x \text{Sin}[x - y], \text{Cos}[x - y] - x \text{Sin}[x - y]\}\}$$

Matriz Jacobiana de H na origem

$$JL_{\theta} = JL / . \{x \rightarrow \theta, y \rightarrow \theta\}$$

$$\{\{\theta, \theta\}, \{\theta, 1\}\}$$

Função A de do Teorema 1.4.

$$A = -x (-1 + \text{Cos}[x - y])$$

[cosseno]

$$-x (-1 + \text{Cos}[x - y])$$

A nossa função B é a função $\lambda y + B(x,y)$ do Teorema 1.4.

$$B = 2x - x \text{Cos}[x - y] - \text{Sin}[x - y]$$

[cosseno] [seno]

$$2x - x \text{Cos}[x - y] - \text{Sin}[x - y]$$

Resolvendo $B = 0$ para y em função de x

Definição de B, tomando $y = f(x)$

$$B = 2x - x \text{Cos}[x - f[x]] - \text{Sin}[x - f[x]]$$

[cosseno] [seno]

$$2x - x \text{Cos}[x - f[x]] - \text{Sin}[x - f[x]]$$

$$B / . x \rightarrow \theta$$

$$\text{Sin}[f[\theta]]$$

Como queremos $B(0, f(0)) = 0$, devemos ter que $\text{Sin}[f[0]] = 0$, de onde $f[0] = 0$.

$$f[\theta] = \theta$$

$$\theta$$

Derivando ambos os membros de $B = 0$ em relação a x

$$B1 = D[B, x]$$

[derivada]

$$2 - \text{Cos}[x - f[x]] - \text{Cos}[x - f[x]] (1 - f'[x]) + x \text{Sin}[x - f[x]] (1 - f'[x])$$

Aplicando em $x = 0$ e igualando a zero

$$B1 / . x \rightarrow \theta$$

$$f'[\theta]$$

Temos então que $f' [0] = 0$

$$f' [0] = 0$$

$$0$$

Derivando de novo em relação a x

$$B2 = D[B1, x]$$

[derivada]

$$2 \sin[x - f[x]] (1 - f'[x]) + x \cos[x - f[x]] (1 - f'[x])^2 + \\ \sin[x - f[x]] (1 - f'[x])^2 + \cos[x - f[x]] f''[x] - x \sin[x - f[x]] f''[x]$$

Aplicando em $x = 0$ e igualando a zero

$$B2 / . x \rightarrow 0$$

$$f'' [0]$$

Temos então que $f'' [0] = 0$

$$f'' [0] = 0$$

$$0$$

Derivando de novo com relação a x

$$B3 = D[B2, x]$$

[derivada]

$$3 \cos[x - f[x]] (1 - f'[x])^2 + \cos[x - f[x]] (1 - f'[x])^3 - \\ x \sin[x - f[x]] (1 - f'[x])^3 - 3 \sin[x - f[x]] f''[x] - 3 x \cos[x - f[x]] (1 - f'[x]) f''[x] - \\ 3 \sin[x - f[x]] (1 - f'[x]) f''[x] + \cos[x - f[x]] f^{(3)}[x] - x \sin[x - f[x]] f^{(3)}[x]$$

Aplicando em $x = 0$ e igualando a zero

$$B3 / . x \rightarrow 0$$

$$4 + f^{(3)} [0]$$

Temos que $f^{(3)} [0] = -4$ e com isso $y = f(x) = -\frac{2}{3} x^3 + \dots$

Substituindo em A e tomando a expansão de Taylor para encontrar a função $g(x)$.

$$A = -x (-1 + \cos[x - y]) / . y \rightarrow -\frac{2}{3} x^3$$

[cosseno]

$$-x \left(-1 + \cos \left[x + \frac{2x^3}{3} \right] \right)$$

Aplicando em $x = 0$

$$A / . x \rightarrow 0$$

$$0$$

Derivando em relação a x

$$A1 = D[A, x]$$

[derivada]

$$1 - \cos\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] + x(1 + 2x^2) \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right]$$

Aplicando em $x = 0$

$$A1 / . x \rightarrow 0$$

$$0$$

Derivando de novo

$$A2 = D[A1, x]$$

[derivada]

$$x(1 + 2x^2)^2 \cos\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] + 4x^2 \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] + 2(1 + 2x^2) \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right]$$

Aplicando em $x = 0$

$$A2 / . x \rightarrow 0$$

$$0$$

Derivando de novo

$$A3 = D[A2, x]$$

[derivada]

$$12x^2(1 + 2x^2) \cos\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] + 3(1 + 2x^2)^2 \cos\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] +$$

$$16x \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] - x(1 + 2x^2)^3 \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right]$$

Aplicando em $x = 0$

$$A3 / . x \rightarrow 0$$

$$3$$

Portando, temos que $g(x) = A(x, f(x)) = \frac{1}{2} x^3 + \dots$

$$\theta_1 = -r + \text{Cos}[\theta]$$

[cosseno]

$$r_1 = r (\text{Sin}[\theta] - 1)$$

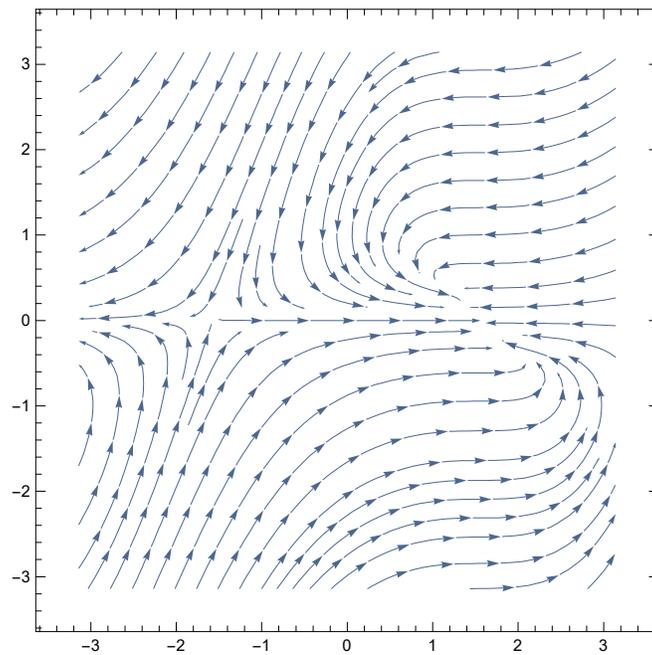
[seno]

$$-r + \text{Cos}[\theta]$$

$$r (-1 + \text{Sin}[\theta])$$

`StreamPlot[{ θ_1 , r_1 }, { θ , $-\pi$, π }, { r , $-\pi$, π }]`

[gráfico de fluxo]



Apêndice III

Campo de Vetores do sistema (1.6) quando $\omega=1$.

$$F1 = r (\text{Sin}[\theta] - 1)$$

$$F2 = -r + \text{Cos}[\theta]$$

$$r (-1 + \text{Sin}[\theta])$$

$$-r + \text{Cos}[\theta]$$

Pontos de Equilíbrio.

$$P2 = \left\{ \theta, -\frac{\pi}{2} \right\};$$

$$P1 = \left\{ \theta, \frac{\pi}{2} \right\};$$

Matriz Jacobiana DF

$$DF = \{ \{ D[F1, r], D[F1, \theta] \}, \{ D[F2, r], D[F2, \theta] \} \}$$

$$\{ \{-1 + \text{Sin}[\theta], r \text{Cos}[\theta]\}, \{-1, -\text{Sin}[\theta]\} \}$$

Matriz Jacobiana calculada em Q2

$$J2 = DF /. \{ r \rightarrow \theta, \theta \rightarrow -\frac{\pi}{2} \}$$

$$\{ \{-2, \theta\}, \{-1, 1\} \}$$

Eigensystem[J2]

[autovalores e autovetores]

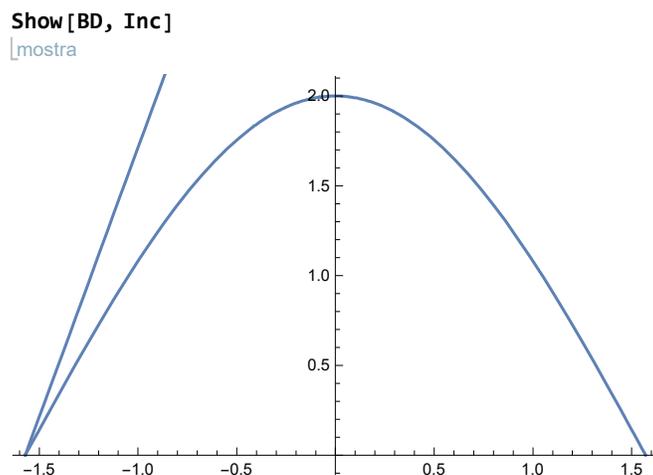
$$\{ \{-2, 1\}, \{ \{3, 1\}, \{ \theta, 1 \} \} \}$$

Q2 é uma sela com curva instável no eixo θ e curva estável “fora” do disco D.

$$BD = \text{Plot} \left[2 \text{Cos}[\theta], \left\{ \theta, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\} \right];$$

$$\text{Inc} = \text{Plot} \left[3 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right), \{ \theta, -\frac{\pi}{2}, \theta \} \right];$$

Gráfico do bordo de D e da curva estável no plano (θ, r)



Matriz Jacobiana calculada em Q1

$$J1 = DF /. \{r \rightarrow \theta, \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}\}$$

$$\{\{\theta, \theta\}, \{-1, -1\}\}$$

$$\text{Eigensystem}[J1]$$

[autovalores e autovetores]

$$\{\{-1, \theta\}, \{\{\theta, 1\}, \{-1, 1\}\}\}$$

Q1 é semi-hiperbólico e para estudarmos sua estabilidade, vamos utilizar o Teorema 1.4.

Translação do campo $(F1, F2)$ de $(0, \frac{\pi}{2})$ para $(0, 0)$.

$$G1 = r (\text{Cos}[\theta] - 1)$$

[cosseno]

$$G2 = -r - \text{Sin}[\theta]$$

[seno]

$$r (-1 + \text{Cos}[\theta])$$

$$-r - \text{Sin}[\theta]$$

Matriz Jacobiana do campo G

$$DG = \{\{D[G1, r], D[G1, \theta]\}, \{D[G2, r], D[G2, \theta]\}\}$$

[derivada] [derivada] [derivada] [derivada]

$$\{\{-1 + \text{Cos}[\theta], -r \text{Sin}[\theta]\}, \{-1, -\text{Cos}[\theta]\}\}$$

Matriz Jacobiana do campo G no novo Q1 = (0,0)

$$DG1 = DG /. \{r \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0\}$$

$$\{\{0, 0\}, \{-1, -1\}\}$$

$$\text{Eigensystem}[DG1]$$

[autovalores e autovetores]

$$\{\{-1, 0\}, \{\{0, 1\}, \{-1, 1\}\}\}$$

Matriz de mudança de variáveis, formada pelos autovetores de DG1.

$$M = \{\{1, 0\}, \{-1, 1\}\}$$

$$\{\{1, 0\}, \{-1, 1\}\}$$

$$M1 = \text{Inverse}[M]$$

[matriz inversa]

$$\{\{1, 0\}, \{1, 1\}\}$$

Tomando $(u,v) = M1(r,\theta)$, temos que $x = r$ e $y = x+\theta$, de onde $r = x$ e $\theta = y-x$ e multiplicando o campo por -1 para estar nas hipóteses de Dumortier et al segue que

$$H1 = -x (\text{Cos}[y - x] - 1)$$

[cosseno]

$$-x (-1 + \text{Cos}[x - y])$$

$$H2 = -(-2x + x \text{Cos}[y - x] - \text{Sin}[y - x])$$

[cosseno]

[seno]

$$2x - x \text{Cos}[x - y] - \text{Sin}[x - y]$$

Mostrando que a origem é equilíbrio

$$H1 /. \{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\}$$

$$0$$

$$H2 /. \{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\}$$

$$0$$

Matriz Jacobiana de H

$$JL = \{\{D[H1, x], D[H1, y]\}, \{D[H2, x], D[H2, y]\}\}$$

[derivada]

[derivada]

[derivada]

[derivada]

$$\{\{1 - \text{Cos}[x - y] + x \text{Sin}[x - y], -x \text{Sin}[x - y]\},$$

$$\{2 - 2 \text{Cos}[x - y] + x \text{Sin}[x - y], \text{Cos}[x - y] - x \text{Sin}[x - y]\}\}$$

Matriz Jacobiana de H na origem

$$JL_{\theta} = JL / . \{x \rightarrow \theta, y \rightarrow \theta\}$$

$$\{\{\theta, \theta\}, \{\theta, 1\}\}$$

Função A de do Teorema 1.4.

$$A = -x (-1 + \text{Cos}[x - y])$$

[cosseno]

$$-x (-1 + \text{Cos}[x - y])$$

A nossa função B é a função $\lambda y + B(x,y)$ do Teorema 1.4.

$$B = 2x - x \text{Cos}[x - y] - \text{Sin}[x - y]$$

[cosseno] [seno]

$$2x - x \text{Cos}[x - y] - \text{Sin}[x - y]$$

Resolvendo $B = 0$ para y em função de x

Definição de B, tomando $y = f(x)$

$$B = 2x - x \text{Cos}[x - f[x]] - \text{Sin}[x - f[x]]$$

[cosseno] [seno]

$$2x - x \text{Cos}[x - f[x]] - \text{Sin}[x - f[x]]$$

$$B / . x \rightarrow \theta$$

$$\text{Sin}[f[\theta]]$$

Como queremos $B(0, f(0)) = 0$, devemos ter que $\text{Sin}[f[0]] = 0$, de onde $f[0] = 0$.

$$f[\theta] = \theta$$

$$\theta$$

Derivando ambos os membros de $B = 0$ em relação a x

$$B1 = D[B, x]$$

[derivada]

$$2 - \text{Cos}[x - f[x]] - \text{Cos}[x - f[x]] (1 - f'[x]) + x \text{Sin}[x - f[x]] (1 - f'[x])$$

Aplicando em $x = 0$ e igualando a zero

$$B1 / . x \rightarrow \theta$$

$$f'[\theta]$$

Temos então que $f' [0] = 0$

$$f' [0] = 0$$

0

Derivando de novo em relação a x

$$B2 = D[B1, x]$$

[derivada]

$$2 \sin[x - f[x]] (1 - f'[x]) + x \cos[x - f[x]] (1 - f'[x])^2 + \\ \sin[x - f[x]] (1 - f'[x])^2 + \cos[x - f[x]] f''[x] - x \sin[x - f[x]] f''[x]$$

Aplicando em $x = 0$ e igualando a zero

$$B2 / . x \rightarrow 0$$

$$f'' [0]$$

Temos então que $f'' [0] = 0$

$$f'' [0] = 0$$

0

Derivando de novo com relação a x

$$B3 = D[B2, x]$$

[derivada]

$$3 \cos[x - f[x]] (1 - f'[x])^2 + \cos[x - f[x]] (1 - f'[x])^3 - \\ x \sin[x - f[x]] (1 - f'[x])^3 - 3 \sin[x - f[x]] f''[x] - 3 x \cos[x - f[x]] (1 - f'[x]) f''[x] - \\ 3 \sin[x - f[x]] (1 - f'[x]) f''[x] + \cos[x - f[x]] f^{(3)}[x] - x \sin[x - f[x]] f^{(3)}[x]$$

Aplicando em $x = 0$ e igualando a zero

$$B3 / . x \rightarrow 0$$

$$4 + f^{(3)} [0]$$

Temos que $f^{(3)} [0] = -4$ e com isso $y = f(x) = -\frac{2}{3} x^3 + \dots$

Substituindo em A e tomando a expansão de Taylor para encontrar a função $g(x)$.

$$A = -x (-1 + \cos[x - y]) / . y \rightarrow -\frac{2}{3} x^3$$

[cosseno]

$$-x \left(-1 + \cos \left[x + \frac{2x^3}{3} \right] \right)$$

Aplicando em $x = 0$

$$A / . x \rightarrow 0$$

0

Derivando em relação a x

$$A1 = D[A, x]$$

[derivada]

$$1 - \cos\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] + x(1 + 2x^2) \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right]$$

Aplicando em $x = 0$

$$A1 / . x \rightarrow 0$$

0

Derivando de novo

$$A2 = D[A1, x]$$

[derivada]

$$x(1 + 2x^2)^2 \cos\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] + 4x^2 \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] + 2(1 + 2x^2) \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right]$$

Aplicando em $x = 0$

$$A2 / . x \rightarrow 0$$

0

Derivando de novo

$$A3 = D[A2, x]$$

[derivada]

$$12x^2(1 + 2x^2) \cos\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] + 3(1 + 2x^2)^2 \cos\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] +$$

$$16x \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right] - x(1 + 2x^2)^3 \sin\left[x + \frac{2x^3}{3}\right]$$

Aplicando em $x = 0$

$$A3 / . x \rightarrow 0$$

3

Portando, temos que $g(x) = A(x, f(x)) = \frac{1}{2} x^3 + \dots$

$$\theta_1 = -r + \text{Cos}[\theta]$$

[cosseno]

$$r_1 = r (\text{Sin}[\theta] - 1)$$

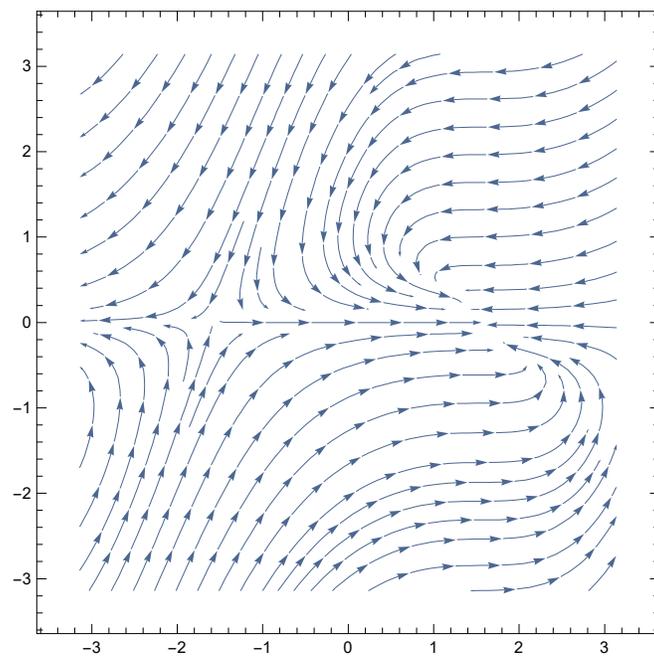
[seno]

$$-r + \text{Cos}[\theta]$$

$$r (-1 + \text{Sin}[\theta])$$

StreamPlot[{ θ_1 , r_1 }, { θ , $-\pi$, π }, { r , $-\pi$, π }]

[gráfico de fluxo]



Apêndice IV

Componentes do Campo em (2.2). Modificação sem Anulamento no Bordo do Disco D.

$$f1[x_, y_] := -y + \mu * x + \lambda * \frac{1 - x}{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}$$

$$f2[x_, y_] := x + \mu * y - \lambda * \frac{y}{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}$$

Pontos de equilíbrio em função dos parâmetros μ e λ .

$$P1 = \left\{ \frac{\lambda \left(\lambda - \mu \sqrt{(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2} \right)}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{\lambda \left(\mu \lambda + \sqrt{(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2} \right)}{(1 + \mu^2)^2} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\lambda \left(\lambda - \mu \sqrt{-\lambda^2 + (1 + \mu^2)^2} \right)}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{\lambda \left(\lambda \mu + \sqrt{-\lambda^2 + (1 + \mu^2)^2} \right)}{(1 + \mu^2)^2} \right\}$$

$$P2 = \left\{ \frac{\lambda \left(\lambda + \mu \sqrt{(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2} \right)}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{\lambda \left(\mu \lambda - \sqrt{(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2} \right)}{(1 + \mu^2)^2} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\lambda \left(\lambda + \mu \sqrt{-\lambda^2 + (1 + \mu^2)^2} \right)}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{\lambda \left(\lambda \mu - \sqrt{-\lambda^2 + (1 + \mu^2)^2} \right)}{(1 + \mu^2)^2} \right\}$$

Parâmetros da Curva de Hopf, com $0 < \mu < 1$.

$$\lambda = 2 \mu$$

$$2 \mu$$

Simplificando a expressão

$$\sigma = \text{Simplify} \left[\sqrt{(1 + \mu^2)^2 - \lambda^2}, \theta < \mu < 1 \right]$$

|simplifica

$$1 - \mu^2$$

P1 e P2 simplificados.

$$P1 = \text{Simplify}\left[\left\{\frac{\lambda (\lambda - \sigma \mu)}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{\lambda (\mu \lambda + \sigma)}{(1 + \mu^2)^2}\right\}, \theta < \mu < 1\right]$$

$$\left\{\frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}, \frac{2 \mu}{1 + \mu^2}\right\}$$

$$P2 = \text{FullSimplify}\left[\left\{\frac{\lambda (\lambda + \sigma \mu)}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{\lambda (\mu \lambda - \sigma)}{(1 + \mu^2)^2}\right\}, \theta < \mu < 1\right]$$

$$\left\{-\frac{2 \mu^2 (-3 + \mu^2)}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{2 \mu (-1 + 3 \mu^2)}{(1 + \mu^2)^2}\right\}$$

Matriz Jacobiana.

$$A[\{x_, y_}] := \{\{\text{Derivative}[1, 0][f1][x, y], \text{Derivative}[0, 1][f1][x, y]\}, \\ \{\text{Derivative}[1, 0][f2][x, y], \text{Derivative}[0, 1][f2][x, y]\}\}$$

Polinômio Característico da Matriz Jacobiana.

$$P[s_, \{x_, y_}] := \text{Det}[A[\{x, y\}] - s * \text{IdentityMatrix}[2]]$$

Análise do ponto P1.

Matriz Jacobiana calculada em P1.

$$J = \text{Simplify}[A[P1], \theta < \mu < 1]$$

$$\left\{\left\{\frac{\mu - 6 \mu^3 + \mu^5}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{-1 - 6 \mu^2 + 3 \mu^4}{(1 + \mu^2)^2}\right\}, \left\{\frac{1 - 2 \mu^2 + 5 \mu^4}{(1 + \mu^2)^2}, -\frac{\mu (1 - 6 \mu^2 + \mu^4)}{(1 + \mu^2)^2}\right\}\right\}$$

Polinômio Característico da matriz Jacobiana calculada em P1.

$$\text{Simplify}[P[s, P1], \theta < \mu < 1]$$

$$1 + s^2 - \mu^2$$

Autovalores da Matriz Jacobiana aplicada em P1.

$$\text{Solve}[1 + s^2 - \mu^2 == 0, s]$$

$$\left\{\left\{s \rightarrow -\sqrt{-1 + \mu^2}\right\}, \left\{s \rightarrow \sqrt{-1 + \mu^2}\right\}\right\}$$

Como $-1 + \mu^2 < 0$, temos que os auto valores são complexos e com partes reais nulas. Portanto, o

ponto P1 é um candidato a ser ponto de equilíbrio do tipo Hopf, quaisquer que sejam os parâmetros pertencentes à curva $\lambda = 2\mu$.

Análise do ponto P2.

Matriz Jacobiana em P2.

$$\text{Simplify}[A[P2], \frac{\sqrt{3}}{3} < \mu < 1]$$

[simplifica]

$$\left\{ \left\{ \frac{\mu + 6\mu^3 - 3\mu^5}{1 - 2\mu^2 - 3\mu^4}, \frac{1 + 2\mu^2 - 7\mu^4}{-1 + 2\mu^2 + 3\mu^4} \right\}, \left\{ \frac{1 - 6\mu^2 + \mu^4}{1 - 2\mu^2 - 3\mu^4}, \frac{\mu(-3 + 6\mu^2 + \mu^4)}{-1 + 2\mu^2 + 3\mu^4} \right\} \right\}$$

μ varia entre $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e 1 pois é apenas nesse intervalo que o ponto P2 existe para a curva de Hopf, uma vez que fora desse intervalo, ou seja, $0 < \mu < \frac{\sqrt{3}}{3}$, a coordenada y de P2 fica negativa, o que não nos interessa.

Polinômio Característico da Matriz Jacobiana calculada em P2.

$$\text{FullSimplify}[P[s, P2], \frac{\sqrt{3}}{3} < \mu < 1]$$

[simplifica completamente]

$$\frac{-1 + \mu^4 - 4s\mu(-1 + \mu^2) + s^2(-1 + 3\mu^2)}{-1 + 3\mu^2}$$

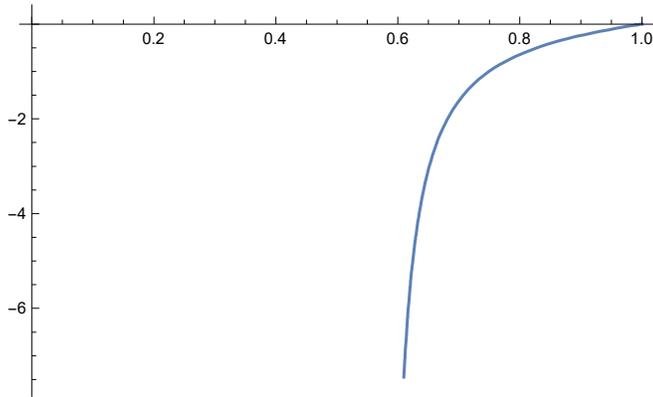
Calculando o determinante para ver a estabilidade do ponto P2.

$$D1 = \text{Simplify}[\text{Det}[A[P2]], \frac{\sqrt{3}}{3} < \mu < 1]$$

[simplifica] [determinante]

$$\frac{-1 + \mu^4}{-1 + 3\mu^2}$$

Plot [D1, { μ , $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 1}, AxesOrigin \rightarrow {0, 0}]
[gráfico] [origem dos eixos]



Como o determinante da matriz Jacobiana em P2 é sempre negativo, temos que P2 é uma sela.

Cálculo do Primeiro Coeficiente de Lyapunov para o ponto de equilíbrio P1.

Matriz Jacobiana calculada no ponto de equilíbrio P1

$J = \text{Simplify}[A[P1], \theta < \mu < 1]$
[simplifica]

$$\left\{ \left\{ \frac{\mu - 6\mu^3 + \mu^5}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4}{(1 + \mu^2)^2} \right\}, \left\{ \frac{1 - 2\mu^2 + 5\mu^4}{(1 + \mu^2)^2}, -\frac{\mu(1 - 6\mu^2 + \mu^4)}{(1 + \mu^2)^2} \right\} \right\}$$

Auto valor s1

$$s1 = \sqrt{1 - \mu^2}$$

$$\sqrt{1 - \mu^2}$$

Auto vetor q=(q0,q1) associado ao auto valor s1

$\text{Solve}[J \cdot \{q0, q1\} - I s1 \{q0, q1\} == 0, \{q0, q1\}]$
[resolve] [unidade imaginária]

$$\left\{ \left\{ q1 \rightarrow -\frac{q0 \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 - i \sqrt{1 - \mu^2} - 2i \mu^2 \sqrt{1 - \mu^2} - i \mu^4 \sqrt{1 - \mu^2} \right)}{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4} \right\} \right\}$$

Definindo a segunda componente de q em função da primeira

$$q1 = -\frac{q0 \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 - i \sqrt{1 - \mu^2} - 2i \mu^2 \sqrt{1 - \mu^2} - i \mu^4 \sqrt{1 - \mu^2} \right)}{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4};$$

Reescrevendo q em função de q0

$$q = \left\{ q\theta, - \frac{q\theta \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 - i\sqrt{1-\mu^2} - 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} - i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4} \right\}$$

$$\left\{ q\theta, - \frac{q\theta \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 - i\sqrt{1-\mu^2} - 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} - i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4} \right\}$$

Verificação

Simplify[J.q - I s1 q]

[simplifica [unidade i

{0, 0}

Vetor qc(q0c,q1c), isto é, o conjugado de q

$$qc = \left\{ q\theta, - \frac{q\theta \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 + i\sqrt{1-\mu^2} + 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} + i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4} \right\}$$

$$\left\{ q\theta, - \frac{q\theta \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 + i\sqrt{1-\mu^2} + 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} + i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4} \right\}$$

q0c = q0

q0

$$q1c = - \frac{q\theta \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 + i\sqrt{1-\mu^2} + 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} + i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4}$$

$$- \frac{q\theta \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 + i\sqrt{1-\mu^2} + 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} + i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4}$$

Verificação

Simplify[J.qc + I s1 qc]

[simplifica [unidade in

{0, 0}

Transposta de J

JT = Transpose[J]

[transposição

$$\left\{ \left\{ \frac{\mu - 6\mu^3 + \mu^5}{(1 + \mu^2)^2}, \frac{1 - 2\mu^2 + 5\mu^4}{(1 + \mu^2)^2} \right\}, \left\{ \frac{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4}{(1 + \mu^2)^2}, -\frac{\mu(1 - 6\mu^2 + \mu^4)}{(1 + \mu^2)^2} \right\} \right\}$$

Auto vetor adjunto p=(p0,p1)

Solve[JT.{p0, p1} + I s1 {p0, p1} = 0, {p0, p1}]

[resolve [unidade imaginária

$$\left\{ \left\{ p1 \rightarrow - \frac{p\theta \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 + i\sqrt{1-\mu^2} + 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} + i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{1 - 2\mu^2 + 5\mu^4} \right\} \right\}$$

Escrevendo p em função de p0

$$p = \left\{ p_0, - \frac{p_0 \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 + i\sqrt{1-\mu^2} + 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} + i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{1 - 2\mu^2 + 5\mu^4} \right\}$$

$$\left\{ p_0, - \frac{p_0 \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 + i\sqrt{1-\mu^2} + 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} + i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{1 - 2\mu^2 + 5\mu^4} \right\}$$

Vetor pc=(p0c,p1c), isto é, o conjugado de p

$$pc = \left\{ p_0c, - \frac{p_0c \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 - i\sqrt{1-\mu^2} - 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} - i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{1 - 2\mu^2 + 5\mu^4} \right\}$$

$$\left\{ p_0c, - \frac{p_0c \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 - i\sqrt{1-\mu^2} - 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} - i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{1 - 2\mu^2 + 5\mu^4} \right\}$$

Reescrevendo a segunda componente em função da primeira

$$p_1c = - \frac{p_0c \left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 - i\sqrt{1-\mu^2} - 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} - i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{1 - 2\mu^2 + 5\mu^4};$$

Verificação

Simplify[JT.p + I s1 p]

[simplifica [unidade i

{0, 0}

Simplify[JT.pc - I s1 pc]

[simplifica [unidade in

{0, 0}

Condição de normalização.

Encontrando os vetores p e pc(Conjugado de p) em função de q0.

FullSimplify[Solve[p0c q0 + p1c q1 - 1 == 0, p0c]

[simplifica compl [resolve

$$\left\{ \left\{ p_0c \rightarrow \frac{-1 + \mu \left(i\sqrt{1-\mu^2} + \mu \left(-1 + \mu^2 + \mu^4 - 6i\mu\sqrt{1-\mu^2} + i\mu^3\sqrt{1-\mu^2} \right) \right)}{2q_0(-1 + \mu^2)(1 + \mu^2)^2} \right\} \right\}$$

Vetor q para q0=1.

$$q = \left\{ 1, - \frac{\left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 - i\sqrt{1-\mu^2} - 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} - i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4} \right\}$$

$$\left\{ 1, - \frac{\mu - 6\mu^3 + \mu^5 - i\sqrt{1-\mu^2} - 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} - i\mu^4\sqrt{1-\mu^2}}{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4} \right\}$$

Vetor qc para q0=1.

$$qc = \left\{ 1, -\frac{\mu - 6\mu^3 + \mu^5 + i\sqrt{1-\mu^2} + 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} + i\mu^4\sqrt{1-\mu^2}}{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4} \right\}$$

$$\left\{ 1, -\frac{\mu - 6\mu^3 + \mu^5 + i\sqrt{1-\mu^2} + 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} + i\mu^4\sqrt{1-\mu^2}}{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4} \right\}$$

Vetor p para q0=1.

$$pf = p / . p0 \rightarrow \frac{-1 + \mu \left(-i\sqrt{1-\mu^2} + \mu \left(-1 + \mu^2 + \mu^4 + 6i\mu\sqrt{1-\mu^2} - i\mu^3\sqrt{1-\mu^2} \right) \right)}{2(-1 + \mu^2)(1 + \mu^2)^2};$$

Vetor pc para q0=1.

$$pfc = \left\{ \frac{-1 + \mu \left(i\sqrt{1-\mu^2} + \mu \left(-1 + \mu^2 + \mu^4 - 6i\mu\sqrt{1-\mu^2} + i\mu^3\sqrt{1-\mu^2} \right) \right)}{2(-1 + \mu^2)(1 + \mu^2)^2}, \right.$$

$$\left. \left(\frac{-1 + \mu \left(i\sqrt{1-\mu^2} + \mu \left(-1 + \mu^2 + \mu^4 - 6i\mu\sqrt{1-\mu^2} + i\mu^3\sqrt{1-\mu^2} \right) \right)}{2(-1 + \mu^2)(1 + \mu^2)^2} \right) \right.$$

$$\left. \left(-\frac{\left(\mu - 6\mu^3 + \mu^5 - i\sqrt{1-\mu^2} - 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} - i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} \right)}{1 - 2\mu^2 + 5\mu^4} \right) \right\};$$

Última Verificação para as condições da página 196 Kuznetsov.

