ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

EFEI

INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

519.614:534(043.2)
I19a
500

Dissertação de Mestrado

Análise de Sensibilidade dos Parâmetros de Projeto Dinâmico de Fundações de Máquinas sobre Estacas

Paulo Shigueme Ide
Orientador: Márcio Tadeu de Almeida

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DE PROJETO DINÂMICO DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS SOBRE ESTACAS

Paulo Shigueme Ide

ORIENTADOR: Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida

Dissertação de Mestrado
apresentada para obtenção do título de
Mestre - área: Engenharia Mecânica.

Itajubá - MG
Dezembro - 1987

Aos meus pais:

Hazime Ide e Kimiko Aoki

À minha esposa, Neide e

às minhas filhas Heidi e

Evelyn

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Márcio Tadeu de Almeida, pela orientação e incentivo dados neste trabalho.

À Escola Federal de Engenharia de Itajubá pela oportunidade dada para a conclusão deste trabalho.

Ao Consultor do Centro de Processamento de Dados da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Roberto Castro Júnior, pelo apoio e dedicação dados na parte computacional

À Srta. Claudetè Coli Junqueira, pela paciência e competência na datilografia dos originais.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuiram de forma decisiva para a realização deste trabalho e que não foram aqui citados.

RESUMO

Este trabalho visa analisar a sensibilidade dos parâmetros de projeto dinâmico nas frequências naturais e nas respostas de uma fundação sobre estacas.

A partir de um modelo com 3 graus de liberdade de uma fundação sobre estacas foram determinadas as equações de movimento vibratório da mesma. Foi feito um estudo de todas as propriedades físicas que aparecem nessas equações, ou seja, momento de inércia, rigidez e amortecimento. Em seguida, foram obtidos os autovalores e autovetores das equações a fim de se calcular as frequências naturais da fundação.

Através de uma simulação computacional foram obtidas várias curvas mostrando as variações das frequências naturais e das respostas dinâmicas da fundação em função de cada dimensão física da fundação. Essas curvas serão de grande interesse para o especialista em vibração na análise dinâmica de fundações de máquinas sobre estacas.

ABSTRACT

The present work ains to analyse the sensibility of parameters of Dynamic Design of Natural Frequencies and the Responses of Foundations of Machines on Concrete of Piles.

Starting from a model with three degres of freedom of a foundation of machines on piles, the equations of vibrating movement of that foundation were determined. All of the phisical properties of those equations, that is, moment of inertia, stiffness and dumping were studied. Then the eigenvalues and engenvectors of those equations were obtained in order to calculate the natural frequencies of the foundation.

Through computational simulation several graphics were obtained. They showed the variations of the natural frequencies and of the dynamic responses of the foundation, which varied according to each of its physical dimension and will be of much interest to the specialist in vibration in the dynamic analysis of foundation of machines on concret piles.

LISTA DE SÍMBOLOS

A = área da seção transversal da estaca

a_o = frequência admensional do solo

a_1, a_2 = autovalores

C = constante de amortecimento interno da estaca

C_x, C_z, C_ψ = constante de amortecimento horizontal, vertical e rotacional, respectivamente, equivalente do sistema

C_x^1, C_z^1, C_ψ^1 = constante de amortecimento horizontal, vertical e rotacional, respectivamente, de uma estaca

$C_{\psi x}^1$ = constante de amortecimento rotacional e horizontal acoplados de uma estaca

C_x^g, C_z^g, C_ψ^g = constante de amortecimento equivalente horizontal, vertical e rotacional, respectivamente, do grupo de estacas

C_x^f, C_z^f, C_ψ^f = constante de amortecimento relativa ao embutimento do bloco, horizontal, vertical e rotacional, respectivamente

dz = elemento da estaca

D_z^g = razão de amortecimento geométrico vertical equivalente do grupo de estacas

E_p = módulo de elasticidade longitudinal da estaca

$f_{i,j}$ = parâmetro de rigidez ou amortecimento

f = frequência da máquina

F_o = força de excitação devido ao desbalanceamento

F_x, F_z = força de excitação devido ao desbalanceamento na direção horizontal e vertical, respectivamente

G = módulo de elasticidade transversal do solo

g = aceleração da gravidade

H = distância da força horizontal à base do bloco

h = profundidade de embutimento do bloco no solo

$H_n^{(2)}$ = funções de Hankel de segunda espécie de ordem n

I_ψ = momento de inércia da massa do sistema em relação ao eixo $\bar{X}$

$[I]$ = matriz identidade

$j = \sqrt{-1}$ = imaginário

$J_n(x)$ = funções de Bessel, de primeira espécie de ordem n

K_x, K_z, K_ψ = constante de rigidez horizontal, vertical e rotacional, respectivamente, do sistema

K_x^1, K_z^1, K_ψ^1 = constante de rigidez horizontal, vertical e rotacional de uma estaca, respectivamente

$K_{\psi x}^1$ = constante de rigidez rotacional e horizontal acoplados

K_x^g, K_z^g, K_ψ^g = constante de rigidez horizontal, vertical e rotacional do grupo de estacas, respectivamente

K_x^f, K_z^f, K_ψ^f = constante de rigidez horizontal, vertical e rotacional relativa ao embutimento, respectivamente

$[K]$ = Matriz rigidez

ℓ = comprimento da estaca

L_R = comprimento de onda

m = massa do sistema

M = momento fletor

m_1 = massa da estaca por unidade de comprimento

$[M]$ = matriz massa

$[M^{-1}]$ = inversa da matriz massa

Q = esforço cortante

q = carga distribuída uniformemente

r_o = raio da estaca

R_x = reação horizontal do solo à altura z

R_{vz} = reação vertical do solo à altura z

$\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ = constantes que levam em consideração a influência do embutimento do bloco, na vertical

$\bar{S}_{u1}$, $\bar{S}_{u2}$ = constantes que levam em consideração a influência do embutimento do bloco, na horizontal

$\bar{S}_{\psi 1}$, $\bar{S}_{\psi 2}$ = constantes que levam em consideração a influência do embutimento do bloco, na rotação

S_{u1}, S_{u2}, S_{w2} = parâmetros admensionais para se calcular as reações

t = tempo

u_1, u_2 = autovetores

V = velocidade

V_s = velocidade de onda de cisalhamento no solo

V_c = velocidade de onda longitudinal na estaca

x = direção horizontal do movimento

x_r = distância do C.G. do sistema ao centro da estaca na direção horizontal

$Y_n(x)$ = funções de Bessel, de segunda espécie de ordem n

$\bar{Z}_{CG}$ = distância do C.G. do sistema à base do sistema

z = direção vertical do movimento

ψ = direção rotacional do movimento

θ_1, θ_2 = modos naturais

ω_x, ω_z, ω_ψ = frequência natural na direção horizontal, vertical e rotacional, respectivamente

μ = coeficiente de Poisson

α_A = fator de influência para o deslocamento axial na estaca em relação a uma estaca de referência

α_L = fator de deslocamento para o movimento horizontal

γ = ângulo de distorção no cisalhamento

γ_s = peso específico do solo

ρ = massa específica do solo

ρ_ρ = massa específica da estaca

λ = constante complexa

σ = tensão normal

τ = tensão de cisalhamento

β = ângulo de afastamento

ÍNDICE

INTRODUÇÃO..... 1

CAPÍTULO 1 - DESENVOLVIMENTO DE MODELOS MATEMÁTICOS DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS..... 2

1.1 - Introdução..... 2

1.2 - Técnicas de Modelagem..... 2

1.3 - Modelos..... 5

1.4 - Descrição do Modelo Analisado..... 8

1.5 - Vibração do Sistema e suas Causas..... 10

1.6 - Análises dos Componentes..... 11

1.6.1 - Rotor do Ventilador..... 11

1.6.2 - Mancais..... 11

1.6.3 - Pedestais de Aço..... 11

1.6.4 - Pedestais de Concreto..... 11

1.6.5 - Bloco de Concreto..... 11

1.6.6 - Solo..... 12

1.6.7 - Estacas..... 12

CAPÍTULO 2 - DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA DE FUNDAÇÃO SOBRE ESTACAS..... 13

2.1 - Introdução..... 13

2.2 - Modelos do Sistema - Equações de Movimento..... 14

2.2.1 - Modo Vertical..... 14

2.2.2 - Movimento Horizontal Acoplado..... 15

2.3 - Vibração Livre do Sistema..... 16

2.3.1 - Modo Vertical..... 16

2.3.2 - Modo Horizontal e Rotacional (acoplado)..... 17

2.3.2.1 - Autovalores e Autovetores..... 17

2.3.2.2 - Modos Naturais de Vibração..... 21

2.4 - Vibração Forçada com Amortecimento..... 24

2.4.1 - Modo Vertical..... 24

2.4.2 - Modo Horizontal e Rotacional Acoplados..... 25

CAPÍTULO 3 - DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ E AMORTECIMENTO DAS ESTACAS..... 30

3.1 - Introdução..... 30

3.2 - Rotação e Translação Horizontal no Plano Vertical..... 31

3.3 - Equação Diferencial do Movimento para Vibração Amortecida Horizontal da Estaca..... 33

3.4 - Constantes de Integração da Equação (3.19)..... 40

3.5 - Constantes de Integração para Estacas Rigidamente Engastada ao Bloco e Apoiada na Extremidade Inferior.... 41

3.6 - Equação Diferencial do Movimento para a Vibração Amortecida Vertical da Estaca..... 43

3.7 - Constantes de Integração da Equação (3.48)..... 49

3.8 - Constantes de Amortecimento e Rigidez das Estacas (Individuais)..... 51

3.8.1 - Movimento Vertical..... 52

3.8.1.1 - Constante de Rigidez para uma Estaca na Direção Vertical (K_z^1)..... 52

3.8.1.2 - Constante de Amortecimento para uma Estaca na Direção Vertical (C_z^1)..... 53

3.8.2 - Movimento Horizontal..... 54

3.8.2.1 - Constante de Rigidez para uma Estaca na Direção Horizontal (K_x^1)..... 54

3.8.2.2 - Constante de Amortecimento para uma Estaca na Direção Horizontal (C_x^1) ... 55

3.8.3 - Movimento de Rotação no Plano Vertical 57

3.8.3.1 - Constante de Rigidez Rotacional para uma Estaca (K_ψ^1) 57

3.8.3.2 - Constante de Amortecimento Rotacional para uma Estaca (C_ψ^1) 58

3.8.4 - Movimento de Rotação e Translação Horizontal Acoplados 50

3.8.4.1 - Constante de Rigidez Rotacional e Horizontal Acoplados para uma Estaca ($K_{\psi x}^1$) 59

3.8.4.2 - Constante de Amortecimento Rotacional e Horizontal Acoplados para uma Estaca (C_ψ^1) 60

3.9 - Constantes de Rigidez e Amortecimento Equivalente de um Grupo de Estacas 64

3.9.1 - Movimento Vertical 66

3.9.2 - Movimento Horizontal 69

3.9.3 - Movimento Rotacional 71

CAPÍTULO 4 - AVALIAÇÃO DAS PROPRIEDADES DINÂMICAS DOS SOLOS 73

4.1 - Introdução 73

4.2 - Módulo de Elasticidade Transversal (G) 73

4.2.1 - Procedimentos de Campo 75

4.2.2 - Procedimentos de Laboratório 77

4.3 - Coeficiente de Amortecimento 79

4.4 - Coeficiente de Poisson e Massa Específica do Solo 81

CAPÍTULO 5 - RESULTADOS DA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DE PROJETO E CONCLUSÕES..... 84

5.1 - Procedimento..... 84

5.2 - Hipóteses Consideradas..... 85

5.3 - Sensibilidade dos Parâmetros de Projeto com o Aumento do Raio das Estacas..... 85

5.4 - Sensibilidade dos Parâmetros de Projeto com o Aumento do Comprimento das Estacas..... 93

5.5 - Sensibilidade dos Parâmetros de Projeto com o Aumento dos Espaçamentos (S_1 e S_2) entre as Estacas..... 101

5.6 - Sensibilidade dos Parâmetros de Projeto com o Aumento da Altura do Bloco (HB)..... 108

5.7 - Sensibilidade dos Parâmetros de Projeto com o Aumento do Comprimento do Bloco (LB)..... 115

5.8 - Sensibilidade dos Parâmetros de Projeto com o Aumento da Largura do Bloco (BB)..... 122

5.9 - Sensibilidade nas Frequências Naturais com o Aumento das Alturas dos Pedestais..... 129

5.10 - Sensibilidade nas Frequências Naturais com o Aumento das Larguras dos Pedestais..... 129

5.11 - Sensibilidade nas Frequências Naturais com o Aumento dos Comprimentos dos Pedestais..... 129

5.12 - Sensibilidade na Frequência Natural na Direção Vertical com o Aumento de Massa..... 140

5.13 - Conclusões..... 142

5.14 - Sugestões..... 143

APÊNDICE A - MODELAGEM DA FUNDAÇÃO PARA ELABORAÇÃO DOS PROGRAMAS..... 144

A.1 - Nomenclatura..... 144

A.2 - Centro de Gravidade do Sistema..... 145

A.3 - Momento de Inércia do Sistema em Relação ao Eixo de Rotação ($\bar{X}$)..... 146

APÊNDICE B - PARÂMETRO DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO..... 149

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... 154

ÍNDICE DAS FIGURAS

CAPÍTULO 1 - DESENVOLVIMENTO DE MODELOS MATEMÁTICOS DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

Figura 1.1 - Máquina em vibração sobre um bloco de fundação sobre estacas..... 6

Figura 1.2 - Modo vertical..... 7

Figura 1.3 - Modo horizontal desacoplado..... 7

Figura 1.4 - Modo horizontal acoplado ao rotacional..... 8

Figura 1.5 - Sistema típico analisado..... 9

CAPÍTULO 2 - DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA DE FUNDAÇÃO SOBRE ESTACAS

Figura 2.1 - Máquina em vibração sobre um bloco de fundação sobre estacas..... 13

Figura 2.2 - Modo vertical..... 14

Figura 2.3 - Movimento horizontal acoplado ao rotacional.... 15

CAPÍTULO 3 - DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ E AMORTECIMENTO DAS ESTACAS

Figura 3.1 - Translação e rotação no plano horizontal..... 31

Figura 3.2 - Parâmetros S_{u1}, S_{u2}, S_{w1} e S_{w2} (coeficiente de Poisson entre parênteses)..... 33

Figura 3.3 - Esforços no elemento dz..... 34

Figura 3.4 - Estaca engastada na extremidade superior e fixa na inferior..... 41

Figura 3.5 - Variações na função $F_{11}(\lambda)$ com a frequência a_o e $\frac{V_s}{V_c}$ 43

Figura 3.6 - Deslocamentos e esforços no elemento dz da estaca..... 45

Figura 3.7 - Deslocamentos verticais na estaca..... 50

Figura 3.8 - Variações dos parâmetros f com a frequência a_o. 61

Figura 3.9 - Variações dos parâmetros de rigidez e amortecimento com a esbeltez da estaca..... 62

Figura 3.10 - Parâmetros de rigidez e amortecimento da resposta vertical (concreto armado)..... 63

Figura 3.11 - Parâmetros de rigidez e amortecimento da resposta vertical (madeira..... 64

Figura 3.12 - α_A em função do espaçamento e comprimento da estaca..... 65

Figura 3.13 - Solução gráfica para α_L..... 70

Figura 3.14 - Definição de x_r e z_c..... 70

CAPÍTULO 4 - AVALIAÇÃO DAS PROPRIEDADES DINÂMICAS DOS SOLOS

Figura 4.1 - Curva de tensão e deformação para solo..... 74

Figura 4.2 - Teste de excitador de superfície..... 75

Figura 4.3 - Teste de superfície..... 76

Figura 4.4 - Razões de amortecimento para 4 modos de carga.. 79

Figura 4.5 - Definição de amortecimento interno..... 79

Figura 4.6 - Amortecimento interno para areias e argilas.... 80

CAPÍTULO 5 - RESULTADOS DA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DE PROJETO E CONCLUSÕES

Figura 5.1 - Modelagem do Sistema..... 84

Figuras 5.2, 5.3, 5.4 - Frequências Naturais nas Três Direções de Movimento Variando o Raio das Estacas 87-89

Figuras 5.5, 5.6, 5.7 - Respostas nas Três Direções de Movimento Variando o Raio das Estacas..... 90-92

Figuras 5.8, 5.9, 5.10 - Frequências Naturais nas Três Direções de Movimento Variando o Comprimento das Estacas..... 94-97

Figuras 5.11, 5.12, 5.13 - Respostas nas Três Direções de Movimento Variando o Comprimento das Estacas. 98-100

Figuras 5.14, 5.15, 5.16, 5.17, 5.18, 5.19 - Frequências Naturais nas Três Direções de Movimento Variando os Espaçamentos entre as Estacas..... 102-107

Figuras 5.20, 5.21, 5.22 - Frequências Naturais nas Três Direções de Movimento Variando a Altura do Bloco..... 109-111

Figuras 5.23, 5.24, 5.25 - Respostas nas Três Direções de Movimento Variando a Altura do Bloco..... 112-115

Figuras 5.26, 5.27, 5.28 - Frequências Naturais nas Três Diresões de Movimento Variando o Comprimento do Bloco..... 116-118

Figuras 5.29, 5.30, 5.31 - Respostas nas Três Direções de Movimento Variando o Comprimento do Bloco..... 119-121

Figuras 5.32, 5.33, 5.34 - Frequências Naturais nas Três Direções de Movimento Variando a Largura do Bloco..... 123-125

Figuras 5.35, 5.36, 5.37 - Respostas nas Três Direções de Movimento Variando a Largura do Bloco..... 126-128

Figuras 5.38, 5.39 - Frequências Naturais nas Direções Horizontal e Rotacional com o Aumento das Alturas dos Pedestais..... 130-131

Figuras 5.40, 5.41, 5.42, 5.43 - Frequências Naturais nas Direções Horizontal e Rotacional com o Aumento das larguras dos Pedestais..... 132-135

Figuras 5.44, 5.45, 5.46, 5.47 - Frequências Naturais nas Direções Horizontal e Rotacional com o Aumento dos Comprimentos dos Pedestais..... 136-139

Figuras 5.48 - Frequência Natural na Direção Vertical com o Aumento de Massa..... 141

APÊNDICE A - MODELAGEM DA FUNDAÇÃO PARA ELABORAÇÃO DOS PROGRAMAS

Figura A.1 - Vista Lateral do Bloco..... 146

Figura A.2 - Vista Lateral do Pedestal Nº 1..... 146

Figura A.3 - Vista Lateral do Pedestal Nº 2..... 147

Figura A.4 - Vista Lateral do Ventilador..... 147

Figura A.5 - Vista Lateral do Eixo..... 148

Figura A.6 - Vista Lateral do Motor..... 148

APÊNDICE B - PARÂMETROS DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO

Figura B.1 - Parâmetros de Rigidez e Amortecimento no Momento Rotacional..... 150

Figura B.2 - Parâmetros de Rigidez e Amortecimento no Movimento Acoplado..... 151

Figura B.3 - Parâmetros de Rigidez e Amortecimento no Movimento Vertical..... 152

Figura B.4 - Parâmetros de Rigidez e Amortecimento no Movimento horizontal..... 153

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... 154

INTRODUÇÃO

As fundações de estruturas dinamicamente carregadas, usualmente produzidas por ventos, terremotos ou máquinas normalmente caem dentro de três categorias: blocos, malhas e fundações profundas ou elevadas. A escolha do tipo de fundação depende da geometria, da carga estrutural e da qualidade do solo.

O entendimento do comportamento dinâmico dessas fundações está ainda no seu início.

A modelagem em elementos finitos abrangendo tanto o solo quanto a estrutura representa a mais completa e racional medida matemática para a análise do comportamento dinâmico dessas fundações presentemente disponível. Entretanto, alguns aspectos de interação entre o solo e a estrutura são difíceis de serem modelados em forma de elementos finitos. Além disso, os resultados de tal análise não é na forma que permitirá ao projetista facilmente avaliar os efeitos relativos das variáveis do problema. Portanto, a análise por elementos finitos deve ser feita apenas por especialistas no assunto.

O presente trabalho visa dar ao especialista em vibrações um procedimento alternativo para obtenção das constantes de rigidez e amortecimento e analisar a sensibilidade dos parâmetros de projeto (frequências naturais e respostas) de uma fundação de máquina sobre estacas.

CAPÍTULO 1

DESENVOLVIMENTO DE MODELOS MATEMÁTICOS DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

1.1 - INTRODUÇÃO

Uma análise dinâmica detalhada de um sistema estrutural da forma como aparece na realidade é raramente feita. Na prática, é usual escolher um modelo idealizado consistindo de molas e massas concentradas as quais atuarão da mesma maneira que a estrutura real. É necessário apenas que seja feita uma seleção própria e adequada dos parâmetros do sistema tal que a equivalência da mola idealizada, do amortecimento e da massa concentrada do modelo resulte em deslocamentos equivalentes nos pontos de significância do modelo idealizado. Assim, o modelo idealizado deve se comportar da mesma forma que a estrutura real.

1.2 - TÉCNICAS DE MODELAGEM

As técnicas de modelagem adotadas em estruturas sujeitas a cargas dinâmicas ainda estão no estágio de desenvolvimento. A modelagem usada em estruturas simples, tal como uma viga apoiando uma carga vibratória, ou uma fundação rígida tipo bloco apoiando uma máquina, é simples e direta. Entretanto, quando as estruturas envolvidas são de um tipo indeterminado, as quais se apoiam no solo e são sujeitas a forças dinâmicas, a modelagem é mais complexa e difere dependendo de cada projetista. Estas diferenças necessariamente não significam desacordos nas medidas básí

cas fundamentais, mas se relacionam mais à precisão e eficiência conseguida na solução. Durante os anos 60, a investigação de sistemas estruturais usados na exploração espacial e mais recentemente em estruturas usadas em usinas nucleares, resultou em um grande desenvolvimento do estado de arte no campo das estruturas dinâmicas. O uso de computadores digitais e as técnicas de análise por elementos finitos tem sido os principais fatores do desenvolvimento do estado de arte. Portanto, é imperativo que os projetistas que desejam resolver problemas estruturais dinâmicos devem possuir conhecimento suficiente dessas ferramentas. A modelagem de qualquer sistema estrutural é ditada pelos objetivos da solução. A solução desejada pode ser uma frequência fundamental ou um espectro de frequência de todos os modos possíveis de vibração. Em alguns casos pode ser necessário encontrar a resposta de vibração em vários pontos de interesse. Existem algumas considerações práticas as quais comumente são usadas em todas as representações de modelos. As principais considerações são as seguintes:

1) Concentração de Massa

A localização lógica da massa concentrada equivalente em um modelo deve ser no:

a) ponto onde a força dinâmica está atuando;

b) ponto onde é desejada a resposta da vibração;

c) ponto de interseção de uma viga e uma coluna;

d) centro de gravidade de todas as massas do sistema.

2) Constante de Mola

A constante de mola representa uma relação linear entre a carga aplicada e o deslocamento da massa. O valor da cons

tante de mola é derivado da rigidez estrutural elástica média existente entre as massas de oscilação ou entre uma massa e outro apoio rígido infinito. Especificamente, as propriedades elásticas de:

a) um membro prismático pode ser representado por 3 molas lineares e três molas rotacionais;

b) uma chapa fina pode ser representada por duas molas lineares e duas molas rotacionais as quais são equivalentes ao alongamento e curvatura que ocorre no plano da chapa;

c) um bloco maciço de concreto se aproxima da rigidez infinita;

d) reações do solo às cargas da fundação podem ser representadas por molas elásticas capazes de trabalhar na tração e compressão.

3) Coeficiente de Amortecimento

O amortecimento pode ocorrer devido a diversos fatores presentes no sistema dinâmico, por exemplo, a resistência do atrito estrutural e o escorregamento que ocorre nas superfícies de contato.

O amortecimento admitido no sistema estrutural é do tipo viscoso e inclui as seguintes suposições adicionais:

a) o amortecimento interno presente nas estruturas de aço e concreto é nominal, por exemplo, o coeficiente de amortecimento varia de 2 a 5% para as estruturas de concreto e de 8 a 10% para as estruturas de aço e normalmente é então desprezado;

b) o fator de amortecimento associado ao solo está na forma de amortecimento interno e geométrico. O valor do amortecimento

interno é pequeno em todos os modos de oscilação, exceto no modo em balanço (rotacional); o amortecimento geométrico possui considerável efeito na resposta dinâmica do sistema e geralmente é incluído na representação do modelo.

4) Força de Excitação

A força de excitação normalmente é considerada como uma força concentrada equivalente, aplicada a pontos onde as massas são concentradas. Os torques são aplicados nos centros de massa em forma concentrada ou em forma de binários.

1.3 - MODELOS

As estruturas dinâmicas de engenharia usam diferentes técnicas de modelagem, dependendo do tipo de solução desejada.

Modelo Analisado: máquina em vibração apoiada em um bloco fundação sobre estacas

Este tipo de fundação é uma forma bastante comum de sistema dinâmico e usualmente é considerada por engenheiros de projetos nas instalações industriais e petroquímicas. São possíveis três formas dinâmicas de vibração as quais investigaremos. Os modos vertical e horizontal são descritos por equações diferenciais lineares, e a solução para as frequências naturais e para a resposta de vibração é de fácil obtenção. No modo em balanço (rotacional) o efeito de acoplamento do modo horizontal pode ser ignorado para fundações rasas.

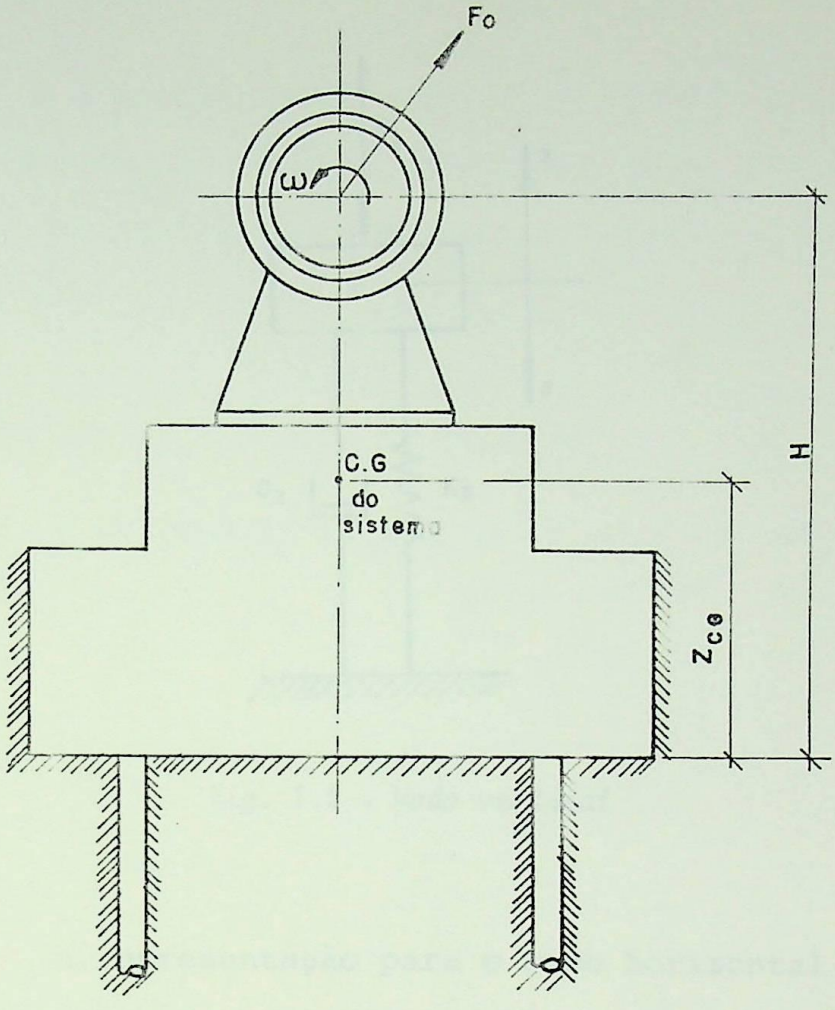

Fig. 1.1 - Máquina em vibração sobre um bloco de fundação sobre estacas

O modo vertical normalmente se comporta independentemente dos outros modos. A massa m do sistema é admitida concentrada no eixo vertical. A constante de mola do solo e das estacas (K_z), amortecimento do solo e das estacas (C_z), a inércia da massa, a força de excitação (F_z) da máquina, possuem sua linha de ação coincidindo com o eixo vertical.

A equação do movimento na vertical é:

$$m\ddot{z} + C_z\dot{z} + K_z z = F_z$$

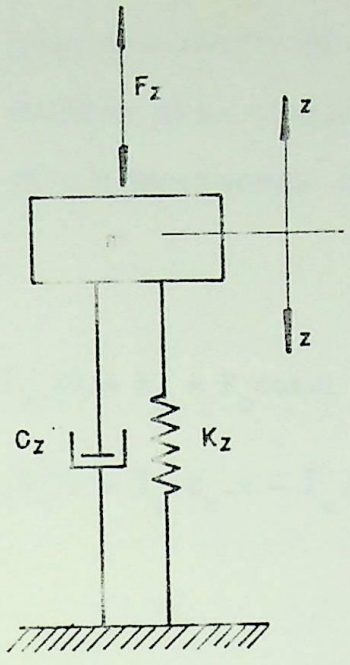

Fig. 1.2 - Modo vertical

A representação para o modo horizontal envolve uma aproximação. Neste modo, contrariamente ao modo vertical, as massas não se encontram em um eixo horizontal e nem a linha de ação das forças é coincidente com o eixo horizontal. Por estas razões, este modo normalmente é acoplado ao modo rotacional. A equação de movimento na horizontal sem o acoplamento é:

$$m\ddot{x} + C_x\dot{x} + K_x x = F_x$$

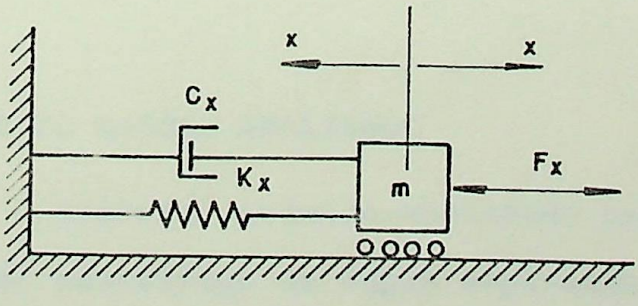

Fig. 1.3 - Modo horizontal desacoplado

A melhor representação do verdadeiro comportamento dinâmico do sistema é o modelo abaixo que considera o acoplamento do movimento horizontal com o movimento rotacional. As equações de movimento são:

$$m\ddot{x} + C_x(\dot{x}-\bar{Z}_c.\dot{\psi}) + K_x(x-\bar{Z}_c.\psi) = F_x = F_o\cos\omega t$$

$$I_\psi.\ddot{\psi} + (C_\psi+C_x\bar{Z}_c)\dot{\psi} + (K_\psi+K_x\bar{Z}_c^2)\psi - \bar{Z}_c.C_x.\dot{x} - \bar{Z}_c.K_x.x = F_x(H-\bar{Z}_c)$$

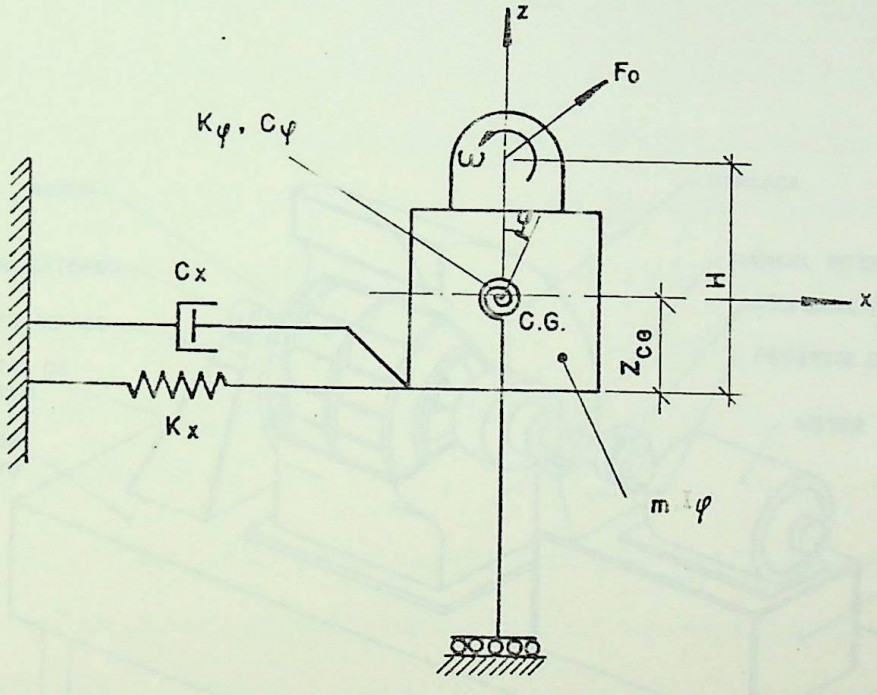

Fig. 1.4 - Modo horizontal acoplado ao rotacional

1.4 - DESCRIÇÃO DO MODELO ANALISADO

O sistema dinâmico analisado neste trabalho envolve um ventilador centrífugo de dupla aspiração de grande utilização na indústria. Alguns destes são de grande porte, e com todo o equipamento rotativo, frequentemente são afetados com problemas

de alta vibração. Felizmente, estas instalações podem ser analisadas analiticamente para assegurar um funcionamento adequado. É necessário que a fundação atue adequadamente, quando acoplado ao resto do sistema. No caso, o rotor do ventilador está localizado no centro do eixo entre os mancais de fluido. Os mancais são fixados em pedestais de aço, que por sua vez são fixados a pedestais de concreto. Os pedestais de concreto são ligados em um grande bloco de concreto armado, que é apoiado pelo solo e por 6 estacas de concreto. A figura (1.5) mostra o sistema de fundação do ventilador, com seus vários componentes.

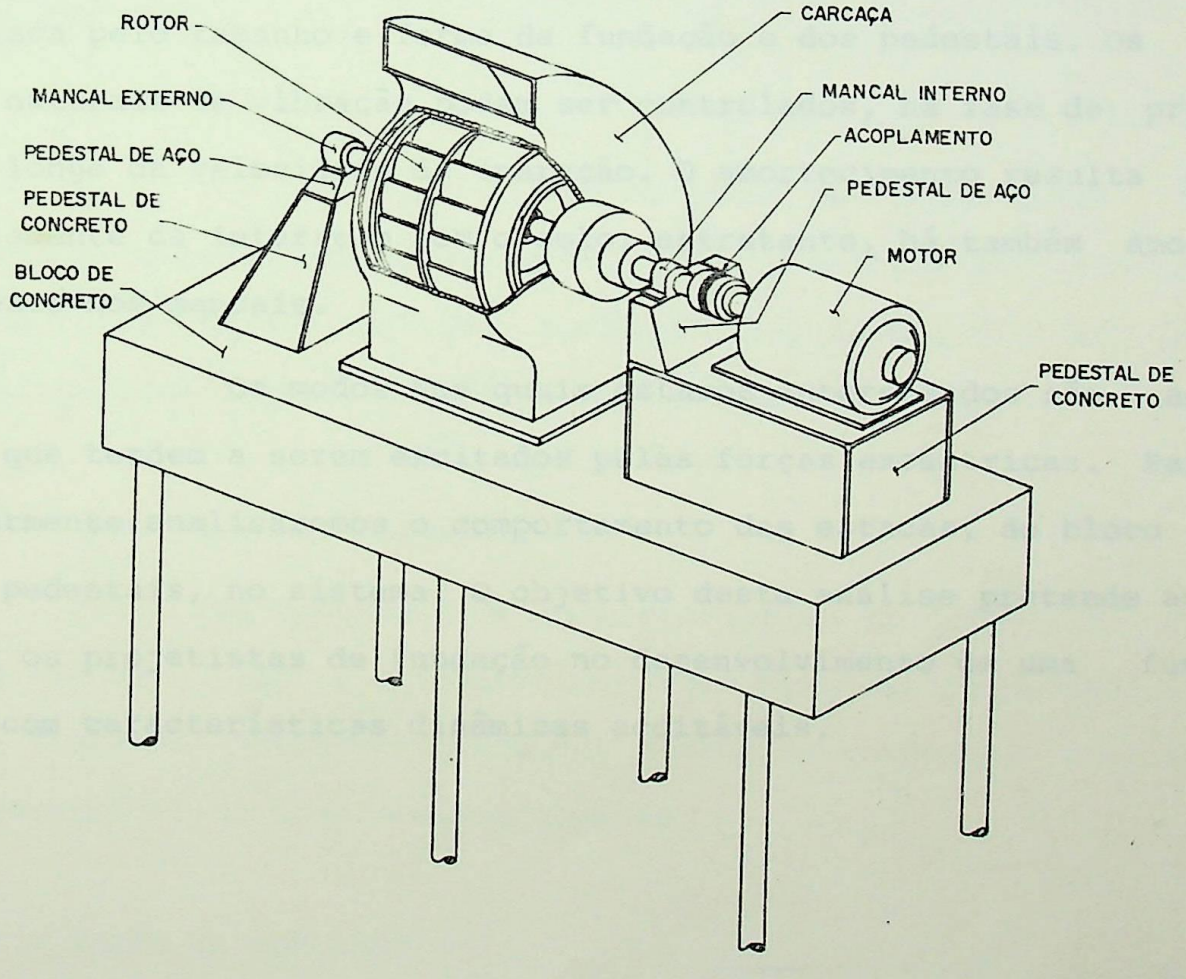

Fig. 1.5 - Sistema típico analisado

1.5 - VIBRAÇÃO DO SISTEMA E SUAS CAUSAS

Como o objetivo desta análise é controlar a alta vibração do sistema, é importante uma discussão dos problemas típicos de vibração nestas instalações. A primeira preocupação é com a velocidade de operação devido às forças excêntricas. Devido ao tamanho do rotor, existe um limite à medida com a qual o equilíbrio do rotor pode ser praticamente mantido. A rigidez dinâmica do sistema à velocidade de operação deve ser alta o suficiente para manter a vibração dentro de limites aceitáveis.

A resposta do sistema às forças excêntricas é controlada pela rigidez estática nos mancais, pelos modos dinâmicos de vibração e pelo amortecimento. A rigidez estática pode ser controlada pelo tamanho e forma da fundação e dos pedestais. Os modos naturais de vibração podem ser controlados, na fase de projeto, longe da velocidade de operação. O amortecimento resulta primariamente da interação com o solo, entretanto, há também amortecimento nos mancais.

Os modos nos quais estamos interessados são aqueles que tendem a serem excitados pelas forças excêntricas. Particularmente analisaremos o comportamento das estacas, do bloco e dos pedestais, no sistema. O objetivo desta análise pretende auxiliar os projetistas de fundação no desenvolvimento de uma fundação com características dinâmicas aceitáveis.

1.6 - CONSIDERAÇÕES DOS COMPONENTES

1.6.1 - ROTOR DO VENTILADOR

O rotor está incluído no modelo do sistema com um componente rígido, contribuindo para a massa e inércia do sistema.

1.6.2 - MANCAIS

Serão utilizados mancais de película de fluído que se apoiam em pedestais de aço, fornecendo amortecimento e rigidez lateral, vertical e axial. Incluiremos os mancais no modelo do sistema como um corpo rígido, contribuindo apenas como massa e inércia.

1.6.3 - PEDESTAIS DE AÇO

Os pedestais de aço fornecem a conexão entre os mancais e os pedestais de concreto. Estes pedestais são construídos de chapas de aço soldadas, formando plataformas rígidas, contribuindo para a massa e inércia do sistema.

1.6.4 - PEDESTAIS DE CONCRETO

Os pedestais de concreto apoiam os pedestais de aço e elevam o rotor e o sistema de dutos para dar folga suficiente de trabalho. Ambos serão grandes blocos de concreto, admitido rígido e modelado como massa e inércia.

1.6.5 - BLOCO DE CONCRETO

Os pedestais de concreto apoiam-se em uma grande bloco de concreto, usada para apoiar a estrutura. Nesta análise,

o bloco será modelado como um corpo rígido, com propriedades de massa e inércia. Admitiremos que os modos flexíveis estão suficientemente acima da velocidade de operação para que esta suposição seja válida.

1.6.6 - SOLO

O solo é um fator crítico na análise dinâmica do sistema, já que nele se apoia todo o conjunto. O solo possui tanto rigidez quanto amortecimento, e seus efeitos na análise dinâmica da fundação serão considerados no modelo como molas e amortecedores.

1.6.7 - ESTACAS

A maioria das estacas são instaladas em grupos ou agrupamentos. A rigidez e amortecimento do grupo não será a simples soma da rigidez e amortecimento das estacas individuais. Consideraremos nesta análise estacas de concreto armado que serão modeladas por molas e amortecimentos equivalentes.

CAPÍTULO 2

DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA DE FUNDAÇÃO SOBRE ESTACAS

2.1 - INTRODUÇÃO

Vamos determinar neste capítulo as frequências naturais e a resposta dinâmica de uma fundação de máquina sobre estacas, conforme a figura (2.1).

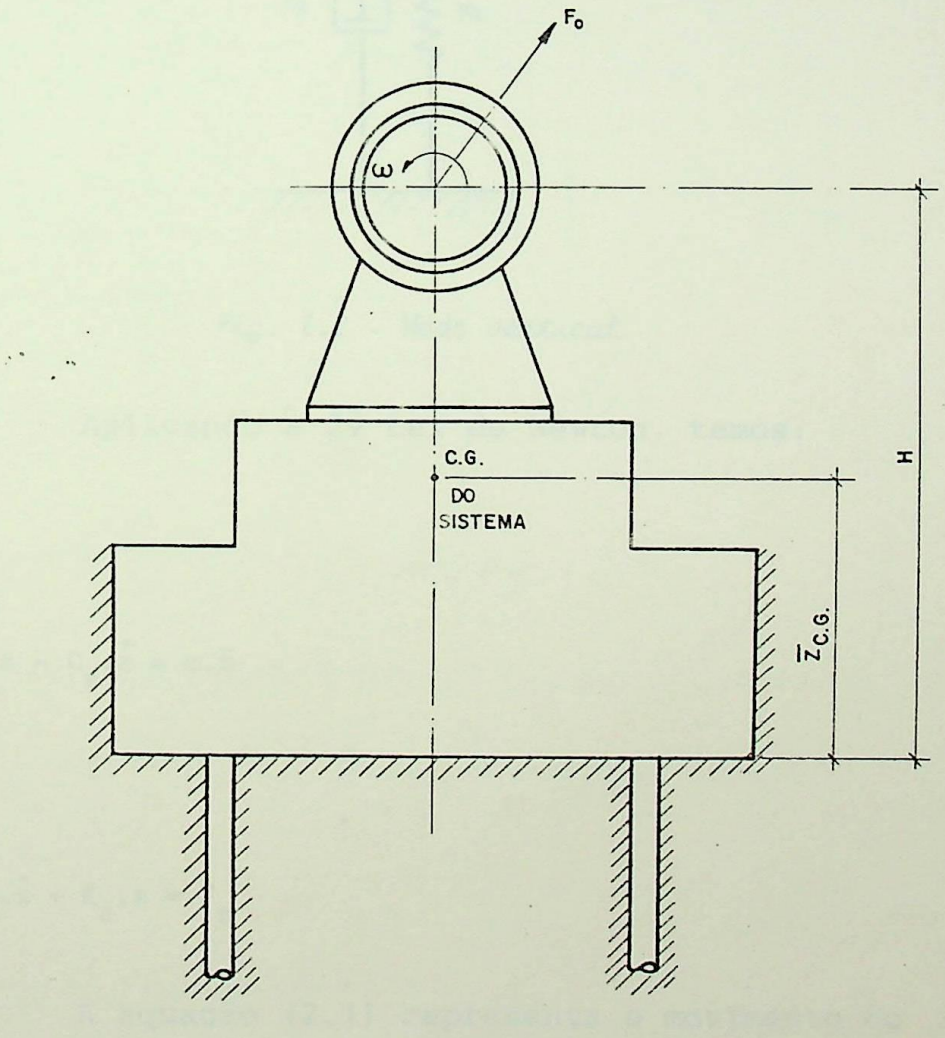

Fig. 2.1 - Máquina em vibração sobre um bloco de fundação sobre estacas

2.2 - MODELOS DO SISTEMA - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

2.2.1 - MODO VERTICAL

Considerando o exposto no Capítulo 1, temos:

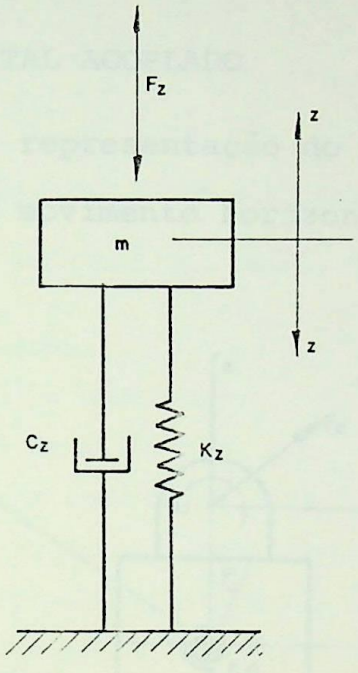

Fig. 2.2 - Modo vertical

Aplicando a 2ª Lei de Newton, temos:

$$R = m.a$$

$$F_z - K_z.z - C_z.\dot{z} = m.\ddot{z}$$

Então:

$$m.\ddot{z} + C_z.\dot{z} + K_z.z = F_z \qquad (2.1)$$

A equação (2.1) representa o movimento do sistema do modo vertical, onde:

m = massa total do sistema;

z = direção vertical do movimento;

F_z = força de excitação vertical;

K_z = constante de mola vertical equivalente do sistema;

C_z = amortecimento vertical equivalente do sistema;

F_z = força de excitação devido ao desbalanceamento na direção vertical.

2.2.2 - MOVIMENTO HORIZONTAL ACOPLADO

A melhor representação do modo horizontal é considerando o acoplamento do movimento horizontal com o rotacional.

