UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

Análise de Vibração em Estruturas Sanduíche com Materiais Compósitos e Núcleo Viscoelástico Utilizando o Método da Transformada Diferencial

Autor: **Aureliano Rodrigues Barborati Ribeiro**
Orientador: **José Juliano de Lima Junior**

Itajubá, Abril de 2021
MG - Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

Análise de Vibração em Estruturas Sanduíche com Materiais Compósitos e Núcleo Viscoelástico Utilizando o Método da Transformada Diferencial

Autor: **Aureliano Rodrigues Barborati Ribeiro**
Orientador: **José Juliano de Lima Junior**

Curso: **Doutorado em Engenharia Mecânica**
Área de Concentração: **Projeto, Fabricação e Materiais**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Itajubá, Abril de 2021
MG - Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

Análise de Vibração em Estruturas Sanduíche com Materiais Compósitos e Núcleo Viscoelástico Utilizando o Método da Transformada Diferencial

Autor: **Aureliano Rodrigues Barborati Ribeiro**
Orientador: **José Juliano de Lima Junior**

Composição da Banca Examinadora

Eng. Dr. Fernando José de Oliveira Moreira - EMBRAER
Prof. Dr. Antonio Wagner Forti - DME/UNESP
Prof. Dr. Bruno Silva de Sousa - IEM/UNIFEI
Profa. Dra. Patricia da Silva Lopes Alexandrino - IEM/UNIFEI
Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior, Presidente - IEM/UNIFEI

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Rubens Ribeiro e Irma de Camargo Ribeiro.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, por me dar sabedoria e discernimento.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior, meus agradecimentos pela valiosa dedicação e pelos importantes conselhos.

Aos meus familiares, Lilian Ribeiro, Rubia Ribeiro, Alessandra Ribeiro, Priscila Ribeiro, Kelly Ribeiro e Juliana Ribeiro e a minha esposa Sandra Regina Biaco Ribeiro.

Aos amigos de doutorado UNIFEI Felipe de Souza Eloy, Luis Guilherme Cunha Santos e Júlio César Silva de Souza.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido à esta pesquisa.

Ao professor Antonio Carlos Ancheloti Junior coordenador do Laboratório de Processamento de Compósitos I.

Aos Professores coordenadores do Laboratório de Vibração e Acústica José Juliano de Lima Junior, Janaina Cunha Vaz Alboquerque e Sebastião Simões da Cunha Junior.

Ao servidor técnico administrativo Ângelo de Souza.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, ao Instituto de Engenharia Mecânica e a Unifei pela oportunidade oferecida em aprimorar meus conhecimentos.

"O impossível não existe, acredite em si mesmo e realce voos inimagináveis"

Aureliano Rodrigues Barborati Ribeiro.

Resumo

RIBEIRO, A. R. B. (2021), *Análise de Vibração em Estruturas Sanduíche com Materiais Compósitos e Núcleo Viscoelástico Utilizando o Método da Transformada Diferencial*, 208pp. Tese de Doutorado, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Nesta tese faz-se uma análise dinâmica através da solução da equação diferencial de movimento de um modelo de viga compósita composta por três camadas, duas com material compósito e uma com núcleo viscoelástico. Inicialmente se obtém a equação diferencial que governa o movimento de vibração livre por meio da Teoria de vigas compósitas aplicando-se o Princípio de Hamilton. Essa equação é resolvida com a utilização do Método da Transformada Diferencial. Obtém-se os parâmetros modais como frequências naturais e modos de vibração. Descreve-se passo a passo o desenvolvimento dos corpos de prova feitos com o material tipo fibra de vidro e resina epoxy, onde a camada viscoelástica é embutida juntamente entre as camadas da manta de fibra de vidro no processo de infusão a vácuo conhecido como VARTM. Determina-se os fatores de amortecimento para as vigas compósitas com núcleo viscoelástico, utilizando-se a resposta da velocidade no tempo do ensaio de vibração livre, utiliza-se para isso a representação de um sistema com um grau de liberdade. Finalmente os resultados numéricos obtidos são comparados com outros autores, resultados teóricos e experimentais, com o objetivo de analisar a efetividade do equacionamento teórico e do método de solução utilizado. Uma boa concordância entre os resultados teóricos e experimentais é observada.

Palavras-chave: Vibrações mecânicas, materiais compósitos, método da transformada diferencial.

Abstract

RIBEIRO, A. R. B. (2021),*Vibration Analysis in Sandwich Structures with Composite Materials and Viscoelastic Core Using the Differential Transform Method*, 208pp. Doctoral Thesis, Institute of Mechanical Engineering, Federal University of Itajubá.

In this thesis a dynamic analysis is made through the solution of the differential equation of motion of a composite beam model composed of three layers, two with composite material and one with a viscoelastic core. Initially, the differential equation that governs the free vibration movement is obtained through the composite beam theory applying Hamilton's Principle. This equation is solved using the Differential Transform Method. Modal parameters such as natural frequencies and vibration modes are obtained. We describe step by step the development of specimens made with fiberglass material and epoxy resin, where the viscoelastic layer is embedded together between the layers of the fiberglass mat in the vacuum infusion process known as VARTM. The damping factors for composite beams with viscoelastic core are determined, using the velocity response in time of the free vibration test, using for this the representation of a system with one degree of freedom. Finally, the numerical results obtained are compared with other authors, theoretical and experimental results, in order to analyze the effectiveness of the theoretical equation and the solution method used. A good agreement between theoretical and experimental results is observed.

Key-words: Mechanical Vibrations, Composite Materials, Differential Transform Method .

Sumário

Lista de Figuras **iii**

Lista de Tabelas **v**

Lista de Símbolos **viii**

Lista de Abreviaturas **x**

1 INTRODUÇÃO **1**

1.1 Introdução 1
1.2 Estado da Arte 2
1.3 Justificativas e Motivação 8
1.4 Objetivos 9
1.5 Contribuições do Trabalho 9
1.6 Conteúdo do Trabalho 10

2 MÉTODO DA TRANSFORMADA DIFERENCIAL APLICADO À TEORIA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI **12**

2.1 Análise de Vibração Livre da Viga de Euler-Bernoulli 12

3 EQUACIONAMENTO DO MODELO DE VIGA COMPÓSITA DE EULER-BERNOULLI COM APOIOS ELÁSTICOS VARIÁVEIS **27**

3.1 Equacionamento do Modelo de Viga 27
3.2 Solução da Equação utilizando DTM 29
3.3 Frequências Naturais Dimensionais e Adimensionais de Vigas Contínuas Compósitas 39

4 DTM APLICADA A VIGAS COMPÓSITAS COM NÚCLEO VISCOELÁSTICO ATRAVÉS DO PRINCÍPIO DE HAMILTON **42**

4.1 Equação de Movimento 43

5 ANÁLISE EXPERIMENTAL **73**

5.1 Introdução 73
5.2 Confecção dos Modelos de Viga 73
5.3 Caracterização do Compósito 77
5.4 Descrição do Ensaio de Vibração Livre 79
5.5 Cálculo da Frequência Natural 83
5.6 Fatores de Amortecimento 89

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES **93**

7 CONCLUSÕES **101**

7.1 Propostas para Trabalhos Futuros 102

Referências Bibliográficas **104**

A Método da Transformada Diferencial Aplicado a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli **109**

B APLICAÇÃO DO MÉTODO DA TRANSFORMADA DIFERENCIAL EM VIGAS DE EULER-BERNOULLI COM APOIOS VARIÁVEIS ELÁSTICOS **138**

C DESENVOLVIMENTO DAS INTEGRAIS POR PARTES **150**

D INSTRUMENTAÇÃO **178**

E MÉTODO DA TRANSFORMADA DIFERENCIAL **183**

E.1 Teoremas da Transformada Diferencial 184

Lista de Figuras

2.1 Modelo de uma viga contínua de Euler-Bernoulli. 13
2.2 Viga em balanço. 20

3.1 Modelo de uma viga contínua laminada de Euler-Bernoulli. 28
3.2 Modelo de uma viga contínua laminada de Euler-Bernoulli com apoios variáveis elásticos. 29

4.1 Configuração da viga sanduíche. 43
4.2 Coordenadas do sistema e deslocamentos das camadas da viga sanduíche. . . . 44

5.1 Marcação e corte das lâminas. 74
5.2 Vista superior das disposições das vigas. 74
5.3 Diagrama do processo VARTM. 75
5.4 Bolsa de vácuo. 76
5.5 Equipamento montado destinado à infusão da resina no reforço. 76
5.6 Movimento da resina na pré forma. 77
5.7 Após a infusão e retirado do peel ply. 77
5.8 Viga 24 camadas com núcleo viscoelástico. 80
5.9 Viga 24 camadas sem núcleo viscoelástico. 80
5.10 Viga 12 camadas com núcleo viscoelástico. 81
5.11 Viga 12 camadas sem núcleo viscoelástico. 81
5.12 Viga 8 camadas com núcleo viscoelástico. 81
5.13 Viga 8 camadas sem núcleo viscoelástico. 82
5.14 $Shaker$,Viga Engastada e Vibrômetro Lazer. 82
5.15 FRF Viga 24 Camadas com Viscoelástico. 84
5.16 Resposta no tempo Viga 24 Camadas com Viscoelástico. 84
5.17 FRF Viga 24 Camadas sem o Viscoelástico. 85
5.18 Resposta no tempo Viga 24 Camadas sem Viscoelástico. 85
5.19 FRF Viga 12 Camadas com o Viscoelástico. 85
5.20 Resposta no tempo Viga 12 Camadas com Viscoelástico. 86
5.21 FRF Viga 12 Camadas sem o Viscoelástico. 86
5.22 Resposta no tempo Viga 12 Camadas sem Viscoelástico. 86
5.23 FRF Viga 8 Camadas com o Viscoelástico. 87

5.24 Resposta no tempo Viga 8 Camadas com Viscoelástico. 87
5.25 FRF Viga 8 Camadas sem o Viscoelástico. 88
5.26 Resposta no tempo Viga 8 Camadas sem Viscoelástico. 88
5.27 Resposta de velocidade no tempo para a viga sanduíche de 24 camadas com núcleo viscoelástico. 89
5.28 Ajuste da curva de amplitude no tempo para a viga sanduíche de 24 camadas com núcleo viscoelástico. 90
5.29 Ajuste da curva de amplitude no tempo para a viga sanduíche de 24 camadas sem núcleo viscoelástico. 91
5.30 Ajuste da curva de amplitude no tempo para a viga sanduíche de 12 camadas com núcleo viscoelástico. 91
5.31 Ajuste da curva de amplitude no tempo para a viga sanduíche de 12 camadas sem núcleo viscoelástico. 92
5.32 Ajuste da curva de amplitude no tempo para a viga sanduíche de 8 camadas com núcleo viscoelástico. 92
5.33 Ajuste da curva de amplitude no tempo para a viga sanduíche de 8 camadas sem núcleo viscoelástico. 92

6.1 Resposta analítica x numérica para os três primeiros modos de vibração de uma viga contínua. 94
6.2 1º, 2º 3º modo de vibração para uma viga compósita com núcleo viscoelástico. . 95
6.3 1º, 2º 3º modo de vibração para uma viga compósita com núcleo viscoelástico biapoiada. 96

A.1 Viga bi-engastada. 110
A.2 Viga bi-apoiada. 116
A.3 Viga livre-livre. 121
A.4 Viga apoiada livre. 127
A.5 Viga engastada apoiada. 133

B.1 Viga com apoios variáveis elásticos. 138

D.1 Analisador de sinais. 178
D.2 Amplificador de sinal. 179
D.3 Shaker. 179
D.4 Vibrômetro. 180
D.5 Paquímetro. 180
D.6 Balança. 181
D.7 Misturador mecânico. 181
D.8 Máquina de corte. 182

Lista de Tabelas

2.1 Função original x Transformada DTM 20
2.2 Condições de contorno $\varphi = 0$. 21
2.3 Condição de contorno. 21
2.4 Condição de contorno $\varphi = 1$. 21
2.5 Substituição das condições de contorno. 22
2.6 Transformada inversa DTM. 26

3.1 Condições de contorno para $\varphi = 0$. 31
3.2 Condições de contorno para $\varphi = 1$. 31
3.3 Substituição das condições de contorno. 32
3.4 Transformada inversa DTM. 38
3.5 Propriedades materiais e geométricas da viga laminada. 40
3.6 Frequências naturais em (kHz) para uma viga esbelta simplesmente apoiada (0º). 40
3.7 Frequências naturais adimensionais para uma viga feita a partir de um laminado ”angle-ply”(α/-α/-α/α). 41

4.1 Condições de contorno viga sanduiche. 70
4.2 DTM para as condições de contorno (C.C.) em $x = 0$. 71
4.3 DTM para as condições de contorno em $x = L$. 72

5.1 Propriedades dos constituintes do compósito. 78
5.2 Valores das massas iniciais, finais e das porcentagens em peso de cada fase. . . 79
5.3 Propriedades do compósito. 79
5.4 Propriedades geométricas das vigas utilizadas nos ensaios em mm, com viscoelástico (cv) e sem viscoelástico (sv). 82
5.5 Duas frequências experimentais obtidas para a viga compósita com 24 camadas e núcleo viscoelástico em (Hz). 84
5.6 Desvios relativos (%) calculados entre as frequências naturais experimentais e numéricas viga 24 camada com núcleo viscoelástico. 84
5.7 Duas frequências experimentais obtidas para a viga compósita com 24 camadas sem núcleo viscoelástico em (Hz). 85
5.8 Desvios relativos (%) calculados entre as frequências naturais experimentais e numéricas viga 24 camada sem núcleo viscoelástico. 85
5.9 Duas frequências experimentais obtidas para a viga compósita com 12 camadas e núcleo viscoelástico em (Hz). 86

5.10 Desvios relativos (%) calculados entre as frequências naturais experimentais e numéricas viga 12 camada com núcleo viscoelástico. 86
5.11 Duas frequências experimentais obtidas para a viga compósita com 12 camadas sem núcleo viscoelástico em (Hz). 87
5.12 Desvios relativos (%) calculados entre as frequências naturais experimentais e numéricas viga 12 camada sem núcleo viscoelástico. 87
5.13 Duas frequências experimentais obtidas para a viga compósita com 8 camadas e núcleo viscoelástico em (Hz). 88
5.14 Desvios relativos (%) calculados entre as frequências naturais experimentais e numéricas viga 8 camada com núcleo viscoelástico. 88
5.15 Duas frequências experimentais obtidas para a viga compósita com 8 camadas sem núcleo viscoelástico em (Hz). 89
5.16 Desvios relativos (%) calculados entre as frequências naturais experimentais e numéricas viga 8 camada sem núcleo viscoelástico. 89
5.17 Relação do número de camadas das vigas e seu fator de amortecimento. 92

6.1 Frequências naturais adimensionais $\hat{\beta}$, para a viga contínua em balanço. 93
6.2 Propriedades do material e sua geometria. 95
6.3 Frequências naturais Hz. 98
6.4 Desvios relativos percentuais (%). 99
6.5 Propriedades do material e sua geometria. 100
6.6 Frequências naturais para uma viga biapoiada em (rad/s). 100
6.7 Desvios relativos percentuais (%). 100

A.1 Substituição das condições de contorno. 111
A.2 Substituição das condições de contorno. 117
A.3 Substituição das condições de contorno. 122
A.4 Substituição das condições de contorno. 128
A.5 Substituição das condições de contorno. 134

B.1 Substituição das condições de contorno. 142
B.2 Transformada inversa DTM. 148

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

g	Aceleração da gravidade (m/s^2)
h	Altura (m)
A	Área (m^2)
b	Base de uma viga de seção retangular (m)
L	Comprimento (m)
c_i	Constante
k	Constante
c_0,c_1	Constantes
x,y,z	Coordenadas cartesianas
v	Deflexão (m)
$w(x,t)$	Deslocamento vertical (m)
F	Força (N)
V	Força cortante (N)
q	Força por unidade de comprimento (N/m)
$g(x)$	Função de (x)
$T(t)$	Função do tempo (s)
M	Massa (kg)
M_c	Massa do corpo (kg)
M_L	Massa do líquido deslocado (kg)
E	Modo de elasticidade longitudinal (GPa)
$W(x)$	Modo de vibração ou autovetor
I	Momento de inércia de área (m^4)
M	Momento fletor (N.m)
$X_n(x)$	N-ésimo modo de vibração
W_f	Peso da fibra (kg)
W_m	Peso da matriz (kg)
W_r	Peso da viga (kg)
K	Rigidez (N/m)
t	Tempo (s)
V_c	Volume do corpo imerso (m^3)
V_L	Volume do líquido deslocado (m^3)

Símbolos Gregos

λ	Autovalor
α	Constante
β	Constante
γ	Constante
φ	Coordenada horizontal admensional
δ	Deflexão de uma viga (m)
ω_n	Frequência angular natural (rad/s)
β	Frequência natural dimensional (m^{-1})
ρ	Massa específica (kg/m^3)

Caracteres Inferiores

n	N-ésima frequência natural
RR	Rotação direita
RL	Rotação esquerda
TR	Translação direita
TL	Translação esquerda

Operadores

$\otimes$		Convolução.
$\bullet'$	ou $\frac{\partial \bullet}{\partial x}$	Derivada parcial de primeira ordem de $\bullet$ com relação a x.
$\bullet''$	ou $\frac{\partial^2 \bullet}{\partial x^2}$	Derivada parcial de segunda ordem de $\bullet$ com relação a x.
$\bullet'''$	ou $\frac{\partial^3 \bullet}{\partial x^3}$	Derivada parcial de terceira ordem de $\bullet$ com relação a x.
$\dot{\bullet}$	ou $\frac{\partial \bullet}{\partial t}$	Derivada parcial de primeira ordem de $\bullet$ com relação a t.
$\ddot{\bullet}$	ou $\frac{\partial^2 \bullet}{\partial t^2}$	Derivada parcial de segunda ordem de $\bullet$ com relação t.
$\delta_{k,n}$		Função delta de Dirac.
$\prod$		Produtório.
$\sum$		Somatório.

Lista de Abreviaturas

DTM – ***M****etodo da* ***T****ransformada* ***D****iferencial*
GDTM – ***M****etodo da* ***T****ransformada* ***D****iferencial* **G**eneralizada
LTM – ***M****etodo da* ***T****ransformada de* ***L****aplace*
RLC – ***R****esistor* ***C****apacitor* ***I****ndutor*
TPDTM – ***M****etodo da* ***T****ransformada* ***D****iferencial* **P**rojetada
LADM – ***M****etodo de* ***D****ecomposicao de* ***L****aplace* **A**domiam
HPM – ***M****etodo de* ***P****ertubacao de* ***H****omotofia*
NSFDS – ***E****squema de* ***D****iferencas* ***F****initas*
RDTM – ***M****etodo da* ***T****ransformada* ***D****iferencial* **R**eduzido
HSDT – ***D****eformacao por* ***C****isalhamento de* ***O****rdem* **S**uperior
PDE – ***E****quacoes* ***D****iferenciais* ***P****arciais*
DT – ***T****ransformada* ***D****iferencial*
VARTM – ***M****odelagem por* ***T****ransferencia de* ***R****esina* **A**ssistida por **V**acuo

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Introdução

Com a evolução industrial e tecnológica, por meio de equipamentos e matéria prima, cresce a demanda por materiais que possam ser mais leves e que possuam uma alta resistência mecânica, como isso surge a oportunidade de substituição dos materiais tradicionais pelo emprego do novos materiais. Seguindo esta tendência, as estruturas sanduíches, como vigas, placas, casca entre outras, vem sendo vistas como materiais preferenciais em diversas aplicações, principalmente na indústria aeronáutica onde o fator "peso"tem sido um parâmetro crítico.

As estruturas sanduíches são combinações de diferentes materiais, podendo estes ser compostos ou simples.

Neste tipo de disposição, notam-se geralmente três camadas de materiais, com duas camada fina, sendo uma lâmina superior e outra inferior conhecidas como "$skins$".

Podendo estas serem isotrópicas, ortotrópicas ou anisotrópicas, e com um núcleo central conhecido como "$core$", geralmente de massa específica menor, podendo ser um material viscoelástico

Tendo a sua geometria como a de uma lâmina ou uma manta, no qual essas camadas são intimante ligadas umas às outras de modo que as propriedades de uma agreguem vantagens à estrutura final combinada.

Nesta tese realiza-se dois modelos matemáticos dinâmicos para a representação dos modelos de vigas compósitas. O primeiro trata-se da modelagem de vigas utilizando a teoria de vigas de Euler-Bernoulli com a regra das misturas.

O segundo modelo matemático dinâmico ocorre utilizando-se o Princípio de Hamilton para a solução do equacionamento do modelo de viga compósita. Realizou-se o ensaio de vibração livre experimental para as vigas sanduíche com e sem núcleo viscoelástico.

Suas frequências naturais foram comparadas com as obtidas por outros autores e com a modelagem matemática realizada nesse trabalho, por meio de um programa computacional, desenvolvido com base na teoria de vigas compósitas apresentada.

Para as vigas sanduíche ensaiadas foi possível a obtenção do fator de amortecimento utilizando-se a técnica dos mínimos quadrados aplicada à curva de resposta no tempo experimental.

1.2 Estado da Arte

O método da transformada integral como Laplace e a transformada de Fourier são métodos amplamente utilizados para resolver problemas de engenharia, no entanto são métodos complicados e de difícil entendimento na solução de problemas não lineares. Já o método da transformada diferencial, (DTM), é de fácil entendimento e amplamente aplicável em problemas de engenharia, na representação de sistemas lineares e não lineares. Foi utilizado pela primeira vez na solução de equações diferenciais, em análise de circuitos por Zhou (1986).

O método da transformada diferencial foi utilizado por Cheng e Ho (1996) e Abdel e Hassan (2002) para solucionar problemas de autovalores e para resolver equações diferenciais parciais.

Malik e Dang (1998) foram os pioneiros em aplicar o método da transformada diferencial na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, para soluções de problemas de vibrações em vigas contínuas, no qual comparou-se os resultados do método DTM por meio das frequências naturais e das formas modais de vibração com os resultados das soluções analíticas exatas. Os autores compararam os resultados obtidos de acordo com o método da transformada diferencial para seis tipos de condições de contorno com os resultados analíticos exatos de Rao (1992).

Jang e Chen (2001) afirmam que o método da transformada diferencial é um procedimento iterativo para obter soluções analíticas das equações diferenciais da série Taylor.

Chen e Jusp (2004), Bert e Zeng (2004) e Arikoglu e Ozkol (2005) mostraram que o método da transformada diferencial tornou-se uma ferramenta muito eficiente para a solução de sistemas não lineares ou de variação de parâmetros.

Çatal (2006) sugeriu o método da transformada diferencial para análise de vibração livre em vigas engastadas e simplesmente apoiadas e para vigas de Timoshenko, apoiadas em solo com função elástica.

Attarnejad e Shahba (2008) aplicaram o método da transformada diferencial para obter a matriz de rigidez dinâmica para vigas rotativas não prismáticas com qualquer tipo de variação de área da seção transversal e momento de inércia ao longo da viga.

Mei (2008) abordou a técnica da transformada diferencial para a solução do problema

de vibração livre de vigas rotativas, sob a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, onde obteve as frequências naturais e os modos de vibração.

De acordo com Reza (2008), o método da transformada diferencial foi empregado para obter a matriz de rigidez dinâmica para elementos de viga rotativos não prismáticos com qualquer tipo de variação da área da seção transversal e momento de inércia ao longo da viga.

Agboola e Gbadeyan (2010) aplicaram o método da transformada diferencial na solução de problemas de vibrações, sobre a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, no qual foi possível determinar as frequências naturais e os modos de vibração, para as diferentes condições de contorno impostas ao sistema.

Wattanasakulpong e Hoffman (2010) utilizaram o método da transformada diferencial na análise de vibração livre de vigas compósitas, sobre a teoria vigas de Euler-Bernoulli, onde os apoios da viga foram representados como apoios variáveis elásticos e com condições de contorno variadas.

O método da transformada diferencial foi empregado na solução da Equação diferencial de movimento da teoria de vigas de Euler-Bernoulli sob o efeito de uma força axial em vibração livre por Yesilce (2010).

Arikoglu e Ozkol (2010) realizaram o estudo para a análise da vibração de uma viga compósita de três camadas com núcleo viscoelástico. As equações de movimento que governam as vibrações livres da viga sanduíche são derivadas aplicando o princípio de Hamilton. Essas equações são resolvidas usando o método de transformada diferencial, (DTM), no domínio da frequência. A variação do fator de perda modal com os parâmetros do sistema é avaliada e apresentada graficamente. Os resultados obtidos com o (DTM) são comparados aos de estudos anteriores e uma boa concordância é observada. É a primeira vez que o (DTM) é usado para a análise de autovalor de uma estrutura de sanduíche.

Soltanalizadeh (2011) aplicou o Método de Transformada Diferencial, (DTM), para resolver a Equação hiperbólica do Telégrafo. Este método pode ser usado para obter as soluções exatas desta Equação. No final, alguns testes numéricos são apresentados para demonstrar a eficácia e eficiência do método proposto.

Balkaya *et al.* (2009), Catal (2012), Zhifeng *et al.* (2013) utilizaram o método da transformada diferencial para realizar uma análise de vibração livre de uma viga contínua por meio da teoria de vigas de Euler-Bernoulli.

Torabi (2012) utilizou um o método para a solução do problema de vibração da Equação de quarta ordem do modelo de viga de Euler-Bernoulli chamado método de transformada diferencial, (DTM), que é um dos métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias e parciais que usam a forma de polinômios como aproximação às soluções exatas.

Kittisak (2012) aplicou o método da transformada diferencial, (DTM), para lidar com o

problemas de vibração em vigas escalonadas com apoios de extremidade gerais e extremidades com restrições elásticas. O método demonstrou várias vantagens, como convergência rápida, alta precisão e estabilidade computacional. Ao contrário de algumas abordagens aproximadas que exigem a correta função admissível assumida, o método de transformada diferencial fornece todas as frequências naturais e suas formas modais.

Mohammad (2013) propôs o Método de Transformada Diferencial, (DTM), para prever a vibração de uma viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko, sobre um solo elástico. O Método da Transformação Diferencial foi apresentado brevemente. O (DTM) pode ser facilmente aplicado a problemas lineares ou não lineares e reduz o tamanho do trabalho computacional. Com esse método, soluções exatas podem ser obtidas sem a necessidade de métodos complexos e que exijam muita memória computacional, é uma ferramenta útil para soluções analíticas e numéricas. Para esclarecer e ilustrar as características e capacidades do método apresentado, diferentes problemas foram resolvidos usando a técnica e as soluções foram comparadas com as obtidas na literatura.

Najafgholipour e Soodbakhshb (2016) utilizaram o método da transformada diferencial para uma abordagem semi analítica generalizada para os sistemas de equações diferenciais, onde resolveu problemas de vibrações de sistemas com múltiplos graus de liberdade.

Benhammouda e Leal (2016) apresentaram uma solução analítica de algumas equações diferenciais de retardo não linear. Essas equações de retardo são difíceis de tratar numericamente podendo não serem resolvidas por códigos de uso geral existentes. Um novo método de etapas combinadas com o método de transformada diferencial, (DTM), é proposto como uma ferramenta poderosa para resolver as equações diferenciais de retardo não lineares. Este método reduz as equações diferenciais de retardo não lineares a equações diferenciais ordinárias que são então resolvidas pelo (DTM). Além disso, mostra-se que as soluções podem ser melhoradas pelo método de retomada Laplace-Padé.

Magesh e Saravanan (2017) utilizaram dois métodos diferentes, um é moderno e o outro é tradicional, a saber, Método da Transformada Diferencial Generalizada, (GDTM), e Método da Transformada de Laplace, (LTM), para obter a solução analítica de circuito, (RLC), fracionário não homogêneo de segunda ordem. Apresentou-se a solução em termos de séries convergentes onde (GDTM) e (LTM) mostraram-se capazes de produzir a solução exata do circuito (RLC) fracionário. A grande força de (GDTM) sobre (LTM) é que a transformação diferencial das condições iniciais ocupam os coeficientes dos dois primeiros termos na solução em série de modo que chega-se à solução exata com poucas iterações. Devido a isso, o (GDTM) leva menos tempo para convergir do que o (LTM) e isso foi demonstrado.

Bagyalakshmi e Saisundarakrshnan (2017) utilizaram Método de Transformação Diferencial Projetada (TPDTM). Eles certificaram-se da eficácia do método resolvendo três exemplos numéricos que surgem no campo da análise de transferência de calor. Para validar os resulta-

dos e analisar a eficiência computacional das propostas utilizou-se o Método de Decomposição de Laplace Adomian (LADM) e Método de Pertubação de Homotofia (HPM) e observou-se boa concordância. Observou-se que a técnica proposta fornece bons resultados com menos recursos computacionais. Mesmo que haja uma uniformidade entre as soluções obtidas por (TPDTM) e (LADM), a técnica proposta supera a complexidade de manipulação de polinômios de (Adomian) em (LADM). A metodologia e os resultados apresentados neste artigo revelam claramente a eficiência computacional do presente método. O (TPDTM) devido à sua eficiência computacional tem potencial para ser usado como uma nova ferramenta, não apenas para resolver equações diferenciais fracionárias não lineares, mas também para analisar a informação pré-local do sistema.

Ndii e Anggriani (2018) aplicaram o Método de Transformação Diferencial, (DTM), e o Esquema de Diferenças Finitas Não Padrão, (NSFDS), que são técnicas numéricas alternativas usadas para resolver um sistema de equações diferenciais lineares e não lineares. Utilizou-se nesse trabalho o (DTM) e o (NSFDS) para um modelo matemático da dinâmica de transmissão de doenças de plantas e comparar suas soluções com as geradas pela rotina ode45 do @MATLAB, que é o valor numérico bem estabelecido pela rotina. As soluções do (DTM) e (NSFDS) estão de acordo com a rotina ode45 do @MATLAB no pequeno passo de tempo.

Merdan e Anaç (2019) estudaram as soluções de equações diferenciais parciais aleatórias e as condições iniciais das equações diferenciais parciais de componentes aleatórios. O Método de transformação diferencial aleatória é aplicado para examinar as soluções das equações diferenciais parciais e o $software$ @MAPLE é usado para encontrar as soluções, o Método Laplace-Padé é usado para melhorar a convergência das soluções. A eficiência do método para as equações diferenciais parciais de componentes aleatórios é investigada por comparar as fórmulas para os valores esperados e variâncias com os resultados das simulações das equações aleatórias.

Em Arslan (2020) o método híbrido (métodos de transformação diferencial e diferenças finitas) e o (RDTM) (método de transformação diferencial reduzido) são implementados para resolver a Equação de Rosenau-Hyman. Esses métodos fornecem os resultados precisos desejados em apenas alguns termos e o procedimento de abordagem é bastante simples e eficaz. Um experimento é dado para demonstrar o eficiência e confiabilidade dos métodos apresentados. Os resultados numéricos obtidos são comparados entre si e com solução exata. Parece que os resultados do método híbrido e do (RDTM) apresentam bom desempenho como os outros métodos. A parte mais importante deste estudo é que esses métodos são adequados para resolver alguns problemas lineares e não lineares, e aumentam o ganho computacional.

A viga é um dos modelos fundamentais de estruturas elásticas, uma vez que é utilizada em uma variedade de aplicações, como por exemplo, em hélices de helicópteros, asas de aviões, braços robóticos e trilhos de trens COSTA (2006). A viga é tratada como um modelo unidimensional, fazendo-se a hipótese de que o comprimento é bem maior que as dimensões da seção

transversal.

Rajasekaran (2008) realizou uma análise de flambagem de vigas e colunas a partir da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, aplicou o método da transformada diferencial e quadratura diferencial harmônica para várias condições de apoio e considerou a variação de rigidez à flexão. Catal (2012) analisou o comportamento da viga para diferentes condições de contorno e cargas dinâmicas.

Izabela (2014) estudou a solução de uma Equação diferencial de quarta ordem com vários coeficientes que ocorrem no problema de vibração da viga de Euler-Bernoulli. A Equação relacionada foi escrita como uma Equação diferencial de matriz de primeira ordem. Para resolver a Equação, foi proposto o método das séries de potências.

Kerwin (1959) foi o primeiro a trabalhar com multicamadas sendo uma delas a camada de amortecimento entre as duas camadas de face. Ditaranto (1965) derivou uma Equação diferencial de sexta ordem para uma viga sanduíche com núcleo viscoelástico com o módulo de cisalhamento complexo e avaliou as frequências naturais. Mead e Markust (1969) refinaram a teoria de Ditaranto (1965) e aplicaram para uma viga com as condições de contorno fixa-fixa.

Mead e Markust (1969) estudou a solução da Equação diferencial de movimento de sexta ordem que foi derivada em termos do deslocamento transversal, w, para uma viga sanduíche de três camadas com um núcleo viscoelástico. As expressões matemáticas em termos de w foram encontradas para as diversas condições de contorno da viga.

Tomas (1992) apresentou os resultados teóricos e experimentais preliminares relativos à modelagem de vigas sanduíche com amortecimento, apresentou-se um método de identificação dos parâmetros ótimos constitutivos dos materiais viscoelásticos utilizados nas vigas. Os tipos de vibração em considerações foram vibrações harmônicas forçadas no estado estacionário e vibrações livres.

Algumas dificuldades ainda são encontradas na introdução dos materiais compósitos na indústria moderna. Tita (1999) afirma que entre as principais causas disso estão na dificuldade de se prever o modo de falha exato do material, os custos na sua fabricação e a falta de conhecimento sobre o comportamento do material junto a materiais químicos corrosivos.

Uma grande vantagem dos materiais compósitos, como afirma Jones (1999), citado por Perdigão (2010) é que quando são projetados corretamente, possuem as melhores características/qualidades dos seus constituintes ou componentes e, por vezes, algumas qualidades que nenhum constituinte/componente possui.

Subramanian (2006), os materiais compósitos têm sido extensivamente utilizados nas engenharias aeroespacial, automotiva, nuclear, marinha, biomédica e civil, devido ao fato desses materiais possuírem elevada relação resistência-peso, elevada rigidez em relação ao peso, características superiores de fadiga e capacidade de orientação das fibras para atender a requisitos de projeto.

Eloy (2014) realizou um estudo sobre o comportamento dinâmico de vigas compósitas laminadas simétricas e escalonadas em várias partes com apoios variáveis elásticos, onde comparou as frequências naturais obtidas pelo modelo de viga de Euler-Bernoulli e de Cisalhamento.

Belarbi e Tati (2017) aplicaram um novo modelo de elemento finito em camadas de ordem superior, desenvolvido anteriormente pelos presentes autores para a análise estática de compósito laminado e placas sanduíche, foi estendido para estudar o comportamento vibratório de placas sanduíche multicamadas. No presente modelo em camadas, um campo de deslocamento de primeira ordem é assumido para as camadas de face, enquanto um campo de deslocamento de ordem superior é assumido para o núcleo.

Loja (2017) estudou três modelos em camadas de vigas com base em diferentes teorias de deformação por cisalhamento, implementados por meio de elementos finitos baseados em Krigagem. O comportamento viscoelástico do núcleo em sanduíche é modelado usando o método complexo e o problema dinâmico é resolvido no domínio da frequência. Um conjunto de estudos de caso ilustra o desempenho dos modelos.

Cherkasov e Yurkin (2017) trabalharam na construção de viga sanduíche que consiste em duas chapas de aço conectadas por autoadesivas mástique betume-borracha. Os resultados da pesquisa trata-se de avaliar proporção da espessura da camada na viga sanduíche, o amortecimento, a vibração referente camada viscoelástica de mástique e borracha-betume e suas propriedades. O artigo apresenta a dependência das propriedades de amortecimento de vibração das vigas sanduíche sobre a espessura da camada viscoelástica, a frequência de vibração e temperatura. Afirma-se que o amortecimento eficaz de vibração está na faixa de temperatura de -40 °C a + 80 °C.

Mageshwaran e Manoharan (2018) investigaram a análise de vibração da viga sanduíche composta laminada uniforme com núcleo viscoelástico. A Equação diferencial governante de movimento do compósito laminado da viga sanduíche é derivada na forma de elemento finito com base na teoria de deformação por cisalhamento de ordem superior (HSDT). O modelo de elementos finitos desenvolvido foi validado em termos de frequências naturais com @ANSYS e literatura disponível. Vários estudos paramétricos são realizados para examinar o impacto da espessura do núcleo, relação de aspecto sob várias condições de limite nas frequências naturais da estrutura. Os resultados ilustram que as frequências naturais podem ser aumentadas com o aumento da espessura do núcleo e diminuídas com o aumento do aspecto.

De acordo com Keykubat (2020), as características de vibração livre da viga sanduíche compósita são examinadas usando um eficiente esquema de solução numérica. A viga simplesmente apoiada é considerada composta por duas folhas faciais isotrópicas e um núcleo ortotrópico. As formulações de elasticidade plana são usadas para derivar as equações de movimento e a Equação diferencial governante reduzida é resolvida por Método das Funções Complementares. A análise adimensional das frequências naturais é feita para adquirir a alta precisão junto

com poucas divisões. As influências do material e parâmetros geométricos na frequência natural também são ilustrados. As soluções são validadas com os resultados obtidos do $software$ de elementos finitos e é mostrado que o método apresentado é uma técnica de solução eficiente para os problemas de vibração de vigas mistas com núcleo.

1.3 Justificativas e Motivação

O desenvolvimento de novos materiais de construção, como os compósitos permitiram desenvolver estruturas mais leves e com elevada capacidade de resistência. Nesse aspecto, podem surgir vibrações consideradas indesejáveis, motivando o estudo de técnicas e aplicação de novos materiais e métodos matemáticos que minimizam essas vibrações.

E com isso o interesse no estudo sobre o método das transformadas diferenciais (DTM) aplicado na solução de problemas de vibrações em vigas compósitas sanduíche com núcleo viscoelástico.

Esse trabalho pode ser justificada por várias razões, dentre as quais se destacam como principais:

- O DTM tem-se mostrado promissor na solução de equações diferenciais complexas, lineares e não lineares;
- Os materiais compósitos são amplamente utilizados em aeronaves, bem como hélice, pás de helicópteros, asas de aviões, geralmente fabricadas como painéis sanduíches, submetidos a cargas dinâmicas que excitam a vibração da estrutura. Vários trabalhos encontrados na literatura apresentam lâminas fabricadas a partir de materiais convencionais, como aço ou alumínio, e somente alguns apresentam estudos de lâminas a partir de materiais compósitos;
- As estruturas sanduíches apresentam grande adaptabilidade em função dos materiais utilizados tanto para as lâminas quanto para o núcleo. Apresentam comportamento complexo uma vez que se constituem de materiais diferentes. Com isso as técnicas utilizadas para amortecer ou atenuar os efeitos de vibrações nestes tipos de estruturas tornam-se extremamente importantes. Vários trabalhos encontrados na revisão bibliográfica apresentam o desenvolvimento do método da transformada diferencial muito enxuto dificultando o entendimento do método.

1.4 Objetivos

O objetivo deste trabalho trata-se da aplicação do método da transformada diferencial, no qual o método será utilizado e testado para a solução dos problemas de vibrações em estruturas do tipo vigas sanduíche compósitas com núcleo viscoelástico. Desta forma os objetivos específicos da tese consistem em:

- Realizar o estudo detalhado do método da transformada diferencial, descrever todo o desenvolvimento do método e suas formas de aplicações com a máxima clareza, demonstrando o desenvolvimento do método passo a passo, o que diferencia esta tese para os outros trabalhos utilizando o método, no qual a atenção para o desenvolvimento de detalhes sobre o método deixou a desejar;
- Detalhar a obtenção do modelo de vigas sanduíche compósita com núcleo viscoelástico, no qual o material do núcleo é inserido juntamente com as camadas compósitas já no processo de infusão da resina;
- Realizar os ensaios de vibração livre das vigas sanduíche compósitas com e sem núcleo viscoelástico para verificar a sua efetividade na redução da vibração;
- Realizar os ajustes numéricos para a determinação do fator de amortecimento das vigas baseada na resposta livre amortecida;
- Aplicar o Princípio de Hamilton em vigas sanduíche compósitas com núcleo viscoelástico;
- Desenvolver um programa computacional para determinar as formas modais e suas frequências naturais para as estruturas do tipo viga sanduíche compósita com núcleo viscoelástico, comparar os resultados experimentais e numéricos com os resultados de outros autores;

1.5 Contribuições do Trabalho

- Desenvolvimento matemático detalhado para a obtenção do modelo de viga compósita com núcleo viscoelástico utilizando o modelo de Euler-Bernoulli e o Princípio de Hamilton;
- Apresentação da formulação matemática para o estudo de materiais compósitos com núcleo viscoelástico, detalhando cada passo para a obtenção da Equação diferencial de movimento e suas condições de contorno;

- Solução detalhada da Equação dinâmica de movimento da viga compósita com núcleo viscoelástico utilizando o método da transformada diferencial;
- Tem como contribuição o estudo minucioso sobre o método da transformada diferencial, com desenvolvimento passo a passo, aplicado para solucionar equações diferenciais na busca pela solução de problemas de vibrações em vigas compósitas sanduíche com núcleo viscoelástico;
- Apresentação detalhada dos principais teoremas e colorários relativos ao método da transformada diferencial;
- Realização de experimentos com vigas compósitas com várias camadas com e sem núcleo viscoelástico determinando os parâmetros modais e análise do comportamento do amortecimento do núcleo viscoelástico na redução da vibração;
- Desenvolvimento de um programa computacional para determinar a resposta temporal, frequências angulares naturais e modos de vibração de uma viga compósita e núcleo viscoelástico;
- Apresentação de resultados numéricos e experimentais do problemas de vibrações de vigas compósitas comparados com os de outros autores encontrados na literatura;
- Apresentação dos fatores de amortecimento por meio de ajustes analíticos, os quais se mostram eficientes para a utilização nesta classe de material;

1.6 Conteúdo do Trabalho

No Capítulo 1 é apresentada a história do método da transformada diferencial, o pioneiro que desenvolveu e método, a sua primeira aplicação que ocorreu em uma análise de circuitos elétricos, um estudo sobre o referencial bibliográfico do método, exemplos e aplicações em diversos estudos com o método.

O Capítulo 2 trata do desenvolvimento analítico completo passo a passo do método da transformada diferencial utilizando o Princípio de Hamilton de com apoios clássicos.

O Capítulo 3 apresenta o desenvolvimento analítico completo passo a passo do método da transformada diferencial na solução de viga de Euler-Bernoulli, para as vigas sanduíche compósitas com núcleo viscoelástico e apoios elásticos variáveis.

No Capítulo 4 aplica-se o método da transformada diferencial passo a passo em vigas sanduíche compósitas com núcleo viscoelástico através do Princípio de Hamilton.

O Capítulo 5 refere-se à confecção dos modelos de viga contínua do tipo sanduíche com núcleo viscoelástico e sem o núcleo viscoelástico, juntamento com a realização do ensaio de

vibração livre, realização da caracterização do compósito, onde ocorreu a determinação do fator de amortecimento, utilizando-se o ajuste da curva através da resposta no tempo em velocidade.

O Capítulo 6 trata-se dos resultados e das discussões sobre os desenvolvimentos do DTM tanto para a teoria de vigas do Princípio de Hamilton quanto para a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, utilizando-se condições de contorno clássicas ou com apoios elásticos variáveis, para materiais isotrópicos e ortotrópicos, com e sem núcleo viscoelástico e a comparação entre os resultados das frequências naturais experimentais e os resultados numéricos.

No Apêndice A encontra-se o desenvolvimento do método da transformada diferencial para a solução do problema de vibração, através do equacionamento da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, aplicado para todas as condições clássicas de contorno, com isso possibilitando determinar os modos de vibração da estrutura e suas frequências naturais.

O Apêndice B realizou-se uma abordagem no desenvolvimento teórico completo passo a passo do (DTM) utilizando a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, porem com outras condições de contorno, conhecidas como apoios variáveis elásticos, aplica-se o método da transformada diferencial nas condições de contorno e na Equação de movimento da viga, possibilitando determinar os modos de vibração da estrutura tipo viga e suas frequências naturais.

O Apêndice C trata do desenvolvimento das integrais por partes referentes às vigas com materiais isotrópicos e materiais ortotrópicos, com as vigas tendo uma lâmina e três lâminas. Para o desenvolvimento matemático utiliza-se o Princípio de Hamilton. Determina-se a Equação de movimento das estruturas tipo vigas sanduíche compósitas com núcleo viscoelástico, e com isso aplica-se o método da transformada diferencial, para determinar os modos de vibração da estrutura e suas frequências naturais.

O Apêndice D é referente à listagem dos equipamentos e maquinários utilizados para o desenvolvimento da Tese, das atividades referentes à construção das vigas, da medição de vibração livre, pesagem do materiais e aferição das amostras ensaiadas em laboratórios.

Já o Apêndice E apresenta as definições e os principais teoremas e colorários do método da transformada diferencial, com demonstrações de exemplos.