Simplify[J.q - I s1 q]

[simplifica [unidade i

{0, 0}

Simplify[J.qc + I s1 qc]

[simplifica [unidade in

{0, 0}

Simplify[JT.pf + I s1 pf]

[simplifica [unidade in

{0, 0}

Simplify[JT.pfc - I s1 pfc]

[simplifica [unidade ime

{0, 0}

q0 = 1;

$$q1 = -\frac{\mu - 6\mu^3 + \mu^5 - i\sqrt{1-\mu^2} - 2i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} - i\mu^4\sqrt{1-\mu^2}}{-1 - 6\mu^2 + 3\mu^4};$$

$$p0c = \frac{-1 + \mu \left(i \sqrt{1 - \mu^2} + \mu \left(-1 + \mu^2 + \mu^4 - 6 i \mu \sqrt{1 - \mu^2} + i \mu^3 \sqrt{1 - \mu^2} \right) \right)}{2 (-1 + \mu^2) (1 + \mu^2)^2};$$

$$p1c = \left(\frac{-1 + \mu \left(i \sqrt{1 - \mu^2} + \mu \left(-1 + \mu^2 + \mu^4 - 6 i \mu \sqrt{1 - \mu^2} + i \mu^3 \sqrt{1 - \mu^2} \right) \right)}{2 (-1 + \mu^2) (1 + \mu^2)^2} \right)$$

$$\left(- \frac{\left(\mu - 6 \mu^3 + \mu^5 - i \sqrt{1 - \mu^2} - 2 i \mu^2 \sqrt{1 - \mu^2} - i \mu^4 \sqrt{1 - \mu^2} \right)}{1 - 2 \mu^2 + 5 \mu^4} \right);$$

Simplify [p0c q0 + p1c q1]

[simplifica

1

Função B

Campo de vetores

$$\lambda = 2 \mu$$

$$2 \mu$$

$$F1 = -y + \mu * x + \lambda * \frac{1 - x}{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}$$

$$F2 = x + \mu * y - \lambda * \frac{y}{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}$$

$$-y + x \mu + \frac{2 (1 - x) \mu}{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}$$

$$x + y \mu - \frac{2 y \mu}{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}$$

Derivadas para encontrar B((x1,x2),(y1,y2))

$$b1 = D[D[F1, x], x] x1 y1 + D[D[F1, x], y] x2 y1 + D[D[F1, y], x] x1 y2 + D[D[F1, y], y] x2 y2$$

$$x1 y1 \left(\frac{6 (1 - x)^3 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{6 (1 - x) \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{3/2}} \right) + x2 y2 \left(\frac{6 (1 - x) y^2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{2 (1 - x) \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{3/2}} \right) +$$

$$x2 y1 \left(- \frac{6 (1 - x)^2 y \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{2 y \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{3/2}} \right) + x1 y2 \left(- \frac{6 (1 - x)^2 y \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{2 y \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

b1 aplicada no ponto (x,y) de equilibrio

$$\mathbf{b1} /. \left\{ \mathbf{x} \rightarrow \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}, \mathbf{y} \rightarrow \frac{2 \mu}{1 + \mu^2} \right\}$$

$$\mathbf{x2 y1} \left(-\frac{12 \mu^2 \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)^2}{(1 + \mu^2) \left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)^2\right)^{5/2}} + \frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2) \left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) +$$

$$\mathbf{x1 y2} \left(-\frac{12 \mu^2 \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)^2}{(1 + \mu^2) \left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)^2\right)^{5/2}} + \frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2) \left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) +$$

$$\mathbf{x1 y1} \left(\frac{6 \mu \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)^3}{\left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)^2\right)^{5/2}} - \frac{6 \mu \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)}{\left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) +$$

$$\mathbf{x2 y2} \left(\frac{24 \mu^3 \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)}{(1 + \mu^2)^2 \left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)^2\right)^{5/2}} - \frac{2 \mu \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)}{\left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}\right)^2\right)^{3/2}} \right)$$

$$\mathbf{b2} = \mathbf{D}[\mathbf{D}[\mathbf{F2}, \mathbf{x}], \mathbf{x}] \mathbf{x1 y1} + \mathbf{D}[\mathbf{D}[\mathbf{F2}, \mathbf{x}], \mathbf{y}] \mathbf{x2 y1} + \mathbf{D}[\mathbf{D}[\mathbf{F2}, \mathbf{y}], \mathbf{x}] \mathbf{x1 y2} + \mathbf{D}[\mathbf{D}[\mathbf{F2}, \mathbf{y}], \mathbf{y}] \mathbf{x2 y2}$$

$$\mathbf{x2 y1} \left(\frac{6 (1 - \mathbf{x}) \mathbf{y}^2 \mu}{((1 - \mathbf{x})^2 + \mathbf{y}^2)^{5/2}} - \frac{2 (1 - \mathbf{x}) \mu}{((1 - \mathbf{x})^2 + \mathbf{y}^2)^{3/2}} \right) + \mathbf{x1 y2} \left(\frac{6 (1 - \mathbf{x}) \mathbf{y}^2 \mu}{((1 - \mathbf{x})^2 + \mathbf{y}^2)^{5/2}} - \frac{2 (1 - \mathbf{x}) \mu}{((1 - \mathbf{x})^2 + \mathbf{y}^2)^{3/2}} \right) +$$

$$\mathbf{x1 y1} \left(-\frac{6 (1 - \mathbf{x})^2 \mathbf{y} \mu}{((1 - \mathbf{x})^2 + \mathbf{y}^2)^{5/2}} + \frac{2 \mathbf{y} \mu}{((1 - \mathbf{x})^2 + \mathbf{y}^2)^{3/2}} \right) + \mathbf{x2 y2} \left(-\frac{6 \mathbf{y}^3 \mu}{((1 - \mathbf{x})^2 + \mathbf{y}^2)^{5/2}} + \frac{6 \mathbf{y} \mu}{((1 - \mathbf{x})^2 + \mathbf{y}^2)^{3/2}} \right)$$

b2 aplicada no ponto (x,y) de equilíbrio

$$\mathbf{b2} /. \left\{ \mathbf{x} \rightarrow \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2}, \mathbf{y} \rightarrow \frac{2 \mu}{1 + \mu^2} \right\}$$

$$\mathbf{x1 y1} \left(- \frac{12 \mu^2 \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} \right)^2}{(1 + \mu^2) \left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} \right)^2 \right)^{5/2}} + \frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2) \left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} \right)^2 \right)^{3/2}} \right) +$$

$$\mathbf{x2 y2} \left(- \frac{48 \mu^4}{(1 + \mu^2)^3 \left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} \right)^2 \right)^{5/2}} + \frac{12 \mu^2}{(1 + \mu^2) \left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} \right)^2 \right)^{3/2}} \right) +$$

$$\mathbf{x2 y1} \left(\frac{24 \mu^3 \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} \right)}{(1 + \mu^2)^2 \left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} \right)^2 \right)^{5/2}} - \frac{2 \mu \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} \right)}{\left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} \right)^2 \right)^{3/2}} \right) +$$

$$\mathbf{x1 y2} \left(\frac{24 \mu^3 \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} \right)}{(1 + \mu^2)^2 \left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} \right)^2 \right)^{5/2}} - \frac{2 \mu \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} \right)}{\left(\frac{4 \mu^2}{(1 + \mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2 \mu^2}{1 + \mu^2} \right)^2 \right)^{3/2}} \right)$$

Definindo a função B((x1,x2),(y1,y2))

$B[\{x1_ , x2_ \}, \{y1_ , y2_ \}] :=$

$$\left\{ \begin{aligned} & x2 y1 \left(- \frac{12 \mu^2 \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2}{(1+\mu^2) \left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{5/2}} + \frac{4 \mu^2}{(1+\mu^2) \left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) + \\ & x1 y2 \left(- \frac{12 \mu^2 \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2}{(1+\mu^2) \left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{5/2}} + \frac{4 \mu^2}{(1+\mu^2) \left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) + \\ & x1 y1 \left(\frac{6 \mu \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^3}{\left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{5/2}} - \frac{6 \mu \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)}{\left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) + \\ & x2 y2 \left(\frac{24 \mu^3 \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)}{(1+\mu^2)^2 \left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{5/2}} - \frac{2 \mu \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)}{\left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{3/2}} \right), \\ & x1 y1 \left(- \frac{12 \mu^2 \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2}{(1+\mu^2) \left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{5/2}} + \frac{4 \mu^2}{(1+\mu^2) \left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) + \\ & x2 y2 \left(- \frac{48 \mu^4}{(1+\mu^2)^3 \left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{5/2}} + \frac{12 \mu^2}{(1+\mu^2) \left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) + \\ & x2 y1 \left(\frac{24 \mu^3 \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)}{(1+\mu^2)^2 \left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{5/2}} - \frac{2 \mu \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)}{\left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) + \\ & x1 y2 \left(\frac{24 \mu^3 \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)}{(1+\mu^2)^2 \left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{5/2}} - \frac{2 \mu \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)}{\left(\frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} + \left(1 - \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) \end{aligned} \right\}$$

Função C

Campo de vetores

$$\lambda = 2 \mu$$

$$2 \mu$$

$$F1 = -y + \mu * x + \lambda * \frac{1 - x}{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}$$

$$F2 = x + \mu * y - \lambda * \frac{y}{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}$$

$$-y + x \mu + \frac{2 (1 - x) \mu}{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}$$

$$x + y \mu - \frac{2 y \mu}{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}$$

Derivadas para encontrar C((x1,x2),(y1,y2),(z1,z2))

Calculando C1

$$C1 = D[D[D[F1, x], x], x] x1 y1 z1 + D[D[D[F1, x], x], y] x2 y1 z1 +$$

$$D[D[D[F1, x], y], x] x1 y2 z1 + D[D[D[F1, y], x], x] x1 y1 z2 +$$

$$D[D[D[F1, y], y], x] x1 y2 z2 + D[D[D[F1, x], y], y] x2 y2 z1 +$$

$$D[D[D[F1, y], x], y] x2 y1 z2 + D[D[D[F1, y], y], y] x2 y2 z2$$

$$x2 y1 z1 \left(-\frac{30 (1 - x)^3 y \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{7/2}} + \frac{18 (1 - x) y \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} \right) +$$

$$x1 y2 z1 \left(-\frac{30 (1 - x)^3 y \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{7/2}} + \frac{18 (1 - x) y \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} \right) +$$

$$x1 y1 z2 \left(-\frac{30 (1 - x)^3 y \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{7/2}} + \frac{18 (1 - x) y \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} \right) +$$

$$x2 y2 z2 \left(-\frac{30 (1 - x) y^3 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{7/2}} + \frac{18 (1 - x) y \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} \right) +$$

$$x2 y2 z1 \left(\frac{30 (1 - x)^2 y^2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{7/2}} - \frac{6 (1 - x)^2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{6 y^2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{3/2}} \right) +$$

$$x2 y1 z2 \left(\frac{30 (1 - x)^2 y^2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{7/2}} - \frac{6 (1 - x)^2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{6 y^2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{3/2}} \right) +$$

$$x1 y2 z2 \left(\frac{30 (1 - x)^2 y^2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{7/2}} - \frac{6 (1 - x)^2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{6 y^2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{3/2}} \right) +$$

$$x1 y1 z1 \left(\frac{30 (1 - x)^4 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{7/2}} - \frac{36 (1 - x)^2 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{6 \mu}{((1 - x)^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

Aplicando C1 no ponto de equilíbrio

Simplify $\left[C1 /. \left\{ x \rightarrow \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}, y \rightarrow \frac{2\mu}{1+\mu^2} \right\} \right]$

$$-\frac{1}{(1+\mu^2)^4} 4\mu \left(x_2 \left(-6 y_1 z_1 \mu \left(-1 + 9\mu^2 - 9\mu^4 + \mu^6 \right) + 3 y_2 z_2 \mu \left(-3 + 17\mu^2 - 17\mu^4 + 3\mu^6 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. y_2 z_1 \left(1 - 26\mu^2 + 66\mu^4 - 26\mu^6 + \mu^8 \right) + y_1 z_2 \left(1 - 26\mu^2 + 66\mu^4 - 26\mu^6 + \mu^8 \right) \right) + \right. \\ \left. x_1 \left(6 y_1 \mu \left(4 z_1 \mu \left(1 - 3\mu^2 + \mu^4 \right) - z_2 \left(-1 + 9\mu^2 - 9\mu^4 + \mu^6 \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. y_2 \left(-6 z_1 \mu \left(-1 + 9\mu^2 - 9\mu^4 + \mu^6 \right) + z_2 \left(1 - 26\mu^2 + 66\mu^4 - 26\mu^6 + \mu^8 \right) \right) \right) \right)$$

Calculando C2

$C2 = D[D[D[F2, x], x], x] x_1 y_1 z_1 + D[D[D[F2, x], x], y] x_2 y_1 z_1 +$

$D[D[D[F2, x], y], x] x_1 y_2 z_1 + D[D[D[F2, y], x], x] x_1 y_1 z_2 +$

$D[D[D[F2, y], y], x] x_1 y_2 z_2 + D[D[D[F2, x], y], y] x_2 y_2 z_1 +$

$D[D[D[F2, y], x], y] x_2 y_1 z_2 + D[D[D[F2, y], y], y] x_2 y_2 z_2$

$$x_1 y_1 z_1 \left(-\frac{30(1-x)^3 y \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{7/2}} + \frac{18(1-x) y \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{5/2}} \right) + \\ x_2 y_2 z_1 \left(-\frac{30(1-x) y^3 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{7/2}} + \frac{18(1-x) y \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{5/2}} \right) + \\ x_2 y_1 z_2 \left(-\frac{30(1-x) y^3 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{7/2}} + \frac{18(1-x) y \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{5/2}} \right) + \\ x_1 y_2 z_2 \left(-\frac{30(1-x) y^3 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{7/2}} + \frac{18(1-x) y \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{5/2}} \right) + \\ x_2 y_1 z_1 \left(\frac{30(1-x)^2 y^2 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{7/2}} - \frac{6(1-x)^2 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{6y^2 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{2\mu}{((1-x)^2 + y^2)^{3/2}} \right) + \\ x_1 y_2 z_1 \left(\frac{30(1-x)^2 y^2 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{7/2}} - \frac{6(1-x)^2 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{6y^2 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{2\mu}{((1-x)^2 + y^2)^{3/2}} \right) + \\ x_1 y_1 z_2 \left(\frac{30(1-x)^2 y^2 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{7/2}} - \frac{6(1-x)^2 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{6y^2 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{2\mu}{((1-x)^2 + y^2)^{3/2}} \right) + \\ x_2 y_2 z_2 \left(\frac{30y^4 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{7/2}} - \frac{36y^2 \mu}{((1-x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{6\mu}{((1-x)^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

Aplicando C2 no ponto de equilíbrio

Simplify [C2 /. {x → $\frac{2\mu^2}{1+\mu^2}$, y → $\frac{2\mu}{1+\mu^2}$ }]
[simplifica

$$-\frac{1}{(1+\mu^2)^4} 2\mu \left(2x1 \left(-6y1z1\mu \left(-1+9\mu^2-9\mu^4+\mu^6 \right) + 3y2z2\mu \left(-3+17\mu^2-17\mu^4+3\mu^6 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. y2z1 \left(1-26\mu^2+66\mu^4-26\mu^6+\mu^8 \right) + y1z2 \left(1-26\mu^2+66\mu^4-26\mu^6+\mu^8 \right) \right) + \right. \\ \left. x2 \left(-3y2 \left(-1+\mu^2 \right) \left(-2z1\mu \left(3-14\mu^2+3\mu^4 \right) + z2 \left(-1+19\mu^2-19\mu^4+\mu^6 \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. 2y1 \left(3z2\mu \left(-3+17\mu^2-17\mu^4+3\mu^6 \right) + z1 \left(1-26\mu^2+66\mu^4-26\mu^6+\mu^8 \right) \right) \right) \right)$$

Definindo a função $c((x1,x2),(y1,y2),(z1,z2)) = (C1,C2)$

$c(\{x1_, x2_ \}, \{y1_, y2_ \}, \{z1_, z2_ \}) :=$

$$\left\{ -\frac{1}{(1+\mu^2)^4} 4\mu \left(x2 \left(-6y1z1\mu \left(-1+9\mu^2-9\mu^4+\mu^6 \right) + 3y2z2\mu \left(-3+17\mu^2-17\mu^4+3\mu^6 \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. y2z1 \left(1-26\mu^2+66\mu^4-26\mu^6+\mu^8 \right) + y1z2 \left(1-26\mu^2+66\mu^4-26\mu^6+\mu^8 \right) \right) + \right. \\ \left. x1 \left(6y1\mu \left(4z1\mu \left(1-3\mu^2+\mu^4 \right) - z2 \left(-1+9\mu^2-9\mu^4+\mu^6 \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. y2 \left(-6z1\mu \left(-1+9\mu^2-9\mu^4+\mu^6 \right) + z2 \left(1-26\mu^2+66\mu^4-26\mu^6+\mu^8 \right) \right) \right) \right), \\ -\frac{1}{(1+\mu^2)^4} 2\mu \left(2x1 \left(-6y1z1\mu \left(-1+9\mu^2-9\mu^4+\mu^6 \right) + 3y2z2\mu \left(-3+17\mu^2-17\mu^4+3\mu^6 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. y2z1 \left(1-26\mu^2+66\mu^4-26\mu^6+\mu^8 \right) + y1z2 \left(1-26\mu^2+66\mu^4-26\mu^6+\mu^8 \right) \right) + \right. \\ \left. x2 \left(-3y2 \left(-1+\mu^2 \right) \left(-2z1\mu \left(3-14\mu^2+3\mu^4 \right) + z2 \left(-1+19\mu^2-19\mu^4+\mu^6 \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. 2y1 \left(3z2\mu \left(-3+17\mu^2-17\mu^4+3\mu^6 \right) + z1 \left(1-26\mu^2+66\mu^4-26\mu^6+\mu^8 \right) \right) \right) \right) \right\}$$

Matriz Inversa de J

J⁻¹ = Inverse[J]

[matriz inversa

$$\left\{ \left\{ -\frac{\mu \left(1-6\mu^2+\mu^4 \right)}{\left(1+\mu^2 \right)^2 \left(\frac{1}{\left(1+\mu^2 \right)^4} + \frac{3\mu^2}{\left(1+\mu^2 \right)^4} + \frac{2\mu^4}{\left(1+\mu^2 \right)^4} - \frac{2\mu^6}{\left(1+\mu^2 \right)^4} - \frac{3\mu^8}{\left(1+\mu^2 \right)^4} - \frac{\mu^{10}}{\left(1+\mu^2 \right)^4} \right)}, \right. \\ \left. -\frac{-1-6\mu^2+3\mu^4}{\left(1+\mu^2 \right)^2 \left(\frac{1}{\left(1+\mu^2 \right)^4} + \frac{3\mu^2}{\left(1+\mu^2 \right)^4} + \frac{2\mu^4}{\left(1+\mu^2 \right)^4} - \frac{2\mu^6}{\left(1+\mu^2 \right)^4} - \frac{3\mu^8}{\left(1+\mu^2 \right)^4} - \frac{\mu^{10}}{\left(1+\mu^2 \right)^4} \right)}, \right. \\ \left. -\frac{1-2\mu^2+5\mu^4}{\left(1+\mu^2 \right)^2 \left(\frac{1}{\left(1+\mu^2 \right)^4} + \frac{3\mu^2}{\left(1+\mu^2 \right)^4} + \frac{2\mu^4}{\left(1+\mu^2 \right)^4} - \frac{2\mu^6}{\left(1+\mu^2 \right)^4} - \frac{3\mu^8}{\left(1+\mu^2 \right)^4} - \frac{\mu^{10}}{\left(1+\mu^2 \right)^4} \right)}, \right. \\ \left. \frac{\mu-6\mu^3+\mu^5}{\left(1+\mu^2 \right)^2 \left(\frac{1}{\left(1+\mu^2 \right)^4} + \frac{3\mu^2}{\left(1+\mu^2 \right)^4} + \frac{2\mu^4}{\left(1+\mu^2 \right)^4} - \frac{2\mu^6}{\left(1+\mu^2 \right)^4} - \frac{3\mu^8}{\left(1+\mu^2 \right)^4} - \frac{\mu^{10}}{\left(1+\mu^2 \right)^4} \right)} \right\}$$

Produtos internos do primeiro coeficiente de Lyapunov (pag 199 Kuznetsov)

Calculando c aplicada nos vetores q,

$$c3 = \text{Simplify}[c[\{q0, q1\}, \{q0, q1\}, \{q0c, q1c\}]]$$

$$\left\{ \frac{4 \mu (1 + \mu^2)^2 \left(1 + 7 \mu^2 - 4 \mu^4 + 2 \mu^6 + i \mu \sqrt{1 - \mu^2} + 9 i \mu^3 \sqrt{1 - \mu^2} - 2 i \mu^5 \sqrt{1 - \mu^2} \right)}{(1 + 6 \mu^2 - 3 \mu^4)^2}, \right. \\ \left. - \frac{2 \mu (1 + \mu^2)^2 \left(-3 \mu - 24 \mu^3 + 3 \mu^5 + i \sqrt{1 - \mu^2} + 6 i \mu^2 \sqrt{1 - \mu^2} - 15 i \mu^4 \sqrt{1 - \mu^2} \right)}{(1 + 6 \mu^2 - 3 \mu^4)^2} \right\}$$

Primeira componente de c(q,q,qc)

$$c30 = - \frac{4 \mu (1 + \mu^2)^2 \left(1 + 7 \mu^2 - 4 \mu^4 + 2 \mu^6 + i \mu \sqrt{1 - \mu^2} + 9 i \mu^3 \sqrt{1 - \mu^2} - 2 i \mu^5 \sqrt{1 - \mu^2} \right)}{(1 + 6 \mu^2 - 3 \mu^4)^2};$$

Segunda componente de c(q,q,qc)

$$c31 = - \frac{2 \mu (1 + \mu^2)^2 \left(-3 \mu - 24 \mu^3 + 3 \mu^5 + i \sqrt{1 - \mu^2} + 6 i \mu^2 \sqrt{1 - \mu^2} - 15 i \mu^4 \sqrt{1 - \mu^2} \right)}{(1 + 6 \mu^2 - 3 \mu^4)^2};$$

Produto interno [p , c(q,q,qc)]

$$v1 = \text{Simplify}[p0c c30 + p1c c31]$$

$$\frac{\mu (1 + \mu^2)^2 \left(-1 + \mu^2 + 3 i \mu \sqrt{1 - \mu^2} \right)}{1 + 5 \mu^2 - 9 \mu^4 + 3 \mu^6}$$

Calculando B(q,qc) = b3

$$b3 = \text{Simplify}[B[\{q0, q1\}, \{q0c, q1c\}]]$$

$$\left\{ \frac{2 (1 + \mu^2) (\mu + 3 \mu^3)}{-1 - 6 \mu^2 + 3 \mu^4}, - \frac{4 (\mu^4 + \mu^6)}{-1 - 6 \mu^2 + 3 \mu^4} \right\}$$

Calculando a inversa de J aplicada em b3

$$b4 = \text{Simplify}[JI.b3]$$

$$\left\{ \frac{2 \mu^2 - 4 \mu^4 - 6 \mu^6}{1 + 5 \mu^2 - 9 \mu^4 + 3 \mu^6}, \frac{2 (\mu + \mu^5 + 2 \mu^7)}{1 + 5 \mu^2 - 9 \mu^4 + 3 \mu^6} \right\}$$

Calculando B(q,b4) = b5

$$b5 = \text{Simplify}\left[\mathbf{B}[\{q0, q1\}, \left\{\frac{2\mu^2 - 4\mu^4 - 6\mu^6}{1 + 5\mu^2 - 9\mu^4 + 3\mu^6}, \frac{2(\mu + \mu^5 + 2\mu^7)}{1 + 5\mu^2 - 9\mu^4 + 3\mu^6}\right\}\right]]$$

$$\left\{-\left(\left(4(\mu + \mu^3)^2\left(-5\mu + 18\mu^3 - 7\mu^5 + 2\mu^7 + i\sqrt{1-\mu^2} - 10i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} + 15i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} - 2i\mu^6\sqrt{1-\mu^2}\right)\right)\right) / \left((-1 + \mu^2)(1 + 6\mu^2 - 3\mu^4)^2\right)\right\}, \\ -\left(\left(4(\mu + \mu^3)^2\left(-1 + 11\mu^2 - 17\mu^4 + 3\mu^6 - 5i\mu\sqrt{1-\mu^2} + 14i\mu^3\sqrt{1-\mu^2} - 9i\mu^5\sqrt{1-\mu^2}\right)\right)\right) / \left((-1 + \mu^2)(1 + 6\mu^2 - 3\mu^4)^2\right)\right\}$$

Primeira componente de b5

b51 =

$$-\left(\left(4(\mu + \mu^3)^2\left(-5\mu + 18\mu^3 - 7\mu^5 + 2\mu^7 + i\sqrt{1-\mu^2} - 10i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} + 15i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} - 2i\mu^6\sqrt{1-\mu^2}\right)\right)\right) / \left((-1 + \mu^2)(1 + 6\mu^2 - 3\mu^4)^2\right);$$

Segunda componente de b5

b52 =

$$-\left(\left(4(\mu + \mu^3)^2\left(-1 + 11\mu^2 - 17\mu^4 + 3\mu^6 - 5i\mu\sqrt{1-\mu^2} + 14i\mu^3\sqrt{1-\mu^2} - 9i\mu^5\sqrt{1-\mu^2}\right)\right)\right) / \left((-1 + \mu^2)(1 + 6\mu^2 - 3\mu^4)^2\right);$$

Calculando o produto interno [p , b5]

v2 = Simplify[p0c b51 + p1c b52]

$$\left(2\mu^3(1 + \mu^2)^2\left(-1 - \mu^2 + \mu^4 + \mu^6 + i\mu\sqrt{1-\mu^2} - 6i\mu^3\sqrt{1-\mu^2} + i\mu^5\sqrt{1-\mu^2}\right)\right. \\ \left.(-1 - 5\mu^4 + 2\mu^6 - 2i\mu\sqrt{1-\mu^2} + 4i\mu^3\sqrt{1-\mu^2} - 2i\mu^5\sqrt{1-\mu^2})\right) / \\ \left((1 - 2\mu^2 + 5\mu^4)(1 + 5\mu^2 - 9\mu^4 + 3\mu^6)^2\right)$$

Calculando B(q,q) = b6

b6 = Simplify[B[{q0, q1}, {q0, q1}]]

$$\left\{\frac{1}{(1 + 6\mu^2 - 3\mu^4)^2} 2\mu(1 + \mu^2)\left(1 - 33\mu^2 + 29\mu^4 - 15\mu^6 + 2\mu^8 + 10i\mu\sqrt{1-\mu^2} - 38i\mu^3\sqrt{1-\mu^2} + 14i\mu^5\sqrt{1-\mu^2} - 2i\mu^7\sqrt{1-\mu^2}\right), \frac{1}{(1 + 6\mu^2 - 3\mu^4)^2} 4\mu(1 + \mu^2)\right. \\ \left.(-6\mu + 19\mu^3 - 12\mu^5 + 3\mu^7 + i\sqrt{1-\mu^2} - 13i\mu^2\sqrt{1-\mu^2} + 15i\mu^4\sqrt{1-\mu^2} - 3i\mu^6\sqrt{1-\mu^2})\right\}$$

Calculando a matriz (2.i.s1*Id[2] - J) = m

m = Simplify[2 I s1 IdentityMatrix[2] - J]

$$\left\{ \left\{ 2 i \sqrt{1-\mu^2} - \frac{\mu - 6 \mu^3 + \mu^5}{(1+\mu^2)^2}, \frac{1 + 6 \mu^2 - 3 \mu^4}{(1+\mu^2)^2} \right\}, \left\{ \frac{-1 + 2 \mu^2 - 5 \mu^4}{(1+\mu^2)^2}, 2 i \sqrt{1-\mu^2} + \frac{\mu - 6 \mu^3 + \mu^5}{(1+\mu^2)^2} \right\} \right\}$$

Calculando a inversa da matriz m

mi = Simplify[Inverse[m]]

$$\left\{ \left\{ \frac{\mu - 6 \mu^3 + \mu^5 + 2 i \sqrt{1-\mu^2} + 4 i \mu^2 \sqrt{1-\mu^2} + 2 i \mu^4 \sqrt{1-\mu^2}}{3 (-1 + \mu^2) (1 + \mu^2)^2}, \frac{-1 - 6 \mu^2 + 3 \mu^4}{3 (-1 + \mu^2) (1 + \mu^2)^2} \right\}, \left\{ \frac{1 - 2 \mu^2 + 5 \mu^4}{3 (-1 + \mu^2) (1 + \mu^2)^2}, -\frac{\mu - 6 \mu^3 + \mu^5 - 2 i \sqrt{1-\mu^2} - 4 i \mu^2 \sqrt{1-\mu^2} - 2 i \mu^4 \sqrt{1-\mu^2}}{3 (-1 + \mu^2) (1 + \mu^2)^2} \right\} \right\}$$

Multiplicando mi pelo vetor B(q,q) = b6

Mi = Simplify[mi.b6]

$$\left\{ - \left(\left(2 \mu^2 (1 + \mu^2) \left(7 - 65 \mu^2 + 67 \mu^4 - 19 \mu^6 + 2 \mu^8 + 38 i \mu \sqrt{1-\mu^2} - 38 i \mu^3 \sqrt{1-\mu^2} + 18 i \mu^5 \sqrt{1-\mu^2} - 2 i \mu^7 \sqrt{1-\mu^2} \right) \right) / \left(3 (-1 + \mu^2) (1 + 6 \mu^2 - 3 \mu^4)^2 \right) \right), \right. \\ \left. - \left(\left(2 \mu (1 + \mu^2) \left(3 - 31 \mu^2 + 73 \mu^4 - 45 \mu^6 + 8 \mu^8 + 16 i \mu \sqrt{1-\mu^2} - 40 i \mu^3 \sqrt{1-\mu^2} + 32 i \mu^5 \sqrt{1-\mu^2} - 8 i \mu^7 \sqrt{1-\mu^2} \right) \right) / \left(3 (-1 + \mu^2) (1 + 6 \mu^2 - 3 \mu^4)^2 \right) \right) \right\}$$

Calculando B(qc, Mi) = b7

b7 = Simplify[B[{q0c, q1c},

$$\left\{ - \left(\left(2 \mu^2 (1 + \mu^2) \left(7 - 65 \mu^2 + 67 \mu^4 - 19 \mu^6 + 2 \mu^8 + 38 i \mu \sqrt{1-\mu^2} - 38 i \mu^3 \sqrt{1-\mu^2} + 18 i \mu^5 \sqrt{1-\mu^2} - 2 i \mu^7 \sqrt{1-\mu^2} \right) \right) / \left(3 (-1 + \mu^2) (1 + 6 \mu^2 - 3 \mu^4)^2 \right) \right), \right. \\ \left. - \left(\left(2 \mu (1 + \mu^2) \left(3 - 31 \mu^2 + 73 \mu^4 - 45 \mu^6 + 8 \mu^8 + 16 i \mu \sqrt{1-\mu^2} - 40 i \mu^3 \sqrt{1-\mu^2} + 32 i \mu^5 \sqrt{1-\mu^2} - 8 i \mu^7 \sqrt{1-\mu^2} \right) \right) / \left(3 (-1 + \mu^2) (1 + 6 \mu^2 - 3 \mu^4)^2 \right) \right) \right\} \\ \left\{ \frac{4 (\mu + \mu^3)^2 \left(-\mu - 12 \mu^3 + 5 \mu^5 + 3 i \sqrt{1-\mu^2} + 20 i \mu^2 \sqrt{1-\mu^2} - 11 i \mu^4 \sqrt{1-\mu^2} \right)}{3 (-1 + \mu^2) (1 + 6 \mu^2 - 3 \mu^4)^2}, \right. \\ \left. - \frac{4 (\mu + \mu^3)^2 \left(-3 + \mu^2 - 7 \mu^4 + 5 \mu^6 - 5 i \mu \sqrt{1-\mu^2} + 18 i \mu^3 \sqrt{1-\mu^2} - 5 i \mu^5 \sqrt{1-\mu^2} \right)}{3 (-1 + \mu^2) (1 + 6 \mu^2 - 3 \mu^4)^2} \right\}$$

Primeira componente de b7

$$b71 = \frac{4 (\mu + \mu^3)^2 \left(-\mu - 12 \mu^3 + 5 \mu^5 + 3 \sqrt{1 - \mu^2} + 20 \mu^2 \sqrt{1 - \mu^2} - 11 \mu^4 \sqrt{1 - \mu^2} \right)}{3 (-1 + \mu^2) (1 + 6 \mu^2 - 3 \mu^4)^2};$$

Segunda componente de b7

$$b72 = - \frac{4 (\mu + \mu^3)^2 \left(-3 + \mu^2 - 7 \mu^4 + 5 \mu^6 - 5 \mu \sqrt{1 - \mu^2} + 18 \mu^3 \sqrt{1 - \mu^2} - 5 \mu^5 \sqrt{1 - \mu^2} \right)}{3 (-1 + \mu^2) (1 + 6 \mu^2 - 3 \mu^4)^2};$$

Calculando o produto interno [p , b7]

v3 = Simplify[p0c b71 + p1c b72]

[simplifica](#)

$$\left(2 (\mu + \mu^3)^2 \left(-1 - \mu^2 + \mu^4 + \mu^6 + \mu \sqrt{1 - \mu^2} - 6 \mu^3 \sqrt{1 - \mu^2} + \mu^5 \sqrt{1 - \mu^2} \right) \right. \\ \left. \left(-9 \mu + 40 \mu^3 - 45 \mu^5 + 10 \mu^7 + 6 \mu \sqrt{1 - \mu^2} + 2 \mu^2 \sqrt{1 - \mu^2} + 10 \mu^4 \sqrt{1 - \mu^2} - \right. \right. \\ \left. \left. 10 \mu^6 \sqrt{1 - \mu^2} \right) \right) / \left(3 (1 - 2 \mu^2 + 5 \mu^4) (1 + 5 \mu^2 - 9 \mu^4 + 3 \mu^6)^2 \right)$$

Resultado (5.62) da pag 199 da referência "Kuznetsov".

v4 = FullSimplify[v1 - 2 v2 + v3]

[simplifica completamente](#)

$$\frac{\mu (1 + \mu^2)^2 \left(3 - 3 \mu^4 + 3 \mu \sqrt{1 - \mu^2} + 7 \mu^3 \sqrt{1 - \mu^2} \right)}{3 (-1 + \mu^2)^2 (-1 - 6 \mu^2 + 3 \mu^4)}$$

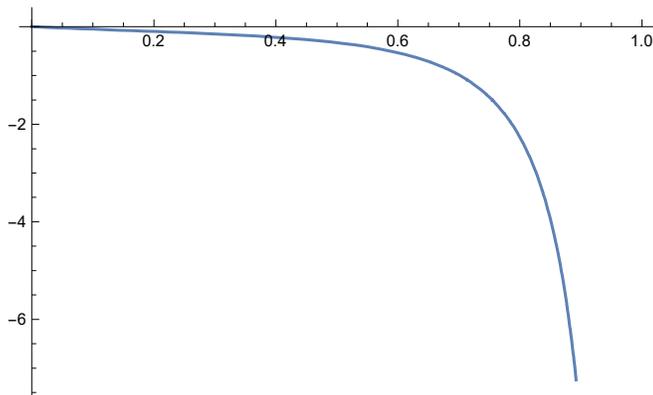
Sinal do Primeiro Coeficiente de Lyapunov

$$LY = \frac{\mu (1 + \mu^2)^2 (1 - \mu^4)}{2 s1 (-1 + \mu^2)^2 (-1 - 6 \mu^2 + 3 \mu^4)}$$

$$\frac{\mu (1 + \mu^2)^2 (1 - \mu^4)}{2 \sqrt{1 - \mu^2} (-1 + \mu^2)^2 (-1 - 6 \mu^2 + 3 \mu^4)}$$

Plot[LY, {μ, 0, 1}]

[gráfico](#)



É Negativo para todo $0 < \mu < 1$.