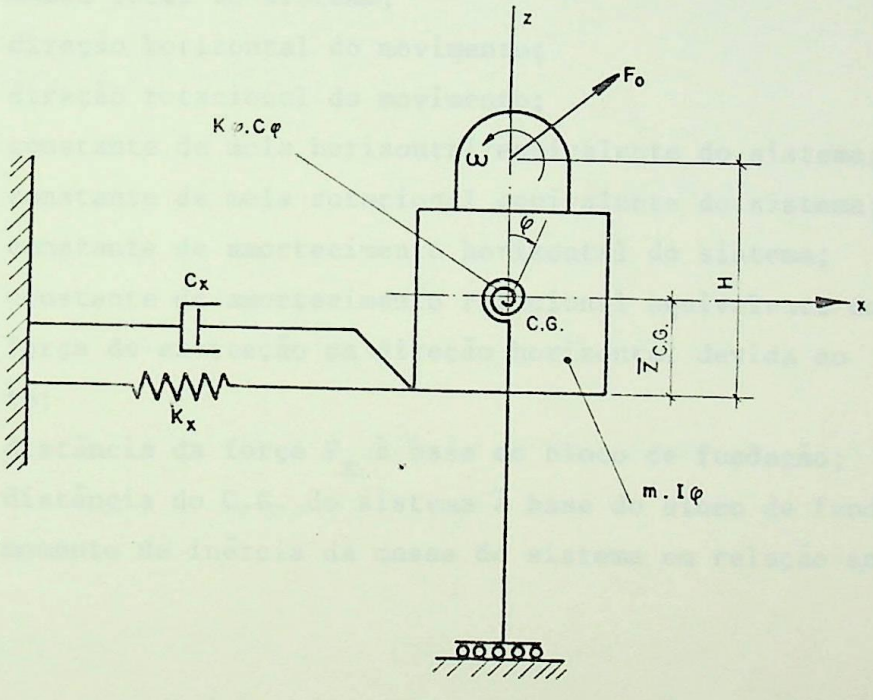

Fig. 2.3 - Movimento horizontal acoplado ao rotacional

Aplicando a 2ª Lei de Newton, temos:

$$R = m.a$$

$$F_x - K_x(x - Z_{CG}.\psi) - C_x(\dot{x} - \bar{Z}_{CG}.\dot{\psi}) = m.\ddot{x}$$

ou

$$m.\ddot{x} + C_x(\dot{x} - \bar{Z}_{CG}.\dot{\psi}) + K_x(x - \bar{Z}_{CG}.\psi) = F_x = F_o \cos\omega t \qquad (2.2)$$

Aplicando a equação de Newton para o torque, $\Sigma m_\psi = I_\psi . \alpha$, tem-se:

$$F_x(H-\bar{Z}_{CG})+K_x(x-\bar{Z}_{CG}.\psi).\bar{Z}_{CG}+C_x(\dot{x}-\bar{Z}_{CG}.\dot{\psi})\bar{Z}_{CG}-K_\psi.\psi-C_\psi.\dot{\psi} = I_\psi.\ddot{\psi}$$

ou

$$I_\psi.\ddot{\psi}+(C_\psi+C_x.\bar{Z}^2_{CG})\dot{\psi}+(K_\psi+K_x.\bar{Z}^2_{CG})\psi-\bar{Z}_{CG}.C_x.\dot{x}-\bar{Z}_{CG}.K_x.x = F_x(H-\bar{Z}_{CG}) =$$

$$= F_o.\cos\omega t(H-\bar{Z}_{CG}) \qquad (2.3)$$

As equações (2.2) e (2.3) representam o movimento horizontal e rotacional acoplados, onde:

- m = massa total do sistema;
- x = direção horizontal do movimento;
- ψ = direção rotacional do movimento;
- K_x = constante de mola horizontal equivalente do sistema;
- K_ψ = constante de mola rotacional equivalente do sistema;
- C_x = constante de amortecimento horizontal do sistema;
- C_ψ = constante de amortecimento rotacional equivalente do sistema;
- F_x = força de excitação na direção horizontal devida ao desbalanceamento;
- H = distância da força F_x à base do bloco de fundação;
- $\bar{Z}_{CG}$ = distância do C.G. do sistema à base do bloco de fundação;
- I_ψ = momento de inércia da massa do sistema em relação ao eixo $\bar{X}$.

2.3 - VIBRAÇÃO LIVRE DO SISTEMA

2.3.1 - MODO VERTICAL

A equação diferencial do movimento na direção vertical do sistema é:

$$m.\ddot{z} + C_z.\dot{z} + K_z.z = F_z = F_o.\text{sen}\omega t \qquad (2.1)$$

que é independente dos outros modos.

Considerando a vibração livre e sem amortecimento, temos:

$$m.\ddot{z} + K_z.z = 0 \qquad (2.4)$$

Assumindo o movimento harmônico, $z=A.\text{sen}\omega t$, tem-se:

$$\dot{z} = A\omega\cos\omega t \quad \text{e} \quad \ddot{z} = -\omega^2 A.\text{sen}\omega t$$

Substituindo em (2.4), vem:

$$-m\omega^2 A\text{sen}\omega t + K_z.A\text{sen}\omega t = 0$$

donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{K_z}{m}} \qquad (2.5)$$

Pela equação (2.5) podemos obter a frequência natural do sistema no modo vertical.

2.3.2 - MODO HORIZONTAL E ROTACIONAL (ACOPLADO)

2.3.2.1 - Autovalores e Autovetores

As equações diferenciais do movimento do sistema são:

$$m.\ddot{x} + C_x(\dot{x}-\dot{\psi}.\bar{Z}_{CG}) + K_x(x-\psi.\bar{Z}_{CG}) = F_x = F_o.\cos\omega t \qquad (2.2)$$

$$I_\psi.\ddot{\psi} + (C_\psi + C_x.\bar{Z}^2_{CG})\dot{\psi} + (K_\psi + K_x.\bar{Z}^2_{CG})\psi - \bar{Z}_{CG}.C_x\dot{x} - \bar{Z}_{CG}.K_x.x =$$

$$= F_x(H-\bar{Z}_{CG}) = F_o.\cos\omega t(H-\bar{Z}_{CG}) \qquad (2.3)$$

Veremos a solução das equações (2.2) e (2.3) separadamente da equação (2.1), pois o movimento na direção vertical independe das outras duas direções.

Escrevendo as equações (2.2) e (2.3) na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_x & -\bar{Z}_{CG}.C_x \\ -\bar{Z}_{CG}.C_x & C_\psi + C_x.Z_{CG}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} K_x & -\bar{Z}_{CG}K_x \\ -\bar{Z}_{CG}.K_x & K_\psi + K_x.\bar{Z}_{CG}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_x(H-\bar{Z}_{CG}) \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

Para se determinar as frequências naturais do sistema e seus respectivos modos, a vibração livre sem amortecimento do sistema é primeiramente considerada.

Então as equações (2.6) são reduzidas para a forma:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_x & -\bar{Z}_{CG}.K_x \\ -\bar{Z}_{CG}.K_x & K_\psi + K_x.\bar{Z}_{CG}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.7)$$

ou

$$[M].[\ddot{X}]+[K].[X] = [0] \qquad (2.8)$$

onde:

$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix}$ é a matriz massa

e

$$[K] = \begin{bmatrix} K_x & -\bar{Z}_{CG}.K_x \\ -\bar{Z}_{CG}.K_x & K_\psi + K_x.\bar{Z}^2_{CG} \end{bmatrix}$$ é a matriz rigidez

Assumindo um movimento harmônico $\ddot{X}=-a_i.X$ onde $a_i=\omega_i^2$, a equação (2.8) torna-se:

$$-a_i[M].[X]+[K].[X]=[0]$$

$$\{-a_i[M]+[K]\}.\{U\} = \{0\} \qquad (2.9)$$

onde:

$$\{U\} = \{X\}$$

Prémultiplicando a equação (2.9) por $[M^{-1}]$, onde $[M^{-1}]$ é a matriz inversa de [M] tem-se:

$$\{-a_i[M^{-1}].[M]+[M^{-1}].[K]\}\{U\} = \{0\}$$

ou

$$\{[M^{-1}].[K]-a_i[I]\}.\{U\} = \{0\} \qquad (2.10)$$

onde $[M^{-1}].[M]=[I]$ é a matriz identidade, de acordo com a definição de matriz inversa.

A equação matricial (2.10) é um conjunto de equações simultâneas em u_i. Para que a solução do sistema de equações não seja trivial, $u_i=0$, o determinante dos coeficientes da equação matricial (2.10) deve ser nulo, então:

$$\left|[M^{-1}].[K]-a_i[I]\right| = 0 \qquad (2.11)$$

que é denominada como *Equação Característica* do sistema. Substituindo os elementos das matrizes na equação (2.11), vem:

$$\left|\begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_\psi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_x & -\bar{Z}_{CG}.K_x \\ -\bar{Z}_{CG}K_x & K_\psi+K_x\,\bar{Z}_{CG}^2 \end{bmatrix} - a_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

onde:

$$[M^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_\psi} \end{bmatrix}$$

ou

$$\left|\begin{bmatrix} \frac{k_x}{m} & -\frac{\bar{Z}_{CG}.K_x}{m} \\ -\frac{\bar{Z}_{CG}.K_x}{I_\psi} & \frac{K_\psi+K_x.\bar{Z}_{CG}^2}{I_\psi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_i \end{bmatrix}\right| = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} \frac{K_x}{m} - a_i & -\frac{\bar{Z}_{CG}.K_x}{m} \\ -\frac{\bar{Z}_{CG}.K_x}{I_\psi} & \frac{K_\psi+K_x.\bar{Z}_{CG}^2}{I_\psi} - a_i \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.12)$$

donde:

$$(\frac{K_x}{m} - a_i).(\frac{K_\psi+K_x.\bar{Z}_{CG}^2}{I_\psi} - a_i) - (-\frac{\bar{Z}_{CG}.K_x}{I_\psi}).(-\frac{\bar{Z}_{CG}.K_x}{m}) = 0$$

ou

$$(\frac{K_x}{m}).(\frac{K_\psi+K_x.\bar{Z}_{CG}^2}{I_\psi}) - \frac{K_x}{m}\cdot a_i - (\frac{K_\psi+K_x.\bar{Z}_{CG}^2}{I_\psi})\,a_i + a_i^2 - \frac{K_x^2.\bar{Z}_{CG}^2}{m.I_\psi} = 0$$

ou

$$a_i^2 - (\frac{K_x}{m} + \frac{K_\psi+K_x.\bar{Z}_{CG}^2}{I_\psi})a_i + (\frac{K_x}{m})(\frac{K_\psi+K_x.\bar{Z}_{CG}^2}{I_\psi}) - \frac{\bar{Z}_{CG}^2.K_x^2}{I_\psi.m} = 0 \qquad (2.13)$$

que é um polinômio em a_i de grau (n) igual ao número de graus de liberdade do sistema dinâmico. As raízes a_i dessa equação cara te

rística são chamadas de *autovalores* e são calculadas como:

$$a_{1,2} = \frac{\left(\frac{K_x}{m} + \frac{K_\psi + K_x \cdot \bar{Z}_{CG}^2}{I_\psi}\right) \pm \left\{\left(\frac{K_x}{m} + \frac{K_\psi + K_x \cdot \bar{Z}_{CG}^2}{I_\psi}\right)^2 - 4\left[\left(\frac{K_x}{m}\right) \cdot \left(\frac{K_\psi + K_x \cdot \bar{Z}_{CG}^2}{I_\psi}\right) - \frac{\bar{Z}_{CG}^2 \cdot K_x^2}{m \cdot I_\psi}\right]\right\}^{1/2}}{2} \tag{2.14}$$

onde a_1 e a_2 são os autovalores.

As frequências naturais (sem amortecimento) do sistema dinâmico são determinadas pela equação:

$$a_i = \omega_i^2 \tag{2.15}$$

2.3.2.2 - Modos Naturais de Vibração

Substituindo a_i na equação matricial (2.10) obtemos o correspondente modo natural ou principal u_i, que é também chamado de *autovetor*.

Assim, para a_1, tem-se:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_\psi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_x & -\bar{Z}_{CG} \cdot K_x \\ -\bar{Z}_{CG} \cdot K_x & K_\psi + K_x \cdot \bar{Z}_{CG}^2 \end{bmatrix} - a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{K_x}{m} & -\frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{m} \\ \frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{I_\psi} & \frac{K_\psi + K_x \cdot \bar{Z}_{CG}^2}{I_\psi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \frac{K_x}{m} - a_1 & -\frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{m} \\ \frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{I_\psi} & \frac{K_\psi + K_x \cdot \bar{Z}_{CG}}{I_\psi} - a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

Donde:

$$(\frac{K_x}{m} - a_1)\, u_1 - (\frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{m})\, u_2 = 0$$

ou

$$u_2 = \frac{(\frac{K_x}{m} - a_1)u_1}{\frac{Z_{CG} \cdot K_x}{m}} \qquad (2.17)$$

Poderíamos também obter u_2 fazendo:

$$-(\frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{I_\psi})u_1 + (\frac{K_\psi + K_x \cdot \bar{Z}^2_{CG}}{I_\psi} - a_1)u_2 = 0$$

ou

$$u_2 = \frac{(\frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{I_\psi})u_1}{\frac{K_\psi + K_x \cdot \bar{Z}^2_{CG}}{I_\psi} - a_1} \qquad (2.17)'$$

é uma equação equivalente à (2.17).

Notamos que, sendo as equações (2.9) homogêneas, não há uma única solução para os valores de u; assim podemos então obter somente uma relação entre as grandezas u's. Portanto, o modo natural de vibração é definido por uma relação de amplitudes de movimento em vários pontos sobre a estrutura quando excitada na frequência natural correspondente. É claro que a amplitude

real depende das condições iniciais e das posições e dos módulos das forças de excitação.

Então o modo natural para a frequência natural ω_1 é:

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dfrac{(\frac{K_x}{m} - a_1)u_1}{\frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{m}} \end{bmatrix}$$

onde u_1 é arbitrário.

Analogamente o modo natural para a_2 é dado por:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_\psi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_x & -\bar{Z}_{CG} \cdot K_x \\ -\bar{Z}_{CG} \cdot K_x & K_\psi + K_x \cdot \bar{Z}_{CG}^2 \end{bmatrix} - a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \frac{K_x}{m} - a_2 & -\frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{m} \\ -\frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{I_\psi} & \frac{K_\psi + K_x \cdot \bar{Z}_{CG}^2}{I_\psi} - a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.18)$$

Donde:

$$(\frac{K_x}{m} - a_2)u_1 - (\frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{m})u_2 = 0$$

ou

$$u_2 = \frac{(\frac{K_x}{m} - a_2) \cdot u_1}{\frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{m}} \qquad (2.19)$$

ou ainda:

$$u_2 = \frac{\frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{I_\psi} u_1}{\frac{K_\psi + K_x \cdot \bar{Z}_{CG}^2}{I_\psi} - a_2} \qquad (2.19)'$$

Portanto, o modo natural para a frequência natural ω_2 é:

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{(\frac{K_x}{m} - a_2)}{\frac{\bar{Z}_{CG} \cdot K_x}{m}} u_1 \end{bmatrix}$$

onde u_1 é arbitrário.

2.4 - VIBRAÇÃO FORÇADA COM AMORTECIMENTO

2.4.1 - MODO VERTICAL

A equação diferencial do movimento do modo vertical é:

$$m.\ddot{z} + C_z.\dot{z} + K_z.z = F_z \qquad (2.1)$$

Usando o método da impedância mecânica, ou seja, fazendo na equação (2.1),

$$F_z = F_o.\text{sen}\omega t = F_o.e^{j\omega t}$$

$$z = Z.e^{j\omega t}$$

Calculando as derivadas:

$$\dot{z} = Z.j.\omega.e^{j\omega t}$$

$$\ddot{z} = -Z.\omega^2.e^{j\omega t}$$

vem:

$$-m.Z.\omega^2.e^{j\omega t} + C_z.Z.j.\omega.e^{j\omega t} + K_z.Z.e^{j\omega t} = F_o.e^{j\omega t}$$

Dividindo por $e^{j\omega t}$, teremos:

$$[-m.\omega^2 + C_z.j.\omega + K_z]Z = F_o$$

ou

$$Z = \frac{F_o}{(K_z - m.\omega^2) + (C_z.\omega)j} \qquad (2.20)$$

A equação (2.20) representa a resposta dinâmica do sistema no modo vertical, cuja amplitude de vibração permanente é:

$$Z = \frac{F_o}{\sqrt{(K_z - m.\omega_z^{\,2})^2 + (C_z.\omega_z)^2}} \qquad (2.21)$$

2.4.2 - MODO HORIZONTAL E ROTACIONAL ACOPLADOS

Temos que as equações dos movimentos são dadas pelas equações (2.2) e (2.3).

$$m.\ddot{x} + C_x(\dot{x} - \bar{Z}_{CG}.\dot{\psi}) + K_x(x - \bar{Z}_{CG}.\psi) = F_o.\cos\omega t \qquad (2.2)$$

$$I_\psi.\ddot{\psi} + (C_\psi + C_x.\bar{Z}_{CG}^2)\dot{\psi} + (K_\psi + K_x.\bar{Z}_{CG}^2)\psi - \bar{Z}_{CG}.C_x.\dot{x} - \bar{Z}_{CG}.K_x.x = F_o.\cos\omega t(H - \bar{Z}_{CG}) \qquad (2.3)$$

Usando novamente o método da Impedância Mecânica, ou seja, substituindo $F_o \cos\omega$ por $F_o.e^{j\omega t}$, x por $X.e^{j\omega t}$ e ψ por $\phi.e^{j\omega t}$ e calculando inicialmente as derivadas, vem:

$$\dot{x} = X.\omega.je^{j\omega t}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2.X.e^{j\omega t}$$

$$\dot{\psi} = \phi.\omega.j.e^{j\omega t}$$

$$\ddot{\psi} = -\omega^2.\phi.e^{j\omega t}$$

Para a equação (2.2):

$$-m.\omega^2.X.e^{j\omega t} + C_x[X.\omega.j.e^{j\omega t} - \bar{Z}_{CG}.\phi.\omega.j.e^{j\omega t}] +$$

$$+K_x[X.e^{j\omega t} - \bar{Z}_{CG}.\phi.e^{j\omega t}] = F_o.e^{j\omega t} \qquad (2.22)$$

Dividindo a equação obtida por $e^{j\omega t}$, temos:

$$-m.\omega^2.X + C_x[X.\omega.j - \bar{Z}_{CG}.\phi.\omega.j] + K_x[X - \bar{Z}_{CG}.\phi] = F_o$$

Rearranjando os termos semelhantes, obtém-se:

$$X[-\omega^2.m + C_x.\omega.j + K_x] + \phi[-C_x.\bar{Z}_{CG}.\omega.j - K_x.\bar{Z}_{CG}] = F_o \qquad (2.23)$$

Para a equação (2.3):

$$-I_\psi.\omega^2.\phi.e^{j\omega t} + [C_\psi + C_x.\bar{Z}^2_{CG}]\phi.\omega.j.e^{j\omega t} + [K_\psi + K_x.\bar{Z}^2_{CG}]\phi.e^{j\omega t} -$$

$$-\bar{Z}_{CG}.C_x.X.\omega.j.e^{j\omega t} - \bar{Z}_{CG}.K_x.X.e^{j\omega t} = F_o.e^{j\omega t}(H - \bar{Z}_{CG}) \qquad (2.24)$$

Dividindo a equação obtida por $e^{j\omega t}$, tem-se:

$$-I_{\psi}.\omega^2.\phi+(C_{\psi}+C_x.\bar{Z}_{CG}^2)\phi.\omega.j+(K_{\psi}+K_x.\bar{Z}_{CG}^2)\phi-\bar{Z}_{CG}.C_x.X.\omega.j-$$

$$-\bar{Z}_{CG}.K_x.X=F_o.(H-\bar{Z}_{CG})$$

Rearranjando os termos semelhantes, vem:

$$X(-\bar{Z}_{CG}.C_x.\omega.j-\bar{Z}_{CG}.K_x)+\phi[-\omega^2.I_{\psi}+(C_{\psi}+C_x.\bar{Z}_{CG}^2).\omega.j+(K_{\psi}+K_x.\bar{Z}_{CG}^2)]=F_o.(H-\bar{Z}_{CG}) \tag{2.25}$$

Assim, ficamos com o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} &X[-\omega^2.m+C_x.\omega.j+K_x]+\phi[-C_x.\bar{Z}_{CG}.\omega.j-K_x.\bar{Z}_{CG}]=F_o \\ &X[-\bar{Z}_{CG}.C_x.\omega.j-\bar{Z}_{CG}.K_x]+\phi[-\omega^2.I_{\psi}+(C_{\psi}+C_x.\bar{Z}_{CG}).\omega.j+(K_{\psi}+K_x.\bar{Z}_{CG}^2)]=F_o.(H-\bar{Z}_{CG}) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Resolvendo o sistema (2.26) pelo Teorema de Cramer, obtém-se:

$$x=\frac{D_x}{D} \qquad e \qquad \phi=\frac{D_{\phi}}{D}$$

$$D_X=\begin{vmatrix} F_o & -C_x.\bar{Z}_{CG}.\omega.j-K_x.\bar{Z}_{CG} \\ F_o(H-\bar{Z}_{CG}) & [-\omega^2.I_{\psi}+(C_{\psi}+C_x.\bar{Z}_{CT}^2)\omega.j+(K_{\psi}+K_x.\bar{Z}_{CG}^2)] \end{vmatrix}=$$

$$=F_o[-\omega^2.I_{\psi}+(C_{\psi}+C_x.\bar{Z}_{CG}^2)\omega.j+(K_{\psi}+K_x.\bar{Z}_{CG}^2)]+F_o(H-\bar{Z}_{CG}).$$

$$.(C_x.\bar{Z}_{CG}.\omega.j+K_x.\bar{Z}_{CG})=+F_o[-\omega^2.I_{\psi}+(K_{\psi}+K_x.\bar{Z}_{CG}^2+(H-\bar{Z}_{CG}).K_x.\bar{Z}_{CG}]+$$

$$+F_o[(C_{\psi}+C_x.\bar{Z}_{CG}^2)+(H-\bar{Z}_{CG})(C_x.\bar{Z}_{CG})]\omega.j=A+Bj$$

$$D_\phi = \begin{vmatrix} -\omega^2.m+C_x.\omega.j+K_x & F_o \\ -\bar{Z}_{CG}.C_x.\omega.j-\bar{Z}_{CG}.K_x & F_o(H-\bar{Z}_{CG}) \end{vmatrix} =$$

$$= F_o(H-\bar{Z}_{CG})[-\omega^2.m+C_x.\omega.j+K_x]+F_o(\bar{Z}_{CG}.C_x.\omega.j+\bar{Z}_{CG}.K_x) =$$

$$= F_o(H-\bar{Z}_{CG})[-\omega^2.m+K_x]+F_o.\bar{Z}_{CG}.K_x+F_o.\bar{Z}_{CG}.C_x.\omega.j+F_o(H-\bar{Z}_{CG}).C_x.\omega.j = C+D.j$$

$$D = \begin{vmatrix} -\omega^2.m+C_x.\omega.j+K_x & -C_x.\bar{Z}_{CG}.\omega.j-K_x.\bar{Z}_{CG} \\ -\bar{Z}_{CG}.C_x.\omega.j-\bar{Z}_{CG}.K_x & [-I_\psi.\omega^2+(C_\psi+C_x.\bar{Z}^2_{CG})\omega.j+(K_\psi+K_x.\bar{Z}^2_{CG})] \end{vmatrix}$$

ou ainda:

$$D = \omega^4.m.I_\psi-\omega^2.m(K_\psi+K_x.\bar{Z}^2_{CG})-K_x.I_\psi.\omega^2+K_x.K_\psi-C_x.\omega^2C_\psi+C_x.\omega.K_\psi.j +$$

$$+ C_\psi.K_x.\omega.j-\omega^3.m(C_\psi+C_x.\bar{Z}^2_{CG}).j-\omega^3.I_\psi.C_x.j = J+K.j$$

Desta maneira, X e ϕ podem ser escritos na forma:

$$X = \frac{A+B.j}{J+K.j} = G+H.j \qquad (2.27)$$

e

$$\phi = \frac{C+D.j}{J+K.j} = L+N.j \qquad (2.28)$$

As amplitudes da vibração serão:

$$X = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{J^2+K^2}} \qquad (2.29) \qquad \phi = \sqrt{\frac{C^2+D^2}{J^2+K^2}} \qquad (2.30)$$

onde:

$$A = F_o[-\omega^2 . I_\psi + K_\psi + K_x . \bar{Z}_{CG}^2 + (H - \bar{Z}_{CG}) . K_x . \bar{Z}_{CG}]$$

$$B = F_o[C_\psi + C_x . \bar{Z}_{CG}^2 + (H - \bar{Z}_{CG})(C_x . \bar{Z}_{CG})]$$

$$C = [-\omega^2 . m + K_x] F_o . (H - \bar{Z}_{CG}) + F_o . K_x . \bar{Z}_{CG}$$

$$D = F_o . \bar{Z}_{CG} . C_x . \omega + F_o . (H - \bar{Z}_{CG}) . C_x . \omega$$

$$J = \omega^4 . m . I_\psi - \omega^2 . m(K_\psi + K_x . \bar{Z}_{CG}^2) - K_x . I_\psi . \omega^2 + K_x . K_\psi - C_x . \omega^2 . C_\psi$$

$$K = -\omega^3 . m(C_\psi + C_x . \bar{Z}_{CG}^2) + C_x . \omega . K_\psi + C_\psi . K_x . \omega - \omega^3 . C_x . I_\psi$$

Desta forma, podemos analisar as amplitudes de vibração na direção vertical pela equação (2.21), na direção horizontal, pela equação (2.27) e na direção rotacional, pela equação (2.28).

CAPÍTULO 3

DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ E AMORTECIMENTO DAS ESTACAS

3.1 - INTRODUÇÃO

A dinâmica de estacas tem recebido especial atenção principalmente devido às suas aplicações em fundações de máquinas e estruturas sob cargas dinâmicas tais como desbalanceamento de massa, desalinhamento, etc. Entretanto, o comportamento dinâmico das estacas não está ainda completamente entendido, visto que a interação solo-estaca é bastante complexa. Não há quaisquer métodos prontamente disponíveis aplicáveis, que incluem esta interação e, como consequência disto, é comum se ignorar inteiramente o solo e atribuir toda rigidez da fundação à rigidez das estacas. Por outro lado, pode-se ignorar a rigidez horizontal e rotacional das estacas, atribuindo toda rigidez dinâmica ao solo. O amortecimento derivado das estacas na prática é apenas suposto.

O objetivo deste capítulo é fornecer uma medida que leve em consideração aproximadamente a interação entre solo-estaca de uma maneira relativamente simples. Tal medida pode ser obtida admitindo-se que o solo seja composto de um conjunto de camadas independentes horizontais infinitesimamente finas que se estendem ao infinito. Admite-se também que as estacas sejam verticais, que não afetem uma à outra, que o movimento da estaca seja harmônico e limitado a um plano vertical. Estas suposições foram bem sucedidas para bases embutidas, segundo BARANOV (1967) [2]; NOVAK e BEREDUGO (1972) [2]; NOVAK e SACHS (1973) [2]; NOVAK (1974) [2]. Em

tão, tanto as reações dinâmicas do solo por unidade de comprimento da estaca quanto a solução da resposta da estaca podem ser descritas por equações condensadas.

3.2 - ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO HORIZONTAL NO PLANO VERTICAL

Consideramos primeiramente os casos em que a estaca é excitada pela translação horizontal e pela rotação de sua cabeça em um plano vertical (Figura 3.1).

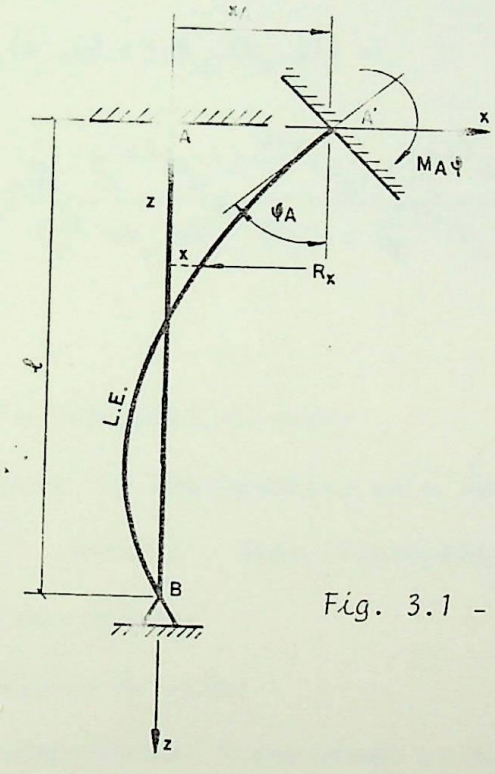

Fig. 3.1 - Translação e rotação no plano horizontal

Quando um elemento dz da estaca sofre um deslocamento horizontal complexo x(z,t) à altura z, ele encontrará uma reação horizontal do solo, que segundo BARANOV (1967) [2]; NOVAK e BEREDUGO (1972) [2], é dada por:

$$R_x = G(S_{u1} + j\, S_{u2})\, x(z,t)\, dz \qquad (3.1)$$

onde:

R_x = reação horizontal do solo à altura z;

G = módulo de elasticidade transversal do solo;

j = imaginário ($\sqrt{-1}$)

S_{u1}, S_{u2} = parâmetros admensionais que dependem da frequência admensional,

$$a_o = r_o . 2\pi f . \sqrt{\frac{\rho}{G}} ,$$

do coeficiente de Poisson μ e são as partes real e imaginária da função complexa abaixo dada por BARANOV (1967) [2].

$$S_u(a_o,\mu) = [S_{u1}(a_o,\mu) + j\ S_{u2}(a_o,\mu)] =$$

$$= 2\pi a_o \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{q}} . H_2^{(2)}(a_o).H_1^{(2)}(x_o) + H_1^{(2)}(x_o).H_1^{(2)}(a_o)}{H_0^{(2)}(a_o).H_2^{(2)}(x_o) + H_0^{(2)}(x_o).H_2^{(2)}(a_o)}\right] \qquad (3.2)$$

onde:

a_o = frequência admensional do solo;

r_o = raio da estaca (ou equivalente, se a estaca não for circular, tem-se $r_o = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$, sendo A = área transversal da estaca;

f = frequência da máquina;

ρ = massa específica do solo;

G = módulo de elasticidade transversal do solo;

$q = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}$

$x_o = a_o \sqrt{2}$

$H_n^{(2)}$ = funções de Hankel de segunda espécie de ordem n, ou seja:

$$H_n^{(2)} = J_n(x) - j.Y_n(x) \qquad (3.3)$$

J_n, Y_n = Funções de Bessel, de primeira e segunda espécie de ordem n, respectivamente.

Os parâmetros S_{u1} e S_{u2} podem ser obtidos pela equação (3.2) para vários valores de μ e a_o, que segundo NOVAK e BEREDUGO (1972) [2], são dados conforme Figura 3.2.

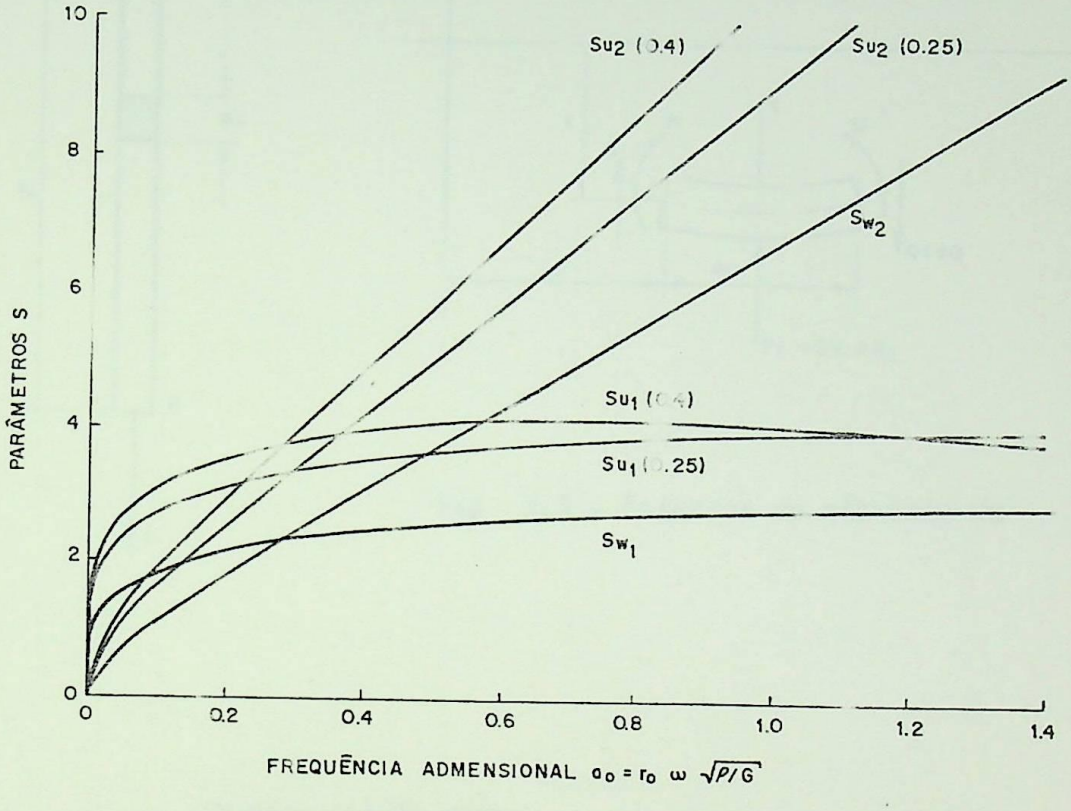

Fig. 3.2 - Parâmetros Su_1, Su_2, S_{w1} e S_{w2} (coeficiente de Poisson entre parênteses)

Com a reação do solo dada pela equação (3.1), podemos obter a equação diferencial do movimento para a vibração horizontal amortecida da estaca.

3.3 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO MOVIMENTO PARA A VIBRAÇÃO AMORTECIDA HORIZONTAL DA ESTACA

A equação diferencial de movimento para a vibração transversal pode ser deduzida a partir da equação diferencial da linha elástica de vigas, estudada na resistência dos materiais.

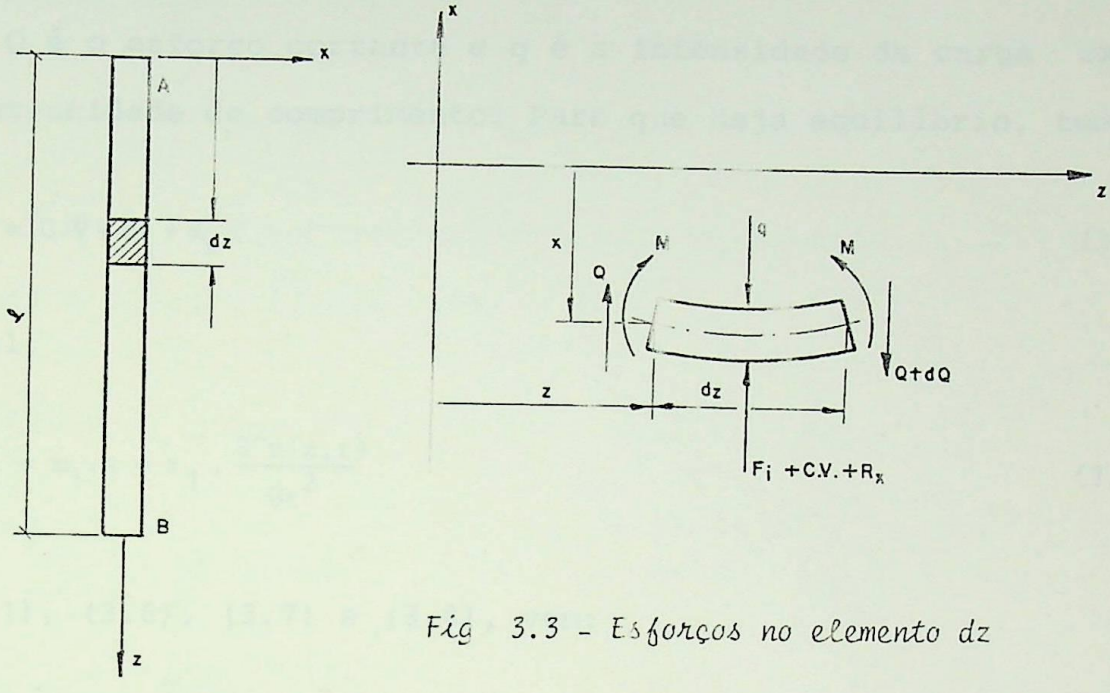

Fig 3.3 - Esforços no elemento dz

Temos então que:

$$EI \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} = M(z,t) \quad \text{(Equação diferencial da linha elástica)} \qquad (3.4$$

Nesta equação, EI é o módulo de rigidez à flexão da estaca, M(z,t) é o momento fletor em uma seção e x é a deflexão da viga.

Supondo EI constante e derivando a equação (3.4) duas vezes, obtém-se:

$$EI \frac{\partial^3 x(z,t)}{\partial z^3} = \frac{\partial M(z,t)}{\partial z} = Q \qquad (3.5)$$

$$EI \frac{\partial^4 x(z,t)}{\partial z^4} = \frac{\partial Q}{\partial z} = -q \qquad (3.6)$$

onde: Q é o esforço cortante e q é a intensidade da carga externa, por unidade de comprimento. Para que haja equilíbrio, temos:

$$q = C.V + F_i + R_x \qquad (3.7)$$

na qual,

$$F_i = m_1.a = m_1 . \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} \qquad (3.8)$$

De (3.1), (3.6), (3.7) e (3.8), vem:

$$EI \frac{\partial^4 x(z,t)}{\partial z^4} = -C.V - m_1 . \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} - G(S_{u1}+j.S_{u2})\, x(z,t)dz \qquad (3.9)$$

Tomando-se dz=1, tem-se:

$$EI \frac{\partial^4 x(z,t)}{\partial z^4} = - C . \frac{\partial x(z,t)}{\partial t} - m_1 . \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} - G (S_{u1} + j . S_{u2})\, x(z,t) \qquad (3.10)$$

ou

$$m_1 . \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} + C . \frac{\partial x(z,t)}{\partial t} + G(S_{u1}+j.S_{u2})\, x(z,t) + EI \frac{\partial^4 x(z,t)}{\partial z^4} = 0 \qquad (3.11)$$

Na qual, m_1 é massa da estaca por unidade de comprimento e C é o amortecimento interno da estaca.

Admitindo um movimento harmônico induzido através da cabeça da estaca, uma solução do estado permanente para a equação (3.11) pode ser escrita como:

$$x(z,t) = x(z).e^{j\omega t} \qquad (3.12)$$

onde a amplitude complexa é:

$$x(z) = x_1(z) + j.x_2(z) \qquad (3.13)$$

Calculando as derivadas da equação (3.12) necessárias para equação (3.11), vem:

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = x(z).j.\omega.e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} = -\omega^2.x(z).e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial z} = \frac{dx(z)}{dz} . e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} = \frac{d^2x(z)}{dz^2} . e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^3 x(z,t)}{\partial z^3} = \frac{d^3x(z)}{dz^3} . e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^4 x(z,t)}{\partial z^4} = \frac{d^4x(z)}{dz^4} . e^{j\omega t}$$

Substituindo estas derivadas na equação (3.11), tem-se:

$$-m_1.\omega^2.x(z).e^{j\omega t} + C.j.\omega.x(z).e^{j\omega t} + G(S_{u1}+jS_{u2}).x(z).e^{j\omega t} +$$

$$+ EI . \frac{d^4x(z)}{dz^4} . e^{j\omega t} = 0$$

ou

$$EI \frac{d^4x(z)}{dz^4} + x(z) \left[G.S_{u1} - m_1.\omega^2 + j(C.\omega + G.S_{u2})\right] = 0 \qquad (3.14)$$

ou

$$\frac{d^4x(z)}{dz^4} + \frac{x(z)}{EI} \left[G.S_{u1} - m_1.\omega^2 + j(C.\omega + G.S_{u2})\right] = 0 \qquad (3.15)$$

A equação (3.15) é a equação diferencial do movimento vibratório horizontal da estaca.

Vejamos a solução geral da equação (3.15).

Fazendo,

$$\lambda = \ell . \sqrt[4]{\frac{1}{EI} \left[+m_1.\omega^2 - G.S_{u1} - j(C.\omega + G.S_{u2})\right]} \qquad (3.16)$$

a equação (3.15) torna-se:

$$\frac{d^4x(z)}{dz^4} - \frac{\lambda^4}{\ell^4} .x(z) = 0 \qquad 3.17)$$

Usando o operador $D^4 = \frac{d^4}{dz^4}$, vem:

$$(D^4 - \frac{\lambda^4}{\ell^4}) \; x(z) = 0 \qquad (3.18)$$

onde:

$$D_1 = + \frac{\lambda}{\ell} \qquad D_3 = + \frac{\lambda}{\ell} .j$$

$$D_2 = - \frac{\lambda}{\ell} \qquad D_4 = - \frac{\lambda}{\ell} .j$$

A solução geral da equação (3.18) é do tipo:

$$x(z) = C_1'.e^{-\frac{\lambda}{\ell}z} + C_2'.e^{\frac{\lambda}{\ell}z} + C_3.\cos\frac{\lambda z}{\ell} + C_4.\operatorname{sen}\frac{\lambda z}{\ell}$$

ou

$$x(z) = C_1'(\cosh\frac{\lambda z}{\ell} - \operatorname{senh}\frac{\lambda z}{\ell}) + C_2'(\cosh\frac{\lambda z}{\ell} + \operatorname{senh}\frac{\lambda z}{\ell}) + C_3.\cos\frac{\lambda z}{\ell} + C_4.\operatorname{sen}\frac{\lambda z}{\ell}$$

ou

$$x(z) = C_1.\cosh\frac{\lambda z}{\ell} + C_2.\operatorname{senh}\frac{\lambda z}{\ell} + C_3.\cos\frac{\lambda z}{\ell} + C_4.\operatorname{sen}\frac{\lambda z}{\ell} \qquad (3.19)$$

A equação (3.19) é a solução geral da equação (3.15), onde o parâmetro complexo de frequência é dado pela equação (3.16).

A equação (3.16 pode ser escrita de forma mais conveniente, fazendo-se:

$$\lambda_o = \ell \sqrt[4]{\frac{m_1.\omega^2}{EI}}$$

$$L = \frac{\ell^4.G}{EI} \qquad (3.20)$$

$$a = \lambda_o^4 - L.S_{u1}$$

$$b = -L(C.\omega.\frac{1}{G} + S_{u2})$$

Então a equação (3.16) torna-se:

$$\lambda = \sqrt[4]{a+b.j} \qquad (3.21)$$

ou

$$\lambda = \lambda_1 + j.\lambda_2 \qquad (3.22)$$

na qual:

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{r} \cdot \cos\frac{\phi}{4} \qquad e \qquad \lambda_2 = \sqrt[4]{r} \cdot \operatorname{sen}\frac{\phi}{4} \tag{3.23}$$

onde:

$$r = \sqrt[2]{a^2+b^2}$$
$$\operatorname{tg}\phi = \frac{b}{a} \tag{3.24}$$

Para uma estaca de seção transversal circular, os parâmetros λ_o e L podem ser escritos como:

$$\lambda_o = \sqrt[4]{\frac{m_1 \cdot \omega^2}{EI}} = \ell \cdot \sqrt[4]{\frac{m_1}{E} \cdot \frac{a_o^2 \cdot G}{r_o^2 \cdot \rho} \cdot \frac{4}{\pi r_o^4}} =$$

$$= \frac{\ell}{r_o} \cdot \sqrt[4]{\frac{4a_o^2 \cdot G}{E \cdot \rho} \cdot \frac{m_1}{\pi r_o^2}} = \frac{\ell}{r_o} \cdot \sqrt[2]{a_o} \cdot \sqrt[4]{\frac{4G}{E} \cdot \frac{\rho_p}{\rho}}$$

$$\lambda_o = \frac{\ell}{r_o} \cdot \sqrt[2]{2\,\frac{V_s}{V_c} \cdot a_o} \tag{3.25}$$

onde:

$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ = velocidade da onda transversal no solo

$V_c = \sqrt{\frac{E}{\rho_p}}$ = velocidade da onda longitudinal na estaca (3.26)

$\frac{\ell}{r_o}$ = índice de esbeltez da estaca

e

$$L = \frac{\ell^4 . G}{EI} = \frac{4G . \ell^4}{E . \pi . r_o^4}$$

$$L = \frac{4}{\pi} . \left(\frac{\ell}{r_o}\right)^4 . \frac{\rho}{\rho_p} . \left(\frac{V_s}{V_c}\right)^2 \qquad (3.27)$$

onde:

$$\frac{\rho}{\rho_p} = \frac{\text{massa específica do solo}}{\text{massa específica da estaca}}$$

3.4 - CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO (3.19)

As constantes de integração da equação (3.19) são determinadas pelas condições de contorno da estaca, as quais necessitam das derivadas da equação (3.19).

Derivadas da equação (2.19):

$$\frac{dx(z)}{dz} = \frac{\lambda}{\ell} \left(C_1 . \text{senh}\, \frac{\lambda z}{\ell} + C_2 . \cosh \frac{\lambda z}{\ell} - C_3 . \text{sen}\, \frac{\lambda z}{\ell} + C_4 . \cos \frac{\lambda z}{\ell}\right)$$

$$\frac{d^2x(z)}{dz^2} = \frac{\lambda^2}{\ell^2} \left(C_1 . \cosh \frac{\lambda z}{\ell} + C_2 . \text{senh}\, \frac{\lambda z}{\ell} - C_3 . \cos \frac{\lambda z}{\ell} - C_4 . \text{sen}\, \frac{\lambda z}{\ell}\right) \qquad (3.28)$$

$$\frac{d^3x(z)}{dz^3} = \frac{\lambda^3}{\ell^3} \left(C_1 . \text{senh}\, \frac{\lambda z}{\ell} + C_2 . \cosh \frac{\lambda z}{\ell} + C_3 . \text{sen}\, \frac{\lambda z}{\ell} - C_4 . \cos \frac{\lambda z}{\ell}\right)$$

Com essas derivadas podemos escrever que o momento fletor e o esforço cortante são:

$$M = EI . \frac{d^2x(z)}{dz^2}$$

$$Q = EI . \frac{d^3x(z)}{dz^3} \qquad (3.29)$$

3.5 - CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO PARA ESTACAS RIGIDAMENTE ENGASTADA AO BLOCO E APOIADA NA EXTREMIDADE INFERIOR

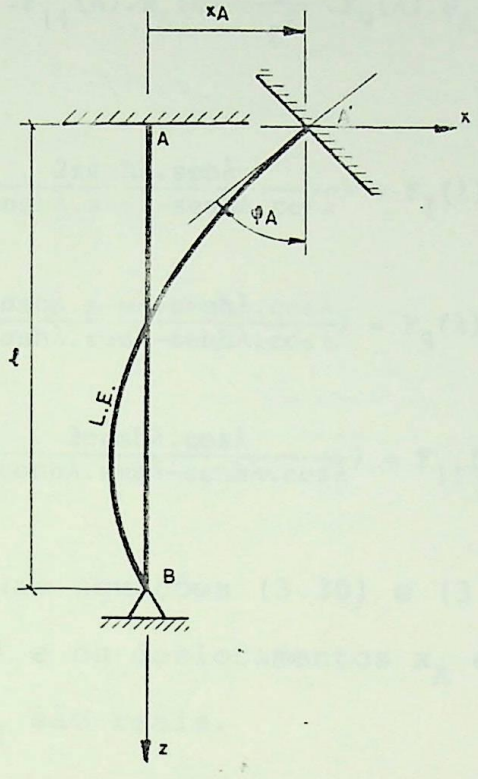

Fig. 3.4 - Estaca engastada na extremidade superior e fixa na inferior

Temos as seguintes condições de contorno:

1) Para $z=0$, o deslocamento horizontal $x(0) = x_A$;

2) Para $z=0$, o deslocamento angular $\psi(0) = \psi_A$, ou seja $\frac{dx(0)}{dz} = \psi_A$;

3) Para $z=\ell$, o deslocamento horizontal $x(\ell) = 0$;

4) Para $z=\ell$, o momento fletor $M(\ell)=0$, ou seja $\frac{d^2x(\ell)}{dz} = 0$.

Com as constantes assim obtidas e pelas equações (3.28) e (3.29), podemos obter o momento e reação horizontal na cabeça da estaca, fazendo $z=0$. Assim:

$$M_{\varphi A}(t) = \frac{E_p I}{\ell^2} \cdot F_9(\lambda) \cdot x_A(t) + \frac{E_p I}{\ell} \cdot F_7(\lambda) \cdot \varphi_A(t)$$

$$R_{xA}(t) = \frac{E_p I}{\ell^3} \cdot F_{11}(\lambda) \cdot x_A(t) - \frac{E_p I}{\ell^2} \cdot F_9(\lambda) \cdot \varphi_A(t) \qquad (3.30)$$

onde:

$$F_7(\lambda) = -\lambda \left(\frac{2\,\mathrm{senh}\lambda \cdot \mathrm{sen}\lambda}{\cosh\lambda \cdot \mathrm{sen}\lambda - \mathrm{senh}\lambda \cdot \cos\lambda}\right) = F_7(\lambda)_1 + j \cdot F_7(\lambda)_2$$

$$F_9(\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{\cosh\lambda \cdot \mathrm{sen}\lambda + \mathrm{senh}\lambda \cdot \cos\lambda}{\cosh\lambda \cdot \mathrm{sen}\lambda - \mathrm{senh}\lambda \cdot \cos\lambda}\right) = F_9(\lambda)_1 + j \cdot F_9(\lambda)_2 \qquad (3.31)$$

$$F_{11}(\lambda) = -\lambda^3 \left(\frac{2\cosh\lambda \cdot \cos\lambda}{\cosh\lambda \cdot \mathrm{sen}\lambda - \mathrm{senh}\lambda \cdot \cos\lambda}\right) = F_{11}(\lambda)_1 + j \cdot F_{11}(\lambda_2)$$

Nas equações (3.30) e (3.31), as reações M_A e R_{xA}, as funções $F_i(\lambda)$ e os deslocamentos x_A e φ_A são complexos; as funções $F_i(\lambda)_{1,2}$ são reais.

