

TESE

92



11 NOV 1975

PROF. ADJ. PAULO ROBERTO WILSON

OPERAÇÃO ÓTIMA DOS SISTEMAS
ELETRICOS DE POTÊNCIA

Tese apresentada à ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ como parte das exigências do Concurso de Livre Docência.

Otto J. M. Smith, Ph. D.
Orientador

Julho de 1975

BANCA EXAMINADORA:

1.

2.

3.

4.

5.

Conceito: _____

Data: _____

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado a meus pais
Maria Helena e Roberto.

A G R A D E C I M E N T O S

À Universidade Federal de Santa Maria pelo estímulo que me foi dado.

À Escola Federal de Engenharia de Itajubá pela orientação que me dispensou na elaboração deste trabalho.

Ao Professor Homer E. Brown pela habilidade com que ensina os métodos computacionais e a amabilidade com que trata seus discípulos motivando-os para o sucesso.

Í N D I C E

	Pág.
RESUMO	ix
INTRODUÇÃO	1

PRIMEIRA PARTE

CAPÍTULO 1 - MÉTODOS MATEMÁTICOS USADOS NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO FLUXO DE POTÊNCIA	6
1.1 - Métodos diretos de solução de sistemas de equações lineares	7
1.1.1 - Solução pelo uso de determinantes	7
1.1.2 - Pelo uso da decomposição triangular	10
1.1.3 - Pelo uso do Método de Gauss-Jordan	12
1.2 - Métodos iterativos de solução de sistemas de equações lineares	13
1.2.1 - Método de Gauss	13
1.2.2 - Método de Gauss-Seidel com deslocamentos sucessivos	16
1.2.3 - Método de Gauss-Seidel com correções sucessivas	17
1.2.4 - Método de relaxação	18
1.2.5 - Aceleração nos processos iterativos	20
1.2.6 - Extrapolação	22
CAPÍTULO 2 - CARACTERÍSTICAS OPERACIONAIS DOS SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA E O PROBLEMA DO FLUXO DE POTÊNCIA .	23
2.1 - Características operacionais dos sistemas de potência .	23
2.1.1 - Um exemplo demonstrativo	23
2.1.2 - Equações do Fluxo de Potência Estático (EFPE) .	25
2.1.3 - Classificação das variáveis do sistema	28
2.1.4 - Primeira tentativa de solução das E.F.P.E.	29
2.1.5 - Segunda tentativa de solução das E.F.P.E.	30
2.1.6 - Restrições operacionais do sistema	31
2.1.7 - Terceira tentativa de solução das E.F.P.E.	34

2.1.8 - Classificação das barras segundo as variáveis pré-especificadas	35
2.2 - Formulação do problema do fluxo de potência	36
2.2.1 - Regras para a formação de uma matriz generalizada das admitâncias nodais	36
2.2.2 - A esparsidade de \bar{Y}	40
2.3 - Solução do fluxo de potências usando as correntes nodais	41
2.3.1 - Introdução	41
2.3.2 - Solução do fluxo de potência por métodos diretos	42
2.3.3 - Método direto com substituição em bloco e matriz \bar{Y}	46
2.3.4 - Método direto com substituição em avanço e matriz \bar{Y}	48
2.3.5 - Método direto com corrente residual nula	51
2.3.6 - Solução do fluxo de potência pelos Métodos Iterativos de Gauss e Gauss-Seidel	53
2.3.7 - Solução do fluxo de potência pelo método de Newton-Raphson com matriz \bar{Y}	53
2.3.8 - Obtenção dos elementos da matriz Jacobiana	58
2.3.9 - Detalhes de montagem da matriz Jacobiana	62

SEGUNDA PARTE

CAPÍTULO 1 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS DAS TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO	66
1.1 - Métodos Diretos aplicados à otimização sem restrições	66
1.1.1 - Formulação do problema	66
1.1.2 - Solução variacional	67
1.1.3 - Solução algébrica	69
1.2 - Métodos Indiretos aplicados à otimização sem restrições	71
1.2.1 - Introdução	71
1.2.2 - Método do gradiente	72
1.3 - Conceitos básicos da minimização com restrições	75
1.3.1 - Máximos, mínimos e pontos de sela	75
1.3.2 - Problemas da dualidade	77
1.3.3 - Teoremas da dualidade	80
1.3.4 - Interpretação econômica das variáveis duais V_i e L_j	81
1.3.5 - Teorema de Lagrange	83

	Pág.
1.3.6 - Minimização com restrições de igualdade pelo Mé- todo de Lagrange	84
1.3.7 - Teorema de Kuhn-Tucker	86
1.3.8 - Análise das condições de Kuhn-Tucker	88
1.3.9 - Primeira interpretação econômica das variáveis duais de Kuhn-Tucker	94
CAPÍTULO 2 - O ESTUDO DA OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO DOS SISTEMAS DE POTÊNCIA EM REGIME PERMANENTE	97
2.1 - Revisão da formulação do problema do Fluxo de Potência.	97
2.2 - Estratégias de operação ótima	98
2.3 - O problema da programação generalizada	98
2.4 - Alocação ótima de geradores pelo critério de mínimo cus- to	99
2.4.1 - Relações de restrição	100
2.4.2 - Restrições de igualdade	100
2.4.3 - Restrições de desigualdade	101
2.4.4 - Estratégia de despacho ótimo	101
2.5 - Fórmula do despacho ótimo considerando-se só as restri- ções de igualdade	103
2.5.1 - Análise física do problema	105
2.5.2 - Despacho ótimo em um sistema com "n" barras ...	106
2.5.3 - Considerações computacionais	107
2.6 - Alocação ótima de geradores considerando as perdas nas linhas de transmissão	109
2.6.1 - Dedução da fórmula do despacho ótimo	109
2.6.2 - Estratégia do despacho ótimo para "2" barras ..	110
2.6.3 - Estratégia de despacho ótimo para um sistema de "n" barras	117
2.7 - Dedução da fórmula geral das perdas na transmissão	118
2.8 - Dedução de uma expressão geral para as P I T	122
2.9 - Procedimento computacional para determinar a estratégia de operação ótima incluindo as perdas nas linhas	128
2.10 - O problema geral da operação ótima	131
2.10.1 - Formulação matemática do problema	132
2.10.2 - Condições necessárias para a obtenção de C óti- mo	135
2.10.3 - Procedimento computacional para obter a estra- tégia de operação ótima pelo método do gra- diente	138

	Pág.
2.10.4 - Fluxo de Potência Ótimo pelo Método de Dommel- -Tinney	142
2.10.5 - Segunda interpretação das variáveis duais	150
2.10.6 - Fluxo de Potência Ótimo pelo enfoque de Rashed e Kelly	156
CAPÍTULO 3 - CONCLUSÕES	164
3.1 - Conclusões finais	164
3.2 - Comentários	165
3.3 - Futuros desenvolvimentos	165
BIBLIOGRAFIA	166

RESUMO

É feita uma revisão dos métodos diretos e iterativos usados na solução do Problema do Fluxo de Potência. É estudada a formulação do Problema do Fluxo de Potência com ênfase no Método de Newton-Raphson resolvido pelo Algoritmo de Tinney-Hart. É feita uma revisão das Técnicas de Otimização com ênfase no Método do Gradiente, nos Teoremas da Dualidade e na Interpretação Econômica das Variáveis Duais de Kuhn-Tucker. Todos os estudos feitos formam a base teórica para a criação de um procedimento que serve de fundamento para a construção de um algoritmo de Fluxo de Potência Ótimo com base nos trabalhos de Dommel-Tinney e Rashed-Kelly.

ABSTRACT

A review is done of direct and iterative methods used for solving the Power Flow Problem. Formulation of the Power Flow Problem is studied and emphasis is placed on Newton-Raphson's Method solved by Tinney-Hart's Algorithm. Optimization Techniques are reviewed and emphasis is placed on the Gradient Method, Duality Theorems and on the Economic Interpretation of Kuhn-Tucker's Dual Variables. All previous studies form the basic theory in order to devise a procedure that will be useful in the development of one Optimal Power Flow Algorithm under the Dommel-Tinney's and Rashed-Kelly's approaches.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho é um estudo em profundidade na área da Operação Ótima de Sistemas Elétricos de Potência que, em sentido amplo, pode ser dividido nas três etapas seguintes:

- 1 - Previsão de carga a curto e longo prazos;
- 2 - alocação econômica de geradores;
- 3 - operação econômica, ou despacho econômico, do sistema de produção de energia elétrica.

Atente-se que a primeira etapa se refere respectivamente à previsão de carga hora-a-hora para um dado dia, e a previsão da carga no período de um ou vários anos onde os picos de carga sazonais são previstos. A alocação econômica de geradores refere-se à determinação e ao uso de uma combinação ótima de geradores que possam suprir a demanda horária. Finalmente, a operação econômica, terceira etapa, refere-se à determinação das potências ativas e reativas que devem ser individualmente geradas por um conjunto de geradores previamente escolhidos, ou alocados, a fim de suprir uma dada demanda com custo mínimo.

Para a operação ótima e completa de um sistema de potência, estes três aspectos são frequentemente avaliados, hora-a-hora, na etapa 3 e em períodos mais longos nas etapas 1 e 2, e continuamente modificados a fim de ter-se um despacho ótimo. O procedimento geral levado a efeito por um centro de despacho de carga está ilustrado na figura 1.

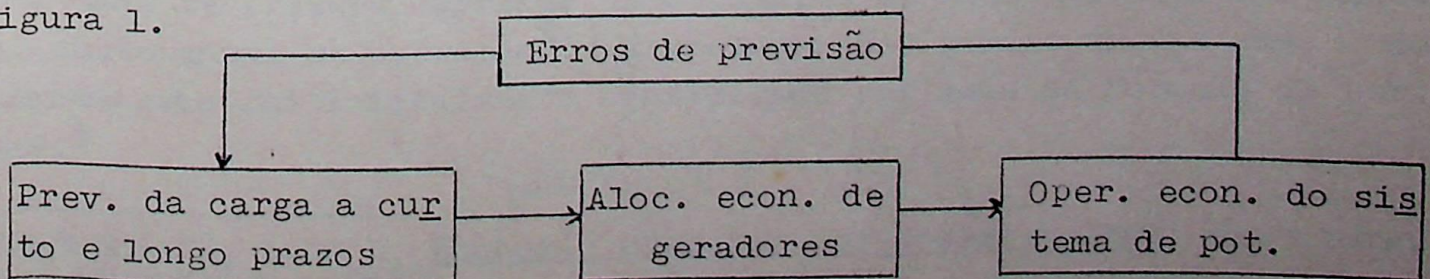


Fig. 1 - Procedimento do despacho ótimo de carga.

Devido à extensão e complexidade do tema, foi necessário fossem impostos limites ao estudo do mesmo. Isso foi feito de modo a não tirar a generalidade dos resultados permitindo, assim, a aplicação destes estudos a casos mais complexos. Assim é que o presente trabalho foi limitado ao estudo da terceira etapa para o caso de sistemas térmicos. Seus resultados podem ser ampliados para abarcar os sistemas hidrotérmicos.

Partindo-se das premissas de que as etapas 1 e 2 já foram vencidas, isto é, de que já se dispõe da previsão de carga a curto e longo prazos e de que já foi selecionado um conjunto de geradores para serem postos em serviço, pode-se dizer que o presente trabalho tem os seguintes objetivos:

- 1 - Responder à pergunta: Como determinar as potências dos geradores em serviço de modo a satisfazer as exigências de consumo e minimizar, simultaneamente, as despesas de geração?
- 2 - Tornar acessível aos estudantes de Engenharia Elétrica um livro-texto sobre operação econômica de sistemas elétricos escrito dentro de um enfoque atualmente só encontrado em periódicos científicos de difícil acesso a muitos estudantes.

A crescente alta no preço dos combustíveis e o limitado potencial hidráulico dos rios são apenas dois dos muitos fatores que mostram a importância e a necessidade dos estudos mencionados. Há ainda a salientar a carência de livros-textos, mesmo estrangeiros, que tratam do assunto de um modo mais atualizado já que as obras mais conhecidas¹ e ² foram escritas na década de 50.

Muitas das antigas pesquisas no estudo da operação econômica de sistemas foram primeiramente dirigidas para unidades térmicas operando em paralelo. Isso resultou na teoria do carregamento incremental onde se procura carregar os geradores de modo a obter-se o mínimo custo anual de operação.^{1,3} A inclusão das perdas do sistema de transmissão foi inicialmente considerada por meio da fórmula de perdas.¹

¹KIRCHMAYER, Leon K. Economic operation of power systems. New York, John Wiley, 1958.

²KIRCHMAYER, Leon K. Economic control of interconnected systems. New York, John Wiley and sons, 1959.

³STEINBERG, M.J. e SMITH, T.H. The theory of incremental rates. Periódico, Electrical Engineering, USA, march, april, 1934.

Embora esta fórmula se baseie em uma série de simplificações, ela ainda presta bons serviços com erros de apenas algumas unidades por cento. Há métodos muito sofisticados ainda em uso, para o cálculo dos coeficientes da fórmula de perdas.⁴

Usando a equação de Euler do cálculo variacional Cypser,⁵ desenvolveu em 1953 um conjunto de equações de programação que permitiam atingir a economia máxima.

Em 1960, Bernholtz e Graham,⁶ apresentaram uma solução, pelo método de programação dinâmica, ao problema da otimização da operação de um sistema hidrotérmico.

Em 1964, Dahlin⁷ considerou a aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin, junto com a programação dinâmica, ao problema do despacho econômico de um sistema hidrotérmico.

Deve-se notar que, já em 1958, Carpentier⁸ apresentou uma importante contribuição ao modificar as soluções de despacho econômico então existentes, de modo a permitir a inclusão de um modelo exato da rede de transmissão. Ele mostrou que o problema da otimização da operação do sistema é de natureza da programação não linear e deduziu as condições de ótimo usando técnicas de programação não linear. Uma outra importante contribuição foi dada, em 1968, por Tinney e Dommel.⁹ Nesse caso, as soluções do fluxo de potência ótimo são obtidos para um sistema térmico pelo Método de Newton. O mínimo é obtido por meio de um algoritmo de ajustamento por técnica de gradiente.

⁴HOHENSTEIN, H.H. Happ; KIRCHMAYER, L.R.; STAGG, G.W. Direct calculation of transmission loss formula II. IEEE Trans., New York, V.PAS 83. pp 702-707, 1964.

⁵CYPSEER, R.J. Computer search for economical operation of a hydro-thermal electric system. AIEE Trans., New York, pp.1260-67, 1954.

⁶BERNHOLTZ, B. e GRAHAM, L.V. Hydro-thermal economic scheduling. AIEE Trans. New York, 1960.

⁷DAHLIN, E. B. Theoretical and computational aspects of optimal principles with special application to power system operation. AIEE Trans., Doctoral dissertation. Pennsylvania, 1964.

⁸CARPENTIER, J. Contribution a l'étude du dispatching économique. Bul. Soc. Franc. Elect., França, v. 3. August, 1962.

⁹DOMMEL, H.W. e TINNEY, W. F. Optimal power flow solutions. IEEE Trans., New York, v. PAS 87. pp. 1866-76, 1968.

Em 1969, Sasson¹⁰ apresentou um enfoque unificado de perda mínima e custo mínimo. Ele fez uma investigação dos vários métodos de programação não linear aplicáveis ao problema considerado.

Finalmente em 1974, Rashed e Kelly¹¹ propuseram o uso de uma técnica de gradiente de segunda ordem para corrigir as deficiências do método de Dommel e Tinney. Nesse caso, a matriz hessiana é usada para corrigir as variáveis de controle. O método dá boa convergência e requer menos memória que os demais.

Na primeira parte do presente trabalho procurou-se dar, em primeiro lugar, uma sólida fundamentação através de uma revisão da análise de sistemas elétricos especialmente orientada para a imediata aplicação ao problema do fluxo de potência ótimo. Assim, esta fundamentação diz respeito aos métodos matemáticos e às características operacionais dos sistemas de potência. Isso visa dar uma melhor idéia do funcionamento físico do sistema e de como este funcionamento pode ser simulado em um modelo matemático. Uma especial atenção foi dada aos detalhes computacionais do Método de Newton-Raphson. A seguir, passa-se à segunda parte que trata das técnicas de otimização, primeiro, em seus fundamentos teóricos, onde um especial cuidado é dispensado aos problemas da dualidade e ao teorema de Kuhn-Tucker; depois, se passa à aplicação destas técnicas de otimização à operação dos sistemas elétricos de potência. O estudo é feito no sentido de prover sólidas bases para a compreensão e uso das idéias expostas nos trabalhos de Dommel e Tinney e de Rashed e Kelly já citados, na solução dos problemas nacionais da operação econômica de sistemas elétricos de potência.

Na primeira parte, o capítulo 1 descreve, de modo sucinto, os métodos matemáticos que foram ou estão sendo usados na solução do problema do fluxo de carga. É dada uma visão objetiva dos principais métodos permitindo uma avaliação mais realista dos resultados que se pode esperar dos diferentes métodos de fluxo de potência otimizados que tomam por base um ou outro daqueles métodos matemáticos.

¹⁰SASSON, A.M. Nonlinear programming solutions for the load flow, minimum loss and economic dispatching problems. IEEE Trans., New York. V.PAS. 88. pp. 399-409, 1969.

¹¹RASHED, A.M.H. e KELLY, D.H. Optimal load flow using lagrangian multipliers and the hessian matrix. IEEE Trans., New York, January, February, 1974.

O capítulo 2 aprofunda-se no estudo das características operacionais dos sistemas de potência visando a formulação matemática do problema do fluxo de potência realizável, não ótimo, com base nos métodos matemáticos estudados no capítulo anterior e nas características físicas do sistema. É adotado um enfoque de espaço de estado. A solução do fluxo de potência é obtida pelo Método de Newton-Raphson, com as variáveis classificadas em três categorias diferentes.

Já na segunda parte, o capítulo 1 apresenta os fundamentos teóricos das técnicas de otimização mais usadas na operação de sistemas elétricos de potência. Além de auxiliar na compreensão dos vários tipos de modelos de fluxo de potência otimizados que são publicados em periódicos altamente especializados, este capítulo serve de base para o seguinte.

No capítulo 2, aplica-se tudo o que foi estudado nos capítulos anteriores na solução do problema da operação econômica através do estudo da otimização da operação dos sistemas de potência em regime permanente. As equações que definem a condição ótima de funcionamento do sistema são estudadas em detalhe visando facilitar a construção de algoritmos computacionais dentro de um enfoque de programação generalizada.

Seguem-se as conclusões e comentários sobre o trabalho e a exposição das etapas de desenvolvimento futuro desse vasto e complexo campo que é a operação econômica dos sistemas elétricos de potência.

Quanto a questão referente à simbologia, foram usados os símbolos de acordo com a fonte na qual o trecho em questão está baseado. Assim as convenções não são as mesmas para o trabalho inteiro. Mas cada símbolo é definido sempre que é usado pela primeira vez.

Além disso, tem-se o símbolo:

E.F.P.E. = Equações do Fluxo de Potência Estático.

PRIMEIRA PARTE

CAPÍTULO 1 - MÉTODOS MATEMÁTICOS USADOS NA SOLUÇÃO DO FLUXO DE POTÊNCIA

Na opinião de Sparrow,¹² na maioria dos casos, o maior problema na operação, ou no planejamento de um sistema elétrico de potência é a determinação dos valores da corrente, ou da potência, que flui nas várias linhas, transformadores, etc., do sistema, quando nos são dadas certas condições de carga e certos parâmetros do sistema.

Escrevendo as equações representativas de um sistema, encontraremos um conjunto de equações simultâneas não lineares relacionando as tensões e correntes do sistema. Veremos, adiante, que as equações da própria rede são lineares e que a não linearidade é introduzida pela natureza das cargas.

Na prática, o método nodal de formação das equações da rede é quase que o único a ser usado. Os métodos em uso para a solução das equações assim formadas são baseados em métodos padronizados para a solução de conjuntos de equações lineares simultâneas. Para ressaltar a diferença entre os vários métodos de solução das equações do fluxo de potência, estuda-se primeiro os métodos padronizados para a solução de conjuntos de equações lineares simultâneas e, a seguir, estuda-se as modificações a serem introduzidas para levar em conta as não linearidades das equações do fluxo de potência, além de tirar vantagem da esparsidade das matrizes de coeficientes.

Na solução de conjuntos de equações lineares simultâneas consi

¹² SPARROW, David C. Análise de sistemas de potência II. Apostila do curso de pos-graduação da EFEI. Itajuba, MG, 1974. p. 5.

PRIMEIRA PARTE

CAPÍTULO 1 - MÉTODOS MATEMÁTICOS USADOS NA SOLUÇÃO DO FLUXO DE POTÊNCIA

Na opinião de Sparrow,¹² na maioria dos casos, o maior problema na operação, ou no planejamento de um sistema elétrico de potência é a determinação dos valores da corrente, ou da potência, que flui nas várias linhas, transformadores, etc., do sistema, quando nos são dadas certas condições de carga e certos parâmetros do sistema.

Escrevendo as equações representativas de um sistema, encontraremos um conjunto de equações simultâneas não lineares relacionando as tensões e correntes do sistema. Veremos, adiante, que as equações da própria rede são lineares e que a não linearidade é introduzida pela natureza das cargas.

Na prática, o método nodal de formação das equações da rede é quase que o único a ser usado. Os métodos em uso para a solução das equações assim formadas são baseados em métodos padronizados para a solução de conjuntos de equações lineares simultâneas. Para ressaltar a diferença entre os vários métodos de solução das equações do fluxo de potência, estuda-se primeiro os métodos padronizados para a solução de conjuntos de equações lineares simultâneas e, a seguir, estuda-se as modificações a serem introduzidas para levar em conta as não linearidades das equações do fluxo de potência, além de tirar vantagem da esparsidade das matrizes de coeficientes.

Na solução de conjuntos de equações lineares simultâneas consi

¹²SPARROW, David C. Análise de sistemas de potência II. Apostila do curso de pós-graduação da EFEI. Itajuba, MG, 1974. p. 5.

dere-se um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots + a_{1n}X_n &= Y_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \dots + a_{2n}X_n &= Y_2 \\ \dots & \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + \dots + a_{nn}X_n &= Y_n \end{aligned} \quad (1)$$

Quer-se determinar os valores de X_1, X_2, \dots, X_n dados os valores de Y_1, Y_2, \dots, Y_n e os coeficientes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$.

Este conjunto de equações pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\bar{A} \bar{X} = \bar{Y} \quad (2)$$

onde \bar{A} é a matriz dos coeficientes e \bar{X} é o vetor-coluna das incógnitas.

Basicamente existem dois métodos para resolver a equação acima:

- a) Diretamente, através da inversão de \bar{A} , isto é, pela obtenção de \bar{A}^{-1} . Assim é que, premultiplicando ambos os lados de (2) por \bar{A}^{-1} , tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{A}^{-1} \bar{A} \bar{X} &= \bar{A}^{-1} \bar{Y} \\ \bar{I} \bar{X} &= \bar{A}^{-1} \bar{Y} \\ \bar{X} &= \bar{A}^{-1} \bar{Y} \end{aligned} \quad (3)$$

Todos os métodos diretos dão ênfase na obtenção de \bar{A}^{-1} a fim de determinar \bar{X} , como ver-se-á a seguir.

- b) Iterativamente, por meio de uma estimativa inicial para o vetor das incógnitas, \bar{X} , a qual será chamada de \bar{X}_0 .

Usa-se, então, uma fórmula que utiliza os elementos de \bar{A} e de \bar{Y} a qual faz uma correção no valor da primeira estimativa, X_0 , e fornece um valor mais preciso, \bar{X}_1 .

Os vários métodos iterativos diferem principalmente na maneira pela qual esta fórmula é deduzida.

1.1 - Métodos diretos de solução de sistemas de equações lineares.

1.1.1 - Solução pelo uso de determinantes.

Dado o conjunto de equações

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = Y_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = Y_2$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = Y_3$$

ou

$$\bar{A} \bar{X} = \bar{Y} \quad (4)$$

escreve-se o determinante da matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Seja A_{11} o cofator de a_{11} , isto é: $A_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}$

Seja A_{21} o cofator de a_{21} , etc.

Então, multiplicando-se a primeira equação por A_{11} , a segunda por A_{21} e a terceira por A_{31} , tem-se:

$$a_{11}A_{11}X_1 + a_{12}A_{11}X_2 + a_{13}A_{11}X_3 = A_{11}Y_1$$

$$a_{21}A_{21}X_1 + a_{22}A_{21}X_2 + a_{23}A_{21}X_3 = A_{21}Y_2 \quad (6)$$

$$a_{31}A_{31}X_1 + a_{32}A_{31}X_2 + a_{33}A_{31}X_3 = A_{31}Y_3$$

somando-se as equações resultantes:

$$X_1(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31}) + X_2(A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32}) + X_3(A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33}) = A_{11}Y_1 + A_{21}Y_2 + A_{31}Y_3$$

e pelas regras dos determinantes tem-se:

$$A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} = |A|$$

$$A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32} = 0$$

$$A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33} = 0$$

então:

$$X_1 |A| = A_{11}Y_1 + A_{21}Y_2 + A_{31}Y_3$$

ou

$$X_1 = \left(\frac{1}{|A|}\right) A_{11}Y_1 + A_{21}Y_2 + A_{31}Y_3$$

ou

$$X_1 = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

de modo similar tem-se:

$$X_2 = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{12} & A_{22} & A_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

Assim determina-se as incógnitas X_1 , X_2 e X_3 .

Note-se que as equações de X_1 , de X_2 e de X_3 podem ser combinadas em forma matricial e serem assim expressas:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Comparando-se (7) com (3), $\bar{X} = \bar{A}^{-1} \bar{Y}$, é evidente que:

$$\bar{A}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Assim (8) é a Regra de Cramer para a formação da inversa de uma matriz.

Dependência Linear das Equações:

A equação (8) mostra um ponto importante com respeito à solução direta de conjuntos de equações, isto é, que não é possível achar-se uma solução se $|A| = 0$. Esta condição aparece quando existe uma dependência linear no conjunto de equações, isto é, quando uma ou mais das equações pode ser formada pela combinação linear de duas ou mais das outras equações do conjunto. Tal equação é redundante e faz com que $|A|$ seja zero.

A matriz \bar{A} é, então, chamada de matriz singular.

Exemplo:

Tomando-se o conjunto de equações:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 2$$

$$3X_1 + 2X_3 = 1$$

$$2X_1 - X_2 + X_3 = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 1(0 \cdot 1 + 2 \cdot 1) - 1(3 \cdot 1 - 2 \cdot 2) + \\ + 1(3 \cdot -1 - 0 \cdot 2) = 2 + 1 - 3 = 0$$

Ao examinar-se o conjunto de equações, vê-se que a segunda equação pode ser obtida pela adição das outras duas. Desta maneira ela é redundante, $|A| = 0$, e \bar{A} é singular.

Note-se que foram dadas três equações a três incógnitas, porém a redundância reduz o sistema a duas equações, com três incógnitas e torna-o insolúvel.

1.1.2 - Pelo uso da decomposição triangular.

Pela combinação de equações vai-se eliminando sucessivamente as incógnitas até ficar-se com uma equação e uma incógnita. Então se determina o valor desta incógnita e substitui-se seu valor em sentido inverso, backward-substitution, de maneira a ir sucessivamente de terminando as outras incógnitas.

Seja o sistema de equações (5):

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = Y_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = Y_2$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = Y_3$$

Seguem-se os seguintes passos:

1 - Divide-se a primeira equação pelo seu primeiro coeficiente a_{11} :

$$X_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} X_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} X_3 = \frac{Y_1}{a_{11}}$$

ou

$$X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 = g_1 \quad (9)$$

2 - Elimina-se X_1 de cada uma das restantes equações ao multi

plicar-se (9) pelo primeiro coeficiente da equação considerada, criando-se uma nova equação, a qual é diminuída da equação considerada:

$$X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 = g_1$$

$$(a_{21} - a_{21})X_1 + (a_{22} - a_{21}b_{12})X_2 + (a_{23} + a_{21}b_{13})X_3 = Y_2 - a_{21}g_1$$

$$(a_{31} - a_{31})X_1 + (a_{32} - a_{31}b_{12})X_2 + (a_{33} - a_{31}b_{13})X_3 = Y_3 - a_{31}g_1$$

ou

$$X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 = g_1$$

$$a_{22}'X_2 + a_{23}'X_3 = Y_2' \quad (10)$$

$$a_{32}'X_2 + a_{33}'X_3 = Y_3'$$

3 - Divide-se a segunda das equações de (10) pelo seu primeiro coeficiente:

$$X_2 + \frac{a_{23}'}{a_{22}'}X_3 = \frac{Y_2'}{a_{22}'}$$

ou

$$X_2 + b_{23}X_3 = g_2 \quad (11)$$

4 - Elimina-se X_2 de cada uma das equações restantes:

$$X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 = g_1$$

$$X_2 + b_{23}X_3 = g_2$$

$$(a_{32}' - a_{32}')X_2 + (a_{33}' - a_{32}'b_{23})X_3 = Y_3' - a_{32}'g_2$$

ou

$$X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 = g_1$$

$$X_2 + b_{23}X_3 = g_2 \quad (12)$$

$$a_{33}''X_3 = Y_3''$$

5 - Divide-se a terceira equação de (12) pelo seu primeiro coeficiente e tem-se:

$$X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 = g_1$$

$$X_2 + b_{23}X_3 = g_2 \quad (13)$$

$$X_3 = g_3$$

Até aqui seguiu-se um curso direto (forward-course) e obteve-se um conjunto, de forma triangular, de equações. Obteve-se explicitamente o valor de X_3 , o que permite sua substituição em curso inverso (backward substitution), para obter-se os valores de X_2 e de X_1 .

Rearranjando-se as equações (13), tem-se:

$$\begin{aligned} X_1 &= g_1 - b_{12}X_2 - b_{13}X_3 \\ X_2 &= g_2 - b_{23}X_3 \\ X_3 &= g_3 \end{aligned} \quad (14)$$

que, comparando-se com:

$$\bar{X} = \bar{A}^{-1}\bar{Y}$$

e levando-se em conta que g_3 é função de Y_1, Y_2, Y_3 , vem a indicar que é possível obter-se a terceira linha de \bar{A}^{-1} desde que se registrem as operações efetuadas sobre Y_1, Y_2 e Y_3 de modo a criar g_3 . De maneira semelhante, as operações que resultaram em g_2 e b_{23} darão a segunda linha de \bar{A}^{-1} . As operações que deram g_1, b_{12} e b_{13} darão a sua primeira linha. Deste modo, pode-se achar o inverso de \bar{A} aplicando-se a eliminação gaussiana.

1.1.3 - Pelo uso do Método de Gauss-Jordan

Esta modificação do Método de Gauss elimina a necessidade da substituição em sentido inverso para obter-se os valores de X_1, X_2 , etc. O processo é idêntico àquele de Gauss mas só até o ponto em que X_2 é eliminado da terceira e das seguintes equações. Agora, porém, X_2 também é eliminado da primeira equação. Então X_3 é eliminado da quarta e das seguintes equações. Mas agora ele, também, é eliminado da primeira e da segunda equações, etc.

Finalmente, tem-se um conjunto, de forma diagonal, de equações em vez da forma triangular dada pelo método de Gauss, isto é, tem-se:

$$\begin{aligned} X_1 &= g_1 \\ X_2 &= g_2 \\ X_3 &= g_3 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ X_n &= g_n \end{aligned}$$

Em qualquer estágio de eliminação dos métodos de Gauss ou de Gauss-Jordan pode ocorrer a perda de significantes dígitos nos coeficientes calculados. Para ultrapassar esta dificuldade, pode-se mudar a ordem de eliminação das variáveis. Um método que melhora a precisão é o da condensação pivotal. Neste método, seleciona-se o maior elemento (pivot) da matriz de coeficientes e elimina-se o correspondente X_j . Repete-se o processo para o sistema reduzido. Para a solução final, a ordem dos valores X_j dependerá da ordem de seleção dos elementos pivotaes.

1.2 - Métodos iterativos de solução de sistemas de equações lineares.

1.2.1 - Método de Gauss

Este método usa aproximações sucessivas para obter novos valores para as incógnitas em um conjunto de equações.

Seja o conjunto de equações lineares simultâneas:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n &= Y_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n &= Y_2 \\ \dots & \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n &= Y_n \end{aligned} \quad (15)$$

Pode-se escrever as equações deste conjunto sob a forma:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{a_{11}} (Y_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 \dots - a_{1n}X_n) \\ X_2 &= \frac{1}{a_{22}} (Y_2 - a_{21}X_1 - a_{23}X_3 \dots - a_{2n}X_n) \\ \dots & \\ X_n &= \frac{1}{a_{nn}} (Y_n - a_{n1}X_1 - a_{n2}X_2 \dots - a_{n,n-1}X_{n-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

Fazendo-se uma estimativa inicial dos valores das incógnitas $X_1 \dots X_n$, isto é, tomando-se a estimativa $X_1^0 \dots X_n^0$ e substituindo-se estes valores em (16), obtém-se uma estimativa mais precisa $X_1^1 \dots X_n^1$. Substitui-se agora em (16) a ultima estimativa e obtém-se valores mais precisos $X_1^2 \dots X_n^2$. Assim se itera até obter-se uma solução. Considera-se que a solução foi obtida quando os sucessivos valores de todos os X estão dentro de uma tolerância especificada, ou seja, se:

$$|X_j^k - X_j^{k+1}| < \epsilon \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, n$$

Note-se que isto não garante que a solução tem uma precisão igual à tolerância ϵ . A precisão da solução depende das características de convergência do conjunto de equações.

Este tipo de método e os métodos iterativos em geral, usualmente, fornecem uma solução se:

- a - Os elementos da matriz de coeficientes a_{11}, a_{22}, \dots etc., são grandes em comparação com os elementos de fora da diagonal. A convergência é acelerada porque os elementos "mútuos" são relativamente pequenos e X_n é controlado principalmente por a_{nn} .
- b - Se a estimativa inicial para $X_1^0 \dots X_n^0$ é razoável. Esta última condição é, em geral, facilmente conseguida quando se faz:

$$X_1 = \frac{Y_1}{a_{11}} \quad X_2 = \frac{Y_2}{a_{22}} \quad \dots \quad X_n = \frac{Y_n}{a_{nn}}$$

Caso o processo de iteração resulte em uma solução, diz-se que ele converge, ele pode divergir se os elementos da diagonal forem fracos, isto é, se forem pequenos quando comparados de fora da diagonal ou se o sistema físico descrito for instável ou marginalmente instável. No método descrito, os valores de $X_1^j \dots X_n^j$ achados na j ésimas iteração são substituídos nas equações (16) simultaneamente, de modo que se possa calcular $X_1^{j+1} \dots X_n^{j+1}$. Isto é conhecido como um processo de deslocamentos simultâneos já que os valores $X_1^j \dots X_n^j$ são substituídos simultaneamente em (16).

Exemplo do uso do Método de Gauss:

Elgerd¹³ cita o seguinte exemplo.

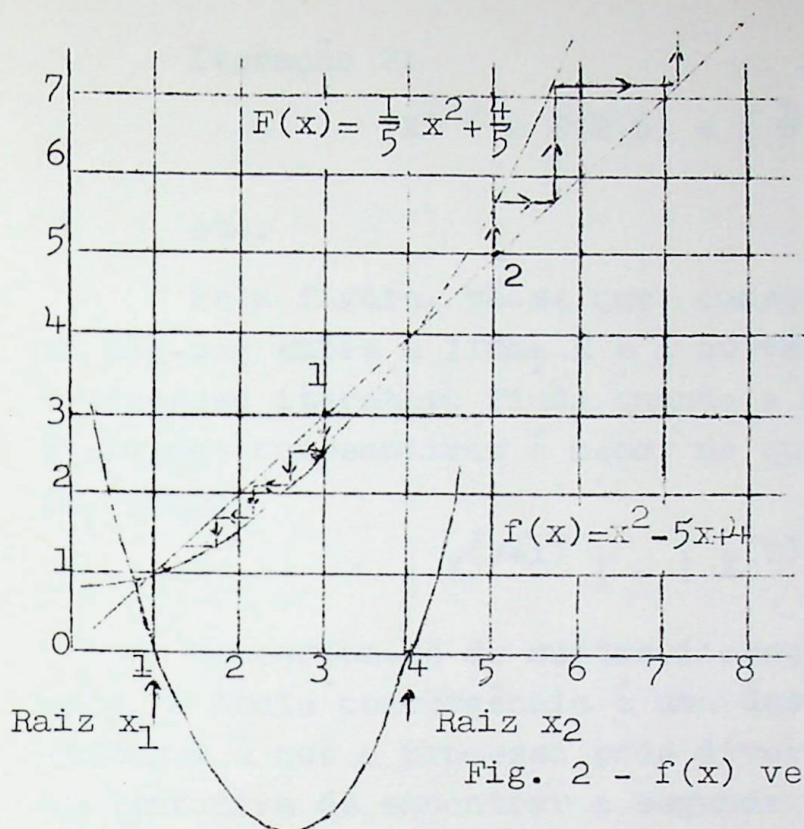
$$f(x) = x^2 - 5x + 4 = 0$$

É fácil confirmar-se que as raízes desta equação são:

$$X_1 = 1 \quad X_2 = 4$$

A figura a seguir mostra a plotagem da função $f(x)$ versus X .

¹³ELGERD, Olle I. Electric Systems Theory. New York, McGraw-Hill, 1971. p. 243.



A seguir, escreve-se a equação sob a forma:

$$X = \frac{1}{5} X^2 + \frac{4}{5}$$

Mais genericamente a forma acima é do tipo

$$X = F(x) \quad (A)$$

$F(x)$ não é única e, neste caso, por exemplo, ela poderia tomar a forma alternativa que é

$$X = \frac{5X - 4}{X}$$

O importante é que sempre é possível achar-se uma função $F(x)$ para qualquer função $f(x)$.

Com base na equação (A), escolhe-se agora o seguinte algoritmo iterativo computacional:

$$X^{(v+1)} = F(X^{(v)}) \quad (B)$$

onde " v " é a ordem da iteração.

Assim se tem os seguintes passos:

Iteração 0: Arbitra-se um valor inicial para a raiz procurada

$$X^{(0)} = 3$$

Iteração 1: A partir da equação de iteração (B), obtém-se:

$$X^{(1)} = F(3) = \left(\frac{1}{5}\right) 3^2 + \frac{4}{5} = 2,6$$

Iteração 2:

$$X^{(2)} = F(2,6) = \left(\frac{1}{5}\right) 2,6^2 + \frac{4}{5} = 2,15$$

etc.

Pela figura, vê-se que, começando-se no ponto 1, procede-se em zig-zag entre a linha X e a curva F(x) aproxima-se da raiz $X_1=1$. O processo iterativo finda quando a melhoria de precisão entre duas iterações consecutivas é menor do que uma certa tolerância ξ , ou seja, quando

$$|X^{(v+1)} - X^{(v)}| < \xi$$

Necessita-se de muitas iterações para chegar-se próximo à raiz. A lenta convergência é uma desvantagem deste método. Outra desvantagem é que o processo pode divergir o que é visto na figura 2, na tentativa de encontrar a segunda raiz, $X_2 = 4$. Começando-se em $X^{(0)} = 5$, o método realmente diverge. Quando o método de Gauss é usado na solução de fluxo de potência, é freqüente necessitar-se de mais de 100 iterações até obter-se a necessária precisão.

1.2.2 - Método de Gauss-Seidel com deslocamentos sucessivos.

Uma melhora na taxa de convergência das equações pode ser obtida pelo uso da técnica óbvia de usar-se o novo valor de X_k , ou seja, X_k^{j+1} , tão logo o mesmo seja obtido. Isto é conhecido como um processo de deslocamentos sucessivos. O método que o utiliza chama-se de Método de Gauss-Seidel.

Escrevendo-se as equações na ordem em que são calculadas, na iteração $j + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} X_1^{j+1} &= \frac{1}{a_{11}} (Y_1 - a_{12}X_2^j - a_{13}X_3^j \dots - a_{1n}X_n^j) \\ X_2^{j+1} &= \frac{1}{a_{22}} (Y_2 - a_{21}X_1^{j+1} - a_{23}X_3^j \dots - a_{2n}X_n^j) \\ X_3^{j+1} &= \frac{1}{a_{33}} (Y_3 - a_{31}X_1^{j+1} - a_{32}X_2^{j+1} - a_{34}X_4^j \dots - a_{3n}X_n^j) \\ &\dots\dots\dots \\ X_k^{j+1} &= \frac{1}{a_{kk}} (Y_k - a_{k1}X_1^{j+1} \dots - a_{k,k-1}X_{k-1}^{j+1} - a_{k,k+1}X_{k+1}^j \dots - \\ &\quad - a_{kn}X_n^j) \\ &\dots\dots\dots \\ X_n^{j+1} &= \frac{1}{a_{nn}} (Y_n - a_{n1}X_1^{j+1} - a_{n2}X_2^{j+1} \dots - a_{n,n-1}X_{n-1}^{j+1}) \end{aligned} \tag{17}$$

É evidente que x_n^{j+1} será calculado com base em um conjunto mais preciso de valores para x_1, \dots, x_{n-1} do que o seria se fosse usado o método de Gauss. Assim é que matematicamente se pode mostrar que a convergência se torna mais rápida.

1.2.3 - Método de Gauss-Seidel com correções sucessivas

Os métodos iterativos até agora descritos são aplicados para a determinação de novos valores das variáveis. Esta técnica é conhecida como um método de aproximações sucessivas.

O método das correções sucessivas é uma variação do procedimento descrito e serve para calcular correções a serem feitas num conjunto de valores da estimativa inicial. Para este esquema, cada variável x_k é a soma do seu valor inicial x_k^0 e as correções obtidas a cada passo do processo, ou seja,

$$x_k^j = x_k^0 + (x_k^1 - x_k^0) + (x_k^2 - x_k^1) \dots + (x_k^n - x_k^{n-1})$$

Seja a diferença nos valores de x_k obtida em duas iterações sucessivas dada por:

$$\alpha_k^{j+1} = x_k^{j+1} - x_k^j$$

Substituindo x_k^{j+1} e x_k^j pelas suas expressões equivalentes tiradas da equação (17), a fórmula para o cálculo das correções sucessivas é:

$$\begin{aligned} \alpha_k^{j+1} &= \frac{1}{a_{kk}} (Y_k - a_{k1}x_1^{j+1} \dots - a_{k,k-1}x_{k-1}^{j+1} - a_{k,k+1}x_{k+1}^j \dots - a_{kn}x_n^j) \\ &\quad - \frac{1}{a_{kk}} (Y_k - a_{k1}x_1^j \dots - a_{k,k-1}x_{k-1}^j - a_{k,k+1}x_{k+1}^{j-1} \dots - a_{kn}x_n^{j-1}) \end{aligned}$$

combinando os termos:

$$\begin{aligned} \alpha_k^{j+1} &= \frac{1}{a_{kk}} \left\{ (Y_k - Y_k) - a_{k1}(x_1^{j+1} - x_1^j) \dots - a_{k,k-1}(x_{k-1}^{j+1} - x_{k-1}^j) - \right. \\ &\quad \left. - a_{k,k+1}(x_{k+1}^j - x_{k+1}^{j-1}) \dots - a_{kn}(x_n^j - x_n^{j-1}) \right\} \end{aligned}$$

A fórmula resultante em termos de α é:

$$\begin{aligned} \alpha_k^{j+1} &= \frac{1}{a_{kk}} (-a_{k1}\alpha_1^{j+1} - a_{k2}\alpha_2^{j+1} \dots - a_{k,k-1}\alpha_{k-1}^{j+1} - a_{k,k+1}\alpha_{k+1}^j \\ &\quad \dots - a_{kn}\alpha_n^j) \end{aligned} \quad (17a)$$

riáveis $X_1^1 \dots X_n^1$ antes substituí-los no sistema (18). Esta técnica, ao ser usada em Processos de Relaxação, é conhecida como Substituição em Bloco. Pode-se, no entanto, tornar o Método de Relaxação análogo ao de Gauss-Seidel usando-se simplesmente os novos valores de X_k^1 tão logo sejam os mesmos obtidos. Tem-se uma convergência mais rápida, em menor número de iterações, do que no caso do Método de Gauss-Seidel. Mas isto é conseguido às expensas de um trabalho aritmético adicional porque todos os resíduos devem ser recalculados após cada substituição de um novo valor de X_k^j . Esta técnica, quando aplicada ao Processo de Relaxação, é conhecida como substituição direta (forward-substitution).

A superioridade dos Processos de Relaxação está no fato de que não é necessário operar-se na ordem em que as variáveis são dadas, isto é, $1 \dots n$, mas pode-se operar em uma ordem que depende apenas de R_n . O critério usual para um conjunto de equações lineares, simultâneas e reais é o de operar-se primeiro sobre o maior resíduo. Reduz-se a zero este resíduo pela mudança do valor de X_k e este novo X_k é então substituído no resto do conjunto de equações, substituição direta, e então o maior resíduo resultante é selecionado dentre todos os demais que compõem o sistema.

Este método dá convergência em menor número de iterações do que seria obtido caso as equações fossem tomadas em ordem direta. Necessita, porém, de um trabalho aritmético adicional. Isto põe em discussão um ponto importante com relação à solução de problemas por computadores. É o fato de que o verdadeiro critério de eficiência de um método é o tempo total de computação requerido e não apenas o número de iterações. Assim sendo, a eliminação do maior resíduo, em primeiro lugar, usualmente fornece uma resposta em menos iterações mas não necessariamente em menos tempo de computação.

Deve-se notar que outros critérios que não o do tamanho do resíduo podem ser usados para a decisão de qual deve ser o resíduo a ser eliminado por primeiro. Por exemplo, se as equações forem complexas, então

$$R_k = (a_k + jb_k) = |R_k| \angle \theta_k$$

e, neste caso, pode-se decidir com base no tamanho de a_k , b_k , $|R_k|$ ou de $\angle \theta_k$

1.2.5 - Aceleração nos processos iterativos.

A convergência pode ser mais rápida nos processos iterativos

pelo uso da "aceleração". Isto consiste na aplicação de uma correção na variável X_k que é maior do que aquelas calculadas usando-se um dos métodos precedentes.

Supondo-se que o valor de X_k é X_k^j na j -ésima iteração, leva-se adiante o processo iterativo pelo Método de Gauss, Gauss-Seidel ou de Relaxação, para obter-se um novo valor o qual se chama de $X_k^{(j+1)}$. O valor de X_k a ser usado com base na iteração $j+1$ é chamado de $X_{k,acel}^{j+1}$ e é computado a partir de:

$$X_{k,acel}^{j+1} = X_{k,acel}^j + \Delta X_k \quad (20)$$

$$\text{com } \Delta X_k = (X_k^{(j+1)} - X_k^j)h \quad \text{e} \quad X_{k,acel}^0 = 0$$

onde h é o fator de aceleração que pode ser real ou complexo.

O uso de $h > 1$ proporciona uma aceleração na convergência. Se esta técnica é usada em conjunção com o Método de Relaxação, então é chamada de sobre-relaxação (over-relaxation).

O uso de valores de h , demasiadamente grandes, produz instabilidade matemática e faz divergir o processo.

No caso em que a solução apresenta instabilidade com $h=1$, às vezes, é possível obter-se uma boa resposta usando-se um valor $h < 1$, o que dá lugar a sub-relaxação (under-relaxation).

Existe uma considerável teoria para o cálculo de valores ótimos de " h " para equações lineares. Mas o mesmo não acontece para os sistemas de equações não lineares de um sistema de potência, onde " h " é, em geral, empiricamente determinado.

Pelas figuras 3 e 4, vê-se que valores demasiadamente grandes de " h " causam divergência (overshoot).

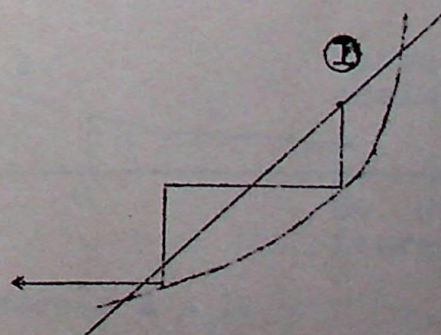
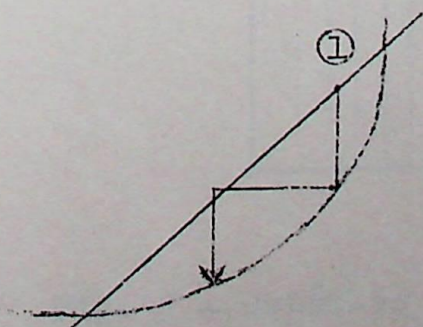


Fig. 3 - Convergência acelerada. Fig. 4 - Fator de aceleração muito grande causa a divergência.

1.2.6 - Extrapolação

Quando um grande número de equações simultâneas são resolvidas por uma técnica iterativa, como no caso de equações de um grande sistema de potência, em geral, depara-se com um número muito grande de iterações a serem feitas até chegar-se à solução. No entanto, após 10 ou 20 iterações, em geral, é possível determinar-se uma regra geométrica que esteja sendo aproximadamente seguida no valor das correções (veja-se a figura 5). Assim, armazenando-se os valores das correções ao longo de um certo número de iterações, é possível prever aproximadamente a solução final e, então, pode-se "saltar" para este valor economizando-se um considerável número de iterações.

Geralmente se adota o seguinte procedimento:

- 1 - Executa-se uma quantidade de iterações comuns até que o processo de solução atinja uma convergência estável;
- 2 - a partir dos valores das correções armazenadas, calcula-se o valor final aproximado das variáveis e "salta-se" para eles;
- 3 - executa-se, novamente, uma certa quantidade de iterações comuns até que o processo de solução atinja um padrão estável de novo;
- 4 - fazem-se novas previsões do valor das variáveis e salta-se para eles se necessário for.

Note-se que, uma vez que a Lei de Convergência não é conhecida com exatidão, resulta que os valores exatos não são diretamente determinados pelo "salto" o que torna necessário fazer-se mais iterações adicionais.

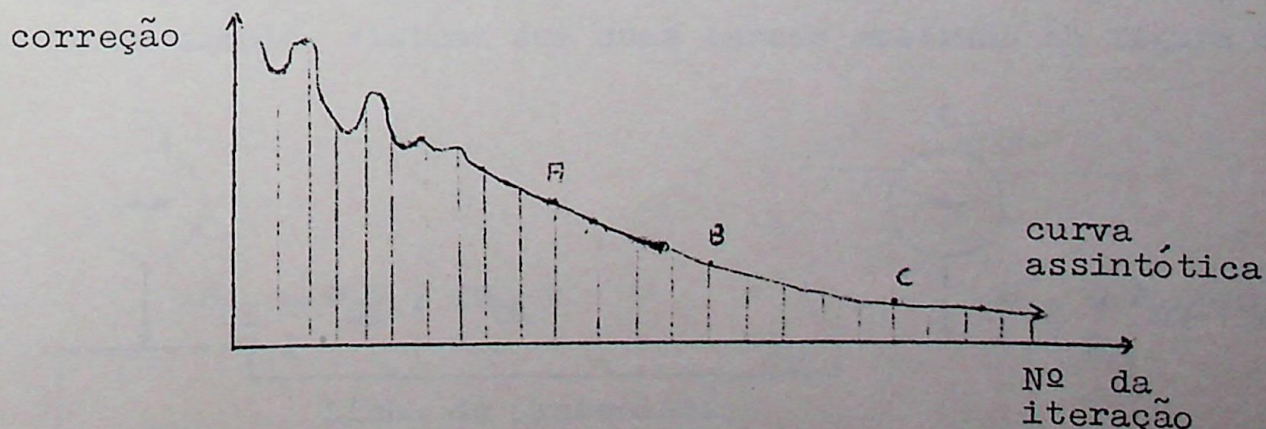


Fig. 5 - Obtém-se a equação da secção A - B e prevê-se o ponto C

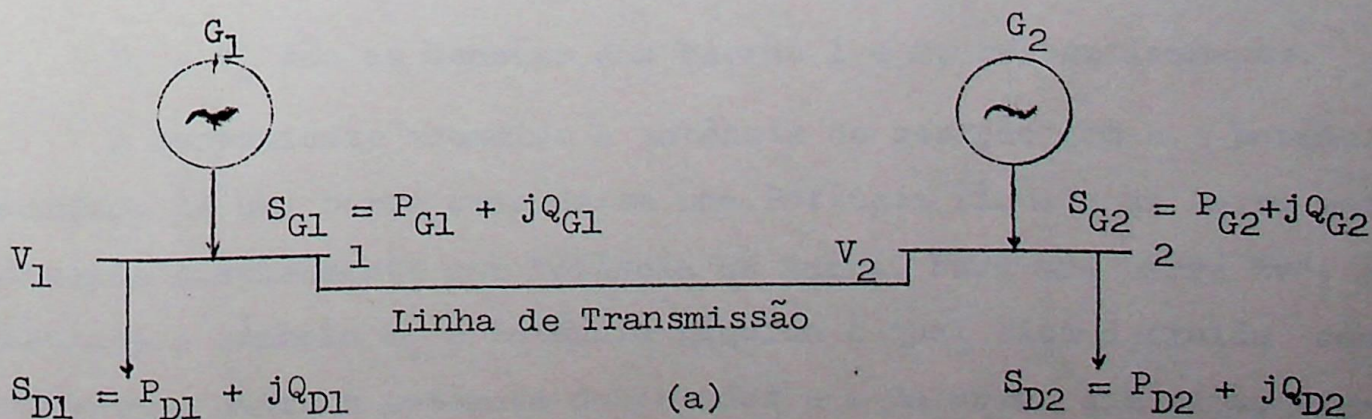
CAPÍTULO 2 - CARACTERÍSTICAS OPERACIONAIS DOS SISTEMAS
ELÉTRICOS DE POTÊNCIA E O PROBLEMA DO
FLUXO DE POTÊNCIA.

2.1 - Características operacionais dos sistemas de potência.

Talvez o problema mais comum que se encontra no planejamento ou na operação de um sistema elétrico de potência é o da determinação dos valores da corrente, ou da potência, que fluem nas várias linhas, transformadores, etc. do sistema, quando são conhecidas as condições de carga e alguns parâmetros da geração. Escrevendo-se as equações para um tal sistema, descobre-se que elas constituem um conjunto de equações não lineares simultâneas que relacionam as tensões e as correntes no sistema. É possível mostrar que as não linearidades são devidas à natureza das cargas e das gerações, ao passo que as equações da rede em si são um sistema de equações lineares simultâneas, quer seja usado o método nodal, o método dos laços ou uma combinação de ambos.

2.1.1 - Um exemplo demonstrativo.

Segundo a opinião de Elgerd,¹⁴ a parte essencial do problema da operação de um sistema pode ser melhor explicada por meio da discussão de um simples sistema com duas barras mostrado na figura 6-a.



¹⁴ELGERD, Olle I. Electric systems theory. New York, McGRAW-HILL, 1971. p. 200.

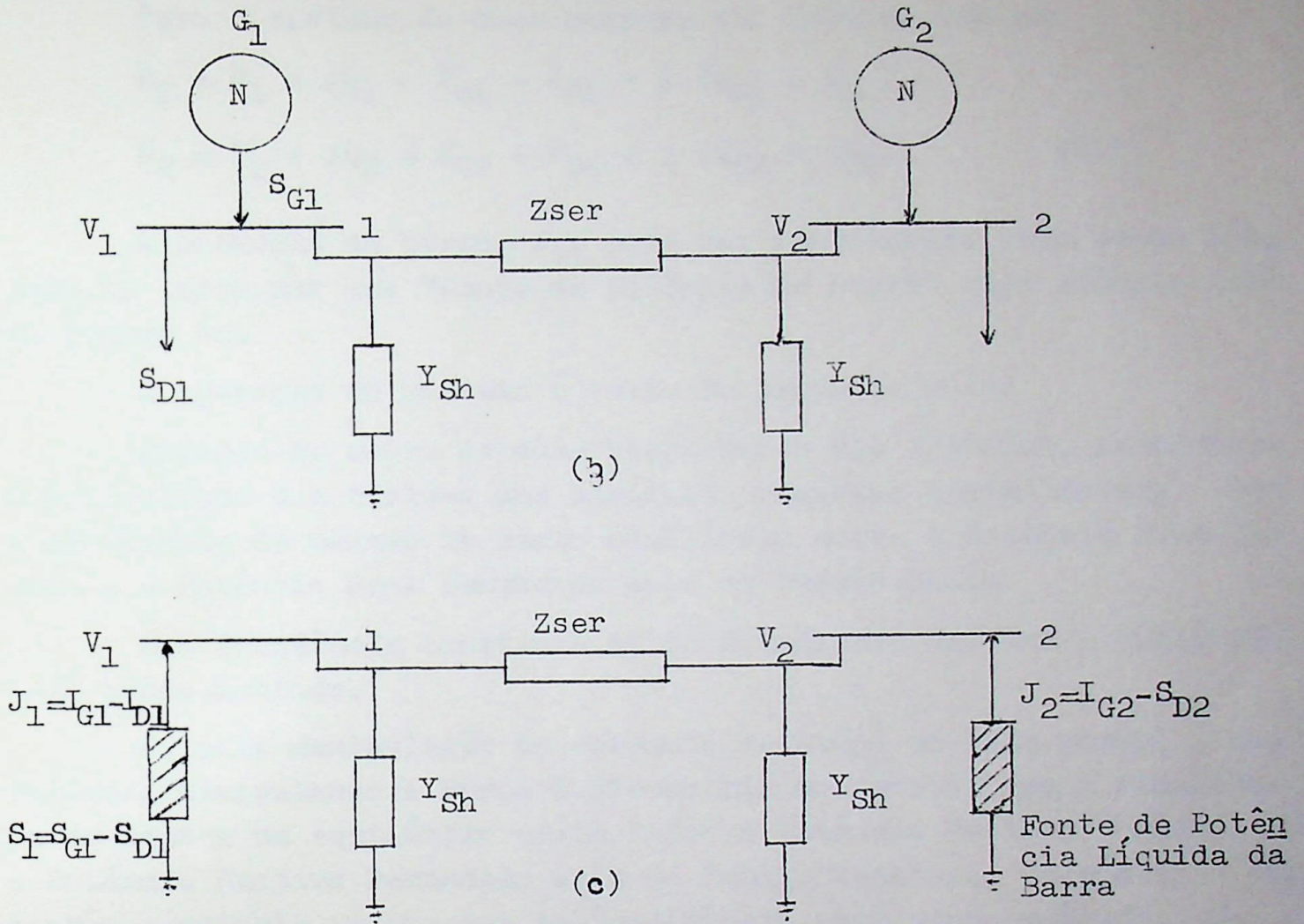


Fig. 6 - Circuito equivalente de um sistema de duas barras.

Onde tem-se:

S_{G1} e S_{G2} = Potência injetada nas barras 1 e 2 pelos respectivos geradores.

S_{D1} e S_{D2} = Carga solicitada das barras 1 e 2.

Z_{ser} e Y_{sh} são respectivamente a impedância-série e a admitância-shunt da linha de transmissão.

V_1 e V_2 são as tensões das barras 1 e 2, respectivamente.

É conveniente acumular a potência de geração com a potência demandada de uma barra criando-se uma Potência Líquida da Barra mais conhecida simplesmente por Potência da Barra. Para uma barra "v", atribui-se o símbolo S_v à Potência Líquida a qual fica definida como a diferença entre a potência do gerador e a da carga que estão ligadas a esta barra.

Para o sistema de duas barras, sob estudo, tem-se:

$$\begin{aligned} S_1 &= P_1 + jQ_1 = P_{G1} - P_{D1} + j(Q_{G1} - Q_{D1}) \\ S_2 &= P_2 + jQ_2 = P_{G2} - P_{D2} + j(Q_{G2} - Q_{D2}) \end{aligned} \quad (21)$$

A potência da barra, S_V , pode ser considerada como sendo injetada na barra por uma "fonte de potência de barra" cujo símbolo está na figura 6c.

A operação do sistema é feita do seguinte modo:

Atuando-se sobre os dois reguladores das turbinas, promove-se a manipulação dos torques das máquinas primárias (prime movers) com a finalidade de manter um exato equilíbrio entre a Potência Real Gerada e a Potência Real Demandada mais as Perdas Reais.

Uma frequência constante de 60Hz indicará que tal equilíbrio está sendo mantido.

E, pela manipulação da corrente de campo em cada rotor, estar-se-á manipulando a Força Eletromotriz do estator com a finalidade de manter um equilíbrio exato entre a Potência Reativa Gerada e a Potência Reativa Demandada mais as Perdas Reativas. Um módulo de tensão constante indica que tal equilíbrio está sendo mantido.

A função da linha de transmissão é a de prover um caminho para que o excesso de potência de uma barra possa atender ao excesso de carga em outra barra e/ou para servir como uma ligação de emergência.

2.1.2 - Equações do Fluxo de Potência Estático (EFPE)

Para melhor entender-se as características do sistema da figura 6, estudam-se os problemas associados com o objetivo de manter-se um equilíbrio entre potências, tensões e frequência. Sendo a figura 6c a representação de uma rede elétrica, é fácil construir-se um modelo do sistema ao se usarem as fórmulas que descrevem as redes elétricas.

A corrente $\frac{S_1^*}{V_1^*}$ que entra na barra 1, correspondente à tensão e à potência da barra 1, deve ser igual à corrente que entra na linha. Mas esta última consiste em duas componentes, sendo uma a que flui na admitância Shunt dada por $V_1 Y_{Sh}$ e a outra componente é a que flui na impedância-série da rede equivalente dada por $(V_1 - V_2)/Z_{ser}$.

Para ter-se um equilíbrio de corrente na barra 1, deve-se ter:

$$\frac{S_1^*}{V_1^*} = V_1 Y_{Sh} + \frac{V_1 - V_2}{Z_{ser}} \quad (22)$$

e para a barra 2:

$$\frac{S_2^*}{V_2^*} = V_2 Y_{Sh} + \frac{V_2 - V_1}{Z_{ser}}$$

Para propósitos práticos a admitância Shunt pode ser considerada puramente capacitiva e tem-se:

$$Y_{Sh} = \frac{j}{X_c} \quad (23)$$

Sendo X_c a reatância capacitiva de uma metade da linha.

A impedância-série pode ser escrita assim:

$$Z_{ser} = R + jX_L$$

Definindo-se um fator de perda:

$$\alpha = \frac{R}{X_L}$$

e, considerando-se que as perdas são comparativamente pequenas, tem-se:

$$\alpha \ll 1$$

Sob esta hipótese, pode-se escrever:

$$Z_{ser} \approx X_L e^{j(\pi/2 - \alpha)} \quad (24)$$

As tensões de barra, V_1 e V_2 , são caracterizadas por um módulo e um ângulo de fase e pode-se escrever:

$$V_1 = |V_1| e^{j\delta_1} \quad \text{e} \quad V_2 = |V_2| e^{j\delta_2} \quad (25)$$

A substituição das equações (21), (23), (24) e (25) nas duas equações complexas (22), depois da separação das partes reais e imaginárias, dá quatro equações reais que são:

$$P_{G1} - P_{D1} - \frac{|V_1|^2}{X_L} \text{Sen} \alpha + \frac{|V_1| |V_2|}{X_L} \text{Sen} [\alpha - (\delta_1 - \delta_2)] = 0$$

$$P_{G2} - P_{D2} - \frac{|V_2|^2}{X_L} \text{Sen} \alpha + \frac{|V_1| |V_2|}{X_L} \text{Sen} [\alpha + (\delta_1 - \delta_2)] = 0$$

$$\begin{aligned}
 Q_{G1} - Q_{D1} + \frac{|V_1|^2}{X_C} - \frac{|V_1|^2}{X_L} \cos \alpha + \frac{|V_1| |V_2|}{X_L} \cos [\alpha - (\delta_1 - \delta_2)] &= 0 \\
 Q_{G2} - Q_{D2} + \frac{|V_2|^2}{X_C} - \frac{|V_2|^2}{X_L} \cos \alpha + \frac{|V_1| |V_2|}{X_L} \cos [\alpha + (\delta_1 - \delta_2)] &= 0
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

As equações (26) são de grande importância para as discussões seguintes e serão chamadas de Equações do Fluxo de Potência Estático (EFPE).

Características importantes das E.F.P.E.:

- 1 - são equações algébricas porque representam o modelo de um sistema estático, isto é, um sistema operando em estado permanente;
- 2 - são equações não lineares, portanto de difícil solução analítica e, por isso mesmo, freqüentemente, resolvidas por métodos numéricos;
- 3 - geralmente, em análise de redes elétricas, as equações relacionam tensões e correntes; no entanto, as E.F.P.E. relacionam tensões e potências já que em geral não há interesse no valor das correntes;
- 4 - tacitamente foi suposto um regime permanente, ou seja, uma freqüência constante, a qual está implícita nos valores de X_L e X_C já que a variável "freqüência" não aparece explicitamente nas E.F.P.E.. Em realidade, a variação permitida em regime permanente é de $\pm 0,05\text{Hz}$;
- 5 - o "equilíbrio de potência real", discutido antes, é demonstrado matematicamente ao se somarem as duas primeiras equações de (26). Onde:

$$P_{G1} + P_{G2} = P_{D1} + P_{D2} + \frac{\text{Sen } \alpha}{X_L} [|V_1|^2 + |V_2|^2 - 2|V_1||V_2| \cos(\delta_1 - \delta_2)]
 \tag{27}$$

Esta equação diz que a soma da geração real é igual à soma da demanda real mais as perdas reais, as quais perfazem uma pequena percentagem da demanda.

- 6 - o "equilíbrio de potência reativa" pode ser demonstrado pela soma das duas últimas equações de (26). Onde:

$$Q_{G1} + Q_{G2} = Q_{D1} + Q_{D2} + \frac{\cos \alpha}{X_L} [|V_1|^2 + |V_2|^2 - 2|V_1||V_2|\cos(\delta_1 - \delta_2)] - \frac{|V_1|^2 + |V_2|^2}{X_C} \quad (28)$$

Nesta equação o terceiro termo representa as perdas reativas e o quarto termo representa a geração reativa da linha. Veja-se o seu sinal;

- 7 - os termos das perdas são funções somente das tensões. Donde:

$$P_L = P_L(V_1, V_2) = P_L(|V_1|, |V_2|, \delta_1, \delta_2) \quad (29)$$

$$Q_L = Q_L(V_1, V_2) = Q_L(|V_1|, |V_2|, \delta_1, \delta_2)$$

- 8 - Nota-se que, em todas as equações (26), os ângulos de fase δ_1 e δ_2 aparecem sob a forma de diferença, $\delta_1 - \delta_2$;
- 9 - as 4 equações (26), além dos parâmetros fixos da rede α , X_L e X_C , também contem 12 variáveis (excluindo-se a frequência implícita). Assim, para obter-se uma solução, deve-se reduzir o número de "incógnitas" o que é feito fixando-se, segundo vários critérios, os valores de algumas variáveis. De fato, deve-se reduzir o número de "incógnitas" de doze para quatro para igualar o número de equações.

Assim, deve-se especificar a priori oito das variáveis. As restantes quatro poderão, então, pelo menos em princípio, ser determinadas. Mas, mesmo neste caso, não é certo que se obtenha uma solução única já que as equações não lineares deste tipo têm várias soluções. Veja-se, por exemplo, a equação não linear.

$$\text{Sen } X = 0$$

a qual tem um número infinito de soluções. No entanto, como regra geral, só existe uma solução que tem significação prática.

2.1.3 - Classificação das variáveis do sistema.

A observação número nove põe em destaque um dos pontos mais importantes da discussão sobre fluxo de potência. Já que se deseja obter uma intuição sobre as relações de causa-efeito do sistema, torna-se imperativo que se ponha certa ordem nesta abundância de variáveis. Assim sendo, dentro de um enfoque de Espaço de Estado, pode-se classificá-las em três grupos naturais:

Variáveis de distúrbio ou sem controle.

É fácil ver-se que as variáveis de demanda, P_{D1} , P_{D2} , Q_{D1} e Q_{D2} , estão completamente fora do controle do operador, pois são determinadas pelo consumidor. Estas variáveis não controláveis serão simbolizadas por p_1, \dots, p_4 . A palavra *distúrbio* é usada no sentido de que a ocorrência de mudanças imprevisíveis nestas variáveis pode fazer com que o sistema se desvie do seu estado nominal. As variáveis de distúrbio, assim definidas, constituem as componentes de um vetor de distúrbio, \bar{p} , com dimensão quatro, definido assim:

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{D1} \\ Q_{D1} \\ P_{D2} \\ Q_{D2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Variáveis de estado e variáveis de controle.

Para as restantes oito variáveis pode-se lançar mão de nomes usados na teoria de controle. Assim denominam-se variáveis de controle aquelas que fisicamente são usadas para manipular ou controlar as outras. Portanto, as variáveis de controle, ou independentes, são as produções dos geradores P_{G1} , P_{G2} , Q_{G1} e Q_{G2} . Como se verá mais tarde, Q_{G1} e Q_{G2} controlam $|V_1|$ e $|V_2|$ enquanto que P_{G1} e P_{G2} controlam δ_1 e δ_2 , respectivamente. Assim sendo, as variáveis estado, ou variáveis dependentes, são $|V_1|$, $|V_2|$, δ_1 e δ_2 . Para ficar de acordo com os símbolos mais usados na prática, as variáveis de controle serão representadas pelos símbolos u_1, \dots, u_4 e as variáveis de estado, por x_1, \dots, x_4 .

Desta forma, tem-se o vetor de estado \bar{x} , e o vetor de controle \bar{u} , assim definidos:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ |V_1| \\ \delta_2 \\ |V_2| \end{bmatrix} \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{G1} \\ Q_{G1} \\ P_{G2} \\ Q_{G2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

2.1.4 - Primeira tentativa de solução das E.F.P.E.

Depois de se classificarem as doze variáveis nas equações (26), a solução das mesmas intuitivamente deveria seguir estas etapas:

- 1 - Baseando-se no suposto conhecimento da demanda dos consumidores, ter-se-ia um conhecimento a priori dos quatro parâmetros "p";
- 2 - supondo-se um conhecimento a priori das gerações, ter-se-iam especificado as quatro variáveis de controle "u";
- 3 - as restantes quatro variáveis, tensões e ângulos, se constituiriam em incógnitas. Tendo-se 4 equações, ao menos em princípio, poder-se-ia resolver o sistema (26).

Porém uma observação mais detalhada mostra a existência de dois impecilhos quanto ao uso do método acima exposto. Os problemas são os seguintes:

- 1 - Não é possível especificar-se a priori todas as quatro variáveis de geração. As equações (27) e (28) dizem que a soma das variáveis de controle deve igualar à soma das demandas mais as perdas. Mas as perdas são desconhecidas já que, pelas equações (29), estas são funções das incógnitas constituídas pelas variáveis de estado. Assim é que não se conhece a priori a geração real total, $P_{G1} + P_{G2}$, nem a geração reativa total, $Q_{G1} + Q_{G2}$. É claro que, usando algum critério prático, pode-se especificar a priori duas das gerações individuais, tais como P_{G2} e Q_{G2} , por exemplo, o que deixaria P_{G1} e Q_{G1} como incógnitas livres para assumirem valores necessários para suprir as perdas além de suprir alguma demanda não satisfeita por P_{G2} e Q_{G2} ;
- 2 - as E.F.P.E. não permitem a determinação individual dos ângulos de fase δ_1 e δ_2 , mas apenas permitem a determinação da sua diferença, $\delta_1 - \delta_2$. Este fato fica claro ao verificar-se que qualquer valor arbitrário que for somado a δ_1 e a δ_2 na equação (26) não afetará estas equações. Assim se vê que a diferença $\delta_1 - \delta_2$ é que deve ser tratada como uma incógnita.

2.1.5 - Segunda tentativa de solução das E.F.P.E.

Para contornar os dois obstáculos acima apontados, leva-se em conta que o valor da incógnita " $\delta_1 - \delta_2$ " não se altera ao fixar-se um de seus componentes δ_1 ou δ_2 . Assim é que se escolheu fixar $\delta_1 = 0$ e, deste modo, a tensão da barra 1 tornou-se um fator de referência. Com isto reduziu-se de quatro para três o número das variáveis de estado incógnitas, que são $|V_1|$, $|V_2|$ e δ_2 .

Da análise anterior, viu-se que as duas variáveis de controle de um nó poderiam ser fixadas a priori. Neste exemplo, fixa-se P_{G2} e Q_{G2} . Como resultado, sobram cinco incógnitas para quatro equações.

Para reduzir-se em um o número de incógnitas, apela-se para uma característica operacional do sistema que recomenda que o nível de voltagem seja o mais constante possível. Com isso reduz-se de cinco para quatro o número de incógnitas ao fixar-se a priori o valor de um dos dois módulos de tensão, $|V_1|$ ou $|V_2|$.

Para exemplo, fixou-se a priori o valor de $|V_1|$, ou seja, fixou-se a priori o valor do módulo da tensão da barra de referência.

Com base no raciocínio desenvolvido, pode-se modificar o procedimento da primeira tentativa da solução das E.F.P.E. para o seguinte:

- 1 - Supõe-se conhecidas as variáveis de demanda;
- 2 - para um nó especificam-se as variáveis de geração real e reativa. Por exemplo, especifica-se P_{G2} e Q_{G2} , mas deixam-se livres P_{G1} e Q_{G1} , pois as perdas não são conhecidas. Especifica-se $\delta_1 = 0$ e, com isso, a tensão na barra 1 torna-se um fator de referência;
- 3 - especifica-se $|V_1|$. Por exemplo, $|V_1| = 1 \text{ p.u.}$;
- 4 - resolvem-se as E.F.P.E. para se determinar os valores das incógnitas $|V_2|$, δ_2 , P_{G1} e Q_{G1} .

O problema está resolvido, salientando-se, porém, que o procedimento acima poderá resultar em valores de $|V_2|$ mais altos ou mais baixos que o valor realmente desejado. Há varios outros procedimentos para evitar-se este problema um dos quais será mostrado logo após a discussão de mais detalhes sobre as características operacionais do sistema e de suas restrições.

2.1.6 - Restrições operacionais do sistema.

Sparrow¹⁵ caracteriza os seguintes tipos de barras:

- 1 - Barra de carga.

As cargas aplicadas a uma rede de transmissão são, em geral, consideradas constantes tanto na parte real como na parte reativa. Elas se mantêm independentes das variações de tensão no ponto de su-

¹⁵ SPARROW, David C. Análise de sistemas de potência II. Apostila do Curso de Pós-graduação da E.F.E.I. Itajuba, MG, 1974. p. 33.

primento. Esta independência deve-se ao fato de que, em geral, as redes de transmissão suprem a carga dos consumidores por meio de um ou mais transformadores com troca de "taps" sob carga, dispondo de equipamento automático de regulação de tensão destinado a manter constante a tensão no secundário.

O regulador de tensão opera e ajusta o tap do transformador de modo a manter constante a voltagem do secundário, V_s . Desta maneira, $P + jQ$ permanece constante no secundário, e, conseqüentemente, no primário, seja qual for a variação na voltagem primária V_p do sistema de transmissão.

Desconsiderando-se as perdas de magnetização, pode-se dizer que $P + jQ$ fica constante na barra ligada ao sistema de transmissão já que uma queda na tensão do sistema de transmissão é acompanhada por uma elevação na corrente e o que é visto na fórmula $P + jQ = VI^*$.

As quantidades que podem variar em uma barra de carga são os módulos e os ângulos das tensões e das correntes. Atente-se que o que foi dito se refere ao sistema operando em estado permanente o que se verifica quando o trocador de "taps" tem tempo para operar (veja a figura 7).

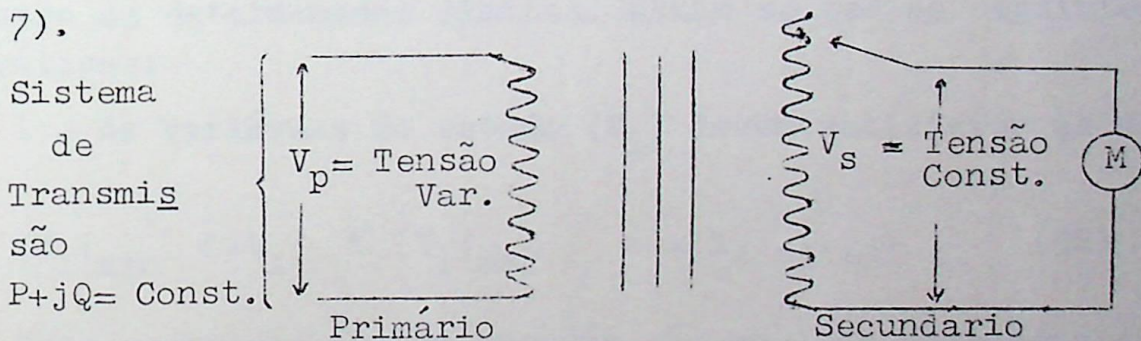


Fig. 7 - Barra de carga.

2 - Barra de geração com P e $|V|$ fixos.

A maneira usual de operar as usinas em um sistema de potência é manter-se constante a potência gerada, o que implica em manter constante a potência mecânica de acionamento; manter-se também constante o módulo da tensão, o que é feito por meio de controle da excitação usando-se um regulador automático de tensão, isto tudo em regime permanente. Portanto P e $|V|$ são fixos. Mas Q , a potência reativa da máquina e seu ângulo δ com respeito ao resto do sistema podem variar de acordo com as mudanças no estado do sistema.

Note-se que, às vezes, um gerador, por razões de limitação da sua potência, tem que trabalhar gerando valores constantes de potência real e reativa. Então ele passa a ser tratado com uma carga negativa com V e I variáveis em módulos e em ângulos.

3 - Barra de geração com $|V|$ e δ fixos.

Quando as potências reais a serem geradas são distribuídas entre os geradores, a sua soma deve ser igual à soma das cargas mais a perda na linha de transmissão.

As perdas não são conhecidas antes de fazer-se o estudo do fluxo de potência. Assim sendo, deve-se permitir que, ao menos, um gerador no sistema tenha uma geração de potência real e reativa variável para suprir estas perdas. Além disso, ao menos uma barra do sistema deve ter sua tensão com módulo e ângulo fixos para que possa agir como referência para todo o sistema. Estas duas necessidades são combinadas em uma barra de gerador, conhecida como barra de folga (Swing ou Slackbus) ou barra de referência. Esta referência pode ser uma referência de tensão complexa, uma referência de módulo de tensão, uma referência de ângulo, etc.

Restrições práticas a respeito das variáveis de estado.

A solução das E.F.P.E. do exemplo em estudo terá aceitação prática somente se todas as variáveis de controle e de estado estiverem dentro de determinados limites. Assim se tem as seguintes restrições práticas:

1 - As variáveis de estado $|V_i|$ devem satisfazer às desigualdades

$$|V_i|_{\min} < |V_i| < |V_i|_{\max} \quad i = 1, \dots, n \quad (32)$$

Esta restrição mostra que não são aceitas tensões com módulos cujos valores não estejam dentro de uma faixa que em geral varia entre 5 e 10 por cento em torno dos valores nominais.

2 - Certas variáveis de estado δ_i devem satisfazer à restrição de desigualdade

$$|\delta_i - \delta_j| < |\delta_i - \delta_j|_{\max} \quad (33)$$

Esta desigualdade especifica o máximo ângulo de potência para uma linha de transmissão entre as barras "i" e "j".

Restrições práticas a respeito das variáveis de controle.

Devido a limitações práticas nas fontes de potência real, P_{Gi} , e de potência reativa, Q_{Gi} , o valor das variáveis de controle deve observar as desigualdades seguintes:

$$\begin{aligned}
 P_{Gi, \min} &< P_{Gi} < P_{Gi, \max} \\
 Q_{Gi, \min} &< Q_{Gi} < Q_{Gi, \max}
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

As restrições a respeito da potência reativa podem ser devidas a considerações térmicas quando se opera com fator de potência em atraso ou devidas às necessidades ditadas pela estabilidade, quando se opera com fator de potência adiantado.

Se algumas barras não tiverem geração de potência, P ou Q , então para estas barras faz-se:

$$P_{Gi} = 0 \quad \text{e/ou} \quad Q_{Gi} = 0$$

As equações (27) e (28) afirmam que a produção total de potência ativa e reativa deve ser igual à demanda total mais as perdas. Mas estas equações não dizem nada a respeito de como se distribui as gerações de P e de Q entre os diversos geradores.

Existem infinitas maneiras de fazer-se esta distribuição. Porém, entre todas, só uma é que resulta em um mínimo custo de operação. A segunda parte deste trabalho estuda a maneira de determinar esta distribuição ótima das gerações e ver-se-á que, além das restrições acima mencionadas, serão necessárias outras de ordem econômica.

2.1.7 - Terceira tentativa de solução das E.F.P.E.

Na tentativa anterior, viu-se que os valores calculados para as tensões poderiam situar-se fora da estreita faixa de variação permitida e a solução seria inviável. Com isso em mente, é que agora vai-se especificar a priori os módulos das tensões e vai-se permitir que outras variáveis menos restritas desempenhem a função de incógnitas.

Seja o sistema da figura 6.

Este sistema é caracterizado por suposição, pelos seguintes parâmetros da rede:

$$X_L = 0,1 \text{ pu} \quad X_C = 10 \text{ pu} \quad \alpha = 0,1$$

Supondo-se, também, que os cargas são iguais e com os seguintes valores:

$$P_{D1} = P_{D2} = 20 \text{ MW pu}$$

$$Q_{D1} = Q_{D2} = 10 \text{ MW pu}$$

Considera-se os dois casos operacionais seguintes:

1º caso: Existem fontes de Potência Reativa Variável, Q , em ambas as barras.

Fazendo-se as especificações prévias: $|V_1| = |V_2| = 1$ pu, ou seja, adotando-se um perfil constante de tensão e especificando-se, ainda, $\delta_1 = 0$, ou seja, adotando-se a barra 1 como barra de referência de ângulo e especificando-se $P_{G2} = 15$ MW pu tem-se as incógnitas: P_{G1} , Q_{G1} , δ_2 e Q_{G2} . E, com isso, fica-se com quatro equações (26) e quatro incógnitas. E o sistema pode ser resolvido.

A especificação prática de P_{G2} pode ter decorrido do fato de que a potência nominal da máquina 2 era só de 15 MW pu ou então pode ser decorrência de estudos que aconselharam este valor de 15 MWpu como sendo o mais econômico.

Note-se que a especificação de P_{G2} resultou em uma deficiência de 5 MW pu na barra 2 a qual deve ser transportada pela linha.

A geração da máquina 1 será de 25 MW pu mais as perdas.

2º caso: É claro que no caso anterior estava explicita a suposição de que havia fontes de potência reativa variável, Q , em ambas as barras. Mas agora supondo que a barra 2 não disponha de tal fonte, tem-se $Q_{G2} = 0$.

Deste modo não é possível controlar-se a tensão na barra 2 e deve-se remover a especificação de $|V_2|$. As novas especificações são

$$|V_1| = 1 \quad \delta_1 = 0 \quad P_{G2} = 15 \text{ MW pu} \quad \text{e} \quad Q_{G2} = 0$$

A solução das E.F.P.E. fornecerá: $|V_2|$, δ_2 , P_{G1} e Q_{G1} . Se o valor de $|V_2|$ for muito baixo pode-se reespecificar $|V_1|$ em um valor um pouco mais alto. Isto fará com que o valor resultante para $|V_2|$ seja um pouco aumentado também.

2.1.8 - Classificação das barras segundo as variáveis pré-especificadas.

Barra do tipo 1, ou barra sem fonte de Q variável:

Para este tipo de barra conhece-se a priori P_{Di} e Q_{Di} . Mas especifica-se a priori P_{Gi} e Q_{Gi} , como se fez com a barra 2 do segundo caso acima. Tendo-se os P_D e Q_D e especificando-se os P_G e Q_G em realidade, está-se especificando os P_i e Q_i . Assim é que para as barras do tipo 1 as E.F.P.E. fornecem os valores de $|V_i|$ e δ_i .

Uma barra só de carga, devido a sua falta de geração, caracte

riza-se por P_{Gi} e Q_{Gi} , iguais a zero e, portanto, é do tipo 1.

Barra do tipo 2, barra com fonte de Q variável.

Para este tipo de barra, conhece-se a priori P_{Di} e Q_{Di} e especifica-se $|V_i|$ e P_{Gi} . Com efeito, o que se está especificando é P_i .

A solução das E.F.P.E. fornece os valores de δ_i e Q_{Gi} , e, conseqüentemente, Q_i .

A barra do tipo 2 é uma barra que pode variar o valor da geração de Q o que lhe permite controlar $|V|$ e, portanto, pode ser chamada de Barra de Tensão Controlada.

Uma barra de geração é uma barra do tipo 2.

Pode-se dizer que a barra 2 do 1º caso acima é do tipo 2.

Barra do tipo 3 - barra de folga.

Para este tipo de barra, conhece-se a priori P_{Di} e Q_{Di} e especifica-se $|V_i|$ e δ_i , sendo este último geralmente feito igual a zero.

A solução das E.F.P.E. fornece P_{Gi} e Q_{Gi} e, conseqüentemente, P_i e Q_i .

Esta é uma barra de referência não só para ângulos como para módulos das tensões. Às vezes é chamada de barra de folga porque ela absorve as perdas, as quais criavam uma folga na equação de equilíbrio de potência.

A barra número 1 do primeiro caso acima é do tipo 3.

2.2 - Formulação do Problema do Fluxo de Potência.

2.2.1 - Regras para a formação de uma matriz generalizada das admitâncias modais.

Elgerd¹⁶ menciona a importância de ordem não só pedagógica mas também teórica e prática que tem o método usado na montagem da matriz da rede de transmissão.

Na referência,¹⁷ Stagg mostra vários métodos para a montagem da matriz da rede.

¹⁶ ELGERD, Olle I. Electric energy systems theory. New York, McGraw-Hill, 1971. p. 220.

¹⁷ STAGG, Glenn W. e EL-ABIAD, Ahmed H. Computer methods in power system analysis. Tokyo, Kogakusha, 1968. p. 79.

Na referência¹⁸ Sparrow, destaca que a matriz de admitâncias, ou de impedâncias, é obtida pela aplicação de uma Matriz de Incidência sobre uma matriz constituída pelos elementos da rede primitiva ao usar-se o Método da Malha Fechada (loop ou mesh). A Matriz de Incidência é montada manualmente já que ela descreve a topologia da rede. Isto é comumente feito por um engenheiro que olha para um diagrama da rede e então obtém os elementos apropriados da matriz de incidência de acordo com as conexões da rede. Em geral, não é possível, dentro deste método, o uso de um computador para fazer automaticamente a montagem da matriz de incidência com base em uma simples lista dos números das linhas e das barras.

As redes, objetos de mais atenção, são aquelas muito grandes, contendo até milhares de barras, assim é que a montagem manual da Matriz de Incidência, além de trabalhosa, fica muito sujeita a erros. Por isso, o Método de Malha Fechada (loop ou mesh) não merece tanta atenção no momento. É possível que rotinas para computador possam ser desenvolvidos que tornem este método mais prático no futuro.

Felizmente acontece que existe uma matriz da rede que pode ser montada automaticamente sem dificuldade e sem o uso da Matriz de Incidência. Esta é a Matriz de Admitâncias pelo Método Nodal. Esta Matriz é geralmente conhecida como Matriz das Admitâncias Nodais (MAN) e é designada por \bar{Y} .

Como \bar{Y} pode ser facilmente montada, é que hoje em dia são largamente utilizados os Métodos de Análise de Fluxo de Potência com base na Análise Nodal. Na referência (18), Sparrow mostra uma maneira de montagem de \bar{Y} que será descrita a seguir e que é diferente daquela citada na referência (16).

Escrevendo-se as equações para I_0 , I_1 , I_2 e I_3 , para a rede da figura 8, a seguir, tem-se:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= V_0 y_{0e} + (V_0 - V_1) y_{01} + (V_0 - V_2) y_{02} + (V_0 - V_3) y_{03} \\
 I_1 &= V_1 y_{1e} + (V_1 - V_0) y_{01} + (V_1 - V_2) y_{12} + (V_1 - V_3) y_{13} \\
 I_2 &= V_2 y_{2e} + (V_2 - V_0) y_{02} + (V_2 - V_1) y_{12} + (V_2 - V_3) y_{23} \\
 I_3 &= V_3 y_{3e} + (V_3 - V_0) y_{03} + (V_3 - V_1) y_{13} + (V_3 - V_2) y_{23}
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

¹⁸ SPARROW, Colin E. Análise de sistemas de potência II. Apostila do Curso de Pós-graduação da EFEI, Itajuba, MG, 1974. p. 12.

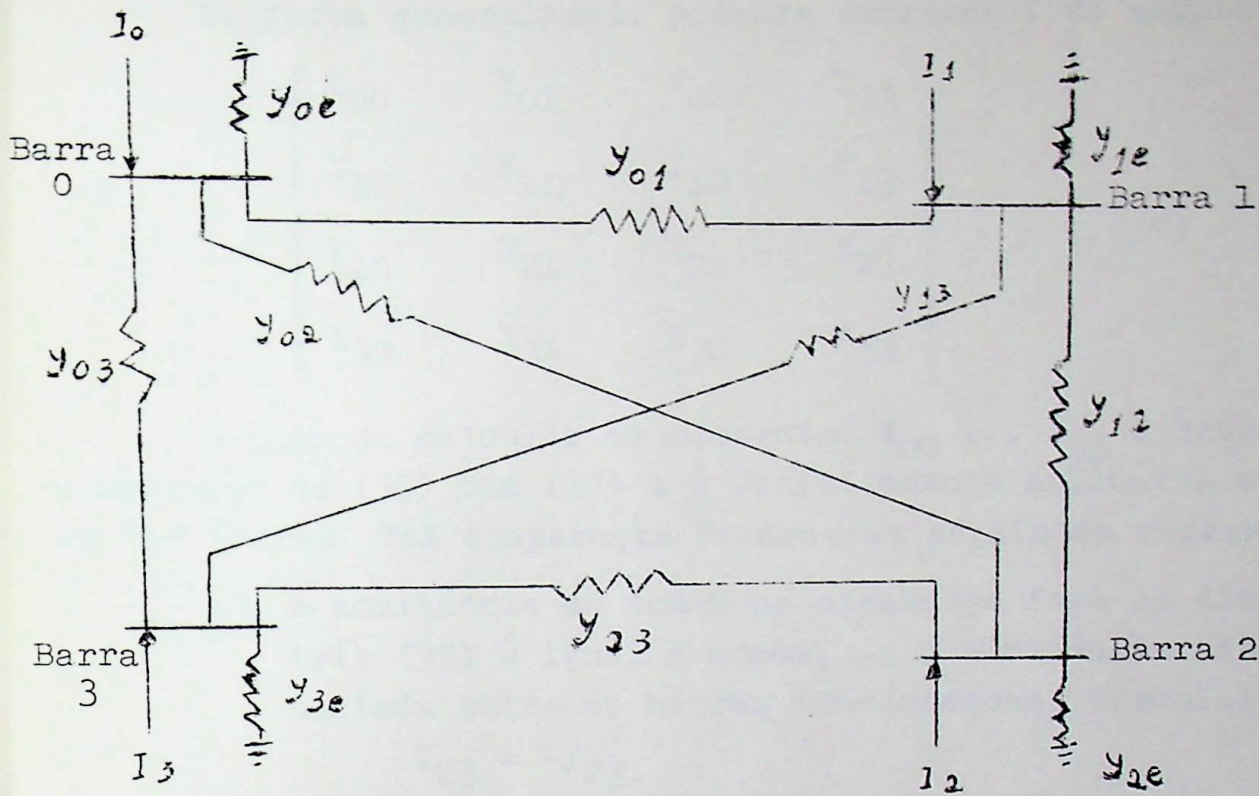


Fig. 8 - Rede genérica de 4 nós.

Fatorando V_0, V_1, V_2 e V_3 :

$$I_0 = V_0(y_{0e} + y_{01} + y_{02} + y_{03}) - V_1y_{01} - V_2y_{02} - V_3y_{03}$$

$$I_1 = -V_0y_{01} + V_1(y_{1e} + y_{01} + y_{12} + y_{13}) - V_2y_{12} - V_3y_{13}$$

$$I_2 = -V_0y_{02} - V_1y_{12} + V_2(y_{2e} + y_{02} + y_{12} + y_{23}) - V_3y_{23}$$

$$I_3 = -V_0y_{03} - V_1y_{13} - V_2y_{23} + V_3(y_{3e} + y_{03} + y_{13} + y_{23})$$

(36)

ou sob forma matricial:

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_{0e} + y_{01} + y_{02} + y_{03}) & -y_{01} & -y_{02} & -y_{03} \\ -y_{01} & (y_{1e} + y_{01} + y_{12} + y_{13}) & -y_{12} & -y_{13} \\ -y_{02} & -y_{12} & (y_{2e} + y_{02} + y_{12} + y_{23}) & -y_{23} \\ -y_{03} & -y_{13} & -y_{23} & (y_{3e} + y_{03} + y_{13} + y_{23}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

(37)

ou abreviadamente: $\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{V}$ (38)

De forma generalizada pode-se escrever \bar{Y} do seguinte modo:

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} Y_{00} & Y_{01} & Y_{02} & Y_{03} \\ Y_{10} & Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{20} & Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{30} & Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \quad (39)$$

O modo de calcular os elementos $Y_{00} \dots Y_{33}$ é deduzido pela comparação de (39) com (37) e é perfeitamente aplicável a um sistema de "n" barras. Tal comparação fornece as seguintes regras:

- 1 - A admitância de todos os elementos fora da diagonal da matriz (39) é igual a menos, -, a admitância fisicamente conectada entre as barras consideradas. Exemplo:

$$Y_{23} = -y_{23}$$

- 2 - A matriz \bar{Y} , de (39), é simétrica em relação à diagonal principal já que na maioria dos sistemas tem-se:

$$-y_{jk} = -y_{kj} \quad \text{ou seja} \quad Y_{jk} = Y_{kj}$$

- 3 - A admitância de todos os elementos da diagonal é dada pela soma de todas as admitâncias fisicamente conectadas à barra considerada. Exemplo:

$$Y_{22} = y_{2e} + y_{20} + y_{21} + y_{23}$$

- 4 - Como se verá adiante, a matriz \bar{Y} , além de simétrica, é também esparsa, o que aumenta a facilidade do seu uso em análise de sistemas.

É óbvio que a maneira de montar a matriz das admitâncias para uma grande rede será a mesma que foi usada para a pequena rede acima ilustrada. Assim sendo, as regras generalizadas para formar a matriz das admitâncias são:

- 1 - Os elementos Y_{jk} de fora da diagonal são iguais ao negativo da admitância fisicamente existente entre os nós "j" e "k", ou seja:

$$Y_{jk} = -y_{jk} \quad \forall j \neq k \quad (40)$$

- 2 - A matriz das impedâncias é simétrica em relação à sua diagonal principal, ou seja:

$$Y_{jk} = Y_{kj} \quad \forall j \neq k \quad (41)$$

- 3 - Os elementos da diagonal são iguais à soma de todas as admitâncias fisicamente conectadas ao nó "k" incluindo qualquer admitância entre o nó "k" e a terra:

$$Y_{kk} = y_{ke} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M y_{kj} \quad (42)$$

onde "n" é o número de barras na rede.

É de notar-se que a regra "1" indica que $Y_{jk} = -y_{jk} = 0$ quando não existir conexão entre as barras "j" e "k".

Eis uma vantagem do método, já que, dada uma lista das barras, que são conectadas pelas linhas, junto com as respectivas impedâncias, inclusive a impedância para terra, pode-se facilmente montar a matriz da rede.

Agora a equação (37) pode ser expressa em termos gerais como:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1e} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n y_{1j} & -y_{12} & -y_{13} & \dots & -y_{1n} \\ -y_{12} & y_{2e} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n y_{2j} & -y_{23} & \dots & -y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_{1n} & -y_{2n} & -y_{3n} & \dots & -y_{ne} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n y_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (43)$$

onde $k = 1, \dots, n$ é a ordem da linha.

2.2.2 - A esparsidade de \bar{Y}

Uma propriedade importante da matriz \bar{Y} não é muito óbvia ao se observarem as equações de sua montagem, como acima foi dado. Mas a verdade é que, em geral, tal matriz é muito esparsa.

Isto se deve ao fato de que, num sistema típico, em geral o número de linhas é 1,5 vezes o número de barras. Considerando-se que cada linha tem duas barras, então haverá uma correspondência de 3 linhas de conexão para cada barra da rede. Assim ao se tomar qualquer linha \bar{Y} da matriz (43), vê-se que, na citada linha, haverá um elemento Y_{kk} diferente de zero e, aproximadamente só 3 elementos, $Y_{kj} \neq 0$ sendo os demais $n - 4$ elementos todos nulos, onde "n" é o número de

nós da rede.

Por exemplo, um sistema com 200 barras terá uma matriz \bar{Y} contendo $200 \times 200 = 40.000$ elementos dos quais somente $200 \times 4 = 800$ elementos não serão nulos. Isto permite uma grande economia em memória do computador se forem usadas técnicas de compactação adequadas já que se deve reter apenas 800 números e seus endereços. Pode-se, ainda, obter vantagens sobre a simetria de \bar{Y} o que reduz ainda mais a necessidade de memória.

Assim é que a esparsidade de \bar{Y} é uma das mais fortes razões para o uso das técnicas puramente iterativas para a solução do problema do fluxo de potência.

2.3 - Solução do problema do fluxo de potência usando as correntes nodais.

2.3.1 - Introdução.

Em cada barra tem-se:

$$S_k = P_k + jQ_k = V_k I_k^* \quad (44)$$

Donde:

$$I_k = \left(\frac{S_k}{V_k} \right)^* \quad (45)$$

Com isso relacionam-se as condições de contorno com as correntes que entram em cada nó. Para as barras do tipo 1, o valor de "S" é conhecido e para as barras do tipo 2 pode-se trabalhar com valores estimados de Q e de ϕ para determinar-se a corrente nodal.

Uma vantagem adicional do Método Nodal é a de que o Método Convencional de Alocação de Potência entre Geradores pode ser facilmente convertido para o fornecimento das correntes nodais em termos das potências conforme a equação (45).

Tem-se agora dois tipos de equações, (43) e (45) que, em conjunto, descrevem completamente as relações entre potência, tensão, corrente e os parâmetros da rede elétrica. Torna-se fácil demonstrar que estas duas equações formam um conjunto de equações algébricas simultâneas e não lineares, ao se substituir a equação (45) em (43), usando-se a notação de (39) para os elementos de \bar{Y} :

$$I_0 = \left(\frac{S_0}{V_0} \right)^* = V_0 Y_{00} + V_1 Y_{01} + V_2 Y_{02} + \dots + V_n Y_{0n}$$

As equações usadas na solução são aquelas que expressam as tensões nodais em termos de \bar{Z} e das correntes nodais, ou seja:

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I}$$

Onde os elementos de \bar{I} são calculados com base na equação (45).

A figura abaixo mostra um possível diagrama para a solução do sistema de equações (47) usando-se Método Direto.

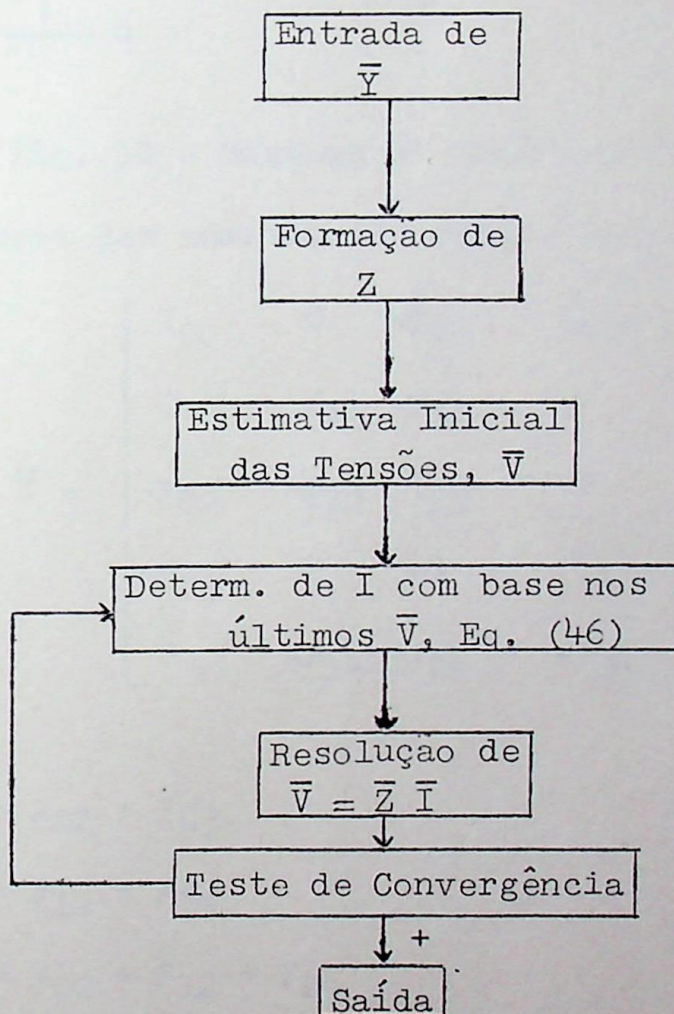


Fig. 9 - Técnica de solução com método direto.

Ocorre que a matriz \bar{Y} até agora mencionada pode facilmente ser do tipo singular e não ter inverso.

Considere-se a rede elétrica abaixo que não tem elementos shunt, ou seja, nela a capacitância da linha é negligível.

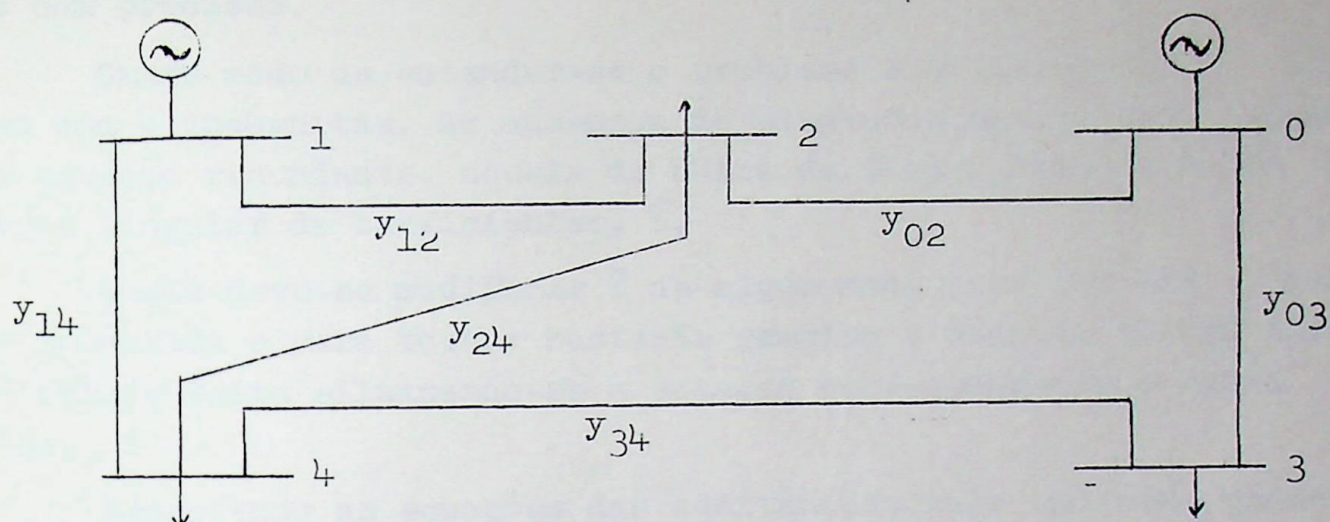


Fig. 10 - Sistema de potência sem elementos shunt.

A matriz das admitâncias para a rede acima é:

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} Y_{00} & 0 & -y_{02} & -y_{03} & 0 \\ 0 & Y_{11} & -y_{12} & 0 & -y_{14} \\ -y_{02} & -y_{12} & Y_{22} & 0 & -y_{24} \\ -y_{03} & 0 & 0 & Y_{33} & -y_{34} \\ 0 & -y_{14} & -y_{24} & -y_{34} & Y_{44} \end{bmatrix} \quad (49)$$

onde:

$$Y_{00} = y_{02} + y_{03}$$

$$Y_{11} = y_{12} + y_{14}$$

$$Y_{22} = y_{02} + y_{12} + y_{24}$$

$$Y_3 = y_{03} + y_{34}$$

$$Y_{44} = y_{14} + y_{24} + y_{34}$$

Note-se que, pelo fato de não haver elementos shunt, tem-se:

$$Y_{kk} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n y_{jk}$$

Deste modo, a soma dos elementos em qualquer linha, ou coluna, é zero. Isto indica que a matriz é singular e não pode ser invertida. Se houvesse uma pequena impedância shunt, então a \bar{Y} seria "quase singular". Seu inverso existiria, mas poderia ser difícil de obter.

-lo com precisão.

Outro modo de entender-se o problema é notar que há 5 equações com 4 incógnitas. Na ausência de elementos shunt, isto fornece uma equação redundante, aquela da barra de folga. Disso resulta uma matriz singular de coeficientes, \bar{Y} .

Assim deve-se modificar \bar{Y} de algum modo para que ela possa ser invertida e para tornar bastante preciso o cálculo do seu inverso. Isto é feito eliminando-se a equação correspondente à barra de folga.

Escrevendo as equações das admitâncias para uma rede genérica de "n" nós, tem-se:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= Y_{00}V_0 + Y_{01}V_1 + Y_{02}V_2 + \dots + Y_{0n}V_n \\
 I_1 &= Y_{10}V_0 + Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + \dots + Y_{1n}V_n \\
 I_2 &= Y_{20}V_0 + Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + \dots + Y_{2n}V_n \\
 &\dots\dots\dots \\
 I_n &= Y_{n0}V_0 + Y_{n1}V_1 + Y_{n2}V_2 + \dots + Y_{nn}V_n
 \end{aligned} \tag{50}$$

Fazendo-se $I'_k = I_k - Y_{k0}V_0$ e trazendo para o lado esquerdo do sistema de equações aqueles termos em V_0 , tem-se:

$$\begin{aligned}
 I'_0 &= I_0 - Y_{00}V_0 = Y_{01}V_1 + Y_{02}V_2 + \dots + Y_{0n}V_n \\
 I'_1 &= I_1 - Y_{10}V_0 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + \dots + Y_{1n}V_n \\
 I'_2 &= I_2 - Y_{20}V_0 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + \dots + Y_{2n}V_n \\
 &\dots\dots\dots \\
 I'_n &= I_n - Y_{n0}V_0 = Y_{n1}V_1 + Y_{n2}V_2 + \dots + Y_{nn}V_n
 \end{aligned} \tag{51}$$

Desprezando-se a primeira equação como sendo redundante, já que V_0 é conhecido, e, escrevendo-se (51) sob forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ \dots \\ I'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} \tag{52}$$

ou seja, agora se tem uma matriz de ordem "n" em vez de "n+1" para as "n" incógnitas das tensões.

A nova matriz \bar{Y} pode sempre ser invertida porque o caso de ter-se todos os $Y_{kk} = \sum_{j=1}^n y_{jk}$ já não pode ocorrer mais.

As "n" correntes \bar{I}' podem ser determinadas por uma versão modificada da equação (45), isto é:

$$I'_k = \left(\frac{S_k}{V_k} \right)^* - Y_{k0} V_0 \quad (53)$$

e assim obtém-se sucessivamente o sistema de equações:

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I}' \quad (54)$$

para a solução procurada.

A seguir vários métodos entre os mais usados para a solução deste sistema.

2.3.3 - Método direto com substituição em bloco e matriz \bar{Y} .

Este método usa as equações (53) e (54) em um processo de iteração do tipo Gauss, ou seja, todos os valores de $I'_k^{(i)}$ são determinados pela colocação dos valores $V_k^{(i)}$ nas equações (53), e a seguir, estes valores de $I'_k^{(i)}$ são substituídos em (54) simultaneamente a fim de determinar-se um novo conjunto de valores de tensões $V^{(i+1)}$.

O processo de solução é o seguinte:

Passo 1º - Estimam-se os valores iniciais das tensões nodais:

$$V_1^{(0)} \dots V_n^{(0)}$$

Passo 2º - Calcula-se o valor de I'_k em cada nó a partir do último conjunto de tensões nodais que foi calculado, isto é:

$$I'_k^{(i)} = \left(\frac{S_k}{V_k^{(i)}} \right)^* - Y_{k0} V_0 \quad (55)$$

Onde S_k é o valor programado (scheduled), $P_{ks} + jQ_{ks}$, para barras do tipo 1, ou então, é formado por P_{ks} junto com um valor de Q_{ks} dado pela equação abaixo, para barras do tipo 2:

$$Q_{ks} = I_m (V_k I_k^*)$$

Donde:

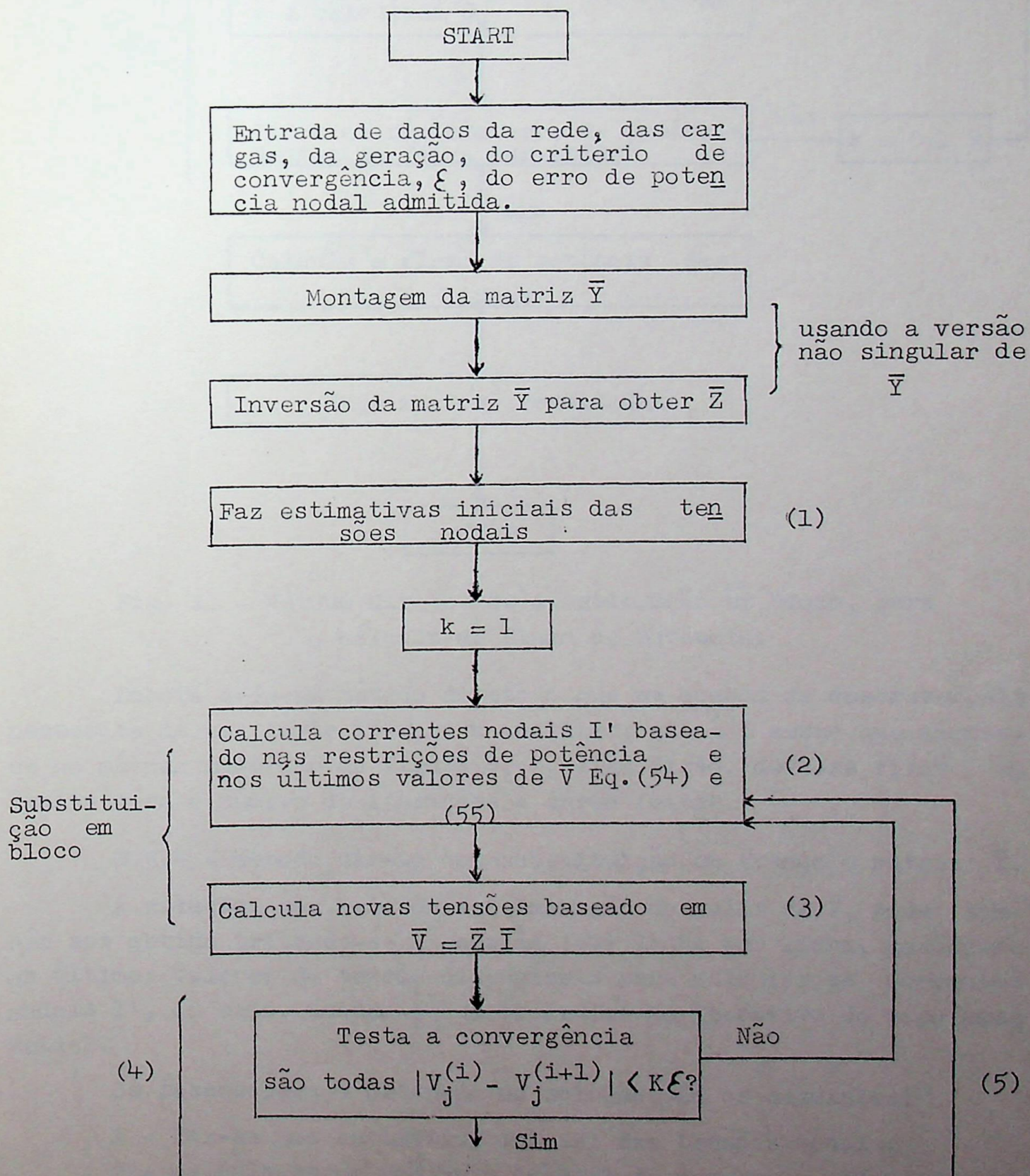
$$Q_{ks}^{(i)} = I_m (V_k^{(i)} \left(\sum_{j=0}^n Y_{kj} V_j^{(i)} \right)^*)$$

Passo 3º - Calcula-se um novo conjunto de tensões $V_1^{(i+1)} \dots V_n^{(i+1)}$ usando-se os valores de $I_k^{(i)}$ na equação (54).

Passo 4º - Testa-se a convergência.

Passo 5º - Caso a convergência não tenha sido obtida, repetem-se os passos 2 até 4.

Este processo de substituição em bloco é descrito no diagrama seguinte:



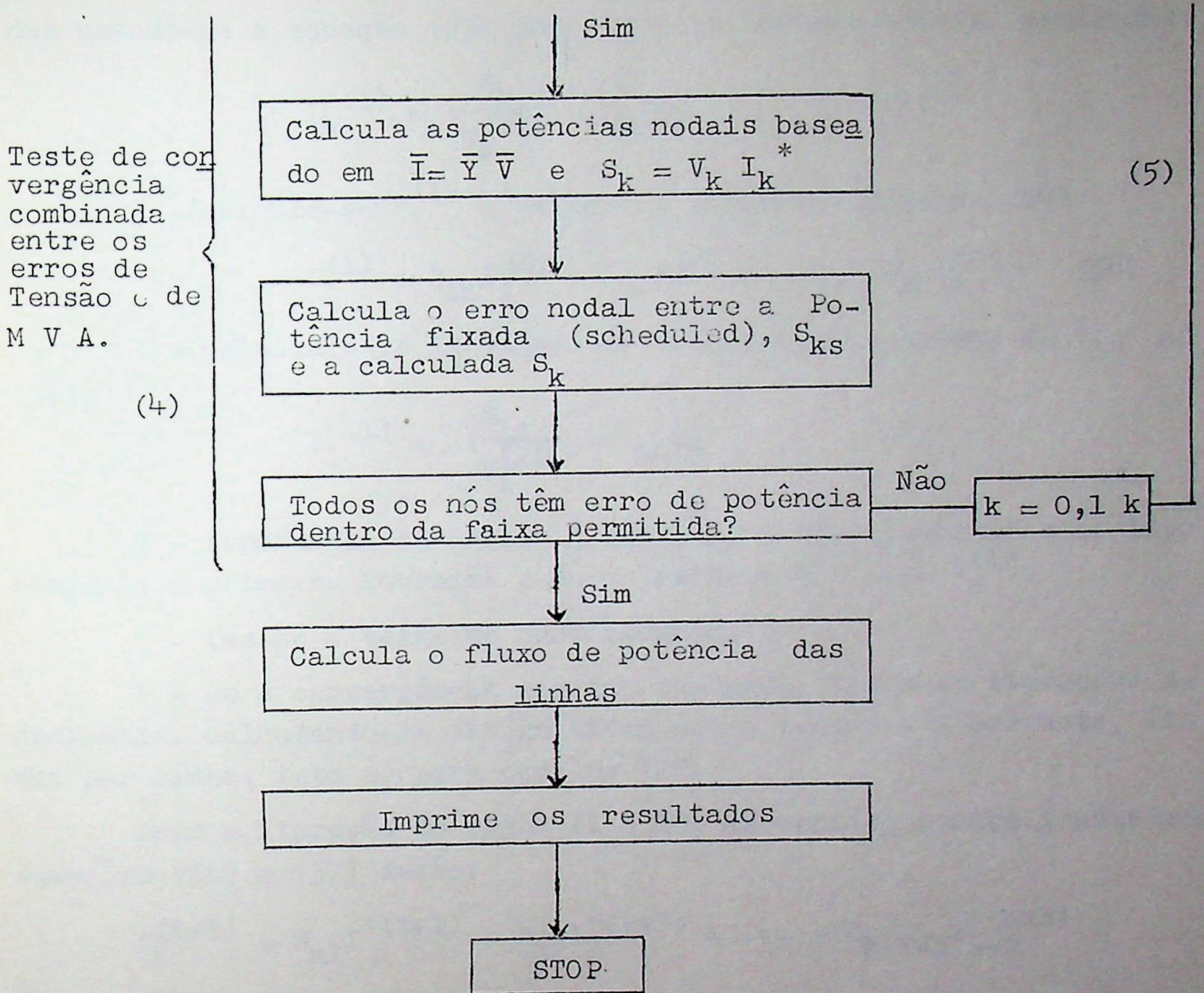


Fig. 11 - Método direto, de substituição em bloco, para o cálculo de fluxo de potência.

Embora seja um método direto o que se acabou de descrever, ele necessita de uma parte iterativa auxiliar, que é o mesmo que acontece no método mostrado na figura 6, e, além disso, deve-se fixar um limite para o número de iterações a serem feitas.

2.3.4 - Método direto com substituição em avanço e matriz \bar{Y} .

A solução, por meio da determinação do valor de \bar{V} , pode também ser obtida tratando-se a equação (54) linha por linha, usando-se os últimos valores de tensão disponíveis para calcular as correntes nodais I' , ou seja, usando-se um procedimento iterativo do tipo Seidel.

Os passos para a obtenção da solução são os seguintes:

- 1 - Faz-se uma estimativa inicial das tensões.
- 2 - calcula-se um conjunto inicial de

das usando-se a equação (55) junto com as tensões nodais estimadas:

$$I'_k(i) = \left(\frac{S_k}{V_k(i)} \right)^* - Y_{k0} V_0 \quad (55)$$

3 - calcula-se $V_1^{(1)}$ a partir da primeira linha de (54):

$$V_1^{(1)} = Z_{11} I'_1(i) + Z_{12} I'_2(i) + \dots + Z_{1n} I'_n(i) \quad (56)$$

4 - recalcula-se I'_1 usando-se este valor melhorado de V_1 , ou seja:

$$I'_1(1) = \left(\frac{S_1}{V_1^{(1)}} \right)^* - Y_{10} V_0 \quad (57)$$

5 - repetem-se os passos 3 e 4 para todos os nós da linha. Isto completa a primeira iteração e dá os valores $V_1^{(1)} \dots V_n^{(1)}$;

6 - faz-se o teste de convergência;

7 - se a convergência não for atingida, fazem-se iterações adicionais, calculando-se alternativamente a tensão e a corrente, linha por linha, isto é, para cada nó "k".

Para a iteração de ordem $(i + 1)$, as versões generalizadas das equações (56) e (57) serão:

$$V_k^{(i+1)} = Z_{k1} I'_1(i+1) + Z_{k2} I'_2(i+1) + \dots + Z_{k,k-1} I'_{k-1}(i+1) + \\ Z_{kk} I'_k(i) + Z_{k,k+1} I'_{k+1}(i) + \dots + Z_{kn} I'_n(i) \quad (58)$$

$$I'_k(i+1) = \left(\frac{S_k}{V_k(i+1)} \right)^* - Y_{k0} V_0 \quad (59)$$

Como é de se esperar, este método apresenta uma convergência mais rápida do que o método de substituição em bloco.

A única vantagem da Substituição em Bloco é a de que é possível usar-se um procedimento padronizado para a multiplicação de matrizes na computação de $\bar{V} = \bar{Z} \bar{I}'$.

A seguir, tem-se o diagrama de blocos do método em foco.

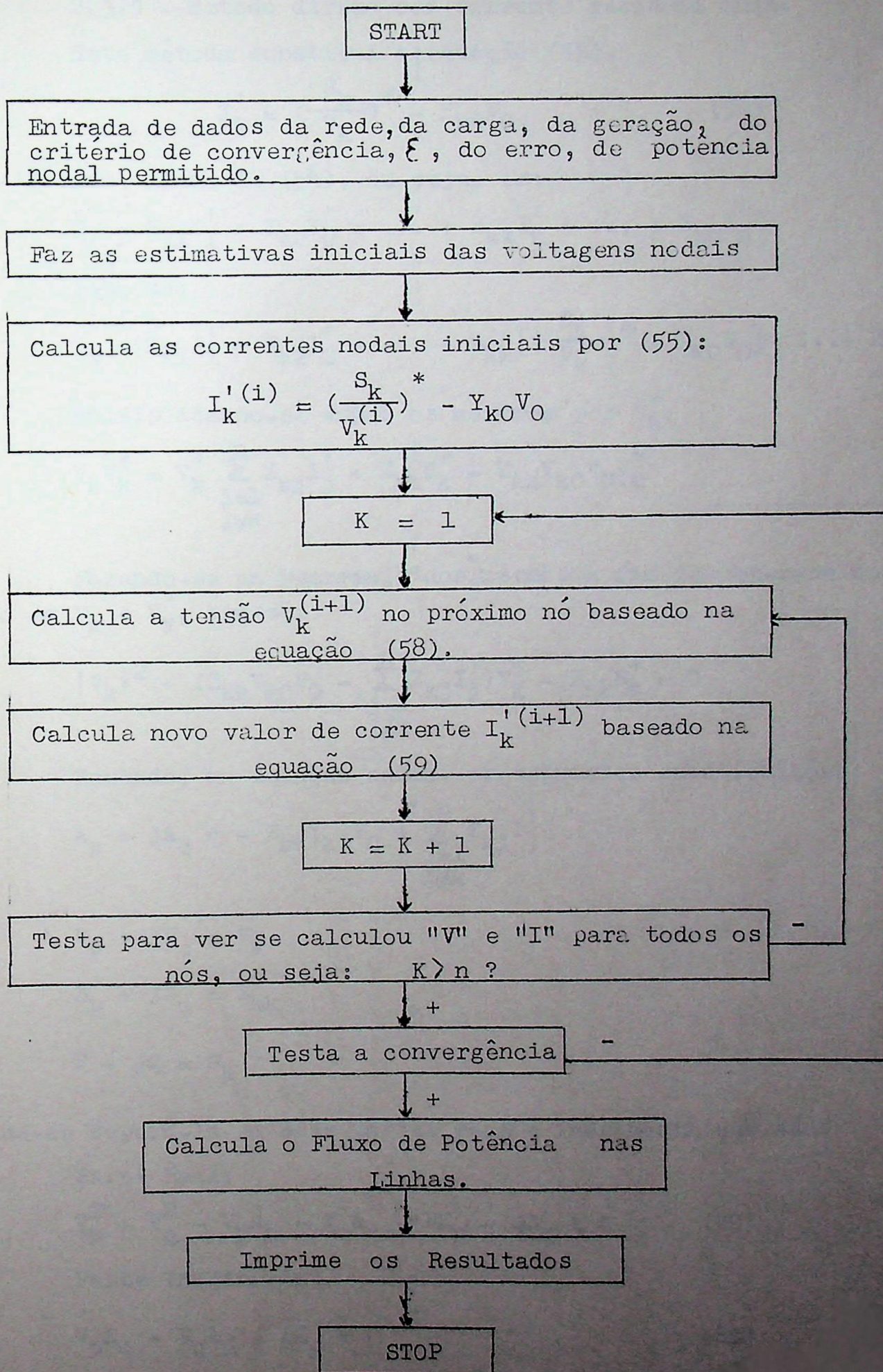


Fig. 12 - Método direto de substitui

2.3.5 - Método direto com corrente residual nula.

Este método substitui a equação (53),

$$I'_k = \left(\frac{S_k}{V_k}\right)^* - Y_{k0}V_0 \quad (53)$$

na 'késima' linha de (54); ou seja, em:

$$V_k = Z_{k1}I'_1 + Z_{k2}I'_2 + \dots + Z_{kk}I'_k + \dots + Z_{kn}I'_n$$

Isto dá:

$$V_k = Z_{k1}I'_1 + Z_{k2}I'_2 + \dots + Z_{kk}\left[\left(\frac{S_k}{V_k}\right)^* - Y_{k0}V_0\right] + \dots + Z_{kn}I'_n$$

Multiplicando-se ambos os membros por V_k^* :

$$V_k V_k^* = V_k^* \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Z_{kj} I'_j + Z_{kk} S_k^* - Z_{kk} Y_{k0} V_0 V_k^*$$

Fazendo-se um rearranjo dos termos a fim de obter-se uma equação em V_k e V_k^* , tem-se:

$$|V_k|^2 + (Z_{kk} V_{k0} V_0 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Z_{kj} I'_j) V_k^* - Z_{kk} S_k^* = 0$$

Fazendo, na equação acima, as seguintes substituições:

$$A_p + jA_q = -Z_{kk} Y_{k0} V_0 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Z_{kj} I'_j$$

$$V_p + jV_q = V_k$$

$$Z_p + jZ_q = Z_{kk}$$

$$P + jQ = S_k$$

pode-se separá-la em suas partes real e imaginária que são:

Parte Real:

$$V_p^2 + V_q^2 - V_p A_p - V_q A_q - P Z_p - Q Z_q = 0 \quad (60)$$

Parte Imaginária:

$$V_p A_q - V_q A_p - Q Z_p = 0 \quad (61)$$

Obtém-se uma expressão para o valor de V_p combinando-se as duas últimas equações. São possíveis dois casos:

1º Caso

$P = P_{ks}$ e $Q = Q_{ks}$, ou seja, quando se tem um nó de carga e, portanto, P e Q são especificados.

Neste caso, obtém-se V_q a partir de (61)

$$V_q = \frac{1}{A_p} (V_p A_q - Q Z_p + P Z_q)$$

o qual é substituído em (60) dando uma expressão para V_p com base em quantidades conhecidas.

Obtém-se uma expressão quadrática em V_p , da forma:

$$V_p^2 + B V_p + C = 0$$

que pode ser facilmente resolvida usando-se a fórmula de solução das equações quadráticas.

2º Caso

$P = P_{ks}$ e $|V_k| = |V_{ks}| = |V_p + jV_q|$, ou seja, quando se tem um nó de geração.

Ja que "Q" é uma incógnita, deve-se usar

$$|V_{ks}|^2 = V_p^2 + V_q^2 \quad (62)$$

para eliminar-se V_q , deve-se, também, eliminar "Q" das equações (60) e (61). De novo, obter-se-á para V_p uma expressão quadrática da forma:

$$V_p^2 + G V_p + H = 0$$

Em ambos os casos acima, depois de obter-se V_p , torna-se fácil de obter V_q a partir das equações (61) ou (62).

As soluções, sob forma de valores de V_p e de V_q , expressos em forma algébrica, são usadas como uma base para um processo iterativo de solução no qual se pode usar a Substituição em Bloco ou a Substituição em Avanço. Esta última, em geral, é a mais usada por convergir mais facilmente.

Todos os Métodos Diretos descritos convergem mais rapidamente do que os Métodos Puramente Iterativos. Isto é de esperar-se desde que para equações lineares os Métodos Diretos darão a resposta em uma só iteração.

Os Métodos Diretos têm duas desvantagens:

- 1 - a necessidade de inverter-se a matriz \bar{Y} para a obtenção de \bar{Z} consome muito tempo com grandes matrizes;

2 - , fato de que \bar{Z} é uma matriz cheia, enquanto \bar{Y} é muito esparsa, faz com que os Métodos Diretos requeiram maior memória no computador.

Brameller e Denmead,¹⁹ discutem, em detalhes, os Métodos Diretos acima descritos.

2.3.6 - Solução do fluxo de potência pelos Métodos Iterativos de Gauss e Gauss-Seidel.

Todos estes métodos usam a matriz das admitâncias nodais, \bar{Y} , e não requerem a inversão da matriz. Trata-se de métodos bastante difundidos e que não serão aqui abordados. Para uma excelente descrição em detalhes, recomenda-se a obra de Elgerd²⁰.

2.3.7 - Solução do fluxo de potência pelo método de Newton-Raphson com matriz \bar{Y} .

Seja um sistema de equações não lineares:

$$\begin{aligned} f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) &= Y_1 \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) &= Y_2 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(X_1, X_2, \dots, X_n) &= Y_n \end{aligned} \quad (63)$$

Onde X_1, X_2, \dots, X_n são incógnitas. Pré-fixando-se as estimativas dos valores iniciais $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}$ para as incógnitas, pode-se definir $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_n$ como sendo as correções necessárias para a solução do sistema (63), isto é:

$$\begin{aligned} f_1(X_1^{(0)} + \Delta X_1, X_2^{(0)} + \Delta X_2, \dots, X_n^{(0)} + \Delta X_n) &= Y_1 \\ f_2(X_1^{(0)} + \Delta X_1, X_2^{(0)} + \Delta X_2, \dots, X_n^{(0)} + \Delta X_n) &= Y_2 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(X_1^{(0)} + \Delta X_1, X_2^{(0)} + \Delta X_2, \dots, X_n^{(0)} + \Delta X_n) &= Y_n \end{aligned} \quad (64)$$

¹⁹BRAMELLER, A. e DENMEAD, J. K. Some improved methods for digital network analysis. Proc. IEE. v. 109, 1962. p. 109.

²⁰ELGERD, Olle I. Electric energy systems theory. New York, McGraw-Hill, 1971. p. 252.

De (67 a) tem-se:

$$[\Delta X_i] = [J]^{-1} [\Delta Y_i] \quad (67 \text{ b})$$

e de posse dos ΔX pode-se obter os novos valores para o vetor solução, X_i , de:

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} &= X_1^{(0)} + \Delta X_1 \\ X_2^{(1)} &= X_2^{(0)} + \Delta X_2 \\ &\dots\dots\dots \\ X_n^{(1)} &= X_n^{(0)} + \Delta X_n \end{aligned} \quad (68)$$

Com estes novos valores para as incógnitas, calculam-se os valores de $(Y_i - f_i)$. Sendo estes inferiores a uma tolerância especificada, os valores obtidos de X_i tornam-se a solução do sistema. Em caso contrário os novos X_i são usados para formar a nova " f_i ". Então se resolve novamente o sistema (67) repetindo-se o processo até alcançar a convergência.

O Método de Newton, na versão a ser estudada em detalhe, relaciona os erros nos valores das potências real e reativa com os erros no módulo e no ângulo de fase das tensões nodais. Este método foi desenvolvido por Tinney e Hart²¹.

No Problema do Fluxo de Potência, a corrente total que um nó k injeta nas linhas que o conectam com os outros nós é dada por:

$$\bar{I}_k = \sum_{j=1}^N \bar{Y}_{kj} \bar{V}_j \quad (69)$$

onde \bar{V} é o valor complexo da tensão do nó " m " com respeito a um nó de referência; \bar{I}_k é o valor complexo da corrente que entra no nó " k "; \bar{Y}_{kj} é o valor complexo do elemento da matriz admitância ligado entre os nós " k " e " j ". O somatório inclui todos os nós do sistema que tenham uma conexão direta com o nó " k ".

As quantidades vetoriais podem ser representadas na forma polar ou vetorial:

²¹TINNEY, W.F. e HART, C.E. Power flow solution by Newton's method. IEEE, Trans., New York, V.PAS. 86. 1967. p. 1449.

$$\begin{aligned}\bar{I}_k &= I_k e^{j\alpha_k} = a_k + j b_k \\ \bar{V}_j &= V_j e^{j\delta_j} = e_j + j f_j \\ \bar{Y}_{kj} &= Y_{kj} e^{j\theta_{kj}} = G_{kj} + j B_{kj}\end{aligned}\quad (70)$$

onde α e δ são medidos com respeito a uma tensão de referência arbitrária e θ é o ângulo obtido a. diagrama de impedâncias para a linha que liga os nós "k" e "j".

No resto desta seção, \bar{I}_k , \bar{V}_j , \bar{Y}_{kj} , etc. representarão o módulo das respectivas quantidades complexas.

A potência, entregue por um nó, expressa em termos da corrente injetada \bar{I}_k e da tensão nodal \bar{V}_k , é dada por

$$P_k + jQ_k = \bar{V}_k \bar{I}_k^* \quad (71)$$

Substituindo-se em (71) o conjugado de \bar{I}_k de acordo com sua expressão em (69), tem-se:

$$P_k + jQ_k = \bar{V}_k \sum_{j=1}^n \bar{Y}_{kj}^* \bar{V}_j \quad (72)$$

Em um sistema de n nós, há um conjunto de n-1 equações simultâneas da forma acima. Estas equações devem ser resolvidas simultaneamente para se determinarem as tensões incógnitas que satisfazem o sistema de equações (72).

A substituição nas equações (72) dos valores iniciais estimados das tensões nodais não fornecerá valores de P_k e jQ_k iguais aos valores especificados como dados de entrada. A diferença entre as potências fixadas e as potências estimadas, calculadas com base nas tensões estimadas, $\Delta P_k = P_k - P'_k$ e $\Delta Q_k = Q_k - Q'_k$, deve ser reduzida a um valor abaixo de um erro permissível, o que é feito por um reajuste das tensões complexas, incógnitas \bar{V}_j , durante o processo iterativo. A aproximação linear das equações (66) pode ser agora estendida ao problema do fluxo de potência. Brown,²² mostra que, tomando-se as derivadas totais da equação (72) e separando-se as partes real e imaginária, obtém-se:

²²BROWN, Homer E. Solution of large networks by matrix methods. New York, John Wiley, 1975.

$$\Delta P_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial P_k}{\partial \delta_j} \Delta \delta_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial P_k}{\partial V_j} \Delta V_j \quad (73)$$

$$\Delta Q_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_k}{\partial \delta_j} \Delta \delta_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_k}{\partial V_j} \Delta V_j \quad (74)$$

Nestas equações j , quando não indica uma quantidade imaginária, toma o valor de k e de todos os números dos nós que estão diretamente conectados com o nó k . O subíndice k toma o valor de todos os números dos nós menos o número do nó de balanço.

O sistema de equações lineares simultâneas acima deve ser resolvido para determinar-se o conjunto de valores de $\Delta \delta$ e ΔV . Estes ajustes $\Delta \delta$ e ΔV irão reduzir os erros, ΔP e ΔQ , entre as potências pré-fixadas e as potências calculadas com base nas tensões estimadas. Assim se terá um sistema de equações equivalente ao sistema (67), onde os valores estimados para as incógnitas, $X_i^{(0)}$, são substituídos pelos valores estimados para as novas incógnitas $V_i^{(0)}$ e $\delta_i^{(0)}$ e onde os valores das aproximações $f(X_i)$ são substituídos pelos valores calculados de P e Q .

Segundo Sparrow,²³ o sistema de equações (67) toma a forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \dots \\ \Delta P_n \\ \Delta Q_1 \\ \dots \\ \Delta Q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} & | & N_{11} & \dots & N_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} & | & N_{n1} & \dots & N_{nm} \\ J_{11} & \dots & J_{1n} & | & L_{11} & \dots & L_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ J_{m1} & \dots & J_{mn} & | & L_{m1} & \dots & L_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_1 \\ \dots \\ \Delta \delta_n \\ \frac{\Delta V_1}{V_1} \\ \dots \\ \frac{\Delta V_m}{V_m} \end{bmatrix} \quad (75)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H} & | & \bar{N} \\ \bar{J} & | & \bar{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \frac{\Delta V}{V} \end{bmatrix} \quad (76)$$

desde que as barras de carga sejam numeradas de 1 a m ; que as barras

²³ SPARROW, Colin E. Análise de sistemas de potência II. Apostila do Curso de Pós-graduação da EFEI, Itajuba, MG, 1974. p. 59.

de geração sejam numeradas de $n+1$ a n e que a barra de balanço tenha o número 0.

No sistema (76), tomou-se:

$$H = \frac{\partial P}{\partial \delta} \quad N = \frac{\partial P}{\partial V} \quad U = \frac{\partial Q}{\partial \delta} \quad L = \frac{\partial Q}{\partial V} \quad (77)$$

2.3.8 - Obtenção dos elementos da matriz Jacobiana.

Os valores de \bar{H} , \bar{N} , \bar{J} e \bar{L} são obtidos pela conveniente diferenciação parcial da equação (71) expressa em coordenadas polares.

Usando as convenções dadas pelas equações (70) e (72), tem-se:

$$P_k + jQ_k = \bar{V}_k \bar{I}_k^* = \bar{V}_k \sum_{j=1}^n \bar{Y}_{kj}^* \bar{V}_j^* \quad (78)$$

$$P_k + jQ_k = V_k \epsilon^{j\delta_k} \cdot I_k \epsilon^{-j\alpha_k} = V_k \epsilon^{j\delta_k} \cdot \sum_{j=1}^n Y_{kj} \epsilon^{-j\omega_{kj}} \cdot V_j \epsilon^{-j\delta_j} \quad (79)$$

$I = H_{kj}$ e J_{kj} para $j \neq k$.

Toma-se a derivada parcial de (79) em respeito a um valor de δ_j que seja diferente de δ_k e tem-se:

$$\frac{\partial P_k}{\partial \delta_j} + j \frac{\partial Q_k}{\partial \delta_j} = V_k \epsilon^{j\delta_k} \cdot Y_{kj} \epsilon^{-j\omega_{kj}} (-jV_j \epsilon^{-j\delta_j}) = -j \cdot V_k \epsilon^{j\delta_k} (Y_{kj} \epsilon^{-j\omega_{kj}} \cdot V_j \epsilon^{-j\delta_j}) \quad (80)$$

De (70):

$$Y_{kj} \epsilon^{-j\omega_{kj}} \cdot V_j \epsilon^{-j\delta_j} = (Y_{kj} \epsilon^{j\omega_{kj}} \cdot V_j \epsilon^{j\delta_j})^* = (a_j + jb_j)^* \quad (81)$$

De (80) e (81) vem:

$$\frac{\partial P_k}{\partial \delta_j} + j \frac{\partial Q_k}{\partial \delta_j} = -j (e_k + jf_k) (a_j - jb_j) \quad (82)$$

Então, separando e igualando-se as partes real e imaginária, tem-se:

$$H_{kj} = \frac{\partial P_k}{\partial \delta_j} = (a_j f_k - b_j e_k) \quad (83)$$

$$J_{kj} = \frac{\partial Q_k}{\partial \delta_j} = -(a_j e_k + b_j f_k) \quad (84)$$

válidas para $j \neq k$, ou seja, para elementos fora das diagonais de \bar{H} e de \bar{J} .

2 - N_{kj} e L_{kj} para $j \neq k$.

Por comodidade de cálculo, toma-se a derivada parcial da equação (79) com respeito a um valor de V_j que seja diferente de V_k , multiplicada por V_j e tem-se:

$$\frac{\partial P_k}{\partial V_j} \cdot V_j + j \frac{\partial Q_k}{\partial V_j} \cdot V_j = V_j \cdot V_k \xi^{j\delta_k} \cdot Y_{kj} \xi^{-j\theta_{kj}} \cdot 1 \cdot \xi^{-j\delta_j} \quad (85)$$

$$= V_k \xi^{j\delta_k} \cdot (Y_{kj} \xi^{-j\theta_{kj}} \cdot V_j \xi^{-j\delta_j}) \quad (86)$$

e pela equação (80):

$$= -\frac{1}{j} \left(\frac{\partial P_k}{\partial \delta_j} + j \frac{\partial Q_k}{\partial \delta_j} \right) \quad (87)$$

Portanto, das equações (82) e (87), tem-se:

$$\frac{\partial P_k}{\partial V_j} \cdot V_j + j \frac{\partial Q_k}{\partial V_j} \cdot V_j = (a_j e_k + b_j f_k) + j(a_j f_k - b_j e_k) \quad (88)$$

Donde:

$$N_{kj} = \frac{\partial P_k}{\partial V_j} \cdot V_j = a_j e_k + b_j f_k = -J_{kj} \quad (89)$$

$$L_{kj} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_j} \cdot V_j = a_j f_k - b_j e_k = H_{kj} \quad (90)$$

As equações acima são válidas para $j \neq k$, ou seja, para os elementos situados fora das diagonais de \bar{N} e \bar{L} .

Note-se que não há necessidade de computar estes elementos de fora das diagonais de \bar{N} e \bar{L} porque devido à simetria, das equações (83), (84), (89) e (90), seus valores são automaticamente obtidos ao se calcularem os elementos situados fora das diagonais de \bar{H} e \bar{J} .

3 - H_{kk} e J_{kk} ; ou seja, para $j = k$

Agora j toma todos os valores de 1 a n , inclusive um valor igual a k e tem-se:

$$\frac{\partial P_k}{\partial \delta_k} + \frac{\partial Q_k}{\partial \delta_k} = \frac{\partial}{\partial \delta_k} \left[(V_k \xi^{j\delta_k} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} \xi^{-j\theta_{kj}} \cdot V_j \xi^{-j\delta_j}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (V_k \xi^{j\delta_k} \cdot Y_{kk} \xi^{-j\theta_{kk}} \cdot V_k \xi^{-j\delta_k}) \\
& = \frac{\partial}{\partial \delta_k} \left[(V_k \xi^{j\delta_k} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} \xi^{-j\theta_{kj}} \cdot V_j \xi^{-j\delta_j}) + \right. \\
& \quad \left. + (V_k^2 \cdot Y_{kk} \xi^{-j\theta_{kk}}) \right] \\
& = jV_k \xi^{j\delta_k} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} \xi^{-j\theta_{kj}} \cdot V_j \xi^{-j\delta_j} + 0 \\
& = (jV_k \xi^{j\delta_k} \cdot \sum_{j=1}^n Y_{kj} \xi^{-j\theta_{kj}} \cdot V_j \xi^{-j\delta_j}) - \\
& \quad - jY_{kk} \xi^{-j\theta_{kk}} \cdot V_k^2 \\
& = j(P_k + jQ_k) - j(G_{kk} - jB_{kk})V_k^2 \tag{91}
\end{aligned}$$

que, efetuando e separando as partes real e imaginária, resulta em:

$$H_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial \delta_k} = - (Q_k + B_{kk} \cdot V_k^2) \tag{92}$$

$$J_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial \delta_k} = (P_k - G_{kk} \cdot V_k^2) \tag{93}$$

válidas para $j = k$, ou seja, para os elementos das diagonais de \bar{H} e \bar{J} .

4 - N_{kk} e L_{kk} , ou seja, para $j = k$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_k}{\partial V_k} \cdot V_k + \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} \cdot V_k & = V_k \cdot \frac{\partial}{\partial V_k} \left[(V_k \xi^{j\delta_k} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} \xi^{-j\theta_{kj}} \cdot V_j \xi^{-j\delta_j}) + \right. \\
& \quad \left. + (V_k \xi^{j\delta_k} \cdot Y_{kk} \xi^{-j\theta_{kk}} \cdot V_k \xi^{-j\delta_k}) \right] \\
& = V_k \cdot \frac{\partial}{\partial V_k} \left[(V_k \xi^{j\delta_k} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} \xi^{-j\theta_{kj}} \cdot V_j \xi^{-j\delta_j}) + \right. \\
& \quad \left. + (V_k^2 \cdot Y_{kk} \xi^{-j\theta_{kk}}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V_k \xi^{j\theta_k} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{kj} \xi^{-j\theta_{kj}} \cdot V_j \xi^{-j\theta_j} + 2V_k^2 \cdot Y_{kk} \xi^{-j\theta_{kk}} \\
&= (P_k + jQ_k) + (G_{kk} - jB_{kk}) V_k^2 \quad (94)
\end{aligned}$$

que, pela separação das partes real e imaginária, resulta em:

$$N_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial V_k} \cdot V_k = P_k + G_{kk} \cdot V_k^2 \quad (95)$$

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} \cdot V_k = Q_k - B_{kk} \cdot V_k^2 \quad (96)$$

válidas para $j = k$, ou seja, para os elementos das diagonais de \bar{N} e \bar{L} .

Notem-se as equações (92), (93), (95) e (96), que, ao computar-se H_{kk} e J_{kk} , já se dispõe de elementos para o cálculo de L_{kk} e N_{kk} respectivamente.

Assim se pode montar uma matriz jacobiana completa em qualquer etapa do processo iterativo desde que sejam conhecidos os valores especificados de P e Q , a matriz admitância, Y , e os últimos valores dos módulos e dos ângulos das tensões nodais.

Agora as equações (73) e (74) podem ser assim escritas:

$$\Delta P_k = \sum_{j=1}^n H_{kj} \cdot \Delta \theta_j + \sum_{j=1}^n N_{kj} \frac{\Delta V_j}{V_j} \quad (97)$$

$$\Delta Q_k = \sum_{j=1}^n J_{kj} \Delta \theta_j + \sum_{j=1}^n L_{kj} \frac{\Delta V_j}{V_j} \quad (98)$$

Pelo acima exposto, a forma geral da solução iterativa pelo método de Newton-Raphson segue o procedimento abaixo:

- 1 - fornecer os dados de entrada e formar a matriz \bar{Y} , do modo usual;
- 2 - fazer uma estimativa inicial dos módulos e ângulos das tensões do sistema;
- 3 - melhorar esta estimativa inicial usando um Fluxo de Potência de corrente contínua, ou pelo método de Glim e Stagg,²⁴

²⁴STAGG, G.E. e EL-ABIAD, A.H. Computer methods in power system analysis. Tokio, kogakusha, 1968.

por uma única iteração;

- 4 - calcular os valores de \bar{H} , \bar{J} , \bar{N} e \bar{L} a partir dos últimos valores de tensão, da admitância da rede e das potências especificadas e montar a matriz jacobiana $[J]$;
- 5 - usar $[J]^{-1}$, como na equação (67 b) para obter as correções de tensão para todos os nós e aplicá-las nos últimos valores das tensões;
- 6 - testar a convergência;
- 7 - repetir as etapas 4 até 6 se não se obtiver convergência.

2.3.9 - Detalhes da montagem da matriz Jacobiana.

Tomando-se as definições seguintes:

1	2	3	4
Tipo de barra	Valores Especific.	Incógnitas	
De Carga	P, Q	V, δ	
De Tensão Control	P, V	δ	Q
De Geração	P, V	δ	Q
De Balanço	V, δ		P, Q

Fig. 13

Das equações (67) ou (73) e (74), vê-se que a matriz jacobiana é formada por derivadas dos valores calculados para P e Q como uma função dos valores estimados das incógnitas V e δ . Dependendo do tipo de barra considerada uma ou mais das derivadas, podem anular-se como é demonstrado a seguir.

Seja o sistema:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_k \\ \Delta Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{kj} = \frac{\partial P_k}{\partial \delta_j} & \bar{N}_{kj} = \frac{\partial P_k}{\partial V_j} \\ \bar{J}_{kj} = \frac{\partial Q_k}{\partial \delta_j} & \bar{L}_{kj} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_j \\ \frac{\Delta V_j}{V_j} \end{bmatrix} \quad (99)$$

1 - "k" e "j" são barras de carga:

Então P_k e Q_k são especificados e é mister calcular-se $P = f(V_j, \delta)$ e $Q = (V_j, \delta)$, a fim de ter-se os ΔP_k e ΔQ_k . Além disso, por serem barras de carga V_j e δ_j não são pré-fixados e faz sentido to-

mar-se derivadas de $P = f(V_j, \delta)$ em relação a V e a δ o mesmo acontecendo com as derivadas de Q . Logo, neste caso, haverá quatro entradas para a matriz jacobiana, ou seja: H_{kj} , N_{kj} , J_{kj} e L_{kj} .

2 - Se "k" é barra de geração e "j" é barra de tensão fixa. Então a barra "k" terá P_k e V_k pré-fixados; em consequência a equação (98) não se aplica, uma vez que o valor de Q não foi pré-fixado. Com isso, J_{kj} e L_{kj} tornam-se desnecessários.

Além disso, a barra "j", sendo de tensão fixa, implica em que $\Delta V_j = 0$, já que neste tipo de barra não se permite que a tensão varie. Assim o sistema (99) mostra que N_{kj} se torna desnecessário. Vê-se que a única entrada para a matriz jacobiana será H_{kj} .

3 - Se "k" é barra de tensão controlada e "j" é barra de carga.

Sendo "k" uma barra de tensão fixa, ela terá V_k e P_k especificados. E, em consequência, a equação (98) não se aplica já que o valor de Q não foi especificado. Com isso, J_{kj} e L_{kj} tornam-se desnecessários.

Além disso, a barra "j", por ser de carga, terá V_j e δ_j como variáveis o que dará sentido à existência dos elementos H_{kj} e N_{kj} os quais se tornam as duas únicas entradas na matriz jacobiana.

4 - Se "k" é barra de carga e "j" é barra de geração.

Então, por raciocínio semelhante àquele acima feito, conclui-se que haverá duas entradas, H_{kj} e J_{kj} , para a matriz jacobiana.

5 - Se "k" é barra-geração e "j" é barra de carga.

Torna-se fácil demonstrar que haverá duas entradas, ou seja, H_{kj} e N_{kj} .

6 - Se "k = j" é uma barra de geração.

Então só haverá uma entrada, ou seja, H_{jj} .

7 - Se "k = j" é uma barra de carga.

Neste caso haverá quatro entradas, H_{kk} , N_{kk} , J_{kk} , L_{kk} .

8 - Se duas barras não tiverem ligação direta entre si elas não aparecerão na matriz jacobiana.

Com o raciocínio acima desenvolvido, é fácil saber-se o número de entradas para todas as combinações de tipos de barra.

Exemplo de montagem da matriz jacobiana:

Seja uma rede com N barras, das quais N_g é o número de barras de geração, além da barra de balanço. Assim se obtém um sistema com

$(2N - N_G - 2)$ equações. Pois nas barras geradoras só comparece a equação da potência ativa e na barra de balanço não comparece nem a equação da potência ativa nem a da reativa.

Nas $(2N - N_G - 2)$ equações obtidas, as potências são conhecidas (ver coluna 2 da figura 13) e as incógnitas são as tensões e ângulos conforme a coluna 3 da mesma figura.

Como exemplo considere-se a rede da figura 14 onde a barra 1 é de balanço, as barras 3 e 6 são de geração, sendo de carga as barras 2, 4, 5 e 7.

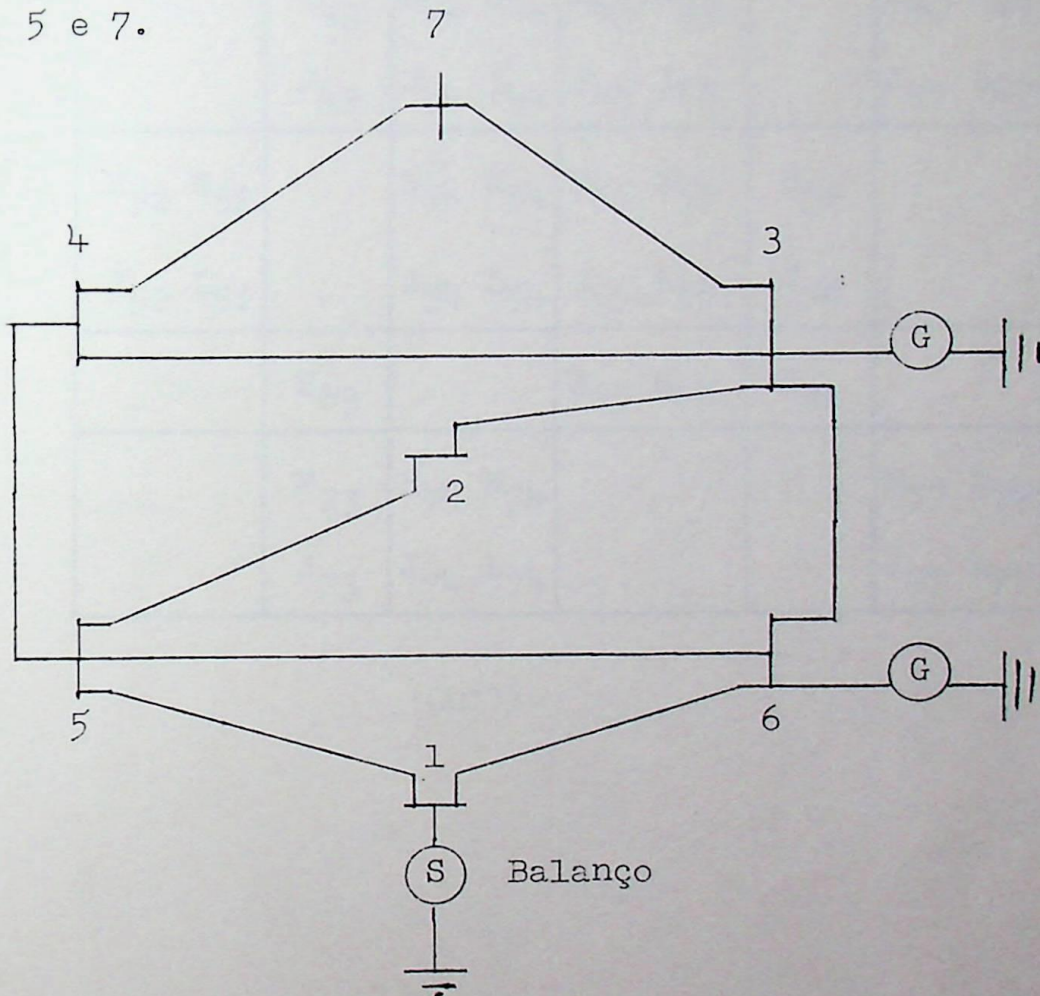


Fig. 14 - Rede exemplo.

Aplicando-se os conhecimentos relativos aos detalhes da montagem da matriz jacobiana recém-adquiridos, tem-se a matriz (100).

Note-se que não é necessário calcular-se todos os valores acima devido às razões de simetria apontadas nas equações (89) e (90), ou seja,

$$N_{kj} = -J_{kj} \quad (89)$$

$$L_{kj} = H_{kj} \quad (90)$$

para $j \neq k$

devendo-se também considerar as simplificações citadas à página 61

quando $j = k$.

ΔP_2	$H_{22} \quad N_{22}$	H_{23}		$H_{25} \quad N_{25}$			$\Delta \sigma_2$
ΔQ_2	$J_{22} \quad L_{22}$	J_{23}		$J_{25} \quad L_{25}$			$\Delta E_2/E_2$
ΔP_3	$H_{32} \quad N_{32}$	H_{33}	$H_{34} \quad N_{34}$		H_{36}	$H_{37} \quad N_{37}$	$\Delta \sigma_3$
ΔP_4		H_{43}	$H_{44} \quad N_{44}$	$H_{45} \quad N_{45}$		$H_{47} \quad N_{47}$	$\Delta \sigma_4$
ΔQ_4		J_{43}	$J_{44} \quad L_{44}$	$J_{45} \quad L_{45}$		$J_{47} \quad L_{47}$	$\Delta E_4/E_4$
ΔP_5	$H_{52} \quad N_{52}$		$H_{54} \quad N_{54}$	$H_{55} \quad N_{55}$	H_{56}		$\Delta \sigma_5$
ΔQ_5	$J_{52} \quad L_{52}$		$J_{54} \quad L_{54}$	$J_{55} \quad L_{55}$	J_{56}		$\Delta E_5/E_5$
ΔP_6		H_{63}		$H_{65} \quad N_{65}$	H_{66}		$\Delta \sigma_6$
ΔP_7		H_{73}	$H_{74} \quad N_{74}$			$H_{77} \quad N_{77}$	$\Delta \sigma_7$
ΔQ_7		J_{73}	$J_{74} \quad L_{74}$			$J_{77} \quad L_{77}$	$\Delta E_7/E_7$

(10)

SEGUNDA PARTE

CAPÍTULO 1 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS DAS TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO.

1.1 - Métodos diretos aplicados à otimização sem restrições.

1.1.1 - Formulação do problema.

Para desenvolver esta formulação El-Hawary,²⁵ considera a operação de "m" geradores térmicos ligados a mesma barra, com o custo do combustível dado por:

$$F_i (P_{gi}) = \alpha_i + \beta_i P_{gi} + \gamma_i P_{gi}^2$$

onde α_i , β_i , γ_i são constantes conhecidas e P_{gi} é a geração de potência ativa da iésima usina.

O custo total do combustível é dado por:

$$F = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_{gi} + \gamma_i P_{gi}^2) \quad (101)$$

ou seja:

$$F = (\alpha_1 + \beta_1 P_{g1} + \gamma_1 P_{g1}^2) + (\alpha_2 + \beta_2 P_{g2} + \gamma_2 P_{g2}^2) + \dots + (\alpha_m + \beta_m P_{gm} + \gamma_m P_{gm}^2) \quad (102)$$

ou então:

$$F = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m) + (\beta_1 P_{g1} + \beta_2 P_{g2} + \dots + \beta_m P_{gm}) + (\gamma_1 P_{g1}^2 + \gamma_2 P_{g2}^2 + \dots + \gamma_m P_{gm}^2) \quad (103)$$

que, em forma vetorial, torna-se:

²⁵ EL-HAWARY, Mohamed E. Operação econômica de sistemas de potência. Apostila do Curso de Pós-graduação em Eng. Eletr., UFSM, 1973.

$$\begin{aligned}
 F = & [1 \ 1 \ \dots \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix} + [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_m] \begin{bmatrix} P_{g1} \\ P_{g2} \\ \dots \\ P_{gm} \end{bmatrix} + \\
 & + [P_{g1} \ P_{g2} \ \dots \ P_{gm}] \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{g1} \\ P_{g2} \\ \dots \\ P_{gm} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{104}$$

Fazendo-se:

$$\begin{aligned}
 \bar{M} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{P}_g = \begin{bmatrix} P_{g1} \\ P_{g2} \\ \dots \\ P_{gm} \end{bmatrix}; \quad \bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix}; \\
 (m \times 1) \qquad \qquad (m \times 1) \qquad \qquad (m \times 1) \\
 \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_m \end{bmatrix}; \quad \bar{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_m \end{bmatrix} \\
 (m \times 1) \qquad \qquad (m \times m)
 \end{aligned}$$

Tem-se

$$\boxed{F = \bar{M}^T \bar{\alpha} + \bar{B}^T \bar{P}_g + \bar{P}_g^T \bar{\gamma} \bar{P}_g} \tag{105}$$

Para resolver-se o problema, procura-se uma combinação de P_{gi} tal que F seja minimizado. Pode-se usar um método variacional ou um algébrico.

1.1.2 - Solução variacional.

Em um extremo (máximo, mínimo ou ponto de sela), a primeira derivada parcial de F com respeito a cada P_{gi} deve ser zero.

Donde:

$$\frac{\partial F}{\partial P_{gi}} = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m \tag{106}$$

No entanto, para que um extremo seja um mínimo, é necessário que:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial P_{gi}^2} > 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (107)$$

Portanto as condições necessárias e suficientes para obter-se um mínimo de F a partir de (102) são:

$$\begin{aligned} B_i + 2 \lambda_i P_{gi} &= 0 & i = 1, \dots, m \\ 2 \lambda_i &> 0 & i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (108)$$

Dentro do enfoque vetorial, chama-se de gradiente, $\overline{\nabla F}$, o vetor obtido pelas derivadas parciais de 1ª ordem de uma função escalar, representado por:

$$\overline{\nabla F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial P_{g1}} \\ \frac{\partial F}{\partial P_{g2}} \\ \dots \\ \frac{\partial F}{\partial P_{gm}} \end{bmatrix} \quad (109)$$

Então a condição necessária para a existência de um mínimo, e quações (106), é representável por:

$$\overline{\nabla F} = \bar{0} \quad (110)$$

Examina-se, agora, a condição de suficiência para a existência de um mínimo, sistema (107).

A matriz das derivadas parciais de segunda ordem de F , em relação a todos os P_{gi} é chamada de matriz Hessiana e representada por:

$$\overline{\nabla^2 F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial P_{g1}^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial P_{g1} \partial P_{g2}} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial P_{g1} \partial P_{gm}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial P_{g1} \partial P_{g2}} & \frac{\partial^2 F}{\partial P_{g2}^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial P_{g2} \partial P_{gm}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial P_{g1} \partial P_{gm}} & \frac{\partial^2 F}{\partial P_{g2} \partial P_{gm}} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial P_{gm}^2} \end{bmatrix} \quad (111)$$

E a condição de suficiência é que $\overline{\nabla^2 F}$ seja positiva definida. Porém de (108) vê-se que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial P_{gi} \partial P_{gj}} = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

e (111) transforma-se na matriz diagonal:

$$\overline{\nabla^2 F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial P_{g1}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial P_{g2}^2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial P_{gm}^2} \end{bmatrix} \quad (112)$$

ou ainda de (108) vem:

$$\overline{\nabla^2 F} = 2 \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_m \end{bmatrix} \quad (113)$$

No caso em estudo tem-se:

$$\overline{\nabla F} = \bar{\beta} + 2\bar{\gamma} \bar{P}_g \quad \text{e} \quad \overline{\nabla^2 F} = 2\bar{\gamma} \quad (114)$$

e, conseqüentemente, por (110) e (111) as condições de mínimo são:

$$\overline{\nabla F} = \bar{\beta} + 2\bar{\gamma} \bar{P}_g = \bar{0} \quad (115)$$

$$\overline{\nabla^2 F} = 2\bar{\gamma} > \bar{0} \quad (116)$$

isto é, $\bar{\gamma}$ deve ser uma matriz positiva definida.

1.1.3 - Solução algébrica.

A expressão algébrica:

$$F = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_{gi} + \gamma_i P_{gi}^2) \quad (101)$$

pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 F &= \sum_{i=1}^m \left[\left(\alpha_i - \frac{B_i^2}{4\gamma_i} \right) + \gamma_i \left(P_{gi} + \frac{B_i^2}{2\gamma_i} \right)^2 \right] \\
 &= \sum_{i=1}^m \left(\alpha_i - \frac{B_i^2}{4\gamma_i} \right) + \sum_{i=1}^m \gamma_i \left(P_{gi} + \frac{B_i^2}{2\gamma_i} \right)^2
 \end{aligned} \tag{117}$$

Fazendo-se:

$$F_{\xi} = \sum_{i=1}^m \left(\alpha_i - \frac{B_i^2}{4\gamma_i} \right) \tag{118}$$

vê-se que F_{ξ} não depende de P_{gi} e, portanto, $F_{\xi} = \text{constante}$. Consequentemente, para minimizar-se F , basta minimizar o valor de

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i \left(P_{gi} + \frac{B_i^2}{2\gamma_i} \right)^2 \tag{119}$$

A equação (117) torna-se:

$$F = F_{\xi} + \sum_{i=1}^m \gamma_i \left(P_{gi} + \frac{B_i^2}{2\gamma_i} \right)^2 \tag{120}$$

$$\text{Se } \gamma_i > 0 \quad i = 1, \dots, m \tag{121}$$

então

$F \gg F_{\xi}$ para cada combinação de P_{gi} .

Assim o mínimo de F é F_{ξ} e isso ocorre só quando

$$P_{gi} + \frac{B_i}{2\gamma_i} = 0 \quad i = 1, \dots, m \tag{122}$$

Dentro de um enfoque vetorial, considera-se a expressão (105) e obtém-se uma expressão análoga à (117):

$$\begin{aligned}
 F &= \bar{M}^T \bar{\alpha} + \bar{P}^T \bar{P}_g + \bar{P}_g^T \bar{\gamma} \bar{P}_g \\
 &= \left(\bar{M}^T \bar{\alpha} - \frac{\bar{B}^T (\bar{\gamma}-1)^T \bar{B}}{4} \right) + \left(\bar{P}_g + \frac{(\bar{\gamma}-1)^T \bar{B}}{2} \right)^T \bar{\gamma} \left(\bar{P}_g + \frac{(\bar{\gamma}-1)^T \bar{B}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Fazendo:

$$F_{\xi} = \bar{M}^T \bar{\alpha} - \frac{\bar{B}^T (\bar{\gamma}-1)^T \bar{B}}{4} \tag{123}$$

tem-se:

$$F = F_{\xi} + \left(\bar{P}_g + \frac{(\bar{\gamma}-1)^T \bar{B}}{2} \right)^T \bar{\gamma} \left(\bar{P}_g + \frac{(\bar{\gamma}-1)^T \bar{B}}{2} \right) \tag{124}$$

E, seguindo-se raciocínio análogo ao que determinou (122) con-

clui-se que o mínimo é atingido para

$$\bar{P}_g + \frac{(\bar{\gamma}-1)^T \bar{B}}{2} = \bar{0} \quad (125)$$

onde $\bar{\gamma}$ = matriz positiva definida. (126)

1.2 - Metodos indiretos aplicados a otimização sem restrições.

1.2.1 - Introdução.

Há duas razões que motivam o estudo da minimização de uma função não linear de várias variáveis sem restrições. A primeira é que a análise da minimização sem restrições lança as bases teóricas para a minimização com restrições. A segunda razão é a de que um problema de minimização com restrições, muitas vezes, pode ser resolvido depois de ter sido transformado em um problema de minimização sem restrições. Deve-se também considerar que, na maioria dos casos reais, é difícil a obtenção de uma expressão explícita para a solução ótima. Mesmo em casos simples, a inversão da matriz $\bar{\gamma}$, requerida na equação (125), é difícil de se obter caso a matriz não seja diagonal ou caso tenha grande dimensão.

O método da iteração permite um ataque mais objetivo ao problema e consiste em fazer diminuir a função-custo a cada passo.

A idéia básica é partir-se de um ponto \bar{P}_0 previamente escolhido e passar-se, por iterações sucessivas, a outros pontos que são obtidos por meio de uma equação da forma:

$$\bar{P}_{n+1} = \bar{P}_n + \alpha_n \bar{r}_n \quad (127)$$

onde:

$$\bar{r}_n = \text{Vetor} \quad \text{e} \quad \alpha_n = \text{escalar}$$

O modo de escolher o vetor \bar{r}_n varia conforme a técnica usada. Há técnicas que escolhem o vetor com base em informações sobre o comportamento da função, objetivo, apenas para valores próximos do ponto \bar{P}_n , como é o caso do método do gradiente, também chamado de método de primeira ordem por só usar derivadas parciais de primeira ordem.

Uma vez escolhido \bar{r}_n , o escalar α_n é selecionado com a finalidade de minimizar a função $F(\bar{P}_n + \alpha_n \bar{r}_n)$, como uma função de α . Assim é que " α " toma o valor da menor raiz positiva de:

$$\frac{d}{d\alpha} F(\bar{P}_n + \alpha \bar{r}_n) = 0 \quad (128)$$

Na figura 15, o processo de descenso é ilustrado no espaço onde F é representado por seus contornos. Começando-se de um ponto arbitrado, \bar{P}_0 , move-se segundo a direção do vetor F_0 até alcançar o pri

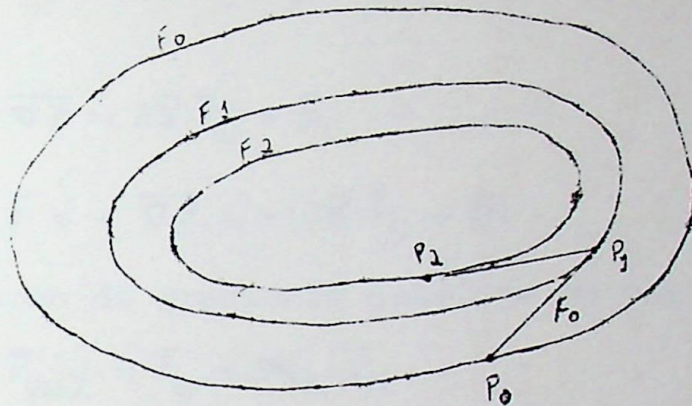


Fig. 15 - Processo de descenso.

meiro ponto onde a linha $(\bar{P}_0 + \alpha \bar{V}_0)$ é tangente a um contorno de F .

1.2.2 - Método do gradiente.

Neste método, escolhe-se, para um dado ponto \bar{P}_n , um vetor de direção igual ao negativo do gradiente de F no ponto \bar{P}_n .

Admitindo-se que a função a ser minimizada seja dada por:

$$F = \bar{\beta}^T \bar{P}_g + \bar{P}_g^T \bar{\gamma} \bar{P}_g \quad (129)$$

como nas equações (125) e (126), o mínimo é obtido quando:

$$(\bar{P}_g + \frac{(\bar{\gamma}^{-1})^T \bar{\beta}}{2}) = 0 \quad (130)$$

(131) $\bar{\gamma}$ = matriz positiva definida, simétrica e quadrada.

Considerando-se que:

$$(\bar{\gamma}^{-1})^T = \bar{\gamma}^{-1} \quad (131)$$

a equação (130) fornece:

$$2\bar{P}_g + (\bar{\gamma}^{-1}) \bar{\beta} = 0$$

$$2\bar{\gamma} \bar{P}_g + (\bar{\gamma}) (\bar{\gamma}^{-1}) \bar{\beta} = 0$$

$$2\bar{\gamma} \bar{P}_g + \bar{\beta} = 0 \quad (132)$$

e a minimização equivale a resolver o problema linear expresso na equação (132).

Desse modo, é conveniente considerar-se qualquer aproximação \bar{P}_i do ponto de minimização, \bar{P}_g , de F , como sendo uma solução aproximada de (132). O resíduo da aproximação feita é o vetor:

$$F = -(2\bar{\gamma} P_0 + \bar{\beta}) \quad (133)$$

Tem-se:

$$\nabla F = 2\bar{\gamma} \bar{P}_0 + \bar{\beta} \quad (134)$$

Donde:

$$\bar{r} = -\nabla F = -(2\bar{\gamma} \bar{P}_0 + \bar{\beta}) \quad (135)$$

Logo o método do gradiente consiste em tomar:

$$\bar{P}_{n+1} = \bar{P}_n + \alpha_n \bar{r}_n \quad (136)$$

onde

$$\bar{r}_n = -(2\bar{\gamma} \bar{P}_n + \bar{\beta})$$

É interessante notar-se que a direção escolhida por este método é perpendicular ao contorno de F já que é o negativo do gradiente e tem-se o gráfico da figura 16.

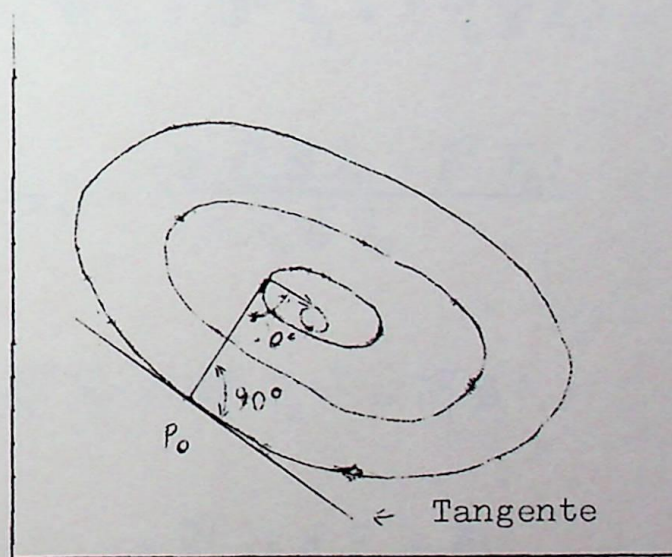


Fig. 16 - Método do gradiente.

O valor de α_n é escolhido com base em $\frac{\partial}{\partial \alpha} F(\bar{P}_n + \alpha \bar{r}_n) = 0$ e de (129) e (136) tem-se:

$$\begin{aligned} F(\bar{P}_n + \alpha \bar{r}_n) &= \bar{\beta}^T (\bar{P}_n + \alpha \bar{r}_n) + (\bar{P}_n + \alpha \bar{r}_n)^T \bar{\gamma} (\bar{P}_n + \alpha \bar{r}_n) \\ &= \bar{\beta}^T \bar{P}_n + \alpha \bar{\beta}^T \bar{r}_n + \bar{P}_n^T \bar{\gamma} \bar{P}_n + \alpha \bar{P}_n^T \bar{\gamma} \bar{r}_n + \alpha \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{P}_n + \\ &\quad + \alpha \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{r}_n \end{aligned} \quad (137)$$

Por simetria, tem-se:

$$\bar{\gamma}^T = \bar{\gamma}$$

Donde:

$$\bar{P}_n^T \bar{\gamma} \bar{r}_n = \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{P}_n \quad (138)$$

Dessa forma, pode-se somar o quarto e o quinto termos de (137) e tem-se:

$$F(\bar{P}_n + \alpha \bar{r}_n) = \bar{\beta}^T \bar{P}_n + \alpha \bar{\beta}^T \bar{r}_n + \bar{P}_n^T \bar{\gamma} \bar{P}_n + 2\alpha \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{P}_n + \alpha^2 \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{r}_n$$

como:

$$\bar{\beta}^T \bar{P}_n + \bar{P}_n^T \bar{\gamma} \bar{P}_n = F(\bar{P}_n) \quad (139)$$

e considerando-se (127), tem-se:

$$F(\bar{P}_{n+1}) = F(\bar{P}_n) + \alpha^2 \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{r}_n + \alpha (\bar{\beta}^T \bar{r}_n + 2 \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{P}_n)$$

e derivando:

$$\frac{\partial F(\bar{P}_{n+1})}{\partial \alpha} = 2\alpha \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{r}_n + (\bar{\beta}^T \bar{r}_n + 2 \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{P}_n) = 0$$

Donde:

$$\alpha_n = \frac{-(2 \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{P}_n + \bar{\beta}^T \bar{r}_n)}{2 \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{r}_n} \quad (140)$$

Mas:

$$\bar{\beta}^T \bar{r}_n = (\bar{\beta}^T \bar{r}_n)^T = \bar{r}_n^T \bar{\beta} \quad (141)$$

Então:

$$\alpha_n = \frac{-\bar{r}_n^T (2 \bar{\gamma} \bar{P}_n + \bar{\beta})}{2 \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{r}_n} \quad (142)$$

Pela equação (137), tem-se:

$$\alpha_n = \frac{\bar{r}_n^T \bar{r}_n}{2 \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{r}_n} \quad (143)$$

Assim sendo, pelo método do gradiente, o passo seguinte é dado de acordo com (136), por:

$$\bar{P}_{n+1} = \bar{P}_n + \frac{\bar{r}_n^T \bar{r}_n}{2 \bar{r}_n^T \bar{\gamma} \bar{r}_n} \cdot \bar{r}_n \quad (144)$$

onde:

$$\bar{r}_n = -(2 \bar{\gamma} \bar{P}_n + \bar{B}) \quad (145)$$

1.3 - Conceitos básicos da minimização com restrições.

1.3.1 - Máximos, mínimos e pontos de sela.

Uma superfície que é descrita explicitamente por uma equação da forma $Z = f(x, j)$ pode ser vista como uma superfície de nível do campo escalar F definido pela equação:

$$F(x, j, z) = f(x, j) - z \quad (146)$$

Se f for diferenciável, o gradiente deste campo será dado pelo vetor:

$$\nabla F = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} - \bar{k} \quad (147)$$

Segundo Apostol,²⁶ pode-se escrever uma equação linear para o plano tangente a um ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ como:

$$Z - Z_1 = A(x - x_1) + B(Y - y_1) \quad (148)$$

onde:

$$A = D_1 f(x_1, y_1) \quad e \quad B = D_2 f(x_1, y_1)$$

Quando ambos os coeficientes A e B são zero, o ponto P_1 é chamado de Ponto Estacionário da Superfície Z e o ponto (x_1, y_1) é chamado de Ponto Estacionário da Função f , ou Ponto Crítico de f .

O plano tangente, em um ponto estacionário, é horizontal. Os pontos estacionários de uma superfície são classificados em três categorias: máximo, mínimo e ponto de sela.

Estes três tipos de pontos podem ser introduzidos para campos escalares arbitrários definidos em subconjuntos do \bar{R}^n .

Definição: Um campo escalar tem um máximo absoluto em um ponto \bar{a} de um conjunto S em \bar{R}^n , se:

²⁶APOSTOL, Tom M. Calculus. 2. ed. Barcelona, Ed. Reverté, 1972. p. 369.

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}) \quad (149)$$

para todos os \bar{x} em S . O número $f(\bar{a})$ é chamado de Valor Máximo Absoluto ou Global de f em S . A função f tem um Máximo Relativo ou local em \bar{a} se a desigualdade é satisfeita para todos os \bar{x} que estão dentro de uma n -bola $B(\bar{a})$ de S (ver figura 17).

O Mínimo Absoluto, ou Global, e o Mínimo Relativo, ou Local, são definidos de modo análogo usando-se o sinal oposto da desigualdade acima (ver figura 18).

Definição: Um número que é um Máximo Relativo ou um Mínimo Relativo de f é chamado de Extremo de f .

Se f tem um extremo em um ponto interior \bar{a} e é diferenciável ali, então todas as derivadas parciais de primeira ordem $D_1 f(\bar{a})$, \dots , $D_n f(\bar{a})$ devem ser zero. Em outras palavras, $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$. Isto é simples de provar ao fixar-se cada componente e reduzir-se o problema ao caso de uma dimensão. No caso de $n = 2$, isso significa que há um plano horizontal tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(\bar{a}, f(\bar{a}))$.

Por outro lado, é fácil encontrar-se exemplos nos quais a anulação de todas as derivadas parciais no ponto \bar{a} não implica necessariamente na existência de um extremo em \bar{a} . Isso ocorre nos pontos de sela (ver figura 19).

Definição: Supondo-se que f é diferenciável em \bar{a} . Se $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$, então \bar{a} é chamado de ponto estacionário de f . Um ponto estacionário é chamado de Ponto de Sela se cada n -bola $B(\bar{a})$ contém pontos \bar{x} tais que $f(\bar{x}) < f(\bar{a})$ e outros pontos tais que $f(\bar{x}) > f(\bar{a})$.

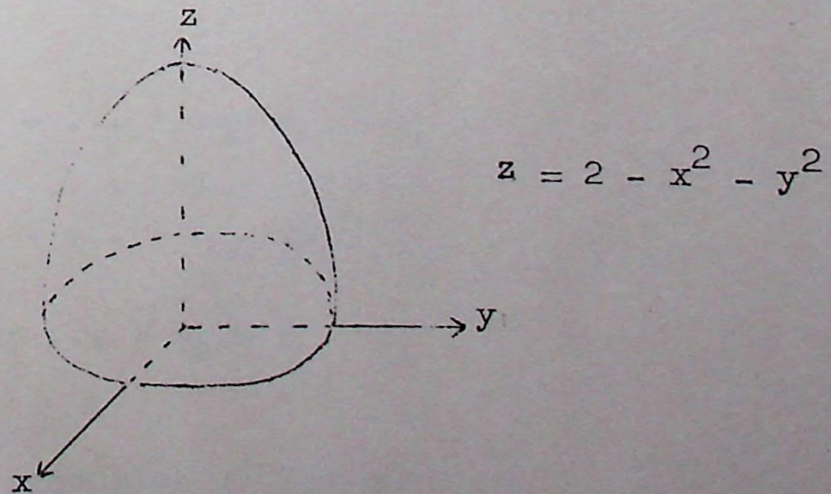


Fig. 17 - Máximo na origem.

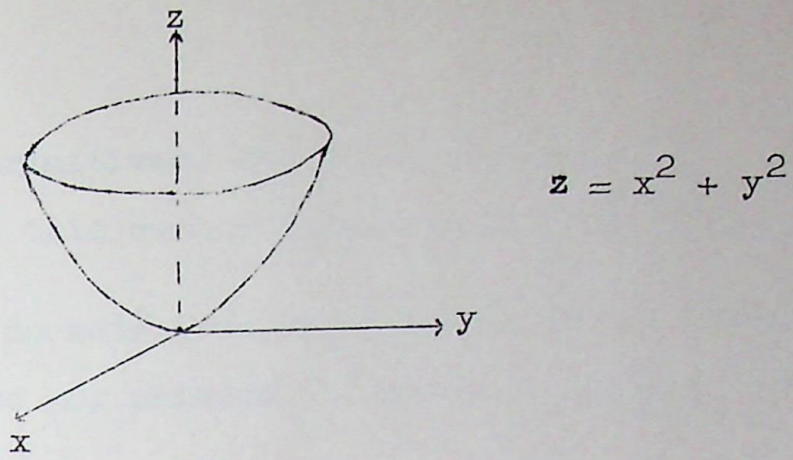


Fig. 18 - Mínimo na origem.

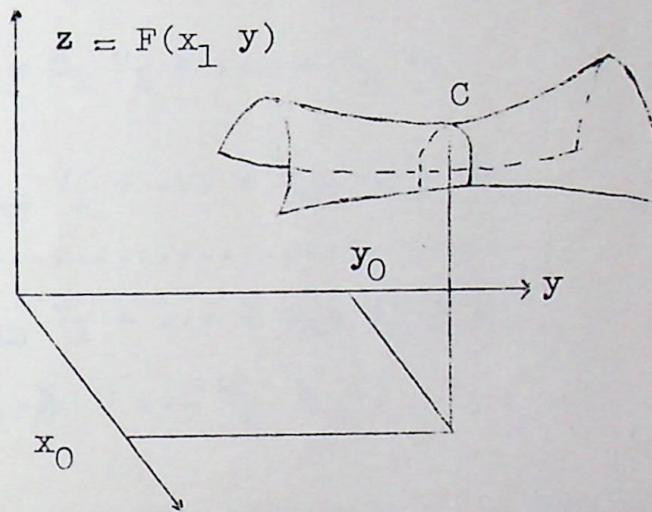


Fig. 19 - Ponto sela em c.

1.3.2 - Problemas da dualidade.

Baumol,²⁷ mostra que dado o problema primitivo:

maximizar

$$\Pi = P_1 Q_1 + \dots + P_n Q_n \tag{150}$$

sujeito a:

$$a_{11} Q_1 + \dots + a_{1n} Q_n \leq C_1$$

.....

$$a_{m1} Q_1 + \dots + a_{mn} Q_n \leq C_m$$

$$Q_1 \geq 0; \dots ; Q_n \geq 0$$

onde:

Q_j = Quantidade produzida do produto "j"

²⁷BAUMOL, W.J. Economic theory and operations analysis. 3. ed. London, Prentice Hall, 1972.

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{m1} Q_1 + \dots + a_{mn} Q_n + U_m = C_m$$

$$Q_1 \geq 0; \dots; Q_n \geq 0$$

$$U_1 \geq 0; \dots; U_m \geq 0$$

e o problema dual equivalente será:

minimizar

$$\alpha = C_1 V_1 + \dots + C_m V_m$$

sujeito a

$$a_{11} V_1 + \dots + a_{m1} V_m - L_1 = P_1 \tag{153}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{1n} V_1 + \dots + a_{mn} V_m - L_n = P_n$$

$$V_1 \geq 0; \dots; V_m \geq 0$$

$$L_1 \geq 0; \dots; L_n \geq 0$$

onde:

U_i = Recurso, quantidade de matéria-prima ou capacidade, disponível mas não usado na produção

ou

U_i = Variáveis de folga primitivas, com "i" = 1, ..., m

L_j = Perda contábil por unidade produzida do produto "j" ou

L_j = Variáveis de folga duais, com "j" = 1, ..., n.

A esta altura é útil fazer-se o quadro resumo da figura 20.

Convenções:

- - Var. Ordinárias
- - Var. de Folga

	Var. Primitivas (Probl. de Maxim.) (Quant. físicas)	Var. Duais (Probl. de Minim.) (Quant. monet.)
Ref. à produção do produto "j"	□ Q_j	○ L_j
Ref. ao consumo do recurso "i"	○ U_i	□ V_i

Fig. 20 - Quadro resumo das variáveis.

1.3.3 - Teoremas da dualidade.

Na obra já citada, Baumol prova os seguintes teoremas úteis:

Teorema I:

"O máximo valor de Π é igual ao mínimo valor de α , e qualquer par de soluções viáveis para as quais se tiver $\Pi = \alpha$ constituir-se-á em um par de soluções ótimas".

Teorema II:

Em uma solução ótima, obrigatoriamente, tem-se:

$$Q_j L_j = 0, \text{ para cada produto "j"} \quad (154)$$

$$U_i V_i = 0, \text{ para cada recurso de produção "i"} \quad (155)$$

Da equação (154) tem-se:

$$Q_j = 0 \quad \text{ou} \quad L_j = 0 \quad \text{ou} \quad Q_j = L_j = 0 \quad (156)$$

Isso significa que, se houver produção do produto "j", $Q_j > 0$, então sua perda contábil deverá ser nula, isto é, deve-se ter $L_j = 0$. Por outro lado, significa também que, se a produção do produto "j" incorrer em uma perda contábil, $L_j > 0$, então a quantidade a ser produzida deverá ser nula, isto é, deve-se ter $Q_j = 0$.

Da equação (155) tem-se:

$$U_i = 0 \quad \text{ou} \quad V_i = 0 \quad \text{ou} \quad U_i = V_i = 0 \quad (157)$$

Assim se vê que, se o recurso, ou matéria-prima forem supridos com folga ou excesso, isto é, se $U_i > 0$, então a equação (155) afirma que este recurso deve ter um valor contábil nulo, ou seja, $V_i = 0$.

Portanto as equações do teorema II, quando expressas em palavras, afirmam que:

Em um par de decisões ótimas:

- 1 - a firma produzirá, apenas, os produtos que incorrem em perdas de oportunidade, ou contábeis, nulas, $L_j = 0$;
- 2 - só os recursos que forem totalmente utilizados na produção é que receberão um valor V_i positivo;
- 3 - qualquer par de soluções viáveis para ambos os problemas, primitivo e dual, será um par de soluções ótimas.

Os teoremas citados acima podem ser estendidos à programação

ção não linear e auxiliam a compreensão do significado econômico das variáveis duais de Kuhn-Tucker.

Por ora é útil fazer-se o seguinte resumo:

U_i = Variável de folga, primitiva ou do problema de maximização;

= Quantidade do bem de produção "i", matéria-prima ou capacidade de máquina, não utilizada na produção;

L_j = Variável de folga, dual ou do problema de minimização;

= Perda contábil ou lucro que se deixou de ganhar por não se ter aproveitado a oportunidade mais lucrativa;

Q_j = Variável ordinária primitiva ou do problema de maximização;

= Quantidade produzida do produto "j";

V_i = Valor, ou preço contábil, do recurso de produção "i";

$V_i = \frac{\partial \pi}{\partial C_i}$ = Contribuição marginal ao lucro dada pelo recurso "i";

= Variável ordinária dual ou do problema de minimização.

1.3.4 - Interpretação econômica das variáveis duais V_i e L_j .

Considerando-se a variável dual V_i , Baumol afirma que V_i indica o quanto seria adicionado aos lucros, π , da firma, se de algum modo, ela pudesse aumentar seus recursos, (i), por uma unidade, o que equivale a relaxar, em parte, a restrição

$$a_{i1} Q_1 + \dots + a_{in} Q_n \leq C_i \quad (158)$$

Isso em termos mais precisos pode ser escrito assim:

$$V_i = \frac{\partial \pi}{\partial C_i} \quad (159)$$

Quanto a L_j , esta é chamada de perda contábil ou perda de oportunidade e seu sentido é agora explicado.

De (153) tem-se:

$$L_j = (a_{1j} V_1 + \dots + a_{mj} V_m) - P_j$$

ou

$$L_j = \sum_i a_{ij} V_i - P_j \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array} \quad (160)$$

Onde:

1 - P_j é o lucro obtido na produção de cada unidade do produto "j";

2 - $\sum_i a_{ij} V_i$ é o valor contábil dos recursos usados na produção de uma unidade do produto "j" já que:

a_{ij} = quantidade do recurso "i" usado na produção de uma unidade do produto "j";

V_i = valor, ou preço, contábil de uma unidade do recurso "i".

Assim é que (160) pode ser assim reescrita:

L_j = valor dos recursos necessários à produção de uma unidade do produto "j" - lucro por unidade produzida do produto "j".

Se $L_j > 0$, isso significa que houve uma perda de lucro para a firma ao produzir o produto "j".

Por construção, os valores contábeis, V_i , são estabelecidos de modo a imputarem o lucro líquido, Π , a todos os recursos disponíveis para a produção. Por isso é que, na melhor das hipóteses, o lucro unitário, P_j , irá apenas cobrir o preço contábil dos recursos usados, $\sum_i a_{ij} V_i$. E, neste caso, a perda contábil L_j associada à produção desse produto será nula, $L_j = 0$. Para os produtos com $L_j > 0$, haverá uma perda contábil líquida.

O significado de "perda contábil líquida" esclarece que, se $L_j > 0$, então os recursos que foram usados na produção do produto "j" seriam melhor empregados se fossem usados na produção de outro produto. Pode-se dizer, também, que o lucro P_j desse produto não cobre a contribuição marginal à lucratividade que se obteria se os mesmos recursos fossem usados para produzir outro produto. Vê-se, pois, que a perda contábil é uma perda relativa à alternativa de maior lucro.

Exemplo:

Supondo que a produção de sacolas e de sapatos utilize o mesmo tipo de recursos e que permita obter-se:

$$P_{sc} = \text{Cr\$ } 5,00 \text{ para as sacolas e}$$

$$P_{sp} = \text{Cr\$ } 7,00 \text{ para os sapatos,}$$

então se tem

$$L_{sc} = \text{Cr\$ } 2,00 \quad \text{e} \quad L_{sp} = \text{Cr\$ } 0,00$$

Isto é, embora a firma faça um lucro absoluto de Cr\$ 5,00 em cada sacola que produz, ainda assim ela tem uma perda relativa, ou perda contábil líquida de Cr\$ 2,00 quando $P_{sc} = \text{Cr\$ } 5,00$ é comparado ao montante que ela ganharia se tivesse alocado seus recursos para a produção de sapatos.

1.3.5 - Teorema de Lagrange.

Teorema:

Seja f uma função real tal que $f \in C^1$ em um conjunto aberto S de E_n . Sejam g_1, \dots, g_m funções reais tais que $\bar{g} = (g_1, \dots, g_m) \in C^1$ em S , e suponha-se que $m < n$. Seja X_0 aquele subconjunto de S no qual \bar{g} se anula, ou seja,

$$X_0 = \{ X | X \in S, \bar{g}(X) = \bar{0} \} \quad (161)$$

Suponha-se que $\bar{X}_0 \in X_0$ e que existe um entorno $N(\bar{X}_0)$ tal que $f(\bar{X}) \leq f(\bar{X}_0)$ para todo $\bar{X} \in X_0 \cap N(\bar{X}_0)$, ou que $f(\bar{X}) \geq f(\bar{X}_0)$ para todo $\bar{X} \in X_0 \cap N(\bar{X}_0)$. Suponha-se que o determinante de ordem m dado por $\det [D_j g_i(\bar{X}_0)]$ é diferente de zero.

Então existem m números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ que satisfazem às n equações seguintes:

$$\lambda D_r f(\bar{X}_0) + \sum_{k=1}^m \lambda_k D_r g_k(\bar{X}_0) = 0 \quad r = 1, \dots, n$$

onde $\lambda_k =$ multiplicadores de Lagrange.

Em forma vetorial tem-se:

$$\nabla f(\bar{X}_0) + \lambda_1 \nabla g_1(\bar{X}_0) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\bar{X}_0) = \bar{0} \quad (162)$$

Em outra de suas obras, Apostol²⁸ apresenta a prova para este teorema.

O teorema de Lagrange é útil para a solução de problemas de otimização com restrições de igualdade como veremos adiante. Suponha-se que $f(x,y,z)$ representa a temperatura em um ponto (x, y, z) do espaço.

Pergunta-se: qual o valor máximo ou mínimo da temperatura em uma certa superfície? - Se a equação da superfície for dada explicitamente

²⁸APOSTOL, Tom M. Análisis matemático. Barcelona, Ed. Reverté, 1972, p. 150.

tamente como $z = h(x, y)$, então se pode substituir z por $h(x, y)$, e eliminação de uma variável, para obter-se a temperatura na superfície como uma função só de x e y , ou seja,

$$F(x, y) = f[x, y, h(x, y)] \quad (163)$$

e o problema constitui-se em encontrar os extremos de F .

Na prática surgem dificuldades quando a equação da superfície é dada de forma implícita, $g(x, y, z) = 0$. É impossível expressar-se z em função de x e y . Um método útil para a solução de tais problemas é o método dos multiplicadores de Lagrange.

1.3.6 - Minimização com restrições de igualdade, pelo Método de Lagrange.

Considera-se a operação de m geradores térmicos ligados a mesma barra. Como antes, o custo do combustível dado por:

$$F = \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \beta_i P_{gi} + \gamma_i P_{gi}^2) \quad (164)$$

O problema consiste na determinação dos P_{gi} que minimizam F e satisfazem simultaneamente a restrição de igualdade dada por:

$$P_D = \sum_{i=1}^m P_{gi} \quad (165)$$

onde P_D é a Potência Ativa demandada na barra.

Sem considerar-se a restrição acima, a solução será aquela já vista antes e expressa por (130), ou seja:

$$\left. \begin{aligned} P_{gi} &= -\frac{\beta_i}{2\gamma_i} \\ \gamma_i &> 0 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, m \quad (166)$$

Mas, no presente caso, a solução acima resultaria na expressão:

$$\sum_{i=1}^m P_{gi} = -\sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{2\gamma_i} \quad (167)$$

a qual poderia ser diferente de P_D . Assim se deve fazer nova análise incluindo-se na mesma a restrição dada por (165).

A restrição (165) pode ser assim reescrita:

$$\sum_{i=1}^m P_{gi} - P_D = 0 \quad (168)$$

Acrescentando-se zero ao funcional F , dado por (164), seu valor não se alterará. Entretanto as unidades de custo que ele expressa são diferentes das unidades de potência expressas por (168). Por isso, é necessário multiplicar-se a expressão acima pelo multiplicador de Lagrange λ a fim de obter a expressão aumentada do custo, também chamada de Lagrangeano:

$$F = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i P_{gi} + \gamma_i P_{gi}^2) + \lambda \left(\sum_{i=1}^m P_{gi} - P_D \right) \quad (169)$$

De (169), λ é obtido de tal modo, que ambas as equações (164) e (165) são simultaneamente satisfeitas.

A solução variacional é obtida por meio de:

$$\frac{\partial F}{\partial P_{gi}} = \beta_i + 2 \gamma_i P_{gi} + \lambda = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (170)$$

Donde:

$$P_{gi} = \frac{-(\lambda + \beta_i)}{2 \gamma_i} \quad (171)$$

Mas, para satisfazer-se a restrição (165), deve-se fazer:

$$\sum_{i=1}^m \frac{-(\lambda + \beta_i)}{2 \gamma_i} = P_D \quad (172)$$

Como resultado obtém-se:

$$\lambda = \frac{-(P_D + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{2 \gamma_i})}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{2 \gamma_i}} \quad (173)$$

Assim, de (171) e (173), há a seguinte solução ótima:

$$P_{gi} = \frac{-\beta_i}{2 \gamma_i} + \frac{1}{2 \gamma_i} \cdot \frac{P_D + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{2 \gamma_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{2 \gamma_i}} \quad i = 1, \dots, m \quad (174)$$

1.3.7 - Teorema de Kuhn-Tucker.

Os trabalhos de Hadley²⁹ e Baumol³⁰ apresentam a prova do teorema de Kuhn-Tucker o qual pode ser resumido na seguinte proposição:

"Quaisquer valores das variáveis, Q e V , que minimizem (maximizem) o valor da Função Objetivo Original sujeita às restrições de igualdade, ou de desigualdade, irão, também, minimizar (maximizar) o valor da Expressão Lagrangeana sujeita, apenas, as condições de não negatividade das suas variáveis".

A análise de Kuhn-Tucker ainda oferece outros interessantes resultados, tais como:

1 - Em um problema de programação matemática os Multiplicadores de Lagrange, λ , tornam-se iguais aos preços ótimos dos recursos, V .

Por esse motivo é que, daqui para diante, se usarão os símbolos das variáveis duais V_1, \dots, V_m em lugar dos multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ onde for conveniente.

2 - Supondo que o problema primitivo seja o da maximização dos lucros, Π , então o problema dual será o da minimização do custo contábil α . Seja $\mathcal{L}(Q_1, \dots, Q_n, V_1, \dots, V_m)$ a expressão do Lagrangeano comum a ambos os problemas a qual pode ser representada resumidamente por $\mathcal{L}(Q, V)$.

Seja ainda Q^0 o conjunto dos Q ótimos do problema primitivo e V^0 o conjunto dos V ótimos para o problema dual.

Então a análise de Kuhn-Tucker afirma que:

2a - os valores das variáveis primitivas Q_1, \dots, Q_n que maximizam Π devem, também, ser os que maximizam $\mathcal{L}(Q, V^0)$ que é a Expressão Lagrangeana do problema primitivo na qual se fez $\lambda_i = V_i^0$, isto é, na qual substituiu-se os λ pelo conjunto dos V_i ótimos do problema dual.

De modo similar, os valores das variáveis duais V_1, \dots, V_m que minimizam α também minimizam $\mathcal{L}(Q^0, V)$;

²⁹HADLEY, G. Nonlinear and dynamic programming. London, Addison Wesley, 1972.

³⁰BAUMOL, W.J. Economic theory and operation analysis. London, Prentice-Hall, 1972.

2b - uma vez determinada a combinação dos Q's e V's que constituem, respectivamente, a solução para os problemas primitivo e dual, então, para estes valores, o Lagrangeano $\mathcal{L}(Q, V)$ terá o menor valor que quaisquer V's podem dar-lhe e o mais alto valor que quaisquer Q's podem dar-lhe;

2c - dados um problema primitivo e o seu dual, a Expressão Lagrangeana para ambos é idêntica em forma.

Assim é que, usando-se uma notação genérica, o problema primitivo pode ser escrito da seguinte forma:

maximizar

$$\pi = \sum_{j=1}^n P_j Q_j$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j \leq C_i \quad i = 1, \dots, m.$$

e isso corresponde ao Problema Lagrangeano na forma, maximizar

$$\mathcal{L}(Q, V^0) = \sum_{j=1}^n P_j Q_j + \sum_{i=1}^m V_i^0 (C_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j)$$

De modo semelhante, o problema dual pode ser escrito como minimizar

$$\alpha = \sum_{i=1}^m C_i V_i$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} V_i \geq P_j \quad j = 1, \dots, n$$

cujo Problema Lagrangeano é

minimizar

$$\mathcal{L}(Q^0, V) = \sum_{i=1}^m V_i C_i + \sum_{j=1}^n Q_j^0 (P_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} V_i)$$

A observação das duas Expressões Lagrangeanas acima indica que cada uma é um caso especial da Forma Lagrangeana Generalizada seguinte:

$$\mathcal{L}(Q, V) = \sum P_j Q_j + \sum V_i C_i - \sum \sum V_i a_{ij} Q_j \quad (175)$$

Isso prova a afirmativa (2c). Pois vê-se que o Problema La-

grangeano Primitivo é maximizar $L(Q, V)$ com V_1, \dots, V_m feitos respectivamente iguais a V_1^0, \dots, V_m^0 e que o Problema Lagrangeano Dual é minimizar a mesma função generalizada $\mathcal{L}(Q, V)$ com os valores de Q_1, \dots, Q_n feitos iguais a Q_1^0, \dots, Q_n^0 .

Desse modo, a solução é chamada de Ponto de Cella para a Função Lagrangeana Generalizada $\mathcal{L}(Q, V)$. Com esta função sendo maximizada com respeito aos valores dos Q_j 's e minimizada com respeito aos valores dos V_i 's.

Resumindo, se o problema envolver a maximização de

$$\Pi = f(Q_1, \dots, Q_n) \leq C_m$$

sujeito a

$$g_1(Q_1, \dots, Q_n) \leq C_1$$

.....

$$g_m(Q_1, \dots, Q_n) \leq C_m$$

a Função Lagrangeana será:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Q, V) = f(Q_1, \dots, Q_n) + V_1 [C_1 - g_1(Q_1, \dots, Q_n)] + \dots + \\ + V_m [C_m - g_m(Q_1, \dots, Q_n)] \end{aligned}$$

e o teorema de Kuhn-Tucker afirma que determinando-se os Q 's para os quais $\mathcal{L}(Q, V)$ é um máximo e os V 's para os quais esta função é um mínimo, sujeita somente às condições de não negatividade $Q_j \geq 0$ e $V_i \geq 0$, então se encontrarão as soluções dos problemas primitivo e dual.

1.3.8 - Análise das condições de Kuhn-Tucker.

A observação de que um problema de maximização, ou de minimização, com restrições pode ser transformado em um problema de maximização, ou minimização, de uma Expressão Lagrangeana sem restrições é um primeiro grande passo na teoria da otimização. No entanto, tornam-se necessários mais dois passos, ou seja, deve-se verificar as condições de ótimo de Primeira Ordem e as condições de Segunda Ordem.

Examinam-se, agora, as condições de primeira ordem para a maximização, ou minimização, da Expressão Lagrangeana

$$\mathcal{L}(Q_1, \dots, Q_n, V_1, \dots, V_m).$$

Da teoria clássica do cálculo infinitesimal, com várias variáveis, a solução de um problema de máximo, ou mínimo, com restrições de igualdade requer que todas as derivadas parciais desta expressão sejam nulas, ou seja:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(Q, V)}{\partial Q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (176)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(Q, V)}{\partial V_i} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (177)$$

É bom recordar que o procedimento consiste em resolver simultaneamente estas $n + m$ equações para determinar o valor ótimo das $n + m$ variáveis $Q_1, \dots, Q_n, V_1, \dots, V_m$. É de se perguntar se semelhante estratégia pode ser estendida a problemas de programação matemática envolvendo restrições de desigualdade. A análise de Kuhn-Tucker diz que, se as funções relevantes são diferenciáveis, tal extensão é possível. As condições de Primeira Ordem de Kuhn-Tucker, para um problema de minimização são as seguintes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(Q, V)}{\partial Q_j} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (178)$$

$$Q_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}(Q, V)}{\partial Q_j} \right) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (179)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(Q, V)}{\partial V_i} \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (180)$$

$$V_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}(Q, V)}{\partial V_i} \right) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (181)$$

$$Q_j \geq 0; \quad V_i \geq 0 \quad (182)$$

Note-se que as condições (176) e (177) do cálculo diferencial foram substituídas por (178) e (180) que agora passam, adicionalmente, a conter desigualdades. Foram também introduzidas duas condições novas, isto é, (179) e (181).

Para um problema de maximização, bastaria inverter-se o sinal das desigualdades.

Os requisitos do cálculo infinitesimal de que em um ponto extremo, máximo ou mínimo, as derivadas parciais sejam nulas só são

válidos para pontos extremos que ocorrem no interior do intervalo considerado, como na figura 21.

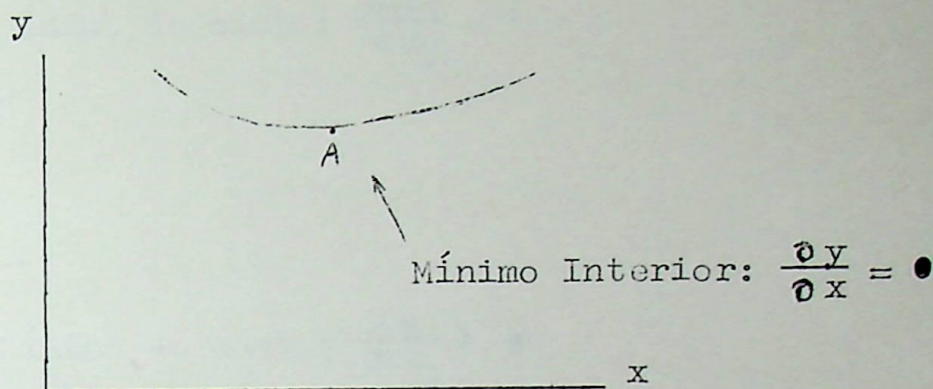


Fig. 21 - Ponto extremo interior.

Já as condições (178) e (180) de Kuhn-Tucker são uma generalização das condições (176) e (177) do cálculo infinitesimal para levar em conta a possível ocorrência de um ponto extremo (máximo, ou mínimo) em um canto do intervalo (corner extremum). As condições (179) e (181) de Kuhn-Tucker determinam se devem ser aplicadas as regras de pontos extremos de interior ou as regras de pontos extremos de canto, e isto só é possível porque as variáveis Q e V são obrigadas a tomar valores não negativos.

Considere-se a minimização de $y = f(x_1, \dots, x_n)$ sujeita a ter todos os $x_i \geq 0$.

Supondo-se, primeiramente, que o ponto A, sob consideração, tem um valor x_1 que pode ser aumentado ou diminuído, isto é, supõe-se ser A um ponto interior do intervalo de x:

Se A for um ponto de extremo, então deverá satisfazer a:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0 \quad (183)$$

Assim se tem o extremo interior visto na figura (21).

Por outro lado, pode-se supor que está sendo testada a possibilidade da existência de um mínimo de canto no qual $x_1 = 0$. Nesse caso, tem-se teoricamente as três possibilidades:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0 ; \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} < 0 ; \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} > 0 \quad (184)$$

das quais (ver figura 22) apenas a última pode ser desprezada.

Desse modo, dada uma função diferenciável $y = f(x_1, \dots, x_n)$, tem-se as seguintes regras:

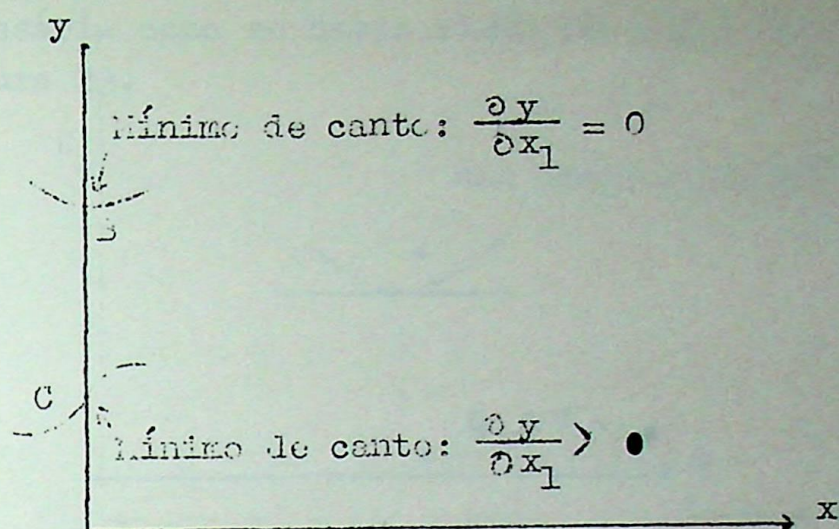


Fig. 22 - Pontos extremos de canto.

1 - Para um mínimo, ou máximo interior, é necessário que:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \bullet \quad i = 1, \dots, n \quad (185)$$

2 - Para um mínimo de canto é necessário que:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} > \bullet \quad (186)$$

3 - Para um máximo de canto é necessário que:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} < \bullet \quad (187)$$

As condições (179) e (181) são novas, comparadas com as do cálculo infinitesimal, e determinam se são as condições de ponto de extremo de canto, ou se são as condições de ponto de extremo interior as que devem ser usadas em cada caso.

Considere-se, primeiro, a condição:

$$Q_j \frac{\partial \mathcal{L}(Q, V)}{\partial Q_j} = \bullet \quad (179)$$

que pode ser assim expressa:

$$Q_j = \bullet \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_j} = 0 \quad \text{ou ambos são nulos} \quad (179^*)$$

Isto tem a seguinte implicação:

Se o valor Q_j considerado não for nulo é claro que se ter um mínimo interior e (179), então, requer que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_j} = \bullet$ o que é uma

condição necessária como se havia visto em (176) pois tem-se a situação da figura 23.

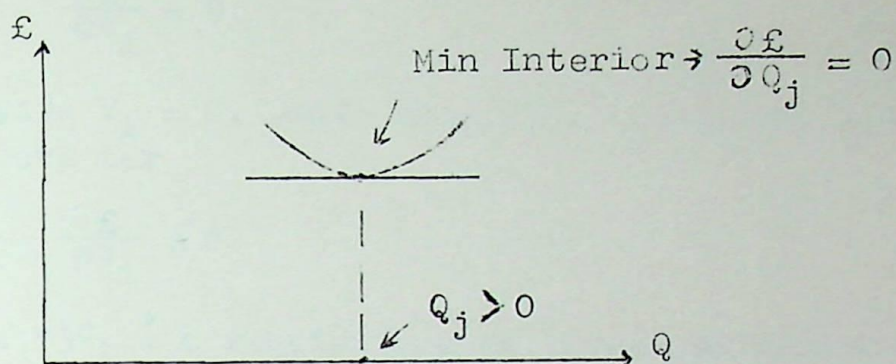


Fig. 23 - Mínimo Interior.

Caso seja considerado um canto, onde $Q_j = 0$, então (179), ou (179^{*}), informa que

$$\frac{\partial f}{\partial Q_j} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial Q_j} \neq 0$$

Porém a condição (178) de Kuhn-Tucker diz que se deve ter $\frac{\partial f}{\partial Q_j} \geq 0$, que pela regra "2", é o requisito necessário para se ter um mínimo de canto (ver figura 24).

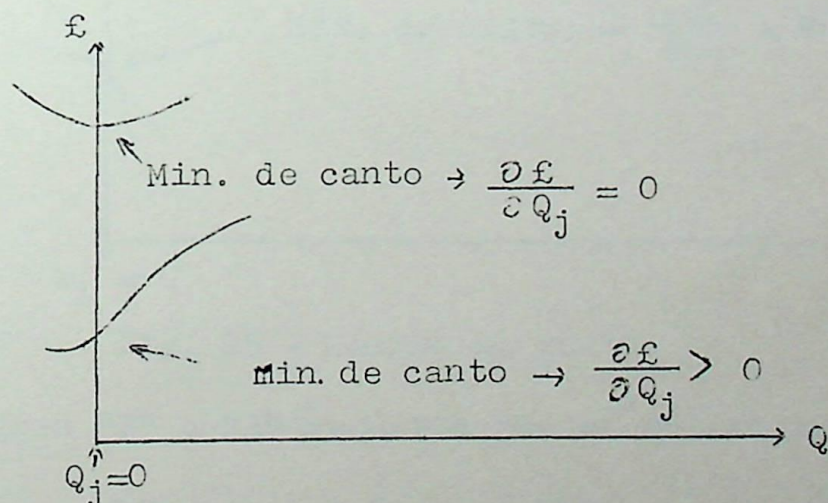


Fig. 24 - Mínimo de canto.

De modo semelhante tem-se:

$$V_i \left[- \frac{\partial f(Q, V)}{\partial V_i} \right] = 0 \quad (181)$$

que se pode reescrever assim:

$$V_i = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial V_i} = 0 \quad \text{ou ambos são nulos.} \quad (181^*)$$

Isto, em interpretação análoga a de (179^{*}), informa que para $V_i \neq 0$, ou para ponto de máximo interior, deve-se ter

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_i} = 0$$

enquanto que, para $V_i = 0$, ponto de canto, a comparação com (180) mostra que se deve ter

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_i} \leq 0$$

que, pela regra "3", é o requisito para ter-se um máximo de canto (ver a figura 25).

Aqui a desigualdade tem sentido inverso porque se procura o ponto de sela de $\mathcal{L}(Q, V)$, isto é, procuram-se valores de Q e V nos quais $\mathcal{L}(Q, V)$ é um mínimo em relação a Q . Porém é um máximo com relação a V . Dessa forma, a figura (25):

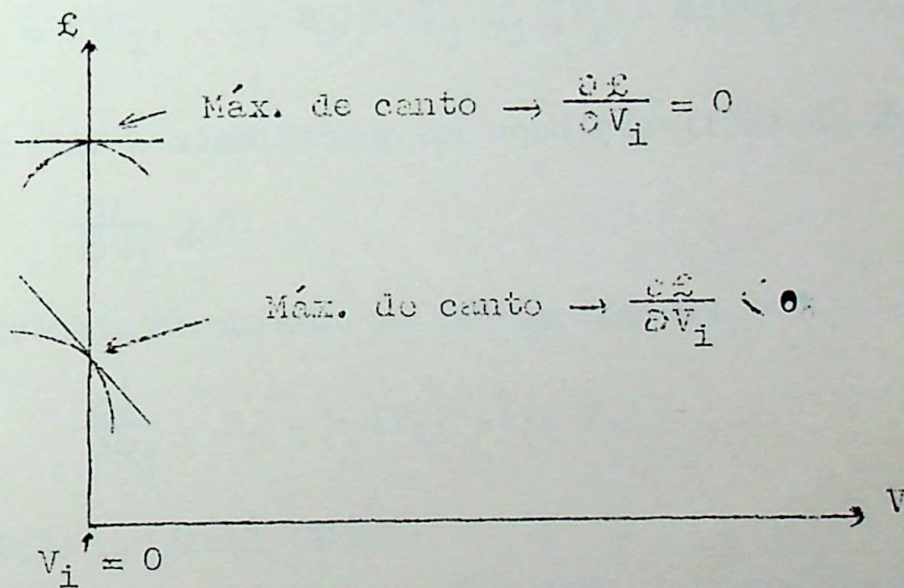


Fig. 25 - Máximo de canto.

As regras "2" e "3" requerem que se determine o ponto com:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_j} \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_i} \leq 0$$

exatamente como é especificado pelas condições (178) e (180) de Kuhn-Tucker.

Em resumo, as condições de Kuhn-Tucker são uma generalização dos requisitos necessários aos extremos, dados pelo cálculo infinitesimal. Enquanto os últimos se aplicam somente a pontos interiores, os primeiros adaptam-se automaticamente a pontos de canto ou a pontos interiores conforme as circunstâncias o requerem.

1.3.9 - Primeira interpretação econômica das variáveis duais de Kuhn-Tucker.

Supondo-se que, agora, o problema primitivo é o de minimização de custos, \leq , pode-se estudar uma alternativa para a interpretação da condição (178) a qual oferece uma imediata tradução econômica da condição (179).

É útil recordar-se que uma restrição típica desse problema vem de (151), ou seja:

$$h_j(V_1, \dots, V_m) - P_j \geq 0$$

Donde:

$$P_j - h_j(V_1, \dots, V_m) \leq 0 \quad (188)$$

Mas, como para este caso, a Função Lagrangeana é

$$\mathcal{L}(Q, V) = f(V_1, \dots, V_m) + \sum_j Q_j [P_j - h_j(V_1, \dots, V_m)] \quad (189)$$

pode-se interpretar o significado da condição (178) de Kuhn-Tucker

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_j} \geq 0$$

pois, por diferenciação direta de (189), tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_j} = P_j - h_j(V_1, \dots, V_m) \quad (190)$$

que é a restrição original (188).

Em outras palavras, a condição (178) de Kuhn-Tucker nada mais é do que a j -ésima equação de restrição em uma forma "disfarçada".

Isto mostra como as condições de Kuhn-Tucker garantem que, ao resolver-se o Problema Lagrangeano, são simultaneamente satisfeitas as restrições do problema original embora as restrições não apareçam, de forma explícita, na formulação lagrangeana do problema.

Estuda-se, agora, uma alternativa para a interpretação da condição (178). De (153) tem-se:

$$L_j = - P_j + h_j(V_1, \dots, V_m)$$

Assim a condição (178) permite escrever

$$- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_j} = L_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Portanto a condição (178) de Kuhn-Tucker equivale à restrição de não negatividade da variável dual de folga, L , expressa no problema original.

Vê-se, também, que a derivada parcial de f com relação a Q_j é simplesmente igual à variável de folga L_j com sinal trocado.

A condição (179) pode ser assim reescrita:

$$L_j Q_j = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Assim se constata que esta condição equivale à proposição básica da teoria da dualidade a qual declara que o produto "j" só deve ser produzido, $Q_j \neq 0$, se ele não incorrer em perda de oportunidade, isto é, só se $L_j = 0$.

Pode-se, agora, rapidamente, oferecer uma interpretação análoga, das condições do problema dual. No entanto, as condições (176) a (181) devem ter seus sinais de desigualdade trocados pois agora trata-se de maximização.

Assim é que a restrição típica desse problema pode ser escrita como

$$0 \leq C_i - g_i(Q_1, \dots, Q_n) \quad (191)$$

A função objetivo original do problema dual é:

$$\pi = f(Q_1, \dots, Q_n) \quad (192)$$

A forma explícita da Função Lagrangeana é:

$$f(Q, V) = f(Q_1, \dots, Q_n) + \sum_i V_i [C_i - g_i(Q_1, \dots, Q_n)] \quad (193)$$

Por diferenciação de (193), tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial V_i} = C_i - g_i(Q_1, \dots, Q_n) \geq 0 \quad (194)$$

que é idêntica à restrição original (191).

Portanto a condição (180) de Kuhn-Tucker é simplesmente equivalente a iésima equação de restrição.

Outra interpretação da condição (180) auxilia a interpretação econômica da condição (181) de Kuhn-Tucker.

De (152) recorda-se que a iésima variável dual de folga, U_i , (capacidade não usada) é definida a partir de:

$$g_i(Q_1, \dots, Q_m) + U_i = C_i \quad (195)$$

ou

$$U_i = C_i - g_i(Q_1, \dots, Q_m) \quad (196)$$

que, comparada com (194), pode ser assim reescrita:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_i} = U_i \geq 0$$

Donde se conclui que a derivada do Lagrangeano com relação a V_i , o i ésimo multiplicador de Lagrange é equivalente a U_i , ou à i ésima variável de folga.

Vê-se, também, que a condição (180) equivale à restrição de não negatividade das variáveis de folga dadas do problema original (152).

Além disso, substituindo-se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_i} = U_i$$

na condição (181) de Kuhn-Tucker obtém-se:

$$V_i U_i = 0$$

Logo a condição (181) equivale ao Teorema da Dualidade que afirma que, no ponto ótimo:

- 1 - ou P_i , a quantidade de recursos, ou de capacidade disponível, mas não usada é nula;
- 2 - ou V_i , o valor marginal da capacidade não usada, é nulo;
- 3 - ou ambos são nulos;
- 4 - ou pode-se também dizer que, se houver capacidade, ou recurso de produção não usada, $U_i > 0$, então ele deverá ter um valor marginal nulo, $V_i = 0$.

As condições de segunda ordem dos pontos de extremo são as seguintes:

- 1 - o conjunto de restrições deve definir uma região viável, realizável, que seja totalmente convexa;
- 2 - para um máximo local a função objetiva original deve ser côncava nas vizinhanças do ponto de máximo. Para um ponto de mínimo, ela deve ser convexa. Se estas condições de concavidade e convexidade se mantiverem válidas em todo o intervalo considerado, então o ponto extremo será um máximo, ou mínimo, global.

CAPÍTULO 2 - O ESTUDO DA OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO DOS SISTEMAS
TEMAS DE POTÊNCIA EM REGIME PERMANENTE.

2.1 - Revisão da formulação do problema do Fluxo de Potência.

Nas equações (26) tem-se para o sistema de duas barras lá estudado:

$$\begin{aligned}
 P_{G1} - P_{D1} - \frac{|V_1|^2}{X_L} \operatorname{Sen} \alpha + \frac{|V_1||V_2|}{X_L} \operatorname{Sen} [\alpha - (\delta_1 - \delta_2)] &= 0 \\
 P_{G2} - P_{D2} - \frac{|V_2|^2}{X_L} \operatorname{Sen} \alpha + \frac{|V_1||V_2|}{X_L} \operatorname{Sen} [\alpha + (\delta_1 - \delta_2)] &= 0 \\
 Q_{G1} - Q_{D1} + \frac{|V_1|^2}{X_C} - \frac{|V_1|^2}{X_L} \operatorname{Cos} \alpha + \frac{|V_1||V_2|}{X_L} \operatorname{Cos} [\alpha - (\delta_1 - \delta_2)] &= 0 \\
 Q_{G2} - Q_{D2} + \frac{|V_1|^2}{X_C} - \frac{|V_2|^2}{X_L} \operatorname{Cos} \alpha + \frac{|V_1||V_2|}{X_L} \operatorname{Cos} [\alpha + (\delta_1 - \delta_2)] &= 0
 \end{aligned} \tag{26}$$

Isto é, para um sistema de duas barras tem-se um sistema de 4 equações não lineares com 12 variáveis. Assim é que 8 destas variáveis devem ter seus valores pré-fixados a fim de ter-se o número de incógnitas, isto é, quatro igual ao número de equações.

Há varias maneiras de pré-fixar-se os valores das variáveis das equações (26). Um modo é o seguinte:

- 1 - considera-se como conhecida a demanda dos consumidores ou seja as variáveis incontroláveis ou vetor \bar{p} ;
- 2 - estima-se a priori o valor das variáveis de controle que podem ser as potências dos geradores, ou vetor \bar{u} ;
- 3 - as 4 variáveis de estado restantes V_1, V_2, δ_1 e δ_2 são as incógnitas a determinar.

Na prática, nem sempre se usa o método acima. Mas fato importante é que se deve reduzir, de algum modo, o número de incógnitas de forma a obterem-se duas incógnitas por barra.

2.2 - Estratégias de operação ótima.

Segundo Elgerd,³¹ uma dada carga pode, teoricamente, ser suprida em uma infinidade de diferentes configurações de operação do sistema. No entanto, na prática, o operador deve escolher uma configuração particular. Com isso, além de igualar o número de incógnitas ao número de equações, estará respeitando as características técnicas e econômicas do sistema.

Um modo de fixar-se uma configuração particular é o seguinte:

- 1 - fixa-se P_D e Q_D nas barras de carga, ou do tipo 1;
- 2 - fixa-se P_G e $|V|$ nas barras de geração, ou do tipo 2;
- 3 - fixa-se $|V|$ e δ na barra de referência.

Resta a pergunta: como são fixados tais valores?

A resposta é dada pelos métodos de otimização a serem estudados, a seguir, os quais permitem a seleção de uma estratégia ótima de operação.

2.3 - O problema da programação generalizada.

Procura-se minimizar a função objetivo:

$$C = C(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \quad (197)$$

satisfazendo simultaneamente as restrições de igualdade dadas por:

$$\bar{h}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0} \quad (198)$$

e, ou, as restrições de desigualdade

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \leq \bar{0} \quad (199)$$

O problema expresso na forma acima é denominado Problema de Programação Generalizada. Deve-se observar que o número de restrições, dimensões dos vetores \bar{h} e \bar{g} , não é necessariamente relacionado ao número das variáveis de estado ou de controle, isto é, às dimensões de \bar{x} e \bar{u} .

³¹ELGERD, Olle I. Electric energy systems theory. New York. McGraw-Hill, 1971. p. 274.

Tem-se uma programação linear quando as equações (197) e (198) são lineares em \bar{x} , \bar{u} e \bar{p} .

Tem-se uma programação não linear quando alguma ou todas as expressões de (197), (198) e (199) não são lineares em \bar{x} , \bar{u} e \bar{p} . Esse é o caso dos sistemas de potência. Para ele raramente existe solução analítica o que força a procura de soluções numéricas.

2.4 - Alocação ótima de geradores pelo critério de mínimo custo.

Inicialmente se estuda a alocação feita por meio do critério do custo mínimo sem levar em conta as perdas nas linhas de transmissão.

Estudam-se usinas já existentes. Daí a razão de se considerarem só os custos variáveis ou os custos referentes ao consumo de combustível.

O custo total da produção do sistema é dado por:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (\text{em Cr\$/h}) \quad (200)$$

onde: C_i = Custo médio de produção na barra "i", em Cr\$/hora.

Uma vez que as potências reais são as que mais influenciam o custo total, para fins práticos, pode-se escrever:

$$C_i = C_i(P_{Gi}) \quad \text{em Cr\$/h} \quad (201)$$

Donde:

$$C = C_1(P_{G1}) + C_2(P_{G2}) + \dots + C_n(P_{Gn}) \quad (202)$$

Diz-se que o custo total é separável quando C pode ser escrito como uma soma em que cada termo depende só de uma variável.

A função C tem a mesma natureza para usinas a carvão, a óleo, a gás, assim como usinas nucleares. Assim, a menos que haja declaração em contrário, é para este tipo de usinas que o presente estudo é dirigido (ver figura 26).

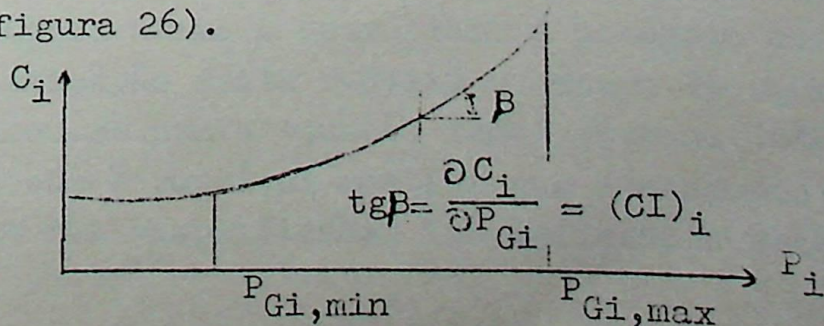


Fig. 26 - Curva típica de custo x MW para um gerador a óleo.

2.4.1 - Relações de restrição.

A fim de escolher-se um conjunto de potências, P_{Gi} , que minimizem o custo total na equação (202), é necessário que se satisfaçam simultaneamente certas restrições as quais serão estudadas a seguir.

2.4.2 - Restrições de igualdade.

Estas restrições é que mantêm o equilíbrio estático do sistema em relação à demanda das cargas dos consumidores e se constituem nas Equações do Fluxo de Potência Estática, E.F.P.E., dadas nas equações (26).

A solução simultânea das equações (202), junto com as E.F.P.E., torna-se muito trabalhosa. É possível simplificar-se o problema pela suposição de que o custo total não é significativamente influenciado pela potência reativa e o respectivo perfil de voltagens. Assim se torna necessário considerar apenas o equilíbrio de potências reais obtido pela soma das duas primeiras equações de (26) ou seja:

$$P_{G1} + P_{G2} = P_{D1} + P_{D2} + \frac{\text{Sen } \alpha}{X_L} \left[|V_1|^2 + |V_2|^2 - 2|V_1||V_2|\text{Cos}(\delta_1 - \delta_2) \right] \quad (203)$$

Mas a equação acima, de acordo com (198) pode ser assim escrita:

$$h(P_{G1}, \dots, P_{Gn}) = \sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D - P_L = 0 \quad (204)$$

onde:

$$\text{Demanda Total} = P_D = \sum_{i=1}^r P_{Di} \quad (205)$$

$$P_L = \text{Perda Total}$$

O sistema de equações (26) quando aplicado a um sistema elétrico com "n" barras produzia "2n" equações, pois tinha-se uma equação para a potência ativa e outra para a potência reativa em cada barra. A simplificação feita reduziu o número de equações de 2n para 1, ou seja, ficou-se com a equação (204) apenas. Isto custou alguma aproximação já que é possível mostrar que a componente reativa da potência, Q_i , que foi simplificada, tem influência sobre a voltagem, V_i .

Por sua vez, V_i influirá, embora fracamente, nas perdas devi-

das à potência real, já que P_L depende de V_i .

Nesta secção, as perdas não são consideradas e a equação (204) é simplificada para:

$$h(P_{G1}, \dots, P_{Gn}) = \sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D = 0 \quad (206)$$

2.4.3 - Restrições de desigualdade.

Em relação às restrições de desigualdade (199), além de P_{Gi} , que afeta o custo e que deve ser mantida entre limites, há outras variáveis que, embora não afetem o custo variável, devem também ser mantidas entre limites por motivos técnicos. Assim é que (199) pode ser reescrita sob a forma:

$$P_{Gi, \min} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi, \max}.$$

$$Q_{Gi, \min} \leq Q_{Gi} \leq Q_{Gi, \max}.$$

$$|V_i|_{\min} \leq |V_i| \leq |V_i|_{\max}.$$

A "equação de equilíbrio de potência" (206) pode ser satisfeita de uma infinidade de maneiras, ou P_{Gi} , sendo dadas a demanda total P_D e a natureza das funções C_i .

2.4.4 - Estratégia de despacho ótimo.

Sendo consideradas apenas as restrições de igualdade em um sistema de duas barras, tem-se:

$$n = 2$$

e as equações (202) e (206) dão

$$C = C_1 + C_2 = C_1(P_{G1}) + C_2(P_{G2}) \quad (207)$$

$$h(P_{G1}, P_{G2}) = P_{G1} + P_{G2} - P_D = 0 \quad (208)$$

Das equações acima, vê-se que:

$$C = f(P_{G1}, P_{G2})$$

e então se pode traçar o diagrama tridimensional da figura (27).

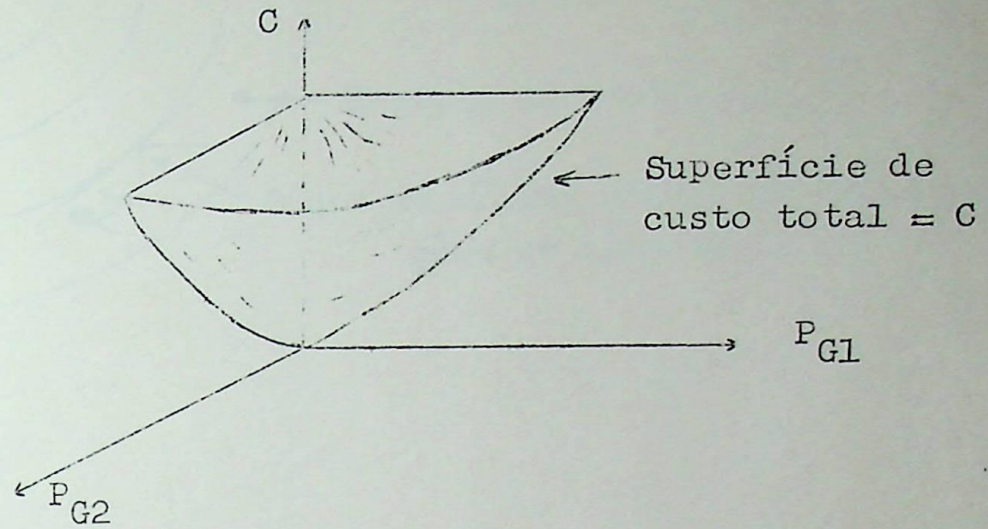


Fig. 27 - Superfície de custo.

É lógico que o mínimo custo de geração se dá para $P_{G1} = P_{G2} = 0$. Mas não se pode operar neste ponto já que as restrições de igualdade (208), devem também ser satisfeitas. Assim se deve levar em conta a superfície de restrições, com o que se tem o diagrama da figura 28.

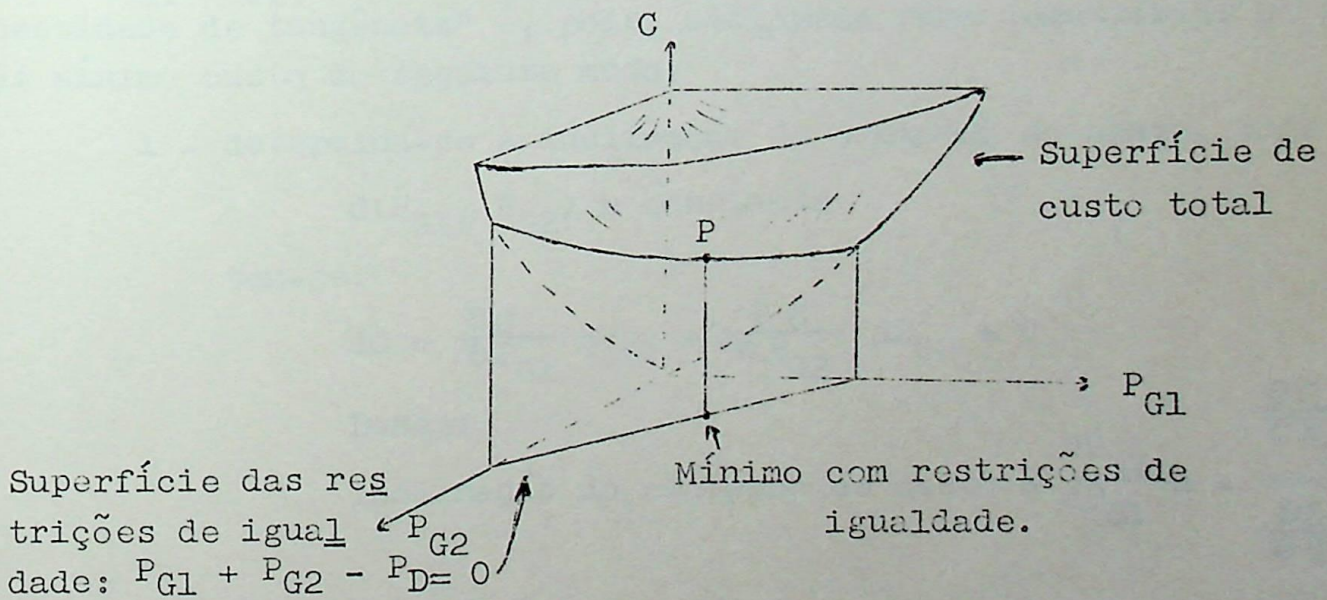


Fig. 28 - Superfície de custo com restrições de igualdade.

Resumindo, pode-se dizer que, para obter-se um mínimo custo total sujeito às restrições de igualdade, deve-se operar no ponto mais baixo que é possível atingir-se na superfície de custo sem abandonar a superfície de restrição, como no ponto P. da figura acima. A mesma figura permite o traçado dos contornos das curvas equicusto formadas pela intersecção de planos horizontais, em níveis ou custos diferentes, com a superfície de custo total o que resulta na figura 29.

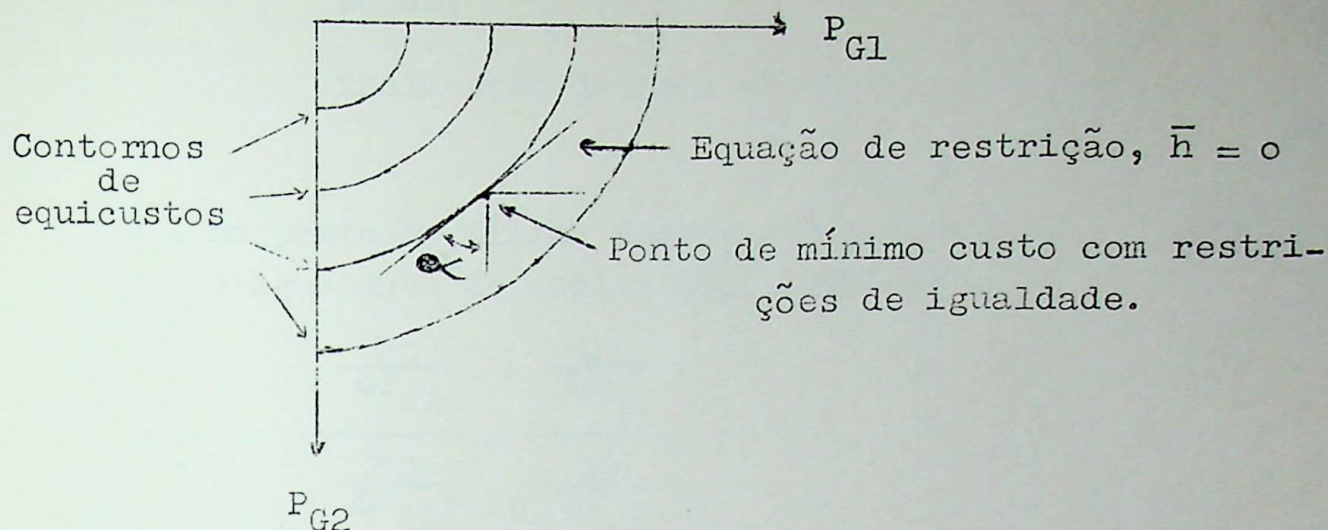


Fig. 29 - Curvas equicusto.

2.5 - Fórmula do despacho ótimo considerando-se só as restrições de igualdade.

A figura anterior auxilia a identificação matemática do ponto de mínimo custo. Nota-se que, no ponto de mínimo, a linha da restrição $h(P_{G1}, P_{G2}) = 0$ é a tangente ao contorno da curva de custo. A "necessidade de tangência" é, pois, utilizada para identificar o ponto de mínimo custo do seguinte modo:

- 1 - determina-se a inclinação do contorno do custo, pois de

$$C(P_{G1}, P_{G2}) = \text{constante}$$

tem-se:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial P_{G1}} dP_{G1} + \frac{\partial C}{\partial P_{G2}} dP_{G2} = 0$$

Donde:

$$\text{inclinação do contorno de custo} = \frac{dP_{G2}}{dP_{G1}} = - \frac{\frac{\partial C}{\partial P_{G1}}}{\frac{\partial C}{\partial P_{G2}}}$$

- 2 - determina-se a inclinação da linha de restrição, pois de

$$h(P_{G1}, P_{G2}) = 0$$

tem-se:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial P_{G1}} dP_{G1} + \frac{\partial h}{\partial P_{G2}} dP_{G2} = 0$$

ou

$$\frac{\partial h}{\partial P_{G2}} dP_{G2} = - \frac{\partial h}{\partial P_{G1}} dP_{G1}$$

Donde:

$$\text{inclinação da reta de restrição} = \frac{dP_{G2}}{dP_{G1}} = - \frac{\frac{\partial h}{\partial P_{G1}}}{\frac{\partial h}{\partial P_{G2}}}$$

3 - no ponto de mínimo custo, a "necessidade de tangência" dá a igualdade de inclinações, isto é:

$$\frac{\frac{\partial C}{\partial P_{G1}}}{\frac{\partial C}{\partial P_{G2}}} = \frac{\frac{\partial h}{\partial P_{G1}}}{\frac{\partial h}{\partial P_{G2}}}$$

Donde se tem:

$$\frac{\frac{\partial C}{\partial P_{G2}}}{\frac{\partial C}{\partial P_{G1}}} = \frac{\frac{\partial h}{\partial P_{G2}}}{\frac{\partial h}{\partial P_{G1}}} = - \text{tg } \alpha \quad (209)$$

ou

$$\frac{\frac{\partial C}{\partial P_{G2}}}{\frac{\partial h}{\partial P_{G2}}} = \frac{\frac{\partial C}{\partial P_{G1}}}{\frac{\partial h}{\partial P_{G1}}} = \text{constante} = \lambda \quad (210)$$

e das duas últimas equações tem-se:

$$\text{Multiplicador de Lagrange} = \lambda = - \text{tg } \alpha$$

De (210) tem-se:

$$\frac{\partial C}{\partial P_{G1}} = \lambda \frac{\partial h}{\partial P_{G1}}$$

donde:

$$\frac{\partial C}{\partial P_{G1}} - \lambda \frac{\partial h}{\partial P_{G1}} = 0 \quad (211)$$

e de modo análogo, (210) dá:

$$\frac{\partial C}{\partial P_{G2}} - \lambda \frac{\partial h}{\partial P_{G2}} = 0$$

4 - a esta altura define-se a seguinte Função de Custo com Restrição, ou Lagrangeano:

$$C^* = C - \lambda h = C_1 + C_2 - \lambda (P_{G1} + P_{G2} - P_D) \quad (212)$$

Donde:

$$dC^* = dC - \lambda dh = \frac{\partial C}{\partial P_{G1}} dP_{G1} + \frac{\partial C}{\partial P_{G2}} dP_{G2} - \lambda \left(\frac{\partial C}{\partial P_{G1}} dP_{G1} - \right. \\ \left. - \lambda \frac{\partial C}{\partial P_{G2}} dP_{G2} \right)$$

ou

$$dC^* = \left(\frac{\partial C}{\partial P_{G1}} - \lambda \frac{\partial C}{\partial P_{G1}} \right) dP_{G1} + \left(\frac{\partial C}{\partial P_{G2}} - \lambda \frac{\partial C}{\partial P_{G2}} \right) dP_{G2}$$

ou

$$dC^* = \frac{\partial C^*}{\partial P_{G1}} dP_{G1} + \frac{\partial C^*}{\partial P_{G2}} dP_{G2}$$

5 - finalmente, comparando-se a equação (211) com as duas últimas equações acima, tem-se:

$$\frac{\partial C^*}{\partial P_{G1}} = 0 \quad e \quad \frac{\partial C^*}{\partial P_{G2}} = 0 \quad (213)$$

Donde se conclui que o ponto de mínimo custo com restrições de igualdade é caracterizado pelo sistema de equações (213).

2.5.1 - Análise física do problema.

Antes de entrar-se no sistema de equações (211), calcula-se C e h, ou seja, determina-se:

$$C = C_1 + C_2 = C_1(P_{G1}) + C_2(P_{G2})$$

$$h = h(P_{G1}, P_{G2}) = P_{G1} + P_{G2} - P_D = 0$$

Das duas últimas equações obtém-se:

$$\frac{\partial h}{\partial P_{G1}} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial P_{G2}} = 1$$

$$\frac{\partial C}{\partial P_{G1}} = \frac{\partial C_1}{\partial P_{G1}} \quad ; \quad \frac{\partial C}{\partial P_{G2}} = \frac{\partial C_2}{\partial P_{G2}}$$

Os valores acima substituídos em (211) resultam em:

$$\frac{\partial C_1}{\partial P_{G1}} - \lambda = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial C_2}{\partial P_{G2}} - \lambda = 0$$

Donde:

$$\lambda = \frac{\partial C_1}{\partial P_{G1}} = \frac{\partial C_2}{\partial P_{G2}} \quad (214)$$

Pode-se, pois, concluir que:

- 1 - o sistema deve ser operado de modo a satisfazer o sistema de equações (213);
- 2 - no ponto de despacho ótimo todos os geradores devem operar com iguais custos incrementais,

$$\frac{\partial C_i}{\partial P_{Gi}} ;$$

- 3 - no caso acima em que as perdas não foram consideradas, o Custo Incremental é igual ao multiplicador de Lagrange, ou

$$\lambda = \frac{\partial C_i}{\partial P_{Gi}} ;$$

- 4 - no presente problema, há 3 incógnitas, P_{G1} , P_{G2} e λ as quais são determinadas pela equação (208) da restrição de igualdade pelo sistema de equações (213).

2.5.2 - Despacho ótimo em um sistema com "n" barras.

Os resultados obtidos para 2 barras são extensivos a um sistema de "n" barras. Ter-se-á "n" equações do tipo (213), isto é,

$$\frac{\partial C^*}{\partial P_{Gi}} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (215)$$

A função custo tornar-se-á

$$C^* = C_1 + \dots + C_n - \lambda \left(\sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D \right) \quad (216)$$

De (215) e (216) tem-se a estratégia de despacho ótimo seguinte:

$$\frac{\partial C_i}{\partial P_{Gi}} = (C I)_i = \lambda \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (217)$$

onde as $n+1$ incógnitas, P_{G1} , P_{G2} , ..., P_{Gn} e λ , serão determinadas pelas "n" equações (217) e pela equação de restrição de h , dada por (206).

A equação (217) só é aplicada quando as restrições de igualdade não são violadas, isto é, quando os geradores funcionam dentro das características da potência nominal.

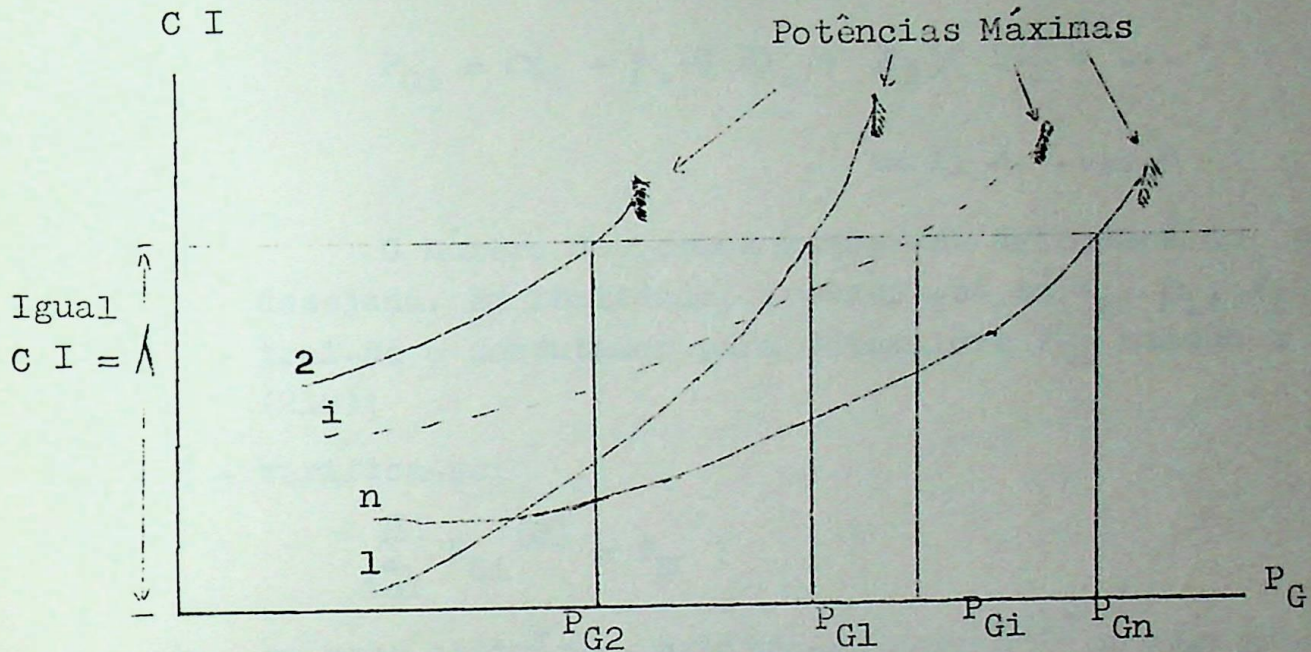


Fig. 30 - Representação gráfica da equação (217)
(a soma dos P_G deve ser igual à P_D)

É bom observar que:

- 1 - no presente estudo fez-se a hipótese de que a demanda é constante;
- 2 - em caso de desconsiderar-se as perdas, λ ganha o significado físico de representar o custo incremental de cada gerador;
- 3 - o multiplicador de Lagrange só dá resultados úteis para superfícies de custo que possuam derivadas parciais convenientes mas a equação de tangência, (209), falha em muitos casos práticos onde se têm superfície de custo com forma complicada.

2.5.3 - Considerações computacionais.

Na prática, as curvas das equações (217) são determinadas empiricamente. O procedimento usado para a obtenção da alocação ó de carga entre geradores, via computador, é o seguinte:

- 1 - arbitra-se um custo incremental inicial, $\lambda^{(0)}$;
- 2 - para $(C I)^0 = \lambda^{(0)}$, calcula-se as gerações individuais $P_{G1}^{(0)}$, $P_{G2}^{(0)}$, ..., $P_{Gn}^{(0)}$.

Isto é feito armazenando-se as curvas $(C I)_i$, da figura 30, no computador sob a forma de polinômios:

$$P_{Gi} = \alpha_i + \beta_i (C I)_i + \gamma_i (C I)_i^2 + \dots \quad (218)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

O número de termos a usar-se dependerá da precisão desejada. Em realidade, armazena-se só α_i , β_i , γ_i e instrui-se o computador para determinar P_{Gi} usando a equação (218);

- 3 - verifica-se:

$$\sum_{i=1}^n P_{Gi}^{(0)} = P_D$$

- 4 - em caso contrário, arbitra-se novo $\lambda^{(1)}$ e repetem-se as etapas anteriores. Se $P_{Gi}^{(0)} < P_D$, a figura 31 indica que se deve arbitrar

$$\lambda^{(1)} > \lambda^{(0)}$$

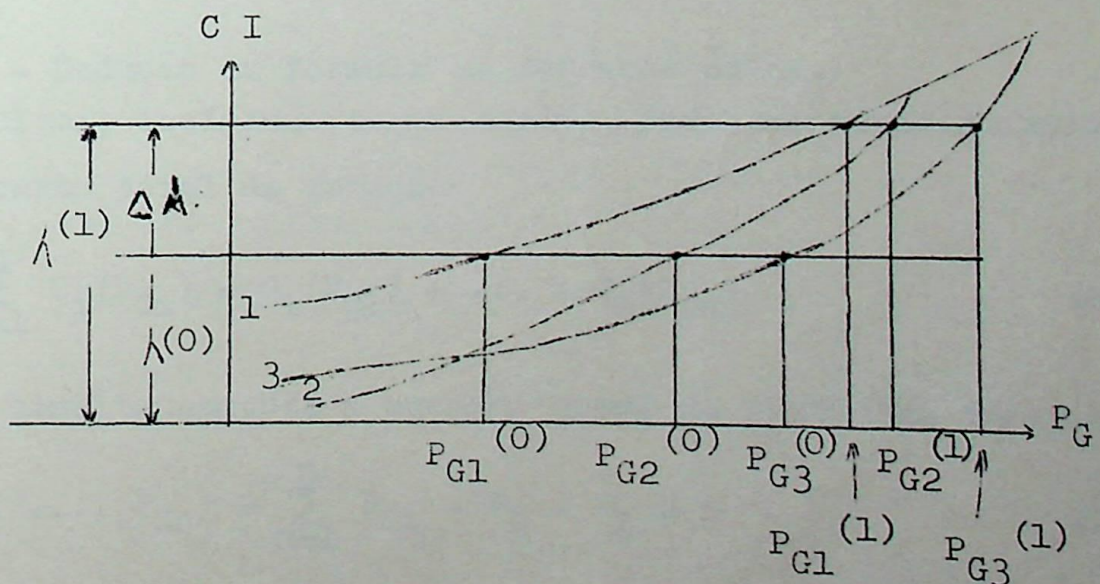


Fig. 31 - Processo computacional.

Supondo-se que ainda se tenha:

$$\sum_{i=1}^n P_{Gi}^{(1)} < P_D$$

continua-se a incrementar λ , com acréscimo constante, até ter-se:

$$\sum_{i=1}^n P_{Gi}^{(V)} > P_D$$

Dai para diante adota-se um $\Delta\lambda$ menor e itera-se em sentido oposto,

$$\lambda^{(V+1)} = \lambda^{(V)} - \Delta\lambda,$$

até obter-se um valor abaixo de P_D , ou seja:

$$\sum_{i=1}^n P_{Gi}^{(2)} < P_D.$$

Prossegue-se em zigue-zague com $\Delta\lambda$ decrescentes até convergir-se para o valor λ correto.

É de se observar que esta estratégia simplificada só dá bons resultados onde as perdas são pequenas, ao redor de $3\%P_D$, quando comparadas com a demanda, tal como acontece nas áreas urbanas.

2.6 - A locação ótima de geradores considerando as perdas nas linhas de transmissão.

Quando há linhas de transmissão longas, as perdas por elas causadas chegam a atingir 30% de P_D e devem ser consideradas nas fórmulas.

2.6.1 - Dedução da fórmula do despacho ótimo.

O problema, incluindo-se as perdas, pode ser assim definido: minimizar o custo total de geração

$$C = \sum_{i=1}^n C_i(P_{Gi}) = C_1(P_{G1}) + \dots + C_n(P_{Gn}) \quad (219)$$

satisfazendo simultaneamente a equação geral de restrição de igualdade

$$h(P_{G1}, \dots, P_{Gn}) = \sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D - P_L = 0 \quad (220)$$

em vez de satisfazer a equação simplificada (206), sem perdas.

Usando-se o método do multiplicador da Lagrange, obtém-se a seguinte função de custo com restrições de igualdade:

$$C^* = \sum_{i=1}^n C_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D - P_L \right)$$

Para simplificar o raciocínio, sem afetar sua validade, desconsideram-se os efeitos da potência reativa em P_L e isto permite considerar-se constantes os módulos das voltagens, V_i , de modo que os P_{Gi} são as únicas variáveis sujeitas a manipulação. Assim é que de (221) vem:

$$\frac{\partial C^*}{\partial P_{Gi}} = \frac{\partial C_i}{\partial P_{Gi}} - \lambda \frac{\partial P_{Gi}}{\partial P_{Gi}} + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

ou, de (214)

$$\frac{\partial C^*}{\partial P_{Gi}} = (C I)_i - \lambda + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}} = 0 \quad (222)$$

sendo P_D considerado constante.

As "n" equações de despacho ótimo (222), juntas com a equação de equilíbrio de potência (204), determinam as "n+1" incógnitas $P_{G1}, \dots, P_{Gn}, \lambda$.

De (222) define-se:

$$\text{Perda Incremental de Transmissão} = \text{PIT} = \frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}}$$

e com a nova simbologia, (222) fornece:

$$\frac{\partial C^*}{\partial P_{Gi}} = (C I)_i - \lambda [1 - (\text{PIT})_i] = 0$$

Donde:

$$(C I)_i = \lambda [1 - (\text{PIT})_i] \quad i = 1, \dots, n \quad (223)$$

A equação acima representa o custo incremental quando as perdas na transmissão são consideradas.

2.6.2 - Estratégia de despacho ótimo para "2" barras.

Para simplificar a exposição, são feitas as seguintes hipóteses:

1 - a linha de transmissão é relativamente curta e, portanto, é representável por sua impedância série:

$$Z = R + jX;$$

2 - as perdas são relativamente pequenas comparadas com P_D ;

3 - a reatância domina a resistência da linha:

$$X^2 \gg R^2;$$

4 - opera-se o sistema com um perfil plano de voltagens, isto

é:

$$|V_1| = |V_2| = |V|;$$

- 5 - opera-se a linha bem abaixo do limite estático de estabilidade, ou seja, P_G é tão pequena, que $\delta = \angle V_1 - \angle V_2$ toma valores para os quais se tem:

$$\text{Sen } \delta \approx \delta \quad \text{e} \quad \text{Cos } \delta \approx 1 - \frac{\delta^2}{2} \quad (224)$$

- 6 - têm-se dois geradores idênticos com curvas de custo incremental idênticas e de forma linear dadas por:

$$(C I)_1 = \alpha + \beta P_{G1}$$

$$(C I)_2 = \alpha + \beta P_{G2};$$

- 7 - tomar-se-á especificamente:

$$R = 0,02 \text{ pu} \quad X = 0,10 \text{ pu}$$

$$|V_1| = |V_2| = |V| = 1,00 \text{ pu}$$

$$\alpha = 2 \text{ Cr\$/h e MW pu}$$

$$\beta = 1 \text{ Cr\$/h e (MW pu)}^2$$

$$P_{D1} = 1 \text{ MW pu} \quad P_{D2} = 3 \text{ MW pu}$$

Desconsiderando-se as perdas, vê-se que, devido à identidade das curvas, $C I$, os dois geradores produziram 2MW cada um e a linha de transmissão transporta 1 MW pu da barra 1 a 2 (ver figura 32).

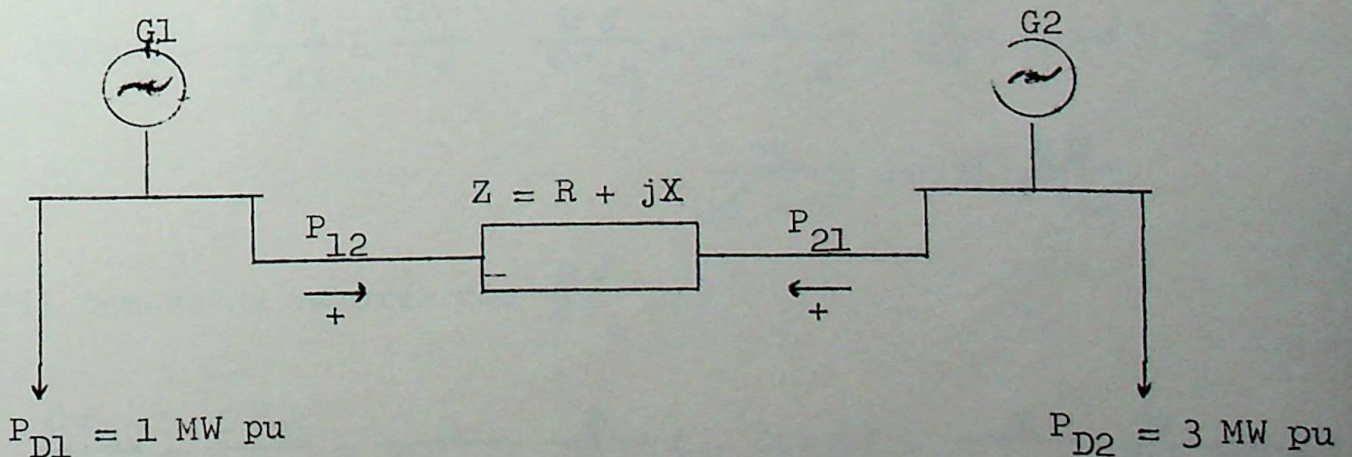


Fig. 32 - Sistema em estudo.

Considerando-se as perdas, o gerador 2 deverá produzir mais de 2 MW pu a fim de ter-se custo total mínimo. Disso resulta que a carga da linha será menor que 1 MW e, arbitrando-se em 10 MW pu a ca

pacidade de transporte da mesma, poder-se-á satisfazer a hipótese 5.

Pode-se escrever para ambos os terminais da linha de transmissão as seguintes equações:

$$P_{12} = P_{G1} - P_{D1} = \frac{R}{R^2 + X^2} (1 - \cos \delta) + \frac{X}{R^2 + X^2} \text{Sen } \delta \quad (225)$$

e

$$P_{21} = P_{G2} - P_{D2} = \frac{R}{R^2 + X^2} (1 - \cos \delta) - \frac{X}{R^2 + X^2} \text{Sen } \delta$$

A diferença das potências nos dois extremos da linha, resguardadas as convenções de sinal mostradas na figura acima, dá a perda na linha, ou:

$$P_L = P_{12} + P_{21} = \frac{2R}{R^2 + X^2} (1 - \cos \delta) \quad (226)$$

Sendo $(\text{PIT})_i = \frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}}$, a equação (226) dá:

$$\begin{aligned} (\text{PIT})_1 &= \frac{\partial P_L}{\partial P_{G1}} = \frac{dP_L}{d\delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial P_{G1}} = \frac{2R}{R^2 + X^2} \cdot \frac{d}{d\delta} (-\cos \delta) \cdot \frac{\partial \delta}{\partial P_{G1}} = \\ &= \frac{2R}{R^2 + X^2} \text{Sen } \delta \frac{\partial \delta}{\partial P_{G1}} \quad (227) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{PIT})_2 &= \frac{\partial P_L}{\partial P_{G2}} = \frac{dP_L}{d\delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial P_{G2}} = \frac{2R}{R^2 + X^2} \cdot \frac{d}{d\delta} (-\cos \delta) \cdot \frac{\partial \delta}{\partial P_{G2}} = \\ &= \frac{2R}{R^2 + X^2} \text{Sen } \delta \frac{\partial \delta}{\partial P_{G2}} \end{aligned}$$

de (225) tem-se os valores dos $\frac{\partial \delta}{\partial P_G}$:

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial P_{G1}} = \frac{\partial P_{G1}}{\partial P_{G1}} = \frac{R}{R^2 + X^2} \frac{\partial}{\partial P_{G1}} (1 - \cos \delta) + \frac{X}{R^2 + X^2} \frac{\partial}{\partial P_{G1}} (\text{Sen } \delta)$$

ou

$$1 = \frac{R}{R^2 + X^2} \text{Sen } \delta \frac{\partial \delta}{\partial P_{G1}} + \frac{X}{R^2 + X^2} \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial P_{G1}} \quad (228 a)$$

$$\frac{\partial P_{21}}{\partial P_{G2}} = \frac{\partial P_{G2}}{\partial P_{G2}} = \frac{R}{R^2+X^2} \frac{\partial}{\partial P_{G2}} (-\cos \delta) - \frac{X}{R^2+X^2} \frac{\partial}{\partial P_{G2}} (\sin \delta)$$

ou

$$1 = \frac{R}{R^2+X^2} \sin \delta \frac{\partial \delta}{\partial P_{G2}} - \frac{X}{R^2+X^2} \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial P_{G2}} \quad (228 \text{ b})$$

de (228 a) vem:

$$1 = \frac{\partial \delta}{\partial P_{G1}} \left(\frac{R \sin \delta + X \cos \delta}{R^2 + X^2} \right)$$

ou

$$\frac{\partial \delta}{\partial P_{G1}} = \frac{R^2 + X^2}{R \sin \delta + X \cos \delta} \quad (229 \text{ a})$$

de 228 b) vem:

$$1 = \frac{\partial \delta}{\partial P_{G2}} \left(\frac{R \sin \delta - X \cos \delta}{R^2 + X^2} \right)$$

ou

$$\frac{\partial \delta}{\partial P_{G2}} = \frac{R^2 + X^2}{R \sin \delta - X \cos \delta} \quad (229 \text{ b})$$

substituindo-se (229) em (227), tem-se:

$$(\text{PIT})_1 = 2R \frac{\sin \delta}{R \sin \delta + X \cos \delta} \quad (230)$$

$$(\text{PIT})_2 = 2R \frac{\sin \delta}{R \sin \delta - X \cos \delta}$$

Estas equações são exatas mas podem ser simplificadas usando-se as hipóteses 3 e 5 que permitem escrever as equações aproximadas

$$(\text{PIT})_1 \approx \frac{2R \delta}{X} \quad \text{MW/MW} \quad (231)$$

$$(\text{PIT})_2 \approx \frac{-2R \delta}{X} \quad \text{MW/MW}$$

onde a hipótese 5 permitiu a substituição de $\sin \delta$ por δ e a substituição de $X \cos \delta$ por X . Além disso, a hipótese 3 permitiu despre-

zar-se $R \text{ Sen } \delta$ quando, como aqui, é comparado com $X \text{ Cos } \delta$.

Note-se que as duas PIT são iguais e de sinais opostos.

A potência da linha sendo a média de P_{12} e $-P_{21}$, por meio da equação (225), tem-se:

$$\frac{P_{12} - P_{21}}{2} = \left(\frac{2X}{R^2 + X^2} \text{ Sen } \delta \right) \frac{1}{2}$$

A hipótese 3 permite desprezar R^2 donde:

$$\text{Pot Linha} = \frac{X \text{ Sen } \delta}{X^2} = \frac{\text{Sen } \delta}{X} \quad (232)$$

Pela hipótese 2, sabe-se que P_L é pequena em relação a P_D , logo:

$$\text{Pot Linha} \approx P_{12} = P_{G1} - P_{D1} \quad (233)$$

ou

$$\text{Pot Linha} \approx -P_{21} = P_{D2} - P_{G2} \quad (234)$$

De (232), (233) e (234) tem-se:

$$\text{Pot Linha} \approx P_{G1} - P_{D1} \approx P_{D2} - P_{G2} \approx \frac{\text{Sen } \delta}{X} \approx \frac{\delta}{X} \quad (235)$$

A última aproximação acima é devida à hipótese 5.

Das equações (231) e (235) tem-se as seguintes alternativas para as PIT:

$$(\text{PIT})_1 \approx -(\text{PIT})_2 \approx 2R(P_{G1} - P_{D1}) \quad (236)$$

e no presente exemplo:

$$(\text{PIT})_1 = 0,04 (P_{G1} - 1)$$

Assim é que a fórmula de despacho ótimo de (223) transforma-se em:

$$(\text{C I})_1 = \alpha + \beta P_{G1} = \lambda \left[1 - 0,04(P_{G1} - 1) \right] \quad (237)$$

$$(\text{C I})_2 = \alpha + \beta P_{G2} = \lambda \left[1 + 0,04(P_{G1} - 1) \right]$$

As três incógnitas P_{G1} , P_{G2} e λ podem ser determinadas com as duas equações (237) e a equação de equilíbrio de potência (204).

Tomando-se a equação das perdas

$$P_L = \frac{2R}{R^2 + X^2} (1 - \cos \delta) \quad (226)$$

a hipótese 5 permite escrever:

$$1 - \cos \delta = 1 - 1 + \frac{\delta^2}{2} = \frac{\delta^2}{2}$$

que substituído na equação (226) dá:

$$P_L = \frac{2R}{R^2 + X^2} \frac{\delta^2}{2} = \frac{R \delta^2}{R^2 + X^2}$$

R^2 , sendo pequeno com relação a X^2 , é simplificado, hipótese 3, e tem-se:

$$P_L \approx \frac{R \delta^2}{X^2} \approx R(\text{Pot Linha})^2 \approx 0,02(P_{G1} - P_{D1})^2 = 0,02(P_{G1} - 1)^2$$

Desse modo, a equação de equilíbrio de potência:

$$h(P_{G1}, \dots, P_{Gn}) = \sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D - P_L = 0 \quad (204)$$

torna-se:

$$P_{G1} + P_{G2} = 4 + 0,02 (P_{G1} - 1)^2 \quad (238)$$

Assim as duas equações (237) mais a (238) podem determinar todas as três incógnitas mas resultam não lineares quando se tenta eliminar δ .

Evita-se a não linearidade pela observação física do sistema a qual intuitivamente mostra que, ao se considerarem as perdas, o gerador 1 deverá fornecer menos de 50% da P_D já que 75% da carga estão ligados diretamente no gerador 2.

Assim se pode escrever:

$$P_{G1} = 2 - \epsilon_1 \text{ MW pu.}$$

$$P_{G2} = 2 + \epsilon_1 \text{ MW pu.}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são quantidades positivas e pequenas.

A substituição de P_{G1} e P_{G2} em (237) e a divisão de ambas as equações dá:

$$\frac{\alpha + \beta P_{G1}}{\alpha + \beta P_{G2}} = \frac{(2) + (1)(2 - \xi_1)}{(2) + (1)(2 + \xi_2)} = \frac{4 - \xi_1}{4 + \xi_2}$$

e:

$$\frac{\lambda \left[1 - 0,04(P_{G1} - 1) \right]}{\lambda \left[1 - 0,04(P_{G1} - 1) \right]} = \frac{1 - 0,04(2 - \xi_1 - 1)}{1 + 0,04(2 - \xi_1 - 1)} = \frac{1 - 0,04(1 - \xi_1)}{1 + 0,04(1 - \xi_1)}$$

ou

$$\frac{4 - \xi_1}{4 + \xi_2} = \frac{1 - 0,04(1 - \xi_1)}{1 + 0,04(1 - \xi_1)} \quad (239)$$

A substituição de P_{G1} e P_{G2} em (238) dá:

$$2 - \xi_1 + 2 + \xi_2 = 4 + 0,02(2 - \xi_1 - 1)^2$$

$$4 + \xi_2 - \xi_1 = 4 + 0,02(1 - \xi_1)^2$$

$$\xi_2 - \xi_1 = 0,02(1 - \xi_1)^2 \quad (240)$$

Desprezando-se os termos de segunda ordem, pois ξ_1 e ξ_2 são pequenos, as equações (239) e (240) dão:

$$\xi_1 = 0,153 \quad \text{e} \quad \xi_2 = 0,167$$

Na operação ótima, a distribuição de cargas será:

$$P_{G1} = 2 - \xi_1 = 2 - 0,153 = 1,847 \text{ MW pu}$$

$$P_{G2} = 2 + \xi_2 = 2 + 0,167 = 2,167 \text{ MW pu}$$

As perdas serão dadas por:

$$P_L = P_{G1} + P_{G2} - P_D = 2 - \xi_1 + 2 + \xi_2 - 4 = \xi_2 - \xi_1$$

ou

$$P_L = \xi_2 - \xi_1 = 0,014 \text{ MW pu}$$

Deve-se observar que:

1 - por meios analíticos encontraram-se equações não lineares

mesmo no estudo de um sistema pequeno e fazendo-se simplificações. Isso ressalta a necessidade de usar-se métodos numéricos;

- 2 - mesmo com perdas menores que 1% de P_D , menores que 0,04 MW pu, a divisão de carga entre dois geradores idênticos é bem diferente da relação 0,50 : 0,50.

2.6.3 - Estratégia de despacho ótimo para um sistema de "n" barras.

Do sistema de duas barras recém-estudado conclui-se que:

- 1 - os geradores, embora sendo idênticos, operam com diferentes custos incrementais quando as perdas são consideradas;
- 2 - na equação

$$(C I)_i = [1 - (PIT)_i] \quad (223)$$

vê-se que os geradores com alto valor positivo de PIT irão operar com baixo custo incremental;

- 3 - os valores do Custo Incremental são sempre positivos mas os das PIT podem ser positivos ou negativos.

Todas estas características são válidas também para o caso geral de um sistema com "n" barras.

No caso de considerar-se as perdas, obtém-se a figura 33, abaixo, a qual equivale a figura 30 referente ao caso em que as perdas não foram consideradas.

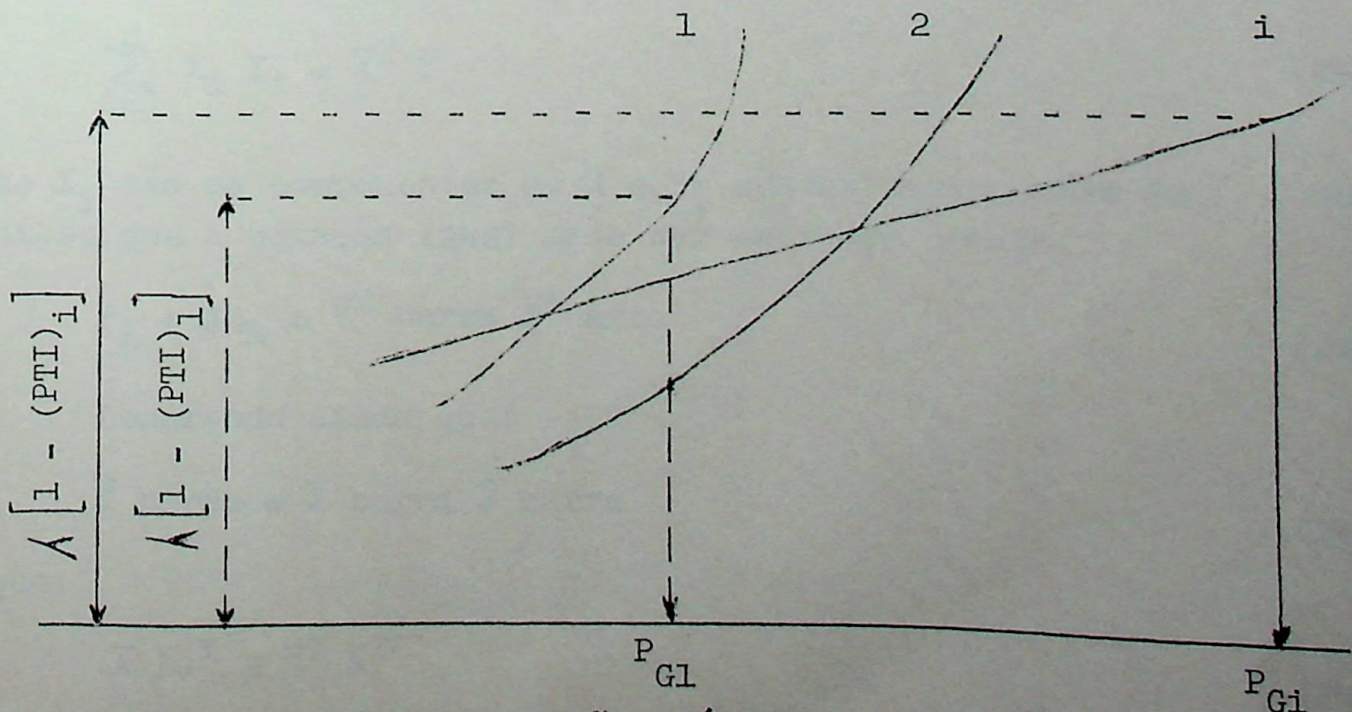


Fig. 33 - Interpretação gráfica da equação (223).

A figura 33 mostra que, dentro da estratégia de operação ótima, deve-se primeiro determinar os valores individuais das PI^r para, com base nestes, determinar as potências individuais dos geradores, P_{Gi}.

2.7 - Dedução da fórmula geral das perdas na transmissão.

Lembrando-se que a potência líquida ou potência injetada na barra "i" é dada por

$$S_i = P_i + jQ_i = P_{Gi} - P_{Di} + j(Q_{Gi} - Q_{Di}) \quad (241)$$

e que:

$$P_L = \sum_{i=1}^n P_{Gi} - \sum_{i=1}^n P_{Di} \quad (204)$$

vê-se que a soma das potências líquidas ou injetadas de todas as "n" barras dá, como resultado, a potência total gerada menos a carga total, isto é, fornece a perda total na transmissão.

Assim se pode escrever:

$$P_L + jQ_L = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n V_i J_i^* \quad (242)$$

onde:

J_i = corrente na barra "i".

Lembrando que o produto escalar, ou interno, de dois vetores \bar{X} e \bar{Y} de iguais dimensões é definido como:

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = \bar{X}^T \bar{Y} \quad (243)$$

onde X_i são as componentes de \bar{X} e Y_i são as componentes de \bar{Y} , conclui-se que a equação (242) pode ser expressa como:

$$P_L + jQ_L = \bar{V}^T \text{ barra } \bar{J}^* \text{ barra} \quad (244)$$

Lembrando ainda que:

$$\bar{V} \text{ barra} = \bar{Z} \text{ barra } \bar{J} \text{ barra} \quad (245)$$

e que:

$$(\bar{A} \bar{B})^T = \bar{B}^T \bar{A}^T \quad (246)$$

pode-se expressar (244) assim:

$$P_L + jQ_L = (\bar{Z}_{\text{barra}} \quad \bar{J}_{\text{barra}})^T \bar{J}_{\text{barra}}^*$$

ou

$$P_L + jQ_L = (\bar{J}_{\text{barra}}^T \quad \bar{Z}_{\text{barra}}^T) \bar{J}_{\text{barra}}^*$$

e como \bar{Z}_{barra} é simétrica tem-se:

$$P_L + jQ_L = \bar{J}_{\text{barra}}^T \bar{Z}_{\text{barra}} \bar{J}_{\text{barra}}^* \quad (247)$$

Pode-se escrever a matriz de impedância de barra sob a forma de uma matriz resistência e uma matriz reatância:

$$\bar{Z}_{\text{barra}} = \bar{R} + j\bar{X} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn} \end{bmatrix} \quad (248)$$

O vetor corrente de barra pode ser expresso como uma soma de seus vetores, coluna, componentes:

$$\bar{J}_{\text{barra}} = \bar{J}_p + j\bar{J}_q = \begin{bmatrix} J_{p1} \\ \cdot \\ \cdot \\ J_{pn} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} J_{q1} \\ \cdot \\ \cdot \\ J_{qn} \end{bmatrix} \quad (249)$$

Portanto, pode-se reescrever a equação (247) sob a forma:

$$P_L + jQ_L = (\bar{J}_p + j\bar{J}_q)^T (\bar{R} + j\bar{X}) (\bar{J}_p - j\bar{J}_q) \quad (250)$$

De (250) vem:

$$\begin{aligned} & (\bar{J}_p^T + j\bar{J}_q^T) (\bar{R} + j\bar{X}) (\bar{J}_p - j\bar{J}_q) = \\ & = (\bar{J}_p^T \bar{R} + j\bar{J}_p^T \bar{X} + j\bar{J}_q^T \bar{R} - \bar{J}_q^T \bar{X}) (\bar{J}_p - j\bar{J}_q) = \\ & = \bar{J}_p^T \bar{R} \bar{J}_p + j \bar{J}_p^T \bar{X} \bar{J}_p + j \bar{J}_q^T \bar{R} \bar{J}_p - \bar{J}_q^T \bar{X} \bar{J}_p - \\ & - j \bar{J}_p^T \bar{R} \bar{J}_q + \bar{J}_p^T \bar{X} \bar{J}_q + \bar{J}_q^T \bar{R} \bar{J}_q + j \bar{J}_q^T \bar{X} \bar{J}_q \end{aligned}$$

Tomando-se apenas a parte real do triplice produto de matrizes, tem-se:

$$P_L = \bar{J}_p^T \bar{R} \bar{J}_p + \bar{J}_p^T \bar{X} \bar{J}_q + \bar{J}_q^T \bar{R} \bar{J}_q - \bar{J}_q^T \bar{X} \bar{J}_p \quad (251)$$

Mas, com respeito às dimensões, verifica-se que:

$$\bar{J}_p \text{ é } (n \times 1); \quad \bar{X} \text{ é } (n \times n) \quad \text{e} \quad \bar{J}_q \text{ é } (n \times 1)$$

Donde:

$$(\bar{J}_p^T \bar{X}) \bar{J}_q \text{ é de dimensões } \left[(1 \times n) (n \times n) \right] (n \times 1)$$

$$\text{ou } (1 \times n) (n \times 1)$$

$$\text{ou } (1 \times 1)$$

Portanto se conclui que a matriz $(\bar{J}_p^T \bar{X} \bar{J}_q)$ é simétrica e pode-se escrever:

$$\bar{J}_p^T \bar{X} \bar{J}_q = (\bar{J}_p^T \bar{X} \bar{J}_q)^T = \left[(\bar{J}_p^T \bar{X}) \bar{J}_q \right]^T = \bar{J}_q^T (\bar{J}_p^T \bar{X})^T = \bar{J}_q^T \bar{X}^T \bar{J}_p$$

mas \bar{X} é simétrica, ou seja, $\bar{X} = \bar{X}^T$; donde se tem:

$$\bar{J}_p^T \bar{X} \bar{J}_q = \bar{J}_q^T \bar{X} \bar{J}_p$$

A igualdade acima permite a simplificação dos segundo e quarto termos de (251) e dá:

$$P_L = \bar{J}_p^T \bar{R} \bar{J}_p + \bar{J}_q^T \bar{R} \bar{J}_q \quad (252)$$

Lembrando agora que dados:

\bar{C} ($m \times p$) com elemento genérico c_{ir}

\bar{A} ($m \times n$) com elemento genérico a_{ij}

\bar{B} ($n \times p$) com elemento genérico b_{jr}

o produto:

$$\bar{C} = \bar{A} \bar{B}$$

terá o elemento genérico:

$$c_{ir} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jr}$$

Assim, de modo análogo, para o caso em estudo, tem-se os dados:

\bar{C} ($1 \times n$) com elemento genérico c_{1k} ou c_k

\bar{J}_p^T ($1 \times n$) com elemento genérico J_{1j} ou J_j ou J_{pj}

\bar{R} ($n \times n$) com elemento genérico r_{jk}

\bar{J}_p ($n \times 1$) com elemento genérico J_{k1} ou J_k ou J_{pk}

Fazendo-se:

$$P_L = P_{L1} + P_{L2}$$

então o produto

$$P_{L1} = (\bar{J}_p^T \bar{R}) \bar{J}_p = \bar{C} \bar{J}_p$$

terá o elemento genérico:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_{1k} J_{k1} &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n J_{1j} r_{jk} J_{k1} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^n r_{jk} J_{pj} J_{pk} \end{aligned}$$

De modo semelhante, tem-se para P_{L2} :

$$P_{L2} = \bar{J}_q^T \bar{R} \bar{J}_q$$

o termo genérico:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^n r_{jk} J_{qj} J_{qk}$$

Assim é que a equação (252) se transforma em:

$$P_L = P_{L1} + P_{L2} = \sum_{k=1}^n r_{jk} (J_{pj} J_{pk} + J_{qj} J_{qk}) \quad (253)$$

A equação acima dá a Potência Total de Perdas em termos de correntes de barra.

Querendo-se expressar as perdas em termos de potências e de voltagens das barras, deve-se adotar a seguinte formulação para a barra "i":

$$P_i + j Q_i = V_i J_i^* = V_i (J_{pi} - J_{qi}) = |V_i| (\cos \delta_i + j \text{Sen } \delta_i) (J_{pi} - J_{qi}) \quad (254)$$

onde:

δ_i = ângulo de fase de V_i com respeito a barra de referência.

De (254) tem-se:

$$J_{pi} = \frac{P_i \cos \delta_i + Q_i \operatorname{sen} \delta_i}{|V_i|} \text{ e } J_{qi} = \frac{P_i \operatorname{sen} \delta_i - Q_i \cos \delta_i}{|V_i|} \quad (255)$$

Substituindo-se em

$$P_L = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n r_{jk} (J_{pj} J_{pk} + J_{qj} J_{qk})$$

os valores de J_p e J_q dados por (255) e fazendo-se algumas manipulações algébricas obtém-se:

$$P_L = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\alpha_{jk} (P_j P_k + Q_j Q_k) + \beta_{jk} (Q_j P_k - P_j Q_k) \right] \quad (256)$$

onde:

$$\alpha_{jk} = \frac{r_{jk}}{|V_j| |V_k|} \cos(\delta_j - \delta_k) \quad (257)$$

$$\beta_{jk} = \frac{r_{jk}}{|V_j| |V_k|} \operatorname{sen}(\delta_j - \delta_k)$$

2.8 - Dedução de uma expressão geral para as PIT.

Devido a (257) tem-se:

$$(PIT)_i = \frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial P_i} \left[\alpha_{jk} (P_j P_k + Q_j Q_k) + \beta_{jk} (Q_j P_k - P_j Q_k) \right] \quad (258)$$

Na equação acima, substituiu-se P_{Gi} por P_i com base no fato de que

$P_i = P_{Gi} - P_{Di}$ e que P_{Di} é constante.

Assim é que de (258) tem-se:

$$(PIT)_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial P_i} (\alpha_{jk} P_j P_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial P_i} (\alpha_{jk} Q_j Q_k) + \\ + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial P_i} (\beta_{jk} Q_j P_k) - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\beta_{jk} P_j Q_k)$$

A operação $\frac{\partial}{\partial P_i}$ é feita em cada um dos quatro termos acima, para cada par de índices j, k .

Lembrando que:

$$\frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial P_i} = - \frac{r_{jk}}{|V_j||V_k|} \text{Sen}(\delta_j - \delta_k) \left(\frac{\partial \delta_j}{\partial P_i} - \frac{\partial \delta_k}{\partial P_i} \right) = \alpha'_{jk} \quad (259)$$

$$\frac{\partial \beta_{jk}}{\partial P_i} = \frac{r_{jk}}{|V_j||V_k|} \text{Cos}(\delta_j - \delta_k) \left(\frac{\partial \delta_j}{\partial P_i} - \frac{\partial \delta_k}{\partial P_i} \right) = \beta'_{jk}$$

constrói-se a figura 33, ou quadro-resumo.

ÍNDICE					
j	k	$\frac{\partial}{\partial P_i} (\alpha_{jk} P_j P_k)$	$\frac{\partial}{\partial P_i} (\alpha_{jk} Q_j Q_k)$	$\frac{\partial}{\partial P_i} (\beta_{jk} Q_j P_k)$	$\frac{\partial}{\partial P_i} (-\beta_{jk} P_j Q_k)$
$j=i$	$k=i$	$2 P_i \alpha_{ii}$	0	0	0
$j=i$	$k \neq i$	$P_k (\alpha_{ik} + P_i \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial P_i})$	$Q_i Q_k \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial P_i}$	$Q_i P_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial P_i}$	$-Q_k (\beta_{ik} + P_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial P_i})$
$j \neq i$	$k=i$	$P_j (\alpha_{ij} + P_i \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial P_i})$	$Q_j Q_i \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial P_i}$	$Q_j (\beta_{ji} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial P_i})$	$-P_j Q_i \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial P_i}$
$j \neq i$	$k \neq i$	$P_j P_k \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial P_i}$	$Q_j Q_k \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial P_i}$	$Q_j P_k \frac{\partial \beta_{jk}}{\partial P_i}$	$-P_j Q_k \frac{\partial \beta_{jk}}{\partial P_i}$

Fig. 33 - Quadro-resumo das derivadas.

Somando-se linha por linha do quadro, tem-se:

$$\begin{aligned}
 (\text{PIT})_i &= 2 \alpha_{ii} P_i + \\
 &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left[\alpha_{ik} P_k - \beta_{ik} Q_k + (P_i P_k + Q_i Q_k) \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial P_i} + (Q_i P_k - P_i Q_k) \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial P_i} \right] + \\
 &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[\alpha_{ji} P_j + \beta_{ji} Q_j + (P_i P_j + Q_i Q_j) \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial P_i} + (Q_j P_i - P_j Q_i) \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial P_i} \right] + \\
 &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left[(P_j P_k + Q_j Q_k) \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial P_i} + (Q_j P_k - P_j Q_k) \frac{\partial \beta_{jk}}{\partial P_i} \right] \quad (260)
 \end{aligned}$$

Pode-se simplificar (260) com base nos seguintes fatos:

1 - a equação (257) dá:

$$\alpha_{jk} = \alpha_{kj} \quad \text{e} \quad \beta_{jk} = -\beta_{kj}$$

que pode ser aplicado ao segundo somatório;

2 - da equação (259) tem-se:

$$\frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial P_i} = \alpha'_{jk} = \alpha'_{kj} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \beta_{jk}}{\partial P_i} = \beta'_{jk} = -\beta'_{kj}$$

e isto é aplicado ao segundo somatório;

3 - o valor do segundo somatório não é alterado ao substituir se j por k no mesmo.

Assim se pode escrever:

$$\begin{aligned} (\text{PIT})_i &= 2 \alpha_{ii} P_i + \\ &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \alpha_{ik} P_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (P_i P_k + Q_i Q_k) \alpha'_{ik} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (Q_i P_k - P_i Q_k) \beta'_{ik} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \beta_{ik} Q_k \\ &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \alpha_{ik} P_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (P_i P_k + Q_i Q_k) \alpha'_{ik} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (Q_i P_k - P_i Q_k) \beta'_{ik} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \beta_{ik} Q_k \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left[(P_j P_k + Q_j Q_k) \alpha'_{jk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (Q_j P_k - P_j Q_k) \beta'_{jk} \right] \end{aligned} \quad (261)$$

Donde:

$$\begin{aligned} (\text{PIT})_i &= 2 \alpha_{ii} P_i + \\ &+ 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \alpha_{ik} P_k + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (P_i P_k + Q_i Q_k) \alpha'_{ik} + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (Q_i P_k - P_i Q_k) \beta'_{ik} - \\ &- 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \beta_{ik} Q_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (P_j P_k + Q_j Q_k) \alpha'_{jk} - (P_j P_i + Q_j Q_i) \alpha'_{ji} \right] + \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (Q_j P_k - P_j Q_k) \beta'_{jk} - (Q_j P_i - P_j Q_i) \beta'_{ji} \right] \end{aligned} \quad (262)$$

Novas simplificações podem ser feitas pois de (257) tem-se:

$$\alpha_{ii} = 0 \quad \text{donde} \quad \alpha'_{ii} = 0 \quad \text{e}$$

$$\beta_{ii} = 0 \quad \text{donde} \quad \beta'_{ii} = 0$$

assim a equação de $(PIT)_i$ pode ser reescrita assinalando-se os termos a simplificar:

$$\begin{aligned} (PIT)_i &= 2 \cancel{\alpha_{ii}} P_i + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} P_k - 2 \cancel{\alpha'_{ii}} P_i + 2 \sum_{k=1}^n (P_i P_k + Q_i Q_k) \alpha'_{ik} - \\ &\quad - 2(P_i Q_i - Q_i Q_i) \cancel{\alpha'_{ii}} + 2 \sum_{k=1}^n (Q_i P_k - P_i Q_k) \beta'_{ik} - 2(Q_i P_i - P_i Q_i) \beta'_{ii} - \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^n \beta_{ik} Q_k + 2 \beta_{ii} Q_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (P_j P_k + Q_j Q_k) \alpha'_{jk} - \sum_{k=1}^n (P_i P_k + Q_i Q_k) \alpha'_{ik} - \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \frac{12^{\circ}}{(P_j P_i + Q_j Q_i)} \alpha'_{ji} + (P_i P_i + Q_i Q_i) \cancel{\alpha'_{ii}} + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (Q_j P_k - P_j Q_k) \beta'_{jk} - \sum_{k=1}^n (Q_i P_k - P_i P_k) \beta'_{ik} - \sum_{j=1}^n \frac{16^{\circ}}{(Q_j P_i - P_j Q_i)} \beta'_{ji} + \\ &\quad + (Q_i P_i - P_i Q_i) \cancel{\beta'_{ii}} \end{aligned}$$

Após simplificar-se, pela anulação dos termos acima assinalados, procede-se a troca de j por k nos 12º e 16º termos da equação acima nos quais também se considerou que $\alpha'_{ki} = \alpha'_{ik}$ e $\beta'_{ki} = -\beta'_{ik}$ • que resulta em:

$$\begin{aligned} (PIT)_i &= 2 \sum_{k=1}^n (\alpha_{ik} P_k - \beta_{ik} Q_k) + 2 \sum_{k=1}^n (P_i P_k + Q_i Q_k) \alpha'_{ik} + \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^n (Q_i P_k - P_i Q_k) \beta'_{ik} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[(P_j P_k + Q_j Q_k) \alpha'_{jk} + (Q_j P_k - P_j Q_k) \beta'_{jk} \right] + \\ &\quad - \sum_{k=1}^n (P_i P_k + Q_i Q_k) \alpha'_{ik} - \sum_{k=1}^n (P_k P_i + Q_k Q_i) \alpha'_{ik} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^n (Q_i P_k - P_i Q_k) \beta'_{ik} - \sum_{k=1}^n (P_k Q_i - Q_k P_i) \beta'_{ik} \end{aligned}$$

Fazendo-se ainda as simplificações acima assinaladas tem-se:

$$(PIT)_i = 2 \sum_{k=1}^n (\alpha_{ik} P_k - \beta_{ik} Q_k) + \sum_{j=1}^n \left[(P_j P_k + Q_j Q_k) \alpha'_{jk} - (P_j Q_k + Q_j P_k) \beta'_{jk} \right] \quad (263)$$

que é a expressão geral para as PIT.

Lembrando que:

$$J_i = \frac{P_i - j Q_i}{V_i^*} = y_{i1} V_1 + \dots + y_{in} V_n \quad i = 1, \dots, n \quad (264)$$

donde se tem:

$$P_i = \text{Real} \left\{ \sum_{v=1}^n y_{iv} V_v V_i^* \right\} \quad (265)$$

Mas, em forma polar, tem-se:

$$V_i^* = |V_i| e^{-j\delta_i} \quad ; \quad V_v = |V_v| e^{j\delta_v} \quad ; \quad y_{iv} = |y_{iv}| e^{j\psi_{iv}}$$

e a equação (265) transforma-se em:

$$P_i = \text{Real} \left\{ \sum_{v=1}^n |y_{iv} V_v V_i| e^{j(\delta_v - \delta_i + \psi_{iv})} \right\} \quad (266)$$

Tomando a parte real da equação (266), tem-se:

$$P_i = \sum_{v=1}^n |y_{iv} V_v V_i| \cos(\delta_v - \delta_i + \psi_{iv}) \quad (267)$$

que, por diferenciação, dá o seguinte:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = - |y_{ij} V_j V_i| \text{Sen}(\delta_j - \delta_i + \psi_{ij}) \quad (268)$$

ou

$$\frac{\partial \delta_j}{\partial P_i} = - \frac{1}{|y_{ij} V_i V_j| \text{Sen}(\delta_j - \delta_i + \psi_{ij})} \quad (269)$$

A substituição das derivadas parciais de (265) nas equações (259) resulta em:

$$\alpha'_{jk} = \frac{r_{jk} \text{Sen}(\delta_j - \delta_k)}{|V_i| |V_j| |V_k|} \left[\frac{1}{|y_{ij}| |V_j| \text{Sen}(\delta_j - \delta_i + \psi_{ij})} - \frac{1}{|y_{ik}| |V_k| \text{Sen}(\delta_k - \delta_i + \psi_{ik})} \right]$$

$$\beta'_{j k} = \frac{r_{j k} \cos(\delta_j - \delta_k)}{|V_i| |V_j| |V_k|} \left[\frac{1}{|y_{i k}| |V_k| \text{Sen}(\delta_k - \delta_i + \psi_{i k})} + \frac{1}{|y_{i j}| |V_j| \text{Sen}(\delta_j - \delta_i + \psi_{i j})} \right] \quad (270)$$

As equações (257), (263) e (270) permitem calcular as Perdas Incrementais de Transmissão, PIT, com base nas potências e voltagens das barras.

A presença da somatória dupla em (263) contribui pouco para a precisão dos cálculos mas aumenta muito o tempo de computação. Por essa razão, ela é desprezada e, na maioria dos casos, usa-se a fórmula:

$$(\text{PIT})_i \approx 2 \sum_{k=1}^n (P_k \alpha_{i k} - Q_k \beta_{i k}) \quad (271)$$

Conclui-se que, levando em consideração as perdas, obtêm-se as "n" Equações de Despacho Ótimo, (223):

$$(C I)_i = \lambda \left[1 - (\text{PIT})_i \right] \quad i = 1, \dots, n$$

com

$$(\text{PIT})_i = 2 \sum_{k=1}^n (P_k \alpha_{i k} - Q_k \beta_{i k})$$

que, junto com a Equação de Equilíbrio de Potência (220)

$$\sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D - P_L = 0$$

onde de (238) se tem:

$$P_L = \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^n \left[\alpha_{j k} (P_j P_k + Q_j Q_k) + \beta_{j k} (Q_j P_k - P_j Q_k) \right]$$

determinam a Geração Individual Ótima, P_{Gi} , de modo a ter-se uma Minimização Total do Custo de Geração.

No caso em que as perdas foram desconsideradas, é bom lembrar que as Equações de Despacho Econômico (217) e (201):

$$\frac{\partial C_i}{\partial P_i} = (C I)_i = \lambda \quad \text{e} \quad C_i = C_i(P_{Gi})$$

eram desacopladas, isto é, a equação "i" só dependia do "i"ésimo gerador, P_{Gi} . Naquele caso, um valor arbitrado para λ iniciava o processo (ver fig. 31) o qual convergia para as gerações ótimas, P_{Giot} .

Considerando-se as perdas, o procedimento é análogo, porém mais complicado, já que tanto as Equações de Despacho Ótimo como as de Equilíbrio de Potência são acopladas, ou seja, elas contêm termos referentes às perdas. Estes termos de perdas dependem de todos os geradores do sistema conforme mostram as equações (271) e (256).

2.9 - Procedimento computacional para determinar a estratégia de operação ótima incluindo as perdas nas linhas.

O procedimento computacional que será exposto em forma de diagrama de blocos baseia-se no quadro abaixo, que é semelhante ao da figura (13):

TIPO DA BARRA	VARIÁVEIS			
	ESPECIFICADAS		DEPENDENTES	
	FIXADAS	CONTROLE	ESTADO	SECUNDÁRIAS
DE CARGA (1)	P_i Q_i	-	$ V_i $ δ_i	- -
DE GERAÇÃO (2)	$ V_i $ -	P_{Gi}	δ_i -	$Q_{Gi} \rightarrow Q_i$
DE BALANÇO (3)	δ_i $ V_i $	-	-	$P_{Gi} \rightarrow P_i$ $Q_{Gi} \rightarrow Q_i$

Fig. 34 - Definição das variáveis.

As idéias básicas do diagrama de blocos são as seguintes:

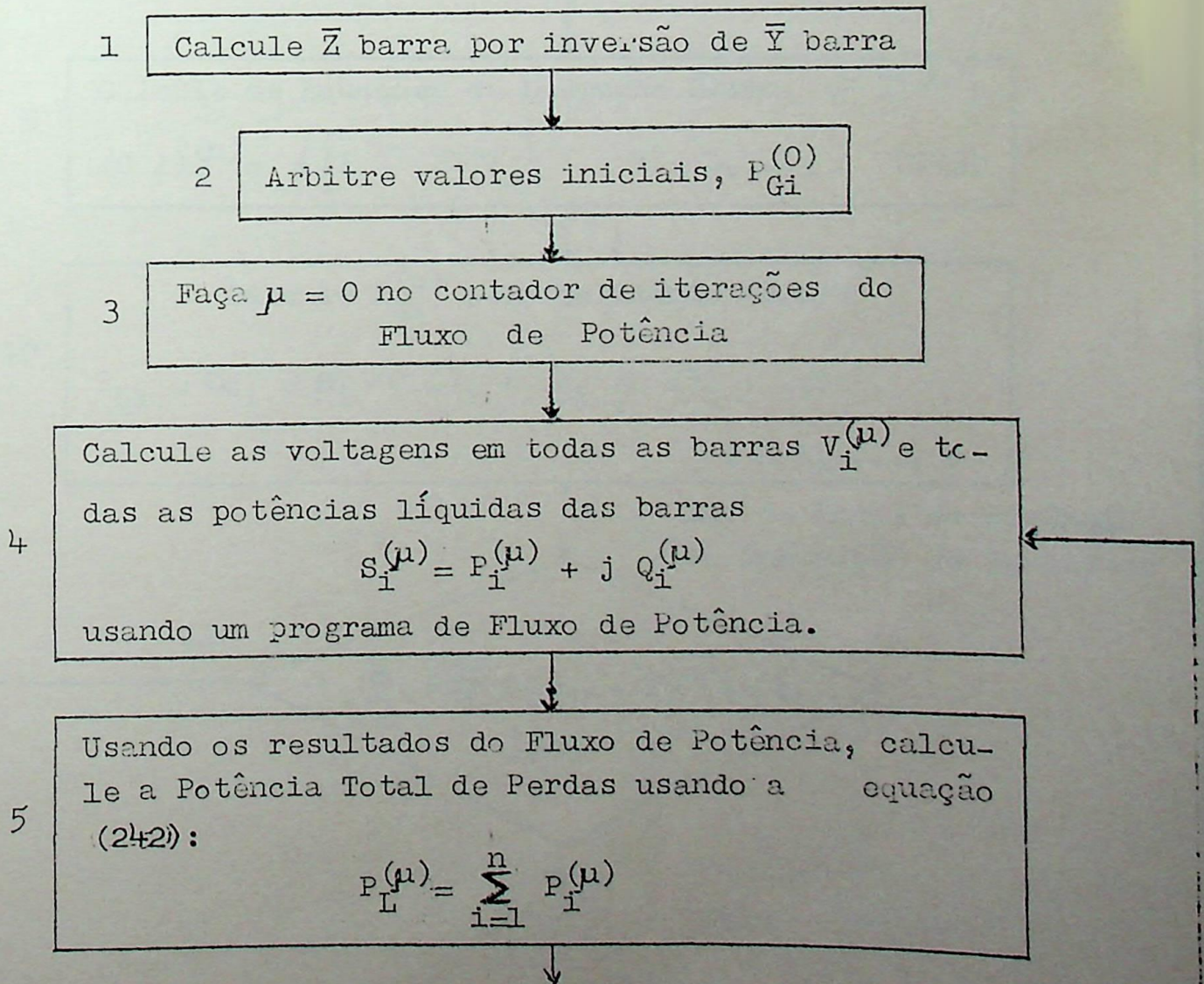
1 - Supõe-se conhecidas as demandas P_{Di} e Q_{Di} em todos os tipos de barras e o módulo da voltagem para as barras de geração.

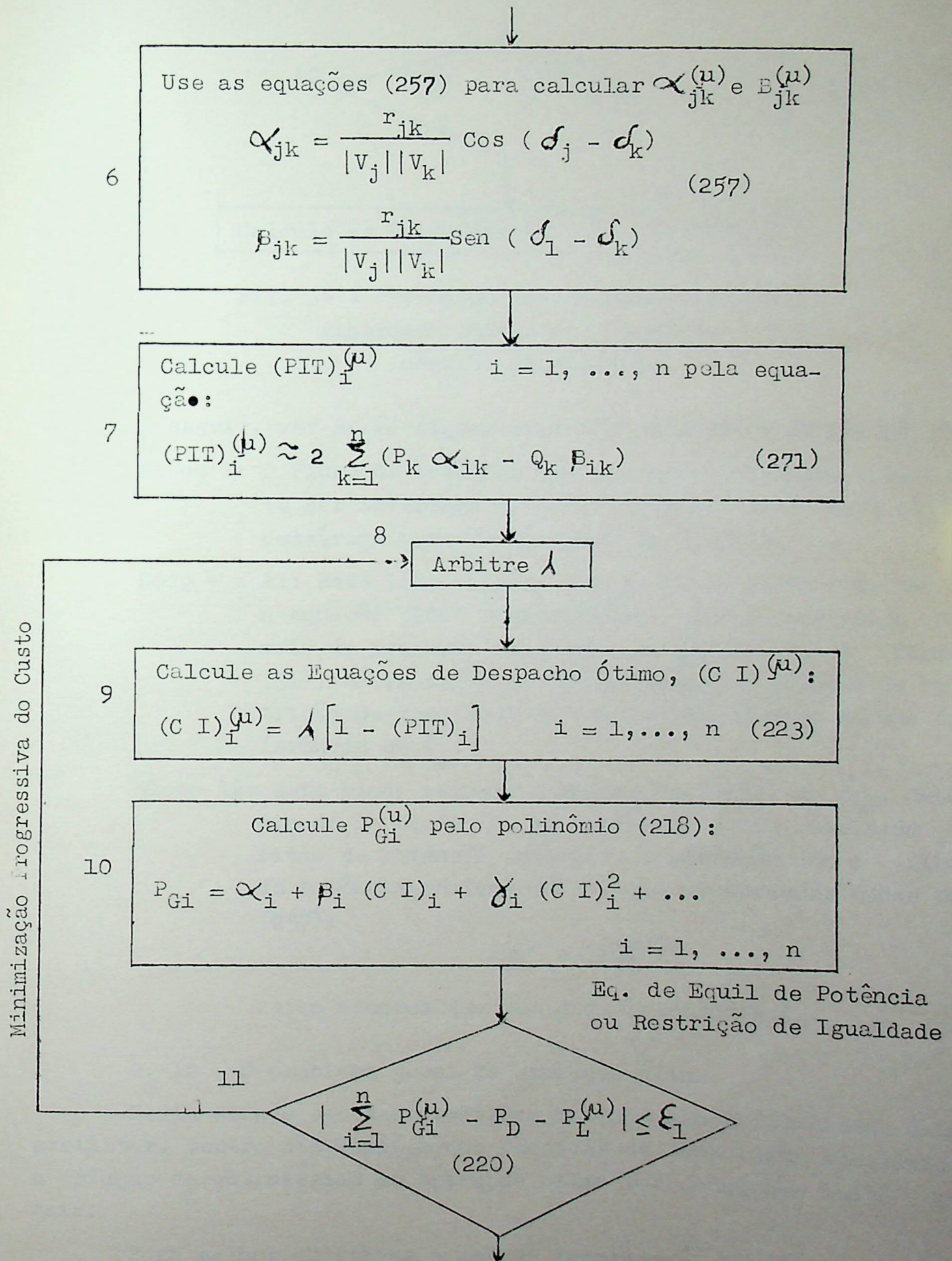
2 - Adotam-se as convenções:

$$P_i = P_{Gi} - P_{Di} = \text{Potência Ativa Líquida de Barra}$$

$$Q_i = Q_{Gi} - Q_{Di} = \text{Potência Reativa Líquida de Barra.}$$

- 3 - Arbitra-se uma geração individual para os geradores, P_{Gi} .
- 4 - Com base nos valores citados, no item 1, executa-se um estudo de Fluxo de Potência. Este estudo fornece a tensão complexa e a potência líquida de todas as barras além de dar as potências ativa e reativa de cada gerador incluindo o gerador de balanço.
- 5 - Com estes resultados, a equação (271) permite calcular as $(PIT)_i$. Isso permite que se resolvam as Equações de Despacho Ótimo, (223), por meio de uma iteração em λ da maneira descrita na figura (31). Desse modo, obtém-se o primeiro conjunto de potências ótimas dos geradores, P_{Gi} .
- 6 - O conjunto dos P_{Gi} recém-citados constitui as variáveis de controle e são eles substituídos no estudo do fluxo de potência em lugar dos P_{Gi} antes arbitrados. Assim, um novo estudo de fluxo de potência é feito com base nestes valores semi-otimizados dos P_{Gi} e no processo de otimização, descrito no item 5.





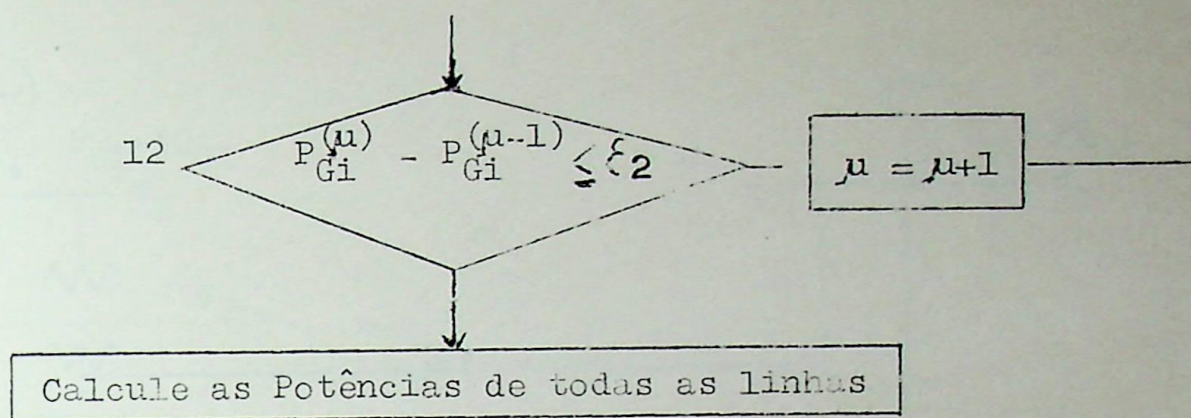


Fig. 35 - Procedimento computacional considerando perdas e restrições de igualdade.

A seguir, ver-se-ão alguns comentários sobre a figura nº 35.

Bloco 1: O Fluxo de Potência usa uma matriz \bar{Y} barra a qual deve ser invertida pois os elementos de \bar{Z} barra são necessários para os cálculos do bloco 6.

Loop 4 a 11: Este loop interno com λ faz o teste para ver se a equação (220) é satisfeita. Isso é conseguido por meio do processo iterativo de λ descrito na figura (31). Só se sairá do "loop" quando a equação da restrição de igualdade for satisfeita dentro de uma tolerância de ξ_1 .

Bloco 12: Este bloco calcula a mudança do valor do P_{Gi} , determinado no bloco 10, em confronto com o resultado do fluxo de potência anterior. A iteração com o fluxo de potência continuará até que as mudanças dadas por (257):

$$P_{Gi}^{(\mu)} - P_{Gi}^{(\mu-1)}$$

sejam menores que uma dada tolerância ξ_2 .

2. 10 - O problema geral da operação ótima.

Nesta secção são desenvolvidos métodos com a finalidade de possibilitar, dentro dos limites das técnicas de computação eletrônica, a criação de estratégias de operação ótima sob condições muito gerais.

Para melhor objetivar o estudo tomar-se-á, para referência, o sistema da figura 36 onde as Relações de Transformação dos dois transformadores podem ser variadas entre: $a_{\min} < a < a_{\max}$.

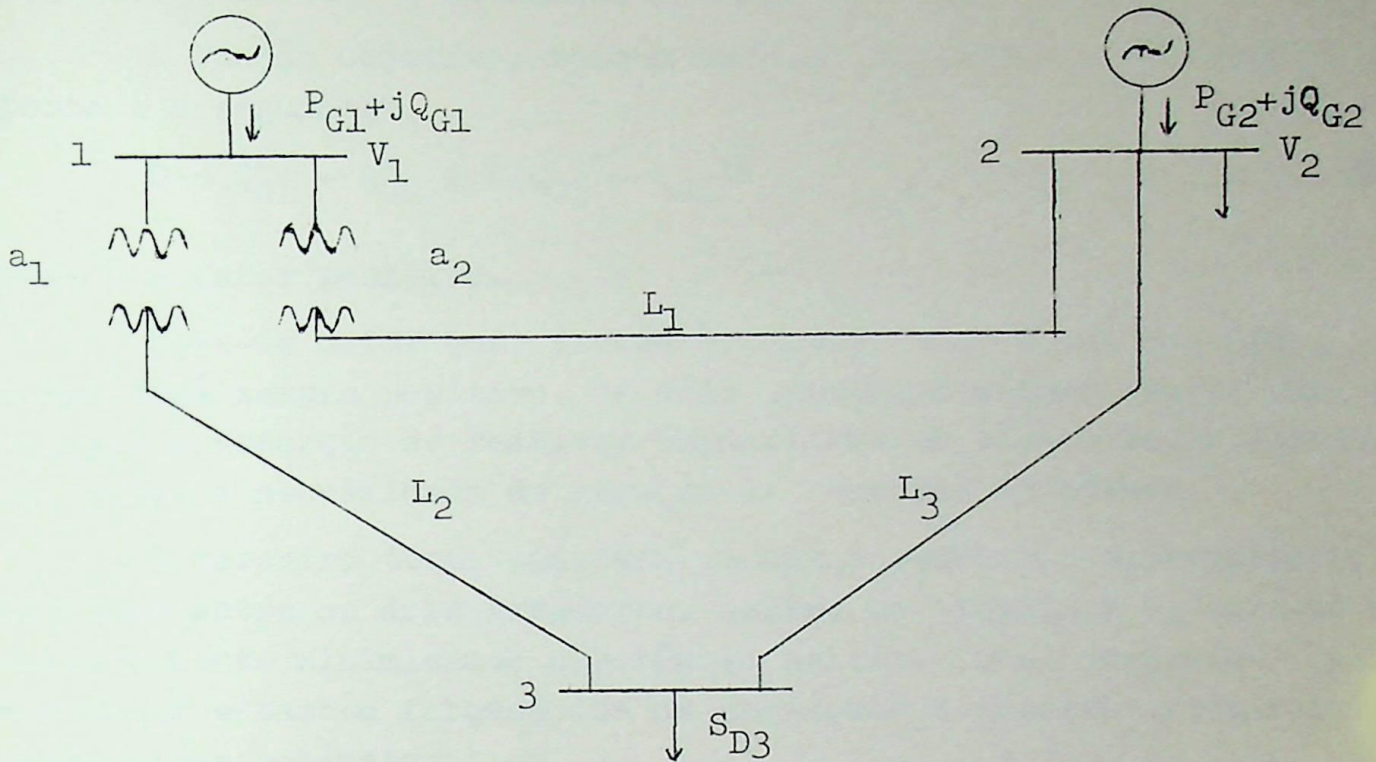


Fig. 36 - Sistema de exemplo.

Esta é a representação de um caso prático em que o problema é o excesso de potência reativa no sistema. Pode-se supor que as três redes de alta tensão atravessam uma área densamente povoada. Por isso são constituídas de cabos subterrâneos. Isso gera uma alta capacitância shunt que de dia é consumida pelas cargas indutivas mas à noite esta carga diminui e a geração reativa da linha deve ser consumida de outro modo.

Como fazer este consumo constitui-se em um problema. Uma solução poderia ser conseguida operando-se os geradores de um modo subexcitado à noite. Porém isso causaria a existência de baixos valores na força eletromotriz interna com a conseqüente redução da margem de estabilidade.

Um outro modo constitui-se na otimização da mudança dos "taps" sob carga de modo a criar um alto fluxo de corrente reativa circulando no laço das três redes. Desse modo, a potência reativa será consumida pelas reatâncias das redes e dos transformadores e permitirá que os geradores operem com menor subexcitação. Estuda-se, pois, a otimização da mudança dos "taps".

2.10.1 - Formulação matemática do problema.

Será dado um enfoque de Programação Matemática Generalizada à solução do problema proposto. Isso é feito seguindo a orientação de

Elgerd e Sullivan³² e de Dommel e Tinney³³.

A Função Objetivo, também chamada de critério de custo, proposta é a seguinte:

$$C = Q_{G1}^2 + Q_{G2}^2 + K(Q_{G1} - Q_{G2})^2 \quad (272)$$

onde $K =$ Fator positivo.

Deve-se notar que, devido à maneira como C foi definido, o mesmo será sempre positivo. Os dois primeiros termos servem para penalizar a absorção de reativos capacitivos em cada gerador diminuindo, pois, a necessidade de geração de reativos indutivos.

O terceiro termo penaliza, tende a reduzir, o desequilíbrio de reativos entre os dois geradores. Assim, ao minimizar C , está-se simultaneamente minimizando a Potência Reativa Total absorvida pelos geradores e também forçando-se os geradores a absorver proporcionalmente estas potências.

Quanto às Restrições de Igualdade, é útil fazerem-se algumas observações. Nos estudos feitos até aqui, desenvolveram-se Estratégias de Operação Ótima para casos em que o Critério de Custo, C , era uma função explícita das Potências Reais do Sistema.

Agora o custo depende explicitamente das variáveis constituídas pelas Potências Reativas do Sistema. Dessa forma, poder-se-ia, por analogia com o estudo anterior, adotar, como Restrição de Igualdade, a seguinte equação de Equilíbrio de Potência Reativa (28):

$$Q_{G1} + Q_{G2} = Q_{D1} + Q_{D2} + \frac{\cos \alpha}{X_L} \left[|V_1|^2 + |V_2|^2 - 2|V_1||V_2|\cos(\delta_1 - \delta_2) \right] - \frac{|V_1|^2 + |V_2|^2}{X_C}$$

Com isso só se levariam em consideração as variáveis que tivessem um forte efeito sobre o Equilíbrio da Potência Reativa e que são Q_{G1} , Q_{G2} e as relações de transformação Q_1 e Q_2 que fazem variar

³²ELGERD, O. I. e SULLIVAN, R. L. Minimally proportioned reactive generation control via automatic tap-changing transformers. Proc. P.I.C.A. Conference. Denver, Colo. 1969.

³³DOMMEL, H. W. e TINNEY, W. F. Optimal power flow solutions. IEEE Trans. New York, V. PAS 87. n. 10. pp. 1866-76. October, 1968.

$|V_1|$ e $|V_2|$.

No entanto, será seguido um enfoque mais geral e mais útil que pode ser aplicado nos casos em que a Função Objetivo depende tanto das Variáveis Ativas como das Variáveis Reativas do Sistema.

Como as E.F.P.E. definidas pelas equações (26) representam o conjunto de restrições de igualdade mais geral, elas serão aqui adotadas.

Portanto têm-se as restrições de igualdade seguintes:

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0} \quad (273)$$

Estudando-se as Restrições de Desigualdade a serem impostas sobre as variáveis \bar{x} e \bar{u} , pode-se dividi-las em Restrições Fortes e Restrições Fracas. Como exemplo de Restrições Fortes, tem-se a posição dos "taps" a_1 e a_2 . Quando os limites mecânicos são atingidos no trocador de "taps", não se pode ir além. Desse modo, a posição dos "taps" só pode ser escolhida dentro das seguintes Restrições Fortes de Desigualdade.

$$a_{i,\min} < a_i < a_{i,\max} \quad (274)$$

Mas, por exemplo, se as necessidades indicam que a voltagem deve ser mantida entre 0.95 e 1.05 pu, pode-se, em realidade, aceitar valores de 0.94 pu. e talvez até de 0.91 pu. Assim é que, nesta análise, os limites de voltagem são um exemplo de Restrições Fracas de Desigualdade.

Nessa análise, os dois tipos de restrições são tratados do seguinte modo:

Se, durante o curso das iterações computacionais uma variável atingir um Limite Forte, faz-se com que este valor-limite seja usado na iteração seguinte.

Para as Variáveis Fracas atribui-se uma Função de Penalidade W , definida na figura (37).

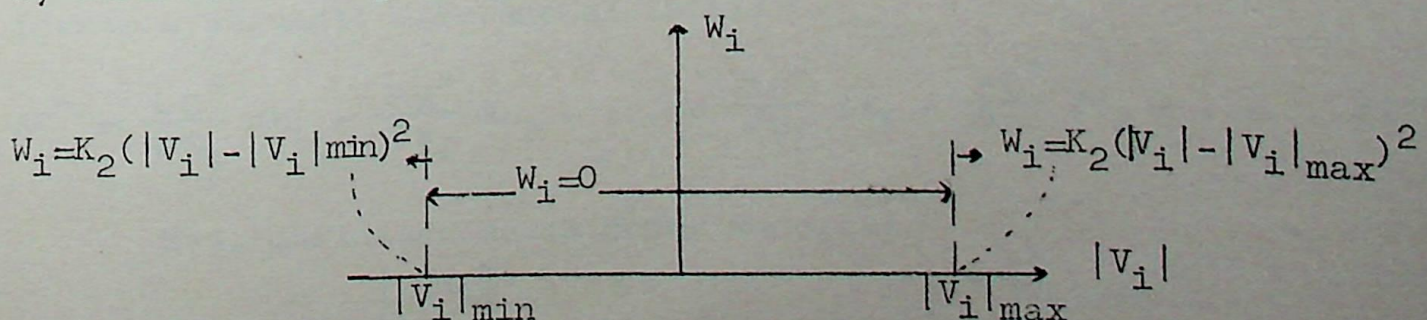


Fig. 37 - A função de penalidade fraca soma-se ao custo total se a voltagem sai do entorno permitido. A constante K_2 controla o grau de penalidade.

A função W é nula se as tensões estão dentro dos limites prescritos. Fora destes limites, a função cresce monotonamente.

A função de penalidade assim definida é somada à função do custo total, C , e penaliza "fracamente" qualquer excursão da voltagem para fora dos limites permitidos.

2.10.2 - Condições necessárias para a obtenção de C ótimo.

Tendo-se obtido um Novo Critério de Custo, ou Nova Função Objetivo, pela adição da Função de Penalidade Fraca, W , ao antigo Critério de Custo, C , procura-se agora obter a Função Lagrangeana também chamada de Função de Custo Aumentada, C^* .

Para tanto faz-se uma analogia com a já estudada equação (212):

$$C^* = C - \lambda h$$

Vê-se, pois, que, onde antes havia o escalar " h ", agora existe o vetor " \bar{f} " e, conseqüentemente, deverá haver um valor de λ_1 para cada componente de \bar{f} , ou seja, deve-se ter:

$$C^* = C + W - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 - \dots \quad (275)$$

Definindo-se o vetor $\bar{\lambda}$ como sendo:

$$\bar{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

pode-se compactar a equação (275) sob a forma:

$$C^* = C + W - \bar{\lambda}^T \bar{f} \quad (276)$$

Procura-se, agora, as condições necessárias para que C^* seja mínimo. Lembrando que C^* é uma função das variáveis \bar{x} e \bar{u} , pode-se formar a seguinte diferencial total:

$$dC^* = \frac{\partial C^*}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial C^*}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial C^*}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial C^*}{\partial u_2} du_2 + \dots \quad (277)$$

Mas, definindo-se os novos vetores:

$$\bar{dx} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad \bar{du} = \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial \bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C^*}{\partial x_1} \\ \frac{\partial C^*}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial C^*}{\partial \bar{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C^*}{\partial u_1} \\ \frac{\partial C^*}{\partial u_2} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (278)$$

torna-se possível expressar a equação (276) na forma compacta seguinte:

$$dC^* = d\bar{x}^T \frac{\partial C^*}{\partial \bar{x}} + d\bar{u}^T \frac{\partial C^*}{\partial \bar{u}} \quad (279)$$

Se o sistema estiver operando em seu Estado Ótimo, caracterizado por $\bar{x} = x \text{ ótm.}$ e $\bar{u} = u \text{ ótm.}$, então uma variação diferencial arbitrária nas variáveis \bar{u} ou \bar{x} não mudará o valor de C^* .

Desse modo, impondo-se que dC^* seja nulo em consequência das variações $d\bar{x}$ ou $d\bar{u}$, a equação (279) se transforma em:

$$dC^* = 0 = d\bar{x}^T \frac{\partial C^*}{\partial \bar{x}} + d\bar{u}^T \frac{\partial C^*}{\partial \bar{u}} \quad (280)$$

e, como por hipótese:

$$d\bar{x} \neq 0 \quad \text{e} \quad d\bar{u} \neq 0 \quad (281)$$

resulta que:

$$\frac{\partial C^*}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial C^*}{\partial \bar{u}} = 0 \quad (282)$$

As equações (282) são, portanto, as Condições Necessárias para o Custo Ótimo.

Pela substituição de (276) em (282) tem-se:

$$\frac{\partial C^*}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[C + \sum_{i=1}^3 W_i - \bar{\lambda}^T \bar{f} \right] = 0$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial C}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\sum_{i=1}^3 W_i \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{\lambda}^T \bar{f}) = 0 \quad (283)$$

Mas, definindo-se as Matrizes Jacobianas seguintes:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

pode-se avaliar $\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{\lambda}^T \bar{f})$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{\lambda}^T \bar{f}) &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\lambda_1 f_1) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\lambda_2 f_2) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\lambda_3 f_3) \end{aligned} \quad (284)$$

$$\text{mas } \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\lambda_1 f_1) = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} + f_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{x}}$$

e devido às equações (198) e (212) tem-se: $f_1 = 0$

$$\text{donde } \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\lambda_1 f_1) = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} \quad (285)$$

e, de modo análogo, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\lambda_2 f_2) = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\lambda_3 f_3) = \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \bar{x}} \quad (286)$$

Assim as equações (285) e (286), quando substituídas em (284), resultam em:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{\lambda}^T \bar{f}) = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \bar{x}}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{\lambda}^T \bar{f}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial f_3}{\partial \bar{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right)^T \bar{\lambda} \quad (287)$$

A substituição de (287) em (283) resulta em:

$$\frac{\partial C^*}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial C}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\sum_{i=1}^3 W_i \right) - \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right)^T \bar{\lambda} = 0 \quad (288)$$

e, de modo análogo, tem-se:

$$\frac{\partial C^*}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial C}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left(\sum_{i=1}^3 W_i \right) - \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right)^T \bar{\lambda} = 0 \quad (289)$$

Para este específico exemplo a figura 37 mostra que W é função somente das variáveis de estado e, conseqüentemente, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left(\sum_{i=1}^3 W_i \right) = \bar{0} \quad (290)$$

Do mesmo modo, a equação 272:

$$C = Q_{G1}^2 + Q_{G2}^2 + K(Q_{G1} - Q_{G2})^2$$

mostra que neste problema C só é função de \bar{u} e portanto tem-se:

$$\frac{\partial C}{\partial \bar{x}} = \bar{0} \quad (291)$$

2.10.3 - Procedimento computacional para obter a estratégia de operação ótima pelo método do gradiente.

Nesse ponto já foram lançadas as bases teóricas para o desenvolvimento de um algoritmo computacional que convergirá para uma solução ótima dada por $\bar{x} = \bar{x}_{otm}$ e $\bar{u} = \bar{u}_{otm}$. Esta solução ótima, se for substituída nas equações (288) e (289) que exprimem as condições necessárias ao C ótimo, irá satisfazê-las dentro de certa tolerância.

As computações seguem as seguintes etapas:

1 - Faz-se uma arbitragem inicial do Vetor de Controle $\bar{u}(0)$.

- 2 - Substitui-se $\bar{u}^{(0)}$ na equação do Fluxo de Potência

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = 0 \quad (292)$$

a qual é resolvida pelo método de Newton-Raphson, ou de Gauss-Seidel.

A solução do fluxo de potência fornece o Vetor de Estado, $\bar{x}^{(0)}$,

- 3 - Calculam-se as derivadas parciais das equações (288) e (289) para $\bar{x} = \bar{x}^{(0)}$ e $\bar{u} = \bar{u}^{(0)}$.

- 4 - Depois de vencida a etapa 3, então a equação (288):

$$\frac{\partial C^*}{\partial \bar{x}^{(0)}} = \frac{\partial C}{\partial \bar{x}^{(0)}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{(0)}} \left(\sum_{i=1}^3 W_i \right) - \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^{(0)}} \right)^T \bar{\lambda}^{(0)} = 0$$

fornece um sistema de equações lineares nas incógnitas $\bar{\lambda}^{(0)}$. Assim $\bar{\lambda}^{(0)}$ é determinado pela inversão da matriz $\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right)^T$,

isto é, a solução é dada por (288) mediante as seguintes transformações:

$$\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^{(0)}} \right)^T \bar{\lambda}^{(0)} = \frac{\partial C}{\partial \bar{x}^{(0)}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{(0)}} \left(\sum_{i=1}^3 W_i \right) \quad (293)$$

donde:

$$\bar{\lambda}^{(0)} = \left[\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^{(0)}} \right)^T \right]^{-1} \left[\frac{\partial C}{\partial \bar{x}^{(0)}} + \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^3 W_i \right)}{\partial \bar{x}^{(0)}} \right]$$

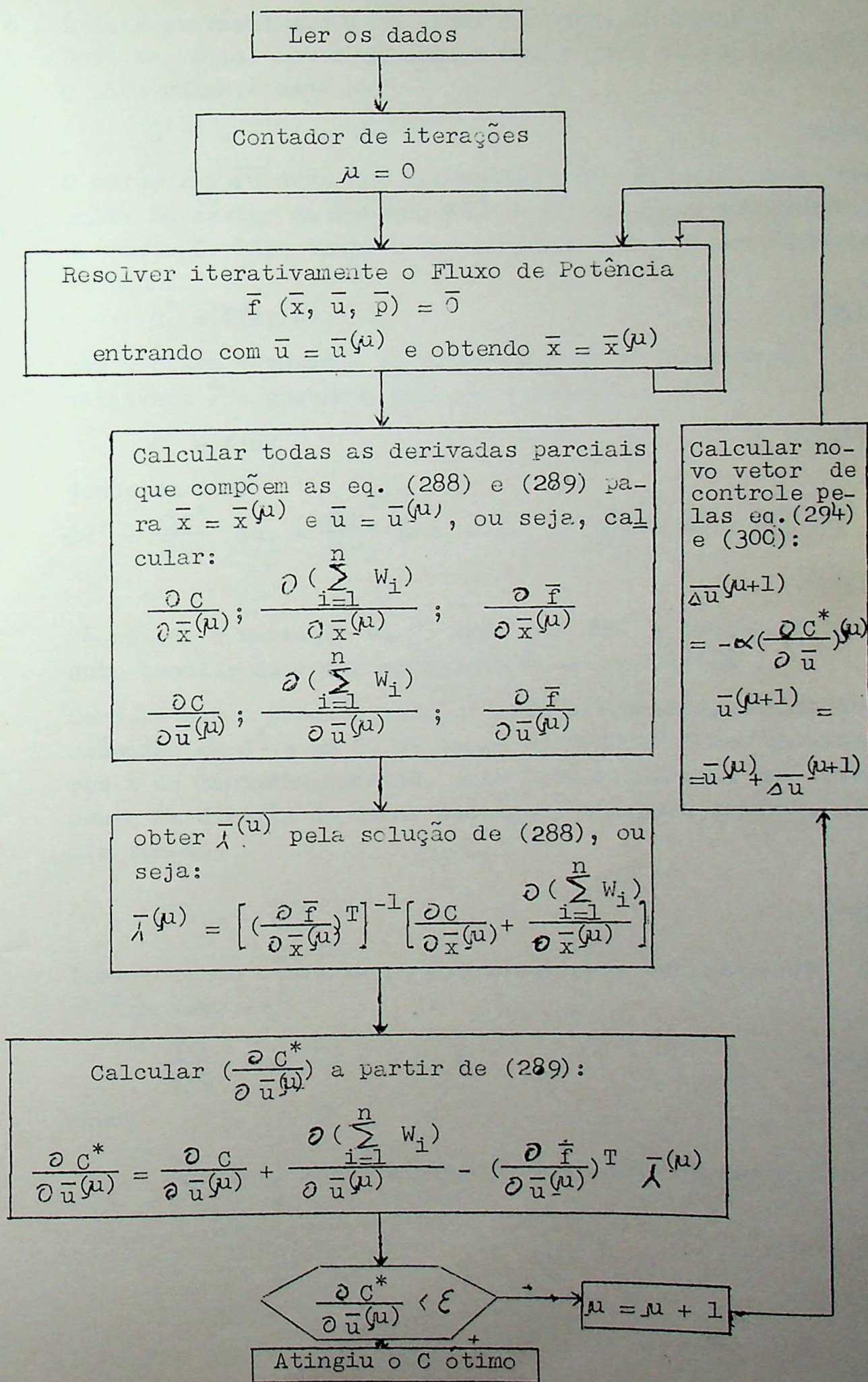
- 5 - Substituindo-se $\bar{\lambda}^{(0)}$ em (289), obtém-se o primeiro valor para as derivadas parciais:

$$\left(\frac{\partial C^*}{\partial \bar{u}} \right)^{(0)}$$

Se este valor for igual a $\bar{0}$, dentro de certa tolerância, isto significa que o valor arbitrado para o vetor de controle \bar{u} é a solução ótima pois as condições para C ótimo foram satisfeitas nas etapas 4 e 5, isto é, foram satisfeitas as condições (282):

$$\frac{\partial \bar{C}^*}{\partial \bar{x}} = \bar{0} \quad e \quad \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial \bar{u}} = \bar{0}$$

Fig. 38 - Algoritmo para a obtenção da estratégia operacional ótima pelo método do gradiente (Steepest descent).



- 6 - É mais provável que $u^{(0)}$ ainda não seja a solução. Deve-se, pois, obter um melhor valor para \bar{u} , ou seja, $\bar{u}^{(1)}$. O novo valor é dado por:

$$\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(0)} + \overline{\Delta u}^{(1)} \quad (294)$$

O acréscimo $\overline{\Delta u}$ deve ser determinado de tal modo, que resulte no máximo decréscimo ΔC^* em C^* e, conseqüentemente, do custo C . Para tanto é bom lembrar que originariamente se tinha

$$C^* = f(\bar{x}, \bar{u}) \quad (295)$$

mas a etapa 4 removeu a dependência de C^* em relação às variáveis \bar{x} e portanto pode-se escrever:

$$C^* = f(\bar{u}) \quad (296)$$

donde se tem:

$$\Delta C^* = \frac{\partial C^*}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial C^*}{\partial u_2} \Delta u_2 + \dots = \left(\frac{\partial C^*}{\partial \bar{u}} \right) \overline{\Delta u} = \bar{\nabla}_u^T \overline{\Delta u} \quad (297)$$

Vê-se que a variação em C^* dada por ΔC^* é função do produto escalar do vetor gradiente $\bar{\nabla}_u$ e do vetor $\overline{\Delta u}$.

Sabe-se que o produto escalar será maximizado, máximo decréscimo em C^* e em C , se ambos os vetores forem colineares e de sentidos opostos, pois isto implica em um movimento na direção de maior descenso, steepest descent. Assim tem-se:

$$\overline{\Delta u} = - \bar{\nabla}_u \quad (298)$$

Com o custo C^* varia proporcionalmente às variações de $\bar{u}, \overline{\Delta u}$, tem-se:

$$\frac{\partial C^*}{\partial \bar{u}} = \alpha \overline{\Delta u} = -\alpha \bar{\nabla}_u \quad (299)$$

onde

$$\alpha = \text{constante de proporcionalidade ou passo} \quad (300)$$

2.10.4 - Fluxo de Potência Ótimo pelo Método de Dommel-Tinney

Usando a classificação das variáveis, dada na figura (39) Dommel e Tinney³⁴ enfocaram o problema da operação ótima dos sistemas de potência aplicando os princípios da programação matemática generalizada. Seja a Função Objetivo a ser minimizada:

$$f = \sum K_i (P_{Gi})$$

onde

$$K_i = \text{Custo de Produção da fonte } P_{Gi}$$

Embora o estudo seguinte utilize a notação usada no "paper" em foco, é fácil estabelecer-se sua correspondência com a notação previamente usada. Assim, por exemplo, a equação da potência injetada no nó k , (72):

$$\bar{V}_k \sum_{j=1}^N Y_{kj}^* \bar{V}_j^* = P_k + j Q_k$$

encontra, através do seu conjugado, uma correspondência na seguinte equação dada por Dommel-Tinney:

$$V_k e^{-j\theta_k} \sum_{m=1}^N (G_{km} + j B_{km}) V_m e^{j\theta_m} = P_k - j Q_k = (P_G - P_C) - j(Q_G - Q_C) \quad (30B)$$

$k = 1, \dots, N$

onde:

V_k = módulo da voltagem no nó k

θ_k = ângulo da voltagem no nó k

$G_{km} + j B_{km}$ = elemento da matriz das admitâncias nodais

P_k e Q_k são as potências real e reativa injetadas no nó k .

P_G e P_C são as potências ativas de geração e de carga, respectivamente

Q_G e Q_C são as potências reativas de geração e de carga, respectivamente.

Sabe-se que o Fluxo de Potência em um sistema com N nós obedece a N equações nodais complexas do tipo (30B).

³⁴DOMMEL, H.W. e TINNEY, W. P. Optimal load solutions. IEEE Trans. New York, v. PAS-87, p. 1866-76, 1968.

Fazendo-se em (301):

$$V_k e^{-j\theta_k} \sum_{m=1}^N (G_{km} + j B_{km}) V_m e^{j\theta_m} = P_k(V, \theta) - j Q_k(V, \theta)$$

TIPO DA BARRA	ESPECIFICADAS = \bar{y}		DEPENDENTES	
	FIXADAS	DE CONTROLE	DE ESTADO	RESULTANTES
1	2	3	4	5
CARGA	$P_k Q_k$	-	$V_k \theta_k$	-
GER	P_k	V_k	θ_k	Q_k
BALANÇO	$\theta_1 = 0^\circ$	V_1	-	$P_1 Q_1$
	\bar{p}	\bar{u}	\bar{x}	

Fig. 39 - Classificação das variáveis usadas por Dommel e Tinney.

então (301) dará origem às $2N$ equações reais seguintes:

$$P_k(V, \theta) - P_k = 0 \quad k = 1, \dots, N \quad (302)$$

$$Q_k(V, \theta) - Q_k = 0 \quad k = 1, \dots, N \quad (303)$$

Assim cada nó fica caracterizado pelas quatro variáveis P_k , Q_k , V_k e θ_k . Duas destas variáveis devem ser especificadas e as duas restantes constituem-se nas incógnitas, ou variáveis de estado.

A classificação das variáveis é feita com base nas variáveis especificadas criando os três tipos de nós da figura (39).

O problema básico é a determinação das variáveis incógnitas \bar{x} , isto é, V_k e θ_k , pois, com base nelas, as equações (302) e (303) determinam P_k e Q_k . Para isso, de acordo com a figura (39), forma-se o vetor das incógnitas, \bar{x} , e o vetor das variáveis especificadas, \bar{y} .

Tem-se pois:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \text{elementos} \\ \text{da 4ª ct-} \\ \text{luna da} \\ \text{fig. (39)} \end{bmatrix} \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} \text{elementos} \\ \text{das 2ª e} \\ \text{3ª colu-} \\ \text{nas da fi} \\ \text{gura (39)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{elementos fixa} \\ \text{dos, } \bar{p}, \text{ da 2ª} \\ \text{coluna elemen} \\ \text{to de controle} \\ \bar{u}, \text{ da 3ª col.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{u} \end{bmatrix}$$

Agora se obtêm as Equações do Fluxo de Potência selecionando-se de (302) e (303) um número de equações igual ao número de variáveis de estado, incógnitas. Assim se forma o vetor $\bar{g}(\bar{x}, \bar{y})$, ou seja:

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) = \left[\begin{array}{l} \text{uma eq. (302)} \\ \text{uma eq. (303)} \\ \text{uma eq. (302)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{P. cada nó de} \\ \text{carga} \\ \text{P. cada nó de} \\ \text{geração} \end{array} \right] = \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0} \quad (305)$$

Estas equações do Fluxo de Potência constituem-se nas restrições de igualdade do sistema em estudo.

Com base no que foi dito, o problema resume-se em minimizar, pela variação dos parâmetros de controle \bar{u} e pelo uso de um Método do Gradiente, a Função Objetivo "F" penalizada pelas restrições de desigualdade nas Variáveis de Estado e nas Funcionais, sob as Restrições de Igualdade do Fluxo de Potência e as Restrições de Desigualdade nas Variáveis de Controle dadas de acordo com o Teorema de Kuhn-Tucker.

O problema pode ser assim matematicamente formulado:

$$\text{Minimizar}_{\bar{u}} \quad f(\bar{x}, \bar{u}) + \sum W_j \quad (306)$$

onde $\sum W_j$ são as penalidades citadas

sob as restrições de igualdade do Fluxo de Potência:

$$g(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0} \quad (307)$$

e, sob as restrições de desigualdade, dadas pelas características operacionais do sistema, seguintes:

$$\bar{V}_m \leq \bar{V} \leq \bar{V}_M \quad \text{ou} \quad (\bar{V} - \bar{V}_L) \leq \bar{0} \quad \text{e} \quad (\bar{V}_L - \bar{V}) \leq \bar{0}$$

$$\bar{P}_m \leq \bar{P} \leq \bar{P}_M \quad \text{ou} \quad (\bar{P} - \bar{P}_L) \leq \bar{0} \quad \text{e} \quad (\bar{P}_L - \bar{P}) \leq \bar{0}$$

$$\bar{Q}_m \leq \bar{Q} \leq \bar{Q}_M \quad \text{ou} \quad (\bar{Q} - \bar{Q}_L) \leq \bar{0} \quad \text{e} \quad (\bar{Q}_L - \bar{Q}) \leq \bar{0}$$

e

$$\bar{h}(\bar{x}, \bar{u}) \leq \bar{0} \quad (308)$$

onde

\bar{x} = vetor das variáveis de estado

\bar{u} = vetor das variáveis de controle

\bar{V}_m = vetor das voltagens mínimas

\bar{V}_M = vetor das voltagens máximas

\bar{P}_m = vetor das potências ativas mínimas

\bar{P}_M = vetor das potências ativas máximas

\bar{Q}_m = vetor das potências reativas mínimas

\bar{Q}_M = vetor das potências reativas máximas

$\bar{h}(\bar{x}, \bar{u}) \leq 0$ corresponde ao vetor das restrições de desigualdade funcionais.

Na solução do problema, segue-se o seguinte raciocínio:

- 1 - Adicionam-se as restrições de igualdade à Função Objetivo, $f(\bar{x}, \bar{u})$ e obtém-se o Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{u}) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \bar{\lambda}^T [\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})] \quad (309)$$

- 2 - Aplicam-se ao Lagrangeano as condições necessárias ao mínimo e tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\lambda}} = \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0} \quad (310)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{x}}\right)^T \bar{\lambda} = \bar{0} \quad (311)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} + \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}}\right)^T \bar{\lambda} = \bar{0} \quad (312)$$

Mas (310) é simplesmente o sistema de equações do Fluxo de Potência o qual pode ser resolvido pelo Método de Newton³⁵ e³⁶:

Esta solução satisfaz (310) e dá a Matriz Jacobiana em forma fatorada, L U, que, sendo transposta, auxiliará a determinação de $\bar{\lambda}$ na etapa seguinte.

- 3 - Usa-se a equação (311) para determinar $\bar{\lambda}$:

$$\bar{\lambda} = - \left[\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{x}}\right)^T \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \quad (313)$$

³⁵TINNEY, W. F. e HART, C. E. Power flow solution by Newton's method. New York. IEEE Trans. v. Pas-86, 1967.

³⁶TINNEY, W. F. e WALKER, J. W. Direct solutions of sparse network equations by optimally ordered triangular factorization. New York. IEEE. Proc. v. 55, 1967.

Desse modo, a equação (311) é satisfeita.

- 4 - A próxima equação a ser satisfeita é a (312). Para tal substitui-se em (312) $\bar{\lambda}$ obtido na etapa anterior e calcula-se $\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}$.

Prova-se agora que $\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}$ é o gradiente reduzido da função objetivo $f(\bar{x}, \bar{u})$ quando as restrições de igualdade já foram satisfeitas.

Com efeito, considere-se uma função Escalar $f(\bar{u})$. Por definição, sua diferencial total é:

$$df = (\bar{\nabla} f)^T \bar{d}u \quad (314)$$

e para $f(\bar{u}, \bar{x})$ tem-se:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\right)^T \bar{d}u + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^T \bar{d}x \quad (315)$$

onde $\bar{d}u$ e $\bar{d}x$ estão relacionados pelas equações de Fluxo de Potência:

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0}$$

A expansão de "g", em série de Taylor até os termos de 1ª ordem, dá:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \bar{d}x + \frac{\partial g}{\partial \bar{u}} \bar{d}u = \bar{0} \quad (316)$$

ou

$$\bar{d}x = - \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{u}} \cdot \bar{d}u \quad (317)$$

Substituindo-se (317) em (315), tem-se:

$$df = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\right)^T - \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^T \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}}\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial \bar{u}} \right] \bar{d}u \quad (318)$$

mas de (314) vem:

$$df = (\bar{\nabla} f)^T \bar{d}u$$

Logo a comparação de (314) e (318) dá:

$$(\bar{\nabla} f)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\right)^T - \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^T \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}}\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial \bar{u}} \quad (319)$$

ou

$$\bar{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} - \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{u}}\right)^T \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}}\right)^T \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \quad (320)$$

mas como por (313) tem-se:

$$- \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right)^T \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} = \bar{\lambda}$$

então (320) transforma-se em:

$$\bar{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{u}} \right)^T \bar{\lambda} \quad (321)$$

De (312) e (321) vem:

$$\bar{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \quad (322)$$

mas agora tem-se $\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{c}$

$$\text{logo: } \bar{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \quad (323)$$

Esta comparação mostra que a substituição de $\bar{\lambda}$ na equação (312), além de satisfazê-la, também fornece o gradiente da função objetivo. Este gradiente mede a sensibilidade da função objetivo, já sujeita às restrições de igualdade, com relação às variáveis de controle \bar{u} . O gradiente $\bar{\nabla} f$ só será nulo quando o mínimo for atingido. Mas, mesmo que a solução ótima não tenha sido atingida, o negativo do gradiente, $-\bar{\nabla} f$, indica a direção a ser seguida pelos valores dos parâmetros de controle, \bar{u} , que resultará no maior decréscimo da função objetivo sujeita às restrições de igualdade.

- 5 - Levando-se em consideração as restrições de desigualdade nos parâmetros de controle, determina-se um novo conjunto destes parâmetros, ou seja:

$$u^{\text{novo}} = u^{\text{velho}} + \Delta \bar{u} \quad \text{com} \quad \Delta \bar{u} = -\alpha \bar{\nabla} f \quad (324)$$

e para-se quando

$\bar{\nabla} f$ for convenientemente pequeno.

As restrições de desigualdade nos parâmetros de controle são levadas em conta nesse momento pelo Teorema de Kuhn-Tucker que estabelece os valores que os parâmetros de controle devem tomar a fim de que o mínimo seja atingido. Para tanto, faz-se agora um estudo de tais condições. O mesmo será facilitado pela matéria já vista em (1.3.7) na II Parte.

Assim sendo, considera-se o problema seguinte:

$$\begin{aligned} & \underset{(\bar{u})}{\text{minimizar}} && f(\bar{x}, \bar{u}) && (325) \end{aligned}$$

sujeita às Restrições de Igualdade

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0} \quad (326)$$

e às Restrições de Desigualdade nos Parâmetros de Controle, \bar{u} , (ver equações 308):

$$(\bar{u} - \bar{u}_M) \leq \bar{0} \quad (327)$$

ou

$$(\bar{u}_m - \bar{u}) \leq \bar{0} \quad (328)$$

Sob a hipótese de que (327) e (328) são convenientemente convexas, então (175) permite escrever a Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = f(\bar{x}, \bar{u}) + (\bar{\lambda})^T \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) + (\bar{\mu}_M)^T (\bar{u} - \bar{u}_M) + (\bar{\mu}_m)^T (\bar{u}_m - \bar{u}) \quad (329)$$

onde:

$\bar{\mu}_M$ = Variável Dual associada ao Limite Superior de \bar{u}

$\bar{\mu}_m$ = Variável Dual associada ao Limite Inferior de \bar{u}

É útil recordar que as equações de (178) a (182) se referem a um estado semelhante e para o qual só se considerou o Limite Inferior.

Observe-se que, quando $\bar{\mu}_M$ existe então, $\bar{\mu}_m$ é nula e vice-versa. Isto é, quando a componente u_i atinge o seu valor máximo, u_{iM} , então a componente dual μ_{iM} passa também a existir, μ_{im} , porém torna-se nula. A recíproca é verdadeira para os valores mínimos o que permite concluir-se que $\bar{\mu}_m$ e $\bar{\mu}_M$ nunca existem simultaneamente. Isso equivale a dizer-se que nunca ambas as Restrições (327) e (328) estão simultaneamente ativas.

O Teorema de Kuhn-Tucker (ver 1.3.7. na II Parte) aplicado a (329) estabelece as seguintes condições Necessárias à obtenção do custo mínimo:

I - O gradiente do Lagrangeano deve ser nulo (ver figura 23), ou seja:

$$\bar{\nabla} \mathcal{L} = \bar{0} \quad (330)$$

donde:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{x}} = \bar{0} ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{u}} = \bar{0} ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\lambda}} = 0 \quad (331)$$

II - Agora as Equações de Exclusão seguintes devem ser satisfeitas:

$$(\mu_M)^T (\bar{u} - \bar{u}_M) = \bar{0} \quad (332)$$

$$(\mu_m)^T (\bar{u}_m - \bar{u}) = \bar{0} \quad (333)$$

$$u_M \geq 0 ; \quad u_m \geq 0 \quad (334)$$

A consequência das condições "I" de Kuhn-Tucker, sobre o algoritmo computacional em foco é que o mesmo deverá satisfazer às condições já vistas na etapa anterior, (310), (311) e (312) adicionadas do aparecimento da variável dual " μ " em (311). Assim de (331) tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\lambda}} = \bar{g}(\bar{x}; \bar{u}, \bar{p}) = \bar{0} \quad (335)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{x}} \right)^T \bar{\lambda} = \bar{0} \quad (336)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} + \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}} \right)^T \bar{\lambda} + \bar{\mu} = \bar{0} \quad (337)$$

onde, devido às observações feitas após (329) com relação às componentes u_i do vetor \bar{u} , tem-se:

$$\mu_i = \mu_{iM} \quad \text{se} \quad u_i > 0 \quad (338)$$

ou

$$\mu_i = -\mu_{im} \quad \text{se} \quad u_i < 0$$

A consequência das condições II de Kuhn-Tucker sobre o Algoritmo computacional em foco é que, por (324), deve-se fazer:

$$u_i^{\text{nov}} = \begin{cases} = u_{iM} & \text{se } u_i^{\text{velho}} + \Delta u_i > u_{iM} \\ = u_{im} & \text{se } u_i^{\text{velho}} + \Delta u_i < u_{im} \\ = u_i^{\text{velho}} + \Delta u_i & \text{nos demais casos.} \end{cases} \quad (339)$$

2.10.5 - Segunda interpretação das variáveis duais.

De (337) tem-se:

$$\bar{\mu} = - \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{u}} \right)^T \bar{\lambda} \right] \quad (340)$$

A comparação de (321), (323) e (340) resulta em:

$$\bar{\mu} = - \bar{\nabla} f = - \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \quad (341)$$

De (341) conclui-se que:

I - As componentes do vetor dual, ao serem multiplicadas por (-1), tornam-se iguais às componentes do vetor gradiente, donde:

$$\mu_{iM} = - \frac{\partial f}{\partial \bar{u}_M} \quad \text{e} \quad \mu_{im} = \frac{\partial f}{\partial \bar{u}_m} \quad (342)$$

logo as variáveis duais, ou as componentes não nulas dos limites do gradiente, medem a Sensibilidade da Função Objetivo, f , com relação aos limites dos Parâmetros de Controle, u_{iM} e u_{im} . Pode-se dizer que elas expressam o Acréscimo de Custo, ou o Preço Pago pela Imposição dos Limites das desigualdades. Outrossim, elas também avaliam o Decréscimo do Custo, ou a Economia, resultante ao Relaxamento Parcial dos Limites das desigualdades. Veja-se a analogia com a equação (159).

II - Por outro lado, como \bar{u} deve satisfazer às Equações de Exclusão (332) a (334), então se tem:

$$\mu_i = 0 \quad \text{se} \quad u_{im} < u_i < u_{iM} \quad (343)$$

$$\mu_i = \mu_{iM} \quad \text{se} \quad u_i = u_{iM} \quad (344)$$

$$\mu_i = -\mu_{im} \quad \text{se} \quad u_i = u_{im} \quad (345)$$

mas, como as μ_i são as componentes do gradiente, com o sinal trocado, então, devido a (341), as equações (343) a (345) correspondem respectivamente às seguintes componentes do vetor gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 \quad \text{se} \quad u_{im} < u_i < u_{iM} \quad (346)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} \leq 0 \quad \text{se} \quad u_i = u_{iM} \quad (347)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} \geq 0 \quad \text{se} \quad u_i = u_{im} \quad (348)$$

Uma vista de olhos na figura 22 mostra que as equações acima tratam respectivamente dos seguintes tipos de mínimos:

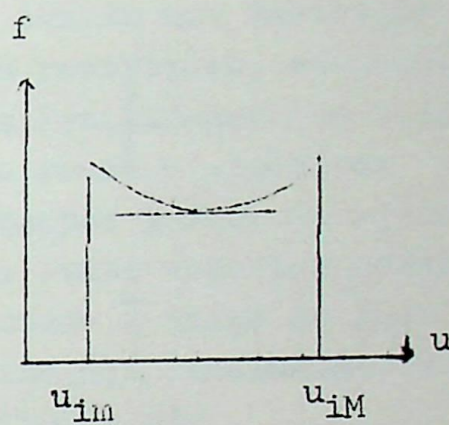


Fig. 40 - Equação (346)

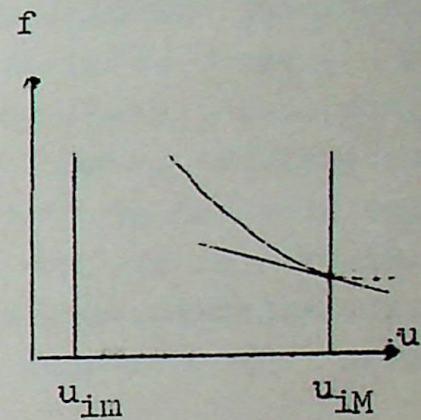


Fig. 41 - Equação (347)

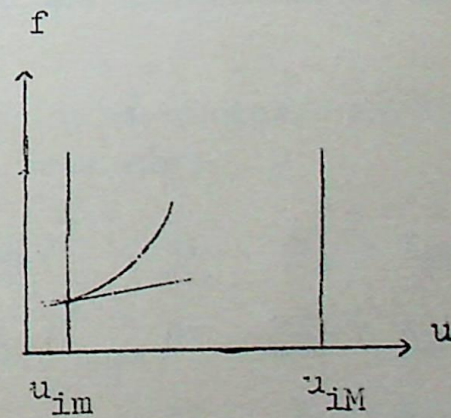


Fig. 42 - Equação (348)

III - É possível provar, por um estudo de sensibilidade semelhante, que, no ponto de custo mínimo, tem-se:

$$\bar{\lambda} = - \frac{df}{d\bar{p}} \quad (349)$$

Logo as componentes do vetor dos Multiplicadores de Lagrange exprimem a Sensibilidade da Função Objetivo, f , com relação ao vetor de Perturbação, \bar{p} , representado na coluna 2 da figura

39. Assim os Δ_i indicam as mudanças causadas no Custo Total da Geração, f , devidas a P_D e Q_D nas barras de carga e a P_G nas de geração e, com isso, fornecem uma base técnico-econômica para a fixação das tarifas.

- 6 - Além das restrições de desigualdades nos parâmetros de controle \bar{u} , existem também as Restrições de Desigualdade, nas Variáveis de Estado, \bar{x} , e nas Funcionais $h(\bar{x}, \bar{u})$. Quando \bar{x} é função de \bar{u} , como acontece com $V_m \leq V \leq V_M$ nos nós de carga, tem-se uma Restrição de Desigualdade Funcional. Para estas restrições, chamadas de Restrições Fraças, o Método das Penalidades tem sido o mais eficaz porque modifica muito pouco o algoritmo descrito. Estas restrições são importantes porque as novas Variáveis de Controle calculadas na etapa anterior podem fazer com que as variáveis de estado \bar{x} saiam de seus limites pré-estabelecidos. Com o Método das Penalidades a função objetivo "f" deve ser substituída por

$$f_p = f(\bar{x}, \bar{u}) + \sum W_j \quad (350)$$

onde se introduz em f uma penalidade W_j para cada restrição violada.

Desse modo, para o nó de carga mencionado, as Funções de Penalidade a usar são:

$$W_j \begin{cases} = K_j (x_j - x_{jM})^2 & \text{se } x_j > x_{jM} \\ = K_j (x_j - x_{jm})^2 & \text{se } x_j < x_{jm} \\ = 0 & \text{se } x_{jm} < x_j < x_{jM} \end{cases} \quad (351)$$

$K_j =$ constante empírica (ver fig. 37)

Um breve resumo do que foi dito é agora apresentado como uma base para o Algoritmo Computacional:

- 1) Estima-se o valor inicial dos parâmetros de controle \bar{u}^0 .
- 2) Calcula-se, em forma fatorada, a matriz Jacobiana

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \bar{H} & \bar{N} \\ \bar{J} & \bar{L} \end{bmatrix} = \bar{L} \bar{U} \quad (352)$$

- 3) Calcula-se o Fluxo de Potência pelo Método de Newton-Raphson usando-se a matriz Jacobiana da etapa 2.

$$\begin{bmatrix} \overline{\Delta P} \\ \overline{\Delta Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{H} & \overline{N} \\ \overline{J} & \overline{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\Delta \theta} \\ \overline{\Delta V} \\ \overline{\Delta x} \end{bmatrix} = \overline{L} \overline{U} \overline{\Delta x} \quad (353)$$

- 4) Com base em (313), calcula-se $\overline{\lambda}$. Os termos de penalidade W_j , nas equações que se seguem, só entram em consideração se a Função Objetivo tiver de ser aumentada com funções de penalidade que dependam das variáveis indicadas na derivada parcial de W_j . Assim se tem:

$$\begin{bmatrix} \overline{\lambda}_p \\ \overline{\lambda}_q \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \overline{H} & \overline{N} \\ \overline{J} & \overline{L} \end{bmatrix}^{T^{-1}} \right\} \left\{ -Z \begin{bmatrix} \overline{H}_1 \\ \overline{N}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial W_j}{\partial \theta} \cdot \theta \\ \sum \frac{\partial W_j}{\partial V} \cdot V \end{bmatrix} \right\} \quad (354)$$

onde

$\overline{\lambda}_p$ e $\overline{\lambda}_q$ = Subvetores dos Multiplicadores de Lagrange associados com as Restrições de Igualdade da Potência Ativa e Potência Reativa, respectivamente

$$\overline{H}_1 = \frac{\partial P_1(V, \theta)}{\partial \theta} \quad \overline{N}_1 = \frac{\partial P_1(V, \theta)}{\partial V} \quad (355)$$

$$Z = \begin{cases} \frac{\partial K_1}{\partial P_{G1}} & \text{Para as Potências Ativa e Reativa Ótimas} \\ 1 & \text{Para o caso de Potência Reativa Ótima.} \end{cases} \quad (356)$$

- 5) Com os valores de $\overline{\lambda}$, obtidos na etapa anterior, a equação (312) permite calcular as componentes da Gradiente com relação aos parâmetros de controle e tem-se:

$$\bar{\nabla} f_p = \frac{\partial f_p}{\partial \bar{u}} \quad (357)$$

onde

$$f_p = f(\bar{x}, \bar{u}) + \sum W_j$$

6) Parar se:

$$\bar{\nabla} f_p^{\text{nov}} \approx \bar{\nabla} f_p^{\text{vel}} \quad (358)$$

7) Caso contrário, determine-se um novo conjunto de parâmetros de controle por meio de (324):

$$\bar{u}^{\text{nov}} = \bar{u}^{\text{vel}} - c \bar{\nabla} f_p^{\text{nov}} \quad (359)$$

onde

c = constante empiricamente determinada.

8) Voltar à etapa nº 2 (ver figura 43).

Neste método, a Barra de Balanço tem a finalidade de servir de Barra de Referência para o Ângulo da Voltagem além de servir para a Absorção das Perdas do Sistema. Quando o objetivo for a Minimização de Perdas, o algoritmo tenderá a minimizar a Potência Ativa a ser gerada na barra de balanço pois nas outras barras a Potência Ativa já foi fixada (ver coluna 2, fig 39). Desse modo, o ponto ótimo depende da barra escolhida para balanço o que não corresponde a realidade dos fatos.

O trabalho de Rashed e Kelly,³⁷ utilizando as idéias básicas acima apresentadas, faz uma correção para o problema da dependência da escolha da Barra de Balanço pois, em sua formulação, todas as barras passam a absorver as perdas do sistema. Além disso, ele usa um enfoque de gradiente de segunda ordem para a obtenção da correção das variáveis de controle, combinado com a redução do número de variáveis do sistema.

³⁷RASHED, A.M.H. e KELLY, D.H. Optimal load flow solution using Lagrangian Multipliers and the Hessian Matrix. AIEE. Trans. New York, 1974.

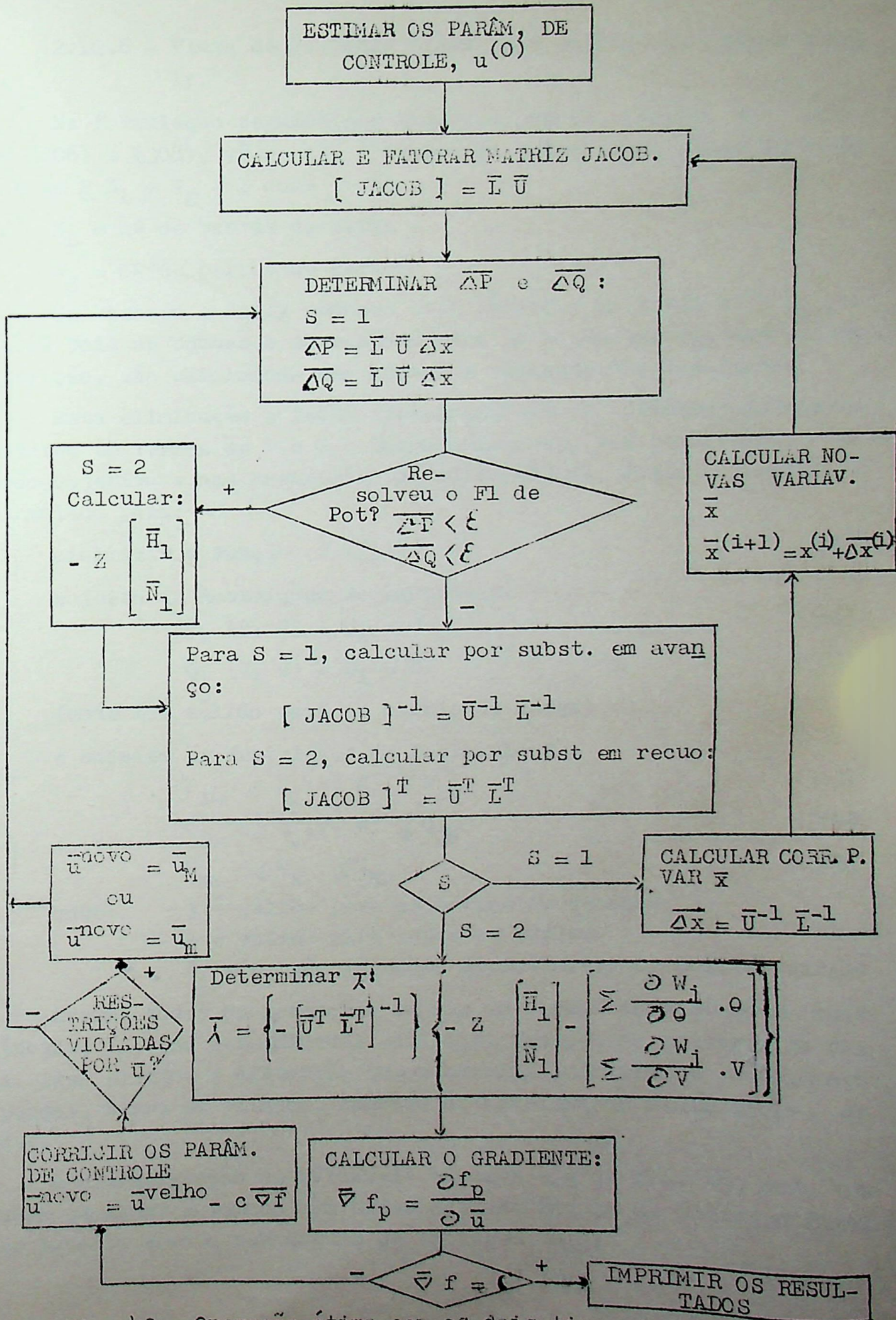


Fig. 43 - Operação ótima com os dois tipos de restrições.

2.10.6 - Fluxo de Potência Ótimo pelo enfoque de Rashed e Kelly.

Na formulação seguida por Tinney e Dommel, segundo as equações (306) e (308), vê-se que o número de equações do Fluxo de Potência é de $2 N_L + N_g - 1$ onde

N_L = nº de barras de carga

N_g = nº de barras de geração

Já Rasheed e Kelly reduzem este número a um total de $2 N_L$ equações pois as equações correspondentes às potências P_G , das barras de geração, são eliminadas sem afetar a validade dos resultados.

Esta eliminação é feita expressando-se as Potências Ativas dos Geradores em termos de V e θ e introduzindo-as, sob esta forma, na Função Objetivo e nas Restrições de Desigualdade. Assim o problema é reformulado para:

$$\text{minimizar a Função } f(V, \theta) \quad (360)$$

sujeita às Restrições de Igualdade:

$$P_i(V, \theta) + C_i = 0 \quad (361)$$

$$Q_i(V, \theta) + D_i = 0 \quad (362)$$

(onde i é válido para as barras de carga)

e sujeita às Restrições de Desigualdade:

$$P_{jm} \leq P_j(V, \theta) \leq P_{jM} \quad (363)$$

$$Q_{jm} \leq Q_j(V, \theta) \leq Q_{jM} \quad (364)$$

$$V_{km} \leq V_k \leq V_{kM} \quad (365)$$

onde: j é válido para as barras de geração

k é válido para todas as barras

P_i e Q_i são injeções de Potência; C_i e D_i são cargas

Assim, todos os geradores suprem as perdas do sistema e suas potências, P_G , são determinadas pela distribuição da voltagem do sistema. Isso elimina a distorção que a escolha da barra de suprimento de perdas, barra de balanço, causava no Problema da Minimização de Perdas.

A classificação de variáveis adotada é a da fig. 44, onde um gerador qualquer é tomado com Referência de Ângulo de Voltagem fazendo-se igual a zero o seu Ângulo de Voltagem θ_{GR} .

TIPO DA BARRA		VARIÁVEIS ESPECIFICADAS		VARIÁVEIS DEPENDENTES	
Nº	NOME	FIXADAS	DE CON- TROLE	DE ESTADO	RESUL- TANTES
1	CARGA	P_G, Q_G	-	V_G, θ_G	-
2	TENSÃO CTRL	P_{TC}	V_{TC}	θ_{TC}	Q_{TC}
3	GER. DE REEM.	θ_{GR}	V_{GR}	-	P_{GR}, Q_{GR}
4	GERAÇÃO	-	V_G, θ_G	-	P_G, Q_G
		\bar{p}	\bar{u}	\bar{x}	

Fig. 44 - Classificação das variáveis de Rashed e Kelly.

Com base na definição de variáveis da figura (44), pode-se fazer uma formulação mais detalhada do problema, ou seja:

$$\text{minimizar } f(V, \theta) = \sum K_i P_{Gi}(V, \theta) \quad (366)$$

onde:

K_i = custo de produção da potência P_{Gi}

$P_{Gi}(V, \theta)$ = Potência ativa do i ésimo gerador expressa em termo de V e θ .

i = Válido para todos os geradores.

sujeita às Restrições de Igualdade:

$$1) P_p + P_{Cp} = 0 \quad (367)$$

para $p = 1, \dots, N$

e $p \in 1, 2$ (ver 1ª coluna da figura (44), ou seja, para os nós de carga e os de tensão controlada.

$$2) Q_p + Q_{cp} = 0 \quad (368)$$

para $p = 1, \dots, N$

e $p \in 1,$

ou seja, para os nós de carga.

(as Equações (367) e (368) são reunidas sob a denominação genérica de $\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{0}$)

e sujeita às Restrições de Desigualdade:

$$3 - V_{p, m} \leq V_p \leq V_{p, M} \quad (369)$$

para $p = 1, \dots, N$

e $p \in 1, 2, 3, 4,$

ou seja, o Módulo da Tensão é livre para variar entre seus limites em todos os Tipos de Barra.

$$4 - P_{p, m} \leq P_p \leq P_{p, M} \quad (370)$$

para $p = 1, \dots, N$

e $p \in 3, 4,$

ou seja, a Potência Ativa é limitada nas Barras de Geração e de Referência

$$5 - Q_{p, m} \leq Q_p \leq Q_{p, M} \quad (371)$$

para $p = 1, \dots, N$

e $p \in 2, 3, 4,$

ou seja, a Potência Reativa é limitada nas Barras de Tensão Controlada, de Referência e de Geração.

Albuquerque³⁸ introduziu as Barras de Tensão Controlada nas Restrições de Igualdade, isto é, nas Equações do Fluxo de Potência. Portanto as equações (367) e (368) são obtidas da maneira a seguir explicada.

Sabe-se que a potência injetada em um nó é dada por:

$$P_p + j Q_p = \bar{E}_p \bar{I}_p^* \quad (372)$$

$$\text{mas } \bar{I}_p = \sum_{q=1}^N \bar{Y}_{pq} \bar{E}_q \quad (373)$$

$$\text{donde } \bar{I}_p^* = \sum_{q=1}^N \bar{Y}_{pq}^* E_q^* \quad (374)$$

Sabe-se também que:

$$\bar{E}_p = E_p + j F_p \quad (375)$$

$$\text{e que } \bar{E}_q^* = E_q - j F_q \quad (376)$$

³⁸ ALBUQUERQUE, J.C.R. Fluxo de carga com otimização de perdas. CEEI IBM, Rio de Janeiro, 1975.

Substituindo-se em (372) as equações (374), (375) e (376), se tem:

$$P_p + jQ_p = (E_p + jF_p) \sum_{q=1}^N \left[(G_{pq} + jB_{pq})(E_q - jF_q) \right] =$$

$$= \sum_{q=1}^N (E_p + jF_p) \left[(E_q G_{pq} + F_q B_{pq}) + j(E_q F_{pq} - F_q G_{pq}) \right] \quad (377)$$

e, separando-se as partes real e reativa, tem-se:

$$P_p = \sum_{q=1}^N \left[E_p (E_q G_{pq} + F_q B_{pq}) + F_p (F_q G_{pq} - E_q B_{pq}) \right] \quad (378)$$

e

$$Q_p = \sum_{q=1}^N \left[F_p (E_q G_{pq} + F_q B_{pq}) - E_p (F_q G_{pq} - E_q B_{pq}) \right] \quad (379)$$

Os valores de P_p e Q_p dados por (378) e (379) são substituídos em (367) e (368) de modo a obter-se um sistema com o número de equações igual ao número de variáveis dependentes. Este sistema constitui o Fluxo de Potência e é assim expresso:

$$\sum_{q=1}^N \left[E_p (E_q G_{pq} + F_q B_{pq}) + F_p (F_q G_{pq} - E_q B_{pq}) \right] + P_{C,p} = 0 \quad (380)$$

(Equação válida para todas as Barras de Carga e de Tensão Controlada)

$$\sum_{q=1}^N \left[F_p (E_q G_{pq} + F_q B_{pq}) - E_p (F_q G_{pq} - E_q B_{pq}) \right] + Q_{C,p} = 0 \quad (381)$$

(Equação válida só para as Barras de Carga)

Deste ponto em diante, segue-se um raciocínio semelhante ao do Método de Tinney e Dommel mas com a diferença de que a Correção das Variáveis de Controle, $\overline{\Delta u}$, antes dada em (359)

$$\text{por } \overline{u}^{\text{novo}} = \overline{u}^{\text{velho}} - C \overline{\nabla f}^{\text{novo}} \quad (382)$$

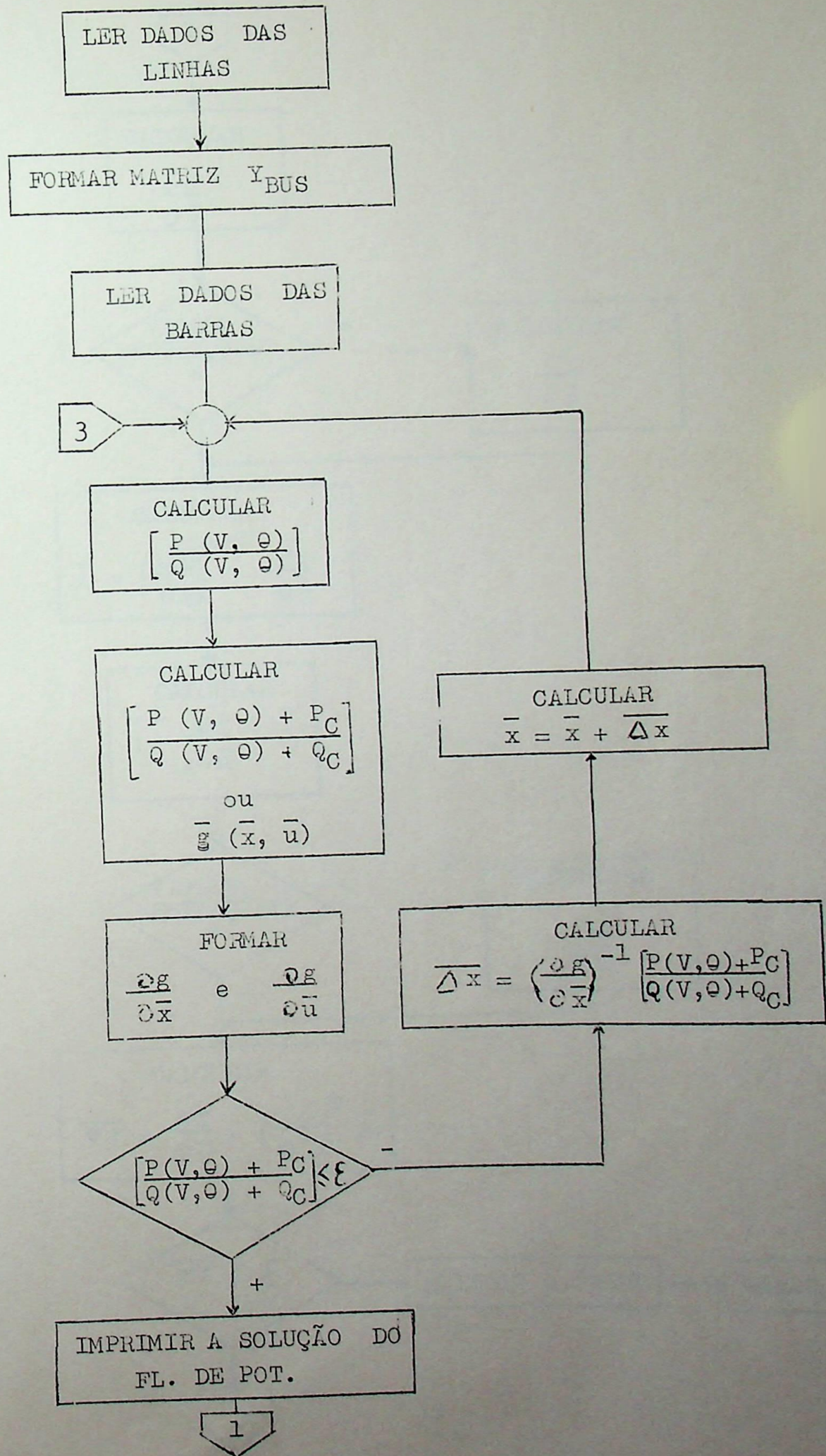
agora usa a Matriz Hessiana e tem-se:

$$\overline{\Delta u} = - \overline{H}^{-1} \overline{\nabla f} \quad (383)$$

onde \overline{H} é a Matriz Hessiana das Derivadas Parciais de Segunda Ordem da Função Lagrangeana \mathcal{L} com respeito às Variáveis de Controle \overline{u} .

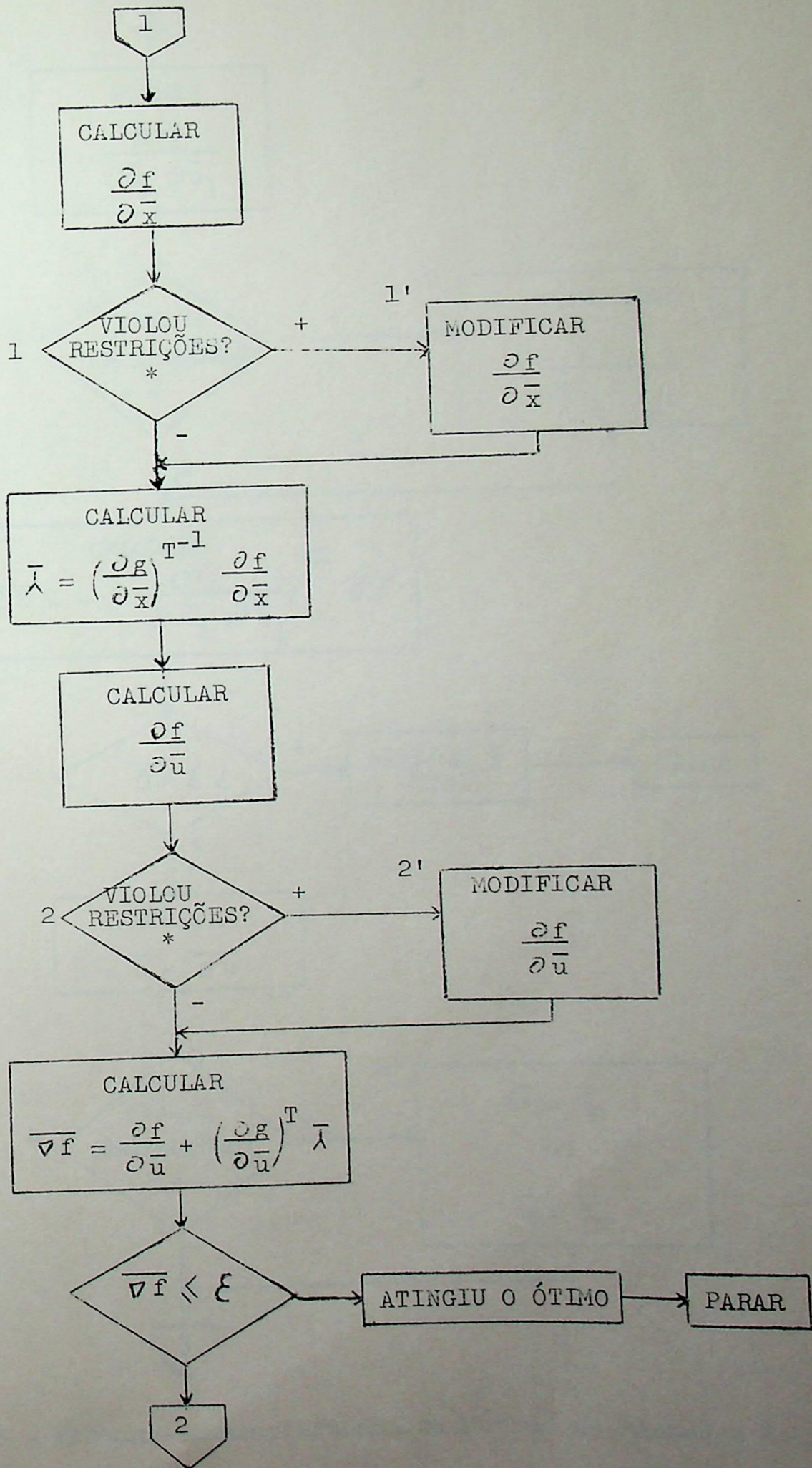
Dessa forma, tem-se um algoritmo expresso pelo diagrama de blocos da figura (45).

FLUXO DE POTÊNCIA



REDUZIDO

GRADIENTE



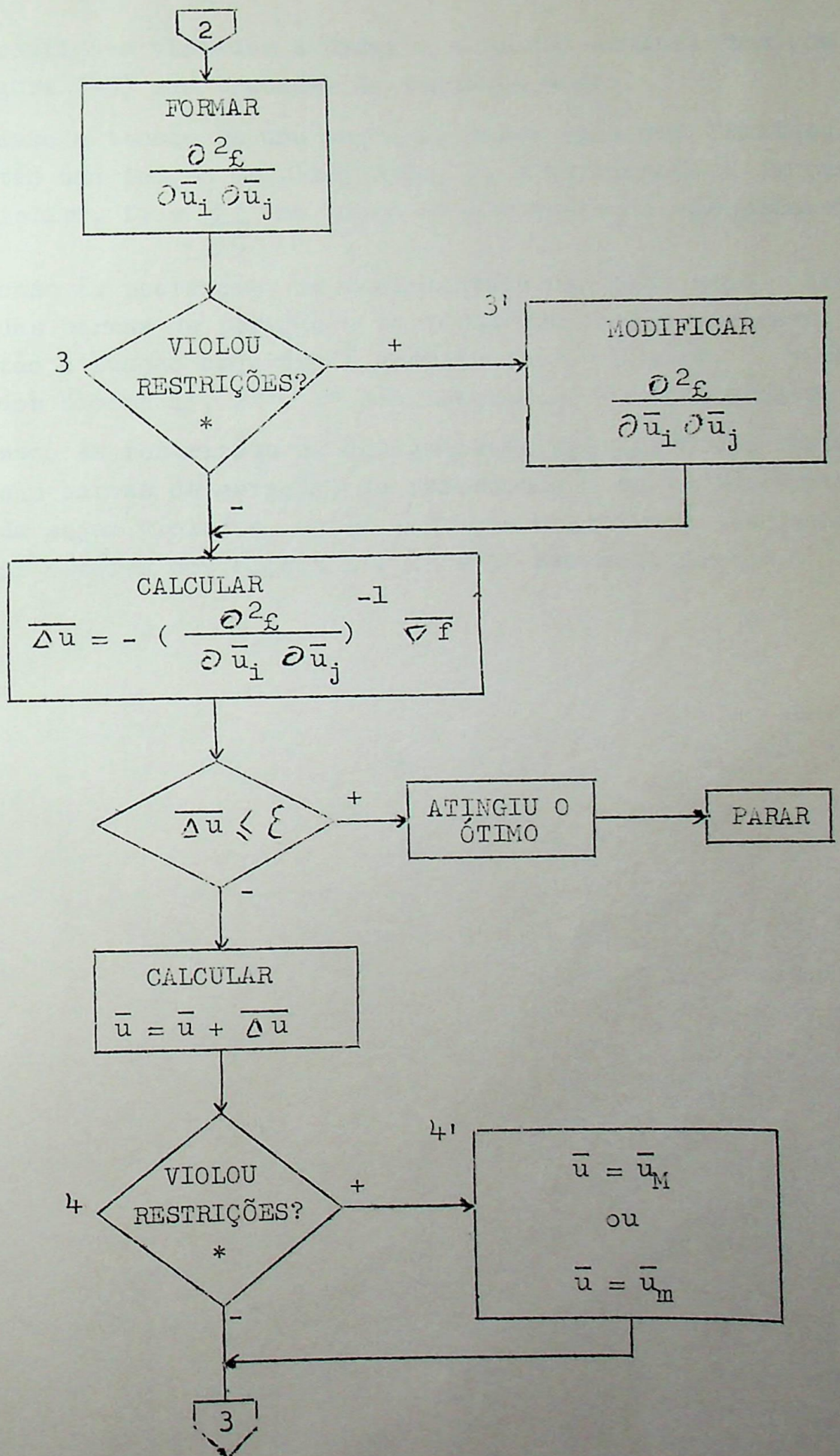


Fig. 45 - Fluxograma simplificado do Método de Rashed e Kelly

As restrições violadas citadas nos blocos assinalados com 1, 2 e 3 na figura (45) são tratadas do seguinte modo:

- 1 - caso a tensão em uma barra de carga saia dos limites, então uma função de penalidade, W , é adicionada à função objetivo, f , e $\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}$ no bloco 1' é modificada adequadamente;
- 2 - caso as restrições de desigualdade nas potências ativas das barras de geração e de referência sejam violadas, então a função objetivo é penalizada por W e os vetores dos blocos 1', 2' e 3' são adequadamente modificados;
- 3 - caso as restrições de desigualdade nas potências reativas das barras de geração, de referência e de tensão controlada sejam violadas, então a função objetivo é penalizada e os vetores dos blocos 1', 2' e 3' são modificados.

CAPÍTULO 3 - CONCLUSÕES

3.1 - Conclusões finais.

À luz dos objetivos traçados na introdução deste trabalho, chegou-se às seguintes conclusões:

- 1 - Entre as várias representações matemáticas que a Teoria dos Circuitos propõe para as redes dos Sistemas Elétricos de Potência na atualidade, a mais adequada é a Matriz das Admitâncias Nodais, \bar{Y} barra (ver 2.2.1 - 1ª Parte). Isso porque ela é automaticamente montada pelo computador além de ser bastante esparsa o que representa uma grande economia de memória do computador.
- 2 - No atual estágio das técnicas computacionais, o uso de um Método Direto para a solução do Problema do Fluxo de Potência é o mais adequado embora envolva a inversão de grandes matrizes. Os óbices são removidos usando-se o Método de Newton-Raphson desenvolvido por Tinney-Hart (ver 2.3.7 - 1ª Parte) que graças a um processo de Eliminação Gaussiana Otimamente Ordenada aliada a técnicas de compactação, torna viável a inversão de matrizes e permite a solução de problemas com até 1000 barras em computadores com 32k de memória (ver 2.3.7 - 1ª Parte). É de notar-se que tal método incorpora automaticamente as perdas nas linhas de transmissão embora o valor destas dependa da barra de balanço que for escolhida.
- 3 - A intercalação dos Teoremas da Dualidade (ver 1.3.3 - 2ª Parte) e de conhecimentos adequados de Análise Econômica (ver 1.3.9 - 2ª Parte) entre os estudos, tais como são feitos agora, nas áreas de Análise de Sistemas Elétricos de Potência e de Operação Ótima de Sistemas, dará mais motivação e mais significação técnica e econômica ao conteúdo

do desta última área.

- 4 - Dentro de um contexto tecnológico atualizado, o Problema do Fluxo de Potência Otimizado deve ser abordado como um Problema de Programação Não Linear Generalizada (ver 2.3 - 2ª Parte). A identificação das variáveis é facilitada pela Teoria do Espaço de Estado (ver 2.1.3 - 1ª Parte). A viabilidade de tal abordagem ampara-se no Método do Fluxo de Potência Ótimo desenvolvido por Dommel e Tinney (ver 2.10.4 - 2ª Parte). Este método baseia-se no trabalho sobre soluções diretas de equações de redes esparsas usando a fatoração otimamente ordenada criado por Tinney e Walker (ver 2.10.4 - 2ª Parte), mas deve ser usado com o aperfeiçoamento introduzido por Rashed e Kelly (ver 2.10.6 - 2ª Parte) que faz uso da Matriz Hessiana para a correção das variáveis de controle além de eliminar a dependência da escolha da barra de balanço para o caso de minimização de perdas.

3.2 - Comentários.

Tratando-se de um campo complexo, de característica interdisciplinar e que passa atualmente por extrema evolução tecnológica, envidou-se todo o esforço para oferecer aos estudantes que deste trabalho fizerem uso uma atualizada base teórica orientada no sentido das necessidades práticas das empresas de energia elétrica. Isso foi feito de uma forma precisa e compacta visando possibilitar a construção de algoritmos computacionais destinados à solução do Problema do Despacho Ótimo de Carga. O diagrama de blocos da figura (45) e o procedimento a ele associado servem de seguro guia neste sentido.

3.3 - Futuros desenvolvimentos.

Como uma etapa futura, pode-se conduzir um estudo, visando um maior detalhamento das equações do gradiente e das correções citadas na figura (45). Como resultado do que se viu (ver 2.10.5 - 2ª Parte) pode-se incluir no algoritmo um estudo de sensibilidade visando a obtenção automática do Custo dos Limites impostos pelas Restrições de Desigualdade além de obter-se um critério técnico-econômico, para a fixação de tarifas. O mesmo algoritmo pode ser estendido à Operação Econômica de Sistemas Hidrotérmicos como é explicado nos comentários do trabalho de Tinney e Dommel já citado.

BIBLIOGRAFIA

1. ALBUQUERQUE, J. C. Fluxo de carga com otimização de perdas. CEEL-IBM, Rio de Janeiro, 1975.
2. APOSTOL, Tom M. Analisis Matematico. Barcelona, Ed. Reverté, 1972.
3. APOSTOL, Tom M. Calculus. 2. ed. Barcelona, Ed Reverté, 1972.
4. BANDINI, A. Operação econômica dos sistemas de produção e transmissão de energia elétrica. Apostila do Curso de Pós-graduação em Eng. Elétrica da EFEI, MG, 1970.
5. BAUMOL, W. J. Economic theory and operations analysis. 3. ed. London, Prentice Hall, 1972.
6. BERNHOLTZ, B. e GRAHAM, L. V. Hydro-thermal economic scheduling. AIEE Trans., New York, 1960.
7. BRAMPELLER, A. e DENMEAD, J. K. Some improved methods for digital network analysis. Proc. IEE. V. 109., London, 1962.
8. BROWN, Homer E. Solution of large networks by matrix methods. New York, Ed. John Wiley, 1975.
9. BUBENKO, J. A. Power system simulation. Apostila do C.P.G. em Eng Elétrica, U.F.M.G., 1974.
10. CARPENTIER, J. Contribution a l'étude du dispatching économique. Bul. Soc. Franc. Elect., França, V. 3., August, 1962.
11. CYPSEK, R. J. Computer search for economical operation of a hydro thermal electric system. AIEE Trans., New York, pp. 1260-1267, 1954.
12. DAHLIN, E. B. Theoretical and computational aspects of optimal principles with special application to power system. AIEE Trans., Doctoral dissertation, Pennsylvania, 1964.
13. DIRECTOR, W. S. e ROHRER, R. A. Introduction to system theory. New York, McGraw-Hill, 1972.

14. DOMMEL, H. W. e TINNEY, W. F. Optimal power flow solutions. IEEE Trans., New York, V. PAS-83. pp. 1866-1876, 1968.
15. ELGERD, O. I. Electric energy systems theory. New York, McGraw-Hill, 1971.
16. ELGERD, O. I. e SULIVAN, R. L. Minimally proportioned reactive generation control via automatic tap-changing transformers. Proc. PICA conf. Denver, Colo., 1969.
17. EL-HAWARY, M. E. Operação econômica de sistemas de potência. Apostila do Curso de Pós-graduação em Eng. El. da U.F.S.M., R.S., 1973.
18. HADLEY, G. Nonlinear and dynamic programming. London, Addison-Wesley, 1972.
19. HOHENSTEIN, H. H. H.; KIRKMAYER, L. K.; STAGG, G. W. Direct calculation of transmission loss formula II. IEEE Trans., New York, V. PAS-83. pp. 702-707, 1964.
20. KIRCHMAYER, Leon K. Economic operation of power systems. New York, John Wiley, 1958.
21. KIRCHMAYER, Leon K. Economic control of interconnected systems. New York, John Wiley, 1959.
22. RASHED, A. M. H. e KELLY, D. H. Optimal load flow using lagrangian multipliers and the hessian matrix. IEEE Trans., New York, 1974.
23. SASHDEVA, S.S. Otimização da operação dos sistemas de potência. A postila do C.P.G. em Eng. Elétrica da UFPb, Campina Grande, Pb, 1973.
24. SASSON, A. M. Nonlinear programming solutions for the load flow minimum loss and economic dispatching problems. IEEE Trans. New York, V. PAS-88. pp. 399-409, 1969.
25. SASSON, A. M. Some applications of optimization techniques to power system problems. IEEE Trans. New York, V. PAS-62. pp. 959-972, 1974.
26. SPARROW, C. E. Análise de sistemas de potência II. Apostila do Curso de Pós-graduação em Eng. El. da EFEI., MG, 1974.
27. STAGG, Glenn W. e EL-ABIAD, A. H. Computer methods in power system analysis. Tokio, Kogakusha, 1968.
28. STEINBERG, M. J. e SMITH T. H. The theory of incremental rates. Elect. Eng. U.S.A., 1934.

29. STEVENSON, W. D. Elements of power system analysis. New York, McGraw-Hill, 1962.
30. TINNEY, W. F. e HART, C. E. Power flow solution by Newton's method. IEEE. Trans. New York, V. PAS-86. p. 1449, 1967.
31. TINNEY, W. F. e WALKER, J. W. Direct solutions of sparse network equations by optimally ordered triangular factorization. IEEE Proc. New York, V. 55. pp. 1801-1809, 1967.