Apêndice V

Componentes do Campo em (2.2).

$$F1 = -y + \frac{(1-x)\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + x\mu$$

$$F2 = x - \frac{y\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + y\mu$$

$$-y + \frac{(1-x)\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + x\mu$$

$$x - \frac{y\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + y\mu$$

Matriz Jacobiana DF

`a11 = FullSimplify[D[F1, x]];`
[simplifica compl· [derivada]

`a12 = FullSimplify[D[F1, y]];`
[simplifica compl· [derivada]

`a21 = FullSimplify[D[F2, x]];`
[simplifica compl· [derivada]

`a22 = FullSimplify[D[F2, y]];`
[simplifica compl· [derivada]

`DF = Simplify[{{a11, a12}, {a21, a22}}, μ > 0]`
[simplifica]

$$\left\{ \left\{ -\frac{y^2 \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{3/2}} + \mu, -1 + \frac{(-1+x)y\lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{3/2}} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ 1 + \frac{(-1+x)y\lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{3/2}}, -\frac{(-1+x)^2 \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{3/2}} + \mu \right\} \right\}$$

Polinômio Característico da Matriz Jacobiana

`P[s_, {x_, y_}] := Det[DF - s IdentityMatrix[2]]`
[determina· [matriz identidade]

Coefficientes do Polinômio Característico.

`cc[i_, {x_, y_}] := Coefficient[P[s, {x, y}], s, i]`
[coeficiente]

Coefficiente do termo independente.

`c = FullSimplify[cc[0, {x, y}], t < 0]`
[simplifica completamente]

$$1 - \frac{\lambda \mu}{\sqrt{(-1+x)^2 + y^2}} + \mu^2$$

Coeficiente do termo linear.

b = FullSimplify[cc[1, {x, y}], t < 0]

[simplifica completamente]

$$\frac{\lambda}{\sqrt{(-1+x)^2 + y^2}} - 2\mu$$

Coeficiente do termo quadrático.

a = FullSimplify[cc[2, {x, y}], t < 0]

[simplifica completamente]

1

Discriminante ($\delta = b^2 - 4ac$)

t1 = b^2 - 4ac

$$\left(\frac{\lambda}{\sqrt{(-1+x)^2 + y^2}} - 2\mu \right)^2 - 4 \left(1 - \frac{\lambda\mu}{\sqrt{(-1+x)^2 + y^2}} + \mu^2 \right)$$

Já sabemos pelo Teorema 2.1 que o ponto de equilíbrio P1 é da forma

$$P1 = \left\{ \frac{\lambda \left(\lambda - \mu \sqrt{(1+\mu^2)^2 - \lambda^2} \right)}{(1+\mu^2)^2}, \frac{\lambda \left(\mu \lambda + \sqrt{(1+\mu^2)^2 - \lambda^2} \right)}{(1+\mu^2)^2} \right\};$$

Discriminante para os valores de x e y de equilíbrio

Simplify[t1 /. {x -> $\frac{\lambda \left(\lambda - \mu \sqrt{(1+\mu^2)^2 - \lambda^2} \right)}{(1+\mu^2)^2}$, y -> $\frac{\lambda \left(\mu \lambda + \sqrt{(1+\mu^2)^2 - \lambda^2} \right)}{(1+\mu^2)^2}$ }, $\mu > 0$]

[simplifica]

$$\left(-4(1+\mu^2)^2 + \lambda^2(5 - 2\mu^2 + \mu^4) - 8\lambda\mu \sqrt{-\lambda^2 + (1+\mu^2)^2} \right) /$$

$$\left(\lambda^2(-1+\mu^2) + (1+\mu^2)^2 + 2\lambda\mu \sqrt{-\lambda^2 + (1+\mu^2)^2} \right)$$

Temos então que como o denominador da expressão acima é sempre positivo, o ponto de equilíbrio P1 é um foco quando o numerador é negativo e um nó quando o numerador é positivo.

Parâmetro de Mudança de Foco para Nó

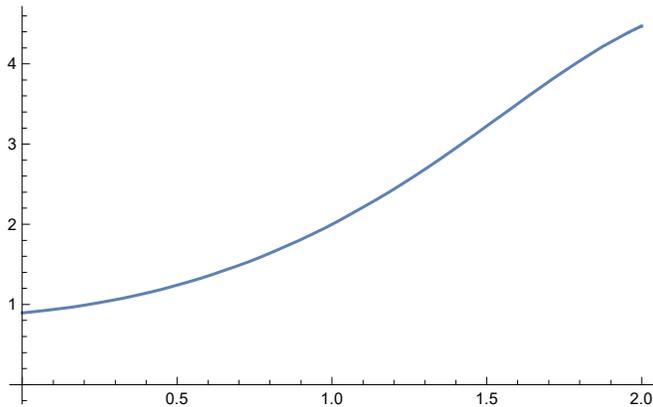
$$\text{Solve}\left[-4(1+\mu^2)^2 + \lambda^2(5-2\mu^2+\mu^4) - 8\lambda\mu\sqrt{-\lambda^2+(1+\mu^2)^2} == 0, \lambda, \text{Reals}\right]$$

[resolva] [números]

$$\left\{ \left\{ \lambda \rightarrow 2\sqrt{\frac{1+\mu^2}{5-4\mu+\mu^2}} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow -2\sqrt{\frac{1+\mu^2}{5+4\mu+\mu^2}} \right\} \right\}$$

$$\text{Plot}\left[2\sqrt{\frac{1+\mu^2}{5-4\mu+\mu^2}}, \{\mu, 0, 2\}, \text{AxesOrigin} \rightarrow \{0, 0\}\right]$$

[gráfico] [origem dos eixos]



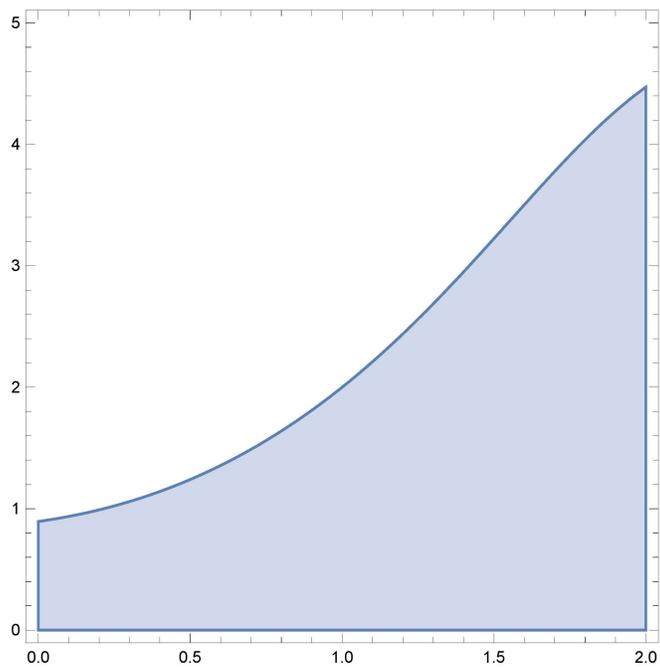
Região em que o Discriminante é negativo, isto é, o Ponto de Equilíbrio P1 é um Foco

$$Dn = -4(1+\mu^2)^2 + \lambda^2(5-2\mu^2+\mu^4) - 8\lambda\mu\sqrt{-\lambda^2+(1+\mu^2)^2}$$

$$-4(1+\mu^2)^2 + \lambda^2(5-2\mu^2+\mu^4) - 8\lambda\mu\sqrt{-\lambda^2+(1+\mu^2)^2}$$

RegionPlot[Dn < 0, {μ, 0, 2}, {λ, 0, 5}]

gráfico de uma região



Portanto, para $2\sqrt{\frac{1+\mu^2}{5-4\mu+\mu^2}} < \lambda < 1+\mu^2$, o Ponto de Equilíbrio P1 é um Nó, uma vez que o sistema (2.3) não tem equilíbrios para $\lambda > 1+\mu^2$.

Apêndice VI

Componentes do campo de vetores do sistema (3.2)

$$F1 = -y + \frac{(1-x)\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{x(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$F2 = x - \frac{y\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

Parâmetros no plano (μ, λ) correspondentes aos equilíbrios no plano (x, y)

`FullSimplify[Solve[{F1, F2} == 0, {μ, λ}]]`

`[simplifica compl· [resolve`

$$\left\{ \left\{ \mu \rightarrow -\frac{((-1+x)x+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{y(-1+x^2+y^2)}, \lambda \rightarrow \frac{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}(x^2+y^2)}{y} \right\} \right\}$$

$$\mu_e = -\frac{((-1+x)x+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{y(-1+x^2+y^2)};$$

$$\lambda_e = \frac{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}(x^2+y^2)}{y};$$

Matriz Jacobiana DF

`a11 = FullSimplify[D[F1, x]];`

`[simplifica compl· [derivada`

`a12 = FullSimplify[D[F1, y]];`

`[simplifica compl· [derivada`

`a21 = FullSimplify[D[F2, x]];`

`[simplifica compl· [derivada`

`a22 = FullSimplify[D[F2, y]];`

`[simplifica compl· [derivada`

`DF = MatrixForm[{{a11, a12}, {a21, a22}}]`

`[forma de matriz`

$$\left(\begin{array}{cc} -\frac{y^2\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(2x^4+(-1+3x^2)y^2+y^4)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -1 + \frac{(-1+x)y\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{xy(1+x^2+y^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ 1 + \frac{(-1+x)y\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{xy(1+x^2+y^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\frac{\lambda}{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}} - \frac{2y^4\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{\mu-x^2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2 \left(\frac{\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1+2x^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) \end{array} \right)$$

Traço e Determinante de DF

`tr = FullSimplify[a11 + a22]`

`[simplifica completamente`

$$-\frac{\lambda}{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}} + \frac{(1-3x^2-3y^2)\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

det = FullSimplify[a11 a22 - a21 a12]

[simplifica completamente]

$$\begin{aligned}
 & - \left(-1 + \frac{(-1+x)y\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{xy(1+x^2+y^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) \left(1 + \frac{(-1+x)y\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{xy(1+x^2+y^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) + \\
 & \left(-\frac{y^2\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(2x^4+(-1+3x^2)y^2+y^4)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) \\
 & \left(-\frac{\lambda}{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}} - \frac{2y^4\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{\mu-x^2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2 \left(\frac{\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1+2x^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Traço e Determinante de DF com os parâmetros de equilíbrio aplicados

T1 = FullSimplify[tr /. {μ → μe, λ → λe}]

[simplifica completamente]

D1 = FullSimplify[det /. {μ → μe, λ → λe}]

[simplifica completamente]

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-1+x)^2 x (1+2x) + x(-3+4x)y^2 + 2y^4}{y(-1+x^2+y^2)} \\
 & \frac{(-1+x)(y^2 - (x^2+y^2)(y^2 + 2((-1+x)x + y^2)^2))}{y^2((-1+x)^2+y^2)(-1+x^2+y^2)}
 \end{aligned}$$

Numeradores de T1 e D1, descartando o termo (-1+x), em D1, que não se anula na região de interesse do plano (x,y)

T = Expand[Numerator[T1]]

[expand· [numerador]

$$x - 3x^3 + 2x^4 - 3xy^2 + 4x^2y^2 + 2y^4$$

Dm = Expand[y^2 - (x^2 + y^2)(y^2 + 2((-1+x)x + y^2)^2)]

[expande fatores]

$$-2x^4 + 4x^5 - 2x^6 + y^2 - 3x^2y^2 + 8x^3y^2 - 6x^4y^2 - y^4 + 4xy^4 - 6x^2y^4 - 2y^6$$

Candidatos à ponto de Bogdanov-Takens (Traço e Determinante iguais a zero).

Simplify[Solve[{T == 0, Dm == 0}, Reals]]

[simplifica [resolve [números r

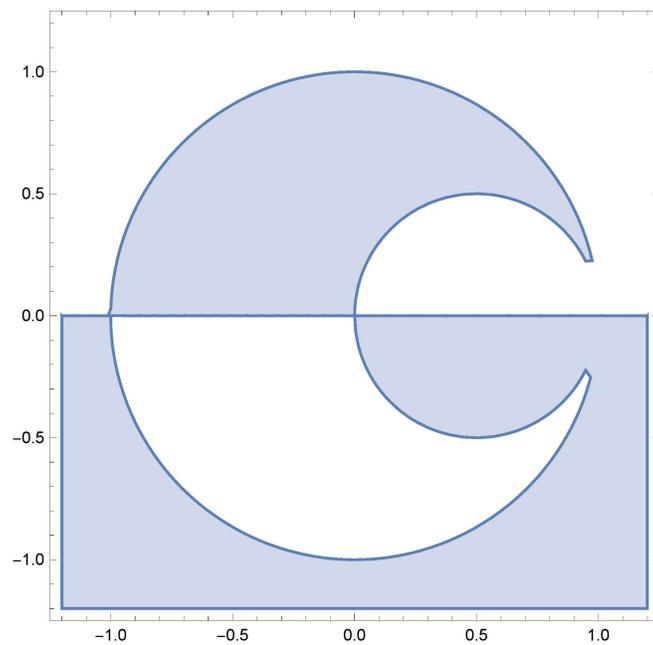
$$\begin{aligned}
 & \left\{ \{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\}, \{x \rightarrow 1, y \rightarrow 0\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{4}(3 - \sqrt{17}), y \rightarrow -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17})} \right\}, \right. \\
 & \left. \left\{ x \rightarrow \frac{1}{4}(3 + \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17})} \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

Único ponto candidato que nos interessa

$$BT = \left\{ \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})} \right\};$$

Pontos do plano (x,y) para os quais a aplicação ϕ tem a primeira coordenada maior ou igual que zero

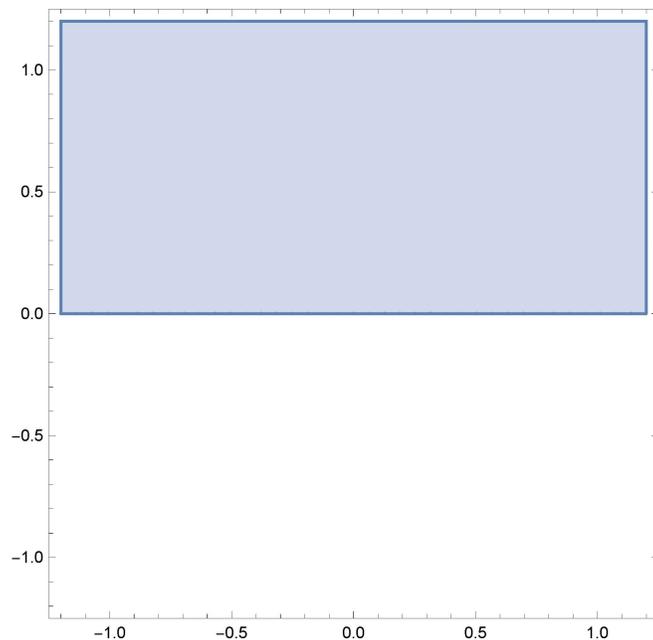
R1 = RegionPlot[$\mu e \geq 0$, {x, -1.2, 1.2}, {y, -1.2, 1.2}]
 gráfico de uma região



Pontos do plano (x,y) para os quais a aplicação ϕ tem a segunda coordenada maior ou igual que zero

```
R2 = RegionPlot[ $\lambda e \geq 0$ , {x, -1.2, 1.2}, {y, -1.2, 1.2}]
```

[\[gráfico de uma região\]](#)



```
U = RegionPlot[{ $\lambda e \geq 0$  &&  $\mu e \geq 0$ }, {x, -1.2, 1.2}, {y, -1.2, 1.2}];
```

[\[gráfico de uma região\]](#)

```
d = ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]},
```

[\[gráfico paramétrico\]](#) [\[cosseno\]](#) [\[seno\]](#)

```
{t, 0,  $\pi$ }, PlotStyle -> {Darker, Thickness -> 0.0085}];
```

[\[estilo do gráfico\]](#) [\[mais e...\]](#) [\[espessura\]](#)

```
d2 = ParametricPlot[{1/2 + Cos[t]/2, Sin[t]/2}, {t, 0,  $\pi$ },
```

[\[gráfico paramétrico\]](#) [\[cosseno\]](#) [\[seno\]](#)

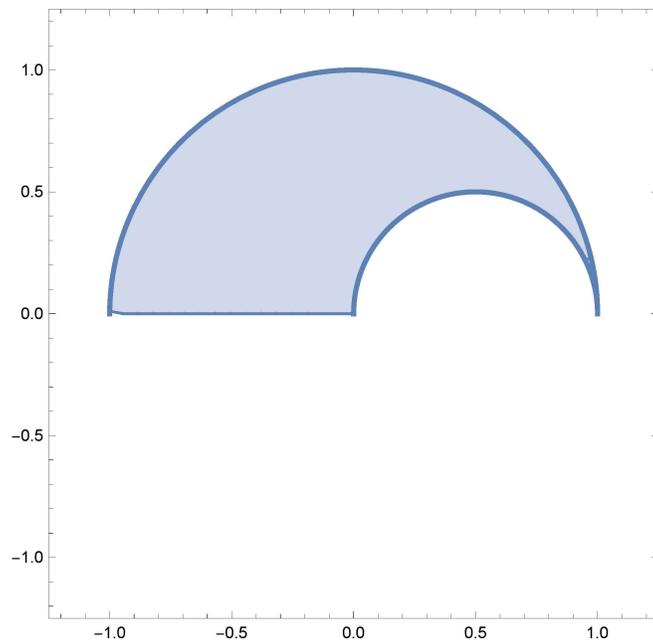
```
PlotStyle -> {Darker, Thickness -> 0.0085}];
```

[\[mais e...\]](#) [\[espessura\]](#)

Pontos no plano (x,y) tais que a imagem de ϕ pertence ao quadrante $\mu > 0$ e $\lambda > 0$.

```
U1 = Show[U, d, d2]
```

[mostra](#)



Ponto de equilíbrio candidato à Bogdanov-Takens no plano (x,y)

```
PBT = Graphics[{{PointSize[0.02], Red, Point[{{1/4 (3 - sqrt(17)), 1/2 sqrt(1/2 (-3 + sqrt(17))}}]}}];
```

[representa... [tamanho do ponto [ve... [ponto

Parâmetros μ e λ do ponto de equilíbrio BT

```
FullSimplify[ $\mu e /. \{x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}\}$ ]
```

[simplifica completamente

$$\sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}$$

```
FullSimplify[ $\lambda e /. \{x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}\}$ ]
```

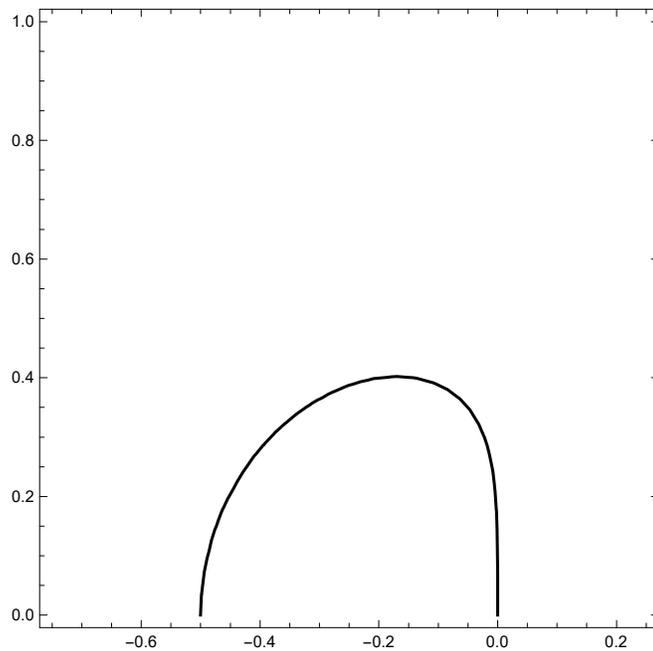
[simplifica completamente

$$\frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17})$$

```
MLBT = Graphics[{{PointSize[0.012], Red, Point[{{ $\sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}$ ,  $\frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17})$ }}]}}];
```

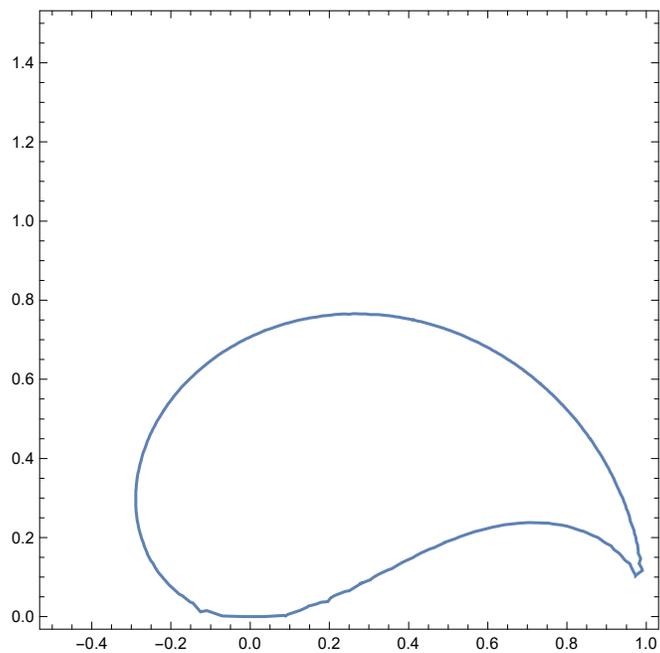
Calculando os candidatos a serem pontos de equilíbrio do tipo HOPF

```
H = ContourPlot[T == 0, {x, -0.75, 0.25},  
  gráfico de contornos  
  {y, 0, 1}, ContourStyle -> {Black, Thickness[0.005]}  
  estilo de contorno preto espessura
```



S = ContourPlot[Dm == 0, {x, -0.5, 1}, {y, 0, 1.5}]

gráfico de contornos

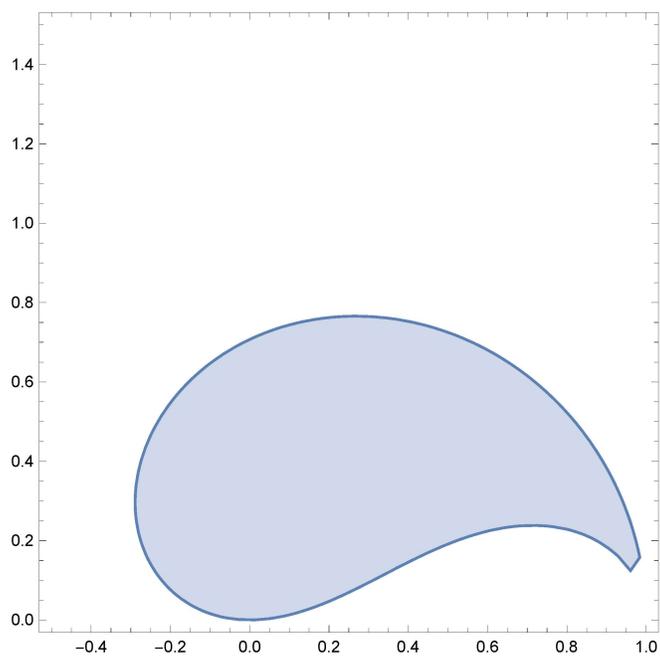


Como o arco inferior na figura acima está fora da região U, ele não nos interessa.

Região onde o determinante de DF é positivo

R = RegionPlot[Dm > 0, {x, -0.5, 1}, {y, 0, 1.5}]

gráfico de uma região

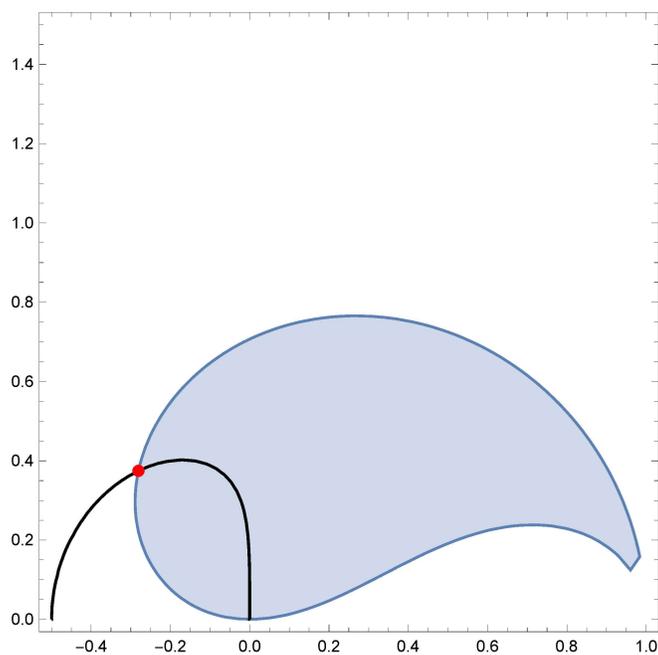


Região com $Dm > 0$, $T = 0$ e BT. Portanto, os candidatos à serem

pontos de Hopf estão sobre a curva preta e dentro da região azul

Show[R, H, PBT]

[mostra



Resolvendo $T = 0$ para fazermos a parametrização da curva dos candidatos a pontos de Hopf

Solve[T == 0, {y}]

[resolve

$$\left\{ \left\{ y \rightarrow -\frac{1}{2} \sqrt{3x - 4x^2 - \sqrt{x} \sqrt{-8 + 9x}} \right\}, \left\{ y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3x - 4x^2 - \sqrt{x} \sqrt{-8 + 9x}} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ y \rightarrow -\frac{1}{2} \sqrt{3x - 4x^2 + \sqrt{x} \sqrt{-8 + 9x}} \right\}, \left\{ y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3x - 4x^2 + \sqrt{x} \sqrt{-8 + 9x}} \right\} \right\}$$

Gráfico de uma das soluções com x variando da abscissa do ponto de Bogdanov-Takens até zero

```
H1 = Plot[ $\frac{1}{2} \sqrt{3x - 4x^2 + \sqrt{-8x + 9x^2}}$ ,
  gráfico
  {x,  $\frac{1}{4} (3 - \sqrt{17})$ , 0}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> Black]
  origem dos eixos      estilo do gráf... preto
```

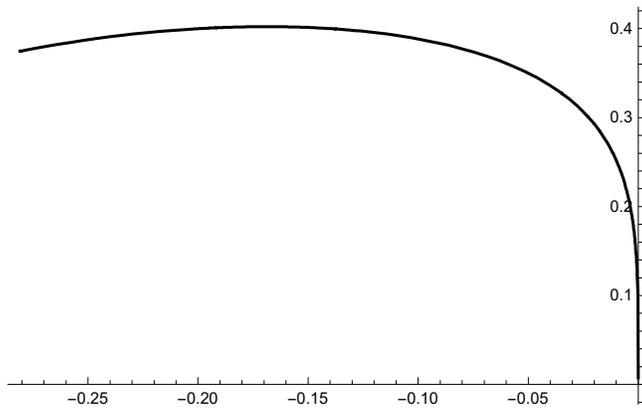
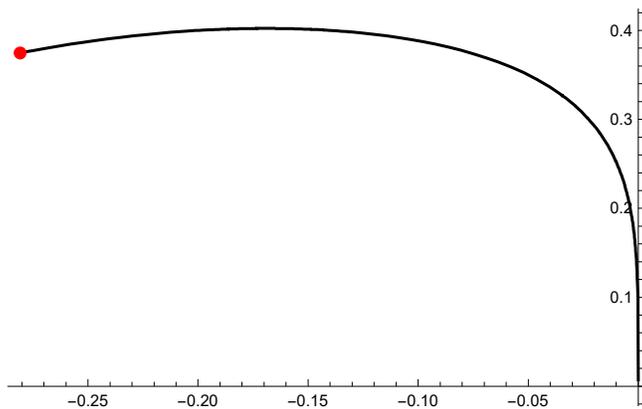


Gráfico acima junto com o ponto candidato a ponto de Bogdanov-Takens

```
Show[H1, PBT]
  mostra
```

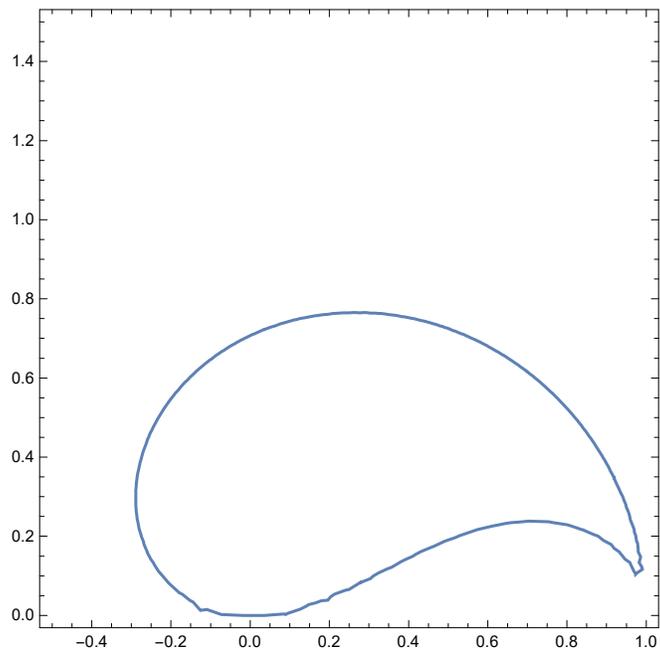


Início do estudo dos candidatos a ponto de Sela-Nó

Região onde o $Dm > 0$

```
S = ContourPlot[Dm == 0, {x, -0.5, 1}, {y, 0, 1.5}]
```

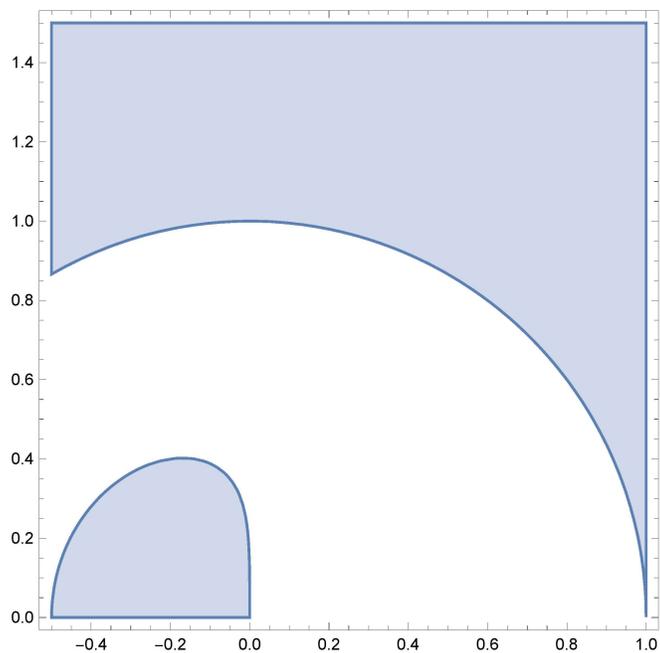
gráfico de contornos



Região onde $T1 > 0$

```
t1 = RegionPlot[T1 > 0, {x, -0.5, 1}, {y, 0, 1.5}]
```

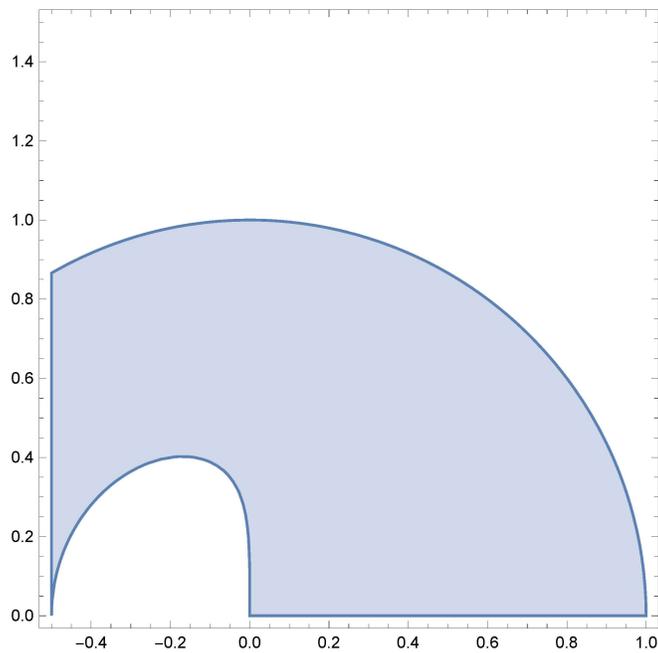
gráfico de uma região



Região onde $T1 < 0$

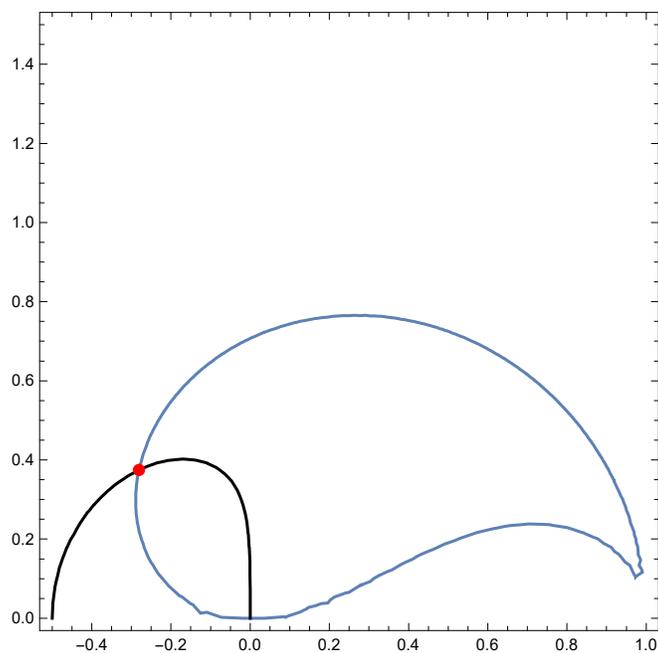
`t2 = RegionPlot[T1 < 0, {x, -0.5, 1}, {y, 0, 1.5}]`

[\[gráfico de uma região\]](#)



`Show[S, H, PBT]`

[\[mostra\]](#)



Parametrização para as curvas dos candidatos a pontos de Sela-Nó.