Capítulo 2

MÉTODO DA TRANSFORMADA DIFERENCIAL APLICADO À TEORIA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI

O método da transformada diferencial é aplicado para solucionar problemas discretos, contínuos, lineares e não lineares. Nesse trabalho o método da transformada diferencial é aplicado para solucionar problemas de vibrações mecânicas, por meio do equacionamento dinâmico da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. O método da transformada diferencial é aplicado em todas as condições de contorno e na Equação de movimento da viga, possibilitando assim representar todas as condições clássicas de apoio, obtendo-se assim as frequências naturais e os modos de vibração pertinentes. O resultado do método da transformada diferencial é comparado com a solução analítica da teoria de vigas de Euler-Bernoulli e com outros resultados da literatura.

2.1 Análise de Vibração Livre da Viga de Euler-Bernoulli

Esta seção da tese apresenta o equacionamento dinâmico do modelo de viga de Euler-Bernoulli, conforme a Figura 2.1.

A vibração na Viga de Euler-Bernoulli é geralmente chamada de vibração transversal ou vibrações de flexão. A Figura 2.1 ilustra uma viga engastada com a direção da vibração transversal indicada pela deflexão, $w(x,t)$, visto que ocorre no sentido de z. A viga em questão possui seção retangular $A(x)$, base b, altura h, comprimento L e rigidez de flexão $EI(x)$, de acordo com Inman (2001) e Rao (2008).

Considerando as seguintes hipótese:

- Após a ocorrência da flexão, as seções planas da viga permanecem planas e normais à

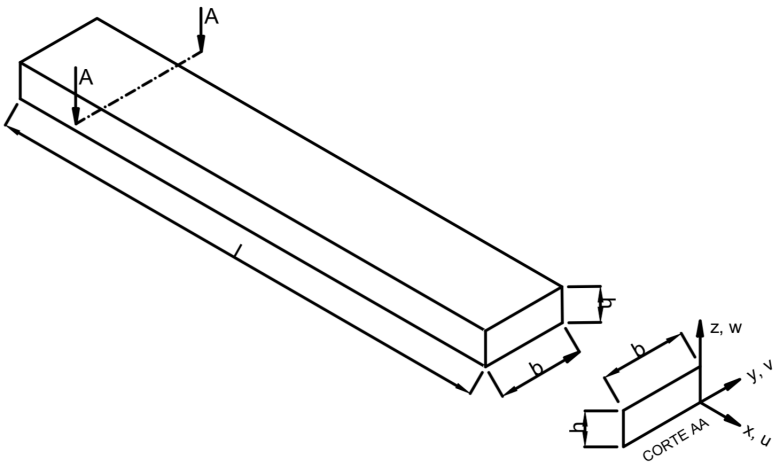

Figura 2.1: Modelo de uma viga contínua de Euler-Bernoulli.

linha neutra;

- O valor do comprimento da viga é bem maior do que o valor das outras dimensões $L/b > 10$ e $L/h > 10$;
- Os deslocamentos verticais, eixo z, de todos os pontos de uma seção transversal são pequenos;
- O deslocamento lateral segundo o eixo y é nulo;
- A viga é considerada na ausência de carregamento axial;
- O coeficiente de Poisson não é considerado;
- Não são consideradas as forças dissipativas;
- Material homogêneo, isotrópico e elástico linear;
- Seção reta em um prisma reto;
- O efeito do momento de inércia de rotação e do cisalhamento são desprezados.

O princípio de Hamilton relaciona energia cinética, forças conservativas e não conservativas. As forças conservativas se relacionam com a energia potencial elástica, no caso de estruturas ou sistemas mecânicos. As forças não conservativas se relacionam com a dissipação de energia.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W_{Nc}) dt = 0 \tag{2.1}$$

Sendo T energia cinética, U energia potencial elástica e W_{Nc} trabalho realizado.

Para sistemas conservativos.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)dt = 0 \tag{2.2}$$

Para a viga da Figura 3.1 as energias cinéticas e potencial elástica são determinadas pelas Equações (2.3) e (2.4).

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x) \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dzdx \tag{2.3}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} E(x) z^2 \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dzdx \tag{2.4}$$

Substituindo as Equações (2.3) e (2.4) na Equação (2.2) e multiplicando pela largura b da viga, encontra-se:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \Bigg[& \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x) b \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dzdx + \\ & -\frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} bE(x) z^2 \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dzdx \Bigg] dt = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Com as integrais dadas pela Equação (2.6) obtêm-se o momento de inércia de área da seção transversal e altura da viga.

$$b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = I; \int_{-h/2}^{h/2} dz = h \tag{2.6}$$

Substituindo-se a Equação (2.6) na Equação (2.5), tem-se a Equação (2.7).

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \Bigg[& \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) hb \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \\ & -\frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \Bigg] dt = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

ou tem-se a Equação (2.8)

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \Bigg[& \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \\ & -\frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \Bigg] dt = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

sendo

$\rho(x)bhA(x) = \rho(x)A(x) = \rho A(x) \quad e \quad E(x)I(x) = EI(x)$

Para simplificar a anotação usa-se w ao invés do $w(x,t)$ nos equacionamentos seguintes.

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \Bigg[\frac{1}{2}\int_0^L \rho A(x)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t}\right)dx + \\ -\frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx\Bigg]dt = 0\end{aligned} \tag{2.9}$$

Chamando a primeira integral da Equação (2.9) de I_1, tem-se as Equações (2.10), (2.11) e (2.12):

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2}\int_0^L \rho A(x)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \rho A(x)\left[\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]dx\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^L \rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)dx \\ &= \int_0^L \rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}(\delta w)dx\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^L \rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)\frac{\partial x}{\partial t}dx \\ &= \int_0^L \rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)dx\end{aligned} \tag{2.12}$$

Fazendo a integral por partes tem-se a Equação (2.13)

$$\int_0^L udv = uv|_0^L - \int_0^L vdu \tag{2.13}$$

Com isso obtêm-se as Equações (2.14) e (2.15).

$$u = \rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial t} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial x} + \rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\right) + 0 \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\right)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Logo obtêm-se a Equações (2.16), (2.17) e (2.18)

$$du = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\right)dx \tag{2.16}$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial x}(\delta w)dx \tag{2.17}$$

$$v = \delta w \tag{2.18}$$

Tomando as Equações (2.12) a (2.18) a integral por partes fica:

$$I_1 = \rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial t}\delta w|_0^L - \int_0^L \delta w\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\right)dx \tag{2.19}$$

$$I_1 = -\int_0^L \delta w\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\right)dx \tag{2.20}$$

Tomando a segunda integral da Equação (2.9) e chamando de I_2, tem-se a Equação (2.21):

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left[\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]dx \\
&= -\int_0^L EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx \\
&= -\int_0^L EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta w)dx
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Fazendo a integração por partes de I_2 com as definições tem-se as Equações (2.22), (2.23), (2.24) e (2.25):

$$u = EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.22}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \Rightarrow du = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx \tag{2.23}$$

$$dv = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta w)dx \tag{2.24}$$

$$v = \frac{\partial}{\partial x}(\delta w) \tag{2.25}$$

Substituindo as Equações (2.22) a (2.25) na integração por partes, vem as Equações (2.26) e (2.27):

$$I_2 = -\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(\delta w)\frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx\right] \tag{2.26}$$

$$I_2 = -EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)|_0^L + \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)dx \tag{2.27}$$

Fazendo a integração por partes da integral da Equação (2.27), vem as Equação (2.28), (2.29), (2.30) e (2.31)

$$u = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{2.28}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \Rightarrow du = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx \tag{2.29}$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial x}(\delta w)dx \tag{2.30}$$

$$v = \delta w \tag{2.31}$$

Substituindo as Equações (2.28) a (2.31) na Equação (2.27) encontra-se I_2.

$$I_2 = -EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)|_0^L + \frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(\delta w)|_0^L - \int_0^L (\delta w)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx \tag{2.32}$$

Substituindo as Equações (2.20) e (2.32) na Equação (2.9) encontra-se a Equação de movimento da viga e suas condições de contorno.

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\Bigg[-\int_0^L \delta w\frac{\partial}{\partial}\left(\rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\right)dx - \int_0^L \delta w\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx + \\ -EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)|_0^L + \frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(\delta w)|_0^L\Bigg]dt = 0\end{aligned} \tag{2.33}$$

Aplicando o Lema do Dubois-Reymand no qual cada termo da Equação (2.33) deve ser zero independentemente, vem a Equação (2.34):

$$-\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\right)dx - \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx = 0$$

e as condições de contorno são:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}\right) = 0 \quad ; \quad \delta w(0,t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2}\right) = 0 \quad ; \quad \delta w(L,t) = 0$$

$$EI\left(\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}\right) = 0 \quad ; \quad \delta\left(\frac{\partial w(0,t)}{\partial x}\right) = 0$$

$$EI\left(\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2}\right) = 0 \quad ; \quad \delta\left(\frac{\partial w(L,t)}{\partial x}\right) = 0$$

Após a integração, tem-se a Equação (2.34) que é a Equação de movimento de uma viga com massa específica, modulo de elasticidade e seção transversal variável com x.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho A(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{2.34}$$

Para o caso da massa específica, módulo de elasticidade e seção transversal constante tem-se a forma mais conhecida da Equação de Euler-Bernoulli, está representada na Equação (2.35).

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.35}$$

Admitindo-se uma solução por separação de variáveis,tem-se a Equação (2.36):

$$w(x,t) = W(x)T(t) \tag{2.36}$$

Sendo, $W(x)$ o modo natural de deflexão da viga, $T(t)$ a função harmônica de tempo, ω_n a frequência angular natural.

Então a Equação (2.35), após a substituição da Equação (2.36), fica como a Equação(2.37):

$$\frac{EI}{W(x)}\frac{d^4W(x)}{dx^4} = -\frac{\rho A}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \omega_n^2 \tag{2.37}$$

Logo tem-se a Equação (2.38):

$$\frac{EI}{\rho A}\frac{1}{W(x)}\frac{d^4W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \omega_n^2 \tag{2.38}$$

Admensionalisando a Equação (2.38) através da Equação (2.39).

$$\varphi = \frac{x}{L}; \quad W(\varphi) = \frac{W(x)}{L}; \quad \lambda^2 = \frac{\rho A \omega_n^2 L^4}{EI} \tag{2.39}$$

a parte espacial da Equação (2.38) fica na forma adimensional vem a Equação (2.40):

$$\frac{\partial^4 W(\varphi)}{\partial \varphi^4} - \lambda^2 W(\varphi) = 0 \tag{2.40}$$

Escolhendo a condição de contorno para a extremidade engastada, do lado esquerdo da viga com $x = 0$, de acordo a Equação (2.41)

$$w(x,t)|_{x=0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = 0 \tag{2.41}$$

Escolhendo as condição de contorno para a extremidade livre, do lado direito da viga com $x = L$, de acordo a Equação (2.42)

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}|_{x=L} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}|_{x=L} = 0 \tag{2.42}$$

e as condições iniciais para $t = 0$, como a Equação (2.43)

$$w(x,t)|_{t=0} = w(x,0) = w_0(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \dot{w}_0(x) \tag{2.43}$$

Utilizando a Equação (2.41) e (2.42), as condições de contorno admensionais são:

$$W(\varphi)|_{\varphi=0} = \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 W(\varphi)}{\partial \varphi^2}|_{\varphi=1} = \frac{\partial^3 W(\varphi)}{\partial \varphi^3}|_{\varphi=1} = 0 \tag{2.44}$$

A partir das definições e propriedades do método da transformada diferencial tem-se a Tabela 3.1.

Tabela 2.1: Função original x Transformada DTM

Função original	Transformada DTM
$w(t) = x(t) + z(t)$	$W(k) = X(k) + Z(k)$
$w(t) = ax(t)$	$W(k) = aX(k)$
$w(t) = dx(t)/dt$	$W(k) = (k+1)X(k+1)$
$w(t) = d^2x(t)/dt^2$	$W(k) = (k+1)(k+2)X(k+2)$

Aplica-se o método da transformada diferencial na Equação (2.40) que resulta em:

$$(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)W(k+4) - \lambda^2 W(k) = 0 \tag{2.45}$$

Reescrevendo a Equação (2.45), da seguinte maneira:

$$W(k+4) = \frac{\lambda^2 W(k)}{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} \tag{2.46}$$

combinando a Equação (2.46) com as propriedades das condições de contorno do método da transformada diferencial e considerando as condições de contorno para viga em balanço da Figura (2.2), a Equação (2.44) obtém-se $W(x)$ e λ.

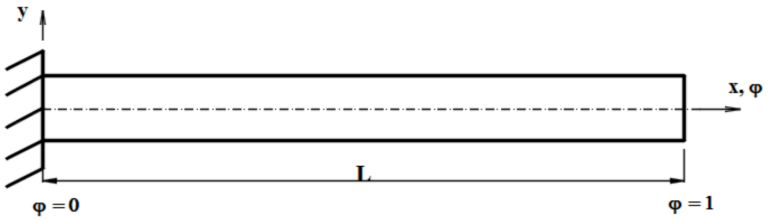

Figura 2.2: Viga em balanço.

Tabela 2.2: Condições de contorno $\varphi = 0$.

Função original	Transformada DTM
$w(x,t)\|_{x=0} = 0$	$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\|_{x=0}$
$W(\varphi)\|_{\varphi=0} T(t) = 0$	$\frac{dW(x)}{dx}\|_{x=0} T(t) = 0$
$W(0) = 0$	$\frac{dW(\varphi)}{d\varphi}\|_{\varphi=0} = 0$

Aplicando o método da transformada diferencial nas condições de contorno do lado esquerdo da viga, de acordo com a Tabela 2.3.

Tabela 2.3: Condição de contorno.

Deflexão	Inclinação
$W(0) = 0$	$W(1) = 0$

Agora considerando as condições de contorno da viga engastada livre para $\varphi = 1$, representando a extremidade livre do lado direito tem-se a Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Condição de contorno $\varphi = 1$.

Momento fletor	Força cortante
$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\|_{x=L}$	$\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\|_{x=L}$
$\frac{d^2 W(x)}{dx^2}\|_{x=L} T(t) = 0$	$\frac{d^3 W(x)}{dx^3}\|_{x=L} T(t) = 0$
$\frac{d^2 W(\varphi)}{d\varphi^2}\|_{\varphi=1} = 0$	$\frac{d^3 W(\varphi)}{d\varphi^3}\|_{\varphi=1} = 0$

Aplicando o método da transformada diferencial nas condições de contorno, referentes a extremidade direita da viga $\varphi = 1$ tem-se as Equações (2.47) e (2.48):

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)W(k) = 0 \tag{2.47}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)W(k) = 0 \tag{2.48}$$

Os valores de $W(2)$ e $W(3)$ são respectivamente, c_0 e c_1, os valores atribuídos a $W(2)$ e $W(3)$ são valores constantes e diferentes de zero, porque os valores atribuídos $W(0)$ e $W(1)$

já são zero, não se pode considerar todas as condições de contorno com valor zero se não fica impossibilitado de representar o lado direito da viga como sendo o lado livre da viga.

Realizando-se os somatórios das condições de contorno com auxílio da Equação (2.46) isto é, variando o valor de k de 0 até 11, obtém-se a Tabela 3.2. O valor de k para esse caso foi escolhido apenas como uma forma de truncamento e como uma forma de exemplo para que a tabela não ficasse muito extensa.

Tabela 2.5: Substituição das condições de contorno.

Variação de k	Resultado
$W(0)$	0
$W(1)$	0
$W(2)$	c_0
$W(3)$	c_1
$W(4)$	0
$W(5)$	0
$W(6)$	$\frac{\lambda^2 c_0}{360}$
$W(7)$	$\frac{\lambda^2 c_1}{840}$
$W(8)$	0
$W(9)$	0
$W(10)$	$\frac{\lambda^4 c_0}{1814400}$
$W(11)$	$\frac{\lambda^4 c_1}{6652800}$

Generalizando os resultados encontrados na Tabela 3.2 tem-se as Equações (2.49) a (2.52):

$$W(4k) = 0 \qquad k = 0, 1, 2... \tag{2.49}$$

$$W(4k+1) = 0 \qquad k = 0, 1, 2... \tag{2.50}$$

$$W(4k+2) = \frac{2!\,\lambda^{2k} c_0}{(4k+2)!} \qquad k = 1, 2... \tag{2.51}$$

$$W(4k+3) = \frac{3!\,\lambda^{2k} c_1}{(4k+3)!} \qquad k = 1, 2... \tag{2.52}$$

É importante salientar que ocorrerá uma substituição apenas nas condições de contorno

generalizadas que forem diferentes de zero.

Substituindo as Equações generalizadas (2.51) e (2.52) nas Equações (2.47) e (2.48), vem as Equações (2.53) e (2.54)

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)W(k) = 0 \tag{2.53}$$

Fazendo inicialmente $k = 4k+2$ e $k = 4k+3$ na Equação (2.53), vem:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(4k+2)(4k+2-1)W(4k+2) + (4k+3)(4k+3-1)W(4k+3) = 0 \tag{2.54}$$

Para o termo $W(4k+2)$, tem-se as Equações (2.55) e (2.56):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2!\,\lambda^{2k}c_0}{(4k+2)!}(4k+2)(4k+1) = \sum_{k=0}^{\infty}(4k+2)(4k+1)\frac{2!\,\lambda^{2k}c_0}{(4k+2)(4k+1)(4k)!} = 0 \tag{2.55}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2!\,\lambda^{2k}c_0}{(4k)!} = 0 \tag{2.56}$$

Para o termo $W(4k+3)$, obtêm-se as Equações (2.57) e (2.59):

$$\sum_{k=0}^{\infty}(4k+3)(4k+2)W(4k+3)\frac{3!\,\lambda^{2k}c_1}{(4k+3)!} = 0 \tag{2.57}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(4k+3)(4k+2)\frac{3!\,\lambda^{2k}c_1}{(4k+3)(4k+2)(4k+1)!} = 0 \tag{2.58}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2k}c_1}{(4k+1)!} = 0 \tag{2.59}$$

Reescrevendo a Equação (2.48), vem a Equação (2.60):

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)W(k) = 0 \tag{2.60}$$

Fazendo inicialmente $k = 4k+2$ e $k = 4k+3$ na Equação (2.60) vem a Equação (2.61):

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}(4k+2)(4k+2-1)(4k+2-2)W(4k+2)+\\&+(4k+3)(4k+3-1)(4k+3-2)W(4k+3)=0\end{aligned} \tag{2.61}$$

Para o termo $W(4k+2)$, tem-se a Equação (2.62) e (2.63):

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}(4k+2)(4k+1)(4k)\frac{2!\,\lambda^{2k}c_0}{(4k+2)!}=0\\&\sum_{k=0}^{\infty}(4k+2)(4k+1)(4k)\frac{2!\,\lambda^{2k}c_0}{(4k+2)(4k+1)(4k)(4k-1)!}=0\end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2!\,\lambda^{2k}c_0}{(4k-1)!}=0 \tag{2.63}$$

Para o termo $W(4k+3)$, tem-se a Equação (2.64) e (2.65):

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}(4k+3)(4k+2)(4k+1)\frac{3!\,\lambda^{2k}c_1}{(4k+3)!}=0\\&\sum_{k=0}^{\infty}(4k+3)(4k+2)(4k+1)\frac{3!\,\lambda^{2k}c_1}{(4k+3)(4k+2)(4k+1)(4k)!}=0\end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3!\,\lambda^{2k}c_1}{(4k)!}=0 \tag{2.65}$$

com isso:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)W(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2!\,\lambda^{2k} c_0}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2k} c_1}{(4k+1)!} = 0 \tag{2.66}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)W(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2!\,\lambda^{2k} c_0}{(4k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2k} c_1}{(4k)!} = 0 \tag{2.67}$$

Da Equação (2.66) e (2.67), obtém-se:

$$2!\,c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k)!} + 3!\,c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k+1)!} = 0 \tag{2.68}$$

Dividindo a 2ª parcela da Equação (2.68) pela 1ª parcela da mesma Equação vem a Equação (2.69):

$$\frac{c_0}{c_1} = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k+1)!} / \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k)!} \tag{2.69}$$

A Equação (2.67), tem-se a Equação (2.70):

$$2!\,c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-1)!} + 3!\,c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k)!} = 0 \tag{2.70}$$

Dividindo a 2ª parcela da Equação (2.70) pela 1ª parcela da mesma Equação vem a Equação (2.71):

$$\frac{c_0}{c_1} = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k)!} / \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-1)!} = 0 \tag{2.71}$$

fazendo

$$\begin{aligned} e_{11} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k)!} \qquad e_{12} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k+1)!} \\ e_{21} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-1)!} \qquad e_{22} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k)!} \end{aligned} \tag{2.72}$$

Colocando as Equações (2.67), (2.71) e (2.73) na forma matricial, tem-se a Equação (2.73):

$$\begin{bmatrix} e_{11} & 3e_{12} \\ e_{21} & 3e_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.73}$$

calculando o determinante do sistema referente à Equação (2.73), determina-se os autovalores da viga, solucionando $f^k(\lambda) = 0$, obtêm-se a Equação (2.74):

$$f^k(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k)!}\right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k+1)!}\right) \tag{2.74}$$

Com os autovalores da viga determina-se os autovetores ou modos de vibração. Para que isso seja possível, substitui-se as Equações (2.49) a (2.52) na Equação (E.5). A Equação (E.5) trata-se da transformada inversa do DTM mostrada na Tabela 2.6.

Tabela 2.6: Transformada inversa DTM.

Variação de (k)	$x^{(4k)}W(4k)$	$x^{(4k+1)}W(4k+1)$	$x^{(4k+2)}W(4k+2)$	$x^{(4k+3)}W(4k+3)$
0	$x^0W(0)$	$x^1W(1)$	$x^2W(2)$	$x^3W(3)$
1	$x^4W(4)$	$x^5W(5)$	$x^6W(6)$	$x^7W(7)$
2	$x^8W(8)$	$x^9W(9)$	$x^{10}W(10)$	$x^{11}W(11)$

De acordo com a Tabela 2.6, tem-se a Equação (2.75):

$$\begin{aligned} w(x) = &\sum_{k=0}^{\infty} W(4k)x^{(4k)} + \sum_{k=0}^{\infty} W(4k+1)x^{(4k+1)} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} W(4k+2)x^{(4k+2)} + \sum_{k=0}^{\infty} W(4k+3)x^{(4k+3)} \end{aligned} \tag{2.75}$$

Adota-se para a variável c_0 o valor igual a 3, e coloca-se a variável c_1 em função de variável c_0 tem-se a Equação (2.76):

$$c_1 = -\frac{e_{11}}{3e_{12}} c_0 \tag{2.76}$$

Na sequência determina-se o equacionamento da forma modal e a Equação (2.77):

$$w(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k+2)!} x^{(4k+2)} + 3c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k+3)!} x^{(4k+3)} \tag{2.77}$$

com isso substitui-se a Equação (2.77), na Equação (2.78), e multiplica-se toda Equação por c_0, e determina-se a forma modal do sistema obtendo-se a Equação (2.78):

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k+2)!} x^{(4k+2)} - \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^{2k}}{(4k)!}}{\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^{2k}}{(4k+1)!}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k+3)!} x^{(4k+3)} \tag{2.78}$$

Capítulo 3

EQUACIONAMENTO DO MODELO DE VIGA COMPÓSITA DE EULER-BERNOULLI COM APOIOS ELÁSTICOS VARIÁVEIS

Neste Capítulo é apresentado o desenvolvimento analítico do modelo de viga de Euler-Bernoulli aplicado a uma viga compósita laminada uniforme, com apoios elásticos variáveis e solução através do Método da Transformadas Diferenciais.

3.1 Equacionamento do Modelo de Viga

Para o desenvolvimento do modelo, algumas considerações devem ser levadas em conta, além das considerações do modelo de viga de Euler-Bernoulli apresentadas no Capítulo 3, são elas:

- As lâminas são perfeitamente unidas, de modo que não haja deslocamentos relativos entre as mesmas;
- A espessura da matriz (resina) presente entre uma lâmina e outra é considerada muito pequena, de modo que possa ser desprezada.

A Figura 3.1 ilustra uma viga laminada. A viga em questão possui seção retangular $A(x)$, em (m^2), base b em (m), altura h em (m) e comprimento L em (m). O deslocamento vertical em uma seção transversal de abscissa x em um tempo t, é representado por w.

Considera-se inicialmente que a viga possui carregamento vertical na direção z. Devido ao fato da viga ser esbelta $(b << L)$, as tensões são ignoradas na direção z, o que implica

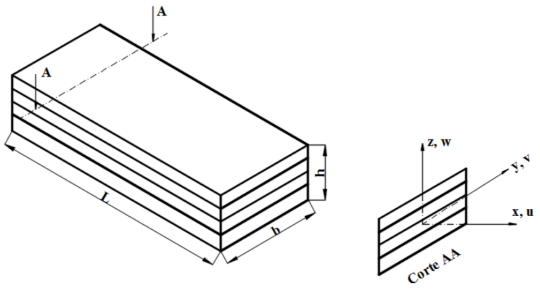

Figura 3.1: Modelo de uma viga contínua laminada de Euler-Bernoulli.

que os efeitos do coeficiente de Poisson podem ser ignorados, Eloy (2014). Então a força e o momento na direção x, são:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ k_x \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Onde N_x é a força (N) na direção x, M_x momento fletor $(N.m)$, A_{11} matriz de rigidez à tração e à compressão (N/m), B_{11} matriz de acoplamento entre a rigidez planar e a rigidez à flexão (N) e ε_{x0} deformação no plano central.

Caso ocorra a consideração de cisalhamento no sistema ele é determinado por meio da seguinte Equação (3.2):

$$Q_x = 2A_{55}\varepsilon_{xy} \tag{3.2}$$

Se a viga for simétrica em relação ao seu plano de referência $B_{ij} = 0$, então o momento fletor da viga, $M(x,t)$, é dado na Equação (3.3):

$$M(x,t) = b(x)D_{11}(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.3}$$

sendo $M(x,t)$ momento fletor (Nm), D_{11} termo da matriz de rigidez à flexão (Nm), $b(x)$ base da viga (m) e $w(x,t)$ deflexão ao longo do eixo z. O produto expresso por $b(x)D_{11}(x)$ diz respeito à rigidez flexural para vigas compósitas de seção retangular, ao invés de $EI(x)$ usada para materiais isotrópicos, com I momento de inércia de área (m^4) e E módulo de elasticidade longitudinal do material (Pa).

A substituição do momento fletor, Equação (3.3), na Equação (2.34) resulta na Equação (3.4):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho A(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b(x)D_{11}(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{3.4}$$

Se $b(x)D11(x)$ e $A(x)$ são admitidos constantes ao longo da viga, a Equação (3.4) simplifica-se obtendo a Equação (3.5) que é a diferencial de vibração livre:

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad , \quad c = \sqrt{\frac{bD_{11}}{\rho A}} \tag{3.5}$$

sendo c a velocidade de propagação da onda no meio sólido (m/s).

Nessa etapa do trabalho após a aplicação da teoria do compósito laminado na teoria de vigas contínuas, encontra-se a solução da Equação, implementando ao modelo citado anteriormente o método da transformada diferencial. O modelo que utilizou-se é referente a uma viga compósita laminada com apoios varáveis elásticos (elementos atuando como molas, nas condições de contorno), como mostra Figura 3.2.

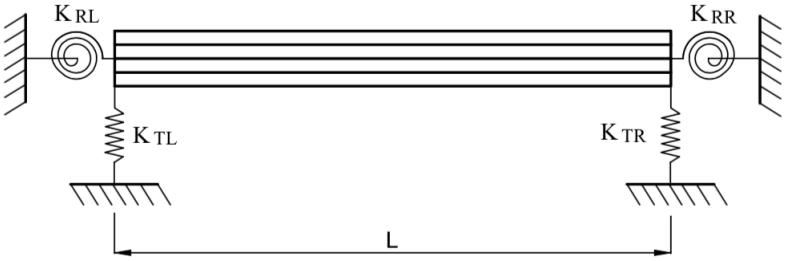

Figura 3.2: Modelo de uma viga contínua laminada de Euler-Bernoulli com apoios variáveis elásticos.

Onde k_{TL} trata-se da rigidez de translação e o k_{RL} da rigidez de rotação da extremidade esquerda da viga, já o k_{RR} trata-se da rigidez de rotação e o k_{TR} da rigidez de translação da extremidade direita da viga.

3.2 Solução da Equação utilizando DTM

A solução da Equação (3.5) é obtida por separação de variáveis, $w(x,t) = W(x)T(t)$. Inicia-se os cálculos a partir da Equação (3.5), que corresponde à Equação de movimento da viga compósita, na forma adimensional conforme Equação (2.40) e tem-se a Equação (3.6)

$$\frac{d^4 W(\varphi)}{d\varphi^4} - \lambda^2 W(\varphi) = 0 \quad \text{e} \quad \lambda^2 = \frac{\rho A \omega_n^2 L^4}{bD_{11}} \tag{3.6}$$

Aplicando as condições de contorno referentes à extremidade esquerda para $x = 0$ tem-se a Equação (3.7):

$$bD_{11}\frac{d^3W(x)}{dx^3} + k_{TL}W(x) = 0 \qquad bD_{11}\frac{d^2W(x)}{dx^2} - k_{RL}\frac{dW(x)}{dx} = 0 \tag{3.7}$$

Colocando as condições de contorno da Equação (3.7), na forma adimensional para $\varphi = 0$ tem-se a Equação (3.8):

$$\frac{d^3W(\varphi)}{d\varphi^3} + \beta_{TL}W(\varphi) = 0 \qquad \frac{d^2W(\varphi)}{d\varphi^2} - \beta_{RL}\frac{dW(\varphi)}{d\varphi} = 0 \tag{3.8}$$

e definindo tem-se a Equação (3.9):

$$\beta_{TL} = \frac{k_{TL}L^3}{bD_{11}} \qquad \beta_{RL} = \frac{k_{RL}L}{bD_{11}} \tag{3.9}$$

Dando sequência ao raciocínio, aplica-se as condições de contorno para a extremidade direita da viga, onde $x = L$ e obtêm-se a Equação (3.10):

$$bD_{11}\frac{d^3W(x)}{dx^3} - k_{TR}W(x) = 0 \qquad bD_{11}\frac{d^2W(x)}{dx^2} + k_{RR}\frac{dW(x)}{dx} = 0 \tag{3.10}$$

Colocando as condições de contorno da Equação (3.10), na forma adimensional para $\varphi = 1$ tem-se a Equação (3.11):

$$\frac{d^3W(\varphi)}{d\varphi^3} - \beta_{TR}W(\varphi) = 0 \qquad \frac{d^2W(\varphi)}{d\varphi^2} + \beta_{RR}\frac{dW(\varphi)}{d\varphi} = 0 \tag{3.11}$$

e definindo obtêm-se a Equação (3.12):

$$\beta_{TR} = \frac{k_{TR}L^3}{bD_{11}} \qquad \beta_{RR} = \frac{k_{RR}L}{bD_{11}} \tag{3.12}$$

Sendo que β_{TL} representa a rigidez de translação e β_{RL} representa a rigidez de rotação da extremidade esquerda da viga, respectivamente já β_{RR} representa a rigidez de rotação e β_{TR} a rigidez de translação da extremidade direita da viga, respectivamente.

Adotando valores diferentes de zero para as condições de deflexão e inclinação, tendo como valores, c_0 e c_1 respectivamente, de acordo com o método da transformada diferencial e fazendo $\varphi = 0$, tem-se a Tabela 3.1:

Fazendo $\varphi = 1$, tem-se a Tabela 3.2:

Tabela 3.1: Condições de contorno para $\varphi = 0$.

Deslocamento	Inclinação
$W(0) = W(\varphi) = c_0$	$W(1) = \dfrac{dW(\varphi)}{d\varphi} = c_1$

Tabela 3.2: Condições de contorno para $\varphi = 1$.

Momento fletor	Força cisalhante
$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)W(k) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)W(k) = 0$

Para $k = 0$ na Equação (3.8), tem-se

$$\begin{aligned} &(K+1)(K+2)(K+3)W(K+3) - \beta_{TR} = 0 \\ &6W(3) - \beta_{TR}c_0 = 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

e

$$\begin{aligned} &(K+1)(K+2)W(K+2) - \beta_{RL}(K+1)W(K+1) = 0 \\ &2W(2) - \beta_{RL}c_1 = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

logo a Equação (3.14), resulta na Equação (3.15):

$$\begin{aligned} &2W(2) - \beta_{RL}c_1 = 0 \\ &W(2) = \frac{\beta_{RL}c_1}{2} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Da mesma forma a Equação (3.13), resulta na Equação (3.16):

$$\begin{aligned} &6W(3) + \beta_{TL}c_0 = 0 \\ &W(3) = -\frac{\beta_{TL}c_0}{6} \end{aligned} \tag{3.16}$$

De acordo com as propriedades e definições do método da transformada diferencial da Tabela (3.1), aplicou-se o método da transformada diferencial na Equação de movimento da teoria de vigas compósitas com apoios variáveis elásticos de Euler-Bernoulli, Equação (3.6) ficando da seguinte forma tem-se a Equação (3.17):

$$(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)W(k+4) - \lambda^2 W(k) = 0 \tag{3.17}$$

Reescrevendo a Equação (3.17), da seguinte maneira tem-se a Equação (3.18):

$$W(k+4) = \frac{\lambda^2 W(k)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \tag{3.18}$$

Encontrando $W(k)$ para todos os valores de k e substituindo as condições de deslocamento e inclinação da Tabela (4.1), na Equação de movimento (3.18), tem-se os seguintes termos dados na Tabela (3.3).

Tabela 3.3: Substituição das condições de contorno.

Variação de k=0,1,2...7	Resultado
$W(0+4)$	$W(4) = \frac{\lambda^2 c_0}{4!}$
$W(1+4)$	$W(5) = \frac{\lambda^2 c_1}{5!}$
$W(2+4)$	$W(6) = \frac{\lambda^2 \beta_{RL} c_1}{6!}$
$W(3+4)$	$W(7) = -\frac{\lambda^2 \beta_{TL} c_0}{7!}$
$W(4+4)$	$W(8) = \frac{\lambda^4 c_0}{8!}$
$W(5+4)$	$W(9) = \frac{\lambda^4 c_1}{9!}$
$W(6+4)$	$W(10) = \frac{\lambda^4 \beta_{RL} c_1}{10!}$
$W(7+4)$	$W(11) = -\frac{\lambda^4 \beta_{TL} c_0}{11!}$

Reescrevendo a Equação (3.18), de maneira generalizada tem-se a Equação (3.19):

$$\begin{aligned} W(4k) &= \frac{\lambda^{2k} c_0}{(4k)!} \\ W(4k+1) &= \frac{\lambda^{2k} c_1}{(4k+1)!} \\ W(4k+2) &= \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL} c_1}{(4k+2)!} \\ W(4k+3) &= -\frac{\lambda^{2k} \beta_{TL} c_0}{(4k+3)!} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Após as equações generalizadas e aplicando o método da transformada diferencial, nas condições de contorno da viga, momento fletor e esforço cortante, Tabela (3.2), referente a extremidade direita para $\varphi = 1$, obtém-se as Equações (3.20) e(3.21):

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)W(k) + \sum_{k=0}^{\infty} kW(k)\beta_{RR} = 0 \tag{3.20}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)W(k) - \sum_{k=0}^{\infty} W(k)\beta_{TR} = 0 \tag{3.21}$$

Substituindo as Equações generalizadas (3.19), nas equações de contorno transformadas pelo método da transformada diferencial, Equações (3.20) e (3.21), obtém-se as Equações (3.22) a(3.25) com os seguintes conjuntos de somatórios formados pelos polinômios:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)W(k) = 0 \\
&W(4k) = 4k(4k-1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_0}{(4k)(4k-1)(4k-2)!} \\
&W(4k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_0}{(4k-2)!} \\
&W(4k+1) = (4k+1)(4k)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_1}{(4k+1)(4k)(4k-1)!} \\
&W(4k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_1}{(4k-1)!} \\
&W(4k+2) = (4k+2)(4k+1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL} c_1}{(4k+2)(4k+1)(4k)!} \\
&W(4k+2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL} c_1}{(4k)!} \\
&W(4k+3) = (4k+3)(4k+2)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL} c_0}{(4k+3)(4k+2)(4k+1)!} \\
&W(4k+3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL} c_0}{(4k+1)!}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kW(k)\beta_{RR} = 0$$

$$W(4k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}c_0}{(4k-1)!}$$

$$W(4k+1) = (4k+1)\beta_{RR}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}c_1}{(4k+1)(4k)!}$$

$$W(4k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}c_1}{(4k)!}$$

$$W(4k+2) = (4k+2)\beta_{RR}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\beta_{RL}c_1}{(4k+2)(4k+1)!}$$

$$W(4k+2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{RL}c_1}{(4k+1)!}$$

$$W(4k+3) = (4k+3)\beta_{RR}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\beta_{TL}c_0}{(4k+3)(4k+2)!}$$

$$W(4k+3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{TL}c_0}{(4k+2)!} \tag{3.23}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)W(k) = 0$$

$$W(4k) = (4k)(4k-1)(4k-2)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_0}{(4k)(4k-1)(4k-2)(4k-3)!}$$

$$W(4k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_0}{(4k-3)!}$$

$$W(4k+1) = (4k+1)(4k)(4k-1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_1}{(4k+1)(4k)(4k-1)(4k-2)!}$$

$$W(4k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_1}{(4k-2)!}$$

$$W(4k+2) = (4k+2)(4k+1)(4k)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL} c_1}{(4k+2)(4k+1)(4k)(4k-1)!}$$

$$W(4k+2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL} c_1}{(4k-1)!}$$

$$W(4k+3) = (4k+3)(4k+2)(4k+1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL} c_0}{(4k+3)(4k+2)(4k+1)(4k)!}$$

$$W(4k+3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL} c_0}{(4k)!} \tag{3.24}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k=0}^{\infty} Y(k)\beta_{TR} = 0 \\
&W(4k) = \beta_{TR}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}c_0}{(4k)!} \\
&W(4k) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}c_0}{(4k)!} \\
&W(4k+1) = \beta_{TR}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}c_1}{(4k+1)!} \\
&W(4k+1) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}c_1}{(4k+1)!} \\
&W(4k+2) = \beta_{TR}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RL}c_1}{(4k+2)!} \\
&W(4k+2) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}\beta_{RL}c_1}{(4k+2)!} \\
&W(4k+3) = \beta_{TR}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TL}c_0}{(4k+3)!} \\
&W(4k+3) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}\beta_{TL}c_0}{(4k+3)}!
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Após substituir as Equações (3.19) generalizadas nas Equações (3.20) e (3.21), de contorno, que representam a extremidade direita da viga em $\varphi = 1$, escreve-se os polinômios tem-se as Equações (3.26) e(3.27):

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)W(k) + \sum_{k=0}^{\infty} kW(k)\beta_{RR} = \\
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}c_0}{(4k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}c_1}{(4k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RL}c_1}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TL}c_0}{(4k+1)!} + \\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}c_0}{(4k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}c_1}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{RL}c_1}{(4k+1)!} + \\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{TL}c_0}{(4k+2)!}
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)W(k) - \sum_{k=0}^{\infty} W(k)\beta_{TR} =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_0}{(4k-3)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_1}{(4k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL} c_1}{(4k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL} c_0}{(4k)!} +$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR} c_0}{(4k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR} c_1}{(4k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR} \beta_{RL} c_1}{(4k+2)!} +$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR} \beta_{TL} c_0}{(4k+3)!} \tag{3.27}$$

Após descrever as somas polinomiais por meio das Equações (3.26) e (3.27), obtêm-se a Equação (3.28) onde essa Equação trata-se dos termos que irão compor a formação da matriz da Equação (3.29).

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RR}}{(4k-1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL}}{(4k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RR} \beta_{TL}}{(4k+2)!} \\
e_{12} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RR}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RR} \beta_{RL}}{(4k+1)!} \\
e_{21} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-3)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR}}{(4k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR} \beta_{TL}}{(4k+3)!} \\
e_{22} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-2)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR}}{(4k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL}}{(4k-1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR} \beta_{RL}}{(4k+2)!}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Com isso forma-se a matriz com seus devidos elementos, encontra-se a Equação (3.29):

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.29}$$

Resolvendo o sistema matricial homogêneo, Equação (3.29), encontra-se o polinômio

característico $f^k(\lambda)$, da Equação (3.30).

$$
\begin{aligned}
&f^k(\lambda) = \\
&\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(4k-2)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}}{(4k-1)!}\right)-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TL}}{(4k+1)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{TL}}{(4k+2)!}\right)\right] \\
&\times\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(4k-2)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RL}}{(4k-1)!}\right)-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}}{(4k+1)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}\beta_{RL}}{(4k+2)!}\right)\right]+ \\
&-\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(4k-3)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}\beta_{TL}}{(4k+3)!}\right)-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}}{(4k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TL}}{(4k)!}\right)\right] \\
&\times\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(4k-1)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{RL}}{(4k+1)!}\right)+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}}{(4k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RL}}{(4k)!}\right)\right]=0
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Para se obter os modos de vibração, substitui-se as Equações (3.19), na Equação (E.5). A Equação (E.5) trata-se da transformada inversa do DTM, com isso tem-se a Tabela 3.4:

Tabela 3.4: Transformada inversa DTM.

Variação de (k)	$x^kW(4k)$	$x^kW(4k+1)$	$x^kW(4k+2)$	$x^kW(4k+3)$
0	$x^0W(0)$	$x^1W(1)$	$x^2W(2)$	$x^3W(3)$
1	$x^4W(4)$	$x^5W(5)$	$x^6W(6)$	$x^7W(7)$
2	$x^8W(8)$	$x^9W(9)$	$x^{10}W(10)$	$x^{11}W(11)$

Com isso tem-se a Equação (3.31):

$$
\begin{aligned}
w(x) = c_0\sum_{k=0}^{\infty}W(4k)x^{(4k)}+c_1\sum_{k=0}^{\infty}W(4k+1)x^{(4k+1)}+ \\
+c_1\sum_{k=0}^{\infty}W(4k+2)x^{(4k+2)}+c_0\sum_{k=0}^{\infty}W(4k+3)x^{(4k+3)}
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Substituindo as Equações (3.19), que representam as equações generalizadas na Equação (3.31), que é a Equação inversa, obtêm-se a Equação (3.32):

$$
\begin{aligned}
w(x) = c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(4k)!}x^{(4k+1)}+c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(4k+1)!}x^{(4k+1)}+ \\
+c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RL}}{(4k+2)!}x^{(4k+2)}+c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TL}}{(4k+3)!}x^{(4k+3)}
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Dando sequência para encontrar o equacionamento da forma modal, e atentando que a solução do sistema da Equação (3.29) possui um determinante nulo, com isso atribui-se um valor para uma das variáveis do sistema. Adota-se para a variável c_0 o valor igual a 1, e coloca a variável c_1 em função de variável c_0, com isso obtém-se:

$$c_1 = -\frac{e_{11}}{e_{12}} c_0 \tag{3.33}$$

Reescrevendo a Equação (3.33), com a substituição da Equação (3.28) encontra-se a Equação (3.34):

$$c_1 = -\frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}}{(4k-1)!}\right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\beta_{TL}}{(4k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{TL}}{(4k+2)!}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{RL}}{(4k+1)!}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\beta_{RL}}{(4k)!}\right)} \tag{3.34}$$

3.3 Frequências Naturais Dimensionais e Adimensionais de Vigas Contínuas Compósitas

Um programa computacional foi desenvolvido para modelos de viga contínuas, por meio da representação da teoria de vigas de Euler-Bernoulli e o método da transformada diferencial no Apêndice A.

Para os diferentes tipos de apoios variáveis elásticos, usam-se as constantes β_{TL}, β_{RL}, β_{TR} e β_{RR} apresentadas nas Equações (3.9) e (3.12), pela facilidade de se trabalhar com constantes adimensionais. Essas constantes são diretamente proporcionais à rigidez de rotação k_{RL}, k_{RR} e translação, k_{TL}, k_{TR}, respectivamente. Logo, quando a rigidez de rotação e translação tendem para infinito, as constantes adimensionais β_{RL}, β_{RR} e β_{TL}, β_{TR} tendem a infinito também, neste caso, o apoio apresenta uma rigidez muito alta, o que corresponde a um apoio engastado, e se essas constantes tendem a zero, significa que não há nenhuma restrição à rotação ou à translação no apoio da viga, de modo que o apoio é livre. Então variando os valores das constantes adimensionais e simulam-se as diferentes condições de contorno estudadas.

As simulações a serem apresentadas são realizadas em função das propriedades do material e geometria da viga laminada mostrada na Tabela (3.5), os dados apresentados nesta Tabela foram obtidos de Eloy (2014).

Faz-se agora para a comparação das frequências naturais dimensionais e adimensionais

com as frequências encontradas na literatura para materiais laminados, em função das condições de apoio e da relação comprimento sobre espessura dessas vigas. Essas propriedades foram obtidas de Yildirim e kiral (2000) e são valores característicos do compósito de fibra de carbono/resina epóxi, sendo o reforço unidirecional.

Tabela 3.5: Propriedades materiais e geométricas da viga laminada.

Grandeza	Valor	Unidade
Módulo de elasticidade longitudinal E_1	144,8	GPa
Módulo de elasticidade longitudinal E_2	9,65	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 1-2 G_{12}	4,14	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 1-3 G_{13}	4,14	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 2-3 G_{23}	3,45	GPa
Massa específica ρ	1.389,23	kg/m^3
Coeficiente de Poisson ν_{12}	0,3	-
Coeficiente de cisalhamento k$_c$	5/6	-

A Tabela (3.6), mostra os valores das frequências em kHz para uma viga contínua laminada, constituída de uma única lâmina orientada a (0º), simplesmente apoiada nas extremidades, onde se comparam os valores obtidos para uma viga esbelta e para uma viga espessa, sendo $\frac{L}{h} = 120, h = 6,35\,mm, b = 24,5\,mm$.

Tabela 3.6: Frequências naturais em (kHz) para uma viga esbelta simplesmente apoiada (0º).

	$\hat{\beta}$	Viga Contínua	$\hat{\beta}$
Freq	Eloy(2014)	Chandrashekhara *et al.* (1990)	Autor(DTM)
1ª	0,051	0,051	0,051
2ª	0,203	0,203	0,203
3ª	0,457	0,457	0,457
4ª	0,813	0,812	0,813
5ª	1,270	1,269	1,270

Cabe ressaltar aqui que essas frequências naturais adimensionais (ω_{ad}) são diferentes daquelas mostradas anteriormente, $\hat{\beta}$. Para vigas compósitas, as frequências adimensionais dadas pela Equação (3.35), são as mais comuns encontradas na literatura.

$$\omega_{ad} = \omega_n L^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_1 h^2}} \tag{3.35}$$

sendo ω_n a frequência natural angular da viga (rad/s), L o comprimento da viga (m), ρ a massa

específica do material $kg/(m^3)$, E_1 o módulo de elasticidade longitudinal na direção principal do laminado (N/m^2) e h a espessura da viga (m).

A Tabela (3.7) mostra as frequências naturais adimensionais dadas pela Equação (3.35), para diferentes ângulos de orientação das fibras das lâminas, bem como para diferentes condições de contorno. O laminado Angle-Ply trata-se da posição das fibras em relação ao ângulo referente as camadas de montagem, podendo ser $[+45/-45/-45/+45] = [\pm 45]$ e $[30/-30/30/-30/-30/30$ $[\pm 30]$

Tabela 3.7: Frequências naturais adimensionais para uma viga feita a partir de um laminado "angle-ply"(α/-α/-α/α).

		$\omega_{ad}\left(\frac{L}{h}=15\right)$			
Ângulo(0º)	Referência	SS	CC	CF	CS
0	Eloy(2014)	2,8577	6,4779	1,018	4,4642
	Autor(DTM)	2,8577	6,4779	1,018	4,4642
15	Eloy(2014)	2,6812	6,0779	0,9552	4,1885
	Autor(DTM)	2,6813	6,0779	0,9552	4,1886
30	Eloy(2014)	2,2046	4,9975	0,7853	3,4439
	Autor(DTM)	2,2048	4,9985	0,7851	3,4433
45	Eloy(2014)	1,5771	3,5751	0,5618	2,4638
	Autor(DTM)	1,5781	3,5748	0,5620	2,4646
60	Eloy(2014)	1,0234	2,3201	0,3646	1,5988
	Autor(DTM)	1,0236	2,3228	0,3652	1,6014
75	Eloy(2014)	0,7648	1,7338	0,2725	1,1948
	Autor(DTM)	0,7658	1,7379	0,2732	1,1982
90	Eloy(2014)	0,7353	1,6668	0,2619	1,1487
	Autor(DTM)	0,7363	1,6708	0,2613	1,1470

$SS-$ Simplesmente apoiada; $CC-$ engastada nas duas extremidades; $CF-$ engastada$-$livre $CS-$ engastada $-$ apoiada.

Os resultados apresentados utilizando o método da transformada diferencial concordam com os resultados apresentados por Eloy (2014). O desvio máximo nas frequências naturais foi de 0,2%.

Capítulo 4

DTM APLICADA A VIGAS COMPÓSITAS COM NÚCLEO VISCOELÁSTICO ATRAVÉS DO PRINCÍPIO DE HAMILTON

Devido à necessidade de produzir estruturas duráveis, com alta resistência, e tendo em vista o fator peso reduzido, chama a atenção de cientistas e engenheiros para o estudo de estruturas tipo sanduíche com múltiplas camadas. A estrutura sanduíche consiste em duas camadas ou mais de faces finas e rígidas, separadas por um núcleo interno relativamente espesso e leve, que possui uma propriedade de dissipação de energia. Esses elementos estruturais vem sendo utilizados nas diversas áreas da engenharia, como exemplo na engenharia naval, aeronáutica e automobilística. O deslocamento e a deformação são fenômenos importantes induzidos por vibração, que podem causar ruídos e fadigas indesejados, portanto o amortecimento e a redução dessas vibrações são de extrema importância. Para que se possa atingir esse objetivo é necessária a utilização dos materiais viscoelástico em suas camadas. O material viscoelástico pode ser aplicado por exemplo durante a confecção das vigas dentro da bolsa de infusão ou após a fabricação das vigas sendo aplicado externamente na viga. As camadas viscoelásticas de amortecimento são aplicadas às estruturas como camadas passivas ou ativas, dependendo do tipo de aplicação que se venha a ter no projeto, podendo ser livres ou restritas. Entre o tratamento de amortecimento passivo mais eficiente, fácil e comum está o tratamento de amortecimento de camadas. Quando essas estruturas são submetidas à flexão cíclica, a camada de amortecimento é submetida aos esforços de cisalhamento devido ao amortecimento relativo da camada de base e da camada limitadora. Este tipo de movimento provoca forte atrito interno, que por sua vez resulta em um forte decaimento da energia cinética para cada ciclo de flexão, diminuindo a amplitude de vibração em estruturas através da aplicação das camadas viscoelásticas.

A presente tese estuda as frequências naturais, os modos de vibração e fator de perda para uma viga de três camadas com núcleo viscoelástico utilizando o Método da Transformada Diferencial. O núcleo é modelado com o módulo de cisalhamento complexo e as equações governantes são derivadas usando o Princípio de Hamilton. A técnica de solução e o modelo de viga sanduíche são comparados com outros resultados já existentes na literatura. Os cálculos são realizados para as camadas face ortotrópicas juntamente com os parâmetros de perdas modais e as frequências naturais.

4.1 Equação de Movimento

As suposições usadas para derivar as relações cinemáticas e as equações governantes são as seguintes:

1. O ângulo de cisalhamento das placas das faces superiores e inferiores é desconsiderado;
2. A camada central viscoelástica é relativamente macia e com um módulo complexo;
3. A deformação na camada central ocorre exclusivamente devido à tensão transversal de cisalhamento;
4. As camadas são consideradas incompressíveis através da espessura;
5. O deslocamento transversal não muda entre as camadas;
6. A deflexão da viga é pequena;
7. Não há deslizamento entre as camadas.

A configuração da viga sanduíche é apresentada na Figura 5.1.

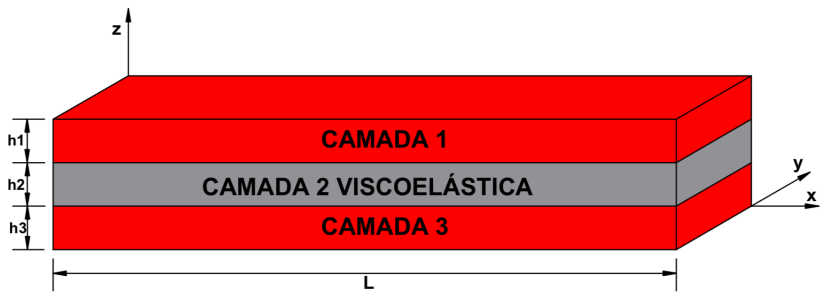

Figura 4.1: Configuração da viga sanduíche.

Por meio da geometria da viga, Figura 5.2, as relações cinemáticas são derivadas da seguinte maneira e obtêm-se as Equações (4.1) a (4.4):

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) - \frac{h_2}{2}\varphi(x,t) - \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad -\frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2} \tag{4.1}$$

$$u_2(x,t) = u_0(x,t) - z\varphi(x,t), \quad -\frac{h_2}{2} \leq z \leq \frac{h_2}{2} \tag{4.2}$$

$$u_3(x,t) = u_0(x,t) + \frac{h_2}{2}\varphi(x,t) - \left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad -\frac{h_3}{2} \leq z \leq \frac{h_3}{2} \tag{4.3}$$

$$w_i = w(x,t), \quad i = 1,2,3 \tag{4.4}$$

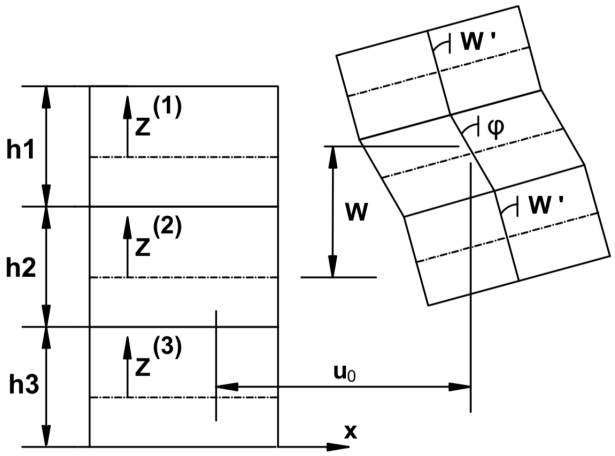

Figura 4.2: Coordenadas do sistema e deslocamentos das camadas da viga sanduíche.

Aqui $\varphi(x,t)$ é o deslocamento angular total, $u_0(x,t)$ é o deslocamento longitudinal, $w(x,t)$ é o deslocamento transversal do centroide do núcleo viscoelástico, u_i e w_i correspondem aos deslocamentos longitudinais e transversais das camadas.

As relações tensão e deformação para a viga sanduíche são obtidas das Equações (4.1) à (4.4). Aqui é omitido que as variáveis u_0, φ e w são funções de x e t, por motivo de clareza e simplificação na notação das equações e tem-se as Equações (4.5) a (4.7):

$$\varepsilon_{xx}^{(1)} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h_2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad -\frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2} \tag{4.5}$$

$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \quad -\frac{h_2}{2} \leq z \leq \frac{h_2}{2} \tag{4.6}$$

$$\varepsilon_{xx}^{(3)} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad -\frac{h_3}{2} \leq z \leq \frac{h_3}{2} \tag{4.7}$$

Já as relações entre tensão e deformação, tem-se as Equações (4.8) a (4.10):

$$\sigma_{xx}^{(1)} = E_1 \varepsilon_{xx}^{(1)} \tag{4.8}$$

$$\sigma_{xz}^{(2)} = G_2^* \gamma_{xz}^{(2)} \tag{4.9}$$

$$\sigma_{xx}^{(3)} = E_3 \varepsilon_{xx}^{(3)} \tag{4.10}$$

Aqui G_2^*=$G_2(1 + i\eta)$ é o módulo de cisalhamento complexo do núcleo viscoelástico e E_1, E_3 correspondem ao módulo de Young das camadas de face superior e inferior, respectivamente e $i\eta$ sendo o termo responsável pela dissipação da cama viscoelástica. Considerando as faces das camadas ortotrópicas, o módulo de Young das camadas pode ser calculado como a Equação (4.11):

$$E_i = Q_{11}\cos^4(\theta_i) + Q_{22}\sin^4(\theta_i) + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2(\theta_i)\cos^2(\theta_i), i = 1, 3. \tag{4.11}$$

Onde θ_i é o ângulo de laminação da camada i, e tem-se a Equação (4.12):

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{66} &= G_{12}, \quad \nu_{21} = \nu_{12}\frac{E_{22}}{E_{11}} \end{aligned} \tag{4.12}$$

são as propriedades dos materiais para as camadas de face do compósito.

Para uma viga em vibração livre, o Princípio de Hamilton pode ser descrito como a Equação (4.13):

$$\int_0^t (\delta U - \delta T)dt = 0 \tag{4.13}$$

Onde U e T correspondem à energia elástica de deformação e à energia cinética, respectivamente. Considerando o problema da Equação (4.13), tem-se a Equação (4.14):

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left[\sigma_{xx}^{(1)} \delta\varepsilon_{xx}^{(1)} - \rho_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial t} \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \right] dz dx dt + \\
&+ \int_0^t \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \left[\sigma_{xz}^{(2)} \delta\gamma_{xz}^{(2)} - \rho_2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \delta \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) \right] dz dx dt + \\
&+ \int_0^t \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left[\sigma_{xx}^{(3)} \delta\varepsilon_{xx}^{(3)} - \rho_3 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial t} \delta \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) \right] dz dx dt = 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Substituindo a relação tensão e deformação da energia potencial nas integrais de Hamilton e substituindo as Equações (4.5) e (4.8) encontra-se δU_1 temos a Equação (4.15):

$$\begin{aligned}
\delta U_1 &= \sigma_{xx}^{(1)} \delta\varepsilon_{xx}^{(1)} \\
&= E_1 \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Fazendo a expansão da Equação (4.15), tem-se a Equação (4.16):

$$\begin{aligned}
\delta U_1 = {} & E_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} - E_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \frac{h_2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - E_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
& - E_1 \frac{h_2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + E_1 \frac{h_2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \frac{h_2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_1 \frac{h_2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
& - E_1 \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + E_1 \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{h_2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\
& + E_1 \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Substituindo a Equação (4.1) na Equação (4.14) determina-se o variacional da energia cinética para a camada 1 e com isso tem-se as Equações (4.17) a (4.19):

$$\begin{aligned}
\delta T_1 &= -\frac{1}{2} \rho_1 \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \\
&= -\rho_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial t} \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\delta T_1 = -\rho_1 \dot{w} \delta \dot{w} - \rho_1 & \left[\dot{u}_0 - \frac{h_2}{2} \dot{\varphi} - \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right] \delta \left[\dot{u}_0 - \frac{h_2}{2} \dot{\varphi} - \right. \\
& \left. + \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\delta T_1 = &-\rho_1 \dot{w}\delta\dot{w} - \rho_1\left[\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 - \dot{u}_0\delta\frac{h_2}{2}\dot{\varphi} - \dot{u}_0\delta\left(z+\frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right] + \\ &-\rho_1\left[-\frac{h_2}{2}\dot{\varphi}\delta\dot{u}_0 + \frac{h_2}{2}\dot{\varphi}\delta\frac{h_2}{2}\dot{\varphi} + \frac{h_2}{2}\dot{\varphi}\delta\left(z+\frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right] + \\ &-\rho_1\left[-\left(z+\frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\delta\dot{u}_0 + \left(z+\frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\delta\frac{h_2}{2}\dot{\varphi} + \right. \\ &\left. + \left(z+\frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\delta\left(z+\frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right]\end{aligned} \tag{4.19}$$

Realizando as substituições para relação tensão deformação do núcleo viscoelástico e substituindo as Equações (4.6) e (4.9), encontram-se δU_2 e com isso tem-se as Equações (4.20) e (4.21):

$$\delta U_2 = \sigma_{xz}^{(2)}\delta\gamma_{xz}^{(2)} = G_2^*\gamma_{xz}\delta\gamma_{xz} = G_2^*\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi\right) \tag{4.20}$$

$$\delta U_2 = G_2^*\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\delta\varphi\right) + G_2^*\left(-\varphi\delta\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi\delta\varphi\right) \tag{4.21}$$

Da Equação (4.14) com a substituição da Equação (4.2) tem-se as Equações (4.22) a (4.24):

$$\begin{aligned}\delta T_2 &= -\frac{1}{2}\rho_2\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t}\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) \\ &= -\rho_2\left(\frac{\partial w}{\partial t}\delta\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t}\delta\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\delta T_2 = -\rho_2\dot{w}\delta\dot{w} - \rho_2\left(\dot{u}_0 - z\dot{\varphi}\right)\delta\left(\dot{u}_0 - z\dot{\varphi}\right) \tag{4.23}$$

$$\delta T_2 = -\rho_2\dot{w}\delta\dot{w} - \rho_2\left(\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 - \dot{u}_0\delta z\dot{\varphi}\right) - \rho_2\left(-z\dot{\varphi}\delta\dot{u}_0 + z\dot{\varphi}\delta z\dot{\varphi}\right) \tag{4.24}$$

Substituindo as Equações (4.7) e (4.10), encontra-se δU_3 e tem-se as Equações (4.25) e (4.26):

$$\begin{aligned}\delta U_3 &= \sigma_{xx}^{(3)}\delta\varepsilon_{xx}^{(3)} \\ &= E_3\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\delta\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\delta U_3 = & E_3\frac{\partial u_0}{\partial x}\delta\frac{\partial u_0}{\partial x} + E_3\frac{\partial u_0}{\partial x}\delta\frac{h_2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - E_3\frac{\partial u_0}{\partial x}\delta\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & E_3\frac{h_2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta\frac{\partial u_0}{\partial x} + E_3\frac{h_2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta\frac{h_2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - E_3\frac{h_2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & -E_3\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\frac{\partial u_0}{\partial x} - E_3\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\frac{h_2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\ & +E_3\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{4.26}$$

Substituindo a Equação (4.3) na Equação (4.14) encontra-se as Equações (4.27) a (4.29):

$$\delta T_3 = -\rho_3\left(\frac{\partial w}{\partial t}\delta\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial t}\delta\frac{\partial u_3}{\partial t}\right) \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}\delta T_3 = & -\rho_3\dot{w}\delta\dot{w} + \\ & -\rho_3\left[\dot{u}_0 + \frac{h_2}{2}\dot{\varphi} - \left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right]\delta\left[\dot{u}_0 + \frac{h_2}{2}\dot{\varphi} - \left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right]\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}\delta T_3 = & -\rho_3\dot{w}\delta\dot{w} - \rho_3\left[\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 + \dot{u}_0\delta\frac{h_2}{2}\dot{\varphi} - \dot{u}_0\delta\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right] + \\ & -\rho_3\left[\frac{h_2}{2}\dot{\varphi}\delta\dot{u}_0 + \frac{h_2}{2}\dot{\varphi}\delta\frac{h_2}{2}\dot{\varphi} - \frac{h_2}{2}\dot{\varphi}\delta\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right] + \\ & -\rho_3\left[-\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\delta\dot{u}_0 - \left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\delta\frac{h_2}{2}\dot{\varphi} + \right. \\ & \left. + \left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\delta\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right]\end{aligned} \tag{4.29}$$

Assim substituindo as Equações (4.16), (4.19), (4.21), (4.24), (4.26) e (4.29) na Equação (4.14), tem-se a Equação (4.30):

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}(\delta U_1 + \delta T_1)dzdxdt + \int_0^t\int_0^L\int_{-h_2/2}^{h_2/2}(\delta U_2 + \delta T_2)dzdxdt + \\ &+\int_0^t\int_0^L\int_{-h_3/2}^{h_3/2}(\delta U_3 + \delta T_3)dzdxdt = 0\end{aligned} \tag{4.30}$$

Com as seguintes definições das Equações (4.16) e (4.19) obtêm-se as Equações (4.31) a (4.50):

$$\int_0^t\int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}(\delta U_1 + \delta T_1)dzdxdt = \int_0^t E_1\sum_{i=1}^{9} I_i dt + \int_0^t \rho_1\sum_{i=10}^{19} I_i dt \tag{4.31}$$

$$I_1 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} dz dx \tag{4.32}$$

$$I_2 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dz dx \tag{4.33}$$

$$I_3 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz dx \tag{4.34}$$

$$I_4 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) dz dx \tag{4.35}$$

$$I_5 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dz dx \tag{4.36}$$

$$I_6 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dz dx \tag{4.37}$$

$$I_7 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} dz dx \tag{4.38}$$

$$I_8 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz dx \tag{4.39}$$

$$I_9 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz dx \tag{4.40}$$

$$I_{10} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \dot{w} \delta \dot{w} dz dx \tag{4.41}$$

$$I_{11} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 dz dx \tag{4.42}$$

$$I_{12} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \left(\dot{u}_0 \delta\dot{\varphi}\right) dzdx \tag{4.43}$$

$$I_{13} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right) \dot{u}_0 \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dzdx \tag{4.44}$$

$$I_{14} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \left(\dot{\varphi}\delta\dot{u}_0\right) dzdx \tag{4.45}$$

$$I_{15} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \dot{\varphi}\delta\dot{\varphi} dzdx \tag{4.46}$$

$$I_{16} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right) \dot{\varphi}\delta \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dzdx \tag{4.47}$$

$$I_{17} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \delta\dot{u}_0 dzdx \tag{4.48}$$

$$I_{18} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \delta\dot{\varphi} dzdx \tag{4.49}$$

$$I_{19} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dzdx \tag{4.50}$$

Para o núcleo substituindo as Equações (4.21) e (4.24), tem-se as Equações (4.51) a (4.60):

$$\int_0^t \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (\delta U_2 + \delta T_2) dzdxdt = \int_0^t G_2^* \sum_{i=20}^{23} I_i dt + \int_0^t \rho_2 \sum_{i=24}^{28} I_i dt \tag{4.51}$$

Assim:

$$I_{20} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} dzdx \tag{4.52}$$

$$I_{21} = -\int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \frac{\partial w}{\partial x} \delta\varphi dzdx \tag{4.53}$$

$$I_{22} = -\int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \varphi\delta\frac{\partial w}{\partial x}dzdx \tag{4.54}$$

$$I_{23} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \varphi\delta\varphi dzdx \tag{4.55}$$

$$I_{24} = -\int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \dot{w}\delta\dot{w}dzdx \tag{4.56}$$

$$I_{25} = -\int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \dot{u}_0\delta\dot{u}_0 dzdx \tag{4.57}$$

$$I_{26} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \dot{u}_0\delta z\dot{\varphi}dzdx \tag{4.58}$$

$$I_{27} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} z\dot{\varphi}\delta\dot{u}_0 dzdx \tag{4.59}$$

$$I_{28} = -\int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} z^2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}dzdx \tag{4.60}$$

Para a terceira camada com a substituição das Equações (4.26) e (4.29), tem-se as Equações (4.61) a (4.80):

$$\int_0^t \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} (\delta U_3 + \delta T_3)dt = \int_0^t E_3 \sum_{i=29}^{37} I_i dt + \int_0^t \rho_3 \sum_{i=38}^{47} I_i dt \tag{4.61}$$

$$I_{29} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{\partial u_0}{\partial x}\delta\frac{\partial u_0}{\partial x}dzdx \tag{4.62}$$

$$I_{30} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\delta\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dzdx \tag{4.63}$$

$$I_{31} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dzdx \tag{4.64}$$

$$I_{32} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) dz dx \tag{4.65}$$

$$I_{33} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dz dx \tag{4.66}$$

$$I_{34} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz dx \tag{4.67}$$

$$I_{35} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} dz dx \tag{4.68}$$

$$I_{36} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz dx \tag{4.69}$$

$$I_{37} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz dx \tag{4.70}$$

Para a energia cinética

$$I_{38} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \dot{w} \delta \dot{w} dz dx \tag{4.71}$$

$$I_{39} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 dz dx \tag{4.72}$$

$$I_{40} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \left(\dot{u}_0 \delta \dot{\varphi} \right) dz dx \tag{4.73}$$

$$I_{41} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \dot{u}_0 \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dz dx \tag{4.74}$$

$$I_{42} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \left(\dot{\varphi} \delta \dot{u}_0 \right) dz dx \tag{4.75}$$

$$I_{43} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 (\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi})\, dzdx \tag{4.76}$$

$$I_{44} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\dot{\varphi}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dzdx \tag{4.77}$$

$$I_{45} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\delta\dot{u}_0 dzdx \tag{4.78}$$

$$I_{46} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\delta\dot{\varphi} dzdx \tag{4.79}$$

$$I_{47} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dzdx \tag{4.80}$$

Após a resolução por partes das Equações (4.32) a (4.50), (4.52) (4.60) e (4.62) a (4.80), encontram-se as Equações (4.81) a (4.127), cuja solução detalhada encontra-se no Apêndice C.

$$I_1 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dzdx \tag{4.81}$$

$$I_2 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2}\delta\varphi\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dzdx \tag{4.82}$$

$$I_3 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\delta w \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} dzdx \tag{4.83}$$

$$I_4 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2}\delta u_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dzdx \tag{4.84}$$

$$I_5 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \delta\varphi\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dzdx \tag{4.85}$$

$$I_6 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2}\left(z + \frac{h_1}{2}\right)\delta w \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} dzdx \tag{4.86}$$

$$I_7 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right) \delta u_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dz dx \tag{4.87}$$

$$I_8 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right) \delta\varphi \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dz dx \tag{4.88}$$

$$I_9 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right)^2 \delta w \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dz dx \tag{4.89}$$

$$I_{10} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz dx \tag{4.90}$$

$$I_{11} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{4.91}$$

$$I_{12} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \delta\varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{4.92}$$

$$I_{13} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right) \delta w \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{4.93}$$

$$I_{14} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \delta u_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz dx \tag{4.94}$$

$$I_{15} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \delta\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz dx \tag{4.95}$$

$$I_{16} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\frac{h_2}{2}\right) \left(z + \frac{h_1}{2}\right) \delta w \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{4.96}$$

$$I_{17} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta u_0 \left(z + \frac{h_1}{2}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{4.97}$$

$$I_{18} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\frac{h_2}{2}\right) \left(z + \frac{h_1}{2}\right) \delta\varphi \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{4.98}$$

$$I_{19} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right)^2 \delta w \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} dz dx \tag{4.99}$$

$$I_{20} = -\int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz dx \tag{4.100}$$

$$I_{21} = -\int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \frac{\partial w}{\partial x} \delta\varphi dz dx \tag{4.101}$$

$$I_{22} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \delta w \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz dx \tag{4.102}$$

$$I_{23} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \varphi \delta\varphi dz dx \tag{4.103}$$

$$I_{24} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz dx \tag{4.104}$$

$$I_{25} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{4.105}$$

$$I_{26} = -\int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} z \delta\varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{4.106}$$

$$I_{27} = -\int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} z \delta u_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz dx \tag{4.107}$$

$$I_{28} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (z)^2 \delta\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz dx \tag{4.108}$$

$$I_{29} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz dx \tag{4.109}$$

$$I_{30} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \delta\varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz dx \tag{4.110}$$

$$I_{31} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \delta w \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} dz dx \tag{4.111}$$

$$I_{32} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \delta u_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz dx \tag{4.112}$$

$$I_{33} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \delta\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz dx \tag{4.113}$$

$$I_{34} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \delta w \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} dz dx \tag{4.114}$$

$$I_{35} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \delta u_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dz dx \tag{4.115}$$

$$I_{36} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \delta\varphi \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dz dx \tag{4.116}$$

$$I_{37} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right)^2 \delta w \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dz dx \tag{4.117}$$

$$I_{38} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz dx \tag{4.118}$$

$$I_{39} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{4.119}$$

$$I_{40} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \delta\varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{4.120}$$

$$I_{41} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \delta w \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{4.121}$$

$$I_{42} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \delta u_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz dx \tag{4.122}$$

$$I_{43} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \delta \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz dx \tag{4.123}$$

$$I_{44} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(\frac{h_2}{2} \right) \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \delta w \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{4.124}$$

$$I_{45} = - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \delta u_0 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{4.125}$$

$$I_{46} = - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(\frac{h_2}{2} \right) \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \delta \varphi \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{4.126}$$

$$I_{47} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right)^2 \delta w \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} dz dx \tag{4.127}$$

Após a integração e substituição dos limites em todas as integrais por partes demonstradas anteriormente deve-se agrupar todos os termos relacionados aos δu_0, $\delta \varphi$ e δw. Assim das Equações (4.81) à (4.127).

δu_0 aparece nas integrais e tem-se a Equação (4.128):

$$\begin{aligned} \int_0^t & \left[E_1 \left(I_1 + I_4 + I_7 \right) + \rho_1 \left(I_{11} + I_{14} + I_{17} \right) + \rho_2 \left(I_{25} + I_{27} \right) \right. \\ & \left. + E_3 \left(I_{29} + I_{32} + I_{35} \right) \rho_3 \left(I_{39} + I_{42} + I_{45} \right) \right] dt = 0 \end{aligned} \tag{4.128}$$

$\delta \varphi$ aparece nas integrais e tem-se a Equação (4.129):

$$\begin{aligned} \int_0^t & \left[E_1 \left(I_2 + I_5 + I_8 \right) + \rho_1 \left(I_{12} + I_{15} + I_{18} \right) + G_2^* \left(I_{21} + I_{23} \right) \right. \\ & \left. + \rho_2 \left(I_{26} + I_{28} \right) + E_3 \left(I_{30} + I_{33} + I_{36} + I_{40} \right) + \rho_3 \left(I_{43} + I_{46} \right) \right] dt = 0 \end{aligned} \tag{4.129}$$

e finalmente δw aparece nas integrais tem-se a Equação (4.130):

$$\begin{aligned}\int_0^t &\left[E_1\left(I_3+I_6+I_9\right)+\rho_1\left(I_{10}+I_{13}+I_{16}+I_{19}\right)+G_2^*\left(I_{20}+I_{22}\right)\right.\\&\left.+\rho_2 I_{24}+E_3\left(I_{31}+I_{34}+I_{37}\right)+\rho_3\left(I_{38}+I_{41}+I_{44}+I_{47}\right)\right]dt=0\end{aligned} \tag{4.130}$$

Substituindo os termos dos variacionais de δu_0, $\delta\varphi$ e δw tem-se as Equações (4.131) a (4.133):

$$\begin{aligned}\int_0^t \delta u_0 &\left[\left(E_1h_1+E_3h_3\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{h_2}{2}\left(E_3h_3-E_1h_1\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\right.\\&+\frac{1}{2}\left(E_3h_3^2-E_1h_1^2\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\left(h_1\rho_1+h_2\rho_2+h_3\rho_3\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+\\&\left.-\left(h_3\rho_3-h_1\rho_1\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3-h_1^2\rho_1\right)\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}\right]dt+\end{aligned} \tag{4.131}$$

$$\begin{aligned}+\int_0^t \delta\varphi &\left[\left(E_3h_3-E_1h_1\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{h_2}{2}\left(E_1h_1+E_3h_3\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\right.\\&+\frac{1}{2}\left(E_1h_1^2+E_3h_3^2\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+2G_2^*\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\varphi\right)-\left(h_3\rho_3-h_1\rho_1\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+\\&\left.-\frac{h_2}{6}\left(h_2\rho_2+3h_1\rho_1+3h_3\rho_3\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\left(h_1^2\rho_1+h_3^2\rho_3\right)\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}\right]dt+\end{aligned} \tag{4.132}$$

$$\begin{aligned}+\int_0^t \delta w &\left[\frac{1}{2}\left(E_3h_3^2-E_1h_1^2\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+\right.\\&+\frac{h_2}{4}\left(E_1h_1^2+E_3h_3^2\right)\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{1}{3}\left(E_1h_1^3+E_3h_3^3\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\\&+G_2^*h_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3-h_1^2\rho_1\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2\partial x}-\frac{h_2}{4}\left(h_1^2\rho_1+h_3^2\rho_3\right)\frac{\partial^3\varphi}{\partial t^2\partial x}+\\&\left.-\frac{1}{3}\left(h_1^3\rho_1+h_3^3\rho_3\right)\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\partial x^2}-\left(h_1\rho_1+h_2\rho_2+h_3\rho_3\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]dt=0\end{aligned} \tag{4.133}$$

Como δu_0, $\delta\varphi$ e δw são diferentes de zero, tem-se as Equações (4.134) a (4.136):

$$\begin{aligned}&\left(E_1h_1+E_3h_3\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{h_2}{2}\left(E_3h_3-E_1h_1\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(E_3h_3^2-E_1h_1^2\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\\&=\left(h_1\rho_1+h_2\rho_2+h_3\rho_3\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+\frac{h_2}{2}\left(h_3\rho_3-h_1\rho_1\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3-h_1^2\rho_1\right)\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}\end{aligned} \tag{4.134}$$

$$\begin{aligned}(E_3h_3 - E_1h_1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{h_2}{2}(E_1h_1 + E_3h_3)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2G_2^*\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi\right)\\ = (h_3\rho_3 - h_1\rho_1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{h_2}{6}(3h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + 3h_3\rho_3)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left(h_1^2\rho_1 + h_3^2\rho_3\right)\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x}\end{aligned} \tag{4.135}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(E_3h_3^2 - E_1h_1^2\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{h_2}{4}\left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{1}{3}\left(E_1h_1^3 + E_3h_3^3\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} +\\ +G_2^*h_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3 - h_1^2\rho_1\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} + \frac{h_2}{4}\left(h_1^2\rho_1 + h_3^2\rho_3\right)\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x}\\ + \frac{1}{3}\left(h_1^3\rho_1 + h_3^3\rho_3\right)\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} - (h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{4.136}$$

Para uma forma da vibração harmônica da viga sanduíche, os deslocamentos podem ser considerados, como as Equações (4.137) a (**??**):

$$u_0(x,t) = \overline{u}_0(x)e^{i\omega t} \tag{4.137}$$

$$\varphi(x,t) = \overline{\varphi}(x)e^{i\omega t} \tag{4.138}$$

$$w(x,t) = \overline{w}(x)e^{i\omega t} \tag{4.139}$$

Derivando as Equações (4.137) a (5.139) com relação a x, tem-se as Equações (4.140) a (4.147):

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u}_0e^{i\omega t}\right) = \overline{u}_0'e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\varphi}e^{i\omega t}\right) = \overline{\varphi}'e^{i\omega t} \tag{4.140}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{w}e^{i\omega t}\right) = \overline{w}'e^{i\omega t} \tag{4.141}$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\overline{u}_0e^{i\omega t}\right) = \overline{u}_0''e^{i\omega t} \tag{4.142}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\overline{\varphi} e^{i\omega t}\right) = \overline{\varphi}'' e^{i\omega t} \tag{4.143}$$

$$\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\overline{u}_0 e^{i\omega t}\right) = \overline{u}_0''' e^{i\omega t} \tag{4.144}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\overline{w} e^{i\omega t}\right) = \overline{w}''' e^{i\omega t} \tag{4.145}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\overline{\varphi} e^{i\omega t}\right) = \overline{\varphi}''' e^{i\omega t} \tag{4.146}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\overline{w} e^{i\omega t}\right) = \overline{w}^{iv} e^{i\omega t} \tag{4.147}$$

Derivando as Equações (4.137) a (5.139) com relação a t, tem-se as Equações (4.148) a (4.153):

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\overline{u}_0 e^{i\omega t}\right) = \overline{u}_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(i\omega e^{i\omega t}\right) = \overline{u}_0\left(i^2\omega^2 e^{i\omega t}\right) = \overline{u}_0\left(-\omega^2 e^{i\omega t}\right) \tag{4.148}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\overline{\varphi} e^{i\omega t}\right) = \overline{\varphi} \frac{\partial}{\partial t}\left(i\omega e^{i\omega t}\right) = \overline{\varphi}\left(i^2\omega^2 e^{i\omega t}\right) = \overline{\varphi}\left(-\omega^2 e^{i\omega t}\right) \tag{4.149}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\overline{w} e^{i\omega t}\right) = \overline{w} \frac{\partial}{\partial t}\left(i\omega e^{i\omega t}\right) = \overline{w}\left(i^2\omega^2 e^{i\omega t}\right) = \overline{w}\left(-\omega^2 e^{i\omega t}\right) \tag{4.150}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\overline{u}_0\left(-\omega^2 e^{i\omega t}\right) = \overline{u}_0'\left(-\omega^2 e^{i\omega t}\right) \tag{4.151}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\overline{\varphi}\left(-\omega^2 e^{i\omega t}\right) = \overline{\varphi}'\left(-\omega^2 e^{i\omega t}\right) \tag{4.152}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{w}\left(-\omega^2 e^{i\omega t}\right) = \overline{w}''\left(-\omega^2 e^{i\omega t}\right) \tag{4.153}$$

Substituindo os termos após as derivada tem-se as Equações (4.154) a (4.156):

$$\begin{aligned}&\left(E_1h_1 + E_3h_3\right)e^{i\omega t}\overline{u}_0'' + \frac{h_2}{2}\left(E_3h_3 - E_1h_1\right)e^{i\omega t}\overline{\varphi}'' + \frac{1}{2}\left(E_3h_3^2 - E_1h_1^2\right)e^{i\omega t}\overline{w}''' \\ &= \left(h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3\right)\overline{u}_0(-\omega^2 e^{i\omega t}) + \\ &\quad + \frac{h_2}{2}\left(h_3\rho_3 - h_1\rho_1\right)\overline{\varphi}(-\omega^2 e^{i\omega t}) + \frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3 - h_1^2\rho_1\right)\overline{w}'(-\omega^2 e^{i\omega t})\end{aligned} \tag{4.154}$$

$$\begin{aligned}&\left(E_3h_3 - E_1h_1\right)e^{i\omega t}\overline{u}_0'' + \frac{h_2}{2}\left(E_1h_1 + E_3h_3\right)e^{i\omega t}\overline{\varphi}'' + \frac{1}{2}\left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)e^{i\omega t}\overline{w}''' + \\ &+2G_2^*(e^{i\omega t}\overline{w}' - \overline{\varphi}e^{i\omega t}) = \left(h_3\rho_3 - h_1\rho_1\right)\overline{u}_0(-\omega^2 e^{i\omega t}) + \\ &\quad + \frac{h_2}{6}\left(+3h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + 3h_3\rho_3\right)\overline{\varphi}(-\omega^2 e^{i\omega t}) + \frac{1}{2}\left(h_1^2\rho_1 + h_3^2\rho_3\right)\overline{w}'(-\omega^2 e^{i\omega t})\end{aligned} \tag{4.155}$$

$$\begin{aligned}&G_2^*h_2(e^{i\omega t}\overline{\varphi}' - e^{i\omega t}\overline{w}'') + \frac{1}{2}\left(E_3h_3^2 - E_1h_1^2\right)e^{i\omega t}\overline{u}_0''' + \\ &\quad + \frac{h_2}{4}\left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)e^{i\omega t}\overline{\varphi}''' + \frac{1}{3}\left(E_1h_1^3 + E_3h_3^3\right)e^{i\omega t}\overline{w}^{iv} \\ &\quad = \frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3 - h_1^2\rho_1\right)\overline{u}_0'(-\omega^2 e^{i\omega t}) - \left(h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3\right)\overline{w}(-\omega^2 e^{i\omega t}) + \\ &\quad\quad + \frac{h_2}{4}\left(h_1^2\rho_1 + h_3^2\rho_3\right)\overline{\varphi}'(-\omega^2 e^{i\omega t}) + \frac{1}{3}\left(h_1^3\rho_1 + h_3^3\rho_3\right)\overline{w}''(-\omega^2 e^{i\omega t})\end{aligned} \tag{4.156}$$

Colocando o termo $e^{i\omega t}$ em evidência tem-se equações iguais a zero. Como $e^{i\omega t}$ não é zero para todo $t \geq 0$, logo tem-se a Equação diferencial que descreve o comportamento dinâmico da viga compósita e tem-se as Equações (4.157) a (4.159):

$$\begin{aligned}&\left(E_1h_1 + E_3h_3\right)\overline{u}_0'' + \frac{h_2}{2}\left(E_3h_3 - E_1h_1\right)\overline{\varphi}'' + \frac{1}{2}\left(E_3h_3^2 - E_1h_1^2\right)\overline{w}''' \\ &= -\omega^2\left[\left(h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3\right)\overline{u}_0 + \frac{h_2}{2}\left(h_3\rho_3 - h_1\rho_1\right)\overline{\varphi} + \frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3 - h_1^2\rho_1\right)\overline{w}'\right]\end{aligned} \tag{4.157}$$

$$\begin{aligned}&\left(E_3h_3 - E_1h_1\right)\overline{u}_0'' + \frac{h_2}{2}\left(E_1h_1 + E_3h_3\right)\overline{\varphi}'' + \frac{1}{2}\left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)\overline{w}''' + 2G_2^*(\overline{w}' - \varphi) \\ &= -\omega^2\left[\left(h_3\rho_3 - h_1\rho_1\right)\overline{u}_0 + \frac{h_2}{6}\left(3h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + 3h_3\rho_3\right)\overline{\varphi} + \frac{1}{2}\left(h_1^2\rho_1 + h_3^2\rho_3\right)\overline{w}'\right]\end{aligned} \tag{4.158}$$

$$G_2^* h_2 \left(\overline{\varphi}' - \overline{w}''\right) + \frac{1}{2}\left(E_3 h_3^2 - E_1 h_1^2\right)\overline{u}_0''' + \frac{h_2}{4}\left(E_1 h_1^2 + E_3 h_3^2\right)\overline{\varphi}''' + \frac{1}{3}\left(E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3\right)\overline{w}^{iv}$$
$$= -\omega^2 \left[\frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3 - h_1^2\rho_1\right)\overline{u}_0' - \left(h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3\right)\overline{w} + \frac{h_2}{4}\left(h_1^2\rho_1 + h_3^2\rho_3\right)\overline{\varphi}' + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\left(h_1^3\rho_1 + h_3^3\rho_3\right)\overline{w}''\right] \tag{4.159}$$

Para aplicar o Método das Transformadas Diferenciais no sistema de Equações (4.157) a (4.159) deve-se derivar as Equações (4.157) e (4.158), com relação a x onde as derivadas de segunda ordem, se transformarão em derivadas de terceira ordem e obtêndo-se as Equações (4.160) a (4.162):

$$\begin{aligned}&\left(E_1 h_1 + E_3 h_3\right)\overline{u}_0''' + \frac{h_2}{2}\left(E_3 h_3 - E_1 h_1\right)\overline{\varphi}''' + \frac{1}{2}\left(E_3 h_3^2 - E_1 h_1^2\right)\overline{w}^{iv} \\ &= -\omega^2\left[\left(h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3\right)\overline{u}_0' + \frac{h_2}{2}\left(h_3\rho_3 - h_1\rho_1\right)\overline{\varphi}' + \frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3 - h_1^2\rho_1\right)\overline{w}''\right]\end{aligned} \tag{4.160}$$

$$\begin{aligned}&\left(E_3 h_3 - E_1 h_1\right)\overline{u}_0''' + \frac{h_2}{2}\left(E_1 h_1 + E_3 h_3\right)\overline{\varphi}''' + \frac{1}{2}\left(E_1 h_1^2 + E_3 h_3^2\right)\overline{w}^{iv} + 2G_2^*(\overline{w}'' - \overline{\varphi}') \\ &= -\omega^2\left[\left(h_3\rho_3 - h_1\rho_1\right)\overline{u}_0' + \frac{h_2}{6}\left(3h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + 3h_3\rho_3\right)\overline{\varphi}' + \frac{1}{2}\left(h_1^2\rho_1 + h_3^2\rho_3\right)\overline{w}''\right]\end{aligned} \tag{4.161}$$

$$G_2^* h_2 \left(\overline{\varphi}' - \overline{w}''\right) + \frac{1}{2}\left(E_3 h_3^2 - E_1 h_1^2\right)\overline{u}_0''' + \frac{h_2}{4}\left(E_1 h_1^2 + E_3 h_3^2\right)\overline{\varphi}''' + \frac{1}{3}\left(E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3\right)\overline{w}^{iv}$$
$$= -\omega^2 \left[\frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3 - h_1^2\rho_1\right)\overline{u}_0' - \left(h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3\right)\overline{w} + \frac{h_2}{4}\left(h_1^2\rho_1 + h_3^2\rho_3\right)\overline{\varphi}' + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\left(h_1^3\rho_1 + h_3^3\rho_3\right)\overline{w}''\right] \tag{4.162}$$

Após aumentar os termos das derivadas de ordem dois para ordem três, será aplicado o Método das Transformada Diferencial nas Equações (4.160) a (4.162), lembrando que a forma de aplicar o método das transformadas diferenciais pode ser visto no Apêndice E. O método da transformada diferencial é aplicado para transformar equações diferenciais em equações polinomiais, baseadas na série de Taylor e obter com isso as Equações (4.163) a (4.165):

$$
\begin{aligned}
&\left(E_1h_1+E_3h_3\right)(K+3)(K+2)(K+1)U(K+3)+\\
&\quad+\frac{h_2}{2}\left(E_3h_3-E_1h_1\right)(K+3)(K+2)(K+1)\Phi(K+3)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\left(E_3h_3^2-E_1h_1^2\right)(K+4)(K+3)(K+2)(K+1)W(K+4)\\
&\qquad=-\omega^2\left[\left(h_1\rho_1+h_2\rho_2+h_3\rho_3\right)(K+1)U(K+1)+\frac{h_2}{2}\left(h_3\rho_3-h_1\rho_1\right)(K+1)\Phi(K+1)+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3-h_1^2\rho_1\right)\right](K+2)(K+1)W(K+2)
\end{aligned}
\tag{4.163}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(E_3h_3-E_1h_1\right)(K+3)(K+2)(K+1)U(K+3)+\\
&\quad+\frac{h_2}{2}\left(E_1h_1+E_3h_3\right)(K+3)(K+2)(K+1)\Phi(K+3)+\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(E_1h_1^2+E_3h_3^2\right)(K+4)(K+3)(K+2)(K+1)W(K+4)+\\
&\qquad+2G_2^*(K+2)(K+1)W(K+2)-2G_2^*(K+1)\Phi(K+1)\\
&\qquad=-\omega^2\left[\left(h_3\rho_3-h_1\rho_1\right)(K+1)U(K+1)+\frac{h_2}{6}\left(3h_1\rho_1+h_2\rho_2+3h_3\rho_3\right)(K+1)\Phi(K+1)+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{1}{2}\left(h_1^2\rho_1+h_3^2\rho_3\right)(K+2)(K+1)W(K+2)\right]
\end{aligned}
\tag{4.164}
$$

$$
\begin{aligned}
&G_2^*h_2(K+1)\Phi(K+1)-G_2^*h_2(K+2)(K+1)W(K+2)+\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(E_3h_3^2-E_1h_1^2\right)(K+3)(K+2)(K+1)U(K+3)+\\
&\quad+\frac{h_2}{4}\left(E_1h_1^2+E_3h_3^2\right)(K+3)(K+2)(K+1)\Phi(K+3)+\\
&\qquad+\frac{1}{3}\left(E_1h_1^3+E_3h_3^3\right)(K+4)(K+3)(K+2)(K+1)W(K+4)\\
&\qquad=-\omega^2\left[\frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3-h_1^2\rho_1\right)(K+1)U(K+1)-\left(h_1\rho_1+h_2\rho_2+h_3\rho_3\right)W(K)+\right.\\
&\qquad\quad\left.+\frac{h_2}{4}\left(h_1^2\rho_1+h_3^2\rho_3\right)(K+1)\Phi(K+1)+\frac{1}{3}\left(h_1^3\rho_1+h_3^3\rho_3\right)(K+2)(K+1)W(K+2)\right]
\end{aligned}
\tag{4.165}
$$

Após aplicar do método da transformada diferencial para a obtenção dos polinômios, realizou-se a separação de cada termo e tem-se a tem-se as Equações (4.166) e (4.167):

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= (E_1h_1 + E_3h_3)\,(K+3)\,(K+2)\,(K+1)\,U\,(K+3) \\
a_{12} &= \frac{h_2}{2}\,(E_3h_3 - E_1h_1)\,(K+3)\,(K+2)\,(K+1)\,\Phi\,(K+3) \\
a_{13} &= \frac{1}{2}\left(E_3h_3^2 - E_1h_1^2\right)(K+4)\,(K+3)\,(K+2)\,(K+1)\,W\,(K+4) \\
a_{21} &= (E_3h_3 - E_1h_1)\,(K+3)\,(K+2)\,(K+1)\,U\,(K+3) \\
a_{22} &= \frac{h_2}{2}\,(E_1h_1 + E_3h_3)\,(K+3)\,(K+2)\,(K+1)\,\Phi\,(K+3) \\
a_{23} &= \frac{1}{2}\left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)(K+4)\,(K+3)\,(K+2)\,(K+1)\,W\,(K+4) \\
a_{31} &= \frac{1}{2}\left(E_3h_3^2 - E_1h_1^2\right)(K+3)\,(K+2)\,(K+1)\,U\,(K+3) \\
a_{32} &= \frac{h_2}{4}\left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)(K+3)\,(K+2)\,(K+1)\,\Phi\,(K+3) \\
a_{33} &= \frac{1}{3}\left(E_1h_1^3 + E_3h_3^3\right)(K+4)\,(K+3)\,(K+2)\,(K+1)\,W\,(K+4)
\end{aligned}
\tag{4.166}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= -\omega^2(h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3)(K+1)U(K+1) \\
c_{12} &= -\omega^2\frac{h_2}{2}\,(h_3\rho_3 - h_1\rho_1)\,(K+1)\,\Phi\,(K+1) \\
c_{13} &= -\omega^2\frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3 - h_1^2\rho_1\right)(K+2)\,(K+1)\,W\,(K+2) \\
c_{21} &= -\omega^2\,(h_3\rho_3 - h_1\rho_1)\,(K+1)\,U\,(K+1) \\
c_{22} &= -\omega^2\frac{h_2}{6}\,(3h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + 3h_3\rho_3)\,(K+1)\,\Phi\,(K+1) - 2G_2^*\,(K+1)\,\Phi(K+1) \\
c_{23} &= -\omega^2\frac{1}{2}\left(h_1^2\rho_1 + h_3^2\rho_3\right)(K+2)\,(K+1)\,W\,(K+2) - 2G_2^*\,(K+2)\,(K+1)\,W(K+2) \\
c_{31} &= -\omega^2\frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3 - h_1^2\rho_1\right)(K+1)\,U\,(K+1) \\
c_{32} &= -\omega^2\frac{h_2}{4}\left(h_1^2\rho_1 + h_3^2\rho_3\right)(K+1)\,\Phi\,(K+1) - G_2^*h_2\,(K+1)\,\Phi(K+1) \\
c_{33} &= -\omega^2\frac{1}{3}\left(h_1^3\rho_1 + h_3^3\rho_3\right)(K+2)\,(K+1)\,W\,(K+2) + G_2^*h_2\,(K+2)\,(K+1)\,W(K+2) \\
c_{34} &= -\omega^2\,(h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3)\,W\,(K)
\end{aligned}
\tag{4.167}
$$

Depois de separar cada termo do polinômio monta-se a matriz. A solução do sistema matricial permite encontrar o valor de $W(K+4)$ e tem-se as Equações (4.168) e (4.169):

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_{K+3} \\ \Phi_{K+3} \\ W_{K+4} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
c_{11}U_{K+1} + c_{12}\Phi_{K+1} + c_{13}W_{K+2} + 0 \\
c_{21}U_{K+1} + c_{22}\Phi_{K+1} + c_{23}W_{K+2} + 0 \\
c_{31}U_{K+1} + c_{32}\Phi_{K+1} + c_{33}W_{K+2} + c_{34}W_K
\end{bmatrix}
\tag{4.168}
$$

$$W_{K+4} = \frac{1}{2\left(K+1\right)\left(K+2\right)\left(K+3\right)\left(K+4\right)\left(E_1h_1^3+E_3h_3^3\right)}\left\{6\omega^2h_2\left(h_3-h_1\right)\rho_2\left(K\right.\right.$$
$$\left.+1\right)U_{K+1}+2\left[6G_2^*\left(h_1+2h_2+h_3\right)-\omega^2\left(h_1^3\rho_1+h_3^3\rho_3\right)\right]\left(K+1\right)\left(K+2\right)W_{K+2}+$$
$$+24\omega^2\left(h_1\rho_1+h_2\rho_2+h_3\rho_3\right)W_K$$
$$\left.+\left[\omega^2h_2^2\left(h_1+h_3\right)\rho_2-12G_2^*\left(h_1+2h_2+h_3\right)\right]\left(K+1\right)\Phi_{K+1}\right\} \tag{4.169}$$

Na sequência utiliza-se as Equações (4.157) e (4.158), onde aplica-se nelas o método da transformada diferencial, com a finalidade de passarmos de um sistema de equações diferenciais para um sistema de equações polinomiais e obter as Equações (4.170) e (4.171):

$$\left(E_1h_1+E_3h_3\right)\left(K+2\right)(K+1)U(K+2)+\frac{h_2}{2}\left(E_3h_3-E_1h_1\right)\left(K+2\right)(K+1)\Phi(K+2)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(E_3h_3^2-E_1h_1^2\right)\left(K+3\right)(K+2)(K+1)W(K+3)$$
$$=-\omega^2\left[\left(h_1\rho_1+h_2\rho_2+h_3\rho_3\right)U(K)+\frac{h_2}{2}\left(h_3\rho_3-h_1\rho_1\right)\Phi(K)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3-h_1^2\rho_1\right)\right]\left(K+1\right)W(K+1) \tag{4.170}$$

$$\left(E_3h_3-E_1h_1\right)\left(K+2\right)(K+1)U(K+2)+\frac{h_2}{2}\left(E_1h_1+E_3h_3\right)\left(K+2\right)(K+1)\Phi(K+2)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(E_1h_1^2+E_3h_3^2\right)\left(K+3\right)(K+2)(K+1)W(K+3)+2G_2^*(K+1)W(K+1)+$$
$$-2G_2^*\Phi(K)=-\omega^2\left[\left(h_3\rho_3-h_1\rho_1\right)U(K)+\frac{h_2}{6}\left(3h_1\rho_1+h_2\rho_2+3h_3\rho_3\right)\Phi(K)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(h_1^2\rho_1+h_3^2\rho_3\right)\left(K+1\right)W(K+1)\right] \tag{4.171}$$

Após aplicar do método da transformada diferencial para a obtenção dos polinômios, realizou-se a separação de cada termo e encontrou-se as Equações (4.172) e (4.173):

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \left(E_1h_1+E_3h_3\right)\left(K+2\right)\left(K+1\right)U\left(K+2\right) \qquad (4.172)\\
a_{12} &= \frac{h_2}{2}\left(E_1h_1+E_3h_3\right)\left(K+2\right)\left(K+1\right)\Phi\left(K+2\right)\\
a_{13} &= \frac{1}{2}\left(E_3h_3^2-E_1h_1^2\right)\left(K+3\right)\left(K+2\right)\left(K+1\right)W\left(K+3\right)\\
a_{21} &= \left(E_3h_3-E_1h_1\right)\left(K+2\right)\left(K+1\right)U\left(K+2\right)\\
a_{22} &= \frac{h_2}{2}\left(E_1h_1+E_3h_3\right)\left(K+2\right)\left(K+1\right)\Phi\left(K+2\right)\\
a_{23} &= \frac{1}{2}\left(E_1h_1^2+E_3h_3^2\right)\left(K+3\right)\left(K+2\right)\left(K+1\right)W\left(K+3\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= -\omega^2(h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3)U(K) \\
c_{12} &= -\omega^2\frac{h_2}{2}\left(h_3\rho_3 - h_1\rho_1\right)\Phi\left(K\right) \\
c_{13} &= -\omega^2\frac{1}{2}\left(h_3^2\rho_3 - h_1^2\rho_1\right)\left(K+1\right)W\left(K+1\right) \\
c_{21} &= -\omega^2\left(h_3\rho_3 - h_1\rho_1\right)U\left(K\right) \\
c_{22} &= -\omega^2\frac{h_2}{6}\left(3h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + 3h_3\rho_3\right)\Phi\left(K\right) + 2G_2^*\Phi(K) \\
c_{23} &= -\omega^2\frac{1}{2}\left(h_1^2\rho_1 + h_3^2\rho_3\right)\left(K+1\right)W\left(K+1\right) - 2G_2^*(K+1)W(K+1)
\end{aligned}
\tag{4.173}
$$

Na sequência de separação dos termos monta-se uma matriz $2x2$, onde os termos de a_{13} e a_{23} multiplicados por W_{K+3} passem a fazer parte do sistema como termos independentes e obtêm-se a Equação (4.174):

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_{K+2} \\ \Phi_{K+2} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} c_{11}U_K & + & c_{12}\Phi_K & + & c_{13}W_{K+1} & - & a_{13}W_{K+3} \\ c_{21}U_K & + & c_{22}\Phi_K & + & c_{23}W_{K+1} & - & a_{23}W_{K+3} \end{bmatrix}
\tag{4.174}
$$

Com isso obtém-se as Equações (4.175) e (4.176):

$$
\begin{aligned}
U_{K+2} = {} & \frac{1}{4}\left(K+3\right)\left(h_1 - h_3\right)W_{K+3} \\
& - \frac{2G_2^*\left(E_1h_1 - E_3h_3\right) + \omega^2h_1h_3\left(E_1h_3\rho_3 - E_3h_1\rho_1\right)}{4\left(K+2\right)E_1E_3h_1h_3}W_{K+1} + \\
& + \frac{12G_2^*\left(E_1h_1 - E_3h_3\right) + \omega^2h_2\left[E_3h_3\left(6h_1\rho_1 + h_2\rho_2\right) - E_1h_1\left(h_2\rho_2 + 6h_3\rho_3\right)\right]}{24\left(K+1\right)\left(K+2\right)E_1E_3h_1h_3}\Phi_K + \\
& - \frac{\omega^2\left[E_3h_3\left(2h_1\rho_1 + h_2\rho_2\right) + E_1h_1\left(h_2\rho_2 + 2h_3\rho_3\right)\right]}{4\left(K+1\right)\left(K+2\right)E_1E_3h_1h_3}U_K
\end{aligned}
\tag{4.175}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_{K+2} & \\
= {} & \frac{12G_2^*\left(E_1h_1 + E_3h_3\right) - \omega^2h_2\left(6E_3h_1h_3\rho_1 + E_1h_1h_2\rho_2 + E_3h_2h_3\rho_2 + 6E_1h_1h_3\rho_3\right)}{12\left(K+1\right)\left(K+2\right)E_1E_3h_1h_2h_3}\Phi_K \\
& - \frac{\left(K+3\right)\left(h_1 + h_3\right)}{2h_2}W_{K+3} + \\
& - \frac{2G_2^*\left(E_1h_1 + E_3h_3\right) + \omega^2h_1h_3\left(E_3h_1\rho_1 + E_1h_3\rho_3\right)}{2\left(K+2\right)E_1E_3h_1h_2h_3}W_{K+1} + \\
& + \frac{\omega^2\left[E_3h_3\left(2h_1\rho_1 + h_2\rho_2\right) - E_1h_1\left(h_2\rho_2 + 2h_3\rho_3\right)\right]}{2\left(K+1\right)\left(K+2\right)E_1E_3h_1h_2h_3}U_K
\end{aligned}
\tag{4.176}
$$

As condições de contorno também são avaliadas de acordo com as Equações (4.177) a (4.180):

$$\left(N_x^{(1)} + N_x^{(3)}\right) \delta u_0 \Big|_0^L = 0 \tag{4.177}$$

$$\frac{h_2}{2}\left(N_x^{(3)} - N_x^{(1)}\right) \delta\varphi \Big|_0^L = 0 \tag{4.178}$$

$$\left(Q_x^{(2)} + \frac{\partial}{\partial x}M_x^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x}M_x^{(3)} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x}N_x^{(1)} - \frac{h_3}{2}\frac{\partial}{\partial x}N_x^{(3)}\right) \delta w \Big|_0^L = 0 \tag{4.179}$$

$$\left(\frac{h_3}{2}N_x^{(3)} - \frac{h_1}{2}N_x^{(1)} - M_x^{(1)} - M_x^{(3)}\right) \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \Big|_0^L = 0 \tag{4.180}$$

Onde tem-se tem-se a Equação (4.181):

$$N_x^{(i)} = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{xx}^{(i)} dz, \quad Q_x^{(i)} = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{xx}^{(i)} dz, \quad M_x^{(i)} = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} z\sigma_{xx}^{(i)} dz \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.181}$$

Para o problema considerado, o momento e a força são obtidos das Equações (4.5) a (4.10) e aplicadas na Equação (4.181), com isso tem-se as Equações (4.182) a (4.186):

$$N_x^{(1)} = E_1\left(h_1\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{2}h_1h_2\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{2}h_1^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{4.182}$$

$$N_x^{(3)} = E_3\left(h_3\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}h_2h_3\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}h_3^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{4.183}$$

$$Q_x^{(2)} = G_2^* h_2\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi\right) \tag{4.184}$$

$$M_x^{(1)} = -\frac{1}{12}E_1 h_1^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{4.185}$$

$$M_x^{(3)} = -\frac{1}{12}E_3 h_3^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{4.186}$$

Substituindo as Equações (4.182) e (4.183) na Equação (4.177), tem-se a Equação (4.187):

$$\left(E_1 h_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{2}E_1 h_1 h_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2}E_1 h_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \left(E_3 h_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}E_3 h_2 h_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}E_3 h_3^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{4.187}$$

Fazendo as derivadas da Equação (4.187) e colocando o termo $e^{i\omega t}$ em evidência e sabendo-se que $e^{i\omega t} \neq 0$ para todo $t \geq 0$, tem-se a Equação (4.188):

$$E_1 h_1 \overline{u}_0' + E_3 h_3 \overline{u}_0' - \frac{1}{2}E_1 h_1 h_2 \overline{\varphi}' + \frac{1}{2}E_3 h_2 h_3 \overline{\varphi}' - \frac{1}{2}E_1 h_1^2 \overline{w}'' + \frac{1}{2}E_3 h_3^2 \overline{w}'' = 0 \tag{4.188}$$

Condição de contorno livre tem-se a Equação (4.189):

$$2\left(E_1 h_1 + E_3 h_3\right)\overline{u}_0' + h_2\left(E_3 h_3 - E_1 h_1\right)\overline{\varphi}' + \left(E_3 h_3^2 - E_1 h_1^2\right)\overline{w}'' = 0 \tag{4.189}$$

Substituindo as Equações (4.182) e (4.183) na Equação (4.178) tem-se a Equação (4.190):

$$\begin{aligned} &\frac{h_2}{2}\left(E_3 h_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}E_3 h_2 h_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}E_3 h_3^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ &+ \left(-E_1 h_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}E_1 h_1 h_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}E_1 h_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.190}$$

Fazendo-se as derivadas da Equação (4.190) e colocando-se o termo $e^{i\omega t}$ em evidência, sabendo-se que $e^{i\omega t} \neq 0$ para todo $t \geq 0$, tem-se a Equação (4.191):

$$\left(\frac{h_2}{2}E_3 h_3 \overline{u}_0' + \frac{h_2^2}{4}E_3 h_3 \overline{\varphi}' + \frac{h_2}{4}E_3 h_3^2 \overline{w}''\right) + \left(-\frac{h_2}{2}E_1 h_1 \overline{u}_0' + \frac{h_2^2}{4}E_1 h_1 \overline{\varphi}' + \frac{h_2}{4}E_1 h_1^2 \overline{w}''\right) = 0 \tag{4.191}$$

Condição de contorno livre tem-se a Equação (4.192):

$$2\left(E_3 h_3 - E_1 h_1\right)\overline{u}_0' + h_2\left(E_1 h_1 + E_3 h_3\right)\overline{\varphi}' + \left(E_1 h_1^2 + E_3 h_3^2\right)\overline{w}'' = 0 \tag{4.192}$$

Para os outros dois termos das condições de contorno livre, Equações (4.179) e (4.180), substitui-se as Equações (4.182) a (4.186) na Equação (4.179) tem-se as Equações (4.193) e (4.194):

$$\begin{aligned} &G_2^* h_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{12}E_1 h_1^3\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{12}E_3 h_3^3\right) \\ &+ \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(E_1 h_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{2}E_1 h_1 h_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2}E_1 h_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ &- \frac{h_3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(E_3 h_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}E_3 h_3 h_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}E_3 h_3^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.193}$$

$$\begin{aligned} &\left(G_2^* h_2 \frac{\partial w}{\partial x} - G_2^* h_2 \varphi\right) + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{12}E_1 h_1^3\right) + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{12}E_3 h_3^3\right) + \\ &+ \left(\frac{E_1 h_1^2}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{E_1 h_1^2 h_2}{4}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{E_1 h_1^3}{4}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right) + \\ &- \left(\frac{E_3 h_3^2}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{E_3 h_3^2 h_2}{4}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{E_3 h_3^3}{4}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.194}$$

Fazendo-se as derivadas da Equação (4.194), colocando-se o termo $e^{i\omega t}$ em evidência, sabendo-se que $e^{i\omega t} \neq 0$ para todo $t \geq 0$, tem-se a Equação (4.195):

$$\begin{aligned} &G_2^* h_2 \overline{w}' - G_2^* h_2 \overline{\varphi} + \left(-\frac{E_1 h_1^3}{12}\right)\overline{w}''' + \left(-\frac{E_3 h_3^3}{12}\right)\overline{w}''' \\ &+ \left(\frac{E_1 h_1^2}{2}\overline{u}_0'' - \frac{E_1 h_1^2 h_2}{4}\overline{\varphi}'' - \frac{E_1 h_1^3}{4}\overline{w}'''\right) - \left(\frac{E_3 h_3^2}{2}\overline{u}_0'' + \frac{E_3 h_3^2 h_2}{4}\overline{\varphi}'' + \frac{E_3 h_3^3}{4}\overline{w}'''\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.195}$$

Resposta livre tem-se a Equação (4.196):

$$12G_2^* h_2 \left(\overline{w}' - \overline{\varphi}\right) + 6\left(E_1 h_1^2 - E_3 h_3^2\right)\overline{u}_0'' - 3h_2\left(E_1 h_1^2 + E_3 h_3^2\right)\overline{\varphi}'' - 4\left(E_1 h_1^3 - E_3 h_3^3\right)\overline{w}''' = 0 \tag{4.196}$$

Substituindo as Equações (4.182), (4.183), (4.185) e (4.186) na Equação (4.180), encontra-se a resposta livre para a Equação (4.197):

$$\begin{aligned} &\frac{h_3}{2}\left(E_3 h_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}E_3 h_2 h_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}E_3 h_3^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \frac{h_1}{2}\left(E_1 h_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \right. \\ &\left. -\frac{1}{2}E_1 h_1 h_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2}E_1 h_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \\ &- \left(-\frac{1}{12}E_1 h_1^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \left(-\frac{1}{12}E_3 h_3^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.197}$$

Fazendo-se as derivadas da Equação (4.197), colocando-se o termo $e^{i\omega t}$ em evidência, sabendo-se que $e^{i\omega t} \neq 0$ para todo $t \geq 0$, tem-se as Equações (4.198) e (4.199):

$$\begin{aligned}&\left(\frac{E_3h_3^2}{2}\overline{u}_0' + \frac{E_3h_3^2h_2}{4}\overline{\varphi}' + \frac{E_3h_3^3}{4}\overline{w}''\right) + \\ &+\left(-\frac{E_1h_1^2}{2}\overline{u}_0' + \frac{E_1h_1^2h_2}{4}\overline{\varphi}' + \frac{E_1h_1^3}{4}\overline{w}''\right) + \left(\frac{E_1h_1^3}{12}\overline{w}''\right) + \left(\frac{E_3h_3^3}{12}\overline{w}''\right) +\end{aligned} \tag{4.198}$$

$$6\left(E_3h_3^2 - E_1h_1^2\right)\overline{u}_0' + 3h_2\left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)\overline{\varphi}' + 4\left(E_1h_1^3 + E_3h_3^3\right)\overline{w}'' = 0 \tag{4.199}$$

Para a condição de contorno biapoiada sem deslizamento com $\overline{u}_0 = 0$ deslocamento e $\overline{w} = 0$ momento e $\overline{\varphi} \neq 0$ e $\dfrac{\partial w}{\partial x} \neq 0$, onde isso já foi demonstrado nas Equações (4.187) e (4.188) e nas Equações (4.194) e (4.195), tem-se tem-se as Equações (4.200) e (4.201):

$$2\left(E_3h_3 - E_1h_1\right)\overline{u}_0' + h_2\left(E_1h_1 + E_3h_3\right)\overline{\varphi}' + \left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)\overline{w}'' = 0 \tag{4.200}$$

$$6\left(E_3h_3^2 - E_1h_1^2\right)\overline{u}_0' + 3h_2\left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)\overline{\varphi}' + 4\left(E_1h_1^3 + E_3h_3^3\right)\overline{w}'' = 0 \tag{4.201}$$

A Tabela 5.1 trata das configurações finais das condições de contorno bi-engastada (CC), livre-livre (FF) e simplesmente apoiada (SC).

Tabela 4.1: Condições de contorno viga sanduiche.

Vigas	**Condições de contorno**
CC	$\overline{u}_0 = 0, \quad \overline{\varphi} = 0, \quad \overline{w} = 0, \quad \overline{w}' = 0$
FF	$2\left(E_1h_1 + E_3h_3\right)\overline{u}_0' + h_2\left(E_3h_3 - E_1h_1\right)\overline{\varphi}' + \left(E_3h_3^2 - E_1h_1^2\right)\overline{w}'' = 0$ $2\left(E_3h_3 - E_1h_1\right)\overline{u}_0' + h_2\left(E_1h_1 + E_3h_3\right)\overline{\varphi}' + \left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)\overline{w}'' = 0$ $12G_2^*h_2\left(\overline{w}' - \overline{\varphi}\right) + 6\left(E_1h_1^2 - E_3h_3^2\right)\overline{u}_0'' - 3h_2\left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)\overline{\varphi}'' +$ $-4(E_1h_1^3 - E_3h_3^3)\overline{w}''' = 0$ $6\left(E_3h_3^2 - E_1h_1^2\right)\overline{u}_0' + 3h_2\left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)\overline{\varphi}' + 4\left(E_1h_1^3 + E_3h_3^3\right)\overline{w}'' = 0$
SC	$\overline{w} = 0, \quad 2\left(E_1h_1 + E_3h_3\right)\overline{u}_0' + h_2\left(E_3h_3 - E_1h_1\right)\overline{\varphi}' + \left(E_3h_3^2 - E_1h_1^2\right)\overline{w}'' = 0$ $2\left(E_3h_3 - E_1h_1\right)\overline{u}_0' + h_2\left(E_1h_1 + E_3h_3\right)\overline{\varphi}' + \left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)\overline{w}'' = 0$ $6\left(E_3h_3^2 - E_1h_1^2\right)\overline{u}_0' + 3h_2\left(E_1h_1^2 + E_3h_3^2\right)\overline{\varphi}' + 4\left(E_1h_1^3 + E_3h_3^3\right)\overline{w}'' = 0$

Os resultados apresentados dos sistemas de equações diferenciais das Equações (4.160) a (4.162), são transformados por meio das regras básicas do método da transformada diferencial, que são fornecidos na Tabela 5.2 e com isso combinados para fornecer as seguintes relações de

recorrência:

Onde U_k, W_k e Φ_k correspondem a transformada diferencial de $\overline{u}_0$,$\overline{w}$ e $\overline{\varphi}$, as condições de contorno na Tabela 5.1, são transformadas para $x = 0$ e podem ser rearranjadas na Tabela 5.3. As condições de contorno para $x = L$, no qual N é o número de termos calculados, ele aparece nos somatórios.

Tabela 4.2: DTM para as condições de contorno (C.C.) em $x = 0$.

C.C.	**DTM**
CC	$U_0 = 0, \quad \Phi_0 = 0, \quad W_0 = 0, \quad W_1 = 0$
FF	$U_1 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad W_2 = 0,$ $W_3 = \dfrac{2h_2G_2^*\left(W_1 - \Phi_0\right) + E_1h_1^2\left(2U_2 - h_2\Phi_2\right) - E_3h_3^2\left(2U_2 + h_2\Phi_2\right)}{4\left(E_1h_1^3 + E_3h_3^3\right)}$
SC	$U_0 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad W_0 = 0, \quad W_2 = 0$

Tabela 4.3: DTM para as condições de contorno em $x = L$.

Condições de contorno
CC $\Sigma_{k=0}^{N} U_k L^k = 0, \quad \Sigma_{k=0}^{N} \Phi_k L^k = 0, \quad \Sigma_{k=0}^{N} W_k L^k = 0, \quad \Sigma_{k=0}^{N} k W_k L^{k-1} = 0$
FF $\Sigma_{k=0}^{N} \left[2\left(E_1 h_1 + E_3 h_3\right) k U_k L^{k-1} + h_2 \left(E_3 h_3 - E_1 h_1\right) k \Phi_k L^{k-1} + \left(E_3 h_3^2 - E_1 h_1^2\right) k \left(k-1\right) W_k\right] L^{k-2} = 0$ $\Sigma_{k=0}^{N} \left[2\left(E_3 h_3 - E_1 h_1\right) k U_k L^{k-1} + h_2 \left(E_1 h_1 + E_3 h_3\right) k \Phi_k L^{k-1} + \left(E_1 h_1^2 + E_3 h_3^2\right) k \left(k-1\right) W_k L^{k-2}\right] = 0$ $\Sigma_{k=0}^{N} \left[12 G_2^* h_2 L^2 \left(k W_k - L \varphi_k\right) + 6 \left(E_1 h_1^2 - E_3 h_3^2\right) L k \left(k-1\right) U_k - 3 h_2 \left(E_1 h_1^2 + E_3 h_3^2\right) L k \left(k-1\right) \Phi_k \right.$ $\left. -4 \left(E_1 h_1^3 - E_3 h_3^3\right) k \left(k-1\right) \left(k-2\right) W_k\right] L^{k-3} = 0$ $\Sigma_{k=0}^{N} \left[6 \left(E_3 h_3^2 - E_1 h_1^2\right) L k U_k + 3 h_2 \left(E_1 h_1^2 + E_3 h_3^2\right) L k \Phi_k + 4 \left(E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3\right) k \left(k-1\right) W_k\right] L^{k-2} = 0$
SC $\Sigma_{k=0}^{N} W_k L^k = 0$ $\Sigma_{k=0}^{N} \left[2\left(E_1 h_1 + E_3 h_3\right) k U_k L^{k-1} + h_2 \left(E_3 h_3 - E_1 h_1\right) k \Phi_k L^{k-1} + \left(E_3 h_3^2 - E_1 h_1^2\right) k \left(k-1\right) W_k L^{k-2}\right] = 0$ $\Sigma_{k=0}^{N} \left[2\left(E_3 h_3 - E_1 h_1\right) k U_k L^{k-1} + h_2 \left(E_1 h_1 + E_3 h_3\right) k \Phi_k L^{k-1} + \left(E_1 h_1^2 + E_3 h_3^2\right) k \left(k-1\right) W_k\right] L^{k-2} = 0$ $\Sigma_{k=0}^{N} \left[6 \left(E_3 h_3^2 - E_1 h_1^2\right) L k U_k + 3 h_2 \left(E_1 h_1^2 + E_3 h_3^2\right) L k \Phi_k + 4 \left(E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3\right) k \left(k-1\right) W_k\right] L^{k-2} = 0$

Capítulo 5

ANÁLISE EXPERIMENTAL

5.1 Introdução

A parte experimental do presente trabalho consta de três etapas: A primeira trata da confecção dos modelos de viga contínua em material compósito laminado com núcleo viscoelástico e sem o núcleo viscoelástico, A segunda refere-se ao ensaio de vibração livre para a obtenção das frequências naturais experimentais dessas vigas. A terceira é a determinação dos fatores de amortecimento através da curva de ajuste da resposta experimental da velocidade no tempo. A seguir, essas etapas são descritas, incluindo os processos utilizados, os materiais e equipamentos envolvidos. Todos os dados técnicos dos equipamentos estão no Apêndice D com as características dos equipamentos utilizados na tese.

5.2 Confecção dos Modelos de Viga

A confecção dos modelos de viga ensaiados foi realizada no Laboratório de Materiais Compósitos I, do Instituto de Engenharia Mecânica da Unifei, onde foram montadas as vigas utilizando-se tecido de fibra bidirecional de vidro plano WR240 e resina epóxi da Barracuda, em sistema resina/endurecedor (RESINA EPOXY AR 21/ ENDURECEDOR A21). Inicialmente, com a ajuda de uma régua e um pincel marcador, foram desenhados no tecido um retângulo com 11 divisões de 2 cm de comprimento (no sentido do comprimento do rolo a 0º), por 23 cm de largura de acordo com a Figura 5.1. Logo após foram feitos mais 23 recortes contendo as mesmas medidas do primeiro retângulo. Esses retângulos foram cortados com uma tesoura, tomando-se os devidos cuidados para que o corte fosse realizado na direção 0º das fibras do tecido. Em seguida, os retângulos foram combinados de maneira que as camadas começassem a se formar com 24 camadas mais o viscoelástico, na sequência 24 camadas sem o viscoelástico, depois 12 camadas com viscoelástico, 12 camadas sem viscoelástico, 8 camadas com viscoelás-

tico e 8 camadas sem o viscoelástico, de modo a formar uma placa com espessura constante ao longo de seu comprimento para cada divisão. O valor de 24, 12 e 8 camadas foi utilizado para garantir uma boa rigidez estrutural, visto que em testes anteriores utilizando apenas 3 camadas a estrutura apresentou-se com uma rigidez muito baixa, impossibilitando o ensaio de vibração livre experimental.

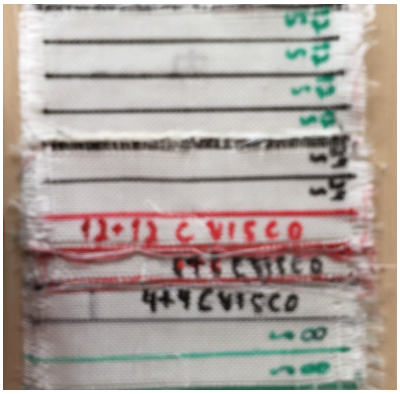

Figura 5.1: Marcação e corte das lâminas.

Todas as lâminas foram colocadas de modo que a orientação de suas fibras fosse 0º com relação ao seu comprimento. Esta combinação de lâminas é mostrada na Figura 5.2.

Figura 5.2: Vista superior das disposições das vigas.

Dessa forma, após a infusão da resina nas lâminas, a placa pode ser cortada no sentido de seu comprimento, assim obtendo-se os modelos de viga contínua. Montado o esquema de laminação, parte-se para o procedimento de infusão da resina no tecido de fibra de vidro. Para isso foi utilizada a Moldagem por Transferência de Resina Assistida por Vácuo (VARTM), que consta de um processo onde a resina é transferida para o interior das fibras das lâminas através de um gradiente de pressão desenvolvido no interior de uma bolsa de vácuo, onde se encontra a pré-forma (ou fibras do reforço), como mostrado na Figura 5.3 tirada de Eloy (2014).

Inicialmente, passou-se sobre o ferramental (ou base de isolamento), neste caso uma superfície metálica plana, um desmoldante, cuja função é facilitar a desmoldagem na retirada do

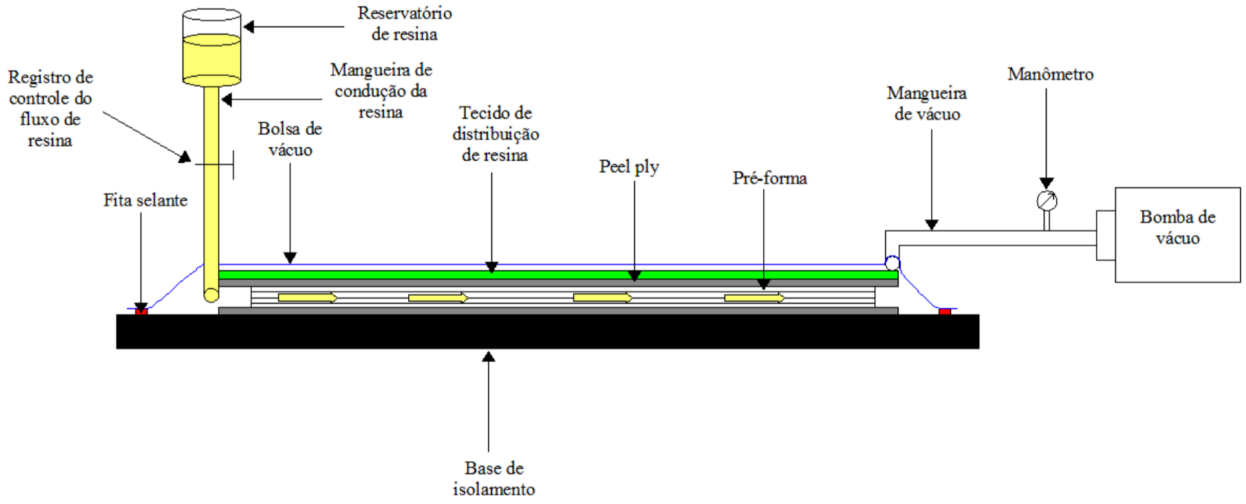

Figura 5.3: Diagrama do processo VARTM.

laminado. Em seguida foi colocada uma camada de *peel ply*, que é um tecido fino e poroso responsável pelo bom acabamento do material. Sobre a primeira camada de *peel ply*, foram colocadas as lâminas do tecido de fibra de vidro (pré-forma) na disposição desejada, tal como na Figura 5.2.

Sobre a pré-forma, colocou-se novamente outra camada de *peel ply*, e sobre esta, uma rede de plástico (tecido de distribuição de resina) do tamanho aproximado da placa do reforço, cuja função é facilitar e acelerar o movimento da resina sobre as fibras, diminuindo-se assim o tempo do processo.

Após esse arranjo, foram colocados dois dutos em forma de espiral, nas extremidades do laminado. Em seguida, toda a montagem foi coberta por um plástico para a formação da bolsa de vácuo, de modo que esse plástico teve suas bordas vedadas através de um selante de bordas, que foi colocado entre o plástico e a base de isolamento.

Fechada a bolsa de vácuo como mostra a Figura 5.4, o próximo passo foi conectar uma mangueira externa a um dos dutos e a um funil que iria conter a resina à pressão atmosférica. Outra mangueira foi conectada no outro duto e em uma bomba de vácuo. Para a averiguação do correto fechamento da bolsa antes da infusão da resina, ligou-se a bomba e retirou-se todo o ar de dentro da bolsa, e foi procurada qualquer possível entrada de ar na mesma.

Logo após, a resina foi preparada, sendo misturados 200,00 gramas de RESINA EPOXI AR 21 com 76 gramas de ENDURECEDOR A21, tal como indicado pelo fabricante (100 partes em peso de resina para 38 de endurecedor). A quantidade necessária dessas duas partes é uma função da área ou do peso do reforço e do volume de fibras desejado, de acordo com o recomendado pelo fabricante. Os componentes da resina foram misturados manualmente por 5 minutos com o auxílio de uma haste de madeira para homogeneizar a mistura. Em seguida, a resina então misturada foi levada a um tanque de pressão, onde permaneceu por um tempo de

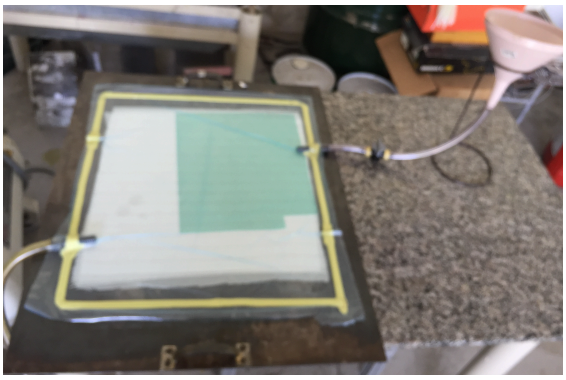

Figura 5.4: Bolsa de vácuo.

10 minutos sob pressão de 26 inHg exercida pela bomba de vácuo. Assim todas as bolhas de ar devidas à mistura manual foram retiradas, eliminando-se então o possível aparecimento de vazios no interior do laminado.

Após toda a preparação, partiu-se finalmente para a infusão da resina de acordo com a Figura 5.5 , onde foi colocado um funil suspenso e conectado a uma mangueira com uma válvula para o controle de seu fluxo.

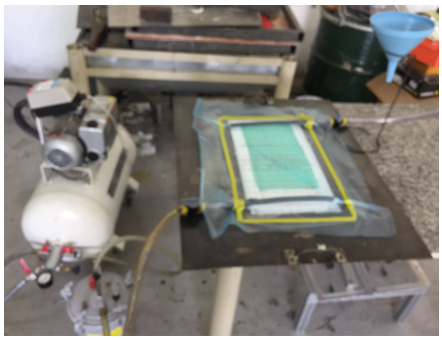

Figura 5.5: Equipamento montado destinado à infusão da resina no reforço.

Assim, a partir do momento em que a bomba de vácuo foi ligada, devido ao gradiente de pressão a resina começou a ser movimentada sobre a pré-forma de acordo com a Figura 5.6. O tempo total da infusão foi de aproximadamente 19 minutos.

Terminado o processo de infusão da resina no reforço, é necessário certo tempo de descanso para que a resina fique totalmente polimerizada (curada ou endurecida), tempo este chamado de tempo de cura. Esse tempo pode ser menor caso se consiga aumentar a temperatura sobre o compósito, assim, utilizou-se um forno elétrico com temperatura ajustável que forneceu uma temperatura de 80 ºC durante 4 horas para o processo de cura da resina.

Transcorrido o tempo de cura, desmontou-se a bolsa e os equipamentos e retiraram-se as camadas de $peel\ ply$. A placa obtida de acordo com a Figura 5.7, foi cortada no sentido de

Figura 5.6: Movimento da resina na pré forma.

seu comprimento para a obtenção dos modelos de viga a serem ensaiados, desprezando-se as bordas longitudinais e transversais de cada viga. A máquina utilizada no corte foi uma máquina de disco de corte com jato de água.

Figura 5.7: Após a infusão e retirado do peel ply.

5.3 Caracterização do Compósito

A determinação da densidade do material compósito foi feita através do Princípio de Arquimedes. Foram retiradas três amostras quadradas com 3 centímetros de lado para a determinação da densidade. De acordo com esse princípio, todo corpo submerso totalmente ou parcialmente em um líquido está sujeito à ação de uma força vertical de baixo para cima chamada empuxo E_p, de intensidade igual ao peso do líquido deslocado. Assim, as Equações (5.1) a (5.6) descrevem a determinação da densidade do compósito imerso no líquido. Neste caso a água, sendo m_L a massa do líquido deslocado kg, g a aceleração da gravidade m/s^2, ρ_L a massa específica do líquido m^3, V_L o volume do líquido deslocado m^3, V_c o volume do corpo imerso m^3, m_c a massa do corpo kg e ρ_c a massa específica do corpo kg/m^3 e tem-se a Equação (5.1).

$$E_p = m_L g \tag{5.1}$$

ou a Equação (5.2).

$$E_p = \rho_L V_L g \tag{5.2}$$

Considerando-se que o volume do líquido deslocado é igual ao volume do corpo tem-se a Equação (5.3):

$$V_c = V_L = V \tag{5.3}$$

Como a Equação (5.4):

$$V = \frac{m_c}{\rho_c} \tag{5.4}$$

Substituindo a Equação (5.4) em (5.2) tem-se a Equação (5.5):

$$E_p = \rho_L \frac{m_c}{\rho_c} g \tag{5.5}$$

Igualando-se a Equação (5.5) a (5.1) tem-se a Equação (5.6):

$$\rho_c = \rho_L \frac{m_c}{m_L} \tag{5.6}$$

Desta forma, a partir da Equação (5.6) torna-se possível a obtenção da densidade do compósito.

Para a determinação das demais propriedades deste material, através da Regra das Misturas, as características de cada componente são dadas separadamente na Tabela 6.1, dados obtidos do fabricante do material citado anteriormente.

Tabela 5.1: Propriedades dos constituintes do compósito.

Propriedade	**Reforço**	**Matriz**
Densidade (g/cm^3)	2,54	1,16
Módulo de Elasticidade (GPa)	72,5	3,75
Módulo de Cisalhamento (GPa)	30	1,4
Coeficiente de Poisson	0,2	0,35

Para a determinação da porcentagem em volume de fibras e de matriz presente no compósito, desenvolvido através da regra das misturas, é necessário o conhecimento da porcentagem

em peso de cada constituinte. Para isso foram retirados três corpos de prova (2,0 x 2,0 cm^2) da placa com a finalidade de secagem dos mesmos em estufa por 3 horas a 400 ºC, assim, consegue-se a remoção da resina e determina-se a porcentagem em peso referente às fibras.

A Tabela 6.2 mostra os valores das porcentagens em peso da fibra (W_f) e da matriz (W_m), bem como os valores das massas iniciais e finais de cada corpo de prova.

Tabela 5.2: Valores das massas iniciais, finais e das porcentagens em peso de cada fase.

Propriedades	Corpo de prova
Massa inicial (g)	10,7
Massa final (g)	5,4
$W_f(\%)$	50,3
$W_m(\%)$	49,7

Assim, a porcentagem em peso do reforço foi de 50,28% e da matriz, 49,72%, e com isso chegou-se ao valor da porcentagem em peso das fibras (W_f). Com a utilização da Regra das Misturas, as propriedades características do compósito confeccionado neste trabalho são determinadas e estão apresentadas na Tabela 6.3.

Após a obtenção e caracterização do material compósito laminado, partiu-se para o ensaio de vibração livre dos modelos de viga.

Tabela 5.3: Propriedades do compósito.

Propriedades	Valor	Unidade
Fração volumétrica de fibra (V_f)	31,59	%
Densidade (ρ)	1.596,0	kg/m^3
Módulo de elasticidade longitudinal (E_1)	25,46	GPa
Módulo de elasticidade transversal (E_2)	6,0	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 1-2 (G_{12})	2,58	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 1-3 (G_{13})	2,35	GPa
Módulo de cisalhamento no plano 2-3 (G_{23})	2,35	GPa
Coeficiente de Poisson no plano 1-2 (ν_{12})	0,3	-

5.4 Descrição do Ensaio de Vibração Livre

Os ensaios de vibração foram realizados no Laboratório de Vibrações e Acústica do IEM da UNIFEI. Esta parte do experimento tem a finalidade de levantar experimentalmente as propriedades dinâmicas de vigas laminadas uniformes com e sem núcleo viscoelástico a fim de se compararem as frequências naturais calculadas pelo programa desenvolvido pelo autor através da teoria do método da transformada diferencial com as frequências experimentais medidas no laboratório através do ensaio dinâmico.

Foram analisadas sete vigas compósitas laminadas contínuas, sendo 4 com núcleo viscoelástico e 3 sem o núcleo viscoelástico. As Figuras 5.8 a 5.13 mostram as vigas e a respectiva denominação de seus parâmetros geométricos.

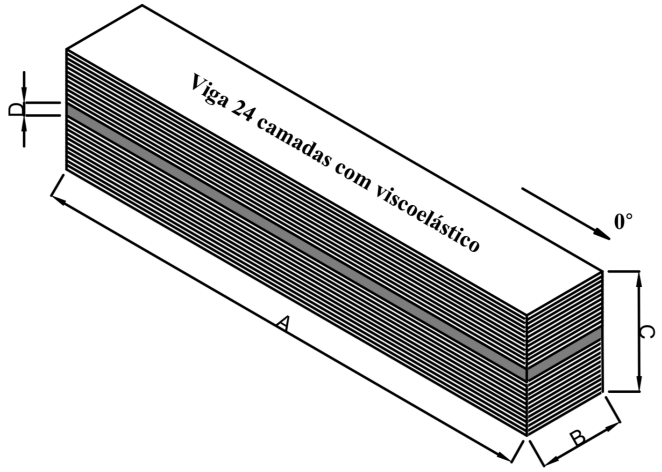

Figura 5.8: Viga 24 camadas com núcleo viscoelástico.

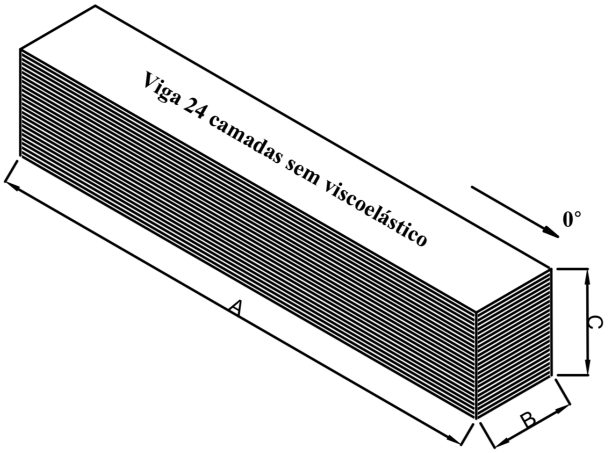

Figura 5.9: Viga 24 camadas sem núcleo viscoelástico.

A Tabela 6.4, contém os valores referentes à largura, espessura da viga, espessura do viscoelástico, comprimento de cada viga mostrada nas Figuras 5.8 a 5.13. Esses valores foram medidos com um paquímetro digital.

Para a realização do ensaio, a condição de contorno utilizada foi a engastada-livre, onde a viga tem seus movimentos restritos em uma extremidade, através de seu engaste em um suporte

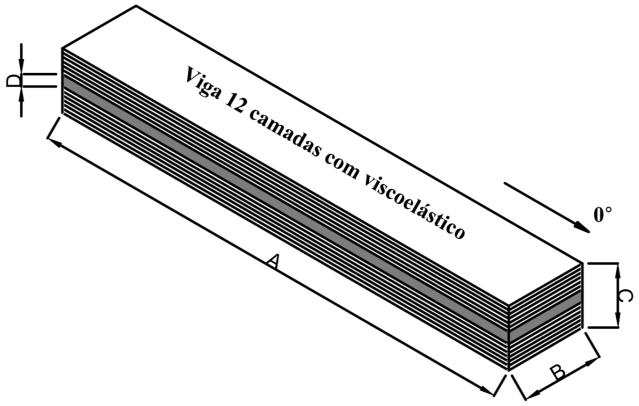

Figura 5.10: Viga 12 camadas com núcleo viscoelástico.

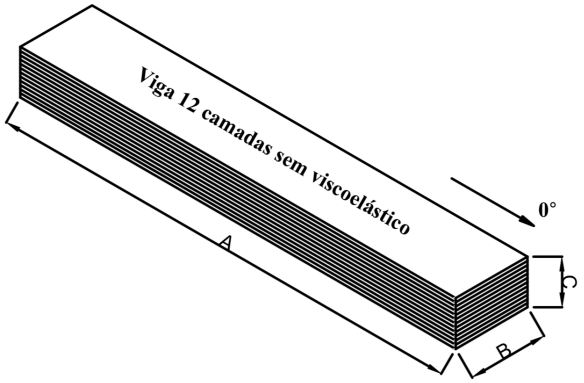

Figura 5.11: Viga 12 camadas sem núcleo viscoelástico.

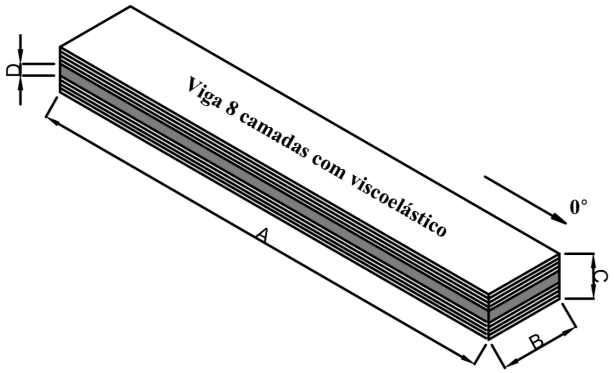

Figura 5.12: Viga 8 camadas com núcleo viscoelástico.

com alta rigidez. Os parafusos do suporte foram apertados usando um torquímetro reduzindo a condição de folga e propiciando a repetibilidade das condições de fixação. A viga é colocada em oscilação mediante a aplicação de um impulso no plano perpendicular ao plano de fixação da viga, na altura de sua linha neutra e em sua extremidade livre. O impulso aplicado excita dinamicamente a viga através do $shaker$ ligado a uma haste metálica cujo a ponta da haste continha uma célula de carga que tocava na viga excitando de acordo com o sinal de impulso gerado pelo programa. Esse impulso tem uma amplitude em volts que no caso transmitia esse

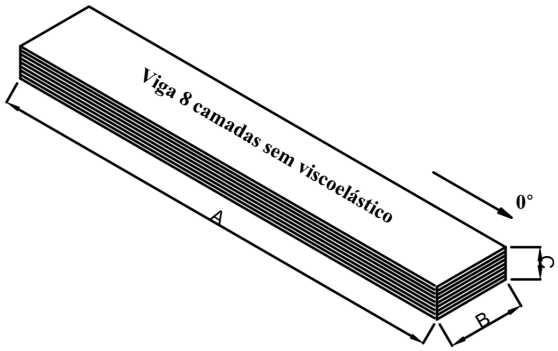

Figura 5.13: Viga 8 camadas sem núcleo viscoelástico.

Tabela 5.4: Propriedades geométricas das vigas utilizadas nos ensaios em mm, com viscoelástico (cv) e sem viscoelástico (sv).

Vigas	Comprimento (A)	Esp. viga (C)	Largura (B)	Esp.visco (D)
24 camada cv	230	5,0	20	0,7
24 camada sv	230	4,3	20	0,7
12 camada cv	230	3,3	20	0,7
12 camada sv	230	2,6	20	0,7
8 camada cv	230	2,0	20	0,7
8 camada sv	230	1,3	20	0,7

sinal para a bobina do $shaker$. Assim a viga entra em movimento e o sinal deste movimento é captado pelo vibrômetro laser, posicionado no mesmo plano de aplicação da força impulsiva e transmitido ao analisador de sinais, conforme a Figura 5.14, todos os equipamentos para a realização do ensaio de vibração livre e para a confecção das vigas estão no Apêndice D.

Figura 5.14: $Shaker$,Viga Engastada e Vibrômetro Lazer.

Devido à transparência do material constituinte da viga, foi colocado em sua extremidade sob a incidência do laser um pequeno pedaço de fita refletiva, de modo que o laser pudesse

capturar melhor o movimento da viga. O analisador é capaz de receber e armazenar um número grande de sinais do vibrômetro em curtos intervalos de tempo, permitindo a obtenção dos gráficos de espectro de frequência e a sua resposta no tempo.

Nas Tabelas de 6.5 a 6.18 estão presentes os resultados obtidos nos ensaios e os valores gerados pelo programa computacional desenvolvido pelo autor, bem como os erros relativos, dado pela Equação (5.9) . As frequências medidas em laboratório apresentam-se em Hertz, enquanto que o programa computacional permite a obtenção dos valores em rad/s, Hz e em valores adimensionais, $\hat{\beta}_{1,k}$, os quais são substituídos na Equação (5.7) para o cálculo das frequências em rad/s e posteriormente utilizando a Equação (5.8) obtêm-se as frequências em Hz, que serão utilizadas para as comparações.

5.5 Cálculo da Frequência Natural

$$\omega_{n_k} = \left(\frac{\hat{\beta}_{1,k}}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{b_1 D_{11}}{\rho A_1}} \tag{5.7}$$

$$f_{n_k} = \frac{\omega_{n_k}}{2\pi} \tag{5.8}$$

Sendo ω_{n_k} a k-ésima frequência angular natural em rad/s, $\hat{\beta}_{1,k}$ a k-ésima frequência natural adimensional. L é o comprimento total da viga em (m), D_{11} o termo que reflete a rigidez à flexão do material da viga (Nm), b_1 a largura da viga (m), ρ a massa específica (kg/m^3), A_1 a área da seção transversal da viga em (m^2), f_{n_k} a k-ésima frequência natural (Hz), k o índice que indica a k-ésima frequência natural e 1 o índice de β.

As Figuras 5.15 a 5.26 mostram os espectros de frequência de cada viga ensaiada através do experimento, onde o sinal obtido teve uma médias de 30 repetições onde o intervalo de cada batida para a excitação da viga era de 1 minuto e sua resposta no tempo.

Os desvios relativos $\%$ para todas as Tabelas são calculados pela Equação (5.9) e os valores das frequências de laboratório Tabeladas são retirados das figuras de espectro de frequência.

$$Desvio \quad Relativo\,(\%) = \frac{Freq_{experimental} - Freq_{calculada}}{Freq_{experimental}} \times 100 \tag{5.9}$$

Sendo $Freq_{experimental}$ as frequências naturais provenientes dos ensaios e $Freq_{calculada}$ as frequências naturais calculadas pelo programa computacional desenvolvido pelo autor.

A Tabela 5.5 mostra a comparação entre as frequências naturais obtidas experimental-

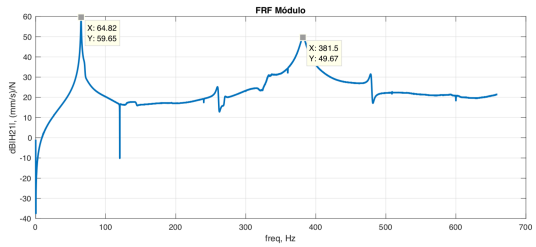

Figura 5.15: FRF Viga 24 Camadas com Viscoelástico.

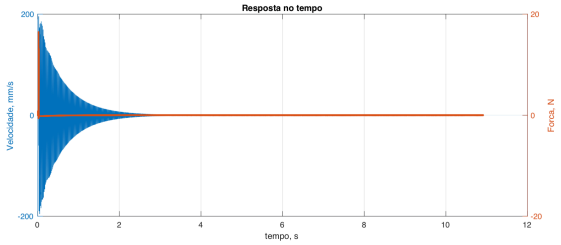

Figura 5.16: Resposta no tempo Viga 24 Camadas com Viscoelástico.

mente e através do programa computacional desenvolvido pelo autor. Já a Tabela 5.6 mostra o desvio relativo entre as mesmas.

Tabela 5.5: Duas frequências experimentais obtidas para a viga compósita com 24 camadas e núcleo viscoelástico em (Hz).

Frequência	Experimental	Autor
1ª	64,82	64,51
2ª	381,5	379,06

Tabela 5.6: Desvios relativos (%) calculados entre as frequências naturais experimentais e numéricas viga 24 camada com núcleo viscoelástico.

Tipo de Viga	1ª Frequência natural	2ª Frequência natural
24 camadas com viscoelástico	0,4	0,6

A Tabela 5.7 mostra a comparação entre as frequências naturais obtidas experimentalmente e através do programa computacional desenvolvido pelo autor. Já a Tabela 5.8 mostra o desvio relativo entre as mesmas.

A Tabela 5.9 mostra a comparação entre as frequências naturais obtidas experimentalmente e através do programa computacional desenvolvido pelo autor. Já a Tabela 5.10 mostra o desvio relativo entre as mesmas.

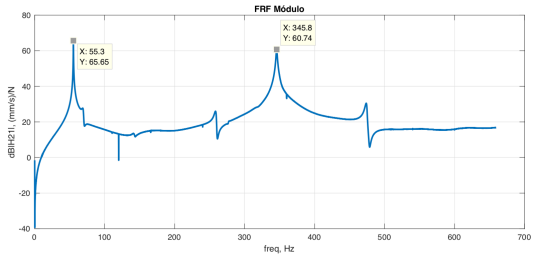

Figura 5.17: FRF Viga 24 Camadas sem o Viscoelástico.

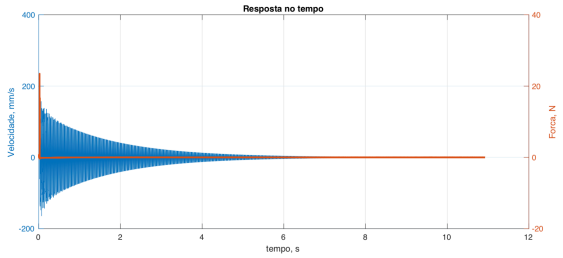

Figura 5.18: Resposta no tempo Viga 24 Camadas sem Viscoelástico.

Tabela 5.7: Duas frequências experimentais obtidas para a viga compósita com 24 camadas sem núcleo viscoelástico em (Hz).

Frequência	Experimental	Autor
1ª	55,3	55,34
2ª	345,7	320,21

Tabela 5.8: Desvios relativos (%) calculados entre as frequências naturais experimentais e numéricas viga 24 camada sem núcleo viscoelástico.

Tipo de Viga	1ª Frequência natural	2ª Frequência natural
24 camadas sem viscoelástico	0,07	7,4

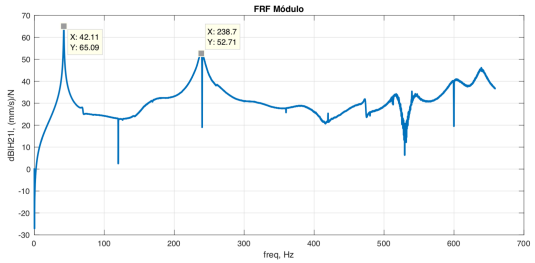

Figura 5.19: FRF Viga 12 Camadas com o Viscoelástico.

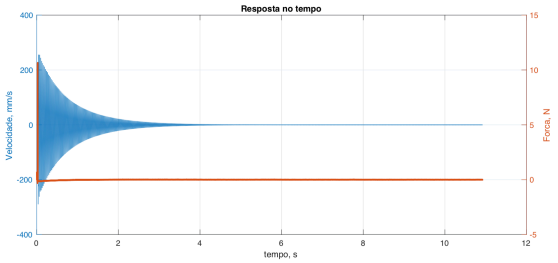

Figura 5.20: Resposta no tempo Viga 12 Camadas com Viscoelástico.

Tabela 5.9: Duas frequências experimentais obtidas para a viga compósita com 12 camadas e núcleo viscoelástico em (Hz).

Frequência	Experimental	Autor
1ª	42,11	42,63
2ª	238,7	235,38

Tabela 5.10: Desvios relativos (%) calculados entre as frequências naturais experimentais e numéricas viga 12 camada com núcleo viscoelástico.

Tipo de Viga	1ª Frequência natural	2ª Frequência natural
12 camadas com viscoelástico	1,2	1,4

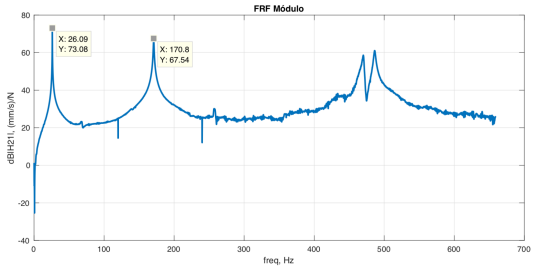

Figura 5.21: FRF Viga 12 Camadas sem o Viscoelástico.

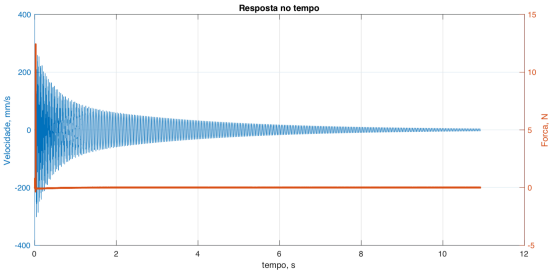

Figura 5.22: Resposta no tempo Viga 12 Camadas sem Viscoelástico.

A Tabela 5.11 mostra a comparação entre as frequências naturais obtidas experimentalmente e através do programa computacional desenvolvido pelo autor. Já a Tabela 5.12 mostra o desvio relativo entre as mesmas.

Tabela 5.11: Duas frequências experimentais obtidas para a viga compósita com 12 camadas sem núcleo viscoelástico em (Hz).

Frequência	Experimental	Autor
1ª	26,09	26,60
2ª	170,8	166,45

Tabela 5.12: Desvios relativos (%) calculados entre as frequências naturais experimentais e numéricas viga 12 camada sem núcleo viscoelástico.

Tipo de Viga	1ª Frequência natural	2ª Frequência natural
12 camadas sem viscoelástico	2,0	2,5

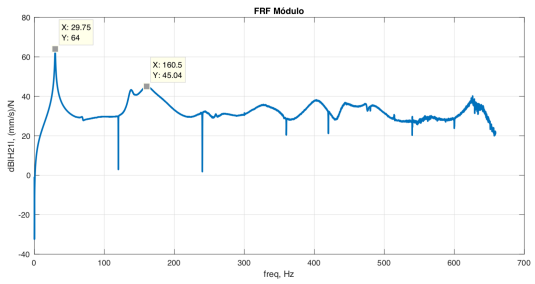

Figura 5.23: FRF Viga 8 Camadas com o Viscoelástico.

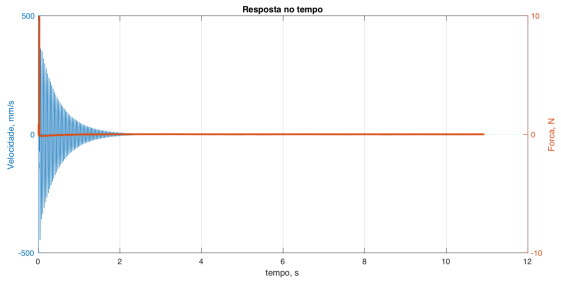

Figura 5.24: Resposta no tempo Viga 8 Camadas com Viscoelástico.

A Tabela 5.13 mostra a comparação entre as frequências naturais obtidas experimentalmente e através do programa computacional desenvolvido pelo autor. Já a Tabela 5.14 mostra o desvio relativo entre as mesmas.

Tabela 5.13: Duas frequências experimentais obtidas para a viga compósita com 8 camadas e núcleo viscoelástico em (Hz).

Frequência	Experimental	Autor
1ª	29,75	29,73
2ª	160,5	158,52

Tabela 5.14: Desvios relativos (%) calculados entre as frequências naturais experimentais e numéricas viga 8 camada com núcleo viscoelástico.

Tipo de Viga	1ª Frequência natural	2ª Frequência natural
8 camadas com viscoelástico	0,06	1,2

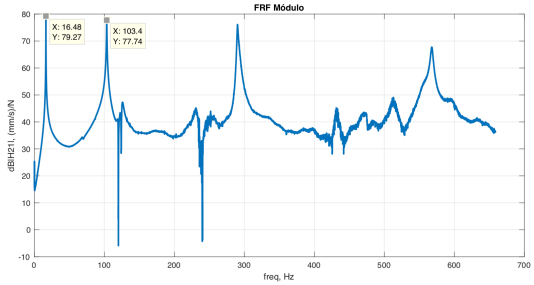

Figura 5.25: FRF Viga 8 Camadas sem o Viscoelástico.

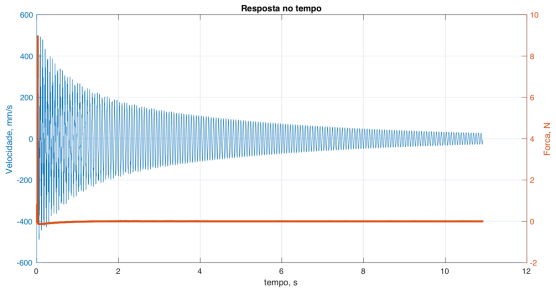

Figura 5.26: Resposta no tempo Viga 8 Camadas sem Viscoelástico.

A Tabela 5.15 mostra a comparação entre as frequências naturais obtidas experimentalmente e através do programa computacional desenvolvido pelo autor. Já a Tabela 5.16 mostra o desvio relativo entre as mesmas.

Tabela 5.15: Duas frequências experimentais obtidas para a viga compósita com 8 camadas sem núcleo viscoelástico em (Hz).

Frequência	Experimental	Autor
1ª	16,48	16,47
2ª	103,4	103,7

Tabela 5.16: Desvios relativos (%) calculados entre as frequências naturais experimentais e numéricas viga 8 camada sem núcleo viscoelástico.

Tipo de Viga	1ª Frequência natural	2ª Frequência natural
8 camadas sem viscoelástico	0,06	0,3

5.6 Fatores de Amortecimento

Após o ensaio de vibração livre, gravaram-se as respostas das velocidades das vigas em função do tempo. Um exemplo de curva de velocidade pelo tempo é mostrado na Figura 5.27. Com essas respostas na forma gráfica, tornou-se possível a determinação dos fatores de amortecimento das vigas sanduíche com e sem o material viscoelástico que é descrito a seguir.

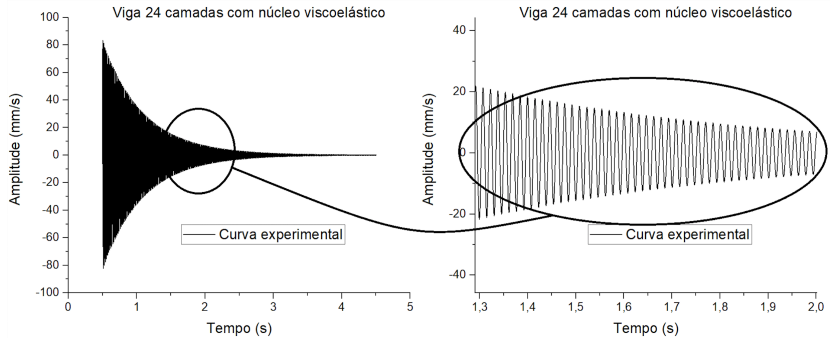

Figura 5.27: Resposta de velocidade no tempo para a viga sanduíche de 24 camadas com núcleo viscoelástico.

A fim de se determinar o fator de amortecimento das curvas semelhantes à da Figura 5.27, foi realizado um ajuste pelo método dos mínimos quadrados não linear. Para isso, foi utilizada como resposta de solução analítica a Equação (5.11). A Equação (5.10) diz respeito à Equação em deslocamento e a Equação (5.11), em velocidade, de um sistema em vibração livre amortecida com um grau de liberdade, assumindo-se fatores de amortecimento menores do que 1.

$$y\left(t\right) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[A\cos\left(\omega_d t\right) + B\sin\left(\omega_d t\right)\right] \tag{5.10}$$

$$\dot{y}\left(t\right) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[-B\omega_d\cos\left(\omega_d t\right) - A\omega_d\sin\left(\omega_d t\right) - \omega_n\zeta\left(A\cos\left(\omega_d t\right) + B\sin\left(\omega_d t\right)\right)\right] \tag{5.11}$$

sendo ω_d a frequência natural amortecida em rad/s, A e B as constantes arbitrá e o ζ o fator de amortecimento.

A frequência natural amortecida, em rad/s, é dada pela Equação (5.12):

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{5.12}$$

Assim, a Equação (5.11) foi implementada através do $software$ computacional @Origin, no qual os valores das constantes e do fator de amortecimento tiveram seus valores iniciais atribuídos pelo usuário. Na Figura 5.28, apresenta-se um ajuste realizado para o exemplo da Figura 5.27, bem como os quatro parâmetros da resposta analítica já apresentada, sendo eles as constantes arbitrárias A e B, o fator de amortecimento ajustado representado pela letra q, e a frequência natural dada em rad/s representada pela letra r. O coeficiente de determinação, representado por Adj.R-quadrado na Tabela da Figura 5.28, tal como obtido pelo $software$ computacional @Origin, indica o ajuste do modelo estatístico ou, no caso, da Equação (5.11) com os dados ou a curva experimental obtida no ensaio de vibração livre. O coeficiente de determinação a ser apresentado nas Tabelas seguintes terá a nomenclatura de R. Os valores de frequência do ajuste são diferente dos valores de frequência obtido pelo método por que o modelo de ajuste trata-se de um sistema com apenas um grau de liberdade, o valor do amortecimento para os casos viscosos aumenta quando se diminui o valor do número de camadas. O valor obtido na tabela referente a R trata-se do valor em $\%$ que mostra a confiabilidade do ajuste feito para este modelo, para um valor de ajuste aceitável o valor de R deve estar acima de 90%.

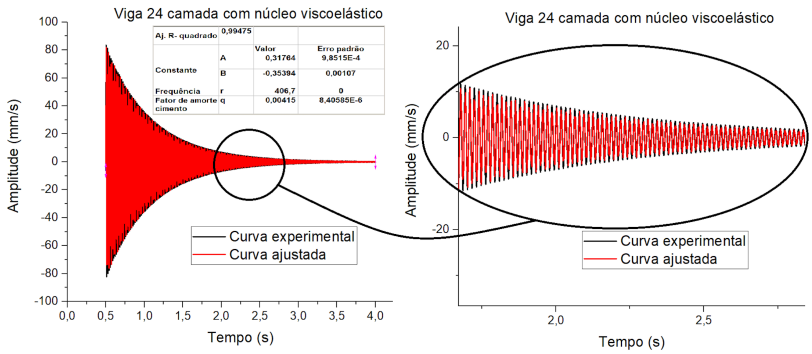

Figura 5.28: Ajuste da curva de amplitude no tempo para a viga sanduíche de 24 camadas com núcleo viscoelástico.

De acordo com a Figura 5.28 o valor do fator de amortecimento ζ é de 0,00415 ao passo que o ajuste realizado teve um coeficiente de determinação R de 0,99475 o que representa uma forte relação entre o ajuste realizado e a curva obtida experimentalmente.

Os valores do fator de amortecimento ζ e do coeficiente de determinação R para os demais ajustes realizados estão presentes nas Tabelas das Figuras de 5.29 a 5.33 para as vigas com material viscoelástico e sem o material viscoelástico.

Observa-se nas Tabelas das Figuras de 5.29 a 5.33, que os valores de R obtidos foram todos superiores a 0,95, o que mostra que os ajustes realizados são confiáveis e as curvas ajustadas acomodam-se fortemente às curvas experimentais. Cabe ressaltar aqui, que os valores obtidos para os fatores de amortecimento ζ são valores aproximados, uma vez que são obtidos a partir de um ajuste, ou seja, a partir de um modelo teórico analítico.

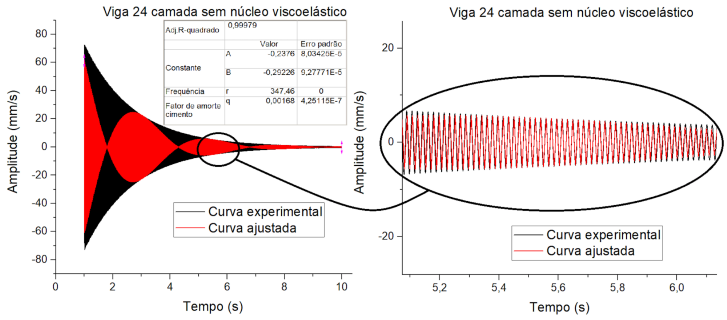

Figura 5.29: Ajuste da curva de amplitude no tempo para a viga sanduíche de 24 camadas sem núcleo viscoelástico.

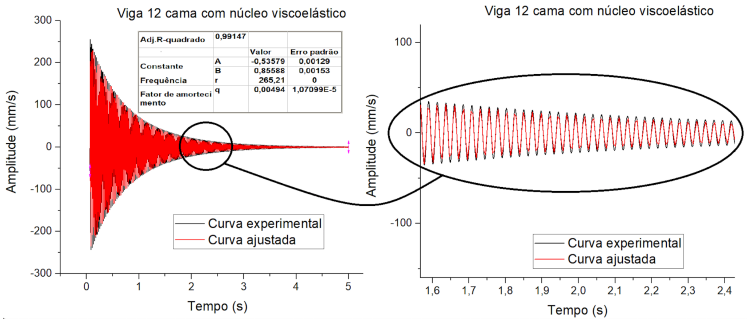

Figura 5.30: Ajuste da curva de amplitude no tempo para a viga sanduíche de 12 camadas com núcleo viscoelástico.

A Tabela 6.17 relaciona-se o número de camadas das vigas com o seu fator de amortecimento, onde o fator de perda do material viscoelástico foi obtido a temperatura ambiente de 20ºC.

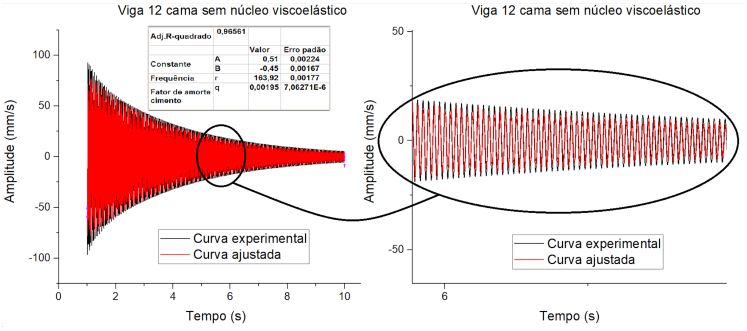

Figura 5.31: Ajuste da curva de amplitude no tempo para a viga sanduíche de 12 camadas sem núcleo viscoelástico.

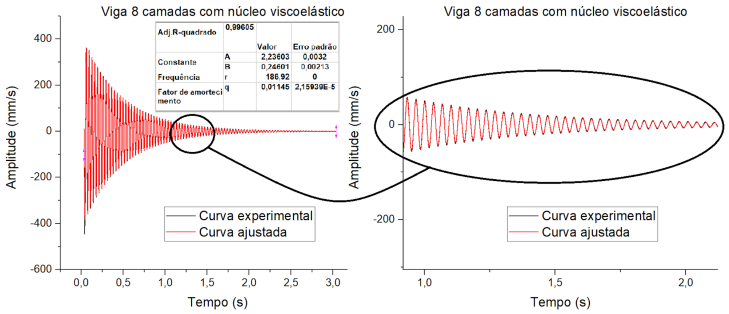

Figura 5.32: Ajuste da curva de amplitude no tempo para a viga sanduíche de 8 camadas com núcleo viscoelástico.

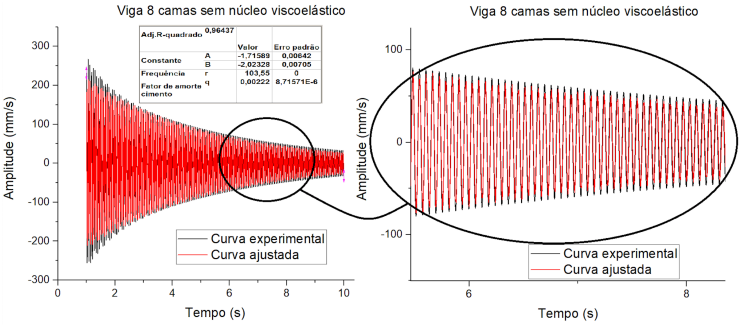

Figura 5.33: Ajuste da curva de amplitude no tempo para a viga sanduíche de 8 camadas sem núcleo viscoelástico.

Tabela 5.17: Relação do número de camadas das vigas e seu fator de amortecimento.

Tipo de Viga	Fator de amortecimento
24 camadas com viscoelástico	0,00415
24 camadas sem viscoelástico	0,00168
12 camadas com viscoelástico	0,00494
12 camadas sem viscoelástico	0,00195
8 camadas com viscoelástico	0,01145
8 camadas sem viscoelástico	0,00222

Capítulo 6

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A fim de verificar a efetividade do modelo de viga utilizado e do método de solução empregado são apresentados e analisados os resultados numéricos e experimentais gerados pelo autor e comparados com outros autores.

De acordo com o desenvolvimento matemático realizado no Capítulo 2 obtêm-se as frequências naturais para a viga em balanço modelo de Euler-Bernoulli utilizando a Equação (2.73). De acordo com a Tabela 7.1 é possível visualizar a comparação das três primeiras frequências naturais obtidas pelo autor em relação as mesmas frequências naturais obtidas na literatura.

Tabela 6.1: Frequências naturais adimensionais $\hat{\beta}$, para a viga contínua em balanço.

	1ª Freq	**2ª Freq**	**3ª Freq**
Autor	1,875	4,694	7,855
Malik e Dang (1998)	1,875	4,694	7,855
Inman (2001)	1,875	4,694	7,855

De acordo com a Tabela 6.1 observa-se que os valores referentes para as três primeiras frequência naturais utilizando o método da transformada diferencial foi idêntico as três primeiras frequências obtidas pelos os outros dois autores conforme a literatura. Utilizando as três primeiras frequências naturais adimensionais obtidas pelo autor e substituindo na Equação (2.74) é possível obter-se os modos de vibração para cada uma dessas frequências. O gráfico da Figura 6.1 mostra a 1ª, 2ª e 3ª forma modal de vibração referentes às três primeiras frequências naturais e as compara com o resultado analítico da literatura.

Analisando-se os resultados apresentados na Tabela 6.1 e Figura 6.1 verifica-se que o

DTM reproduziu as frequências angulares naturais e os modos de vibração, mostrando a sua efetividade.

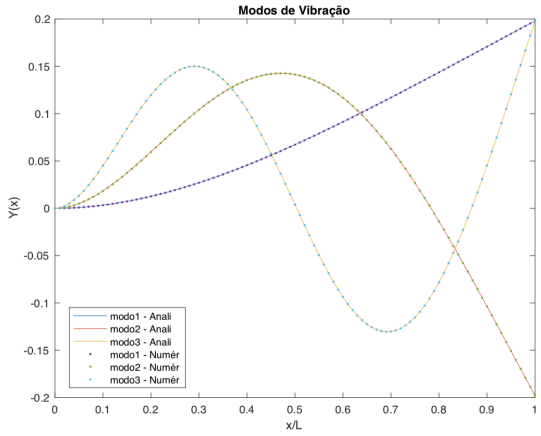

Figura 6.1: Resposta analítica x numérica para os três primeiros modos de vibração de uma viga contínua.

No Capítulo 3 foi equacionado do modelo de viga compósita de Euler-Bernoulli com apoios elásticos variáveis. A Tabela 3.6 demonstra os valores das frequências naturais em kHz para uma viga contínua laminada, constituída de uma única lamina orientada a (0º), tendo a sua condição de contorno como simplesmente apoiada nas extremidades. Para os resultados da Tabela 3.7, as frequências naturais adimensionais são dadas pela Equação (3.35) para diferentes ângulos de orientação das fibras das lâminas, bem como para diferentes condições de contorno.

Comparando os resultados apresentados na Tabela 3.6 pelo autor e demais autores verifica-se que o DTM reproduziu as frequências naturais de forma exata para as três primeiras frequências naturais. Para a 4ª frequência o erro relativo percentual foi de 0,1%, já para a 5ª frequência foi de 0,008%.

Analisando-se os resultados apresentados na Tabela 3.7 para diferentes ângulos do laminado e condições de contorno clássicas verifica-se que o DTM reproduziu as frequências para 15º com o erro relativo percentual máximo foi de 0,0037% para a condição SS. No caso do ângulo de 30º esse valor máximo foi de 0,026% para a condição de contorno CF. O maior desvio relativo percentual foi de 0,285% para o ângulo de 75º e com condição de contorno CS.

De acordo com o Capítulo 4 foram obtidos as frequências naturais, os modos de vibração e o fator de perda para uma viga de três camadas com núcleo viscoelástico utilizando o método da transformada diferencial. Os resultados numéricos são comparados com outros resultados existentes na literatura. A simulação realizada para a viga compósita de seção retangular com camadas de fibra de vidro e núcleo viscoelástico, cujo a condição de contorno trata-se de uma viga engastada livre, utilizou-se as propriedades geométricas e o material descritos na Tabela 6.2 foram retirados de Arikoglu e Ozkol (2010).

Tabela 6.2: Propriedades do material e sua geometria.

Camadas 1 e 3	
Módulo de elasticidade	$E_1 = E_3$ = 69 GPa
Densidade	$\rho_1 = \rho_3$ = 2.800 kg/m^3
Espessura	$h_1 = h_3$ = 1,5 mm
Camada viscoelástica (camada 2)	
Módulo de cisalhamento	G_2 = 0,69 MPa
Densidade	ρ_2 = 968,3 kg/m^3
Espessura	h_2 = 0,127 mm
Fator de perda	η = 0,1, 0,2, 0,3, 0,6, 1,0, 1,5
Comprimento total da viga	L = 177,8 mm

Na Tabela 6.3 os valores das frequências de vibração são apresentados para os primeiros três modos e diferentes valores para os fatores de perda.

De acordo com os desvios relativos percentuais determinados das frequências da Tabela 6.3 apresentados na Tabela 6.4 nota-se que ouve uma pequena variação nos valores de reposta para as frequências. O maior desvio relativo percentual foi de 3,2658% para o fator de perda 1,5, 3ª frequência em relação a Johnson *et al.* (1981).

Os modos de vibração que estão representados na Figura (6.1) trata-se dos modos de vibração referentes a primeira, segunda e terceira frequência natural utilizando-se o fator de perda η com valor igual a 0,1 onde a condição de contorno para essa viga refere-se a uma viga engastada livre.

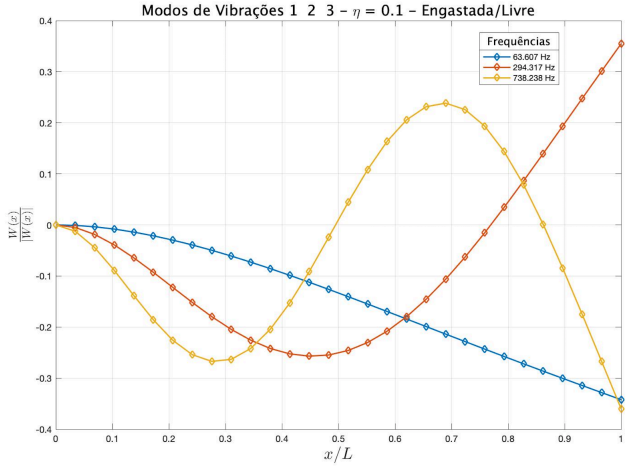

Figura 6.2: 1º, 2º 3º modo de vibração para uma viga compósita com núcleo viscoelástico.

Observa-se que Shi e Hua (2006) utilizaram o método inverso para identificação do material da viga, Johnson *et al.* (1981) usou o método dos elementos finitos e finalmente Arikoglu e Ozkol (2010) utilizaram o DTM e elementos finitos.

Os resultados dos desvios relativos percentuais apresentados na Tabela 6.4 comprovam a aplicabilidade do DTM para resolver esse tipo de problema.

Considerando uma viga sanduíche de seção retangular, com sua condição de contorno biapoiada, no qual suas propriedades e dimensões geométricas são fornecidas na Tabela 6.2, foram retirados de Arikoglu e Ozkol (2010).

Além disso, as formas modais de vibração para a viga sanduíche com núcleo viscoelástico, com condição de contorno biapoiada em suas extremidades são apresentadas na Figura 6.3, utilizando o fator de perda η = 0,38. Os resultados mostram-se com boa concordância, validando-se tanto o método da transformada diferencial quanto o modelo de viga usado neste estudo.

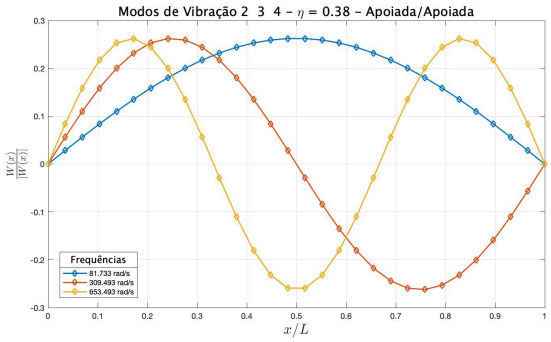

Figura 6.3: 1º, 2º 3º modo de vibração para uma viga compósita com núcleo viscoelástico biapoiada.

A Tabela 6.5 apresenta as propriedades do material e geometria para três problemas com camadas viscoelástica. As frequências naturais são apresentadas na Tabela 6.6.

Após a obtenção das frequências naturais demonstradas na Tabela 6.6 referentes aos problemas 1, 2 e 3, observa-se que ocorreu um pequeno desvio nos valores das frequências naturais do autor em comparação com as frequências naturais obtidas na literatura. Os valores dos desvios percentuais podem ser visualizados na Tabela 6.7. Nota-se que o maior desvio relativo percentual foi de 0,1444% para a 3ª frequência do problema 2. Observa-se que Tang e Lumsdaine (2008) utilizaram o Princípio de Hamilton e uma Equação de sexta ordem para descrever a porção da viga coberta pela camada de restrição viscoelástica. Lall *et al.* (1988) utilizaram o método de Rayleigh-Ritz para determinar as frequências naturais. Assim verifica-se a boa concordância dos resultados e a efetividade do DTM.

No capítulo 5 encontram-se os resultados experimentais e numéricos para uma viga compósita com várias camadas e com e sem núcleo viscoelástico, conforme as Tabelas 5.5, 5.7, 5.9, 5.11, 5.13 e 5.16.

Os resultados obtidos pelo autor através do ensaio de vibração livre com o objetivo de se determinar as frequências naturais, e compara-las com os resultados obtidos pelo autor por meio do método da transformada diferencial. Calculou-se os desvios relativos percentuais entre

o valores obtidos pela frequências naturais experimentais com os valores das frequências calculadas pelo autor conforme as Tabelas 5.6, 5.8, 5.10, 5.12, 5.14 e 5.16. O fator de amortecimento estrutural foi determinado para cada uma das vigas cujo os valores são apresentados na Tabela 5.17.

O maior desvio relativo percentual relativo para a 1ª frequência experimental foi de 2% para a viga com 12 camadas sem o núcleo viscoelástico. Para a 2ª frequência natural experimental o maior valor foi de 2,5% para a mesma viga. Uma exceção foi viga com 24 camadas sem o núcleo viscoelástico que foi de 7,4%. De maneira geral os resultados mostram que o DTM reproduziu os resultados experimentais com boa aproximação.

Tabela 6.3: Frequências naturais Hz.

η		**1º Modo**	**2º Modo**	**3º Modo**
0,1	Autor	63,607	294,214	738,005
	Arikoglu e Ozkol (2010)	63,614	294,236	738,028
	Shi e Hua (2006)	63,61	294,20	738,02
	Johnson *et al.* (1981)	64,2	297,0	747,2
0,2	Autor	63,741	294,439	739,159
	Arikoglu e Ozkol (2010)	63,766	294,526	738,247
	Shi e Hua (2006)	63,74	294,43	738,18
	Johnson *et al.* (1981)	64,4	297,6	748,0
0,3	Autor	63,975	294,808	738,415
	Arikoglu e Ozkol (2010)	64,011	295,000	738,612
	Shi e Hua (2006)	63,957	294,796	738,432
	Johnson *et al.* (1981)	64,7	298,0	748,2
0,6	Autor	65,005	296,689	739,778
	Arikoglu e Ozkol (2010)	65,182	297,407	740,556
	SShi e Hua (2006)	65,005	296,675	739,793
	Johnson *et al.* (1981)	65,5	301,0	753,0
1,0	Autor	66,914	300,544	742,910
	Arikoglu e Ozkol (2010)	67,251	302,207	745,001
	Shi e Hua (2006)	66,913	300,533	742,92
	Johnson *et al.* (1981)	67,4	307,0	762,0
1,5	Autor	69,367	306,574	748,723
	Arikoglu e Ozkol (2010)	69,816	309,855	753,161
	Shi e Hua (2006)	69,366	306,555	748,725
	Johnson *et al.* (1981)	70,0	315,0	774,0

Tabela 6.4: Desvios relativos percentuais (%).

η		**1º Modo**	**2º Modo**	**3º Modo**
0,1	Arikoglu e Ozkol (2010)	0,0110	0,0075	0,0031
	Shi e Hua (2006)	0,0047	0,0048	0,0020
	Johnson *et al.* (1981)	0,9237	0,9380	1,2306
0,2	Arikoglu e Ozkol (2010)	0,0392	0,0295	0,1235
	Shi e Hua (2006)	0,0016	0,0031	0,1326
	Johnson *et al.* (1981)	1,0233	1,0622	1,1820
0,3	Arikoglu e Ozkol (2010)	0,0562	0,0651	0.0267
	Shi e Hua (2006)	0,0281	0,0041	0,0023
	Johnson *et al.* (1981)	1,1206	1.0711	1,3078
0,6	Arikoglu e Ozkol (2010)	0,2715	0,2414	0,1051
	Shi e Hua (2006)	0	0,0047	0,0020
	Johnson *et al.* (1981)	0,7557	1,4322	1,7559
1,0	Arikoglu e Ozkol (2010)	0,5011	0,5503	0.2807
	Shi e Hua (2006)	0,0015	0,0037	0,0013
	Johnson *et al.* (1981)	0,7211	2,1029	2.5052
1,5	Arikoglu e Ozkol (2010)	0,6431	1,0589	0,5892
	Shi e Hua (2006)	0,0014	0,0062	0,0003
	Johnson *et al.* (1981)	0,9043	2,6749	3,2658

Tabela 6.5: Propriedades do material e sua geometria.

	Problema 1	Problema 2	Problema 3
Camadas 1 e 3			
Módulo de elasticidade	$E_1 = E_3$ = 207 GPa	$E_1 = E_3$ = 207 GPa	$E_1 = E_3$ = 207 GPa
Densidade	$\rho_1 = \rho_3$ = 7.800 kg/m^3	$\rho_1 = \rho_3$ = 7.800 kg/m^3	$\rho_1 = \rho_3$ = 7.800 kg/m^3
Espessura	h_1 = 0,5 h_3 = 5,0 mm	h_1= 0,5 h_3 = 5,0 mm	h_1 = 0,5 h_3 = 5,0 mm
Cam.viscoel (camada 2)			
Módulo de cisalhamento	G_2 = 0,2615 MPa	G_2 = 4,0 MPa	G_2 = 20,0 MPa
Densidade	ρ_2 = 2.000,0 kg/m^3	ρ_2 = 2.000,0 kg/m^3	ρ_2 = 2.000,0 kg/m^3
Espessura	h_2 = 2,5 mm	h_2 = 2,5 mm	h_2 = 2,5 mm
Fator de perda	η = 0,38	η = 0,38	η = 0,38
Comprimento total da viga	L = 300,0 mm	L = 242,5 mm	L = 1.084,498 mm

Tabela 6.6: Frequências naturais para uma viga biapoiada em (rad/s).

Problemas		1º Modo	2º Modo 2	3º Modo
	Autor	740,48	2947,77	6623,47
1	Arikoglu e Ozkol (2010)	740,48	2947,77	6623,47
	Tang e Lumsdaine (2008)	740,56	2949,00	6629,68
	Lall *et al.* (1988)	740,56	2948,29	6629,66
	Autor	1187,76	4570,15	10192,61
2	Arikoglu e Ozkol (2010)	1187,94	4570,22	10192,64
	Tang e Lumsdaine (2008)	1187,98	4573,14	10207,35
	Lall *et al.* (1988)	1187,93	4573,05	10207,35
	Autor	81,72	309,33	652,78
3	Arikoglu e Ozkol (2010)	81,73	309,41	653,13
	Tang e Lumsdaine (2008)	81,74	309,39	652,92
	Lall *et al.* (1988)	81,73	309,35	652,85

Tabela 6.7: Desvios relativos percentuais (%).

Problemas		1º Modo	2º Modo 2	3º Modo
1	Arikoglu e Ozkol (2010)	0	0	0
	Tang e Lumsdaine (2008)	0,0108	0,0417	0,0937
	Lall *et al.* (1988)	0,0108	0,0176	0,0934
2	Arikoglu e Ozkol (2010)	0,0152	0,0015	0,0003
	Tang e Lumsdaine (2008)	0,0185	0,0654	0,1444
	Lall *et al.* (1988)	0,0143	0,0634	0,1444
3	Arikoglu e Ozkol (2010)	0,0122	0,0259	0,0536
	Tang e Lumsdaine (2008)	0,0245	0,0194	0,0214
	Lall *et al.* (1988)	0,0122	0,0065	0,0107

Capítulo 7

CONCLUSÕES

Esta tese apresenta os principais teoremas e colorários relacionados ao método da transformada diferencial, os desenvolvimentos teóricos para o modelo de viga de Euler-Bernoulli com condições de contorno clássicas, modelo de viga compósita de Euler-Bernoulli com apoios elásticos variáveis e modelo de viga compósita com núcleo viscoelástico. Apresenta também a técnica de construção dos corpos de prova, a técnica de realização dos experimentos e e a técnica de estimação do fator de amortecimento da viga compósita com núcleo viscoelástico. Os autovalor definidos pelo modelos desenvolvidos foram resolvidos utilizando o método da transformada diferencial. Conclui-se que:

- A utilização do material viscoelástico no núcleo da viga se mostrou efetivo na redução da vibração, sendo que o amortecimento obtido varia com a espessura do núcleo, número de camadas compósitas e com a temperatura, para esse trabalho utilizou-se a temperatura ambiente;

- O Método da Transformada Diferencial aplicado a vigas compósitas foi apresentado em detalhes e se mostrou efetivo na solução dos problemas apresentados e seus resultados numéricos mostram que o método da transformada diferencial pode ser usado com sucesso na análise de vibração de vigas com materiais convencionais e materiais compósitos. O método se mostra robusto e preciso, sendo uma alternativa ao método dos elementos finitos tradicionalmente utilizando na literatura consultada, podendo ,também, ser aplicado em problemas lineares e não lineares de análise dinâmica de vibrações entre outros;

- O modelo de viga compósita com o seu desenvolvimento teórico detalhado foi apresentado e os seus resultados numéricos utilizando o método da transformada diferencial apresentaram uma boa concordância com os resultados experimentais e numéricos apresentados pelo autor e por outros autores;

- Os experimentos realizados apresentaram resultados coerentes com a literatura e que o

método da transformada diferencial consegue com boa exatidão ao reproduzir os resultados experimentais;

técnica de identificação dos fatores de amortecimento da viga compósitas com núcleo viscoelástico utilizada nesta tese se mostrou efetiva para obtenção desse parâmetro;

- Assim conclui-se, finalmente, que esta tese conseguiu atingir os seus objetivos, sendo assim um referencial para trabalhos futuros.

7.1 Propostas para Trabalhos Futuros

- Realizar o estudo de vigas compósitas com núcleo viscoelástico utilizando os modelos de Vlasov, Cisalhamento e Timoskenko;
- Realizar o estudo de placas compósitas com núcleo viscoelástico utilizando os modelos de Kirchhoff e Rissiner e Mindlin;
- Realizar a modelagem do método da transformada diferencial modificado MDTM, método da transformada diferencial generalizado GDTM e a transformada diferencial com aproximação de Padé, que são utilizadas para melhorar a convergência e exatidão das aproximações do DTM;
- Utilizar outros materiais para a fabricação das vigas sanduíche, como manta de fibra de carbono, fibra de coco ou fibra de algodão;
- Realizar a fabricação e ensaios experimentais de placas com núcleos viscoelásticos;
- Fazer um estudo utilizando metamateriais;
- Fazer uma investigação do efeito da temperatura no comportamento dinâmico da viga ou placa no sentido de encontrar a melhor configuração deste em função da temperatura;
- Fazer uma análise dinâmica para vigas, placas ou cascas multicamadas com múltiplos núcleos viscoelásticos.

Referências Bibliográficas

Abdel e Hassan(2002) I. H. Abdel e Halim. Hassan. Different applications for the differential transformation in the differential equations. *Applied Mathematics and Computation archive*, 129:1–22.

Agboola e Gbadeyan(2010) O.O. Agboola e J.A. Gbadeyan. Free vibration analysis of euler-bernoulli beam using differential transformation method. *Jornal Article Draft*, páginas 1–14.

Arikoglu e Ozkol(2010) A. Arikoglu e I. Ozkol. Vibration analysis of composite sandwich beams with viscoelastic core by using differential transform method. *ELSEVIER*, 92:3031–3039.

Arikoglu e Ozkol(2005) A. Arikoglu e I. Ozkol. Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method. *Applied Mathematics and Computation*, 168:1145–1158.

Arslan(2020) D. Arslan. The comparison study of hybrid method with rdtm for solving rosenau-hyman equation. *Sciendo*, 5:267–274.

Attarnejad e Shahba(2008) Reza. Attarnejad e Ahmad. Shahba. Application of differential transform method in free vibration analysis of rotating non-prismatic beams. *World Applied Sciences Journal*, 5:441–448.

Bagyalakshmi e Saisundarakrshnan(2017) M. Bagyalakshmi e G. Saisundarakrshnan. Tarig projected differential transform method to solve fractional nonlinear partial differential equations. *SPM*, 38:23–46.

Balkaya *et al.***(2009)** M. Balkaya, M.O. Kaya, e A. Saglamer. Analysis of the vibration of an elastic beam supported on elastic soil using the differential transform method. *Archive of Applied Mechanics*, 79:135–146.

Belarbi e Tati(2017) M. O. Belarbi e A. Tati. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A layerwise finite element formulation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 14:2265–2290.

Benhammouda e Leal(2016) B. Benhammouda e H. V. Leal. A new multi?step technique with differential transform method for analytical solution of some nonlinear variable delay differential equations. *Springer Plus*, 5:145–155.

Bert e Zeng(2004) C.W. Bert e H. Zeng. Analysis of axial vibration of compound bars by differential transformation method. *Journal Sound Vibration*, 275:641–647.

Catal(2012) S. Catal. Response of forced euler-bernoulli beams using differential transform method. *Structural Engineering and Mechanics*, 42:95–119.

Chandrashekhara *et al.***(1990)** K. Chandrashekhara, K. Krishnamurthy, e S. Roy. Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation. 14:269–279.

Chen e Jusp(2004) C.K. Chen e Jusp. Application of differential transformation to transient advective dispersive transport equation. *Applied Mathematics and Computation, Elsevier*, 155:25–38.

Chen(1999) CK. Ho SH. Chen. Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method. *Applied Mathematics and Computation*, 106:171–179.

Cheng e Ho(1996) C.K. Cheng e S.H. Ho. Application of differential transformation to eigenvalue problems. *Appl. Math. Comput.*, 79:173–188.

Cherkasov e Yurkin(2017) V. D. Cherkasov e Y. V. Yurkin. Damping properties of sandwich beams with viscoelastic layer. *IOP*, páginas 1–6.

COSTA(2006) S. N. J. COSTA, 2006. *O Modelo de Timoshenko em Vigas Elásticas, Estruturas Offshore e Nanotubos de Carbono Através da Resposta Fundamental de Valor Inicial*. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Ditaranto(1965) R.A. Ditaranto. Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite-length beams. *Journal Applied Mechanical*, 32:881–886.

Eloy(2014) F. S. Eloy. Análise do comportamento dinâmico de uma viga escalonada sobre apoios elásticos variáveis usando matrerial compósito. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá,MG.

Inman(2001) D. J. Inman. *Engineering Vibration, (2th Edition)*. Prentice Hall, New Jersey,USA. ISBN 0130174483.

Izabela(2014) Z. Izabela. Solution of differential eqution for the euler-bernoulli beam. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 13:157–162.

Jang e Chen(2001) M.J. Jang e C.L. Chen. Two- dimensional differential transform for partial differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 121:261–270.

Johnson *et al.***(1981)** CD. Johnson, DA. Kienholz, e LC. Rogers. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers. *Shock Vib Bull*, 51(1):71–81.

Jones(1999) R. M. Jones. *Mechanics of Composite Materials,(2th Edition)*. Taylor e Francis, Philadelphia. ISBN 1-56032-717-X.

Kangalgil e Fatma(2009) OF. Kangalgil e Ayaz. OF. Fatma. Solitary wave solutions for the kdv and mkdv equations by differential transform method. *ELSEVIER*, 41:464–472.

Kerwin(1959) E.M. Kerwin. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer. *Journal Acoust Societ*, 31:952–962.

Keykubat(2020) A. A. Keykubat. An efficient method for the plane vibration analysis of composite sandwich beam with an orthotropic core. *Cumhuriyet Science Journal*, 10:521–526.

Kittisak(2012) C. Kittisak, S. Jarruwat. Application of the differential transformation method to vibration analysis of stepped beams with elastically constrained ends. *Journal of Vibration and Control*, páginas 1–14.

Lall *et al.***(1988)** AK. Lall, Asnani. NT, e BC. Nakra. Damping analysis of partially covered sandwich beams. *J Sound Vib*, 123(2):247?59.

Loja(2017) M. A. R. Loja. Dynamic response of soft core sandwich beams with metal-graphene nanocomposite skins. *Shock and Vibration*, 2017:1–17.

Magesh e Saravanan(2017) N. Magesh e A. Saravanan. Generalized differential transform method for solving rlc electric circuit of non-integer order. *De Gruyter*, páginas 127–135.

Mageshwaran e Manoharan(2018) S. Mageshwaran e R. Manoharan. A numerical investigation on vibration analysis of the laminated composite sandwich beam. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 118:4139–4147.

Malik e Dang(1998) M. Malik e H.H. Dang. Vibration analysis of continuous systems by differential transformation. *Applied Mathematics and Computation*, 96:17–26.

Mead e Markust(1969) D. Mead e S. Markust. The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal Sound Vibration*, 10:163–175.

Mei(2008) C. Mei. Application of differential transformation technique to free vibration analysis of a centrifugally stiffened beam. *Computers and Structures*, 86:1280–1284.

Merdan e Anaç(2019) M. Merdan e H. Anaç. Solving of some random partial differential equations by using differential transformation method and laplace- padé method. *Dergipark*, 9:108–118.

Mohammad(2013) R. Mohammad, A. Ali Amin. Analysis of vibration of a pipeline supported on elastic soil using differential transform method. *American Journal of Mechanical Engineering*, 1:96–102.

Najafgholipour e Soodbakhshb(2016) M. A. Najafgholipour e Navid. Soodbakhshb. Modified differential transform method for solving vibration equations of mdof systems. *Civil Engineering Journal*, 2:1–17.

Ndii e Anggriani(2018) M. Ndii e N. Anggriani. Comparison of the differential transformation method and non standard finite difference scheme for solving plant disease mathematical model. *Bio Mathematical Society*, 1:110–121.

Perdigão(2010) L. F. S. Perdigão. Análise estática de vigas em materiais compósitos usando computacão simbólica. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Meca?nica, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Lisboa.

Rajasekaran(2008) S. Rajasekaran. Buckling of fully and partially embedded non-prismatic columns using differential quadrature and differential transformation methods. *Structural Engineering and Mechanics*, 28:221–238.

Rao(2008) Rao. *Vibrações Mecânicas*. Pearson Prentice Hall, Av Ermano Marchetti, 1435, São Paulo, SP, Brasil. ISBN 978-85-7605-200-5. Tradução Arlete Simille, Revisor Técnico José Juliano de Lima Junior.

Rao(1992) J.S. Rao. Advanced theory of vibration. *New York*, páginas 264–265.

Reza(2008) A. S.Ahamad Reza. Application of differential transform method in free vibration analysis of rotating non-prismatic beams. *World Applied Sciences Journal*, 5:441–448.

Shi e Hua(2006) YM. Shi e HX. Hua. Material parameter identification of sandwich beams by an inverse method. *J Sound Vib*, 290(3-5):1234–55.

Soltanalizadeh(2011) B. Soltanalizadeh. Differential transformation method for solving one-space-dimensional telegraph equation. *Scielo*, 30:639–653.

Subramanian(2006) P. Subramanian. Dynamic analysis of laminated composite beams using higher order theories and finite elements. *Composite Structures*, 73:342–353.

Tang e Lumsdaine(2008) SJ. Tang e A. Lumsdaine. Analysis of constrained damping layers, including normal-strain effects. *AIAA J*, 46(12):2998?3011.

Tita(1999) V. Tita. Análise dinâmica teórica e experimental de vigas fabricadas a partir de materiais compósitos poliméricos reforçados. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos.

Tomas(1992) O. Tomas, L. Niels. Modelling and identification of viscoelastic properties of vibrating sandwich beams. *Composite Structure*, 22:15–31.

Torabi(2012) K. J. Nafar Dastgerdi Torabi. Solution of free vibration equations of euler-bernoulli cracked beams by using differential transform method. *Trans Tech Publications*, 110-116:4532–4536.

Wattanasakulpong e Hoffman(2010) D. W. Kelly Wattanasakulpong, N. B. G. Prusty e M. Hoffman. A theoretical investigation on the free vibration of functionally graded beams. *Conference on Computational Structures Technology, Valencia*, páginas 14–17.

Yesilce(2010) Y. Yesilce. Differential transform method for free vibration analysis of a moving beam. *Structural Engineering and Mechanics*, 35:645–658.

Zhifeng *et al.***(2013)** L. Zhifeng, Y. Yunyao, W. Feng, Z. Yongsheng, e Ligang. Study on modified differential transform method for free vibration analysis of uniform euler-bernoulli beam. *Structural Engineering and Mechanics*, 48:697–709.

Zhou(1986) J.K. Zhou. Differential transformation and its application for electrical circuits. *Huazhong University Press, Wuhan, 1986 (in Chinese).*

Çatal(2006) Seval. Çatal. Analysis of free vibration of beam on elastic soil using differential transform method. *Structural Engineering and Mechanics*, 24:51–62.

Apêndice A

Método da Transformada Diferencial Aplicado a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli

Nesse apêndice aplicou-se o método da transformada diferencial para solução problemas de vibrações mecânicas, por meio do equacionamento dinâmico da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. O método da transformada diferencial foi aplicado em todas as condições de contorno e na equação de movimento de movimento das vigas, possibilitando assim representar todas as condições clássicas de apoio, juntamento com as frequências naturais e os modos de vibração pertinentes as condições de contorno clássicas.

O início desta análise ocorreu a partir da equação de movimento de viga, proveniente da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, assim sendo:

Equação (2.5), referente a equação de movimento do sistema vibratório, na forma adimensional obtém-se a Equação (A.1).

$$\frac{\partial^4 Y(\varphi)}{\partial \varphi^4} - \lambda^2 Y(\varphi) = 0 \tag{A.1}$$

Escolhendo as condições de contorno para a viga representando a sua extremidade esquerda $x = 0$, tem-se:

Deflexão	Inclinação
$y(0) = 0$	$\left.\frac{dy(x)}{dx}\right\|_{x=0} = 0$

Escolhendo as condições de contorno para a viga representando a sua extremidade direita $x = 1$, tem-se:

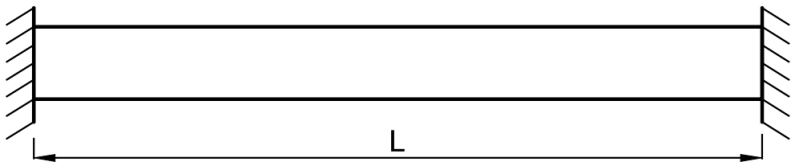

Figura A.1: Viga bi-engastada.

Deflexão	Inclinação
$y(0) = 0$	$\left.\frac{dy(x)}{dx}\right\|_{x=1} = 0$

A partir das definições e propriedades do método da transformada diferencial de acordo com a tabela 1, aplicou-se o método da transformada diferencial na Equação (3.4), que corresponde a equação de movimento, da teoria de vigas de Euler-Bernoulli obtém-se a Equação (A.2).

$$(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)Y(K+4) - !\,K\lambda^2 Y(K) = 0 \tag{A.2}$$

Rescrevendo a Equação A.2, para uma melhor disposição temos a Equação (A.3):

$$Y(K+4) = \frac{!\,K\lambda^2 Y(K)}{(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)Y(K+4)} = 0 \tag{A.3}$$

Combinando a Equação (A.3), com as propriedades das condições de contorno do método da transformada diferencial, de acordo com a tabela 2 das condições de contorno. Como exemplo considerou uma viga com a condição clássica de contorno, bi-engastada (C-C), de acordo com a Figura B.1.

Considerando as condições de contorno da viga bi-engastada em sua extremidade esquerda em $x = 0$, tem-se:

Deflexão	Inclinação
$y(0) = 0$	$\left.\frac{dy(x)}{dx}\right\|_{x=0} = 0$

Aplicando o método da transformada diferencial nas condições de contorno da viga bi-engastada na extremidade esquerda em $x = 0$, tem-se:

Deflexão	Inclinação
$Y(0) = 0$	$Y(1) = 0$

Considerando as condições de contorno da viga bi-engastada em sua extremidade direita

em $x = 1$, tem-se:

Deflexão	Inclinação
$y(x)\|_{x=1}$	$\left.\frac{dy(x)}{dx}\right\|_{x=1} = 0$

Aplicando o método da transformada diferencial nas condições de contorno da viga bi-engastada na extremidade direita em $x = 1$, tem-se as Equações (A.4) e (A.5):

$$\sum_{K=0}^{\infty} Y(K) = 0 \tag{A.4}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} KY(K) = 0 \tag{A.5}$$

Os valores de $Y(2)$ e $Y(3)$ são respectivamente: $Y(2) = c_0$ e $Y(3) = c_1$.
Substituindo as condições de contorno na Equação de movimento (A.3) para o método da transformada diferencial, variando o valor de K de 0 até 10, obteremos a seguinte tabela.

Tabela A.1: Substituição das condições de contorno.

Condição de contorno	Resultado
$Y(4)$	0
$Y(5)$	0
$Y(6)$	$\frac{\lambda^2 c}{360}$
$Y(7)$	$\frac{\lambda^2 d}{840}$
$Y(8)$	0
$Y(9)$	0
$Y(10)$	$\frac{\lambda^4 c}{1814400}$
$Y(11)$	$\frac{\lambda^4 d}{6652800}$

Generalizando os resultados encontrados na tabela obtêm-se as Equações (A.6) a (A.9):

$$Y(4K) = 0 \qquad K = 0, 1, 2..., \tag{A.6}$$

$$Y(4K + 1) = 0 \qquad K = 0, 1, 2..., \tag{A.7}$$

$$Y(4K+2) = \frac{2!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K+2)!} \qquad K = 1, 2..., \tag{A.8}$$

$$Y(4K+3) = \frac{3!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K+3)!} \qquad K = 1, 2..., \tag{A.9}$$

Substituindo as Equações (A.8) e (A.9), generalizadas nas Equações (A.4) e (A.5), importante salientar que vamos substituir apenas as condições de contorno generalizadas que forem diferentes de zero.

$$\begin{aligned} &\sum_{K=0}^{\infty} Y(K) = 0 \\ &Y(4K+2) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{2!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K+2)!} \\ &Y(4K+3) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K+3)!} \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{K=0}^{\infty} KY(K) = 0 \\ &Y(4K+2) = (4K+2) \sum_{K=0}^{\infty} \frac{2!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K+2)(4K+1)!} \Rightarrow Y(4K+2) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{2!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K+1)!} \\ &Y(4K+3) = (4K+3) \sum_{K=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K+3)(4K+2)!} \Rightarrow Y(4K+3) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K+2)!} \end{aligned} \tag{A.11}$$

Após substituirmos as equações generalizadas nas equações de contorno, vamos reescreve-las:

$$\sum_{K=0}^{\infty} Y(K) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{2!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K+2)!} + \sum_{K=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K+3)!} \tag{A.12}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} KY(K) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{2!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K+1)!} + \sum_{K=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K+2)!} \tag{A.13}$$

Das Equações (A.12) e (A.13), podemos obter:

$$2!\,c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!} + 3!\,c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} = 0 \tag{A.14}$$

$$\frac{c_1}{c_0} = 3 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} / \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!} = 0 \tag{A.15}$$

$$\frac{c_1}{c_0} = 3 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!} / \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} = 0 \tag{A.16}$$

Onde:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!} \qquad e_{12} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} \\ e_{21} &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} \qquad e_{22} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!} \end{aligned} \tag{A.17}$$

Sabendo-se que:

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{A.18}$$

Solucionando o determinante do sistema referente a Equação (A.18), conseguimos determinar as frequências naturais da viga, onde a solução fica representada da seguinte maneira na Equação (A.19):

$$f^K(\lambda) = \left(\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!} \right) - \left(\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} \right) \tag{A.19}$$

Após obtermos as frequências naturais do sistema vamos determinar os modos de vibração, para que isso seja possível, vamos substituir as Equações (A.6),(A.7),(A.8) e(A.9) generalizadas na Equação (E.5).

A Equação (E.5) trata-se da transformada inversa do método da transformada diferencial, com isso tem-se a Equação (A.20):

$$\begin{bmatrix} x^0Y(0) \\ x^4Y(4) \\ x^8Y(8) \end{bmatrix} = Y(4K) \begin{bmatrix} x^1Y(1) \\ x^5Y(5) \\ x^9Y(9) \end{bmatrix} = Y(4K+1)$$
$$\begin{bmatrix} x^2Y(2) \\ x^6Y(6) \\ x^{10}Y(10) \end{bmatrix} = Y(4K+2) \begin{bmatrix} x^3Y(3) \\ x^7Y(7) \\ x^{11}Y(11) \end{bmatrix} = Y(4K+3) \tag{A.20}$$

Com isso temos a Equação (A.21):

$$y(x) = \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K)x^{(4K)} + \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+1)x^{(4K+1)}$$
$$+ \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+2)x^{(4K+2)} + \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+3)x^{(4K+3)} \tag{A.21}$$

Para que possamos dar sequência para encontrarmos o equacionamento da forma modal, devemos nos atentar que a solução do sistema da Equação (B.18), possui um determinante nulo, com isso devemos atribuir um valor para uma das variáveis do sistema, adotaremos para a variável c_0 o valor igual a 1, e colocamos a variávelc_1 em função de variável c_0 e tem-se a Equação (A.22):

$$c_1 = -\frac{e_{11}}{e_{22}}c_0 \tag{A.22}$$

Em sequência damos continuidade para determinarmos o equacionamento da forma modal e encontramos a Equação (A.23):

$$y(x) = c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!}x^{(4K+2)} + c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}x^{(4K+3)} \tag{A.23}$$

Com isso devemos substituir a Equação (A.22), na Equação (A.23) e multiplicarmos toda a equação por c_0, com isso determinaremos a forma modal do sistema dada na Equação (A.24)

$$y(x) = c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!}x^{(4K+2)} - c_0 \frac{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!}}{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}} c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}x^{(4K+3)} \tag{A.24}$$

Sabendo-se que a constante c_0, possui o valor unitário igual a 1, a forma modal final fica como a Equação (A.25):

$$y(x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!} x^{(4K+2)} - \frac{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!}}{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} x^{(4K+3)} \tag{A.25}$$

O início desta análise ocorreu a partir da equação de movimento de viga, proveniente da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, assim sendo:
Equação (2.5), referente a equação de movimento do sistema vibratório, na forma adimensional com a Equação (A.26).

$$\frac{\partial^4 Y(\varphi)}{\partial \varphi^4} - \lambda^2 Y(\varphi) = 0 \tag{A.26}$$

Escolhendo as condições de contorno para a viga representando a sua extremidade esquerda $x = 0$, tem-se:

Deflexão	Momento Fletor
$y(0) = 0$	$\left.\frac{d^2 y(x)}{dx^2}\right\|_{x=0} = 0$

Escolhendo as condições de contorno para a viga representando a sua extremidade direita $x = 1$, tem-se:

Deflexão	Inclinação
$y(0) = 0$	$\left.\frac{d^2 y(x)}{dx^2}\right\|_{x=1} = 0$

A partir das definições e propriedades do método da transformada diferencial de acordo com a tabela 1, aplicou-se o método da transformada diferencial na Equação (A.26), que corresponde a Equação (A.27) de movimento, da teoria de vigas de Euler-Bernoulli.

$$(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)Y(K+4) - !\,K\lambda^2 Y(K) = 0 \tag{A.27}$$

Rescrevendo a Equação (A.27), para uma melhor disposição tem-se a Equação (A.28):

$$Y(K+4) = \frac{!\,K\lambda^2 Y(K)}{(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)Y(K+4)} = 0 \tag{A.28}$$

Combinando a Equação (A.28), com as propriedades das condições de contorno do método da

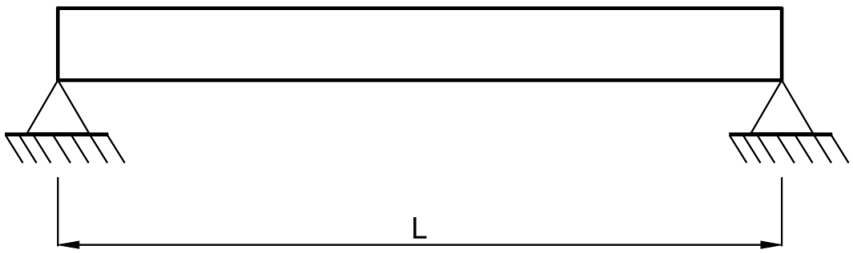

Figura A.2: Viga bi-apoiada.

transformada diferencial, de acordo com a tabela 2 das condições de contorno. Como exemplo considerou uma viga com a condição clássica de contorno, bi-apoiada (S-S), de acordo com a Figura A.2.

Considerando as condições de contorno da viga bi-apoiada em sua extremidade esquerda em $x = 0$, tem-se:

Deflexão	Inclinação
$y(0) = 0$	$\left.\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right\|_{x=0} = 0$

Aplicando o método da transformada diferencial nas condições de contorno da viga bi-apoiada na extremidade esquerda em $x = 0$, tem-se:

Deflexão	Inclinação
$Y(0) = 0$	$Y(2) = 0$

Considerando as condições de contorno da viga bi-apoiada em sua extremidade direita em $x = 1$, tem-se:

Deflexão	Inclinação
$y(x)\|_{x=1}$	$\left.\frac{dy(x)}{dx}\right\|_{x=1} = 0$

Aplicando o método da transformada diferencial nas condições de contorno da viga bi-apoiada na extremidade direita em $x = 1$, tem-se obtêm-se as Equações (A.29) e (A.30):

$$\sum_{K=0}^{\infty} Y(K) = 0 \tag{A.29}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)Y(K) = 0 \tag{A.30}$$

Os valores de $Y(1)$ e $Y(3)$ são respectivamente: $Y(1) = c_1$ e $Y(3) = c_0$.

Substituindo as condições de contorno na Equação de movimento (A.28) para o método da transformada diferencial, variando o valor de K de 0 até 10, obteremos a seguinte tabela.
Generalizando os resultados encontrados na tabela encontra-se as Equações (A.31) a (A.34):

Tabela A.2: Substituição das condições de contorno.

Condição de contorno	Resultado
$Y(4)$	0
$Y(5)$	$\frac{\lambda^2 c_1}{120}$
$Y(6)$	0
$Y(7)$	$\frac{\lambda^2 c_0}{840}$
$Y(8)$	0
$Y(9)$	$\frac{\lambda^2 c_1}{362880}$
$Y(10)$	0
$Y(11)$	$\frac{\lambda^2 c_0}{39916800}$

$$Y(4K) = 0 \qquad K = 0, 1, 2..., \tag{A.31}$$

$$Y(4K+1) = \frac{1!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K+1)!} \qquad K = 1, 2..., \tag{A.32}$$

$$Y(4K+2) = 0 \qquad K = 0, 1, 2..., \tag{A.33}$$

$$Y(4K+3) = \frac{3!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K+3)!} \qquad K = 1, 2..., \tag{A.34}$$

Substituindo as Equações (A.32) e (A.34), generalizadas nas Equações (A.29) e (A.30), importante salientar que vamos substituir apenas as condições de contorno generalizadas que forem diferentes de zero, e tem-se obtêm-se as Equações (A.35) e (A.36)

$$\begin{aligned} &\sum_{K=0}^{\infty} Y(K) = 0 \\ &Y(4K+1) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K+1)!} \\ &Y(4K+3) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K+3)!} \end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)Y(K) = 0$$

$$Y(4K+1) = (4K+1)(4K)\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1!\,\lambda^{2K}c_1}{(4K+1)(4K)(4K-1)!} \Rightarrow$$

$$Y(4K+1) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1!\,\lambda^{2K}c_1}{(4K-1)!}$$

$$Y(4K+3) = (4K+3)(4K+2)\sum_{K=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2K}c_0}{(4K+3)(4K+2)(4K+1)!} \Rightarrow$$

$$Y(4K+3) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2K}c_0}{(4K+1)!} \tag{A.36}$$

Após substituirmos as equações generalizadas nas equações de contorno, tem-se as Equações (A.37) e (A.38):

$$\sum_{K=0}^{\infty} Y(K) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1!\,\lambda^{2K}c_1}{(4K+1)!} + \sum_{K=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2K}c_0}{(4K+3)!} \tag{A.37}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)Y(K) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1!\,\lambda^{2K}c_1}{(4K-1)!} + \sum_{K=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2K}c_0}{(4K+1)!} \tag{A.38}$$

Realizando a separação de variáveis, das Equações (A.37) e (A.38), podemos obter as Equações (A.39) a (A.41):

$$1!\,c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} + 3!\,c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} = 0 \tag{A.39}$$

$$\frac{c_0}{c_1} = 6\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} \Big/ \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} = 0 \tag{A.40}$$

$$\frac{c_0}{c_1} = 6\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} \Big/ \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!} = 0 \tag{A.41}$$

Onde tem-se a Equação (A.42):

$$\begin{aligned} e_{11} &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} \qquad & e_{12} &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} \\ e_{21} &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!} \qquad & e_{22} &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} \end{aligned} \tag{A.42}$$

Sabendo-se que a Equação (A.43):

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{A.43}$$

Solucionando o determinante do sistema referente a Equação (A.43), conseguimos determinar as frequências naturais da viga, onde a solução fica representada da seguinte maneira na Equação (A.44):

$$f^K(\lambda) = \left(\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} \right) - \left(\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} \right) \tag{A.44}$$

Após obtermos as frequências naturais do sistema vamos determinar os modos de vibração, para que isso seja possível, vamos substituir as Equações (A.32),(A.34) na Equação (E.5) generalizadas.

A Equação (E.5) trata-se da transformada inversa do método da transformada diferencial, com isso temos a Equação (A.45):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^0Y(0) \\ x^4Y(4) \\ x^8Y(8) \end{bmatrix} &= Y(4K) \begin{bmatrix} x^1Y(1) \\ x^5Y(5) \\ x^9Y(9) \end{bmatrix} = Y(4K+1) \\ \begin{bmatrix} x^2Y(2) \\ x^6Y(6) \\ x^{10}Y(10) \end{bmatrix} &= Y(4K+2) \begin{bmatrix} x^3Y(3) \\ x^7Y(7) \\ x^{11}Y(11) \end{bmatrix} = Y(4K+3) \end{aligned} \tag{A.45}$$

Com isso temos a Equação (A.46):

$$\begin{aligned} y(x) = &\sum_{K=0}^{\infty} Y(4K)x^{(4K)} + \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+1)x^{(4K+1)} \\ &+ \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+2)x^{(4K+2)} + \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+3)x^{(4K+3)} \end{aligned} \tag{A.46}$$

Para que possamos dar sequencia para encontrarmos o equacionamento da forma modal, devemos nos atentar que a solução do sistema da Equação (A.43), possui um determinante nulo, com isso devemos atribuir um valor para uma das variáveis do sistema, adotaremos para a variável c_1 o valor igual a 1, e colocamos a variávelc_0 em função de variável c_1 obtêm-se a Equação (A.47):

$$c_0 = -\frac{e_{11}}{e_{22}} c_1 \tag{A.47}$$

Em sequência damos continuidade para determinarmos o equacionamento da forma modal tem-se a Equação (A.48):

$$y(x) = c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} x^{(4K+1)} + c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} x^{(4K+3)} \tag{A.48}$$

Com isso devemos substituir a Equação (A.47), na Equação (A.48) e multiplicarmos toda a equação por c_1, com isso determinaremos a forma modal do sistema na Equação (A.49):

$$y(x) = c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} x^{(4K+1)} - c_1 \frac{\sum_{K=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!}}{\sum_{K=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}} c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} x^{(4K+3)} \tag{A.49}$$

Sabendo-se que a constante c_1, possui o valor unitário igual a 1, a forma modal final fica como a Equação (A.50):

$$y(x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} x^{(4K+1)} - \frac{\sum_{K=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!}}{\sum_{K=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} x^{(4K+3)} \tag{A.50}$$

O início desta análise ocorreu a partir da equação de movimento de viga, proveniente da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, assim sendo:
Equação (2.5), referente a equação de movimento do sistema vibratório, na forma adimensional têm-se a Equação (A.51):

$$\frac{\partial^4 Y(\varphi)}{\partial \varphi^4} - \lambda^2 Y(\varphi) = 0 \tag{A.51}$$

Escolhendo as condições de contorno para a viga representando a sua extremidade esquerda $x = 0$, tem-se:

Momento Fletor	Força Cisalhante
$\dfrac{d^2 y(x)}{dx^2}$	$\left.\dfrac{d^3 y(x)}{dx^3}\right\|_{x=0} = 0$

Escolhendo as condições de contorno para a viga representando a sua extremidade direita $x = 1$, tem-se:

Figura A.3: Viga livre-livre.

Momento Fletor	Força Cisalhante
$\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$	$\left.\dfrac{d^3y(x)}{dx^3}\right\|_{x=1} = 0$

A partir das definições e propriedades do método da transformada diferencial de acordo com a tabela 1, aplicou-se o método da transformada diferencial na Equação (B.26), que corresponde a Equação (A.52) de movimento, da teoria de vigas de Euler-Bernoulli.

$$(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)Y(K+4) - !\,K\lambda^2 Y(K) = 0 \tag{A.52}$$

Rescrevendo a Equação (A.52), para uma melhor disposição temos a Equação (A.53):

$$Y(K+4) = \frac{!\,K\lambda^2 Y(K)}{(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)Y(K+4)} = 0 \tag{A.53}$$

Combinando a Equação (A.53), com as propriedades das condições de contorno do método da transformada diferencial, de acordo com a tabela 2 das condições de contorno. Como exemplo considerou uma viga com a condição clássica de contorno, livre-livre (F-F), de acordo com a Figura A.3.

Considerando as condições de contorno da viga livre-livre em sua extremidade esquerda em $x = 0$, tem-se:

Momento Fletor	Força Cisalhante
$\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$	$\left.\dfrac{d^3y(x)}{dx^3}\right\|_{x=0} = 0$

Aplicando o método da transformada diferencial nas condições de contorno da viga livre-livre na extremidade esquerda em $x = 0$, tem-se:

Deflexão	Inclinação
$Y(2) = 0$	$Y(3) = 0$

Considerando as condições de contorno da viga livre-livre em sua extremidade direita em $x = 1$, tem-se:

Momento Fletor	Força Cisalhante
$\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$	$\left.\dfrac{d^3y(x)}{dx^3}\right\|_{x=1} = 0$

Aplicando o método da transformada diferencial nas condições de contorno da viga livre-livre na extremidade direita em $x = 1$, tem-se as Equações (A.54) e (A.55):

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)Y(K) = 0 \tag{A.54}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)(K-2)Y(K) = 0 \tag{A.55}$$

Os valores de $Y(0)$ e $Y(1)$ são respectivamente: $Y(0) = c_0$ e $Y(3) = c_1$.
Substituindo as condições de contorno na Equação de movimento (A.53) para o método da transformada diferencial, variando o valor de K de 0 até 10, obteremos a seguinte tabela.
Generalizando os resultados encontrados na tabela obtêm-se as Equações (A.56) a (A.59):

Tabela A.3: Substituição das condições de contorno.

Condição de contorno	Resultado
$Y(4)$	$\frac{\lambda^2 c_0}{24}$
$Y(5)$	$\frac{\lambda^2 c_1}{120}$
$Y(6)$	0
$Y(7)$	0
$Y(8)$	$\frac{\lambda^4 c_0}{40320}$
$Y(9)$	$\frac{\lambda^4 c_1}{362880}$
$Y(10)$	0
$Y(11)$	0

$$Y(4K) = \frac{1!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K)!} \qquad K = 1, 2..., \tag{A.56}$$

$$Y(4K+1) = \frac{3!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K+1)!} \qquad K = 1, 2..., \tag{A.57}$$

$$Y(4K+2) = 0 \qquad K = 0, 1, 2..., \tag{A.58}$$

$$Y(4K+3)=0 \qquad K=0,1,2...,$$ (A.59)

Substituindo as Equações (A.56) e (A.57), generalizadas nas Equações (A.54) e (A.55), importante salientar que vamos substituir apenas as condições de contorno generalizadas que forem diferentes de zero e obtêm-se as Equações (A.60) e (A.61).

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)Y(K)=0$$

$$Y(4k)=(4K)(4K-1)\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}c_0}{(4K)(4K-1)(4K-2)!}\Rightarrow$$

$$Y(4k)=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}c_0}{(4K-2)!}$$

$$Y(4K+1)=(4K+1)(4K)\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}c_1}{(4K+1)(4K)(4K-1)!}\Rightarrow$$

$$Y(4k+1)=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}c_1}{(4K-1)!}$$ (A.60)

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)(K-2)Y(K)=0$$

$$Y(4K)=(4K)(4K-1)(4K-2)\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}c_0}{(4K)(4K-1)(4K-2)(4K-3)!}\Rightarrow$$

$$Y(4K)=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}c_0}{(4K-3)!}$$

$$Y(4K+1)=(4K+1)(4K)(4K-1)\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}c_1}{(4K+1)(4K)(4K-1)(4K-2)!}\Rightarrow$$

$$Y(4K+1)=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}c_1}{(4K-2)!}$$ (A.61)

Após substituirmos as equações generalizadas nas equações de contorno, vamos reescreve-las as Equações (A.62) e (A.63):

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)Y(K)=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}c_0}{(4K-2)!}+\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}c_1}{(4K-1)!}$$ (A.62)

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)(K-2)Y(K) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_0}{(4K-3)!} + \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_1}{(4K-2)!} \tag{A.63}$$

Realizando a separação de variáveis, das Equações (A.62) e (A.63), podemos obter obtêm-se as Equações (A.64) a (A.66):

$$c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-2)!} + c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!} = 0 \tag{A.64}$$

$$\frac{c_1}{c_0} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!} / \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-2)!} = 0 \tag{A.65}$$

$$\frac{c_1}{c_0} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-2)!} / \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-3)!} = 0 \tag{A.66}$$

Onde obtêm-se a Equação (A.67):

$$\begin{aligned} e_{11} &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-2)!} \qquad e_{12} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!} \\ e_{21} &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-3)!} \qquad e_{22} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-2)!} \end{aligned} \tag{A.67}$$

Sabendo-se que a Equação (A.68):

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{A.68}$$

Solucionando o determinante do sistema referente a Equação (A.68), conseguimos determinar as frequências naturais da viga, onde a solução fica representada na Equação (A.69) da seguinte maneira:

$$f^K(\lambda) = \left(\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-2)!} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-2)!} \right) - \left(\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-3)!} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!} \right) \tag{A.69}$$

Após obtermos as frequências naturais do sistema vamos determinar os modos de vibração, para que isso seja possível, vamos substituir as Equações (A.56),(A.57) na Equação (E.5) generalizadas.

A Equação (E.5) trata-se da transformada inversa do método da transformada diferencial, com

isso temos a Equação (A.70):

$$\begin{bmatrix} x^0Y(0) \\ x^4Y(4) \\ x^8Y(8) \end{bmatrix} = Y(4K) \begin{bmatrix} x^1Y(1) \\ x^5Y(5) \\ x^9Y(9) \end{bmatrix} = Y(4K+1)$$
$$\begin{bmatrix} x^2Y(2) \\ x^6Y(6) \\ x^{10}Y(10) \end{bmatrix} = Y(4K+2) \begin{bmatrix} x^3Y(3) \\ x^7Y(7) \\ x^{11}Y(11) \end{bmatrix} = Y(4K+3) \tag{A.70}$$

Com isso temos que a Equação (A.71):

$$y(x) = \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K)x^{(4K)} + \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+1)x^{(4K+1)}$$
$$+ \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+2)x^{(4K+2)} + \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+3)x^{(4K+3)} \tag{A.71}$$

Para que possamos dar sequencia para encontrarmos o equacionamento da forma modal, devemos nos atentar que a solução do sistema da Equação (A.68), possui um determinante nulo, com isso devemos atribuir um valor para uma das variáveis do sistema, adotaremos para a variável c_0 o valor igual a 1, e colocamos a variávelc_1 em função de variável c_0 e obtêm-se a Equação (A.72):

$$c_1 = -\frac{e_{11}}{e_{22}}c_0 \tag{A.72}$$

Em sequência damos continuidade para determinarmos o equacionamento da forma modal e tem-se a Equação (A.73):

$$y(x) = c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K)!}x^{(4K)} + c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!}x^{(4K+1)} \tag{A.73}$$

Com isso devemos substituir a Equação (A.72), na Equação (A.73) e multiplicarmos toda a equação por c_0, com isso determinaremos a forma modal do sistema e obtermos a Equação (A.74):

$$y(x) = c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K)!}x^{(4K)} - c_0 \frac{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-2)!}}{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!}} c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!}x^{(4K+1)} \tag{A.74}$$

Sabendo-se que a constante c_0, possui o valor unitário igual a 1, a forma modal final fica como a Equação (A.75):

$$y(x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K)!} x^{(4K)} - \frac{\sum_{K=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^{2K}}{(4K-2)!}}{\sum_{K=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!}} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} x^{(4K+1)} \tag{A.75}$$

O início desta análise ocorreu a partir da equação de movimento de viga, proveniente da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, assim sendo:
Equação (2.5), referente a equação de movimento do sistema vibratório, na forma adimensional e obtêm-se a Equação (A.76).

$$\frac{\partial^4 Y(\varphi)}{\partial \varphi^4} - \lambda^2 Y(\varphi) = 0 \tag{A.76}$$

Escolhendo as condições de contorno para a viga representando a sua extremidade esquerda $x = 0$, tem-se:

Deflexão	Momento Fletor
$y(x) = 0$	$\left.\dfrac{d^2 y(x)}{dx^2}\right\|_{x=0} = 0$

Escolhendo as condições de contorno para a viga representando a sua extremidade direita $x = 1$, tem-se:

Momento Fletor	Força Cisalhante
$\dfrac{d^2 y(x)}{dx^2} = 0$	$\left.\dfrac{d^3 y(x)}{dx^3}\right\|_{x=1} = 0$

A partir das definições e propriedades do método da transformada diferencial de acordo com a tabela 1, aplicou-se o método da transformada diferencial na Equação (A.76), que corresponde a Equação (A.77) de movimento, da teoria de vigas de Euler-Bernoulli.

$$(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)Y(K+4) - !\, K\lambda^2 Y(K) = 0 \tag{A.77}$$

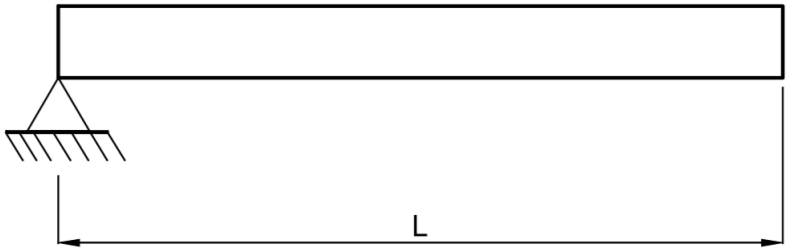

Figura A.4: Viga apoiada livre.

Rescrevendo a Equação (A.77), para uma melhor disposição temos a Equação (A.78):

$$Y(K+4) = \frac{!\,K\lambda^2 Y(K)}{(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)Y(K+4)} = 0 \tag{A.78}$$

Combinando a Equação (A.78), com as propriedades das condições de contorno do método da transformada diferencial, de acordo com a tabela 2 das condições de contorno. Como exemplo considerou uma viga com a condição clássica de contorno, apoiada-livre (S-F), de acordo com a Figura A.4.

Fazer desenho dessa viga Considerando as condições de contorno da viga apoiada-livre em sua extremidade esquerda em $x = 0$, tem-se:

Deflexão	Momento Fletor
$y(x) = 0$	$\left.\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right\|_{x=0} = 0$

Aplicando o método da transformada diferencial nas condições de contorno da viga apoiada-livre na extremidade esquerda em $x = 0$, tem-se:

Deflexão	Inclinação
$Y(0) = 0$	$Y(2) = 0$

Considerando as condições de contorno da viga livre-livre em sua extremidade direita em $x = 1$, tem-se:

Momento Fletor	Força Cisalhante
$\frac{d^2y(x)}{dx^2}$	$\left.\frac{d^3y(x)}{dx^3}\right\|_{x=1} = 0$

Aplicando o método da transformada diferencial nas condições de contorno da viga livre-livre na extremidade direita em $x = 1$, tem-se as Equações (A.79) e (A.80):

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)Y(K) = 0 \tag{A.79}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)(K-2)Y(K) = 0 \tag{A.80}$$

Os valores de $Y(1)$ e $Y(3)$ são respectivamente: $Y(1) = c_1$ e $Y(3) = c_0$.
Substituindo as condições de contorno na Equação de movimento (A.78) para o método da transformada diferencial, variando o valor de K de 0 até 10, obteremos a seguinte tabela.
Generalizando os resultados encontrados na tabela tem-se as Equações (A.81) a (A.84):

Tabela A.4: Substituição das condições de contorno.

Condição de contorno	Resultado
$Y(4)$	0
$Y(5)$	$\frac{1!\lambda^2 c_1}{120}$
$Y(6)$	0
$Y(7)$	$\frac{3!\lambda^2 c_0}{5040}$
$Y(8)$	0
$Y(9)$	$\frac{\lambda^4 c_1}{362880}$
$Y(10)$	0
$Y(11)$	$\frac{\lambda^4 c_0}{39916800}$

$$Y(4K) = 0 \qquad K = 0, 1, 2..., \tag{A.81}$$

$$Y(4K+1) = \frac{1!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K+1)!} \qquad K = 1, 2..., \tag{A.82}$$

$$Y(4K+2) = 0 \qquad K = 0, 1, 2..., \tag{A.83}$$

$$Y(4K+3) = \frac{3!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K+3)!} \qquad K = 1, 2..., \tag{A.84}$$

Substituindo as Equações (A.82) e (A.84), generalizadas nas Equações (**??**) e (A.80), importante salientar que vamos substituir apenas as condições de contorno generalizadas que forem

diferentes de zero, obtêm-se as Equações (A.85) e (A.86).

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)Y(K) = 0$$

$$Y(4K+1) = (4K+1)(4K)\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_1}{(4K+1)(4K)(4K-1)!} \Rightarrow$$

$$Y(4K+1) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_1}{(4K-1)!}$$

$$Y(4K+3) = (4K+3)(4K+2)\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_0}{(4K+3)(4K+2)(4K+1)!} \Rightarrow$$

$$Y(4K+3) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_0}{(4K+1)!} \tag{A.85}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)(K-2)Y(K) = 0$$

$$Y(4K+1) = (4K+1)(4K)(4K-1)\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_1}{(4K+1)(4K)(4K-1)(4K-2)!} \Rightarrow$$

$$Y(4K+1) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_1}{(4K-2)!}$$

$$Y(4K+3) = (4K+3)(4K+2)(4K+1)\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_0}{(4K+3)(4K+2)(4K+1)(4K)!} \Rightarrow$$

$$Y(4K+3) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_0}{(4K)!} \tag{A.86}$$

Após substituirmos as equações generalizadas nas equações de contorno, vamos reescreve-las e obter as Equações (A.87) e (A.88):

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)Y(K) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_1}{(4K-1)!} + \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_0}{(4K+1)!} \tag{A.87}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)(K-2)Y(K) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_1}{(4K-2)!} + \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_0}{(4K)!} \tag{A.88}$$

Realizando a separação de variáveis, das Equações (A.87) e (A.88), podemos obter as Equações

(A.89) a (A.91):

$$c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!} + c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} = 0 \tag{A.89}$$

$$\frac{c_0}{c_1} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} / \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!} = 0 \tag{A.90}$$

$$\frac{c_0}{c_1} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K)!} / \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-2)!} = 0 \tag{A.91}$$

Onde obtêm-se a Equação (A.92):

$$\begin{aligned} e_{11} &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!} \qquad e_{12} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} \\ e_{21} &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-2)!} \qquad e_{22} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K)!} \end{aligned} \tag{A.92}$$

Obtêm-se a Equação (A.93):

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{A.93}$$

Solucionando o determinante do sistema referente a Equação (A.93), conseguimos determinar as frequências naturais da viga, onde a solução fica representada da seguinte maneira na Equação (A.94):

$$f^K(\lambda) = \left(\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K)!} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!} \right) - \left(\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-2)!} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} \right) \tag{A.94}$$

Após obtermos as frequências naturais do sistema vamos determinar os modos de vibração, para que isso seja possível, vamos substituir as Equações (A.82),(A.84) na Equação (E.5) generalizadas.

A Equação (E.5) trata-se da transformada inversa do método da transformada diferencial, com isso obtêm-se a Equação (A.95):

$$\begin{bmatrix} x^0Y(0) \\ x^4Y(4) \\ x^8Y(8) \end{bmatrix} = Y(4K) \begin{bmatrix} x^1Y(1) \\ x^5Y(5) \\ x^9Y(9) \end{bmatrix} = Y(4K+1)$$
$$\begin{bmatrix} x^2Y(2) \\ x^6Y(6) \\ x^{10}Y(10) \end{bmatrix} = Y(4K+2) \begin{bmatrix} x^3Y(3) \\ x^7Y(7) \\ x^{11}Y(11) \end{bmatrix} = Y(4K+3) \tag{A.95}$$

Com isso temos a Equação (A.96):

$$y(x) = \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K)x^{(4K)} + \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+1)x^{(4K+1)}$$
$$+ \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+2)x^{(4K+2)} + \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+3)x^{(4K+3)} \tag{A.96}$$

Para que possamos dar sequencia para encontrarmos o equacionamento da forma modal, devemos nos atentar que a solução do sistema da Equação (A.93), possui um determinante nulo, com isso devemos atribuir um valor para uma das variáveis do sistema, adotaremos para a variável c_0 o valor igual a 1, e colocamos a variávelc_1 em função de variável c_0 tem-se a Equação (A.97):

$$c_1 = -\frac{e_{11}}{e_{22}}c_0 \tag{A.97}$$

Em sequência damos continuidade para determinarmos o equacionamento da forma modal para a Equação (A.98):

$$y(x) = c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!}x^{(4K+1)} + c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}x^{(4K+3)} \tag{A.98}$$

Com isso devemos substituir a Equação (A.97), na Equação (A.98) e multiplicarmos toda a equação por c_0, com isso determinaremos a forma modal do sistema na Equação (A.99):

$$y(x) = c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!}x^{(4K+1)} - c_0 \frac{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!}}{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!}} c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}x^{(4K+3)} \tag{A.99}$$

Sabendo-se que a constante c_0, possui o valor unitário igual a 1, a forma modal final fica como a Equação (A.100):

$$y(x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} x^{(4K+1)} - \frac{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!}}{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!}} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} x^{(4K+3)} \tag{A.100}$$

O início desta análise ocorreu a partir da equação de movimento de viga, proveniente da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, assim sendo:
Equação (2.5), referente a Equação (A.101) de movimento do sistema vibratório, na forma adimensional.

$$\frac{\partial^4 Y(\varphi)}{\partial \varphi^4} - \lambda^2 Y(\varphi) = 0 \tag{A.101}$$

Escolhendo as condições de contorno para a viga representando a sua extremidade esquerda $x = 0$, tem-se:

Deflexão	Inclinação
$y(x) = 0$	$\left.\frac{dy(x)}{dx}\right\|_{x=0} = 0$

Escolhendo as condições de contorno para a viga representando a sua extremidade direita $x = 1$, tem-se:

Deflexão	Momento Fletor
$y(x) = 0$	$\left.\frac{d^2 y(x)}{dx^2}\right\|_{x=1} = 0$

A partir das definições e propriedades do método da transformada diferencial de acordo com a tabela 1, aplicou-se o método da transformada diferencial na Equação (A.101), que corresponde a equação de movimento, da teoria de vigas de Euler-Bernoulli e obtêm-se a Equação (A.102).

$$(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)Y(K+4) - !\,K\lambda^2 Y(K) = 0 \tag{A.102}$$

Rescrevendo a Equação (A.102), para uma melhor disposição temos a Equação (A.103):

$$Y(K+4) = \frac{!\,K\lambda^2 Y(K)}{(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)Y(K+4)} = 0 \tag{A.103}$$

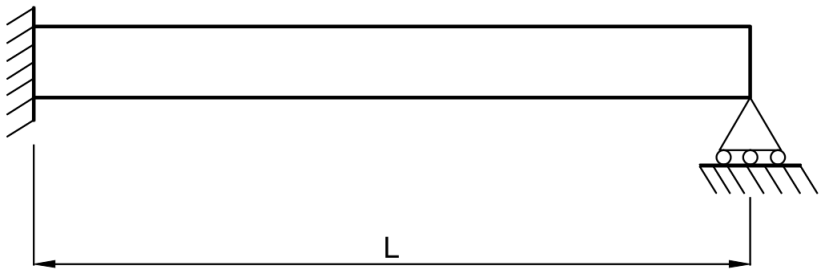

Figura A.5: Viga engastada apoiada.

Combinando a Equação (A.103), com as propriedades das condições de contorno do método da transformada diferencial, de acordo com a tabela 2 das condições de contorno. Como exemplo considerou uma viga com a condição clássica de contorno, engastada apoiada (C-S), de acordo com a Figura A.5.

Considerando as condições de contorno da viga engastada apoiada em sua extremidade esquerda em $x = 0$, tem-se:

Deflexão	Inclinação
$y(x) = 0$	$\left.\dfrac{dy(x)}{dx}\right\|_{x=0} = 0$

Aplicando o método da transformada diferencial nas condições de contorno da viga engastada apoiada na extremidade esquerda em $x = 0$, tem-se:

Deflexão	Inclinação
$Y(0) = 0$	$Y(1) = 0$

Considerando as condições de contorno da viga engastada apoiada em sua extremidade direita em $x = 1$, tem-se:

Momento Fletor	Momento Fletor
$y(x) = 0$	$\left.\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}\right\|_{x=1} = 0$

Aplicando o método da transformada diferencial nas condições de contorno da viga engastada apoiada na extremidade direita em $x = 1$, tem-se as Equações (A.104) e (A.105):

$$\sum_{K=0}^{\infty} Y(K) = 0 \tag{A.104}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)Y(K) = 0 \tag{A.105}$$

Os valores de $Y(2)$ e $Y(3)$ são respectivamente: $Y(2) = c_1$ e $Y(3) = c_0$.
Substituindo as condições de contorno na Equação de movimento A.103 para o método da transformada diferencial, variando o valor de K de 0 até 10, obteremos a seguinte tabela.

Tabela A.5: Substituição das condições de contorno.

Condição de contorno	Resultado
$Y(4)$	0
$Y(5)$	0
$Y(6)$	$\frac{2!\lambda^2 c_1}{720}$
$Y(7)$	$\frac{3!\lambda^2 c_0}{5040}$
$Y(8)$	0
$Y(9)$	0
$Y(10)$	$\frac{\lambda^4 c_1}{1814400}$
$Y(11)$	$\frac{\lambda^4 c_0}{6652800}$

Generalizando os resultados encontrados na tabela tem-se as Equações (A.106) a (A.109):

$$Y(4K) = 0 \qquad K = 0, 1, 2..., \tag{A.106}$$

$$Y(4K+1) = 0 \qquad K = 0, 1, 2..., \tag{A.107}$$

$$Y(4K+2) = \frac{2!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K+2)!} \qquad K = 1, 2..., \tag{A.108}$$

$$Y(4K+3) = \frac{3!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K+3)!} \qquad K = 1, 2..., \tag{A.109}$$

Substituindo as Equações (A.108) e (A.109), generalizadas nas Equações(A.104) e (A.105), importante salientar que vamos substituir apenas as condições de contorno generalizadas que

forem diferentes de zero e obtêm-se as Equações (A.110) e (A.111):

$$\begin{aligned} \sum_{K=0}^{\infty} Y(K) &= 0 \\ Y(4K+2) &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{2!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K+2)!} \\ Y(4K+3) &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K+3)!} \end{aligned} \tag{A.110}$$

$$\begin{aligned} \sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)Y(K) &= 0 \\ Y(4K+2) = (4K+2)(4K+1)\sum_{K=0}^{\infty} \frac{2!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K+2)(4K+1)(4K)!} &\Rightarrow \\ Y(4K+2) &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{2!\,\lambda^{2K} c_1}{(4K)!} \\ Y(4K+3) = (4K+3)(4K+2)\sum_{K=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K+3)(4K+2)(4K+1)!} &\Rightarrow \\ Y(4K+3) &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{3!\,\lambda^{2K} c_0}{(4K+1)!} \end{aligned} \tag{A.111}$$

Após substituirmos as equações generalizadas nas equações de contorno, vamos reescreve-las obtêndo-se as Equações (A.112) e (A.113):

$$\sum_{K=0}^{\infty} Y(K) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_1}{(4K+2)!} + \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_0}{(4K+3)!} \tag{A.112}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} K(K-1)Y(K) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_1}{(4K)!} + \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} c_0}{(4K+1)!} \tag{A.113}$$

Realizando a separação de variáveis, das Equações (A.112) e (A.113), podemos obter as Equações (A.114) a (A.116):

$$2!\,c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K-1)!} + 3!\,c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} = 0 \tag{A.114}$$

$$\frac{c_1}{c_0} = 3\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}/\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!} = 0 \tag{A.115}$$

$$\frac{c_1}{c_1} = 3\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!}/\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}}{(4K)!} = 0 \tag{A.116}$$

Onde pode-se obter a Equação (A.117):

$$\begin{aligned} e_{11} &= \sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!} \qquad e_{12} = \sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!} \\ e_{21} &= \sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}}{(4K)!} \qquad e_{22} = \sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!} \end{aligned} \tag{A.117}$$

Sabendo-se que a Equação (A.118):

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{A.118}$$

Solucionando o determinante do sistema referente a Equação (A.118), conseguimos determinar as frequências naturais da viga, onde a solução fica representada da seguinte maneira tem-se a Equação (A.119):

$$f^K(\lambda) = \left(\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}}{(4K+1)!}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!}\right) - \left(\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}}{(4K)!}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}\right) \tag{A.119}$$

Após obtermos as frequências naturais do sistema vamos determinar os modos de vibração, para que isso seja possível, vamos substituir as Equações (A.108),(A.109) na Equação (E.5) generalizadas.

A Equação (E.5) trata-se da transformada inversa do método da transformada diferencial, com isso temos a Equação (A.120):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^0Y(0) \\ x^4Y(4) \\ x^8Y(8) \end{bmatrix} &= Y(4K) \begin{bmatrix} x^1Y(1) \\ x^5Y(5) \\ x^9Y(9) \end{bmatrix} = Y(4K+1) \\ \begin{bmatrix} x^2Y(2) \\ x^6Y(6) \\ x^{10}Y(10) \end{bmatrix} &= Y(4K+2) \begin{bmatrix} x^3Y(3) \\ x^7Y(7) \\ x^{11}Y(11) \end{bmatrix} = Y(4K+3) \end{aligned} \tag{A.120}$$

Com isso tem-se a Equação (A.121):

$$y(x) = \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K)x^{(4K)} + \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+1)x^{(4K+1)} + \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+2)x^{(4K+2)} + \sum_{K=0}^{\infty} Y(4K+3)x^{(4K+3)} \tag{A.121}$$

Para que possamos dar sequencia para encontrarmos o equacionamento da forma modal, devemos nos atentar que a solução do sistema da Equação (A.118), possui um determinante nulo, com isso devemos atribuir um valor para uma das variáveis do sistema, adotaremos para a variável c_1 o valor igual a 1, e colocamos a variávelc_0 em função de variável c_1 tem-se a Equação (A.122):

$$c_0 = -\frac{e_{11}}{e_{22}}c_1 \tag{A.122}$$

Em sequência damos continuidade para determinarmos o equacionamento da forma modal obtêm-se a Equação (A.123):

$$y(x) = c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!}x^{(4K+2)} + c_0 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}x^{(4K+3)} \tag{A.123}$$

Com isso devemos substituir a Equação (A.122), na Equação (A.123) e multiplicarmos toda a equação por c_0, com isso determinaremos a forma modal do sistema tem-se a Equação (A.124):

$$y(x) = c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!}x^{(4K+2)} - c_1 \frac{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!}}{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}} c_1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}x^{(4K+3)} \tag{A.124}$$

Sabendo-se que a constante c_1, possui o valor unitário igual a 1, a forma modal final fica como a Equação (A.125):

$$y(x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!}x^{(4K+2)} - \frac{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+2)!}}{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K}}{(4K+3)!}x^{(4K+3)} \tag{A.125}$$

Apêndice B

APLICAÇÃO DO MÉTODO DA TRANSFORMADA DIFERENCIAL EM VIGAS DE EULER-BERNOULLI COM APOIOS VARIÁVEIS ELÁSTICOS

Nesta seção foi realizada uma abordagem utilizando a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, porém com outros tipos de condições de contorno, conhecidos como apoios variáveis elásticos. Para que possa resolver os problemas de vibrações mecânicas referente à teoria de vigas de Euler-Bernoulli, aplicou-se o método da transformada diferencial. O método da transformada diferencial foi aplicado na teoria de vigas, com a finalidade de obter as frequências naturais e os modos de vibrações.

O modelo de viga pode ser visto na Figura B.1.

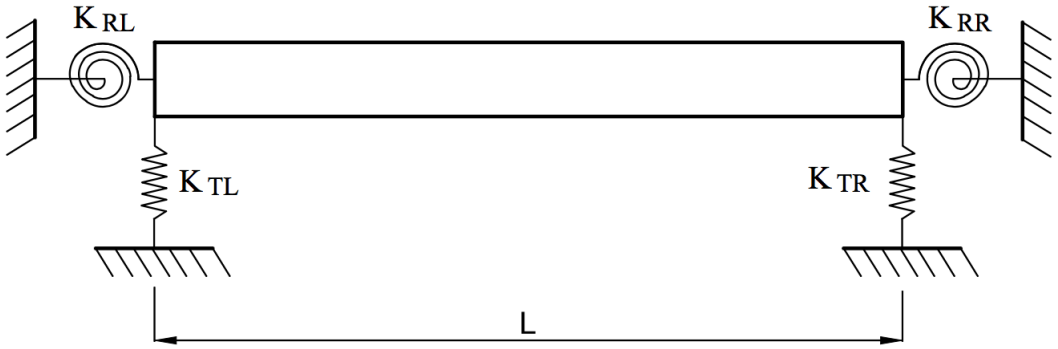

Figura B.1: Viga com apoios variáveis elásticos.

De acordo com os cálculos a partir da Equação (2.39), que corresponde à Equação de

movimento da viga, na forma adimensional tem-se a Equação (B.1).

$$\frac{\partial^4 W(\varphi)}{\partial \varphi^4} - \lambda^2 W(\varphi) = 0 \tag{B.1}$$

Para o caso da Figura B.1, as condições de contorno referentes a extremidade esquerda para $x = 0$, tem-se a Equação (B.2):

$$k_{TL} W(x) + EIV(x) = 0 \qquad k_{RL} \frac{dW(x)}{dx} - M(x)EI = 0 \tag{B.2}$$

Reescrevendo as condições de contorno da Equação (B.2), da seguinte forma tem-se a Equação (B.3):

$$EI \frac{d^3 W(x)}{dx^3} + k_{TL} W(x) = 0 \qquad EI \frac{d^2 W(x)}{dx^2} - k_{RL} \frac{dW(x)}{dx} = 0 \tag{B.3}$$

Colocando as condições de contorno da Equação (B.3), na forma adimensional para $\varphi = 0$,tem-se a Equação (B.4)

$$\frac{d^3 W(\varphi)}{d\varphi^3} + \beta_{TL} W(\varphi) = 0 \qquad \frac{d^2 W(\varphi)}{d\varphi^2} - \beta_{RL} \frac{dW(\varphi)}{d\varphi} = 0 \tag{B.4}$$

Escrevendo na forma adimensional a Equação (B.4), tem-se a Equação (B.5):

$$\beta_{TL} = \frac{k_{TL} L^3}{EI} \qquad \beta_{RL} = \frac{k_{RL} L}{EI} \tag{B.5}$$

Dando sequência ao raciocínio, aplica-se as condições de contorno para a extremidade direita da viga, onde $x = L$,

$$k_{TR} W(x) - EIV(x) = 0 \qquad k_{RR} \frac{W(x)}{dx} + M(x)EI = 0 \tag{B.6}$$

Reescrevendo as condições de contorno da Equação (B.6), da seguinte forma tem-se a Equação (B.7):

$$EI \frac{d^3 W(x)}{dx^3} - k_{TR} W(x) = 0 \qquad EI \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + k_{RR} \frac{dW(x)}{dx} = 0 \tag{B.7}$$

Colocando as condições de contorno da Equação (B.7), na forma adimensional para $\varphi = 1$,tem-

se a Equação (B.8)

$$\frac{d^3W(\varphi)}{d\varphi^3} - \beta_{TR}W(\varphi) = 0 \qquad \frac{d^2W(\varphi)}{d\varphi^2} + \beta_{RR}\frac{dW(\varphi)}{d\varphi} = 0 \tag{B.8}$$

Colocando na forma adimensional a Equação (B.5), tem-se a Equação (B.9):

$$\beta_{TR} = \frac{k_{TR}L^3}{EI} \qquad \beta_{RR} = \frac{k_{RR}L}{EI} \tag{B.9}$$

Sendo β_{TL} a rigidez de translação e β_{RL} a rigidez de rotação da extremidade esquerda da viga, já β_{RR} a rigidez de rotação e β_{TR} a rigidez de translação da extremidade direita da viga, E é o módulo de elasticidade e I o momento de inércia.
Utilizando valores diferentes de zero para as condições de deflexão e inclinação, tendo como respectivos valores, c_0 e c_1 respectivamente, utilizando o método da transformada diferencial e aplicando para as constantes c_0 e c_1 em $\varphi = 0$, obtém-se tem-se a Equação (B.10):

$$W(0) = W(\varphi) = c_0 \qquad e \qquad W(1) = \frac{dW(\varphi)}{d\varphi} = c_1 \tag{B.10}$$

As expressões para os valores diferentes de zero referentes ao momento fletor e força cisalhante para a extremidade em $\varphi = 0$, podem ser escritas como:

Momento fletor	Força cisalhante
$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)W(k) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)W(k) = 0$

Para o momento fletor em $k = 2$, tem-se a Equação (B.11).

$$\begin{aligned} &2(2-1)W(2) = 0 \\ &2W(2) = 0 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Para a força cisalhante em $k = 3$, tem-se a Equação (B.12).

$$\begin{aligned} &3(3-1)(3-2)W(3) = 0 \\ &6W(3) = 0 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Substituindo as Equações(B.10) e (B.11), do momento fletor na na segunda Equação (B.4) tem-

se a Equação (B.13).

$$\begin{aligned} 2W(2) - \beta_{RL}\frac{dW(\varphi)}{d\varphi} &= 0 \\ W(2) &= \frac{\beta_{RL}c_1}{2} \end{aligned} \tag{B.13}$$

Substituindo as Equações(B.10) e (B.12), da força cisalhante na primeira Equação (B.4)tem-se a Equação (B.14).

$$\begin{aligned} 6W(3) + \beta_{TL}W(\varphi) &= 0 \\ W(3) &= -\frac{\beta_{TL}c_0}{6} \end{aligned} \tag{B.14}$$

De acordo com as propriedades e definições do método da transformada diferencial da Tabela 3.1, aplicou-se o método da transformada diferencial na Equação de movimento (B.1), da teoria de vigas de Euler-Bernoulli e obtendo a Equação (B.15).

$$(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)k!\,W(k+4) - \lambda^2 k!\,W(k) = 0 \tag{B.15}$$

Reescrevendo a Equação (B.15), na forma da Equação (B.16).

$$W(k+4) = \frac{\lambda^2 W(k)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \tag{B.16}$$

Encontrando $W(k)$ para todos os valores de k, e substituindo as Equações (B.10),(B.13) e (B.14), na Equação de movimento (B.16), e com isso obtém-se os seguintes termos da Tabela 3.4.

Reescrevendo a Equação (B.16), de maneira generalizada, obtém-se a Equação (B.17):

$$\begin{aligned} W(4k) &= \frac{\lambda^{2k}c_0}{(4k)!} \\ W(4k+1) &= \frac{\lambda^{2k}c_1}{(4k+1)!} \\ W(4k+2) &= \frac{\lambda^{2k}\beta_{RL}c_1}{(4k+2)!} \\ W(4k+3) &= -\frac{\lambda^{2k}\beta_{TL}c_0}{(4k+3)!} \end{aligned} \tag{B.17}$$

Tabela B.1: Substituição das condições de contorno.

Variação de k=0,1,2...7	Resultado
$W(0+4)$	$W(4) = \frac{\lambda^2 c_0}{4!}$
$W(1+4)$	$W(5) = \frac{\lambda^2 c_1}{5!}$
$W(2+4)$	$W(6) = \frac{\lambda^2 \beta_{RL} c_1}{6!}$
$W(3+4)$	$W(7) = -\frac{\lambda^2 \beta_{TL} c_0}{7!}$
$W(4+4)$	$W(8) = \frac{\lambda^4 c_0}{8!}$
$W(5+4)$	$W(9) = \frac{\lambda^4 c_1}{9!}$
$W(6+4)$	$W(10) = \frac{\lambda^4 \beta_{RL} c_1}{10!}$
$W(7+4)$	$W(11) = -\frac{\lambda^4 \beta_{TL} c_0}{11!}$

Após as equações generalizadas, e aplicando o método da transformada diferencial nas condições de contorno da viga, referente à extremidade direita para $\varphi = 1$, obtém-se as Equações (B.18) e (B.19):

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)W(k) + \sum_{k=0}^{\infty} kW(k)\beta_{RR} = 0 \tag{B.18}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)W(k) - \sum_{k=0}^{\infty} W(k)\beta_{TR} = 0 \tag{B.19}$$

Substituindo as Equações generalizadas (B.17), nas equações de contorno transformadas pelo DTM (B.18) e (B.19), com isso obtendo os seguintes conjuntos de somatórios formados

pelos polinômios das Equações (B.20) a (B.23):

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)W(k) = 0 \\
&W(4k) = 4k(4k-1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_0}{(4k)(4k-1)(4k-2)!} \\
&W(4k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_0}{(4k-2)!} \\
&W(4k+1) = (4k+1)(4k)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_1}{(4k+1)(4k)(4k-1)!} \\
&W(4k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_1}{(4k-1)!} \\
&W(4k+2) = (4k+2)(4k+1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL} c_1}{(4k+2)(4k+1)(4k)!} \\
&W(4k+2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL} c_1}{(4k)!} \\
&W(4k+3) = (4k+3)(4k+2)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL} c_0}{(4k+3)(4k+2)(4k+1)!} \\
&W(4k+3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL} c_0}{(4k+1)!}
\end{aligned}
\tag{B.20}
$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kW(k)\beta_{RR} = 0$$

$$W(4k) = (4k)\beta_{RR}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}c_0}{(4k)(4k-1)!}$$

$$W(4k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}c_0}{(4k-1)!}$$

$$W(4k+1) = (4k+1)\beta_{RR}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}c_1}{(4k+1)(4k)!}$$

$$W(4k+1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}c_1}{(4k)!}$$

$$W(4k+2) = (4k+2)\beta_{RR}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RL}c_1}{(4k+2)(4k+1)!}$$

$$W(4k+2) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{RL}c_1}{(4k+1)!}$$

$$W(4k+3) = (4k+3)\beta_{RR}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TL}c_0}{(4k+3)(4k+2)!}$$

$$W(4k+3) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{TL}c_0}{(4k+2)!} \tag{B.21}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)W(k) = 0$$

$$W(4k) = (4k)(4k-1)(4k-2)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_0}{(4k)(4k-1)(4k-2)(4k-3)!}$$

$$W(4k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_0}{(4k-3)!}$$

$$W(4k+1) = (4k+1)(4k)(4k-1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_1}{(4k+1)(4k)(4k-1)(4k-2)!}$$

$$W(4k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_1}{(4k-2)!}$$

$$W(4k+2) = (4k+2)(4k+1)(4k)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL} c_1}{(4k+2)(4k+1)(4k)(4k-1)!}$$

$$W(4k+2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL} c_1}{(4k-1)!}$$

$$W(4k+3) = (4k+3)(4k+2)(4k+1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL} c_0}{(4k+3)(4k+2)(4k+1)(4k)!}$$

$$W(4k+3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL} c_0}{(4k)!} \tag{B.22}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k=0}^{\infty} W(k)\beta_{TR} = 0 \\
&W(4k) = \beta_{TR}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}c_0}{(4k)!} \\
&W(4k) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}c_0}{(4k)!} \\
&W(4k+1) = \beta_{TR}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}c_1}{(4k+1)!} \\
&W(4k+1) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}c_1}{(4k+1)!} \\
&W(4k+2) = \beta_{TR}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RL}c_1}{(4k+2)!} \\
&W(4k+2) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}\beta_{RL}c_1}{(4k+2)!} \\
&W(4k+3) = \beta_{TR}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TL}c_0}{(4k+3)!} \\
&W(4k+3) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}\beta_{TL}c_0}{(4k+3)}!
\end{aligned}
\tag{B.23}
$$

Após substituição as Equações (B.17), generalizadas nas Equações (B.18) e (B.19) de contorno, que representam a extremidade direita da viga em $\varphi = 1$, escrevendo os polinômios tem-se as Equações (B.24) e (B.25):

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)W(k) + \sum_{k=0}^{\infty} kW(k)\beta_{RR} = \\
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}c_0}{(4k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}c_1}{(4k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RL}c_1}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TL}c_0}{(4k+1)!} + \\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}c_0}{(4k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}c_1}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{RL}c_1}{(4k+1)!} + \\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{TL}c_0}{(4k+2)!}
\end{aligned}
\tag{B.24}
$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)W(k) - \sum_{k=0}^{\infty} W(k)\beta_{TR} =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_0}{(4k-3)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} c_1}{(4k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL} c_1}{(4k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL} c_0}{(4k)!} +$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR} c_0}{(4k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR} c_1}{(4k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR} \beta_{RL} c_1}{(4k+2)!} +$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR} \beta_{TL} c_0}{(4k+3)!} \tag{B.25}$$

Descrevendo as somas polinomiais por meio das Equações (B.24) e (B.25), e reescrevendo para o formato dos índices matriciais tem-se tem-se a Equação (B.26).

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RR}}{(4k-1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL}}{(4k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RR} \beta_{TL}}{(4k+2)!} \\
e_{12} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RR}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RR} \beta_{RL}}{(4k+1)!} \\
e_{21} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-3)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR}}{(4k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR} \beta_{TL}}{(4k+3)!} \\
e_{22} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-2)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR}}{(4k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL}}{(4k-1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TR} \beta_{RL}}{(4k+2)!}
\end{aligned} \tag{B.26}$$

Com isso forma-se a matriz com seus devidos índices, ficando conforme a Equação (B.27):

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{B.27}$$

Solucionando o determinante do sistema referente à Equação (B.27) e determinando as frequências naturais da viga, onde a solução fica representada da seguinte maneira pela Equação (B.28):

$$
\begin{aligned}
&f^k(\lambda) = \\
&\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(4k-2)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}}{(4k-1)!}\right)-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TL}}{(4k+1)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{TL}}{(4k+2)!}\right)\right] \\
&\times\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(4k-2)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RL}}{(4k-1)!}\right)-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}}{(4k+1)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}\beta_{RL}}{(4k+2)!}\right)\right] \\
&-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(4k-3)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}\beta_{TL}}{(4k+3)!}\right)-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TR}}{(4k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{TL}}{(4k)!}\right) \\
&\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(4k-1)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}\beta_{RL}}{(4k+1)!}\right)+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RR}}{(4k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\beta_{RL}}{(4k)!}\right)=0
\end{aligned}
\tag{B.28}
$$

Após obter-se as frequências naturais do sistema, determinar-se os modos de vibração, para que isso seja possível substituir-se as Equações (B.17) na Equação (E.5). A Equação (E.5) trata-se da transformada inversa do DTM.

Tabela B.2: Transformada inversa DTM.

Variação de (k)	$x^{(4k)}W(4k)$	$x^{(4k+1)}W(4k+1)$	$x^{(4k+2)}W(4k+2)$	$x^{(4k+3)}W(4k+3)$
0	$x^0W(0)$	$x^1W(1)$	$x^2W(2)$	$x^3W(3)$
1	$x^4W(4)$	$x^5W(5)$	$x^6W(6)$	$x^7W(7)$
2	$x^8W(8)$	$x^9W(9)$	$x^{10}W(10)$	$x^{11}W(11)$

De acordo com a Tabela 3.5, tem-se a Equação (B.29)

$$
\begin{aligned}
W(x) = c_0\sum_{k=0}^{\infty}W(4k)x^{(4k)} + c_1\sum_{k=0}^{\infty}W(4k+1)x^{(4k+1)} \\
+c_1\sum_{k=0}^{\infty}W(4k+2)x^{(4k+2)} + c_0\sum_{k=0}^{\infty}W(4k+3)x^{(4k+3)}
\end{aligned}
\tag{B.29}
$$

Substituindo as Equações (B.17), que representam as equações generalizadas na Equação (B.30), que é a Equação inversa, obtém-se a Equação (B.30):

$$W(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k)!} x^{(4k+1)} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k+1)!} x^{(4k+1)}$$
$$+ c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL}}{(4k+2)!} x^{(4k+2)} + c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL}}{(4k+3)!} x^{(4k+3)} \tag{B.30}$$

Dando sequência para encontrar o equacionamento da forma modal, onde a solução do sistema da Equação (B.27), possui um determinante nulo, com isso atribuir-se um valor para uma das variáveis do sistema adota-se para a variável c_0 o valor igual a 1, e coloca-se a variável c_1 em função de variável c_0, com isso tem-se a Equação (B.31):

$$c_1 = -\frac{e_{11}}{e_{12}} c_0 \tag{B.31}$$

Reescrevendo a Equação (B.31), tem-se a Equação (B.32):

$$c_1 = -\frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RR}}{(4k-1)!} \right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{TL}}{(4k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RR} \beta_{TL}}{(4k+2)!} \right)}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(4k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RR} \beta_{RL}}{(4k+1)!} \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RR}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \beta_{RL}}{(4k)!} \right)} \tag{B.32}$$

Apêndice C

DESENVOLVIMENTO DAS INTEGRAIS POR PARTES

O desenvolvimento destas integrais por partes é apresentado em detalhes neste apêndice. Resolução das integrais por partes para uma viga sanduíche com núcleo viscoelástico de três camadas ou mais, obtêm-se as Equações (C.1) a (C.300):

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{C.1}$$

$$I_1 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} dz dx \tag{C.2}$$

$$u = \frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{C.3}$$

$$du = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \tag{C.4}$$

$$v = \delta u_0 \tag{C.5}$$

$$dv = \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{C.6}$$

$$I_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta u_0 \Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz dx \tag{C.7}$$

$$\tag{C.8}$$

$$I_1 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz dx \tag{C.9}$$

$$I_2 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dz dx \tag{C.10}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial u_0}{\partial x} && \text{(C.11)} \\ du &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} && \text{(C.12)} \\ v &= \delta\varphi && \text{(C.13)} \\ dv &= \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} && \text{(C.14)} \end{aligned}$$

$$I_2 = -\frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \delta\varphi \Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta\varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz dx \right) \tag{C.15}$$

$$I_2 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \delta\varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz dx \tag{C.16}$$

$$I_3 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz dx \tag{C.17}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial u_0}{\partial x} && \text{(C.18)} \\ du &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} && \text{(C.19)} \\ v &= \delta \frac{\partial w}{\partial x} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) && \text{(C.20)} \\ dv &= \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) && \text{(C.21)} \end{aligned}$$

$$I_3 = -\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz dx \right] \tag{C.22}$$

$$I_3 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz dx \tag{C.23}$$

$$u = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\left(z+\frac{h_1}{2}\right) \tag{C.24}$$

$$du = \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}\left(z+\frac{h_1}{2}\right) \tag{C.25}$$

$$v = \delta w \tag{C.26}$$

$$dv = \delta\frac{\partial w}{\partial x} \tag{C.27}$$

$$I_3 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\delta w\Big|_0^L - \int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\delta w\left(z+\frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}dzdx \tag{C.28}$$

$$I_3 = -\int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\delta w\left(z+\frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}dzdx \tag{C.29}$$

$$I_4 = -\int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\frac{h_2}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)dzdx \tag{C.30}$$

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{C.31}$$

$$du = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \tag{C.32}$$

$$v = \delta u_0 \tag{C.33}$$

$$dv = \delta\frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{C.34}$$

$$I_4 = -\frac{h_2}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta u_0\Big|_0^L - \int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\delta u_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dzdx\right) \tag{C.35}$$

$$I_4 = \int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\frac{h_2}{2}\delta u_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dzdx \tag{C.36}$$

$$I_5 = \int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\left(\frac{h_2}{2}\right)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dzdx \tag{C.37}$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{C.38}$$

$$du = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tag{C.39}$$

$$v = \delta\varphi \tag{C.40}$$

$$dv = \delta\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{C.41}$$

$$I_5 = \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta\varphi\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz dx\right) \tag{C.42}$$

$$I_5 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \delta\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz dx \tag{C.43}$$

$$I_6 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2}\left(z + \frac{h_1}{2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz dx \tag{C.44}$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{C.45}$$

$$du = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tag{C.46}$$

$$v = \delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z + \frac{h_1}{2}\right) \tag{C.47}$$

$$dv = \delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(z + \frac{h_1}{2}\right) \tag{C.48}$$

$$I_6 = \frac{h_2}{2}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z + \frac{h_1}{2}\right)\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z + \frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz dx\right] \tag{C.49}$$

$$I_6 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2}\delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z + \frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz dx \tag{C.50}$$

$$u = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tag{C.51}$$

$$du = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \tag{C.52}$$

$$v = \delta w \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \tag{C.53}$$

$$dv = \delta \frac{\partial w}{\partial x} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \tag{C.54}$$

$$I_6 = -\frac{h_2}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \delta w \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta w \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} dz dx \right] \tag{C.55}$$

$$I_6 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \delta w \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} dz dx \tag{C.56}$$

$$I_7 = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} dz dx \tag{C.57}$$

$$u = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \tag{C.58}$$

$$du = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \tag{C.59}$$

$$v = \delta u_0 \tag{C.60}$$

$$dv = \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{C.61}$$

$$I_7 = -\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \delta u_0 \Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta u_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) dz dx \right] \tag{C.62}$$

$$I_7 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \delta u_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dz dx \tag{C.63}$$

$$I_8 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz dx \tag{C.64}$$

$$u = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(z+\frac{h_1}{2}\right) \tag{C.65}$$

$$du = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z+\frac{h_1}{2}\right) \tag{C.66}$$

$$v = \delta\varphi \tag{C.67}$$

$$dv = \delta\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} \tag{C.68}$$

$$I_8 = \frac{h_2}{2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)\delta\varphi\Big|_0^L - \int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\delta\varphi\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)dzdx\right] \tag{C.69}$$

$$I_8 = -\int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\frac{h_2}{2}\delta\varphi\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)dzdx \tag{C.70}$$

$$I_9 = \int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dzdx \tag{C.71}$$

$$u = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 \tag{C.72}$$

$$du = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 \tag{C.73}$$

$$v = \delta\frac{\partial w}{\partial x} \tag{C.74}$$

$$dv = \delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{C.75}$$

$$I_9 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2\delta\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_0^L - \int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\delta\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 dzdx \tag{C.76}$$

$$I_9 = -\int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\delta\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 dzdx \tag{C.77}$$

$$u = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 \tag{C.78}$$

$$du = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 \tag{C.79}$$

$$v = \delta w \tag{C.80}$$

$$dv = \delta\frac{\partial w}{\partial x} \tag{C.81}$$

$$I_9 = -\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 \delta w\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} E_1 \delta w \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 dzdx\right] \tag{C.82}$$

$$I_9 = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 \delta w \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dzdx \tag{C.83}$$

$$I_{10} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \dot{w}\delta\dot{w} dzdx \tag{C.84}$$

$$u = \frac{\partial w}{\partial t} \tag{C.85}$$

$$du = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{C.86}$$

$$v = \delta w \tag{C.87}$$

$$dv = \delta\frac{\partial w}{\partial t} \tag{C.88}$$

$$I_{10} = -\left(\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dzdx\right) \tag{C.89}$$

$$I_{10} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dzdx \tag{C.90}$$

$$I_{11} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \dot{u_0}\delta u_0 dzdx \tag{C.91}$$

$$u = \frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{C.92}$$
$$du = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{C.93}$$
$$v = \delta u_0 \tag{C.94}$$
$$dv = \delta \frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{C.95}$$

$$I_{11} = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \delta u_0 \Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \right) \tag{C.96}$$

$$I_{11} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{C.97}$$

$$I_{12} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \dot{u_0} \delta \dot{\varphi} dz dx \tag{C.98}$$

$$u = \frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{C.99}$$
$$du = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{C.100}$$
$$v = \delta \varphi \tag{C.101}$$
$$dv = \delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{C.102}$$

$$I_{12} = \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \delta \varphi \Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta \varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \right) \tag{C.103}$$

$$I_{12} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \delta \varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{C.104}$$

$$I_{13} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \dot{u_0} \delta \frac{\partial u_0}{\partial t \partial x} dz dx \tag{C.105}$$

$$u = \frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{C.106}$$
$$du = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{C.107}$$
$$v = \delta \frac{\partial w}{\partial x}\left(z + \frac{h_1}{2}\right) \tag{C.108}$$
$$dv = \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\left(z + \frac{h_1}{2}\right) \tag{C.109}$$

$$I_{13} = \frac{\partial u_0}{\partial t}\delta \frac{\partial w}{\partial x}\left(z + \frac{h_1}{2}\right)\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\delta \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{C.110}$$

$$u = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{C.111}$$
$$du = \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} \tag{C.112}$$
$$v = \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\delta w \tag{C.113}$$
$$dv = \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\delta \frac{\partial w}{\partial x} \tag{C.114}$$

$$I_{13} = \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\delta w\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\delta w \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{C.115}$$

$$I_{13} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\delta w \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{C.116}$$

$$I_{14} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2}\dot{\varphi}\delta u_0 dz dx \tag{C.117}$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{C.118}$$
$$du = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{C.119}$$
$$v = \delta u_0 \tag{C.120}$$
$$dv = \delta \frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{C.121}$$

$$I_{14} = \frac{h_2}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta u_0\Big|_0^L - \int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\delta u_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dzdx\right) \tag{C.122}$$

$$I_{14} = -\int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\frac{h_2}{2}\delta u_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dzdx \tag{C.123}$$

$$I_{15} = -\int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\left(\frac{h_2}{2}\right)^2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}dzdx \tag{C.124}$$

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{C.125}$$
$$du = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{C.126}$$
$$v = \delta\varphi \tag{C.127}$$
$$dv = \delta\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{C.128}$$

$$I_{15} = -\left(\frac{h_2}{2}\right)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta\varphi\Big|_0^L - \int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\delta\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dzdx\right) \tag{C.129}$$

$$I_{15} = \int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\left(\frac{h_2}{2}\right)^2\delta\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dzdx \tag{C.130}$$

$$I_{16} = -\int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\left(\frac{h_2}{2}\right)\left(z+\frac{h_1}{2}\right)\dot{\varphi}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}dzdx \tag{C.131}$$

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{C.132}$$
$$du = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{C.133}$$
$$v = \delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z+\frac{h_1}{2}\right) \tag{C.134}$$
$$dv = \delta\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\left(z+\frac{h_1}{2}\right) \tag{C.135}$$

$$I_{16} = -\left(\frac{h_2}{2}\right)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)\Big|_0^L - \int_0^L\int_{-h_1/2}^{h_1/2}\delta\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)dzdx\right] \tag{C.136}$$

$$I_{16} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) dz dx \tag{C.137}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) && \text{(C.138)} \\ du &= \frac{\partial \varphi}{\partial t^3} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) && \text{(C.139)} \\ v &= \delta w && \text{(C.140)} \\ dv &= \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} && \text{(C.141)} \end{aligned}$$

$$I_{16} = \left(\frac{h_2}{2} \right) \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta w \Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta w \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3 \partial x} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) dz dx \right] \tag{C.142}$$

$$I_{16} = - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \frac{h_2}{2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \delta w \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3 \partial x} dz dx \tag{C.143}$$

$$I_{17} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \delta u_0 dz dx \tag{C.144}$$

$$\begin{aligned} u &= \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} && \text{(C.145)} \\ du &= \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} && \text{(C.146)} \\ v &= \delta u_0 && \text{(C.147)} \\ dv &= \delta \frac{\partial u_0}{\partial t} && \text{(C.148)} \end{aligned}$$

$$I_{17} = \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial t \partial x} \delta u_0 \Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta u_0 \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{C.149}$$

$$I_{17} = - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta u_0 \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{C.150}$$

$$I_{18} = - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\frac{h_2}{2} \right) \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \delta \dot{\varphi} dz dx \tag{C.151}$$

$$u = \left(z+\frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \tag{C.152}$$

$$du = \left(z+\frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \tag{C.153}$$

$$v = \delta\varphi \tag{C.154}$$

$$dv = \delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{C.155}$$

$$I_{18} = -\left(\frac{h_2}{2}\right)\left[\left(z+\frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial t \partial x}\delta\varphi\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta\varphi\left(z+\frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2 \partial x} dz dx\right] \tag{C.156}$$

$$I_{18} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\frac{h_2}{2}\right)\left(z+\frac{h_1}{2}\right)\delta\varphi\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{C.157}$$

$$I_{19} = -\int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dz dx \tag{C.158}$$

$$u = \left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \tag{C.159}$$

$$du = \left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \tag{C.160}$$

$$v = \delta\frac{\partial w}{\partial x} \tag{C.161}$$

$$dv = \delta\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \tag{C.162}$$

$$I_{19} = -\left[\left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\delta w\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} dz dx\right] \tag{C.163}$$

$$u = \left(z+\frac{h_1}{2}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \tag{C.164}$$

$$du = \left(z+\frac{h_1}{2}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \tag{C.165}$$

$$v = \delta w \tag{C.166}$$

$$dv = \delta\frac{\partial w}{\partial x} \tag{C.167}$$

$$I_{19} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \left(z + \frac{h_1}{2} \right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{C.168}$$

$$u = \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \tag{C.169}$$

$$du = \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \tag{C.170}$$

$$v = \left(z + \frac{h_1}{2} \right)^2 \delta w \tag{C.171}$$

$$dv = \left(z + \frac{h_1}{2} \right)^2 \delta \frac{\partial w}{\partial x} \tag{C.172}$$

$$I_{19} = \left(z + \frac{h_1}{2} \right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \delta w \Bigg|_0^L - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta w \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} dz dx \tag{C.173}$$

$$I_{19} = - \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(z + \frac{h_1}{2} \right)^2 \delta w \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} dz dx \tag{C.174}$$

$$I_{20} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} dz dx \tag{C.175}$$

$$u = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{C.176}$$

$$du = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{C.177}$$

$$v = \delta w \tag{C.178}$$

$$dv = \delta \frac{\partial w}{\partial x} \tag{C.179}$$

$$I_{20} = \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Bigg|_0^L - \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz dx \tag{C.180}$$

$$I_{20} = - \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz dx \tag{C.181}$$

$$I_{21} = - \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \varphi dz dx \tag{C.182}$$

$$I_{22} = -\int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \varphi\delta\frac{\partial w}{\partial x}dzdx \tag{C.183}$$

$$\begin{aligned} u &= \varphi && \text{(C.184)}\\ du &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} && \text{(C.185)}\\ v &= \delta w && \text{(C.186)}\\ dv &= \delta\frac{\partial w}{\partial x} && \text{(C.187)} \end{aligned}$$

$$I_{22} = -\left(\varphi\delta w\,|_0^L - \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \delta w\frac{\partial\varphi}{\partial x}dzdx\right) \tag{C.188}$$

$$I_{22} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \delta w\frac{\partial\varphi}{\partial x}dzdx \tag{C.189}$$

$$I_{23} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \varphi\delta\varphi dzdx \tag{C.190}$$

$$I_{24} = -\int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \dot{w}\delta\dot{w}dzdx \tag{C.191}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial w}{\partial t} && \text{(C.192)}\\ du &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} && \text{(C.193)}\\ v &= \delta w && \text{(C.194)}\\ dv &= \delta\frac{\partial w}{\partial t} && \text{(C.195)} \end{aligned}$$

$$I_{24} = -\left(\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \delta w\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}dzdx\right) \tag{C.196}$$

$$I_{24} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \delta w\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}dzdx \tag{C.197}$$

$$I_{25} = -\int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \dot{u_0}\delta\dot{u_0} dz dx \tag{C.198}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial u_0}{\partial t} && \text{(C.199)} \\ du &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} && \text{(C.200)} \\ v &= \delta u_0 && \text{(C.201)} \\ dv &= \delta\frac{\partial u_0}{\partial t} && \text{(C.202)} \end{aligned}$$

$$I_{25} = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\delta u_0\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \rho_2 \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx\right) \tag{C.203}$$

$$I_{25} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{C.204}$$

$$I_{26} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \dot{u_0}\delta z\dot{\varphi} dz dx \tag{C.205}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial u_0}{\partial t} && \text{(C.206)} \\ du &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} && \text{(C.207)} \\ v &= z\delta\varphi && \text{(C.208)} \\ dv &= z\delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} && \text{(C.209)} \end{aligned}$$

$$I_{26} = \frac{\partial u_0}{\partial t} z\delta\varphi\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} z\delta\varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{C.210}$$

$$I_{26} = -\int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} z\delta\varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{C.211}$$

$$I_{27} = \int_0^L \int_{-h_2/2}^{h_2/2} z\dot{\varphi}\delta\dot{u_0} dz dx \tag{C.212}$$

$$u = z\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{C.213}$$
$$du = z\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{C.214}$$
$$v = \delta u_0 \tag{C.215}$$
$$dv = \delta\frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{C.216}$$

$$I_{27} = z\frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta u_0\Big|_0^L - \int_0^L\int_{-h_2/2}^{h_2/2} z\delta u_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dzdx \tag{C.217}$$

$$I_{27} = -\int_0^L\int_{-h_2/2}^{h_2/2} z\delta u_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dzdx \tag{C.218}$$

$$I_{28} = -\int_0^L\int_{-h_2/2}^{h_2/2} z^2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}dzdx \tag{C.219}$$

$$u = z^2\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{C.220}$$
$$du = z^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{C.221}$$
$$v = \delta\varphi \tag{C.222}$$
$$dv = \delta\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{C.223}$$

$$I_{28} = -\left(z^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta\varphi\Big|_0^L - \int_0^L\int_{-h_2/2}^{h_2/2}\rho_2\delta\varphi z^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dzdx\right) \tag{C.224}$$

$$I_{28} = \int_0^L\int_{-h_2/2}^{h_2/2} z^2\delta\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dzdx \tag{C.225}$$

$$I_{29} = \int_0^L\int_{-h_3/2}^{h_3/2}\frac{\partial u_0}{\partial x}\delta\frac{\partial u_0}{\partial x}dzdx \tag{C.226}$$

$$u = \frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{C.227}$$
$$du = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \tag{C.228}$$
$$v = \delta u_0 \tag{C.229}$$
$$dv = \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{C.230}$$

$$I_{29} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta u_0 \Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz dx \tag{C.231}$$

$$I_{29} = - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz dx \tag{C.232}$$

$$I_{30} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dz dx \tag{C.233}$$

$$u = \frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{C.234}$$
$$du = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \tag{C.235}$$
$$v = \delta \varphi \tag{C.236}$$
$$dv = \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{C.237}$$

$$I_{30} = \frac{h_2}{2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \varphi \Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(\delta \varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) dz dx \right] \tag{C.238}$$

$$I_{30} = - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \delta \varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz dx \tag{C.239}$$

$$I_{31} = - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz dx \tag{C.240}$$

$$u = \frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{C.241}$$

$$du = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \tag{C.242}$$

$$v = \delta \frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.243}$$

$$dv = \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.244}$$

$$I_{31} = -\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz dx\right] \tag{C.245}$$

$$I_{31} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dz dx \tag{C.246}$$

$$u = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \tag{C.247}$$

$$du = \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \tag{C.248}$$

$$v = \delta w\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.249}$$

$$dv = \delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.250}$$

$$I_{31} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\delta w\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta w\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} dz dx \tag{C.251}$$

$$I_{31} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2}\right)\delta w\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} dz dx \tag{C.252}$$

$$I_{32} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) dz dx \tag{C.253}$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{C.254}$$
$$du = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tag{C.255}$$
$$v = \delta u_0 \tag{C.256}$$
$$dv = \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{C.257}$$

$$I_{32} = \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta u_0 \Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz dx \right) \tag{C.258}$$

$$I_{32} = - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \delta u_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz dx \tag{C.259}$$

$$I_{33} = \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dz dx \tag{C.260}$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{C.261}$$
$$du = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tag{C.262}$$
$$v = \delta \varphi \tag{C.263}$$
$$dv = \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{C.264}$$

$$I_{33} = \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \varphi \Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) dz dx \tag{C.265}$$

$$I_{33} = - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \delta \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz dx \tag{C.266}$$

$$I_{34} = - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \left(z - \frac{h_3}{2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz dx \tag{C.267}$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{C.268}$$

$$du = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tag{C.269}$$

$$v = \delta \frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.270}$$

$$dv = \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.271}$$

$$I_{34} = -\frac{h_2}{2}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta \frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta \frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right] dz dx \tag{C.272}$$

$$I_{34} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2}\delta \frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz dx \tag{C.273}$$

$$u = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tag{C.274}$$

$$du = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \tag{C.275}$$

$$v = \delta w\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.276}$$

$$dv = \delta \frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.277}$$

$$I_{34} = \frac{h_2}{2}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\delta w\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta w\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} dz dx\right] \tag{C.278}$$

$$I_{34} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\delta w \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} dz dx \tag{C.279}$$

$$I_{35} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} dz dx \tag{C.280}$$

$$u = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.281}$$

$$du = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.282}$$

$$v = \delta u_0 \tag{C.283}$$

$$dv = \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{C.284}$$

$$I_{35} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\delta u_0\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta u_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) dzdx \tag{C.285}$$

$$I_{35} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2}\right)\delta u_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dzdx \tag{C.286}$$

$$I_{36} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\frac{\partial \varphi}{\partial x} dzdx \tag{C.287}$$

$$u = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.288}$$

$$du = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.289}$$

$$v = \delta\varphi \tag{C.290}$$

$$dv = \delta\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{C.291}$$

$$I_{36} = -\frac{h_2}{2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\delta\varphi\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta\varphi \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) dzdx\right] \tag{C.292}$$

$$I_{36} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\delta\varphi\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dzdx \tag{C.293}$$

$$I_{37} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dzdx \tag{C.294}$$

$$u = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)^2 \tag{C.295}$$

$$du = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)^2 \tag{C.296}$$

$$v = \delta\frac{\partial w}{\partial x} \tag{C.297}$$

$$dv = \delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{C.298}$$

$$I_{37} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)^2 \delta\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)^2 dzdx \tag{C.299}$$

$$I_{37} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)^2 dzdx \tag{C.300}$$

$$u = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)^2 \tag{C.301}$$

$$du = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)^2 \tag{C.302}$$

$$v = \delta w \tag{C.303}$$

$$dv = \delta\frac{\partial w}{\partial x} \tag{C.304}$$

$$I_{37} = -\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)^2 \delta w\bigg|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta w\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)^2 dzdx\right] \tag{C.305}$$

$$I_{37} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z-\frac{h_3}{2}\right)^2 \delta w\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dzdx \tag{C.306}$$

$$I_{38} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \dot{w}\delta\dot{w} dzdx \tag{C.307}$$

$$u = \frac{\partial w}{\partial t} \tag{C.308}$$

$$du = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{C.309}$$

$$v = \delta w \tag{C.310}$$

$$dv = \delta \frac{\partial w}{\partial t} \tag{C.311}$$

$$I_{38} = -\left[\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \rho_3 \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz dx\right] \tag{C.312}$$

$$I_{38} = \int_0^L \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz dx \tag{C.313}$$

$$I_{39} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \dot{u_0} \delta \dot{u_0} dz dx \tag{C.314}$$

$$u = \frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{C.315}$$

$$du = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{C.316}$$

$$v = \delta u_0 \tag{C.317}$$

$$dv = \delta \frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{C.318}$$

$$I_{39} = -\left[\frac{\partial u_0}{\partial t}\delta u_0\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx\right] \tag{C.319}$$

$$I_{39} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{C.320}$$

$$I_{40} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2} \dot{u_0} \delta \dot{\varphi} dz dx \tag{C.321}$$

$$u = \frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{C.322}$$
$$du = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{C.323}$$
$$v = \delta\varphi \tag{C.324}$$
$$dv = \delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{C.325}$$

$$I_{40} = -\frac{h_2}{2}\left[\frac{\partial u_0}{\partial t}\delta\varphi\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta\varphi - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx\right] \tag{C.326}$$

$$I_{40} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2}\delta\varphi\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{C.327}$$

$$I_{41} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z + \frac{h_3}{2}\right) u_0 \delta\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dz dx \tag{C.328}$$

$$u = \frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{C.329}$$
$$du = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{C.330}$$
$$v = \delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z + \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.331}$$
$$dv = \delta\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.332}$$

$$I_{41} = -\left[\frac{\partial u_0}{\partial t}\delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx\right] \tag{C.333}$$

$$I_{41} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dz dx \tag{C.334}$$

$$u = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{C.335}$$

$$du = \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} \tag{C.336}$$

$$v = \delta\left(z + \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.337}$$

$$dv = \delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.338}$$

$$I_{41} = -\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\delta w\left(z + \frac{h_3}{2}\right)\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta w\left(z + \frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} dz dx\right] \tag{C.339}$$

$$I_{41} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\delta w\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{C.340}$$

$$I_{42} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2}\dot{\varphi}\delta\dot{u}_0 dz dx \tag{C.341}$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{C.342}$$

$$du = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{C.343}$$

$$v = \delta u_0 \tag{C.344}$$

$$dv = \delta\frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{C.345}$$

$$I_{42} = -\frac{h_2}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\delta u_0\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta u_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz dx\right) \tag{C.346}$$

$$I_{42} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \frac{h_2}{2}\delta u_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz dx \tag{C.347}$$

$$I_{43} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \dot{\varphi}\delta\dot{\varphi} dz dx \tag{C.348}$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{C.349}$$
$$du = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{C.350}$$
$$v = \delta\varphi \tag{C.351}$$
$$dv = \delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{C.352}$$

$$I_{43} = -\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\delta\varphi\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz dx\right) \tag{C.353}$$

$$I_{43} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \delta\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz dx \tag{C.354}$$

$$I_{44} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \dot{\varphi}\left(z + \frac{h_3}{2}\right) \delta\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dz dx \tag{C.355}$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{C.356}$$
$$du = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{C.357}$$
$$v = \delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.358}$$
$$dv = \delta\frac{\partial w}{\partial t \partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.359}$$

$$I_{44} = \left(\frac{h_2}{2}\right)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\delta\frac{\partial w}{\partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right)\Big|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) dz dx\right] \tag{C.360}$$

$$I_{44} = \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(\frac{h_2}{2}\right)\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \delta\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz dx \tag{C.361}$$

$$u = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.362}$$
$$du = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x}\left(z - \frac{h_3}{2}\right) \tag{C.363}$$
$$v = \delta w \tag{C.364}$$
$$dv = \delta\frac{\partial w}{\partial t \partial x} \tag{C.365}$$

$$I_{44} = -\left(\frac{h_2}{2}\right)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\delta w\Big|_0^L - \int_0^L\int_{-h_3/2}^{h_3/2}\delta w\frac{\partial^3\varphi}{\partial t^2\partial x}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)dzdx\right] \quad \text{(C.366)}$$

$$I_{44} = \int_0^L\int_{-h_3/2}^{h_3/2}\left(\frac{h_2}{2}\right)\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\delta w\frac{\partial^3\varphi}{\partial t^2\partial x}dzdx \quad \text{(C.367)}$$

$$I_{45} = \int_0^L\int_{-h_3/2}^{h_3/2}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\delta u_0 dzdx \quad \text{(C.368)}$$

$$u = \left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x} \quad \text{(C.369)}$$

$$du = \left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x} \quad \text{(C.370)}$$

$$v = \delta u_0 \quad \text{(C.371)}$$

$$dv = \delta\frac{\partial u_0}{\partial t} \quad \text{(C.372)}$$

$$I_{45} = \left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial t\partial x}\delta u_0\Big|_0^L - \int_0^L\int_{-h_3/2}^{h_3/2}\delta u_0\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}dzdx \quad \text{(C.373)}$$

$$I_{45} = -\int_0^L\int_{-h_3/2}^{h_3/2}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\delta u_0\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}dzdx \quad \text{(C.374)}$$

$$I_{46} = \int_0^L\int_{-h_3/2}^{h_3/2}\frac{h_2}{2}\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\delta\dot{\varphi}dzdx \quad \text{(C.375)}$$

$$u = \left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x} \quad \text{(C.376)}$$

$$du = \left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x} \quad \text{(C.377)}$$

$$v = \delta\varphi \quad \text{(C.378)}$$

$$dv = \delta\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad \text{(C.379)}$$

$$I_{46} = \frac{h_2}{2}\left[\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial t\partial x}\delta\varphi\Big|_0^L - \int_0^L\int_{-h_3/2}^{h_3/2}\delta\varphi\left(z-\frac{h_3}{2}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}dzdx\right] \quad \text{(C.380)}$$

$$I_{46} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(\frac{h_2}{2}\right) \left(z - \frac{h_3}{2}\right) \delta\varphi \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} dz dx \tag{C.381}$$

$$I_{47} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_3}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dz dx \tag{C.382}$$

$$u = \left(z - \frac{h_3}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \tag{C.383}$$

$$du = \left(z - \frac{h_3}{2}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \tag{C.384}$$

$$v = \delta \frac{\partial w}{\partial x} \tag{C.385}$$

$$dv = \delta \frac{\partial w}{\partial t \partial x} \tag{C.386}$$

$$I_{47} = -\left[\left(z - \frac{h_3}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \left(z - \frac{h_3}{2}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} dz dx\right] \tag{C.387}$$

$$u = \left(z - \frac{h_3}{2}\right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \tag{C.388}$$

$$du = \left(z - \frac{h_3}{2}\right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \tag{C.389}$$

$$v = \delta w \tag{C.390}$$

$$dv = \delta \frac{\partial w}{\partial x} \tag{C.391}$$

$$I_{47} = \left(z - \frac{h_3}{2}\right)^2 \delta w\bigg|_0^L - \int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \delta w \left(z - \frac{h_1}{2}\right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} dz dx \tag{C.392}$$

$$I_{47} = -\int_0^L \int_{-h_3/2}^{h_3/2} \left(z - \frac{h_1}{2}\right)^2 \delta w \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} dz dx \tag{C.393}$$

Apêndice D

INSTRUMENTAÇÃO

⇒ **Analisador de Sinais**

Descrição: Analisador de sinais Brüel & Kjaer

Modelo: Modelo PHOTON+

Características: 4 entradas e uma saída

Figura D.1: Analisador de sinais.

⇒ **Amplificador**

Descrição: Amplificador Brüel & Kjaer

Modelo: 2712

Limitador de corrente: 2 à 15 A rms

Impedância de saída: Alta e baixa

Ganho de amplificação: 1 a 10.

Obs:O ganho utilizado neste trabalho foi de 7.

Figura D.2: Amplificador de sinal.

⇒ **Shaker**

Descrição: Shaker Brüel & Kjaer

Modelo: 4808

Faixa de frequência: 5 Hz à 10 kHz

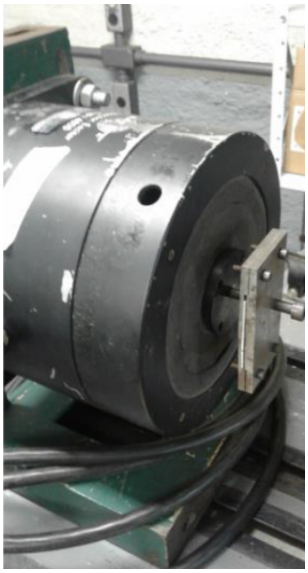

Figura D.3: Shaker.

⇒ **Vibrômetro**

Descrição: Vibrômetro OMETRON

Modelo: VQ-500-D

Faixa de frequência: 0,5 Hz à 22 kHz

Faixa de medição: 20 mm/s, 100 mm/s e $500mm/s$

Melhor resolução: 0,02 $\mu m/s(Hz)$

Figura D.4: Vibrômetro.

⇒ **Paquímetro digital**

Descrição: Paquímetro digital - DIGIMESS

Modelo: 100.178 BL

Resolução: 0,01 mm

Capacidade: 200 mm

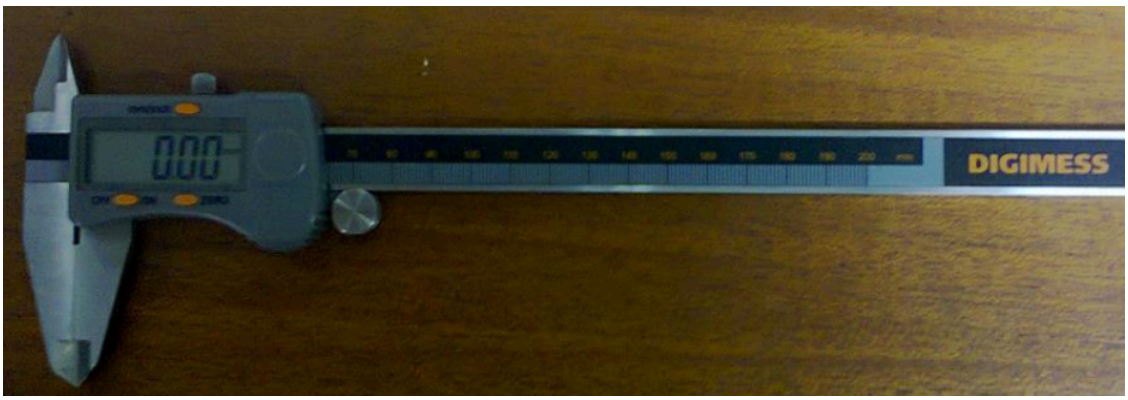

Figura D.5: Paquímetro.

⇒ **Balança utilizada no ensaio de massa específica**

Balança utilizada no ensaio de massa específica

Descrição: Balança SHIMADZU Modelo: AY 220

Capacidade de pesagem: 220 g

Figura D.6: Balança.

⇒ **Misturador mecânico**

Descrição: Agitador mecânico FISATOM

Modelo: 713D

Características: Dois eixos de acionamento, rotação regulável de até 5000 rpm.

Figura D.7: Misturador mecânico.

⇒ **Máquina de corte**

Descrição: Máquina de corte Norton

Modelo: Clipper TR 201E

Potência: 900 W

Figura D.8: Máquina de corte.

Apêndice E

MÉTODO DA TRANSFORMADA DIFERENCIAL

Neste capítulo são apresentadas as definições e os principais teoremas do Método da Transformada Diferencial - (DTM).

O método da transformada diferencial foi proposto pela primeira vez por Zhou (1986). É um dos métodos numéricos utilizados para resolver equações diferenciais ordinárias e parciais lineares e não lineares, com taxa de convergência rápida e erro de cálculo pequeno.

O método da transformada diferencial reduz o problema a um conjunto de equações recursivas que podem ser resolvidas. O método da transformada diferencial pode ser aplicado para resolver equações ou sistemas de equações lineares e não-lineares, de acordo com Chen (1999) e Kangalgil e Fatma (2009).

O método da transformada diferencial utiliza a forma de polinômios como aproximações das soluções exatas de equações diferenciais ordinárias e parciais. O método é baseado na expansão da série de Taylor. A principal diferença entre o método da série de Taylor e o método da transformada diferencial é que o primeiro exige cálculos de derivadas de ordem superior, enquanto que o segundo envolve procedimentos iterativos. A aplicação do método da transformada diferencial na solução de equações diferenciais geralmente envolve duas transformações, ou seja, a transformação diferencial e a transformação diferencial inversa. Seja $y(x)$ uma função contínua pertencente ao domínio D e $x = x_i$ sendo qualquer ponto em D. A função de Taylor por meio da série de $y(x)$ é da forma apresentada na Equações (E.1) e (E.2).

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x - x_i)^k \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=x_i} \tag{E.1}$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x_i=0} \tag{E.2}$$

Das Equações (E.1) e (E.2), a equação diferencial de ordem n da série de Taylor da função de expansão $y(x)$ é definida no ponto $x = x_i$, como apresentada na Equação (E.3).

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=x_i} \tag{E.3}$$

Observar-se que $Y(k)$ denota a transformada diferencial da função $y(x)$. No caso de $x_i = 0$, a função $y(x)$ pode ser representada em termos da transformada diferencial $Y(k)$ na forma mostrada pela Equação (E.4).

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \tag{E.4}$$

Em aplicações reais, a função $y(x)$ é expressa por uma série finita da Equação (E.4) que pode ser escrita pela Equação (E.5).

$$y(x) = \sum_{k=0}^{N} Y(k)x^k \tag{E.5}$$

Sendo, N o número de elementos da série.

Com base na suposição de que o leitor esteja familiarizado com o método da transformada diferencial, a maioria dos autores omite as provas de alguns teoremas. Assim os teoremas apresentados são derivadas das Equações (E.2) e (E.4).

E.1 Teoremas da Transformada Diferencial

Nos teoremas seguintes a e b são constantes e têm-se a Equação (E.6).

$DT\{y(x)\}$=$Y[k]$, $DT\{a_j(x)\}$=$A_j[k]$, $DT\{f(x)\}$=$F[k]$, $DT\{g(x)\}$=$G[k]$ e $DT\{a(x)\}$=$A[k]$ a função delta é:

$$\delta_{k,n} = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1, & k = n \end{cases} \tag{E.6}$$

Teorema 1 - Combinação Linear

A combinação linear é relacionada com a transformada diferencial, i.e.

Se $y(x) = af(x) \pm bg(x)$, então $Y(k) = aF(k) \pm bG(k)$.

Prova disso obtêm-se a Equação (E.7).

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(af(x) \pm bg(x))|_{x=0} = \frac{1}{k!}\left(a\frac{d^k f(x)}{dx^k} + b\frac{d^k g(x)}{dx^k}\right)|_{x=0} = aF(k) \pm bG(k) \quad \text{(E.7)}$$

Colorário 2 - Multiplicação Escalar

Se $y(x) = af(x)$, então $Y(k) = aF(k)$.

Prova. É obtido do teorema 1, fazendo b=0.

Teorema 3 - Função Polinomial

Se $y(x) = ax^n$, então $Y(k) = a\ \delta_{n,k}$

Prova, por definição tem-se a Equação (E.8).

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}ax^n|_{x=0} = a\frac{1}{k!}\frac{d^k x^n}{dx^k}\begin{cases}0 & k \neq n\\ 1, & k = n\end{cases} = a\delta_{n,k} \quad \text{(E.8)}$$

Colorário 4 - Função Constante

Se $y(x) = a$, então $Y(k) = a\ \delta_{0,k}$

Prova, ao definir n = 0 no teorema 3, a prova está completa.

Teorema 5 - Função Exponencial

Se $y(x) = e^{ax+b}$, então $Y(k) = e^b\frac{a^k}{k!}$

Prova, por definição tem-se a Equação (E.9).

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}e^{ax+b}|_{x=0}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(e^{ax}e^b) = \frac{1}{k!}e^b a^k e^{ax}|_{x=0} = e^b\frac{a^k}{k!} \quad \text{(E.9)}$$

Teorema 6 - Funções Trigonométricas

Se $y(x)$= sin$(ax + b)$ e $g(x)$=cos$(ax + b)$, então tem-se a Equação (E.10):

$$Y(k) = \frac{a^k}{k!}\sin\left(\frac{k\pi}{2} + b\right) \quad e \quad G(k) = \frac{a^k}{k!}\cos\left(\frac{k\pi}{2} + b\right) \quad \text{(E.10)}$$

Prova, por definição a Equação (E.11):

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\sin(ax+b)\,|_{x=0} = \frac{1}{k!}a^k \sin\left(ax+b+\frac{k\pi}{2}\right)|_{x=0}$$
$$= \frac{a^k}{k!}\sin\left(\frac{k\pi}{2}+b\right) \tag{E.11}$$

e da mesma forma tem-se a Equação (E.12):

$$Y(k) = \frac{a^k}{k!}\cos\left(\frac{k\pi}{2}+b\right) \tag{E.12}$$

Teorema 7 - Derivadas de Ordem n

Se $y(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$, então:

$Y(k)$=$\left(\prod_{r=1}^{n}(k+r)\right) F(k+n)$

Prova, por definição obtêm-se a Equação (E.13):

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right)|_{x=0}$$
$$= \frac{1}{k!}\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}f(x)|_{x=0} = f(x)|_{x=0} =$$
$$\frac{(k+n)!}{k!}\left[\frac{1}{(k+n)!}\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}f(x)\right] = \frac{(k+n)!}{k!}F(k+n) \tag{E.13}$$

Colorário 8 - A Transformada Diferencial

$f'(x) \Leftrightarrow (k+1)F(k+1)$

$f''(x) \Leftrightarrow (k+1)(k+2)F(k+2)$

$f'''(x) \Leftrightarrow (k+1)(k+2)(k+3)F(k+3)$

Prova, estes resultados são obtidos fazendo n= 1,2,3 no teorema 7.

Teorema 9 - Convolução

Se a convolução de $F(k)$ e $G(k)$ é definida tem-se as Equações (E.14) e (E.15):

$$F(k) \otimes G(k) = \sum_{r=0}^{k} F(k)G(k-r) \tag{E.14}$$

então

$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(k) \otimes G(k) = G(k) \otimes F(k) \tag{E.15}$$

Prova considerando tem-se Equação (E.16).

$$y(x) = f(x)g(x) \tag{E.16}$$

a fórmula de Leibnitz para n-ésima derivada de um produto tem-se a Equação (E.17):

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x)g(x) = \sum_{r=0}^{k} (r^k) \frac{d^r f(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r} g(x)}{dx^{k-r}} \tag{E.17}$$

então obtêm-se a Equação (E.18).

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} f(x)g(x)|_{x=0} = \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^{k} \frac{k!}{r!\,(k-r)!} \frac{d^r}{dx^r} f(x) \frac{d^{k-r}}{dx^{k-r}} g(x)|_{x=0} \\ &= \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dx^r} f(x)|_{x=0} \frac{1}{(k-r)!} \frac{d^{k-r}}{dx^{k-r}} g(x)|_{x=0} = \sum_{r=0}^{k} F(r)G(k-r) \end{aligned} \tag{E.18}$$

trocando os papéis de f e g, como mostra a Equação (E.19).

$$\sum_{r=0}^{k} G(r)F(k-r) = \sum_{r=0}^{k} F(k-r)G(r) \tag{E.19}$$

Consequentemente tem-se (E.20):

$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(k) \otimes G(k) = G(k) \otimes F(k) \tag{E.20}$$

Teorema 10 - Produto de função

Supondo que a Equação (E.21):

$$y(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x) \tag{E.21}$$

Então tem-se (E.22)

$$Y[k] = \sum_{r_{1=0}}^{k} \sum_{r_{2=0}}^{k_1} ... \sum_{r_{n-1=0}}^{k_{n-2}} F_1(r_1)F_2(r_2)...F_{n-1}(r_{n-1})F(k_{n-1}) \tag{E.22}$$

e com isso obtêm-se Equação (E.23)

$$k_p = k - \prod_{i=1}^{p} r_i, 1 \leq p < n \tag{E.23}$$

Prova, por definição que a Equação (E.24)

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)|_{x=0} \tag{E.24}$$

assim aplicando a fórmula de Leibnitz, tem-se a Equação (E.25):

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\sum_{r_1=0}^{k}\left(\frac{k!}{k_1!\,r_1!}\frac{d^{r_1}}{dx^{r_1}}f_1(x)\frac{d^{k-r_1}}{dx^{k-r_1}}\left(\prod_{i=2}^{n} f_i(x)\right)|_{x=0}\right) \tag{E.25}$$

repetindo esse processo novamente, de acordo com a Equação (E.25).

$$Y(k) = \sum_{r_1=0}^{k} F_1(r_1)\sum_{r_2=0}^{k_2} F_2(r_2)\left(\frac{1}{k_2!}\frac{d^{k_2}}{dx^{k_2}}\left(\prod_{i=3}^{n} f_i(x)\right)|_{x=0}\right) \tag{E.26}$$

continuando desta forma para $n-1$, de acordo com a Equação (E.26).

$$Y(k) = \sum_{r_1=0}^{k} F_1(r_1)\sum_{r_2=0}^{k_1} F_2(r_2)...\sum_{r_{n-1=0}}^{k_{n-2}} F_{n-1}(r_{n-1})\left(\frac{1}{k_{n-1}!}\left(\frac{d^{k_{n-1}}}{dx^{k_{n-1}}}f_n(x)\right)|_{x=0}\right) \tag{E.27}$$

$$= \sum_{r_1=0}^{k} F_1(r_1)\sum_{r_2=0}^{k_1} F_2(r_2)...\sum_{r_{n-1=0}}^{k_{n-2}} F_{n-1}(r_{n-1})F(k_{n-1}) \tag{E.28}$$

$$= \sum_{r_1=0}^{k}\sum_{r_2=0}^{k_1}...\sum_{r_{n-1=0}}^{k_{n-2}} F_1(r_1)F_2(r_2)...F_{n-1}(r_{n-1})F(k_{n-1}) \tag{E.29}$$

Teorema 11

Supondo que a Equação (E.30):

$$y(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x)\frac{d^m}{dx^m}g(x) \tag{E.30}$$

então do Teorema 7, obtêm-se a Equação (E.31):

$$Y(k) = \sum_{r=0}^{k} \left(\prod_{i=1}^{n} (r+i) \right) \left(\prod_{j=1}^{n} (k-r+j) \right) F(r+n)G(k-r+m) \tag{E.31}$$

Prova, por definição que a Equação (E.32),

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \frac{d^m}{dx^m} g(x) \right) \tag{E.32}$$

Fórmula de Leibnitz tem-se as Equações (E.33), (E.34) e (E.36):

$$= \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^{k} C_r^k \frac{d^r}{dx^r} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) \frac{d^{k-r}}{dx^{k-r}} \left(\frac{d^m}{dx^m} g(x) \right) \tag{E.33}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \left(\frac{1}{r!} \frac{d^{r+n}}{dx^{r+n}} f(x) \right) \left(\frac{1}{(k-r)!} \frac{d^{m+k-r}}{dx^{m+k-r}} g(x) \right) \tag{E.34}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \left(\frac{(r+n)!}{r!} F(r+n) \right) \left(\frac{(m+k-r)!}{(k-r)!} G(m+k-r) \right) \tag{E.35}$$

portanto a Equação (E.36) e (E.37) fica.

$$Y(k) = \sum_{r=0}^{k} \left(\prod_{i=1}^{n} (r+i) \right) \left(\prod_{j=1}^{m} (k+j-r) \right) \left(\frac{1}{(r+n)!} \frac{d^{r+n}}{dx^{r+n}} f(x) \right) \left(\frac{1}{(k+m-r)!} \frac{d^{k+m-r}}{dx^{k+m-r}} g(x) \right) \tag{E.36}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \left(\prod_{i=1}^{n} (r+i) \right) \left(\prod_{j=1}^{m} (k+j-r) \right) F(r+n)G(k-r+m) \tag{E.37}$$

Teorema 12

Se $y(x) = (1+x)^m$

então tem-se a Equação (E.55).

$$\begin{aligned} Y(k) = C_k^m = (m_k) = dfracm!k!\,(m-k)! \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!} (1+x)^{m-k}|_{x=0} \\ = \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!} \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = (m_k) = C_k^m \end{aligned} \tag{E.38}$$

Prova, por definição tem-se a Equação (E.39).

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^m|_{x=0} \tag{E.39}$$

Teorema 13 - Integral Definida

Se obtêm a Equação (E.42).

$$y(x) = \int_0^x f(t)dt \tag{E.40}$$

então tem-se a Equação (E.43).

$$Y(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \dfrac{F(k-1)}{k} & k > 0 \end{cases} \tag{E.41}$$

Prova, tomando $\overline{f}(x)$ como anti derivada de $f(x)$, então tem-se a Equação (E.42).

$$\int_0^x f(t)dt = \overline{f}(x) - \overline{f}(0) \tag{E.42}$$

e tem-se a Equação (E.43).

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(\int_0^x f(t)dt\right)|_{x=0} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(\overline{f}(x) - \overline{f}(0)\right)|_{x=0} \tag{E.43}$$

Quando $k = 0$ tem-se a Equação (E.44).

$$Y(0) = \overline{f}(0) - \overline{f}(0) = 0 \tag{E.44}$$

e quando $k > 0$, fica de acordo com a Equação (E.45).

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(\overline{f}(x) - \overline{f}(0)\right)|_{x=0} = \frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}f(x)|_{x=0} = \frac{F(k-1)}{k} \tag{E.45}$$

Teorema 14 - Transformada Diferencial Inversa

Tem-se a Equação (E.46).

$$y(x) = f(ax) \tag{E.46}$$

então tem-se a Equação (E.47).

$$Y(k) = a^k F(k) \tag{E.47}$$

Prova, usando a transformada diferencial inversa, de acordo com a Equação (E.48).

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)x^k \tag{E.48}$$

e claramente tem-se a Equação (E.49).

$$f(ax) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(ax)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a^k F(k)x^k \tag{E.49}$$

e a transformada diferencial obtêm a Equação (E.50).

$$Y(k) = a^k F(k) \tag{E.50}$$

Teorema 15 - Condições Iniciais

Tem-se a Equação (E.51).

$$\frac{d^n}{dx^n}y(x)|_{x=0} = a \quad \text{então} \quad Y(n) = \frac{a}{n!} \tag{E.51}$$

Prova, por definição tem-se a Equação (E.52).

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}y(x)|_{x=0} \tag{E.52}$$

e assim, quando $k = n$, fica de acordo com a Equação (E.53).

$$Y(n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}y(x)|_{x=0} \tag{E.53}$$

e inserindo a condição inicial, de acordo com a Equação (E.54).

$$Y(n) = \frac{a}{n!} \tag{E.54}$$

Colorário 16

Tem-se a Equação (E.55).

$$\begin{aligned} y(0) = a_0 &\Leftrightarrow Y(0) = a_0 \\ y'(0) = a_1 &\Leftrightarrow Y(1) = a_1 \\ y''(0) = a_2 &\Leftrightarrow Y(2) = \frac{a_2}{2!} \\ y^n(0) = a_n &\Leftrightarrow Y(n) = \frac{a_n}{n!} \end{aligned} \tag{E.55}$$

Prova, esta é uma consequência direta do teorema 15 simplesmente definindo n= 1,2,3 respectivamente.

Teorema 17 - Condições de Contorno

Tem-se a Equação (E.56).

$$y(a) = b \quad ento \quad b = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)a^k \tag{E.56}$$

Prova, por definição da transformada diferencial inversa obtêm-se a Equação (E.57).

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \tag{E.57}$$

e então, substituindo $x = a$, de acordo com a Equação (E.58).

$$b = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)a^k \tag{E.58}$$

Teorema 18 - Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Se $a, be a_0$ são contantes na equação diferencial ordinária linear de primeira ordem tem-se a Equação (E.59).

$$a\frac{dy(x)}{dx} + by(x) = 0, \quad y(0) = a_0 \tag{E.59}$$

então o método da transformada diferencial converge para a solução exata.

Prova, a equação diferencial tem uma solução geral tem-se a Equação (E.60).

$$y(x) = a_0 e^{-\frac{b}{a}x} \tag{E.60}$$

de acordo com a transformação diferencial da equação (E.59), obtém-se a Equação (E.61).

$$a(k+1)Y(k+1) + bY(k) = 0, \quad Y(0) = a_0 \tag{E.61}$$

e rearranjando a Equação (E.61).

$$Y(k+1) = -\frac{b}{a(k+1)}Y(k) \tag{E.62}$$

resolvendo esta relação de recorrência de acordo com a Equação (E.63).

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left(\frac{-b}{a}\right)^k a_0 \tag{E.63}$$

e assim, a solução obtida do método da transformada diferencial tem-se a Equação (E.64).

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{-b}{a}\right)^k a_0 x^k = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{bx}{a}\right)^k = a_0 e^{-\frac{b}{a}x} \tag{E.64}$$

Teorema 19 - Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

Se $a, b, c, a_0 e a_1$ contantes na equação diferencial de segunda ordem tem-se a Equação (E.65).

$$a\frac{d^2y(x)}{dx^2} + b\frac{dy(x)}{dx} + cy = 0, \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1 \tag{E.65}$$

então o método da transformada diferencial converge para a solução exata.

Prova, tomando a transformada diferencial da Equação (E.65).

$$a(k+1)(k+2)Y(k+2) + b(k+1)Y(k+1) + cY(k) = 0, \quad Y(0) = a_0, \quad Y(1) = a_1 \tag{E.66}$$

e a solução da transformada diferencial tem-se a Equação (E.67).

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \tag{E.67}$$

Substituindo a série original da Equação (E.67), no teorema 17.

$$a\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)Y(k)x^{k-2} + b\sum_{k=2}^{\infty} kY(k)x^{k-1} + c\sum_{k=2}^{\infty} kY(k)x^k = 0 \tag{E.68}$$

e rearranjando a Equação (E.68).

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(a(k+1)(k+2)Y(k+2) + b(k+1)Y(k+1) + cY(k)\right)x^k = 0 \tag{E.69}$$

e comparando os coeficientes da Equação (E.69).

$$a(k+1)(k+2)Y(k+2) + b(k+1)Y(k+1) + cY(k) = 0 \tag{E.70}$$

daí, a relação de recorrência do método da transformada diferencial é satisfeita.

Mais ainda, os teoremas mostram que o método da transformada diferencial converge

para a solução exata quando o problema envolvido é linear (homogêneo ou não homogêneo).