

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**INTEGRABILIDADE LOCAL DE CAMPOS  
DE VETORES EM  $\mathbb{R}^2$  E  $\mathbb{R}^3$**

**Willian Pereira Nunes**

Itajubá, Fevereiro 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Willian Pereira Nunes

**INTEGRABILIDADE LOCAL DE CAMPOS  
DE VETORES EM  $\mathbb{R}^2$  E  $\mathbb{R}^3$**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como  
parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Fevereiro 2015

Itajubá-MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Willian Pereira Nunes

**INTEGRABILIDADE LOCAL DE CAMPOS  
DE VETORES EM  $\mathbb{R}^2$  E  $\mathbb{R}^3$**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 20 de fevereiro de 2015,  
conferindo ao autor o título de Mestre em Ciências Matemática

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello (orientador)

Prof. Dr. Bráulio Augusto Garcia

Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga

Itajubá – MG

2015

# Agradecimentos

Ao professor Luis Fernando pela paciência, pela orientação ao longo dos anos de graduação e mestrado e por todo apoio no desenvolvimento desta dissertação.

À minha família, em particular a minha mãe por todo auxílio e dedicação no decorrer da minha vida e ao meu pai pelos conselhos e conversas que me ajudaram a progredir.

A minha namorada Altimare por todo amor, carinho, paciência e pelas importantes contribuições para o desenvolvimento desta dissertação.

Aos professores do Instituto de Matemática e Computação (IMC) pelas disciplinas ministradas, pela disposição em sempre ajudar não só em sala de aula.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

*“A matemática é a única ciência exata  
em que nunca se sabe do que se está a falar  
nem se aquilo que se diz é verdadeiro.”*

— BERTRAND RUSSEL

# Resumo

A teoria qualitativa de equações diferenciais começou ainda no século XIX com os trabalhos de Henri Poincaré e a partir daí muito foi feito, desde uma fundamentação teórica mais precisa até a resolução de problemas emergentes. Um destes problemas é decidir a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema diferencial com linearização não hiperbólica. Muitos avanços foram feitos, mas ainda restam problemas em aberto, dentre os quais é decidir quando um sistema analítico com um equilíbrio não hiperbólico monodrômico é foco ou centro. Tal problema é conhecido como problema foco-centro.

Nesta dissertação, será abordado o problema foco-centro, revisando alguns conceitos para o centro do tipo linear, para estabelecer alguns resultados para o caso nilpotente. A falta de um algoritmo para analisar o caso nilpotente será um dos temas abordados, com a apresentação de um teorema que fornece um método para detecção de condições para a existência de um centro nilpotente. Também será estudado este problema com uso das integrais primeiras, analisando quando a sua existência é uma condição necessária e suficiente para um equilíbrio ser um centro.

De modo a ilustrar os métodos estudados, será feita uma aplicação para sistemas específicos.

**Palavra chave:** Problema Foco-Centro; Centro Nilpotente; Integral Primeira; Liapunov.

# Abstract

The qualitative theory of differential equations began in the nineteenth century with the Henri Poincaré work and from there much has been done, since a theoretical basis more accurate, to solving emerging problems. One of this problem is to decide the stability of a equilibrium point of a differential system with non-hyperbolic linearization. Many advances have been made, but there are still open issues, for example decide when an analytical system with a non-hyperbolic monodromic equilibrium point is focus or center. This problem is known as the center-focus problem.

In this dissertation, the center-focus problem will be discussed by reviewing some concepts for the center of the linear type, to establish some results for the nilpotent case. The lack of an algorithm to analyze the case nilpotent will be one of the topics covered with the presentation of a theorem that provides a method for detecting conditions for the existence of a nilpotent center. It will also be studied this problem with the use of first integrals, analyzing when its existence is a necessary and sufficient condition for an equilibrium point be a center.

In order to illustrate the methods used, an application will be made for specific systems.

**Keywords:** Center-Focus Problem; Nilpotent Center; First Integral; Liapunov.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Um pouco sobre o problema foco-centro</b>	<b>17</b>
2.1	Sistemas do tipo linear . . . . .	20
2.1.1	Aplicação de Poincaré . . . . .	20
2.1.2	Função sucessão e valores focais . . . . .	21
2.1.3	Algoritmo de Liapunov . . . . .	24
2.2	Sistemas do tipo nilpotente . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Aplicações para centros nilpotentes</b>	<b>39</b>
<b>4</b>	<b>Integrabilidade de sistemas diferenciais</b>	<b>45</b>
	<b>Anexo</b>	<b>64</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>69</b>



# Introdução

Na teoria qualitativa de equações diferenciais, o estudo e a caracterização dos retratos de fase de campos planares é um dos problemas mais antigos. Um problema ainda em aberto é o problema foco-centro.

Considere um sistema

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

onde  $P$  e  $Q$  são funções analíticas definidas em um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , com  $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$ .

Um caso de interesse é quando a linearização na origem apresenta autovalores imaginários puros. Neste caso, a investigação do problema foco-centro pode ser feita em três subcasos:

1. **Ponto crítico não degenerado:** Para este caso, o problema foi teoricamente resolvido por Poincaré [20] e Liapunov [17]. No entanto, problemas computacionais e a dificuldade de encontrar condições mais simples para se analisar, não permitiram resolver o problema em um contexto mais geral.
2. **Ponto crítico nilpotente:** Neste caso, é necessário garantir primeiro a monodromia, algo que foi feito por Andreev em [1]. Quanto a determinação da estabilidade, muito já foi feito, de modo a generalizar os métodos do caso não degenerado para este caso, mas ainda não há nenhuma resposta definitiva. Este é um caso amplamente estudado, po-

demos citar, por exemplo, [12], [11] e [10].

3. **Ponto crítico degenerado com linearização nula:** Os resultados atuais se referem à famílias específicas de sistemas e a solução geral ainda parece estar distante, ver [15].

Nesta dissertação, a discussão é centrada no caso nilpotente, analisando o problema com algumas ferramentas e apresentando exemplos para ilustrar os resultados.

No Capítulo 1, serão introduzidas algumas definições e teoremas que servirão para a discussão ao longo do texto. Estes resultados foram escolhidos de modo a deixar a dissertação o mais auto contida possível, facilitando assim a demonstração dos resultados de outros capítulos.

No Capítulo 2, alguns resultados acerca do problema foco-centro serão apresentados, tais como os métodos utilizados para a determinação da estabilidade no caso linear e no caso nilpotente. O foco principal será no método algébrico de Liapunov, descrevendo-o em detalhes e culminando com um teorema mostrando como calcular o primeiro coeficiente de Liapunov. Vale ressaltar que, um algoritmo para estudar centros nilpotentes atribuído a [12] será enunciado e demonstrado aqui.

No Capítulo 3, será feita uma aplicação das ferramentas desenvolvidas no capítulo anterior em alguns resultados desenvolvidos por mim e o meu orientador.

No Capítulo 4, analisaremos o problema através das integrais primeiras, investigando quando a sua existência é condição necessária e suficiente para definir a estabilidade. Serão apresentados alguns resultados clássicos como o Teorema do Centro Linear, junto com a sua demonstração, e um teorema de existência de integrais primeiras de [18].

Ao fim desta dissertação, será apresentado o algoritmo utilizado para fazer os cálculos presentes no trabalho.

# Capítulo 1

## Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo vamos introduzir alguns conceitos que servirão de base para o resto da dissertação. Este estudo pode ser encontrado em [9], [12], [22] e [15].

Seja  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto. Definimos um campo vetorial de classe  $C^r$  em  $\Delta$ , como sendo uma função  $\mathcal{X} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^r$ . Neste caso, o  $r$  do  $C^r$  pode assumir qualquer valor inteiro positivo,  $\infty$  ou  $\omega$ , onde  $r = \omega$  representa uma função analítica.

Nesta dissertação, vamos trabalhar exclusivamente com campos analíticos em  $\mathbb{R}^2$ , a menos que seja especificado de outra maneira. Quando possível, alguns resultados serão enunciados da maneira mais geral possível de modo a não descaracterizar a referência onde foi consultada.

Um campo vetorial será representado da seguinte forma

$$\mathcal{X}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad (1.1)$$

onde  $P$  e  $Q$  são funções de classe  $C^r$ .

Um sistema de equações diferenciais será representado por

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.2)$$

onde  $P$  e  $Q$  são funções de classe  $C^r$ .

Será comum ao longo do texto, nos referenciarmos a um sistema diferencial através do campo vetorial associado a ele e vice e versa.

**Definição 1.0.1.** Uma solução para (1.3) é uma função diferenciável  $\phi : I \rightarrow \Delta$ , onde  $I$  é um intervalo da reta, tal que

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \mathcal{X}(\phi(t)),$$

$\forall t \in I$ .

Será comum chamarmos de trajetórias ou curvas integrais do campo  $\mathcal{X}$ , uma solução para a equação diferencial (1.3).

A noção de integração de um campo vetorial irá significar que, estamos olhando para as curvas  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , com  $t$  pertencendo a algum intervalo de  $\mathbb{R}$ , que são soluções da equação diferencial

$$X' = \mathcal{X}(X), \tag{1.3}$$

onde  $X = (x, y) \in \Delta$  e  $X'$  denota  $dX/dt$ . As variáveis  $X$  e  $t$  são chamadas de variável dependente e variável independente, respectivamente. Convencionaremos que a variável  $t$  será chamada de tempo.

**Definição 1.0.2.** Um ponto  $p \in \Delta$  é dito um ponto de equilíbrio de  $\mathcal{X}$ , se  $\mathcal{X}(p) = 0$ . Caso contrário, diremos que ele é um ponto regular de  $\mathcal{X}$ .

**Definição 1.0.3.** Uma curva integral  $\phi : I \rightarrow \Delta$  de  $\mathcal{X}$  chama-se máxima se, para toda curva integral  $\psi : J \rightarrow \Delta$  tal que,  $I \subset J$  e  $\phi = \psi|_I$  então  $I = J$  e conseqüentemente  $\phi = \psi$ . Chamaremos  $I$  de intervalo máximo.

**Teorema 1.0.4.** Seja  $\mathcal{X}$  um campo vetorial de classe  $C^r$ ,  $1 \leq r \leq \infty$  ou  $\omega$ .

- (Existência e unicidade de soluções máximas) Para cada  $(x, y) \in \Delta$ , existe um intervalo aberto  $I_{(x,y)}$ , onde está definida a única solução máxima  $\phi_{(x,y)}$  de (1.3) tal que  $\phi_{(x,y)}(0) = (x, y)$ ;

- (Regularidade com relação às condições iniciais) O conjunto  $\mathcal{D} = \{(t, x); x \in \Delta, t \in I_x\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^3$  e a aplicação  $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \Delta$ , dada por  $\phi(t, x) = \phi_x(t)$  é de classe  $C^r$ . Mais ainda,  $\phi$  satisfaz à equação

$$D_1 D_2 \phi(t, x) = D\mathcal{X}(\phi(t, x)) \cdot D_2 \phi(t, x),$$

para todo  $(t, x) \in \mathcal{D}$ . Aqui a letra  $D$  denota a derivada de  $\mathcal{X}$  e  $D_2$  a derivada em relação a segunda variável de  $\phi(t, x)$ .

**Definição 1.0.5.** A aplicação  $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \Delta$  chama-se fluxo gerado por  $\mathcal{X}$ .

**Definição 1.0.6.** O conjunto  $\gamma_p = \{\phi(t, p), t \in I_p\}$ , isto é, a imagem da curva integral de  $\mathcal{X}$  pelo ponto  $p$ , chama-se órbita de  $\mathcal{X}$  pelo ponto  $p$ .

Note que,  $q \in \gamma_p \iff \gamma_p = \gamma_q$ . De fato, se  $q \in \gamma_p$ , então  $q = \phi(t_1, p)$  e  $\phi(t, q) = \phi(t + t_1, p)$  e  $I_p - t_1 := \{t - t_1, \text{ com } t \in I_p\} = I_q$ .

Temos então que, duas órbitas de  $\mathcal{X}$  coincidem ou são disjuntas, isto é,  $\Delta$  fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser

- imagem biunívoca de um intervalo de  $\mathbb{R}$ ;
- um ponto;
- difeomorfa a um círculo.

Em resumo, temos o seguinte teorema.

**Teorema 1.0.7.** Se  $\phi$  é uma solução máxima de (1.3) em  $I$ , verifica-se uma única das seguintes alternativas:

- $\phi$  é biunívoca;
- $I = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é constante;
- $I = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é periódica, isto é, existe um  $s > 0$  tal que  $\phi(t + s) = \phi(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e  $\phi(t_1) \neq \phi(t_2)$  se  $|t_1 - t_2| < s$ .

**Definição 1.0.8.** Uma órbita periódica  $\gamma$  de um campo vetorial  $\mathcal{X}$  é chamada de ciclo limite se, existe uma vizinhança  $U$  de  $\gamma$  tal que a única órbita periódica contida em  $U$  é  $\gamma$ .

**Definição 1.0.9.** O conjunto  $\Delta$  munido da decomposição em órbitas de  $\mathcal{X}$  chama-se retrato de fase de  $\mathcal{X}$ . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo  $\mathcal{X}$  e os pontos de equilíbrio são munidos da orientação trivial.

**Definição 1.0.10.** Sejam  $\mathcal{X}_1$  e  $\mathcal{X}_2$  campos vetoriais definidos nos abertos  $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{R}^n$ , respectivamente. Diz-se que  $\mathcal{X}_1$  é topologicamente equivalente (resp.  $C^r$ -equivalente) a  $\mathcal{X}_2$  quando, existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo  $C^r$ )  $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  que leva órbita de  $\mathcal{X}_1$  em órbita de  $\mathcal{X}_2$ , preservando a orientação. Mais precisamente, sejam  $p \in \Delta_1$  e  $\gamma_1(p)$  a órbita orientada de  $\mathcal{X}_1$  passando por  $p$ , então  $h(\gamma_1(p))$  é a órbita orientada  $\gamma_2(h(p))$  de  $\mathcal{X}_2$  passando por  $h(p)$ .

**Definição 1.0.11.** Sejam  $\phi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\phi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  os fluxos gerados pelos campos  $\mathcal{X}_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{X}_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , respectivamente. Diz-se que  $\mathcal{X}_1$  é topologicamente conjugado ( $C^r$ -conjugado) a  $\mathcal{X}_2$  quando existe um homeomorfismo (difeomorfismo de classe  $C^r$ )  $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  tal que  $h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x))$  para todo  $(t, x) \in D_1$ .

**Definição 1.0.12.** Sejam  $\mathcal{X} : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^r$  definido no aberto  $\Delta$  e  $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Uma aplicação diferenciável  $f : A \rightarrow \Delta$  de classe  $C^r$  chama-se seção transversal local de  $\mathcal{X}$  quando, para todo  $a \in A$ ,  $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$  e  $\mathcal{X}(f(a))$  geram o espaço  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $\Sigma = f(A)$  munido da topologia induzida. Se  $f : A \rightarrow \Sigma$  for um homeomorfismo, diz-se que  $\Sigma$  é uma seção transversal de  $\mathcal{X}$ .

**Teorema 1.0.13** (Fluxo Tubular). Seja  $p$  um ponto regular de  $\mathcal{X} : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$  e  $f : A \rightarrow \Sigma$  uma seção transversal local de  $\mathcal{X}$  de classe  $C^r$  com  $f(0) = p$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em

$\Delta$  e um difeomorfismo  $h : V \longrightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$  de classe  $C^r$ , onde  $\epsilon > 0$  e  $B$  é uma bola aberta em  $\mathbb{R}^{n-1}$  de centro na origem tal que:

1.  $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$ ;
2.  $h$  é uma  $C^r$ -conjugação entre  $\mathcal{X}|_V$  e o campo constante  $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ .

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [22].

**Corolário 1.0.14.** Seja  $\Sigma$  uma seção transversal de  $\mathcal{X}$ . Para todo ponto  $p \in \Sigma$  existem  $\epsilon > 0$ , uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^n$  e uma função  $\tau : V \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^r$  tais que  $\tau(V \cap \Sigma) = 0$  e

1. Para todo  $q \in V$ , a curva integral  $\phi(t, q)$  de  $\mathcal{X}|_V$  é definida e biunívoca em  $J_q = (-\epsilon + \tau(q), \epsilon + \tau(q))$ ;
2.  $\xi(q) = \phi(\tau(q), q) \in \Sigma$  é o único ponto onde  $\phi(t, q)|_{J_q}$  intercepta  $\Sigma$ . Em particular,  $q \in \Sigma \cap V$  se e só se  $\tau(q) = 0$ ;
3.  $\xi : V \longrightarrow \Sigma$  é de classe  $C^r$  e  $D\xi(q)$  é sobrejetiva para todo  $q \in V$ . Mais ainda,  $D\xi(q).v = 0$  se e só se  $v = \alpha\mathcal{X}(q)$  para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [22].

**Definição 1.0.15.** Seja  $p$  um ponto de equilíbrio de (1.1). O ponto de equilíbrio  $p$  é dito monodrômico se não existem órbitas se aproximando, ou se afastando, de  $p$ , com tangente bem definida em  $p$ .

**Observação 1.0.16.** Se uma órbita  $\gamma$  possuir tangente bem definida num ponto de equilíbrio  $p$ , diremos que  $\gamma$  é uma órbita característica para  $p$  do sistema (1.1).

Mais adiante falaremos de alguns resultados que garantem a monodromia de um ponto de equilíbrio. Um fato importante, provado em [14], é que, quando um campo  $\mathcal{X}$  é analítico, um ponto monodrômico é sempre um foco ou centro.

**Definição 1.0.17.** Seja um sistema de equações diferenciais analítico no plano associado ao campo (1.1) e  $p \in \mathbb{R}^2$  um ponto de equilíbrio de  $\mathcal{X}$ . Dizemos que

$$D\mathcal{X}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

é a linearização do campo  $\mathcal{X}$  em  $p$ .

**Definição 1.0.18.** Seja um sistema de equações diferenciais analítico no plano associado ao campo (1.1) e  $p \in \mathbb{R}^2$  um ponto de equilíbrio de  $\mathcal{X}$ . Dizemos que  $p$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico de  $\mathcal{X}$  se, a sua linearização  $D\mathcal{X}(p)$  possui todos os seus autovalores com partes reais não nulas. Caso contrário, diremos que o ponto é não hiperbólico.

**Definição 1.0.19.** Seja  $p$  um ponto de equilíbrio de um campo (1.1) de classe  $C^r$ , com  $r \geq 1$  ou  $r = \omega$ . Então  $p$  é denominado:

1. não degenerado, se 0 não é um autovalor de  $D\mathcal{X}(p)$ ;
2. degenerado, se o determinante de  $D\mathcal{X}(p)$  é nulo. Um ponto degenerado é chamado de:
  - (a) degenerado elementar, se apenas um dos autovalores de  $D\mathcal{X}(p)$  for nulo;
  - (b) nilpotente, se os dois autovalores são nulos, mas  $D\mathcal{X}(p) \neq 0$ , isto é,  $D\mathcal{X}(p)$  não é a matriz nula;
  - (c) linearmente nulo, se  $D\mathcal{X}(p)$  for uma matriz nula;
3. Dizemos que  $p$  é um centro se existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que todas as órbitas de  $U - \{p\}$  são fechadas;
4. Dizemos que  $p$  é um foco se existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que todas as órbitas de  $U - \{p\}$  espiralam na direção de  $p$  ou se afastam de  $p$ , para  $t > 0$ .



**Definição 1.0.20.** Diremos que (1.1) é reversível com respeito a uma involução  $\varphi$ , isto é, um difeomorfismo definido em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\varphi \circ \varphi = Id$ , se

$$D\varphi(x, y)\mathcal{X}(x, y) = -\mathcal{X}(\varphi(x, y)),$$

$\forall (x, y) \in U$ .

**Definição 1.0.21.** Seja  $H : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função não-constante, definida numa vizinhança  $U$  de um ponto de equilíbrio  $p$  de um campo vetorial (1.1). Dizemos que  $H$  é uma integral primeira de (1.1) se

1.  $H$  é constante ao longo de todas as órbitas do sistema;
2.  $H$  não é constante em nenhum aberto de  $U$ .

**Definição 1.0.22.** Seja um campo vetorial do tipo (1.1), definido em um aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ . Seja  $\varphi(t)$  a curva integral passando pelo ponto  $p$ , definida no seu intervalo máximo  $I_p$ ,  $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$ . Se  $\omega_+(p) = \infty$ , definimos o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in \Delta; \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Analogamente, se  $\omega_-(p) = -\infty$ , define-se o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta; \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Os conjuntos  $\omega(p)$  e  $\alpha(p)$  são chamados respectivamente de conjuntos  $\omega$ -limite e conjunto  $\alpha$ -limite de  $p$ .

**Teorema 1.0.23** (Teorema de Poincaré-Bendixson). Seja  $\varphi(t) = \varphi(t, p)$  uma curva integral de  $\mathcal{X}$ , definida para todo  $t \geq 0$ , tal que  $\gamma_p^+$  esteja contida num compacto  $K \subset \Delta$ . Suponha que o campo  $\mathcal{X}$  possua um número finito de equilíbrios em  $\omega(p)$ . Tem-se então as seguintes alternativas:

1. Se  $\omega(p)$  contém somente pontos regulares, então  $\omega(p)$  é uma órbita periódica;

2. Se  $\omega(p)$  contém pontos regulares e equilíbrios, então  $\omega(p)$  consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos de equilíbrios quando  $t \rightarrow \pm\infty$ ;
3. Se  $\omega(p)$  não contém pontos regulares, então  $\omega(p)$  é um ponto de equilíbrio.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [22].

Suponhamos que  $(0, 0)$  seja um ponto de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais. O retrato de fase no caso dos sistemas bidimensionais lineares estão bem estabelecidos, isto é, os retratos dos sistemas do tipo  $X' = AX$ , onde  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$  com entradas constantes e  $\delta = \det A \neq 0$ . Se  $\delta < 0$  temos uma sela; se  $\delta > 0$  e  $\sigma = \text{Tr } A = 0$  temos um centro; se  $\delta > 0$  e  $\sigma^2 - 4\delta < 0$  temos um foco e se  $\delta > 0$  e  $\sigma^2 - 4\delta \geq 0$  temos um nó.

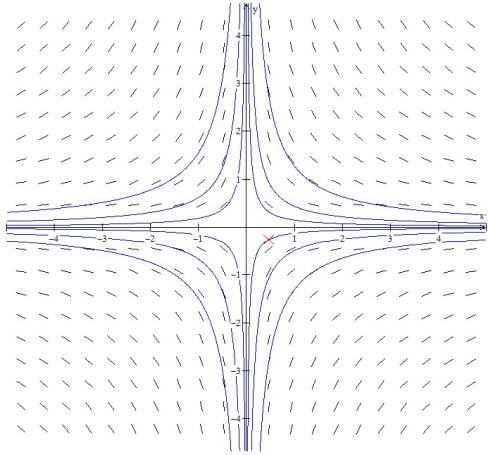


Figura 1.1: Ponto de equilíbrio do tipo sela.

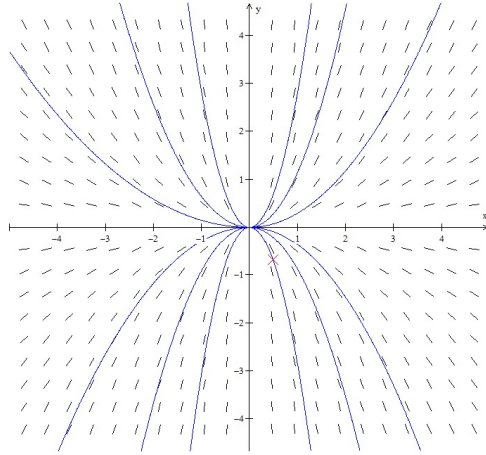


Figura 1.2: Ponto de equilíbrio do tipo nó.

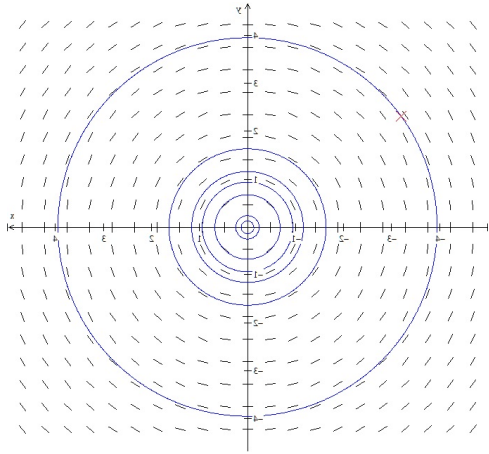


Figura 1.3: Ponto de equilíbrio do tipo centro.

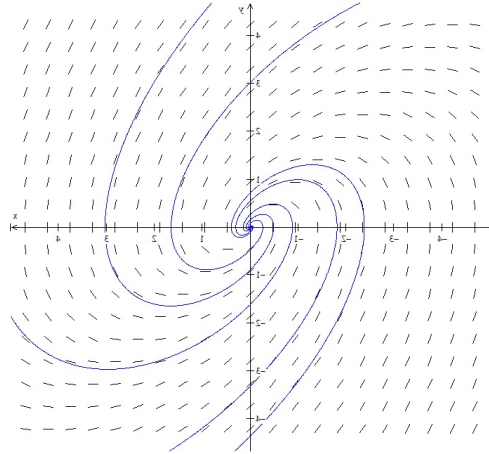


Figura 1.4: Ponto de equilíbrio do tipo foco.

No caso não linear, isto é,  $X' = AX + r(X)$ , onde  $r$  é uma função analítica definida em  $\mathbb{R}^2$  sem termos lineares, com  $Dr(0) = 0$ , o estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico já está bem estabelecido, via Teorema de Hartman, ver [22].

O estudo do próximo capítulo irá se concentrar no caso não hiperbólico.

# Capítulo 2

## Um pouco sobre o problema foco-centro

O estudo descrito neste capítulo pode ser encontrado em [12], [11], [6], [15], [2] e [16].

Suponhamos que a origem seja um equilíbrio isolado do campo planar analítico  $\mathcal{X}$  da forma (1.1). Vamos investigar o comportamento local deste campo numa vizinhança da origem.

**Proposição 2.0.24.** Seja um campo planar analítico  $\mathcal{X}$  da forma (1.1), com um equilíbrio não degenerado isolado na origem. Suponha que os autovalores de sua parte linear na origem são da forma  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ . Então este campo pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} x' &= \alpha x - \beta y + F(x, y), \\ y' &= \beta x + \alpha y + G(x, y), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $F(x, y)$  e  $G(x, y)$  são funções analíticas numa vizinhança da origem, com  $F, G$  e suas derivadas parciais em relação a  $x$  e  $y$  se anulando na origem.

*Demonstração.* Por hipótese, o campo  $\mathcal{X}$  é analítico numa vizinhança da ori-

gem, então podemos expressar  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  como

$$P(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0)y + \Phi(x, y),$$

$$Q(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial Q}{\partial y}(0, 0)y + \Psi(x, y),$$

onde as funções  $\Phi(x, y)$  e  $\Psi(x, y)$  são analíticas e  $\Phi(0, 0) = \Psi(0, 0) = 0$ ,  $\partial_x \Phi(0, 0) = \partial_y \Phi(0, 0) = \partial_x \Psi(0, 0) = \partial_y \Psi(0, 0) = 0$ .

Chamemos  $\partial_x P(0, 0)$ ,  $\partial_y P(0, 0)$ ,  $\partial_x Q(0, 0)$  e  $\partial_y Q(0, 0)$  respectivamente por  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ . Segue então que (1.1) fica da forma

$$\begin{cases} x' &= ax + by + \Phi(x, y), \\ y' &= cx + dy + \Psi(x, y). \end{cases} \quad (2.2)$$

Logo, a parte linear  $D\mathcal{X}(0, 0)$  de (2.2) tem seu polinômio característico dado por  $P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$ .

Usando que a origem é um equilíbrio não degenerado e isolado, obtemos que  $ad - bc \neq 0$ . Assim,  $\delta = (a - d)^2 - 4bc$ .

Por outro lado, como  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$  então

$$\delta < 0 \longrightarrow b, c \neq 0.$$

Considere então a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x &= -\left(\frac{\alpha - d}{\beta c}\right)\bar{x} - \frac{1}{c}\bar{y}, \\ y &= -\frac{1}{\beta}\bar{x}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Observe que, o fato de  $\beta \neq 0$  e  $c \neq 0$ , garante que (2.3) está bem definido.

Logo, (2.2), após a mudança (2.3), assume a forma

$$\begin{cases} \bar{x}' &= \alpha\bar{x} - \beta\bar{y} + \bar{F}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \bar{y}' &= \beta\bar{x} + \alpha\bar{y} + \bar{G}(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases}$$

completando a demonstração.  $\square$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $(0, 0)$  é um centro de (1.1). Sabemos que os autovalores da linearização são da forma  $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$  e através de uma mudança linear de variáveis tal como na Proposição 2.0.24, um reescalonamento do tempo do tipo  $\beta t = \tau$ , (1.1) pode ser escrito de uma das formas

$$\begin{cases} x' &= -y + F_1(x, y), \\ y' &= x + F_2(x, y), \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} x' &= y + F_1(x, y), \\ y' &= F_2(x, y), \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} x' &= F_1(x, y), \\ y' &= F_2(x, y), \end{cases} \quad (2.6)$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são funções analíticas cujos desenvolvimentos de Taylor iniciam-se com termos quadráticos pelo menos, definidas numa vizinhança da origem.

Os sistemas (2.4), (2.5) e (2.6) são chamados respectivamente de centro do tipo linear, nilpotente e degenerado.

Observemos o seguinte, o fato dos autovalores da linearização serem complexos conjugados puros, não garante que a origem seja um centro.

**Exemplo 1.** Seja o sistema diferencial

$$\begin{cases} x' &= -y + x^3, \\ y' &= x - y^2. \end{cases} \quad (2.7)$$

Note que, a origem é um equilíbrio isolado e os autovalores da linearização são  $\lambda = \pm i$ , mas a origem é um foco repulsor.

Mais adiante na dissertação, mostraremos como determinar a estabilidade deste sistema.

Nas próximas seções vamos discutir um pouco sobre os tipos linear e o nilpotente.

## 2.1 Sistemas do tipo linear

O estudo descrito nesta seção e seções subsequentes pode ser encontrado em [12], [11], [6], [15], [2] e [16].

Ao longo deste capítulo, vamos estudar algumas ferramentas que iremos utilizar para analisar a estabilidade de um ponto de equilíbrio com autovalores da linearização complexos puros.

### 2.1.1 Aplicação de Poincaré

A aplicação de Poincaré, também conhecida como aplicação de primeiro retorno, é uma função utilizada no estudo da estabilidade e bifurcação de órbitas periódicas. Desenvolvido por Poincaré em seu artigo [20], este método oferece algumas vantagens e algumas delas serão descritas ao longo da seção.

**Definição 2.1.1.** Sejam um campo vetorial  $\mathcal{X}$  de classe  $C^r$ ,  $\gamma$  uma órbita periódica de  $\mathcal{X}$  passando por um ponto  $p$  e  $\Sigma$  uma seção transversal de  $\mathcal{X}$  em  $M_0 = (p, \mathcal{X}(p))$ . Definimos a aplicação de Poincaré  $\Pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ , com  $\Sigma_0 \subset \Sigma$ , como a função de primeiro retorno do fluxo em  $\Sigma$ , isto é, para cada ponto de  $\Sigma_0$  pertencente a uma órbita suficientemente próxima de  $p$ , a aplicação de Poincaré fornece o primeiro ponto em que a órbita intercepta  $\Sigma$  num tempo positivo.

Observe que,  $\Sigma_0$  é escolhido suficientemente pequeno de modo que, a aplicação  $\Pi$  esteja definida em todos os pontos de  $\Sigma_0$ .

**Proposição 2.1.2.** Seja  $\mathcal{X}$  um campo vetorial de classe  $C^r$ . Então, a aplicação de Poincaré associada a uma órbita fechada  $\gamma$  de  $\mathcal{X}$ , numa vizinhança da origem, é um difeomorfismo de classe  $C^r$  sobre sua imagem  $\Sigma_1$ .

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [15].

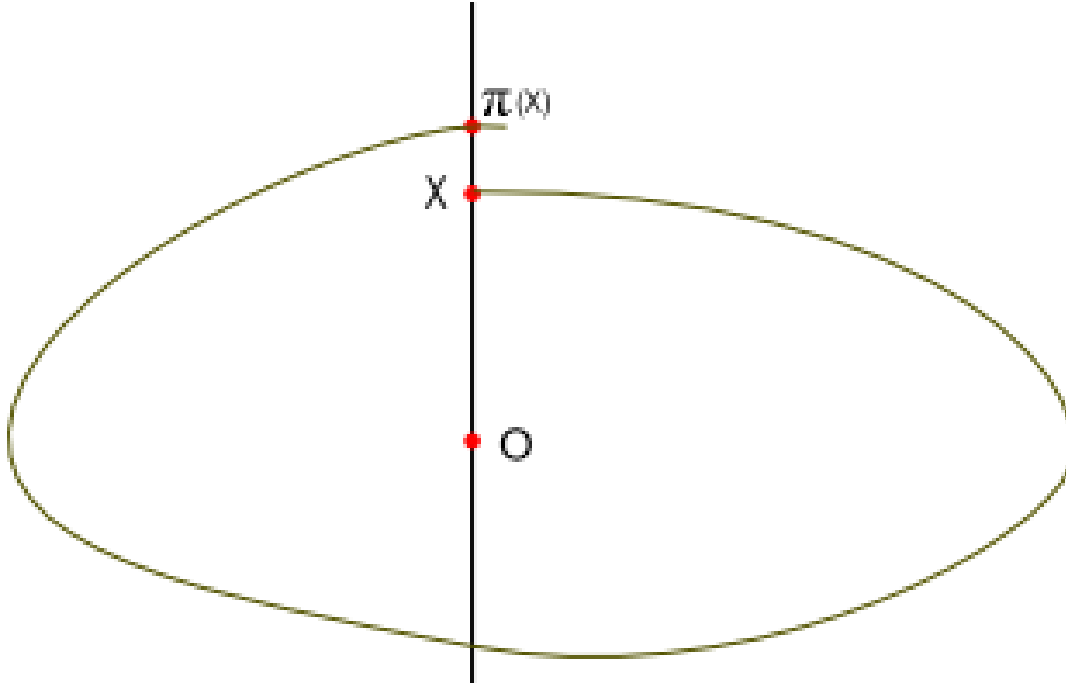


Figura 2.1: Aplicação de Poincaré.

**Proposição 2.1.3.** Sejam  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $\mathcal{X}$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Seja  $\gamma$  uma órbita periódica de  $\mathcal{X}$  de período  $T$  e  $\Pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  a transformação de Poincaré em uma seção transversal  $\Sigma$  em  $p \in \gamma$ . Então

$$\Pi'(p) = \exp \left( \int_0^T \operatorname{div} \mathcal{X}(\gamma(t)) dt \right), \quad (2.8)$$

onde  $\operatorname{div} \mathcal{X}(x, y) = \partial_x P(x, y) + \partial_y Q(x, y)$ .

A demonstração deste resultado também pode ser encontrada em [22].

### 2.1.2 Função sucessão e valores focais

Seja um sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + \Phi(x, y), \\ y' = \beta x + \alpha y + \Psi(x, y); \end{cases} \quad (2.9)$$

onde  $\Phi$  e  $\Psi$  são funções analíticas cujos desenvolvimentos de Taylor iniciam-se com termos quadráticos pelo menos, definidas numa vizinhança da origem.



Vamos estudar o sistema (2.9), com interesse no caso  $\alpha = 0$ . Fazendo uma mudança de coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$

obtemos

$$\begin{cases} r' = \alpha r + \Phi(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) + \Psi(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = F(r, \theta), \\ \theta' = \beta + \frac{\Psi(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)}{r} \cos \theta - \frac{\Phi(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)}{r} \operatorname{sen} \theta = \beta + \phi(r, \theta), \end{cases} \quad (2.10)$$

onde  $\Psi = \Psi(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$  e  $\Phi = \Phi(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ .

Reduziremos o sistema (2.10) à equação

$$\frac{dr}{d\theta} = R(r, \theta) = \frac{F(r, \theta)}{\beta + \phi(r, \theta)}. \quad (2.11)$$

O lema a seguir vai nos ajudar a decidir quando a equação (2.11) tem solução.

**Lema 2.1.4.** A função  $R(r, \theta)$  tem derivadas parciais contínuas com respeito a  $r$  até a ordem  $m$  na região  $-\infty < \theta < \infty$ ,  $0 \leq |r| < \delta$ , onde  $\delta$  é um número real suficientemente pequeno.

A demonstração deste resultado pode ser obtida em [2].

Usando o Lema 2.1.4 juntamente com o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções, a equação (2.11) possui uma única solução  $r = f(\theta; \theta_0, r_0)$  com condição inicial  $(\theta_0, r_0)$ , para  $-\delta < r < \delta$ , com  $\delta$  suficientemente pequeno.

As órbitas do sistema (2.10) coincidem com as curvas integrais da equação (2.11). Daí, uma solução de (2.11) pode ser considerada como a equação de uma curva  $L$  em coordenadas polares. Notemos que, se  $L$  é fechada então existe somente uma curva  $\bar{L}$  do sistema (2.9) correspondente a ela. Agora, se  $L$  não for fechada, então existe uma infinidade de curvas correspondentes a  $L$ ,

da forma

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t) + 2k\pi,$$

onde  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Então, para  $r_0$  suficientemente pequeno a solução  $r = f(\theta; \theta_0, r_0)$  da equação (2.11) está definida para  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$ . Consideremos

$$r_1 = f(\theta_0 + 2\pi; \theta_0, r_0).$$

Fixemos  $\theta = \theta_0$ . Obtemos então, um segmento transversal ao sistema com ponto de origem em  $(0,0)$ . Chamemos de  $M_0$  e  $M_1$  as duas primeiras intersecções de uma órbita de (2.9), com este segmento. Defina  $\overline{OM_0} = r_0$  e  $\overline{OM_1} = r_1$ . Iremos chamar o ponto  $r_1$  de primeiro retorno e variando  $r_0$ , obtemos uma função que definiremos abaixo.

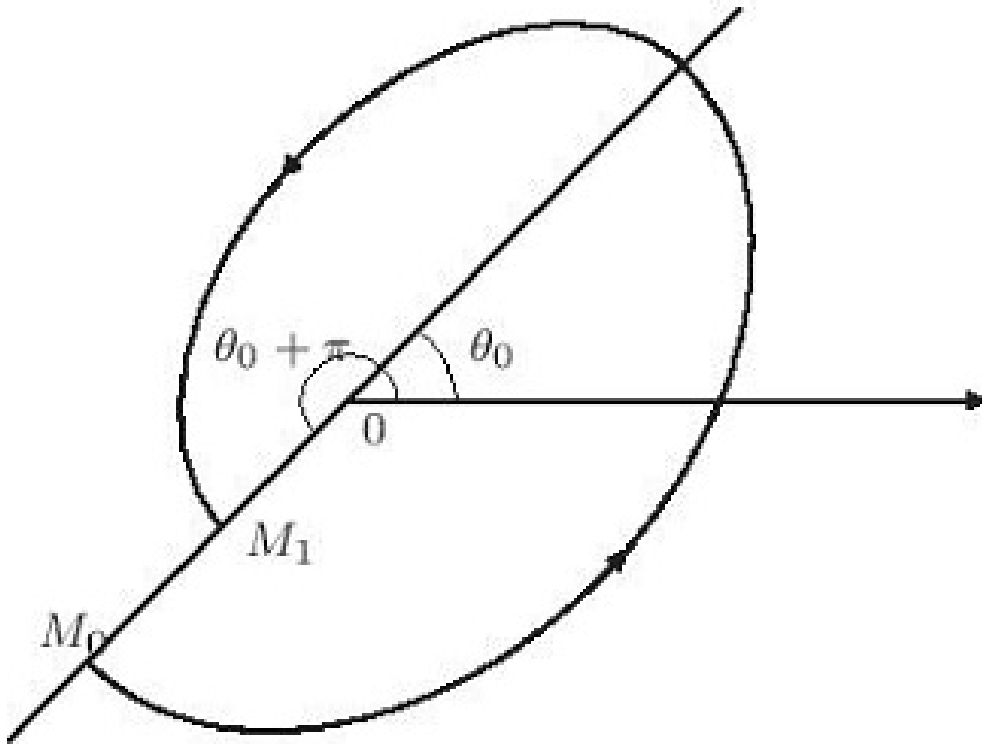


Figura 2.2: Função sucessão.

**Definição 2.1.5.** Seja  $\Pi(x)$  a aplicação de Poincaré para uma órbita  $\gamma$  de um

sistema diferencial analítico. Definimos a função sucessão como sendo

$$d(x) = \Pi(x) - x.$$

Se  $d(x_0) = 0$ , então curva será fechada. Observe então que, se  $d(x) \equiv 0$ ,  $\forall x \in \text{Dom } d$ , então o equilíbrio será um centro, caso contrário será um foco atrator ou repulsor, dependendo do sinal de  $d$ .

Por definição,  $f(\theta; 0, r_0)$  satisfaz

$$\frac{df(\theta; 0, r_0)}{d\theta} = R(f(\theta; 0, r_0), \theta).$$

Aplicando argumentos semelhantes àqueles utilizados na demonstração da Proposição 2.1.3, obtemos

$$\frac{\partial f(\theta; 0, 0)}{\partial r_0} = \exp\left(2\pi \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Observe que, a equação (2.11) é invariante pela mudança  $r_0$  por  $-r_0$  e de  $\theta$  por  $\theta + \pi$ . De fato,

$$\frac{d(-r_0)}{d(\theta + \pi)} = -\frac{dr_0}{d\theta} = -R(r_0, \theta) = R((-r_0), (\theta + \pi)).$$

### 2.1.3 Algoritmo de Liapunov

A ideia principal consiste em construir, de maneira recursiva, uma função de Liapunov que pode ser utilizada para determinar a estabilidade de um equilíbrio.

**Definição 2.1.6** (Estabilidade de Liapunov). Seja um sistema  $x' = f(t, x)$ , onde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua e  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  é um aberto. Seja  $\phi(t)$  uma órbita deste sistema, definida para todo  $t \geq 0$ . Então  $\phi(t)$  é estável se  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  e  $\psi(t)$  é uma outra solução do sistema então  $|\psi(0) - \phi(0)| < \delta$ , com  $\psi(t)$  definida para todo  $t \geq 0$  e  $|\psi(t) - \phi(t)| < \epsilon$ ,  $\forall t \geq 0$ .

**Definição 2.1.7.** Dizemos que  $\phi(t)$  é assintoticamente estável se for estável do

tipo Liapunov e, além disso, existir em  $\bar{\delta}$  tal que se

$$|\psi(0) - \phi(0)| < \bar{\delta} \longrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t) - \phi(t)| = 0.$$

Considere  $P(n) \cup \{0\}$ , onde 0 é o polinômio nulo, o espaço dos polinômios homogêneos de grau  $n$  nas variáveis  $x$  e  $y$  e considere também uma função

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{j=3}^{\infty} V_j(x, y), \quad (2.12)$$

onde cada  $V_j \in P(j)$ ,  $j \geq 3$  e  $X(x, y) = (-y + F_1(x, y), x + F_2(x, y))$  é o campo associado a (2.4).

Para analisar a estabilidade da origem, precisamos estudar a derivada de  $V$  na direção do campo vetorial  $X$ , cuja definição é da forma

$$\dot{V}(x, y) = \nabla V(x, y) \cdot X(x, y). \quad (2.13)$$

Se a função  $V$  é positiva definida em uma vizinhança da origem e  $\dot{V}(x, y) \leq 0$ , então a função  $V$  é chamada função de Liapunov para o sistema (2.4) na origem, ver [22].

**Teorema 2.1.8.** Se  $V$  é uma função de Liapunov na origem para o sistema (2.4), então o ponto de equilíbrio na origem é estável. Se, além disso,  $\dot{V} < 0$ , então o equilíbrio é assintoticamente estável.

A demonstração deste resultado pode ser encontrado em [22].

Seja um sistema do tipo (2.4). Notemos que, a primeira aproximação deste sistema tem a forma

$$x' = -y, \quad y' = x. \quad (2.14)$$

Os autovalores deste sistema são iguais à  $\pm i$ . Vamos estudar então, a influência dos termos não lineares no comportamento das trajetórias do sistema (2.4) em uma vizinhança da origem. Para isto, considere o seguinte método de Poincaré, a intersecção das trajetórias do sistema com a seção transversal

$x = 0$ .

Para o tempo  $t = 0$ , a trajetória  $(x(t, h), y(t, h))$  começa no ponto  $(0, h)$ , para  $h$  bem pequeno. Vamos denotar  $T(h)$ , como sendo o tempo de retorno entre duas sucessivas intersecções com  $x = 0$ . Vale ressaltar que, para um  $h$  suficientemente pequeno, este tempo é finito e pode ser encontrado, uma vez que (2.14) e (2.4) diferem por termos de ordem  $o((x^2 + y^2)^2)$  próximo da origem. Daí,

$$x(T(h), h) = 0 \quad (2.15)$$

e  $y(T(h), h)$  pode ser aproximado por uma série de potências em termos de  $h$  da forma

$$y(T(h), h) = h + \bar{L}_2 h^2 + \bar{L}_3 h^3 + \dots \quad (2.16)$$

Então, o primeiro coeficiente  $\bar{L}_m$  diferente de zero é chamado de coeficiente de Liapunov. Estes coeficientes serão utilizados para determinar a estabilidade ou instabilidade de um ponto de equilíbrio. É possível mostrar que, o primeiro coeficiente não nulo é necessariamente um índice ímpar da forma  $m = 2k + 1$ , ver, por exemplo, [2].

Vamos descrever agora um método para encontrar uma expressão simbólica para os coeficientes de Liapunov em uma vizinhança da origem em função do campo. Para isto é necessário encontrar uma função de Liapunov para o sistema (2.4) da forma

$$V(x, y) = V_2(x, y) + V_3(x, y) + \dots + V_{n+1}(x, y), \quad (2.17)$$

onde  $V_2(x, y) = (x^2 + y^2)/2$  e

$$V_k(x, y) = \sum_{i+j=k} V_{i,j} x^i y^j,$$

com  $V_{i,j}$  os coeficientes de  $V_k$ . Calculando  $\dot{V}(x, y)$  obtemos

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \left( -y + \sum_{k=2} F_{1,k}(x, y) \right) + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \left( x + \sum_{k=2} F_{2,k}(x, y) \right).$$

onde  $F_{1,k}$  e  $F_{2,k}$  são os polinômios homogêneos de grau  $k$  do desenvolvimento de Taylor de  $F_1$  e  $F_2$  respectivamente. Calculando o produto,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= -xy + xy + xF_{1,2} + yF_{2,2} - \left( y \frac{\partial V_3}{\partial x} - x \frac{\partial V_3}{\partial y} \right) \\ &+ xF_{1,3} + yF_{2,3} + F_{1,2} \frac{\partial V_3}{\partial x} + F_{2,2} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \left( y \frac{\partial V_4}{\partial x} - x \frac{\partial V_4}{\partial y} \right) + \dots \end{aligned}$$

Sabemos que  $P(n) \cup \{0\}$  possui estrutura de espaço vetorial de dimensão finita.

Defina então a transformação linear

$$\begin{aligned} T_n &: P(n) \longrightarrow P(n) \\ p &\longmapsto T_n(p) = y \frac{\partial p}{\partial x} - x \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

**Lema 2.1.9.** Se  $n$  é ímpar, então  $T_n$  é um isomorfismo.

**Lema 2.1.10.** Se  $n$  é par, isto é,  $n = 2l$ , então o núcleo de  $T_n$ ,  $\ker(T_n)$ , tem dimensão 1 e é gerado por  $\{(x^2 + y^2)^l\}$ .

As demonstrações destes dois resultados pode ser encontrada em [8].

Pelo Lema 2.1.9, existe algum  $V_3 \in P(n)$  tal que

$$T_3(V_3(x, y)) = xF_{1,2} + yF_{2,2}.$$

Por este motivo, os termos cúbicos de  $\dot{V}$  se anulam. Agora, pelo Lema 2.1.10 e o Teorema do Núcleo e Imagem, existe um  $V_4$  tal que

$$\dot{V} = L_4(x^2 + y^2)^2 + O((x^2 + y^2)^5),$$

onde  $O((x^2 + y^2)^5)$  representam os termos de ordem maiores ou iguais a 5 e  $L_4$  é uma constante.

Se  $L_4 \neq 0$ , então a função  $V(x, y)$  irá determinar a estabilidade da origem. Mais precisamente, se  $L_4 < 0$ , então  $V$  é uma função de Liapunov em alguma vizinhança da origem então o equilíbrio é assintoticamente estável. Se  $L_4 > 0$ , então a origem é instável.

Agora se  $L_4 = 0$ , nada podemos concluir. Prossequimos então utilizando os Lemas 2.1.9 e 2.1.10, de modo a obter uma nova expressão de  $V$ , tal que o coeficiente de  $\dot{V}$  é  $L_6(x^2 + y^2)^3$  e assim sucessivamente.

Convencionaremos daqui para frente que, o primeiro coeficiente de Liapunov será denotado por  $L_1$ , o segundo por  $L_2$  e assim por diante.

**Teorema 2.1.11.** Se  $L_n = 0$ ,  $n = 1, \dots, N$ , mas  $L_{N+1} \neq 0$ , então a estabilidade do equilíbrio na origem está bem determinada. Mais precisamente, se  $L_{N+1} < 0$ , então a origem é assintoticamente estável. Se  $L_{N+1} > 0$ , a origem é instável.

A demonstração pode ser encontrada em [3].

**Teorema 2.1.12** (Centro de Liapunov). Se um campo vetorial  $X$  do tipo (2.4) é analítico e  $L_n = 0$ ,  $\forall n \geq 1$ , então a origem é um centro. Além disso, a série que define  $V$  é convergente numa vizinhança da origem e representa uma função cujas curvas de nível, contém as órbitas da equação diferencial correspondente ao campo  $X$ .

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [8].

O próximo resultado, nos permite estabelecer uma relação entre os coeficientes de Liapunov e as constantes  $L_{2n}$  que multiplicam o gerador do núcleo da transformação, definida no Lema 2.1.10.

**Lema 2.1.13.** Sejam  $\bar{L}_{2m+1}$ ,  $m \geq 1$  a  $m$ -ésima constante de Liapunov de um sistema do tipo (2.4) e  $L_{2n}$ ,  $n \geq 2$  o coeficiente de  $V_{2n}$  tal como definido anteriormente. Então, se  $k \in \mathbb{N}$  e  $L_{2j} = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, k - 1$ , então  $\bar{L}_{2k-1} = 2\pi(2k - 1)!L_{2k}$ .

Agora que está bem definido a constante de Liapunov com as constantes definidas no Lema 2.1.10, vamos ilustrar o procedimento apresentando um te-

orema, que fornece explicitamente o primeiro coeficiente de Liapunov para um sistema diferencial do tipo (2.4).

**Teorema 2.1.14.** Seja um sistema analítico

$$\begin{cases} x' = -y + F_2(x, y) + F_3(x, y) = -y + P(x, y), \\ y' = x + G_2(x, y) + G_3(x, y) = x + Q(x, y), \end{cases} \quad (2.18)$$

onde

$$\begin{aligned} F_2 &= \mu_{2,0}x^2 + \mu_{1,1}xy + \mu_{0,2}y^2, \\ F_3 &= \mu_{3,0}x^3 + \mu_{2,1}x^2y + \mu_{1,2}xy^2 + \mu_{0,3}y^3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G_2 &= \nu_{2,0}x^2 + \nu_{1,1}xy + \nu_{0,2}y^2, \\ G_3 &= \nu_{3,0}x^3 + \nu_{2,1}x^2y + \nu_{1,2}xy^2 + \nu_{0,3}y^3 \end{aligned}$$

são os termos de grau 2 e 3 da expansão de Taylor de  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$ , respectivamente. Então, o primeiro coeficiente de Liapunov  $L_1$  é igual a

$$\begin{aligned} L_1 &= 3\mu_{3,0} + \mu_{1,2} + \nu_{2,1} - 3\nu_{3,0} + \mu_{2,0}\mu_{1,1} + \mu_{0,2}\mu_{1,1} \\ &+ 2\mu_{0,2}\nu_{0,2} - \nu_{0,2}\nu_{1,1} - \nu_{2,0}\nu_{1,1} - 2\nu_{2,0}\mu_{2,0}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Considere as transformações lineares  $T_3 : P(3) \rightarrow P(3)$  e  $T_4 : P(4) \rightarrow P(4)$ , definidas por

$$T_k(p) = y \frac{\partial p}{\partial x} - x \frac{\partial p}{\partial y},$$

onde  $p \in P(k)$  e  $k = 3, 4$ . Sejam  $p \in P(3)$  e  $q \in P(4)$  da forma

$$p(x, y) = \alpha_0x^3 + \alpha_1x^2y + \alpha_2xy^2 + \alpha_3y^3.$$



e

$$q(x, y) = \beta_0 x^4 + \beta_1 x^3 y + \beta_2 x^2 y^2 + \beta_3 y^3 x + \beta_4 y^4.$$

Como  $P(3)$  é isomorfo à  $\mathbb{R}^4$  ( $P(3) \cong \mathbb{R}^4$ ), podemos usar que  $p(x, y) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ .

Análogo para o  $q$ .

Daí,

$$T_3(p) = T((\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = (-\alpha_1, 3\alpha_0 - 2\alpha_2, 2\alpha_1 - 3\alpha_3, \alpha_2).$$

e

$$T_4(q) = T((\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)) = (-\beta_1, 4\beta_0 - 2\beta_2, 3\beta_1 - 3\beta_3, 2\beta_2 - 4\beta_4, \beta_3).$$

Seja  $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2 + V_3(x, y) + V_4(x, y) + \dots$  uma função, onde  $V_i \in P(i)$ , com  $i = 3, 4, \dots$ . Calculemos então a derivada da função  $V$  na direção do campo,

$$\dot{V}(x, y) = -xy + xy + xF_2 + yG_2 - \left( y \frac{\partial V_3}{\partial x} - x \frac{\partial V_3}{\partial y} \right) \quad (2.19)$$

$$+ xF_3 + yG_3 + F_2 \frac{\partial V_3}{\partial x} + G_2 \frac{\partial V_3}{\partial y} - \left( y \frac{\partial V_4}{\partial x} - x \frac{\partial V_4}{\partial y} \right) \dots \quad (2.20)$$

Observe que,

$$\begin{aligned} xF_2 + yG_2 &= x(\mu_{2,0}x^2 + \mu_{1,1}xy + \mu_{0,2}y^2) + y(\nu_{2,0}x^2 + \nu_{1,1}xy + \nu_{0,2}y^2) \\ &= \mu_{2,0}x^3 + (\mu_{1,1} + \nu_{2,0})x^2y + (\mu_{0,2} + \nu_{1,1})xy^2 + \nu_{0,2}y^3 \\ &\cong (\mu_{2,0}, \mu_{1,1} + \nu_{2,0}, \mu_{0,2} + \nu_{1,1}, \nu_{0,2}). \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.9, existe uma escolha para  $V_3 = (b_0, b_1, b_2, b_3) \in P(3)$  tal que

$$T_3(V_3) = (-b_1, 3b_0 - 2b_2, 2b_1 - 3b_3, b_2) = (\mu_{2,0}, \mu_{1,1} + \nu_{2,0}, \mu_{0,2} + \nu_{1,1}, \nu_{0,2}),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} b_1 &= -\mu_{2,0}, \\ b_2 &= \nu_{0,2}, \\ 3b_0 - 2b_2 &= \mu_{1,1} + \nu_{2,0}, \\ 2b_1 - 3a_3 &= \mu_{0,2} + \nu_{1,1}. \end{aligned}$$

Defina então,

$$V_3(x, y) = \left( \frac{\mu_{1,1} + \nu_{2,0} + 2\nu_{0,2}}{3} \right) x^3 - \mu_{2,0}x^2y + \nu_{0,2}xy^2 - \left( \frac{2\mu_{2,0} + \mu_{0,2} + \nu_{1,1}}{3} \right) y^3.$$

Vamos encontrar agora os coeficientes de  $V_4$ . Usando o Lema 2.1.10, podemos encontrar um  $V_4 \in P(4)$  tal que

$$xF_3 + yG_3 + F_2 \frac{\partial V_3}{\partial x} + G_2 \frac{\partial V_3}{\partial y} - \left( y \frac{\partial V_4}{\partial x} - x \frac{\partial V_4}{\partial y} \right) = L(x^2 + y^2)^2,$$

onde  $L \in \mathbb{R}$  é uma constante a ser determinada. Sendo assim, consideremos

$$xF_3 + yG_3 + F_2 \frac{\partial V_3}{\partial x} + G_2 \frac{\partial V_3}{\partial y} = c_0x^4 + c_1x^3y + c_2x^2y^2 + c_3xy^3 + c_4y^4.$$

Tome  $L = (3c_0 + c_2 + 3c_4)$ . Daí,

$$c_0x^4 + c_1x^3y + c_2x^2y^2 + c_3xy^3 + c_4y^4 - \frac{L}{8}(x^2 + y^2)^2 \in \text{Im}(T(4)).$$

Fazendo as devidas simplificações na expressão anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{5c_0 - c_2 - 3c_4}{8} \right) x^4 + c_1x^3y + \left( \frac{-3c_0 + 3c_2 - 3c_4}{8} \right) x^2y^2 + \\ c_3xy^3 + \left( \frac{-3c_0 - c_2 + 5c_4}{8} \right) y^4. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Seja então  $V_4(x, y) = d_0x^4 + d_1x^3y + d_2x^2y^2 + d_3xy^3 + d_4y^4$ . Como

$$T_4(V_4) = (-d_1, 4d_0 - 2d_2, 3d_1 - 3d_3, 2d_2 - 4d_4, d_3)$$

e levando em conta (2.21), obtemos as seguintes expressões para os coeficientes de  $V_4$

$$\begin{aligned}d_0 &= \frac{c_1 + c_3}{4} \\d_1 &= \frac{-5c_0 - c_2 - 3c_4}{8}, \\d_2 &= \frac{c_3}{4}, \\d_3 &= \frac{-3c_0 - c_2 + 5c_4}{8}, \\d_4 &= 0.\end{aligned}$$

Logo, para

$$V_4(x, y) = \frac{c_3}{4}x^4 + \left(\frac{-5c_0 - c_2 - 3c_4}{8}\right)x^3y + \frac{c_3}{4}x^2y^2 + \left(\frac{-3c_0 - c_2 + 5c_4}{8}\right)xy^3,$$

a expressão do  $\dot{V}$  fica

$$\dot{V}(x, y) = \frac{L}{8}(x^2 + y^2)^2 + \dots$$

Temos então que, se  $L \neq 0$ , então  $L$  irá definir a estabilidade do equilíbrio na origem.

Resta agora calcularmos, explicitamente, os  $c_i$ ,  $i = 0, 2, 4$ . Então,

$$\begin{aligned}
xF_3 + yG_3 + F_2 \frac{\partial V_3}{\partial x} + G_2 \frac{\partial V_3}{\partial y} &= x^4 \mu_{1,1} \mu_{2,0} + 2x^4 \mu_{2,0} \nu_{0,2} - 2x^3 y \mu_{2,0}^2 + x^2 y^2 \mu_{0,2} \mu_{1,1} \\
&+ 2x^2 y^2 \mu_{0,2} \nu_{0,2} - x^2 y^2 \mu_{2,0} \nu_{0,2} - 2x^2 y^2 \mu_{2,0} \nu_{2,0} \\
&- x^2 y^2 \nu_{1,1} \nu_{2,0} - 2xy^3 \mu_{0,2} \mu_{2,0} - y^4 \nu_{0,2} \mu_{0,2} - 2y^4 \nu_{0,2} \mu_{2,0} \\
&- y^4 \nu_{0,2} \nu_{1,1} + x^4 \mu_{3,0} + x^3 y \mu_{2,1} + x^3 y \nu_{3,0} + x^3 y \mu_{1,1}^2 \\
&+ 2x^2 xy \mu_{1,1} \nu_{0,2} + x^2 xy \mu_{1,1} \nu_{2,0} - x^2 xy \mu_{2,0} \nu_{1,1} + x^2 y^2 \nu_{2,1} \\
&- 2x^2 y y \mu_{1,1} \mu_{2,0} + xy^3 \mu_{0,3} - xy y^2 \nu_{1,1} \mu_{0,2} - 2xy y^2 \nu_{1,1} \mu_{2,0} \\
&- x y^3 \nu_{1,1}^2 + y^4 \nu_{0,3} + xxy^2 \mu_{1,2} + xy^2 y \nu_{1,2}.
\end{aligned}$$

Colocando em evidência os termos  $x^4$ ,  $x^2 y^2$  e  $y^4$  e comparando com os  $c_i$  obtemos que

$$c_0 = \mu_{3,0} + \mu_{2,0} \mu_{1,1} + 2\mu_{2,0} \nu_{0,2},$$

$$c_2 = \mu_{0,2} \mu_{1,1} + 2\mu_{0,2} \nu_{0,2} - 2\mu_{2,0} \mu_{1,1} - 2\nu_{2,0} \mu_{2,0} + 2\nu_{0,2} \nu_{1,1} - \nu_{2,0} \nu_{1,1} + \mu_{1,2} + \nu_{2,1},$$

$$c_4 = \nu_{0,3} - 2\mu_{2,0} \nu_{0,2} - \nu_{0,2} \nu_{1,1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
L &= 3c_0 + c_2 + 3c_4, \\
&= 3\mu_{3,0} + \mu_{1,2} + \nu_{2,1} - 3\nu_{3,0} + \mu_{2,0} \mu_{1,1} + \mu_{0,2} \mu_{1,1} \\
&+ 2\mu_{0,2} \nu_{0,2} - \nu_{0,2} \nu_{1,1} - \nu_{2,0} \nu_{1,1} - 2\nu_{2,0} \mu_{2,0},
\end{aligned}$$

provando assim o teorema. □

O Teorema 2.1.14 oferece uma fórmula para calcular o primeiro coeficiente de Liapunov de um sistema do tipo (2.4). Caso ele seja nulo, prosseguimos de maneira análoga para obter uma expressão para o segundo coeficiente de Liapunov. Se ele também for nulo, prosseguimos calculando o terceiro, o quarto

e assim sucessivamente.

## 2.2 Sistemas do tipo nilpotente

O estudo descrito nesta seção pode ser encontrado em [12], [11] e [15].

A ideia desta seção é tentar encontrar um método, tal como fizemos para o caso linear, para determinar a estabilidade de um equilíbrio na origem, cuja linearização possui autovalores complexos puros, mas o sistema possui a forma (2.5).

**Definição 2.2.1.** Dizemos que dois campos vetoriais  $C^r$   $X$  e  $Y$ ,  $r \geq 1$  ou  $r = \omega$  são orbitalmente equivalentes em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio na origem se existir um difeomorfismo (difeomorfismo analítico para o caso  $\omega$ ), levando a vizinhança do 0 em uma outra vizinhança de 0, mantendo o 0 fixo e levando o retrato de fase de  $X$  no retrato de fase de  $Y$ , podendo reverter a orientação.

Note que, o ponto de equilíbrio desta definição não precisa ser a origem, basta considerar um translado linear, levando o ponto de equilíbrio até a origem.

Para o caso (2.5), não existe nenhum algoritmo que seja comparável ao método de Poincaré-Liapunov para determinar condições para um equilíbrio ser um centro. O resultado a seguir, funciona essencialmente para mostrar que podemos utilizar o algoritmo de Poincaré-Liapunov para determinar centros nilpotentes.

**Teorema 2.2.2** (Teorema do Centro Nilpotente). Suponha que a origem do sistema (2.5) é um centro. Então existem funções analíticas  $M_1$  e  $M_2$ , tais que o sistema

$$\begin{cases} x' &= y + F_1(x, y) + \epsilon M_1(x, y), \\ y' &= -\epsilon x + F_2(x, y) + \epsilon M_2(x, y), \end{cases} \quad (2.22)$$

possui um centro do tipo linear na origem para todo  $\epsilon > 0$ , onde  $M_1(x, y) = (x + f)\partial f/\partial y$  e  $M_2(x, y) = -(x + f)\partial f/\partial x - f$ . A função  $f(x, y)$  é uma função

analítica cujo desenvolvimento de Taylor inicia-se com termos quadráticos, pelo menos.

Para fazer a demonstração, precisaremos do seguinte teorema, que pode ser encontrado em [4].

**Teorema 2.2.3.** Se um sistema analítico (2.5) possui um centro na origem, então existe uma mudança de variáveis analítica tal que o novo sistema também tem a forma de (2.5) e é reversível com respeito ao difeomorfismo  $(x, y, t) \rightarrow (-x, y, -t)$ .

*Demonstração do Teorema 2.2.2.* Seja um sistema do tipo (2.5). Suponha que a origem é um equilíbrio do tipo centro e isolado. Pelo Teorema 2.2.3, este sistema é orbitalmente equivalente a um sistema tempo-reversível numa vizinhança próxima a origem. Então, existe uma mudança de variáveis analítica da forma

$$\begin{cases} x &= u + f(x, y), \\ y &= v + g(x, y), \end{cases} \quad (2.23)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções analíticas. Usando estas novas variáveis, o sistema (2.5) tem a forma

$$\begin{cases} u' &= v + \bar{F}_1(u, v), \\ v' &= \bar{F}_2(u, v), \end{cases} \quad (2.24)$$

onde  $\bar{F}_1$  e  $\bar{F}_2$  são funções analíticas, com desenvolvimento de Taylor começando com termos de grau 2 em  $u$  e  $v$ . Por [4], existe um reescalonamento do tempo  $dt = (1 + h(u, v))d\tau$ , tal que (2.24) pode ser escrito da forma

$$\begin{cases} u' &= (v + \bar{F}_1(u, v))((1 + h(u, v))) = Y_1(u, v), \\ v' &= (\bar{F}_2(u, v))((1 + h(u, v))) = Y_2(u, v), \end{cases} \quad (2.25)$$

e este sistema é invariante pela simetria  $\varphi(u, v) = (-u, v)$ .

Agora, considere a seguinte perturbação de (2.25)

$$\begin{cases} u' &= (v + \bar{F}_1(u, v))((1 + h(u, v))), \\ v' &= -\epsilon u + (\bar{F}_2(u, v))((1 + h(u, v))), \end{cases} \quad (2.26)$$

com  $\epsilon > 0$ .

Afirmação, a origem é um centro no sistema (2.26). De fato, seja a simetria  $\varphi(u, v) = (-u, v)$ . Mostremos que, o sistema é invariante pela simetria. Calculemos o Jacobiano de  $\varphi$  em  $(u, v)$ ,

$$D\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X(u, v) = (X_1(u, v), X_2(u, v)),$$

onde

$$X_1(u, v) = (v + \bar{F}_1(u, v))((1 + h(u, v)))$$

e

$$X_2(u, v) = -\epsilon u + (\bar{F}_2(u, v))((1 + h(u, v))).$$

Daí,

$$D\varphi(u, v).X(u, v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1(u, v) \\ X_2(u, v) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

e

$$-X(\varphi(u, v)) = -(v + \bar{F}_1(-u, v)(1 + h(-u, v)), -\epsilon(-u) + (\bar{F}_2(-u, v))((1 + h(-u, v)))). \quad (2.28)$$

Como o sistema (2.25) é invariante por  $\varphi$ , vale que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1(u, v) \\ Y_2(u, v) \end{pmatrix} = -(Y_1(-u, v), Y_2(-u, v)),$$

ou seja,  $Y_1(u, v) = Y_1(-u, v)$  e  $Y_2(u, v) = -Y_2(-u, v)$ . Logo, comparando os termos em (2.27) e (2.28), resulta que

$$X_1(u, v) = X_1(-u, v) \text{ e } X_2(u, v) = -X_2(-u, v).$$

Como  $X_1(u, v) = Y_1(u, v)$  e  $X_2(u, v) = -\epsilon u + Y_2(u, v)$ , segue que (2.27) e (2.28)

são iguais. Assim, (2.26) é invariante por  $\varphi$ .

Uma vez que, os autovalores da parte linear são  $\lambda = \pm i$ , pela monodromia, e (2.26) é invariante por  $\varphi$ , segue que a origem é um centro para todo  $\epsilon > 0$ .

Retornando as variáveis antigas  $x$  e  $y$ , (2.26) fica igual à

$$\begin{cases} x' &= y + F_1(x, y) + \epsilon M_1(x, y), \\ y' &= -\epsilon x + F_2(x, y) + \epsilon M_2(x, y), \end{cases} \quad (2.29)$$

onde  $\epsilon > 0$ ,

$$M_1(x, y) = (x + f) \frac{\partial f}{\partial y}$$

e

$$M_2(x, y) = -(x + f) \frac{\partial f}{\partial x} - f.$$

Como (2.26) é um centro do tipo linear, para todo  $\epsilon > 0$  e as mudanças de variáveis eram analíticas, segue que o mesmo vale para (2.29), provando o teorema.

□

O Teorema do Centro Nilpotente nos diz, a grosso modo, que um centro analítico nilpotente é sempre limite de centros analíticos lineares.

**Teorema 2.2.4.** Suponha que a origem de um sistema diferencial analítico (2.5) é monodrômico e que este sistema é limite de centros do tipo linear da forma (2.22). Suponhamos ainda que, não existe ponto de equilíbrio de (2.22) tendendo a origem quando  $\epsilon$  tende a zero. Então, o sistema (2.5) possui um centro na origem.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [11].

É importante notar no teorema anterior que, se a origem da família de sistemas do tipo (2.22) não é um centro para todos os valores do seu parâmetro, então não é possível aplicar o método de Liapunov, dependendo apenas dos coeficientes da função  $f(x, y)$ .



Considere então um problema, no qual queremos determinar condições necessárias para termos um centro nilpotente em um sistema nilpotente analítico. Primeiramente precisamos garantir a monodromia do sistema analítico, pois caso contrário nem teríamos um problema foco-centro. O próximo teorema vai fornecer condições necessárias e suficientes para a monodromia de um equilíbrio de um sistema analítico do tipo (2.5).

**Teorema 2.2.5** (Andreev). Seja  $X = (y + F_1(x, y), F_2(x, y))$  um campo vetorial do tipo (2.5). Seja  $y = \phi(x)$  uma solução da equação  $y + F_1(x, y) = 0$ , contendo a origem. Assumindo que a expansão da função  $F_2(x, \phi(x))$  é da forma  $\xi(x) = \alpha_k x^k + O(x^{k+1})$  e  $\Delta(x) = \operatorname{div} X(x, \phi(x)) = \beta_n x^n + O(x^{n+1})$ , onde  $\alpha_k \neq 0$ ,  $2 \leq k$  e  $1 \leq n$ . Então, a origem é um foco ou centro se, e somente se,  $k$  é ímpar,  $\alpha_k < 0$  e ocorre um dos casos abaixo:

- $k = 2n + 1$  e  $\beta_n^2 + 4\alpha_k(n + 1) < 0$ ;
- $k < 2n + 1$ ;
- $\Delta(x) \equiv 0$ .

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [1].

Para dar uma ideia do funcionamento deste algoritmo, faremos uma aplicação dele no próximo capítulo.

# Capítulo 3

## Aplicações para centros nilpotentes

Os resultados descritos neste capítulo foram desenvolvidos por mim e o meu orientador, utilizando os resultados desenvolvidos no Capítulo 2.

**Teorema 3.0.6.** Seja um campo vetorial

$$X(x, y) = (y + xH(x, y), \alpha x^3 + yH(x, y)),$$

onde  $\alpha < 0$  e  $H(x, y)$  é um polinômio nas variáveis  $x$  e  $y$ . Então a origem é um equilíbrio monodrômico do campo  $X$  se, e somente se,  $H(x, y)$  possuir polinômios de grau  $\geq 2$ .

*Demonstração.* Seja  $X(x, y) = (y + F_1(x, y), F_2(x, y))$ , onde  $F_1(x, y) = xH(x, y)$ ,  $F_2(x, y) = \alpha x^3 + yH(x, y)$  e  $H(x, y) = \sum_{i=r}^l H_i(x, y)$ , onde os  $H_i$  são polinômios homogêneos de grau  $i$  e  $r > 1$ . Considere  $G(x, y) = y + F_1(x, y)$ . Calculando a derivada parcial de  $G(x, y)$  em relação a  $y$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = 1 + x \left( \sum_{i=r}^l \frac{\partial H_i(x, y)}{\partial y} \right). \quad (3.1)$$

Observe que,  $G(0, 0) = 0$  e  $\partial_y G(0, 0) = 1, \forall r > 1$ . Logo, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança de  $(0, 0)$  tal que  $y = \phi(x)$ , para uma

única função  $\phi$  nesta vizinhança e  $G(x, \phi(x)) = 0$ , com  $\phi(x)$  passando pela origem.

Como  $G$  é analítica,  $\phi(x)$  também o é. Consideremos daqui para frente a expansão de Taylor de  $\phi(x)$  como sendo o próprio  $\phi(x)$ , de modo a simplificar a escrita. Vale ressaltar que a expansão de  $\phi(x)$  começa pelo menos com termos lineares.

A divergência do campo  $X$  é

$$\operatorname{div} X(x, y) = 2H(x, y) + x \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}.$$

Usando que  $y = \phi(x)$ ,  $\phi(x) = c_1x + c_2x^2 + \dots = x(c_1 + c_2x + \dots) = x.z$  e

$$H(x, \phi(x)) = \sum_{i=r}^l H_i(x, xz) = \sum_{i=r}^l x^i H_i(1, z) = x^r \left( \sum_{i=r+1}^l x^{i-1} H_i(1, z) \right),$$

temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X(x, \phi(x)) &= 2H(x, \phi(x)) + x \frac{\partial H(x, \phi(x))}{\partial x} + \phi(x) \frac{\partial H(x, \phi(x))}{\partial y}, \\ & \tag{3.2} \end{aligned}$$

$$= x^r \left( \bar{H} + \frac{\partial \bar{H}(1, z)}{\partial x} + z^r \frac{\partial \bar{H}(1, z)}{\partial y} \right),$$

onde  $\bar{H} = \left( \sum_{i=r+1}^l x^{i-1} H_i(1, z) \right)$ .

Comparando  $F_2$  com o Teorema de Andreev, temos que  $F_2$  precisa ter a forma  $\xi(x) = \alpha_k x^k + O(x^k)$ , com  $k$  ímpar. Como  $k \neq 1$ , uma vez que estamos supondo que a parte linear é nilpotente, segue que o próximo valor adequado para  $k$  é 3. Logo para garantir que a expansão de  $F_2$  tenha a forma  $\xi(x) = \alpha x^3 + O(x^4)$ , precisamos que  $r \geq 2$ . Como  $\alpha < 0$ ,  $k < 2r + 1$  e as outras hipóteses se verificam, pelo Teorema de Andreev a origem é um ponto monodrômico se, e somente se,  $r \geq 2$ .  $\square$

**Teorema 3.0.7.** Seja um campo vetorial

$$X(x, y) = (y + x(H_2(x, y) + H_3(x, y)), \alpha x^3 + y(H_2(x, y) + H_3(x, y))), \quad (3.3)$$

onde  $\alpha < 0$ ,

$$H_2(x, y) = b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2$$

e

$$H_3(x, y) = b_{3,0}x^3 + b_{2,1}x^2y + b_{1,2}xy^2 + b_{0,3}y^3$$

são polinômios homogêneos de grau 2 e 3, respectivamente. Então a origem é um centro se, e somente se,  $b_{2,0} = b_{0,2} = b_{3,0} = b_{1,2} = 0$  e  $b_{0,3} = -5b_{2,1}/3$ .

*Demonstração.* Por conveniência de escrita, considere  $H = H_2(x, y) + H_3(x, y)$ . Pelo Teorema 3.0.6, a origem é um ponto monodrômico. Considere então a seguinte perturbação do sistema,

$$X_\epsilon(x, y) = (y + xH + \epsilon M_1(x, y), -\epsilon x + \alpha x^3 + yH + \epsilon M_2(x, y)),$$

onde  $M_1(x, y) = -(x + f)\partial f/\partial y$ ,  $M_2(x, y) = -(x + f)\partial f/\partial x - f$ , onde  $f$  é uma função analítica com desenvolvimento de Taylor da forma

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}x^i y^j,$$

tal como no Teorema 2.2.2. A ideia agora é, calcular alguns coeficientes de Liapunov, de modo a tentar detectar algumas condições suficientes para a origem ser um centro. Utilizando o algoritmo para o método algébrico de Liapunov no software Maple<sup>©</sup>, calculamos os três primeiros coeficientes de Liapunov, que chamaremos aqui de  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ ,

$$L_1 = \frac{(6a_{0,2}a_{1,1} - 3a_{0,3})\epsilon^3 + (-6a_{0,2}a_{1,1} + 12a_{1,1}a_{2,0} + 3b_{0,2})\epsilon^2}{3\epsilon^2 + 2\epsilon + 3} \\ \frac{(-12a_{1,1}a_{2,0} + 3a_{2,1} + b_{0,2} + b_{2,0})\epsilon + 3b_{2,0}}{3\epsilon^2 + 2\epsilon + 3}.$$

Colocando o  $\epsilon$  em evidência, obtemos que, para  $L_1 = 0$  é necessário que  $b_{0,2} = 0$  e  $b_{2,0} = 0$ . Utilizando esta informação e fazendo algumas escolhas para os termos de  $f$  expansão, o segundo coeficiente é dado por:

$$\begin{aligned}
L_2 = & 30 \epsilon^6 a_{0,2} a_{1,1}^3 + 30 \epsilon^6 a_{0,2} a_{1,1} a_{1,2} - 10 \epsilon^5 a_{0,2} a_{1,1}^3 - 30 \epsilon^6 a_{0,2} a_{1,3} \\
& - 30 \epsilon^6 a_{0,4} a_{1,1} - 10 \epsilon^5 a_{0,2} a_{1,1} a_{1,2} + 108 \epsilon^5 a_{0,2} a_{1,1} a_{3,0} - 9 \epsilon^5 a_{0,2} a_{1,1} b_{1,1} + \\
& 10 \epsilon^4 a_{0,2} a_{1,1}^3 + 10 \epsilon^5 a_{0,2} a_{1,3} - 36 \epsilon^5 a_{0,2} a_{3,1} + 10 \epsilon^5 a_{0,4} a_{1,1} \\
& - 36 \epsilon^5 a_{1,1} a_{2,2} + 45 \epsilon^5 a_{1,1} b_{0,3} + 10 \epsilon^4 a_{0,2} a_{1,1} a_{1,2} - 36 \epsilon^4 a_{0,2} a_{1,1} a_{3,0} + \\
& 3 \epsilon^4 a_{0,2} a_{1,1} b_{1,1} - 30 \epsilon^3 a_{0,2} a_{1,1}^3 + 90 \epsilon^4 a_{0,2} a_{1,1} - 10 \epsilon^4 a_{0,2} a_{1,3} + \\
& 12 \epsilon^4 a_{0,2} a_{3,1} + 15 \epsilon^4 a_{0,2} b_{1,2} - 30 \epsilon^4 a_{0,2} b_{3,0} - 10 \epsilon^4 a_{0,4} a_{1,1} + 12 \epsilon^4 a_{1,1} a_{2,2} \\
& - 3 \epsilon^3 a_{0,2} a_{1,1} b_{1,1} - 30 \epsilon^3 a_{0,2} a_{1,1} + 30 \epsilon^3 a_{0,2} a_{1,3} - 12 \epsilon^3 a_{0,2} a_{3,1} + \\
& 10 \epsilon^3 a_{0,2} b_{1,2} + 25 \epsilon^3 a_{0,2} b_{3,0} + 30 \epsilon^3 a_{0,4} a_{1,1} - 12 \epsilon^3 a_{1,1} a_{2,2} + 30 \epsilon^3 a_{1,1} a_{4,0} + \\
& 25 \epsilon^3 a_{1,1} b_{0,3} + 10 \epsilon^3 a_{1,1} b_{2,1} - 108 \epsilon^2 a_{0,2} a_{1,1} a_{3,0} + 9 \epsilon^2 a_{0,2} a_{1,1} b_{1,1} + \\
& 30 \epsilon^2 a_{0,2} a_{1,1} + 36 \epsilon^2 a_{0,2} a_{3,1} + 15 \epsilon^2 a_{0,2} b_{1,2} + 36 \epsilon^2 a_{1,1} a_{2,2} - 30 \epsilon^2 a_{1,1} a_{4,0} \\
& - 30 \epsilon^2 a_{1,1} b_{0,3} + 15 \epsilon^2 a_{1,1} b_{2,1} - 90 a_{0,2} \epsilon a_{1,1} + 45 \epsilon a_{0,2} b_{3,0} + 90 \epsilon a_{1,1} a_{4,0}.
\end{aligned}$$

Colocando  $\epsilon$  em evidência, para  $L_2 = 0$ , não é necessária nenhuma condição extra do campo. Fazendo as simplificações possíveis, que a perturbação permite, o terceiro coeficiente tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}
L_3 = & 54 \epsilon^2 a_{2,2} a_{3,1} + 6 \epsilon^2 a_{2,2} b_{1,2} - 85 \epsilon^2 a_{3,1} b_{0,3} - 14 \epsilon^2 b_{0,3} b_{1,2} \\
& - 54 \epsilon a_{2,2} a_{3,1} - 15 \epsilon a_{2,2} b_{1,2} + 168 a_{4,0} a_{3,1} \epsilon + 76 \epsilon a_{3,1} b_{0,3} \\
& - 29 \epsilon a_{3,1} b_{2,1} + 6 \epsilon a_{4,0} b_{1,2} + 14 \epsilon b_{0,3} b_{1,2} - 2 \epsilon b_{1,2} b_{2,1} \\
& - 168 a_{3,1} a_{4,0} + 14 a_{3,1} b_{2,1} - 21 a_{4,0} b_{1,2} + 2 b_{1,2} b_{2,1} \epsilon.
\end{aligned}$$

Com o  $\epsilon$  em evidência, obtemos que para  $L_3 = 0$  é necessário que  $b_{0,3} = -5/3 b_{2,1}$  e  $b_{3,0} = b_{1,2} = 0$ .

Com estas condições em mãos, vamos reescrever o campo (3.3)

$$\begin{cases} x' = y + x(b_{1,1}xy + b_{2,1}x^2y - 5/3b_{2,1}y^3), \\ y' = \alpha x^3 + y(b_{1,1}xy + b_{2,1}x^2y - 5/3b_{2,1}y^3). \end{cases} \quad (3.4)$$

Chamaremos

$$G_1(x, y) = y + x(b_{1,1}xy + b_{2,1}x^2y - 5/3b_{2,1}y^3)$$

e

$$G_2(x, y) = \alpha x^3 + y(b_{1,1}xy + b_{2,1}x^2y - 5/3b_{2,1}y^3).$$

Uma vez que a origem é um equilíbrio monodrômico, se mostrarmos que o sistema é reversível, então a origem será um centro.

Seja então  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função definida em uma vizinhança  $U$  da origem, dada por  $\varphi(x, y) = (x, -y)$ . É fácil ver que,  $\varphi$  é uma involução e um difeomorfismo. Verifiquemos então se o sistema (3.4) é reversível com respeito a  $\varphi$ .

Observe que,

$$D\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$D\varphi(x, y) \cdot X(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (G_1(x, y), G_2(x, y)).$$

Por outro lado,

$$X(\varphi(x, y)) = X(x, -y) = (G_1(x, -y), G_2(x, -y)),$$

onde

$$G_1(x, -y) = -y + x(b_{1,1}x(-y) + b_{2,1}x^2(-y) - 5/3b_{2,1}(-y)^3)$$

e

$$G_2(x, -y) = \alpha x^3 + (-y)(b_{1,1}x(-y) + b_{2,1}x^2(-y) - 5/3b_{2,1}(-y)^3).$$

Temos então que,  $D\varphi(x, y).X(x, y) = -X(\varphi(x, y))$ , provando que o campo é reversível com respeito a  $\varphi$ . Portanto, a origem do campo é um centro se, e somente se,  $b_{2,0} = b_{0,2} = b_{3,0} = b_{1,2} = 0$  e  $b_{0,3} = -5/3b_{2,1}$ .  $\square$

# Capítulo 4

## Integrabilidade de sistemas diferenciais

O estudo descrito neste capítulo pode ser encontrado em [7], [19], [18], [5] e [10].

A ideia deste capítulo é estudar o problema foco-centro para o caso nilpotente, através de integrais primeiras. Veremos alguns resultados que garantem a existência de integrais primeiras para certos tipos de sistemas nilpotentes e quando que estes são suficientes para garantir a estabilidade do equilíbrio.

A argumentação abaixo pode ser encontrada em [5] e servirá para demonstrarmos o Teorema do Centro Linear.

Seja um sistema

$$X' = AX + \Upsilon(X), \quad (4.1)$$

onde  $X \in \mathbb{C}^n$ ,  $A$  é uma matriz constante  $n \times n$  e as coordenadas  $X_k$  de  $\Upsilon$  são séries de potências convergentes sem termos lineares.

Suponha que (4.1) possua um equilíbrio na origem cujos autovalores da linearização são  $k_i = \pm i\omega$ ,  $i=1,2$ , e os outros  $k_3, k_4, \dots, k_n$  possuem parte real negativa.

Através de uma mudança de variável, parecida com a da Proposição 2.0.24, o sistema (4.1) se transforma em



$$\begin{cases} x'_1 &= i\omega x_1 + X_1(x_1, x_2, \tilde{x}), \\ x'_2 &= -i\omega x_2 + X_2(x_1, x_2, \tilde{x}), \\ \tilde{x}' &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{X}(x_1, x_2). \end{cases} \quad (4.2)$$

Por causa da mudança e do fato de que as componentes são reais, segue que  $x_2 = \bar{x}_1$  e  $X_2(x_1, x_2, \tilde{x}) = \bar{X}_1(x_1, x_2, \tilde{x})$ , onde a barra simboliza o complexo conjugado. De acordo com um teorema, que pode ser encontrado em [5] na página 60, existe uma mudança de variável

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 + h_1(y_1, y_2, \tilde{y}), \\ x_2 &= y_2 + h_2(y_1, y_2, \tilde{y}), \\ \tilde{x} &= \tilde{y} + \tilde{h}(y_1, y_2), \end{cases} \quad (4.3)$$

transformando (4.2) em

$$\begin{cases} y'_1 &= iy_1 + y_1 P_1(y_1 y_2), \\ y'_2 &= -iy_2 + y_2 P_2(y_1 y_2), \\ \tilde{y}' &= \tilde{A}\tilde{y} + \tilde{Y}(y_1, y_2, \tilde{y}), \end{cases} \quad (4.4)$$

com  $\tilde{Y}(y_1, y_2, 0) = 0$ , onde  $P_1$  e  $P_2$  são séries formais de potências de  $y_1 y_2$ , sem termos constantes.

Existem dois tipos possíveis para a função  $P_1$ :

1. Tipo 1, quando

$$P_1(y_1 y_2) = G(y_1 y_2) + iH(y_1 y_2),$$

onde  $G(y_1 y_2) = g(y_1 y_2)^n + \dots$ , com  $g \neq 0$ ,  $H(y_1 y_2)$  é uma série de potências com coeficientes reais;

2. Tipo 2, quando

$$P_1(y_1 y_2) = iH(y_1 y_2).$$

Analisemos primeiramente o Tipo 1.

Considere a expansão dos termos na mudança (4.3). Escolhendo um  $N$

grande, podemos truncar a expansão no  $N$ -ésimo termo de modo que o sistema (4.4) pode ser escrito como

$$\begin{cases} y_1' &= iy_1(1 + \bar{H}_1^{2N}(y_1y_2)) + gy_1(y_1y_2)^N + Y_1^*, \\ y_2' &= -iy_2(1 + \bar{H}_2^{2N}(y_1y_2)) + gy_2(y_1y_2)^N + Y_2^*, \\ \tilde{y}' &= \tilde{A}\tilde{y} + \tilde{Y}^{2N+2} + \tilde{Y}^*, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde  $\tilde{Y}(\tilde{y}, 0) = 0$  e as expansões de  $Y_1^*$ ,  $Y_2^*$  e  $\tilde{Y}^*$  começam com termos de ordem maiores que  $2N + 2$ .

**Lema 4.0.8.** Para o Tipo 1, se  $g < 0$ , então a origem de (4.1) é assintoticamente estável e se  $g > 0$ , então a origem é instável.

*Demonstração.* Como a mudança (4.4) é analítica basta verificar as afirmações para o sistema (4.5).

Considere a função de Liapunov

$$U(y_1, y_2, \tilde{y}) = y_1y_2 + W(\tilde{y}),$$

onde  $W(\tilde{y})$  é uma forma quadrática satisfazendo

$$\frac{\partial W}{\partial \tilde{y}} \tilde{A}\tilde{y} = g(y_3^2 + \dots + y_n^2). \quad (4.6)$$

Como  $\tilde{A}$  possui os autovalores com partes reais negativas e a expressão do lado direito de (4.6) é uma forma quadrática, pelo Lema na página 57 de [5],  $W(\tilde{y})$  tem um sinal definido que depende de  $g$ .

Daí, calculando a derivada de  $U$  na direção de (4.5) e fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$\dot{U} = g(2(y_1y_2)^{N+1} + y_3^2 + \dots + y_n^2) + y_1y_2^* + y_2y_1^* + \frac{\partial W}{\partial \tilde{y}}(\tilde{Y}^{2N+2} + \tilde{Y}^*).$$

Como  $y_2 = \bar{y}_1$ , a soma nos parênteses irá definir o sinal de  $g$ .

Pelas propriedades de  $Y_1^*$ ,  $Y_2^*$  e  $\tilde{Y}^*$ , o mesmo ocorre com  $\dot{U}$ , em uma pequena

vizinhança da origem. Logo, se  $g < 0$ ,  $\dot{U}$  e a origem é assintoticamente estável pelo Teorema (2.1.8) e se  $g > 0$ , a origem é instável.  $\square$

Analisemos agora o Tipo 2.

Considere novamente a mudança (4.3). Sabendo que,  $P_1 = iH(y_1y_2)$  e  $P_2 = -iH(y_1y_2)$ . Então, (4.4) se escreve como

$$\begin{cases} y_1' &= iy_1(1 + H(y_1y_2)), \\ y_2' &= -iy_2(1 + H(y_1y_2)), \\ \tilde{y}' &= \tilde{A}'\tilde{y} + \tilde{Y}(y_1, y_2, \tilde{y}), \end{cases} \quad (4.7)$$

Pelo teorema da página 62 em [5], segue que as séries  $h_1$ ,  $h_2$  e  $\tilde{h}$  em (4.3) são convergentes para  $|Y| < M$ , para algum  $M > 0$ .

É fácil ver que, o produto  $y_1y_2$  é uma integral primeira das duas primeiras equações de (4.7). Então,  $V = y_1y_2$  é uma função de Liapunov. Em resumo, provamos o seguinte lema.

**Lema 4.0.9.** Para o Tipo 2, a origem de (4.1) é estável.

Vamos agora descrever em detalhes a geometria das trajetórias de (4.7), para  $|Y| < M$ . Observe que, o espaço real  $\text{Re } y_1$  e  $\text{Im } y_1, y_3, \dots, y_n$  é estratificado pelos cilindros invariantes

$$\Gamma : (\text{Re } y_1)^2 + (\text{Im } y_1)^2 = c,$$

com  $|y| < M$  e  $c \in \mathbb{R}$  tal que,  $|c| < M$ , cuja intersecção com o hiperplano  $\tilde{y} = 0$ , resulta em uma família de curvas  $\gamma$  fechadas, que na verdade são círculos.

As soluções pertencentes a  $\Gamma$  tendem a soluções periódicas, quando  $t \rightarrow +\infty$ . Como a solução geral das duas primeiras equações de (4.7) é da forma

$$y_1 = c_1 e^{i(1+H)t} \quad \text{e} \quad y_2 = c_2 e^{-i(1+H)t},$$

segue então que, o período destas soluções é dado por  $2\pi(1+H)^{-1}$ , com  $\sqrt{c}$  sendo o raio das circunferências.

A transformação  $x \mapsto (\operatorname{Re} y_1, \operatorname{Im} y_1, \tilde{y})$  é analítica, real e com o Jacobiano não nulo. Então, para uma vizinhança suficientemente pequena, a origem é estratificada por superfícies analíticas invariantes  $(n-1)$ -dimensional cuja intersecção com superfícies analíticas invariantes 2-dimensional passando pela origem, resulta em órbitas fechadas.

Logo, esta intersecção é coberta com trajetórias fechadas, provando que a origem é um centro.

Agora, considere a integral  $y_1 y_2 = c$  de (4.7). Pelo Teorema da Função Implícita, a transformação (4.3) é invertível e a sua inversa é dada por

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + g_1(x_1, x_2, \tilde{x}), \\ y_2 = x_2 + g_2(x_1, x_2, \tilde{x}), \\ \tilde{y} = \tilde{x} + \tilde{g}(x_1, x_2), \end{cases} \quad (4.8)$$

onde  $g_1, g_2, \tilde{g}$  são séries de potências convergentes.

Então,

$$H(x_1, x_2, \tilde{x}) = x_1 x_2 + g(x_1, x_2, \tilde{x}),$$

onde

$$g = x_1 g_2(x_1, x_2, \tilde{x}) + x_2 g_1(x_1, x_2, \tilde{x}) + g_1(x_1, x_2, \tilde{x}) g_2(x_1, x_2, \tilde{x})$$

é uma integral primeira de (4.2) e, portanto, o sistema é do Tipo 2. Em resumo, temos o teorema.

**Teorema 4.0.10.** O sistema (4.2) é do Tipo 2 se, e somente se, o sistema possui uma integral primeira.

Se  $n = 2$ , as conclusões que podemos chegar é que, se  $H$  for do Tipo 1, então a origem será um foco atrator ou repulsor, dependendo do sinal de  $g$ , e se  $h$  for do Tipo 2, a origem será um centro se, e somente se, possuir uma integral primeira na origem, ou seja, provamos o seguinte teorema.

**Teorema 4.0.11** (Teorema do Centro Linear). Um sistema analítico do tipo (2.4) possui um centro na origem se, e somente se, existe uma integral primeira analítica local da forma  $H(x, y) = x^2 + y^2 + F(x, y)$ , definida em uma vizinhança da origem, onde  $F$  é uma função analítica com desenvolvimento de Taylor com termos pelo menos quadráticos.

Lembremos que, o Teorema 2.2.2 nos diz que um centro nilpotente pode ser aproximado por uma família a 1 parâmetro de centros lineares. Então, pelo Teorema 4.0.11, para cada  $\epsilon > 0$  teremos uma integral primeira analítica  $H_\epsilon(x, y)$ . Uma pergunta razoável é a seguinte, será que um centro nilpotente sempre possuirá uma integral primeira analítica definida numa vizinhança da origem?

A resposta para esta pergunta virá ao longo do capítulo.

A primeira coisa importante é garantir a existência de uma integral primeira para sistemas diferenciais. O estudo abaixo pode ser encontrado em [18].

**Definição 4.0.12.** Seja um sistema do tipo (1.1). Definimos um sistema ortogonal à (1.1) como sendo  $\mathcal{X}^\perp(x, y) = (-Q(x, y), P(x, y))$ .

**Observação:**

1. Os pontos críticos de  $\mathcal{X}^\perp$  são os mesmos de  $\mathcal{X}$ .
2. Se  $X_0$  é um ponto regular de  $\mathcal{X}$ , então o par ordenado  $(\mathcal{X}(x_0), \mathcal{X}^\perp(x_0))$  formam uma base ortogonal, positivamente orientada de  $\mathbb{R}^2$ .
3.  $\mathcal{X}^\perp$  possui a mesma regularidade que o campo  $\mathcal{X}$ .

Vamos definir algumas notações que serão utilizadas quando convenientes. Denotaremos por  $\delta$  uma órbita de  $\mathcal{X}$  e  $\gamma$  uma órbita de  $\mathcal{X}^\perp$ . Quando  $\delta$  for uma órbita periódica, denotaremos por  $\Delta$  o conjunto compacto com bordo  $\delta$ . Denotaremos também por  $\alpha(\gamma)$  o conjunto  $\alpha$ -limite de  $\gamma$  e por  $\omega(\gamma)$  o conjunto  $\omega$ -limite de  $\gamma$ .

**Proposição 4.0.13.** Se  $\delta$  é uma órbita periódica orientada no sentido anti-horário (horário), então o compacto  $\Delta$  é positivamente (negativamente) invariante por  $\mathcal{X}^\perp$ .

**Proposição 4.0.14.** A intersecção de qualquer órbita periódica de  $\mathcal{X}^\perp$  com qualquer órbita periódica de  $\mathcal{X}$  contém no máximo um ponto.

*Demonstração.* Se  $\delta$  é uma órbita periódica orientada no sentido anti-horário, então uma órbita periódica  $\gamma$  de  $\mathcal{X}^\perp$  interceptando  $\delta$  deve entrar em  $\Delta$ . Se existisse um outro ponto nesta intersecção, então, por causa da invariância positiva de  $\Delta$ ,  $\delta$  e  $\gamma$  devem ser tangentes em algum ponto, o que contraria a ortogonalidade dos campos.  $\square$

**Definição 4.0.15.** Suponha que a origem seja um centro de (1.1). Seja  $\delta$  uma órbita periódica não trivial de  $\mathcal{X}$  ao redor da origem, de modo que  $\Delta$  satisfaz

$$\forall \delta \in \Delta, \delta \text{ é uma órbita periódica ao redor da origem.} \quad (4.9)$$

Definimos

$$N_0 = \text{int}(\Delta),$$

com  $\Delta$  satisfazendo (4.9).

**Teorema 4.0.16.** Seja a origem  $O$ , um equilíbrio isolado de um sistema  $X(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$  de classe  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ . Então,  $O$  é um centro se, e somente se, existe uma integral primeira  $H$  de classe  $C^k$  num aberto sem a origem, com um mínimo isolado na origem. Se  $O$  é um centro,  $H$  está definido sobre todo o  $N_0$ .

*Demonstração.* Assumindo que  $O$  é um centro. A prova será conduzida em 6 etapas.

Sejam os sistemas

$$X(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

e

$$X^\perp(x, y) = (-F_2(x, y), F_1(x, y)).$$

Seja também  $\Delta$  um compacto com bordo  $\delta$ , que é uma órbita fechada com a origem em seu interior, e  $N_0 = \text{int}(\Delta)$ .

**Afirmção 1:** Não existem órbitas periódicas ou homoclínicas de  $X^\perp$  interceptando  $N_0$ .

De fato, suponha que uma órbita fechada  $\gamma$  de  $X^\perp$  intercepte  $N_0$ . Então,  $\gamma$  irá cruzar transversalmente alguma órbita fechada de  $X$  em  $N_0$ . Mas, sabemos que, se duas órbitas fechadas se interceptam transversalmente, então elas possuem pelo menos dois pontos em comum, o que contraria a Proposição 4.0.14. Análogo, para uma órbita homoclínica.

**Afirmção 2:** Qualquer órbita de  $X^\perp$ , interceptando  $N_0$  tende a  $O$ , quando  $t \rightarrow \infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ .

Imediato da Proposição 4.0.13 e do Teorema de Poincaré - Bendixson.

**Afirmção 3:** Qualquer órbita  $\gamma$  de  $X^\perp$  interceptando  $N_0$ , intercepta todas as órbitas periódicas de  $X$  em  $N_0$ .

De fato, sem perda de generalidade, suponha que  $\gamma(t) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Se existir uma órbita periódica  $\delta_1$  em  $N_0$  tal que  $\delta_1 \cap \gamma = \emptyset$ , então  $\gamma$  estará inteiramente contido no compacto  $\Delta_{\delta_1}$  com bordo  $\delta_1$  ou em  $\mathbb{R}^2 - \Delta_{\delta_1}$ .

Se  $\gamma \subset \Delta_{\delta_1}$ , como não há outros equilíbrios em  $\Delta_{\delta_1}$ , diferente de  $O$ , o  $\alpha$ -limite de  $\gamma$  será uma órbitas periódicas de  $X$  ou uma órbita homoclínica, contradizendo a **Afirmção 1**.

Se  $\gamma \subset \mathbb{R}^2 - \Delta_{\delta_1}$ , então  $\gamma(t)$  não tende à  $0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , o que também é uma contradição.

**Afirmção 4:** Existe uma integral primeira  $H$ .

Seja  $\gamma(t)$  uma órbita de  $X^\perp$  parametrizada interceptando  $N_0$ . Para cada  $x \in N_0$ , seja  $\delta_x$  o ciclo passando por  $x$ .

Defina  $\beta : N_0 - \{O\} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função que associa, para cada  $x \in N_0 - \{O\}$ , o valor  $t$  do parâmetro, onde  $\gamma$  intercepta  $\delta_x$ , isto é,  $\beta(x) = t$ , quando  $\gamma(t) \in \delta_x$ .

Pelas afirmações anteriores, é fácil ver que  $\beta$  está bem definida.

Se  $\gamma(t) \rightarrow O$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , defina então

$$H : N_0 \longrightarrow \mathbb{R},$$

como sendo  $H(x) = e^{-\beta(x)} = e^{-t}$ , se  $x \neq O$  e  $H(O) = 0$ .

Se  $\gamma(t) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow -\infty$ , a definição é análoga. A função  $H$  que definimos é constante ao longo das trajetórias e possui um mínimo isolado em  $O$ . Vamos assumir para as outras afirmações que,  $\gamma(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Afirmção 5:**  $H$  é contínua em  $O$ .

Com efeito, para cada  $\epsilon > 0$ , seja  $\delta_\epsilon$  o ciclo correspondente a  $t = -\ln \epsilon$ . Então para cada  $x \in \text{int}(\Delta_\epsilon)$ ,  $\beta(x) > t$  e  $H(x) = e^{-\beta(x)} < \epsilon$ .

**Afirmção 6:**  $H$  é de classe  $C^k$  fora da origem.

Seja  $\psi(t, x)$  a solução de  $X^\perp$  passando por  $x$  em  $t = 0$  e  $\varphi(s, x)$  a solução de  $X$  nas mesmas condições. Tome  $x_0$  tal que,  $\psi(t, x_0) = \gamma(t)$ .

Se a função  $\alpha : (s, t) \longrightarrow \varphi(s, \psi(t, x_0))$  possui uma inversa local  $C^k$ , então podemos escrever

$$H(x) = e^{-\pi_t \circ \alpha^{-1}},$$

onde  $\pi_t(s, t) = t$  e  $H(x)$  é de classe  $C^k$  fora da origem.

Como  $\varphi(s, \cdot)$  é um  $C^k$ -difeomorfismo para cada  $s$ , é suficiente mostrar que a inversibilidade local de  $\alpha$  na curva  $\gamma$ , isto é, para  $s = 0$ . Calculando a matriz Jacobiana

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi(s, \psi(t, x_0))}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} X^\perp(\psi(t, x_0)) \end{aligned}$$

O termo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t}$$



se anula uma vez que o campo não depende de  $s$ . Daí,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(-F_2(\psi(t, x_0)), F_3(\psi(t, x_0))),$$

onde  $\partial_{x_2} \varphi$  é uma matriz  $2 \times 2$ . Como a matriz  $[\partial_{x_2} \varphi]$  é igual a matriz identidade quando  $s = 0$ , veja [21], então

$$\left| \frac{\partial(\alpha)}{\partial(t)} \right| (0, t) = (f_1^2 + f_2^2)(\gamma(t)) \neq 0$$

e  $\alpha$  possui uma inversa suave em uma vizinhança de  $(0, t)$ , provando o resultado. A recíproca é facilmente verificada.

Os dois próximos lemas podem ser encontrados em [13] página 177 e serão úteis na demonstração.

**Lema 4.0.17.** Seja um sistema (1.1) com um equilíbrio na origem. Suponha que  $H$  é uma integral primeira de (1.1) em uma vizinhança limitada  $D$  da origem. Se  $H(0) = 0$  e  $H(x) > 0$  para  $x \neq 0$  em  $D$ , então  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio estável.

*Demonstração.* Se  $H(0) = 0$ ,  $H(x) > 0$  para  $x \neq 0 \in D$ , então  $\forall \epsilon > 0$

$$\alpha := \min_{|x|=\epsilon} E(x) > 0.$$

Escolha  $0 < \delta < \epsilon$  de modo que  $\{x : |x| \leq \delta\} \subset D$  e  $\max_{|x| \leq \delta} H(x) < \alpha$ .

Como  $H$  é uma integral primeira, segue que para uma solução  $x(t, x_0)$ , vale que,

$$|x_0| < \delta \implies |x(t, x_0)| < \epsilon.$$

Provando o lema. □

**Lema 4.0.18.** Em  $\mathbb{R}^2$ , todas as órbitas em uma vizinhança de um equilíbrio estável isolado de um sistema que possui uma integral primeira devem ser órbitas periódicas e o ponto de equilíbrio é um centro.

Logo, se  $H$  é uma integral primeira de classe  $C^k$  num aberto sem a origem, com um mínimo isolado na origem, então  $H$  não é constante em qualquer vizinhança de  $O$ . Daí, podemos usar os Lemas 4.0.17 e o 4.0.18 e o resultado segue.

□

O teorema anterior nos diz que, para um sistema do tipo (1.1) de classe  $C^k$ , incluindo o caso analítico, a existência da integral primeira não garante que ela é  $C^k$  na origem, muito menos analítica.

Os dois teoremas abaixo melhoram ainda mais as condições destas integrais primeiras.

**Teorema 4.0.19.** Seja um sistema (1.1) de classe  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , com um ponto de equilíbrio na origem  $O$ . Então,  $O$  é um centro se, e somente se, existir uma integral primeira de classe  $C^k$  com um mínimo isolado na origem.

Se  $O$  é um centro, a integral está definida em todo o  $N_0$ .

**Teorema 4.0.20.** Seja um sistema (1.1) de classe  $C^\infty$  com um ponto de equilíbrio na origem  $O$ . Então,  $O$  é um centro se, e somente se, existir uma integral primeira de classe  $C^\infty$  com um mínimo isolado na origem.

Se  $O$  é um centro, a integral está definida em todo o  $N_0$ .

A demonstração destes dois últimos teoremas pode ser encontrada em [18].

Agora que já estabelecemos a existência, sobre certas condições, de uma integral primeira, vamos estabelecer alguns resultados para sistemas do tipo nilpotente.

**Definição 4.0.21.** Dizemos que uma série de potências

$$H = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} x^i y^j$$

é uma integral primeira formal do sistema (2.5) se  $H$  satisfaz

$$\frac{\partial H}{\partial x}(y + F_1(x, y)) + \frac{\partial H}{\partial y} F_2(x, y) \equiv 0.$$

No próximo teorema, vamos analisar a existência de integrais primeiras (analíticas ou formais) definidas em uma vizinhança da origem de um centro nilpotente. Este teorema pode ser encontrado em [7].

**Teorema 4.0.22.** Suponha que o sistema (2.5) possui um centro na origem.

a) Se  $F_1(x, y) = yf(x, y^2)$  e  $F_2(x, y) = g(x, y^2)$ , então o sistema (2.5) possui uma integral primeira analítica da forma  $H = y^2 + F(x, y)$ , com  $F$  uma função com desenvolvimento de Taylor começando com termos de grau maior que 2.

b) Se o sistema possui uma integral primeira formal, então esta integral primeira formal é da forma  $H = y^2 + F(x, y)$ , com  $F$  uma função com desenvolvimento de Taylor começando com termos de grau maior que 2. Em particular, se o sistema possui uma integral primeira analítica definida na origem, então esta integral primeira analítica tem a forma  $H = y^2 + F(x, y)$ , com  $F$  uma função com desenvolvimento de Taylor começando com termos de grau maior que 2.

c) Como uma aplicação, nós caracterizamos os centros nilpotentes para sistemas diferenciais

$$\begin{cases} x' &= y + P_3(x, y), \\ y' &= Q_3(x, y), \end{cases}$$

que possui uma integral primeira analítica, onde  $P_3$  e  $Q_3$  são polinômios homogêneos de grau 3.

*Demonstração.* a) Suponha que o sistema (2.5) tenha a forma

$$\begin{cases} x' &= y + yf(x, y^2), \\ y' &= g(x, y^2), \end{cases} \quad (4.10)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções com desenvolvimento de Taylor começando com termos pelo menos quadráticos e que o sistema (4.10) possui um centro na origem.

Considere a seguinte mudança de variáveis e reescalonamento do tempo

$$\begin{cases} x &= u, \\ y &= \sqrt{u^2 + v^2}, \\ d\tau &= \left( \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{v} \right) dt, \end{cases}$$

definida no conjunto  $\Sigma = \{(x, y) | y^2 - x^2 > 0 \text{ e } y > 0\}$  e o semi-plano  $\{v > 0\}$ .

Nas novas variáveis  $(u, v, \tau)$ , o sistema (4.10) assume a forma

$$\begin{cases} u' &= u + v f(u, u^2 + v^2), \\ v' &= -u + g(u, u^2 + v^2) - u f(u, u^2 + v^2). \end{cases} \quad (4.11)$$

Observe que, o sistema (4.11) está definido em todo o  $\mathbb{R}^2$ .

Uma vez que a expansão das funções  $f$  e  $g$  começam com termos quadráticos, temos que (4.11) é um centro linear, pois ele é reversível com respeito à  $(u, v) \rightarrow (u, -v)$ . Então, pelo Teorema 4.0.11, o sistema (4.11) possui uma integral primeira analítica da forma  $H(u, v) = u^2 + v^2 + F(u, v)$ , definida em uma vizinhança da origem, onde  $F(u, v)$  uma função com desenvolvimento de Taylor começando com termos pelo menos cúbicos.

Usando que o sistema é invariante pela transformação  $(u, v) \rightarrow (u, -v)$ , se  $(u(t), v(t))$  é uma solução de (4.11), então  $(u(-t), -v(-t))$  também é uma solução. Logo, o retrato de fase de (4.11) é simétrico com respeito ao eixo  $u$ . Mais ainda, como eixo  $u$  não é formado por órbitas, pela monodromia, cada órbita que possui um ponto no eixo  $u$  é simétrico, isto é, é invariante pela simetria. Por este motivo, a sua integral primeira  $H(u, v)$  também é invariante pela mesma simetria. Assim,  $H$  deve ter a forma  $H(u, v) = u^2 + v^2 + I(u, v^2)$ , onde  $I(u, v^2)$  é uma função com desenvolvimento de Taylor começando com termos pelo menos cúbicos.

Voltando com as variáveis antigas obtemos que, para uma vizinhança de  $U_1$  da

origem, a função analítica

$$\bar{H}(x, y) = H\left(x, \sqrt{y^2 - x^2}\right) = y^2 + I(x, y^2 - x^2)$$

é uma integral primeira de (4.10) em  $\Sigma \cap U_1$ . É fácil ver que  $\bar{H}$  é analítica, pois é a composição de funções analíticas.

Como a origem de (4.10) é um centro, seja  $U_2$  uma vizinhança na origem invariante pelo fluxo do sistema tal que  $U_2 \subset U_1$ . Para cada órbita periódica  $\gamma$  contida em  $U_2$  existe um ponto  $(x_0, y_0) \in \Sigma \cap U_2$  tal que, localmente,  $\gamma$  pode ser escrita como  $y = F(x)$ , onde  $F$  é analítica. O arco  $\gamma \cap \Sigma$  deve coincidir com um arco da curva analítica  $\bar{H}(x, y) = h$ , para algum  $h \in \mathbb{R}$ , uma vez que  $\bar{H}$  é uma integral primeira analítica de (4.10) em  $\Sigma \cap U_2$ . Por este motivo, em uma vizinhança de  $(x_0, y_0)$  a curva  $\bar{H}(x, y) = h$  pode ser escrita como  $y = G(x)$ , com  $G$  analítica. Como  $F$  e  $G$  são funções analíticas de uma variável que coincidem em uma vizinhança de um ponto  $(x_0, y_0)$ , segue que as curva analíticas  $\gamma$  e  $\bar{H}(x, y) = h$  coincidem em  $U_2$ . Portanto,  $\bar{H}$  é uma integral primeira analítica de (4.10) em  $U_2$ , provando o item **a**).

□

A demonstração dos itens b e c fogem um pouco do escopo proposto, mas ela pode ser encontrada em [7].

**Proposição 4.0.23.** Seja o campo

$$\begin{cases} x' &= y + x^2, \\ y' &= -x^3. \end{cases} \quad (4.12)$$

Então (4.12) possui um centro nilpotente na origem, mas ele não possui nem uma integral primeira analítica local e nem uma formal definida na origem.

*Demonstração.* Usando o Teorema 2.2.5, obtemos que a origem é um ponto de equilíbrio monodrômico.

Afirmção, o sistema (4.12) é reversível com respeito a involução  $\varphi(x, y) =$

$(-x, y)$ . De fato,

$$F(\varphi(x, y)) = (y + (-x)^2, -(-x)^3) = (y + x^2, x^3)$$

e

$$D\varphi(x, y).F(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y + x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}.$$

Observe que,  $D\varphi(x, y).F(x, y) = -(y + x^2), -x^3) = -F(\varphi(x, y))$ , provando que o sistema é reversível. Como a origem é monodrômica, segue que a origem é um centro nilpotente.

Pelo Teorema 4.0.22 item **b**, se o sistema possui uma integral primeira analítica local na origem, então ela deve ser da forma  $H = y^2 + F(x, y)$ , com o desenvolvimento de Taylor de  $F$  começando com termos de grau maior que 2.

Supondo que

$$F = \sum_{i+j=3}^{\infty} f_{ij}x^i y^j$$

e impondo que  $H$  é uma integral primeira, isto é,  $H$  satisfaz

$$\frac{\partial H}{\partial x}(y + x^2) - \frac{\partial H}{\partial y}(x^3) \equiv 0.$$

Expandindo os termos obtemos

$$\begin{aligned} & -x^7 f_{4,1} - 2x^6 y f_{3,2} - 3x^5 y^2 f_{2,3} - 4x^4 y^3 f_{1,4} - 5x^3 y^4 f_{0,5} + 5x^6 f_{5,0} + 4x^5 y f_{4,1} \\ & - 4x^3 y^3 f_{0,4} + 2x^3 y^3 f_{2,3} + x^2 y^4 f_{1,4} + 4x^5 f_{4,0} + 5x^4 y f_{5,0} - 3x^3 y^2 f_{0,3} + 4x^3 y^2 f_{4,1} \\ & + 2xy^4 f_{2,3} + y^5 f_{1,4} - x^4 f_{1,1} - 2x^3 y f_{0,2} + 4x^3 y f_{4,0} - 2x^3 y + 2x^3 f_{2,0} + x^2 y f_{1,1} \\ & + 3x^2 y^3 f_{3,2} + y^2 f_{1,1} + 3x^4 y^2 f_{3,2} + 2xy f_{2,0}. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos termos de grau 3 a 0, obtemos que os coeficientes  $f_{3,0}$ ,  $f_{2,1}$  e  $f_{1,2}$  devem se anular. Substituindo estes valores, obtemos

$$\begin{aligned}
& -x^7 f_{4,1} - 2x^6 y f_{3,2} - 3x^5 y^2 f_{2,3} - 4x^4 y^3 f_{1,4} - 5x^3 y^4 f_{0,5} + 5x^6 f_{5,0} + 4x^5 y f_{4,1} \\
& -4x^3 y^3 f_{0,4} + 2x^3 y^3 f_{2,3} + x^2 y^4 f_{1,4} + 4x^5 f_{4,0} + 5x^4 y f_{5,0} - 3x^3 y^2 f_{0,3} + \\
& 2xy^4 f_{2,3} + y^5 f_{1,4} - x^4 f_{1,1} - 2x^3 y f_{0,2} + 4x^3 y f_{4,0} - 2x^3 y + 2x^3 f_{2,0} + x^2 y f_{1,1} \\
& + 3x^2 y^3 f_{3,2} + y^2 f_{1,1} + 3x^4 y^2 f_{3,2} + 2xy f_{2,0} + 4x^3 y^2 f_{4,1}.
\end{aligned}$$

Igualando agora os coeficientes de grau 4 a 0, obtemos que  $f_{1,3}$ ,  $f_{2,2}$  e  $f_{3,1}$  devem se anular e  $f_{4,0} = 1/2$ . Substituindo estes valores, obtemos

$$\begin{aligned}
& -x^7 f_{4,1} - 2x^6 y f_{3,2} - 3x^5 y^2 f_{2,3} - 4x^4 y^3 f_{1,4} - 5x^3 y^4 f_{0,5} + 5x^6 f_{5,0} + 4x^5 y f_{4,1} + 3x^4 y^2 f_{3,2} \\
& -4x^3 y^3 f_{0,4} + 2x^3 y^3 f_{2,3} + x^2 y^4 f_{1,4} + 5x^4 y f_{5,0} - 3x^3 y^2 f_{0,3} + 4x^3 y^2 f_{4,1} + 3x^2 y^3 f_{3,2} \\
& + 2xy^4 f_{2,3} + y^5 f_{1,4} + 2x^5 - x^4 f_{1,1} - 2x^3 y f_{0,2} + 2x^3 f_{2,0} + x^2 y f_{1,1} + 2xy f_{2,0} + y^2 f_{1,1}.
\end{aligned}$$

Notemos que, na expressão acima, o monômio  $x^5$  possui uma constante igual a 2 e por este motivo a expressão não pode se anular, provando assim que  $H$  não é uma integral primeira.  $\square$

Este resultado responde a pergunta acerca da existência de integral primeira analítica sempre que um ponto de equilíbrio for um centro. Veremos adiante que, para o caso degenerado, o resultado é o mesmo.

Seja o campo

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases} \quad (4.13)$$

onde  $P$  e  $Q$  são funções analíticas tais que,  $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$ .

Suponha que a origem seja um centro degenerado. Temos então que, as componentes do campo podem ser expressas como séries de potências tais como

$$\begin{aligned}
P(x, y) &= P_2(x, y) + \cdots + P_n(x, y) + \cdots, \\
Q(x, y) &= Q_2(x, y) + \cdots + Q_n(x, y) + \cdots,
\end{aligned} \quad (4.14)$$

onde  $P_j$  e  $Q_j$  são polinômios homogêneos de grau  $j$ , com  $j = 2, \dots$ .

**Definição 4.0.24.** Seja uma função analítica  $f(x, y)$  definida em uma vizinhança de um ponto  $(x_0, y_0)$ . Definimos o subgrau de  $f$  como sendo o menor inteiro positivo  $j$ , tal que alguma derivada

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^i y^{j-i}}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Iremos denotar o subgrau como sendo,  $\text{subdeg}_{(x_0, y_0)} f(x, y)$ .

**Definição 4.0.25.** Uma direção característica para a origem do sistema (4.13) é uma raiz  $\omega \in S^1$  do polinômio homogêneo  $xQ_n(x, y) - yP_n(x, y)$ , com  $n = \min\{\text{subdeg}_{(x_0, y_0)} P(x, y), \text{subdeg}_{(x_0, y_0)} Q(x, y)\}$ , que pode ser representado na forma  $\omega = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ , onde  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

É imediato que, o número de direções características é no máximo  $n + 1$ . Os dois próximos resultados podem ser encontrados em [10].

**Proposição 4.0.26.** Seja  $\gamma(t)$  uma órbita característica para a origem do sistema (4.13) e

$$\omega = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}.$$

Então,  $\omega$  é uma direção característica do sistema (4.13).

**Corolário 4.0.27.** Se todas as raízes do polinômio  $xQ_n(x, y) - yP_n(x, y)$  possuem parte imaginária não nula, então a origem é um ponto de equilíbrio monodrômico.

Com estas definições e teoremas bem estabelecidos, estamos em condição de provar a proposição a seguir.



**Proposição 4.0.28.** O campo

$$\begin{cases} x' = -y^3, \\ y' = x^3 + \frac{x^2 + y^2}{2}, \end{cases} \quad (4.15)$$

possui um centro na origem, mas não possui uma integral primeira analítica definida na origem.

*Demonstração.* Mostremos primeiramente que a origem é um centro.

Seja  $F(x, y) = (-y^3, x^3 + (x^2 + y^2)/2)$  o campo associado à (4.15). Mostremos que, o campo é reversível com respeito à involução  $\varphi(x, y) = (x, -y)$ . De fato,

$$D\varphi(x, y).F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 + (x^2 + y^2)/2 \end{pmatrix}$$

e

$$F(x, -y) = (y^3, x^3 + (x^2 + y^2)/2).$$

Note que,  $D\varphi(x, y).F(x, y) = -F(x, -y)$ , provando que o campo é reversível.

Agora, observemos que, a expansão das coordenadas do campo  $F$  possui um subgrau 3. Daí,  $P_3(x, y) = -y^3$ ,  $Q_3(x, y) = x^3$  e

$$xQ_3(x, y) - yP_3(x, y) = x^4 + y^4$$

possui todas as raízes com a parte imaginária. Logo, pelo Corolário 4.0.27, a origem é um ponto monodrômico e como ele é reversível, segue que a origem é um centro.

Para mostrar que o campo não possui integral primeira na origem, vamos utilizar  $w = (x^3 - (x^2y^2)/2)dx + y^3dy$ , que é a forma diferencial associada à (4.15).

De acordo com [19], a forma  $w$  possui uma integral primeira se existirem polinômios  $m$  e  $n$  nas variáveis  $x$  e  $y$ , tais que  $w = mdn$ . Então, como o campo e a forma diferencial estão relacionados por meio de um isomorfismo, se a forma diferencial possui uma integral primeira, então o campo também vai possuir.

Observe que, o campo  $F$  possui polinômios de grau no máximo 3. Por este motivo, suponha que

$$n(x, y) = x^4 b_{4,0} + x^3 y b_{3,1} + x^2 y^2 b_{2,2} + x y^3 b_{1,3} + y^4 b_{0,4}$$

e

$$m(x, y) = a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} mdn &= (4x^4 a_{1,0} b_{4,0} + 4x^3 y a_{0,1} b_{4,0} + 3x^3 y a_{1,0} b_{3,1} + 3x^2 y^2 a_{0,1} b_{3,1} \\ &+ 2x^2 y^2 a_{1,0} b_{2,2} + 2xy^3 a_{0,1} b_{2,2} + xy^3 a_{1,0} b_{1,3} + y^4 a_{0,1} b_{1,3} \\ &+ 4x^3 a_{0,0} b_{4,0} + 3x^2 y a_{0,0} b_{3,1} + 2xy^2 a_{0,0} b_{2,2} + y^3 a_{0,0} b_{1,3}) dx \\ &+ (x^4 a_{1,0} b_{3,1} + x^3 y a_{0,1} b_{3,1} + 2x^3 y a_{1,0} b_{2,2} + 2x^2 y^2 a_{0,1} b_{2,2} \\ &+ 3x^2 y^2 a_{1,0} b_{1,3} + 3xy^3 a_{0,1} b_{1,3} + 4xy^3 a_{1,0} b_{0,4} \\ &+ 4y^4 a_{0,1} b_{0,4} + x^3 a_{0,0} b_{3,1} + 2x^2 y a_{0,0} b_{2,2} + 3xy^2 a_{0,0} b_{1,3} \\ &+ 4y^3 a_{0,0} b_{0,4}) dy. \end{aligned}$$

Comparando  $mdn$  com  $w$ , é fácil ver que  $a_{0,1} = a_{1,0} = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} mdn &= (4x^3 a_{0,0} b_{4,0} + 3x^2 y a_{0,0} b_{3,1} + 2xy^2 a_{0,0} b_{2,2} + y^3 a_{0,0} b_{1,3}) dx \\ &+ (x^3 a_{0,0} b_{3,1} + 2x^2 y a_{0,0} b_{2,2} + 3xy^2 a_{0,0} b_{1,3} + 4y^3 a_{0,0} b_{0,4}) dy. \end{aligned}$$

Não existe escolha para as constantes na expressão acima de modo que,  $w = mdn$ . Logo, o campo  $F$  não possui uma integral primeira e o resultado segue.  $\square$

# Anexo

## Algoritmo Liapunov

```
> restart;
> for i from 2 to 4 do f[i] := sum(a[i-j, j]*x^(i-j)*y^j, j = 0
.. i) end do:
> for i from 2 to 3 do g[i] := sum(b[i-j, j]*x^(i-j)*y^j, j = 0
.. i) end do:
> for i from 2 to 2 do l[i] := sum(c[i-j, j]*x^(i-j)*y^j, j = 0
.. i) end do:
> f := sum(f[k], k = 2..4):
> H := sum(g[l], l = 2..3):
> L := sum(l[j], j=2):
> M := (x+f)*(diff(f, y)):
> N := -(x+f)*(diff(f, x))-f:
> V[2,0]:=1/2:V[1,1]:=0:V[0,2]:=1/2:
```

```

> V[2]:=sum('V[2-k,k]*x^(2-k)*y^k','k'=0..2):
> V[3]:=sum('V[3-k,k]*x^(3-k)*y^k','k'=0..3):
> V[4]:=sum('V[4-k,k]*x^(4-k)*y^k','k'=0..4):
> V[5]:=sum('V[5-k,k]*x^(5-k)*y^k','k'=0..5):
> V[6]:=sum('V[6-k,k]*x^(6-k)*y^k','k'=0..6):
> V[7]:=sum('V[7-k,k]*x^(7-k)*y^k','k'=0..7):
> V[8]:=sum('V[8-k,k]*x^(8-k)*y^k','k'=0..8):

```

### Função de Liapunov e suas derivadas

```

> U:=mtaylor(V[2]+V[3]+V[4]+V[5]+V[6]+V[7]+V[8],[x,y],9):
Ux:=diff(U,x):Uy:=diff(U,y):

```

### Tk(Vk)

```

> T[3]:=mtaylor(x*Uy-y*Ux,[x,y],4):T[4]:=mtaylor(x*Uy-y*Ux,[x,y],5)
-mtaylor(x*Uy-y*Ux,[x,y],4):
T[5]:=mtaylor(x*Uy-y*Ux,[x,y],6)-mtaylor(x*Uy-y*Ux,[x,y],5):
T[6]:=mtaylor(x*Uy-y*Ux,[x,y],7)-mtaylor(x*Uy-y*Ux,[x,y],6):
T[7]:=mtaylor(x*Uy-y*Ux,[x,y],8)-mtaylor(x*Uy-y*Ux,[x,y],7):
T[8]:=mtaylor(x*Uy-y*Ux,[x,y],9)-mtaylor(x*Uy-y*Ux,[x,y],8):

```

### Definir o campo

```

> F:=H*x+M*epsilon+y: G:=-2*x^3+H*y+N*epsilon-epsilon*x:

```

Os  $D_k$  são os polinômios de grau  $k$  de  $V$  aplicado no campo.

### D3

```

> D3:=mtaylor(Ux*(F)+Uy*(G),[x,y],4)-mtaylor(Ux*(F)+Uy*(G),[x,y],3):
> d30:=coeff(coeff(D3,x,3),y,0):d21:=coeff(coeff(D3,x,2),y,1):
d12:=coeff(coeff(D3,x,1),y,2):d03:=coeff(coeff(D3,x,0),y,3):
> S3:=solve({d30,d21,d12,d03},{V[3,0],V[2,1],V[1,2],V[0,3]}):
> V[1,2]:=subs(S3,V[1,2]):
V[3,0]:=subs(S3,V[3,0]):V[0,3]:=subs(S3,V[0,3]):
V[2,1]:=subs(S3,V[2,1]):

```

### Verificação

> simplify(D3):

#### D4

```
> D4:=mtaylor(Ux*(F)+Uy*(G)-eta[2]*(x^2+y^2)^2,[x,y],5)
-mtaylor(Ux*(F)+Uy*(G),[x,y],4):
> d40:=coeff(coeff(D4,x,4),y,0):d31:=coeff(coeff(D4,x,3),y,1):
d22:=coeff(coeff(D4,x,2),y,2):d13:=coeff(coeff(D4,x,1),y,3):
d04:=coeff(coeff(D4,x,0),y,4):
> solve({d40,d31,d22,d13,d04},{V[4,0],V[3,1],V[2,2],V[1,3],V[0,4],eta[2]}):
> V[0,4]:=0:
> S4:=solve({d40,d31,d22,d13,d04},{V[4,0],V[3,1],V[2,2],V[1,3],eta[2]}):
> V[4,0]:=subs(S4,V[4,0]):V[3,1]:=subs(S4,V[3,1]):
V[2,2]:=subs(S4,V[2,2]):V[1,3]:=subs(S4,V[1,3]):
V[0,4]:=subs(S4,V[0,4]):eta[2]:=subs(S4,eta[2]):
```

### Verificação

> simplify(D4):

#### D5

```
> D5:=mtaylor(Ux*(F)+Uy*(G),[x,y],6)-mtaylor(Ux*(F)+Uy*(G),[x,y],5):
> d50:=coeff(coeff(D5,x,5),y,0):d41:=coeff(coeff(D5,x,4),y,1):
d32:=coeff(coeff(D5,x,3),y,2):d23:=coeff(coeff(D5,x,2),y,3):
d14:=coeff(coeff(D5,x,1),y,4):d05:=coeff(coeff(D5,x,0),y,5):
> S5:=solve({d50,d41,d32,d23,d14,d05},{V[5,0],V[4,1],V[3,2],
V[2,3],V[1,4],V[0,5]}):
> V[5,0]:=subs(S5,V[5,0]):V[4,1]:=subs(S5,V[4,1]):
V[3,2]:=subs(S5,V[3,2]):V[2,3]:=subs(S5,V[2,3]):
V[1,4]:=subs(S5,V[1,4]):V[0,5]:=subs(S5,V[0,5]):
```

### Verificação

> simplify(D5):

#### D6

```

> D6:=mtaylor(Ux*(F)+Uy*(G)-eta[3]*(x^2+y^2)^3,[x,y],7)
-mtaylor(Ux*(F)+Uy*(G),[x,y],6):
> d60:=coeff(coeff(D6,x,6),y,0):d51:=coeff(coeff(D6,x,5),y,1):
d42:=coeff(coeff(D6,x,4),y,2):d33:=coeff(coeff(D6,x,3),y,3):
d24:=coeff(coeff(D6,x,2),y,4):d15:=coeff(coeff(D6,x,1),y,5):
d06:=coeff(coeff(D6,x,0),y,6):
> solve({d60,d51,d42,d33,d24,d15,d06},{V[6,0],V[5,1],V[4,2],
V[3,3],V[2,4],V[1,5],V[0,6],eta[3]}):
> V[0,6]:=0:
> S6:=solve({d60,d51,d42,d33,d24,d15,d06},{V[6,0],V[5,1],
V[4,2],V[3,3],V[2,4],V[1,5],eta[3]}):
> V[6,0]:=subs(S6,V[6,0]):V[5,1]:=subs(S6,V[5,1]):
V[4,2]:=subs(S6,V[4,2]):V[3,3]:=subs(S6,V[3,3]):
V[2,4]:=subs(S6,V[2,4]):V[1,5]:=subs(S6,V[1,5]):
eta[3]:=subs(S6,eta[3]):

```

### Verificação

```

> simplify(D6):

```

### D7

```

> D7:=mtaylor(Ux*(F)+Uy*(G),[x,y],8)-mtaylor(Ux*(F)+Uy*(G),[x,y],7):
> d70:=coeff(coeff(D7,x,7),y,0):d61:=coeff(coeff(D7,x,6),y,1):
d52:=coeff(coeff(D7,x,5),y,2):d43:=coeff(coeff(D7,x,4),y,3):
d34:=coeff(coeff(D7,x,3),y,4):d25:=coeff(coeff(D7,x,2),y,5):
d16:=coeff(coeff(D7,x,1),y,6):d07:=coeff(coeff(D7,x,0),y,7):
> S7:=solve({d70,d61,d52,d43,d34,d25,d16,d07},{V[7,0],V[6,1],
V[5,2],V[4,3],V[3,4],V[2,5],V[1,6],V[0,7]}):
> V[7,0]:=subs(S7,V[7,0]):V[6,1]:=subs(S7,V[6,1]):
V[5,2]:=subs(S7,V[5,2]):V[4,3]:=subs(S7,V[4,3]):
V[3,4]:=subs(S7,V[3,4]):V[2,5]:=subs(S7,V[2,5]):
V[1,6]:=subs(S7,V[1,6]):V[0,7]:=subs(S7,V[0,7]):

```

### Verificação

```

> simplify(D7):

```

```

                                D8
> D8:=mtaylor(Ux*(F)+Uy*(G)-eta[4]*(x^2+y^2)^4,[x,y],9)
-mtaylor(Ux*(F)+Uy*(G),[x,y],8):
> d80:=coeff(coeff(D8,x,8),y,0):d71:=coeff(coeff(D8,x,7),y,1):
d62:=coeff(coeff(D8,x,6),y,2):d53:=coeff(coeff(D8,x,5),y,3):
d44:=coeff(coeff(D8,x,4),y,4):d35:=coeff(coeff(D8,x,3),y,5):
d26:=coeff(coeff(D8,x,2),y,6):d17:=coeff(coeff(D8,x,1),y,7):
d08:=coeff(coeff(D8,x,0),y,8):
> solve({d80,d71,d62,d53,d44,d35,d26,d17,d08},{V[8,0],V[7,1],
V[6,2],V[5,3],V[4,4],V[3,5],V[2,6],V[1,7],V[0,8],eta[4]}):
> V[0,8]:=0:
> S8:=solve({d80,d71,d62,d53,d44,d35,d26,d17,d08},{V[8,0],V[7,1]
,V[6,2],V[5,3],V[4,4],V[3,5],V[2,6],V[1,7],eta[4]}):
> V[8,0]:=subs(S8,V[8,0]):V[7,1]:=subs(S8,V[7,1]):
V[6,2]:=subs(S8,V[6,2]):V[5,3]:=subs(S8,V[5,3]):
V[4,4]:=subs(S8,V[4,4]):V[3,5]:=subs(S8,V[3,5]):
V[2,6]:=subs(S8,V[2,6]):V[1,7]:=subs(S8,V[1,7]):
eta[4]:=subs(S8,eta[4]):

```

### Verificação

```
> simplify(D8):
```

### Coefficientes de Liapunov

```
> L1:=eta[2]:L2:=eta[3]:L3:=eta[4]:
> collect(L1,epsilon):
```

# Referências Bibliográficas

- [1] A. F. ANDREEV, *Investigation of the behaviour of the integral curves of a system of two differential equations in the neighborhood of a singular point*, Transl. Amer. Math. Soc., **8** (1958), 183 - 207.
- [2] A. A. ANDRONOV, E. A. LEONTOVICH, I. I. GORDAN, A. G. MAIER, *Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane*, John Willey Sons, New York, 1973.
- [3] V. I. ARNOL'D, Y.S. YLYASHENKO, *Ordinary Dieferential Equations*, Encyclopedia Math. Sci. **1**, Springer Berlim, 1988.
- [4] M. BERTHIER, R. MOUSSU, *Réversibilité et classification des centres nilpotents*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **44** (1994), 465 - 494.
- [5] Y. N. BIBIKOV, *Lecture Notes in Mathematics - Local Theory of Non-linear Analytic Ordinary Differential Equations*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1979.
- [6] L. C. V. BOAS, *Estudo do Teorema de Bautin para Campos Quadráticos no Plano*, Dissertação de mestrado, Instituto de Matemática e Computação - Universidade Federal de Itajubá, 2011.
- [7] J. CHAVARRIGA, H. GIACOMINI, J. GINÉ, J. LLIBRE, *Local analytic integrability for nilpotent centers*, Ergodic Theory and Dynam. Systems, **23** (2003), 417-428.



- [8] C. CHICONE, Ordinary Differential Equations with Applications, Springer - Velag, New York, 1999.
- [9] F. DUMORTIER, J. LLIBRE, J. C. ARTÉS, Qualitative Theory of Planar Differential Systems, Univesitext Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [10] I. A. GARCÍA, J. GINÉ, M. GRAU, *A necessary condition in the monodromy problem for analytic differential equations on the plane*, J. Symbolic Comput., **41** (2006), 943 - 958.
- [11] H. GIACOMINI, J. GINÉ, J. LLIBRE, *The problem of distinguishing between a center and a focus for nilpotent and degenerate analytic systems*, J. Differential Equations, **227** (2006), 406 - 426.
- [12] J. GINÉ, J. LLIBRE, *A method for characterizing nilpotent centers*, J. Math. Anal. Appl., **413** (2014), 537 - 545.
- [13] J. K. HALE, Ordinary Differential Equations, 2<sup>a</sup> edição, Krieger Publishing Company Malabar, Florida, 1980.
- [14] Y. S. ILYASHENKO, *Finiteness theorems for limit cycles*, Translations of Math. Monographs Amer. Math. Soc., Providence R.I., **94** (1991), 1259 - 1269.
- [15] J. ITIKAWA, O problema do centro-foco para singularidades nilpotentes no plano, Dissertação de mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.
- [16] O. KUZNETSOVA, Lyapunov Quantities and Limit Cycles in Two-dimensional Dynamical Systems, Dissertação do Instituto Faculty of Information Technology of the University of Jyväskylä, Ylistönrinne, 2011.
- [17] M. A. LIAPUNOV, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Ann. of Math. Stud., **17**, Princeton University Press, Princeton, N. J.; Oxford University Press, London, 1947. iv+272 pp. [paged 203-474].

- [18] L. MAZZI, M. SABATINI, *A Characterization of Centres via First Integrals* J. Differential Equations, **76** (1988), 222 - 237.
- [19] R. MOUSSU, *Une Démonstration Géométrique d'un Théorème de Lyapunov-Poincaré*, Astérisque, **9899** (1982), 216 - 223.
- [20] H. POINCARÉ, *Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles*, Journal de Mathématiques, **37** (1881), 375-422; **8** (1882) 251-296; Oeuvres de Henri Poincaré vol. I, Gauthier-Villars, Paris, 1951, 3-84.
- [21] C. SANSONE, R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Cremonese, Roma, 1956.
- [22] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [23] J. SOTOMAYOR, *Curvas definidas por equações diferenciais no plano*, 13º Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981.