Resolvendo $Dm = 0$ para y em função de x para fazer a parametrização

do arco onde Tr é positivo.

$$\text{D2} = \text{Solve} \left[\left(y^2 - (x^2 + y^2) \left(y^2 + 2 \left((-1 + x) x + y^2 \right)^2 \right) \right) = 0, y \right]$$

$$\left\{ \left\{ y \rightarrow -\sqrt{\left(-\frac{1}{6} + \frac{2x}{3} - x^2 + 7 \right) / \left(6 \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) - (4x) / \left(3 \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) + (5x^2) / \left(3 \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) + \frac{1}{6} \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right\} \right\},$$

$$\left\{ y \rightarrow \sqrt{\left(-\frac{1}{6} + \frac{2x}{3} - x^2 + 7 \right) / \left(6 \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) - (4x) / \left(3 \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) + (5x^2) / \left(3 \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) + \frac{1}{6} \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right\} \right\},$$

$$\left\{ y \rightarrow -\sqrt{\left(-\frac{1}{6} + \frac{2x}{3} - x^2 - 7 \right) / \left(12 \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) + (7i) / \left(4\sqrt{3} \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) + (2x) / \left(3 \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) - (2ix) / \left(\sqrt{3} \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) - (5x^2) / \left(6 \left(-10 + 48x - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. \left(\sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) + (2x) / \left(3 \left(-10 + 48x - \right. \right. \\
& \left. \left. 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) + \\
& (2ix) / \left(\sqrt{3} \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) - (5x^2) / \left(6 \left(-10 + 48x - \right. \right. \\
& \left. \left. 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) - \\
& (5ix^2) / \left(2\sqrt{3} \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) - \\
& \frac{1}{12} \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} + \\
& \frac{1}{4\sqrt{3}} \\
& i \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \Bigg\}, \\
\{y \rightarrow \sqrt{\left(-\frac{1}{6} + \frac{2x}{3} - x^2 - 7 / \left(12 \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) - (7i) / \left(4\sqrt{3} \right. \right. \\
& \left. \left. \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) \right) + \\
& (2x) / \left(3 \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) + (2ix) / \left(\sqrt{3} \right. \\
& \left. \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) - \\
& (5x^2) / \left(6 \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) - (5ix^2) / \left(2\sqrt{3} \right. \\
& \left. \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \right) - \\
& \frac{1}{12} \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} + \\
& \frac{1}{4\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$$i \left(-10 + 48x - 93x^2 + 28x^3 + 3\sqrt{3} \sqrt{-9 + 8x + 50x^2 - 208x^3 + 271x^4 - 104x^5 - 8x^6} \right)^{1/3} \Bigg\} \Bigg\}$$

Tomando a solução de interesse acima.

`y1 = FullSimplify[D2[[2]]]`

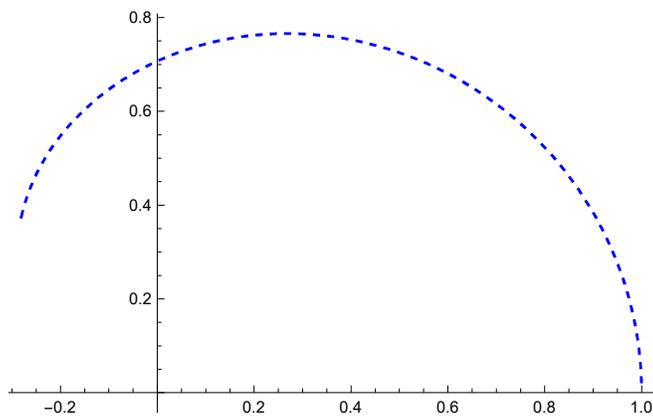
[simplifica completamente]

$$\left\{ y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sqrt{\left(-1 + 7 \sqrt{-10 + x(48 + x(-93 + 28x))} + 3\sqrt{3} \sqrt{-(-1+x)^2(9+x(10+x(-39+8x(15+x))))} \right)^{1/3} + \left(-10 + x(48 + x(-93 + 28x)) + 3\sqrt{3} \sqrt{-(-1+x)^2(9+x(10+x(-39+8x(15+x))))} \right)^{1/3} + 2x \left(2 - 3x - 4 \sqrt{-10 + x(48 + x(-93 + 28x)) + 3\sqrt{3} \sqrt{-(-1+x)^2(9+x(10+x(-39+8x(15+x))))} \right)^{1/3} + (5x) \sqrt{-10 + x(48 + x(-93 + 28x)) + 3\sqrt{3} \sqrt{-(-1+x)^2(9+x(10+x(-39+8x(15+x))))} \right)^{1/3}} \right) \right\}$$

`c1 = Plot[y /. y1, {x, $\frac{1}{4}(3 - \sqrt{17})$, 1}, PlotStyle -> {Blue, Dashed}]`

[gráfico]

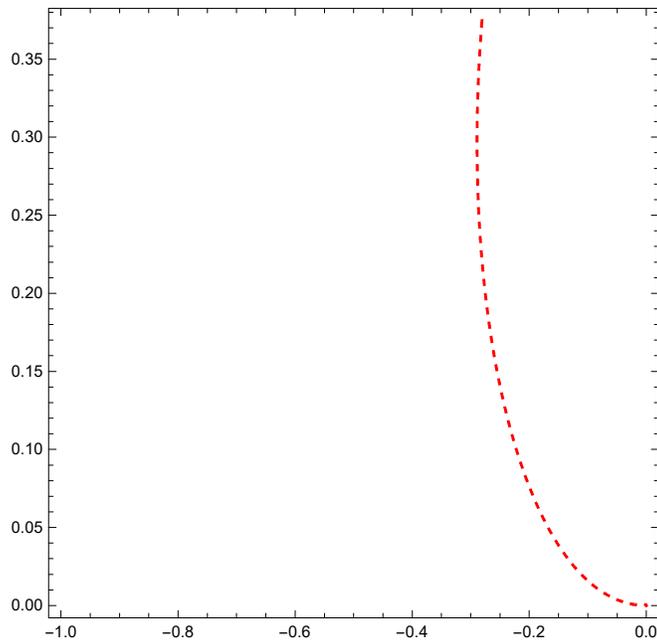
[estilo do gráfico azul tracejado]



Pontanto, ficamos apenas com a solução y1

$$G2 = \text{ContourPlot} \left[\frac{(-1+x)(y^2 - (x^2 + y^2)(y^2 + 2((-1+x)x + y^2)^2))}{y^2((-1+x)^2 + y^2)(-1+x^2 + y^2)} = 0, \{x, -1, 0\}, \right.$$

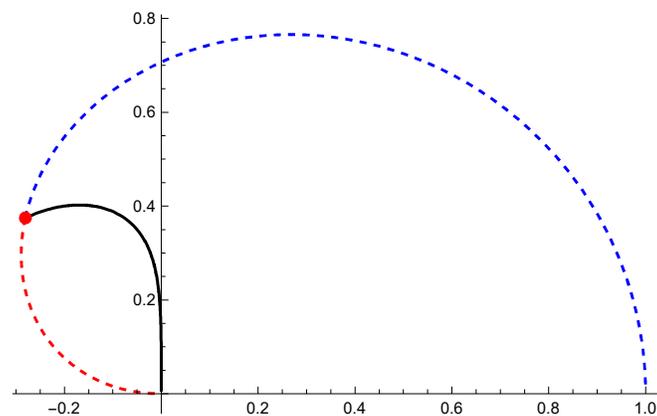
$$\left. \{y, 0, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17})}\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 150, \text{ContourStyle} \rightarrow \{\text{Red, Dashed}\} \right]$$



Curvas de candidatos à pontos de Hopf (Preta), Sela-Nó (Azul e Vermelha) e ponto candidato à equilíbrio do tipo Bogdanov-Takens.

Show[c1, G2, H1, PBT]

[mostra



Parametrização da curva de candidatos a pontos de bifurcação do tipo

Hopf no plano μ, λ .

$$\text{FullSimplify}\left[\{\mu e, \lambda e\} /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}\right\}\right]$$

[simplifica completamente]

$$\left\{ -\frac{2t}{\sqrt{3t + \sqrt{t(-8+9t)}} \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}}, \frac{\sqrt{4-5t + \sqrt{t(-8+9t)}} (3t + \sqrt{t(-8+9t)})}{4 \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}} \right\}$$

Parametrização das curvas de parâmetros tais que o sistema (3.2) admite pontos dos tipo Sela-Nó.

$$\text{msn2} = \text{FullSimplify}[\mu e /. y1];$$

[simplifica completamente]

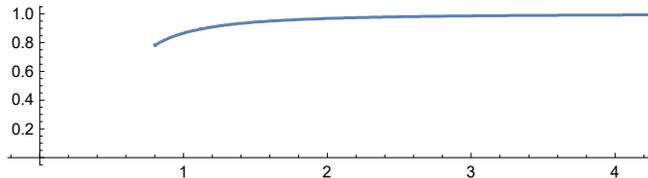
$$\text{lsn2} = \text{FullSimplify}[\lambda e /. y1];$$

[simplifica completamente]

Curva dos parâmetros tais que os equilíbrio serão candidatos a pontos de Sela-Nó quando $\text{Tr} > 0$. Esta curva foi parametrizada com $x = x$ e $y = y1(x)$

$$\text{SN2} = \text{ParametricPlot}\left[\{\text{msn2}, \text{lsn2}\}, \left\{x, \frac{1}{4}(3 - \sqrt{17})\right\}, 1\right], \text{AxesOrigin} \rightarrow \{0, 0\}$$

[gráfico paramétrico] [origem dos eixos]



Parametrizando a curva tracejada vermelha com x em função de y .

$$\text{D3} = \text{Solve}\left[-2x^4 + 4x^5 - 2x^6 + y^2 - 3x^2y^2 + 8x^3y^2 - 6x^4y^2 - y^4 + 4xy^4 - 6x^2y^4 - 2y^6 = 0, x\right]$$

[resolve]

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \text{Root}\left[-y^2 + y^4 + 2y^6 - 4y^4 \#1 + (3y^2 + 6y^4) \#1^2 - 8y^2 \#1^3 + (2 + 6y^2) \#1^4 - 4 \#1^5 + 2 \#1^6 \&, 1\right]\right\}, \left\{ x \rightarrow \text{Root}\left[-y^2 + y^4 + 2y^6 - 4y^4 \#1 + (3y^2 + 6y^4) \#1^2 - 8y^2 \#1^3 + (2 + 6y^2) \#1^4 - 4 \#1^5 + 2 \#1^6 \&, 2\right]\right\}, \left\{ x \rightarrow \text{Root}\left[-y^2 + y^4 + 2y^6 - 4y^4 \#1 + (3y^2 + 6y^4) \#1^2 - 8y^2 \#1^3 + (2 + 6y^2) \#1^4 - 4 \#1^5 + 2 \#1^6 \&, 3\right]\right\}, \left\{ x \rightarrow \text{Root}\left[-y^2 + y^4 + 2y^6 - 4y^4 \#1 + (3y^2 + 6y^4) \#1^2 - 8y^2 \#1^3 + (2 + 6y^2) \#1^4 - 4 \#1^5 + 2 \#1^6 \&, 4\right]\right\}, \left\{ x \rightarrow \text{Root}\left[-y^2 + y^4 + 2y^6 - 4y^4 \#1 + (3y^2 + 6y^4) \#1^2 - 8y^2 \#1^3 + (2 + 6y^2) \#1^4 - 4 \#1^5 + 2 \#1^6 \&, 5\right]\right\}, \left\{ x \rightarrow \text{Root}\left[-y^2 + y^4 + 2y^6 - 4y^4 \#1 + (3y^2 + 6y^4) \#1^2 - 8y^2 \#1^3 + (2 + 6y^2) \#1^4 - 4 \#1^5 + 2 \#1^6 \&, 6\right]\right\} \right\}$$

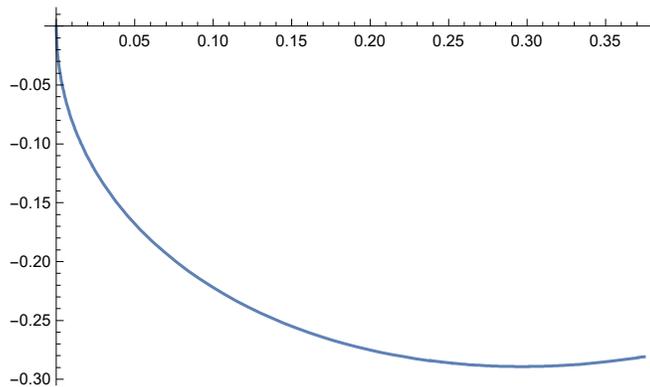
```
x1 = D3[ [1]]
```

```
{x → Root[-y2 + y4 + 2 y6 - 4 y4 #1 + (3 y2 + 6 y4) #12 - 8 y2 #13 + (2 + 6 y2) #14 - 4 #15 + 2 #16 &, 1]}
```

Curva de candidatos a ponto de Sela-Nó G2 com x em função de y

```
d1 = Plot[Root[-y2 + y4 + 2 y6 - 4 y4 #1 + (3 y2 + 6 y4) #12 - 8 y2 #13 + (2 + 6 y2) #14 - 4 #15 + 2 #16 &,
  [gráf... [raiz
```

```
1], {y, 0,  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}$ }, AxesOrigin → {0, 0}
  [origem dos eixos
```



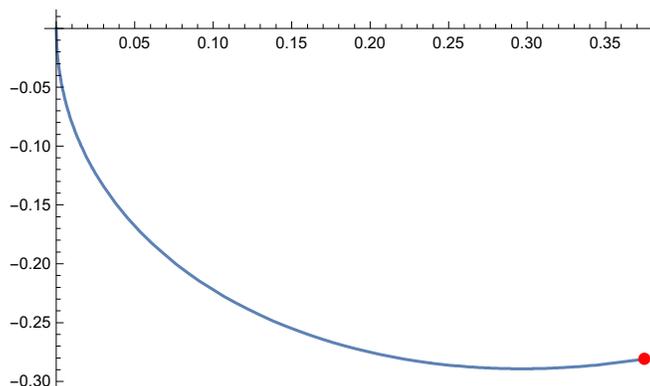
Ponto de Bogdanov-Takens com as coordenadas invertidas (apenas para verificação)

```
bti = Graphics[{{PointSize[0.02], Red, Point[ $\left\{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17})\right\}$ ]}]}];
  [representa... [tamanho do ponto [ve... [ponto
```

Gráfico da curva de Sela-Nó acima junto com o ponto de Bogdanov-Takens no plano (y,x)

```
Show[d1, bti]
```

```
[mostra
```



```
msn1 = FullSimplify[ $\mu e /. x1$ ];
```

[simplifica completamente]

```
lsn1 = FullSimplify[ $\lambda e /. x1$ ];
```

[simplifica completamente]

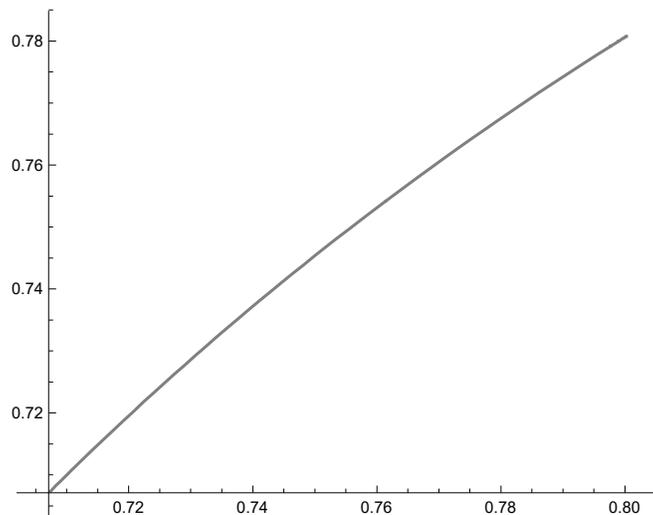
```
SN1 = ParametricPlot[{msn1, lsn1},
```

[gráfico paramétrico]

```
{y, 0.001,  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}$ }, AxesOrigin -> { $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ }, PlotStyle -> Gray]
```

[origem dos eixos]

[estilo do gráfico] [cinza]



```
diag = ParametricPlot[{x, x}, {x, 0, 0.8}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> Orange];
```

[gráfico paramétrico]

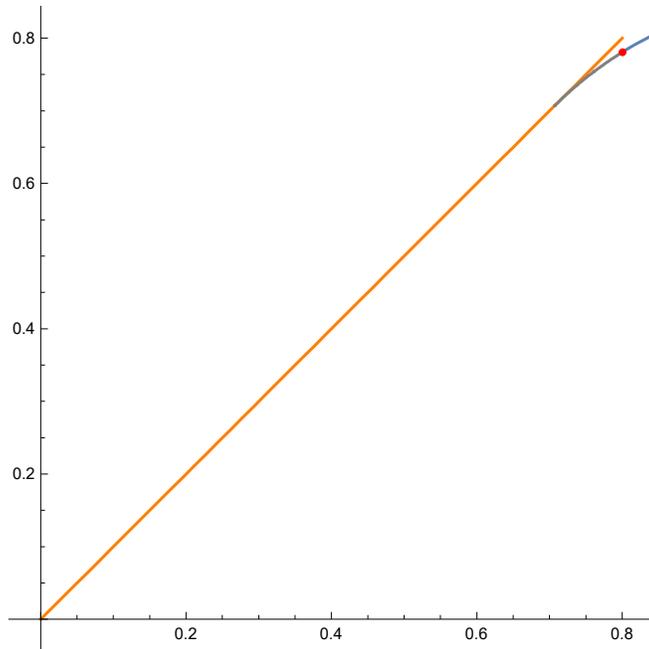
[origem dos eixos]

[estilo do gráfico] [laranja]

Gráfico contendo partes das duas curvas de bifurcação de Sela-Nó, a curva $\lambda = \mu$ e o ponto de bifurcação de Bogdanov-Takens.

Show[diag, SN1, SN2, MLBT]

[mostra



Apêndice VII

Componentes do Campo em (3.2). Modificação com Anulamento no Bordo do Disco D.

$$F1[x_, y_] := -y + \frac{(1-x)\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{x(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$F2[x_, y_] := x - \frac{y\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Encontrando μ e λ para os quais o sistema (3.2) admite pontos de equilíbrio.

```
FullSimplify[Solve[{F1[x, y], F2[x, y]} == 0, {μ, λ}]]
|simplifica compl· |_resolve
```

$$\left\{ \left\{ \mu \rightarrow -\frac{((-1+x)x+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{y(-1+x^2+y^2)}, \lambda \rightarrow \frac{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}(x^2+y^2)}{y} \right\} \right\}$$

$$\mu e = -\frac{((-1+x)x+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{y(-1+x^2+y^2)};$$

$$\lambda e = \frac{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}(x^2+y^2)}{y};$$

