

TESE
301



"TRABALHO DE TESE APRESENTADO NA ESCOLA FEDERAL
DE ENGENHARIA DE ITAJUBA PARA OBTER O TITULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA ELETRICA NA AREA DE CONCEI
TRAÇÃO DE SISTEMAS DE POTENCIA"

" CRITERIO DE POPOV "



Autor: MARCOS CASTELLANOS AGUIRRE
Orientador: ALBERTO EDUARDO FREGOSI

C O N T E Ú D O

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 2 O PROBLEMA DE LUR'E

2.1 O Problema Básico.

2.1.1 Características do elemento LI.

2.1.2 Características do elemento NLI.

2.2 Solução Proposta por Lur'e.

2.2.1 Método de Lur'e.

2.2.2 Critério de Popov para o Problema de Lur'e.

2.2.3 Conexão entre o Critério de Popov e o Método de Lur'e.

2.3 Extensões do Problema Básico.

2.3.1 Respeito do elemento NLI.

2.3.2 Sistemas Multivariáveis.

2.3.3 Sistemas Variantes.

2.3.4 Sistemas Multivariáveis Variantes

CAPÍTULO 3 CRITÉRIO DE POPOV NA ANÁLISE E PROJETO DOS SISTEMAS NÃO-LINEARES.

3.1 Diagramas de Bode e Nichols e o Critério de Popov.

3.1.1 Transferência ao Plano de Bode da Linha Popov.

3.1.2 O Critério de Popov e o Diagrama de Nichols.

3.1.3 Transferência do Critério do Círculo ao Plano de Bode.

C O N T E Ú D O

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 2 O PROBLEMA DE LUR'E

2.1 O Problema Básico.

2.1.1 Características do elemento LI.

2.1.2 Características do elemento NLI.

2.2 Solução Proposta por Lur'e.

2.2.1 Método de Lur'e.

2.2.2 Critério de Popov para o Problema de Lur'e.

2.2.3 Conexão entre o Critério de Popov e o Método de Lur'e.

2.3 Extensões do Problema Básico.

2.3.1 Respeito do elemento NLI.

2.3.2 Sistemas Multivariáveis.

2.3.3 Sistemas Variantes.

2.3.4 Sistemas Multivariáveis Variantes

CAPÍTULO 3 CRITÉRIO DE POPOV NA ANÁLISE E PROJETO DOS SISTEMAS NÃO-LINEARES.

3.1 Diagramas de Bode e Nichols e o Critério de Popov.

3.1.1 Transferência ao Plano de Bode da Linha Popov.

3.1.2 O Critério de Popov e o Diagrama de Nichols.

3.1.3 Transferência do Critério do Círculo ao Plano de Bode.

CAPÍTULO 4 APLICAÇÃO DO CRITÉRIO POPOV EM SISTEMAS DE POTÊNCIA.

4.1 Máquina Síncrona com Regulador de Velocidade.

4.1.1 Aplicação do Critério de Popov.

4.1.2 Aplicação de uma Função Lyapunov do tipo "Quadrática mais Integral da Não-Linearidade".

4.1.3 Máquina Síncrona com Regulador de Velocidade.

4.2 Máquina Síncrona com Decréscimo de Fluxo e Regulador de Voltagem.

4.2.1 Aplicação do Critério de Popov.

4.2.2 Aplicação de uma Função Lyapunov do tipo "Quadrática mais Integral da Não-Linearidade".

4.3 Sistemas Multimáquinas.

4.3.1 Aplicação do Critério de Popov.

4.3.2 Aplicação de uma Função Lyapunov do tipo "Quadrática mais Integral da Não-Linearidade".

4.3.3 Exemplo: Sistema de duas Máquinas

4.3.4 Região de Estabilidade e Tempo de Eliminação de Falta.

CAPÍTULO 5 CONCLUSÕES

APÊNDICE PROVA DO TEOREMA 1 DE POPOV.

BIBLIOGRAFIA

Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal a análise dos aspectos fundamentais da teoria dos sistemas dinâmicos, com ênfase na estabilidade e no comportamento assintótico das trajetórias. O problema de estabilidade formulado por Ljapunov em 1874, através da introdução do conceito de função de Lyapunov [1], marcou o início de uma nova abordagem na análise de sistemas dinâmicos não lineares.

CAPÍTULO 1

" INTRODUÇÃO "

A motivação do problema é procurar sistemas não-lineares cujas trajetórias "asintoticamente" se aproximam de um ponto de equilíbrio. O estudo de sistemas dinâmicos não-lineares com perturbações arbitrárias nos parâmetros é uma tarefa extremamente difícil para a maioria dos casos. O poder de uma boa teoria de estabilidade é fundamental para distinguir

(1) Até agora a condição de suficiência era dada em termos de uma função de Lyapunov, mas não se sabia, em geral, como encontrar tal função. O exemplo clássico de um sistema não-linear cujo comportamento assintótico não pode ser determinado por métodos lineares é o sistema de Van der Pol. A teoria de estabilidade de Lyapunov fornece um método global e satisfatório para resolver este problema.

INTRODUÇÃO

O estudo da estabilidade Assintótica Global ocupa um lugar importante na teoria dos Sistemas de Controle Automático. O problema, inicialmente formulado por A.I. Lur'e e V.N. Postnikov [31] em 1944, mereceu rapidamente a atenção de numerosos cientistas que originaram um grande número de trabalhos sobre o tema.

A transcendência do problema foi grande, fundamentalmente por duas razões: a) a sua importância teórica em geral e b) a sua aplicação prática em particular a um grande número de problemas da Engenharia. Existe atualmente a impressão de que o problema será resolvido totalmente chegando a estabelecer as condições de necessidade e suficiência para que se assegure a estabilidade absoluta dos sistemas que correspondem ao problema de Lur'e (1).

A essência do problema é procurar sistemas não-lineares que sejam "similares" a sistemas lineares, ou seja: seus estados tendem a um estado de equilíbrio depois de uma perturbação arbitrária com comportamentos exponenciais decrescentes, adquirem valores finitos para distúrbios finitos, etc. O poder separar tal classe de sistemas não seria importante se as condições para os distinguir

- - - - -

(1) Até agora a condição de suficiência está plenamente comprovada, mas não a de necessidade, ainda que por exemplo para uma não-linearidade contínua e monovalorizada não tem sido possível construir um exemplo de um sistema que seja global e assintoticamente estável e que não satisfaça o Critério de Popov.

fossem muito estritas.

Foi V. M. Popov, com seu elegante Critério em 1949 e depois Yakubovich que provaram que tal classe de sistemas é muito extensa e que as condições que devem satisfazer para pertencer a ela são facilmente definíveis. Sistemas completamente linearizáveis, com exceção de um elemento não-linear que satisfaz a conjectura de Aizerman, constituem a classe de sistemas não-lineares que chamaremos "da forma de Lur'e".

O método mais geral para a análise da estabilidade dos sistemas autônomos não-lineares, é o Método Direto de Lyapunov. Encontrando uma função Lyapunov para o sistema em estudo pode assegurar-se a sua estabilidade no sentido de Lyapunov. A grande desvantagem deste método é que não existe um caminho sistemático para encontrar tal função.

Lur'e e Postnikov propuseram uma solução para o problema obtendo um sistema de equações quadráticas diretamente do modelo diferencial do sistema; a existência de uma solução com raízes reais das equações é condição suficiente para afirmar a estabilidade absoluta do sistema. Como recursos para desenvolver seu método usaram formas canônicas de escrever as equações do sistema, assim como a função Lyapunov do tipo "quadrática mais integral da não-linearidade".

Popov, ao contrário de todos os investigadores sobre o tema que lhe precederam, estabeleceu as condições de suficiência tendo como base a resposta em frequência da parte linear do sistema dando assim um critério muito simples e conveniente em sua aplicação e em sua interpretação gráfica. Por esta razão, o chamado Critério de Popov serviu como base para a extensão e ampliação do problema original para sistemas com elementos não-lineares de características mais restritivas tais como: a monotonia, posuir limites em sua derivada, e ainda para outras características como a histerese ativa ou passiva, etc. Autores como Narendra-Taylor [35] e Anderson [2] têm estudado extensões para sistemas multi variáveis e/ou variantes.

Em muitas situações determinar se o sistema é ou não global e assintoticamente estável, não é suficiente; deseja-se "melhorar-lo por meio de modificações em seus parâmetros e/ou por compensação estática ou dinâmica. Nestas circunstâncias o Critério de Popov é uma ferramenta poderosa para a análise e o desenho de sistemas da forma de Lur'e, em combinação com o Método de Resposta em Frequência. Os Diagramas de Nyquist, Bode assintótico e Nichols têm demonstrado a sua validade podendo também ser usados em sistemas não-lineares com o uso de lápis e papel somente, ou seja, com pouca ajuda computacional ou de calculadoras.

O problema da estabilidade transitoria nos Sistemas de Potência é cada vez mais importante conforme aumentam o tamanho dos sistemas e a interconexão das áreas, devido á tendência dos sistemas a perder o sincronismo e á possibilidade de oscilações na potência transferida.

Em geral o problema se origina com a seguinte sequência de fenomenos: uma falta ocorre em algum ponto do sistema e afeta as condições de operação; de alguma forma a falta é eliminada e o sistema alcança uma nova condição de operação após a falta (que muitas vezes não é a desejada), devendo determinar se o sistema alcança um novo ponto de equilíbrio estável e em que tempo. Este é claramente um problema de estabilidade no sentido Lyapunov.

Deve-se assinalar a característica mais importante do problema de estabilidade em Sistemas de Potência, ou seja: não pode falr-se de Estabilidade Global, mas de estimar o domínio de atração do estado de equilíbrio estável do sistema. Portanto o principal objetivo é determinar a região de estabilidade assintótica. Até agora o Método Direto de Lyapunov parece ser o melhor procedimento para delimitar tal região.

As não-linearidades que aparecem nos fenomenos de falta em Sistemas de Potência são do tipo senoidal, satisfazendo a conjectura de Aizerman só para valores perto

da origem; utiliza-se o Critério de Popov para determinar a estabilidade assintótica numa região próxima á origem e para assegurar a existencia de uma função Lyapunov do tipo "quadrática mais integral da não-linearidade", e usa-se para construir tal função o Lema de Kalman-Yakubovich em suas diferentes versões.

O proprio Popov estabeleceu a conexão entre o seu critério e o Método Direto de Lyapunov ao demonstrar que se existe uma função Lyapunov do tipo "quadrático mais integral da não-linearidade" então o primeiro se cumpre. Relacionando ambos os métodos foram possíveis estudos de estabilidade nos sistemas em que melhores resultados tem sido obtidos: os Sistemas Elétricos de Potência.

O objetivo de presente trabalho é assinalar as possibilidades do Critério de Popov para a análise de Estabilidade Assintótica Global em Sistemas Não-Lineares. Para isto no capítulo 2 se faz uma descrição do método partindo do problema básico e suas extensões para considerar outros casos tais como Sistemas Variantes e Multivariáveis.

No capítulo 3 se descrevem e aplicam várias formas de combinar o Critério de Popov com o Método de Resposta em Frequência para a análise e projeto de sistemas não-lineares; apresentam-se quatro exemplos resolvidos que podem servir como orientação para estender a aplicação dos

métodos a sistemas de maior ordem, de fase não mínima, etc

No capítulo 4 trata-se a aplicação da teoria vista no capítulo 2 a Sistemas Elétricos de Potência partindo do modelo mais simplificado de uma Máquina Síncrona até um sistema multináquinas.

No capítulo 5 apresentam-se as conclusões finais e sugestões para novos trabalhos sobre esta rica matéria.

2.1 O PROBLEMA DE LUR'E

Lur'e e Postnikov [1] propõem o problema de estabilidade absoluta (EA) para o sistema:



CAPÍTULO 2

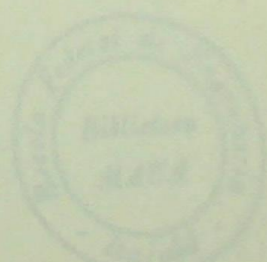
" O PROBLEMA DE LUR'E "

Fig. 2.1

esse tipo de sistema pode ser:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv \\ v &= -N(x) + u \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde x é o vetor de estados, B é $n \times 1$; A é matriz $n \times n$ real constante; $N(x)$ é uma combinação linear dos elementos de x , sendo N uma função não linear de x . As funções de tempo $u(t)$, $v(t)$ podem ser a entrada e saída de parte linear ou linearizável do sistema (L), e $N(x)$ um controlador não-linear (NL).



2.1 O PROBLEMA BASICO.

Lur'e e Postnikov [31] propuseram o problema da Estabilidade Absoluta (EA) para o sistema:

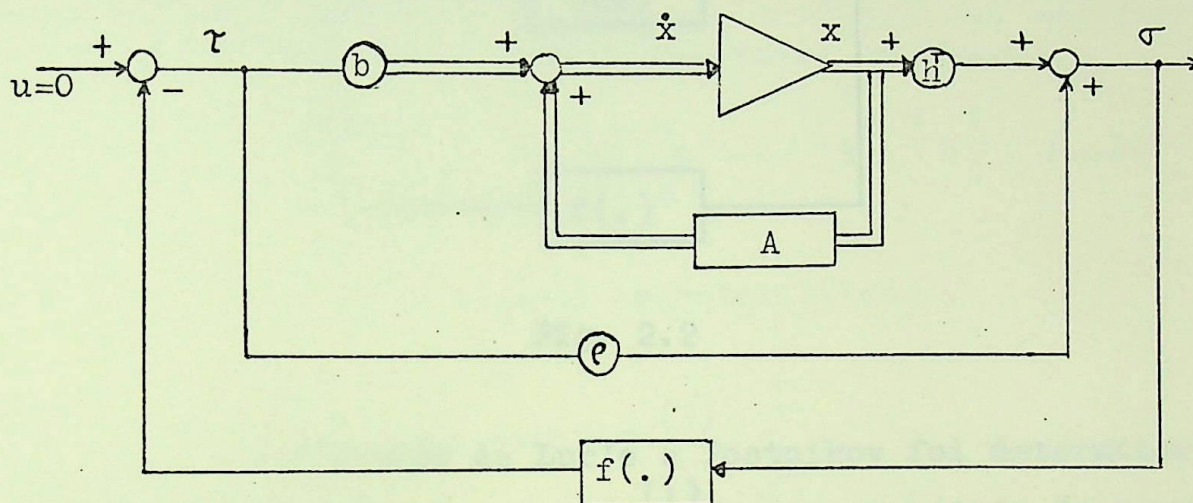


Fig. 2.1

cujo modelo de estado pode ser:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + b\tau \\ \sigma &= h^T x + e\tau \\ \tau &= -f(\sigma)\end{aligned}\tag{2.1}$$

A dimensão dos vectores b , h é n ; A é matriz $n \times n$ e e é um escalar constante ($e \geq 0$); σ é uma combinação linear das variáveis de estado x_i e τ , sendo τ uma função não linear de σ . As funções do tempo $\tau(t)$, $\sigma(t)$ podem ser a entrada e a saída da parte linear ou linearizável do sistema (LI), e $f(\cdot)$ um controlador não-linear (NLI).

A parte linear invariável (LI), pode expressar-se de forma mais simples como $G(s)$ mostrado na Fig. 2.2

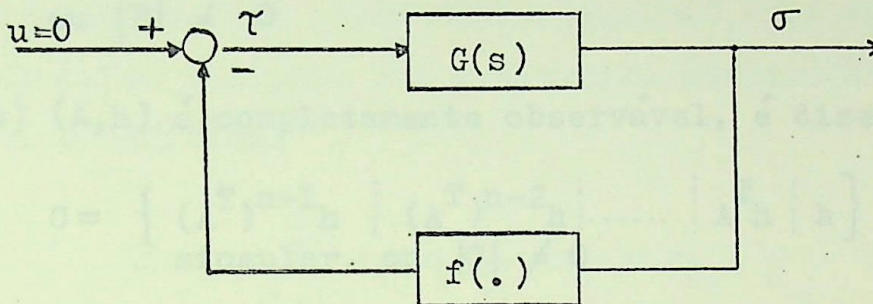


Fig. 2.2

O objetivo de Lur'e e Postnikov foi determinar as condições que levam a $x = 0$ ⁽¹⁾ a ser um estado de equilíbrio global e assintoticamente estável (g.a.e) considerando que a parte não-linear e a linear possuem determinadas características.

2.1.1 Características do elemento LI

Se na Fig. 2.1 supomos $f(.) = 1$, é obtido o sistema linear:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\tau \\ \sigma &= h^T x + e\tau \end{aligned} \quad (2.2) \quad (2)$$

-
- (1) Considera-se $x=0$ como o estado de equilíbrio do sistema. Para o caso de qualquer outro estado de equilíbrio, tal que $x \neq 0$, traslada-se ao origem.
 - (2) Se $e = 0$ o número de pólos de $G(s)$ é maior que o número de zeros para todo sistema fisicamente realizável.

que possui características tais que:

a) (A, b) é completamente controlável, é dizer

$B \triangleq \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} A^{n-1}b & A^{n-2}b & \dots & Ab \\ \hline & & & b \end{array} \right\}$ é não singular,

ou $|B| \neq 0$

b) (A, h) é completamente observável, é dizer

$C = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} (A^T)^{n-1}h & (A^T)^{n-2}h & \dots & A^T h \\ \hline & & & h \end{array} \right\}$ é não singular, ou $|C| \neq 0$

c) As raízes da equação característica:

$$|\lambda I - A| = 0$$

tem parte real negativa. (3)

2.1.2 Características do elemento NLI.

O elemento não-linear invariante, $f(\sigma)$ na eq. (2.1) terá que cumprir:

a) Ser representável matematicamente por uma função escalar real e contínua cujo argumento σ é um escalar real.

b) $f(0) = 0$

c) $f(\sigma)/\sigma \in [K_1, K_2)$ ou $K_1 \leq f(\sigma)/\sigma < K_2$ para $\sigma \neq 0$ e
 $0 \leq K_1 < K_2 \leq \infty$

(3) O caso de raízes nulas pode ser redutível e será aplicado praticamente no Capítulo 4.

2.2 SOLUÇÃO PROPOSTA POR LUR'E

Considerando o sistema definido pelo sistema de equações (2.2) como linear estável (as raízes da equação característica têm parte real negativa), foi demonstrado por Lyapunov que pode ser construída uma função quadrática positiva definida:

$$Q(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n q_{ij} x_i x_j, \quad q_{ij} = q_{ji} \quad (2.3)$$

cuja derivada é :

$$\dot{Q}(x) = \sum_{i=1}^n \left[2 \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i \sum_{m=1}^n a_{im} x_m \right] \quad (2.4)$$

que é uma função quadrática negativa definida. Para isto Lyapunov assumiu uma forma quadrática positiva definida arbitrária:

$$W(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ i=1}}^n w_{ij} x_i x_j \quad (2.5)$$

onde $w_{ij} = w_{ji}$ são coeficientes numéricos fixos, e provou que no caso estável para a eq. (2.2) é sempre possível escolher os coeficientes q_{ij} da eq. (2.3) de forma única tal que:

$$\dot{Q}(x) = -W(x)$$

ou com as eq. (2.4) e (2.5)

$$\sum_{i=1}^n \left[2 \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j \sum_{m=1}^n a_{im} x_m \right] = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} x_i x_j \quad (2.6)$$

demonstrando ao mesmo tempo que $Q(x)$ é positiva definida se obtida de $W(x)$.

Seguindo o mesmo processo para o sistema definido pelo sistema de eq. (2.1), teremos de procurar, como condição suficiente para assegurar a estabilidade global assintótica, uma função V das n variáveis de estado (x_1, x_2, \dots, x_n) diferenciável e contínua que cumpre:

p1) $V(x)$ é positiva definida no espaço n -dimensional, ou seja:

$$V(x) > 0 \quad \forall \quad x \neq 0, \quad V(x) = 0 \implies x = 0$$

p2) $\dot{V}(x)$, a derivada temporal de $V(x)$, é negativa definida no espaço n -dimensional ou seja:

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall \quad x \neq 0, \quad \dot{V}(x) = 0 \implies x = 0$$

p3) $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \infty$; a função $V(x)$ cresce sem limite quando qualquer das componentes (x_1, x_2, \dots, x_n) cresce sem limite.

2.2.1 Método de Lur'e.

Lur'e e Postnikov propuseram como função $V(x)$ a forma denominada "quadrática mais integral da não-linearidade." (4)

$$V(x, \sigma) = Q(x) + \theta \int_0^\sigma f(r) dr \quad (2.7)$$

onde $Q(x)$ foi definido na eq. (2.3), $\theta \geq 0$ é um número real e a condição c) imposta á não linearidade ($f(\sigma)/\sigma \in [K_1, K_2]$) segura o cumprimento da condição p1).

A condição p3) cumpre-se já que $\lim_{x_i \rightarrow \infty} Q(x_i) = \infty$,
 $i = 1, 2 \dots n.$

Para se analisar se é cumprida a condição p2) pode-se seguir o seguinte processo: [29]

Escrevemos a eq. (2.3) na forma:

$$Q(x) = x^T R x \quad (2.8)$$

onde R é uma matriz simétrica positiva definida. Substituindo a eq. (2.8) na eq. (2.7), resulta:

$$V(x, \sigma) = x^T R x + \theta \int_0^\sigma f(r) dr \quad (2.9)$$

derivando

$$\dot{V}(x, \sigma) = x^T R \dot{x} + \dot{x}^T R x + \theta f(\sigma) \dot{\sigma}$$

- - - - -

(4) A razão de escolher $V(x)$ definida na eq. (2.7) é somente heurística.

usando a eq. (2.1)⁽⁵⁾ obtem-se

$$\dot{V}(x, \sigma) = -x^T [RA + A^T R] x + f(\sigma) [-b^T R x - x^T R b + \rho h^T A x] - \rho f^2(\sigma) h^T b \quad (2.10)$$

como o elemento LI é estável e definindo:

$$-Q \triangleq A^T R + RA$$

se $Q = Q^T > 0$, assegura-se que $Q = Q^T > 0$

Definindo:

$$c^T \triangleq h^T A, \quad g \triangleq \frac{c}{2} - Rb \quad (2.11)$$

a eq. (2.10) fica da seguinte forma:

$$\dot{V}(x, \sigma) = -x^T Q x + 2 f(\sigma) g^T x - \rho h^T b f^2(\sigma) \quad (2.12)$$

que pode ser escrita na forma

$$\dot{V} = - \begin{bmatrix} x \\ f(\sigma) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & -g \\ -g^T & \rho h^T b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ f(\sigma) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

A eq. (2.13) é negativa definida se a matriz

$$P = \begin{bmatrix} Q & -g \\ -g^T & \rho h^T b \end{bmatrix}$$

é positiva definida, como Q já é positiva definida o determinante de P deverá ser positivo. ⁽⁶⁾

(5) Pelo pé de página (2) suporemos $\rho = 0$

(6) Para o teorema que respalda tal afirmação consultar [21]

Como o determinante de

$$\begin{bmatrix} \square^{-1} & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

é positivo (0 é vetor de zeros) então o determinante de

$$\begin{bmatrix} \square^{-1} & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & -g \\ -g^T & \beta h^T b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\square^{-1}g \\ -g^T & \beta h^T b \end{bmatrix}$$

também é positivo, pelo que deverá cumprir-se a condição:

$$\beta h^T b > g^T \quad (2.14)$$

O cumprimento da inequação (2.14) e a comprovação de que \square é positiva definida permitem concluir que $V(x, \sigma)$, definida na eq. (2.7) é uma função Luapunov; pelo que pode-se garantir a estabilidade global e assintótica do sistema.

2.2.2 Crítério de Popov para o Problema de Lur'e.

V.M. Popov ao invés de resolver o problema de Lur'e com inequação do tipo (2.14) contendo os coeficientes do sistema original, baseia-se na resposta em frequência da parte linear do sistema, representado pelo sistema de eq. (2.1) para deduzir a estabilidade assintótica global.

Se nas eq. (2.1) supomos $f(\cdot) = K_2$ teremos a representação de um sistema linear. Conforme ao Critério de Nyquist é necessário e suficiente, para que o sistema seja estável, que o diagrama de Nyquist não intercepte o eixo real no intervalo $[-\infty, -K_2^{-1}]$ como mostra a Fig. 2.2 (a condição c) imposta á parte linear faz com que $G(j\omega)$ seja uma função transferencia do tipo zero).

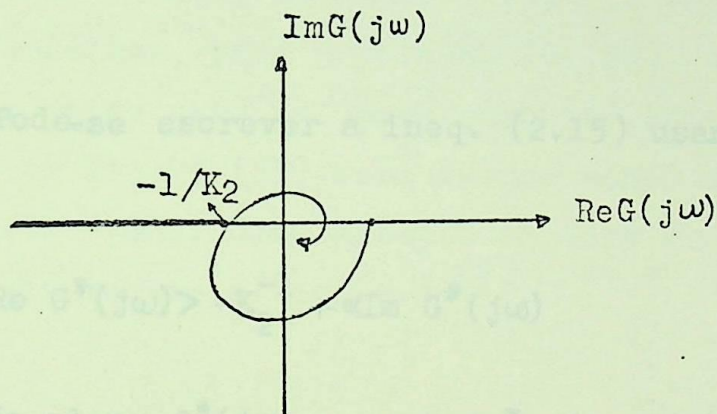


Fig. 2.2

Assim, para que o sistema da Fig. 2.1 seja global e assintoticamente estável, com os elementos LI e NLI que cumprem as propriedades 2.1.1 e 2.1.2, é suficiente que se cumpra o:

TEOREMA 1 POPOV: O sistema representado pelo sistema de equações (2.1) será global e assintoticamente estável, se existe um número real α , tal que para todo $\omega \geq 0$ ^(6')

$$\text{Re} \left[(1 + \alpha j\omega) G(j\omega) \right] - K_2^{-1} > 0 \quad (2.15)$$

(6') No Apêndice se apresenta a prova do Teorema 1 deixando a dos Teoremas seguintes por ser similar. Pode-se consultar [3].

A interpretação geométrica da ineq. (2.15) chamada "Condição Popov" é seu maior atrativo.

Seja $G^*(j\omega)$ tal que:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} G^*(j\omega) &\triangleq \operatorname{Re} G(j\omega) \\ \operatorname{Im} G^*(j\omega) &\triangleq \operatorname{Im} G(j\omega) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Podem-se escrever a ineq. (2.15) usando (2.16) e obtem-se

$$\operatorname{Re} G^*(j\omega) > -K_2^{-1} + \alpha \operatorname{Im} G^*(j\omega) \quad (2.17)$$

No plano $G^*(j\omega)$ a expressão (2.17) com sinal de igualdade resulta ser a equação de uma reta chamada "linha Popov" com inclinação $\frac{1}{\alpha}$ e que cruza o eixo real no ponto $-1/K_2$. Analisando a eq. (2.17) resulta que o gráfico de $G(j\omega)$ deverá ficar totalmente à direita desta linha para cumprir com a "Condição Popov" e poder afirmar que o sistema é g.a.e.

Na Fig. 2.3 mostra-se a ilustração do Teorema 1.

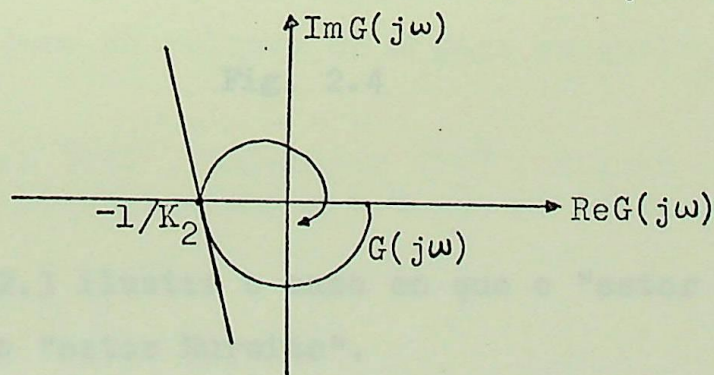


Fig. 2.3

Da Fig. 2.2 e da Fig. 2.3 pode-se observar dois setores referentes a $f(\cdot)$. Chama-se "setor Hurwits" ao setor permissível para a relação linear invariante

$$\tau = -K\sigma \quad (2.15a)$$

e chama-se "setor Popov" ao setor permissível para a relação não-linear $\tau = -f(\sigma)$ no plano τ vs. σ . Do critério de Nyquist sabe-se que, para a relação (2.15a), o "setor Hurwits" é o maior possível para garantir estabilidade portanto o "setor Popov" (SP) será sempre menor ou igual ao "setor Hurwits" (SH). Como exemplo do caso em que eles não são iguais tem-se a Fig. 2.4 (7).

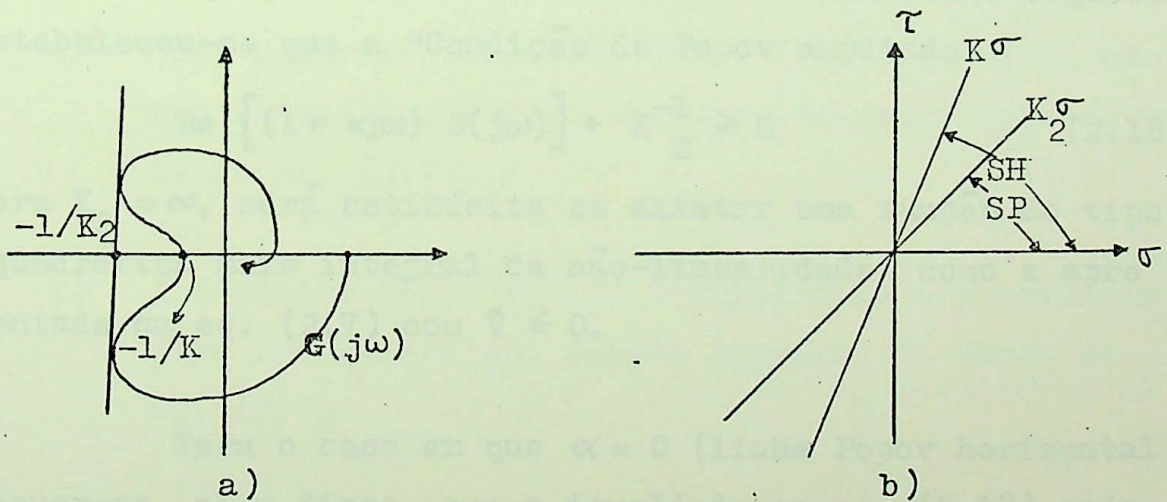


Fig. 2.4

- (7) A Fig. 2.3 ilustra o caso em que o "setor Popov" é igual ao "setor Hurwits".

Se $K_1 < f(\sigma)/\sigma < K$ para algum intervalo de valores de σ , o sistema não linear pode ser g.a.e; mais com base na Condição Popov não se pode afirmar que assim seja, mostrando por tanto seu caráter de suficiência mais de não necessidade.

2.2.3 Conexão entre o Critério de Popov e o Método de Lur'e.

Com base no que foi apresentado nas seções anteriores pode-se deduzir uma relação entre o Critério de Popov e o Método de Lur'e. (8)

Para o caso mais simples do sistema representado pelas eq. (2.1) para $f(\cdot) = K$ onde $K \in (0, \infty)$, e todas as raízes da equação característica caem no semiplano esquerdo estabeleceu-se que a "Condição de Popov ampliada":

$$\operatorname{Re} [(1 + \alpha j\omega) G(j\omega)] + K^{-1} \frac{1}{2} \geq 0 \quad (2.18)$$

para $K_2 = \infty$, será satisfeita se existir uma função do tipo "quadrática mais integral da não-linearidade" como a apresentada na eq. (2.7) com $\hat{V} \leq 0$.

Para o caso em que $\alpha = 0$ (linha Popov horizontal) requer-se, além disso, que a igualdade na eq. (2.18) seja cumprida só para os valores de ω para os quais $\operatorname{Re} G(j\omega) \geq 0$

(8)

 Yakubovich [54], Lefschetz [28], Kalman 27 e o mesmo Popov estabeleceram a relação de ambos os métodos.

Recíprocamente, é necessário e suficiente, que a eq. (2.15) seja cumprida para que exista uma função Lyapunov da forma da eq. (2.7) com $\dot{V} < 0$ (negativa definida) para o intervalo $[K_1, K_2)$.

Para o sistema Básico representado pelas eq. (2.1) com as condições de 2.1.1 e 2.1.2, é suficiente o assinalado a respeito das conexões entre ambos métodos. Muitos artigos publicados consideram outras condições para as partes LI e NLI do sistema, seja considerando raízes imaginárias e/ou nulas na equação característica da parte LI ou considerando as variações no intervalo de $f(\cdot)$: $(0, \infty)$, $[0, \infty)$, $(0, \infty]$, $[\varepsilon, \infty]$, etc. Em todos os casos podemos chegar às seguintes conclusões:

- a) Para cumprir a condição Popov (2.15), é suficiente que exista uma função Lyapunov da forma apresentada na eq. (2.7).
- b) A condição Popov (2.15) é suficiente e necessária para que exista uma função Lyapunov da forma da eq. (2.7).

2.3 EXTENSOES DO PROBLEMA BASICO.

Popov propôs uma nova função Lyapunov para o sistema da Fig. 2.1 que adiciona à usada por Lur'e o termo $1/2\theta\rho\tau^2$, ou seja:

$$V(x) = 1/2 x^T R x + \beta \int_0^\sigma f(r) dr + 1/2 \beta \rho \tau^2 \quad (2.19)$$

A eq. (2.19) é positiva definida do mesmo modo que a eq. (2.9) e satisfaz a condição p3:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

Referente á condição p2) tem-se que:

$$\dot{V}(x) = (\nabla V)^T \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (9)$$

e obtem-se então: (10)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & 1/2 x^T [A^T R + R A] x - f(\sigma) x^T [R b - \beta A^T h - \gamma h] \\ & - [\beta h^T b + \gamma (\rho + K_2^{-1})] f^2(\sigma) - \gamma \sigma f(\sigma) [1 - f(\sigma) \sigma K_2^{-1}] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para se afirmar que a eq. (2.20) é negativa definida teremos de utilizar o seguinte lema:

- (9) ∇V significa o gradiente de V .
- (10) Para obter a eq. (2.20) usa-se:
- i) $x^T R A x = 1/2 x^T (A^T R + R A) x$, tomando só a parte simétrica do produto RA .
 - ii) Seguindo o método "S" [3], usa-se a igualdade $\gamma f(\sigma) \{ [h^T x + \rho \tau - \sigma] - [f(\sigma) K_2^{-1} - \sigma f(\sigma) K_2^{-1} \sigma] \} = 0$ para um escalar $\gamma > 0$.

Lema MKY [33] : Dadas as condições a) e c) de 2.1.1 e um vector K assim como um escalar ψ , existirão o vector real q e as matrizes simétricas semidefinidas positivas P, M que satisfarão as seguintes condições:

$$i) \quad A^T P + PA \triangleq qq^T - M$$

$$ii) \quad Pb - k \triangleq \sqrt{\psi} q$$

iii) (q^T, A) é completamente observável se e somente se

$$H(s) \triangleq 1/2\psi + k^T (sI - A)^{-1} b \text{ é real positiva.}$$

Para aplicar o Lema MKY na eq. (2.20) definimos:

$$1/2\psi \triangleq \beta h^T b + \gamma (\rho + K_2^{-1})$$

$$k \triangleq \beta A^T h + \gamma h$$

selecionando apropriadamente P, q, M obtém-se

$$\dot{V}(x) = 1/2 [x^T q + \sqrt{\psi} f(\sigma)]^2 - 1/2 x^T M x - \gamma \sigma f(\sigma)$$

$$[1 - f(\sigma)\sigma K_2^{-1}] \quad (2.21)$$

A função (2.21) é negativa semidefinida pelo que a função definida pela eq. (2.19) é uma função Lyapunov se for provado que nenhuma trajetória do sistema permanece em um ponto em que $\dot{V} = 0$ exceto na origem $x = 0$

Igualmente podemos rescrever a condição Popov (2.15) como:

$$\operatorname{Re} \left\{ Z(s) \left[G(s) + K_2^{-1} \right] \right\} > 0 \quad (2.22)$$

onde $Z(s) \triangleq \alpha s + \eta$ com $\alpha \geq 0$ e $\eta > 0$; para a eq. (2.15) foi considerado $Z(s) \triangleq \alpha s + 1$.

Ambas as expressões (2.19) e (2.22) servirão como ponto de partida para se analisar variações no Sistema Básico considerando características mais específicas para o elemento NLI ou considerando elementos multivariáveis e/ou variantes.

2.3.1 Respeito do elemento NLI.

A condição fundamental que foi estabelecida em 2.1.2, ou seja: $f(\sigma)/\sigma \in [K_1, K_2)$, $0 \leq K_1 < K_2 \leq \infty$ deverá ser mantida, e além disso a existência e a unicidade da solução para o sistema da Fig. (2.1).

Supondo propriedades suplementares ou restrições mais específicas para o elemento NL, pode-se estender ou simplificar as condições para a estabilidade do sistema.

A função Lyapunov definida na eq. (2.19) será aplicada para se determinar a estabilidade global e assintótica de todos os casos tratados nesta secção.

A) Função Monótona.

Brocket e Willems [5] consideraram as seguintes características adicionais para o elemento HLI:

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } \frac{d [f(\sigma)]}{dt} \geq 0; \quad \frac{d \sigma}{dt} < K, \quad K_1 \leq K \leq K_2 \\ \text{ii) } f^{-1}(\sigma) \text{ existe} \end{array} \right\} (2.23)$$

pelo que $f(\sigma)$ é uma função monótona crescente biunívoca (11) passando pelo origem conforme mostra a Fig. 2.4.

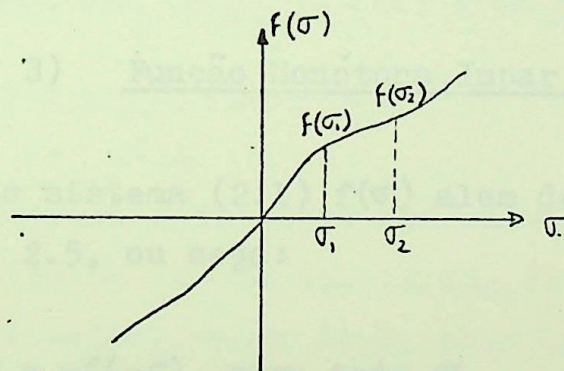


Fig. 2.4

(11) Na linguagem de análise funcional $f(\sigma)$ pertence á classe F : $f(\sigma) \in \{F\}$ se $K_1 \leq f(\sigma)/\sigma \leq K_2$.

Para este caso ao agregar as características i) e ii) tem-se uma sub-classe de funções, ou seja $f(\sigma) \in \{F_m\}$ sendo $\{F_m\} \in \{F\}$

Para funções com tais características pode-se enunciar o seguinte:

TEOREMA 2 DE POPOV [5] : O sistema representado pelo sistema de eq. (2.1) é global e assintoticamente estável se $f(\sigma)$ satisfaz a eq. (2.23) e existe um multiplicador real positivo ⁽¹²⁾ da forma:

$$Z(s) = \alpha_0 s + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{s + h_i}{c_i s + \eta_i}$$

com α_i, c_i, η_i reais e positivos e $c_i \leq 1$

B) Função Monótona Ímpar [5]

Se no sistema (2.1) $f(\sigma)$ além de ser monótona, for ímpar, Fig. 2.5, ou seja:

$$f(\sigma) = -f(-\sigma) \text{ para todo } \sigma$$

aplica-se o mesmo Teorema 2 de Popov só que com $c_i \leq 2$

(12) $Z(s)$ é real positivo se $\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0$ para todo ω real; nesse caso $Z(s)$ não tem polos no semiplano direito. Além disso, para ser real positivo, se $Z(s)$ tem polos imaginários, terão de ser simples e os resíduos de $Z(s)$ neles deverão ser reais e positivos.

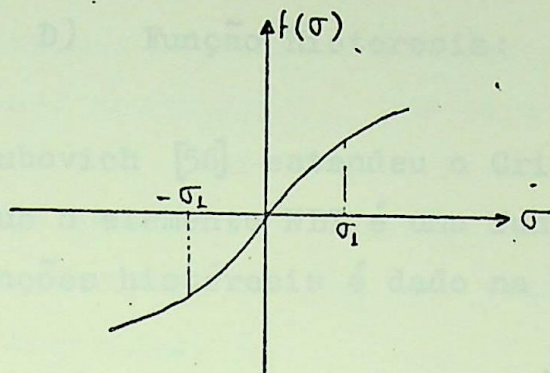


Fig. 2.5

e) Função Potência [5]

No sistema (2.1) se $f(\sigma)$ é da forma:

$$f(\sigma) = k(\sigma)^u \operatorname{sinal}(\sigma) \quad (2.25)$$

aplica-se o Teorema 2 de Popov com um valor de c_i que dependerá do valor de u na eq. (2.25) segundo uma função $\varphi(u)$ que dá o melhor valor de c_i para um dado u , e que se apresenta na Fig. 2.6

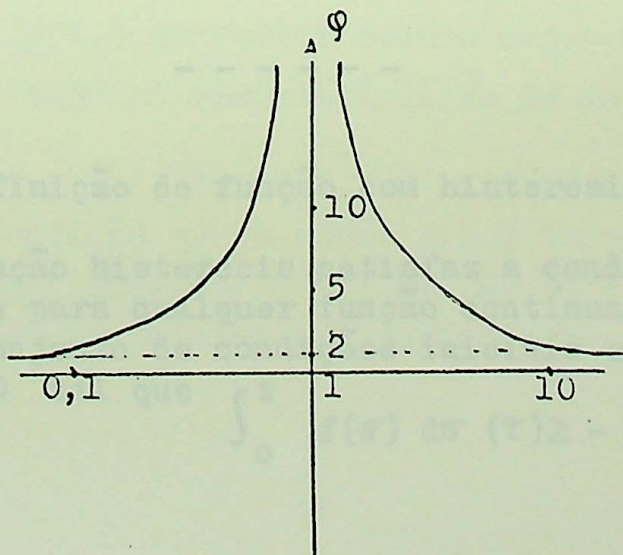


Fig. 2.6

D) Função Histeresis:

Yakubovich [56] estendeu o Critério de Popov a sistemas em que o elemento NLI é uma função histeresis; um exemplo de funções histeresis é dado na Fig. 2.7 (13)

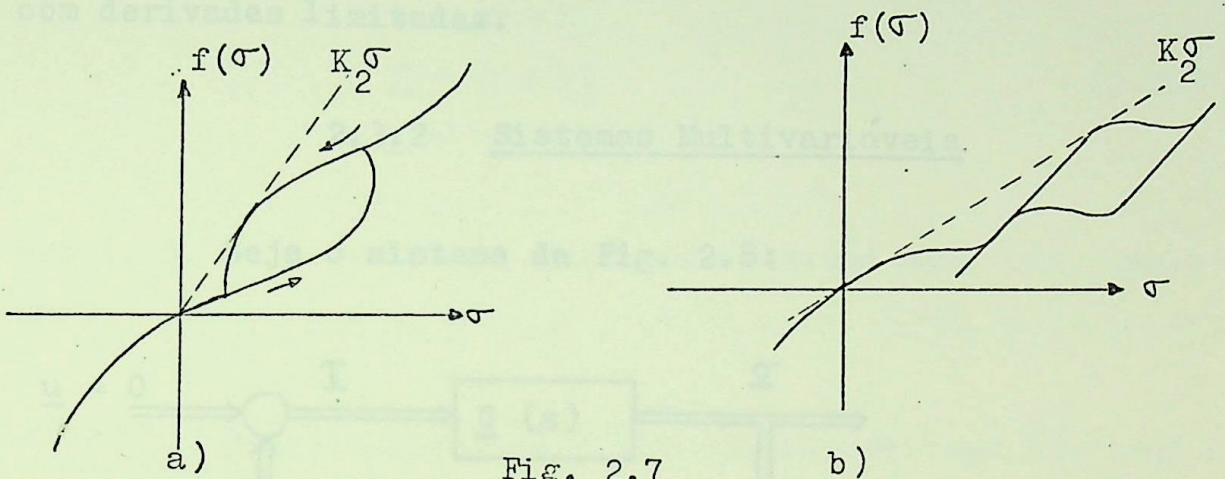


Fig. 2.7

Para sistemas cujo elemento NLI é uma função do tipo da Fig. 2.7 a) ou b) aplica-se o:

TEOREMA 3 DE POPOV: O sistema representado pelas eq. (2.1) é global e assintoticamente estável com $f(\sigma)$ sendo uma função histeresis que satisfaz a condição de positividade. (14)

(13) Ver definição de função com histeresis em [56] .

(14) Uma função histeresis satisfaz a condição de positividade se para qualquer função contínua $\sigma(t)$ e qualquer conjunto de condições iniciais existe uma constante $\gamma \geq 0$ tal que $\int_0^t f(\sigma) d\sigma(\tau) \geq -\gamma, \forall t \geq 0$

Poderíamos considerar funções com outras características ou fazer combinações, mas para o objetivo do presente trabalho é suficiente com os apresentados. O leitor interessado pode consultar a referência [41] que considera funções NLI descontínuas ou [55] que considera funções NLI com derivadas limitadas.

2.3.2 Sistemas Multivariáveis

Seja o sistema da Fig. 2.8:

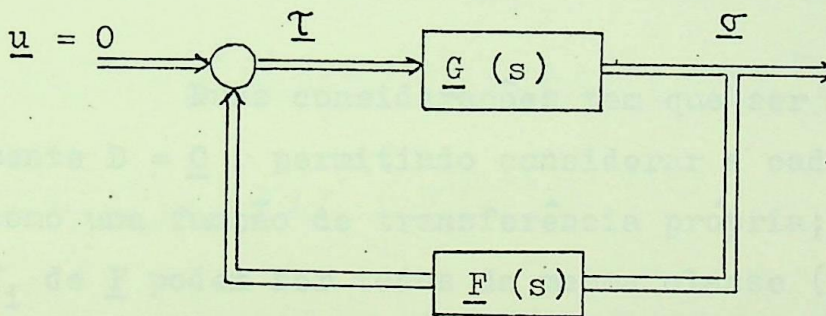


Fig. 2.8

- sendo: i) $\underline{G}(s)$ uma matriz $n \times n$ de funções de transferência estáveis tal que $\lim_{\|s\| \rightarrow \infty} \underline{G}(s) = \underline{0}$
- ii) $\underline{F}(\cdot)$ um vector coluna cujas componentes possuem as características da seção 2.1.2 (15)

(15) Para a condição c) da seção 2.1.2 podemos escrever $f_i(\sigma_i)/\sigma_i \in [\underline{K}_1, \underline{K}_2)$ sendo $\underline{K}_1, \underline{K}_2$ matrizes diagonais de limites inferiores e superiores para $f_i(\cdot)$

iii) $\underline{\tau}$, $\underline{\sigma}$ vetores coluna das n entradas e m saídas respectivamente.

O modelo de estado da Fig. 2.8 é:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{\tau} \\ \underline{\sigma} &= C\underline{x} + D\underline{\tau} \\ \underline{\tau} &= -\underline{F}(\underline{\sigma})\end{aligned}\quad (2.26)$$

com A , B , C , D matrizes reais de dimensão $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ e $m \times m$.

Duas considerações tem que ser feitas: 1) geralmente $D = \underline{0}$, permitindo considerar a cada elemento de $G(s)$ como uma função de transferência própria; 2) os elementos f_i de \underline{F} podem ser todos da mesma classe (possuem iguais características), ou podem ser diferentes; podem ser interatuantes ou não, podendo assim obter um grande número de possíveis combinações.

Para determinar a estabilidade assintótica global do sistema representado pelas eq. (2.26), a função Lyapunov proposta por Lur'e e Postnikov é [3]:

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T R \underline{x} + N^T \underline{\sigma} + \lambda^T \underline{\sigma} N + 1/2 \underline{\tau}^T (\underline{\sigma} D + D^T \underline{\sigma}) \underline{\tau} \quad (2.27)$$

que é a versão matricial da eq. (2.19) proposta por Popov porque:

- i) $N^T \triangleq \left[\int_0^{\sigma_1} f_1(r) dr \dots \int_0^{\sigma_m} f_n(r) dr \right] = \left(\int_0^{\sigma} \underline{F}(r) dr \right)^T$
- ii) $\lambda^T \triangleq [1, 1 \dots 1]$
- iii) $R = R^T \geq 0; \quad \underline{\beta} \triangleq \text{diag} [\beta_i] \geq 0$

comprovando que $(\underline{\beta}D + D^T\underline{\beta}) \geq 0$ assegura-se que a eq. (2.27) é definida positiva.

A derivada da eq. (2.27) é :

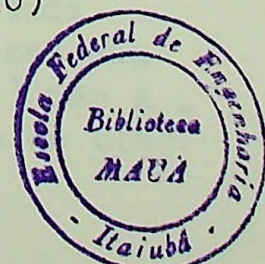
$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & x^T (A^T R + RA)x + x^T [RB - A^T C^T \underline{\beta} - C^T \underline{\gamma}] \underline{F} - \underline{F}^T [B^T R - \underline{\beta}CA \\ & - \underline{\gamma}C] x - \underline{F}^T [\underline{\beta}CB + B^T C^T \underline{\beta} + \underline{\gamma}D + D^T \underline{\gamma} + 2\underline{\gamma}K_2^{-1}] \underline{F} - [\sigma^T \underline{\gamma} \underline{F} - \\ & - \underline{F}^T K_2^{-1} \underline{\gamma} \underline{F}] - [\underline{F}^T \underline{\gamma} \sigma - \underline{F}^T \underline{\gamma} K_2^{-1} \underline{F}] \quad (16) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Devido as características das $f_i(\cdot)$ e a que $\underline{\gamma} > 0$ ($\underline{\gamma} \triangleq \text{diag} [\gamma_i, i = 1, 2 \dots]$) pode-se assegurar que os dois últimos termos são negativos semidefinidos porque

$$\underline{F}^T K_2^{-1} \underline{\gamma} \underline{F} < \sigma^T \underline{\gamma} \underline{F} \forall \underline{F} \neq 0$$

Levar os quatro primeiros termos a uma forma quadrática e assegurar sua definição negativa terá de estender-se o Lema MKY à forma análoga matricial que, fez Anderson [2] e que é chamado Lema A-MKY.

(16) Ver pé de página Nº (10) referente à eq. (2.20)



Lema A-MKY: seja $\underline{H}(s)$ uma matriz de funções de transferência racionais tal que $H_\infty \triangleq \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega)$ é finito; ou seja $\underline{H}(s)$ tem polos com parte real negativa e/ou polos simples com parte real nula. Se $\{A_1, B_1, C_1, H_\infty\}$ é uma realização mínima ⁽¹⁷⁾ de $\underline{H}(s)$ então $\underline{H}(s)$ é real positiva se e só se existem uma matriz positiva definida R assim como E e Q tal que:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & RA_1 + A_1^T R = -QQ^T \\ \text{ii)} \quad & RB_1 = C_1^T - QE \\ \text{iii)} \quad & E^T E = H_\infty + H_\infty^T \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para utilizar o Lema A-MKY na eq. (2.28) identifiquemos:

$$A_1 = A$$

$$B_1 = B$$

$$C_1 \triangleq \underline{\beta} CA + \underline{\gamma} C$$

$$EE^T \triangleq \underline{\beta} CB + B^T C^T \underline{\beta} + \underline{\gamma} D + D^T \underline{\gamma} + 2\underline{\gamma} \underline{K}_2^{-1}$$

substituindo na eq. (2.28) obtemos:

$$\dot{V}(x) = - [Q^T x + E \underline{F}]^T [Q^T x + E \underline{F}] - 2 [\underline{\sigma}^T \underline{\gamma} \underline{F} - \underline{F}^T \underline{K}_2^{-1} \underline{\gamma} \underline{F}] \quad (2.30)$$

que é negativa semidefinida se e só se

(17) Se os elementos $G_{ij}(s)$ de $\underline{G}(s)$ no sistema da Fig. 2.8 são racionais e \underline{G} não tem mais zeros que polos, existem muitos $\{A, B, C, D\}$ que levam a modelos de estado equivalentes. Cada um desses conjuntos de matrizes chama-se "realização de $\underline{G}(s)$ ". A realização de $\underline{G}(s)$ com A de dimensão mínima, chama-se "realização mínima de $\underline{G}(s)$ ".

$$\underline{H}(s) \triangleq \underline{\gamma} [C(sI - A)^{-1}B + D + \underline{K}_2^{-1}] + s \beta C(sI - A)^{-1}B$$

é matriz mínima real positiva (18).