O índice 1 das funções $F_i(\lambda)_1$ se relaciona com a rigidez dinâmica e o índice 2 das funções $F_j(\lambda)_2$ se relaciona com o amortecimento.

As funções F dependem fortemente da razão de velocidade da onda $\frac{V_s}{V_c}$ (rigidez do solo). Isto pode ser visto na figura 3.5, na qual são mostradas as funções $F_{11}(\lambda_1)$ e $\frac{F_{11}}{a_o}(\lambda_2)$ para alguns valores da razão da velocidade.

O amortecimento interno da estaca foi desprezado (c=0), pois ele é muito menor do que o amortecimento do solo.

As funções F poderiam ser usadas conforme as equações (3.31), no entanto, será estudado mais tarde que os resultados podem ser apresentados sob outra forma que elimina a necessidade de seus cálculos nas aplicações práticas.

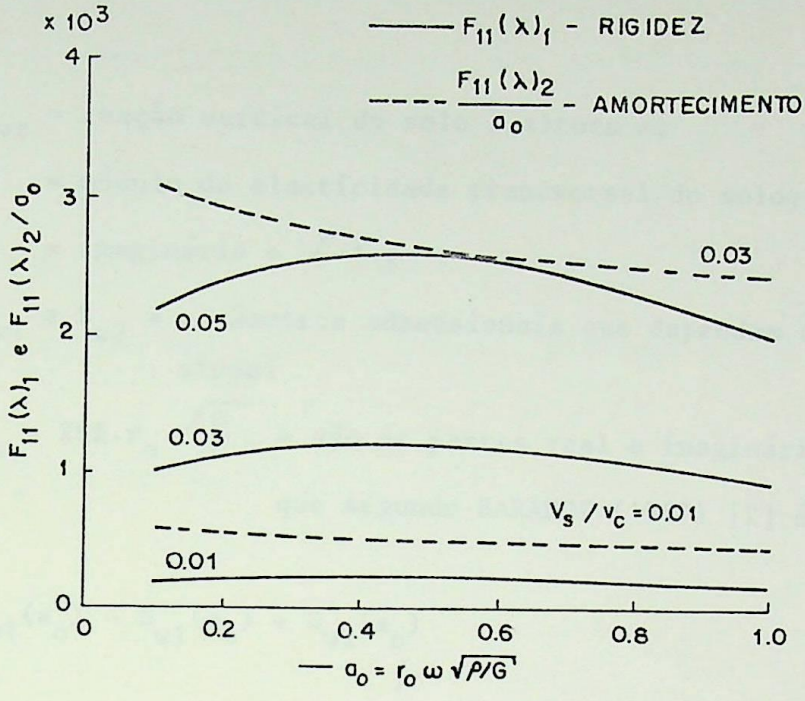

Fig. 3.5 - Variações na função $F_{11}(\lambda)$ com a frequência a_o e V_s/V_c

($\frac{\ell}{r_o} = 40$, $\frac{\rho}{\rho_p} = 0,70$ e $\mu = 0,40$)

3.6 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO MOVIMENTO PARA A VIBRAÇÃO AMORTECIDA VERTICAL DA ESTACA

As reações dinâmicas da estaca pertinentes ao movimento vertical da estaca podem ser obtidas usando as mesmas suposições para o solo como no movimento horizontal.

Admitindo que a extremidade inferior da estaca seja fixa, a reação vertical do solo que atua à altura z no elemento dz da estaca, segundo BARANOV (1964) [2]; NOVAK e BEREDUGO (1972) [2] é:

$$R_{vz} = G(S_{w1} + j.S_{w2})\, w(z,t)dz \qquad (3.32)$$

onde:

R_{vz} = reação vertical do solo à altura z;

G = módulo de elasticidade transversal do solo;

j = imaginário = $\sqrt{-1}$;

S_{w1} e S_{w2} = parâmetros admensionais que dependem da frequência admensional

$a_o = 2\pi f.r_o \sqrt{\frac{\rho}{G}}$ e são as partes real e imaginária da função complexa, que segundo BARANOV (1967) [2] é:

$$S_{w1}(a_o) = S_{w1}(a_o) + S_{w2}(a_o) \tag{3.33}$$

onde:

$$S_{w1}(a_o) = 2\pi a_o \left[\frac{J_1(a_o).J_o(a_o)+Y_1(a_o).Y_o(a_o)}{J_o^{\,2}(a_o) + Y_o^{\,2}(a_o)}\right] \tag{3.34}$$

e

$$S_{w2}(a_o) = \frac{4}{J_o^{\,2}(a_o)+Y_o^{\,2}(a_o)} \tag{3.35}$$

nas quais:

J_o e J_1 = funções de Bessel de primeira espécie de ordem zero e um, respectivamente.

$Y_o(a_o)$, $Y_1(a_o)$ = funções de Bessel de segunda espécie e ordem zero e um, respectivamente.

Os parâmetros S_{w1} e S_{w2} podem ser obtidos pela equação (3.34) para vários valores de a_o que, segundo NOVAK e BEREDUGO (1972)[2], obtém-se pelo gráfico da figura (3.2).

Com as reações do solo definidas pela equação (3.32), a equação diferencial do movimento vertical amortecido será obtido a seguir.

Considere um elemento dz da estaca. Se w é o deslocamento em z, o deslocamento em z + dz será w + dw, ou seja, $w + \frac{\partial w}{\partial z} . dz$. É evidente então que o elemento dz na nova posição mudou em comprimento de uma quantidade $\frac{\partial w}{\partial z} . dz$, e, desta forma, a deformação específica longitudinal será $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Pela Lei de Hooke, podemos então escrever:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ (Lei de Hooke)} \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} = \frac{P}{A.E_p} \tag{3.38}$$

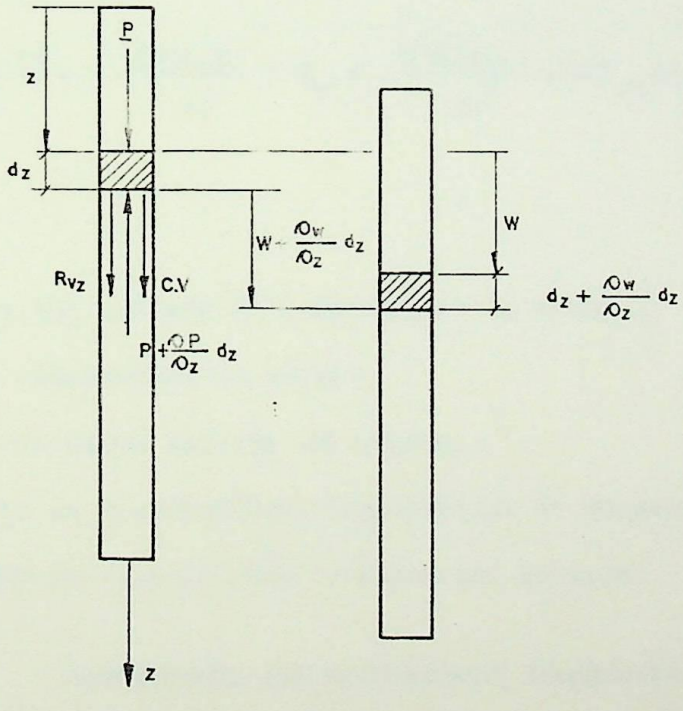

Fig. 3.6 - Deslocamentos e esforços no elemento dz da estaca

Aplicando a Lei de Movimento de Newton, teremos:

$$R = m.a \tag{3.38}$$

$$P + \frac{\partial P}{\partial z}\, dz - P - C \cdot \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} - R_{vz} = m_1 \cdot \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} \tag{3.39}$$

Diferenciando a equação (3.38), substituindo em (3.39), com (3.32), vem:

$$A.E_p \cdot \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial P}{\partial z} \tag{3.40}$$

$$A.E_p \cdot \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} \cdot dz - C \cdot \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} - G(S_{w1} + j.S_{w2})\ w(z,t).dz = m_1 \cdot \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} \tag{3.41}$$

Tomando dz=1, teremos:

$$m_1 \cdot \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} + C \cdot \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} - E_p.A \cdot \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} + G(S_{w1}+j.S_{w2})\ w(z,t) = 0 \tag{3.42}$$

na qual:

m_1 = massa por unidade de comprimento da estaca;

A = área transversal da estaca;

C = amortecimento interno da estaca;

E_p = módulo de elasticidade longitudinal do material da estaca;

G = módulo de elasticidade transversal do solo.

Assumindo um movimento harmônico induzido através da cabeça da estaca, uma solução do estado permanente para a equação (3.42), é:

$$w(z,t) = w(z).e^{j\omega t} \tag{3,43}$$

onde:

$$w(z) = w_1(z) + j.w_2(z) \tag{3.44}$$

é a amplitude complexa.

Derivando a equação (3.43), obtemos:

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} = \frac{dw(z)}{dz} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} = \frac{d^2 w(z)}{dz^2} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial t} = w(z) \cdot e^{j\omega t} \cdot \omega \cdot j$$

$$\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} = -w(z) \cdot e^{j\omega t} \cdot \omega^2$$

Substituindo estas derivadas na equação (3.42), vem:

$$-m_1 . w(z) . \omega^2 . e^{j\omega t} + c . \omega . j . w(z) . e^{j\omega t} + G(S_{w1} + jS_{w2})\ w(z) . e^{j\omega t} -$$

$$-E_p . A \left[\frac{d^2 w(z)}{dz^2} . e^{j\omega t}\right] = 0$$

ou

$$E_p . A . \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + [m_1 . \omega^2 - G . S_{w1} - j(C . \omega + G . S_{w2})]\ w(z) = 0 \qquad (3.45)$$

A equação (3.45) é a equação diferencial do movimento vibratório vertical da estaca.

Vejamos a solução geral da equação (3.45).

Fazendo,

$$\lambda = \ell \sqrt[2]{\frac{1}{E_p . A} [m_1 . \omega^2 - G . S_{w1} - j(C . \omega + G . S_{w2})]} \qquad (3.46)$$

A equação (3.45) torna-se:

$$\frac{d^2w(z)}{dz^2} + \frac{\lambda^2}{\ell^2} . w(z) = 0 \qquad (3.47)$$

A solução da equação (3.47) é:

$$w(z) = C_5 . \cos\lambda \frac{z}{\ell} + C_6 . \operatorname{sen}\lambda \frac{z}{\ell} \qquad (3.48)$$

A equação (3.48) é a solução geral da equação (3.45), onde o parâmetro complexo de frequência é dado pela equação (3.46).

A equação (3.46) pode ser escrita de forma mais conveniente, fazendo-se:

$$\lambda_o = \ell . \sqrt[2]{\frac{m_1 . \omega^2}{E_p . A}}$$

$$K = \frac{\ell^2 . G}{E_p . A} \qquad (3.49)$$

$$a = \lambda_o^2 - K . S_{w1}$$

$$b = -K\left(\frac{C . \omega}{G} + S_{w2}\right)$$

Com isto a equação (3.46) torna-se:

$$\lambda = \sqrt[2]{a+b.j} = \lambda_1 + j . \lambda_2 \qquad (3.50)$$

onde:

$$\lambda_1 = \sqrt[2]{r} . \cos\frac{\phi}{2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_1 = \sqrt{r} . \operatorname{sen}\frac{\phi}{2} \qquad (3.51)$$

com:

$$r = \sqrt[2]{a^2 + b^2} \qquad (3.52)$$

$$tg\phi = \frac{b}{a}$$

Para uma estaca de seção circular, os parâmetros λ_o e K podem ser escritos como:

$$\lambda_o = \ell \sqrt[2]{\frac{m_1 \cdot \omega^2}{E_p \cdot A}} = \ell \sqrt[2]{\frac{m_1}{E_p \cdot A} \cdot \frac{a_o^2 \cdot G}{r_o^2 \cdot \rho}} = \frac{a_o \cdot \ell}{r_o} \sqrt[2]{\frac{m_1}{A} \frac{G}{E_p \cdot \rho}} =$$

$$= \frac{\ell}{r_o} \cdot a_o \cdot \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho} \cdot \frac{G}{E_p}}$$

ou

$$\lambda_o = \frac{\ell}{r_o} \cdot \frac{V_s}{V_c} \cdot a_o \qquad (3.53)$$

em que são válidas as mesmas equações dadas por (3.26), e

$$K = \frac{\ell^2 \cdot G}{E_p \cdot A} = \frac{\ell^2}{E_p} \cdot \frac{G}{\pi r_o^2} = \left(\frac{\ell}{r_o}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{G}{E_p}$$

ou

$$K = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\rho}{\rho_p} \left(\frac{V_s}{V_c} \cdot \frac{\ell}{r_o}\right)^2 \qquad (3.54)$$

3.7 - CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO (3.48)

A força concentrada em um elemento dz da estaca é:

$$N(z) = E_p \cdot A \cdot \frac{dw(z)}{dz} \qquad (3.55)$$

Derivando a equação (3.48) temos:

$$\frac{dw(z)}{dz} = -C_5 \cdot \frac{\lambda}{\ell} \cdot \operatorname{sen}\lambda \frac{z}{\ell} + C_6 \cdot \frac{\lambda}{\ell} \cdot \cos \frac{\lambda z}{\ell} \qquad (3.56)$$

Então:

$$N(z) = E_p . A[-C_5 . \frac{\lambda}{\ell} . \text{sen}\ \frac{\lambda z}{\ell} + C_6 . \frac{\lambda}{\ell} . \cos\ \frac{\lambda z}{\ell}] \qquad (3.57)$$

Considerando uma estaca rigidamente engastada ao bloco e apoiada na extremidade inferior, temos as seguintes condições de contorno.

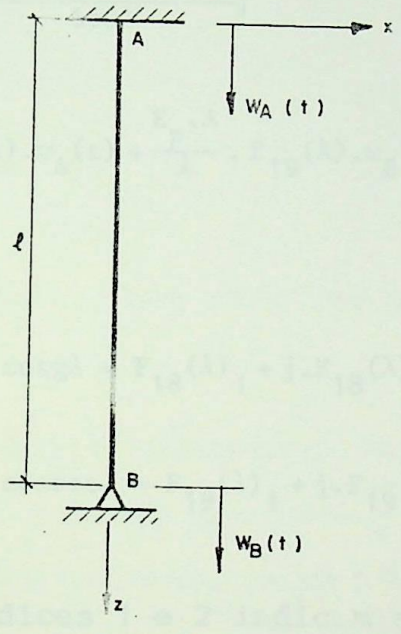

Fig. 3.7 - Deslocamentos verticais na estaca

1) Para z=0 o deslocamento $w(0)=w_A(t)$, então:

$$w(0) = w_A(t) = C_5$$

2) Para z=ℓ, o deslocamento vertical $w(\ell)=w_B(t)$, então:

$$w(\ell) = w_B(t) = C_5 . \cos\lambda + C_6 . \text{sen}\lambda$$

$$C_6 = \frac{w_5(t) - w_A(t) . \cos\lambda}{\text{sen}\lambda}$$

com isto:

$$N(z) = R_{vz}(t) = E_p.A[-w_A(t) \cdot \frac{\lambda}{\ell} \cdot \operatorname{sen}\lambda \frac{z}{\ell} + (\frac{w_B(t)-w_A(t).\cos\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}).\frac{\lambda}{\ell}.\cos\lambda\frac{z}{\ell}] \tag{3.58}$$

Fazendo z=0 na equação (3.58), teremos a força axial na cabeça da estaca, dada por:

$$R_{vz}(t) = -\frac{E_p.A.\lambda}{\ell}[\frac{w_B(t)-w_A(t).\cos\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}]$$

ou

$$R_{vz} = -\frac{E_p.A}{\ell}.F_{18}(\lambda).w_A(t) + \frac{E_p.A}{\ell}.F_{19}(\lambda).w_B(t) \tag{3.59}$$

onde:

$$F_{18}(\lambda) = \frac{\lambda\cos\lambda}{\operatorname{sen}\lambda} = \lambda.\operatorname{cotg}\lambda = F_{18}(\lambda)_1 + j.F_{18}(\lambda)_2$$

$$F_{19}(\lambda) = \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\lambda} = \lambda.\operatorname{cossec}\lambda = F_{19}(\lambda)_1 + j.F_{19}(\lambda)_2 \tag{3.60}$$

Os índices 1 e 2 indicam as partes real e imaginária das funções $F_j(\lambda)$, que se relacionam com a rigidez dinâmica e amortecimento, respectivamente.

Posteriormente as funções das equações (3.60) serão apresentados por gráficos, que eliminam a necessidade de seus cálculos nas aplicações práticas.

3.8 - CONSTANTES DE AMORTECIMENTO E RIGIDEZ DAS ESTACAS (INDIVIDUAIS)

Com os esforços obtidos anteriormente, é possível se determinar as constantes de rigidez e amortecimento das esta

cas. Calcularemos as constantes de rigidez e amortecimento, considerando cada direção do movimento vibratório.

3.8.1 - MOVIMENTO VERTICAL

Se a estaca vibrar apenas na direção vertical, a equação (3.59), para $w_B(t)=0$ (ponta fixa), torna-se:

$$R_{vz}(t) = -\frac{E_p.A}{\ell} . F_{18}(\lambda).w_A(t)$$

ou

$$R_{vz}(t) = -\frac{E_p.A}{\ell} [F_{18}(\lambda)_1+j.F_{18}(\lambda)_2] w_A(t) \qquad (3.61)$$

3.8.1.1 - Constante de rigidez para uma estaca na direção vertical (K_z^1)

A constante de rigidez vertical de uma estaca pode ser calculada como a força que produz um deslocamento unitário na cabeça da estaca, ou seja, $w_A(t)=1$. Então a equação (3.61) se torna (tomando-se a parte real):

$$R_{vz} = K_z^1 = \frac{E_p.A}{\ell} .F_{18}(\lambda)_1 \qquad (3.62)$$

Multiplicando-se e dividindo-se por r_o, a expressão anterior, teremos:

$$K_z^1 = \frac{E_p.A}{\ell.r_o} . F_{18}(\lambda)_1.r_o = \frac{E_p.A}{r_o} . \frac{F_{18}(\lambda)_1}{(\frac{\ell}{r_o})}$$

fazendo:

$$f_{18,1} = \frac{F_{18}(\lambda)_1}{(\frac{\ell}{r_o})} \qquad (3.63)$$

a equação anterior fica:

$$K_z^1 = \frac{E_p.A}{r_o} \cdot f_{18,1} \qquad (3.64)$$

Esta equação permite calcular a constante de rigidez vertical de uma estaca. Nesta equação temos:

$f_{18,1}$ = parâmetro de rigidez vertical;

$\frac{\ell}{r_o}$ = "esbeltez" da estaca

A = área da seção transversal da estaca;

r_o = raio da estaca, ou equivalente, se a estaca não for circular;

E_p = módulo de elasticidade longitudinal do material da estaca.

3.8.1.2 - Constante de amortecimento para uma estaca na direção vertical (C_z^1)

Da equação (3.61) temos a parte imaginária relacionada com o amortecimento que é dada por:

$$R_{vz} = \frac{E_p.A}{\ell} \cdot F_{18}(\lambda)_2 . w_A(t) \qquad (3.65)$$

mas,

$$R_{vz} = C.V = C_z^1 \cdot \frac{dw_A(t)}{dt} = C_z^1 . \omega . w_A(t)$$

Substituindo em (3.65) teremos:

$$C_z^1 . \omega . w_A(t) = \frac{E_p.A}{\ell} \cdot F_{18}(\lambda)_2 . w_A(t)$$

ou

$$C_z^1 = \frac{E_p.A}{\ell.\omega} \cdot F_{18}(\lambda)_2 \qquad (3.66)$$

Como:

$$\omega = \frac{a_o}{r_o} \cdot V_s$$

vem:

$$C_z^1 = \frac{E_p \cdot A \cdot F_{18}(\lambda)_2}{\ell \cdot \frac{a_o}{r_o} \cdot V_s} \qquad (3.67)$$

Fazendo

$$f_{18,2} = \frac{F_{18}(\lambda)_2}{\frac{a_o \cdot \ell}{r_o}} \qquad (3.68)$$

temos:

$$C_z^1 = \frac{E_p \cdot A}{V_s} \cdot f_{18,2} \qquad (3.69)$$

onde $f_{18,2}$ é o parâmetro de amortecimento vertical.

3.8.2 - MOVIMENTO HORIZONTAL

Se a estaca vibrar apenas na direção horizontal, a equação (3.30), para $\psi_A(t)=0$ (engastada no bloco), torna-se:

$$R_{xA}(t) = \frac{E_p \cdot I}{\ell^3} \cdot F_{11}(\lambda) \cdot x_A(t)$$

$$R_{xA}(t) = \frac{E_p \cdot I}{\ell^3} [F_{11}(\lambda)_1 + j \cdot F_{11}(\lambda)_2] \, x_A(t) \qquad (3.70)$$

3.8.2.1 - Constante de rigidez para uma estaca na direção horizontal (K_x^1)

Essa constante de rigidez pode ser determinada como no caso anterior, ou seja, fazendo $x_A(t)=1$ e tomando apenas a

parte real da equação (3.70), que se relaciona com a rigidez horizontal da estaca.

$$R_{xA}(t) = K_x^1 = \frac{E_p.I}{\ell^3} \cdot F_{11}(\lambda)_1 \qquad (3.71)$$

Multiplicando-se e dividindo-se a equação (3.72) por r_o^3, vem:

$$K_x^1 = \frac{E_p.I}{r_o^3.\ell^3} \cdot F_{11}(\lambda)_1 \cdot r_o^3 = \frac{E_p.I}{r_o^3} \cdot \frac{F_{11}(\lambda)_1}{(\frac{\ell}{r_o})^3}$$

Fazendo:

$$f_{11,1} = \frac{F_{11}(\lambda)_1}{(\frac{\ell}{r_o})^3} \qquad (3.72)$$

$$K_x^1 = \frac{E_p.I}{r_o^3} \cdot f_{11,1} \qquad (3.73)$$

onde $f_{11,1}$ é o parâmetro de rigidez horizontal. Com esta equação (3.73) obtemos a constante de rigidez horizontal para uma estaca.

3.8.2.2 - Constante de amortecimento para uma estaca na direção horizontal (C_x^1)

Da equação (3.70) temos a parte imaginária que se relaciona com o amortecimento, que é dada por:

$$R_{xA}(t) = \frac{E_p.I}{\ell^3} [F_{11}(\lambda)_2 . x_A(t)] \qquad (3.74)$$

como:

$$R_{xA}(t) = C_x^{\,1} \cdot \frac{dx_A(t)}{dt} = C_x^{\,1} \cdot \omega \cdot x_A(t)$$

vem:

$$C_x^{\,1} \cdot \omega \cdot x_A(t) = \frac{E_p \cdot I}{\ell^3} [F_{11}(\lambda)_2 \cdot x_A(t)]$$

ou

$$C_x^{\,1} = \frac{E_p \cdot I}{\ell^3 \cdot \omega} \cdot F_{11}(\lambda)_2 \qquad (3.75)$$

como

$$\omega = \frac{a_o}{r_o} \cdot V_s$$

temos:

$$C_x^{\,1} = \frac{E_p \cdot I}{\ell^3 \cdot a_o \cdot V_s} \cdot r_o \cdot F_{11}(\lambda)_2$$

Multiplicando-se e dividindo-se por $r_o^{\,2}$, vem:

$$C_x^{\,1} = \frac{E_p \cdot I}{\ell^3 \cdot r_o^{\,2}} \cdot \frac{F_{11}(\lambda)_2}{\frac{a_o}{r_o^{\,3}} \cdot V_s} \qquad (3.76)$$

Fazendo

$$f_{11,2} = \frac{F_{11}(\lambda)_2}{a_o \left(\frac{\ell}{r_o}\right)^3} \qquad (3.77)$$

temos:

$$C_x^{\,1} = \frac{E_p \cdot I}{r_o^{\,2} \cdot V_s} \cdot f_{11,2} \qquad (3.78)$$

onde $f_{11,2}$ é o parâmetro de amortecimento horizontal.

3.8.3 - MOVIMENTO DE ROTAÇÃO NO PLANO VERTICAL

Se a estaca tiver apenas movimento de rotação, a equação (3.30) para $x_A(t)=0$ torna-se:

$$M_{\psi A}(t) = \frac{E_p.I}{\ell}.F_7(\lambda).\psi_A(t) \tag{3.79}$$

$$M_{\psi A}(t) = \frac{E_p.I}{\ell}[F_7(\lambda)_1+j.F_7(\lambda)_2].\psi_A(t) \tag{3.80}$$

3.8.3.1 - Constante de rigidez rotacional para uma estaca (K_ψ^1)

Fazendo-se $\psi_A(t)=1$ na equação (3.80) e tomando apenas a parte real, obtemos:

$$M_{\psi A}(t) = K_\psi^1 = \frac{E_p.I}{\ell}.F_7(\lambda)_1 \tag{3.81}$$

Multiplicando-se e dividindo-se por r_o a equação (3.81), teremos:

$$K_\psi^1 = \frac{E_p.I.r_o}{\ell.r_o}.F_7(\lambda)_1 = \frac{E_p.I}{r_o}.\frac{F_7(\lambda)_1}{(\frac{\ell}{r_o})}$$

Fazendo

$$f_{7,1} = \frac{F_7(\lambda)_1}{\frac{\ell}{r_o}} \tag{3.82}$$

vem:

$$K_\psi^1 = \frac{E_p.I}{r_o}.f_{7,1} \tag{3.83}$$

Onde $f_{7,1}$ é o parâmetro de rigidez rotacional. Pela equação (3.83) podemos obter a constante de rigidez rotacional para uma estaca.

3.8.3.2 - Constante de amortecimento rotacional para uma estaca ($C_\psi{}^1$)

Da equação (3.80) temos a parte imaginária que se relaciona com o amortecimento, que é dada por:

$$M_{\psi A}(t) = \frac{E_p . I}{\ell} . F_7(\lambda)_2 . \psi_A(t) \qquad (3.84)$$

como

$$M_{\psi A}(t) = C.\psi = C_\psi{}^1 . \frac{d\psi_A(t)}{dt}$$

e $\psi_A(t)=1$

vem:

$$C_\psi{}^1 . \omega = \frac{E_p . I}{\ell} . F_7(\lambda)_2$$

$$C_\psi{}^1 = \frac{E_p . I}{\ell . \omega} . F_7(\lambda)_2 \qquad (3.85)$$

ainda,

$$\omega = \frac{a_o}{r_o} . V_s$$

então:

$$C_\psi{}^1 = \frac{E_p . I}{\ell . \frac{a_o}{r_o} . V_s} . F_7(\lambda)_2 \qquad (3.86)$$

Fazendo

$$f_{7,2} = \frac{F_7(\lambda)_2}{a_o . (\frac{\ell}{r_o})} \qquad (3.87)$$

vem:

$$C_{\psi}^{1} = \frac{E_p.I}{V_s} \cdot f_{7,2} \qquad (3.88)$$

onde $f_{7,2}$ é o parâmetro de amortecimento rotacional.

3.8.4 - MOVIMENTO DE ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO HORIZONTAL ACOPLADOS

Se a estaca vibrar nas direções horizontal e rotacional, a equação (3.30), para $\psi_A(t)=0$ ou $x_A(t)=0$, na 1ª equação ou na 2ª equação, obtemos:

Por exemplo, tomando a 2ª equação de (3.30), vem:

$$R_{xA}(t) = \frac{E_p.I}{\ell^2}.F_9(\lambda).\psi_A(t)$$

ou

$$R_{xA}(t) = \frac{E_p.I}{\ell^2}\,[F_9(\lambda)_1 + j.F_9(\lambda)_2].\psi_A(t) \qquad (3.89)$$

3.8.4.1 - Constante de rigidez rotacional e horizontal acoplados para uma estaca ($K_{\psi x}^{1}$)

Tomando-se apenas a parte real da equação (3.89), que se relaciona com a rigidez da estaca, podemos escrever para $\psi_A(t)=1$, que:

$$R_{xA}(t) = K_{x\psi}^{1} = \frac{E_p.I}{\ell^2}.F_9(\lambda)_1 \qquad (3.90)$$

multiplicando e dividindo por r_o^2, vem:

$$K_{\psi x}^{1} = \frac{E_p.I}{\ell^2.r_o^2}.F_9(\lambda)_1.r_o^2 = \frac{E_p.I}{r_o^2}.\frac{F_9(\lambda)_1}{(\frac{\ell}{r_o})^2}$$

Fazendo:

$$f_{9,1} = \frac{F_9(\lambda)_1}{(\frac{\ell}{r_o})^2} \tag{3.91}$$

obtemos:

$$K^1_{\psi x} = K^1_{x\psi} = \frac{E_p.I}{r_o^2} \cdot f_{9,1} \tag{3.92}$$

que é a expressão para se obter a constante de rigidez acoplada.

3.8.4.2 - Constante de amortecimento rotacional e horizontal acoplados para uma estaca ($C^1_{\psi x}$)

Tomando-se a parte imaginária da equação (3.89), que se relaciona com o amortecimento, tem-se para $\psi_A(t)=1$:

$$C^1_{\psi x} = \frac{E_p.I}{\ell^2} \cdot F_9(\lambda)_2 \tag{3.93}$$

Multiplicando-se e dividindo-se por r_o^2 a equação (3.93), vem:

$$C^1_{\psi x} = \frac{E_p.I}{\ell^2} \cdot \frac{F_9(\lambda)_2}{r_o^2} \cdot r_o^2 = \frac{E_p.I}{r_o^2} \cdot \frac{F_9(\lambda)_2}{(\frac{\ell}{r_o})^2}$$

Fazendo

$$f_{9,2} = \frac{F_9(\lambda)_2}{(\frac{\ell}{r_o})^2}$$

vem:

$$C^1_{\psi x} = C^1_{x\psi} = \frac{E_p.I}{r_o^2} \cdot f_{9,2} \tag{3.94}$$

que é a equação para se determinar o amortecimento acoplado.

Por meio das fórmulas obtidas anteriormente, as constantes de amortecimento e rigidez das estacas podem ser prontamente calculadas. O cálculo pode ser bastante simplificado quando se usam os parâmetros f de rigidez e amortecimento ao invés das funções originais F. As vantagen do uso dos parâmetros f são:

1) Os parâmetros f mudam pouco com a frequência, conforme a figura abaixo.

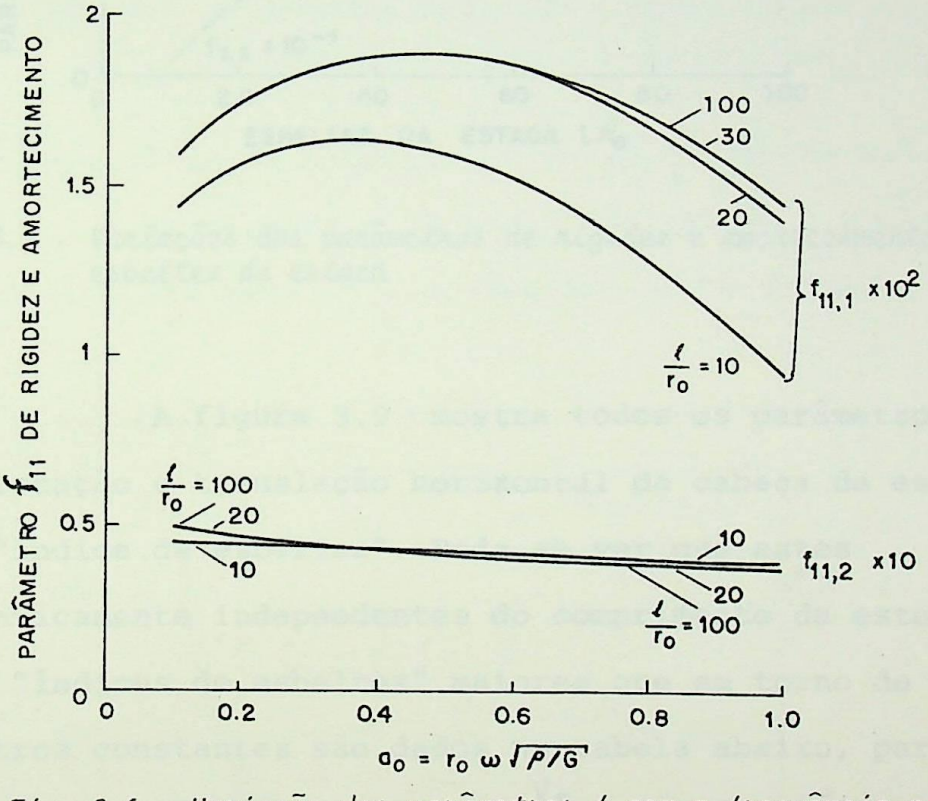

Fig. 3.8 - Variação dos parâmetros f com a frequência a_0

Na maioria das situações reais, a frequência adimensional a_0 é menor que cerca de 0,50 e para propósitos práticos, pode-se considerar os parâmetros f de rigidez e amortecimento como constantes independentes da frequência.

2) Grande parte dos parâmetros f são independentes do "índice de esbeltez" $(\frac{\ell}{r_0})$, ou seja, do comprimento da estaca. Isto pode ser visto nas figuras abaixo.

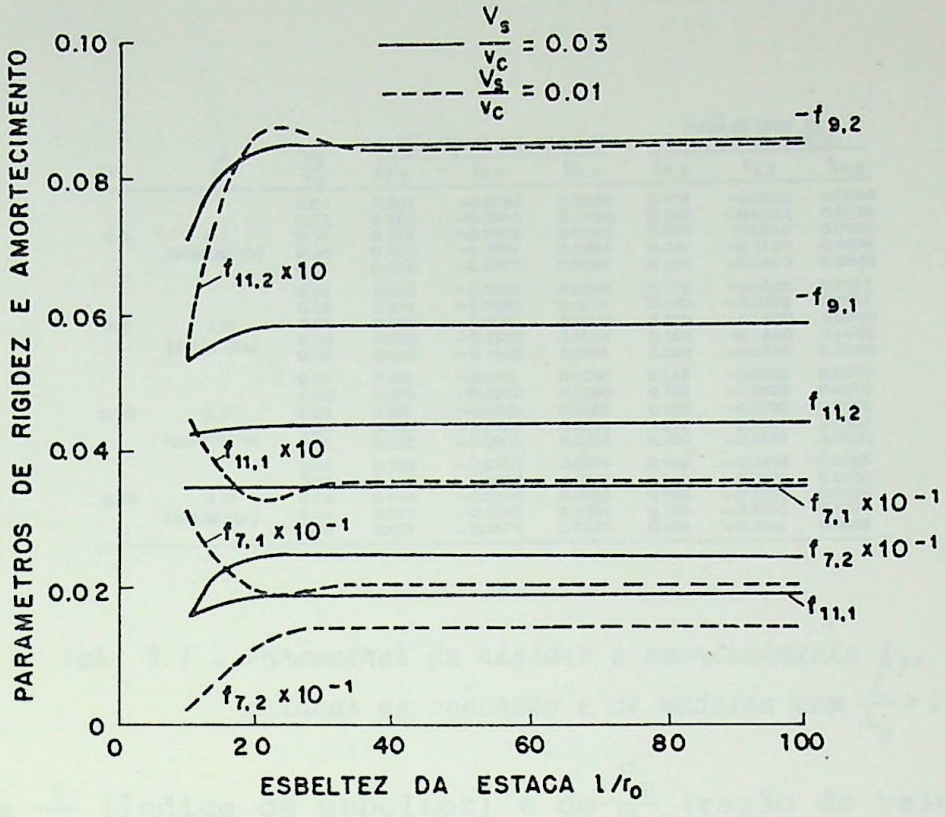

Fig. 3.9 - Variações dos parâmetros de rigidez e amortecimento com a esbeltez da estaca

A figura 3.9 mostra todos os parâmetros pertinentes à rotação e translação horizontal da cabeça da estaca versus o "índice de esbeltez". Pode-se ver que estes parâmetros são praticamente independentes do comprimento da estaca para todos os "índices de esbeltez" maiores que em torno de 20. Tais parâmetros constantes são dados na tabela abaixo, para alguns valores das razões de velocidade $\frac{V_S}{V_C}$, para dois valores da razão de massa $\frac{\rho}{\rho_p}$ e para dois valores de coeficiente de Poisson do solo.

Os parâmetros de rigidez e amortecimento para o movimento vertical da cabeça da estaca dependem bastante da extensão da estaca como se pode notar nas figuras 3.10 e 3.11, onde os parâmetros f_{18} são independentes do coeficiente de Poisson e podem ser obtidos das figuras 3.10 e 3.11 para uma grande

μ	$\frac{\rho}{\bar{\rho}}$	$\frac{V_S}{V_C}$	PARÂMETROS DE RIGIDEZ $f_{7.1}$	$f_{9.1}$	$f_{11.1}$	PARÂMETROS DE AMORTECIMENTO $f_{7.2}$	$f_{9.2}$	$f_{11.2}$
0.4	0.7 (CONCRETO)	0.01	0.202	−0.0194	0.0036	0.139	−0.0280	0.0084
		0.02	0.285	−0.0388	0.0100	0.200	−0.0566	0.0238
		0.03	0.349	−0.0582	0.0185	0.243	−0.0848	0.0438
		0.04	0.403	−0.0776	0.0284	0.281	−0.1130	0.0674
		0.05	0.450	−0.0970	0.0397	0.314	−0.1410	0.0942
0.4	2.0 (MADEIRA)	0.01	0.265	−0.0336	0.0082	0.176	−0.0466	0.0183
		0.02	0.374	−0.0673	0.0231	0.249	−0.0932	0.0516
		0.03	0.459	−0.1010	0.0423	0.305	−0.1400	0.0949
		0.04	0.529	−0.1350	0.0654	0.352	−0.1860	0.1460
		0.05	0.592	−0.1680	0.0914	0.394	−0.2330	0.2040
0.25	0.7 (CONCRETO)	0.01	0.195	−0.0181	0.0032	0.135	−0.0262	0.0076
		0.02	0.275	−0.0362	0.0090	0.192	−0.0529	0.0215
		0.03	0.337	−0.0543	0.0166	0.235	−0.0793	0.0395
		0.04	0.389	−0.0724	0.0256	0.272	−0.1057	0.0608
		0.05	0.435	−0.0905	0.0358	0.304	−0.1321	0.0850
0.25	2.0 (MADEIRA)	0.01	0.256	−0.0315	0.0074	0.169	−0.0434	0.0165
		0.02	0.362	−0.0630	0.0208	0.240	−0.0868	0.0465
		0.03	0.444	−0.0945	0.0385	0.293	−0.1301	0.0854
		0.04	0.512	−0.1260	0.0593	0.339	−0.1735	0.1315
		0.05	0.573	−0.1575	0.0828	0.379	−0.2168	0.1838

Tab. 3.1 - Parâmetros de rigidez e amortecimento f_7, f_9, f_{11} para estacas de concreto e de madeira com $\frac{\ell}{r_o} > 25$

faixa de $\frac{\ell}{r_o}$ (índice de esbeltez) e de $\frac{V_S}{V_C}$ (razão de velocidades). A tabela 3.1 e as figuras 3.10 e 3.11 facilitam a obtenção da rigidez dinâmica das estacas e do amortecimento do solo.

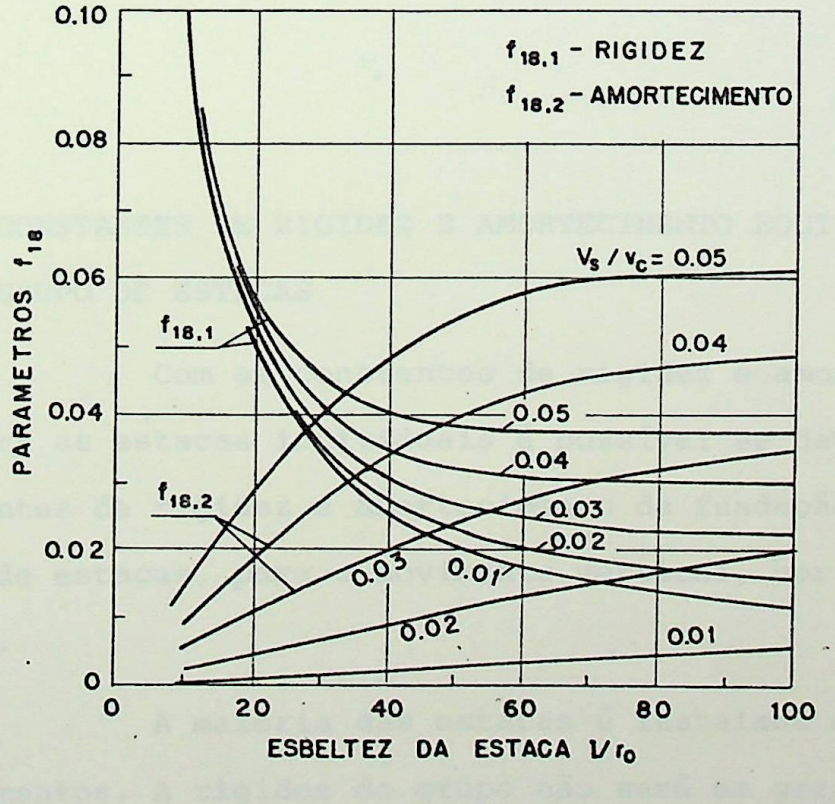

Fig. 3.10 - Parâmetros de rigidez e amortecimento da resposta vertical (concreto armado)

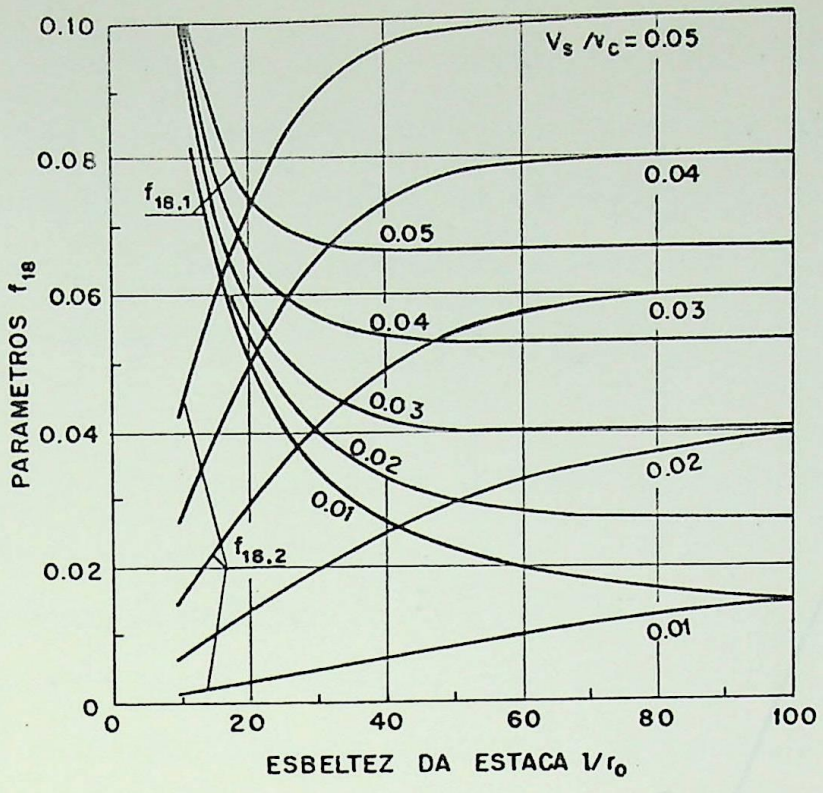

Fig. 3.11 - Parâmetro de rigidez e amortecimento da resposta vertical (madeira)

Tanto a rigidez quanto o amortecimento podem ser afetados pelo agrupamento de estacas, que será abordado a seguir.

3 - CONSTANTES DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO EQUIVALENTE DE UM GRUPO DE ESTACAS

Com as constantes de rigidez e amortecimento obtidas para as estacas individuais é possível se determinar as constantes de rigidez e amortecimento da fundação, ou seja, do grupo de estacas, para o movimento vertical, horizontal e rotacional.

A maioria das estacas é instalada em grupos ou agrupamentos. A rigidez do grupo não será em geral a simples soma das rigidezas das estacas individuais. O mesmo se pode dizer com relação ao amortecimento. Se forem usados diversos gru

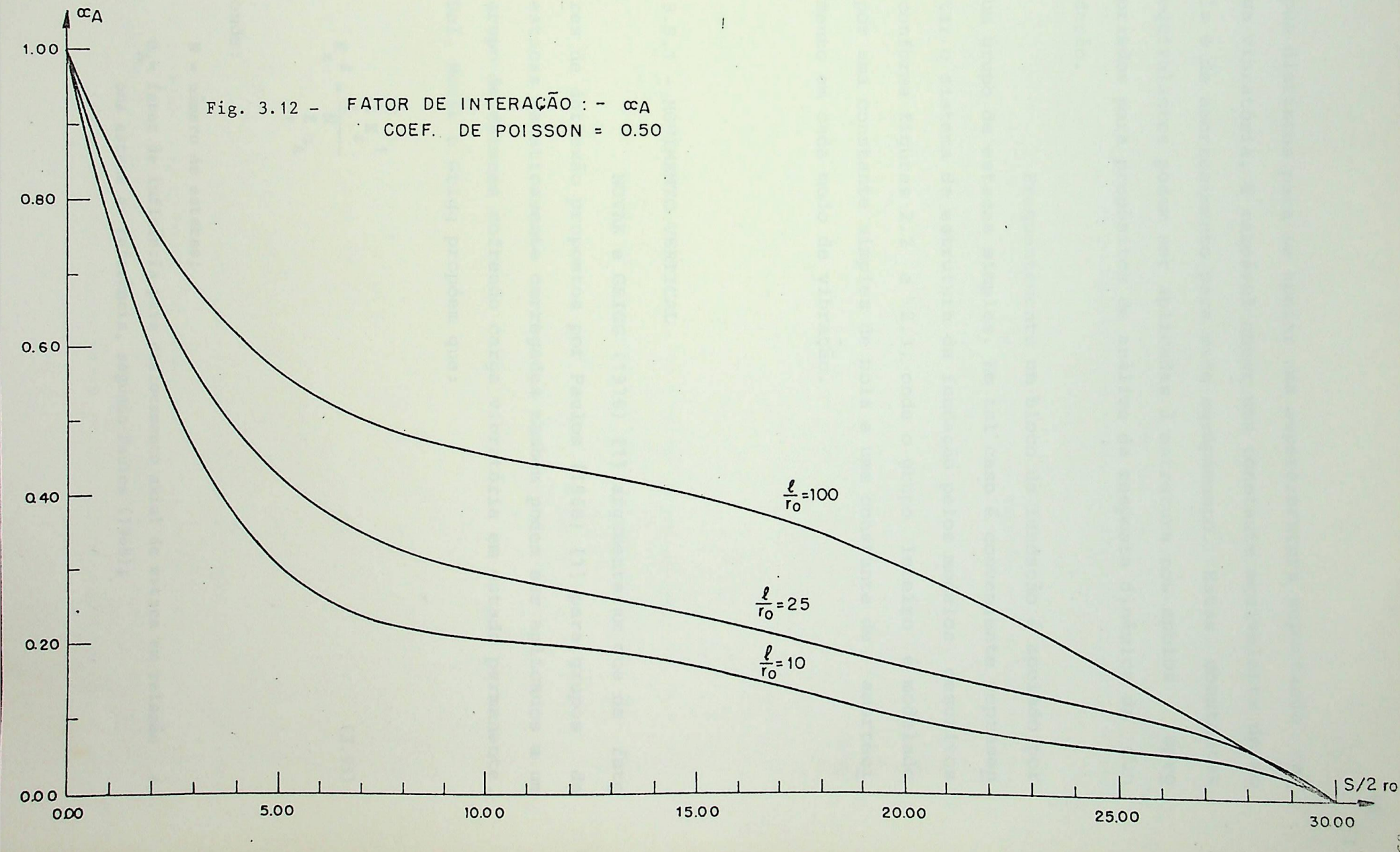

Fig. 3.12 - FATOR DE INTERAÇÃO : - α_A
COEF. DE POISSON = 0.50

pos distintos para se apoiar uma superestrutura suportando carga vibratória, é razoável obter uma constante equivalente de mola e de amortecimento para cada agrupamento. Estas constantes equivalentes podem ser aplicadas à estrutura nos apoios apropriados para propósitos de análise da resposta dinâmica da fundação.

