TESE
57

FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

MÉTODOS ESPECIAIS EM ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS LINEARES

JOSÉ CARLOS GOULART DE S.

ITAJUBÁ - MINAS
1974

MÉTODOS ESPECIAIS
EM
ANÁLISE
DE
CIRCUITOS ELÉTRICOS LINEARES

I 618

Escola Federal de Engenharia de Itajubá
BIBLIOTECA

MÉTODOS ESPECIAIS EM ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS LINEARES

Trabalho apresentado como Tese de Livre-Docência em Circuitos Elétricos na Escola Federal de Engenharia de Itajubá.

José Carlos Goulart de Siqueira

Itajubá - M.G.
1974

Class. 621.3.049:517.9(043.2)
Cutt. S618m
57

A minha esposa Bernadete, ao meu filho Fabiano e àquele(a) esperado(a) para breve, numa tentativa de recompensá-los pelas muitas horas subtraídas do convívio familiar.

PREFÁCIO

As idéias básicas que nortearam a realização deste trabalho podem ser resumidas em três tópicos principais, a saber: (1) *proposição de uma maneira sistemática de resolver equações diferenciais envolvendo uma ou mais funções singulares como função forçante, sem o emprego do método operacional das transformadas de Laplace.* Em termos de Engenharia Elétrica isto corresponde a determinar a resposta ao impulso de um dado circuito no próprio domínio do tempo, sem auxílio de transformação para o domínio da frequência complexa. (2) *proposição de um procedimento sistemático para a decomposição de uma função definida por trechos polinomiais em funções singulares.* Este procedimento é importante para a determinação da resposta de circuitos a determinados sinais arbitrários de entrada e também necessário quando se procura a transformada de Laplace de tais tipos de funções. (3) *desenvolvimento de um processo aproximado para a determinação da resposta de um circuito a um pulso não-repetitivo e arbitrário de entrada.*

Para que estes três objetivos pudessem ser atingidos, no entanto, era necessário que armazenássemos uma razoável quantidade de outros úteis conhecimentos, os quais ou deveriam ser reunidos em forma de apêndices ao final do trabalho, ou diluídos ao longo do próprio texto. Optamos então pela segunda alternativa, por considerar que ela seria capaz de melhor atender aos nossos anseios didáticos, estabelecendo uma sequenciação a mais lógica e contínua possível. Também por imposições didáticas, fizemos a inclusão de um número bastante significativo de exemplos, tendo sempre presente a preocupação de selecioná-los, de modo a obter um máximo de diversificação.

Em face da fixação dos objetivos citados e das imposições adicionais a que nos propuzemos, resultou então a disposição final dos assuntos que comentamos à seguir.

No Capítulo 1 fazemos um apanhado geral sobre as funções singulares, relacionando as suas principais propriedades e, ao mesmo tempo, estabelecendo uma nomenclatura uniforme para todas elas, a qual está baseada na simples fixação de índices, negativos ou positivos — ou zero, para a variável U. Destaque especial é dado às funções singulares degrau e impulso unitários.

No Capítulo 2 apresentamos, de início, uma rápida revisão sobre equações diferenciais lineares com coeficientes constantes; recordamos as várias formas da solução complementar e apresentamos o *método abreviado de cálculo* para a determinação da solução particular. Depois estabelecemos as bases da solução de equações diferenciais com funções forçantes singulares, sem fugir ao domínio do tempo. Isto feito, passamos à determinação das respostas ao impulso e ao degrau de circuitos lineares; nesta oportunidade mostramos duas maneiras de calcular as condições iniciais necessárias ao conhecimento das constantes arbitrárias das respostas respectivas: a primeira baseada em três teoremas relacionados com a tensão numa capacitância e com a corrente numa indutância; a segunda, de caráter mais geral, baseada somente na própria equação diferencial do circuito.

O Capítulo 3 inicia-se com a proposição de um método suficientemente simples e sistemático para a decomposição de sinais em funções singulares. Depois fazemos uma incursão na integral de convolução, ocasião em que realizamos uma série de interessantes aplicações, visando, principalmente, as partes subsequentes do mesmo capítulo. Em seguida compilamos as expressões básicas do chamado método "Spline Fitting" para ajuste de dados por meio de cúbicas. Finalmente, propomos um processo aproximado para a determinação da resposta de circuitos a pulsos arbitrários de entrada.

No apêndice incluimos apenas três tabelas decorrentes de comparações efetuadas entre as aproximações e os resultados exatos.

Gostaríamos de citar que este trabalho também foi elaborado para servir de referência aos senhores alunos da disciplina DEL 106 - Circuitos Elétricos II - da EFEI, atualmente sob nossa responsabilidade.

Desejamos expressar nossa gratidão aos pro-

fessores Fredmarck Gonçalves Leão e José Abel R. dos Santos que muito nos incentivaram neste empreendimento e ao professor José Carlos de Oliveira pelas inúmeras vezes que assumiu a chefia do Departamento de Eletricidade, possibilitando-nos um contato mais constante com este trabalho, principalmente nos seus momentos mais críticos.

Finalmente, externamos o nosso agradecimento a Srta. Sonia Maria A. Faria e ao Senhor Anchieta Nogueira B. Guimarães pelos magníficos trabalhos de datilografia e desenho, respectivamente, os quais emprestaram valiosa colaboração aos nossos objetivos.

Itajubá - MG, Agosto de 1974

José Carlos Goulart de Siqueira

Índice

1 - As Funções Singulares

1.1 - Função Degrau Unitário $U_{-1}(t)$ 1

1.2 - Função Impulso Unitário $U_0(t)$ - Suas Derivadas e Integrais 5

1.3 - Exemplos Diversos 13

2 - A Resposta dos Circuitos Elétricos Às Funções Singulares

2.1 - Equações Diferenciais 19

- A solução da equação diferencial homogênea 20

- A solução da equação diferencial não-homogênea 23

2.2 - Equações Diferenciais com Funções Forçantes Singulares 29

2.3 - Respostas Ao Impulso E Ao Degrau 43

3 - A Resposta dos Circuitos Elétricos Aos Pulsos Arbitrários De Entrada

3.1 - Decomposição de Sinais em Funções Singulares 64

- Regra Para a Decomposição de uma Função Definida por Trechos Polinomiais em Funções Singulares 68

3.2 - A Integral De Convolução 71

3.3 - Circuitos Com Entradas Arbitrárias Não-Repetitivas 97

- Ajuste de Curvas Pelo Processo "Spline Fitting" 98

Conclusão e Objetivos Futuros 109

Apêndice

Tabela A-1 112

Tabela A-2 113

Tabela A-3 115

Simbologia 116

Bibliografia 118

1

AS FUNÇÕES SINGULARES

Neste capítulo introdutório apresentaremos, de forma razoavelmente detalhada, um grupo de funções especiais que é conhecido pela denominação genérica de *funções singulares*. Estudaremos as suas mais importantes propriedades e reuniremos as suas inter-relações mais destacadas e usuais.

Duas das mais importantes funções singulares, largamente empregadas na análise de circuitos, são a *função degrau unitário* ou *função unitária de Heaviside* e a *função impulso unitário* ou *função delta de Dirac*. O destaque que será dado aqui a estas duas funções singulares fica plenamente justificado se atentarmos para a seguinte propriedade dos circuitos: a saida (resposta) de qualquer circuito linear e invariante com o tempo para uma entrada (excitação) arbitrária qualquer pode ser achada quando se conhece a sua saida para uma entrada degrau ou impulso unitários.

1.1 - Função Degrau Unitário $U_{-1}(t)$

Uma das maneiras de se *caracterizar* um sistema linear é especificar a sua resposta ao degrau unitário. A função degrau unitário, a qual está mostrada na figura 1.1-1a, é definida como sendo nula para t negativo, unitária para t positivo e descontínua para $t = 0$. Assim,

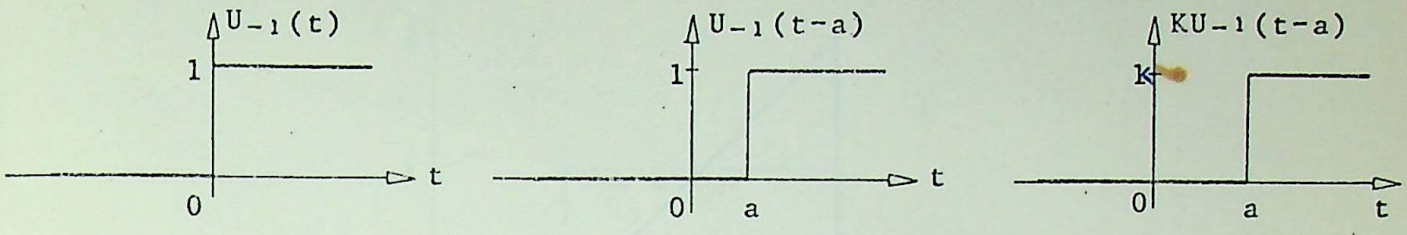
$$U_{-1}(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ 1 \text{ para } t > 0 \end{cases} \qquad (1.1\text{-}1)$$

Se a descontinuidade ocorre no ponto $t = a$ e não no ponto $t = 0$, o degrau unitário é então denotado por $U_{-1}(t-a)$ e está mostrado na figura 1.1-1b. Por conseguinte,

$$U_{-1}(t-a) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < a \\ 1 \text{ para } t > a \end{cases} \qquad (1.1\text{-}2)$$

Costuma-se dizer que este último é um degrau unitário *atrasado* de um valor a.

Quando a descontinuidade tem um valor $K \neq 1$ e ocorre no ponto $t = a$, então nos referimos ao degrau $K.U_{-1}(t-a)$, o qual está mostrado na figura 1.1-1c. Ele é o degrau unitário escalado pelo fator K e atrasado de a.



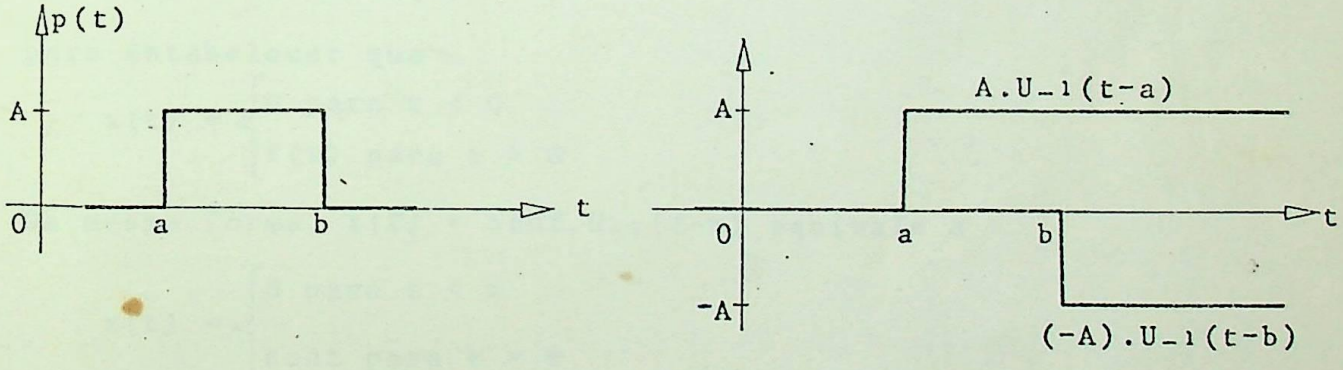
(a) (b) (c)

Figura 1.1-1

Em face da possibilidade de se poder atrasar e escalar por um fator K a função degrau unitário, podemos representar uma grande quantidade de diferentes pulsos por meio de degraus. Por exemplo, o pulso retangular da figura 1.1-2a pode ser representado pela soma de duas funções degraus

$$p(t) = A.U_{-1}(t-a) + (-A).U_{-1}(t-b) =$$
$$= A\left[U_{-1}(t-a) - U_{-1}(t-b)\right], \qquad (1.1\text{-}3)$$

Como indicado na figura 1.1-2b



(a) (b)

Figura 1.1-2

A multiplicação da equação do pulso retangular de amplitude $A = 1$, compreendido entre $t = 1$ e $t = 3$, isto é, $\left[U_{-1}(t-1) - U_{-1}(t-3)\right]$ pela equação da reta, $(t - 1)$, produz o pulso triangular

$$p(t) = (t-1)\left[U_{-1}(t-1) - U_{-1}(t-3)\right] \qquad (1.1\text{-}4)$$

que está mostrado na figura 1.1-3

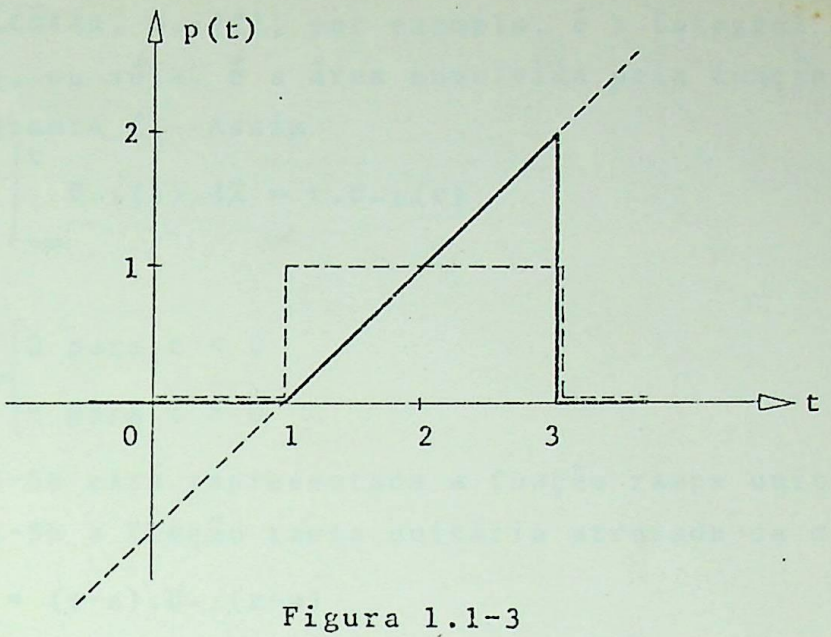


Figura 1.1-3

Na teoria dos circuitos é comum convencionar o instante da aplicação da excitação aos mesmos como sendo o instante $t = 0$. Isto implica que, para o circuito, a entrada $x(t)$ é zero antes de $t = 0$, e varia de acordo com uma determinada lei para $t > 0$. Assim, se a excitação $f(t)$ deve ser aplicada a um circuito no instante $t = 0$, escrevemos

$$x(t) = f(t).U_{-1}(t)$$

para estabelecer que

$$x(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ f(t) \text{ para } t > 0 \end{cases}$$

Da mesma forma, $x(t) = sen t.U_{-1}(t-\pi)$ equivale a

$$x(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < \pi \\ \text{sen } t \text{ para } t > \pi \end{cases}$$

Esta entrada está mostrada na figura 1.1-4

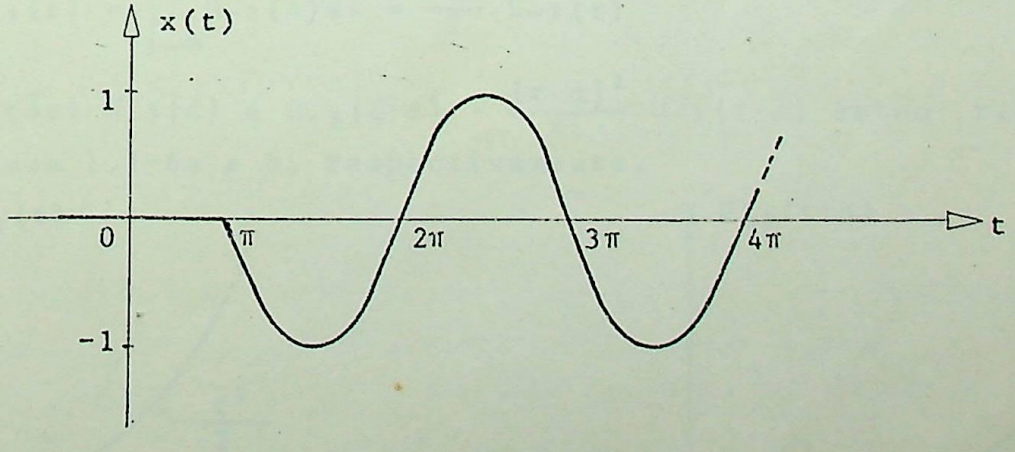


Figura 1.1-4

Um número infinito de funções singulares pode ser obtido por inte -

ção *rampa unitária*, $U_{-2}(t)$, por exemplo, é a integral da função degrau unitário, ou seja, é a área envolvida pela função degrau unitário até o instante t. Assim

$$U_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_{-1}(\lambda).d\lambda = t.U_{-1}(t) \qquad (1.1\text{-}5)$$

ou

$$U_{-2}(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ t \text{ para } t > 0 \end{cases} \qquad (1.1\text{-}6)$$

Na figura 1.1-5a está representada a função rampa unitária $U_{-2}(t)$ e na figura 1.1-5b a função rampa unitária atrasada de a,

$$U_{-2}(t-a) = (t-a).U_{-1}(t-a)$$

De acordo com a equação (1.1-5) e com a figura 1.1-5a,

$$U_{-1}(t) = \frac{d}{dt} U_{-2}(t) \qquad (1.1\text{-}7)$$

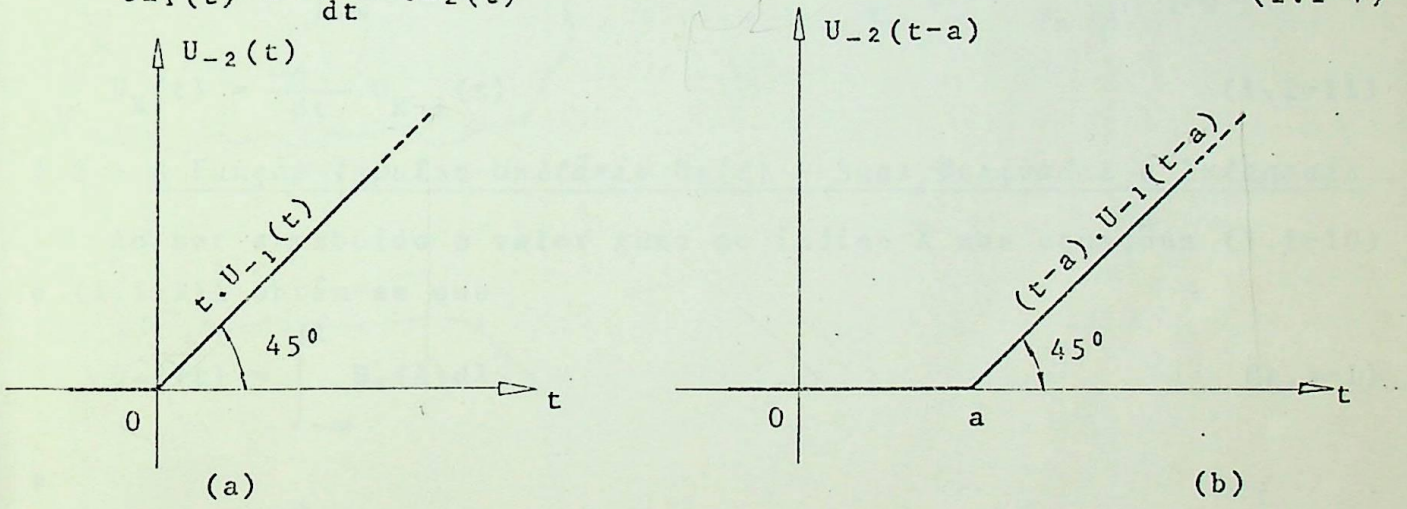
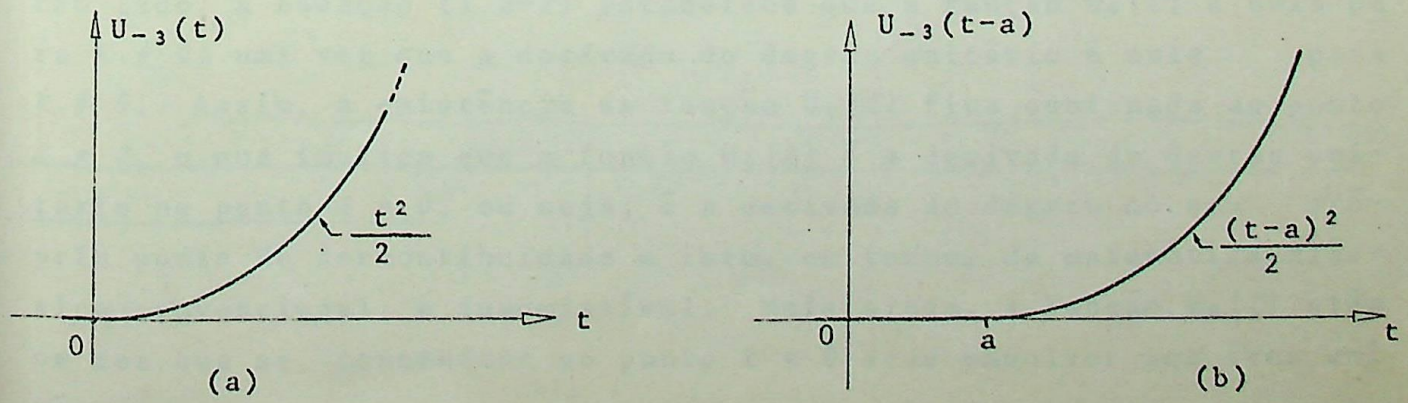


Figura 1.1-5

A integração da função rampa unitária, ou seja, a área compreendida pela mesma até o instante t, gera a função singular

$$U_{-3}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_{-2}(\lambda)d\lambda = \frac{t^2}{2}.U_{-1}(t) \qquad (1.1\text{-}8)$$

As funções $U_{-3}(t)$ e $U_{-3}(t-a) = \frac{(t-a)^2}{2} U_{-1}(t-a)$ estão representadas na figura 1.1-6a e b, respectivamente.



Da figura 1.1-6a e da equação (1.1-8),

$$U_{-2}(t) = \frac{d}{dt} U_{-3}(t) \qquad (1.1\text{-}9)$$

Continuando com as integrações sucessivas, outras funções singulares vão sendo obtidas, a saber:

$$U_{-4}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_{-3}(\lambda)d\lambda = \frac{t^3}{3!} U_{-1}(t) \text{ e } U_{-3}(t) = \frac{d}{dt} U_{-4}(t)$$

$$U_{-5}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_{-4}(\lambda)d\lambda = \frac{t^4}{4!} U_{-1}(t) \text{ e } U_{-4}(t) = \frac{d}{dt} U_{-5}(t)$$

. . . . . .

. . . . . .

Então, de um modo geral,

$$U_{K-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_K(\lambda)d\lambda \qquad (1.1\text{-}10)$$

$$U_K(t) = \frac{d}{dt} U_{K-1}(t) \qquad (1.1\text{-}11)$$

1.2 - A Função Impulso Unitário $U_0(t)$ - Suas Derivadas e Integrais

Ao ser atribuido o valor zero ao índice K nas equações (1.1-10) e (1.1-11) obtêm-se que

$$U_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_0(\lambda)d\lambda. \qquad (1.2\text{-}1)$$

e

$$U_0(t) = -\frac{d}{dt} U_{-1}(t) \qquad (1.2\text{-}2)$$

Mas, pela maneira como foram concebidas, as equações (1.1-10) e (1.1-11) somente são válidas para valores inteiros e negativos de K, e nós não podemos simplesmente atribuir o valor zero ao índice K e extrapolar à partir daí. A relação (1.2-1), porém, sugere a existência de uma função singular $U_0(t)$, de área unitária quando $t > 0$ e nula quando $t < 0$ — de acordo com a definição de $U_{-1}(t)$. Por outro lado, a equação (1.2-2) estabelece que a função $U_0(t)$ é nula para $t \neq 0$; uma vez que a derivada do degrau unitário é nula para $t \neq 0$. Assim, a existência da função $U_0(t)$ fica confinada ao ponto $t = 0$, o que implica que a função $U_0(t)$ é a derivada do degrau unitário no ponto $t = 0$, ou seja, é a derivada do degrau no seu próprio ponto de descontinuidade e isto, em termos de matemática clássica convencional, é inadmissível. Mais ainda, a função $U_0(t)$ além de ter que se *concentrar* no ponto $t = 0$ deve envolver uma área unitária, pois

$$\int_{-\infty}^{t} U_0(\lambda)d\lambda = 0 \text{ quando } t < 0, \text{ dado que } U_{-1}(t) = 0 \text{ para } t < 0$$

e

$$\int_{-\infty}^{t} U_0(\lambda)d\lambda = 1 \text{ quando } t > 0, \text{ porque } U_{-1}(t) = 1 \text{ quando } t > 0$$

o que é igualmente inadmissível do ponto de vista da matemática convencional.

A impossibilidade de se propor uma definição rigorosa para $U_0(t)$, fundamentada na matemática clássica convencional dos anos 30 é que levou o físico Paul A.M. Dirac, que a empregou pela primeira vez nos seus trabalhos de Mecânica Quântica, a denominá-la de *função imprópria*. Atualmente a função $U_0(t)$ tem vasta aplicação, principalmente em análise de sistemas, e é denominada *função Delta de Dirac* ou *função impulso unitário*.

No ano de 1950, Laurent Schwartz publicou um tratado intitulado "A *Teoria das Distribuições*", dentro do qual propôs uma base suficientemente rigorosa e satisfatória para a função delta de Dirac. Infelizmente, porém, a Teoria das Distribuições de Schwartz revelou-se demasiadamente abstrata para matemáticos aplicados e físicos.

Em 1953, George Temple elaborou uma teoria mais elementar, embora não menos rigorosa, sob o título "*Teorias e Aplicações das Funções Generalizadas*", dentro da qual a função impulso foi rigorosamente definida, ficando também devidamente provadas as equações (1.2-1) e (1.2-2).

Como não pretendemos estabelecer a função impulso unitário $U_0(t)$ em bases demasiadamente rigorosas, o que também seria fugir aos objetivos a que estamos nos propondo, apresentaremos a função impulso de maneira intuitiva, como ela é hoje concebida na Engenharia, ou seja, considerá-la-emos como o limite de um pulso de área unitária cuja base tende a zero.

Seja a função pulso retangular $p_a(t)$ indicada na figura 1.2-1a e que é expressa analiticamente como

$$p_a(t) = \frac{1}{a}\left[U_{-1}(t) - U_{-1}(t-a)\right]$$

Sua área é unitária independentemente do valor de a, o qual é considerado sempre positivo, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)dt = 1 \text{ para todo } a > 0$$

Quando a tender a zero, resultará, no limite, um pulso de área

unitária, base zero e amplitude infinita. A este pulso limite chamaremos função Delta de Dirac ou função impulso unitário. Assim,

$$U_0(t) = \lim_{a \to 0} p_a(t) \qquad (1.2\text{-}3)$$

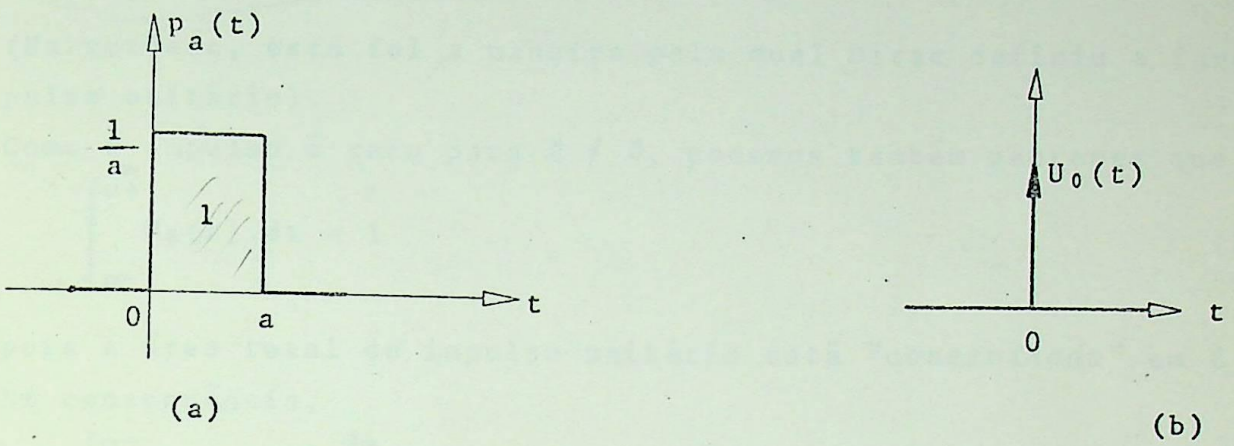


Figura 1.2-1

A função impulso unitário é representada graficamente como se indica na figura 1.2-1b.

Como no caso da função degrau, podemos atrasar uma função impulso pela substituição do argumento t por $t-a$. A função impulso atrasada do valor a, $U_0(t-a)$, é mostrada na figura 1.2-2a. Quando o pulso que aproxima o impulso tem base a e altura A/a, sua área vale A, qualquer que seja o valor de $a > 0$. No limite, quando a tender a zero, este pulso irá gerar um impulso de área A, o qual é denotado por $A.U_0(t)$ e está indicado na figura 1.2-2b. Na figura 1.2-2c se indica um impulso de área A que ocorre no instante $t = a$, isto é, $A.U_0(t-a)$.

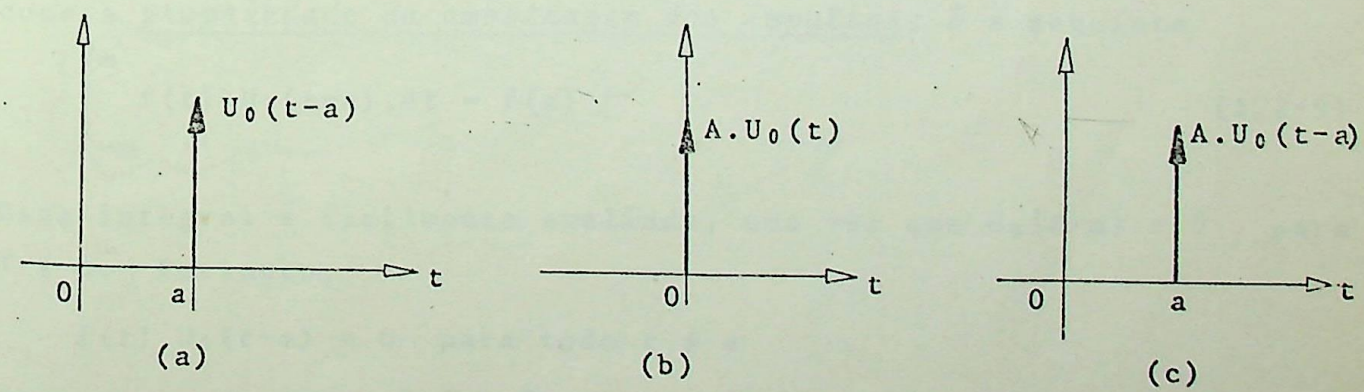


Figura 1.2-2

É interessante observar, por conseguinte, que o fator A que multiplica um impulso não representa a sua intensidade, que é infinita, mas sim a área envolvida pelo mesmo.

Agora podemos apresentar então as propriedades fundamentais da função impulso unitário; a saber

$$U_0(t) = 0 \quad \text{para} \quad t \neq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} U_0(t)dt = 1 \tag{1.2-4}$$

(Na verdade, esta foi a maneira pela qual Dirac definiu a função impulso unitário).

Como o impulso é zero para $t \neq 0$, podemos também escrever que

$$\int_{0-}^{0+} U_0(t).dt = 1 \tag{1.2-5}$$

pois a área total do impulso unitário está "*concentrada*" em $t = 0$. Em consequência,

$$\int_{-\infty}^{0-} U_0(t)dt = \int_{0+}^{\infty} U_0(t)dt = 0 \tag{1.2-6}$$

Da mesma forma,

$$U_0(t-a) = 0 \quad \text{para} \quad t \neq a$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} U_0(t-a)dt = 1 \tag{1.2-7}$$

e

$$\int_{a-}^{a+} U_0(t-a).dt = 1 \tag{1.2-8}$$

Uma outra importantíssima propriedade da função impulso, conhecida como a *propriedade da amostragem dos impulsos*, é a seguinte

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).U_0(t-a).dt = f(a) \tag{1.2-9}$$

Esta integral é facilmente avaliada, uma vez que $U_0(t-a) = 0$ para $t \neq a$. Portanto,

$$f(t).U_0(t-a) = 0 \quad \text{para todo } t \neq a$$

Para $t = a$, se $f(t)$ é contínua neste ponto, o produto $f(t).U_0(t-a)$ torna-se $f(a).U_0(t-a)$. Assim,

$$f(t).U_0(t-a) = f(a).U_0(t-a) \tag{1.2-10}$$

Então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).U_0(t-a)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(a).U_0(t-a)dt = f(a)\int_{-\infty}^{\infty} U_0(t-a)dt = f(a)$$

Da mesma forma,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).U_0(t).dt = f(0) \qquad (1.2\text{-}11)$$

Usando a propriedade da amostragem dos impulsos, podemos apresentar uma primeira justificativa para a equação (1.2-2). Integrando por partes a expressão $\delta(t).\frac{d}{dt}U_{-1}(t)$, entre os "*limites*" $-\infty$ e $+\infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\frac{d}{dt}U_{-1}(t).dt = U_{-1}(t).f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} U_{-1}(t).\frac{d}{dt}f(t).dt =$$

$$= f(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} d\left[f(t)\right] = f(\infty) - f(t)\Big|_{o}^{\infty} = f(0) \qquad (1.2\text{-}12)$$

Comparando a equação (1.2-12) com a equação (1.2-11) ou considerando como iguais os operadores que produzem o mesmo resultado, concluimos que

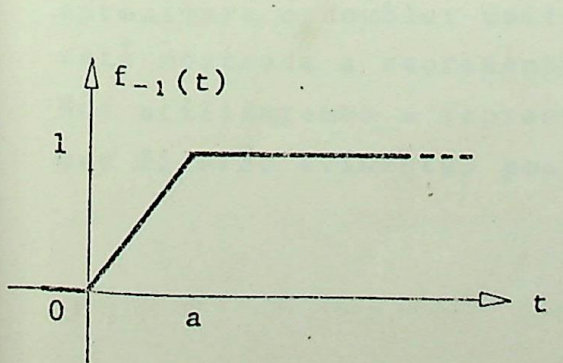
$$U_0(t) = \frac{d}{dt}U_{-1}(t),$$

ficando então justificada a equação (1.2-2).

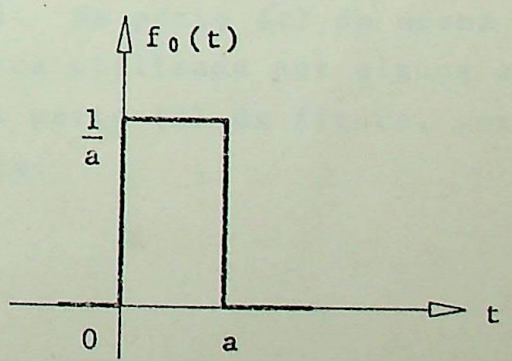
Uma segunda maneira de justificar a equação (1.2-2), um pouco mais intuitiva, é apresentada a seguir. Consideremos a função $\delta_{-1}(t)$ mostrada na figura 1.2-3a e a sua derivada $\delta_0(t)$ indicada na figura 1.2-3b. Portanto,

$$f_0(t) = \frac{d}{dt}f_{-1}(t) \qquad (1.2\text{-}13)$$

$$f_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_0(\lambda)d\lambda \qquad (1.2\text{-}14)$$



(a)



(b)

Figura 1.2-3

Ao fazer a tender para zero, $\delta_{-1}(t)$ se transforma na função $U_{-1}(t)$ e $\delta_0(t)$ na função $U_0(t)$. Assim as equações (1.2-13) e (1.2-14) se transformam em

$$U_0(t) = \frac{d}{dt} U_{-1}(t)$$

$$U_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_0(\lambda)d\lambda$$

Se o degrau tem intensidade A e ocorre no ponto $t = a$, isto é, se o degrau é $A.U_{-1}(t-a)$, então

$$\frac{d}{dt}\left[A.U_{-1}(t-a)\right] = A.U_0(t-a) \qquad (1.2-15)$$

Fica pois justificado que as equações (1.1-10) e (1.1-11) são realmente válidas para $K = 0$, isto é, existem para $K = 0$.
Quando atribuimos ao índice K o valor 1, as equações (1.1-11) e (1.1-10) se transformam em

$$U_1(t) = \frac{d}{dt} U_0(t) \qquad (1.2-16)$$

e

$$U_0(t) = \int_{-\infty}^{t} U_1(\lambda)d\lambda \qquad (1.2-17)$$

Embora existam as mesmas dificuldades apontadas para as equações (1.2-1) e (1.2-2), relativamente às equações (1.2-16) e (1.2-17), não discutiremos mais os méritos da questão, limitando-nos a dizer que a função $U_1(t)$ é denominada *"Doublet Unitário"*.
Uma maneira intuitiva de apresentar uma visualização do Doublet unitário está mostrada na figura 1.2-4. Na parte (a) da figura está indicado um pulso triangular $\delta_0(t)$ que também gera o impulso unitário quando a tende para zero. Na parte (b) está mostrada a derivada do pulso da parte (a). Quando a tender a zero, a função $\delta_1(t)$ aproximará o doublet unitário $U_1(t)$. Na parte (c) da mesma figura está mostrada a representação gráfica utilizada por alguns autores. Nós utilizaremos a representação da parte (d) da figura, por razões que ficarão evidentes posteriormente.

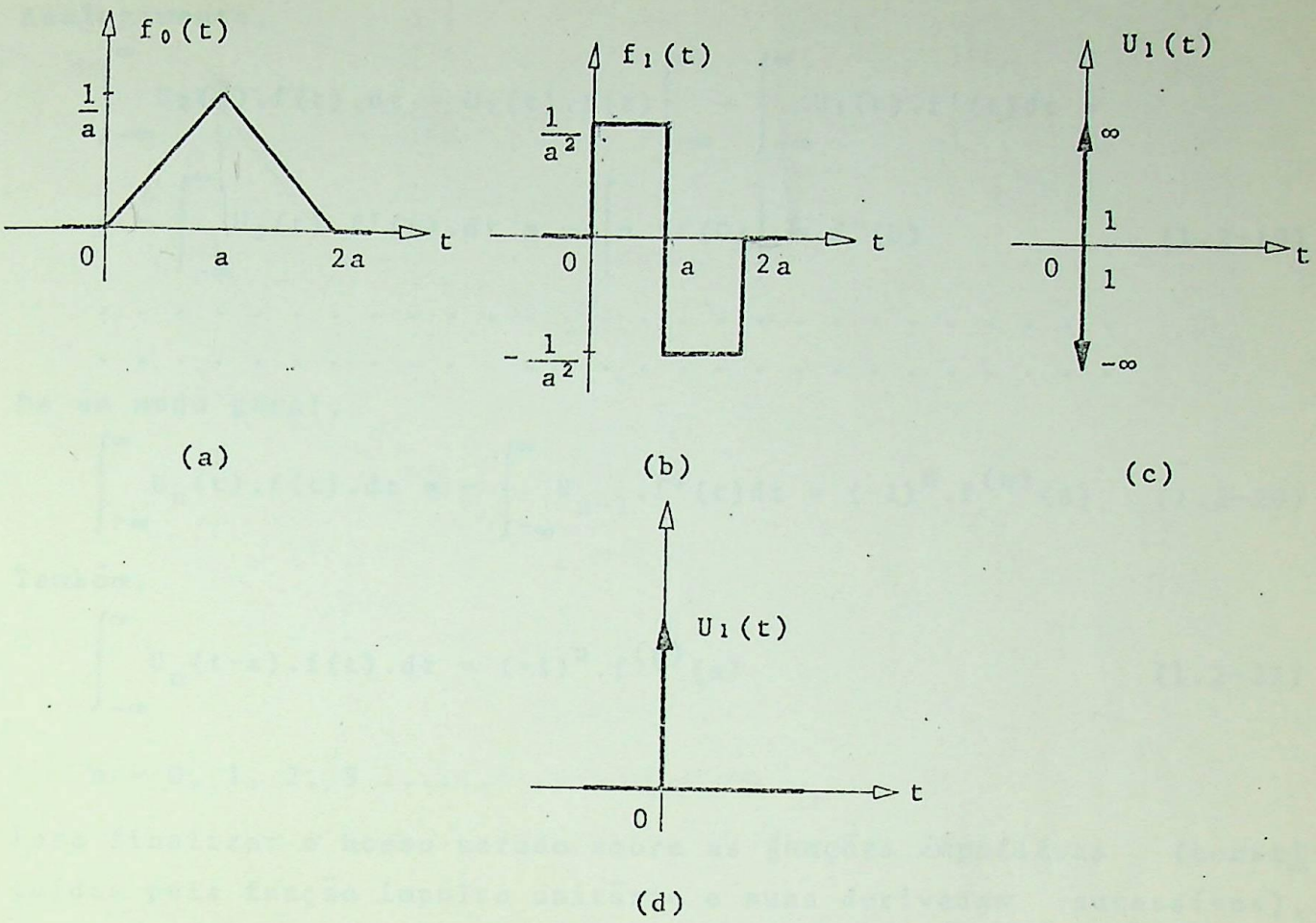


Figura 1.2-4

Atribuindo-se ao índice K na equação (1.1-11) os valores 2, 3, 4, etc, obteremos outras funções singulares, $U_2(t)$, $U_3(t)$, $U_4(t)$ etc, que, evidentemente, também satisfazem a equação (1.1-10). Portanto podemos considerar a função impulso unitário $U_0(t)$ como sendo o ponto de partida para a obtenção de duas classes de funções singulares, as quais são obtidas por integrações ou derivações sucessivas do impulso unitário. Encarando as funções singulares sob este aspecto, compreendemos perfeitamente a razão da escolha dos índices negativos e positivos usados nas demais funções singulares. O índice negativo estabelece que a função singular foi obtida por integração sucessiva do impulso unitário e o índice positivo indica que a função singular foi gerada por derivação sucessiva da função impulso unitário.

As funções singulares obtidas por derivação da função impulso gozam também das seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_1(t).f(t).dt = U_0(t).f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} U_0(t).f'(t).dt =$$

$$= f(0).U_0(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - f'(0)\int_{-\infty}^{\infty} U_0(t)dt = -f'(0) \qquad (1.2\text{-}18)$$

Analogamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_2(t).f(t).dt = U_1(t).f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} U_1(t).f'(t)dt =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} U_1(t).f'(t).dt = - \left[- f''(0) \right] = f''(0) \qquad (1.2\text{-}19)$$

. . . . . .

. . . . . .

De um modo geral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_n(t).f(t).dt = - \int_{-\infty}^{\infty} U_{n-1}.f'(t)dt = (-1)^n.f^{(n)}(0) \qquad (1.2\text{-}20)$$

Também,

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_n(t-a).f(t).dt = (-1)^n.f^{(n)}(a) \qquad (1.2\text{-}21)$$

$n = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$

Para finalizar o nosso estudo sobre as *funções impulsivas* (constituidas pela função impulso unitário e suas derivadas sucessivas), gostaríamos de relacionar algumas de suas aplicações.

1) Muitas vêzes, a entrada de um sistema é um pulso cuja duração é relativamente pequena quando comparada com a constante de tempo do sistema. Sob certas condições, podemos aproximar a resposta do sistema ao pulso pela resposta a um impulso de igual área, aplicado no mesmo instante que se aplicaria o pulso. Com base nesta aproximação é que desenvolveremos mais tarde a *integral de convolução* ou de *Duhamel*, para a determinação da resposta de um circuito a uma entrada arbitrária qualquer, quando é conhecida a sua resposta a um impulso unitário (ou degrau unitário).
2) Uma das mais úteis propriedades das funções singulares impulsivas é a possibilidade de se definir a derivada de uma função mesmo nos pontos de descontinuidade. Este fato será devidamente explorado por nós, principalmente no desenvolvimento de um processo para a decomposição de funções representadas por trechos polinomiais em funções singulares.
3) Muitas vêzes, a energia inicial armazenada nos circuitos elétricos pode ser convenientemente representada por fontes hipotéticas de impulsos. Outras vêzes, uma fonte impulsiva equivalente surge como resultado de manipulações matemáticas, mesmo que o circuito não possua fontes impulsivas.

1.3 - Exemplos Diversos

Exemplo 1.3-1 - Representar a função indicada na figura 1.3-1 em termos de funções degrau.

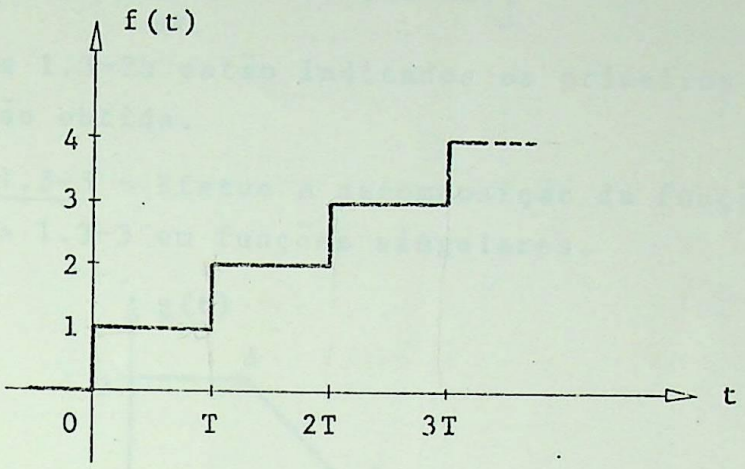


Figura 1.3-1

Solução - Facilmente se conclui que

$$f(t) = U_{-1}(t) + U_{-1}(t-T) + U_{-1}(t-2T) + U_{-1}(t-3T) + \ldots\ldots =$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} U_{-1}(t-KT)$$

Exemplo 1.3-2 - Idem para a função onda quadrada $f_1(t)$ indicada na figura 1.3-2a.

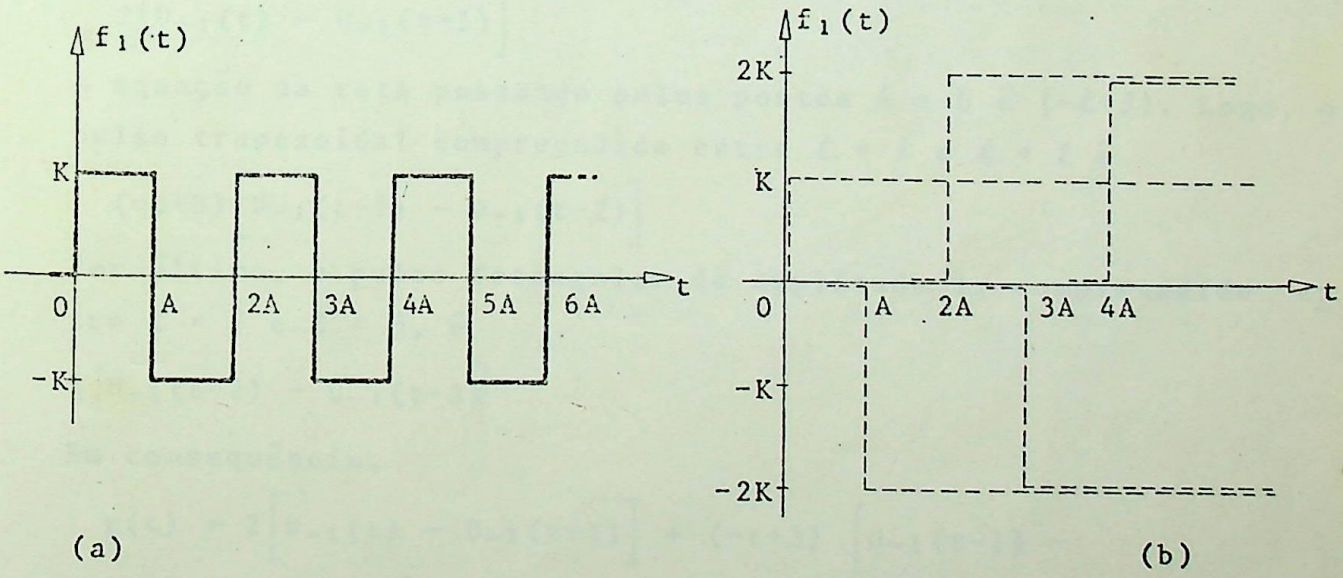


Figura 1.3-2

Solução - De acordo com a figura 1.1-2 e a equação (1.1-3), podemos escrever que $f_1(t)$ é a soma de equações de pulsos que se alternam,

$$f_1(t) = K\left[U_{-1}(t) - U_{-1}(t-A)\right] - K\left[U_{-1}(t-A) - U_{-1}(t-2A)\right] +$$

$$+ K\left[U_{-1}(t-2A) - U_{-1}(t-3A)\right] - K\left[U_{-1}(t-3A) - U_{-1}(t-4A)\right] + \ldots =$$

$$= K\left[U_{-1}(t) - 2U_{-1}(t-A) + 2U_{-1}(t-2A) - 2U_{-1}(t-3A) + \ldots\right] =$$

$$= K\left[U_{-1}(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n . U_{-1}(t-nA)\right]$$

Na figura 1.3-2b estão indicados os primeiros degraus contidos na solução obtida.

Exemplo 1.3-3 - Efetue a decomposição da função $g(t)$ indicada na figura 1.3-3 em funções singulares.

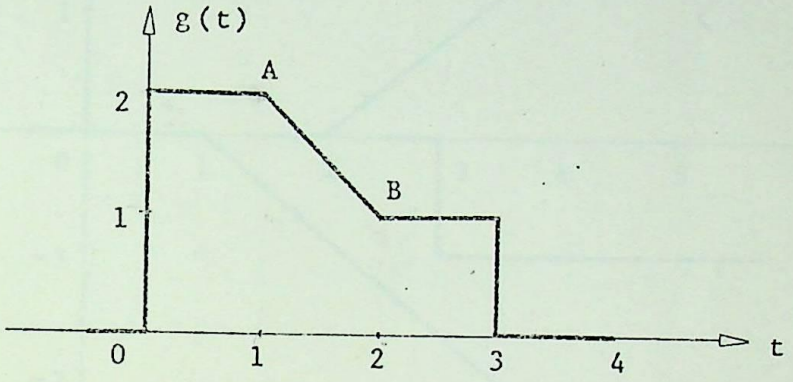


Figura 1.3-3

Solução - O pulso de amplitude igual a 2, compreendido entre $t = 0$ e $t = 1$, é

$$2\left[U_{-1}(t) - U_{-1}(t-1)\right]$$

A equação da reta passando pelos pontos A e B é $(-t+3)$. Logo, o pulso trapezoidal compreendido entre $t = 1$ e $t = 2$ é

$$(-t+3)\left[U_{-1}(t-1) - U_{-1}(t-2)\right]$$

Por último, o pulso retangular de amplitude 1, compreendido entre $t = 2$ e $t = 3$, é

$$1\left[U_{-1}(t-2) - U_{-1}(t-3)\right]$$

Em consequência,

$$g(t) = 2\left[U_{-1}(t) - U_{-1}(t-1)\right] + (-t+3)\left[U_{-1}(t-1) - U_{-1}(t-2)\right] + U_{-1}(t-2) - U_{-1}(t-3) =$$

$$= 2U_{-1}(t) - 2U_{-1}(t-1) - (t-1).U_{-1}(t-1) + 2U_{-1}(t-1) + (t-2).U_{-1}(t-2) - U_{-1}(t-2) + U_{-1}(t-2) - U_{-1}(t-3) =$$

$$= 2.U_{-1}(t) - (t-1).U_{-1}(t-1) + (t-2)U_{-1}(t-2) - U_{-1}(t-3)$$

Logo

$$g(t) = 2U_{-1}(t) - U_{-2}(t-1) + U_{-2}(t-2) - U_{-1}(t-3) \qquad (1.3\text{-}1)$$

Portanto a função $g(t)$ se compõe de quatro funções singulares; dois degraus e duas rampas. Estas funções estão representadas na figura 1.3-4.

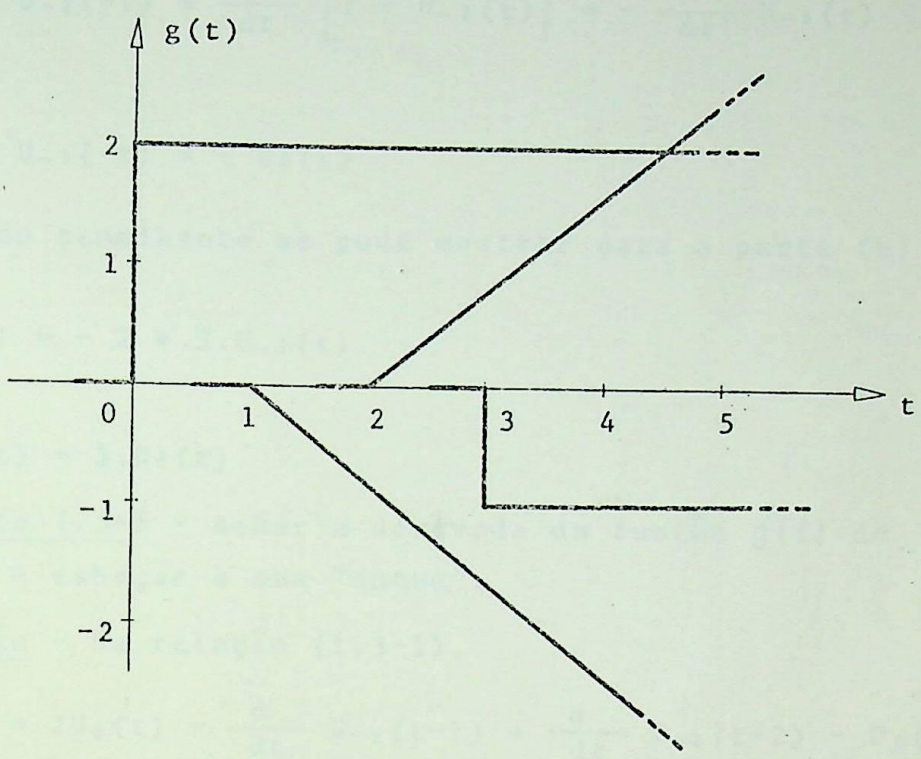


Figura 1.3-4

Exemplo 1.3-4 - Achar as derivadas das funções $U_{-1}(-t)$ e $f(t)$ indicadas na figura 1.3-5a e 1.3-5b, respectivamente.

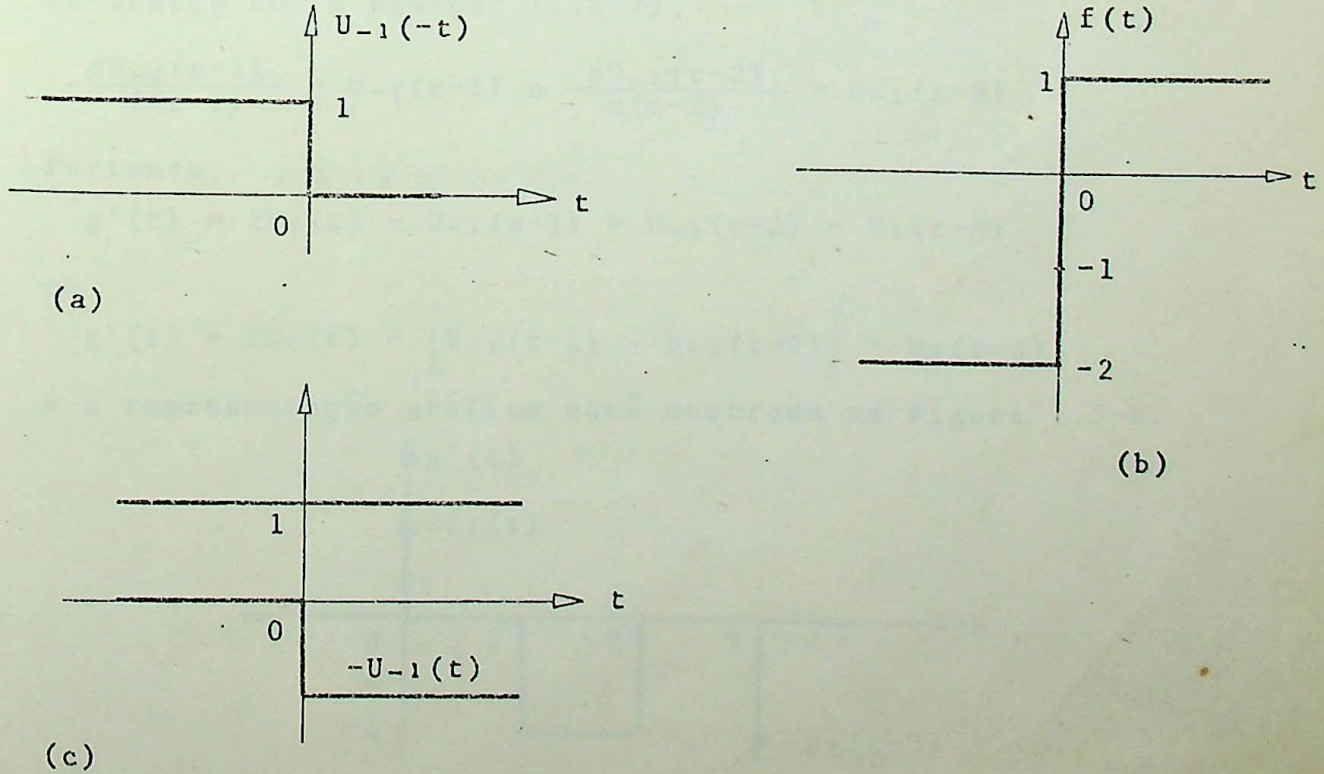


Figura 1.3-5

Solução - Conforme se pode constatar da parte (c) da figura 1.3-5,

$$U_{-1}(-t) = 1 - U_{-1}(t)$$

Então

$$\frac{d}{dt} U_{-1}(-t) = \frac{d}{dt}\left[1 - U_{-1}(t)\right] = - \frac{d}{dt} U_{-1}(t)$$

donde

$$\frac{d}{dt} U_{-1}(-t) = - U_0(t) \qquad (1.3\text{-}2)$$

De modo semelhante se pode mostrar para a parte (b) da figura que

$$f(t) = - 2 + 3.U_{-1}(t)$$

Logo

$$f'(t) = 3.U_0(t)$$

Exemplo 1.3-5 - Achar a derivada da função $g(t)$ do exemplo 1.3-3 e esboçar a sua "*curva*".

Solução - Da relação (1.3-1),

$$g'(t) = 2U_0(t) - \frac{d}{dt} U_{-2}(t-1) + \frac{d}{dt} U_{-2}(t-2) - U_0(t-3) =$$

$$= 2U_0(t) - \frac{dU_{-2}(t-1)}{d(t-1)} \cdot \frac{d(t-1)}{dt} + \frac{dU_{-2}(t-2)}{d(t-2)} \cdot \frac{d(t-2)}{dt} -$$

$$- U_0(t-3)$$

De acordo com a equação (1.1-7),

$$\frac{dU_{-2}(t-1)}{d(t-1)} = U_{-1}(t-1) \text{ e } \frac{dU_{-2}(t-2)}{d(t-2)} = U_{-1}(t-2)$$

Portanto

$$g'(t) = 2U_0(t) - U_{-1}(t-1) + U_{-1}(t-2) - U_0(t-3)$$

ou

$$g'(t) = 2U_0(t) - \left[U_{-1}(t-1) - U_{-1}(t-2)\right] - U_0(t-3),$$

e a representação gráfica está mostrada na figura 1.3-6.

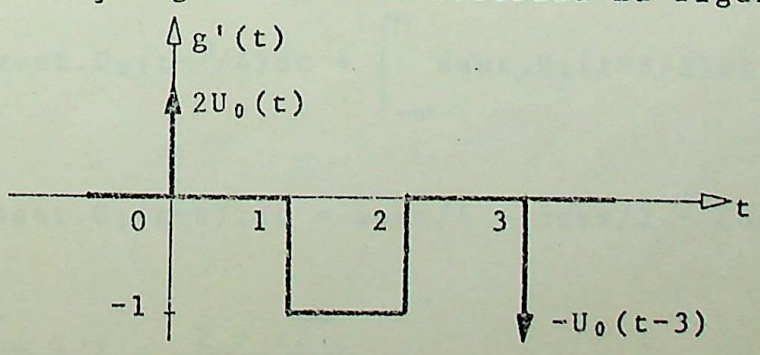


Figura 1.3-6

Comparando as figuras 1.3-3 e 1.3-6, observamos que em cada ponto de descontinuidade de $g(t)$ existe um impulso em $g'(t)$ e que a área do impulso é igual ao valor da descontinuidade. Isto também pode ser observado nas derivadas das funções da figura 1.3-5, partes (a) e (b).

Exemplo 1.3-6 - Calcular as integrais indicadas à seguir.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}.U_0(t-T).dt$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos t.U_0(t-\pi/3).dt$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} U_0(t-a).U_{-1}(t-b).dt$ $a>b$ d) $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} t\left[U_0(t-\pi/4) + U_1(t-\pi/2) + U_2(t-\pi)\right]dt$

Solução - Aplicando a equação (1.2-19), com $g(t)$, a e n adaptados a cada um dos casos, de (a) a (d), teremos:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}.U_0(t-T)dt = e^{j\omega T}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos t.U_0(t-\pi/3).dt = \cos\pi/3 = 1/2$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} U_0(t-a).U_{-1}(t-b).dt = U_{-1}(a-b)$

Como $a > b$, $U_{-1}(a-b) = U_{-1}(\lambda)$ para $\lambda > 0$, isto é, $U_{-1}(a-b) = 1$. Então

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_0(t-a).U_{-1}(t-b).dt = 1 \quad \text{para} \quad a > b$$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} t\left[U_0(t-\pi/4) + U_1(t-\pi/2) + U_2(t-\pi)\right].dt =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} t.U_0(t-\pi/4)dt + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} t.U_1(t-\pi/2)dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} t.U_2(t-\pi).dt = \operatorname{sen}\pi/4 - \cos\pi/2 - \cos\pi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

Exemplo 1.3-7 - A um capacitor em repouso se aplica a corrente $i(t)$ indicada na figura 1.3-7. Calcular a carga armazenada nele no instante $t = 5\ (s)$.

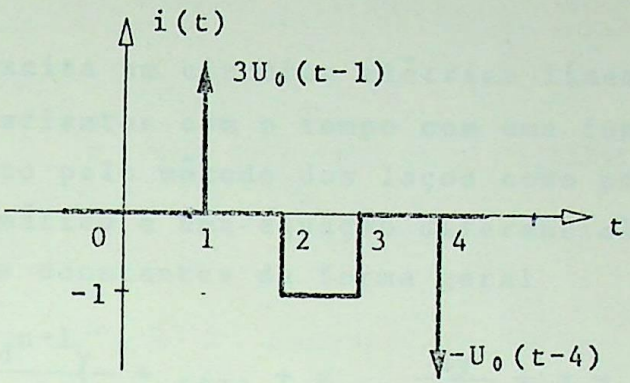


Figura 1.3-7

Solução - Sendo

$$i(t) = \frac{dq}{dt};$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\lambda)d\lambda$$

então

$$q(5) = \int_{-\infty}^{5} i(t)dt = \int_{-\infty}^{1-} i(t)dt + \int_{1-}^{2-} 3U_0(t-1)dt + \int_{2-}^{3+} -1dt +$$

$$+ \int_{3+}^{5} -U_0(t-4)dt = 0 + 3 - 1 - 1 = 1\ (C)$$

2

A RESPOSTA DOS CIRCUITOS ELÉTRICOS ÀS FUNÇÕES SINGULARES

Quando se excita um circuito elétrico linear com parâmetros concentrados e invariantes com o tempo com uma função $x(t)$, o seu equacionamento, tanto pelo método dos laços como pelo nodal, ou seja, o seu modelo matemático é uma equação diferencial linear ordinária com coeficientes constantes da forma geral

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \qquad (2.0)$$

aonde y é a solução (resposta) desejada e a_1, a_2, ..., a_n, b_0, b_1, ..., b_m são constantes.

Neste segundo capítulo procuraremos desenvolver uma maneira sistemática de resolver uma tal equação diferencial para o caso de $x(t)$ ser uma função singular, supondo que são conhecidas as condições iniciais em $t = 0_-$. Destaque especial será dado ao caso em que $x(t)$ é uma função degrau ou um impulso unitários.

2.1 - *Equações Diferenciais*

Nesta seção faremos um apanhado de determinados tópicos da teoria das equações diferenciais ordinárias, procurando estabelecer uma sólida base para o estudo da seção seguinte.

Desde que $x(t)$ é uma função conhecida, o lado direito da equação (2.0) é uma conhecida função do tempo, chamada *função forçante* e denotada por $f(t)$. Assim, a equação (2.0) pode ser escrita

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = f(t) \qquad (2.1\text{-}1)$$

Se $f(t)$ é identicamente nula, esta equação se reduz a *equação diferencial homogênea*

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0 \qquad (2.1\text{-}2)$$

Para uma função forçante não nula, a equação (2.1-1) é chamada uma *equação diferencial não-homogênea*.

A equação homogênea (2.1-2) tem n diferentes soluções linearmente independentes, as quais podem ser denotadas por $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_n(t)$. Assim, a solução mais geral é

$$y_H(t) = K_1y_1(t) + K_2y_2(t) + ... + K_ny_n(t) \qquad (2.1\text{-}3)$$

aonde K_1, K_2, ..., K_n são *constantes arbitrárias*. A solução geral da equação não-homogênea (2.1-1) é

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) \qquad (2.1\text{-}4)$$

O termo $y_H(t)$ é a solução da correspondente equação homogênea, como dado na equação (2.1-3) e é chamada *solução complementar*. O termo $y_P(t)$ é qualquer outra solução livre de constantes arbitrárias que satisfaça a equação (2.1-1) e é chamada *solução particular*.

A solução da equação diferencial homogênea

Admitamos que a solução da equação (2.1-2) seja da forma

$$y(t) = e^{pt}$$

aonde p é uma constante a ser determinada. Substituindo esta suposta solução na equação (2.1-2), obtemos

$$(p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + ... + a_{n-1}p + a_n)\, e^{pt} = 0$$

Para que esta equação seja satisfeita para todos os valores de t,

$$F(p) = p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + ... + a_{n-1}p + a_n = 0 \qquad (2.1\text{-}5)$$

A equação (2.1-5) é chamada a *equação característica* e é uma equação algébrica que apresenta n raízes, (p_1, p_2, p_3, ..., p_n) chamadas *raízes características*. Assim, fatorando o *operador polinomial* $F(p)$, temos

$$F(p) = (p-p_1)(p-p_2)(p-p_3) .... (p-p_n) \qquad (2.1\text{-}6)$$

Então as soluções da equação diferencial homogênea são

$$y_1(t) = e^{p_1t},\ y_2(t) = e^{p_2t},\ y_3(t) = e^{p_3t},\ ....,\ y_n(t) = e^{p_nt}$$

Se todas as raízes da equação característica são *reais* e *distintas*, as n soluções acima são independentes e a solução geral é

$$y_H(t) = K_1e^{p_1t} + K_2e^{p_2t} + K_3e^{p_3t} + ... + K_ne^{p_nt} \qquad (2.1\text{-}7)$$

Se algumas das raízes da equação característica são *complexas* e *distintas*, $y_H(t)$ pode ser escrita numa forma diferente. Quando a equação diferencial tem coeficientes a_1, a_2, a_3, ..., a_n reais, as raízes complexas da equação característica sempre ocorrem em pares conjugados. Se, por exemplo, $p_1 = \alpha + j\beta$, α e β reais, então uma ou-

tra raíz é, necessariamente, $p_2 = \alpha - j\beta$. Então

$$K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} = e^{\alpha t}.(K_1 e^{j\beta t} + K_2 e^{-j\beta t}) =$$

$$= e^{\alpha t}.\left[K_1(\cos\beta t + j\,\mathrm{sen}\beta t) + K_2(\cos\beta t - j\,\mathrm{sen}\beta t)\right] =$$

$$= e^{\alpha t}.\left[(K_1 + K_2)\cos\beta t + j(K_1 - K_2)\mathrm{sen}\beta t\right] =$$

$$= e^{\alpha t}.(K_3\cos\beta t + K_4\mathrm{sen}\beta t) = K.e^{\alpha t}.\cos(\beta t + \phi)$$

Portanto, se $p_1 = \alpha + j\beta$, $p_2 = \alpha - j\beta$ e $p_3, p_4, \ldots, p_n$ são reais e distintas,

$$y_H(t) = e^{\alpha t}.(K_1\cos\beta t + K_2\mathrm{sen}\beta t) + K_3 e^{p_3 t} + \ldots + K_n e^{p_n t}$$

ou (2.1-8)

$$y_H(t) = K.e^{\alpha t}.\cos(\beta t + \phi) + K_3 e^{p_3 t} + \ldots + K_n e^{p_n(t)} \quad (2.1\text{-}9)$$

aonde ϕ e K são constantes arbitrárias.

Se existirem *raízes reais repetidas*, os termos na equação (2.1-7) não serão todos independentes e a equação não representará a solução mais geral da equação (2.1-2), uma vez que o número de constantes arbitrárias será inferior a ordem n da equação diferencial. Se $p_1 = p_2$, por exemplo, $K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} = (K_1 + K_2)e^{p_1 t} = K_1' e^{p_1 t}$. Neste caso se pode mostrar que $y_1(t) = e^{p_1 t}$ e $y_2(t) = t.e^{p_1 t}$ são soluções independentes, de maneira que a solução geral da equação homogênea é

$$y_H(t) = (K_1 + K_2 t)e^{p_1 t} + K_3 e^{p_3 t} + \ldots + K_n e^{p_n t} \quad (2.1\text{-}10)$$

Em geral, se a raíz p_1 se repete m vezes, isto é, $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_m$, então a solução geral é

$$y_H(t) = (K_1 + K_2 t + K_3 t^2 + \ldots + K_m t^{m-1})e^{p_1 t} + \ldots + K_n e^{p_n t}$$

(2.1-11)

No caso de *raízes complexas repetidas*, os termos na equação (2.1-8) ou (2.1-9) também não serão independentes e a solução, no caso de $p_1 = p_2 = \alpha + j\beta$ e $p_3 = p_4 = \alpha - j\beta$, por exemplo, deverá ser tomada como

$$y_H(t) = e^{\alpha t}\left[(K_1 + K_2 t)\cos\beta t + (K_3 + K_4 t)\mathrm{sen}\beta t\right] + \ldots + K_n e^{p_n t}$$

(2.1-12)

Exemplo 2.1-1 - Resolver as seguintes equações diferenciais homogêneas:

a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 6y = 0$

b) $(p + 1)(p - 2)(p + 3)y = 0$

c) $(p - 1)^3(p + 2)(p + 3)y = 0$

d) $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 10.y = 0$

e) $p(p^2 + 4)(p - 1)^2y = 0$

f) $(p^4 + 2p^2 + 1)y = 0$

g) $p(p^4 + 6p^2 + 9)y = 0$

Solução -

a) Usando o *operador diferencial de Heaviside*, $p = d/dt$, a equação pode ser escrita

$(p^2 + p - 6)y = 0$

Então

$F(p) = p^2 + p - 6$

e a equação característica é

$p^2 + p - 6 = 0$

Então as raízes características são $p_1 = 2$ e $p_2 = -3$.

Logo

$y_H(t) = K_1e^{2t} + K_2e^{-3t}$

b) As raízes da equação característica são $p_1 = -1$, $p_2 = 2$ e $p_3 = -3$.

Então

$y_H(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{2t} + K_3e^{-3t}$

c) As raízes da equação característica $(p - 1)^3(p + 2)(p + 3) = 0$ são $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, $p_4 = -2$ e $p_5 = -3$. Então

$y_H(t) = (K_1 + K_2t + K_3t^2)e^t + K_4e^{-2t} + K_5e^{-3t}$

d) O operador polinomial é $F(p) = p^2 - 2p + 10$ e a equação característica é

$p^2 - 2p + 10 = 0$

Então $p_1 = 1 + j3$ e $p_2 = 1 - j3$, e a solução procurada é

$y_H(t) = e^t(K_1\cos 3t + K_2\operatorname{sen} 3t)$

ou

$y_H(t) = K.e^t.\cos(3t + \phi)$

e) As raízes características são $p_1 = 0$, $p_2 = j2$, $p_3 = -j2$,

$p_4 = 1 = p_5$. Então a solução geral é

$$y_H(t) = K_1 + K_2\cos 2t + K_3 \operatorname{sen} 2t + (K_4 + K_5 t)e^t$$

f) A equação diferencial escrita em termos do operador p é $(p^4 + 2p^2 + 1)y = 0$. As raízes da equação característica são $p_1 = p_2 = j$ e $p_3 = p_4 = -j$, e a solução procurada é

$$y_H(t) = (K_1 + K_2 t)\cos t + (K_3 + K_4 t)\operatorname{sen} t$$

g) As raízes características são $p_1 = 0$, $p_2 = p_3 = j\sqrt{3}$, $p_4 = p_5 = -j\sqrt{3}$. A solução geral é pois

$$y_H(t) = K_1 + (K_2 + K_3 t)\cos\sqrt{3}t + (K_4 + K_5 t)\operatorname{sen}\sqrt{3}t$$

A Solução da Equação Diferencial Não-Homogênea

Conforme mencionado anteriormente, a solução de uma equação diferencial não-homogênea se compõe de dois tipos de soluções; a solução complementar $y_H(t)$ que envolve um número de constantes arbitrárias igual à ordem da equação diferencial, que já aprendemos como calcular, e a solução particular $y_p(t)$, livre de constantes arbitrárias. Pretendemos agora recordar um dos métodos empregados na determinação da solução particular $y_p(t)$.

Os dois métodos principais utilizados na determinação de $y_p(t)$ são o *Método da Variação de Parâmetros* e o *Método dos Coeficientes Indeterminados*. Recordaremos aqui um método denominado *Abreviado* e que é uma ligeira variação do método dos coeficientes indeterminados.

Uma solução particular de uma equação diferencial linear $F(p)y = f(t)$, com coeficientes constantes, é dada por $y_p(t) = \frac{1}{F(p)} f(t)$, aonde o membro da direita deve ser entendido como $1/F(p)$ operando sobre $f(t)$, e que tem por resultado

$$y_p(t) = e^{p_1 t}\int e^{(p_2-p_1)t}\int e^{(p_3-p_2)t} \ldots \int e^{(p_n-p_{n-1})t}\int f(t)\, e^{-p_n t}.dt^n \qquad (2.1\text{-}13)$$

Para determinadas formas de $f(t)$ entretanto, o trabalho necessário para calcular $\frac{1}{F(p)} f(t)$ pode ser bastante reduzido. Estabeleceremos o método para algumas dessas formas especiais.

1º Caso - $f(t) = \alpha . e^{\beta t}$, onde α e β são constantes arbitrárias. Neste caso,

$$y_p(t) = \frac{1}{F(p)}(\alpha . e^{\beta t}) = \frac{\alpha . e^{\beta t}}{F(\beta)} = \frac{1}{F(\beta)} \cdot f(t) \qquad (2.1\text{-}14)$$

$F(\beta) \neq 0$

Exemplo 2.1-2 - Resolver as equações diferenciais seguintes

a) $(p^3 - 2p^2 - 5p + 6)y = e^{4t}$ ou $(p - 1)(p - 3)(p + 2)y = e^{4t}$

b) $(p - 1)(p - 3)(p + 2)y = (e^{2t} + 3)^2$

c) $(p - 1)(p - 3)(p + 2)y = e^{3t}$

Solução

a) A equação característica é $(p - 1)(p - 3)(p + 2) = 0$ e as raízes características são $p_1 = 1$, $p_2 = 3$ e $p_3 = -2$. Então, a solução complementar é

$$y_H(t) = K_1e^t + K_2e^{3t} + K_3e^{-2t}$$

Uma integral particular é

$$y_P(t) = \frac{1}{(p - 1)(p - 3)(p + 2)} e^{4t} = \frac{1}{(3)(1)(6)} e^{4t} = \frac{1}{18} e^{4t}$$

A solução geral é

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = K_1e^t + K_2e^{3t} + K_3e^{-2t} + \frac{1}{18} e^{4t}$$

b)

$$y_P(t) = \frac{1}{(p-1)(p-3)(p+2)} (e^{2t} + 3)^2 =$$

$$= \frac{1}{(p-1)(p-3)(p+2)} (e^{4t} + 6e^{2t} + 9e^{0t}) =$$

$$= \frac{e^{4t}}{(3)(1)(6)} + \frac{6e^{2t}}{(1)(-1)(4)} + \frac{9e^{0t}}{(-1)(-3)(2)} =$$

$$= \frac{e^{4t}}{18} - \frac{3e^{2t}}{2} + \frac{3}{2}$$

$$y(t) = K_1e^t + K_2e^{3t} + K_3e^{-2t} + \frac{e^{4t}}{18} - \frac{3e^{2t}}{2} + \frac{3}{2}$$

c) Uma integral particular é

$$y_P(t) = \frac{1}{(p - 1)(p - 3)(p + 2)} e^{3t}$$

Neste caso, $F(\beta) = F(3) = 0$ e *o método não pode ser aplicado*. Uma maneira de contornar tal dificuldade é proceder como se indica a seguir.

$$y_P(t) = \frac{1}{(p-3)} \left[\frac{1}{(p-1)(p+2)} e^{3t} \right] = \frac{1}{p-3} \left(\frac{e^{3t}}{2.5} \right) =$$

$$= \frac{1}{10} \left(\frac{1}{p-3} e^{3t} \right) = \frac{1}{10} \left(e^{3t} \int e^{3t} . e^{-3t} . dt \right) =$$

$$= \frac{1}{10} e^{3t} \cdot \int dt = \frac{te^{3t}}{10}$$

Então

$$y(t) = K_1 e^{t} + K_2 e^{3t} + K_3 e^{-2t} + \frac{te^{3t}}{10}$$

Sempre que a solução complementar contiver termos que participam da função forçante, $F(\beta) = 0$ e teremos que proceder como se indicou acima, empregando-se a fórmula

$$\frac{1}{p + a} f(t) = e^{-at} \cdot \int f(t) e^{at} dt \qquad (2.1\text{-}15)$$

Quando a função forçante é um seno ou um cosseno, podemos ainda considerá-la como sendo da forma exponencial por meio de

$$f_C(t) = \alpha . e^{j\omega t} = \alpha . \cos\omega t + j . \alpha . \operatorname{sen}\omega t$$

Neste caso,

$$y_{PC}(t) = \frac{1}{F(p)} \alpha . e^{j\omega t} = \frac{\alpha . e^{j\omega t}}{F(j\omega)} = \text{parte real de } \left[y_{PC}(t)\right] +$$

$$+ j . \text{parte imaginária de } \left[y_{PC}(t)\right]$$

Pelo princípio da superposição, se pode mostrar que

se $f(t) = \alpha . \cos\omega t$ = parte real de $\left[f_C(t)\right]$, então

$y_P(t)$ = parte real de $\left[y_{PC}(t)\right]$

se $f(t) = \alpha . \operatorname{sen}\omega t$ = parte imaginária de $\left[f_C(t)\right]$, então

$y_P(t)$ = parte imaginária de $\left[y_{PC}(t)\right]$

Exemplo 2.1-3 - Resolver a equação $(p^2 + 4)y = sen3t$.

Solução - A equação característica é $p^2 + 4 = 0$, da qual determinamos que $p_1 = j2$ e $p_2 = -j2$. De acordo com a equação (2.1-8)

$$y_H(t) = K_1 \cos 2t + K_2 \operatorname{sen} 2t$$

ou

$$y_H(t) = K \cos(2t + \phi)$$

Para a determinação de uma solução particular, consideremos inicialmente a função forçante como sendo

$$f_C(t) = e^{j3t} = \cos 3t + j \operatorname{sen} 3t$$

A solução particular correspondendo a esta função forçante é

$$y_{PC}(t) = \frac{1}{p^2 + 4} e^{j3t} = \frac{e^{j3t}}{(j3)^2 + 4} = \frac{e^{j3t}}{4 - 9} = -\frac{e^{j3t}}{5}$$

Como a função forçante verdadeira é $f(t) = sen3t$ = *parte imagi*

nária de $\left[\delta_C(t)\right]$ = *parte imaginária de* $\left[e^{j3t}\right]$, segue-se que

$$y_p(t) = \text{parte imaginária de } \left[y_{PC}(t)\right] =$$

$$= \text{parte imaginária de } \left[-\frac{ej3t}{5}\right]$$

$$= \text{parte imaginária de } \left[-\frac{\cos 3t}{5} - j\,\frac{\text{sen}3t}{5}\right]$$

Portanto

$$y_p(t) = -\frac{1}{5}.\text{sen}3t$$

Logo

$$y(t) = K_1\cos 2t + K_2\text{sen}2t - \frac{1}{5}\,\text{sen}3t$$

ou

$$y(t) = K.\cos(2t + \phi) - \frac{1}{5}\,\text{sen}3t$$

Embora se possa tratar a função forçante do tipo seno ou cosseno da maneira que acabamos de mostrar, existe uma outra maneira de proceder, a qual constitui o segundo caso.

2º Caso - $\delta(t) = K\text{sen}(\omega t + \theta)$ ou $K\cos(\omega t + \theta)$

Para este caso,

$$y_p(t) = \frac{1}{F(p^2)}\,K\text{sen}(\omega t + \theta) = \frac{K\text{sen}(\omega t + \theta)}{F(-\omega^2)} \qquad (2.1\text{-}16)$$

ou $\qquad F(-\omega^2) \neq 0$

$$y_p(t) = \frac{1}{F(p^2)}\,K\cos(\omega t + \theta) = \frac{K\cos(\omega t + \theta)}{F(-\omega^2)} \qquad (2.1\text{-}17)$$

$$F(-\omega^2) \neq 0$$

Exemplo 2.1-4 - Resolver

a) $(p^2 + 4)y = \text{sen}3t$

b) $(p^2 + 3p - 4)y = \text{sen}2t$

Solução

a) $p_1 = j2$, $p_2 = -j2$ e $y_H(t) = K_1\cos 2t + K_2\text{sen}2t$

$$y_p(t) = \frac{1}{p^2 + 4}\,\text{sen}3t = \frac{\text{sen}3t}{-(3^2) + 4} = -\frac{1}{5}\,\text{sen}3t$$

$$y(t) = K_1\cos 2t + K_2\text{sen}2t - \frac{1}{5}\,\text{sen}3t$$

b) A equação característica é

$$p^2 + 3p - 4 = 0$$

e as raízes características são $p_1 = 1$ e $p_2 = -4$.

Então a solução complementar é

$$y_H(t) = K_1 e^{t} + K_2 e^{-4t}$$

Uma integral particular é

$$y_p(t) = \frac{1}{p^2+3p-4}\,\text{sen}2t = \frac{1}{-(2^2)+3p-4}\,\text{sen}2t$$

$$= \frac{1}{3p-8}\,\text{sen}2t = \frac{3p+8}{9p^2-64}\,\text{sen}2t = \frac{3p+8}{-9.4-64}\,\text{sen}2t =$$

$$= -\frac{1}{100}(3p+8)\text{sen}2t = -\frac{1}{100}\left(3\frac{d}{dt}\,\text{sen}2t + 8\text{sen}2t\right) =$$

$$= -\frac{6.\cos 2t}{100} - \frac{8.\text{sen}2t}{100} = -\frac{1}{50}(3\cos 2t + 4\text{sen}2t)$$

ou, de outra maneira,

$$y_p(t) = \frac{1}{(p-1)(p+4)}\,\text{sen}2t = \frac{(p+1)(p-4)}{(p^2-1)(p^2-16)}\,\text{sen}2t =$$

$$= \frac{(p^2-3p-4)}{(-5)(-20)}\,\text{sen}2t = \frac{1}{100}(p^2-3p-4)\text{sen}2t$$

$$= \frac{1}{100}\left(-\frac{d^2}{dt^2}\,\text{sen}2t - 3\frac{d}{dt}\,\text{sen}2t - 4\text{sen}2t\right) =$$

$$= -\frac{1}{50}(4\text{sen}2t + 3\cos 2t)$$

Portanto, a solução geral é

$$y(t) = K_1 e^{t} + K_2 e^{-4t} - \frac{1}{50}(4\text{sen}2t + 3\cos 2t)$$

3º Caso - $f(t) = t^n$

Neste caso,

$$y_p(t) = \frac{1}{F(p)}\,t^n = (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n)t^n \qquad (2.1\text{-}18)$$

$$a_0 \neq 0$$

aonde o polinômio é obtido pelo desenvolvimento de $1/F(p)$ em potências crescentes de p, desprezando-se todos os termos além de p^n, porque $p^{n+1}(t^n) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\,t^n = 0$.

Exemplo 2.1-5 - Resolver as equações

a) $(p^2-4p+3)y = t^2 + 2t + 1$

b) $(p^3 - 4p^2 + 3p)y = t^2$

Solução

a) A solução complementar é

$y_H(t) = K_1 e^{t} + K_2 e^{3t}$, porque $p_1 = 1$ e $p_2 = 3$

Uma integral particular é

$$y_p(t) = \frac{1}{3 - 4p + p^2}(t^2 + 2t + 1)$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & /3 - 4p + p^2 \\ \hline -1 + \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}p^2 & \frac{1}{3} + \frac{4}{9}p + \frac{13}{27}p^2 + \ldots \\ \hline \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}p^2 & \\ -\frac{4}{3}p + \frac{16}{9}p^2 - \frac{4}{9}p^3 & \\ \hline \frac{13}{9}p^2 - \frac{4}{9}p^3 & \\ \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Então,

$$y_p(t) = \frac{1}{3 - 4p + p^2}(t^2 + 2t + 1) =$$

$$= (\frac{1}{3} + \frac{4}{9}p + \frac{13}{27}p^2)(t^2 + 2t + 1) =$$

$$= \frac{1}{3}(t^2+2t+1) + \frac{4}{9}\cdot\frac{d}{dt}(t^2+2t+1) + \frac{13}{27}\cdot\frac{d^2}{dt^2}(t^2+2t+1) =$$

$$= \frac{t^2}{3} + \frac{2t}{3} + \frac{1}{3} + \frac{8t}{9} + \frac{8}{9} + \frac{26}{27} =$$

$$= \frac{t^2}{3} + \frac{14t}{9} + \frac{59}{27}$$

Finalmente,

$$y(t) = K_1 e^{t} + K_2 e^{3t} + \frac{t^2}{3} + \frac{14t}{9} + \frac{59}{27}$$

b) A solução complementar é

$$y_H(t) = K_1 + K_2 e^{t} + K_3 e^{3t}$$

Uma integral particular é

$$y_p(t) = \frac{1}{p(p^2 - 4p + 3)}(t^2) = \frac{1}{p}(\frac{1}{3} + \frac{4}{9}p + \frac{13}{27}p^2)t^2 =$$

$$= \frac{1}{p}(\frac{t^2}{3} + \frac{8}{9}t + \frac{26}{27})$$

Como $\frac{1}{p}\left[f(t)\right] = \int f(t)dt$,

$$y_p(t) = \int (\frac{t^2}{3} + \frac{8t}{9} + \frac{26}{27})dt = \frac{t^3}{9} + \frac{4t^2}{9} + \frac{26t}{27}$$

Logo

$$y(t) = K_1 + K_2 e^{t} + K_3 e^{3t} + \frac{t^3}{9} + \frac{4t^2}{9} + \frac{.26t}{27}$$

Embora existam outros casos onde o método abreviado se aplica, o material anteriormente apresentado é mais que suficiente para os nossos objetivos futuros.

2.2 - *Equações Diferenciais com Funções Forçantes Singulares*

Nesta seção concentraremos nossas atenções sobre os aspectos matemáticos relacionados com a solução de equações diferenciais sujeitas a funções forçantes do tipo singular. Resolvendo equações diferenciais com funções forçantes dessa natureza, estaremos na verdade estabelecendo a maneira de proceder para a determinação da resposta dos circuitos elétricos ao degrau e ao impulso unitários.

Em se tratando de funções forçantes singulares, pode acontecer que a solução (resposta) $y(t)$ e suas derivadas sejam descontínuas em $t = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} &y(0_-) \neq y(0_+) \\ &y'(0_-) \neq y'(0_+) \\ &y''(0_-) \neq y''(0_+) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &y^{(n-1)}(0_-) \neq y^{(n-1)}(0_+) \end{aligned} \qquad (2.2\text{-}1)$$

Mais ainda, nos problemas de análise de circuitos, as condições iniciais são conhecidas no instante $t = 0_-$ e a determinação das constantes arbitrárias que figuram na resposta exigem o conhecimento das condições iniciais no instante $t = 0_+$. Portanto, um dos problemas que temos que resolver é o da determinação das condições em $t = 0_+$ à partir do conhecimento das mesmas em $t = 0_-$.

Para maior facilidade no trato com tais problemas, utilizaremos, de uma maneira geral, uma equação diferencial de segunda ordem, a qual facilitando o entendimento do que será exposto não acarretará nenhuma perda de generalidade. Suponhamos então que a equação diferencial que relaciona a entrada $x(t)$ e a saida $y(t)$ de um circuito linear seja

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 . \frac{dy}{dt} + a_2 . y = b_0 . x(t)$$

ou

$$y''(t) + a_1.y'(t) + a_2.y(t) = b_0.x(t) \qquad (2.2\text{-}2)$$

Sabemos que a solução geral de uma equação diferencial de ordem n envolve n constantes arbitrárias e que a determinação destas constantes só é possível quando são conhecidas n condições de contorno; no caso de circuitos elétricos n condições em $t = 0_+$. Por conseguinte, a solução geral da equação (2.2-2) exige o conhecimento de duas condições em $t = 0_+$, a saber: $y(0+)$ e $y'(0+)$.

Quando $x(t) = U_{-1}(t)$, para que os dois membros da equação (2.2-2) sejam iguais é necessário que alguma parcela do membro da esquerda contenha também um degrau; e é evidente que esta parcela é $y''(t)$, porque se $y'(t)$ contiver um degrau, então $y''(t)$ conterá um impulso e isto quebrará o equilíbrio dos dois membros da equação. Por um raciocínio semelhante podemos afirmar também que $y(t)$ não pode conter um degrau. Porém, se $y''(t)$ contém um degrau, então $y'(t)$ contem uma rampa $U_{-2}(t)$ e $y(t)$ uma parábola $U_{-3}(t)$. Podemos concluir então que quando $x(t)$ na equação (2.2-2) é um degrau, $y(0+) = y(0-)$ e $y'(0+) = y'(0-)$ — em face da continuidade de $U_{-2}(t)$ e $U_{-3}(t)$ em $t = 0$. Por conseguinte, não existe qualquer dificuldade no cálculo da solução da equação (2.2-2) quando $x(t)$ é um degrau. A solução particular é achada empregando-se o método abreviado à equação $y''(t) + a_1y'(t) + a_2y(t) = b_0$, uma vez que $U_{-1}(t) = 1$ para $t > 0$. De posse dos valores $y(0+) = y(0-)$ e $y'(0+) = y'(0-)$ se calculam as duas constantes arbitrárias da solução geral.

Embora não seja necessário conhecer o valor de $y''(0+)$ para a solução completa da equação, ele pode ser calculado fazendo-se $t = 0+$ na própria equação (2.2-2):

$$y''(0+) + a_1.y'(0+) + a_2.y(0+) = b_0$$

donde

$$y''(0+) = b_0 - \left[a_1.y'(0+) + a_2.y(0+)\right] \qquad (2.2\text{-}3)$$

Exemplo 2.2-1 - Resolver a equação diferencial

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 5U_{-1}(t)$$

com as condições inicias $y(0-) = 0$ e $y'(0-) = 0$

Solução - As raízes da equação característica são $p_1 = -1$ e $p_2 = -2$. Então a solução complementar é

$$y_H(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{-2t}$$

A solução particular é avaliada considerando-se a função forçante igual a 5 e empregando-se a equação (2.1-14) com $\beta = 0$, isto é,

$$y_p(t) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2}(5e^{ot}) = \frac{5}{2}$$

Assim

$$y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} + \frac{5}{2}$$

Como $y(t)$ e $y'(t)$ devem ser contínuas em $t = 0$,

$$y(0_+) = y(0_-) = 0$$

$$y'(0_+) = y'(0_-) = 0$$

Substituindo estas condições iniciais em $y(t)$ e $y'(t)$, encontramos que $K_1 = -5$ e $K_2 = 5/2$. Finalmente,

$$y(t) = \left[-5e^{-t} + \frac{5}{2}(1 + e^{-2t})\right].U_{-1}(t)$$

aonde a multiplicação por $U_{-1}(t)$ se deve ao fato de que a função forçante existe somente para $t > 0$ e, *como as condições em* $t = 0_-$ *são todas nulas*, a resposta encontrada somente é válida para $t > 0$.

Afirmamos há pouco que quando uma equação diferencial de segunda ordem é excitada por um degrau, então a solução $y(t)$ deve conter uma parábola $U_{-3}(t) = t^2/2!$ e, aparentemente, a solução encontrada não encerra nenhuma parábola $U_{-3}(t)$. Todavia, para confirmar nossas afirmações anteriores, podemos reescrever a solução obtida por meio da série de Mac-Laurin da função exponencial,

$$e^{\alpha t} = 1 + \frac{\alpha t}{1!} + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} + \ldots$$

Portanto,

$$y(t) = \left[-5.(1-\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\ldots)+\frac{5}{2}\ (1+1-\frac{2t}{1!}+\frac{4t^2}{2!}-\frac{8t^3}{3!}+\ldots)\right].U_{-1}(t) =$$

$$= (5.\frac{t^2}{2!}-15.\frac{t^3}{3!}+35\frac{t^4}{4!}-\ldots)U_{-1}(t) = 5.U_{-3}(t)-15.U_{-4}(t) +$$

$$+ 35.U_{-5}(t)-\ldots$$

e,

$$y'(t) = 5.U_{-2}(t) - 15.U_{-3}(t) + 35U_{-4}(t) - \ldots$$

$$y''(t) = 5.U_{-1}(t) - 15.U_{-2}(t) + 35U_{-3}(t) - \ldots$$

Constatamos assim que realmente $y(t)$ contém uma parábola, $y'(t)$ uma rampa e $y''(t)$ um degrau e também que $y''(0_+) = 5$, resultado que também pode ser comprovado fazendo $t = 0_+$ na equação dada:

$$y''(0_+) + 3y'(0_+) + 2y(0_+) = 5$$

Como $y(0_+) = y'(0_+) = 0$, segue-se que $y''(0_+) = 5$.

Quando $x(t)$ na equação (2.2-2) é uma função forçante singular do tipo daquelas obtidas por integração sucessiva do degrau unitário, isto é, rampa e parábolas, então todas as condições são contínuas em $t = 0$,

$$y(0_+) = y(0_-)$$

$$y'(0_+) = y'(0_-)$$

$$y''(0_+) = y''(0_-)$$

e a solução particular $y_p(t)$ pode ser obtida pelo emprego direto do método abreviado, sem qualquer dificuldade.

* *Exemplo 2.2-2* - Um circuito elétrico é descrito pela equação diferencial

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 6.x(t)$$

Determine a sua resposta $y(t)$ para uma entrada $x(t)$ rampa unitária $U_{-2}(t)$, sendo dadas as condições iniciais $y(0_-)=0$, $y'(0_-)=1$.

Solução - As raízes características são $p_1 = -2$ e $p_2 = -3$. A solução complementar é então

$$y_H(t) = K_1.e^{-2t} + K_2.e^{-3t}$$

independentemente de qual seja a função forçante. Quando a função forçante é uma rampa unitária, a equação é

$$(p^2 + 5p + 6)y = 6.U_{-2}(t) = 6t\,U_{-1}(t)$$

A solução particular é determinada, portanto, considerando-se a função forçante igual a $6t$ e empregando-se o terceiro caso do método abreviado, equação (2.1-18). Assim,

$$y_p(t) = \frac{1}{p^2 + 5p + 6}(6t) = (\frac{1}{6} - \frac{5}{36}\,p)6t = t - \frac{5}{6}$$

Então

$$y(t) = K_1e^{-2t} + K_2e^{-3t} + t - \frac{5}{6}$$

Como todas as condições são contínuas em $t = 0$, $y(0_+) = y(0_-) = 0$ e $y'(0_+) = y'(0_-) = 1$. A substituição destas condições em $y(t)$ e em

$$y'(t) = -2K_1e^{-2t} - 3K_2e^{-3t} + 1$$

resulta no sistema

$$0 = K_1 + K_2 - 5/6$$

$$1 = -2K_1 - 3K_2 + 1$$

ou

$$K_1 + K_2 = 5/6$$

$$2K_1 + 3K_2 = 0$$

Resolvendo o sistema anterior, encontramos que $K_1 = 5/2$ e $K_2 = -5/3$.

Finalmente,

$$y(t) = \frac{5}{2} e^{-2t} - \frac{5}{3} e^{-3t} + t - \frac{5}{6}$$

Se a função forçante na equação (2.2-2) é um impulso unitário, ou seja, se $x(t) = U_0(t)$ a equação (2.2-2) torna-se

$$y''(t) + a_1.y'(t) + a_2.y(t) = b_0.U_0(t) \qquad (2.2-4)$$

Para nos assegurarmos de que o lado esquerdo da equação (2.2-4) será igual ao lado direito, $y''(t)$ deverá conter um impulso, $y'(t)$ um degrau e $y(t)$ uma rampa. Por conseguinte, para o caso da equação (2.2-4), que é de segunda ordem, $y'(t)$ e $y''(t)$ são descontínuas em $t = 0$, ou seja, $y'(0+) \neq y'(0-)$ e $y''(0+) \neq y''(0-)$; porém $y(t)$ é contínua em $t = 0$, isto é, $y(0+) = y(0-)$. É evidente que se a equação diferencial for de terceira ordem, $y'''(t)$ conterá um impulso, $y''(t)$ um degrau, $y'(t)$ uma rampa e $y(t)$ uma parábola, de maneira que $y'''(0+) \neq y'''(0-)$, $y''(0+) \neq y''(0-)$ e $y'(0+) = y'(0-)$, $y(0+) = y(0-)$. Concluímos então que *para uma função forçante impulso unitário, as duas derivadas de mais alta ordem da resposta são descontínuas em $t = 0$.* Portanto, para o caso de uma equação de segunda ordem, precisamos calcular apenas $y'(0+)$, à partir do conhecimento de $y'(0-)$, uma vez que não precisamos do valor de $y''(0+)$ para o cálculo das constantes arbitrárias que figurarão na solução geral. Uma das maneiras de se calcular $y'(0+)$ consiste em se integrar a própria equação (2.2-4) entre os limites $0-$ e $0+$; assim,

$$\int_{0-}^{0+} y''(t)dt + a_1 \int_{0-}^{0+} y'(t)dt + a_2 \int_{0-}^{0+} y(t)dt = b_0 \int_{0-}^{0+} U_0(t)dt$$

donde

$$\Big[y'(0+) - y'(0-)\Big] + a_1 \Big[y(0+) - y(0-)\Big] + a_2 \int_{0-}^{0+} y(t)dt = b_0 \qquad (2.2-5)$$

Como $y(t)$ é contínua em $t = 0$, a equação (2.2-5) se reduz a

$$y'(0+) - y'(0-) = b_0$$

donde

$$y'(0+) = b_0 + y'(0-) \qquad (2.2\text{-}6)$$

Se precisássemos do valor de $y''(0+)$, substituiríamos t por $0+$ na equação (2.2-4), obtendo que

$$y''(0+) = -\left[a_1 y'(0+) + a_2 y(0+)\right] \qquad (2.2\text{-}7)$$

Exemplo 2.2-3 - Resolver a equação diferencial

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 5U_0(t)$$

com as condições iniciais $y(0-) = 0$ e $y'(0-) = 0$.

Solução - Como a função forçante é um impulso, $y''(t)$ tem que conter um impulso, $y'(t)$ um degrau e $y(t)$ uma rampa. Por conseguinte, $y(0+) = y(0-) = 0$ e $y'(0+) = b_0 + y'(0-) = 5 + 0 = 5$. Para $t > 0$, a equação se reduz a

$$(p^2 + 3p + 2)y = 0$$

e a sua solução é

$$y(t) = (K_1 . e^{-t} + K_2 . e^{-2t}) . U_{-1}(t)$$

então

$$y'(t) = -(K_1 e^{-t} + 2K_2 e^{-2t}) . U_{-1}(t) + (K_1 + K_2) . U_0(t)$$

Substituindo as condições $y(0+) = 0$ e $y'(0+) = 5$ em $y(t)$ e $y'(t)$, resulta o sistema

$$0 = K_1 + K_2$$

$$-5 = K_1 + 2K_2$$

do qual calculamos que $K_1 = 5$ e $K_2 = -5$.

Finalmente,

$$y(t) = (5e^{-t} - 5e^{-2t}) . U_{-1}(t)$$

Verifiquemos agora que a solução obtida realmente satisfaz a equação diferencial.

$$y'(t) = (-5e^{-t} + 10e^{-2t}) . U_{-1}(t)$$

$$y''(t) = (5e^{-t} - 20e^{-2t}) . U_{-1}(t) + 5U_0(t)$$

Então,

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = (5e^{-t} - 20e^{-2t})U_{-1}(t) + 5U_0(t) +$$

$$+ (-15e^{-t} + 30e^{-2t}) . U_{-1}(t) + (10e^{-t} - 10e^{-2t}) . U_{-1}(t) =$$

$$= 5 . U_0(t)$$

Também, $y(0+) = 0$, $y'(0+) = 5$ e $y''(0+) = -15$.

Da própria equação dada,

$$y''(0+) + 3y'(0+) + 2y(0+) = 0$$

donde

$$y''(0+) = - \left[3y'(0+) + 2y(0+)\right] = - 15$$

Portanto,

$$y(t) = 5(e^{-t} - e^{-2t}).U_{-1}(t)$$

é realmente a solução pedida.

Substituindo as funções exponenciais pelas suas respectivas séries de Mac-Laurin em $y(t)$, $y'(t)$ e $y''(t)$, obtemos que

$$y(t) = 5.U_{-2}(t) - 15.U_{-3}(t) + 35.U_{-4}(t) - \ldots$$

$$y'(t) = 5.U_{-1}(t) - 15.U_{-2}(t) + 35.U_{-3}(t) - \ldots$$

$$y''(t) = 5.U_{0}(t) - 15.U_{-1}(t) + 35.U_{-2}(t) - \ldots$$

e podemos confirmar a presença da função rampa em $y(t)$, do degrau em $y'(t)$ e do impulso em $y''(t)$, e também que $y(0+) = 0$, $y'(0+) = 5$ e $y''(0+) = - 15$. Observe-se também que a função rampa que está presente em $y(t)$ também está presente em $y'(t)$ e em $y''(t)$, e que a função degrau que está contida em $y'(t)$ também toma parte em $y''(t)$. Além disso, como as condições em $t = 0-$ são todas nulas, *as condições em* $t = 0+$ *de* y, y' *e* y'' *correspondem aos coeficientes da função* $U_{-1}(t)$ *nas respectivas expressões.*

Exemplo 2.2-4 - Resolver a equação do exemplo 2.2-3 com as condições $y(0-) = 1$ e $y'(0-) = 2$.

Solução - As condições em $t = 0+$ são $y(0+) = y(0-) = 1$ e $y'(0+) = b_0 + y'(0-) = 5 + 2 = 7$, e a solução da equação é

$$y(t) = K_1.e^{-t} + K_2.e^{-2t}$$

No caso presente, em que as condições em $t = 0-$ são diferentes de zero, não podemos multiplicar a resposta por $U_{-1}(t)$. Se o fizessemos, obteríamos que:

$$y(t) = (K_1.e^{-t} + K_2.e^{-2t}).U_{-1}(t)$$

e que

$$y'(t) = - (K_1e^{-t} + 2K_2e^{-2t})U_{-1}(t) + (K_1 + K_2).U_0(t)$$

Como $y(0+) = K_1 + K_2 = y(0-) = 1 \neq 0$, então existiria uma função impulso $(K_1 + K_2).U_0(t) = U_0(t)$ em $y'(t)$ e um *doublet* $U_1(t)$ em $y''(t)$, o que seria inadmissível porque destruiria o equilíbrio

dos dois membros da equação diferencial. Em outras palavras, como $y(0-) \neq 0$ e $y(0+) = y(0-) \neq 0$, a multiplicação da solução por $U_{-1}(t)$ implica na inclusão de um degrau $y(0+).U_{-1}(t)$ em $y(t)$, o que está contra a imposição de que $y(t)$ contenha uma função rampa (e suas integrais sucessivas), mas não uma função degrau. Portanto, a solução da equação é realmente

$$y(t) = K_1.e^{-t} + K_2.e^{-2t}$$

e

$$y'(t) = - K_1.e^{-t} - 2K_2.e^{-2t}$$

Substituindo as condições iniciais em $t = 0_+$,

$$1 = K_1 + K_2$$

$$7 = - K_1 - 2K_2$$

donde calculamos que $K_1 = 9 \quad K_2 = -8$

Assim,

$$y(t) = 9e^{-t} - 8e^{-2t}$$

Como a multiplicação da resposta por $U_{-1}(t)$ gera confusão, preferimos escrever, finalmente, que

$$y(t) = 9e^{-t} - 8e^{-2t}, \text{ para } t > 0$$

Quando a função forçante contém uma ou mais funções impulsivas ocorrendo em $t = 0$, a equação diferencial é igual a zero para $t > 0$ — uma vez que as mesmas funções impulsivas são nulas para $t \neq 0$. Assim sendo, a solução da equação diferencial se reduz à solução de uma equação homogênea. Do estudo feito na seção 2.1, constatamos que quaisquer que sejam as raízes da equação característica $F(p) = 0$, a solução da equação homogênea poderá sempre ser expressa por exponenciais, ou seja, decomposta em série de potências de t. Este fato constitue a base para o desenvolvimento de um outro método para a determinação das condições iniciais em $t = 0_+$, o qual passamos a estudar agora.

Para maior facilidade de entendimento, retomemos o exemplo 2.2-4, ou seja, o problema da solução da equação $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 5.U_0(t)$ com as condições $y(0_-) = 1$ e $y'(0_-) = 2$.

A necessidade de que $y''(t)$ contenha uma função impulso, $y'(t)$ um degrau e $y(t)$ uma rampa, aliada à possibilidade de se poder expressar a solução em forma de uma série de potências de t, nos permite escrever que

$$y(t) = C_0U_{-2}(t) + C_1U_{-3}(t) + C_2U_{-4}(t) + \ldots \qquad (2.2\text{-}8)$$

$$y'(t) = C_0U_{-1}(t) + C_1U_{-2}(t) + C_2U_{-3}(t) + \ldots \qquad (2.2\text{-}9)$$

$$y''(t) = C_0U_0(t) + C_1U_{-1}(t) + C_2U_{-2}(t) + \ldots \qquad (2.2\text{-}10)$$

Substituindo na equação dada, obtemos que

$$\left[C_0U_0(t) + C_1U_{-1}(t) + C_2U_{-2}(t) + \ldots\right] + 3.\left[C_0U_{-1}(t) + C_1U_{-2}(t) + \right.$$

$$\left. + C_2U_{-3}(t) + \ldots\right] + 2.\left[C_0U_{-2}(t) + C_1U_{-3}(t) + C_2U_{-4}(t) + \ldots\right] =$$

$$= 5U_0(t)$$

ou, agrupando os termos semelhantes, que

$$C_0U_0(t) + \left[C_1 + 3C_0\right]U_{-1}(t) + \left[C_2 + 3C_1 + 2C_0\right]U_{-2}(t) +$$

$$+\left[C_3 + 3C_2 + 2C_1\right]U_{-3}(t) + \ldots = 5.U_0(t)$$

Então

$$C_0 = 5$$

$$C_1 + 3C_0 = 0, \quad C_1 = -15$$

$$C_2 + 3C_1 + 2C_0 = 0, \quad C_2 = 35 \qquad (2.2\text{-}11)$$

$$C_3 + 3C_2 + 2C_1 = 0, \quad C_3 = -75$$

. . . . . .

Se as condições em $t = 0_-$ fossem todas nulas, evidentemente as condições em $t = 0_+$ seriam os coeficientes das funções degrau de cada uma das equações (2.2-8) a (2.2-10), a saber, zero, $C_0 = 5$ e $C_1 = -15$, respectivamente. Entretanto, como as condições iniciais em $t = 0_-$ não são nulas, devemos somar às condições em $t = 0-$ os valores dos coeficientes dos degraus porventura existentes em $y(t)$, $y'(t)$ e $y''(t)$, para obtermos as condições em $t = 0_+$. Portanto,

$$\begin{cases} y(0_+) = y(0_-) + 0 = y(0_-) = 1 \\ y'(0_+) = y'(0_-) + C_0 = 2 + 5 = 7 \\ y''(0_+) = y''(0_-) + C_1 = y''(0_-) - 15 \end{cases} \qquad (2.2\text{-}12)$$

e os resultados encontrados, $y(0_+) = 1$ e $y'(0_+) = 7$, obviamente concordam com aqueles obtidos na solução do exemplo 2.2-4.

Uma observação adicional nos permite simplificar bastante o método exposto. As condições iniciais relacionadas nas expressões (2.2-12) nos mostram que precisamos calcular somente os coeficientes dos degraus porventura contidos em $y(t)$ e em suas derivadas. Então, das expressões de $y(t)$, $y'(t)$ e $y''(t)$, concluimos que *é suficiente computar apenas os termos à esquerda dos degraus, inclusive.* Assim,

observando as expressões (2.2-8) a (2.2-10), escrevemos que

$$y(t) \doteq C0.U_{-2}(t)$$

$$y'(t) \doteq C_0.U_{-1}(t) \qquad (2.2\text{-}13)$$

$$y''(t) \doteq C_0.U_0(t) + C_1.U_{-1}(t)$$

aonde a notação $\doteq$ serve para ressaltar que a função $y(t)$ e suas derivadas não são constituídas apenas das funções singulares que estão indicadas em cada uma delas.

Portanto, substituindo na equação diferencial, resulta

$$C_0U_0(t) + C_1U_{-1}(t) + 3.C_0U_{-1}(t) = 5.U_0(t)$$

ou

$$C_0U_0(t) + \left[C_1 + 3C_0\right]U_{-1}(t) = 5.U_0(t)$$

donde

$$C_0 = 5$$

$$C_1 + 3C_0 = 0, \quad C_1 = -15$$

Exemplo 2.2-5 - Resolver a equação diferencial

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 5U_1(t),$$

dadas as condições $y(0_-) = 1$ e $y'(0_-) = 2$.

Solução - Para $t > 0$, a equação é $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$ e a sua solução é

$$y(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{-2t}$$

Como a função forçante é um *doublet*, o equilíbrio dos dois membros da equação dada exige que $y''(t)$ inclua um doublet, $y'(t)$ um impulso e $y(t)$ um degrau. Para a determinação das condições em $t = 0_+$, consideramos então que

$$y(t) \doteq C_0U_{-1}(t)$$

$$y'(t) \doteq C_0U_0(t) + C_1U_{-1}(t)$$

$$y''(t) \doteq C_0U_1(t) + C_1U_0(t) + C_2U_{-1}(t)$$

A substituição na equação diferencial resulta em

$$C_0U_1(t) + \left[C_1+3C_0\right]U_0(t) + \left[C_2+3C_1+2C_0\right]U_{-1}(t) = 5U_1(t)$$

donde

$$C_0 = 5$$

$$C_1 + 3C_0 = 0, \quad C_1 = -15$$

$$C_2 + 3C_1 + 2C_0 = 0, \quad C_2 = 35$$

Por conseguinte,

$$y(0_+) = y(0_-) + C_0 = 1 + 5 = 6$$

$$y'(0_+) = y'(0_-) + C_1 = 2 - 15 = -13$$

$$y''(0_+) = y''(0_-) + C_2 = y''(0_-) + 35$$

Com os valores que encontramos para $y(0_+)$ e $y'(0_+)$, determinamos que $K_1 = -1$ e $K_2 = 7$.

Finalmente,

$$y(t) = 7e^{-2t} - e^{-t} \quad \text{para } t > 0$$

Novamente não multiplicamos a resposta por $U_{-1}(t)$ pois se assim o fizessemos estaríamos afirmando que todas as condições em $t = 0_-$ são nulas e isto não é verdade, uma vez que $y(0_-) = 1$ e $y'(0_-) = 2$.

Observemos também que quando integramos a equação diferencial entre os limites 0_- e 0_+ resulta

$$y'(0_+) - y'(0_-) + 3y(0_+) - 3y(0_-) = 5\int_{0_-}^{0_+} U_1(t)dt$$

Como

$$\int_{0_-}^{0_+} U_1(t)dt = 0,$$

de acordo com a equação (1.2-20), segue-se que

$$y'(0_+) + 3y(0_+) = 5,$$

equação que é satisfeita pelos valores encontrados.

Exemplo 2.2-6 - Um sistema de entrada $x(t)$ e saida $y(t)$ é descrito pela equação diferencial

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4x'(t) + 2x(t)$$

Determinar a saida correspondente a entrada $x(t) = U_0(t)$, sabendo-se que $y(0_-) = 1$ e $y'(0_-) = 3$.

Solução - Quando $x(t) = U_0(t)$, a equação se torna

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4U_1(t) + 2U_0(t)$$

Sua solução, para $t > 0$, é

$$y(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{-2t}$$

Face ao segundo membro da equação, concluimos que $y''(t)$ deverá conter um *doublet* e um impulso, $y'(t)$ um impulso e um degrau e $y(t)$ um degrau e uma rampa. Então escrevemos que

$$y(t) \doteq C_0 U_{-1}(t)$$

$$y'(t) \doteq C_0 U_0(t) + C_1 U_{-1}(t)$$

$$y''(t) \doteq C_0 U_1(t) + C_1 U_0(t) + C_2 U_{-1}(t)$$

Substituindo na equação,

$$C_0 U_1(t) + \left[C_1 + 3C_0\right] U_0(t) + \left[C_2 + 3C_1 + 2C_0\right] U_{-1}(t) =$$

$$= 4U_1(t) + 2U_0(t)$$

donde

$$C_0 = 4$$

$$C_1 + 3C_0 = 2, \quad C_1 = -10$$

$$C_2 + 3C_1 + 2C_0 = 0, \quad C_2 = 22$$

Assim,

$$y(0_+) = y(0_-) + C_0 = 1 + 4 = 5$$

$$y'(0_+) = y'(0_-) + C_1 = 3 - 10 = -7$$

Portanto,

$$K_1 + K_2 = 5$$

$$K_1 + 2K_2 = 7$$

Resolvendo o sistema, encontramos que $K_1 = 3$ e $K_2 = 2$. Finalmente,

$$y(t) = 3.e^{-t} + 2.e^{-2t} \quad \text{para } t > 0$$

Exemplo 2.2-7 - Resolver a equação íntegro-diferencial

$$y''(t) + 8y'(t) - 7 \int_{0-}^{t} y(\lambda)d\lambda = 3U_{-1}(t)$$

As condições iniciais são $y(0_-) = -2$ e $y'(0_-) = 4$.

Solução - Considerando que $y(t)$ e $y'(t)$ são contínuas em $t = 0$, $y(0_+) = y(0_-) = -2$ e $y'(0+) = y'(0_-) = 4$. Como a equação diferencial é de terceira ordem, existirão três constantes arbitrárias a determinar na sua solução e, em consequência, precisamos calcular $y''(0+)$. Isto é feito substituindo t por $0+$ na própria equação diferencial:

$$y''(0+) + 8y'(0+) - 7 \int_{0-}^{0+} y(\lambda)d\lambda = 3$$

Sendo $y(t)$ contínua em $t = 0$, $\int_{0-}^{0+} y(\lambda)d\lambda = 0$.

Então

$$y''(0+) = 3 - 8y'(0+) = -29$$

Derivando a equação dada, obtemos que

$$y'''(t) + 8y''(t) - 7y(t) = 3U_0(t)$$

Para $t > 0$, ela é

$$(p^3 + 8p^2 - 7)y(t) = 0$$

As raízes da equação característica são $p_1 = -1$, $p_2 \simeq 0,9$ e $p_3 \simeq 7,9$. Então a solução da equação é

$$y(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{0,9t} + K_3e^{7,9t}$$

Em consequência,

$$y'(t) = -K_1e^{-t} + 0,9K_2e^{0,9t} + 7,9K_3e^{7,9t}$$

e

$$y''(t) = K_1e^{-t} + 0,81K_2e^{0,9t} + 62,41K_3e^{7,9t}$$

Considerando o instante $t = 0+$, obtemos o sistema

$$K_1 + K_2 + K_3 = -2$$

$$-K_1 + 0,9K_2 + 7,9K_3 = 4$$

$$K_1 + 0,81K_2 + 62,41K_3 = -29$$

do qual determinamos que $K_1 = 5,5$, $K_2 = 3,07$ e $K_3 = -0,43$. Finalmente,

$$y(t) = 5,5e^{-t} + 3,07e^{0,9t} - 0,43e^{7,9t} \quad \text{para } t > 0$$

Exemplo 2.2-8 - Resolver o sistema de equações diferenciais

$$x'(t) + 3x(t) - 4y(t) = U_{-1}(t)$$

$$2x(t) + y'(t) - y(t) = U_0(t)$$

com as condições $x(0-) = x'(0-) = y(0-) = y'(0-) = 0$

Solução - Usando o operador diferencial $p = d/dt$, podemos escrever o sistema da seguinte forma

$$(p + 3)x(t) - 4y(t) = U_{-1}(t)$$

$$2x(t) + (p - 1)y(t) = U_0(t)$$

Em seguida podemos obter uma equação só para $x(t)$, e outra só para $y(t)$, como segue

$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} U_{-1}(t) & -4 \\ U_0(t) & p-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+3 & -4 \\ 2 & p-1 \end{vmatrix}}$$

ou

$$F(p)x(t) = \begin{vmatrix} p+3 & -4 \\ 2 & p-1 \end{vmatrix} x(t) = \begin{vmatrix} U_{-1}(t) & -4 \\ U_0(t) & p-1 \end{vmatrix}$$

então

$$(p^2 + 2p + 5)x(t) = U_0(t) - U_{-1}(t) + 4U_0(t) =$$

$$= 5U_0(t) - U_{-1}(t) \qquad (2.2\text{-}14)$$

Da mesma forma,

$$F(p)y(t) = (p^2 + 2p + 5)y(t) = \begin{vmatrix} p+3 & U_{-1}(t) \\ 2 & U_0(t) \end{vmatrix}$$

ou

$$(p^2 + 2p + 5)y(t) = U_1(t) + 3U_0(t) - 2U_{-1}(t) \qquad (2.2\text{-}15)$$

Para $t > 0$,

$$(p^2 + 2p + 5)x(t) = -1$$

$$(p^2 + 2p + 5)y(t) = -2$$

As raízes características são obtidas da equação característica $F(p) = p^2 + 2p + 5 = 0$ e são $p_1 = -1 + j2$ e $p_2 = -1 - j2$. Então as soluções complementares são

$$x_H(t) = e^{-t}.(A_1\cos 2t + A_2\operatorname{sen} 2t)$$

$$y_H(t) = e^{-t}.(B_1\cos 2t + B_2\operatorname{sen} 2t)$$

e as soluções particulares,

$$x_P(t) = \frac{1}{p^2 + 2p + 5}(-1e^{0t}) = -\frac{1}{5}$$

$$y_P(t) = \frac{1}{p^2 + 2p + 5}(-2e^{0t}) = -\frac{2}{5}$$

Portanto,

$$x(t) = e^{-t}(A_1\cos 2t + A_2\operatorname{sen} 2t) - \frac{1}{5} \qquad (2.2\text{-}16)$$

$$y(t) = e^{-t}(B_1\cos 2t + B_2\operatorname{sen} 2t) - \frac{2}{5} \qquad (2.2\text{-}17)$$

Em face dos segundos membros das equações (2.2-14) e (2.2-15), devemos tomar

$$x(t) \doteq C_0 U_{-2}(t)$$

$$x'(t) \doteq C_0 U_{-1}(t) + C_1 U_{-2}(t)$$

$$x''(t) \doteq C_0 U_0(t) + C_1 U_{-1}(t) + C_2 U_{-2}(t)$$

e

$$y(t) \doteq D_0 U_{-1}(t)$$

$$y'(t) \doteq D_0 U_0(t) + D_1 U_{-1}(t)$$

$$y''(t) \doteq D_0 U_1(t) + D_1 U_0(t) + D_2 U_{-1}(t)$$

Substituindo nas equações (2.2-14) e (2.2-15), resulta

$$C_0 U_0(t) + \left[C_1 + 2C_0\right] U_{-1}(t) + \left[C_2 + 2C_1 + 5C_0\right] U_{-2}(t) =$$

$$= 5U_0(t) - U_{-1}(t)$$

$$D_0 U_1(t) + \left[D_1 + 2D_0\right] U_0(t) + \left[D_2 + 2D_1 + 5D_0\right] U_{-1}(t) =$$

$$= U_1(t) + 3U_0(t) - 2U_{-1}(t)$$

Donde

$C_0 = 5$ $\qquad$ $D_0 = 1$

$C_1 + 2C_0 = -1$; $C_1 = -11$ $\qquad$ $D_1 + 2D_0 = 3$; $D_1 = 1$

Como todas as condições em $t = 0-$ são nulas, as condições em $t = 0+$ são dadas apenas pelos coeficientes das funções degrau. Assim,

$$x(0_+) = 0,\ x'(0_+) = C_0 = 5,\ y(0_+) = D_0 = 1$$

e

$$y'(0_+) = D_1 = 1$$

Com estas condições iniciais, determinamos que $A_1 = 1/5$, $A_2 = 13/5$, $B_1 = 7/5$ e $B_2 = 6/5$.

Então

$$x(t) = \frac{e^{-t}}{5}(\cos 2t + 13\operatorname{sen} 2t - e^{t}).U_{-1}(t)$$

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{5}(7\cos 2t + 6\operatorname{sen} 2t - 2e^{t}).U_{-1}(t)$$

2.3 - *Respostas ao Impulso e ao Degrau*

As respostas de um circuito *sem energia inicialmente armazenada* em $t = 0-$ a uma excitação impulso unitário ou degrau unitário, aplicada no instante $t = 0$, revestem-se de tal importância que recebem símbolos especiais. Assim, $h(t)$ designa a *resposta ao impulso* e

$r(t)$ e *resposta ao degrau*. $h(t)$ também é conhecida pelo nome de *função de Green* e $r(t)$ por *admitância indicial*.

Um dos pontos básicos na determinação de $h(t)$ e de $r(t)$ é a avaliação das condições iniciais em $t = 0+$; para que se possa, depois, calcular as constantes arbitrárias envolvidas nas soluções. Existem duas maneiras principais de proceder a avaliação destas condições em $t = 0+$. A primeira exige o conhecimento do circuito que se pretende examinar, emprega alguns teoremas relacionados com a tensão numa capacitância e a corrente numa indutância, e, em certos casos, uma boa dose de engenhosidade. A segunda maneira consiste na utilização das próprias equações que descrevem o comportamento do circuito e se utiliza das técnicas apresentadas principalmente na seção anterior. Embora o nosso objetivo seja o segundo processo, faremos inicialmente uma rápida explanação sobre o primeiro deles.

São três os teoremas empregados no primeiro método para determinação das condições iniciais em $t = 0+$, a saber:

Teorema 2.3-1 - Se todas as tensões e correntes permanecem finitas, a tensão numa capacitância e a corrente numa indutância não se podem alterar instantaneamente.

Se a tensão $e(t)$ de uma capacitância C variasse instantaneamente, então $e(t)$ incluiria obrigatoriamente uma função degrau, e a sua derivada um impulso. Dessa forma, a corrente $i(t) = C\frac{de(t)}{dt}$ da capacitância envolveria um impulso e realmente não permaneceria finita. Da mesma maneira se pode mostrar que uma variação instantânea da corrente de uma indutância exigiria uma tensão infinita.

Teorema 2.3-2 - Um impulso unitário de corrente circulando através de uma capacitância C acarreta uma variação instantânea de $1/C$ (V) na sua tensão, enquanto que um impulso unitário de tensão aplicado entre os terminais de uma indutância L altera instantaneamente a sua corrente de um valor $1/L$ (A).

Se a corrente numa capacitância inicialmente descarregada C é $i(t) = U_0(t)$, então a tensão vale

$$e(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} U_0(\lambda)d\lambda = \frac{1}{C}U_{-1}(t)$$

donde

$$e(0+) = \frac{1}{C} \quad (V)$$

Observe-se que esta corrente impulsiva deposita a carga de

1 Coulomb e armazena $(1/2)Ce^2 = 1/2C$ Joule de energia na mesma capacitância C, instantaneamente.

Da mesma forma, se um impulso unitário de tensão é aplicado aos terminais de uma indutância L, que não era percorrida por corrente alguma antes da aplicação do impulso de tensão, então a corrente é

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} U_0(\lambda)d\lambda = \frac{1}{L}U_{-1}(t)$$

donde

$$i(0_+) = \frac{1}{L}\ (\Lambda)$$

Este impulso de tensão também insere instantaneamente uma energia de $(1/2)Li^2 = 1/2L$ Joule no campo magnético da indutância.

Teorema 2.3-3 - A tensão de uma capacitância e a corrente numa indutância precisam permanecer sempre finitas.

O que este teorema estabelece é que nenhuma tensão ou corrente pode ser um *doublet* unitário. Se a corrente em uma capacitância é um *doublet* unitário, a tensão se torna infinita, pois

$$e(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)d\lambda = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} U_1(\lambda)d\lambda = \frac{1}{C}U_0(t)$$

Convém observar finalmente que os teoremas não fazem qualquer restrição à corrente de uma capacitância, nem à tensão de uma indutância, as quais podem variar instantaneamente mesmo que todas as correntes e tensões permaneçam finitas.

Conforme mencionamos anteriormente, os valores iniciais em $t = 0+$ das respostas são achados através da utilização dos teoremas 2.3-1 a 2.3-3. Em consequência do teorema 2.3-1, se não há impulsos no circuito, a tensão na capacitância e a corrente na indutância precisam ser as mesmas em $t = 0-$ e $t = 0+$. Quando a tensão da capacitância e a corrente na indutância são determinadas, todas as outras tensões e correntes do circuito podem ser obtidas pela aplicação das leis de Kirchhoff.

Exemplo 2.3-1 - Determine a tensão $e_0(t)$ no circuito da figura 2.3-1, sabendo-se que não há energia inicialmente armazenada no mesmo.

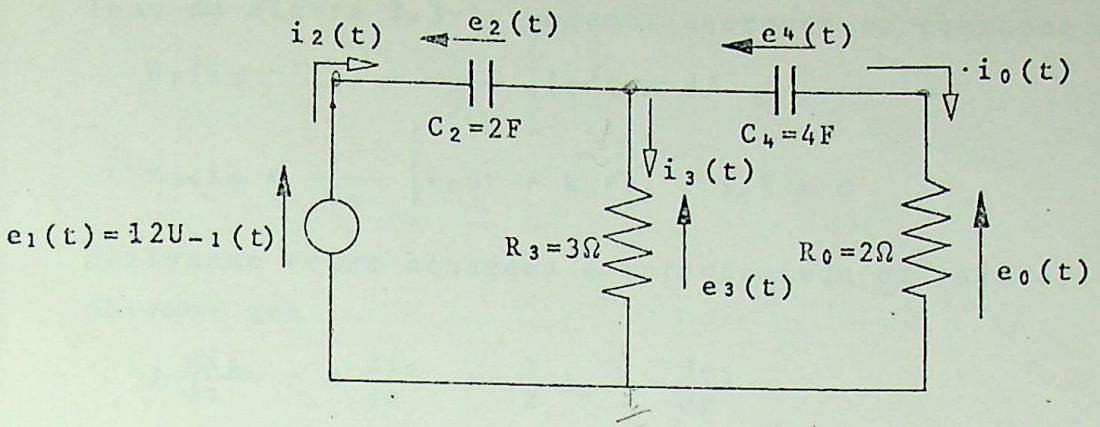


Figura 2.3-1

Solução - Do enunciado se depreende que

$$e_2(0-) = 0 \quad \text{e} \quad e_4(0-) = 0.$$

A única possibilidade de circular impulsos de corrente em resposta a um salto na fonte de tensão ocorre quando o circuito contem um laço constituido exclusivamente da fonte de tensão e de capacitâncias. (O dual também é verdadeiro). Como tal situação não ocorre no circuito da figura 2.3-1, não há impulsos no circuito e $e_2(0+) = e_2(0-) = 0$, $e_4(0+) = e_4(0-) = 0$. Então a tensão da fonte, $e_1(0+) = 12$, precisa aparecer inicialmente nas resistências, ou seja $e_3(0+) = e_0(0+) = 12$ e isto equivale a considerar que no instante $t = 0$ as capacitâncias estão em curto-circuito. Em consequência, $i_3(0+) = e_3(0+)/3 = 4$ e $i_0(0+) = e_0(0+)/2 = 6$. Portanto $i_2(0+) = i_0(0+) + i_3(0+) = 6 + 4 = 10$. Por outro lado, $e_1(t) = e_0(t) + e_4(t) + e_2(t)$, de modo que

$$\frac{de_1}{dt} = \frac{de_0}{dt} + \frac{de_4}{dt} + \frac{de_2}{dt}$$

e

$$e_1'(0+) = e_0'(0+) + e_4'(0+) + e_2'(0+)$$

Como $e_1(t) = 12U_{-1}(t)$, $e_1'(t) = 12U_0(t)$ e $e_1'(0+) = 0$

Também,

$$i_0(0+) = C_4 . e_4'(0+) \quad \text{e} \quad i_2(0+) = C_2 . e_2'(0+)$$

donde

$$e_4'(0+) = \frac{1}{4}.6 = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad e_2'(0+) = \frac{1}{2}.10 = 5$$

Então,

$$0 = e_0'(0+) + \frac{3}{2} + 5$$

e

$$e_0'(0+) = -\frac{13}{2}$$

Considerando $i_2(t)$ e $i_0(t)$ como sendo as correntes das duas malhas da figura 2.3-1, podemos escrever as equações simultâneas,

$$R_3(i_2 - i_0) + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt = e_1$$

$$R_0 . i_0 + \frac{1}{C_4}\int i_0 dt + R_3(i_0 - i_2) = 0$$

Derivando estas equações e introduzindo os valores numéricos, obtemos que

$$3\frac{di_2}{dt} - 3\frac{di_0}{dt} + \frac{1}{2}i_2 = \frac{de_1}{dt}$$

$$5\frac{di_0}{dt} + \frac{1}{4}i_0 - 3\frac{di_2}{dt} = 0$$

ou que

$$-6\frac{di_0}{dt} + 6\frac{di_2}{dt} + i_2 = 24U_0(t)$$

$$20\frac{di_0}{dt} + i_0 - 12\frac{di_2}{dt} = 0$$

Entrando com o operador diferencial de Heaviside,

$$-6pi_0(t) + (6p + 1)i_2(t) = 24U_0(t)$$

$$(20p + 1)i_0(t) - 12pi_2(t) = 0$$

(Observemos, de passagem, que embora o circuito não esteja sendo excitado por uma fonte impulsiva, uma das funções forçantes é um impulso de 24 unidades de área, conforme previsto no ítem 3 da página 12).

A equação característica é

$$F(p) = \begin{vmatrix} -6p & 6p+1 \\ 20p+1 & -12p \end{vmatrix} = -48p^2 - 26p - 1 = 0$$

e que apresenta como raízes $p_1 = -1/2$ e $p_2 = -1/24$. Então

$$F(p).i_0(t) = -48(p+1/2)(p+1/24).i_0(t) = \begin{vmatrix} 24U_0(t) & 6p+1 \\ 0 & -12p \end{vmatrix}$$

ou

$$(p + 1/2)(p + 1/24)i_0(t) = 6U_1(t)$$

ou ainda

$$(48p^2 + 26p + 1)i_0(t) = 288U_1(t) \qquad (2.3\text{-}1)$$

Para $t > 0$, a equação é

$$(p + 1/2)(p + 1/24)i_0(t) = 0$$

e a sua solução é dada por

$$i_0(t) = A_1 e^{-t/2} + A_2 e^{-t/24}$$

Assim,

$$e_0(t) = 2i_0(t) = K_1 e^{-t/2} + K_2 e^{-t/24} \qquad (2.3\text{-}2)$$

e

$$e_0'(t) = -\frac{K_1}{2}.e^{-t/2} - \frac{K_2}{24}.e^{-t/24}$$

Substituindo as condições iniciais $e_0(0+) = 12$ e $e_0'(0+) = -13/2$, obtemos que

$$K_1 + K_2 = 12$$

$$12K_1 + K_2 = 156$$

e determinamos que $K_1 = 144/11$ e $K_2 = -12/11$.

Finalmente,

$$e_0(t) = \frac{12}{11}(12e^{-t/2} - e^{-t/24}).U_{-1}(t) \qquad (2.3\text{-}3)$$

Se a fonte de tensão fosse $e_1(t) = U_{-1}(t)$, então

$$e_0(t) = r(t) = \frac{1}{11}(12e^{-t/2} - e^{-t/24}).U_{-1}(t) \qquad (2.3\text{-}4)$$

Se $x(t)$ e $y(t)$ são, respectivamente, a entrada e a saida de um circuito linear sem qualquer energia inicialmente armazenada, então a resposta à nova entrada dx/dt é dy/dt e a resposta à entrada $\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda$ é $\int_{-\infty}^{t} y(\lambda)d\lambda$.

Sabemos que a equação diferencial que expressa o comportamento de um circuito linear e invariante com o tempo é da forma geral

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y =$$

$$= b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Diferenciando os dois membros da equação,

$$\frac{d^{n+1} y}{dt^{n+1}} + a_1 \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_{n-1} \frac{d^2 y}{dt^2} + a_n \frac{dy}{dt} =$$

$$= b_m \frac{d^{m+1} x}{dt^{m+1}} + b_{m-1} \frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_0 \frac{dx}{dt}$$

ou

$$\frac{d^n}{dt^n}(\frac{dy}{dt}) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\frac{dy}{dt}) + \ldots + a_{n-1} \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}) + a_n(\frac{dy}{dt}) =$$

$$= b_m \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{dx}{dt}\right) + b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \ldots + b_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) + b_0\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

A comparação da primeira com a terceira equação permite concluir que quando a entrada que era $x(t)$ foi substituida por dx/dt, a saida que era $y(t)$ passou a ser dy/dt. A segunda parte da proposição pode ser demonstrada de modo análogo. Portanto, se a entrada é diferenciada ou integrada o mesmo acontece com a saida. Desde que

$$U_0(t) = \frac{d}{dt} U_{-1}(t) \qquad \text{e} \qquad U_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_0(\lambda)\,d\lambda$$

então

$$h(t) = \frac{d}{dt} r(t) \tag{2.3-5}$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\lambda)\,d\lambda \tag{2.3-6}$$

Portanto a resposta ao impulso é a inclinação da curva da resposta ao degrau e a resposta ao degrau é a área sob a curva da resposta ao impulso até o tempo t.

De acordo com a equação (2.3-5), a resposta ao impulso do circuito da figura 2.3-1 é então

$$h(t) = \frac{d}{dt} r(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{11}(12e^{-t/2} - e^{-t/24})U_{-1}(t)\right] =$$

$$= \frac{1}{11}\left(\frac{e^{-t/24}}{24} - 6e^{-t/2}\right)U_{-1}(t) + U_0(t)$$

Então

$$h(t) = \frac{1}{264}(e^{-t/24} - 144e^{-t/2})U_{-1}(t) + U_0(t)$$

ou

$$h(t) = (0{,}004e^{-t/24} - 0{,}55e^{-t/2})U_{-1}(t) + U_0(t) \tag{2.3-7}$$

Exemplo 2.3-2 - Achar a resposta ao impulso do circuito da figura 2.3-1, isto é, achar $e_0(t) = h(t)$ para $e_1(t) = U_0(t)$.

Solução - Considerando o sistema de equações de laço obtido no exemplo anterior,

$$-3\frac{di_0}{dt} + 3\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{2}i_2 = \frac{de_1}{dt}$$

$$5\frac{di_0}{dt} + \frac{1}{4}i_0 - 3\frac{di_2}{dt} = 0\,,$$

substituindo $e_1(t) = U_0(t)$ e usando o operador p,

$$-6pi_0(t) + (6p + 1)i_2(t) = 2U_1(t)$$

$$(20p + 1)i_0(t) - 12pi_2(t) = 0$$

Então

$$F(p)i_0(t) = -(48p^2+26p+1)i_0(t) = -48(p+1/2)(p+1/24)i_0(t) =$$

$$= \begin{vmatrix} 2U_1(t) & 6p+1 \\ 0 & -12p \end{vmatrix} = -24U_2(t)$$

e

$$2(p + 1/2)(p + 1/24)i_0(t) = U_2(t) \qquad (2.3\text{-}8)$$

Sua solução é

$$i_0(t) = A_1e^{-t/2} + A_2e^{-t/24} \quad \text{para} \quad t > 0$$

Logo

$$e_0(t) = K_1e^{-t/2} + K_2e^{-t/24}$$

e

$$e_0'(t) = -\frac{K_1}{2}e^{-t/2} - \frac{K_2}{24}e^{-t/24}$$

Para a determinação de K_1 e K_2, precisamos achar primeiro $e_0(0+)$ e $e_0'(0+)$. Quando $e_1(t) = U_0(t)$, a tensão impulsiva da fonte precisa aparecer nos terminais das resistências no instante $t = 0$, uma vez que pelo teorema 2.3-3 as tensões $e_2(t)$ e $e_4(t)$ nos terminais das capacitâncias devem sempre permanecer finitas. Caso contrário, isto é, se o impulso de tensão da fonte se aplicasse aos terminais das capacitâncias, as correntes $i_2(t)$ e $i_0(t)$, circulando nas mesmas, seriam funções *doublet*, o que é impossível acontecer num circuito passível de solução. Assim, a corrente $i_3(t) = e_3(t)/R_3$ contém o impulso $(1/3)\,U_0(t)$ e a corrente $i_0(t) = e_0(t)/R_0$ o impulso $(1/2)U_0(t)$, as quais, de acordo com o teorema 2.3-2, fazem com que as tensões $e_2(t)$ e $e_4(t)$ sofram um salto de zero para $(1/2 + 1/3)/2 = 5/12$ e $1/8$, respectivamente. Então $e_2(0+) = 5/12$ e $e_4(0+) = 1/8$. No instante $t = 0+$, a fonte de tensão está em curto-circuito e a lei das tensões de Kirchhoff aplicada ao longo do laço externo do circuito permite escrever que $e_0(0+) + e_4(0+) + e_2(0+) = 0$. Logo, $e_0(0+) = -e_2(0+) - e_4(0+) = -13/24$ e $i_0(0+) = e_0(0+)/R_0 = -13/48$. Também $e_3(0+) = -e_2(0+) = -5/12$ e $i_3(0+) = e_3(0+)/R_3 = -5/36$ e, ainda, $i_2(0+) = i_0(0+) + i_3(0+) = -13/48 - 5/36 = -177/432$.

Por outro lado,

$$e_0'(0_+) = - e_2'(0+) - e_4'(0_+)$$

Sendo

$$e_2'(0+) = (1/C_2).i_2(0+) = - 177/864$$

e

$$e_4'(0+) = (1/C_4).i\ (0+) = - 13/192$$

então

$$e_0'(0_+) = 471/1728 = 0,273$$

Com os valores $e_0(0+) = - 13/24 \simeq - 0,542$ e $e_0'(0_+) \simeq 0,273$, determinamos que $K_1 \simeq - 0,55$ e $K_2 \simeq 0,004$. Portanto,

$$e_0(t) = h(t) = - 0,55e^{-t/2} + 0,004e^{-t/24} \quad \text{para} \quad t > 0$$

Como $e_0(t)$ vale $U_0(t)$ no instante $t = 0$, pois os capacitores estão em curto-circuito neste instante, resulta

$$h(t) = (0,004e^{-t/24} - 0,55e^{-t/2}).U_{-1}(t) + U_0(t)$$

e que é o mesmo resultado obtido na equação (2.3-7) por derivação da resposta ao degrau.

Exemplo 2.3-3 - Determine a resposta ao impulso do circuito da figura 2.3-2. A saida considerada é a corrente $i_0(t)$.

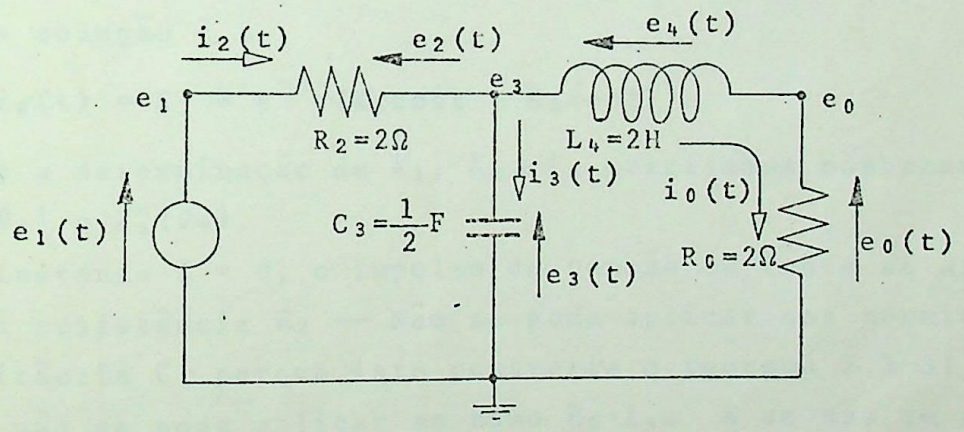


Figura 2.3-2

Solução - As equações das correntes que deixam os nós independentes do circuito são

$$\frac{e_3 - e_1}{R_2} + C_3\frac{de_3}{dt} + \frac{1}{L_4}\int(e_3 - e_0)dt = 0$$

$$\frac{1}{L_4}\int(e_0 - e_3)dt + \frac{e_0}{R_0} = 0$$

ou

$$C_3.\frac{d^2e_3}{dt^2} + \frac{1}{R_2}.\frac{de_3}{dt} + \frac{1}{L_4}.e_3 - \frac{1}{L_4}.e_0 = \frac{1}{R_2}.\frac{de_1}{dt}$$

$$-\frac{1}{L_4}.e_3 + \frac{1}{R_0}.\frac{de_0}{dt} + \frac{1}{L_4}.e_0 = 0$$

Substituindo os valores numéricos e introduzindo $e_1(t) = U_0(t)$,

$$(p^2 + p + 1)e_3(t) - e_0(t) = U_1(t)$$

$$-e_3(t) + (p + 1)e_0(t) = 0$$

Substituindo, ainda, $e_0(t)$ por $2i_0(t)$,

$$(p^2 + p + 1)e_3(t) - 2i_0(t) = U_1(t)$$

$$-e_3(t) + 2(p + 1)i_0(t) = 0$$

E o polinômio característico é

$$F(p) = \begin{vmatrix} p^2+p+1 & -2 \\ -1 & 2p+2 \end{vmatrix} = 2p(p^2 + 2p + 2)$$

Então

$$2p(p^2 + 2p + 2)i_0(t) = \begin{vmatrix} p^2+p+1 & U_1(t) \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = U_1(t)$$

ou

$$2p(p + 1 - j)(p + 1 + j)i_0(t) = U_1(t)$$

cuja solução é

$$i_0(t) = K_1 + e^{-t}.(K_2\cos t + K_3\operatorname{sen} t)$$

Para a determinação de K_1, K_2 e K_3 precisamos conhecer $i_0(0+)$, $i_0'(0+)$ e $i_0''(0+)$.

No instante $t = 0$, o impulso de tensão da fonte se aplica somente à resistência R_2 — Não se pode aplicar aos terminais da capacitância C_3 porque isto contraria o teorema 2.3-3. Então também não se pode aplicar ao ramo R_0-L_4. E se não se aplica ao todo R_0-L_4, também não se pode aplicar às partes, R_0 ou L_4, a fim de que se cumpra a segunda lei de Kirchhoff. Portanto, para $t = 0$, $e_2 = U_0(t)$, $i_2 = (1/2)U_0(t)$, $e_3 = 0$ e a necessidade de que e_0 e e_4 sejam nulas implica que $i_0 = 0$, fazendo com que $i_3 = i_2 = (1/2)U_0(t)$.

A corrente $i_3 = (1/2)U_0(t)$ circulando no instante $t = 0$ através da capacitância C_3 provoca uma variação instantânea em e_3, de zero para $(1/2)/C_3 = 1$, isto é, $e_3(0+) = 1$. Como $e_1(0+) = 0$, $e_2(0+) = -e_3(0+) = -1$ e $i_2(0+) = -1/2$. A corrente i_0 na indutância L_4 é nula em $t = 0+$, pois não há nenhum impulso de tensão aplicado à mesma em $t = 0$. Em consequência de $i_0(0+) = 0$,

$e_0(0+) = 0$, $i_3(0+) = i_2(0+) - i_0(0+) = -1/2$ e $e_4(0+) = e_3(0+) - e_0(0+) = 1$. Por outro lado,

$$e_4(t) = e_3(t) - e_0(t)$$

ou

$$L_4 . i_0'(t) = e_3(t) - e_0(t)$$

donde

$$i_0'(0+) = \frac{1}{L_4}\left[e_3(0+) - e_0(0+)\right] = 1/2$$

Também

$$i_0''(t) = \frac{1}{L_4}\left[e_3'(t) - e_0'(t)\right] = \frac{1}{L_4}\left[\frac{e_3(t)}{C_3} - R_0 . i_0'(t)\right]$$

e

$$i_0''(0+) = -1$$

Substituindo as condições iniciais $i_0(0+) = 0$, $i_0'(0+) = 1/2$ e $i_0''(0+) = -1$ nas expressões de $i_0(t)$, $i_0'(t)$ e $i_0''(t)$, obtemos o sistema de equações

$$K_1 + K_2 = 0$$

$$-K_2 + K_3 = 1/2$$

$$-2K_3 = -1,$$

do qual determinamos que $K_3 = 1/2$ e $K_2 = K_1 = 0$.

Finalmente

$$i_0(t) = h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \operatorname{sen} t \; U_{-1}(t) \qquad (2.3\text{-}9)$$

O exemplo 2.3-1 ilustra muito bem que a determinação das condições iniciais em $t = 0+$, para efeito de cálculo posterior das constantes de integração envolvidas na resposta ao degrau, não apresenta nenhuma barreira desencorajadora.

A criteriosa aplicação dos teoremas 2.3-1 a 2.3-3, juntamente com as leis de Kirchhoff, nos fornece sempre as condições iniciais desejadas. Mais ainda, quando a excitação degrau unitário da fonte da tensão não produz impulsos em nenhuma parte do circuito (e esta situação sempre se verifica quando o circuito não contem laços formados somente pela fonte de tensão e capacitâncias) então, em consequência dos mencionados teoremas, *as capacitâncias podem ser substituídas por curto-circuitos e as indutâncias por circuitos abertos.* Assim, para a determinação de todas as tensões e correntes iniciais no exemplo 2.3-1 poderíamos ter utilizado a configuração tipicamente resistiva da figura 2.3-3, que é válida para o instante $t = 0+$,

e concluir que $e_2(0+) = e_4(0+) = 0$, $e_3(0+) = e_0(0+) = 12$, $i_3(0+) = 12/3 = 4$, $i_0(0+) = 6$ e $i_2(0+)$ 10.

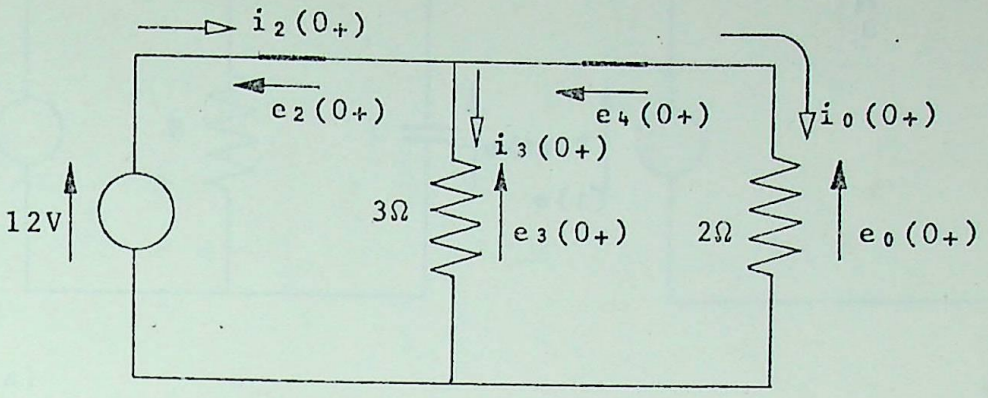


Figura 2.3-3

Os exemplos 2.3-2 e 2.3-3, no entanto, salientam com muita propriedade, e de forma *incontestável*, que a aplicação dos teoremas 2.3-1 a 2.3-3 para a determinação das condições iniciais dos circuitos submetidos a impulsos não é tão simples e, regra geral, bastante trabalhosa. Ela exige um contato frequente com o circuito e uma atenção altamente estafante. Uma maneira de se contornar estas dificuldades consiste em se aplicar a relação (2.3-5) e determinar a resposta ao impulso por meio da resposta ao degrau, ou seja, de forma indireta. Este procedimento, entretanto, nem sempre conduz à solução menos trabalhosa e mais rápida da questão. Em consequência de tais desvantagens, preferimos utilizar o procedimento que expuzemos na seção 2.2 e atacar a questão de forma direta. Com isto conseguimos: (1) - prescindir da configuração do circuito, uma vez de posse das equações diferenciais que regem o seu comportamento, ou seja, determinar as condições iniciais em $t = 0+$ sem nos referirmos ao próprio circuito, o que, por sua vez, (2) consegue tornar o método mais geral e independente da configuração ou topologia dos circuitos que estamos abordando e (3) diminuir de forma acentuada o trabalho de pesquisa das condições iniciais.

O restante deste capítulo é dedicado principalmente à determinação da resposta ao impulso dos circuitos elétricos, o que é feito com base no que expuzemos na seção 2.2.

Exemplo 2.3-4 - Determine a resposta ao impulso para os circuitos da figura 2.3-4a e b.

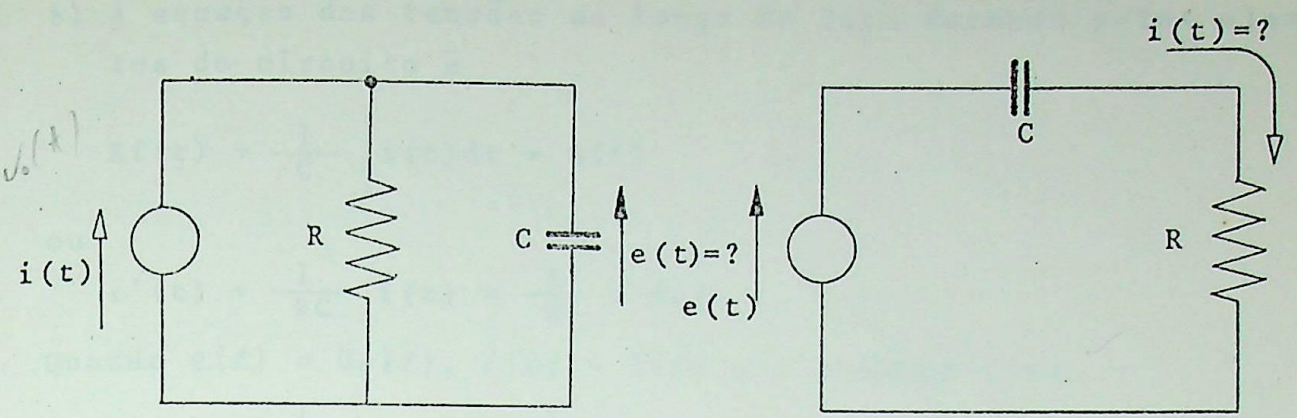


Figura 2.3-4

Solução - a) A equação das correntes que deixam o nó superior do circuito é

$$C.e'(t) + \frac{1}{R}\, e(t) = i(t)$$

Quando $i(t) = U_0(t)$, $e(t) = h(t)$ e a equação fica

$$h'(t) + \frac{1}{RC}\, h(t) = \frac{1}{C}\, U_0(t)$$

Para $t > 0$,

$$(p + 1/RC)h(t) = 0$$

e

$$h(t) = K_1 . e^{-t/RC} . U_{-1}(t)$$

Para que seja garantido o equilíbrio dos dois membros da equação diferencial, $h'(t)$ deverá conter um impulso e $h(t)$ um degrau. Então escrevemos

$$h(t) \doteq C_0 U_{-1}(t)$$

$$h'(t) \doteq C_0 U_0(t) + C_1 U_{-1}(t)$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos que

$$C_0 U_0(t) + (C_1 + C_0/RC) U_{-1}(t) = (1/C) U_0(t)$$

donde

$$C_0 \doteq 1/C \quad \text{e} \quad C_1 = -1/RC^2$$

Assim,

$$h(0+) = C_0 = 1/C$$

$$h'(0+) = C_1 = -1/RC^2$$

e, com a condição $h(0+) = 1/C$, determinamos que $K_1 = 1/C$. Então

$$h(t) = (1/C) . e^{-t/RC} . U_{-1}(t)$$

b) A equação das tensões ao longo do laço formado pelos elementos do circuito é

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = e(t)$$

ou

$$i'(t) + \frac{1}{RC}\,i(t) = \frac{1}{R}\,e'(t)$$

Quando $e(t) = U_0(t)$, $i(t) = h(t)$ e a equação fica

$$h'(t) + \frac{1}{RC}\,h(t) = \frac{1}{R}\,U_1(t)$$

Para $t > 0$,

$$(p + 1/RC)h(t) = 0$$

e a solução é

$$h(t) = K_1 . e^{-t/RC} . U_{-1}(t)$$

A presença do *doublet* $U_1(t)$ no segundo membro da equação implica que $h'(t)$ deve conter um *doublet* e que $h(t)$ *tem que conter um impulso*. Então escrevemos que

$$h(t) \doteq C_0U_0(t) + C_1U_{-1}(t)$$

$$h'(t) \doteq C_0U_1(t) + C_1U_0(t) + C_2U_{-1}(t)$$

Substituindo na equação diferencial, resulta

$$C_0U_1(t) + (C_1+C_0/RC)U_0(t) + (C_2+C_1/RC)U_{-1}(t) = (1/R)U_1(t)$$

Então

$$C_0 = 1/R$$

$$C_1 + C_0/RC = 0, \qquad C_1 = -1/CR^2$$

$$C_2 + C_1/RC = 0, \qquad C_2 = 1/C^2R^3$$

Como $h(0+) = C_1 = -1/CR^2$, $K_1 = -1/CR^2$ e como a resposta deve conter o impulso $C_0U_0(t) = (1/R)U_0(t)$, escrevemos, finalmente, que

$$h(t) = \frac{1}{R} . U_0(t) - \frac{1}{CR^2} . e^{-t/RC} . U_{-1}(t)$$

<u>Exemplo 2.3-5</u> - Achar a resposta ao degrau dos circuitos do exemplo anterior.

<u>Solução</u> - Em face da expressão (2.3-6), ou seja, considerando que a resposta ao degrau é a área sob a curva da resposta ao impulso até o tempo t, podemos escrever que

a)

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{t} (1/C) . e^{-\lambda/RC} . U_{-1}(\lambda) . d\lambda =$$

$$= (1/C)\int_{o+}^{t} e^{-\lambda/RC}.d\lambda = -R.e^{-\lambda/RC}\Big|_{o+}^{t} = R(1 - e^{-t/RC})U_{-1}(t)$$

Portanto

$$r(t) = R(1 - e^{-t/RC}).U_{-1}(t)$$

b)

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[(1/R)U_0(\lambda) - (1/CR^2).e^{-\lambda/RC}.U_{-1}(\lambda)\right]d\lambda =$$

$$= \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{t} U_0(\lambda)d\lambda - \frac{1}{CR^2}\int_{o+}^{t} e^{-\lambda/RC}.d\lambda =$$

$$= \frac{1}{R}U_{-1}(t) + \frac{1}{R}.e^{-\lambda/RC}\Big|_{o+}^{t} =$$

$$= \frac{1}{R}U_{-1}(t) + \frac{1}{R}(e^{-t/RC} - 1).U_{-1}(t)$$

Então

$$r(t) = (1/R).e^{-t/RC}.U_{-1}(t)$$

Exemplo 2.3-6 - Determinar a resposta ao impulso para o circuito da figura 2.3-5.

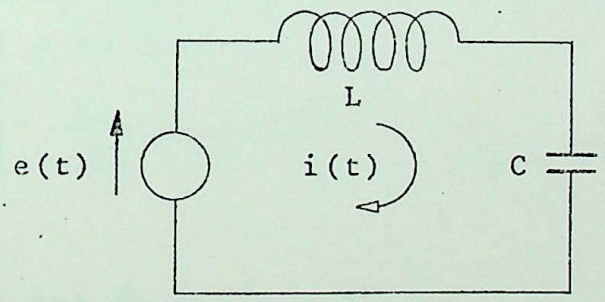


Figura 2.3-5

Solução - A equação diferencial que estabelece o comportamento do circuito é

$$L.i'(t) + (1/C)\int i(t)dt = e(t)$$

ou

$$i''(t) + (1/LC).i(t) = (1/L).e'(t)$$

Quando $e(t) = U_0(t)$, $i(t) = h(t)$ e a equação fica

$$h''(t) + (1/LC)h(t) = (1/L).U_1(t)$$

Para $t > 0$,

$$(p^2 + 1/LC)h(t) = 0$$

e as raízes características são $p_1 = j/\sqrt{LC}$ e $p_2 = -j/\sqrt{LC}$. E a solução é então

$$h(t) = \left[K_1 \cos(t/\sqrt{LC}) + K_2 \operatorname{sen}(t/\sqrt{LC})\right].U_{-1}(t)$$

A presença de $U_1(t)$ no segundo membro da equação exige que $h''(t)$ inclua um *doublet*, $h'(t)$ um impulso e $h(t)$ um degrau. Assim,

$$h(t) \doteq C_0.U_{-1}(t)$$

$$h'(t) \doteq C_0.U_0(t) + C_1U_{-1}(t)$$

$$h''(t) \doteq C_0U_1(t) + C_1U_0(t) + C_2U_{-1}(t)$$

Substituindo então na equação, resulta que

$$C_0U_1(t) + C_1U_0(t) + (C_2 + C_0/LC)U_{-1}(t) = (1/L)U_1(t)$$

donde concluimos que

$$C_0 = h(0+) = 1/L$$

$$C_1 = h'(0+) = 0$$

$$C_2 + C_0/LC = 0, \quad C_2 = h''(0+) = -1/L^2C$$

Considerando as condições $h(0+) = 1/L$, $h'(0+) = 0$ e as expressões de $h(t)$ e de $h'(t)$,

$$h'(t) = \left[-\frac{K_1}{\sqrt{LC}} \operatorname{sen}(t/\sqrt{LC}) + \frac{K_2'}{\sqrt{LC}}.\cos(t/\sqrt{LC})\right].U_{-1}(t) +$$

$$+ K_1.U_0(t),$$

determinamos que $K_1 = 1/L$ e $K_2 = 0$

Finalmente,

$$h(t) = \frac{1}{L}.\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t.U_{-1}(t)$$

Exemplo 2.3-7 - Determine as condições $i_0(0+)$, $i_0'(0+)$ e $i_0''(0+)$ para o circuito do exemplo 2.3-3.

Solução - A equação diferencial envolvendo a saida $i_0(t)$ foi obtida no exemplo 2.3-3 e é dada por

$$i_0'''(t) + 2i_0''(t) + 2i_0'(t) = (1/2)U_1(t)$$

A presença de $U_1(t)$ no segundo membro da equação sugere que devemos considerar

$$i_0(t) \doteq 0.U_{-1}(t)$$

$$i_0'(t) \doteq C_0 . U_{-1}(t)$$

$$i_0''(t) \doteq C_0 . U_0(t) + C_1 . U_{-1}(t)$$

$$i_0'''(t) \doteq C_0 . U_1(t) + C_1 . U_0(t) + C_2 U_{-1}(t)$$

aonde o termo $0.U_{-1}(t)$ implica que a função $i_0(t)$ não apresenta descontinuidade em $t = 0$ e $i_0(0+) = i_0(0-) = 0$. Substituindo os valores das expressões anteriores na equação diferencial, resulta que

$$C_0 U_1(t) + (C_1+2C_0)U_0(t) + (C_2+2C_1+2C_0)U_{-1}(t) = (1/2)U_1(t)$$

donde

$$C_0 = 1/2 = i_0'(0+)$$

$$C_1 + 2C_0 = 0, \qquad C_1 = -1 = i_0''(0+)$$

$$C_2 + 2C_1 + 2C_0 = 0, \qquad C_2 = 1 = i_0'''(0+)$$

e os resultados encontrados confirmam aqueles obtidos no exemplo 2.3-3.

Exemplo 2.3-8 - Determine a resposta ao impulso para o circuito da figura 2.3-6, o qual contém uma fonte de corrente controlada por corrente.

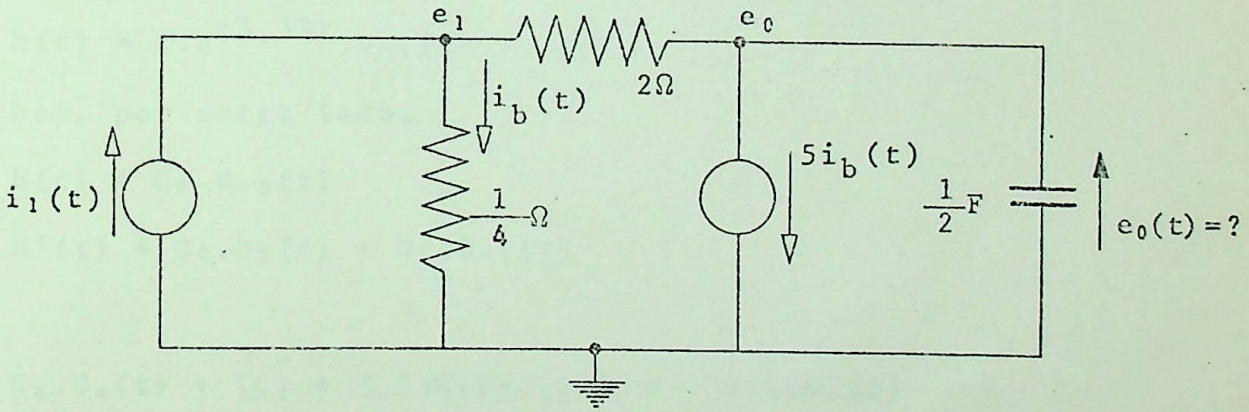


Figura 2.3-6

Solução - Considerando a parte inferior do circuito como nó de referência, podemos escrever as duas equações nodais que seguem

nó e_1: $\quad 4e_1 + \dfrac{e_1 - e_0}{2} = i_1(t)$

nó e_0: $\quad \dfrac{e_0 - e_1}{2} + \dfrac{1}{2} . \dfrac{d}{dt} e_0 = -5i_b$

ou

$$9e_1(t) - e_0(t) = 2i_1(t)$$

$$-e_1(t) + (p+1)e_0(t) = -10i_b(t)$$

mas $i_b(t) = e_1(t)/(1/4) = 4e_1(t)$ e o sistema de equações se con

verte em

$$9e_1(t) - e_0(t) = 2i_1(t)$$

$$39e_1(t) + (p+1)e_0(t) = 0$$

Quando $i_1(t) = U_0(t)$, o sistema fica

$$9e_1(t) - h(t) = 2U_0(t)$$

$$39e_1(t) + (p+1)h(t) = 0$$

Então

$$\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 39 & p+1 \end{vmatrix} .h(t) = \begin{vmatrix} 9 & 2U_0(t) \\ 39 & 0 \end{vmatrix}$$

ou

$$(9p + 48)h(t) = - 78U_0(t)$$

ou, ainda,

$$h'(t) + 5,33h(t) = - 8,66U_0(t)$$

Para $t > 0$,

$$(p + 5,33)h(t) = 0$$

e

$$h(t) = K.e^{-5,33t}.U_{-1}(t)$$

Também, por outro lado,

$$h(t) \doteq C_0.U_{-1}(t)$$

$$h'(t) \doteq C_0.U_0(t) + C_1.U_{-1}(t)$$

e

$$C_0.U_0(t) + (C_1 + 5,33C_0)U_{-1}(t) = - 8,66U_0(t)$$

donde

$$C_0 = - 8,66 = h(0+) = K$$

$$C_1 + 5,33C_0 = 0, \qquad C_1 = 46,3 = h'(0+)$$

Finalmente,

$$h(t) = - 8,66.e^{-5,33t}.U_{-1}(t)$$

ou

$$h(t) = - \frac{78}{9}.e^{-48t/9}.U_{-1}(t)$$

Exemplo 2.3-9 - Determinar a resposta ao impulso do circuito da figura 2.3-7. Em seguida, achar a resposta ao degrau.

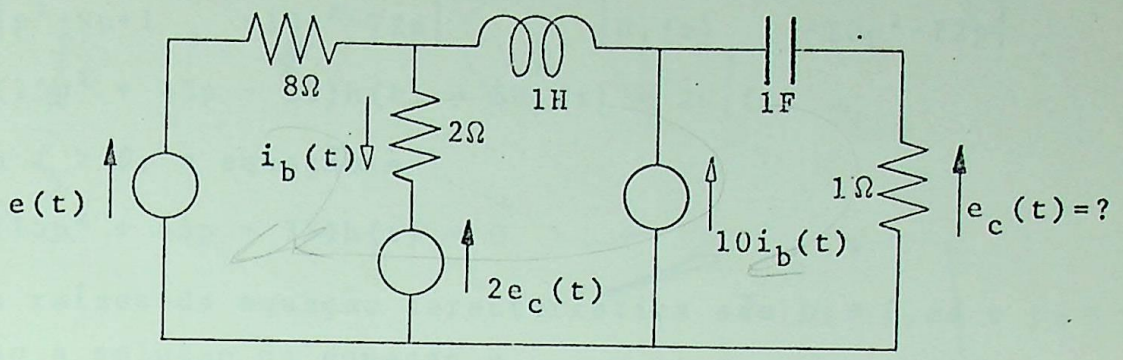


Figura 2.3-7

Solução - As correntes de laço $i_b(t)$, $10i_b(t)$ e $i_c(t)$ são selecionadas de maneira que apenas uma corrente de laço passe através da fonte de corrente e apenas uma passe pela resistência de 1 Ω na qual a tensão é desejada, conforme mostrado na figura 2.3-8. As equações da lei das tensões ao longo dos laços definidos pelas correntes independentes $i_b(t)$ e $i_c(t)$ são

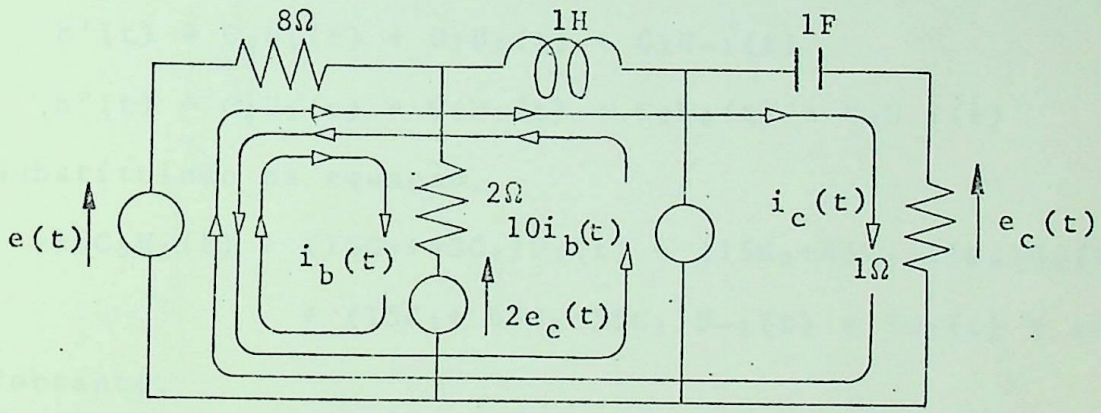


Figura 2.3-8

Laço i_b: $\quad 2e_c + 2i_b + 8(i_b - 10i_b + i_c) = e$

Laço i_c: $\quad e_c + \int i_c dt + \frac{d}{dt}(i_c - 10i_b) + 8(i_b - 10i_b + i_c) = e$

Como

$$e_c(t) = 1.i_c(t) = i_c(t),$$

$$10e_c - 70i_b = e$$

$$\frac{d}{dt} e_c + 9e_c + \int e_c dt - 10 \frac{d}{dt} i_b - 72i_b = e$$

Quando $e(t) = U_0(t)$, $e_c(t) = h(t)$ e o sistema torna-se

$$10h(t) - 70i_b(t) = U_0(t)$$

$$(p^2 + 9p + 1)h(t) - (10p^2 + 72p)i_b(t) = U_1(t)$$

Então,

$$\begin{vmatrix} 10 & -70 \\ p^2+9p+1 & -10p^2-72p \end{vmatrix} h(t) = \begin{vmatrix} U_0(t) & -70 \\ U_1(t) & -10p^2-72p \end{vmatrix}$$

$$(15p^2 + 45p - 35)h(t) = 5U_2(t) + 2U_1(t)$$

para $t > 0$, a equação é

$$(15p^2 + 45p - 35)h(t) = 0$$

e as raízes da equação característica são $p_1 \simeq 0,64$ e $p_2 \simeq -3,64$. Então a solução da equação é

$$h(t) = K_1 . e^{0,64t} + K_2 . e^{-3,64t}$$

e

$$h'(t) = 0,64K_1 e^{0,64t} - 3,64K_2 e^{-3,64t}$$

Considerando a presença de $U_2(t)$ e $U_1(t)$ no segundo membro da equação, devemos tomar

$$h(t) \doteq C_0 U_0(t) + C_1 U_{-1}(t)$$

$$h'(t) \doteq C_0 U_1(t) + C_1 U_0(t) + C_2 U_{-1}(t)$$

$$h''(t) \doteq C_0 U_2(t) + C_1 U_1(t) + C_2 U_0(t) + C_3 U_{-1}(t)$$

Substituindo na equação,

$$15C_0 U_2(t) + (15C_1+45C_0)U_1(t) + (15C_2+45C_1-35C_0)U_0(t) +$$

$$+ (15C_3+ 45C_2-35C_1)U_{-1}(t) = 5U_2(t) + 2U_1(t)$$

Portanto,

$$15C_0 = 5, \qquad C_0 = 1/3$$

$$15C_1 + 45C_0 = 2, \qquad C_1 = -13/15 \simeq -0,87$$

$$15C_2 + 45C_1 - 35C_0 = 0, \qquad C_2 = 152/45 \simeq 3,38$$

assim

$$h(0+) = C_1 = -0,87$$

$$h'(0+) = C_2 = 3,38$$

Substituindo estas condições iniciais em $h(t)$ e $h'(t)$ encontramos que $K_1 \simeq 0,07$ e $K_2 \simeq -0,94$. Observando que $h(t)$ deve conter um impulso de área $C_0 = 1/3$, escrevemos, finalmente, que

$$h(t) = \frac{1}{3} U_0(t) + \frac{1}{100} (7e^{0,64t} - 94e^{-3,64t})U_{-1}(t)$$

A resposta ao degrau é

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\lambda)d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} -\frac{1}{3}\, U_0(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{100} \int_{0+}^{t} (7e^{0,64\lambda} - 94e^{-3,64\lambda})\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{3}\, U_{-1}(t) + \left(\frac{7}{64}\, e^{0,64\lambda} + \frac{94}{364}\, e^{-3,64\lambda}\right)\Bigg|_{0+}^{t} =$$

$$= \frac{1}{3}\, U_{-1}(t) + \frac{7}{64}\, e^{0,64t} + \frac{94}{364}\, e^{-3,64t} - \frac{7}{64} - \frac{94}{364}$$

ou seja

$$r(t) = 10^{-3}.(109.e^{0,64t} + 258e^{-3,64t} - 34).U_{-1}(t)$$

A RESPOSTA DOS CIRCUITOS ELÉTRICOS AOS PULSOS ARBITRÁRIOS DE ENTRADA

Este último capítulo está sub-dividido em três seções principais. Na primeira delas, a seção 3.1, introduzimos um método para a decomposição de funções definidas por trechos polinomiais em funções singulares. Na seção 3.2 mostramos como pode ser obtida a resposta de um circuito a uma entrada composta de trechos polinomiais. Ainda na seção 3.2 fazemos a generalização para o caso da determinação da resposta de um circuito a uma entrada arbitrária qualquer, por meio da integral de convolução. Finalmente, na seção 3.3, propomos um método aproximado para a determinação da resposta de um circuito a um pulso arbitrário de entrada.

3.1 - *Decomposição de Sinais em Funções Singulares*

No exemplo 1.3-3, efetuamos a decomposição de $g(t)$, uma função definida por trechos polinomiais na figura 1.3-3, numa soma de funções singulares. Naquele exemplo adotamos uma sistemática que consistiu essencialmente na multiplicação de cada trecho respectivo por uma função pulso retangular, do tipo daquele definido na equação (1.1-3) e indicado na figura 1.1-2a. De posse de tal resultado, efetuamos, no exemplo 1.3-5, a derivação de $g(t)$ e concluimos que $g'(t)$ continha um impulso em cada ponto de descontinuidade de $g(t)$.

Nesta seção iremos desenvolver um processo mais geral e eficiente para a decomposição de uma função definida por trechos polinomiais na soma de funções singulares. Como ponto de partida estabeleceremos, de maneira um pouco mais formal, a questão da derivação de funções que apresentam descontinuidades finitas.

Consideremos a função $f(t)$ mostrada na figura 3.1-1 e que apresenta a descontinuidade finita de valor A no ponto $t = a$. Definindo uma outra função $f_1(t)$ igual a $f(t)$ para $t < a$ e possuindo o mesmo formato que $f(t)$, embora contínua no ponto $t = a$, podemos escrever que

$$f_1(t) = f(t) - A.U_{-1}(t-a)$$

e que a derivada de $f(t)$ é

$$f'(t) = f_1'(t) + A.U_0(t-a) \qquad (3.1\text{-}1)$$

aonde $f_1'(t)$ é a própria derivada de $f(t)$ para $t \neq a$, uma vez que

$f(t)$ e $f_1(t)$ têm o mesmo formato.

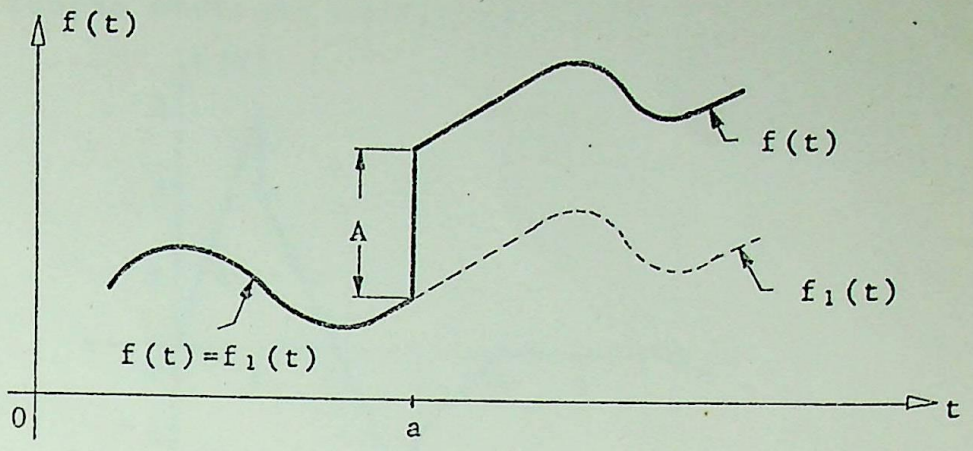


Figura 3.1-1

Exemplo 3.1-1 - Derivar a função $f(t)$ indicada na figura 3.1-2.

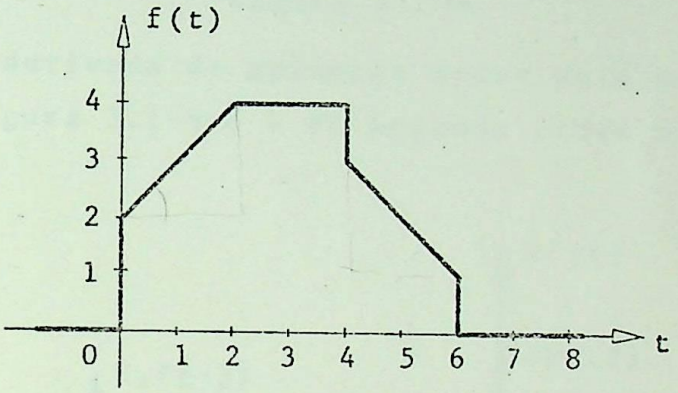


Figura 3.1-2

Solução - Em consequência das descontinuidades que a função $f(t)$ apresenta nos pontos $t = 0$, $t = 4$ e $t = 6$, a derivada inclue três funções impulsos nestes mesmos pontos e está mostrada na figura 3.1-3.

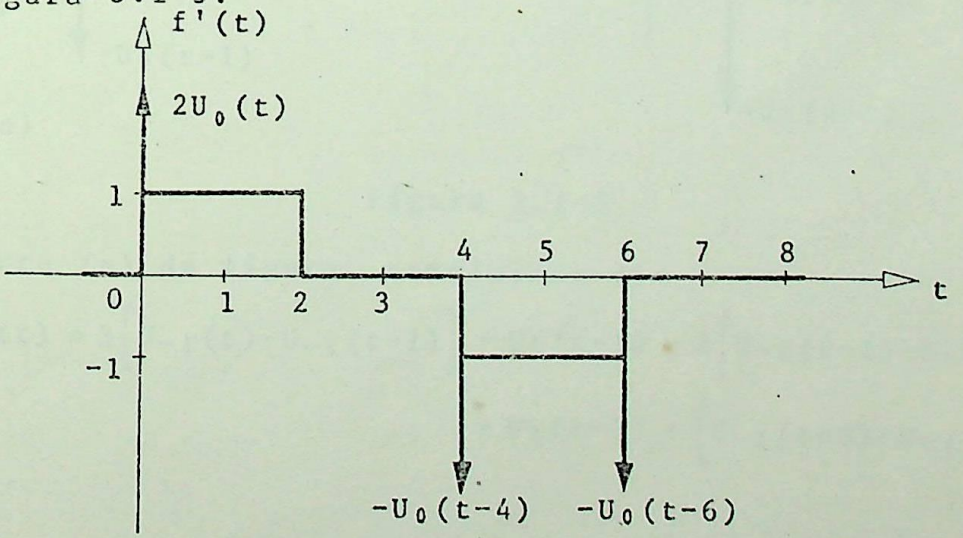


Figura 3.1-3

Então,

$$f'(t) = 2U_0(t) + U_{-1}(t) - U_{-1}(t-2) - U_0(t-4) - U_{-1}(t-4) + \\ + U_{-1}(t-6) - U_0(t-6)$$

Exemplo 3.1-2 - Determinar as derivadas de primeira e segunda ordens da função mostrada na figura 3.1-4.

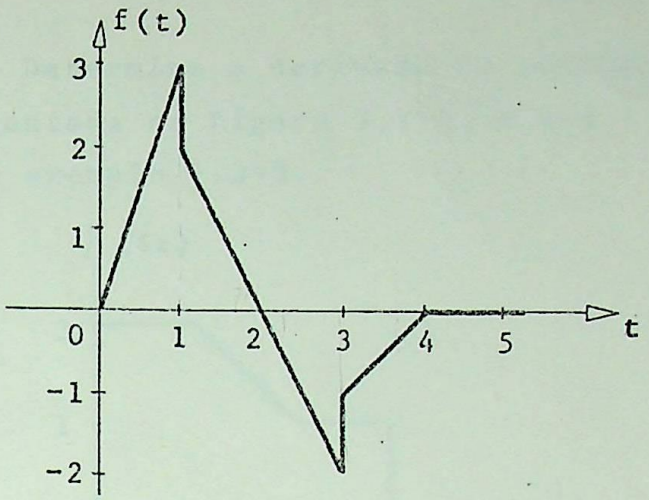


Figura 3.1-4

Solução - A derivada de primeira ordem está mostrada na parte (a) da figura 3.1-5 e a de segunda ordem na parte (b) da mesma figura.

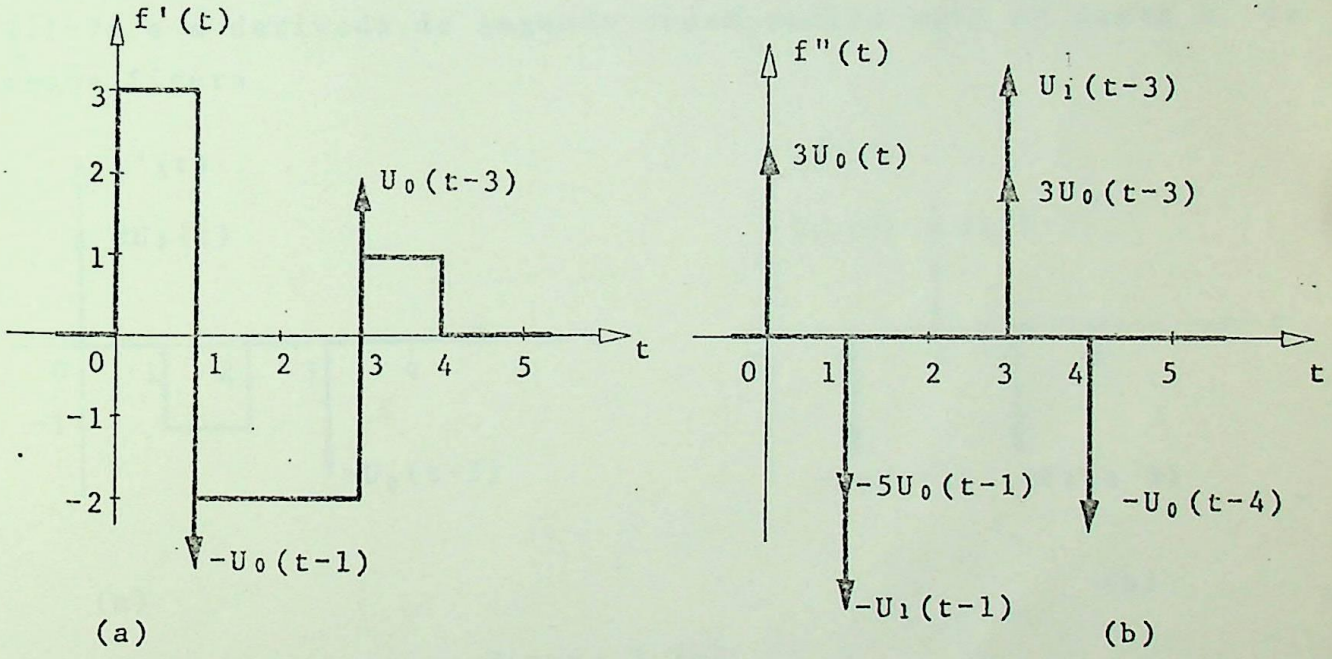


Figura 3.1-5

Da parte (a) da figura, concluimos que

$$f'(t) = 3\left[U_{-1}(t)-U_{-1}(t-1)\right] - U_0(t-1) - 2\left[U_{-1}(t-1)-U_{-1}(t-3)\right] + U_0(t-3) + \left[U_{-1}(t-3)-U_{-1}(t-4)\right]$$

ou

$$f'(t) = 3U_{-1}(t) - U_0(t-1) - 5U_{-1}(t-1) + U_0(t-3) + 3U_{-1}(t-3) - U_{-1}(t-4)$$

e, tanto da figura 3.1-5b, como da expressão acima,

$$f''(t) = 3U_0(t) - U_1(t-1) - 5U_0(t-1) + U_1(t-3) + 3U_0(t-3) - U_0(t-4)$$

Exemplo 3.1-3 - Determine a derivada de segunda ordem da função $g(t)$ representada na figura 3.1-6, e que é a repetição da figura 1.3-3 do exemplo 1.3-3.

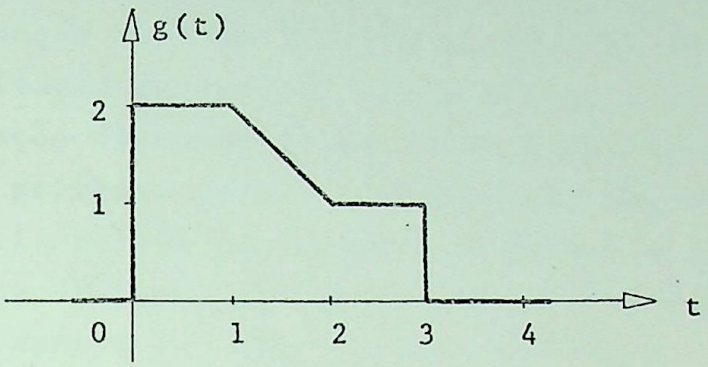
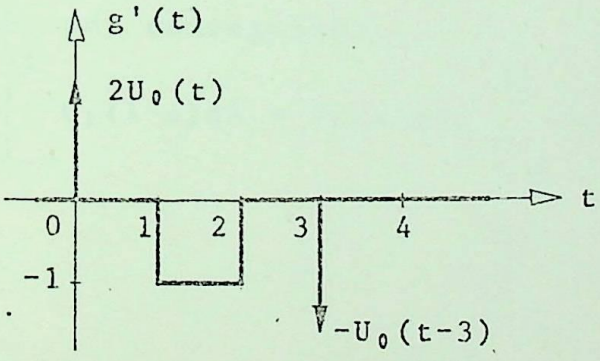
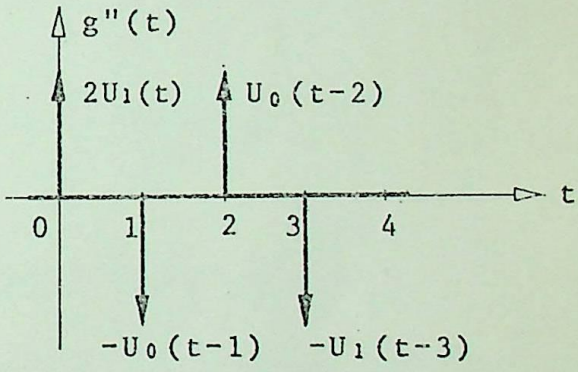


Figura 3.1-6

Solução - A derivada de primeira ordem está indicada na figura 3.1-7a e a derivada de segunda ordem pedida está na parte b da mesma figura.



(a)



(b)

Figura 3.1-7

Da parte (a) da figura 3.1-7 concluimos que

$$g'(t) = 2U_0(t) - \left[U_{-1}(t-1) - U_{-1}(t-2)\right] - U_0(t-3) \qquad (3.1\text{-}2)$$

Da parte (b) da mesma figura,

$$g''(t) = 2U_1(t) - U_0(t-1) + U_0(t-2) - U_1(t-3) \qquad (3.1\text{-}3)$$

O resultado contido na expressão (3.1-2) confirma aquele obtido para $g'(t)$ no exemplo 1.3-5. Entretanto, a maneira como foi conseguido no exemplo 3.1-3 é ligeiramente diferente daquela do exemplo 1.3-5. Aqui, a derivação foi executada diretamente do gráfico da função $g(t)$ e, depois, escrita a sua expressão analítica, enquanto

que lá, no exemplo 1.3-5, primeiro determinamos a expressão analítica da função $g(t)$, em termos de funções singulares, para depois efetuarmos a sua derivação.

Quando uma função é definida por trechos polinomiais não existe qualquer dificuldade para a obtenção de suas derivadas sucessivas a partir do seu próprio gráfico e, portanto, não precisamos de decompor primeiro a função dada em funções singulares para depois procedermos a sua derivação sucessiva. Mais ainda, a possibilidade de executar a derivação diretamente do gráfico da função permite estabelecer um outro processo para a decomposição de uma função definida por trechos polinomiais em funções singulares, processo este cuja presença não constatamos nas obras que consultamos. Utilizaremos o próprio exemplo 3.1-3 para a sua introdução.

Observemos, inicialmente, que a derivada de segunda ordem de $g(t)$ consiste somente de funções impulsivas.
Considerando, por outro lado, que

$$\int_{-\infty}^{t} U_1(\lambda)d\lambda = U_0(t), \quad \int_{-\infty}^{t} U_0(\lambda)d\lambda = U_{-1}(t) \text{ e } \int_{\infty}^{t} U_{-1}(\lambda)d\lambda = U_{-2}(t)$$

e que, por conseguinte,

$$\int_{-\infty}^{t} U_1(\lambda-a)d\lambda = U_0(t-a), \quad \int_{-\infty}^{t} U_0(\lambda-a)d\lambda = U_{-1}(t-a) \quad \text{e}$$

$$\int_{-\infty}^{t} U_{-1}(\lambda-a)d\lambda = U_{-2}(t-a)$$

então, integrando duas vêzes, sucessivamente, os dois membros da expressão (3.1-3), entre os limites $-\infty$ e t, obtemos que

$$g(t) = 2U_{-1}(t) - U_{-2}(t-1) + U_{-2}(t-2) - U_{-1}(t-3) \qquad (3.1\text{-}4)$$

e constatamos que a expressão (3.1-4) é exatamente igual à expressão (1.3-1) que obtivemos no exemplo 1.3-3, ou seja, é a própria decomposição da função $g(t)$ da figura 3.1-6 em funções singulares. Do que acabamos de expor, resulta então a seguinte

Regra para a decomposição de uma função definida por trechos polinomiais em funções singulares.

1) Diretamente do gráfico da função dada efetue tantas derivações sucessivas quantas forem necessárias para se obter um resultado consistindo somente de funções impulsivas.

2) Efetue tantas integrações sucessivas do resultado obtido no i-

tem anterior, quantas forem as derivações sucessivas, para obter a decomposição desejada.

Exemplo 3.1-4 - Efetue a decomposição da função indicada na figura 3.1-8 em funções singulares.

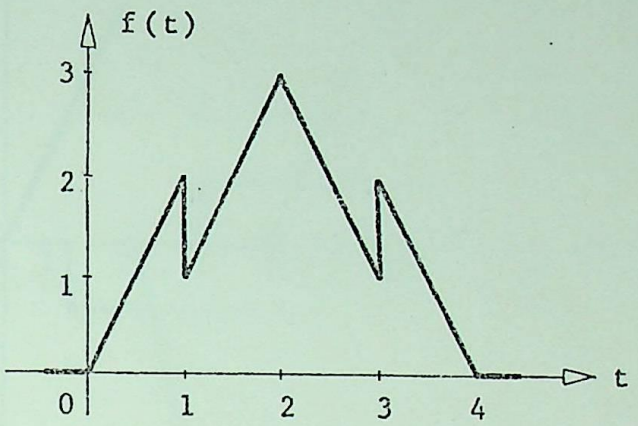


Figura 3.1-8

Solução - Para obtermos somente funções impulsivas é necessário que derivemos duas vêzes a função $f(t)$ dada. E as duas derivadas estão mostradas nas partes (a) e (b) da figura 3.1-9, respectivamente.

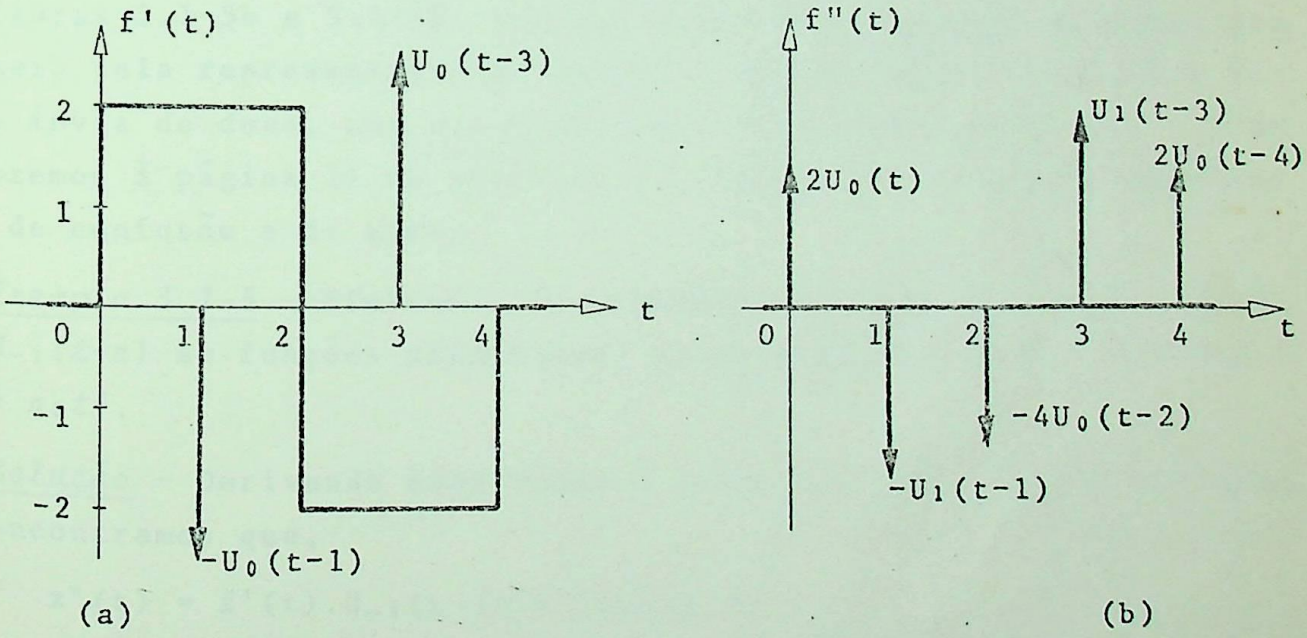


Figura 3.1-9

Da figura 3.1-9b,

$$f''(t) = 2U_0(t) - U_1(t-1) - 4U_0(t-2) + U_1(t-3) + 2U_0(t-4)$$

Integrando duas vêzes $f''(t)$, sucessivamente, obtemos que

$$f(t) = 2U_{-2}(t) - U_{-1}(t-1) - 4U_{-2}(t-2) + U_{-1}(t-3) + 2U_{-2}(t-4)$$

e as funções componentes estão indicadas na figura 3.1-10.

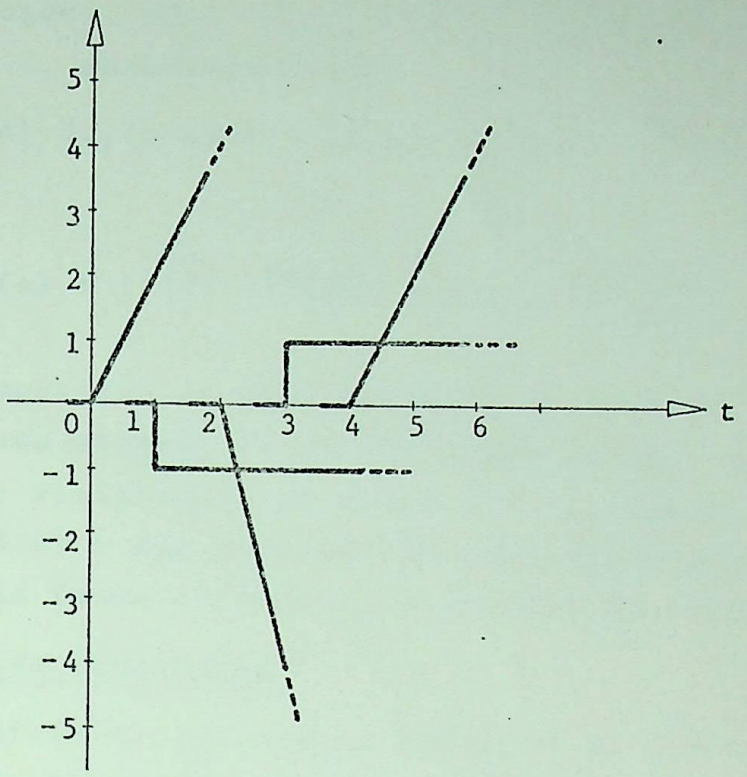


Figura 3.1-10

As figuras 3.1-5b e 3.1-9b ilustram muito bem o porque de nossa preferência pela representação de funções impulsivas por uma única seta ao invés de duas, uma apontando para $-\infty$ e outra para $+\infty$, como propuzemos à página 11 do capítulo 1. Menos setas menor possibilidade de confusão e de erros.

Exemplo 3.1-5 - Efetuar a decomposição da função $x(t) = f(t).U_{-1}(t-a)$ em funções singulares, sabendo-se que $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

Solução - Derivando duas vêzes a expressão $x(t) = f(t).U_{-1}(t-a)$, encontramos que,

$$x'(t) = f'(t).U_{-1}(t-a) + f(a).U_0(t-a)$$

$$x''(t) = f''(t).U_{-1}(t-a) + f'(a).U_0(t-a) + f(a).U_1(t-a)$$

Se

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

então

$$f'(t) = a_1 + 2a_2 t$$

$$f''(t) = 2a_2$$

e como $f''(t)$ não depende de t, podemos considerar que $f''(t) = 2.a_2 = f''(a)$. Assim,

$$x''(t) = f(a).U_1(t-a) + f'(a).U_0(t-a) + f''(a).U_{-1}(t-a)$$

Integrando, agora, duas vêzes $x''(t)$, sucessivamente, entre os limites $-\infty$ e t, encontramos que

$$x(t) = f(a).U_{-1}(t-a) + f'(a).U_{-2}(t-a) + f''(a).U_{-3}(t-a) \qquad (3.1\text{-}5)$$

ou

$$x(t) = \left[f(a) + f'(a).\frac{(t-a)}{1!} + f''(a).\frac{(t-a)^2}{2!} \right].U_{-1}(t-a) \qquad (3.1\text{-}6)$$

Então a decomposição de $f(t).U_{-1}(t-a)$ em funções singulares pode ser efetuada através da decomposição de $f(t)$ em série finita de Taylor nas vizinhanças do ponto $t = a$, seguida da multiplicação por $U_{-1}(t-a)$ e das respectivas conversões posteriores, para a transição da forma (3.1-6) para a forma (3.1-5).

3.2 - *A Integral de Convolução*

Esta seção inicia-se com alguns exemplos de determinação da resposta de circuitos lineares e invariantes com o tempo às entradas definidas por trechos polinomiais. O método que será empregado consiste essencialmente de três etapas: (1) decomposição da entrada em funções singulares, degraus, rampas e parábolas, de acordo com o procedimento exposto na seção anterior; (2) determinação da $h(t)$, a resposta ao impulso do circuito e, de posse desta, das respostas ao degrau, rampa, etc, por integração sucessiva de $h(t)$; (3) determinação, e superposição, das respostas do circuito às funções singulares componentes da entrada dada. Uma vez encerrada esta parte, passamos então ao desenvolvimento de uma sistemática que culminará com a integral de convolução.

Exemplo 3.2-1 - Ache a resposta do circuito da figura 3.2-1b ao pulso da figura 3.2-1a, sabendo-se que a energia inicialmente armazenada no circuito é nula para $t = 0_-$.

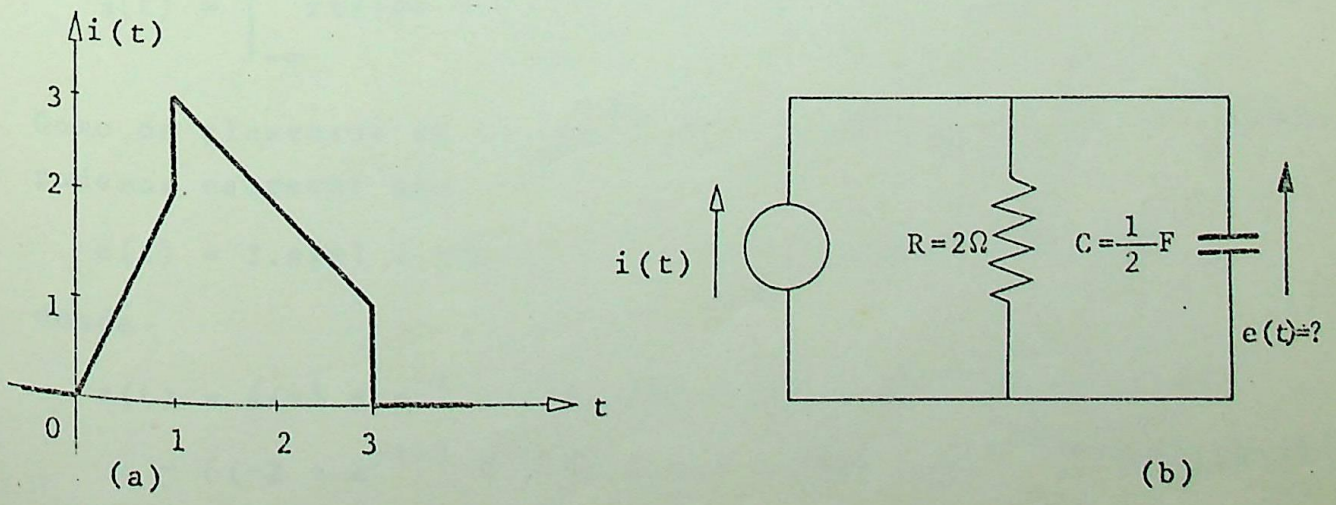
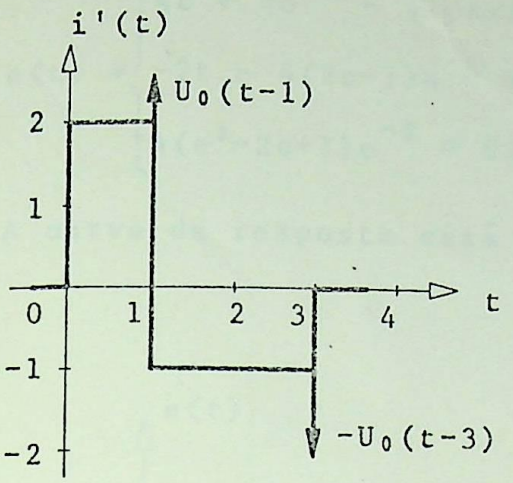
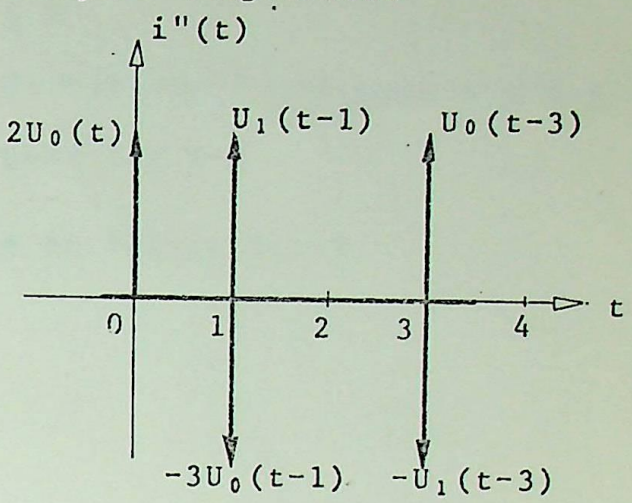


Figura 3.2-1

Solução - Como primeiro passo, efetuemos a decomposição do pulso da fonte de corrente $i(t)$ em funções singulares:



(a)



(b)

Figura 3.2-2

Da figura 3.2-2b,

$$i(t) = 2U_{-2}(t) + U_{-1}(t-1) - 3U_{-2}(t-1) + U_{-2}(t-3) - U_{-1}(t-3)$$

A resposta do circuito da figura 3.2-1b ao impulso foi calculada no exemplo 2.3-4 e é dada por

$$h(t) = \frac{1}{C}\, e^{-t/RC}.U_{-1}(t)$$

Substituindo os valores de R e C, $h(t) = 2e^{-t}.U_{-1}(t)$. Integrando $h(t)$ entre os limites $-\infty$ e t,

$$r(t) = 2\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda}.U_{-1}(\lambda)d\lambda = 2\int_{0+}^{t} e^{-\lambda}.d\lambda = 2(1 - e^{-t}).U_{-1}(t)$$

Integrando agora $r(t)$ entre os limites $-\infty$ e t, que é a resposta do circuito a uma função rampa unitária $U_{-2}(t)$, à qual denominaremos de $s(t)$, teremos

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} r(\lambda)d\lambda = 2\int_{0+}^{t} (1 - e^{-\lambda})d\lambda = 2(-1 + e^{-t} + t).U_{-1}(t)$$

Como os elementos do circuito, R e C, não variam com o tempo, podemos escrever que

$$e(t) = 2.s(t) + r(t-1) - 3.s(t-1) + s(t-3) - r(t-3)$$

donde

$$e(t) = 4(-1 + e^{-t} + t)U_{-1}(t) + 2(1 - e^{-t+1})U_{-1}(t-1) -$$
$$- 6(-2 + e^{-t+1} + t)U_{-1}(t-1) + 2(-4 + e^{-t+3} + t)U_{-1}(t-3) -$$
$$- 2(1 - e^{-t+3})U_{-1}(t-3)$$

ou, de modo equivalente, que

$$e(t) = \begin{cases} 4t + 4e^{-t} - 4 \text{ para } 0 < t \leq 1 \\ -2t - 4(2e-1)e^{-t} + 10 \simeq -2t - 17{,}75e^{-t} + 10 \text{ para } 1 \leq t \leq 3 \\ 4(e^3-2e+1)e^{-t} \simeq 62{,}60e^{-t} \text{ para } t \geq 3 \end{cases}$$

A curva da resposta está mostrada na figura 3.2-3.

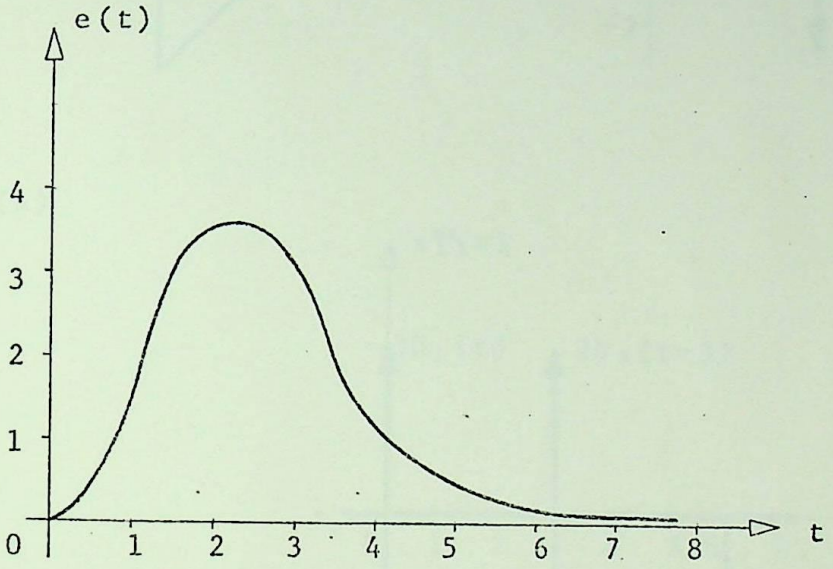
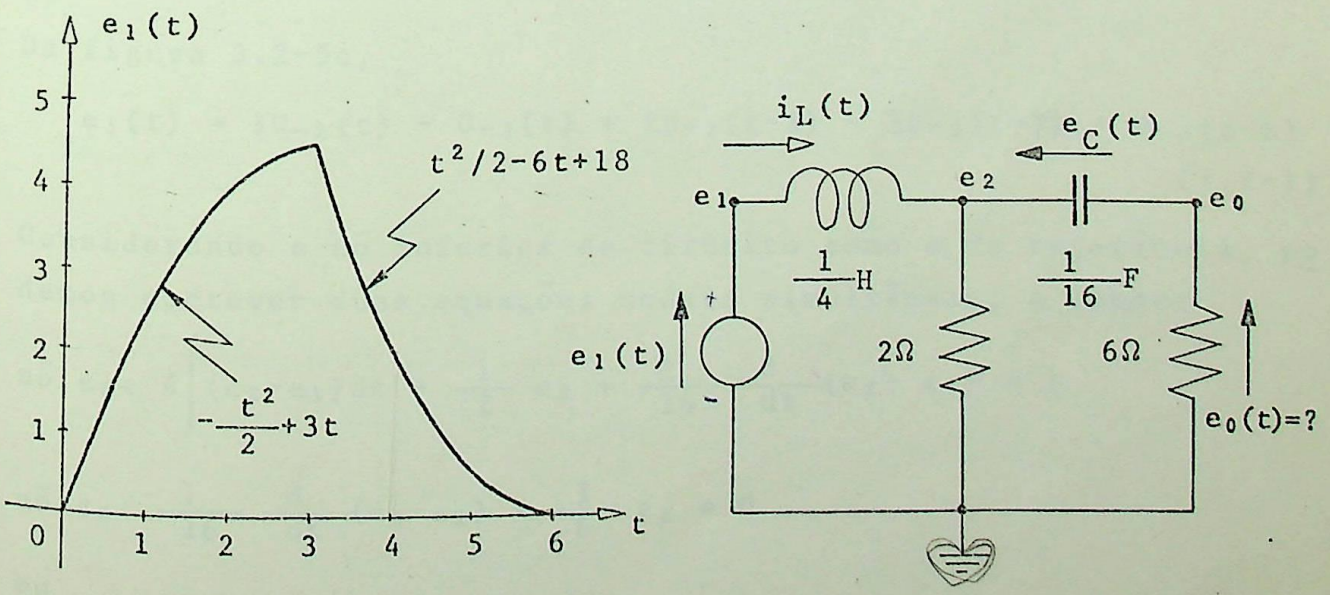


Figura 3.2-3

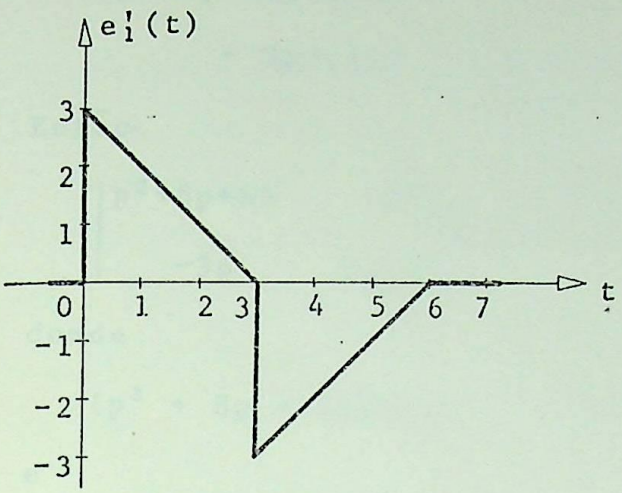
Exemplo 3.2-2 - Achar a tensão $e_0(t)$ no circuito da figura 3.2-4b para a fonte de tensão $e_1(t)$ indicada na figura 3.2-4a. Sabe-se que $e_C(0_-) = i_L(0_-) = 0$.



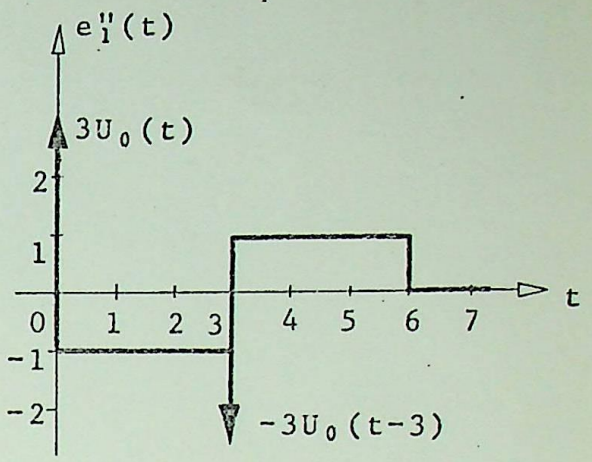
(a) (b)

Figura 3.2-4

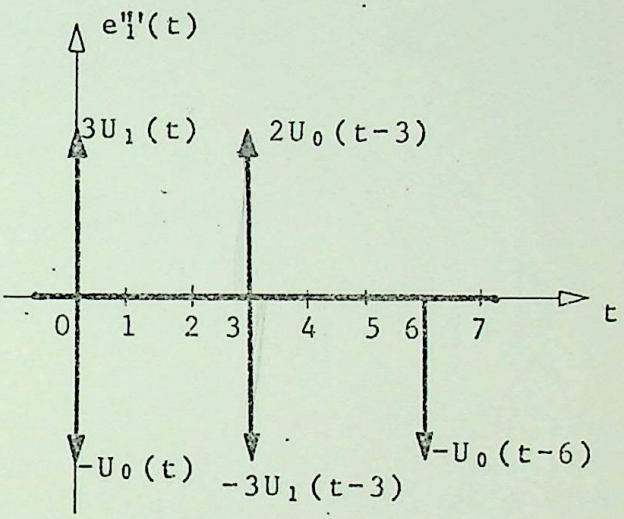
Solução - Efetuemos inicialmente a decomposição da entrada $e_1(t)$ em funções singulares.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.2-5

Da figura 3.2-5c,

$$e_1(t) = 3U_{-2}(t) - U_{-3}(t) + 2U_{-3}(t-3) - 3U_{-2}(t-3) - U_{-3}(t-6) \qquad (3.2\text{-}1)$$

Considerando o nó inferior do circuito como o de referência, podemos escrever duas equações nodais simultâneas; a saber:

$$\text{nó } e_2: \; 4\int (e_2 - e_1)dt + \frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{d}{dt}(e_2 - e_0) = 0$$

$$\text{nó } e_0: \; \frac{1}{16} \cdot \frac{d}{dt}(e_0 - e_2) + \frac{1}{6} e_0 = 0$$

ou

$$(p^2+8p+64)e_2(t) - p^2 e_0(t) = 64e_1(t)$$

$$- 3pe_2(t) + (3p+8)e_0(t) = 0$$

Quando $e_1(t) = U_0(t)$, $e_0(t) = h(t)$ e o sistema fica

$$(p^2+8p+64)e_2(t) - p^2h(t) = 64.U_0(t)$$

$$-3pe_2(t) + (3p+8)h(t) = 0$$

Então

$$\begin{vmatrix} p^2+8p+64 & -p^2 \\ -3p & 3p+8 \end{vmatrix} h(t) = \begin{vmatrix} p^2+8p+64 & 64U_0(t) \\ -3p & 0 \end{vmatrix}$$

donde

$$(p^2 + 8p + 16)h(t) = 6.U_1(t) \qquad (3.2\text{-}2)$$

e

$$(p + 4)^2h(t) = 0 \quad \text{para} \quad t > 0$$

A equação característica apresenta uma raíz dupla e igual a -4, e a solução da equação é

$$h(t) = (K_1 + K_2t)e^{-4t}$$

$$h'(t) = \left[-4K_1 + (1-4t)K_2\right]e^{-4t}$$

Da equação (3.2-2) concluimos que devemos tomar

$$h(t) \doteq C_0.U_{-1}(t)$$

$$h'(t) \doteq C_0.U_0(t) + C_1.U_{-1}(t)$$

$$h''(t) \doteq C_0.U_1(t) + C_1.U_0(t) + C_2.U_{-1}(t)$$

Substituindo estas expressões na equação (3.2-2), resulta que

$$C_0U_1(t) + (C_1+8C_0)U_0(t) + (C_2+8C_1+16C_0)U_{-1}(t) = 6.U_1(t)$$

Comparando os dois membros dessa equação,

$$C_0 = 6 = h(0+)$$

$$C_1 + 8C_0 = 0, \qquad C_1 = -48 = h'(0+)$$

$$C_2 + 8C_1 + 16C_0 = 0, \qquad C_2 = 288 = h''(0+)$$

Com as condições $h(0+) = 6$ e $h'(0+) = -48$, determinamos, das expressões de $h(t)$ e $h'(t)$, que $K_1 = 6$ $K_2 = -24$. Então,

$$h(t) = 6(1 - 4t)e^{-4t}.U_{-1}(t)$$

Assim,

$$r(t) = \int_{0+}^{t} 6(1 - 4\lambda)e^{-4\lambda}d\lambda = 6te^{-4t}.U_{-1}(t)$$

$$s(t) = \int_{0+}^{t} 6\lambda e^{-4\lambda}d\lambda = \frac{3}{8}\left[1 - (1 + 4t)e^{-4t}\right].U_{-1}(t)$$

e

$$z(t) = \frac{3}{16}\left[2t - 1 + (1 + 2t)e^{-4t}\right].U_{-1}(t)$$

aonde $s(t)$ e $z(t)$ são as respostas à rampa $U_{-2}(t)$ e à parábola $U_{-3}(t)$, respectivamente.

Como o circuito da figura 3.2-4b é linear e invariante com o tempo, a resposta à entrada $e_1(t)$, definida pela expressão (3.2-1), é

$$e_0(t) = 3s(t) - z(t) + 2z(t-3) - 3s(t-3) - z(t-6)$$

ou seja,

$$e_0(t) = \frac{9}{8}\left[1-(1+4t)e^{-4t}\right]U_{-1}(t) - \frac{3}{16}\left[2t-1+(1+2t)e^{-4t}\right]U_{-1}(t) +$$

$$+ \frac{6}{16}\left[2t-7+(2t-5)e^{-4(t-3)}\right]U_{-1}(t-3) - \frac{9}{8}\left[1-(4t-11).\right.$$

$$\left.e^{-4(t-3)}\right]U_{-1}(t-3) - \frac{3}{16}\left[2t-13+(2t-11)e^{-4(t-6)}\right]U_{-1}(t-6)$$

ou

$$e_0(t) = \left[21/16-3t/8-(21/16+39t/8)e^{-4t}\right]U_{-1}(t) +$$

$$+ \left[-30/8+3t/4-(114/8-21t/4)e^{-4(t-3)}\right]U_{-1}(t-3) +$$

$$+ \left[39/16-3t/8-(3t/8-33/16)e^{-4(t-6)}\right]U_{-1}(t-6)$$

ou, ainda,

$$e_0(t) \simeq \begin{cases} 1,313-0,375t-(4.875t+1,313)e^{-4t} & \text{para } 0 \leq t \leq 3 \\ -2,438+0,375t-(4,875t+1,313)e^{-4t}+(5,25t-14,25)e^{-4(t-3)} & 3 \leq t \leq 6 \\ -(4,875t+1,313)e^{-4t}+(5,25t-14,25)e^{-4(t-3)}-(0,375t-2,063). & \\ \qquad .e^{-4(t-6)} & \text{para } t \geq 6 \end{cases}$$

A curva representativa da saida $e_0(t)$ está indicada na figura 3.2-6.

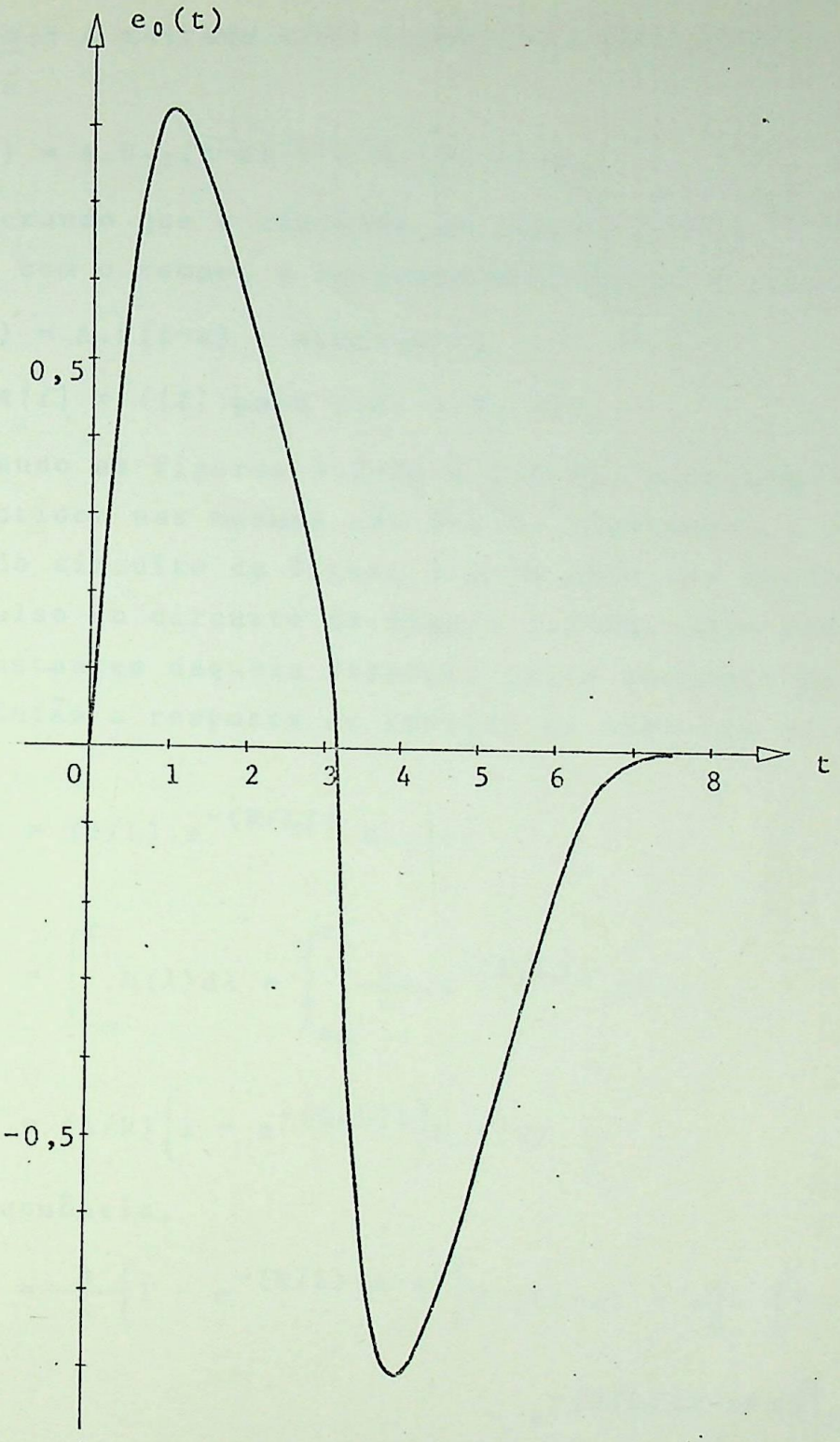


Figura 3.2-6

Exemplo 3.2-3 - Determinar a corrente $i(t)$ que circulará no circuito da figura 3.2-7b quando a fonte de tensão $e(t)$ for o pulso retangular da figura 3.2-7a.

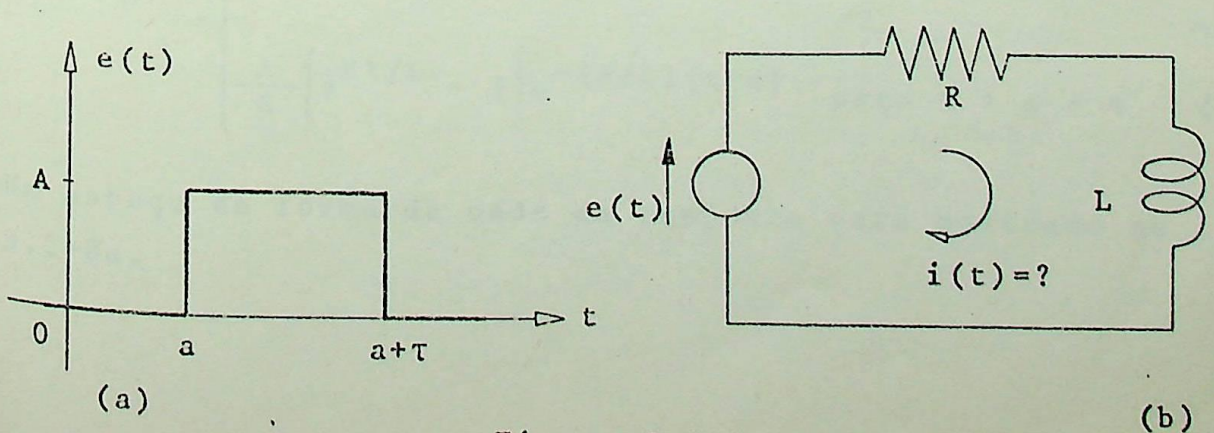


Figura 3.2-7

Solução - A entrada $e(t)$ decomposta em termos de funções singulares é

$$e(t) = A.U_{-1}(t-a) - A.U_{-1}(t-a-\tau)$$

Considerando que o circuito da figura 3.2-7b é linear e invariante com o tempo, a resposta solicitada é dada por

$$i(t) = A.r(t-a) - A.r(t-a-\tau)$$

aonde $r(t) = i(t)$ para $e(t) = U_{-1}(t)$.

Observando as figuras 3.2-7b e 2.3-4a, concluimos que os circuitos contidos nas mesmas são duais. Portanto, a resposta ao impulso do circuito da figura 3.2-7b pode ser obtida da resposta ao impulso do circuito da figura 2.3-4a, pela troca dos elementos constantes daquela resposta pelos respectivos elementos duais. Então a resposta ao impulso do circuito da figura 3.2-7b é

$$h(t) = (1/L).e^{-(R/L)t}.U_{-1}(t)$$

Logo

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\lambda)d\lambda = \int_{0_+}^{t} \frac{1}{L}.e^{-(R/L)\lambda}.d\lambda =$$

$$= (1/R)\left[1 - e^{-(R/L)t}\right]U_{-1}(t)$$

Em consequência,

$$i(t) = \frac{A}{R}\left[1 - e^{-(R/L)(t-a)}\right]U_{-1}(t-a) - \frac{A}{R}\left[1 - e^{-(R/L)(t-a-\tau)}\right]U_{-1}(t-a-\tau)$$

ou, de modo equivalente, que

$$i(t) = \begin{cases} \frac{A}{R}\left[1 - e^{-(R/L)(t-a)}\right] & \text{para } a < t < a + \tau \\ \frac{A}{R}\left[e^{R\tau/L} - 1\right]e^{-(R/L)(t-a)} & \text{para } t > a + \tau \end{cases} \qquad (3.2\text{-}3)$$

Um esboço da forma de onda da resposta está mostrado na figura 3.2-8a.

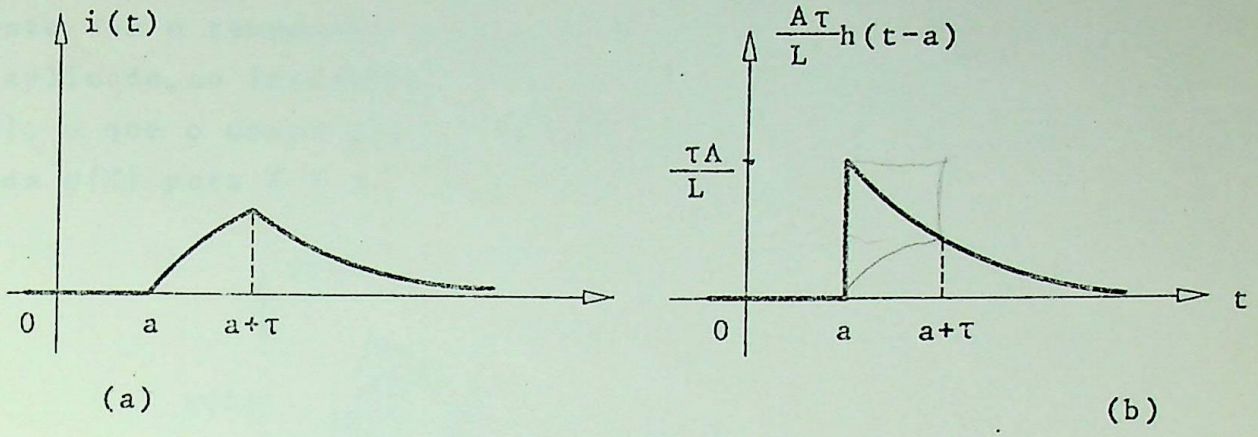


Figura 3.2-8

Se a resposta ao impulso do circuito da figura 3.2-7b é $h(t) = (1/L).e^{-(R/L)t}.U_{-1}(t)$, então a sua resposta a um impulso de área igual a do pulso da figura 3.2-7a, e aplicado no mesmo instante $t = a$, é dada por

$$\tau A.h(t-a) = (\tau A/L).e^{-(R/L)(t-a)}.U_{-1}(t-a) \qquad (3.2-4)$$

e que está mostrada na figura 3.2-8b.

Considerando a equação (3.2-3) e substituindo $e^{R\tau/L}$ pela sua correspondente série de Mac-Laurin, resulta que

$$i(t) = \frac{A}{R}\left(1+\frac{R\tau}{L}+\frac{1}{2!}.\left(\frac{R\tau}{L}\right)^2+\frac{1}{3!}.\left(\frac{R\tau}{L}\right)^3+\ldots-1\right)e^{-(R/L)(t-a)}$$

ou, se $\tau << L/R = T$, que

$$i(t) \simeq \frac{\tau A}{L}\,e^{-(R/L)(t-a)} = \tau A.h(t-a) \text{ para } t > a + \tau \qquad (3.2-5)$$

A observação da equação (3.2-5) e/ou da figura 3.2-8, permite concluir que *se a duração τ do pulso é muito pequena comparada com a constante de tempo T do circuito, então a resposta do circuito ao pulso retangular, para t > a + τ, pode ser aproximada pela resposta a um impulso de igual área, ocorrendo no mesmo instante "a" no qual tem início o pulso.* Mais ainda, este procedimento é satisfatório mesmo para pulsos de forma não retangular, ou seja, o formato do pulso é irrelevante. Tomando por base a conclusão anterior, podemos então fazer o seguinte: substituir a entrada arbitrária de um circuito por uma sucessão de pulsos de curta duração; em seguida, substituir os pulsos por impulsos de igual área e aproximar a resposta do circuito pela superposição das respostas aos vários impulsos. É evidente que quando a duração dos pulsos tender para zero a

aproximação se tornará exata. Este é o procedimento que adotaremos à seguir para o estabelecimento da chamada integral de convolução.

Imaginemos que a um circuito elétrico linear e invariante com o tempo, sem energia inicialmente armazenada em $t = 0-$, seja aplicada, no instante $t = 0$, uma entrada arbitrária qualquer $x(t)$, e que o nosso problema seja a determinação da correspondente saida $y(t)$ para $t \geq 0$.

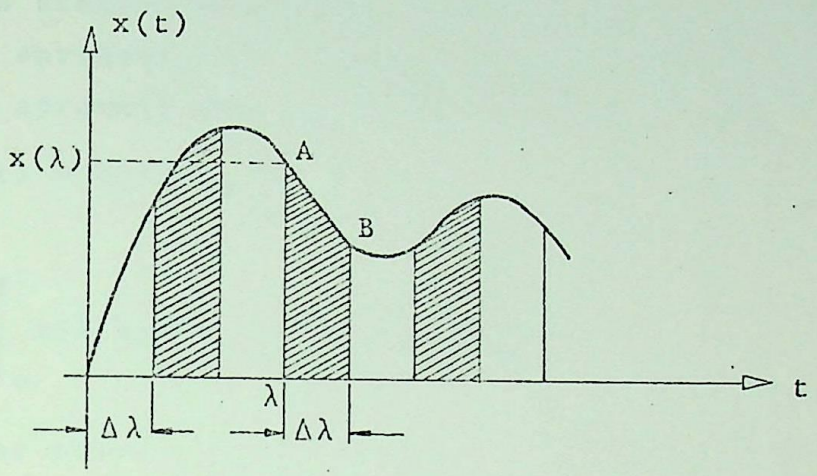


Figura 3.2-9

A resposta do circuito ao pulso típico em $t = \lambda$, representado pelo trecho da curva de entrada compreendido entre os pontos A e B na figura 3.2-9, pode ser aproximada pela resposta ao impulso de *igual área*

$$x(\lambda).\Delta\lambda.U_0(t-\lambda)$$

Se a resposta do circuito ao impulso unitário $U_0(t)$ é $h(t)$, a resposta a um impulso de área $x(\lambda)\Delta\lambda$ ocorrendo no instante $t = \lambda$ é

$$x(\lambda).\Delta\lambda.h(t-\lambda)$$

de acordo com a propriedade da invariança com o tempo do circuito em questão.

Sendo também linear o circuito, o princípio da superposição assegura que a resposta a entrada $x(t)$ até um tempo t é a soma das respostas a todos os impulsos até aquele tempo. Então

$$y(t) = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \sum_{\lambda=0}^{t} x(\lambda)h(t-\lambda)\Delta\lambda$$

ou

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \qquad (3.2\text{-}6)$$

A expressão (3.2-6), que é válida somente para circuitos lineares,

invariantes no tempo e com condições iniciais nulas em $t = 0_-$, é chamada *Integral de Convolução, de Superposição, de Carson ou de Duhamel*, representada simbolicamente por $x(t)*h(t)$ e entendida como $x(t)$ *convoluída com* $h(t)$. Ela estabelece que *a resposta de um circuito linear a uma entrada arbitrária qualquer é a convolução da entrada arbitrária com a resposta ao impulso*. Esta conclusão é às vezes denominada *Teorema de Borel*.

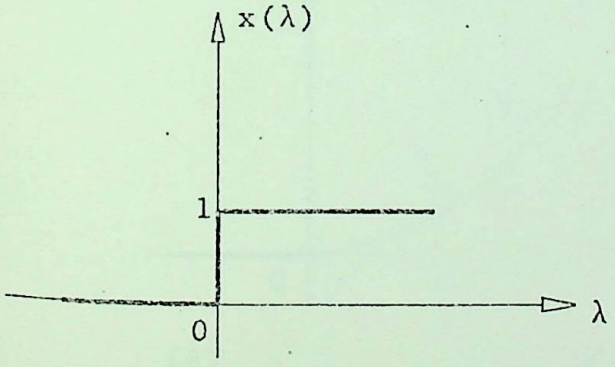
Antes de efetuarmos alguns exemplos de aplicação da integral de convolução, apresentamos, à seguir, a sua interpretação gráfica, dentro da qual aproveitamos para mostrar também que

$$x(t)*h(t) = h(t)*x(t)$$

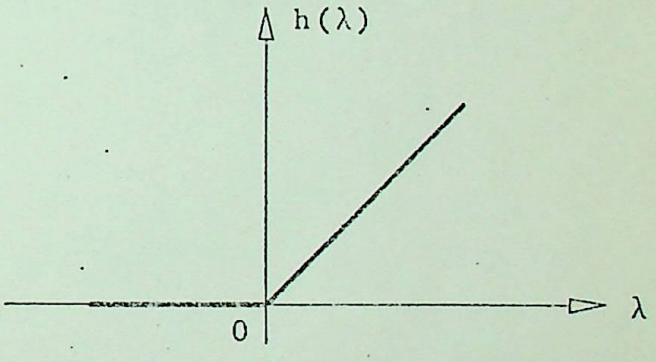
ou seja,

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t x(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda \qquad (3.2\text{-}7)$$

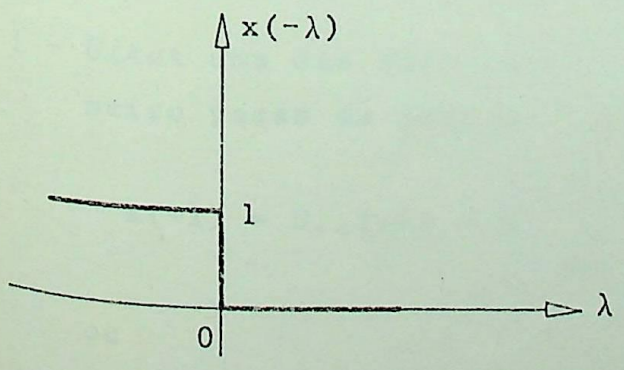
Para ilustrar melhor, consideremos as funções $x(t) = U_{-1}(t)$ e $h(t) = U_{-2}(t)$, que estão mostradas em termos da variável λ nas figuras 3.2-10a e 3.2-11a, respectivamente.



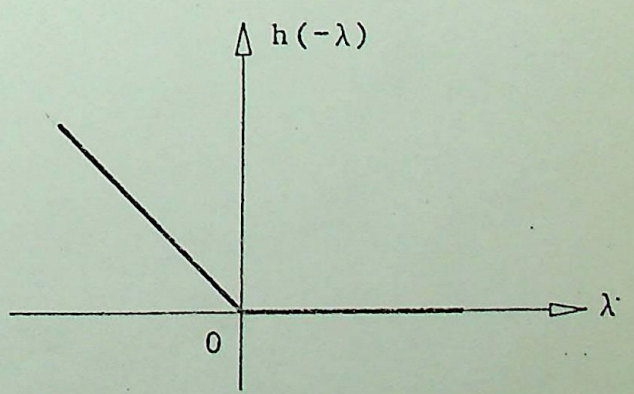
(a)



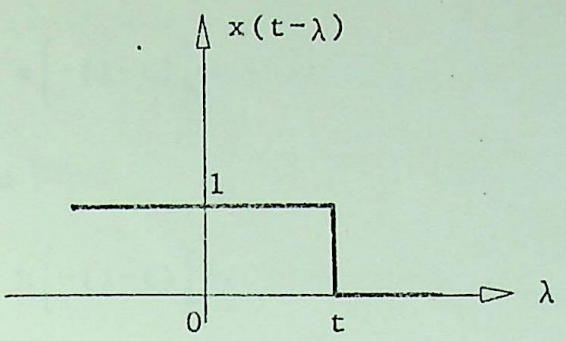
(a)



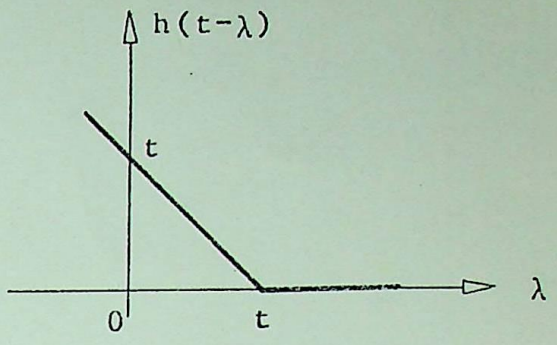
(b)



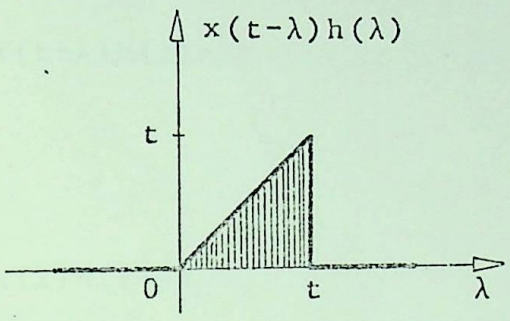
(b)



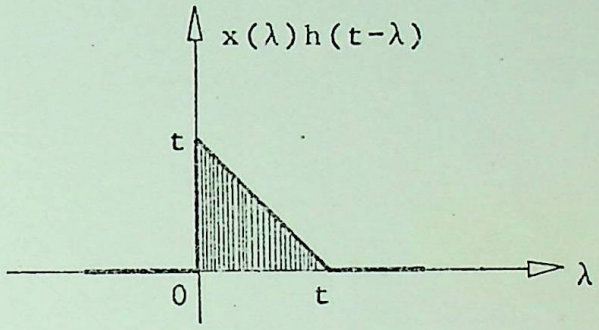
(c)



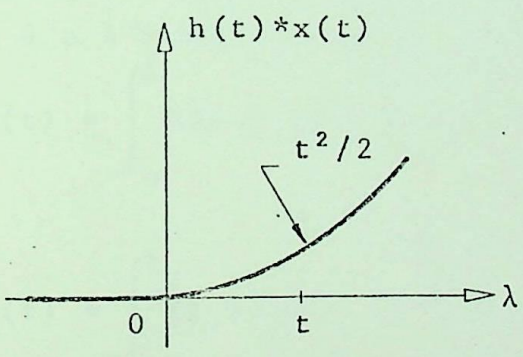
(c)



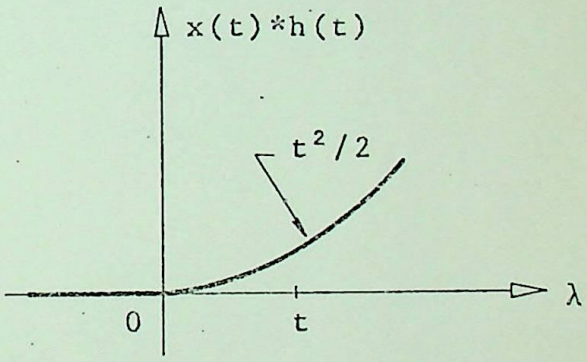
(d)



(d)



(e)



(e)

Figura 3.2-10

Figura 3.2-11

O procedimento gráfico consiste de quatro passos essenciais, a saber:

1 - *Girar* uma das duas funções em torno do eixo vertical. Este primeiro passo dá origem a

$$x(-\lambda) = U_{-1}(-\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ para } \lambda > 0 \\ 1 \text{ para } \lambda < 0 \end{cases}, \text{ na figura 3.2-10b}$$

ou

$$h(-\lambda) = -\lambda U_{-1}(-\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ para } \lambda > 0 \\ -\lambda \text{ para } \lambda < 0 \end{cases}, \text{ na figura 3.2-11b}$$

2 - *Deslocar* uma delas para a direita de um valor t. Isto origina

$$x\left[-(\lambda-t)\right]=x(t-\lambda)=U_{-1}(t-\lambda)=\begin{cases}0 \text{ para } \lambda > t\\ 1 \text{ para } \lambda < t\end{cases}, \text{ na figura 3.2-10c}$$

ou

$$h\left[-(\lambda-t)\right]=h(t-\lambda)=(t-\lambda)U_{-1}(t-\lambda)=\begin{cases}0 \text{ para } \lambda>t\\ t-\lambda \text{ para } \lambda<t\end{cases}, \text{na figura 3.2-11c}$$

3 - *Multiplicar* a função que foi deslocada para a direita pelo original da outra. Este produto dá como resultado

$$x(t-\lambda)h(\lambda)=U_{-1}(t-\lambda)\lambda U_{-1}(\lambda)=\begin{cases}0 \text{ para } t<\lambda<0\\ \lambda \text{ para } 0<\lambda<t\end{cases}, \text{ na figura 3.2-10d}$$

ou

$$x(\lambda)h(t-\lambda)=U_{-1}(\lambda)(t-\lambda)U_{-1}(t-\lambda)=\begin{cases}0 \text{ para } t<\lambda<0\\ t-\lambda \text{ para } 0<\lambda<t\end{cases}, \text{na fig. 3.2-11d}$$

4 - *Integrar* a função produto desde zero até o valor t, isto é, calcular a área sob a curva produto compreendida entre os valores $\lambda = 0$ e $\lambda = t$. O resultado deste último passo é

$$y(t) = \int_0^t \lambda d\lambda = (t^2/2)U_{-1}(t) \quad \text{na figura 3.2-10e}$$

ou

$$y(t) = \int_0^t (t-\lambda)d\lambda = (t^2/2)U_{-1}(t) \quad \text{na figura 3.2-11e}$$

O procedimento gráfico geralmente é empregado para determinar a saida de um circuito quando a entrada é dada graficamente e não pode ser acuradamente descrita por uma expressão analítica simples, ou então quando a sua resposta ao impulso é determinada experimentalmente através da aplicação de um pulso de curtíssima duração e área unitária (para aproximar um impulso unitário). Normalmente a sistemática a empregar consiste na determinação gráfica da área sob a curva produto para vários valores diferentes de t. A cada valor de área obtido para um determinado tempo t corresponde uma única ordenada da curva da saida $y(t)$.

Um bom entendimento do significado de uma convolução gráfica facilita muito a execução da própria convolução analítica.

Quando as condições iniciais não são nulas em $t = 0-$, devemos calcu

lar a resposta para qualquer energia inicialmente armazenada separadamente e somar ao resultado da convolução.

Exemplo 3.2-4 - Efetuar a convolução de $x(t)$ com $K.U_0(t)$.

Solução - Da expressão 3.2-6,

$$x(t)*KU_0(t) = \int_0^t x(\lambda).KU_0(t-\lambda)d\lambda = K\int_0^t x(\lambda)U_c(t-\lambda)d\lambda$$

Efetuando a mudança de variável
$\alpha = t-\lambda$, $\lambda = t-\alpha$ e $d\lambda = -d\alpha$, e notando que t é parâmetro na integral de convolução, resulta que

$$x(t)*KU_0(t) = K\int_t^0 x(t-\alpha).U_0(\alpha).(-d\alpha) =$$

$$= K\int_0^t x(t-\alpha).U_0(\alpha).d\alpha$$

Observando que o produto $x(t-\alpha)$ por $U_0(\alpha)$ só é significativo no ponto $\alpha = 0$, uma vez que $U_0(\alpha) = 0$ para $\alpha \neq 0$, podemos escrever que

$$\int_0^t x(t-\alpha)U_0(\alpha)d\alpha = \int_0^t x(t)U_0(\alpha)d\alpha = x(t)\int_0^t U_0(\alpha)d\alpha$$

Portanto

$$x(t)*KU_0(t) = Kx(t)$$

e a conclusão é que *a convolução de uma função $x(t)$ com um impulso de área K é igual à própria função $x(t)$ multiplicada pela constante K.*

Exemplo 3.2-5 - A resposta ao impulso de um circuito elétrico linear e invariante com o tempo é $h(t) = 2e^{-t}.U_{-1}(t)$. Determinar a resposta $y(t)$ para a entrada $x(t)$ mostrada na figura 3.2-12.

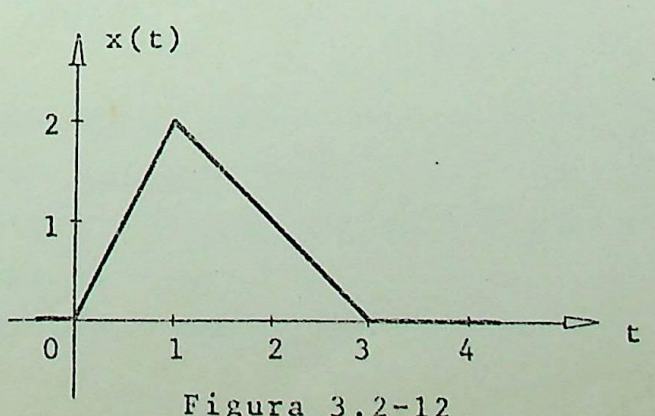
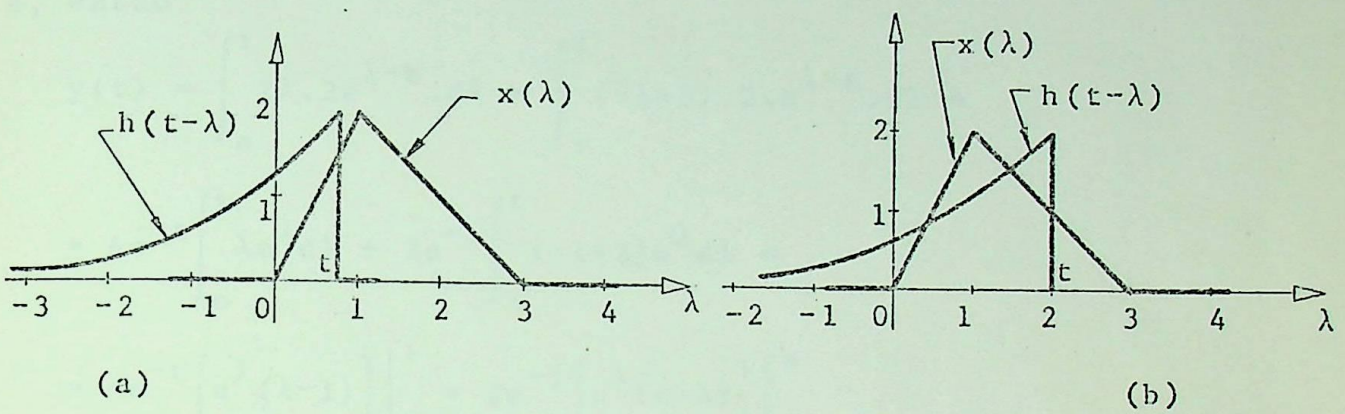


Figura 3.2-12

Solução - Para maior facilidade de compreensão, ilustraremos a solução analítica com algumas considerações gráficas.
Nas figuras 3.2-13a, b e c estão mostradas as funções $x(\lambda)$ e $h(t-\lambda)$ para valores de t compreendidos entre zero e *1*, entre *1* e *3*, e entre *3* e o infinito, respectivamente.



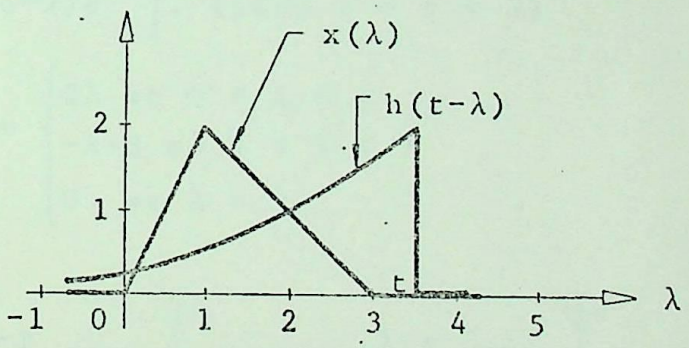


Figura 3.2-13

Da expressão da resposta ao impulso determinamos que

$$h(\lambda) = 2e^{-\lambda}U_{-1}(\lambda), \quad h(-\lambda) = 2e^{\lambda}.U_{-1}(-\lambda) \text{ e}$$

$$h(t-\lambda)=h\Big[-(\lambda-t)\Big]=2e^{\lambda-t}.U_{-1}(t-\lambda)=\begin{cases}2e^{\lambda-t} & \text{para } \lambda < t,\\ 0 & \text{para } \lambda>t\end{cases}$$

Conforme podemos notar, observando as figuras 3.2-13a, b e c, a resposta $y(t)$ do circuito será composta de três expressões. Uma para o intervalo $0 < t < 1$, outra para o intervalo $1 < t < 3$ e uma terceira para $t > 3$.
Para $0 < t < 1$, $x(\lambda) = 2\lambda$ e

$$y(t) = \int_0^t 2\lambda . 2e^{\lambda - t} . d\lambda = 4e^{-t} \int_0^t \lambda e^{\lambda} d\lambda = 4e^{-t} \left[e^{\lambda} (\lambda - 1) \right] \Big|_0^t$$

Portanto

$$y(t) = 4(-1+t+e^{-t}), \quad (\text{para } 0 < t < 1) \tag{3.2-8}$$

Para $1 < t < 3$, $x(\lambda) = \begin{cases} 2\lambda \text{ se } 0 < \lambda < 1 \\ -\lambda + 3 \text{ se } 1 < \lambda < 3 \end{cases}$

e, então

$$y(t) = \int_0^1 2\lambda . 2e^{\lambda - t} . d\lambda + \int_1^t (-\lambda + 3) . 2 . e^{\lambda - t} . d\lambda =$$

$$= 4e^{-t} \int_0^1 \lambda e^{\lambda} d\lambda + 2e^{-t} \int_1^t (-\lambda + 3) e^{\lambda} d\lambda =$$

$$= 4e^{-t} \left[e^{\lambda} (\lambda - 1) \right] \Big|_0^1 + 2e^{-t} \left[e^{\lambda} (4 - \lambda) \right] \Big|_1^t$$

Logo

$$y(t) = 2\left[4 - t - (3e - 2)e^{-t} \right], \quad (\text{para } 1 < t < 3) \tag{3.2-9}$$

Para $t > 3$, $x(\lambda) = \begin{cases} 2\lambda \text{ se } 0 < \lambda < 1 \\ -\lambda + 3 \text{ se } 1 < \lambda < 3 \\ 0 \text{ se } \lambda > 3 \end{cases}$

Portanto

$$y(t) = \int_0^1 2\lambda . 2e^{\lambda - t} . d\lambda + \int_1^3 (-\lambda + 3) 2e^{\lambda - t} . d\lambda + \int_3^t 0 . 2e^{\lambda - t} . d\lambda =$$

$$= 4e^{-t} \left[e^{\lambda} (\lambda - 1) \right] \Big|_0^1 + 2e^{-t} \left[e^{\lambda} (4 - \lambda) \right] \Big|_1^3$$

Finalmente,

$$y(t) = 2(e^3 - 3e + 2)e^{-t}, \quad (t > 3) \tag{3.2-10}$$

Outro Método (Verificação) -

Se a resposta ao impulso do circuito é $h(t) = 2e^{-t} . U_{-1}(t)$, então a resposta ao degrau é

$$r(t) = \int_{-\infty}^t 2e^{-\lambda} . U_{-1}(\lambda) d\lambda = 2 \int_{0_+}^t e^{-\lambda} d\lambda = -2e^{-\lambda} \Big|_{0_+}^t$$

donde

$$r(t) = 2(1 - e^{-t}) U_{-1}(t)$$

e a resposta a rampa unitária $U_{-2}(t)$ é

$$s(t) = \int_0^t 2(1 - e^{-\lambda})d\lambda = 2(\lambda + e^{-\lambda})\Big|_0^t$$

$$s(t) = 2(-1 + t + e^{-t})U_{-1}(t)$$

A decomposição da entrada em funções singulares é expressa por

$$x(t) = 2U_{-2}(t) - 3U_{-2}(t-1) + U_{-2}(t-3)$$

Logo

$$y(t) = 2s(t) - 3s(t-1) + s(t-3) =$$

$$= 4(-1+t+e^{-t})U_{-1}(t) - 6(-2+t+e.e^{-t})U_{-1}(t-1) +$$

$$+ 2(-4+t+e^{3}.e^{-t})U_{-1}(t-3)$$

ou, de modo equivalente,

$$y(t) = \begin{cases} 4(-1+t+e^{-t}) & \text{para } 0 < t < 1 \\ 2\left[4-t-(3e-2)e^{-t}\right] \simeq 2(4-t-6,15e^{-t}) & \text{para } 1 < t < 3 \\ 2(e^{3}-3e+2)e^{-t} \simeq 27,86e^{-t} & \text{para } t > 3 \end{cases}$$

e os resultados obtidos por este outro método confirmam aqueles contidos nas expressões (3.2-8) a (3.2-10). A forma de onda da saida $y(t)$ está mostrada na figura 3.2-14.

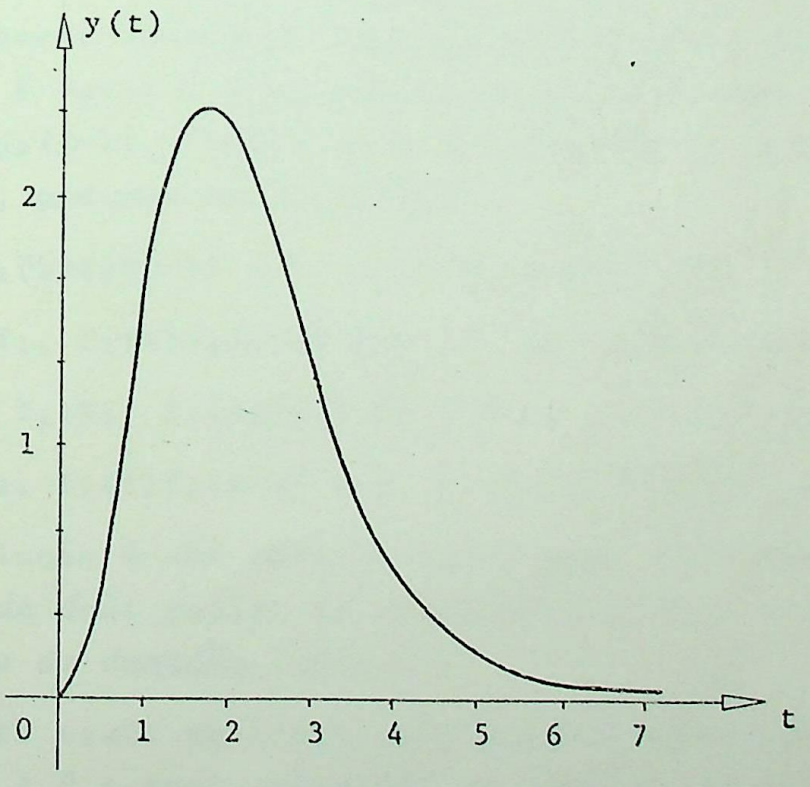


Figura 3.2-14

Exemplo 3.2-6 - Determinar a duração da função resultante da convolução das funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ indicadas nas figuras

3.2-15a e b.

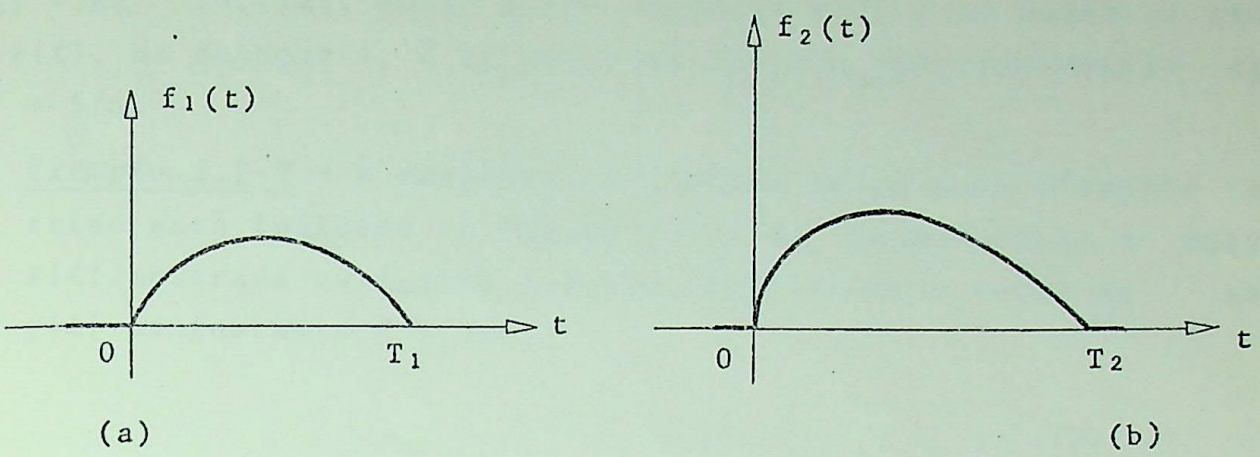


Figura 3.2-15

Solução -

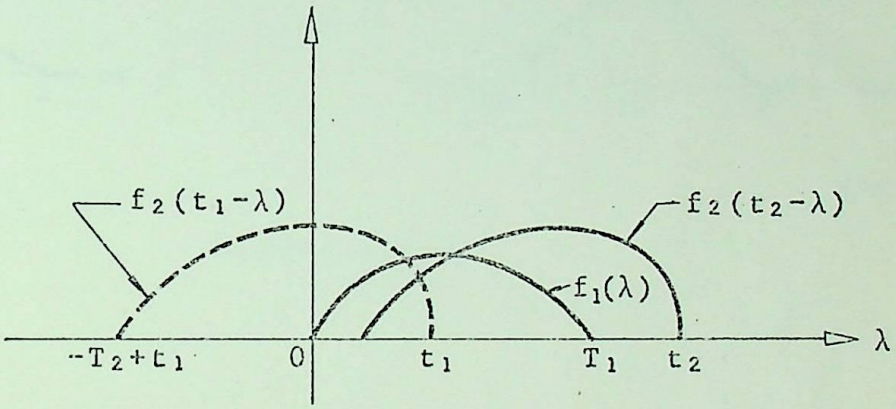


Figura 3.2-16

Considerando que a convolução das funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$, num dado tempo t, é igual a área sob a curva resultante do produto de $f_1(\lambda)$ por $f_2(t-\lambda)$, desde zero até o tempo t, e observando a figura 3.2-16, podemos concluir que:

- se $t \leq 0$, $f_1(\lambda)f_2(t-\lambda) = 0$ e $f_1(t)*f_2(t) = 0$
- se $0 < t \leq T_1$, $f_1(\lambda)f_2(t-\lambda) \neq 0$ e $f_1(t)*f_2(t) \neq 0$
- se $T_1 \leq t < T_1+T_2$, $f_1(\lambda)f_2(t-\lambda) \neq 0$ e $f_1(t)*f_2(t) \neq 0$
- se $t \geq T_1+T_2$, $f_1(\lambda)f_2(t-\lambda) \neq 0$ e $f_1(t)*f_2(t) = 0$

Então a convolução é não nula no intervalo $0<t<T_1+T_2$, ou seja, *a convolução de dois pulsos de duração T_1 e T_2, respectivamente, é um pulso de duração T_1+T_2.*

Uma regra muito usual no trato com funções exponenciais da forma $e^{-\alpha t}.U_{-1}(t)$, $\alpha > 0$ e real, consiste em considerar que num intervalo de tempo aproximadamente igual a $5\tau = 5/\alpha$, a função exponencial decrescente, para a maioria dos propósitos práticos, já atingiu o seu valor final zero. Por conseguinte, podemos adotar como regra

prática que se a resposta ao impulso de um circuito é da forma $h(t) = Ke^{-\alpha t}.U_{-1}(t)$, então a sua resposta $y(t)$ a um pulso de entrada $x(t)$, de duração T, é um pulso de duração aproximadamente igual a $T + 5/\alpha$.

Exemplo 3.2-7 - A resposta ao impulso de um dado circuito elétrico está indicada na figura 3.2-17a. Considerando a entrada $x(t)$ mostrada na figura 3.2-17b, determinar o valor da saida $y(t)$ no instante $t = 3/2$.

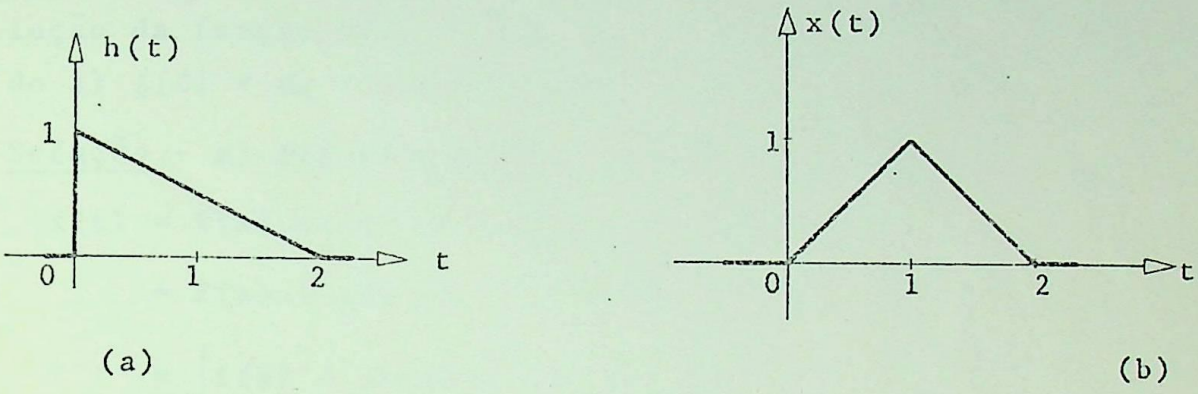


Figura 3.2-17

Solução

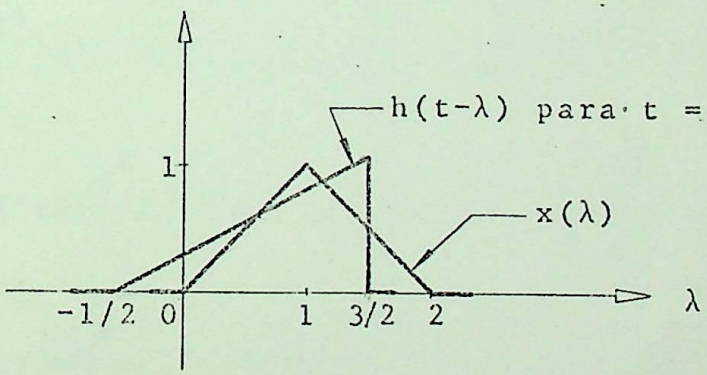


Figura 3.2-18

O valor da resposta no instante $t = 3/2$, $y(3/2)$, é igual a área sob a curva produto $x(\lambda).h(3/2 - \lambda)$ desde $\lambda = 0$ até $\lambda = t = 3/2$. Da figura 3.2-18, determinamos que

$$x(\lambda) = \begin{cases} \lambda \text{ para } 0 < \lambda < 1 \\ -\lambda+2 \text{ para } 1 < \lambda < 3/2 \end{cases}$$

e

$$h(3/2 - \lambda) = \lambda/2 + 1/4 \quad \text{para } 0 < \lambda < 3/2$$

Portanto ...

$$x(\lambda).h(3/2-\lambda) = \begin{cases} \lambda^2/2 + \lambda/4 & \text{para } 0 < \lambda < 1 \\ -\lambda^2/2 + 3\lambda/4 + 1/2 & \text{para } 1 < \lambda < 3/2 \end{cases}$$

e

$$y(3/2) = \int_0^1 (\lambda^2/2+\lambda/4)d\lambda + \int_1^{3/2} (-\lambda^2/2+3\lambda/4+1/2)d\lambda$$

Finalmente,

$$y(3/2) = 59/96$$

Exemplo 3.2-8 - Estabelecer uma fórmula para o cálculo da convolução da função $x(t) = f(t).U_{-1}(t-a)$ com $h(t) = e^{\alpha t}.U_{-1}(t)$, sendo a) $f(t) = a_0 + a_1 t$, b) $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

Solução - a) Das expressões (3.1-5) e (3.1-6),

$$x(t) = f(a).U_{-1}(t-a) + f'(a).U_{-2}(t-a) =$$

$$= f(a).U_{-1}(t-a) + f'(a)(t-a).U_{-1}(t-a) =$$

$$= \Big[f(a) + f'(a)(t-a)\Big].U_{-1}(t-a)$$

Então

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda).h(t-\lambda)d\lambda =$$

$$= f(a)\int_a^t e^{\alpha(t-\lambda)}d\lambda + f'(a)\int_a^t (\lambda-a)e^{\alpha(t-\lambda)}d\lambda =$$

$$= e^{\alpha t}\left\{f'(a)\int_a^t \lambda e^{-\alpha\lambda}d\lambda + \Big[f(a) - af'(a)\Big]\int_a^t e^{-\alpha\lambda}d\lambda\right\}$$

$$y.e^{-\alpha t} = f'(a)\left[\frac{\lambda e^{-\alpha\lambda}}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha\lambda}}{\alpha^2}\right]\Bigg|_a^t - \Big[f(a)-af'(a)\Big].\left[\frac{e^{-\alpha\lambda}}{\alpha}\right]\Bigg|_a^t =$$

$$= -\frac{tf'(a)e^{-\alpha t}}{\alpha} + \frac{af'(a)e^{-\alpha a}}{\alpha} - \frac{f'(a)e^{-\alpha t}}{\alpha^2} + \frac{f'(a)e^{-\alpha a}}{\alpha^2} -$$

$$- \frac{f(a)e^{-\alpha t}}{\alpha} + \frac{f(a)e^{-\alpha a}}{\alpha} + \frac{af'(a)e^{-\alpha t}}{\alpha} - \frac{af'(a)e^{-\alpha a}}{\alpha} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha a}}{\alpha^2}\Big[\alpha f(a) + f'(a)\Big] - e^{-\alpha t}\left[\frac{(t-a)f'(a) + f(a)}{\alpha} + \frac{f'(a)}{\alpha^2}\right]$$

Sendo $f(t) = a_0 + a_1 t$, $f'(t) = a_1 = f'(a)$ e

$$y(t) = \frac{e^{-\alpha a}\Big[\alpha f(a) + f'(a)\Big]e^{\alpha t} - \Big[\alpha f(t) + f'(t)\Big]}{\alpha^2}.U_{-1}(t-a) \qquad (3.2\text{-}11)$$

b) Se $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, então, de acordo com as expressões (3.1-5) e (3.1-6),

$$x(t) = f(a)U_{-1}(t-a) + f'(a)U_{-2}(t-a) + f''(a)U_{-3}(t-a) =$$

$$= f(a)U_{-1}(t-a) + f'(a)(t-a)U_{-1}(t-a) + f''(a)\frac{(t-a)^2}{2}U_{-1}(t-a) =$$

$$= \left[f(a) + f'(a)(t-a) + f''(a)\frac{(t-a)^2}{2}\right].U_{-1}(t-a)$$

Assim,

$$y(t) = f''(a)\int_a^t \frac{(\lambda-a)^2}{2}.e^{\alpha(t-\lambda)}d\lambda + f'(a)\int_a^t (\lambda-a).e^{\alpha(t-\lambda)}d\lambda +$$

$$+ f(a)\int_a^t e^{\alpha(t-\lambda)}d\lambda$$

ou

$$y(t).e^{-\alpha t} = \frac{f''(a)}{2}\int_a^t (\lambda^2-2a\lambda+a^2)e^{-\alpha\lambda}d\lambda + f'(a)\int_a^t (\lambda-a)e^{-\alpha\lambda}d\lambda +$$

$$+ f(a)\int_a^t e^{-\alpha\lambda}d\lambda$$

então

$$y(t) = -\frac{t^2 f''(a)}{2\alpha} - \frac{tf''(a)}{\alpha^2} - \frac{f''(a)}{\alpha^3} + \frac{atf''(a)}{\alpha} + \frac{af''(a)}{\alpha^2} -$$

$$- \frac{a^2 f''(a)}{2\alpha} - \frac{f'(a)}{\alpha^2} - \frac{tf'(a)}{\alpha} + \frac{af'(a)}{\alpha} - \frac{f(a)}{\alpha} + e^{-\alpha a}\left[\frac{f''(a)}{\alpha^3} +\right.$$

$$\left. + \frac{f'(a)}{\alpha^2} + \frac{f(a)}{\alpha}\right]e^{\alpha t}$$

$$y(t) = \frac{e^{-\alpha a}}{\alpha^3}\left[\alpha^2 f(a) + \alpha f'(a) + f''(a)\right]e^{\alpha t} -$$

$$- \frac{1}{\alpha}\left[f(a) + f'(a)(t-a) + f''(a)(t^2/2-at+a^2/2)\right] -$$

$$- \frac{1}{\alpha^2}\left[f'(a) + f''(a)(t-a)\right] -$$

$$- \frac{1}{\alpha^3}\left[f''(a)\right]$$

Finalmente,

$$y(t) = \frac{e^{-\alpha a}\left[\alpha^2 f(a)+\alpha f'(a)+f''(a)\right]e^{\alpha t}}{\alpha^3}.U_{-1}(t-a) -$$

$$- \frac{\left[\alpha^2 f(t)+\alpha f'(t)+f''(t)\right]}{\alpha^3}.U_{-1}(t-a)$$

(3.2-12)

Continuando com a sistemática empregada no exemplo 3.2-8, poderíamos demonstrar que se $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, então a convolução de $x(t) = f(t).U_{-1}(t-a)$ com $h(t) = e^{\alpha t}.U_{-1}(t)$ seria expressa por

$$y(t) = \frac{e^{-\alpha a}}{\alpha^4}\left[\alpha^3 f(a) + \alpha^2 f'(a) + \alpha f''(a) + f'''(a)\right]e^{\alpha t}.U_{-1}(t-a) -$$

$$- \frac{1}{\alpha^4}\left[\alpha^3 f(t) + \alpha^2 f'(t) + \alpha f''(t) + f'''(t)\right].U_{-1}(t-a)$$

(3.2-13)

A indução para o caso de um polinômio do grau n é feita à seguir. Se $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$, $x(t) = f(t).U_{-1}(t-a)$ e $h(t) = Ke^{\alpha t}.U_{-1}(t)$, então,

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = K.\frac{e^{-\alpha a}.F(a).e^{\alpha t} - F(t)}{\alpha^{n+1}}.U_{-1}(t-a) \qquad (3.2\text{-}14)$$

aonde

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha^{n-i}.f^{(i)}(t) = \alpha^n f(t)+\alpha^{n-1}f'(t)+\alpha^{n-2}f''(t)+\ldots+f^{(n)}(t)$$

(3.2-15)

Exemplo 3.2-9 - Efetuar a convolução de $x(t) = (1+2t)U_{-1}(t-2)$ com $h(t) = e^{-2t}.U_{-1}(t)$.

Solução - No caso presente, $f(t) = 1 + 2t$ e $f'(t) = 2$;

$a = 2$, $\alpha = -2$ e $K = 1$.

Da expressão (3.2-15),

$$F(t) = \alpha f(t) + f'(t) = -2 - 4t + 2 = -4t$$

e

$$F(a) = F(2) = -8$$

De (3.2-14),

$$y(t) = \frac{e^4.(-8).e^{-2t} - (-4t)}{(-2)^2}.U_{-1}(t-2)$$

ou

$$y(t) = \left[t - 2e^{-2(t-2)}\right]U_{-1}(t-2)$$

Exemplo 3.2-10 - A resposta ao impulso de um circuito é $h(t) = 4e^{-2t}.U_{-1}(t)$. Determinar a resposta para a entrada $x(t)$ mostrada na figura 3.2-19.

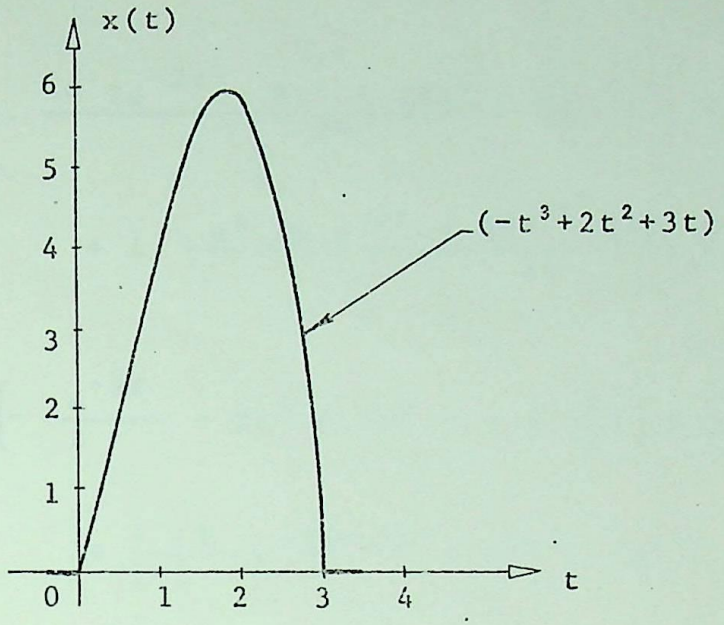


Figura 3.2-19

Solução - A entrada pode ser escrita como

$$x(t) = (-t^3 + 2t^2 + 3t)\left[U_{-1}(t) - U_{-1}(t-3)\right]$$

ou

$$x(t) = (-t^3 + 2t^2 + 3t)U_{-1}(t) + (t^3 - 2t^2 - 3t)U_{-1}(t-3)$$

E a resposta desejada pode ser obtida através da aplicação das expressões (3.2-14) e (3.2-15) a cada uma das parcelas componentes de $x(t)$, seguida da superposição destes resultados parciais.

Para a primeira parcela,

$$f(t) = -t^3 + 2t^2 + 3t$$

e

$$F(t) = \alpha^3 f(t) + \alpha^2 f'(t) + \alpha f''(t) + f'''(t) =$$

$$= -8(-t^3+2t^2+3t) + 4(-3t^2+4t+3) - 2(-6t+4) - 6$$

então

$$F(t) = 8t^3 - 28t^2 + 4t - 2$$

e

$$F(a) = F(0) = -2$$

Para a segunda parcela,

$$f(t) = t^3 - 2t^2 - 3t$$

e

$$F(t) = -8t^3 + 28t^2 - 4t + 2$$

$$F(a) = F(3) = 26$$

Portanto

$$y(t) = 4.\frac{-2e^{-2t} - 8t^3 + 28t^2 - 4t + 2}{16} U_{-1}(t) +$$

$$+ 4.\frac{e^6.26.e^{-2t} + 8t^3 - 28t^2 + 4t - 2}{16} U_{-1}(t-3)$$

ou

$$y(t) = \left(-\frac{e^{-2t}}{2} - 2t^3 + 7t^2 - t + \frac{1}{2}\right).U_{-1}(t) +$$

$$+ \left(\frac{13}{2} e^{-2(t-3)} + 2t^3 - 7t^2 + t - \frac{1}{2}\right).U_{-1}(t-3)$$

ou ainda

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{e^{-2t}}{2} - 2t^3 + 7t^2 - t + \frac{1}{2} & \text{para } 0 \leq t \leq 3 \\ (13e^6 - 1) \cdot \frac{e^{-2t}}{2} & \text{para } t > 3 \end{cases}$$

A forma de onda da resposta está indicada na figura 3.2-20.

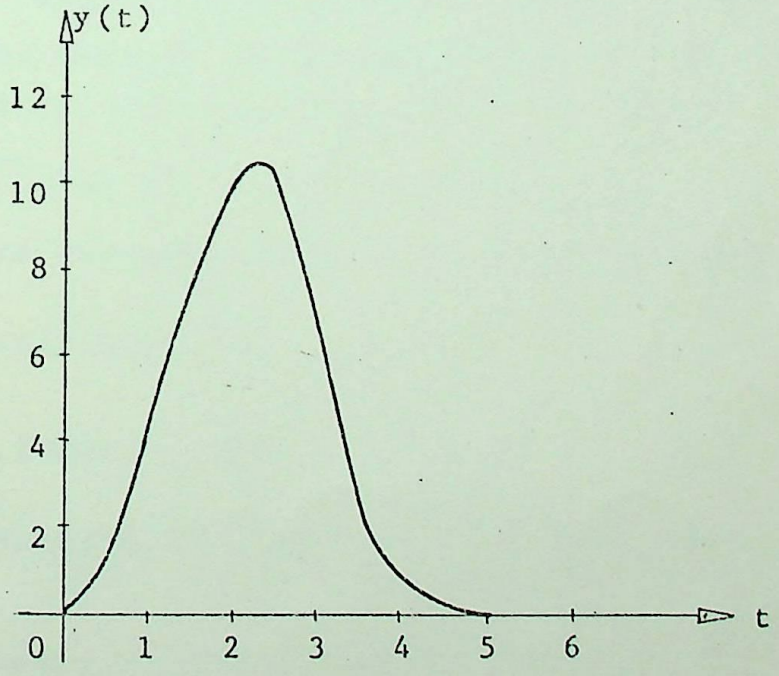


Figura 3.2-20

Exemplo 3.2-11 - Determinar a resposta do circuito da figura 3.2-21a para a entrada mostrada na figura 3.2-21b.

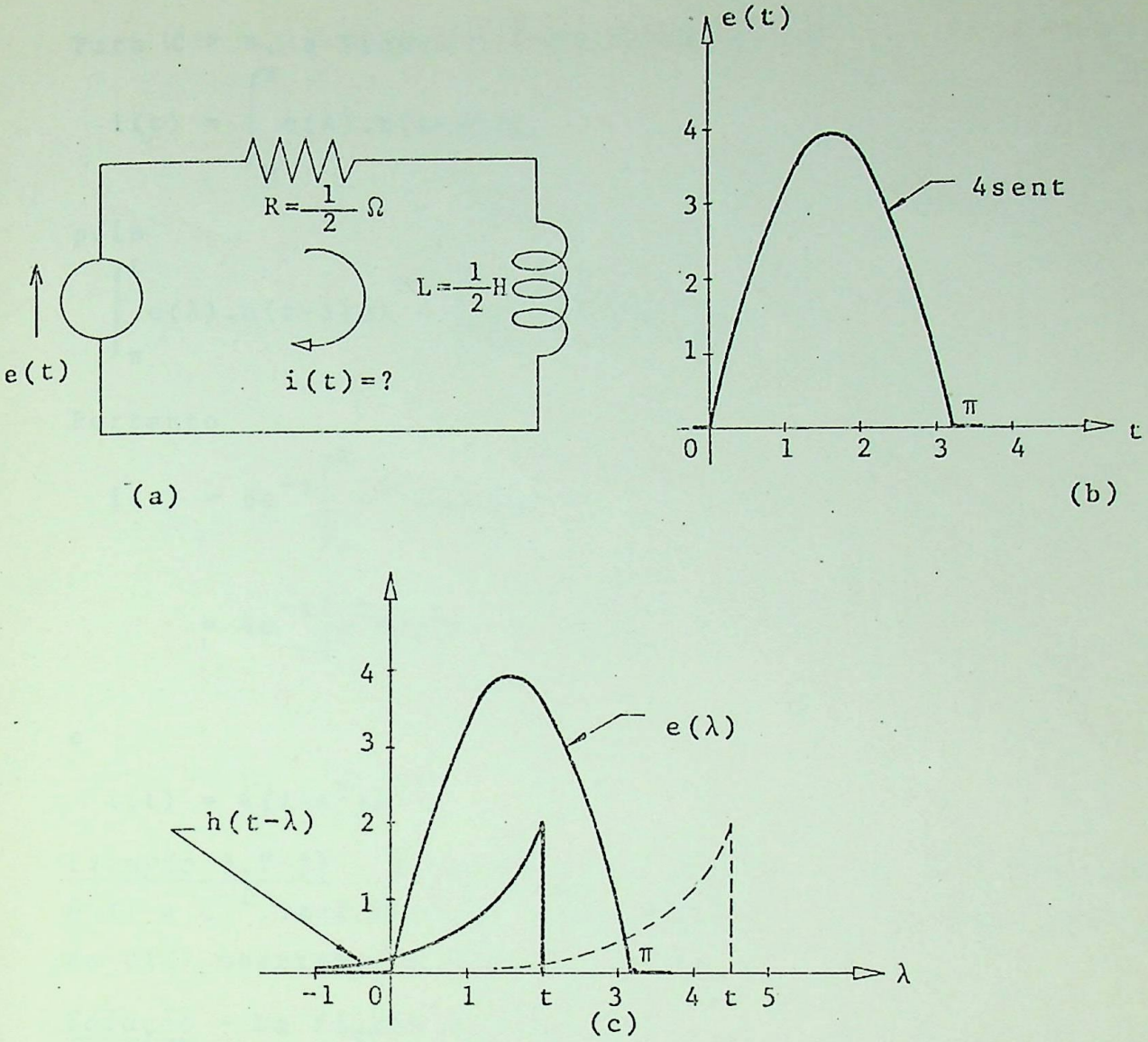


Figura 3.2-21

Solução - A resposta ao impulso do circuito da figura 3.2-21a foi obtida no exemplo 3.2-3 e vale $h(t) = (1/L).e^{-(R/L)t}U_{-1}(t)$. Introduzindo os valores numéricos ela se torna

$$h(t) = 2e^{-t}.U_{-1}(t)$$

A resposta do circuito ao pulso senoidal é dada por

$$i(t) = \int_0^t e(\lambda).h(t-\lambda)d\lambda$$

Da figura 3.2-21c, e para $0 < t < \pi$

$$i(t) = \int_0^t 8\text{sen}\lambda.e^{-(t-\lambda)}d\lambda = 8e^{-t}\int_0^t e^{\lambda}.\text{sen}\lambda.d\lambda =$$

$$= 4e^{-t}\left[e^{\lambda}(\text{sen}\lambda - \cos\lambda)\right]\Big|_0^t$$

então,

$$i(t) = 4\left[\text{sen}t - \cos t + e^{-t}\right]$$

Para $t > \pi$, a figura 3.2-21c ilustra que

$$i(t) = \int_0^{\pi} e(\lambda).h(t-\lambda)d\lambda,$$

pois

$$\int_{\pi}^{t} e(\lambda).h(t-\lambda)d\lambda = \int_{\pi}^{t} 0.h(t-\lambda)d\lambda = 0$$

Portanto

$$i(t) = 8e^{-t}\int_0^{\pi} e^{\lambda}.\text{sen}\lambda.d\lambda =$$

$$= 4e^{-t}\left[e^{\lambda}(\text{sen}\lambda - \cos\lambda)\right]\Big|_0^{\pi}$$

e

$$i(t) = 4(1+e^{\pi})e^{-t}$$

Exemplo 3.2-12 - A resposta ao impulso de um dado circuito é $h(t) = e^{-t}.\text{sen}t.U_{-1}(t)$. Determinar a sua resposta para a entrada $e(t)$ mostrada na figura 3.2-21b.

Solução - Da figura 3.2-21b,

$$e(t) = 4\text{sen}t \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

donde

$$e(\lambda) = 4\text{sen}\lambda \quad \text{para} \quad 0 \leq \lambda \leq \pi$$

Também

$$h(t-\lambda) = e^{-t}.e^{\lambda}.\text{sen}(t-\lambda).U_{-1}(t-\lambda)$$

Então, para $0 \leq t \leq \pi$,

$$y(t) = 4e^{-t}\int_0^{t} e^{\lambda}.\text{sen}\lambda.\text{sen}(t-\lambda).d\lambda =$$

$$= 4e^{-t}.\text{sen}t.\int_0^{t} e^{\lambda}.\text{sen}\lambda.\cos\lambda d\lambda -$$

$$- 4e^{-t}.\cos t.\int_0^{t} e^{\lambda}.\text{sen}^2\lambda.d\lambda =$$

$$= 2e^{-t}.\text{sen}t\int_0^{t} e^{\lambda}.\text{sen}2\lambda.d\lambda - 4e^{-t}.\cos t\int_0^{t} e^{\lambda}.\text{sen}^2\lambda.d\lambda =$$

$$= 2e^{-t}\text{sent}.\left[\frac{e^{\lambda}(\text{sen}2\lambda. - 2\cos 2\lambda)}{5}\right]\Bigg|_{o}^{t} -$$

$$- 4e^{-t}.\cos t.\left[\frac{e^{\lambda}.\text{sen}\lambda}{5}(\text{sen}\lambda - 2\cos\lambda) + \frac{2}{5}\,e^{\lambda}\right]\Bigg|_{o}^{t} =$$

$$= \frac{2}{5}\,e^{-t}.\text{sent}\left[e^{t}(\text{sen}2t - 2\cos 2t) + 2\right] -$$

$$- \frac{4}{5}\,e^{-t}.\cos t\left[e^{t}\text{sent}(\text{sent} - 2\cos t) + 2e^{t} - 2\right] =$$

$$= \frac{4}{5}\left[e^{-t}(\text{sent} + 2\cos t) + (\text{sent} - 2\cos t)\right] =$$

$$= \frac{4}{5}\left[(e^{-t} + 1)\text{sent} + 2(e^{-t} - 1)\cos t\right]$$

Para $t > \pi$,

$$y(t) = 4e^{-t}\int_{o}^{\pi} e^{\lambda}.\text{sen}\lambda.\text{sen}(t-\lambda)\,d\lambda =$$

$$= 2e^{-t}\text{sent}\left[\frac{e^{\lambda}(\text{sen}2\lambda - 2\cos 2\lambda)}{5}\right]\Bigg|_{o}^{\pi} -$$

$$- 4e^{-t}\cos t\left[\frac{e^{\lambda}\text{sen}\lambda(\text{sen}\lambda - 2\cos\lambda) + 2e^{\lambda}}{5}\right]\Bigg|_{o}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{5}e^{-t}.\text{sent}.(-2e^{\pi} + 2) + \frac{4}{5}\,e^{-t}.\cos t(-2e^{\pi} + 2)$$

então

$$y(t) = \frac{4}{5}(1 - e^{\pi}).e^{-t}.(\text{sent} - 2\cos t)$$

3.3 - *Circuitos com Entradas Arbitrárias Não-Repetitivas*

Uma excitação impulso unitário insere sempre uma certa quantidade de energia no circuito no instante $t = 0$. Assim sendo, qualquer *resposta ao impulso* tem a forma da *resposta livre* e descreve o *comportamento natural* do circuito, ou seja, a equação diferencial que descreve o comportamento do mesmo tem sempre como função forçante uma ou mais funções impulsivas ocorrendo no instante $t = 0$. Portanto, tais equações são sempre homogêneas para $t > 0$. Dessa forma, a resposta ao impulso é dada por uma expressão do tipo da equação (2.1-7) ou (2.1-9) ou (2.1-10) ou (2.1-12).

Nesta seção proporemos um método para a determinação da resposta aproximada de um circuito a uma entrada arbitrária do tipo pulso

não-repetitivo e de duração relativamente não muito longa; admitiremos que a resposta ao impulso é da forma das expressões (2.1-7) e (2.1-10). Em essência, o procedimento que será proposto está baseado nas expressões (3.2-14) e (3.2-15) e se utiliza também de um ajustamento polinomial do pulso arbitrário de entrada, o qual é suposto conhecido de um gráfico construído em escala ou de uma tabela de pares coordenados.

Uma vez obtido o ajustamento polinomial da entrada arbitrária, tudo se passa como no exemplo 3.2-10. O ajustamento polinomial mencionado constitui o ponto de partida desta seção.

Ajuste de Curvas pelo Processo "SPLINE FITTING"

Neste processo de ajuste, nós passamos um conjunto de cúbicas através de determinados pontos, usando uma nova cúbica em cada sub-intervalo. Mais ainda, exigimos que tanto a *inclinação* como a *curvatura* de um par de cúbicas que se unem num determinado ponto sejam idênticas, neste mesmo ponto de junção. O desenvolvimento das expressões inerentes a este método de ajuste será omitido aqui, mas pode ser encontrado, por exemplo, em Gerald, Curtis F., Applied Numerical Analysis, Addison Wesley Publishing Company, ed. 1970.

A cúbica relativa ao sub-intervalo i é escrita na forma

$$x(t) = a_i(t-t_i)^3 + b_i(t-t_i)^2 + c_i(t-t_i) + d_i \qquad (3.3\text{-}1)$$

e situa-se entre os pontos (t_i, x_i) e (t_{i+1}, x_{i+1}).

$$a_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i}, \qquad b_i = \frac{S_i}{2}$$

$$c_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{h_i} - \frac{2h_iS_i + h_iS_{i+1}}{6}, \qquad d_i = x_i = x(t_i)$$

aonde

$$h_i = t_{i+1} - t_i, \text{ para } i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

S_i é a derivada de segunda ordem de $x(t)$ no ponto $t = t_i$, isto é, $S_i = x''(t_i)$ e é obtida do sistema de equações seguinte

$$\begin{bmatrix} h_2 & -(h_1+h_2) & h_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) & h_4 & & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & h_{n-1} & -(h_{n-2}+h_{n-1}) & & h_{n-2} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{x_3 - x_2}{h_2} - \dfrac{x_2 - x_1}{h_1} \\ \dfrac{x_4 - x_3}{h_3} - \dfrac{x_3 - x_2}{h_2} \\ \dfrac{x_5 - x_4}{h_4} - \dfrac{x_4 - x_3}{h_3} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quando os pontos são igualmente espaçados, $h_i = h$ para qualquer i e o sistema anterior torna-se

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \{S\} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta^2 x_1 \\ \Delta^2 x_2 \\ \Delta^2 x_3 \\ \vdots \\ \Delta^2 x_{n-2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

aonde

$$\Delta^2 x_i = \Delta x_{i+1} - \Delta x_i, \tag{3.3-2}$$

sendo que

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \tag{3.3-3}$$

Também

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{S_{i+1} - S_i}{6h} \\ b_i &= \frac{S_i}{2} \\ c_i &= \frac{\Delta x_i}{h} - \frac{h(2S_i + S_{i+1})}{6} \\ d_i &= x_i = x(t_i) \end{aligned} \tag{3.3-4}$$

Supondo que o número de pontos é $n = 5$, e que portanto quatro é o número de sub-intervalos, o sistema para o cálculo do vetor $\{S\}$ pode ser escrito

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta^2 x_1 \\ \Delta^2 x_2 \\ \Delta^2 x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.3\text{-}5)$$

Exemplo 3.3-1 - Ajustar os dados da tabela seguinte pelo método *"spline fitting"*.

i	t_i	x_i	Δx_i	$\Delta^2 x_i$
1	0	0	1	2
2	1	1	3	-4
3	2	4	-1	0
4	3	3	-1	-1
5	4	2	-2	
6	5	0		

Solução - Da tabela dada concluimos que o número de pontos é $n = 6$ e que os mesmos são igualmente espaçados, ou seja, $h = 1$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Então, da equação (3.3-5),

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -24 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de cujo sistema determinamos que $S_1 = 11$, $S_2 = 2$, $S_3 = -7$, $S_4 = 2$, $S_5 = -1$, $S_6 = -4$.

De posse destes valores, calculamos os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i para os vários intervalos, os quais estão tabelados a seguir.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	-3/2	11/2	-3	0
2	-3/2	1	7/2	1
3	3/2	-7/2	1	4
4	-1/2	1	-3/2	3
5	-1/2	-1/2	-1	2

As cúbicas de ajuste, de acordo com a expressão (3.3-1) são portanto

$$x(t) = -\frac{3}{2}t^3 + \frac{11}{2}t^2 - 3t \qquad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

$$x(t) = -\frac{3}{2}(t-1)^3 + (t-1)^2 + \frac{7}{2}(t-1) + 1 =$$

$$= -\frac{3}{2}t^3 + \frac{11}{2}t^2 - 3t \qquad \text{para } 1 \leq t \leq 2$$

$$x(t) = \frac{3}{2}(t-2)^3 - \frac{7}{2}(t-2)^2 + (t-2) + 4 =$$

$$= \frac{3}{2}t^3 - \frac{25}{2}t^2 + 33t - 24 \qquad \text{para } 2 \leq t \leq 3$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}(t-3)^3 + (t-3)^2 - \frac{3}{2}(t-3) + 3 =$$

$$= -\frac{1}{2}t^3 + \frac{11}{2}t^2 - 21t + 30 \qquad \text{para } 3 \leq t \leq 4$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}(t-4)^3 - \frac{1}{2}(t-4)^2 - (t-4) + 2 =$$

$$= -\frac{1}{2}t^3 + \frac{11}{2}t^2 - 21t + 30 \qquad \text{para } 4 \leq t \leq 5$$

Os resultados obtidos no exemplo 3.3-1 nos mostram que as duas primeiras equações são iguais, e que também as duas últimas o são. Este fato é consequência de duas hipóteses que são feitas ao tempo da obtenção do sistema para o cálculo do vetor $\{S\}$: de que S_1 é uma extrapolação linear de S_2 e S_3 e que S_n é também uma extrapolação linear de S_{n-2} e S_{n-1}. Essas hipóteses são feitas em virtude da impossibilidade de se estabelecer a condição de mesma inclinação e mesma curvatura para os pontos extremos do intervalo total considerado. Portanto, se o número de pontos considerados for $n = 5$, teremos quatro sub-intervalos e apenas duas cúbicas; uma para os dois primeiros sub-intervalos e outra para os dois últimos. Este procedimento será empregado em todas as aplicações subsequentes, considerando também que os pontos são igualmente espaçados.

Exemplo 3.3-2 - Ajustar pelo método "*spline fitting*" os pontos da tabela seguinte, os quais foram amostrados da função $e(t) = 4sent$ indicada na figura 3.2-21b.

i	t_i	e_i	Δe_i	$\Delta^2 e_i$
1	0	0	2,828427126	-1,656854252
2	0,785398164	2,828427126	1,171572874	-2,343145748
3	1,570796327	4,000000000	-1,171572874	-1,656854252
4	2,356194491	2,828427126	-2,828427126	
5	3,141592654	0		

Solução - Da equação (3.3-5)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -16,115945868 \\ -22,791388400 \\ -16,115945868 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema resulta que

$S_1 = S_5 = -1,017130346$, $S_3 = -4,354851610$

$S_2 = S_4 = -2,285990978$

Os coeficientes, calculados pelas expressões (3.3-4) com $h = 0,785398164$, estão tabelados à seguir para as cúbicas correspondentes ao primeiro e terceiro sub-intervalos.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	-0,354143225	-0,508565173	4,219144764	0
3	0,354143225	-2,177425805	-0,000000028	4,000000000

Então

$$e(t) = -0,354143225t^3 - 0,508565173t^2 + 4,219144764$$

para $0 \leq t \leq 0,785398164 = \pi/4$ e também

para $\pi/4 \leq t \leq 1,570796327 = \pi/2$.

Para o terceiro e quarto sub-intervalos,

$$e(t) = 0,354143225(t-\pi/2)^3 - 2,177425805(t-\pi/2)^2 -$$

$$- 0,000000028(t-\pi/2) + 4,000000000 =$$

$$= 0,354143225t^3 - 3,846286436t^2 + 9,462025036t -$$

$$- 2,745165637$$

para $\pi/2 \leq t \leq 2,356194491 = 3\pi/4$ e também

para $3\pi/4 \leq t \leq 3,141592654 = \pi$

Os resultados encontrados podem ser postos numa outra forma, a saber:

$$e(t) = (-0,354143225t^3 - 0,508565173t^2 + 4,219144764t).$$
$$.\left[U_{-1}(t) - U_{-1}(t-\pi/2)\right] + (0,354143225t^3 - 3,846286436t^2 +$$
$$+ 9,462025036t - 2,745165637).\left[U_{-1}(t-\pi/2) - U_{-1}(t-\pi)\right]$$

ou

$$e(t) = (-0,354143225t^3-0,508565173t^2+4,219144764t).U_{-1}(t) +$$
$$+ (0,708286450t^3-3,337721263t^2+5,242880272t-2,745165637).$$
$$.U_{-1}(t-\pi/2) + (0,354143225t^3+3,846286436t^2-9,462025036t +$$
$$+ 2,745165637).U_{-1}(t-\pi) \qquad (3.3\text{-}6)$$

A tabela A-1 fornece uma idéia do erro percentual que se comete ao substituir a função $e(t) = 4sent$, $0 \leq t \leq \pi$, por duas cúbicas, obtidas pelo método *"spline fitting"*.

Depois de estabelecer as relações básicas do ajuste pelo método *"spline fitting"* e ilustrar o seu emprego por meio de algumas aplicações, mostraremos agora, e através de dois exemplos selecionados, como as expressões (3.2-14) e (3.2-15) podem ser empregadas para a determinação aproximada da resposta de circuitos a pulsos arbitrários de excitação. Trataremos apenas do caso das respostas ao impulso da forma $K.e^{\alpha t}.U_{-1}(t)$ ou $K.e^{\alpha t}.sen\omega t.U_{-1}(t)$.

Exemplo 3.3-3 - Resolver o exemplo 3.2-11 usando a aproximação obtida na expressão (3.3-6) para a função $e(t) = 4sent$, que é a excitação do circuito da figura 3.2-21a.

Solução - No exemplo 3.2-11 determinamos que $h(t) = 2e^{-t}U_{-1}(t)$. Então concluimos que $K = 2$ e $\alpha = -1$ e, dessa forma, a expressão (3.2-15) torna-se

$$F(t) = \alpha^3.f(t) + \alpha^2.f'(t) + \alpha.f''(t) + f'''(t),$$

considerando que $f(t)$ é do terceiro grau em t.
Portanto

$$F(t) = -f(t) + f'(t) - f''(t) + f'''(t) \qquad (3.3\text{-}7)$$

e a resposta aproximada $i(t)$ do circuito da figura 3.2-21a é obtida pela superposição dos resultados encontrados na aplicação da expressão (3.2-14) a cada uma das parcelas componentes da expressão (3.3-6).
Para a *primeira parcela*, $a = 0$ e

$$f(t) = -0,354143225t^3 - 0,508565173t^2 + 4,219144764t$$

Então, de acordo com a expressão (3.3-7),

$$F(t) = 0,354143225t^3 - 0,553864502t^2 - 3,111415760t +$$
$$+ 3,111415760$$

e

$$F(a) = F(0) = 3,111415760$$

Assim, de acordo com (3.2-14),

$$i_1(t) = (6,222831520e^{-t} - 0,708286450t^3 + 1,107729004t^2 +$$
$$+ 6,222831520t - 6,222831520).U_{-1}(t)$$

e

$$i(t) = i_1(t) \text{ para } 0 \leq t \leq \pi/2 \qquad (3.3\text{-}8)$$

Para a *segunda parcela*, $a = \pi/2 = 1,570796327$ e

$$f(t) = 0,708286450t^3 - 3,337721263t^2 + 5,242880272t -$$
$$- 2,745165637$$

Então

$$F(t) = -0,708286450t^3 + 5,462580613t^2 - 16,168041500t +$$
$$+ 18,913207140$$

e

$$F(a) = F(\pi/2) = 4,249718660$$

Logo

$$i_2(t) = (40,886350980e^{-t} + 1,416572900t^3 -$$
$$- 10,925161230t^2 + 32,336083000t -$$
$$- 37,826414280).U_{-1}(t-\pi/2)$$

Efetuando a superposição de $i_1(t)$ com $i_2(t)$, obtemos que

$$i(t) = 47,109182500e^{-t} + 0,708286450t^3 - 9,817432226t^2 +$$
$$+ 38,558914520t - 44,049245800 \quad \text{para } \pi/2 \leq t \leq \pi \qquad (3.3\text{-}9)$$

Para a *terceira parcela*, $a = \pi = 3,141592654$ e

$$f(t) = -0,354143225t^3 + 3,846286436t^2 - 9,462025036t +$$
$$+ 2,745165637$$

Então

$$F(t) = 0,354143225t^3 - 4,908716111t^2 + 19,279457260t -$$
$$- 22,024622890$$

e

$$F(a) = F(\pi) = 1,077155080$$

Portanto

$$i_3(t) = (49,852229260e^{-t} - 0,708286450t^3 + 9,817432226t^2 - 38,558914520t + 44,049245800).U_{-1}(t-\pi)$$

e a superposição de $i_3(t)$ com $i_2(t)$ e $i_1(t)$ dá como resultado

$$i(t) = 96,961411760e^{-t} \quad \text{para } t \geq \pi \qquad (3.3\text{-}10)$$

Na figura 3.3-1 está mostrada a curva da resposta aproximada $i(t)$ do circuito da figura 3.2-21a e na tabela A-2 uma comparação entre ela e a resposta exata obtida no exemplo 3.2-11.

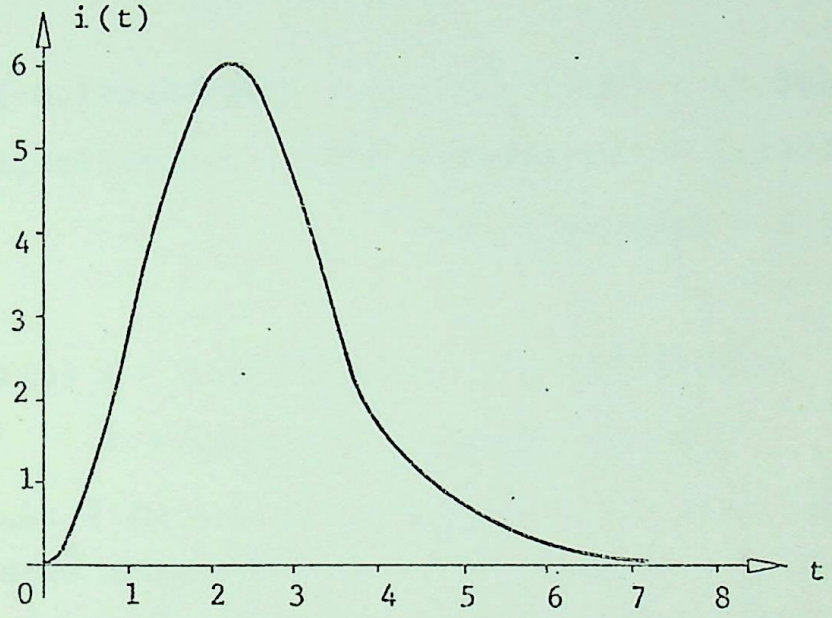


Figura 3.3-1

Exemplo 3.3-4 - Sabe-se que a resposta ao impulso de um dado circuito é $h(t) = e^{-t}.sen t.U_{-1}(t)$. Determinar a resposta do mesmo à entrada amostrada na tabela do exemplo 3.3-2, ou seja, resolver o exemplo 3.2-12 usando um procedimento análogo ao empregado no exemplo 3.3-3.

Solução - A resposta ao impulso do circuito em consideração pode ser escrita como

$$h(t) = e^{-t}.\text{sen}t = \text{parte imaginária de } \left(e^{-t}.e^{jt}\right) =$$

$$= \text{parte imaginária de } \left(e^{(-1+j)t}\right).$$

Portanto, podemos aplicar um procedimento análogo ao empregado no exemplo anterior, considerando, inicialmente, que a resposta ao impulso é da forma $Ke^{\alpha t}$, aonde $K = 1$ e $\alpha = -1+j$. Depois de resolver o problema para esta resposta ao impulso complexa, a

resposta verdadeira desejada do circuito será obtida pela superposição das partes imaginárias das respostas complexas individuais obtidas para cada parcela do ajuste da entrada arbitrária dada.

Então, se $\alpha = -1+j = \sqrt{2}\ \underline{/135^0}$, $\alpha^2 = 2\underline{/-90^0} = -j2$, $\alpha^3 = 2\sqrt{2}\ \underline{/45^0} = 2+j2$ e $\alpha^4 = 4\underline{/180^0} = -4$.

Assim, da expressão (3.2-15),

$$F(t) = (2+j2)f(t) - j2f'(t) + (-1+j)f''(t) + f'''(t)$$

Portanto, para a *primeira parcela* do ajuste da entrada dada, constante da expressão (3.3-6), temos que $a = 0$ e que

$$f(t) = -0,354143225t^3 - 0,508565173t^2 + 4,219144764t$$

Assim

$$F(t) = (-0,708286450t^3 - 1,017130346t^2 + 10,563148880t - 1,107729004) + j(-0,708286450t^3 + 1,107729004t^2 + 8,347690870t - 9.455419874)$$

donde

$$F(a) = F(0) = -1,107729004 - j9,455419874 = 9,520085532\ \underline{/-96,681903430^0}$$

Substituindo $F(t)$ e $F(a)$ na equação (3.2-14) e considerando somente a *parte imaginária* do resultado obtido, temos que

$$y_1(t) = \left[2,380021383e^{-t}.\text{sen}(t+83,318096570^0) - 0,177071613t^3 + 0,276932251t^2 + 2,086922718t - 2,363854969\right].U_{-1}(t)$$

e

$$y(t) = y_1(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq \pi/2 \qquad (3.3\text{-}11)$$

Para a *segunda parcela*, $a = \pi/2 = 1,570796327$ e

$$f(t) = 0,708286450t^3 - 3,337721263t^2 + 5,242880272t - 2,745165637$$

Então

$$F(t) = (1,416572900t^3 - 6,675442526t^2 + 6,236041840t + 5,434829952) + j(1,416572900t^3 - 10,925161226t^2 + 28,086364296t - 22,651534344)$$

e

$$F(a) = F(\pi/2) \simeq 4,249718739$$

Assim de (3.2-14), calculamos que

$$y_2(t) = (5,110793968.e^{-t}.\cos t + 0,354143225t^3 -$$

$$- 2,731290305t^2 + 7,021591075t - 5,662883585).U_{-1}(t-\pi/2)$$

Somando $y_1(t)$ com $y_2(t)$, obtemos

$$y(t) = 7,479777283.e^{-t}.\text{sen}(t + 87,878188680^0) +$$

$$+ 0,177071612t^3 - 2,454358054t^2 + 9,108513793t -$$

$$- 8,026738554 \quad \text{para } \pi/2 \leq t \leq \pi \qquad (3.3\text{-}12)$$

Para a *terceira parcela*, $a = \pi = 3,141592654$ e

$$f(t) = - 0,354143225t^3 + 3,846286436t^2 - 9,462025036t +$$

$$+ 2,745165637$$

Então

$$F(t) = (-0,708286450t^3 + 7,692572872t^2 - 16,799190722t -$$

$$- 4,327100948) + j(-0,708286450t^3 + 9,817432222t^2 -$$

$$- 36,434055166t + 32,106954218)$$

e

$$F(a) = F(\pi) = - 3,141989648 - j7,421159130 =$$

$$= - 8,058889612 \underline{/67,053046150^0}$$

De (3.2-14), calculamos que

$$y_3(t) = \Big[46,622071880.e^{-t}.\text{sen}(t - 112,946953900^0) -$$

$$- 0,177071613t^3 + 2,454358054t^2 - 9,108513793t +$$

$$+ 8,026738554\Big].U_{-1}(t-\pi)$$

Superpondo este último resultado ao contido na expressão (3.3-12), resulta que

$$y(t) = - 38,900222030.e^{-t}.\text{sen}(t + 62,603072260^0) \quad \text{para } t > \pi$$

(3.3-13)

Na figura 3.3-2 está indicada a curva da resposta aproximada $y(t)$ do circuito e na tabela A-3 é apresentada uma comparação entre o valor exato da resposta, indicado no exemplo 3.2-12, e o valor aproximado aqui obtido.

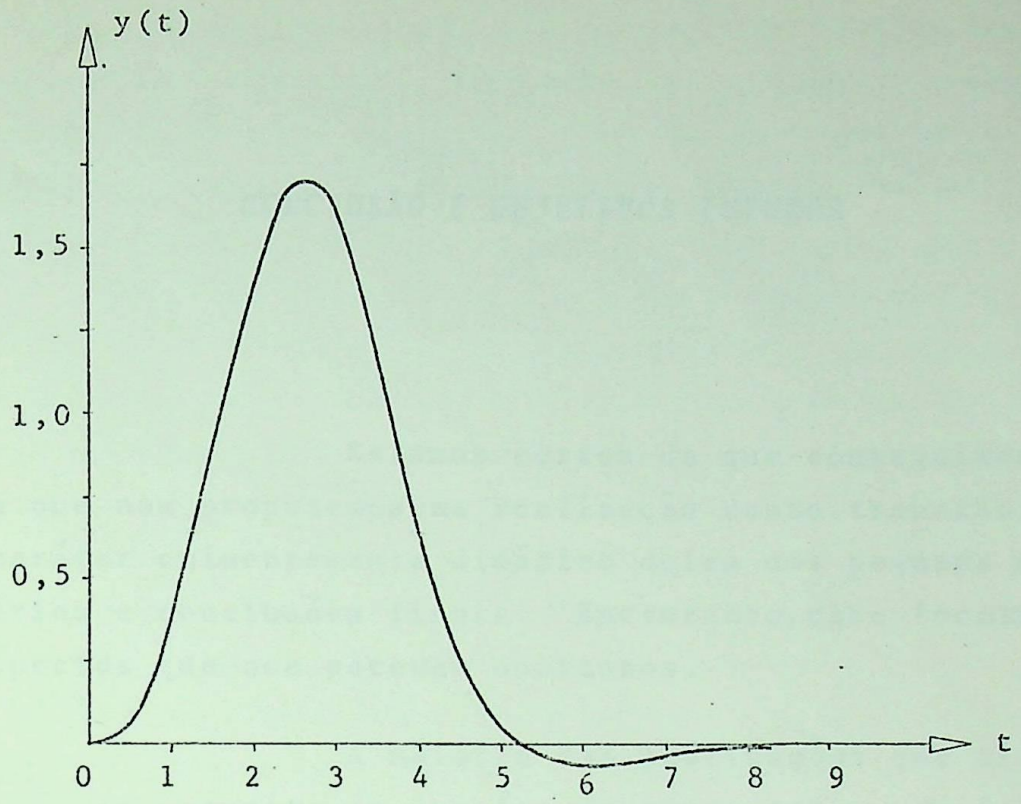


Figura 3.3-2

CONCLUSÃO E OBJETIVOS FUTUROS

Estamos certos de que conseguimos atingir as metas a que nos propuzemos na realização deste trabalho.
O seu caráter eminentemente didático deixa uma pequena margem para comentários e conclusões finais. Entretanto, cabe focalizar aqui alguns aspectos que nos parecem oportunos.

A maioria das publicações que tratam da determinação da resposta ao impulso de circuitos — ou de sistemas, de modo geral — aborda a questão, *já de início*, por meio das transformadas de Laplace. Este procedimento, embora poderosíssimo em termos de cálculo simbólico ou operacional, regra geral, torna obscuro o lado físico da questão. No Capítulo 2 nós desenvolvemos, principalmente, a determinação da resposta ao impulso dos circuitos, inicialmente sob um ponto de vista puramente físico, através dos Teoremas 2.3-1 a 2.3-3, os quais se relacionam com a tensão numa capacitância e a corrente numa indutância. Somente depois disso é que propuzemos um procedimento um tanto mais matemático, mais rápido e menos trabalhoso de atacar a questão, embora trabalhando ainda no domínio do tempo. No Capítulo 1 nada mais fizemos senão apresentar as funções singulares de forma bem detalhada e estabelecer uma nomenclatura uniforme para todas elas.

No Capítulo 3 propuzemos um método extremamente simples mas suficientemente geral para efetuar a decomposição de funções que são definidas por trechos polinomiais em funções singulares. Essa decomposição é altamente importante uma vez que, conforme pudemos ilustrar por meio de inúmeros exemplos, a resposta dos circuitos lineares a excitações dessa natureza pode ser obtida pela superposição das respostas a estas funções singulares componentes. Esta proposição se reveste de um significado todo especial, pois, além de poupar tempo e evitar as "*regrinhas*" e tentativas propostas por muitos autores, é de uma elegância matemática formidável.

Ainda no Capítulo 3, e após desenvolver a expressão da integral de convolução e executar diversificadas aplicações, efetuamos o ajuste de um pulso (teoricamente) arbitrário e não repetitivo ($e(t) = 4\text{sen}t$, $0 \leq t \leq \pi$) por meio de duas cúbicas. Estas cúbicas foram geradas pelo interessantíssimo método *"spline fitting"*, empregando-se apenas cinco pontos amostrados. Utilizamos depois as expressões desenvolvidas para a convolução de polinomiais com respostas ao impulso do tipo exponencial, na determinação aproximada da resposta de circuitos submetidos a pulsos dessa natureza. Nesta oportunidade abordamos os casos em que a resposta ao impulso era ou uma exponencial decrescente ou uma função senoidal amortecida, ou seja, estudamos os casos de raízes características não repetidas, reais ou complexas. Efetuamos em seguida a comparação entre os resultados exatos e os aproximados, constatando que, embora o número de pontos amostrados fosse pequeno, o erro percentual cometido situou-se dentro de limites que consideramos bastante razoáveis. Isto pode ser confirmado através das Tabelas A-2 e A-3 do Apêndice.

Embora se possa ter a impressão de que o processo aproximado do final do terceiro capítulo seja excessivamente trabalhoso, essa idéia realmente não corresponde à realidade. Mas é obvio que estamos levando em conta que o usuário dispõe de uma calculadora eletrônica de bolso, dessas que à cada dia estão se tornando mais e mais difundidas, principalmente nos meios técnicos e universitários. Na execução dos cálculos desse trabalho utilizamos uma *HP45*, a qual dispõe de nove unidades auxiliares de memória e possibilita, sem nenhuma dificuldade, a operação com polinômios empregando até nove decimais.

Para o futuro próximo pretendemos desenvolver o processo aproximado que expuzemos aqui também para o caso de raízes características repetidas, ou seja, para o caso de resposta ao impulso da forma da expressão (2.1-11) ou (2.1-12). Além disso, pretendemos também estabelecer sub-rotinas *FORTRAN* para executar a integral de convolução em computador digital, considerando qualquer tipo de entrada e de resposta ao impulso dos circuitos. Para este fim já desenvolvemos, dentre outras, uma sub-rotina para efetuar interpolação, uma para integração e outra para o traçado do gráfico de qualquer resposta.

APÊNDICE

Tabela A-1

t grau	t radiano	$e(t)=4sent$	$e(t)$ aproximado	Erro % (módulo)
0	0	0	0	-
5	0,087266463	0,348622972	0,364081541	4,43
10	0,174532925	0,694592710	0,719005066	3,51
15	0,261799388	1,035276180	1,063358459	2,71
20	0,349065851	1,368080574	1,395729596	2,02
25	0,436332313	1,690473047	1,714706348	1,43
30	0,523598776	2,000000000	2,018876602	0,94
35	0,610865238	2,294305745	2,306828229	0,55
40	0,696131701	2,571150438	2,571161637	≈ 0
45	0,785398164	2,828427126	2,828427127	≈ 0
50	0,872664626	3,064177773	3,059250148	0,16
55	0,959931089	3,276608177	3,268206058	0,26
60	1,047197551	3,464101614	3,453882730	0,29
65	1,134464014	3,625231148	3,614868047	0,29
70	1,221730477	3,758770483	3,749749883	0,24
75	1,308996939	3,863703306	3,857116115	0,17
80	1,396263402	3,939231012	3,935554624	0,09
85	1,483529864	3,984778793	3,983653286	0,03
90	1,570796327	4,000000000	3,999999978	≈ 0
95	1,658062790	3,984778793	3,983653310	0,02
100	1,745329252	3,939231012	3,935554645	0,09
105	1,832595715	3,863703305	3,857116133	0,17
110	1,919862177	3,758770484	3,749749893	0,24
115	2,007128640	3,625231148	3,614868053	0,29
120	2,094395102	3,464101617	3,453882743	0,29
125	2,181661565	3,276608178	3,268206073	0,26
...	.....	.....	.....	....
145	2,530727416	2,294305745	2,306828223	0,55
...	.....	.....	.....	....
165	2,879793266	1,035276180	1,063358453	2,71
170	2,967059729	0,694592710	0,719005053	3,51
175	3,054326191	0,348622972	0,364081543	4,43
180	3,141592654	0	≈ 0	-

Esta tabela refere-se ao exemplo 3.3-2

Tabela A-2

t grau	t radiano	$i(t)$	$i(t)$ aproximado	Erro % (módulo)
0	0	0	0	-
5	0,087266463	0,029575647	0,030985443	4,77
10	0,174532925	0,114758505	0,119475247	4,11
15	0,261799388	0,250234524	0,259013600	3,51
20	0,349065851	0,430696814	0,443448164	2,96
25	0,436332313	0,650853428	0,666904721	2,47
30	0,523598776	0,905437772	0,923763936	2,02
35	0,610865238	1,189221346	1,208640044	1,63
40	0,696131701	1,501012523	1,509090172	0,54
45	0,785398164	1,823752510	1,841952310	1,00
50	0,872664626	2,164374077	2,180617174	0,75
55	0,959931089	2,513979522	2,527724945	0,55
60	1,047197551	2,867780842	2,878795598	0,38
65	1,134464014	3,221135882	3,229487496	0,26
70	1,221730477	3,569568790	3,575585786	0,17
75	1,308996939	3,908790477	3,912991840	0,11
80	1,396263402	4,234718788	4,237713510	0,07
85	1,483529864	4,543498120	4,545856270	0,05
90	1,570796327	4,831518304	4,833315010	0,04
95	1,658062790	5,095432472	5,097286800	0,04
100	1,745329252	5,332173704	5,333480520	0,02
105	1,832595715	5,538970364	5,539305320	0,01
110	1,919862177	5,713359732	5,712347940	0,02
115	2,007128640	5,853200024	5,850632820	0,04
120	2,094395102	5,956680456	5,952585470	0,07
125	2,181661565	6,022329364	6,016999000	0,09
130	2,268928027	6,049020160	6,043003390	0,10
135	2,356194491	6,035975148	6,030037380	0,10
140	2,443460954	5,982767064	5,977822580	0,08
145	2,530727416	5,889318304	5,886339880	0,05
150	2,617993879	5,755897756	5,755807820	≈ 0
155	2,705260341	5,583115864	5,586662580	0,06
160	2,792526804	5,371915896	5,379540130	0,14
165	2,879793266	5,123564964	5,135259090	0,23
170	2,967059729	4,839641232	4,854805750	0,31
175	3,054326191	4,522019700	4,539319970	0,38
180	3,141592654	4,172855672	4,190082470	0,41

Tabela A-2 (continuação)

t grau	t radiano	$i(t)$	$i(t)$ aproximado	Erro % (módulo)
190	3,316125579	3,504569505	3,519037460	0,41
200	3,490658504	2,943309902	2,955460802	"
220	3,839724354	2,076053873	2,084624470	"
240	4,188790206	1,464337707	1,470382949	"
270	4,712388981	0,867451469	0,871032579	"
300	5,235987756	0,513865106	0,515986502	"
330	5,759586533	0,304405902	0,305662584	"
360	6,283185308	0,180325444	0,181069884	"
400	6,981317008	0,089714422	0,090084791	"
450	7,853981635	0,037485977	0,037640731	"
500	8,726646262	0,015663016	0,015727678	"
540	9,424777962	0,007792569	0,007824739	"
570	9,948376737	0,004616200	0,004635257	"
600	10,471975510	0,002734567	0,002745856	"

Esta tabela refere-se ao exemplo 3.3-3

Tabela A-3

t grau	t radiano	$y(t)$	$y(t)$ aproximado	Erro % (módulo)
0	0	0	0	-
5	0,087266463	0,000423890	0,000444825	4,94
10	0,174532925	0,003240772	0,003384323	4,43
15	0,261799388	0,010440686	0,010853141	3,95
20	0,349065851	0,023596654	0,024422942	3,50
25	0,436332313	0,043891426	0,045244759	3,08
30	0,523598776	0,072145814	0,074090442	2,70
35	0,610865238	0,108848109	0,111392747	2,34
40	0,696131701	0,155917062	0,154834932	0,69
50	0,872664626	0,270168947	0,274073406	1,45
60	1,047197551	0,416680542	0,420832968	0,10
70	1,221730477	0,587358754	0,591224960	0,66
80	1,396263402	0,773787175	0,777034892	0,42
90	1,570796327	0,966303661	0,968855643	0,26
100	1,745329252	1,154724502	1,156636624	0,17
110	1,919862177	1,328974788	1,330236559	0,09
120	2,094395102	1,479621711	1,480135942	0,03
130	2,268928027	1,598310590	1,598025526	0,02
140	2,443460954	1,678105634	1,677163906	0,06
150	2,617993879	1,713739087	1,712549506	0,07
160	2,792526804	1,701773481	1,700952866	0,05
170	2,967059729	1,640682641	1,640848726	0,01
180	3,141592654	1,530857731	1,532280936	0,09
200	3,490658504	1,199320574	1,175842252	1,96
220	3,839724354	0,828218050	0,816184894	1,45
240	4,188790206	0,501222167	0,496951590	0,85
260	4,537856056	0,252379173	0,252704682	0,13
280	4,886921906	0,085193395	0,087749567	3,00
320	5,585053608	-0,059125135	-0,056119676	5,08
360	6,283185308	-0,066154361	-0,064496197	2,51
400	6,981317008	-0,035790547	-0,035270547	1,45
460	8,028514560	-0,003681540	-0,003792003	3,00
520	9,075712112	0,003115491	0,003012693	3,30
580	10,122909660	0,001546650	0,001524179	1,45

Esta tabela refere-se ao exemplo 3.3-4

Simbologia

C - capacitância (Farad) ou, quando usada como índice, indicação de que uma dada expressão está sendo considerada "*na forma complexa*".

$e(t)$ - tensão (Volt).

h, h_i - amplitude de sub-intervalo.

$h(t)$ - *resposta ao impulso* de um circuito.

i - índice (de modo geral).

$i(t)$ - corrente (Ampère).

L - indutância (Henry).

n - grau de polinômio ou número de pontos amostrados de uma função.

P - operador diferencial de Heaviside.

p_i - raiz de ordem i da equação característica.

R - resistência (ohm).

$r(t)$ - *resposta ao degrau* de um circuito.

S_i - derivada de segunda ordem de uma função de t no ponto t_i.

$s(t)$ - *resposta a rampa* unitária de um circuito.

T - constante de tempo de circuito.

$U_0(t)$ - função impulso unitário.

$U_{-1}(t)$ - função degrau unitário.

$U_{-2}(t)$ - função rampa unitária.

$U_1(t)$ - função *doublet* unitário.

$U_K(t)$ - função singular gerada pela derivada de ordem K da função impulso unitário.

$U_{-K}(t)$ - função singular gerada pela integração sucessiva, e de ordem K, da função impulso unitário.

$y_H(t)$ - solução complementar de uma equação diferencial.

$y_p(t)$ - solução particular de uma equação diferencial.

$z(t)$ - *resposta a parábola unitária* de um circuito.

α - inverso da constante de tempo.

Δx_i - diferença de primeira ordem da função x.

$\Delta^2 x_i$ - diferença de segunda ordem da função x.

τ - duração de um pulso.

ω - frequência angular (pulsação).

0_- - instante imediatamente antes de $t = 0$.

0_+ - instante imediatamente depois de $t = 0$.

$\doteq$ - indica que o membro da direita de uma expressão não está escrito com todas as suas parcelas.

$\longrightarrow\!\triangleright$ - direção positiva de referência para correntes.

$\longrightarrow$ - direção positiva de referência para tensões ou representação gráfica de função impulsiva.

* - representa a convolução de duas funções.

Bibliografia

1 - *Close*, Charles M., The Analysis of Linear Circuits, Harcourt, Brace & World, Inc, New York/Chicago/Burlingame - 1966.

2 - *Kuo*, Franklin F., Network Analysis and Synthesis, John Wiley & Sons, Inc., New York/London/Sydney - 1968.

3 - *Desoer*, Charles A. and Ernest S. *Kuh*, Basic Circuit Theory, McGraw-Hill Book Company, New York/San Francisco/St. Louis / Toronto/London/Sydney - 1966.

4 - *Ku*, Y.H., Transient Circuit Analysis, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton/New Jersey/Toronto/New York/London - 1961.

5 - *Stanley*, William D., Transform Circuit Analysis for Engineering And Technology, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey - 1968.

6 - *Hayt* Jr., William H. e Jack E. *Kemmerly*, Análise de Circuitos em Engenharia, McGraw-Hill do Brasil Ltda, São Paulo/Rio de Janeiro/Belo Horizonte - 1973.

7 - *Boffi*, Luiz V. e Júlio A.M. *Coutinho*, Elementos de Análise de Sistemas Lineares, ETEGIL, São Paulo - 1966.

8 - *Hsu*, Hwei P., Análise de Fourier, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro - 1973.

9 - *Ayres* Jr, Frank, Equações Diferenciais, Ao Livro Técnico Ltda - Rio de Janeiro - 1958.

10 - *Gerald*, Curtis F., Applied Numerical Analysis, Addison Wesley Publishing Company - 1970.

11 - *Pennington*, Ralph H., Introductory Computer Methods and Numerical Analysis, Collier - MacMillan Student Editions, New York - 1965.

12 - *Dirac*, P.A.M., "The Principles of Quantum Mechanics" - Oxford University Pres, 1930.

13 - *Temple*, G., "The Theory of Generalized Functions" - Proc. Royal Society, A, 228, 1955, 175 - 190.

14 - *Schwartz*, L., Theorie des Distributions, Vols. I et II, Herman et Cie, Paris, 1950 et 1951.

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200057
NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA