FERNANDO JOSÉ COSTANTI

Introdução aos CAMPOS TENSORIAIS

I N T R O D U Ç Ã O

A O S

C A M P O S   T E N S O R I A I S

por

Fernando José Costanti

1974

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

ITAJUBÁ - M.G.

Fernando J. Costanti

INTRODUÇÃO AOS CAMPOS TENSORIAIS

Trabalho apresentado como Tese de Livre-Docência em Física Teórica na Escola Federal de Engenharia de Itajubá - Minas Gerais

1974

P R E F Á C I O

"Hâtons-nous de rendre la
philosophie populaire."

Diderot

Este trabalho, se algum mérito possui, é o de procurar expor algumas lições introdutórias ao estudo dos campos tensoriais e da Física Matemática. Não trata de nenhuma tese original nem contém contribuições de pesquisas pessoais, sendo portanto um trabalho de compilação onde mais não fizemos do que ordenar e sintetizar os diversos tópicos, segundo uma orientação didática, dirigida a alunos que já tenham um preparo básico de Física e Análise Matemática, ao nível de graduação em engenharia.

Expressa, porém, uma filosofia pessoal, consolidada em doze anos de ensino da Física na Escola Federal de Engenharia de Itajubá e em outros estabelecimentos de nível superior, cuja preocupação primordial é incutir no aluno o reconhecimento da necessidade de uma atitude mental renovada face as conquistas intelectuais do mundo moderno e capacitá-lo a trabalhar com os princípios e métodos da Física Moderna, já que, sem esse adestramento, nem o físico nem o engenheiro serão competentes para encarar os problemas que emergem da Ciência e da Tecnologia atuais.

Sentimos assim que o professor deve fornecer mais idéias e métodos, deixando ao aluno a liberdade de conhecer e descobrir os fatos e as informações, cada vez mais numerosas, que a vida nos fornece.

De uma forma mais obje[illegible] trabalho que apresentamos se destina a servir de texto [illegible] curso de Pós-Graduação para Engenheiros, antecedendo o [illegible] das disciplinas do currículo especifico, oferec[illegible] tanto, ao mesmo tempo, como revisão [illegible] plinas da Teoria Eletromagnética, Mecânica Analítica, Teoria dos Campos e outras, em nível de mestrado.

A nossa intenção é que esse trabalho, depois de consolidado em duas sequências de cursos, possa [illegible] ser transformado em um livro texto para posterior utilização, ampliado convenientemente. Por esse motivo, o trabalho é apresentado como um texto experimental e se valerá muito das críticas e modificações que forem sugeridas, em especial pela Banca Examinadora, que o apreciar como trabalho para o concurso de Livre-Docência.

Na parte I do trabalho apresentamos uma exposição do conceito de tensor, num espaço afim. Nossa preocupação nessa primeira parte foi a de situar as definições fundamentais do cálculo tensorial como uma álgebra, sem nenhuma definição de métrica, inclusive no que se refere ao cálculo diferencial onde não se introduz conceitos de distância ou de ângulos.

Na parte II introduzimos a métrica de Riemann e desenvolvemos o estudo do espaço métrico riemanniano, até a noção de curvatura. Para tornar mais sucinta a exposição, não demos ênfase especial à métrica euclidiana como é usual nos textos e, até certo ponto, didaticamente e conveniente.

Na parte III a mecânica clássica é exposta resumidamente em suas bases, como revisão e ao mesmo tempo, como exemplo de aplicação dos métodos tensoriais. Aproveitamos para indicar nessa parte a excelência dos principios variacionais.

Nas partes IV e V procuramos, dentro da exiguidade do texto, apresentar a Teoria da Relatividade Restrita, com ênfase na aplicação a Teoria Eletromagnética.

A parte VI foi necessária, principalmente, para melhor compreensão da Teoria da Relatividade Generalizada, mas serve de fundamento para um curso de Mecânica dos Fluidos. Com um pouco mais de desenvolvimento, o leitor poderá aplicar o que foi exposto nessa parte para a compreensão da Hidrodinâmica e mesmo da Termodinâmica.

A parte VII fornece uma [illegible] dos princípios da Teoria da Relatividade Generalizada, em especial do [illegible]-

po gravitacional o encerra o trabalho.

Incluimos com apêndices tres topicos, necessários eventualmente a compreensão de alguns conceitos do texto.

Desejamos expressar nosso reconhecimento ao Prof. CHRISTOVAM COLOMBO DOS SANTOS, catedrático da Universidade de Minas Gerais, cujas lições inesqueciveis e inexcediveis influiram profundamente em nosso trabalho profissional como docente. Quanto à elaboração desta monografia, queremos agradecer à cooperação da Srta. Therezinha Rita Corrêa de Salles Dias, que datilografou os originais.

Fernando José Costanti

Í N D I C E

Pág.

INTRODUÇÃO

A idealização de sistemas abstratos ou modêlos racionais, com a finalidade de explicar os fenômenos da natureza, é a essência do pensamento científico. Em sua gênese, o pensamento matemático parte de noções muito concretas - e fica intimamente ligado à percepção dos objetos reais. Gradativamente as imagens ideais desses objetos atingem graus de abstração cada vez mais elevados e se estruturam na mente sob a forma de sistemas lógico-dedutivos.

Se essa estruturação é imposta pela natureza dos objetos observados, se resulta da constituição mental ou se é meramente convencional, é um tema que ainda não foi suficientemente esclarecido.

O físico ou o engenheiro habitua-se, desde o inicio de seu aprendizado escolar, a manipular sistemas abstratos, na aritmética, na álgebra, na análise diferencial e, enfim, em outros capítulos, não limitados a matemática. Com efeito, em todos os áreas do ensino de engenharia há uma grande preocupação em *sistematizar* as noções utilizadas, mesmo aquelas de índole bastante prática, oriundas da *arte* e da *experiência profissional*. Essa tendência que atinge hoje mesmo as ciências sociais e humanas impele o ensino profissional a um aumento de informações de base, de forma a preparar o profissional para enfrentar a avalanche de informações técnicas que vêm revestidas de um caráter lógico-dedutivo ou de uma apresentação formalista, manipuladas pelas regras do algebrismo abstrato.

A utilidade de tal apresentação é, embora se possa pensar o contrário, extremamente comprovada. As profundas analogias que existem entre os diversos sistemas materiais permitem, uma vez estabelecido o sistema abstrato, dominar uma área mais ampla de conhecimentos, pelo menos no que diz respeito a métodos e fundamentos. Um economista quando se utiliza dos conceitos abstratos da teoria dos sistemas poderá prever com mais precisão as flutuações ou os movimentos dos fenômenos econômicos e estabelecer normas da ação práticas e eficientes a partir de considerações teóricas.

Um outro aspecto interessante da utilidade pragmática do desenvolvimento de sistemas abstratos ou geometrias dedutivas é que longe de se estacionarem, essas teorias avançam, quer por extensões puramente abstratas, quer por solicitação das idéias inspiradas no conhecimento empírico, reforçado pela ampliação dos recursos tecnológicos. Há, portanto, uma realimentação da técnica, prática e utilitária para a abstração teórica, pura.

Por exemplo, Newton, elaborou as bases do cálculo diferencial, utilizando-o para construir um modêlo físico-teórico, com tal sucesso que o modêlo foi erigido como um *princípio* físico universal. Mais tarde, quando Einstein, apoiando-se em observações experimentais, pretendeu criar um novo modêlo para os fenômenos físicos que explicasse essas observações, foi obrigado a, se não criar, pelo menos atuar enormemente no desenvolvimento do cálculo tensorial que é uma generalização de conceitos abstratos.

Toda a Física Moderna do século XX é uma vasta construção de símbolos, conceitos e equações, elaborados sem a preocupação de conexão com antigos conceitos da Física, considerados concretos ou evidentes. Diz-se *considerados* pois a Física Clássica de ontem e muitos engenheiros de hoje revestem as entidades teóricas de significados que consideram concretos pela sua analogia com formas usuais de percepção. O engenheiro eletricista, por exemplo, utiliza conceitos de fluxo magnético, corrente elétrica e outros e, pelo uso continuado dessas grandezas, pela familiaridade com seu manejo ou pelo fato de haver assim aprendido desde os cursos básicos, passa a considerar tais imagens como *palpáveis* ou *compreensíveis*. O mesmo ocorre na Física com os conceitos de onda e partículas que ligados a observação macroscópica de certos fenômenos irão se tornar ineficientes e mesmo contraditórios, quando aplicados a observações microscópicas.

A evolução da idéia do átomo é um exemplo notável de como uma concepção teórica, de um modêlo abstrato, qual seja uma equação diferencial parcial, pode vir a ser a idéia mais *concreta* que se pode dar do fenômeno. Os espaços generalizados, os operadores, as grandezas postuladas de um sistema lógico-dedutivo são empregados para *descrever* uma realidade física. Essa descrição é considerada tanto mais correta quanto melhores forem os resultados calculados em comparação com as medidas e quanto maior for a capacidade do sistema em explicar e inclusive prever novos fatos, adiantando-se às pesquisas experimentais. É o que ocorreu com o pósitron, pensando com muitos anos de antecedência a sua descoberta ou com as ondas eletromagnéticas, demonstradas por Maxwell trinta anos antes de produzidas em laboratório por Hertz.

No que concerne a engenharia elétrica, atualmente, os recursos axiomáticos e dedutivos tem servido para a elaboração de explicações acerca de máquinas e circuitos, permitindo a generalização de conceitos e o estabelecimento de técnicas de análise anteriormente diversificadas nas aplicações particulares ou nos algoritmos especializados. Tal ponto de vista geral permite, primeiro, extrair conclusões as vezes ocultas pela aparência desigual dos assuntos tratados e, segundo, organizar algoritmos de cálculos mais eficientes com vistas a sistemas elétricos muito complicados pelo número de seus elementos ou pelas caracteristicas de seu comportamento.

De conformidade com o pensamento acima exposto o ensino da engenharia colocou em sua base o aprendizado da Física e dos diversos modalidades do Cálculo. Durante muito tempo, quando a técnica ainda iniciava sua violenta expansão, foi permitido afirmar que a ciência da Engenharia era uma aplicação da Física e da Matemática. Acreditamos que tal afirmativa na atualidade, é exagerada, se não totalmente errônea. Com efeito, o que nossa experiência no ensino da Física para engenheiros tem revelado é que uma boa preparação pré-universitária ou, digamos, ao nível do primeiro ano do ensino superior, comum a estudantes de diversas áreas: engenharia, biologia, economia ou ciências sociais, no que concerne a Física e a Matemática, é suficiente para o aluno iniciar as disciplinas de engenharia em nível de aplicação e extremamente indicado para alunos de outras áreas.

Em outras palavras, julgamos que se comete um êrro quando se hipertrofia o aprendizado da Física e da Matemática, precedendo as disciplinas de engenharia e outro êrro quando se atrofia o ensino das técnicas fisico-matemáticas , para alunos das áreas biomédicas ou sociais. No primeiro caso justifica-se a afirmativa pelo fato de que os modernos meios de comunicação e a facilidade de acesso as informações possibilitam ao estudante, hoje em nível pré-universitário, aprender muito mais de conceitos fisicos do que os tradicionais programas das escolas de engenharia. No segundo caso é a evolução das disciplinas biomédicas e sociais que está obrigando a um conhecimento fundamental dos métodos matemáticos.

Acreditamos que as deficiências observadas pelos professores das ciências básicas, em engenharia, nos centros mais favorecidos, se referem mais a ausência de conhecimentos metadológicos e falta de treinamento no raciocinio cientifico do que a carência de informações acêrca dos fenômenos físicos. Nossa preocupação portanto quando lecionamos tópicos de Física ou de Matemática é a de expor e fazer compreender ao estudante principalmente, a *metodologia* dessas diciplinas pois o treinamento e o domínio dos conceitos deve vir acompanhados de aplicação técnica, para que sejam realmente utilizados.

Até hoje temos visto muitos profissionais de engenharia que perderam energia e boa parte do seu tempo tentando decifrar charadas matemáticas ou tentando acompanhar seus mestres em altos vôos de digressão matemática para, a partir do terceiro ano de estudos, utilizar uma fração do que foi aprendido e, depois de formado, não utilizar nada relacionado com esse treinamento básico. O quadro é muito diferente quando vemos por exemplo um acertado ensino de índole matemática ser utilizado na técnica dentro e fora da faculdade. Acreditamos que dentro do ensino básico de engenharia ainda há que se pesquisar uma linha de ação mais conveniente com a realidade profissional e com a evolução do pensamento moderno.

Considerando, porém, o engenheiro tal qual se nos apresenta, dentro do panorama atual, num aprendizado de Pós-Graduação, devemos levar em conta apenas a realidade do ensino atual das escolas de engenharia e, portanto, devemos aternos à revisão e ampliação dos tópicos fundamentais das disciplinas dos curriculos usuais, procurando reorganizar metodicamente os conhecimentos fragmentarios que o engenheiro possa ter resultante do ensino de graduação e de alguma experiência adquirida. Um curso introdutório de Física, nesse nível, deve constituir um sistema que apesar de abstrato possa ser imediatamente reconhecido como fundamento de disciplinas usualmente separadas no curriculo de formação profissional.

Isso realmente é um roteiro de Física Teórica mas ocorre que uma linha de exposição de Física Teorica teria outros compromissos além de os de servir para estudantes pós-graduados de engenharia, isto é, não poderia abdicar de uma intensa preparação matemática e de um rigor formal.

O trabalho que apresentamos, na verdade um conjunto de lições dirigidas a pós-graduados de engenharia, desce a detalhes elementares e procura ampliar as noções da Física Teórica, procurando adaptar seu intrincado formalismo à mentalidade já formada do jovem engenheiro.

Usaremos no decorrer deste trabalho os métodos e a simbologia do Cálculo Tensorial, que é uma generalização do Cálculo Vetorial, ou, mais rigorosamente um desenvolvimento do Cálculo Diferencial absoluto, cuja estruturação se deve a Ricci (1853-1925), Levi-Civita (1873-1941) , Beltrami, Christoffel e outros mas cujos métodos remontam aos estudos das variedades pluridimensionais empreendidas por Gauss, Riemann e Lobatschewsky. A idéia de tensor, como sendo uma generalização do vetor nasceu com a introdução do *quaternion* de Hamilton (1805-1865) mas a denominação de tensor aparece mais explicitamente nos estudos de Voigt (1850-1919) concernentes a tensões e deformações de cristais.

O que ressalta no emprego do Cálculo Tensorial não é apenas a sua simbologia extremamente condensada que permite manipular expressões ligadas a um elevado número de dimensões ou grandezas, mas principalmente a essência de sua conceituação, caracterizada por uma atitude mental peculiar. Com efeito, o tema central do Cálculo Tensorial é a noção de *invariância*, que é um conceito quase primitivo mas de grande fecundidade no desenvolvimento dos modêlos científicos. A *invariância*, isto é, a imutabilidade no meio das mudanças, a permanência, num mundo fluente, a persistência de uma configuração, apesar de torções e tensões, a conservação de um valor face a transformações arbitrárias, não permite uma definição geral mas é extremamente utilizada na Física e na Matemática. Aceita-se , que uma relação fisico-matemática so exprime uma lei física independente do observador, se apresentar um aspecto invariante face a uma transformação do sistema de referência.

Um outro aspecto filosófico do Cálculo Tensorial é uma atitude digamos pitagórica, face ao universo. As idéias de simplicidade simétrica e ordem são intensamente aplicadas e o objetivo de seu formalismo é, entre outros, reduzir a Física a uma Geometria, a mais simples que se possa conceber.

Julgamos que numa exposição da física teórica, destinada a alunos cujos objetivos maiores não são as disciplinas da física ou da matemática pura, é muito conveniente a guisa de introdução, incluir algumas noções, mesmo gragmentárias, da metodologia e da epistemologia da física. Tais noções, que constituem disciplinas proprias e ultrapassam uma simples introdução são todavia importantes para a compreensão dos desenvolvimentos matemáticos. O ensino da física teórica não pode, mesmo em níveis elementares, prescindir dessas considerações que nó mínimo justificam perante o aluno as inúmeras páginas enviadas de formalismo algébrica que separam as noções fundamentais das conclusões necessárias.

A compreensão dos métodos, em qualquer ciência, dá ao aluno maior segurança e uma visão de conjunto extremamente útil para que ele não se perca nos algoritmos, nos símbolos e nas demonstrações muitas vezes fastidiosas. Quase sempre, no introito de uma aula, notamos que uma idéia geral do que vai se expor, a justificativa e a colocação do tema, antes de seu desenvolvimento, criam o ambiente de comunicação tão necessário a uma árida exposição matemática.

J.L. DESTOUCHES em uma de suas excelentes obras ( ). começa por fazer uma distinção interessante entre física teórica e física matemática, concluindo que a primeira busca um sentido concreto de suas formulações e se preocupa em explicar os fatos experimentais enquanto que a segunda procura desentranhar a ossatura lógica das teorias e sistematizar, de um ponto de vista geral as relações matemáticas oriundas da física teórica, analisando inclusive a lógica da física.

Estabelece aquele autor que a física matemática é o estudo dos ESQUEMAS das diversas teorias físicas. Admite que uma teoria física se compõe de três fases ou partes: uma sintese indutiva, um enunciado axiomático e uma parte dedutiva. Quanto ao esquema de um sistema ou fenômeno, compõe-se de:

a) uma descrição ou modêlo num espaço físico tridimensional ou num espaço-tempo quadridimensional , através de um conjunto de pontos e um conjunto de funções de pontos (campos).

b) a descrição, por um sistema de equações, das diversas leis as quais o sistema está sujeito (esta parte necessita de uma sibolização).

c) a transformação da descrição do sistema num espaço físico por uma representação mais abstrata onde, seja o sistema estudado, sejam os conhecimentos adquiridos sobre os sistema, são representados por um so ponto de um espaço dito figurativo. As leis de evolução do sistema se traduzirão por condições impostas ao movimento do ponto figurativo.

Uma teoria possuirá uma estrutura formal se conter um certo cálculo algébrico. O esquema da teoria física deve descrever todas as propriedades formais da teoria.

Os esquemas usuais da Física Matemática , são: os esquemas da mecânica clássica (newtoneano, lagrangeano , hamiltoneano), os esquemas funcionais (teoria dos campos) os esquemas previsionais da mecânica ondulatória, os esquemas de evolução emm mecânica ondulatória, os esquemas operatórios e os esquemas funcionais de corpusculos.

Este trabalho trata de temas introdutórios ao esquema funcional, isto é, a teoria dos campos. Um campo é uma função de um ponto do espaço e do tempo, obedecendo certas equações de derivadas parciais. A grandeza mais geral, representativa do campo é o tensor, cujos casos particulares são os vetores e os escalares.

Não trataremos dos outros esquemas, embora aqui se deva fazer uma referência especial aos esquemas operatorios que trataremos em um trabalha posterior, como introdução a mecânica quântica.

PARTE I

T E N S O R E S

1 - EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE VETOR

Nos cursos de graduação introduz-se usualmente uma conceituação geométrica do vetor. Considera-se a totalidade dos segmentos orientados do espaço e define-se uma relação de equivalência, denominada equipolência. Dois segmentos são equipolentes se tem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. A relação de equipolência separa os segmentos do espaço em classes de segmentos equipolentes. Chama-se vetor a cada uma dessas classes, representada por qualquer um de seus elementos. O vetor é então graficamente representado por um segmento orientado. A classe dos segmentos degenerados num ponto constitue o vetor *zero*.

O conceito exposto, essencialmente geométrico, aplica-se a diversas grandezas fisicas tais como as forças e velocidades, representadas por vetores. De uma forma geral, uma grandeza física vetorial necessita de: módulo, direção e sentido para sua completa especificação. Nota-se entretanto que há certa diferença entre algumas grandezas vetoriais da Física. Assim, por exemplo, a velocidade, a força, o deslocamento, a quantidade de movimento são vetores associados a corpúsculos ou elementos; a densidade de corrente elétrica e a intensidade de campo elétrico ou magnético, na teoria de Maxwell, são associados a distribuições continuas de carga. Outros vetores tais como velocidades angular e aceleração angular são representações convencionais, onde os conceitos de módulo, direção e sentido são associados, isto é, o módulo pode representar número de rotações por segmento e a direção pode representar o sentido horário ou antihorário da rotação. Um elemento de superfície pode também ser representado por um vetor, colocando-se como módulo o valor da área e como direção a direção da normal da área.

Na medida em que se procurava introduzir novas grandezas vetoriais acentuavam-se as limitações do conceito geométrico de vetor. A princípio para se atribuir a uma grandeza a característica de vetor estudava-se suas propriedades comparando-as com as propriedades geométricas do vetor. Por exemplo, uma rotação finita de um sólido em torno de um ponto, sendo representada por um segmento que tenha como módulo o ângulo de rotação e como direção o sentido de rotação, não pode ser considerada como vetor pois a adição de duas rotações, em eixos diferentes, dará um resultado que depende da ordem das rotações e, portanto, não pode ser assimilada a uma grandeza vetorial.

A primeira generalização do vetor foi apresentada por Hamilton (1805-1865) que criou o *quaternion*. A idéia geratriz do quaternio foi a de generalizar o operador imaginário $\sqrt{-1}$. Como sabemos a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ pode ser interpretada como um operador que gira uma grandeza complexa, no plano de Argand, de um ângulo de 90º. Um complexo do tipo:

$$z = a + bi = r\,(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\theta)$$

pode ser encarado como um operador, que multiplicado por outro complexo:

$$w = \alpha + \beta i = \rho\,(\cos\phi + i\ \mathrm{sen}\phi)$$

transforma-o em outro complexo:

$$P = z.w = (a+bi)\ .\ (\alpha + \beta i) = (a\alpha - b\beta) + i\,(a\beta + b\alpha)$$

O primeiro complexo z se comporta portanto, como um operador que girou e dilatou o complexo w, no plano de Argand.

A idéia de Hamilton foi generalizar essa equação para um vetor do espaço de quatro dimensões:

$$Z = a + bi + cj + dk$$

onde $\{a, b, c, d\}$ são reais e $\{i, j, k\}$ são unitários que obedecem as seguintes regras de multiplicação:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k; \quad jk = -kj = i; \quad ki = -ik = j$$

O conjugado de Z será:

$$Z^* = a - bi - cj - dk$$

O quadrado do módulo de Z será:

$$ZZ^* = (a+bi+cj+dk) \cdot (a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2$$

O produto de Z por um quaternion qualquer:

$$W = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k, \text{ será:}$$

$$ZW = (a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)+i(\alpha b+\beta a+\gamma d-\delta c)+j(\alpha c-\beta d+\gamma a+\delta b)+k(\alpha d+\beta c-\gamma b+\delta a),$$
que é um outro quaternion.

O desenvolvimento dessas idéias conduziu os físicos ao emprego cada vez mais fecundo, das transformações lineares e da teoria dos operadores lineares, em espaços abstratos.

O vetor evoluiu na concepção do tensor que, como veremos generalizou a idéia primitiva e forneceu recursos matemáticos para a construção da teoria física extremamente potentes, como foi o caso da teoria da relatividade de Einstein.

Convém assinalar que, mesmo com o desenvolvimento do cálculo tensorial, com aspecto a mais amplo, a álgebra dos quaternions pode ser utilizada ainda com eficiência e encontramos na literatura especializada muitas aplicações oriundas da álgebra dos quaternions e algumas extensões tais como, por exemplo, os quaternions espinores.

2 - DEFINIÇÃO DO ESPAÇO VETORIAL

Um conjunto A é um espaço vetorial sobre um corpo K se:

1) o conjunto A possuir uma lei de composição interna de grupo abeliano denominada adição (T)
2) o corpo K possuir duas leis denominadas adição (+) multiplicação (·)
3) existir uma aplicação K x A em A, que:
   3.1) seja distributiva em relação a adição (T)
   3.2) seja distributiva em relação a adição (+)
   3.3) seja associativa em relação a multiplicação (·)
   3.4) tenha como elemento neutro o elemento neutro da multiplicação (·).

Os elementos do conjunto A são chamados vetores e indicados simplesmente por x, y, z, etc. Os elementos do corpo K serão indicados por e letras gregas.

Simbolicamente as propriedades do espaço vetorial são indicados como segue:

1) Lei interna sobre A

   1.1) $(x \mathrm{T} y) \mathrm{T} z = x \mathrm{T} (y \mathrm{T} z)$ $(x, y, z \in A)$

   1.2) $x \mathrm{T} \theta = \theta \mathrm{T} x = x$ (θ = elemento neutro)

   1.3) $x \mathrm{T} x' = \theta$ (x' = simétrico de x)

   1.4) $x \mathrm{T} y = y \mathrm{T} x$

2) Lei externa sobre A

   2.1) $\alpha . (x \mathrm{T} y) = \alpha . x \mathrm{T} \alpha . y$ $(\alpha \in K)$

   2.2) $(\alpha + \beta) . x = \alpha . x \mathrm{T} \beta . x$ $(\alpha, \beta \in K)$

   2.3) $\alpha . (\beta . x) = (\alpha\beta) . x$

   2.4) $\varepsilon . x = x$ (ε = elemento neutro da multiplicação sobre K)

Podemos simplificar as notações anteriores com as seguintes considerações:

a) sabemos que o simétrico de um elemento de K, pela Lei (+) pode ser excrito $\varepsilon' = -\varepsilon$ ou $\alpha\varepsilon' = \varepsilon'\alpha = -\alpha$. Como

$$(\alpha+e) . x = \alpha . x \; T \; e . x = \alpha . x$$

vem:

$$e . x = \theta$$

onde:

e = neutro da adição em K.

b) Temos: $\varepsilon . x \; T \; \varepsilon' . x = (\varepsilon+\varepsilon') . x = e . x = \theta$

logo $\varepsilon' . x$ é simétrico de $\varepsilon . x$ ou $x' = -x$

c) Como:

$$\alpha . (x \; T \; x') = \alpha . x \; T \; \alpha . x' = \alpha . \theta$$

$$\alpha . \theta = \alpha . x \; T \; \alpha . (\varepsilon'.x) = \alpha . x \; T \; (-\alpha) . x$$

$$\alpha . \theta = \alpha + (-\alpha) . x = e.x = \theta$$

d) $\alpha . x = \theta$ implica $\alpha = e$ ou $x = \theta$

e) o simétrico de um elemento de K é único.

Com essas considerações o espaço vetorial pode ser, sem perda de rigor, caracterizado pelas relações:

1) $(x+y) + z = x + (y+z)$

2) $x + \theta = \theta + x = x$ (θ = elemento zero de A)

3) $x + (-x) = 0$ ($-x$ = simétrico de x)

4) $x + y = y+x$

5) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

6) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

7) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

8) $\varepsilon x = x$

9) $0x = \theta$ (0 = elemento zero de K)

10) $\alpha\theta = \theta$

11) $\alpha x = \theta \Rightarrow x = \theta$ se $\alpha \neq 0$
$\alpha = 0$ se $x \neq 0$

12) $(-1)\ x = -x$

13) $x = y + z \Rightarrow z = x + (-y) = x - y$ (notação simplificada)

Toda a parte B do espaço vetorial A será um sub-espaço vetorial se quaisquer que sejam x e y, pertencentes a B, os vetores $(x+y)$ e (αx) pertencerem a A.

3 - BASES DO ESPAÇO VETORIAL

Em um espaço vetorial m vetores não nulos formam um sistema *linearmente independente* ou *livre*, de ordem m, quando não for possível encontrar m números $\{\alpha_i\}$, tais que:

$$\alpha_i \, x_i = \theta \qquad (1)$$

Quando existirem os $\{\alpha_i\}$, nem todos nulos o sistema é dito *linearmente dependente* ou *ligado*.

O conjunto de todos os sistemas livres, de um espaço Λ, pode apresentar ordens limitadas ou não. No primeiro caso haverá um inteiro n tal que existam sistemas livres de ordem n e não existam sistemas livres de ordem imediatamente superior.

Um sistema livre de ordem máxima n é denominado base do espaço e a ordem n, a dimensão do espaço.

Dada uma base do espaço Λ, todo o vetor desse espaço pode ser expresso, de maneira única, mediante uma combinação linear dos vetores da base. Com efeito, sendo $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ um sistema livre de ordem máxima n, o sistema de n+1 componentes: $(e_1, e_2, \ldots, e_n, x)$ será necessariamente ligado, havendo portanto números $\{\alpha_i\}$ tais que:

$$\alpha_i \, e_i + \lambda x = \theta, \quad \text{com} \quad \lambda \neq 0$$

donde:

$$x = - \frac{\alpha_i}{\lambda} \cdot e_i \, ,$$

$$x = x^i \, e_i \qquad (2)$$

onde os números $x^i = -\frac{\alpha_i}{\lambda}$ são denominados componentes do vetor x. A expressão de x dada em (2) é única, pois se não fosse, teriamos:

$$x = y^i \, e_i \qquad (3)$$

Subtraindo (3) de (2) resultará:

$$x - x = \theta = (x^i - y^i)\ e_i$$

donde:

$$x^i = y^i$$

Para que um sistema de vetores constitua uma base de A é necessário e suficiente que todo o vetor de A possa ser expresso de maneira única, mediante uma combinação linear de vetores do sistema. Com efeito, sendo dado um sistema de p vetores tais que todo o vetor $\underline{x}$ seja expresso por:

$$x = x^i\ e_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{4}$$

onde os x^i são componentes de x, o sistema $\{e_i, x\}$, de p+1 componentes deixa de ser livre e portanto a ordem máxima é p.

Todos os sistemas livres de ordem p podem servir para expressar os vetores de A pois, tomando-se um sistema $(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_p)$, podemos escrever:

$$f_1 = a^1\ e_1 + a^2\ e_2 + \ldots + a^q\ e_q$$

ou

$$e_1 = \frac{1}{a^1} f_1 - \frac{a^2}{a^1} e_2 - \frac{a^3}{a^1} e_1 - \ldots - \frac{a^q}{a^1} e_q$$

que levando em (4) dará:

$$x = x^1 \left(\frac{1}{a^1} f_1 - \frac{a^2}{a^1} e_2 - \ldots - \frac{a^q}{a^1} e_q\right)$$

Repetindo-se o raciocinio, substituimos todos os e_i por combinação lineares dos f_i, chegando a:

$$x = \bar{x}^i\ f_i \tag{5}$$

onde os $\bar{x}^i$ são as componentes de x, para a base f_1.

O fato de existirem diversas bases para um espaço de $\underline{n}$ dimensões leva a noção de mudança de bases.

Algebricamente, usaremos as convenções abaixo:

a) Base original: e_i

Vetor do espaço, na base original: $x = x^i e_i$ (4)

Componentes originais: x^i

b) Nova base: $\overline{e}_i$

Vetor do espaço na base nova: $x = \overline{x}^i \overline{e}_i$ (5)

Novas componentes: $\overline{x}^i$

c) Mudança de bases: $\overline{e}_i = a_i^j e_j$, (6)

onde os a_i^j formam uma matriz de números; e

$$e_j = b_j^i \overline{e}_i \,, \tag{7}$$

onde os b_j^i são obtidos da matriz inversa de a_i^j.

d) Mudança de componentes:

$$x = x^i e_i = x^j e_j = x^j b_j^i \overline{e}_i = \overline{x}^i \overline{e}_i$$

logo:

$$\overline{x}^i = b_j^i x^j \tag{8}$$

Analogamente:

$$x = \overline{x}^i \overline{e}^i = \overline{x}^i a_i^j e_j = x^j e_j$$

donde:

$$x^j = a_i^j \overline{x}^i \tag{9}$$

Verificamos, portanto, que as componentes do vetor se transformam de acordo com a matriz inversa da transformação das bases.

Por esse motivo as componentes do vetor, como foram definidas são chamadas *contravariantes*.

4 - ESPAÇO VETORIAL DUAL

O estudo da dualidade é também o estudo das formas lineares, isto é, das aplicações do tipo:

$$F(x)$$

que obedecem as seguintes relações:

a) $F(x + y) = F(x) + F(y) \qquad (x,y) \in A \qquad (10)$

b) $F(\alpha x) = \alpha F(x) \qquad \alpha \in K \qquad (11)$

Em função das componentes, teremos:

$$F(x) = F(x^i e_i) = x^i F(e_i) = F(e_i) x^i$$

Como os $F(e_1)$ são independentes de x, podemos escrever:

$$F(e_i) = A_i \qquad (12)$$

donde:

$$F(x) = A_i x^i \qquad (13)$$

isto é, as formas lineares F(x) são combinações lineares das componentes dos vetores.

O conjunto de todas as formas lineares constitue um espaço vetorial. Com efeito, se indicarmos os funcionais F(x) por y*, z*, w*, etc. e adotarmos as leis de composição:

a) $y^* + z^* = y_i x^i + z_i x^i = (y_i + z_i) x^i = w_i x^i = w^* \qquad (14)$

b) $\alpha y^* = \alpha y_i x^i = (\alpha y_i) x^i \qquad (15)$

verificaremos todas as propriedades de um espaço vetorial.

Como as formas lineares podem ser expressas pela relação $F(x) = a_i x^i$, de maneira única, podemos considerar o sistema de componentes x^i como base do espaço vetorial , constituido pelas formas lineares.

Chamaremos x^i da base dual, O espaço das formas lineares também é designado como *espaço dual*.

Se efetuarmos a transformação de bases:

$$\bar{e}_i = a_i^j\, e_j$$

ou

$$e_j = b_j^i\, \bar{e}_i$$

teremos para uma dada forma linear y* as seguintes mudanças:

$$F(x) = F(\bar{x})$$

$$F(x^l e_l) = F(\bar{x}^i \bar{e}_i)$$

$$x^j\, F(e_j) = \bar{x}^i\, F(\bar{e}_i)$$

ou

$$A_j x^j = \bar{A}_i \bar{x}^i = \bar{A}_i\, b_j^i\, x^j$$

donde:

$$A_j = b_j^i\, \bar{A}_i \tag{16}$$

Analogamente:

$$\bar{A}_i = a_i^j\, A_j \tag{17}$$

concluindo-se que as componentes das formas lineares se transformam do mesmo modo que as bases do espaço.

Por esse motivo as componentes dos vetores do espaço dual são chamadas *covariantes*.

5 - PRODUTO TENSORIAL DE ESPAÇOS VETORIAIS

Dados dois espaços vetoriais A e B, de dimensões respectivamente iguais a m e n, sobre o mesmo corpo K, podemos construir um espaço vetorial de dimensão mn sobre o corpo K, representado por $A \otimes B$ e denominado produto tensorial de A por B, tal que:

a) sendo $x \in A$ e $y \in B$, ao par (x,y) corresponderá o elemento $x \otimes y$ pertencente a $A \otimes B$.

b) sendo x_1, x_2, x_3 elemento de A e y_1, y_2, y_3 elementos de B, teremos:

$$x_1 \otimes (y_1 + y_2) = x_1 \otimes y_1 + x_1 \otimes y_2 \tag{18}$$

$$(x_1 + x_2) \otimes y_1 = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_1 \tag{19}$$

c) sendo $\alpha \in K$:

$$\alpha x \otimes y = x \otimes \alpha y = \alpha(x \otimes y) \tag{20}$$

d) sendo $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m)$ e $(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)$ bases respectivamente de A e B, então os mn elementos, $e_i \otimes f_j$, com $i = 1,2,\ldots,m$, e $j = 1,2,\ldots,n$ formam uma base do espaço $A \otimes B$.

O elemento $x \otimes y$ do produto tensorial pode ser expresso, em função das componentes, como segue:

$$x = x^i\, e_i \in A$$

$$y = y^j\, f_j \in B$$

$$x \otimes y = x^i\, y^j\, e_i \otimes f_j \in A \otimes B$$

Escrevendo:

$$T = x \otimes y \tag{21}$$

$e_i \otimes f_j = \varepsilon_{ij}$ (não confundir com o símbolo de simetria) (22)

$$x^i\, y^j = t^{ij} \tag{23}$$

vem:

$$T = x \otimes y = t^{ij}\, \varepsilon_{ij} \qquad \begin{matrix}(i = 1,2,\ldots,m)\\ (j = 1,2,\ldots,n)\end{matrix} \tag{24}$$

No caso de tomarmos duas novas bases $\bar{e}_i \in A$ e $\bar{f}_j \in B$ onde:

$$e_i = \alpha_i^r\, \bar{e}_r$$

e

$$f_j = \beta_j^s\, \bar{f}_s$$

vem:

$$T = x \otimes y = x^i y^j\, \alpha_i^r\, e^r \otimes \beta_j^s\, \bar{f}_s =$$

$$= x^i\, y^j\, \alpha_j^r\, \beta_j^s\, \bar{e}_r \otimes \bar{f}_s$$

ou

$$T = \alpha_i^r\, \beta_j^s\, t^{ij}\, \bar{e}^r \otimes \bar{f}^s \tag{25}$$

onde notamos que T é uma combinação linear dos novos elementos $\bar{e}_r \otimes \bar{f}_s$. Se $T = 0$ é necessário que $t^{ij} = 0$ e o sistema de mn elementos $\bar{e}_r \otimes \bar{f}_s$ será então linearmente independente, podendo, ser portanto tomado como nova base.

A noção de produto tensorial pode ser estendida para o caso de mais de dois espaços, conservando-se a propriedade associativa, do produto e a idéia de base, como segue:

$x \in A$

$y \in B$

$z \in C$

Construimos:

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

e

$$(e_i \otimes f_j) \otimes g_k = e_i \otimes (f_j \otimes g_k) = \varepsilon_{ijk}$$

resultando um elemento do produto tensorial dos espaços A, B e C.

$$T = (x \otimes y) \otimes z = x^i\, y^j\, z^k\, \varepsilon_{ijk} = t^{ijk}\, \varepsilon_{ijk} \tag{26}$$

denominado tensor.

Quando A ≡ B ≡ C o produto tensorial resulta em uma potência tensorial. De uma forma geral, tomando-se um espaço A, de dimensão n, podemos construir uma potência tensorial q, efetuando o produto tensorial de q espaços idênticos a A, com a seguinte notação, por exemplo:

$$x \otimes y \otimes z \otimes \ldots \otimes w = x^i\, y^j\, z^k \ldots w^s\, \varepsilon_{ijk\ldots s} = t^{ijk\ldots s}\, \varepsilon_{ijk\ldots s} \tag{27}$$

onde: x, y, z,..., w pertencem a A.

e $\varepsilon_{ijk\ldots s} = e_i \otimes e_j \otimes e_k \ldots \otimes e_s$

Tomando-se o espaço dual A* podemos analogamente construir potencias tensoriais do tipo:

$$x^* \otimes y^* \otimes z^* \otimes \ldots \otimes w^* = x_i\, y_j\, z_k \ldots w_s\, \varepsilon^{ijk\ldots s}$$

onde fizemos $\varepsilon^{ijk\ldots s} = x^i \otimes y^j \otimes z^k \otimes \ldots \otimes w^s$.

Uma potência tensorial de A ou A* será indicada por $A^{(r)}$ ou $A^{*(s)}$.

6 - TENSOR AFIM, DO ESPAÇO A

Chamaremos tensor afim, do espaço A, a todo o elemento do espaço obtido, tomando-se potenciais arbitrárias de A ou A* e multiplicando-as tensorialmente.

Por exemplo:

$$T = A^{(r)} \otimes A^{*(s)} \otimes A^{*(p)} \otimes A^{(q)}$$

ou da forma geral:

$$T = A^{(r_1)} \otimes A^{*(s_1)} \otimes A^{(r_2)} \otimes A^{*(s_2)} \otimes \dots \otimes A^{r_m} \otimes A^{*s_n}$$

onde aparecem m indices r e n indices s.

O total de índices: $p = m + n$, determina a ordem do tensor. A dimensão do espaço tensorial será N^p, se a dimensão de A for N.

Expressando pelas componentes, vem:

$$T = t^{r_1 r_2 r_3 \dots r_m}_{s_1 s_2 s_3 \dots s_n} \quad \varepsilon^{s_1 s_2 s_3 \dots s_n}_{r_1 r_2 r_3 \dots r_m} \tag{28}$$

onde, por convenção, temos:

T - tensor (ordem p, m vezes contravariante e n vezes covariante)

$$t^{r_1 r_2 \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_n} = x^{r_1} x^{r_2} \dots x^{r_m} x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_n} = \text{componentes}$$

$$\varepsilon^{s_1 s_2 \dots s_n}_{r_1 r_2 \dots r_m} = e_{r_1} \otimes e_{r_2} \otimes \dots \otimes e^{s_1} \otimes e^{s_2} \otimes \dots = \text{bases}$$

Quando efetuamos uma mudança de bases do tipo:

$$\bar{e}_i = a_i^j \, e_j \, .$$

e

$$e_j = b_j^i \, \bar{e}_i$$

Observamos que as componentes se transformam segundo:

$$\bar{t}\,{}^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{k_1 k_2 \ldots k_m} = a\,{}^{s_1 s_2 s_3 \ldots}_{k_1 k_2 k_3 \ldots} \; b\,{}^{i_1 i_2 i_3 \ldots}_{r_1 r_2 r_3 \ldots} \; t\,{}^{r_1 r_2 r_3 \ldots}_{s_1 s_2 s_3 \ldots} \tag{29}$$

EXEMPLOS DE TENSORES:

a) de 1ª ordem: contravariante: x^i

covariante : u_i

b) de 2ª ordem: 2 vezes contra: t^{ij}

2 vezes co : t_{ij}

Misto : t^i_j

c) de 3ª ordem: t^{ijk}, t_{ijk}, t^{ij}_k, t^k_{ij}

Usaremos também a expressão valência do tensor para caracterizar a sua natureza. Se o espaço for de dimensão n e o vetor de valência r, então teremos n^r componentes do tensor. A variância será indicada por $\{^p_q\}$, isto é, p vezes contravariante e q vezes covariante.

7 - ÁLGEBRA TENSORIAL

a) ADIÇÃO - só é realizada quando os tensores são do mesmo tipo:

$$T^{ij}_{k} = R^{ij}_{k} + S^{ij}_{k} \tag{30}$$

b) CONTRAÇÃO - quando dois indices do vetor aparecem repetidos, a ordem abaixa e o indice desaparece.

Por exemplo, se temos T^{ij}_{k} e fazemos $i = k$ resultará:

$$T^{ij}_{k} = T^{ij}_{i} = C^{j} \tag{31}$$

É fácil verificar que essa operação tem caracter tensorial, isto é, pode ser realizada sem atentar contra a natureza tensorial, da nova entidade. Com efeito, tomemos;

$$\overline{T}^{rs}_{l} = a^{k}_{l}\, b^{r}_{i}\, b^{s}_{j}\, T^{ij}_{k} \quad ;$$

Se $r = l$

vem:

$$\overline{T}^{rs}_{r} = a^{k}_{r}\, b^{r}_{i}\, b^{s}_{j}\, T^{ij}_{k}$$

mas:

$$a^{k}_{r}\, b^{r}_{i} = \delta^{k}_{i}$$

donde:

$$\overline{T}^{rs}_{r} = \delta^{k}_{i}\, b^{s}_{j}\, T^{ij}_{k} = b^{s}_{j}\, T^{ij}_{i}$$

ou

$$\overline{C}^{s} = b^{s}_{j}\, C^{j}$$

c) MULTIPLICAÇÃO - pode ser realizada com tensores de tipos diferentes:

$$A^i B^k C_m = T^{ik}_m \quad (32)$$

MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR - não altera o caracter tensorial:

$$\lambda(A^{ij}_k) = B^{ij}_k \quad (33)$$

d) MULTIPLICAÇÃO COM CONTRAÇÃO - é a multiplicação seguida de contração:

$$A_{ij} B^k = C^k_{ij}$$

$$j = k \Rightarrow A_{ij} B^j = C^j_{ij} = C_i \quad (34)$$

Quando multiplicamos dois tensores e fazemos a contração de todos os indices, reduzindo o produto a um escalar, dizemos que os dois tensores são associados. Exemplo:

$$A^k_{ij} B^{rs}_t \Rightarrow A^k_{ij} B^{ij}_k = \text{escalar} \quad (35)$$

e) TENSOR NULO - se as componentes do tensor são nulas, em um ponto de um sistema, permanecerão nulas em qualquer outro sistema.

f) CRITÉRIO DE TENSORIALIDADE - frequentemente teremos necessidade de reconhecer se uma grandeza dada possue natureza tensorial e determinar a sua variância.

O processo natural consiste em verificar se a transformação da grandeza segue a lei de transformação dos tensores. Outro método , porém, mais cômodo ,consiste em utilizar, a propriedade da multiplicação com contração, estabelecendo o seguinte critério:

Se uma grandeza de volume r, ligada a uma base, é multiplicada por um tensor de variância $\{{p \atop q}\}$ *ligado a mesma base e produz após* $\underline{\ell}$ *contrações um tensor de variância* $\{{s \atop t}\}$ *ligado a mesma base, a grandeza considerada é um tensor de variância* $\{{s+\ell-p \atop t+\ell-q}\}$.

Por exemplo, suponhamos que uma grandeza de 5 indices de colocação não definida: A(ijkrs) seja multiplicada por B^j_k, dando:

$$A(ijkrs)\ B^j_k = C^r_{is}$$

Mudando de base:

$$\bar{A}(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)\ \bar{B}^\beta_\gamma = \bar{C}^\delta_{\alpha\varepsilon}$$

Mas:

$$\bar{C}^\delta_{\alpha\varepsilon} = a^i_\alpha\ a^s_\varepsilon\ b^\delta_r\ C^r_{is}$$

$$\bar{B}^\beta_\gamma = a^k_\gamma\ b^\beta_j\ B^j_k$$

$$B^j_k = b^\gamma_k\ a^j_\beta\ \bar{B}^\beta_\gamma$$

$$\bar{A}(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)\ \bar{B}^\beta_\gamma = a^i_\alpha\ a^s_\varepsilon\ b^\delta_r\ C^r_{is}$$

$$\bar{A}(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)\ \bar{B}^\beta_\varepsilon = a^i_\alpha\ a^s_\varepsilon\ b^\delta_r\ A(ijkrs)\ B^j_k$$

$$\bar{A}(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)\ \bar{B}^\beta = a^i_\alpha\ a^s_\varepsilon\ b^\delta_r\ A(ijkrs)\ b^\gamma_k\ a^j_\beta\ \bar{B}^\beta_\gamma$$

ou

$$\bar{A}(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon) = a^i_\alpha\ a^s_\varepsilon\ a^j_\beta\ b^\delta_r\ b^\gamma_k\ A(ijkrs)$$

donde se conclue que a colocação correta dos indices é:

$$\bar{A}^{\delta\gamma}_{\alpha\beta\varepsilon} = a^i_\alpha\ a^j_\beta\ a^s_\varepsilon\ b^\gamma_k\ b^\delta_r\ A^{kr}_{ijs}$$

O tensor A é de variância $\{{2 \atop 3}\}$.

Quando multiplicado por B, de variância $\{{1 \atop 1}\}$ produziu C, de variância $\{{1 \atop 2}\}$, após 2 contrações:

$$A^{kr}_{ijs}\; B^{j}_{k} = C^{krj}_{ijsk} = C^{r}_{is}$$

EXEMPLOS:

I) A grandeza $\frac{\partial \emptyset}{\partial X^{\alpha}}$ é covariante, de valência 1, pois:

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial X^{\alpha}}\, dx^{\alpha} = d\emptyset = \text{escalar}$$

II) A expressão do trabalho, em física:

$$d\zeta = F_{\alpha}\, dx^{\alpha} = \text{escalar}$$

mostra que a força é covariante e o deslocamento é contravariante.

g) O PROBLEMA DO REFERENCIAL

É importante observar que a definição de tensor está vinculada a um dado ponto e um dado sistema de referência. Em certos casos podemos operar sobre tensores em pontos diferentes, por exemplo se o sistema de referência for retilineo, mas nunca poderemos operar com tensores relativos a sistemas diferentes.

Por isso uma matriz construida com elementos ligados a dois sistemas de referência diferentes não pode ser encarada como um tensor.

Os fatores definidos anteriormente, por (6) e (7) para as transformações lineares, podem ser re-escritos a partir de:

$$\bar{x}^{i} = b^{i}_{j}\, x^{j}$$

$$x^j = a^j_i \, \bar{x}^i$$

da forma:

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = b^i_j \qquad e \qquad \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = a^j_i \tag{36}$$

Em coordenadas curvilineas os a^i_j e b^i_j são variáveis para cada ponto.

h) SIMETRIA E ANTI-SIMETRIA

Um tensor A^{ij} ou A_{ij} é simétrico se:

$$A^{ij} = A^{ji} \tag{37}$$

$$A_{ij} = A_{ji} \tag{37'}$$

e anti-simétrico se:

$$A^{ij} = - A^{ji} \tag{38}$$

$$A_{ij} = - A_{ji} \tag{38'}$$

Essas propriedades se conservam na mudança de bases. Para um tensor misto não se conservam tais propriedades.

Um tensor de valência 2, com n^2 componentes possuirá somente $\frac{n(n+1)}{2}$ componentes independentes se for simétrico e $\frac{n(n-1)}{2}$ se for anti-simétrico.

Um tensor de valência 2 pode ser sempre decomposto em uma soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico.

Com efeito, um tensor simétrico pode ser escrito:

$$s^{ij} = \frac{1}{2} (A^{ij} + A^{ji}) \qquad \text{pois} \qquad s^{ij} = s^{ji} \tag{39}$$

e um anti-simétrico:

$$a^{ij} = \frac{1}{2} (A^{ij} - A^{ji}) \qquad \text{pois} \qquad a^{ij} = - a^{ji} \tag{40}$$

donde:

$$s^{ij} + a^{ij} = A^{ij} \qquad \text{onde} \quad A^{ij} \text{ é qualquer.} \tag{41}$$

8 - PSEUDO-TENSORES E PSEUDO-ESCALARES

Quando se faz uma mudança de coordenadas do tipo:

$$\bar{x}^i = f(x^i) \tag{42}$$

podemos construir a matriz:

$$J = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = |b^i_j| \qquad i,j = 1,2,\ldots,n \tag{43}$$

cujo determinante é denominado Jacobiano.

O determinante das derivadas inversas:

$$K = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} = |a^i_j| \tag{44}$$

obedece a relação:

$$JK = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} = \delta^\ell_k \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\ell} = \delta^j_i \tag{45}$$

Denominaremos pseudo-tensor de peso n a entidade cuja lei de transformação difere do tensor pela presença do fator J^n, por exemplo:

$$\bar{A}^i = J^n\, b^i_j\, A^j \tag{46}$$

Para n = 0, temos um tensor propriamente, dito.

Consideremos agora um tensor c^{ijk} completamente anti-simétrico. É facil verificar que o tensor de valência r no espaço de n dimensões posssuirá no caso de anti-simetria completa $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ componentes independentes. No caso de r = 3, haverá apenas 1 componente independente (no espaço de 3 dimensões).

$$c^{ijk} = \varepsilon^{ijk}\, C \tag{47}$$

onde ε^{ijk} é o simbolo de anti-simetria.

Como:

$$\overline{c}^{ijk} = b_r^i\, b_s^j\, b_t^k\, c^{rst}$$

$$J \cdot b_k^1 = a_2^i\, a_3^j - a_2^j\, a_3^i$$

e

$$\overline{c}^{rst} = \varepsilon^{rst}\, \overline{C}$$

$$\overline{c}^{ijk} = b_r^i\, b_s^j\, b_t^k\, \varepsilon^{rst}\, \overline{C}$$

Para um dado (i,j,k) por exemplo (1,2,3), vem:

$$C = b_r^1\, b_s^2\, b_t^3\, \varepsilon^{rst}\, \overline{C} = J\, \overline{C} \tag{48}$$

e

$$\overline{C} = \frac{1}{J}\, C \tag{49}$$

Logo os valôres C são pseudo-escalares, pois quando mudamos as bases, não são invariantes. Chamaremos C de capacidade escalar.

Analogamente, o tensor do tipo

$$d_{ijk} = \varepsilon_{ijk}\, D \tag{50}$$

transformar-se-á de acordo com:

$$\overline{D} = J\, D \tag{51}$$

A entidade D será designada por densidade escalar.

O produto de uma capacidade escalar por uma densidade escalar produz um escalar:

$$CD = \frac{1}{J} \times J \times \overline{C}\, \overline{D} = \overline{C}\, \overline{D} \tag{52}$$

Um pseudo-tensor de peso n = -1 é denominado capacidade tensorial e de peso n = 1, densidade tensorial. O produto de uma capacidade tensorial por uma densidade tensorial produz um tensor.

Um tensor anti-simétrico, de dois indices no espaço de tres dimensões se reduz a um pseudo-tensor. Com efeito, para t^{ij} anti-simétrico teremos:

$$t^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & t^{12} & t^{13} \\ -t^{12} & 0 & t^{23} \\ -t^{13} & -t^{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_3 & -A_2 \\ -A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & -A_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformando:

$$t^{ij} = a^i_j \, a^j_m \, \overline{t}^{lm}$$

ou

$$\overline{t}^{lm} = b^l_i \, b^m_j \, t^{ij}$$

Aplicando as propriedades de anti-simetria:

$$t^{ij} = (a^i_2 a^j_3 - a^i_3 a^j_2)\overline{A}_1 + (a^i_3 a^j_1 - a^i_1 a^j_3)\overline{A}_2 + (a^i_1 a^j_2 - a^i_2 a^j_1)\overline{A}_3$$

ou

$$t^{ij} = J\, b^r_k \, \overline{A}_r = A_k \qquad (53)$$

ou ainda, usando o operador ε_{ijk}:

$$t^{ij} = \varepsilon^{ijk} A_k \qquad (53')$$

Multiplicando (53') por ε, resulta:

$$\varepsilon_{ijk} \, t^{ij} = \varepsilon_{12k} \, t^{12} + \varepsilon_{21k} \, t^{21} = t^{12} - t^{21} = 2A_k$$

donde:

$$A_k = \frac{1}{2} \, \varepsilon_{ijk} \, t^{ij} \qquad (53'')$$

De um modo geral os tensores anti-simétricos são pseudo-tensores de ordem mais baixa.

Assim, por exemplo, se A^{ik} é um tensor anti-simétrico, pode ser expresso por:

$$A_m = \frac{1}{2} \varepsilon_{ik\ell m} A^{ik}$$

que alguns autores ( ) chamam de dual. Melhor seria: adjunto.

No espaço tridimensional, se tomarmos o elemento de área como um tensor $ds^{ij} = dx^i dx^j$, o seu dual será:

$$ds_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} ds^{ij}$$

Nos espaços com métrica poderemos interpretar a dualidade acima como o vetor normal ao elemento de área e de módulo igual à área:

Num espaço quadridimensional, o dual de um elemento de superfície é:

$$ds_{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ik\ell m} ds^{\ell m}$$

Podemos verificar que:

$$ds_{ik} ds^{ik} = 0$$

O dual de uma hiper-superficie $ds^{k\,m}$ será

$$ds_i = \frac{1}{6} \varepsilon_{ik\ell m} ds^{k\ell m}$$

9 - O POSTULADO DO TRANSPORTE PARALELO

O cálculo diferencial para tensores será introduzido com base em duas orientações:

a) as operações definidas devem possuir caráter invariante face as transformações dos sistemas de referência.

b) não será utilizado nenhum conceito de metrica, isto é, as noções não devem depender de medidas de distância e ângulos.

Partiremos de um postulado fundamental: o postulado do transporte paralelo, isto é, num domínio infinitamente pequeno em torno do ponto P, um tensor pode ser transportado paralelamente, entendendo-se por transporte paralelo a condição:

$$\bar{u}^r\ (\bar{x}^s + \delta\bar{x}^s) = \bar{u}^r\ (\bar{x}^s) \tag{54}$$

Passando ao referencial x^k, vem:

$$u^i\ (x^k+\delta x^k) = a^i_r\ (x^k+\delta x^k)\bar{u}^r = u^i\ (x^k) + \frac{\partial a^i_r}{\partial\ \bar{x}^s}\ \delta\bar{x}^s\ \bar{u}^r$$

$$u^i\ (x^k+\delta x^k) = u^i\ (x^k) + \frac{\partial^2\ x^i}{\partial\bar{x}^s\ \partial\bar{x}^r}\ b^s_k\ b^r_j\ \ \delta x^k\ u^j$$

Fazendo:

$$\Gamma^i_{jk} = -\ \frac{\partial^2\ x^i}{\partial\bar{x}^r\ \partial\bar{x}^s}\ b^r_j\ b^s_k \tag{55}$$

com:

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} \tag{56}$$

vem:

$$u^i\ (x^k+\delta x^k) = u^i\ (x^k) - \Gamma^i_{jk}\ u^j\ \delta x^k \tag{57}$$

donde se conclui que a definição do transporte paralelo não é invariante. Ela vale somente para um sistema particular $\bar{x}^s$, chamado sistema de coordenadas geodesicas. Existe, uma infinidade de sistemas geodésicos como se pode verificar, dependendo da escolha adequada dos coeficientes a e b. Assim, para coordenadas retilineas (a e b constantes) a expressão (54) é conservada para qualquer transformação pois o ultimo termo de (57) é nulo.

No caso de considerarmos um vetor:

$$\vec{u} = u^i \, e_i \tag{58}$$

vem:

$$\delta\vec{u} = \delta u^i \, e_i + u^i \, \delta e_i = 0$$

como:

$$\delta u^i = - \Gamma^i_{jk} \, u^j \, \delta x^k \tag{59}$$

vem:

$$- \Gamma^i_{jk} \, u^j \, \delta x^k \, e_i = - u^j \, \delta e_j$$

donde:

$$\delta e_j = \Gamma^i_{jk} \, e_i \, \delta x^k \tag{60}$$

10 - DERIVADA COVARIANTE DE TENSORES

Quando passamos de um ponto $P(x^k)$ para outro $P(x^k+\delta x^k)$, o transporte paralelo de um vetor contravariante obedecerá a condição:

$$u^i\ (x^k+\delta x^k) - u^i(x^k) + \Gamma^i_{jk}\ u^j\ \delta x^k = 0 \tag{61}$$

que corresponde a noção que temos de diferencial nula. Num caso geral podemos definir uma diferencial absoluta:

$$Du^i = u^i\ (x^k+\delta x^k) - u^i\ (x^k) + \Gamma^i_{jk}\ u^j\ \delta x^k \neq 0$$

ou

$$\frac{Du^i}{Dx^k} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\ u^j \tag{62}$$

Usaremos a notação:

$$u^i_{;k} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\ u^j = u^i_{,k} + \Gamma^i_{jk}\ u^j \tag{63}$$

Alguns autores usam a notação $D_k u^i$ ou $\nabla_k\ u^i$.

Se o vetor for um covariante V_j, admitiremos analogamente:

$$v_{j;k} = \frac{\partial v_j}{\partial x^k} + B^h_{jk}\ v_h = v_{j,k} + B^h_{jk}\ v_h \tag{64}$$

onde o fator B^i_{jk} introduzido pode ser relacionado com Γ^i_{jk}.

Com efeito, o conceito de derivação parcial:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\ (u^i\ v_i) = \frac{D}{Dx^k}\ (u^i\ v_i) \tag{65}$$

pode ser aplicado às definições e condições anteriores,

donde:

$$\frac{D}{Dx^k}(u^i v_i) = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} v_i + v_i \Gamma^i_{jk} u^j + u^i \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + u^i B^h_{ik} v_h$$

ou

$$\frac{D}{Dx^k}(u^i v_i) = \frac{\partial}{\partial x^k}(u^i v_i) + u^j v_i (\Gamma^i_{jk} + B^i_{jk})$$

donde:

$$B^i_{jk} = - \Gamma^i_{jk} \tag{66}$$

resultando:

$$v_{j;k} = \frac{\partial v_j}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk} v_i \tag{67}$$

Admitindo-se a simetria dos Γ^i_{jk} podemos construir uma expressão independente de qualquer transformação das coordenadas qual seja:

$$v_{j;k} - v_{k;j} = \frac{\partial v_j}{\partial x^k} - \frac{\partial v_k}{\partial x^j} = r_{kj} = v_{j,k} - v_{k,j} \tag{68}$$

que é chamada rotacional do vetor covariante.

Podemos mostrar que as derivadas covariantes satisfazem a regra:

$$\frac{D}{Dx^k}(uv) = u\frac{Dv}{Dx^k} + v\frac{Du}{Dx^k} \tag{69}$$

para quaisquer tensores $\underline{u}$ e $\underline{v}$.

A partir dessa propriedade podemos deduzir uma regra geral de derivação covariante para um tensor qualquer:

"Adiciona-se à derivada parcial os termos $\pm t\Gamma$, onde (+) se refere ao índice contravariante e (-) ao covariante. Os índices corresponderão aos do tensor fazendo-se para cada um deles o somatório dos $t\Gamma$".

EXEMPLOS:

$$t^{ij}_{;k} = \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^k} + t^{rj}\,\Gamma^i_{kr} + t^{ir}\,\Gamma^j_{kr} .$$

$$t_{ij;k} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^k} - t_{rj}\,\Gamma^r_{ik} - t_{ir}\,\Gamma^r_{kj}$$

$$t^i_{j;k} = \frac{\partial t^i_j}{\partial x^k} + t^r_j\,\Gamma^i_{kr} - t^i_r\,\Gamma^r_{kj}$$

No caso de V(P) = escalar, resulta simplesmente:

$$V_{,k} = \nabla_k V = \frac{\partial V}{\partial x^k} = V_{;k} \tag{70}$$

que é um vetor covariante denominado gradiente de V.

No caso de uma densidade escalar do tipo:

$d_{ijk} = \varepsilon_{ijk}\,D$, por exemplo, resulta:

$$d_{ijk;r} = \frac{\partial d_{ijk}}{\partial x^r} - d_{ljk}\,\Gamma^l_{ir} - d_{ilk}\,\Gamma^l_{jr} - d_{ijl}\,\Gamma^l_{kr} \tag{71}$$

e

$$d_{123;r} = D_{;r} = \nabla_r\, D = \frac{\partial d_{123}}{\partial x^r} - (\Gamma^1_{1r} + \Gamma^2_{2r} + \Gamma^3_{3r})\, d_{123}$$

ou

$$\nabla_r D = \frac{\partial\, D}{\partial x^r} - \Gamma^k_{kr}\, D = D_{;r} \qquad (72)$$

Para uma capacidade escalar teremos analogamente:

$$\nabla_r C = \frac{\partial\, C}{\partial x^r} + \Gamma^k_{kr}\, C = C_{;r} \qquad (73)$$

Para uma densidade tensorial, do tipo Du^i, por exemplo, teremos:

$$\nabla_r\, (Du^i) = \frac{\partial}{\partial x^r}\, (Du^i) - \Gamma^k_{kr}\, (Du^i) + \Gamma^i_{jr}\, (Du^j) \qquad (74)$$

A expressão (74) será utilizada para introduzir o divergente, isto é, a soma das derivadas: $(r = i)$.

$$\nabla_i\, (Du^i) = \frac{\partial}{\partial x^i}\, (Du^i) = Du^i_{,i} \qquad (75)$$

que é uma expressão independente dos Γ^i_{jk}.

11 - DERIVADA ABSOLUTA DE UM VETOR

Se as coordenadas x^k variam em função do tempo $\underline{t}$, o ponto representativo do espaço se move. Um vetor u^i associado ao ponto também será função do tempo e podemos procurar sua variação, definindo a expressão:

$$\dot{u}^i = \frac{Du^i}{D\,t} = \frac{\partial u^i}{\partial\,t} + \Gamma^i_{hk}\, u^h \frac{dx^k}{d\,t} \tag{76}$$

denominada: *derivada absoluta* do vetor u^i.

Quando:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\,t} = \text{velocidade} \tag{77}$$

vem:

$$\dot{u}^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{hk} \frac{dx^h}{d\,t} \frac{dx^k}{d\,t} = \text{aceleração absoluta} \tag{78}$$

A condição de *velocidade constante* implicará:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{hk} \frac{dx^h}{d\,t} \frac{dx^k}{d\,t} = 0 \tag{79}$$

que define um pequeno segmento de linha reta. O conjunto desses segmentos dará uma *linha geodésica*.

12 - TRANSPORTE DE QUANTIDADES E TENSORES

Tomemos um escalar T associado a um ponto P do espaço e procuremos sua variação, quando passamos do ponto P ao ponto próximo, Q. A variação δT será proporcional as componentes δx^k do deslocamento:

$$\delta T = F_k \ \delta x^k \qquad (80)$$

Se o ponto Q está distante, podemos escrever:

$$T_Q = T_P + \int_{PBQ} F_k \ \delta x^k$$

onde PBQ indica uma certa trajetória, no espaço, de P a Q.

Se a trajetória fosse outra, por exemplo, PCQ, teriamos:

$$T'_Q = T_P + \int_{PCQ} F_k \ \delta x^k$$

e a diferença entre os valôres, em cada caso, seria:

$$T_Q - T'_Q = \oint F_k \ \delta x^k = \frac{1}{2} \int_S r_{kh} \ ds^{kh} \qquad (81)$$

com dois casos:

$$\text{a)} \quad r_{kh} = \frac{\partial F_h}{\partial x^k} - \frac{\partial F_k}{\partial x^k} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_k = \frac{\partial T}{\partial x^k} \qquad (82)$$

b) $r_{kh} \neq 0 \Rightarrow$ T não é integrável, não podendo ser feitas comparações e distância.

Tomemos agora um vetor u^i e realizemos o transporte descrito anteriormente, com a condição de u^i se manter paralelo:

$$Du^i = du^i + \Gamma^i_{jk}\, u^j\, dx^k = 0 \qquad (83)$$

donde:

$$du^i = -\,\Gamma^i_{jk}\, u^j\, dx^k = F^i_k\, dx^k \qquad (84)$$

onde:

$$F^i_k = -\,\Gamma^i_{jk}\, dx^k \qquad (85)$$

Façamos a integral:

$$\delta u^i = \oint F^i_k\, dx^k = \frac{1}{2}\int_S \frac{\partial F^i_h}{\partial x^k} - \frac{\partial F^i_k}{\partial x^h}\quad dx^{kh} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_S r^i_{kh}\, ds^{kh}$$

onde:

$$r^i_{kh} = \frac{\partial F^i_h}{\partial x^k} - \frac{\partial F^i_k}{\partial x^h} \qquad (86)$$

ou

$$r^i_{kh} = u^j\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\,\Gamma^i_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^k}\,\Gamma^i_{jh}\right] + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial u^j}{\partial x^h} - \Gamma^i_{jh}\frac{\partial u^j}{\partial x^k}$$

$$r^i_{kh} = u^j\,\frac{\partial}{\partial x^h}\,\Gamma^i_{jk} - u^j\,\frac{\partial}{\partial x^k}\,\Gamma^i_{jh} + \Gamma^i_{jk}\,\Gamma^j_{\ell h}\,u^\ell -$$

$$-\,\Gamma^i_{jh}\,\Gamma^j_{\ell k}\,u^\ell$$

resultando:

$$\delta u^i = \oint F^i_k\, dx^k = -\,\frac{1}{2}\int_S R^i_{j,kh}\, u^j\, ds^{kh} \qquad (87)$$

onde:

$$R^i_{j,kh} = \frac{\partial}{\partial x^k}\,\Gamma^i_{jh} - \frac{\partial}{\partial x^h}\,\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{\ell k}\,\Gamma^\ell_{jh} - \Gamma^i_{\ell h}\,\Gamma^\ell_{jk} \qquad (88)$$

é um tensor de 4 índices, denominado tensor de curvatura do espaço afim.

Se tomarmos, finalmente, um vetor v_j, teremos:

$$Dv_j = dv_j - \Gamma^{\ell}_{jk} v_{\ell} \; dx^k = 0 \tag{89}$$

$$dv_j = \Gamma^{\ell}_{jk} v_{\ell} \, dx^k = F_{jk} \, dx^k \tag{90}$$

onde:

$$F_{jk} = \Gamma^{\ell}_{jk} v_{\ell} \tag{91}$$

O rotacional será agora:

$$r_{j,kh} = \frac{\partial F_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^h} \tag{92}$$

e analogamente:

$$\delta v_j = \oint F_{jk} \, dx^k = \frac{1}{2} \int_S R^i_{j,kh} \, v_i \, ds^{kh} \tag{93}$$

Em suma, o transporte de um vetor em um circuito fechado não conserva o vetor. Esse fato implica na desigualdade das derivadas segundas:

$$\frac{D}{Dx^k} \frac{Dv_j}{Dx^h} - \frac{D}{Dx^h} \frac{Dv_j}{Dx^k} = R^{\ell}_{j,hk} \tag{94}$$

O que precedeu pode ser aplicado a um tensor qualquer:

$$\delta T^i_{j\ell} = \frac{1}{2} \int_S \left[- R^i_{s,kh} \, T^s_{j\ell} + R^s_{j,kh} \, T^i_{s\ell} + R^s_{\ell,kh} \, T^i_{js} \right] ds^{kh} \tag{95}$$

No caso de uma densidade escalar A, como:

$$\frac{DA}{Dx^k} = \frac{\partial A}{\partial x^k} - A\,\Gamma^i_{ik} = 0$$

vem:

$$d(\log A) = \Gamma^i_{ik}\,dx^k$$

e

$$\delta(\log A) = \frac{1}{2}\int_S r_{kh}\,ds^{kh}$$

onde:

$$r_{kh} = \frac{\partial \Gamma^i_{hi}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{ki}}{\partial x^h} \tag{96}$$

Se fizermos a contração do tensor R, resultará:

$$R_{j,h} = R^i_{j,ih} = \frac{\partial \Gamma^i_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{ji}}{\partial x^h} + \Gamma^i_{\ell i}\,\Gamma^\ell_{jh} - \Gamma^i_{\ell h}\,\Gamma^\ell_{ji} \tag{97}$$

e, devido a simetria dos Γ, podemos escrever:

$$r_{kh} = R^i_{k,ih} - R^i_{h,ik} = R_{k,h} - R_{h,k} \tag{98}$$

Observando a fórmula de definição do tensor $R^i_{j,kh}$ vemos que:

$$R^i_{j,kh} = -\,R^i_{j,hk} \tag{99}$$

e

$$R^i_{j,kh} + R^i_{k,hj} + R^i_{h,jk} = 0 \tag{100}$$

O tensor R caracteriza a curvatura do espaço afim. A condição $R^i_{j,kh} = 0$ implica em um espaço plano.

Em outras palavras, as propriedades do tensor R, tais como (99) e (100) são propriedades inerentes ao *espaço* definido, em particular, à lei de paralelismo à distância.

Cada espaço, que introduzimos através de uma métrica particular, apresentará um tensor de curvatura. O transporte de um vetor num espaço de curvatura não nula (*espaço curvo*) não deixa invariante a propriedade de paralelismo. Num *espaço plano*, caracterizado por $R^{i}_{j,kh} = 0$, mesmo utilizando coordenadas curvilíneas, podemos encontrar eixos com propriedades , dos eixos retilíneos, definindo um *espaço linear*.

PARTE II

O ESPAÇO DE RIEMANN

1 - O TENSOR MÉTRICO FUNDAMENTAL

Se caracterizarmos um espaço pelos seus vetores de base, o conceito de medida, nesse espaço estará vinculado a possibilidade de se ter um padrão de medida para esses vetores. Um elemento diferencial do espaço será expresso em função de elementos diferenciais medidos sobre os eixos do sistema de base. Assim, no espaço euclidiano com sistema de base ortogonal, de acordo com uma generalização do teorema de Pitágoras teriamos, para o elemento de distância:

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \ldots + (dx^r)^2 \qquad (101)$$

Mudando-se a base:

$$\bar{e}_m = a^i_m \, e_i \qquad \text{e} \qquad dx^i = a^i_m \, d\bar{x}^m$$

$$e_i = b^m_i \, \bar{e}_m \qquad\qquad d\bar{x}^m = b^m_i \, dx^i$$

Vem:

$$(d\bar{s})^2 = dx^i dx^i = a^i_l \, a^i_m \, d\bar{x}^l \, d\bar{x}^m = \bar{g}_{lm} \, d\bar{x}^l \, d\bar{x}^m \qquad (102)$$

onde fizemos, nesse caso:

$$\bar{g}_{lm} = a^i_l \, a^i_m = \bar{g}_{ml} \qquad (103)$$

O tensor $\bar{g}_{lm}$ é simétrico, tendo portanto $\frac{r(r+1)}{2}$ componentes independentes.

Ao se introduzir a métrica devemos pensar em dois casos:

a) metro orientável - fixo a um ponto, e

b) metro transportável - para comparar unidades de medidas em pontos diferentes.

As formulas caracteristicas da métrica de um espaço serão, no caso geral:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{104}$$

ou $(g_{ik} = g_{ki})$

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{lm}\, d\bar{x}^l\, d\bar{x}^m \tag{105}$$

onde:

$$\bar{g}_{lm} = a^i_l\, a^k_m\, g_{ik} \tag{106}$$

ou:

$$g_{ik} = b^l_i\, b^m_k\, \bar{g}_{lm} \tag{107}$$

define o tensor métrico fundamental, cujo determinante:

$$g = |g_{ik}| \tag{108}$$

pode ser calculado por:

$$g = g_{(i)k}\, G_{(i)k} = g_{i(k)}\, G_{i(k)} \tag{109}$$

onde G_{ik} é o menor correspondente a g_{ik}

Além disso:

$$g_{ik}\, G_{jk} = g_{ik}\, G_{il} = 0 \tag{110}$$

Façamos:

$$g^{ik} = \frac{G_{ik}}{g} \tag{111}$$

verificando que:

$$g_{ik}\, g^{jk} = \delta^j_i$$

e $\quad g_{ik}\, g^{il} = \delta^l_k$, donde se conclui que os g^{ik} são componentes de um tensor contravariante cujo determinante é;

$$|g^{ik}| = g' = g^{-1} \qquad (112)$$

Nas aplicações usuais é frequente partir das coordenadas cartesianas ortogonais, resultando a seguinte sequência de cálculos:

a) Dado $\overline{x} = f(x)$ onde $\overline{x}$ = cartesiano

b) Construimos $g_{ik} = \dfrac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^i} \dfrac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^k}\, \overline{g}_{lm}$

c) Como $\overline{g}_{lm} = \delta_{lm}$ (cartesiano ortogonal)

d) Vem: $g_{ik} = \dfrac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^i} \dfrac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^k}\, \delta_{lm} = \left(\dfrac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^i}\right) \cdot \left(\dfrac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^k}\right) \qquad (113)$

ou

$$g_{ik} = (\text{coluna } i \text{ de } J)\ (\text{coluna } k \text{ de } J) \qquad (114)$$

A interpretação geométrica dos g_{ik} pode ser obtida a partir das linhas coordenadas ou eixos. Tomamos um ponto, uma unidade de comprimento e_k e construimos a medida real de comprimento:

$$dl = e_k\, dx^k \quad (\text{no ponto } x^k) \qquad (115)$$

Como:

$$dx^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

para deslocamentos no eixo de ordem (k) vem:

$$g_{kk}\, (dx^k)^2 = (e_k)^2\, (dx^k)^2$$

donde:

$$g_{kk} = (e_k)^2 \tag{116}$$

Desenvolvendo:

$$ds^2 = g_{ii}\ (dx^i)^2 + g_{kk}\ (dx^k)^2 + 2g_{ik}\ dx^i\ dx^k$$

e comparando com o caso simples de dois eixos obliquos podemos generalizar a expressão:

$$ds^2 = (e_1)^2\ (dx^1)^2 + (e_2)^2\ (dx^2)^2 +$$

$$+ 2e_1\ e_2\ \cos\theta_{12}\ dx^1\ dx^2\ ,$$

vālida no plano OXY, para o caso de n dimensões,colocando:

$$g_{ik} = e_1\ e_k\ \cos\theta_{ik}$$

e (117)

$$g_{kk} = (e_k)^2$$

No caso de sistemas ortogonais:$\cos\theta_{ik} = 0$, resultando:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1{}^2 & 0 & 0 \\ 0 & e_2{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3{}^2 \end{vmatrix} = (e_1 e_2 e_3)^2$$

e

$$g' = g^{ik} = \begin{vmatrix} 1/e_1{}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/e_2{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/e_3{}^2 \end{vmatrix} = (e_1 e_2 e_3)^{-2}$$

2 - OPERAÇÕES MÉTRICAS

A natureza tensorial de uma grandeza pode ser alterada por operações métricas. Assim, por exemplo:

$$g_{ik}\ u^k = u_i = \text{covariante} \tag{118}$$

$$g^{ik}\ u_j = u^k = \text{contravariante} \tag{119}$$

pois

$$u_i = g_{ik}\ g^{jk}\ u_j = \delta_i^j\ u_j = u_i$$

Uma aplicação de g, em geral, com contração, abaixa ou eleva um índice do tensor:

$$g_{hk}\ t^{ijh} = t_k^{ij} \tag{120}$$

$$g^{hl}\ t_l^{ij} = t^{ijh} \tag{121}$$

Vejamos agora algumas definições:

a) NORMA DE UM VETOR

Tomando-se:

$$dx^j = g^{ij}\ dx_i$$

$dx_i = g_{ik}\ dx^k$, define-se:

$$\text{Norma} = (d\,s)^2 = g_{ik}\ dx^i\ dx^k = dx_i dx^i = g^{ij}\ dx_i\ dx_j \tag{122}$$

Assim, por exemplo, o vetor velocidade de um ponto:

$$u^k = \frac{dx^k}{d\ t}$$

terá a norma:

$$|u|^2 = (\frac{ds}{dt})^2 = g_{ik}\ u^i\ u^k = u^i\ u_i = g^{ij}.u_i\ u_j$$

que vale para qualquer vetor u.

b) PRODUTO ESCALAR

$$\vec{u}\ .\ \vec{v} = (uv) = u_i\ v^i = \text{escalar} \tag{123}$$

que pode ser generalizado para:

$$u_i v^i = g_{ik}\ u^k\ v^i = u^k\ v_k = g^{jk}\ u_j\ u_k = u\ .\ v \tag{124}$$

O ângulo generalizado pode ser introduzido de:

$$(uv) = |u|\ .\ |v| \cos\ (uv) \tag{125}$$

ou

$$\cos\theta_{ik} = \cos\ (uv) = \frac{g_{ik}\ u^i\ v^k}{[(g_{ik}u^i u^k)(g_{ik}v^i v^k)]^{1/2}} \tag{126}$$

onde θ_{ik} pode ser um ângulo imaginário ou real.

No caso de dois eixos, virá:

$$\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{[g_{11}\ g_{22}]^{1/2}}$$

c) COMPONENTES COVARIANTES

Tomemos umaa forma linear definida por:

$$dL = a_k\ \delta x^k = 0$$

onde δx^k é uma variação de x^k; essa expressão representará um hiperplano perpendicular a direção do vetor covariante a_k, pois temos:

$$g_{ik}\ a^i\ \delta x^k = a_k\ \delta x^k = 0 \tag{127}$$

donde se conclui que os valôres a_k definem um elemento de plano perpendicular ao vetor. Assim os componentes a^k de um vetor definem o contorno projetivo do vetor paralelamente aos eixos enquanto que as componentes a_k definem um elemento plano perpendicular ao vetor. Os produtos do tipo:

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_i = x^j e_j \cdot e_i = x^j g_{ji} = x_i$$

definem as componentes covariantes de um vetor.

Em coordenadas cartesianas ortonormais, teremos:

$$g_{ik} = g^{ik} = g^i_k = \delta_{ik} = \delta_{ik} = \delta^i_k \qquad (128)$$

donde:

$$x_i = \delta_{ij} x^j = x^i \qquad (129)$$

não havendo portanto diferença entre componentes covariantes e contravariantes.

d) TRANSFORMAÇÃO DO DETERMINANTE $|g|$

Como:

$$\overline{g}_{lm} = a^i_l a^k_m g_{ik}$$

vem:

$$|\overline{g}_{lm}| = |a^k_m| \; |g_{ki}| \; |a^i_l| = J^2 \; |g_{ki}|$$

logo:

$$|\overline{g}| = J^2 \; |g| \qquad (130)$$

donde concluimos que as expressões $|g|^{1/2}$ e $|g|^{-1/2}$ constituem densidades e capacidades escalares.

e) VERDADEIRA GRANDEZA DE UMA COMPONENTE

Definimos a verdadeira grandeza como:

$$V_{(i)} = v^i e_i = \frac{1}{e_i} v_i \tag{131}$$

ou

$$V_{(i)} = \sqrt{g_{ii}}\, v^i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} v_i \tag{132}$$

Ao longo de um x^k temos uma unidade de comprimento local:

$$e_k = \sqrt{g_{kk}} = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \tag{133}$$

para sistemas ortogonais.

As componentes covariantes serão:

$$a_k = e_k^2\, a^k \tag{134}$$

O comprimento do vetor será:

$$|a|^2 = g_{ik}\, a^i\, a^k = g_{kk}\, (a^k)^2 = (a^k e_k)^2 = (\frac{a_k}{e_k})^2 \tag{135}$$

A verdadeira grandeza dos componentes em um sistema ortogonal, será:

$$A_k = e_k\, a^k = \frac{1}{e_k} a_k = \sqrt{a_k a^k} \tag{136}$$

donde:

$$|a|^2 = \sum_k A_k^2 \tag{137}$$

f) PRODUTO VETORIAL

O produto vetorial (vide apêndice 3) de dois vetores é:

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \varepsilon_{ijk}\, a^i\, b^j\, e_k$$

O produto vetorial, utilizando-se a expressão (53") pode ser escrito:

$$c_i = \frac{1}{2}\, \varepsilon_{ijk}\, c^{jk} \quad \text{ou} \quad c^{jk} = a^j\, b^k - a^k\, b^j$$

3 - OPERADORES DIFERENCIAIS

Definimos anteriormente:

(70) a) gradiente de V: $a_i = \frac{\partial V}{\partial x^i}$ (vetor covariante)

(68) b) rotacional de a_i: $b_{ik} = \frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k}$ (tensor covariante)

(75) c) divergente de A^i: $D = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}$ (densidade escalar)

A introdução de operações métricas pode ampliar o campo de aplicação desses operadores.

Assim por exemplo, partindo de um vetor contravariante a^i construimos a densidade:

$$A^i = \sqrt{|g|}\; a^i \tag{138}$$

e em seguida um divergente escalar puro:

$$d = \frac{1}{\sqrt{g}} D = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}\; a^i) \tag{139}$$

Para coordenadas ortogonais: $g = e_1 e_2 e_3$, logo:

$$d = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \frac{\partial}{\partial x^1} (e_1 e_2 e_3 a^1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (e_1 e_2 e_3 a^2) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^3} (e_1 e_2 e_3 a^3)$$

Em verdadeira grandeza, vem finalmente:

$$d = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} e_2 e_3 A_1 + \frac{\partial}{\partial x^2} e_1 e_3 A_2 + \frac{\partial}{\partial x^3} e_1 e_2 A_3 \right] \tag{140}$$

Para o gradiente teremos:

$$A_k = \frac{1}{e_k} \frac{\partial V}{\partial x^k} \tag{141}$$

Para o rotacional cuja expressão é:

$$r_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}$$

vem:

$$R_{ik} = \frac{r_{ik}}{e_1 e_k} = \frac{1}{e_1 e_k}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}(e_k A_k) - \frac{\partial}{\partial x^k}(e_i A_i)\right] \tag{142}$$

Podemos agora definir outro operador: o laplaciano que, em eixos ortogonais cartesianos é dado por:

$$\nabla^2 V = \sum_k \frac{\partial^2 V}{(\partial x^k)^2} \tag{143}$$

Nesse sistema particular o laplaciano pode ser identificado com:

laplaciano = divergente do gradiente

pois

$$\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial V}{\partial x^k}\right) \tag{144}$$

Mas no caso geral a definição de divergente se aplica para entidades contravariantes. Logo é necessário fazer:

$$a^i = g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k} \tag{145}$$

e em seguida aplicar a formula (139):

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k}\right] \tag{146}$$

observando que os $|g|$ correspondem a g_{ik}. Se fizermos tudo em contravariantes podemos tomar $|g'|$ que é igual a $1/|g|$. Resultará:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{e_2 e_3}{e_1} \frac{\partial V}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{e_1 e_3}{e_2} \frac{\partial V}{\partial x^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial V}{\partial x^3}\right) \right] \qquad (147)$$

4 - INVARIÂNCIA DO PADRÃO, ESPAÇO DE RIEMANN

Suponhamos que o padrão sofra uma variação relativa:

$$\frac{\delta \ell}{\ell} = f_k \ \delta x^k \qquad (148)$$

onde os f_k definem as condições de transporte do padrão.

Se o deslocamento se der ao longo de uma trajetória fechada elementar, teremos:

$$\frac{d \ell}{\ell} = f_k \ dx^k \text{ (ao longo da trajetória)}$$

ou

$$\frac{d \ell}{\ell} = (\text{rotacional de } f)_{12} \ \delta x^1 \ \delta x^2 \quad . \qquad (149)$$

Se o rotacional não é nulo não se conservará o padrão. Caso contrário, podemos escrever:

$$f_k = \frac{\partial S}{\partial x^k} \qquad (150)$$

ou ainda: $f_k = 0$, para indicar invariância do metro.

Definiremos um espaço de Riemann quando se verificar:

a) a existência de uma métrica

b) a métrica é orientável em todos os sentidos e transportável a distância.

5 - DERIVAÇÃO COVARIANTE NOS ESPAÇOS RIEMANNIANOS

Vimos que a condição de transporte paralelo é:

$$Du^i = du^i + \Gamma^i_{hl}\, u^h\, \delta x^l = 0 \tag{151}$$

donde:

$$du^i = - \Gamma^i_{hl}\, u^h\, dx^l \tag{152}$$

A condição de invariância do comprimento , será:

$$d|u|^2 = d\,(g_{ik}\, u^i\, u^k) = 0 \tag{153}$$

ou

$$d(g_{ik})\, u^i\, u^k + g_{ik}\,(du^i)\, u^k + g_{ik}\, u^i\,(du^k) = 0 \tag{154}$$

Levando (152) em (154), vem:

$$d(g_{ik})\, u^i u^k - g_{ik}\, \Gamma^i_{hl}\, u^h\, dx^l\, u^k -$$

$$- g_{ik}\, \Gamma^k_{hl}\, u^h\, dx^l\, u^i = 0$$

$$\frac{\partial(g_{ik})}{\partial x^l}\, dx^l\, u^i u^k - g_{hk}\, \Gamma^h_{il}\, u^i\, dx^l\, u^k -$$

$$- g_{ih}\, \Gamma^h_{kl}\, u^k\, dx^l\, u^i = 0\,, \text{ donde:}$$

$$\frac{\partial(g_{ik})}{\partial x^l} = g_{hk}\, \Gamma^h_{il} + g_{ih}\, \Gamma^h_{kl} \tag{155}$$

Fazendo:

$$g_{hk}\,\Gamma^{h}_{il} = \Gamma_{k,il} \quad \text{ou} \quad \Gamma^{h}_{il} = g^{hk}\,\Gamma_{k,il} \tag{156}$$

e

$$g_{ih}\,\Gamma^{h}_{kl} = \Gamma_{i,kl} \quad \text{ou} \quad \Gamma^{h}_{kl} = g^{ih}\,\Gamma_{i,kl} \tag{157}$$

vem:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{l}} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{l,ik} \tag{158}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{i}} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{l,ik} \tag{159}$$

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x^{k}} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik} \tag{160}$$

Somando (160) com (159) e subtraindo (158), vem:

$$2\,\Gamma_{l,ik} = \frac{\partial g_{il}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{l}} = 2\,\Gamma_{l,ki}$$

donde:

$$\Gamma_{l,ik} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{l}}\right] \tag{161}$$

Podemos escrever os Γ^{h}_{ik} de outra maneira, diferente da definição (55), usando:

$$\Gamma^{h}_{ik} = g^{hl}\,\Gamma_{l,ik}$$

donde:

$$\Gamma^{h}_{ik} = \frac{1}{2}\,g^{hl}\left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{l}}\right] \tag{162}$$

Os simbolos Γ introduzidos são denominados simbolos de CHRISTOFFEL. Outras notações:

$$\Gamma_{l,ik} = \begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} = \text{simbolos de } 1^{a} \text{ espécie}$$

$$\Gamma^{h}_{ik} = \left\{ {ik \atop h} \right\} = \text{simbolos de } 2^{a} \text{ espécie} \tag{163}$$

Os resultados anteriores decorrem naturalmente das regras já estabelecidas para a derivação covariante afim. Com efeito:

$$D|u|^2 = 0 \implies D\,(g_{ik}) = 0$$

$$\frac{Dg_{ik}}{D\,x^l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial\, x^k} - \Gamma^h_{kl}\, g_{ih} - \Gamma^h_{il}\, g_{hk} = 0$$

ou

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{i,kl} - \Gamma_{k,il} = 0 \text{ , idêntica a (158).}$$

APLICAÇÕES:

a) Tomemos:

$a_i = g_{ij}\, a^j$. Como:

$a^j_{;k} = \dfrac{Da^j}{Dx^k}$, vem:

$$a_{i;k} = \frac{Da_i}{Dx^k} = \frac{Dg_{ij}a^j}{Dx^k} = g_{ij}\, a^j_{;k} \tag{164}$$

onde se verifica que as notações utilizadas permitem a extensão das propriedades formais dos símbolos g para derivadas.

b) Tomemos a densidade A:

$$\frac{D\,A}{Dx^k} = \frac{\partial\,A}{\partial x^k} - A\,\Gamma^h_{kh}$$

Para $A = \sqrt{|g|}$, vem:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{D\sqrt{|g|}}{Dx^k} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^k} - \Gamma^h_{kh}$$

$$\frac{D(\log\,g)}{Dx^k} = \frac{\partial(\log\,g)}{\partial x^k} - 2\,\Gamma^h_{kh} \qquad (165)$$

Mas:

$$\frac{\partial\,g}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\,.\,(\text{menor de } g_{ij}) = g\,(g^{ij}\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$$

e a equação (165) é identicamente nula, resultando:

$$\frac{\partial(\log\,g)}{\partial x^k} = 2\,\Gamma^h_{kh} = g^{ij}\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \qquad (165)'$$

c) O Laplaciano pode ser re-escrito:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,(\sqrt{|g|}\;g^{ik}\,\frac{\partial\,V}{\partial x^k}) = \frac{\partial}{\partial x^i}\,(g^{ik}\,\frac{\partial\,V}{\partial x^k}) +$$

$$+\; g^{ik}\,\frac{\partial\,V}{\partial x^k}\;\frac{(\log\,\sqrt{|g|})}{\partial x^i}$$

ou

$$\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial x^i}\,(g^{ik}\,\frac{\partial\,V}{\partial x^k}) + g^{ik}\,\frac{\partial\,V}{\partial x^k}\,\Gamma^h_{ih} = \frac{D}{Dx^i}\,(g^{ik}\,\frac{\partial\,V}{\partial x^k})$$

Trocando i = j por h e h por i, vem:

$$\nabla^2 V = g^{ik}\,\frac{D^2 V}{Dx^i\,Dx^k} \qquad (166)$$

d) Os teoremas de Gauss e Stokes podem ser generalizados, por exemplo, para um espaço de quatro dimensões. Assim, por exemplo, uma integral sobre uma hiper-superfície fechada pode ser transformada numa integral sobre o hiper- volume, trocando o elemento de integração ds^i por:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \{ \} d\,\Omega$$

Por exemplo:

$$\int A_i \, ds^i = \int_V \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\,\Omega$$

onde:

$$d\Omega = dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4$$

Numa integração sobre uma superfície podemos substituir ds_{ik} por:

$$ds^i \frac{\partial}{\partial x^k} - ds^k \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Por exemplo:

$$\frac{1}{2}\int A_{ik}\, ds_{ik} = \frac{1}{2}\int (ds^i \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^k} - ds^k \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^i}) = \int \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^k}\, ds^i$$

Numa integração ao longo de um contorno do espaço quadri-dimensional, substituimos dx^i por:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \{ \} ds^{ki}$$

Por exemplo:

$$\int A_i \, dx^i = \int \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \, ds^{ki} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) ds^{ki}$$

Para coordenadas generalizadas num espaço de tres dimensões, podemos escrever:

$$\int_V A^i{}_{,i} \, dV = \int_S A^i \, n_i \, ds$$

$$\int_V g^{ij} \, A_{i,j} \, dV = \int_S g^{ij} \, A_i \, n_j \, dS = \int_S A_i \, n^i \, dS$$

$$\int_V g^{ij} \quad \Phi_{,ij} \, dV = \int_S \Phi_{,i} \, n^i \, dS = \int_S \frac{\delta \Phi}{\delta n} \, dS$$

$$\int_S \varepsilon^{ijk} \, A_{k,j} \, n_i \, ds = \int A_k \, t^k \, d\ell$$

6 - GEODESICAS

Resumamos as condições do transporte paralelo:

$$|u|^2 = \text{constante}$$

$$(uv) = g_{ik}\, u^i\, v^k = \text{constante} \tag{167}$$

$$\cos\,(uv) = \frac{(u.v)}{|u|\,|v|} = \text{constante}$$

Para realizar um transporte paralelo deslocamos o vetor $\vec{u}$ ao longo de uma linha, chamada geodésica, conservando o valor do vetor e seu ângulo com essa linha.

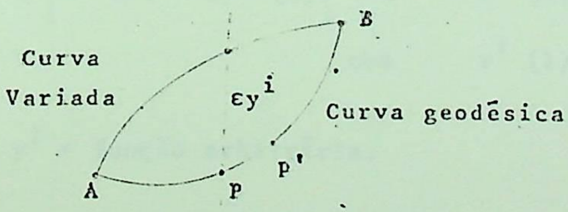
As geodesicas, nos espaços de Riemann possuem a propriedade de serem linhas mais curtas (ou mais longas) entre dois pontos dados do espaço.

O comprimento de uma curva é dada por:

$$S = \int_A^B dS = \text{certa curva C} \tag{168}$$

$$S + \delta S = \int_A^B dS + d(\delta S) \;=\; \text{curva variada}$$

$$\delta S = \int_A^B d(\delta S) = 0 \;\;\Rightarrow\; \text{curva geodésica}$$



$$dx^i = u^i\, d\lambda \tag{169}$$

Na geodésica (curva C) teremos:

$$Du^i = 0 \quad e \quad du^i = -\Gamma^i_{kl}\, u^k\, dx^l = -\Gamma^i_{kl}\, u^k\, u^l\, d\lambda$$

$$\frac{Du^i}{D\lambda} = \frac{\partial u^i}{\partial \lambda} + \Gamma^i_{kl}\, u^k\, u^l = 0 \tag{170}$$

Analogamente:

$$\frac{Du_k}{d\lambda} = \frac{\partial u_k}{\partial \lambda} - \Gamma^i_{kl}\, u_i\, u^l = 0 \tag{171}$$

Mas:

$$\Gamma^i_{kl}\, u_i = \Gamma^i_{kl}\, g_{ij}\, u^j = \Gamma_{j,kl}\, u^j$$

donde:

$$\frac{Du_k}{D\lambda} = \frac{\partial u_k}{\partial \lambda} - \Gamma_{j,kl}\, u^j\, u^l = \frac{\partial u_k}{\partial \lambda} - \frac{1}{2}\,(\Gamma_{j,kl} + \Gamma_{l,kj})$$

ou, tendo em vista (158):

$$\frac{Du_k}{D\lambda} = \frac{\partial u_k}{\partial \lambda} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}\, u^j\, u^l = 0 \tag{172}$$

que é a forma mais simples da geodesica.

Na curva APB temos:

$$P\left[x^i\,(\lambda)\right] \qquad e \qquad u^i\,(\lambda) = \frac{\partial x^i}{\partial \lambda}$$

Na curva AQB temos:

$$Q\left[x^i\,(\lambda) + \varepsilon y^i\,(\lambda)\right] \qquad e \qquad u^i\,(\lambda) + \varepsilon v^i\,(\lambda)$$

$$\text{com} \qquad v^i\,(\lambda) = \frac{\partial y^i}{\partial \lambda}$$

onde y^i = função arbitrária.

$$S = \int_A^B dS = \int_A^B \sqrt{g_{ik}\, u^i\, u^k}\, d\lambda$$

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_A^B \frac{\delta(g_{ik}\, u^i\, u^k)}{\sqrt{g_{ik}}\, u^i\, u^k}\, d\lambda$$

$$|u|\, \delta S = \frac{1}{2} \int_A^B \delta(g_{ik}\, u^i\, u^k)\, d\lambda$$

$$|u|\, \delta S = \frac{1}{2} \int_A^B \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\, \varepsilon\, y^l\, u^i\, u^k + g_{ik}\, u^i \,.\varepsilon\, v^k + \right.$$

$$\left. + g_{ik}\, u^k\, \varepsilon\, v^i\right) d\lambda$$

Mas:

$$v^k = \frac{\partial y^k}{\partial\, \lambda}$$

$$g_{ik}\, u^i\, v^k\, \varepsilon = g_{ik}\, u^k\, v^i\, \varepsilon$$

donde:

$$|u|\, \delta S = \frac{1}{2} \int_A^B \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}\, y^k u^i u^k + 2\, u_k\, \varepsilon\, \frac{\partial y^k}{\partial\, \lambda}\right) d\lambda =$$

$$= \int_A^B \left(\frac{1}{2}\, \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}\, u^i u^l - \frac{\partial u_k}{\partial\, \lambda}\right) \varepsilon\, y^k\, d\lambda = 0 \qquad (173)$$

após integração por partes e notando que:

$$y^k\, (A) = y^k\, (B) = 0.$$

Na geodésica cumpre-se portanto a condição de extremo, isto é, $\delta\, S = 0$. O vetor u^i fica paralelo no deslocamento e $|u|$ permanece constante:

$$|u|^2 = g_{ik}\, u^i\, u^k = cte$$

Se colocarmos:

$$|u|^2 = g_{ik}\, u^i\, u^k = 1 \qquad (174)$$

vem:

$$ds^2 = d\lambda^2 \qquad (175)$$

e o parâmetro será o próprio comprimento da curva.

7 - O TENSOR DE RIEMANN - CHRISTOFFEL

No espaço afim, os símbolos Γ foram utilizados na definição do transporte paralelo de tensores. Com a introdução das métricas g_{ih}, a condição de invariância do padrão permitiu relacionar Γ^i_{jk} com os g_{ik}.

A expressão (88), definindo o tensor de curvatura pode então, nos espaços com métrica, ser inteiramente, determinada pelo valor particular de g_{ik}.

Se considerarmos novamente as expressões (87) e (93):

$$\text{(87)} \qquad \delta u^i = - \frac{1}{2} \int_S R^i_{j,kh}\, u^j\, ds^{kh}$$

$$\text{(93)} \qquad \delta u_\ell = \frac{1}{2} \int_S R^i_{\ell,kh}\, u_i\, ds^{kh}$$

podemos, na primeira equação, introduzir $g_{i\ell}$ e obter:

$$\delta u_\ell = g_{i\ell}\, \delta u^i = - \frac{1}{2} \int_S g_{i\ell}\, R^i_{j,kh}\, u^j\, ds^{kh} \tag{176}$$

Fazendo:

$$g_i \; R^i_{j,kh} = R_{\ell j,kh} \tag{177}$$

vem:

$$\delta u_\ell = - \frac{1}{2} \int_S R_{\ell j,kh}\, u^j\, ds^{kh} \tag{178}$$

Mas, pela segunda equação:

$$\delta u_\ell = \frac{1}{2} \int_S R^i_{\ell,kh}\, g_{ij}\, u^j\, ds^{kh}$$

ou

$$\delta u_\ell = \frac{1}{2} \int_S R_{j\ell,kh}\ u^j\ ds^{kh} \quad . \tag{179}$$

Comparando (178) com (179) resulta:

$$R_{\ell j,kh} = - R_{j\ell,kh} \quad . \tag{180}$$

A propriedade (180) expressa o fato de $|u|^2$ ser invariante no transporte paralelo. Com efeito:

$$\delta |u|^2 = 2\ g_{ik}\ u^i\ \delta u^k = 2\ u_i\ \delta u^i = 0 \tag{181}$$

Mas, devido a (87):

$$u_i\ \delta u^i = - \frac{1}{2} \int_S R_{ij,kh}\ u^i\ u^j\ ds^{kh} \tag{182}$$

A expressão (182) será nula se considerarmos válida a equação (180).

O desenvolvimento da equação de definição, (177) fornecerá:

$$R_{\ell j,kh} = g_{\ell i} \left[\Gamma^i_{jh,k} - \Gamma^i_{jk,h} + \Gamma^i_{rk}\ \Gamma^r_{jh} - \Gamma^i_{rh}\ \Gamma^r_{jk} \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\ \Gamma_{\ell,jh} - \frac{\partial}{\partial x^h}\ \Gamma_{\ell,jk} + \Gamma^i_{jk}\ \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x^h} - \Gamma^i_{jh}\ \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x^k} +$$

$$+ \Gamma_{\ell,rk}\ \Gamma^r_{jh} - \Gamma_{\ell,rh}\ \Gamma^r_{jk} \tag{183}$$

Designando todos os índices mudos de (183) por $\underline{r}$ e levando em consideração a equação (158), vem:

$$R_{\ell j,kh} = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{\ell,jh} - \frac{\partial}{\partial x^h} \Gamma_{\ell,jk} + \Gamma_{r,\ell h} \Gamma^r_{jk} -$$

$$- \Gamma_{r,\ell k} \Gamma^r_{jh} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\;h}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{\;k}}{\partial x^h \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^k \partial x^\ell} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^h \partial x^\ell} \right) +$$

$$+ g^{rs} \left(\Gamma_{r,\ell h} \Gamma_{s,jk} - \Gamma_{r,\ell k} \Gamma_{s,jh} \right)$$

onde podemos verificar que existe uma simetria do tipo:

$$R_{\ell j,kh} = R_{kh,\ell j} \tag{184}$$

além de:

$$R_{\ell j,kh} = - R_{j\ell,kh} \tag{185}$$

$$R_{\ell j,kh} = - R_{\ell j,hk} \tag{186}$$

$$R_{\ell j,kh} + R_{\ell k,hj} + R_{\ell h,jk} = 0 \tag{187}$$

Podemos mostrar que, devido a essas simetrias o tensor curvatura possuirá, no espaço de $\underline{n}$ dimensões:

$$\frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1) \quad \text{componentes distintas.}$$

Convém assinalar que a notação dos tensores de curvatura varia em diversos autores. A que apresentamos até agora é a de BRILLOUIN (   ):

$$R \text{ misto} \Rightarrow R^{i}_{j,kh}$$

$$R \text{ covariante} \Rightarrow R_{ij,kh}$$

Com a mesma orientação acima, podemos não utilizar a virgula de separação, facilitando o emprego da mesma para indicar derivação, como:

$$R^{i}_{jkh} = \Gamma^{i}_{jh,k} - \Gamma^{i}_{jk,h} + \Gamma^{i}_{\ell h} - \Gamma^{i}_{\ell h} \; \Gamma^{\ell}_{jk} \tag{188}$$

Para outras notações consultar BRILLOUIN (   ), página 131.

8.- O TENSOR DE RICCI E EINSTEIN

As equações (96) e (98) referente ao transporte de densidades escalares permitem escrever:

$$\delta(\log A) = \frac{1}{2} \int_S \left[R_{kh} - R_{hk} \right] ds^{kh} \tag{189}$$

onde:

$$R_{kh} = R^{i}_{kih} = - \Gamma^{i}_{ki,h} + \Gamma^{i}_{kh,i} + \Gamma^{i}_{\ell i}\, \Gamma^{\ell}_{kh} + \Gamma^{i}_{\ell h}\, \Gamma^{\ell}_{ki} \tag{190}$$

é o tensor de curvatura contraido, de Ricci e Einstein. Devido a simetria dos Γ, podemos escrever:

$$R_{hk} - R_{kh} = \Gamma^{i}_{ki,h} - \Gamma^{\ i}_{hi,k} \tag{191}$$

A expressão (189) é identicamente nula se respeitarmos a invariância do padrão, resultando a simetria de R_{kh}. Isso, aliás pode ser verificado diretamente se utilizarmos a equação (165').

$$\Gamma^{i}_{ki} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\log g)}{\partial x^{k}}$$

donde:

$$\Gamma^{i}_{ki,h} = \frac{1}{2} \frac{\partial^{2} (\log\sqrt{g})}{\partial x^{k} \quad \partial x^{h}} = \Gamma^{i}_{hi,k} \tag{192}$$

que levando em (191) fornece:

$$R_{hk} = R_{kh} \tag{193}$$

A propriedade expressa por (193) corresponde à hipótese da invariância de $\sqrt{g}$ em transporte paralelo.

Se colocarmos:

$$R^h_k = g^{hi} R_{ik} \,, \tag{194}$$

Com nova contração, resulta:

$$R = R^k_k = g^{ki} R_{ik} \tag{195}$$

que é um invariante, chamado invariante de curvatura.

Como aplicação das equações precedentes podemos provar algumas identidades que serão utilizadas na exposição da relatividade geral, denominadas *identidades de Bianchi*:

$$R_{ijk\ell;h} + R_{ij\ell h;k} + R_{ijhk;\ell} = 0 \tag{196}$$

As mesmas fórmulas podem ser escritas para os R mistos:

$$R^{ij}_{k\ell;h} + R^{ij}_{\ell h;k} + R^{ij}_{hk;\ell} = 0 \tag{197}$$

Com contração do par $\underline{i\ell}$, resulta:

$$R^{ij}_{hi;h} + R^{ij}_{ih;k} + R^{ij}_{hk;i} = 0$$

ou

$$-R^j_{k;h} + R^j_{h;k} + R^{ij}_{hk;i} = 0 \tag{198}$$

Com nova contração, para os indices jk resulta:

$$-R_{;h} + R^j_{h;j} + R^i_{h;i} = 0$$

ou

$$-R_{;h} + 2\, R^{j}_{h;j} = 0$$

resultando finalmente:

$$\frac{D}{Dx^{j}} \left[-\frac{1}{2}\, g^{j}_{h}\, R + R^{j}_{h} \right] = 0 \tag{199}$$

onde:

$$g^{j}_{h} = \delta^{j}_{h}$$

que é uma expressão utilizada na teoria da relatividade.

Vamos agora utilizar os resultados anteriores para a compreensão dos espaços de Riemann não euclidianos.

Sabemos que, num espaço riemanniano, o emprego de coordenadas geodésicas simplificam as fórmulas por anularem os coeficientes Γ. Na vizinhança de um ponto P podemos encontrar um espaço euclidiano.

Tomemos uma métrica euclidiana:

$$ds^2 = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 + (dv^3)^2 + \dots (dv^r)^2 > 0 \tag{200}$$

onde, evidentemente $g_{k\ell} = \delta_{k\ell}$

As coordenadas de um ponto P sobre uma geodésica que passa por P serão:

$$v^k = \alpha^k\, s \tag{201}$$

onde:

α^k = cossenos diretores da geodésica

s = comprimento medido na geodésica

As equações da geodésica, como sabemos, são:

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \Gamma^{k}_{\ell m}\, \frac{dx^{\ell}}{dx^{s}}\, \frac{dx^{m}}{dx^{s}} = 0 \tag{202}$$

Mas, como os α^k são constantes, para as coordenadas v^k teremos:

$$d^2x^k/ds^2 = 0, \quad \text{donde:}$$

$$\Gamma^k_{\ell m} \; \alpha^\ell \; \alpha^m = 0 \tag{203}$$

ou

$$\Gamma^k_{\ell m} \; v^\ell \; v^m = 0$$

$$\Gamma_{k\ell m} \; v^\ell \; v^m = 0 \tag{204}$$

Derivando (204) em relação a $\underline{s}$, continuamos a manter a identidade, pois não sairemos da geodésica. Resulta:

$$\frac{\partial \; T_{k\ell m}}{\partial v^n} \; v^\ell \; v^m \; \alpha^n = 0 \tag{205}$$

donde:

$$\frac{\partial \; T_{k\ell m}}{\partial v^n} + \frac{\partial \; T_{kmn}}{\partial v^\ell} + \frac{\partial \; T_{kn\ell}}{\partial v^m} = 0 \tag{206}$$

Como os Γ são nulos em P, o tensor de curvatura dado pela expressão geral (183) se reduzirá a:

$$R_{k\ell mn} = \frac{\partial \; T_{k\ell n}}{\partial v^m} - \frac{\partial T_{k\ell m}}{\partial v^n} \tag{207}$$

As equações (206) e (207) fornecem:

$$\Gamma_{k\ell m} = \frac{1}{3} \left[R_{k\ell nm} - R_{kmn\ell} \right] v^n \tag{208}$$

Levando (208) em (158) resulta:

$$\frac{\partial g^{k\ell}}{\partial v^m} = \Gamma_{k\ell m} + \Gamma_{\ell km} = \frac{1}{3} \left[R_{kmn\ell} + R_{\ell mnk} \right] v^n$$

Integrando:

$$g^{k\ell} = \delta_{k\ell} + \frac{1}{3} \left[R_{kmn\ell} + R_{\ell mnk} \right] v^n v^m \qquad (209)$$

onde verificamos que se o tensor de curvatura não é nulo, o espaço não pode ser euclidiano. Caso contrário os $g_{k\ell}$ podem se reduzir a forma euclidiana num domínio finito em torno de P e ao longo de todo o espaço, percorrido ponto a ponto.

PARTE III

MECÂNICA CLÁSSICA

1 - O ESQUEMA NEWTONIANO

Seguindo a orientação de J.L. DESTOUCHES, vamos expor, nesta parte do trabalho, os principais esquemas da mecânica racional. Daremos, porém, um tratamento geométrico com ênfase aos principios variacionais. Vejamos, inicialmente, de maneira sucinta, o esquema newtoniano.

Além dos conceitos clássicos de espaço e tempo, que não comentaremos aqui, o mais importante dos principios desse esquema é o *principio das equações diferenciais:*

"Existe pelo menos uma referencial T tal que em seu movimento relativo a esse referencial e numa escala de tempo, todo o ponto material M_i adquire, pela presença de outros pontos naturais M_j, colocados a distancias finitas, uma aceleração $d^2\vec{r}_i/dt^2$ bem determinada em grandeza, direção e sentido, dependendo das posições dos pontos, da velocidade de cada ponto e do tempo, isto é:

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \emptyset_i \left(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \frac{d\vec{r}_i}{d\,t}, \frac{d\vec{r}_j}{d\,t}, t\right) \text{"} \tag{210}$$

A função $\emptyset_i$ é chamada *força aceleratriz* do ponto M_i. Se essas funções satisfazem certas condições analíticas o movimento do sistema é perfeitamente determinado quando se fornecem as posições e as velocidades num instante inicial. Isso caracteriza o determinismo mecânico.

A cada ponto material atribuimos um coeficiente numérico positivo, chamado massa. Chamaremos força ao produto da massa pela força aceleratriz:

$$F_i = m_i \, \emptyset_i \tag{211}$$

ou

$$F_i = m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} \tag{212}$$

que é a equação fundamental da dinâmica newtoniana.

O princípio da inércia é outro princípio fundamental da mecânica de Newton e estabelece a existência de sistemas de referência privilegiados (sistemas inerciais), com relação aos quais um ponto não sujeito a ação dos outros pontos possui aceleração nula. Como diz Einstein ( ), o ponto fraco do princípio da inércia reside no fato de conter um círculo vicioso: uma partícula move-se sem aceleração se está suficientemente afastado de outras particulas; por outro lado, dizemos que ela está suficientemente afastada de outras particulas quando se desloca sem aceleração.

Um sistema de N particulas M_i pode ser descrito por um esquema no espaço tri-dimensional, utilizando as equações (210) para cada ponto e os conceitos de velocidade e aceleração. Podemos ainda introduzir o conceito da *quantidade de movimento*.

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i = m_i \frac{d\vec{r}_i}{d\,t} \qquad (213)$$

donde:

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{d\,t} \qquad (214)$$

Podemos representar o sistema como um único ponto do espaço de configuração, de 3N dimensões, cujas coordenadas são:

$$(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N)$$

Ou então numa extensão em momentos, de 3N dimensões:

$$(Px_1,\ Py_1, Pz_1, Px_2, Py_2, Pz_2, \ldots, Px_N, Py_N, Pz_N)$$

Podemos, enfim, montar um espaço de 6N dimensões chamado espaço de fase, cujas coordenadas são as coordenadas do espaço de configuração e da extensão em momentos. As componentes de um ponto do espaço fase são:

$$\vec{P}\ (\vec{r}_i,\ \vec{p}_i) \qquad (215)$$

Um vetor desse espaço, definido por $\frac{dp}{dt}$, terá as componentes:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\ (\vec{v}_i,\ \vec{f}_i) \qquad (216)$$

Um movimento real do sistema é representado no espaço-fase por uma aplicação, que transforme o ponto inicial P(0) em P(t) e pode ser representado por um operador de evolução E $(t,\ t_o)$:

$$P(t) = E(t,t_o)\ P(0) \qquad (217)$$

No transcurso do tempo o ponto do espaço fase desenvolverá uma *trajetória figurativa* do sistema S.

2 - O ESQUEMA LAGRANGEANO

Um sistema S estará submetido a *ligações* se as coordenadas e as velocidades estiverem relacionadas por m equações do tipo:

$$h_k (\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) = 0 \qquad \begin{array}{l}(i = 1,2,...,N)\\ (k = 1,2,...,m)\end{array} \qquad (218)$$

Uma ligação é holonoma se não depende das velocidades v_i:

$$h_k (\vec{r}_i, t) = 0 \qquad (219)$$

e no caso mais simples, pode também não depender do tempo:

$$h_k (\vec{r}_i) = 0 \qquad (220)$$

Cada ligação introduz uma hiper-superfície, no espaço de configuração. Se existem m ligações, o ponto figurativo do sistema deverá se manter na interseção dessas hiper-superfícies, isto é, ficará restrito a uma variedade de $n = 3N - m$ dimensões. Será então mais comodo adotar-se um espaço de n dimensões com as coordenadas generalizadas de Lagrange:

$$q^i = q^i (x_k\ y_k\ z_k) \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,...,n\\ k = 1,2,...,3N\end{array} \qquad (221)$$

O número n determina os graus de liberdade do sistema S e o espaço de n dimensões agora construido chamar-se-á espaço de configuração riemanniano.

As variáveis do esquema lagrangeano serão, além do tempo, as coordenadas q^i e as derivadas $dq^i/dt = \dot{q}^i$.

A equação fundamental do esquema lagrangeano pode ser construida por dois processos diferentes:

a) como aplicação do principio de d'Alembert, ou,

b) através de um principio variacional.

Em qualquer um dos dois processos a notação tensorial é bastante cômoda.

Apenas como ilustração mostraremos os dois processos, ressaltando porém a excelência do segundo processo, mais sintético, mais elegante e mais amplo, permitindo uma extensão a toda a física, como veremos no decorrer desta exposição.

a) PRIMEIRO PROCESSO

O principio de d'Alembert estabelece que:

"As forças exteriores aplicadas ao sistema devem ser equilibradas pelas forças de inércia; se formarmos a resultante das forças exteriores e de inércia, essa resultante é nula, seu trabalho é nulo para qualquer deslocamento virtual do sistema".

Para um sistema sem ligações, podemos expressar o principio de d'Alembert como segue:

$$X_k - m_k \ddot{x}^k = 0 \tag{222}$$

onde X_k = componente da força exterior $\vec{X}$.

$$- m \ddot{x}^k = - m \frac{d^2x^k}{dt^2} = \text{força de inércia} \tag{223}$$

Para deslocamentos virtuais δx^k, podemos escrever:

$$(-X_k + m_k \ddot{x}^k)\ \delta x^k = 0 \tag{224}$$

No espaço de configuração para ligações dependentes do tempo e das coordenadas, temos:

$$x^k = x^k\,(q^i,\ t) \qquad k = 1,2,\ldots,\ 3N \quad i = 1,2,\ldots,\ n$$

$$\delta x^k = \frac{\partial x^k}{\partial q^i}\ \delta q^i$$

donde:

$$\left[-X_q + m_k\ \ddot{x}^k\right] \frac{\partial x^k}{\partial q^i}\ \delta q^i = 0 \tag{225}$$

ou

$$(P_i - Q_i)\ \delta q^i = 0 \tag{226}$$

onde:

$$P_i = \frac{\partial x^k}{\partial q^i}\ m_k\ \ddot{x}^k \tag{227}$$

$$Q_i = \frac{\partial x^k}{\partial q^i}\ X_k \tag{228}$$

Fazendo $\frac{\partial x^k}{\partial q^i} = b_i^k$ vemos que as equações (227) e (228) apenas representam a transformação covariante dos termos da equação (225) face a transformação (221).

A velocidade pode ser transformada como segue:

$$\dot{x}^k = \frac{\partial x^k}{\partial t} + \frac{\partial x^k}{\partial q^i}\ \dot{q}^i = a_i^k\ \dot{q}^i + \frac{\partial x^k}{\partial t} \tag{229}$$

No caso de ligações independentes do tempo teriamos simplesmente uma transformação contravariante:

$$\dot{x}^k = a_i^k\ \dot{q}^i$$

Vamos desenvolver a equação (227):

$$P_i = \frac{d}{dt}\left(m_k\, \dot{x}^k \frac{\partial x^k}{\partial q^i}\right) - m_k\, \dot{x}^k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^k}{\partial q^i}\right)$$

Tendo em vista que:

?

$$\frac{\partial x^k}{\partial q^i} = \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{q}^i} \tag{231}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^k}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial^2 x^k}{\partial t\, \partial q^i} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial q^i\, \partial q^j}\, \dot{q}^j = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{dx^k}{d\,t}\right) \tag{232}$$

vem:

$$P_i = \frac{d}{dt}\left[m_k\, \dot{x}^k \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{q}^i}\right] - m_k\, \dot{x}^k \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{q}^i}$$

Definindo:

$$T = \frac{1}{2}\, m_k\, (\dot{x}^k)^2 = \text{energia cinética} \tag{233}$$

vem:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = m_k\, \dot{x}^k \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{q}^u} \tag{234}$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial q^i} = m_k\, \dot{x}^k \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial q^i} \tag{235}$$

donde:

$$P_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} \tag{236}$$

Como:

$$P_i - Q_i = 0$$

resultam as equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i = 0 \tag{237}$$

Chamando:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = \text{momento conjugado de } q^i \tag{238}$$

vem:

$$\frac{dp_i}{d\,t} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i = 0 \tag{239}$$

Se as forças exteriores admitem uma função geradora como a *energia potencial* $U(x^k) = - V(x^k)$:

$$X_k = - \frac{\partial V}{\partial x^k} \quad , \tag{240}$$

vem:

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial q^i} = - a^k_i \frac{\partial V}{\partial x^k} = - \frac{\partial V}{\partial q^i} \tag{241}$$

ou no caso mais geral:

$$Q_i = - \frac{\partial U}{\partial q^i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial q^i}\right) \quad , \tag{242}$$

Quando as ligações não dependem do tempo, teremos:

$$2T = m_k\,(\dot{x}^k)^2 = M_{ij}\,\dot{q}^i\,\dot{q}^j \tag{243}$$

onde:

$$M_{ij} = M_{ij} = m_k\,a^k_i\,a^k_j \tag{244}$$

Os coeficientes M_{ij} representam as massas no espaço de configuração.

A expressão do momento, será, nesse caso:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q^i} = M_{ij} \dot{q}^j \tag{245}$$

onde desaparece o fator 1/2 devido à simetria de M_{ij}.

A equação (239) será:

$$\frac{dp_i}{d\,t} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^h - Q_i = 0$$

$$\frac{dp_i}{d\,t} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^h + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0 \tag{246}$$

Se introduzirmos:

$$L = T - V = \frac{1}{2} M_{jh} \dot{q}^j \dot{q}^h - V \tag{247}$$

chamada função de Lagrange, resulta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \ . \tag{248}$$

ou

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \qquad \text{e} \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{249}$$

Observemos que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial q^i} \dot{q}^i = \dot{q}^i \left[\frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] =$$

$$= \dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial q^i} + \ddot{q}^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt} \left(\dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) =$$

$$= \frac{dT}{dt} - 2 \frac{dT}{dt} = - \frac{dT}{dt}$$

donde:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} (T + V) = 0 \qquad (250)$$

logo:

$$\varepsilon = T + V = \text{energia total} = \text{constante} \qquad (251)$$

Levando em consideração a equação ( ) , podemos escrever também:

$$\varepsilon = p_i \dot{q}^i - L \qquad (252)$$

b) SEGUNDO PROCESSO

Os principios variacionais estabelecem condições as quais deve satisfazer certa função para tornar estacionário (máximo ou mínimo) o valor de uma integral da função.

Para se entender melhor o conceito variacional vamos apresentar uma imagem geométrica.

Tomemos como métrica riemanniana do espaço de configuração:

$$ds^2 = M_{ij}\ dq^i\ dq^j \tag{253}$$

Se fizermos a mudança de escala:

$$y^k = \sqrt{m^k}\ x^k \tag{254}$$

vem:

$$2T = \sum_k (\dot{y}^k)^2 \tag{255}$$

passando para o espaço de configuração teremos:

$$2T = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} M_{ij}\ \dot{q}^i\ \dot{q}^j \tag{256}$$

Se tomarmos a velocidade covariante:

$$\dot{q}_i = M_{ij}\ \dot{q}^j = p_i \tag{257}$$

vemos que é igual à componente do momento conjugado.

A derivada absoluta de um vetor covariante é:

$$\frac{Du_i}{D\lambda} = \frac{du_i}{d\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} u^j u^h$$

No caso que estavamos tratando, vem:

$$\frac{D\dot{q}_i}{Dt} = \frac{d\dot{q}_i}{dt} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i}\dot{q}^j\dot{q}^h = -\frac{\partial V}{\partial q^i} = Q_i \qquad (258)$$

Para ligações independentes do tempo:

$$\frac{d\dot{q}_i}{dt} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q^h}\dot{q}^h + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}^h}\ddot{q}^h = \frac{\partial M_{ij}}{\partial q^h}\dot{q}^j\dot{q}^h + M_{ij}\ddot{q}^j$$

donde:

$$\frac{D\dot{q}_i}{dt} = M_{ij}\ddot{q}^j + \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q^h} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i}\right)\dot{q}^j\dot{q}^h = -\frac{\partial V}{\partial q^i} \qquad (259)$$

Se não há forças externas, a equação acima é a equação de uma *geodésica* no espaço de configuração.

Para descrever a mecânica do sistema, partimos então da *métrica* ds^2, baseada nos coeficientes M_{ij} e a geodésica do espaço representará a evolução do sistema, quando $Q_i = 0$.

A velocidade do ponto de configuração, dará:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2T} \qquad (260)$$

Se $v \neq 0$, $\varepsilon = T + V = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + V$

$$v = \sqrt{2}\,(\varepsilon - V) \qquad (261)$$

Como interpretar agora, geometricamente um caso de sistema com ligações independentes do tempo, com energia potencial não nula?

Uma interpretação interessante, segundo Brillouin (   ) será construir um espaço de (n+1) dimensões onde as coordenadas seriam (q^i, t) com $i = 1,2,...,n$.

A métrica pode ser escolhida como sendo:

$$ds^2 = (A + 2L)dt^2 = g_{ij}dq^i dq^j = g_{00}(dq^o)^2 + M_{ij}dq^i dq^j \quad (262)$$

com:

$$A = \text{constante} \qquad e \qquad 2L = 2T - 2V$$

$$g_{00} = A - 2V \quad (263)$$

$$g_{i0} = g_{0i} = 0$$

Como:

$$\frac{dq_i}{d\,s} = g_{ij}\frac{dq^j}{d\,s}$$

a equação da geodésica será:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dq_i}{d\,s}\right) = \frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dq^j}{d\,s}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jh}}{\partial q^i}\frac{dq^j}{d\,s}\frac{dq^h}{d\,s} = 0$$

ou

$$\frac{d}{ds}\left(M_{ij}\frac{dq^i}{d\,s}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i}\frac{dq^j}{d\,s}\frac{dq^h}{d\,s} - \frac{\partial V}{\partial q^i}\left(\frac{dq^0}{d\,s}\right)^2 \quad (264)$$

Como:

$$M_{ij}\frac{dq^j}{d\,s} = M_{ij}\,\dot{q}^j\frac{dt}{ds} = p_i\frac{dt}{ds} \quad (265)$$

vem:

$$p_i \frac{d^2t}{ds^2} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \left[\dot{p}_i - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{jh}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^h + \frac{\partial V}{\partial q^i} \right] = 0 \quad (266)$$

Calculando:

$$\frac{\frac{d^2t}{ds^2}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} = - \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt}(A + 2L)}{(A + 2L)} \quad (267)$$

resultará:

$$\frac{d^2t}{ds^2} << \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \quad (268)$$

desde que se faça: $A >> 2L$

Logo, a equação (266) dará:

$$\dot{p}_i - \frac{1}{2} M_{jh} \dot{q}^j \dot{q}^h + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^i} = 0 .$$

idêntica a (246).

O movimento somente será equivalente a uma geodésica, se A for muito grande.

Analogamente, podemos mostrar que no caso geral de ligações holonomas variáveis com o tempo e com a energia potencial, o problema se reduz a busca de uma geodésica no espaço de métrica:

$$ds^2 = (A + 2L)\, dt^2 = g_{ij}\, dq^i\, dq^j \quad (269)$$

mas com:

$$2L = 2\,(T_0 + T_1 + T_2) - 2V \quad (270)$$

onde:

$$2T_0 = \mu = m_k \left(\frac{\partial x^k}{\partial t}\right)^2$$

$$2T_1 = 2\, \upsilon_i\, \dot{q}^i = 2\, m_k \frac{\partial x^k}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial q^i}$$

$$2T_2 = M_{ij}\, \dot{q}^i\, \dot{q}^j = m_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j}$$

$$g_{00} = \Lambda + 2T_0 - 2V = \Lambda + \mu - 2V \tag{271}$$

$$g_{0i} = g_{i0} = \upsilon_i$$

$$g_{ij} = M_{ij}$$

Como a geodésica é o caminho mais curto entre dois pontos do espaço, o problema de calcular a geodésica é equivalente ao de tornar mínima a integral:

$$S = \int_a^b ds \tag{272}$$

ou

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\Lambda+2L}\; dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(\sqrt{\Lambda} + \frac{L}{\sqrt{\Lambda}} \ldots\right) dt$$

$$S = \sqrt{\Lambda}\,(t_2 - t_1) + \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{273}$$

Quando a e b são fixados, a variação de S e da integral $\int L dt$ são proporcionais. O mínimo de um corresponderá ao mínimo do outro (Brillouin, Pág. 162, op.cit).

Concluimos, finalmente, que no esquema lagrangeano as equações do movimento do sistema satisfazem ao *princípio da ação mínima*, definindo-se:

$$S = \int L dt = \text{integral de ação} \tag{274}$$

O cálculo das variações permite resolver o seguinte problema geral:

(I) - é dado $L\ (q, \dot{q}, t)$: lagrangeano do sistema

(II) - é imposta a condição $\delta \int L dt = 0$

(III) - determinar as equações a que L deve estar sujeito para que a condição (b) seja verificada.

Sabemos que, do cálculo das variações que a condição necessária e suficiente para que:

$$\delta \int_a^b F\ (y,\ y',\ x)\ dx = 0$$

com $y(a) = \alpha$ e $Y(b) = \beta$ é que F satisfaça a

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{275}$$

Chamada: equação de Euler-Lagrange.

No caso de:

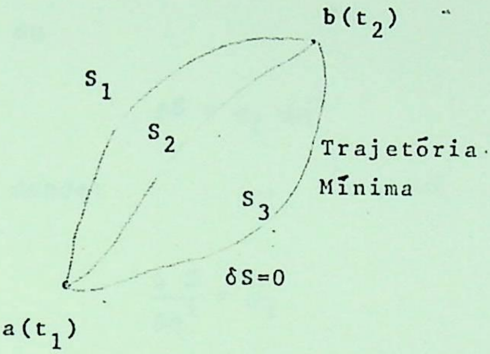
$$S = \int L\ (q^i,\ \dot{q}^i,\ t)\ dt$$

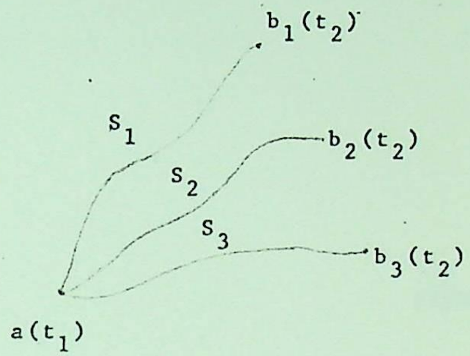
vem imediatamente:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \tag{276}$$

Observemos que a integral de ação S se refere à trajetória mínima entre os pontos $a(t_2)$ e $b(t_2)$ fixados. Para essa trajetória, $\delta\Lambda = 0$.

Encaremos, porém, a integral S sob outro ponto de vista, qual seja, como uma propriedade proporcional ao comprimento de cada trajetória que se inicia no ponto $a(t_1)$ mas cujo ponto final $b(t_2)$ não é fixo:





Teremos:

$$S = \int L\ (q,\ \dot{q},\ t)\ dt$$

$$\delta S = \delta \int L\ (q,\ \dot{q},\ t)\ dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\ \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ \delta q\right)\ dt$$

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ \delta q \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\ \delta q\ \delta t \qquad (277\ )$$

A condição $\delta\Lambda = 0$ para $a(t_1)$ e $b(t_2)$ fixos leva, como sabemos as equações de Euler:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Supondo agora (Fig.) que tenhamos em cada trajetória um movimento real, a integral da equação (277) se anula.

Colocando-se $\delta q(t_1) = 0$ e $\delta q(t_2) = \delta q \neq 0$, vem:

$$\delta S = p\,\delta\,q$$

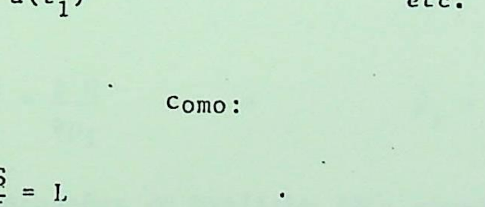
ou

$$\delta S = p_i\,\delta q^i$$

donde:

$$\frac{\partial\,S}{\partial q^i} = p_i \tag{278}$$

De maneira análoga, se encararmos a variação de S com o tempo:



Como:

$$\frac{dS}{dt} = L$$

e

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial\,S}{\partial q^i}\,\dot{q}^i = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i\,\dot{q}^i \tag{279}$$

vem:

$$L = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i\,\dot{q}^i \quad \text{ou} \quad -\frac{S}{t} = L - p_i\,\dot{q}^i \tag{280}$$

3 - O ESQUEMA HAMILTONEANO

Vimos que o lagrangeano descreve o sistema em função de coordenadas e velocidades generalizadas mas podemos passar a outro esquema, utilizando coordenadas e momentos generalizados.

Com efeito:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i = \dot{p}_i \, dq^i + p_i \, d\dot{q}^i$$

$$dL = \dot{p}_i \, dq^i + \frac{d}{dt} (p_i \, \dot{q}^i) - \dot{q}^i \, dp_i$$

$$d \left[p_i \, \dot{q}^i - L \right] = - \dot{p}_i \, dq^i + \dot{q}^i \, dp_i \qquad (281)$$

Chamando:

$$H = p_i \, \dot{q}^i - L = \text{hamiltoneano} \qquad (282)$$

vem:

$$dH = - \dot{p}_i \, dq^i + \dot{q}^i \, dp_i \qquad (283)$$

donde:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \text{e} \qquad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q^i} \qquad (284)$$

que são as equações de Hamilton (2 n equações de primeira ordem).

É fácil ver que:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (285)$$

As equações de Hamilton podem ser deduzidas diretamente de um principio variacional.

Com efeito, de (280), temos:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - H \tag{286}$$

Como:

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i$$

vem:

$$dS = p_i \, dq^i - H \, dt \tag{287}$$

donde:

$$S = \int p_i \, dq^i - H \, dt \tag{288}$$

$$\delta S = \int \delta p \, dq + p \, \delta(dq) - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \, dt - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \, dt$$

$$\delta S = \int \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt\right) \delta p + p \delta q - \int \left(dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt\right) \delta q = 0$$

donde:

$$\frac{dq^i}{d\,t} = \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp^i}{d\,t} = \dot{p}^i = - \frac{\partial H}{\partial q^i}$$

Como uma interessante observação adicional ao método variacional, vamos expor sucintamente o principio NOETHER, extraido de um apêndice de LANCZOS ( ).

Segundo o método de NOETHER, extraimos os principios de conservação da energia, do momentum linear e do momentum angular a partir da propriedade da integral de ação permanecer invariante face a um grupo de transformação infinitesimais.

Tomemos o lagrangeano $L(q_i, \dot{q}_i)$ não dependente explicitamente do tempo e efetuemos a translação da variável t:

$$t = t' + \alpha$$

onde α = constante infinitesimal.

O lagrangeano resultará em

$$L\ (q_i,\ q'_i)$$

onde: $$q'_i = \frac{dq}{dt'}$$

A integral de ação será:

$$S = \int_{t'_1 + \alpha}^{t'_2 + \alpha} L\ (q_i,\ q'_i)\ dt'$$

Suponhamos agora que o parâmetro α seja função de t' satisfazendo as condições:

$$\alpha\ (t_1) = \alpha(t_2) = 0$$

Teremos:

$$\frac{dq_i}{d\ t} = \frac{dq_i}{dt'}\ (1 - \alpha')$$

donde:

$$L\left[q_i,\ q'_i\ (1-\alpha)\right] = L\ (q_i, q'_i) - \frac{\partial\ L}{\partial \dot{q}_i}\ \dot{q}_i\ \alpha'$$

Como:

$$dt = (1+\alpha')\ dt'$$

podemos escrever:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\ (q_i,\ q_i')\ dt' - \int (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ \dot{q}_i - L)\ \alpha'\ \dot{d}t'$$

A condição $\delta S = 0$, leva a

$$\frac{d}{dt'}\ (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ \dot{q}_i - L) = 0$$

donde:

$$P_i\ \dot{q}_i - L = \varepsilon$$

que é o teorema da energia, isto anteriormente.

Façamos agora:

$$x_i = x'_i + \alpha$$

$$y_i = y'_i + \beta$$

$$z_i = z'_i + \gamma$$

Resulta:

$$T = \frac{1}{2}\ m_i \left[(\dot{x}'_i + \dot{\alpha})^2 + (\dot{y}'_i + \dot{\beta})^2 + (\dot{z}'_i + \dot{\gamma})^2 \right]$$

donde:

$$S = \int (T-V) dt = \int L dt + \int m_i\ (\dot{x}_i \dot{\alpha} + \dot{y}_i \dot{\beta} + \dot{z}_i \dot{\gamma}\ )\ dt$$

Para $S = 0$, vem:

$$m_i\ \dot{x}_i = c_1$$

$$m_i\ \dot{y}_i = c_2$$

$$m_i\ \dot{z}_i = c_3$$

que expressa a conservação do momentum linear.

Façamos finalmente:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{\Omega} \times \vec{r}\,'$$

resultando:

$$T = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i'^2 + \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i' + \dot{\vec{\Omega}} \vec{x} \dot{\vec{r}}_i')^2$$

donde, após introdução em S, para $S = 0$, virá:

$$m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{M} = \text{constante}$$

que expressa a conservação do momentum angular.

PARTE IV

TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

1 - CINEMÁTICA RELATIVISTA

Desenvolvemos agora o essencial da cinemática relativistica, utilizando o espalo quadridimensional de Minkowski, definido pelas 4 coordenadas:

$$\begin{aligned} x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \\ x^4 &= ct \qquad c = \text{velocidade da luz no vácuo} \end{aligned} \tag{289}$$

onde (x,y,z) representam as coordenadas do espaço euclidiano e t representa o tempo.

A métrica invariante do espaço será dada por:

$$ds^2 = m_{ij}\, dx^i\, dx^j \quad (i,j = 1,2,3,4) \tag{290}$$

onde:

$$m_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \tag{291}$$

resultando:

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\, dt^2 \tag{292}$$

Podemos dar uma representação mais compacta da métrica, utilizando:

$$x^4 = jct \qquad \text{onde} \qquad j = \sqrt{-1} \tag{293}$$

Nesse caso teriamos:

$$m_{ij} = - \delta_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (294)$$

resultando:

$$ds^2 = - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2 \qquad (295)$$

A métrica transforma-se de acôrdo com:

$$\overline{m}_{rs} = a^i_r \, a^j_s \, m_{ij} \qquad (296).$$

A invariância da métrica ds^2 pode adquirir um significado físico se considerarmos movimentos relativos de sistemas de referência, tais como uma translação no espaço euclidiano. Como o tempo foi incorporado ao sistema de referência uma translação será interpretada como uma *rotação* no espaço - tempo, sendo que, pela natureza dos eixos coordenados, uma rotação geral pode ser decomposta em 6 rotações particulares:

3 pseudo-rotações (planos $x^1 0 x^4$; $x^2 o x^4$; $x^3 0 x^4$)

e

3 rotações reais (planos $x^1 0 x^2$; $x^2 0 x^3$; $x^3 0 x^1$)

Se fixarmos um relógio no sistema $\overline{S}$, em translação com velocidade v, relativamente a S, no ponto $\overline{x}=\overline{y}=\overline{z}=0$, teremos:

$$ds^2 = c^2 \, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 \, \overline{dt}^2 \qquad (297)$$

donde:

$$\overline{dt} = \frac{d\,s}{c} = \frac{1}{c} \left[c^2 \, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \right]^{1/2}$$

ou

$$\overline{dt} = dt \left[1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 \, dt^2} \right]^{1/2}$$

Mas, considerando que:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2$$

vem:

$$\overline{dt} = \frac{d\,s}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (298)$$

e o invariante do espaço pode ser escrito como:

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (299)$$

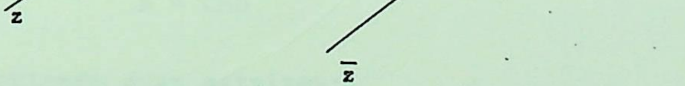
ou

$$ds = \frac{cdt}{\gamma} \qquad (300)$$

onde fizemos, como é usual:

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (301)$$

Vamos estabelecer agora as equações de transformação para um sistema $\overline{S}$ que se move com velocidade uniforme $\vec{v}$ na direção do eixo Ox de um sistema S, mantendo os planos paralelos, como se indica na figura abaixo:



No continuo espaço-tempo quadridimensional isso é uma rotação particular, definida por:

$$x^1 = A\,\overline{x}^1 + B\,\overline{x}^4 \qquad \text{(não depende de } x^2 \text{ e } x^3\text{)}$$

$$x^2 = \overline{x}^2$$

$$x^3 = \bar{x}^3$$

$$x^4 = C\bar{x}^1 + D\bar{x}^4 \quad \text{(não depende de } x^2 \text{ e } x^3\text{)}$$

A condição:

$$\bar{m}_{rs} = a^i_r\, a^j_s\, m_{ij}$$

fornece:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & C \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ B & 0 & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & B \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} A^2 - C^2 &= 1 \\ B^2 - D^2 &= 1 \qquad (302) \\ AB - CD &= 0 \end{aligned}$$

cuja resolução fornece as duas opções:

$$D = A \qquad\qquad D = -A$$

$$C = B \qquad\qquad C = -B$$

Como $B^2 = A^2 - 1$, podemos fazer:

$$A = Ch\Theta$$

obtendo duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} Ch\theta & 0 & 0 & Sh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Sh\theta & 0 & 0 & Ch\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} Ch\theta & 0 & 0 & Sh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -Sh\theta & 0 & 0 & -Ch\theta \end{bmatrix}$$

Se impomos $x^i = \bar{x}^i$ para $\theta = 0$, subsistirá apenas a primeira matriz, resultando:

$$\begin{aligned} x^1 &= Ch\theta\, \bar{x}^1 + Sh\theta\, \bar{x}^4 \\ x^2 &= \bar{x}^2 \\ x^3 &= \bar{x}^3 \\ x^4 &= Sh\theta\, \bar{x}^1 + Ch\theta\, \bar{x}^4 \end{aligned} \tag{303}$$

ou a relação inversa:

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= Ch\theta\, x^1 - Sh\theta\, x^4 \\ \bar{x}^2 &= x^2 \\ \bar{x}^3 &= x^3 \\ \bar{x}^4 &= -Sh\theta\, x^1 + Ch\theta\, x^4 \end{aligned} \tag{304}$$

Se para $\bar{x}^1 = 0$ temos $x^1 = vt$, então:

$$0 = Ch\theta\,(vt) - Sh\theta\,(ct)$$

donde:

$$Th\theta = \frac{v}{c} = \beta \tag{305}$$

com:

$$\begin{aligned} Sh\theta &= \gamma\beta \\ Ch\theta &= \gamma \end{aligned} \tag{306}$$

resultando as chamadas equações de Lorentz.

$$\begin{aligned}
\bar{x}^1 &= \gamma x^1 - \gamma\beta\, x^4 \\
\bar{x}^2 &= x^2 \\
\bar{x}^3 &= x^3 \\
\bar{x}^4 &= -\gamma\beta x^1 + \gamma x^4
\end{aligned} \tag{307}$$

ou

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \gamma\,(x - vt) \\
\bar{y} &= y \\
\bar{z} &= z \\
\bar{t} &= \gamma\,(t - \frac{xv}{c^2})
\end{aligned} \tag{308}$$

A matriz da transformação de Lorentz pode ser indicada por:

$$\bar{x}^i = b^i_j\, x^j$$

ou a inversa:

$$x^j = a^j_i\ \bar{x}^i \tag{309}$$

onde:

$$b^i_j = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \qquad a^j_i = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Os quadrivetores do espaço de Minkowski serão caracterizados pelas transformações:

$$\begin{aligned}
&\text{a) covariante:} \quad \bar{A}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} A_j = a^j_i\, A_j \\
&\text{b) contravariante:} \quad \bar{B}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} B^j = b^i_j\, B^j
\end{aligned} \tag{310}$$

O tensor fundamental m_{ij} permite transformar expressões contravariantes em covariantes::

$$m_{ij}\ B^j = B_i \qquad (311)$$

Duas transformações sucessivas do tipo translação, por exemplo com velocidades v^1 e v^2 podem ser obtidas pela aplicação sucessiva da matriz a_i^j:

$$\begin{bmatrix} Ch\theta_1 & 0 & 0 & Sh\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Sh\theta_1 & 0 & 0 & Ch\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ch\theta_2 & 0 & 0 & Sh\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Sh\theta_2 & 0 & 0 & Ch\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ch(\theta_1+\theta_2) & 0 & 0 & Sh(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Sh(\theta_1+\theta_2) & 0 & 0 & Ch(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

Logo, a rotação resultante é $\theta = \theta_1 + \theta_2$, donde se infere que no caso de duas translações não temos a clássica soma de velocidades mas sim:

$$\frac{v}{c} = Th\theta = Th\ (\theta_1+\theta_2) = \frac{\frac{v^1}{c} + \frac{v^2}{c}}{1 + \frac{v^1\ v^2}{c^2}}$$

ou

$$v = \frac{v^1+v^2}{1 + v^1v^2/c^2} \qquad (312)$$

A expressão anterior é um caso particular de adição dos quadrivetores velocidade, que no espaço de Minkowski são definidos pela relação:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\ s} \qquad (i = 1,2,3,4) \qquad (313)$$

ou, considerando que:

$$ds = \frac{cdt}{\gamma} \ ,$$

$$u^i = \frac{\gamma\ dx^i}{dct} = \frac{\gamma}{c}\ \frac{dx^i}{d\ t} \qquad (314)$$

resultando:

$$u^i = \frac{\gamma}{c} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\gamma}{c} v^i \qquad (i = 1,2,3)$$

$$u^4 = \frac{\gamma}{c} \frac{c\,dt}{dt} = \gamma \qquad (315)$$

Para representarmos a adição de velocidades, como é usual na cinemática tri-dimensional teriamos de reduzir dimensionalmente nossa definição de velocidade pois dx^i/ds é adimensional.

Podemos escrever para isso:

$$v^i = \frac{c}{\gamma} M^i_j u^j \quad \Rightarrow \quad u^j = \frac{\gamma}{c} N^j_i v^i \qquad (316)$$

onde a matriz M^i_j para correção dimensional é:

$$M^i_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix} \text{ com } \left[M^i_j \right]^{-1} = N^j_i \qquad (317)$$

Para uma transformação de Lorentz, resulta:

$$\bar{v}^i = \frac{c}{\bar{\gamma}} M^i_j \bar{u}^j \qquad (318)$$

Mas, de acordo com (309)

$$u^j = a^j_r \bar{u}^r$$

donde:

$$v^i = \frac{c}{\gamma} M^i_j a^j_r \bar{u}^r = \frac{c}{\gamma} M^i_j a^j_r \frac{\bar{\gamma}}{c} N^j_i \bar{v}^i$$

ou

$$v^i = \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} M^i_j a^j_r N^j_i \bar{v}^i \qquad (319)$$

Desenvolvendo vem:

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & c\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma\beta}{c} & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}^1 \\ \bar{v}^2 \\ \bar{v}^3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & V \\ 0 & \frac{1}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & 0 \\ \frac{V}{c^2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}^1 \\ \bar{v}^2 \\ \bar{v}^3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\bar{\gamma}\left(\frac{V\bar{v}^1}{c^2} + 1\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{v}^1 V}{c^2}} \tag{320}$$

e

$$v^1 = \frac{\bar{v} + V}{1 + \frac{\bar{v}^1 V}{c^2}} \qquad v^3 = \frac{\bar{v}^3}{\gamma\left(1 + \frac{\bar{v}^1 V}{c^2}\right)}$$

$$v^2 = \frac{\bar{v}^2}{\gamma\left(1 + \frac{\bar{v}^1 V}{c^2}\right)} \tag{321}$$

Observemos que:

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2 = (u^i)^2 = -1 \tag{322}$$

pois:

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 = (dx^i)^2 = -ds^2 \qquad (323)$$

donde resulta:

$$2\, u^i \frac{du^i}{d\,s} = 0 \qquad (324)$$

A expressão:

$$J^i = \frac{du^i}{d\,s} = \frac{d^2\, x^i}{ds^2} \qquad (i = 1,2,3,4) \qquad (325)$$

define o quadrivetor aceleração.

Não comentaremos aqui, para não alongarmos demasiadamente a exposição, muitas consequências interessantes da cinemática relativista. O leitor interessado poderá consultar a bibliografia indicada no final do trabalho, especialmente no que se refere aos problemas da dilatação do tempo e da contração do espaço, que por seu caráter muito diverso das noções clássicas da mecânica, chamam a atenção sempre que se estuda, pela primeira vez, a teoria da relatividade restrita.

Como nosso objetivo é, principalmente, uma visão sintética da teoria do campo, passaremos imediatamente a dinâmica relativista.

2 - DINÂMICA RELATIVISTA

Adotaremos a seguinte expressão para o lagrangeano:

$$L = - \frac{m_o c^2}{\gamma} \tag{326}$$

A integral de ação resultará:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} - \frac{m_o c^2}{\gamma} dt \tag{327}$$

ou, tendo em vista que:

$$ds = \frac{cdt}{\gamma}$$

$$S = - m_o c \int_a^b ds \tag{328}$$

De acôrdo com o princípio da ação mínima:

$$\delta S = - m_o c \; \delta \int_a^b ds = 0$$

Utilizando a expressão (323), vem:

$$\delta S = - m_o \; c \; \delta \int_a^b - (dx^i)^2 = - m_o c \int_a^b \frac{-dx^i \; \delta \; dx^i}{-dx_i^2} =$$

$$= m_o c \int_a^b u^i \; d \; \delta \; x^i \; .$$

onde:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\,s}$$

Integrando, resulta:

$$\delta S = m_o . c\, u^i\, \delta x^i \Big|_a^b - m_o\, c \int_a^b \delta x^i \frac{du^i}{d\,s} ds = 0 \qquad (329)$$

Para $(\delta x^i)_a = (\delta x^i)_b = 0$, trajetória real entre os pontos a e b, a condição $\delta S = 0$, fornecerá $du^i/ds = 0$, isto é; *velocidade constante para partícula livre.*

No caso de variação das coordenadas, fixaremos o ponto a e faremos variar b, isto é:

$$(\delta x^i)_a = 0 \qquad (\delta x^i)_b = \delta x^i \neq 0$$

Impondo a condição da trajetória ser real, a integral se anula resultando, em (329):

$$\delta S = m_o . c\, u^i\, \delta x^i$$

Definindo o quadrivetor momentum, como:

$$p^i = \frac{\delta S}{\delta x^i} \qquad (330)$$

resulta:

$$p^i = m_o . c\, u^i \qquad (331)$$

onde, para i = 1,2,3, os valôres p^i são os mesmos que os do momentum tridimensional, definido por:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \qquad (332)$$

pois:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial\, v} \left(- m_o\, c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = \gamma m_o\, \vec{v} \qquad (333)$$

Para i = 4, teremos:

$$p^4 = m_o . c\, u^4 = m_o\, c\, j\, \gamma = j\, \gamma\, m_o c$$

ou

$$p^4 = j\, \frac{\varepsilon}{c}$$

onde introduzimos a energia total, definida por:

$$\varepsilon = p \cdot v - L = \gamma\, m_o\, c^2 = mc^2 \tag{336}$$

Logo *momentum* e *energia* compõem um único quadrivetor de componentes:

$$p^i = m_o\, c\, u^i$$

ou seja:

$$p^i = m_o\, c\, \frac{\gamma}{c}\, v^i = \gamma\, m_o\, v^i = m\, v^i \quad (i = 1,2,3) \tag{337}$$

$$p^4 = j\, \gamma\, m_o\, c = j\, m\, c = j\, \frac{\varepsilon}{c} \tag{338}$$

O quadrivetor *força* pode ser introduzido por exemplo, por:

$$F^i = \frac{dp^i}{d\, s} = m_o\, c\, \frac{du^i}{d\, s} \tag{339}$$

Como:

$$\delta_{ij}\, u^i\, \frac{du^j}{d\, s} = 0 \tag{340}$$

resulta:

$$\delta_{ij}\, F^i\, u^j = 0 \tag{341}$$

Para i = 1,2,3, teremos:

$$F^i = \frac{dp^i}{d\,s} = \frac{\gamma}{c}\,\frac{dp^i}{d\,t} = \frac{\gamma}{c}\,f^i \tag{342}$$

onde f^i são as componentes usuais da força.

Para i = 4, teremos:

$$F^i = \frac{dp^4}{d\,s} = \frac{\gamma}{c}\,\frac{dp^4}{d\,t} = \frac{\gamma}{c}\,\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\varepsilon}{c}\right) = \frac{\gamma}{c^2}\,\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{343}$$

Mas:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_c}{d\,t} = \frac{d}{dt}\,(\vec{f}\,.\,\vec{d\ell}) = \vec{f}\,.\,\vec{v} \tag{344}$$

donde:

$$F^4 = \frac{\gamma}{c^2}\,(\vec{f}\,.\,\vec{v}) \tag{345}$$

Convém lembrar que a expressão $f = \frac{dp}{dt}$ não fornece um quadrivetor.

Como sabemos, as expressões:

$$\vec{f} = m_o\,\frac{d\vec{v}}{dt}$$

e

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right) = \vec{f}\,.\,\vec{v} \tag{346}$$

constituem a base da mecânica clássica mas não são invariantes.

Se usarmos o quadrivetor aceleração $J^i = \frac{du^i}{d\,s}$ e multiplicarmos pela energia de repouso $m_o c^2$, vem:

$$\emptyset^i = m_o c^2\,\frac{du^i}{d\,s} = \gamma\,m_o\,c\,\frac{du^i}{d\,t} \tag{347}$$

Para passarmos de u^i as componentes v^j, temos:

$u^i = \frac{\gamma}{c}\,N^i_j\,v^j$, onde N^i_j é definido por (317).

Vem, da equação (347):

$$\phi^i = \gamma\, m_o\, c \frac{d}{d\,t} \left(\frac{\gamma}{c}\; N^i_j\, v^j\right) = \gamma\, m_o\, N^i_j \frac{d}{dt} \left(\gamma\, v^j\right)$$

ou

$$m_o \frac{d}{d\,t} (\gamma\;\; v^i) = \frac{\phi^i}{\gamma} \qquad i = 1,2,3$$

$$m_o \frac{d}{d\,t} (\gamma\; c) = \frac{\phi^4}{\gamma} \qquad i = 4 \tag{348}$$

Vemos que fazendo $f^i = \gamma\, \frac{\phi^i}{\gamma}$, a força no espaço tridimensional teremos uma equação análoga a de Newton (idêntica para $v \ll c$).

Considerando que:

$$u_i \;\; \frac{du^i}{d\,s} = u_i\, \phi^i = 0 \tag{349}$$

e

$$u_i = m_{ir}\; u^r \tag{350}$$

vem, para (349):

$$m_{ir}\; u^r\; \phi^i = 0$$

ou

$$- \phi^1\, u^1 - \phi^2\, u^2 - \phi^3\, u^3 + \phi^4\, u^4 = 0 \tag{351}$$

donde:

$$\phi^4\, u^4 = \delta_{ij}\, \phi^i\, u^j = \delta_{ij}\, \phi^i \frac{\gamma}{c}\, v^j = \delta_{ij} \frac{\gamma^2}{c}\, f^i\, v^j$$

$$\frac{\phi^4}{\gamma} = \frac{1}{c}\; \delta_{ij}\; F^i\, v^j \tag{352}$$

resultando:

$$m_o \frac{d}{dt} (\gamma c) = \frac{1}{c} F^i v^i \tag{353}$$

ou

$$\frac{d}{dt} (\gamma m_o c^2) = F^i v^i = \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{354}$$

Como:

$$p^i = m_o c u^i$$

e

$$u_i^2 = -1$$

vem:

$$(\Sigma p_i^2) = - m_o^2 c^2 \tag{355}$$

resultando identidade muito utilizada:

$$p^2 + m_o^2 c^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2}$$

ou

$$(pc)^2 + (m_o c^2)^2 = \varepsilon^2 \tag{356}$$

Na identidade acima podemos levar o valor $p^i = \frac{\partial s}{\partial x^i}$ e escrever:

$$(\frac{\partial s}{\partial x})^2 + (\frac{\partial s}{\partial y})^2 + (\frac{\partial s}{\partial z})^2 - \frac{1}{c^2} (\frac{\partial s}{\partial t})^2 + m_o^2 c^2 = 0 \tag{357}$$

que consiste a equação de Hamilton-Jacobi para a mecânica relativista.

Todos os quadrivetores introduzidos obedecem as fórmulas de transformação. Apenas para comodidade nas aplicações, vamos resumir em seguida as expressões de transformação face a uma translação.

a) Coordenadas de evento espaço-temporal

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \gamma\,(x - Vt) \\ \bar{y} &= y \qquad\qquad \bar{x}^i = b^i_j\, x^j \\ \bar{z} &= z \\ \bar{t} &= \gamma\,(t - Vx/c^2) \end{aligned} \tag{358}$$

b) Componentes da velocidade relativista tridimensional:

$$\bar{v}^1 = \frac{v^1 - V}{1 - v^1 V/c^2}$$

$$\bar{v}^2 = \frac{v_2\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v^1 V/c^2} \qquad \left(\text{para } v^i = \frac{dx^i}{d\,t}\right) \tag{359}$$

$$\bar{v}^3 = \frac{v_3\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v^1 V/c^2}$$

Além disso, podemos extrair das expressões acima:

$$\sqrt{1 - \bar{v}^2/c^2} = \frac{\sqrt{(1 - V^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}}{1 - v^1 V/c^2} \tag{360}$$

que é muito utilizada nas demonstrações.

c) Quadrivetor momentum

$$\bar{p}^1 = \gamma p^1 - \gamma\beta p^4 = \gamma p^1 - \gamma\beta \frac{\varepsilon}{c} = \gamma\ (p^1 - \frac{V\varepsilon}{c^2})$$

$$\bar{p}^2 = p^2 \ ;\ \bar{p}^3 = p^3 \tag{361}$$

$$\bar{p}^4 = -\ \gamma\beta\ p^1 + \gamma p^4 = \gamma(p^4 - \beta\ p^1) \quad \text{ou}$$

$$\bar{\varepsilon} = \gamma\ (\varepsilon - V\ p^1)$$

d) Componentes da força relativista tridimensional:

$$\bar{f}^1 = \frac{d\bar{p}^1}{d\ \bar{t}} = \frac{d}{d\ \bar{t}}\ (\bar{p}^1) = \frac{d}{d\ \bar{t}}\frac{dt}{d\bar{t}}\ (\bar{p}^1)$$

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{d}{d\ t}\gamma\ (t - \frac{Vx}{c^2}) = \gamma\ (1 - \frac{Vv^1}{c^2})$$

donde:

$$\bar{f}^1 = \frac{\gamma}{\gamma(1 - \frac{v^1 V}{c^2})}\ \frac{d}{d\ t}\ (p^1 - \frac{V\varepsilon}{c^2})$$

$$\bar{f}^1 = \frac{1}{(1 - \frac{v^1 V}{c^2})}\ f^1 - \frac{V}{c^2}\frac{d\varepsilon}{dt}$$

donde:

$$\bar{f}^1 = \frac{f^1 - \frac{V}{c^2} \vec{f} \cdot \vec{v}}{(1 - \frac{v^1 V}{c^2})}$$

$$\bar{f}^2 = \frac{d\bar{p}^2}{d\,\bar{t}} = \frac{dp^2}{d\,\bar{t}} = \frac{d}{d\,t}\frac{dt}{d\bar{t}}(p^2) = \frac{f^2}{\gamma(1 - \frac{v^1 V}{c^2})} \qquad (362)$$

e

$$\bar{f}^3 = \frac{f^3}{\gamma(1 - \frac{v^1 V}{c^2})}$$

Observemos que a aplicação direta de:

$$\vec{f} = \frac{d}{d\,t}(\gamma\, m_o\, \vec{v}) = \gamma m_o \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m_o\, v\, \dot{v}\, \vec{v}}{c^2\,(1 - u^2/c^2)^{3/2}}$$

forneceria duas componentes para a força relativista, em forma vetorial.

Podemos introduzir também o momento angular definido por:

$$M^{ik} = x^i\, p^k - x^k\, p^i$$

que se reduz, por ser anti-simétrico, a

$$M_4 = M_{4i} = jc\left[t\, p_i - \frac{\varepsilon x^i}{c^2}\right] \qquad i = 1,2,3$$

$$M_x = M^{yz} = -\,M^{zy}$$

$$M_y = M^{zx} = -\,M^{xz}$$

$$M_z = M^{xy} = -\,M^{yx}$$

PARTE V

CAMPO ELETROMAGNÉTICO

1 - QUADRIPOTENCIAL DE UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

A função de ação para uma carga puntiforme $\underline{e}$ num campo eletromagnético será:

$$S = \int_a^b (-m_o\, c\, ds + \frac{e}{c} A_i\, dx^i) \qquad (363)$$

onde A_i = quadrivetor potencial $(A_1, A_2, A_3, j\emptyset)$, observando-se que não estamos dando atenção a colocação correta dos índices.

$$S = \int_a^b (-m_o\, c\, ds + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot d\vec{r} - e\, \emptyset\, dt)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (- \frac{m_o c^2}{\gamma} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\, \emptyset)\, dt \qquad (364)$$

O lagrangeano será:

$$L = - \frac{m_o c^2}{\gamma} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\, \emptyset \qquad (365)$$

A impulsão será:

$$P = \frac{\partial L}{\partial v} = \gamma\, m_o\, \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \qquad (366)$$

O Hamiltoneano será:

$$H = \vec{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial v} - L = \gamma\, m_o\, c^2 + e\, \emptyset \qquad (367)$$

donde:

$$\left[\frac{H - e\emptyset}{c}\right]^2 = m_o^{\,2}\, c^2 + \left[p - \frac{e}{c}\, \vec{A}\right]$$

où

$$H = m_o{}^2 c^4 + c^2 \left(P - \frac{e}{c} \vec{A}\right)^2 + e\emptyset \tag{368}$$

Para v << c

$$L = \frac{m_o v^2}{2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\,\emptyset \tag{369}$$

$$H = \frac{1}{2m_o} \left(P - \frac{e}{c} \vec{A}\right)^2 + e\,\emptyset \tag{370}$$

2 - O TENSOR DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Pelo princípio da ação mínima:

$$\delta S = \delta \int_a^b (-m_o\, c\, ds + \frac{e}{c} A_i\, dx^i) = 0 \qquad (371)$$

ou

$$\delta S = \int_a^b (-m_o\, c\, du^i\, \delta x^i - \frac{e}{c}\, \delta x^i\, d\, A_i + \frac{e}{c}\, \delta A_i\, dx^i) +$$

$$+ \quad (m_o\, c\, u^i + \frac{e}{c} A_i)\, \delta x^i \Big|_a^b = 0$$

donde:

$$\int -(m_o\, c\, du^i\, \delta x^i - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\, \delta x^i\, dx^k + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\, dx^i\, \delta x^k) = 0$$

$$\int \left[- m_o c\, \frac{du^i}{d\, s} + \frac{e}{c} (\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k})\, u^k \right] \delta x^i\, ds = 0$$

donde:

$$m_o c\, \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} (\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k})\, u^k \qquad (372)$$

Façamos:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = - F_{ki} \qquad (373)$$

vem , em (372):

$$m_o\, c\, \frac{du^i}{d\, s} = \frac{e}{c}\, F_{ik}\, u^k \qquad (374)$$

que é a equação do movimento da carga no campo.

Levando os valores de A_i na equação (373) resulta:

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0$$

$$F_{12} = - F_{21} = H_z$$

$$F_{13} = - F_{31} = - H_y \quad \text{(onde } \vec{H} = \text{campo magnético, vetor axial)}$$

$$F_{23} = - F_{32} = H_x \tag{375}$$

$$F_{14} = - F_{41} = - j\ E_x$$

$$F_{24} = - F_{42} = -j\ E_y \quad \text{(onde } \vec{E} = \text{campo elétrico, vetor polar)}$$

$$F_{34} = - F_{43} = -j\ E_z$$

Resumindo:

$$F_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & H_z & H_y & -j\ E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -j\ E_y \\ -H_y & -H_x & 0 & -j\ E_z \\ j\ E_x & jE_y & jE_z & 0 \end{bmatrix} \tag{376}$$

A equação (374) fornece, para i = 1,2,3

$$m \frac{dv}{dt} = e\ \vec{E} + \frac{e}{c}\ \vec{v} \times \vec{H} \tag{377}$$

e para i = 4:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = e\ \vec{E}\ .\ \vec{v} \tag{378}$$

Voltando a expressão de δS e analisando agora, como já fizemos anteriormente na dinâmica relativista, a variação da ação, num movimento real, teremos:

$$\delta S = (m_o\ c\ u^i + \frac{e}{c} A_i) \delta\ x^i$$

$$\frac{\delta\ S}{\delta x^i} = m_o\ c\ u^i + \frac{e}{c} A_i = p^i + \frac{e}{c} A_i = p^i \qquad (379)$$

onde:

$$p^i = p^i + \frac{e}{c} A^i \qquad (i = 1,2,3) \qquad (380)$$

$$p^4 = \frac{j}{c} (\ _c + e\ \emptyset) \qquad (381)$$

Temos ainda:

$$(p_i - \frac{e}{c} A_i)^2 = - m_o^2\ c^2$$

ou

$$(\frac{\partial\ S}{\partial x^i} - \frac{e}{c} A^i)^2 + m_o^2\ c^2 = 0 \qquad (382)$$

Os quadrivetores transformar-se-ão segundo:

$$A^1 = \gamma\ (\overline{A}^1 + \beta\ \emptyset)$$

$$A^2 = \overline{A}^2\ ;\ \ A^3 = \overline{A}^3 \qquad (383)$$

$$\emptyset = \gamma(\overline{\emptyset} + \beta\overline{A}^1)$$

Quanto aos tensores F^{ik}, podemos escrever:

$$F^{ik} = a_m^i\ a_\ell^k\ \overline{F}^{m\ell} \qquad (384)$$

resultando, após os cálculos:

$$E_x = \overline{E}_x$$

$$E_y = \gamma(\overline{E}_y + \beta\overline{H}_z)$$

$$E_z = \gamma\,(\bar{E}_z - \beta\,\bar{H}_y)$$

$$H_x = \bar{H}_x$$

$$H_y = \gamma\,(\bar{H}_y - \beta\,\bar{E}_z) \tag{385}$$

$$H_z = \gamma\,(\bar{H}_z + \beta\,\bar{E}_y)$$

Os invariantes do campo são:

$$(F_{ik})^2 = \text{escalar} \tag{386}$$

e

$$\varepsilon_{ik\ell m}\,F_{ik}\,F_{\ell m} = \text{pseudo escalar} \tag{387}$$

que fornecem:

$$H^2 - E^2 = \text{invariante} \tag{388}$$

e

$$\vec{E}\,.\,\vec{H} = \text{invariante} \tag{389}$$

As equações de Maxwell podem ser extraidas das propriedades do tensor do campo, como segue:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_K}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \tag{390}$$

$$H_x = F_{23} = \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2}$$

$$H_y = F_{31} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{391}$$

$$H_z = F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}$$

$$-j\vec{E} = F_{14}+F_{24}+F_{34} = (\frac{\partial \emptyset}{\partial x^1} + \frac{\partial \emptyset}{\partial x^2} + \frac{\partial \emptyset}{\partial x^3})j +$$

$$+ \frac{1}{c} (\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{\partial A_3}{\partial t})j$$

donde:

$$\vec{E} = - \nabla\emptyset - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial T} \tag{392}$$

Da expressão (390) podemos concluir que:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial F_{k\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{\ell i}}{\partial x^k} = 0$$

donde:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{393}$$

e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \tag{394}$$

Consideremos agora a ação para o caso de diversas particulas, formando um sistema. Nesse caso, a função de ação constará de tres parcelas:

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

onde:

a) S_1 (refere-se as particulas) $= - \Sigma\, m_o\, c \int ds$

b) S_2 (refere-se as particulas e ao campo) $= \Sigma\, \frac{e}{c} \int A_k\, dx^k$

c) Quanto a S_3, refere-se apenas ao campo e deverá ser introduzido após algumas considerações físicas. Uma forma conveniente, de S_3 é:

$$S_3 = a \int F_{ik}{}^2\, dV\, dt \qquad (\,a = \text{constante}) \tag{395}$$

No sistema Gaussiano de unidades, $a = -\frac{1}{16\Pi}$. No sistema racionalizado de Heaviside teríamos: $a = -\frac{1}{4}$.

Em notação quadridimensional:

$$S_3 = \frac{j}{16\,\Pi\,c} \int F_{ik}^{\ 2}\, d\,\Omega \qquad (d\Omega = dx dy dz d\tau) \qquad (396)$$

donde:

$$S = -\Sigma\left[m_o\, cds + \frac{e}{c}\ A_k\, dx^k + \frac{j}{16\Pi c}\int F_{ik}^{\ 2}\, d\Omega\right] \qquad (397)$$

Vamos definir agora o quadrivetor corrente, a partir da noção de densidade de carga. Como as cargas são puntiformes, a melhor expressão para a densidade de carga é:

$$\delta = \frac{de}{dV} = e_i\ \delta\ (\vec{r} - \vec{r}_i) \qquad (398)$$

onde δ é a função *Delta de Dirac*.

A expressão dV é invariante, portanto se formarmos a equação:

$$(de)\ dx^i = \rho\ dV\ dx^i = \rho\ dV\ dt\ \frac{dx^i}{d\ t} \qquad (399)$$

podemos definir o *quadrivetor corrente*:

$$J_i = \frac{dx^i}{d\ t} = \gamma\ \rho_o\ \frac{dx^i}{d\ s}\ \frac{c}{\gamma} = \rho_o\ c\ u^i \qquad (400)$$

Para i = 1,2,3

$$\vec{J} = \vec{v} \qquad (401)$$

Para i = 4

$$J_4 = j\ \rho\ c \qquad (402)$$

A carga pode ser expressa por:

$$e = \int \rho dV = \int \frac{1}{j\ c}\ J_4\ dV = \frac{1}{j\ c}\int_S J_i\ dS_i \qquad (403)$$

Resulta para S_2, a expressão:

$$S_2 = \frac{1}{c}\int \rho \ \frac{dx^i}{d\ t} A_i \ dV\ dt = - \frac{j}{c^2}\int A_i \ J_i \ d\Omega \tag{404}$$

Finalmente podemos escrever:

$$S = - \Sigma \int m_o c ds - \frac{j}{c^2}\int A_i J_i \ d\Omega + \frac{j}{16\Pi c}\int F_{ik}{}^2 \ d\Omega \tag{405}$$

O principio da ação mínima fornece:

$$\delta S = \int \left[\frac{1}{jc^2} J_i \ \delta A_i - \frac{1}{16\Pi jc} \delta \ (F_{ik}{}^2) \right] d\Omega$$

ou

$$\delta S = \int \frac{1}{j\ c} \left[\frac{1}{c} J_i \delta \ A_i + \frac{1}{4\ \Pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right] d\Omega \tag{406}$$

Levando em conta:

$$\int_S A_i \ d\ S_i = \int_V \frac{\partial A_i}{\partial x^i} \ d\Omega \tag{407}$$

vem:

$$\delta S = \frac{1}{j\ c}\int \left[\frac{1}{c} J_i - \frac{1}{4\ \Pi} \ \frac{\partial F_{ik}}{\partial\ x^k} \right] \delta\ A_i \ d\Omega \ +$$

$$+ \frac{1}{4\Pi jc}\int F_{ik} \ \delta\ A_i \ d\ S_k \Big|_a^b \tag{408}$$

donde:

$$\int \left[\frac{1}{c} J_i - \frac{1}{4\ \Pi} \frac{\partial F_{ik}}{\partial\ x^k} \right] \delta A_i \ d\Omega \ = 0$$

e

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial\ x^k} = \frac{4\ \Pi}{c} J_i \tag{409}$$

Para i = 1,2,3, vem:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\,\Pi}{c}\vec{J} \tag{410}$$

Para i = 4:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\,\Pi\,\rho \tag{411}$$

As equações (393), (394), (410) e (411)constituem o sistema de equações de Maxwell.

Derivando a equação (409) teremos:

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x^i\,\partial x^k} = \frac{4\,\Pi}{c}\frac{\partial J_i}{\partial x^i} = -\frac{\partial^2 F_{ki}}{\partial x^i\,\partial x^k} = 0 \tag{412}$$

ou

$$\frac{\partial J_i}{\partial x^i} = 0 \tag{412'}$$

isto é:

$$(\rho v^i)_{,i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{413}$$

ou, vetorialmente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,, \tag{414}$$

que é a *equação da continuidade*.

A expressão (412') conduz diretamente ao principio da *conservação da carga elétrica*. Com efeito, a carga espacial total é dada por (403):

$$\frac{1}{j\,c}\int_S J_i\,ds^i$$

Se considerarmos uma região limitada por dois hiper-planos $x^4 = C_1$ e $x^4 = c_2$ e aplicarmos o teorema de Gauss ao hiper-volume compreendido pelos hiper-planos teremos, levando em consideração (412'):

$$\int_S J_i \, ds^i = \int_V \frac{\partial J_i}{\partial x^i} \, d\Omega = 0 \tag{415}$$

donde se conclui que a expressão (403) é sempre igual, independente da hiper-superfície de integração.

Das equações de Maxwell podemos deduzir, dois importantes conceitos, de teoria dos campos, referentes à energia eletromagnética.

Tomemos as expressões (393) e (410) e escrevamos:

$$\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \frac{4 \Pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{E} -$$

$$- \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} x \vec{E}) + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} x \vec{H})$$

ou

$$\frac{1}{2 c} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) = - \frac{4\Pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{E} - \nabla \cdot (\vec{E} x \vec{H})$$

donde:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\Pi} = - \vec{J} \cdot \vec{E} - \vec{\nabla} \cdot \vec{N} \tag{416}$$

onde fizemos:

$$\vec{N} = \frac{c}{4 \Pi} \vec{E} x \vec{H} = \text{vetor de Poynting} \tag{417}$$

A expressão (416) permite escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\Pi} dv = - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv - \int_S \vec{N} \cdot d\hat{S}$$

Como:

$$\frac{d\varepsilon_c}{d\,t} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{v}\,.\,\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\,.\,(e\vec{E} + \frac{e}{c}\,\vec{v} \times \vec{H}) = e\,\vec{E}\,.\,\vec{v}$$

$$\int \vec{J}\,.\,\vec{E}\,dv = \Sigma\,e\,\vec{v}\,.\,\vec{E}$$

e

$$\int \vec{N}\,.\,d\hat{S} = 0 \qquad \text{(se considerarmos toda a região)}$$

vem:

$$\frac{\partial}{\partial\,t}\left[\int \frac{E^2 + H^2}{8\,\pi}\,dv + \Sigma\,\varepsilon\right] = 0 \tag{418}$$

A expressão:

$$w = \frac{E^2 + H^2}{8\,\pi} \tag{419}$$

é chamada: *densidade de energia*.

No caso de uma região limitada:

$$\frac{\partial}{\partial\,t}\left[\int_V w\,dv + \Sigma\varepsilon_c\right] = -\int_S N\,.\,dS \tag{420}$$

e o fluxo de N através de S pode ser interpretado como a variação, com o tempo da energia do campo e das particulas no interior da área S.

PARTE VI

DINÂMICA DOS MEIOS CONTINUOS

1 - EQUAÇÃO NÃO RELATIVISTA

A importância do estudo da dinâmica dos meios continuos, no contexto de um curso de física matemática, é muito grande, por vários motivos. Primeiramente, há o interesse, objetivo de dar bases ao estudo teórico da hidrodinâmica e da elasticidade, cujo desenvolvimento e campo de aplicações técnicas são imensos. Os recursos do cálculo tensorial são especialmente, indicados para essa área científica e, historicamente a noção física do tensor nasceu de trabalhos sobre deformação de meios cristalinos.

Em segundo lugar, as extensões teóricas, do tema permite-nos relacioná-lo com a teoria eletromagnética de Maxwell e com as idéias básicas da relatividade generalizada.

Como a teoria clássica dos fluidos ou dos meios elásticos trata a questão sob um ponto de vista macroscopico, onde não se leva em consideração o comportamento de partículas mas sim o de uma matéria considerada continua, subsiste uma analogia com a teoria dos campos.

Os conceitos mecânicos de energia e momento por exemplo, foram levados da dinâmica dos meios continuos para a teoria do campo eletromagnético de Maxwell.

O grande desenvolvimento das teorias de campo, principalmente com a teoria da relatividade generalizada, por se desenvolver na linha de pensamento da matéria continua encontra, por isso mesmo, grandes dificuldades em incorporar a noção de partícula numa unica doutrina coerente com a idéia de campo.

A noção básica do fluido continuo é a *densidade de matéria* ρ, definida por:

$$m = \int_V \rho(x,y,z,t)\, dx\, dy\, dz \qquad (421)$$

e as variáveis são as coordenadas e o tempo: P (x,y,z,t) para um ponto P do meio.

Admite-se ainda que seja definida a velocidade $\vec{v}$ no ponto.

A variação de matéria no interior de uma região deve ser igual ao fluxo resultante que atravessa a superfície limite da região, isto é:

$$\frac{dm}{dt} + \int_S \rho\vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = 0 \qquad (422)$$

ou

$$\int_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho v^i)_{;i} \right] dx\, dy\, dz = 0 \qquad (423)$$

donde resulta a chamada equação da continuidade:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho v^i)_{;i} = 0 \qquad (424)$$

Qualquer grandeza Q, que expresse uma propriedade do meio e seja função das variáveis x, y, z e t admitirá a derivada total.

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} Q = \frac{\partial Q}{\partial t} + v^i\, Q_{,i} \qquad (425)$$

Sendo g^i a força atuante na unidade de volume, vem:

$$g^i = \rho \frac{Dv^i}{Dt} = \rho a^i \qquad (426)$$

onde a^i é a aceleração.

Tendo em vista (425), resulta:

$$g^i = \rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k\, v^i{}_{;k}\right)$$

$$g^i = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v^i) + (\rho\ v^k\ v^i)_{;k} - v^i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} \right]$$

donde:

$$g^i = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v^i) + (\ \rho v^i\ v^k)_{;k} \qquad (427)$$

O campo de forças G^i pode incluir forças de volume isto é, proporcionais ao volume, ou forças de área resultantes da tensão do meio material e dependendo da área orientada.

Algèbricamente:

$$G^i = \int_V f^i\ dx\ dy\ dz + \int_S t^{ik}\ ds_k \qquad (428)$$

onde:

f^i = força de volume por unidade de volume.

O tensor t^{ik} que introduzimos é um tensor tal que as componentes das forças por área sejam:

$$dq^i = t^{ik}\ dA_k$$

Além disso, o tensor t^{ik} deverá ser simétrico para atender o principio de conservação do momento angular.

Aplicando o teorema de Gauss em (428), resulta:

$$G^i = \int_V (f^i - t^{ik}_{\ ,k})\ dx\ dy\ dz \qquad (429)$$

donde, tendo em vista (427) resulta:

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + (\rho v^i\ v^k)_{;k} + t^{ik}_{\ ,k} - f^i = 0 \qquad (430)$$

que pode ser inteiramente extendida para coordenadas curvilineas , tomando-se $t^{ik}_{;k}$, donde resulta:

$$\frac{\partial\,(\rho v^i)}{\partial t} + (\rho\, v^i\, v^k + t^{ik})_{;k} = f^i \tag{431}$$

2 - *EQUAÇÕES RELATIVISTAS*

Consideremos o espaço-tempo de MINKOWSKI com a métrica sob a forma:

$$ds^2 = (dx^4)^2 - (dx^3)^2 - (dx^2)^2 - (dx^1)^2 \tag{432}$$

no sistema de referencia de Galileo (S_o):

$$x = x^1 \quad y = x^2 \quad z = x^3 \quad e \quad ct = x^4 \tag{433}$$

Se o meio está em repouso relativo ao sistema S_o, então:

$$v^i = 0 \quad e \quad u^4 = 1 \tag{434}$$

onde u^i representará o vetor velocidade quadridimensional e v^i o vetor velocidade tridimensional. Podemos, em vista de (434) escrever:

$$\begin{aligned} u^i_{,j} &= \frac{1}{c}\, v^i_{,j} \\ u^4_{,j} &= 0 \end{aligned} \tag{435}$$

Como $\vec{u}$ é um vetor quadridimensional unitário:

$$u^i\, u_{i,j} = 0 \tag{436}$$

As equações (431) e (424) podem ser escritas:

$$\frac{\partial p^i}{\partial\, t} + t^{ik}_{,k} = f^i \tag{437}$$

e

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + p^{k}_{,k} = 0 \qquad (438)$$

onde:

$p^{i} = \rho u^{i}$ = momentum clássico por unidade de volume.

O fluxo de energia no elemento de ãres dS, de componentes $d\sigma_k$ deve conter os termos relativos a energia da matéria e das tensões, visto não termos considerado outros campos.

O fluxo de energia devido a tensões pode ser calculado como segue:

I - força superficial = $t^{i\ell}\, d\sigma_i$

II - potência = $t^{i\ell}\, d\sigma\, u^{\ell} = - v_\ell\, t^{i\ell}\, d\sigma_i$

III - potência/área = fluxo de energia = $v_\ell\, t^{i\ell}$ (439)

Considerando o fluxo de energia da matéria, como:

IV - potência/área = $\rho c^2\, v^{i}$ (440)

teremos que o fluxo total será obtido de (440) e (439):

$$\rho c^2\, v^{i} - v_\ell\, t^{i\ell} \qquad (441)$$

Como $\varepsilon = m\, c^2$, podemos escrever:

$$p^{i} = \rho\, v^{i} - \frac{1}{c^2} v_\ell\, t^{i\ell} \qquad (442)$$

Levando (442) em (437) e (438) resultam:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho v^{i} - \frac{1}{c^2} v_\ell\, t^{i\ell}\right) + t^{ik}_{,k} = f^{i}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\rho v^{k} - \frac{1}{c^2} v_\ell\, t^{k\ell}\right]_{,k} = 0 \qquad (443)$$

Como $v^{i} = 0$ no ponto P_o relativo a S_o, vem:

$$\rho \frac{dv^i}{dt} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial v_\ell}{\partial t} t^{i\ell} + t^{ik}_{,k} = f^i$$

$$(444)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v^k_{,k} - \frac{1}{c^2} (v_\ell\, t^{k\ell})_{,k} = 0$$

Como $x^4 = ct$, resultam:

$$\rho\, c\, v^i_{,4} - \frac{1}{c} (v_\ell\, t^{i\ell})_{,4} + t^{ik}_{,k} = f^i$$

$$(445)$$

$$c\, \rho_{,4} + \rho v^k_{,k} - \frac{1}{c^2} (v_\ell\, t^{k\ell})_{,k} = 0$$

Tomemos agora um tensor simétrico, no espaço quadridimensional definido no ponto P_o de S_o como:

$$T^{ik} = t^{ik}$$

$$(446)$$

$$T^{i4} = T^{4i} = 0$$

onde:

$$T^{ik}\, v_k = 0$$

e introduzamos também o vetor quadridimensional:

$$\Phi^i = f^i$$

$$(447)$$

$$\Phi^4 = 0$$

onde:

$$\Phi^i\, v_i = 0$$

Podemos mostrar, utilizando (434), (435) e (446), que a equação geral

$$(\rho c^2\, v^i\, v^k + T^{ik})_{;k} = \Phi^i \qquad (448)$$

satisfaz as equações (445) no ponto P_o de S_o.

Chamaremos T^{ik} de *tensor de pressões*.

A equação (448) pode ser re-escrita como:

$$P^{ik}_{;k} = \frac{1}{c^2} \Phi^i \tag{449}$$

onde:

$$P^{ik} = \rho v^i v^k + \frac{1}{c^2} T^{ik} \tag{450}$$

é o *tensor de impulsão-energia* do meio.

Tendo em vista (446) podemos escrever:

$$P^{ik} v_k = \rho v^i \tag{451}$$

3 - APLICAÇÃO A UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

As idéias expostas nos itens anteriores podem ser aplicadas na elaboração da teoria do campo eletromagnético. Vamos escrever inicialmente as grandezas introduzidas na Parte V, no sistema de Galileo:

I) QUADRIPOTENCIAL DO CAMPO

$$\phi^1 = -A_x \qquad \phi^2 = -A_y \qquad \phi^3 = -A_z \qquad \phi^4 = -\phi$$

$$\phi_1 = A_x \qquad \phi_2 = A_y \qquad \phi_3 = A_z \qquad \phi_4 = -\phi$$

II) TENSOR CAMPO ELETROMAGNÉTICO

$$F_{ik} = \phi_{k,i} - \phi_{i,k} \qquad F_{ik} = -F_{ki}$$

cujo adjunto pode ser escrito:

$$\bar{F}^{rs} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\,\varepsilon^{ijrs}\,F_{ij} = \varepsilon^{ijrs}\,F_{ij} \qquad \text{pois } g = -1$$

III) QUADRIVETOR CORRENTE ELÉTRICA

$$J^i = \rho_o\, c\, u^i$$

$$J^i = \rho v^i \qquad i = 1,2,3 \qquad J^4 = \rho c$$

IV) EQUAÇÕES DE MAXWELL

$$F^{ik}_{\ ,k} = \frac{4\,\Pi}{c}\,J^i \qquad \text{ou} \qquad F^{ik}_{\ ;k} = \frac{4\,\Pi}{c}\,J^i$$

$$\bar{F}^{rs}_{\ ,s} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \bar{F}^{rs}_{\ ;s} = 0$$

Estas ultimas equações também podem ser escritas:

$$F_{ik,\ell} + F_{k\ell,i} + F_{\ell i,k} = 0$$

V) CONSERVAÇÃO DA CARGA

$$J_{i,i} = 0 \quad \text{ou} \quad -J^{i}_{;i} = 0$$

VI) DENSIDADE DE FORÇA DE LORENTZ

$$\vec{K} = \rho E + \frac{\rho}{c} \vec{v} \times \vec{H}$$

ou

$$K^{i} = \frac{1}{c} J_{i} F^{ik} \tag{452}$$

Podemos agora, definir o *tensor impulsão-energia* do campo eletromagnético.

Podemos tomar, na equação (449), $\Phi^{i} = \; ^{i}$, e escrever:

$$P^{ik}_{;k} = \frac{1}{c^2} \Phi^{i} = \frac{1}{c^2} k^{i} \tag{453}$$

Considerando que:

$$J_{i} = - \frac{c}{4\pi} F^{ir}_{;r} \tag{454}$$

vem na equação (452)

$$K_{i} = - \frac{1}{4\pi} F_{ik} F^{kr}_{;r} \tag{455}$$

donde:

$$4\pi \, k_{i} = - (F_{ik} F^{kr})_{;r} + F^{kr} F_{ik;r} \tag{456}$$

Trocando k por r e considerando que $F_{ik} = - F_{ki}$, vem:

$$F^{kr}_{\ ;r} F_{ik} = \frac{1}{2} F^{kr} (F_{ik;r} + F_{ri;k}) \tag{457}$$

Levando em consideração a equação ( ), vem:

$$F^{kr} F_{ik;r} = - \frac{1}{2} F^{kr} F_{kr;i} = - \frac{1}{4} (F^{kr}F_{kr})_{;i} \tag{458}$$

levando (458) em (456):

$$- 4\Pi\ k_i = (F_{ik}F^{kr})_{;r} + \frac{1}{4} (F_{mn} F^{mn})_{;i} \tag{459}$$

ou

$$- 4\Pi\ k_i = (- F_{km} F^{ik} + \frac{1}{4} g^k_i F_{mn} F^{mn})_{;k} \tag{460}$$

Definindo o tensor simétrico:

$$M_{ik} = \frac{1}{4\Pi c^2} (\frac{1}{4} g_{ik} F^{mn} F_{mn} - F_{im} F^{\alpha}_{\mu}) \tag{461}$$

resulta:

$$(P^{ik} + M^{ik})_{;k} = 0 \tag{462}$$

onde se verifica que o tensor M^{ik} é um tensor que deve ser somado ao P^{ik} para descrever o movimento do meio continuo incluindo a ação do campo eletromagnético.

O desenvolvimento de (461) nos fornecerá, as componentes de M^{ik}, usualmente expressas por:

$$M^{rs} = \frac{1}{4\Pi} \quad \frac{1}{2} \left(\delta_{rs} \left(E^2+H^2\right) - H_r H_s - E_r E_s\right)$$

$$M^{4s} = M^{s4} = \frac{1}{4\Pi c} \quad \varepsilon^{sik} \; E_i \; H_k \tag{463}$$

$$M^{44} = \frac{1}{8\Pi c^2} \left(E^2 + H^2\right)$$

PARTE VII

TEORIA DA RELATIVIDADE GENERALIZADA

1 - CAMPO GRAVITACIONAL

Uma particula de massa m, colocada num campo de forças $\vec{F}$ possuirá uma aceleração dada por:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\dot{\vec{v}} \qquad (464)$$

A força $\vec{F}$, em geral não depende de m por exemplo no campo eletromagnético:

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad (465)$$

No campo gravitacional, porém, a força é proporcional a massa m segundo a lei de Newton:

$$\vec{F} = K\,\frac{M}{r^2}\,m\,\hat{r} \qquad (466)$$

onde:

k = constante = $6{,}66 \times 10^{-8}$ $(\text{dina.cm}^2.\text{g}^{-2})$

M = massa puntiforme geradora do campo

r = distância entre as massas

ou

$$\vec{F} = -\,m\,\vec{\nabla}\,\phi \qquad (467)$$

onde:

$$\phi = -\,k\,\frac{M}{r} \qquad (468)$$

A energia potencial do campo gravitacional será:

$$U = m\,\phi = -\,k\,\frac{m\,M}{r} \qquad (469)$$

A equação (467) resulta:

$$k \frac{M}{r^2} m \hat{r} = m a$$

donde se conclui que a aceleração independerá da massa da partícula, contrariamente ao que ocorrerá no campo eletromagnético.

Como a massa é definida a partir da proporcionalidade entre a força atuante e a aceleração produzida a teoria da gravitação de Newton aceita implicitamente que a massa devido a inércia do corpo (massa inercial) é idêntica a massa utilizada na expressão do campo gravitacional (massa gravitacional). Essa hipótese constitue o *princípio de equivalência*, cujo enunciado preciso seria: "*um referencial S não acelerado em que exista um campo gravitacional uniforme e um referencial S' uniformemente acelerado em relação a S onde não exista um campo gravitacional são equivalentes do ponto de vista físico*".

A teoria do campo gravitacional de Newton escoimada da idéia de ação a distância, cujas dificuldades, de interpretação, no dizer pitoresco de Diderot (1750) só teriam, respostas "na casa de qualquer newtoniano", pode ser encarada como uma teoria análoga à eletromagnética de Maxwell se introduzirmos o conceito de "*intensidade do campo gravitacional*":

$$\vec{g} = - \nabla \emptyset \qquad (470)$$

análogo a intensidade do campo elétrico.

Como na eletrostática pensaremos em linhas de forças gravitacionais confluentes em uma dada massa M, tais que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = - 4 \Pi k \rho \qquad (471)$$

onde:

ρ = densidade de massa.

Das equações (471) e (470) extraimos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\emptyset) = \nabla^2 \emptyset = 4 \Pi k \rho \qquad (472)$$

que pode ser considerada a equação do campo gravitacional análoga a equação de Poisson do campo eletromagnético.

Convém observar, porém, a diferença essencial entre os campos gravitacionais e eletromagnéticos: o efeito do campo gravitacional sobre um corpo de prova pode ser eliminado por meio de um movimento uniformemente acelerado do corpo.

Por esse motivo, o campo gravitacional foi imaginado por Einstein como estreitamente vinculado às proprieda - des de um espaço-tempo. Afatado de qualquer ação gravitacional uma particula descreverá nesse espaço tempo a geodésica correspondente a métrica do espaço de MINKOWSKI Euclidiano. Quando houver a presença de um campo gravitacional, a geodésica corresponderia a uma métrica do espaço de Riemann do tipo:

$$ds^2 = g_{\ell m}\, dx^{\ell}\, dx^{m} \qquad (473)$$

Os fatores $g_{\ m}$ desempenharão o papel de *potenciais* do campo de gravitação e devem satisfazer condições , tais que sejam compatíveis com as equações do campo na forma de Poisson ou Laplace.

Construiremos o espaço da teoria do campo gravitacional não-euclidiano e as propriedades físicas serão expressas por restrições na definição dos coeficientes da métrica.

2 - CAMPO GRAVITACIONAL DE EINSTEIN

Vimos, na parte II, que a condição para que um espaço seja euclidiano é

$$R^{i}_{jkr} = 0 \tag{474}$$

ou, para um dado vetor covariante A_i:

$$A_{i,jk} = A_{i,kj} \tag{475}$$

O tensor de curvatura contraido definido, na equação (190) pode ser escrito de forma diferente:

$$R_{mn} = \Gamma^{i}_{ms}\,\Gamma^{s}_{ni} - \Gamma^{i}_{mn}\,\Gamma^{s}_{is} + \Gamma^{s}_{ms,n} - \Gamma^{s}_{mn,s}$$

ou, tendo em vista (192):

$$R_{mn} = -\Gamma^{i}_{mn,i} + \Gamma^{\ell}_{mi}\,\Gamma_{n\ell} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^m\ \partial x^n} - \Gamma^{i}_{mn}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\log \sqrt{-g} \tag{476}$$

A lei da gravitação, para um espaço vazio, seria simplesmente:

$$R_{mn} = G_{mn} \tag{477}$$

Para uma região com massas, o campo deve satisfazer equações dos tipos (472) e (473).

Vamos tentar uma generalização da equação (472) fazendo:

$$S_{\ell m} = \lambda\, Q_{\ell m} \qquad (478)$$

onde:

$S_{\ell m}$ = tensor potencial gravitacional

λ = constante

$Q_{\ell m}$ = tensor caracteristico da materia-energia

Podemos identificar $Q_{\ell m}$ com o tensor impulsão-energia, incluindo ação eletromagnética, fazendo:

$$Q_{\ell m} = P_{\ell m} + M_{\ell m} \qquad (479)$$

De acordo com a equação (462), podemos escrever:

$$(P^{\ell m} + M^{\ell m})_{;m} = 0 \qquad (480)$$

donde vemos que o tensor $Q^{\ell m}$ é conservativo.

Quanto a $S^{\ell m}$ só depende de $g^{\ell m}$ e devido a (478) e (480) deverá ser também conservativo, isto é:

$$S^{\ell m}_{;m} = 0 \qquad (481)$$

Observemos que a simetria de $S^{\ell m}$ reduz, suas componentes ao número de 10 (dez). Para determiná-las devemos impor ao tensor $S^{\ m}$ as seguintes condições:

a) $S^{\ell m}$ só depende de $g_{\ell m}$ e suas derivadas de primeira e segunda ordem, sendo linear relativamente às derivadas de segunda ordem.

b) $S^{\ell m}$ satisfaz a equação (481).

Um tensor que satisfaz as condições acima pode ser encontrado na expressão (199) re-escrita como:

$$(R_{\ell m} - \frac{1}{2} g_{\ell m} R)_{;m} = 0 \tag{482}$$

Para maior generalidade, tomemos:

$$S_{\ell m} = h \; R_{\ell m} - \frac{1}{2} g_{\ell m} (R + h) \tag{483}$$

onde h e k são constantes.

Resulta em (478):

$$S_{\ell m} = R_{\ell m} - \frac{1}{2} g_{\ell m} (R + h) = K \, Q_{\ell m} \tag{484}$$

onde K = constante

Fazendo h = 0, resultam as equações de Einstein para o campo gravitacional:

$$S_{\ell m} = R_{\ell m} - \frac{1}{2} g_{\ell m} R = K \, Q_{\ m} \tag{485}$$

Sendo que, no caso de regiões afastadas da ação massa-energia:

$$R_{\ell m} - \frac{1}{2} g_{\ell m} R = 0 \tag{486}$$

ou seja:

$$R_{\ell m} = 0 \tag{487}$$

Quanto ao tensor $Q_{\ell m}$, sua determinação dependerá do caso em questão e do conhecimento da propriedade da matéria segnndo um determinado esquema.

Existe portanto, mas de um tensor $Q_{\ m}$ estudado na relatividade geral. Assim por exemplo, se considerarmos, um meio material continuo sem ações eletromagnéticas, podemos escrever:

$$Q^{\ell m} = \rho\, u^{\ell}\; u^{m} \tag{488}$$

Se existir tensões $T_{\ell m}$ usaremos o valor mais completo de P^{ik} extraido de equação (450):

$$Q^{\ell m} = \rho u^{\ell}\, u^{m} + \frac{1}{c^2}\, T^{\ell m}$$

que, no caso de fluido perfeito, fornecerá:

$$Q^{\ell m} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^{\ell}\, u^{m} - \frac{p}{c^2}\, g^{\ell m} \tag{489}$$

As equações (485) podem ser escritas:

$$G^{\ell m} = R^{\ell m} - \frac{1}{2}\, g^{\ell m}\, R$$

e (490)

$$G^{\ell m} + \alpha\;\; P^{\ell m} = 0$$

onde vamos tomar $Q^{\ell m} = P^{\ell m}$ = tensor impulsão-energia e indicar, como é mais usual $S^{\ell m}$ por $G^{\ell m}$.

3 - CAMPO DE UMA PARTÍCULA ISOLADA .

Dentro do que nos propusemos neste trabalho, não caberia desenvolver a teoria da relatividade generalizada. Apenas para dar uma idéia de sua aplicabilidade faremos o estudo de uma solução particular da equação (477), para uma região externa a cargas.

Suponhamos uma particula material, fixa na origem do sistema de referência e escrevamos o tensor métrico fundamental sob a forma:

$$g_{mn} = \begin{matrix} -e^{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \mathrm{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\nu} \end{matrix} \qquad (491)$$

com:

$$x^1 = r \quad x^2 = \theta \quad x^3 = \phi \quad x^4 = t \qquad (492)$$

Resulta:

$$ds^2 = - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \mathrm{sen}^2 d\phi^2 + e^{\nu} dt^2 \qquad (493)$$

$$-g = e^{\lambda+\nu} r^4 \mathrm{sen}^2 \theta \qquad (494)$$

e

$$\Gamma^{s}_{mn} = \frac{1}{2} g^{ss} (g_{ms,n}+g_{ns,m}-g_{mn,s}) \qquad (495)$$

onde suspendemos, provisoriamente, a convenção somatoria de Einstein.

Teremos:

$$\Gamma^m_{mm} = \frac{1}{2g_{mm}} g_{mm,n}$$

$$\Gamma^n_{mm} = \frac{1}{2g_{nn}} g_{mm,n} \tag{496}$$

$$\Gamma^n_{mn} = \frac{1}{2g_{nn}} g_{nn,m}$$

$$\Gamma^s_{mn} = 0$$

Tendo em vista (494) e fazendo:

$\frac{\partial}{\partial r}$ { } = { }', vem:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda' \qquad \Gamma^3_{23} = \text{cotg}\,\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^1_{33} = -r\,\text{sen}^2\,\theta\,e^{-\lambda}$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^2_{33} = -\text{sen}\,\theta\cos\theta \tag{497}$$

$$\Gamma^4_{14} = \frac{1}{2}\nu' \qquad \Gamma^1_{44} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\,\nu'$$

$$\Gamma^1_{22} = -\,re^{-\lambda} \qquad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \ldots = 0$$

Levando (497) em (1900) e aplicando (477) resulta:

$$G_{11} = \frac{\nu''}{2} + \frac{(\nu')^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} = 0 \qquad . \qquad (498)$$

$$G_{22} = e^{-\lambda} \quad 1 + \frac{r}{2} (\nu'-\lambda') \quad - 1 = 0 \qquad (499)$$

$$G_{33} = \text{sen}^2\,\theta\, e^{-\lambda} \; 1 + \frac{r}{2} (\nu'-\lambda') \quad - \text{sen}^2\theta = 0 \qquad (500)$$

$$G_{44} = e^{\nu-\lambda} \; - \frac{\nu''}{2} - \frac{(\nu')^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu'}{r} \; = 0 \qquad (501)$$

Observemos que G_{33} repete G_{22}, havendo portanto apenas <u>3</u> equações para determinarmos o movimento.

De (501) e (498) obtemos:

$$\lambda' + \nu' = 0 \qquad (502)$$

ou

$$\lambda + \nu = \text{constante} = C_o \qquad (503)$$

Como desejamos que a expressão (493) se reduza a:

$$ds^2 = -dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2\, \text{sen}^2\theta\, d\phi^2 + \quad dt^2$$

devemos exigir que λ e ν tendam para zero, quando $r \to \infty$.

Logo:

$$\lambda + \nu = 0 \qquad e \qquad \lambda = -\nu \qquad (504)$$

De $G_{22} = 0$ extraimos:

$$e^{\nu}\,(1 + r\nu') = 1 \qquad (505)$$

Fazendo $e^{\nu} = \gamma$, vem:

$$(1 + r\nu') = (1 + \frac{r}{\gamma}\gamma') = 1$$

ou

$$\frac{d\gamma}{1-\gamma} = r'$$

e

$$\gamma = 1 - \frac{2\kappa m}{r} \tag{506}$$

onde fizemos a constante de integração igual a 2m.

A solução (506) conduz a:

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\phi^2 + dt^2 \tag{507}$$

que é euclidiana para $r = \infty$ ($\gamma = 1$) e é singular em $r = 0$.

A trajetória duma particula livre no campo de gravitação é dada por:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

que, levando em conta (497), conduz a:

$$r^2\frac{d\phi}{ds} = h \tag{508}$$

e

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\kappa}{\gamma} \tag{509}$$

onde $\underline{h}$ e $\underline{\kappa}$ são constantes.

←σψθε.

Escrevendo (507) sob a forma:

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - \gamma\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = -1 \qquad (510)$$

Fazendo $u = \frac{1}{r}$ e levando em consideração (508) e (509), resulta:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{C^2-1}{h^2} + \frac{2mu}{h^2} + 2\ m\ u^3 \qquad (511)$$

Diferenciando em relação a , vem:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\kappa m}{h^2} + 3\kappa m\ u^2 = \frac{\kappa m}{h^2}\ (1+3h^2u^2) \qquad (512)$$

Na equação (512) a relação:

$$\frac{3\kappa m\ u^2}{\kappa m/h^2} = 3\ r\ \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2$$

é muito pequena para velocidades ordinárias e podemos então, nesse caso escrever:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\kappa m}{h^2}\ . \qquad (513)$$

que é a equação newtoniana do movimento.

A equação (513) fornece a equação da orbita eliptica:

$$u_o = \frac{\kappa m}{h^2} \quad 1 + e \cos (\phi - w) \tag{514}$$

onde:

e = excentricidade da elipse
w = posição do perihelio

O periodo da solução aproximada é 2Π, isto é, as orbitas são fechadas.

A solução de (512) apresentará, porém, uma precessão que podemos calcular, levando u_o em (512) e fazendo algumas aproximações. Resulta:

$$U \equiv \frac{\kappa m}{h^2} \quad 1 + e \cos (\phi - w - \varepsilon) \tag{515}$$

onde:

$$\varepsilon = \frac{3\kappa^2 m^2}{h^2}$$

Entre dois perihelios sucessivos teremos

$$\Delta\varepsilon = \frac{3\kappa^2 m^2}{h^2} \, 2\Pi = \frac{6\Pi^2 \kappa^2 m^2}{h^2} \tag{516}$$

A expressão (516) foi confirmada para o caso do planeta Mercurio que apresenta uma precessão no seu perihelio de 43" por século.

Ainda no campo de uma particula isolada, podemos calcular o desvio de um raio luminoso ao penetrar num campo de ação gravitacional.

Para isso tomemos a velocidade v = c, resultando:

sultando:

$$ds = 0, \quad h = \infty$$

e

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3\kappa m\, u^2 \tag{517}$$

Procedendo à integração de (517) por aproximação, tomamos:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0$$

donde:

$$u = \frac{\cos\phi}{R} \quad \text{(reta)} \tag{518}$$

Levando (518) em (517):

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3\kappa m}{R^2} \cos^2\phi$$

Uma solução será:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\cos\phi}{R} + \frac{m}{R^2} (\cos^2\phi + 2 \operatorname{sen}^2\phi)$$

donde:

$$R = r \cos\phi + \frac{m}{r} \frac{r^2\cos^2\phi + 2r^2\operatorname{sen}^2\phi}{r}$$

ou, em coordenadas cartesianas:

$$x = R - \frac{m}{R} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2+y^2} \tag{519}$$

Na equação (519) o ultimo membro pode ser considerado como um desvio da reta $x = R$.

A expressão assintótica ($y \to \infty$) fornece:

$$x = R \pm \frac{2\kappa m}{R}$$

resultando a deflexão:

$$\Delta x \cong \frac{4\kappa m}{R} \qquad (520)$$

que pode ser observada durante as eclipses do sol, quando então as estrelas fixas se tornam visiveis.

A deflexão prevista, segundo (520), ẽ de 1,75" mas a dificuldade da comprovação experimental estã no fato de que tal valor estã nos limites do ẽrro experimental.

APÊNDICE I

1 - NOTAÇÕES E DEFINIÇÕES ELEMENTARES DA ÁLGEBRA

1 - Conjunto -

É uma noção primitiva, caracterizada pelos elementos do conjunto. Representa-se o conjunto, neste trabalho, por letras maiúsculas ou por { }.

Os elementos, também denominados pontos ou componentes de um conjunto, ficam especificados por simples enumeração ou pelo enunciado de uma propriedade comum a esses elementos.

2 - Pertinência -

Um elemento x pertence a um conjunto X: $x \in X$, um elemento x não pertence a um conjunto X: $x \notin X$.

3 - Inclusão -

Um conjunto B está contido em um conjunto A, quando todo o elemento $b \in B$ é elemento de A: $A \supset B$.

4 - Igualdade ou Identidade -

Será indicada sempre por $x = y$ ou $P = Q$.

5 - Implicação Lógica -

A propriedade P implica logicamente a propriedade Q, isto é, vale Q sempre que valer P: $P \Rightarrow Q$

6 - Equivalência Lógica -

Para que P seja verdadeiro é necessário e suficiente que Q o seja: $P \Leftrightarrow Q$.

7 - Subconjunto ou parte de um conjunto A -

É o conjunto formado de elementos de A, definidos por enumeração ou por alguma propriedade satisfeira ou não por todos os elementos de A.

8 - Parte vazia -

Quando uma propriedade P não é satisfeita por nenhum elemento de A, a parte assim definida é chamada parte vazia: Ø.

9 - Parte Unitária -

Parte composta de um unico elemento: {x}.

10 - Complemento -

Sendo A um conjunto, X uma parte de A definida por propriedade P, chama-se complemento de X relativo a A o conjunto dos elementos de A que não pertencem a X, isto é,que não possuem a propriedade P. Complemento de X: $C_A X$.

11 - Reunião de dois conjuntos A e B -

É o conjunto formado de elementos de A ou B: A   B.

12 - Interseção de dois conjuntos A e B -

É o conjunto formado de elementos de A e B: A   B.

13 - Produto de dois conjuntos A e B -

É o conjunto formado pelos pares (x,y) onde x   A e y   B. Produto: A x B.

14 - Aplicação do conjunto A em B -

Quando se estabelece uma correspondência , entre *todos os* a ∈ A e *alguns* b ∈ B. Diz-se também que a aplicação é uma função sobre A, com valores em B: A → f (A). Sendo dada a função f, isto é, definida a maneira de se corresponder a a ∈ A com b ∈ B, pode-se interpretar também como uma *transformação*.

Designa-se a ∈ A por variável e b ∈ B por imagem ou valor da função f.

15 - Aplicação do conjunto A sobre B -

Quando se estabelece uma correspondência entre todos os $a \in A$ e todos os b B.

16 - Aplicação biunívoca -

Quando todo o elemento $b \in B$ é imagem por f de um único elemento $a \in A$.

17 - Aplicação recíproca -

Quando se deseja tomar uma transformação onde a imagem $b \in B$ de $a \in A$ passa a ser a variável e onde a variável $a \in A$ passa a ser imagem de $b \in B$, isto é, quando se deseja aplicar o conjunto B em A, é necessário verificar se a aplicação é:

I - aplicação sobre

II - aplicação biunivoca

Nesse caso define-se perfeitamente a aplicação reciproca: f^{-1}.

18 - Aplicação composta -

Dados, A, B e C, sendo:

g: aplicação $B \rightarrow C$

f: aplicação $A \rightarrow B$

chama-se aplicação composta: $h = g \circ f$ a aplicação $A \rightarrow C$.

Observe-se as ordem dos simbolos pois a aplicação $f \circ g \neq g \circ f$. Deve-se ler sempre da direita para a esquerda.

19 - Relação Binária -

Sendo E um conjunto, A uma parte de $E \times E$, diz-se que dois elementos x e y de E são ligados por uma relação binária definida por A, se $(x,y) \in A$. Indica-se a relação entre x e y por $x \, R \, y$.

Nos casos particulares ter-se-á por exemplo:

$x \approx y$, $x = y$, $x \equiv y$, etc

A relação R é:

I - reflexiva, quando $x\ R\ x$ é sempre verdadeira: qualquer que seja $x \in E$, $x\ R\ x \in A$.

II - simétrica, quando $x\ R\ x \Leftrightarrow y\ R\ x$, isto é, se $(x,y) \in A$, $(y,x) \in A$.

III - transitiva, se $x\ R\ y$ e $y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$.

IV - antisimétrica, se $x\ R\ y$ e $y\ R\ x \Rightarrow x = y$.

20 - *Equivalência e ordem* -

Quando uma relação binária obedece as condições I, II e III e denominada relação de equivalência.

Quando uma relação obedece as condições I, III e IV é denominada relação de ordem.

21 - *Lei de composição interna sobre um conjunto A e uma aplicação de AxA em A:* $z = f(x,y)$ *onde* $z \in A$ *e* $(x,y) \in A \times A$.

Indica-se a $f(x,y)$ por $x\ T\ y$ ou $X \perp y$.

A lei de composição interna pode ou não apresentar as seguintes caracteristicas:

I - Associatividade - $(x\ T\ y)\ TZ = x\ T(Y\ T\ x)$

II - Comutatividade - $x\ T\ y = y\ T\ x$

III - Elemento regular - $a \in A$ é regular se:

$a\ T\ x = a\ T\ y$ e $x\ T\ a = y\ T\ x$, implicarem em $x = y$.

IV - Elemento neutro - $e \in A$ é neutro se $e\ T\ x = x\ T\ e = x$

V - Elemento simétrico - $x \in A$ possue um $x' \in A$ simétrico se: $x\ T\ x' = x'\ T\ x = e$

Outra notação para o elemento simétrico pode ser x^{-1}.

22 - Isomorfismo de duas leis internas -

Seja A um conjunto de elementos a_1, a_2,..., ... a_n..., munido de uma lei interna T e um conjunto B de elementos b_1, b_2,..., b_n..., munido de uma lei interna L. Supondo-se que haja uma aplicação biunívoca f de A em B.

$a \rightarrow b = f(a)$, e, que $f(a_1 T a_2) = f(a_1)\ L f(a_2)$

então diz-se que f é um isomorfismo de A em B, relativamente as leis T em A e L em B.

23 - Distributividade de uma lei com relação a outra -

Quando para x, y, z A verificamos:

$(xTy)\ LZ = (xLZ)\ T\ (yLz)$

$ZL\ (xTy) = (ZLx)\ T\ (ZLy)$

24 - Grupos -

Um conjunto G é um grupo se possuir uma lei interna com as três propriedades:

I - Associativa: $(xTy)TZ = xT(yTZ)$, $(x,y,z \in G)$

II - Possue elemento neutro: $eTx = xTe = x$ $(x,e \in G)$

III - Seus elementos possuem simétricos:
$xTx' = x'Tx = e$ $(x,x' \in G)$

Se além dessas propriedades, a lei T for comutativa, o grupo é chamado abeliano.

Uma parte X G é um subgrupo para a lei T se os elementos de X possuem a mesma lei de grupo T.

25 - Anéis -

Um conjunto A é um anel se possue duas leis internas, a primeira sendo uma lei de grupo abeliano e a segundo associativa e distributiva em relação a primeira. Isto é, por exemplo:

1ª LEI:

$$\text{I} - (x + y) + z = x + (y + z) \qquad (x, y, z \in A)$$

$$\text{II} - x + e = e + x = x$$

$$\text{III} - x + (-x) = e$$

$$\text{IV} - x + y = y + x$$

2ª LEI:

$$\text{I} - (x,y)z = x(yz) \qquad (x, y, z) \in A$$

$$\text{II} - (x+y)z = xz + yz$$
$$z(x+y) = zx + zy$$

Se a 2ª Lei for comutativa, o anel é comutativo.

Se a 2ª Lei possuir um elemento neutro, o anel é unitário, Geralmente, o elemento neutro da 1ª Lei é representado por e ou 0 e o elemento neutro da 2ª Lei é representado por ε ou 1.

26 - Corpos -

Um conjunto K é um corpo se obedecer as seguintes propriedades:

a) ser um anel

b) o conjunto K*, formado de todos os seus elementos menos o elemento neutro e, possuir como lei de grupo a segunda lei do anel.

Isto é;

1ª LEI:

$$\text{I} - (x+y) + z = x + (y+z) \qquad (x, y, z \in K)$$

$$\text{II} - x + e = e + x = x$$

$$\text{III} - x + (-x) = e$$

$$\text{IV} - x + y = y + x$$

2^{a} Lei:

$$\text{I} - (xy)z = x(yz) \qquad (z,y,z \in K)$$

$$\text{II} - (x+y)z = xz + yz$$

$$a(x+y) = zx + zy$$

$$\text{III} - x\,\varepsilon = \varepsilon x = x \qquad (x \in K^*)$$

$$\text{IV} - xx^{-1} = x^{-1}\,x = \varepsilon \qquad (x \in K^*)$$

O corpo pode ainda ser comutativo se a 2^{a} Lei o for.

27 - *Lei de composição externa sobre o conjunto A (ou B) é uma aplicação de B x A em A (ou B) -*

Isto é, a lei de composição externa permite compor um elemento y A a partir de um elemento $x \in A$ e outro elemento $x \in B$.

Diz-se, geralmente, que o conjunto B, nesse caso, é um conjunto de operadores e um elemento qualquer $x \in B$ é um operador.

APENDICE 2

NOTAÇÃO INDICIAL

1 - Uso de Índices -

Utiliza-se no Cálculo Tensorial, uma notação sintética com o emprego de índices. Assim, um conjunto de $\underline{N}$ elementos.

$$\{x, y, z, \ldots\}$$

será indicado simplesmente por:

$$\{x^i\} \quad \text{ou} \quad \{x_i\}$$

Pode-se utilizar vários índices num mesmo símbolo, as superiores chamaremos contravariantes e os inferiores covariantes, por razões que veremos posteriormente. Exemplos:

$$x^{\alpha\beta}_{\gamma} \qquad A^{i_1, i_2, \ldots, i_n}_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \qquad y^{12},\ a_{123},\ \text{etc}$$

Um símbolo com $\underline{n}$ índices covariantes e $\underline{m}$ contravariantes é denominado $\underline{m}$ vezes contravariante e $\underline{n}$ vezes covariante, de valência $(m + n)$.

Para uma representação bastante condensada, Einstein estabeleceu a seguinte convenção:

> *"A presença em um monômio de um e mesmo índice, simultaneamente inferior e superior, indica uma soma de monômios, atribuindo-se aos índices os valôres dentro do seu respectivo intervalo de variação".*

EXEMPLOS:

a) $a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$

b) $a_k b_i^k C^i = a_1 b_1^1 C^1 + a_1 b_2^1 C^2 + a_1 b_3^1 C^3 + \dots + a_1 b_n^1 C^n +$

$+ a_2 b_1^2 C^1 + a_2 b_2^2 C^2 + a_2 b_3^2 C^3 + \dots + a_2 b_n^2 C^n + \text{etc}$

c) $a_k b_i^k = a_1 b_i^1 + a_2 b_i^2 + \dots + a_n b_i^n = A_i$

O índice com relação ao qual se faz a soma dos monômios é denominado: índice mudo, porque pode ser trocado por qualquer outro simbolo, por exemplo:

$$a^i b_i = a^k b_k = a^\alpha b_\alpha$$

Os índices não repetidos conservam um único valor em cada equação. Um sistema de n equações lineares com n incognitas seria representado por exemplo, assim:

$$y_i = a_{ij} x^j$$

isto é:

$$y_1 = a_{11} x^1 + a_{12} x^2 + \dots + a_{1n} x^n$$

$$y_2 = a_{21} x^1 + a_{22} x^2 + \dots + a_{2n} x^n$$

....

$$y_n = a_{n1} x^1 + a_{n2} x^2 + \dots + a_{nn} x^n$$

Quando se deseja usar expoentes ou suspender a convenção somatória, utiliza-se parênteses:

$(x^1)^3, \quad (x^3)^2, \quad$ etc.

A notação $a_{(i)}\, x^{(i)}$ significa apenas um monômio de índice i.

Quando se trata de derivadas também se aplica a convenção:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial u}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial u}{\partial x^2} dx^2 + \ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^j} = \frac{\partial u}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} = \frac{\partial u}{\partial x^1} \frac{\partial y^1}{\partial x^j} + \frac{\partial u}{\partial y^2} \frac{\partial y^2}{\partial x^j} + \frac{\partial u}{\partial y^3} \frac{\partial y^3}{\partial x^j} + \ldots$$

Quando os índices é repetido várias vezes a somatória não se deve fazer senão uma única vez:

$$a_{ii}x^i x^i = a_{11}x^1 x^1 + a_{22}x^2 x^2 + \ldots + a_{nn}x^n x^n$$

2 - Regras algébricas para a notação indicial

A fim de fixar a notação indicial dar-se- á a seguir algumas regras e propriedades usuais:

a) Deve-se respeitar a valência dos termos.

EXEMPLO:

$$A^k_{ij} + B^k_{ij} = C^k_{ij} \qquad \text{(correto)}$$

$$A^k_{ij} + B^k_{\ell} = C_j \qquad \text{(errado)}$$

b) Um índice mudo pode não aparecer explicitamente:

EXEMPLO:

$$A^k_i B_k + C_i D^j E_j = F_i \qquad \text{(correto)}$$

$$a_{ik}\, x^i x^k = A \qquad \text{(correto)}$$

c) Multiplicação por escalar

$$\alpha(\beta a^i b_i^j) = \alpha\beta\ (a^i b_i^j)$$

$$(\alpha+\beta)\ a^i b_i = \alpha a^i b_i + \beta a^i b_i$$

$$\alpha(a_r b^r + C_k d^k) = \alpha\ a_r b^r + \alpha C_k d^k$$

d) Multiplicação de monômios

$$(a^1 b_1)^2 = (a^i b_i) \times (a^k b_k)$$

$$(a^i b_i) \times (C^j d_j) = a^i C^j b_i d_j$$

$$a_i(x^i_{rs} + y^i_{rs}) = a_i x^i_{rs} + a_i\ y^i_{rs}$$

e) Derivação

$$\frac{d}{dt}\ (a_i b^i) = \frac{da_i}{d\ t}\ b^i + a_i\ \frac{db^i}{d\ t}$$

? - *Símbolos de Kronecker*

Utiliza-se frequentemente um simbolo denominado: *delta de Kronecker*, simples ou generalizado, cujas propriedades permitem simplificações nos desenvolvimentos algébricos.

a) Delta de Kronecker (simples)

NOTAÇÃO: δ_{ij}, δ^{ij} ou δ^i_j

cujo valor é:

$$\begin{cases} 0, \text{ para todo } i \neq j \\ 1, \text{ para todo } i = j \end{cases}$$

EXEMPLOS:

$$dS^2 = \delta_{ij}\, dx^i\, dx^j = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^n)^2$$

Sendo $\{x^i\}$ um conjunto de variáveis independentes, a derivada parcial

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \begin{cases} 0, \text{ para } x^i \neq x^j \\ 1, \text{ para } x^i = x^j \end{cases}$$

tem o significado formal de δ^i_j, podendo-se numa expressão, substituir:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} \quad \text{por} \quad \delta^i_j$$

Outras propriedades interessante dos δ^i_j pode ser apreciada no exemplo seguinte:

DADO:

$$S = a_i x^i, \text{ onde } \{a_i\} = \text{constante}$$

Tomando-se:

$$\frac{\partial S}{\partial x^k} = a_i \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = a_i\, \delta^i_k$$

vem:

$$\frac{\partial S}{\partial x^k} = a_1\, \delta^1_k + a_2\, \delta^2_k + a_3\, \delta^3_k + \ldots + a_k\, \delta^k_k + \ldots = a_k$$

donde se conclue que o simbolo δ^i_k é um operador que troca i por k na expressão dada. Assim, podemos fazer:

$$\delta^\alpha_\beta\, a_\alpha = a_\beta$$

sempre que ocorrer expressões com o símbolo de Kronecker.

b) Delta de Kronecker (generalizado)

Notação: $\delta^{i_1, i_2, \ldots, i_m}_{k_1, k_2, \ldots, k_m}$

cujo valor é:

0 - quando no mínimo dois dos índices superiores ou inferiores forem iguais ou quando os dois conjuntos de índices forem diferentes.

+1 - quando for necessário um número par de permutações, para arranjar os índices superiores na mesma ordem dos inferiores.

-1 - quando for necessário um número impar de permutações para arranjar os índices superiores na mesma ordem dos inferiores.

EXEMPLOS:

$$\delta^{123}_{123} = 1 \quad \delta^{122}_{122} = 0$$

$$\delta^{123}_{123} = -1 \quad \delta^{173}_{163} = 0$$

Um caso particular do delta de Kronecker, generalizado, que se utilizará frequentemente, obtém-se fazendo:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 3 \ldots\ldots\ldots$$

ou

$$\delta^{i_1, i_2, \ldots, i_n}_{1, 2, \ldots, n}$$

que se indica abreviadamente por $\varepsilon^{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, podendo-se definir analogamente: $\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$

EXEMPLO:

$$\varepsilon_{123} = 1 \qquad \varepsilon_{321} = -1$$

$$\varepsilon_{312} = 1 \qquad \varepsilon_{112} = 0$$

4 - Exercícios -

a) Dada a expressão $T = a_{ij}\, x^i x^j$, onde $a_{ij} = a_{ji}$ calcular $\frac{\partial T}{\partial x^k}$

$$\frac{\partial T}{\partial x^k} = a_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^k} x^j + \frac{\partial x^j}{\partial x^k} x^i = a_{ij}\, \delta^i_k\, x^j + \delta^i_k\, x^i =$$

$$= \delta^i_k\, a_{ij} + \delta^j_k\, a_{ij} x^i = a_{kj} x^k + a_{ik} x^i =$$

$$= a_{kj} x^j + a_{jk} x^j = 2\, a_{kj} x^j$$

b) Dado $S = a_{ik} x^i x^k = 0$, provar que $a_{\alpha\beta} = - a_{\beta\alpha}$

$$\frac{\partial S}{\partial x^\alpha} = a_{ik}\, \delta^i_\alpha\, x^k + a_{ik} x^i\, \delta^k_\alpha = a_{\alpha k} x^k + a_{i\alpha}\, x^i$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha\, \partial x^\beta} = a_{\alpha k}\, \delta^k_\beta + a_{i\alpha}\, \delta^i_\beta = a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 0$$

c) Calcular δ^i_i $(i = 1 \dots n)$

$$\delta^i_i = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

d) Desenvolver para i = 1, 2, 3:

$$\text{I} \ - \quad \delta_{3i}x^i = \delta_{31}x^1 + \delta_{32}x^2 + \delta_{33}x^3 = x^3$$

$$\text{II} \ - \quad \delta^i_j\, x^j y_i = x^i y_i = x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3$$

$$\text{III} \ - \quad \frac{\partial}{\partial x^k}(A_{hij}x^h x^i x^j) = A_{hij}\,\delta^h_k\, x^i x^j + A_{hij}x^h\,\delta^i_k\, x^j +$$

$$+ A_{hij}\, x^h x^i\,\delta^j_k = A_{kij}x^i x^j +$$

$$+ A_{ikj}x^i x^j + A_{jik}x^i x^j =$$

$$= (A_{hij} + A_{ikj} + A_{jik})x^i x^j = \text{etc}$$

5 - *Aplicação - uma breve revisão de determinantes* -

A notação indicial se presta para uma representação de determinantes, bastante comoda e eficiente.

Com efeito, um determinante pode ser representado por:

$$|a^i_j| = \begin{vmatrix} a^1_1\ a^1_2\ \ldots\ a^1_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^n_1\ a^n_2\ \ldots\ a^n_n \end{vmatrix} = \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\, a^{i_1}_1\, a^{i_2}_2\, \ldots\, a^{i_n}_n$$

ou

$$|a^i_j| = \varepsilon^{i_1,i_2,\ldots,i_n}\, a^1_{i_1}\, a^2_{i_2}\, \ldots\, a^n_{i_n}$$

EXEMPLO:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ij}\, a_1^i\, a_2^j = a_1^1\, a_2^2 - a_2^1\, a_1^2$$

Por definição o determinante é uma soma de n^n termos, dos quais geralmente $n!$ são diferentes de zero. O sinal de cada termo dependerá da permutação par ou impar de índices relativamente a ordem natural.

Vejamos algumas propriedades:

a) Se uma linha ou coluna é nula, o determiante é nulo:

$$\varepsilon_{i_1,i_2,\dots,i_n}\, a_1^{i_1},\, a_2^{i_2} \dots 0 \dots a^{i_n} = 0$$

b) para se multiplicar o determinante por um escalar , basta multiplicar uma linha ou coluna pelo escalar.

$$d = \varepsilon_{i_1,i_2,\dots,i_n}\, a_1^{i_1}\, a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}$$

Fazendo-se:

$$D = \varepsilon_{i_1,i_2,\dots,i_n}\, a_1^{i_1}\, a_2^{i_2} \dots A_k^{i_k} \dots a_n^{i_n}$$

onde:

$$A_k^{i_k} = m\, a_k^{i_k}$$

vem:

$$D = \varepsilon_{i_1,i_2,\dots,i_n}\, a_1^{i_1}\, a_2^{i_2} \dots m\, a_k^{i_k} \dots a_n^{i_n} = m\, d$$

c) uma troca de duas linhas ou duas colunas muda o sinal do determinante.

Seja:

$$\varepsilon_{i_1,\ldots,i_\alpha i_\beta\ldots i_n} a_1^{i_1} \ldots a_\alpha^{i_\alpha} \ldots a_\beta^{i_\beta}\ldots a_n^{i_n}$$

Trocando por (índices mudos):

$$\varepsilon_{i_1,\ldots,i_\beta i_\alpha \ldots i_n} a^{i_1}_1,\ldots, a_\beta^{i_\beta} a_\alpha^{i_\alpha} \ldots a_n^n$$

a expressão não se altera mas o ε muda de sinal.

d) duas linhas ou colunas sendo iguais, o determinante é nulo.

É fácil verificar como corolário da proposição anterior.

e) Demonstra-se que:

$$\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n} a_{j_1}^{i_1} a_{j_2}^{i_2} \ldots a_{j_n}^{i_n} = |a_j^i| \, \varepsilon_{j_i,j_2,\ldots,j_n}$$

Com efeito, se $j_1,j_2,j_3,\ldots,j_n$ valem $1,2,3,\ldots,n$, temos a definição do determinante $|a_j^i|$. Uma permutação do tipo $j_1,j_2,\ldots,j_n$ implica apenas numa mudança de sinal, segundo se trata de uma permutação par ou impar. Analogamente:

$$\varepsilon^{i_1,i_2,\ldots,i_n} a^{j_1} a^{j_2} \ldots a^{j_n} = |a_j^i| \, \varepsilon^{j_i,j_2,\ldots,j_n}$$

f) Multiplicação de determinantes

Tomemos:

$$|a_j^i|\ |b_j^i| = |a_j^i|\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\ b_1^{i_1}\ b_2^{i_2}\ \ldots\ b_n^{i_n} =$$

$$= \varepsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_n}\ a_{i_1}^{j_1}a_{i_2}^{j_2}\ \ldots\ a_{i_n}^{j_n}\ b_1^{i_1}b_2^{i_2}\ldots b_n^{i_n} \equiv$$

$$= \varepsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_n}\ (a_{i_1}^{j_1}b_1^{i_1})(a_{i_2}^{j_2}b_2^{i_2})\ldots(a_{i_n}^{j_n}b_n^{i_n}) =$$

$$= \varepsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_n}\ C_1^{j_1}\ C_2^{j_2}\ \ldots\ C_n^{j_n} = |C^i{}_1|$$

onde:

$$C_1^i = a_\alpha^i\ b_j^\alpha$$

g) Expansão em cofatores

Tomemos:

$$|d| = |a_j^i| = \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\ a_1^{i_1}a_2^{i_2}\ldots a_n^{i_n} =$$

$$= a^{i_k}\ (\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\ a_2^{i_2}\ a_{k-1}^{i_{k-1}}\ a_{k+1}^{i_{k+1}}\ a_n^{i_n})$$

A expressão entre parentesis é o resultado da supressão da linha $\underline{k}$ e da coluna i_k no determinante. Denominaremos:

$$A_{i_k}^k = \text{cofator de } a_k^{i_k} = \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\ a_1^{i_1}\ldots a_{k-1}^{i_{k-1}}\ a_{k+1}^{i_{k+1}}\ldots a_n^{i_n}$$

Resulta:

$$d = a_{(k)}^{i_k}\ A_{i_k}^{(k)} \quad \text{(somatório em k suspenso)}$$

ou mais simplesmente:

$$|d| = a^{\alpha}_{(\beta)} \; A^{(\beta)}_{\alpha}$$

que se pode indicar por:

$$|d| \; \delta^{i}_{j} = a^{\alpha}_{j} \; \Lambda^{i}_{\alpha}$$

Analogamente:

$$d \; \delta^{i}_{j} = a^{i}_{\alpha} \; A^{\alpha}_{j}$$

h) Aplicação ao sistema de equações lineares.

Seja:

$$y^{i} = a^{i}_{\alpha} \; x^{\alpha}$$

Multiplicando por A^{β}_{i}, vem:

$$A^{\beta}_{i} y^{i} = \Lambda^{\beta}_{i} a^{i}_{\alpha} \; x^{\alpha} = d \; \delta^{\alpha}_{\beta} \; x^{\alpha} = d \; x^{\beta}$$

donde:

$$x^{\beta} = \frac{A^{\beta}_{i} \; y^{i}}{d} = \frac{(y^{i}) \times (\text{cofator de } a^{i}_{\beta})}{d} \quad \text{para } d \neq 0$$

6 - Exercícios -

6.1 - Desenvolver:

a) $a_{i} \; b^{i}_{j}$ $(n = 1,2,3,4)$

b) $a^{i} \; b_{i} \; C^{i}_{j}$ $(n = 1,2)$

c) $a^{i}_{i} \; b_{i}$ $(n = 1,2,3,4)$

d) $a^{i} \; b^{k}_{i} \; C_{k}$ $(i = 1,2,3)$

$(h = 1,2)$

e) $a_i\ b^i_j\ C^j_k\ d^k \quad (i,j,h = 1,2)$

f) $a_{ii}\ b^{ij}\ C_j \quad (i = 1,2,3)$

$(j = 1,2)$

6.2 - Desenvolver:

a) $A^j_i = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\ \dfrac{\partial\ y}{\partial x^j} \quad (i,j = 1,2,3)$

6.3 - Demonstrar que:

a) $\dfrac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\ \dfrac{\partial\ x}{\partial y^j} = \delta^i_j \quad$ se $\alpha = \beta$

6.4 - Escrever na forma indicial:

a) $\dfrac{\partial y^i}{\partial n^1}\ \dfrac{\partial x^j}{\partial x^1} + \dfrac{\partial y^i}{\partial x^2}\ \dfrac{\partial y^j}{\partial x^2} + \dfrac{\partial y^i}{\partial x^2}\ \dfrac{\partial y^j}{\partial x^3}$

6.5 - Desenvolver:

a) $\delta_{ij}\ x^i\ x^j$

b) $\delta_{31}\ x^i$

c) $\delta^i_j\ x^j\ y_i$

d) $\dfrac{\partial}{\partial x^k}\ (A_{hij}\ x^h\ x^i\ x^j)$

6.6 - Mostrar que:

$$\delta^{\alpha\beta}_{ij}\ \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \phi_j}{\partial x^i}$$

EXERCÍCIOS:

6.7 - Verificar que:

$$\varepsilon_{ijk} \; \varepsilon^{hjk} = 2 \; \delta_i^h \; (h,i,j,k = 1,2,3)$$

Temos:

$$\varepsilon_{123} \; \varepsilon^{123} + \varepsilon_{132} \; \varepsilon^{132} = 2$$

$$\varepsilon_{231} \; \varepsilon^{231} + \varepsilon_{213} \; \varepsilon^{213} = 2$$

$$\varepsilon_{312} \; \varepsilon^{312} + \varepsilon_{321} \; \varepsilon^{321} = 2$$

e para todos os valôres $i \neq j$ as somas são nulas.

6,8 - Suponhamos que as coordenadas do ponto P sejam funções do parâmetro $\underline{t}$. Seja dada a função escalar T, invariante que depende de $x^1, x^2, \ldots, x^n$ e das derivadas das coordenadas com relação a t, isto é:

$$T = f(x^i, \dot{x}^i, t) = \bar{f}(\bar{x}^i, \dot{\bar{x}}^i, t)$$

Mostrar que:

$$V_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^r}$$

se transforma em $\bar{V}_r = \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r} V_i$

Temos:

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial T}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \bar{x}^k}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{x}}^k} = \frac{\partial T}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \dot{\bar{x}}^k} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{\bar{x}}^k}$$

Mas

$$\frac{\partial x^i}{\partial \dot{\bar{x}}^k} = 0$$

e

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \dot{\bar{x}}^m}\, \dot{\bar{x}}^m$$

$$\frac{\partial\ \dot{x}^i}{\partial\ \bar{x}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}\ \frac{\partial \dot{\bar{x}}^m}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^m\ \partial \bar{x}^k}\, \dot{\bar{x}}^m = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^m\ \partial \bar{x}^k}\, \dot{\bar{x}}^m$$

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{\bar{x}}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}\ \frac{\partial \dot{\bar{x}}^m}{\partial \dot{\bar{x}}^k} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^m\ \partial \dot{\bar{x}}^k}\, x^m = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}\ \delta^m_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}$$

$$\frac{\partial\ T}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial\ T}{\partial x^i}\ \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial\ T}{\partial \dot{x}^i}\ \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^m\ \partial \bar{x}^k}\, \dot{\bar{x}}^m$$

$$\frac{\partial\ T}{\partial \dot{\bar{x}}^k} = \frac{\partial\ T}{\partial \dot{x}^i}\ \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}$$

$$\frac{d}{dt}\ \left(\frac{\partial\ T}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\right) = \frac{d}{dt}\ \left(\frac{\partial\ T}{\partial \dot{x}^i}\right) \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial\ T}{\partial \dot{x}^i}\ \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k\ \partial \bar{x}^m}\, \dot{\bar{x}}^m$$

donde:

$$\left[\frac{d}{dt}\ \left(\frac{\partial\ T}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\right) - \frac{\partial\ T}{\partial \bar{x}^k}\right] = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\ \left[\frac{d}{dt}\ \left(\frac{\partial\ T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial\ T}{\partial x^i}\right]$$

ou

$$V_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\ V_i$$

6.9 - Se um vetor tem componentes cartesianas:

$$V\ \left(\frac{d^2x}{dt^2}\ ,\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

mostrar que:

$$V\ \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2;\ \ \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{r}\ \frac{dr}{dt}\ \frac{d\theta}{dt}\right)$$

em coordenadas polares.

6.10 - Sendo $|a_j^i|$ funções de x^1, $x^2, \ldots, x^n$ demonstrar que:

$$\frac{\partial |a_j^i|}{\partial x^u} = A_\beta^\alpha\ \ \frac{\partial a_\alpha^\beta}{\partial x^u}$$

Com efeito, temos por definição:

$$|a_j^i| = \varepsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\ a_1^{i_1}\ a_2^{i_2}\ \ldots\ a_n^{i_n}$$

Derivando:

$$\frac{\partial |a_i^j|}{\partial x^u} = \varepsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\ \frac{\partial a_1^{i_1}}{\partial x^u}\ a_2^{i_2}\ \ldots\ a_n^{i_n} + \ldots$$

$$\frac{\partial |a_i^j|}{\partial x^u} = A_{i_1}^1\ \frac{\partial a_1^{i_1}}{\partial x^u} + A_{i_2}^2\ \frac{\partial a_2^{i_2}}{\partial x^u} + \ldots + \ldots$$

logo:

$$\frac{\partial |a_j^i|}{\partial x^u} = A_\beta^\alpha\ \ \frac{\partial a_\alpha^\beta}{\partial x^u}$$

6.11 - Demonstrar que:

$$\frac{\partial \log|J|}{\partial x^u} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^u \, \partial x^\alpha} \qquad \text{onde} \quad |J| = \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|$$

Tomemos:

$$|a^i_j| = \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| \qquad \text{com} \quad J = |a^i_j| \neq 0$$

$$\delta^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x}{\partial y^j}$$

Podemos fixar o índice J e escrever mudando a notação:

$$y^i = a^i_\alpha \, X^\alpha$$

onde:

$$y^i = \delta^i_j \quad e \quad \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} = a^i_\alpha$$

donde:

$$X^\beta = \frac{Y^\alpha \text{ x (cofator } a^\alpha_\beta)}{|J|}$$

Voltando à notação primitiva:

$$\frac{\partial x^\beta}{y^j} = \frac{\delta^\alpha_i \text{ x (cofator de } \partial y^\alpha/\partial x^\beta)}{|J|} = \frac{(\text{cofator de } \partial y^j/\partial x^\beta)}{|J|}$$

donde:

$$\text{cofator de } \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} = |J| \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}$$

Aplicando o resultado acima ao exercício, anterior, vem:

$$\frac{\partial |J|}{\partial x^u} = |J| \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \frac{\partial (\partial y^\beta / \partial x^j)}{\partial x^u} = |J| \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^j \, \partial x^u}$$

donde:

$$\frac{\partial |J|}{\partial x^u} \frac{1}{|J|} = \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^j \, \partial x^u}.$$

ou

$$\frac{\partial \log |J|}{\partial x^u} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\alpha \, \partial x^u}$$

6.12 - Sendo $y^i = y^i(x^i)$ com $J \neq 0$, provar que:

$$\frac{\partial^2 x^u}{\partial y^k \, \partial y^j} = - \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^k} \frac{\partial x^u}{\partial y^i} \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\beta \, \partial x^\alpha}$$

Toma-se:

$$\delta^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}$$

Derivando-se com relação a y^k

$$0 = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial y^j \, \partial y^k} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\beta \, \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^k}$$

Multiplicando por $\frac{\partial x^u}{\partial y^i}$

$$\frac{\partial x^u}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^j \, \partial y^k} + \frac{\partial x^u}{\partial y^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^k} = 0$$

$$\frac{\partial^2 x^u}{\partial y^j \, \partial y^k} = - \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^k} \frac{\partial x^u}{\partial y^u} \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\beta \, \partial x^\alpha}$$

No caso simples de $y = f(x)$ vem:

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = - \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

6.13 - Mostrar que:

a) $\varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{k\ell m} = \delta_{i\ell}\ \delta_{jm} - \delta_{im}\ \delta_{j\ell}$

b) $\varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{mjk} = 2\ \delta_{im}$

c) $\varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{ijk} = 6$

e em seguida, deduzir formas similares para ε_{ijkm}

APÊNDICE 3

ALGEBRA EXTERIOR

Devido a frequente utilização dos conceitos de anti-simetria e de importância do produto vetorial, faremos algumas considerações adicionais acêrca da chamada *"algebra exterior"*.

Se tomarmos um tensor anti-simetrico:

$$T = t^{ij}\, e_i \otimes e_j \qquad (i,j = 1,2,\ldots,n)$$

podemos fazer:

$$T = \underset{i<j}{t^{ij}}\, e_i \otimes e_j + \underset{i \geq j}{t^{ij}}\, e_i \otimes e_j$$

ou

$$T = t^{ij}\, (e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) \qquad (i \quad j)$$

donde se conclui que os tensores anti-simétricos podem ser expressos em uma base definida por:

$$e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \qquad (i \quad j)$$

Uma forma do tipo acima é um caso particular do *produto exterior* dos vetores a, b, c,..., u, definido pelo tensor anti-simétrico.

$$t^{\alpha\beta\gamma\ldots} = \begin{vmatrix} a^\alpha & a^\beta & a^\gamma & \ldots\ldots \\ b^\alpha & b^\beta & b^\gamma & \ldots\ldots \\ c^\alpha & c^\beta & c^\gamma & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u^\alpha & u^\beta & u^\gamma & \end{vmatrix}$$

No caso de 2 vetores:

$$t^{ik} = a^i\, b^k - a^k\, b^i$$

que indicaremos por:

$$a \wedge b$$

Podemos escrever, portanto:

$$T = t^{ij}\, e_i \wedge e_j$$

Para indicar que as componentes se referem a base $e_i \wedge e_j$ usaremos a notação:

$$t^{(ij)}$$

que indicam, segundo LICHNEROWICZ (   ) as *componentes restritas* $(i < j)$.

Para uma mudança de bases, teremos:

$$t^{ij} = a^i_r\, a^j_s\, \bar{t}^{rs}$$

$$t^{ij} = \sum_{r<s} a^i_r\, a^j_s\, \bar{t}^{rs} + \sum_{r \geq s} a^i_r\, a^j_s\, \bar{t}^{rs}$$

ou

$$t^{ij} = (a^i_r\, a^j_s - a^i_s\, a^j_r)\, \bar{t}^{rs} \qquad (r < s)$$

donde:

$$t^{(ij)} = \begin{vmatrix} a^i_r & a^j_r \\ a^i_s & a^j_s \end{vmatrix} \bar{t}^{(rs)}$$

e analogamente:

$$t_{(ij)} = \begin{vmatrix} b_i^r & b_j^r \\ b_i^s & b_j^s \end{vmatrix} \bar{t}_{(rs)}$$

Como:

$$t_{ij} = g_{ik}\, g_{j\ell}\, t^{k\ell}$$

podemos mostrar que para componentes restritas:

$$t_{(ij)} = \begin{vmatrix} g_{ik} & g_{jk} \\ g_{i\ell} & g_{j\ell} \end{vmatrix} t^{(k\ell)} \qquad k < \ell$$

B I B L I O G R A F I A

ARIS, R. - Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics - Prentice-Hall, Inc. (1962)

BERGMANN - Introduction to the Theory of Relativity Prentice-Hall, Inc. (1942)

BICKLEY, W.G. e GIBSON, R.E. - Via Vector to Tensor - The English Universities Press Ltda - London (1962)

BRILLOWIN, L. - Les Tenseurs en Mecanique et en Elasticité - Masson et C^{ie}. Editeurs (1960).

BETANCOURT, F.M. - Elementos de Ãlgebra Lineal. Eds. de la Dirección de Cultura Venezuela - (1972).

COUDERC, P. - La Relativité - Presses Universitaires de France - (1969).

DENIS-PAPIN, M. et KAUFMANN, A. - Cours de Calcul Tensoriel - Editions Albin Michel - Paris (1966).

DESTOUCHES, J.L. - La Phisique Mathématique, Ed. Presses Universitaires de France - Paris (1969).

EINSTEIN, A. - La Relatividad - Emecé Editores, S.A. B. Aires (1950).

EINSTEIN, A. - O signficado da relatividade - Tradução Mário Silva Armênio Amado, Editor - Coimbra (1958).

EISENMAN, R.L. - Matrix Vector-Analysis - McGraw Hill Book, Company Inc. (1963).

EDDINGTON, A.S. - Espace, Temps et Gravitation - Libraire Scientifique J. Hermann - Paris (1921).

GOLDSTEIN, H, - Classical Mechanics - Addison-Wesley Ed. (1950).

HAGUE.B - Introduction a L'Analyse Vectorielle - Dunod-Paris - Traduzido por Annie Nozières (1961).

HWEI P. HSU - Analise Vetorial - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda - Traduzido por Edgard Pedreira de Cerqueira Neto (1972).

JUVENT, G. - Introduction au Calcul Tensoriel - Lib. Sc. Albert Blanchard -Paris (1922).

LASS, HARRY - Vector and Tensor Analysis - International Student Edition: McGraw-Hill Book Company, Inc. (1950).

LANCZOS, C. - The Variational Principles of Mechanics - University of Toronto Press - Toronto - 4ª Edição (1970).

LANDAU, L. et LIFSHITZ, E. - Mécanique - Eds. Mir - Moscou - (1966)

LANDAU, L. ET LIFSHITZ, E. - Theorie du Champ - Editions de La Paix-Moscon - Traduzido do Russo (1962).

LICHNEROWICZ, A - Elementos de Cálculo Tensorial - Aguilar - 2ª Edição Tradução Julio Porcel Moleon (1965)

LABOUREUR,M. CHASSAT,M. CARDOT. C. - Cours de Calcul Mathematique Moderne - Béranger (1963).

MALTSEV, A.I. - Fundamentos de Álgebra Lineal - Siglo XXI Editores S.A. -Traduzido do Russo (1970).

McCONNELL, A.J. - Applications of Tensor Analysis - Dover Publications Inc., New York (1957).

MORSE, PHILIP and FESHBACH, HERMAN - Methods of Theoretical Physics - International Student Edition (1953)

PANOFSKY, W.K.H. and PHILLIPS, M. - Classical Electricity and Magnetism. Addison-Wesley Ed. (1962)

POINCELOT, PAUL - Prẽcis D'Electromagnẽtisme Theõrique - Ed. Dunod - Paris - (1963)

RESNICK, R. - Introduction to Special Relativity - Ed. John Wiley (1968)

RICCI et LEVI-CIVITA - Methodes de calcul differentiel absolu - Lib. Sc. Albert Blanchard (1923).

SPAIN, BARRY - Tensor Calculus - Inerscience Publishers, Inc., New York (1953)

SPIEGEL, M.R. - Vector Analysis - Schaum Publishing C.O. - New York (1959).

SANTOS, C. COLOMBO - Introdução ao Cãlculo Tensorial e ã Geometria Riemanniana - Ed. U.F.M.G. - BH (1960)

SANTOS, C. COLOMBO - Relãtividade Especial - Ed. U.F.O.P - Ouro Preto (1973)

ZAMANSKY, M. - Introduction ã l'algẽbre et l'analyse modernes - Dunod-Paris (1967).