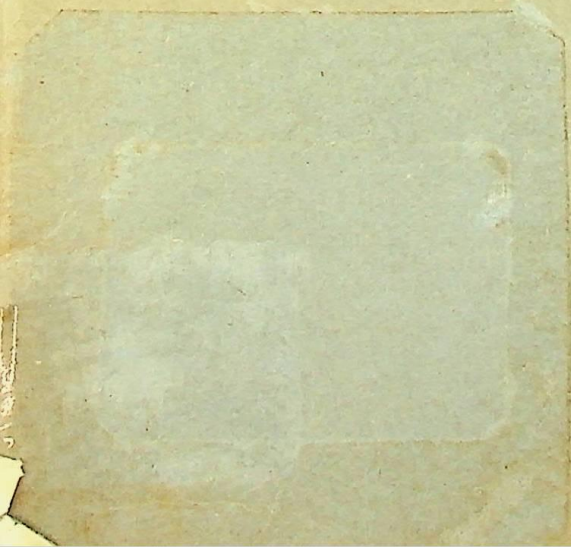
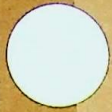


TESE

321



ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

"CONVECÇÃO NATURAL EM TUBOS VERTICAIS  
COM PRESSÃO  
IMPOSTA NUMA EXTREMIDADE"

Helder Fernando de França Mendes Carneiro

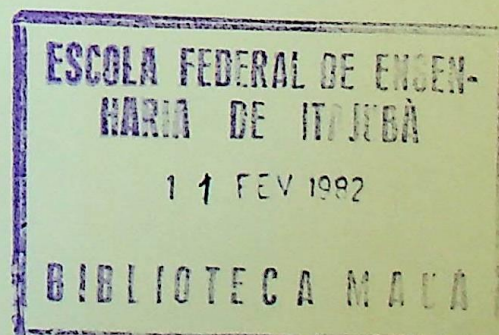
ORIENTADOR : Euclides Carvalho Fernandes

CO-ORIENTADOR: Genésio José Menon



*Trabalho de Dissertação apresentado à comissão de pós-graduação da Escola Federal de Engenharia de Itajubá como parte dos requisitos para obtenção do Título de " Mestre em Engenharia Mecânica "*

ITAJUBÁ, DEZEMBRO DE 1981



CLASS. 517.962 : 602.28(043.2)

CUT. Cage

TOMBO 321

## A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Euclides Carvalho Fernandes, que se mostrou um grande amigo, não só pela orientação recebida, como também pelo valioso incentivo que me foi dado, que certamente será importante na minha vida profissional.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica pela amizade, incentivo e distinção com que me trataram, em particular aos professores Nelson Manzares Filho, Waldir de Oliveira e em especial ao Professor Genésio José Menon pela sua colaboração no trabalho.

À Comissão de Pós-Graduação por ter acreditado na minha capacidade, dando a oportunidade para realização do curso e pelo constante apoio recebido durante o transcorrer do mesmo.

Ao CNPq, que através do seu programa de bolsa de estudo, tornou possível a minha participação nesse curso.

À todos professores e funcionários da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, que contribuíram direta ou indiretamente para o meu êxito.

Aos parentes e amigos, que sempre me deram todo o apoio.

## R E S U M O

Analisa-se o escoamento de convecção natural em regime laminar, permanente, na região de entrada de tubos verticais, considerando fluidos com números de Prandtl iguais a 0,7; 1; 2,5; 5 e 10 com a condição de temperatura da parede do tubo uniforme. Abordando-se as situações em que o tubo se encontra com ambas as extremidades abertas e aquela em que existe uma restrição ao escoamento no topo do mesmo. Utilizou-se o método de diferenças finitas na solução das equações de camada limite.

## ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	FORMULAÇÃO	4
3	SOLUÇÃO NUMÉRICA	13
4	RESULTADOS	21
5	CONCLUSÃO	69
APÊNDICE A		
	Parametrização das Equações Fundamentais	71
APÊNDICE B		
	Escoamento Desenvolvido	76
APÊNDICE C		
	I Solução Segundo o Método Integral	81
	II Expressões Analíticas para $F$ , $H'$ e $\overline{Nu}_0$	90
APÊNDICE D		
	I Fluxograma	92
	II Programa	95
	BIBLIOGRAFIA	103

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA		PÁG.
1	Geometria do Problema para Tubos Inclínados	3
2	Ilustração do Escoamento de Convecção Natural num Tubo Vertical	3
3	Malha para Representação de diferenças	14
4	Representação da Região de Mudança da Malha na Direção Radial.	19
5	Variação da Vazão Adimensional e do Fluxo de Entalpia com o Comprimento Adimensional do Tubo para vários $Pr$ .	25
6	Variação do Número de Nusselt Médio com $l/L^+$ para vários $Pr$	26
7	Vazão Volumétrica Versus $L+\Delta L$ para Valores de $Z$ Constantes e $Pr = 0,7$	32
8	Vazão Volumétrica Versus $L+\Delta L$ para Valores de $Z$ Constantes e $Pr = 2,5$	33
9	Vazão Volumétrica Versus $L+\Delta L$ para Valores de $Z$ Constantes e $Pr = 5,0$	34
10	Vazão Volumétrica Versus $L+\Delta L$ para Valores de $Z$ Constantes e $Pr = 10,0$	35
11	Fluxo de Entalpia na Saída Versus $L+\Delta L$ para Valores de $Z$ Constantes e $Pr = 0,7$	36
12	Fluxo de Entalpia na Saída Versus $L+\Delta L$ para Valores de $Z$ Constantes e $Pr = 2,5$	37
13	Fluxo de Entalpia na Saída Versus $L+\Delta L$ para Valores de $Z$ Constantes e $Pr = 5,0$	38
14	Fluxo de Entalpia na Saída Versus $L+\Delta L$ para Valores de $Z$ Constantes e $Pr = 10,0$	39

15	Variação da Vazão Volumétrica com $\Delta L/L$ para Valores de Z Constantes e $Pr = 0,7$	40
16	Variação da Vazão Volumétrica com $\Delta L/L$ para Valores de Z Constantes e $Pr = 2,5$	41
17	Variação da Vazão Volumétrica com $\Delta L/L$ para Valores de Z Constantes e $Pr = 5,0$	42
18	Variação da Vazão Volumétrica com $\Delta L/L$ para Valores de Z Constantes e $Pr = 10,0$	43
19	Variação do Fluxo de Entalpia na Saída com $\Delta L/L$ para Valores de Z Constantes e $Pr = 0,7$	44
20	Variação do Fluxo de Entalpia na Saída com $\Delta L/L$ para Valores de Z Constantes e $Pr = 2,5$	45
21	Variação do Fluxo de Entalpia na Saída com $\Delta L/L$ para Valores de Z Constantes e $Pr = 5,0$	46
22	Variação do Fluxo de Entalpia na Saída com $\Delta L/L$ para Valores de Z Constantes e $Pr = 10,0$	47
B1	Comportamento da Pressão Adimensional com Relação a X	79
B2	Exemplo de uma Situação envolvendo o Problema Estudado	79
C1	Principais Grandezas Envolvidas na Solução pelo Método Integral	31

## LISTA DE TABELAS

TABELA		PÁG.
Ia	Referente aos Resultados para $Z = 0,0$ com $Pr = 0,7$	27
Ib	Referente aos Resultados para $Z = 0,0$ com $Pr = 1,0$	28
Ic	Referente aos Resultados para $Z = 0,0$ com $Pr = 2,5$	29
Id	Referente aos Resultados para $Z = 0,0$ com $Pr = 5,0$	30
Ie	Referente aos Resultados para $Z = 0,0$ com $Pr = 10,0$	31
IIa	Referente aos Resultados para $Z = 0,1$ com $Pr = 0,7$	48
IIb	Referente aos Resultados para $Z = 0,25$ com $Pr = 0,7$	49
IIc	Referente aos Resultados para $Z = 0,5$ com $Pr = 0,7$	50
IIId	Referente aos Resultados para $Z = 1,0$ com $Pr = 0,7$	51
IIe	Referente aos Resultados para $Z = 2,0$ com $Pr = 0,7$	52
IIIf	Referente aos Resultados para $Z = 3,0$ com $Pr = 0,7$	53
IIIa	Referente aos Resultados para $Z = 0,25$ com $Pr = 2,5$	54
IIIb	Referente aos Resultados para $Z = 0,5$ com $Pr = 2,5$	55
IIIc	Referente aos Resultados para $Z = 1,0$ com $Pr = 2,5$	56
IIId	Referente aos Resultados para $Z = 2,0$ com $Pr = 2,5$	57
IIIe	Referente aos Resultados para $Z = 3,0$ com $Pr = 2,5$	58
IVa	Referente aos Resultados para $Z = 0,5$ com $Pr = 5,0$	59
IVb	Referente aos Resultados para $Z = 1,0$ com $Pr = 5,0$	60
IVc	Referente aos Resultados para $Z = 2,0$ com $Pr = 5,0$	61
IVd	Referente aos Resultados para $Z = 3,0$ com $Pr = 5,0$	62
IVe	Referente aos Resultados para $Z = 4,0$ com $Pr = 5,0$	63

IVf	Referente aos Resultados para $Z = 5,0$ com $Pr = 5,0$	64
Va	Referente aos Resultados para $Z = 1,0$ com $Pr = 10,0$	65
Vb	Referente aos Resultados para $Z = 3,0$ com $Pr = 10,0$	66
Vc	Referente aos Resultados para $Z = 5,0$ com $Pr = 10,0$	67
Vd	Referente aos Resultados para $Z = 7,0$ com $Pr = 10,0$	68

## SIMBOLOGIA

- a Dimensão do raio do tubo usada no Apêndice C;
- a' Coeficiente na equação (C-2);
- a" Coeficiente na equação para o perfil de temperatura no Apêndice C;
- $A_k$  Coeficiente da equação (41) definido em (43);
- $\overline{A_k}$  Coeficiente da equação (42) definido em (43);
- b' Coeficiente na equação (C-2);
- b" Coeficiente na equação para o perfil de temperatura no Apêndice C;
- $B_k$  Coeficiente da equação (41) definido em (43);
- $\overline{B_k}$  Coeficiente da equação (42) definido em (43);
- c' Coeficiente na equação (C-2);
- c" Coeficiente na equação para o perfil de temperatura no Apêndice C;
- $C_k$  Coeficiente da equação (41) definido em (43);
- $\overline{C_k}$  Coeficiente da equação (42) definido em (43);
- $C_p$  Calor específico à pressão constante;
- $D_k$  Coeficiente da equação (41) definido em (43);
- $\overline{D_k}$  Coeficiente da equação (42) definido em (43);
- F Vazão volumétrica adimensional definida em (25);
- g Aceleração da gravidade;
- $Gr_\gamma$  Número de Grashof definido em (8);
- Gr Número de Grashof definido pela equação (18);
- $h_o$  Coeficiente de convecção local;
- $\bar{h}$  Coeficiente de convecção médio;
- H Fluxo de entalpia adimensional numa secção particular do tubo, dado pela equação (30);
- H' Fluxo de entalpia adimensional na secção de saída do tubo;

- $j$  Índice das linhas da malha na direção radial;  
 $K$  Condutividade térmica do fluido;  
 $k$  Índice das linhas da malha na direção longitudinal;  
 $kp$  Índice da linha longitudinal da malha, onde ocorre mudança na dimensão radial da malha;  
 $\ell$  Comprimento do tubo;  
 $L$  Comprimento adimensional do tubo;  
 $L^+$  Comprimento adimensional do tubo definido pela equação (33);  
 $T$  Temperatura num ponto qualquer do escoamento;  
 $T_0$  Temperatura ambiente;  
 $T_w$  Temperatura da parede do tubo;  
 $u$  Velocidade na direção axial;  
 $u_0$  Velocidade na entrada do tubo;  
 $U$  Velocidade adimensional na direção axial;  
 $U_0$  Velocidade adimensional na entrada do tubo;  
 $v$  velocidade na direção radial;  
 $\dot{V}$  vazão volumétrica;  
 $V$  Velocidade adimensional na direção radial;  
 $x$  Coordenada axial;  
 $X$  Coordenada axial adimensional;  
 $w$  Velocidade angular  
 $W$  Velocidade angular adimensional;  
 $n$  Número de incrementos da malha na direção radial;  
 $NU_0$  Número de Nusselt local;  
 $\overline{NU}_0$  Número de Nusselt médio;  
 $p$  Pressão;  
 $p^*$  Diferença de pressão;  
 $P$  Pressão adimensional definida em (8);  
 $Pr$  Número de Prandtl definido em (8);

- $Q$  Calor absorvido pelo fluido desde a entrada até uma sec  
ção particular do tubo;
- $Q'$  Calor absorvido pelo fluido desde a entrada até a secção  
de saída do tubo;
- $r$  Coordenada radial;
- $r_w$  raio do tubo;
- $R$  Coordenada radial adimensional;
- $Z$  Valor da restrição na saída;
- $\gamma$  Inclinação do tubo em relação a horizontal;
- $\theta$  temperatura adimensional definida em (8);
- $\phi$  Coordenada angular;
- $\rho$  densidade;
- $\nu$  Viscosidade cinemática;
- $\Phi(Pr, L)$  Fator de correção introduzido na expressão (34)
- $\alpha(Pr, L)$  Fator de correção introduzido na expressão (33);
- $\delta$  Espessura da camada limite dinâmica;
- $\delta_T$  Espessura da camada limite térmica;

## 1 - INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo estudar o problema do escoamento de convecção natural em regime laminar, permanente, em tubos verticais, considerando-se fluidos com diferentes números de Prandtl e situações nas quais a superfície interna do tubo se encontra a temperatura constante.

Trata-se de um tópico de grande importância no estudo de transferência de calor, com aplicações em diversos campos da engenharia, como por exemplo em sistemas de energia solar e nuclear.

O modelamento físico do problema se baseia no fato de que as pequenas diferenças de densidade, provocadas por gradientes de temperatura, originam forças de empuxo causadoras do movimento do fluido. Admite-se que o fluido entra pela base do tubo com velocidade uniforme e temperatura ambiente.

Na solução desse tipo de problema é comum considerar-se que o escoamento é desenvolvido em toda extensão do tubo, com o intuito de simplificar a solução matemática do mesmo. Porém, esta consideração só fornece bons resultados nos casos em que o comprimento do tubo é grande em relação ao diâmetro. Entretanto, nesse problema, interessam soluções para os casos em que não há desenvolvimento dos perfis de velocidade e de temperatura, onde deixa de ser válida a consideração anterior.

Elenbaas [1] (1942), analisou analítica e experimentalmente o escoamento de convecção natural em dutos verticais, com secção transversal de forma triangular, retangular, quadrangular, circular e também o caso de placas planas paralelas verticais, para a condição de temperatura na parede constante, usando ar como fluido de trabalho. Na solução analítica determinou uma expressão para o número de Nusselt, considerando numa primeira aproximação que a velocidade transversal era nula, para posteriormente determinar os coeficientes da expressão de modo que a mesma satisfizesse as condições limites, correspondentes aos casos "placa plana" e escoamento desenvolvido, e que representasse ao mesmo tempo os resultados, numa faixa intermediária, obtidos experimentalmente.

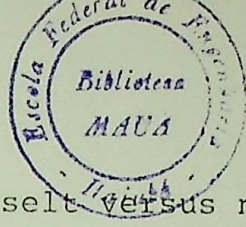
Bodoia e Osterle [2] (1962), analisaram o escoamento

mento de convecção natural de um fluido com número de Prandtl igual a 0,7, na região de entrada de dutos verticais formados por duas placas planas e paralelas, com a condição de temperatura na parede constante. Observaram uma boa concordância dos seus resultados teóricos para o número de Nusselt médio, em relação aos encontrados experimentalmente por Elenbaas [1], exceto para baixos valores do parâmetro  $Gr \cdot a/\ell$ , onde  $a$  representa a metade do espaçamento entre as placas,  $Gr$  representa o número de Grashof e  $\ell$  representa o comprimento do canal.

Davis e Perona [3] (1971), procedendo de maneira semelhante, estenderam a análise para o caso de tubos verticais usando um fluido com número de Prandtl igual a 0,7. Observaram uma boa concordância dos seus resultados para o número de Nusselt médio em relação aos encontrados experimentalmente por Elenbaas [1], embora tenham verificado uma discordância de até 13%, numa faixa intermediária desses seus resultados para o número de Nusselt, quando confrontados com os conseguidos analiticamente por este último autor. Adicionalmente analisaram a situação para fluxo de calor na parede constante.

Kageyama e Izumi [4] (1970), fizeram um estudo semelhante ao realizado por Davis e Perona [3], para o caso de fluido com número de Prandtl igual a 0,72, sem fazer uma análise comparativa dos seus resultados com os conseguidos por Elenbaas [1]. Estenderam o estudo para o caso em que a velocidade adimensional de entrada era constante e igual a 1/8, correspondente à situação de escoamento dinâmico e termicamente desenvolvido, variando o número de Prandtl como parâmetro numa faixa de 0,01 a 100, considerando a temperatura na parede como constante. Portanto, nessa situação não se analisou as condições de escoamento na região de entrada do tubo.

Dyer [5] (1975), analisou o escoamento de convecção natural na região de entrada de tubos verticais com a condição de fluxo de calor na parede constante, visando estudar teoricamente a influência de algumas condições de entrada, em termos do perfil de velocidade e do valor da pressão, sobre os resultados numéricos. Procedeu ainda um estudo teórico-experimental dos parâmetros de transferência de calor, apresentando re-



sultados na forma do número de Nusselt versus número de Rayleigh. Utilizou na maioria das análises um fluido com número de Prandtl igual a 0,7.

Meriç [6] (1977), analisou a situação de tubo vertical para o caso de fluido com número de Prandtl igual a 0,7, empregando um método analítico que envolve a linearização das equações de camada limite. Mostrou a validade do método pela boa concordância dos seus resultados com os conseguidos numericamente por Davis e Perona [3]. Sem, entretanto, acrescentar novos resultados relativamente aos já conhecidos.

No presente trabalho estendeu-se a solução do problema obtida por Davis e Perona [3], para o caso de temperatura na parede constante, para outros números de Prandtl, iguais a 1; 2,5; 5 e 10. A formulação matemática foi feita adotando-se o modelo de camada limite representado pelas equações de continuidade, movimento e energia, em cuja solução empregou-se o método de diferenças finitas. Os resultados são apresentados na forma de uma correlação entre o comprimento adimensional do tubo e as grandezas adimensionais representativas da vazão volumétrica do escoamento,  $F$ , e do fluxo de entalpia na secção de saída do tubo,  $H'$ , para cada valor do número de Prandtl. Os resultados de transferência de calor são também correlacionados na forma do número de Nusselt médio. Estes resultados são representados por expressões analíticas determinadas para a faixa de números de Prandtl analisados.

Finalmente, apresenta-se uma correlação gráfica envolvendo  $F$  e  $H'$  versus o comprimento de tubo, para casos em que simula-se uma restrição ao escoamento no topo do mesmo, representada por uma grandeza adimensional,  $Z$ , relacionando a pressão adimensional na saída do tubo e a vazão volumétrica  $F$ . As curvas de  $F$  e  $H'$  são traçadas para vários valores de  $Z$  constantes, conforme o número de Prandtl considerado. Considera-se ainda uma variação de  $F$  e  $H'$  com o acréscimo relativo de tubo, dado em percentagem, para certos valores de  $Z$  considerados, com a finalidade de se fornecer resultados aplicáveis no pré-dimensionamento com a consideração de uma restrição na saída do tubo. Esta situação é típica, por exemplo, de coletor solar do tipo de convecção natural.

## 2 - FORMULAÇÃO

O problema é formulado, adotando-se o modelo de camada limite, com base nas equações de continuidade, movimento e energia.

As equações fundamentais são escritas considerando-se que as propriedades do meio fluido, exceto a densidade, são independentes da temperatura. \*As variações de temperatura são suficientemente pequenas para produzir a força de empuxo. O escoamento é permanente, laminar e incompressível\*. A dissipação viscosa é desprezível. E ainda, com o objetivo de generalizar a formulação com relação a disposição do tubo e mostrar uma solução alternativa para o caso de tubos inclinados, considera-se que o mesmo se encontra inclinado de um ângulo  $\gamma$  em relação a horizontal, conforme a figura 1. Nesta situação o escoamento terá que ser tratado como tridimensional devido ao aparecimento de uma componente de velocidade na direção tangente ao raio do tubo. Desse modo as equações em coordenadas cilíndricas que governam o fenômeno, são:

continuidade:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ; \quad (1)$$

movimento:

$$\begin{aligned} v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{w^2}{r} = g_r \beta (T-T_0) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r} + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \quad ; \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} + u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{vw}{r} = g_\phi \beta (T-T_0) - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p^*}{\partial \phi} + v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{w}{r^2} \right) \quad ; \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} + u \frac{\partial u}{\partial x} = g_x \beta (T-T_0) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad ; \quad (4) \end{aligned}$$

e energia:

$$v \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{w}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{K}{\rho C_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T^2}{\partial \phi^2} \right), \quad (5)$$

onde  $T$  representa a temperatura,  $x$  a coordenada axial,  $r$  a coordenada radial,  $\phi$  a coordenada angular,  $u$  a velocidade axial,  $v$  a velocidade radial,  $w$  a velocidade tangencial e  $p^*$  é a pressão de movimento definida, numa determinada elevação no tubo, pela diferença entre a pressão estática ( $p$ ) e a pressão hidrostática ( $p_h$ ) do escoamento. As propriedades do fluido envolvidas, são: a densidade  $\rho$ , a condutividade térmica  $K$ , o calor específico à pressão constante  $C_p$ , a viscosidade cinemática  $\nu$  e o coeficiente de expansão térmica  $\beta$ , definido por:

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (6)$$

As componentes da aceleração da gravidade,  $g$ , segundo as coordenadas  $r$ ,  $\phi$  e  $x$  são representadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} g_r &= -g \cos \gamma \sin \phi, \\ g_\phi &= -g \cos \gamma \cos \phi \quad \text{e} \\ g_x &= -g \sin \gamma \end{aligned} \quad (7)$$

As condições de contorno para esse problema são as mesmas adotadas para o caso de tubo vertical, onde considera-se que a temperatura da parede do tubo é constante e que o fluido entra pela base com velocidade uniforme e temperatura ambiente, conforme a figura 1.

A parametrização das equações (1)-(5) esta mostrada no Apêndice A, e é conseguida considerando-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{Gr_\gamma r_\omega}, \quad R = \frac{r}{r_\omega}, \quad U = \frac{u r_\omega}{Gr_\gamma \nu}, \quad V = \frac{v r_\omega}{\nu}, \quad W = \frac{w r_\omega}{\nu}, \quad P = \frac{p^* r_\omega^2}{\rho Gr_\gamma^2 \nu^2}, \\ \theta &= \frac{T - T_0}{T_\omega - T_0}, \quad Gr_\gamma = \frac{g \beta (T_\omega - T_0) r_\omega^3 \cdot \sin \gamma}{\nu^2} \quad \text{e} \quad Pr = \frac{\nu \rho C_p}{K} \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $X, R, U, V, W$  e  $P$  possuem, respectivamente, o mesmo significado das variáveis dimensionais  $x, r, u, v, w$  e  $p$ , representadas por letras minúsculas, enquanto  $\theta$  representa a temperatura na forma adimensional. As notações  $Gr_\gamma$  e  $Pr$  representam, respectivamente, o número de Grashof e o número de Prandtl, sendo  $r_0$  o raio do tubo,  $T_w$  a temperatura na parede e  $T_0$  a temperatura ambiente.

As equações adimensionais resultantes, são:

$$\frac{V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \phi} + \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} V \frac{\partial V}{\partial R} + U \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{W}{R} \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{w^2}{R} &= (Gr_\gamma \cotg \gamma \cos \phi) \theta - Gr_\gamma^2 \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \\ + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Gr_\gamma^2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} - \frac{V}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \phi} & \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} V \frac{\partial W}{\partial R} + U \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{W}{R} \frac{\partial W}{\partial \phi} + \frac{VW}{R} &= (Gr_\gamma \cotg \gamma \sen \phi) \theta - Gr_\gamma^2 \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} \\ + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Gr_\gamma^2} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{W}{R^2} & \end{aligned} \quad (11)$$

$$V \frac{\partial U}{\partial R} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{W}{R} \frac{\partial U}{\partial \phi} = \theta - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Gr_\gamma^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad (12)$$

$$V \frac{\partial \theta}{\partial R} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{W}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{1}{Gr_\gamma^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2} \right) \quad (13)$$

As simplificações correspondentes ao modelo de camada limite são conseguidas aplicando-se as hipóteses dessa teoria, com a consideração de que o número de Grashof é grande, nas equações (9) e (13). Neste caso, todos os termos que ficam divididos pelo número de Grashof desaparecem e, o sistema de cinco equações fica reduzido a três equações, pois as equações (10) e (11) se transformam nas seguintes condições, respectivamente:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0 \quad e \quad \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \quad (14)$$

Ainda, considerando-se que o tubo se encontra pouco inclinado em relação a vertical, pode-se desprezar a velocidade tangencial e tratar o problema como bidimensional. Desse modo, após uma série de simplificações, reduziu-se a formulação para o caso de tubos inclinados naquela encontrada para tubos verticais, com a aplicação da teoria de camada limite e considerando o escoamento como bidimensional.

Portanto, a solução do problema para tubos verticais pode ser usada como uma primeira estimativa para se analisar a situação de tubos inclinados, embora não se conheça a faixa de número de Grashof para a qual esta aproximação é válida.

A figura 2 ilustra a geometria do problema para tubos verticais, bem como as condições iniciais e de contorno.

As equações adimensionalizadas, que representam a situação para tubos verticais, são as seguintes:

$$\frac{V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad (15)$$

$$V \frac{\partial U}{\partial R} + U \frac{\partial U}{\partial X} = 0 - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \quad (16)$$

$$V \frac{\partial \theta}{\partial R} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \quad (17)$$

onde as variáveis  $V$ ,  $R$ ,  $U$ ,  $X$ ,  $\theta$  e  $P$  foram definidas em (8), com a diferença de que o número de Grashof para esta situação é redefinido como:

$$Gr = \frac{g \beta (T_w - T_o) r_w^3}{\nu^2} \quad (18)$$

Considera-se neste problema, que a velocidade de entrada no tubo é uniforme. Desprezando-se a propagação do efeito de entrada no tubo, no reservatório, que afeta a distribuição de velocidade nessa região, tornando a determinação da forma real do perfil bastante difícil. Entretanto, a forma plana foi adotada por Bodoia e Osterle [2], Davis e Perona [3], Kageyama e Izumi [4] e, segundo Dyer [5] é uma consideração bas

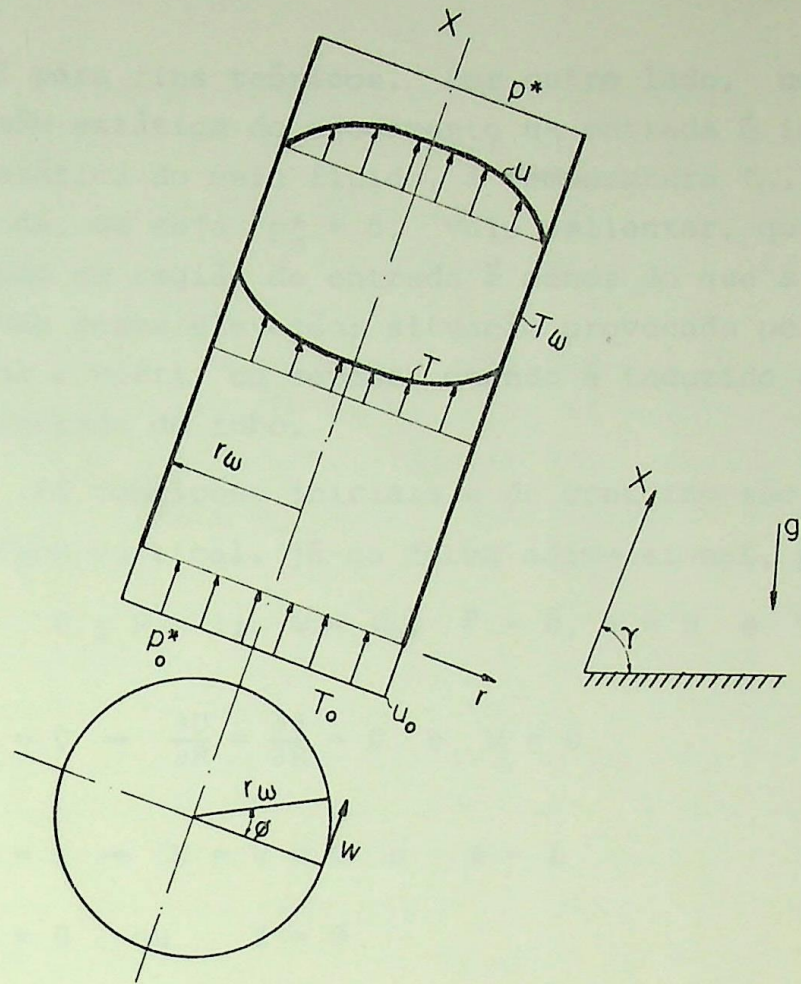


Figura 1: Geometria do Problema para Tubos Inclinados.

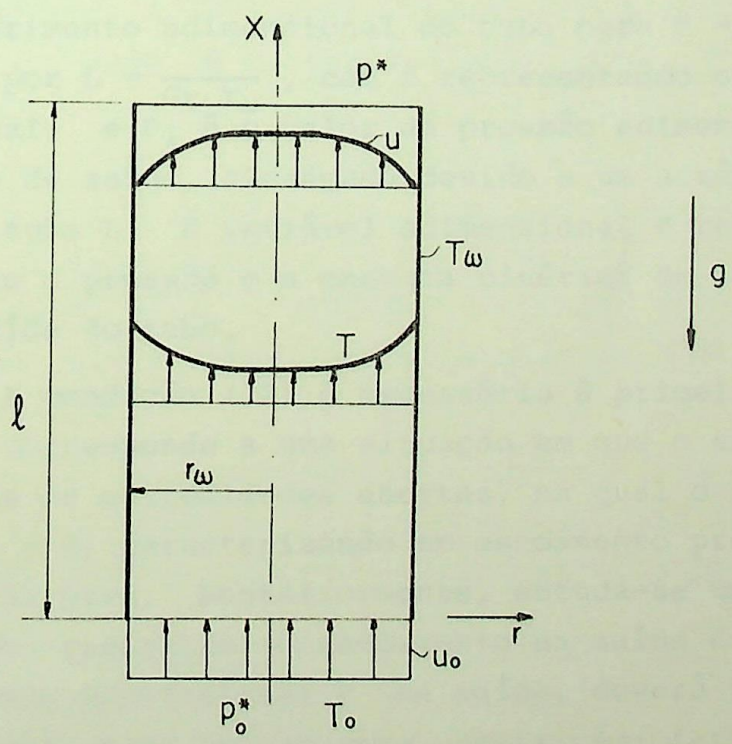


Figura 2: Ilustração do Escoamento de convecção Natural num Tubo Vertical.

tante razoável para fins teóricos. Por outro lado, considera-se que a pressão estática do escoamento na entrada é igual a pressão hidrostática do meio fluido, à temperatura  $T_0$ , no mesmo nível da entrada, ou seja  $p_0^* = 0$ . Vale salientar, que na realidade a pressão na região de entrada é menor do que a de sua vizinhança, numa mesma elevação; situação provocada pela aceleração do fluido a partir do repouso quando é induzido a escoar em direção a entrada do tubo.

As condições iniciais e de contorno são dadas para o caso de tubo vertical, já na forma adimensional, por:

$$X = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq R < 1; \quad U = U_0, \quad P = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{e} \quad V = 0 \quad (19)$$

$$X \geq 0; \quad R = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad \text{e} \quad V = 0 \quad (20)$$

$$R = 1 \Rightarrow U = V = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 1 \quad (21)$$

$$X = L; \quad P = 0 \quad \text{ou} \quad Z = 0 \quad (22)$$

$$X = L + \Delta L; \quad P = P_1 \quad \text{ou} \quad Z = \frac{2 \cdot P_1}{U_0^2} > 0 \quad , \quad (23)$$

onde  $L$  é o comprimento adimensional do tubo para  $P = 0$  na saída do mesmo, dado por  $L = \frac{\ell}{Gr \cdot r_w}$ , com  $\ell$  representando o seu comprimento dimensional; e  $P_1$  é o valor da pressão adimensional positiva na secção de saída, alcançada devido a um acréscimo  $\Delta L$  no comprimento do tubo  $L$ . A variável adimensional  $Z$  representa uma relação entre a pressão e a energia cinética do escoamento, na secção da saída do tubo.

A condição (22) é necessária à primeira etapa deste trabalho, e corresponde a uma situação em que o tubo se encontra com ambas as extremidades abertas, na qual o fluido entra e sai com  $P = 0$ , caracterizando um escoamento provocado por convecção natural pura. Posteriormente, estuda-se uma situação em que existe uma restrição ao escoamento na saída do tubo. Neste caso, a pressão adimensional  $P$  na saída, deverá ter um valor positivo suficiente para vencer essa restrição; fato representado pela condição (23).

O comportamento da pressão adimensional em relação a posição axial X, no tubo, é discutido no Apêndice B.

Os parâmetros do problema são a velocidade adimensional na entrada do tubo e o número de Prandtl. Para fins de determinação da solução, numericamente, pode-se fixar o parâmetro  $U_0$  e determinar o comprimento adimensional do tubo L, para qual corresponde a pressão na saída igual a zero, conforme a condição (22). Tal procedimento tem que ser repetido para cada valor do parâmetro número de Prandtl considerado. A solução do problema para casos em que a pressão de saída ou a variável Z é positiva segue o mesmo raciocínio, visando determinar o comprimento de tubo acrescido,  $L + \Delta L$ , capaz de produzir um determinado valor de pressão no escoamento de saída, suficiente para vencer uma restrição ao escoamento situada no topo do tubo; mantendo a mesma velocidade de entrada, conforme a condição (23). Neste caso o escoamento é considerado como de convecção mista, onde  $U_0$  é composto por duas componentes: a componente de convecção natural, responsável por  $P = 0$  na saída de um tubo de comprimento  $L + \Delta L$ , e a componente de convecção forçada, a qual produz uma pressão positiva na saída do tubo acrescido,  $L + \Delta L$ , com o mesmo valor da restrição imposta ao escoamento. A componente de  $U_0$ , correspondente a convecção natural, deve ser calculada por meio de um processo de tentativas até que se encontre a velocidade de entrada, correspondente a  $P = 0$  na saída de um tubo de comprimento  $L + \Delta L$ . Entretanto, deve-se salientar que para esse caso, tendo em vista o objetivo do trabalho, interessa a determinação de  $\Delta L$ , correspondente a uma determinada restrição ao escoamento na saída do tubo, e também, o aumento da energia recebida pelo fluido até a saída, devido a esse acréscimo  $\Delta L$  no comprimento do tubo.

As quantidades adimensionais de interesse no problema são a vazão volumétrica, o fluxo de entalpia e o número de Nusselt, que exprime o parâmetro de transferência de calor.

A vazão volumétrica, realmente, não é rigorosamente constante devido a variação da densidade do fluido com a temperatura, entretanto pode ser assim considerada dadas às pequenas variações envolvidas. Assim, considerando-se que o flui

do entra pela base com uma velocidade  $u_0$ , define-se esta grandeza como:

$$\dot{V} = u_0 \cdot \pi \cdot r_\omega^2 = 2 \pi \int_0^{r_\omega} u r dr \quad (24)$$

Substituindo as variáveis adimensionais na equação (24), resulta

$$F = U_0 = \frac{\dot{V}}{\pi \cdot r_\omega \cdot v \cdot Gr} = 2 \int_0^1 UR dR \quad , \quad (25)$$

que representa a vazão volumétrica adimensional.

De modo semelhante determina-se a equação adimensional para o fluxo de entalpia numa secção transversal do tubo. Desprezado o termo de dissipação viscosa e pelo princípio de conservação da energia, tem-se que o calor absorvido  $Q$ , pelo fluido escoando através de um volume de controle cilíndrico, formado pela parede e duas secções transversais quaisquer do tubo, de entrada e saída do escoamento, é igual a diferença entre o fluxo de entalpia,  $I$ , nas secções de saída e entrada deste volume. Sendo  $dm$  um elemento do fluxo de massa numa secção de área  $A$ , têm-se que:

$$I = \int_A \rho C_p T d\dot{V} \quad (26)$$

Definindo-se a temperatura média global ( $T_b$ ) por

$$T_b = \frac{1}{\dot{V}} \int_A T d\dot{V} \quad (27)$$

e substituindo em (26), resulta que

$$I = \rho \dot{V} C_p T_b \quad (28)$$

no caso de se considerar  $\rho$  e  $C_p$  como constantes. Se  $I(0)$  e  $I(x)$  forem, respectivamente, o fluxo de entalpia na entrada e o fluxo de entalpia numa secção qualquer do tubo, têm-se que o calor absorvido pelo fluido desde a secção de entrada até uma secção  $x$ , no tubo, é

$$Q = I(x) - I(0) = \rho \dot{V} C_p (T_b - T_0) \quad (29)$$

sendo:

$$T_b = T_b(x) \text{ e } T_o = T_b(0).$$

Substituindo-se as variáveis adimensionais na equação (29), obtêm-se

$$H = \frac{Q}{\pi \cdot C_p \cdot \rho \cdot r_w \cdot (T_w - T_o) \cdot v \cdot Gr} = 2 \int_0^1 R \theta \, dR \quad (30)$$

que representa o fluxo de entalpia na forma adimensional.

Definindo-se o coeficiente de convecção médio na forma de:

$$\bar{h} = \frac{Q' / 2 \cdot \pi \cdot r_w \cdot \ell}{(T_w - T_o)} \quad , \quad (31)$$

onde  $Q'$  é o calor absorvido pelo fluido desde a entrada até a secção de saída do tubo, o correspondente número de Nusselt médio é representado por

$$\overline{Nu}_o = \frac{\bar{h} \cdot r_w}{K} = \frac{H'}{2L^+} \quad , \quad (32)$$

onde: 
$$L^+ = \frac{\ell / r_w}{Gr Pr} \quad (33)$$

e  $H'$  representa  $Q'$  na forma adimensional.

Vale ressaltar que no problema em questão existem valores assintóticos para as quantidades adimensionais  $F$ ,  $H$  e  $\overline{Nu}_o$ , correspondentes à condição de escoamento desenvolvido, situação relativa à um comprimento de tubo infinito. Esta situação é discutida no Apêndice B. Porém, pode ser adiantado, segundo Davis e Perona [3], que independentemente do número de Prandtl considerado, têm-se os seguintes valores assintóticos para essas grandezas:

$$F = H = \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad \overline{Nu}_o = \frac{1}{16 L^+} \quad (34)$$

Finalmente, combinando as equações (25), (29) e (30), resulta a equação adimensional para a temperatura médial global,  $\theta_b$ :  $\theta_b = \frac{H}{F}$ , que tende para unidade quando  $L \rightarrow \infty$ .

### 3 - SOLUÇÃO NUMÉRICA

A solução do problema foi determinada resolvendo-se o sistema de equações formado pelas equações (15), (16) e (17), observando-se as condições iniciais e de contorno dadas em (19)-(23). Para isso empregou-se o método de diferenças finitas, aplicando a Técnica de Progressão Numérica, discutida para problemas do tipo em questão, por Hornbeck [7].

Este método consiste basicamente na discretização das variáveis envolvidas, que passam a ser definidas somente nos nós de uma malha retangular, disposta no caso bidimensional, sobre a secção de interesse do problema. Trata-se de um método aproximado no sentido de que uma diferenciação, em um certo ponto, é aproximada por um quociente de diferenças entre as variáveis envolvidas, num pequeno intervalo próximo ao ponto considerado.

No caso presente é possível fixar uma malha retangular numa semi-secção longitudinal do tubo, conforme a figura 3, aproveitando a simetria transversal do problema. Uma intersecção entre duas linhas quaisquer da malha, chamada de nó, é representada por  $(j,k)$ , onde  $j$  representa os índices das linhas da malha na direção radial e  $k$  representa os índices das linhas na direção axial. Estas linhas são numeradas a partir de um sistema de eixos arbitrários, disposto conforme a figura 3, de tal forma que  $j$  cresce no sentido da base para o topo e  $k$  do centro para a parede do tubo. As distâncias  $DX$  e  $DR$ , entre duas linhas vizinhas e paralelas, representam os respectivos incrementos das variáveis independentes  $X$  e  $R$ , que são definidas num nó qualquer  $(j,k)$  como:  $X = j.DX$  e  $R = k.DR$ . As variáveis dependentes são definidas como funções nodais pelo subscrito  $(j,k)$ .

Permite-se, no momento, que cada diferenciação das equações (15), (16) e (17) seja representada por um quociente de diferenças, derivado de uma série de Taylor truncada. O erro cometido ao se fazer esta transformação está intimamente relacionado com a dimensão dos incrementos  $DX$  e  $DR$ , ou seja, com as dimensões da malha. Desse modo, as formas escolhidas para representar os termos dessas equações, são as seguintes, de acordo com Davis e Perona [3], para cada uma delas:

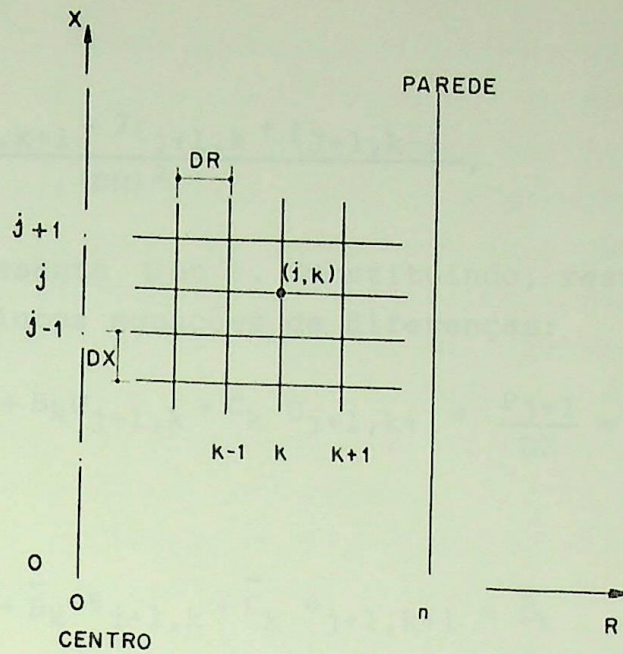


Figura 3: Malha para Representação de Diferenças.

Para equação de continuidade,

$$\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{V_{j+1,k+1} - V_{j+1,k}}{DR} \quad (35)$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j,k+1} + U_{j+1,k} - U_{j,k}}{2 DX} \quad (36)$$

que substituídas na equação (15) resulta a seguinte equação de diferenças:

$$\frac{V_{j,k}}{R_k} + \frac{V_{j+1,k+1} - V_{j+1,k}}{DR} + \frac{U_{j+1,k+1} - U_{j,k+1} + U_{j+1,k} - U_{j,k}}{2 DX} = 0 \quad (37)$$

As equações de movimento e energia terão as suas diferenciações substituídas pelas seguintes formas aproximadas:

$$\frac{\partial \xi}{\partial R} = \frac{\xi_{j+1,k+1} - \xi_{j+1,k-1}}{2 DR} \quad (38)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{\xi_{j+1,k} - \xi_{j,k}}{DX} \quad (39)$$

e

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial R^2} = \frac{\xi_{j+1,k+1} - 2\xi_{j+1,k} + \xi_{j+1,k-1}}{(DR)^2}, \quad (40)$$

onde  $\xi$  representa  $U$  ou  $\theta$ . Substituindo, resultam respectivamente as seguintes equações de diferenças:

$$A_k U_{j+1,k-1} + B_k U_{j+1,k} + C_k U_{j+1,k+1} + \frac{P_{j+1}}{DX} = D_k \quad (41)$$

e

$$\bar{A}_k \theta_{j+1,k-1} + \bar{B}_k \theta_{j+1,k} + \bar{C}_k \theta_{j+1,k+1} = \bar{D}_k \quad (42)$$

Os coeficientes  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $D_k$ ,  $\bar{A}_k$ ,  $\bar{B}_k$ ,  $\bar{C}_k$  e  $\bar{D}_k$  representam as seguintes equações:

$$A_k = -\frac{V_{j,k}}{2DR} - \frac{1}{(DR)^2} + \frac{1}{2 \cdot R_k \cdot DR}$$

$$B_k = \frac{U_{j,k}}{DX} + \frac{2}{(DR)^2},$$

$$C_k = \frac{V_{j,k}}{2DR} - \frac{1}{(DR)^2} - \frac{1}{2 \cdot R_k \cdot DR},$$

$$D_k = \frac{P_j + (U_{j,k})^2}{DX} + \theta_{j+1,k},$$

$$\bar{A}_k = -\frac{V_{j,k}}{2DR} - \frac{1}{Pr \cdot DR^2} + \frac{1}{2 \cdot Pr \cdot R_k \cdot DR},$$

$$\bar{B}_k = \frac{U_{j,k}}{DX} + \frac{2}{Pr \cdot DR^2},$$

$$\bar{C}_k = \frac{V_{j,k}}{2DR} - \frac{1}{Pr \cdot DR^2} - \frac{1}{2 \cdot Pr \cdot R_k \cdot DR}$$

e

$$\bar{D}_k = \frac{U_{j,k} \cdot \theta_{j,k}}{DX} \quad (43)$$

Desse modo, transformou-se um sistema de equações diferenciais parciais num formado por equações de diferenças. Na realidade, estas últimas representam sistemas de equações algébricas lineares, de ordem igual ao número de incrementos na direção radial da malha e, dependendo da maneira como são resolvidas, são classificadas como: explícita e implícita. A equação (37) é do tipo explícita, pois considerando-se os resultados de  $U$  como conhecidos e baseando-se nos resultados para  $V$  nos nós do nível inferior, determina-se o valor da variável  $V$  em cada nó, individualmente (para cada valor de  $k$ ), no nível considerado. As equações (41) e (42) são do tipo implícita, pois fornecem simultaneamente os resultados para as variáveis  $U$  e  $\theta$  respectivamente, em todos os nós do nível considerado, usando os resultados do nível anterior como dados.

Os sistemas de equações são resolvidos obedecendo-se as seguintes etapas:

- inicialmente, define-se o valor do número de Prandtl, da vazão volumétrica, das dimensões da malha e da restrição ao escoamento na saída do tubo;

- começando no nível de entrada do tubo,  $j=0$ , onde os valores de todas as variáveis de interesse são conhecidos através das condições (19)-(21), resolve-se o seguinte sistema de  $n$  equações gerado quando varia-se  $k$  de zero a  $n-1$  na equação (42),

$$\begin{aligned}
 \bar{B}_0 \theta_{1,0} + 2 \bar{C}_0 \theta_{1,1} &= \bar{D}_0 \\
 \bar{A}_1 \theta_{1,0} + \bar{B}_1 \theta_{1,1} + \bar{C}_1 \theta_{1,2} &= \bar{D}_1 \\
 \bar{A}_2 \theta_{1,1} + \bar{B}_2 \theta_{1,2} + \bar{C}_2 \theta_{1,3} &= \bar{D}_2 \\
 \cdot &\cdot \\
 \cdot &\cdot \\
 \cdot &\cdot \\
 \bar{A}_{n-1} \theta_{1,n-2} + \bar{B}_{n-1} \theta_{1,n-1} &= \bar{D}_{n-1} - \bar{C}_{n-1},
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

determinando-se os valores de  $\theta$  nos nós do nível seguinte,  $j=1$ , ou seja  $\theta_{1,0}; \theta_{1,1}; \theta_{1,2}; \dots; \theta_{1,n-1}$ .  $\theta_{1,n}$  é conhecido pela

condição (21);

- ainda com os valores do nível de entrada do tubo e com os resultados conseguidos na etapa anterior, resolve-se o sistema de  $n+1$  equações, formado pelas  $n$  equações geradas quando varia-se  $k$  de zero a  $n-1$  na equação (41),

$$\begin{aligned}
 B_0 U_{1,0} + C_0 U_{1,1} + \frac{P_1}{DX} &= D_0 \\
 A_1 U_{1,0} + B_1 U_{1,1} + C_1 U_{1,2} + \frac{P_1}{DX} &= D_1 \\
 A_2 U_{1,1} + B_2 U_{1,2} + C_2 U_{1,3} + \frac{P_1}{DX} &= D_2 \\
 \vdots &\vdots \\
 A_{n-1} U_{1,n-2} + B_{n-1} U_{1,n-1} + \frac{P_1}{DX} &= D_{n-1},
 \end{aligned} \tag{45}$$

e pela equação adicional originada eliminando-se  $V_{j+1,k}$  na equação (37) por meio de substituições sucessivas, usando as condições (20) e (21), resultando na seguinte equação genérica:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{V_{j,k}}{R_k} + \frac{1}{2DX} \left[ U_{j+1,0} - U_{j,0} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (U_{j+1,k} - U_{j,k}) \right] = 0; \tag{46}$$

- finalmente, resolve-se explicitamente o sistema de equações gerado quando varia-se  $k$  de zero a  $n-2$  na equação (37), utilizando os resultados anteriores como dados, resultando  $V_{1,1}, V_{1,2}, \dots, V_{1,n-1}$ , pois  $V_{1,0}$  e  $V_{1,n}$  são conhecidos pelas condições (20) e (21).

Desta maneira determina-se os valores de  $U$ ,  $V$  e  $\theta$  nos nós do nível  $j=1$  e, também, o valor da pressão  $P$  neste nível. Seguindo um processo semelhante, usando estes últimos resultados como dados de entrada, obtêm-se os valores destas variáveis no nível  $j=2$ . Sucessivamente, avançando no sentido do escoamento até o ponto onde a pressão assume um valor prefixado pela condição (22) ou (23), consegue-se determinar os valores

destas variáveis em todos os nós da malha. O fluxograma reduzido, juntamente com o programa em fortran que executa estas etapas, são apresentados no Apêndice D.

A solução do sistema de equações da segunda etapa, que é do tipo tri-diagonal, foi determinada através de um algoritmo de eliminação de Gauss especial e, o da terceira foi resolvido empregando-se a técnica que envolve a inversão da matriz de coeficientes, utilizando o algoritmo de Gauss-Jordam.

Uma atenção especial foi requerida pelas equações (16) e (17) na forma de diferenças finitas, quando se considerou os nós da malha sobre o linha de centro do tubo ( $k = 0$ ), pois neste ponto  $R = 0$  e os termos envolvendo  $\frac{1}{R} \left( \frac{\partial}{\partial R} \right)$ , na forma de diferenças finita, não puderam ser diretamente estimados. Entretanto, empregando-se a regra de L'Hospital, obteve-se a seguinte transformação:

$$\frac{1}{R} \left( \frac{\partial}{\partial R} \right) = \frac{\partial^2}{\partial R^2} ,$$

permitindo que o problema fosse contornado. Esse mesmo problema foi evitado na equação (37), onde considerou-se pela condição (20) que  $V_{j,0} = 0$ .

Considerou-se na solução do problema uma malha com dimensões variáveis, tanto na direção axial como na radial, visando aproveitar algumas vantagens que isto oferece.

Inicialmente, vale salientar que a região de entrada do tubo apresenta dois problemas principais, que comprometem o emprego do modelo de camada limite nesta região: primeiro, a equação de movimento na direção  $R$  torna-se importante; e segundo, esta região apresenta uma indeterminação matemática, pois se comporta como uma singularidade ( $V$  tende para o infinito quando  $X$  se aproxima de zero). Sem querer discutir a validade ou não do modelo de camada limite nesta situação, alerta-se apenas que em termos do método de solução empregado aqui, deve-se tomar cuidado com esse último problema, pois poderá invalidar os resultados obtidos. Neste caso o problema pôde ser evitado, adotando-se uma malha na região próxima à entrada com incremento, na direção axial, pequeno. Desse modo, garantiu-se que o efeito da singularidade ficasse confinado numa região arbitrária próxi

na entrada do tubo, Hornbeck [7]. Feita essa observação, os incrementos foram aumentados gradualmente sem comprometer a precisão dos resultados.

Por outro lado, consegue-se melhor precisão empregando-se uma malha com dimensão na direção radial reduzida. Em contra partida a ordem dos sistemas de equações aumenta substancialmente, trazendo algumas desvantagens. Portanto, considerou-se um artifício onde mantêm-se o emprego de uma malha mais fina somente nas regiões onde ocorrem grandes gradientes de velocidade e de temperatura, pois a utilização de uma malha relativamente mais grossa na região central do tubo, apresenta resultados satisfatórios. Entretanto, com isso tornou-se impossível determinar diretamente o valor das representações na forma de diferença central, dadas por (38) e (40), empregadas para representar as diferenciações em relação a coordenada radial no nó  $k_p$  onde ocorre a mudança na dimensão do incremento radial da malha. Porque esta forma de diferença opera com três nós igualmente espaçados, situados num mesmo nível. E portanto, modificou-se esta representação no nó considerado, substituindo o valor da variável no nó  $k_p-1$  pelo valor da mesma num nó auxiliar  $k_q$ , colocado a uma distância  $DR_2$  antes do nó  $k_p$ , conforme a figura 4.

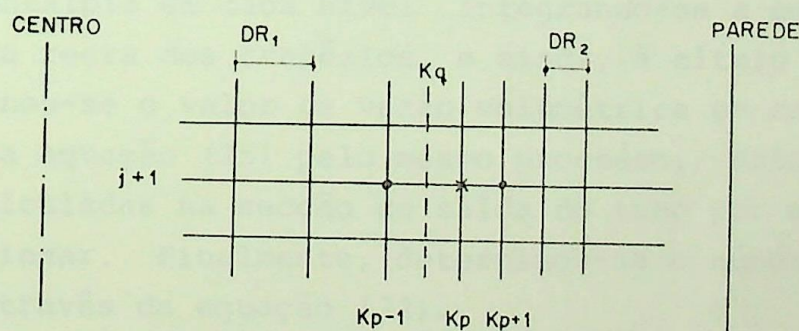


Figura 4: Representação da Região de Mudança da Malha na Direção Radial.

Sendo que o valor da variável no nó auxiliar  $k_q$  foi determinado empregando-se uma interpolação quadrática, envolvendo os valores nos nós  $k_p-1$ ,  $k_p$  e  $k_p+1$ , através da seguinte expressão, dada por Hornbeck [7]:

$$\xi_{j+1,kq} = 2 \frac{REL^2}{1+REL} \xi_{j+1,kp-1} + 2(1-REL) \xi_{j+1,kp} + \frac{REL-1}{REL+1} \xi_{j+1,kp+1},$$

(47)

onde

$$REL = \frac{DR_2}{DR_1}$$

Neste problema considerou-se  $DR_1$  e  $DR_2$  iguais, respectivamente, a 0,05 e 0,025, onde  $DR_1$  é o maior incremento e  $DR_2$  o menor.

Do modo que a solução do problema foi estruturada, as dimensões da malha a ser adotada fica totalmente definida com a determinação das seguintes grandezas: incremento inicial na direção axial,  $DX$ ; dimensão dos incrementos  $DR_1$  e  $DR_2$ ; dimensão de referência que indica quando  $DX$  deve aumentar,  $ZRT$ ; fator de aumento da dimensão  $DX$ ,  $ACR$ , na forma:  $DX = (1+ACR).DX$ ; número de incrementos na direção radial,  $n$ ; e finalmente, o Índice do nó  $k_p$  contado a partir do centro. Na determinação da dimensão da malha mais apropriada, empregou-se o seguinte procedimento: para cada par de valores  $U_0$  e  $Pr$ , obteve-se soluções com tamanho de malha cada vez menores, variando as grandezas citadas, até que a solução obtida para duas reduções sucessivas de malha concordassem dentro da precisão estipulada; definindo as dimensões da malha. Para cada valor de  $U_0$  fixado, determinou-se o fluxo de entalpia em cada nível integrando-se a equação (30) com base na regra dos trapézios, e ainda, à título de observação, determinou-se o valor da vazão volumétrica em cada nível integrando-se a equação (25) pelo mesmo processo. Estas grandezas foram calculadas na secção de saída do tubo por meio de interpolação linear. Finalmente, determinou-se o número de Nusselt médio através da equação (32).

## 4 - RESULTADOS

A solução do problema foi analisada para uma faixa de  $F$  entre 0,005 e 0,11. Empregando-se para isto uma malha com as dimensões que melhor se adaptaram a cada valor de  $F$  considerado, definida de acordo com as grandezas dadas no quadro I,

QUADRO I

F	n	$k_p$	ZRT	ACR
0,005	29	12	0,00002	1
0,00955	29	12	0,00002	1
0,0125	29	12	0,00002	1
0,0150	30	11	0,00004	1
0,0175	30	11	0,00004	1
0,020	30	11	0,00004	1
0,030	32	9	0,00008	1
0,040	32	9	0,0006	1
0,050	32	9	0,0006	1
0,060	32	9	0,0006	1
0,070	33	8	0,0006	1
0,080	33	8	0,0006	1
0,090	33	8	0,0006	1
0,100	33	8	0,0006	1
0,110	33	8	0,0006	1

Sendo que o valor do incremento inicial  $DX$ , empregado de acordo com os valores de  $F$  e  $Pr$  considerados, variou dentro de uma faixa entre  $3,905 \cdot 10^{-7}$  e  $6,25 \cdot 10^{-5}$ ; adotando os menores valores dessa faixa para os casos de pequenas vazões.

Esses valores foram definidos após extensa experimentação numérica dentro daquele procedimento para se determinar as melhores dimensões para a malha, onde observou-se que os

resultados para o comprimento do tubo demoraram para convergir com a precisão estipulada, menor que 2%, enquanto que os resultados para o fluxo de entalpia convergiram rapidamente dentro de uma precisão menor que 1%. Observou-se ainda, que os casos para pequenas vazões apresentaram maior dificuldade para se conseguir a convergência dos resultados.

Uma correlação entre  $F$  e  $L$  esta mostrada na figura 5 juntamente com a variação de  $H'$  com  $L$ , para valores de número de Prandtl iguais a 0,7; 1; 2,5; 5 e 10. Observa-se que as curvas de  $F$  e  $H'$  se deslocam para a direita a medida que o número de Prandtl aumenta, e que todas elas, independentemente do seu parâmetro, tendem para o valor assintótico, relativo as condições de escoamento desenvolvido, correspondente a  $L$  tendendo ao infinito. Verifica-se ainda que para um mesmo comprimento adimensional de tubo  $L$ , têm-se maiores vazões volumétricas e fluxos de entalpia adimensionais quando o número de Prandtl é menor.

A variação do número de Nusselt médio com  $\frac{1}{L^+} = \frac{r\omega}{\ell}$  Gr.Pr está mostrada graficamente na figura 6, observando-se que os pontos estão praticamente sobre uma mesma curva, independentemente do tipo de fluido considerado. Isto já era esperado, pois nos escoamentos em que as forças de inércia são desprezíveis, em relação as forças de atrito e empuxo, o número de Nusselt é função somente do produto Gr.Pr.

Através dos resultados numéricos apresentados pelas tabelas do tipo I e de uma solução segundo o método integral, apresentada no Apêndice C juntamente com o raciocínio empregado, determinou-se as seguintes expressões para representar, respectivamente, a vazão volumétrica, o fluxo de entalpia na saída do tubo e o número de Nusselt médio:

$$F = \frac{1}{8} \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{8}{(11,0025L + 1,71332Pr)^{0,122}} \cdot \left( \frac{L}{\frac{5}{3} + Pr} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \quad (48)$$

$$H' = \frac{1}{8} \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{12,896 Pr^{-1/2}}{(164,445L + 1,4777Pr)^{0,106}} \cdot \left( \frac{L^3}{\frac{5}{3} + Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \right] \right\} \quad (49)$$

$$\overline{NU}_O = \frac{1}{16L^+} \left\{ 1 - \exp \left[ \frac{-12,896 \frac{Pr^{0,144}}{(5/3 + Pr)^{1/4}} (L^+)^{3/4}}{(1,4777 + 164,445 L^+)^{0,106}} \right] \right\}, \quad (50)$$

sendo que a equação (48) representa os resultados para  $F$ , em função de  $L$  e  $Pr$ , com um desvio médio de 3% e um desvio máximo em torno de 8%, na região de pequenas vazões, enquanto que as equações (49) e (50) representam, respectivamente, as curvas de  $H'$  em função de  $L$  e  $Pr$ , e de  $\overline{NU}_O$  em função de  $L^+$  e  $Pr$ , com um desvio médio de 2%. Em ambas, os maiores desvios são encontrados numa faixa intermediária de  $\frac{1}{L^+}$ , entre 105 e 4, onde observa-se que os mesmos crescem com o número de Prandtl, chegando alcançar um valor máximo em torno de 7%.

Nas figuras 7; 8; 9 e 10 são apresentadas as curvas  $F$  versus  $L+\Delta L$ , para situações de  $Z$  constantes. Considerando, respectivamente, fluidos com números de Prandtl iguais a 0,7; 2,5; 5 e 10, com os valores de  $Z$  variando numa faixa de 0 a 7, dependendo do fluido considerado. Como já era esperado, observando o comportamento da curva de pressão, a medida que  $Z$  aumenta o comprimento do tubo final também aumenta, mostrando que os afastamentos das curvas para esses valores de  $Z$  constantes em relação a curva para  $Z$  igual a zero, são cada vez maiores. Sendo que quanto maior é o número de Prandtl menor é esse afastamento relativo, para um mesmo valor de  $Z$  considerado. O mesmo comentário pode ser feito para as figuras 11; 12; 13 e 14, que representam a variação de  $H'$  com  $L+\Delta L$  para os mesmos valores de  $Z$  empregados nos gráficos anteriores.

As figuras 15; 16; 17 e 18 representam a variação de  $F$  com o acréscimo relativo no comprimento do tubo  $\frac{\Delta L}{L}$ , dado em percentagem, em situações de  $Z$  maior que zero e para números de Prandtl iguais a 0,7; 2,5; 5 e 10 respectivamente. Esta variação é expressa na forma de curvas para  $Z$  constante, onde verifica-se um deslocamento das mesmas para a direita a medida que o valor de  $Z$  aumenta. Sendo que para uma mesma curva, consegue-se maior acréscimo relativo do tubo no caso de pequenas vazões, enquanto que a região de maiores vazões experimenta um acréscimo relativo quase que constante. As mesmas considerações podem ser feitas para as figuras 19; 20; 21 e 22, que mostram as curvas

vas de  $H'$  versus  $\frac{\Delta L}{L}$  .

Nos gráficos  $F \times \frac{\Delta L}{L}$  e  $H' \times \frac{\Delta L}{L}$  surgiram problemas para se traçar as curvas para  $Z$  constante devido ao espalhamento dos pontos, principalmente na faixa intermediária das curvas, sendo que esse problema se agravava a medida que o número de Prandtl crescia. Neste caso, procurou-se traçar essas curvas seguindo a tendência dos resultados iniciais e finais, colocando uma maior quantidade de pontos na faixa intermediária para facilitar no traçado.

Adicionalmente, são apresentadas as tabelas com os resultados empregados na confecção dos gráficos. Com as tabelas do tipo I apresentando os resultados para as figuras 5 e 6, enquanto que as tabelas do tipo II, III, IV e V apresentam os resultados para as figuras 7 até 22 . Nestas últimas encontram-se os resultados referentes ao acréscimo relativo do fluxo de entalpia na secção de saída,  $\Delta H'/H'$ , devido ao aumento  $\Delta L$  no comprimento do tubo. Observando em alguns casos que essa grandeza apresenta valores negativos, indicados com asterisco, provavelmente por causa de problemas numéricos, sendo aconselhável considerá-los como iguais a zero, ou seja não apresentou aumento no fluxo de entalpia; ou então desprezá-los.

Todos os resultados numéricos desse trabalho foram conseguidos, empregando-se um computador digital HP-3000.

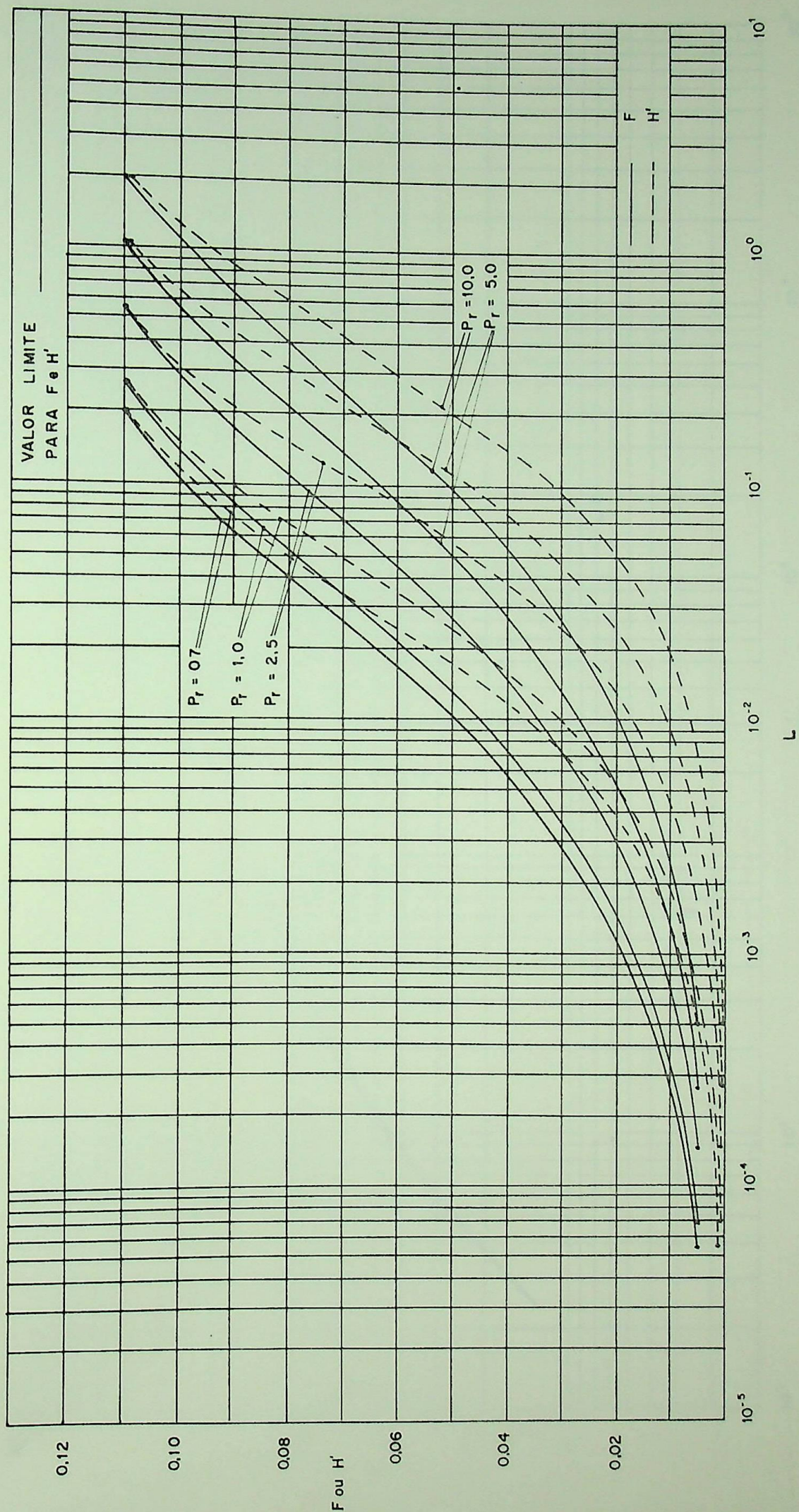


Figura 5: Variação da Vazão Adimensional e do Fluxo de Entalpia com o Comprimento Adimensional do Tubo para vários  $P_r$ .

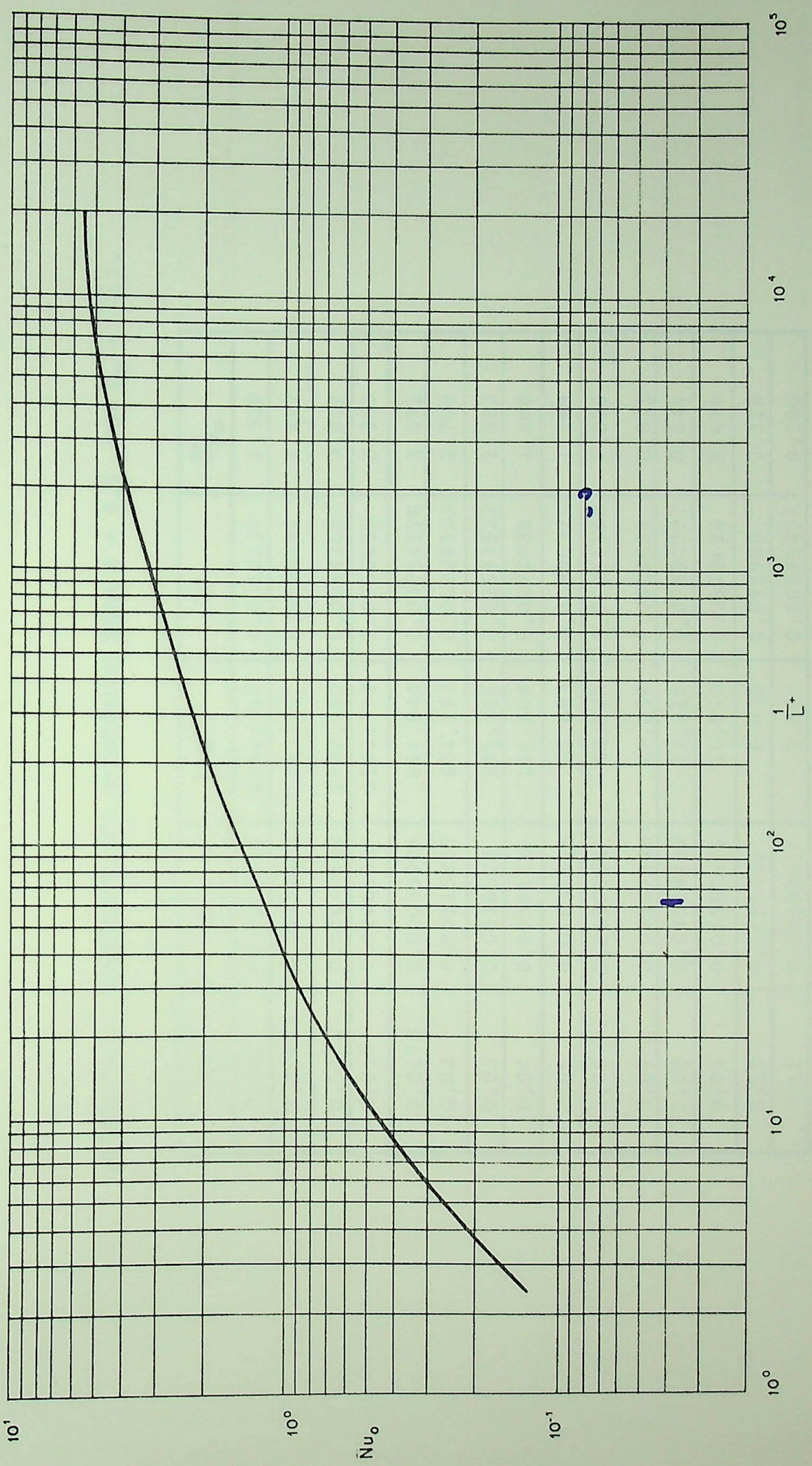


Figura 6: Variação do Número de Nusselt Médio com  $1/L^+$  para vários  $Er$ .

TABELA Ia : REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 0,0$  COM  $P_r = 0,7$ .

F	L	$l/L^+$	H'	$\overline{Nu}_o$
0,005	0,00005442	12862,918	0,0010137	6,519
0,00955	0,00022484	3113,311	0,0028441	4,427
0,0125	0,00040632	1722,780	0,0044260	3,812
0,015	0,0006120	1143,772	0,0058638	3,353
0,0175	0,00085906	814,844	0,00754198	3,072
0,02	0,00115857	604,193	0,00926523	2,798
0,03	0,0028528	245,366	0,01697522	2,082
0,04	0,0059121	116,809	0,0272038	1,588
0,05	0,01031176	67,883	0,03800321	1,289
0,06	0,0170854	40,970	0,05011168	1,026
0,07	0,02587346	27,054	0,0614588	0,831
0,08	0,04019482	17,415	0,07400797	0,644
0,09	0,06357672	11,010	0,0870624	0,479
0,10	0,1055445	6,632	0,098988	0,328
0,11	0,2039901	3,431	0,10993438	0,188

TABELA I b : REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 0,0$  COM  $P_r = 1,0$ .

F	L	1/L <sup>+</sup>	H'	$\bar{N}_{U_0}$
0,005	0,00007085	14114,326	0,00094943	6,700
0,00955	0,0002902	3445,780	0,0026596	4,582
0,0125	0,0005209	1919,570	0,00409847	3,933
0,015	0,0007814	1279,705	0,00545736	3,491
0,0175	0,0010871	919,878	0,00694238	3,193
0,02	0,0014795	675,876	0,00869247	2,937
0,03	0,00362689	275,718	0,01593354	2,199
0,04	0,00762106	131,215	0,02579816	1,692
0,05	0,0132068	75,718	0,0360940	1,366
0,06	0,0216301	46,231	0,0477485	1,103
0,07	0,0355194	29,833	0,0599231	0,893
0,08	0,052154	19,173	0,0727227	0,697
0,09	0,0824251	12,132	0,0857019	0,519
0,10	0,13752987	7,271	0,09870217	0,358
0,11	0,26598117	3,759	0,11019303	0,207

TABELA I c : REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 0,0$  COM  $P_r = 2,5$ .

F	L	1/L <sup>+</sup>	H'	$\overline{Nu}_0$
0,005	0,00014662	17050,879	0,00081988	6,989
0,00955	0,00058252	4291,698	0,0022515	4,831
0,0125	0,00104366	2395,416	0,00349476	4,185
0,015	0,00154936	1613,569	0,00465953	3,759
0,0175	0,00217094	1151,574	0,00593405	3,416
0,02	0,0029917	835,631	0,00747624	3,123
0,03	0,0073683	339,289	0,01389163	2,356
0,04	0,0153348	163,027	0,0228821	1,865
0,05	0,0270897	92,285	0,03280314	1,513
0,06	0,0445969	56,058	0,04402272	1,233
0,07	0,0700136	35,707	0,0561485	1,002
0,08	0,11050254	22,623	0,0696072	0,787
0,09	0,1754535	14,248	0,0832282	0,592
0,10	0,2950579	8,472	0,0972415	0,411
0,11	0,5594250	4,468	0,1094521	0,244

TABELA Id : REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 0,0$  COM  $P_r = 5,0$ .

F	L	1/L <sup>+</sup>	H'	$\bar{N}_{U_0}$
0,005	0,00026595	18800,526	0,00074317	6,985
0,00955	0,0010608	4713,334	0,00206104	4,857
0,0125	0,00190346	2626,795	0,00322254	4,232
0,015	0,00282532	1769,711	0,00428857	3,794
0,0175	0,00395948	1262,792	0,00548942	3,466
0,02	0,00545833	916,031	0,00691393	3,166
0,03	0,01365086	366,276	0,01319261	2,416
0,04	0,02778153	179,975	0,02148312	1,933
0,05	0,049773	100,456	0,03125715	1,569
0,06	0,0824379	60,651	0,04231379	1,283
0,07	0,13203826	37,867	0,05501092	1,041
0,08	0,20750155	24,096	0,06810320	0,820
0,09	0,32943726	15,177	0,08191832	0,621
0,10	0,55547473	9,001	0,09668765	0,435
0,11	1,0452692	4,783	0,10929805	0,261

TABELA Ie : REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 0,0$  COM  $P_r = 10,0$ .

F	L	$1/L^+$	H'	$\overline{Nu}_o$
0,005	0,00051056	19586,336	0,00069775	6,833
0,00955	0,00203647	4910,457	0,00196004	4,812
0,0125	0,00366019	2732,098	0,00308807	4,218
0,015	0,00544853	1835,357	0,00410536	3,767
0,0175	0,0076194	1312,439	0,00527412	3,460
0,02	0,01052394	950,218	0,00665062	3,159
0,03	0,02659288	376,040	0,01286076	2,418
0,04	0,05261544	190,058	0,02068256	1,965
0,05	0,094761	105,528	0,03029353	1,598
0,06	0,1582983	63,171	0,04136928	1,306
0,07	0,25527826	39,172	0,05421633	1,061
0,08	0,40065841	24,958	0,06705072	0,836
0,09	0,63454005	15,759	0,08099437	0,638
0,10	1,0686753	9,357	0,09627783	0,450
0,11	1,98724094	5,032	0,10883774	0,273

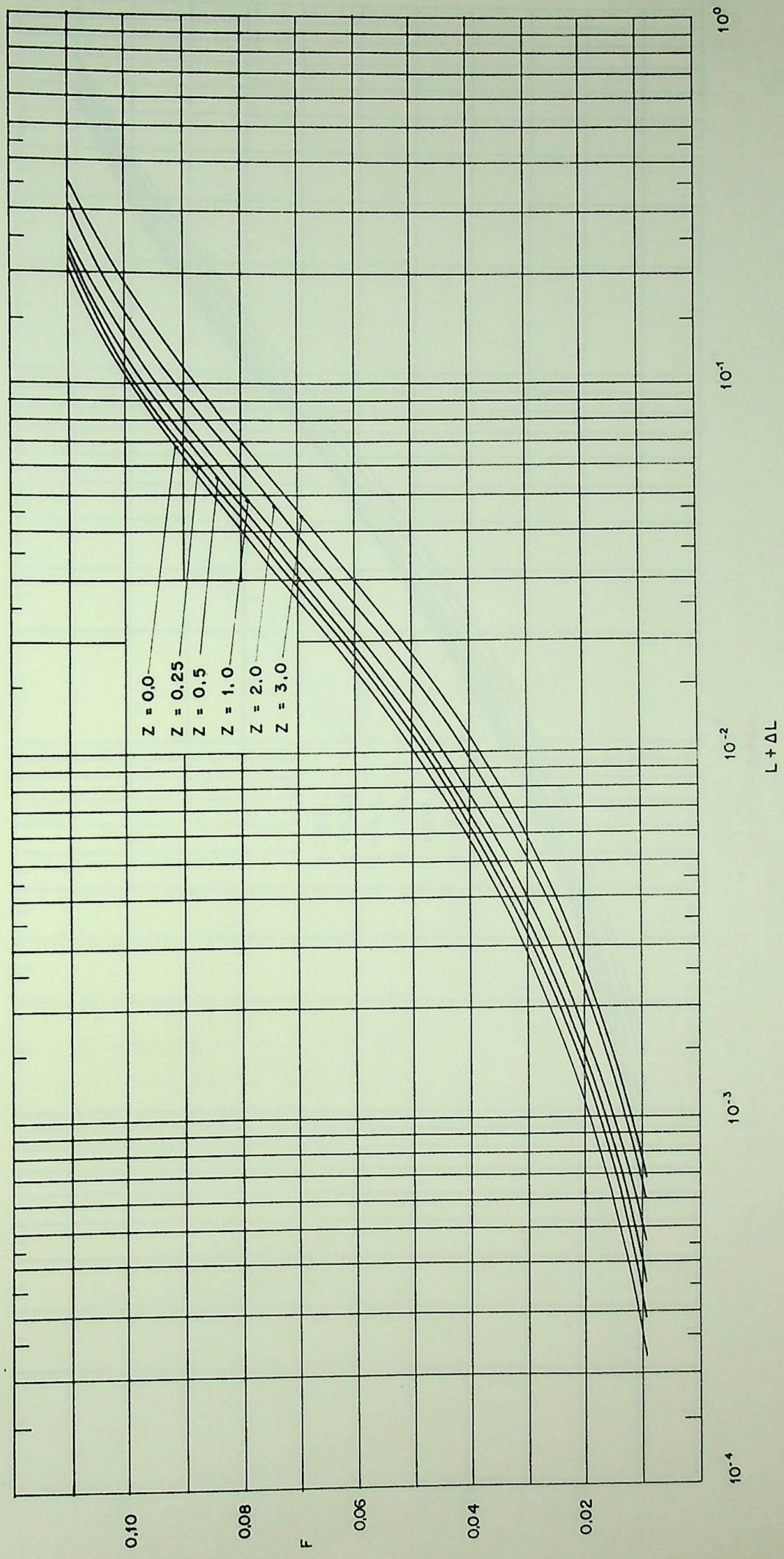


Figura 7: Vazão Volumétrica Versus  $L+\Delta L$  para Valores de Z Constantes e  $Fr = 0,7$ .



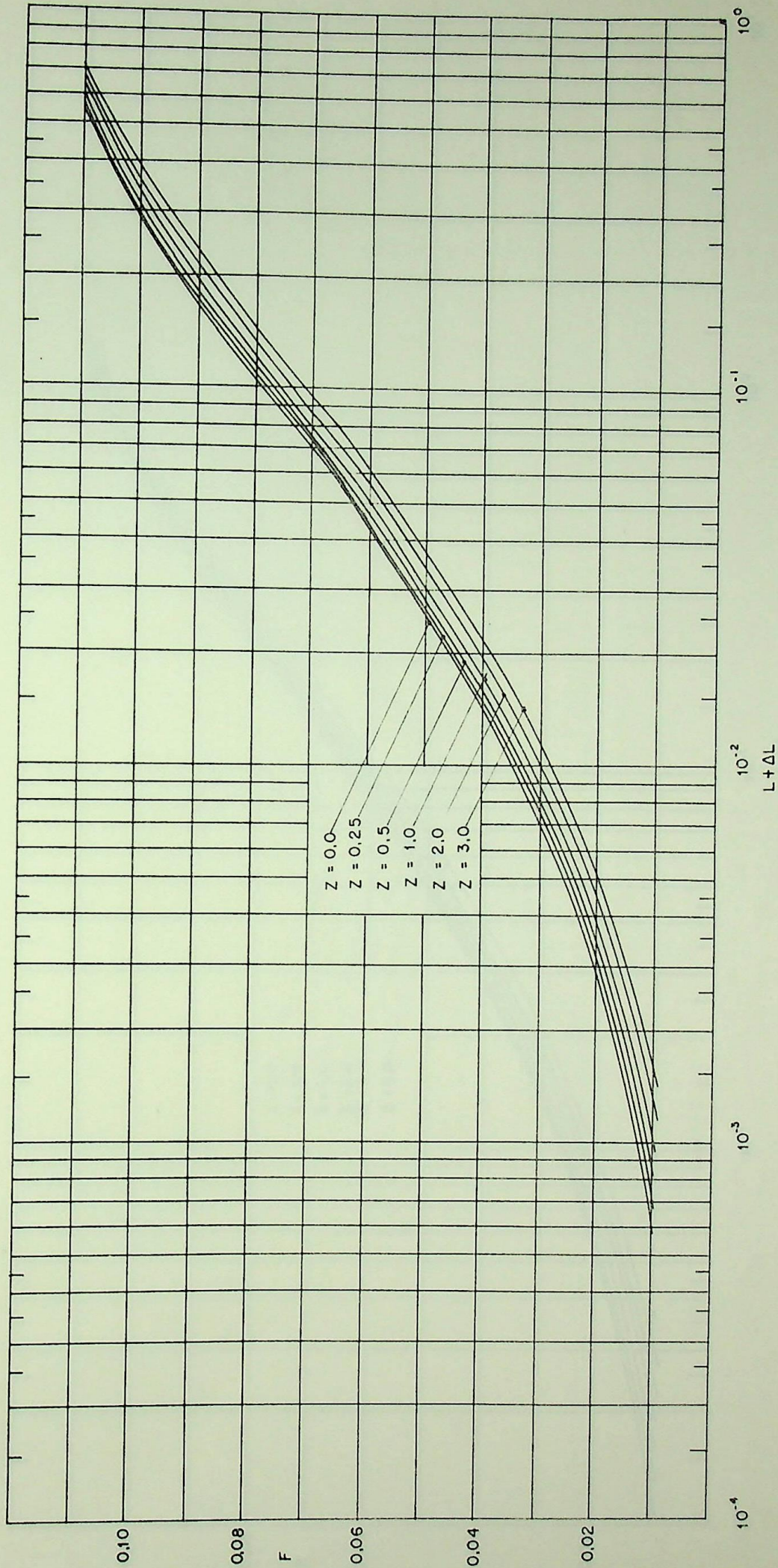


Figura 8: Vazão Volumétrica Versus  $L+\Delta L$  para Valores de  $Z$  Constantes e  $Pr = 2, 5$ .

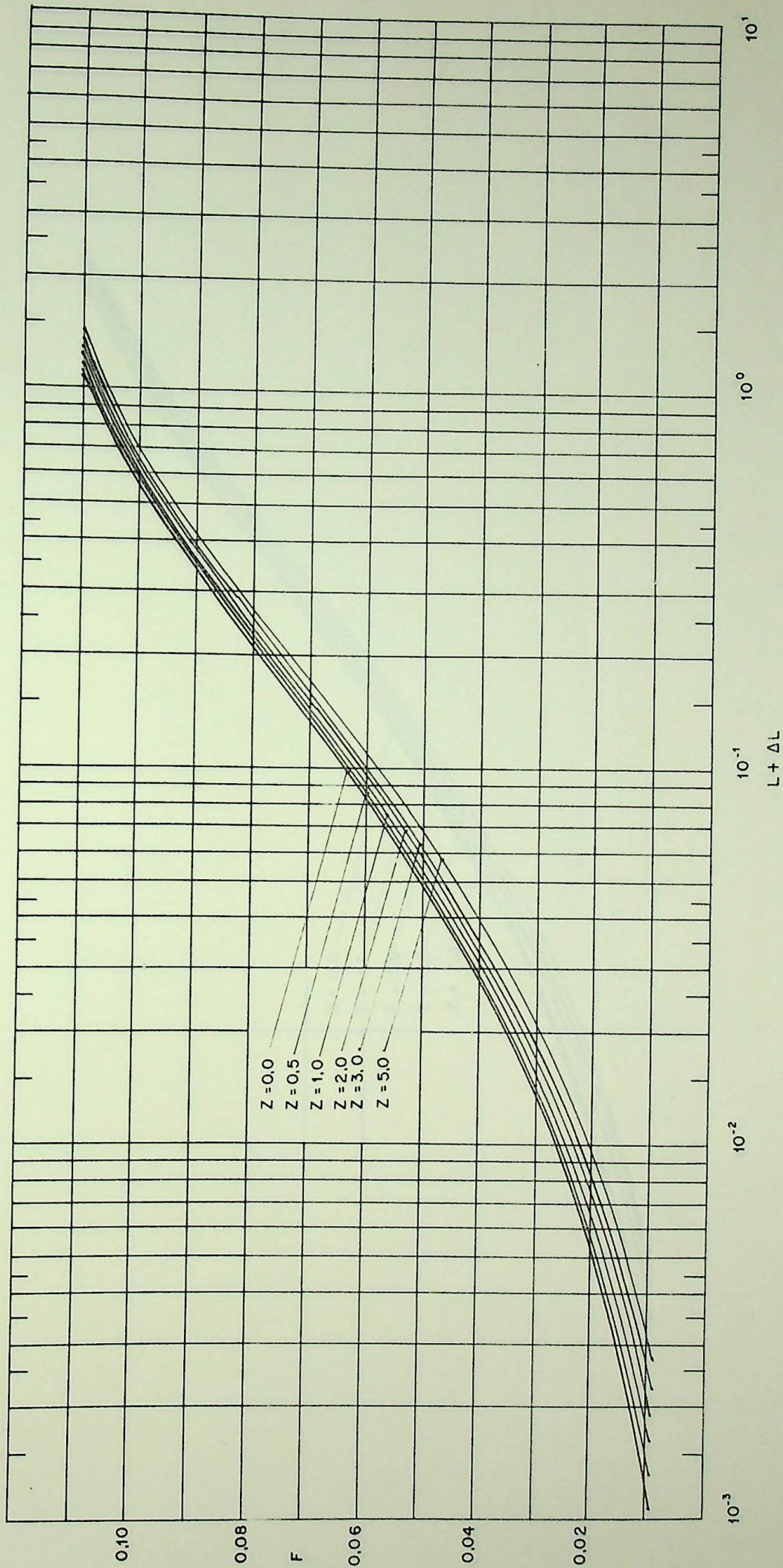


Figura 9: Vasão Volumétrica Versus  $L+\Delta L$  para Valores de  $Z$  Constantes  $Pr = 5,0$ .

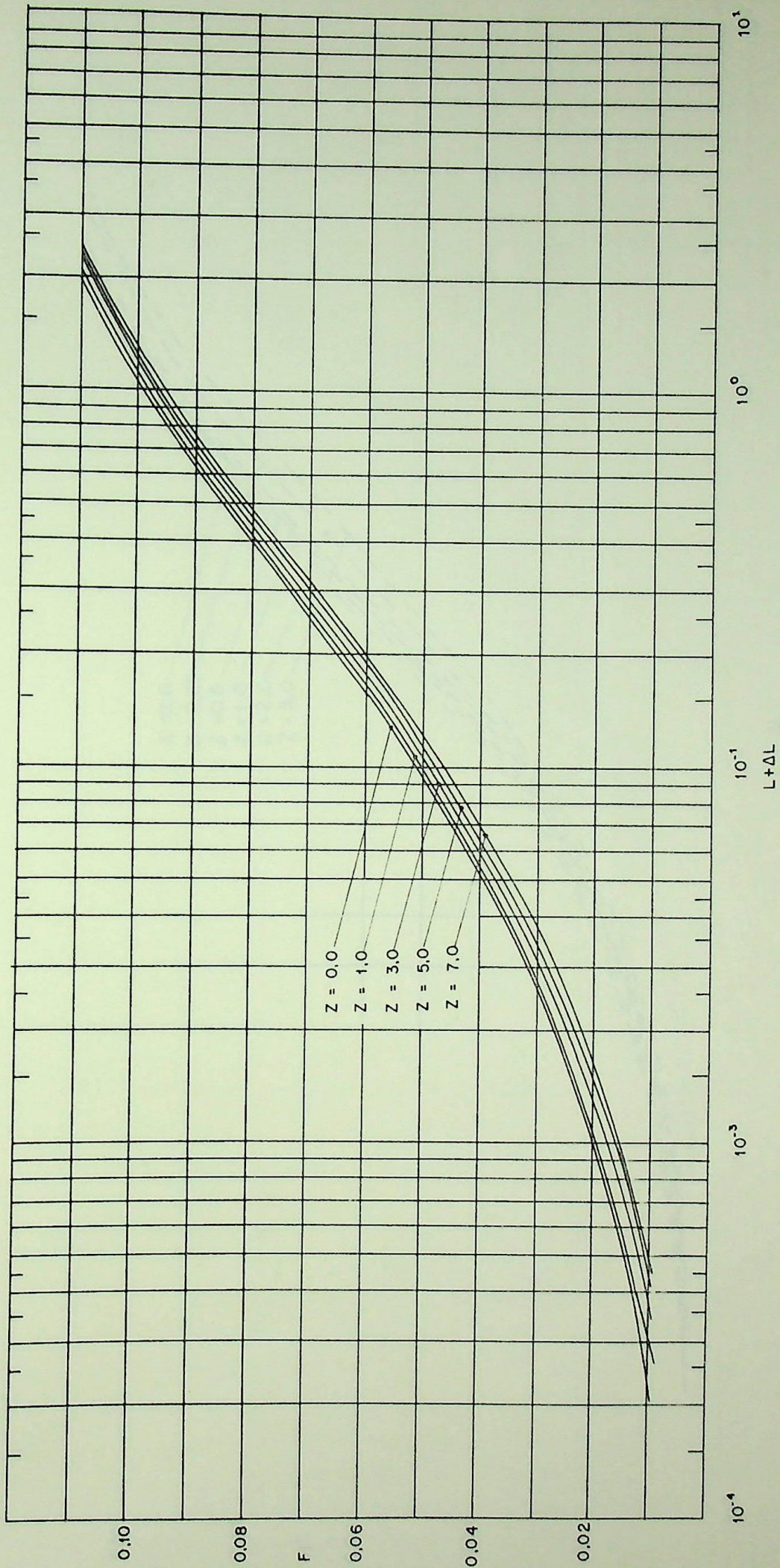


Figura 10: Vazão Volumétrica Versus  $L+\Delta L$  para Valores de  $Z$  Constantes  $Fr = 10, 0$ .

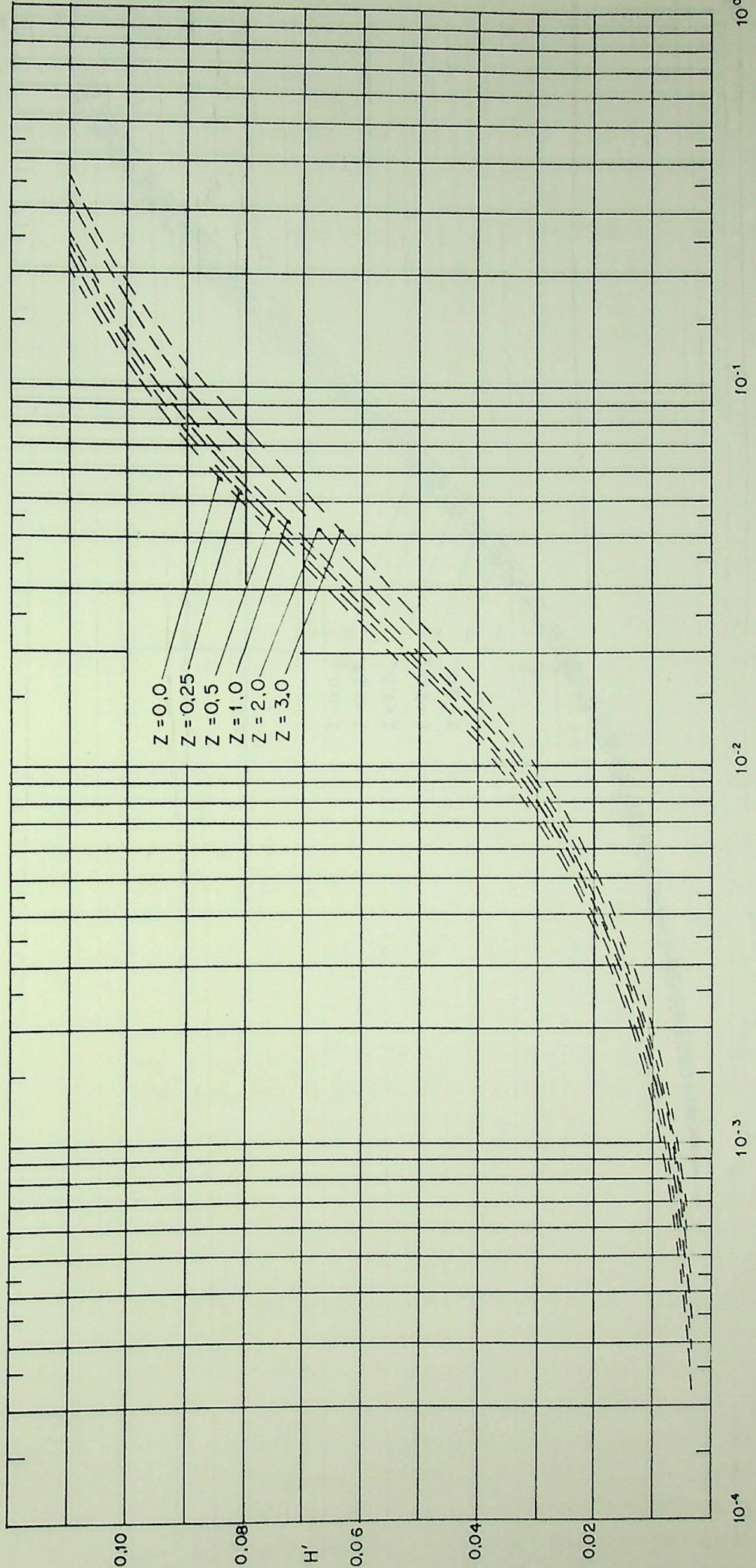


Figura 11: Fluxo de Entalpia na Saída Versus  $L + \Delta L$  para Valores de  $Z$  Constantes e  $Fr = 0,7$ .

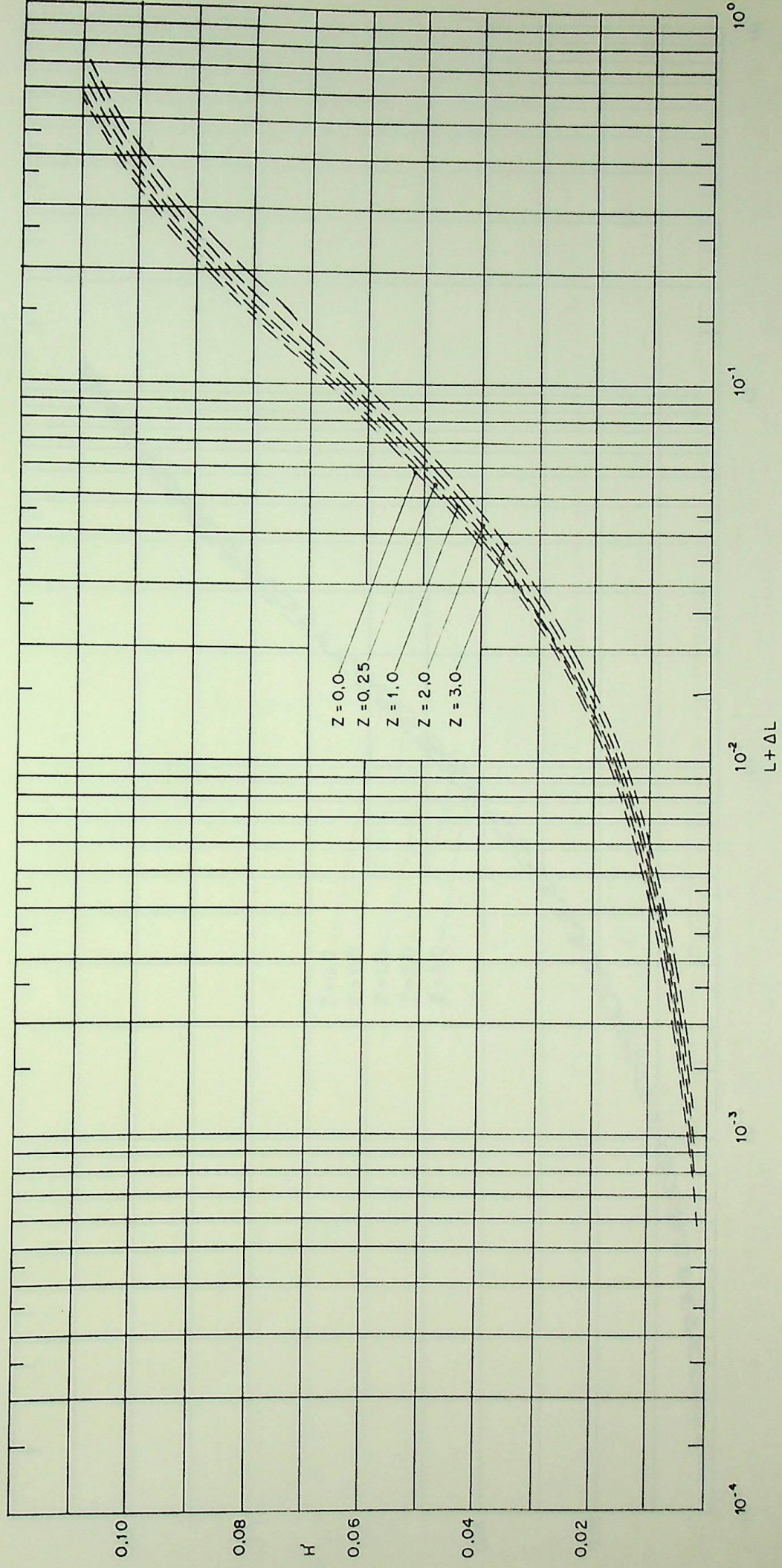


Figura 12: Fluxo de Entalpia na Saída Versus  $L+\Delta L$  para Valores de  $Z$  Constantes e  $Pr = 2,5$ .

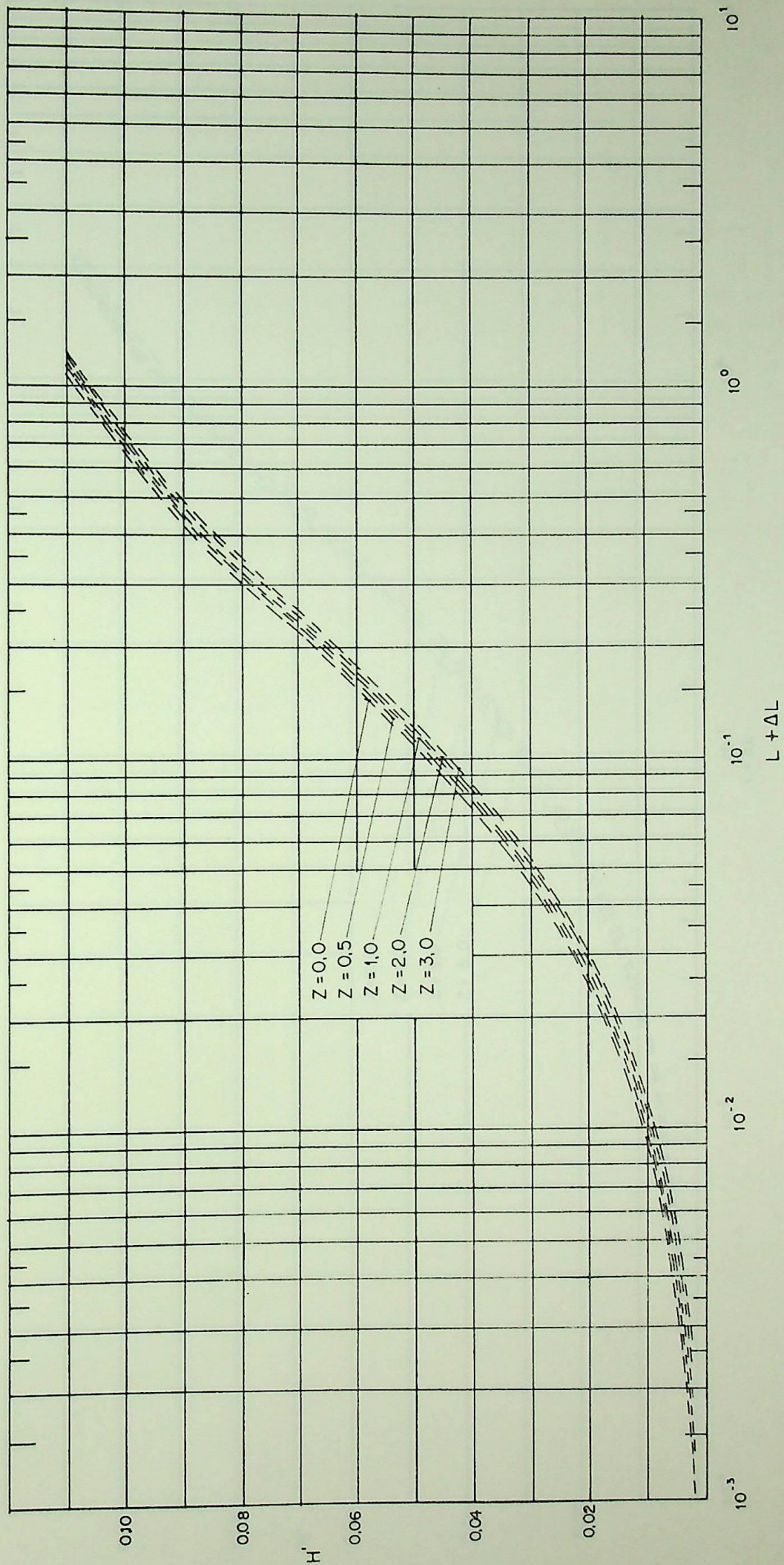


Figura 13: Fluxo de Entalpia na Saída Versus  $L + \Delta L$  para Valores de  $Z$  Constantes e  $Pr = 5,0$ .

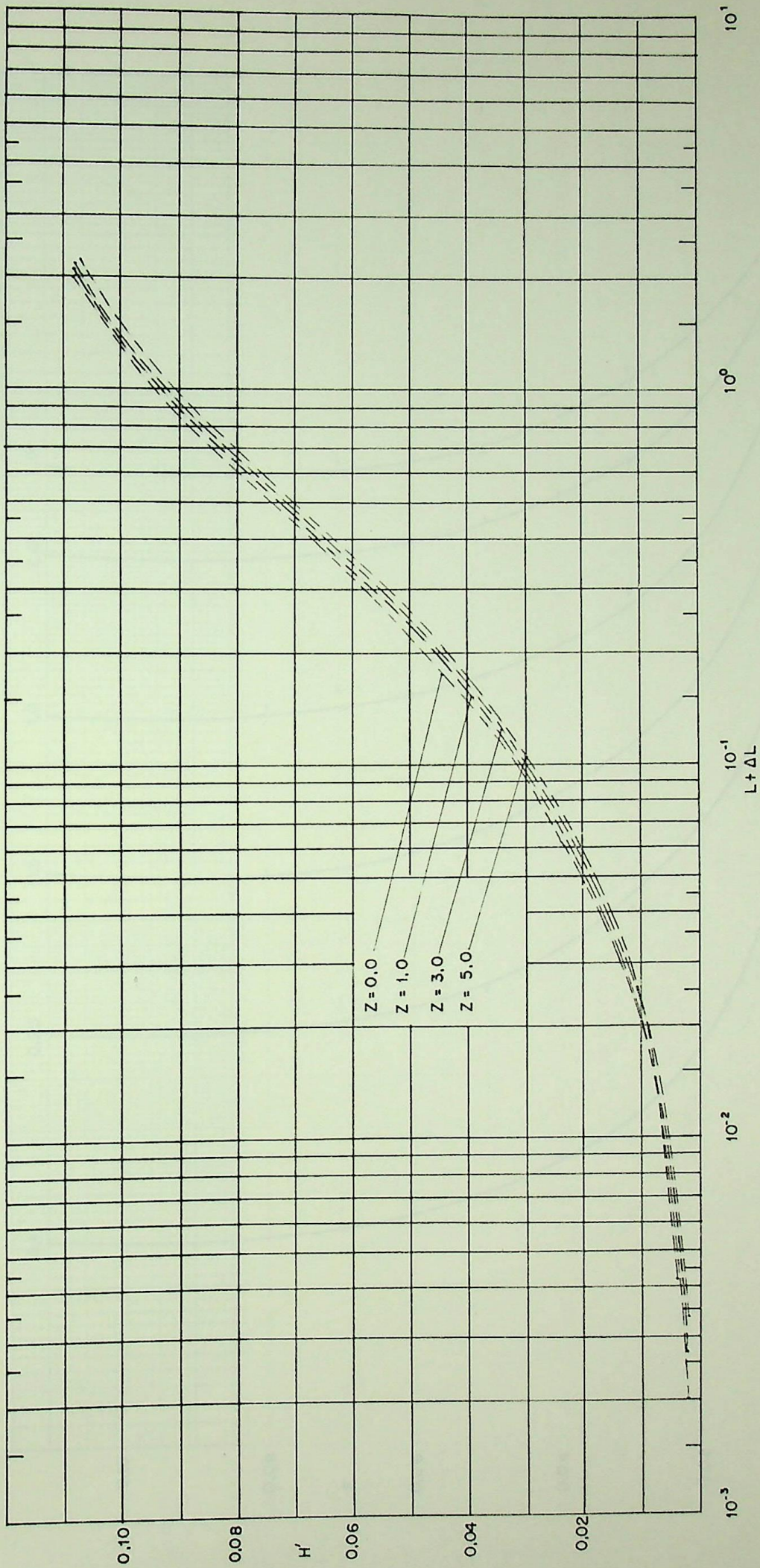


Figura 14: Fluxo de Entalpia na Saída Versus  $L + \Delta L$  para Valores de  $Z$  Constantes e  $Pr = 10,0$ .

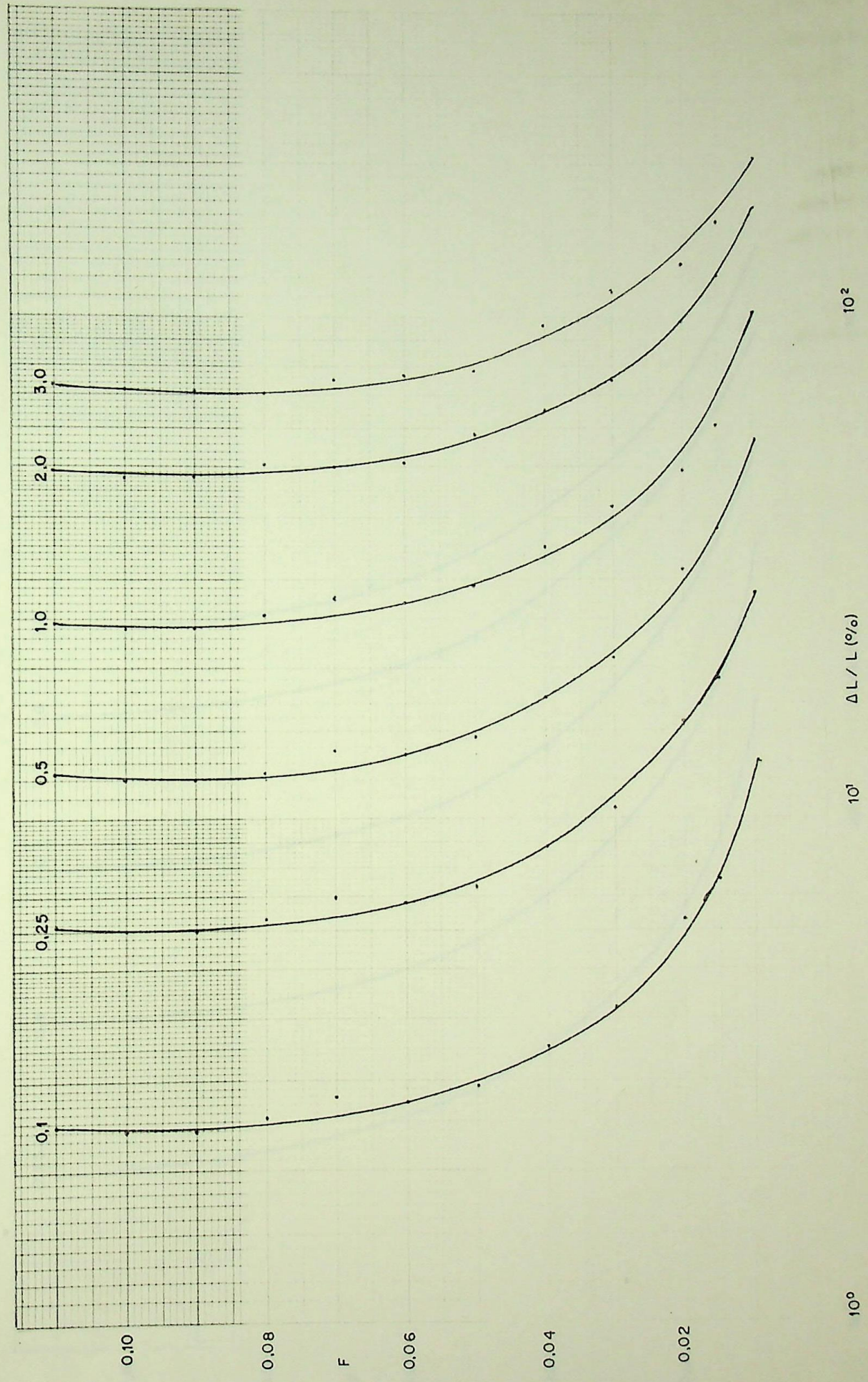


Figura 15: Variação da Vazão Volumétrica com  $\Delta L / L$  para Valores de  $Z$  Constantes e  $Pr = 0,7$ .

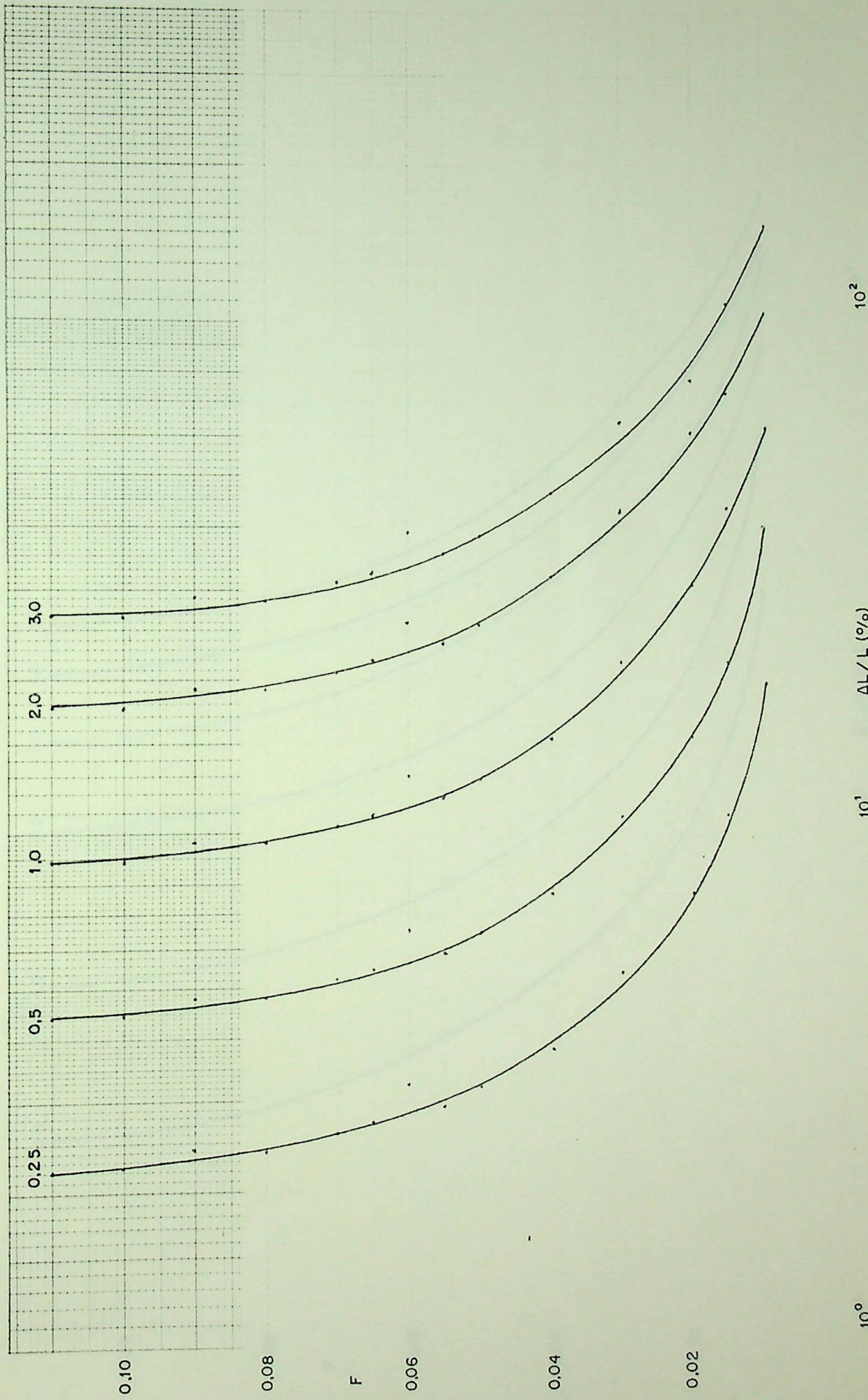


Figura 16: Variação da Vazão Volumétrica com  $\Delta L/L$  para Valores de Z Constantes e  $Pr = 2,5$ .

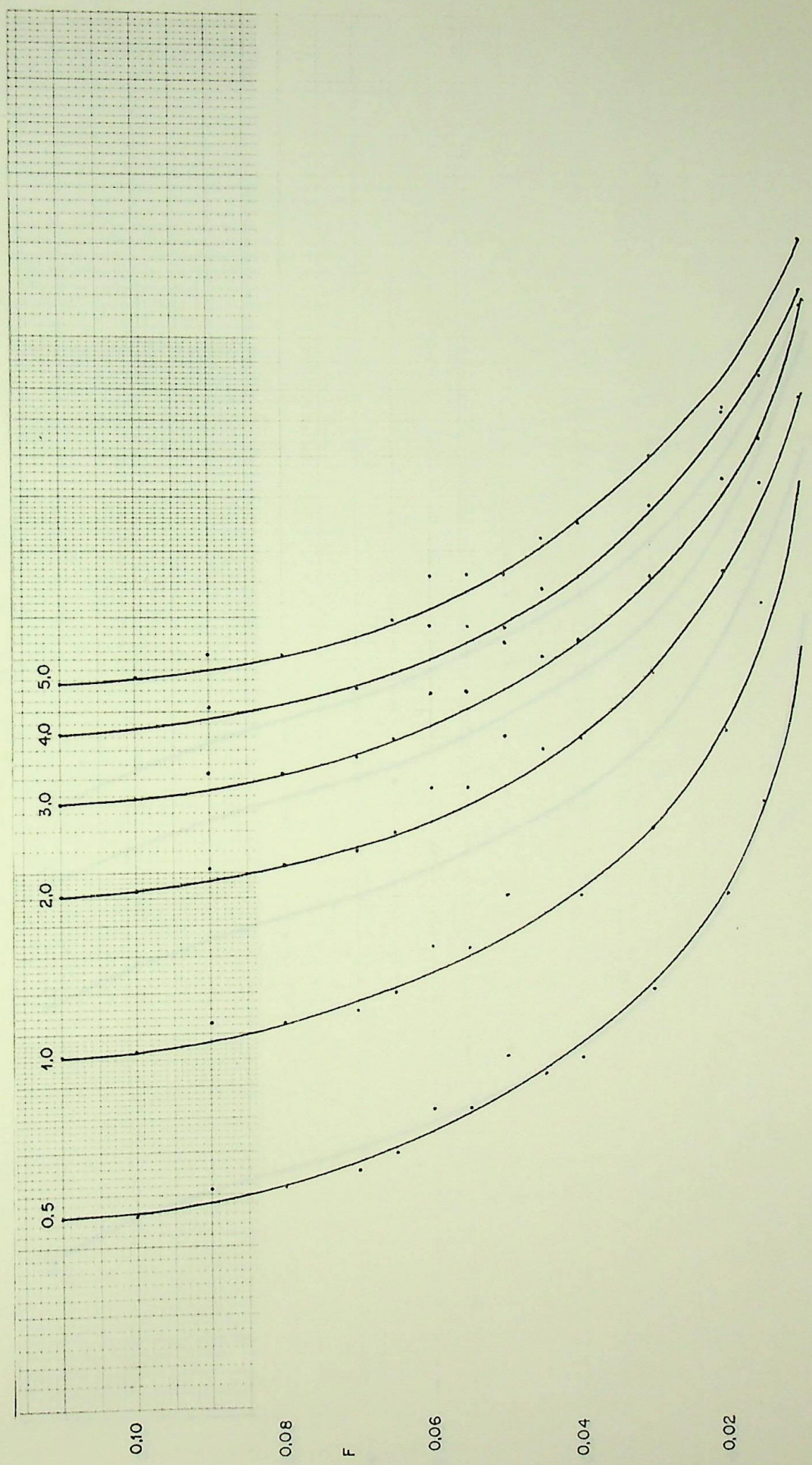


Figura 17: Variação da Vazão Volumétrica com  $\Delta L/L$  para Valores de 2 Constantes e  $Pr = 5,0$ .

$10^0$

$10^2$

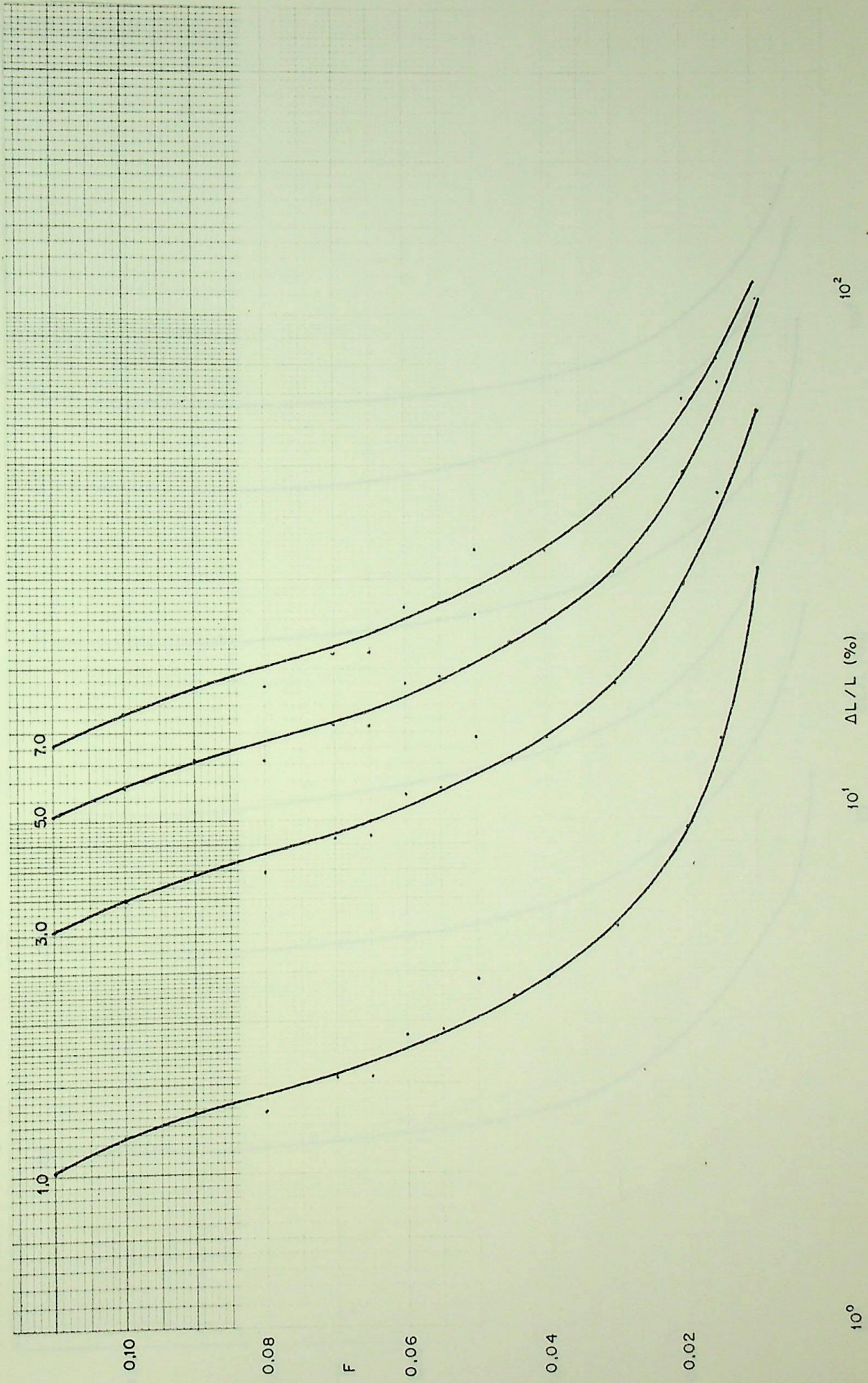


Figura 18: Variação da Vazão Volumétrica com  $\Delta L/L$  para Valores de Z Constantes e  $Pr = 10,0$ .

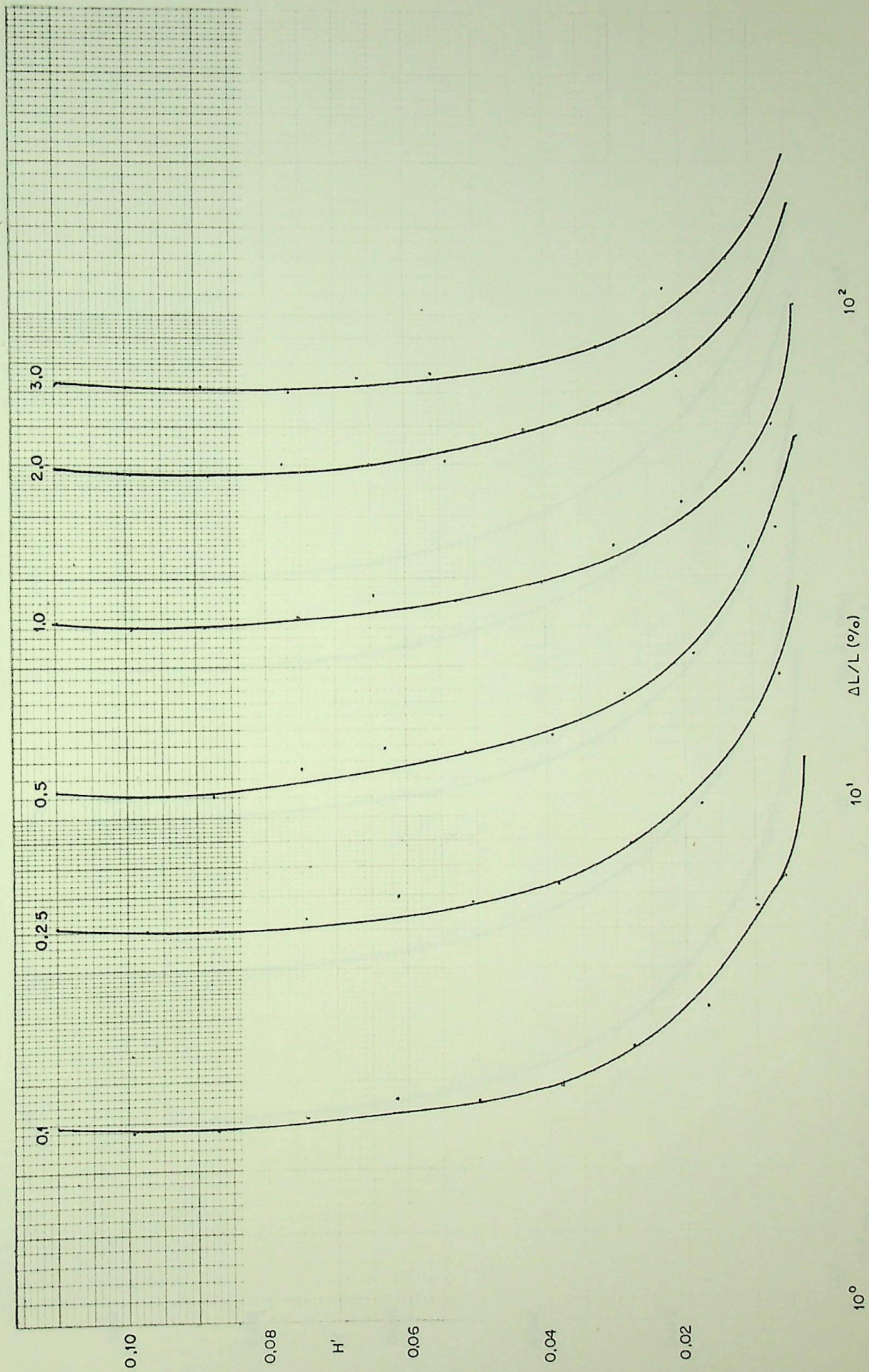


Figura 19: Variação do Fluxo de Entalpia na Saída com  $\Delta L/L$  para Valores de  $Z$  Constantes e  $Fr = 0,7$ .

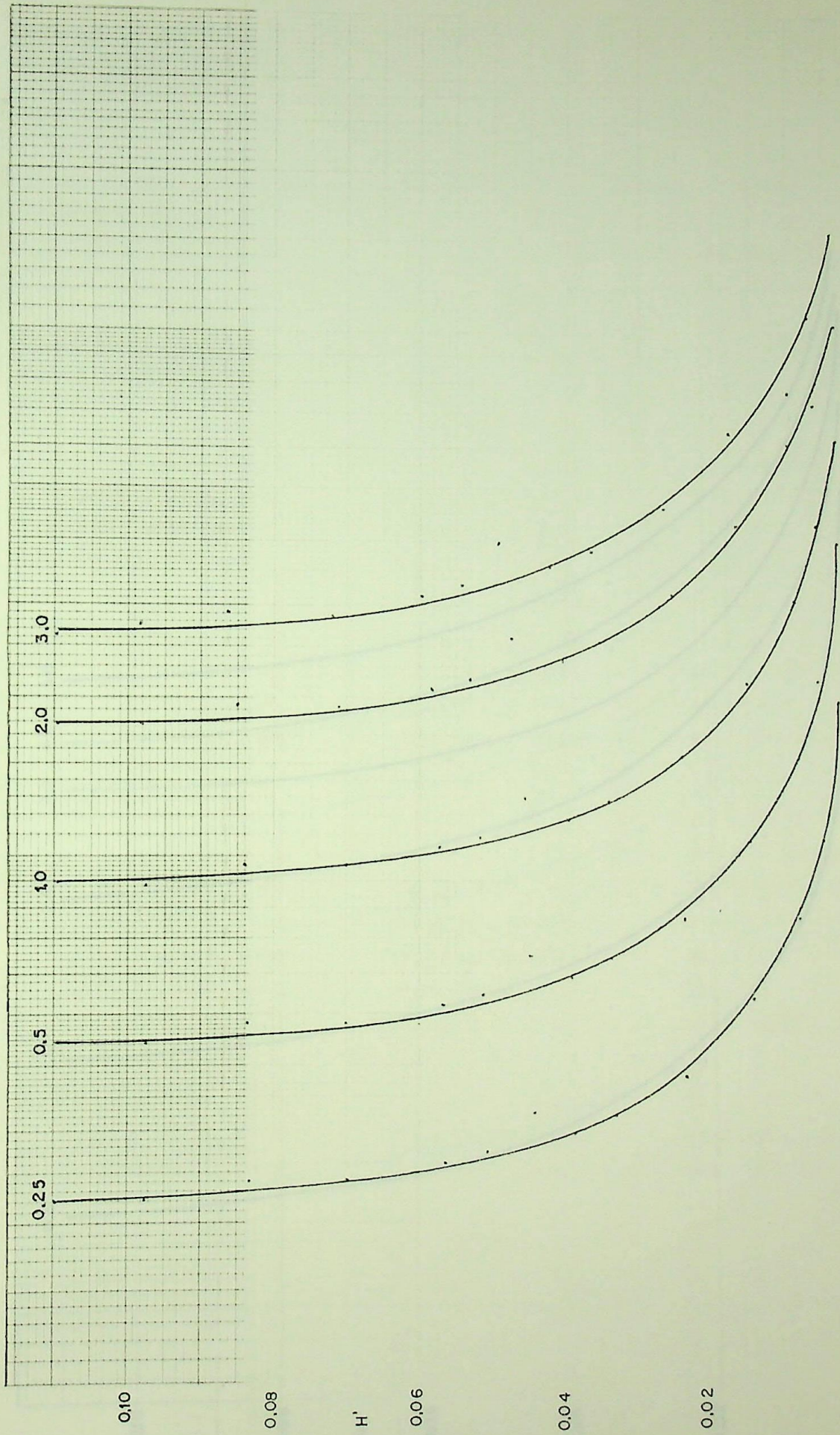


Figura 20: Variação do Fluxo de Entalpia na Saída com  $\Delta L/L$  para Valores de  $z$  Constantes e  $Pr = 2,5$ .

$10^0$

$10^1$

$10^2$

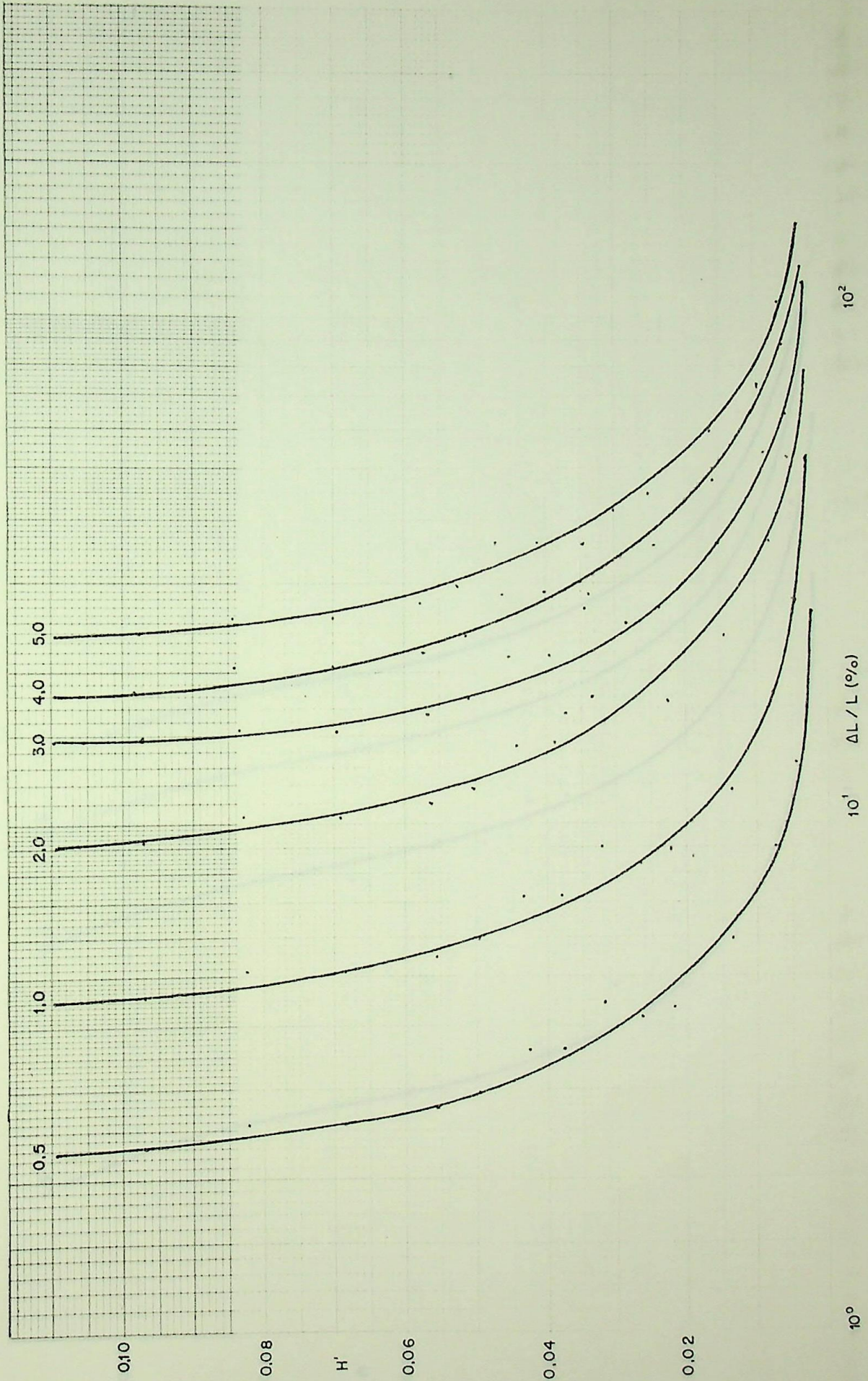


Figura 21: Variação do Fluxo de Entalpia na Saída com  $\Delta L/L$  para Valores de  $Z$  Constantes e  $Pr = 5,0$ .

$10^0$

$10^1$

$\Delta L/L$  (%)

$10^2$

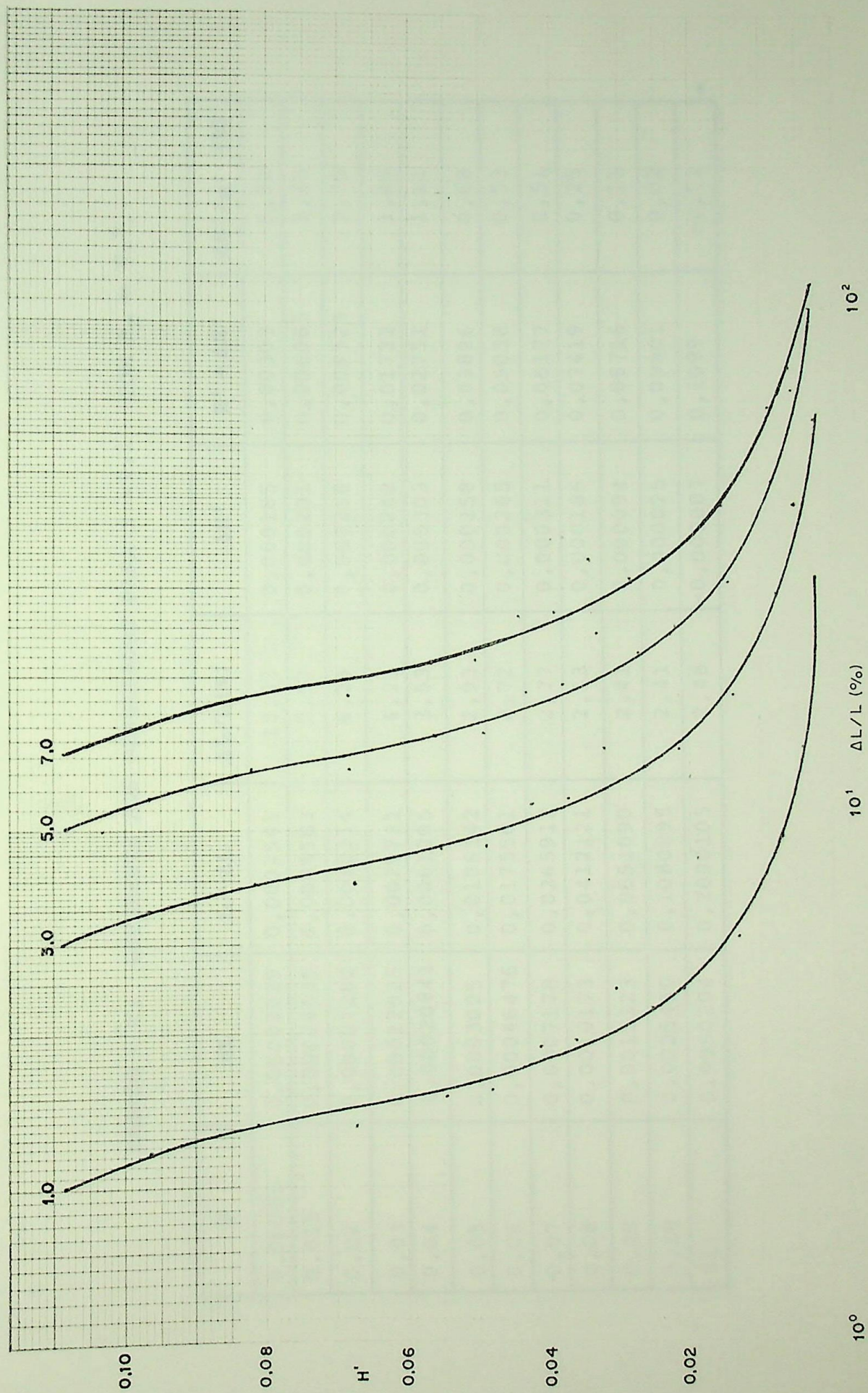


Figura 22: Variação do Fluxo de Entalpia na Saída com  $\Delta L/L$  para Valores de  $Z$  Constante e  $Pr = 10,0$ .

TABELA I Ia: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 0,1$  COM  $P_T = 0,7$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L (\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H' (\%)$
0,00955	0,00002929	0,0002541	13,03	0,000185	0,00303	6,52
0,015	0,00004635	0,0006583	7,57	0,000201	0,006065	3,43
0,02	0,00007282	0,0012314	6,29	0,000258	0,009523	2,78
0,03	0,00012025	0,0029731	4,21	0,000248	0,01722	1,46
0,04	0,00020841	0,0061205	3,53	0,000303	0,02751	1,11
0,05	0,0003025	0,0106142	2,93	0,000258	0,03826	0,68
0,06	0,00046476	0,0175501	2,72	0,000265	0,05038	0,53
0,07	0,0007178	0,0265912	2,77	0,000311	0,06177	0,51
0,08	0,0010173	0,0412121	2,53	0,000186	0,07419	0,25
0,09	0,0015323	0,0651090	2,41	0,000094	0,08716	0,11
0,10	0,0025450	0,1080895	2,41	0,000025	0,09901	0,02
0,11	0,0050204	0,2090105	2,46	-0,000007	0,1099	-0,01

\*

TABELA Iib: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 0,25$  COM  $P_r = 0,7$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L (\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H' (\%)$
0,00955	0,00006381	0,0002886	28,38	0,000370	0,003214	13,01
0,015	0,00011588	0,0007279	18,93	0,000503	0,006367	8,58
0,02	0,0001820	0,0013406	15,71	0,000645	0,009910	6,96
0,03	0,0003006	0,0031535	10,54	0,000620	0,01760	3,65
0,04	0,0005210	0,0064331	8,81	0,000756	0,02796	2,78
0,05	0,0007562	0,0110680	7,33	0,000646	0,03865	1,70
0,06	0,0011619	0,0182473	6,80	0,000663	0,05077	1,32
0,07	0,0017944	0,027668	6,94	0,000778	0,06224	1,27
0,08	0,0025432	0,0427380	6,33	0,000464	0,07447	0,63
0,09	0,0038308	0,0674075	6,03	0,000234	0,0873	0,27
0,10	0,0063626	0,111907	6,03	0,000062	0,09905	0,06
0,11	0,0125511	0,2165412	6,15	-0,000018	0,1099	-0,02

\*

TABELA IIC: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 0,5$  COM  $P_T = 0,7$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L(\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H'(\%)$
0,00955	0,00012761	0,0003524	56,76	0,000740	0,003584	26,02
0,015	0,00023175	0,0008437	37,87	0,001007	0,00687	17,17
0,02	0,0003641	0,0015226	31,43	0,001289	0,01055	13,92
0,03	0,00060123	0,003454	21,07	0,001241	0,01822	7,31
0,04	0,00104204	0,006954	17,63	0,001513	0,02872	5,56
0,05	0,0015125	0,011824	14,67	0,001291	0,03929	3,40
0,06	0,0023238	0,0194092	13,60	0,001325	0,05144	2,64
0,07	0,0035889	0,0294624	13,87	0,001555	0,06301	2,53
0,08	0,0050865	0,045281	12,65	0,000928	0,07494	1,25
0,09	0,0076616	0,0712384	12,05	0,000468	0,08753	0,54
0,10	0,0127252	0,1182697	12,06	0,000123	0,09911	0,12
0,11	0,0251022	0,229092	12,31	-0,000037	0,1099	-0,03

\*

TABELA IId: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA Z = 1,0 COM P<sub>r</sub> = 0,7.

F	ΔL	L + ΔL	ΔL/L (%)	ΔH'	H' + ΔH'	ΔH'/H' (%)
0,00955	0,00023307	0,000458	103,66	0,001293	0,004136	45,44
0,015	0,00037132	0,0009833	60,67	0,001398	0,007262	23,84
0,02	0,0005697	0,0017283	49,17	0,001669	0,01093	18,02
0,03	0,0012024	0,0040553	42,15	0,002481	0,01946	14,62
0,04	0,00208408	0,0079962	35,25	0,003026	0,03023	11,12
0,05	0,00302502	0,0133367	29,34	0,002583	0,04059	6,80
0,06	0,000464763	0,0217330	27,20	0,00650	0,05276	5,29
0,07	0,0071779	0,0330514	27,74	0,003111	0,06457	5,06
0,08	0,01017306	0,0503678	25,31	0,001856	0,07586	2,51
0,09	0,0153233	0,078900	24,10	0,000937	0,088	1,08
0,10	0,0254504	0,1309949	24,11	0,000247	0,09923	0,25
0,11	0,0502044	0,2541945	24,61	-0,000074	0,1099	-0,07

\*

TABELA IIe : REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 2,0$  COM  $P_r = 0,7$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L(\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H' (\%)$
0,00955	0,0003741	0,000599	166,44	0,001835	0,004679	64,51
0,015	0,0007426	0,0013546	121,34	0,002796	0,008659	47,68
0,02	0,0011394	0,0022979	98,35	0,003338	0,01260	36,03
0,03	0,00214218	0,0049950	75,09	0,003837	0,02081	22,60
0,04	0,0038338	0,0097459	64,85	0,00488	0,03208	17,94
0,05	0,00605004	0,0163618	58,67	0,005165	0,04317	13,59
0,06	0,00873105	0,0258164	51,10	0,003944	0,05406	7,87
0,07	0,01296784	0,0388413	50,12	0,003453	0,06491	5,62
0,08	0,0203461	0,0605409	50,62	0,003712	0,07772	5,02
0,09	0,0306467	0,0942234	48,20	0,001873	0,08894	2,15
0,10	0,0509009	0,1564454	48,23	0,000494	0,09948	0,50
0,11	0,1003087	0,304399	49,22	-0,000147	0,1098	-0,13

\*

TABELA II f: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 3,0$  COM  $P_r = 0,7$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L (\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H' (\%)$
0,00955	0,0004675	0,0006923	207,91	0,002068	0,004912	72,71
0,015	0,0009634	0,0015754	157,41	0,003271	0,009134	55,77
0,02	0,0014949	0,0026534	129,03	0,003869	0,01313	41,76
0,03	0,0032133	0,00606611	112,63	0,005756	0,02273	33,91
0,04	0,0050915	0,0110035	86,12	0,005071	0,03228	18,64
0,05	0,0080939	0,0184056	78,49	0,004923	0,04293	12,95
0,06	0,0130966	0,030182	76,65	0,005916	0,05603	11,81
0,07	0,0194517	0,0453252	75,18	0,005179	0,06664	8,43
0,08	0,0286744	0,0688691	71,34	0,002799	0,07681	3,78
0,09	0,045513	0,1090896	71,59	0,002041	0,08910	2,34
0,10	0,0763514	0,181896	72,34	0,000740	0,09973	0,75
0,11	0,1506132	0,3546033	73,83	-0,000221	0,1097	-0,20

\*

TABELA IIIa: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 0,25$  COM  $P_r = 2,5$ .

F	$\Delta L$	L + $\Delta L$	$\Delta L/L$ (%)	$\Delta H'$	H' + $\Delta H'$	$\Delta H'/H'$ (%)
0,00955	0,0001148	0,00069729	19,70	0,000228	0,002479	10,11
0,015	0,0001675	0,00171690	10,81	0,000237	0,004896	5,08
0,02	0,0002282	0,0032199	7,63	0,000257	0,007733	3,44
0,03	0,0003947	0,0077631	5,36	0,000306	0,001420	2,20
0,04	0,0005868	0,0159216	3,83	0,000308	0,02319	1,35
0,05	0,0008664	0,0279561	3,20	0,000307	0,03311	0,94
0,055	0,0010455	0,0364780	2,95	0,000300	0,03885	0,78
0,06	0,0014472	0,0460441	3,25	0,000437	0,04446	0,99
0,065	0,0015648	0,0589644	2,73	0,000305	0,05097	0,60
0,07	0,001822	0,0718359	2,60	0,000273	0,05642	0,49
0,08	0,0026487	0,1131513	2,40	0,000213	0,06982	0,31
0,09	0,0042381	0,1796916	2,42	0,000242	0,08347	0,29
0,10	0,0065688	0,30162676	2,23	0,000083	0,09732	0,09
0,11	0,0123898	0,5718149	2,21	0,000016	0,1095	0,01

TABELA IIib: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 0,5$  COM  $P_T = 2,5$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L (\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H' (\%)$
0,00955	0,0002295	0,00081207	39,41	0,000455	0,002707	20,23
0,015	0,0003350	0,0018844	21,63	0,000473	0,005133	10,15
0,02	0,0004564	0,0034481	15,26	0,000514	0,007991	6,88
0,03	0,0007895	0,0081578	10,76	0,000612	0,01450	4,41
0,04	0,0011737	0,0165085	7,65	0,000616	0,02350	2,69
0,05	0,0017327	0,0288224	6,40	0,000613	0,03342	1,87
0,055	0,0020910	0,0375235	5,90	0,000599	0,03915	1,55
0,06	0,0028944	0,0474913	6,49	0,000873	0,04490	1,98
0,065	0,0031295	0,0605292	5,45	0,000610	0,05128	1,20
0,07	0,0036446	0,0736582	5,21	0,000546	0,05669	0,97
0,08	0,0052975	0,115800	4,79	0,000426	0,07003	0,61
0,09	0,0084762	0,1839297	4,83	0,000483	0,08371	0,58
0,10	0,0131376	0,3081956	4,45	0,000166	0,09741	0,17
0,11	0,0247796	0,5842047	4,43	0,000032	0,1095	0,03

TABELA IIIC: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 1,0$  COM  $P_r = 2,5$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L(\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H'(\%)$
0,00955	0,0003622	0,00094473	62,18	0,000655	0,002906	29,07
0,015	0,0006701	0,0022195	43,25	0,000946	0,005606	20,31
0,02	0,0009128	0,0039045	30,51	0,001029	0,008505	13,76
0,03	0,001579	0,0089474	21,43	0,001224	0,01512	8,81
0,04	0,0023474	0,0176822	15,31	0,001231	0,02411	5,38
0,05	0,0034654	0,0305552	12,79	0,001227	0,03403	3,74
0,055	0,0041821	0,0396146	11,80	0,001198	0,03975	3,11
0,06	0,0057889	0,0503857	12,98	0,001747	0,04577	3,397
0,065	0,0062591	0,0636587	10,90	0,00122	0,05189	2,41
0,07	0,007289	0,0773028	10,41	0,001091	0,05724	1,94
0,08	0,0105950	0,1210976	9,59	0,000853	0,07046	1,23
0,09	0,0169524	0,192406	9,66	0,000966	0,08419	1,16
0,10	0,0262753	0,3213332	8,91	0,000332	0,09757	0,34
0,11	0,049559	0,608984	8,86	0,000064	0,1095	0,06

TABELA IIId: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 2,0$  COM  $P_r = 2,5$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L (\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H' (\%)$
0,00955	0,0006018	0,00118437	103,32	0,001034	0,003285	45,92
0,015	0,0011220	0,0026714	72,42	0,001495	0,006154	32,08
0,02	0,0018256	0,0048173	61,02	0,002057	0,009534	27,52
0,03	0,0031581	0,01052647	42,86	0,002448	0,01634	17,62
0,04	0,0046948	0,0200296	30,62	0,002463	0,02534	10,76
0,05	0,0069309	0,0340207	25,59	0,002454	0,03526	7,48
0,055	0,0083641	0,0437967	23,61	0,002396	0,04095	6,22
0,06	0,0115777	0,0561746	25,96	0,003494	0,04752	7,94
0,065	0,0125183	0,0699179	21,81	0,002441	0,05311	4,82
0,07	0,0145783	0,0845919	20,82	0,002182	0,05833	3,89
0,08	0,02119016	0,1316927	19,18	0,001706	0,07131	2,45
0,09	0,0339049	0,2093585	19,32	0,001933	0,08516	2,32
0,10	0,0525507	0,3476086	17,81	0,000664	0,09791	0,68
0,11	0,0991186	0,6585437	17,72	0,000127	0,1096	0,12

TABELA IIIe: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 3,0$  COM  $P_T = 2,5$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L (\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H' (\%)$
0,00955	0,0009028	0,0014853	154,98	0,001551	0,003802	68,87
0,015	0,0016831	0,0032324	108,63	0,002242	0,006901	48,11
0,02	0,0022953	0,0052870	76,72	0,002393	0,009869	32,00
0,03	0,0047372	0,0121055	64,29	0,003672	0,01756	26,43
0,04	0,0070423	0,0223771	45,92	0,003694	0,02658	16,14
0,05	0,0103964	0,0374861	38,38	0,003681	0,03648	11,22
0,055	0,0125462	0,0479788	35,41	0,003595	0,04214	9,32
0,06	0,0173666	0,0619635	38,94	0,00524	0,04926	11,90
0,065	0,0187774	0,07617708	32,71	0,003661	0,05433	7,22
0,07	0,0218674	0,0918811	31,23	0,003274	0,05942	5,83
0,08	0,0317852	0,1422877	28,76	0,002559	0,07217	3,68
0,09	0,0508574	0,2263109	28,99	0,002899	0,08613	3,48
0,10	0,078826	0,3738840	26,72	0,000996	0,09824	1,02
0,11	0,1486779	0,7081030	26,58	0,000191	0,1096	0,17

TABELA IIIe: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA Z = 3,0 COM Pr = 2,5.

F	$\Delta L$	L + $\Delta L$	$\Delta L/L(\%)$	$\Delta H'$	H' + $\Delta H'$	$\Delta H'/H'(\%)$
0,00955	0,0009028	0,0014853	154,98	0,001551	0,003802	68,87
0,015	0,0016831	0,0032324	108,63	0,002242	0,006901	48,11
0,02	0,0022953	0,0052870	76,72	0,002393	0,009869	32,00
0,03	0,0047372	0,0121055	64,29	0,003672	0,01756	26,43
0,04	0,0070423	0,0223771	45,92	0,003694	0,02658	16,14
0,05	0,0103964	0,0374861	38,38	0,003681	0,03648	11,22
0,055	0,0125462	0,0479788	35,41	0,003595	0,04214	9,32
0,06	0,0173666	0,0619635	38,94	0,00524	0,04926	11,90
0,065	0,0187774	0,07617708	32,71	0,003661	0,05433	7,22
0,07	0,0218674	0,0918811	31,23	0,003274	0,05942	5,83
0,08	0,0317852	0,1422877	28,76	0,002559	0,07217	3,68
0,09	0,0508574	0,2263109	28,99	0,002899	0,08613	3,48
0,10	0,078826	0,3738840	26,72	0,000996	0,09824	1,02
0,11	0,1486779	0,7081030	26,58	0,000191	0,1096	0,17

TABELA IVa: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 0,5$  COM  $P_r = 5,0$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L (\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H' (\%)$
0,00955	0,00028122	0,0013420	26,51	0,0003	0,002361	14,54
0,015	0,00037701	0,0032023	13,34	0,000281	0,00457	6,56
0,02	0,0004939	0,0059522	9,05	0,000295	0,007209	4,27
0,03	0,0008146	0,0144654	5,97	0,000329	0,01352	2,49
0,04	0,0012412	0,0290227	4,47	0,000356	0,02184	1,66
0,045	0,0015689	0,0391291	4,18	0,000388	0,02647	1,49
0,05	0,0022343	0,05200728	4,49	0,000552	0,03181	1,77
0,055	0,0023760	0,0681174	3,61	0,000432	0,03754	1,16
0,06	0,0029650	0,0854029	3,60	0,000479	0,04279	1,13
0,065	0,0031743	0,1099343	2,97	0,000330	0,04933	0,67
0,07	0,0036483	0,1356865	2,76	0,000284	0,05530	0,52
0,08	0,0053075	0,2128090	2,56	0,000228	0,06833	0,33
0,09	0,0084523	0,3378895	2,57	0,000263	0,08218	0,32
0,10	0,0128587	0,5683334	2,31	0,000083	0,09677	0,09
0,11	0,0237029	1,0689721	2,27	0,00001	0,1093	0,01

TABELA IVb: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA Z = 1,0 COM Pr = 5,0.

F	$\Delta L$	L + $\Delta L$	$\Delta L/L$ (%)	$\Delta H'$	H' + $\Delta H'$	$\Delta H'/H'$ (%)
0,00955	0,0005624	0,0016232	53,02	0,000599	0,002661	29,09
0,015	0,0007540	0,0035793	26,69	0,000563	0,004851	13,13
0,02	0,0009878	0,0064461	18,10	0,00059	0,007504	8,54
0,03	0,0016292	0,0152800	11,93	0,000657	0,01385	4,98
0,04	0,0024824	0,0302639	8,94	0,000712	0,0222	3,31
0,045	0,00313778	0,040698	8,35	0,000775	0,02686	2,97
0,05	0,0044685	0,0542415	8,98	0,001104	0,03236	3,53
0,055	0,0047521	0,0704935	7,23	0,000864	0,03797	2,33
0,06	0,0059301	0,088368	7,19	0,000959	0,04327	2,27
0,065	0,0063487	0,1131087	5,95	0,00066	0,04966	1,35
0,07	0,0072966	0,1393348	5,53	0,000568	0,05558	1,03
0,08	0,0106149	0,2181165	5,12	0,000455	0,06856	0,67
0,09	0,0169046	0,3463418	5,13	0,000526	0,08244	0,64
0,10	0,0257174	0,5811921	4,63	0,000167	0,09685	0,17
0,11	0,0474058	1,0926750	4,54	0,000021	0,1093	0,02

TABELA IVc: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA Z = 2,0 COM P<sub>r</sub> = 5,0.

F	ΔL	L + ΔL	ΔL/L (%)	ΔH'	H' + ΔH'	ΔH'/H' (%)
0,00955	0,0008213	0,0018821	77,42	0,000788	0,002849	38,23
0,015	0,0015080	0,00433337	53,38	0,001126	0,005414	26,25
0,02	0,0019756	0,00743396	36,19	0,00118	0,008094	17,07
0,03	0,0032584	0,01690932	23,87	0,001314	0,01451	9,96
0,04	0,0049648	0,03274632	17,87	0,001424	0,02291	6,63
0,045	0,00627556	0,0438357	16,71	0,00155	0,02763	5,94
0,05	0,0089371	0,0587101	17,96	0,002207	0,03346	7,06
0,055	0,0095043	0,0752457	14,46	0,001727	0,03883	4,65
0,06	0,0118602	0,0942981	14,39	0,001918	0,04423	4,53
0,065	0,0126975	0,1194574	11,89	0,001319	0,05032	2,69
0,07	0,0145932	0,1466314	11,05	0,001137	0,05615	2,07
0,08	0,0212299	0,2287315	10,23	0,000910	0,06910	1,34
0,09	0,0338092	0,3632465	10,26	0,001053	0,08297	1,29
0,10	0,0514349	0,6069096	9,26	0,000333	0,09702	0,34
0,11	0,0948117	1,1400809	9,07	0,000042	0,1093	0,04

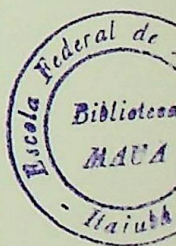


TABELA IVd: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 3,0$  COM  $P_r = 5,0$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L(\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H'(\%)$
0,00955	0,0012319	0,0022927	116,13	0,001182	0,003243	57,34
0,015	0,0018236	0,0046489	64,55	0,001277	0,005566	29,79
0,02	0,0029634	0,00842177	54,29	0,001771	0,008685	25,61
0,03	0,0048877	0,0185385	35,80	0,001971	0,01516	14,94
0,04	0,0074471	0,0352287	26,81	0,002136	0,02362	9,94
0,045	0,00941334	0,0469735	25,06	0,002325	0,02841	8,92
0,05	0,0134057	0,0631787	26,93	0,003311	0,03457	10,59
0,055	0,0142564	0,0799978	21,69	0,002591	0,03970	6,98
0,06	0,0177903	0,1002282	21,58	0,002877	0,04519	6,80
0,065	0,0190462	0,1258062	17,84	0,001979	0,05098	4,04
0,07	0,0218898	0,1539280	16,58	0,001705	0,05672	3,10
0,08	0,0318449	0,2393465	15,35	0,001365	0,06947	2,00
0,09	0,0507138	0,38015113	15,39	0,001579	0,0835	1,93
0,10	0,0771523	0,6326270	13,89	0,0005	0,09719	0,52
0,11	0,1422175	1,1874867	13,61	0,000063	0,1094	0,06

TABELA IVE: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 4,0$  COM  $P_r = 5,0$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L (\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H' (\%)$
0,00955	0,0012996	0,0023604	122,51	0,001174	0,003235	56,95
0,015	0,0024315	0,0052568	86,06	0,001703	0,005992	39,72
0,02	0,0039512	0,00940959	72,39	0,002361	0,009275	34,15
0,03	0,0065169	0,0201677	47,74	0,002629	0,01582	19,92
0,04	0,0099295	0,0377111	35,74	0,002848	0,02433	13,26
0,045	0,01255112	0,05011134	33,42	0,003101	0,02918	11,89
0,05	0,0142640	0,0640370	28,66	0,002715	0,03397	8,69
0,055	0,0190086	0,0847499	28,91	0,003454	0,04056	9,31
0,06	0,023720	0,10615839	28,77	0,003836	0,04615	9,06
0,065	0,0253949	0,1321549	23,79	0,002638	0,05164	5,38
0,07	0,0291864	0,16122466	22,10	0,002274	0,05728	4,13
0,08	0,0424599	0,2499615	20,46	0,001820	0,06992	2,67
0,09	0,0676185	0,3970557	20,53	0,002106	0,08402	2,57
0,10	0,1028697	0,6583445	18,52	0,000666	0,09735	0,69
0,11	0,1896233	1,2348925	18,14	0,000084	0,1094	0,08

TABELA IVf: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 5,0$  COM  $P_T = 5,0$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L(\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H'(\%)$
0,00955	0,0016244	0,0026853	153,13	0,001467	0,003528	71,18
0,015	0,0030393	0,0058647	107,58	0,002129	0,006418	49,64
0,02	0,0040274	0,0094857	73,78	0,002211	0,009125	31,98
0,03	0,00814614	0,0217970	59,67	0,003286	0,01648	24,91
0,04	0,01241197	0,0401935	44,68	0,00356	0,02504	16,57
0,045	0,0156889	0,0532491	41,77	0,003876	0,02996	14,86
0,05	0,0178300	0,0676030	35,82	0,003394	0,03465	10,86
0,055	0,0237607	0,0895021	36,14	0,004318	0,04142	11,64
0,06	0,0296506	0,1120885	35,97	0,004795	0,04711	11,33
0,065	0,0317437	0,1385037	29,73	0,003298	0,05230	6,73
0,07	0,036483	0,1685212	27,63	0,002842	0,05785	5,17
0,08	0,0530749	0,2605765	25,58	0,002275	0,07038	3,34
0,09	0,0845231	0,41396038	25,66	0,002632	0,08455	3,21
0,10	0,1285872	0,6840619	23,15	0,000833	0,09752	0,86
0,11	0,2370292	1,2322984	22,68	0,000105	0,1094	0,10

TABELA Va : REFERENTE AOS RESULTADOS PARA Z = 1,0 COM P<sub>r</sub> = 10,0.

F	ΔL	L + ΔL	ΔL/L (%)	ΔH'	H' + ΔH'	ΔH'/H' (%)
0,00955	0,0006388	0,0026752	31,37	0,000361	0,002321	18,42
0,015	0,0008007	0,0062492	14,7	0,000312	0,004417	7,60
0,02	0,0010225	0,0115465	9,72	0,000317	0,006968	4,77
0,03	0,0016449	0,0282378	6,19	0,000339	0,01320	2,63
0,04	0,0025553	0,0551708	4,86	0,000384	0,02107	1,85
0,045	0,00320811	0,0746926	4,49	0,000413	0,02567	1,63
0,05	0,0046245	0,0993855	4,88	0,000601	0,03089	1,98
0,055	0,0048578	0,1304091	3,87	0,000460	0,03658	1,27
0,06	0,0059766	0,1642749	3,78	0,000499	0,04187	1,21
0,065	0,0063624	0,2119395	3,09	0,000338	0,04835	0,70
0,07	0,0078577	0,2631360	3,08	0,000361	0,05458	0,67
0,08	0,0105398	0,4111982	2,63	0,000229	0,06728	0,34
0,09	0,0167311	0,6512711	2,64	0,000274	0,08127	0,34
0,10	0,024983	1,0936588	2,34	0,00008	0,09636	0,08
0,11	0,0401866	2,0274275	2,02	-0,000119	0,1087	-0,11

\*

TABELA Vb: REFERENTE AOS RESULTADOS PARA  $Z = 3,0$  COM  $P_r = 10,0$ .

F	$\Delta L$	$L + \Delta L$	$\Delta L/L (\%)$	$\Delta H'$	$H' + \Delta H'$	$\Delta H'/H' (\%)$
0,00955	0,0013072	0,0033437	64,19	0,000657	0,002617	33,52
0,015	0,0024020	0,0078506	44,09	0,000936	0,005041	22,79
0,02	0,0030677	0,0135916	29,15	0,000951	0,007602	14,31
0,03	0,0049349	0,0315278	18,56	0,001016	0,01388	7,90
0,04	0,0076660	0,0602814	14,57	0,001151	0,02183	5,56
0,045	0,0096243	0,0811088	13,46	0,001238	0,02649	4,90
0,05	0,0138735	0,1086345	14,64	0,001802	0,03210	5,95
0,055	0,0145734	0,1401248	11,61	0,001379	0,0375	3,82
0,06	0,0179299	0,1762282	11,33	0,001498	0,04287	3,62
0,065	0,0190873	0,2246644	9,28	0,001014	0,04902	2,11
0,07	0,0235733	0,2788515	9,23	0,001082	0,05530	2,00
0,08	0,0316194	0,4322778	7,89	0,000688	0,06774	1,03
0,09	0,0501933	0,6847333	7,91	0,000822	0,08182	1,02
0,10	0,0749505	1,1436258	7,01	0,000239	0,09652	0,25
0,11	0,120559	2,107800	6,07	-0,000358	0,1085	-0,33

\*

TABELA Vc : REFERENTE AOS RESULTADOS PARA Z = 5,0 COM Pr = 10,0 .

F	$\Delta L$	L + $\Delta L$	$\Delta L/L(\%)$	$\Delta H'$	H' + $\Delta H'$	$\Delta H'/H'(\%)$
0,00955	0,002178	0,0042151	106,98	0,001095	0,003055	55,87
0,015	0,0040034	0,0094520	73,48	0,00156	0,005665	37,99
0,02	0,0051128	0,01563676	48,58	0,001586	0,008236	23,84
0,03	0,008225	0,0348178	30,93	0,001693	0,01455	13,16
0,04	0,0127767	0,0653921	24,28	0,001918	0,0226	9,27
0,045	0,0160405	0,0875250	22,44	0,002063	0,02732	8,17
0,05	0,0231224	0,1178834	24,40	0,003004	0,0333	9,92
0,055	0,0242890	0,1498404	19,35	0,002299	0,03842	5,98
0,06	0,0298832	0,1881815	18,88	0,002497	0,04387	6,04
0,065	0,03181224	0,2373893	15,47	0,001690	0,04970	3,52
0,07	0,0392888	0,2945670	15,39	0,001803	0,05602	3,33
0,08	0,052699	0,4533574	13,15	0,001147	0,0682	1,71
0,09	0,083655	0,7181955	13,18	0,00137	0,08236	1,69
0,10	0,1249175	1,1935927	11,69	0,000398	0,09668	0,41
0,11	0,2009331	2,1881741	10,11	-0,000596	0,1082	-0,55

\*

TABELA Vd : REFERENTE AOS RESULTADOS PARA Z = 7,0 COM P<sub>r</sub> = 10,0.

F	ΔL	L + ΔL	ΔL/L (%)	ΔH'	H' + ΔH'	ΔH'/H' (%)
0,00955	0,0023420	0,0043785	115,01	0,001094	0,003054	55,79
0,015	0,0044143	0,0098628	81,02	0,001598	0,005703	38,92
0,02	0,0071579	0,0176818	68,02	0,002220	0,008871	33,38
0,03	0,0115148	0,0381077	43,30	0,00237	0,01523	18,43
0,04	0,0178874	0,0705028	34,00	0,002685	0,02337	12,98
0,045	0,0224567	0,0939412	31,41	0,002889	0,02814	11,44
0,05	0,03237146	0,1271324	34,16	0,004206	0,03450	13,88
0,055	0,0340047	0,1595560	27,08	0,003218	0,03934	8,91
0,06	0,04183657	0,2001348	26,43	0,003496	0,04486	8,45
0,065	0,0445371	0,2501142	21,66	0,002366	0,05037	4,93
0,07	0,05500431	0,3102825	21,55	0,002525	0,05674	4,66
0,08	0,0737786	0,474437	18,41	0,001606	0,06866	2,40
0,09	0,1171177	0,7516577	18,46	0,001918	0,08291	2,37
0,10	0,174884	1,243559	16,36	0,000557	0,09683	0,58
0,11	0,2813064	2,268547	14,16	-0,000835	0,1080	-0,77

\*

## 5 - CONCLUSÃO

A figura 5 apresenta uma correlação entre o comprimento adimensional do tubo  $L$  e as grandezas adimensionais  $H'$  e  $F$ , para vários números de Prandtl, onde pode ser observado que a utilização de um fluido com número de Prandtl maior produz um acréscimo considerável no comprimento do tubo, para se manter um determinado valor de  $F$  ou  $H'$ . Encontrando-se, neste caso, um acréscimo de até 90% para  $L$ , ocorrido nos resultados para  $Pr = 10$  em relação aos obtidos para  $Pr = 0,7$ ; mesmo comparando os resultados de  $L$  para  $Pr = 0,7$  e  $Pr = 1,0$  observa-se uma diferença apreciável. A figura 6 apresenta uma correlação entre o  $\overline{NU}_O$  e  $1/L^+$  para a mesma faixa de número de Prandtl analisada, verificando-se que os resultados obtidos se situaram sobre uma mesma curva, independentemente do fluido considerado. Por outro lado, os resultados conseguidos para  $Pr = 0,7$  concordaram satisfatoriamente com aqueles obtidos anteriormente por Davis e Perona [3].

As expressões propostas para representar os resultados do fluxo de entalpia, da vazão volumétrica e também do número de Nusselt médio concordam com uma boa aproximação com os resultados numéricos da solução por diferenças finitas. Sendo que o desvio máximo verificado entre os resultados obtidos numericamente e através da expressão analítica, para o  $\overline{NU}_O$ , é menor do que o encontrado empregando a expressão proposta por Elenbaas [1].

Na situação em que considera-se uma restrição ao escoamento na saída do tubo, existe a necessidade de aumentar o comprimento do mesmo para se manter a mesma velocidade de entrada, em relação a situação em que  $Z = 0$ , ocorrendo com isto um aumento do fluxo de entalpia na secção de saída. As correlações envolvendo o comprimento do tubo acrescido, o acréscimo relativo do tubo, a vazão volumétrica e o fluxo de entalpia são mostradas através de gráficos para vários valores de números de Prandtl, apresentando ainda as tabelas com os resultados obtidos. Verifica-se que o acréscimo relativo do tubo, considerado para uma determinada restrição na saída do mesmo, diminui a medida que se utiliza fluido com número de Prandtl maior.

A aplicação desses resultados para o caso de tu

bo inclinado é válida quanto maior for o número de Grashof, considerada a variação da influência do campo de gravidade com a inclinação do tubo. Entretanto, se o número de Grashof assumir um valor elevado, poderá haver transição no escoamento e, no momento, não se conhece em que faixa esta consideração é válida, podendo ficar esta incôgnita como assunto de outro trabalho. Por outro lado, esses resultados são úteis no pré-dimensionamento e avaliação de projetos, particularmente no caso de coletores solares. Nesse caso importa inclusive a perda de carga, e assim os resultados apresentados aqui poderão ser usados na forma de pré-dimensionamento.

Para finalizar, são apresentadas as seguintes ' sugestões para continuidade deste trabalho:

- fazer a verificação experimental dos resulta - dos conseguidos;
- estudar o caso do tubo inclinado, determinando em que faixa os resultados para tubos verticais são aplicáveis;
- determinar expressões para representar os re - sultados obtidos numericamente, considerando a situação com restrição na saída do tubo, em função de  $L$ ,  $Pr$  e  $Z$  (para isso são apresentadas tabelas com os resultados obtidos, além dos gráfi - cos);
- realizar um estudo semelhante utilizando outras geometrias.

## APÊNDICE A

## PARAMETRIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

A parametrização das equações de continuidade, movimento e energia, considerando o caso tridimensional é conseguida fixando-se valores de referência para cada variável dimensional envolvida. Sendo que as variáveis adimensionais resultantes dessa consideração, são substituídas nas equações citadas, transformando-as em equações adimensionalizadas com seus coeficientes na forma de parâmetros adimensionais. Em seguida, relaciona-se tais parâmetros impondo a condição de que o número de grupos adimensionais resultante seja mínimo.

Inicialmente, define-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$X = \frac{x}{x_1}, \quad R = \frac{r}{r_1}, \quad U = \frac{u}{u_1}, \quad V = \frac{v}{v_1}, \quad W = \frac{w}{w_1}, \quad P = \frac{p^*}{p_1} \quad e$$

$$\theta = \frac{T - T_\omega}{T_0 - T_\omega}, \quad (A-1)$$

onde  $x_1, r_1, u_1, v_1, w_1$  e  $p_1$  são valores de referência. Para em seguida substituí-los nas equações (1) - (5), resultando nas seguintes equações parametrizadas:

$$\frac{V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \phi} + \frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad \text{se} \quad \frac{v_1}{r_1} = \frac{u_1}{x_1} = \frac{w_1}{r_1} \quad (A-2)$$

$$V \frac{\partial V}{\partial R} + U \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{W}{R} \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{W^2}{R} = N_1 \theta \cos \phi - N_2 \frac{\partial P}{\partial R} + N_3 \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} +$$

$$+ N_4 \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + N_5 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + N_6 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} - N_7 \frac{V}{R^2} - N_8 \frac{1}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \phi} \quad (A-3)$$

$$V \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{W}{R} \frac{\partial W}{\partial \phi} + U \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{VW}{R} = N_9 \theta \sin \phi - N_{10} \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \phi} + N_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} +$$

$$+ N_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + N_{13} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + N_{14} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + N_{15} \frac{1}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \phi} - N_{16} \frac{W}{R^2} \quad (A-4)$$

$$V \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{W}{R} \frac{\partial U}{\partial \phi} + U \frac{\partial U}{\partial X} = N_{17} \theta - N_{18} \frac{\partial P}{\partial X} + N_{19} \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + N_{20} \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} +$$

$$+ N_{21} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + N_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad (A-5)$$

$$V \frac{\partial \theta}{\partial R} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{W}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = N_{23} \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + N_{24} \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + N_{25} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + N_{26} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2}, \quad (A-6)$$

sendo  $N_1, N_2, N_3, \dots, N_{26}$  parâmetros adimensionais definidos pelas seguintes expressões:

$$N_3 = N_4 = N_5 = N_7 = N_{11} = N_{12} = N_{13} = N_{16} = N_{19} = N_{20} = N_{21} = \frac{v}{r_1 v_1}$$

$$N_6 = N_{14} = N_{22} = \frac{v r_1}{x_1^2 v_1}$$

$$N_{23} = N_{24} = N_{26} = \frac{k}{\rho c_p v_1 r_1}$$

$$N_8 = N_{15} = \frac{2v}{r_1 v_1}$$

$$N_1 = N_9 = \frac{g \beta (T_w - T_o) r_1}{v_1^2} \cdot \cos \gamma$$

$$N_{17} = \frac{g \beta (T_w - T_o) r_1}{v_1 u_1} \cdot \sin \gamma$$

$$N_2 = N_{10} = \frac{p_1}{\rho v_1^2}$$

$$N_{18} = \frac{p_1 r_1}{\rho x_1 v_1 u_1}$$

e

$$N_{25} = \frac{K r_1}{\rho c_p x_1^2 v_1} \quad (A-7)$$

Interessa minimizar o número de parâmetros adimensionais, fixando o máximo possível de valores numéricos para os mesmos. Entretanto, deve-se observar a existência de algumas relações entre os parâmetros listados em (A-7), fato que impossibilita de torná-los todos iguais a valores numéricos. As prin

cipais relações encontradas são as seguintes:

$$\frac{N_6}{N_{25}} = \frac{N_3}{N_{23}} = Pr$$

$$\frac{N_6}{N_{23}} = Pr \left( \frac{r_1}{x_1} \right)^2$$

$$\frac{N_1}{N_{17}} = \left( \frac{u_1}{v_1} \right) \cdot \cotg \gamma = \left( \frac{x_1}{r_\omega} \right) \cdot \cotg \gamma$$

e

$$\frac{N_2}{N_{18}} = \frac{N_3}{N_6} = \frac{N_{23}}{N_{25}} = \left( \frac{u_1}{v_1} \right)^2 = \left( \frac{x_1}{r_1} \right)^2 \quad (A-8)$$

Deve ser observado que para se conseguir algumas dessas relações dadas em (A-8), usou-se a condição decorrente da equação de continuidade,  $\frac{v_1}{r_1} = \frac{u_1}{x_1} = \frac{w_1}{r_\omega}$ . Esta condição foi imposta com a finalidade de se manter a forma dessa equação, tendo em vista o interesse de se analisar uma situação física correspondente ao problema de camada limite.

No momento, considera-se o máximo possível de parâmetros adimensionais como iguais a valores numéricos, neste caso como iguais a unidade, obedecendo as relações impostas em (A-8), para não ocorrer de algum modo a particularização do problema para uma determinada situação física. Antes, deve-se observar a necessidade de ser fixada uma variável de referência, pois tem-se um sistema indeterminado de cinco equações para seis incógnitas. Neste tipo de problema é significativo considerar  $r_1$  como igual a dimensão do raio do tubo,  $r_\omega$ . Assim, considerando que

$$N_3 = N_4 = N_5 = N_7 = N_{11} = N_{12} = N_{13} = N_{16} = N_{19} = N_{20} = N_{21} = \frac{v}{v_1 \cdot r_\omega} = 1 ,$$

$N_{23}$  não pode ser fixado para não particularizar o número de Prandtl, conforme a relação dada em (A-8). Nem  $N_6$ , para não fixar a geometria. Se  $N_{18} = 1$ , não se pode fixar  $N_2$  pelo mesmo motivo. Como  $N_{23}$  e  $N_6$  resultam da fixação de  $N_3$ ,  $N_{25}$  não pode ser fixado para não particularizar a relação entre  $Pr$  e  $\left( \frac{r_\omega}{x_1} \right)^2$ . Se

$N_{17} = 1$ ,  $N_1$  não pode ser fixado, pois fixaria a relação entre  $\gamma$  e  $\left(\frac{x_1}{r_\omega}\right)$ . Têm-se finalmente que  $N_8 = 2$ , pois  $\frac{v}{v_1 \cdot r_\omega} = 1$ .

Pode-se, no momento, determinar as demais variáveis de referência, bem como os parâmetros adimensionais restantes. Resultando,

$$v_1 = \frac{v}{r_\omega}, \quad u_1 = Gr_\gamma \frac{v}{r_\omega}, \quad x_1 = Gr_\gamma r_\omega, \quad w_1 = \frac{v}{r_\omega}, \quad p_1 = \rho \cdot Gr_\gamma^2 \frac{v^2}{r_\omega^2}$$

e

$$N_9 = N_1 = Gr_\gamma \cotg \gamma$$

$$N_{10} = N_2 = Gr_\gamma^2$$

$$N_6 = N_{14} = N_{22} = \frac{1}{Gr_\gamma^2}$$

$$N_{23} = N_{24} = N_{26} = \frac{1}{Pr}$$

$$N_{25} = \frac{1}{Pr Gr_\gamma^2} \quad (A-9)$$

Substituindo todos os resultados nas equações (A-2) - (A-6), resultam as seguintes equações:

$$\frac{V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \phi} + \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad (A-10)$$

$$\begin{aligned} V \frac{\partial V}{\partial R} + U \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{W}{R} \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{W^2}{R} &= (Gr_\gamma \cotg \gamma \cos \phi) \theta - Gr_\gamma^2 \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \\ + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Gr_\gamma^2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} - \frac{V}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \phi} & \end{aligned} \quad (A-11)$$

$$\begin{aligned} V \frac{\partial W}{\partial R} + U \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{W}{R} \frac{\partial W}{\partial \phi} + \frac{VW}{R} &= (Gr_\gamma \cotg \gamma \sen \phi) \theta - Gr_\gamma^2 \frac{\partial P}{\partial \phi} + \\ + \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Gr_\gamma^2} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{W}{R^2} & \end{aligned} \quad (A-12)$$

$$\begin{aligned} V \frac{\partial U}{\partial R} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{W}{R} \frac{\partial U}{\partial \phi} &= 0 - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \\ + \frac{1}{Gr_\gamma^2} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} & \end{aligned} \quad (A-13)$$

$$v \frac{\partial \theta}{\partial R} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{W}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{1}{Gr_\gamma^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2} \right) \quad (A-14)$$

Sendo as variáveis adimensionais resultantes, representadas por:

$$X = \frac{X}{Gr_\gamma r_\omega}, \quad R = \frac{r}{r_\omega}, \quad U = \frac{u r_\omega}{Gr_\gamma v}, \quad V = \frac{v r_\omega}{v}, \quad W = \frac{w r_\omega}{v}, \quad P = \frac{p^* r_\omega^2}{\rho Gr_\gamma^2 v^2},$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_\omega - T_0}, \quad Gr_\gamma = \frac{g \beta (T_\omega - T_0) r_\omega^2}{v^2} \cdot \text{sen} \gamma \quad \text{e} \quad Pr = \frac{v \rho C_p}{K} \quad (A-15)$$



## APÊNDICE B

## ESCOAMENTO DESENVOLVIDO

No caso do escoamento desenvolvido, têm-se que:

$$U = U(R) \quad \text{e} \quad V = 0 \quad ,$$

e com isto  $\frac{\partial U}{\partial X} = 0$ . Substituindo essas condições nas equações (16) e (17), resultam respectivamente,

$$-\frac{dP}{dX} + \theta + \nabla^2 U = 0 \quad (\text{B-1})$$

e

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{Pr} \cdot \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \quad (\text{B-2})$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR}$$

Através da equação (B-1) determina-se que

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{d^2 P}{dX^2} \quad (\text{B-3})$$

e

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = \frac{1}{R^2} \frac{dU}{dR} - \frac{1}{R} \frac{d^2 U}{dR^2} - \frac{d^3 R}{dR^3} \quad (\text{B-4})$$

Fazendo a substituição de (B-3) e (B-4) na equação (B-2), obtêm-se

$$\nabla^4 U + Pr U \frac{d^2 P}{dX^2} = 0 \quad (\text{B-5})$$

Na equação (B-5) a solução para  $U = U(R)$  só será possível se  $\frac{d^2 P}{dX^2}$  for igual a uma constante  $\epsilon$ . Assim, integrando-se diretamente e aplicando as condições para  $P = 0$ , quando

$X = 0$  e  $X = L$ , resulta que

$$P = \frac{\epsilon \cdot X}{2} (X - L)$$

Como:  $\frac{dP}{dX} = \epsilon \cdot (X - \frac{L}{2})$ , obtêm-se substituindo na equação (B-1),

$$\theta = \epsilon (X - \frac{L}{2}) - \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R \frac{dU}{dR}) \quad (B-6)$$

Se  $\frac{dP}{dX}$  for diferente de zero a pressão aumentará ou diminuirá indefinidamente enquanto  $X$  se aproxima do infinito, contrariando o princípio básico do escoamento de Convecção natural. Desse modo, conclui-se que para esta situação  $\frac{dP}{dX}$  deve ser igual a zero e, para que isto ocorra  $\epsilon = 0$ . Assim, resulta da equação (B-6),

$$\theta = - \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R \frac{dU}{dR}) \quad (B-7)$$

Uma outra condição para que o escoamento seja desenvolvido é que  $\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$ . Substituindo esta condição na equação (B-2), resulta

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R \frac{d\theta}{dR}) = 0 \quad (B-8)$$

Resolvendo esta equação, considerando as condições:  $R = 0 \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0$  e  $R = 1 \Rightarrow \theta = 1$ , obtêm-se que

$$\theta = 1 \quad (B-9)$$

Substituindo a condição (B-9) na equação (B-7) e resolvendo para  $U$ , considerando as condições:  $R = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial R} = 0$  e  $R = 1 \Rightarrow U = 0$ , resulta

$$U = \frac{1 - R^2}{4} \quad (B-10)$$

que é o perfil parabólico para escoamento isotérmico. Portanto, substituindo a equação (B-10) na equação (25), determina-se o valor limite para a vazão volumétrica adimensional, correspondente ao escoamento desenvolvido,

$$F = 2 \int_0^1 \frac{1-R^2}{4} R \, dR = \frac{1}{8}, \quad (\text{B-11})$$

e como nesta situação  $\theta = 1$ , obtêm-se similarmente, empregando-se a equação (30), o valor limite para o fluxo de entalpia adimensional,

$$H = \frac{1}{8} \quad (\text{B-12})$$

Pela equação (32) resulta o valor limite para o número de Nusselt médio,

$$\overline{NU}_0 = \frac{1}{16L^+} \quad (\text{B-13})$$

Pode ser verificado através da solução numérica para  $F = 1/8$ , que a variação da pressão adimensional  $P$  com  $X$  tem um comportamento semelhante ao mostrado pela curva 1 da figura B1. Entretanto, no problema em questão interessam as situações dadas pela condição de contorno (22) ou (23), onde a pressão na saída deverá ser maior ou igual a zero, definindo o comprimento do tubo para cada caso. Em outras palavras, deseja-se que a curva de  $P$  alcance o eixo  $X$ , como está esquematicamente representado pela curva 2 da figura B1. Nesta situação, supondo a dependência  $F = F(L)$  contínua, considerando um determinado fluido, conclui-se que  $F$  deve ser menor do que  $1/8$ .

A figura B2 apresenta o esquema de uma situação para o caso de convecção natural através de um tubo aberto nas extremidades. Onde dois reservatórios à mesma pressão são interligados por um tubo aquecido com temperatura constante maior do que a do meio fluido. Neste caso o fluido é elevado do reservatório inferior para o superior, simplesmente pela variação da densidade do fluido com a temperatura; com uma determinada vazão que depende do comprimento do tubo.

A situação em que existe uma restrição ao escoamento na saída do tubo, pode ser exemplificada de modo semelhante, considerando que o reservatório superior se encontra afastado da saída do mesmo. Neste caso, é necessário a colocação de uma tubulação para condução do fluido até este reservatório, que

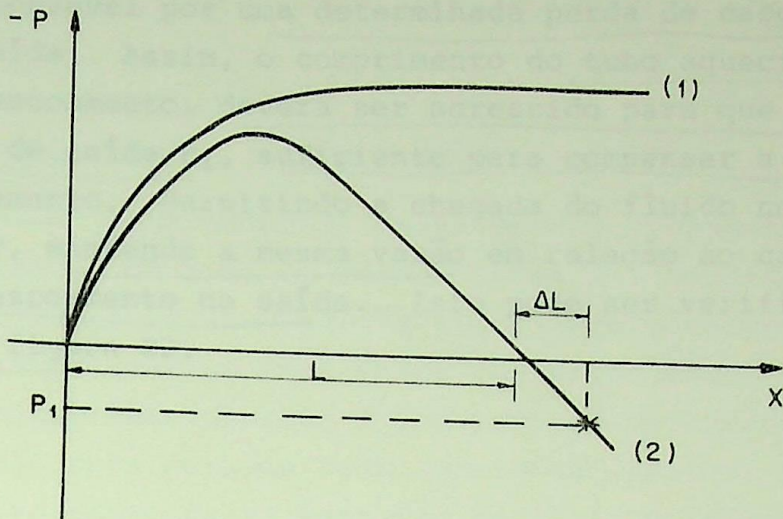


Figura B1: Comportamento da Pressão Adimensional com Relação a  $X$ .

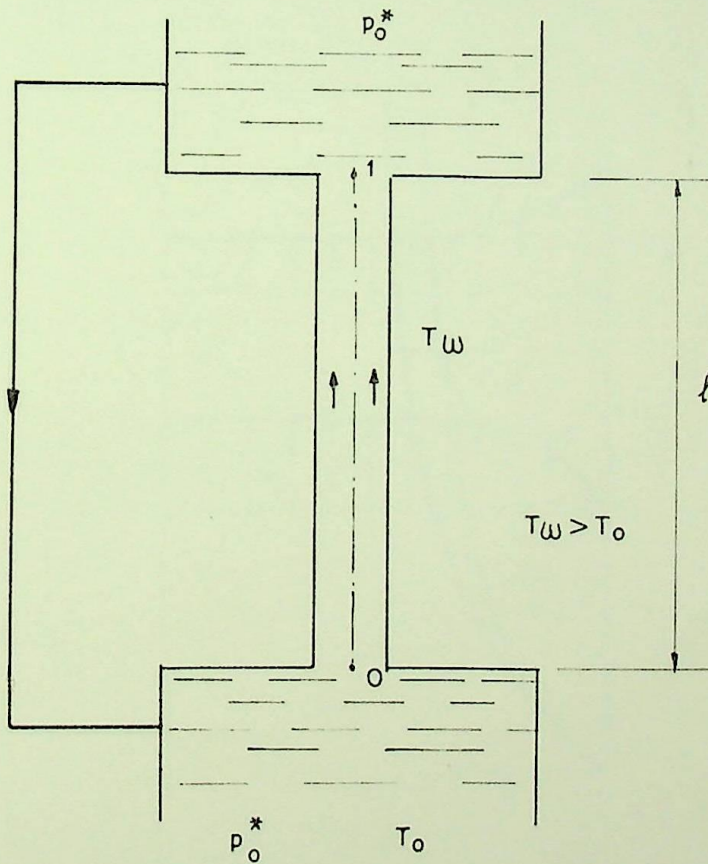


Figura B2: Exemplo de uma Situação envolvendo o Problema Estudado.

é responsável por uma determinada perda de carga no escoamento de saída. Assim, o comprimento do tubo aquecido  $L$ , que provoca o escoamento, deverá ser acrescido para que produza uma pressão de saída  $P_1$ , suficiente para compensar a perda de carga no escoamento. Permitindo a chegada do fluido no reservatório superior, mantendo a mesma vazão em relação ao caso sem restrição ao escoamento na saída. Isto pode ser verificado pela curva 2 da figura B2.

Os resultados correspondentes a situação em que o comprimento do tubo é bem pequeno comparado com seu raio, pois serão considerados como condições limites, para  $L \rightarrow 0$ . A mesma obedecidas pelas equações analíticas, determinadas com o objetivo de representar os resultados para a vazão volumétrica, para o fluxo de entalpia e para o número de Nusselt médio, obtidos numericamente.

Definindo-se algumas grandezas consideradas na seção através da figura C1, têm-se para o caso bidimensional,

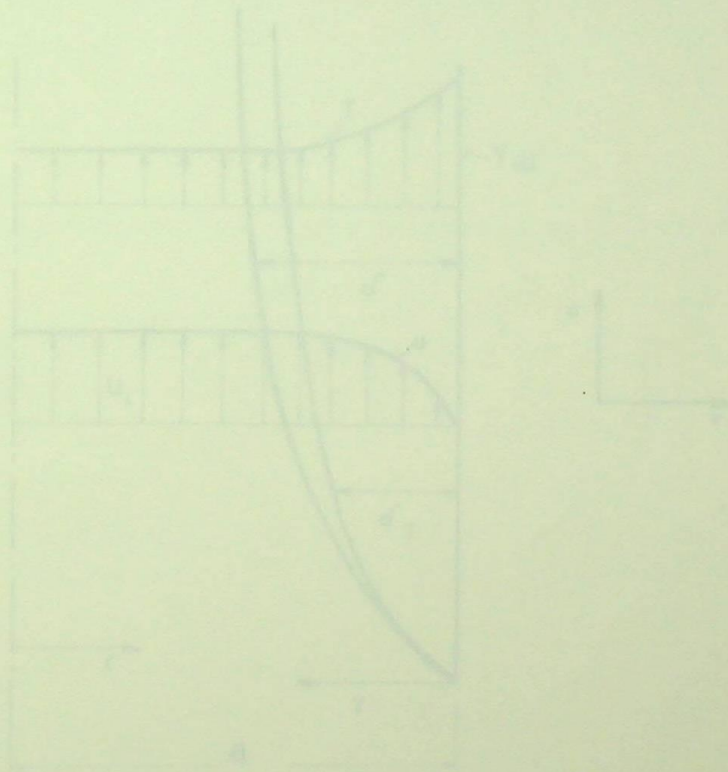


Figure C1. Geometria bidimensional para análise numérica para o caso de escoamento em tubo.

## APÊNDICE C

### I - SOLUÇÃO SEGUNDO O MÉTODO INTEGRAL

No momento, resolve-se o problema para o caso de tubo vertical através do método integral, considerando-se para isso perfis do  $2^\circ$  grau para a velocidade e temperatura. Nesta solução, interessam os resultados correspondentes a situação em que o comprimento do tubo é bem pequeno comparado com seu raio, pois serão considerados como condições limites, para  $L \Rightarrow 0$ . A serem obedecidas pelas equações analíticas, determinadas com o objetivo de representar os resultados para a vazão volumétrica, para o fluxo de entalpia e para o número de Nusselt médio, obtidos numericamente.

Definindo-se algumas grandezas consideradas na solução através da figura C1, têm-se para o caso bidimensional,

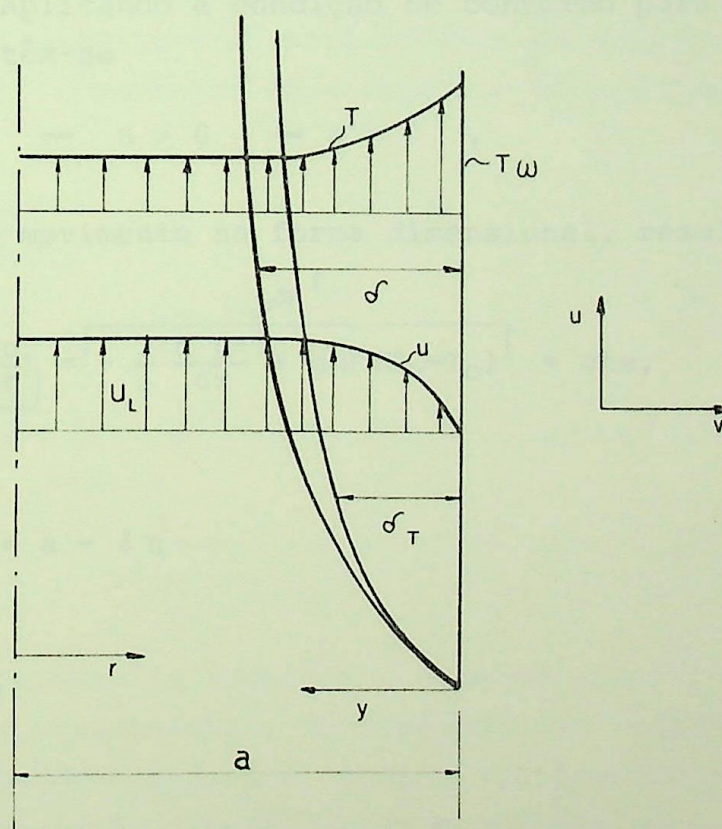


Figura C1: Principais Grandezas envolvidas na Solução pelo Método Integral.

Se  $\eta = \frac{y}{\delta}$ , as condições de contorno para o problema são:

$$\eta = 0 \left\{ \begin{array}{l} u = v = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \eta = 1 \left\{ \begin{array}{l} u = u_L \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \end{array} \right. \quad (C-1)$$

e o perfil de velocidade, em função de  $\eta$ , é o seguinte:

$$u = a' + b'\eta + c'\eta^2 \quad (C-2)$$

com  $a'$  e  $2c'$  derivada em relação a  $\eta$  sendo dadas como segue:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = b' + 2c'\eta \quad (C-3)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 2c' \quad (C-4)$$

Aplicando a condição de contorno para  $\eta = 0$  na equação (C-2), têm-se

$$\eta = 0 \implies u = 0 \implies a' = 0,$$

e da equação de movimento na forma dimensional, resulta

$$-v \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{du}{dr} \right) \right] = \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{d p^*}{dx} + g \beta (T_w - T_0) \right] = \text{cte},$$

$\nearrow$  f
 $\searrow$  -M

como  $r = a - y = a - \delta \eta$

e

$$dr = -\delta \eta,$$

encontra-se que

$$-M = - \left. \frac{du}{d\eta} \right|_{\eta=0} + \frac{a}{\delta} \left. \frac{d^2 u}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = - \frac{f \delta a}{v}$$



Substituindo (C-3) e (C-4) na equação anterior, com a condição de  $\eta = 0$ , obtêm-se

$$-M = -b' + \frac{2\delta}{a} c' \quad (C-5)$$

Aplicando a condição de contorno para  $\eta = 1$  em (C-3), resulta

$$\eta = 1 \implies \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \implies b' = -2c'$$

que substituído na equação (C-5), produz

$$c' = \frac{-M}{2(1 + \frac{a}{\delta})}$$

e

$$b' = \frac{M}{(1 + \frac{a}{\delta})}$$

Finalmente, substituindo-se os valores de  $a'$ ,  $b'$  e  $c'$  na equação (C-2), consegue-se a seguinte equação para o perfil de velocidade :

$$u = \frac{1}{2} \frac{M\delta}{(\delta+a)} \eta (2-\eta) \quad (C-6)$$

$$\text{Se } \eta = 1 \implies u = u_L = \frac{1}{2} \frac{M\delta}{(\delta+a)},$$

que é a velocidade fora da camada limite. Desse modo, substituindo em (C-6), resulta

$$\frac{u}{u_L} = \eta(2-\eta) \quad (C-7)$$

De maneira semelhante pode-se encontrar esse resultado na forma adimensional, considerando as variáveis adimensionais definidas no Apêndice A. Assim, considerando-se um perfil de velocidade em função de  $R$  e as condições seguintes :

$$R = R_L \implies \frac{\partial U}{\partial R} = 0$$

e

$$R = 1 \implies U = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial U}{\partial R} \right) \Big|_{R=1} = \frac{dP}{dX} - 1 = -F = \text{cte},$$

onde  $R = r/a$ . Operando, encontra-se que

$$U = \frac{F}{2(2-R_L)} \left[ (1-2R_L) + 2R_L R - R^2 \right] \quad (\text{C-8})$$

Com :

$$r_L = a^{-\delta} \implies R_L = 1-\delta^+$$

$$R = a^{-y} \implies R = 1-\delta^+ \eta$$

e  $\delta^+ = \frac{\delta}{a}$ . Substituindo em (C-8) encontra-se o seguinte resultado :

$$\frac{U}{U_L} = \eta(2-\eta), \quad (\text{C-9})$$

onde

$$U_L = \frac{F\delta^2}{2(1+\delta^+)} = \frac{\delta^2}{2(1+\delta^+)} \quad \left( -\frac{dP}{dX} + 1 \right)$$

é a velocidade adimensional fora da camada limite.

Tratando-se de um escoamento permanente e incompressível, a equação de continuidade pode ser determinada considerando-se a definição de velocidade média ( $u_m$ ). Resulta, portanto, aplicando as grandezas definidas anteriormente, a seguinte equação:

$$u_m = \frac{2\delta}{a} \int_0^1 \left(1 - \frac{\delta}{a} \eta\right) u \, d\eta + \left(1 - \frac{\delta}{a}\right)^2 u_L \quad (\text{C-10})$$

Substituindo-se a equação (C-7) em (C-10) e operando, resulta a seguinte expressão:

$$\frac{u_m}{u_L} = \frac{1}{6} \left[ 2 + \left(2 - \frac{\delta}{a}\right)^2 \right] \quad (\text{C-11})$$

Em função das variáveis adimensionais resulta simplesmente

$$\frac{U_m}{U_L} = \frac{1}{6} \left[ 2 + \left(2 - \frac{\delta}{a}\right)^2 \right] \quad (\text{C-12})$$

O problema é resolvido através das equações de movimento e energia na forma integral. Estas equações são escritas nessa forma, integrando-se as equações (16) e (17) em relação a  $R$ , de  $R_L$  à 1, mantendo  $X$  fixo, empregando a equação de continuidade dada pela equação (15) juntamente com a condição de contorno para  $R = R_L$ , resultando inicialmente a equação de movimento:

$$\frac{d}{dX} U_L^2 \int_{R_L}^1 R \frac{U}{U_L} \left( \frac{U}{U_L} - 1 \right) dR + \frac{\partial U_L}{\partial X} \int_{R_L}^1 R \frac{U}{U_L} dR = - \frac{dP}{dX} \int_{R_L}^1 R dR + \int_{R_L}^1 R \rho dR + \left. \frac{\partial U}{\partial R} \right|_{R=1} \quad (C-13)$$

Com:

$$R = R_L \implies \eta = 1$$

e

$$R = 1 \implies \eta = 0$$

Considerando-se um perfil de temperatura em função de  $\eta_T$ ,

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_w - T_0} = a'' + b'' \eta_T + c'' \eta_T^2$$

onde  $\eta_T = Y/\delta_T$  e, as condições de contorno seguintes:

$$\eta_T = 0 \implies \theta = 1$$

e

$$\eta_T = 1 \implies \begin{cases} \theta = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta_T} = 0 \end{cases}$$

Resulta após uma série de operações, semelhante ao caso do perfil de velocidade, a equação para o perfil de temperatura,

$$\theta = (1 - \eta_T)^2, \quad (C-14)$$

e se  $\zeta = \frac{\delta_T}{\delta}$ , substituindo em (C-14), resulta

$$\theta = \left(1 - \frac{\eta}{\zeta}\right)^2 \quad (C-15)$$

Determina-se agora cada termo da equação (C-13), colocando-os inicialmente em função de  $\eta$  e  $\delta^+$  utilizando as expressões conseguidas anteriormente. Desse modo, resultam

$$\int_{R_L}^1 R \frac{U}{U_L} \left( \frac{U}{U_L} - 1 \right) dR = \delta^+ \left( -\frac{2}{15} + \frac{\delta^+}{20} \right)$$

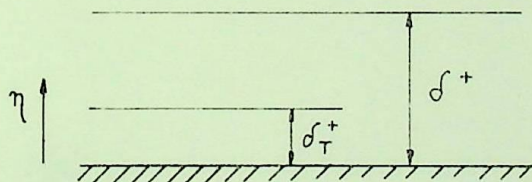
$$\int_{R_L}^1 R \frac{U}{U_L} dR = \delta^+ \left( -\frac{2}{3} - \frac{5}{14} \delta^+ \right)$$

$$\int_{R_L}^1 R dR = \frac{\delta^+ (2 - \delta^+)}{2}$$

e

$$\left. \frac{\partial U}{\partial R} \right|_{R=1} = \frac{-2U_L}{\delta^+}$$

Entretanto, no problema em questão interessam as situações em que  $\zeta \leq 1$ , que incluem a faixa de número de Prandtl analisada na solução numérica. Neste caso pode-se fazer as seguintes considerações:



$$R_T = 1 - \zeta \delta^+$$

$$0 \leq R \leq R_T \implies \theta = 0 \quad \text{e} \quad R_T \leq R \leq 1 \implies \theta = \left(1 - \frac{\eta}{\zeta}\right)^2$$

$$R = R_T \implies \eta = \frac{1 - R_T}{\delta^+} = \zeta$$

e

$$\int_{R_L}^1 R \theta dR = \int_{R_L}^{R_T} R \overset{0}{\theta_0} dR + \int_{R_T}^1 R \theta dR = \int_{R_T}^1 R \theta dR,$$

com isso resolve-se o termo  $\int_{R_L}^1 R \theta dR$  da equação (C-13),

$$\int_{R_L}^1 R \theta dR = \frac{\delta_T^+}{12} (4 - \delta_T^+)$$

Substituindo o resultado para cada termo na equação (C-13), resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \left[ \left( -\frac{2}{15} + \frac{\delta^+}{20} \right) \delta^+ U_L^2 \right] + \left( \frac{2}{3} - \frac{5}{12} \delta^+ \right) \delta^+ U_L \frac{dU_L}{dX} = \frac{-\delta^+(2-\delta^+)}{2} \frac{dP}{dX} + \\ + \frac{\delta_T^+}{12} (4 - \delta_T^+) - \frac{2U_L}{\delta^+} \end{aligned} \quad (C-16)$$

A forma integral da equação de energia é determinada integrando-se a equação (17), dada na formulação, de  $R_T$  a 1, mantendo X constante. Resultando

$$\frac{d}{dX} \int_{R_T}^1 \theta U R dR = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=1} \quad (C-17)$$

De maneira semelhante ao caso da equação (C-13), resolve-se cada termo da equação (C-17). Assim,

$$\int_{R_T}^1 R U \theta dR = \frac{\delta^+ U_L \zeta^2}{60} (10 - 2\zeta - 4\delta^+ \zeta + \delta^+ \zeta^2)$$

e

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=1} = \frac{2}{\zeta \delta^+}$$

Substituindo em (C-17), resulta

$$\frac{d}{dX} \zeta^2 \delta^+ U_L \left[ (10 - 2\zeta) - 4\delta^+ \zeta + \delta^+ \zeta^2 \right] = \frac{120}{Pr \zeta \delta^+} \quad (C-18)$$

Neste ponto modifica<sup>M</sup>-se as equações (C-16) e (C-18) para a situação de interesse:  $X \rightarrow 0 \Rightarrow \delta \rightarrow 0$ . Nesta condição  $\delta_T \simeq \delta$  e  $\zeta = 1$ , que se enquadra na faixa de  $\zeta$  que vem sendo considerada aqui. Portanto, modificando<sup>M</sup>-se as equações integrais, em função de  $\delta^+$  e  $\eta$ , desprezando-se o efeito de curvatura do tubo, resultam as seguintes equações:

movimento:

$$-8 \frac{d}{dX} (\delta^+ U_L^2) + 40 \delta^+ U_L \frac{dU_L}{dX} = -60\delta^+ \frac{dP}{dX} + 20\delta^+ - \frac{120U_L}{\delta^+} \quad (C-19)$$

e energia:

$$8 \frac{d}{dX} (\delta^+ U_L) = \frac{120}{Pr \delta^+} \quad (C-20)$$

Permanecendo a equação (C-12), para a continuidade, sem modificações.

Como no caso em que  $X \rightarrow 0$  o comportamento é semelhante ao caso "placa plana", pode-se empregar o seguinte:

$$\delta^+ = C_1 X^m \quad (C-21)$$

e

$$U_L = C_2 X^n \quad (C-22)$$

Substituindo (C-21) e (C-22) nas equações (C-19) e (C-20), e manipulando, obtêm-se

$$- \frac{dP}{dX} = C_2^2 X^{2n-1} \frac{(6n-2m)}{15} + 2 \frac{C_2}{C_1^2} X^{n-2m} - \frac{1}{3} \quad (C-23)$$

e

$$C_1^2 C_2 X^{2m+n-1} = \frac{15}{Pr(m+n)} \quad (C-24)$$

A equação (C-24) determina que,

$$2m+n-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 1 - 2m$$

Esta condição é substituída na equação (C-23), resultando

$$- \frac{dP}{dX} = 2 X^{1-4m} \left[ \frac{(3-7m)}{15} C_2^2 + \frac{C_2}{C_1^2} \right] - \frac{1}{3} \quad (C-25)$$

e pela equação (C-24),

$$C_1^2 \cdot C_2 = \frac{15}{Pr(m+n)} \quad (C-26)$$

Neste caso, para  $X \rightarrow 0$   $\delta^+ = C_1 X^m \Rightarrow C_1 X^{1/4}$ , pois

$1-4m = 0 \quad \therefore \quad m = \frac{1}{4}$  e pela outra condição  $n = \frac{1}{2}$ . Substituindo  $n$  e  $m$  em (C-25) e (C-26), resultam

$$-\frac{dP}{dX} = 2 \left( \frac{C_2^2}{12} + \frac{C_2}{C_1^2} \right) - \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad C_1^2 \cdot C_2 = \frac{20}{Pr}$$

Considerando-se ainda que  $P(X=0) = P(X=L) = 0 \rightarrow \frac{dP}{dX} = 0$ , opera-se essas duas equações determinando  $C_1$  e  $C_2$ ,

$$C_1 = 3,310 \, Pr^{-1/2} \quad (5/3 + Pr)^{1/4} \quad (C-27)$$

e

$$C_2 = 1,826 \quad (5/3 + Pr)^{-1/2} \quad (C-28)$$

Substituindo (C-27) e (C-28) em (C-21) e (C-22), resultam

$$\delta^+ = C_1 \, Pr^{1/4} \, (X^+)^{1/4} = 3,310 \, Pr^{-1/4} \, (5/3 + Pr)^{1/4} \, (X^+)^{1/4} \quad (C-29)$$

e

$$U_L = C_2 \, Pr^{1/2} \, (X^+)^{1/2} = 1,826 \, Pr^{1/2} \, (5/3 + Pr)^{-1/2} \, (X^+)^{1/2}, \quad (C-30)$$

onde 
$$X^+ = \frac{x/r_w}{Gr \cdot Pr},$$

O número de Nusselt local ( $N_{U_O}$ ) é calculado empregando-se a definição e as expressões anteriores, resultando

$$N_{U_O} = \frac{h_O \cdot a}{K} = \frac{2}{\delta^+} \quad (C-31)$$

onde  $h_O$  é o coeficiente de convecção local. Utilizando a definição do número de Nusselt médio ( $\overline{N_{U_O}}$ ) e o resultado anterior, obtêm-se a seguinte expressão para  $\overline{N_{U_O}}$  :

$$\overline{N_{U_O}} = 0,806 \frac{Pr^{1/4} \, (X^+)^{-1/4}}{(5/3 + Pr)^{1/4}} \quad (C-32)$$

II - EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA  $F$ ,  $H'$  e  $\overline{NU}_O$ 

Inicialmente, as equações propostas para representar as curvas de  $F$ ,  $H'$  e  $\overline{NU}_O$  obedecem as seguintes condições limites: caso em que  $L \rightarrow \infty$ , correspondendo ao escoamento desenvolvido dado no Apêndice B, e a situação quando  $L \rightarrow 0$ , que corresponde à estimativa obtida anteriormente segundo o método integral, para  $X \rightarrow 0$ . Sendo que os resultados numéricos, numa faixa intermediária das curvas, são recuperados adotando-se fatores de correção,  $\alpha$  e  $\phi$ , em função de  $Pr$  e  $L$ , que devem ser considerados nas equações analíticas. As formas desses fatores de correção foram aqui determinadas através do método dos mínimos quadrados, utilizando os resultados obtidos numericamente, observando algumas restrições de tal maneira que não invalidasse as condições iniciais obedecidas pelas equações, quando se fizesse os limites para  $L \rightarrow 0$  e  $L \rightarrow \infty$ .

Desse modo, a forma inicial da equação apropriada para representar cada grandeza citada, é a seguinte:

Vazão volumétrica,

$$F = \frac{1}{8} \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{8 \psi(Pr)}{\alpha (Pr, L)} (L^+)^{1/2} \right] \right\}; \quad (C-33)$$

Fluxo de entalpia na saída,

$$H' = \frac{1}{8} \left\{ 1 - \exp \left[ -16 \frac{\lambda (Pr)}{\phi (Pr, L)} (L^+)^{3/4} \right] \right\} \quad (C-34)$$

e

Número de Nusselt médio,

$$\overline{NU}_O = \frac{H'}{2L^+} = \frac{1}{16L^+} \left\{ 1 - \exp \left[ -16 \frac{\lambda (Pr)}{\phi (Pr, L)} (L)^{3/4} \right] \right\} \quad (C-35)$$

onde:

$$\lambda(Pr) = 0,806 \frac{Pr^{1/4}}{(5/3 + Pr)^{1/4}}$$

$$e \quad \psi(Pr) = 1,826 \frac{Pr^{1/2}}{(5/3 + Pr)^{1/2}}$$

Sendo que as equações de  $\alpha(\text{Pr}, L)$  e  $\phi(\text{Pr}, L)$  devem ter uma forma tal, que satisfaçam as seguintes verificações:

Quando  $L \rightarrow \infty$ :

$$\text{para que } \lim_{L \rightarrow \infty} F = \lim_{L \rightarrow \infty} H' = \frac{1}{8} \text{ e } \lim_{L \rightarrow \infty} \bar{N}U_0 = \frac{1}{16L^+}$$

$\alpha(\text{Pr}, L)$  e  $\phi(\text{Pr}, L)$  devem tender a um valor finito

Quando  $L \rightarrow 0$ :

resulta truncando no segundo termo da expansão em série,

$$F = \psi(\text{Pr}) L^{+1/2}$$

$$H' = 2 \lambda(\text{Pr}) L^{+3/4}$$

$$\text{e } \bar{N}U_0 = \lambda(\text{Pr}) L^{+1/4}$$

e para que isto ocorra  $\alpha(\text{Pr}, L)$  e  $\phi(\text{Pr}, L)$  devem tender à unidade ou a um valor que corrija os coeficientes das funções  $\psi(\text{Pr})$  e  $\lambda(\text{Pr})$ , em relação aos resultados obtidos numericamente.

Empregando-se esse raciocínio chegou-se às seguintes equações finais:

$$F = \frac{1}{8} \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{8}{(11,0025L + 1,71332 \text{ Pr})^{0,122}} \cdot \left( \frac{L}{\frac{5}{3} + \text{Pr}} \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (\text{C-36})$$

$$H' = \frac{1}{8} \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{12,896}{(164,445L + 1,4777 \text{ Pr})^{0,106}} \cdot \left( \frac{L^3}{\frac{5}{3} + \text{Pr}} \right)^{1/4} \right] \right\} \quad (\text{C-37})$$

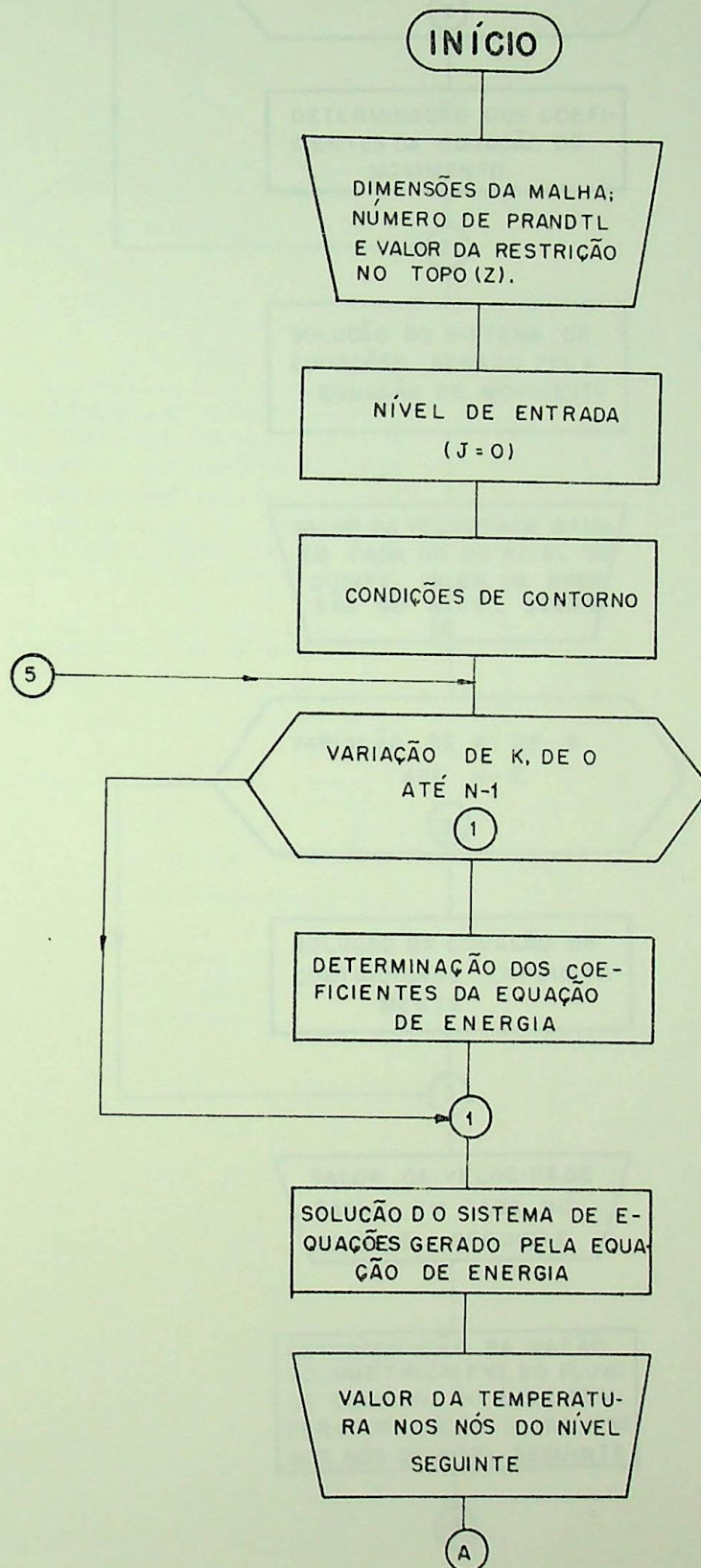
$$\text{e } \bar{N}U_0 = \frac{1}{16L^+} \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{12,896 \frac{\text{Pr}^{0,144}}{(5/3 + \text{Pr})^{1/4}} (L^+)^{3/4}}{(1,4777 + 164,445 L^+)^{0,106}} \right] \right\} \quad (\text{C-38})$$

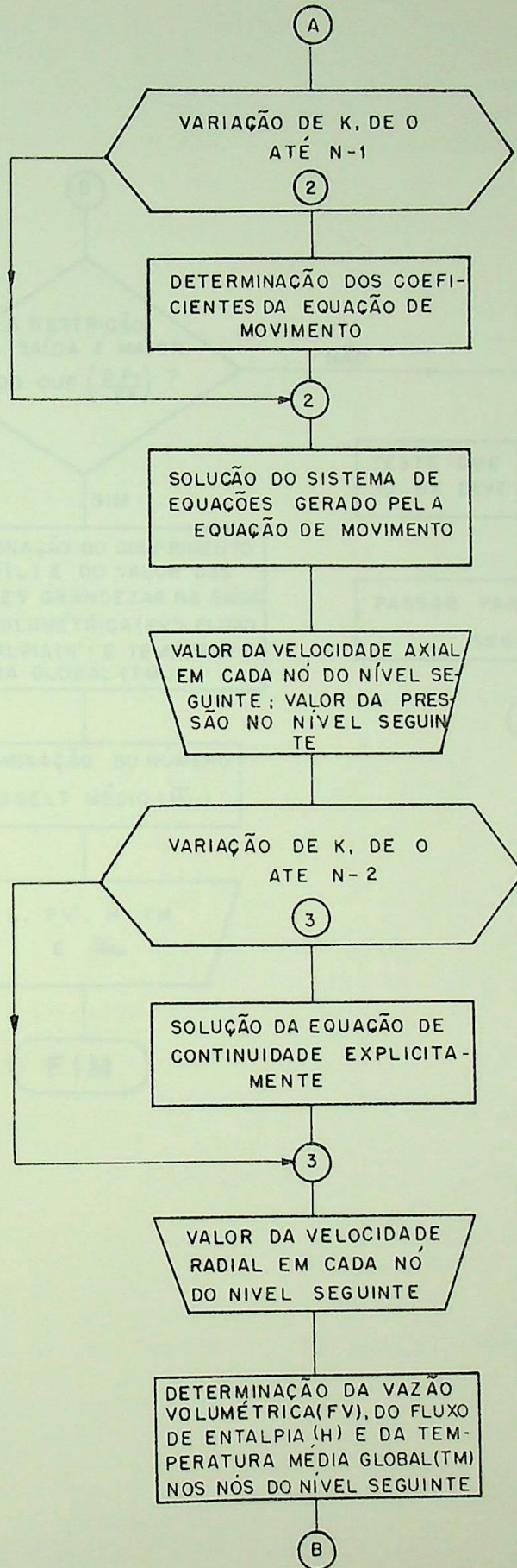
Por outro lado, Elenbaas [1] propôs a seguinte expressão para representar o  $\bar{N}U_0$  nessa situação:

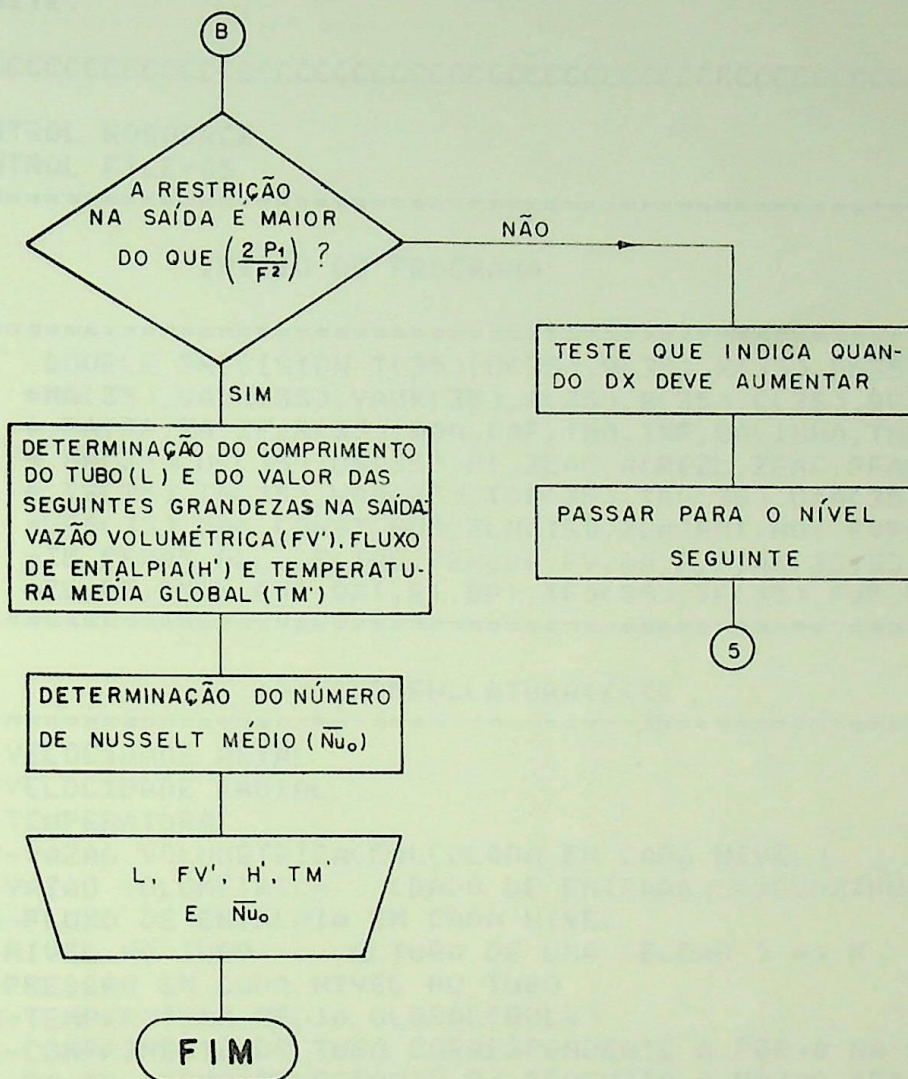
$$\bar{N}U_0 = \frac{1}{16L^+} \left\{ 1 - \exp \left[ - (20L^+)^{3/4} \right] \right\} \quad (\text{C-39})$$

## APÊNDICE D

## I - FLUXOGRAMA







```

1  CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
2  C
3  C   PROGRAMA PARA DETERMINAR O CAMPO DE VELOCIDADE E DE C
4  C   TEMPERATURA NO ESCOAMENTO DE CONVECCAO NATURAL ATRA-C
5  C   VES DE UM TUBO VERTICAL ,COM A CONDICAO DE TEMPERATU-C
6  C   RA NA PAREDE CONSTANTE.EMPREGANDO O METODO DE DIFE- C
7  C   RENCAS FINITAS NA SOLUCAO DAS EQUACOES DE CAMADA LI- C
8  C   MITE.
9  C
10 CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
11 C
12 *CONTROL NOSOURCE
13 *CONTROL FILE=05
14 C=====
15 C
16 C           INICIO DO PROGRAMA
17 C
18 C=====
19 C           DOUBLE PRECISION T(35),U(35),V(35),X(35),D(35),QA
20 C           *MAC(35),UAUX(35),VAUX(35),AC(35),BC(35),C(35),BETAK(35)
21 C           *,PA,PF,ZA,ZF,R(35),QAA,QAF,TMA,TMF,QA,INHA,TMLINHA
22 C           *,UA(35),UF(35),US(35),P1,ZLAC,ACREZL,ZFAC,PFAC,DP
23 C           *,TS(35),TA(35),US0(35),TS0(35),TA0(35),UA0(35),FVF,
24 C           *UF0(35),QAF,CONST,HUS,ZLHAISO,ZLACRM1,NU1,FVFAC,Y
25 C           *TM,PPMAX,DLL,DELTAQ,PERC0Q,FV,QA,Z,P,ANK(35,35),FVA,
26 C           *ZL,DZ,PMAX,FV1,QA1,R1,DP1,TF0(35),TF(35),FVP,FV0
27 C=====
28 C
29 C           >>>>NOMENCLATURA<<<<<
30 C=====
31 C U-VELOCIDADE AXIAL
32 C V-VELOCIDADE RADIAL
33 C T-TEMPERATURA
34 C FV-VAZAO VOLUMETRICA(CALCULADA EM CADA NIVEL)
35 C F-VAZAO VOLUMETRICA (DADO DE ENTRADA) =>CONSTANTE(F)C
36 C QA-FLUXO DE ENTALPIA EM CADA NIVEL
37 C Z-NIVEL NO TUBO ( ALTURA DE UNA SECCAO ) => X
38 C P-PRESSAO EM CADA NIVEL NO TUBO
39 C TM-TEMPERATURA MEDIA GLOBAL(BULK)
40 C ZL-COMPRIENTO DE TUBO CORRESPONDENTE A PER=0 NA SAI- C
41 C   DA DO MESMO,NECESSARIO P/ PRODUZIR A VAZAO "F"=>XL C
42 C DZ-INCREMENTO INICIAL NA DIRECAO AXIAL DO TUBO(DISTAN-C
43 C   CIA ENTRE DOIS NIVEIS CONSECUTIVOS: =>(DX) C
44 C DR-INCREMENTO NA DIRECAO RADIAL(COMEÇANDO NO CENTRO C
45 C   DO TUBO)
46 C AR-INCREMENTO NA DIRECAO RADIAL DO CENTRO ATE A O PON-C
47 C   TO KP. (DR1=AR=0.05 => DADO DE ENTRADA).
48 C PR-NUMERO DE PRANDTL
49 C N- NUMERO DE INTERVALOS EM QUE O RAIO ESTA DIVIDIDO C
50 C ACR-FATOR DE ACRESCIMO DO INCREMENTO AXIAL,NA SEGUIN-C
51 C   TE FORMA: DZ=(1+ACR)*DZ
52 C PMAX-PRESSAO MAXIMA NEGATIVA
53 C PER-VALOR DA RESTRICAO AO ESCOAMENTO NA SAIDA.: =>(Z) C
54 C   FORMA: PER=(2.*F**2)/P1
55 C ZLAC- COMPRIMENTO DE TUBO P/ UNA PRESSAO POSITIVA NA C
56 C   SAIDA.(PARA PER>0)
57 C ACREZL-DIFERENCA ENTRE ZLAC E ZL

```

```

58 C KP-VALOR DE "K" ONDE OCORRE A MUDANCA DA DIMENSAO DA C
59 C MALHA NA DIRECAO RADIAL. C
60 C QALINHA(QA")-FLUXO DE ENTALPIA NA SECCAO DE SAIDA;=>H'C
61 C TMLINHA(TM")-TEMPERATURA MEDIA GLOBAL NA SECCAO DE SA C
62 C IDA DO TUBO;(BULK).;=> TM' C
63 C ZRT-VALOR DE REFERENCIA QUE INDICA QUANDO DZ DEVE AU- C
64 C MENTAR .( ZRT=CONST => DADO DE ENTRADA) C
65 C-----C
66 C OS INDICES "A" E "F" INDICAM VALORES DE P,Z,QA,TM,U, C
67 C T USADOS NA INTERPOLACAO LINEAR P/ SE CONSEGUIR RESUL-C
68 C TADOS NA SAIDA DO TUBO;ONDE "A" SAO OS VALORES NO NI- C
69 C VEL ANTES DO DE SAIDA E "F" SAO OS VALORES NO NIVEL C
70 C SEGUINTE AO DE SAIDA. C
71 C-----C
72 C DEVE-SE SEMPRE DIMENSIONAR AS VARIAVEIS UTILIZADAS C
73 C AQUI, JUNTAMENTE COM VARIAVEL "CN" DA SUBROTINA NIVHO,C
74 C COM O VALOR DO NUMERO DE INTERVALOS EM QUE O RAIO C
75 C DO TUBO FOI DIVIDIDO MAIS UM.O VALOR DE KP DEPENDE C
76 C DO VALOR ESCOLHIDO PARA N. C
77 C DESSE NODO, TEN-SE OS SEGUINTE VALORES DE "KP" C
78 C COMPATIVEIS COM O DE "N ",USADOS NO PROGRAMA: C
79 C PARA: C
80 C KP=8 => N=33 C
81 C KP=9 => N=32 C
82 C KP=10=> N=31 C
83 C KP=11=> N=30 C
84 C KP=12=> N=29 C
85 C-----C
86 C NO PROGRAMA ADICIONOU-SE 1 NO VALOR DOS INDICES "K" E C
87 C "J" .ASSIM, K=1 E K=N+1 SIGNIFICAM, RESPECTIVAMENTE, O C
88 C CENTRO E A PAREDE DO TUBO, ENQUANTO QUE J=1 INDICA O C
89 C NIVEL DA BASE DO TUBO. C
90 C-----C
91 C OBS: PMAX NAO E REALNENTE O VALOR DA PRESSAO MAXIMA, C
92 C INDICA APENAS A MAIOR PRESSAO OCORRIDA NUMA DAS LINHAS C
93 C TRANSVERSAIS DA MALHA. C
94 C C
95 C C
96 C=====C
97 C C
98 C ENTRADA DE DADOS C
99 C C
100 C=====C
101 C ACCEPT N,FR,DZ,AR,F,ACR,PER
102 C ACCEPT KP,CONST
103 C DISPLAY "DZ INICIAL=",DZ
104 C J=1
105 C KC=1
106 C DO 1 K=1,N
107 C U(K)=F
108 C V(K)=0.
109 C T(K)=0.
110 C 1 CONTINUE
111 C P=0.
112 C Z=0.
113 C IKP=KP+4
114 C ZIKP=KP/2.

```

```

115      IIKP=AINT(ZIKP)
116      IF((ZIKP-IIKP).EQ.0.) IKP=KP+2
117      PMAX=0.
118      KT=0
119      JC=2
120      13 J=J+1
121          KC=KC+1
122          DR=AR
123          IF(PMAX-ABS(P))70,70,127
124      70 PMAX=ABS(P)
125      127 V(1)=0.
126          Z=Z+DZ
127          NS=N+1
128          U(NS)=0.
129          V(NS)=0.
130          T(NS)=1.
131          REL=.5
132          C(1)=-4./((PR*DR**2.))
133          B(1)=U(1)/DZ+(4./((PR*DR**2.)))
134          D(1)=U(1)*T(1)/DZ
135          A(1)=0.
136          R(1)=0.
137          DO 2 K=2,N
138              IF(K-KP) 80,81,81
139      81 DR=.025
140          R(KP)=(KP-1)*AR
141          R1=(K-KP)*DR
142          R(K)=R(KP)+R1
143          GO TO 88
144      80 R(K)=(K-1)*DR
145      88 A(K)=-V(K)/(2.*DR)-(1./((PR*DR**2.)))+(1./
146          *(2.*PR*R(K)*DR))
147          B(K)=U(K)/DZ+(2./((PR*DR**2.)))
148          C(K)=V(K)/(2.*DR)-(1./((PR*DR**2.)))-(1./
149          *(2.*PR*R(K)*DR))
150          D(K)=U(K)*T(K)/DZ
151      2 CONTINUE
152          B(KP)=B(KP)+(A(KP)*2.*(1.-REL))
153          C(KP)=C(KP)+(A(KP)*((REL-1.)/(REL+1.)))
154          A(KP)=A(KP)*(2.*REL**2.*(1./((1.+REL))))
155          D(N)=D(N)-C(N)
156          R(NS)=1.
157          K=1
158          BETA(K)=B(K)
159          GAMA(K)=D(K)/BETA(K)
160          DO 11 K=2,N
161              BETA(K)=B(K)-(A(K)*C(K-1))/BETA(K-1)
162      11 GAMA(K)=(D(K)-A(K)*GAMA(K-1))/BETA(K)
163          K=N
164          T(K)=GAMA(K)
165          NI=N-1
166          DO 12 I=1,NI
167              K=N-I
168      12 T(K)=GAMA(K)-(C(K)*T(K+1))/BETA(K)
169      C IF(KC-5)65,66,66
170      C 66 WRITE(6,100)(R(K),K=1,KP,2),(R(K),K=IKP,N+1,4)
171      C WRITE(6,200)

```

```

172 C      WRITE(6,300)Z,(T(K),K=1,KP,2),(T(K),K=IKP,N+1,4)
173 65 DR=AR
174 C(1)=-4./DR**2.
175 B(1)=U(1)/DZ+4./DR**2.
176 D(1)=(P+U(1)**2.)/DZ+T(1)
177 A(1)=0.
178 DO 14 K=2,N
179 IF(K-KP) 82,83,83
180 83 DR=.025
181 82 A(K)=-((V(K)/(2.*DR))-(1./DR**2.))+1./((2.*DR+R(K))
182 B(K)=U(K)/DZ+(2./DR**2.)
183 C(K)=V(K)/(2.*DR)-(1./DR**2.)-1./((2.*R(K)*DR)
184 D(K)=(P+U(K)**2.)/DZ+T(K)
185 14 CONTINUE
186 B(KP)=B(KP)+(A(KP)*2.*(1.-REL))
187 C(KP)=C(KP)+(A(KP)*((REL-1.)/(REL+1.)))
188 A(KP)=A(KP)*2.*REL**2.*(1./((1.+REL))
189 Y=0.
190 DO 22 K=2,N
191 22 Y=Y+(-V(K)/R(K)+U(K)/DZ)
192 D(N+1)=Y+U(1)/((2.*DZ)
193 AM(1,1)=B(1)
194 AM(1,2)=C(1)
195 DO 15 JM=3,N
196 15 AM(1,JM)=0.
197 DO 16 KM=1,N
198 16 AM(KM,N+1)=1./DZ
199 AM(N+1,N+1)=0.
200 DO 17 KM=2,N-1
201 AM(KM,KM)=B(KM)
202 AM(KM,KM-1)=A(KM)
203 AM(KM,KM+1)=C(KM)
204 IF(KM-2)53,53,54
205 54 DO 18 JM=1,KM-2
206 18 AM(KM,JM)=0.
207 53 IF(KM+1-N)55,17,17
208 55 DO 19 JM=KM+2,N
209 19 AM(KM,JM)=0.
210 17 CONTINUE
211 AM(N,N)=B(N)
212 AM(N,N-1)=A(N)
213 AM(N+1,1)=1./((2.*DZ)
214 DO 20 JN=2,N
215 20 AM(N+1,JN)=1./DZ
216 CALL MIVNC(AM,N+1)
217 DO 21 KM=1,N+1
218 X(KM)=0.
219 DO 21 JN=1,N+1
220 21 X(KM)=X(KM)+AM(KM,JN)*D(JN)
221 DO 23 KM=1,N
222 23 UAUX(KM)=X(KM)
223 UAUX(N+1)=0.
224 P=X(N+1)
225 C      IF(KC-5)67,68,68
226 C      68 WRITE(6,210)
227 C      WRITE(6,300)Z,(UAUX(K),K=1,KP,2),(UAUX(K),K=IKP,
228 C      *N+1,4)

```

```

229      67 DR=AR
230      VAUX(2)=DR*(UAUX(2)-UK(2))+UAUX(1)-UK(1))/DZ
231      DO 24 K=2, KP-1
232      VAUX(K+1)=DR*((-V(K)/R(K))+ (VAUX(K)/DR)-(UAUX(K+1)
233      *-UK(K+1)+UAUX(K)-UK(K))/ (2.*DZ))
234      24 CONTINUE
235      DO 86 K=KP, N-1
236      DR=.025
237      86 VAUX(K+1)=DR*((-V(K)/R(K))+ (VAUX(K)/DR)-(UAUX(K+1)
238      *-UK(K+1)+UAUX(K)-UK(K))/ (2.*DZ))
239      VAUX(1)=0.
240      VAUX(N+1)=0.
241      C      IF(KC-5)69,71,71
242      C      71 WRITE(6,220)
243      C      WRITE(6,300) Z,(VAUX(K),K=1,KP,2),(VAUX(K),K=IKP,
244      C      *N+1,4)
245      69 DO 25 K=1, N+1
246      UK(K)=UAUX(K)
247      25 V(K)=VAUX(K)
248      DR=AR
249      QA=0.
250      FV=0.
251      DO 26 K=2, KP-1
252      FV=FV+UK(K)*R(K)*DR
253      26 QA=QA+(UK(K)*T(K)*R(K))*DR
254      FV=FV+(DR*UK(KP)*R(KP))/2.
255      QA=QA+(DR*UK(KP)*R(KP)*T(KP))/2.
256      QA=2.*QA
257      FV=2.*FV
258      FV1=0.
259      QA1=0.
260      DO 85 K=KP+1, N
261      FV1=FV1+UK(K)*R(K)
262      85 QA1=QA1+(UK(K)*T(K)*R(K))
263      QA1=QA1*(1.-R(KP))/(N+1-KP)
264      FV1=FV1*(1.-R(KP))/(N+1-KP)
265      QA1=QA1+(UK(KP)*T(KP)*R(KP))*(1.-R(KP))/(2.*
266      *(N+1-KP))
267      FV1=FV1+(UK(KP)*R(KP))*(1.-R(KP))/(2.*(N+1-KP))
268      FV1=2.*FV1
269      QA1=2.*QA1
270      QA=QA1+QA
271      FV=FV1+FV
272      TM=QA/FV
273      C      IF(KC-5)72,73,73
274      C      73 WRITE(6,230)
275      C      WRITE(6,400) J, Z, P, FV, QA
276      C      WRITE(6,401) FV
277      KC=0
278      72 DP=P
279      IF(DP-0.)58,59,59
280      59 IF(KT-1)186,655,186
281      655 P1=PER*(F**2)/2.
282      WRITE(6,503) J, Z, P
283      DP1=P1
284      IF(DP-DP1) 84,84,185
285      185 ZFAC=Z

```

```

286 DISPLAY 'PRESSAO NA SAIDA MAIOR QUE ZERO'
287 QAFAC=QA
288 FVFAC=FY
289 PFAC=P
290 ZLAC=ZL+(P1-0.)*(ZFAC-ZL)/(PFAC-0.)
291 ZLACRM1=ZLAC/PR
292 ACREZL=ZLAC-ZL
293 DLL=(ACREZL/ZL)*100.
294 DO 605 K=1,N+1
295 TF(K)=T(K)
296 UF(K)=U(K)
297 TS(K)=TS0(K)+(TF(K)-TS0(K))*(ZLAC-ZL)/(ZFAC-ZL)
298 605 US(K)=US0(K)+(UF(K)-US0(K))*(ZLAC-ZL)/(ZFAC-ZL)
299 QAP=(ZLAC-ZL)*(QAFAC-QALINHA)/(ZFAC-ZL)+QALINHA
300 DELTAQ=QAP-QALINHA
301 PERCDQ=(DELTAQ/QALINHA)*100.
302 FVP=(ZLAC-ZA)*(FVFAC-FVA)/(ZFAC-ZA)+FVA
303 NU1=QAP/(2.*ZLACRM1)
304 DISPLAY "
305 * PERFIL DE VELOCIDADE E DE TEMPERATURA"
306 DISPLAY "
307 * NA SAIDA DO TUBO COM P1>0."
308 WRITE(6,100)(R(K),K=1,KP,2),(R(K),K=IKP,N+1,4)
309 WRITE(6,210)
310 WRITE(6,300) ZLAC,(US(K),K=1,KP,2),(US(K),K=IKP
311 *,N+1,4)
312 WRITE(6,200)
313 WRITE(6,301) ZLAC,(TS(K),K=1,KP,2),(TS(K),K=IKP
314 *,N+1,4)
315 WRITE(6,501) ZLAC,ACREZL,QAP,P1,NU1,FVP,DLL,DELTAQ
316 *,PERCDQ
317 GO TO 27
318 84 IF(KT-1)186,58,186
319 186 ZF=Z
320 PF=P
321 KT=1
322 FVF=FY
323 QAF=QA
324 TME=TM
325 ZL=ZA-PA*(ZF-ZA)/(PF-PA)
326 QALINHA=(ZL-ZA)*(QAF-QAA)/(ZF-ZA)+QAA
327 FV0=(ZL-ZA)*(FVF-FVA)/(ZF-ZA)+FVA
328 ZLMAIS0=ZL/PR
329 NUS=QALINHA/(2.*ZLMAIS0)
330 TMLINHA=(ZL-ZA)*(TME-TMA)/(ZF-ZA)+TMA
331 DO 302 K=1,N+1
332 UF0(K)=U(K)
333 TF0(K)=T(K)
334 US0(K)=UA0(K)+(UF0(K)-UA0(K))*(ZL-ZA)/(ZF-ZA)
335 302 TS0(K)=TA0(K)+(TF0(K)-TA0(K))*(ZL-ZA)/(ZF-ZA)
336 PPMAX=PMAX
337 DISPLAY 'PRESSAO NA SAIDA IGUAL A ZERO'
338 PMAX=-PMAX
339 WRITE(6,500)PR,DR,DZ,F,ACR,PA,ZA,PF,ZF,ZL,TMLINHA,
340 *QALINHA,PMAX,J,FV0,PER,NUS
341 DISPLAY "
342 *PERFIL DE VELOCIDADE E DE TEMPERATURA"

```

```

343         DISPLAY          "
344     *           NA SAIDA DO TUBO COM P1=0."
345     WRITE(6,100)(R(K),K=1,KP,2),(R(K),K=IKP,N+1,4)
346     WRITE(6,210)
347     WRITE(6,300) ZL,(US0(K),K=1,KP,2),(US0(K),K=IKP,
348     *N+1,4)
349     WRITE(6,200)
350     WRITE(6,301) ZL,(TS0(K),K=1,KP,2),(TS0(K),K=IKP,
351     *N+1,4)
352     IF(PER.EQ.0.) GO TO 27
353 58 PA=P
354     ZRT=CONST
355     ZA=Z
356     DO 606 K=1,N+1
357     TACK)=T(K)
358     UAD(K)=U(K)
359     TAD(K)=T(K)
360 606 UAK(K)=U(K)
361     QAA=QA
362     FVA=FV
363     TMA=TM
364     ZJC=(JC-1)*DZ
365     IF(ZJC-ZRT)60,61,61
366 61 DZ=(1.+ACR)*DZ
367     JC=0
368 60 JC=JC+1
369     GO TO 13
370 27 STOP
371 100 FORMAT(/,1X,'J',4X,'Z',5X,'U',11(1X,'R=',F4.2,1X,
372     *''))
373 200 FORMAT(55X,'TEMPERATURA')
374 300 FORMAT(1X,'U',F10.8,'U',11(1X,'R=',F8.4,''))
375 301 FORMAT(1X,'U',F10.8,'U',11(1X,'R=',F8.4,''),/,,)
376 210 FORMAT(54X,'VELOCIDADE U')
377 220 FORMAT(54X,'VELOCIDADE V')
378 230 FORMAT(/,38X,'*',1X,'J',1X,'*',4X,'Z',5X,'*',3X,
379     *'PRESSAO',2X,'*',3X,'FV',3X,'*',3X,'QA',3X)
380 400 FORMAT(38X,'*',13,'*',F10.8,'*',E12.4,'*',F8.6,'*',
381     *,F8.6,'*')
382 401 FORMAT(1X,'FV=',F10.8)
383 500 FORMAT(/,1X,'PR=',F5.2,/,,1X,'DR=',F8.5,/,,1X,'DZ=',
384     *F10.8,/,,1X,'F=',F10.8,/,,1X,'ACR=',F5.3,/,,1X,'PA=',
385     *E12.4,/,,1X,'ZA=',F10.8,/,,1X,'PF=',E12.4,/,,1X,
386     *'ZF=',F10.8,/,,1X,'ZL=',F10.8,/,,1X,'TM"=',F10.8,/
387     *,1X,'QA"=',F10.8,/,,1X,'PMAX"=',E12.4
388     *,/,,1X,'J"=',13,/,,1X,'FV0"=',F10.8,/,,1X,'PER"=',F7.3,
389     */,,1X,'NU0"=',F7.3,/,,)
390 501 FORMAT(1X,'COMPR. DO TUBO ACRESC. =',F10.8,/,,1X,
391     *'ACRESCIMO NECESSARIO P/ PRESSAO IMPOSTA=',F10.8
392     *,/,,1X,'FLUXO DE ENTALPIA NA SAIDA DO TUBO C/ P>0=',
393     *E12.4,/,,1X,'PRESSAO DE SAIDA POSITIVA=',F12.8,
394     */,,1X,'NUMERO DE NUSSELT MEDIO P/ P1>0=',
395     *F8.4,/,,1X,'VAZAO NA SAIDA COM P1>0=',F8.5,/,,1X
396     *,'REL. ACREZL/ZL EM X=',F6.2,/,,1X,'DELTA QA ='
397     *,F8.6,/,,1X,'REL. DELTAQA/QALINHA EM X ='F6.2)
398 503 FORMAT(1X,'J"=',14,3X,'Z"=',F10.6,3X,'F"=',E12.4)
399     END

```

```

400      SUBROUTINE MIYNO(CM, J3)
401      DOUBLE PRECISION CM(35,35), CO, SO
402      DIMENSION JN(70)
403      DO 125 I=1, J3
404      125  JN(I+20)=I
405      DO 144 I=1, J3
406      CO=0.
407      J1=I
408      DO 135 K=1, J3
409      IF((ABS(CO)-ABS(CM(I,K)))>.GE.0.) GO TO 135
410      126  J1=K
411      CO=CM(I,K)
412      135  CONTINUE
413      127  IF(I.EQ.J1) GO TO 138
414      128  K=JN(J1+20)
415      JN(J1+20)=JN(I+20)
416      JN(I+20)=K
417      DO 137 K=1, J3
418      SO=CM(K,I)
419      CM(K,I)=CM(K,J1)
420      137  CM(K,J1)=SO
421      138  CM(I,I)=1.
422      DO 139 J1=1, J3
423      139  CM(I,J1)=CM(I,J1)/CO
424      DO 142 J1=1, J3
425      IF(I.EQ.J1) GO TO 142
426      129  CO=CM(J1,I)
427      IF(CO.EQ.0.) GO TO 142
428      130  CM(J1,I)=0.
429      DO 141 K=1, J3
430      141  CM(J1,K)=CM(J1,K)-CO*CM(I,K)
431      142  CONTINUE
432      144  CONTINUE
433      DO 143 I=1, J3
434      IF(JN(I+20).EQ.I) GO TO 143
435      131  J1=I
436      132  J1=J1+1
437      IF(JN(J1+20).EQ.I) GO TO 133
438      136  IF(J3.GT.J1) GO TO 132
439      133  JN(J1+20)=JN(I+20)
440      DO 163 K=1, J3
441      CO=CM(I,K)
442      CM(I,K)=CM(J1,K)
443      163  CM(J1,K)=CO
444      JN(I+20)=I
445      143  CONTINUE
446      RETURN
447      END

```

## BIBLIOGRAFIA:

- [1] ELENBAAS, W.; The dissipation of heat by free convection. The inner surface of vertical tubes of different shapes of cross-section, *Physica, Holland*, Vol. 9, 365-374, (1942).
- [2] BODOIA, J.R. and OSTERLE, J.F.; The development of free convection between heated vertical plates, *J. Heat Transfer Trans. ASME*, Vol. 84, 40-44, (1962).
- [3] DAVIS, L. P. and PERONA, J.J.; Development of free convection flow of a gas in a heated vertical open tube, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 14, 889-903, (1971).
- [4] KAGEYAMA, M. and IZUMI, R.; Natural convection in a vertical tube, *Bull. J.S.M.E.*, Vol. 13, 382-394, (1970).
- [5] DYER, J. R.; The development of laminar natural-convective flow in a vertical uniform heat flux duct., *Int. J. Heat Mass transfer*, Vol. 18, 1455-1465, (1975).
- [6] MERIÇ, R. A.; An analitical study of natural convection in a vertical open tube, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 20, 429-431, (1977).
- [7] HORNBECK, R. W.; Numerical Marching Techniques for Fluid Flows with Heat Transfer, NASA SP-297, (1973).

