

TESE
308

CONTROLE DAS VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR
VÓRTICES EM ESTRUTURAS CILÍNDRICAS



ARAILDO LIMA DA SILVA

CONTROLE DAS VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR
VÓRTICES EM ESTRUTURAS CILINDRICAS

ARAILDO LIMA DA SILVA



Dissertação apresentada à Escola
Federal de Engenharia de Itajubá
para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia Mecânica.

ITAJUBÁ (MG)

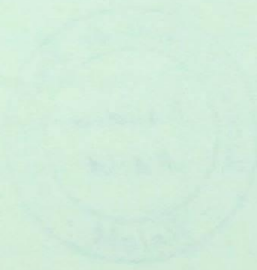
MAR/81

CLASS. 534.833(0432)

CUTT. 5 586 e

TOMBO 308

AVULSO DE ANEXO



Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

ESTADO LIBRE ASOCIADO DE PUERTO RICO

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida, pela orientação ao desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas professores e amigos da FEG e EFEI, que direta e indiretamente contribuíram para que o mesmo fosse realizado.

A Sra. Zélia de Araujo Pedran, pela datilografia.



A meus pais

A minha esposa

SUMÁRIO

O objetivo deste trabalho é estabelecer as relações que governam o controle das vibrações induzidas por vórtices em estruturas cilíndricas e limitar estas amplitudes a valores aceitáveis nas aplicações práticas.

São utilizados modelos matemáticos limitados para descrever as relações da interação fluido estrutura e utiliza-se a analogia eletro-mecânica para a análise do sistema acoplado Estrutura-Neutralizador.

É desenvolvido um método prático de cálculo para projetar um absorvedor dinâmico que controla as amplitudes destas vibrações forçadas induzidas pelo fluxo nas estruturas.

INDICE

CONTROLO DAS VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTEICES

SUMARY

1.1 INTRODUÇÃO 1

1.2 MODIFICAÇÃO ESTRUTURAL 2

1.3 NEUTRALIZAÇÃO DE VIBRAÇÃO 3

The objective of this work is to establish the relations that govern the control of vibrations induced by vortices in cylindrical structures and to limit these amplitudes to acceptable values in practical situations.

1.3.1 Modelo Matemático de Neutralização 3

1.3.2 Modelo de Neutralização por Absorção 4

Limited mathematical models are utilized to describe the relations of the fluid structure and electro-mechanic analogy is used for the analysis of the system of the coupled Neutralizing-Structure.

2 ANÁLISE DIMENSIONAL 23

A practical method of calculation is developed for projecting a dynamic absorber which controls the amplitudes of the forced vibrations induced by the flow in the structures.

2.1 Método de Neutralização por Absorção 23

2.2 Método de Neutralização por Absorção 24

2.3 Método de Neutralização por Absorção 25

2.4 Método de Neutralização por Absorção 26

2.5 Método de Neutralização por Absorção 27

2.6 Método de Neutralização por Absorção 28

2.7 Método de Neutralização por Absorção 29

2.8 Método de Neutralização por Absorção 30

2.9 Método de Neutralização por Absorção 31

2.10 Método de Neutralização por Absorção 32

ÍNDICE

1	REDUÇÃO DAS VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES	
1.1	INTRODUÇÃO	1
1.2	MODIFICAÇÃO ESTRUTURAL	2
1.3	NEUTRALIZADORES DE VIBRAÇÃO	5
1.3.1	Introdução	5
1.3.2	Descrição do Neutralizador	5
1.3.3	EXEMPLO - Barramento de Substação	15
1.3.4	EXEMPLO - Cabo de linha de Transmissão	17
	REFERÊNCIAS	21
2	ANÁLISE DIMENSIONAL	
2.1	INTRODUÇÃO	23
2.2	VARIÁVEIS ADMENSIONAIS	23
2.2.1	Geometria	23
2.2.2	Velocidade Reduzida, Amplitude Adimensional	24
2.2.3	Razão de Massa	25
2.2.4	Número de Reynolds	26
2.2.5	Número de Mach	26
2.2.6	Fator de Amortecimento	27
2.3	APLICAÇÃO	28
	REFERÊNCIAS	31

3	VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES	
3.1	INTRODUÇÃO	32
3.2	A ESTEIRA DE VÓRTICES DE UM CILINDRO CIRCULAR ESTACIONÁRIO ..	36
3.3	NÚMERO DE STROUHAL	40
3.4	EFEITO DO MOVIMENTO DO CILINDRO SOBRE A ESTEIRA	45
3.5	ANÁLISE DE VIBRAÇÃO INDUZIDA POR VÓRTICES	49
3.6	MODELO DA ESTEIRA OSCILATÓRIA	53
3.6.1	Introdução	53
3.6.2	Descrição do Modelo	53
3.6.3	Resultados	63
3.7	MODELO DE CORRELAÇÃO	68
3.7.1	Introdução	68
3.7.2	Descrição do Modelo de Correlação	70
3.7.3	Parâmetros do Modelo	75
3.7.4	Resultados	79
3.8	EXEMPLO, TERMOPAR DE PROVA	87
3.9	EXEMPLO, CABO REBOCADOR	91
	REFERÊNCIAS	98
4	CONTROLE DAS VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES	
4.1	INTRODUÇÃO	106
4.2	ESTRUTURA VIBRANTE	106
4.3	FORÇAS AERODINÂMICAS	113
4.4	MODELO SIMPLIFICADO DE UMA ESTRUTURA	115
4.4.1	Regras de Equivalência	115

4.4.2	Massa equivalente do "ponto-guia"	116
4.4.3	Rigidez equivalente no "ponto-guia"	117
4.4.4	Força equivalente do "ponto-guia"	118
4.4.5	Neutralizador	119
4.4.6	Equações que governam o sistema amortecido	121
4.4.6.a	<i>Modelo equivalente do sistema amortecido</i>	121
4.4.6.b	<i>Analogia eletro-mecânica</i>	122
4.4.7	Equações para a máxima amplitude	126
4.5	MÉTODO PRÁTICO DE CÁLCULO	128
4.6	APLICAÇÃO	133
4.7	CARACTERÍSTICA DE UM BOM NEUTRALIZADOR	143
	REFERÊNCIAS	144
5	COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES	145
	APÊNDICE A - GALLOPING DE BARRAS	148
	REFERÊNCIAS	154
	APÊNDICE B - PRINCÍPIO DA ORTOGONALIDADE	155
	REFERÊNCIAS	159
	APÊNDICE C - SISTEMAS ANÁLOGOS	160
	REFERÊNCIAS	163
	APÊNDICE D - LISTAGEM E TABELAS DE G	164

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal
A_y	Amplitude de vibração perpendicular a linha de corrente livre
C_L	Coefficiente de sustentação perpendicular a linha de corrente livre
C_{LE}	Coefficiente de sustentação equivalente
C	Constante de amortecimento
c	Capacitância
E_i	Energia cinética
$E I$	Rigidez à flexão
F	Força por unidade de comprimento
G	Admitância
I	Momento de inércia de área
L	Comprimento do vão da estrutura
l_c	Comprimento de correlação
R_e	Número de Reynolds
S	Número de Strouhal
S_F	Densidade espectral
U	Velocidade da linha de corrente livre
x	Posição paralela ao fluxo de fluido
Y	Posição perpendicular a linha de corrente livre
\bar{y}	Amplitude reduzida
Z	Impedância
e	Velocidade do som
f	Frequência (Hz)
g	Aceleração da gravidade

K	Constante de mola por unidade de comprimento
m	Massa por unidade de comprimento
r	Função de correlação
t	Tempo
x	Deslocamento ou posição paralela a linha de corrente livre
y	Deslocamento ou posição perpendicular a linha de corrente livre
z	Comprimento ao longo do vão
δ_r	Amortecimento reduzido, $2 m (2 \pi \tau) / \rho D^2$
τ	Fator de amortecimento
λ	Comprimento de onda
ν	Viscosidade cinemática
ρ	Densidade do fluido
ψ	Forma do modo ao longo do vão
ω	Frequência (rd/seg)
α	Fator de Sintonia
μ	Razão de massa
β	Razão de frequências
T_n	Fator de escala
W_i	Potência

NOTA: Somente os símbolos principais são definidos, sendo os outros definidos nos capítulos individuais.

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO	1		
1.1	Método de redução da vibração induzida por vórtice	4	
1.2	Sistema massa mola com absorvedor	6	
1.3.a,b	Faixa de operação do absorvedor.....	10	
1.4	Relação de massa x Relação de frequências	12	
1.5	Curva de Resposta de um absorvedor com amortecimento	14	
1.6	Barramento e absorvedor	15	
1.7	Cabo de linha de transmissão com absorvedor dinâmico	17	
1.8	Faixa de operação do absorvedor	19	
CAPÍTULO	2		
2.1	Trajeto [̃] ria da vibraç [~] o de um modelo rigidez - amortecimento - massa	25	
2.2	Decremento livre de uma estrutura unidimensional com amorte [~] cimento viscoso	28	
2.3	Resposta lateral de um modelo de construç [~] o alto com raz [~] o de lados 2	30	
CAPÍTULO	3		
3.1	Uma sequ [~] ncia de superf [~] cies de campos de press [~] o e formas de esteiras para $R_e = 112.000$ para aproximadamente um terço de um ciclo de v [~] rtices desprendidos	35	
3.2	Regime de fluxo de um fluido atrav [~] s de um cilindro circular.	38	

3.3	Número de Strouhal x Número de Reynolds	41
3.4	Números de Strouhal para seções não circulares	43
3.5	Números de Strouhal para bancos de tubos alinhados	43
3.6	Número de Strouhal para bancos de tubos alternados	44
3.7	Correlação na direção do vão para um cilindro rígido em vibrações ressonantes com vórtices circulantes	46
3.8	Regiões em que o movimento do cilindro controla a frequência da circulação	47
3.9	O caminho de vórtices além de um cilindro vibrando transversalmente no meio de um fluxo em ressonância com vórtices circulantes	48
3.10	Vibrações induzidas por vórtices em uma placa plana	51
3.11	Ressonância de um cilindro circular rígido com vórtices circulantes	52
3.12	Cilindro e sistema de coordenadas	54
3.13	Volume de controle	55
3.14	Máxima amplitude normalizada versus razão de massa vezes parâmetros de amortecimento	65
3.15	Curva encontrada de dados experimentais para uma barra pivotada em ressonância com emissão de vórtices	79
3.16	Significante amplitude de ressonância para o modo senoidal $[\psi = \text{sen}(\frac{\pi Z}{L})]$ com uma função do amortecimento com dados experimentais	82
3.17	Significante amplitude ressonante para barra pivotada ($\psi=z/L$) como uma função do amortecimento	82
3.18	Significante amplitude ressonante para o cilindro rígido ($\psi=1$) em comparação com dados experimentais	84
3.19	Coeficiente de sustentação equivalente como uma função de significativa amplitude para o cilindro rígido modo ($\psi=1$) em	

	comparação com dados experimentais	85
3.20	Termopar de prova	88
3.21	Coeficiente de arraste do cilindro versus R_e com um diâmetro de 6 polegadas	89
3.22	Cabo Rebocador	92
3.23	Frequências características de um cabo flexível de 3 ft de comprimento e um diâmetro de 0,1 in	94
3.24	Espectro de frequências da aceleração transversal para um cabo simples	95
3.25	Espectro de potência da aceleração para o fluxo de um cabo simples	96
3.26	Espectro de potência da flutuação de tensões para um cabo simples	96
CAPÍTULO 4		
4.1	Neutralizador com amortecimento viscoso	120
4.2	Sistema acoplado, estrutura neutralizador	121
4.3	Sistema acoplado equivalente	123
4.4	Circuito elétrico análogo	124
4.5	Circuito elétrico análogo simplificado	124
4.6	Admitância geral por densidade relativa x amplitude reduzida	129
4.7.a	$G \times \mu$; para vários τ_A e $\alpha = \text{const.}$	130
4.7.b	$G \times \alpha$; para vários τ_A e $\mu = \text{const.}$	131
4.7.b	$G \times \alpha$; para vários μ e $\tau_A = \text{const.}$	131
4.8	Modos possíveis de vibração de dois vãos associados mecanicamente	134
4.9	Faixa de atuação do neutralizador	142

ÍNDICE DE TABELAS

3.1	Número de Strouhal para uma variedade de formas	41
3.2	Formas dos modos e fatores geométricos da eq . 3.17	67
3.3	Resposta das três formas dos modos	81
4.1	Frequências próprias dos tubos em ligas de alumínio	135
4.2	Valores de G para $\mu = 0,045$	138
4.3	Valores de G para $\mu = 0,10$	140
4.4	Valores de G para $\mu = 0,12$	140
C.1	Analogias elétricas	161

CAPÍTULO 1

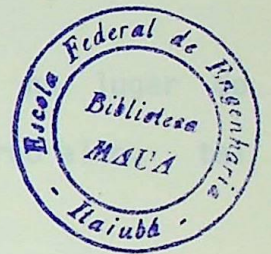
REDUÇÃO DAS VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES

1.1 INTRODUÇÃO

Um sistema pode ser levado a vibrar excessivamente, se é excitado por uma força vibratória cuja frequência de excitação é igual ou próxima à frequência natural do sistema.

Para o caso de uma estrutura exposta a um fluxo de fluido, esta excitação é gerada pela formação e desprendimento de vórtices, conhecidos como vórtices de Von Karman, sendo este mecanismo descrito com mais detalhes no cap. III.

Substancial redução da amplitude destas vibrações pode ser conseguida pela modificação estrutural ou pela introdução de neutralizadores de vibrações, como segue.



CAPÍTULO 1

REDUÇÃO DAS VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES

1.1 INTRODUÇÃO

Um sistema pode ser levado a vibrar excessivamente, se é excitado por uma força vibratória cuja frequência de excitação é igual ou próxima a frequência natural do sistema.

Para o caso de uma estrutura exposta a um fluxo de fluido, esta excitação é gerada pela formação e desprendimento de vórtices, conhecidos como vórtices de Von Karman, sendo este mecanismo descrito com mais detalhes no cap. III.

Substancial redução da amplitude destas vibrações pode ser conseguida pela modificação estrutural ou pela introdução de neutralizadores de vibrações, como segue.

1.2 MODIFICAÇÃO ESTRUTURAL

1.2.1 Se a massa ou amortecimento interno da estrutura for aumentado, as vibrações ressonantes diminuem.

Aumento do amortecimento pode ser conseguido pela fricção entre elementos estruturais, caso seja permitida.

Usando-se materiais compostos, tal como concreto no lugar do aço original ou incorporando-se materiais com amortecimento interno alto, tal como madeira, borracha e areia.

1.2.3 Alterar a seção transversal da estrutura poder ser um perfil aerodinâmico. Simples projetos para dissipar energia podem ser eficientes, por exemplo, a vibração destrutiva de solda em tubos da Usina atômica do TOKAI foi suprimida pelo artifício de correntes sobre os tubos (Ref. 1.2).

Uma solução alternativa poderia ter sido passar os tubos através de orifícios sobre medida nos suportes, permitindo fricção, melhor do que soldar os tubos sobre os suportes.

Consolidação da estrutura é extremamente não prático para uma estrutura grande ou complexa.

1.2.2 Evitar ressonância fazendo-se com que a relação abaixo seja mantida:

$$\frac{U}{fD} < 1 \quad 1.1$$

onde f - é a frequência natural da estrutura,

U - é a velocidade da linha de corrente livre

D - é a largura da estrutura

Então a ressonância com emissão de vórtices, sendo que isto é ordinariamente conseguido com o aumento da frequência natural da estrutura, onde isto é permitido.

1.2.3 Alterar a seção transversal se a estrutura puder ser um perfil aerodinâmico, por exemplo em pilar marítimo (Ref. 1.3) como mostrado na fig. 1.1, então o fluxo não poderia separar-se da seção e emissão de vórtices podem ser eliminadas. O perfil aerodinâmico requerido com uma razão de afilamento de 6:1 ou um ângulo moderado de inclinação, cerca de 8 a 10^0 torna-se eficaz, este perfil é eficaz somente se o ângulo de ataque do fluxo para o perfil não for variável, sendo que algumas variações podem produzir grandes forças laterais.

Algum sucesso tem sido conseguido na redução de vibrações induzidas em canos verticais, no ar, pelo uso de aletas helicoidais mostradas na fig. 1.1 (Ref. 1.3 e 1.4).

Cabos marítimos requerem do mesmo modo projetos que eliminem a influência de vórtices, mais do que tubos verticais porque a água possui densidade grande, comparada com a densidade do ar.

As fitas plásticas mostradas na fig. 1.1, as quais são trança

das em volta do cabo tem sido usadas para reduzir significativamente as vibrações e aumentam a vida útil do cabo.

Torna-se eficaz uma fita trançada, e um diâmetro de determinado comprimento poderia ser aumentado para quatro diâmetros em torno do cabo e é especulativo no futuro um diâmetro a parte.

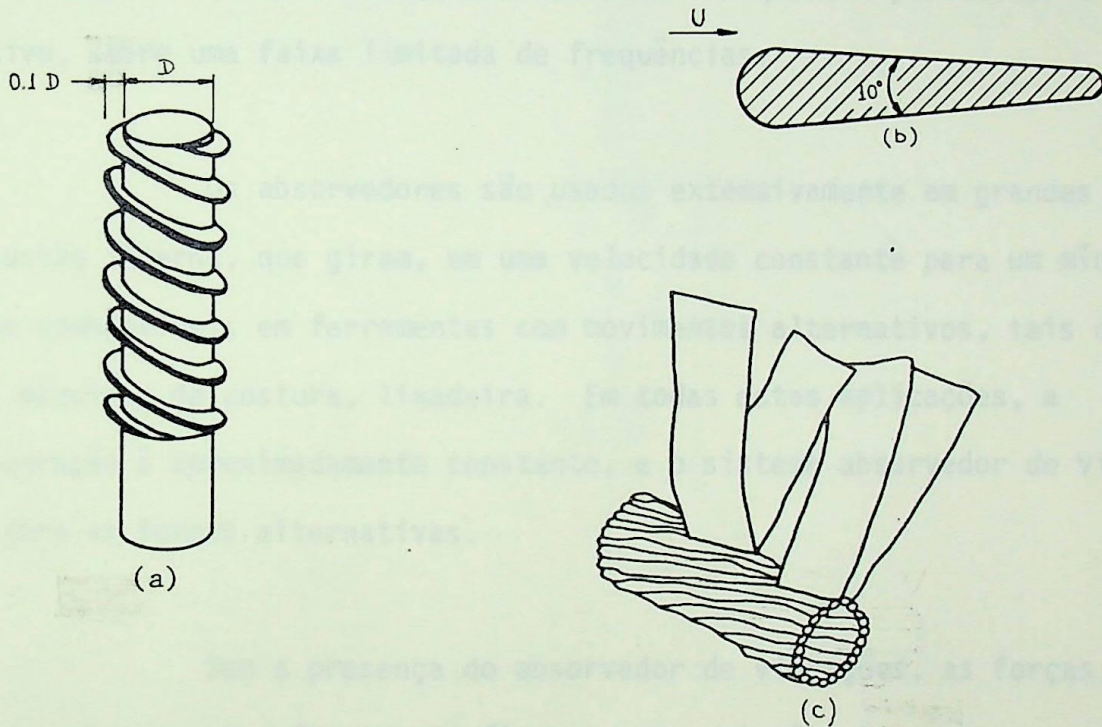


Fig. 1.1 Métodos de redução da vibração induzida por vórtice:
 a) Cano vertical com fiada de chapa helicoidal (Ref. 1.4)
 b) Pilar marítimo afilado, (Ref. 1.5)
 c) Cabo com fitas

1.3 NEUTRALIZADORES DE VIBRAÇÃO

1.3.1 Introdução

Em muitos casos as vibrações não podem ser suavizadas pelos meios descritos no ítem 1.2, no entanto, podemos reduzi-la pela introdução de um neutralizador ou absorvedor dinâmico de vibrações.

O absorvedor dinâmico é um dispositivo mecânico usado para diminuir vibrações indesejáveis. Sua maior aplicação está nas máquinas síncronas. O absorvedor dinâmico é sintonizado para uma frequência particular e é somente efetivo, sobre uma faixa limitada de frequências.

Os absorvedores são usados extensivamente em grandes motores de combustão interna, que giram, em uma velocidade constante para um mínimo consumo de combustível; em ferramentas com movimentos alternativos, tais como: Tesouras, máquinas de costura, lixadeira. Em todas estas aplicações, a frequência de operação é aproximadamente constante, e o sistema absorvedor de vibração, equilibra as forças alternativas.

Sem a presença do absorvedor de vibrações, as forças alternativas fariam com que a ferramenta ficasse sem controle.

Vários absorvedores são usados em linhas de transmissão, minimizando os efeitos de fadiga provenientes da vibração induzida pelo vento.

1.3.2 Descrição do neutralizador

Em sua forma mais simples, um absorvedor dinâmico consiste de uma massa e uma mola.

Considerando o sistema massa mola representado na fig. 1.2 onde o absorvedor \bar{e} fixado a um sistema massa mola de um grau de liberdade, o efeito da adiçãõ do absorvedor \bar{e} transformar o sistema em um sistema de dois graus de liberdade, isto \bar{e} , a presença do absorvedor aumenta um grau de liberdade ao sistema original.

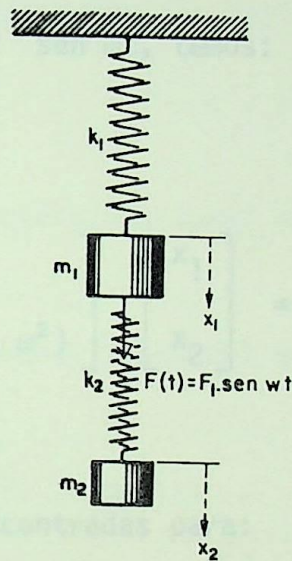


Fig. 1.2 Sistema massa mola com absorvedor

Uma aplicação da 2a. Lei de NEWTON, nos conduz as equações do movimento para a massa principal e para a massa do absorvedor, que são:

$$-k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + F_1 \cdot \text{sen } \omega t = m_1 \ddot{x}_1 \quad (1.2)$$

$$-k_2 (x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2 \quad (1.3)$$

As equações (1) e (2), podem ser representadas em forma matricial como segue:

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 - m_2 \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \text{ sen } \omega t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Para uma solução da forma:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \text{ sen } \omega t, \text{ temos:}$$

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 - m_2 \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

cujas frequências naturais são encontradas para:

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 - m_2 \omega^2) \end{bmatrix} = 0 \quad (1.6)$$

isto é, as frequências naturais do sistema são os autovalores ou as raízes do determinante:

$$\text{Det. } (\omega^2) = (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2 = 0 \quad (1.7)$$

e as amplitudes x_1 e x_2 são:

$$x_1 = \frac{F_1 (k_2 - m_2 \omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \quad (1.8.a)$$

$$x_2 = \frac{F_1 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \quad (1.8.b)$$

Ambas as amplitudes x_1 e x_2 são determinadas, se o módulo da função forçante $F(t) = F_1 \text{sen } \omega t$ for conhecida.

As seguintes substituições são feitas, simplificando-se as expressões:

$$\omega_{11}^2 = \frac{k_1}{m_1}; \quad \text{frequência natural do sistema inicial isolado.}$$

$$\omega_{22}^2 = \frac{k_2}{m_2}; \quad \text{frequência natural do sistema absorvedor isolado.}$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}; \quad \text{razão de massas.}$$

Das expressões acima temos:

$$\frac{k_2}{k_1} = \mu \cdot \frac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2}$$

Resolvendo-se para x_1 e x_2 , temos:

$$x_1 = \frac{F_1}{k_1} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{22}^2}\right)}{\left(1 + \mu \frac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2} - \frac{\omega^2}{\omega_{11}^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{22}^2}\right) - \mu \cdot \frac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2}\right)} \quad (1.9.a)$$

$$x_2 = \frac{F_1}{k_1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \mu \frac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2} - \frac{\omega^2}{\omega_{11}^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{22}^2}\right) - \mu \frac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2}} \quad (1.9.b)$$

Verificamos através da equação 8.a que, se $\omega = \omega_{22}$, o movimento da massa principal m_1 não é simplesmente reduzido, cessa teoricamente.

As figs. 1.3.a e 1.3.b mostram os deslocamentos x_1 e x_2 , como funções do parâmetro F_1/k_1 . A razão de massa é $1/4$ e $\omega_{11} = \omega_{22}$, ou seja, o absorvedor está sintonizado para a frequência natural do sistema principal. A faixa de operação satisfatória onde $x/(F_1/k_1) < 1$, está sombreada.

Dois parâmetros podem ser variados, um dos quais é a razão de massa. Evidentemente uma grande relação de massa não representa um problema prático, mas um absorvedor da mesma ordem de grandeza de massa do sistema principal, não é uma boa solução para resolver o problema vibratório, ao mesmo tempo que uma pequena razão de massa, apresenta uma faixa muito estreita de operação do absorvedor.

O segundo parâmetro passível de variação é a relação de frequências.

$$\alpha = \frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}$$

onde conforme visto anteriormente a frequência ótima do sistema absorvedor ω_{22} , é a frequência em que $x_1 = 0$.

Temos portanto que escolher uma combinação destes parâmetros que melhor satisfaça os requisitos operacionais.

A frequência do absorvedor não é necessariamente igual a ω_{11} , embora o uso de um absorvedor de vibração é mais garantido quando a frequência forçante está mais próxima da frequência natural do sistema principal; e as restrições operacionais impossibilitam essa variação.

Uma desvantagem do absorvedor dinâmico de vibrações é que ele adiciona mais um grau de liberdade ao sistema.

Para encontrar as novas frequências do sistema principal e absorvedor, temos que retornar a equação (1.5), colocando-se $\alpha = \frac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2}$, para $\text{Det.}(\omega^2) = 0$

$$\left(1 + \mu \alpha^2 - \frac{\omega^2}{\omega_{11}^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{22}^2}\right) - \mu \alpha^2 = 0 \quad (1.10)$$

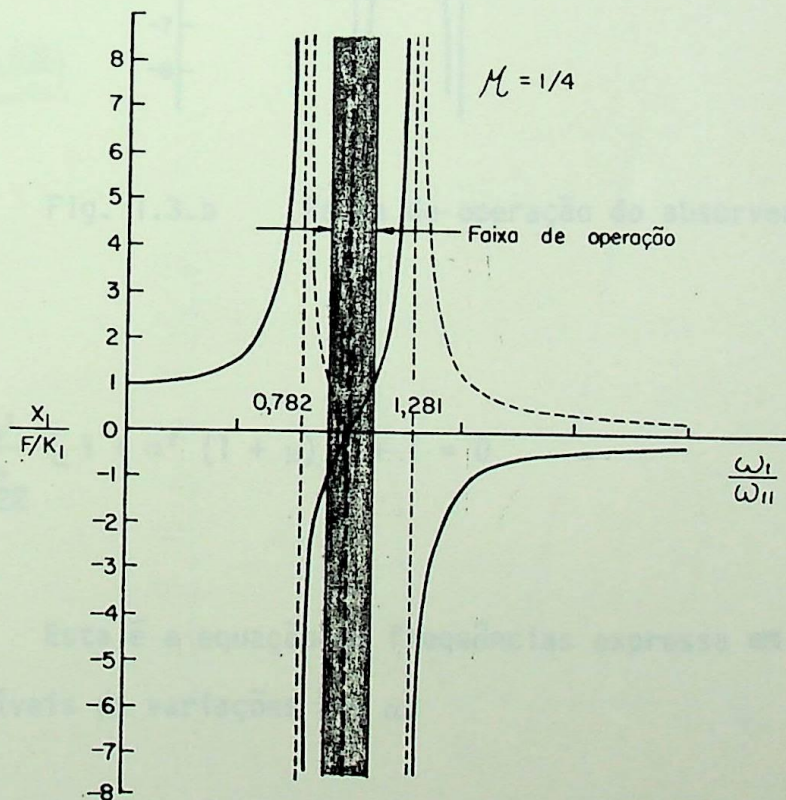


Fig. 1.3.a Faixa de operação do absorvedor

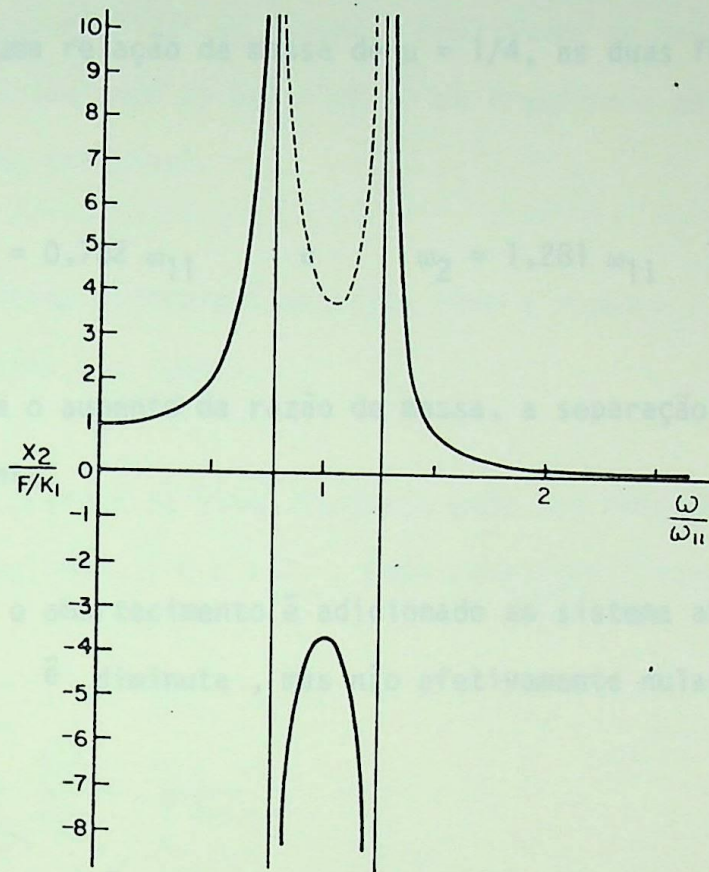


Fig. 1.3.b Faixa de operação do absorvedor

$$\alpha^2 \left(\frac{\omega^4}{\omega_{22}^4} \right) - \frac{\omega^2}{\omega_{22}^4} [1 + \alpha^2 (1 + \mu)] + 1 = 0 \quad (1.11)$$

Esta é a equação de frequências expressa em função dos dois parâmetros passíveis de variações μ e α .

$$\text{Para } \omega_{11} = \omega_{22}, \alpha^2 = 1$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_{22}^2} = \frac{2 + \mu}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2 + \mu)^2 - 4}$$

Na Fig. 1.4 a separação das duas frequências materiais, ω_1 e ω_2 é aparente. Para uma relação de massa de $\mu = 1/4$, as duas frequências naturais ω_1 e ω_2 são:

$$\omega_1 = 0,782 \omega_{11} \quad \text{e} \quad \omega_2 = 1,281 \omega_{11}$$

Com o aumento da razão de massa, a separação das duas frequências naturais aumenta.

Se o amortecimento é adicionado ao sistema absorvedor, a amplitude de x_1 é diminuta, mas não efetivamente nulas.

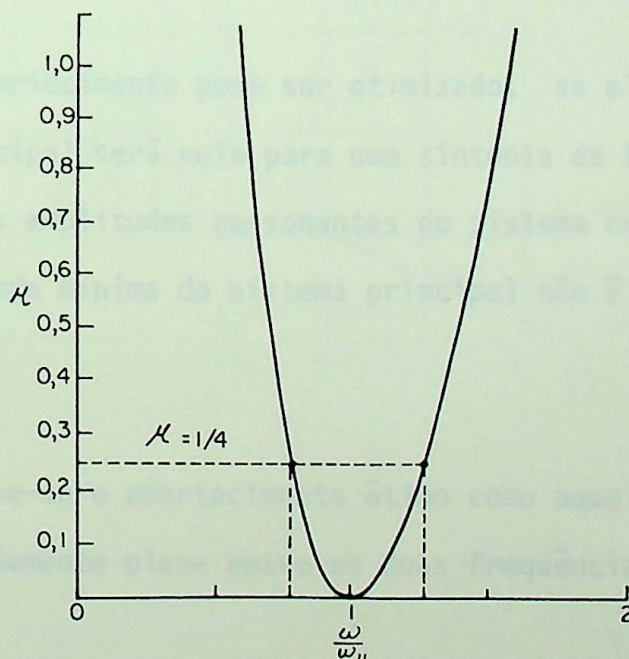


Fig. 1.4 Relação de massa x Relação de frequências

Infelizmente, a frequência natural mais baixa, diminui menos que a frequência natural mais alta, e é a menor frequência natural que deve ser aprovada para alcançar a velocidade de operação.

Para equalizar as máximas amplitudes na ressonância, o absorvedor amortecido é sintonizado um pouco acima da frequência natural mais baixa principal do sistema principal.

A ótima sintonia é definida como a razão $\alpha = \omega_{22}/\omega_{11}$, quando as amplitudes ressonantes são iguais.

Um cálculo da ótima sintonia pode ser encontrado em S. Timoshenko e Y.P. Den Hartog, Ref. 1.6 e 1.7. Este resultado é apresentado na equação (1.12).

$$\alpha = \frac{\omega_{22}}{\omega_{11}} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (1.12)$$

O amortecimento pode ser otimizado, se ele é ausente, a amplitude do sistema principal será nula para uma sintonia de frequência, $\omega = \omega_{22}$. Com amortecimento, as amplitudes ressonantes do sistema combinado são diminuídas, porém, a amplitude mínima do sistema principal não é nula para a frequência sintonizada.

Define-se o amortecimento ótimo como aquele que faria a curva de resposta aproximadamente plana entre as duas frequências naturais ω_1 e ω_2 .

Com estes parâmetros poderemos controlar a vibração do sistema principal, mas não eliminá-la.

A fig. 1.5 mostra a variação do parâmetro $x_1/(F_1/k_1)$ como função de ω/ω_{11} , para vários fatores de amortecimento $\tau = C/C_{crit.}$.

onde: τ é o fator de amortecimento
 C é o amortecimento presente no sistema
 $C_{crit.}$ é o amortecimento crítico

observe que a otimização definida torna a ordenada de P igual a ordem de 0.

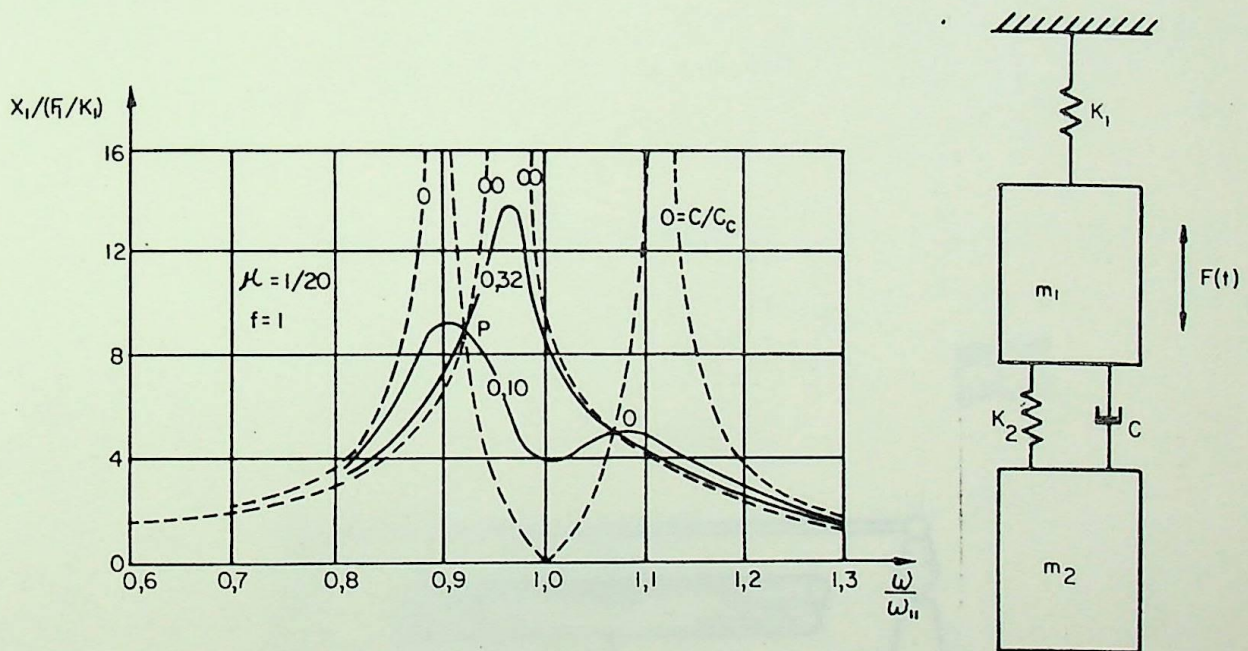


Fig. 1.5 Curva de resposta de um absorvedor com amortecimento

1.3.3 EXEMPLO - Barramento de subestação

Barramento de subestação são tubos ocos, usados para conduzir correntes elétricas em subestações de distribuição. Com vãos apoiados em grandes distâncias, eles frequentemente são sujeitos às vibrações induzidas pelo vento.

Consideremos um barramento construído de uma barra em liga de alumínio de 25 (m), com uma massa de 3,75 kg/m, a qual tem uma frequência natural de 5,0 Hz.

Determinar a massa e a constante da mola de um absorvedor dinâmico de vibrações, colocados no meio do vão, se o barramento e absorvedor não possuem frequências naturais dentro do intervalo de 3,5 a 7,0 Hz.

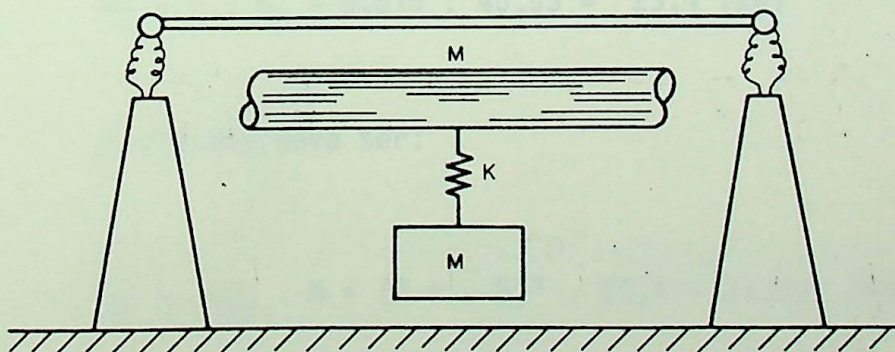


Fig. 1.6 - Barramento e absorvedor

SOLUÇÃO: *Ex. 1.3 - Cabo de Linha de Transmissão*

O efeito inercial da massa de uma viga biapoiada pode ser modelada pela substituição de $(17/35)$ da massa da viga, em seu centro geométrico.

Logo a massa efetiva será:

$$m_e = \frac{17}{35} \cdot 25 \cdot 3,75 = 45,53 \text{ (kg)}$$

Da fig. 1.4 para $\alpha = \frac{\omega_{11}}{\omega_{22}} = 1$

$$\frac{\omega}{\omega_{22}} = \frac{3,5}{5,0} = 0,7 \rightarrow \mu = 0,515$$

$$\frac{\omega}{\omega_{22}} = \frac{7,0}{5,0} = 1,4 \rightarrow \mu = 0,460$$

onde μ é a relação de massas.

Tomando-se o maior valor, vem:

$$m_2 = \mu \cdot m_e = 0,515 \cdot 45,53 \cong 23,4 \text{ (kg)}$$

A rigidez deve ser:

$$k_2 = \omega_{22}^2 \cdot m = (2 \pi \cdot 5)^2 \cdot 23,4 = 23.095 \text{ (N/m)}$$

1.3.4 EXEMPLO - Cabo de Linha de Transmissão

Um cabo de linha de transmissão com massa de 1,5 kg/m é suspenso ao longo de um vão. Absorvedores de vibrações são fixados ao cabo, perto dos grampos de suspensão, para suprimir as vibrações induzidas pelo vento.

Sendo que estas vibrações são verticais, e formam uma série de laços estacionários.

Cada absorvedor consiste de dois pesos de 2,5 (kg) ligados por um pequeno cabo flexível.

A frequência natural do absorvedor sozinho é 15 Hz. Por causa do grande comprimento do vão, o cabo é excitado próximo de alguma frequência natural, que pode ser aproximada por $f_n = 75/L$, onde L é o comprimento de um laço em metros.

Deseja-se determinar a faixa de frequências para que um absorvedor seja efetivo. Observe que a massa de um laço diminui quando o comprimento do "Loop" diminui.

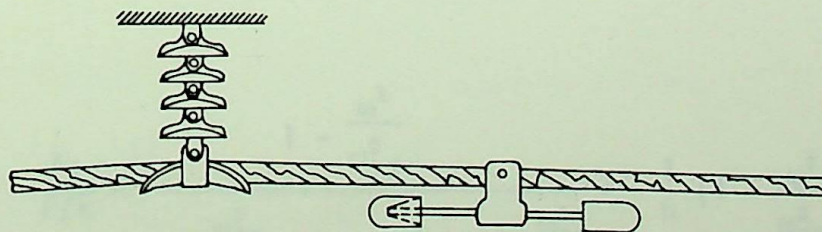


Fig. 1.7 Cabo de linha de transmissão com absorvedor dinâmico

SOLUÇÃO:

Tomemos a equação:

$$\frac{x_1}{F/k} = \frac{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{22}^2})}{(1 + \mu \frac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2} - \frac{\omega^2}{\omega_{11}^2}) (1 - \frac{\omega^2}{\omega_{11}^2}) - \mu \frac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2}}$$

Desde que o cabo seja excitado perto de uma frequência natural, podemos escrever:

$$\omega = \omega_{11} = 2 \pi f_n = \frac{2 \pi (75)}{L}$$

Fig. 1.8 Faixa de operação do absorvedor

Logo:

$$\frac{x_1}{F/k} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{22}^2}}{(\mu \frac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2}) (1 - \frac{\omega^2}{\omega_{22}^2}) - \mu \frac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2}} = - \frac{1}{\mu} (1 - \frac{\omega^2}{\omega_{22}^2})$$

$$\mu = \frac{\text{massa do absorvedor}}{\text{massa do laço}} = \frac{5}{1,5 \cdot L}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1,5 L}{5} = \frac{2 \pi \cdot (75)}{\omega} \cdot \frac{1,5}{5} = \frac{45 \cdot \pi}{\omega}$$

fixando-se $\frac{x_1}{F/k} = -1$, ponto B

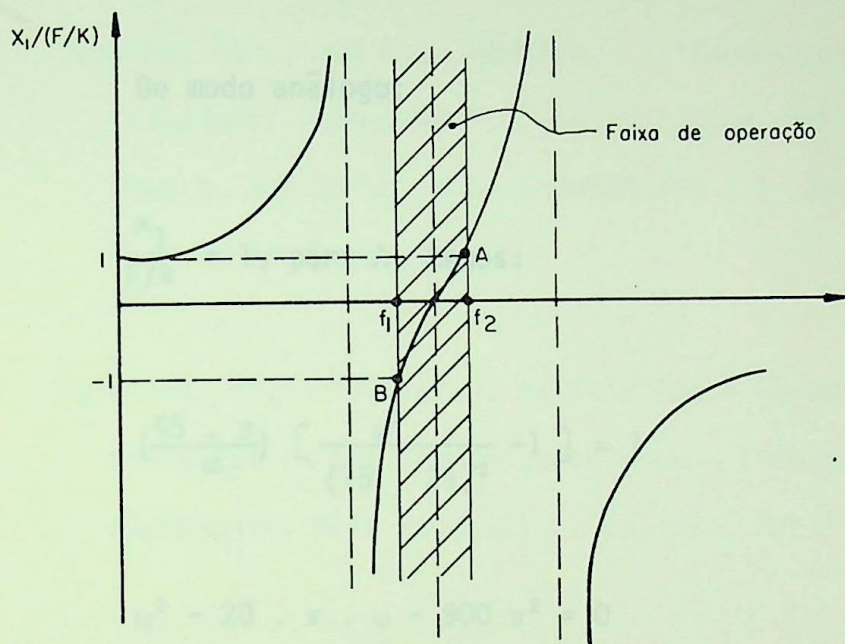


Fig. 1.8 Faixa de operação do absorvedor

Logo:

$$-1 = \left(\frac{45 \cdot \pi}{\omega} \right) \cdot \left(\frac{\omega^2}{(15 \cdot 2 \pi)^2} - 1 \right)$$

$$\omega^2 + 20 \cdot \pi \cdot \omega - (30 \pi)^2 = 0$$

$$\therefore \omega' = 67,93 \text{ rd/s}$$

$$\omega'' = -130,76 \text{ rd/s}$$

As frequências negativas são desprezadas como não tendo significado físico real.

$$\text{logo: } f_1 = 10,8 \text{ Hz}$$

De modo análogo:

$$\frac{x_1}{F/k} = 1, \text{ para } A, \text{ temos:}$$

$$\left(\frac{45 \cdot \pi}{\omega} \right) \left[\frac{\omega^2}{(15 \cdot 2\pi)^2} - 1 \right] = 1$$

$$\omega^2 - 20 \cdot \pi \cdot \omega - 900 \pi^2 = 0$$

$$\therefore \omega''' = 20,8 \text{ rd/s}$$

$$\omega'''' = -67,73 \text{ rd/s}$$

$$\text{logo: } f_2 = 20,8 \text{ Hz}$$

finalmente temos a faixa que o absorvedor atua:

$$10,8 < f < 20,8 \text{ Hz}$$

REFERÊNCIAS

- 1.1 Walshe, D.E., and L.R. Woolton, "*Preventing wind Induced Oscillations of Structures of Circular Section*", proc. Inst. Civil Engrs, London, 1970 .
- 1.2 Scanlan, R.H., and R.L. Wardlaw, "*Reduction of Flow Induced Structural Vibrations*" in *Isolation of Mechanical Vibration, Impact, and Noise*, J.C. Snowden and E.E. Ungar (eds), American Society of Mechanical.
- 1.3 Funukawa, M., "*Vibration of Tube Banks by Wake Force*", paper presented at the Symposium on Flow Induced Vibrations in Heat exchangers, Held in Keswick, England, April 1973.
- 1.4 Hanko, Z.G., "*Vortex Induced Vibrations at Low-Head weirs*", proc. Am. Soc. Civil Engrs. Hydraulics Div. 93, 255-270 (1967)
- 1.5 Scruton, C., "*On the Wind Excited oscillation of Stacks, Towers and Masts*", in proceedings of the conference on Wind Effects on Buildings and Structures, Held in Teddington, England, June 1963, National Physical Laboratory.
- 1.6 Timoshenko, S.D.H. Young, and W. Weaver, Jr., "*Vibrations problems in Engineering*", 4 th ed., John Wiley and sons, New York, 1974.
- 1.7 Den Hartog, J.P., "*Mecânica de las Vibraciones*", trad. de la 4. ed., México, Continental, 1964.

- 1.8 Thomson, W.T. "*Vibrations Theory and Applications*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- 1.9 Steidel, R.F. "*An introduction to Mechanical Vibrations*", Revised 2nd, John Willey and Sons, 1980.

CAPÍTULO 2

ANÁLISE DIMENSIONAL

2.1 INTRODUÇÃO

Um modelo em duas dimensões, de um corpo com amortecimento e rigidez, exposto a fluxo estável, é mostrado na figura 2.1. As vibrações laterais deste modelo bidimensional, podem ser descritas por parâmetros adimensionais que governam o fluxo do fluido, o modelo, e a interação.

2.2 ANÁLISE DIMENSIONAL

2.2.1 Introdução

A geometria do modelo construído, pode ser caracterizada por parâmetros adimensionais.

A especificação da geometria inclui ordinariamente a razão de comprimento na terceira dimensão para a largura (aspecto relacional), e a razão da superfície rugosa para a largura. A geometria é o parâmetro mais importante na determinação da força de fluido sobre uma estrutura.

2.2.2 Velocidade reduzida, amplitude adimensional

Como o modelo vibra no fluxo, ele traça como resposta a trajetória mostrada na figura 2.1. Para vibrações em regime permanente, o comprimento da trajetória para um ciclo é a velocidade livre de corrente de fluxo e f é a frequência.

CAPÍTULO 2

ANÁLISE DIMENSIONAL

2.1 INTRODUÇÃO

Um modelo em duas dimensões, de um corpo com amortecimento e rigidez, exposto a fluxo estável, é mostrado na figura 2.1. As vibrações laterais, deste modelo bidimensional, podem ser descritas por parâmetros adimensionais que governam o fluxo de fluido, o modelo, e a interação.

2.2 VARIÁVEIS ADMENSIONAIS

2.2.1 Geometria

A geometria, do modelo construído, pode ser especificada pela sua razão de esbeltez:

$$\frac{L}{D} = \frac{\text{Comprimento}}{\text{Largura}} \quad (2.1)$$

A especificação da geometria inclui ordinariamente a razão de comprimento na terceira dimensão para a largura (aspecto relacional), e a razão da superfície rugosa para a largura. A geometria é o parâmetro mais importante na determinação da força do fluido sobre uma estrutura.

2.2.2 Velocidade reduzida, amplitude adimensional

Como o modelo vibra no fluxo, ele traça como resposta a trajetória mostrada na figura 2.1. Para Vibrações em regime permanente, o comprimento da trajetória para um ciclo é U/f , onde U é a velocidade livre da corrente de fluxo e f é a frequência de Vibração.

A largura da trajetória é " $2A_y$ ", onde, A_y é a amplitude da Vibração. Estas dimensões da trajetória podem ser relacionadas como:

$$\frac{U}{fD} = \frac{\text{Comprimento da trajetória por ciclo}}{\text{Largura do modelo}} \quad (2.2)$$

$$\frac{A_y}{D} = \frac{\text{Amplitude da Vibração}}{\text{Largura do modelo}} \quad (2.3)$$

O primeiro destes parâmetros é comumente chamado de Velocidade reduzida ou Velocidade adimensional. Seu inverso é chamado de frequência adimensional. A largura máxima (D), do modelo normal a linha de corrente livre é ordinariamente usada na formação desses parâmetros, porque esta largura tende a comandar a largura da esteira. Se a velocidade reduzida for pequena (< 10) então o modelo frequentemente interage fortemente nas proximidades da esteira.

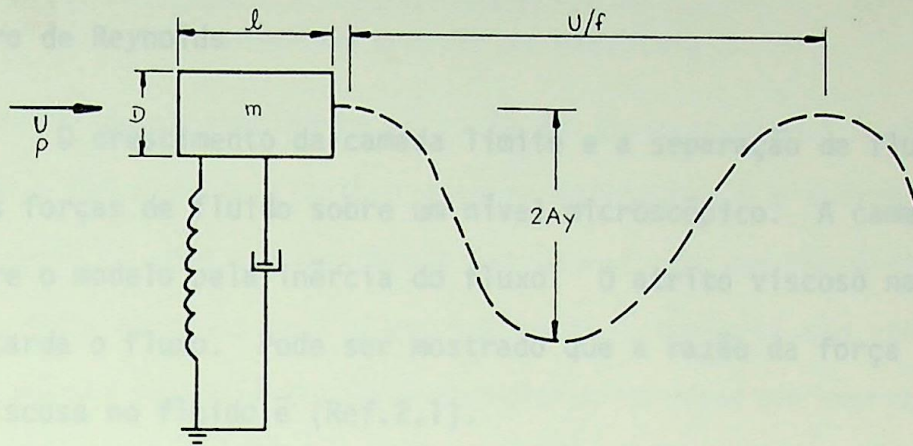


Fig. 2.1 Trajetória da Vibração de um modelo
rigidez - amortecimento - massa

2.2.3 Razão de massa

A razão de massa do modelo para o fluido que desloca é proporcional a

$$\frac{m}{\rho D^2} = \frac{\text{Massa por unidade de comprimento do modelo}}{\text{Densidade do fluido x dimensão do modelo}^2} \quad (2.4)$$

onde m ordinariamente inclui a massa estrutural e a "massa adicionada" do fluido arrastado pelo movimento do modelo. A razão de massa provém de uma medida dos efeitos de flutuações e a inércia do modelo relativa àquela do fluido, porém ela é mais comumente usada para medir a sensibilidade do peso livre das estruturas às vibrações induzidas por fluxo. Tanto quanto a razão da densidade do fluido para a estrutura aumenta fica mais propenso às vibrações induzidas

por fluxo.

2.2.4 Número de Reynolds

O crescimento da camada limite e a separação de fluxo são determinados pelas forças de fluido sobre um nível microscópico. A camada limite é impelida sobre o modelo pela inércia do fluxo. O atrito viscoso na superfície do modelo retarda o fluxo. Pode ser mostrado que a razão da força de inércia para força viscosa no fluido é (Ref.2.1).

$$\frac{UD}{\nu} = \frac{\text{força de inércia}}{\text{força viscosa}} \quad (2.5)$$

onde ν é a viscosidade cinemática do fluido, e \bar{v} é igual a viscosidade absoluta dividida pela densidade do fluido. Esta razão, chamada o número de Reynolds (R_e), dá uma medida da camada limite e transição do fluxo laminar para o fluxo turbulento. A separação do fluxo para modelos de dorsos íngremes é uma função do número de Reynolds.

2.2.5 Número de Mach

O número de Mach é igual a

$$\frac{U}{e} = \frac{\text{Velocidade do fluido}}{\text{Velocidade do som}} \quad (2.6)$$

onde e é a velocidade do som no fluido. O número de Mach é uma medida da tendência do fluido a comprimir quando ele encontra uma estrutura. Esta discussão é limitada para números de Mach menores do que 0,3, em que a compressibilidade não influencia ordinariamente a análise.

2.2.6 Fator de amortecimento

A energia dissipada pela estrutura, quando ela vibra, é caracterizada por:

$$\tau = \frac{\text{energia dissipada por ciclo}}{4\pi \times \text{total de energia da estrutura}} \quad (2.7)$$

onde τ é o fator de amortecimento ou razão de amortecimento. O modelo usado comumente para a força de amortecimento sobre estruturas é o amortecimento viscoso ideal, o qual se opõe ao movimento estrutural com uma força proporcional a velocidade. Para os casos onde o amortecimento estrutural não pode ser modelado por este modelo ideal, é possível definir-se um fator de amortecimento equivalente de modo que a expressão (2.7) continua válida, sendo que este procedimento possui verificação experimental (Ref. 2.3). Para estruturas lineares, o amortecimento viscoso, $2\pi\tau$ é igual ao logaritmo natural da relação das amplitudes de dois quaisquer ciclos sucessivos de uma estrutura levemente amortecida em livre decremento, como mostrado na figura 2.2. Se a energia de entrada para o modelo é menor que a energia gasta no amortecimento, as vibrações induzidas por fluxo diminuirão. O fator de amortecimento é frequentemente desprezado porque ele requer medidas estruturais dinâmicas; contudo, o amortecimento é ordinariamente o mecanismo necessário para limitar a Vibração. As medidas de amortecimento são feitas todas, em testes de Vibrações livres.

Uma variável muito utilizada, chamada de amortecimento reduzido, pode ser formada pelo produto da razão de massa e o fator de amortecimento:

$$\frac{2m (2\pi\tau)}{\rho D^2} = \text{Amortecimento reduzido } (\delta r) \quad (2.8)$$

Aumentando-se o amortecimento viscoso reduz-se a amplitude das Vibrações induzidas por fluxo.

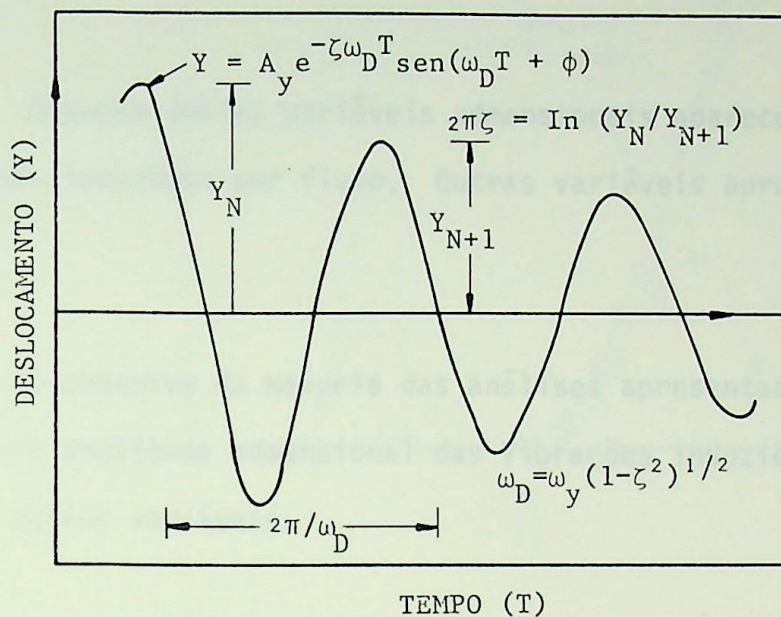


Fig. 2.2 Decremento livre de uma estrutura unidimensional com amortecimento viscoso.
 ω_y é a frequência natural de vibração

2.3. APLICAÇÃO

As variáveis adimensionais que foram encontradas para serem usadas na descrição das vibrações de uma estrutura elástica em um fluxo subsônico estável ($U/e < 0,3$) são:

- | | |
|---------------------------|---------------------|
| 1. Geometria | (L/D) |
| 2. Velocidade reduzida | (U/fD) |
| 3. Amplitude adimensional | (A _y /D) |



4. Razão de massa $(m/\rho D^2)$
5. Número de Reynolds (UD/ν)
6. Fator de Amortecimento (τ)

Algumas destas variáveis adimensionais aparecerão sempre em análise de Vibrações induzidos por fluxo. Outras variáveis apropriadas podem aparecer.

O objetivo da maioria das análises apresentados neste texto são para prever a amplitude adimensional das Vibrações induzidas por fluxo como uma função das outras variáveis.

$$\frac{A_y}{D} = F \left(\frac{L}{D}, \frac{UD}{\nu}, \frac{U}{fD}, \frac{m}{\rho D^2}, \tau \right) \quad (2.9)$$

Na fig. 2.3, a amplitude da Vibração induzida por fluxo de um modelo construído é mostrada como uma função da velocidade reduzida e do fator de amortecimento. Os dois picos da amplitude de Vibração são causados por diferentes mecanismo de Vibrações induzidas por fluxo. É bem sabido que, para número de Reynolds acima de 1.000, o vórtice periódico ocorre em uma frequência dada por $f_s = SU/D$; onde S é aproximadamente 0,2. A ressonância do modelo construído com vórtice ($f=f_s$) é esperado em uma velocidade reduzida ($U/f.D$) de $1/S \approx 5$.

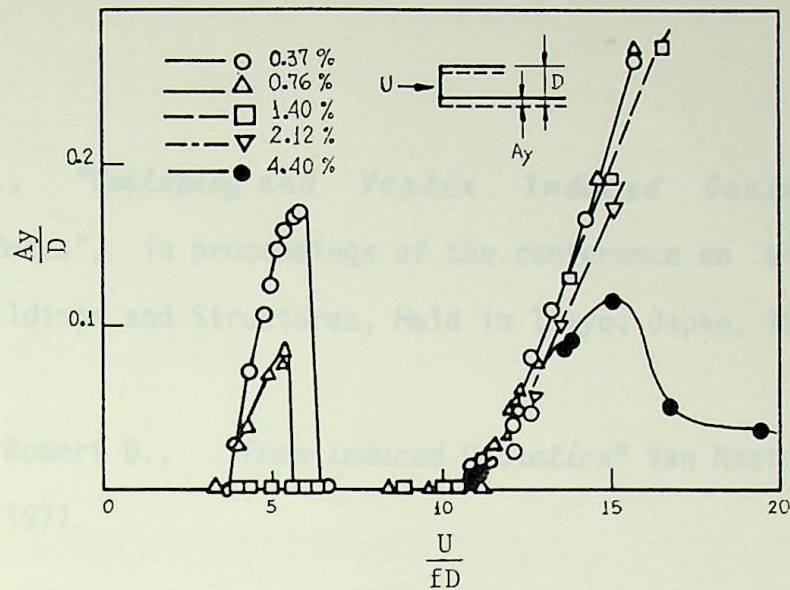


Fig. 2.3 Resposta lateral de um modelo de construção alto com uma razão de lados 2. (Ref. 2.2)

Portanto, o primeiro pico na Vibração é causado pelo vórtice desprendido. Aumentando o amortecimento dos limites aguçados dessas Vibrações. Para uma velocidade reduzida de 11, uma instabilidade aerodinâmica chamada galope começa. Essas vibrações são análogas as tremulações de aeronaves com exceção de que elas são autoexcitadas. As Vibrações galopantes geralmente aumentam com a velocidade reduzida.

REFERÊNCIAS

- 2.1 Schlichting, H., "Boundary Layer Theory", McGraw-Hill, New York 1968.
- 2.2 Novak, M., "Gallopig and Vortex Induced Oscillation of Structures", in proceedings of the conference on Wind Effects on Buildings and Structures, Held in Tokyo, Japan, 1971.
- 2.3 Blevins, Robert D., "Flow induced Vibration" Van Nostrand Reinhold Ltda, 1977.

CAPÍTULO 3

VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES

3.1 INTRODUÇÃO

Desde os tempos antigos, sabe-se que o vento pode causar uma vibração induzida por vórtices em corpos. No século XV, Leonardo da Vinci esboçou uma linha de vórtices na esteira de um corpo íngreme numa corrente (Ref. 3.1). Em 1878, Strouhal (Ref. 3.2) encontrou que os tons eólicos gerados por um fio eram proporcionais a velocidade do vento dividida pela espessura do fio. Em 1879, Lord Rayleigh (Ref. 3.3) encontrou que uma corda de violino no vento vibrava primeiramente normal ao vento. Ele também observou que o som umentava bastante quando os tons naturais do fio coincidiam com os tons eólicos. A periodicidade da esteira de um cilindro foi associada com a formação de vórtices por Bérnard em 1908 (Ref. 3.4) e com a formação de um caminho estável de vórtices alternados por Von Karman em 1912 (Ref. 3.5).

Quando uma partícula flui na direção do ângulo principal de um cilindro bojudado, a pressão da partícula do fluido aumenta da pressão da corren

te livre para a pressão de estagnação. A alta pressão do fluido perto do lado principal impele o desenvolvimento de camadas limites sobre ambos os lados do cilindro. Contudo as forças de pressão não são suficientes para forçar as camadas limites em volta do lado oposto do cilindro, para altos números de Reynolds. Perto da Seção mais larga do cilindro, as camadas limites separam cada lado da superfície do cilindro e formam duas camadas livres cisalhantes que deixam linhas de rã no fluxo. Essas duas camadas livres cisalhantes contornam a esteira. Desde que a porção íntima da camada livre cisalhante ou de corte move-se muito mais vagarosamente, que a porção mais externa das camadas que estão em contato com a linha de corrente, as camadas livres de corte tendem a enrolar discretamente, rodopiando e formando vórtices. Um padrão regular de vórtices é formado na esteira que interage com o movimento do cilindro e é a fonte dos efeitos chamados Vibrações induzidas por vórtices.

Qualquer estrutura que tiver um perfil com dorso íngreme pode gerar vórtices em um fluxo subsônico. Os caminhos de vórtices tendem a ser muito análogos independentemente da passagem pela estrutura. Os campos de pressão oscilante e a força líquida sobre um cilindro são mostrados na fig. 3.1 para uma porção do ciclo. As forças oscilantes podem ser causadas por cilindros montados elasticamente e vibrar emitindo tons eólicos. As grandes amplitudes de Vibrações induzida em estruturas elásticas por vórtices em circulação são de grande importância prática por causa de seu efeito destrutivo em pontes, antenas, cabos, e trocadores de calor.

Este capítulo apresenta dados experimentais sobre Vibrações induzidas por vórtices e desenvolve métodos aproximados para prever o começo e amplitude dessas Vibrações. A natureza da esteira periódica que se forma atrás de corpos estacionários íngremes, é estudado em função do número de Reynolds. Então a influência do movimento estrutural é incorporada. Os modelos para esti

mar a amplitude ressonante das Vibrações induzidas por vórtices de cilindros circulares, tanto como os métodos de previsão de Vibrações serão estudados neste capítulo. Embora quase todo capítulo seja devotado para seções retas circulares (cilíndricas), os conceitos discutidos podem ser aplicados às outras seções retas quando mais dados experimentais tornarem-se disponíveis.

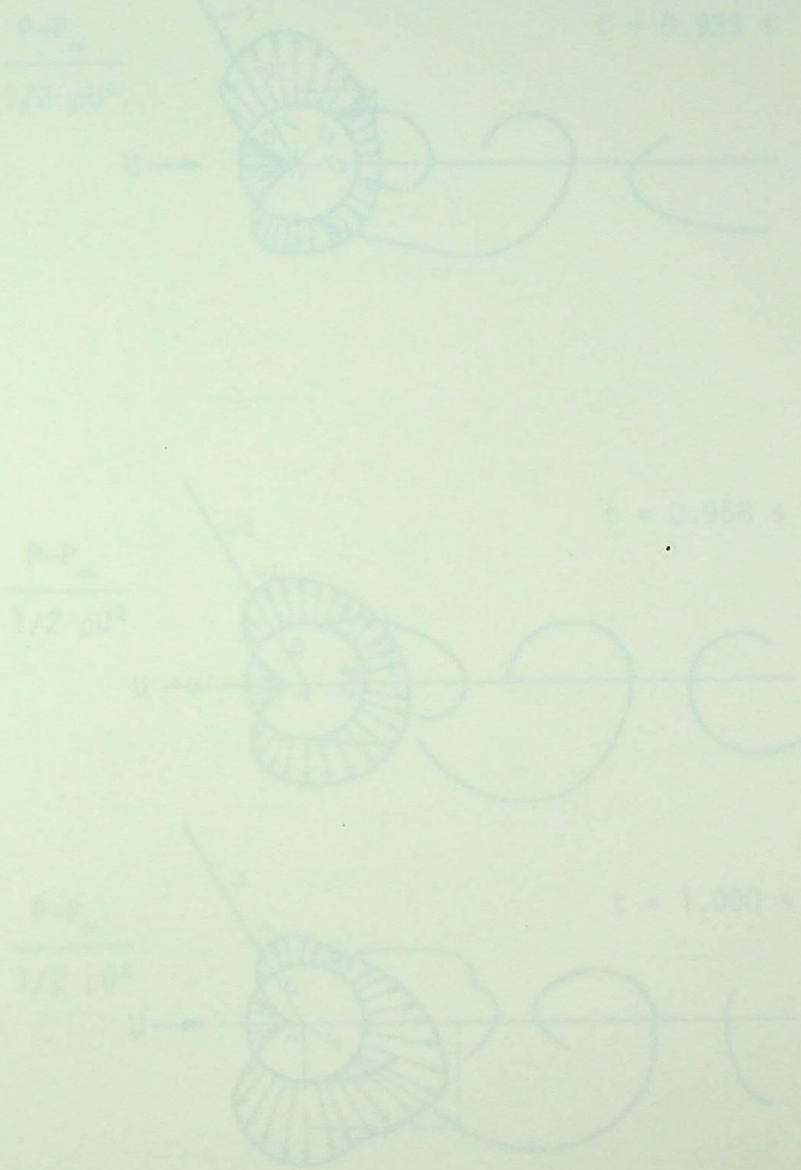


Fig. 3.1 Uma sequência de instantâneos superfícies de campos de pressão e formas da esteira de vórtices induzidas por um cilindro circular para $Re = 112,000$ para aproximadamente um ciclo de vórtices das grandes (Fig. 2.2).

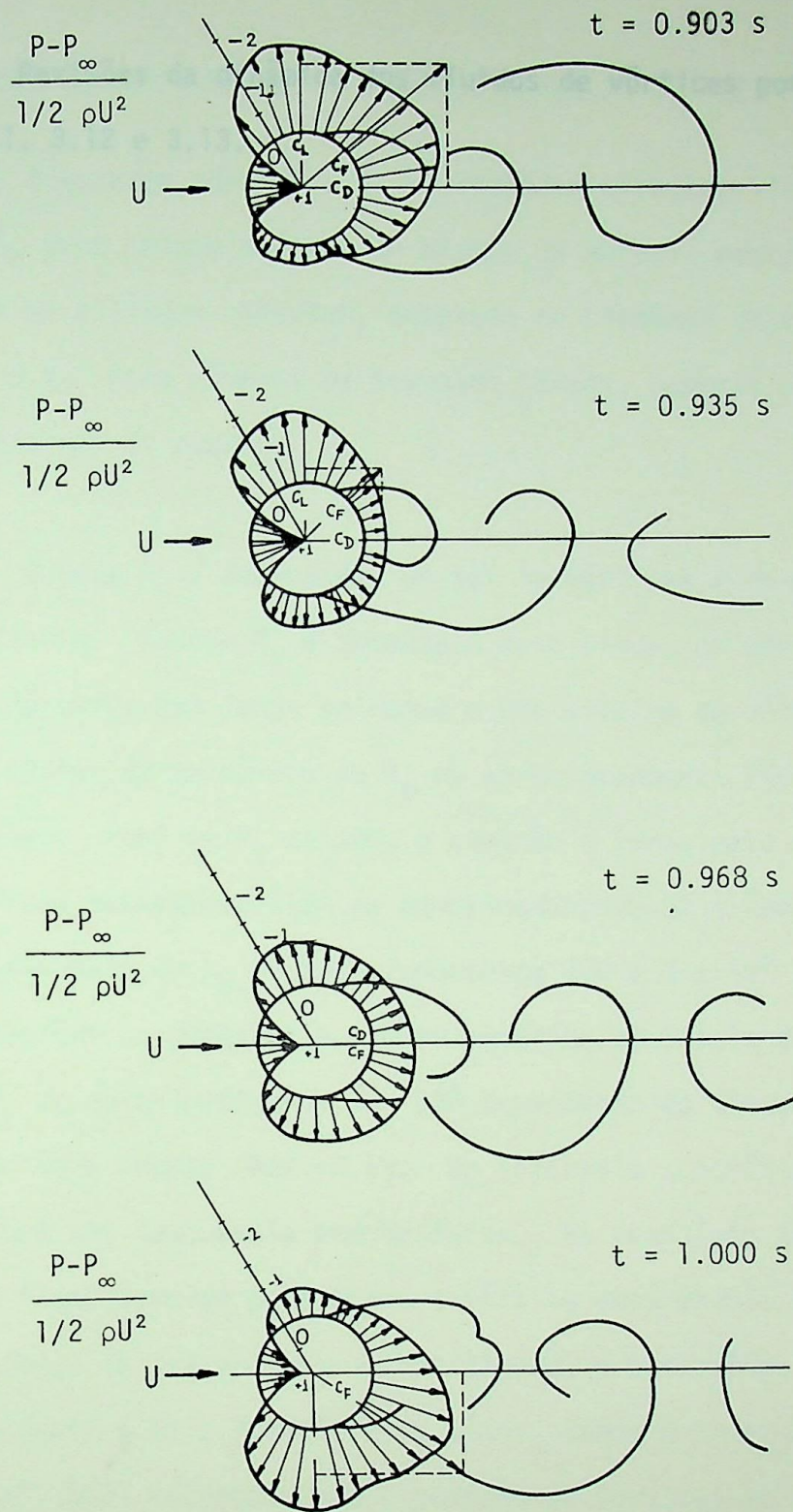


Fig. 3.1 Uma seqüência de simultâneas superfícies de campos de pressão e formas de esteiras para $R_e = 112.000$ para aproximadamente um terço de um ciclo de vórtice desprendido (Ref. 3.7).

3.2 A ESTRELA Revisões da dinâmica dos fluidos de vórtices podem ser encontradas nas Ref. 3.1, 3.12 e 3.13.

A esteira periódica de um cilindro circular liso, é uma função de R_e para baixos números de Mach. Os maiores regimes de vórtices despreendidos de um cilindro circular, adaptado de Lienhard (Ref. 3.6) são mostrados na fig. 3.2. Para números de Reynolds baixos, baseado no diâmetro de um cilindro, o fluxo não se separa.

Quando R_e é aumentado, um par de vórtices é formado imediatamente atrás do cilindro. Quando R_e é aumentado mais ainda, os vórtices se alargam até que um dos vórtices bem longe se rompe e uma esteira de vórtices alternada é formada. Acima de um número de R_e de aproximadamente 150, o caminho de vórtices é laminar. Para um R_e de 300, o caminho é turbulento e ele degenera totalmente em fluxo turbulento além de aproximadamente 4 diâmetros abaixo do cilindro. O intervalo de R_e de aproximadamente 300 a 3×10^4 tem sido chamado de intervalo subcrítico, porque ele ocorre anterior ao início da camada limite turbulenta em R_e de aproximadamente 3×10^4 dependendo da camada limite turbulenta e da superfície rugosa (Ref. 3.8). No intervalo subcrítico de R_e , a oscilação ocorre com uma frequência bem definida. Na transição de R_e , o ponto de separação do fluxo move-se para trás, o vórtice despreendido é desorganizado (com uma faixa larga de frequências de oscilação), e o cilindro sofre um arrasto bem defluido (Ref. 3.6). Para R_e mais altos, temos o intervalo supercrítico. Koehn (Ref. 3.8) encontrou que o caminho de vórtices se auto-organiza.

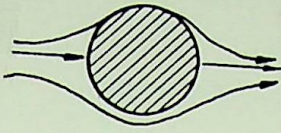
A esteira de vórtice desenvolve-se constantemente quando o fluxo flui lentamente abaixo do cilindro. Schaefer e Eshwari (Ref. 3.5) observaram que a esteira lateral para o sentido de corrente escapa e a esteira principal para o sentido de corrente escapa de um cilindro. A esteira principal escapa para o sentido de corrente escapa de um cilindro. A esteira principal escapa para o sentido de corrente escapa de um cilindro. A esteira principal escapa para o sentido de corrente escapa de um cilindro.

3.2 A ESTEIRA DE VÓRTICES DE UM CILINDRO CIRCULAR ESTACIONÁRIO

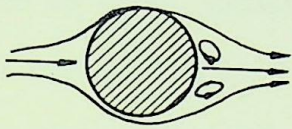
A esteira periódica de um cilindro circular liso, é somente uma função de R_e para baixos números de Mach. Os maiores regimes de Vórtices desprendidos de um cilindro circular, adaptado de Lienhard (Ref. 3.6) são mostrados na fig. 3.2. Para números de Reynolds baixos, baseado no diâmetro de um cilindro, o fluxo não se separa.

Quando R_e é aumentado, um par de vórtices é formado imediatamente atrás do cilindro. Quando R_e é aumentado mais ainda, os vórtices se alargam até que um dos vórtices bem longe se rompe e uma esteira de vórtices alternados é formada. Acima de um número de R_e de aproximadamente 150, o caminho de vórtices é laminar. Para um R_e de 300, o caminho é turbulento e ele degenera totalmente em fluxo turbulento além de aproximadamente 50 diâmetros abaixo do cilindro. O intervalo de R_e de aproximadamente 300 a 3×10^5 tem sido chamado de intervalo subcrítico, porque ele ocorre anterior ao início da camada limite turbulenta em R_e de aproximadamente 3×10^5 dependendo da camada limite turbulenta e da superfície rugosa (Ref. 3.8). No intervalo subcrítico de R_e , a circulação ocorre com uma frequência bem definida. Na transição de R_e , o ponto de separação do fluxo move-se para trás, o vórtice desprendido é desorganizado (com uma faixa larga de frequências de oscilação), e o cilindro sofre um arrasto bem definido (Ref. 3.8). Para R_e mais altos, temos o intervalo supercrítico, Roshko (Ref. 3.8) encontrou que o caminho de vórtices se auto reestabelece.

A esteira de vórtice desenvolve-se constantemente quando ela flui corrente abaixo do cilindro. Schaefer e Eshinazi (Ref. 3.9) encontraram que da lateral para o sentido da corrente espaçam e estreitam para um mínimo, a uma pequena distância corrente abaixo do cilindro, e então aumentam. A esteira pode ser fortemente tridimensional (Ref. 3.10, 3.11).

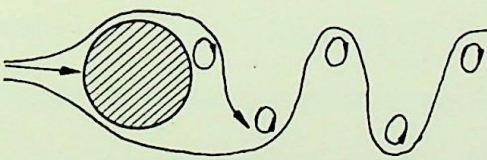


$R_e < 5$, regime de fluxo sem separação



5 a 15 $\leq R_e < 40$

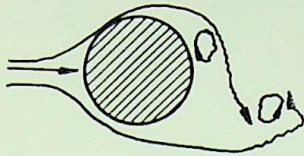
Aparece em par de vórtices na esteira.



$40 \leq R_e < 90$ e $90 \leq R_e < 150$

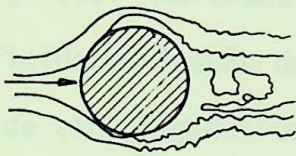
Dois regimes em que o caminho de vórtice é laminar.

continuação

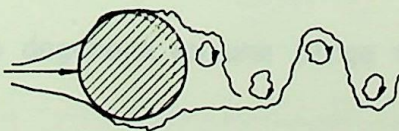


$150 \leq R_e < 300$ intervalo de transição para turbulência em vórtices.

$300 < R_e \leq 3 \times 10^5$ o caminho dos vórtices é totalmente turbulento.



$3 \times 10^5 \leq R_e < 3,5 \times 10^6$ a camada limite laminar passou pela transição turbulento e a esteira é estreita e desorganizada.



$3,5 \times 10^6 \leq R_e$

O caminho de vórtices turbulentos é reestabelecido.

Fig.3.2 Regime de fluxo de fluido através de um cilindro circular (Ref. 3.6).

3.3 NÚMERO DE STROUHAL

O número de Strouhal (S) é a proporcionalidade constante entre a frequência predominante do vórtice em circulação (f_s) e a velocidade da corrente livre (U) dividido pela largura do cilindro (D).

$$f_s = SU/D \quad (3.1)$$

Se o cilindro é inclinado na direção do fluxo, a componente da velocidade do fluxo normal ao eixo do cilindro é usado na equação acima (Ref. 3.14). O número de Strouhal (S) é uma função da geometria e de Re , para baixos números de Mach. O número de Strouhal para cilindros circulares é mostrado na fig. 3.3. Na transição dos números de Reynolds, a frequência de circulação é definida em função da frequência predominante de uma larga faixa de frequências de circulação. Os números de Strouhal para seções não circulares são dados na tabela 3.1 e fig. 3.4, em que D é definido como a largura máxima da seção normal a corrente livre. (Note que as seções íngremes tendem a ter números de Strouhal baixos). Uma compilação de arranjos de tubos e números de Strouhal de Fitz - hugh (Ref. 3.24) são mostrados nas figs. 3.5 e 3.6. Para arranjos de tubos, o número de Strouhal é baseado em um diâmetro de tubo e uma velocidade média na seção reta mínima entre tubos. Quando o arranjo de tubos torna-se bem fechado, a frequência distinta associada com o vórtice desprezado degenera em uma larga faixa de turbulência (Ref. 3.25).

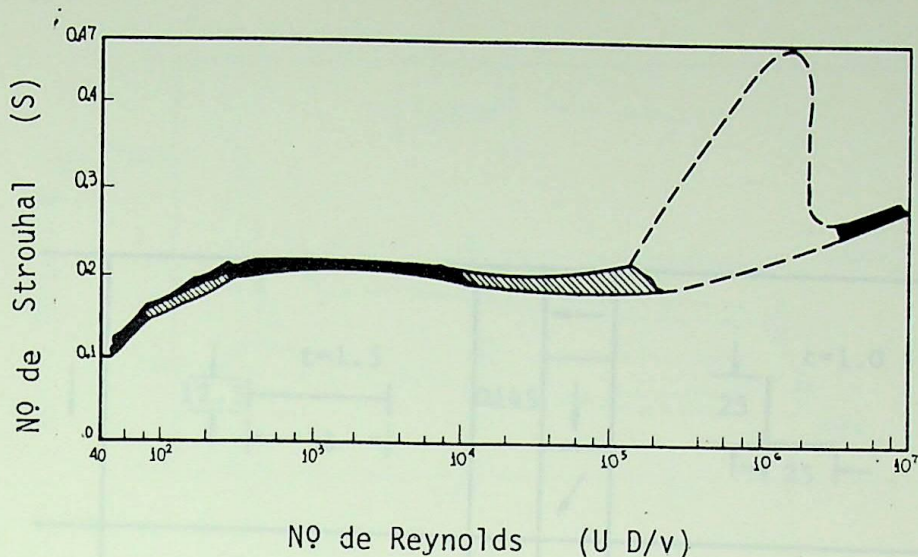


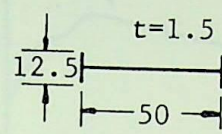
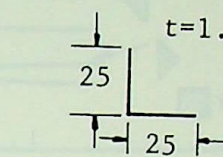
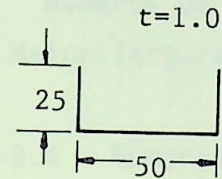
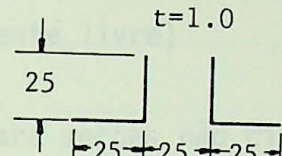
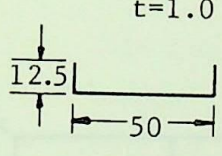
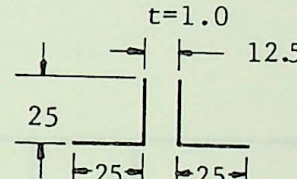
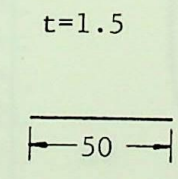
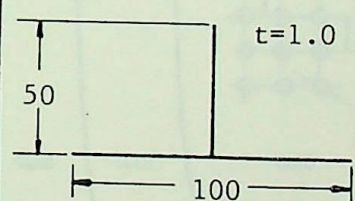
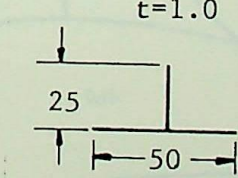
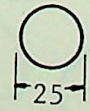
Fig. 3.3 N^o de Strouhal x N^o de Reynolds

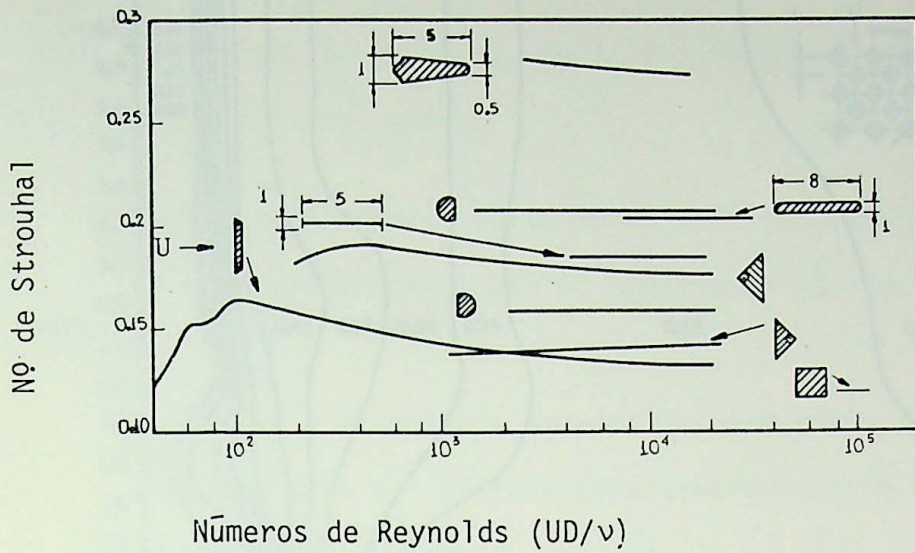
TABELA 3.1 Número de Strouhal para uma variedade de formas (Ref. 3.23)

Vento	Dimensões dos Perfis	Valor de s	Vento	Dimensões dos Perfis	Valor de s
→		0.120	↓		0.147
→		0.120	↓		0.150
↓		0.144	←		0.145
			↑		0.142
			↙		0.147

continua...

continuação

				0131 0134 0137
		0140 0153		0121 0143
		0145 0168		0135
		0156 0145		0160
Cilindro 11800 < R < 19100				0114 0145
		0200		



(D = Maior largura normal a corrente livre)

Fig. 3.4 Números de Strouhal para seções não circulares (Ref. 3.15; 3.22)

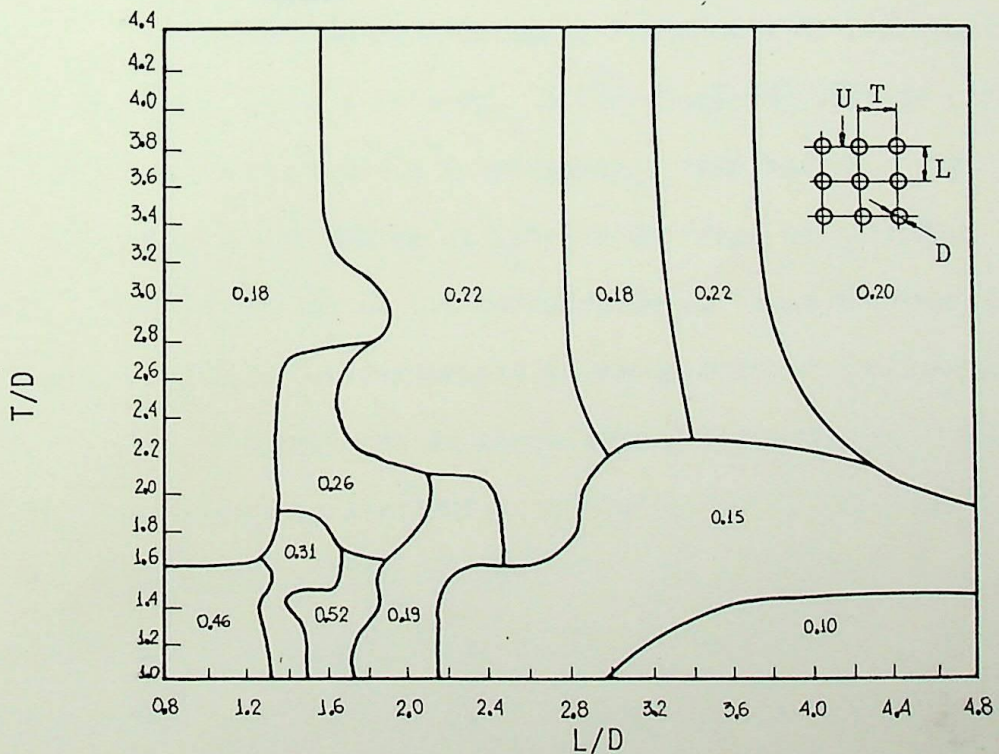


Fig. 3.5 Números de Strouhal para bancos de tubos alinhados (Ref. 3.24)

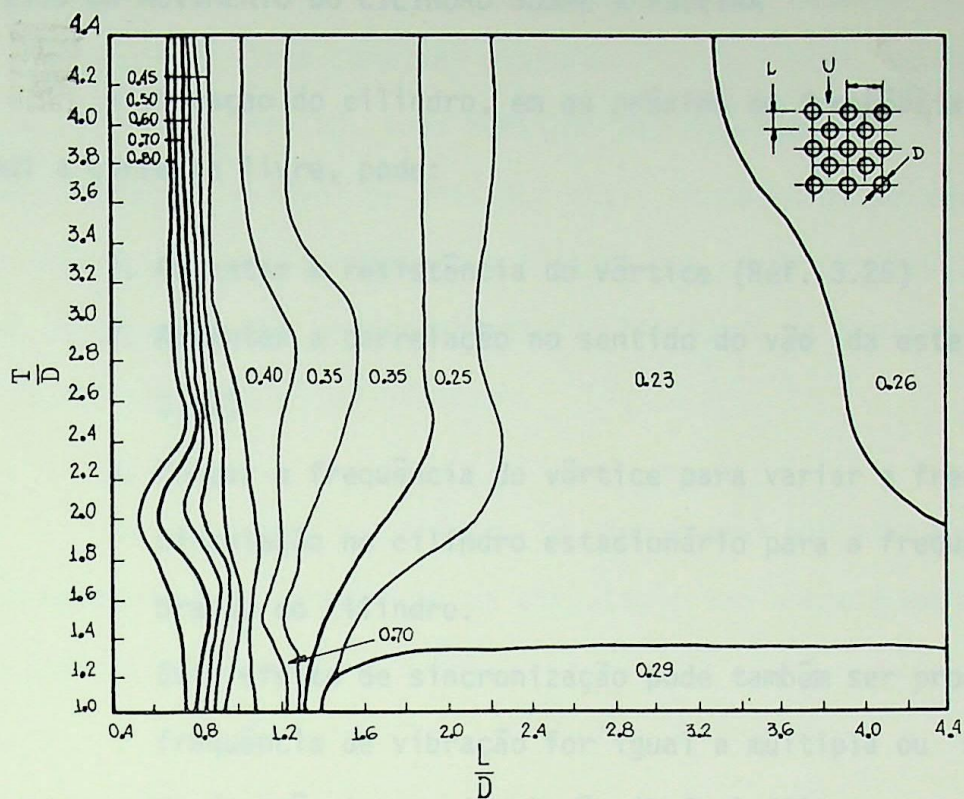


Fig. 3.6 Números de Strouhal para bancos de tubos alternados.

3.4 EFEITO DO MOVIMENTO DO CILINDRO SOBRE A ESTEIRA

A vibração do cilindro, em ou próximo da frequência de circulação e normal a corrente livre, pode:

1. Aumentar a resistência do vórtice (Ref. 3.26)
2. Aumentar a correlação no sentido do vão da esteira (Ref. 3.27)
3. Forçar a frequência do vórtice para variar a frequência de circulação no cilindro estacionário para a frequência de vibração do cilindro.

Este efeito de sincronização pode também ser produzido se a frequência de vibração for igual a múltipla ou sub-múltipla da frequência de circulação (Ref. 3.28)

4. Aumentar a força de arrasto (Ref. 3.28)

A vibração em ou próximo da frequência da circulação tem um forte efeito organizante sobre a esteira. A correlação do vórtice circulante ao longo do eixo do cilindro aumenta intensamente, como mostra a fig. 3.7 (Ref. 3.27). A correlação é uma medida da esteira do fluxo no cilindro tri-dimensionalmente. Uma correlação de 1,0 corresponde ao fluxo bi-dimensional, com vórtices sendo circulados uniformemente ao mesmo tempo e frequência ao longo do vão do cilindro. A frequência da circulação é sincronizada com a frequência de vibração; isto tranca ou sincroniza, o efeito foi primeiramente documentado por Bishop e Hassan (Ref. 3.28). A faixa de sincronização é o intervalo acima das velocidades de fluxo que as frequências de circulação dos vórtices sincroniza com a frequência de vibração do cilindro. A faixa de sincronização medida por Koopman (Ref. 3.29) para baixos números de Reynolds é mostrada na fig.3.8.

Quando a amplitude de vibração do cilindro é aumentada além de

aproximadamente $0,5 D$, o padrão simétrico de vórtices espaçados alternadamente começa-se a dissolver. Isto pode ser visto na fig. 3.9 (Ref. 3.30) que em uma amplitude de $1D$ e um R_e de 190, três vórtices são formados por ciclo de vibração ao invés do padrão estável de dois por ciclo formados em baixas amplitudes. Esta dissolução dos vórtices simétricos implica que as forças induzidas por vórtices sobre um cilindro são auto-limitantes, limitando as amplitudes de vibrações no cilindro na ordem de um diâmetro.

As vibrações no cilindro em frequências bem afastadas dos harmônicos e sub-harmônicos da frequência da circulação tem somente um pequeno efeito sobre a esteira (Refs. 3.20 e 3.26).

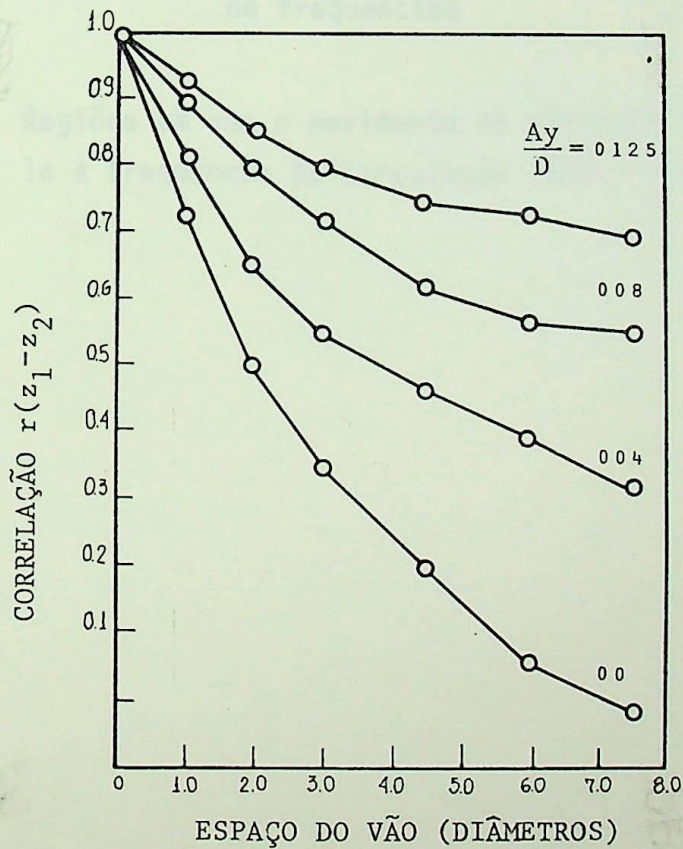


Fig. 3.7 Correlação na direção do vão para um cilindro rígido em vibrações ressonantes com vórtices circulantes.

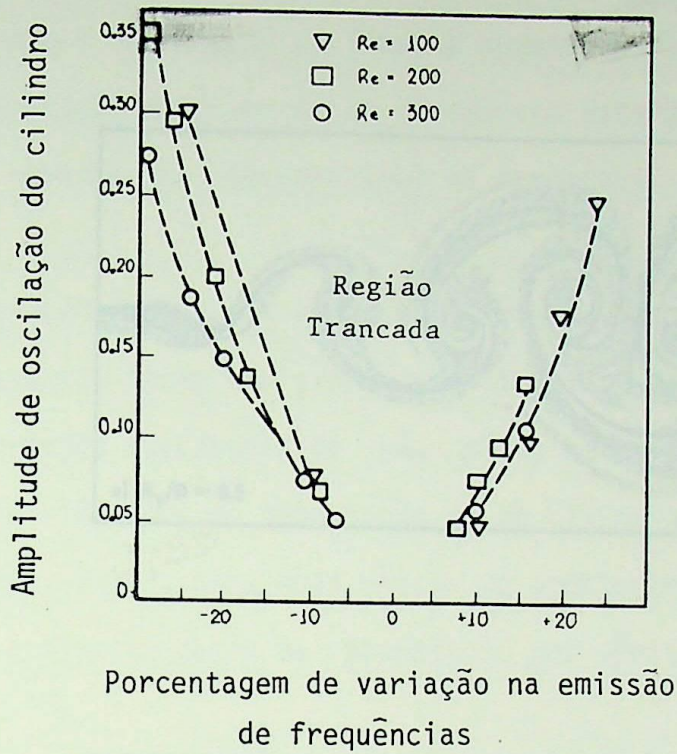


Fig. 3.3 Regiões em que o movimento do cilindro contra a frequência da circulação (Ref. 3.29)

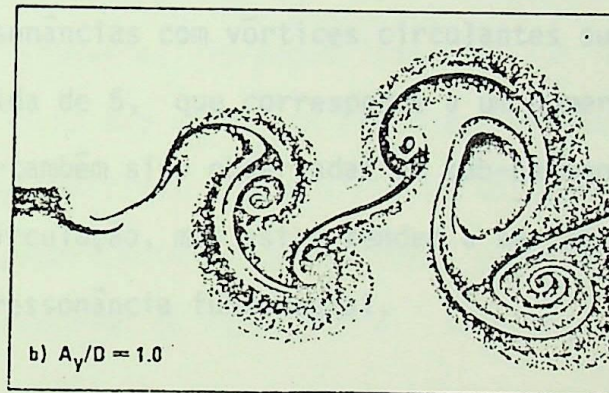
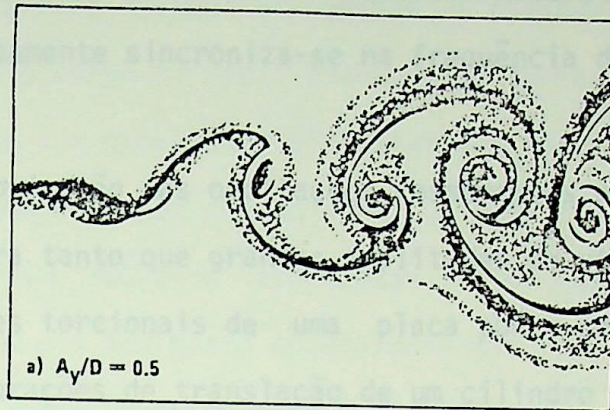


Fig. 3.9 O caminho de vórtices além de um cilindro vibrando transversalmente no meio de um fluxo em ressonância com vórtices circulantes. $R_e = 190$.

Fig. 3.9a Um caminho estável de vórtices alternados.

Fig. 3.9b Um padrão instável com três vórtices ' formados por ciclo de vibração (Ref. 3.30).

3.5 ANÁLISE DE VIBRAÇÃO INDUZIDA POR VÓRTICES

Quando a velocidade do fluxo é aumentada ou diminuída tal que a frequência da circulação aproxima-se da frequência natural da estrutura, o vórtice circulante subitamente sincroniza-se na frequência da estrutura.

A sincronização das oscilações ressonantes perto da esteira fornecem energia a estrutura tanto que grandes amplitudes de vibrações podem ser produzidas. As vibrações torcionais de uma placa podem ser vistas na fig. 3.10 (Ref. 3.19), e as vibrações de translação de um cilindro circular são mostrados na fig. 3.11 (Ref. 3.22), para dois níveis de amortecimento. Um largo pico de resposta indica a sincronização da ressonância dos vórtices circulantes.

As ressonâncias com vórtices circulantes surgem aproximadamente a uma velocidade reduzida de 5, que corresponde a um número de Strouhal de 0,2. As vibrações tem também sido observadas em sub-harmonicos e super harmonicos da frequência da circulação, mas estas tendem a ser de amplitudes bem mais baixas que aquelas da ressonância fundamental.

Se as vibrações paralelas ao fluxo aparecerem, elas teriam sido esperadas perto de uma velocidade reduzida de 2,5, porque dois ciclos de oscilações de pressões paralelas a linha de corrente livre são produzidos por cada um ciclo normal as linhas de corrente livre. O terceiro harmônico, vibrações induzidas por vórtices de uma estaca marinha em uma velocidade reduzida de 1,2, tem sido observado com vórtices circulantes simétricos, antes do usual padrão alternado. (Refs. 3.31 e 3.32).

Seria desejável prever analiticamente a amplitude das vibrações induzidas por vórtices usando superfícies de pressão sobre o cilindro que fossem obtida de uma análise do campo de fluxo. Idealmente, uma solução seria

resolver as equações de Navier Stokes dependentes do tempo em presença das vibrações no cilindro, a separação do fluxo e formação do vórtice emergiriam naturalmente da solução, e a pressão e carga de cisalhamento sobre o cilindro providiriam a tensão forçante para o movimento acoplado do cilindro. Enquanto algumas soluções numéricas para o campo de fluxo tenham sido conhecidas em computadores digitais, essas soluções tem geralmente sido limitadas para cada cilindro estacionário e para número de Reynolds abaixo de 1.000 onde o fluxo é laminar ou as soluções onde a viscosidade tem sido desprezadas. A análise geral integrada de ambos os campos de fluxo e o movimento do cilindro não é disponível para a vasta maioria dos casos práticos. Entretanto, os modelos limitados tem sido desenvolvidos para descrever a interação cilindro-fluido. Enquanto estes modelos não são resolvidos pela equação de Navier Stokes dependentes do tempo, eles incorporam muitos dos efeitos dinâmicos que tem sido observados experimentalmente. Dois modelos para prever as vibrações induzidas por vórtices de cilindros circulares normais ao fluxo são descritos nas seguintes seções. Nenhum destes modelos são diretamente aplicável a seções não circulares ou vibrações paralelas ao fluxo. Embora experiência sobre cilindros estacionários indiquem que as forças de oscilações paralelas ao fluxo sobre cilindros são de 7% a 8% das normais ao fluxo (Ref. 3.33).



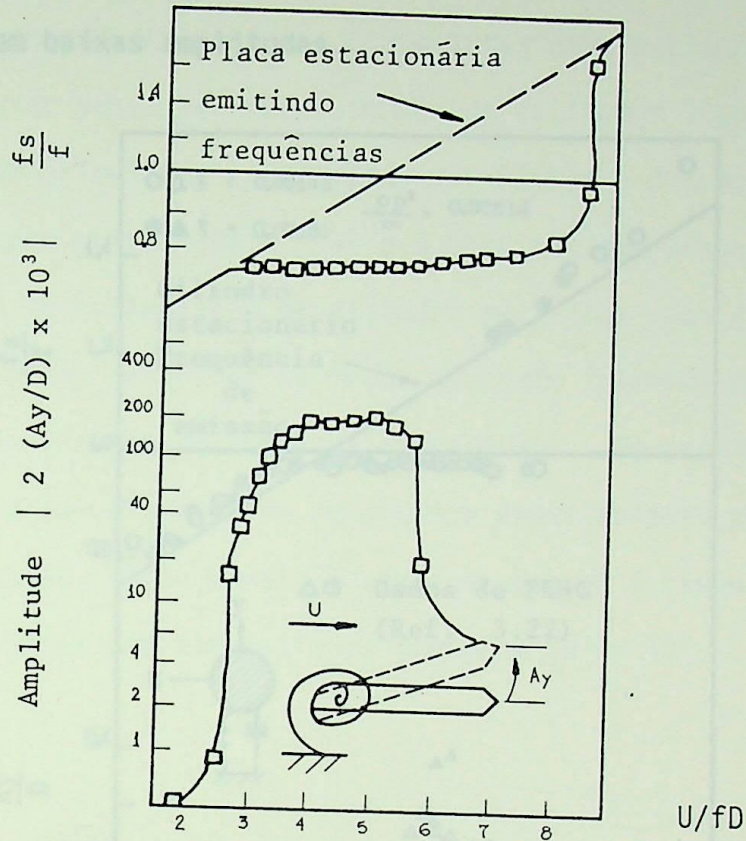


Fig. 3.10 Vibrações induzidas por vórtices em uma placa (Ref. 3.19)

Esses modelos são, essencialmente métodos para tornar disponível os dados experimentais. Eles não são aproximações rigorosas da interação fluido/estrutura. Todavia, eles tem razoável uso para estimar a resposta de estruturas cilíndricas a vibrações ressonantes induzidas por vórtices no intervalo de número de Reynolds de $10^3 - 10^5$.

O primeiro desses modelos, o modelo da esteira oscilatória, re

trata a esteira quase como linear, o acoplamento oscilatório com a estrutura é auto-excitado. O segundo modelo é designado para considerar os efeitos de correlação na direção do vão que tem uma forte influência sobre as vibrações induzidas por vórtices em baixas amplitudes.

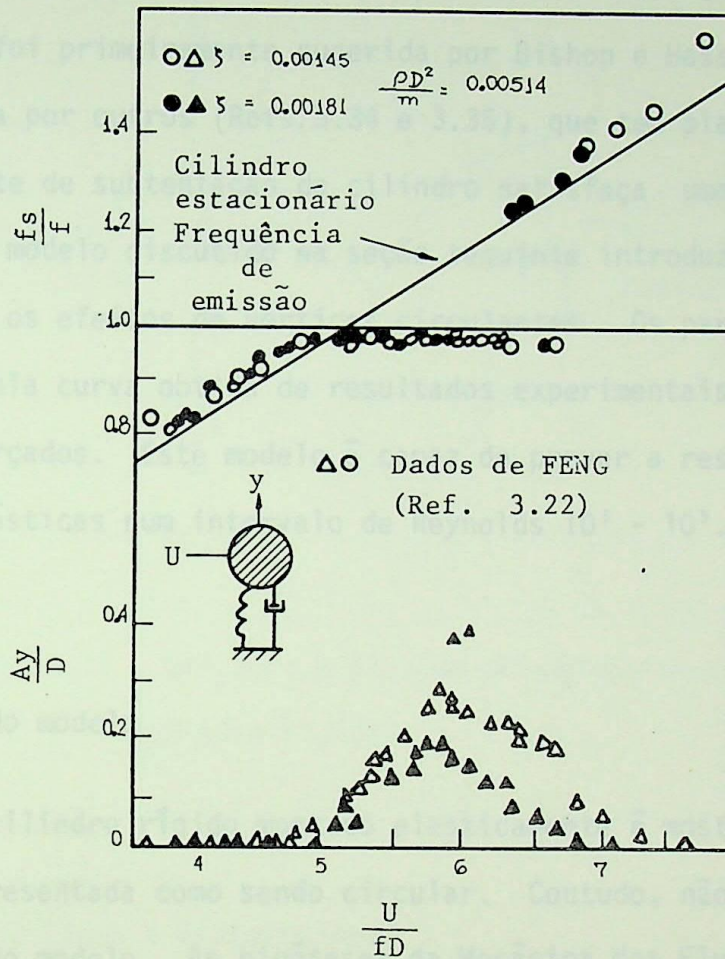


Fig. 3.11 Ressonância de um cilindro circular rí-
gido com vórtices circulantes.
(Ref. 3.22)

3.6 MODELO DA ESTEIRA OSCILATÓRIA

3.6.1 Introdução

A natureza dos vórtices circulantes auto-excitados sugere que o comportamento do fluido possa ser modelado por um oscilador simples e não linear. Esta idéia foi primeiramente sugerida por Bishop e Hassan (Ref. 3.28), e tem sido continuada por outros (Refs. 3.34 e 3.35), que tem planejado modelos em que o coeficiente de subtentação do cilindro satisfaça uma equação típica de Van der Pol. O modelo discutido na seção seguinte introduz um fluxo variável para descrever os efeitos de vórtices circulantes. Os parâmetros do modelo são determinados pela curva obtida de resultados experimentais para cilindros estacionários e forçados. Este modelo é capaz de prever a resposta de estruturas cilíndricas elásticas num intervalo de Reynolds $10^3 - 10^5$.

3.6.2 Descrição do modelo

O cilindro rígido montado elasticamente é mostrado na fig.3.12. A seção reta é representada como sendo circular. Contudo, não é essencial para o desenvolvimento do modelo. As hipóteses da Mecânica dos Fluidos básica para o modelo são:

1. Fluxos não viscosos evidenciam uma boa aproximação para o campo de fluxo na parte externa nas proximidades da esteira.
2. Existe uma lâmina de vórtice bem formada com uma frequência de circulação bem definida.
3. A vorticidade é gerada somente na camada limite do cilindro e os vórtices crescem uniformemente a uma resistência máxima e movem-se corrente abaixo.

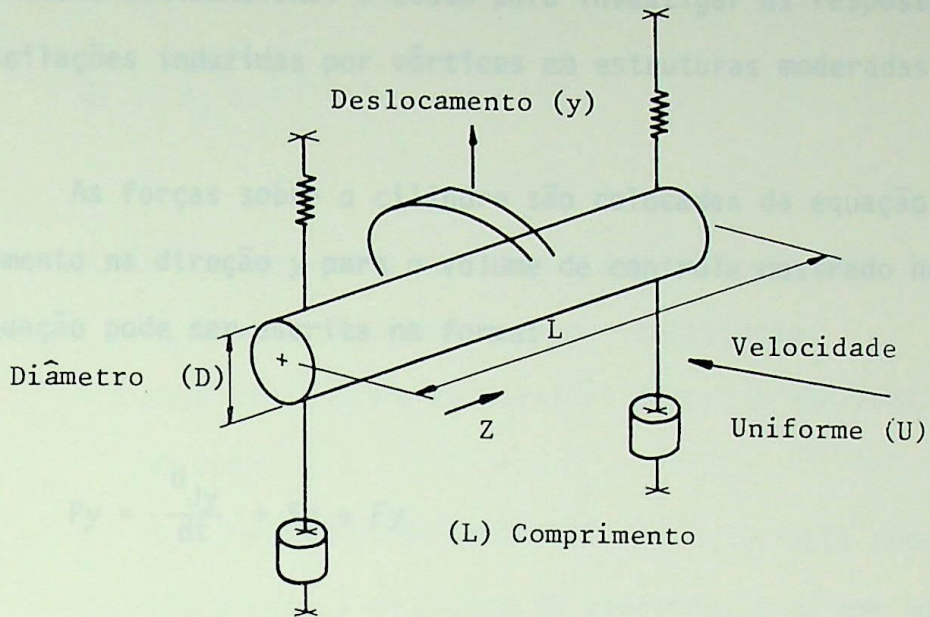


Fig. 3.12 Cilindro e sistema de coordenadas (cilindro rígido)

4. O fluxo é bidimensional.
5. A força exercida pelo fluxo, sobre o cilindro, depende somente da velocidade e aceleração de um fluxo relativo médio ao cilindro.

Quando um cilindro longo está estacionário, vórtices são circundados ao longo do vão com relação aparente de fases não fixas. Contudo, quando a amplitude de vibração aumenta, o fluxo torna-se correlacionado ao longo do vão e os vórtices são circundados nas proximidades das lâminas bidimensionais. ' Donde, a força do vórtice sobre o cilindro pode não ser bem aproximada de um

modelo de fluxo bidimensional para pequenas amplitudes de vibração. Para um modelo de fluxo correlacionado geralmente pode-se prever a resposta da amplitude. Contudo, um modelo bidimensional é usado para investigar as respostas de amplitudes das oscilações induzidas por vórtices em estruturas moderadas para grandes.

As forças sobre o cilindro são colocadas da equação de quantidade de movimento na direção y para o volume de controle mostrado na figura 3.13. Esta equação pode ser escrita na forma:

$$P_y = \frac{dJ_y}{dt} + S_y + F_y \quad (3.2)$$

onde

F_y - é a força de fluido sobre o cilindro;

P_y - é a força de pressão sobre a superfície paralela ao eixo y ;

S_y - é a quantidade de movimento do fluxo através da superfície de controle

J_y - é a quantidade de movimento vertical dentro do volume de controle.

A quantidade de movimento (J_y) será: $J_y = \iint_A \rho v \, dx \, dy \quad (3.3)$

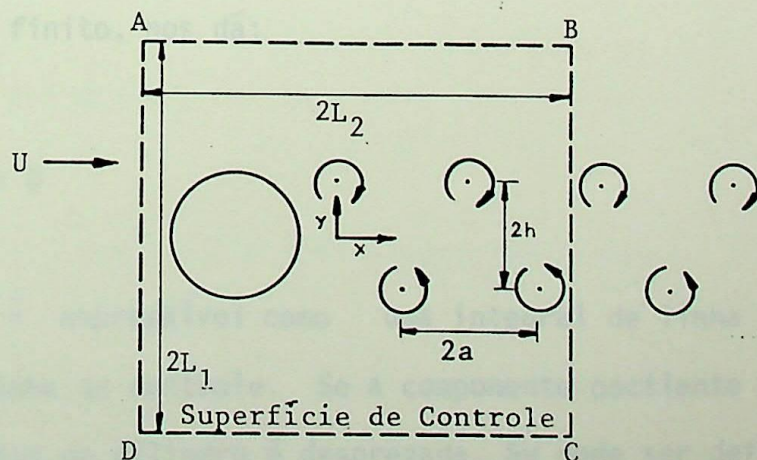


Fig. 3.13 Volume de Controle

onde v é a componente vertical da velocidade do fluido e ρ é a densidade do fluido. Uma variável auxiliar (\dot{W}) de fluido é definida tal que:

$$J_y = a_0 \rho \dot{W} D^2 \quad (3.4)$$

onde:

- D - é o comprimento característico da seção reta do cilindro e a_0 é uma constante de proporcionalidade.
- \dot{W} - este sinal acima da variável denota a derivada com relação ao tempo.
- \dot{W} - é o peso médio da componente da velocidade transversal do fluxo dentro do volume de controle, e dá uma medida de grandeza das oscilações transversais do fluido na esteira.

O campo de fluxo afastado, induzido pelo caminho de vórtices diminui com $O\left(\frac{1}{r}\right)$ onde:

r - é a distância do caminho de vórtices.

Uma aplicação da equação de Bernouille, e a integração da pressão do fluido ao longo dos contornos AB e CD no limite quando L_1 aproxima-se infinitamente enquanto L_2 permanece finito, nos dá:

$$P_y = 0 \quad (3.5)$$

S_y é expressível como uma integral de linha ao longo dos lados BC e AD do volume de controle. Se a componente oscilante do fluxo transversal corrente abaixo do cilindro é desprezada, S_y pode ser definida pela consideração de que uma integral de linha que divide em duas partes o caminho in

finito de vórtices.

Assumindo que a componente oscilante do fluxo transversal corrente acima é pequena, pode-se mostrar que:

$$| S_y | = \rho U_t \Gamma + \text{Termos de correção} \quad (3.6)$$

onde: $\rho U_t \Gamma$ - é o módulo de S_y determinado de um caminho de vórtices potenciais ideais. Os termos de correção são necessários para o modelo não linear e efeitos de viscosidade.

Γ - é a circulação de um vórtice e

U_t - é a velocidade translacional do caminho de vórtices.

A circulação será uma função somente da componente transversal da velocidade sobre as superfícies BC e AD. Onde é razoável supor que a circulação de um vórtice possa ser aproximadamente proporcional ao módulo da componente da velocidade média transversal no volume de controle. Se isto for portanto assumido, temos:

$$\Gamma = K | \dot{W} | D \quad (3.7)$$

onde: K - é a uma constante de proporcionalidade.

Examinando a fase da quantidade de movimento do fluxo no volume de controle, e que através do contorno BC, pode ser argumentada que S_y deva atrasar \dot{W} de aproximadamente um quarto de ciclo. Onde:

$$S_y = K \rho U_t + \dot{W}(t - T/4) + \text{Termos de correção} \quad (3.8)$$

onde: T - é o período do vórtice circulante.

Os termos de correção podem ser expressos em série de potências ímpares de W e \dot{W} .

Por simplicidade, somente termos lineares e cúbicos em \dot{W} serão retidos em S_y .

Assumindo que W oscila harmonicamente na frequência do vórtice circulante, isto dá:

$$S_y = K \rho U_t \omega_s W D - a_1 \rho U D \dot{W} + a_2 \rho \dot{W}^3 D/U \quad (3.9)$$

onde: a_1 e a_2 - são constantes adimensionais que são assumidas pequenas com relação a K .

ω_s - é a frequência circular do vórtice circulante.

É adotado que a força entre o cilindro e o fluido depende somente de uma velocidade média pesada e da aceleração do fluido relativa ao cilindro. Onde, não há distinção entre o movimento forçado do cilindro e o movimento do cilindro montado elasticamente na Mecânica dos Fluidos fundamental. A força sobre o cilindro, que é dependente da aceleração relativa do fluido no cilindro, é adotado como sendo uma função linear desta variável. A força exercida sobre

o cilindro pela velocidade relativa pode ser escrita na forma de um coeficiente de sustentação enquanto a grandeza $\bar{\epsilon}$ é proporcional ao ângulo relativo entre a linha de corrente livre e a componente do fluxo a montante do cilindro. Para pequenos ângulos, este ângulo é $(\dot{W} - \dot{y}) / U$. A força líquida exercida sobre o cilindro, tem portanto a forma:

$$F_y = a_3 \rho D^2 (\ddot{W} - \ddot{y}) + a_4 \rho D U (\dot{W} - \dot{y}) \quad (3.10)$$

onde: a_3 e a_4 - são constantes adimensionais

O fluido oscilador é montado pela substituição das expressões componentes (Eqs. 3-4, 3-5, 3-9 e 3-10). Na equação da quantidade de movimento (Eq. 3.2). Isto dá:

$$\ddot{W} + K' \frac{U_t}{U} \cdot \frac{U}{D} \cdot \omega_s W = (a_1' - a_4') \frac{U}{D} \dot{W} - a_2' \frac{\dot{W}^3}{UD} + a_3' \ddot{y} + a_4' \frac{U}{D} \dot{y} \quad (3.11)$$

onde: $K' = K / (a_0 + a_3)$, $a_i' = a_i / (a_0 + a_3)$ (3.12)

Se o cilindro for montado elasticamente, ele responderá as forças de fluido sobre ele.

A equação do movimento para a montagem elástica, e com um amortecimento viscoso, conforme fig. 3.12, será:

$$\ddot{y} + 2 \tau_T \omega_y \dot{y} + \omega_y^2 y = a_3'' \ddot{W} + a_4'' \dot{W} U/D \quad (3.13)$$

onde:

$$a_i'' = \rho D^2 a_i / (m + a_3 \rho D^2),$$

$$i = 3, 4, \quad (3.14)$$

$$\tau_T = (\tau \sqrt{K/m} / \omega_y + \tau_f) / (1 + a_3 \rho D^2 / m) \quad (3.15)$$

$$\tau_f = a_4 \rho DU / (2m \omega_y)$$

onde: ω_y - é a frequência natural circular do cilindro;

ρ - é a densidade do fluido;

D - é o diâmetro do cilindro;

m - é a massa por unidade de comprimento do cilindro, incluindo a massa do fluido, que é aproximadamente igual a massa do fluido deslocado pelo cilindro, independente à forma do modo ou presença de vórtices circulantes (Ref. 3.32);

K - é a rigidez do suporte por unidade de comprimento;

τ_t - é o coeficiente efetivo de amortecimento, composto de uma componente causada pelo amortecimento estrutural viscoso (τ) e amortecimento de fluido viscoso (τ_t), esta última limita a amplitude de vibração quando o amortecimento estrutural é próximo de zero.

O primeiro termo do lado direito da equação do fluido oscilador (Eq. 3.11) é um termo de amortecimento negativo que representa a extração da energia do fluido da linha de corrente livre e a transformação daquela energia em oscilações transversais do fluido. O segundo termo da direita do lado direito da Equação 3.11, representa um fluido não linear comandado que limita a amplitude de oscilação do fluido. O lado esquerdo da equação (3.11) representa a realimentação de fluido entre as proximidades da esteira e a camada limite do cilindro.

Esta quase esteira/camada limite realimentada é o "marca-passo" do vórtice circulante. As oscilações transversais do fluido impõem uma força fluida oscilante sobre o cilindro através do lado direito da Eq. 3.13 a força de fluido não é independente do movimento do cilindro.

Justamente quando o fluido impõe uma força sobre o cilindro, o cilindro também reage com a mesma força sobre o fluido. A força colocada sobre o fluido pelo cilindro é representada pelos dois últimos termos da direita do lado direito da equação 3.11.

Quando a frequência das oscilações do fluido aproxima-se da frequência natural do cilindro, podem ser induzidas grandes amplitudes de movimento do cilindro, este movimento do cilindro realimenta o fluido oscilató-

rio. As forças do fluido e amplitudes resultantes do cilindro são determinadas pela interação do fluido oscilador e o movimento do cilindro.

Há somente um termo não linear nas equações 3.11 e 3.13; mais termos não lineares devem ser empregados se o modelo desejado for mais preciso. Infelizmente, aumentando o número de termos não lineares aumenta-se grandemente a dificuldade de analisar o modelo e a determinação dos parâmetros do modelo.

O modelo da equação 3.11 e 3.13 foi analisado, usando o método da variação lenta dos parâmetros. Os parâmetros do modelo foram fixados por combinações de medidas experimentais de vórtices circulantes do cilindro estacionário e forçado (Ref. 3.36).

3.6.3 Resultados

A frequência natural do fluido oscilante (a frequência de circulação) é dada pela equação 3.11 como

$$\omega = k' \cdot \frac{U_t}{U} \cdot \frac{U}{D} \quad (3.16)$$

Desde que $\frac{U_t}{U}$ é aproximadamente constante para um grande intervalo do número de Reynolds, o modelo da esteira oscilatória diz que a frequência natural do fluido oscilador é proporcional a razão da velocidade da corrente livre para o diâmetro do cilindro. Este é um fato experimental bem conhecido.

O modelo da esteira oscilatória prevê que um cilindro montado elasticamente exibirá grandes amplitudes de oscilações quando a frequência do vórtice circulante aproximar-se da frequência natural do cilindro. A resposta do cilindro é uma função da relação da frequência natural da estrutura do cilindro, do amortecimento viscoso, e da relação do deslocamento da massa do fluido e a massa do cilindro.

O modelo apresenta um efeito característico, i.é, a frequência de emissão de vórtices para o cilindro montado elasticamente é conduzida pela frequência natural de oscilação estrutural. Prevê que este efeito característico aumentaria com a diminuição do amortecimento estrutural, isto é confirmado pelos resultados experimentais, prevendo também que aumentaria com a razão da massa fluida deslocada para a massa do cilindro, exceto no caso de valores muito pequenos do amortecimento estrutural.

O pico da amplitude de ressonância do cilindro do modelo pode

ser expresso em termos de uma simples variável chamada de amortecimento reduzido $[\delta_r = 2m(2\pi\tau) / \rho D^2]$. Este pico aumenta com a diminuição do δ_r (amortecimento reduzido) até que um limite máximo de amplitude é alcançado.

IWAN (ref. 3.37) mostrou que o modelo pode ser usado para prever a amplitude ressonante de uma estrutura elástica composta de seções cilíndricas circulares transversais.

Seus resultados apresentados na fig. 3.14 e tabela 3.2, são limitados para faixa de Reynolds subcrítica 2×10^2 a 2×10^5 , onde os dados experimentais foram obtidos.

A equação desta curva é:

$$\frac{A_y}{D} = \frac{0,07 \gamma}{(\delta_r + 1,9)S^2} \left[0,30 + \frac{0,72}{(\delta_r + 1,9)S} \right]^{1/2} \quad (3.17)$$

onde:

A_y é a máxima amplitude, ao longo do vão, de um particular modo correspondente para γ .

O deslocamento da estrutura é assim:

$Y = A_y \psi(z) \cos \omega_s t$, onde $\psi(z)$ é a forma ou configuração do modo ao longo do vão no ponto z . γ é um fator geométrico o qual é uma função da configuração do modo.

$$\gamma = \psi_{\text{m\grave{a}x}} (z/L) \left\{ \frac{\int_0^L \psi^2 (z) dz}{\int_0^L \psi^4 (z) dz} \right\}^{1/2} \quad (3.18)$$

onde $\psi_{\text{m\grave{a}x}}$ é o m\grave{a}ximo valor da configuração do modo ψ sobre o alcance estendido de $z = 0$ até $z = L$.

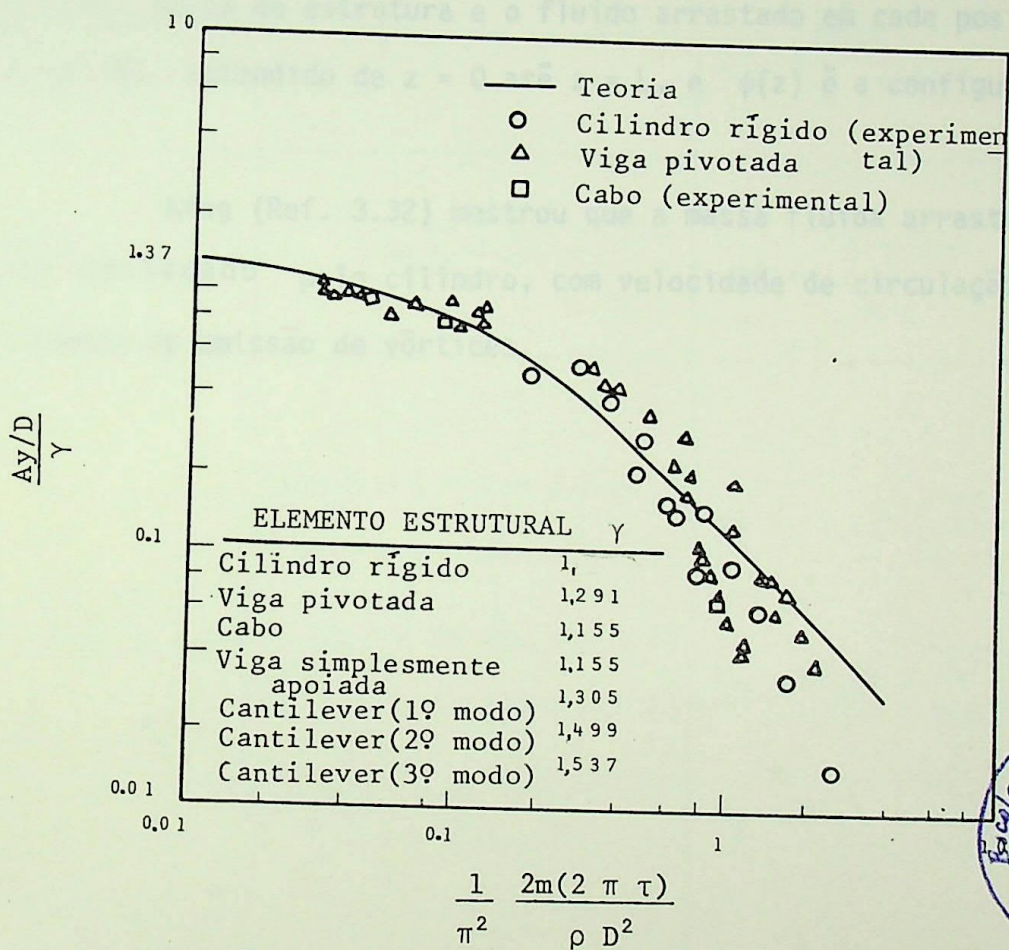


Fig. 3.14 M\grave{a}xima amplitude normalizada da resposta versus raz\~ao de massa vezes par\~ametro de amortecimento.

(Refs. 3.22, 3.38 at\~e 3.42), ap\~os Iwan.

(Ref. 3.37)

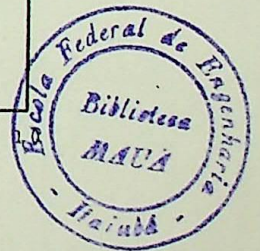


TABELA 3 Se a massa do cilindro não é uniformemente distribuída, então a massa equivalente por unidade de comprimento é dada por:

$$m = \frac{\int_0^L m(z) \psi^2(z) dz}{\int_0^L \psi^2(z) dz} \quad (3.19)$$

onde $m(z)$ é a massa da estrutura e o fluido arrastado em cada posição z ao longo do vão, estendido de $z = 0$ até $z = L$, e $\psi(z)$ é a configuração do modo.

King (Ref. 3.32) mostrou que a massa fluida arrastada é igual ao fluido deslocado pelo cilindro, com velocidade de circulação desprezível ou na presença de emissão de vórtices.

* De Ref. 3.32

** m = massa por unidade de comprimento e incluído a massa adicional do fluido deslocado.

E = módulo de elasticidade

I = momento de inércia da área da seção

L = comprimento do vão

TABELA 3.2* FORMAS DOS MODOS E FATORES GEOMETRICOS DA EQ. 3.17

ELEMENTO ESTRUTURAL	FORMAS DOS MODOS** $\psi (z/L)$	FREQUÊNCIA NATURAL ωy	γ
Cilindro Rígido	1	$\sqrt{\frac{K}{m}}$	1,000
Viga Uniforme pivotado	z/ℓ	$\sqrt{\frac{3 k \theta^3}{m L^3}}$	1,291
Cabo Tenso	$\text{sen } n \pi z/L$	$n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m L^4}}$	1,155 para $n = 1, 2, 3, \dots$
Barra Uniforme simplesmente apoiada	$(\text{sen } \beta n L - \text{sen h } \beta n L)$ $\cdot (\text{sen } \rho n z - \text{sen h } \beta n z)$ $+ (\text{cos } \beta n \ell + \text{cos h } \beta n \ell)$ $\cdot (\text{cos } \beta n z - \text{cos h } \beta n z)$ $\beta_n^4 = \frac{W_n^2 m}{EI}$	$W_1 = 3,52 \sqrt{\frac{EI}{m L^4}}$ $W_2 = 22,03 \sqrt{\frac{EI}{m L^4}}$ $W_3 = 61,7 \sqrt{\frac{EI}{m L^4}}$	$\gamma_1 = 1,305$ $\gamma_2 = 1,499$ $\gamma_3 = 1,537$

* Da Ref. 3.37

** m = massa por unidade de comprimento e incluso a massa adicional do fluido deslocado; E = módulo de elasticidade I = momento de inércia da área da seção L = comprimento do vão

Dois regiões da fig. 3.14 são de particular interesse. Primeira, com amortecimento estrutural aproximando-se de zero, o modelo prevê que as vibrações induzidas por vórtices alcançam um limite máximo de amplitudes para uma redução da componente de excitação de força fluida com amplitudes aumentando, possivelmente causado pelo colapso de emissão de vórtices observado por GRIFFIN (Ref. 3.30) e mostrado na fig. 3.9.

Segundo as previsões do modelo são bem acima dos dados experimentais para amplitude da ordem de 0.1 diâmetro ou menores.

Efeito de correlação ao longo do vão reduzem a excitação líquida em baixas amplitudes. Estes efeitos de correlação são discutidos nas seções seguintes.

3.7 MODELO DE CORRELAÇÃO

3.7.1 Introdução

O modelo da esteira oscilante para vibrações induzidas por vórtices foi obtida usando uma aproximação determinante, a admissão da hipótese de que o movimento do fluido é completamente correlacionado ao longo do comprimento do cilindro.

Por mais que, o comprimento de correlação deste movimento fluido possa ter um largo efeito sobre a força fluida atuante sobre o cilindro em altos R_e e baixas amplitudes de vibrações do cilindro (Ref. 3.27).

Foi desenvolvido um modelo dinâmico especializado para vibrações induzidas por vórtices usando a teoria da vibração aleatória (Ref. 3.43).

A estrutura teórica é baseada sobre uma correlação representativa do alcance e a dependência de amplitudes do cilindro das forças de vórtices.

Os dados experimentais sobre comprimento de correlação e forças de sustentação como funções de amplitudes ressonantes são usados para determinar os parâmetros do modelo.

As hipóteses básicas do modelo são:

1. Em ressonância, a amplitude de correlação da força de sustentação sobre o cilindro pode ser representada como uma função da amplitude do cilindro.
2. Em ressonância, o vão de correlação das forças de vórtices pode ser representado por um comprimento característico de correlação. O comprimento de correlação aumenta uniformemente com a amplitude do cilindro, até que um escoamento bidimensional é alcançado.

O modelo é limitado para ressonância de um único modo com emissão de vórtices e uma faixa de R_e de $2 \times 10^2 < R_e < 2 \times 10^5$, onde existe uma esteira de vórtices bem formada.

Somente a componente da força de sustentação sobre o cilindro em fase com a velocidade do cilindro é considerada, e somente esta componente pode ceder energia para o cilindro.

3.7.2 Descrição do modelo de correlação

Considere a seção reta de uma estrutura cilíndrica circular re-
ta paralela ao eixo axial z , com comprimento L e diâmetro D em um fluxo cruzado
e de magnitude U .

A seção cilíndrica \bar{e} mostrada na fig. 3.12.

Se a frequência predominante de emissão de vórtices (ω_s) está
em ou próxima da frequência natural da seção cilíndrica (ω_y), o cilindro res-
ponderia predominantemente em um modo simples para as forças induzidas por vór-
tices.

Isto \bar{e} mostrado no Capítulo 4 (equação 4.15) que o movimento
do cilindro em modo simples \bar{e} descrito por:

$$\ddot{Y} + 2 \tau_y \omega_y \dot{Y} + \omega_y^2 Y = \frac{\int_0^L F(z,t) \psi(z) dz}{\int_0^L m(z) \psi^2(z) dz} \quad (3.20)$$

onde o deslocamento da seção \bar{e} ,

$$Y(z,t) = Y(t) \psi(z) \quad (3.21)$$

$m(z)$ \bar{e} a massa por unidade de comprimento da seção incluindo a massa do fluido
arrastado.

A massa de fluido arrastado \bar{e} ordinariamente estimada como sendo a massa
do fluido deslocada pelo cilindro.

τ_y é o fator de amortecimento da estrutura devido ao amortecimento gerado internamente pela estrutura.

$F(z,t)$ é a força da sustentação dinâmica do fluido sobre a seção na qual atua na direção Y.

Se a força induzida por vórtices é modelada como harmônica.

$$F(z,t) = \frac{1}{2} \rho U^2 D C_L(z) \cos \omega_s t \quad (3.22)$$

onde $C_L(z)$ é o coeficiente de sustentação e ρ é a densidade do fluido. Um coeficiente de sustentação equivalente é definido, o qual é independente da posição z ao longo do vão, mas o qual resulta na mesma generalização de forças sobre o cilindro.

$$C_{LE} = \frac{\int_0^L C_L(z) \psi(z) dz}{\int_0^L \psi^2(z) dz} \quad (3.23)$$

Em ressonância, a frequência natural do sistema levemente amortecido, (ω_y) é aproximadamente igual a frequência de emissão (ω_s) , e a amplitude da resposta é:

$$\frac{A_y}{D} = \frac{\pi}{(2\pi S)^2} \frac{C_{LE}}{\delta_r} \frac{\int_0^L \psi(z) dz}{\int_0^L \psi^2(z) dz} \quad (3.24)$$

$$\text{Com } Y(z,t) = A_y \psi(z) \text{ sen } \omega_s t \quad (3.25)$$

O número de STROUHAL na ressonância é definido pela equação 3.1, e o fator de amortecimento reduzido (δ_r) é definido pela equação 2.8 .

Se as equações 3.22 e 3.25 são comparadas, pode-se ver que a força e o deslocamento estão fora de fase de 90° e somente a componente de força com esta defasagem é considerada, a componente em fase é ignorada porque não fornece nenhuma energia líquida para o cilindro.

As forças sobre o cilindro causadas por emissão de vórtices para altos números de Reynolds contêm fortes componentes tridimensionais.

As propriedades aleatórias dessas componentes ao longo do vão, são representadas por uma estreita faixa, estacionária do processo aleatório.

A densidade do espectro transversal das forças de vórtices do modelo é $S_F(z_1, z_2, \omega)$.

A integral da densidade do espectro transversal sobre a faixa de frequência positiva é a média do quadrado das forças de sustentação.

$$\int_0^{\infty} S_F(z_1, z_2, \omega) d\omega = \overline{[F(z)]^2},$$

onde: $\overline{[F(z)]^2}$ é a média quadrática da força de sustentação por unidade de comprimento.

(—) a barra denota o tempo médio.

Se a ressonância com emissão de vórtices, com um modo distinto é assumida, o análogo da equação 3.24 para vibrações aleatórias é:

$$\overline{Y^2} = \int_0^{\infty} \frac{\int_0^L \int_0^L S_F(z_1, z_2, \omega) \psi(z_1) \psi(z_2) dz_1 dz_2}{|Z(\omega)|^2 \left[\int_0^L \psi^2 dz \right]^2} d\omega \quad (3.26)$$

onde: $\overline{Y^2}$ é a média quadrática da amplitude de resposta e

$Z(\omega)$ é a impedância,

$$Z = (\omega_y^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega_y\tau) m,$$

m é a massa uniforme equivalente por unidade de comprimento (Eq. 3.19), e

i é a constante imaginária $(-1)^{1/2}$

Se a banda da frequência de emissão de vórtice é comparável em largura para a banda de resposta do oscilador, Eq. 3.26 pode ser reduzida para

$$Y = K_1^2 \frac{\int_0^L \int_0^L R(z_1, z_2) \psi(z_1) \psi(z_2) dz_1 dz_2}{|Z(\omega_y)|^2 \left[\int_0^L \psi^2 dz \right]^2} \quad (3.27)$$

onde a função de correlação transversal é

$$R(z_1, z_2) = \int_0^{\infty} S_F(z_1, z_2, \omega) d\omega \quad (3.28)$$

a qual \bar{e} o valor médio do produto de forças de emissão de vórtices por unidade de comprimento em z_1 e z_2 . K_1 é uma função da largura da banda de emissão de vórtices.

Se a largura da banda de emissão de vórtice é mais estreita do que a largura da banda da resposta do cilindro, então $K = 1$.

A função correlação cruzada (R) é expressa como

$$R(z_1, z_2) = q^2 D^2 g(z_1) g(z_2) r(z_1 - z_2) \quad (3.29)$$

onde

q é a pressão dinâmica

$g(z)$ é a raiz quadrada da média quadrática dos coeficientes das forças de sustentação, na localização z ao longo do vão e

$r(z_1 - z_2)$ é a função correlação ao longo do vão, isto é, a média sobre muitos ciclos do produto das forças de sustentação em z_1 e z_2 divididos por seus valores médios absolutos.

O máximo valor para r é 1 em $z_1 = z_2$.

r é assumido como dependendo somente da distância axial entre dois pontos sobre o cilindro.

O coeficiente de sustentação uniforme equivalente por unidade de comprimento, C_{LE} , para a vibração aleatória é:

$$C_{LE}^2 = \frac{k_1^2 k_2^2 \int_0^L \int_0^L g(z_1) g(z_2) r(z_1 - z_2) \psi(z_1) \psi(z_2) dz_1 dz_2}{\left(\int_0^L \psi dz \right)^2}$$

C_{LE} é diretamente análogo ao coeficiente de sustentação uniforme apresentado na equação 3.23 para o caso determinado.

C_{LE} é uma função da configuração do modo (ψ) e da amplitude de resposta porque r e z são funções da amplitude de resposta.

K_2 é uma constante, a qual relata o pico de amplitude de resposta do cilindro observado experimentalmente para a amplitude R.M.S.

Se $r(z_1 - z_2)$ é determinado por medidas experimentais sobre o cilindro em ressonância com emissão de vórtices e medidas de uma amplitude de ressonância do cilindro significativa (A_y) são obtidas como uma função do amortecimento (δ_r) então a equação 3.24 pode ser usada para determinar o coeficiente de sustentação efetivo (C_{LE}) e a equação 3.30 pode ser usada para determinar a dependência da amplitude da força de sustentação correlacionada ($k_1 k_2 g$).

Uma vez que $K_1 K_2 g$ são conhecidas, a teoria pode ser ampliada para várias configurações de modos:

Esta aproximação é usada nas seções seguintes.

3.7.3 Parâmetros do modelo

Dados de TOEBE para a correlação ao longo do vão de um cilindro rígido ($\psi = 1$), oscilando em ressonância com emissão de vórtices (Ref. 3.27) são mostrados na fig. 3.7. O comprimento de correlação aumenta com a amplitude, onde o comprimento de correlação (R_e) é a área sob a função de correlação:

$$l_c = \int_{-\infty}^{\infty} r(z_1 - z_2) d(z_1 - z_2) \quad (3.31)$$

e a correlação ao longo do vão é modelada como:

$$r(z_1 - z_2) = \exp(-2 |z_1 - z_2| / \ell_c) \quad (3.32)$$

A forma exponencial é escolhida por generalidade e conveniência matemática.

Aplicando-se a equação 3.31 para a fig. 3.7, pode ser visto que a correlação ao longo do vão aumenta de 5 diâmetros em amplitudes zero.

O fluxo torna-se completamente correlacionado em uma amplitude de vibração suficiente (Ref. 3.42).

É razoável assumir que o comprimento de correlação do cilindro rígido com emissão de vórtices em ressonância é uma função somente da amplitude do cilindro. O comprimento de correlação para o movimento harmônico do cilindro em ressonância com emissão de vórtices é modelado como aumentando com as amplitudes de um comprimento mínimo de correlação.

$$\ell_c = \begin{cases} \ell_c^0 + KA / (A_m - A) & A < A_m \\ \infty & A > A_m \end{cases} \quad (3.33)$$

onde os dados experimentais disponíveis sugerem que: $\ell_c^0 = 5D$, $K = 100 D$ e $A_m = 0,5 D$. Há incertezas suficientemente significantes na escolha destes valores para A_m , sem embargo estas incertezas podem contribuir significativamente com erros somente para certos coeficientes de esbeltez do cilindro.

$|L/D = 0 (100)|$ em amplitudes próximas de A_m .

A função g , a qual especifica a dependência de amplitude da correlação de forças de vórtices, é aproximada por uma série de potências contendo três termos:

$$\begin{aligned} K_1 K_2 g &= a + b \left| \dot{Y} \right| / (2 \pi S U) + c \left| \dot{Y} \right|^2 (2 \pi S U)^2 \\ &= a + b \psi(z) A_y / D + c \psi^2(z) A_y^2 / D^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

As constantes a , b e c foram encontradas pela curva adequada de C_{LE} versus A_y de dados experimentais de VIKERY e WATKINS (Ref. 3.40) e HARTLEN (Ref. 3.41) para um pico de ressonância de uma viga cilíndrica pivotada em ressonância com emissão de vórtices, mostrada na fig. 3.15, usando-se as equações 3.24, 3.30, 3.33 e 3.34. A curva corresponde exatamente a:

$$a = 0,35$$

$$b = 0,60$$

$$c = -0,93$$

A primeira derivada da curva em C_{LE} é 0,07. A dependência da amplitude do estado de agitação do modelo da esteira oscilante é mostrada para comparação na fig. 3.15.

Medidas feitas para esta condição do cilindro mostram que com a amplitude de vibração do cilindro afastando-se de zero, a esteira torna-se organizada, e o alcance direcional de correlação aumenta.

A força de vórtice é também conhecida aumentar com a amplitude. Ambos estes efeitos são refletidos no modelo de correlação. Quando A_y é da ordem de 0,1 D, comprimento de correlação (eq. 3.33) e coeficiente de sustentação

($b > 0$) são funções crescentes da amplitude A_y .

Com as amplitudes do cilindro aumentadas para aproximadamente um diâmetro, o coeficiente de sustentação torna a diminuir. A amplitude na qual o máximo C_{LE} ocorre depende da geometria do cilindro e da amplitude na qual o fluxo é assumido como sendo completamente correlacionado.

Existe alguma incerteza acerca da amplitude requerida para uma completa correlação do fluxo. Apesar disto, os dados experimentais da fig.3.15 mostram claramente que o coeficiente de sustentação diminui e aproxima-se de zero quando a amplitude é aumentada além de um diâmetro. Isto dá um limite máximo de amplitudes de oscilações induzidas por vórtices que é independente do amortecimento estrutural.

A existência destes limites implicam que o processo de emissão de vórtices e a esteira de vórtices regular iniciam o colapso para grandes amplitudes de movimento do cilindro (Ref. 3.30).

Coefficiente de Sustentação sustentada (C_{LE})

Fig. 3.15. Gráfico mostrando os dados experimentais para um cilindro fixado em um fluido com emissão de vórtices. (Ref. 3.30, 3.31)

3.3.4. Resultados

Os dados experimentais para um cilindro fixado em um fluido com emissão de vórtices são mostrados na Fig. 3.15. O gráfico mostra o coeficiente de sustentação sustentada (C_{LE}) em função da amplitude de movimento do cilindro (A_y). Os resultados são mostrados na tabela 3.3. Os resultados

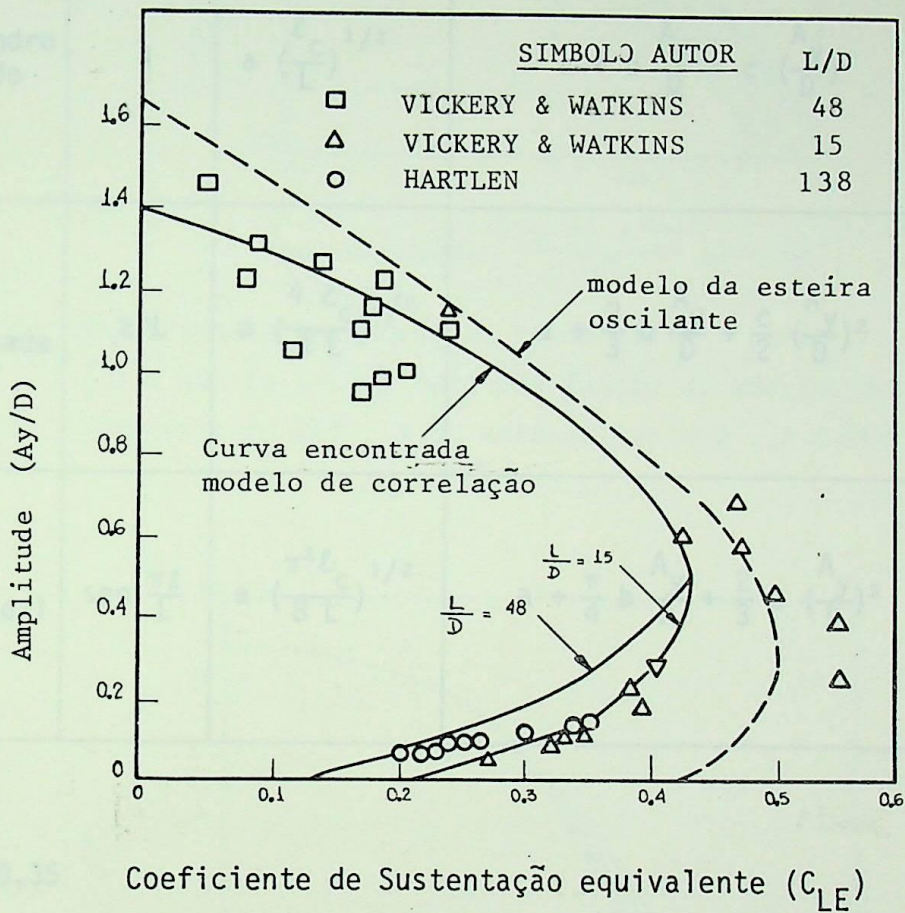


Fig. 3.15 Curva encontrada de dados experimentais para uma barra pivotada em ressonância com emissão de vórtices. (Ref. 3.40, 3.41)

3.7.4 Resultados

O modelo de correlação tem sido ampliado da forma do modo $|\psi(z)|$ do cilindro rígido, a viga engastada e livre, e ao modo senoidal. Alguns casos limites destas análises são mostrados na tabela 3.3. Os resultados

TABELA 3.3 RESPOSTA DAS TRÊS FORMAS DOS MODOS*

MODO	$\psi(z)$	C_{LE} $A_y/D \ll 1$ $\ell_c \ll L$	C_{LE} $\ell_c \gg \ell$	A_y/D
Cilindro rígido	1	$a \left(\frac{\ell_c}{L}\right)^{1/2}$	$a + b \frac{A_y}{D} + c \left(\frac{A_y}{D}\right)^2$	1,0
Viga pivotada	z/L	$a \left(\frac{4 \ell_c}{3 L}\right)^{1/2}$	$a + \frac{2}{3} b \frac{A_y}{D} + \frac{c}{2} \left(\frac{A_y}{D}\right)^2$	1,4
Modo senoidal	$\text{sen } \frac{\pi z}{L}$	$a \left(\frac{\pi^2 \ell_c}{8 L}\right)^{1/2}$	$a + \frac{\pi}{4} b \frac{A_y}{D} + \frac{2}{3} c \left(\frac{A_y}{D}\right)^2$	1,2

* $a = 0,35$

$b = 0,60$

$c = -0,93$

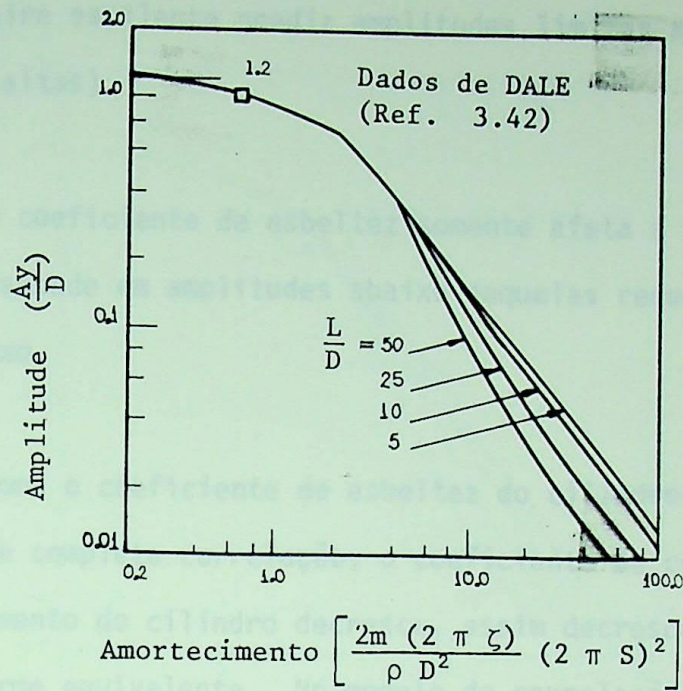


Fig. 3.16 Significante amplitude de ressonância para o modo senoidal $[\psi = \text{sen}(\pi z/L)]$ como uma função do amortecimento com dados experimentais da Ref. 3.42 extrapolado com $\tau = 0,005$.

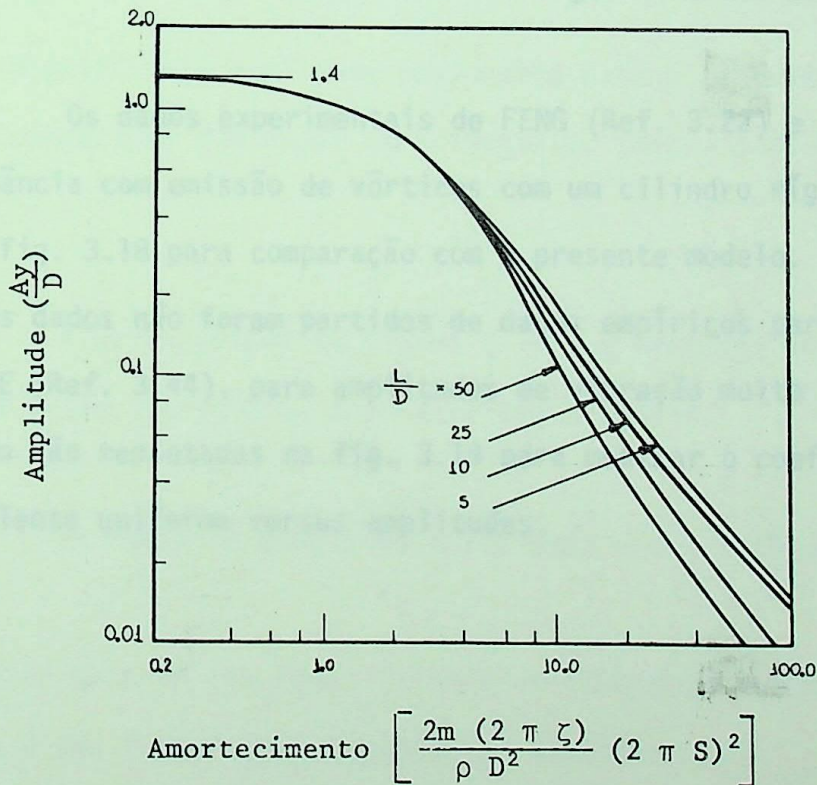


Fig. 3.17 Significante amplitude ressonante para barra pivotada ($\psi = z/L$) como uma função de amortecimento.

(O modelo da esteira oscilante prediz amplitudes limites as quais são aproximadamente 30% mais altas).

O coeficiente de esbeltez somente afeta a resposta do cilindro quando o mesmo responde em amplitudes abaixo daquelas requeridas para completa correlação do fluxo.

Como o coeficiente de esbeltez do cilindro \bar{e} é aumentado por baixo da amplitude de completa correlação, o coeficiente de comprimento de correlação para o comprimento do cilindro decresce, assim decrescendo o coeficiente de sustentação uniforme equivalente. No modelo de correlação, a amplitude requerida para correlacionar o fluxo completamente é assumida como sendo de 0,5 D.

Se um valor diferente for assumido ele poderá transferir a posição da origem da ramificação das curvas das figs. 3.16 até 3.18.

Os dados experimentais de FENG (Ref. 3.22) e SCRUTON (Ref.3.39) sobre ressonância com emissão de vórtices com um cilindro rígido ($\psi = 1$) são plotados na fig. 3.18 para comparação com o presente modelo. A concordância é boa e estes dados não foram partidos de dados empíricos para o modelo. Os dados de WALSHE (Ref. 3.44), para amplitudes de vibração muito pequenas de um cilindro rígido são replotadas na fig. 3.19 para mostrar o coeficiente de sustentação equivalente uniforme versus amplitudes.

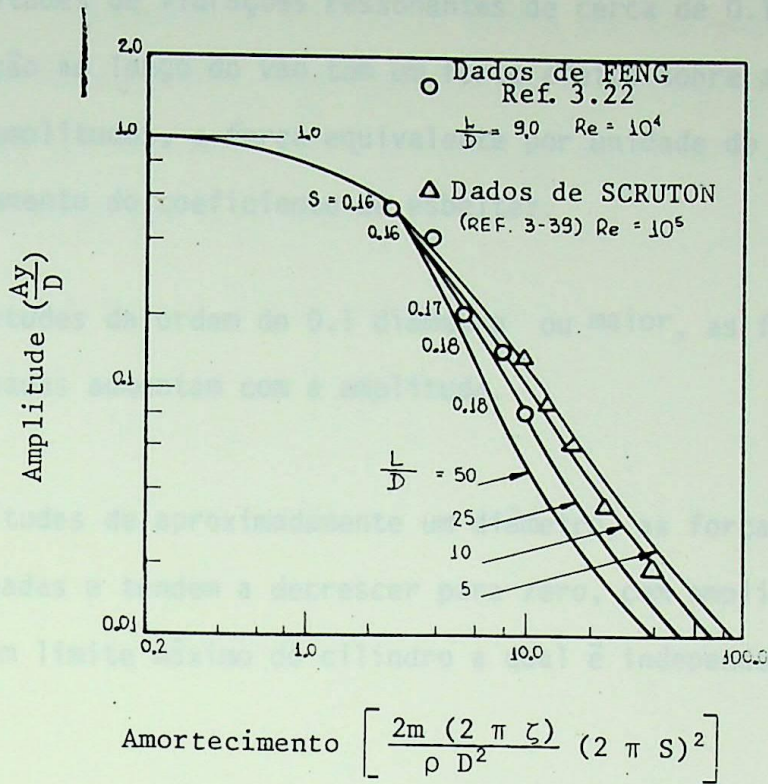


Fig. 3.18 Significante amplitude ressonante para o cilindro rígrado ($\psi=1$) em comparação com dados experimentais. (Refs. 3.22 e 3.39).

A curva sôlida na figura 3.19 é a previsão do modelo correto. Em bora os dados sejam imprecisos, eles suportam o modelo.

Em resumo o modelo de correlação prevê o seguinte:

1. A resposta do modo de uma seção cilíndrica reta em ressonância com emissão de vórtice é uma função dos seguintes parâmetros:

Amortecimento $[(2 \pi S)^2 \delta_r]$, configuração do modo $[\psi(z)]$ e coeficiente de esbeltez (L/D).

2. Em amplitudes de vibrações ressonantes de cerca de 0.1 diâmetro ou menor, a correlação ao longo do vão tem um forte efeito sobre a resposta do cilindro. Nestas amplitudes, a força equivalente por unidade de comprimento diminui com o aumento do coeficiente de esbeltez.
3. Em amplitudes da ordem de 0.1 diâmetro ou maior, as forças de vórtices correlacionadas aumentam com a amplitude.
4. Em amplitudes de aproximadamente um diâmetro, as forças de vórtices são correlacionadas e tendem a decrescer para zero, com amplitudes aumentando. Isto produz um limite máximo do cilindro a qual é independente do amortecimento.

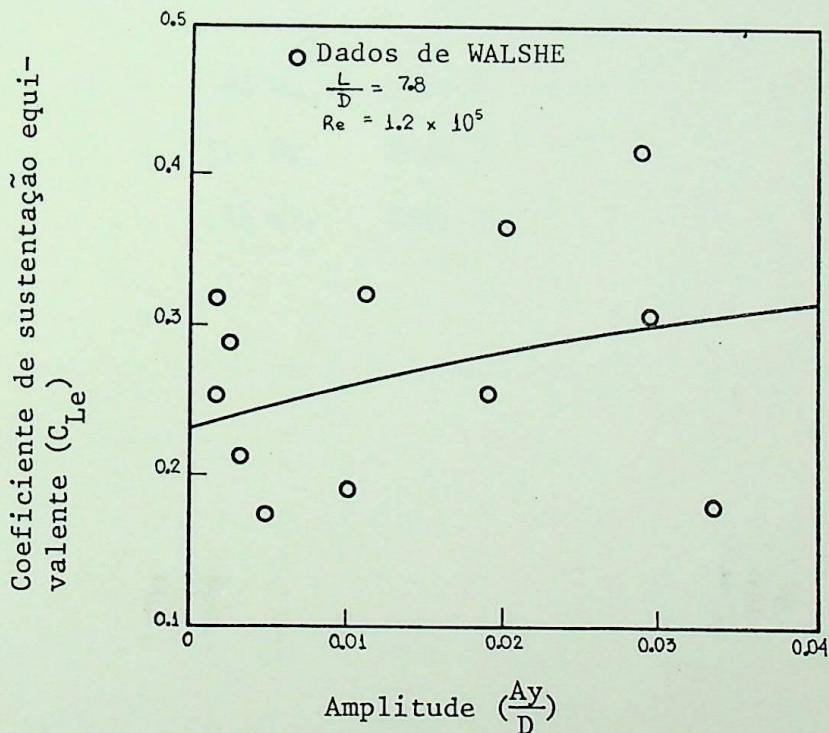


Fig. 3.19 Coeficiente de sustentação uniforme equivalente como uma função de significativa amplitude para o cilindro rígido modo ($\psi=1$) em comparação com dados experimentais. (Ref. 3.44).

O modelo de correlação mostra uma boa concordância com evidências experimentais obtidas independentemente e é provavelmente superior ao do modelo da esteira oscilante, para previsão de amplitudes de vibrações induzidas por vórtices em baixas amplitudes.

O número R_v é 10^6 .

As frequências naturais do corpo de prova são facilmente calculadas:

- $f_1 = 34$ Hz, Modo 1
- $f_2 = 273$ Hz, Modo 2
- $f_3 = 595$ Hz, Modo 3

3.8 EXEMPLO, TERMOPAR DE PROVA

Um termopar de prova de aço, mostrado na figura 3.22 é introduzido na saída do tubo de um trocador de calor a gás de uma usina nuclear. A velocidade máxima do fluxo de hélio é 200 ft/s (61 m/s) na temperatura de 1000°F. (538 °C) e a pressão de 700 psi (492.000 kg/m²).

A viscosidade cinemática do hélio sob estas condições é 0,00015 ft²/s (0,0000139 m²/s), e a densidade é 0,15 lb/ft³ (2,4 kg/m³).

O máximo R_e é 10^5 .

As frequências naturais do corpo de prova são facilmente calculadas.

$f_i = 34 \text{ Hz, Modo 1}$
 $= 213 \text{ Hz, Modo 2}$
 $= 596 \text{ Hz, Modo 3}$

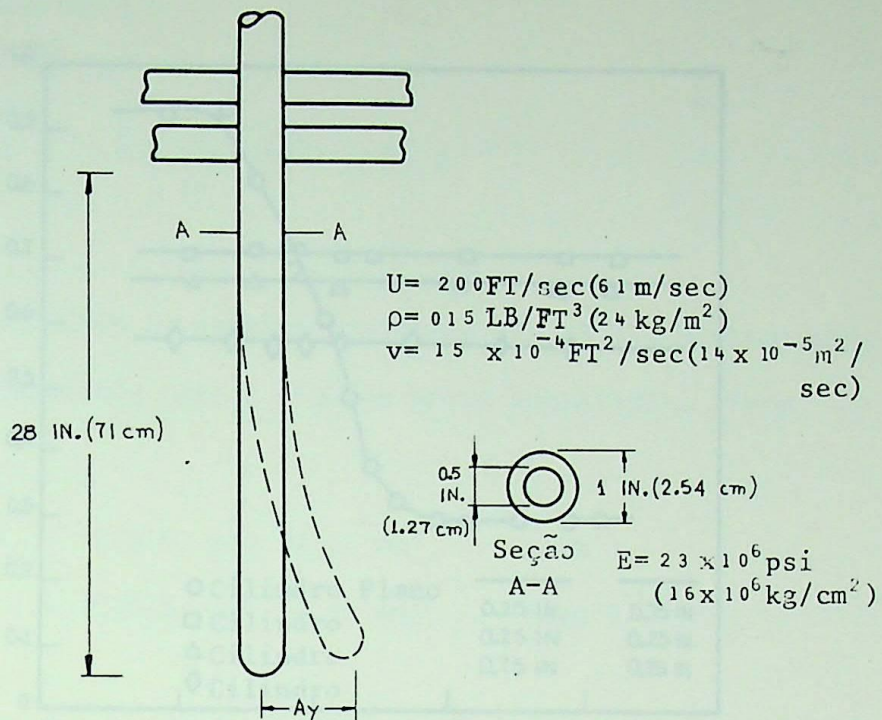


Fig. 3.20 Termorpar de prova

Ressonância com emissão de vórtices na faixa de R_e subcritica são esperadas próximas de

$$U = \frac{f_i D}{S}$$

$$= 14 \text{ ft/s} (4,3 \text{ m/s}), \quad \text{modo 1,}$$

$$= 89 \text{ ft/s} (27 \text{ m/s}), \quad \text{modo 2,}$$

$$= 205 \text{ ft/s} (76 \text{ m/s}), \quad \text{modo 3,}$$

onde $S = 0,2$. Ressonância com o 3º modo fundamental não é possível por causa da velocidade do fluxo requerida.

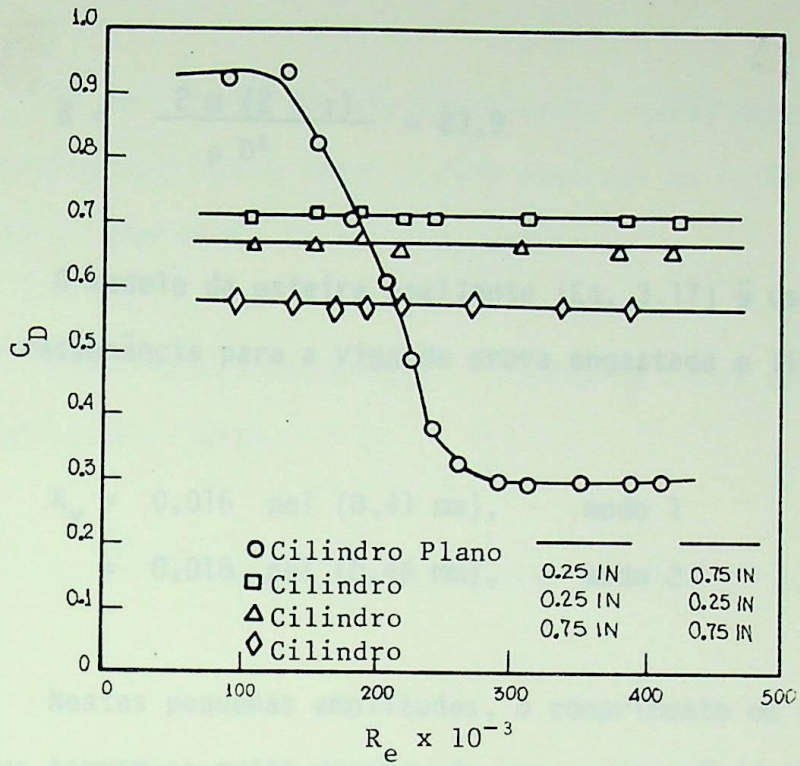


Fig. 3.21 Coeficiente de arraste do cilindro versus R_e com um diâmetro de 6 polegadas (Ref. 3.23)

A primeira harmônica ressonante para vibrações paralelas, do sistema destas velocidades.

A razão da massa, do corpo de prova, uniforme \bar{e}

$$\frac{m}{\rho D^2} = 1960$$

O coeficiente de amortecimento \bar{e} 0,0034, e o coeficiente de amortecimento reduzido \bar{e} :

$$\delta = \frac{2 m (2 \pi \tau)}{\rho D^2} = 83,9$$

O modelo da esteira oscilante (Eq. 3.17) \bar{e} usado para prever as amplitudes de ressonância para a viga de prova engastada e livre.

$$A_y = 0,016 \text{ pol (0,41 mm), modo 1}$$

$$= 0,018 \text{ pol (0,46 mm), modo 2}$$

Nestas pequenas amplitudes, o comprimento de correlação de emissão de vórtices tornam-se muito menores do que a extensão do bastão delgado, seja: $[(L/D) = 28]$. Por este motivo, a previsão do modelo oscilador correlato \bar{e} substancialmente conservativa. Uma pior estimativa da máxima amplitude de ressonância pode ser encontrada do modelo de correlação. O modo do bastão pivotado \bar{e} usado como uma aproximação da curvatura do 1º modo da viga. O modelo oscilador preve somente uma diferença de 10% entre os dois casos.

Desde que no caso de $(L/D) = 30$ e $\delta_r \cdot (2 \pi S)^2 = 130$ não \bar{e} coberto pela fig. 3.17, pois o comprimento de correlação \bar{e} estimado no mínimo valor estacionário de $5 D$ (Eq. 3.33) e o coeficiente de sustentação equivalente computado da tabela 3.2 \bar{e} $C_{LE} = 0,17$. A equação 3.24 prevê que as amplitudes significantes do 1º modo para $\psi(z) = z/L$ \bar{e} $A_y = 0,0062 \text{ pol. (0,16 mm)}$ para estas amplitudes o comprimento de correlação equivalente \bar{e} $6D$.

Uma amplitude \bar{e} computada para este novo comprimento de correlação, e após algumas interações, a amplitude do 1º modo \bar{e} estimada como sendo

$A_y = 0,0069 \text{ pol (0,21 mm)}$, a qual corresponde a um comprimento de correlação de 6,4 diâmetros.

As amplitudes são aproximadamente iguais aquelas previstas no modelo das esteiras oscilantes vezes a raiz quadrada da razão do comprimento de correlação para o comprimento da esteira $(\ell_c/L)^{1/2}$.

Esta razão dá a redução líquida na força que se deve ao comprimento de correlação finito.

As tensões podem ser computadas da forma do modo e das amplitudes extremas.

Os esforços são computados com as curvas de fadiga, tal como estas na norma ASME, para determinar a vida por fadiga.

3.9 EXEMPLO, CABO REBOCADOR

Os hidrofones rebocados são dispostos como na fig. 3.23. Se a catenária do cabo rebocador é aproximada por um segmento de reta com tensão uniforme, a amplitude de vibração é pequena (em particular).

$$\frac{EA}{T} \ll 1, \quad \frac{A_y}{L} \ll 1$$

onde A é a área da seção transversal do cabo, T é a tensão no cabo, E é o módulo de elasticidade, e L o comprimento do cabo. As frequências naturais do cabo rebocador são:



$$f_n = \frac{n}{2L} \left(\frac{T}{m} \right)^{1/2} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

Com a correspondente configuração do modo

$$Y_n(x, t) = y_n \sin \frac{n \pi z}{L} \sin (2 \pi f_n t).$$

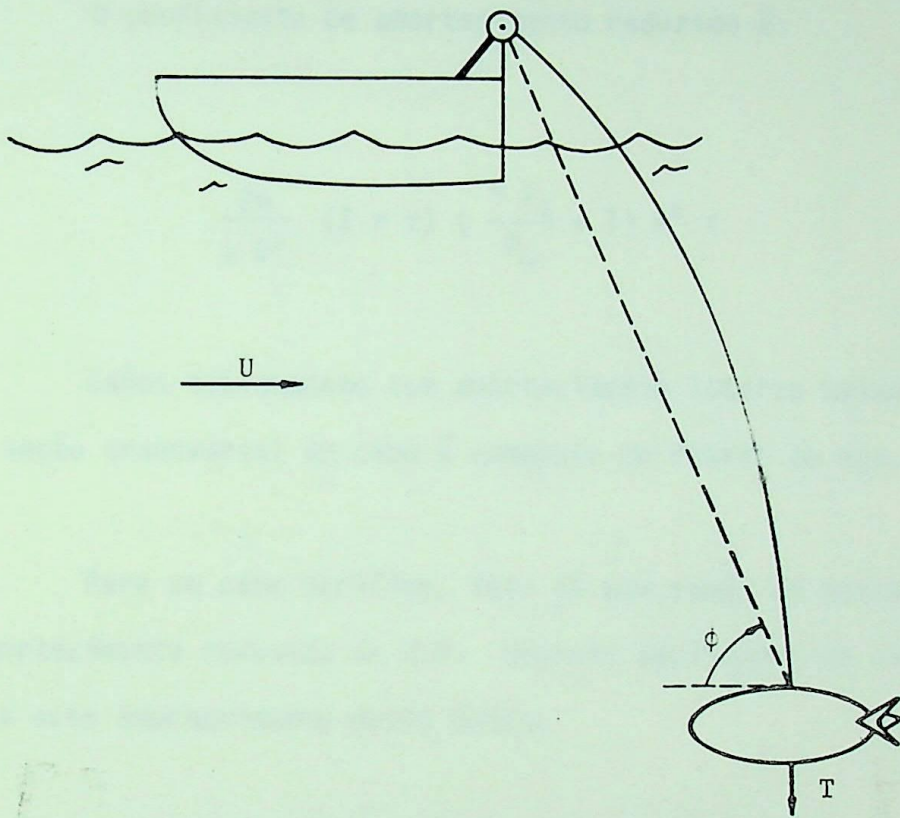


Fig. 3.22 Cabo rebocador

Ressonância com emissão de vórtices são esperados em velocidades:

$$V_i = \frac{f_n D}{S \cos \phi}$$

Se a seção transversal do cabo \bar{e} composta de uma fração (k) de

fibras tensionadas à carga de trabalho, tendo uma densidade ρ_s , então a razão de massa do cabo é:

$$\frac{m}{\rho D^2} = \frac{\pi}{4} \left(K \frac{\rho_s}{\rho_w} + 1 \right),$$

onde ρ_w é a densidade da água, e m inclui a massa do cabo e a massa adicional da água.

O coeficiente de amortecimento reduzido é:

$$\frac{2m}{\rho D^2} (2 \pi \tau) \left(\frac{K \rho_s}{\rho_w} + 1 \right) \pi^2 \tau$$

Cabos tipicamente tem amortecimento interno baixo ($\tau \approx 0,005$), e 80% e da seção transversal do cabo é composta de fibras de aço.

Para um cabo marítimo, isto dá uma razão de massa de 5,8 e um fator de amortecimento reduzido de 0.4. Grandes amplitudes de vibrações são esperadas para este amortecimento muito baixo.

As grandes amplitudes de vibrações correlatam a emissão de vórtices e assim vórtices são formadas nas esteiras posteriores bidimensionais dos cabos marítimos vibrando (Ref. 3.49).

As grandes amplitudes de vibração produzem um acentuado bloqueio na banda.

Como a velocidade do fluxo é variável, o cabo passa de uma ressonância para outra, como mostrado na fig. 3.23.

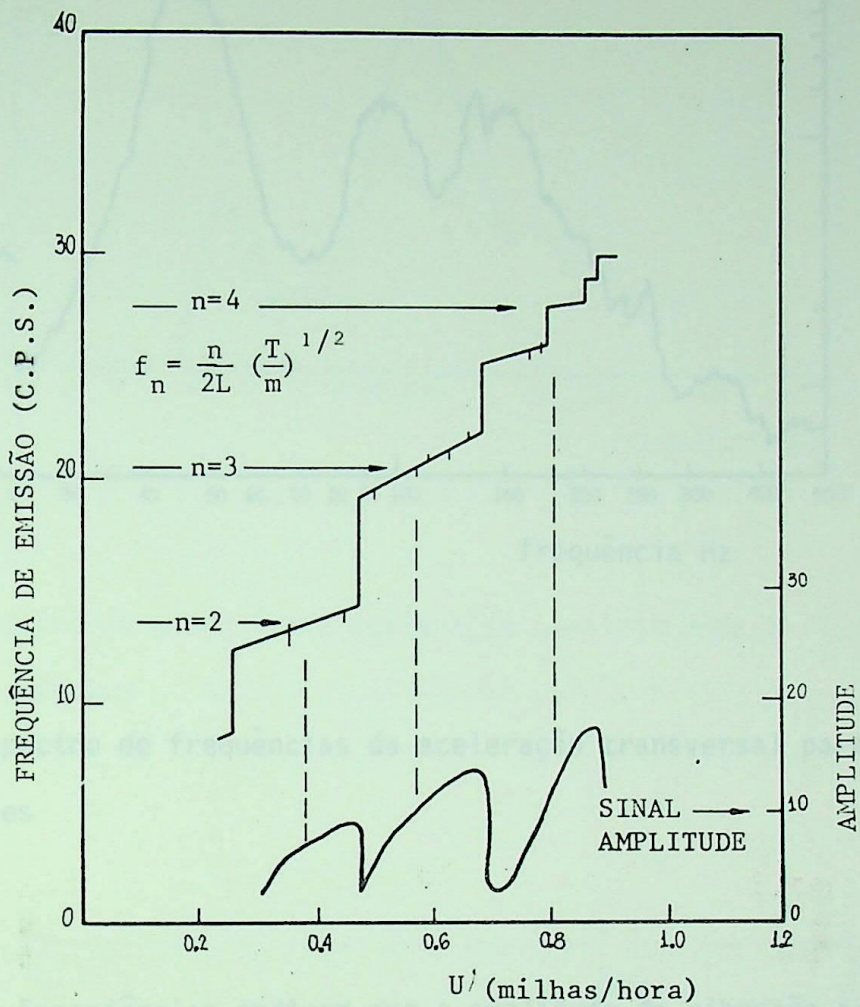


Fig. 3.23 Frequências características de um cabo flexível de 3 ft de comprimento e um diâmetro de 0,1 in. (Ref. 3.42).

As amplitudes de vibrações do cabo são limitadas somente por uma redução de forças de vórtices em grandes amplitudes.

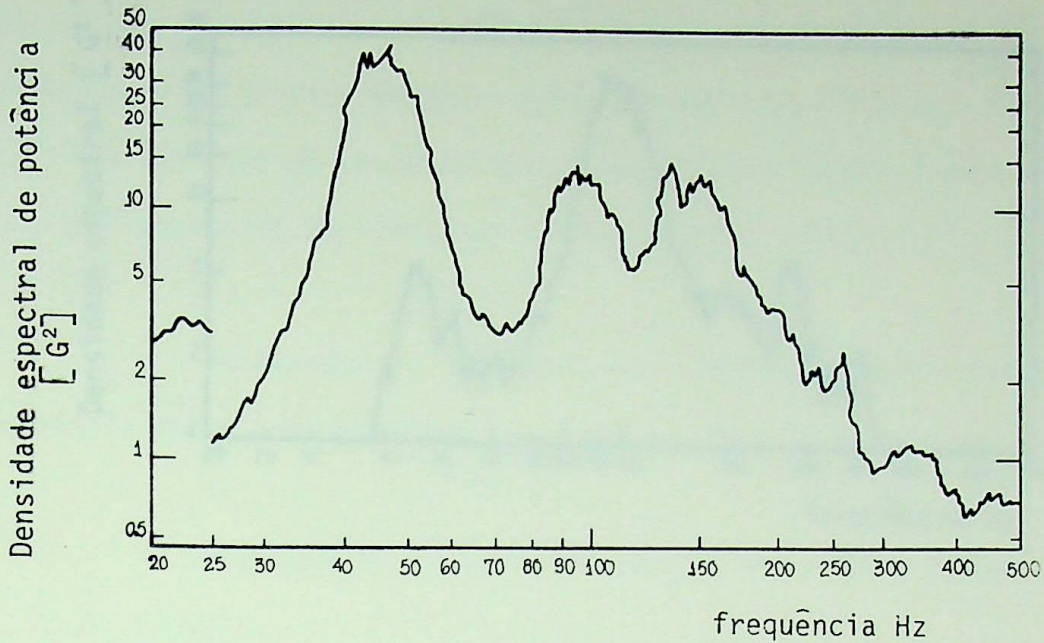


Fig. 3.24 Espectro de frequências da aceleração transversal para um cabo simples

Experiências indicam que a amplitude de vibração induzida por vórtices não é reduzida pela inclinação do cilindro em um ângulo de ataque moderado para o fluxo (Ref. 3.50). O modelo da esteira oscilante prediz que o limite de amplitude torna-se 1,6 diâmetros para a configuração do modo senoidal. Assim pode-se esperar que o deslocamento pico a pico de um ante-nô é cerca de 3,2 diâmetros para cabos marítimos.

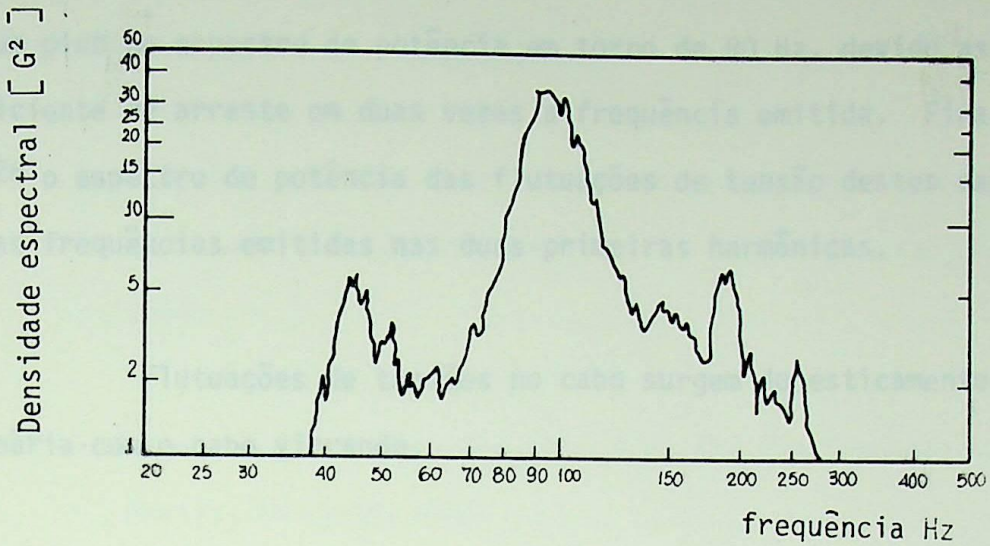


Fig. 3.25 Espectro de potência da aceleração paralela para o fluxo por um ca
bo simples

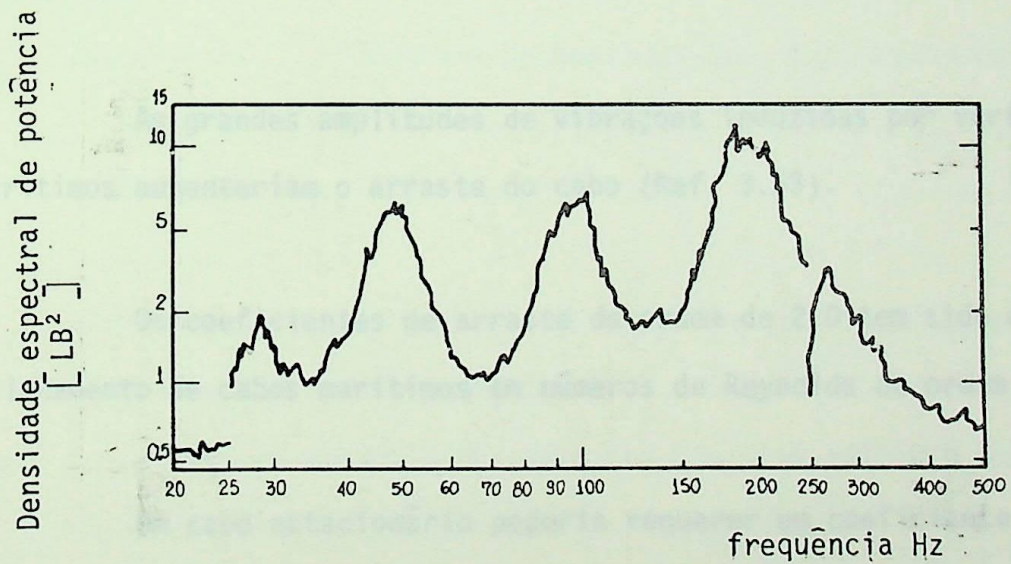


Fig. 3.26 Espectro de potência da flutuação de tensões para um cabo simples.

A fig. 3.24 mostra o espectro de potência da aceleração trans -
versal de um cabo marítimo em um ante-nô com emissão de frequência em torno de

45 Hz. O espectro de potência da aceleração paralela para o fluxo na fig. 3.25 mostra um pico no espectro de potência em torno de 90 Hz, devido as flutuações do coeficiente de arraste em duas vezes a frequência emitida. Finalmente, na fig. 3.26 o espectro de potência das flutuações de tensão destes cabos mostram picos nas frequências emitidas nas duas primeiras harmônicas.

Flutuações de tensões no cabo surgem do esticamento e distorção na catenária com o cabo vibrando.

Este problema não linear requer uma solução numérica complexa (Ref. 3.51, 3.52).

Embora que, seja bem conhecido o fato de que as grandes amplitudes de vibrações induzidas em cabos marítimos possam fadigar e quebrar um cabo em poucas horas.

As grandes amplitudes de vibrações induzidas por vórtices dos cabos marítimos aumentariam o arraste do cabo (Ref. 3.53).

Os coeficientes de arraste da ordem de 2,0 tem sido usados para o dimensionamento de cabos marítimos em números de Reynolds da ordem de 10^4 .

Um cabo estacionário poderia requerer um coeficiente de arraste de somente 1,2.

REFERÊNCIAS

- 3.1 Marris, A.W., "A Review of Vortex Streets periodic wakes and Induced Vibration Phenomena", J. Basic Eng. 86,185 - 194 1964.
- 3.2 Strouhal, V., "Über eine besondere Art der Tonerregung", Ann. Physik, Leipzig, 1878.
- 3.3 Rayleigh, L., phil. Mag. 7, 149, 1879.
- 3.4 Bénéard, H., "Formation de Centres de Giration a l'arriere d'un obstacle en Mouvement", Comp. Rend. 146, 1908.
- 3.5 Karman, Th., "Über den Mechanismus des Widerstandes den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt", Nachr. Königl. Gesellschaft, 1912.
- 3.6 Lienhard, J.H., "Synopsis of Lift, Drag and Vortex Frequency Data for Rigid circular cylinders", Washington State University, College of Engineering, Research Division Bulletin 300,1966.
- 3.7 Drescher, H., "Messung der auf querongeströmte Zylinder ausgeübten zeitlich veränderlichen Drucke", Z. F. Flugwiss 4,17-21, 1956.
- 3.8 Roshko, A., "Experiments on the Flow past a cylinder at very high Reynolds number", J. Fluid Mach. 10, 345-356, 1961,

- 3.9 Scraeffer, J. W., and S. Eskinazi, "An Analysis of the Vortex Street Generated in a Viscous Fluid", J. Fluid Mech. 6, 241-260, 1959.
- 3.10 Humphreys, J.S., "On a Circular cylinder in a Steady wind at Transition Reynolds Numbers", J. Fluid Mech. 9, 603-612, 1960.
- 3.11 Roshko, A., "On the Development of Turbulent Wakes from Vortex Streets", National Advisory committee for Aeronautics Report, NACA - TN - 2913, 1953.
- 3.12 Mair, W. A., and D. Y. Maule, "Bluff Bodies and Vortex Shedding - A Report on Euromech 17", J. Fluid Mech 45, 209-224, 1971.
- 3.13 Morkovin, M. V., "Flow Around a Circular Cylinder", Symposium, on Fully separated Flows", in proceedings of the American Society of Mechanical Engineers, Engineering Division Conference, Held in Philadelphia, May 18-20, 1964, A.G. Hansen (ed.), American Society of Mechanical Engineers, New York, 1964, pp. 102-118.
- 3.14 Chui, W.S., and J. H. Lienhard, "On Real Fluid Flow over yawed circular cylinders", J. Basic Eng. 89, 851-870, 1967.
- 3.15 Roshko, "On the Drag and Shedding Frequency of Two-Dimensional Bluff Bodies", National Advisory Committee for Aeronautics Report NACA - TN - 3169, July 1954.

- 3.16 Wardlaw, R.L., "On Relating Two-Dimensional Bluff Body Potential Flow to the periodic Vortex Wake", DME/NAE Quarterly Bulletin 1966, 2.
- 3.17 Mujumdar, A.S., and W. J. M. Douglas, "Vortex Shedding from Slender Cylinders of various Cross Sections", J. Fluids Eng. 95, 474-476, 1973.
- 3.18 Vickery, B. J., "Fluctuating Lift and Drag on a Long Cylinder of Square Cross Section", J. Fluid Mech. 25,481, 1966.
- 3.19 Toebes, G.H., and P.S. Eagleson, "Hydroelastic Vibrations of Flat Plates Related to Trailing Edge Geometry", J. Basic Eng. 83, 671-678, 1961.
- 3.20 Jones, G.W., J.J. Cincotta, and R. W. Walter, "Aerodynamic Forces on Stationary and Oscillating Circular Cylinder at High Reynolds Numbers", National Aeronautics and Space Administrations Report NASA TR R-300, February 1969.
- 3.21 Fung, Y.C., "An introduction to the Theory of Aeroelasticity", Dover, N. Y. 1969, P.62
- 3.22 Fung, C.C., "The measurement of Vortex-Induced Effects in Flow past Stationary and Oscillating Circular and D-Section Cylinder", M. A. Sc. Thesis, University of British Columbia, 1968.

- 3.23 Task Committee on Wind Forces, *"Wind Forces on Structures"*,
Trans. Am. Soc. Civil Engrs. 126, 1124-1198, 1961.
- 3.24 Fitz-hung, J.S., *"Flow Induced Vibration in Heat Exchangers"*,
Oxford University Report RS 57, January 1973 (AERE- P7 238).
- 3.25 Zdravkovich, M.M., and J.A. Nuttall, *"On the Elimination of
Aerodynamic Noise in a Staggered Tube Bank"*, J. Sound and
Vibration 34, 173-177, 1974.
- 3.26 Griffin, O. M. and S.E. Ramberg, *"The Effects of Synchronized
Cylinder Vibrations on Vortex Formation and Strength, Velocity
Fluctuations, and Mean Flow"*, Paper E-3, presented at the
Symposium on Flow Induced Structural Vibrations, Held in
Karlsruhe, Germany, August 14-16, 1972.
- 3.27 Toebe, G.H., *"The Unsteady Flow and Wake near an oscillating
Cylinder"*, J. Basic Eng. 91, 493, 1969.
- 3.28 Bishop, R.E.D., and A. Y. Hassan, *"The Lift and Drag Forces on a
circular cylinder in a Flowing Field"*, proc. Roy. soc. London
Ser. A, 227, 51-75, 1964.
- 3.29 Koopman, G.H., *"The Vortex wakes of Vibrations Cylinders at Low
Reynolds Numbers"*, J. Fluid Mech. 28, 501-512, 1967.
- 3.30 Griffin, O.M., and S.E. Ramberg, *"The Vortex-Street Wakes of
Vibrating Cylinders"*, J. Fluid Mech. 66, 553-576, 1974.

- 3.31 Wooten, L.R., M.H., Warner, and D.H. Cooper, "*Some Aspect of the Oscillations of Full Scale Piles*", Paper presented at the Symposium on Flow Induced Structural Vibrations, Held in Karlsruhe, Germany, August 14-16, 1972.
- 3.32 King, R., M.J. Prosser, and D.J. Johns, "*On Vortex Excitation of Model Piles in Water*", *J. Sound and Vibration* 29, 169-188 1972.
- 3.33 Keefe, R.T., "*An Investigation of the Forces Acting on a Stationary circular cylinder in a Subsonic Stream, and of the associated sound Field*", University of Toronto, Institute of Aerophysics Report UTIA 76, September 1961.
- 3.34 Hartlen, R.T., and I. G. Currie "*Lift Oscillation Model for Vortex-Induced Vibration*", *J. Eng. Mech. Div. Am. Soc. Civil Engrs.* 96, 577-591, 1970.
- 3.35 Skop, R.A., and O.M. Griffin, "*A Model for the Vortex-Excited Resonant Vibrations of Bluff Bodies*", *J. Sound and Vibration* 27, 225-233, 1973.
- 3.36 Iwan, W.D., and R. D. Blevins, "*A Model for Vortex-Induced Oscillation of Structures*", *J. Appl. Mech.* 41, 581-586, 1974.
- 3.37 Iwan, W.D., "*The Vortex Induced oscillation of Elastic Structural Elements*", *J. Eng. Industry*, 97, 1378-1382, 1975.

- 3.38 Skop, R.A., O.M. Griffin, and G.H. Koopmann, "*The Vortex-Excited Resonant Vibrations of Circular Cylinders*", J. Sound and Vibrations 31, 235-249, 1973.
- 3.39 Scruton, C., "*On the Wind Excited Oscillation Stacks, Towers and Masts*", in Proceeding of the Conference on Wind Effects on Buildings and Structures, Held in Teddington, England, June 1963, National Physical Laboratory.
- 3.40 Vickery, B.J., and R.D. Watkins, "*Flow-Induced Vibrations of Cylindrical Structures*" in Proceedings of the First Australian Conference, Held at the University of Western Australia, 1962.
- 3.41 Hartlen, R.T., W. D. Baines, and I. G. Currie, "*Vortex - Excited Oscillations of a circular cylinder*", University of Toronto Report UTME - TP 6809, November 1968.
- 3.42 Dale, J.H. Nenzel, and Mc Candless, "*Dynamics Characteristics of Underwater Cables-Flow Induced Transverse Vibrations*", U. S. Naval Air Development Center Report NADC - AE-6620, 1966.
- 3.43 Blevins, R.D., and T.E. Burton, "*Fluid Forces Induced by Vortex Shedding*", J. Fluid Eng., 95, 19-24, 1976.
- 3.44 Walshe, D.E., "*Some Measurements of the Excitation due to Vortex Shedding of a Smooth Cylinder of Circular Cross Section*", National Physical Laboratory Aero Report 1062, May 1962.

- 3.45 Walshe, D.E., and L.R. Wooltoon, "*preventing Wind Induced Oscillations of Structures of Circular Section*", proc. Inst. Civil Engrs., London, 1970.
- 3.46 Scanlan, R.H., and R.L. Wardlaw, "*Redution of Flow Induced Structural Vibrations*", in *Isolation of Mechanical Vibration, Impact, and Noise*, J.C. Snowden and E.E. Ungar (eds), American Society of Mechanical Engineers, New York, 1973.
- 3.47 Funakawa, M., "*Vibration of Tube Banks by Wake forces*", Paper presented at the Symposium on Flow Induced Vibrations in Heat Exchangers, Held in Keswick, England, April 1973.
- 3.48 Hanko, Z.G., "*Vortex Induced Vibrations at Low-Head weirs*", proc. Am. Soc. Civil Engrs. Hydraulics Div. 93, 255-270, 1967.
- 3.49 Dale, J.R., and R.A. Holler, "*Vortex Wakes from Flexible circular cylinders at low Reynolds Numbers*", U. S. Naval Air Development Center Report NADC - AE- 7011, July, 1970.
- 3.50 King, R., "*Vortex Excited Oscillations of yawed circular cylinders*", ASME Paper n^o. 76. WA/FE-16, to be published in *J. Fluids Eng.*, 1977.
- 3.51 Kerney, K.P., "*Small pertubation Analyses of Oscillatory Tow-cable Motion*", Naval Ship Research and Development Center Report 3430, November 1971.

- 3.52 Cannon, T.C., and J. Genin, "Three-dimensional Dynamical Behavior of a Flexible Towed Cable", *Aeronautical Quarterly*, 23, 201 - 210, 1972.
- 3.53 Griffin, O.M., and S.E. Ramberg, "On Vortex Strength and Drag in Bluff-Body Wakes", *J. Fluid Mech.* 69, 721-728, 1975.

CAPÍTULO 4

CONTROLE DAS VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES

4.1 INTRODUÇÃO

O objetivo desta análise é estabelecer as relações que governam o controle das vibrações forçadas induzidas por vórtices em estruturas cilíndricas, e limitar estas amplitudes de acordo com as exigências operacionais.

Analisaremos o amortecimento das estruturas vibrantes, que se não descritas em termos de suas equações normativas.

4.2 ESTRUTURA VIBRANTE

A equação diferencial parcial que descreve o movimento de uma viga delgada é:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x,t) \quad (4.1)$$

onde:

- y é o deslocamento normal da viga na mesma direção,
- z é a distância ao longo do eixo da viga,
- m é a massa por unidade de comprimento da viga,
- F é a força externa por unidade de comprimento aplicada normal ao eixo da viga na direção y ,
- I é o momento de inércia da área, sendo:

$$I = \int_A y^2 dA \quad (4.2)$$

CAPÍTULO 4

CONTROLE DAS VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES

4.1 INTRODUÇÃO

O objetivo desta análise é estabelecer as relações que governam o controle das vibrações forçadas induzidas por vórtices em estruturas cilíndricas, e limitar estas amplitudes de acordo com as exigências operacionais.

Analisaremos o amortecimento das estruturas vibrantes, que se não descritas em termos de suas equações normativas.

4.2 ESTRUTURA VIBRANTE

A equação diferencial parcial que descreve o movimento de uma viga delgada é:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[E I \frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} \right] + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F(z,t) \quad (4.1)$$

onde: y é o deslocamento normal da viga na mesma direção,
 z é a distância ao longo do eixo da viga,
 m é a massa por unidade de comprimento da viga,
 F é a força externa por unidade de comprimento aplicada normal
ao eixo da viga na direção y , e
 I é o momento de inércia da área, sendo:

$$I = \int_A \xi^2 dA \quad (4.2)$$

onde: A é a área da seção transversal, e
 ξ é a distância do afastamento do centro da viga na direção y .

Em geral, o momento de inércia, o módulo de elasticidade e a massa por unidade de comprimento ao longo do vão da viga variam, ainda que neste tópico eles serão considerados uniformes ao longo do vão.

As soluções da equação (4.1) são encontradas em termos das equações associadas da vibração livre da viga uniforme:

$$E I \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (4.3)$$

Existem dois grupos naturais de condições de contorno na viga:

a. Condições de contorno geométricas.

Estas surgem da sujeição da viga. Por exemplo, se a extremidade da viga em $z = 0$ é segurada por um pino, então $y(0,t) = 0$. Se a extremidade da viga em $z = 0$ é fixada, então:

$$\frac{\partial y}{\partial z}(0,t) = 0$$

b. Condições de contorno cinemáticas

Estas decorrem das forças e momentos sobre a viga. Por exemplo, o momento sobre a extremidade de uma viga fixada por pinos pode ser zero.

Desde que o momento na viga é $E I \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$, uma fixação por pinos em $z = 0$ implica que $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(0,t) = 0$.

Para uma viga duplamente articulada de comprimento L , as condições de contorno são:

$$y(0,t) = y(L,t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(0,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(L,t) = 0 \quad (4.4)$$

Soluções para as equações (4.3) e (4.4), as quais podem ser separadas nas componentes de espaço e tempo são obtidas:

$$y(z,t) = \psi(z) y(t) \quad (4.5)$$

Substituindo-se a equação (4.5) na equação (4.3) e rearranjando, a equação (4.3), torna-se

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^4 \psi(z)}{dz^4} = \frac{m}{E I} \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \text{const.} \quad (4.6)$$

A solução da equação (4.6) usando-se as condições de contorno de (4.4)

$$\begin{aligned}\psi(0) &= \psi(L) = 0 \\ \psi''(0) &= \psi''(L) = 0\end{aligned}\quad (4.7)$$

é

$$y(t) = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \operatorname{cos} \omega_n t; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

onde

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{E I}{m} \right)^{1/2}, \quad (4.8)$$

e

$$\psi_n(z) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi z}{L} \right); \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.9)$$

ψ_n são os modos naturais da estrutura, e

ω_n são as frequências naturais da estrutura.

O modo da mais baixa frequência, o qual é dado para $n=1$, é chamado de modo fundamental.

As formas dos modos naturais e frequências da viga com a variação das condições de contorno são dados nas Refs. 4.2 até 4.4.

A solução completa das equações (4.6 e 4.7) é

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A \operatorname{sen} \omega_n t + B \operatorname{cos} \omega_n t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi z}{L} \right) \quad (4.10)$$

onde: A e B são constantes arbitrárias

Observe que os modos naturais são ortogonais sobre o vão da viga.

$$\int_0^L \psi_i \psi_j dz = \begin{cases} 0 & ; \text{ se } i \neq j \\ L/2 & ; \text{ se } i = j \end{cases} \quad (4.11)$$

Os modos naturais da estrutura são garantidos como sendo ortogonais se o sistema de equações são auto-adjuntos, Ref. 4.1

As soluções para a equação original do movimento forçado (4.1) são obtidas em termos de uma expansão dos modos naturais:

$$y(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \psi_n(z) \quad (4.12)$$

Substituindo-se (4.12) em (4.1), temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[E I \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 y_n(t) + m \ddot{y}_n(t) \right] \sin \left(\frac{n\pi z}{L} \right) = F(z,t) \quad (4.13)$$

A multiplicação de ambos os membros de (4.13) por $\sin \left(\frac{j\pi z}{L} \right)$, e integração sobre o comprimento da viga, e usando-se a propriedade da ortogonalidade, vem:

$$\ddot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{\int_0^L F(z,t) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz}{\int_0^L m \sin^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz} ; n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.14)$$

Em geral se a viga não possui modos ortogonais eq (4.11), como é frequentemente o caso,

$$\ddot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{\int_0^L F(z,t) \psi_n(z) dz}{\int_0^L m \psi_n^2(z) dz} ; n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.15)$$

Esta equação diferencial ordinária descreve o movimento de uma determinada estrutura unidimensional suportada por molas, respondendo as forças generalizadas dadas pelo lado direito da equação (4.15).

A soma das respostas da estrutura equivalente dá a resposta da estrutura contínua eq. (4.12).

Assim, se a estrutura possui modos ortogonais, a equação diferencial parcial (4.1) pode ser reduzida a uma equação diferencial ordinária e equivalente (4.15).

Mesmo nos casos onde os modos da estrutura não são ortogonais, a equação (4.15) dá uma aproximação da resposta da estrutura em um dado modo.

Se a massa da estrutura varia ao longo do vão então, em geral a viga não possui modos ortogonais. Entretanto, se a massa variável não afeta significativamente a configuração do modo, então uma massa equivalente por unidade de comprimento pode ser definida como:

$$m = \frac{\int_0^L m(z) \psi_n^2(z) dz}{\int_0^L \psi_n^2(z) dz} \quad (4.16)$$

A massa equivalente \bar{m} é uma função da forma do modo.

Contudo, se a massa por unidade de comprimento da estrutura \bar{m} é constante, $m \bar{m}$ sempre igual a massa por unidade de comprimento da estrutura.

Ordinariamente, o conceito de massa equivalente somente \bar{m} é usado quando há uma boa razão para acreditar que a estrutura vibre primeiramente em um modo simples de forma conhecida.

Usando-se as equações (4.15) e (4.16), temos:

$$\ddot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{\int_0^L F(z,t) \psi_n(z) dz}{m \int_0^L \psi_n^2(z) dz}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.17)$$

O lado direito da equação (4.17) é $\frac{1}{m}$ vezes a força generalizada do n-ésimo modo, na direção y .

A força $F(z,t)$ é a soma das componentes de amortecimento e ex citação:

$$F = F^A + F^E \quad (4.18)$$

A componente que amortece a estrutura, F^A , é aproximada por um amortecimento viscoso, o qual retarda o movimento com uma força proporcional a velocidade.

$$F^A = -c \frac{\partial y}{\partial t} \quad (4.19)$$

Substituindo-se as equações (4.18), (4.19) em (4.17), temos:

$$\ddot{y}_n + 2 \tau_n \omega_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{\int_0^L F^E(z,t) \psi_n(z) dz}{m \int_0^L \psi_n^2(z) dz}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.20)$$

onde o fator de amortecimento viscoso para cada modo tem sido definido como:

$$\tau_n = \frac{c}{2 m \omega_n} \quad (4.21)$$

4.3 FORÇAS AERODINÂMICAS

De acordo com a expressão (3.22), a força de sustentação dinâmica do fluido é dada por:

$$F(z,t) = \frac{1}{2} \rho U^2 D C_L(z) \cos \omega_{st} \quad (3.22)$$

onde:

- $C_L(z)$ é um coeficiente de sustentação,
- ρ é a densidade do fluido,
- D é a largura da estrutura e
- U é a velocidade da linha de corrente livre

A frequência da força induzida está ligada à velocidade do fluxo através da relação (3.1)

$$f_s = \frac{S U}{D} \quad (3.1)$$

onde: S é a constante de Strouhal, sendo, de acordo com a expressão (3.24)

$$\frac{A_y}{D} = \frac{\pi}{(2\pi S)^2} \cdot \frac{C_{LE}}{\delta_r} \cdot \frac{\int_0^L \psi_n(z) dz}{\int_0^L \psi_n^2(z) dz} \quad (3.24)$$

onde: C_{LE} é definido pela equação (3.23), como sendo:

$$C_{LE} = \frac{\int_0^L C_L(z) \psi_n(z) dz}{\int_0^L \psi_n(z) dz} \quad (3.23)$$

e apresentando na tabela 3.3, onde para o caso do fluxo completamente correlacionado, $l_c \gg L$, modo senoidal, e para $2 \times 10^2 \leq Re \leq 2 \times 10^5$, onde existe uma esteira de vórtice bem formada, temos:

$$C_{LE} = a + \frac{\pi}{4} b \left(\frac{A_y}{D}\right) + \frac{2}{3} c \left(\frac{A_y}{D}\right)^2; \text{ com}$$

$$a = 0,35$$

$$b = 0,60$$

$$c = -0,93$$

fazendo-se $\frac{Ay}{D} = \bar{y}$, temos:

$$C_{LE} = a + \frac{\pi}{4} b \bar{y} + \frac{2}{3} c \bar{y}^2 \quad (4.22)$$

Definindo-se I_{1n} e I_{2n} como fatores de forma, onde:

$$I_{1n} = \int_0^L \psi_n(z) dz \quad (4.23.a)$$

$$I_{2n} = \int_0^L \psi_n^2(z) dz \quad (4.23.b)$$

temos:

$$\bar{y} = \frac{\pi}{(2\pi D)^2} \cdot \frac{C_{LE}}{\delta r} \cdot (I_{1n}/I_{2n}) \quad (4.24)$$

Os fatores de forma representam quantidades numéricas bem definidas, onde o índice n indica que este fator é função do modo de vibração e das condições de contorno, sendo independentes dos parâmetros físicos da estrutura.

4.4 MODELO SIMPLIFICADO DE UMA ESTRUTURA

4.4.1 Regras de equivalência

Como os dispositivos de amortecimento em exame são do tipo discreto, a análise é grandemente simplificada quando substituímos a massa distribuída da estrutura por um sistema simples "massa-mola", equivalente em seu comportamento ao sistema inicial, no ponto onde o neutralizador é ligado ao sistema

ma. (ponto p , $z = s$), visto que este procedimento, é permissível, conforme discutido no item 4.2 .

Denominaremos o referido ponto como "ponto-guia".

Dentre os vários modos de modelar o sistema, adotaremos o que obedece as seguintes regras:

- a. Para amplitudes iguais no "ponto-guia", ambos os sistemas têm a mesma energia.
- b. Ambos os sistemas têm a mesma frequência.
- c. Ambos os sistemas têm a mesma potência de entrada do fluxo de fluido.

4.4.2 Massa equivalente do "ponto-guia", (m_n)

Pela regra (a), a energia armazenada será a mesma em ambos os sistemas (real e equivalente).

Para efeito de cálculo nós igualamos as máximas energias cinéticas de ambos os sistemas (igual a energia total, porque a energia de deformação é zero quando a energia cinética é máxima).

A energia cinética da estrutura é calculada como segue:

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dy_n}{dt} \right)_{\text{máx.}}^2 \rho_0 A dz, \text{ donde:}$$

$$E_1 = \frac{1}{2} m_0 A_y^2 \omega_s^2 \int_0^L \psi_n^2(z) dz \quad (4.25)$$

quando, combinamos com a relação (3.25)

$$y_n = Ay \psi_n(z) \text{ sen } (\omega_{st} t) \quad (3.25)$$

onde, $m_0 = \rho_0 A L$, massa total da estrutura.

A máxima energia cinética do sistema massa-mola de massa m_n , de amplitude $Ay \psi_n(s)$, (amplitude no ponto-guia $z=s$), e frequência ω_s é:

$$E_2 = \frac{1}{2} m_n A_y^2 \psi_n^2(s) \cdot \omega_s^2 ; \quad (4.26)$$

igualando-se E_1 a E_2 , resulta:

$$m_n = \frac{\int_0^L \psi_n^2(z) dz}{\psi_n^2(s)} \cdot m_0 \quad (4.27)$$

4.4.3 Rigidez equivalente no ponto-guia (k_n)

Pela segunda regra de equivalência, a frequência do sistema real, é:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_n}{m_n}} \quad (4.28)$$

o valor de k_n pode ser deduzido combinando-se a relação (4.15) com a obtida a partir de 4.3 .

4.4.4 Força equivalente do ponto-guia

A potência de entrada do fluxo será igual a potência gerada por uma força equivalente F_n , agindo no ponto-guia.

A potência de entrada para o sistema será calculada, supondo que a força aerodinâmica de sustentação está em fase com a velocidade do deslocamento da estrutura (máxima potência de entrada).

$$dw_1 = \frac{1}{2} F \cdot \left(\frac{dy_n}{dt}\right)_{\text{máx}} dz, \quad \text{com}$$

$$y_n = Ay \psi_n(z) \text{ sen } (\omega_{st})$$

como

$$F = \frac{1}{2} \rho U^2 D C_L(z) \cos(\omega_{st}), \text{ temos}$$

$$dw_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 D Ay \psi_n(z) \omega_s C_L(z) \cos(\omega_{st}) dz$$

$$w_{1\text{máx}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rho D Ay \omega_s U^2 \int_0^L C_L(z) \psi(z) dz$$

mas de (3.23), temos:

$$\int_0^L C_L(z) \psi_n(z) dz = C_{LE} \int_0^L \psi_n(z) dz; \text{ logo:}$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rho Ay U^2 \omega_s C_{LE} I_{1n}; \quad (4.29)$$

onde:

$$I_{1n} = \int_0^L \psi_n(z) dz$$

De 3.1, temos; $f_s = \frac{SU}{D}$, logo:

$$w_1 = \frac{1}{2} \rho D^4 \bar{y} \frac{\omega_s^3}{8 \pi^2 S^2} \cdot C_{LE} \cdot I_{1n} \quad (4.30)$$

A potência de entrada do sistema equivalente, Força F_n , amplitude de $Ay \psi_n(s)$ no ponto-guia, e frequência ω_s , é:

$$w_2 = \frac{1}{2} Ay \psi_n(s) \omega_s \cdot F_n \quad (4.31)$$

Fazendo-se $w_1 = w_2$, temos:

$$F_n = \frac{1}{\psi_n(s)} \cdot \frac{1}{8 \pi^2 S^2} \cdot \rho \cdot D^3 \omega_s^2 C_{LE} \cdot I_{1n} \quad (4.32)$$

4.4.6 Neutralizador

A localização mais eficiente do neutralizador de frequências discretas é um sistema massa-mola com amortecimento proporcional a velocidade, e sintonizado à frequência do sistema amortecido, e localizando no ponto de máxima amplitude.

Conforme descrito no capítulo 1, o neutralizador consiste de uma mola suportando uma massa e um amortecedor viscoso, com parâmetros bem definidos como segue:

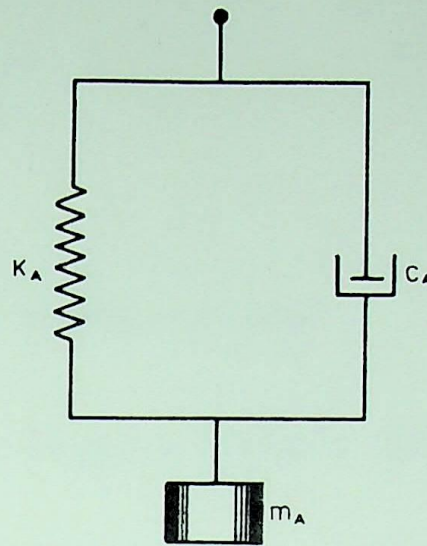


Fig. 4.1 Neutralizador com amortecimento viscoso

os parâmetros do sistema são:

k_A = Rigidez da mola

m_A = Massa do neutralizador

c_A = Coeficiente de amortecimento viscoso

τ_A = Fator de amortecimento

onde:

$$\tau_A = \frac{c_A}{2 m_A \omega_{nA}} = \frac{c_A}{2 \sqrt{k_A m_A}} = \frac{c_A}{c_{\text{crit.}}} \quad (4.33)$$

sendo:

$c_{\text{crit.}}$ \equiv amortecimento crítico

A frequência natural do sistema absorvedor $\bar{\omega}$ é dada por:

$$\omega_A = \sqrt{k_A/m_A} \quad (4.34)$$

4.4.6 Equações que governam o sistema amortecido

4.4.6.a O modelo equivalente do sistema amortecido $\bar{\omega}$ é representado na fig.4.2

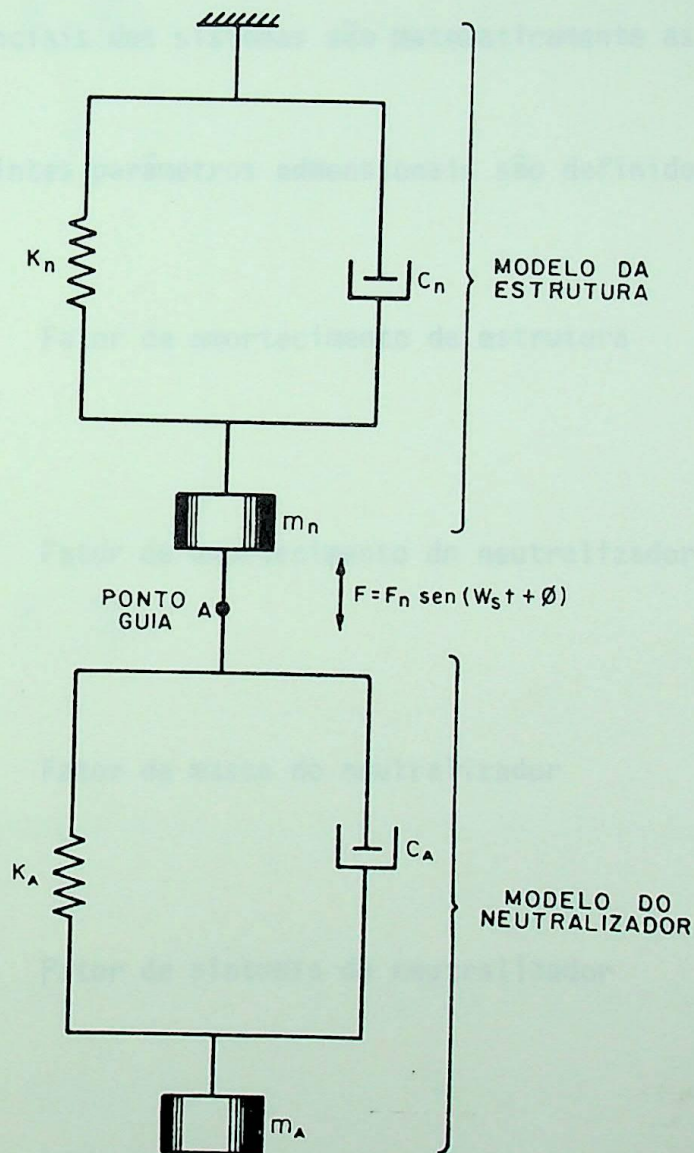


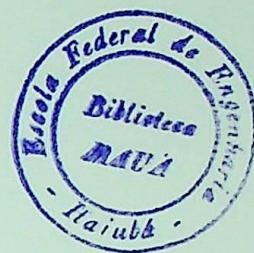
Fig. 4.2 Sistema acoplado, estrutura neutralizador

4.4.6.b Analogia eletromecânica

Será usado a equivalência eletromecânica para a determinação da relação entre força e deslocamento.

Sendo que a analogia adotada será a analogia:

Tensão - Força
Corrente - Velocidade



onde as equações diferenciais dos sistemas são matematicamente as mesmas.

Os seguintes parâmetros adimensionais são definidos:

$$\tau_n = \frac{C_n}{2\sqrt{m_n \cdot k_n}} ; \quad \text{Fator de amortecimento da estrutura} \quad (4.36)$$

$$\tau_A = \frac{C_A}{2\sqrt{m_A \cdot k_A}} ; \quad \text{Fator de amortecimento do neutralizador} \quad (4.37)$$

$$\mu = \frac{m_A}{m_n} ; \quad \text{Fator de massa do neutralizador} \quad (4.38)$$

$$\alpha = \frac{\omega_A}{\omega_n} ; \quad \text{Fator de sintonia do neutralizador} \quad (4.39)$$

$$\beta = \frac{\omega_S}{\omega_n} ; \quad \text{Frequência forçante relativa} \quad (4.40)$$

$$T_n = \frac{m_n \omega_n^2}{\omega_S} ; \quad \text{Fator de escala} \quad (4.41)$$

Representamos na fig. 4.3 o sistema acoplado massa-mola.

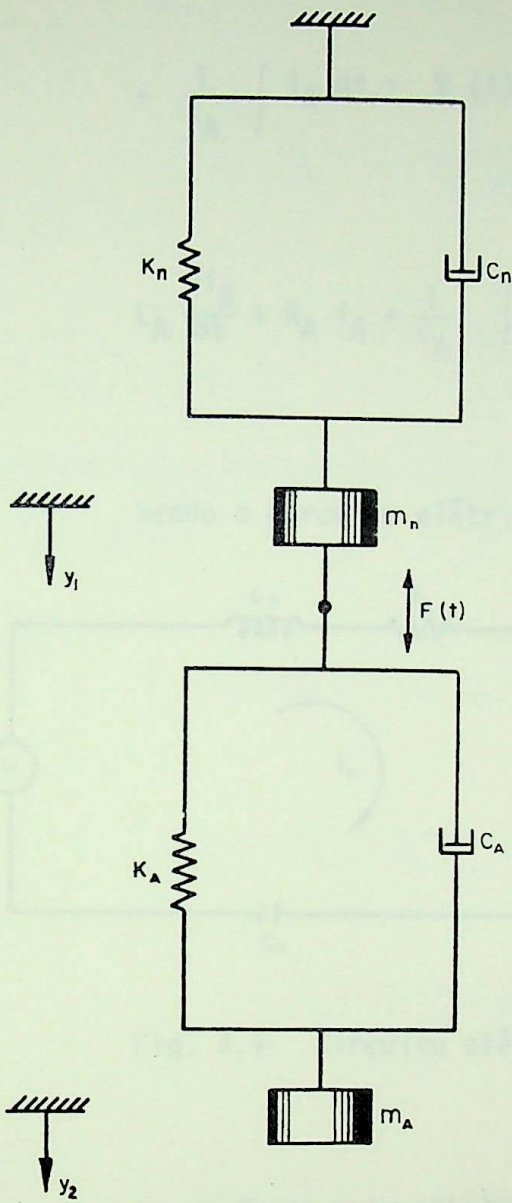


Fig. 4.3 Sistema Acoplado Equivalente

Uma aplicação da 2a. Lei de Newton, nos fornece:

$$(1) \quad m_n \ddot{y}_n + (C_A + C_n) \dot{y}_n + (k_A + k_m) y_n - C_A \dot{y}_A - k_A y_A = f(t)$$

$$(2) \quad m_A \ddot{y}_A + C_A \dot{y}_A + k_A y_A - C_A \dot{y}_n - k_A y_n = 0 \quad (4.42)$$

Usando-se a analogia tensão-força, conforme definido, temos as equações elétricas análogas.

$$(1) \quad L_A \frac{di_n}{dt} + (R_n + R_A) i_n + \left(\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_n} \right) \int i_A dt - R_A i_A - \frac{1}{C_A} \int i_A dt = V(t) \quad (4.43)$$

$$(2) \quad L_A \frac{di_A}{dt} + R_A i_A + \frac{1}{C_A} \int i_A dt - R_A i_A - \frac{1}{C_A} \int i_n dt = 0$$

Sendo o circuito elétrico análogo mostrado na fig. 4.4

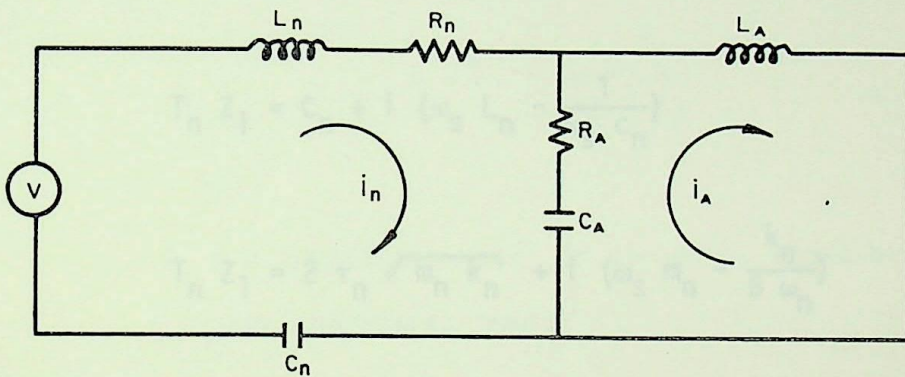


Fig. 4.4 Circuito elétrico análogo

ou em forma mais simplificada

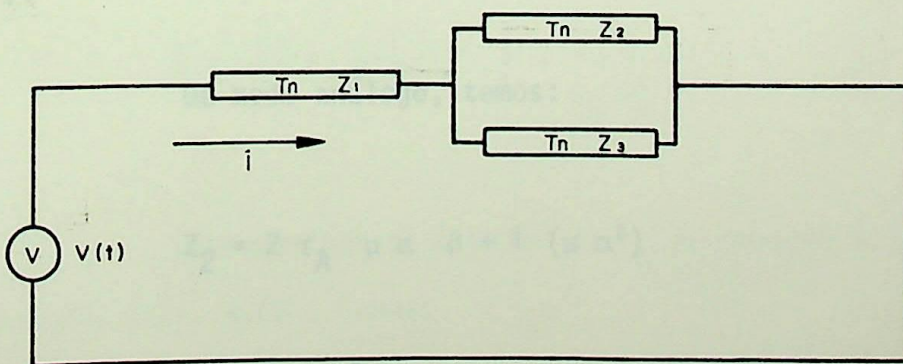


Fig. 4.5 Circuito elétrico análogo

Com

$$T_n Z_1 = R_n + i \left(\omega_s L_n - \frac{1}{\omega_s c_n} \right)$$

$$T_n Z_2 = R_A - i \left(\frac{1}{\omega_s c_A} \right) \quad (4.44)$$

$$T_n Z_3 = 0 + i (\omega_s L_A)$$

e considerando-se os parâmetros adimensionais definidos pelas relações (4.36) até (4.41), temos:

$$T_n Z_1 = C_n + i \left(\omega_s L_n - \frac{1}{\omega_s c_n} \right)$$

$$T_n Z_1 = 2 \tau_n \sqrt{m_n k_n} + i \left(\omega_s m_n - \frac{k_n}{\beta \omega_n} \right)$$

$$Z_1 = \frac{2 \tau_n \omega_n m_n \omega_s}{m_n \omega_n^2} + i \left(\frac{\omega_s m_n \omega_s}{m_n \omega_n^2} - \frac{m_n \omega_n^2 \omega_s}{\beta m_n \omega_n^2} \right)$$

$$\therefore Z_1 = 2 \tau_n \beta + i (\beta^2 - 1) \quad (4.45)$$

De modo análogo, temos:

$$Z_2 = 2 \tau_A \mu \alpha \beta + i (\mu \alpha^2) \quad (4.46)$$

$$Z_3 = i \mu \beta^2 \quad (4.47)$$

Da analogia, temos:

$$V = F_n \operatorname{sen} \omega_{st} \quad (4.48)$$

$$I = \left(\frac{dy_n}{dt} \right)_{\text{m\AA{x}}} \cos (\omega_{st} + \alpha) \quad (4.49)$$

4.4.7 Equação para a m\AA{x}ima amplitude

Considerando-se o circuito representado na fig. 4.5, temos:

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad (4.50)$$

onde Z \AA a imped\AAncia geral do circuito, considerando-se as rela\c\cões anteriores temos:

$$Ay \psi_n (s) \omega_s = \frac{F_n}{F_n Z} \quad (4.51)$$

que pode ser reescrita para

$$\bar{y} = \frac{Ay}{D} = \frac{1}{\psi_n (s)} \cdot \frac{1}{Z} \cdot \frac{F_n}{m_n \omega_n^2 D} \quad (4.52)$$

Introduzindo-se o valor de F_n da equação 4.32 e usando-se as rela\c\cões 4.23, 4.27, 4.40 , temos:

$$\bar{y} = \frac{\beta^2}{Z} \cdot \frac{1}{2 \pi^3 S^2} \cdot \frac{1}{\rho_0^1 / \rho} \cdot C_{LE} (I_{1n} / I_{2n})$$

ou

$$\bar{y} = \frac{G}{2 \pi^2 S^2 \rho_{or}} \cdot C_{LE} (I_{1n}/I_{2n}) \quad (4.53)$$

onde:

$G = \beta^2/Z$ \bar{e} a admitância geral do circuito

ρ'_0 \bar{e} a densidade aparente da estrutura

$\rho_{or} = \rho'_0/\rho$ \bar{e} a densidade relativa da estrutura com relação ao fluido.

G \bar{e} uma função do sistema dos parâmetros do neutralizador (μ , α , τ_A) e da frequência forçada reduzida, $\beta = (\omega_s/\omega_n)$.

A amplitude máxima da vibração A_y ($\bar{y} = \frac{A_y}{D}$) \bar{e} obtida pela solução da equação 4.53.

Pode ser mostrado que a relação 4.53 representa uma condição de estado estável.

Considerando-se o caso da viga biapoçada com modo de vibração senoidal $\psi_n(z) = \text{sen} \frac{n \pi z}{L}$, para o caso de vibração no modo fundamental, temos:

$$I_{11} = \int_0^L \text{sen}^2 \frac{\pi}{L} dz = 2L/\pi$$

$$I_{21} = \int_0^L \text{sen}^2 \frac{\pi}{L} dz = \frac{L}{2}$$

donde: $(I_{11}/I_{21}) = \frac{4}{\pi}$

Podemos então escrever \bar{y} , como:

$$\bar{y} = \frac{Ay}{D} = \frac{G}{2 \pi^2 S^2 \rho_{or}} \left(\frac{4}{\pi} a + b \bar{y} + \frac{8}{3\pi} c \bar{y}^2 \right)$$

a qual pode ser reescrita, como:

$$\frac{G}{\rho_{or}} = \frac{2 \pi^3 S^2 \bar{y}}{\frac{4}{\pi} a + b \bar{y} + \frac{8}{3\pi} c \bar{y}^2} \quad (4.54)$$

4.5 MÉTODO PRÁTICO DE CÁLCULO

A relação 4.53 é independente das condições de contorno e modos de vibração, exceto para os momentos de forma I_{1n} e I_{2n} .

Considerando-se o caso da estrutura biapojada, os valores numéricos dos momentos de forma para o modo fundamental (caso $n=1$), temos a relação 4.54.

Usando-se os valores de a, b e c definidos pela tabela 3.3, nós obtemos

$$\frac{G}{\rho_{or}} = \frac{2,48 \bar{y}}{0,45 + 0,60 \bar{y} - 0,79 \bar{y}^2} \quad (4.55)$$

Sendo esta relação representada graficamente na fig. 4.6.

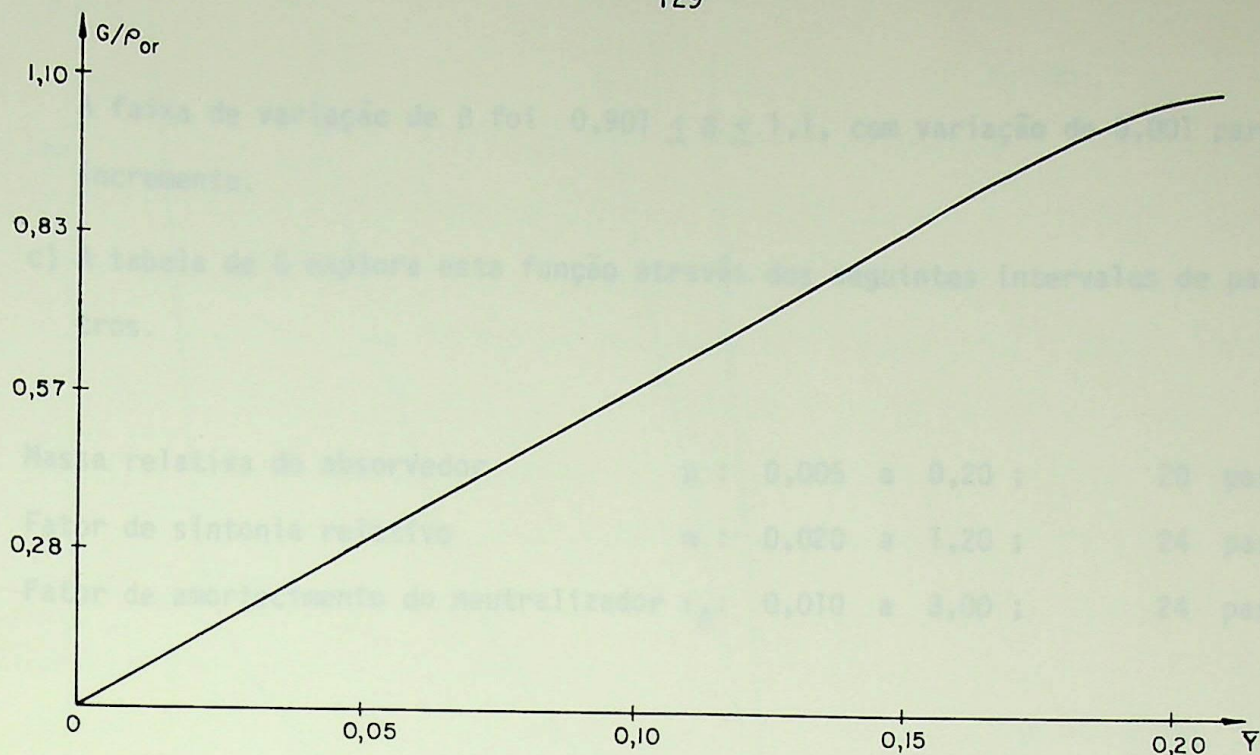


Fig. 4.6 Admitância geral por densidade relativa x amplitude reduzida

Especificando-se a mais alta amplitude aceitável $A_{y_{\max}}$, nós temos:

$$\bar{y} = \frac{A_{y_{\max}}}{D}$$

e o valor de G correspondente a este dado representa a máxima admitância admissível do sistema.

Para propósitos práticos, a admitância G deve ser tabelada para intervalos de valores dos parâmetros do sistema.

Esta tabulação é dada como segue:

- a) O amortecimento próprio do sistema foi tomado igual a 0 (zero), (pior caso). Para cada conjunto de parâmetros μ , α , τ .
- b) A admitância G foi calculada como uma função de β (frequência relativa). Somente o máximo valor de G e o correspondente valor de β devem ser tabelados.

A faixa de variação de β foi $0,901 \leq \beta \leq 1,1$, com variação de 0,001 para o incremento.

c) A tabela de G explora esta função através dos seguintes intervalos de parâmetros.

Massa relativa do absorvedor	μ : 0,005 a 0,20 ;	20 passos
Fator de sintonia relativo	α : 0,020 a 1,20 ;	24 passos
Fator de amortecimento do neutralizador τ_A	: 0,010 a 3,00 ;	24 passos

EFEITO DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS DO NEUTRALIZADOR

Para que se possa observar o efeito da variação dos parâmetros do neutralizador, partindo-se da tabela G, nós plotamos os seguintes gráficos:

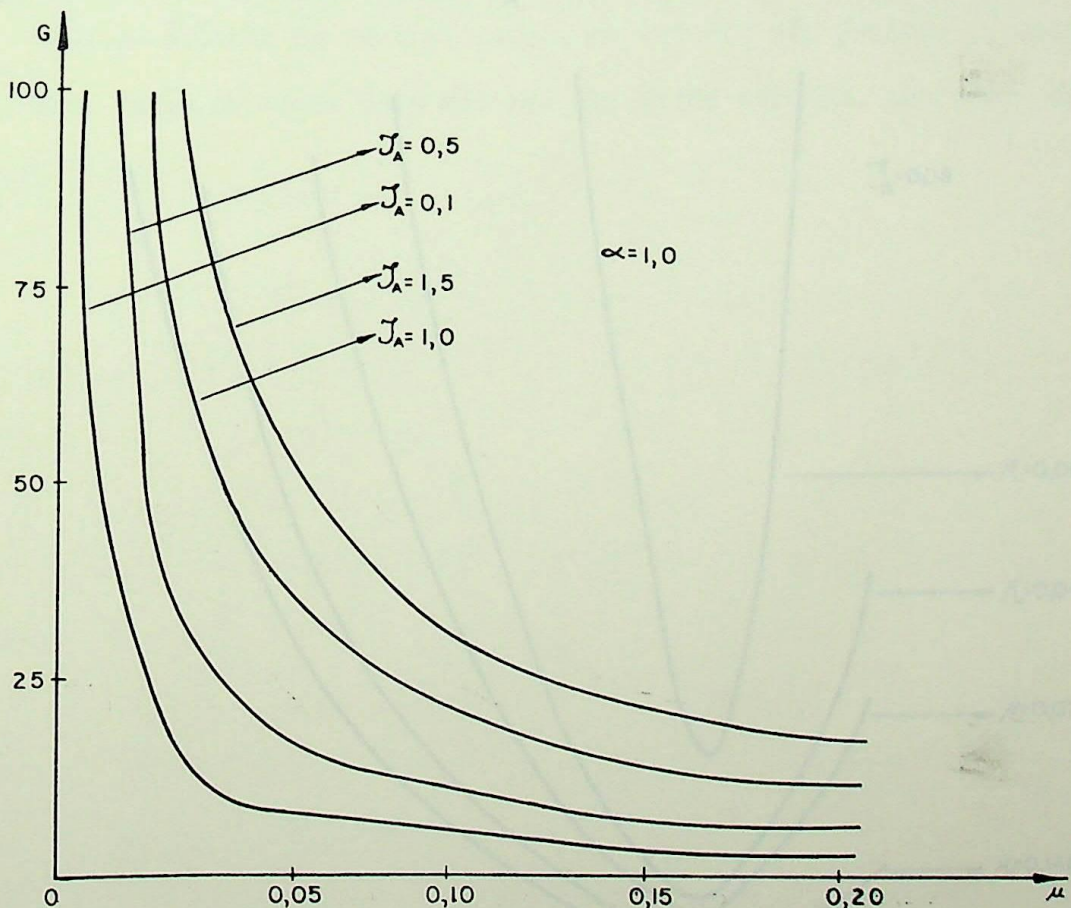


Fig. 4.7.a $G \times \mu$; para vários τ_A e $\alpha = \text{const.}$

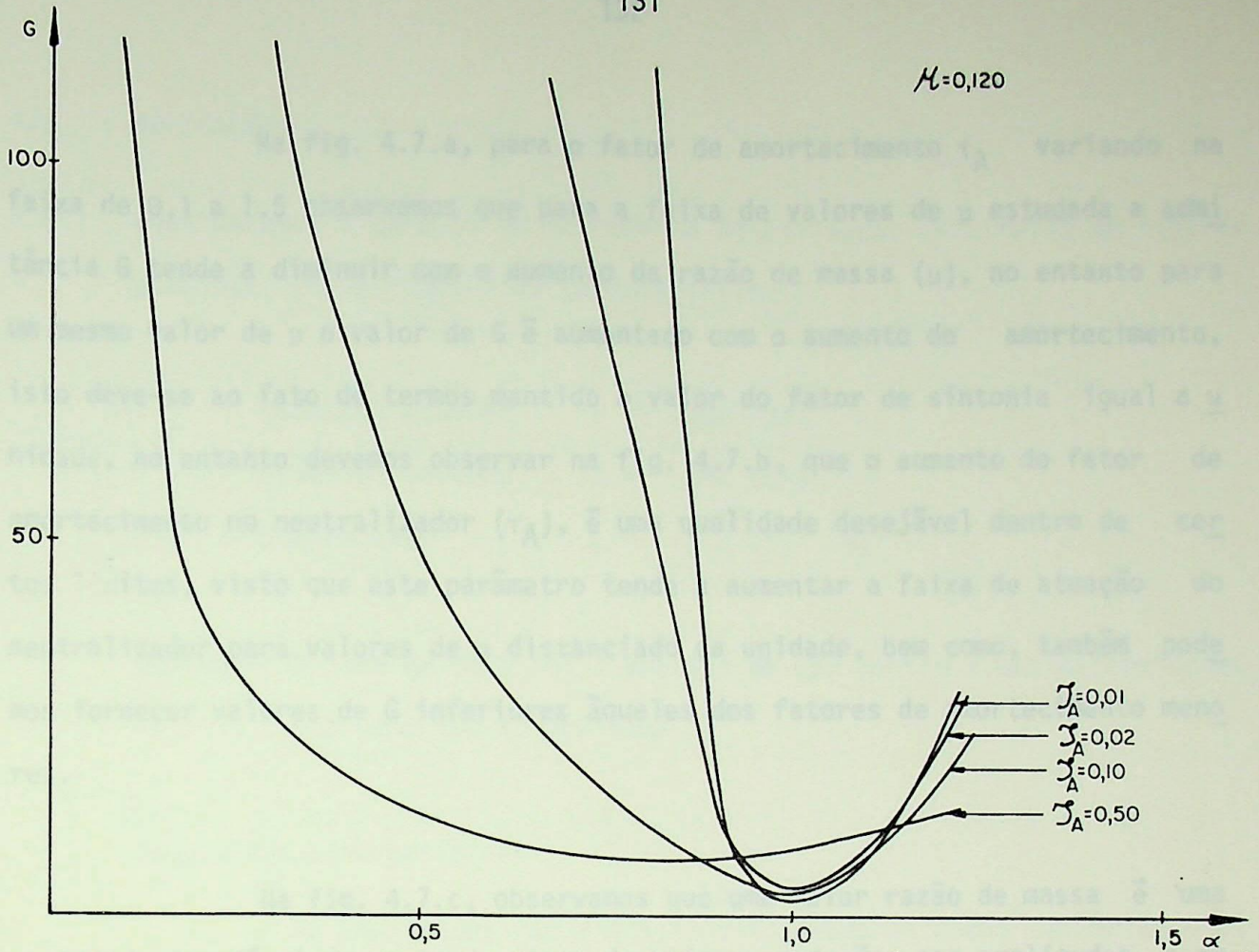


Fig. 4.7.b $G \times \alpha$; para vários τ_A e $\mu = \text{const.}$

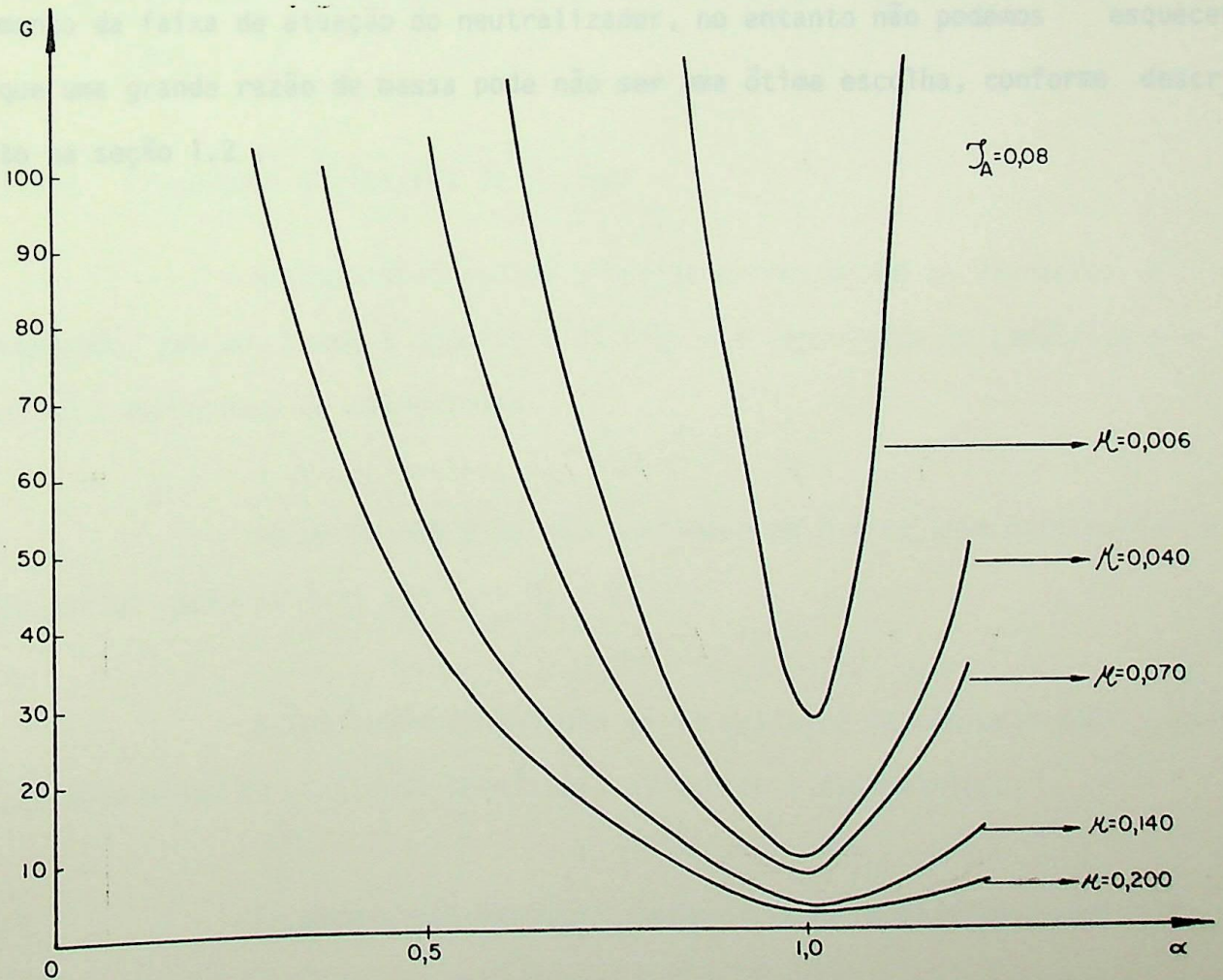


Fig. 4.7.c $G \times \alpha$; para vários μ e $\tau_A = \text{const.}$

Na fig. 4.7.a, para o fator de amortecimento τ_A variando na faixa de 0.1 a 1.5 observamos que para a faixa de valores de μ estudada a admittância G tende a diminuir com o aumento da razão de massa (μ), no entanto para um mesmo valor de μ o valor de G é aumentado com o aumento do amortecimento, isto deve-se ao fato de termos mantido o valor do fator de sintonia igual a unidade, no entanto devemos observar na fig. 4.7.b, que o aumento do fator de amortecimento no neutralizador (τ_A), é uma qualidade desejável dentro de certos limites, visto que este parâmetro tende a aumentar a faixa de atuação do neutralizador para valores de α distanciados da unidade, bem como, também podemos fornecer valores de G inferiores àqueles dos fatores de amortecimento menores.

Na fig. 4.7.c, observamos que uma maior razão de massa é uma qualidade desejável do ponto de vista de maiores reduções nas amplitudes e aumento da faixa de atuação do neutralizador, no entanto não podemos esquecer que uma grande razão de massa pode não ser uma ótima escolha, conforme descrito na seção 1.2 .

4.6 APLICAÇÃO

4.6.1 Consideremos o caso de um barramento de subestação construído em liga de alumínio, com as seguintes características:

Diâmetro externo	$D = 300$ (mm)
Diâmetro interno	$d = 284$ (mm)
Comprimento	$L = 2 \times 21,7$ (m)

MONTAGEM: O tubo de 43,4 (m) é apoiado em seu centro e nas extremidades por suportes articulados.

Requisitos para performa:

As amplitudes de vibração para ambos os modos simétrico e asimétrico de vibração (primeiros dois modos) não devem exceder a 3,0 (mm).

4.6.2 Principais parâmetros do sistema

As duas frequências próprias correspondem as vibrações e são esboçadas abaixo, sendo o modo nº 1 da fig. 4.8 denominado de simétrico e o modo nº 2 denominado de assimétrico.

As barras AB e BC são contínuas em B e os três apoios são do tipo guiado-apoiado, tais que $M_A = M_C = 0$.

A resolução da equação (4.1) aplicada ao conjunto ABC conduz aos dois modos de oscilação possíveis, simétrico e assimétrico.

Do modo simétrico B se comporta como um espelho e vem $y_{-x} =$

y_{+x} , o que significa que os dois vãos oscilam em sincronismo ainda que M_B no tubo não é mais nulo, mas varia senoidalmente.

Na realidade, os vãos AB e BC vibram em regime simétrico, como se eles estivessem engastados em B, e apoiados em A e C respectivamente, e a frequência será $\pi/2$ vezes mais elevada que a fundamental.

No regime assimétrico, tudo se passa como se os dois vãos AB e BC estivessem apoiados cada um em suas extremidades.

O momento em B do metal do tubo contínuo é nulo e uma defasagem de π radianos existe entre as oscilações dos vãos AB e BC, que vibram em oposição de fase, logo:

$$y_{-x} = -y_{+x}$$

A tabela 4.1 tirada da ref. 4.6, permite determinar rapidamente as diferentes frequências para os tubos em ligas de alumínio usuais, para diferentes vãos e para diferentes condições das extremidades, para os modos mais altos, recorrer a equação 4.3.

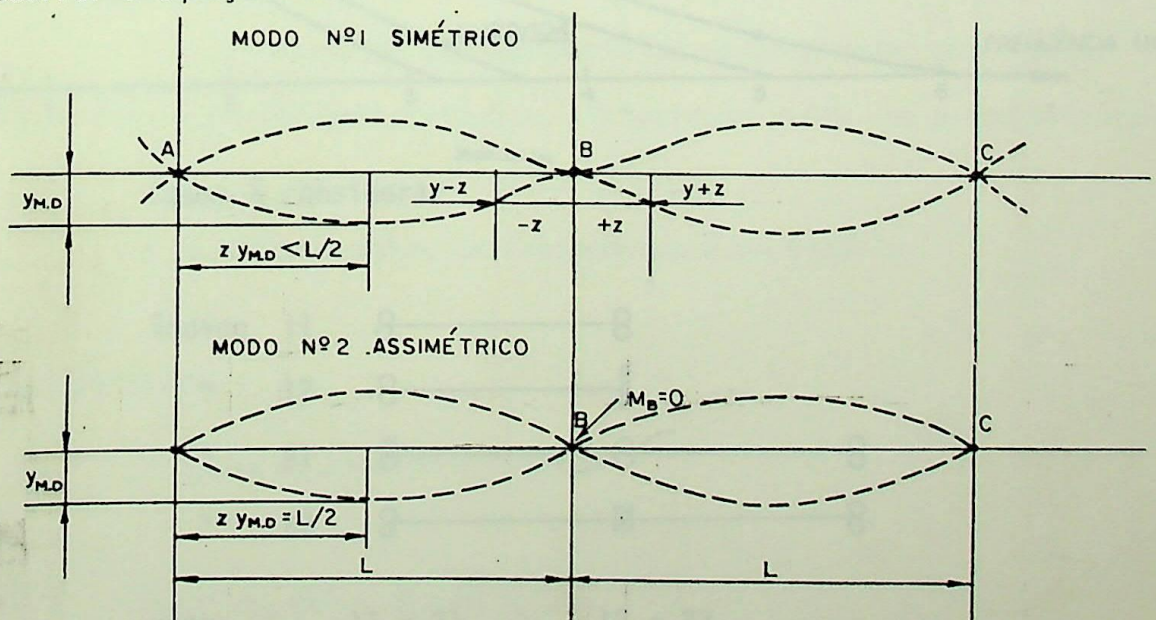
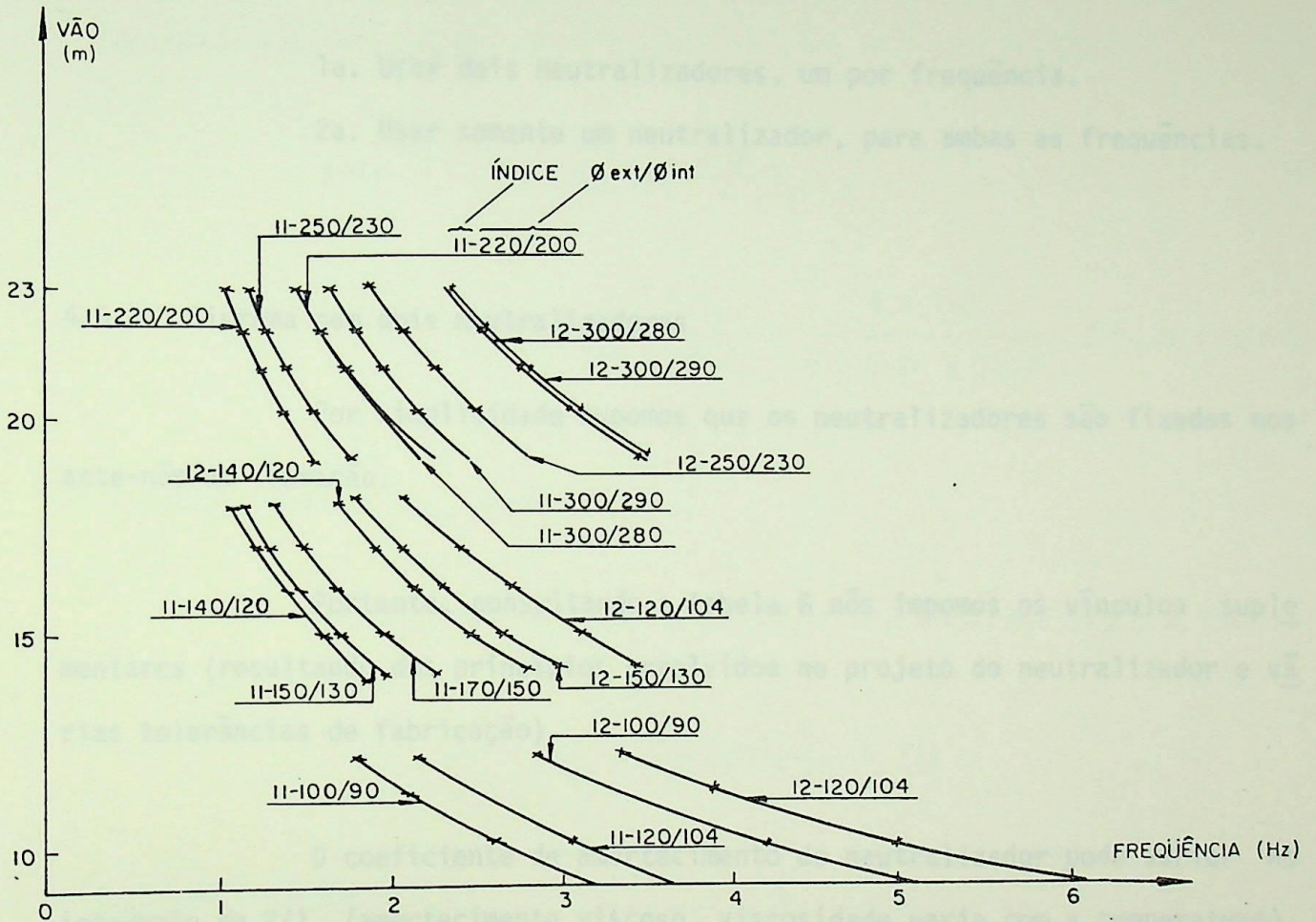
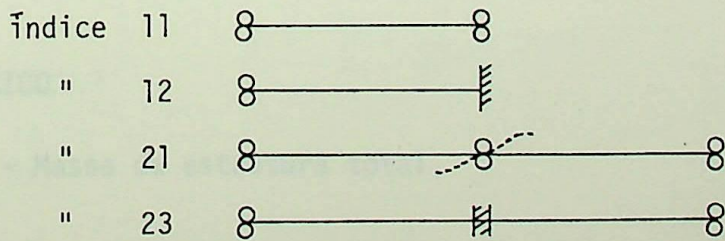


Fig. 4.8 Modos possíveis de vibração de dois vãos associados mecanicamente

TABELA 4.1 Frequências próprias dos tubos em ligas de alumínio - " f_n " função do vão, dos diâmetros de um tubo e do caso de montagem.



Casos a considerar



nota: 11 = 21 12 = 23

Para o nosso caso os valores de f correspondente a 21,7 (m) são:

$$f_1 = 1,73 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2,72 \text{ Hz}$$

Para o caso acima, duas soluções são tomadas:

1a. Usar dois neutralizadores, um por frequência.

2a. Usar somente um neutralizador, para ambas as frequências.

4.6.3 Sistema com dois neutralizadores

Por simplicidade supomos que os neutralizadores são fixados nos ante-nós da vibração.

Portanto, consultando a tabela G nós impomos os vínculos suplementares (resultando dos princípios envolvidos no projeto do neutralizador e várias tolerâncias de fabricação).

O coeficiente de amortecimento do neutralizador pode variar no intervalo de 2/1, (amortecimento viscoso, viscosidade varia com a temperatura).

A tolerância sobre as frequências é de $\pm 5\%$.

a) MODO ASSIMÉTRICO

- Massa da estrutura total,

$$m_{ot} = \rho_0 (D^2 - d^2) \frac{\pi}{4} L_t$$

$$m_{ot} = 2.700 (0,3^2 - 0,284^2) \times \frac{\pi}{4} \times 43,4 = 860 \text{ kg}$$

logo, a massa da estrutura por vão \bar{e} :

$$m_{ov} = 430 \text{ kg}$$

- Densidade aparente (ρ'_0);

temos:
$$m_{ov} = \rho'_0 \frac{\pi D^2}{4} L_v$$

$$\rho'_0 = \frac{4 m_{ov}}{\pi D^2 L_v} = \frac{4 \times 430}{\pi \times 0,3^2 \times 21,7} = 280,34 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

- Densidade relativa ($\rho_{or} = \frac{\rho'_0}{\rho}$)

Considerando-se a densidade do ar (ρ) igual 1,2 (kg/m³), temos:

$$\rho_{or} = \frac{\rho'_0}{\rho} = \frac{280,34}{1,2} \cong 234$$

- Amplitude Máxima

com $A_{y_{m\bar{a}x}} = 3 \text{ mm}$ e $D = 300 \text{ mm}$, temos:

$$\bar{y} = \frac{A_y}{D} = \frac{3}{300} = 0,01$$

- Admitância máxima

com ρ_{or} e \bar{y} , entramos na equação 4.55, e temos:

$$G_{m\bar{a}x} = 12,73$$



- Fator de Sintonia (α)

O fator de sintonia é dado pela relação (4.39), como ω_A/ω_m .

Desde que vamos utilizar um neutralizador por frequência podemos sincronizá-lo na frequência natural da estrutura $f_n = 1,73$ Hz.

Com a faixa de variação permitida de $\pm 5\%$, temos:

$$f_{\min} = 1,73 - 5\% = 1,64 \text{ Hz}$$

$$f_{\max} = 1,73 + 5\% = 1,82 \text{ Hz}$$

$$\frac{f_A}{f_{\min}} = 1,05 \quad \text{e} \quad \frac{f_A}{f_{\max}} = 0,95$$

logo: $0,95 \leq \alpha \leq 1,05$

Recorrendo-se a tabela de G, temos:

TABELA 4.2 Valores de G para $\mu = 0,045$

FATOR DE SINTONIA	FATOR DE AMORTECIMENTO					
	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
0,95	8,73	8,03	7,74	7,81	8,23	8,93
1,00	8,08	7,76	7,81	8,17	8,75	9,49
1,05	12,41	11,54	11,19	11,18	11,44	11,88

Para todos estes valores de G , a máxima amplitude de vibração satisfaz as exigências e está sob as mais diversas condições.

- Massa do neutralizador

A massa do neutralizador \bar{m} é deduzida de:

$$\mu = \frac{m_A}{m_n} = \frac{m_A}{I_2 m_{ov}}$$

$$\therefore m_A = m_{ov} \times I_2 \times \mu$$

$$m_A = 430 \times 0,5 \times 0,045 \cong 9,7 \text{ kg}$$

O Fator de amortecimento será escolhido igual a 0,12 a 20°C e a frequência própria do neutralizador será igual a frequência própria do sistema: 1,73 Hz.

b) MODO SIMÉTRICO

As conclusões para o modo simétrico são análogas, e a massa do neutralizador \bar{m} é aproximadamente 9,7 (kg).

4.6.4 Sistema com um absorvedor

Com os mesmos vínculos anteriores, o absorvedor cobre o intervalo de frequência de:

$$f_1 = 1,73 - 5\% = 1,64 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2,72 + 5\% = 2,85 \text{ Hz}$$

Consultando a tabela G, para $\mu = 0,10$, e para uma frequência $f_A = 1,92$ Hz, temos:

TABELA 4.3 Valores de G para $\mu = 0,10$

FATOR DE SINTONIA	FATOR DE AMORTECIMENTO					
	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,68	12,10	12,00	11,00	10,90	10,81	11,10
1,00	6,02	6,77	7,68	8,65	9,65	10,67
1,15	11,50	11,40	11,95	12,24	12,61	12,85

Desde que o máximo valor admissível para G é de 12,73 para que se cumpram as exigências, temos que retornar a tabela de G visto que o valor de G para $\mu = 0,10$; $\tau_A = 0,50$ e $\alpha = 1,15$, corresponde a 12,85, superior ao admissível.

Consultando novamente a tabela G, para $\mu = 0,12$; e mantendo os mesmos vínculos anteriores, temos:

TABELA 4.4 Valores de G para $\mu = 0,12$

FATOR DE SINTONIA	FATOR DE AMORTECIMENTO					
	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,68	10,91	9,55	9,30	9,20	9,01	9,30
1,00	5,33	5,91	6,60	7,38	8,20	9,04
1,15	10,39	10,38	10,37	10,80	11,50	11,75

Para estes valores dos parâmetros, a máxima amplitude será menor do que aquela especificada, e o sistema está sob as mais adversas condições.

- Massa do neutralizador

Da equação:
$$\mu = \frac{m_A}{m_n} = \frac{m_A}{I_2 m_o}$$

$$\therefore m_A = 0,5 \times 0,12 \times 430 = 25,8 \text{ (kg)}$$

O fator de amortecimento será igual a 0,35 a 20°C e a frequência própria do neutralizador será de 1,91 Hz.

A fig. abaixo representa, G versus fator de sintonia (α) para $\mu = 0,12$ e os valores de τ_A máxima, mínimo e adotado.

A máxima amplitude sob as condições mais adversas será:

$$A_y = 2,79 \text{ mm}$$

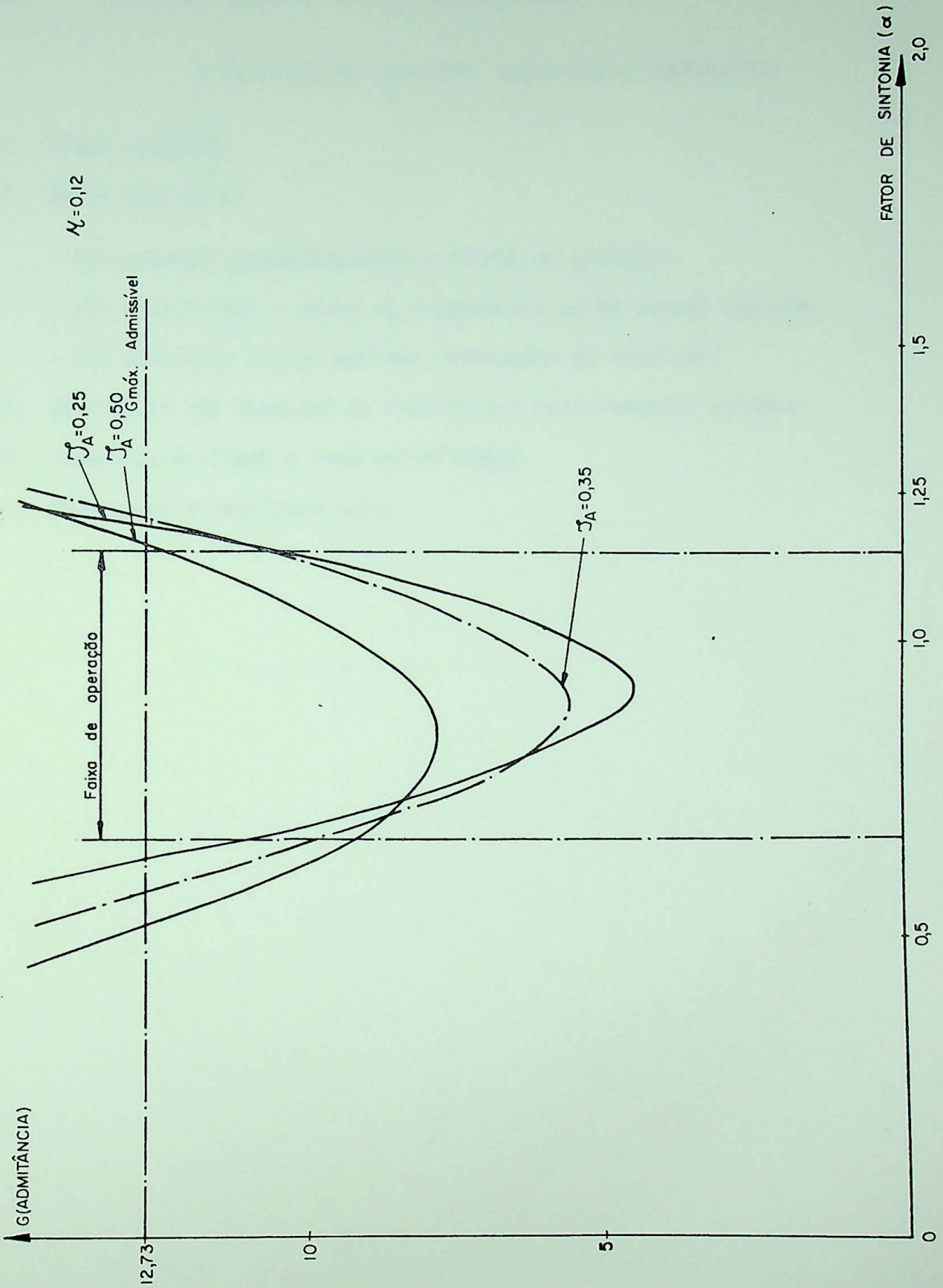


Fig. 4.9 Faixa de operação do neutralizador

4.7 CARACTERÍSTICAS DE UM BOM NEUTRALIZADOR

O respeito as condições seguintes é imperativo.

1. Preço razoável
2. Massa leve para:
 - Não aumentar exageradamente a flecha do condutor.
 - Não transformar o ponto de acoplamento em um pseudo suporte.
 - Não solicitar outras medidas (dimensões do condutor)
3. Eficiência num espectro de frequências relativamente extenso.
4. Indestrutibilidade e incorrosibilidade
5. Manutenção e regulagem nulas

REFERÊNCIAS

- 4.1 Meirovtch, L., *"Analytical Methods in Vibrations"*, Macmillan, New York 1967, p.p. 429-432.
- 4.2 Timoshenko, S., D.H. Young, and W. Weaver, Jr., *"Vibrations problems in Engineering"*, 4 th ed., John Wiley and Sons, New York, 1974.
- 4.3 Bishop, R.E.D., and D.C. Johnson, *"The Mechanics of Vibrations"* Cambridge University press, New York, 1960.
- 4.4 Thomson, W.T., *"Vibrations Theory and Applications"*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- 4.5 Almeida, M.T., e J.S. Dias, *"Controle das Vibrações Eólicas em Barramento de Subestações"*, V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, realizado na Universidade Estadual de Campinas, nº C-07, p.p. 098-107, dezembro, 1979.
- 4.6 Nisal, R., etc R. Maurion, *"Vibrations d'origine o'olienne des conducteurs rigidez des grands postes à très haute tensis"*, Sociēte SIMES, Route de Saulon, 21.220 Gevrey-Chanbertin, France, 1974.
- 4.7 Lerchs, E., *"Vibrations in bus bar"*, Research Burndy, 1974.

CAPÍTULO 5

COMENTÁRIO E CONCLUSÕES

O presente trabalho de tese tem como objetivo acrescentar subsídios a todos aqueles que se defrontam com problema de vibrações induzidas por fluxo.

Estas vibrações têm adquirido crescente importância nos últimos anos, porque os projetistas estão usando materiais que tendem para seus limites, produzindo-se estruturas que tornam-se progressivamente mais leves e mais flexíveis.

Uma melhor compreensão da causa física que dá origem ao problema tem levado inúmeros pesquisadores a trabalharem exaustivamente no problema abordado nesta dissertação, para que se possa adotar soluções eficazes para os problemas de importância prática observados.

Procuramos apresentar o trabalho de forma didática e acessível com o objetivo de colocar a disposição dos engenheiros e estudantes de engenharia

ria uma contribuição bibliográfica sobre o tema de grande escassez em nossos meios, bem como despertar o interesse daqueles que desejam se aprofundar no assunto.

Uma previsão analítica da interação fluido-estrutura ainda não se encontra disponível, ainda que idealmente uma solução seria obtida pela resolução das equações de Navier-Stokes dependentes do tempo na presença das vibrações da estrutura. No entanto apenas algumas soluções numéricas para o campo de fluido tem sido conseguidas em computadores digitais, mas estas soluções têm sido limitadas para cada cilindro estacionário com números de Reynolds abaixo de 1000 onde o fluxo é laminar ou as soluções onde a viscosidade têm sido desprezada .

De modo que a análise geral integrada para os campos de fluxo e movimento da estrutura não é disponível para a maioria dos casos de importância prática. Por este motivo utilizamos alguns modelos limitados para descrever a interação fluido-estrutura.

No Capítulo 1 da dissertação apresentamos algumas recomendações que visam a redução das amplitudes de vibrações através de mudanças estruturais e introduzimos o sistema de neutralizador de vibração em sua forma clássica.

Nos Capítulos 2 e 3 os modelos são generalizados para a resposta das estruturas em fluxo de fluido estável.

No capítulo 4 estabelecemos as relações que governam o controle destas vibrações forçadas e elabora-se um método prático para projetar um absorvedor dinâmico, que controla as amplitudes de vibrações.

Em suma, do exposto podemos:

1. Compreender a causa física que da origem ao problema.
2. Prever o início e as amplitudes máximas de vibrações das estruturas.
3. Projetar estruturas cujos efeitos de vibrações induzidas por vórtices são mi
ninizados.
4. Projetar um absorvedor dinâmico que controla as amplitudes de vibrações das
estruturas.
5. Ainda que este trabalho tenha sido devotado à estruturas cilíndricas, os con
ceitos aqui discutidos podem ser aplicados a outras seções, quando mais da
dos experimentais estiverem disponíveis.

APÊNDICE A

GALLOPING DE BARRAS

Com a estrutura vibrando em um fluxo estável, o fluxo em torno da estrutura oscila relativamente ao movimento da mesma e uma força aerodinâmica oscilante sobre a estrutura é induzida pelas componentes do fluxo.

Quando a força aerodinâmica oscilante tende a diminuir as vibrações da estrutura, esta é dita como sendo aerodinamicamente estável, mas se a força tende a aumentar as vibrações da estrutura então a estrutura é dita como sendo aerodinamicamente instável.

Na análise da estabilidade, para amplitudes suficientemente pequenas de vibração, a força aerodinâmica pode ser modelada como uma função linear do ângulo de ataque do fluxo relativa a estrutura.

Se o fluxo separa-se da seção transversal da estrutura, a força aerodinâmica é uma função não linear do ângulo do fluxo e a estrutura é denominada bojuda. As vibrações induzidas por fluxo em estruturas bojudas são comumente referidas como Galloping.

Galloping pode ocorrer em uma estrutura flexível de peso leve exposta a um fluxo, sendo grande a variedade de seções transversais, incluindo retângulo, quadrado e perfis de asa que são potencialmente instáveis ao Galloping.

A hipótese fundamental da análise do Galloping é que a força

fluida é quase estável, isto é, sobre a estrutura é determinada somente pela velocidade relativa instantânea e pelo ângulo de ataque do fluido relativo a estrutura.

A hipótese quase estática é válida somente se a frequência da componente periódica da esteira próxima associada com emissão de vórtices são acima da frequência natural da estrutura ($f_s \gg f$). Isto é ordinariamente conseguido se a velocidade reduzida é maior do que 10. Infelizmente muitos problemas de importância prática, tais como pontes suspensas têm instabilidade em velocidades reduzidas na faixa de: $1 < U/fD < 10$, onde a emissão de Vórtices é dominante. Tem havido consideráveis debates se as vibrações em pontes suspensas são devidas a emissão de vórtices ou ao mecanismo do tipo Galloping.

Se a velocidade excede a velocidade crítica para o início do Galloping, então a energia colocada pelo fluxo na estrutura poderá exceder a energia dissipada internamente pelo amortecimento estrutural. A amplitude aumentará até que um balanço entre a energia cedida pelo fluxo e a energia dissipada pela estrutura é estabelecido. Se ambas as energias cedida pelo fluxo e a energia dissipada pelo amortecimento aumentam linearmente com a amplitude, então a amplitude de vibração poderá crescer além dos limites uma vez que a condição de estabilidade têm sido ultrapassada.

Ainda que, na estrutura real a energia cedida pelo fluxo à estrutura tem um limite finito, porque as forças fluidas são limitadas.

Assim, a amplitude do Galloping estável pode somente crescer até que ela seja limitada pela não linearidade da força fluida sobre a estrutura ou não linearidade na própria estrutura.

Desde que a força fluida sobre a estrutura \bar{e} determinada somen
 te pela velocidade relativa instantânea, e pelo ângulo de ataque do fluido relata
 tivo a estrutura, o coeficiente da força vertical pode ser modelado como uma
 função de \dot{y}/U e \bar{e} possível expressado como um polinômio em \dot{y}/U ; isto \bar{e} :

$$C_y(\alpha) = a_1 (y/U) + a_2 (y/U)^2 + \dots \quad (\text{A.1})$$

e a força excitante por unidade de comprimento em algum ponto z ao longo do vão,
 será:

$$F_y^e = \frac{1}{2} \rho U^2 D \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) / U \right]^i \quad (\text{A.2})$$

onde:

a_i \bar{e} uma constante determinada pelos coeficientes de sustentação e arraste da estrutura.

Dois casos podem ser facilmente analisados:

- a. A análise da estabilidade \bar{e} feita negligenciando-se todos os termos exceto o termo a_1 .
- b. A análise \bar{e} feita para amplitudes finitas de vibração no modo fundamental.

Para a análise da estabilidade da solução $[y(z,t) = 0]$, somen
 te o termo linear ($i=1$) na equação (A.2) deve ser considerado.

Se a velocidade do fluxo varia ao longo do vão da estrutura, en
 tão substituindo-se o termo linear da equação (A.2) na equação (4.20) e despre
 zando-se todos os termos restantes, e para um modo senoidal simples, temos:

$y(z,t) = y(t) \psi(z)$, vem

$$\ddot{y} + 2 \tau \omega_n y + \omega_n^2 y = \frac{1}{2} \rho D a_1 \frac{\dot{y} \int_0^L U(z) \psi^2(z) dz}{m \int_0^L \psi^2(z) dz}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{A.3})$$

onde $U(z)$ é a velocidade do fluxo em cada ponto z ao longo do vão. Uma velocidade equivalente do fluxo no início do Galloping é definida, como:

$$U = \frac{\int_0^L U(z) \psi^2(z) dz}{\int_0^L \psi^2(z) dz} \quad (\text{A.4})$$

Esta velocidade equivalente é geralmente uma função da configuração do modo.

O início do Galloping ocorre quando o coeficiente de sustentação do termo em \dot{y} é zero.

$$2 \tau_n \omega_n = \rho D a_1 U / (2 m) \quad (\text{A.5})$$

A velocidade do fluxo equivalente requerida para o Galloping é:

$$\frac{U}{f_n D} = \frac{4 m (2 \pi \tau_n)}{\rho D^2 a_1} \quad (\text{A.6})$$

Desde que a equação (A.6) prever a velocidade do fluxo para o início da instabilidade de cada modo, crescendo com a frequência do modo, o modo fundamental é mais susceptível ao Galloping.

Ordinariamente a análise do Galloping é limitada ao modo senoidal simples ($\psi_n = \psi$, para $n = 1$ e $\psi_n = 0$ para $n \neq 1$), então:

$$\ddot{y} + 2 \tau \omega \dot{y} + \omega^2 y = \frac{\rho D}{2m} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i a_i \dot{y}, \quad (\text{A.7})$$

onde:

$$\beta_i = \int_0^L U^{2-i}(z) \psi^{i+1}(z) dz / \int_0^L \psi^2(z) dz \quad (\text{A.8})$$

A equação (A.7) descreve a amplitude finita de vibração não linear do Galloping da barra, que vibra em um modo simples. Se a velocidade do fluxo e a massa são constantes ao longo do vão da estrutura, as equações (A.7) e (A.8) são reduzidas para:

$$K_i = \int_0^L \psi^{i+1}(z) dz / \int_0^L \psi^2(z) dz \quad (\text{A.9})$$

$$m\ddot{y} + 2 m \tau \omega_1 \dot{y} + \omega_1^2 y = \frac{1}{2} \rho U^2 D (k_1 a_1 \dot{y}/U + k_3 a_3 \dot{y}^3/U^3 + \dots) \quad (\text{A.10})$$

Esta não-linear, auto excitada, oscilador equação pode ser aproximadamente resolvida usando o método de variação lenta dos parâmetros (Ref. A.5 e A.6).

Soluções transientes, soluções para o estado estável e a estabilidade do estado estável podem ser encontradas.

REFERÊNCIAS

- A.1 Meirovitch, L. *"Analytical Methods in Vibration"* Macmillan, New York 1967, p.p. 429-432.
- A.2 Timoshenko, S., D.H. Yong, and W. Weaver, Jr., *"Vibrations problems in Engineering"*, 4 th ed. John Wiley and Son, New York, 1974.
- A.3 Bishop, R.E.D., and D.C. Johnson, *"The Mechanics of Vibration"*, Cambridge University, New York, 1960.
- A.4 Thomson, W.T., *"Vibrations and Applications"*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- A.5 Minorsky, N, *"Non linear Oscillations"*, D.Van Nostrand, Princeton, 1962.
- A.6 Strube, R.A., *"Non Linear Differential Equations"*, McGraw-Hill, New York, 1961.

APÊNDICE B

PRINCÍPIO DA ORTOGONALIDADE

A equação diferencial do movimento para vibrações transversais de uma viga é dada com [B.1] ;

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (E I \frac{\partial^2 y (z,t)}{\partial z^2}) + m \frac{\partial^2 y (z,t)}{\partial t^2} = F (z,t) \quad (B.1)$$

Soluções para as vibrações livres da viga uniforme são regidas pela equação diferencial.

$$E I \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (B.2)$$

Para determinar os modos normais de vibração, admitimos a solução da forma:

$$y (z,t) = \psi_n (z) e^{i \omega_n t} \quad (B.3)$$

obtemos:

$$\frac{d^4 y}{d z^4} - \frac{m}{E I} \omega_n^2 y = \left(\frac{d^4 \psi_n}{d z^4} - \frac{m}{E I} \omega_n^2 \psi_n \right) e^{i \omega_n t} = 0 \quad (B.4)$$

$$\therefore \frac{d^4 \psi_n (z)}{d z^4} - \frac{m \omega_n^2}{E I} \psi_n (z) = 0 \quad (B.5)$$

Fazendo-se:

$$\gamma_n^4 = \frac{m \omega_n^2}{E I} ; \quad (\text{B.6})$$

vem:

$$\frac{d^4 \psi_n(z)}{d z^4} - \gamma_n^4 \psi_n(z) = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{d^4 \psi_j(z)}{d z^4} = \gamma_j^4 \psi_j(z) \quad (\text{B.8})$$

onde, $\psi_n(z)$ é a função característica definindo a deflexão do n -ésimo modo,

m é a massa por unidade de comprimento, e a frequência natural do n -ésimo modo é:

$$\omega_n = (\gamma_n \ell)^2 \sqrt{E I / m \ell^4} \quad (\text{B.9})$$

Sendo ψ_n e ψ_j funções normais de vibrações, multiplicando - se (B.7) por ψ_j e (B.8) por ψ_n e substituindo-se o primeiro resultado no segundo, vem:

$$\frac{d^4 \psi_j}{d z^4} \psi_n - \frac{d^4 \psi_n}{d z^4} \psi_j = (\gamma_j^4 - \gamma_n^4) \psi_n \psi_j \quad (\text{B.10})$$

De (B.11), temos:

$$(\gamma_j^4 - \gamma_n^4) \int_0^L \psi_n \psi_j \, dz = \int_0^L \left(\frac{d^4 \psi_j}{dz^4} \psi_n - \frac{d^4 \psi_n}{dz^4} \psi_j \right) dz \quad (\text{B.12})$$

Integrando-se o membro do lado direito da equação (B.12), vem:

$$(\gamma_j^4 - \gamma_n^4) \int_0^L \psi_n \psi_j \, dz = \left[\frac{d^3 \psi_j}{dz^3} \psi_n - \frac{d^3 \psi_n}{dz^3} \psi_j + \frac{d^2 \psi_n}{dz^2} \cdot \frac{d \psi_j}{dz} - \frac{d^2 \psi_j}{dz^2} \cdot \frac{d \psi_n}{dz} \right]_0^L \quad (\text{B.13})$$

A equação (B.13) representa a condição de ortogonalidade para os modos normais de vibração.

Para o caso da viga bi-apoiada, em ambas as extremidades se tem deslocamento e momento fletor nulos, donde:

$$\psi(z=0) = \psi(z=L) = \frac{d^2 \psi}{dz^2}(z=0) = \frac{d^2 \psi}{dz^2}(z=L) = 0 \quad (\text{B.14})$$

De (B.14), obtém-se:

$$(\gamma_j^4 - \gamma_n^4) \int_0^L \psi_n \psi_j \, dz = 0 \quad (\text{B.15})$$

e finalmente:

$$\int_0^L \psi_n \psi_j \, dz = 0; \quad p/n \neq j \quad (\text{B.16})$$

De (B.4), temos:

$$\frac{d^4 y}{dz^4} - \gamma^4 y = 0 \quad (\text{B.17})$$

e admitindo-se solução da forma

$$y = e^{i \bar{\gamma} z} \quad (\text{B.18})$$

com

$$\begin{cases} \bar{\gamma} = \pm \gamma \\ \bar{\gamma} = \pm i \gamma \end{cases}; \text{ obtemos}$$

$$y = \bar{C}_1 \cos h(\gamma z) + \bar{C}_2 \operatorname{sen} h(\gamma z) + \bar{C}_3 \cos(\gamma z) + \bar{C}_4 \operatorname{sen}(\gamma z) \quad (\text{B.19})$$

onde: $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$ e \bar{C}_4 são constantes arbitrárias que devem ser determinadas a partir das condições de contorno.

Os valores de $(\gamma \ell)$ são determinados da equação (B.19), substituindo-se as condições de contorno apropriadas, e da substituição dos valores de $(\gamma \ell)$ na equação (B.9), obtemos os valores de ω_n .

REFERÊNCIAS

- B.1 Meirovitch, L., "*Analytical Methods in Vibrations*" Macmillan, New York, 1967.
- B.2 Thomson, W.T., "*Vibration Theory and Applications*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

APÊNDICE C

SISTEMAS ANÁLOGOS

Por definição, sistemas análogos são descritos pela mesma equação integro-diferencial ou sistemas de equações.

De modo que a solução da equação que descreve um sistema físico automaticamente produz a solução para qualquer sistema análogo.

A solução de um circuito elétrico fornece resultados que são diretamente aplicáveis a circuitos mecânicos, térmicos ou hidráulicos análogos.

Para o caso específico da analogia eletromecânica existem duas analogias elétricas para os sistemas mecânicos.

- a. A analogia voltagem-força
- b. A analogia corrente-força

Sendo que a analogia corrente força se prende mais a uma analogia física do que uma analogia de equações.

Estas analogias eletromecânicas são mostradas na tabela (C.1), tirada da referência (C.2).

TABELA C.1 - Analogias Elétricas

SISTEMA MECÂNICO	SISTEMA ELÉTRICO	
	ANALOGIA VOLTAGEM-FORÇA	ANALOGIA CORRENTE-FORÇA
Princípio de D'Alambert	Lei de voltagem de Kirchoff	Lei de corrente de kirchoff
Grau de Liberdade	Circuito	Nº
Força Aplicada	Interruptor fechado	Interruptor fechado
F Força	v Voltagem (volt)	i Corrente (ampères)
m Massa	L Indutância (Henry)	c Capacitância
x Deslocamento	q Carga (Coulomb)	$\phi = \int v dt$
\dot{x} Velocidade	i Corrente do circuito (Ampères)	v Voltagem do nº (volt)
C Amortecimento	R Resistência (ohm)	1/R Condutância (mho)
K Mola	1/c $\frac{1}{\text{capacitancia}}$	1/L $\frac{1}{\text{capacitancia}}$
Elemento acoplante	Elemento comum a dois circuitos	Elemento entre nºs

Para que os sistemas fiquem idênticos deve ser obtida uma escala de fatores correta, tornando a analogia elétrica completamente equivalente ao sistema mecânico em análise.

Para atingirmos este objetivo a análise dimensional é usada. Os seguintes números adimensionais podem ser obtidos da análise dimensional.

$$m_1/m_2 = L_1/L_2$$

$$K_1/K_2 = C_2/C_1$$

$$\omega/\omega_e = \sqrt{Lc} / \sqrt{m/K}$$

$$F/K_x = v c/q$$

$$C^2/K_m = R^2 c/L$$

REFERÊNCIAS

- C.1 Smith, J.S., "*Circuitos Dispositivos e Sistemas*" Trad. Carlos Tinoco B, Livros Técnicos e Científicos, Editora S.A., Rio de Janeiro, 1975.
- C.2 Seto, W.W., "*Vibrações Mecânicas*" Trans. Fernando V.H. Silva e Nage, N., Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, Rio de Janeiro 1977.



APÊNDICE D

LISTAGEM E TABELAS DE G

DUGFS 51303/81700 FC01RAM COMPILER, MARK 6.1 RC 01/20/78 11 44 .

WEDNESDAY 02/25/8

```

/ABSORVEDOR/DINAMICO
:£ NO PAP
:FILE 6=IMPRESSORA,UNIT=PRINTER,UNLABELED
:¢
:¢
:¢
0002 : REAL P(25),E0(25),ALFA(25),BETA(500),G(500),BMAX(25),CMAX(25)
:¢
:¢
0003 : MASSA RELATIVA DO ABSORVEDOR = M
:¢
0004 : REAC(5,20)(M(IK),IK=1,20)
:¢
0005 : 5 FORMAT(26F5.3/4F5.3)
:¢
0006 : READ(5,20)(E0(I),I=1,24)
:¢
0006 : 20 FORMAT(26F5.2/8F5.2)
:¢
:¢
0007 : FATOR DE AMORTECIMENTO DO ABSORVEDOR = E0
:¢
0008 : READ(5,20)(ALFA(J),J=1,24)
:¢
0009 : GO 100 K=17,20
:¢
0009 : WRITE(6,10)M(I*)
:¢
0010 : 10 FORMAT(11H1,'PARAMETROS DO ABSORVEDOR',E0X,'MASSA RELATIVA DO ABSOR
:¢
0010 : VEDOR =',F6.3/4CX,'FATOR DE AMORTECIMENTO DO ABSORVEDOR')
:¢
0011 : WRITE(6,30)(E0(I),I=1,24)
:¢
0012 : 30 FORMAT(11X,6F15.2/11X,6F15.2/11X,6F15.2/11X,'FAT. SINT
:¢
0012 : ONIA =',F3X,'FREQ. RELATIVA E ADM. MAXIMA')
:¢
:¢
:¢
0013 : FATOR DE SINTONIA = ALFA
:¢
0013 : GO 100 J=1,24
:¢
0014 : GO 35 L=1,25
:¢
0015 : BMAX(IJ)=0.0
:¢
0016 : 35 GMAX(IJ)=0.0
:¢
0017 : GO 37 A=1,500
:¢
0018 : BETA(IJ)=0.0
:¢
0019 : 37 G(IJ)=0.0
:¢
0020 : GO 90 A=1,24
:¢
0021 : K=0
:¢
0022 : DELTA=0.9
:¢
0023 : 40 DELTA=DELTA+0.001
:¢
0024 : K=K+1
:¢
0025 : BETA(K)=DELTA
:¢
0026 : A=BETA(K)**2-1.0
:¢
0027 : B=2.0**2*(I)*M(IK)*ALFA(J)*BETA(K)
:¢
0028 : C=-M(IK)*ALFA(J)**2
:¢
0029 : D=M(IK)*BETA(K)**2
:¢
0030 : E=B**2**2
:¢
0031 : F=A**2**2+A*(C+D)**2+C**2+D**2+C*D**2+B**2**2
:¢
0032 : H=B**2**2*(C+D)**2
:¢
0033 : Z=(E**2**2+F**2)**0.5/H
:¢
0034 : G(K)=(B*ALFA(K)**2)/Z
:¢
0035 : IF(DELTA-1.1)40,6C,50
:¢
0036 : 50 GAUX=G(K)
:¢
0037 : BAUX=BL(A(K))
:¢
0038 : GO 90 A=2,K
:¢
0039 : IF(ABS(G(L))-ABS(CALX))7J,7C,60
:¢
0040 : 60 GAUX=G(L)
:¢
0041 : BAUX=BL(A(L))
:¢
0042 : IF(L.NE.K)GO TO 9C
:¢
0044 : GO TO 60
:¢
0045 : 70 IF(L.NE.K)GO TO 9C
:¢
0047 : 80 GMAX(IJ)=GAUX
:¢
0048 : BMAX(IJ)=BAUX
:¢
0049 : 90 CONTINUE
:¢
0050 : 100 WRITE(6,110)ALFA(J),(BMAX(N),GMAX(N),N=1,24)
:¢
0051 : 110 FORMAT(11X,F6.3,6(F6.3,E11.6)/7X,6(F6.3,E13.6)/7X,
:¢
0051 : 6(F6.3,E13.6))
:¢
0052 : STOP
:¢
0053 : END

```

FATJAZZ ANOTIFICACAO DO ASSORVIOCH

0.01	0.02	0.05	0.10	0.20	0.40	0.80
0.05	0.10	0.20	0.40	0.80	1.60	3.20
0.10	0.20	0.40	0.80	1.60	3.20	6.40
0.20	0.40	0.80	1.60	3.20	6.40	12.80
0.40	0.80	1.60	3.20	6.40	12.80	25.60
0.80	1.60	3.20	6.40	12.80	25.60	51.20

FAT.SINT.

FREQ. RELATIVA E ADP. MAXIMA

0.020	1.630	0.365194E+03	1.000	0.240948E+03	1.000	0.172939E+05	1.000	0.133474E+05	1.077	0.108777E+05	1.000	0.909193E+04
	1.630	0.688174E+04	1.000	0.551760E+04	1.000	0.460714E+04	1.000	0.353374E+04	1.077	0.346724E+04	1.000	0.307721E+04
	1.630	0.777735E+04	1.000	0.221974E+04	1.000	0.155000E+04	1.000	0.153636E+04	1.077	0.138721E+04	1.000	0.123194E+04
	1.630	0.111366E+04	1.000	0.555773E+03	1.000	0.370459E+03	1.000	0.274366E+03	1.077	0.22373E+03	1.000	0.176449E+03
0.040	1.630	0.123510E+04	1.000	0.9E7843E+04	1.000	0.760599E+04	1.000	0.615625E+04	1.077	0.512414E+04	1.000	0.436915E+04
	1.630	0.33510E+04	1.000	0.271545E+04	1.000	0.227762E+04	1.000	0.159393E+04	1.077	0.171771E+04	1.000	0.153047E+04
	1.630	0.17735E+04	1.000	0.110542E+04	1.000	0.92755E+03	1.000	0.751351E+03	1.077	0.692799E+03	1.000	0.616775E+03
	1.630	0.55466E+04	1.000	0.274178E+03	1.000	0.166216E+03	0.999	0.140601E+03	0.979	0.115707E+03	0.999	0.974722E+02
0.060	1.630	0.575144E+04	1.000	0.506610E+04	1.000	0.431435E+04	1.000	0.366913E+04	1.077	0.315112E+04	1.000	0.274193E+04
	1.630	0.215551E+04	1.000	0.176522E+04	1.000	0.149255E+04	1.000	0.126407E+04	1.077	0.113114E+04	1.000	0.101130E+04
	1.630	0.917174E+03	1.000	0.733020E+03	1.000	0.612345E+03	1.000	0.524703E+03	1.077	0.450522E+03	1.000	0.409277E+03
	1.630	0.365141E+03	1.000	0.165776E+03	0.999	0.125901E+03	0.999	0.771276E+02	0.977	0.600702E+02	0.998	0.649927E+02
0.080	1.630	0.331735E+04	1.000	0.366362E+04	1.000	0.274416E+04	1.000	0.242862E+04	1.077	0.214773E+04	1.000	0.190855E+04
	1.630	0.154229E+04	1.000	0.127792E+04	1.000	0.109025E+04	1.000	0.947429E+03	1.077	0.816673E+03	1.000	0.748445E+03
	1.630	0.677551E+03	1.000	0.545415E+03	1.000	0.456451E+03	1.000	0.392334E+03	1.077	0.343747E+03	1.000	0.306255E+03
	1.630	0.277111E+03	1.000	0.139772E+03	0.999	0.966369E+02	0.998	0.753428E+02	0.977	0.635746E+02	0.996	0.568223E+02
0.100	1.630	0.214533E+04	1.000	0.203256E+04	1.000	0.147457E+04	1.000	0.121197E+04	1.077	0.155127E+04	1.000	0.143522E+04
	1.630	0.116431E+04	1.000	0.727978E+03	1.000	0.645717E+03	1.000	0.737759E+03	1.077	0.656744E+03	1.000	0.545933E+03
	1.630	0.533660E+03	1.000	0.41933E+03	1.000	0.357304E+03	1.000	0.311655E+03	1.077	0.273757E+03	1.000	0.243934E+03
	1.630	0.220322E+03	0.999	0.112936E+03	0.998	0.770251E+02	0.997	0.631949E+02	0.976	0.54474E+02	0.998	0.494633E+02
0.150	1.631	0.102735E+04	1.001	0.795998E+03	1.001	0.749255E+03	1.001	0.592650E+03	1.071	0.512754E+03	1.001	0.473876E+03
	1.631	0.661633E+03	1.001	0.572024E+03	1.001	0.511503E+03	1.001	0.453241E+03	1.071	0.410747E+03	1.001	0.371765E+03
	1.630	0.335534E+03	1.001	0.278186E+03	1.001	0.235120E+03	1.001	0.203138E+03	1.071	0.179749E+03	1.001	0.160720E+03
	1.630	0.144887E+03	0.999	0.771759E+02	0.997	0.549643E+02	0.994	0.465597E+02	0.977	0.448449E+02	0.990	0.435170E+02
0.200	1.631	0.437463E+04	1.001	0.245935E+04	1.001	0.166785E+04	1.001	0.126271E+04	1.071	0.101499E+04	1.001	0.847683E+03
	1.631	0.637441E+03	1.001	0.513767E+03	1.001	0.425986E+03	1.001	0.316429E+03	1.071	0.219791E+03	1.001	0.206460E+03
	1.631	0.256382E+03	1.001	0.205519E+03	1.001	0.171727E+03	1.001	0.143600E+03	1.071	0.111175E+03	1.001	0.117171E+03
	1.630	0.106341E+03	0.999	0.599634E+02	0.994	0.472817E+02	0.991	0.432492E+02	0.977	0.426799E+02	0.977	0.435156E+02
0.250	1.631	0.797624E+03	1.001	0.694711E+03	1.001	0.600113E+03	1.001	0.707057E+03	1.071	0.624576E+03	1.001	0.554579E+03
	1.631	0.447187E+03	1.001	0.371706E+03	1.001	0.316456E+03	1.001	0.273143E+03	1.071	0.243151E+03	1.001	0.217641E+03
	1.631	0.199764E+03	1.001	0.152719E+03	1.001	0.135677E+03	1.001	0.115344E+03	1.071	0.101640E+03	1.001	0.917472E+02
	1.630	0.83705E+02	0.996	0.500118E+02	0.992	0.425755E+02	0.989	0.417211E+02	0.974	0.435764E+02	0.974	0.465658E+02
0.300	1.632	0.181713E+04	1.002	0.127666E+04	1.002	0.937754E+03	1.002	0.733549E+03	1.072	0.598922E+03	1.002	0.504447E+03
	1.632	0.382309E+03	1.002	0.304027E+03	1.002	0.257770E+03	1.002	0.221543E+03	1.072	0.194730E+03	1.002	0.173114E+03
	1.632	0.15142E+03	1.002	0.125617E+03	1.001	0.106165E+03	1.001	0.924129E+02	1.072	0.819597E+02	1.002	0.741146E+02
	1.630	0.675281E+03	0.999	0.425419E+03	0.990	0.403561E+03	0.987	0.423541E+03	0.974	0.458413E+03	0.963	0.509646E+02
0.400	1.634	0.135642E+04	1.004	0.977847E+03	1.004	0.625775E+03	1.004	0.481672E+03	1.074	0.390775E+03	1.004	0.327615E+03
	1.634	0.247721E+03	1.004	0.169114E+03	1.004	0.164562E+03	1.004	0.144248E+03	1.074	0.127601E+03	1.004	0.112172E+03
	1.633	0.101817E+03	1.001	0.832177E+02	1.002	0.708169E+02	1.002	0.623329E+02	1.071	0.561462E+02	1.001	0.515538E+02
	0.999	0.480139E+02	0.992	0.372226E+02	0.986	0.397661E+02	0.983	0.456174E+02	0.977	0.528452E+02	0.961	0.606722E+02
0.500	1.637	0.857344E+03	1.007	0.562150E+03	1.007	0.402739E+03	1.007	0.311720E+03	1.077	0.252112E+03	1.007	0.211956E+03
	1.637	0.164700E+03	1.007	0.122232E+03	1.007	0.108255E+03	1.007	0.933412E+02	1.076	0.827715E+02	1.006	0.745772E+02
	1.636	0.676101E+03	1.005	0.502049E+03	1.004	0.448632E+03	1.002	0.436379E+03	1.071	0.402731E+03	1.003	0.377564E+03
	0.999	0.360132E+03	0.984	0.345328E+03	0.984	0.418837E+03	0.982	0.511912E+03	0.977	0.613504E+03	0.963	0.717604E+03
0.600	1.612	0.667328E+03	1.012	0.379314E+03	1.012	0.260147E+03	1.012	0.197531E+03	1.072	0.158921E+03	1.012	0.132913E+03
	1.612	0.106417E+03	1.011	0.911153E+02	1.011	0.646125E+02	1.011	0.590400E+02	1.072	0.531179E+02	1.009	0.481330E+02
	1.609	0.442308E+03	1.007	0.376026E+03	1.005	0.336059E+03	1.001	0.311359E+03	1.071	0.296796E+03	0.996	0.287204E+03
	0.997	0.26349E+03	0.965	0.342772E+03	0.982	0.454333E+03	0.980	0.572924E+03	0.977	0.707299E+03	0.979	0.442356E+03
0.700	1.621	0.424380E+03	1.021	0.222113E+03	1.020	0.151056E+03	1.020	0.114421E+03	1.077	0.921472E+02	1.020	0.772096E+02
	1.619	0.584221E+03	1.018	0.479274E+03	1.017	0.409217E+03	1.016	0.363609E+03	1.076	0.325565E+03	1.014	0.299527E+03
	1.612	0.275791E+03	1.009	0.248836E+03	1.005	0.233507E+03	1.001	0.227242E+03	1.076	0.226440E+03	0.995	0.205227E+03
	0.993	0.236402E+03	0.985	0.354374E+03	0.980	0.500670E+03	0.979	0.652602E+03	0.977	0.809794E+03	0.979	0.964789E+03
0.800	1.635	0.23179E+03	1.035	0.117058E+03	1.035	0.743452E+02	1.034	0.552146E+02	1.074	0.474572E+02	1.035	0.403234E+02
	1.632	0.311322E+03	1.030	0.252262E+03	1.028	0.224911E+03	1.025	0.202637E+03	1.074	0.187675E+03	1.000	0.177577E+03
	1.617	0.17962E+03	1.009	0.164562E+03	1.002	0.167054E+03	0.997	0.174799E+03	1.071	0.159515E+03	0.990	0.194393E+03
	0.988	0.212467E+03	0.981	0.177675E+03	0.979	0.554226E+03	0.979	0.733745E+03	0.979	0.911474E+03	0.979	0.103732E+03
0.900	1.662	0.104190E+03	1.062	0.527513E+02	1.062	0.355270E+02	1.061	0.274059E+02	1.061	0.219794E+02	1.063	0.180706E+02
	1.637	0.147750E+03	1.053	0.126152E+03	1.047	0.113665E+03	1.045	0.106705E+03	1.077	0.103591E+03	1.063	0.107675E+02
	1.615	0.104401E+03	0.999	0.117159E+03	0.991	0.135255E+03	0.987	0.151711E+03	1.076	0.170499E+03	0.985	0.150146E+03
	0.982	0.205371E+03	0.979	0.411421E+03	0.975	0.614156E+03	0.978	0.836455E+03	0.974	0.102771E+03	0.974	0.122512E+03
0.920	1.670	0.881944E+03	1.070	0.445231E+03	1.070	0.300150E+03	1.069	0.223624E+03	1.074	0.166479E+03	1.067	0.159098E+03
	1.664	0.176455E+03	1.060	0.107735E+03	1.053	0.947817E+02	1.044	0.936064E+02	1.077	0.921546E+02	1.022	0.935312E+02
	1.611	0.97463E+03	0.954	0.112494E+03	0.958	0.131117E+03</						

0.04	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.06	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18
0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00

FAT.SINT.

FREQ. RELATIVA E ADM. MAXIMA

0.020	1.000	0.171315E+04	1.000	0.110774E+05	1.000	0.784976E+04	1.000	0.661712E+04	1.000	0.488976E+04	1.000	0.410094E+04
	1.000	0.305530E+04	1.000	0.244532E+04	1.000	0.207461E+04	1.000	0.177992E+04	1.000	0.155449E+04	1.000	0.133549E+04
	1.000	0.124780E+04	1.000	0.954764E+03	1.000	0.852555E+03	1.000	0.713757E+03	1.000	0.624474E+03	1.000	0.555727E+03
	1.000	0.495799E+04	1.000	0.250722E+04	1.000	0.166900E+03	1.000	0.120535E+03	1.000	0.100441E+03	0.999	0.842655E+02
0.040	1.000	0.556900E+04	1.000	0.427644E+04	1.000	0.344355E+04	1.000	0.274151E+04	1.000	0.231729E+04	1.000	0.197008E+04
	1.000	0.152102E+04	1.000	0.122706E+04	1.000	0.102545E+04	1.000	0.862254E+03	1.000	0.773462E+03	1.000	0.689262E+03
	1.000	0.632997E+04	1.000	0.457670E+03	1.000	0.415717E+03	1.000	0.360120E+03	1.000	0.311746E+03	1.000	0.277224E+03
	1.000	0.245600E+04	1.000	0.125177E+04	0.999	0.840228E+02	0.999	0.634233E+02	0.999	0.517776E+02	0.997	0.437935E+02
0.060	1.000	0.266169E+04	1.000	0.229147E+04	1.000	0.195006E+04	1.000	0.165637E+04	1.000	0.142172E+04	1.000	0.123604E+04
	1.000	0.971326E+03	1.000	0.794912E+03	1.000	0.671083E+03	1.000	0.579481E+03	1.000	0.510791E+03	1.000	0.455046E+03
	1.000	0.416366E+03	1.000	0.329891E+03	1.000	0.275571E+03	1.000	0.236575E+03	1.000	0.207779E+03	1.000	0.184379E+03
	1.000	0.166069E+03	0.999	0.855978E+02	0.999	0.568418E+02	0.999	0.436333E+02	0.999	0.359715E+02	0.995	0.311265E+02
0.080	1.000	0.150240E+04	1.000	0.133410E+04	1.000	0.123479E+04	1.000	0.109559E+04	1.000	0.968743E+03	1.000	0.863147E+03
	1.000	0.693404E+03	1.000	0.576147E+03	1.000	0.490445E+03	1.000	0.426491E+03	1.000	0.376540E+03	1.000	0.336499E+03
	1.000	0.304547E+03	1.000	0.245460E+03	1.000	0.205414E+03	1.000	0.176556E+03	1.000	0.154797E+03	1.000	0.137811E+03
	1.000	0.124205E+03	0.999	0.623195E+02	0.998	0.436216E+02	0.996	0.339241E+02	0.994	0.285797E+02	0.991	0.252107E+02
0.100	1.001	0.992431E+03	1.001	0.935626E+03	1.001	0.859323E+03	1.001	0.774324E+03	1.001	0.701971E+03	1.000	0.635164E+03
	1.000	0.524394E+03	1.000	0.4442610E+03	1.000	0.380743E+03	1.000	0.333015E+03	1.000	0.295745E+03	1.000	0.265099E+03
	1.000	0.248275E+03	1.000	0.194247E+03	1.000	0.163046E+03	1.000	0.140353E+03	1.000	0.123191E+03	1.000	0.107777E+03
	1.000	0.990394E+02	0.999	0.509962E+02	0.996	0.355402E+02	0.994	0.265974E+02	0.990	0.244449E+02	0.987	0.221929E+02
0.150	1.001	0.225791E+04	1.001	0.143932E+04	1.001	0.101454E+04	1.001	0.777122E+03	1.001	0.628709E+03	1.001	0.526279E+03
	1.001	0.397770E+03	1.001	0.311445E+03	1.001	0.265813E+03	1.001	0.226091E+03	1.001	0.199747E+03	1.001	0.177678E+03
	1.001	0.160311E+03	1.001	0.124197E+03	1.001	0.106695E+03	1.001	0.914996E+02	1.001	0.806479E+02	1.000	0.720977E+02
	1.000	0.657000E+02	0.997	0.337493E+02	0.992	0.255429E+02	0.987	0.217774E+02	0.997	0.201754E+02	0.995	0.195636E+02
0.200	1.002	0.218151E+04	1.002	0.113636E+04	1.002	0.764993E+03	1.002	0.575758E+03	1.002	0.461741E+03	1.002	0.344555E+03
	1.002	0.286762E+03	1.002	0.231135E+03	1.002	0.192994E+03	1.002	0.166434E+03	1.002	0.144434E+03	1.002	0.123215E+03
	1.002	0.118229E+03	1.002	0.793004E+02	1.001	0.740124E+02	1.001	0.673058E+02	1.001	0.592722E+02	1.000	0.529770E+02
	1.000	0.408784E+02	0.995	0.260909E+02	0.988	0.212116E+02	0.981	0.154188E+02	0.995	0.192970E+02	0.971	0.197772E+02
0.250	1.003	0.115912E+04	1.003	0.747846E+03	1.003	0.592022E+03	1.003	0.426370E+03	1.003	0.346007E+03	1.003	0.290661E+03
	1.003	0.215422E+03	1.003	0.175603E+03	1.003	0.147560E+03	1.003	0.126728E+03	1.003	0.111700E+03	1.003	0.993768E+02
	1.003	0.891146E+02	1.002	0.716207E+02	1.002	0.602351E+02	1.002	0.520368E+02	1.001	0.459999E+02	1.001	0.415151E+02
	1.000	0.376517E+02	0.992	0.224344E+02	0.983	0.190928E+02	0.975	0.167657E+02	0.990	0.196475E+02	0.966	0.211342E+02
0.500	1.005	0.136218E+04	1.005	0.690761E+03	1.005	0.461776E+03	1.005	0.346706E+03	1.005	0.277579E+03	1.005	0.231390E+03
	1.005	0.173687E+03	1.005	0.139072E+03	1.005	0.116009E+03	1.005	0.995501E+02	1.004	0.875579E+02	1.004	0.781512E+02
	1.004	0.705185E+02	1.004	0.569118E+02	1.003	0.479991E+02	1.002	0.416351E+02	1.002	0.369599E+02	1.001	0.333920E+02
	1.000	0.305922E+02	0.989	0.195478E+02	0.978	0.181202E+02	0.971	0.169768E+02	0.994	0.207740E+02	0.962	0.233531E+02
0.600	1.009	0.704325E+04	1.009	0.417024E+03	1.009	0.290821E+03	1.009	0.221436E+03	1.009	0.179465E+03	1.009	0.149366E+03
	1.009	0.112939E+03	1.009	0.938101E+02	1.009	0.755365E+02	1.009	0.649308E+02	1.008	0.571653E+02	1.008	0.511105E+02
	1.008	0.462344E+02	1.007	0.376533E+02	1.005	0.320469E+02	1.004	0.281582E+02	1.003	0.253717E+02	1.001	0.232103E+02
	0.999	0.216782E+02	0.982	0.166400E+02	0.970	0.173389E+02	0.964	0.162726E+02	0.994	0.240795E+02	0.964	0.227518E+02
0.500	1.016	0.541361E+03	1.016	0.267219E+03	1.016	0.193823E+03	1.016	0.146062E+03	1.016	0.117145E+03	1.016	0.978317E+02
	1.016	0.738235E+02	1.015	0.551743E+02	1.015	0.496487E+02	1.015	0.429690E+02	1.014	0.378616E+02	1.013	0.337727E+02
	1.013	0.305173E+02	1.011	0.255118E+02	1.008	0.220699E+02	1.006	0.197322E+02	1.003	0.181352E+02	1.000	0.167995E+02
	0.997	0.161797E+02	0.974	0.155498E+02	0.964	0.149918E+02	0.960	0.136824E+02	0.994	0.231771E+02	0.956	0.330377E+02
0.600	1.027	0.371071E+03	1.027	0.185671E+03	1.027	0.123884E+03	1.027	0.930161E+02	1.027	0.745194E+02	1.026	0.623998E+02
	1.026	0.471959E+02	1.025	0.380647E+02	1.024	0.320626E+02	1.023	0.278360E+02	1.022	0.247165E+02	1.021	0.223414E+02
	1.020	0.204785E+02	1.016	0.172775E+02	1.012	0.153331E+02	1.007	0.133411E+02	1.003	0.133411E+02	0.999	0.127214E+02
	0.993	0.127032E+02	0.968	0.154549E+02	0.960	0.207280E+02	0.957	0.266378E+02	0.954	0.325512E+02	0.955	0.386673E+02
0.700	1.044	0.221340E+03	1.043	0.112350E+03	1.043	0.753947E+02	1.043	0.567653E+02	1.043	0.455707E+02	1.042	0.381443E+02
	1.041	0.289456E+02	1.040	0.225094E+02	1.039	0.194477E+02	1.037	0.174658E+02	1.035	0.156578E+02	1.033	0.143024E+02
	1.030	0.137675E+02	1.023	0.115835E+02	1.015	0.106966E+02	1.006	0.102650E+02	0.999	0.101819E+02	0.992	0.102915E+02
	0.946	0.105402E+02	0.962	0.160734E+02	0.957	0.229212E+02	0.956	0.303192E+02	0.955	0.372779E+02	0.954	0.444542E+02
0.800	1.070	0.130204E+03	1.070	0.652296E+02	1.070	0.436126E+02	1.069	0.328738E+02	1.069	0.264415E+02	1.068	0.222119E+02
	1.067	0.165700E+02	1.065	0.138993E+02	1.062	0.119160E+02	1.059	0.105623E+02	1.055	0.950709E+01	1.050	0.891005E+01
	1.045	0.841160E+01	1.030	0.773859E+01	1.013	0.761071E+01	0.994	0.783171E+01	0.977	0.827700E+01	0.979	0.884478E+01
	0.973	0.945611E+01	0.958	0.172499E+02	0.955	0.254745E+02	0.954	0.337649E+02	0.954	0.421155E+02	0.954	0.504692E+02
0.900	1.100	0.313931E+04	1.100	0.253546E+03	1.100	0.202696E+02	1.100	0.166003E+02	1.100	0.139913E+02	1.100	0.120954E+02
	1.100	0.959233E+03	1.100	0.805826E+02	1.100	0.704710E+01	1.099	0.634626E+01	1.091	0.566419E+01	1.082	0.504360E+01
	1.069	0.534668E+02	1.024	0.514033E+01	0.982	0.594340E+01	0.968	0.679972E+01	0.957	0.769119E+01	0.960	0.861033E+01
	0.950	0.953516E+01	0.954	0.189206E+02	0.954	0.283445E+02	0.954	0.377621E+02	0.954	0.471565E+02	0.954	0.565527E+02
0.500	1.100	0.163796E+04	1.100	0.151076E+03	1.100	0.135555E+02	1.100	0.120595E+02	1.100	0.107614E+02	1.100	0.964324E+01
	1.100	0.808163E+03	1.100	0.700485E+02	1.100	0.626058E+01	1.100	0.572496E+01	1.100	0.534077E+01	1.101	0.506551E+01
	1.076	0.490784E+02	1.009	0.503911E+01	0.966	0.566550E+01	0.953	0.606100E+01	0.957	0.776756E+01	0.956	0.971896E+01
	0.955	0.967935E+01	0.954	0.191311E+02	0.954	0.289459E+02						

FATIA DE APOCIMENTOS DO ASSÓLUM

0.01		0.02		0.03		0.04		0.05		0.06		
0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	
0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	
0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
FAT. SINT.												
FREQ. RELATIVA E JOP. MÁXIMA												
0.020	1.000	0.143291E+03	1.000	0.921059E+03	1.000	0.654493E+04	1.000	0.503631E+04	1.000	0.407742E+04	1.000	0.341651E+04
	1.000	0.257886E+04	1.000	0.207107E+04	1.000	0.172511E+04	1.000	0.144335E+04	1.000	0.129430E+04	1.000	0.115502E+04
	1.000	0.103986E+04	1.000	0.413219E+03	1.000	0.693401E+03	1.000	0.558000E+03	1.000	0.520572E+03	1.000	0.462735E+03
	1.000	0.411699E+03	1.000	0.206809E+03	1.000	0.139083E+03	1.000	0.106459E+03	1.000	0.837900E+02	0.999	0.702976E+02
0.040	1.000	0.486077E+04	1.000	0.365270E+04	1.000	0.287238E+04	1.000	0.231922E+04	1.000	0.192763E+04	1.000	0.164210E+04
	1.000	0.121322E+04	1.000	0.101932E+04	1.000	0.854614E+03	1.000	0.735251E+03	1.000	0.649101E+03	1.000	0.574715E+03
	1.000	0.517426E+03	1.000	0.414731E+03	1.000	0.345925E+03	1.000	0.296768E+03	1.000	0.259495E+03	1.000	0.231032E+03
	1.000	0.206900E+03	1.000	0.104314E+03	0.999	0.701134E+02	0.999	0.531496E+02	0.999	0.411118E+02	0.997	0.365032E+02
0.060	1.000	0.217627E+04	1.000	0.191111E+04	1.000	0.162601E+04	1.000	0.133091E+04	1.000	0.111641E+04	1.000	0.103022E+04
	1.000	0.809307E+03	1.000	0.624919E+03	1.000	0.592731E+03	1.000	0.483240E+03	1.000	0.425778E+03	1.000	0.379218E+03
	1.000	0.342205E+03	1.000	0.274912E+03	1.000	0.229544E+03	1.000	0.197146E+03	1.000	0.172499E+03	1.000	0.153664E+03
	1.000	0.137390E+03	0.997	0.697893E+02	0.998	0.473527E+02	0.997	0.363730E+02	0.995	0.295895E+02	0.994	0.258404E+02
0.080	1.000	0.125113E+04	1.000	0.115404E+04	1.000	0.103277E+04	1.000	0.913296E+03	1.000	0.807145E+03	1.000	0.716937E+03
	1.000	0.572747E+03	1.000	0.440332E+03	1.000	0.405064E+03	1.000	0.355426E+03	1.000	0.313927E+03	1.000	0.280737E+03
	1.000	0.253282E+03	1.000	0.204553E+03	1.000	0.171100E+03	1.000	0.147130E+03	1.000	0.126976E+03	1.000	0.114604E+03
	1.000	0.103504E+03	0.999	0.526950E+02	0.997	0.361754E+02	0.995	0.262536E+02	0.997	0.217599E+02	0.969	0.209930E+02
0.100	1.001	0.121585E+04	1.001	0.107940E+04	1.001	0.927939E+03	1.001	0.754153E+03	1.001	0.685074E+03	1.001	0.597870E+03
	1.001	0.471715E+03	1.001	0.387065E+03	1.001	0.327227E+03	1.001	0.282995E+03	1.001	0.249993E+03	1.001	0.147820E+03
	1.001	0.200717E+03	1.001	0.161992E+03	1.000	0.135873E+03	1.000	0.116910E+03	1.000	0.102641E+03	1.000	0.914611E+02
	1.000	0.825081E+02	0.998	0.424144E+02	0.998	0.296087E+02	0.992	0.236088E+02	0.999	0.203518E+02	0.998	0.184702E+02
0.150	1.001	0.117799E+04	1.001	0.926474E+03	1.001	0.737251E+03	1.001	0.595644E+03	1.001	0.495755E+03	1.001	0.427271E+03
	1.001	0.323968E+03	1.001	0.202198E+03	1.001	0.219811E+03	1.001	0.189160E+03	1.001	0.165965E+03	1.001	0.147820E+03
	1.001	0.133245E+03	1.001	0.106906E+03	1.001	0.892930E+02	1.001	0.766994E+02	1.001	0.672554E+02	1.000	0.600931E+02
	1.000	0.543334E+02	0.996	0.289355E+02	0.991	0.213019E+02	0.985	0.181273E+02	0.979	0.167563E+02	0.974	0.162938E+02
0.200	1.002	0.893387E+03	1.002	0.658435E+03	1.002	0.544769E+03	1.002	0.436995E+03	1.002	0.362791E+03	1.002	0.307919E+03
	1.002	0.235472E+03	1.002	0.197649E+03	1.002	0.159811E+03	1.002	0.137502E+03	1.002	0.120539E+03	1.002	0.107455E+03
	1.002	0.968007E+02	1.002	0.777835E+02	1.002	0.650321E+02	1.001	0.560726E+02	1.001	0.493795E+02	1.001	0.441485E+02
	1.000	0.400653E+02	0.994	0.224057E+02	0.985	0.176519E+02	0.977	0.161656E+02	0.979	0.160002E+02	0.965	0.165002E+02
0.250	1.004	0.147157E+04	1.004	0.736007E+03	1.004	0.490729E+03	1.004	0.368089E+03	1.004	0.294511E+03	1.004	0.245465E+03
	1.004	0.184172E+03	1.004	0.147412E+03	1.004	0.122920E+03	1.004	0.105437E+03	1.004	0.923147E+02	1.003	0.822593E+02
	1.003	0.742994E+02	1.003	0.594495E+02	1.003	0.501655E+02	1.002	0.433101E+02	1.001	0.383727E+02	1.001	0.344472E+02
	1.000	0.313764E+02	0.990	0.186709E+02	0.979	0.158849E+02	0.970	0.156352E+02	0.964	0.163949E+02	0.959	0.176595E+02
0.300	1.006	0.113447E+04	1.006	0.576110E+03	1.006	0.385236E+03	1.006	0.289267E+03	1.006	0.231594E+03	1.006	0.193069E+03
	1.006	0.144225E+03	1.006	0.116604E+03	1.006	0.967954E+02	1.005	0.832739E+02	1.005	0.731573E+02	1.005	0.652376E+02
	1.005	0.588357E+02	1.004	0.425022E+02	1.004	0.400089E+02	1.003	0.347300E+02	1.003	0.302724E+02	1.001	0.278352E+02
	1.000	0.254935E+02	0.987	0.163476E+02	0.974	0.150087E+02	0.965	0.156312E+02	0.959	0.173697E+02	0.950	0.192930E+02
0.400	1.011	0.680336E+03	1.011	0.366176E+03	1.011	0.247875E+03	1.011	0.186963E+03	1.011	0.150004E+03	1.011	0.125234E+03
	1.011	0.941688E+02	1.011	0.755012E+02	1.011	0.630594E+02	1.010	0.543445E+02	1.010	0.477488E+02	1.010	0.427704E+02
	1.008	0.386318E+02	1.003	0.314557E+02	1.007	0.267520E+02	1.005	0.234935E+02	1.003	0.211276E+02	1.001	0.196330E+02
	0.999	0.180036E+02	0.978	0.138779E+02	0.964	0.149606E+02	0.957	0.175270E+02	0.951	0.201975E+02	0.951	0.232671E+02
0.500	1.020	0.448744E+03	1.020	0.238646E+03	1.019	0.161770E+03	1.019	0.122264E+03	1.019	0.982999E+02	1.019	0.820652E+02
	1.019	0.181835E+03	1.018	0.456418E+02	1.018	0.416644E+02	1.017	0.359552E+02	1.017	0.317536E+02	1.016	0.284747E+02
	1.013	0.298911E+02	1.011	0.215528E+02	1.010	0.184512E+02	1.007	0.164934E+02	1.004	0.151274E+02	1.001	0.141666E+02
	0.997	0.334750E+02	0.989	0.120474E+02	0.957	0.158654E+02	0.952	0.195835E+02	0.950	0.235844E+02	0.948	0.277340E+02
0.600	1.032	0.313735E+03	1.032	0.157221E+03	1.032	0.104930E+03	1.032	0.787913E+02	1.032	0.631235E+02	1.031	0.527666E+02
	1.031	0.396631E+02	1.031	0.321653E+02	1.029	0.270813E+02	1.028	0.234964E+02	1.027	0.208479E+02	1.025	0.183221E+02
	1.024	0.172394E+02	1.020	0.145096E+02	1.015	0.128442E+02	1.009	0.117984E+02	1.004	0.111457E+02	0.993	0.107616E+02
	0.993	0.105684E+02	0.961	0.128900E+02	0.952	0.173497E+02	0.949	0.222562E+02	0.944	0.273162E+02	0.947	0.326438E+02
0.700	1.051	0.191206E+03	1.051	0.987536E+02	1.051	0.644085E+02	1.051	0.463059E+02	1.051	0.391670E+02	1.050	0.327843E+02
	1.049	0.248524E+02	1.048	0.201559E+02	1.046	0.170767E+02	1.044	0.147254E+02	1.042	0.133563E+02	1.040	0.121752E+02
	1.037	0.112849E+02	1.029	0.978165E+01	1.019	0.898240E+01	1.009	0.859846E+01	0.979	0.848779E+01	0.991	0.855729E+01
	0.943	0.876418E+01	0.955	0.134336E+02	0.945	0.192150E+02	0.947	0.252486E+02	0.946	0.312855E+02	0.946	0.373816E+02
0.800	1.081	0.114869E+03	1.081	0.578414E+02	1.081	0.387029E+02	1.081	0.291451E+02	1.080	0.234401E+02	1.080	0.196628E+02
	1.076	0.149902E+02	1.076	0.122454E+02	1.074	0.104666E+02	1.071	0.924697E+01	1.067	0.836465E+01	1.062	0.772458E+01
	1.057	0.725398E+01	1.040	0.636992E+01	1.019	0.636949E+01	1.000	0.623630E+01	0.985	0.687102E+01	0.974	0.734635E+01
	0.967	0.789602E+01	0.949	0.144562E+02	0.947	0.213824E+02	0.946	0.285807E+02	0.945	0.353860E+02	0.945	0.424131E+02
0.900	1.100	0.141135E+03	1.100	0.133499E+02	1.100	0.123309E+02	1.100	0.112577E+02	1.100	0.102570E+02	1.100	0.935936E+01
	1.100	0.794312E+02	1.100	0.652811E+01	1.100	0.619744E+01	1.100	0.565996E+01	1.100	0.525776E+01	1.100	0.484925E+01
	1.091	0.472137E+01	1.045	0.433501E+01	0.950	0.493471E+01	0.959	0.565484E+01	0.953	0.642340E+01	0.950	0.720337E+01
	0.949	0.798600E+01	0.946	0.158550E+02	0.945	0.238277E+02	0.945	0.317599E+02	0.945	0.396902E+02	0.945	0.476307E+02
0.920	1.100	0.935766E+01	1.100	0.908689E+01	1.100	0.869636E+01	1.100	0.823933E+01	1.100	0.776677E+01	1.100	0.731074E+01
	1.100	0.658770E+01	1.100	0.587957E+01	1.100	0.539737E+01	1.100	0.503012E+01	1.100	0.474797E+01	1.100	0.445282E+01
	1.100	0.435444E+01	1.03									