Já é claro que pelo método direto de Lyapunov vai sendo maior o trabalho conforme o sistema vai sendo mais geral.

Deve-se assinalar que em muitos casos é mais conveniente procurar uma função Lyapunov específica para um determinado tipo de sistemas com funções características concretas (monótonas, ímpares, etc.) ainda pelos métodos de prova e erro, que intentar aplicar as eq. (2.27) e (2.29). Muitos trabalhos publicados comprovam o anterior, já que os autores devido ao conhecimento e familiarização com um específico tipo de sistemas determinam uma função Lyapunov diferente da eq. (2.27).

O Critério de Popov requer uma adaptação mais simples. Em geral a condição suficiente para poder estabelecer a estabilidade assintótica global, é a existência de uma matriz diagonal $\underline{Z}(s)$ tal que:

$$\operatorname{Re} \left\{ \underline{Z}(s) \left[\underline{G}(s) + \underline{K}_2^{-1} \right] \right\} > 0 \quad (2.31)$$

com $\underline{K}_2^{-1} \triangleq \operatorname{diag} \{ K_{21}, K_{22}, \dots, K_{2n} \}$

(18) Mínima real positiva se $\underline{H}(s)$ é real positiva e $\{A, B, C, D\}$ é realização mínima de $\underline{H}(s)$.

A forma de cada elemento z_i de \underline{Z} dependerá das características do elemento $f_i(\cdot)$ de \underline{F} .

Consideremos o sistema representado na Fig. 2.8;; outra forma de apresentá-lo é o da Fig. 2.9

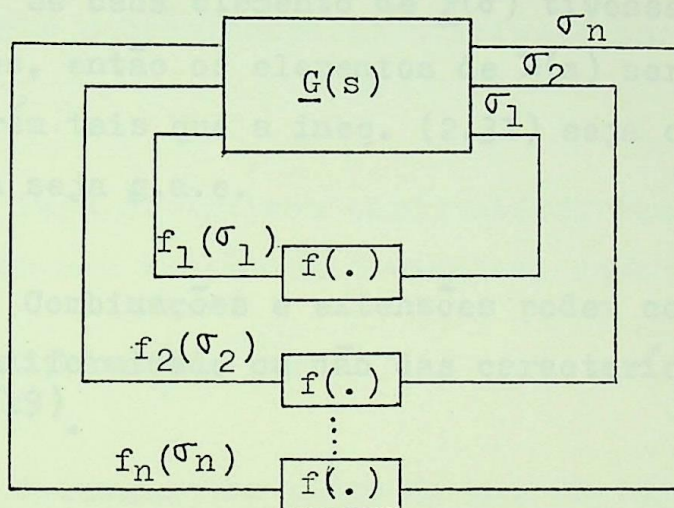


Fig. 2.9

o Critério de Popov para o sistema da Fig. 2.9 é [34] :

TEOREMA 4 DE POPOV: Se existem as matrizes diagonais $\Lambda = \text{diag} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $N = \text{diag} (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ com $\alpha_i \geq 0$, $\eta_i \geq 0$, $\alpha_i + \eta_i > 0$ e $-\eta_i/\alpha_i$ não é polo da i -ésima fila de $\underline{G}(s)$ tal que

$$\text{Re} \left\{ \underline{Z}(s) \left[\underline{G}(s) + \underline{K}_2^{-1} \right] \right\} > 0 \quad (2.32)$$

sendo $\underline{K}_2 \triangleq \text{diag} (K_{21}, K_{22}, \dots, K_{2n})$, e $\underline{Z}(s) \triangleq (N + \Lambda s)$, então o sistema representado pelas eq. (2.26) é global e assintoticamente estável.

Ao considerar características mais específicas para os elementos de $\underline{F}(\sigma)$ como, por exemplo, que todos os $f_i(\sigma_i)$ sejam funções monótonas ímpares, então todos os elementos de $\underline{Z}(s)$ serão da forma da eq. (2.24) com $c_i \leq 2$

Se cada elemento de $\underline{F}(\sigma)$ tivesse características diferentes, então os elementos de $\underline{Z}(s)$ serão de diferente forma porém tais que a ineq. (2.31) seja cumprida para que o sistema seja g.a.e.

Combinações e extensões podem considerar-se com base na uniformidade ou não das características dos elementos NLI (19).

2.3.3. Sistemas Variantes.

Consideremos o sistema representado pela eq. (2.1) porém agora com o elemento não-linear sendo variante

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\tau \\ \sigma &= h^T x + \rho\tau \\ \tau &= -g(\sigma, t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

(19) Por exemplo, ver [22] que considera interação entre os elementos NLI do sistema da Fig. 2.9

Para este caso a função Lyapunov proposta por Popov, e apresentada na eq. (2.19), é:

$$V = \frac{1}{2} x^T R x + \beta \int_0^\sigma g(r, t) dr + \frac{1}{2} \beta \tau^2 \quad (2.34)$$

Para determinar $\dot{V}(x)$ e demonstrar que $\dot{V}(x) < 0$ o procedimento é semelhante ao utilizado para chegar à eq. (2.21).

Para os motivos explicativos deste trabalho pode escolher-se uma função mais simples, como:

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T R x \quad (2.35)$$

derivando e levando em conta as eq. (2.33) obtém-se:

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} x^T (A^T R + R A) x - g(\sigma, t) x^T R b \quad (2.36)$$

Narendra e Taylor [35] desenvolvem a eq. (2.36) e demonstram que é negativa definida usando uma adaptação do Lema MKY devida a Rekasius e Rowland [42].

Qualquer função $V(x)$ que seja escolhida como função Lyapunov, implicará um enorme trabalho analítico e algébrico para chegar ao cumprimento das condições p1) a p3) da secção 2.2, que demonstram que é função Lyapunov.

Por outro lado, o Critério de Popov pode ser aplicado a sistemas variantes como uma simples extensão do caso invariante.

Brockett e Fory [58] consideraram o problema da estabilidade absoluta das eq. (2.33) com τ como uma função com o único requisito de que para cada instante t a função $g(\tau, t)$ não passe os limites do intervalo $[K_1, K_2)$ com $0 = K_1 < K_2 \leq \infty$. Ao considerar uma classe tão ampla de funções leva-nos a uma grande restrição no Critério de Popov e os autores provaram que só $\alpha = 0$ (linha Popov vertical) pode ser aceita para este caso. Assim teríamos:

TEOREMA 5 DE POPOV: O sistema representado pelas eq. (2.33) é global e assintoticamente estável se:

$$\operatorname{Re} [G(s) + K_2^{-1}] > 0, \forall \omega \geq 0$$

A interpretação gráfica na Fig. 2.10 mostra que pode obter-se uma aproximação $(K_2')^{-1}$ que pode estar longe do valor verdadeiro mas suficiente para assegurar a estabilidade do sistema representado pelas eq. (2.33).

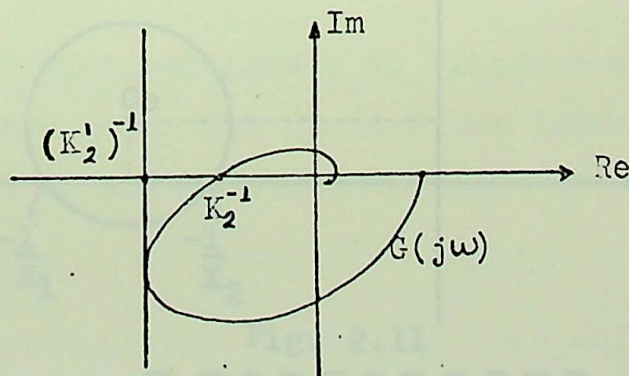


Fig. 2.10

Uma alternativa para considerar a estabilidade do mesmo sistema, como condição suficiente, é o bem conhecido Critério do Círculo que estabelece. [21] .

TEOREMA DO CIRCULO: O sistema representado pelas eq. (2.33) será global e assintoticamente estável para $K_1 \leq g(\sigma, t)/\sigma \leq K_2$ com $0 < K_1, < K_2 < \infty$ se existe um número real α tal que para todo $\omega \geq 0$ cumpre-se:

$$\left| G(j\omega) + \frac{(K_1 + K_2) - j\omega\alpha(K_2 - K_1)}{2K_1K_2} \right|^2 - \left(\frac{K_2 - K_1}{2K_2K_1} \right)^2 (1 + \alpha^2 \omega^2) > 0 \quad (2.37)$$

A interpretação geométrica da ineq. (2.37) é: se $1/K_1 > 1/K_2$ ⁽²⁰⁾ para cada $\omega \geq 0$, o gráfico de $G(j\omega)$ deve estar fora do círculo cujo centro é :

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) + \frac{1}{2} j\alpha\omega \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2} \right) = C_e$$

e que cruza o eixo real nos pontos $(-\frac{1}{K_1}, 0)$, $(-\frac{1}{K_2}, 0)$

(ver Fig. 2.11)

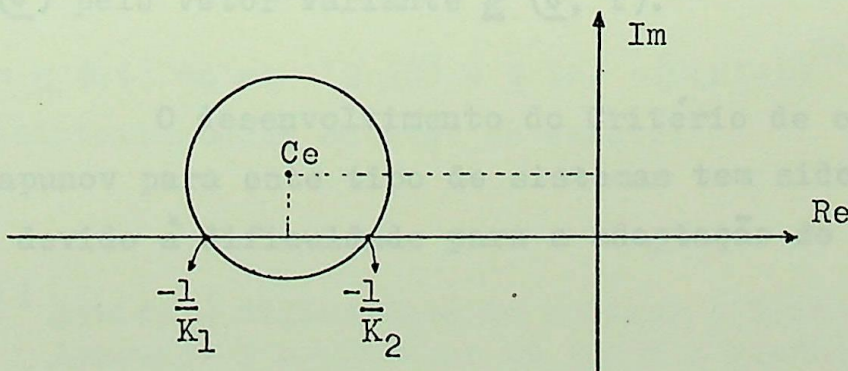


Fig. 2.11

(20) K_1 e K_2 podem ser negativos.

Este teorema é uma generalização alternativa do Teorema 1 de Popov, porque se $K_1 = 0$ tem-se a linha Popov cruzando em $-\frac{1}{K_2}$. A Fig. 2.11 ilustra como pode fazer-se um intercâmbio nas restrições entre as partes linear e não-linear do sistema. Diminuindo a diferença entre K_1 e K_2 ampliamos o intervalo permitido para $G(j\omega)$, aumentando tal diferença as possibilidades do elemento NL são maiores.

O círculo definido pela ineq. (2.37) (ilustrado na Fig. 2.11) é função do produto $\alpha\omega$, todos os círculos passam pelos pontos $(-\frac{1}{K_1})$ e $(-\frac{1}{K_2})$ e seus centros movem-se no sentido positivo do eixo $\text{Im}G(j\omega)$ segundo aumenta $\alpha\omega$. Se $\alpha = 0$, tem-se um só círculo, simétrico com relação ao eixo real, o que é semelhante a situação definida pelo Teorema 5 de Popov.

2.3.4 Sistemas Multivariáveis Variantes.

A maior generalização do sistema representado pelas eq. (2.1) é considerar seus componentes multivariáveis e variantes pelo que na Fig. 2.8 deve-se substituir o vetor $\underline{F}(\underline{\sigma})$ pelo vetor variante $\underline{g}(\underline{\sigma}, t)$.

O desenvolvimento do Critério de estabilidade de Lyapunov para este tipo de sistemas tem sido demasiado lento devido à dificuldade para a adaptação do Lema MKY.

Considerando que os elementos do vetor $\underline{g}(\sigma, t)$ são separáveis tal que ⁽²¹⁾:

$$\underline{g}(\sigma, t) = \underline{K}(t) \underline{F}(\sigma) \quad (2.38)$$

onde $\underline{K}(t) = \text{diag} [K_i(t), i = 1, 2 \dots n]$, $K_i \in [\underline{K}_1, \underline{K}_2]$ com $\underline{0} \leq \underline{K}_1 < \underline{K}_2 \leq \infty$ e $\underline{F}(\sigma)$ já foi especificada na secção 2.3.2, a função Lyapunov seria a (2.27) com $\tau = -\underline{g}(\sigma, t)$ como $\tau = \underline{K}(t) \underline{F}(\sigma)$. A derivada no tempo é semelhante á eq. (2.28) porém contendo termos adicionais com a derivada no tempo de $\underline{K}(t)$; usando uma adaptação do Lema MKY e restrições apropriadas para $\frac{d}{dt} [K(t)]$ [35], uma expressão como a (2.28) pode ser obtida.

A aplicação do Critério de Popov a sistemas multi variáveis variantes é:

TEOREMA 6 DE POPOV: O sistema expressado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B \tau \\ \underline{\sigma} &= Cx + D \tau \\ \underline{\tau} &= -\underline{g}(\sigma, t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

com $\underline{g}(\sigma, t)$ da eq. (2.38) e $\underline{G}(s) = [C(sI-A)^{-1}B+D]$ é global e assintoticamente estável se existe.

(21) Devido á dificuldade de aplicar o Método Direto de Lyapunov e o Critério de Popov a sistemas multivariáveis e variantes, até agora consideram-se só elementos separáveis como na eq. (2.38).

$$\underline{z}(s) = \text{diag} [z_i(s), i = 1, 2 \dots n]$$

tal que

$$\text{Re} \{ \underline{z}(s) [\underline{G}(s) + \underline{K}_2^{-1}] \} > 0, \forall \omega \geq 0$$

com todos os z_i da mesma forma se todos os $f_i(\sigma_i) \in \underline{F}(\sigma)$ possuem as mesmas características, ou diferentes caso contrário.

CAPITULO 3

"CRITERIO DE POPOV NA ANALISE E PROJETO DOS SISTEMAS NÃO-LINEARES"

CRITERIO DE POPOV NA ANALISE E PROJETO DOS
SISTEMAS NÃO-LINEARES.

No presente capítulo estudam-se as possibilidades do Critério de Popov na análise e desenho de sistemas não-lineares que seguem à forma de Lur'e ⁽¹⁾.

Usando técnicas convencionais da teoria clássica de controle realimentado e uma representação da linha Popov ou do Círculo da não-linearidade, ⁽²⁾ num gráfico de ganho em db e fase por frequência logarítmica, podem desenvolver-se métodos que permitem obter resultados satisfatórios usando somente lápis e papel.

O diagrama de Nyquist, o diagrama de Bode assintótico e o plano de Nichols são poderosas ferramentas para uma análise rápida de sistemas não-lineares com as características vistas no Capítulo 2.

Cada um dos diagramas pode ser usado individualmente ou, como se apresenta neste trabalho, de forma combinada para tirar o melhor proveito em quanto a rapidez e facilidade na implementação manual.

- - - - -

- (1) Chamada neste trabalho de "sistema básico" e mostrada na Fig. 2.1
- (2) Dependendo de se o elemento não-linear é invariante ou variante respectivamente.

Varios autores como Hsu-Meyer [21], Naumov-Tsytkim [63] e Murphy [64] desenvolveram métodos para o desenho de sistemas não-lineares da forma de Lur'e baseados no Critério de Popov, fáceis de aplicar se $\alpha = 0$, já que a linha Popov é independente da frequência no Diagrama de Nyquist modificado. Se $\alpha \neq 0$ tais métodos requerem um grande trabalho de tentativa e erro para com pensar o sistema.

A compensação série é a mais simples de aplicar porque produz somente uma alteração direta no diagrama que está sendo usado.

Assim, neste trabalho usar-se-ão só filtros passa-altos e passa-baixos como compensadores em serie (3).

3.1 DIAGRAMAS DE BODE E NICHOLS E O CRITERIO DE POPOV.

No Cap. 2 viu-se o Critério de Popov e o Critério do Circulo, assegurando a estabilidade global e assintótica do sistema se o diagrama de Nyquist modificado da parte linear fica a direita da Linha Popov ou fora do círculo definido para os limites superior e inferior da não-linearidade.

(3) Os termos passa-altos e passa-baixos se referem á passagem de altos e baixos valores de frequência respectivamente. Uma compensação formando varios laços, possui todas as vantagens e desvantagens próprias da introdução de uma nova realimentação.

Uma análise semelhante da estabilidade pode fazer-se no plano de Bode e no plano de Nichols (4) com vantagem por ser mais fácil a construção dos diagramas respectivos e o cálculo dos compensadores, se é aceitável trabalhar com uma aproximação assintótica para o sistema analisado.

3.1.1 Transferência ao plano de Bode da Linha Popov.

Iniciaremos por desenvolver um processo geométrico simples para trasladar a Linha Popov ao Plano ganho em db e fase versus frequência logarítmica.

Seja o diagrama de Nyquist modificado $G^*(j\omega)$ da função transferência $G(s)$ e uma Linha Popov mostradas na Fig 3.1

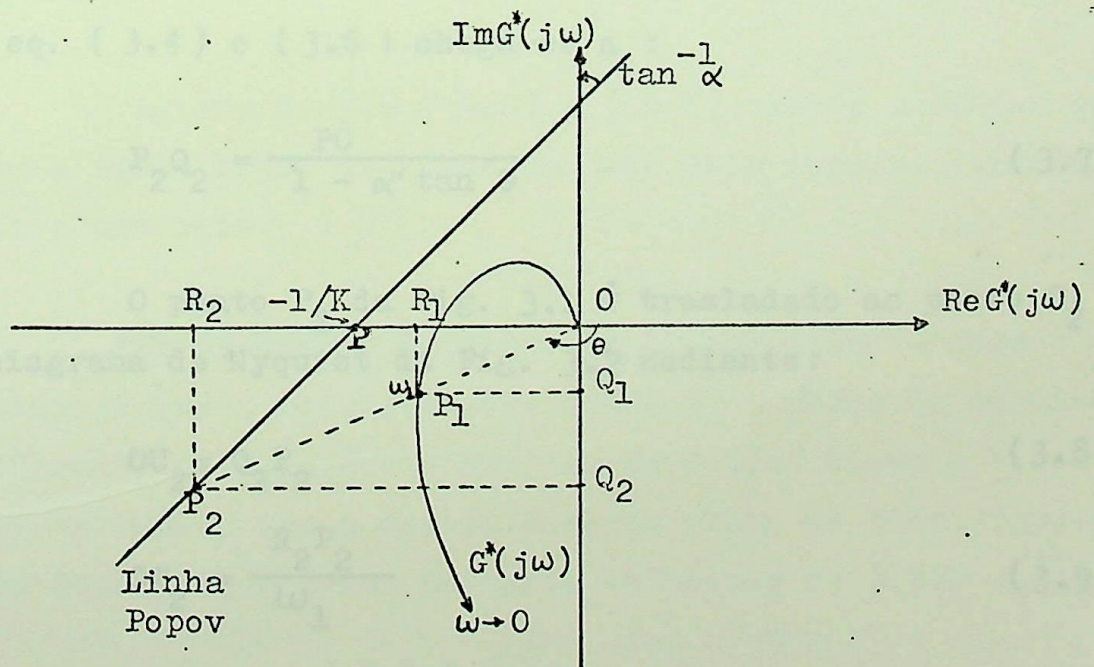


Fig. 3.1

(4) Chamados também gráficos logarítmicos módulo-fase.

Para uma dada ω_1 :

$$\operatorname{Re}G^*(j\omega_1) = OR_1 \quad (3.1)$$

$$\operatorname{Im}G^*(j\omega_1) = OQ_1 \quad (3.2)$$

$$\tan \theta = \frac{OQ_1}{OR_1} = \frac{R_2 P_2}{Q_2 P_2} \quad (3.3)$$

Da eq. 3.3 podemos obter

$$R_2 P_2 = Q_2 P_2 \tan \theta \quad (3.4)$$

definindo agora:

$$\alpha' \triangleq \frac{R_2 P_2}{P_2 R_2} = \frac{P_2 Q_2 - PO}{P_2 R_2} \quad (3.5)$$

ou

$$P_2 R_2 = \frac{P_2 Q_2}{\alpha'} - \frac{PO}{\alpha'} \quad (3.6)$$

das eq. (3.4) e (3.6) chega-se a :

$$P_2 Q_2 = \frac{PO}{1 - \alpha' \tan \theta} \quad (3.7)$$

O ponto P_2 da Fig. 3.1 é trasladado ao ponto S_2 no diagrama de Nyquist da Fig. 3.2 mediante:

$$OU_2 = Q_2 P_2 \quad (3.8)$$

$$OT_2 = \frac{R_2 P_2}{\omega_1} \quad (3.9)$$

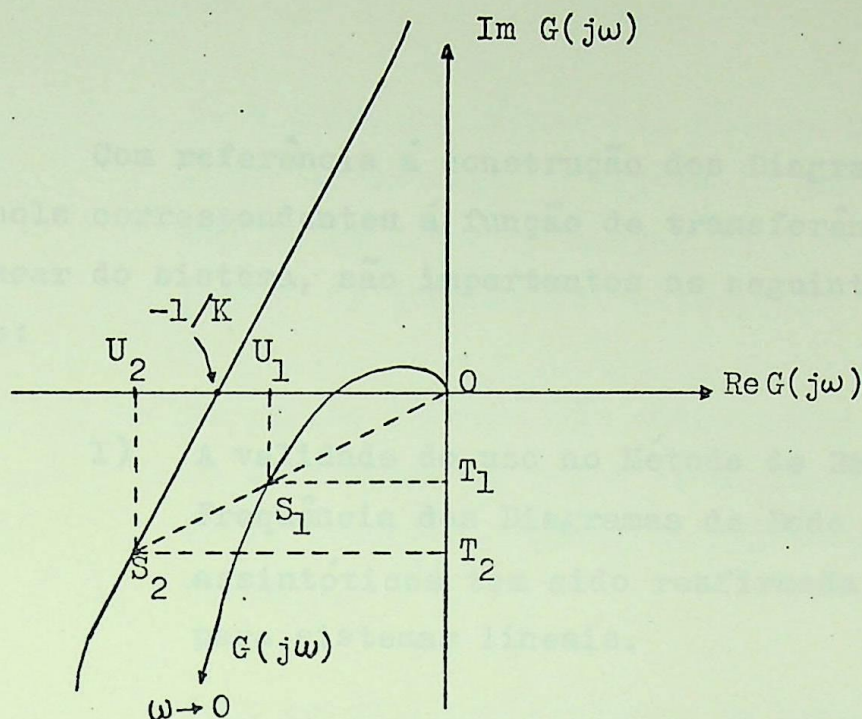


Fig. 3.2

Assim, trasladar a Linha Popov ao Plano de Nyquist se faz ponto por ponto; o ponto $(-\frac{1}{K}, 0)$ é o mesmo em ambos diagramas.

As expressões (3.8) e (3.9) também permitem construir a Linha Popov no Plano de Bode onde resulta ser diferente a uma reta.

"Trasladar" a Condição Popov ao plano de Bode é simples já que a interpretação gráfica no plano de Nyquist modificado, ou seja, que o gráfico de $G(j\omega)$ fique à direita da Linha Popov, tem o equivalente no plano de Bode: "que a Linha Popov fique acima da curva de módulo de $G(j\omega)$ ". (5)

- (5) -----
 É lógico que tanto num diagrama quanto no outro se a Linha Popov é tangente ao gráfico de $G(j\omega)$, ou do módulo de $G(j\omega)$, estará-se dando o maior valor a K para o intervalo $[0, K]$ da não-linearidade.

Com referência á construção dos Diagramas de Bode e Nichols correspondentes á função de transferência da parte linear do sistema, são importantes as seguintes considerações:

- 1) A validade do uso no Método de Resposta em Frequência dos Diagramas de Bode e Nichols assintóticos tem sido reafirmada em [10] e [6] para sistemas lineais.
- 2) Neste trabalho se usarão para a Função de transferência da parte linear, a diferença do que tem sido publicado sobre o tema em trabalhos como [17] ou [13], em que são desenvolvidos algoritmos para o uso de computadores digitais ou analógicos para calcular os diagramas não assintóticos.
- 3) Os resultados que são obtidos ao usar diagramas de Bode e Nichols assintóticos são inexatos, com um erro mais ou menos desprezível dependendo da exatidão requerida; no entanto a facilidade e rapidez com que podem ser construídos justifica a sua utilização.

No diagrama de Bode, o desenho e o cálculo de compensadores estáticos ou dinâmicos para o sistema em estudo, dependerá da curva de módulo e da Linha Popov; ou seja:

- Se a curva de módulo cai abaixo da Linha Popov trasladada, a distância mínima vertical entre ambas as curvas dá o valor do ganho do compensador estático.
- Se existe intersecção entre ambas as curvas, as constantes de tempo do compensador obtêm-se da frequência menor em que acontece a intersecção (6).

Como em qualquer processo de compensação, se é necessário, entra-se a um processo de prova e erro até obter os resultados desejados.