Matriz Jacobiana DF.

```
a11 = FullSimplify[D[F1[x, y], x]];
|simplifica compl· |_derivada
```

```
a12 = FullSimplify[D[F1[x, y], y]];
|simplifica compl· |_derivada
```

```
a21 = FullSimplify[D[F2[x, y], x]];
|simplifica compl· |_derivada
```

```
a22 = FullSimplify[D[F2[x, y], y]];
|simplifica compl· |_derivada
```

```
DF = MatrixForm[{{a11, a12}, {a21, a22}}]
|forma de matriz
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{y^2\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(2x^4+(-1+3x^2)y^2+y^4)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -1 + \frac{(-1+x)y\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{xy(1+x^2+y^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ 1 + \frac{(-1+x)y\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{xy(1+x^2+y^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\frac{\lambda}{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}} - \frac{2y^4\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{\mu-x^2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2 \left(\frac{\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1+2x^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) \end{pmatrix}$$

Traço e Determinante de DF.

tr = FullSimplify[a11 + a22]

[simplifica completamente]

det = FullSimplify[a11 a22 - a21 a12]

[simplifica completamente]

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\lambda}{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}} + \frac{(1-3x^2-3y^2)\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
 & -\left(-1 + \frac{(-1+x)y\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{xy(1+x^2+y^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \left(1 + \frac{(-1+x)y\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{xy(1+x^2+y^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) + \\
 & \left(-\frac{y^2\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(2x^4+(-1+3x^2)y^2+y^4)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \\
 & \left(-\frac{\lambda}{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}} - \frac{2y^4\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{\mu-x^2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2 \left(\frac{\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1+2x^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Aplicando os valores de μe e λe em tr e det.

T1 = FullSimplify[tr /. { $\mu \rightarrow \mu e$, $\lambda \rightarrow \lambda e$ }]

[simplifica completamente]

D1 = FullSimplify[det /. { $\mu \rightarrow \mu e$, $\lambda \rightarrow \lambda e$ }]

[simplifica completamente]

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-1+x)^2 x (1+2x) + x(-3+4x)y^2 + 2y^4}{y(-1+x^2+y^2)} \\
 & \frac{(-1+x)(y^2 - (x^2+y^2)(y^2 + 2((-1+x)x + y^2)^2))}{y^2((-1+x)^2+y^2)(-1+x^2+y^2)}
 \end{aligned}$$

Expandindo os numeradores do Traço e Determinante. Obs.: Podemos retirar da expansão do Determinante o termo $(-1+x)$ que não se anula em nossa região de interesse.

T = Expand[Numerator[T1]]

[expand· [numerador]

$$x - 3x^3 + 2x^4 - 3xy^2 + 4x^2y^2 + 2y^4$$

Dm = Expand[y^2 - (x^2 + y^2)(y^2 + 2((-1+x)x + y^2)^2)]

[expande Tatores

$$-2x^4 + 4x^5 - 2x^6 + y^2 - 3x^2y^2 + 8x^3y^2 - 6x^4y^2 - y^4 + 4xy^4 - 6x^2y^4 - 2y^6$$

Igualando Traço e Determinante a zero para obtermos dois auto valores nulos.

`Simplify[Solve[{T == 0, Dm == 0}, Reals]]`
[simplifica [resolve [números re

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \right\}, \left\{ x \rightarrow 1, y \rightarrow 0 \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})} \right\} \right\}$$

O único ponto de interesse é P1 pois devemos ter $y > 0$.

$$P1 = \left\{ \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})} \right\} \\ \left\{ \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})} \right\}$$

Parâmetros μ e λ do ponto candidato à Bogdanov-Takens.

$$BT = \left\{ \text{FullSimplify} \left[\mu e /. \left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})} \right\} \right], \right. \\ \left. \text{FullSimplify} \left[\lambda e /. \left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})} \right\} \right] \right\} \\ \left\{ \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}) \right\}$$

Condição i) do Teorema 2.2, Matriz Jacobiana não nula.

`DF = ToRadicals[FullSimplify[DF /.`
[converte em [simplifica completamente

$$\left\{ \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}), x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})} \right\} \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{8}{\sqrt{109 + 27\sqrt{17}}} & \frac{1}{4} (-13 + 3\sqrt{17}) \\ \frac{1}{4} (-5 + 3\sqrt{17}) & -\sqrt{-\frac{109}{8} + \frac{27\sqrt{17}}{8}} \end{array} \right)$$

$$DF = \left\{ \left\{ \frac{8}{\sqrt{109 + 27\sqrt{17}}}, \frac{1}{4}(-13 + 3\sqrt{17}) \right\}, \left\{ \frac{1}{4}(-5 + 3\sqrt{17}), -\sqrt{-\frac{109}{8} + \frac{27\sqrt{17}}{8}} \right\} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \frac{8}{\sqrt{109 + 27\sqrt{17}}}, \frac{1}{4}(-13 + 3\sqrt{17}) \right\}, \left\{ \frac{1}{4}(-5 + 3\sqrt{17}), -\sqrt{-\frac{109}{8} + \frac{27\sqrt{17}}{8}} \right\} \right\}$$

Matriz Transposta de DF.

DT = Transpose [DF]

transposição

$$\left\{ \left\{ \frac{8}{\sqrt{109 + 27\sqrt{17}}}, \frac{1}{4}(-5 + 3\sqrt{17}) \right\}, \left\{ \frac{1}{4}(-13 + 3\sqrt{17}), -\sqrt{-\frac{109}{8} + \frac{27\sqrt{17}}{8}} \right\} \right\}$$

Obtendo os auto vetores q0, q1, p1 e p0.

q0 = Solve [DF. {xq0, yq0} == {0, 0}]

resolve

$$\left\{ \left\{ yq0 \rightarrow -\frac{32 xq0}{(-13 + 3\sqrt{17})\sqrt{109 + 27\sqrt{17}}} \right\} \right\}$$

$$q0 = \left\{ xq0, -\frac{32 xq0}{(-13 + 3\sqrt{17})\sqrt{109 + 27\sqrt{17}}} \right\}$$

$$\left\{ xq0, -\frac{32 xq0}{(-13 + 3\sqrt{17})\sqrt{109 + 27\sqrt{17}}} \right\}$$

$$q1 = \text{Solve} \left[DF. \{xq1, yq1\} == \left\{ xq0, -\frac{32 xq0}{(-13 + 3\sqrt{17})\sqrt{109 + 27\sqrt{17}}} \right\} \right]$$

resolve

$$\left\{ \left\{ yq1 \rightarrow \frac{4 xq0}{-13 + 3\sqrt{17}} - \frac{32 xq1}{(-13 + 3\sqrt{17})\sqrt{109 + 27\sqrt{17}}} \right\} \right\}$$

$$q1 = \left\{ xq1, \frac{4 xq0}{-13 + 3\sqrt{17}} - \frac{32 xq1}{(-13 + 3\sqrt{17})\sqrt{109 + 27\sqrt{17}}} \right\}$$

$$\left\{ xq1, \frac{4 xq0}{-13 + 3\sqrt{17}} - \frac{32 xq1}{(-13 + 3\sqrt{17})\sqrt{109 + 27\sqrt{17}}} \right\}$$

p1 = Solve [DT. {xp1, yp1} == {0, 0}]

resolve

$$\left\{ \left\{ yp1 \rightarrow -\frac{32 xp1}{(-5 + 3\sqrt{17})\sqrt{109 + 27\sqrt{17}}} \right\} \right\}$$

$$p1 = \left\{ xp1, - \frac{32 xp1}{(-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} \right\}$$

$$\left\{ xp1, - \frac{32 xp1}{(-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} \right\}$$

$$p0 = \text{Solve}_{\text{resolve}} \left[\text{DT.}\{xp0, yp0\} = \left\{ xp1, - \frac{32 xp1}{(-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} \right\} \right]$$

$$\left\{ \left\{ yp0 \rightarrow - \frac{32 xp0}{(-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} + \frac{4 xp1}{-5 + 3 \sqrt{17}} \right\} \right\}$$

$$p0 = \left\{ xp0, - \frac{32 xp0}{(-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} + \frac{4 xp1}{-5 + 3 \sqrt{17}} \right\}$$

$$\left\{ xp0, - \frac{32 xp0}{(-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} + \frac{4 xp1}{-5 + 3 \sqrt{17}} \right\}$$

q0.p0=1

$$\text{Solve}_{\text{resolve}} \left[xq0 xp0 + \left(- \frac{32 xq0}{(-13 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} \right) * \right]$$

$$\left(\frac{4 xp1}{-5 + 3 \sqrt{17}} - \frac{32 xp0}{(-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} \right) = 1, xp1$$

$$\left\{ \left\{ xp1 \rightarrow \frac{8}{\sqrt{109 + 27 \sqrt{17}} xq0} \right\} \right\}$$

$$p1 = \left\{ \frac{8}{\sqrt{109 + 27 \sqrt{17}} xq0}, - \frac{32 \frac{8}{\sqrt{109 + 27 \sqrt{17}} xq0}}{(-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} \right\}$$

$$\left\{ \frac{8}{\sqrt{109 + 27 \sqrt{17}} xq0}, - \frac{256}{(-5 + 3 \sqrt{17}) (109 + 27 \sqrt{17}) xq0} \right\}$$

q1.p1=1

$$\text{Solve}_{\text{[resolve]}} \left[xq1 \, xp1 + \left(\frac{4 \, xq0}{-13 + 3 \sqrt{17}} - \frac{32 \, xq1}{(-13 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} \right) \right] *$$

$$\left(- \frac{32 \frac{8}{\sqrt{109+27 \sqrt{17}} \, xq0}}{(-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} \right) == 1, \, xq1]$$

$$\{ \{ xq1 \rightarrow 0 \} \}$$

$$q1 = \left\{ 0, \frac{4 \, xq0}{-13 + 3 \sqrt{17}} \right\}$$

$$\left\{ 0, \frac{4 \, xq0}{-13 + 3 \sqrt{17}} \right\}$$

q1.p0=0

$$p0 = \left\{ xp0, - \frac{32 \, xp0}{(-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} + \frac{4 \frac{8}{\sqrt{109+27 \sqrt{17}} \, xq0}}{-5 + 3 \sqrt{17}} \right\}$$

$$\left\{ xp0, - \frac{32 \, xp0}{(-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} + \frac{32}{(-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}} \, xq0} \right\}$$

$$\text{Solve}_{\text{[resolve]}} \left[\left(\frac{4 \, xq0}{-13 + 3 \sqrt{17}} \right) * \left(- \frac{32 \, xp0}{(-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} + \frac{4 \frac{8}{\sqrt{109+27 \sqrt{17}} \, xq0}}{-5 + 3 \sqrt{17}} \right) \right] == 0, \, xp0]$$

$$\{ \{ xp0 \rightarrow \frac{1}{xq0} \} \}$$

$$p0 = \left\{ \frac{1}{xq0}, - \frac{32}{xq0 (-5 + 3 \sqrt{17}) \sqrt{109 + 27 \sqrt{17}}} + \frac{4 \frac{8}{\sqrt{109+27 \sqrt{17}} \, xq0}}{-5 + 3 \sqrt{17}} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{xq0}, 0 \right\}$$

Auto vetores em função da coordenada xq0.

$$q_0 = (xq_0, - \frac{32 xq_0}{(-13+3\sqrt{17})\sqrt{109+27\sqrt{17}}})$$

$$q_1 = (\theta, \frac{4 xq_0}{-13+3\sqrt{17}})$$

$$p_1 = (\frac{8}{\sqrt{109+27\sqrt{17}} xq_0}, - \frac{32 \frac{8}{\sqrt{109+27\sqrt{17}} xq_0}}{(-5+3\sqrt{17})\sqrt{109+27\sqrt{17}}})$$

$$p_0 = (\frac{1}{xq_0}, \theta)$$

Tomando $xq_0 = 1$

$$xq_0 = 1;$$

$$q_0 = \text{Simplify}[\{1, - \frac{32}{(-13+3\sqrt{17})\sqrt{109+27\sqrt{17}}}\}]$$

$$q_1 = \{0, \frac{4}{-13+3\sqrt{17}}\}$$

$$p_1 = \text{Simplify}[\{\frac{8}{\sqrt{109+27\sqrt{17}}}, - \frac{32 \frac{8}{\sqrt{109+27\sqrt{17}}}}{(-5+3\sqrt{17})\sqrt{109+27\sqrt{17}}}\}]$$

$$p_0 = \{1, \theta\}$$

$$\{1, \frac{32}{(13-3\sqrt{17})\sqrt{109+27\sqrt{17}}}\}$$

$$\{0, \frac{4}{-13+3\sqrt{17}}\}$$

$$\{\frac{8}{\sqrt{109+27\sqrt{17}}}, \frac{1}{4}(-13+3\sqrt{17})\}$$

$$\{1, \theta\}$$

Verificando todos os Produtos Internos.

FullSimplify[DF.q0]

[simplifica completamente]

$$\{0, 0\}$$

FullSimplify[DF.q1 - q0]

[simplifica completamente]

$$\{0, 0\}$$

FullSimplify[DT.p1]

[simplifica completamente]

{0, 0}

FullSimplify[DT.p0 - p1]

[simplifica completamente]

{0, 0}

Simplify[q0.p1]

[simplifica]

0

Simplify[q1.p0]

[simplifica]

0

Simplify[q0.p0]

[simplifica]

1

Simplify[q1.p1]

[simplifica]

1

Calculando as derivadas parciais para encontrar a função B(x,y).

b1 = FullSimplify[D[D[F1[x, y], x], x] x1 y1 + D[D[F1[x, y], x], y] x2 y1 +

[simplifica compl· [· [derivada]

[· [derivada]

D[D[F1[x, y], y], x] x1 y2 + D[D[F1[x, y], y], y] x2 y2]

[derivada]

[· [derivada]

$$\begin{aligned}
 & x1 y1 \left(\frac{3 (-1+x) y^2 \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{x (2 x^4 + (3 + 5 x^2) y^2 + 3 y^4) \mu}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) + \\
 & x2 y1 \left(\frac{(-2 (-1+x)^2 + y^2) \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{(y^2 + y^4 + x^2 (-2 + y^2)) \mu}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) + \\
 & x1 y2 \left(\frac{(-2 (-1+x)^2 + y^2) \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{(y^2 + y^4 + x^2 (-2 + y^2)) \mu}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) + \\
 & x2 y2 \left(\frac{(-1+x) \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x (1+x^2) \mu}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + 3 y^2 \left(\frac{\lambda - x \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{x \mu}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

FullSimplify[**b1** /. {**x** -> $\frac{1}{4} (3 - \sqrt{17})$, **y** -> $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}$ }]
[simplifica completamente]

$$\frac{1}{\sqrt{17725 + 4299 \sqrt{17}}}$$

$$\left(-x1 \left(24 y1 \lambda + 2 \sqrt{277 + 99 \sqrt{17}} y2 \lambda - 5 \sqrt{33158 + 8042 \sqrt{17}} y1 \mu + \sqrt{895 + 217 \sqrt{17}} y2 \mu \right) - \right.$$

$$x2 \left(4 (7 + 3 \sqrt{17}) y2 \lambda + 6 \sqrt{2614 + 634 \sqrt{17}} y2 \mu + \right.$$

$$\left. \left. y1 \left(2 \sqrt{277 + 99 \sqrt{17}} \lambda + \sqrt{895 + 217 \sqrt{17}} \mu \right) \right) \right)$$

b2 = FullSimplify[**D**[**D**[**F2**[**x**, **y**], **x**], **x**] **x1 y1** + **D**[**D**[**F2**[**x**, **y**], **x**], **y**] **x2 y1** +
[simplifica compl... [derivada] [derivada]

D[**D**[**F2**[**x**, **y**], **y**], **x**] **x1 y2** + **D**[**D**[**F2**[**x**, **y**], **y**], **y**] **x2 y2**
[derivada] [derivada]

$$x1 y1 \left(\frac{(-2(-1+x)^2 + y^2) \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{(y^2 + y^4 + x^2(-2 + y^2)) \mu}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) +$$

$$x2 y1 \left(\frac{(-1+x) \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x(1+x^2) \mu}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + 3 y^2 \left(\frac{\lambda - x \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{x \mu}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right) +$$

$$x1 y2 \left(\frac{(-1+x) \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x(1+x^2) \mu}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + 3 y^2 \left(\frac{\lambda - x \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{x \mu}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right) + x2 y2$$

$$\left(\frac{3 \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{2 y^4 \mu}{(x^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{3(1+x^2) \mu}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + y^2 \left(-\frac{3 \lambda}{((-1+x)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{(3 - 2 x^2) \mu}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right)$$

FullSimplify[**b2** /. {**x** -> $\frac{1}{4} (3 - \sqrt{17})$, **y** -> $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}$ }]
[simplifica completamente]

$$\left(-x1 \left(2 \sqrt{-3683 + 2091 \sqrt{17}} y1 \lambda + \right. \right.$$

$$\left. 208 y2 \lambda + \sqrt{6463 + 1561 \sqrt{17}} y1 \mu + 6 \sqrt{18838 + 4570 \sqrt{17}} y2 \mu \right) -$$

$$2 x2 \left(104 y1 \lambda - 12 \sqrt{2(5 + 9 \sqrt{17})} y2 \lambda + 3 \sqrt{18838 + 4570 \sqrt{17}} y1 \mu + \right.$$

$$\left. \left. 2 \sqrt{271055 + 65737 \sqrt{17}} y2 \mu \right) \right) / \left(\sqrt{127741 + 30987 \sqrt{17}} \right)$$

Definindo a função B((x1,x2),(y1,y2))

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{B}[\{x1_ , x2_ \}, \{y1_ , y2_ \}] := \\
 & \left\{ \frac{1}{\sqrt{17725 + 4299\sqrt{17}}} \left(-x1 \left(24 y1 \lambda + 2 \sqrt{277 + 99\sqrt{17}} y2 \lambda - 5 \sqrt{33158 + 8042\sqrt{17}} y1 \mu + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \sqrt{895 + 217\sqrt{17}} y2 \mu \right) - x2 \left(4 (7 + 3\sqrt{17}) y2 \lambda + 6 \sqrt{2614 + 634\sqrt{17}} y2 \mu + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. y1 \left(2 \sqrt{277 + 99\sqrt{17}} \lambda + \sqrt{895 + 217\sqrt{17}} \mu \right) \right) \right), \\
 & \left(-x1 \left(2 \sqrt{-3683 + 2091\sqrt{17}} y1 \lambda + 208 y2 \lambda + \sqrt{6463 + 1561\sqrt{17}} y1 \mu + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. 6 \sqrt{18838 + 4570\sqrt{17}} y2 \mu \right) - \right. \\
 & \quad \left. 2 x2 \left(104 y1 \lambda - 12 \sqrt{2(5 + 9\sqrt{17})} y2 \lambda + 3 \sqrt{18838 + 4570\sqrt{17}} y1 \mu + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. 2 \sqrt{271055 + 65737\sqrt{17}} y2 \mu \right) \right) / \left(\sqrt{127741 + 30987\sqrt{17}} \right) \}
 \end{aligned}$$

Segunda e terceira condições de degenerescência (a, b ≠ 0)

$$\mathbf{bt1} = \text{FullSimplify}[\mathbf{(p1.B[q0, q0])}]$$

[simplifica completamente]

$$-4 \lambda + \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \sqrt{17})} \mu$$

Condição ii) de Não-Degenerescência

$$\mathbf{a} = \text{FullSimplify}[\mathbf{bt1} /. \{\mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17})\}]$$

[simplifica completamente]

$$\frac{1}{4} (5 - 3\sqrt{17})$$

$$\mathbf{bt2} = \text{FullSimplify}[\mathbf{(p0.B[q0, q0]) + (p1.B[q0, q1])}]$$

[simplifica completamente]

$$-\sqrt{133 + 31\sqrt{17}} \mu$$

$$\mathbf{b} = \text{ToRadicals}[\text{FullSimplify}[\mathbf{bt2} /. \{\mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17})\}]]$$

[converte em · [simplifica completamente]

$$-\sqrt{\frac{165}{2} + \frac{41\sqrt{17}}{2}}$$

Sinal de S

$$\text{bt} = \text{FullSimplify}\left[\text{bt1} * \text{bt2} /. \left\{\mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17})\right\}\right]$$

$$\sqrt{\frac{2115}{8} + \frac{587\sqrt{17}}{8}}$$

$$\text{S} = \text{Sign}[\text{bt}]$$

1

Quit[]

|encerra a sessão do núcleo

Checando a Regularidade da Aplicação $\phi(f_1, f_2, \text{Tr}(\text{DF}), \text{Det}(\text{DF}))$.

$$\text{G1} = -y + \mu x (1 - x^2 - y^2) / \text{Sqrt}[x^2 + y^2] + \lambda (1 - x) / \text{Sqrt}[(1 - x)^2 + y^2];$$

$$\text{G2} = x + \mu y (1 - x^2 - y^2) / \text{Sqrt}[x^2 + y^2] - \lambda y / \text{Sqrt}[(1 - x)^2 + y^2];$$

Construindo a Função $\phi = (G_1, G_2, G_3, G_4)$

$$\text{G3} = \text{Simplify}[\text{D}[\text{G1}, x] + \text{D}[\text{G2}, y]];$$

$$\text{G4} = \text{Simplify}[\text{D}[\text{G1}, x] \text{D}[\text{G2}, y] - \text{D}[\text{G2}, x] \text{D}[\text{G1}, y]];$$

Matriz Jacobiana de ϕ no equilíbrio $(x, y, \mu, \lambda) =$

$$\left(\frac{1}{4}(3 - \sqrt{17}), \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17})}, \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17})\right)$$

$$\text{P1} = \left\{\frac{1}{4}(3 - \sqrt{17}), \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17})}\right\};$$

$$\text{BT} = \left\{\sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17})\right\};$$

Primeira Coluna (dx)

A11 = ToRadicals $\left[\text{FullSimplify} \left[\text{D}[\text{G1}, x] \right] \right] / .$
[converte em ... [simplifica compl... [derivada

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}) \right\} \left] \right]$$

$$\sqrt{-\frac{109}{8} + \frac{27\sqrt{17}}{8}}$$

A21 = FullSimplify $\left[\text{D}[\text{G2}, x] \right] / .$
[simplifica compl... [derivada

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}) \right\}$$

$$\frac{1}{4} (-5 + 3\sqrt{17})$$

A31 = FullSimplify $\left[\text{D}[\text{G3}, x] \right] / .$
[simplifica compl... [derivada

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}) \right\}$$

$$\sqrt{-\frac{29}{8} + \frac{27\sqrt{17}}{8}}$$

A41 = FullSimplify $\left[\text{D}[\text{G4}, x] \right] / .$
[simplifica compl... [derivada

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}) \right\}$$

$$\frac{1}{8} (-89 + 15\sqrt{17})$$

Segunda Coluna (dy)

A12 = ToRadicals $\left[\text{FullSimplify} \left[\text{D}[\text{G1}, y] \right] \right] / .$
[converte em ... [simplifica compl... [derivada

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}) \right\} \left] \right]$$

$$\frac{1}{4} (-13 + 3\sqrt{17})$$

A22 = ToRadicals [converte em ...] **FullSimplify** [simplifica compl...] **D**[G2, y] /. [derivada]

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}) \right\} \left[-\sqrt{-\frac{109}{8} + \frac{27\sqrt{17}}{8}} \right]$$

A32 = ToRadicals [converte em ...] **FullSimplify** [simplifica compl...] **D**[G3, y] /. [derivada]

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}) \right\} \left[\frac{1}{4} (-23 + \sqrt{17}) \right]$$

A42 = ToRadicals [converte em ...] **FullSimplify** [simplifica compl...] **D**[G4, y] /. [derivada]

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}) \right\} \left[\sqrt{-\frac{4885}{32} + \frac{1203\sqrt{17}}{32}} \right]$$

Terceira Coluna

A13 = ToRadicals [converte em ...] **FullSimplify** [simplifica compl...] **D**[G1, μ] /. [derivada]

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}) \right\} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{5 - \sqrt{17}} \right]$$

A23 = ToRadicals [converte em ...] **FullSimplify** [simplifica compl...] **D**[G2, μ] /. [derivada]

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}) \right\} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-1 + \sqrt{17})} \right]$$

A33 = ToRadicals[FullSimplify[D[G3, μ] /.
[converte em ... [simplifica compl... [derivada

$$\left\{x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17})\right\}]$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{31 - 7\sqrt{17}}$$

A43 = ToRadicals[FullSimplify[D[G4, μ] /.
[converte em ... [simplifica compl... [derivada

$$\left\{x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17})\right\}]$$

$$-\sqrt{2(-1 + \sqrt{17})}$$

Quarta Coluna

A14 = ToRadicals[FullSimplify[D[G1, λ] /.
[converte em ... [simplifica compl... [derivada

$$\left\{x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17})\right\}]$$

$$\sqrt{-\frac{5}{8} + \frac{3\sqrt{17}}{8}}$$

A24 = ToRadicals[FullSimplify[D[G2, λ] /.
[converte em ... [simplifica compl... [derivada

$$\left\{x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17})\right\}]$$

$$\frac{1}{4} (3 - \sqrt{17})$$

A34 = ToRadicals[FullSimplify[D[G3, λ] /.
[converte em ... [simplifica compl... [derivada

$$\left\{x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17})\right\}]$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3 + \sqrt{17}}}$$

A44 = ToRadicals [FullSimplify [D[G4, λ] /.
[converte em ... [simplifica compl... [derivada

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \mu \rightarrow \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}) \right\} \Big] \Big]$$

0

Mφ = { {A11, A12, A13, A14},

{A21, A22, A23, A24}, {A31, A32, A33, A34}, {A41, A42, A43, A44} }

$$\left\{ \left\{ \sqrt{-\frac{109}{8} + \frac{27\sqrt{17}}{8}}, \frac{1}{4} (-13 + 3\sqrt{17}), -\frac{1}{2} \sqrt{5 - \sqrt{17}}, \sqrt{-\frac{5}{8} + \frac{3\sqrt{17}}{8}} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{1}{4} (-5 + 3\sqrt{17}), -\sqrt{-\frac{109}{8} + \frac{27\sqrt{17}}{8}}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-1 + \sqrt{17})}, \frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}) \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \sqrt{-\frac{29}{8} + \frac{27\sqrt{17}}{8}}, \frac{1}{4} (-23 + \sqrt{17}), \frac{1}{2} \sqrt{31 - 7\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{3 + \sqrt{17}}} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{1}{8} (-89 + 15\sqrt{17}), \sqrt{-\frac{4885}{32} + \frac{1203\sqrt{17}}{32}}, -\sqrt{2(-1 + \sqrt{17})}, \emptyset \right\} \right\}$$

Determinante da Matriz Jacobiana DF aplicada em

$$\left(\frac{1}{4} (3 - \sqrt{17}), \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (-3 + \sqrt{17})}, \sqrt{\frac{2}{-1 + \sqrt{17}}}, \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{17}) \right).$$

ToRadicals [FullSimplify [Det [Mφ]]]

[converte em ... [simplifica compl... [determinante

$$-\sqrt{\frac{17}{2} (23 - \sqrt{17})}$$

Apêndice VIII

Componentes do Campo em (3.2). Modificação com Anulamento no Bordo do Disco D.

$$F1 = -y + \frac{(1-x)\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{x(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$F2 = x - \frac{y\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$-y + \frac{(1-x)\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{x(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$x - \frac{y\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Valores de μ e λ para os quais o sistema (3.2) admite equilíbrios.

`FullSimplify[Solve[{F1, F2} == 0, {μ, λ}]]`
[simplifica compl· | resolve]

$$\left\{ \left\{ \mu \rightarrow -\frac{((-1+x)x+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{y(-1+x^2+y^2)}, \lambda \rightarrow \frac{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}(x^2+y^2)}{y} \right\} \right\}$$

$$\mu e = -\frac{((-1+x)x+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{y(-1+x^2+y^2)};$$

$$\lambda e = \frac{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}(x^2+y^2)}{y};$$

Matriz Jacobiana

`a11 = FullSimplify[D[F1, x]];`
[simplifica compl· | derivada]

`a12 = FullSimplify[D[F1, y]];`
[simplifica compl· | derivada]

`a21 = FullSimplify[D[F2, x]];`
[simplifica compl· | derivada]

`a22 = FullSimplify[D[F2, y]];`
[simplifica compl· | derivada]

`Jac = MatrixForm[{{a11, a12}, {a21, a22}}]`
[forma de matriz]

$$\begin{pmatrix} -\frac{y^2\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(2x^4+(-1+3x^2)y^2+y^4)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -1 + \frac{(-1+x)y\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{xy(1+x^2+y^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ 1 + \frac{(-1+x)y\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{xy(1+x^2+y^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\frac{\lambda}{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}} - \frac{2y^4\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{\mu-x^2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2 \left(\frac{\lambda}{((-1+x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1+2x^2)\mu}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) \end{pmatrix}$$

Traço e Determinante de Jac

`tr = FullSimplify[a11 + a22];`
[simplifica completamente]

`det = FullSimplify[a11 a22 - a21 a12];`
[simplifica completamente]

Aplicando os valores de μe e λe em tr e det

`T1 = FullSimplify[tr /. {μ → μe, λ → λe}];`
[simplifica completamente]

`D1 = FullSimplify[det /. {μ → μe, λ → λe}];`
[simplifica completamente]

$$\frac{(-1+x)^2 x (1+2x) + x (-3+4x) y^2 + 2 y^4}{y (-1+x^2+y^2)}$$

$$\frac{(-1+x) \left(y^2 - (x^2+y^2) \left(y^2 + 2 \left((-1+x) x + y^2 \right)^2 \right) \right)}{y^2 \left((-1+x)^2 + y^2 \right) \left(-1+x^2+y^2 \right)}$$

Expandindo o Numerador de tr e det

`T = Expand[Numerator[T1]]`
[expand · [numerador]

$$x - 3 x^3 + 2 x^4 - 3 x y^2 + 4 x^2 y^2 + 2 y^4$$

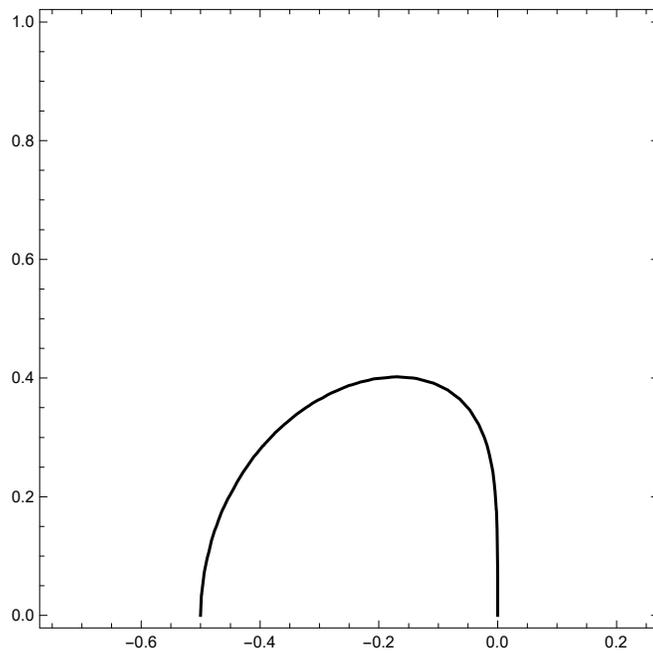
`Dm = Expand[y^2 - (x^2 + y^2) (y^2 + 2 ((-1 + x) x + y^2)^2)]`
[expande fatores]

$$-2 x^4 + 4 x^5 - 2 x^6 + y^2 - 3 x^2 y^2 + 8 x^3 y^2 - 6 x^4 y^2 - y^4 + 4 x y^4 - 6 x^2 y^4 - 2 y^6$$

Calculando os candidatos a pontos de Hopf

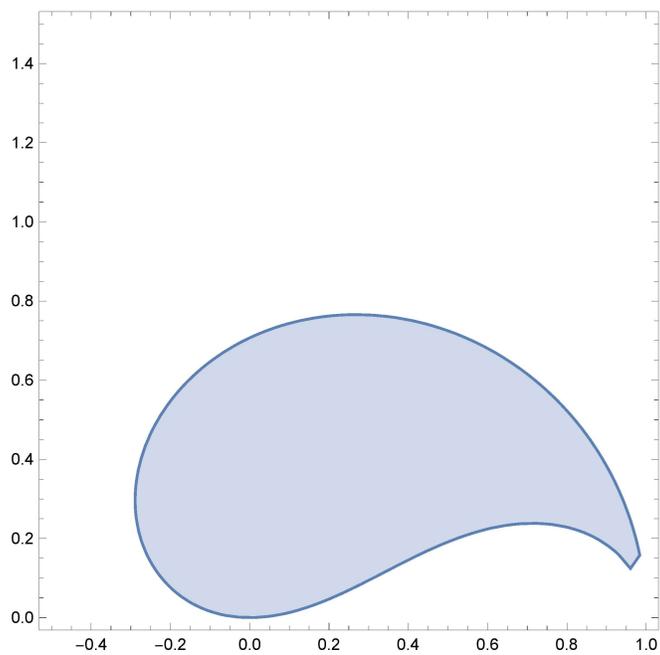
Traço da Matriz Jacobiana igual a zero.

```
H = ContourPlot[T == 0, {x, -0.75, 0.25},
  gráfico de contornos
  {y, 0, 1}, ContourStyle -> {Black, Thickness[0.005]}]
  estilo de contorno preto espessura
```



Determinante da Matriz Jacobiana maior que zero.

```
R = RegionPlot[Dm > 0, {x, -0.5, 1}, {y, 0, 1.5}]
  gráfico de uma região
```



Ponto de Bogdanov-Takens (Apenas para Ilustração)

```
PBT = Graphics[{{PointSize[0.02], Red, Point[{{1/4 (3 - sqrt(17)), 1/2 sqrt(1/2 (-3 + sqrt(17))}}]}}];
```

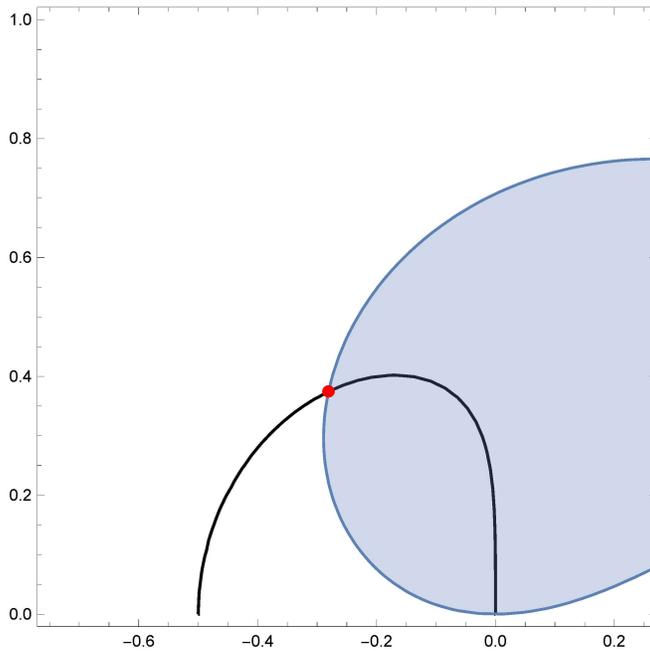
[representa... [tamanho do ponto [ve... [ponto

Curva de candidatos à ponto de Hopf

Ocorre sobre a curva preta e no interior da região azul.

```
Show[H, R, PBT]
```

[mostra



Tomando $T=0$ para y em função de x para obtermos a curva H como $y = f(x)$.

```
Solve[T == 0, y]
```

[resolve

$$\left\{ \left\{ y \rightarrow -\frac{1}{2} \sqrt{3x - 4x^2 - \sqrt{x} \sqrt{-8 + 9x}} \right\}, \left\{ y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3x - 4x^2 - \sqrt{x} \sqrt{-8 + 9x}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ y \rightarrow -\frac{1}{2} \sqrt{3x - 4x^2 + \sqrt{x} \sqrt{-8 + 9x}} \right\}, \left\{ y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3x - 4x^2 + \sqrt{x} \sqrt{-8 + 9x}} \right\} \right\}$$

Ponto de Equilíbrio de Interesse com y em função de x .

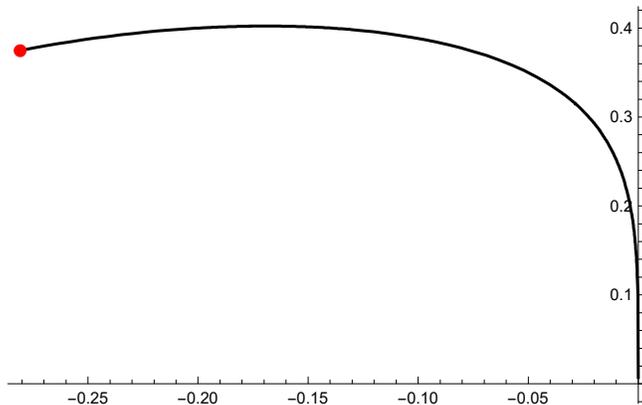
$$P1 = \left\{ t, \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}} \right\}$$

$$\left\{ t, \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}} \right\}$$

Curva no plano (x,y) de candidatos à ponto de Hopf.

```
H1 = Plot[ $\frac{1}{2} \sqrt{3 t - 4 t^2 + \sqrt{-8 t + 9 t^2}}$ ,
  gráfico
  {t,  $\frac{1}{4} (3 - \sqrt{17})$ , 0}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> Black];
  origem dos eixos      estilo do gráf... preto
```

```
Show[H1, PBT]
  mostra
```



Queremos agora encontrar uma curva no plano de parâmetros que possibilite que o sistema (3.2) tenha um ponto de equilíbrio sobre a curva H1.

Tomemos então $x(t)=t$ e $y(t)=\frac{1}{2} \sqrt{3 t - 4 t^2 + \sqrt{-8 t + 9 t^2}}$ e vamos substituir $x(t)$ e $y(t)$ nas equações obtidas para μe e λe .

```
FullSimplify[ $\{\mu e, \lambda e\} /. \{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3 t - 4 t^2 + \sqrt{-8 t + 9 t^2}}\}$ ]
  simplifica completamente
```

$$\left\{ -\frac{2 t}{\sqrt{3 t + \sqrt{t (-8 + 9 t)}} \sqrt{(3 - 4 t) t + \sqrt{t (-8 + 9 t)}}}, \frac{\sqrt{4 - 5 t + \sqrt{t (-8 + 9 t)}} (3 t + \sqrt{t (-8 + 9 t)})}{4 \sqrt{(3 - 4 t) t + \sqrt{t (-8 + 9 t)}}} \right\}$$

Testando para ver que de fato essas substituições nos dão equilíbrios do sistema (3.2).

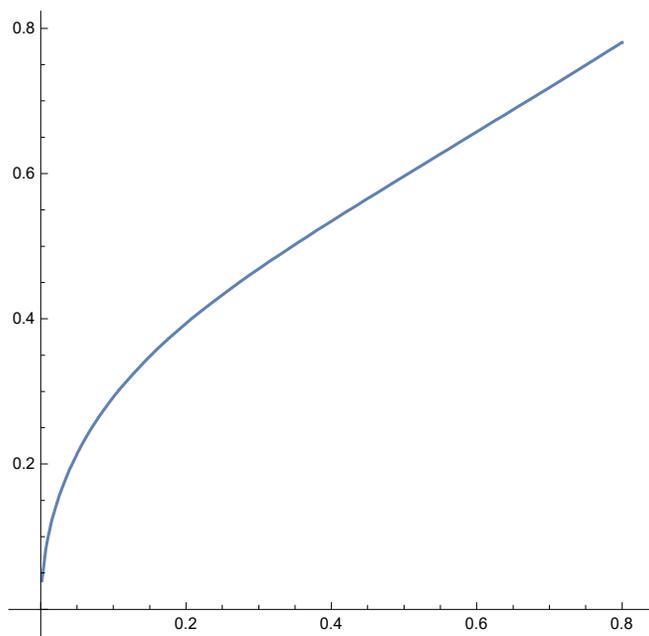
$$\text{FullSimplify}\left[\text{F1} /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2} + \sqrt{-8t + 9t^2}\right\},\right. \\ \left. \text{[simplifica completamente} \right. \\ \left. \mu \rightarrow -\frac{2t}{\sqrt{3t + \sqrt{t(-8+9t)}} \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}},\right. \\ \left. \lambda \rightarrow \frac{\sqrt{4-5t + \sqrt{t(-8+9t)}} (3t + \sqrt{t(-8+9t)})}{4 \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}}\right\}] \\ \emptyset$$

$$\text{FullSimplify}\left[\text{F2} /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2} + \sqrt{-8t + 9t^2}\right\},\right. \\ \left. \text{[simplifica completamente} \right. \\ \left. \mu \rightarrow -\frac{2t}{\sqrt{3t + \sqrt{t(-8+9t)}} \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}},\right. \\ \left. \lambda \rightarrow \frac{\sqrt{4-5t + \sqrt{t(-8+9t)}} (3t + \sqrt{t(-8+9t)})}{4 \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}}\right\}] \\ \emptyset$$

Curva dependente do parâmetro t no plano de parâmetros (μ, λ) .

$$\text{F}[t_] := \left\{ -\frac{2t}{\sqrt{3t + \sqrt{t(-8+9t)}} \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}}, \right. \\ \left. \frac{\sqrt{4-5t + \sqrt{t(-8+9t)}} (3t + \sqrt{t(-8+9t)})}{4 \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}} \right\}$$

```
CurvaH = ParametricPlot[F[t], {t, (3 - Sqrt[17]) / 4, 0}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```



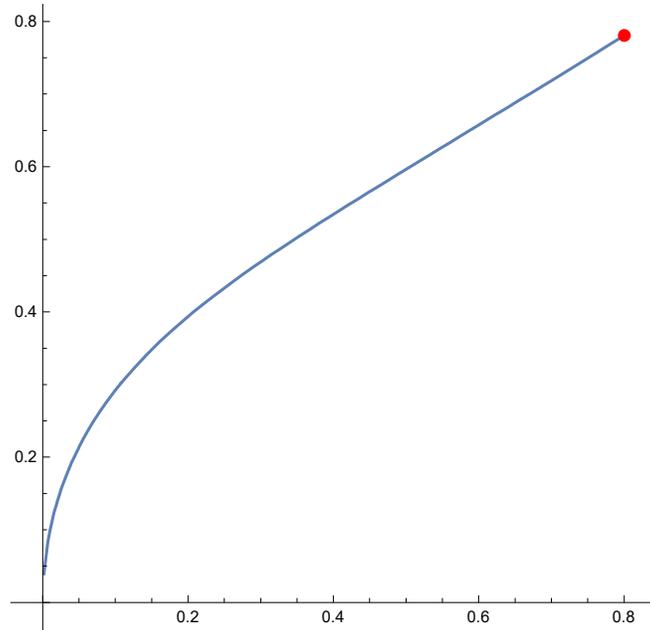
Coordenadas do ponto no plano de parâmetros para o qual o equilíbrio do sistema (3.2) é do tipo Bogdanov-Takens (Apenas para Ilustração).

```
BT = Graphics[{{PointSize[0.02], Red, Point[{{Sqrt[2 / (-1 + Sqrt[17])], 1 / 4 (-1 + Sqrt[17])}}]}}];
```

Curva de Hopf parametrizada com $(\mu(t), \lambda(t))$ no plano de parâmetros juntamente com o ponto de Bogdanov-Takens.

Show [CurvaH, BT]

[mostra



Substituindo os Parâmetros Críticos.

$$\mu = -\frac{2t}{\sqrt{3t + \sqrt{t(-8+9t)}} \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}};$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{4-5t + \sqrt{t(-8+9t)}} (3t + \sqrt{t(-8+9t)})}{4 \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}};$$

Matriz Jacobiana calculada em P1.

FullSimplify [Jac /. {x -> t, y -> $\frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}$ }]

[simplifica completamente

$$\left(\frac{8t \left(-2\sqrt{t(-8+9t)} + t \left(-10+9\sqrt{t(-8+9t)} + t \left(55-13\sqrt{t(-8+9t)} + t \left(-71+24t+8\sqrt{t(-8+9t)} \right) \right) \right) \right)}{\left(4-5t+\sqrt{t(-8+9t)} \right) \left(3t+\sqrt{t(-8+9t)} \right)^2 \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}} \right. \\ \left. - \frac{-4\sqrt{t(-8+9t)} + t \left(13+2\sqrt{t(-8+9t)} + 2t \left(-11+6t-2\sqrt{t(-8+9t)} \right) \right)}{4(-1+t)} \right) - \frac{8t \left(-2\sqrt{t(-8+9t)} + t \left(-10+ \right. \right. \\ \left. \left. \left(4-5t+\sqrt{t(-8+9t)} \right) \right) \right)}{\left(4-5t+\sqrt{t(-8+9t)} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 A = & \left\{ \left\{ \left(8t \left(-2\sqrt{-8+9t} \right) + t \left(-10+9\sqrt{-8+9t} \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. t \left(55-13\sqrt{-8+9t} \right) + t \left(-71+24t+8\sqrt{-8+9t} \right) \right) \right) \right) / \\
 & \left(\left(4-5t+\sqrt{-8+9t} \right) \left(3t+\sqrt{-8+9t} \right)^2 \sqrt{(3-4t)t+\sqrt{-8+9t}} \right), \\
 & \left. \frac{4+8(1-2t)t}{-4+3t+\sqrt{-8+9t}} \right\}, \left\{ \frac{1}{4(-1+t)} \right. \\
 & \left. \left(-4+\sqrt{-8+9t} \right) + t \left(13+2\sqrt{-8+9t} \right) + 2t \left(-11+6t-2\sqrt{-8+9t} \right) \right) \right), \\
 & - \left(\left(8t \left(-2\sqrt{-8+9t} \right) + t \left(-10+9\sqrt{-8+9t} \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. t \left(55-13\sqrt{-8+9t} \right) + t \left(-71+24t+8\sqrt{-8+9t} \right) \right) \right) \right) / \\
 & \left. \left(\left(4-5t+\sqrt{-8+9t} \right) \left(3t+\sqrt{-8+9t} \right)^2 \sqrt{(3-4t)t+\sqrt{-8+9t}} \right) \right) \right\};
 \end{aligned}$$

Polinômio Característico da Matriz Jacobiana.

```
P[s_, {x_, y_}] := Det[A - s IdentityMatrix[2]]
      [determinante [matriz identidade]
```

Coefficientes do Polinômio Característico.

```
cc[i_, {x_, y_}] := Coefficient[P[s, {x, y}], s, i]
      [coeficiente]
```

Polinômio Característico da Matriz Jacobiana calculada em P1.

```
P[s, P1];
```

Coefficiente do termo independente.

```
FullSimplify[cc[0, P1], t < 0]
      [simplifica completamente]

$$\frac{4 - \sqrt{-8+9t} + t(3+8(-2+t)t)}{4(-1+t)^2(1+2t)}$$

```

Coefficiente do termo linear.

```
FullSimplify[cc[1, P1], t < 0]
      [simplifica completamente]
0
```

Coefficiente do termo quadrático.

```
FullSimplify[cc[2, P1], t < 0]
      [simplifica completamente]
1
```

Derivadas para a expansão de Taylor.

```

a = Simplify[D[F1, x]];
    |simplifica |derivada

b = Simplify[D[F1, y]];
    |simplifica |derivada

c = Simplify[D[F2, x]];
    |simplifica |derivada

d = Simplify[D[F2, y]];
    |simplifica |derivada

f20 = Simplify[D[D[F1, x], x]];
    |simplifica |..|derivada

f11 = Simplify[D[D[F1, x], y]];
    |simplifica |..|derivada

f02 = Simplify[D[D[F1, y], y]];
    |simplifica |..|derivada

g20 = Simplify[D[D[F2, x], x]];
    |simplifica |..|derivada

g11 = Simplify[D[D[F2, x], y]];
    |simplifica |..|derivada

g02 = Simplify[D[D[F2, y], y]];
    |simplifica |..|derivada

f30 = Simplify[D[D[D[F1, x], x], x]];
    |simplifica |..|..|derivada

f21 = Simplify[D[D[D[F1, x], x], y]];
    |simplifica |..|..|derivada

f12 = Simplify[D[D[D[F1, x], y], y]];
    |simplifica |..|..|derivada

f03 = Simplify[D[D[D[F1, y], y], y]];
    |simplifica |..|..|derivada

g30 = Simplify[D[D[D[F2, x], x], x]];
    |simplifica |..|..|derivada

g21 = Simplify[D[D[D[F2, x], x], y]];
    |simplifica |..|..|derivada

g12 = Simplify[D[D[D[F2, x], y], y]];
    |simplifica |..|..|derivada

g03 = Simplify[D[D[D[F2, y], y], y]];
    |simplifica |..|..|derivada

```


$$\mathbf{A02} = \text{FullSimplify}\left[\text{f02} / 2 /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}\right\}, t < 0\right]$$

[simplifica completamente]

$$\left(32 t^2 \left(8 \left(-1 + \sqrt{t(-8+9t)}\right) + t \left(164 - 109 \sqrt{t(-8+9t)} + t \left(-623 + 302 \sqrt{t(-8+9t)} + 2 t \left(493 - 144 \sqrt{t(-8+9t)} + t \left(-380 + 123 t + 41 \sqrt{t(-8+9t)}\right)\right)\right)\right)\right) / \left(\left(4 - 5 t + \sqrt{t(-8+9t)}\right)^2 \left(3 t + \sqrt{t(-8+9t)}\right)^3 \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}\right)$$

$$\mathbf{A30} = \text{FullSimplify}\left[\text{f30} / 6 /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}\right\}, t < 0\right]$$

[simplifica completamente]

$$\left(128 t^2 \left(-8 \left(4 + \sqrt{t(-8+9t)}\right) + t \left(136 - 228 \sqrt{t(-8+9t)} + t \left(-1164 + 1562 \sqrt{t(-8+9t)} + t \left(7194 - 3745 \sqrt{t(-8+9t)} + t \left(-18579 + 4452 \sqrt{t(-8+9t)} + 4 t \left(5579 - 708 \sqrt{t(-8+9t)} + 2 t \left(-1538 + 303 t + 101 \sqrt{t(-8+9t)}\right)\right)\right)\right)\right)\right) / \left(\left(4 - 5 t + \sqrt{t(-8+9t)}\right)^3 \left(3 t + \sqrt{t(-8+9t)}\right)^4 \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}\right)$$

$$\mathbf{A21} = \text{FullSimplify}\left[\text{f21} / 2 /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}\right\}, t < 0\right]$$

[simplifica completamente]

$$\left(192 t^2 \left(-64 \sqrt{t(-8+9t)} + t \left(-112 + 516 \sqrt{t(-8+9t)} + t \left(2708 - 1644 \sqrt{t(-8+9t)} + t \left(-10632 + 2667 \sqrt{t(-8+9t)} + t \left(16209 - 2268 \sqrt{t(-8+9t)} + 4 t \left(-2653 + 606 t + 202 \sqrt{t(-8+9t)}\right)\right)\right)\right)\right) / \left(\left(4 - 5 t + \sqrt{t(-8+9t)}\right)^3 \left(3 t + \sqrt{t(-8+9t)}\right)^4\right)$$

$$\mathbf{A12} = \text{FullSimplify}\left[\text{f12} / 2 /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}\right\}, t < 0\right]$$

[simplifica completamente]

$$-\left(128 t^2 \left(16 \left(-4 + \sqrt{t(-8+9t)}\right) + t \left(608 - 940 \sqrt{t(-8+9t)} + t \left(5500 \left(-1 + \sqrt{t(-8+9t)}\right) + t \left(47 \left(568 - 267 \sqrt{t(-8+9t)}\right) + 3 t \left(-20529 + 4777 \sqrt{t(-8+9t)} + t \left(23403 - 2916 \sqrt{t(-8+9t)} + 4 t \left(-3139 + 606 t + 202 \sqrt{t(-8+9t)}\right)\right)\right)\right)\right)\right) / \left(\left(4 - 5 t + \sqrt{t(-8+9t)}\right)^3 \left(3 t + \sqrt{t(-8+9t)}\right)^4 \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}}\right)$$

$$\mathbf{A03} = \text{FullSimplify}\left[\mathbf{f03} / 6 /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}\right\}, t < 0\right]$$

[simplifica completamente]

$$- \left(\left(128 t^2 \left(-28 \sqrt{t(-8+9t)} + t(-148 + 282 \sqrt{t(-8+9t)}) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. t(1738 - 933 \sqrt{t(-8+9t)}) + t(-5919 + 1460 \sqrt{t(-8+9t)}) + 4t \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. (2135 - 294 \sqrt{t(-8+9t)}) + t(-1358 + 303t + 101 \sqrt{t(-8+9t)}) \right) \right) \right) / \\ \left((4 - 5t + \sqrt{t(-8+9t)})^3 (3t + \sqrt{t(-8+9t)})^4 \right)$$

$$\mathbf{B20} = \text{FullSimplify}\left[\mathbf{g20} / 2 /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}\right\}, t < 0\right]$$

[simplifica completamente]

$$\frac{1}{16(-1+t)^2} \left(-8 - 12 \sqrt{t(-8+9t)} + t(8 + 27 \sqrt{t(-8+9t)}) + t(159 + 52 \sqrt{t(-8+9t)}) - 4t(115 + \right. \\ \left. 33 \sqrt{t(-8+9t)} + t(-119 + 45t - 15 \sqrt{t(-8+9t)}) \right)$$

$$\mathbf{B11} = \text{FullSimplify}\left[\mathbf{g11} /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}\right\}, t < 0\right]$$

[simplifica completamente]

$$(64 t^2 (8(-1 + \sqrt{t(-8+9t)}) + t(164 - 109 \sqrt{t(-8+9t)}) + t(-623 + 302 \sqrt{t(-8+9t)}) + \\ 2t(493 - 144 \sqrt{t(-8+9t)}) + t(-380 + 123t + 41 \sqrt{t(-8+9t)})) / \\ \left((4 - 5t + \sqrt{t(-8+9t)})^2 (3t + \sqrt{t(-8+9t)})^3 \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}} \right)$$

$$\mathbf{B02} = \text{FullSimplify}\left[\mathbf{g02} / 2 /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}\right\}, t < 0\right]$$

[simplifica completamente]

$$\frac{1}{16(-1+t)^2} \left(2 \sqrt{t(-8+9t)} + t(54 - 7 \sqrt{t(-8+9t)}) + t(-251 - 64 \sqrt{t(-8+9t)}) + \right. \\ \left. 4t(124 + 33 \sqrt{t(-8+9t)}) + t(-119 + 45t - 15 \sqrt{t(-8+9t)}) \right)$$

$$\mathbf{B30} = \text{FullSimplify}\left[\mathbf{g30} / 6 /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}\right\}, t < 0\right]$$

[simplifica completamente]

$$(64 t^2 (-64 \sqrt{t(-8+9t)}) + t(-112 + 516 \sqrt{t(-8+9t)}) + \\ t(2708 - 1644 \sqrt{t(-8+9t)}) + t(-10632 + 2667 \sqrt{t(-8+9t)}) + t(16209 - \\ 2268 \sqrt{t(-8+9t)}) + 4t(-2653 + 606t + 202 \sqrt{t(-8+9t)})) / \\ \left((4 - 5t + \sqrt{t(-8+9t)})^3 (3t + \sqrt{t(-8+9t)})^4 \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{B21} = \text{FullSimplify}\left[\mathbf{g21} / 2 /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}\right\}, t < 0\right] \\
 & \quad \text{[simplifica completamente]} \\
 & - \left((128 t^2 (16 (-4 + \sqrt{t(-8+9t)}) + \right. \\
 & \quad t (608 - 940 \sqrt{t(-8+9t)} + t (5500 (-1 + \sqrt{t(-8+9t)}) + t (47 (568 - \\
 & \quad 267 \sqrt{t(-8+9t)}) + 3t (-20529 + 4777 \sqrt{t(-8+9t)} + t (23403 - 2916 \\
 & \quad \sqrt{t(-8+9t)} + 4t (-3139 + 606t + 202 \sqrt{t(-8+9t)})))))) / \\
 & \left. \left((4 - 5t + \sqrt{t(-8+9t)})^3 (3t + \sqrt{t(-8+9t)})^4 \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{B12} = \text{FullSimplify}\left[\mathbf{g12} / 2 /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}\right\}, t < 0\right] \\
 & \quad \text{[simplifica completamente]} \\
 & - \left((384 t^2 (-28 \sqrt{t(-8+9t)} + t (-148 + 282 \sqrt{t(-8+9t)} + \right. \\
 & \quad t (1738 - 933 \sqrt{t(-8+9t)} + t (-5919 + 1460 \sqrt{t(-8+9t)} + 4t \\
 & \quad (2135 - 294 \sqrt{t(-8+9t)} + t (-1358 + 303t + 101 \sqrt{t(-8+9t)})))))) / \\
 & \left. \left((4 - 5t + \sqrt{t(-8+9t)})^3 (3t + \sqrt{t(-8+9t)})^4 \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{B03} = \text{FullSimplify}\left[\mathbf{g03} / 6 /. \left\{x \rightarrow t, y \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3t - 4t^2 + \sqrt{-8t + 9t^2}}\right\}, t < 0\right] \\
 & \quad \text{[simplifica completamente]} \\
 & (256 t^2 (4 \sqrt{t(-8+9t)} + \\
 & \quad t (92 - 174 \sqrt{t(-8+9t)} + t (-1126 + 1009 \sqrt{t(-8+9t)} + t (5131 - 2278 \sqrt{t(-8+9t)} + \\
 & \quad 2t (-5565 + 1271 \sqrt{t(-8+9t)} + t (6109 - 750 \sqrt{t(-8+9t)} + \\
 & \quad 2t (-1601 + 303t + 101 \sqrt{t(-8+9t)})))))) / \\
 & \left. \left((4 - 5t + \sqrt{t(-8+9t)})^3 (3t + \sqrt{t(-8+9t)})^4 \sqrt{(3-4t)t + \sqrt{t(-8+9t)}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Função β presente na página 253 da referência “Andronov”.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{\beta} = \text{FullSimplify}[\mathbf{a d - b c}, t < 0] \\
 & \quad \text{[simplifica completamente]} \\
 & \frac{4 - \sqrt{t(-8+9t)} + t(3+8(-2+t)t)}{4(-1+t)^2(1+2t)}
 \end{aligned}$$

Primeiro Termo de L1.

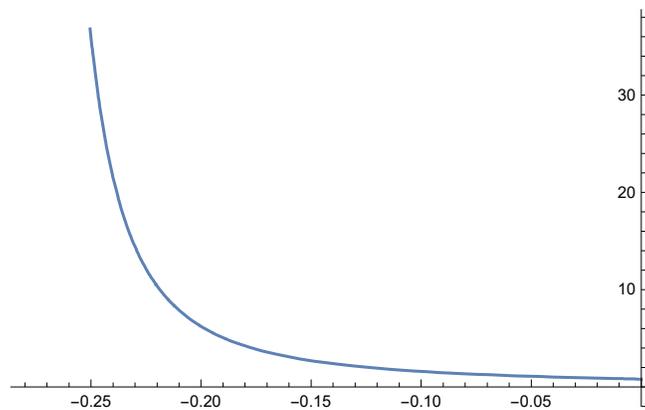
$$L11 = \text{FullSimplify}\left[\frac{-\pi}{4b\sqrt{\beta^3}}, t < \theta\right]$$

[simplifica completamente]

$$-\frac{2\pi(-4 + 3t + \sqrt{t(-8 + 9t)})}{(4 + 8(1 - 2t)t) \sqrt{\frac{(4 - \sqrt{t(-8 + 9t)} + t(3 + 8(-2 + t)t))^3}{(-1 + t)^6(1 + 2t)^3}}$$

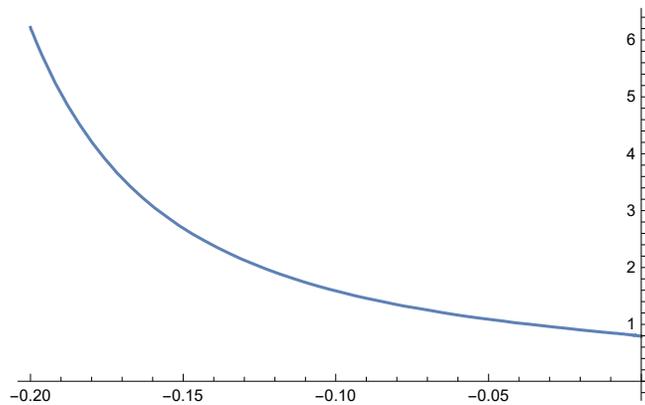
$$\text{Plot}[L11, \{t, \frac{3 - \sqrt{17}}{4}, \theta\}, \text{AxesOrigin} \rightarrow \{\theta, \theta\}]$$

[gráfico] [origem dos eixos]



$$\text{Plot}[L11, \{t, -0.2, \theta\}, \text{AxesOrigin} \rightarrow \{\theta, \theta\}]$$

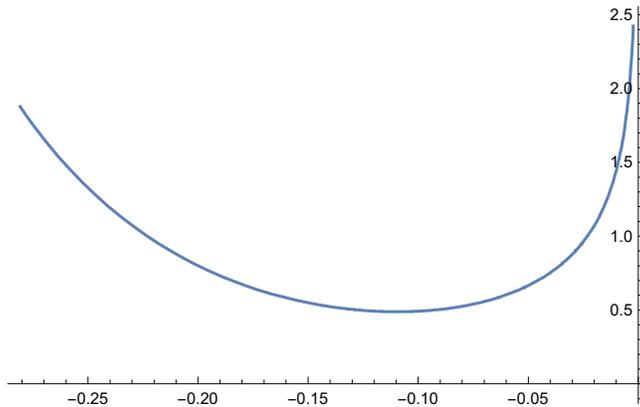
[gráfico] [origem dos eixos]



Assim, o primeiro termo de L1 é positivo. Precisamos ver o segundo termo, que de acordo com Andronov é dado por

$$\begin{aligned}
 L12 = & \text{Simplify}[(a c (A11^2 + A11 B02 + A02 B11) + a b (B11^2 + A20 B11 + A11 B20) + \\
 & \text{[simplifica} \\
 & c^2 (A11 A02 + 2 A02 B02) - 2 a c (B02^2 - A20 A02) - 2 a b (A20^2 - B20 B02) - \\
 & b^2 (2 A20 B20 + B11 B20) + (b c - 2 a^2) (B11 B02 - A11 A20)) - \\
 & (a^2 + b c) (3 (c B03 - b A30) + 2 a (A21 + B12) + (c A12 - b B21)), t < 0] \\
 - & \left((1048576 t^5 (1062882 t^{15} + 2048 \sqrt{t (-8 + 9t)} + \right. \\
 & 118098 t^{14} (-107 + 3 \sqrt{t (-8 + 9t)}) - 2048 t (-33 + 71 \sqrt{t (-8 + 9t)}) - \\
 & 6561 t^{13} (-10739 + 618 \sqrt{t (-8 + 9t)}) + 512 t^2 (-3476 + 3995 \sqrt{t (-8 + 9t)}) + \\
 & 2187 t^{12} (-111901 + 9931 \sqrt{t (-8 + 9t)}) + 1408 t^4 (-62398 + 37147 \sqrt{t (-8 + 9t)}) - \\
 & 256 t^3 (-66126 + 52315 \sqrt{t (-8 + 9t)}) + 4352 t^6 (-155761 + 58388 \sqrt{t (-8 + 9t)}) - \\
 & 1408 t^5 (-207655 + 97026 \sqrt{t (-8 + 9t)}) - 81 t^{11} (-7309090 + 892689 \sqrt{t (-8 + 9t)}) - \\
 & 64 t^7 (-17945528 + 5454339 \sqrt{t (-8 + 9t)}) + \\
 & 18 t^{10} (-58563836 + 9288021 \sqrt{t (-8 + 9t)}) - \\
 & 8 t^9 (-177512545 + 35420061 \sqrt{t (-8 + 9t)}) + \\
 & \left. 8 t^8 (-182815624 + 45154817 \sqrt{t (-8 + 9t)}) \right) / \\
 & \left((4 - 5t + \sqrt{t (-8 + 9t)})^6 (-4 + 3t + \sqrt{t (-8 + 9t)})^2 (3t + \sqrt{t (-8 + 9t)})^{10} \right. \\
 & \left. (3t - 4t^2 + \sqrt{t (-8 + 9t)})^{3/2} \right)
 \end{aligned}$$

Plot[L12, {t, $\frac{3 - \sqrt{17}}{4}$, 0}, AxesOrigin -> {0, 0}]
 [gráfico] [origem dos eixos]



Assim, o segundo termo do Coef. de Lyapunov, segundo Andronov, também é positivo. Multiplicando os dois termos que

L1 = Simplify[L11 L12, t < 0]

[simplifica]

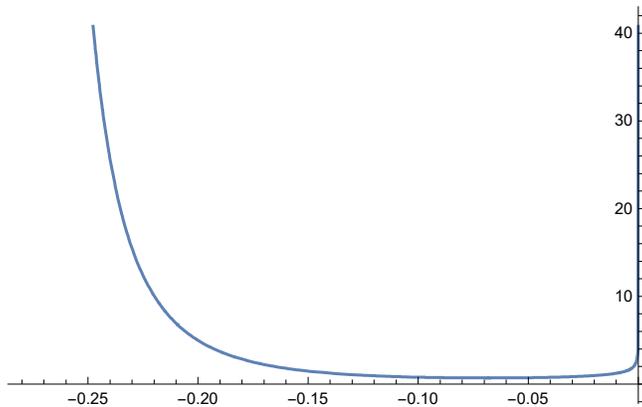
$$\begin{aligned} & (2097152 \pi t^5 (1062882 t^{15} + 2048 \sqrt{t(-8+9t)} + 118098 t^{14} (-107 + 3 \sqrt{t(-8+9t)}) - \\ & 2048 t (-33 + 71 \sqrt{t(-8+9t)}) - 6561 t^{13} (-10739 + 618 \sqrt{t(-8+9t)}) + \\ & 512 t^2 (-3476 + 3995 \sqrt{t(-8+9t)}) + 2187 t^{12} (-111901 + 9931 \sqrt{t(-8+9t)}) + \\ & 1408 t^4 (-62398 + 37147 \sqrt{t(-8+9t)}) - 256 t^3 (-66126 + 52315 \sqrt{t(-8+9t)}) + \\ & 4352 t^6 (-155761 + 58388 \sqrt{t(-8+9t)}) - 1408 t^5 (-207655 + 97026 \sqrt{t(-8+9t)}) - \\ & 81 t^{11} (-7309090 + 892689 \sqrt{t(-8+9t)}) - 64 t^7 (-17945528 + 5454339 \sqrt{t(-8+9t)}) + \\ & 18 t^{10} (-58563836 + 9288021 \sqrt{t(-8+9t)}) - \\ & 8 t^9 (-177512545 + 35420061 \sqrt{t(-8+9t)}) + \\ & 8 t^8 (-182815624 + 45154817 \sqrt{t(-8+9t)})) / \\ & \left((4 + 8(1 - 2t)t)(4 - 5t + \sqrt{t(-8 + 9t)})^6 (-4 + 3t + \sqrt{t(-8 + 9t)}) \right. \\ & (3t + \sqrt{t(-8 + 9t)})^{10} (3t - 4t^2 + \sqrt{t(-8 + 9t)})^{3/2} \\ & \left. \sqrt{\frac{(4 - \sqrt{t(-8 + 9t)} + t(3 + 8(-2 + t)t))^3}{(-1 + t)^6 (1 + 2t)^3}} \right) \end{aligned}$$

Plotando o resultado final da multiplicação dos dois termos.

Plot[L1, {t, $\frac{3 - \sqrt{17}}{4}$, 0}, AxesOrigin -> {0, 0}]

[gráfico]

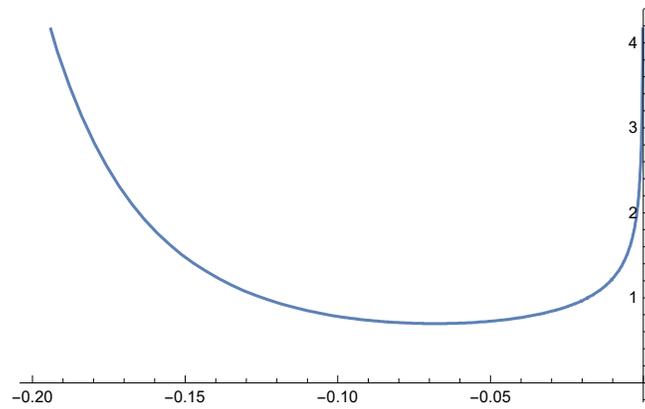
[origem dos eixos]



Plot[L1, {t, -0.2, 0}, AxesOrigin -> {0, 0}]

[gráfico

[origem dos eixos



Concluimos então que o Primeiro Coeficiente de Lyapunov é Positivo.

Apêndice IX

Componentes do Campo em (3.2). Modificação com Anulamento no Bordo do Disco D.

$$F1 = -y + \frac{(1-x)\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{x(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$F2 = x - \frac{y\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

Tomemos o ponto $(\mu, \lambda) = (\frac{3}{4}, 0.745355992499929898803057889577)$

$$\mu = 3 / 4;$$

$$\lambda = 0.7453559924999298988030578895770920784802061198705085747565`30.;$$

`s = NSolve[{F1, F2} == 0, {x, y}, Reals, WorkingPrecision -> 30]`

[solução numérica] [número...] [precisão operacional]

```
{ {x -> -0.27258887025381331992132735437, y -> 0.19184999068246221551621923274},
  {x -> -0.27258887025381331992132735437, y -> 0.19184999068246221551621923274} }
```

Ponto de equilíbrio para tais parâmetros

```
P1 = {-0.2725888702538133199213273543675347276830018448054816202425`29.15490195998574,
      0.1918499906824622155162192327409875754490248929433979277571`29.15490195998574}
```

```
{-0.27258887025381331992132735437, 0.19184999068246221551621923274}
```

Verificação

`Chop[F1 /. {x ->`

[substitui números pequenos por 0

```
-0.2725888702538133199213273543675347276830018448054816202425`29.15490195998574,
```

`y ->`

```
0.1918499906824622155162192327409875754490248929433979277571`29.15490195998574}]
```

0

`Chop[F2 /. {x ->`

[substitui números pequenos por 0

```
-0.2725888702538133199213273543675347276830018448054816202425`29.15490195998574,
```

`y ->`

```
0.1918499906824622155162192327409875754490248929433979277571`29.15490195998574}]
```

0

Matriz Jacobiana aplicada em P1

```

a11 = FullSimplify[D[F1, x]];
      |simplifica compl· |derivada
a12 = FullSimplify[D[F1, y]];
      |simplifica compl· |derivada
a21 = FullSimplify[D[F2, x]];
      |simplifica compl· |derivada
a22 = FullSimplify[D[F2, y]];
      |simplifica compl· |derivada
DF = {{a11, a12}, {a21, a22}};

J = DF /. {x ->
  -0.2725888702538133199213273543675347276830018448054816202425`29.15490195998574,
  y ->
  0.1918499906824622155162192327409875754490248929433979277571`29.15490195998574}
{{0.31527428808517220964846662, 0.0912930392498644327089392129},
 {2.0912930392498644327089392129, 0.6055695143259778280728001989}}

Chop[Eigensystem[J]]
|subs· |autovalores e autovetc
{{0.92084380241115003772126682, 0},
 {{-0.14907119849998597976061158, -0.98882646494608839316151966},
 {-0.27814080557803128489722464, 0.96054031267428011101434614}}

```

Auto vetor do auto valor nulo

```

V0 = {-0.27814080557803128489722464, 0.96054031267428011101434614};

```

Transposta da Matriz Jacobiana.

```

JT = Transpose[J]
      |transposição
{{0.31527428808517220964846662, 2.0912930392498644327089392129},
 {0.0912930392498644327089392129, 0.6055695143259778280728001989}}

Chop[Eigensystem[JT]]
|subs· |autovalores e autovetor
{{0.92084380241115003772126682, 0},
 {{-0.96054031267428011101434614, -0.27814080557803128489722464},
 {-0.98882646494608839316151966, 0.14907119849998597976061158}}

```

Auto vetor do auto valor nulo

```

W0 = {-0.98882646494608839316151966, 0.14907119849998597976061158};

```

Matriz Hessiana de F1

```

A11 = Simplify[D[F1, x, x]];
      [simplifica  _derivada]
A12 = Simplify[D[F1, x, y]];
      [simplifica  _derivada]
A21 = Simplify[D[F1, y, x]];
      [simplifica  _derivada]
A22 = Simplify[D[F1, y, y]];
      [simplifica  _derivada]
H1 = {{A11, A12}, {A21, A22}};
H1 = H1 /. {x ->
           -0.2725888702538133199213273543675347276830018448054816202425`29.15490195998574,
           y ->
           0.1918499906824622155162192327409875754490248929433979277571`29.15490195998574}
      {6.88570651364861194769481521, 3.636464744717000959597560883},
      {3.636464744717000959597560883, 0.029205546097727735446543538}}

```

Matriz Hessiana de F2

```

B11 = Simplify[D[F2, x, x]];
      [simplifica  _derivada]
B12 = Simplify[D[F2, x, y]];
      [simplifica  _derivada]
B21 = Simplify[D[F2, y, x]];
      [simplifica  _derivada]
B22 = Simplify[D[F2, y, y]];
      [simplifica  _derivada]
H2 = {{B11, B12}, {B21, B22}};
H2 = H2 /. {x ->
           -0.2725888702538133199213273543675347276830018448054816202425`29.15490195998574,
           y ->
           0.1918499906824622155162192327409875754490248929433979277571`29.15490195998574}
      {3.636464744717000959597560883, 0.029205546097727735446543538},
      {0.029205546097727735446543538, -8.749330112902365774763353486}}

```

Condição de Não Degenerescência

Segunda derivada de F

```

D2F = Simplify[{V0.H1.V0, V0.H2.V0}]
      [simplifica]
      {-1.3834352422158547934701806, -7.806741865779070703204823}

```

Produto interno em iii) do Teorema 2.4

```

W0.D2F
0.204217013730436491962406

```

Segundo ponto sobre a curva SN1

Tomemos o ponto $(\mu, \lambda) = (\frac{8}{10}, 0.780624749799799775730861640117)$

$$F1 = -y + \frac{(1-x)\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{x(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$F2 = x - \frac{y\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\mu = 8 / 10;$$

$$\lambda = 0.7806247497997997757308616401174743076341199972489570385527`30.;$$

$$s = \text{NSolve}\{\{F1, F2\} == 0, \{x, y\}, \text{Reals}\}$$

[solução numérica] [números reais]

$$\{\{x \rightarrow -0.28093666756663382922162369578, y \rightarrow 0.37393126215463006122375951131\}, \\ \{x \rightarrow -0.28093666756663382922162369578, y \rightarrow 0.37393126215463006122375951131\}\}$$

Ponto de equilíbrio para tais parâmetros

$$P1 = \{-0.2809366675666338292216236957836251621296803739788747746145`29.15490195998574, \\ 0.373931262154630061223759511314996822336816166606865322104`29.15490195998574\}$$

$$\{-0.28093666756663382922162369578, 0.37393126215463006122375951131\}$$

Verificação

$$\text{Chop}[F1 /. \{x \rightarrow$$

[substitui números pequenos por 0

$$-0.2809366675666338292216236957836251621296803739788747746145`29.15490195998574, \\ y \rightarrow 0.373931262154630061223759511314996822336816166606865322104`29.15490195998574\}]$$

0

$$\text{Chop}[F2 /. \{x \rightarrow$$

[substitui números pequenos por 0

$$-0.2809366675666338292216236957836251621296803739788747746145`29.15490195998574, \\ y \rightarrow 0.373931262154630061223759511314996822336816166606865322104`29.15490195998574\}]$$

0

Matriz Jacobiana aplicada em P1

$$a11 = \text{FullSimplify}[D[F1, x]];$$

[simplifica compl·] [derivada

$$a12 = \text{FullSimplify}[D[F1, y]];$$

[simplifica compl·] [derivada

$$a21 = \text{FullSimplify}[D[F2, x]];$$

[simplifica compl·] [derivada

$$a22 = \text{FullSimplify}[D[F2, y]];$$

[simplifica compl·] [derivada

$$DF = \{\{a11, a12\}, \{a21, a22\}\};$$

```
J = DF /. {x →
  -0.2809366675666338292216236957836251621296803739788747746145`29.15490195998574,
  y → 0.373931262154630061223759511314996822336816166606865322104`29.15490195998574}
{{0.53822746919355349016429648, -0.1562512403776646686014565801},
 {1.8437487596223353313985434199, -0.5352533029713696136193915648}}
```

Chop[Eigensystem[J]]

[subs··[autovalores e autovetc

```
{{0.0029741662221838765449049237, 0},
 {{0.28022426915890248359569392, 0.9599345597353805942193346},
 {0.27879645842003751041395595, 0.9603502146469507066429025}}}
```

Auto vetor de s=0

```
V0 = {0.27879645842003751041395595, 0.9603502146469507066429025};
```

Transposta da Matriz Jacobiana.

JT = Transpose[J]

[transposição

```
{{0.53822746919355349016429648, 1.8437487596223353313985434199},
 {-0.1562512403776646686014565801, -0.5352533029713696136193915648}}
```

Chop[Eigensystem[JT]]

[subs··[autovalores e autovetor

```
{{0.0029741662221838765449049237, 0},
 {{0.9603502146469507066429025, -0.27879645842003751041395595},
 {-0.9599345597353805942193346, 0.28022426915890248359569392}}}
```

Auto vetor do auto valor nulo

```
W0 = {-0.9599345597353805942193346, 0.28022426915890248359569392};
```

Matriz Hessiana de F1

A11 = Simplify[D[F1, x, x]];

[simplifica [derivada

A12 = Simplify[D[F1, x, y]];

[simplifica [derivada

A21 = Simplify[D[F1, y, x]];

[simplifica [derivada

A22 = Simplify[D[F1, y, y]];

[simplifica [derivada

H1 = {{A11, A12}, {A21, A22}};

H1 = H1 /. {x →

```
-0.2809366675666338292216236957836251621296803739788747746145`29.15490195998574,
 y → 0.373931262154630061223759511314996822336816166606865322104`29.15490195998574}
```

```
{{5.381519738998648361808818713, -0.384645961587292490916691565},
```

```
{-0.384645961587292490916691565, -2.164023723402742636687681552}}
```

Matriz Hessiana de F2

```

B11 = Simplify[D[F2, x, x]];
      [simplifica  [derivada]
B12 = Simplify[D[F2, x, y]];
      [simplifica  [derivada]
B21 = Simplify[D[F2, y, x]];
      [simplifica  [derivada]
B22 = Simplify[D[F2, y, y]];
      [simplifica  [derivada]
H2 = {{B11, B12}, {B21, B22}};
H2 = H2 /. {x →
  -0.2809366675666338292216236957836251621296803739788747746145`29.15490195998574,
  y → 0.373931262154630061223759511314996822336816166606865322104`29.15490195998574}
{{-0.384645961587292490916691565, -2.164023723402742636687681552},
{-2.164023723402742636687681552, -4.335181447516035179999050020}}

```

Condição de Não Degenerescência

Segunda derivada de F

```

D2F = Simplify[{V0.H1.V0, V0.H2.V0}]
      [simplifica]
{-1.783499698020128974056881, -5.186917450452343470163850}

```

Produto interno em iii) do Teorema 2.4

```

W0.D2F
0.258542845666571014208151

```

Cálculos para os pontos sobre a curva SN2

Componentes do Campo

$$F1 = -y + \frac{(1-x)\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{x(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$F2 = x - \frac{y\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\mu = 1; \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

Matriz Jacobiana aplicada em $P1 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

a11 = FullSimplify[D[F1, x]];
[simplifica compl· derivada]

a12 = FullSimplify[D[F1, y]];
[simplifica compl· derivada]

a21 = FullSimplify[D[F2, x]];
[simplifica compl· derivada]

a22 = FullSimplify[D[F2, y]];
[simplifica compl· derivada]

DF = {{a11, a12}, {a21, a22}};

J = DF /. {x → 0, y → $\frac{\sqrt{2}}{2}}$ }

{{ $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{4}{3} \right\}$, $\left\{ \frac{2}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3} \right\}$ }

Eigensystem[J]

[autovalores e autovetores]

{{ $-\sqrt{2}, 0$ }, {{ $\frac{1}{\sqrt{2}}, 1$ }, { $2\sqrt{2}, 1$ }}}

v0 = { $2\sqrt{2}, 1$ };

Teste

J.v0

{0, 0}

JT = Transpose[J]

[transposição]

{{ $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3} \right\}$, $\left\{ -\frac{4}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3} \right\}$ }

Eigensystem[JT]

[autovalores e autovetores]

{{ $-\sqrt{2}, 0$ }, {{ $-\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1$ }, { $-\sqrt{2}, 1$ }}}

w0 = { $-\sqrt{2}, 1$ };

Matriz Hessiana de F1

```

A11 = Simplify[D[F1, x, x]];
      [simplifica  _derivada]
A12 = Simplify[D[F1, x, y]];
      [simplifica  _derivada]
A21 = Simplify[D[F1, y, x]];
      [simplifica  _derivada]
A22 = Simplify[D[F1, y, y]];
      [simplifica  _derivada]
H1 = {{A11, A12}, {A21, A22}};

H1 = H1 /. {x -> 0, y ->  $\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 

{{ $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ,  $-\frac{10}{3}$ }, { $-\frac{10}{3}$ , 0}}

```

Matriz Hessiana de F2

```

B11 = Simplify[D[F2, x, x]];
      [simplifica  _derivada]
B12 = Simplify[D[F2, x, y]];
      [simplifica  _derivada]
B21 = Simplify[D[F2, y, x]];
      [simplifica  _derivada]
B22 = Simplify[D[F2, y, y]];
      [simplifica  _derivada]
H2 = {{B11, B12}, {B21, B22}};

H2 = H2 /. {x -> 0, y ->  $\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 

{{ $-\frac{10}{3}$ , 0}, {0,  $-\frac{4}{3}$ }}

```

Condição de Não Degenerescência

Segunda derivada de F

```

D2F = Simplify[{V0.H1.V0, V0.H2.V0}]
      [simplifica]
{-16  $\sqrt{2}$ , -28}

```

Produto interno em iii) do Teorema 2.4

$w_0 \cdot D2F$

4

Segundo ponto sobre a curva SN2

$$F1 = -y + \frac{(1-x)\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{x(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$F2 = x - \frac{y\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\mu = \sqrt{\frac{15}{8} + \frac{3\sqrt{17}}{8}}; \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}(7 + \sqrt{17})};$$

$$\text{Matriz Jacobiana aplicada em P1} = \left(\frac{2}{3}, \sqrt{-\frac{5}{18} + \frac{\sqrt{17}}{6}} \right)$$

a11 = FullSimplify[D[F1, x]];
[simplifica compl· [derivada]

a12 = FullSimplify[D[F1, y]];
[simplifica compl· [derivada]

a21 = FullSimplify[D[F2, x]];
[simplifica compl· [derivada]

a22 = FullSimplify[D[F2, y]];
[simplifica compl· [derivada]

DF = {{a11, a12}, {a21, a22}};

J = FullSimplify[DF /. {x → 2/3, y → $\sqrt{-\frac{5}{18} + \frac{\sqrt{17}}{6}}$ }]
[simplifica completamente]

$$\left\{ \left\{ -\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}(915 + 283\sqrt{17})}, \frac{1}{24}(-61 - 5\sqrt{17}) \right\}, \left\{ \frac{1}{24}(-13 - 5\sqrt{17}), -\sqrt{\frac{45}{32} + \frac{121\sqrt{17}}{288}} \right\} \right\}$$

FullSimplify[Eigensystem[J]]
[simplifica compl· [autovalores e autovet]

$$\left\{ \left\{ -\frac{1}{4} \sqrt{141 + 43\sqrt{17}}, 0 \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \left\{ \text{Root}[-32 + 5\#1^2 + \#1^4 \&, 2], 1 \right\}, \left\{ -\frac{1}{64} \sqrt{-3355 + 2403\sqrt{17}}, 1 \right\} \right\} \right\}$$

$$v0 = \left\{ -\frac{1}{64} \sqrt{-3355 + 2403\sqrt{17}}, 1 \right\};$$

Teste

FullSimplify[J.V0]

[simplifica completamente

{0, 0}

JT = FullSimplify[Transpose[J]]

[simplifica compl· [transposição

$$\left\{ \left\{ -\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2} (915 + 283 \sqrt{17})}, \frac{1}{24} (-13 - 5 \sqrt{17}) \right\}, \left\{ \frac{1}{24} (-61 - 5 \sqrt{17}), -\sqrt{\frac{45}{32} + \frac{121 \sqrt{17}}{288}} \right\} \right\}$$

FullSimplify[Eigensystem[JT]]

[simplifica compl· [autovalores e autovetor

$$\left\{ \left\{ -\frac{1}{4} \sqrt{141 + 43 \sqrt{17}}, 0 \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \left\{ \text{Root}[-2048 - 3355 \#1^2 + 10609 \#1^4 \&, 2], 1 \right\}, \left\{ -\frac{1}{8} \sqrt{5 + 3 \sqrt{17}}, 1 \right\} \right\} \right\}$$

$$w0 = \left\{ -\frac{1}{8} \sqrt{5 + 3 \sqrt{17}}, 1 \right\};$$

Teste

FullSimplify[JT.w0]

[simplifica completamente

{0, 0}

Matriz Hessiana de F1

A11 = Simplify[D[F1, x, x]];

[simplifica [derivada

A12 = Simplify[D[F1, x, y]];

[simplifica [derivada

A21 = Simplify[D[F1, y, x]];

[simplifica [derivada

A22 = Simplify[D[F1, y, y]];

[simplifica [derivada

H1 = {{A11, A12}, {A21, A22}};

$$H1 = \text{FullSimplify}[H1 /. \{x \rightarrow 2/3, y \rightarrow \sqrt{-\frac{5}{18} + \frac{\sqrt{17}}{6}}\}]$$

[simplifica completamente

$$\left\{ \left\{ -\frac{7}{48} \sqrt{\frac{17}{2} (107 + 51 \sqrt{17})}, \frac{1}{96} (-107 + 45 \sqrt{17}) \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{1}{96} (-107 + 45 \sqrt{17}), \frac{1}{48} \sqrt{\frac{1}{2} (-47525 + 13011 \sqrt{17})} \right\} \right\}$$

Matriz Hessiana de F2

$$\mathbf{B11} = \text{Simplify}[\text{D}[\mathbf{F2}, \mathbf{x}, \mathbf{x}]]; \\ \text{[simplifica |derivada]}$$

$$\mathbf{B12} = \text{Simplify}[\text{D}[\mathbf{F2}, \mathbf{x}, \mathbf{y}]]; \\ \text{[simplifica |derivada]}$$

$$\mathbf{B21} = \text{Simplify}[\text{D}[\mathbf{F2}, \mathbf{y}, \mathbf{x}]]; \\ \text{[simplifica |derivada]}$$

$$\mathbf{B22} = \text{Simplify}[\text{D}[\mathbf{F2}, \mathbf{y}, \mathbf{y}]]; \\ \text{[simplifica |derivada]}$$

$$\mathbf{H2} = \{\{\mathbf{B11}, \mathbf{B12}\}, \{\mathbf{B21}, \mathbf{B22}\}\};$$

$$\mathbf{H2} = \text{FullSimplify}[\mathbf{H2} /. \{ \mathbf{x} \rightarrow 2/3, \mathbf{y} \rightarrow \sqrt{-\frac{5}{18} + \frac{\sqrt{17}}{6}} \}]; \\ \text{[simplifica completamente]}$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{96} (-107 + 45 \sqrt{17}), \frac{1}{48} \sqrt{\frac{1}{2} (-47525 + 13011 \sqrt{17})} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{1}{48} \sqrt{\frac{1}{2} (-47525 + 13011 \sqrt{17})}, \frac{1}{96} (-1 - 105 \sqrt{17}) \right\} \right\}$$

Condição de Não Degenerescência

Segunda derivada de F

$$\mathbf{D2F} = \text{FullSimplify}[\{\mathbf{V0.H1.V0}, \mathbf{V0.H2.V0}\}]; \\ \text{[simplifica completamente]}$$

$$\left\{ -\frac{3}{512} \sqrt{1608069 + 809923 \sqrt{17}}, -\frac{3(5887 + 601 \sqrt{17})}{4096} \right\}$$

Produto interno em iii) do Teorema 2.4

$$\text{FullSimplify}[\mathbf{W0.D2F}]; \\ \text{[simplifica completamente]}$$

$$\frac{9(89 + 15 \sqrt{17})}{2048}$$

Apêndice X

Campo de Vetores nas coordenadas em (3.2).

$$F1 = -y + \frac{(1-x)\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{x(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$F2 = x - \frac{y\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

Campo de Vetores em coordenadas polares centradas na origem

$$r1 = r \left((1-r^2)\mu + \frac{\lambda(-r + \cos[\theta])}{\sqrt{1+r^2-2r\cos[\theta]}} \right);$$

$$\theta1 = r - \frac{\lambda \sin[\theta]}{\sqrt{1+r^2-2r\cos[\theta]}};$$

$$r1 /. r \rightarrow \theta$$

$$\theta$$

$$\theta1 /. r \rightarrow \theta$$

$$-\lambda \sin[\theta]$$

$$DP = \{ \{D[r1, r], D[r1, \theta]\}, \{D[\theta1, r], D[\theta1, \theta]\} \}$$

$$\left\{ \left\{ (1-r^2)\mu + \frac{\lambda(-r + \cos[\theta])}{\sqrt{1+r^2-2r\cos[\theta]}} + r \left(-2r\mu - \frac{\lambda(2r-2\cos[\theta])(-r+\cos[\theta])}{2(1+r^2-2r\cos[\theta])^{3/2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{1+r^2-2r\cos[\theta]}} \right), r \left(-\frac{r\lambda(-r+\cos[\theta])\sin[\theta]}{(1+r^2-2r\cos[\theta])^{3/2}} - \frac{\lambda\sin[\theta]}{\sqrt{1+r^2-2r\cos[\theta]}} \right) \right\}, \left\{ 1 + \frac{\lambda(2r-2\cos[\theta])\sin[\theta]}{2(1+r^2-2r\cos[\theta])^{3/2}}, -\frac{\lambda\cos[\theta]}{\sqrt{1+r^2-2r\cos[\theta]}} + \frac{r\lambda\sin[\theta]^2}{(1+r^2-2r\cos[\theta])^{3/2}} \right\} \right\}$$

Q1 = (0,0)

$$J1 = DP /. \{\theta \rightarrow \theta, r \rightarrow \theta\}$$

$$\{ \{\lambda + \mu, \theta\}, \{1, -\lambda\} \}$$

Eigensystem[J1]

[autovalores e autovetores]

$$\{ \{-\lambda, \lambda + \mu\}, \{ \{\theta, 1\}, \{2\lambda + \mu, 1\} \} \}$$

Q2 = ($\pi, 0$)

$$J1 = DP / . \{ \theta \rightarrow \pi, r \rightarrow 0 \}$$

$$\{ \{-\lambda + \mu, 0\}, \{1, \lambda\} \}$$

Eigensystem[J1]

[autovalores e autovetores]

$$\{ \{\lambda, -\lambda + \mu\}, \{ \{0, 1\}, \{-2\lambda + \mu, 1\} \} \}$$

Portanto, em $\lambda = \mu$ temos que o ponto Q2 muda sua estabilidade.

Tomemos $\lambda = \mu$.

$$\lambda = \mu;$$

Translação do ponto de equilíbrio Q2 para a origem

$$G1 = r1 / . \theta \rightarrow \theta + \pi$$

$$r \left((1 - r^2) \mu + \frac{\mu (-r - \cos[\theta])}{\sqrt{1 + r^2 + 2 r \cos[\theta]}} \right)$$

$$G2 = \theta 1 / . \theta \rightarrow \theta + \pi$$

$$r + \frac{\mu \sin[\theta]}{\sqrt{1 + r^2 + 2 r \cos[\theta]}}$$

Teste

$$\{G1, G2\} / . \{ \theta \rightarrow 0, r \rightarrow 0 \}$$

$$\{0, 0\}$$

$$DG = \{ \{D[G1, r], D[G1, \theta]\}, \{D[G2, r], D[G2, \theta]\} \}$$

[derivada [derivada [derivada [derivada]

$$\left\{ \left\{ (1 - r^2) \mu + \frac{\mu (-r - \cos[\theta])}{\sqrt{1 + r^2 + 2 r \cos[\theta]}} + \right.$$

$$r \left(-2 r \mu - \frac{\mu (-r - \cos[\theta]) (2 r + 2 \cos[\theta])}{2 (1 + r^2 + 2 r \cos[\theta])^{3/2}} - \frac{\mu}{\sqrt{1 + r^2 + 2 r \cos[\theta]}} \right),$$

$$r \left(\frac{r \mu (-r - \cos[\theta]) \sin[\theta]}{(1 + r^2 + 2 r \cos[\theta])^{3/2}} + \frac{\mu \sin[\theta]}{\sqrt{1 + r^2 + 2 r \cos[\theta]}} \right) \left. \right\},$$

$$\left\{ 1 - \frac{\mu (2 r + 2 \cos[\theta]) \sin[\theta]}{2 (1 + r^2 + 2 r \cos[\theta])^{3/2}}, \frac{\mu \cos[\theta]}{\sqrt{1 + r^2 + 2 r \cos[\theta]}} + \frac{r \mu \sin[\theta]^2}{(1 + r^2 + 2 r \cos[\theta])^{3/2}} \right\}$$

J1 = DG /. {r → 0, θ → 0}

{{0, 0}, {1, μ}}

Eigensystem[J1]

[autovalores e autovetores]

{{0, μ}, {{-μ, 1}, {0, 1}}}

Matriz de Mudança

M = {{-μ, 0}, {1, 1}};

MatrixForm[%]

[forma de matriz]

$$\begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M1 = Inverse[M]

[matriz inversa]

{{{-1/μ, 0}, {1/μ, 1}}

H1 = Simplify[-G1 / μ] /. {r → -μ x, θ → x + y}

[simplifica]

$$-x \mu \left(-1 + x^2 \mu^2 + \frac{-x \mu + \cos[x + y]}{\sqrt{1 + x^2 \mu^2 - 2 x \mu \cos[x + y]}} \right)$$

H2 = FullSimplify[G2 + G1 / μ] /. {r → -μ x, θ → x + y}

[simplifica completamente]

$$-2 x \mu + x^3 \mu^3 + \frac{x \mu (-x \mu + \cos[x + y])}{\sqrt{1 + x^2 \mu^2 - 2 x \mu \cos[x + y]}} + \frac{\mu \sin[x + y]}{\sqrt{1 + x^2 \mu^2 - 2 x \mu \cos[x + y]}}$$

{H1, H2} /. {x → 0, y → 0}

{0, 0}

Matriz Jacobiana de H

JL = {{D[H1, x], D[H1, y]}, {D[H2, x], D[H2, y]}};

[derivada] [derivada] [derivada] [derivada]

Matriz Jacobiana de H na origem

JL0 = JL /. {x → 0, y → 0}

{{0, 0}, {0, μ}}

Estamos na forma canônica do Teorema 1.4

Função A do Teorema 1.4

$$A = -x\mu \left(-1 + x^2\mu^2 + \frac{-x\mu + \cos[x+y]}{\sqrt{1+x^2\mu^2 - 2x\mu\cos[x+y]}} \right);$$

Função B que é a função $\lambda y + B(x,y)$ do Teorema 1.4

$$B = -2x\mu + x^3\mu^3 + \frac{x\mu(-x\mu + \cos[x+y])}{\sqrt{1+x^2\mu^2 - 2x\mu\cos[x+y]}} + \frac{\mu\sin[x+y]}{\sqrt{1+x^2\mu^2 - 2x\mu\cos[x+y]}};$$

Resolvendo $B = 0$ para y em função de x

Definição de B , tomando $y = f(x)$

$$B = \mu \left(x \left(-2 + x\mu \left(x\mu - \frac{1}{\sqrt{1+x^2\mu^2 - 2x\mu\cos[x+f[x]]}} \right) \right) + \frac{x\cos[x+f[x]] + \sin[x+f[x]]}{\sqrt{1+x^2\mu^2 - 2x\mu\cos[x+f[x]]}} \right);$$

$$B / . x \rightarrow 0$$

$$\mu \sin[f[0]]$$

Como queremos $B(0, f(0)) = 0$, devemos ter que $\sin[f[0]] = 0$, de onde $f[0] = 0$.

$$f[0] = 0$$

$$0$$

Derivando ambos os membros de $B = 0$ em relação a x

$$B1 = D[B, x];$$

[derivada]

Aplicando em $x = 0$ e igualando a zero

$$B1 / . x \rightarrow 0$$

$$\mu f'[0]$$

Temos então que $f'[0] = 0$

$$f'[0] = 0$$

$$0$$

Derivando de novo em relação a x

$$B2 = D[B1, x];$$

[derivada]

Aplicando em $x = 0$ e igualando a zero

$$B2 / . x \rightarrow 0$$

$$\mu (2\mu + f''[0])$$

Temos então que $f''[0] = -2\mu$

Assim, $y = f(x) = -\mu x^2 + \dots$

Substituindo em A e tomando a expansão de Taylor para encontrar a função $g(x)$.

$$A = -x\mu \left(-1 + x^2\mu^2 + \frac{-x\mu + \cos[x+y]}{\sqrt{1 + x^2\mu^2 - 2x\mu \cos[x+y]}} \right) / . y \rightarrow -\mu x^2$$

$$-x\mu \left(-1 + x^2\mu^2 + \frac{-x\mu + \cos[x - x^2\mu]}{\sqrt{1 + x^2\mu^2 - 2x\mu \cos[x - x^2\mu]}} \right)$$

Aplicando em $x = 0$

$$A / . x \rightarrow 0$$

$$0$$

Derivando em relação a x

$$A1 = D[A, x];$$

[derivada]

Aplicando em $x = 0$

$$A1 / . x \rightarrow 0$$

$$0$$

Derivando de novo

$$A2 = D[A1, x];$$

[derivada]

Aplicando em $x = 0$

$$A2 / . x \rightarrow 0$$

$$0$$

Derivando de novo

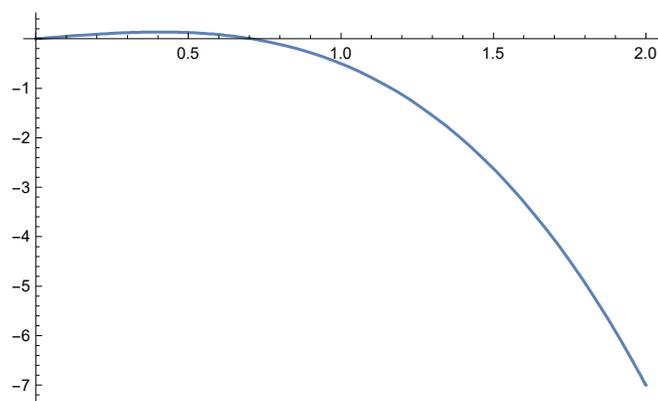
A3 = D[A2, x];
[\[derivada\]](#)

Aplicando em $x = 0$

A3 /. x -> 0
 $-3\mu(-1 + 2\mu^2)$

Portanto, temos que $g(x) = A(x, f(x)) = -(\mu(-1 + 2\mu^2)x^3)/2 + \dots$

Plot[-μ(-1 + 2μ^2)/2, {μ, 0, 2}]
[\[gráfico\]](#)



Solve[-μ(-1 + 2μ^2)/2 == 0, μ]
[\[resolve\]](#)

$\left\{ \left\{ \mu \rightarrow 0 \right\}, \left\{ \mu \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ \mu \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \right\}$

Segundo o Teorema 1.4, para μ entre 0 e $\frac{1}{\sqrt{2}}$, temos que o equilíbrio $Q2 = (\pi, 0)$ é um nó instável. e para $\mu > \frac{1}{\sqrt{2}}$, o equilíbrio $Q2$ é uma sela.

Devemos analisar então o caso onde $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

A3 /. x -> 0
 0

Assim, vamos derivar mais uma vez $A3$ com respeito a x

A4 = D[A3, x];
[\[derivada\]](#)

Aplicando em $x = 0$

$$A4 / . x \rightarrow 0$$

$$0$$

Derivando de novo

$$A5 = D[A4, x];$$

[derivada

Aplicando em $x = 0$

$$A5 / . x \rightarrow 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}$$

Segundo o Teorema 1.4, para $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$, temos que o equilíbrio Q2 é uma sela.

Apêndice XI

Componentes do campo de vetores do sistema (3.2).

$$F1 = -y + \frac{(1-x)\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{x(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$F2 = x - \frac{y\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

x' substituindo os valores polares

$$x1 = \text{FullSimplify}[F1 /. \{x \rightarrow 1 - r \text{Cos}[\theta], y \rightarrow r \text{Sin}[\theta]\}, r \geq 0]$$

$$\lambda \text{Cos}[\theta] + \frac{r\mu(r - 2\text{Cos}[\theta])(-1 + r\text{Cos}[\theta])}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\text{Cos}[\theta]}} - r\text{Sin}[\theta]$$

y' substituindo os valores polares

$$y1 = \text{Simplify}[F2 /. \{x \rightarrow 1 - r \text{Cos}[\theta], y \rightarrow r \text{Sin}[\theta]\}, r \geq 0]$$

$$1 - r\text{Cos}[\theta] - \lambda\text{Sin}[\theta] + \frac{r^2\mu(-r + 2\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\theta]}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\text{Cos}[\theta]}}$$

r'

$$r1 = \text{FullSimplify}[r(-x1\text{Cos}[\theta] + y1\text{Sin}[\theta])]$$

$$r \left(-\lambda - \frac{r^3\mu}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\text{Cos}[\theta]}} + \frac{r\mu(3r - 2\text{Cos}[\theta])\text{Cos}[\theta]}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\text{Cos}[\theta]}} + \text{Sin}[\theta] \right)$$

\theta'

$$\theta1 = \text{FullSimplify}[x1\text{Sin}[\theta] + y1\text{Cos}[\theta]]$$

$$\text{Cos}[\theta] - \left(r \left(\sqrt{1 + r^2 - 2r\text{Cos}[\theta]} + r\mu\text{Sin}[\theta] - \mu\text{Sin}[2\theta] \right) \right) / \left(\sqrt{1 + r^2 - 2r\text{Cos}[\theta]} \right)$$

Tomando r = 0

$$r1 /. r \rightarrow 0$$

$$0$$

$$\theta1 /. r \rightarrow 0$$

$$\text{Cos}[\theta]$$

Matriz Jacobiana

$$DG = \text{Simplify}[\{\{D[\theta 1, \theta], D[\theta 1, r]\}, \{D[r 1, \theta], D[r 1, r]\}\}];$$

[simplifica
[derivada
[derivada
[derivada
[derivada

Matriz Jacobiana aplicada em Q1 = (0, π/2)

$$J1 = DG /. \{r \rightarrow 0, \theta \rightarrow \pi / 2\}$$

$$\{\{-1, -1\}, \{0, 1 - \lambda\}\}$$

Eigensystem[J1]

[autovalores e autovetores

$$\{\{-1, 1 - \lambda\}, \left\{\{1, 0\}, \left\{-\frac{1}{2 - \lambda}, 1\right\}\right\}\}$$

Matriz Jacobiana aplicada em Q2 = (0, -π/2)

$$J2 = DG /. \{r \rightarrow 0, \theta \rightarrow -\pi / 2\}$$

$$\{\{1, -1\}, \{0, -1 - \lambda\}\}$$

Eigensystem[J2]

[autovalores e autovetores

$$\{\{1, -1 - \lambda\}, \left\{\{1, 0\}, \left\{-\frac{1}{-2 - \lambda}, 1\right\}\right\}\}$$

Vamos tomar o deslocamento do ponto de equilíbrio Q1 para a origem.

$$G1 = \theta 1 /. \theta \rightarrow \theta + \pi / 2$$

$$-\text{Sin}[\theta] - \left(r \left(r \mu \text{Cos}[\theta] + \sqrt{1 + r^2 + 2 r \text{Sin}[\theta]} - \mu \text{Sin}\left[2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right] \right) \right) / \left(\sqrt{1 + r^2 + 2 r \text{Sin}[\theta]} \right)$$

$$G2 = r 1 /. \theta \rightarrow \theta + \pi / 2$$

$$r \left(-\lambda + \text{Cos}[\theta] - \frac{r^3 \mu}{\sqrt{1 + r^2 + 2 r \text{Sin}[\theta]}} - \frac{r \mu \text{Sin}[\theta] (3 r + 2 \text{Sin}[\theta])}{\sqrt{1 + r^2 + 2 r \text{Sin}[\theta]}} \right)$$

Teste

$$\{G1, G2\} /. \{r \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0\}$$

$$\{0, 0\}$$

Portanto, para $\lambda = 1$ o ponto de equilíbrio Q1 muda sua estabilidade. Tomemos então, $\lambda = 1$

$$\lambda = 1;$$

G1

$$-\sin[\theta] - \left(r \left(r \mu \cos[\theta] + \sqrt{1 + r^2 + 2 r \sin[\theta]} - \mu \sin\left[2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right] \right) \right) / \left(\sqrt{1 + r^2 + 2 r \sin[\theta]} \right)$$

G2

$$r \left(-1 + \cos[\theta] - \frac{r^3 \mu}{\sqrt{1 + r^2 + 2 r \sin[\theta]}} - \frac{r \mu \sin[\theta] (3 r + 2 \sin[\theta])}{\sqrt{1 + r^2 + 2 r \sin[\theta]}} \right)$$

Matriz Jacobiana do novo campo aplicada na origem

DG = Simplify [{ {D[G1, θ], D[G1, r]}, {D[G2, θ], D[G2, r]} }] ;
[simplifica [derivada [derivada [derivada [derivada

J1 = DG /. {r → 0, θ → 0}

{ {-1, -1}, {0, 0}

Eigensystem[J1]

[autovalores e autovetores

{ {-1, 0}, {1, 0}, {-1, 1}}

Matriz de mudança

M = { {-1, 1}, {1, 0}

{ {-1, 1}, {1, 0}

MatrixForm[%]

[forma de matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inverse[M]

[matriz inversa

{ {0, 1}, {1, 1}

Campo H = (H1,H2) = (x',y') no Teorema 1.4

H1 = FullSimplify[G2] /. {r → x, θ → y - x}

[simplifica completamente

$$x \left(-1 + \cos[x - y] - \frac{x^3 \mu}{\sqrt{1 + x^2 - 2 x \sin[x - y]}} + \frac{x \mu (3 x - 2 \sin[x - y]) \sin[x - y]}{\sqrt{1 + x^2 - 2 x \sin[x - y]}} \right)$$

$H2 = \text{FullSimplify}[G1 + G2] /. \{r \rightarrow x, \theta \rightarrow y - x\}$
[simplifica completamente]

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\sin[x-y]}} \left(-x^4 \mu - 2x^2 \mu \sin[x-y]^2 - \right. \\ \left. 2x \sqrt{1+x^2-2x\sin[x-y]} + \sin[x-y] \left(3x^3 \mu + \sqrt{1+x^2-2x\sin[x-y]} \right) + \right. \\ \left. x \cos[x-y] \left(-x \mu + 2 \mu \sin[x-y] + \sqrt{1+x^2-2x\sin[x-y]} \right) \right)$$

Teste

$\{H1, H2\} /. \{x \rightarrow \theta, y \rightarrow \theta\}$
 $\{\theta, \theta\}$

Matriz Jacobiana de H

$JL = \{\{D[H1, x], D[H1, y]\}, \{D[H2, x], D[H2, y]\}\};$
[derivada] [derivada] [derivada] [derivada]

Matriz Jacobiana de H na origem

$JL\theta = JL /. \{x \rightarrow \theta, y \rightarrow \theta\}$
 $\{\{\theta, \theta\}, \{\theta, -1\}\}$

Devemos multiplicar o campo H por -1 para termos o autovalor não nulo positivo

$H1 = -H1;$
 $H2 = -H2;$

Matriz Jacobiana do novo campo H

$JLm = \{\{D[H1, x], D[H1, y]\}, \{D[H2, x], D[H2, y]\}\};$
[derivada] [derivada] [derivada] [derivada]

Matriz Jacobiana de H na origem

$JL\theta = JLm /. \{x \rightarrow \theta, y \rightarrow \theta\}$
 $\{\{\theta, \theta\}, \{\theta, 1\}\}$

Estamos na forma canônica do Teorema 1.4

Função A do Teorema 1.4

$A = H1;$

Função B que é a função $\lambda y + B(x,y)$ do Teorema 1.4

$$B = H2;$$

Resolvendo $B = 0$ para y em função de x

Definição de B, tomando $y = f(x)$

$$B = - \left(\left(-x^4 \mu - 2x^2 \mu \sin[x - f[x]] \right)^2 - 2x \sqrt{1+x^2 - 2x \sin[x - f[x]]} + \right. \\ \left. \sin[x - f[x]] \left(3x^3 \mu + \sqrt{1+x^2 - 2x \sin[x - f[x]]} \right) + \right. \\ \left. x \cos[x - f[x]] \left(-x \mu + 2 \mu \sin[x - f[x]] + \sqrt{1+x^2 - 2x \sin[x - f[x]]} \right) \right) / \\ \left(\sqrt{1+x^2 - 2x \sin[x - f[x]]} \right) \\ - \frac{1}{\sqrt{1+x^2 - 2x \sin[x - f[x]]}} \left(-x^4 \mu - 2x^2 \mu \sin[x - f[x]] \right)^2 - \\ 2x \sqrt{1+x^2 - 2x \sin[x - f[x]]} + \sin[x - f[x]] \left(3x^3 \mu + \sqrt{1+x^2 - 2x \sin[x - f[x]]} \right) + \\ x \cos[x - f[x]] \left(-x \mu + 2 \mu \sin[x - f[x]] + \sqrt{1+x^2 - 2x \sin[x - f[x]]} \right) \right)$$

$$B / . x \rightarrow 0$$

$$\sin[f[0]]$$

Como queremos $B(0, f(0)) = 0$, devemos ter que $\sin[f[0]] = 0$, de onde $f[0] = 0$.

$$f[0] = 0$$

$$0$$

Derivando ambos os membros de $B = 0$ em relação a x

$$B1 = D[B, x];$$

[derivada]

Aplicando em $x = 0$ e igualando a zero

$$B1 / . x \rightarrow 0$$

$$f'[0]$$

Temos então que $f' [0] = 0$

$$f' [0] = 0$$

Derivando de novo em relação a x

$$B2 = D[B1, x];$$

[derivada]

Aplicando em $x = 0$ e igualando a zero

$$B2 / . x \rightarrow 0$$

$$-2 \mu + f'' [0]$$

Temos então que $f'' [0] = 2 \mu$

Assim, $y = f(x) = \mu x^2 + \dots$

Substituindo em A e tomando a expansão de Taylor para encontrar a função $g(x)$.

$$A = H1 / . y \rightarrow \mu x^2$$

$$-x \left(-1 + \cos [x - x^2 \mu] - \frac{x^3 \mu}{\sqrt{1 + x^2 - 2 x \sin [x - x^2 \mu]}} + \right.$$

$$\left. (x \mu (3 x - 2 \sin [x - x^2 \mu]) \sin [x - x^2 \mu]) / \left(\sqrt{1 + x^2 - 2 x \sin [x - x^2 \mu]} \right) \right)$$

Aplicando em $x = 0$

$$A / . x \rightarrow 0$$

$$0$$

Derivando em relação a x

$$A1 = D[A, x];$$

[derivada]

Aplicando em $x = 0$

$$A1 / . x \rightarrow 0$$

$$0$$

Derivando de novo

$$A2 = D[A1, x];$$

|derivada

Aplicando em $x = 0$

$$A2 /. x \rightarrow 0$$

0

Derivando de novo

$$A3 = D[A2, x];$$

|derivada

Aplicando em $x = 0$

$$A3 /. x \rightarrow 0$$

3

Portanto, temos que $g(x) = A(x, f(x)) = (x^3)/2 + \dots$

Logo, pelo Teorema 1.4 o equilíbrio $Q1 = (\pi/2, 0)$ seria um nó repulsor. Mas como multiplicamos o campo por -1, temos que o equilíbrio $Q1$ é um nó atrator.

Apêndice XII

Componentes do campo de vetores do sistema (3.2).

$$F1 = -y + \frac{(1-x)\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{x(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$F2 = x - \frac{y\lambda}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y(1-x^2-y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

Matriz Jacobiana DF

```

a11 = FullSimplify[D[F1, x]];
      [simplifica compl... [derivada]
a12 = FullSimplify[D[F1, y]];
      [simplifica compl... [derivada]
a21 = FullSimplify[D[F2, x]];
      [simplifica compl... [derivada]
a22 = FullSimplify[D[F2, y]];
      [simplifica compl... [derivada]
DF = Simplify[{{a11, a12}, {a21, a22}}, μ > 0];
      [simplifica

```

Polinômio Característico da Matriz Jacobiana

```

P[s_, {x_, y_}] := Det[DF - s IdentityMatrix[2]]
                  [determina... [matriz identidade]

```

Coefficientes do Polinômio Característico.

```

cc[i_, {x_, y_}] := Coefficient[P[s, {x, y}], s, i]
                  [coeficiente]

```

Coefficiente do termo independente.

```

c = FullSimplify[cc[0, {x, y}], t < 0]
    [simplifica completamente]

```

$$\left(\left((-1+x)^2 + y^2 \right)^{3/2} (x^2 + y^2)^{3/2} + 2x^4\lambda\mu - 4x^5\lambda\mu + 2x^6\lambda\mu - y^2\lambda\mu + 3x^2y^2\lambda\mu - 8x^3y^2\lambda\mu + 6x^4y^2\lambda\mu + y^4\lambda\mu - 4xy^4\lambda\mu + 6x^2y^4\lambda\mu + 2y^6\lambda\mu - 2 \left((-1+x)^2 + y^2 \right)^{3/2} (x^2 + y^2)^{3/2} \mu^2 + 2x^2 \left((-1+x)^2 + y^2 \right)^{3/2} (x^2 + y^2)^{3/2} \mu^2 + 2y^2 \left((-1+x)^2 + y^2 \right)^{3/2} (x^2 + y^2)^{3/2} \mu^2 \right) / \left(\left((-1+x)^2 + y^2 \right)^{3/2} (x^2 + y^2)^{3/2} \right)$$

Coefficiente do termo linear.

```

b = FullSimplify[cc[1, {x, y}], t < 0]
    [simplifica completamente]

```

$$\frac{\lambda}{\sqrt{(-1+x)^2 + y^2}} + \frac{(-1 + 3x^2 + 3y^2)\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Coeficiente do termo quadrático.

`a = FullSimplify[cc[2, {x, y}], t < 0]`
[simplifica completamente]

1

Discriminante ($\delta = b^2 - 4ac$)

`d = FullSimplify[b^2 - 4 a c]`
[simplifica completamente]

$$-4 + \frac{\lambda^2}{(-1+x)^2 + y^2} - \frac{2((-1+x)x + (-1+y)y)(1+x^2+y^2)((-1+x)x + y + y^2)\lambda\mu}{((-1+x)^2 + y^2)^{3/2}(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{(1+x^2+y^2)^2\mu^2}{x^2 + y^2}$$

μ e λ de equilíbrio

$$\mu_e = -\frac{((-1+x)x + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{y(-1+x^2 + y^2)};$$

$$\lambda_e = \frac{\sqrt{(-1+x)^2 + y^2}(x^2 + y^2)}{y};$$

Quero estudar δ apenas para valores de parâmetros que o sistema admita equilíbrios

`delta = FullSimplify[d /. {μ → μe, λ → λe}]`
[simplifica completamente]

$$4x(-1+2x) + \frac{x^2(1+x+2x^2)^2}{(1+x)^2y^2} + 4y^2 - \frac{4x}{(-1+x)^2 + y^2} - \frac{4(-1+x)}{(1+x)(-1+x^2+y^2)^2} + \frac{8+4x-8x^2}{(1+x)^2(-1+x^2+y^2)}$$

`ExpandNumerator[delta]`

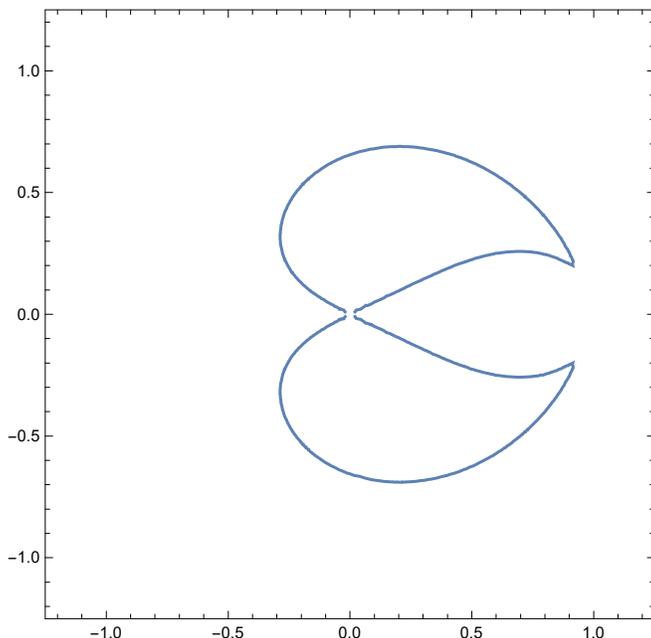
[expande numerador]

$$-4x + 8x^2 + \frac{x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 4x^6}{(1+x)^2y^2} + 4y^2 - \frac{4x}{(-1+x)^2 + y^2} + \frac{4-4x}{(1+x)(-1+x^2+y^2)^2} + \frac{8+4x-8x^2}{(1+x)^2(-1+x^2+y^2)}$$

Curva no plano x,y onde o discriminante é igual a zero (devemos considerar apenas $y > 0$)

```
r0 = ContourPlot[delta == 0, {x, -1.2, 1.2}, {y, -1.2, 1.2}]
```

[|gráfico de contornos](#)



Resolvendo delta igual a zero para y em função de x

```
D2 = Solve[delta == 0, y]
```

[|resolve](#)

$$\left\{ \left\{ y \rightarrow -\sqrt{\text{Root}\left[x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 8x^5 + 11x^6 - 10x^7 + 13x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + (-4 + 4x + 11x^2 - 28x^3 + 26x^4 - 16x^5 + 35x^6 - 48x^7 + 20x^8) \mp 1 + (8 - 20x + 19x^2 - 2x^3 + 27x^4 - 72x^5 + 40x^6) \mp 1^2 + (4 + 4x + x^2 - 48x^3 + 40x^4) \mp 1^3 + (-4 - 12x + 20x^2) \mp 1^4 + 4 \mp 1^5 \&, 1\right]}, \right. \\ \left. \left\{ y \rightarrow \sqrt{\text{Root}\left[x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 8x^5 + 11x^6 - 10x^7 + 13x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + (-4 + 4x + 11x^2 - 28x^3 + 26x^4 - 16x^5 + 35x^6 - 48x^7 + 20x^8) \mp 1 + (8 - 20x + 19x^2 - 2x^3 + 27x^4 - 72x^5 + 40x^6) \mp 1^2 + (4 + 4x + x^2 - 48x^3 + 40x^4) \mp 1^3 + (-4 - 12x + 20x^2) \mp 1^4 + 4 \mp 1^5 \&, 1\right]}, \right. \\ \left. \left\{ y \rightarrow -\sqrt{\text{Root}\left[x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 8x^5 + 11x^6 - 10x^7 + 13x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + (-4 + 4x + 11x^2 - 28x^3 + 26x^4 - 16x^5 + 35x^6 - 48x^7 + 20x^8) \mp 1 + (8 - 20x + 19x^2 - 2x^3 + 27x^4 - 72x^5 + 40x^6) \mp 1^2 + (4 + 4x + x^2 - 48x^3 + 40x^4) \mp 1^3 + (-4 - 12x + 20x^2) \mp 1^4 + 4 \mp 1^5 \&, 2\right]}, \right. \\ \left. \left\{ y \rightarrow \sqrt{\text{Root}\left[x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 8x^5 + 11x^6 - 10x^7 + 13x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + (-4 + 4x + 11x^2 - 28x^3 + 26x^4 - 16x^5 + 35x^6 - 48x^7 + 20x^8) \mp 1 + (8 - 20x + 19x^2 - 2x^3 + 27x^4 - 72x^5 + 40x^6) \mp 1^2 + \right.} \right.$$

$$\begin{aligned}
& (4 + 4x + x^2 - 48x^3 + 40x^4) \sqrt[3]{1} + (-4 - 12x + 20x^2) \sqrt[4]{1} + 4 \sqrt[5]{1} \& , 2 \Big\}, \\
\{y \rightarrow & -\sqrt{\text{Root}[x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 8x^5 + 11x^6 - 10x^7 + 13x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + \\
& (-4 + 4x + 11x^2 - 28x^3 + 26x^4 - 16x^5 + 35x^6 - 48x^7 + 20x^8) \sqrt[3]{1} + \\
& (8 - 20x + 19x^2 - 2x^3 + 27x^4 - 72x^5 + 40x^6) \sqrt[2]{1} + \\
& (4 + 4x + x^2 - 48x^3 + 40x^4) \sqrt[3]{1} + (-4 - 12x + 20x^2) \sqrt[4]{1} + 4 \sqrt[5]{1} \& , 3 \Big\}}, \\
\{y \rightarrow & \sqrt{\text{Root}[x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 8x^5 + 11x^6 - 10x^7 + 13x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + \\
& (-4 + 4x + 11x^2 - 28x^3 + 26x^4 - 16x^5 + 35x^6 - 48x^7 + 20x^8) \sqrt[3]{1} + \\
& (8 - 20x + 19x^2 - 2x^3 + 27x^4 - 72x^5 + 40x^6) \sqrt[2]{1} + \\
& (4 + 4x + x^2 - 48x^3 + 40x^4) \sqrt[3]{1} + (-4 - 12x + 20x^2) \sqrt[4]{1} + 4 \sqrt[5]{1} \& , 3 \Big\}}, \\
\{y \rightarrow & -\sqrt{\text{Root}[x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 8x^5 + 11x^6 - 10x^7 + 13x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + \\
& (-4 + 4x + 11x^2 - 28x^3 + 26x^4 - 16x^5 + 35x^6 - 48x^7 + 20x^8) \sqrt[3]{1} + \\
& (8 - 20x + 19x^2 - 2x^3 + 27x^4 - 72x^5 + 40x^6) \sqrt[2]{1} + \\
& (4 + 4x + x^2 - 48x^3 + 40x^4) \sqrt[3]{1} + (-4 - 12x + 20x^2) \sqrt[4]{1} + 4 \sqrt[5]{1} \& , 4 \Big\}}, \\
\{y \rightarrow & \sqrt{\text{Root}[x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 8x^5 + 11x^6 - 10x^7 + 13x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + \\
& (-4 + 4x + 11x^2 - 28x^3 + 26x^4 - 16x^5 + 35x^6 - 48x^7 + 20x^8) \sqrt[3]{1} + \\
& (8 - 20x + 19x^2 - 2x^3 + 27x^4 - 72x^5 + 40x^6) \sqrt[2]{1} + \\
& (4 + 4x + x^2 - 48x^3 + 40x^4) \sqrt[3]{1} + (-4 - 12x + 20x^2) \sqrt[4]{1} + 4 \sqrt[5]{1} \& , 4 \Big\}}, \\
\{y \rightarrow & -\sqrt{\text{Root}[x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 8x^5 + 11x^6 - 10x^7 + 13x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + \\
& (-4 + 4x + 11x^2 - 28x^3 + 26x^4 - 16x^5 + 35x^6 - 48x^7 + 20x^8) \sqrt[3]{1} + \\
& (8 - 20x + 19x^2 - 2x^3 + 27x^4 - 72x^5 + 40x^6) \sqrt[2]{1} + \\
& (4 + 4x + x^2 - 48x^3 + 40x^4) \sqrt[3]{1} + (-4 - 12x + 20x^2) \sqrt[4]{1} + 4 \sqrt[5]{1} \& , 5 \Big\}}, \\
\{y \rightarrow & \sqrt{\text{Root}[x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 8x^5 + 11x^6 - 10x^7 + 13x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + \\
& (-4 + 4x + 11x^2 - 28x^3 + 26x^4 - 16x^5 + 35x^6 - 48x^7 + 20x^8) \sqrt[3]{1} + \\
& (8 - 20x + 19x^2 - 2x^3 + 27x^4 - 72x^5 + 40x^6) \sqrt[2]{1} + \\
& (4 + 4x + x^2 - 48x^3 + 40x^4) \sqrt[3]{1} + (-4 - 12x + 20x^2) \sqrt[4]{1} + 4 \sqrt[5]{1} \& , 5 \Big\}}
\end{aligned}$$

Plotando a solução mais conveniente

`y1 = D2[[6]]`

$$\begin{aligned}
\{y \rightarrow & \sqrt{\text{Root}[x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 8x^5 + 11x^6 - 10x^7 + 13x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + (-4 + 4x + 11x^2 - 28x^3 + 26x^4 - \\
& 16x^5 + 35x^6 - 48x^7 + 20x^8) \sqrt[3]{1} + (8 - 20x + 19x^2 - 2x^3 + 27x^4 - 72x^5 + 40x^6) \sqrt[2]{1} + \\
& (4 + 4x + x^2 - 48x^3 + 40x^4) \sqrt[3]{1} + (-4 - 12x + 20x^2) \sqrt[4]{1} + 4 \sqrt[5]{1} \& , 3 \Big\}}
\end{aligned}$$

Parametrizando μ e λ em função de x para levar a curva acima no plano de parâmetros

`mf2 = FullSimplify[μ e /. y1];`
[simplifica completamente]

```
lfn2 = FullSimplify[λe /. y1];
```

[simplifica completamente]

Encontrando x para o qual, ao tomarmos $y = y1$, vamos ter $\mu e = 0$.

```
Solve[mfn2 == 0, {x}]
```

[resolve]

```
{{x -> 4/5}}
```

```
Solve[μe == 0, {y}]
```

[resolve]

```
{{y -> -i x}, {y -> i x}, {y -> -sqrt[x - x^2]}, {y -> sqrt[x - x^2]}}
```

```
sqrt[x - x^2] /. x -> 4/5
```

```
2/5
```

Assim, $\mu e = 0$, quando $x = \frac{4}{5}$ e $y1 = \frac{2}{5}$. Concluimos então que a curva no plano dos parâmetros corta $\mu = 0$ quando $\lambda = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

```
lfn2 = FullSimplify[λe /. {x -> 4/5, y -> 2/5}]
```

[simplifica completamente]

```
2/sqrt[5]
```

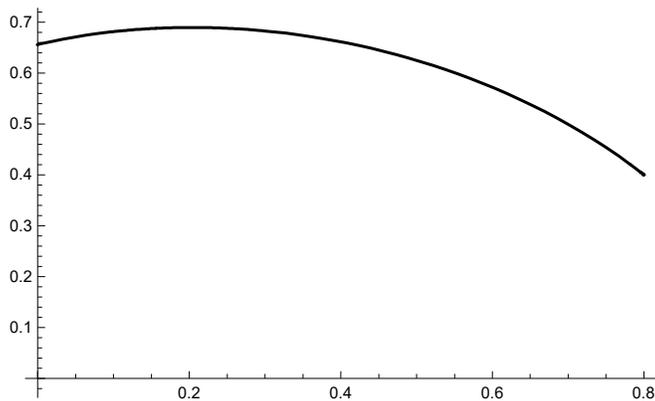
Primeira curva no plano (x,y) onde $\delta = 0$.

```
e1 = Plot[y /. y1, {x, 0, 4/5}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> Black]
```

[gráfico]

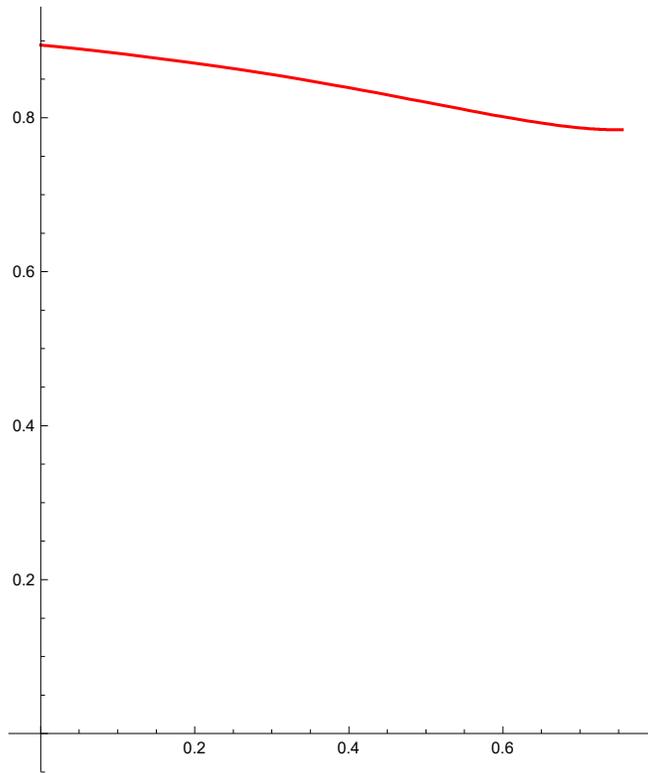
[origem dos eixos]

[estilo do gráfico] [preto]



Parametrização da primeira parte da curva onde $\delta = 0$.

```
FN2 = ParametricPlot[{mfn2, lfn2},  
  gráfico paramétrico  
  {x, 0.0001, 4 / 5}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> Red]  
  origem dos eixos      estilo do gráf... [verme
```



parametrização da segunda curva no plano (μ, λ) .

Resolvendo $\text{delta} = 0$ para x em função de y

```
D1 = Solve[delta == 0, x]  
|resolve
```


Plotando a solução mais conveniente

```
x1 = D1[ [1] ]
```

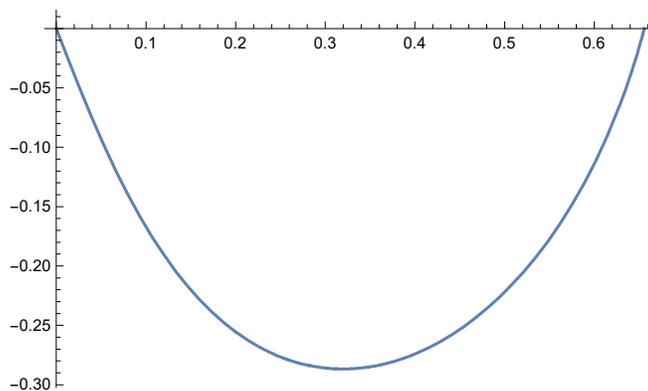
```
{x → Root [
  -4 y2 + 8 y4 + 4 y6 - 4 y8 + 4 y10 + (4 y2 - 20 y4 + 4 y6 - 12 y8) #1 + (1 + 11 y2 + 19 y4 + y6 + 20 y8)
  #12 + (-2 - 28 y2 - 2 y4 - 48 y6) #13 + (3 + 26 y2 + 27 y4 + 40 y6) #14 + (-8 - 16 y2 - 72 y4) #15 +
  (11 + 35 y2 + 40 y4) #16 + (-10 - 48 y2) #17 + (13 + 20 y2) #18 - 12 #19 + 4 #110 &, 1] }
```

```
d1 = Plot [Root [
```

```
  |gráf...|raiz
```

```
  -4 y2 + 8 y4 + 4 y6 - 4 y8 + 4 y10 + (4 y2 - 20 y4 + 4 y6 - 12 y8) #1 + (1 + 11 y2 + 19 y4 + y6 + 20 y8)
  #12 + (-2 - 28 y2 - 2 y4 - 48 y6) #13 + (3 + 26 y2 + 27 y4 + 40 y6) #14 +
  (-8 - 16 y2 - 72 y4) #15 + (11 + 35 y2 + 40 y4) #16 + (-10 - 48 y2) #17 +
  (13 + 20 y2) #18 - 12 #19 + 4 #110 &, 1], {y, 0, y0}, AxesOrigin → {0, 0}]
```

```
|origem dos eixos
```



Encontrando onde a curva $\delta = 0$ cruza o eixo y .

```
delta2 = delta /. x → 0
```

$$4y^2 + \frac{4}{(-1+y^2)^2} + \frac{8}{-1+y^2}$$

Solve[delta2 == 0, y]

[\[resolve\]](#)

$$\left\{ \left\{ y \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{4-10\left(\frac{2}{-11+3\sqrt{69}}\right)^{1/3}+2^{2/3}\left(-11+3\sqrt{69}\right)^{1/3}}}} \right\}, \left\{ y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{4-10\left(\frac{2}{-11+3\sqrt{69}}\right)^{1/3}+2^{2/3}\left(-11+3\sqrt{69}\right)^{1/3}}}} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ y \rightarrow -\frac{1}{2}(-1)^{3/4} \sqrt{\left(\frac{1}{3} \left(8i + 10i \left(\frac{2}{-11+3\sqrt{69}} \right)^{1/3} + 10\sqrt{3} \left(\frac{2}{-11+3\sqrt{69}} \right)^{1/3} - i 2^{2/3} \left(-11+3\sqrt{69}\right)^{1/3} + 2^{2/3}\sqrt{3} \left(-11+3\sqrt{69}\right)^{1/3} \right) \right)} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ y \rightarrow \frac{1}{2}(-1)^{3/4} \sqrt{\left(\frac{1}{3} \left(8i + 10i \left(\frac{2}{-11+3\sqrt{69}} \right)^{1/3} + 10\sqrt{3} \left(\frac{2}{-11+3\sqrt{69}} \right)^{1/3} - i 2^{2/3} \left(-11+3\sqrt{69}\right)^{1/3} + 2^{2/3}\sqrt{3} \left(-11+3\sqrt{69}\right)^{1/3} \right) \right)} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ y \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{3}}(-1)^{1/4} \sqrt{\left(-8i - 10i \left(\frac{2}{-11+3\sqrt{69}} \right)^{1/3} + 10\sqrt{3} \left(\frac{2}{-11+3\sqrt{69}} \right)^{1/3} + i 2^{2/3} \left(-11+3\sqrt{69}\right)^{1/3} + 2^{2/3}\sqrt{3} \left(-11+3\sqrt{69}\right)^{1/3} \right) \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ y \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1)^{1/4} \sqrt{\left(-8i - 10i \left(\frac{2}{-11+3\sqrt{69}} \right)^{1/3} + 10\sqrt{3} \left(\frac{2}{-11+3\sqrt{69}} \right)^{1/3} + i 2^{2/3} \left(-11+3\sqrt{69}\right)^{1/3} + 2^{2/3}\sqrt{3} \left(-11+3\sqrt{69}\right)^{1/3} \right) \right\} \right\}$$

Definindo o valor máximo para y

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{4-10\left(\frac{2}{-11+3\sqrt{69}}\right)^{1/3}+2^{2/3}\left(-11+3\sqrt{69}\right)^{1/3}}}};$$

mfn1 = FullSimplify[μe /. x1];

[\[simplifica completamente\]](#)

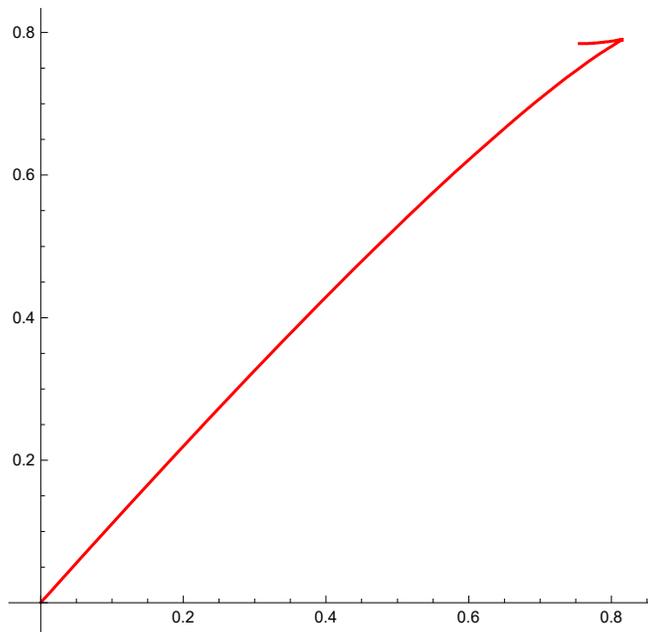
lfn1 = FullSimplify[λe /. x1];

[\[simplifica completamente\]](#)

Parametrização da segunda parte da curva onde $\delta = 0$

```
FN1 = ParametricPlot[{mfn1, lfn1}, {y, 0.0001, y0}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> Red]
```

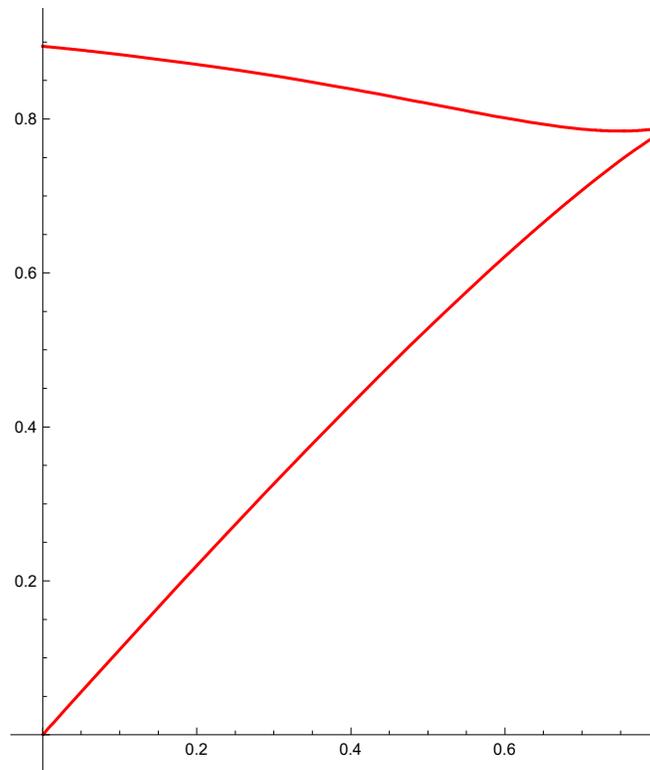
[gráfico paramétrico](#) [origem dos eixos](#) [estilo do gráfico](#) [vermelho](#)



Parametrização final das curvas onde $\delta = 0$.

Show[FN2, FN1]

[mostra](#)



Curvas no plano x,y onde o discriminante é zero, separadas pelas duas parametrizações

```
cp = ContourPlot[delta == 0, {x, -1, 0}, {y, 0, y0}, ContourStyle -> Red, PlotPoints -> 150];
```

[gráfico de contornos](#)

[estilo de contorno](#)

[ver...](#)

[número de pontos no gráf](#)

```
e2 = Plot[y /. y1, {x, 0, 4 / 5}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> Black, PlotRange -> All];
```

[gráfico](#)

[origem dos eixos](#)

[estilo do gráf...](#)

[preto](#)

[intervalo do g...](#)

[tudo](#)

Show[e2, cp]

[mostra](#)

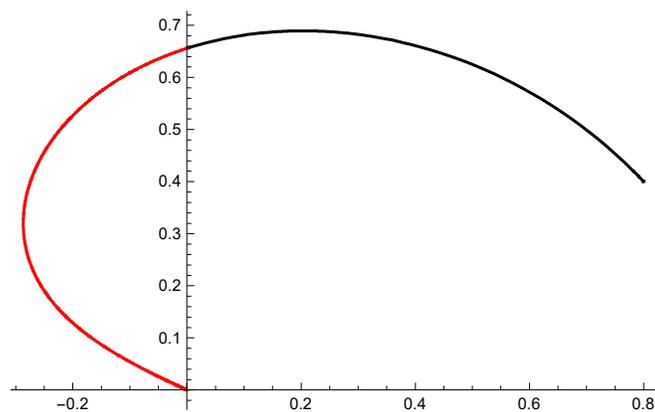
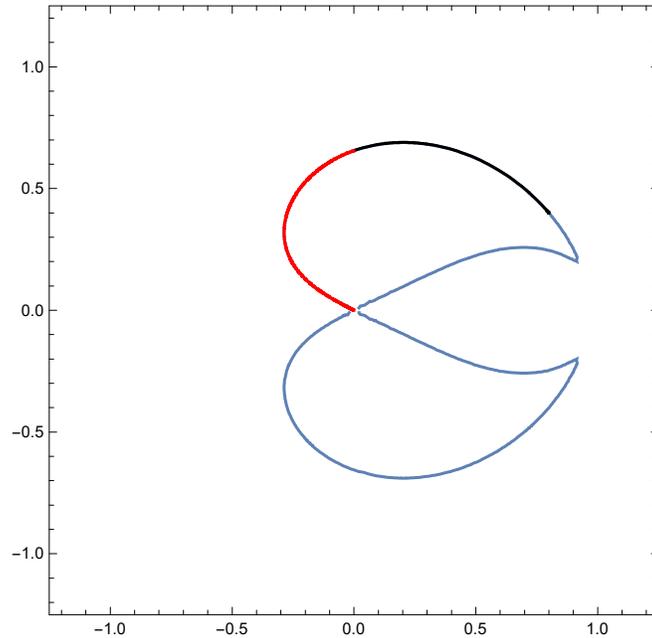


Ilustração mostrando que as curvas com y em função de x e x em função de y , de fato satisfazem $\Delta = 0$

Show[r0, e2, cp]

[mostra



Região do plano x,y em que temos equilíbrios no sistema, e curvas que satisfazem $\Delta = 0$.

`U = RegionPlot[{ $\lambda e \geq 0$ && $\mu e \geq 0$ }, {x, -1.2, 1.2}, {y, -1.2, 1.2}];`

[gráfico de uma região

Show [U, cp, e1]

mostra