Frequentemente um bloco de fundação é apoiado por um grupo de estacas simples. Em tal caso é conveniente representar o sistema da estrutura da fundação pelos modelos descritos conforme figuras 2.2 e 2.3, onde o grupo inteiro é modelado por uma constante simples de mola e uma constante de amortecimento em cada modo de vibração.

3.9.1 - MOVIMENTO VERTICAL

NOVAK e GRIGG (1976) [1] argumentaram que os fatores de deflexão propostos por Paulos (1968) [1] para grupos de estacas estaticamente carregadas também podem ser aplicados a um grupo de estacas sofrendo carga vibratória em estado permanente. Daí, Novak e Grigg propõem que:

$$K_z^g = \frac{\sum_1^N K_z^1}{\sum_1^N \alpha_A} \qquad (3.95)$$

onde:

N = número de estacas;

α_A = fator de influência para deslocamento axial de estaca em relação a uma estaca de referência, segundo Paulos (1968);

K_z^1 = constante de rigidez vertical de uma estaca;

K_g^z = constante de rigidez vertical equivalente do grupo de estacas.

O fator α_A, segundo Paulos [1], pode ser obtido pela figura 3.12, considerando que todas as estacas suportam o mesmo carregamento.

Novak e Grigg [1] propõem também que o amortecimento do grupo pode ser calculado por:

$$C_z^g = \frac{\sum_1^N C_z^1}{\sqrt{\sum_1^N \alpha_A}} \qquad (3.96)$$

onde:

C_z^1 = constante de amortecimento vertical de uma estaca;

C_g^z = constante de amortecimento vertical equivalente do grupo de estacas.

A razão de amortecimento geométrico equivalente para o grupo será:

$$D_g^z = \frac{\sum_1^N C_z^1}{2\sqrt{\sum_1^N K_z^1 . m_c} \cdot \sqrt{\sum_1^N \alpha_A}} \qquad (3.97)$$

onde m_c é a massa total do sistema.

Se o cabeçote (bloco de coroamento) não estiver em contato com o solo, as equações (3.95) e (3.96) podem ser usadas diretamente na análise estrutural. No entanto, se o bloco de coroamento for embutido ou parcialmente embutido no solo

tem-se um efeito favorável na resposta do grupo, devido à resistência lateral do solo e deve ser sempre empregado, quando possível.

Novak e Beredugo [1] têm fornecido expressões para o cálculo das constantes de amortecimento e rigidez para o cabeçote embutido, as quais devem ser somadas aos valores de rigidez e amortecimento obtidos pelas expressões (3.95) e (3.96), para se obter a rigidez e o amortecimento total do sistema para um grupo de estacas, que são:

$$K_z^f = G_s . h . \bar{S}_1 \tag{3.99}$$

$$C_z^f = h . r_o . \sqrt{G_s . \frac{\gamma_s}{g}} . \bar{S}_2 \tag{3.100}$$

onde:

h = profundidade do embutimento do bloco de coroamento (cabeçote);

$\bar{S}_1$ e $\bar{S}_2$ = são constantes que levam em consideração a resistência lateral do embutimento, segundo Beredugo, Novak e Grigg (1976) [1] e são transcritos abaixo;

r_o = raio equivalente do bloco de coroamento.

Tabela 3.2 - Constantes adimensionais dependentes da frequência para blocos embutidos com resistência lateral

v_s	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_{u1}$	$\bar{S}_{u2}$	$\bar{S}_{\phi 1}$	$\bar{S}_{\phi 2}$
0.0	2.7	6.7	3.6	8.2	2.5	1.8
0.25	2.7	6.7	4.0	9.1	2.5	1.8
0.4	2.7	6.7	4.1	10.8	2.5	1.8

ESTES VALORES SÃO APROPRIADOS NA FAIXA DE $0 < a_o \leq 2$

3.9.2 - MOVIMENTO HORIZONTAL

Da mesma forma que no movimento vertical, Novak e Grigg, propõem que:

$$K_x^g = \frac{\sum_1^N K_x^1}{\sum_1^N \alpha_L} \qquad (3.101)$$

e

$$C_x^g = \frac{\sum_1^N C_x^1}{\sqrt{\sum_1^N \alpha_L}} \qquad (3.102)$$

onde:

K_x^g = rigidez equivalente do grupo de estacas;

C_x^g = amortecimento equivalente do grupo de estacas;

α_L = fator de deslocamento para o movimento horizontal definido de forma análoga a α_A, segundo Paulos.

As constantes relativas ao embutimento do bloco no solo, que devem ser somadas às equações (3.101) e (3.102), segundo Novak, Beredugo e Grigg, são:

$$K_x^f = G_s . h . \bar{S}_{u1} \qquad (3.103$$

$$C_x^f = h . r_o . \sqrt{\frac{G_s \cdot \gamma_s}{g}} . \bar{S}_{u2} \qquad (3.104)$$

em que $\bar{S}_{u1}$ e $\bar{S}_{u2}$ são fatores constantes dados pela tabela 3.2 , segundo Novak, Beredugo e Grigg [1].

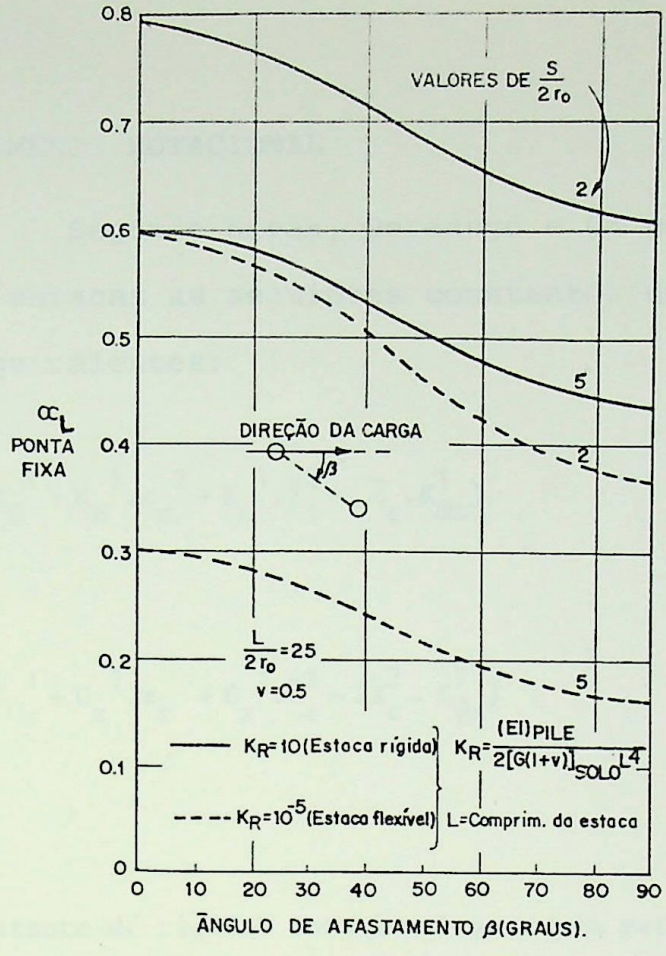

Fig. 3.13 - Solução gráfica para α_L

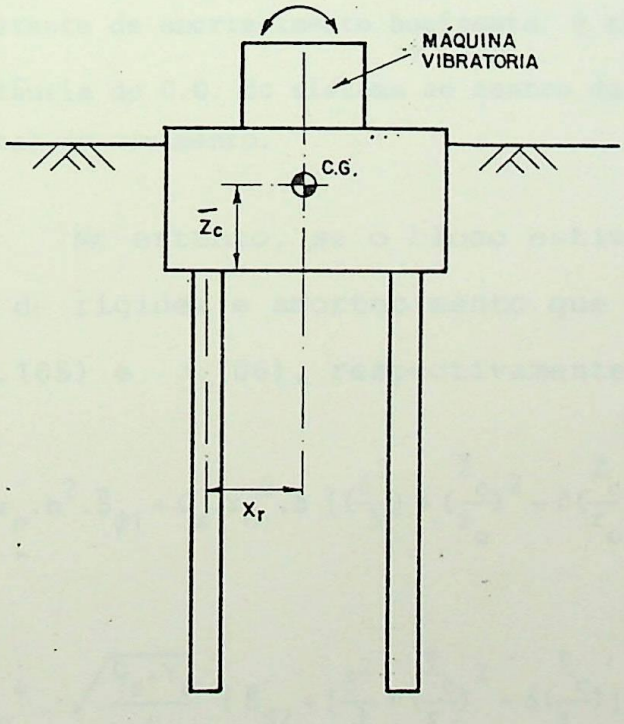

Fig. 3.14 - Definição de x_r *e* Z_c

3.9.3 - MOVIMENTO ROTACIONAL

Segundo Novak, Beredugo e Grigg [1], tem-se para um grupo de estacas as seguintes constantes de rigidez e de amortecimento equivalentes:

$$K_{\psi}^{g} = \sum_{1}^{N} [K_{\psi}^{1} + K_{z}^{1}.x_{r}^{2} + K_{x}^{1}.\bar{Z}_{c}^{2} - 2\bar{Z}_{c}.K_{\psi x}^{1}] \qquad (3.105)$$

e

$$C_{\psi}^{g} = \sum_{1}^{N} [C_{\psi}^{1} + C_{z}^{1}.x_{r} + C_{x}^{1}.\bar{Z}_{c}^{2} - 2\bar{Z}_{c}^{2}.C_{\psi x}^{1}] \qquad (3.106)$$

nas quais:

K_{ψ}^{1} = constante de rigidez rotacional para uma estaca;

C_{ψ}^{1} = constante de amortecimento rotacional para uma estaca;

$\bar{Z}_{c}$ = distância do C.G. à base do bloco;

$K_{\psi x}^{1}$ = constante de rigidez horizontal e rotacional acopladas;

$C_{\psi x}^{1}$ = constante de amortecimento horizontal e rotacional acopladas.

x_{r} = distância do C.G. do sistema ao centro da estaca na direção horizontal do movimento.

No entanto, se o bloco estiver embutido, tem-se as parcelas de rigidez e amortecimento que devem ser somadas às equações (3.105) e (3.106), respectivamente, que são:

$$K_{\psi}^{f} = G_{s}.r_{o}.h^{2}.\bar{S}_{\psi 1} + G_{s}.r_{o}^{2}.h\,[(\frac{\delta^{2}}{3}) + (\frac{\bar{Z}_{c}}{r_{o}})^{2} - \delta(\frac{\bar{Z}_{c}}{r_{o}})].\bar{S}_{u1} \qquad (3.107)$$

e

$$C_{x}^{f} = \delta.r_{o}^{4}.\sqrt{\frac{G_{s}.\gamma_{s}}{g}}\,\{\bar{S}_{\psi 2} + [\frac{\delta^{2}}{3} + (\frac{\bar{Z}_{c}}{r_{o}})^{2} - \delta(\frac{\bar{Z}_{c}}{r_{o}})]\,\bar{S}_{u2}\} \qquad (3.108)$$

onde:

$$\delta = \frac{h}{r_o} ;$$

$\bar{S}_{\psi 1}$ e $\bar{S}_{\psi 2}$ são constantes obtidas por Beredugo, Novak e Grigg [1] e são dados pela tabela 3.2.

Desta forma, podemos analisar dinamicamente uma estrutura sob ação de carga vibratória.

CAPÍTULO 4

AVALIAÇÃO DAS PROPRIEDADES DINÂMICAS DOS SOLOS

4.1 - INTRODUÇÃO

Com a finalidade de se avaliar as constantes de mola K_z, K_x e K_ψ e as constantes de amortecimento C_z, C_x e C_ψ necessárias para a análise dinâmica da fundação, é necessário se determinar os valores das propriedades relevantes dos solos como G (módulo de elasticidade transversal), μ (coeficiente de Poisson), ρ (massa específica) e C (constante de amortecimento). O objetivo deste capítulo é descrever de forma simples os procedimentos pelos quais as propriedades dos solos podem ser avaliadas.

4.2 - MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL (G)

As propriedades dos solos são determinadas, comumente, por ensaios de adensamento, cisalhamento direto e compressão triaxial e todos eles são ensaios onde se aplicam as tensões e as deformações ao solo em períodos de tempo que vão de alguns minutos até vários dias. Sabe-se, entretanto, que as curvas tensão - deformação assim obtidas são muito diferentes daquelas relativas a esforços dinâmicos. É portanto inapropriado se obter o módulo de elasticidade transversal diretamente de um ensaio estático. Daí o uso de ensaios dinâmicos, especialmente os de compressão triaxial em que as cargas são aplicadas, ou quase que instantaneamente, ou por vibrações mantidas duran

te o carregamento do corpo de prova.

Mesmo para valores bem pequenos de esforços, a relação tensão - deformação não é linear. Portanto, é necessário definir o módulo de elasticidade transversal como um módulo equivalente linear tendo a inclinação média da reta ligando as extremidades de uma curva em loop fechado de tensão - deformação (figura 4.1).

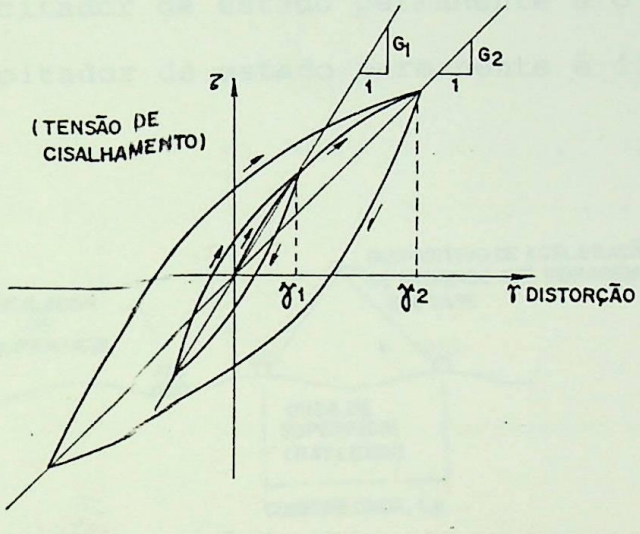

Fig. 4.1 - Ciclo de histerese

Assim, o módulo de elasticidade G depende do esforço. Para se fazer uma análise linear equivalente é necessário conhecer-se a amplitude aproximada do esforço no solo. Para condições de esforço aplicado controlado, as ordenadas de tensão de cisalhamento na figura 4.1, e portanto G, variarão (normalmente decrescem) com o número de ciclos aplicados até se alcançar uma condição estável. Daí em diante, apenas o valor linear equivalente estável do módulo de elasticidade será considerado e será denominado "módulo de elasticidade transversal do solo", pois a resposta da estrutura após milhares de ciclos de carga é a condição principal de interesse ao projetista estrutural.

O módulo de elasticidade G pode ser obtido por medições no campo, medições em laboratório e por uso de correlações publicadas que relacionam o módulo G com outras propriedades mais facilmente medidas.

4.2.1 - PROCEDIMENTOS DE CAMPO

Dois procedimentos amplamente usados no campo são o teste do excitador de estado permanente e o teste de orifício. O teste do excitador de estado permanente é ilustrado na figura 4.2.

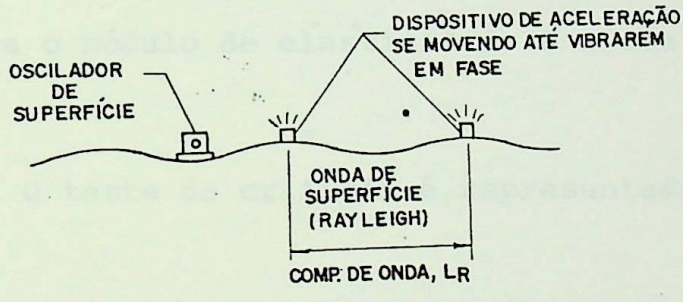

Fig. 4.2 - Teste de excitador de superfície

Um excitador é colocado na superfície de um local a ser investigado, e são criadas ondas de Rayleigh (de superfície). Os dispositivos de aceleração (acelerômetros) são movimentados relativamente um ao outro e ao excitador até que eles se encontrem vibrando em fase, e a distância entre os dispositivos de aceleração é então medida. Como as velocidades de onda de cisalhamento e Rayleigh são aproximadamente iguais para solos com coeficientes de Poisson maiores que 0,35 (que ocorre na maioria dos solos), pode-se determinar, pela equação (4.1) o módulo de elasticidade transversal dinâmico do solo.

$$G = \rho.V_s^2 = \rho.f^2.L_r^2 \qquad (4.1)$$

onde:

G = módulo de elasticidade transversal do solo (dinâmico);

ρ = massa específica do solo;

f = frequência de oscilação;

L_r = comprimento de onda medido;

V_s = velocidade da onda de cisalhamento.

O processo é repetido normalmente com os dispositivos de aceleração em diversas posições relativas ao excitador e com diferentes frequências do excitador para se obter um valor médio para o módulo de elasticidade G a uma dada localização.

O teste de orifício é representado na figura 4.3.

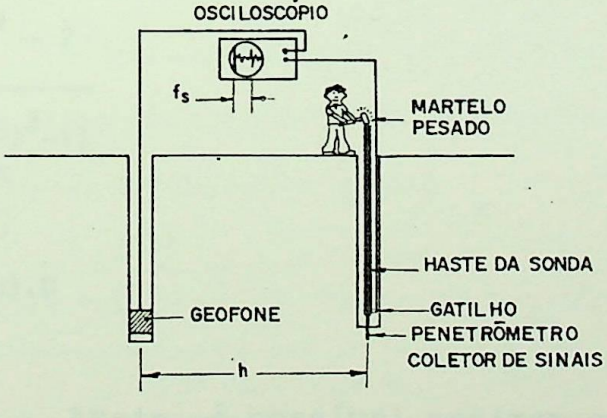

Fig. 4.3 - Teste de superfície

O equipamento de teste consiste simplesmente de um dispositivo para criar uma onda de cisalhamento abaixo da superfície, um outro dispositivo a uma conhecida distância e ao mesmo nível para sentir a passagem da onda de cisalhamento, e

um instrumento para medir o tempo requerido para a onda cruzar a distância entre os dois dispositivos.

O instrumento mostrará a chegada de um primeiro trem de ondas que são as de compressão (mais velozes) e depois as ondas de cisalhamento. Com isso pode-se calcular o tempo que as ondas levam para vencer a distância conhecida entre os dois dispositivos. Com esses tempos se obterão as velocidades de ambos os trens de onda V_c e V_s, com as quais se calcularão G, μ e E, pelas equações (4.3), (4.4) e (4.5), respectivamente.

$$V_s = \frac{h}{t_s} \qquad (4.2)$$

$$V_c = \frac{h}{t_c}$$

$$G = \rho . V_s^2 = \rho . \frac{L^2}{t_s^2} \qquad (4.3)$$

$$\mu = \frac{(\frac{V_c}{V_s})^2 - 2}{2[(\frac{V_c}{V_s})^2 - 1]} \qquad (4.4)$$

$$E = 2(1+\mu).G \qquad (4.5)$$

Assim, é possível medirem-se os módulos em várias profundidades.

4.2.2 - PROCEDIMENTOS DE LABORATÓRIO

O módulo de elasticidade pode ser avaliado da compressão triaxial cíclica de amplitude bastante baixa ou simples testes de cisalhamento; tais testes devem ser executados com

precisão e seu uso é limitado principalmente à pesquisa. Entretanto, um outro tipo de teste, o teste da coluna ressonante, também é um meio preciso de se obter o módulo G. Este método é amplamente aceito entre os engenheiros práticos devido a sua relativa simplicidade. No tipo mais comum de teste de coluna ressonante, uma coluna cilíndrica, sólida, de solo, é excitada longitudinalmente ou torsionalmente à baixa frequência. A frequência de excitação é variada e a amplitude de deformação no solo é registrada a cada frequência de excitação para se determinar a frequência ressonante da coluna de solo. Através de equações de elasticidade para barras vibratórias, obtém-se então o módulo de elasticidade G.

As determinações de campo e/ou laboratório do módulo de elasticidade G devem ser desenvolvidas para cada projeto específico. Como meio de se checar as medições de campo e laboratório, devem ser consultadas correlações publicadas.

Faixas típicas de valores do módulo de elasticidade G para diversos tipos de solos são dadas na tabela 4.1 com o propósito de informação geral.

Tabela 4.1 - Valores típicos para o módulo de elasticidade G

Tipo de Solo	Módulo G (7000[Pa])
Argila macia	3000 - 5000
Argila rígida	10000 - 20000
Areia densa média	5000 - 15000
Areia densa	10000 - 20000
Cascalho denso médio	15000 - 25000
Cascalho denso	20000 - 40000

4.3 - COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO

O amortecimento em um sistema solo-fundação consiste de um componente geométrico, o qual é uma medida da energia irradiada da região da fundação, e de amortecimento de material dentro do solo, o qual é uma medida de energia perdida como resultado dos efeitos de histerese. As relações entre razões de massa e inércia e a razão de amortecimento geométrico são mostradas para os quatro modos desacoplados de movimento na figura 4.4, segundo Richart, Hall e Woods [1].

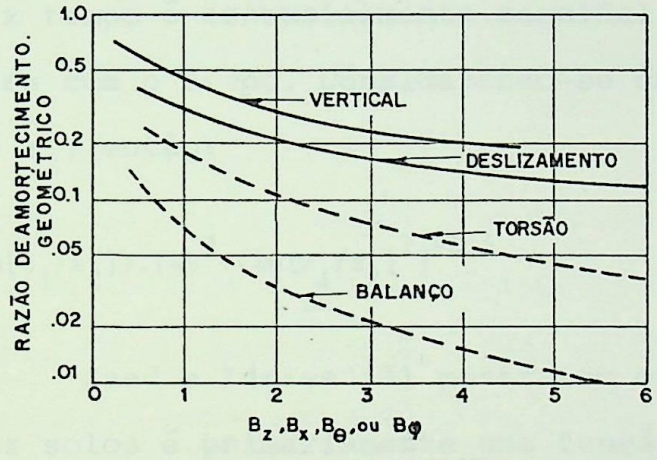

Fig. 4.4 - Razões de amortecimento para 4 modos de carga

O amortecimento interno é definido na figura 4.5, segundo Hardin e Drnevich [1].

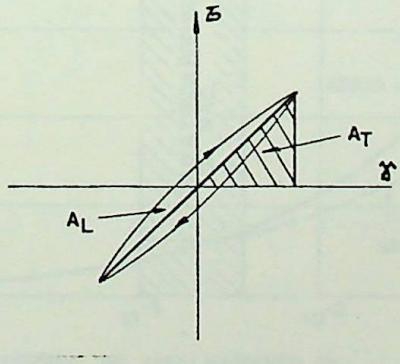

Fig. 4.5 - Definição de amortecimento interno

Vê-se que o amortecimento material é proporcional à razão entre a área do ciclo de histerese do solo sob cisalha

mento simples (energia perdida) e a área hachurada (entrada de energia), ou seja:

$$D_m = \frac{A_L}{A_T} \cdot 4\pi \qquad (4.6)$$

A razão de amortecimento interno pode ser obtida do teste de coluna ressonante. Após o solo estar vibrando em uma condição de estado permanente, o excitador é parado e as vibrações do solo registradas enquanto elas decaem. A relação deslocamento x tempo é essencialmente senoidal, mas com amplitudes decrescentes com o tempo. Considerando-se duas amplitudes sucessivas z_1 e z_2, então:

$$D_m = (\ell n[z_1/z_2]).[4\pi^2+(\ell n(z_1/z_2]^2]^{-0,5} \qquad (4.7)$$

Seed e Idriss [1] mostraram que o amortecimento interno nos solos é primariamente uma função da amplitude do esforço e do tipo de solo. A figura 4.6 fornece valores típicos para amortecimento material proposto por Seed e Idriss.

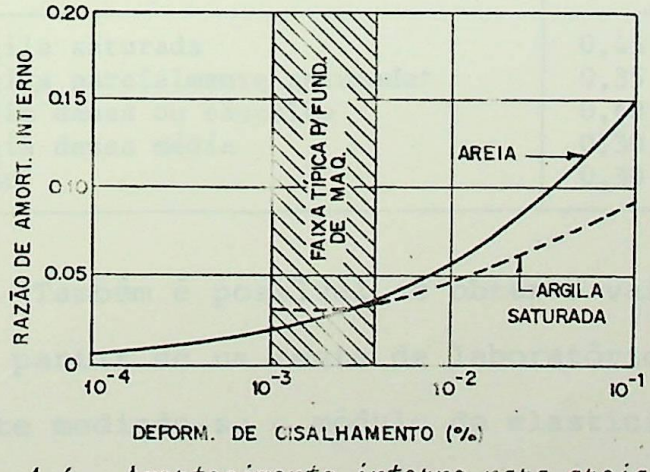

Fig. 4.6 - Amortecimento interno para areias e argilas

Para se obter a razão total de amortecimento D_t do sistema fundação - solo, as razões de amortecimento interno

e geométrico podem ser adicionadas diretamente. Como a razão de amortecimento interno é significativa em relação à razão de amortecimento geométrico no modo rotacional, a razão total de amortecimento deve ser usada na análise da resposta das fundações, ao invés da razão de amortecimento geométrico. Por outro lado, o amortecimento interna é pequeno em relação ao amortecimento geométrico no modo translatório e usualmente é desprezado.

4.4 - COEFICIENTE DE POISSON E MASSA ESPECÍFICA DO SOLO

Os problemas de interação entre solo e fundação são relativamente independentes dos valores escolhidos para o coeficiente de Poisson (μ) e massa específica (ρ). Geralmente, o coeficiente de Poisson é selecionado em função do tipo de solo predominante e pode ser obtido da tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Valores típicos do coeficiente de Poisson μ

Tipo de Solo	μ
Argila saturada	0,45 - 0,50
Argila parcialmente saturada	0,35 - 0,45
Areia densa ou cascalho	0,40 - 0,50
Areia densa média	0,30 - 0,40
Lodo	0,30 - 0,40

Também é possível se obter o valor do coeficiente de Poisson a partir de um teste de laboratório de coluna torcional ressonante medindo-se o módulo de elasticidade transversal G, e a partir de um teste de laboratório de coluna longitudinal ressonante medindo-se o módulo de elasticidade longitudinal E. Com isso podemos determinar o coeficiente de Poisson pela eq

ção:

$$\mu = \left(\frac{E}{2G}\right) - 1 \qquad (4.8)$$

Os valores da massa específica ρ devem ser sempre calculados pelo peso unitário total ao invés do peso unitário aparente seco, pois a massa específica nas equações da razão de inércia e massa sempre representa o solo sofrendo vibração. Os pesos totais são usados porque tanto as partes sólidas quanto líquidas vibram.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS DA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DE PROJETO E CONCLUSÕES

5.1 - PROCEDIMENTO

Objetivando obter a sensibilidade dos parâmetros de projeto dinâmico de uma fundação de máquina sobre estacas, considerou-se o sistema típico da figura (1.5) modelado conforme a figura (5.1), constituído de um bloco de concreto (B) apoiado sobre 6 (seis) estacas (ES) de concreto armado. Sobre o bloco se apoiam dois pedestais de concreto (P_1 e P_2) que sustentam o motor e o ventilador.

Através das equações de movimento nas 3 (três) direções (z, x e ψ) e das equações de rigidez e amortecimento, fêz-se um programa computacional obtendo-se várias curvas de frequências naturais e de respostas nas 3 (três) direções de movimento em função das dimensões geométricas da fundação. Obteve-se também curvas de frequências naturais e de respostas levando-se em consideração a influência do embutimento do bloco no solo, ou seja, a parte do bloco enterrada no solo.

5.2 - HIPÓTESES CONSIDERADAS

a) O rotor do ventilador, o eixo, os mancais, os pedestais de concreto armado e o bloco de concreto foram considerados no modelo, contribuindo apenas como massa e inércia.

b) As estacas foram consideradas verticais e modeladas como molas e amortecedores.

c) O solo foi modelado como mola e amortecedor e as suas características foram consideradas constantes ao longo da profundidade.

5.3 - SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DE PROJETO COM O AUMENTO DO RAIO DAS ESTACAS (Fig. 5.2 a 5.7)

As frequências naturais nas três direções de movimento aumentam sensivelmente e, aproximadamente de formas proporcionais com o raio da estaca.

O embutimento produz também um pequeno aumento nas três frequências naturais.

Os picos de ressonância diminuem muito nas três direções de movimento vibratório e as frequências críticas de excitação aumentam.

Para uma mesma rotação da máquina, as respostas diminuem sensivelmente nas três direções desde que a rotação seja menor que as frequências críticas, para as regiões de ressonâncias.

Os picos ressonantes diminuem um pouco na direção rotacional e aumentam um pouco na direção do movimento horizontal

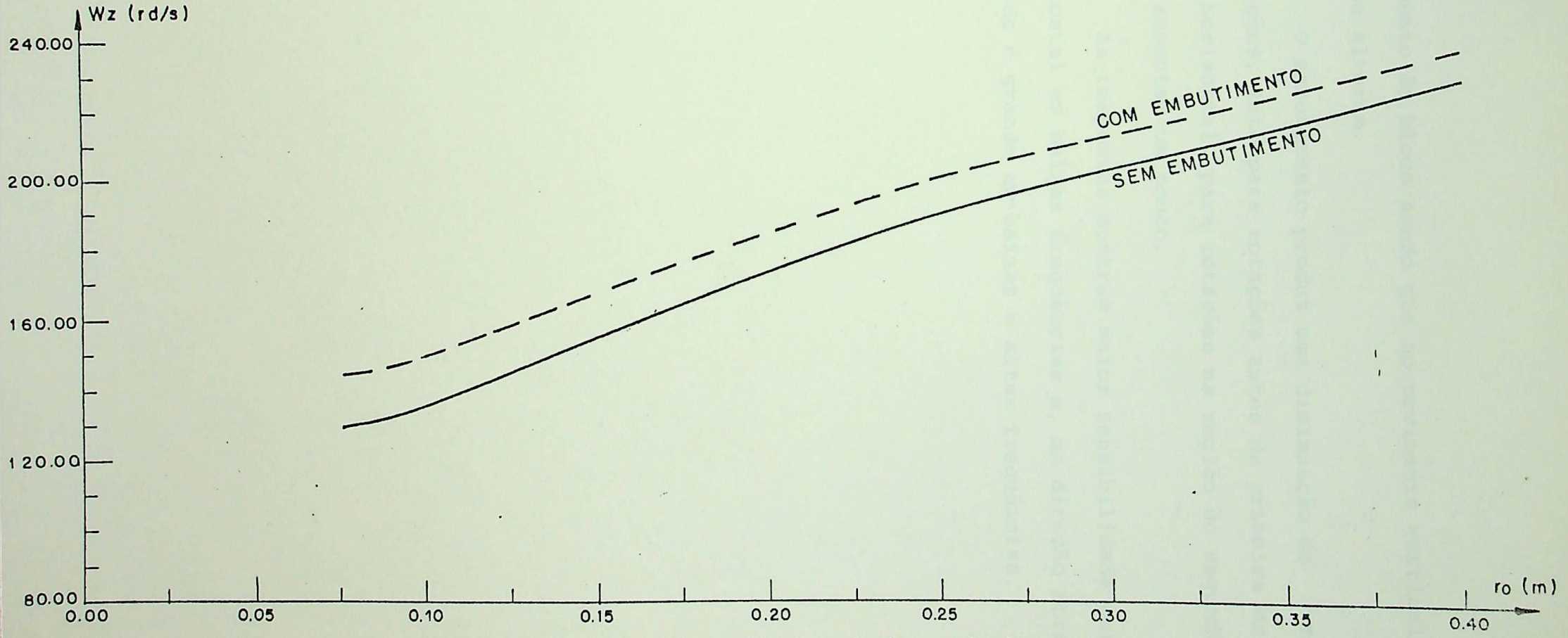

Fig. 5.2 - Frequência natural na direção vertical variando o raio das estacas

com o embutimento do bloco sendo que no movimento vertical praticamente não se alteram.

O embutimento produz uma diminuição da resposta nas três direções, isto para rotações antes da primeira crítica . No movimento horizontal, para rotações na região do segundo pico, as respostas aumentam um pouco.

As respostas mostram maior sensibilidade para a direção horizontal em baixas frequências e, na direção rotacional a sensibilidade é grande em baixas e altas frequências.

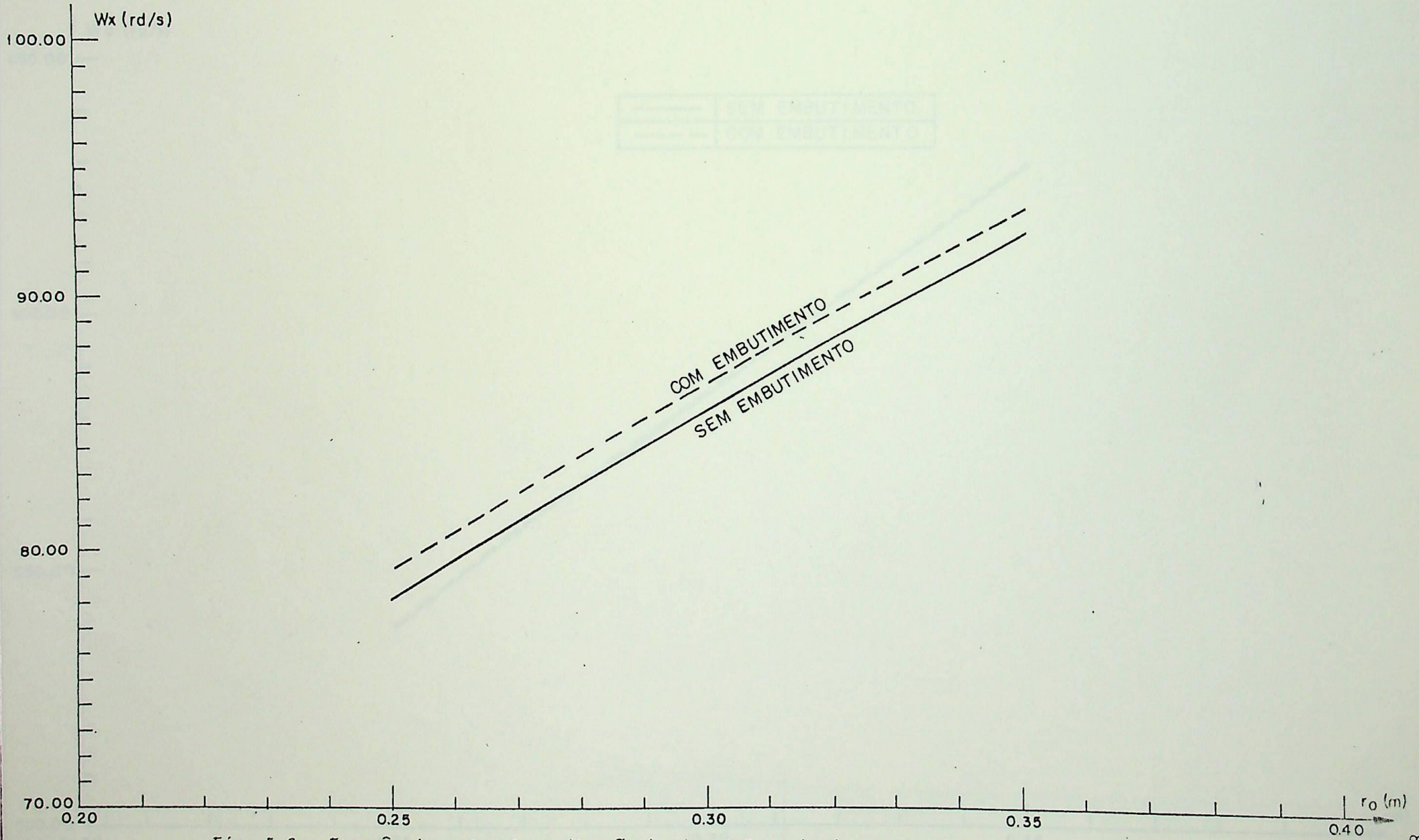

Fig. 5.3 - Frequência natural na direção horizontal variando o raio das estacas

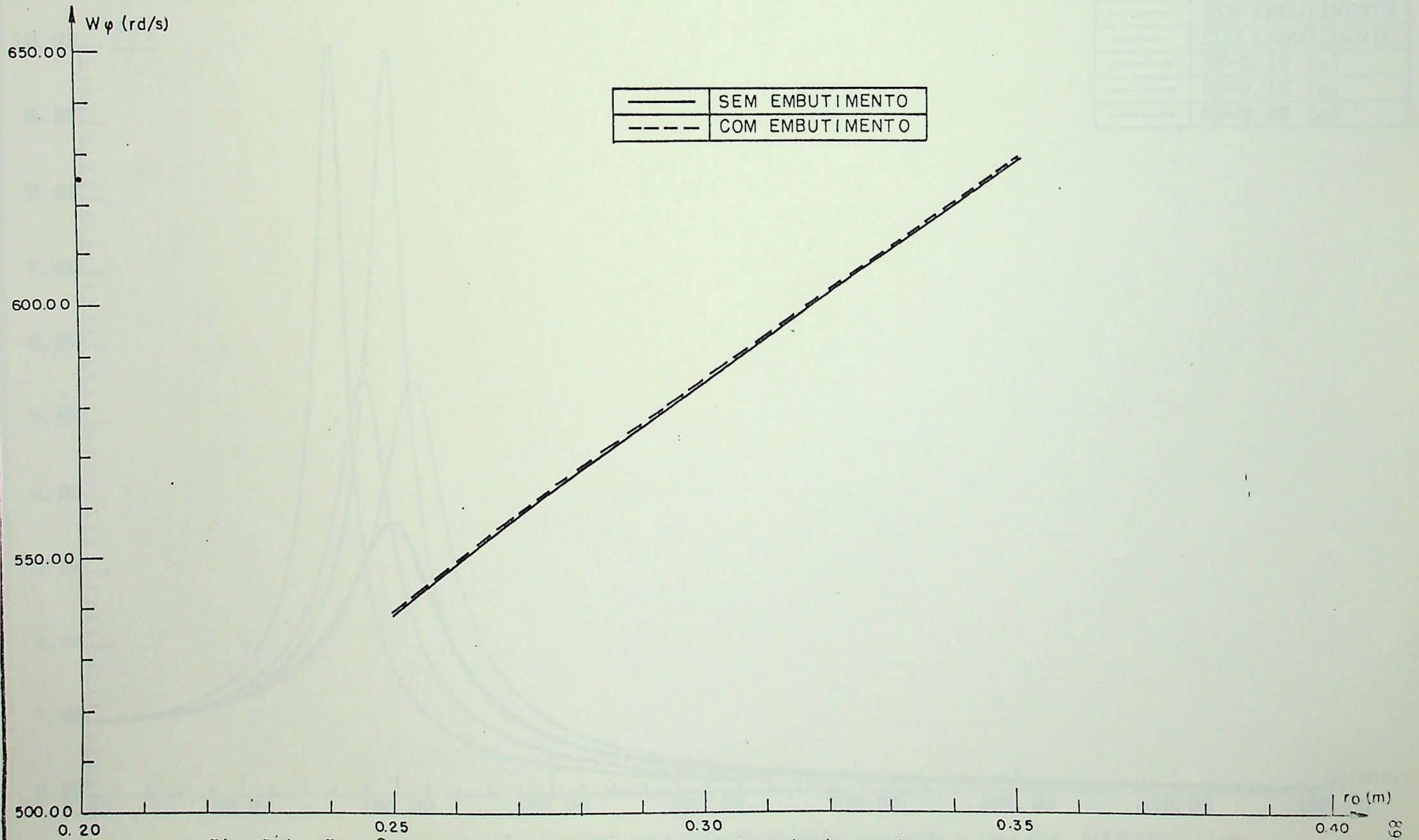

Fig. 5.4 - Frequência natural na direção rotacional variando o raio das estacas

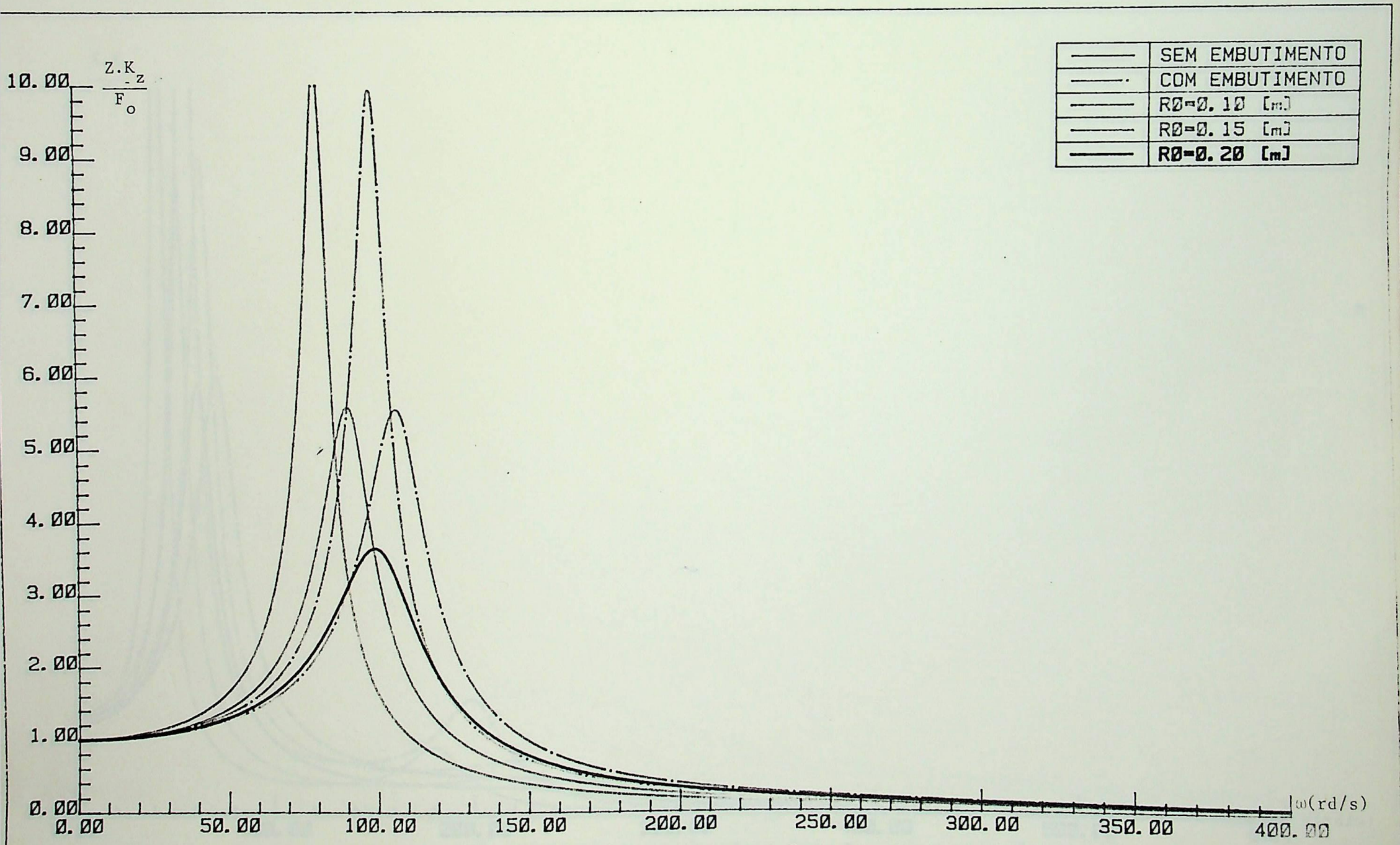

Fig. 5.5 - Resposta na direção vertical em função da rotação, variando o raio das estacas

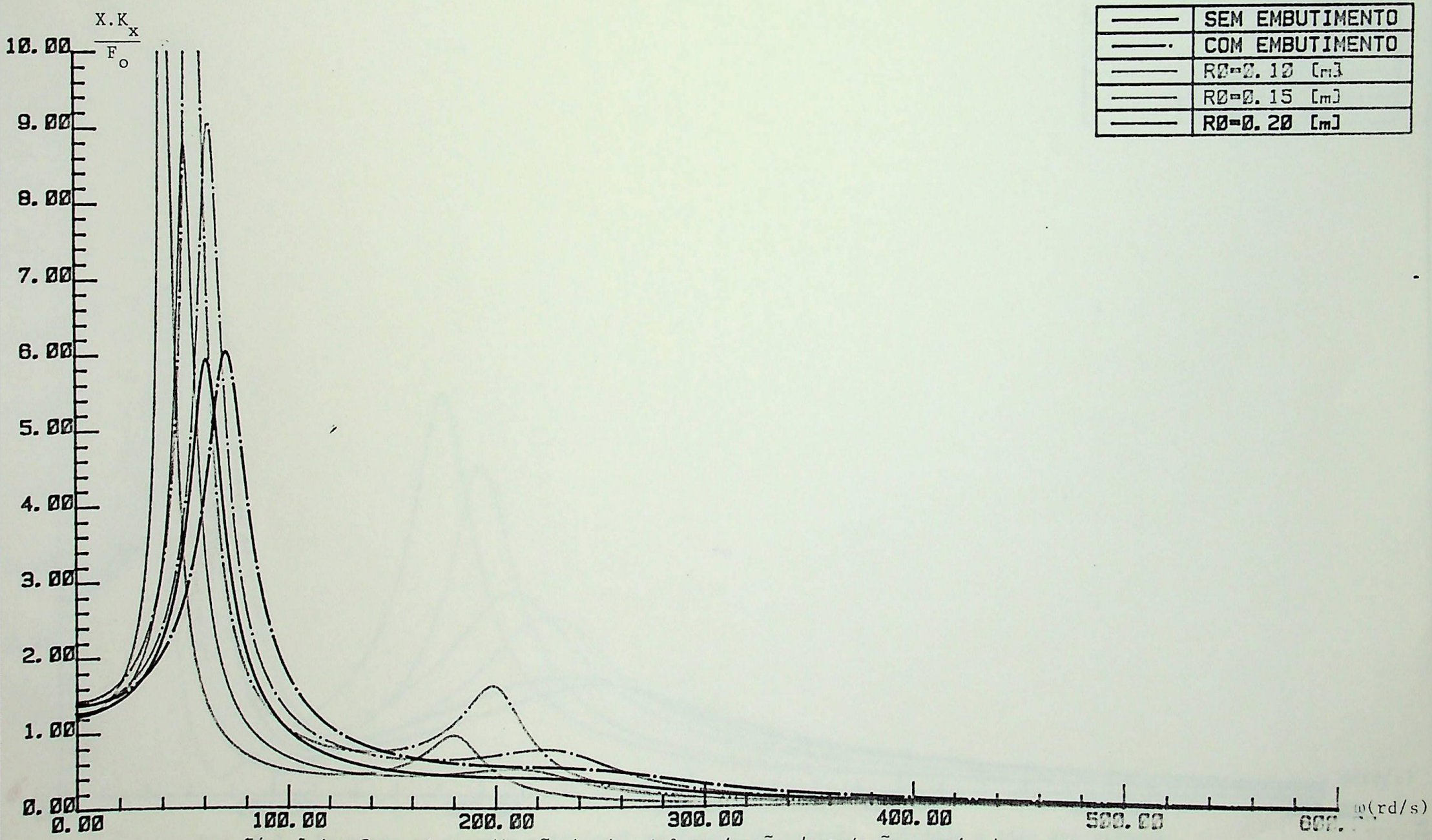

Fig. 5.6 - Resposta na direção horizontal em função da rotação, variando o raio das estacas

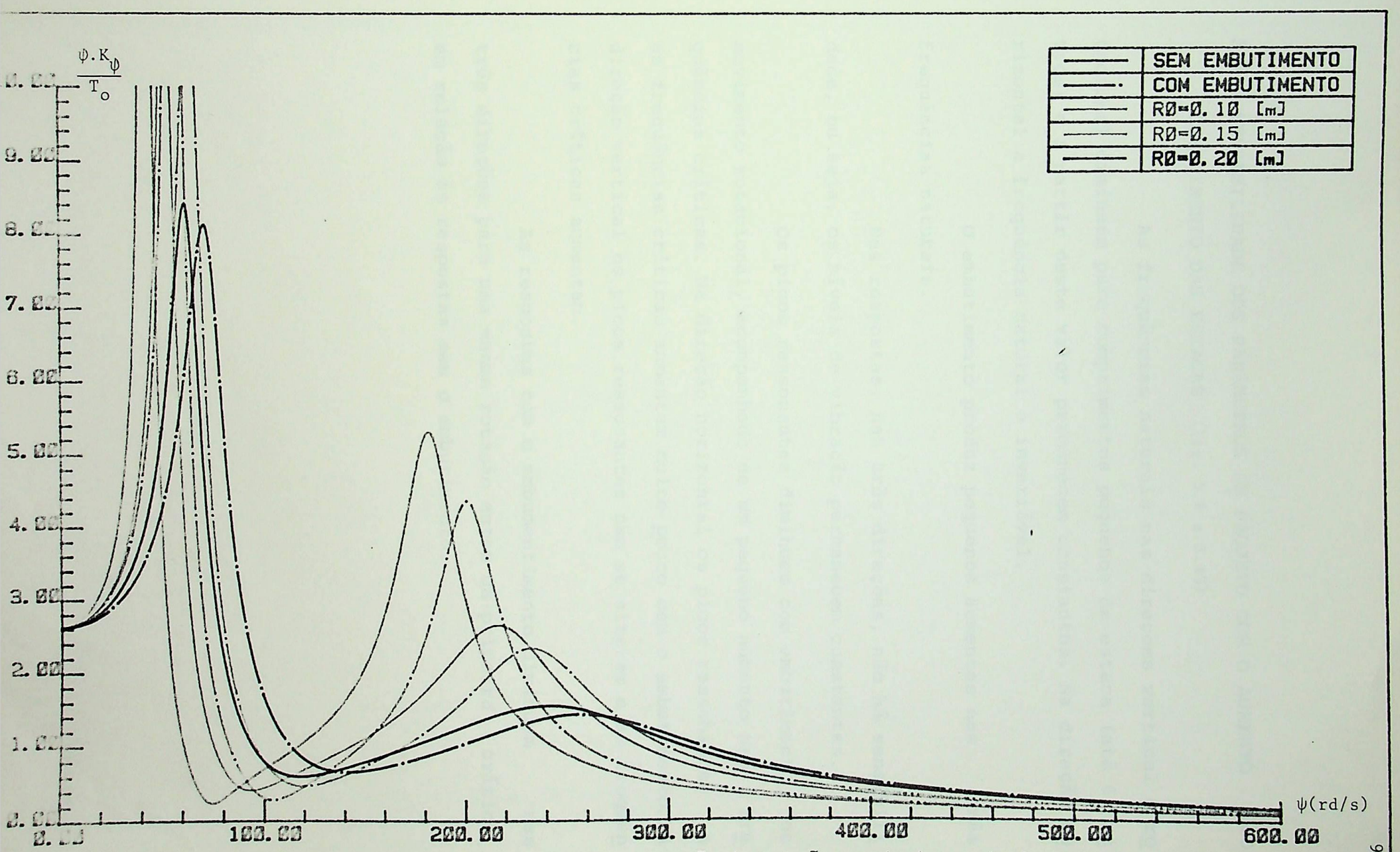

Fig. 5.7 - Resposta na direção rotacional em função da rotação, variando o raio das estacas

5.4 - SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DE PROJETO COM O AUMENTO DO COMPRIMENTO DAS ESTACAS (Fig. 5.8 a 5.13)

As frequências naturais nas direções vertical e rotacional diminuem para comprimentos pequenos da estaca (até 6 metros) e a partir deste valor permanecem constantes. Na direção horizontal a frequência natural é invariável.

O embutimento produz pequenos aumentos nas três frequências naturais.

Nas respostas, nas três direções, não há sensibilidade, ou seja, os níveis de vibração permanecem constantes.

Os picos ressonantes diminuem com embutimento no movimento rotacional, acompanhado de um pequeno aumento nas frequências críticas. Na direção horizontal os picos ressonantes e as frequências críticas aumentam muito pouco com o embutimento. Na direção vertical os picos ressonantes não se alteram e as frequências críticas aumentam.

As respostas com o embumentimento diminuem nas três direções para uma mesma rotação antes da primeira crítica, em relação às respostas sem o embutimento.

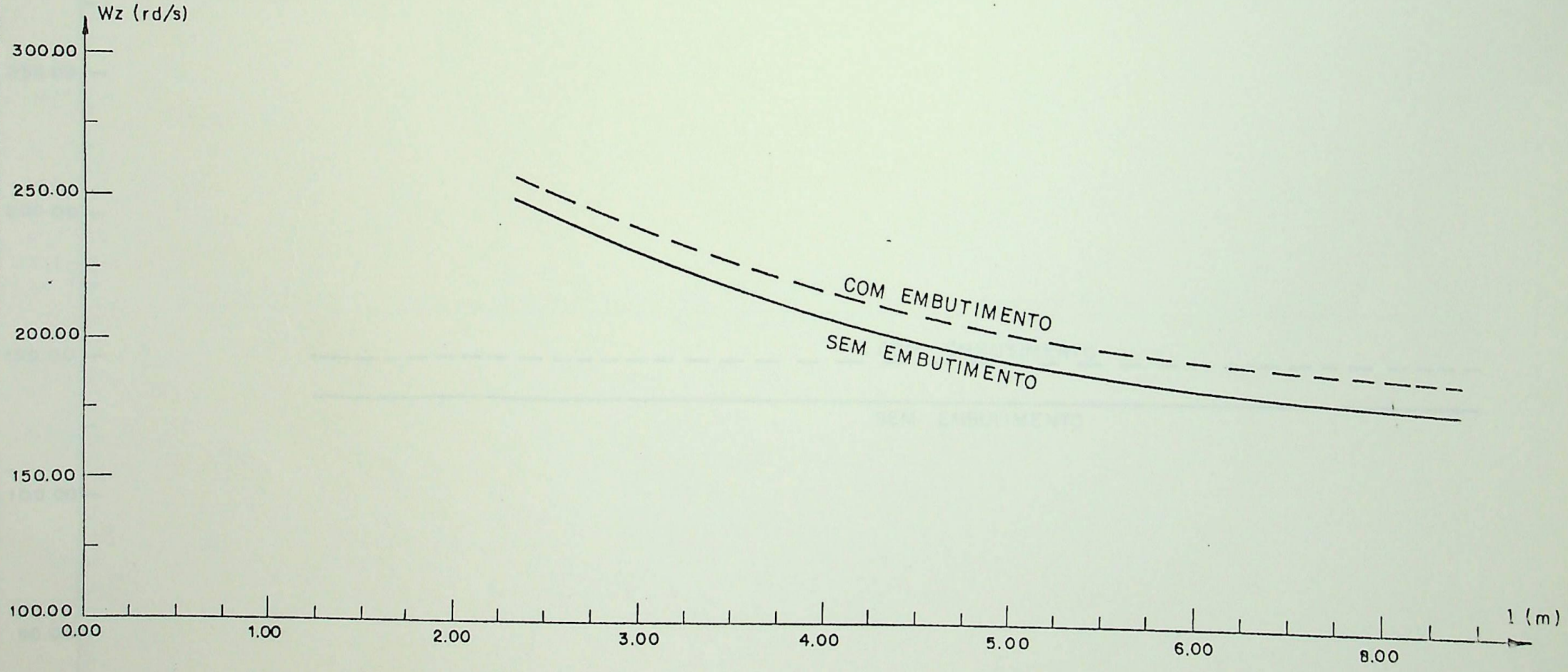

Fig. 5.8a - Frequência natural na direção vertical variando os comprimentos das estacas

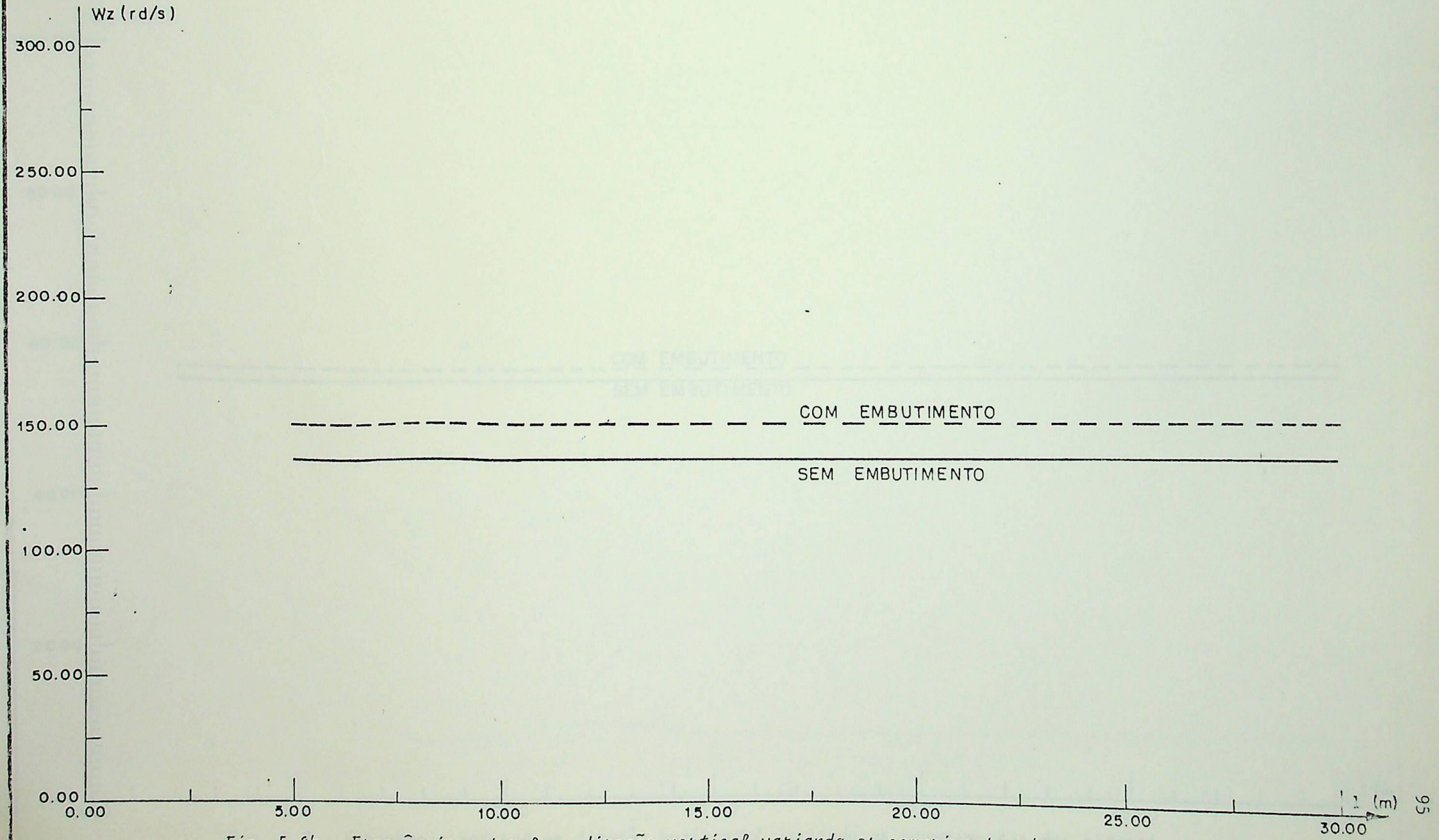

Fig. 5.8b - Frequência natural na direção vertical variando os comprimentos das estacas

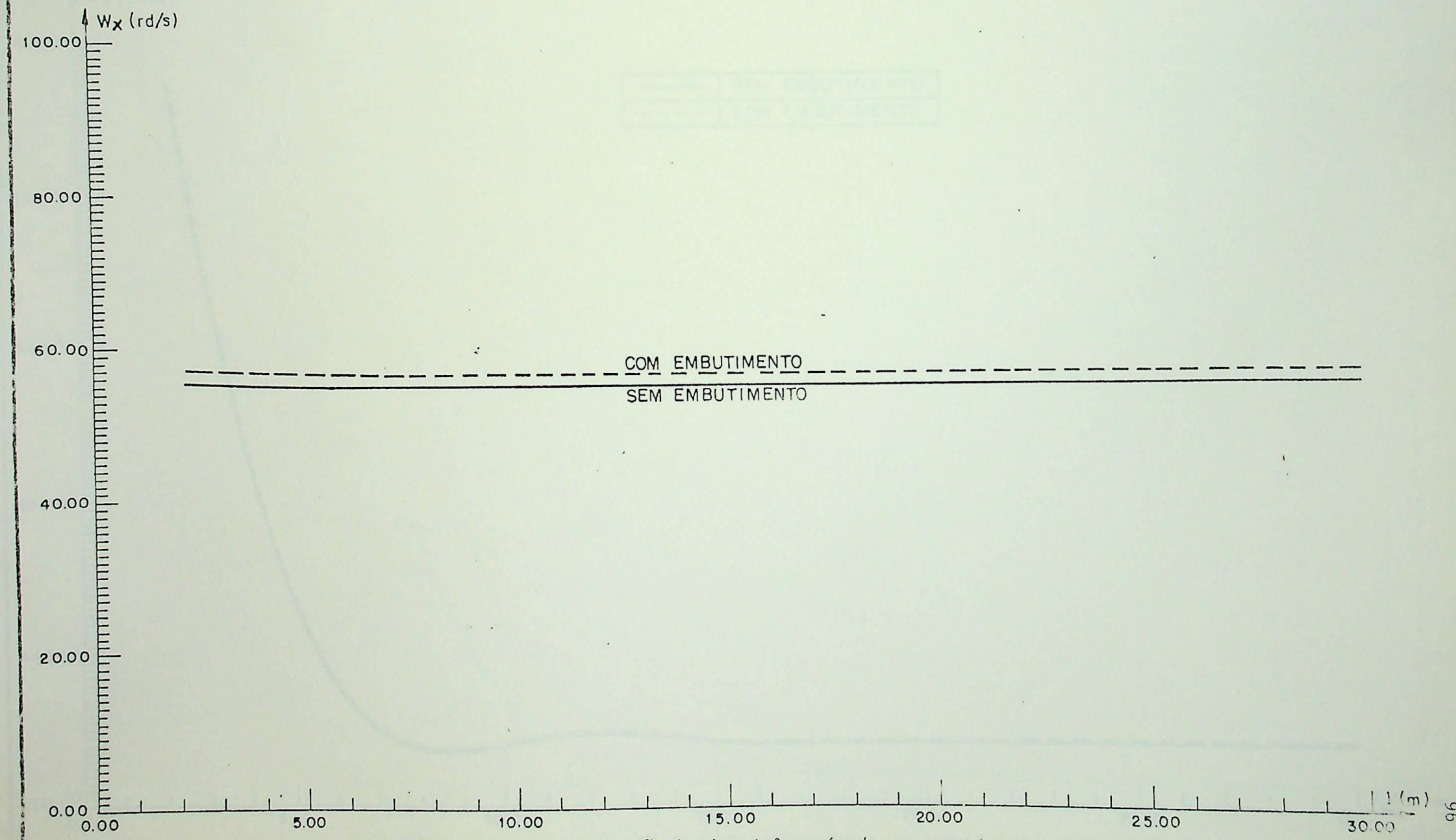

Fig. 5.9 - Frequência natural na direção horizontal variando os comprimentos das estacas

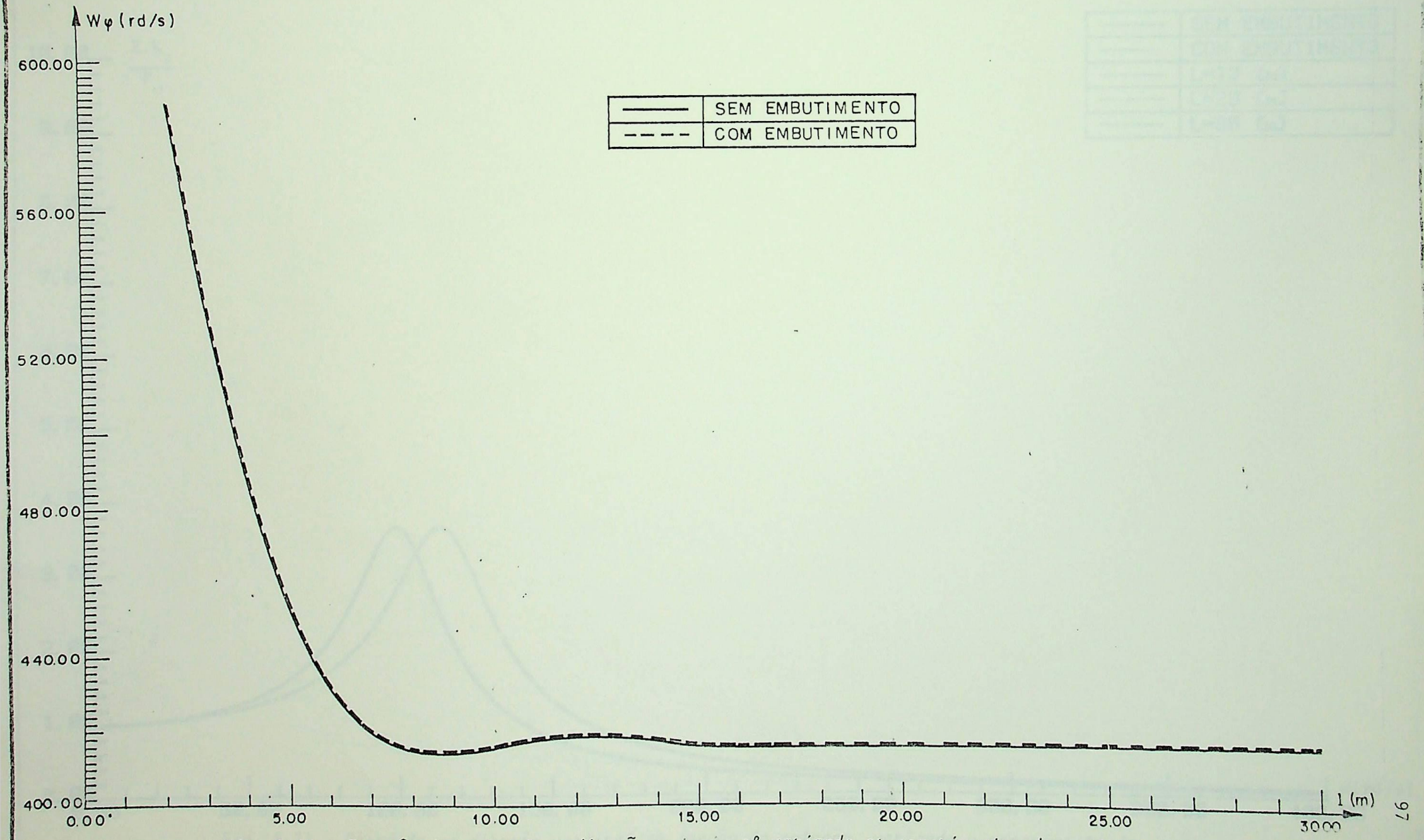

Fig. 5.10 - Frequência natural na direção x variando os comprimentos das estacas

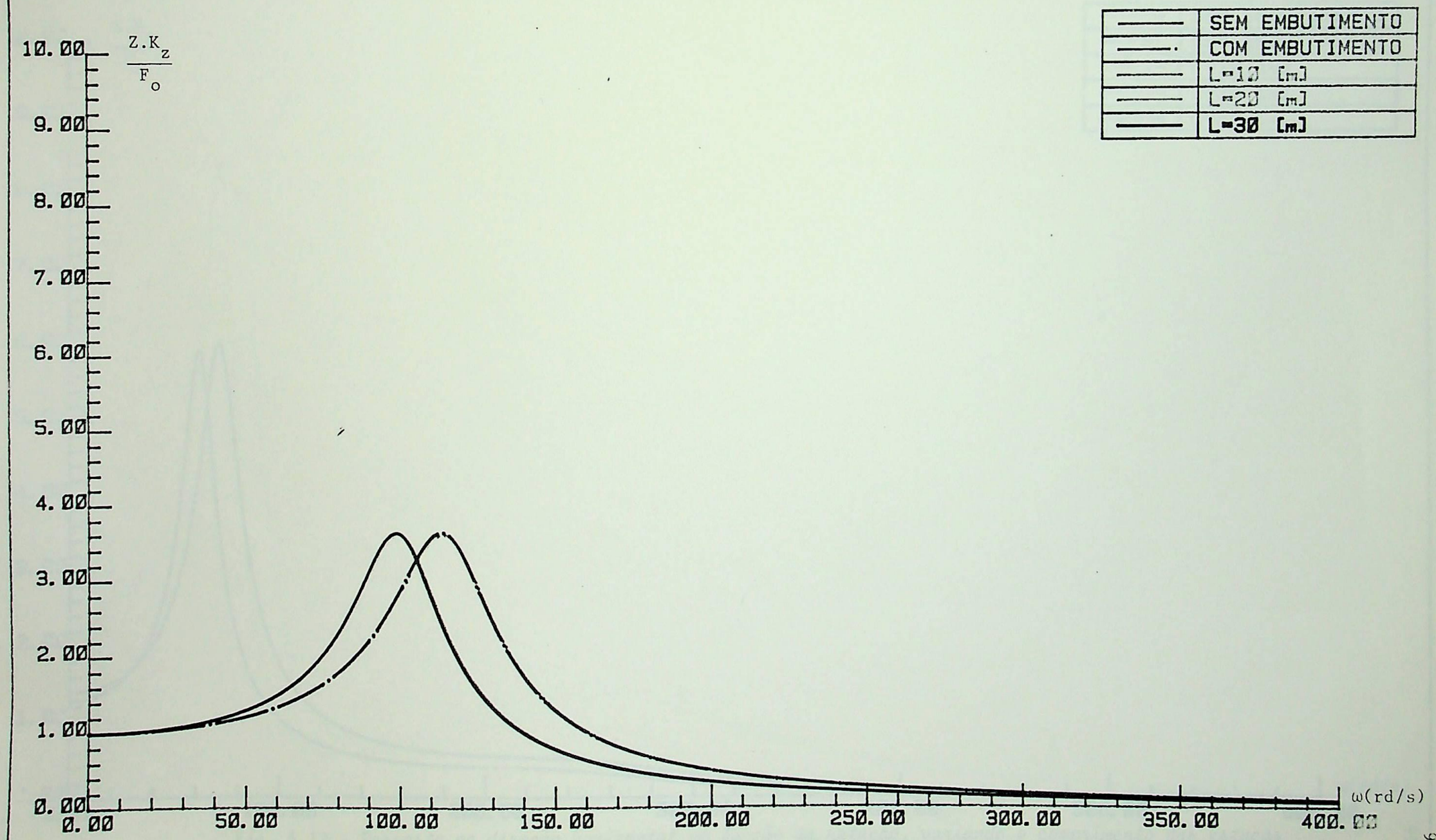

Fig. 5.11 - Resposta na direção vertical em função da rotação, variando o comprimento das estacas

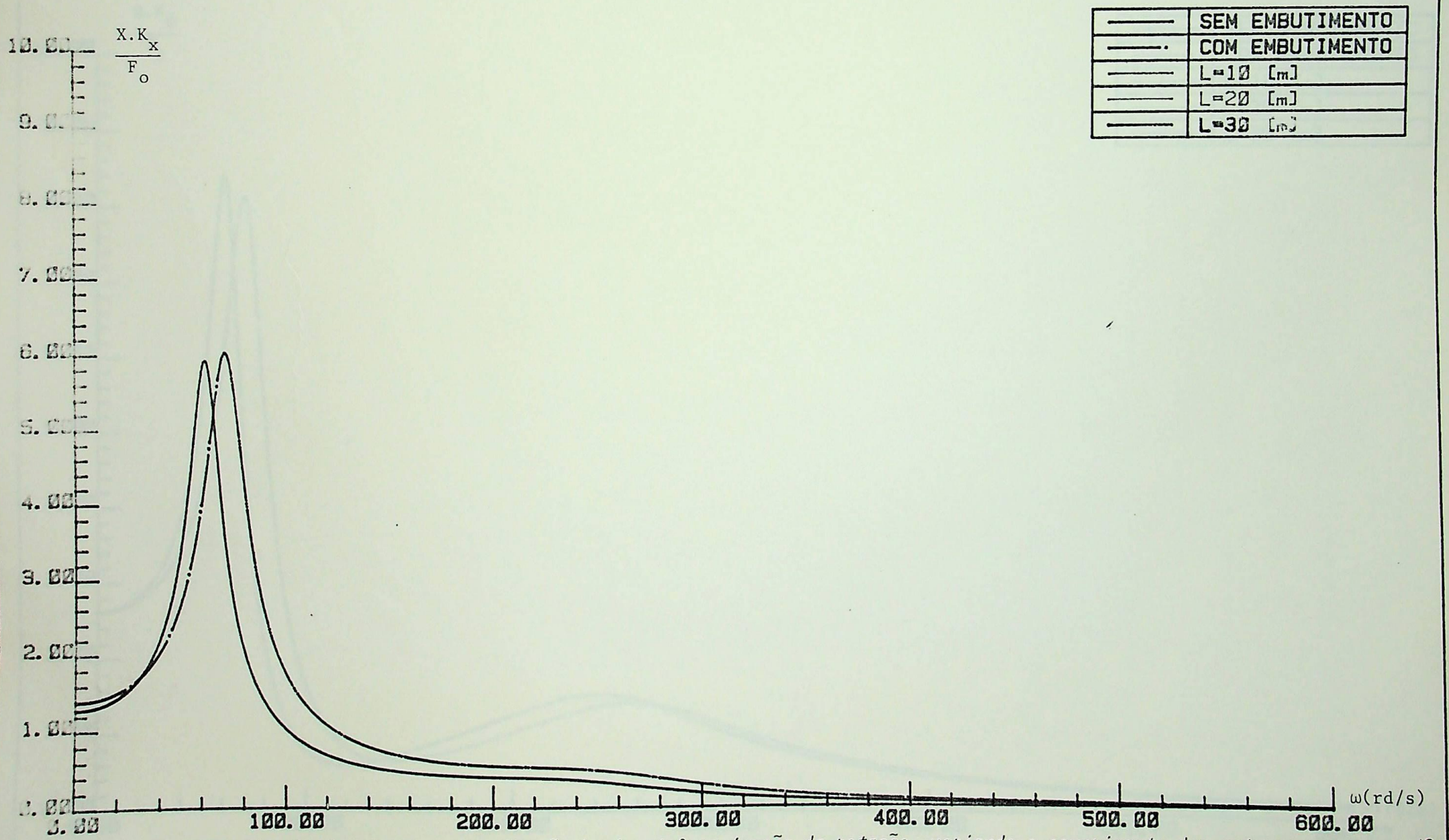

Fig. 5.12 - Resposta na direção horizontal em função da rotação, variando o comprimento das estacas

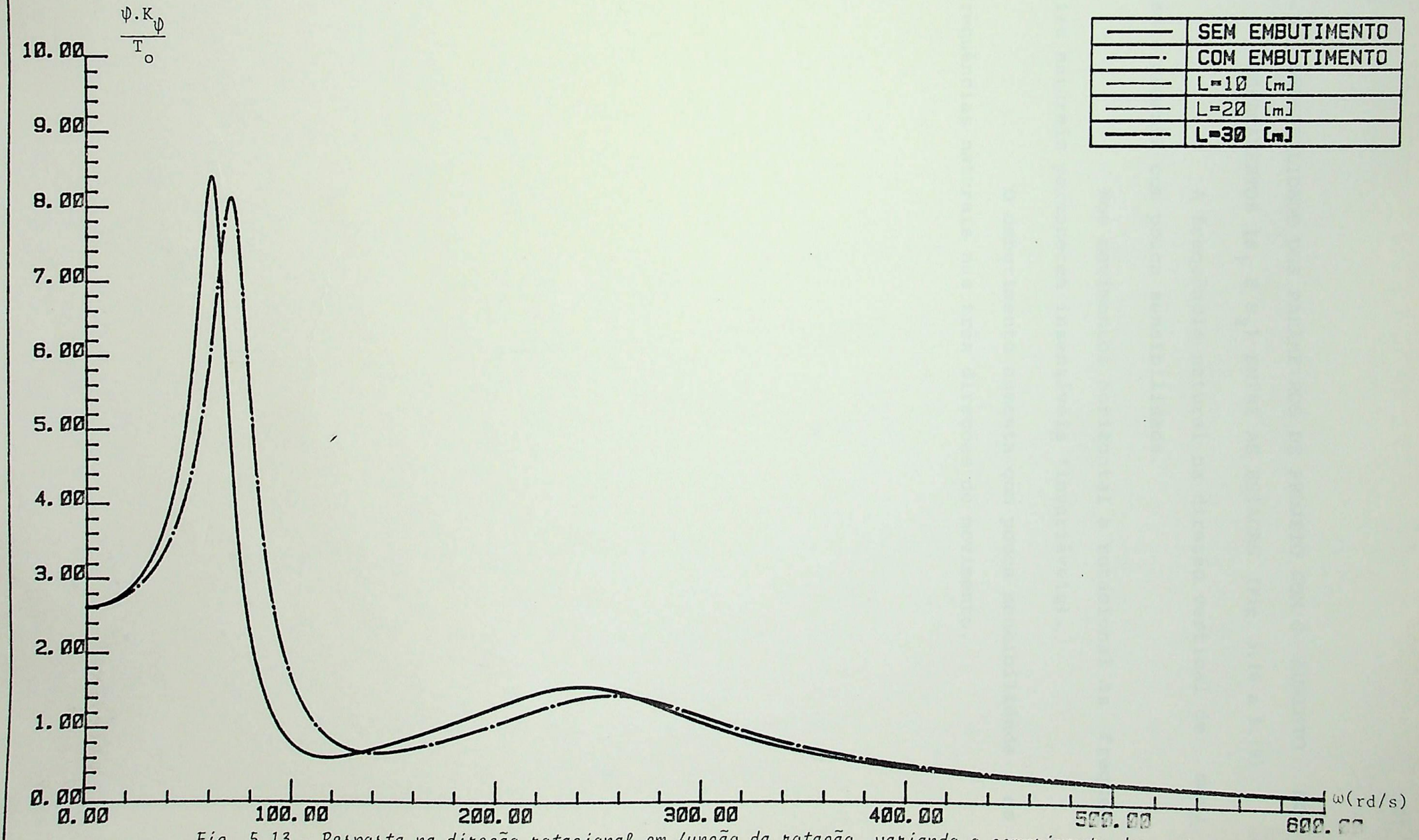

Fig. 5.13 - Resposta na direção rotacional em função da rotação, variando o comprimento das estacas

5.5 - SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DE PROJETO COM O AUMENTO DOS ESPAÇAMENTOS (S_1 E S_2) ENTRE AS ESTACAS (Fig. 5.14 a 5.19)

A frequência natural na direção vertical de movimento aumenta com pouca sensibilidade.

Nos movimentos horizontal e rotacional as frequências naturais permanecem insensíveis (invariáveis).

O embutimento aumenta com pouca sensibilidade as frequências naturais nas três direções de movimento.

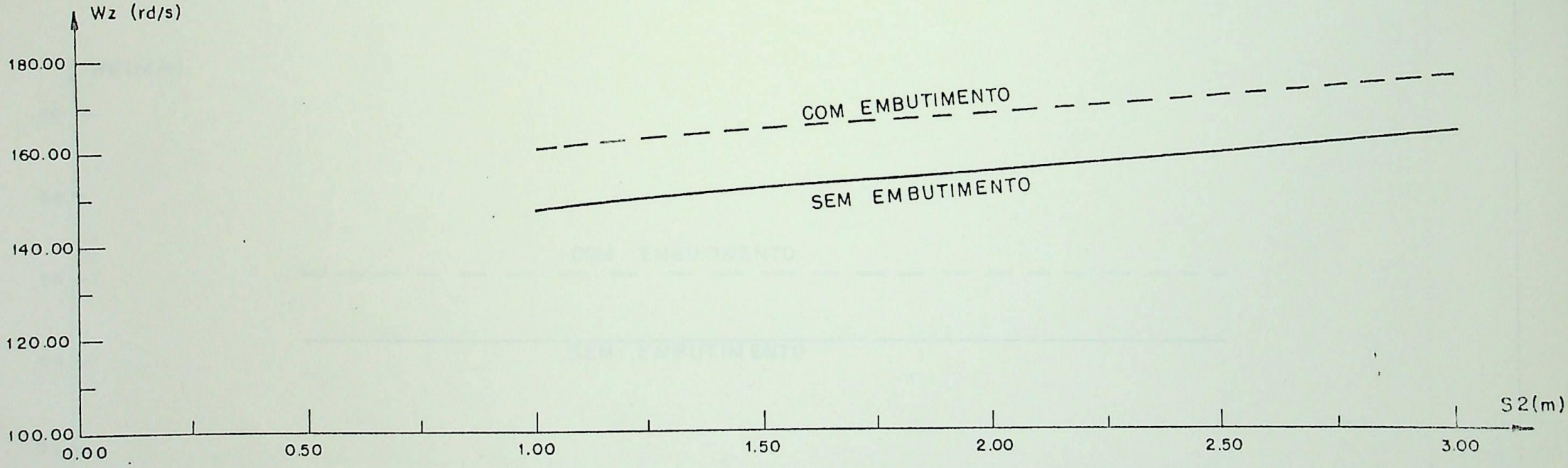

Fig. 5.14 - Frequência natural na direção vertical variando o espaçamento entre estacas

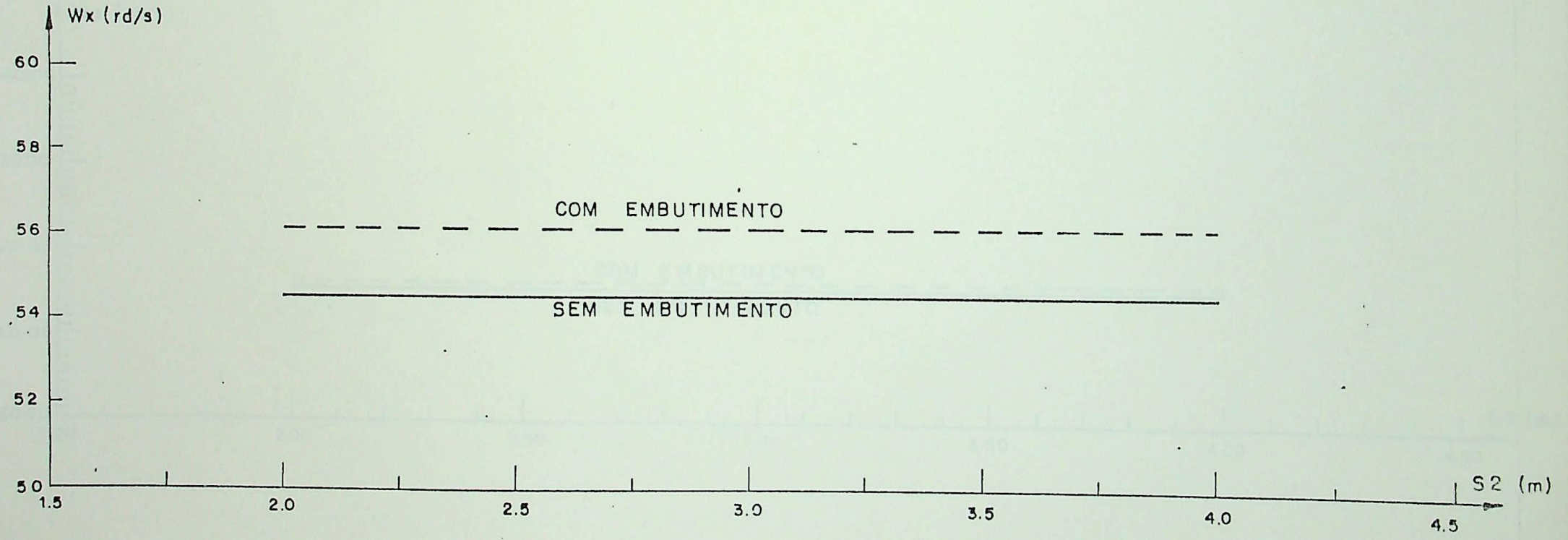

Fig. 5.15 - Frequência natural na direção horizontal variando o espaçamento entre as estacas

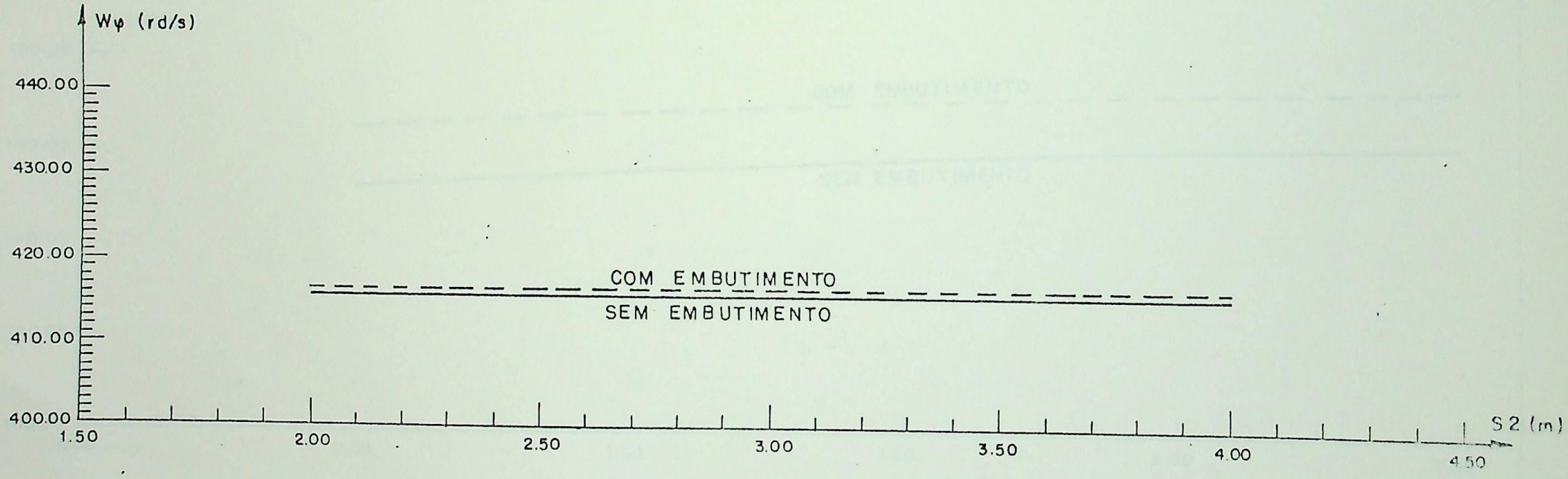

Fig. 5.16 - Frequência natural na direção rotacional variando o espaçamento entre estacas

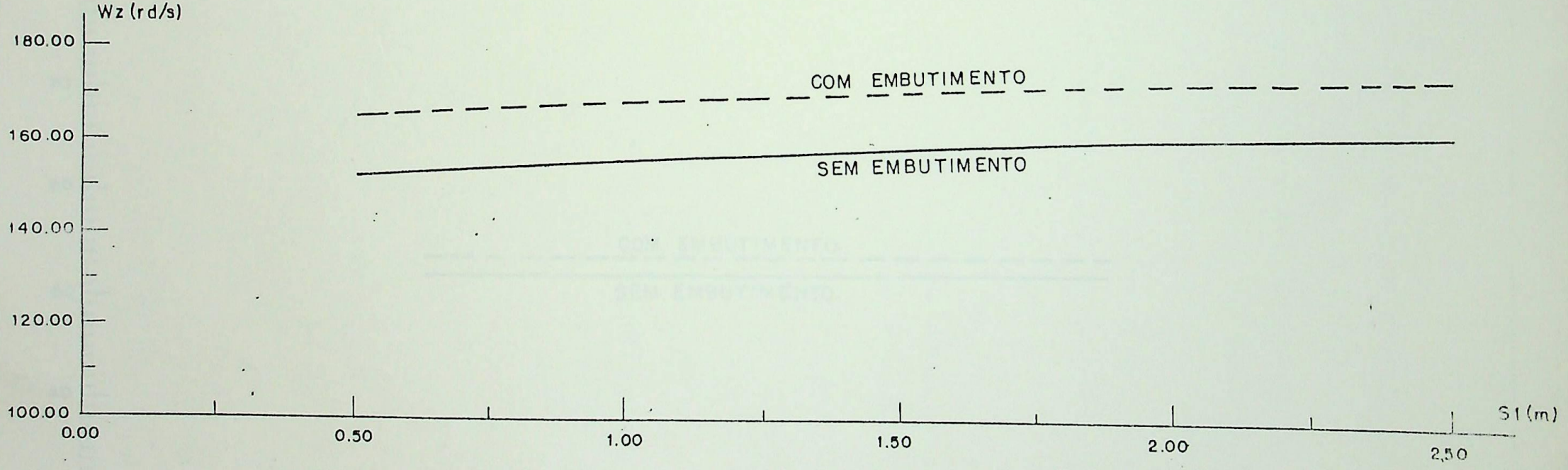

Fig. 5.17 - Frequência natural na direção vertical variando o espaçamento entre estacas

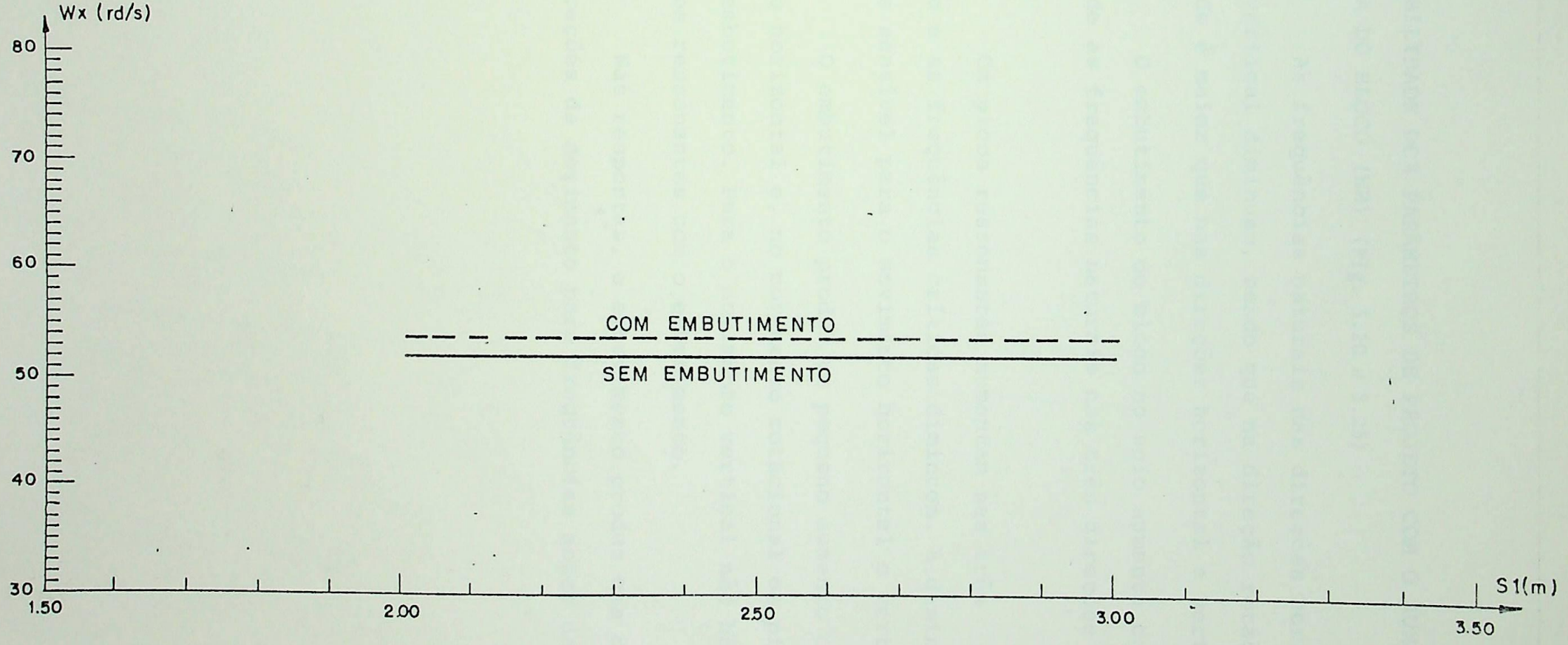

Fig. 5.18 - Frequência natural na direção horizontal, variando o espaçamento entre estacas

5.6 - SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DE PROJETO COM O AUMENTO DA ALTURA DO BLOCO (HB) (Fig. 5.20 a 5.25)

As frequências naturais nas direções horizontal, rotacional e vertical diminuem, sendo que na direção rotacional a sensibilidade é maior que nas direções horizontal e vertical.

O embutimento do bloco no solo aumenta com pouca sensibilidade as frequências naturais nas três direções de movimento.

Os picos ressonantes aumentam nas três direções de movimento e as frequências críticas diminuem. A diminuição dos picos é mais sensível para o movimento horizontal e vertical.

O embutimento produz um pequeno aumento dos picos no movimento horizontal e, no movimento rotacional os picos diminuem com o embutimento. Para o movimento vertical não há alteração dos picos ressonantes com o embutimento.

Nas respostas, o embutimento produz uma diminuição nas três direções de movimento para frequências antes das críticas.

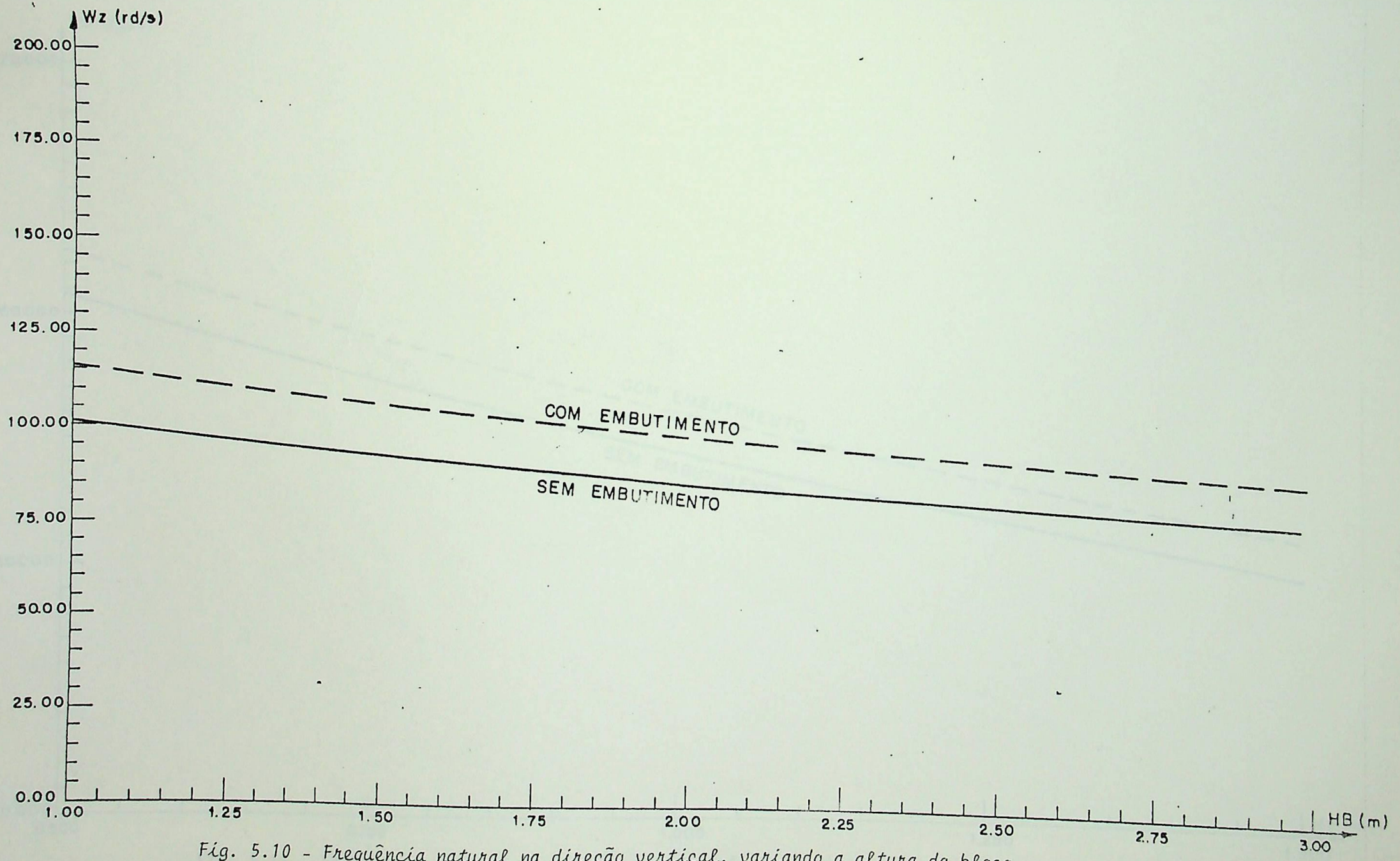

Fig. 5.10 - Frequência natural na direção vertical, variando a altura do bloco

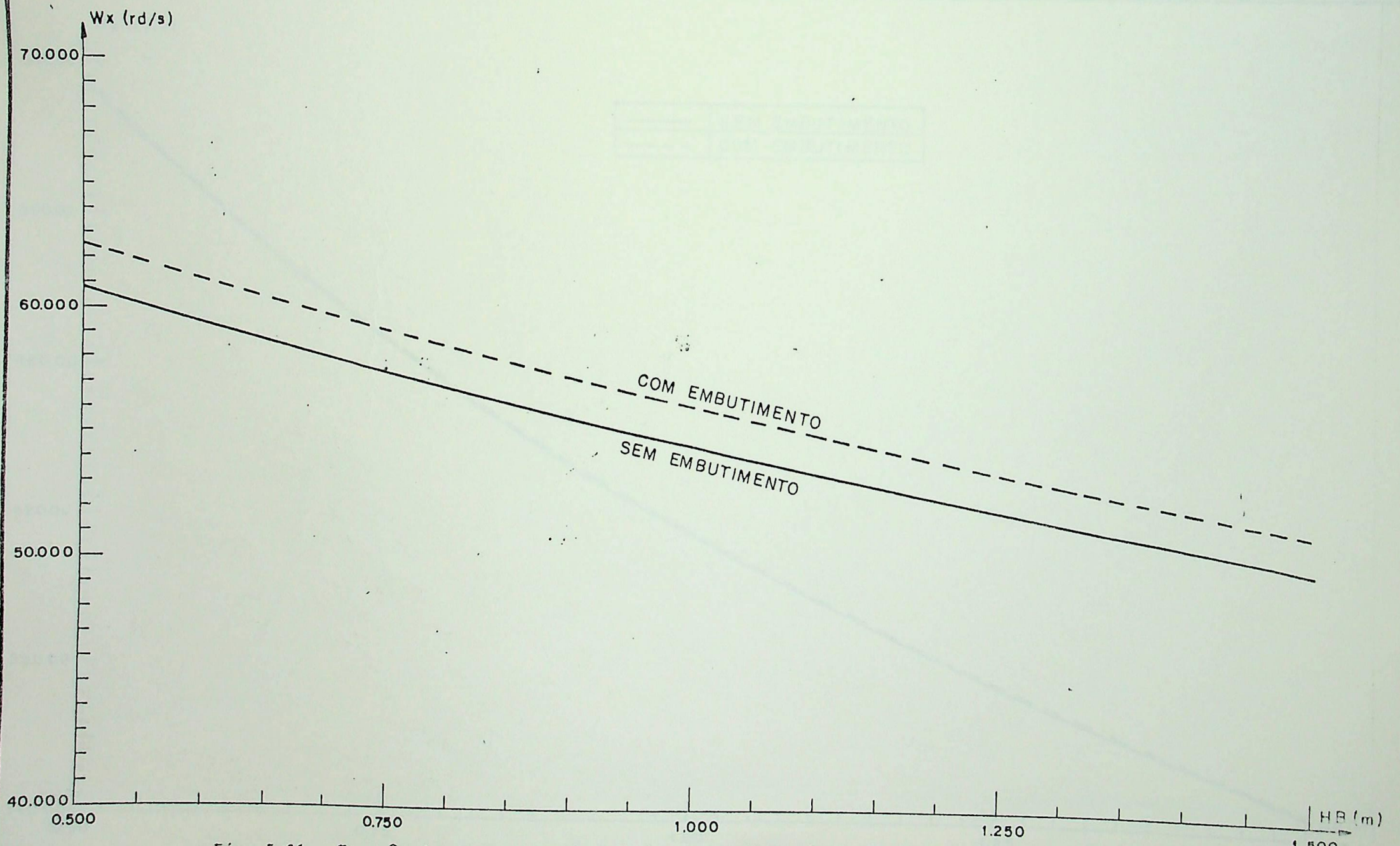

Fig. 5.21 - Frequência natural na direção horizontal, variando a altura do bloco

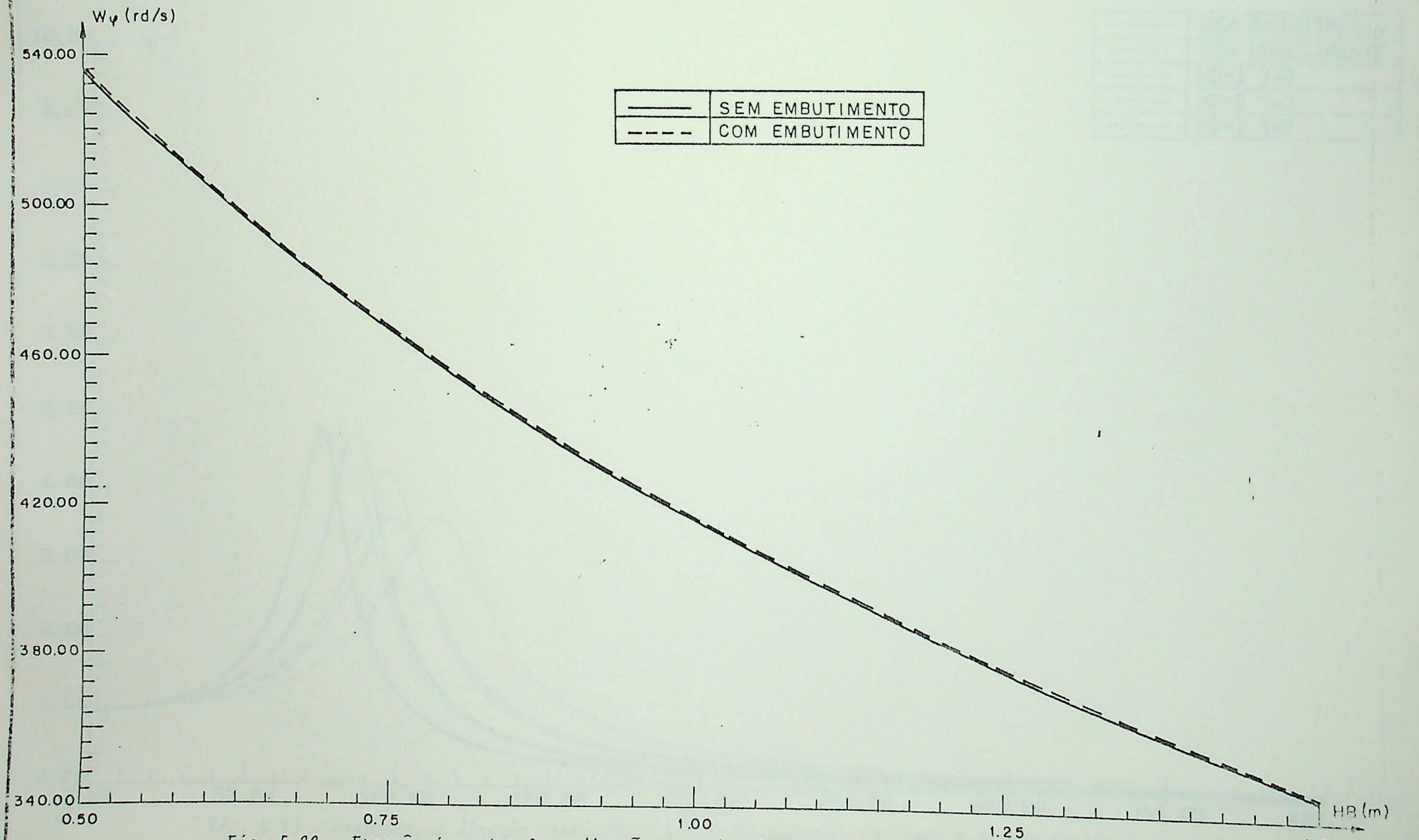

Fig. 5.22 - Frequência natural na direção rotacional variando a altura do bloco

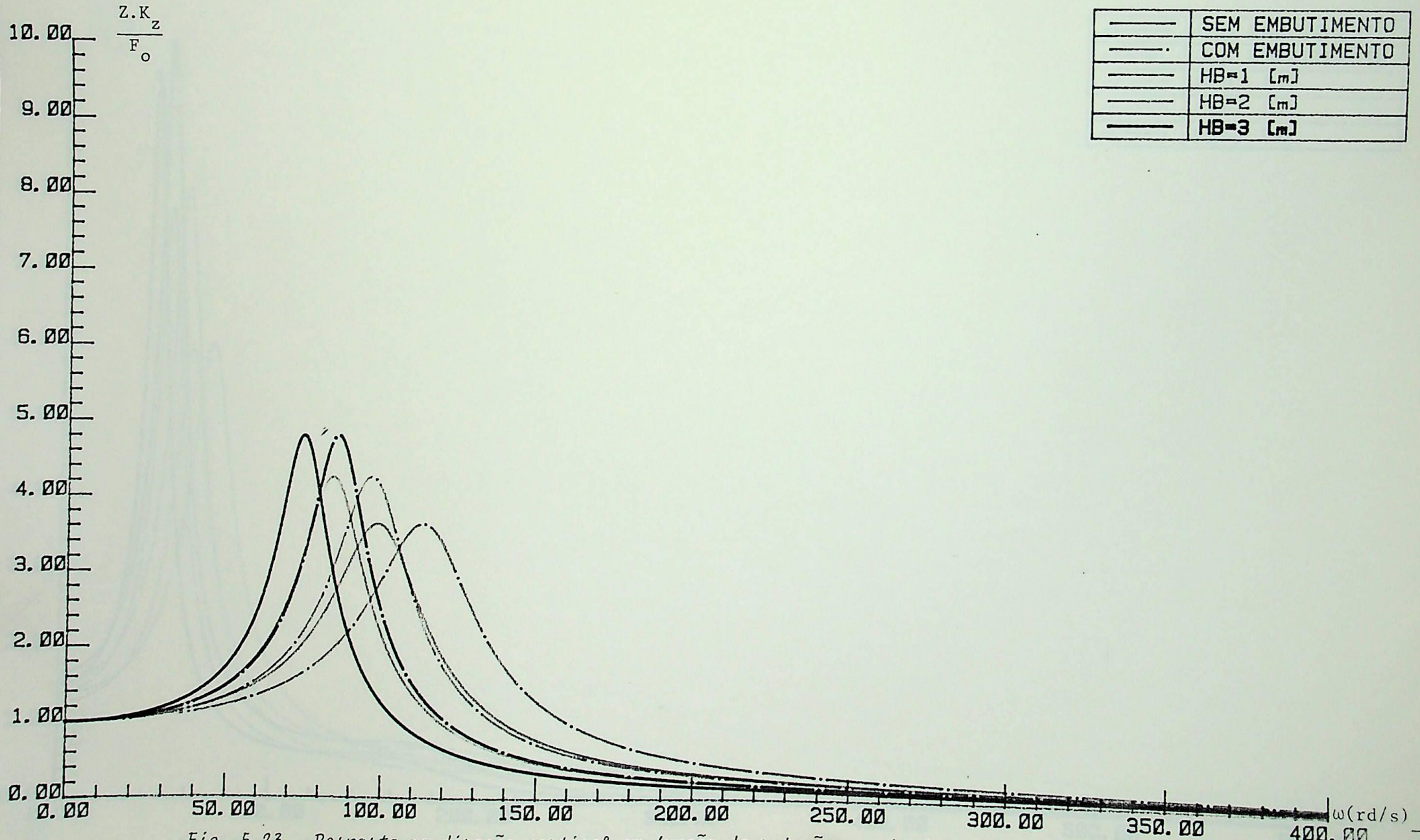

Fig. 5.23 - Resposta na direção vertical em função da rotação, variando a altura do bloco

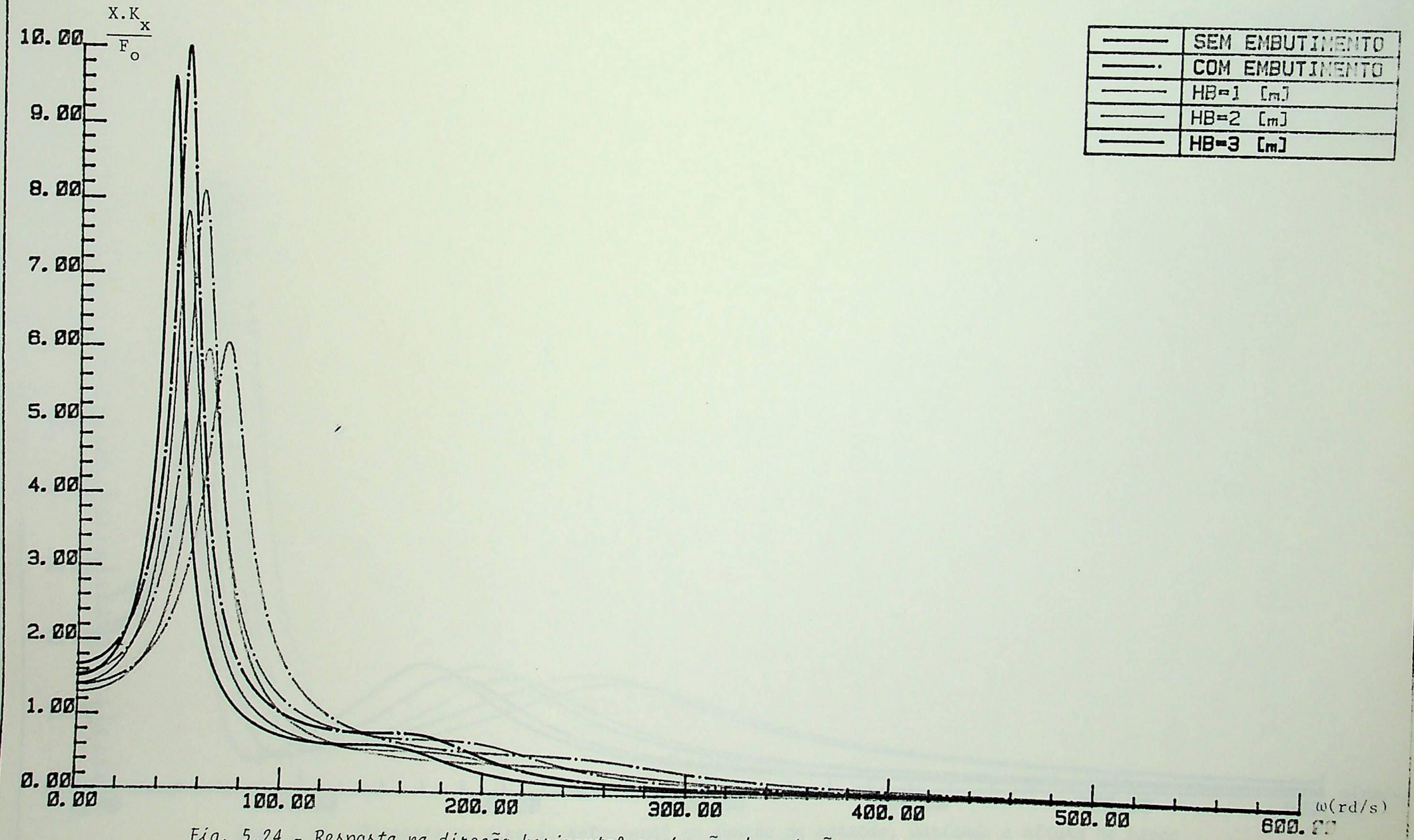

Fig. 5.24 - Resposta na direção horizontal em função da rotação, variando a altura do bloco

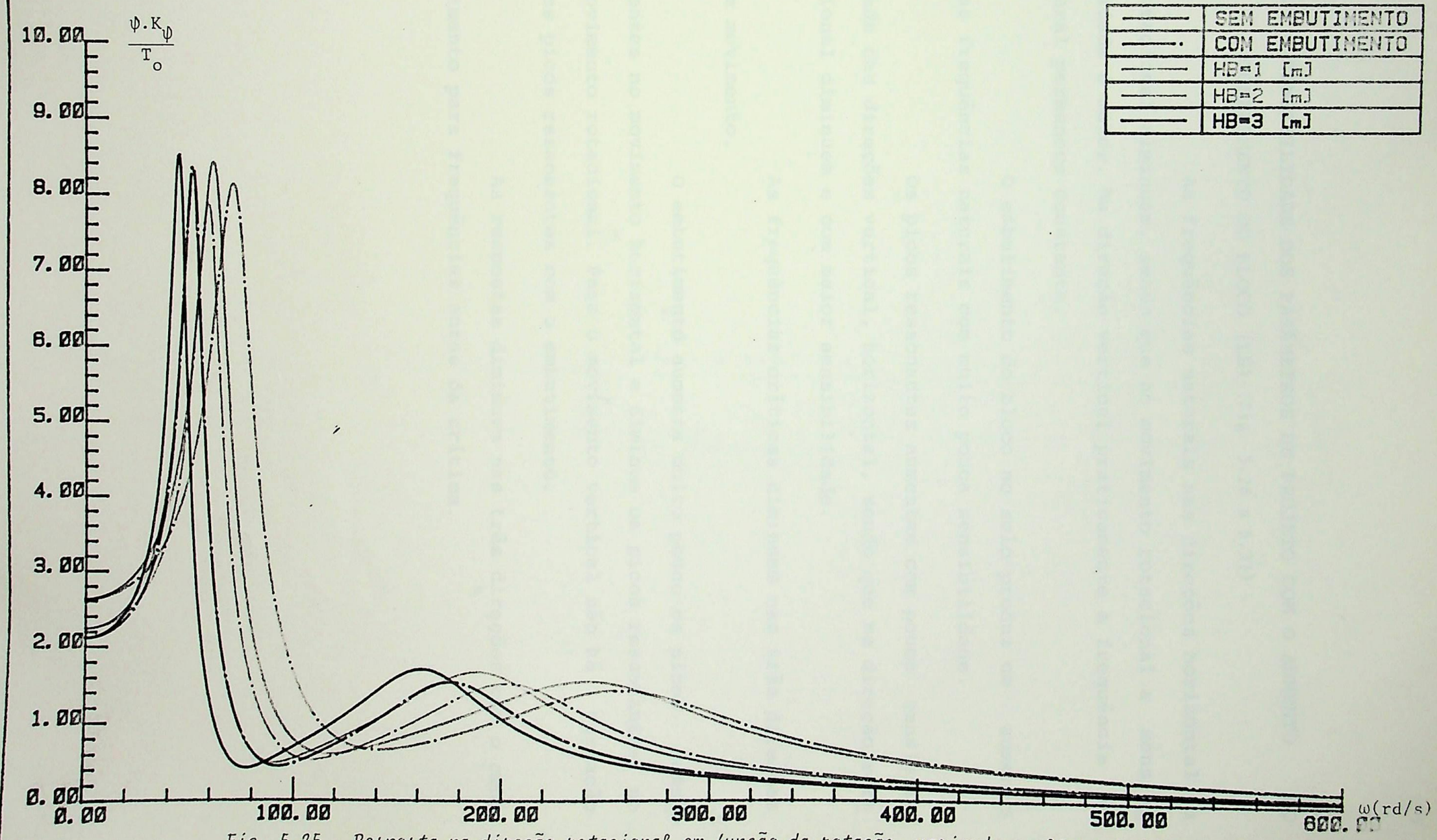

Fig. 5.25 - Resposta na direção rotacional em função da rotação, variando a altura do bloco

5.7 - SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DE PROJETO COM O AUMENTO DO COMPRIMENTO DO BLOCO (LB) (Fig. 5.26 a 5.31)

As frequências naturais nas direções horizontal e rotacional diminuem, sendo que no movimento rotacional a sensibilidade é maior. Na direção vertical praticamente a frequência natural permanece constante.

O embutimento do bloco no solo produz um aumento nas frequências naturais com muito pouca sensibilidade.

Os picos ressonantes aumentam com pouca sensibilidade nas direções vertical, horizontal, sendo que na direção rotacional diminuem e com maior sensibilidade.

As frequências críticas diminuem nas três direções de movimento.

O embutimento aumenta muito pouco os picos ressonantes no movimento horizontal e diminue os picos ressonantes no movimento rotacional. Para o movimento vertical não há variação dos picos ressonantes com o embutimento.

As respostas diminuem nas três direções com o embutimento para frequências antes da crítica.

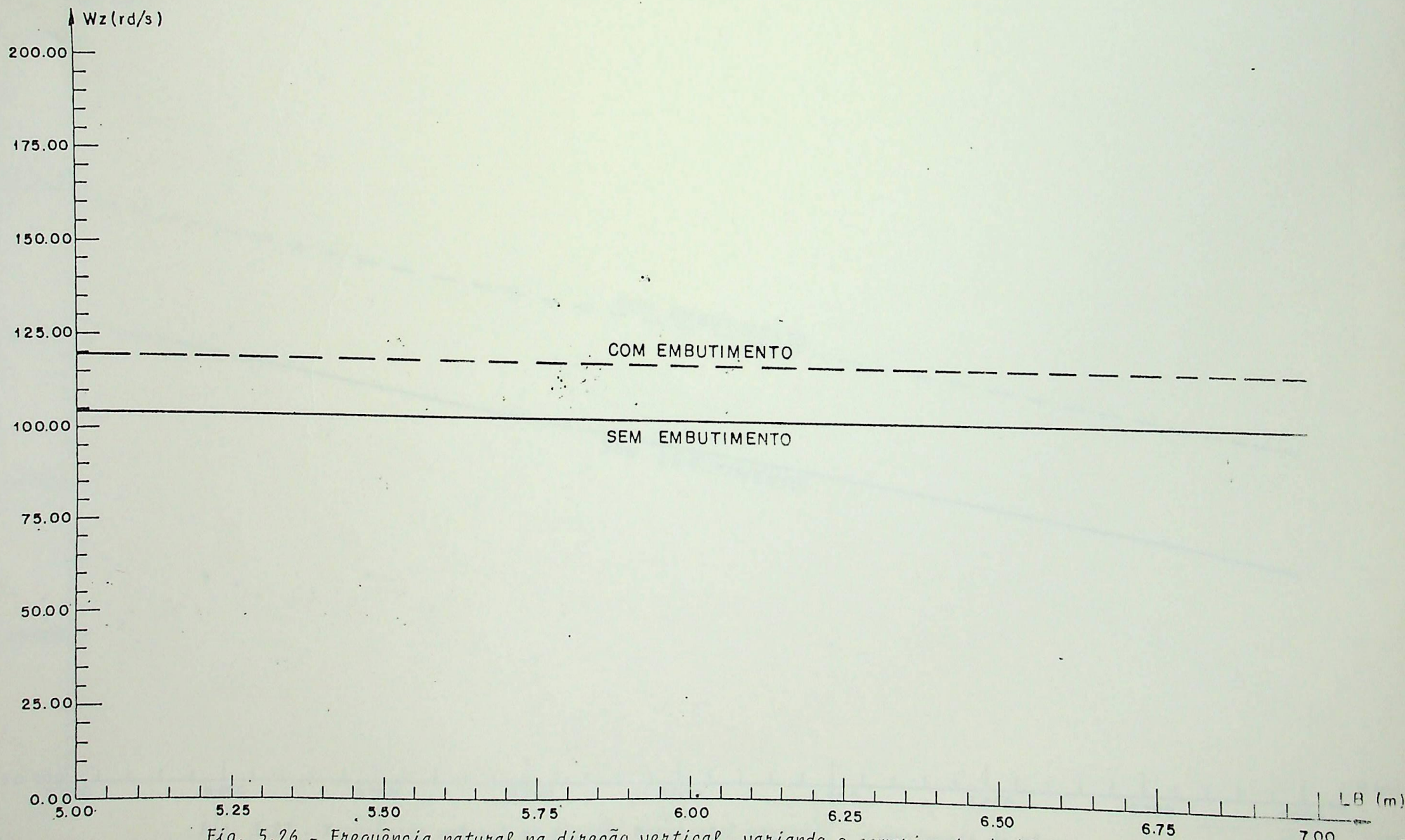

Fig. 5.26 - Frequência natural na direção vertical, variando o comprimento do bloco

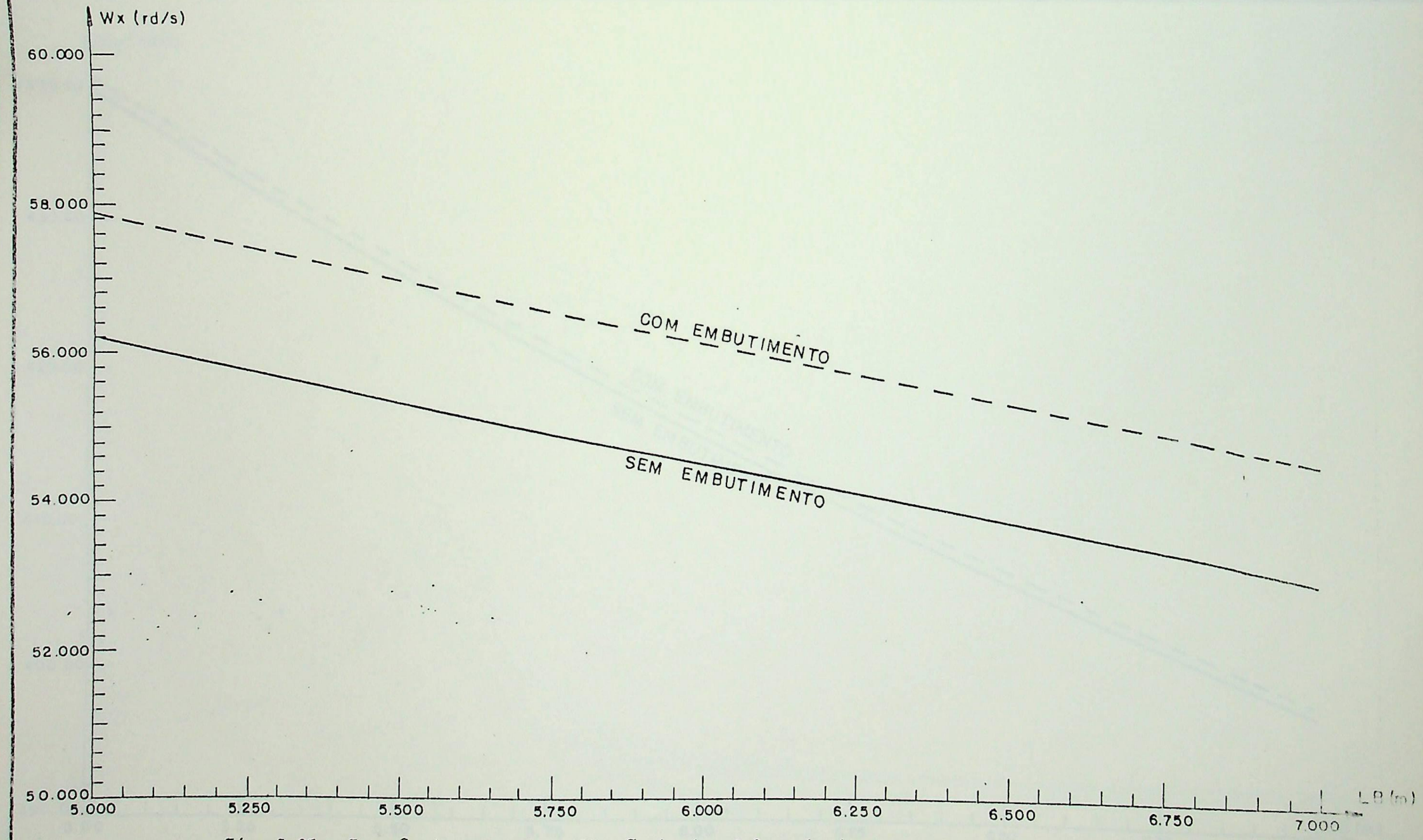

Fig. 5.27 - Frequência natural na direção horizontal variando o comprimento do bloco

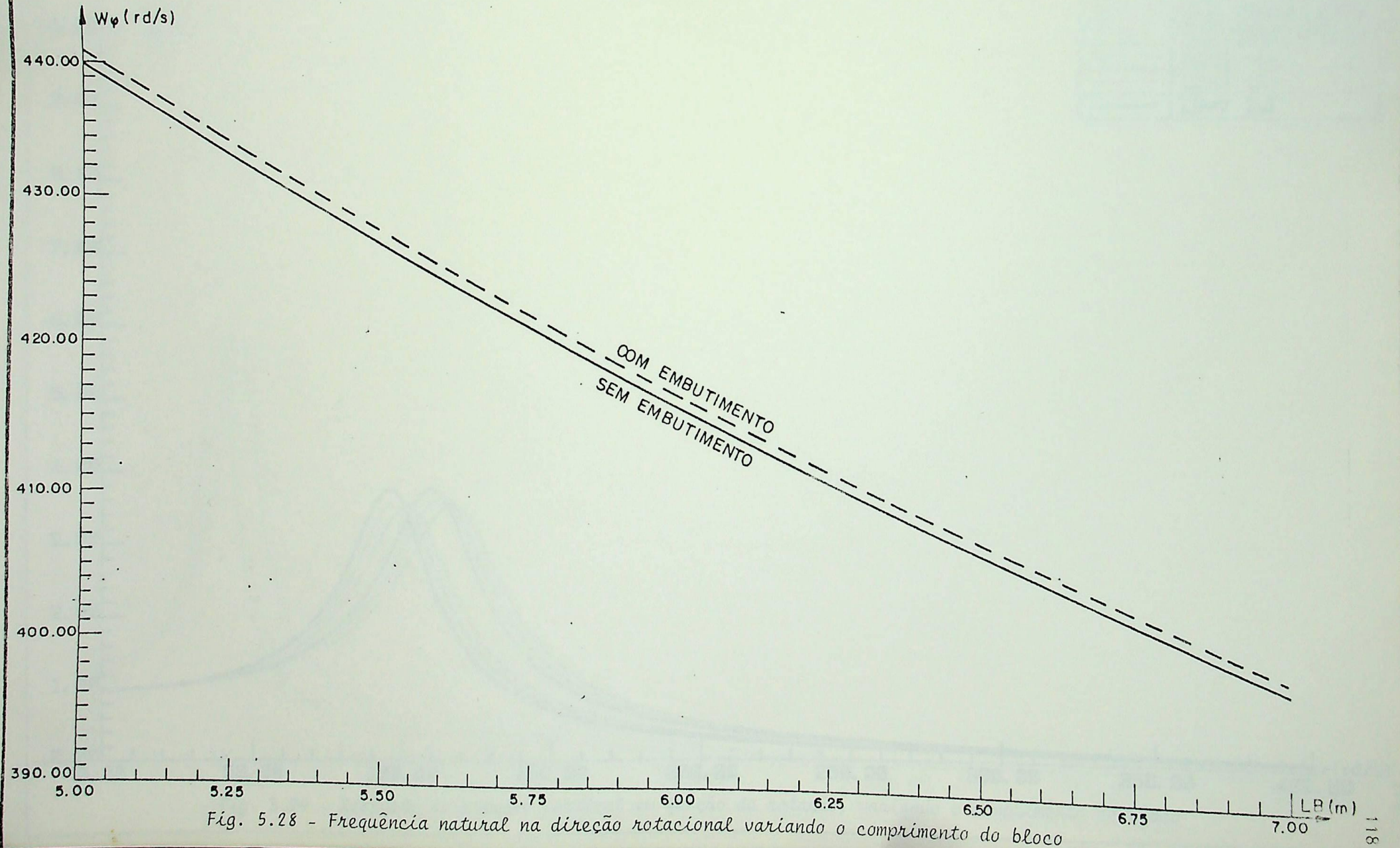

Fig. 5.28 - Frequência natural na direção rotacional variando o comprimento do bloco

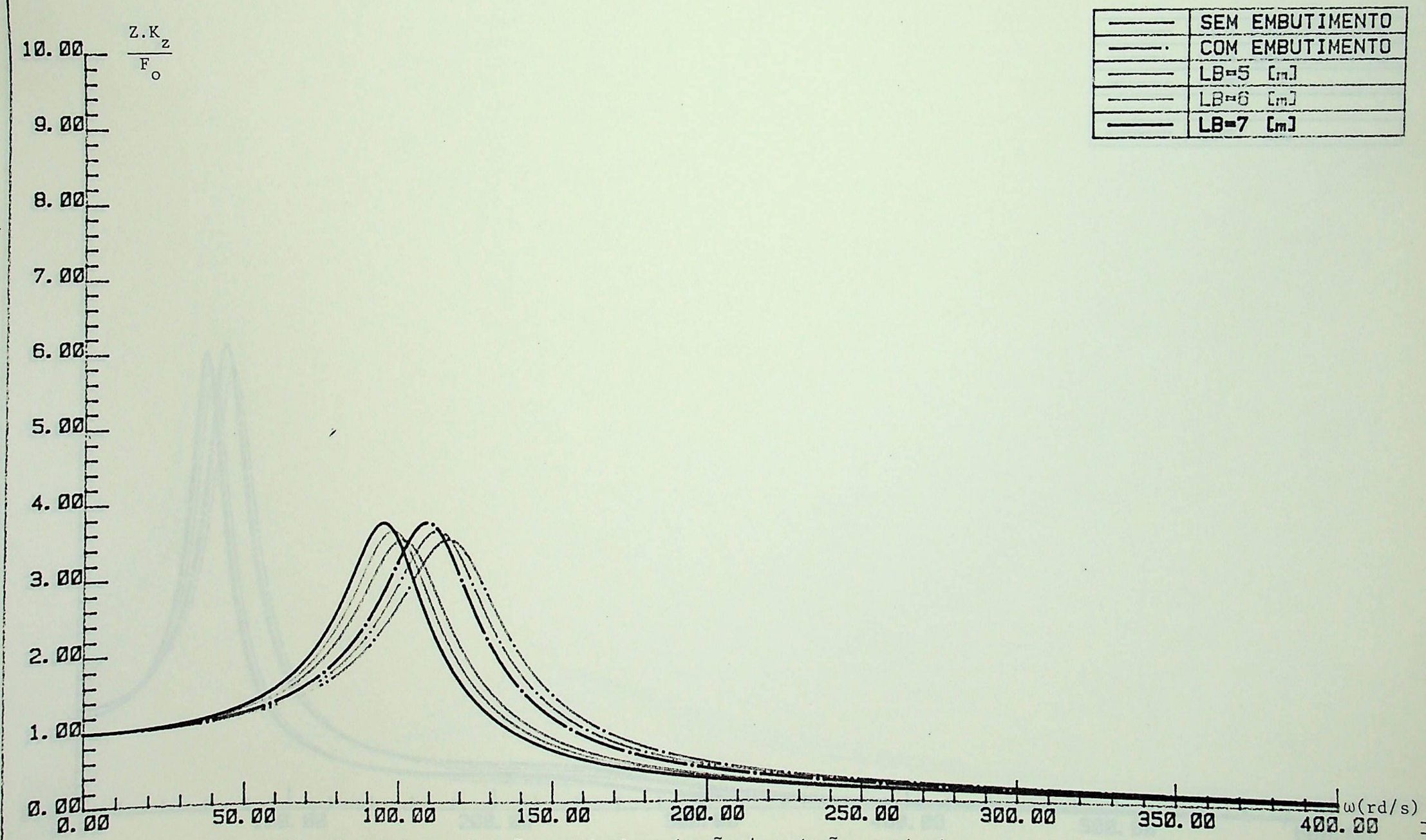

Fig. 5.29 - Resposta na direção vertical em função da rotação, variando o comprimento do bloco

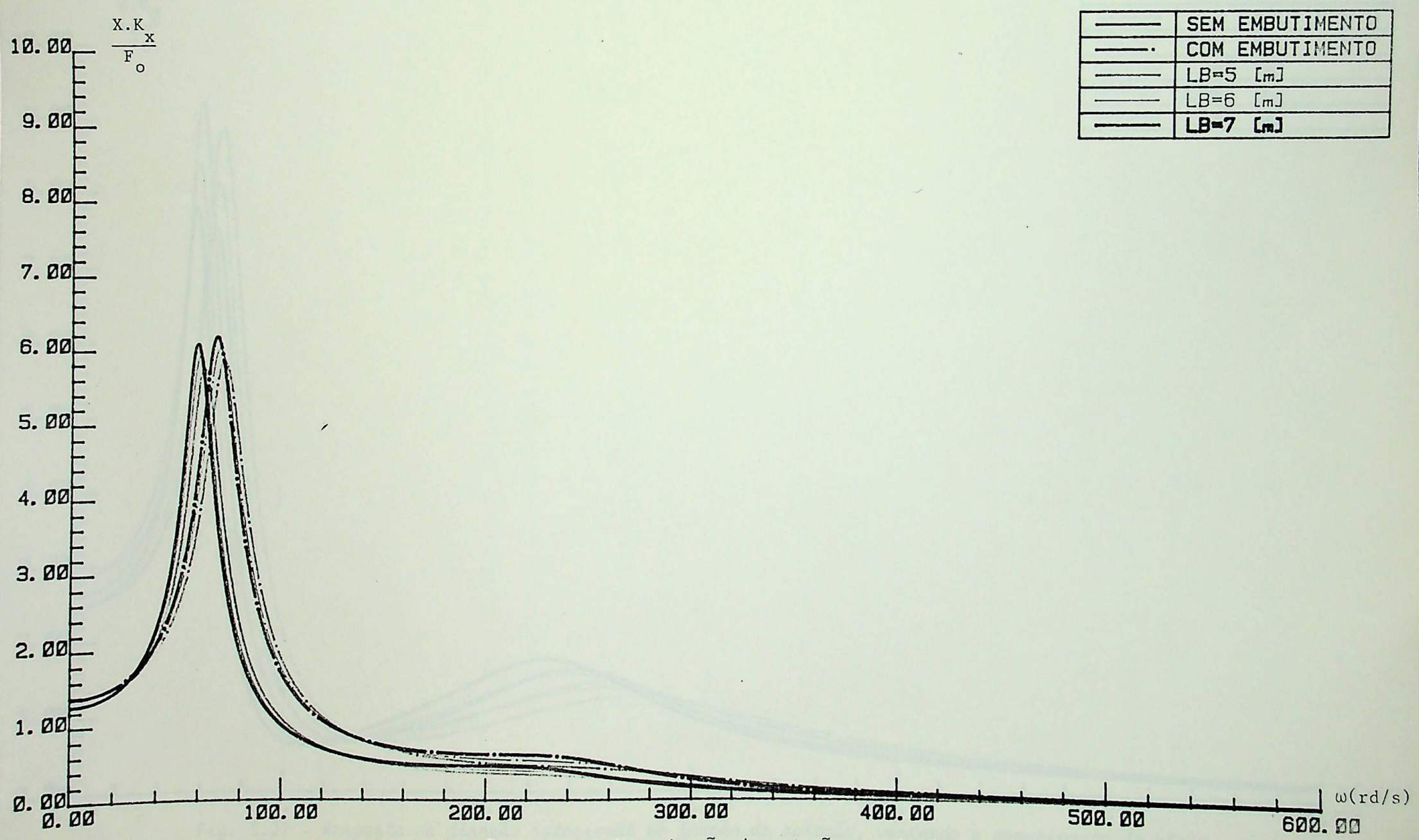

Fig. 5.30 - Resposta na direção horizontal em função da rotação, variando o comprimento do bloco

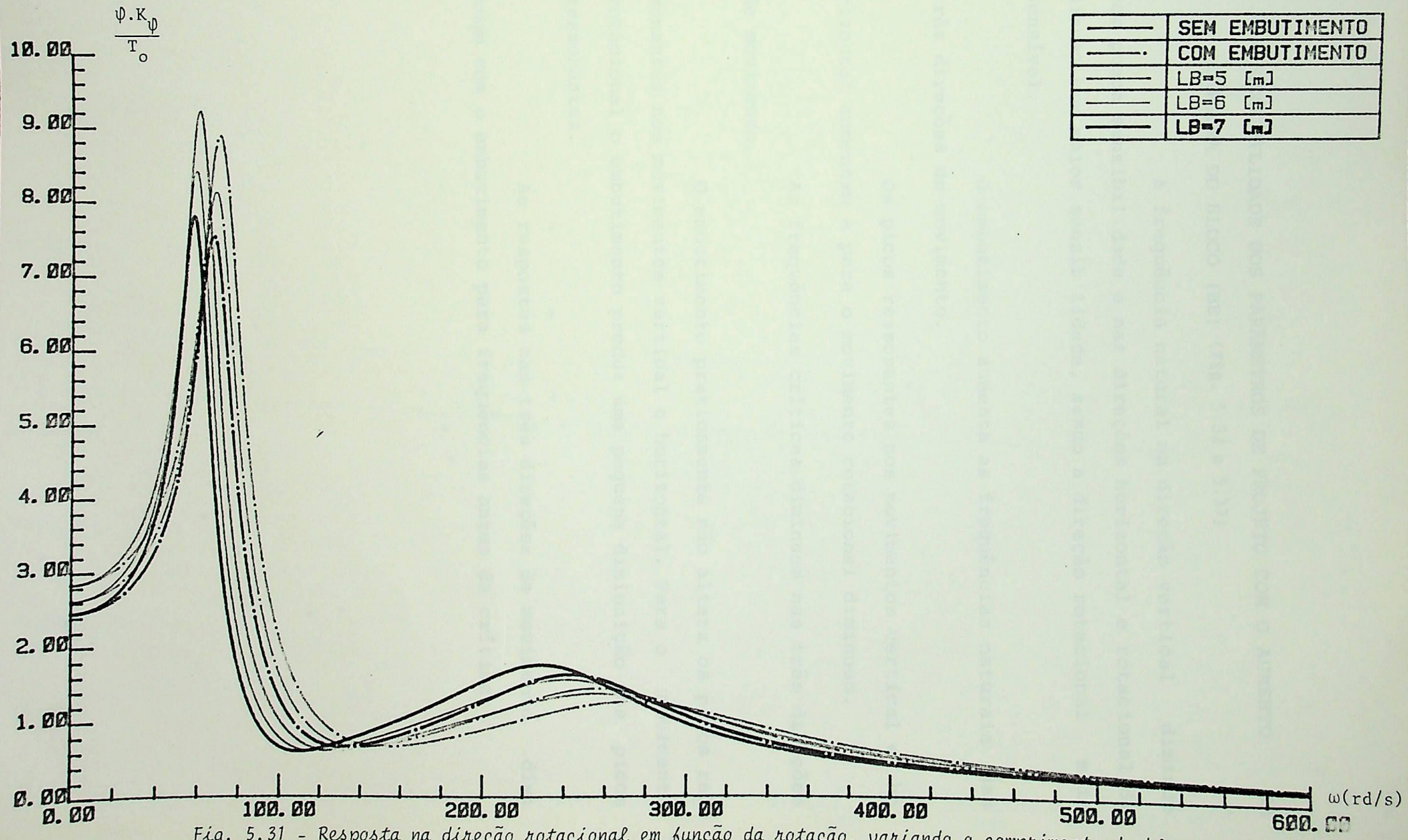

Fig. 5.31 - Resposta na direção rotacional em função da rotação, variando o comprimento do bloco

5.8 - SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DE PROJETO COM O AUMENTO DA LARGURA DO BLOCO (BB) (Fig. 5.32 a 5.37)

A frequência natural na direção vertical diminue com pouca sensibilidade e nas direções horizontal e rotacional diminuem com maior sensibilidade, sendo a direção rotacional mais sensível.

O embutimento aumenta as frequências naturais nas três direções de movimento.

Os picos ressonantes nos movimentos vertical e horizontal aumentam e para o movimento rotacional diminuem.

As frequências críticas diminuem nas três direções de movimento.

O embutimento praticamente não altera os picos ressonantes nos movimentos vertical e horizontal. Para o movimento rotacional o embutimento produz uma pequena diminuição dos picos ressonantes.

As respostas nas três direções de movimento diminuem com o embutimento para frequências antes da crítica.

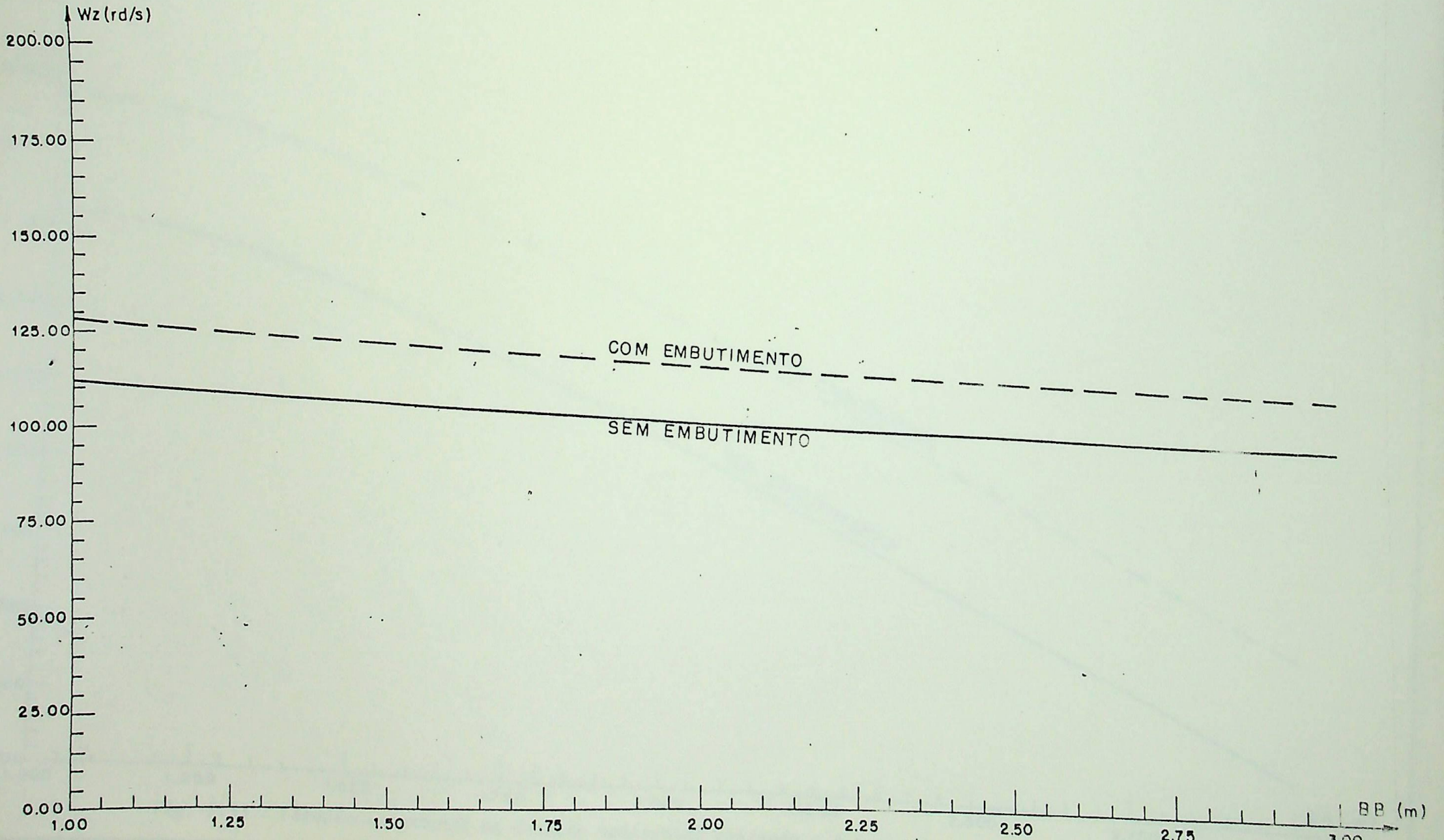

Fig. 5.32 - Frequência natural na direção vertical, variando a largura do bloco

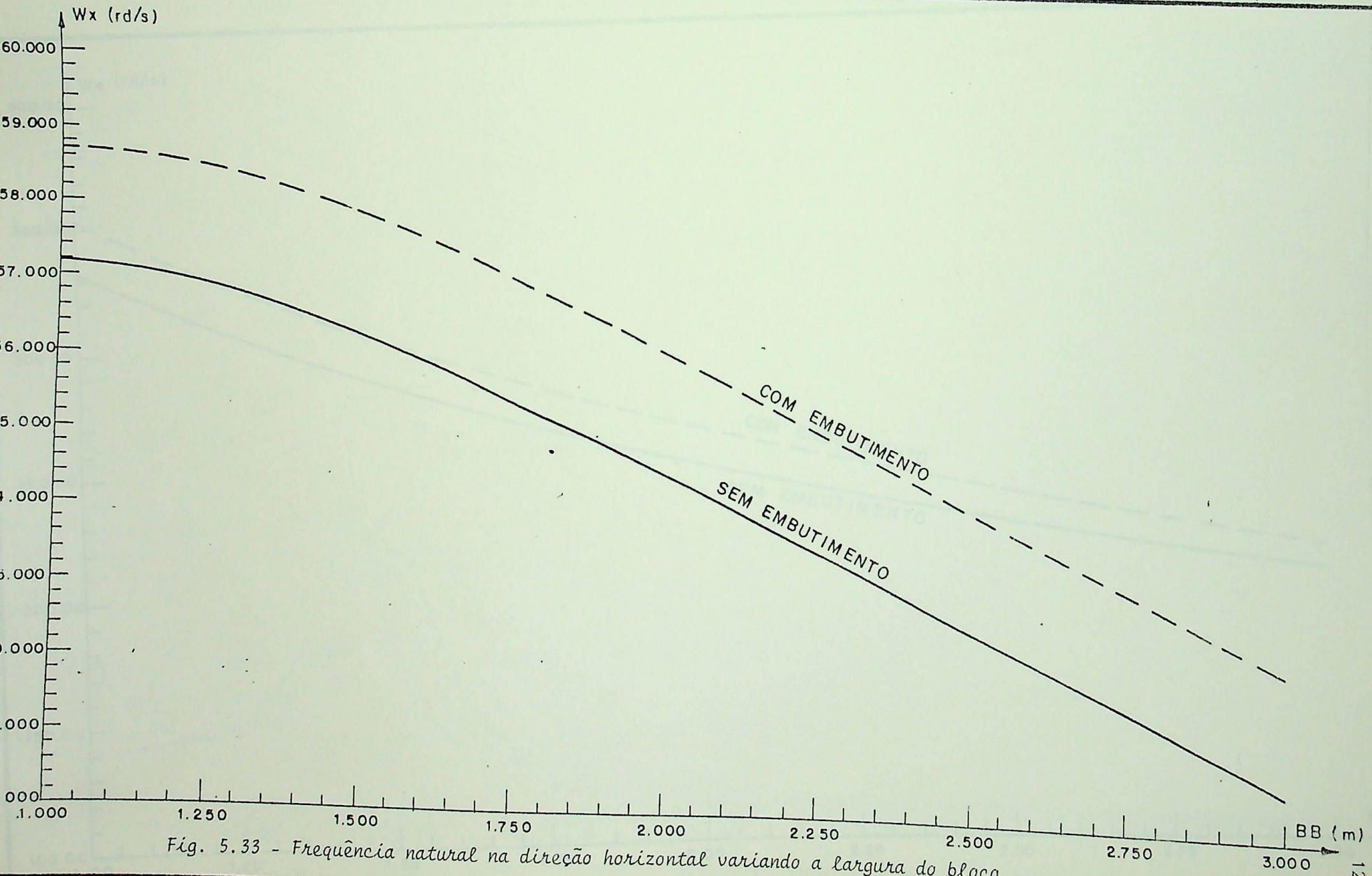

Fig. 5.33 - Frequência natural na direção horizontal variando a largura do bloco

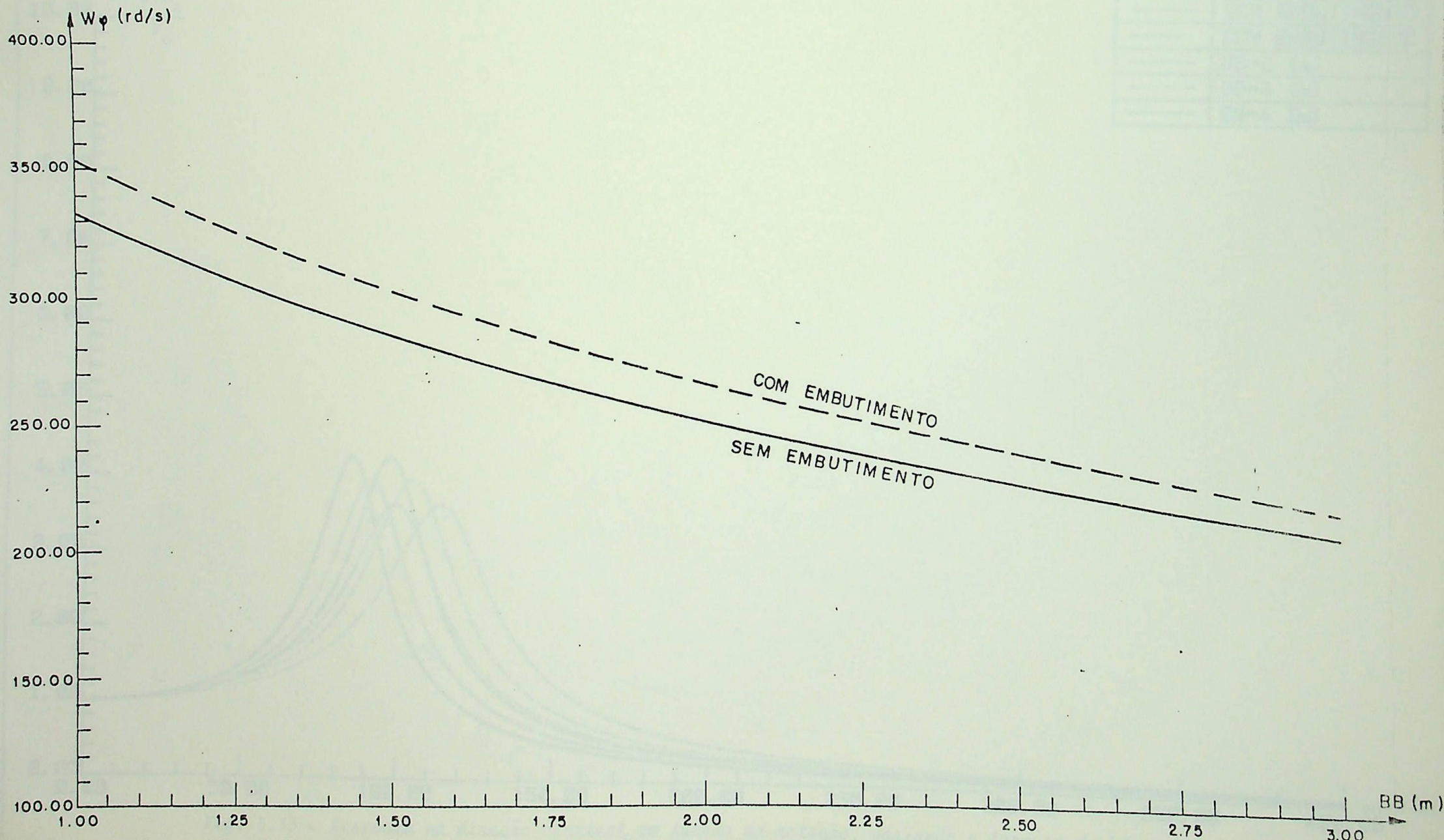

Fig. 5.34 - Frequência natural na direção rotacional, variando a largura do bloco

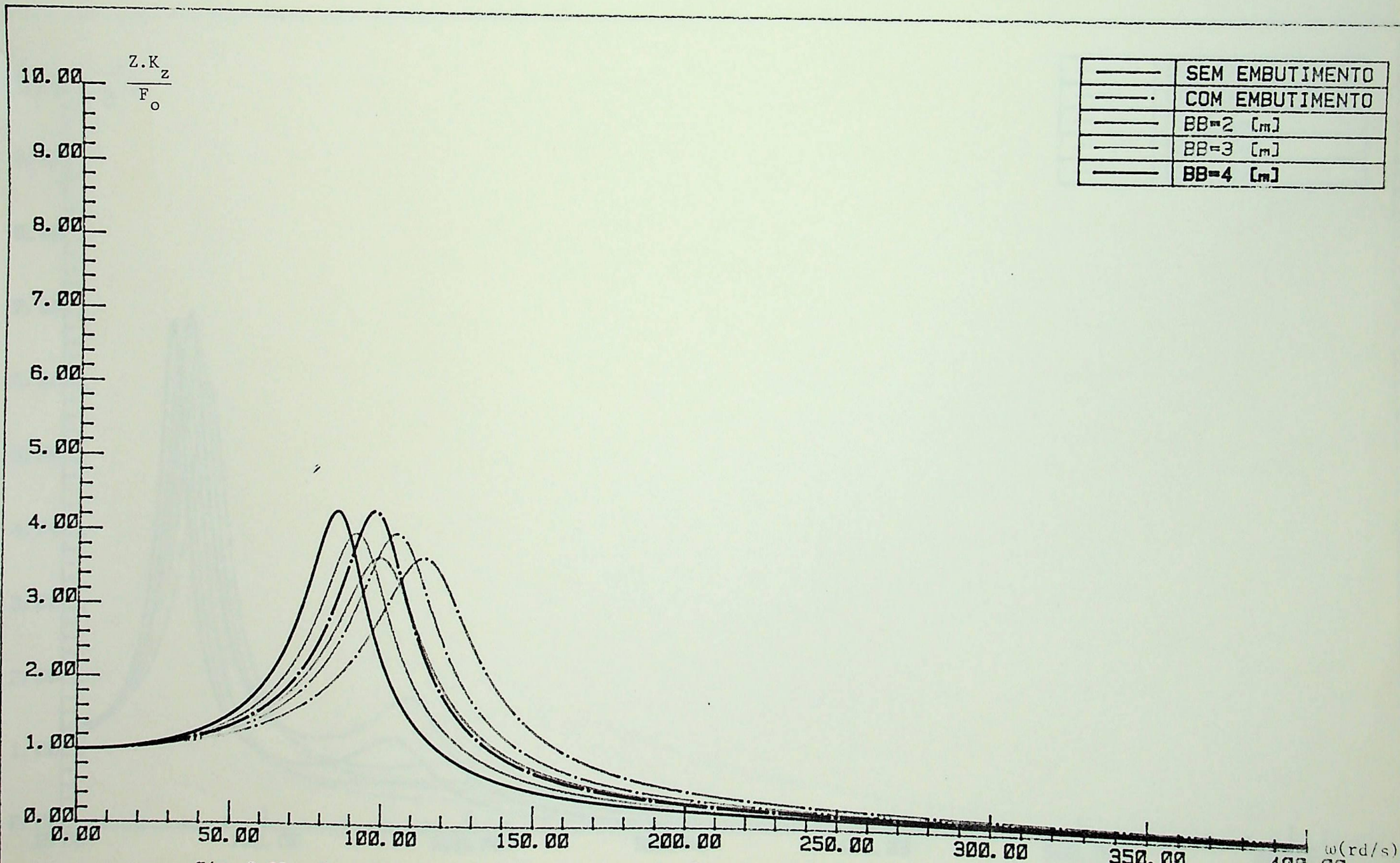

Fig. 5.35 - Resposta na direção vertical em função da rotação, variando a largura do bloco

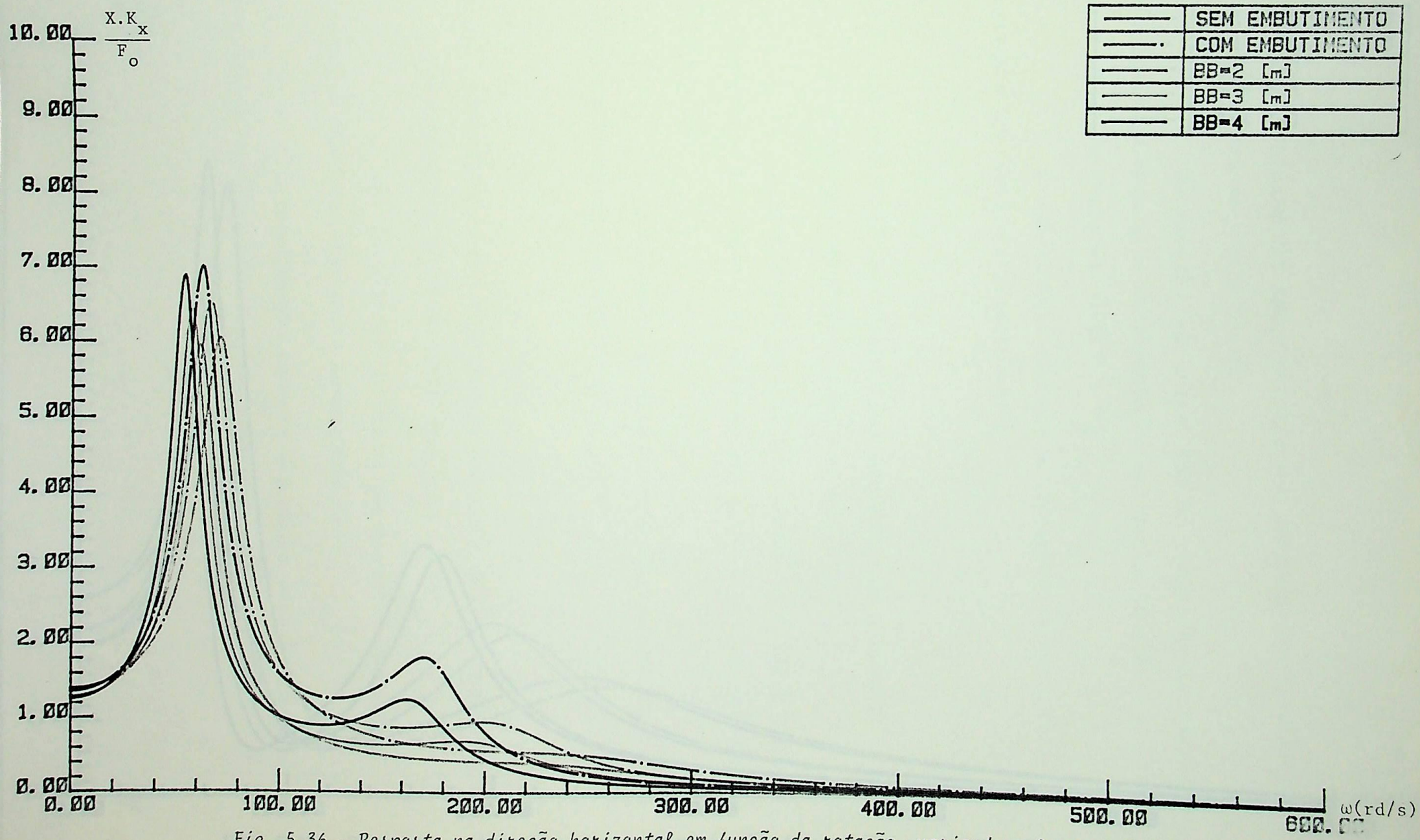

Fig. 5.36 - Resposta na direção horizontal em função da rotação, variando a largura do bloco

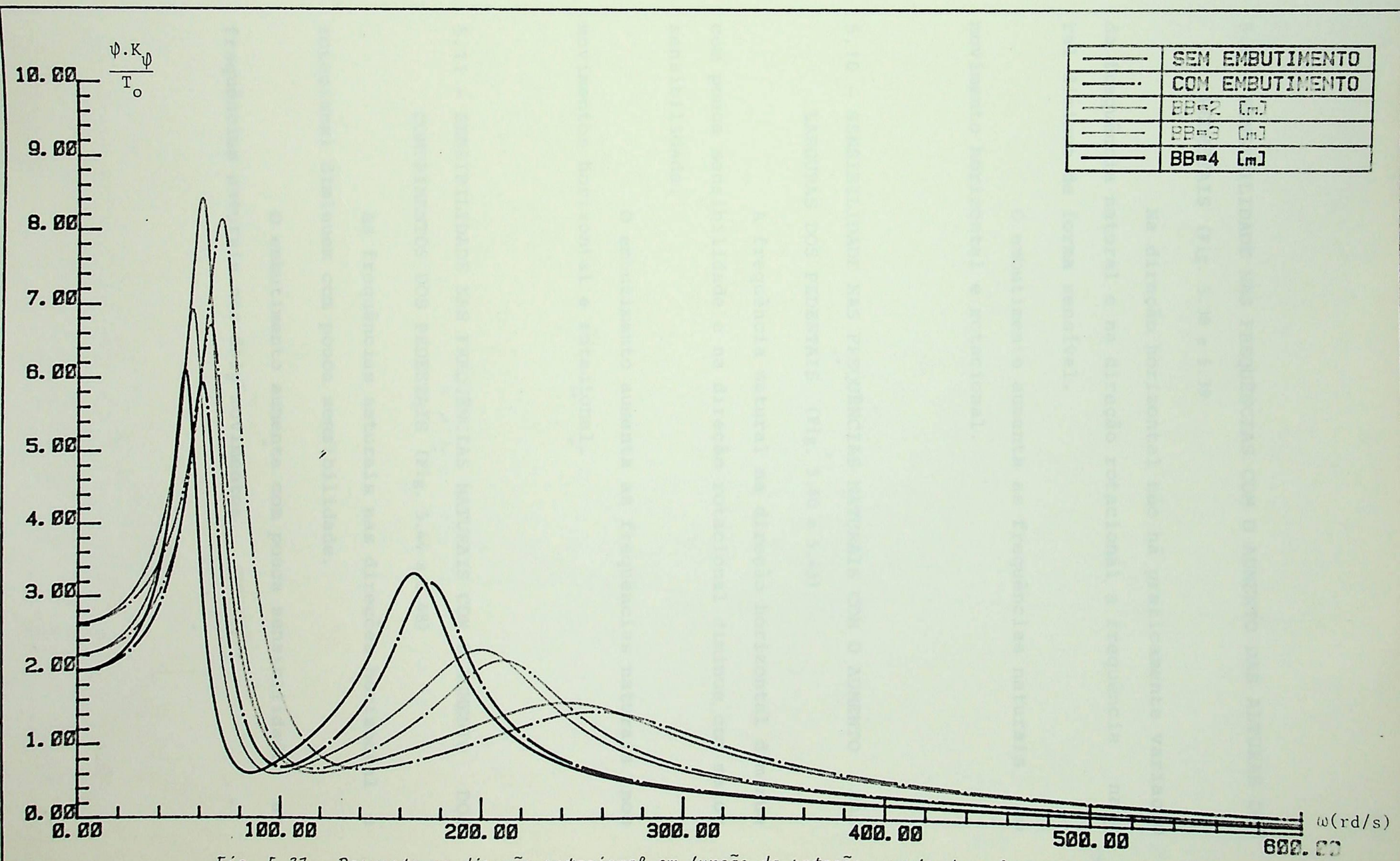

Fig. 5.37 - Resposta na direção rotacional em função da rotação, variando a largura do bloco

5.9 - SENSIBILIDADE NAS FREQUÊNCIAS COM O AUMENTO DAS ALTURAS DOS PEDESTAIS (Fig. 5.38 e 5.39

Na direção horizontal não há praticamente variação da frequência natural e na direção rotacional a frequência natural diminue de forma sensível.

O embutimento aumenta as frequências naturais do movimento horizontal e rotacional.

5.10 - SENSIBILIDADE NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS COM O AUMENTO DAS LARGURAS DOS PEDESTAIS (Fig. 5.40 a 5.43)

A frequência natural na direção horizontal diminue com pouca sensibilidade e na direção rotacional diminue com maior sensibilidade.

O embutimento aumenta as frequências naturais nos movimentos horizontal e rotacional.

5.11 - SENSIBILIDADE NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS COM O AUMENTO DOS COMPRIMENTOS DOS PEDESTAIS (Fig. 5.44 a 5.48)

As frequências naturais nas direções horizontal e rotacional diminuem com pouca sensibilidade.

O embutimento aumenta com pouca sensibilidade as frequências naturais nos dois movimentos.

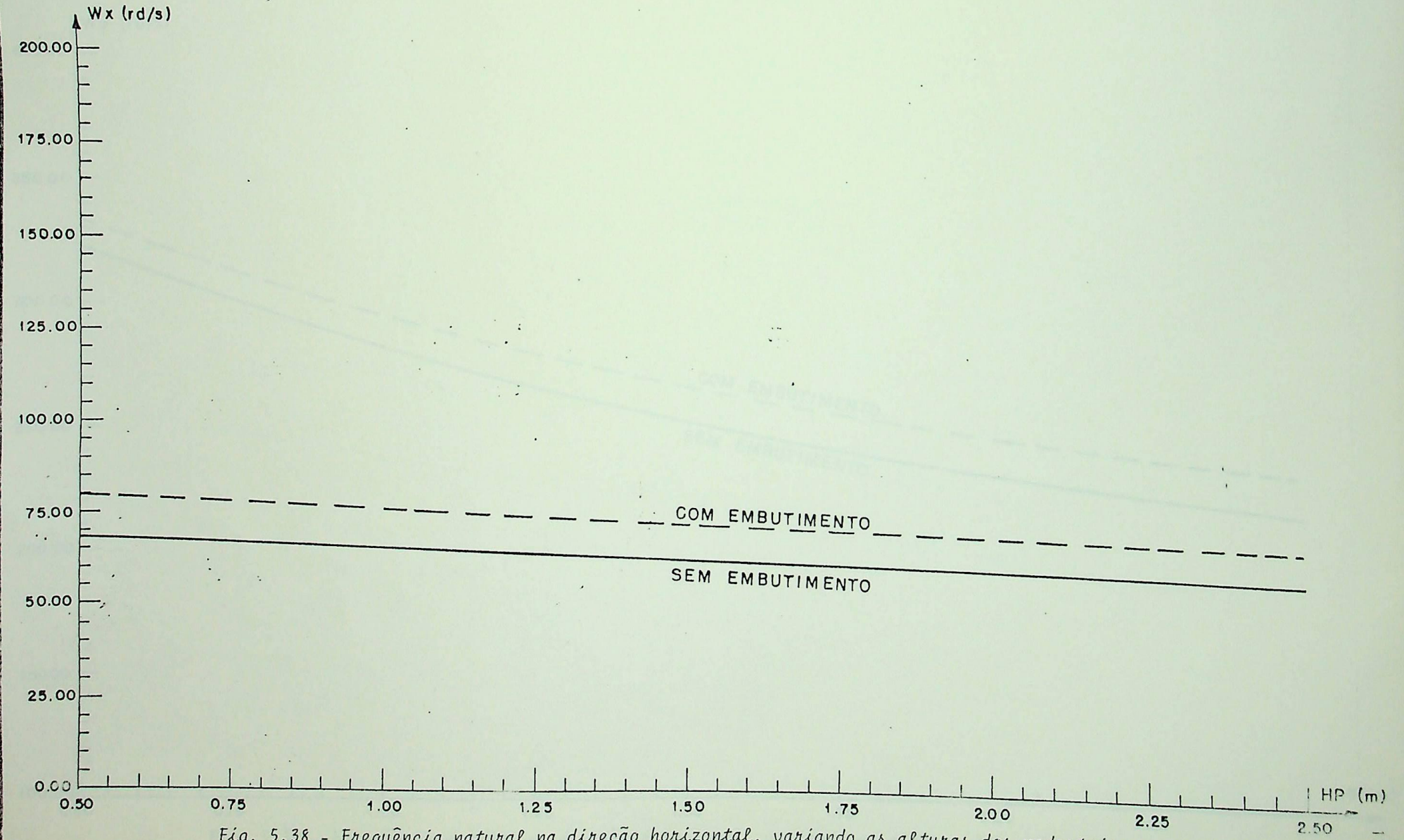

Fig. 5.38 - Frequência natural na direção horizontal, variando as alturas dos pedestais

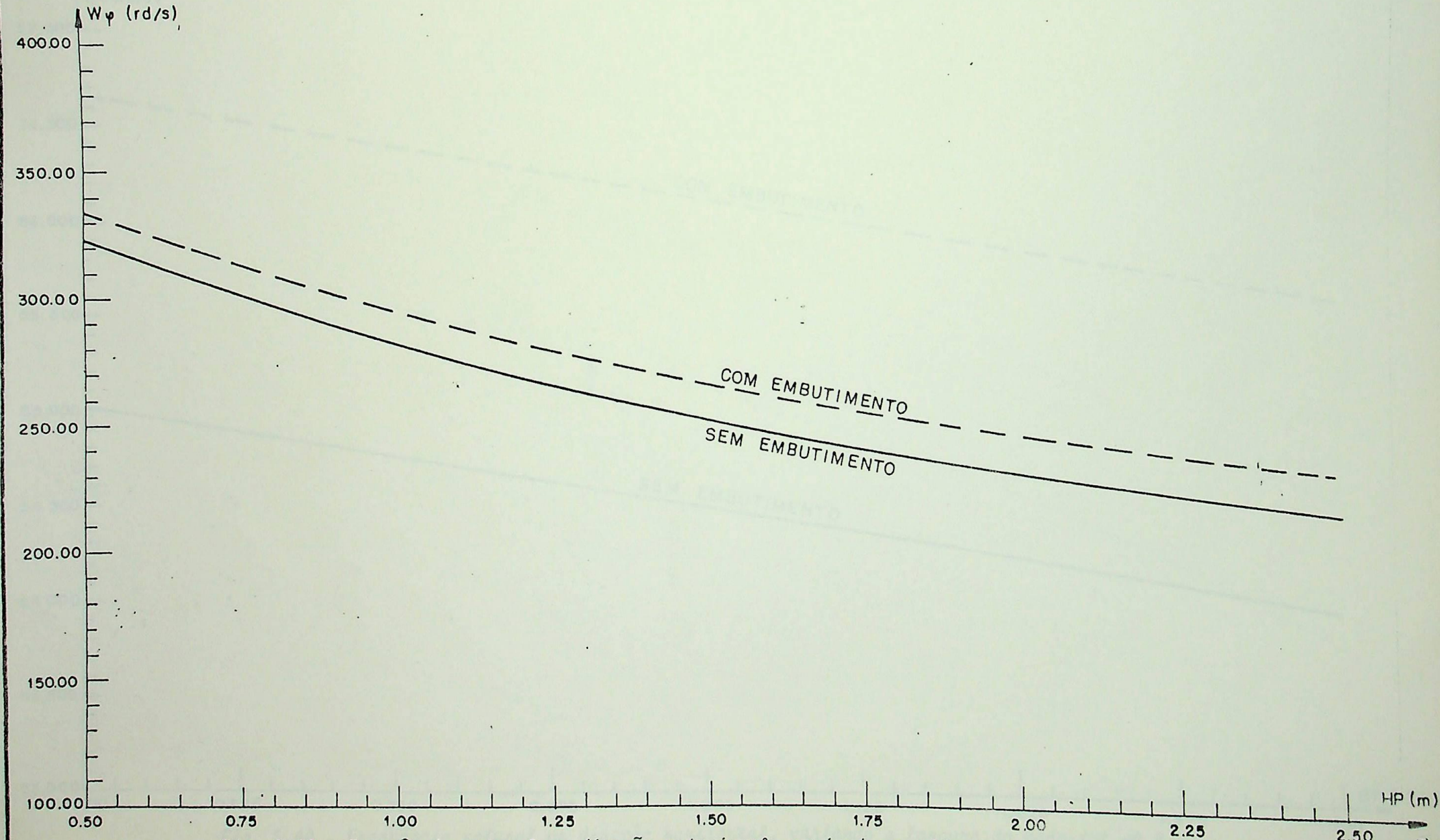

Fig. 5.39 - Frequência natural na direção rotacional, variando as alturas dos pedestais

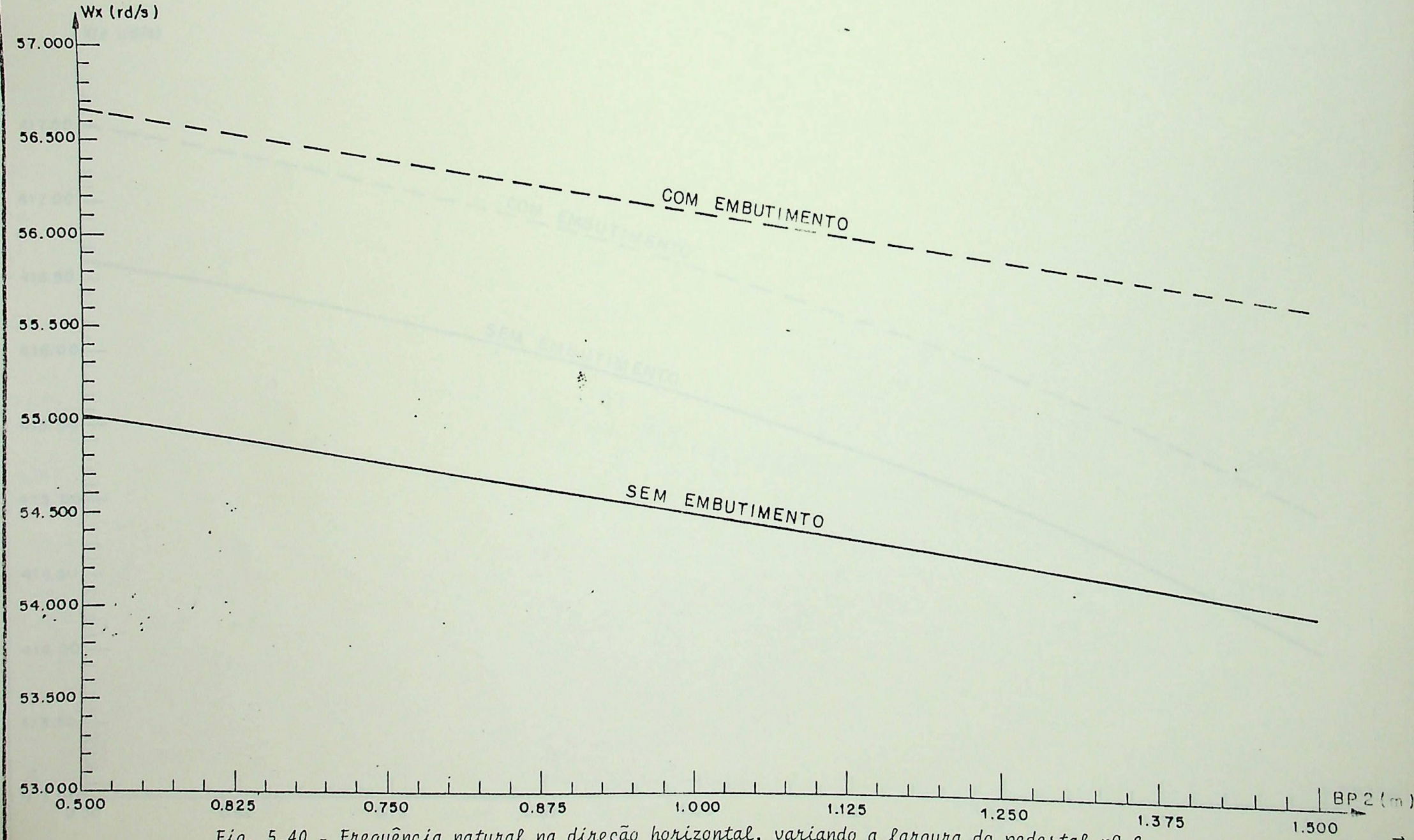

Fig. 5.40 - Frequência natural na direção horizontal, variando a largura do pedestal nº 2

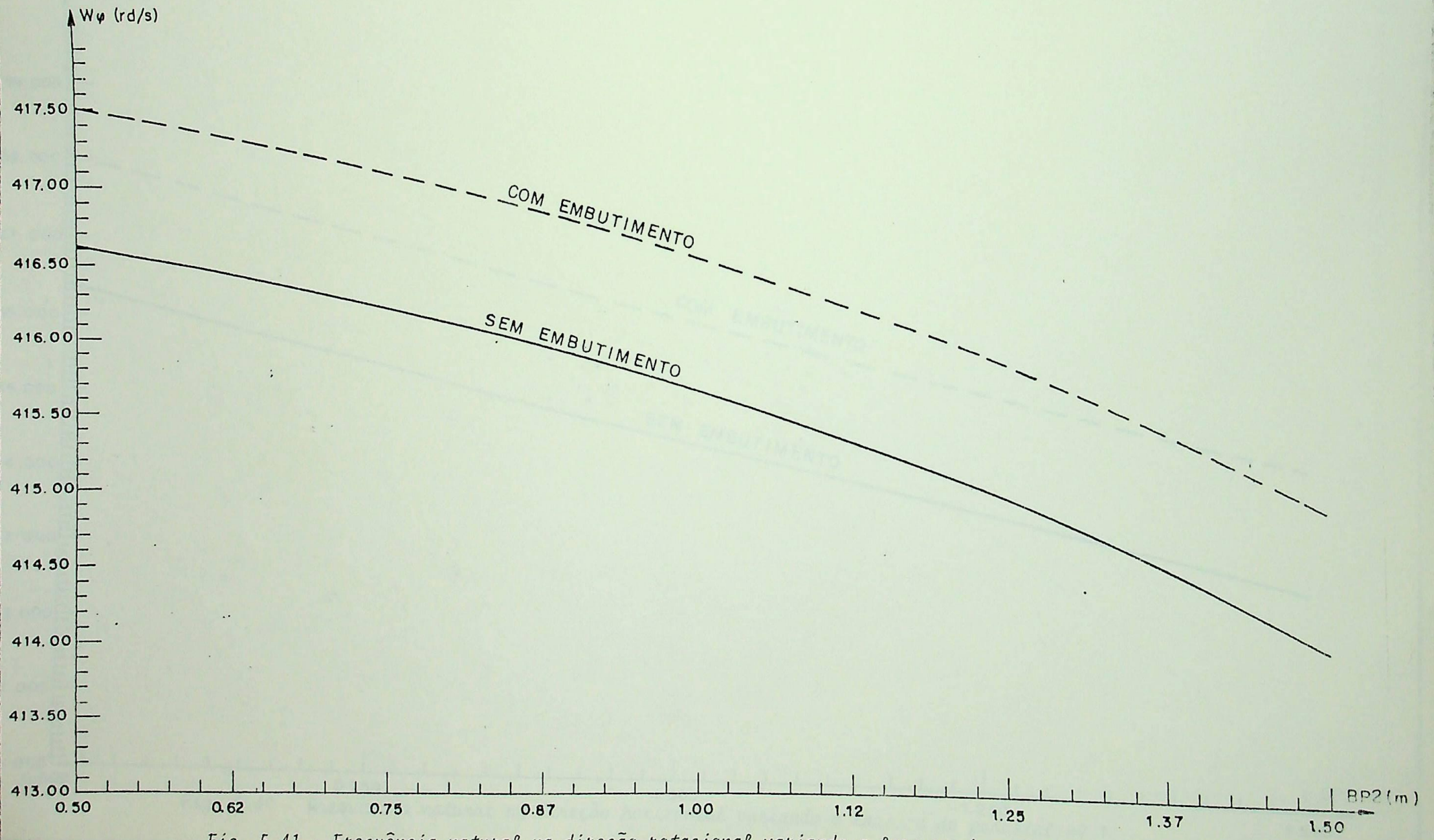

Fig. 5.41 - Frequência natural na direção rotacional variando a largura do pedestal nº 2

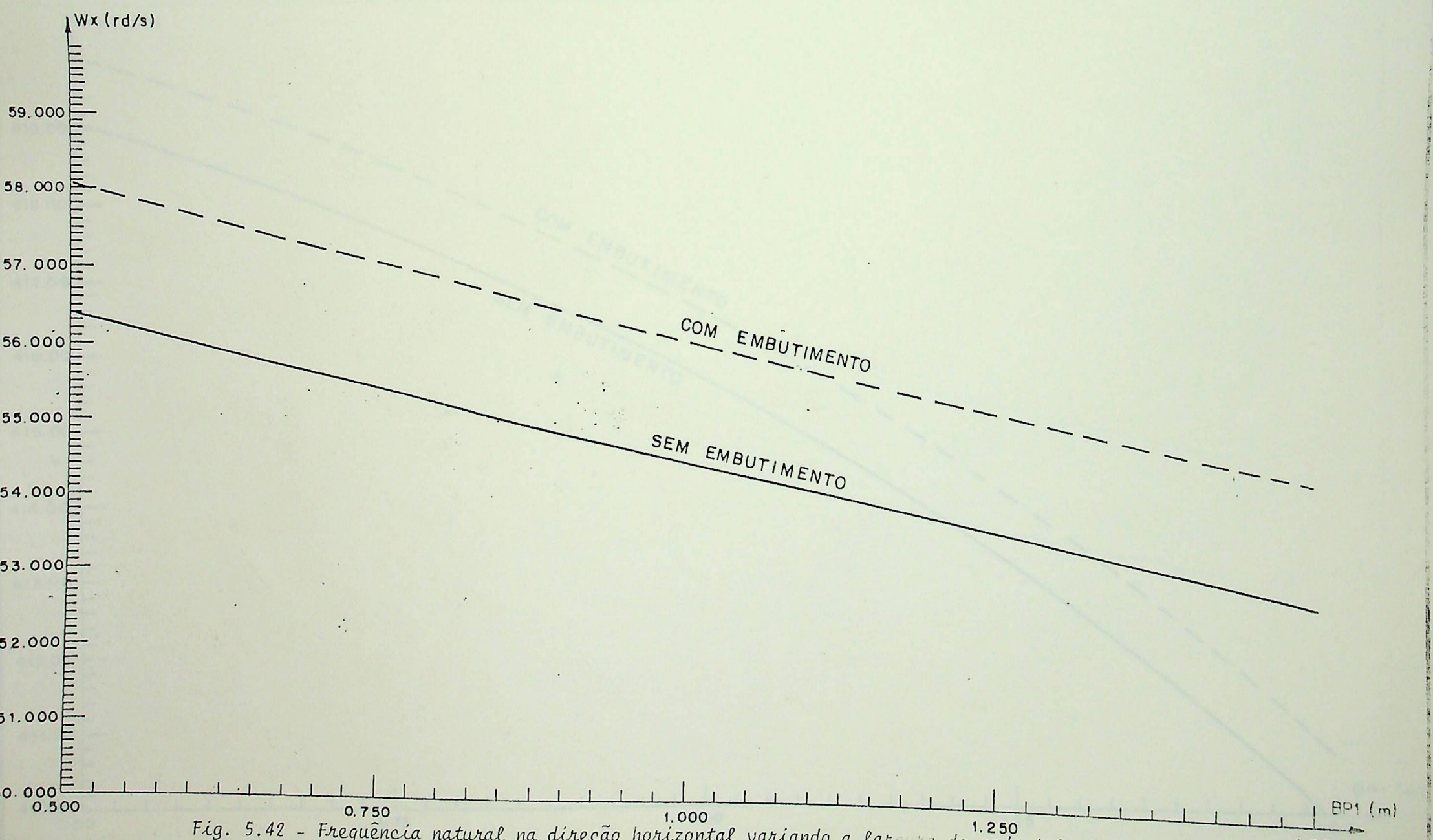

Fig. 5.42 - Frequência natural na direção horizontal variando a largura do pedestal nº 1

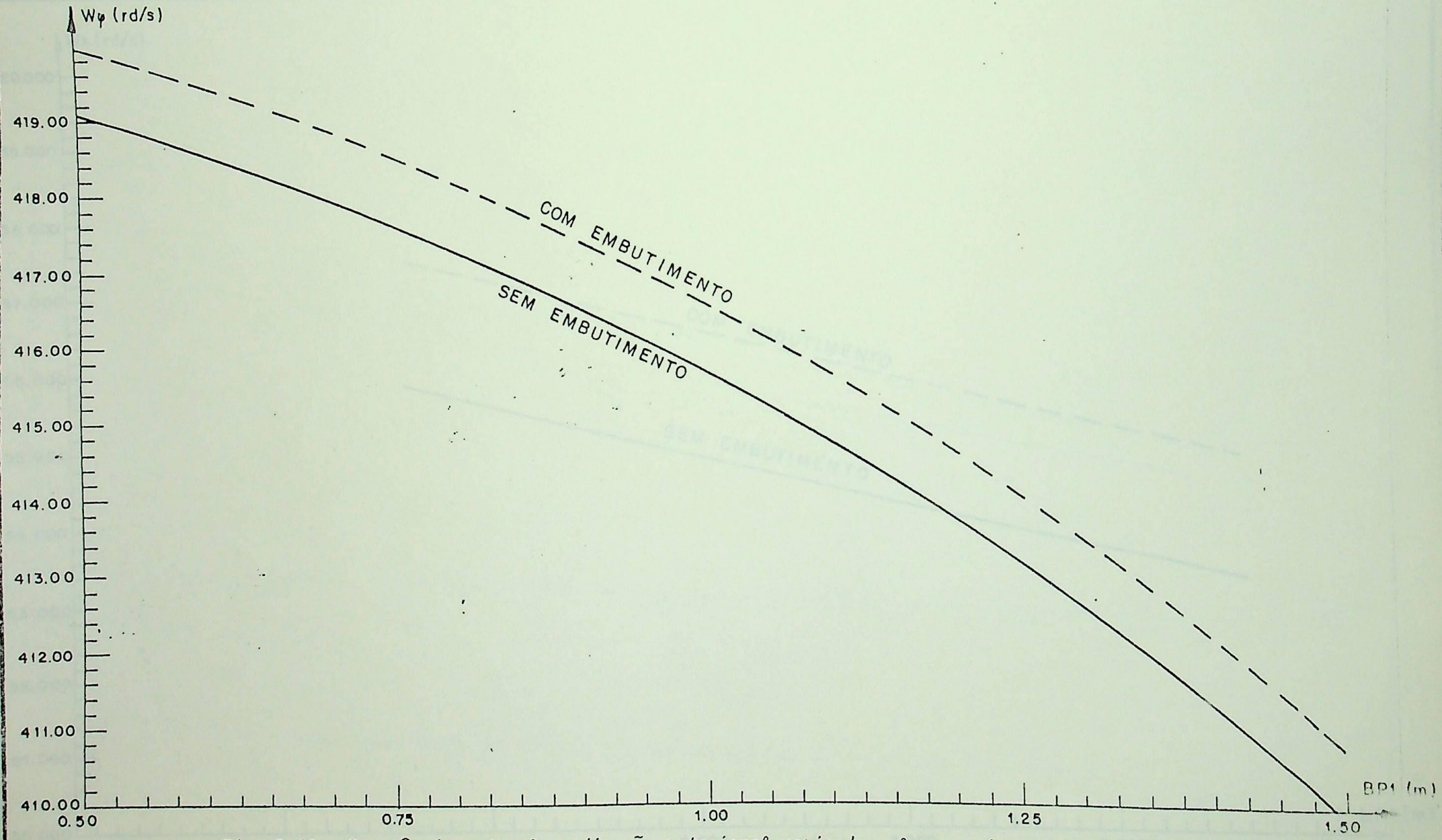

Fig. 5.43 - Frequência natural na direção rotacional variando a largura do pedestal nº 1

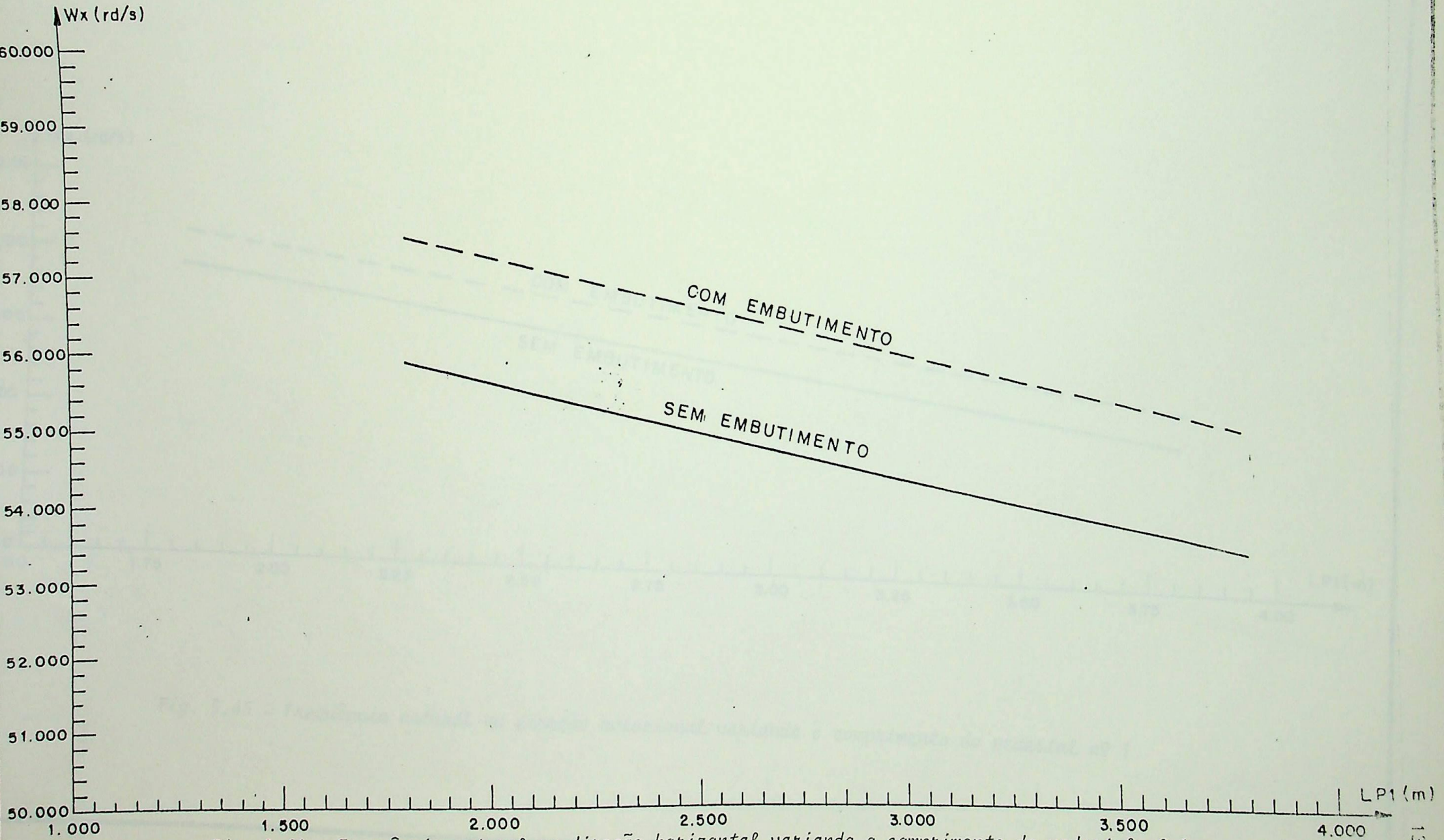

Fig. 5.44 - Frequência natural na direção horizontal variando o comprimento do pedestal nº 1

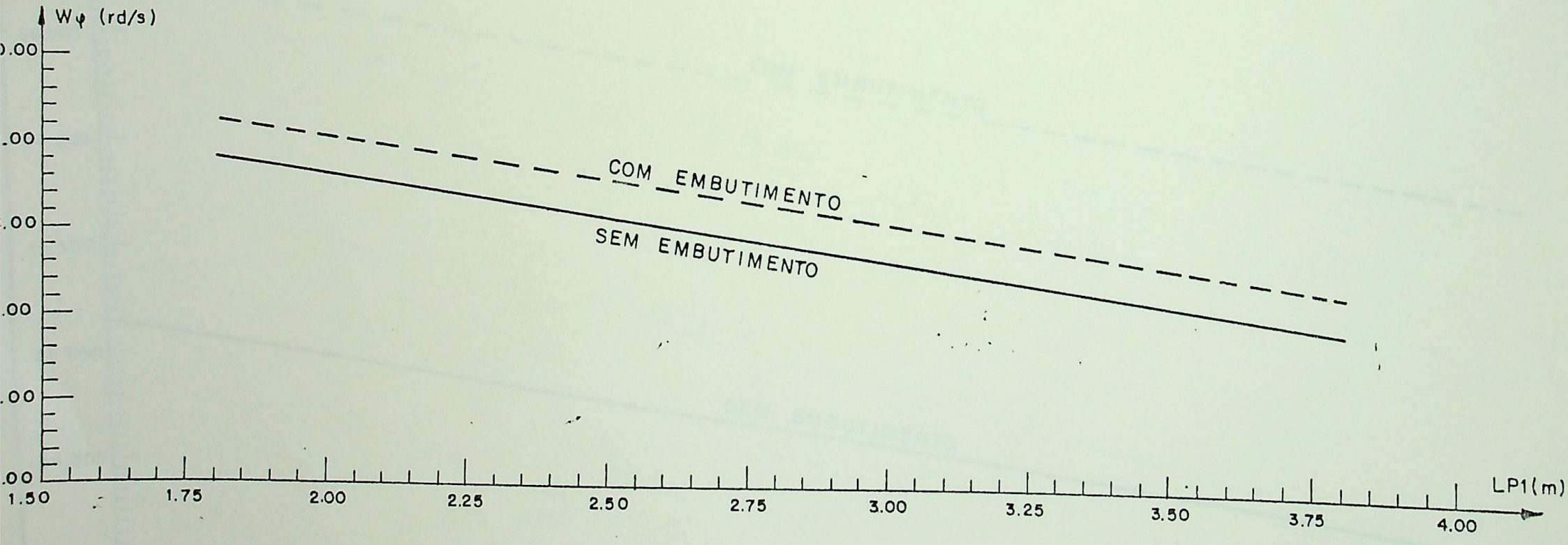

Fig. 5.45 - Frequência natural na direção rotacional variando o comprimento do pedestal nº 1

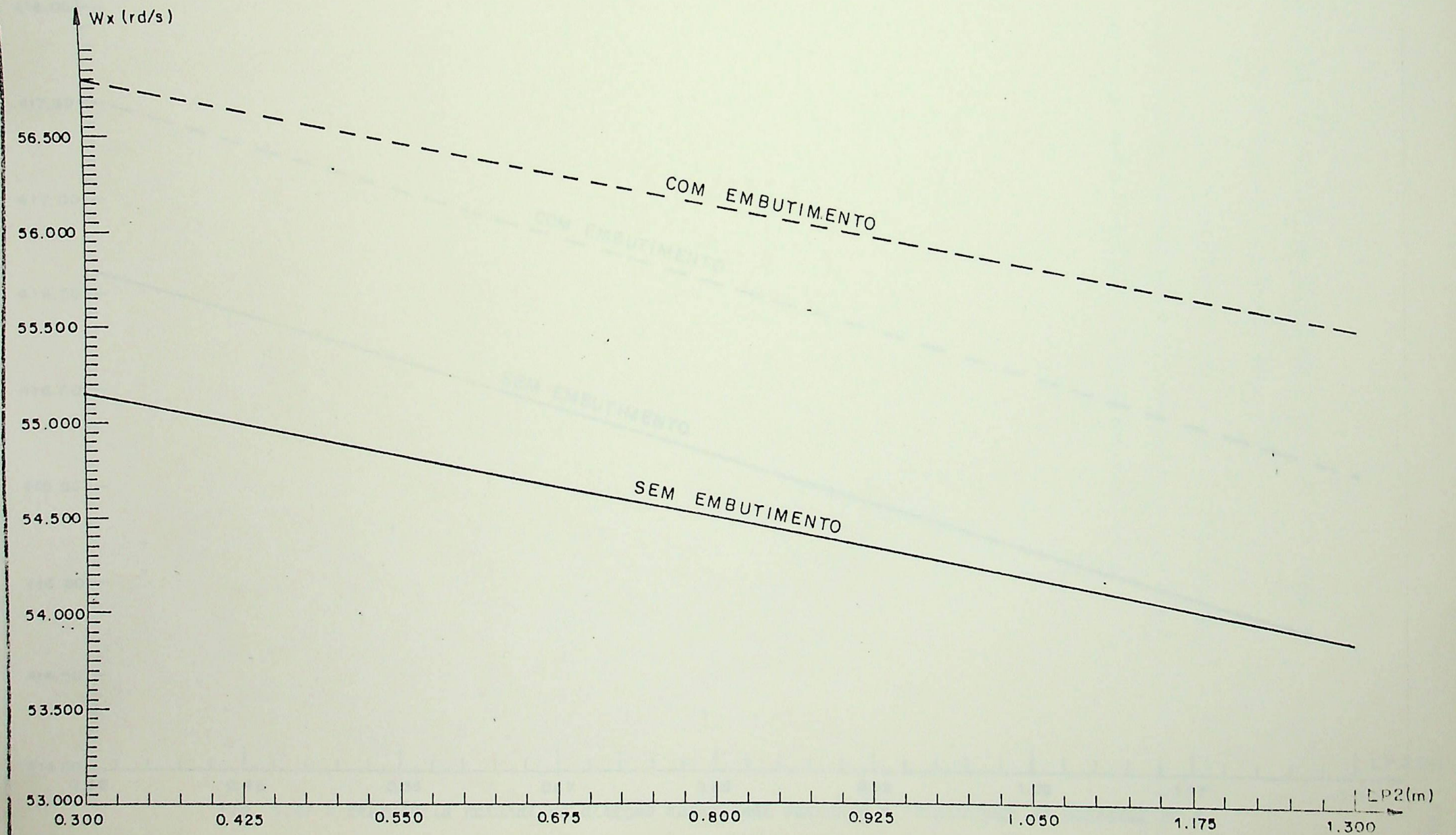

Fig. 5.46 - Frequência natural na direção horizontal variando o comprimento do pedestal nº 2

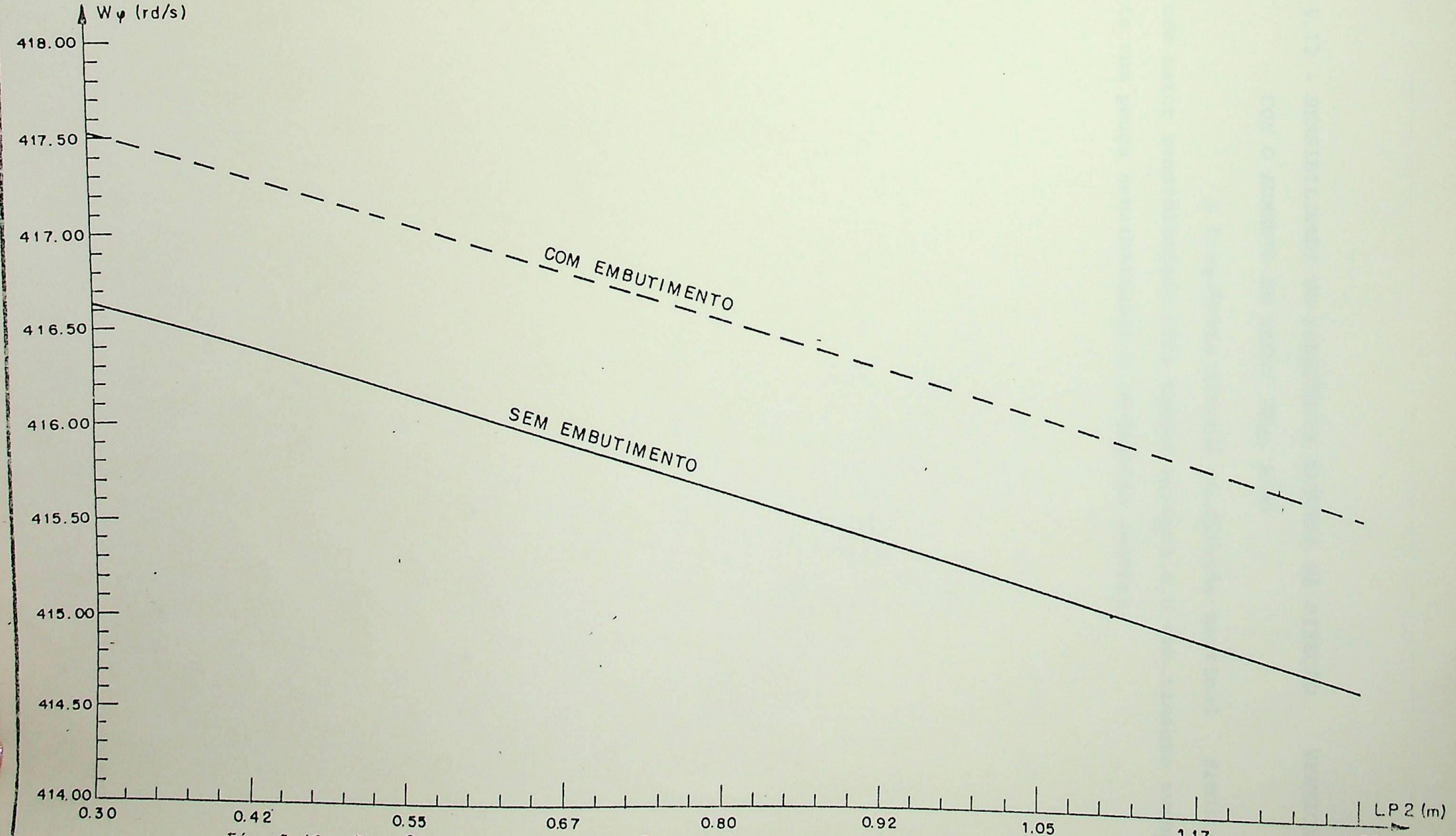

Fig. 5.47 - Frequência natural na direção rotacional variando o comprimento do pedestal nº 2

5.12 - SENSIBILIDADE NA FREQUÊNCIA NATURAL NA DIREÇÃO VERTICAL COM O AUMENTO DE MASSA (Fig. 5.48)

A frequência natural na direção vertical diminue com maior sensibilidade para massas menores e o embutimento aumenta com pouca sensibilidade a frequência natural.

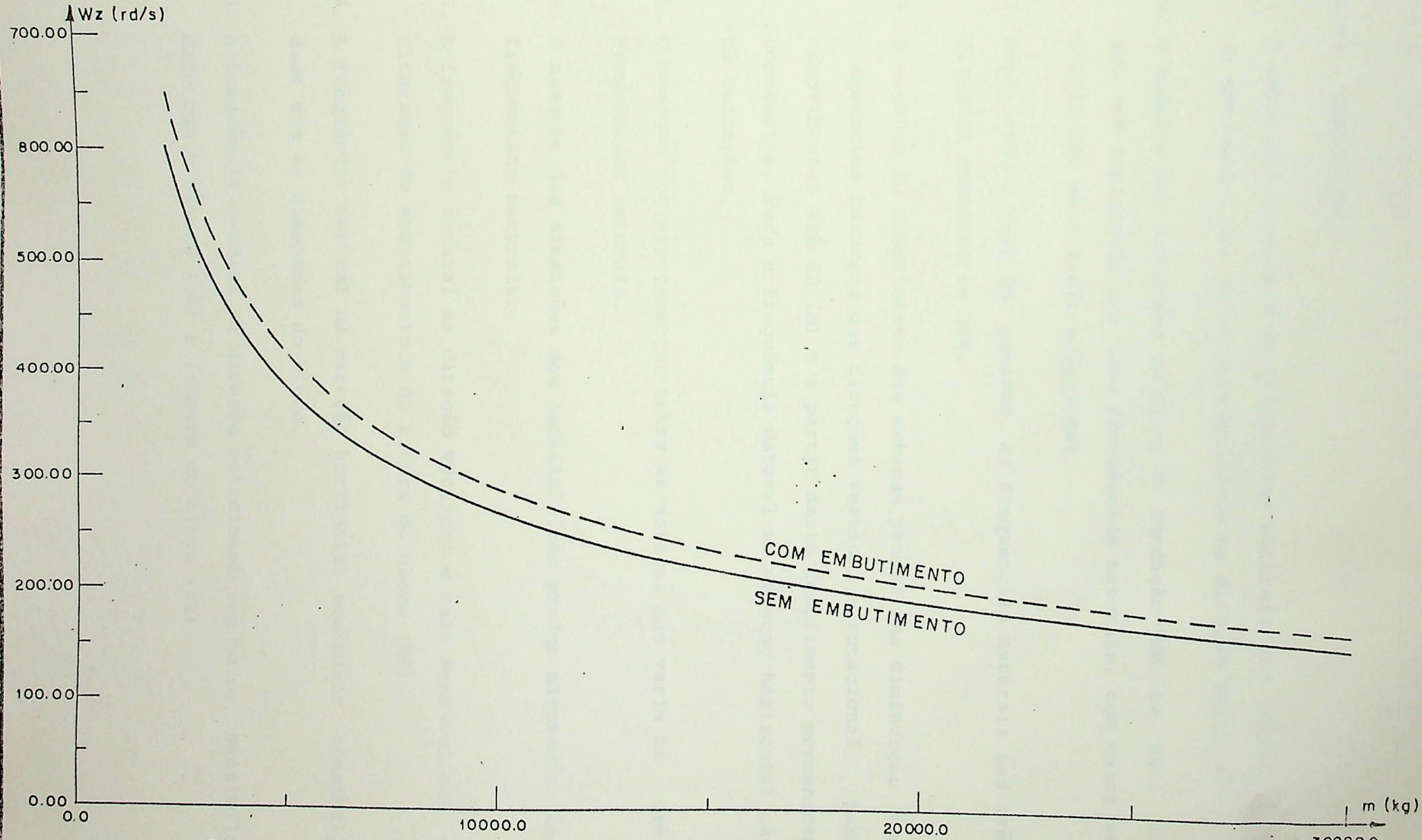

Fig. 5.48 - Frequência natural na direção vertical variando a massa da fundação

5.13 - CONCLUSÕES

1. O embutimento aumenta as frequências naturais nas três direções de movimento, com maior sensibilidade na direção vertical.

2. O aumento das dimensões do bloco de fundação (HB, LB, BB), produz uma diminuição nas três frequências naturais, com maior sensibilidade na direção rotacional.

3. Duplicando o raio das estacas, as frequências naturais nas três direções aumentam em 30%.

4. O aumento do comprimento das estacas produz uma diminuição nas frequências naturais das direções vertical e rotacional para comprimentos até 20 (m) e a partir deste comprimento permanecem constantes. Para a frequência natural na direção horizontal não há variações.

5. O aumento dos espaçamentos entre as estacas não varia as três frequências naturais.

6. O aumento das dimensões dos pedestais não produz alteração nas frequências naturais.

7. A frequência natural na direção vertical é mais sensível com a alteração do embutimento e da altura do bloco (HB).

8. A frequência natural na direção horizontal tem maior sensibilidade com as dimensões do bloco.

9. A frequência natural na direção rotacional tem maior sensibilidade com a altura (HB) e largura do bloco (BB).

5.14 - SUGESTÕES

1. Analisar a sensibilidade da fundação considerando estacas inclinadas e o efeito de torção nas estacas.

2. Analisar com maior profundidade as propriedades dinâmicas do solo.

3. Analisar a sensibilidade em fundações elevadas e em fundações rasas.

4. Analisar o comportamento dinâmico de fundações por elementos finitos.

APÊNDICE A

MODELAGEM DA FUNDAÇÃO PARA ELABORAÇÃO DOS PROGRAMAS

A.1 - NOMENCLATURA

B = Bloco de concreto

BB = Largura do bloco

LB = Comprimento do bloco

HB = Altura do bloco

P1 = Pedestal de concreto nº 1 (direito)

LP1 = Comprimento do pedestal nº 1

HP1 = Altura do pedestal nº 1

BP1 = Largura do pedestal nº 1

P2 = Pedestal de concreto nº 2 (esquerdo)

LP2 = Comprimento do pedestal nº 2

HP2 = Altura do pedestal nº 2

BP2 = Largura do pedestal nº 2

V = Ventilador

LV = Comprimento do ventilador

ϕV = Diâmetro do ventilador

M = Motor

LM = Comprimento do motor

ϕM = Diâmetro do motor

ES = Estaca

ϕES = Diâmetro da estaca

MB = Massa do bloco

MM = Massa do motor

MV = Massa do ventilador

ME = Massa do eixo

MP1 = Massa do pedestal nº 1

MP2 = Massa do pedestal nº 2

MT = Massa total do sistema

A.2 - CENTRO DE GRAVIDADE DO SISTEMA

a) Na Direção y

$$\bar{Y}_{C.G} = \frac{B.B}{2} \quad \text{(simétrico)} \tag{1.A}$$

b) Na Direção x

$$\bar{X}_{C.G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i . \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i}$$

$$\bar{X}_{C.G} = \frac{MP1.\overline{XP1} + MM.\overline{XM} + ME.\overline{XV} + MV.\overline{XV} + MP2.\overline{XP2} + MB.\overline{XB}}{MP1 + MM + ME + MV + MP2 + MB} \tag{2.A}$$

onde:

$\overline{XP1}$ = Distância centroidal do pedestal nº 1 na direção x;

$\overline{XP2}$ = Distância centroidal do pedestal nº 2 na direção x;

$\overline{XM}$ = Distância centroidal do motor na direção x;

$\overline{XV}$ = Distância centroidal do ventilador na direção x;

$\overline{XB}$ = Distância centroidal do bloco na direção x.

c) Na Direção z

$$\bar{Z}_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i . \bar{Z}_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i}$$

$$\bar{Z}_{CG} = \frac{(MP1+MP2)\left(HB+\frac{HP1}{2}\right) + MB \cdot \frac{HB}{2} + (MM+ME+MV)\left(HB+HP1+\frac{\phi M}{2}\right)}{MP1+MM+ME+MV+MP2+MB} \qquad (3.A)$$

A.3 - MOMENTO DE INÉRCIA DO SISTEMA EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO ($\bar{X}$)

$$J_{\bar{X}} = JB + JP1 + JP2 + JV + JE + JM \qquad (4.A)$$

a) Momento de Inércia do Bloco (JB)

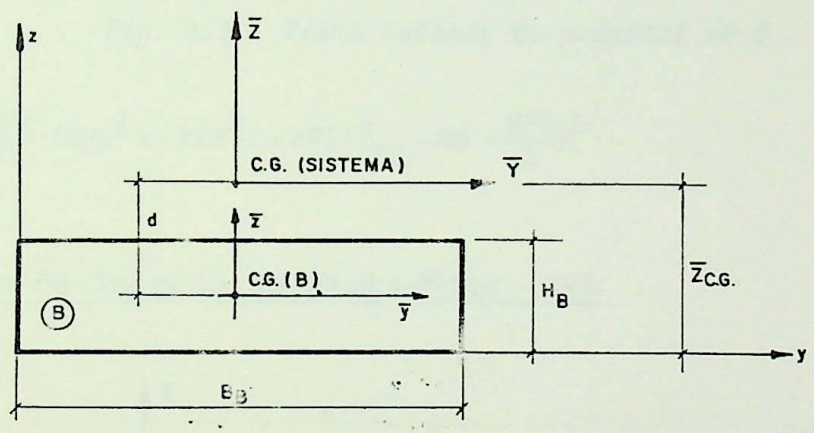

Fig. A.1 - Vista lateral do bloco

$$JB = \frac{MB}{12}(HB^2+BB^2) + MB\left(\bar{Z}_{CG} - \frac{HB}{2}\right)^2 \qquad (5.A)$$

b) Momento de Inércia do Pedestal Nº 1 (JP1)

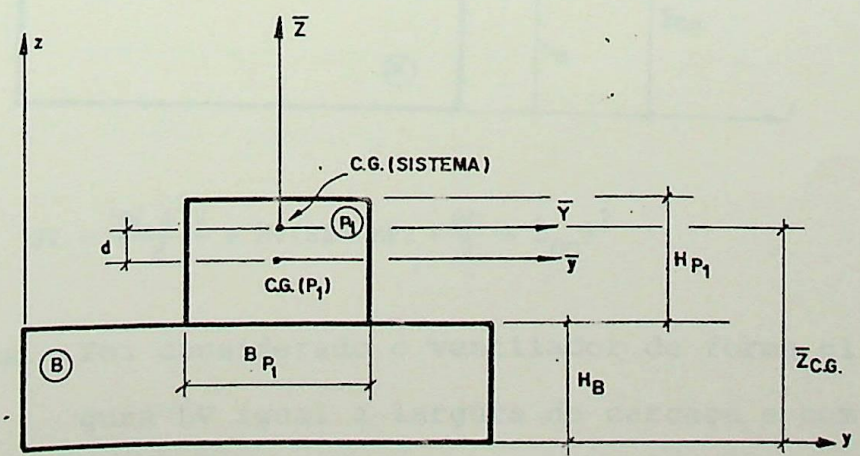

Fig. A.2 - Vista lateral do pedestal nº 1

$$JP1 = \frac{MP1}{12}\,(BP1^2 + HP1^2) + MP1(\bar{Z}_{CG} - HB - \frac{HP1}{2})^2 \qquad (6.A)$$

c) Momento de Inércia do Pedestal Nº 2 (JP2)

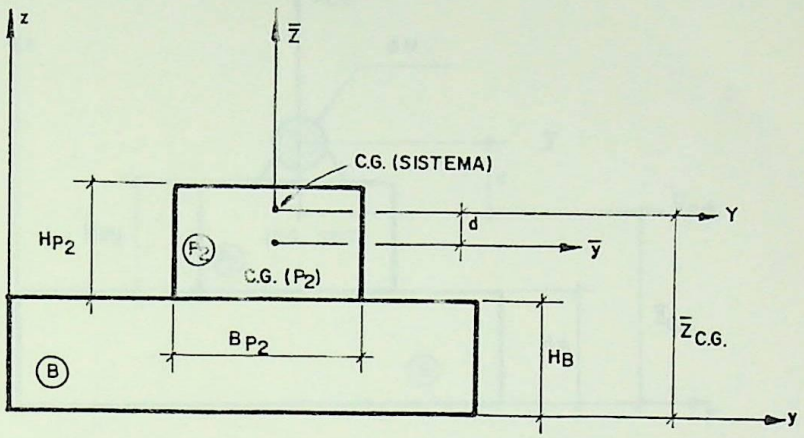

Fig. A.3 - Vista lateral do pedestal nº 2

$$JP2 = \frac{MP2}{12}\,(HP2^2 + BP2^2) + MP2(\bar{Z}_{CG} - HB - \frac{HP2}{2})^2 \qquad (7.A)$$

d) Momento de Inércia do Ventilador (JV)

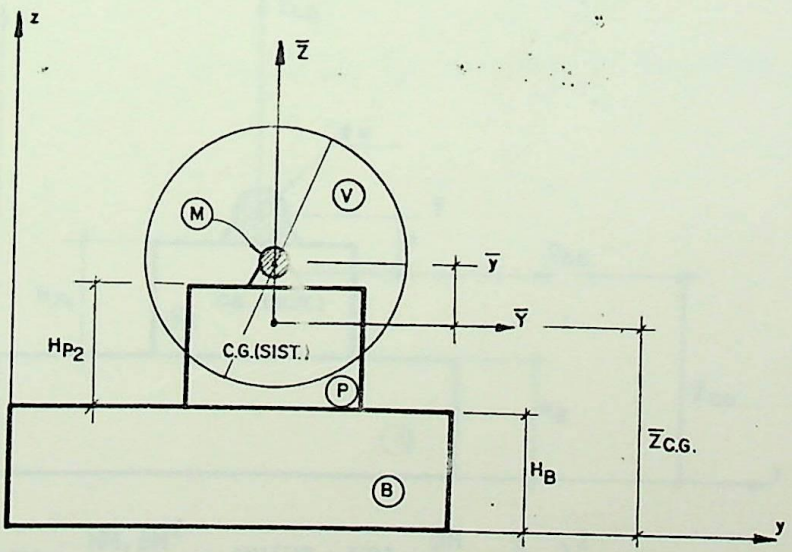

Fig. A.4 - Vista lateral do ventilador

$$JV = \frac{MV.\phi^2 V}{8} + MV(HB + HP2 + \frac{\phi M}{2} - \bar{Z}_{CG})^2 \qquad (A.8)$$

Obs.: Foi considerado o ventilador de forma cilíndrica com largura LV igual a largura da carcaça e com diâmetro ϕV equi

valente à massa do rotor e carcaça.

e) Momento de Inércia do Eixo (JE)

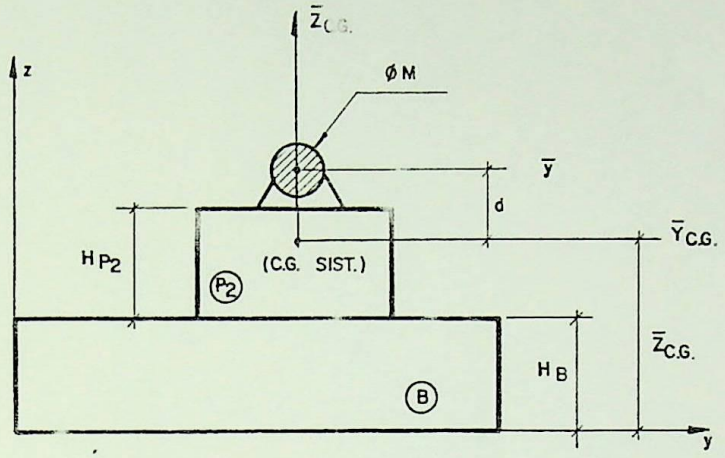

Fig. A.5 - Vista lateral do eixo

$$JE = \frac{ME.\phi E^2}{8} + ME(HB + HP2 + \frac{\phi M}{2} - \bar{Z}_{CG})^2 \qquad (A.9)$$

f) Momento de Inércia do Motor (JM)

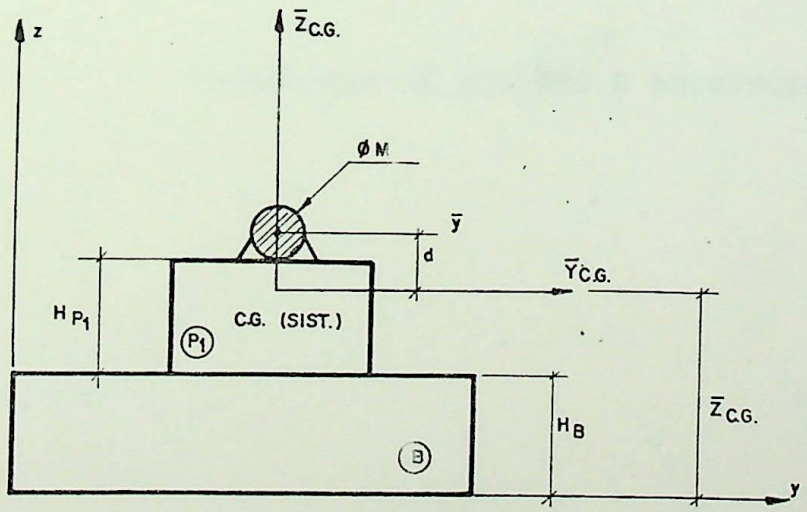

Fig. A.6 - Vista lateral do motor

$$JM = \frac{MM.\phi M^2}{8} + MM(HB + HP1 + \frac{\phi M}{2} - \bar{Z}_{CG})^2 \qquad (A.10)$$

APÊNDICE B

PARÂMETRO DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO

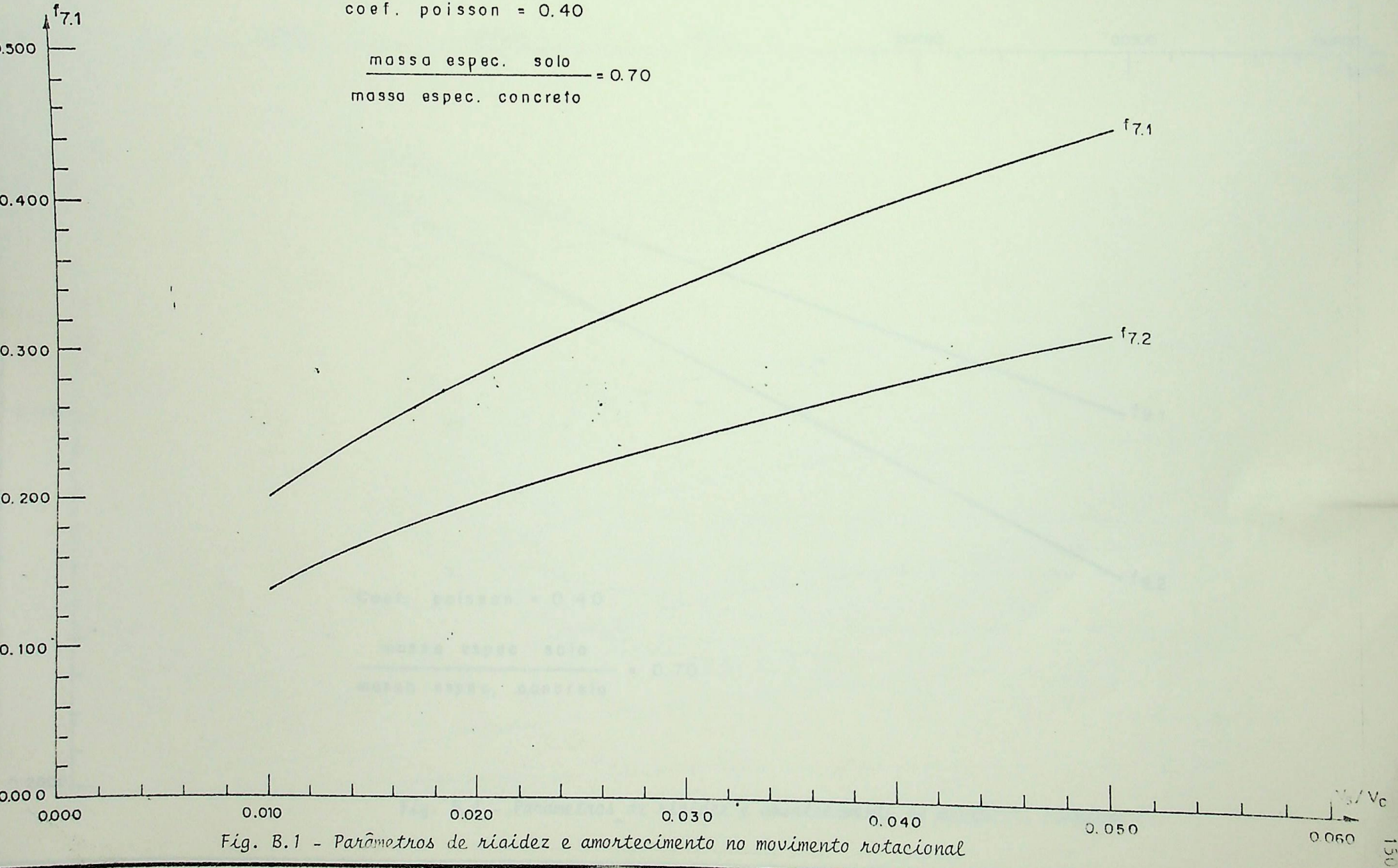

Fig. B.1 - Parâmetros de riaidez e amortecimento no movimento rotacional

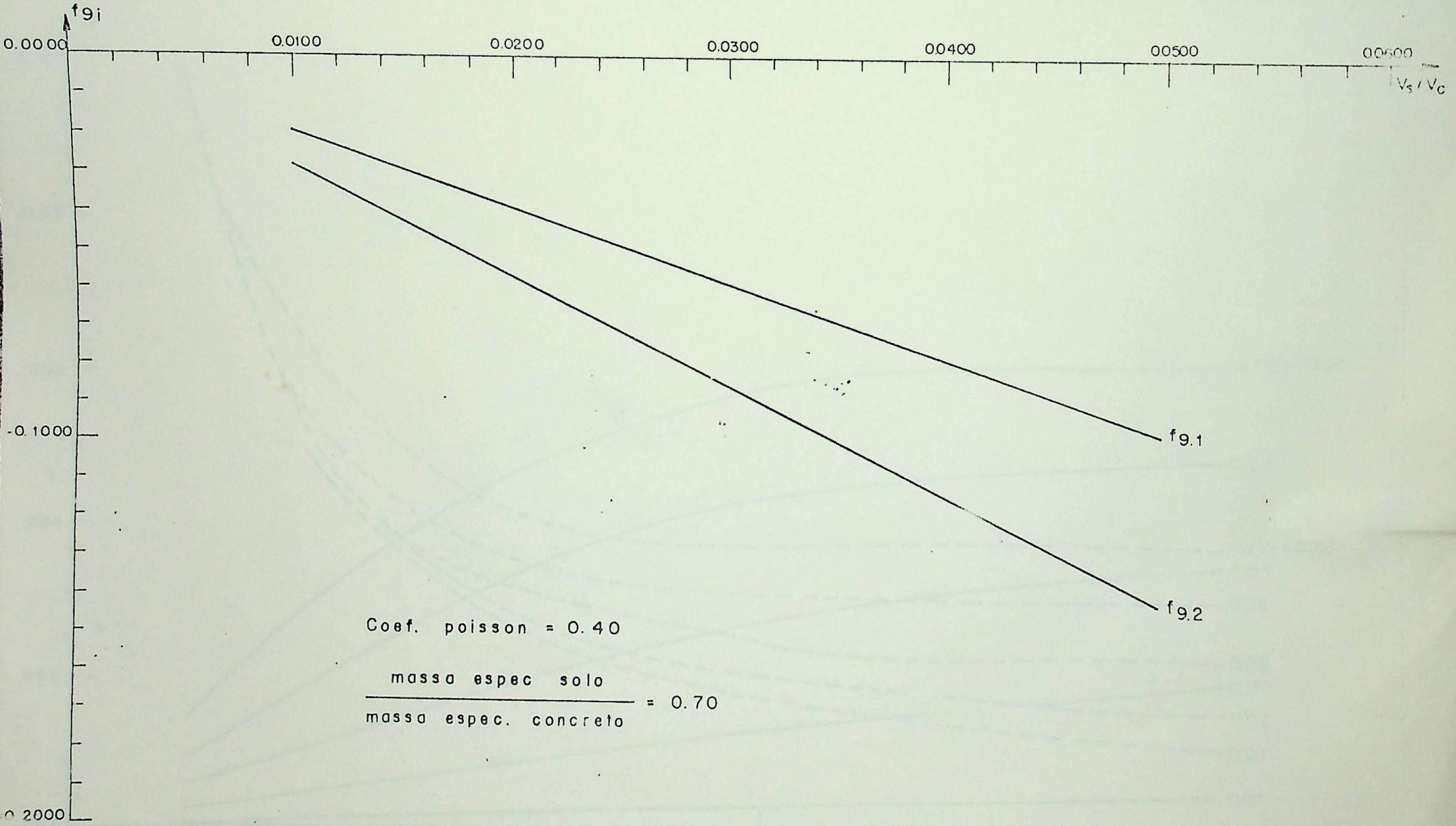

Fig. B.2 - Parâmetros de rigidez e amortecimento no movimento acoplado

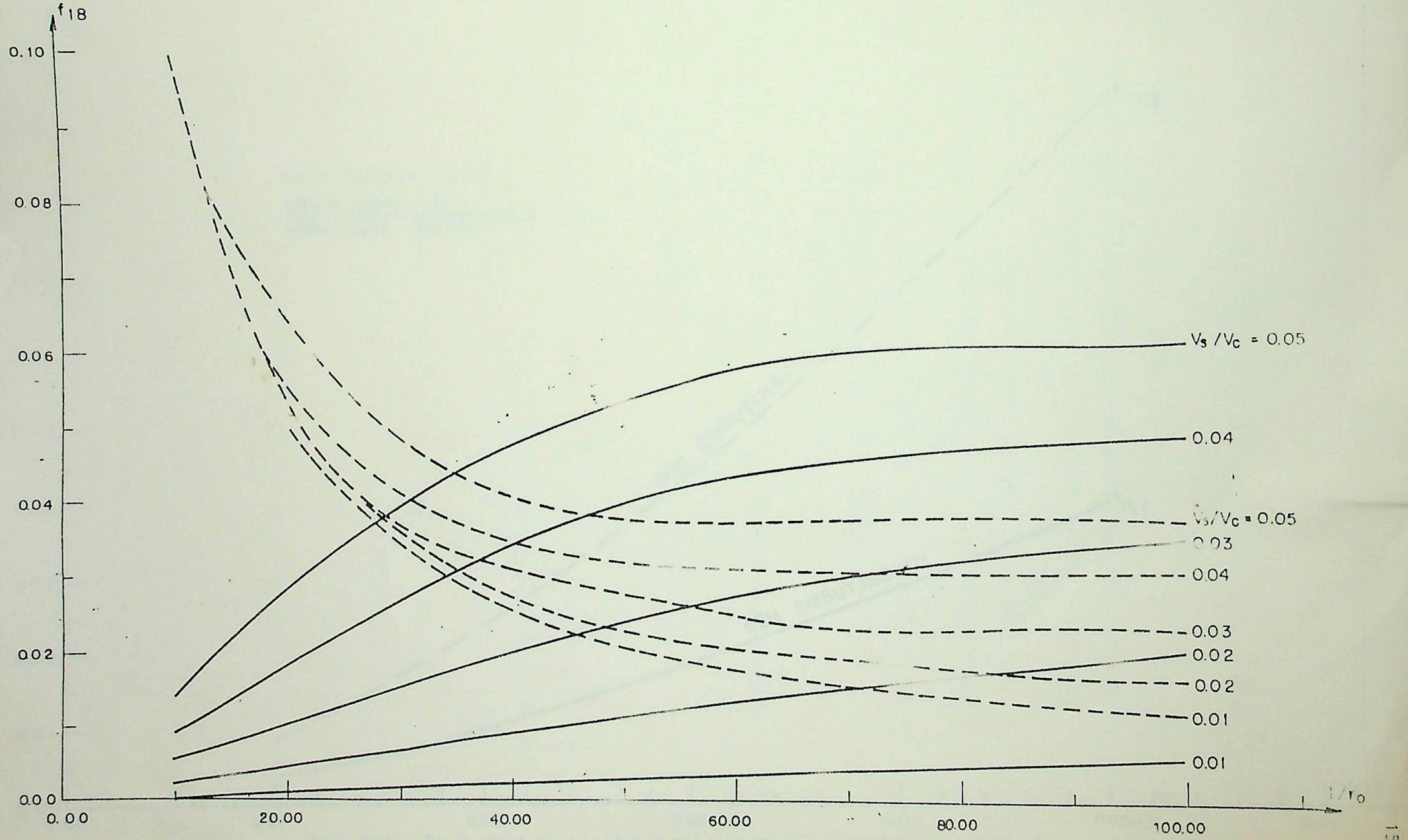

Fig. B.3 - Parâmetros de rigidez e amortecimento no movimento vertical

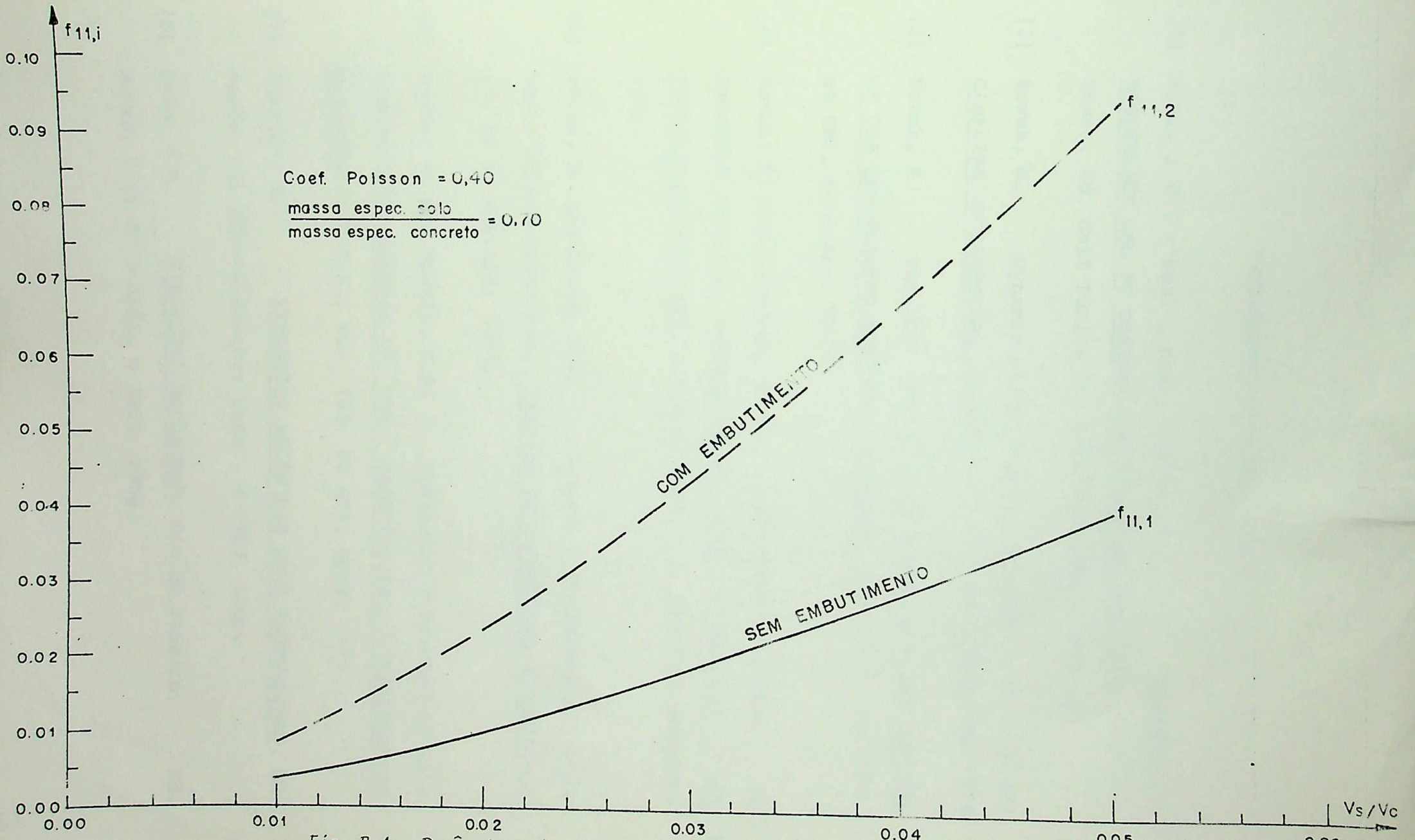

Fig. B.4 - Parâmetros de rigidez e amortecimento no movimento horizontal

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Arya, S.C., O'Neil, M.W., Pincus, G., DESIGN OF STRUCTURES AND FOUNDATIONS FOR VIBRATING MACHINES. Houston Texas. Ed. Gulf Publishing Company, C 1979. 191 pg.

[2] Novak, M. Dynamic Stiffnes and Damping of Piles. CANADIAN GEOTECHNICAL JOURNAL, vol. 11, nº 4, November 1974.

[3] Novak, M. Vertical Vibration of Floating Piles. JOURNAL OF THE ENGINEERING MECHANICS DIVISION, A.S.C.E., vol.103, Nº EM1, February, 1977.

[4] Novak, M. and Beredugo, Y. O. Vertical Vibration of Embedded Footings. JOURNAL OF DE SOIL MECHANICS AND FOUNDATIONS DIVISION, A.S.C.E., vol. 98, Nº SM12, December 1972.

[5] Novak, M. and Grigg, R.F. Dynamic Experiments with Small Pile Foundations. CANADIAN GEOTECHINICAL JOURNAL, vol. 13, Nº 4 November 1976.

[6] Novak, M. and Howell, J.F. Torsional Vibration of Pile Foundations. JOURNAL OF THE GEOTECHNICAL ENGINEERING DIVISION, A.S.C.E., vol. 103, Nº GT4, April 1977.

[7] Almeida, M.T. VIBRAÇÕES MECÂNICAS PARA ENGENHEIROS. São Paulo. Ed. Edgard Blucher Ltda., c 1987. 400p.

[8] Seto, W.W. VIBRAÇÕES MECÂNICAS. Rio de Janeiro. Ed. McGraw Hill do Brasil, c 1964. 298p.

[9] Thonson, W.T. TEORIA DA VIBRAÇÃO COM APLICAÇÕES. Rio de Janeiro. Ed. Interciência Ltda., c 1973. 462p.

[10] Vargas, M. INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS SOLOS. São Paulo. Ed. McGraw-Hill do Brasil, 1977. 509p.

[11] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. Teoria da Elasticidade. Rio de Janeiro. Ed. Guanabara Dois S.A., c 1980.545p.

[12] Ferreira, F.A. MATEMÁTICA SUPERIOR. Escola Federal de Engenharia de Itajubá. Vol. 1, 1ª Edição, 1972.

DATA 06/ 08/ 1990
PROC.
PED. PPG.
LIV. Reposição
Cz$ DOAÇÃO

INV N O
BIM EFEI
DATA | Rubrica

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
BIBLIOTECA MAUÁ – BIM
Este livro deve ser devolvido na última data abaixo

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200500
NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA