Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Uma Classe de Equações de Evolução não Lineares Sujeitas a Condições Iniciais não Locais

Alice Jennefer da Silva

Orientadora: Profª. Drª. Mariza Stefanello Simsen

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES.

Itajubá, 3 de março de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma Classe de Equações de Evolução não Lineares Sujeitas a Condições Iniciais não Locais

Alice Jennefer da Silva

Orientadora: Profª. Drª. Mariza Stefanello Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Análise Matemática

ITAJUBÁ – MG
3 DE MARÇO DE 2021

Dedico aos meus pais,

Rosana de Cássia Dionísio e Silva e Valdmir Moreira da Silva.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por continuar colocando pessoas dedicadas, pacientes, prestativas, compreensivas e motivadoras em minha vida.

A minha família pelas palavras de conforto e pelos melhores abraços.

À Profª. Drª. Mariza Stefanello Simsen, pela orientação deste trabalho e por ter iluminado o caminho que percorri.

Aos meus amigos pelo companheirismo.

Aos meus colegas pelos momentos de estudos.

Ao coordenador do curso, Prof. Dr. Jacson Simsen, pelas conversas e ensinamentos.

Ao corpo docente do Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Itajubá por contribuir para minha formação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja,
que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."

Nikolai Lobachevsky

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre a existência de C^0-soluções para uma classe de equações de evolução não lineares sujeitas a condições iniciais não locais da seguinte forma

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) \ni f(t) \\ f(t) \in F(t, u(t)) \\ u(0) = g(u), \end{cases}$$

onde $A : D(A) \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ é um operador m-acretivo em um espaço de Banach $\mathcal{B}$ de dimensão infinita, $F : [0, 2\pi] \times \overline{D(A)} \to \mathcal{B}$ é uma função multívoca não vazia, convexa, quase fortemente fracamente semicontínua superior e com valores fracamente compactos e $g : C([0, 2\pi]; \overline{D(A)}) \to \overline{D(A)}$ é uma função contínua.

Palavras–chave: Equação de evolução não linear, Condição inicial não local, Operador m-acretivo, Solução integral.

Abstract

This work presents a study about the existence of C^0-solutions for a class of nonlinear evolution equations subjected to nonlocal initial conditions, of the form

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) \ni f(t) \\ f(t) \in F(t, u(t)) \\ u(0) = g(u), \end{cases}$$

where $A : D(A) \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ is an m-accretive operator acting on the infinite-dimensional Banach space $\mathcal{B}$, $F : [0, 2\pi] \times \overline{D(A)} \to \mathcal{B}$ is a nonempty, convex and weakly compact valued almost strongly weakly upper semicontinuous multi-function and $g : C([0, 2\pi]; \overline{D(A)}) \to \overline{D(A)}$ is a continuous function.

Keywords: Nonlinear evolution equation, Nonlocal initial condition, M-accretive operator, Integral solution.

Sumário

Introdução

Sejam $\mathcal{B}$ um espaço de Banach, $A : D(A) \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ um operador m-acretivo, $F : [0, 2\pi] \times \overline{D(A)} \to \mathcal{B}$ uma função multívoca quase fortemente fracamente semicontínua superior e $g : C([0, 2\pi]; \overline{D(A)}) \to \overline{D(A)}$ uma função contínua. A equação de evolução não linear sujeita a condições iniciais não locais

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) \ni f(t) \\ f(t) \in F(t, u(t)) \\ u(0) = g(u) \end{cases} \tag{1}$$

representa a formulação abstrata de muitos problemas não lineares de interesse prático. Um exemplo é a difusão de um gás através de um tubo fino e transparente descrita por uma equação parabólica sujeita a uma condição inicial não local próxima a imposta em (1), veja [12].

Assim, formas específicas de (1) tem sido intensivamente investigadas nas últimas três décadas. Os artigos de Hirano [18], Hirano e Shioji [19], Paicu [27] e Vrabie [34] mostram a existência de solução do problema (1) sujeito a condição periódica $g(u) = u(2\pi)$, onde F é uma função unívoca. Enquanto os artigos de Aizicovici, Papageorgiou e Staicu [3], Lakshmikantham e Papageorgiou [20], Papageorgiou [29] e Paicu [26] consideram F uma função multívoca.

Ademais, o problema (1) sujeito a condição antiperiódica $g(u) = -u(2\pi)$ foi investigado por Aizicovici, Pavel e Vrabie [4]. No entanto, o estudo de soluções antiperiódicas para uma equação de evolução foi iniciado por Okochi [24] e posteriormente estas pesquisas atingiram um número significativo.

Vale ressaltar que, neste trabalho, abordamos o problema (1) sujeito a condição periódica $g(u) = u(2\pi)$ e antiperiódica $g(u) = -u(2\pi)$.

É importante estudar problemas de valores iniciais não locais. Estes têm melhores efeitos nas aplicações do que os problemas de valores iniciais locais. O primeiro artigo lidando com condições iniciais não locais para uma equação de evolução semilinear é devido a Byszewski [10]. O caso totalmente não linear foi considerado por Aizicovici e Lee [1], Aizicovici e McKibben [2], Aizicovici e Staicu [5], García-Falset [15] e García-Falset e Reich [16].

Com a finalidade de mostrar a existência de solução do problema (1), alguns autores utilizam argumentos de compacidade, método dos semigrupos e técnicas de ponto fixo. Em [10], por exemplo, são usados o método dos semigrupos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach e, em [1], os métodos de compacidade e as técnicas de ponto fixo.

Em [5] é estudado o caso em que $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach reflexivo, F é uma função multívoca mensurável em $t \in [0, 2\pi]$ e fortemente fracamente semicontínua superior em $u \in \overline{D(A)}$. Entretanto, neste trabalho, focamos no caso em que F é uma função multívoca quase fortemente fracamente semicontínua superior e permitimos que $\mathcal{B}$ seja um espaço de Banach não reflexivo.

Logo, o objetivo é mostrar resultados que garantem a existência C^0-soluções para uma classe de equações de evolução não lineares sujeitas a condições iniciais não locais, da forma presente em (1), onde $A : D(A) \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ é um operador m-acretivo em um espaço de Banach $\mathcal{B}$ de dimensão infinita, $F : [0, 2\pi] \times \overline{D(A)} \to \mathcal{B}$ é uma função multívoca não vazia, convexa, quase fortemente fracamente semicontínua superior e com valores fracamente compactos e $g : C([0, 2\pi]; \overline{D(A)}) \to \overline{D(A)}$ é uma função contínua.

A dissertação está organizada em três capítulos. O Capítulo 1 apresenta definições e resultados que formaram uma base para o Capítulo 2 e do Capítulo 3.

No Capítulo 2, consideramos a equação de evolução

$$u'(t) + Au(t) \ni f(t), \tag{2}$$

onde $f \in L^1(a, b; \mathcal{B})$, e enunciamos resultados que dizem respeito as soluções da equação diferencial da forma (2). Em seguida, listamos as condições no operador A, na função multívoca F e na função g que precisamos para atingir o nosso objetivo e citamos exemplos de funções g que satisfazem essas condições. Depois mencionamos os passos necessários, que foram colocados como lemas, para provar os resultados principais. Estes são válidos quando $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach reflexivo, mas também quando $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach não reflexivo, como pode ser visto no Capítulo 3, no qual exemplificamos a teoria do Capítulo 2.

Por fim, enumeramos as referências consultadas durante o desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos definições e resultados que utilizamos ao longo deste trabalho.

1.1 Uma Coletânea de Definições e Resultados

As definições e os resultados desta seção podem ser encontrados em [8], [11], [14], [21], [22], [25] e [36]. Denotemos por X e Y os espaços métricos, $\mathcal{N}$ um espaço normado, $\mathcal{B}$ um espaço de Banach, $\mathcal{N}^*$ o dual topológico de $\mathcal{N}$ e $\mathcal{N}^{**}$ o bidual topológico de $\mathcal{N}$.

Definição 1.1.1. *Um ponto $x \in X$ diz-se aderente a um subconjunto $M \subset X$ quando $dist(x, M) = 0$.*

Definição 1.1.2. *O fecho de um subconjunto M em X é o conjunto $\overline{M}$ dos pontos de X que são aderentes a M.*

Definição 1.1.3. *Um conjunto X é sequencialmente fechado se ele contém o limite de cada sequência convergente (x_n) em X.*

Proposição 1.1.1. *Um conjunto X é convexo se*

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in X$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ e $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 1.1.4. *Sejam X um espaço métrico e $M \subset X$.*

1. *Dizemos que X é compacto se cada cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita.*

2. *Dizemos que M é um subconjunto relativamente compacto de X se $\overline{M}$ é um subconjunto compacto de X.*

3. *Dizemos que M é relativamente sequencialmente compacto se cada sequência em M tem pelo menos uma subsequência convergente.*

Proposição 1.1.2. *O espaço métrico X é compacto se e somente se toda sequência em X possui subsequência convergente.*

Proposição 1.1.3. *Todo subconjunto relativamente compacto de um espaço métrico é limitado.*

Definição 1.1.5. *Seja X um espaço métrico. Um subconjunto M de X é totalmente limitado se, para cada $\epsilon > 0$, M está contido em uma união finita de bolas abertas em X de raio ϵ.*

Definição 1.1.6. *O espaço métrico X é completo quando toda sequência de Cauchy em X é convergente.*

Teorema 1.1.1. *(Teorema A.1.1, p. 292, [36]) Sejam X um espaço métrico completo e $M \subset X$. O subconjunto M é relativamente sequencialmente compacto se e somente se M é totalmente limitado.*

Proposição 1.1.4. *Todo subconjunto totalmente limitado em um espaço métrico completo é relativamente compacto.*

Definição 1.1.7. *Uma norma em um espaço vetorial X (real ou complexo) é uma aplicação $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz:*

1. *$\|x_1\| \geq 0$ para todo $x_1 \in X$ e $\|x_1\| = 0$ se e somente se $x_1 = 0$;*

2. *$\|\alpha x_1\| = |\alpha| \|x_1\|$ para todo $x_1 \in X$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$;*

3. $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ *para todos* $x_1,\ x_2 \in X$.

Definição 1.1.8. *O espaço normado* $\mathcal{N}$ *é uniformemente convexo se, para cada* $\epsilon \in (0, 2)$, *existe* $\delta(\epsilon) > 0$ *tal que para cada* $x_1,\ x_2 \in \mathcal{N}$ *com* $\|x_1\| = 1, \|x_2\| = 1$ *e* $\|x_1 - x_2\| \geq \epsilon$, *temos*

$$\left\|\frac{x_1 + x_2}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\epsilon).$$

Definição 1.1.9. *Um espaço normado completo é chamado de espaço de Banach.*

Proposição 1.1.5. *O dual de um espaço normado é um espaço de Banach.*

Definição 1.1.10. *Dizemos que um espaço normado* $\mathcal{N}$ *é reflexivo quando o mergulho isométrico canônico* $J : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^{**}$ *é sobrejetor.*

Proposição 1.1.6. *Um espaço de Banach é reflexivo se e somente se seu dual é reflexivo.*

Proposição 1.1.7. *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Definição 1.1.11. *Seja* $\mathcal{N}$ *um espaço normado.*

1. *Uma sequência* (x_n) *em* $\mathcal{N}$ *converge fortemente se existe* $x \in \mathcal{N}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

2. *Uma sequência* (x_n) *em* $\mathcal{N}$ *converge fracamente se existe* $x \in \mathcal{N}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

para todo $f \in \mathcal{N}^*$.

Seja M um subconjunto não vazio de um espaço normado. No Capítulo 2, as notações $convM$ e $\overline{conv}M$ significarão, respectivamente, a envoltória convexa de M e a envoltória convexa fechada de M. A envoltória convexa de M é o menor convexo contendo M e a envoltória convexa fechada de M é o menor convexo fechado contendo M.

O teorema a seguir é conhecido como Krein-Smulian.

Teorema 1.1.2. *(Teorema 4, p. 434, [14]) Seja $\mathcal{B}$ um espaço de Banach. A envoltória convexa fechada de um subconjunto fracamente compacto de $\mathcal{B}$ é fracamente compacto em $\mathcal{B}$.*

Corolário 1.1.1. *(Corolário 1.1.1, p. 2, [11]) Seja $\mathcal{B}$ um espaço de Banach. Se a sequência $(x_n) \subset \mathcal{B}$ converge fracamente para $x \in \mathcal{B}$, então existe uma sequência (y_n) com $y_n \in conv\{x_N; N \geq n\}$ tal que (y_n) converge fortemente para x.*

Proposição 1.1.8. *Sejam X, Y espaços métricos. A aplicação $f : X \to Y$ é contínua no ponto $x \in X$ se e somente se $f(x_n) \to f(x)$ em Y quando $x_n \to x$ em X.*

Observação 1.1.1. *Cada função contínua é sequencialmente contínua.*

Teorema 1.1.3. *(Teorema 18.3, p. 108, [22]) Sejam $X = X_1 \cup X_2$ com X_1 e X_2 fechados em X e $f : X_1 \to Y$, $g : X_2 \to Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X_1 \cap X_2$, então $\rho : X \to Y$ definida por*

$$\rho(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \in X_1 \\ g(x) & se\ x \in X_2 \end{cases}$$

é contínua.

Teorema 1.1.4. *Sejam f uma função real e contínua em um espaço métrico compacto X,*

$$P = sup_{x \in X} f(x) \quad e \quad Q = inf_{x \in X} f(x).$$

Então existem pontos x_1, $x_2 \in X$ tais que $f(x_1) = P$ e $f(x_2) = Q$.

Proposição 1.1.9. *Se X é compacto, então toda aplicação contínua $f : X \to Y$ é fechada.*

Lema 1.1.1. *(Lema A.1.3, p. 295, [36]) Sejam M um subconjunto compacto em X e $\mathcal{C}$ uma família de funções contínuas de $[a, b]$ para M. Então*

$$\left\{ \int_a^b f(s)ds; f \in \mathcal{C} \right\}$$

é relativamente compacto em X.

Definição 1.1.12. *Sejam X, Y espaços métricos. Dizemos que $f : X \to Y$ é uma aplicação lipschitziana se existir uma constante $c > 0$ tal que*

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq c\, d(x_1, x_2)$$

para quaisquer x_1, $x_2 \in X$. A constante c é chamada constante de Lipschitz.

Proposição 1.1.10. *Sejam X, Y espaços métricos. Se $f : X \to Y$ é uma aplicação lipschitziana, então f é contínua.*

1.2 O Espaço $L^1(a, b; \mathcal{B})$

Esta seção tem a finalidade de esclarecer alguns argumentos utilizados no Capítulo 2 e no Capítulo 3. As referências consultadas foram [11], [13], [28], [32] e [33].

Seja $L^1(a, b; \mathcal{B})$ o espaço das classes de equivalência das funções Bochner integráveis $f : (a, b) \to \mathcal{B}$ com a norma $\int_a^b \|f(s)\|ds$. Denotemos por λ a medida de Lebesgue.

Proposição 1.2.1. *Sejam f e g funções reais mensuráveis e E um conjunto mensurável. Se $0 \leq f \leq g$, então*

$$\int_E f(s)ds \leq \int_E g(s)ds.$$

Teorema 1.2.1. *Sejam p e q expoentes conjugados, $1 < p < \infty$ e (E, Σ, μ) um espaço de medida positiva. Se $f, g : E \to [0, \infty]$ são funções mensuráveis, então*

$$\int_E f(s)\; g(s)d\mu(s) \leq \left(\int_E (f(s))^p d\mu(s)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E (g(s))^q d\mu(s)\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.1}$$

A desigualdade em (1.1) é conhecida como Desigualdade de Hölder.

Teorema 1.2.2. *Se f, $g \in L^1(a, b; \mathcal{B})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então $\alpha f + \beta g \in L^1(a, b; \mathcal{B})$ e*

$$\int_a^b \|(\alpha f(s) + \beta g(s))\|ds \leq |\alpha| \int_a^b \|f(s)\|ds + |\beta| \int_a^b \|g(s)\|ds.$$

Teorema 1.2.3. *O espaço $L^1(a, b; \mathcal{B})$ é um espaço de Banach.*

Teorema 1.2.4. *Se $f \in L^1(a, b; \mathcal{B})$, então*

$$\left\|\int_a^b f(s)ds\right\| \leq \int_a^b \|f(s)\|ds.$$

Proposição 1.2.2. *Se $f \in L^1(a,b;\mathcal{B})$, então para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_E \|f(s)\|ds < \epsilon$$

sempre que $\lambda(E) < \delta$ para cada subconjunto mensurável $E \subset [a,b]$.

Definição 1.2.1. *Um subconjunto $\mathcal{F} \subseteq L^1(a,b;\mathcal{B})$ é uniformemente integrável se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $\lambda(E) < \delta(\epsilon)$ para cada subconjunto mensurável $E \subset [a,b]$, temos*

$$\int_E \|f(s)\|ds \leq \epsilon$$

uniformemente para $f \in \mathcal{F}$.

Proposição 1.2.3. *Seja $\mathcal{F} \subseteq L^1(a,b;\mathcal{B})$.*

1. *Se $\mathcal{F}$ é uniformemente integrável, então sua norma é limitada em $L^1(a,b;\mathcal{B})$.*

2. *Se $\mathcal{F}$ é limitada em $L^p(a,b;\mathcal{B})$ para algum $p > 1$, então $\mathcal{F}$ é uniformemente integrável.*

3. *Se existe $k \in L^1(a,b;\mathbb{R}_+)$ tal que*

$$\|f(t)\| \leq k(t)$$

para cada $f \in \mathcal{F}$ e para quase todo $t \in (a,b)$, então $\mathcal{F}$ é uniformemente integrável.

Demonstração. Para o item 1, tome $\epsilon = 1$ e $\delta > 0$ tal que

$$\int_E \|f(s)\|ds \leq 1$$

uniformemente para $f \in \mathcal{F}$ e para cada subconjunto mensurável $E \subset [a,b]$ com $\lambda(E) < \delta$. Seja n o número de vezes para $\frac{\delta}{2}$ cobrir $[a,b]$. Então,

$$\int_a^b \|f(s)\|ds = \int_a^{\frac{\delta}{2}} \|f(s)\|ds + \int_{a+\frac{\delta}{2}}^{a+\delta} \|f(s)\|ds + \cdots + \int_{a+(n-1)\frac{\delta}{2}}^{b} \|f(s)\|ds \leq n.$$

Para o item 2, sejam $\epsilon > 0$, q o conjugado de $p > 1$ e m tal que

$$\left(\int_E \|f(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} < m$$

para $f \in \mathcal{F}$ e para cada subconjunto mensurável $E \subset [a,b]$. Pela Desigualdade de Hölder, vide Teorema 1.2.1, temos

$$\int_E \|f(s)\| ds \le \left(\int_E \|f(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E 1 ds\right)^{\frac{1}{q}} < m\delta^{\frac{1}{q}} \le \epsilon$$

quando $\delta \le \left(\frac{m}{\epsilon}\right)^{-q}$.

Para o item 3, seja $\epsilon > 0$. Suponha que exista $k \in L^1(a,b;\mathbb{R}_+)$. Pela Proposição 1.2.2, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_E k(s) ds < \epsilon$$

sempre que $\lambda(E) < \delta$ para cada subconjunto mensurável $E \subset [a,b]$. Logo,

$$\int_E \|f(s)\| ds \le \int_E k(s) ds < \epsilon$$

para $f \in \mathcal{F}$. ■

Teorema 1.2.5. *(Teorema 1.3.7, p. 9, [11]) Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita e $\mathcal{B}$ um espaço reflexivo de Banach. Então $\mathcal{F} \subseteq L^1(\Omega, \mu; \mathcal{B})$ é fracamente compacto se e somente se $\mathcal{F}$ é limitado e uniformemente integrável.*

Teorema 1.2.6. *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita, $\mathcal{B}$ um espaço de Banach, $\mathcal{F} \subseteq L^1(\Omega, \mu; \mathcal{B})$ limitada e uniformemente integrável. Se para cada $\epsilon > 0$ existe um subconjunto fracamente compacto $C_\epsilon \subseteq \mathcal{B}$ e um subconjunto mensurável $E_\epsilon \in \Sigma$ com $\mu(\Omega \backslash E_\epsilon) \le \epsilon$ e $f(E_\epsilon) \subseteq C_\epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$, então $\mathcal{F}$ é fracamente relativamente compacto em $L^1(\Omega, \mu; \mathcal{B})$.*

O Teorema 1.2.6 pode ser encontrado em [13].

Sejam $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, dois espaços de medida. Definimos o espaço de medida produto (Ω, Σ, μ) como o espaço de medida para o qual $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, Σ é a menor σ-álgebra contendo todos os conjuntos $E_1 \times E_2$ com $E_i \in \Sigma_i$, $i = 1, 2$, e tal que $\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$ para cada $E_i \in \Sigma_i$, $i = 1, 2$. Agora, enunciaremos o Teorema de Fubini.

Teorema 1.2.7. *(Teorema 1.2.5, p. 6, [11]) Sejam $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, espaços de medida finita e (Ω, Σ, μ) seu espaço produto. Sejam também $\mathcal{B}$ um espaço de Banach e $f \in$*

$L^1(\Omega, \mu; \mathcal{B})$. *Então, para* μ_1- *quase todos os pontos* $s \in \Omega_1$, $t \mapsto f(s,t) \in L^1(\Omega_2, \mu_2; \mathcal{B})$, $s \mapsto \int_{\Omega_2} f(s,t)d\mu_2(t) \in L^1(\Omega_1, \mu_1; \mathcal{B})$ *e*

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \|f(s,t)\| d\mu_2(t) d\mu_1(s) = \int_{\Omega} \|f(\theta)\| d\mu(\theta).$$

1.3 O Espaço Sobolev

Nesta seção esclarecemos algumas notações que aparecerão no Capítulo 3.

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $p \geq 1$. Considere o espaço de Lebesgue

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mensurável e } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

munido com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 1.3.1. *O espaço* $L^p(\Omega)$ *é um espaço de Banach.*

Agora considere o espaço Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega); \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, \ldots, n \right\},$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um domínio.

Sejam $C_0^\infty(\Omega)$ o subespaço de funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω, $W_0^{1,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma de $W^{1,p}(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$ o dual de H_0^1. Note que, para $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ denota a i-ésima derivada fraca de f, ou seja,

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Em $W^{1,p}(\Omega)$, temos a seguinte norma:

$$\|f\|_* = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Teorema 1.3.2. *O espaço* $W^{1,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach.*

As demonstrações dos teoremas enunciados nesta seção podem ser encontrados em [17].

1.4 Função Multívoca

Esta seção, baseada principalmente em [30], apresenta a definição e as propriedades de uma função multívoca, também conhecida como função ponto a conjunto.

Sejam X e Y conjuntos não vazios.

Definição 1.4.1. *A função $F : X \to 2^Y$ que tem como domínio um conjunto de X, como contradomínio o conjunto das partes de um conjunto de Y e que associa cada elemento de $x \in X$ o subconjunto $F(x) \in 2^Y$ é chamada de função ponto a conjunto.*

Definição 1.4.2. *Dizemos que a função ponto a conjunto $F : X \to 2^Y$ é estrita se o conjunto associado a $F(x)$ é não vazio para todo $x \in X$.*

Uma função ponto a conjunto $F : X \to 2^Y$ é caracterizada por seu gráfico $Graf(F)$. O gráfico de F é o subconjunto de $X \times Y$ definido por

$$Graf(F) = \{(x, y) \in X \times Y; y \in F(x)\},$$

onde $F(x)$ é o subconjunto de Y associado a x.

Sejam X, Y espaços métricos, $M \subset X$ um subconjunto não vazio e $\epsilon > 0$. Definimos

$$B[M, \epsilon] = \{x \in X; dist(x, M) \leq \epsilon\}.$$

Definição 1.4.3. *Seja $F : X \to 2^Y$ uma função ponto a conjunto estrita. Dizemos que F é de Lipschitz se existe $c > 0$ (constante de Lipschitz) tal que*

$$F(x_1) \subset B[F(x_2), c\ d(x_1, x_2)] \tag{1.2}$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in X$. Quando $c \in (0, 1)$, F é chamada contração e quando $c = 1$, F é não expansiva.

Observe que de (1.2) decorre que

$$dist(y_1, F(x_2)) \leq c\ d(x_1, x_2)$$

para todo $y_1 \in F(x_1)$ e que

$$dist(y_2, F(x_1)) \leq c\ d(x_2, x_1)$$

para todo $y_2 \in F(x_2)$.

Definição 1.4.4. *A função ponto a conjunto $F : X \to 2^Y$ tem o gráfico fechado se, dados $x \in X$, uma sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to x$ e uma sequência $(y_n) \subset F(x_n)$ tal que $y_n \to y \in Y$, tivermos $y \in F(x)$.*

Definição 1.4.5. *Uma função ponto a conjunto $F : X \to 2^Y$ é convexa se dados x_1, $x_2 \in X$ e $\alpha \in [0, 1]$, temos*

$$\alpha F(x_1) + (1 - \alpha)F(x_2) \subset F(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2).$$

Abaixo estão listadas propriedades das funções ponto a conjunto. Sejam $V(F(x_0))$ uma vizinhança de $F(x_0)$ e $V(x_0)$ uma vizinhança de x_0.

Propriedade 1. Dada $V(F(x_0))$ em Y existe $V(x_0)$ em X tal que

$$F(V(x_0)) \subset V(F(x_0)).$$

Propriedade 2. Dada uma sequência (x_n) em X com $x_n \to x$ e dado $y \in F(x)$, existe uma sequência (y_n) em Y com $y_n \in F(x_n)$, para cada n, tal que $y_n \to y$.

A partir dessas propriedades, definimos uma função ponto a conjunto contínua.

Definição 1.4.6. *Seja $F : X \to 2^Y$ uma função ponto a conjunto.*

1. *Dizemos que F é semicontínua superior se satisfaz a Propriedade 1 para todo $x \in X$.*

2. *Dizemos que F é semicontínua inferior se satisfaz a Propriedade 2 para todo $x \in X$.*

3. *Dizemos que F é contínua se for semicontínua superior e semicontínua inferior.*

Observação 1.4.1. *Uma função ponto a conjunto $F : X \to 2^Y$ é fortemente fracamente semicontínua superior quando F é semicontínua superior de X - dotada com a topologia forte - para Y - dotada com a topologia fraca.*

Lema 1.4.1. *(Lema 2.6.1, p. 47, [11]) Se $F : X \to 2^Y$ é uma função ponto a conjunto não vazia, fortemente fracamente semicontínua superior e com valores fracamente compactos, então, para cada subconjunto compacto M de X, $\bigcup_{x \in M} F(x)$ é fracamente compacto.*

Teorema 1.4.1. *(Teorema 3.1.2, p. 88, [35]) Sejam M um subconjunto mensurável de Lebesgue não vazio e limitado em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, C um espaço topológico, $\mathcal{B}$ um espaço de Banach real e $F : M \times C \to 2^{\mathcal{B}}$ uma função ponto a conjunto satisfazendo:*

1. *$F(t, \cdot) : C \to 2^{\mathcal{B}}$ é semicontínua superior para quase todo $t \in M$;*

2. *$F(\cdot, u) : M \to 2^{\mathcal{B}}$ é mensurável para cada $u \in C$.*

Sejam (g_n) uma sequência que converge fracamente para g em $L^1(M, \mathcal{B})$ e (u_n) uma sequência de funções de M para C que converge para a função $u : M \to C$ para quase todo $t \in M$. Se $g_n(t) \in F(t, u_n(t))$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e para quase todo $t \in M$, então $g(t) \in F(t, u(t))$ para quase todo $t \in M$.

Definição 1.4.7. *Uma função ponto a conjunto $F : X \to 2^X$ tem um ponto fixo se existe $x \in X$ tal que $x \in F(x)$. O ponto x é chamado de ponto fixo de F.*

Teorema 1.4.2. *Se M é um conjunto não vazio, convexo e fracamente compacto em um espaço de Banach e $F : M \to 2^M$ é uma função ponto a conjunto não vazia, fechada, com valores convexos e gráfico sequencialmente fechado, então F tem pelo menos um ponto fixo.*

O Teorema 1.4.2 está presente em [28].

1.5 Operadores

As definições e os resultados desta seção podem ser encontrados em [6], [8], [25], [28], [31] e [33].

Considere $\mathcal{B}$ um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|$ e $\mathcal{B}^*$ seu dual topológico. Um operador A é uma aplicação de $\mathcal{B}$ em $2^{\mathcal{B}}$, o conjunto das partes de $\mathcal{B}$. A fim de simplificar a notação, usaremos $A : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$.

Definição 1.5.1. *Seja $A : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ um operador.*

1. *Dizemos que A é unívoco quando o conjunto Ax contém no máximo um elemento para todo $x \in \mathcal{B}$. Caso contrário, dizemos que A é multívoco.*

2. *O domínio de A é o conjunto $D(A) = \{x \in \mathcal{B}; Ax \neq \emptyset\}$ e a imagem de A é o conjunto $Im(A) = \bigcup_{x\in\mathcal{B}} Ax$.*

O próximo resultado é conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Banach e sua demonstração está detalhada em [25].

Teorema 1.5.1. *Sejam X um espaço métrico completo e M um subconjunto fechado de X. Se a aplicação $A : M \to M$ é uma contração, então A possui um único ponto fixo em M, isto é, existe $x \in M$ tal que $x = A(x)$.*

Sejam $x, y \in \mathcal{B}$ e $h \in \mathbb{R}^*$. Definimos

$$[x, y]_h = \frac{1}{h}(\|x + hy\| - \|x\|)$$

e o limite

$$[x, y]_+ = \lim_{h\to 0^+} [x, y]_h$$

existe. Vide [31].

Seja

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quando $\mathcal{B} = L^1(\Omega)$, podemos escrever

$$[f, g]_+ = \int_\Omega g\ sign(f)dx + \int_{f=0} |g|dx \tag{1.3}$$

para $f, g \in L^1(\Omega)$, como pode ser visto no Exemplo A.15, p. 281, [6]. A fórmula em (1.3) será usada no Capítulo 3.

A demonstração da proposição a seguir está descrita em [31].

Proposição 1.5.1. *Para cada $x, y \in \mathcal{B}$ e $\alpha > 0$, temos*

1. $[\alpha x, y]_+ = [x, y]_+$

2. $|[x, y]_+| \leq \|y\|$

Escreveremos $A : D(A) \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ para enfatizar que nos interessa somente os valores de A em $D(A)$.

Definição 1.5.2. *O operador $A : D(A) \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ é acretivo se*

$$[x_1 - x_2, y_1 - y_2]_+ \geq 0$$

para qualquer $x_i \in D(A)$ e $y_i \in Ax_i$, $i = 1, 2$.

Definição 1.5.3. *O operador $A : D(A) \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ é m-acretivo se A é acretivo e a aplicação $I + A$ é sobrejetora, onde I é o operador identidade em $\mathcal{B}$.*

Definição 1.5.4. *Um operador A é chamado m-dissipativo se $-A$ é m-acretivo.*

Definição 1.5.5. *O operador $A : D(A) \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ é compacto se é contínuo e a imagem de subconjuntos limitados de $D(A)$ são subconjuntos relativamente compactos em $\mathcal{B}$.*

Sejam $\langle x, x^* \rangle$ a forma bilinear canônica que estabelece a dualidade entre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^*$ e $j : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^*$ a aplicação dualidade definida como

$$j(x) = \{x^* \in \mathcal{B}^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Definição 1.5.6. *O operador $A : D(A) \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}^*$ é monótono se*

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$$

para todo $x_i \in D(A)$, $i = 1, 2$.

O conjunto dos operadores é ordenado pela inclusão dos gráficos, isto é, $Graf(A) \subset Graf(T)$ se e somente se $Ax \subset Tx$ para todo $x \in \mathcal{B}$, justificando a seguinte definição:

Definição 1.5.7. *O operador monótono A de $\mathcal{B}$ é maximal monótono se ele não está propriamente contido em qualquer outro operador monótono de $\mathcal{B}$.*

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. A seguir, enumeramos alternativas equivalentes ao conceito de operadores maximais monótonos de $\mathcal{H}$.

Proposição 1.5.2. *Seja A um operador de $\mathcal{H}$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *A é maximal monótono;*

2. *A é monótono e* $Im(I + A) = \mathcal{H}$*;*

3. *Para todo* $\alpha > 0$, $(I + \alpha A)^{-1}$ *é uma contração definida sobre* $\mathcal{H}$.

Observação 1.5.1. *Um operador monótono no espaço de Hilbert é um operador acretivo definido no espaço de Banach.*

1.6 Subdiferenciais

Esta seção, baseada em [35], apresenta definições e resultados que serão utilizados no Capítulo 3.

Definição 1.6.1. *Sejam* $\mathcal{B}$ *um espaço de Banach real. Uma função* $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *é própria quando* φ *não é identicamente* $+\infty$.

Definição 1.6.2. *Sejam* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert real munido com o produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *e* $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *uma função própria, convexa e semicontínua inferior.*

1. *A subdiferencial de* φ *calculada em* x *é o conjunto*

$$\partial\varphi(x) = \{z \in \mathcal{H}; \varphi(x) \leq \varphi(y) + \langle x - y, z \rangle \text{ para cada } y \in \mathcal{H}\}.$$

2. *O operador* $\partial\varphi : D(\partial\varphi) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *que associa cada* $x \in \mathcal{H}$ *o subconjunto* $\partial\varphi(x)$ *em* $\mathcal{H}$ *é chamado de subdiferencial de* φ.

Observação 1.6.1. *A função* $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *é semicontínua inferior quando, para cada* $c \in \mathbb{R}$, *o conjunto*

$$\{x \in \mathcal{H}; \varphi(x) > c\}$$

é aberto em $\mathcal{H}$.

Teorema 1.6.1. *(Teorema 1.6.3, p. 21, [35]) Cada operador m-acretivo* $A : D(A) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é a subdiferencial de uma função própria, convexa e semicontínua inferior.*

Definição 1.6.3. *Dizemos que uma função convexa* $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *é do tipo compacto se, para cada* $\alpha > 0$*, o conjunto de nível*

$$\ell_\alpha = \{x \in \mathcal{H}; \|x\|^2 + \varphi(x) \leq \alpha\}$$

é relativamente compacto em $\mathcal{H}$*.*

Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira suave Γ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ uma função própria, convexa e semicontínua inferior com $f(0) = 0$. Sejam também $p \in [2, \infty)$ e $d > 0$ duas constantes dadas. Definimos $\varphi_p^d : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ por

$$\varphi_p^d(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx + \frac{d}{p}\int_\Omega |u|^p dx + \int_\Gamma f(u) d\sigma & \text{se } u \in W^{1,p}(\Omega) \\ & \text{e } f(u) \in L^1(\Gamma) \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Proposição 1.6.1. *(Proposição 2.2.3, p.44, [35]) A função* φ_p^d *definida acima é própria, convexa, semicontínua inferior e do tipo compacto.*

Capítulo 2

Uma Classe de Equações de Evolução não Lineares Sujeitas a Condições Iniciais não Locais

Este capítulo, baseado em [28], apresenta o estudo realizado com o intuito de garantir a existência de C^0-soluções para uma classe de equações de evolução não lineares sujeitas a condições iniciais não locais da forma

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) \ni f(t) \\ f(t) \in F(t, u(t)) \\ u(0) = g(u), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $A : D(A) \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ é um operador m-acretivo em um espaço de Banach $\mathcal{B}$ de dimensão infinita, $F : [0, 2\pi] \times \overline{D(A)} \to \mathcal{B}$ é uma função multívoca não vazia, convexa, quase fortemente fracamente semicontínua superior (vide Definição 2.2.2) e com valores fracamente compactos e $g : C([0, 2\pi]; \overline{D(A)}) \to \overline{D(A)}$ é uma função contínua.

2.1 Equações de Evolução da Forma $u'(t) + Au(t) \ni f(t)$

Seja $f \in L^1(a, b; \mathcal{B})$ e considere a equação de evolução

$$u'(t) + Au(t) \ni f(t). \tag{2.2}$$

A função $u : [a, b] \to \mathcal{B}$ é uma solução integral ou uma C^0-solução de (2.2) em $[a, b]$ se $u \in C([a, b]; \mathcal{B}), u(t) \in \overline{D(A)}$ para cada $t \in [a, b]$ e u satisfaz

$$\|u(t) - x\| \leq \|u(s) - x\| + \int_s^t [u(\tau) - x, f(\tau) - y]_+ d\tau \tag{2.3}$$

para cada $x \in D(A), y \in Ax$ e $a \leq s \leq t \leq b$. Pelo item (2) da Proposição 1.5.1, podemos reescrever (2.3) como

$$\|u(t) - x\| \leq \|u(s) - x\| + \int_s^t \|f(\tau) - y\| d\tau \tag{2.4}$$

para cada $x \in D(A), y \in Ax$ e $a \leq s \leq t \leq b$.

Os próximos resultados dizem respeito as soluções da equação diferencial da forma (2.2).

Teorema 2.1.1. *(Teorema 2.1, p. 124, [7]) Seja $A : D(A) \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ um operador m-acretivo. Então, para cada $x \in \overline{D(A)}$ e $f \in L^1(a, b; \mathcal{B})$, existe uma única C^0-solução de (2.2) em $[a, b]$ que satisfaz $u(a) = x$. Se $f, g \in L^1(a, b; \mathcal{B})$ e u, v são duas C^0-soluções de (2.2) correspondendo a f e g, respectivamente, então*

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(s) - v(s)\| + \int_s^t \|f(\tau) - g(\tau)\| d\tau \tag{2.5}$$

para cada $a \leq s \leq t \leq b$.

Sejam $\xi \in \overline{D(A)}$, $\tau \in [a, b)$ e $f \in L^1(a, b; \mathcal{B})$. Denotemos por $u(\cdot, \tau, \xi, f)$ a única C^0-solução $v : [\tau, b] \to \overline{D(A)}$ do problema (2.2) que satisfaz $v(\tau) = \xi$ e por $\{S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}, t \geq 0\}$ o semigrupo gerado por $-A$ em $\overline{D(A)}$, isto é, $S(t)\xi = u(t, 0, \xi, 0)$ para cada $\xi \in \overline{D(A)}$ e $t \geq 0$. Dizemos que o semigrupo gerado por $-A$ em $\overline{D(A)}$ é compacto se $S(t)$ é um operador compacto para cada $t > 0$.

Teorema 2.1.2. *(Teorema 2.3.3, p. 47, [35]) Sejam $A : D(A) \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ operador m-acretivo tal que $-A$ gera um semigrupo compacto, $B \subseteq \overline{D(A)}$ limitado e $\mathcal{F}$ uniformemente integrável em $L^1(a, b; \mathcal{B})$. Então, para cada $c \in (a, b)$, o conjunto de C^0-soluções*

$$\{u(\cdot, a, \xi, f); \xi \in B, f \in \mathcal{F}\}$$

é relativamente compacto em $C([c, b]; \mathcal{B})$. Se, em adição, B é relativamente compacto, então o conjunto de C^0-soluções é relativamente compacto em $C([a, b]; \mathcal{B})$.

2.2 Hipóteses em A, F e g

Nesta seção, enumeramos as condições no operador A, na função multívoca F e na função g que vamos precisar. As definições abaixo serão citadas nessas condições.

Definição 2.2.1. *Dizemos que o operador m-acretivo A é do tipo contínuo completo se, para cada sequência (f_n) em $L^1(0, 2\pi; \mathcal{B})$ e (u_n) em $C([0, 2\pi], \mathcal{B})$, sendo u_n uma C^0-solução em $[0, 2\pi]$ do problema*

$$u_n'(t) + Au_n(t) \ni f_n(t),$$

$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *fracamente em $L^1(0, 2\pi; \mathcal{B})$ e $lim_{n\to\infty} u_n = u$ uniformemente em $C([0, 2\pi]; \mathcal{B})$, temos que u é uma C^0-solução em $[0, 2\pi]$ do problema limite*

$$u'(t) + Au(t) \ni f(t).$$

Definição 2.2.2. *Uma função multívoca $F : [0, 2\pi] \times \overline{D(A)} \to \mathcal{B}$ é quase fortemente fracamente semicontínua superior se, para cada $\epsilon > 0$, existe um subconjunto mensurável de Lebesgue $E_\epsilon \subseteq [0, 2\pi]$ com $\lambda(E_\epsilon) \leq \epsilon$ tal que F é uma função multívoca semicontínua superior de $([0, 2\pi] \backslash E_\epsilon) \times \overline{D(A)}$ - dotada com a topologia forte - para $\mathcal{B}$ - dotada com a topologia fraca.*

Denotemos por $C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$ o subconjunto de $C([0, 2\pi]; \mathcal{B})$ que consiste em todas as funções u tais que $u(t) \in \overline{D(A)}$ para cada $t \in [0, 2\pi]$, por $B[0, r]$ a bola fechada de centro 0 e raio r e por $B(0, r)$ a bola aberta de centro 0 e raio r.

As hipóteses no operador A, na função multívoca F e na função g que vamos precisar são listadas a seguir.

(H_1) O operador $A : D(A) \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ possui as propriedades:

(a_1) A é um operador m-acretivo e $0 \in A0$.

(a_2) O semigrupo gerado por $-A$ em $\overline{D(A)}$ é compacto.

(a_3) A é do tipo contínuo completo.

(H_2) A função multívoca $F : [0, 2\pi] \times \overline{D(A)} \to \mathcal{B}$ é não vazia, convexa, quase fortemente fracamente semicontínua superior e com valores fracamente compactos.

(H_3) Existe $r > 0$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}_+$, cada $u \in D(A)$ com $\|u\| = r$ e para cada $z \in F(t,u)$, temos

$$[u,z]_+ \leq 0.$$

(H_3') Existe $r > 0$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}_+$, cada $u \in D(A)$ com $\|u\| \geq r$ e para cada $z \in F(t,u)$, temos

$$[u,z]_+ \leq 0.$$

(H_4) Existe $k \in L^1(0,2\pi;\mathbb{R}_+)$ tal que

$$\|y\| \leq k(t)$$

para quase todo $t \in (0,2\pi)$, para cada $u \in B[0,r]$ e cada $y \in F(t,u)$.
(H_4') Existe $k \in L^1(0,2\pi;\mathbb{R}_+)$ tal que

$$\|y\| \leq k(t)$$

para quase todo $t \in (0,2\pi)$, para cada $u \in \mathcal{B}$ e cada $y \in F(t,u)$.
(H_5) A função $g : C([0,2\pi],\overline{D(A)}) \to \overline{D(A)}$ possui as propriedades:

(g_1) Para cada $\mathcal{U} \subset C([0,2\pi],\overline{D(A)})$ limitado em $C([0,2\pi],\overline{D(A)})$ e relativamente compacto em $C([\delta,2\pi],\overline{D(A)})$ para cada $\delta \in (0,2\pi]$, o conjunto $g(\mathcal{U})$ é relativamente compacto.

(g_2) Para cada $u \in C([0,2\pi];\overline{D(A)})$, temos

$$\|g(u)\| \leq \|u\|_\infty.$$

(g_3) Para cada $u,v \in C([0,2\pi],\overline{D(A)})$, temos

$$\|g(u) - g(v)\| \leq \|u - v\|_\infty.$$

Considere

(g_3') Para cada $u,v \in C([0,2\pi];\overline{D(A)})$, temos

$$\|g(u) - g(v)\| \leq \frac{1}{2\pi}\|u - v\|_{L^1(0,2\pi;\mathcal{B})}.$$

Observação 2.2.1. *A condição (g_3') implica as condições (g_1) e (g_3).*

Primeiramente, mostraremos que (g_3') implica (g_1). Seja $\mathcal{C}$ uma família de funções contínuas de $[0, 2\pi]$ para $\overline{D(A)}$. Então, pelo Lema 1.1.1,

$$\left\{ \int_0^{2\pi} u(s)ds; u \in \mathcal{C} \right\}$$

é relativamente compacto e, pela Proposição 1.1.3, é limitado. Além disso, pela Proposição 1.1.4 e pelo Teorema 1.1.1, a sequência $(u_n) \subset \mathcal{C}$ tem uma subsequência que, sem perda de generalidade, chamaremos de (u_n) tal que

$$\int_0^{2\pi} u_n(s)ds \to \int_0^{2\pi} u(s)ds. \tag{2.6}$$

Assim, $g(u_n) \in g(\mathcal{U})$, onde $\mathcal{U} \subset C([0, 2\pi], \overline{D(A)})$ é limitado em $C([0, 2\pi], \overline{D(A)})$ e relativamente compacto em $C([\delta, 2\pi], \overline{D(A)})$ para cada $\delta \in (0, 2\pi]$. Temos também que

$$\|g(u_n) - g(u)\| \leq \frac{1}{2\pi} \|u_n - u\|_{L^1(0,2\pi;\mathcal{B})}.$$

Por (2.6), deduzimos que $\|g(u_n) - g(u)\| \to 0$. Portanto, $g(\mathcal{U})$ é relativamente compacto.

Agora, mostraremos que (g_3') implica (g_3). De fato,

$$\|g(u) - g(v)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|u(s) - v(s)\| ds \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|u - v\|_\infty ds = \|u - v\|_\infty.$$

■

Observação 2.2.2. *Os exemplos de funções g que satisfazem (H_5) são:*

1. $g(u) = u(2\pi)$
2. $g(u) = -u(2\pi)$
3. $g(u) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} u(s)ds$
4. $g(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u(t_i)$, *onde $0 < t_1 < \cdots < t_n = 2\pi$ são arbitrários, mas fixados, e $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1$.*

Observação 2.2.3. *Os exemplos de g na Observação 2.2.2 correspondem a casos particulares da escolha de g como*

$$g(u) = \frac{1}{\mu([0, 2\pi])} \int_0^{2\pi} \mathcal{N}(u(s)) d\mu(s), \tag{2.7}$$

onde $\mathcal{N} : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}$ *é um operador não expansivo e possivelmente não linear,* μ *é uma medida* σ*-finita, completa em* $[0, 2\pi]$ *e contínua com respeito à medida de Lebesgue em* $t = 0$*, ou seja,* $\lim_{h\to 0^+} \mu([0, h]) = 0$.

Observação 2.2.4. *A condição* (g_1) *é satisfeita por todas as funções* g *da forma* (2.7)*, sendo* μ *contínua com respeito à medida de Lebesgue em* $t = 0$.

Observação 2.2.5. *A condição* (g_2) *em* (H_5) *substitui a primeira parte da condição* $(C2)$ *em [16], que assume que para* $n \geq 1$ *e cada* $u \in C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$ *com* $\|u\|_\infty \leq r$*, temos* $\left\|S\left(\frac{1}{n}\right) g(u)\right\| \leq r$*, onde* $r > 0$ *é a constante que aparece em* (H_3) *e* $\{S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}; t \geq 0\}$ *é o semigrupo de funções não expansivas geradas por* $-A$.

2.3 Resultados Preliminares

Seja

$$\mathcal{F} = \{f \in L^1(0, 2\pi; \mathcal{B}); \|f(t)\| \leq k(t) \text{ para quase todo } t \in (0, 2\pi)\},$$

onde k é a função dada por (H_4).

Com o intuito de demonstrar o Teorema 2.4.2, primeiro mostraremos que, para cada $\epsilon \in (0, 1)$ e cada $f \in L^1(0, 2\pi; \mathcal{B})$, o problema

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) \\ u(0) = (1 - \epsilon)g(u) \end{cases} \tag{2.8}$$

tem uma única C^0-solução $u_\epsilon^f \in C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$.

Em seguida, provaremos que, para cada $\epsilon \in (0, 1)$ fixado, o operador $f \mapsto u_\epsilon^f$ que associa f a única C^0-solução u_ϵ^f do problema (2.8) é compacto de $\mathcal{F}$ para $C([0, 2\pi]; \mathcal{B})$.

Como a função multívoca $F : [0, 2\pi] \times \overline{D(A)} \to \mathcal{B}$ é quase fortemente fracamente semicontínua superior, para o mesmo $\epsilon > 0$, existe um subconjunto mensurável de Lebesgue $E_\epsilon \subseteq [0, 2\pi]$ com $\lambda(E_\epsilon) \leq \epsilon$ tal que $F_{|([0,2\pi]\setminus E_\epsilon)\times\overline{D(A)}}$ é fortemente fracamente semicontínua superior. Definimos a função multívoca $F_\epsilon : [0, 2\pi] \times \overline{D(A)} \to \mathcal{B}$ por

$$F_\epsilon(t, u) = \begin{cases} F(t, u) & \text{para } (t, u) \in ([0, 2\pi]\setminus E_\epsilon) \times \overline{D(A)} \\ \{0\} & \text{para } (t, u) \in E_\epsilon \times \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Depois provaremos que a função multívoca $f \mapsto Sel(F_\epsilon(\cdot, u_\epsilon^f(\cdot)))$, onde

$$Sel(F_\epsilon(\cdot, u_\epsilon^f(\cdot))) = \{h \in L^1(0, 2\pi; \mathcal{B}); h(t) \in F_\epsilon(t, u_\epsilon^f(t)) \text{ para quase todo } t \in [0, 2\pi]\},$$

mapeia um conjunto $K_\epsilon \subseteq L^1(0, 2\pi; \mathcal{B})$ adequadamente escolhido não vazio, convexo e fracamente compacto em si mesmo e tem o gráfico fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado. Tendo em vista o Teorema 1.4.2, esta função multívoca tem pelo menos um ponto fixo que, por meio de $f \mapsto u_\epsilon^f$, produz uma C^0-solução para o problema aproximado

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) \\ f(t) \in F_\epsilon(t, u(t)) \\ u(0) = (1 - \epsilon)g(u). \end{cases} \tag{2.9}$$

Por fim, para cada $\epsilon > 0$, fixamos uma C^0-solução u_ϵ do problema (2.9) e mostraremos que existe uma sequência (ϵ_n) tendendo a zero de modo que (u_{ϵ_n}) converge em $C([0, 2\pi]; \mathcal{B})$ para uma C^0-solução do problema (2.1).

Estes passos serão enunciados como lemas.

Lema 2.3.1. *Assuma que (a_1) em (H_1) e (g_3) em (H_5) são satisfeitas. Então, para cada $\epsilon > 0$ e cada $f \in L^1(0, 2\pi; \mathcal{B})$, o problema*

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) \\ u(0) = (1 - \epsilon)g(u) \end{cases} \tag{2.10}$$

tem uma única C^0-solução u_ϵ^f que satisfaz

$$\|u_\epsilon^f\|_\infty \leq \frac{1}{\epsilon} \int_0^{2\pi} \|f(s)\| ds. \tag{2.11}$$

Demonstração. Seja $\epsilon \in (0, 1)$ arbitrário e fixado. Pelo Teorema 2.1.1, para cada $v \in C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$, o problema

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) \\ u(0) = (1 - \epsilon)g(v) \end{cases} \tag{2.12}$$

tem uma única C^0-solução $u \in C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$.

Considere o operador $P_\epsilon : C([0,2\pi];\overline{D(A)}) \to C([0,2\pi];\overline{D(A)})$ definido por $P_\epsilon(v) = u$, onde u é a única C^0-solução do problema (2.12). Por (2.5), (g_3) em H_5 e tomando $s = 0$, obtemos

$$\|P_\epsilon(v)(t) - P_\epsilon(\tilde{v})(t)\| \leq (1-\epsilon)\|g(v) - g(\tilde{v})\| \leq (1-\epsilon)\|v - \tilde{v}\|_\infty.$$

Pelo Teorema 1.5.1, o operador P_ϵ tem um único ponto fixo $u_\epsilon^f \in C([0,2\pi];\overline{D(A)})$ que é uma C^0-solução de (2.10).

Pelo Teorema 1.1.4, a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|$ atinge ponto máximo em $t \in [0,2\pi]$. Seja $t_m \in [0,2\pi]$ um ponto máximo qualquer, isto é, $\|u_\epsilon^f(t_m)\| = \|u_\epsilon^f\|_\infty$. Como $0 \in A0$ por (a_1) em (H_1), de (2.4) e tomando $s = 0$, temos

$$\|u_\epsilon^f(t)\| \leq (1-\epsilon)\|g(u_\epsilon^f)\| + \int_0^t \|f(\tau)\| d\tau.$$

Agora, por (g_3) em (H_5) e tomando $t = t_m$, obtemos

$$\|u_\epsilon^f\|_\infty = \|u_\epsilon^f(t_m)\| \leq (1-\epsilon)\|u_\epsilon^f\|_\infty + \int_0^{t_m} \|f(\tau)\| d\tau. \tag{2.13}$$

Suponha que $t_m = 0$. Então de (2.13), deduzimos que

$$\|u_\epsilon^f\|_\infty \leq (1-\epsilon)\|u_\epsilon^f\|_\infty.$$

Essa desigualdade é válida quando $u_\epsilon^f \equiv 0$. Caso contrário, $t_m \neq 0$. Assim, de (2.13) temos

$$\|u_\epsilon^f\|_\infty \leq \frac{1}{\epsilon}\int_0^{t_m} \|f(\tau)\| d\tau \leq \frac{1}{\epsilon}\int_0^{2\pi} \|f(\tau)\| d\tau.$$

■

Lema 2.3.2. *Assuma que (a_1), (a_2) em (H_1) e (H_5) são satisfeitas. Sejam $k \in L^1(0,2\pi;\mathbb{R}_+)$ e $\epsilon > 0$ fixado. Então o operador de*

$$\mathcal{F} = \{f \in L^1(0,2\pi;\mathcal{B}); \|f(t)\| \leq k(t) \text{ para quase todo } t \in (0,2\pi)\}$$

para $C([0,2\pi];\mathcal{B})$, definido por $f \mapsto u_\epsilon^f$, onde u_ϵ^f é a única solução do problema (2.10) correspondendo a f, é compacto. Em particular, a imagem de $\mathcal{F}$ pelo operador $f \mapsto u_\epsilon^f$ é compacto.

Demonstração. Precisamos mostrar que $f \mapsto u_\epsilon^f$ é contínuo de $\mathcal{F}$ com a norma de $L^1(0, 2\pi; \mathcal{B})$ para $C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$ com a norma da convergência uniforme e que a imagem de um subconjunto limitado de $\mathcal{F}$ é um subconjunto relativamente compacto em $C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$.

Primeiramente, mostraremos que $f \mapsto u_\epsilon^f$ é contínuo. De (2.5) e tomando $s = 0$, temos

$$\|u_\epsilon^f(t) - u_\epsilon^h(t)\| \leq (1-\epsilon)\|g(u_\epsilon^f) - g(u_\epsilon^h)\| + \int_0^t \|f(\tau) - h(\tau)\| d\tau. \tag{2.14}$$

Aplicando a propriedade (g_3) em (2.14), obtemos

$$\|u_\epsilon^f(t) - u_\epsilon^h(t)\| \leq (1-\epsilon)\|u_\epsilon^f - u_\epsilon^h\|_\infty + \int_0^{2\pi} \|f(\tau) - h(\tau)\| d\tau.$$

Logo,

$$\|u_\epsilon^f - u_\epsilon^h\|_\infty \leq \frac{1}{\epsilon} \int_0^{2\pi} \|f(\tau) - h(\tau)\| d\tau$$

para cada $f, h \in \mathcal{F}$. Assim, $f \mapsto u_\epsilon^f$ é lipschitiziano e, pela Proposição 1.1.10, é contínuo.

Agora, mostraremos que a imagem de um subconjunto limitado de $\mathcal{F}$ é um subconjunto relativamente compacto em $C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$. De (2.11) temos que $\{u_\epsilon^f; f \in \mathcal{F}\}$ é limitada em $C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$. Por (g_2) em (H_5), obtemos

$$\|u_\epsilon^f(0)\| = (1-\epsilon)\|g(u_\epsilon^f)\| \leq (1-\epsilon)\|u_\epsilon^f\|_\infty.$$

Logo $\{u_\epsilon^f(0); f \in \mathcal{F}\}$ é limitado em $\mathcal{B}$. Pelo item 3 da Proposição 1.2.3, $\mathcal{F}$ é uniformemente integrável. De (a_1) e (a_2) em (H_1) e o Teorema 2.1.2, concluímos que $\{u_\epsilon^f; f \in \mathcal{F}\}$ é relativamente compacto em $C([\delta, 2\pi]; \overline{D(A)})$ para cada $\delta \in (0, 2\pi]$. Por (g_1) em (H_5), deduzimos que o conjunto $\{g(u_\epsilon^f); f \in \mathcal{F}\}$, que coincide com $\{u_\epsilon^f(0); f \in \mathcal{F}\}$, é relativamente compacto em $\mathcal{B}$. Por (a_1) e (a_2) em (H_1) e a última parte do Teorema 2.1.2, segue que $\{u_\epsilon^f; f \in \mathcal{F}\}$ é relativamente compacto em $C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$.

Além disso, como $\{u_\epsilon^f; f \in \mathcal{F}\}$ é relativamente compacto em $C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$, então $\overline{\{u_\epsilon^f; f \in \mathcal{F}\}}$ é compacto em $C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$. Portanto, a imagem de $\mathcal{F}$ pelo operador $f \mapsto u_\epsilon^f$ é compacto. ■

Lema 2.3.3. *Assuma que* (H_1), (H_2), (H_4') *e* (H_5) *são satisfeitas. Então, para cada* $\epsilon > 0$, *o problema*

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) \\ f(t) \in F_\epsilon(t, u(t)) \\ u(0) = (1-\epsilon)g(u), \end{cases} \tag{2.15}$$

em que $F_\epsilon : [0, 2\pi] \times \overline{D(A)} \to \mathcal{B}$ *é dada por*

$$F_\epsilon(t,u) = \begin{cases} F(t,u) & \textit{para } (t,u) \in ([0,2\pi]\backslash E_\epsilon) \times \overline{D(A)} \\ \{0\} & \textit{para } (t,u) \in E_\epsilon \times \overline{D(A)}, \end{cases}$$

onde $E_\epsilon \subseteq [0, 2\pi]$ *é um subconjunto mensurável de Lebesgue com* $\lambda(E_\epsilon) \leq \epsilon$ *tal que* $F_{|([0,2\pi]\backslash E_\epsilon)\times\overline{D(A)}}$ *é fortemente fracamente semicontínua superior, tem pelo menos uma solução* u_ϵ.

Demonstração. Sejam $k \in L^1(0, 2\pi; \mathbb{R}_+)$ dada por (H_4') e

$$\mathcal{F} = \{f \in L^1(0, 2\pi; \mathcal{B}); \|f(t)\| \leq k(t) \textit{ para quase todo } t \in (0, 2\pi)\}.$$

Pelo item 3 da Proposição 1.2.3, $\mathcal{F}$ é uniformemente integrável. Pelo Lema 2.3.2, $\{u_\epsilon^f; f \in \mathcal{F}\}$ é compacto em $C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$. Como $t \to u_\epsilon^f$ é contínuo e, pela Proposição 1.1.9, é fechado, então

$$C = \{u_\epsilon^f(t); f \in \mathcal{F}, t \in [0, 2\pi]\} = \overline{\{u_\epsilon^f(t); f \in \mathcal{F}, t \in [0, 2\pi]\}}$$

é compacto em $\overline{D(A)}$.

Por (H_2), a função multívoca $F : [0, 2\pi] \times \overline{D(A)} \to \mathcal{B}$ é quase fortemente fracamente semicontínua superior, ou seja, para cada $\epsilon > 0$, existe um subconjunto mensurável de Lebesgue $E_\epsilon \subseteq [0, 2\pi]$ com $\lambda(E_\epsilon) \leq \epsilon$ tal que F de $([0, 2\pi]\backslash E_\epsilon) \times \overline{D(A)}$ - dotada com a topologia forte - para $\mathcal{B}$ - dotada com a topologia fraca - é uma função multívoca semicontínua superior. Como $F_\epsilon : [0, 2\pi] \times \overline{D(A)} \to \mathcal{B}$ é dada por

$$F_\epsilon(t,u) = \begin{cases} F(t,u) & \text{para } (t,u) \in ([0,2\pi]\backslash E_\epsilon) \times \overline{D(A)} \\ \{0\} & \text{para } (t,u) \in E_\epsilon \times \overline{D(A)}, \end{cases}$$

temos que $F_{\epsilon|([0,2\pi]\backslash E_\epsilon)\times\overline{D(A)}}$ é fortemente fracamente semicontínua superior e tem valores fracamente compactos. Pelo Lema 1.4.1 e pelo Teorema 1.1.2, deduzimos que o conjunto

$$G_\epsilon = \overline{conv} F_\epsilon(([0,2\pi]\backslash E_\epsilon)\times C)$$

é fracamente compacto em $\mathcal{B}$. Afirmamos que

$$H_\epsilon = \overline{conv} F_\epsilon([0,2\pi]\times C) = \overline{conv}[F_\epsilon(([0,2\pi]\backslash E_\epsilon)\times C)\cup\{0\}].$$

Seja M o menor convexo fechado contendo $F_\epsilon([0,2\pi]\times C)$. Pela definição de F_ϵ, obtemos

$$F_\epsilon([0,2\pi]\times C) = [F_\epsilon(([0,2\pi]\backslash E_\epsilon)\times C)\cup\{0\}] \subset M.$$

Isso implica que H_ϵ é fracamente compacto em $\mathcal{B}$.

Seja

$$\mathcal{K}_\epsilon = \{f \in \mathcal{F}; f(t) \in H_\epsilon \text{ } para \text{ } quase \text{ } todo \text{ } t \in (0,2\pi)\}.$$

O conjunto $\mathcal{K}_\epsilon$ é convexo. De fato, sejam $f_1,\ f_2 \in \mathcal{K}_\epsilon$ e $\alpha \in [0,1]$. Pelo Teorema 1.2.2, $\alpha f_1 + (1-\alpha)f_2 \in L^1(0,2\pi;\mathcal{B})$. Ademais,

$$\begin{aligned}\|\alpha f_1 + (1-\alpha)f_2\| \leq \|\alpha f_1\| + \|(1-\alpha)f_2\| &= \alpha\|f_1\| + (1-\alpha)\|f_2\| \\ &\leq \alpha k(t) + (1-\alpha)k(t) = k(t)\end{aligned}$$

para quase todo $t \in (0,2\pi)$. Como H_ϵ é convexo, segue que $\alpha f_1(t) + (1-\alpha)f_2(t) \in H_\epsilon$ para quase todo $t \in (0,2\pi)$. Logo, $\alpha f_1 + (1-\alpha)f_2 \in \mathcal{K}_\epsilon$.

Definimos o operador $Q_\epsilon : \mathcal{K}_\epsilon \to L^1(0,2\pi;\mathcal{B})$ por

$$\begin{aligned}Q_\epsilon(f) &= Sel(F_\epsilon(\cdot, u_\epsilon^f(\cdot))) \\ &= \{h \in L^1(0,2\pi;\mathcal{B}); h(t) \in F_\epsilon(t, u_\epsilon^f(t)) \text{ } para \text{ } quase \text{ } todo \text{ } t \in [0,2\pi]\},\end{aligned}$$

onde u_ϵ^f é a única solução do problema (2.15) correspondendo a $f \in \mathcal{K}_\epsilon$. Note que Q_ϵ está bem definido. Afirmamos que Q_ϵ mapeia o conjunto $\mathcal{K}_\epsilon$ em si mesmo. Seja $f \in K_\epsilon$. Logo, $Q_\epsilon(f) = h \in L^1(0,2\pi;\mathcal{B})$ tal que $h(t) \in F_\epsilon(t, u_\epsilon^f(t))$ para quase todo $t \in [0,2\pi]$. Por (H_4'), existe $k \in L^1(0,2\pi;\mathbb{R}_+)$ tal que $\|h(t)\| \leq k(t)$ para quase todo $t \in (0,2\pi)$. Como $h(t) \in F_\epsilon(t, u_\epsilon^f(t))$ para quase todo $t \in [0,2\pi]$, temos

$$h(t) \in F_\epsilon(t, u_\epsilon^f(t)) \subset \overline{conv} F_\epsilon([0,2\pi]\times C) = H_\epsilon$$

para quase todo $t \in [0, 2\pi]$, mostrando que $h \in K_\epsilon$.

Afirmamos também que Q_ϵ é não vazia, convexa e tem valores fracamente compactos. Como Q_ϵ é uma seleção de $F_\epsilon(t, u_\epsilon^f(t))$, então, pela definição de F_ϵ e por (H_2), Q_ϵ é não vazia e convexa. Pelo Teorema 1.2.6, concluímos que Q_ϵ tem valores fracamente compactos.

Além disso, o gráfico de Q_ϵ é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado. De fato, seja $((f_n, g_n))$ uma sequência no gráfico de Q_ϵ fracamente $\times$ fracamente convergente para $(f, g) \in L^1(0, 2\pi; \mathcal{B}) \times L^1(0, 2\pi; \mathcal{B})$. Pelo Lema 2.3.2 e por (a_3) em (H_1), temos

$$\lim_{n\to\infty} u_\epsilon^{f_n}(t) = u_\epsilon^f(t)$$

uniformemente para $t \in [0, 2\pi]$. Note que $g_n(t) \in F_\epsilon(t, u_\epsilon^{f_n}(t))$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e para quase todo $t \in [0, 2\pi]$, $F_\epsilon(t, \cdot) : C \to \mathcal{B}$ é semicontínua superior para quase todo $t \in [0, 2\pi] \backslash E_\epsilon$ e $F_\epsilon(\cdot, u_\epsilon^f(t)) : [0, 2\pi] \backslash E_\epsilon \to \mathcal{B}$ é mensurável para cada $u_\epsilon^f(t) \in C$. Pelo Teorema 1.4.1, segue que

$$g(t) \in (t, u_\epsilon^f(t)) \tag{2.16}$$

para quase todo $t \in [0, 2\pi] \backslash E_\epsilon$. Por outro lado, $g_n(t) = g(t) = 0$ para quase todo $t \in E_\epsilon$. Assim, (2.16) é verdadeira para quase todo $t \in [0, 2\pi]$ e, portanto, o gráfico de Q_ϵ é fracamente $\times$ fracamente sequencialmente fechado.

Pelo Teorema 1.4.2, Q_ϵ tem pelo menos um ponto fixo $f \in \mathcal{K}_\epsilon$. Logo, este ponto fixo f, por meio de $f \mapsto u_\epsilon^f$, produz uma C^0-solução do problema (2.15). ■

Lema 2.3.4. *Assuma que (H_1), (H_2), (H_3'), (H_4') e (H_5) são satisfeitas. Então, para cada $\epsilon \in (0, 1)$, cada C^0-solução u do problema (2.15) é uniformemente limitada por r dado por (H_3), isto é, $\|u(t)\| \leq r$ para cada $t \in [0, 2\pi]$.*

Demonstração. Seja u uma C^0-solução arbitrária do problema (2.15). Assuma, por absurdo, que $\|u\|_\infty > r$, ou seja, existe $t_m \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\|u\|_\infty = \|u(t_m)\| > r.$$

Afirmamos que $t_m \neq 0$. Suponha que $t_m = 0$. A partir da condição inicial não local e por (g_2) em (H_5), temos

$$\|u\|_\infty = \|u(t_m)\| = \|u(0)\| = (1-\epsilon)\|g(u)\| \leq (1-\epsilon)\|u\|_\infty,$$

implicando que $0 < r < \|u\|_\infty = 0$ que é uma contradição. Assim, $t_m \in (0, 2\pi]$.

Além disso, u não é constante em $[0, t_m]$. De fato, suponha que $u(t) = \xi$ para cada $t \in [0, t_m]$. Pela condição inicial não local e por (g_2) em (H_5), obtemos

$$r < \|u\|_\infty = \|\xi\| = \|u(0)\| = (1-\epsilon)\|g(u)\| \leq (1-\epsilon)\|u\|_\infty = (1-\epsilon)\|\xi\|,$$

mostrando que $\xi = 0$ que é um absurdo, pois $0 < r < \|\xi\|$.

Pelo fato de u não ser constante em $[0, t_m]$, existe $t_0 \in (0, t_m)$ tal que

$$r < \|u(t_0)\| < \|u(s)\| \leq \|u(t_m)\| = \|u\|_\infty \tag{2.17}$$

para cada $s \in (t_0, t_m]$.

Por (a_1) em (H_1), temos que $0 \in A0$. Então, usando (2.3) com $x = 0$, $y = 0$ e $s = t_0$, obtemos

$$r < \|u(t_m)\| \leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t_m} [u(\tau), f(\tau)]_+ d\tau \leq \|u(t_0)\| + \int_0^{t_m} [u(\tau), f(\tau)]_+ d\tau.$$

Agora, usando (H_3') com $z = f(\tau)$ se $\tau \in [0, t_m] \backslash E_\epsilon$ e o item 2 da Proposição 1.5.1 com $f(\tau) = y = 0$ se $\tau \in E_\epsilon$, obtemos

$$r < \|u(t_m)\| \leq \|u(t_0)\|$$

Por (2.17), temos que

$$\|u(t_m)\| \leq \|u(t_0)\| < \|u(t_m)\|$$

que é um absurdo. Portanto $\|u\|_\infty \leq r$. ∎

2.4 Resultados Principais

Nesta seção, demonstraremos os principais resultados deste trabalho.

Teorema 2.4.1. *Se (H_1), (H_2), (H_3'), (H_4') e (H_5) são satisfeitas, então o problema*

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) \ni f(t) \\ f(t) \in F(t, u(t)) \\ u(0) = g(u) \end{cases} \tag{2.18}$$

tem pelo menos uma C^0-solução $u : [0, 2\pi] \to B[0, r] \cap \overline{D(A)}$.

Demonstração. Sejam (ϵ_n) uma sequência com $\epsilon_n \to 0$, (u_n) uma sequência das C^0-soluções do problema (2.15) correspondendo a $\epsilon = \epsilon_n$ e (f_n) tal que

$$\begin{cases} u_n'(t) + Au_n(t) \ni f_n(t), \ t \in [0, 2\pi] \\ f_n(t) \in F_{\epsilon_n}(t, u_n(t)) \text{ para quase todo } t \in (0, 2\pi) \\ u_n(0) = (1 - \epsilon_n) g(u_n). \end{cases}$$

Por (H_4') e pelo item 3 da Proposição 1.2.3, temos que o conjunto $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ é uniformemente integrável em $L^1(0, 2\pi; \mathcal{B})$. Então, pelo Lema 2.3.4, por (a_1) e (a_2) em (H_1) e pelo Teorema 2.1.2, para cada $\delta \in (0, 2\pi)$, o conjunto $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em $C([\delta, 2\pi]; \overline{D(A)})$. Por (g_1) em (H_5), deduzimos que o conjunto

$$\{u_n(0); n \in \mathbb{N}\} = \{(1 - \epsilon_n) g(u_n); n \in \mathbb{N}\} = \{g(u_n); n \in \mathbb{N}\}$$

é relativamente compacto em $\overline{D(A)}$. Agora, pela segunda parte do Teorema 2.1.2, concluímos que $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em $C([0, 2\pi]; \overline{D(A)})$. Logo,

$$C = \overline{\{u_n(t); n \in \mathbb{N}, t \in [0, 2\pi]\}}$$

é compacto em $\mathcal{B}$.

Por (H_2), a função multívoca $F : [0, 2\pi] \times \overline{D(A)} \to \mathcal{B}$ é quase fortemente fracamente semicontínua superior. Assim, $F_{\epsilon_n|([0,2\pi] \setminus E_{\epsilon_n}) \times \overline{D(A)}}$, onde $E_\epsilon \subseteq [0, 2\pi]$ é um subconjunto mensurável de Lebesgue com $\lambda(E_\epsilon) \leq \epsilon$, é uma função multívoca fortemente fracamente semicontínua superior e tem valores fracamente compacto. Pelo Lema 1.4.1 e pelo Teorema 1.1.2, o conjunto

$$\overline{conv} F_{\epsilon_n}([0, 2\pi] \times C) = \overline{conv}[F_{\epsilon_n}(([0, 2\pi] \setminus E_{\epsilon_n} \times C) \cup \{0\}]$$

é fracamente compacto em $\mathcal{B}$. Pelo Teorema 1.2.6, segue que $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ é fracamente relativamente compacto em $L^1(0, 2\pi; \mathcal{B})$.

Então, em pelo menos uma subsequência temos

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ fracamente em } L^1(0, 2\pi; \mathcal{B}) \\ \lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \text{ uniformemente para } t \in [0, 2\pi] \\ \lim_{n\to\infty} (1 - \epsilon_n) g(u_n) = g(u) \end{cases}$$

e, pelo Teorema 1.4.1, concluímos que $f(t) \in F(t, u(t))$ para quase todo $t \in [0, 2\pi]$. Como A é do tipo contínuo completo, vide (a_3) em (H_1), temos que u é uma C^0-solução do problema (2.18) correspondendo a seleção f de $t \mapsto F(t, u(t))$ e, pelo Lema 2.3.4, segue que $u : [0, 2\pi] \to B[0, r] \cap \overline{D(A)}$. ■

Teorema 2.4.2. *Se $(H_1) - (H_5)$ são satisfeitas, então o problema (2.18) tem pelo menos uma C^0-solução.*

Demonstração. Seja $\rho : \mathcal{B} \to B[0, r]$ dada por

$$\rho(u) = \begin{cases} u & \text{se } u \in B[0, r] \\ r\|u\|^{-1}u & \text{se } u \in \mathcal{B} \backslash B[0, r]. \end{cases}$$

Tomando $X_1 = B[0, r]$ e $X_2 = X \backslash B(0, r)$ no Teorema 1.1.3, temos que ρ é contínua.

Definimos a função multívoca $F_\rho : [0, 2\pi] \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ por

$$F_\rho(t, u) = F(t, \rho(u)).$$

Note que F_ρ é não vazia, quase fortemente fracamente semicontínua superior e tem valores fracamente compactos pela continuidade da função ρ. Sejam u_1, $u_2 \in \mathcal{B}$ e $\alpha \in [0, 1]$. Então

$$\alpha\|u_1\| + (1 - \alpha)\|u_2\| \leq \alpha r + (1 - \alpha) r = r,$$

mostrando que F_ρ é convexa. Logo, F_ρ satisfaz a condição (H_2).

Como F satisfaz (H_3), existe $r > 0$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}_+$, cada $u \in D(A)$ com $\|u\| = r$ e para cada $z \in F(t, u)$, temos

$$[u, z]_+ \leq 0.$$

Para o mesmo r, considere $t \in \mathbb{R}_+$, $u \in D(A)$ com $\|u\| \geq r$ e $z \in F_\rho(t,u)$. Se $\|u\| = r$, então

$$F_\rho(t,u) = F(t,\rho(u)) = F(t,u)$$

e isso implica que $[u,z]_+ \leq 0$. Agora, se $\|u\| > r$, então

$$F_\rho(t,u) = F(t,\rho(u)) = F(t, r\|u\|^{-1}u).$$

Note que $r\|u\|^{-1}u$ tem norma r. Segue de (H_3) que $[r\|u\|^{-1}u, z]_+ \leq 0$. Pelo item 1 da Proposição 1.5.1, temos que $[u,z]_+ \leq 0$ já que $r\|u\|^{-1} > 0$. Logo, F_ρ satisfaz (H_3').

Afirmamos que F_ρ também satisfaz a condição (H_4'). Pelo fato de $\|F_\rho(t,u)\| \leq r$ para cada $t \in [0,2\pi]$, existe uma função constante igual a r, $k \in L^1(0,2\pi;\mathbb{R}_+)$, tal que

$$\|F_\rho(t,u)\| \leq k(t)$$

para todo $t \in [0,2\pi]$.

Assim, pelo Teorema 2.4.1, o problema

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) \\ f(t) \in F_\rho(t,u(t)) \\ u(0) = g(u) \end{cases}$$

tem pelo menos uma C^0-solução $u : [0,2\pi] \to B[0,r] \cap \overline{D(A)}$. Como $\|u(t)\| \leq r$ para cada $t \in [0,2\pi]$, concluímos que $F_\rho(t,u(t)) = F(t,u(t))$ para cada $t \in [0,2\pi]$. Portanto, u é uma C^0-solução de (2.18). $\blacksquare$

Capítulo 3

Exemplos

Este capítulo apresenta aplicações da teoria exposta anteriormente. Os exemplos detalhados a seguir podem ser encontrados em [28].

A próxima proposição garante que os resultados do Capítulo 2 valem quando $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach reflexivo.

Proposição 3.0.1. *(Corolário 2.3.1, p.49, [35]) Sejam $\mathcal{B}$ um espaço de Banach real cujo dual topológico é uniformemente convexo e $A : D(A) \subset \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ um operador m-acretivo tal que $-A$ gera um semigrupo compacto. Então A é do tipo contínuo completo.*

Observe que, se $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach não reflexivo, pelas Proposições 1.1.6, 1.1.5 e 1.1.7, seu dual não é uniformemente convexo. Logo, não podemos utilizar a Proposição 3.0.1 para mostrar que o operador m-acretivo A é do tipo contínuo completo. Entretanto, os resultados do Capítulo 2 valem também quando $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach que não é reflexivo.

Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, com fronteira suave Γ e Δ o operador Laplace no sentido das distribuições sobre Ω. Se $\varphi : D(\varphi) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $u : \Omega \to D(\varphi)$, denotemos por

$$S_\varphi(u) = \{v \in L^1(\Omega); v(x) \in \varphi(u(x)) \text{ para quase todo } x \in \Omega\}.$$

Exemplo 3.0.1. *O operador difusão não linear $-\Delta\varphi$ em $L^1(\Omega)$ é m-acretivo do tipo contínuo completo em um espaço de Banach que não é reflexivo.*

A afirmação do Exemplo 3.0.1 é justificada pelo seguinte teorema:

Teorema 3.0.1. *(Teoremas 1.7.7 - 1.7.9, p. 22, [11]) Sejam* Ω *um subconjunto não vazio, aberto e limitado em* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geq 1$*, com* C^1*-fronteira* Γ *e* $\varphi : D(\varphi) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *maximal monótono com* $0 \in \varphi(0)$*. Então o operador* $\Delta\varphi : D(\Delta\varphi) \subseteq L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ *definido por*

$$\begin{cases} D(\Delta\varphi) & = \{u \in L^1(\Omega); \exists\, v \in S_\varphi(u) \cap W_0^{1,1}(\Omega), \Delta v \in L^1(\Omega)\} \\ \Delta\varphi(u) & = \{\Delta v; v \in S_\varphi(u) \cap W_0^{1,1}(\Omega)\} \cap L^1(\Omega) \text{ para } u \in D(\Delta\varphi) \end{cases}$$

é m-dissipativo em $L^1(\Omega)$*. Se, em adição,* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínuo em* $\mathbb{R}$*, de classe* C^1 *em* $\mathbb{R}^*$ *e existem duas contantes* $c > 0$*,* $a > 0$ *se* $n \leq 2$ *e* $a > \dfrac{n-2}{n}$ *se* $n \geq 3$*, tais que*

$$\varphi'(r) \geq c|r|^{a-1}$$

para cada $r \in \mathbb{R}^*$*, então* $\Delta\varphi$ *gera um semigrupo compacto. Além disso, para cada arbitrário e fixado* $\xi \in L^1(\Omega)$*, a aplicação* $f \mapsto u(\cdot, \tau, \xi, f)$ *é fracamente fortemente sequencialmente contínua de* $L^1(\tau, T; L^1(\Omega))$ *para* $C([\tau, T]; L^1(\Omega))$ *e então* $\Delta\varphi$ *é do tipo contínuo completo.*

Nos próximos exemplos, utilizaremos os resultados enunciados abaixo.

Proposição 3.0.2. *(Proposição 2.2.2, p. 42, [35]) Sejam* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert real e* $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *uma função própria, convexa e semicontínua inferior. Se o operador* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *é definido por* $Ax = \partial\varphi(x)$ *para cada* $x \in D(A) = D(\partial\varphi)$*, então a função* φ *é do tipo compacto se e somente se o semigrupo gerado por* $-A$ *em* $\overline{D(A)}$ *é compacto.*

Corolário 3.0.1. *(Corolário 2.3.2, p. 50, [35]) Sejam* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert real e* $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *uma função própria, convexa, semicontínua inferior e do tipo compacto. Seja também* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *definido por* $Ax = \partial\varphi(x)$ *para cada* $x \in D(A) = D(\partial\varphi)$*. Então, para cada* $\xi \in \overline{D(A)}$*, a aplicação* $f \mapsto u(\cdot, a, \xi, f)$ *é fracamente fortemente sequencialmente contínua de* $L^1([a, b]; \mathcal{H})$ *para* $C([a, b]; \mathcal{H})$*.*

Teorema 3.0.2. *(Teorema 1.7.8, p. 22, [11]) Sejam* Ω *um subconjunto não vazio, aberto e limitado em* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geq 1$*, com* C^1*-fronteira* Γ *e* $\varphi : D(\varphi) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *maximal monótono* *com* $0 \in \varphi(0)$. *Se* $q > 1$ *é tal que* $L^q(\Omega) \subseteq H^{-1}(\Omega)$, *então, para cada arbitrário e fixado* $\xi \in L^q(\Omega)$, *a aplicação* $f \mapsto u(\cdot, \tau, \xi, f)$ *é fracamente fortemente sequencialmente contínua de* $L^1(\tau, T; L^q(\Omega))$ *para* $C([\tau, T]; L^1(\Omega))$.

Exemplo 3.0.2. *Sejam* Ω *um subconjunto não vazio, aberto e limitado em* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, *com* C^2*-fronteira* Γ, $p \in [2, \infty)$ *e* $\beta > 0$. *Considere o problema não linear*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} \in \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \beta |u|^{p-2} u + F(t, u) & \text{em } (0, 2\pi) \times \Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial v_p} \in \gamma(u) & \text{em } (0, 2\pi) \times \Gamma \\ u(0) = \dfrac{1}{\mu([0, T])} \displaystyle\int_0^T \mathcal{N}(u(t)) d\mu(t) & \end{cases} \tag{3.1}$$

onde

$$\frac{\partial u}{\partial v_p} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{e_i}),$$

$\overrightarrow{n}$ *é o vetor normal exterior de* Γ, $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ *é a base canônica em* $\mathbb{R}^n$, $F(t, u) = [f_1(t, u) + \psi, f_2(t, u) + \psi]$ *com* $f_i : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, *e* $\psi \in L^2(\Omega)$.

Atentando para o Exemplo 3.0.2, do Teorema 2.4.2 deduzimos o seguinte resultado:

Teorema 3.0.3. *Sejam* $\gamma : D(\gamma) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *um operador maximal monótono com* $0 \in D(\gamma)$ *e* $0 \in \gamma(0)$, $\psi \in L^2(\Omega)$ *e* $f_i : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, *duas funções dadas satisfazendo*

$(F_1) f_1(t, u) \leq f_2(t, u)$ *para cada* $(t, u) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$;

$(F_2) f_1$ *é semicontínua inferior e* f_2 *é semicontínua superior;*

(F_3) *existem* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *tais que* $|f_i(t, u)| \leq a|u| + b$ *para* $i = 1, 2$ *e todo* $(t, u) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$;

(F_4) *existe* $c > 0$ *tal que* $u f_i(t, u) \leq -cu^2$ *para* $i = 1, 2$ *e todo* $(t, u) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

Sejam também $\mathcal{N} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *um operador não expansivo e possivelmente não linear,* μ *uma medida* σ*-finita, completa em* $[0, 2\pi]$ *e contínua em relação a medida de Lebesgue em* $t = 0$. *Então o problema* (3.1) *tem pelo menos uma* C^0*-solução* $u \in C([0, 2\pi]; L^2(\Omega))$.

Demonstração. Seja $A : D(A) \subseteq L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definido por

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega); \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \beta |u|^{p-2} u \in L^2(\Omega) \right\} \\ A(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \beta |u|^{p-2} u \end{cases}$$

e $g : C([0, 2\pi]; L^2(\Omega)) \to L^2(\Omega)$ dada por

$$g(u) = \frac{1}{\mu([0, 2\pi])} \int_0^{2\pi} \mathcal{N}(u(s)) d\mu(s).$$

A partir dessas definições, o problema (3.1) pode ser reescrito da forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} \in A(u) + F(t, u) \\ u(0) = g(u) \end{cases} \tag{3.2}$$

Note que, o problema (3.2) tornou-se o problema (2.18). Com isso, verificaremos que $(H_1) - (H_2)$ são satisfeitas.

Primeiramente, observe que, $D(A)$ é denso em $L^2(\Omega)$, pois $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para cada $p \in [1, \infty)$.

Afirmamos que o operador γ é m-acretivo. De fato, isso segue da Observação 1.5.1 e da Proposição 1.5.2. Assim, o operador $-A$ é m-acretivo, como pode ser visto no Exemplo 1.5.4, p. 18, [35]. Além disso, $0 \in -A0$.

Pelo Exemplo 1.6.3, p. 21-22, [35], temos que a subdiferecial φ_p^d, definida em (1.4), é exatamente o operador $-A$. Como φ_p^d é própria, convexa, semicontínua inferior e do tipo compacto, vide a Proposição 1.6.1, então, pela Proposição 3.0.2, o semigrupo gerado por A em $L^2(\Omega)$ é compacto.

Pelo Corolário 3.0.1, temos que para cada $\xi \in L^2(\Omega)$, a aplicação $f \mapsto u(\cdot, 0, \xi, f)$ é fracamente fortemente sequencialmente contínua de $L^1([0, 2\pi]; L^2(\Omega))$ para $C([0, 2\pi]; L^2(\Omega))$ e, consequentemente, $-A$ é do tipo contínuo completo. Portanto, $-A$ satisfaz (H_1).

Agora, note que F é não vazia e convexa, pois, sejam $(t_1, u_1), (t_2, u_2) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, então

$$\alpha[f_1(t_1, u_1) + \psi, f_2(t_1, u_1) + \psi] + (1 - \alpha)[f_1(t_2, u_2) + \psi, f_2(t_2, u_2) + \psi] =$$

$[(\alpha(f_1(t_1,u_1)-f_1(t_2,u_2))+f_1(t_2,u_2))+\psi,(\alpha(f_2(t_1,u_1)-f_2(t_2,u_2))+f_2(t_2,u_2))+\psi]\subset L^2(\Omega)$.

Afirmamos que F é quase fortemente fracamente semicontínua superior, isto é, para cada $\epsilon>0$, existe um subconjunto mensurável de Lebesgue $E_\epsilon\subseteq[0,2\pi]$ com $\lambda(E_\epsilon)\leq\epsilon$ tal que F é uma função multívoca semicontínua superior de $([0,2\pi]\backslash E_\epsilon)\times\mathbb{R}$ - dotada com a topologia forte - para $L^2(\Omega)$ - dotada com a topologia fraca. Suponha, por contradição, que $F:([0,2\pi]\backslash E_\epsilon)\times\mathbb{R}\to L^2(\Omega)$ não é fortemente fracamente semicontínua superior, então existe $(t,u)\in([0,2\pi]\backslash E_\epsilon)\times\mathbb{R}$ tal que $F:([0,2\pi]\backslash E_\epsilon)\times\mathbb{R}\to L^2(\Omega)$ não é fortemente fracamente semicontínua superior em (t,u). Logo, existe um aberto $M\subset L^2(\Omega)$ tal que $F_{|([0,2\pi]\backslash E_\epsilon)\times\mathbb{R}}(t,u)\subset M$ e uma sequência $(u_n)\subset\mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty}u_n=u$ e $F_{|([0,2\pi]\backslash E_\epsilon)\times\mathbb{R}}(t,u_n)\nsubseteq M$. Isso significa que existe uma sequência (η_n) com $\eta_n\in F_{|([0,2\pi]\backslash E_\epsilon)\times\mathbb{R}}(t,u_n)$ e $\eta_n\in L^2(\Omega)\backslash M$. Temos também que (η_n) é uniformemente limitada. Assim, podemos assumir sem perda de generalidade que (η_n) é fracamente convergente para alguma função η em $L^2(\Omega)$. Pelo Corolário 1.1.1, existe uma sequência (Φ_n) com $\Phi_n\in conv\{\eta_N;N\geq n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n=\eta$$

fortemente em $L^2(\Omega)$. Como f_1 é semicontínua inferior e f_2 é semicontínua superior, então $\eta\in F_{|([0,2\pi]\backslash E_\epsilon)\times\mathbb{R}}(t,u)\subseteq M$. Por outro lado, como $L^2(\Omega)\backslash M$ é fechado, temos que $\eta\in L^2(\Omega)\backslash M$ que é uma contradição.

Ademais, como $F(t,u)$ é um intervalo em $L^2(\Omega)$, segue que F tem valores fracamente compactos. Portanto, a condição (H_2) é satisfeita.

Pelo item 2 da Proposição 1.5.1, temos

$$|[u,z]_+|\leq\|z\|_{L^2(\Omega)}$$

para cada $u\in D(A)$ com $|u|=r$ e $z\in F(t,u)$. Por (F_4) e tomando $r\geq c^{-1}\|\psi\|_{L^2(\Omega)}$, obtemos

$$\|z\|_{L^2(\Omega)}=\|[f_1(t,u)+\psi,f_2(t,u)+\psi]\|_{L^2(\Omega)}\leq[-c|u|+\|\psi\|_{L^2(\Omega)},-c|u|+\|\psi\|_{L^2(\Omega)}]\leq[0,0],$$

mostrando que a condição (H_3) é satisfeita. Logo, podemos escolher $k\in L^1(0,2\pi;\mathbb{R}_+)$ tal que

$$\|z\|_{L^2(\Omega)}\leq k(t)$$

para quase todo $t \in (0, 2\pi)$, cada $u \in B[0, r]$ e cada $z \in F(t, u)$. Isso implica que a condição (H_4) também é satisfeita.

Pelas discussões realizadas na Seção 2.2, concluímos que g satisfaz (H_5).

Portanto, pelo Teorema 2.4.2, o problema (3.1) tem pelo menos uma C^0-solução $u \in C([0, 2\pi]; L^2(\Omega))$. ■

Exemplo 3.0.3. *Sejam Ω um subconjunto não vazio, aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com C^1-fronteira Γ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não decrescente. Considere a equação difusão não linear sujeita a condições iniciais não locais*

$$\begin{cases} u_t(t,x) \in \Delta\varphi(u(t,x)) + f(t,x) & em\ [0,2\pi] \times \Omega \\ f(t,x) \in F(t, u(t,x)) & em\ [0,2\pi] \times \Omega \\ \varphi(u(t,x)) = 0 & em\ [0,2\pi] \times \Gamma \\ u(0,x) = \dfrac{1}{\mu([0,2\pi])} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{N}(u(s,\cdot))(x)d\mu(s) & em\ [0,2\pi] \times \Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Agora, atentando para o Exemplo 3.0.3, do Teorema 2.4.2 deduzimos o seguinte resultado:

Teorema 3.0.4. *Sejam Ω um subconjunto não vazio, aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com C^1-fronteira Γ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$ e de classe C^1 em $\mathbb{R}^*$ para a qual existem duas constantes $c > 0$, $a > 0$ se $n \leq 2$ e $a > \dfrac{n-2}{n}$ se $n \geq 3$, tais que*

$$\varphi'(r) \geq c|r|^{a-1}$$

para cada $r \in \mathbb{R}^*$. Sejam também $F(t,u) = [f_1(t,u)+\psi, f_2(t,u)+\psi]$ com $f_i : [0,2\pi]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1,2,$ satisfazendo $(F_1) - (F_4)$ do Teorema 3.0.3, $\psi \in L^1(\Omega)$ e $\mathcal{N} : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ um operador não expansivo e possivelmente não linear. Então o problema (3.3) tem pelo menos uma C^0-solução $u \in C([\tau, T]; L^1(\Omega))$.

Demonstração. Observe que, o problema (3.3) pode ser reescrito como o problema (2.18). Com isso, verificaremos que $(H_1) - (H_2)$ são satisfeitas.

Considere $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$p_n(x) = \frac{nx}{n|x| + 1}.$$

Note que p_n é de classe C^1 em $\mathbb{R}$, $p_n(0) = 0$, $|p_n(x)| \leq 1$, $p_n'(x) \geq 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = sign(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sejam $u_i \in D(A)$ e $v_i \in -Au_i$, $i = 1, 2$. Por (1.3), podemos escrever

$$[u_1 - u_2, v_1 - v_2]_+ = \int_\Omega (v_1 - v_2) sign(u_1 - u_2) dx + \int_{u_1=u_2} |v_1 - v_2| dx.$$

Aplicando a Fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega (v_1 - v_2) p_n(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) dx = -\int_\Omega \Delta(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) p_n(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) dx$$

$$= \int_\Omega \langle \nabla(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)), \nabla p_n(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) \rangle dx$$

$$= \int_\Omega p_n'(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) \|\nabla(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))\|^2 dx \geq 0.$$

Então,

$$\int_\Omega (v_1 - v_2) p_n(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) dx \geq 0.$$

Agora, fazendo $n \to \infty$, temos

$$\int_\Omega (v_1 - v_2) sign(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) dx \geq 0.$$

Como φ é não decrescente, temos que $sign(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) = sign(u_1 - u_2)$ para quase todo $x \in \Omega$. Logo,

$$\int_\Omega (v_1 - v_2) sign(u_1 - u_2) dx \geq 0.$$

Assim,

$$[u_1 - u_2, v_1, v_2]_+ \geq 0,$$

mostrando que $-A$ é acretivo. Como a aplicação $I + (-A)$ é sobrejetora, onde I é o operador identidade em $L^1(\Omega)$, vide demonstração do Teorema 2.1, p. II.31, [9], concluímos que $-A$ é m-acretivo. Ademais, $0 \in -A0$. Portanto, $-A$ satisfaz (a_1) em (H_1).

Sejam $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ com $u_1 < u_2$. Como φ é não decrescente, então

$$\langle \varphi(u_1) - \varphi(u_2), u_1 - u_2 \rangle = (\varphi(u_1) - \varphi(u_2))(u_1 - u_2) \geq 0.$$

Logo, φ é um operador monótono. Seja $(u_1, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Suponha que para todo $u_2 \in \mathbb{R}$, temos

$$(v - \varphi(u_2))(u_1 - u_2) \geq 0.$$

Para $u_1 > u_2$, temos que $v \geq \varphi(u_2)$. Escolhendo $u_2 = u_n$ com $(u_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $u_n \to u_1$, obtemos $v \geq \varphi(u_1)$ pela continuidade da φ. Para $u_1 < u_2$, temos que $v \leq \varphi(u_2)$. Escolhendo $u_2 = u_n$ com $(u_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $u_n \to u_1$, obtemos $v \leq \varphi(u_1)$ pela continuidade da φ. Portanto, $v = \varphi(u_1)$. Isso implica que φ é maximal monótono. Pelo Teorema 3.0.1, $-A$ também satisfaz (a_2) em (H_1).

Mostraremos que, para cada arbitrário e fixado $\xi \in L^1(\Omega)$, a aplicação $f \mapsto u(\cdot, \tau, \xi, f)$ é fracamente fortemente sequencialmente contínua de $L^1(\tau, T; L^1(\Omega))$ para $C([\tau, T]; L^1(\Omega))$ e, consequentemente, $-A$ será do tipo contínuo completo. Sejam $\xi \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1(\tau, T; L^1(\Omega))$ e (f_n) uma sequência em $L^1(\tau, T; L^1(\Omega))$ com $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ fracamente em $L^1(\tau, T; L^1(\Omega))$. Pelo Teorema de Fubini, temos que $L^1([\tau, T] \times \Omega) = L^1(\tau, T; L^1(\Omega))$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \tag{3.4}$$

fracamente em $L^1([\tau, T] \times \Omega)$. Seja $\alpha \in \mathbb{N}$ arbitrário e fixado. Definimos $P_\alpha : L^1([\tau, T] \times \Omega) \to L^1([\tau, T] \times \Omega)$ por

$$P_\alpha(f)(t, x) = \begin{cases} f(t, x) & \text{se } |f(t, x)| \leq \alpha \\ 0 & \text{se } |f(t, x)| > \alpha. \end{cases}$$

Como (f_n) é fracamente convergente, temos que (f_n) é limitada em $L^1([\tau, T] \times \Omega)$, digamos que por $m > 0$. Então,

$$\alpha\ \lambda(\{(s, y) \in [\tau, T] \times \Omega; |f_n(s, y)| > \alpha\}) \leq \int_{|f_n(t,x)|>\alpha} |f_n(s, y)| ds\ dy \leq m$$

e

$$\lambda(\{(s, y) \in [\tau, T] \times \Omega; |f_n(s, y)| > \alpha\}) \leq \frac{m}{\alpha}$$

para $n, \alpha \geq 1$. Como

$$\|P_\alpha f_n - f_n\|_{L^1([\tau,T]\times\Omega)} = \int_{|f_n(t,x)|>\alpha} |f_n(s, y)| ds\ dy \leq m$$

para $n, \alpha \in \mathbb{N}$, e pelo Teorema 1.2.5, $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ é uniformemente integrável, deduzimos que

$$\lim_{\alpha\to\infty} P_\alpha f_n = f_n \tag{3.5}$$

fortemente em $L^1([\tau, T] \times \Omega)$, uniformemente para $n \geq 1$. Afirmamos que, para cada arbitrário e fixado η no dual de $L^1([\tau, T] \times \Omega)$, isto é, $\eta \in L^\infty([\tau, T] \times \Omega)$, temos

$$\lim_{\alpha\to\infty} \lim_{n\to\infty} |\eta(P_\alpha f_n) - \eta(P_\alpha f)| = 0. \tag{3.6}$$

Note que,

$$|\eta(P_\alpha f_n) - \eta(P_\alpha f)| \leq |\eta(P_\alpha f_n) - \eta(f_n)| + |\eta(f_n) - \eta(f)| + |\eta(f) - \eta(P_\alpha f)|.$$

Agora usando as informações em (3.4) e (3.5), obtemos (3.6). Tomemos $(\xi_p) \subset L^q(\Omega)$ com $\lim_{p\to\infty} \xi_p = \xi$ fortemente em $L^1(\Omega)$. Logo,

$$\|u(t,\tau,\xi,f_n) - u(t,\tau,\xi,f)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u(t,\tau,\xi,f_n) - u(t,\tau,\xi_p,f_n)\|_{L^1(\Omega)}+$$

$$+\|u(t,\tau,\xi_p,f_n) - u(t,\tau,\xi_p,P_\alpha f_n)\|_{L^1(\Omega)} + \|u(t,\tau,\xi_p,P_\alpha f_n) - u(t,\tau,\xi_p,P_\alpha f)\|_{L^1(\Omega)}+$$

$$+\|u(t,\tau,\xi_p,P_\alpha f) - u(t,\tau,\xi_p,f)\|_{L^1(\Omega)} + \|u(t,\tau,\xi_p,f) - u(t,\tau,\xi,f)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Seja $\epsilon > 0$. Fixemos $p = p(\epsilon)$ tal que $\|\xi - \xi_p\|_{L^1(\Omega)} \leq \epsilon$. Por (3.6) e pelo Teorema 3.0.2, para p, podemos encontrar $n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u(t,\tau,\xi_p,P_\alpha f_n) - u(t,\tau,\xi_p,P_\alpha f)\|_{L^1(\Omega)} \leq \epsilon$$

para cada $n, \alpha \in \mathbb{N}$ e $n, \alpha \geq n_1(\epsilon)$. Por (3.5), para o mesmo $\epsilon > 0$ e $p = p(\epsilon)$, existe $n_2(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u(t,\tau,\xi_p,f_n) - u(t,\tau,\xi_p,P_\alpha f_n)\|_{L^1(\Omega)} \leq \epsilon$$

e

$$\|u(t,\tau,\xi_p,P_\alpha f) - u(t,\tau,\xi_p,f)\|_{L^1(\Omega)} \leq \epsilon$$

para cada $\alpha \in \mathbb{N}$ com $\alpha > n_2(\epsilon)$ e cada $n \in \mathbb{N}$. Definindo $n(\epsilon) = \text{máx}\{n_1(\epsilon), n_2(\epsilon)\}$, obtemos

$$\|u(t,\tau,\xi,f_n) - u(t,\tau,\xi,f)\|_{L^1(\Omega)} \leq 5\epsilon$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n(\epsilon)$. Portanto, para cada arbitrário e fixado $\xi \in L^1(\Omega)$, a aplicação $f \mapsto u(\cdot, \tau, \xi, f)$ é fracamente fortemente sequencialmente contínua de $L^1(\tau, T; L^1(\Omega))$ para $C([\tau, T]; L^1(\Omega))$. Assim, $-A$ satisfaz (a_3) em (H_1).

Além disso, para $(H_2) - (H_5)$ seguimos os passos presentes no Teorema 3.0.3.

Então, pelo Teorema 2.4.2, o problema (3.3) tem pelo menos uma C^0-solução $u \in C([\tau, T]; L^1(\Omega))$. ■

Referências Bibliográficas

[1] AIZICOVICI, S.; LEE, H. Nonlinear nonlocal Cauchy problems in Banach spaces. **Applied Mathematics Letters**, v. 18, n. 4, p. 401-407, 2005.

[2] AIZICOVICI, S.; MCKIBBEN, M. Existence results for a class of abstract nonlocal Cauchy problems, **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v. 39, n. 5, p. 649-668, 2000.

[3] AIZICOVICI, S.; PAPAGEORGIOU, N. S.; STAICU, V. Periodic solutions of nonlinear evolution inclusions in Banach spaces. **Journal of Nonlinear and Convex Analysis**, v. 7, n. 2, p. 163-177, 2006.

[4] AIZICOVICI, S.; PAVEL, N. H.; VRABIE, I. I. Anti-periodic solutions to strongly nonlinear evolution equations in Hilbert spaces. **An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (NS)**, v. 44, p. 227-234, 1998.

[5] AIZICOVICI, S.; STAICU, V. Multivalued evolution equations with nonlocal initial conditions in Banach spaces. **Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA**, v. 14, n. 3-4, p. 361-376, 2007.

[6] ANDREU-VAILLO, F.; CASELLES, V.; MAZÓN, J. M. **Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals**. Springer Science & Business Media, 2004.

[7] BARBU, V. **Nonlinear Semigroups and Differential Equation in Banach Spaces**. Editura Academiei, Bucuresti, Noordhoff, 1976.

[8] BARBU, V. **Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces**. Springer Science & Business Media, 2010.

[9] BÉNILAN, Ph. Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications. **Thèse, Publications Math. Orsay, Univ. Paris-Sud**, 1972.

[10] BYSZEWSKI, L. Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 162, n. 2, p. 494-505, 1991.

[11] CARJA, O.; NECULA, M.; VRABIE, I. I. **Viability, Invariance and Applications**. Elsevier North-Holland Mathematics Studies, v. 207, 2007.

[12] DENG, K. Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with initial boundary conditions. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 179, n. 2, p. 630-637, 1993.

[13] DIESTEL, J. Remarks on weak compactness in $L_1(\mu, X)$. **Glasgow. Math. J.**, v. 18, n. 1, p. 87-91, 1977.

[14] DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J. T. **Linear Operators Part I: General Theory**. New York: Interscience Publishers, Inc., 1958.

[15] GARCÍA-FALSET, J. Existence results and asymptotic behaviour for nonlocal abstract Cauchy problems. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 338, n. 1, p. 639-652, 2008.

[16] GARCÍA-FALSET, J.; REICH, S. Integral solutions to a class of nonlocal evolution equations. **Commun. Contemp. Math.**, v. 12, n. 6, p. 1031-1054, 2010.

[17] GUIMARÃES, C. J. **Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações envolvendo o $p(x)$-Laplaciano**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande, 2006.

[18] HIRANO, N. Existence of periodic solutions for nonlinear evolution equations in Hilbert spaces. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 120, n. 1, p. 185-192, 1994.

[19] HIRANO, N.; SHIOJI, N. Invariant sets for nonlinear evolution equations, Cauchy problems and periodic problems. In: **Abstract and Applied Analysis**. Hindawi, 2004.

[20] LAKSHMIKANTHAM, V.; PAPAGEORGIOU, N. S. Periodic solutions of nonlinear evolution inclusions. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 52, n. 1-3, p. 277-286, 1994.

[21] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1983.

[22] MUNKRES, J. **Topology**. 2^{nd} ed. Prentice Hall, Inc., 2000.

[23] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. Petrópolis: Laboratório Nacional de Computação Científica, 2004.

[24] OKOCHI, H. On the existence of periodic solutions to nonlinear abstract parabolic equations. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, v. 40, n. 3, p. 541-553, 1988.

[25] OLIVEIRA, C. R. **Introdução à Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[26] PAICU, A. Periodic solutions for a class of differential inclusions in general Banach spaces. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 337, n. 2, p. 1238-1248, 2008.

[27] PAICU, A. Periodic solutions for a class of nonlinear evolution equations in Banach spaces. **An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (NS)**, v. 55, n. 1, p. 107-118, 2009.

[28] PAICU, A.; VRABIE, I. I. A class of nonlinear evolution equations subjected to nonlocal initial conditions. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v. 72, n. 11, p. 4091-4100, 2010.

[29] PAPAGEORGIOU, N. S. Periodic trajectories for evolution inclusions associated with time-dependent subdifferentials. **Ann. Univ. Sci. Budapest**, v. 37, n. 22, p. 139-155, 1994.

[30] PICCOLI, B. **Funções Ponto a Conjunto**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2005.

[31] REIS, E. L. O. **Soluções Renormalizadas para uma Equação Parabólica com Expoentes Variáveis e Dados Iniciais em L^1**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Itajubá. Itajubá, 2017.

[32] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. 3nd ed. McGraw Hill, 1987.

[33] TOLSTONOGOV, A. L. Properties of integral solutions of differential inclusions with m-accretive operators. **Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR**, v. 49, n. 6, p. 636-644, 1991.

[34] VRABIE, I. I. Periodic solutions for nonlinear evolution equations in a Banach space. **Proceedings of the American Mathematical Society**, p. 653-661, 1990.

[35] VRABIE, I. I. **Compactness Methods for Nonlinear Evolutions**. 2nd ed. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, v. 75, Longman and John Wiley & Sons, 1995.

[36] VRABIE, I. I. **C_0-Semigroups and Applications**. North-Holland Mathematics Studies, v. 191, Elsevier, 2003.