Ilustra-se o anterior com o:

Exemplo 3.1 - Seja o sistema da Fig. 3.3

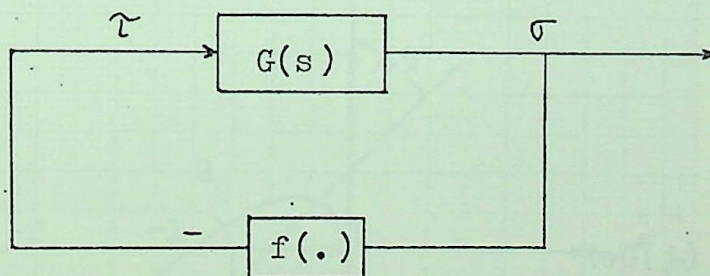


Fig. 3.3

(6) Esta é uma regra empírica, já que os melhores resultados obtêm-se se o filtro é aplicado a partir dessa frequência

com a função de transferência da parte linear sendo:

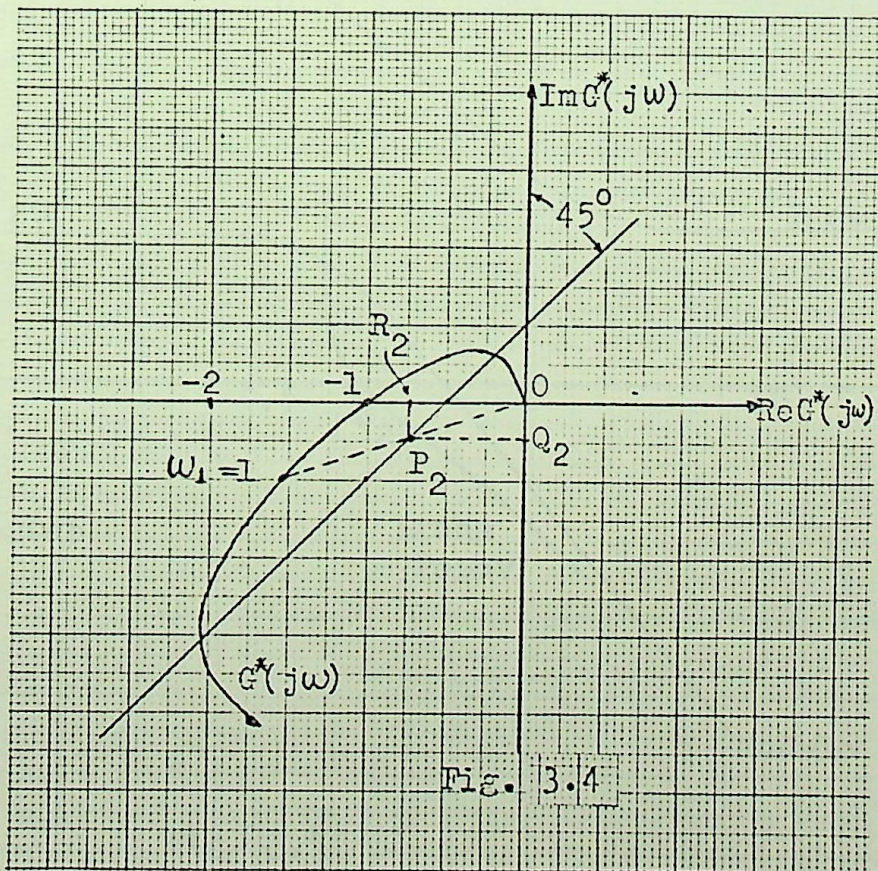
$$G(s) = \frac{8,86}{(s+1)(1,43s+1)(2s+1)} \quad (3.10)$$

Pede-se que o sistema seja global e assintoticamente estável para $f(.) \in [0, 2]$.

Solução: o diagrama de Nyquist modificado de $G(j\omega)$ para

$$G^*(j\omega) = \frac{8,86}{(j\omega+1)(1,43j\omega+1)(2j\omega+1)} \quad (3.11)$$

é mostrado na Fig. 3.4



Traça-se uma Linha Popov no ponto $(-\frac{1}{K_2}, 0)$ para $K_2 = 2$, com uma inclinação tentativa, neste caso² com $\alpha = 1$.

Constroi-se o diagrama de Bode assintótico (7) correspondente a $G(j\omega)$ definida em (3.21), e que se mostra na Fig. 3.5. A seguir traslada-se a Linha Popov usando as eq. (3.8) e (3.9).

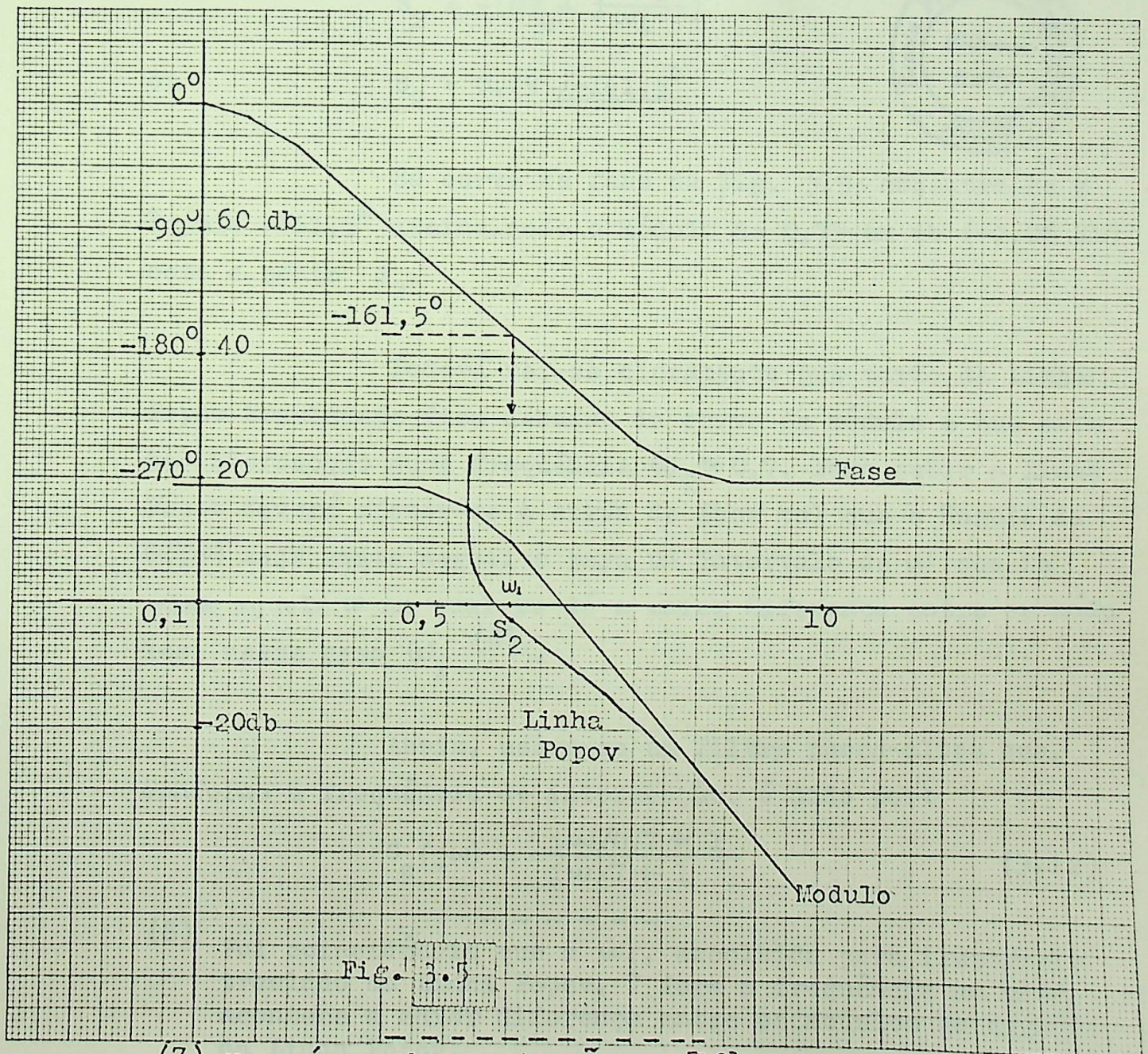


Fig. 3.5

(7) Ver régras de construção em [10].

Assim, por exemplo para $\omega_1 = 1$ obtém-se da Fig. 3.4:

$$G^*(j\omega) = 1,6 \angle -163,4^\circ$$

$$P_2 = -(OR_2 + jOQ_2) = -(0,75 + j0,25)$$

pelo que o ponto a trasladar é

$$S_2 = -(OR_2 + j \frac{OQ_2}{\omega_1})$$

ou

$$S_2 = 0,79 \angle -161,5^\circ$$



Na curva de fase da Fig. 3.5 encontra-se o ângulo $-161,5^\circ$ assinalando o módulo de 0,79 em db ($-2,05$ db) como o ponto S_2 .

Poderá ver-se claramente que parte da Linha Popov trasladada fica debaixo da curva de módulo e que existe intersecção numa frequência $\omega_2 \approx 0,7$. Para subir a Linha Popov deverá afetar-se a curva de fase tal que o ângulo de $G(j\omega)$ seja menos negativo para um intervalo de ω que inclua aquela ω na qual se dá a maior diferença entre os módulos; neste caso ω_1 (8).

Assim, usara-se um filtro passa-altos que, conforme a frequência de intersecção, é dado por:

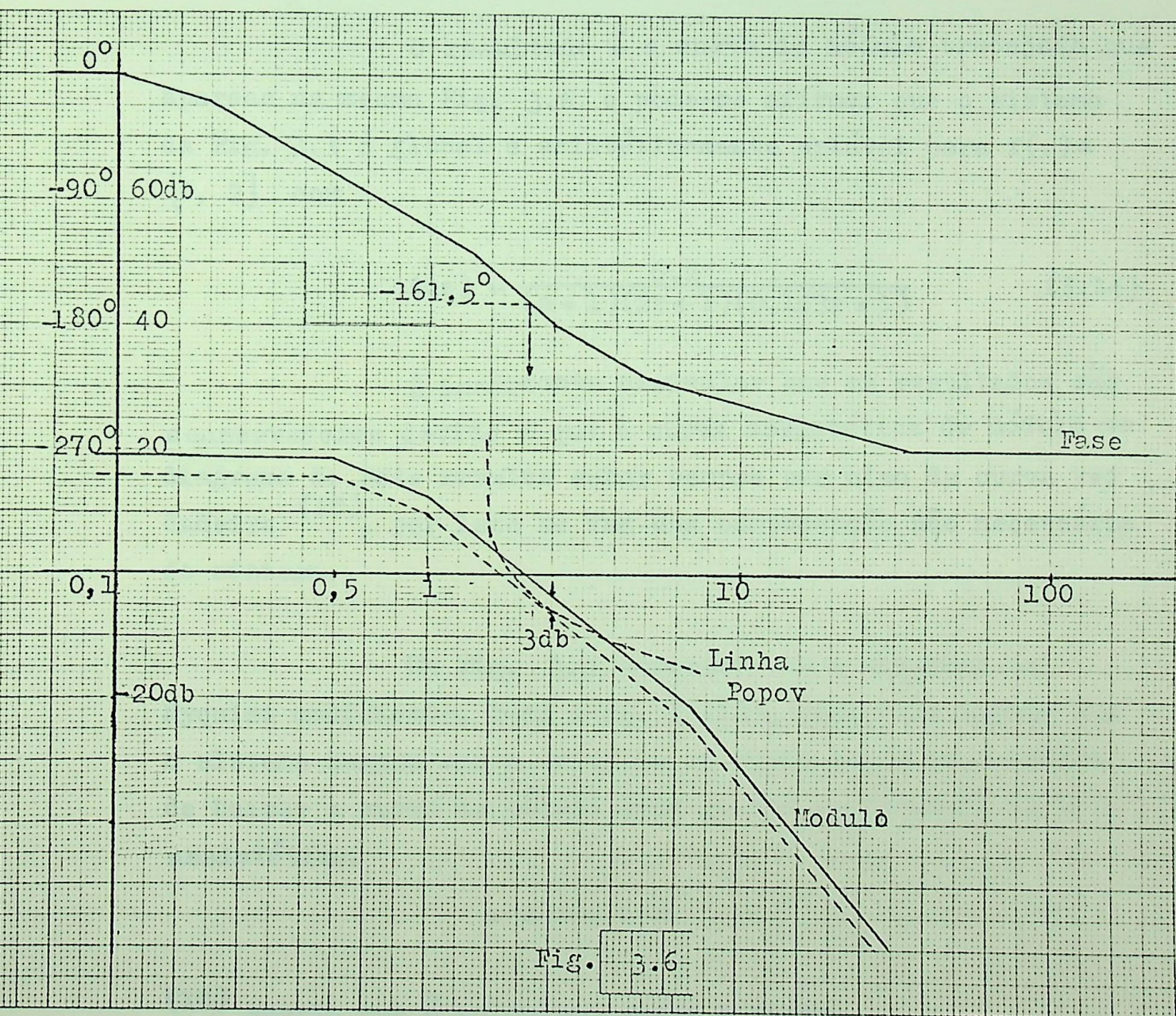
$$G_c(j\omega) = \frac{j\omega/0,7 + 1}{j\omega/7 + 1} \quad (3.12)$$

(8): Foi coincidência que a ω_1 , escolhida para ilustrar o traslado da Linha Popov, fora a frequência na qual acontece a maior diferença entre os módulos de $G(j\omega)$ e da Linha Popov.

Agregando o compensador de (3.12) ao sistema obtém-se a nova resposta em frequência de:

$$G(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{8,86}{(j\omega+1)(2j\omega+1)(0,143j\omega+1)} \quad (3.13)$$

O diagrama de Bode correspondente a (3.13) e a nova Linha Popov (9) se mostram na Fig. 3.6.



- (9) Já que o traslado da Linha Popov depende da curva de fase, terá uma nova localização, se ésta última é modificada.

Ainda existe intersecção entre a curva de módulo e a Linha Popov sendo a distância máxima de 3db, pelo que dá-se um valor de ganho para o filtro na eq. (3.12) de 0,7 modificando a eq. (3.13) a:

$$G(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{6,2}{(j\omega+1)(2j\omega+1)(0,143j\omega+1)}$$

O resultado é a curva de módulo tracejada que aparece na mesma Fig. 3.6. e pode-se afirmar que o sistema da Fig. 3.3 é global e assintoticamente estável para $f(.) \in [0, 2]$ com

$$G(s) = \frac{6,2}{(s+1)(2s+1)(0,143s+1)} \quad (3.14)$$

É importante assinalar que os resultados são conservadores devido a que a curva assintótica de módulo no diagrama de Bode resulta estar sempre por cima da curva verdadeira ⁽¹⁰⁾, por isto se faz uma compensação não necessária do sistema.

Na Fig. 3.6 apresenta-se o diagrama de Nyquist modificado, para a eq. (3.14), onde pode ver-se que o sistema cumpre com o Critério de Popov sem a necessidade de baixar a curva de módulo como se fêz no diagrama de Bode assintótico.

(10) Aquela que é calculada ponto a ponto.

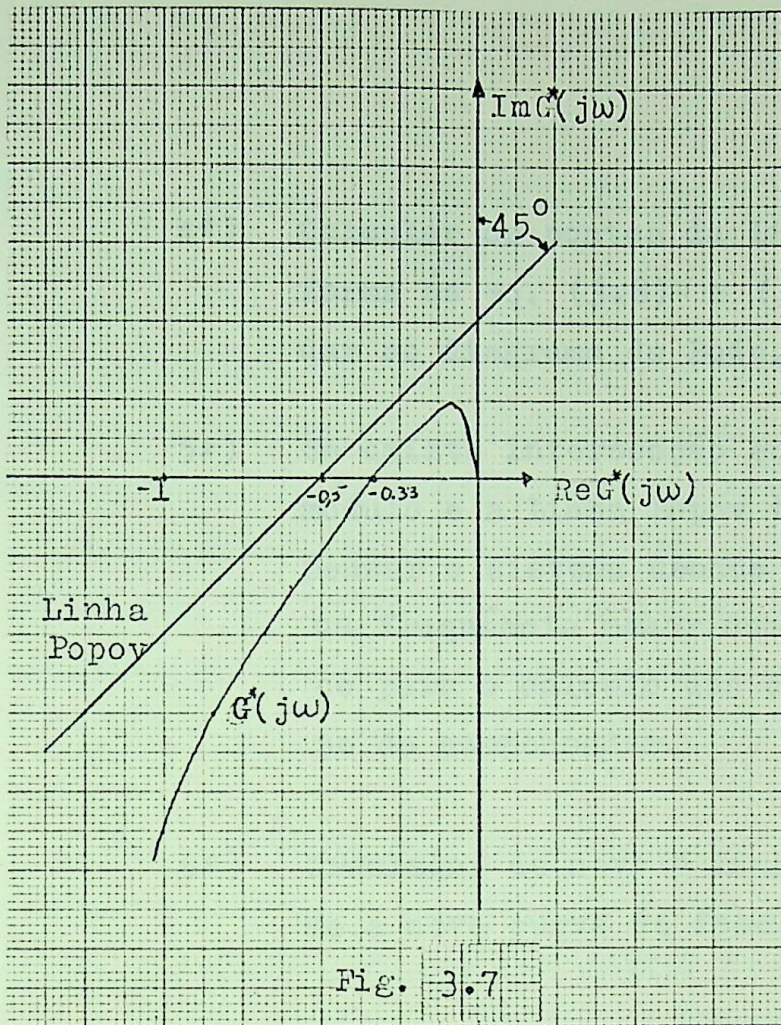


Fig. 3.7

Podemos resumir o método nos seguintes passos:

- 1º) Fazer o diagrama modificado de Nyquist (ou diagrama de Popov) "aproximado", da função de transferência da parte linear do sistema, calculando tantos pontos quantos sejam necessários para ter uma boa aproximação.
- 2º) Traçar uma Linha Popov no valor $(-1/K_2, 0)$ desejado, com uma inclinação tentativa α .
- 3º) Fazer o diagrama de Bode assintótico para a função de transferência da parte linear do sistema.

- 4º) Calcular os pontos da Linha Popov conforme as eq. (3.8) e (3.9) e trasladar ao diagrama de Bode.
- 5º) Se existe intersecção entre a curva de módulo e a Linha Popov trasladada, compensar o sistema usando a intersecção na frequência menor como valor recíproco para o cálculo das constantes de tempo do compensador.
- 6º) Trasladar de novo a Linha Popov conforme a nova curva de fase.
- 7º) Se necessário, regressar ao passo 2º até obter os resultados desejados por meio deste processo iterativo.
- 8º) Construir um diagrama de Nyquist modificado exato da função de transferência final se é necessário conferir os resultados obtidos com o Bode assintótico.

As vantagens deste método são que requer pouco cálculo e que é rapidamente implementado dando uma idéia aproximada da estabilidade do sistema para determinados parâmetros e/ou intervalo da não-linearidade.

3.1.2 O Critério de Popov e o Diagrama de Nichols.

No Método de Resposta em Frequência, para sistemas lineares, pode fazer-se um gráfico de módulo (ordenadas) versus fase (abcissas), da função de transferência, sobre um gabarito que contém curvas M de módulo constante e curvas N de fase constante, da função de transferência do sistema; chama-se ao gráfico resultante Diagrama de Nichols e ao gabarito com as curvas M e N chama-se Carta de Nichols.

Para sistemas não-lineares que seguem a forma de Lur'e pode aplicar-se o Critério de Popov usando uma Carta de Nichols diferente; em vez das curvas de módulo e fase constante, contém as Curvas Limite de Popov, que são geradas trasladando Linhas Popov para diferentes valores de " $\alpha\omega$ ", do plano de Nyquist ao plano de Nichols ⁽¹¹⁾. Na Fig. 3.8 se mostram as Curvas Limite Popov para $-10 \leq \alpha\omega \leq 10$.

A aplicação da Fig. 3.8 baseia-se no mesmo princípio que a aplicação do diagrama de Nyquist e o diagrama de Bode, assinalado nas secções anteriores; ou seja: assim como no diagrama modificado de Nyquist o gráfico de $G^*(j\omega)$ deve ficar a direita da linha Popov e no diagrama de

(11) Em [21] descreve-se como gerar as Curvas Limite Popov no diagrama de Nichols.

Bode a curva de módulo de $G(j\omega)$ deve ficar embaixo da Linha Popov trasladada ou do círculo trasladado; assim, no diagrama de Nichols cada ponto de $G(j\omega)$ para cada ω deve ficar em baixo (ou ser tangente) da Curva Limite Popov $\propto \omega^{(12)}$.

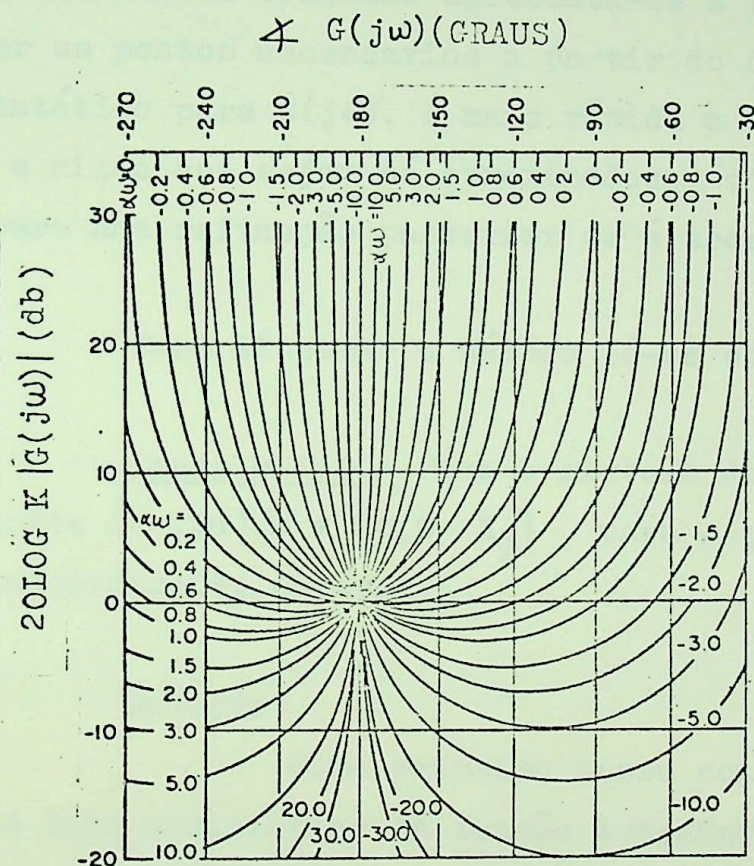


Fig. 3.8

- (12) Observar que é a Condição Popov (2.15) levada a cada diagrama em particular.

La carta de Nichols da Fig. 3.8 usa-se partindo do cálculo de módulo e fase de $G(j\omega)$ para o intervalo de ω que interessa ⁽¹³⁾, o que equivale a calcular os pontos para o diagrama de Nyquist do sistema.

Neste trabalho apresenta-se a possibilidade de obter os pontos necessários a partir do diagrama de Bode assintótico para $G(j\omega)$. É mais rápida a obtenção de resultados e ainda que sejam só aproximados, podem servir como base para uma refinação posterior se é necessária.

Para ilustrar o método dá-se o:

Exemplo 3.2. - Para o sistema do exemplo 3.1 obter o limite de $f(\sigma)/\sigma \in [0, 0 \ K_2]$ para o qual é global e assintoticamente estável.

Solução:

Como primeiro passo constroi-se o diagrama de Bode assintótico da função transferência da parte linear do sistema dada pela eq. (3.11) e transcrita a seguir

$$G(s) = \frac{8,86}{(s+1)(1,43s+1)(2s+1)}$$

e que se apresenta na Fig. 9 (linhas contínuas).

- - - - -

(13) Que depende de cada sistema em particular, podendo estender-se desde $\omega \rightarrow 0$ a $\omega \rightarrow \infty$

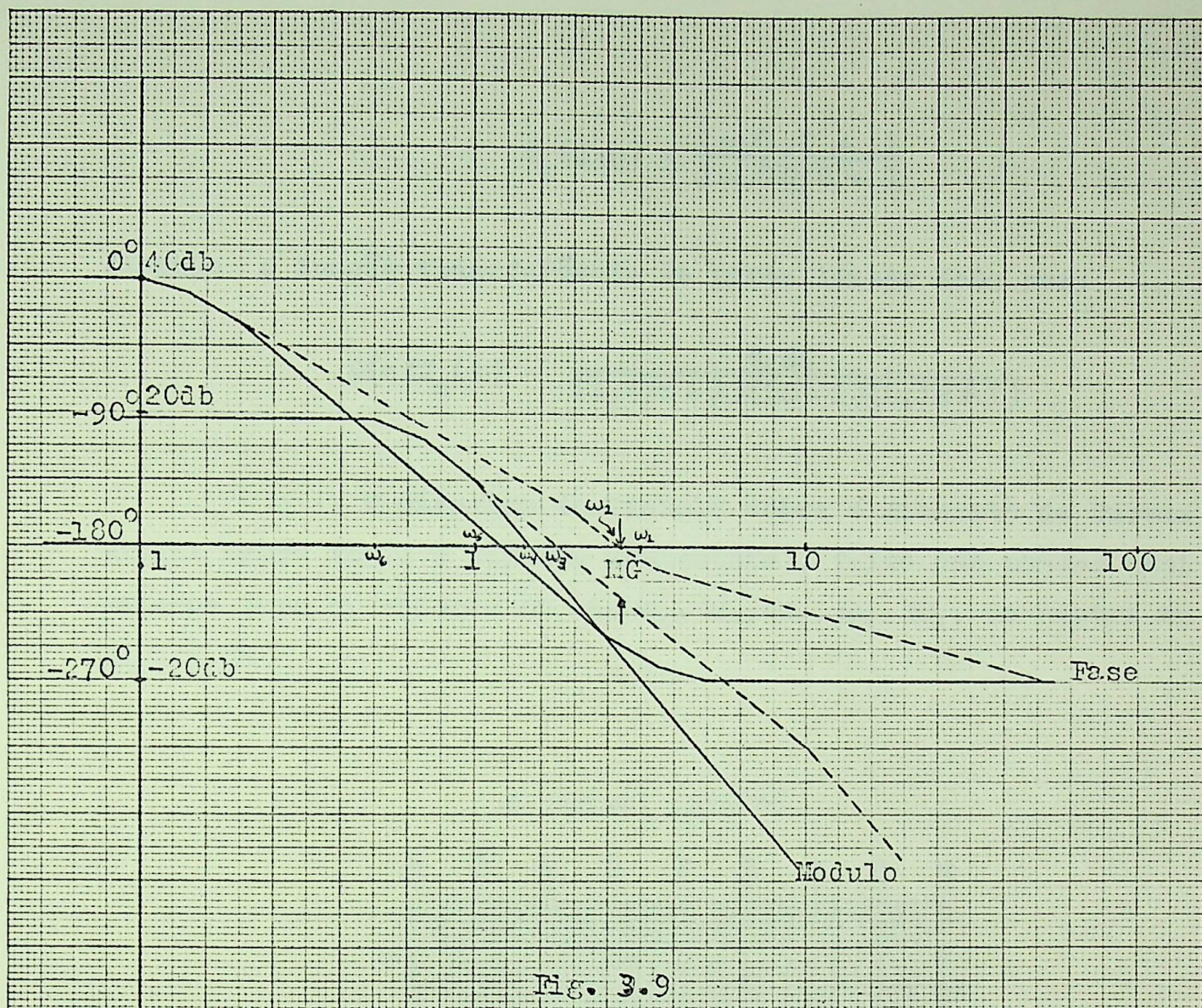


Fig. 3.9

Pode ver-se que $G(j\omega)$ não corresponde a um sistema linear estável devendo compensar-se. A compensação vai depender sobre tudo da Margem de Ganância (MG na Fig. 3.9) (14) da qual dependerá o valor de K_2 .

Escolhe-se um compensador passa-altos de tal forma que $MG = -7$ db (15); o resultado é a curva traçada na Fig. 3.9, tendo sido aplicado o filtro dado por:

(14) Lembra-se que $MG = \|G(j\omega)\|_{-180^\circ}$

(15) Ver técnicas de compensação para sistemas lineares em 10

$$G_c(j\omega) = \frac{j\omega/1,0 + 1}{j\omega/10,0 + 1}$$

ficando a função transferência da parte linear dada por:

$$G(s)G_c(s) = \frac{8,86}{(1,43s + 1)(2s + 1)(0,1s + 1)}$$

O diagrama de Nichols sobre o gabarito de Curvas Limite Popov (para o sistema compensado), feito nos pontos assinalados para os valores de $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$, se mostra na Fig. 3.10

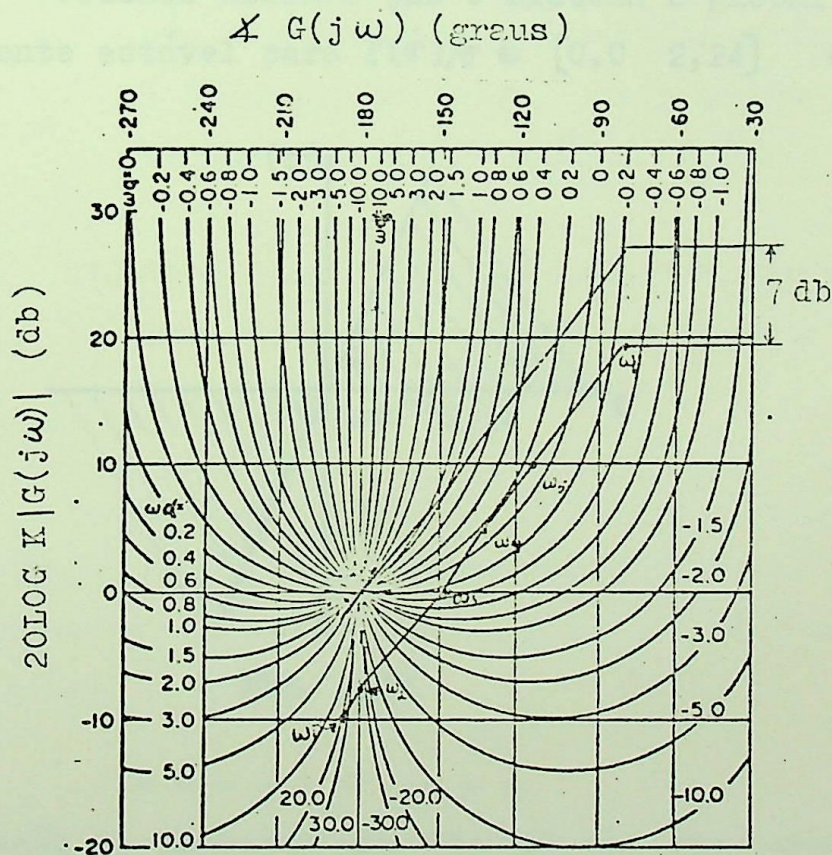


Fig. 3.10

Mediante un deslocamento vertical encontra-se que para

$$20\text{Log } K_2 = 7\text{db}$$

ou

$$K_2 = 2,24 \quad (16)$$

pode-se encontrar um valor de $\alpha = 0,4$ tal que para cada produto $\alpha\omega = 0,4$ o ponto

$$20\text{Log } |G(j\omega)G_c(j\omega)| + 7\text{db}$$

cai abaixo da respectiva Curva Limite Popov (17).

Podemos afirmar que o sistema é global e assintoticamente estável para $f(\sigma)/\sigma \in [0, 0 \quad 2,24]$ da Fig. 3.11

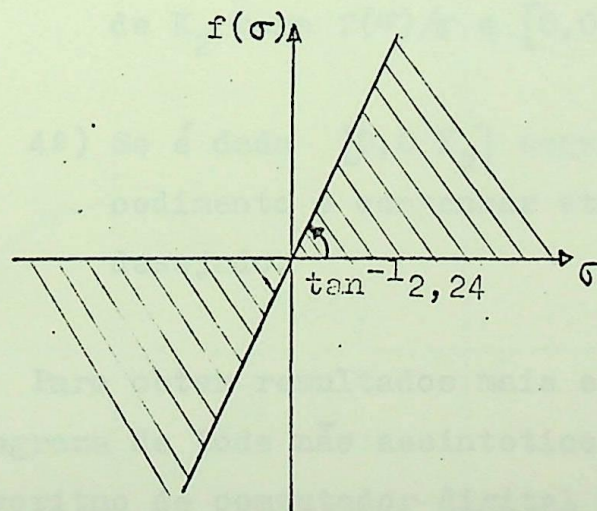


Fig. 3.11

-
- (16) A razão de procurar uma $MG = -7\text{db}$ foi para obter um K_2 aproximado a aquele que foi obtido no método da secção anterior.
- (17) O valor de $\alpha = 0,4$ encontra-se depois de algumas tentativas observando para os pontos assinalados na Fig. 3.10 cada valor de ω no diagrama de Bode assintótico.

Para um sistema da forma de Lur'e o método apresentado nesta secção pode resumir-se nos seguintes passos:

- 1º) Construir o diagrama de Bode assintótico para a parte linear do sistema, $G(s)$.
- 2º) Se $G(s)$ não é estável, compensar estática ou dinamicamente conforme as especificações dadas ao sistema.
- 3º) Construir o diagrama de Nichols partindo do diagrama de Bode Assintótico e determinar o valor de α , tal que se cumpra o Critério de Popov, assim como o valor de K_2 para $f(\sigma)/\sigma \in [0, 0 \quad K_2]$.
- 4º) Se é dado $[0, 0 \quad K_2]$ seguir o mesmo procedimento e compensar até obter o K_2 desejado.

Para obter resultados mais exatos pode usar-se um diagrama de Bode não assintótico feito mediante algum algoritmo de computador digital como o desenvolvido por Garg P. D. em [17]

3.1.3 Transfêrencia do Critério do Círculo ao Plano de Bode.

Conforme o Critério do Círculo visto no capítulo 2 considere-se um sistema cujo modelo de estado é

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\tau & (3.14) \\ \sigma &= hx & (3.15) \\ \tau &= -f(\sigma, t) \end{aligned}$$

ou seja com o elemento não-linear "variante" cuja característica está no intervalo $[K_1, K_2]$ de tal forma que é representado por um círculo no Plano de Nyquist como se mostra na Fig. 3.12

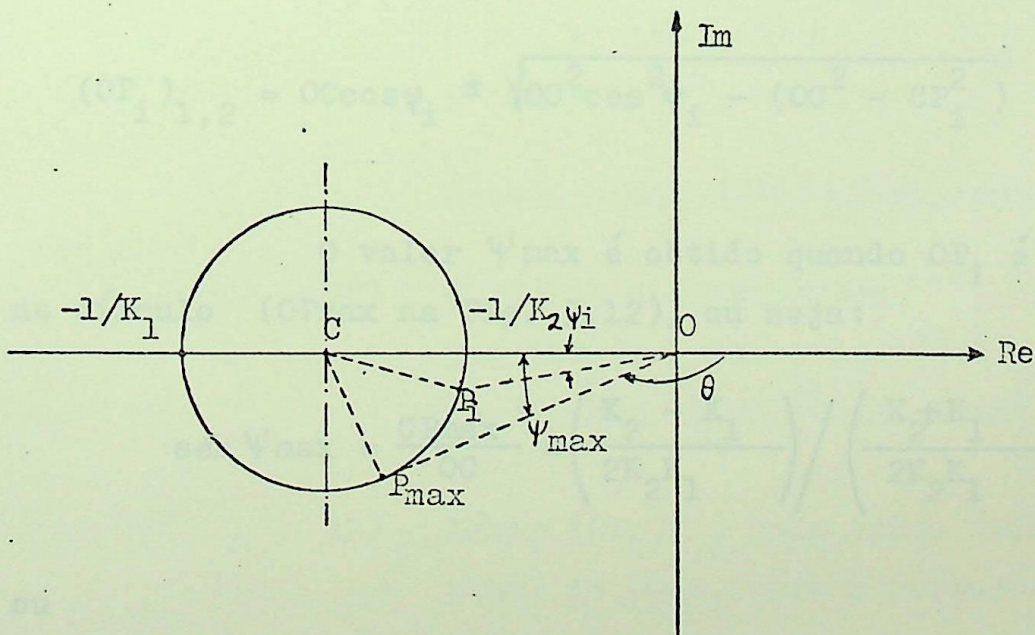


Fig. 3.12

Se $K_2 > K_1 > 0$ o centro do círculo e o raio estarão dados por:

$$\left. \begin{aligned} OC &= -\frac{K_1 + K_2}{2K_1 K_2} \\ CP_i &= \frac{K_2 - K_1}{2K_1 K_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Para qualquer ponto P_i no círculo, da lei dos cossenos aplicada ao triângulo COP_i , obtêm-se as distâncias desde a origem até as duas intersecções da linha CP_i com o círculo (na Fig. 3.12 a outra intersecção obtém-se prolongando a mesma linha OP_i), através da equação:

$$(OP_i)_{1,2} = OC \cos \psi_i \pm \sqrt{OC^2 \cos^2 \psi_i - (OC^2 - CP_i^2)} \quad (3.17)$$

O valor ψ_{\max} é obtido quando CP_i é tangente ao círculo (OP_{\max} na Fig. 3.12), ou seja:

$$\text{sen } \psi_{\max} = \frac{CP_{\max}}{OC} = \left(\frac{K_2 - K_1}{2K_2 K_1} \right) \Bigg/ \left(\frac{K_2 + K_1}{2K_2 K_1} \right)$$

ou

$$\psi_{\max} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \right) \quad (3.18)$$

além disso

$$OP_{\max} = \sqrt{CO^2 - CP_{\max}^2}$$

$$OP_{\max} = \frac{1}{2K_1 K_2} \sqrt{(K_1 + K_2)^2 - (K_1 - K_2)^2}$$

$$OP_{\max} = 1 / \sqrt{K_1 K_2} \quad (3.19)$$

A diferença do método anterior, neste caso, OP_i não está afetado pela frequência pelo que o traslado do círculo ao plano de Bode pode resumir-se nos seguintes passos;

1º) Calcular os limites da variação de θ conforme:

$$\theta_{\min} = -180^\circ - \psi_{\max}$$

$$\theta_{\max} = -180^\circ + \psi_{\max}$$

usando a eq. (3.18) para encontrar ψ_{\max}

2º) Calcular alguns pontos (18) de intersecção $(OP_i)_{1,2}$ com a eq. (3.17) substituindo ψ_i por $\theta_i \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$.

3º) Achar $(OP_i)_{1,2}$ calculando $20\text{Log}(OP_i)$ no plano de Bode, para o correspondente θ_i na curva de fase da parte linear do sistema.

(18)

Quantos pontos sejam necessários para o traçado do círculo, ou seja: OP_{\max}/θ_{\min} , OP_{\max}/θ_{\max} , $(OP_i)_{1,2}/\theta_i$, $(OP_{i+1})_{1,2}/\theta_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots$ com $\theta_i - \theta_{i+1} = 25^\circ$ como sugestão.

Lembramos do Capítulo 2, secção 2.3.3 que para que um sistema da forma de Lur'e, com uma parte linear invariante $G(s)$ e um elemento não-linear variante $f(\sigma, t)$ seja global e assintoticamente estável é suficiente que $G(s)$ seja estável e que $0 \leq K_1 < f(\sigma, t)/\sigma < K_2$ para todo t ou seja que o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ não encerre nenhuma parte do círculo que passa pelos pontos $-1/K_1$ e $-1/K_2$ e com o centro no eixo real negativo.

"Trasladando" o anterior ao plano de Bode se diz que não pode haver intersecção entre a curva de módulo e o círculo trasladado. Se existe intersecção o sistema terá de ser compensado estática ou dinamicamente para que cumpra com as especificações dadas. Quando a compensação é dinâmica deverá determinar-se novamente o círculo no plano de Bode já que depende da curva de Fase e se esta é modificada também o traslado do círculo se modifica (19)

Para ilustrar o método apresenta-se o:

Exemplo 3.3.- Seja o sistema

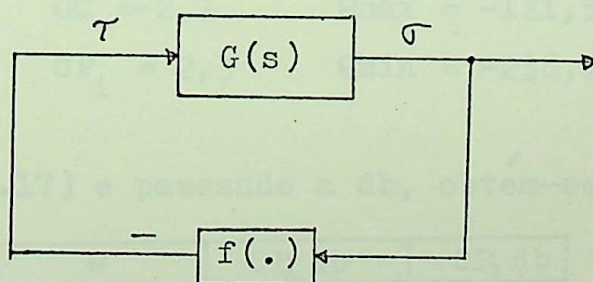


Fig. 3.13

(19) ---
 Levar em conta que o círculo da não linearidade, que é trasladado ao Plano de Bode, resultará uma curva fechada se θ_{\min} é menos negativo que o máximo ângulo para $G(j\omega)$ (que será quando $\omega \rightarrow \infty$); se θ_{\min} é mais negativo, resultará uma curva aberta [13]

com a função transferência da parte linear sendo:

$$G(s) = \frac{20,4(0,667s+1)}{s(s+1)(0,25+1)(0,0677s+1)} \quad (3.20)$$

e o elemento não-linear variante que sempre está no intervalo $[0,2 \quad 2,5]$, segundo é indicada na Fig. 3.14

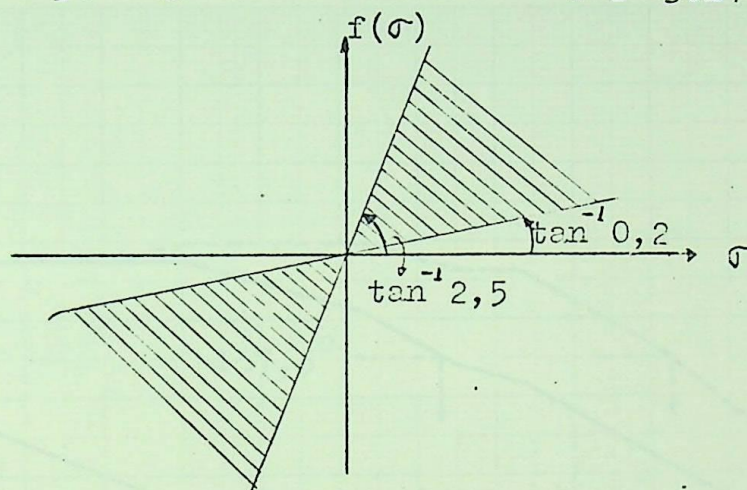


Fig. 3.14

Peê-se que o sistema seja global e assintôticamente estável.

Seguindo o procedimento assinalado anteriormente e usando as eq. (3.16) e (3.18) obtêm-se

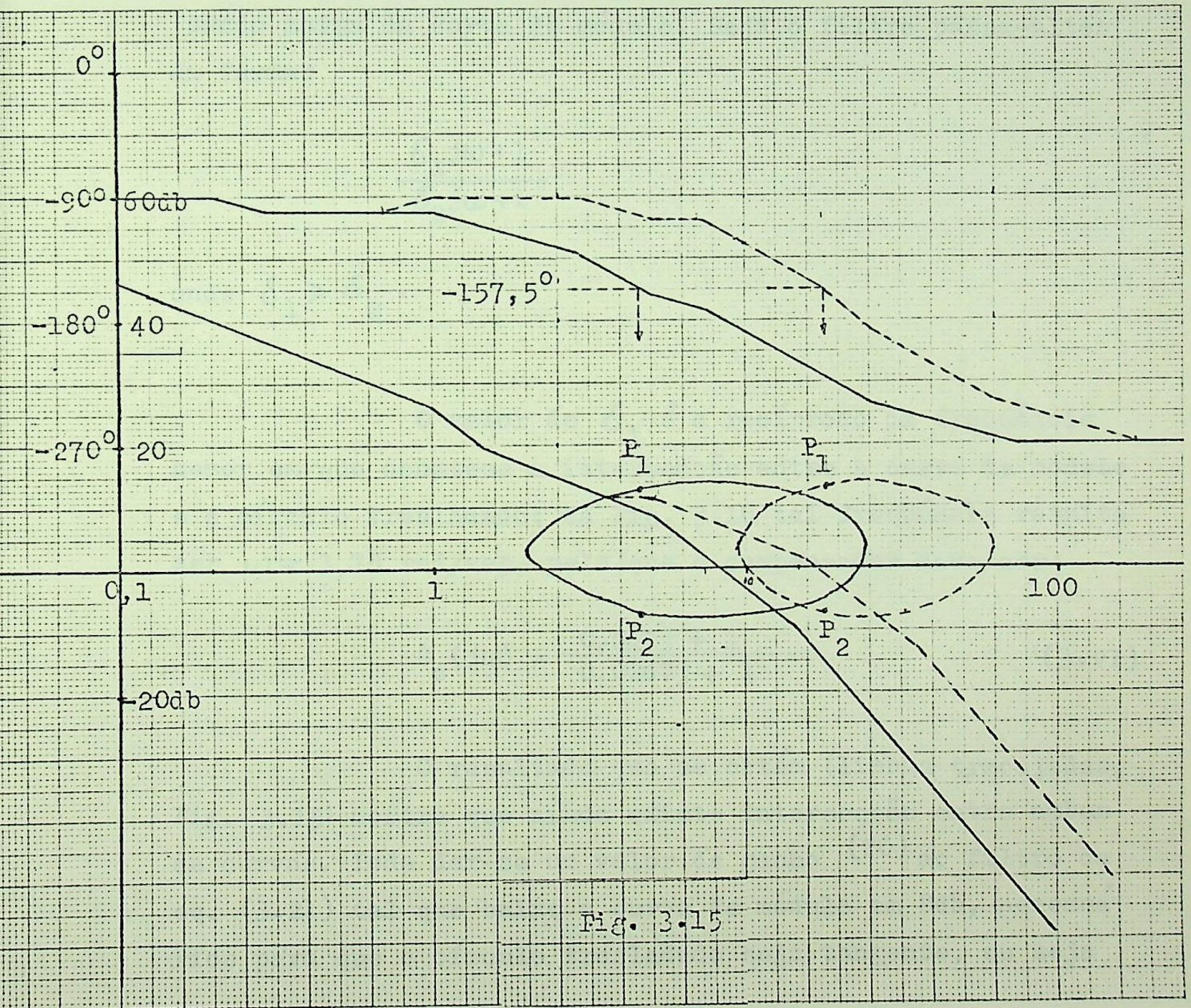
$$\begin{aligned} OC &= -2,7 & \theta_{\max} &= -121,58^\circ \\ CP_i &= 2,3 & \theta_{\min} &= -238,41^\circ \end{aligned}$$

com a eq. (3.17) e passando a db, obtêm-se a tabela 3.1:

θ	OP_1 db	OP_2 db
-121,58	3,01	3,01
-135,00	10,08	-4,06
-157,50	13,16	-7,13
-180,00	13,97	-7,95
-202,50	13,16	-7,13
-225,00	10,08	-4,06
-238,41	3,01	3,01

Tabela 3.1

O diagrama de Bode assintótico para a $G(j\omega)$ correspondente a função de transferência da eq. (3.20) e o círculo da não-linearidade trasladado com base na tabela 3.1 se mostram na Fig. 3.15



Como pode ver-se existe intersecção entre o círculo trasladado e a curva de módulo, pelo que o sistema terá de ser compensado. Escolhemos um compensador passa-altos já que possui valores de fase positivos o que produz um deslocamento para frente (ou adiantamento) fazendo com que o círculo trasladado também seja deslocado para frente passando acima da curva de módulo. Seja o filtro passa-altos da forma:

$$\frac{\delta_1 j\omega + 1}{\delta_2 j\omega + 1}$$

onde $\delta_1 > \delta_2$.

O valor de δ_1 é o recíproco da frequência menor em que acontece a intersecção entre a curva de módulo e o círculo trasladado; da Fig. 3.16 tal frequência resulta ser $\omega \approx 3,75$ rad/seg, pelo que o compensador deve ser:

$$G_c(j\omega) = \frac{0,267j + 1}{0,0267j + 1} \quad (3.21)$$

O resultado que se obtém (linhas tracejadas, Fig. 3.15) mostra que ainda existe intersecção entre ambas as curvas. Pode dar-se um valor de ganho ⁽²⁰⁾ ao filtro da eq. (3.21) tal que baixe a curva de módulo em 8db, necessários para que o círculo trasladado seja tangente, ou seja

(20) Ou pode seguir-se agregando filtros até obter ausência de intersecção.

$$G_c = \frac{0,398 (0,267j\omega + 1)}{(0,0267j\omega + 1)}$$

pelo que a função de transferência da parte linear do sistema fica:

$$G(s) = \frac{8,121(0,667s+1)(0,267s+1)}{s(s+1)(0,2s+1)(0,0667s+1)(0,0267s+1)} \quad (3.22)$$

Para provar que os resultados obtidos no diagrama de Bode assintótico são aceitáveis, na tabela 3.2 e na Fig. 3.16 apresenta-se o diagrama de Nyquist exato da $G(j\omega)$ para a eq. (3.22) com ganho unitário (linha tracejada) e ganho 0.398 (linhas contínuas).

ω	$G(j\omega)$	$0,398G(j\omega)$
7,5	1,99/-124,4	0,79/-124,4
10,0	1,40/-135,4	0,56/-135,4
15,0	0,77/-154,3	0,31/-154,3
24,2	0,32/-180,0	0,13/-180,0
30,0	0,21/-190,7	0,08/-190,7
50,0	0,06/-215,6	0,02/-215,6

Tabela 3.2

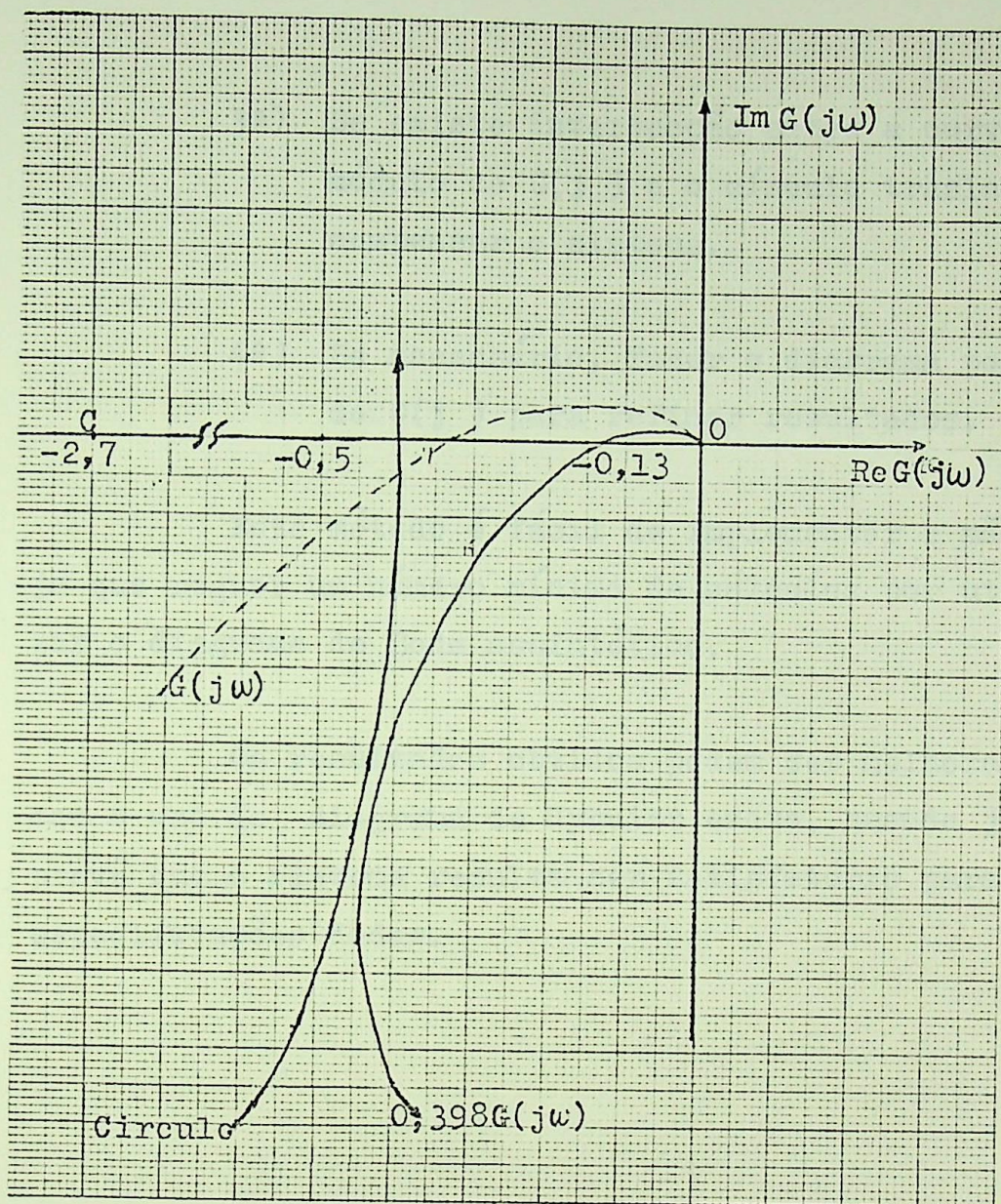


Fig. 3.16

O método pode ser resumido nos seguintes passos: dado o sistema na forma de Lur'e e com o modelo de estado conforme (3.15):

- 1º) Fazer diagrama de Bode assintótico para $G(j\omega)$.
- 2º) Trasladar o círculo de não-linearidade ao plano de Bode.

- 3º) Se existe intersecção entre a curva de módulo de $G(j)$ e o círculo trasladado compensar o sistema.
- 4º) Se necessário, fazer o diagrama polar de $G(j)$ para refinar resultados.

Este método é fácil de implementar a mão, já que requer um número mínimo de cálculos por utilizar o diagrama de Bode assintótico.

Os resultados obtidos podem ser melhorados com o uso do diagrama de Nyquist exato, quando já se prevê que o sistema resulta ser satisfatório para as especificações dadas.

APLICAÇÃO DO CRITÉRIO POPOV EM SISTEMAS DE POTÊNCIA

O estudo da estabilidade desempenha um papel relevante no planejamento e operação dos Sistemas de Potência.

Para o estudo de estabilidade utilizam-se basicamente de dois procedimentos: o primeiro usa métodos numéricos para a solução de equações diferenciais (simulação) para cada contingência e as conclusões são retiradas pelo comportamento das variáveis internas das máquinas. [5].

CAPITULO 4

" APLICAÇÃO DO CRITÉRIO POPOV EM SISTEMAS DE POTÊNCIA "

isto é, as equações que descrevem o comportamento dinâmico da máquina. Engenheiro [6] (1947) usou o critério de função de energia do sistema. Mais tarde Lyell [7] (1953) estudou o uso das ideias de Lyapunov para os sistemas com três máquinas e obteve um critério para estabilidade baseando-se no ponto de equilíbrio instável, sem levar em conta a determinação de tempos críticos para eliminação de

classe [8] em 1966 apresentou um método para fazer comparações entre o critério de Lyapunov e o critério de plano de fase e o segundo método de Lyapunov.



APLICAÇÃO DO CRITÉRIO POPOV EM SISTEMAS DE POTÊNCIA.

O estudo da estabilidade desempenha um papel relevante no planejamento e operação dos Sistemas de Potência.

Para o estudo da estabilidade dispõe-se basicamente de dois procedimentos. O primeiro usa métodos numéricos para a solução de equações diferenciais (simulação) para cada contingência e as conclusões são obtidas pelo comportamento dos ângulos internos das máquinas [65] , [66] , [67] . A outra forma de abordar o problema, baseia-se em métodos diretos para o estudo da estabilidade, isto é, em aqueles que não usam o conhecimento explícito da solução. Magnusson [68] (1947) sugeriu o uso da função de energia do sistema. Mais tarde Aylett [69] (1958) estendeu o uso das idéias de Magnusson para um sistema com três máquinas e obteve um Critério para estabilidade baseando-se no ponto de equilíbrio instável com menor energia. Demonstrou também como usar esses resultados para a determinação de tempos críticos para eliminação de faltas.

Gless [18] em 1966 apresentou um trabalho onde faz comparações entre o critério das áreas iguais, o estudo pelo plano de Fase e o segundo método de Lyapunov.

No caso de duas máquinas, que se reduz a uma máquina com barra infinita e no modelo clássico sem amortecimento, os resultados são exatos e idênticos. Nesse mesmo trabalho, Gless sugere o uso da função de energia do sistema como função Lyapunov no caso de três máquinas.

El-Abiad e Nagappan [11] estenderam o uso de funções Lyapunov para o caso de "n" máquinas e propuseram um algoritmo para análise da estabilidade e a determinação do tempo de eliminação de falta e incluíram amortecimento no modelo. Assim, foi despertado o interesse para o uso de funções de Lyapunov para o estudo da estabilidade de Sistemas de Potência.

O método de Lyapunov dá em geral condições suficientes para a estabilidade de um ponto de equilíbrio e proporciona indicações sobre o domínio de estabilidade.

Podem-se distinguir pelo menos três tipos de funções quanto à obtenção das mesmas.

Do primeiro tipo são as funções que foram obtidas por tentativas [70], e por tentativas fazendo considerações sobre a energia do sistema [18], [11].

Do segundo tipo são as funções que foram obtidas por meio de métodos baseados em escolher o gradiente da função de Lyapunov [71].

No terceiro tipo estão as funções tipo Lur'e obtidas a partir do Critério de Popov.

As não linearidades que aparecem nos fenômenos de falta em Sistemas de Potência são do tipo senoidal e cumprem a condição "primeiro-terceiro quadrante" (condição c) da seção 2.1.2) para valores perto do origen, com limites que chamaremos p_1 e p_2 conforme a Fig. 4.1

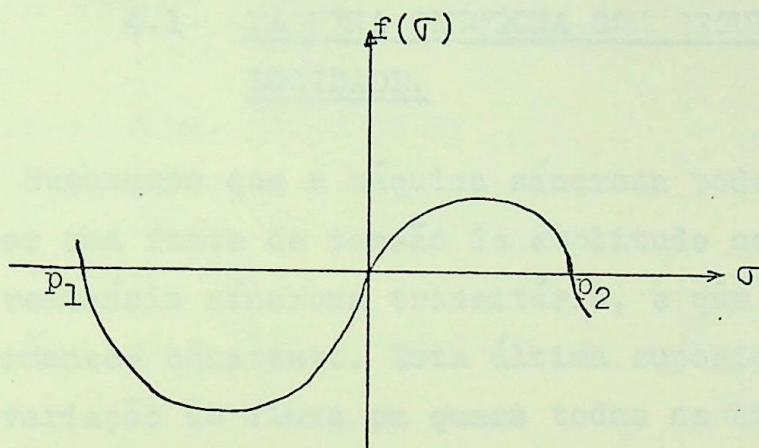


Fig. 4.1

ou seja:

$$0 \leq f(\sigma)/\sigma < \infty \iff p_1 < \sigma < p_2$$

Assim, podemos utilizar o Critério de Popov para deduzir a estabilidade assintótica e para assegurar a existência de uma função Lyapunov do tipo "quadrática mais integral da não-linearidade", usando o Lema MKY em suas diferentes versões para a obter.

Partindo do modelo mais simples para uma máquina síncrona até um sistema de n máquinas considerando variações do fluxo, amortecimento, polos salientes, etc., a determinação da função Lyapunov vai sendo mais laboriosa ainda que necessária para encontrar o tempo de eliminação da falta.

4.1 MÁQUINA SÍNCRONA COM REGULADOR DE VELOCIDADE.

Suporemos que a máquina síncrona pode ser representada por uma fonte de tensão de amplitude constante atrás da reatância síncrona transitória, e que o fluxo em laçado permanece constante. Esta última suposição é válida já que a variação do fluxo em quase todas as situações práticas é geralmente muito mais lento que os fenômenos transitórios que são de interesse no análise da estabilidade transitória.

A equação normalizada de um sistema máquina síncrona-barra infinita, depois de uma falta, pode ser escrita como:

$$\ddot{\delta} - d\dot{\delta} = P_m - \text{sen } \delta \quad (4.1)$$

onde δ é o ângulo do rotor com relação a posição do fluxo girante síncrono (em graus elétricos), P_m é a potência mecânica e d é a constante de amortecimento.

O ponto de equilíbrio na eq. (4.1) é determinado para:

$$\dot{\delta}_0 = 0$$

pelo que resulta ser

$$\delta_0 = \text{sen}^{-1} P_m$$

que pode ser trasladado para a origem definindo:

$$x = \delta - \delta_0$$

modificando-se a eq. (4.1) para

$$\ddot{x} = -d\dot{x} + P_m - \text{sen}(x + \delta_0)$$

$$\ddot{x} = -d\dot{x} + P_m(1 - \cos x) - \sqrt{1 - P_m^2} \text{sen } x \quad (4.2)$$

Definindo:

$$x_1 \triangleq x$$

$$x_2 \triangleq \dot{x}$$

$$f(x_1) \triangleq -P_m(1 - \cos x_1) + \sqrt{1 - P_m^2} \text{sen } x_1 \quad (4.3)$$

obtem-se o modelo de estado, que segue a forma das eq. (2.1):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\tau \\ \sigma &= h^T x \\ \tau &= -f(\sigma) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -d \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

A função transferência da parte linear pode ser deduzida com A, b, h da eq. (4.5) e resulta ser: ⁽¹⁾

$$G(s) = \frac{1}{s(s+d)} \quad (4.6)$$

podendo representar ao sistema pelo diagrama de blocos da fig. 4.2

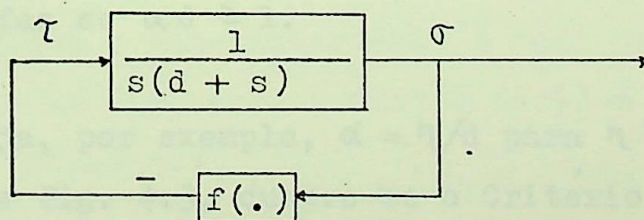


Fig. 4.2

(1) Consultar por exemplo [9].

4.1.1 Aplicação do Critério de Popov.

A não linearidade expressada pela eq. (4.3) é do tipo apresentado na Fig. 4.1, com a região de estabilidade assintótica, ao redor do origem, limitada por

$$-(\pi + 2\delta_0) < \sigma < (\pi - 2\delta_0)$$

Pode-se aplicar o Teorema 1 de Popov, para tal região, resultando que a ineq. (2.15), para o sistema da Fig. 4.2 com as eq. (4.3) e (4.6), é: (2)

$$\operatorname{Re} \left\{ (1 + \alpha j\omega) \left(-\frac{1}{j\omega(j\omega + d)} \right) \right\} \geq 0 \quad (4.7)$$

ou:

$$\frac{\alpha d - 1}{d^2 + \omega^2} \geq 0 \quad \text{para toda } \omega \geq 0 \quad (4.8)$$

que se satisfaz se $\alpha d \geq 1$.

Seja, por exemplo, $\alpha = \eta/d$ para $\eta \geq 1$. Conforme é mostrado na Fig. 4.3, cumpre-se o Critério de Popov.

- (2) Neste caso a matriz A da eq. (3.5) tem uma raiz nula. Além disso devem ser usados os valores $K_1 = 0$, $K_2 = \infty$ cumprindo a ineq. (2.15). Para uma análise ampla da matriz A com autovalores nulos ou imaginários consultar [3].

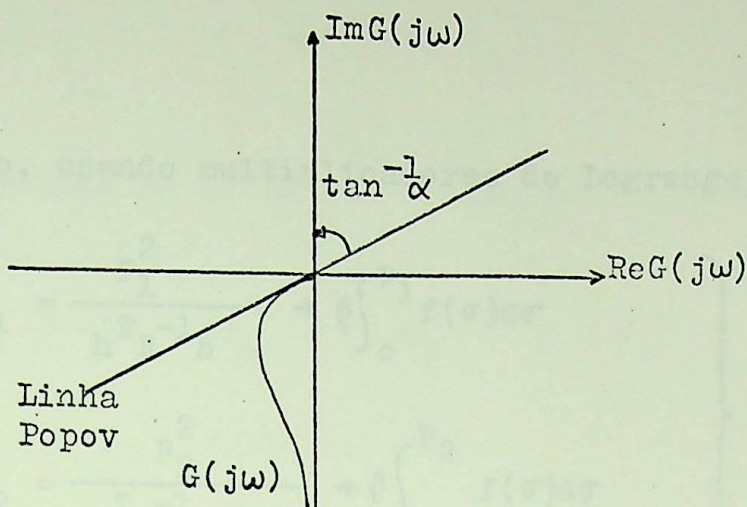


Fig. 4.3

4.1.2 Aplicação de uma Função Lyapunov do tipo "Quadrática mais Integral da não-linearidade".

O cumprimento da ineq. (4.7), conforme o que foi assinalado na seção 2.2.3, garante a existência de uma Função Lyapunov da forma:

$$V = x^T R x + \beta \int_0^\sigma f(r) dr \quad (4.9)$$

Já que a não-linearidade é dada pela eq. (4.3) e tem a forma da Fig. 4.1, a função (4.9) é válida só para $p_1 < \sigma < p_2$ e define-se:

$$M_1 \triangleq \min_{h^T x = p_1} V(x, \sigma) \quad ; \quad M_2 \triangleq \min_{h^T x = p_2} V(x, \sigma)$$

cujo cálculo, usando multiplicadores de Lagrange, é [70] :

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{p_1^2}{h^T R^{-1} h} + \beta \int_0^{p_1} f(\sigma) d\sigma \\ M_2 &= \frac{p_2^2}{h^T R^{-1} h} + \beta \int_0^{p_2} f(\sigma) d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Se: $M \triangleq \min \{M_1, M_2\}$, a região de estabilidade global e assintótica será aquela em que:

$$x^T R x + \beta \int_0^{\sigma} f(r) dr < M \quad (4.11)$$

Escolhendo a matriz R, tal que $R = R^T > 0$, como (3)

$$R = \begin{bmatrix} d & 1 \\ 1 & h/d \end{bmatrix}$$

e com $\beta = 1$ e $h = 1 + d$ obtém-se da eq. (4.9), para o sistema de eq. (4.4), a função Lyapunov

$$V(x_1, x_2, \sigma) = \frac{d}{2} x_1^2 + \frac{1+d}{2d} x_2^2 + x_1 x_2 + \int_0^{\sigma} f(r) dr \quad (4.12)$$

- (3) Para chegar a uma matriz R que seja simétrica definida positiva, e um valor de $\beta \geq 0$ para a eq. (4.9) pode-se usar o procedimento desenvolvido por Kalman em [27] para sistemas cuja matriz A tem um autovalor nulo.

Levando em conta que a não-linearidade está dada pela eq. (4.3) e que:

$$p_1 = -(\pi + 2\delta_0) \quad , \quad p_2 = \pi - 2\delta_0$$

sustituindo nas eq. (4.10) obtém-se

$$M = M_2 = \frac{(\pi - 2\delta_0)^2 d^4}{2(1+d)} - \frac{1+d}{d} [2\cos\delta_0 - P_m(\pi - 2\delta_0)] \quad (4.13)$$

Pelo que o sistema da Fig. 4.2 será global e assintoticamente estável para

$$V(x, \sigma) < M_2$$

ou seja:

$$\frac{d}{2} x_1^2 + \frac{1+d}{2d} x_2^2 + x_1 x_2 + \cos\delta_0 - \cos(x_1 + \delta_0) - P_m x_1 < M_2 \quad (4.14)$$

4.1.3 Máquina Síncrona com Regulador de Velocidade.

Ao considerar-se a ação do regulador de velocidade, o diagrama da Fig. 4.2 modifica-se ao da Fig. 4.4⁽⁴⁾

(4)

Ver por exemplo [36]

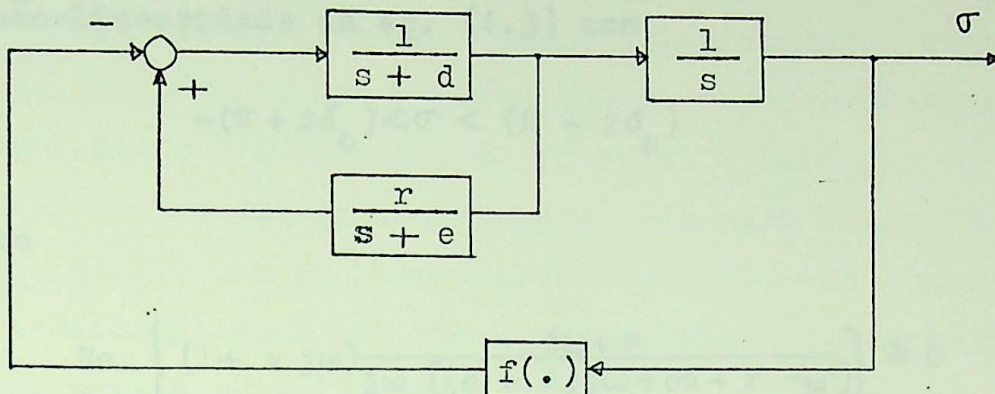


Fig. 4.4

A função transferência da parte linear é:

$$G(s) = \frac{s+e}{s [s^2 + (e+d)s + (ed+r)]} \quad (4.15)$$

com o modelo de estado dado por:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -d & -1 \\ 0 & r & -e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

A condição Popov (2.15) cumpre-se para a mesma não-linearidade da eq. (4.3) com

$$-(\pi + 2\delta_0) < \sigma < (\pi - 2\delta_0)$$

se

$$\operatorname{Re} \left\{ (1 + \alpha j\omega) \frac{j\omega + e}{j\omega [(e + d)j\omega + e\bar{d} + r - \omega^2]} \right\} \geq 0 \quad (4.17)$$

para toda $\omega \geq 0$.

A eq. (4.17) pode ser escrita também da forma:

$$\frac{(\alpha d - 1)\omega^2 + \alpha e(ed + r) + r - e^2}{(ed + r - \omega^2)^2 + (e + d)^2 \omega^2} \geq 0$$

a qual se cumprirá se:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha d - 1 \geq 0 \\ \alpha e(ed + r) + r - e^2 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

Para simplificar podemos escolher $\alpha = \frac{1}{d}$ pelo que as eq. (4.18) ficam:

$$\frac{r(e + d)}{d} \geq 0 \quad (4.19)$$

A eq. (4.19) se cumpre para todo valor de ω já que r, e, d são constantes positivas.



Para chegar à função Lyapunov do tipo "quadrática mais integral da não-linearidade" segue-se o mesmo caminho que para obter a eq.(4.12), ou seja: procura-se uma matriz $R = R^T > 0$ pelo método de prova e erro ou, como neste caso que se tem um modelo de estado cuja matriz A segundo eq. (4.16) tem um autovalor nulo, aplica-se o método de Kalman [27] ; só que agora ao trabalhar com matriz de ordem três é mais laborioso (5).

A função procurada pode ser:

$$\begin{aligned}
 V(x) = & \left(\frac{de+r}{2e^2} \right)^2 \rho x_1^2 \left(\frac{r}{2d(ed+r)} + \frac{\rho}{2} \right) + \\
 & \left[\frac{d(e+d)+r}{2dr(ed+r)} + \frac{\rho}{2e^2} \right] x_3^2 + \frac{de+r}{e} \rho x_1 x_2 - \\
 & \frac{de+r}{e^2} \rho x_1 x_3 + \left[\frac{1}{ed+r} - \frac{\rho}{e} \right] x_2 x_3 + \\
 & \left[\cos \delta_0 - \cos(x_1 + \delta_0) - P_m x_1 \right] \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

onde $\beta = 1$ e ρ constante positiva asseguram que a eq. (4.20), segue a forma da eq.(4.9) com o último termo sendo a integral da não-linearidade (4.3).

(5)

Está fora do objetivo deste trabalho expor o desenvolvimento completo do método. O leitor interessado pode encontrar dois exemplos em [36] .

Além disso a função definida pela eq. (4.20) é uma função definida pela eq. (4.20) é uma função Lyapunov se e somente se:

$$V(x) < M_2 \quad (4.21)$$

sendo M_2 o valor calculado seguindo a eq. (4.15) para o que é necessário o cálculo de, pelo menos, um elemento de R^{-1} .

4.2 MÁQUINA SÍNCRONA COM DECREMENTO DE FLUXO E REGULADOR DE VOLTAGEM.

Desde 1947 Crary [59] e depois muitos outros autores como Kimbark [60], Siddiquee [48] e Willems [50] têm investigado a estabilidade transitória da Máquina Síncrona, (M.S.) considerando variação do fluxo e regulador de voltagem, com o Método Direto de Lyapunov construindo Funções Lyapunov mediante prova e erro.

Foi Pai [39] quem considerou tal problema como um sistema com não-linearidades múltiplas e usando o mesmo procedimento de Kalman [27] das seções anteriores, chegou a uma função do tipo "quadrática mais integral da não-linearidade".

Desprezando resistências, as equações de uma M.S. ligada a uma linha infinita, levando em consideração a variação do fluxo e a ação do regulador de voltagem, são:

$$m\ddot{\delta} + d\dot{\delta} = P_m - \frac{E'_q V_B \text{sen} \delta}{(r_{12} + r'_d)} \quad (4.22)$$

$$E'_q = \frac{V_{ex}}{T'} - \frac{r_{12} + r_d}{r_{12} + r'_d} \frac{E'_q}{T'} + \frac{r_d - r'_d}{r_{12} + r'_d} \frac{V_B}{T'} \cos \delta$$

com:

- m constante de inércia
- d coeficiente de amortecimento
- E'_q voltagem proporcional ao fluxo enlaçado
- V_B voltagem de linha
- V_{ex} voltagem de excitação
- r_{12} reatância entre os terminais do gerador e a linha infinita
- r'_d reatância transitória do eixo direto
- r_d reatância síncrona do eixo direto
- T' constante de tempo, transitória a circuito aberto

O regulador de voltagem pode ser expressado pela equação:

$$V_{ex} = V_m - kV_o \exp\left(-\frac{k}{4}t\right) \quad (4.23)$$

com:

V_m o valor máximo da voltagem de excitação

V_0 Voltagem de excitação antes da falta.

k_4 constante de tempo do regulador.

Para determinar o modelo de estado teremos que deslocar o ponto de equilíbrio para a origem escolhendo:

$$x_1 = \delta - \delta_0$$

$$x_2 = \dot{\delta}$$

$$x_3 = E'_q - E$$

$$x_4 = V_{ex} - V_c$$

sendo δ_0 o valor de δ no ponto de equilíbrio antes da falta.

E é o valor depois da falta de E'_q

Assim, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -d/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\sigma) \\ f_2(\sigma) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

onde as não-linearidades estão dadas por:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\sigma) &= k/m (\sigma_2 + E) \text{sen}(\sigma_1 + \delta_0) - P_m/m \\ f_2(\sigma) &= k_2 (\cos \delta_0 - \cos(\sigma_1 + \delta_0)) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

sendo que

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{r_{12} + r_d}{(r_{12} + r'_d) T'} ; & k_2 &= \frac{(r_d - r'_d) E_B}{(r_{12} + r_d) T'} \\ k_3 &= \frac{1}{T'} ; & k &= \frac{E_B}{r_{12} + r'_d} \end{aligned}$$

Pode observar-se, do modelo de estado (4.24) que as matrizes A, B, e C não são uma realização mínima, pelo que usaremos o modelo que Aizerman e Gantmacher [3] chamaram de "caso particular", obtido mediante a definição da variável auxiliar:

$$\underline{z} = (d/m)x_1 + x_2 \quad (4.26)$$

chegando ao modelo de estado dado por:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x - B_1 \underline{F}(\sigma) \\ \underline{z} &= -q^T \underline{F}(\sigma) \\ \sigma &= C_1^T x + \rho \underline{z} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

desenvolvendo, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d/m & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_3 \\ 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\sigma) \\ f_2(\sigma) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{x}} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\sigma) \\ f_2(\sigma) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m/d & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m/d \\ 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

A representação de estado (4.28) se corresponde com a Fig. 2.8. A função de transferência da parte linear é:

$$\underline{G}(s) = C_1^T (sI - A_1)^{-1} B_1 + e_q^T / s \quad (4.29)$$

e substituindo fica:

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-d/m)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+k_1} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

4.2.1 Aplicação do Critério de Popov.

Para aplicar o Teorema 4 de Popov ao sistema cujo modelo de estado é dado pelas eq. (4.28) deve-se procurar as matrizes:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix}$$

tais que se cumpra

$$\operatorname{Re} \left\{ (N + \Lambda s) \left[\underline{g}(s) + K_2^{-1} \right] \right\} > 0 \quad (4.31)$$

Neste caso as não-linearidades dadas pelas eq. (4.25) seguem a Fig. 4.1 ou seja $f_i(\sigma)/\sigma \in [0, \infty]$ pelo que:

$$\underline{K}_2^{-1} = \underline{0}$$

Escolhemos $\Lambda = \underline{0}$. Com relação a N poderíamos escolher $N = I$, onde I é matriz identidade, que nos leva a cumprir com a condição (4.31); não obstante para generalizar faremos a seguinte suposição: [28] :

Existe uma função $V_1 \in C^1$ que mapeia \mathbb{R}^m em \mathbb{R} tal que $V_1(\sigma) \geq 0$ para todo $\sigma \in \mathbb{R}^m$ com $V_1(0) = 0$ e que para alguma matriz N se cumpre:

$$N^T \underline{F}(\sigma) = \nabla V_1(\sigma) \quad (6) \text{ para todo real } \sigma \in \mathbb{R}^m \quad (4.32)$$

Suponhamos para as eq. (4.28) que (7)

$$V_1(\sigma) = q \int_0^1 f_1(\sigma) d\sigma \quad \text{para } q > 0$$

Aplicando a eq. (4.30) obtém-se:

$$N = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & \frac{qk}{mk_2} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

pelo que a ineq. (4.29) escreve-se:

$$\operatorname{Re} \{ N \underline{G}(s) \} > 0$$

e substituindo com as eq. (4.30) e (4.33) fica

$$\operatorname{Re} \{ N \underline{G}(s) \} = \begin{bmatrix} \frac{q d/m}{\omega^2 + (d/m)^2} & 0 \\ 0 & \frac{(qk/mk_2)^2}{\omega^2 + k_1} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

para todo $\omega \geq 0$, $q > 0$, $d > 0$, $m > 0$, $k_2 > 0$, $k_1 > 0$.

(6) $\nabla V_1(\sigma)$ é gradiente de $V_1(\sigma)$.

(7) V_1 pode ser escolhida como a "integral da não-linearidade" mais como deve satisfazer a eq. (4.32) pode não conter sempre todas as não-linearidades do problema.

Conforme á eq. (4.34) o sistema dado pelas eq. (4.22) cumpre o Criterio de Popov, sendo assintótica ; mente estável na região determinada por

$$p_1 \leq \sigma_{1,2} \leq p_2$$

conforme á Fig. 4.1.

4.2.2 Aplicação de uma Função Lyapunov do tipo "Quadrática mais Integral da Não-Linearidade".

O cumprimento do Teorema 4 de Popov assegura a existencia da Função Lyapunov do tipo:

$$V(x, \sigma) = x^T R x + \underline{\beta} \int_0^\sigma \underline{F}(r) dr \quad (4.35)$$

A matriz R poderia ser escolhida de forma arbitrária só cumprindo com a condição $R = R^T > 0$. Para evitar o processo de prova e erro pode-se seguir uma série de passos deduzidos da prova que Narendra-Newman [61] fizeram da versão matrizal do Lema MKY da seção 2.3.2; esses passos são enunciados e aplicados ao sistema dado pelas eq. (4.22):

- 1º) Determinar a matriz $M(s)$ usando fatoração espectral da expressão:

$$\text{Re} \left\{ \underline{Z}(s) \underline{G}(s) + \underline{K}_2^{-1} \right\} = M^T(-s) M(s) \quad (4.36)$$

onde $Z(s) = (N + \Lambda s)$.

O primeiro membro da eq. (4.36) é a eq. (4.34) pelo que chega-se a

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{qd/m}}{s + d/m} & 0 \\ 0 & \frac{s \sqrt{qk/mr_2}}{s + k_1} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

2ª) A matriz E encontra-se da eq.:

$$\frac{1}{2} N (C_1^T B_1 + d^T) + \frac{1}{2} (B^T C + d e^T) N = E^T E \quad (4.38)^{(8)}$$

Sustituindo com a eq. (4.33) e do modelo de estado (4.28) obtém-se:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & qk/mr_2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

3ª) A identidade dada por:

$$M(s) - E = -Q^T (sI - A_1)^{-1} B_1$$

é resolvida para a matriz $Q_{(n-1)m}$

(8) A eq. (4.38) não é mais que a eq. iii) do sistema de eq. (2.29) do Lema A-MKY da seção 2.3.2

Sustituindo com as eq. (4.37) e (4.39) assim como A_1 e B_1 de (4.28) obtém-se:

$$Q = \begin{bmatrix} -\sqrt{qd/m} & 0 \\ 0 & R_1 \sqrt{qk/mR_2} \\ Q_{31} & Q_{32} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

podendo escolher a vontade os dois elementos que faltam, escolhemos:

$$Q_{31} = 0 \quad ; \quad Q_{32} = -\frac{R_3}{2} \sqrt{\frac{qk}{mR_2}}$$

4º) Finalmente a matriz R é obtida da equação i) do Lema A-MKY, ou seja:

$$A_1^T R + R A_1 = -Q Q^T$$

sustituindo chega-se a :

$$R = \begin{bmatrix} q/2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q k R_1}{2 m R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{qk R_3^2}{8m R_2 R_4} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

A Função Lyapunov dada pela eq. (4.35) pode ser determinada escolhendo o vetor \underline{e} , por exemplo, como

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtendo a função:

$$V(x, \sigma) = x^T R x + \int_0^\sigma f_1(r) dr \quad (4.42)$$

Sustituindo a matriz R da eq. (4.41), a função $f_1(\sigma)$ de (4.25), dando o valor a $q = 1$ e sabendo que $P_m = kE \text{ sen} \delta_0$, é obtida a seguinte função Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{k R_1}{2 m R_2} x_3^2 + \frac{R_3 k}{8 m R_2 R_4} x_4^2 + \frac{k}{m} (x_3 + E) (\cos \delta_0 - \cos(x_1 \delta_0)) - \frac{k}{m} E x_1 \text{ sen} \delta_0 \quad (4.43)$$

sendo a sua derivada:

$$\dot{V} = -\frac{k}{m R_2} \dot{x}_3^2 - \frac{d}{m} \dot{x}_2^2 - \frac{R_3 k}{4 m R_2} \dot{x}_4^2 + \frac{k R_3}{m R_2} x_3 \dot{x}_4 \quad (4.44)$$

Pode observar-se que $V(x) > 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0$ na região de interesse ⁽⁹⁾, assegurando a estabilidade assintótica do sistema.

(9) É demonstrável que $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, condição que deve cumprir-se para que a função (4.43) seja uma função Lyapunov.

Esta região de estabilidade deverá ser obtida de:

$$V(x) < M \quad (4.45)$$

com M sendo o valor da função $V(x)$ no ponto de equilíbrio instável do sistema após a falta.

Os pontos de equilíbrio do sistema dados pelas eq. (4.22) com $\ddot{\delta} = \dot{\delta} = \dot{E}'_q = 0$ serão a solução das eq. [72] :

$$\left. \begin{aligned} P_m - \frac{k k_3}{k_1} V_{ex} \sin \delta - \frac{k k_2}{2 k_1} \sin 2\delta = 0 \\ k_1 E'_q - k_3 V_{ex} - k_2 \cos \delta = 0 \end{aligned} \right\} (4.46)$$

Obtendo das eq. (4.46) o ponto de equilíbrio antes da falta e os pontos de equilíbrio estável e instável⁽¹⁰⁾ depois da falta pode determinar-se a região de estabilidade dada pela ineq. (4.45).

(10)

O sistema pode ter vários pontos de equilíbrio instável devendo determinar-se o mais próximo ao ponto de equilíbrio estável.

4.3 SISTEMAS MULTIMÁQUINAS.

A estabilidade transitória de Sistemas de Potência de "n" máquinas tem recebido a maior atenção nos últimos anos. Vários autores têm proposto funções Lyapunov, quase todos do tipo energia e na base de certa intuição sobre o sistema.

O procedimento de Anderson [2], usado na seção anterior tem demonstrado ser uma das melhores alternativas para resolver uma parte do problema da estabilidade transitória de Sistemas de Potência, que consiste em encontrar uma função apropriada para determinar a região de estabilidade assintótica.

Parte-se do Critério de Popov e com o Lema A-MKY determina-se uma função Lyapunov do tipo "quadrática mais integral da não-linearidade".

A equação para um sistema multimáquinas é (11):

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{\delta}_i + a_i \dot{\delta}_i &= Pm_i - Pe_i \\ Pe_i &= E_i^2 G_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i E_j B_{ij} \text{sen} \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$ representa a i -ésima máquina do sistema.

(11) Feitas as suposições usuais.

$$A = \left[\begin{array}{c|c} M^{-1}Z & O_{n, n-1} \\ \hline S & O_{n-1} \end{array} \right] \quad B = \left[\begin{array}{c} M^{-1}D^T \\ \dots \\ O_{n-1, m} \end{array} \right]$$

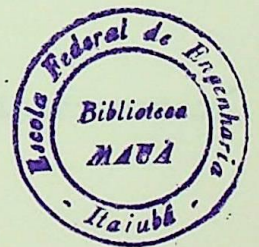
$$C = \left[\begin{array}{c|c} O_{m, n} & W_{m, n-1} \end{array} \right]$$

$$M = \text{diag} \{ m_i \}, \quad m_i > 0$$

$$Z = \text{diag} \{ a_i \}, \quad a_i > 0$$

$$D = WS$$

$$S = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{matrix} \end{array} \right], \text{ matriz } (n-1), n$$



Sendo W uma matriz $m, (n-1)$ definida como a transformação do ângulo δ , ou seja:

$$\lambda = W(\delta)$$

tal que $\lambda_k = \delta_{ij} - \delta_{ij}^0$ para $k = (i-1)n - i(i+1)/2 + j$
e $i < j$; m é dada por $m = \max k = n(n-1)/2$.

Cada elemento de $\underline{F}(\sigma)$ está definido pela equação

$$f_k(\sigma_k) = E_i E_j B_{ij} [\text{sen}(\sigma_k + \delta_{ij}) - \text{sen} \delta_{ij}] \quad (4.50)$$

que cumpre com a condição :

$$0 < \frac{f_k(\sigma_k)}{\sigma_k} < \infty \quad k = 1, 2 \dots m$$

só para $p_1 < \sigma_k < p_2$ conforme à Fig. 4.5

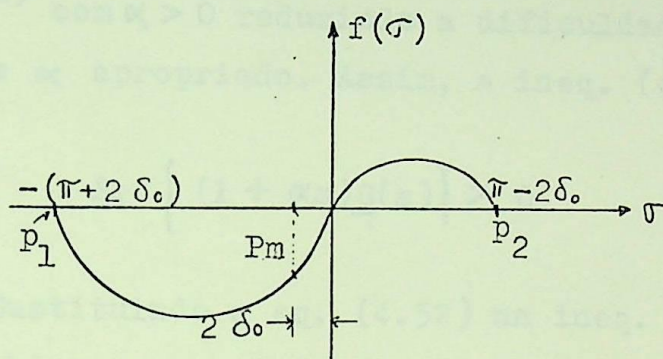


Fig. 4.5

A função de transferência da parte linear estará dada por:

$$\underline{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.51)$$

sustituindo as matrizes de (4.49), função (4.51) fica:

$$\underline{G}(s) = S^{-1}D(sM - Z)^{-1}D^T \quad (4.52)$$

4.3.1 Aplicação do Critério de Popov.

Aplica-se o Teorema 4 de Popov cuja expressão (2.31) com $\underline{K}_2^{-1} = \underline{0}$ é

$$\text{Re} \left\{ \underline{z}(s)\underline{G}(s) \right\} > 0 \quad (4.53)$$

pelo que deve-se procurar um:

$$\underline{Z}(s) = (N + \Delta s)$$

tal que se cumpra a ineq. (4.53). Suponhamos que $N = I$ e $\Delta = \alpha I$ (12) com $\alpha > 0$ reduzindo a dificuldade a encontrar um valor de α apropriado. Assim, a ineq. (4.53) fica:

$$\operatorname{Re} \left\{ (1 + \alpha s) \underline{G}(s) \right\} > 0 \quad (4.54)$$

Sustituindo a eq. (4.52) na ineq. (4.54) e desenvolvendo, obtém-se a matriz diagonal:

$$\operatorname{Re} \left[\left\{ \frac{1 + \alpha s}{s(sm_i + a_i)} \right\} \right] > 0 \quad (4.55)$$

A expressão (4.55) se cumpre se:

$\alpha > \frac{m_i}{a_i}$ para todo i e $\alpha \neq \infty$ assegurando que não haverá cancelamento de polos em $\underline{G}(s)$.

4.3.2 Aplicação de uma Função Lyapunov do tipo "Quadrática mais Integral da Não-Linearidade".

Já que se cumpre a ineq. (4.55), existe uma função Lyapunov da forma:

(12) I é matriz identidade.

$$V(x) = x^T R x + \beta \int_0^{Cx} \underline{F}(\sigma) d\sigma \quad (4.56)$$

em que $R = R^T > 0$.

A aplicação do Lema A-MKY da seção 2.3.2, se resume á solução das equações.

$$\begin{aligned} RA + A^T R &= QQ^T \\ RB &= C^T + \alpha A^T C^T \end{aligned} \quad (4.57)$$

devido a que o produto das matrizes C e B, do sistema dado por (4.49), é

$$CB = 0$$

Q é uma matriz quadrada auxiliar; supondo que a matriz R é dada por:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2^T \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

a solução das eq. (4.57) nos leva a (13)

$$\begin{aligned} R_1 &= \alpha M + (\alpha \lambda + \rho) MUM \\ R_3 &= -Z_{n-1} + \rho Z_{n-1} U_{n-1} Z_{n-1} \\ R_2 &= -R_3 S Z^{-1} M \end{aligned} \quad (4.59)$$

(13) Ver [20]

com

$$\rho = -\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} ; \quad \alpha > \frac{m_i}{a_i} \quad \text{para } i = 1, 2 \dots n$$

e sendo U uma matriz nxn com $u_{ij} = 1$ para todo i, j.

λ é tal que satisfaz:

$$\lambda^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{4} \frac{(a_i m_j - a_j m_i)^2}{(a_i - \frac{m_i}{\alpha})(a_j - \frac{m_j}{\alpha})} \right\} - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{a_i m_i}{a_i - \frac{m_i}{\alpha}} < 0$$

(4.60)

A função Lyapunov considerando as eq. (4.49) e (4.59) junto com $\beta = 1$ e:

$$x^T = [\underline{\omega}^T, \underline{\delta}^T] \quad \text{para } \omega_i = \dot{\delta}_i \quad \text{é dada por:}$$

$$V(x) = \omega^T R_1 \omega + 2 \delta^T R_2 \omega - \delta^T R_3 \delta + \int_0^{cx} \underline{F}(\sigma) d\sigma \quad (4.61)$$

Deve levar-se em conta a dependência da função $V(x)$ dos parâmetros α e λ , ou seja: altos valores para α fazem menos significativos o amortecimento do sistema representado pelas matrizes R_2 e R_3 nas eq. (4.59).

A variação de λ afeta a estimação da região de estabilidade podendo demonstrar-se ⁽¹⁴⁾ que o valor mínimo que possa dar-se a λ tal que cumpra com a ineq. (4.60) leva a estimar a maior região de estabilidade.

4.3.3 Exemplo: Sistema de duas Máquinas.

Como ilustração do método apresentado na seção anterior, seja um sistema de duas máquinas com a máquina 1 como referência e amortecimento não uniforme tal que:

$$a_1/m_1 \neq a_2/m_2$$

as variáveis de estado são

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{\delta}_1 \\ x_2 &= \dot{\delta}_2 \\ x_3 &= (\delta_1 - \delta_2) - (\delta_1^0 - \delta_2^0) \end{aligned} \quad (4.62)$$

aplicando as matrizes de (4.49) o modelo de estado é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2/m_2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/m_1 \\ -1/m_2 \\ 0 \end{bmatrix} f_1(\sigma_1) \quad (4.63)$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(14) Ver [62]

A função de transferência da parte linear usando a eq. (4.52) é:

$$G(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{m_1 s + a_1} + \frac{1}{m_2 s + a_2} \right) \quad (4.64)$$

O elemento não-linear conforme a eq. (4.50) é dado por:

$$f_1(\sigma_1) = E_1 E_2 B_{12} \left[\sin(\sigma_1 + (\delta_1^0 - \delta_2^0)) - \sin(\delta_1^0 - \delta_2^0) \right]$$

Conforme a expressão (4.54) com $G(s)$ dada pela eq. (4.64), o Critério de Popov estabelece que o sistema será assintoticamente estável para

$$-(\pi - 2\delta_{12}^0) < \sigma_1 < (\pi - 2\delta_{12}^0)$$

se se cumpre:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \alpha s}{s(m_1 s + a_1)} + \frac{1 + \alpha s}{s(m_2 s + a_2)} \right\} > 0 \quad (4.64)$$

com

$$\frac{m_1}{a_1} < \alpha < \frac{m_2}{a_2} \quad \text{e } \alpha \neq \infty$$

O cumprimento da expressão (4.64) assegura a existência de uma Função Lyapunov da forma dada na eq. (4.61). Depois de grande manipulação algébrica com a introdução das eq. (4.66) nas eq. (4.62) chega-se à função:

$$\begin{aligned}
 V(x) = & [\alpha m_1 + (\alpha \lambda + \rho) m_1^2] x_1^2 + [\alpha m_2 + (\alpha \lambda + \rho) m_2^2] x_2^2 \\
 & + a_1 (1 + \rho a_1) x_3^2 + 2 m_1 m_2 (\alpha \lambda + \rho) x_1 x_2 + 2 [m_1 (1 + \rho a_1)] x_1 x_3 \\
 & - 2 [(a_1/a_2) m_2 (1 + \rho a_1)] x_2 x_3 + \int_0^{x_3} f(\sigma_1) d\sigma_1 \quad (4.65)
 \end{aligned}$$

onde $\rho = -\frac{1}{a_1 + a_2}$.

e λ deverá estar entre as duas raízes de:

$$\frac{1}{4} \frac{(a_1 m_1 - a_2 m_2)^2}{(a_1 - \frac{m_1}{\alpha}) (a_2 - \frac{m_2}{\alpha})} \lambda^2 - \left(\frac{a_1 m_1}{a_1 - \frac{m_1}{\alpha}} - \frac{a_2 m_2}{a_2 - \frac{m_2}{\alpha}} \right) \lambda - 1 < 0$$

4.3.4 Região de Estabilidade e Tempo de Eliminação de Falta.

Para a análise da Estabilidade Transitória em sistemas de Potência, concluir que o sistema é estável ou não em base ao Critério de Popov ou a existência de uma Função Lyapunov, é apenas o primeiro passo de um processo que, em geral, pode resumir-se em:

- 1º) Determinar se o sistema é assintoticamente estável para não-linearidades do tipo da Fig. 4.1 aplicando o Critério de Popov e construindo uma função Lyapunov para o ponto de equilíbrio estável do sistema após a falta.

2º) Determinar o limite da região de estabilidade de que chamaremos l_ϵ no qual a função Lyapunov encontrada em 1º) terá um valor crítico que chamaremos V_c .

3º) Integrar as equações do sistema na falta até alcançar o limite l_ϵ da região de estabilidade. Esta integração permitirá determinar o tempo de eliminação da falta.

Até aqui temos tratado o item 1º) para sistemas até de "n" máquinas e também o item 2º) só para uma máquina.

Conforme os sistemas de Potência crescem, encontrar a região de estabilidade e o tempo de eliminação da falta, torna-se mais necessário e mais difícil devido a que os métodos tradicionais de simulação consomem um tempo proibitivo para a necessidade de obter rápida (on line) informação sobre o comportamento da estabilidade do sistema.

Para sistemas multi-máquinas uma alternativa para determinar a região em que se cumpre

$$V(x) < l_\epsilon$$



consiste em calcular todos os $(2^{n-1}-1)$ pontos de equilíbrio inestáveis do sistema; em seguida calcular a função $V(x)$ no ponto de equilíbrio instável mais próximo ao ponto de equilíbrio estável obtendo assim o valor crítico V_c .

Neste método são necessários $(2^{n-1}-1)$ soluções do conjunto de equações algébricas não-lineares

$$Ax - BF(\sigma) = 0 \quad (4.66)$$

Pode ver-se que dois são os grandes inconvenientes da aplicação do método direto de Lyapunov na análise da estabilidade transitória em sistemas de Potência, ou seja:

- I) A necessidade de supor numerosas simplificações no modelo matemático do sistema para fazer possível a construção da função Lyapunov apropriada.
- II) Conforme o sistema cresce (n aumenta), o número de soluções requeridas da eq. (4.66) aumentam exponencialmente.

Não obstante, o método de Lyapunov⁽¹⁵⁾ comparado com os métodos numéricos comumente usados nos quais integra-se o sistema de equações diferenciais (4.47), é

(15) Não perder de vista que estamos considerando uma função Lyapunov que existe se o Critério de Popov se cumprir.

melhor já que apresenta a vantagem de que, uma vez conhecido o valor crítico V_c no limite da região de estabilidade λ_ϵ , a informação sobre o comportamento da estabilidade do sistema obtém-se rapidamente (on line).

A maior parte dos trabalhos de investigação neste campo estão dedicados a conseguir um método rápido para chegar a V_c .

Prabhakara e El-Abiad [40] propõem um cálculo aproximado do limite λ_ϵ . Usando o método de Newton-Raphson (16) para encontrar os $(2^{n-1}-1)$ pontos de equilíbrio instáveis a rápida convergência do método depende dos valores iniciais que se supõem (usualmente são permutações e combinações da solução do sistema antes da falta, ou seja $\pm \pi$)

No caso de uma máquina síncrona conectada a uma linha infinita, o ponto de equilíbrio instável mais próximo é $(\pi - 2\delta_0)$ como é mostrado na Fig. 4.1

Estendendo a sistemas multimáquinas se se consideram como pontos iniciais todas as permutações de $(\pi - 2\delta_0)$ obtém-se $(2^{n-1}-1)$ pontos de equilíbrio instáveis aproximados levando a um limite aproximado da região de estabilidade de λ'_ϵ com um erro com relação a λ_ϵ de 1%.

- - - - -

- (16) Qualquer método para a solução de equações transcendentos pode ser usado; os autores preferem N-R pela sua rápida convergência quando os valores iniciais estão próximos a solução.

Alem disso o cálculo do tempo de eliminação da falta é o mesmo integrando a equação diferencial do sistema na falta até alcançar l_ϵ ou l'_ϵ (aproximado).

Ribbens-Pavella [43] partindo do anterior adicio na considerações físicas, como a perda de sincronismo e situações de sincronismo equivalente, e visa reduzir o número de pontos de equilíbrio cujo cálculo é necessário.

Outro método para o estudo da estabilidade transitória em sistemas de potência é utilizar técnicas de agregação e decomposição [25], ou seja: considerando o sistema de n-máquinas decomposto em n-1 subsistemas interligados, encontra-se a região de estabilidade para cada um construindo a seguir um "vector Lyapunov" de funções do tipo "quadrático mais integral da não-linearidade"; este vetor através de uma matriz de "agregação" leva a estimar a região de estabilidade do sistema completo.

CAPITULO 5

" CONCLUSÕES "

CONCLUSÕES

No presente trabalho se quis dar uma visão o mais completa possível das possibilidades do Critério de Popov complementado pelo Método Direto de Lyapunov para Sistemas de Controle Não-Lineares da "forma de Lur'e". É claro que ambos os métodos têm limitações.

Quanto ao Método Direto de Lyapunov, conforme a ordem do sistema aumenta ou é variante ou é multivariável, vai sendo mais laborioso encontrar uma função que possa assegurar-se como de Lyapunov para determinar a Estabilidade Absoluta do Sistema.

Com relação ao Critério de Popov, como viu-se no capítulo 2, a sua generalização a sistemas com elemento(s) não-lineares de características restritivas, ou a sistemas multivariáveis requer encontrar um $Z(s)$ apropriado e tal que se cumpra a Condição Popov.

O que faz mais atrativo ao Critério de Popov, é a sua interpretação geométrica para sistemas não multivariáveis, além da sua simplicidade analítica ainda para as que denominamos como extensões do problema básico originalmente proposto por Lur'e.

A superioridade operativa do Critério de Popov, para fins de projeto, sobre o Método Direto de Lyapunov mostrou-se no capítulo 3.

Viu-se como o Método de Resposta em Frequência continua sendo válido e confirmou-se como poderoso auxiliar para analisar, projetar ou modificar sistemas não-lineares da forma de Lur'e.

Os métodos desenvolvidos no capítulo 3 podem combinar-se ou ampliar as suas possibilidades, por exemplo, para compensar sistemas lineares com elementos como relé com banda nula, amplificadores com saturação, etc.

Com lápis e papel, de maneira simples e rápida, obtêm-se resultados aproximados que muitas vezes são suficientes para responder às exigências de projeto ou planejamento que requerem o cumprimento de certos limites nos parâmetros e resposta do sistema. O analista deverá decidir sobre a alternativa de obter rapidamente resultados aproximados ou aplicar algoritmos computacionais; todos os métodos do capítulo 3 são implementáveis em computador ⁽¹⁾.

Os processos de simulação vão sendo cada vez mais custosos e lentos para o análise da estabilidade transitória em Sistemas Elétricos de Potência. Na procura de métodos mais rápidos e efetivos, um grande passo tem sido dado ao utilizar o Critério de Popov para deduzir se o sistema é estável ante uma perturbação e assegurar a existência de uma função Lyapunov do tipo específico chamado "quadrático mais integral da não-linearidade", imprescindível para determinar a região de estabilidade e calcular o tempo de

(1) Ver por exemplo [13] , [17] .

eliminação da falta. Isto evita entrar ao método de prova e erro na procura da melhor função Lyapunov.

Os resultados mostrados no capítulo 4 podem estender-se ao caso em que o amortecimento seja nulo ou igual para todas as máquinas.

Ao considerar condutâncias de transferência, o Critério de Popov pode aplicar-se a um sistema até de duas máquinas [37], não valendo a sua extensão a um sistema de n -máquinas com $n > 2$ [65].

Requerem-se modelos matemáticos "manejáveis" que incluam: fenômenos de saturação, a ação de reguladores de voltagem (n -máquinas), etc. Um exemplo, é o trabalho de Sasaki [45] (1979) que incorpora a variação do fluxo enlaçado de campo E'_q ao modelo de n -máquinas considerando que é uma variação de um parâmetro, e não como outra variável, afetando só às máquinas que estão mais perto da falta, evitando assim a necessidade de construir novas funções Lyapunov.

Ainda há muito por investigar já que tal sistemática apresenta duas grandes dificuldades: a primeira provem da necessidade de adotar numerosas simplificações ⁽²⁾, além de suposições teóricas das quais é impossível prescindir. A segunda consiste na determinação do limite para a

- - - - -

(2) Ver por exemplo [65] que considera as condutâncias de transferência.

região de estabilidade.

Não obstante o anterior, o Método Direto de Lyapunov auxiliado pelo Critério de Popov, proporciona informação rápida (on line) e um critério racional que segue fielmente o conceito de estabilidade, sendo mais vantajoso que os métodos numéricos já conhecidos e usados (3).

Finalmente, este trabalho objetivou apresentar em conjunto uma grande quantidade de informação que existe em grande número de trabalhos, muitos dos quais incluem-se na Bibliografia, sobre o tema de Critério no Domínio da Frequência para a Estabilidade Absoluta, suas aplicações e projeções".

(3) Os mais recentes trabalhos publicados como [43] e [25] tratam exclusivamente o problema da rápida determinação da região de estabilidade e o limite da mesma.

APÉNDICE

PROVA DO TEOREMA DE POPOV: (*)

Lemas Auxiliares.

Lema 1.- Se a função contínua $f(t)$ e sua derivada $\frac{df(t)}{dt}$ são limitadas para $t \geq 0$, a função contínua $G(x) > 0$ para qualquer $x \neq 0$, $G(0) = 0$ e $\int_0^{\infty} G[f(t)] dt < \infty$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

Lema 2.- Se tres funções reais $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ tendem a zero para $t \rightarrow \infty$ não mais lentamente que uma exponencial (*) e se as suas transformadas de Fourier

$$F_k(j\omega) = \int_0^{\infty} f_k(t) e^{-j\omega t} dt \quad (k = 1, 2, \dots, 3) \quad (A.1)$$

estão relacionadas pela equação

$$F_1(j\omega) = H(j\omega)F_3(j\omega) + F_2(j\omega) \quad (A.2)$$

onde $\operatorname{Re}H(j\omega) \geq \delta > 0$ (A.3)

para todo $\omega \geq 0$, então

$$- \int_0^{\infty} f_1(t)f_3(t)dt \leq \rho \quad (A.4)$$

onde a constante positiva ρ é finita e definida pela equação

$$\rho = \frac{1}{8\pi\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |F_2(j\omega)|^2 d\omega \quad (A.5)$$

(*) Materia tomada de [3]

(*) Será expressado por $f_k(t) \rightarrow 0$ ($k = 1, 2, 3$)

Prova do Teorema 1 de Ponov:

Seja $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) uma solução arbitrária do sistema de eq. (2.1) (*) com uma função arbitrária no setor $[0, K_2]$, onde

$$\sigma(t) = h^T x$$

Aquí

$$\tau(t) = \varphi(t) \quad (\text{A.6})$$

é uma função fixa do tempo e $x_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) é a solução do sistema linear não-homogeneo

$$\dot{x} = Ax + b\tau(t) \quad (\text{A.7})$$

Seja:

$$\tau_\eta(t) = \begin{cases} \tau(t) & \text{para } t \leq \eta \\ 0 & \text{para } t > \eta \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

onde η é um numero positivo fixo arbitrário, e seja a função

$$\sigma_\eta(t) = h^T x_\eta(t)$$

definida pela solução do sistema

$$\dot{x}_\eta = Ax_\eta + b\tau_\eta \quad (\text{A.9})$$

com as mesmas condições iniciais que para $\sigma(t)$,

$$x_{j\eta}(0) = x_j(0) \quad (j = 1, \dots, n)$$

É claro que

$$\sigma_\eta(t) = \sigma(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq \eta$$

(*)

Sustituir $f(\sigma)$ por $\varphi(\sigma)$

Como resultado da propriedade de sistemas lineares não-homogeneos:

$$\sigma_n(t) = \tilde{\sigma}_n(t) + g(t) \quad (\text{A.10})$$

onde $\tilde{\sigma}_n(t)$ é a solução do sistema de eq. (A.9) com condições iniciais zero, e $g(t)$ é uma função do tempo, que depende linearmente dos valores iniciais $x_j(0)$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Além disso, $g(t) \geq 0$ e $\dot{g}(t) \geq 0$

Derivando termo a termo a eq. (A.10):

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\tilde{\sigma}}(t) + \dot{g}(t) \quad (\text{A.11})$$

e combinando com a eq. (A.10) obtém-se

$$\sigma_n(t) + \alpha \dot{\sigma}_n(t) - \frac{\tau_n(t)}{K_2} = \tilde{\sigma}_n(t) + \alpha \dot{\tilde{\sigma}}_n(t) - \frac{\tau_n(t)}{K_2} + g(t) + \alpha \dot{g}(t) \quad (\text{A.12})$$

Introduzendo a notação:

$$f_1(t) = -\sigma_n(t) - \alpha \dot{\sigma}_n(t) + \frac{\tau_n(t)}{K_2}$$

$$f_2(t) = -g(t) - \alpha \dot{g}(t)$$

Sejam as transformadas de Fourier das funções $f_1(t)$, $f_2(t)$, $\tau_n(t)$ e $\tilde{\sigma}_n(t)$ dadas por $F_1(j\omega)$, $F_2(j\omega)$, $\tilde{I}_n(j\omega)$ e $\tilde{\Sigma}_n(j\omega)$. Então a transformada de Fourier da função $-\tilde{\sigma}_n(t)$ está relacionada com a transformada de Fourier de $\hat{I}_n(t)$ pela equação

$$-\tilde{\Sigma}_n(j\omega) = G(j\omega) \tilde{I}(j\omega) \quad (\text{A.13})$$

onde $G(j)$ é a resposta em frequência da parte linear do sistema relacionando a entrada τ com a saída σ .

A eq. (A.12) pode-se escrever:

$$f_1(t) = -\tilde{\sigma}_n(t) - \alpha \dot{\tilde{\sigma}}_n(t) + \frac{\tau_n(t)}{K_2} f_2(t) \quad (\text{A.14})$$

Transformando (Fourier) a eq. (A.14) e usando a eq. (A.13) obtém-se:

$$F_1(j\omega) = \left[(1 + \alpha j\omega)G(j\omega) + \frac{1}{K_2} \right] \tilde{T}_n(j\omega) + F_2(j\omega)$$

Supondo que:

$$H(j\omega) = (1 + \alpha j\omega)G(j\omega) + \frac{1}{K_2} \quad (\text{A.15})$$

Chega-se a:

$$F_1(j\omega) = H(j\omega) \tilde{T}_n(j\omega) + F_2(j\omega) \quad (\text{A.15})$$

Todas as condições de Lema 2 são satisfeitas na eq. (A.15). A inequação que tem que ser demonstrada é:

$$\text{Re } H(j) \geq \delta > 0 \quad (*)$$

Além disso $f_1(t) \geq 0$, $f_2(t) \geq 0$ e $\tau_n(t) \geq 0$.

Pelo que de acordo com o Lema 2:

$$- \int_0^{\infty} f_1(t) \tau_n(t) dt \leq \rho$$

onde

$$\rho = \frac{1}{\delta \pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_2(j\omega)|^2 d\omega$$

(*) A Condição Popov não é alterada se é escrita como
 $\text{Re} \left\{ (1 + \alpha j\omega)G(j\omega) + \frac{1}{K_2} \right\} \geq \delta > 0$ para um $\delta > 0$

A função $F_2(j\omega)$ assim como $f_2(t)$ depende linearmente das condições iniciais e não da quantidade η . Pelo que a constante positiva ρ depende quadráticamente das condições iniciais e tende a zero se as condições iniciais tendem a zero. A constante ρ não depende de η .

Sustituindo a expressão para $f_1(t)$, obtém-se:

$$\int_0^{\infty} \tilde{T}_\eta(t) \left[\sigma_\eta(t) + \alpha \dot{\sigma}_\eta(t) - \frac{\tilde{T}_\eta(t)}{K_2} \right] dt = \int_0^\eta \varphi[\sigma(t)] \left[\sigma(t) + \alpha \dot{\sigma}(t) - \frac{\varphi[\sigma(t)]}{K_2} \right] dt \leq \rho \quad (\text{A.16})$$

Pode-se reescrever a eq. (A.16) separando em duas integrais o membro esquerdo, adicionando a quantidade não negativa

$$\alpha \int_0^{\sigma(0)} \varphi(\sigma) d\sigma$$

a ambos os membros e sendo uma nova constante

$$\rho' = \rho + \alpha \int_0^{\sigma(0)} \varphi(\sigma) d\sigma$$

chega-se á inequação:

$$\int_0^\eta \varphi(\sigma) \left[\sigma - \frac{\varphi(\sigma)}{K_2} \right] dt + \alpha \int_0^{\sigma(t)} \varphi(\sigma) d\sigma \leq \rho'$$

É claro que ambas as integrais são não negativas pelo que:

$$\int_0^\eta \varphi(\sigma) \left[\sigma - \frac{\varphi(\sigma)}{K_2} \right] dt \leq \rho' \quad (\text{A.17})$$

$$\int_0^{\sigma(t)} \varphi(\sigma) d\sigma < \frac{1}{\alpha} \rho' \quad (\text{A.18})$$

Da ineq. (A.18), junto com a suposição que $\varphi(\sigma)$ é contida no setor $[0, K_2]$, ainda não se pode afirmar que a função $\sigma(t)$ é limitada, já que em tal setor podem-se escolher características $\varphi(\sigma)$ para as quais $\int_0^\infty \varphi(\sigma) d\sigma$ é finita. Suponhamos que $\varphi(\sigma)$ satisfaz a condição mais estrita

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < K_2 \quad (\text{A.19})$$

em vez da condição original

$$0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq K_2 \quad (\text{A.20})$$

ou seja que está contida no setor $[\varepsilon, K_2)$ e não no setor $[0, K_2]$.

Segue-se da ineq. (A.18) que a função $\sigma(t)$ é limitada para $t \geq 0$, e

$$|\sigma(t)| \leq \gamma_1 \quad \text{para } t \geq 0 \quad (\text{A.21})$$

onde γ_1 tende a infinito junto com as condições iniciais.

De fato, mudando $\varphi(\sigma)$ por $\varepsilon\sigma$ na ineq. (A.18), obtem-se:

$$\frac{1}{2}\varepsilon\sigma^2(\eta) \leq \frac{\rho'}{\alpha}$$

Sustituindo η por t obtém-se (A.21) na qual

$$M = \sqrt{\frac{2\rho'}{\varepsilon\alpha}}$$

Devido às propriedades das equações diferenciais lineares, a solução $x_i(t)$ do sistema (A.7) são limitadas, ou seja:

$$|x_i(t)| \leq \gamma_2, \quad t_i \geq 0, \quad i = 1, 2 \dots n$$

onde γ_2 tende a zero junto com as condições iniciais.

Segue-se que a solução trivial $x_i = 0$ para o sistema 2.1 é estável no sentido Lyapunov.

Além disso na ineq. (A.17) a função da integral é

$$L(\sigma) = \varphi(\sigma) \left[\sigma - \frac{\varphi(\sigma)}{k_2} \right]$$

que é positiva devido a expressão (A.19) para todo $\sigma \neq 0$ e $L(0) = 0$. O limite das funções $x_i(t)$, implica o limite das derivadas $\dot{x}_i(t)$ e por lo tanto de $\sigma(t)$ e $\dot{\sigma}(t)$. Assim, todas as condições do Lema 1 são satisfeitas.

Do Lema 1 conclue-se que para condições iniciais arbitrárias

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$$

então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi[\sigma(t)] = 0$$

pelo que devido as propriedades das equações lineares:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$$

No procedimento anterior muda-se do setor $[0, K_2]$ pelo setor $[0, K_2]$, pelo que deverá mudar-se a característica para:

$$\varphi_1(\sigma) = \varphi(\sigma) + \varepsilon\sigma \quad (\text{A.23})$$

para $\varepsilon > 0$ pequeno.

O modelo de estado é

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^{(\varepsilon)}x + b\varphi_1(\sigma) \\ \sigma &= h^T x \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

onde

$$a_{ij}^{(\varepsilon)} = a_{ij} - \varepsilon b_i h_j, \quad (ij = 1, \dots, n) \quad a_{ij} \in A, \quad b_i \in b, \quad h_j \in h$$

Se $\varphi(\sigma)$ é contida no setor $[0, K_2]$ então $\varphi_1(\sigma)$ é contida no setor $[\varepsilon, K_2 + \varepsilon]$. A nova função de transferência pode-se expressar:

$$G_\varepsilon(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 - \varepsilon G(j\omega)}$$

Para $\varepsilon > 0$ pequeno, as funções $G_\varepsilon(j\omega)$ e $G(j\omega)$ não são muito diferentes, pelo que da inequação

$$\operatorname{Re} \left\{ (1 + \alpha j\omega) G(j\omega) + \frac{1}{K_2} \right\} \geq \delta > 0$$

segue-se a inequação

$$\operatorname{Re} \left\{ (1 + \alpha j\omega) G_\varepsilon(j\omega) + \frac{1}{K_2} \right\} \geq \delta > 0$$

na qual é possível mudar K_2 por $K_2 + 2\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ e pequeno) de pois de diminuir a constante δ_0 .

Assim, se a Condição Popov é satisfeita para o setor $[0, K_2]$ para o sistema 2.1, então é satisfeita para $[0, K_{2\varepsilon}]$ onde $K_{2\varepsilon} = K_2 + 2\varepsilon$. Quer dizer que o sistema (A.24) é estável para $\varphi_1(\sigma) = 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno já que $\varphi(\sigma)$ é a característica de interesse contida no setor $[0, K_2]$, a correspondente característica $\varphi_1(\sigma)$ é contida no setor $[\varepsilon, K_2 + \varepsilon]$. Assim ambas as características estão contidas no setor $[\varepsilon, K_2]$. Já que o teorema foi provado para tal setor, consequentemente é válido para o sistema 2.1 cujo elemento não-linear é contido no setor $[0, K_2]$.

Assim o Teorema 1 de Popov têm sido provado.

B I B L I O G R A F I A

- [1] ANDERSON B.D.O.- "Stability of Control Systems with Multiple Nonlinearities" - J. Franklin Inst.- Vol. 282, No. 3, 1966, pp. 155-160.
- [2] ANDERSON B.D.O.- "A System Theory Criterion for Positive Real Matrices" - J. SIAM Cont.- Vol. 5, No. 2, 1967, pp. 171-182.
- [3] AIZERMAN M.A. and GANTMACHER, F.R.- "Absolute Stability of Regulator Systems" - Holden Day, San Francisco, Cal., 1964.
- [4] BAKER R.A. and DESOER, C.A.- "Asymptotic Stability in the Large of a Class of Single-Loop Feedback Systems" SIAM J. Control - Vol. 6, No. 1, 1968.
- [5] BROCKETT R.W. and WILLEMS J.L.- "Frequency Domain Stability Criteria", IEEE, Trans. A.C. 10, No. 4, 1965.
- [6] CASTELLANOS A.M.- "Elaboración de Prácticas para un Curso de Control Clásico mediante Computadora Análogica y Digital" - Tesis Profesional - Univ. Aut. de Guadalajara, Guadalajara, Jalisco. 1977.
- [7] DESOER C.A.- "A Generalization of the Popov Criterion" IEEE Trans. A.C. - AC-10, No. 2, 1965.
- [8] N. DHARMA RAO, M.E.- "Routh-Hurwitz Conditions and Lyapunov Methods for the Transient-Stability Problem" PROC. IEE, Vol. 116, No. 4, 1969.
- [9] FEINSTEIN J.- "Teoría dos Sistemas de Controle - Enfoque por Variáveis de Estado" - Ed. Campus, Ltda 1979.

- [10] FREGOSI A.E., FEINSTEIN J. e CALDEIRA L.- "Controle Clássico" - Em edição Editora Campus - 1980.
- [11] EL-ABIAD A.H . and NAGAPPAN K.- " Transient Stability Regions of Multimachine Power System" - IEEE Trans. PAS 85, No. 2, 1966, pp. 169-179.
- [12] GARG P. DEVENDRA.- "A Popov-Criterion-Based Algorithm for Control System Synthesis using Non-Linear Compensators" - Int. J. Control - Vol. 13, No. 1, pp. 155-163.
- [13] GARG P. DEVENDRA, AUSLANDER D. and RABINS M.J.- "A Synthesis Technique for Nonlinear Control Systems Using a Frequency Domain Stability Criterion" - Journal Basic Eng., Serie D, 1970, pp.348-353.
- [14] GARG P. DEVENDRA.- "Application of Three-Mode Controllers for Nonlinear System Synthesis" - IEEE Trans. A.C. 14, No. 1, 1971, pp. 80-82.
- [15] GARG P. DEVENDRA.- "A Compensator Design Technique for Control Systems with Time-Varying Nonlinear Elements" J. Franklin Inst.- Vol. 292, No. 1, pp. 35-44.
- [16] GARG P. DEVENDRA and RABINS M.J.- "Stability Bounds for Nonlinear Systems Designed Via Frequency Domain Stability Criteria" - Trans. ASME - Serie G, Vol. 95, No. 3, pp. 262-265.
- [17] GARG P. Devendra and MAIZZA-NETO O.- " Absolute Stability Results for Non-linear Systems Using Logarithmic Plots" - Int. J. Control - Vol. 21, No. 6, 1975, pp. 899-909.

- [18] GLESS G.E.- "Direct Method of Lyapunov Applied to Transient Power System Stability" - IEEE Trans. PAS 85, No. 2, 1966, pp. 159-167.
- [19] HEINER V.E.- "Comments on "On Lyapunov Functions for Power Systems with Transfer Conductances" - IEEE Trans. A,C. 21, No. 2, 1974, pp. 621-623.
- [20] HEINER V.E.- " A Multi-Machine Power System Lyapunov Function using the Generalized Popov Criterion" - Int. J. Control, Vol. 19, No. 5, 1974, pp. 969-976.
- [21] HSU J.C. and MEYER A.U.- "Modern Control Principles and Applications" - Mc.-Graw Hill, Inc. 1968.
- [22] HUSEYIN OZAY.- "On the Popov Criterion" - Int. J. Cont.- Vol. 17, No. 6, 1973, pp. 1137-1142.
- [23] HUSEYIN OZAY.- "On the Circle Criterion" - Int. J. Cont.- Vol. 18, No. 1, 1973, pp. 9-16.
- [24] IBRAHIM E. S. and REKASIUS Z.V.- "A Stability Criterion for Nonlinear Feedback Systems" - IEEE Trans. AC. 8, No. 3, 1964, pp. 154-159.
- [25] JOCIC L.B., RIBBENS-P.M. and SILJAK D. D.- "Multimachine Power Systems: Stability, Decomposition, and Aggregation" - IEEE Trans. AC. 23, No. 2, 1978, pp. 325-331.
- [26] JOSSELSOON R. and RAJU G.V.S.- "Absolute Stability of Control Systems with Many-Sector and Slope-Restricted Non-linearities." - Int. J. Control - Vol. 19, No. 3, pp. 609-614.

- [27] KALMAN R. E.- "Lyapunov Functions for the Problem of Lur'e in Automatic Control" - Proc. Nac. Ac. Sc. Vol. 49, 1963, pp. 201-205.
- [28] LEFSCHETZ S.- "Stability of Nonlinear Control Systems" Academic Press, N.Y. 1965.
- [29] LEFSCHETZ S.- "Differential Equations" - Intersc. Publishers, N.Y. - 1957.
- [30] LEFSCHETZ S.- "Lyapunov Stability and Controls" - J. Cont. SIAM - Vol. 3, No. 3, 1965, pp. 1-6.
- [31] LUR'E, A.I. and POSTNIKOV, V.M.- "On the Theory of Stability of Control Systems" - Prikl. Math-Mech. Vol. 8, No. 3, 1944.
- [32] LUR'E, A.I.- "On Some Nonlinear Problems in the Theory of Automatic Control" - HM Stationery Office, London 1957.
- [33] MEYER K. R.- "On the Existence of Lyapunov Functions for the Problem of Lur'e" - J. Cont. SIAM. Vol. 3, No. 3, 1966, pp. 373-383.
- [34] MOORE J.B. and ANDERSON, B.D.O.- "A Generalization of the Popov Criterion" - J. Franklin Inst. 285, No. 6 1968,
- [35] NARENDRA K. S. and TAYLOR, J.H.- "Frequency Domain Criteria for Absolute Stability" - Academic Press, 1973.
- [36] PAI M.A. et al.- "Power System Transient Stability Regions Using Popov's Method" - IEEE PAS - 89, No. 5 6, 1970, pp.788-794.

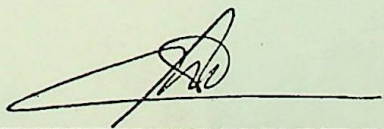
- [37] PAI M.A. and MURTHY P. G.- "On Lyapunov Functions for Power Systems with Transfer Conductances" - IEEE Trans. AC. 18, No. 3, 1973, pp. 181-183.
- [38] PAI M.A. and MURTHY P. G.- "New Lyapunov Functions for Power Systems Based on Minimal Realizations" - Int. J. Control, Vol. 19, No. 2, 1974, pp. 1-14.
- [39] PAI M. A. and RAI V.- "Lyapunov-Popov Stability Analysis of Synchronous Machine with Flux Decay and Voltage Regulator" - Int. J. Cont. Vol. 19, No. 4, 1974, pp. 817-829.
- [40] PRABHAKARA, F.S. and EL-ABIAD, A.H.- "A Simplified Determination of Transient Stability Regions for Lyapunov Methods" - IEEE Trans. Power App. Syst., Vol. PAS 94, No. 2, 1975, pp. 672 a 689.
- [41] PYATNITSKII E. S.- "New Research on the Absolute Stability of Automatic Control Systems" - Avtomatika i Telemek, Vol. 6, pp. 5-36, 1968.
- [42] REKASIUS Z. V. and ROWLAND J. R.- "A Stability Criterion for Feedback Systems Containing a Single Time-Varying Nonlinear Element" - IEEE Trans. Ac. 12, No. 1 1965, pp. 352-353.
- [43] RIBBENS-PAVELLA M.- "Fast Determination of Stability Regions for Online Transient Power System Studies" - PROC. IEE, Vol. 123, No. 7, 1976, pp. 689-696.
- [44] SANDBERG I. W.- "A Frequency-Domain Condition for the Stability of Feedback Systems Containing a Single Time-Varying Nonlinear Element" - Bell S. Tech. J. 1964, pp. 1601-1608.

- [45] SASAKI H.- "An Approximate Incorporation of Field Flux Decay into Transient Stability Analyses of Multimachine Power Systems by the Second Method of Lyapunov" - IEEE Trans. PAS. 98, No. 2, 1979, pp. 473-481.
- [46] SASTRY V. R. and MURTHY P. G.- "Derivation of Completely Controllable and Completely Observable State Models for Multimachine Power System Stability Studies " - Int. J. Cont. Vol. 16, No. 4, 1972, pp. 777-788.
- [47] SHANKAR S. and ATHERTON D. P.- "Graphical Stability Analysis of Nonlinear Multivariable Control Systems" Int. J. Control, Vol. 25, No. 3, 1977, pp. 375-388.
- [48] SIDDIQEE M. V.- "Transient Stability of an a.c. Generator by Lyapunov's Direct Method" - Int. J. Control. Vol. 8, No. 2, 1968, pp. 131-144.
- [49] WILLEMS J. L.- "Comments on "Transient Stability of an a.c. Generator by Lyapunov's Direct Method" - Int. J. Control, Vol. 10, No. 1, 1969, pp. 113-116.
- [50] WILLEMS J. L.- "Optimum Lyapunov Functions and Stability Regions for Multimachine Power Systems" - PROC: IEE, Vol. 117, No. 3, 1970, pp. 573-577.
- [51] WILLEMS J. L.- "Direct Methods for Transient Stability Studies in Power System Analysis" - IEEE Trans. Vol. 16, No. 4, 1971, pp. 332-341.
- [52] WILLEMS J. L.- "The Application of Lyapunov Methods to the Computation of Transient Stability Regions for Multimachine Power System" - IEEE Trans. Vol. 89, No. 5/6, 1970, pp. 795-801.

- [53] WILLEMS J.1.- "The Circle Criterion and Quadratic Lyapunov Functions for Stability Analysis" - IEEE. Trans., A.C. 19, No. 3, 1973.
- [54] YAKUBOVICH V. A.- "Frequency Conditions for the Absolute Stability of Control Systems with Several Nonlinear or Linear Nonstationary Blocks" - Avtomati Ka i Telemek. No. 6, pp. 5-30, 1967.
- [55] YAKUBOVICH V. A.- "Method of Matrix Inequalities in the Stability Theory of Nonlinear Control Systems", II Avtomatika i Telemek - Vol. 26, No. 4, 1965, pp.577-592.
- [56] YAKUBOVICH V. A.- "The Method of Matrix Inequalities in the Theory of Stability of Non-linear Controlled Systems III" - Avtomatika i Telemek. Vol. 26, No. 5, 1965, pp. 753-762.
- [57] ZIMMERMAN C.E. and THALER G.J.- "Application of the Popov Criterion to Design of Nonlinear Systems" - IEEE Trans. AC. 16, No. 2, 1971, pp. 76-79.
- [58] BROCKETT R.W. and FORYS L.J.- "On the Stability of Systems Containing a Time-Varying gain", Proc. 2nd. Allerton Conf. CSTh., 1964.
- [59] CRARY S.B.- "Power System Stability" - Chapman and Hall - London, 1947.
- [60] KIMBARK E.W.- "Power System Stability", IEEE Trans. PAS 85, No. 1, 1966.
- [61] NARENDRA K.S. and NEWMAN C.P.- "Dunham Laboratory Technical Report" - AIAA Vol. 5, No. 11, 1967.

- [62] HENNER V.E.- "Lur'e-Type Lyapunov Function for Multi machine Power Systems" - PROC IEE, Vol. 120, No. 1 1973.
- [63] NAUMOV B.N. and TSYPKIN Ya.- "A Frequency criterion for Absolute Process Stability in Nonlinear Automatic Control Systems" - Automat and R.C. Vol. 25, pp.765, 1964.
- [64] MURPHY G.J.- "A Frequency-Domain Stability Chart for Nonlinear Feedback Systems" - IEEE Trans. AC 12, No.6 1967.
- [65] STAGG G.W.- and EL-ABIAD A.H.- "Computer Methods in Power Systems Analysis" - New York, McGraw Hill, 1968 ch. 10.
- [66] PRABHASHANKAR K. and JANISCHEWSY J.- "Digital Simulation of Multimachine Power Systems for Stability" - IEEE Trans. Power App. Syst., Vol. PAS 87, 1970, pp. 73-80.
- [67] STANTON K.N. and TALUKDAR S.N.- "New Integration Algorithms for Transient Stability Studies" - IEEE Trans. Power App. Syst. Vol. PAS 89, 1970, pp. 985-991.
- [68] MAGNUSSON P.C.- "The Transient Energy Method of Calculating Stability" - AIEE Trans. Vol. 66, 1947, pp. 747-755.
- [69] AYLETT P.D.- "The Energy-Integral Criterion of Transient Stability Limits of Power Systems" - The Inst. of Elet. Eng., IEE, 1958, pp. 527-536.

- [70] WALKER J.A. and McCLAMROCH N.H.- "Finite Regions of Attraction for the Problem of Lur'e" - Int. J. Control Vol. 6, No. 4, 1967, pp. 331-336.
- [71] MANSOUR M.- "Stability Analysis and Control of Power Systems" - Real Time Control of Electric Power System Elsevier Publishing Co. Amsterdam, London, New York, 1972.



MARCOS CASTELLANOS AGUIRRE

27 de Setembro de 1980

Itajubá, M.G. BRASIL

Data 11 / 12 / 19 80
Proc. _____
País. _____
Liv. ~~190000~~ CPC
RC-8 190000

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200301

NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA