

TESE
110

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ



UM MÉTODO NUMÉRICO PARA A SOLUÇÃO DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ENVOLVENDO
FUNÇÕES FORÇANTES DISCRETAS

Prof. Paulo Augusto Bonaldi

1976

JUBÁ

MINAS

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de "Mestre em Ciências" e aprovada em sua forma original pelo orientador e pelo Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação.

COMISSÃO

Prof. Fernando José Costanti

Prof. Márcio Tadeu de Almeida

Prof. Salvador Saad

Prof. Hélio Mokarzel
Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação

ABSTRAT

Firstly, a short study was made on:

- Fourier Series, showing some of its applications in problems of engineering.
- Numerical Methods of Integration.

A method for computers was searched in order to develop, through Fourier Series, functions of which some points are known. For instance, these functions are: oscillograms of electric currents, movement of mechanical parts, statistical numbers of temperature, fluctuations of the market, etc.

This method was applied on the solution of differential equations, of which, the non-linear coefficients and forcing functions are furnished through discrete points.

The efficiency of the method was showed, solving differential equations using digital computation and analogical, too.

This method was applied on studies, such as: seismograph, dynamical absorber and electric-mechanic circuit.

- SUMÁRIO

Fez-se, inicialmente, um estudo sucinto:

- a) das séries de Fourier, mostrando algumas de suas aplicações em problemas de Engenharia;
- b) dos métodos numéricos de integração.

Pesquisou-se um método para computadores, a fim de desenvolver, em série de Fourier, funções das quais se conhecem alguns pontos. Tais funções são, por exemplo: oscilogramas de correntes elétricas, deslocamentos de peças mecânicas, dados estatísticos de temperatura, flutuações do mercado, etc.

Aproveitou-se esse método para solucionar equações diferenciais onde os coeficientes e funções forçantes, não lineares, são dados por pontos discretos.

Mostrou-se a eficiência do método, resolvendo-se equações diferenciais usando-se computação digital e também analógica.

Aplicou-se o método em estudo de sismógrafo, absorvedor dinâmico e circuito elétrico-mecânico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, de alguma forma, tenham contribuído para a realização deste trabalho, em especial aos Profs. Fernando José Costanti e Márcio Tadeu de Almeida, pela orientação e pelo estímulo ao desenvolvimento do mesmo.



À minha esposa.
Aos meus pais.

ÍNDICE

	pag.
1. SÉRIE DE FOURIER	
1.1 - Introdução.....	1. 1
1.2 - Série generalizada de Fourier.....	1. 1
1.3 - Funções periódicas.....	1. 2
1.4 - Expansão em série de Fourier, de Funções Periódicas.	1. 3
1.5 - Funções pares e ímpares.....	1. 5
1.6 - Série de Fourier para funções de meio período.....	1. 7
1.7 - Integral de Fourier.....	1. 9
1.8 - Notação complexa para as séries de Fourier.....	1.12
1.9 - Valor médio quadrático.....	1.12
1.10- Aplicações.....	1.14
2. MÉTODOS NUMÉRICOS - GENERALIDADES	
2.1 - Introdução.....	2. 1
2.2 - Representação polinomial de uma função.....	2. 1
2.3 - Interpolação.....	2. 3
2.3.1 - Fórmula fundamental de Newton.....	2. 3
2.3.2 - Fórmula da interpolação de Lagrange.....	2. 7
2.4 - Integração numérica.....	2. 8
2.4.1 - Regra dos trapézios.....	2. 8
2.4.2 - Regra de símpson.....	2.11
2.5 - Comentários.....	2.14
3. UM MÉTODO NUMÉRICO PARA DESENVOLVER FUNÇÕES, COM DADOS DIS CRETOS EM SÉRIE	
3.1 - Introdução.....	3. 1
3.2.1 - Cálculo de a_n	3. 3
3.2.2 - Cálculo de b_n	3. 5

3.3 - Determinação dos pesos para o cálculo de a_n e b_n ...	3. 6
3.4 - Determinação dos coeficientes a_n e b_n	3.15
3.5 - Aplicações.....	3.22
4. APLICAÇÕES	
4.1 - Introdução.....	4. 1
4.2 - Aplicação a instrumento sísmico.....	4. 1
4.3 - Aplicação a neutralizador de vibrações.....	4. 6
4.4 - Aplicação a circuitos eletro-mecânicos.....	4.14
5. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES.....	5. 1
APÊNDICE - Referências Bibliográficas.....	A. 1

28
22
54
64

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig.	Pág.
1. 1 - Função periódica.....	1. 2
1. 2 - Fenômeno de Gibbs.....	1. 5
1. 3 - Função par.....	1. 6
1. 4 - Função ímpar.....	1. 6
1. 5 - A extensão par de $f(x)$	1. 8
1. 6 - A extensão ímpar de $f(x)$	1. 9
1. 7 - Forma de onda.....	1.15
1. 8 - Representação gráfica de i	1.17
1. 9 - Sistema com excitação periódica.....	1.18
1.10 - Circuito com excitação periódica.....	1.20
1.11 - Sistema com força forçante periódica.....	1.23
2. 1 - Integração aproximada - regra dos trapézios.....	2. 9
2. 2 - Integração aproximada - regra de Simpson.....	2.12
3. 1 - Função $g(t)$, definida em $[0,L]$ - par.....	3. 2
3. 2 - Função $g(t)$, definida em $[0,L]$ - ímpar.....	3. 3
3. 3 - Função $f(t)$, definida num período $2L$	3. 4
4. 1 - Modelo matemático de um aparelho sísmico.....	4. 2
4. 2 - Vibrógrafo.....	4. 3
4. 3 - Resposta de excitação de $F(t)$	4. 5
4. 4 - Modelo matemático de um absorvedor dinâmico.....	4. 7
4. 5 - Absorvedor dinâmico.....	4. 7
4. 6 - Resposta de excitação de $F(t)$ para $m=10$ [kg].....	4.10
4. 7 - Resposta de excitação de $F(t)$ para $m=5$ [kg].....	4.11
4. 8 - Resposta de excitação de $F(t)$ para $m=3$ [kg].....	4.12
4. 9 - Sistema Eletro-mecânico.....	4.14
4.10 - Solução analógica da equação diferencial.....	4.18

LISTA DE SÍMBOLOS

	Unidades
A, a_i	- Constantes
A, a_n	- Coeficientes
B	- Coeficiente
C, C_m	- Constantes
C	- Capacitância [farad]
c	- Coeficiente de amortecimento [kg/s]
E	- Tensão [volt]
f_a, f_m	- Força de amortecimento, força de mola [N]
$f(x_0^+), f(x_0^-)$	- limite à direita e à esquerda de x_0
g_m	- Conjunto de funções ortogonais
g_i	- Função par
h_i	- Função ímpar
I, i	- Corrente [A]
j	- Unidade imaginária
k, k_1, k_2	- Constantes de mola [N/m]
L	- Função Lagrangeana [J]
L	- Indutância [H]
L, ℓ	- Períodos
M, m	- Massa dos corpos [kg]
P	- Período
p	- Pressão [N/m ²]
q	- Carga [C]
R	- Resistência Elétrica [Ω]
r	- Razão de frequência
S	- Constante
T	- Período
T, T*, t*, t	- Tempo, ângulo [s, rad]
V	- Tensão [V]

x, x_p, x_1, x_2	- Deslocamentos	[m]
y	- Ordenada	
δ_{ST}	- Deflexão estática	[m]
ψ	- Ângulo de fase	[rd]
w	- Frequência	[rd/S]
w_n	- Frequência natural	[rd/S]
ξ	- Fator de amortecimento	

CAPÍTULO I

SÉRIE DE FOURIER

1.1 - INTRODUÇÃO

As funções periódicas ocorrem com frequência nos problemas de engenharia, e a representação de tais funções em termos de funções periódicas simples, como, por exemplo, em seno e cosseno, constitui um assunto de significativa importância prática, que conduz às séries de Fourier. Qualquer função periódica arbitrária, com pequenas restrições, pode ser expandida em série de Fourier de componentes senoidais, e as funções não periódicas transitórias podem ser expressas como integrais de Fourier. Desde 1822, quando Jean Baptiste Fourier resolveu, pela primeira vez, o problema do fluxo de calor nos sólidos, por intermédio das séries que hoje têm o seu nome, este assunto cresceu tanto, que agora constitui todo um capítulo da física e da matemática aplicada.

1.2 - SÉRIE GENERALIZADA DE FOURIER

Uma função $f(x)$, arbitrária, pode ser expandida numa série de funções de um conjunto de funções ortogonais $g_m(x)$,

$$f(x) = \sum_{m=0} C_m g_m(x) = C_0 g_0(x) + C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) + \dots + C_m g_m(x), \quad (1.1)$$

desde que $f(x)$ satisfaça às condições de Dirichlet, isto é: a função no intervalo de definição deve apresentar as seguintes propriedades:

C_1 seja contínua ou tenha um número finito de discontinuidades.

C_2 tenha um número finito de máximos e mínimos.

C_3 que a integral $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ seja finita.

Se a série apresentada na eq.(1.1) for convergente e sua soma igual a $f(x)$, diremos que ela é uma série generalizada de Fourier de $f(x)$, e seus coeficientes C_m constituem as constantes de Fourier de $f(x)$ em relação ao conjunto de funções ortogonais considerado.

Nosso problema é a determinação dessas constantes C_m que somente poderão ser achadas quando as funções $g_m(x)$ formarem um conjunto ortogonal nos respectivos intervalos.

1.3 - FUNÇÕES PERIÓDICAS

Uma função $f(\theta)$ é dita periódica quando ela é definida para $\forall \theta \in \mathbb{R}$ e $\exists T \in \mathbb{R}_+$, tal que:

$$f(\theta+T)=f(\theta), \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Ao número T chamamos de período de $f(\theta)$. O gráfico de tal função se obtém pela repetição periódica de seu gráfico em qualquer intervalo de comprimento T , fig.(1.1).

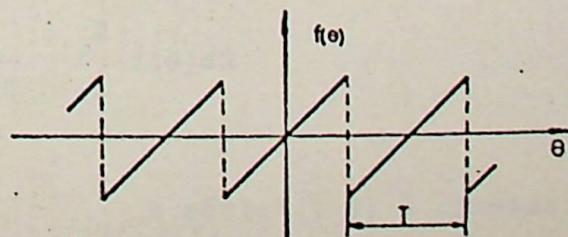


Fig.(1.1) - Função periódica

Da eq.(1.2) decorre que $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$f(\theta+nT) = f(\theta) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ,$$

onde nT , múltiplo de T , é também um período da função $f(\theta)$. Ao menor período positivo T de uma função chamamos período primitivo .

Exs.: Os períodos primitivos das funções $y=\cos\theta$ e $y=\cos 2\theta$ são, respectivamente, 2π e π .

1.4 - EXPANSÃO, EM SÉRIE DE FOURIER, DE FUNÇÕES PERIÓDICAS

Qualquer função $f(\theta)$, com período 2π , que satisfaça às condições de Dirichlet, pode ser expandida numa série trigonométrica da forma

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (1.3)$$

onde os coeficientes a_n e b_n são dados por:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cdot \cos n\theta d\theta \quad n=1,2,3,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (1.4)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

A série (1.3) é chamada série trigonométrica de Fourier e se deve ao fato de que o conjunto de função $g_m(\theta)$: $1, \sin\theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \cos 2\theta, \dots$ forma um conjunto ortogonal sobre o in

intervalo $[-\pi, \pi]$. Seus coeficientes a_n e b_n são chamados coeficientes de Fourier de $f(x)$, enquanto que as eqs. (1.4) constituem as chamadas fórmulas de Euler.

Para série de período 2ℓ , sendo 2ℓ uma distância, escrevemos $\theta = \frac{\pi x}{\ell}$, resultando

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad (1.5)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cdot \frac{\cos n\pi x}{\ell} dx \quad n=1,2,3,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cdot \frac{\operatorname{senn}\pi x}{\ell} dx \quad (1.6)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx$$

Se a variável é o tempo t , temos $\theta = \frac{2\pi t}{T} = \omega t$, onde T é o período e ω a frequência angular; então das eqs. (1.5) e (1.6) resulta:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{senn}\omega t) \quad (1.7)$$

onde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_C^{C+T} f(t) \cos n\omega t dt \quad n=1,2,3,\dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_C^{C+T} f(t) \cdot \operatorname{senn}\omega t dt \quad (1.8)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_C^{C+T} f(t) dt$$

onde C é qualquer número real. No caso especial, $C=-l$ reproduz as eqs. (1.6).

Em todos os casos, a série de Fourier, nos pontos de descontinuidades, converge para a média aritmética entre os limites laterais da função nestes pontos, isto é:

Sendo x_0 um ponto de descontinuidade da função $f(x)$, então a série de Fourier dará para este ponto um valor igual a

$$f(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)] \quad (1.9)$$

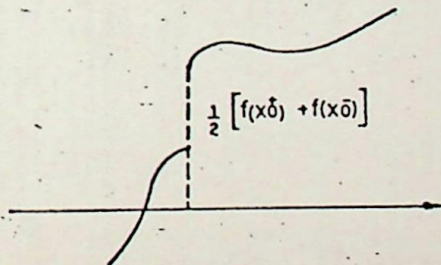


Fig.(1.2) - Fenômeno de Gibbs

Ao fato dado pela eq.(1.9) dá-se o nome de fenômeno de Gibbs, fig.(1.2).

1.5 - FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Uma função $f(\theta)$ se diz par, se

$f(-\theta) = f(\theta)$, para $\forall \theta$, e o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y , Fig.(1.3).

Uma função $f(\theta)$ se diz ímpar, se

$f(-\theta) = -f(\theta)$, para $\forall \theta$, se o seu gráfico é simétrico em relação à origem dos eixos coordenados, Fig.(1.4).

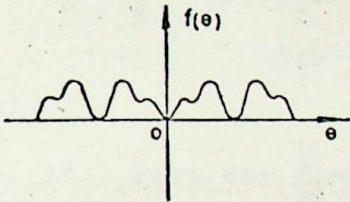


Fig.(1.3) - Função par

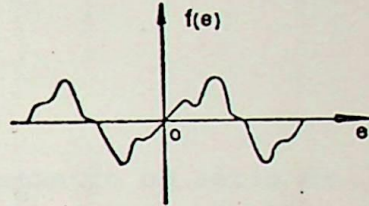


Fig.(1.4) - Função ímpar

Se $f(\theta)$ é par, então

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta \quad (1.10)$$

$g(\theta)$ é ímpar, então

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\theta = 0 \quad (1.11)$$

Por outro lado,

função par . função par = função par

função par . função ímpar = função ímpar

função ímpar . função ímpar = função par

Assim, das eqs. (1.4), (1.10) e (1.11) resulta:

1 Para $f(\theta)$ par, $f(\theta) \cdot \cos n\theta$ será par. Então teremos:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (1.12)$$

$$b_n = 0$$

2 Para $f(\theta)$ ímpar, $f(\theta)$ ímpar, $f(\theta) \cdot \text{senn}\theta$ será ímpar. Então teremos:

$$a_n = 0$$

(1.13)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cdot \text{senn}\theta d\theta$$

conclusão:

1ª Para uma função $f(\theta)$ par, a expansão em série de Fourier apresenta somente termos em cosseno, isto é:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta \quad (1.14)$$

2ª Para uma função $f(\theta)$ ímpar, a expansão em série de Fourier apresenta somente termos em seno, isto é:

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{senn}\theta \quad (1.15)$$

Notemos que estas propriedades de simetria nos permitem predizer quais os termos que deverão desaparecer na expansão em série de Fourier de $f(\theta)$. Além disso, as expressões para o cálculo dos coeficientes desses termos são simplificados: eq.(1.12) e (1.13).

1.6 - SÉRIE DE FOURIER PARA FUNÇÕES DE MEIO PERÍODO

Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $[0, T/2]$ e nula, fora do mesmo. Deste modo, podemos arbitrar uma função no intervalo $[-T/2, 0]$, de modo a considerar a função dada como sendo par ou ímpar, obtendo, assim, séries em cossenos ou senos, respectivamente.

Nas aplicações de teoria das séries de Fourier precisamos muitas vezes de obter um desenvolvimento em série para uma função $f(x)$ contínua por partes, definida apenas no intervalo $[0, T/2]$. Uma maneira de o conseguir é estender $f(x)$ ao intervalo $[-T/2, T/2]$.

É importante assinalar que o intervalo de comprimento $T/2$ pode ser considerado como um semi-período, e uma função periódica pode ser definida de modo a coincidir com a função dada no intervalo; e, embora dê valores também fora do intervalo, não há problema algum, pois a função original não é definida. Vejamos os casos.

1º Caso: A função $f(x)$ é considerada par, fig.(1.5).

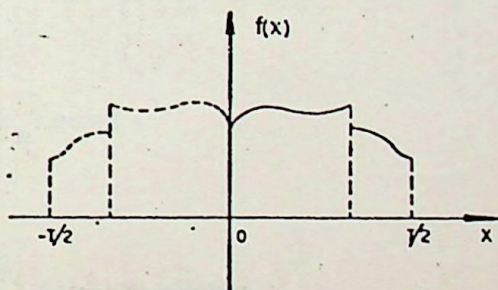


Fig.(1.5) - A extensão par de $f(x)$

Temos: período = T (qualquer), $w = \frac{2\pi}{T}$. De acordo com as condições de simetria, resulta:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nwx \quad (1.16)$$

onde

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cdot \cos nwx dx \quad (1.17)$$

2º Caso: A função $f(x)$ é considerada ímpar, fig.(1.6).

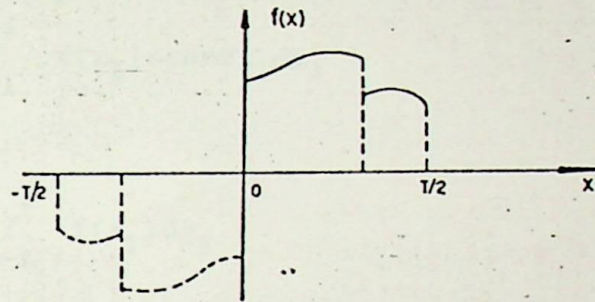


Fig.(1.6) - A extensão ímpar de $f(x)$

Período = T

De acordo com as condições de simetria, resulta:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} wx \quad (1.18)$$

onde

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \text{sen} nwx dx \quad (1.19)$$

1.7 - INTEGRAL DE FOURIER

A integral de Fourier é uma expansão em série de Fourier quando o intervalo tende para o infinito, sendo útil em problemas onde a série de Fourier converge lentamente.

Seja $f(x)$ uma função de uma variável real x no intervalo $[-\ell, \ell]$, satisfazendo às condições de Dirichlet, de tal forma que pode ser desenvolvida em uma série de Fourier.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad (1.20)$$

sendo

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x_1) \cos n\pi x_1 dx_1$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x_1) \operatorname{senn}\pi x_1 dx_1 \quad (1.21)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x_1) dx_1$$

Substituindo as eqs. (1.21) na eq.(1.20), resulta:

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x_1) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{\ell} (x_1 - x) \right] dx_1$$

A expressão entre colchetes corresponde à soma de $-\infty$ a $+\infty$. Então podemos escrever

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x_1) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\ell} \cos \frac{n\pi}{\ell} (x_1 - x) dx_1 \quad (1.22)$$

Notemos que, quando $\ell \rightarrow \infty$, $\frac{\pi}{\ell} \rightarrow 0$.

Logo, para

$$\alpha = \frac{n\pi}{\ell}, \quad \Delta\alpha = \frac{\pi}{\ell} \quad e$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\ell} \cos \frac{n\pi}{\ell} (x_1 - x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \cos \alpha (x_1 - x) \Delta\alpha$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \cos \alpha (x_1 - x) d\alpha$$



Portanto, a eq.(1.22) será:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) dx_1 \int_0^{\infty} \cos \alpha(x_1 - x) d\alpha \quad (1.23)$$

A eq.(1.23) é a integral de Fourier de $f(x)$ e pode se apresentar de uma outra forma: eq.(1.24).

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cdot \cos \alpha x + B(\alpha) \cdot \sin \alpha x] d\alpha \quad (1.24)$$

onde

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \cos \alpha x dx \quad (1.25)$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx$$

Devemos salientar que as eqs.(1.23) e (1.24) se verificam se x for ponto de continuidade. Caso x seja ponto de descontinuidade, devemos trocar $f(x)$ por $\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$.

Para $f(x)$ par, a eq.(1.24) fica

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(x_1) \cos \alpha x_1 dx_1 \quad (1.26)$$

Para $f(x)$ ímpar, a eq.(1.24) será

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(x_1) \sin \alpha x_1 dx_1 \quad (1.27)$$

1.8 - NOTAÇÃO EM TERMOS COMPLEXOS PARA AS SÉRIES DE FOURIER

Usando as fórmulas de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\text{sen}\theta, \quad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\text{sen}\theta \quad (1.28)$$

onde $j = \sqrt{-1}$, podemos escrever a série de Fourier para $f(x)$ como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\pi x/\ell} \quad (1.29)$$

onde

$$C_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cdot e^{-jn\pi x/\ell} dx \quad (1.30)$$

Na eq.(1.29) supõe-se que se satisfazem as condições de Dirichlet e, mais ainda, que $f(x)$ é contínua em x . No caso de haver descontinuidade em x , o primeiro membro da eq.(1.29) de verá ser trocado por $\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$.

1.9 - VALOR MÉDIO QUADRÁTICO

O valor médio quadrático de uma função $f(t)$ num intervalo $[a, b]$ é definido como:

$$f(t) \Big|_{\text{vmg}} = \sqrt{\frac{\int_a^b f^2(t) dt}{b-a}} \quad (1.31)$$

e pode ser expresso, num período, em termos dos coeficientes da expansão em série de Fourier de $f(t)$.

Seja $f(t)$ uma função de período $2p$. De acordo com a eq. (1.15), podemos escrever:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{p} + b_n \sin \frac{n\pi t}{p} \right)$$

ou

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi t}{p} + \dots + a_n \cos \frac{n\pi t}{p} + \dots + b_1 \sin \frac{\pi t}{p} + \dots + b_n \sin \frac{n\pi t}{p} + \dots$$

Logo, $f^2(t)$ consistirá exclusivamente de termos da forma

$$\frac{a_0^2}{4}; \quad a_n^2 \cos^2 \frac{n\pi t}{p}; \quad b_n^2 \sin^2 \frac{n\pi t}{p}$$

e também de termos cruzados da forma

$$a_0 \cdot a_n \cos \frac{n\pi t}{p}; \quad a_0 \cdot b_n \sin \frac{n\pi t}{p}$$

$$2 a_m a_n \cos \frac{m\pi t}{p} \cdot \cos \frac{n\pi t}{p}; \quad 2 a_m b_n \cos \frac{m\pi t}{p} \cdot \sin \frac{n\pi t}{p};$$

$$2 b_m b_n \sin \frac{m\pi t}{p} \cdot \sin \frac{n\pi t}{p}$$

Lembrando que a integral de todo termo cruzado, tomado num período da função ($-P \leq t \leq P$), é zero, e que, para os termos quadrados, se tem:

$$\int_{-P}^P \frac{a_0^2}{4} dt = \frac{a_0^2}{2} P; \quad \int_{-P}^P a_n^2 \cos^2 \frac{n\pi t}{p} dt = a_n^2 P; \quad \int_{-P}^P b_n^2 \sin^2 \frac{n\pi t}{p} dt = b_n^2 P$$

Teremos, dividindo cada termo pelo período $2p$ o valor médio quadrático requerido.

$$f(t) \Big|_{\text{vmq}} = \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)} \quad (1.32)$$

Uma vez que os coeficientes na forma exponencial complexa da série de Fourier de $f(t)$ são relacionados com os da forma trigonométrica pelas eqs.

$$C_0 = \frac{a_0}{2}; \quad C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; \quad C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \bar{C}_n,$$

a equação. (1.32) pode ser escrita

$$f(t) \Big|_{\text{vmq}} = \sqrt{C_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \bar{C}_n} \quad (1.33)$$

Em particular, se $i=f(t)$ for uma corrente elétrica passando por uma resistência R , a potência média dissipada será:

$$i^2_{\text{vmq}} R = \left[\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right] R = (C_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \bar{C}_n) R \quad (1.34)$$

1.10 - APLICAÇÕES

As aplicações seguintes têm como finalidade dar ao leitor uma panorâmica da utilização das séries de Fourier em alguns problemas de engenharia. A resolução de tais problemas envolve equações diferenciais que necessitam de métodos numéricos de integra

ção para as suas respectivas soluções. Estes métodos serão estudados no capítulo seguinte, e são de grande utilidade na resolução de problemas que envolvam dados discretos, os quais constituem o objetivo deste trabalho.

Não desenvolveremos um estudo da teoria para resolver os problemas, uma vez que nos propomos, tão somente, usar um método numérico para resolvê-los. Portanto, nos limitaremos ao uso de fórmulas sem nos preocuparmos com a maneira de como elas foram obtidas.

A.1 Escrever os 4 primeiros termos da série de Fourier que representará a forma de onda mostrada na fig.(1.7).



Fig.(1.7) - Forma de onda

$$i = I_m \text{ sen } \alpha \quad \text{entre } \alpha(\text{ou } \omega t) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha(\text{ou } \omega t) = \pi$$

$$i = 0 \quad \text{entre } \alpha(\text{ou } \omega t) = \pi \quad \text{e} \quad \alpha(\text{ou } \omega t) = 2\pi$$

Solução:

Temos $T = 2\pi$ (período). Das fórmulas (1.8) vem

$$* a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} I_m \text{ sen } \alpha \cdot \text{cos } n \alpha \, d\alpha + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot \text{cos } n \alpha \, d\alpha \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I_m \text{ sen } \alpha \text{cos } n \alpha \, d\alpha \quad (1.35)$$

$$a_n = \frac{I_m}{\Pi} \left[-\frac{\cos(1-n)\alpha}{2(1-n)} - \frac{\cos(1+n)\alpha}{2(1+n)} \right]_0^\Pi, \quad n \neq 1$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{I_m}{\Pi} \left(\frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n} \right) & \text{para } n \text{ par} \\ 0 & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$* b_n = \frac{1}{\Pi} \left[\int_0^\Pi I_m \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}n\alpha d\alpha + \int_0^{2\Pi} 0 \cdot \text{sen}n\alpha d\alpha \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\Pi} \int_0^\Pi I_m \text{sen}\alpha \text{sen}n\alpha d\alpha \quad (1.36)$$

$$b_n = \frac{I_m}{\Pi} \left[\frac{\text{sen}(1-n)\alpha}{2(1-n)} - \frac{\text{sen}(1+n)\alpha}{2(1+n)} \right]_0^\Pi = 0 \quad n \neq 0$$

$$* \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\Pi} \left[\int_0^\Pi I_m \text{sen}\alpha d\alpha + \int_0^{2\Pi} 0 d\alpha \right]$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\Pi} \left[-\cos\alpha \right]_0^\Pi = I_m \Pi$$

Para $n=1$ nas eqs. (1.35) e (1.36) obtém-se, respectivamente

$$* a_1 = \frac{1}{\Pi} \int_0^\Pi I_m \text{sen}\alpha \cos\alpha d\alpha$$

$$a_1 = \frac{I_m}{2\Pi} \left[-\cos 2\alpha \right]_0^\Pi = 0$$

$$* b_1 = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} I_m \text{sen}^2 \alpha d\alpha$$

$$b_1 = \frac{I_m}{2\Pi} \left[\alpha - \frac{\text{sen}2\alpha}{2} \right]_0^{\Pi} = \frac{I_m}{2\Pi} \cdot \Pi = \frac{I_m}{2}$$

Portanto a série será:

$$i = \frac{I_m}{2} + \frac{I_m}{2} \text{sen} \alpha - \frac{2I_m}{3\Pi} \cos 2\alpha - \frac{2I_m}{15\Pi} \cos 4\alpha - \dots \quad (1.37)$$

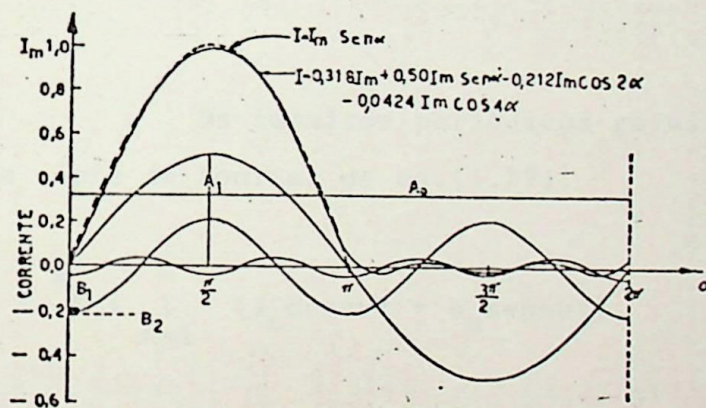


Fig.(1.8) - Representação gráfica de i

Se os quatro termos acima forem combinados graficamente como mostra a fig.(1.8), a onda resultante aproximará-se da forma de onda original mostrada na fig.(1.7), com grande exatidão. A inclusão de mais termos na série de Fourier, eq.(1.37), logicamente aumentará a correspondência entre a onda resultante da fig.(1.8) e a forma de onda original.

A.2 Uma excitação periódica, como mostra a fig.(1.9) (b), está aplicada a uma mola amortecedora. Determine o impulso resultante da massa se $k=40 \text{ lb/in}$ $m=10 \text{ lb-sec}^2/\text{in}$ e $c=20 \text{ lb-sec/in}$.

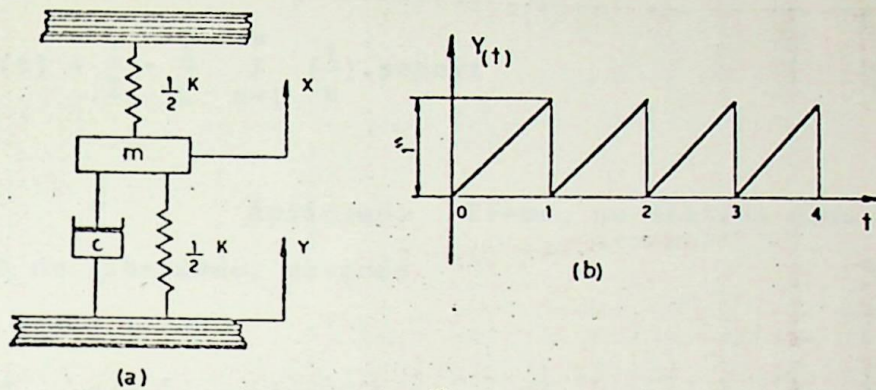


Fig.(1.9) - Sistema com excitação periódica

Solução:

Os impulsos periódicos gerais podem ser representados pela série de Fourier da eq.(1.17).

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Para este impulso periódico dente de serra, temos:

$$F(t) = y(t) = t ; \quad T=1$$

Das eqs.(1.8)vem:

$$a_n = 2 \int_0^1 t \cdot \cos n\omega t dt = 0$$

$$b_n = 2 \int_0^1 t \sin n\omega t dt = -\frac{1}{n\pi}$$

$$\frac{a_0}{2} = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

Logo, a expansão de Fourier de $y(t)$ será

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \text{sennwt}$$

Aplicando $\Sigma F=ma$, no sistema dado para os dois graus de liberdade, obtemos

$$m\ddot{x} = -C(\dot{x}-\dot{y}) - k(x-y)$$

ou

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = C\dot{y} + ky \quad (1.38)$$

onde

$$\dot{y} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w}{\pi} \text{cosnwt} \quad (1.39)$$

De (1.39) e (1.38) resulta

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = \frac{k}{2} - \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{\pi n} \text{sennwt} + \frac{Cw}{\pi} \text{cosnwt} \right] \quad (1.40)$$

Porém

$$\frac{k}{\pi n} \text{sennwt} + \frac{Cw}{\pi} \text{cosnwt} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k^2}{h^2} + C^2 w^2} \text{sen}(nwt + \varphi)$$

onde

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{Cw}{k} \right)$$

E, desde que $w_n^2 = \frac{k}{m}$, $\xi = 2mw_n$, a eq.(1.40) fica

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = \frac{k}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{m} \sqrt{1 + (2rn\xi)^2} \text{sen}(nwt + \varphi) \quad (1.41)$$

Esta é a força imprimida; e a resposta no estado permanente, segundo as mais recentes discussões, é:

$$x_p = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sqrt{\frac{1+(2rn\xi)^2}{(1-n^2r^2)^2+(2rn)^2}} \text{sen}(n\omega t - \psi) \quad (1.42)$$

onde $\psi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{2nr}{1-n^2r^2} - \phi \right)$

Particularmente, para $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = 2 \text{ rad/seg}$, $r = \frac{\omega}{\omega_n} = 0,5$,

$$\xi = \frac{C}{2m\omega_n} = \frac{20}{2 \times 10 \times 2} = 0,5, \text{ teremos:}$$

$$x_p = 0,5 - 0,396 \text{ sen}(6,24t - 7,1^\circ) - 0,225 \text{ sen}(12,48t - 26,5^\circ) - \\ - 0,096 \text{ sen}(18,9t - 74,3^\circ) \dots$$

A.3 Achar a corrente permanente produzida no circuito mostrado na fig.(1.10) (a) pela tensão mostrada na fig.(1.10)(b).

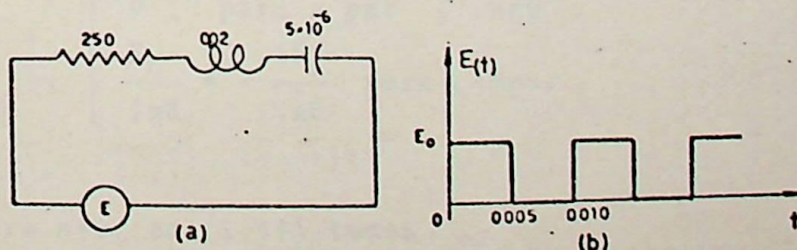


Fig.(1.10) - Circuito com tensão periódica

Solução:

Inicialmente devemos obter a expansão em série de Fourier da tensão. Desde que podemos usar a idéia da impedância complexa, será conveniente usar a forma exponencial complexa da série de Fourier.

Da eq. (1.29) resulta

$$E(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{-in\pi t/0,005} \quad (1.43)$$

onde

$$C_n = \frac{1}{0,01} \int_0^{0,005} E_o e^{-in\pi t/0,005} dt \quad (1.44)$$

$$= 100 E_o \left[\frac{e^{-in\pi t/0,005}}{-in\pi/0,005} \right]_0^{0,005}$$

$$= 100 E_o \left[-\frac{e^{-in\pi}}{in\pi/0,005} + \frac{1}{in\pi/0,005} \right]$$

$$= \frac{E_o}{2} \left(\frac{1-e^{-in\pi}}{in\pi} \right)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{para } n \text{ par}, \quad n \neq 0 \\ \frac{E_o}{in\pi} = -\frac{iE_o}{n\pi} & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

para $n=0$ em (1.44) temos

$$C_o = \frac{1}{0,01} \int_0^{0,005} E_o dt = \frac{E_o}{2}$$

Logo, a eq.(1.43) será:

$$E(t) = E_0 \left(\dots \frac{ie^{-600i\pi t}}{3\pi} + \frac{ie^{200i\pi t}}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{ie^{-200i\pi t}}{\pi} - \frac{ie^{-600i\pi t}}{3\pi} - \dots \right)$$

Sabe-se que a corrente permanente produzida pela tensão da forma $Ae^{i\omega t}$ pode ser obtida simplesmente pela divisão da tensão pela impedância complexa

$$Z(\omega) = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Usando os dados do presente problema, temos:

$$X(\omega) = 250 + i \left(0,02\omega - \frac{10^6}{2\omega} \right)$$

ou, desde que

$$\omega = 200n\pi, \quad n \text{ ímpar}$$

teremos

$$Z(\omega) = Z_n = 250 + i \left(4n\pi - \frac{2.500}{n\pi} \right), \quad n \text{ ímpar.}$$

Portanto, dividindo cada termo da expansão da tensão $E(t)$ pelo valor de Z da frequência correspondente, encontramos:

$$I(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_n e^{200i\pi t}, \quad n \text{ ímpar}$$

Se desejarmos a forma trigonométrica real desta expansão, esta será:

$$I(t) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos 200\pi t + a_2 \cos 600\pi t + \dots + b_1 \sin 200\pi t + b_2 \sin 600\pi t + \dots$$

onde

$$a_n = D_n + D_{-n} = -iE_0 \left[\frac{1}{250n\pi + i(4\pi^2 n^2 - 2.500)} + \frac{1}{-250n\pi + i(4\pi^2 n^2 - 2.500)} \right]$$

$$= - \frac{2E_0 (4\pi^2 n^2 - 2.500)}{(250n\pi)^2 + (4\pi^2 n^2 - 2.500)}, \quad n \text{ ímpar}$$

$$b_n = i(D_n - D_{-n}) = E_0 \left[\frac{1}{250n\pi + i(4\pi^2 n^2 - 2.500)} - \frac{1}{-250n\pi + i(4\pi^2 n^2 - 2.500)} \right]$$

$$= \frac{500n\pi E_0}{(250n\pi)^2 + (4\pi^2 n^2 - 2.500)}, \quad n \text{ ímpar}$$

A.3 Determinar o estado permanente do sistema de vibrações forçada da fig.(1.11)(a) se a força aplicada é a mostrada na fig.(1.11)(b).

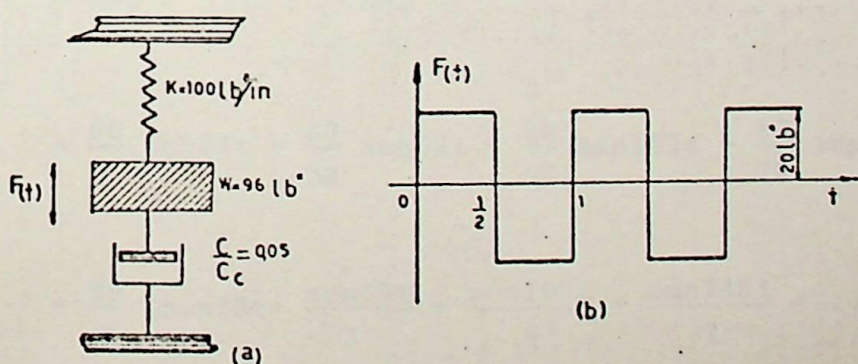


Fig.(1.11) - Sistema com força forçante periódica

Solução:

Inicialmente devemos obter a expansão da série de Fourier da força de excitação $F(t)$, que é uma função ímpar. Portanto, ela só terá termos em seno.

Da eq.(1.19) temos:

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \text{senn}\omega t dt$$

Donde:

$$b_n = \frac{4}{2 \cdot \frac{1}{2}} \int_0^{1/2} 20 \text{sen} \frac{2\pi n t}{2 \cdot \frac{1}{2}} dt = 80 \left[\frac{-\cos 2n\pi t}{2n\pi} \right]_0^{1/2} =$$

$$= \frac{40}{n} (1 - \cos n) = \begin{matrix} 0, & n & \text{par} \\ \frac{80}{n\pi}, & n & \text{ímpar} \end{matrix}$$

e a expansão da série de Fourier de $F(t)$ é obtida através da fórmula (1.18)

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{senn}\omega t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} 2n\pi t \\ &= \frac{80}{\pi} \text{sen} 2\pi t + \frac{80}{3\pi} \text{sen} 6\pi t + \frac{80}{5\pi} \text{sen} 10\pi t + \frac{80}{7\pi} \text{sen} 14\pi t \dots \\ &= \frac{80}{\pi} \left(\text{sen} 2\pi t + \frac{\text{sen} 6\pi t}{3} + \frac{\text{sen} 10\pi t}{5} + \frac{\text{sen} 14\pi t}{7} + \dots \right) \end{aligned}$$

Estando interessados somente na situação de estado permanente, precisamos de encontrar a integral particular correspondente a $F(t)$. Sendo a equação linear, isto pode ser feito usando as idéias da teoria de vibrações.

Portanto, é necessário aplicar a razão adequada de módulo e a diferença de fase para cada componente da força, e somar os resultados. Antes disso, devemos determinar as deflexões estáticas que seriam produzidas no sistema por forças de excitação, tendo os módulos dos vários termos de $F(t)$. Estes são dados por:

$$\delta_{ST} = \frac{(80/n\pi)1b}{10 \text{ lb/in}} = \frac{4}{5n\pi} \text{ in} \quad n \rightarrow \text{ímpar}$$

A frequência natural não amortecida do sistema é dada por:

$$w_n = \sqrt{\frac{kg}{w}} = \sqrt{\frac{100 \times 384}{96}} = 20 \text{ rd/seg}$$

Termos	δ_{ST}	$\frac{w}{w_n}$	$M = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{C}{C_c} \cdot \frac{w}{w_n}\right)^2}}$	$\alpha = \text{tg}^{-1} \frac{2 \frac{C}{C_c} \cdot \frac{w}{w_n}}{1 - \frac{w^2}{w_n^2}}$	Termo estável $= \delta_{ST} M \text{sen}(wt - \alpha)$
1	$4/5\pi$	$2\pi/20$	1,11	2°	$0,28 \text{sen}(2\pi t - 2^\circ)$
2	$4/15\pi$	$6\pi/20$	6,83	40°	$0,58 \text{sen}(6\pi t - 40^\circ)$
3	$4/25\pi$	$10\pi/20$	0,68	174°	$0,03 \text{sen}(10\pi t - 174^\circ)$
4	$4/35\pi$	$14\pi/20$	0,26	177°	$0,01 \text{sen}(14\pi t - 177^\circ)$
.
.
.

Este exemplo ilustra um conceito muito importante que muitas vezes constitui uma característica não muito óbvia

em vibrações forçadas. Se a força diretriz não é uma função somente de senos ou de cossenos, sua função de Fourier conterá termos de frequências acima da fundamental.

Se a frequência de um desses termos está próxima da natural ou ressonante, sendo a resistência viscosa no sistema pequeno, a razão de módulo será muito grande e a harmônica correspondente terá grande influência na resposta do sistema. Se isto acontecer, a resposta pode parecer muito mais alta do que aquela que a força pode produzir.

CAPÍTULO II

MÉTODOS NUMÉRICOS - GENERALIZADOS

2.1 - INTRODUÇÃO

Devido às dificuldades no manuseio de certas funções que aparecem em matemática aplicada, torna-se necessária sua representação aproximada através de funções mais simples.

Este capítulo trata da determinação numérica do valor numérico de integrais do tipo:

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (2.1)$$

Assim, a substituição da função dada $f(x)$ por outra mais simples será feita quando:

- a) for difícil ou impossível obter a primitiva de $f(x)$;
- b) $f(x)$ for dada em forma de tabela.

Todos os métodos numéricos de obtenção do valor de I , da eq. (2.1), se baseiam na aproximação de $f(x)$ por um polinômio e na integração deste. Daí a necessidade de se fazer um estudo sobre aproximações através de polinômios.

2.2 - REPRESENTAÇÃO POLINOMIAL DE UMA FUNÇÃO

Consideremos a função $y=f(x)$ dada na tabela:

$$\begin{array}{rcl}
 x_0 & + & y_0 = f(x_0) \\
 x_1 & + & y_1 = f(x_1) \\
 x_2 & + & y_2 = f(x_2) \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_n & + & y_n = f(x_n)
 \end{array} \quad (2.2)$$

a qual pode ter sido obtida através da expressão analítica de $f(x)$ ou de determinações experimentais.

De um modo geral a função $y=f(x)$ pode ser obtida aproximadamente pelo somatório:

$$f(x) = \varphi(x) = \sum_{i=0}^p a_i \cdot u_i(x) \quad (2.3)$$

onde a_i são constantes e u_i podem ser funções das mais diferentes, tais como polinomiais, exponenciais ou trigonométricas.

Os coeficientes a_i , no caso de os dados da tabela (2.2) serem obtidos experimentalmente, são determinados de modo que $\varphi(x)$ represente melhor $f(x)$.

Por ser de fácil manuseio e também permitir, através do teorema de Taylor, estabelecer com relativa facilidade a expressão do erro envolvido na aproximação de (2.3), empregam-se, entre as funções $u_i(x)$, as funções polinomiais. Daí a eq.(2.3) tomar a seguinte forma:

$$f(x) = \varphi(x) = \sum_{i=0}^p a_i x_i \quad (2.4)$$

OBSERVAÇÕES:

1. Se uma função \bar{e} contínua em um dado intervalo, esta pode ser representada, dentro deste intervalo e com precisão desejada, através do somatório (2.4) compreendendo um número adequado de termos (Teorema de Weierstrass).
2. Se uma função $f(x)$ tem caráter oscilatório, torna-se mais adequada a sua representação através de funções trigonométricas.

$$f(x) \approx \phi(x) = \sum_{i=0}^p a_i \sin ip + \sum_{i=0}^p b_i \cos ip \quad (2.5)$$

2.3 - INTERPOLAÇÃO

Suponhamos conhecida a Tabela (2.2). A determinação de $f(x)$, correspondente a um dado valor x não tabelado, compreendido entre os extremos da tabela, constitui a interpolação.

2.3.1 - Fórmula fundamental de Newton

Vejamos inicialmente o que vem a ser diferença dividida de $y=f(x)$. Por definição, a primeira diferença dividida de $f(x)$, relativa a x_0 e x_1 , é:

$$f [x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

Analogamente, as diferenças de ordem superior são definidas do modo:

$$f [x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

$$f [x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3}$$

..

$$f [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_0, x_1, x_2, x_3] - f[x_1, x_2, x_3, x_4]}{x_0 - x_4}$$

⋮

⋮

$$f [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

Desenvolvendo as expressões das diferenças divididas, resulta:

$$f [x_0, x_1, x_2, \dots, x_p] =$$

$$= \sum_{i=0}^p \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_p)} \quad (2.6)$$

Sabemos, por definição, que:

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Donde:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x, x_0] \quad (2.7)$$

sendo:

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

resulta:

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x, x_0, x_1] \quad (2.8)$$

Substituindo (2.7) em (2.8), teremos:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x, x_0, x_1]$$

Generalizando este procedimento, através do emprego sucessivo das diferenças de ordem superior, resulta:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \\ & (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] + \dots + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots \\ & \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \\ & f[x, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] \end{aligned} \quad (2.9)$$

A aproximação:

$$f(x) \approx \phi(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \\ + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (2.10)$$

constitui a fórmula de interpolação de Newton, de onde é possível de duzir muitas outras fórmulas de interpolação.

Observando as equações (2.9) e (2.10), vemos que o erro de truncamento envolvido na fórmula de Newton é dado por:

$$R_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \quad (2.11)$$

a qual se anula para $x=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Portanto a função $\phi(x)$ em (2.9) é um polinômio de grau n que passa pelos pontos $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)] \dots [x_n, f(x_n)]$ da tabela (2.2).

Em virtude de $R_{n+1}(x)$ se anular para $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ vem, da aplicação do teorema de Rolle, que:

$$\frac{d^n}{dx^n} R_{n+1}(\xi) = R_{n+1}^n(\xi) = 0 \quad (2.12)$$

onde ξ está contido no intervalo que compreende $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Em (2.9) temos:

$$f(x) = \phi(x) + R_{n+1}(x)$$

Derivando n vezes em relação a x , resulta pa
ra $x=\xi$, a partir da eq.(2.12)

$$f^n(\xi) = n! f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] + \frac{d^n}{dx^n} R_{n+1}(\xi) = n! f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$$

ou então:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f^n(\xi)}{n!}$$

donde:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) em (2.11), resulta:

$$R_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (2.14)$$

que constitui a expressão do erro de truncamento de emprego convenien
te, quando é conhecida a expressão analítica da função $f(x)$.

2.3.2 - Fórmula de Interpolação de Lagrange

Desenvolvendo as expressões das diferenças di
vididas da eq.(2.10) segundo a eq.(2.6), obtém-se:

$$f(x) = \phi(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} f(x_0) +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} f(x_1) + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} f(x_n)$$

(2.15)

que é a fórmula de interpolação de Lagrange.

Observemos que esta fórmula dá diretamente o polinômio interpolante para qualquer número de pontos e o erro de truncamento pode ser expresso pela eq.(2.14), uma vez que as eqs.(2.10) e (2.15) constituem a mesma representação aproximada de $f(x)$.

2.4 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Os métodos numéricos para o cálculo de integrais definidas do tipo $I = \int_a^b f(x)dx$ (2.16) são aplicadas quando estas não podem ser calculadas exatamente ou quando a função integrando for dada por uma tabela de valores.

Todos os métodos numéricos para o cálculo de integrais definidas se baseiam na aproximação da função integrando por um polinômio e na integração deste. Nos métodos que analisaremos a seguir esta aproximação será feita por interpolação, mas poder-se-á usar, também, outro tipo de aproximação. Assim, se a função integrando for resultado de medidas será melhor usar aproximação por mínimos quadrados.

2.4.1 - Regra dos Trapézios

Este método de integração aproximada consiste em usar interpolação linear em cada par de valores de $f(x)$.

Seja $y=f(x)$ uma função contínua e derivável no intervalo $[a,b]$, fig.(2.1).

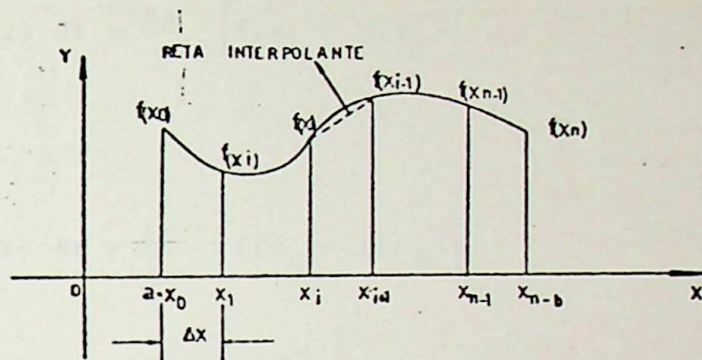


Fig.(2.1) - Integração aproximada - regra dos trapézios

Dividamos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos congruentes de comprimento Δx pelos pontos $a=x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n=b$ e seja $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_i), f(x_{i+1}), \dots, f(x_{n-1}), f(x_n)$ os valores da função $y=f(x)$ nos respectivos pontos.

Aplicando a fórmula de interpolação de Lagrange, eq.(2.15), para um par de pontos qualquer desta função; $f(x_i)$ e $f(x_{i+1})$, como mostra a fig.(2.1), teremos:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \phi(x) = \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} f(x_i) + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} f(x_{i+1}) \\ &= f(x_i) + \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} (x-x_i) \end{aligned}$$

A integral no intervalo de x_i a x_{i+1} fica:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} (x-x_i) \right] \\ &= \frac{x_{i+1}+x_i}{2} [f(x_{i+1})+f(x_i)] = \frac{\Delta x}{2} [f(x_i)+f(x_{i+1})] \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} [f(x_1) + f(x_2)]$$

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} [f(x_2) + f(x_3)]$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\dots$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} [f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

A soma dessas integrais dará a integral toda de $x_0=a$ a $x_n=b$; isto é:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{\Delta x}{2} [f(x_1) + f(x_2)] + \frac{\Delta x}{2} [f(x_2) + f(x_3)] + \dots$$

$$\dots + \frac{\Delta x}{2} [f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

ou ainda, colocando $\frac{\Delta x}{2}$ em evidência

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (2.17)$$

Esta é a fórmula de integração aproximada da regra trapezoidal, cujo nome se deve ao fato de que, em cada trecho, a integral é aproximadamente igual à área de um trapézio limitado pela diferença de abscissas x_{i+1} e x_i , as duas ordenadas $f(x_{i+1})$ e $f(x_i)$, e a reta interpolante que liga os pontos da curva $(x_i, f(x_i))$ e

$(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

É possível estimar uma cota superior para que o erro absoluto E_t cometido ao se integrar uma função $f(x)$ pelo método dos trapézios, utilizando a fórmula

$$E_t = \frac{(\Delta x)^2}{12} (x_n - x_0) \cdot m_2(x) \quad (2.18)$$

onde $m_2(x)$ é um máximo da segunda derivada de $f(x)$ num ponto entre x_0 e x_n .

Sendo, pois, o erro, proporcional a $(\Delta x)^2$, é possível, então calcular o número intervalos em que, uma função deve ser subdividida para que a integral por trapézios tenha uma precisão pré-estabelecida.

2.4.2 - Regra de Simpson

Este método de integração aproximada consiste no uso da interpolação quadrática em cada conjunto de 3 valores da função, subentendendo 2 intervalos consecutivos e, em seguida, integrar os polinômios do 2º grau resultantes.

Vejamos a dedução da fórmula de Simpson, que é uma das mais usadas na integração numérica, quando são conhecidos os valores do integrando para valores igualmente espaçados da variável de integração x .

Seja $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ os valores de $y=f(x)$, nos pontos equidistantes $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ com intervalo Δx , fig.(2.3).

A integral pretendida, eq.(2.16),

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

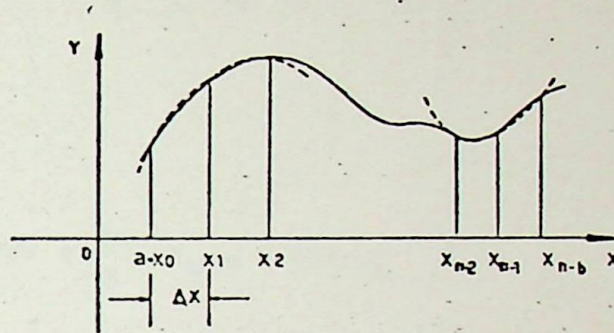


Fig.(2.2) - Integração aproximada - Regra de Simpson

pode ser desdobrada da seguinte forma:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx \quad (2.19)$$

Considerando, por exemplo, o intervalo $[x_0, x_2]$ e utilizando-se de um procedimento semelhante àquele usado na dedução da regra trapezoidal, resulta:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

onde: $S = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$ é a área de um trapézio curvilíneo limitado pelas ordenadas fixas y_0 e y_2 , o eixo dos x e por uma parábola, sendo y_1 a ordenada da curva no ponto médio do intervalo considerado.

Analogamente, teremos:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\int_{x_4}^{x_6} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_4 + 4y_5 + y_6)$$

⋮

⋮

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$



Substituindo estes resultados na eq.(2.19) e agrupando convenientemente os termos, chega-se à fórmula de integração de Simpson:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}) \right] \quad (2.20)$$

Esta fórmula combina simplicidade de forma com melhor precisão, sendo conseqüentemente mais usada para integração numérica. Nota-se, através da demonstração que conduz à fórmula de Simpson, que o intervalo de integração é subdividido em um número par de divisões, o que em algumas vezes constitui sério incômodo.

Tal como na regra dos trapézios, também é possível estimar uma cota superior do erro absoluto (E_s) cometido ao se integrar uma função pela regra de Simpson, utilizando-a seguinte fórmula:

$$E_s = \frac{\Delta x^4}{180} (x_n - x_0) \cdot m_4(x) \quad (2.21)$$

onde $m_4(x)$ é um máximo da quarta derivada de $f(x)$ num ponto entre x_0

$e x_n$.

1

2.5 - COMENTÁRIOS

Se $f(x)$ for dada em forma de tabela ou se for difícil obter os máximos das derivadas, poder-se-á usar tanto a fórmula dos trapézios como a de Simpson de forma iterativa, ou seja: aplicar-se-á a fórmula para um número de intervalos pré-estabelecido e em seguida dobrar-se-á o número de sub-intervalos, aplicando-se novamente a fórmula. Este resultado deverá ser melhor que o primeiro pois o erro é proporcional a uma potência de Δx o qual foi reduzido à metade. O processo deve ser continuado até que a diferença entre dois resultados sucessivos esteja abaixo de uma tolerância desejada.

No entanto, usando um mesmo número de divisões para o cálculo de uma integral que envolva aproximação, verificar-se-á que o resultado obtido mediante a fórmula de Simpson estará mais próximo do valor real da integral que aquele obtido segundo a fórmula dos trapézios.

CAPÍTULO III

UM MÉTODO NUMÉRICO PARA DESENVOLVER FUNÇÕES; COM DADOS
DISCRETOS, EM SÉRIE

3.1 - INTRODUÇÃO

Uma função se diz periódica com dados discretos quando ela é definida por uma tabela de valores obtida através de determinações experimentais, e de tal modo que o conjunto desses valores discretos se repitam sucessivamente no decorrer da experiência. Tais funções são oriundas de problemas que envolvem quantidades, como por exemplo, meteorológicas, estatísticas, econômicas, etc., cujo período tanto pode ser um dia ou um ano. Daí a admissão de que os dados sejam considerados em intervalos de $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$ ou então $\frac{1}{48}$ de um período.

A expansão de Fourier de uma função periódica com dados discretos muitas vezes se faz necessária na prática, e para isso foram imaginados vários métodos, abrangendo coletivamente o campo da Análise Harmônica. Desses, o mais simples e mais óbvio é o da avaliação das integrais de Euler, por intermédio da regra trapezoidal. Este método é inteiramente satisfatório para as aplicações ocasionais e somente precisa de ser aperfeiçoado para quem deve manejar funções numéricas regularmente.

Evidentemente que poderíamos também, por exemplo, avaliar as integrais de Euler, eqs.(1.6), por intermédio da regra de Simpson, que permitiria um menor erro de aproximação, e só não o fazemos pelas razões acima citadas.

3.2 - Consideremos uma função $f(t)$ de período $2L$, para o qual os valores sejam disponíveis em intervalos de

$$\Delta t = \frac{2L}{12} = \frac{L}{6} ; \quad \Delta t = \frac{2L}{24} = \frac{L}{12} \quad \text{ou} \quad \Delta t = \frac{2L}{48} = \frac{L}{24}$$

Lembremo-nos de que qualquer função $f(t)$ pode decompor-se na soma de uma função par e uma função ímpar, ou seja:

$$f(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} + \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

Para $\frac{f(t)+f(-t)}{2} = g(t)$ e $\frac{f(t)-f(-t)}{2} = h(t)$, resulta

$$f(t) = g(t) + h(t), \text{ onde}$$

$g(t)$ é uma função definida no intervalo $[0, L]$ (que é a metade do intervalo $[-L, L]$) e classifica-se como função par, sendo claramente definida na outra metade do intervalo, isto é, em $[-L, 0]$, figura (3.1);

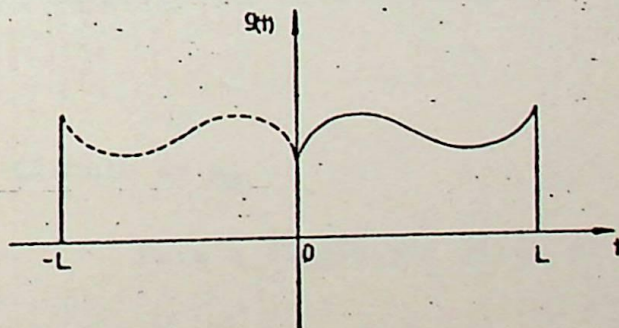


Fig.(3.1) - Função $g(t)$, definida em $[0, L]$ - Função par

e $h(t)$ uma função, também definida no intervalo $[0, L]$, e classificada como função ímpar, sendo bem definida na outra metade do intervalo $[-L, L]$, fig.(3.2).

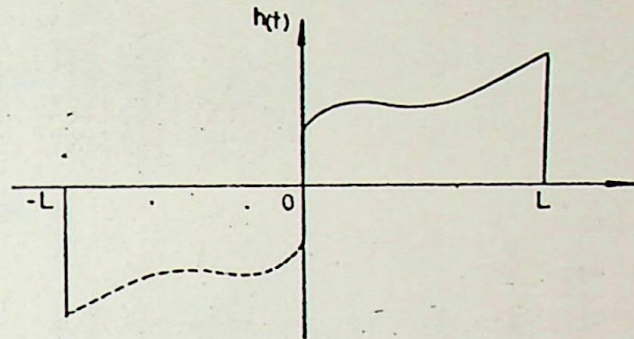


Fig.(3.2) - Função $h(t)$, definida em $[0, L]$ - Função ímpar

Portanto, os termos do cosseno na expansão de $f(t)$ são exatamente os termos na expansão de meio período de $g(t)$ e os termos do seno na expansão de $f(t)$ são exatamente os termos na expansão de meio período de $h(t)$.

Evidentemente que a expansão em série de Fourier da função $f(t)$ se prende na determinação das integrais de Euler, eqs.(1,6), ou seja, dos coeficientes a_n e b_n , os quais temos que calcular.

3.2.1 - Cálculo de a_n

Para a função par $g(t)$, da eq.(1.16) resulta

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(t) \cdot \cos \frac{n\pi t}{L} dt$$

Aplicando a regra trapezoidal, eq.(2.17), e admitindo que os dados discretos de $f(t)$, fig.(3.3) sejam considerados em intervalos de $\frac{1}{12}$ de um período qualquer $2L$, isto é:

$$\Delta t = \frac{2L}{12} = \frac{L}{6}, \text{ teremos:}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \left\{ \frac{1}{6} \left[\frac{g(t_0)}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{L} \cdot 0 + g(t_1) \cos \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{L}{6} + \right. \right. \\ \left. \left. + g(t_2) \cos \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{2L}{6} + \dots + g(t_5) \cdot \cos \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{5L}{6} + \frac{g(t_6)}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{6\pi}{6} \right] \right\} \quad (3.1)$$

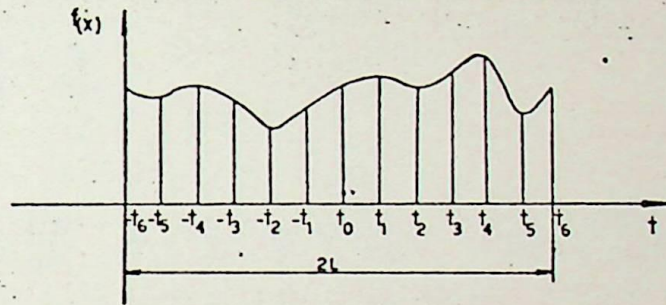


Fig.(3.3) - Função $f(t)$, definida num período $2L$ -função qualquer

Notemos que somente $f(t_0) = f(-t_0)$. Sendo

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \text{ da eq.(3.1) resulta:}$$

$$a_n = \frac{1}{3} \left[\frac{f(t_0) + f(-t_0)}{4} + \frac{f(t_1) + f(-t_1)}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{6} + \frac{f(t_2) + f(-t_2)}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{3} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{f(t_5) + f(-t_5)}{2} \cos \frac{5n\pi}{6} + \frac{f(t_6) + f(-t_6)}{4} \cos n\pi \right]$$

Portanto, para

$$\frac{f(t_i) + f(-t_i)}{2} = g_i, \quad i \in N, \quad 0 \leq i \leq 6, \text{ teremos:}$$

$$a_n = \frac{1}{3} \left[\frac{g_0}{2} + g_1 \cos \frac{n\pi}{6} + g_2 \cos \frac{n\pi}{3} + \dots + g_5 \cos \frac{5n\pi}{6} + \frac{g_6}{2} \cos n\pi \right] \quad (3.2)$$

Analogamente, se os dados discretos de $f(t)$ forem considerados em intervalos de $\frac{1}{24}$ ou $\frac{1}{48}$ de um mesmo período $2L$, teremos:

Para $\Delta t = \frac{2L}{24} = \frac{L}{12}$

$$a_n = \frac{1}{6} \left[\frac{g_0}{2} + g_1 \cos \frac{n\pi}{12} + g_2 \cos \frac{n\pi}{6} + \dots + g_{11} \cos \frac{11n\pi}{12} + \frac{g_{12}}{2} \cos n\pi \right] \quad (3.3)$$

Para $\Delta t = \frac{2L}{48} = \frac{L}{24}$

$$a_n = \frac{1}{12} \left[\frac{g_0}{2} + g_1 \cos \frac{n\pi}{24} + g_2 \cos \frac{n\pi}{12} + \dots + g_{23} \cos \frac{23n\pi}{24} + \frac{g_{24}}{2} \cos n\pi \right] \quad (3.4)$$

3.2.2 - Cálculo de b_n

Para a função ímpar $h(t)$, da eq.(1.19), resulta:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(t) \cdot \frac{\sin \frac{nt}{p}}{p} dt$$

Aplicando, novamente, a regra trapezoidal, eq.(2.17), e admitindo, ainda, que os dados discretos de $f(t)$ fig.(3.3) sejam considerados em intervalos de $\frac{1}{12}$ de um período qualquer $2L$, isto é:

$\Delta t = \frac{2L}{12} = \frac{L}{6}$, teremos:

$$b_n = \frac{2}{L} \left\{ \frac{L}{6} \left[\frac{h(t_0)}{2} \sin \frac{n\pi}{L} \cdot 0 + h(t_1) \sin \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{L}{6} + h(t_2) \sin \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{2L}{6} + \dots + h(t_5) \sin \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{5L}{6} \right] \right\} \quad (3.5)$$

como $h(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$, decorre da eq.(3.5), que:

$$b_n = \frac{1}{3} \left[\frac{f(t_1) - f(-t_1)}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6} + \frac{f(t_2) - f(-t_2)}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} + \dots + \frac{f(t_5) - f(-t_5)}{2} \operatorname{sen} \frac{5n\pi}{6} \right]$$

Portanto, para

$$\frac{f(t_i) - f(-t_i)}{2} = h_i, \quad i \in N, \quad 1 \leq i \leq 5, \quad \text{teremos:}$$

$$b_n = \frac{1}{3} \left[h_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6} + h_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} + \dots + h_4 \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{3} + h_5 \operatorname{sen} \frac{5n\pi}{6} \right] \quad (3.6)$$

Procedendo de maneira análoga, podemos obter o cálculo de b_n nos casos em que os dados discretos de $f(t)$ forem considerados em intervalos de $\frac{1}{24}$ ou $\frac{1}{48}$ de um mesmo período $2L$.

Assim,

para $\Delta t = \frac{2L}{24} = \frac{L}{24}$, teremos:

$$b_n = \frac{1}{6} \left[h_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{12} + h_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6} + \dots + h_{10} \operatorname{sen} \frac{5n\pi}{6} + h_{11} \operatorname{sen} \frac{11n\pi}{12} \right] \quad (3.7)$$

para $\Delta t = \frac{2L}{48} = \frac{L}{24}$ teremos:

$$b_n = \frac{1}{12} \left[h_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{24} + h_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{12} + \dots + h_{22} \operatorname{sen} \frac{11n\pi}{12} + h_{23} \operatorname{sen} \frac{23n\pi}{24} \right] \quad (3.8)$$

3.3 - DETERMINAÇÃO DOS PESOS PARA O CÁLCULO DE a_n E b_n

Combinando os fatores do cosseno ou do seno com outros fatores numéricos inclusive o $\frac{1}{2}$ da definição de $g(t)$ ou $h(t)$, podemos obter um conjunto de pesos que serão utilizados no cálculo dos coeficientes a_n e b_n .

Seja, por exemplo, determinar os pesos que serão utilizados no cálculo de a_3 e b_2 , considerando que o período tenha 24 intervalos.

Tomemos a eq. (3.3)

$$a_n = \frac{1}{6} \left[\frac{g_0}{2} + g_1 \cos \frac{n\pi}{12} + g_2 \cos \frac{n\pi}{6} + \dots + g_{11} \cos \frac{11n\pi}{12} + \frac{g_{12}}{2} \cos n\pi \right]$$

Fazendo $n=3$, e efetuando o produto do fator $\frac{1}{6}$ por cada fator numérico de cada parcela da soma entre colchetes, inclusive o $\frac{1}{2}$ da definição de $g(t)$, iremos obter um conjunto de pesos para o cálculo de a_3 :

Fatores

Pesos

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = 0,08333 \quad \text{pois, } f(t_0) = f(-t_0)$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{24} = 0,05893$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = \frac{0}{12} = 0,00000$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{24} = 0,05893$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{3\pi}{3} = -\frac{1}{12} = -0,08333$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{15\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{24} = -0,05893$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{3\pi}{2} = \frac{0}{12} = 0,00000$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{21\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{24} = 0,05893$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{6\pi}{3} = \frac{1}{12} = 0,08333$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{24} = 0,05893$$

Fatores	Pesos
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{15\pi}{6} = \frac{0}{12}$	$= 0,00000$
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{33}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{24}$	$= -0,05893$
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 3\pi = -\frac{1}{24}$	$= -0,04167$

Tomemos, agora, a eq.(3.7).

Fazendo $n=2$ e, usando um procedimento análogo ao do cálculo de a_3 , determinaremos um conjunto de pesos que serão utilizados no cálculo de b_2 .

Fatores	Pesos
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{24}$	$= 0,04167$
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{24}$	$= 0,07217$
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{12}$	$= 0,08333$
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen} \frac{10\pi}{12} = \frac{1}{24}$	$= 0,04167$
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{2} = \frac{0}{12}$	$= 0,00000$
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen} \frac{14\pi}{12} = -\frac{1}{24}$	$= -0,04165$
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{24}$	$= -0,07217$
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen} \frac{6\pi}{4} = -\frac{1}{12}$	$= -0,08333$
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen} \frac{10\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{24}$	$= -0,07217$
	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{24} = 0,07217$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{22\pi}{12} = -\frac{1}{24} = -0,04167$$

Vemos que a obtenção de tais conjuntos de pesos é bastante simples, porém trabalhosa. Daí a necessidade de um programa para computação digital, que daremos a seguir, para a determinação de tabelas de pesos que serão utilizadas no cálculo dos dez primeiros "a"s e "b"s. Assim, as eqs. (3.2), (3.3) e (3.4) fornecerão tabelas de pesos para o cálculo dos dez primeiros "a"s, enquanto que as tabelas para o cálculo dos dez primeiros "b"s serão fornecidas pelas eqs. (3.6), (3.7) e (3.8), considerando, respectivamente, os dados discretos de $f(t)$ em intervalos de $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$ e $\frac{1}{48}$ de um período qualquer $2L$.

TR 86 FORTRAN COMPILER MV09(70) 240975 FOKA.

```

C      *
C      PROG. PARA ANALISE HARMONICA
      DIMENSION JJ(20), LJ(20)
      COMMON K, N, TA(20,50), TB(20,50)
12     READ (12,1) NINT.
1      FORMAT (13)
      IF (NINT.EQ.0) STOP
      K=NINT/2
      DO 2 N=1,11
      CALL AN
2     CONTINUE
      DO 4 L=1,11
4      JJ(L)=L-1
      WRITE(1,5) NINT, (JJ(J), J=1,11)
5      FORMAT(1H1,4(//),10X, 'TABELA PARA DETERMINACAO DE A(N)', //,10X, 'VAL
      LORES CALCULADOS PARA ', I3, ' INTERVALOS' //,5X,11(2X, ' N = ', I3), //)
      KK=K+1
      DO 7 J3=1, KK
      J8=J3-1
7      WRITE(1,6) J8, (TA(J4, J3), J4=1,11)
6      FORMAT(1X, I3, 3X, 11(F8.5, 2X))
      DO 3 N=1,10
      CALL BN
3     CONTINUE
      DO 8 LL=1,10
8      LJ(LL)=LL
      WRITE(1,9) NINT, (LJ(LL), LL=1,10)
9      FORMAT (4(//),10X, 'TABELA PARA DETERMINACAO DE B(N)', //,10X, 'VAL
      LORES CALCULADOS PARA ', I3, ' INTERVALOS' //,5X,10(2X, ' N = ', I3), //)
      KKK=K-1
      DO 11 J5=1, KKK
11     WRITE(1,6) J5, (TB(J6, J5), J6=1,10)
      GO TO 12
      END

```

```

SUBROUTINE AN
REAL K,L,K1
COMMON I,J,K(20,50),L(20,50)
J1=J-1
KK=I+1
DO 1 M=1,KK
M1=M-1
IF(M1.EQ.I)GO TO 2
K1=1./I
GO TO 1
2 K1=0.5/I
1 K(J,M)=K1*COS((J1*M1*3.1416)/I)
RETURN
END

```

SEITE 3

```

SUBROUTINE BN
REAL K,L,K1
COMMON I,J,K(20,50),L(20,50)
K1=1./I
KK=I-1
DO 1 M=1,KK
L(J,M)=K1*SIN((J*M*3.1416)/I)
RETURN
END

```

SEITE 4

HP FEHLERFREI
KERNESPEICHERBEDARF: 2480 ZELLEN OHNE COMMON

UP AN FEHLERFREI
KERNESPEICHERBEDARF: 104 ZELLEN OHNE COMMON

UP BN FEHLERFREI
KERNESPEICHERBEDARF: 78 ZELLEN OHNE COMMON

TR 86 FORTRAN COMPILER MV09(70) 240975 STARTE:

PROGRAMMLAENGE 13636

ENDE DER COMPILATION

TABELA PARA DETERMINACAO DE A(N)
VALORES CALCULADOS PARA 12 INTERVALOS

	N = 0	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6	N = 7	N = 8	N = 9	N = 10
0	0.16667	0.16667	0.16667	0.16667	0.16667	0.16667	0.16667	0.16667	0.16667	0.16667	0.16667
1	0.16667	0.14434	0.08333	0.00000	-0.08333	-0.14434	-0.16667	-0.14434	-0.08333	0.00000	0.08333
2	0.16667	0.08333	-0.08333	-0.16667	-0.08333	0.08333	0.16667	0.08333	-0.08333	-0.16667	-0.08333
3	0.16667	-0.00000	-0.16667	0.00000	0.16667	0.00000	-0.16667	-0.00000	0.16667	-0.00000	-0.16667
4	0.16667	-0.08333	0.08333	-0.16667	-0.08333	0.16667	-0.08333	0.08333	-0.16667	0.00000	0.08333
5	0.08333	-0.08333	0.08333	-0.08333	0.08333	-0.08333	0.08333	-0.08333	0.08333	-0.08333	0.08333

Tabela (3.1)(a) - Pesos para o cálculo de a_n

TABELA PARA DETERMINACAO DE B(N)
VALORES CALCULADOS PARA 12 INTERVALOS

	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6	N = 7	N = 8	N = 9	N = 10
1	0.08333	0.14434	0.16667	0.14434	0.08333	-0.00000	-0.08333	-0.14434	-0.16667	-0.14434
2	0.14434	0.14434	-0.00000	-0.14434	-0.14434	0.00000	0.14434	0.14434	-0.00000	-0.14434
3	0.16667	-0.00000	-0.16667	0.00000	0.16667	-0.00000	-0.16667	-0.00000	0.16667	-0.00000
4	0.14434	-0.00000	0.00000	-0.14434	-0.14434	0.00000	0.14434	0.14434	-0.00000	-0.14434
5	0.08333	-0.08333	0.08333	-0.08333	0.08333	-0.08333	0.08333	-0.08333	0.08333	-0.08333

Tabela (3.1)(b) - Pesos para o cálculo de b_n

TABELA PARA DETERMINAÇÃO DE B(N)
VALORES CALCULADOS PARA 48 INTERVALOS

N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6	N = 7	N = 8	N = 9	N = 10
0.05478	0.01083	0.01595	0.0236083	0.02537	0.02946	0.03306	0.03608	0.03850	0.04083
0.01595	0.02946	0.03850	0.04167	0.043829	0.046167	0.04850	0.05083	0.053167	0.05550
0.02946	0.04167	0.046167	0.05083	0.05550	0.060167	0.06483	0.06950	0.074167	0.07883
0.04167	0.05083	0.05550	0.060167	0.06483	0.06950	0.074167	0.07883	0.08350	0.088167
0.05550	0.06483	0.06950	0.074167	0.07883	0.08350	0.088167	0.09283	0.09750	0.102167
0.06483	0.074167	0.07883	0.08350	0.088167	0.09283	0.09750	0.102167	0.10683	0.11150
0.07883	0.088167	0.09283	0.09750	0.102167	0.10683	0.11150	0.116167	0.12083	0.12550
0.088167	0.09750	0.102167	0.10683	0.11150	0.116167	0.12083	0.12550	0.130167	0.13483
0.09283	0.102167	0.10683	0.11150	0.116167	0.12083	0.12550	0.130167	0.13483	0.13950
0.102167	0.11150	0.116167	0.12083	0.12550	0.130167	0.13483	0.13950	0.144167	0.14883
0.11150	0.12083	0.12550	0.130167	0.13483	0.13950	0.144167	0.14883	0.15350	0.158167
0.12083	0.130167	0.13483	0.13950	0.144167	0.14883	0.15350	0.158167	0.16283	0.16750
0.130167	0.13950	0.144167	0.14883	0.15350	0.158167	0.16283	0.16750	0.172167	0.17683
0.13950	0.14883	0.15350	0.158167	0.16283	0.16750	0.172167	0.17683	0.18150	0.186167
0.14883	0.158167	0.16283	0.16750	0.172167	0.17683	0.18150	0.186167	0.19083	0.19550
0.158167	0.16750	0.172167	0.17683	0.18150	0.186167	0.19083	0.19550	0.200167	0.20483
0.16750	0.17683	0.18150	0.186167	0.19083	0.19550	0.200167	0.20483	0.20950	0.214167
0.17683	0.186167	0.19083	0.19550	0.200167	0.20483	0.20950	0.214167	0.21883	0.22350
0.186167	0.19550	0.200167	0.20483	0.20950	0.214167	0.21883	0.22350	0.228167	0.23283
0.19550	0.20483	0.20950	0.214167	0.21883	0.22350	0.228167	0.23283	0.23750	0.242167
0.20483	0.214167	0.21883	0.22350	0.228167	0.23283	0.23750	0.242167	0.24683	0.25150
0.214167	0.22350	0.228167	0.23283	0.23750	0.242167	0.24683	0.25150	0.256167	0.26083
0.22350	0.23283	0.23750	0.242167	0.24683	0.25150	0.256167	0.26083	0.26550	0.270167
0.23283	0.242167	0.24683	0.25150	0.256167	0.26083	0.26550	0.270167	0.27483	0.27950
0.242167	0.25150	0.256167	0.26083	0.26550	0.270167	0.27483	0.27950	0.284167	0.28883
0.25150	0.26083	0.26550	0.270167	0.27483	0.27950	0.284167	0.28883	0.29350	0.298167
0.26083	0.270167	0.27483	0.27950	0.284167	0.28883	0.29350	0.298167	0.30283	0.30750
0.270167	0.27950	0.284167	0.28883	0.29350	0.298167	0.30283	0.30750	0.312167	0.31683
0.27950	0.28883	0.29350	0.298167	0.30283	0.30750	0.312167	0.31683	0.32150	0.326167
0.28883	0.298167	0.30283	0.30750	0.312167	0.31683	0.32150	0.326167	0.33083	0.33550
0.298167	0.30750	0.312167	0.31683	0.32150	0.326167	0.33083	0.33550	0.340167	0.34483
0.30750	0.31683	0.32150	0.326167	0.33083	0.33550	0.340167	0.34483	0.34950	0.354167
0.31683	0.326167	0.33083	0.33550	0.340167	0.34483	0.34950	0.354167	0.35883	0.36350
0.326167	0.33550	0.340167	0.34483	0.34950	0.354167	0.35883	0.36350	0.368167	0.37283
0.33550	0.34483	0.34950	0.354167	0.35883	0.36350	0.368167	0.37283	0.37750	0.382167
0.34483	0.354167	0.35883	0.36350	0.368167	0.37283	0.37750	0.382167	0.38683	0.39150
0.354167	0.36350	0.368167	0.37283	0.37750	0.382167	0.38683	0.39150	0.396167	0.40083
0.36350	0.37283	0.37750	0.382167	0.38683	0.39150	0.396167	0.40083	0.40550	0.410167
0.37283	0.382167	0.38683	0.39150	0.396167	0.40083	0.40550	0.410167	0.41483	0.41950
0.382167	0.39150	0.396167	0.40083	0.40550	0.410167	0.41483	0.41950	0.424167	0.42883
0.39150	0.40083	0.40550	0.410167	0.41483	0.41950	0.424167	0.42883	0.43350	0.438167
0.40083	0.410167	0.41483	0.41950	0.424167	0.42883	0.43350	0.438167	0.44283	0.44750
0.410167	0.42083	0.42550	0.430167	0.43483	0.43950	0.444167	0.44883	0.45350	0.458167
0.42083	0.430167	0.43483	0.43950	0.444167	0.44883	0.45350	0.458167	0.46283	0.46750
0.430167	0.44083	0.44550	0.450167	0.45483	0.45950	0.464167	0.46883	0.47350	0.478167
0.44083	0.450167	0.45483	0.45950	0.464167	0.46883	0.47350	0.478167	0.48283	0.48750
0.450167	0.46083	0.46550	0.470167	0.47483	0.47950	0.484167	0.48883	0.49350	0.498167
0.46083	0.470167	0.47483	0.47950	0.484167	0.48883	0.49350	0.498167	0.50283	0.50750
0.470167	0.48083	0.48550	0.490167	0.49483	0.49950	0.504167	0.50883	0.51350	0.518167
0.48083	0.490167	0.49483	0.49950	0.504167	0.50883	0.51350	0.518167	0.52283	0.52750
0.490167	0.50083	0.50550	0.510167	0.51483	0.51950	0.524167	0.52883	0.53350	0.538167
0.50083	0.510167	0.51483	0.51950	0.524167	0.52883	0.53350	0.538167	0.54283	0.54750
0.510167	0.52083	0.52550	0.530167	0.53483	0.53950	0.544167	0.54883	0.55350	0.558167
0.52083	0.530167	0.53483	0.53950	0.544167	0.54883	0.55350	0.558167	0.56283	0.56750
0.530167	0.54083	0.54550	0.550167	0.55483	0.55950	0.564167	0.56883	0.57350	0.578167
0.54083	0.550167	0.55483	0.55950	0.564167	0.56883	0.57350	0.578167	0.58283	0.58750
0.550167	0.56083	0.56550	0.570167	0.57483	0.57950	0.584167	0.58883	0.59350	0.598167
0.56083	0.570167	0.57483	0.57950	0.584167	0.58883	0.59350	0.598167	0.60283	0.60750
0.570167	0.58083	0.58550	0.590167	0.59483	0.59950	0.604167	0.60883	0.61350	0.618167
0.58083	0.590167	0.59483	0.59950	0.604167	0.60883	0.61350	0.618167	0.62283	0.62750
0.590167	0.60083	0.60550	0.610167	0.61483	0.61950	0.624167	0.62883	0.63350	0.638167
0.60083	0.610167	0.61483	0.61950	0.624167	0.62883	0.63350	0.638167	0.64283	0.64750
0.610167	0.62083	0.62550	0.630167	0.63483	0.63950	0.644167	0.64883	0.65350	0.658167
0.62083	0.630167	0.63483	0.63950	0.644167	0.64883	0.65350	0.658167	0.66283	0.66750
0.630167	0.64083	0.64550	0.650167	0.65483	0.65950	0.664167	0.66883	0.67350	0.678167
0.64083	0.650167	0.65483	0.65950	0.664167	0.66883	0.67350	0.678167	0.68283	0.68750
0.650167	0.66083	0.66550	0.670167	0.67483	0.67950	0.684167	0.68883	0.69350	0.698167
0.66083	0.670167	0.67483	0.67950	0.684167	0.68883	0.69350	0.698167	0.70283	0.70750
0.670167	0.68083	0.68550	0.690167	0.69483	0.69950	0.704167	0.70883	0.71350	0.718167
0.68083	0.690167	0.69483	0.69950	0.704167	0.70883	0.71350	0.718167	0.72283	0.72750
0.690167	0.70083	0.70550	0.710167	0.71483	0.71950	0.724167	0.72883	0.73350	0.738167
0.70083	0.710167	0.71483	0.71950	0.724167	0.72883	0.73350	0.738167	0.74283	0.74750
0.710167	0.72083	0.72550	0.730167	0.73483	0.73950	0.744167	0.74883	0.75350	0.758167
0.72083	0.730167	0.73483	0.73950	0.744167	0.74883	0.75350	0.758167	0.76283	0.76750
0.730167	0.74083	0.74550	0.750167	0.75483	0.75950	0.764167	0.76883	0.77350	0.778167
0.74083	0.750167	0.75483	0.75950	0.764167	0.76883	0.77350	0.778167	0.78283	0.78750
0.750167	0.76083	0.76550	0.770167	0.77483	0.77950	0.784167	0.78883	0.79350	0.798167
0.76083	0.770167	0.77483	0.77950	0.784167	0.78883	0.79350	0.798167	0.80283	0.80750
0.770167	0.78083	0.78550	0.790167	0.79483	0.79950	0.804167	0.80883	0.81350	0.818167
0.78083	0.790167	0.79483	0.79950	0.804167	0.80883	0.81350	0.818167	0.82283	0.82750
0.790167	0.80083	0.80550	0.810167	0.81483	0.81950	0.824167	0.82883	0.83350	0.838167
0.80083	0.810167	0.81483	0.81950	0.824167	0.82883	0.83350	0.838167	0.84283	0.84750
0.810167	0.82083	0.82550	0.830167	0.83483	0.83950	0.844167	0.84883	0.85350	0.858167
0.82083	0.830167	0.83483	0.83950	0.844167	0.84883	0.85350	0.858167	0.86283	0.86750
0.830167	0.84083	0.84550	0.850167	0.85483	0.85950	0.864167	0.86883	0.87350	0.878167
0.84083	0.850167	0.85483	0.85950	0.864167	0.86883	0.87350	0.87816		

3.4 - DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES a_n E b_n

Conhecidas as tabelas de pesos, vejamos agora como se determinam os coeficientes a_n e b_n . Para isso é necessário que a função dada seja definida no período por uma tabela de valores que constitui os seus dados discretos. Este período, de acordo com as tabelas de pesos já elaboradas, deverá ter 12, 24 ou 48 intervalos.

Exemplo:

Seja determinar os coeficientes a_2 e b_1 para a função cuja definição no período é:

$$\begin{array}{cccccc}
 y_0 = -2,0000 & y_5 = -0,9236 & y_{10} = -0,1944 & y_{15} = 0,1875 & y_{20} = 0,2222 & \\
 y_1 = -1,7569 & y_6 = -0,7500 & y_{11} = -0,0903 & y_{16} = 0,2222 & y_{21} = 0,1875 & \\
 y_2 = -1,5278 & y_7 = -0,5903 & y_{12} = 0,0000 & y_{17} = 0,2431 & y_{22} = 0,1389 & (3.9) \\
 y_3 = -1,3125 & y_8 = -0,4444 & y_{13} = 0,0764 & y_{18} = 0,2500 & y_{23} = 0,0764 & \\
 y_4 = -1,1111 & y_9 = -0,3125 & y_{14} = 0,1389 & y_{19} = 0,2431 & y_{24} = 0,0000 &
 \end{array}$$

Solução:

Vemos que os dados foram considerados em intervalos de $1/24$ de um período. Logo, os pesos a serem usados serão os das tabelas (3.2)(a) e (3.2)(b).

Interpretando a meio-ordenada y_{12} como $f(t_0)$ em nossa teoria, e usando os pesos na coluna encabeçada por $n=2$ na tabela (3.2)(a) e $n=1$ na tabela (3.2)(b), encontramos a_2 e b_1 sem dificuldade, conforme mostram os cálculos a seguir.

Nota: É importante salientar que este exemplo tem como objetivo principal dar ao leitor uma base mais concreta da teoria desenvolvida anteriormente.

CÁLCULO DE a_2

TERMOS	PESOS	PRODUTOS
$g_0 = g(t_0) = f(t_0) = 0,0000 = 0,0000$	0,08333	0,0000
$g_1 = g(t_1) = f(t_1) + f(-t_1) = 0,0764 - 0,0903 = -0,0139$	0,07217	-0,00100
$g_2 = g(t_2) = f(t_2) + f(-t_2) = 0,1389 - 0,1944 = -0,0555$	0,04167	-0,00231
$g_3 = g(t_3) = f(t_3) + f(-t_3) = 0,1875 - 0,3125 = -0,1250$	0,00000	0,00000
$g_4 = g(t_4) = f(t_4) + f(-t_4) = 0,2222 - 0,4444 = -0,2222$	-0,04167	0,00926
$g_5 = g(t_5) = f(t_5) + f(-t_5) = 0,2431 - 0,5903 = -0,3472$	-0,07217	0,02506
$g_6 = g(t_6) = f(t_6) + f(-t_6) = 0,2500 - 0,7500 = -0,5000$	-0,08333	0,04166
$g_7 = g(t_7) = f(t_7) + f(-t_7) = 0,2431 - 0,9236 = -0,6805$	-0,07217	0,04911
$g_8 = g(t_8) = f(t_8) + f(-t_8) = 0,2222 - 1,1111 = -0,8889$	-0,04167	0,03704
$g_9 = g(t_9) = f(t_9) + f(-t_9) = 0,1875 - 1,3125 = -1,1250$	0,00000	0,00000
$g_{10} = g(t_{10}) = f(t_{10}) + f(-t_{10}) = 0,1389 - 1,5278 = -1,3889$	0,04167	-0,05787
$g_{11} = g(t_{11}) = f(t_{11}) + f(-t_{11}) = 0,0764 - 1,7569 = -1,6805$	0,07217	-0,12128
$g_{12} = g(t_{12}) = f(t_{12}) + f(-t_{12}) = 0,0000 - 2,0000 = -2,0000$	0,04167	-0,08334
	$a_2 =$	-0,10

CÁLCULO DE b_1

TERMINOS	PESOS	PRODUTOS
$h_1 = h(t_1) = f(t_1) - f(-t_1) = 0,0764 + 0,0903 = 0,1667$	0,02157	0,00359
$h_2 = h(t_2) = f(t_2) - f(-t_2) = 0,1389 + 0,1944 = 0,3333$	0,04167	0,01389
$h_3 = h(t_3) = f(t_3) - f(-t_3) = 0,1875 + 0,3125 = 0,5000$	0,05893	0,02947
$h_4 = h(t_4) = f(t_4) - f(-t_4) = 0,2222 + 0,4444 = 0,6666$	0,07217	0,04811
$h_5 = h(t_5) = f(t_5) - f(-t_5) = 0,2431 + 0,5903 = 0,8334$	0,08049	0,06708
$h_6 = h(t_6) = f(t_6) - f(-t_6) = 0,2500 + 0,7500 = 1,0000$	0,08333	0,08333
$h_7 = h(t_7) = f(t_7) - f(-t_7) = 0,2431 + 0,9236 = 1,1667$	0,08049	0,09391
$h_8 = h(t_8) = f(t_8) - f(-t_8) = 0,2222 + 1,1111 = 1,3333$	0,07217	0,09622
$h_9 = h(t_9) = f(t_9) - f(-t_9) = 0,1875 + 1,3125 = 1,5000$	0,05893	0,08839
$h_{10} = h(t_{10}) = f(t_{10}) - f(-t_{10}) = 0,1389 + 1,5278 = 1,6667$	0,04167	0,06945
$h_{11} = h(t_{11}) = f(t_{11}) - f(-t_{11}) = 0,0764 + 1,7569 = 1,8333$	0,02157	0,03954
		$b_1 = 0,63$

Tal como aconteceu no cálculo dos pesos, a determinação dos coeficientes também é por demais cansativa, e envolve um grande número de operações, principalmente se desejarmos calcular todos os coeficientes que as tabelas permitem e que são em número de 21; 11 "a"s e 10 "b"s. Precisamos, portanto, da elaboração de um programa para computação digital.

Seja, por exemplo, obter a expansão em série de Fourier da função anteriormente definida, tabela (3.9).

Solução:

No exemplo anterior indicamos o cálculo dos coeficientes a_2 e b_1 . Notemos que, para a determinação dos demais coeficientes, precisamos de variar tão somente os pesos, já que os termos de g e h são fixos, e que, de acordo com as tabelas elaboradas, poderemos calcular até o coeficiente de ordem 10.

A seguir damos um programa para computação digital para determinar todos esses coeficientes e, também, para obter o desenvolvimento, em série de Fourier, da função dada por dados discretos.

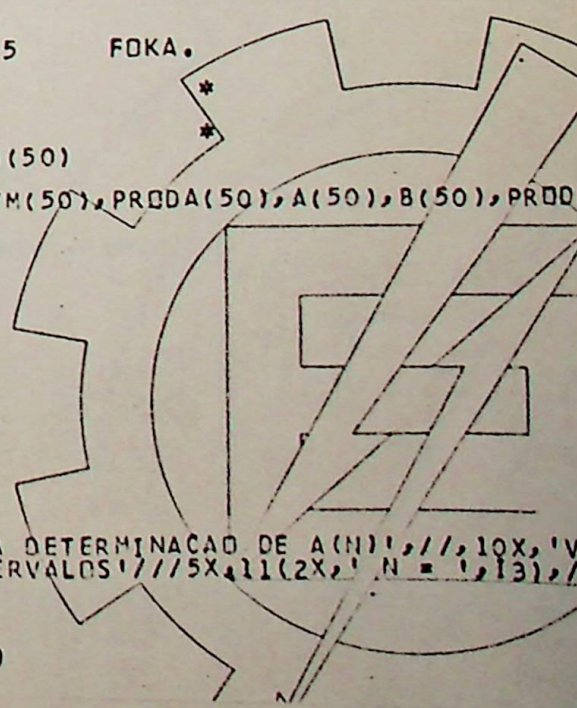
TR 86 FORTRAN COMPILER MV09(70) 240975

FDKA.

```

C      *
C      * PROG. PARA ANALISE HARMONICA
C      *
      INTEGER VM, POS, NEG, SINA(50), SINB(50)
      REAL LO, M
      DIMENSION JJ(20), LJ(20), Y(50), TM(50), PRDA(50), A(50), B(50), PRDB
150), TMB(50)
      DIMENSION T(25), TL(25)
      COMMON K, N, TA(20,50), TB(20,50)
      DATA PES, NEG / ' +', ' -' /
12 READ (12,1) NINT, TIT
1  FORMAT (13,1X,A4)
      NT=NINT+1
      IF(NINT.EQ.0) STOP
      K=NINT/2
      DO 2 N=1,11
      CALL AN
2  CONTINUE
      DO 4 L=1,11
4  JJ(L)=L-1
      WRITE(1,5) NINT, (JJ(J), J=1,11)
5  FORMAT (1H1,4(/),10X, 'TABELA PARA DETERMINACAO DE A(N)', //,10X, 'V
10RES CALCULADOS PARA ',13, ' INTERVALOS' //,5X,11(2X,' N = ',13),//
      KK=K+1
      DO 7 J3=1, KK
7  JB=J3-1
      WRITE(1,6) JB, (TA(J4, J3), J4=1,11)
6  FORMAT (1X,13,3X,11(F8.5,2X))

```




```

SUBROUTINE AN
REAL K,L,K1
COMMON I,J,K(20,50),L(20,50)
J1=J-1
KK=I+1
DO 1 M=1,KK
M1=M-1
IF(M1.EQ.I)GO TO 2
K1=1./I
GO TO 1
2 K1=0.5/I
1 K(J,M)=K1*COS((J1*M1*3.1416)/I)
RETURN
END

```

SEITE 3

```

SUBROUTINE BN
REAL K,L,K1
COMMON I,J,K(20,50),L(20,50)
K1=1./I
KK=I-1
DO 1 M=1,KK
1 L(J,M)=K1*SIN((J*M*3.1416)/I)
RETURN
END

```

SEITE 4

END

```

HP          FEHLERFREI
KERNSPEICHERBEDARF: 2475 ZELLEN OHNE COMMON

UP AN      FEHLERFREI
KERNSPEICHERBEDARF: 104 ZELLEN OHNE COMMON

UP BN      FEHLERFREI
KERNSPEICHERBEDARF: 78 ZELLEN OHNE COMMON

```

SEITE 5

Assim dado os VALORES DA FUNCAO : obtemos os

```

-2.00000
-1.75690
-1.52780
-1.31250
-1.11110
-0.92360
-0.75000
-0.59030
-0.44440
-0.31250
-0.19440
-0.09030
0.00000
0.07640
0.13890
0.18750
0.22220
0.24310
0.25000
0.24310
0.22220
0.18750
0.13890
0.07640
0.00000

```

VALORES DOS TERMOS :

```

A ( 0 ) = -0.66897
B ( 1 ) = 0.63298
A ( 2 ) = 0.40761
B ( 2 ) = -0.31101
A ( 3 ) = -0.10367
B ( 3 ) = 0.20118
A ( 4 ) = 0.04742
B ( 4 ) = -0.14434
A ( 5 ) = -0.02778
B ( 5 ) = 0.10861
A ( 6 ) = 0.01374
B ( 6 ) = -0.08333
A ( 7 ) = -0.01390
B ( 7 ) = 0.06394
A ( 8 ) = 0.01104
B ( 8 ) = -0.04811
A ( 9 ) = -0.00927
B ( 9 ) = 0.03452
A ( 9 ) = 0.00814
B ( 10 ) = -0.02232
A ( 10 ) = -0.00744

```

E, também o desenvolvimento da função em série de Fourier (vide eq. (1.5)).

$$F(T^*) = -0.33 +$$

+	0.41	COS	1	(T* - 12.00)	+		0.63	SEN	1	(T* - 12.00))
-	0.10	COS	2	(T* - 12.00)	-		0.31	SEN	2	(T* - 12.00))
+	0.05	COS	3	(T* - 12.00)	+		0.20	SEN	3	(T* - 12.00))
-	0.03	COS	4	(T* - 12.00)	-		0.14	SEN	4	(T* - 12.00))
+	0.02	COS	5	(T* - 12.00)	+		0.11	SEN	5	(T* - 12.00))
-	0.01	COS	6	(T* - 12.00)	-		0.08	SEN	6	(T* - 12.00))
+	0.01	COS	7	(T* - 12.00)	+		0.06	SEN	7	(T* - 12.00))
-	0.01	COS	8	(T* - 12.00)	-		0.05	SEN	8	(T* - 12.00))
+	0.01	COS	9	(T* - 12.00)	+		0.03	SEN	9	(T* - 12.00))
-	0.01	COS	10	(T* - 12.00)	-		0.02	SEN	10	(T* - 12.00))

onde $0 \leq T^* \leq 24$

Observações:

- O_1 - Este desenvolvimento em série de Fourier apresenta, em consequência das tabelas (3.2)(a) e (3.2)(b), 10 harmônicos: evidentemente que, dependendo da precisão de um problema, poder-se-á limitar o número de harmônicos, simplificando assim os resultados obtidos. No entanto, quanto mais harmônicos forem tomados, mais próximo estará a função dos seus dados originais.
- O_2 - Introduziu-se uma nova variável $t^*=t+L$ (L =semi-período) para transladar o eixo dos $f(t)$ de uma origem $(t_0, f(t_0))$, criada pelas circunstâncias do método (interpretação dada a meio ordenada $f(t_0)$) para a origem real $(-t_1, f(-t_1))$ que corresponde ao valor inicial da tabela.
- O_3 - O programa para computação digital dado, anteriormente também calcula cada um dos dados discretos, através do desenvolvimento obtido testando, assim, a eficiência do método para o problema em estudo.

3.5 - APLICAÇÕES

Veremos, a seguir, algumas aplicações do método em problemas de engenharia. Vale dizer que o mesmo é inteiramente satisfatório quando não houver grandes variações de valores absolutos

tos em pequenos intervalos de tempo.

A.1 - Os valores das ações de uma firma comercial oscilaram no período de 1 ano, conforme mostra a tabela abaixo.

ANO=1975

Mês	Dia	Valor
JAN	1	Cr\$1.000,00
FEV	1	Cr\$1.200,00
MAR	1	Cr\$1.080,00
ABR	1	Cr\$ 960,00
MAI	1	Cr\$ 980,00
JUN	1	Cr\$ 820,00

Mês	Dia	Valor
JUL	1	Cr\$1.200,00
AGO	1	Cr\$1.220,00
SET	1	Cr\$1.100,00
OUT	1	Cr\$ 960,00
NOV	1	Cr\$ 965,00
DEZ	1	Cr\$1.000,00

Determinar uma função que represente o valor da ação em função do tempo.

Solução:

Notemos que o período de 1 ano só será completo se considerarmos o dia 1º de janeiro de 1976. Deste modo, a meio ordenada será interpretada pelo valor Cr\$1.200,00.

As tabelas de pesos (3.1)(a) e (3.1)(b) serão usadas para o cálculo dos coeficientes a_n e b_n , visto que os dados foram considerados em intervalos de $\frac{1}{12}$ do período.

Do programa para computação digital, dado anteriormente, resulta a função:

$$F(T) = 1040.42 +$$

$$\begin{array}{r}
 + \quad 13.15 \text{ COS } 1 (T^* - 6.00) + \quad 17.48 \text{ SEN } 1 (T^* - 6.00) \\
 + \quad 56.25 \text{ COS } 2 (T^* - 6.00) + \quad 120.47 \text{ SEN } 2 (T^* - 6.00) \\
 + \quad 27.50 \text{ COS } 3 (T^* - 6.00) + \quad 53.26 \text{ SEN } 3 (T^* - 6.00) \\
 - \quad 10.41 \text{ COS } 4 (T^* - 6.00) + \quad 52.77 \text{ SEN } 4 (T^* - 6.00) \\
 + \quad 59.34 \text{ COS } 5 (T^* - 6.00) + \quad 15.97 \text{ SEN } 5 (T^* - 6.00) \\
 + \quad 27.50 \text{ COS } 6 (T^* - 6.00) - \quad 0.10 \text{ SEN } 6 (T^* - 6.00) \\
 + \quad 59.35 \text{ COS } 7 (T^* - 6.00) - \quad 15.92 \text{ SEN } 7 (T^* - 6.00) \\
 - \quad 10.42 \text{ COS } 8 (T^* - 6.00) - \quad 52.60 \text{ SEN } 8 (T^* - 6.00) \\
 + \quad 27.51 \text{ COS } 9 (T^* - 6.00) - \quad 23.40 \text{ SEN } 9 (T^* - 6.00) \\
 + \quad 56.23 \text{ COS } 10 (T^* - 6.00) - \quad 120.57 \text{ SEN } 10 (T^* - 6.00)
 \end{array}$$

que exprime o valor da ação em função do tempo (t^*) onde $0 \leq t^* \leq 360$.

A.2 - A seguinte tabela dá a pressão do cilindro por polegada quadrada para uma máquina de combustão interna de 4 ciclos, com incrementos de 30° do ângulo de manivela t^* .

t^*	P	t^*	P	t^*	P	t^*	P	t^*	P
0°	200	150°	45	300°	0	450°	0	600°	5
30°	350	180°	20	330°	0	480°	0	630°	11
60°	167	210°	6	360°	$0 + y_{12} = f(t_0)$	510°	0	660°	30
90°	102	240°	0	390°	0	540°	0	690°	90
120°	65	270°	0	420°	0	570°	0	720°	200

Determine a análise harmônica da pressão.

Solução:

Interpretemos o valor da pressão, acima indicado, como a meio ordenada, ou seja, $y_{12} = f(t_0) = 0$.

Por serem os dados considerados em intervalos de $1/24$ de um período, voltamos a usar as tabelas (3.2)(a) e (3.2)(b) para o cálculo dos coeficientes a_n e b_n . Do programa para computação digital, resulta o desenvolvimento da função em série de Fourier.

$$F(T^*) = 45.46$$

-	76.72	CO S	1	(T^*	-360.00)	-	26.78	SEN	1	(T^*	-360.00)
+	48.37	CO S	2	(T^*	-360.00)	+	34.26	SEN	2	(T^*	-360.00)
-	27.80	CO S	3	(T^*	-360.00)	-	27.43	SEN	3	(T^*	-360.00)
+	18.25	CO S	4	(T^*	-360.00)	+	21.51	SEN	4	(T^*	-360.00)
-	11.34	CO S	5	(T^*	-360.00)	-	19.71	SEN	5	(T^*	-360.00)
+	4.42	CO S	6	(T^*	-360.00)	+	17.33	SEN	6	(T^*	-360.00)
+	0.60	CO S	7	(T^*	-360.00)	-	13.62	SEN	7	(T^*	-360.00)
-	3.83	CO S	8	(T^*	-360.00)	+	10.39	SEN	8	(T^*	-360.00)
+	6.14	CO S	9	(T^*	-360.00)	-	7.93	SEN	9	(T^*	-360.00)
-	7.78	CO S	10	(T^*	-360.00)	+	5.83	SEN	10	(T^*	-360.00)

Sendo $0 \leq t^* \leq 720^\circ$

A.3 - As temperaturas normais máxima e mínima de uma determinada cidade, nos dias 1^{os}. e 15^{os}. de cada mês, são dadas pela seguintes tabela:

Mês	Dias	T _{Max}	T _{min}
JAN	1	38	26
	15	37	25
FEV	1	37	24
	15	38	25
MAR	1	41	26
	15	45	30
ABR	1	51	36
	15	57	42

Mês	Dias	T _{Max}	T _{min}
MAI	1	63	48
	15	68	52
JUN	1	73	57
	15	77	60
JUL	1	80	64
	15	82	66
AGO	1	82	67
	15	80	67

Mês	Dias	T _{Max}	T _{min}
SET	1	77	64
	15	74	60
OUT	1	69	55
	15	64	49
NOV	1	57	43
	15	51	37
DEZ	1	45	32
	15	41	29

Desprezando as ligeiras irregularidades no intervalo dos dados, determine a análise harmônica da temperatura máxima e da temperatura mínima.

Solução:

Neste problema, para que possamos determinar a meio ordenada, é preciso considerar o dia 1º do ano seguinte, a fim de que se possa fechar o período. Assim, os dados passam a ser os seguintes:

Valores de T_{Max}

38.00000
37.00000
37.00000
38.00000
41.00000
45.00000
51.00000
57.00000
63.00000
68.00000
73.00000
77.00000
80.00000
82.00000
82.00000
80.00000
77.00000
74.00000
69.00000
64.00000
57.00000
51.00000
45.00000
41.00000
38.00000

Valores de T_{min}

26.00000
25.00000
24.00000
25.00000
26.00000
30.00000
36.00000
42.00000
48.00000
52.00000
57.00000
60.00000
64.00000
66.00000
67.00000
67.00000
64.00000
60.00000
55.00000
49.00000
43.00000
37.00000
32.00000
29.00000
26.00000



Portanto, 80 e 64 são, respectivamente, as meio ordenadas das temperaturas máxima e mínima.

Como vemos, os dados foram considerados em 1/24 de um período e o processo de resolução, como não podia deixar de ser, é idêntico aos anteriores, lembrando, porém, que, para efeito de cálculo, as temperaturas deverão ser disponíveis em intervalos de 15 dias, a partir de 0 (zero). Assim, teremos:

Para T_{max}		Para T_{min}	
Dias	T_{max}	Dias	T_{min}
0	38	0	26
15	37	15	25
30	37	30	24
45	38	45	25
60	41	60	26
⋮	⋮	⋮	⋮

Usando, pois, o programa visto anteriormente, obtemos:

$$T_{max} = f(T^*) = 59.46$$

+	20.99	COS	1	(T^*	-180.00)	+	8.94	SEN	1	(T^*	-180.00)
-	0.42	COS	2	(T^*	-180.00)	-	0.20	SEN	2	(T^*	-180.00)
-	0.00	COS	3	(T^*	-180.00)	-	0.20	SEN	3	(T^*	-180.00)
+	0.17	COS	4	(T^*	-180.00)	+	0.43	SEN	4	(T^*	-180.00)
+	0.02	COS	5	(T^*	-180.00)	+	0.07	SEN	5	(T^*	-180.00)
-	0.08	COS	6	(T^*	-180.00)	-	0.00	SEN	6	(T^*	-180.00)
-	0.06	COS	7	(T^*	-180.00)	-	0.02	SEN	7	(T^*	-180.00)
+	0.08	COS	8	(T^*	-180.00)	+	0.00	SEN	8	(T^*	-180.00)
-	0.00	COS	9	(T^*	-180.00)	-	0.03	SEN	9	(T^*	-180.00)
+	0.01	COS	10	(T^*	-180.00)	+	0.05	SEN	10	(T^*	-180.00)

$$T_{min} = f(T^*) = 45.17$$

+	19.52	COS	1	(T^*	-180.00)	+	9.50	SEN	1	(T^*	-180.00)
-	0.20	COS	2	(T^*	-180.00)	-	0.36	SEN	2	(T^*	-180.00)
-	0.89	COS	3	(T^*	-180.00)	-	0.08	SEN	3	(T^*	-180.00)
+	0.00	COS	4	(T^*	-180.00)	+	0.43	SEN	4	(T^*	-180.00)
+	0.10	COS	5	(T^*	-180.00)	+	0.04	SEN	5	(T^*	-180.00)
+	0.00	COS	6	(T^*	-180.00)	-	0.17	SEN	6	(T^*	-180.00)
+	0.01	COS	7	(T^*	-180.00)	+	0.06	SEN	7	(T^*	-180.00)
+	0.08	COS	8	(T^*	-180.00)	+	0.00	SEN	8	(T^*	-180.00)
+	0.05	COS	9	(T^*	-180.00)	+	0.08	SEN	9	(T^*	-180.00)
-	0.05	COS	10	(T^*	-180.00)	-	0.22	SEN	10	(T^*	-180.00)

Sendo $0 \leq t^* \leq 360$

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES

4.1 - INTRODUÇÃO

Mostraremos, neste capítulo, a eficiência do método em estudos de sismógrafo, absorvedor dinâmico e circuitos eletromecânicos, utilizando para tais estudos a computação digital e híbrida.

4.2 - APLICAÇÃO A INSTRUMENTO SÍSMICO

Um modelo generalizado para medidas de vibrações é mostrado na fig.(4.1). A base está ligada ao corpo tendo uma vibração dada por uma excitação $F(t)$, definida pela seguinte tabela:

(S)t	F(t)(cm)	t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)
0	0,000	5	4,003	10	0,450	15	-1,035	20	-6,200		
1	8,904	6	3,029	11	0,000	16	-1,850	21	-6,920		
2	7,919	7	2,944	12	0,000	17	-2,950	22	-8,020		
3	6,060	8	1,079	13	0,000	18	-3,220	23	-9,350		
4	5,968	9	0,933	14	-0,653	19	-4,350	24	0,000		

que representa as amplitudes de vibração de uma máquina alternativa.

Sendo $K=50.000$ [N/m], $m=500$ [kg], $C=8.125$ [kg/s] e $F(t)=x_2$, investigar o movimento do sistema.

Solução:

As forças que agem sobre a massa são: a de mo
la

$$f_m = K\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)(x_1 - x_2) \quad (4.1)$$

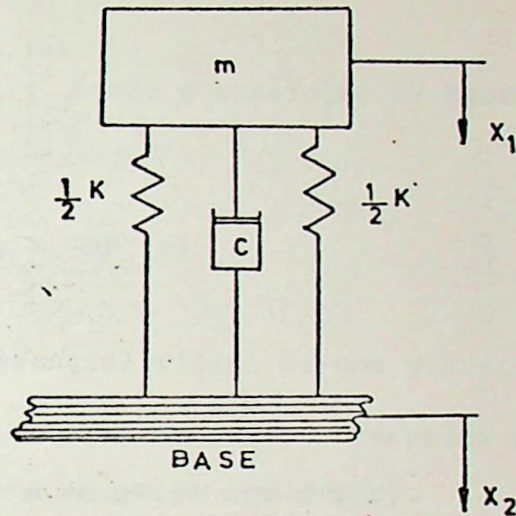


Fig.(4.1) - Modelo matemático de um aparelho sísmico

e a de amortecimento:

$$f_a = C(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (4.2)$$

Assumindo que x_1 é maior que x_2 , e usando

$\Sigma F = ma$, teremos:

$$-k(x_1 - x_2) - C(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m\ddot{x}_1 \quad (4.3)$$

Se o movimento é relativo para

$x = x_1 - x_2$, então:

$$x_1 = x + x_2 \quad \text{e} \quad \dot{x}_1 = \dot{x} + \dot{x}_2$$

e a equação do movimento (4.3) torna-se:

$$m(\ddot{x} + \ddot{x}_2) + C\dot{x} + kx = 0 \quad \text{ou}$$

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_2 \quad (4.4)$$

Sendo a excitação da base $x_2 = F(t)$, de (4.4)

resulta:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = -mF''(t) \quad (4.5)$$

que é a equação diferencial típica de uma vibração forçada.

Para obtermos a resposta em regime permanente teremos que resolver a eq.(4.5) com $x=\psi(t)$.

Como a função forçante $F(t)$ não é definida por uma sentença, a solução da equação diferencial (4.5) não poderá ser resolvida pelos métodos normais existentes no cálculo diferencial. Portanto, para solucionar tal equação desenvolveremos a função $F(t)$ em série de Fourier, através da análise harmônica. Em seguida resolveremos a equação usando o computador digital, obtendo, finalmente, a resposta da excitação do sistema, fig. (4.3).

Um tipo de instrumento sísmico, o vibrôgrafo, usa deste princípio para medir amplitudes de vibração. O movimento relativo entre a massa e a base é usualmente registrada por uma pena pressionada sobre um cilindro rotativo, fig.(4.2), quando a frequência natural do vibrôgrafo tiver um valor muito baixo, a amplitude de vibração será vista como a do movimento relativo registrado com uma diferença de fase de 180° .

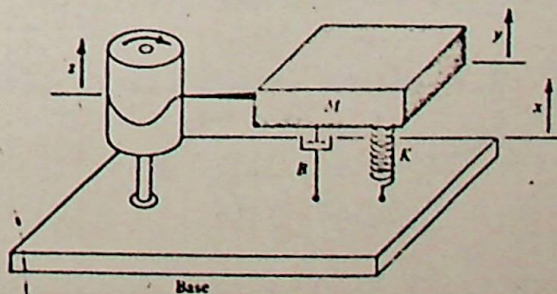


Fig.(4.2) - Vibrôgrafo

Um outro tipo de instrumento sísmico, o acelerômetro, que é usado para medir aceleração, utiliza o mesmo princípio. Ao invés de usar molas macias, muitas molas duras são usadas para dar uma grande frequência natural. Conseqüentemente, a razão de frequência será pequena, e o movimento relativo será a medida da aceleração.

a) Desenvolvimento de $F(t)$ em série de Fourier.

$$F(T) = -0.14 +$$

+	0.06	COS	1	(T - 12.00)	-	4.74	SEN	1	(T - 12.00)
+	0.04	COS	2	(T - 12.00)	+	3.52	SEN	2	(T - 12.00)
+	0.01	COS	3	(T - 12.00)	+	2.02	SEN	3	(T - 12.00)
+	0.09	COS	4	(T - 12.00)	+	1.54	SEN	4	(T - 12.00)
+	0.02	COS	5	(T - 12.00)	+	1.04	SEN	5	(T - 12.00)
+	0.04	COS	6	(T - 12.00)	+	0.81	SEN	6	(T - 12.00)
+	0.01	COS	7	(T - 12.00)	+	0.75	SEN	7	(T - 12.00)
+	0.01	COS	8	(T - 12.00)	+	0.74	SEN	8	(T - 12.00)
+	0.08	COS	9	(T - 12.00)	+	0.22	SEN	9	(T - 12.00)
+	0.05	COS	10	(T - 12.00)	+	0.04	SEN	10	(T - 12.00)



b) Resposta da excitação do sistema

```
TR 86 FORTRAN COMPILER MV09(70) 240975 AFPL+SA1+BA1.
TR 86 FORTRAN COMPILER MV09(70) 240975 AFPL+SA7+BA7.
TR 86 FORTRAN COMPILER MV09(70) 240975 AFPL+SB6+BB6.
TR 86 FORTRAN COMPILER MV09(70) 240975 FOKA.
```

```
DIMENSION T(101), X(101), Y(25)
COMMON T,X
EXTERNAL F1, F2
N = 25
CALL FN42 (F1, F2, 0., 0., 0., 0.01, 25., T, X, Y, 25 )
WRITE (1,1) ( T(I), X(I), Y(I), I=1, 25 )
1 FORMAT(1H1, '////', 10X, 'SOLUCAO DO PROBLEMA NUMERICO', 1H1, '///',
120X, 'T', 10X, 'X(T)', 10X, 'Y(T) / 25(3X, 3(13X, F8.4))')
XMAXP = 4.
XMAXN = 2.
TMAX = 24.
CALL PLU130 (TMAX, XMAXP, XMAXN, N )
STOP
END
```

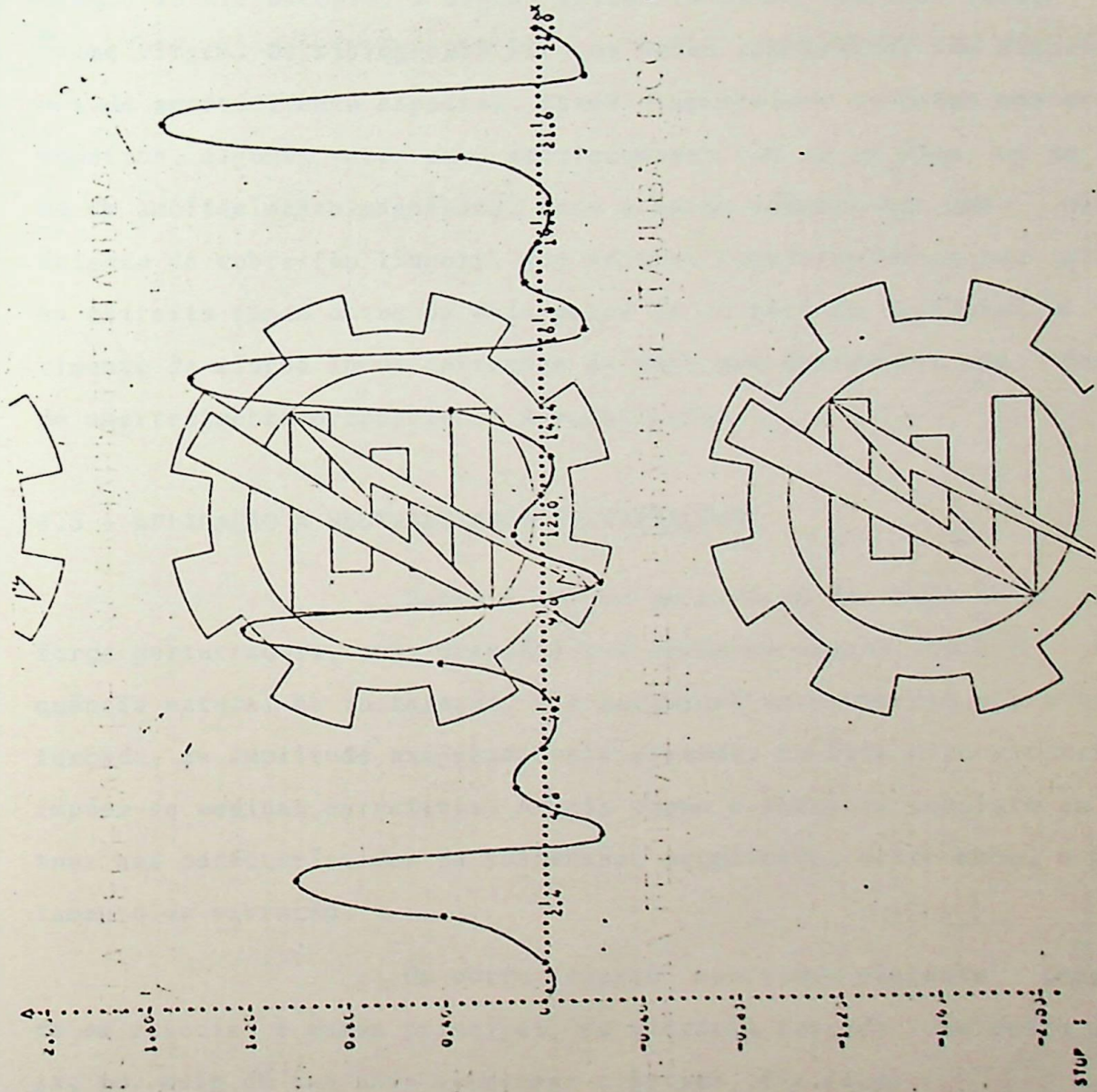


Fig.(4.3) - Resposta da Excitação de $F(t)$

c) Comentários

Os vibrógrafos mais elaborados contêm um instrumento de registro. Alguns têm registrador de pena, para registro numa tira de papel, que se move por dispositivo de relógio; alguns efetuam o registro em celuloide ou vidro, que é subseqüentemente examinado ao microscópio, e alguns enviam um feixe luminoso sobre um filme virgem. Os vibrógrafos são por vezes construídos sem dispositivos de amortecimento especial. Esses dispositivos aparecem nos acelerômetros, algumas vezes como amortecedores com ar ou óleo, ou na forma de amortecimento magnético, onde a massa sísmica tem uma placa delgada de cobre (ou língua), que se move paralelamente a seu plano na estreita fenda entre os dois polos de um potente eletroímã. O movimento da língua induz correntes de fuga que desenvolvem uma força de amortecimento proporcional à velocidade.

4.3 - APLICAÇÃO A NEUTRALIZADOR DE VIBRAÇÕES

Sabemos que se um sistema for sujeito a uma força perturbadora, cuja frequência é aproximadamente igual à frequência natural da instalação, ele executará um movimento vibratório forçado, de amplitude exageradamente elevada. Em tais circunstâncias, impõem-se medidas corretivas. A mais comum e imediata consiste em atuar nas características da suspensão, promovendo, deste modo, o isolamento da vibração.

Um outro recurso, sobretudo elegante, consiste em associar à massa principal, em vibração forçada, uma outra massa, por meio de uma nova suspensão elástica, fig.(4.4).

Desta forma, o sistema passa a ter dois graus de liberdade, que torna possível a determinação de duas amplitudes - (de m_1 e m_2).

A essa montagem chamaremos de neutralizador de vibrações. Corretamente projetado e executado, ele é capaz de anu

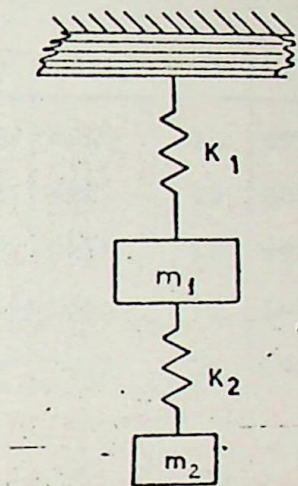


Fig.(4.4) - Modelo matemático de um absorvedor dinâmico

lar completamente a amplitude, sendo curiosamente, tanto mais eficiente quanto mais próximas estiverem as condições de ressonância.

A fig.(4.5)(a) mostra que a massa M tem uma vibração forçada. Eliminaremos tanto quanto possível a amplitude de vibração da massa M , usando uma massa-mola auxiliar que é adicionada à massa M , conforme fig.(4.5)(b).

A massa M é excitada por uma função $F(t)$ (força), aleatória, dada pela tabela abaixo. Estudar o problema.

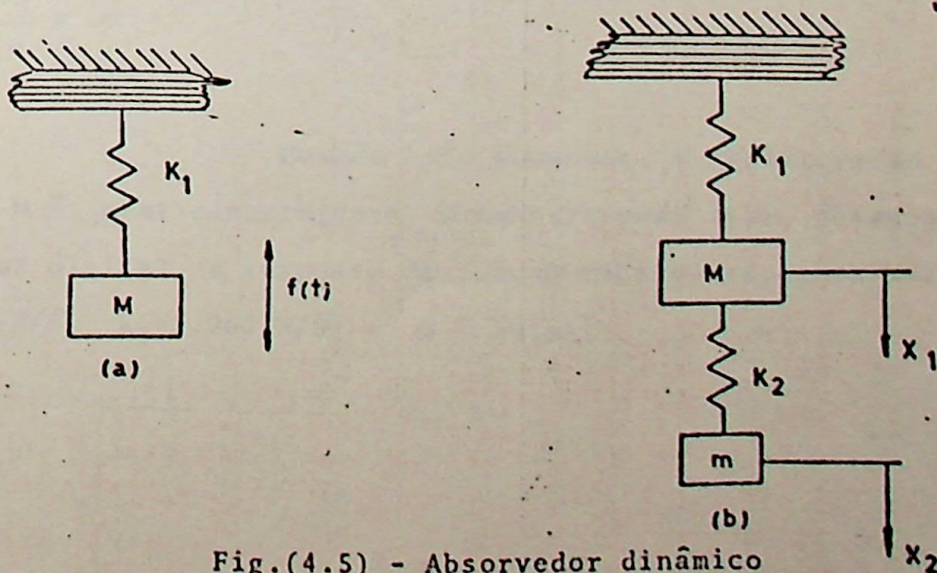


Fig.(4.5) - Absorvedor dinâmico

Função dada discretamente (força)

t(S)	f(t)(kgf)	f	f(t)	t	f(t)	t	f(t)	t	f(t)
0	5100	5	4997	10	4900	15	5006	20	5099
1	4904	6	4971	11	5056	16	5024	21	4902
2	5081	7	5056	12	4916	17	4947	22	5086
3	4940	8	4921	13	5063	18	5075	23	4933
4	5032	9	5093	14	4963	19	4907	24	5040

Solução:

Na fig.(4.5)(b), o sistema é de dois graus de liberdade com uma função forçante agindo na massa M. As equações do movimento são:

$$M\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F(t) \quad (4.6)$$

$$m\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (4.7)$$

O neutralizador é usado quando a frequência natural do sistema é aproximadamente igual à frequência do sistema auxiliar.

$$\frac{k_1}{M} = \frac{k_2}{m} \quad (4.8)$$

Quando isto acontece, a amplitude de vibração da massa M é, praticamente, zero. Demonstraremos isto, obtendo no computador digital, a resposta da função excitadora, para $M=25$ [kg], $k_1=5.000$ [N/S], $k_2=1.000$ [N/S] e $m = 10$ [kg]

a) Desenvolvimento da função $F(t)$ em série de Fourier.

$$F(T) = 4995,50 +$$

+	4.40	COS	1	(T - 12.00)	-	6.20	SEN	1	(T - 12.00)
+	3.28	COS	2	(T - 12.00)	+	5.82	SEN	2	(T - 12.00)
-	6.86	COS	3	(T - 12.00)	+	1.12	SEN	3	(T - 12.00)
+	2.90	COS	4	(T - 12.00)	-	8.01	SEN	4	(T - 12.00)
+	4.86	COS	5	(T - 12.00)	+	8.48	SEN	5	(T - 12.00)
-	8.65	COS	6	(T - 12.00)	-	2.67	SEN	6	(T - 12.00)
+	5.32	COS	7	(T - 12.00)	+	2.97	SEN	7	(T - 12.00)
+	1.14	COS	8	(T - 12.00)	+	1.80	SEN	8	(T - 12.00)
-	2.84	COS	9	(T - 12.00)	-	7.12	SEN	9	(T - 12.00)
-	9.58	COS	10	(T - 12.00)	+	20.74	SEN	10	(T - 12.00)

b) Resposta da excitação $F(t)$.

```

TR 86 FORTRAN COMPILER MV09(70) 240975 AFPL+SA1+BA1.
TR 86 FORTRAN COMPILER MV09(70) 240975 AFPL+SA7+BA7.
TR 86 FORTRAN COMPILER MV09(70) 240975 FOBA.

DIMENSION Y(4),XS(100),YS(4,100),YE(100),A1(4),A2(4),
1 A3(4),A4(4),A5(4),A6(4)
COMMON T,PLOT(101),YPLLOT(101)
EXTERNAL F
DO 22 I=1,4
Y(I)=0.
22 CONTINUE
CALL RK4N (F,0.,Y,0.01, 6.,XS,YS,A1,A2,A3,A4,A5,A6,4,100)
DO 5 L=1,4
WRITE(1,3) L
WRITE(1,2) (XS(I),YS(L,I),I=1,100)
2 FORMAT (1X,2G20.4)
3 FORMAT (1H1,11X,'I',21X,1X(1,11,1))
XMAXP = YS(L,1)
XMAXN = YS(L,1)
DO 4 I = 1,100
IF (YS(L,I).GE.XMAXP) XMAXP=YS(L,I)
IF (YS(L,I).LE.XMAXN) XMAXN=YS(L,I)
4 TPLLOT(I) = XS(I)
YPLLOT(I) = YS(L,I)
XMAXN = ABS(XMAXN)
N=100
TMAX=6.
IF (XMAXN.LT.1.E-15) XMAXN=1.
IF (XMAXP.LT.1.E-15) XMAXP=1.
CALL PLOT30 (TMAX, XMAXP, XMAXN, N)
5 CONTINUE
STOP
END

```

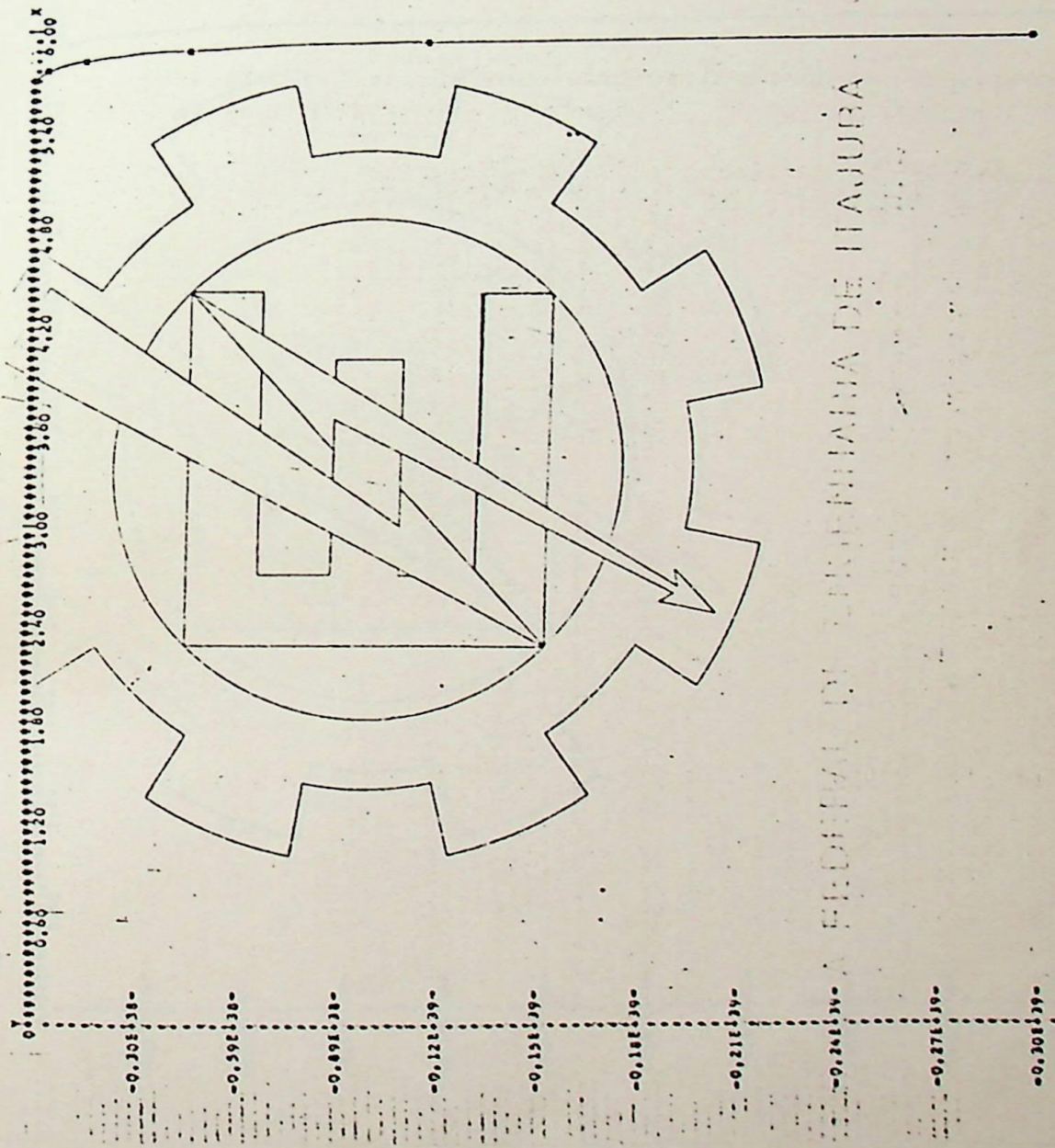


Fig.(4.6) - Resposta da excitação de $F(t)$ para $m=10$ [kg]

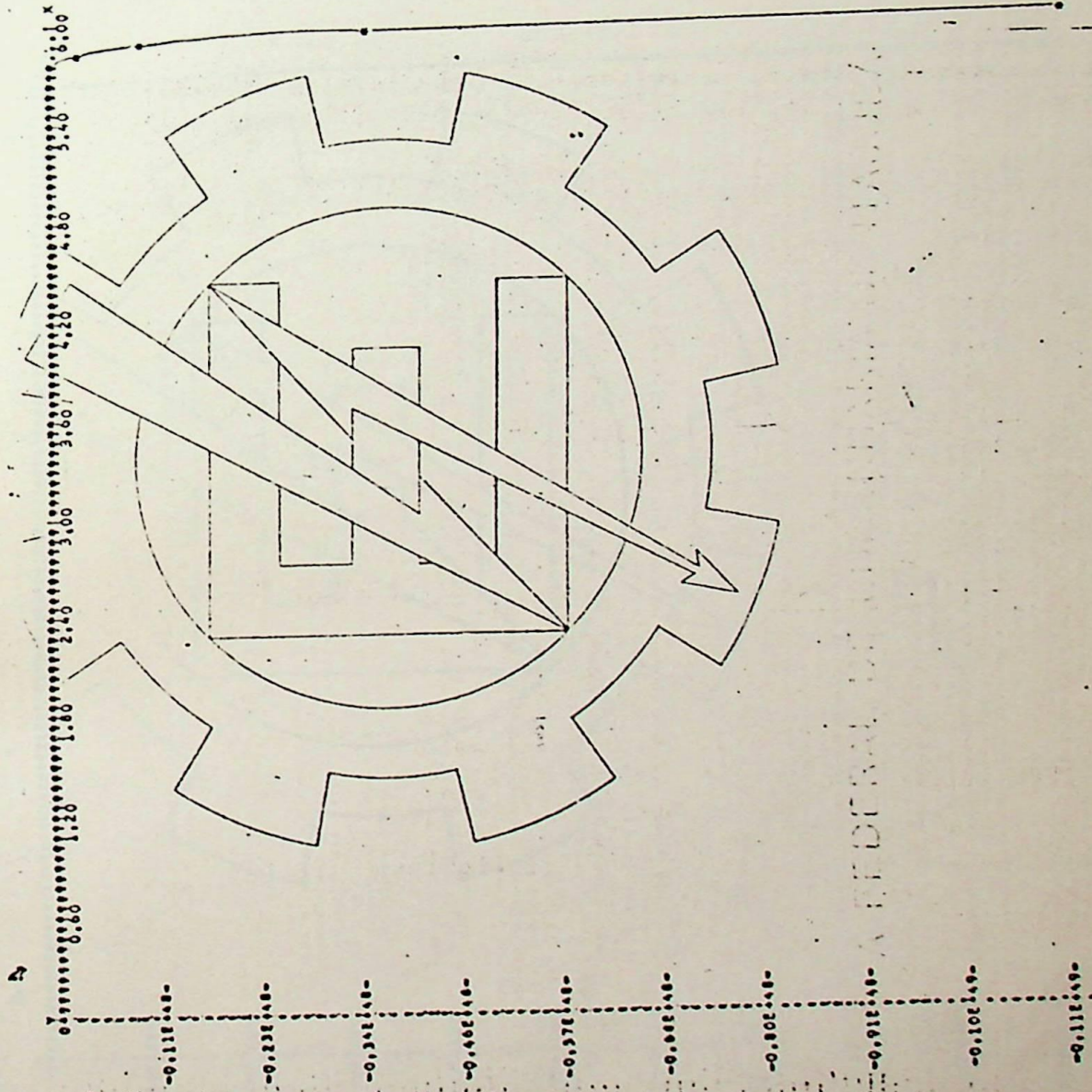


Fig.(4.7) - Resposta da excitação de $F(t)$ para $m=5$ [kg]



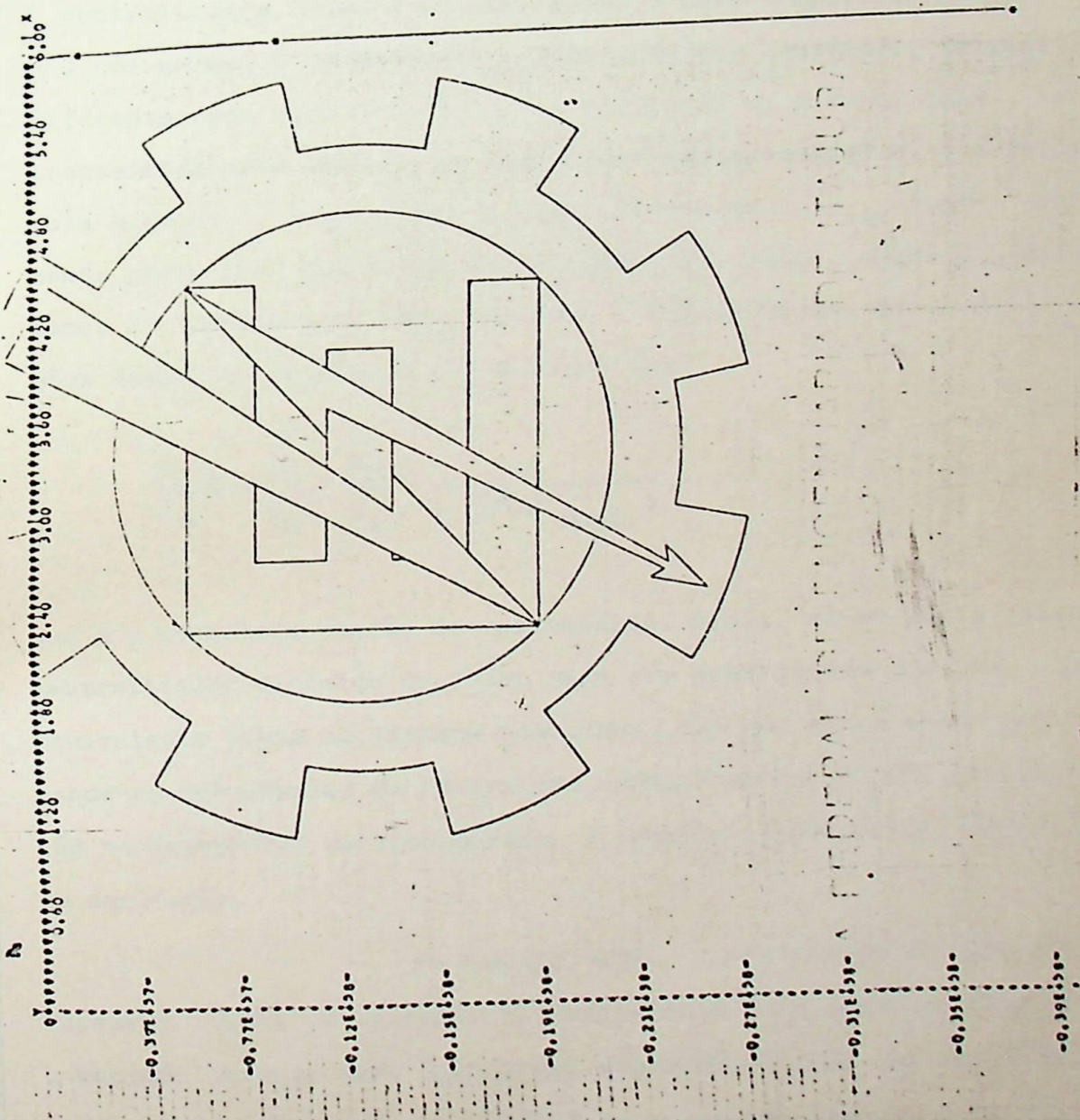


Fig.(4.8) - Resposta da excitação de $F(t)$ para $m=3$ [kg]

c) Comentários

Os resultados obtidos podem ser interpretados da seguinte maneira, que é útil em certas aplicações. Na fig.(4.5) - (b), seja o neutralizador de Frahm k_2, m substituído por uma massa m_{eqv} presa solidamente à massa principal M , e seja essa massa equivalente escolhida de maneira que o movimento x_1 seja o mesmo que com o neutralizador. Como o neutralizador é mais complicado do que apenas uma massa, é claro que m_{eqv} não pode ser constante, devendo ser diferente para cada frequência de excitação w . A força para baixo, transmitida pelo absorvedor para o sistema principal M , é a força de mola $k_2(x_2 - t_1)$, que é igual a $-m\ddot{x}_2$. Se uma massa m_{eqv} fosse solidamente presa a M , sua força de relação, para baixo, sobre M , seria a força de inércia pura $-m_{eqv}\ddot{x}_1$. Para a equivalência, essas duas reações devem ser iguais de tal maneira que:

$$\frac{m_{eqv}}{m} = \frac{\ddot{x}_2}{\ddot{x}_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{1 - (w^2/w_{neutr}^2)}$$

que é a conhecida reação de ressonância. Assim, vê-se que o sistema neutralizador dinâmico de Frahm pode ser substituído por uma massa equivalente presa ao sistema principal, tal que ela é positiva para pequenas frequências de excitação, infinitamente grande para excitação na frequência de ressonância, e negativa para altas frequências de excitação.

No exemplo dado, a velocidade da máquina é variável (força não periódica), entretanto tais como os motores de combustão interna para aplicações automobilísticas ou aeronáuticas, o dispositivo é totalmente inútil porque simplesmente substituímos o sistema original de velocidade de ressonância (com $\frac{w}{w_n} = 1$) por outro sistema com duas velocidades de ressonâncias, mas, mesmo assim, o neutralizador pode ser vantajoso pela introdução de certa parcela de amortecimento na mola do neutralizador como mostra a resposta de

excitação para $m=10$ [kg], fig.(4.6), no intervalo $0 \leq t \leq 5,8$ [s]. Já no intervalo $t \geq 5,8$ [s] o sistema tende a entrar em ressonância e o neutralizador não consegue amortecer o sistema. Para que isso acontecesse deveríamos variar a massa m . Como ilustração, mostramos nas figs. (4.7) e (4.8) as respostas das excitações de $F(t)$ para massas, respectivamente iguais a 5 [kg] e 3 [kg].

4.4 - APLICAÇÃO A CIRCUITOS ELETRO-MECÂNICOS

Consideremos o sistema mostrado na fig.(4.9). A placa superior do condensador C , com massa $m=15$ [kg], é suspensa por uma mola de constante $k=1000$ [N/m]. Ela é livre para mover sobre a ação da gravidade, da mola e do campo elétrico entre as placas. Consequentemente teremos no sistema a capacidade variável C .

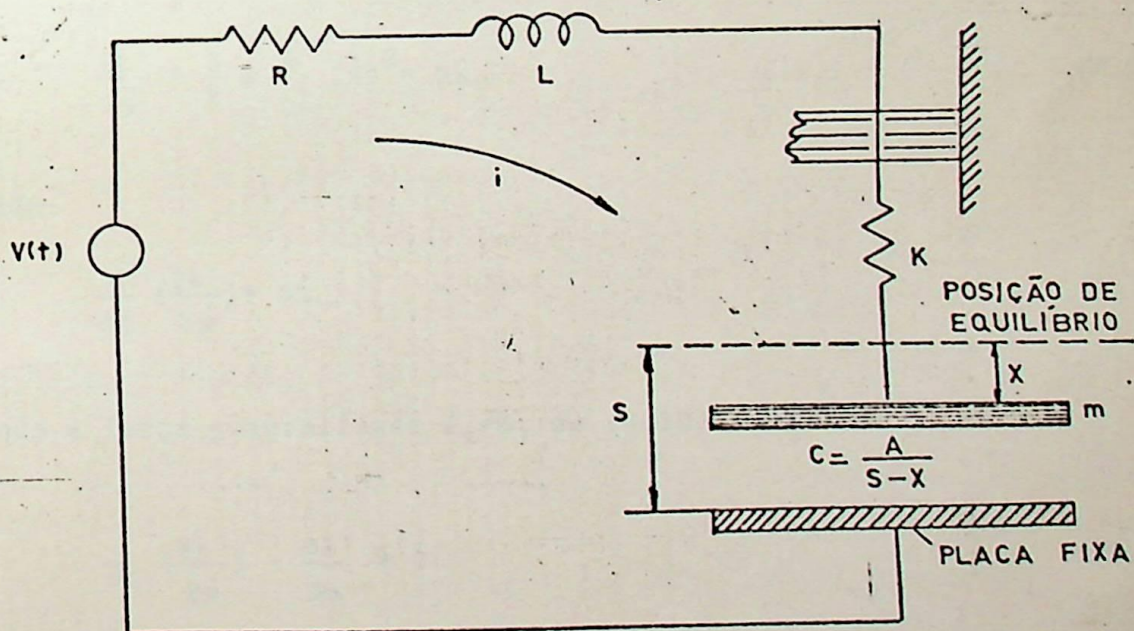


Fig.(4.9) - Sistema eletro-mecânico

Tomemos a linha tracejada como posição de equilíbrio para a placa do condensador descarregado. Assumindo entre as placas nós escrevemos, por conveniência: $C = \frac{A}{S-x}$, onde A é uma constante cujo valor depende da área da placa e das unidades empregadas, e S é a distância indicada. Daí o Lagrangeano para o sistema ser:

$$L' = \frac{1}{2}L \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + q V(t) - \frac{1}{2}q^2 (S-x)/A - \frac{1}{2}kx^2 \quad (4.9)$$

O sistema tem dois graus de liberdade, cujas coordenadas são q e x . Aplicando a equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_R} \right) - \frac{\partial L'}{\partial Q_R} = F_{Q_R} \quad (4.10)$$

para $Q_R = x$ $\dot{Q}_R = \dot{x}$

Da eq.(4.9) decorre:

$$\frac{\partial L'}{\partial x} = \frac{q^2}{2A} - kx \quad e \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\dot{x})^2 = m\dot{x} \quad (4.12)$$

Então:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad (4.13)$$

Sendo a força generalizada $F_x = 0$, de (4.10) resulta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial x} = 0 \quad (4.14)$$

e finalmente,

$$m\ddot{x} + kx - \frac{1}{2} \frac{q^2}{A} = 0 \quad (4.15)$$

Passemos para o 2º grau de liberdade.

$$Q_r = q \quad \dot{Q}_r = \dot{q}$$

Temos pois:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = F_q \quad (4.16)$$

onde $F_q = -R_i = -R \frac{dq}{dt}$

de (4.9) tiramos:

$$\frac{\partial L'}{\partial q} = v(t) - q(S-x)/A \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = L \frac{dq}{dt} \quad (4.18)$$

Donde:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) = L \frac{d^2 q}{dt^2} \quad (4.19)$$

Finalmente, obtemos:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q(S-x)}{A} - V(t) = -R \frac{dq}{dt} \quad (4.20)$$

Portanto, as equações diferenciais do sistema são (4.15) e (4.20).

Pede-se estudar, no computador analógico, o deslocamento $x = \psi(t)$, a capacitância $C(t) = \frac{A}{S-x}$ e a força de atração entre as placas $F(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{A}$, sabendo que $R = 2 [\Omega]$, $L = 0,5 [H]$, $S = 0,10 [m]$, $A = 2 \cdot 10^{-5} [\text{Coulomb}^2/\text{Newton}]$ e $V(t)$ é definida pela tabela a seguir.

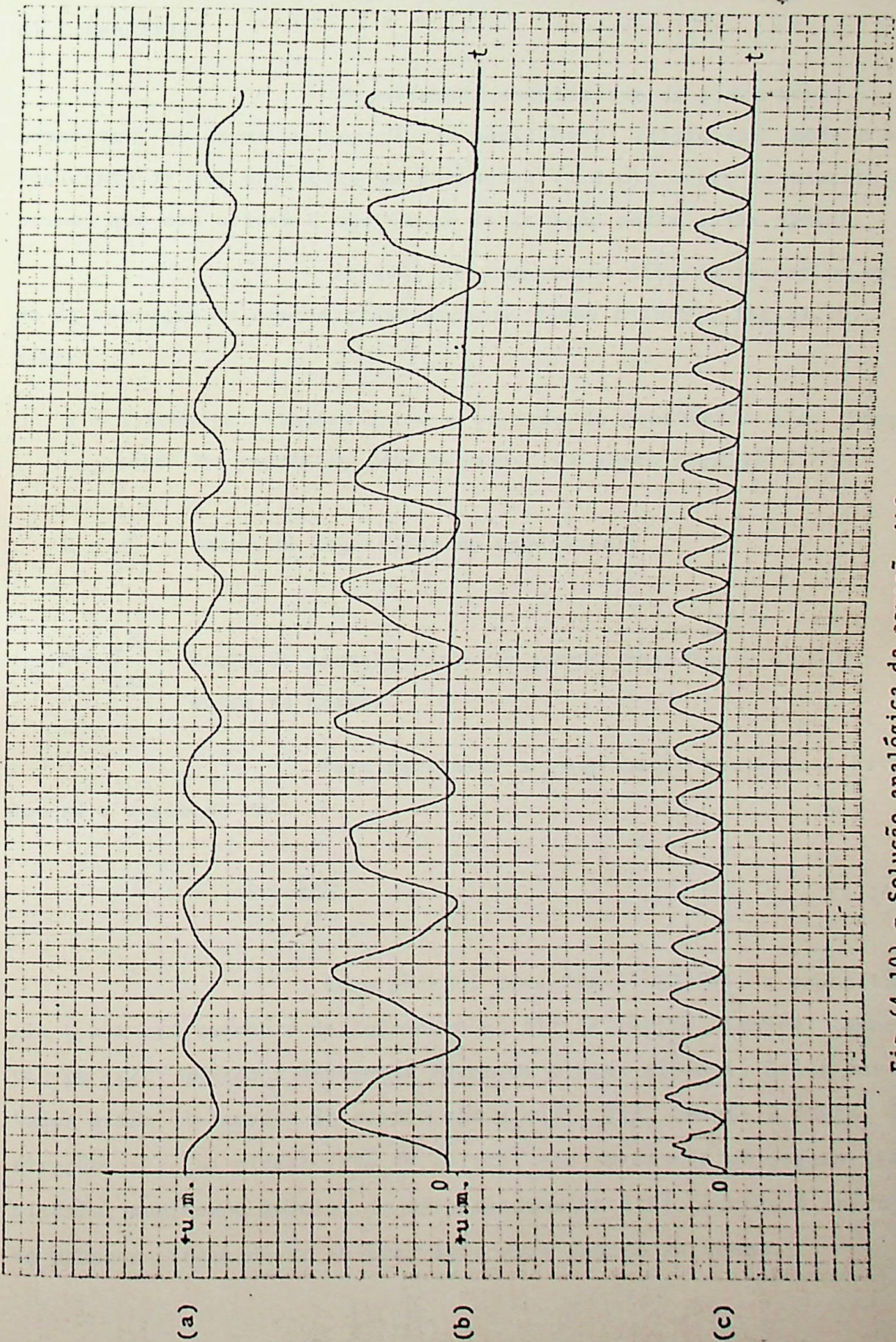


Fig.(4.10) - Solução analógica da equação diferencial

c) Comentários

O movimento oscilatório da placa móvel do capacitor, em torno da posição de equilíbrio, iniciou-se após o aparecimento de uma diferença de potencial (d.d.p), entre as placas do mesmo, que deu origem a uma força de atração entre essas placas.

Através da computação híbrida fêz-se um estudo da variação de certas grandezas num tempo $t=70$ [S], fig.(4.10), a saber:

x → distância relativa entre a posição de equilíbrio e a placa móvel do capacitor (deslocamento da placa móvel).

$C = \frac{A}{S-x}$ → valor da capacidade do condensador

$F = \frac{q^2}{2A}$ → Força de atração entre as placas resultante de d.d.p .
entre as mesmas.

Para facilitar a programação analógica estudou-se a variação de

$$\frac{1}{C} = \frac{S-x}{A} \quad (4.21)$$

Como podemos ver, fig.(4.10)(a), a capacitância C aumenta quando o deslocamento x , fig.(4.10)(b), também aumenta, ou seja: quando a distância entre as placas diminui. Esses resultados estão plenamente de acordo com a eq.(4.21), Quanto à força de atração entre as placas, fig.(4.10)(c), ela apresenta um regime transitório, num tempo inicial de aproximadamente 8 [S], devido à inércia da massa m , tornando-se estável após esse espaço de tempo.

CAPÍTULO V

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Como já tivemos a oportunidade de frisar, o programa para computação digital, Fl.3.18, além de desenvolver as funções com dados discretos, em série de Fourier, também calcula cada um desses dados através do desenvolvimento obtido, permitindo assim testar a eficiência do método para a função em estudo.

A título de ilustração, mostramos os testes feitos para os dados discretos de uma função anteriormente desenvolvida, Fl.3.24.

Dados obtidos
experimentalmente

T_{\max}	T_{\min}
38.000	26.00
37.000	25.00
37.000	24.00
38.000	25.00
41.000	26.00
45.000	30.00
51.000	36.00
57.000	42.00
63.000	48.00
68.000	52.00
73.000	57.00
77.000	60.00
80.000	64.00
82.000	66.00
82.000	67.00
80.000	67.00
77.000	64.00
74.000	60.00
69.000	55.00
64.000	49.00
57.000	43.00
51.000	37.00
45.000	32.00
41.000	29.00
38.000	26.00

Dados obtidos através
da função desenvolvida

T_{\max}	T_{\min}
38.09	26.22
36.96	24.81
36.99	24.15
38.06	24.90
40.90	26.05
45.13	30.01
50.85	35.93
57.16	42.12
62.85	47.83
68.13	52.20
72.90	56.78
77.05	60.23
79.99	63.78
81.95	66.19
82.10	66.85
79.86	67.10
77.18	63.95
73.79	59.99
69.23	55.07
63.76	48.88
57.23	43.17
50.79	36.80
45.18	32.22
40.86	28.77
38.09	26.22

Estabelecido a porcentagem do erro cometida para cada um dos dados, veremos que a maior delas não ultrapassa a 0,8% do seu valor original. Isto vem provar que o método é inteira-

mente satisfatório para este caso.

Portanto, trata-se de um método inteiramente sa
tisfatório para as aplicações ocasionais, e sua eficiência será tan
to maior quanto menor for a variação dos valores absolutos dos da
dos discretos, da função em estudo, em pequenos intervalos do perío
do considerado.

APÊNDICE A

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Bykovsky, I.- Fundamentals of vibrations Engineering - Mir Publishing, Co, New York [1964].
2. Cheng, David K. - The analysis of linear systems, massachussets, Addisson Wesley [1961].
3. Chen Vibrations Theoretical Methods - Addison Wesley Publisher [1966].
4. Church, Austin H. - Mechanical Vibrations - John Wiley and Sons, Inc, New York [1962].
5. Corcoran, George F. - & Kerchner, Russelt, M. - Circuitos de Corrente Alternada, México, Continental [1968].
6. Den Hartog, J.P. - Mechanical Vibrations, McGraw-Hill Book Company, New York [1956].
7. Kaplan, Wilfred - Advanced Calculus, Massachussets, Addson Wesley [1965].
8. Kerchner, Russel, M. - Alternating Currente, John Wiley, New York [1960].
9. Kreyszig, Erwin - Advanced Engineering Mathematics, John Wiley New York [1972].
10. Milne, W.E. - Cálculo Numérico, 2^a Ed., São Paulo, Polígono [1968].
11. Seto, William, W. - Mechanical Vibrations, Shaum Publishers, Co. , New York [1964].
12. Timoshenko, S.- Vibration Problems in Engineering, D.Van Nostrand, Co, New York [1955].

13. Tse, F.S. et alii - Mechanical Vibrations, Allyn and Bacon, Inc, Boston [1963].
14. Wells, Dare A. - Lagrangian Dynamics, Schaw Publishing Edition, New York [1962].