TESE
517

Amauri Reigado Costa de Oliveira

MODELOS E TÉCNICAS COMPUTACIONAIS UTILIZADAS NO PROGRAMA EMTP PARA CÁLCULO DE TRANSITÓRIOS ELETROMAGNETICOS

ITAJUBÁ

Abril de 1988

AMAURI REIGADO COSTA DE OLIVEIRA

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca
MAUÁ
Itajubá

MODELOS E TÉCNICAS COMPUTACIONAIS UTILIZADAS NO PROGRAMA EMTP PARA CÁLCULO DE TRANSITÓRIOS ELETROMAGNÉTICOS

ORIENTADOR: PROF. JOÃO ROBERTO COGO

TRABALHO DE DISSERTAÇÃO APRESENTADO À COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO DA ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE "MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA"

ITAJUBÁ, ABRIL DE 1988

A Jurema,
e aos meus filhos Marina
e Felipe

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, aos meus irmãos e a Sra. Leonides, que muito fizeram para que eu chegasse até aqui.

Ao amigo João Roberto Cogo, pela grande ajuda, principalmente durante o período em que residi em Itajubá.

Ao amigo Fernando Hevelton Duarte Oliveira, pela ajuda na revisão de todo o texto deste trabalho.

Ao amigo Jadir França da Costa, pela bibliografia que me forneceu quando do início deste trabalho.

Aos amigos Rui Michel Senra, José Roberto Valadares, Álvaro Nelson Assis Araújo e Antônio César M. Ferreira,pelo apoio computacional.

Ao amigo Luís Scevola Galery, por todo o apoio da parte da CEMIG e pelas sugestões.

Ao amigo Pedro José Tukoff, pela ajuda nos desenhos deste trabalho.

À amiga Sandra Márcia Malta Maia, que datilografou este trabalho com muito carinho.

Ao Prof. Herman W. Dommel, pelo esclarecimento de dúvidas e pelas sugestões quanto ao conteúdo deste trabalho.

Aos demais amigos da PO/ES4, Márcio, Edna, Frossard, Marco Aurélio, Paulo, Margareth, Cleber , Tião, e ao amigo Eduardo Iani , pelo apoio e pelo incentivo.

Í N D I C E

Página

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO 01

CAPÍTULO 2 - MODELAGEM DE ELEMENTOS DE SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA ATRAVÉS DE PARÂMETROS CONCENTRADOS

2.1 - INTRODUÇÃO 06

2.2 - RAMO R 08

2.3 - RAMO L 08

2.4 - RAMO C 11

2.5 - RAMO RL 14

2.6 - RAMO RLC 17

2.7 - RAMO RC 20

2.8 - RAMO LC 23

2.9 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS DA MODELAGEM ATRAVÉS DE PARÂMETROS CONCENTRADOS 25

2.10- EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA MODELAGEM ATRAVÉS DE PARÂMETROS CONCENTRADOS 32

2.11- CONCLUSÕES 41

CAPÍTULO 3 - REPRESENTAÇÃO DE FONTES DE TENSÃO E DE CORRENTE

3.1 - INTRODUÇÃO 42

3.2 - FORMA DE ONDA COSSENOIDAL 44

3.3 - FORMA DE ONDA DEGRAU 51

3.4 - FORMA DE ONDA RAMPA LIMITADA POR DEGRAU 54

3.5 - FORMA DE ONDA RAMPA DE DUPLA INCLINAÇÃO 56

3.6 - PROBLEMAS QUE OCORREM NA REPRESENTAÇÃO DE FONTES 60

3.7 - CARACTERÍSTICAS ESPECIAIS DAS FONTES 64

3.8 - CONCLUSÕES 70

CAPÍTULO 4 - EQUACIONAMENTO MATEMÁTICO PARA O CÁLCULO DAS TENSÕES

4.1 - INTRODUÇÃO 72

4.2 - EQUACIONAMENTO BÁSICO PARA O CÁLCULO DAS TENSÕES 73

4.3 - MONTAGEM DAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$ 80

4.4 - MONTAGEM DOS VETORES $[e_B]$ E $[i_A]$ 87

4.5 - MONTAGEM DO VETOR $[I_A]$ 88

4.6 - CÁLCULO DO VETOR $[e_A]$ 91

4.7 - EXEMPLO DE CÁLCULO DE TENSÕES PARA UM CIRCUITO SIMPLES 92

4.8 - CONCLUSÕES 109

CAPÍTULO 5 - MODELAGEM DE RAMOS DE SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA ATRAVÉS DE PARÂMETROS CONCENTRADOS CONSIDERANDO O EFEITO DE ACOPLAMENTO

5.1 - INTRODUÇÃO 111

5.2 - EQUACIONAMENTO MATEMÁTICO PARA OS RAMOS ACOPLADOS 112

5.3 - OBTENÇÃO DAS MATRIZES $[G]$ E $[Y]$ 121

5.4 - MONTAGEM DAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$ 126

5.5 - ALGORITMO PARA A MONTAGEM DAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$ CONSIDERANDO O PROCESSAMENTO DAS MATRIZES $[G]$ E $[Y]$ 132

5.6 - ALTERAÇÕES NA EQUAÇÃO DE SOLUÇÃO 153

5.7 - APLICAÇÕES DO MODELO NA REPRESENTAÇÃO DE ELEMENTOS DOS SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA 155

5.8 - EXEMPLO DE CÁLCULO PARA UM RAMO TRIFÁSICO ACOPLADO 157

5.9 - CONCLUSÕES 171

CAPÍTULO 6 - MODELAGEM DE CHAVES

6.1 - INTRODUÇÃO 173

6.2 - MODELOS DE CHAVES 174

6.2.1 - CHAVES CONTROLADAS POR TEMPO 175

6.2.2 - CHAVES CONTROLADAS POR TENSÃO 181

6.2.3 - CHAVES SEMICONDUTORAS 186

6.2.4 - CHAVES ESTATÍSTICAS 191

6.2.5 - CHAVES SISTEMÁTICAS 192

6.3 - REGRAS PARA UTILIZAÇÃO DOS MODELOS DE CHAVES 194

6.4 - APLICAÇÕES DOS MODELOS DE CHAVES 196

6.4.1 - CHAVES CONTROLADAS POR TEMPO 196

6.4.2 - CHAVES CONTROLADAS POR TENSÃO 198

6.4.3 - CHAVES SEMICONDUTORAS 199

6.4.4 - CHAVES ESTATÍSTICAS 207

6.4.5 - CHAVES SISTEMÁTICAS 208

6.4.6 - OUTROS MODELOS DE CHAVES 208

6.5 - PROCESSO COMPUTACIONAL APLICADO AOS MODELOS DE CHAVES 209

6.5.1 - PROCESSO DE FECHAMENTO DAS CHAVES 213

6.5.1.1 - CHAVE DO TIPO 1 214

6.5.1.2 - CHAVE DO TIPO 2 216

6.5.1.3 - CHAVE DO TIPO 3 218

6.5.1.4 - EXEMPLO PARA O PROCESSO DE FECHAMENTO DAS CHAVES 221

6.5.2 - PROCESSO DE ABERTURA DAS CHAVES 227

6.5.3 - ALTERAÇÕES NA EQUAÇÃO DE SOLUÇÃO GERAL 230

6.5.3.1 - ALTERAÇÕES NO VETOR $[e_A]$ 230

6.5.3.2 - ALTERAÇÕES NO VETOR $[i_A]$ 233

6.5.3.3 - ALTERAÇÕES NO VETOR $[I_A]$ 235

6.5.4 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS PARTICULARES DOS MODELOS DE CHAVES 237

6.5.4.1 - CÁLCULO DOS VALORES DE CORRENTES NAS CHAVES 237

6.5.4.2 - CÁLCULO DOS VALORES DE TENSÕES NAS CHAVES 240

6.5.5 - FLUXOGRAMA PARA O PROCESSO DE CÁLCULO DOS MODELOS DE CHAVES 243

6.6 - EXEMPLO DE CÁLCULO PARA OS MODELOS DE CHAVES 243

6.7 - CONCLUSÕES 255

CAPÍTULO 7 - MODELAGEM DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

7.1 - INTRODUÇÃO 257

7.2 - MODELAGEM DE LINHAS DE TRANSMISSÃO ATRAVÉS DE PARÂMETROS CONCENTRADOS 258

7.3 - MODELAGEM DE LINHAS DE TRANSMISSÃO ATRAVÉS DE PARÂMETROS DISTRIBUÍDOS - SISTEMAS MONOFÁSICOS 261

7.3.1 - MODELO SEM PERDAS 262

7.3.2 - MODELO COM RESISTÊNCIAS CONCENTRADAS 270

7.4 - MODELAGEM DE LINHAS DE TRANSMISSÃO ATRAVÉS DE PARÂMETROS DISTRIBUÍDOS - SISTEMAS COM n FASES 285

7.4.1 - MODELO SEM PERDAS 286

7.4.2 - MODELO COM RESISTÊNCIAS CONCENTRADAS 288

7.5 - CONSIDERAÇÕES SOBRE LINHAS DE TRANSMISSÃO TRANSPOSTAS E NÃO TRANSPOSTAS 291

7.6 - EQUAÇÕES GERAIS DOS MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO 297

7.7 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS DOS MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO 308

7.7.1 - ALTERAÇÕES NA EQUAÇÃO DE SOLUÇÃO GERAL 310

7.7.1.1 - MONTAGEM DAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$ 311

7.7.1.2 - MONTAGEM DO VETOR $[I_A]$ 317

7.7.2 - INTERPOLAÇÃO PARA O CÁLCULO DOS VALORES DE HISTÓRIA PASSADA 320

7.7.3 - ARMAZENAMENTO DOS VALORES DE HISTÓRIA PASSADA 338

7.8 - EXEMPLO 343

7.9 - CONCLUSÕES 356

CAPÍTULO 8 - SIMULAÇÃO DE CASOS EXEMPLOS

8.1 - INTRODUÇÃO 359

8.2 - CIRCUITOS RLC 359

8.3 - CHAVES SEMICONDUTORAS 374

8.4 - LINHAS DE TRANSMISSÃO 381

8.5 - CONCLUSÕES 404

APÊNDICE A - O MÉTODO TRAPEZOIDAL

A.1 - INTRODUÇÃO 420

A.2 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA 421

A.3 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS 423

A.4 - CONCLUSÕES 427

APÊNDICE B - TRATAMENTO COMPUTACIONAL PARA MATRIZES ESPARSAS

B.1 - INTRODUÇÃO 428

B.2 - O ARMAZENAMENTO DE MATRIZES ESPARSAS 430

B.3 - CONCLUSÕES 434

APÊNDICE C - ORDENAÇÃO DE MATRIZES

C.1 - INTRODUÇÃO 436

C.2 - ESQUEMAS DE ORDENAÇÃO 438

C.3 - ALGORITMO PARA APLICAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROCESSO DE ORDENAÇÃO 439

C.4 - CONCLUSÕES 444

APÊNDICE D - FATORAÇÃO DE MATRIZES

D.1 - INTRODUÇÃO 445

D.2 - OBTENÇÃO DA TABELA DE FATORES SEM CONSIDERAR A ORDENAÇÃO 446

D.3 - OBTENÇÃO DA TABELA DE FATORES CONSIDERANDO A ORDENAÇÃO 453

D.4 - MATRIZES FATORES 458

D.5 - TRATAMENTO COMPUTACIONAL DO PROCESSO DE FATORAÇÃO 464

D.6 - CONCLUSÕES 467

APÊNDICE E - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

E.1 - INTRODUÇÃO 469

E.2 - EQUACIONAMENTO MATEMÁTICO DO PROCESSO DE SOLUÇÃO 469

E.3 - PROCESSO DE SOLUÇÃO SEM CONSIDERAR A ORDENAÇÃO 471

E.4 - PROCESSO DE SOLUÇÃO CONSIDERANDO A ORDENAÇÃO 472

E.5 - CONCLUSÕES 473

APÊNDICE F - OSCILAÇÕES NUMÉRICAS

F.1 - INTRODUÇÃO 474

F.2 - SITUAÇÕES ONDE OCORREM AS OSCILAÇÕES NUMÉRICAS 478

F.2.1 - TENSÃO ATRAVÉS DE UM INDUTOR QUANDO DA ABERTURA DE UMA CHAVE 478

F.2.2 - CORRENTE ATRAVÉS DE UM CAPACITOR QUANDO DO FECHAMENTO DE UMA CHAVE 483

F.3 - PROCESSOS DE ELIMINAÇÃO DAS OSCILAÇÕES NUMÉRICAS 485

F.3.1 - MELHOR MODELAGEM DO SISTEMA A SER UTILIZADO 486

F.3.2 - AMORTECIMENTO DOS SINAIS ANTES DA DIFERENCIAÇÃO 486

F.3.3 - INTRODUÇÃO DE ELEMENTOS AMORTECEDORES 488

F.3.3.1 - CIRCUITOS COM INDUTORES 489

F.3.3.2 - CIRCUITOS COM CAPACITORES 493

F.4 - CONCLUSÕES 496

APÊNDICE G - TEORIA MODAL APLICADA ÀS LINHAS DE TRANSMISSÃO

G.1 - INTRODUÇÃO 498

G.2 - TEORIA MODAL APLICADA À SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO COM n FASES 502

G.3 - PARÂMETROS MODAIS 509

G.3.1 - MATRIZES DE IMPEDÂNCIAS MODAIS $[Z_{modal}]$ E DE ADMITÂNCIAS MODAIS $[Y_{modal}]$ 509

G.3.2 - MATRIZES DE IMPEDÂNCIAS E ADMITÂNCIAS CARACTERÍSTICAS EM QUANTIDADES MODAIS 512

G.3.3 - VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO MODAL E TEMPO DE VIAGEM MODAL 515

G.4 - MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO 516

G.4.1 - LINHAS NÃO TRANSPOSTAS 517

G.4.2 - LINHAS TRANSPOSTAS 518

G.5 - ANÁLISE PARA CIRCUITOS DUPLOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO 525

G.6 - EXEMPLO PARA OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS 532

G.7 - CONCLUSÕES 536

BIBLIOGRAFIA 537

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

A evolução do consumo de energia elétrica e a exploração de grandes recursos energéticos fizeram com que se desenvolvessem e fossem implantados sistemas elétricos com níveis de tensão cada vez mais elevados. Evoluiu-se, assim, dos níveis de tensão mais baixos (13,8 kV e abaixo), para os níveis de alta tensão (69 kV a 138 kV), até se atingirem, atualmente, os níveis de extra alta tensão (230 kV a 500 kV). Vislumbram-se,ainda, para o futuro, níveis de ultra alta tensão (750 kV a 1200 kV), sendo inclusive que sistemas com esses níveis de tensão já se encontram em fase de estudos e de implantação.

Com essa evolução nos níveis de tensão,aumentaram-se muito os requisitos para projeto e operação de tais sistemas.

Do ponto de vista de transitórios eletromagnéticos,maior atenção deve ser dada para os sistemas com níveis de tensão superiores a 138 kV, devido, principalmente, aos transitórios provocados por chaveamentos. Para os sistemas com níveis de tensão inferiores, os transitórios de chaveamento não são tão importantes do ponto de vista de seus valores, sendo de importância maior a análise de desempenho desses sistemas frente aos problemas provocados por descargas atmosféricas.

Entre os estudos que normalmente são desenvolvidos para análise de transitórios eletromagnéticos, destacam-se :

- análise de desempenho de subestações frente às descargas atmosféricas;

- estudos de tensão de restabelecimento transitória (TRV-Transient Recovery Voltage) e a sua taxa de variação (RRRV - Rate of Rise of Recovery Voltage). Esses estudos são desenvolvidos com o objetivo de especificar disjuntores e avaliar, para disjuntores em operação, a possibilidade de superação de sua capacidade , em função da expansão do sistema elétrico;

- estudos de chaveamento de componentes, tais como linhas de transmissão, reatores e capacitores;

- estudos de aplicação e remoção de faltas;

- estudos de fenômenos físicos especiais, como ferroressonância e oscilações subsíncronas.

A análise dos transitórios eletromagnéticos atualmente é desenvolvida através da utilização dos TNAs (Transient Network Analyzer) e dos programas digitais. Os TNAs são equipamentos onde os componentes do sistema elétrico são representados através de modelos reduzidos do componente real. Os programas digitais, que são as ferramentas mais utilizadas atualmente, consistem em conjuntos de instruções computacionais com o objetivo de simular o comportamento do sistema elétrico, sendo que cada componente desse sistema é representado através de um modelo matemático.

Várias metodologias matemáticas têm sido desenvolvidas com o objetivo de representar, de maneira mais adequada, o comportamento dos sistemas elétricos. A referência [37] mencio-

na uma série de trabalhos que mostram a evolução dessas metodologias, entre as quais destaca-se aquela na qual se baseia o programa EMTP (Electromagnetic Transients Program) [20]. Este programa foi inicialmente desenvolvido por H.W. Dommel [9], quando apresentava por volta de 5000 instruções. Posteriormente, o programa passou a sofrer alterações sucessivas com a implantação de novos modelos e com o aperfeiçoamento dos modelos antigos.

Face à grande importância desse programa, e à sua larga utilização, resolveu-se desenvolver um trabalho de tese, com o objetivo de analisar alguns dos modelos ali disponíveis. Para atender esse objetivo, foi desenvolvido um programa computacional, baseado na mesma metodologia do EMTP, e que considera apenas os seguintes modelos, também disponíveis no EMTP : ramos RLC com e sem acoplamento, fontes de tensão e de corrente, chaves e linhas de transmissão.

Cada um dos capítulos deste trabalho contém uma descrição física do componente, o seu modelo matemático, os recursos computacionais utilizados para simular o componente, e um exemplo numérico completo do processo de cálculo.

No capítulo 2 é apresentada a modelagem de ramos RLC, através de parâmetros concentrados, sem considerar os acoplamentos indutivo e eletrostático que podem existir entre vários ramos desse tipo. As equações diferenciais que descrevem o comportamento físico desses ramos são transformadas em equações algébricas através da aplicação do método trapezoidal. O apêndice A apresenta as principais características desse método.

No capítulo 3 é desenvolvida toda a modelagem para as fontes de tensão e de corrente. Adotaram-se apenas quatro formas de onda para representar tais fontes : senoidal, degrau , rampa limitada por degrau e rampa de dupla inclinação.

No capítulo 4 são desenvolvidas, a partir dos modelos matemáticos apresentados nos capítulos 2 e 3, as equações matriciais para o cálculo das tensões. Para os outros modelos considerados neste trabalho, a equação geral de solução é a mesma , diferenciando-se apenas na forma como seus elementos são montados. Para armazenamento das matrizes de admitâncias do sistema adotaram-se técnicas de exploração da esparsidade (apêndice B). Para o cálculo das tensões, ao invés de se considerar o processo de inversão de matrizes, adotou-se o processo de fatoração. Os aspectos associados a ordenação-fatoração-solução estão descritos, respectivamente, nos apêndices C, D e E.

No capítulo 5 está apresentada a modelagem de ramos RLC, através de parâmetros concentrados, considerando-se os acoplamentos indutivo e eletrostático que podem existir entre esses ramos. A diferença básica entre esse modelo e aquele apresentado no capítulo 2, é que as quantidades escalares consideradas no capítulo 2 são agora substituídas por quantidades matriciais, de maneira a considerar os acoplamentos.

O capítulo 6 apresenta a modelagem de chaves. Além dos modelos de chaves controladas por tempo e por tensão, também disponíveis no EMTP, considerou-se um modelo para as chave semicondutoras (diodos e tiristores). A aplicação do método trapezoidal junto com os modelos de chaves, pode provocar, em algumas situações particulares, o aparecimento de oscilações numéricas nos resultados de tensões e de correntes. O apêndice F descreve as causas dessas oscilações e como eliminá-las.

O capítulo 7 apresenta a modelagem de linhas de transmissão, através de parâmetros concentrados e distribuídos, considerando-se linhas transpostas e não transpostas. Para a modelagem das linhas de transmissão a n fases, considerou-se a aplicação da teoria modal, que produz o desacoplamento das fases nas equações das linhas de transmissão. As principais características da teoria modal estão descritas no apêndice G.

O capítulo 8 compara resultados obtidos pelo programa computacional desenvolvido neste trabalho com resultados do EMTP, soluções analíticas e testes de TNA.

Deve-se ressaltar que o objetivo principal deste trabalho não é o de analisar casos específicos de transitórios eletromagnéticos, mas sim de apresentar, de maneira didática, uma análise detalhada dos modelos mencionados, de forma a permitir aos usuários do programa EMTP um maior conhecimento de alguns dos modelos disponíveis nesse programa.

Seria conveniente que, a partir deste trabalho, outros fossem desenvolvidos com o objetivo de analisar uma série de outros modelos complexos do EMTP, como a representação de elementos não lineares e os modelos de linhas de transmissão que consideram a variação de seus parâmetros com a frequência. Esses novos trabalhos, além de ampliarem o conhecimento sobre o EMTP, permitiriam o desenvolvimento de novos modelos, e até melhorar os modelos disponíveis atualmente no programa.

CAPÍTULO 2 - MODELAGEM DE ELEMENTOS DE SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA ATRAVÉS DE PARÂMETROS CONCENTRADOS

2.1 - INTRODUÇÃO

Os elementos que compõem os sistemas elétricos de potência podem ser representados através de parâmetros concentrados ou distribuídos. Embora para a maioria desses elementos seja possível uma representação através de parâmetros distribuídos, normalmente utiliza-se a representação através de parâmetros concentrados.

A representação através de parâmetros distribuídos, fisicamente, é uma representação mais realista, porém, a representação através de parâmetros concentrados é muito mais simples e produz, praticamente, quase que os mesmos resultados.

Entre os elementos que normalmente são representados através de parâmetros concentrados, pode-se citar : bancos de capacitores, reatores e resistores. Para as linhas de transmissão e os cabos, que caracterizam circuitos a parâmetros distribuídos, também pode-se utilizar a representação através de parâmetros concentrados, desde que o efeito de acoplamento entre as fases possa ser considerado.

Dependendo do tipo de estudo de transitórios eletromagnéticos a ser desenvolvido, a representação através de parâmetros

concentrados é a mais apropriada, principalmente para aqueles componentes cuja característica inerente é a de parâmetros concentrados, como os capacitores, reatores e resistores. O erro para tal representação pode ser considerado como sendo devido apenas ao processo numérico [9, 14] utilizado para determinar a solução das equações diferenciais que descrevem o comportamento de cada um dos componentes considerados. Os problemas associados a representação das linhas de transmissão, através de parâmetros concentrados, serão apresentados no capítulo 7.

A análise da modelagem através de parâmetros concentrados, desenvolvida neste capítulo, não considera o acoplamento entre as fases de um sistema com n fases, e trata apenas de ramos com os elementos básicos de sistema elétricos, que são a resistência, a indutância e a capacitância, e também, as associações possíveis desses elementos. Dessa forma, os ramos que poderão ser representados, considerando-se os elementos básicos dos sistemas elétricos de potência, serão :

- ramo com resistência R
- ramo com indutância L
- ramo com capacitância C
- ramo com resistência R e indutância L
- ramo com resistência R e capacitância C
- ramo com indutância L e capacitância C
- ramo com resistência R, indutância L e capacitância C.

A análise será desenvolvida considerando-se a aplicação do método trapezoidal às equações que descrevem o comportamento de cada um dos ramos mencionados. A aplicação do método trapezoidal resultará num conjunto de equações algébricas, que serão utilizadas para implementação computacional. Os aspectos dessa implementação serão apresentados, mostrando-se principalmente a sequência de cálculo para os ramos considerados.

2.2 - RAMO R

Considere-se a figura 2.1.

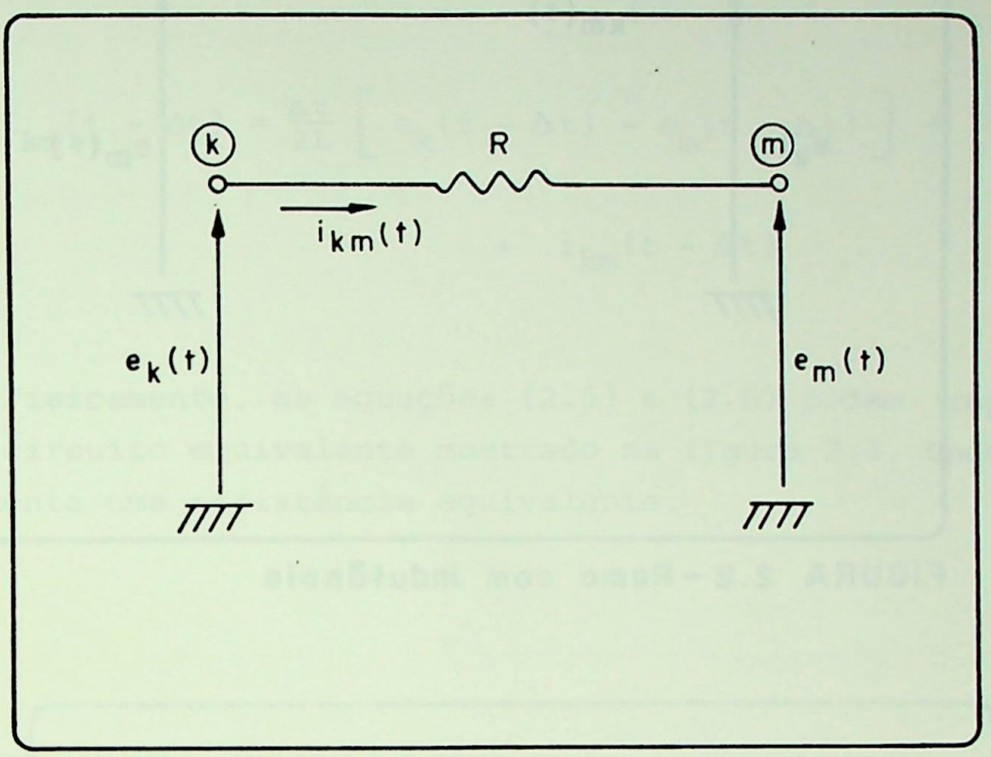


FIGURA 2.1 - Ramo com resistência

A equação (2.1) descreve o comportamento desse ramo.

$$i_{km}(t) = \frac{1}{R} \left[e_k(t) - e_m(t) \right] \qquad (2.1)$$

Como a equação (2.1) é uma equação algébrica, não será necessária nenhuma transformação, e esta será usada na análise transitória de ramos com resistências.

2.3 - RAMO L

Considere-se a figura 2.2.

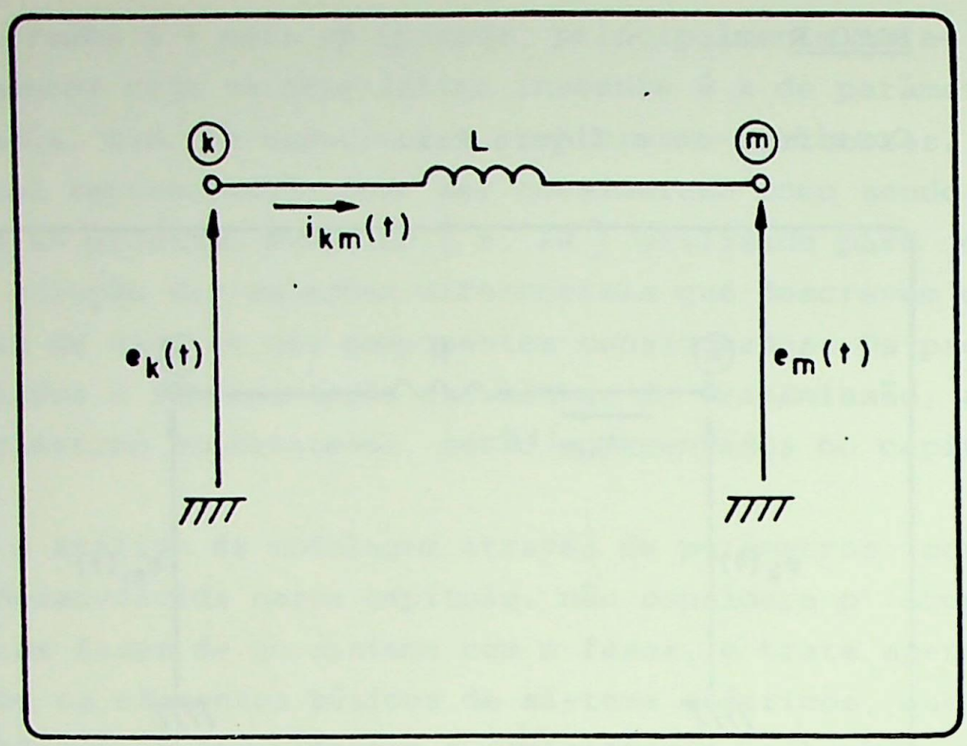


FIGURA 2.2 - Ramo com indutância

A equação (2.2) descreve o comportamento desse ramo.

$$e_k(t) - e_m(t) = L \frac{di_{km}(t)}{dt} \qquad (2.2)$$

A equação (2.2) pode ser escrita da seguinte forma :

$$\frac{di_{km}(t)}{dt} = \frac{1}{L} \left[e_k(t) - e_m(t) \right] \qquad (2.3)$$

Aplicando-se o método trapezoidal à equação (2.3), obtém-se :

$$i_{km}(t) = i_{km}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L} \left[e_k(t) - e_m(t) + e_k(t - \Delta t) - e_m(t - \Delta t) \right] \qquad (2.4)$$

Dividindo-se a equação (2.4) em outras duas, resulta :

$$i_{km}(t) = \frac{\Delta t}{2L} \left[e_k(t) - e_m(t) \right] + I_{km}(t - \Delta t) \qquad (2.5)$$

$$I_{km}(t - \Delta t) = \frac{\Delta t}{2L} \left[e_k(t - \Delta t) - e_m(t - \Delta t) \right] +$$

$$+ \; i_{km}(t - \Delta t) \qquad (2.6)$$

Fisicamente, as equações (2.5) e (2.6) podem representar o circuito equivalente mostrado na figura 2.3, onde R_{EQ} representa uma resistência equivalente.

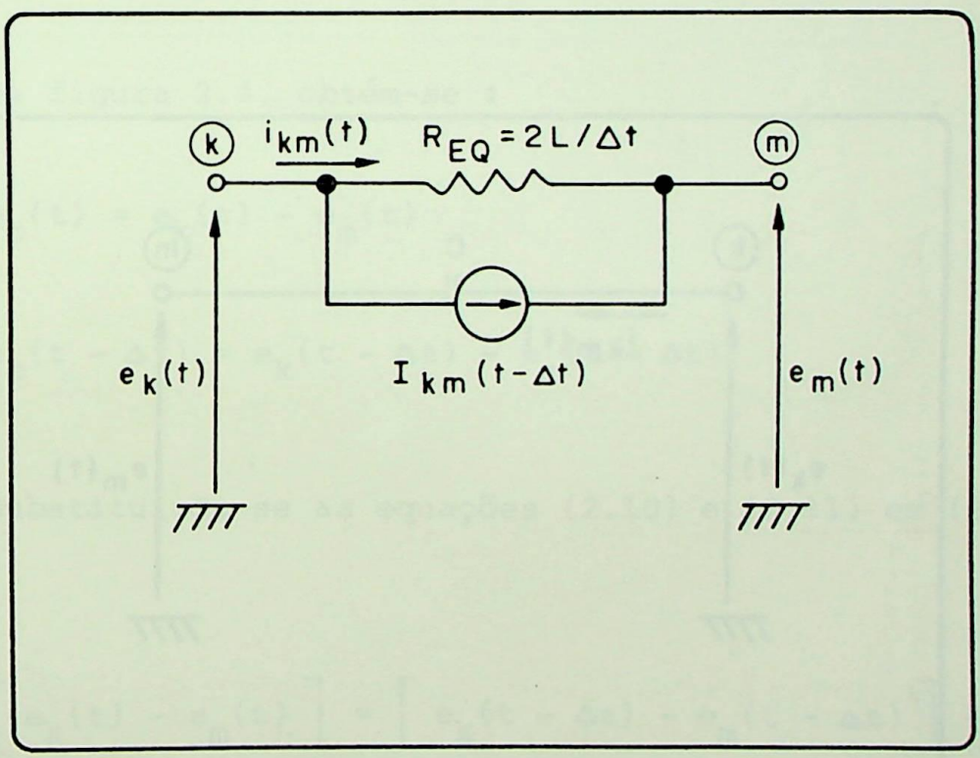


FIGURA 2.3 - Circuito equivalente resultante da aplicação do método trapezoidal à equação de um ramo L

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca
MACÁ
B.M

O valor $I_{km}(t - \Delta t)$, na equação (2.6), é denominado fonte de corrente de história passada e depende dos valores de tensão e corrente do intervalo de tempo anterior $(t - \Delta t)$.

A aplicação do método trapezoidal permite transformar a indutância em um circuito composto de uma resistência, R_{EQ}, em paralelo com uma fonte de corrente, $I_{km}(t - \Delta t)$. Dessa forma, transforma-se uma equação diferencial em duas equações algébricas simples.

2.4 - RAMO C

Considere-se a figura 2.4.

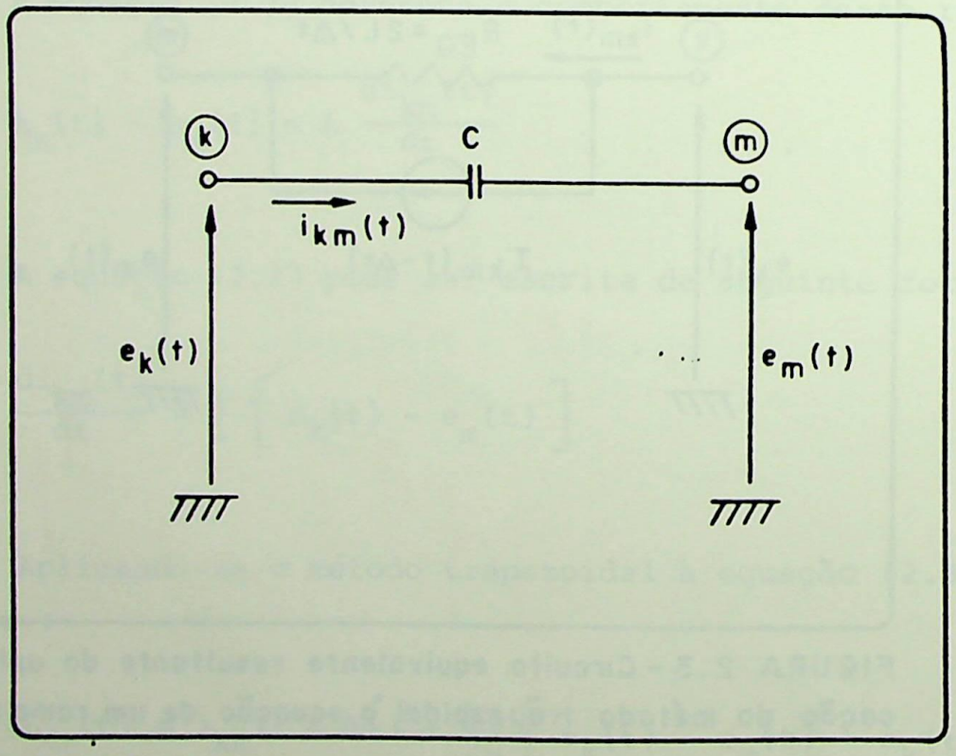


FIGURA 2.4 - Ramo com capacitância

Para o capacitor é possível escrever :

$$i_{km}(t) = C \frac{de_c(t)}{dt} \qquad (2.7)$$

onde $e_c(t)$ é o valor da tensão aplicada ao capacitor.

Da equação (2.7), obtém-se :

$$\frac{de_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_{km}(t) \qquad (2.8)$$

Aplicando-se o método trapezoidal à equação (2.8), resulta :

$$e_c(t) = e_c(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2C} \left[i_{km}(t) + i_{km}(t - \Delta t) \right] \qquad (2.9)$$

Da figura 2.4, obtém-se :

$$e_c(t) = e_k(t) - e_m(t) \qquad (2.10)$$

$$e_c(t - \Delta t) = e_k(t - \Delta t) - e_m(t - \Delta t) \qquad (2.11)$$

Substituindo-se as equações (2.10) e (2.11) em (2.9), resulta :

$$\left[e_k(t) - e_m(t) \right] = \left[e_k(t - \Delta t) - e_m(t - \Delta t) \right] + \frac{\Delta t}{2C} \left[i_{km}(t) + i_{km}(t - \Delta t) \right] \qquad (2.12)$$

Dividindo-se a equação (2.12) em outras duas, obtém-se:

$$i_{km}(t) = \frac{2C}{\Delta t}\left[e_k(t) - e_m(t) \right] + I_{km}(t - \Delta t) \qquad (2.13)$$

$$I_{km}(t - \Delta t) = - \frac{2C}{\Delta t}\left[e_k(t - \Delta t) - e_m(t - \Delta t) \right] - i_{km}(t - \Delta t) \qquad (2.14)$$

Fisicamente, as equações (2.13) e (2.14) podem representar o circuito equivalente mostrado na figura 2.5.

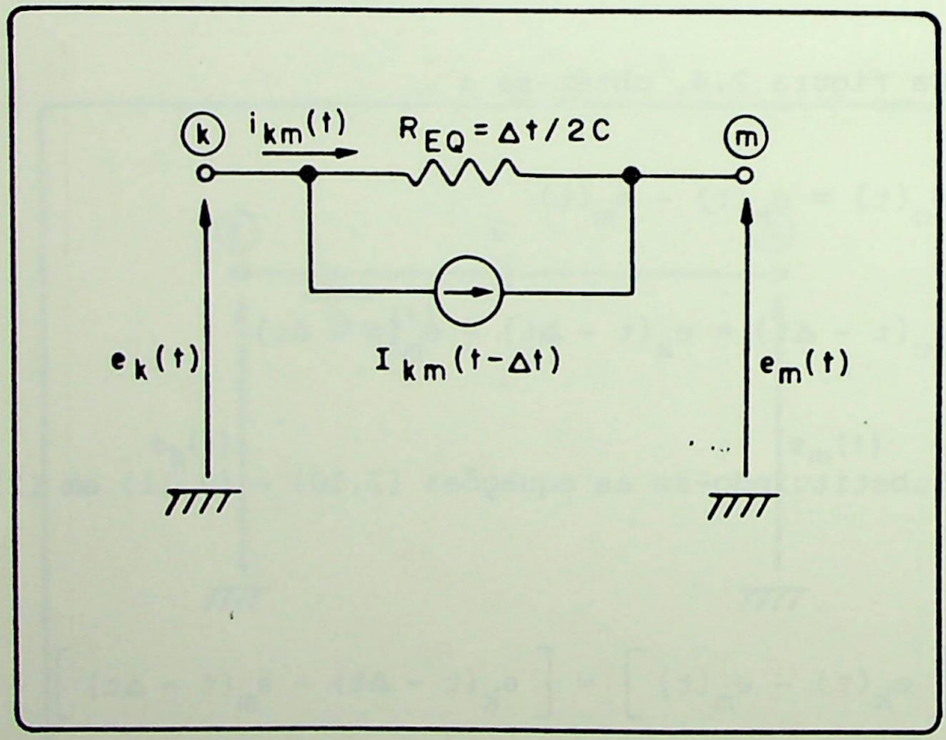


FIGURA 2.5 - Circuito equivalente resultante da aplicação do método trapezoidal à equação de um ramo C

A aplicação do método trapezoidal permite transformar a capacitância em um circuito composto de uma resistência, $R_{EQ} = \Delta t/2C$, em paralelo com uma fonte de corrente de história passada , $I_{km}(t - \Delta t)$.

Para a capacitância, também foi possível transformar uma equação diferencial em duas equações algébricas simples.

2.5 - RAMO RL

Considere-se a figura 2.6.

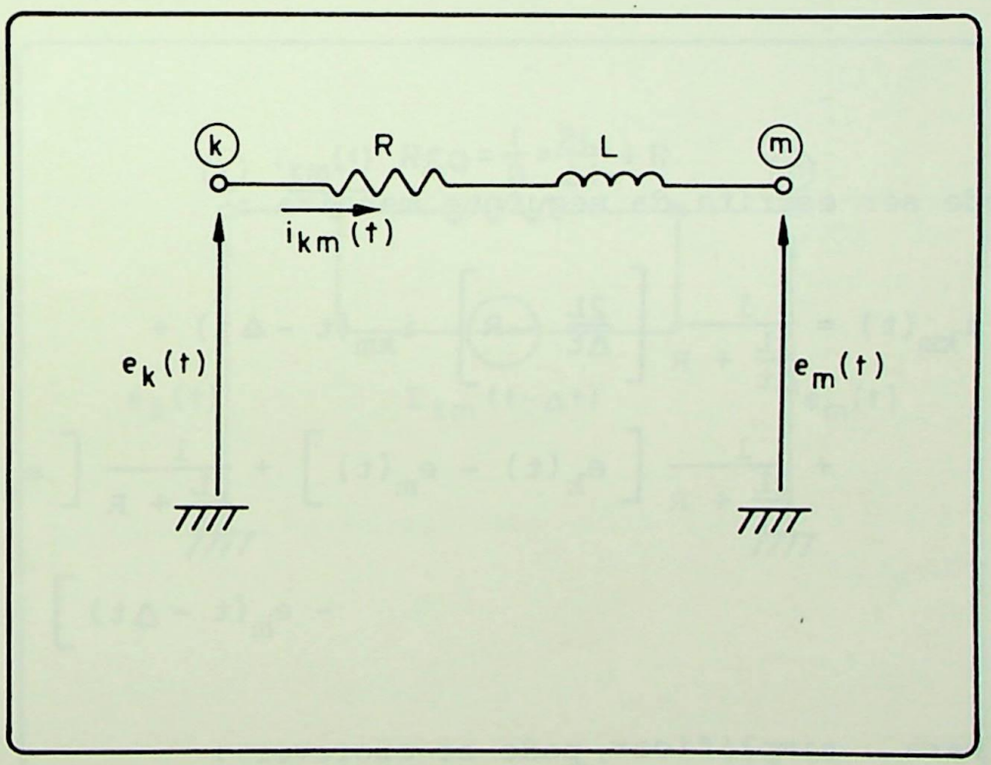


FIGURA 2.6 - Ramo série com resistência e indutância

A equação (2.15) descreve o comportamento desse ramo.

$$e_k(t) - e_m(t) = R\, i_{km}(t) + L \frac{di_{km}(t)}{dt} \qquad (2.15)$$

Reescrevendo-se a equação (2.15), obtém-se :

$$\frac{di_{km}(t)}{dt} = \frac{1}{L}\left[e_k(t) - e_m(t) \right] - \frac{R}{L}\, i_{km}(t) \qquad (2.16)$$

Aplicando-se o método trapezoidal à equação (2.16), obtém-se :

$$i_{km}(t) - i_{km}(t - \Delta t) = \frac{\Delta t}{2L}\left[e_k(t) - e_m(t) + e_k(t - \Delta t) - e_m(t - \Delta t) \right] - \frac{\Delta t\, R}{2L}\left[i_{km}(t) + i_{km}(t - \Delta t) \right] \qquad (2.17)$$

que pode ser escrita da seguinte maneira :

$$i_{km}(t) = \frac{1}{\frac{2L}{\Delta t} + R}\left[\frac{2L}{\Delta t} - R \right] i_{km}(t - \Delta t) + \frac{1}{\frac{2L}{\Delta t} + R}\left[e_k(t) - e_m(t) \right] + \frac{1}{\frac{2L}{\Delta t} + R}\left[e_k(t - \Delta t) - e_m(t - \Delta t) \right] \qquad (2.18)$$

Para simplificar, pode-se escrever :

$$G = \frac{1}{R + \frac{2L}{\Delta t}} \qquad (2.19)$$

$$H = \frac{1}{R + \frac{2L}{\Delta t}} \left[R - \frac{2L}{\Delta t} \right] = G \left[R - \frac{2L}{\Delta t} \right] \qquad (2.20)$$

Substituindo-se (2.19) e (2.20) em (2.18), e dividindo-se a equação em outras duas, obtém-se :

$$i_{km}(t) = G \left[e_k(t) - e_m(t) \right] + I_{km}(t - \Delta t) \qquad (2.21)$$

$$I_{km}(t - \Delta t) = G \left[e_k(t - \Delta t) - e_m(t - \Delta t) \right] -$$

$$- H\, i_{km}(t - \Delta t) \qquad (2.22)$$

Fisicamente, as equações (2.21) e (2.22) podem representar o circuito equivalente mostrado na figura 2.7.

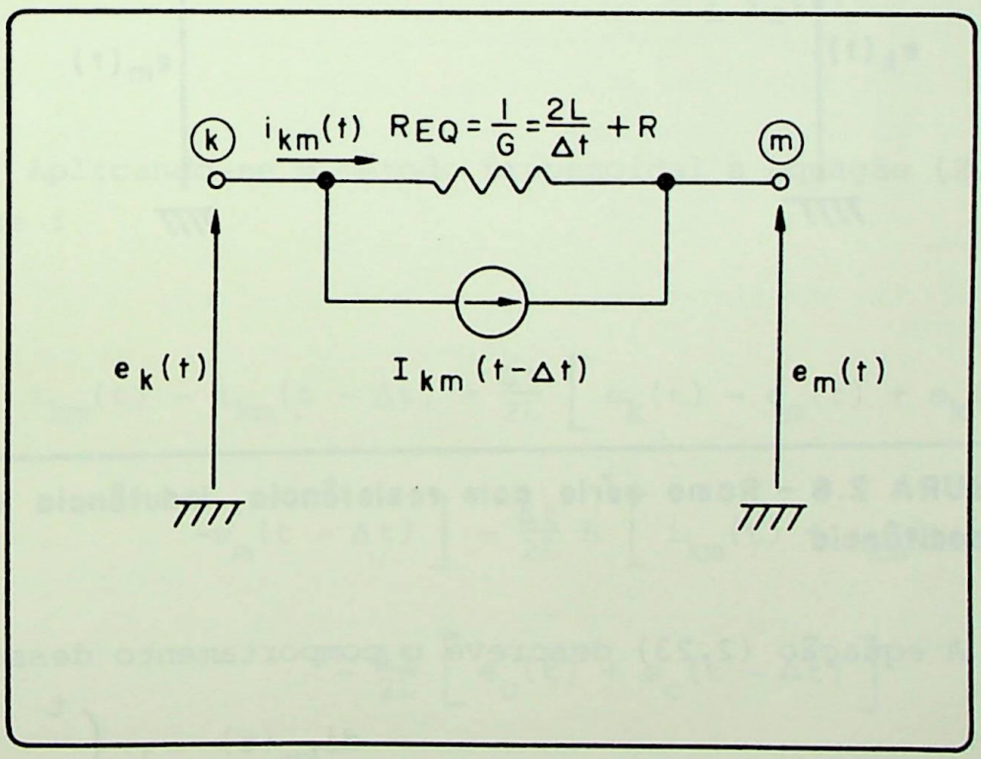


FIGURA 2.7 - Circuito equivalente resultante da aplicação do método trapezoidal à equação de um ramo RL

Neste caso, as transformações obtidas são análogas às dos casos anteriores.

2.6 - RAMO RLC

Considere-se a figura 2.8.

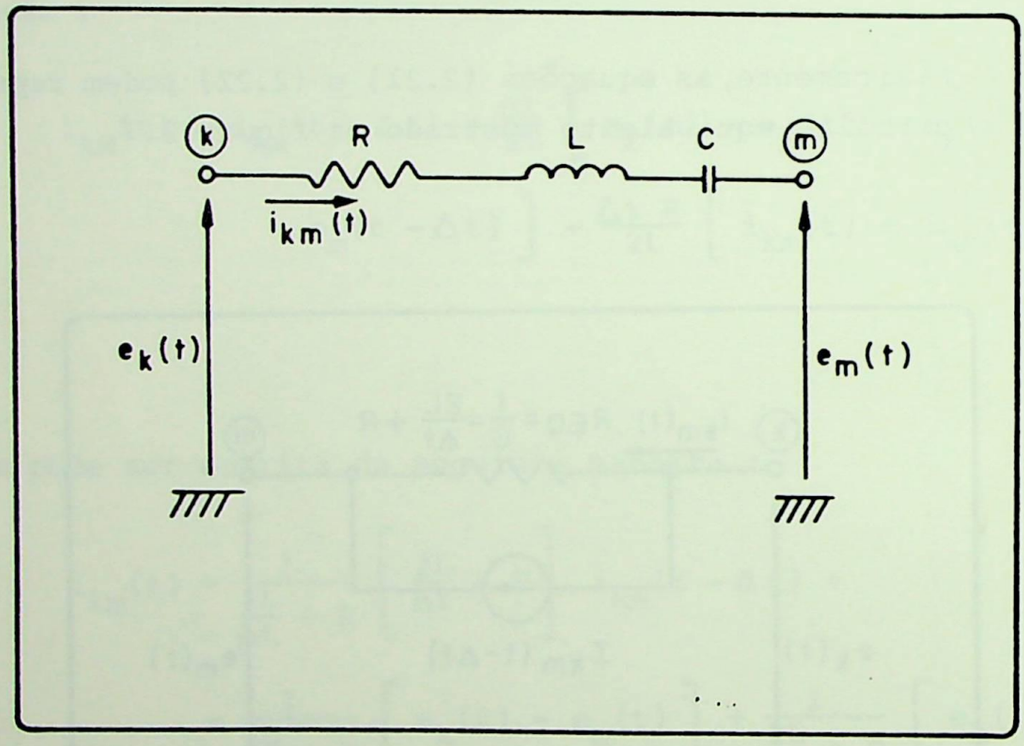


FIGURA 2.8 - Ramo série com resistência, indutância e capacitância

A equação (2.23) descreve o comportamento desse ramo,

$$e_k(t) - e_m(t) = R\, i_{km}(t) + L \frac{di_{km}(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_{km}(t)dt + e_c(0) \qquad (2.23)$$

onde $e_c(0)$ é a tensão inicial no capacitor.

Para o capacitor, tem-se :

$$e_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_{km}(t)dt + e_c(0) \qquad (2.24)$$

Substituindo-se (2.24) em (2.23),obtém-se :

$$e_k(t) - e_m(t) = R\, i_{km}(t) + L\,\frac{di_{km}(t)}{dt} + e_c(t) \qquad (2.25)$$

Reescrevendo-se a equação(2.25), obtém-se :

$$\frac{di_{km}(t)}{dt} = \frac{1}{L}\left[\, e_k(t) - e_m(t)\,\right] - \frac{R}{L}\, i_{km}(t) - \frac{1}{L}\, e_c(t) \qquad (2.26)$$

Aplicando-se o método trapezoidal à equação (2.26), obtém-se :

$$i_{km}(t) - i_{km}(t-\Delta t) = \frac{\Delta t}{2L}\left[\, e_k(t) - e_m(t) + e_k(t-\Delta t) - e_m(t-\Delta t)\,\right] - \frac{\Delta t}{2L}\, R\left[\, i_{km}(t) + i_{km}(t-\Delta t)\,\right] - \frac{\Delta t}{2L}\left[\, e_c(t) + e_c(t-\Delta t)\,\right] \qquad (2.27)$$

Substituindo-se a equação (2.9) na equação (2.27), resulta :

$$\frac{2L}{\Delta t}\left[i_{km}(t) - i_{km}(t-\Delta t)\right] + R\left[i_{km}(t) + i_{km}(t-\Delta t)\right] =$$

$$= \left[e_k(t) - e_m(t) + e_k(t-\Delta t) - e_m(t-\Delta t)\right] -$$

$$- e_c(t-\Delta t) - \frac{\Delta t}{2C}\left[i_{km}(t) + i_{km}(t-\Delta t)\right] -$$

$$- e_c(t-\Delta t) \qquad (2.28)$$

Reescrevendo-se a equação (2.28) e adotando-se :

$$G = \frac{1}{R + \frac{2L}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2C}} \qquad (2.29)$$

$$H = \frac{1}{R + \frac{2L}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2C}}\left[R - \frac{2L+\frac{\Delta t}{2C}}{\Delta t}\right] = G\left[R - \frac{2L}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2C}\right] \qquad (2.30)$$

obtém-se :

$$i_{km}(t) = G\left[e_k(t) - e_m(t)\right] + I_{km}(t-\Delta t) \qquad (2.31)$$

$$I_{km}(t-\Delta t) = G\left[e_k(t-\Delta t) - e_m(t-\Delta t)\right] -$$

$$- H\, i_{km}(t-\Delta t) - 2G\, e_c(t-\Delta t) \qquad (2.32)$$

Fisicamente, as equações (2.31) e (2.32) podem representar o circuito equivalente mostrado na figura 2.9. O valor de $e_c(t)$ está definido na equação (2.9), e o valor $e_c(t-\Delta t)$, que

aparece na equação (2.32), corresponde ao valor de $e_c(t)$ calcu lado no intervalo anterior.

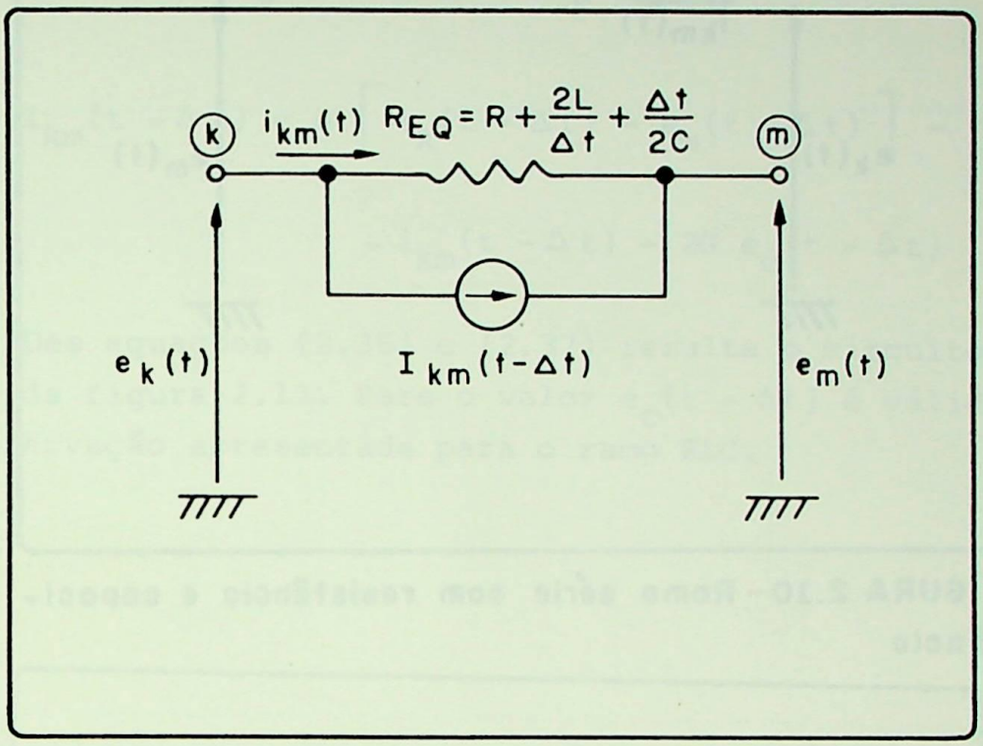


FIGURA 2.9 - Circuito equivalente resultante da aplicação do método trapezoidal à equação de um ramo RLC

Para este caso, também, as transformações obtidas são análogas às dos casos anteriores.

2.7 - RAMO RC

Considere-se a figura 2.10.

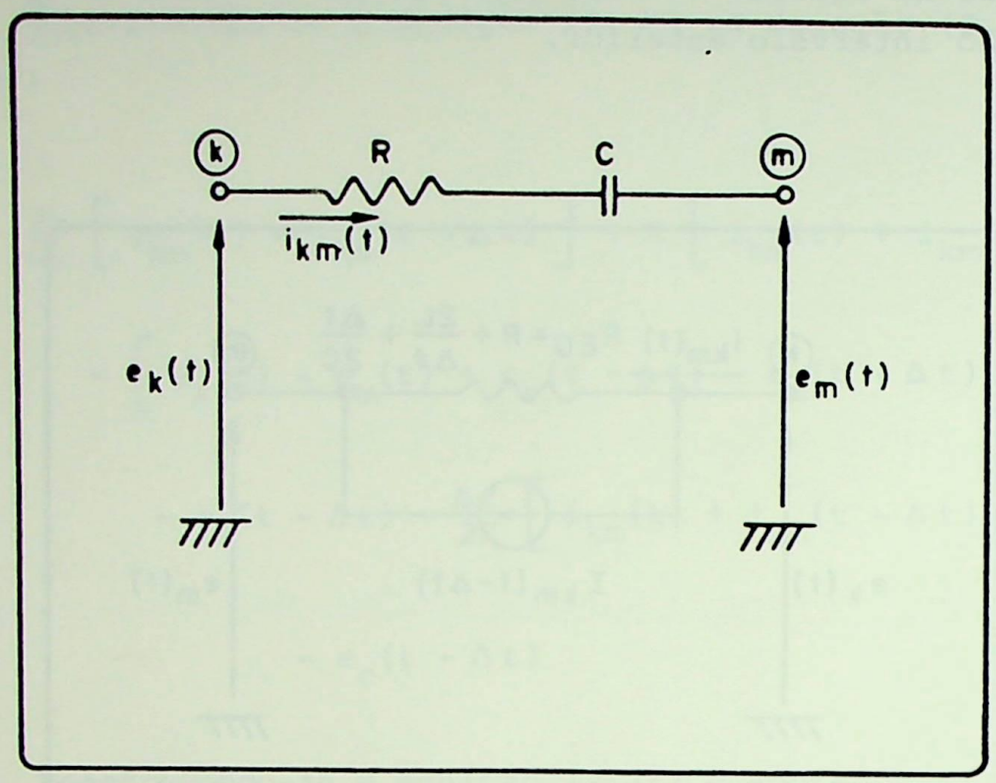


FIGURA 2.10 - Ramo série com resistência e capacitância

A equação (2.33) descreve o comportamento desse ramo,

$$e_k(t) - e_m(t) = R\, i_{km}(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i_{km}(t)dt + e_c(0) \qquad (2.33)$$

onde $e_c(0)$ é a tensão inicial no capacitor.

Este caso pode ser considerado um caso particular do ramo RLC, com L = 0. Dessa forma, a equação (2.9) é válida e nas equações (2.29), (2.30), (2.31) e (2.32) faz-se L = 0, o que resulta :

$$G = \frac{1}{R + \frac{\Delta t}{2C}} \qquad (2.34)$$

$$H = \frac{1}{R + \frac{\Delta t}{2C}} \left[R + \frac{\Delta t}{2C} \right] = G \left[R + \frac{\Delta t}{2C} \right] = 1 \qquad (2.35)$$

$$i_{km}(t) = G \left[e_k(t) - e_m(t) \right] + I_{km}(t - \Delta t) \qquad (2.36)$$

$$I_{km}(t - \Delta t) = G \left[e_k(t - \Delta t) - e_m(t - \Delta t) \right] -$$

$$- i_{km}(t - \Delta t) - 2G\, e_c(t - \Delta t) \qquad (2.37)$$

Das equações (2.36) e (2.37) resulta o circuito equivalente da figura 2.11. Para o valor $e_c(t - \Delta t)$ é válida a mesma observação apresentada para o ramo RLC.

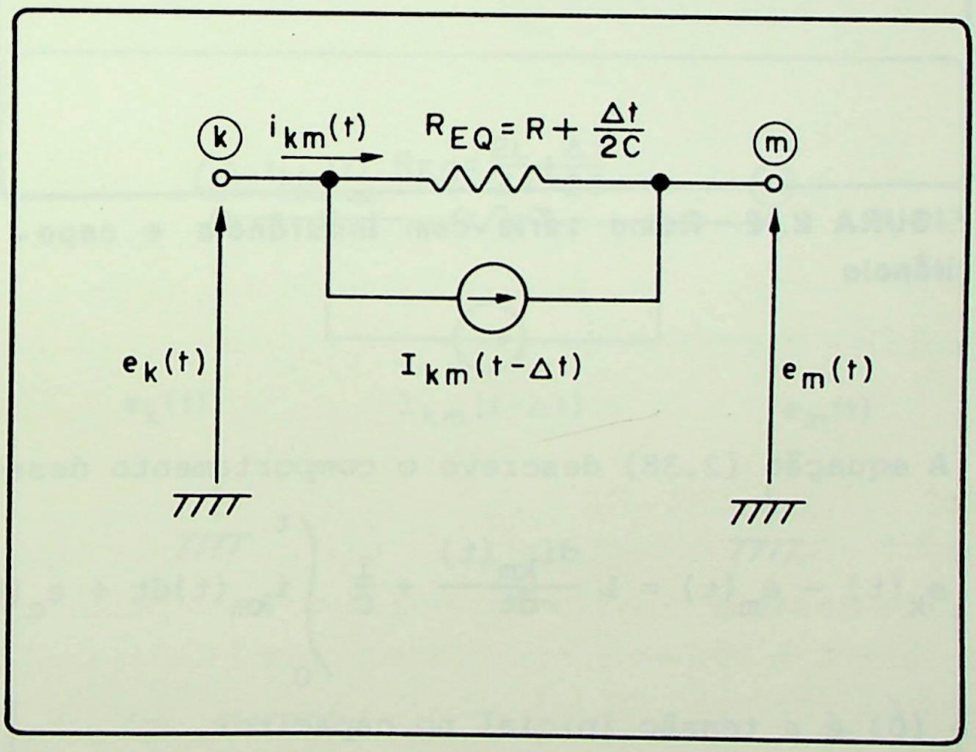


FIGURA 2.11 - Circuito equivalente resultante da aplicação do método trapezoidal à equação de um ramo RC

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ B.M

2.8 - RAMO LC

Considere-se a figura 2.12.

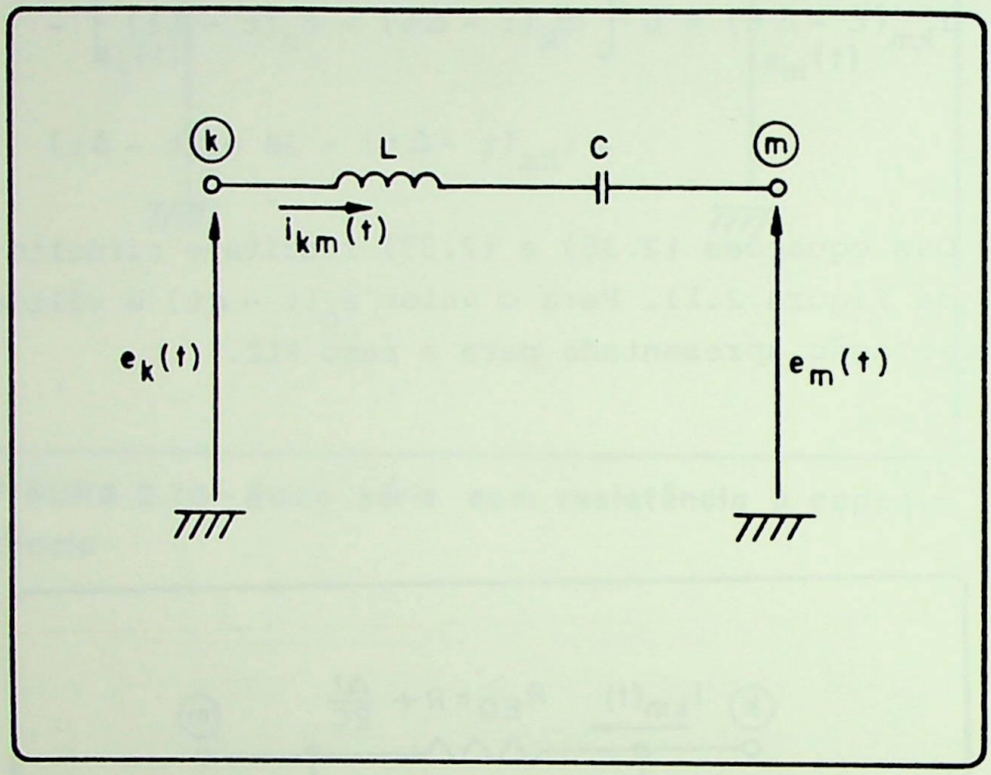


FIGURA 2.12 - Ramo série com indutância e capacitância

A equação (2.38) descreve o comportamento desse ramo,

$$e_k(t) - e_m(t) = L \frac{di_{km}(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_{km}(t)dt + e_c(0) \quad (2.38)$$

onde $e_c(0)$ é a tensão inicial no capacitor.

Este caso também pode ser considerado um caso particular do ramo RLC, com R = 0. Dessa forma, a equação (2.9) é válida e nas equações (2.29), (2.30), (2.31) e (2.32) faz-se R = 0, o que resulta :

$$G = \frac{1}{\frac{2L}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2C}} \tag{2.39}$$

$$H = \frac{1}{\frac{2L}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2C}} \left[- \frac{2L}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2C} \right] = G \left[- \frac{2L}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2C} \right] \tag{2.40}$$

$$i_{km}(t) = G \left[e_k(t) - e_m(t) \right] + I_{km}(t - \Delta t) \tag{2.41}$$

$$I_{km}(t - \Delta t) = G \left[e_k(t - \Delta t) - e_m(t - \Delta t) \right] -$$

$$- H\, i_{km}(t - \Delta t) - 2G\, e_c(t - \Delta t) \tag{2.42}$$

Das equações (2.41) e (2.42) resulta o circuito equivalente da figura 2.13. Para o valor $e_c(t - \Delta t)$ é válida a mesma observação apresentada para o ramo RLC.

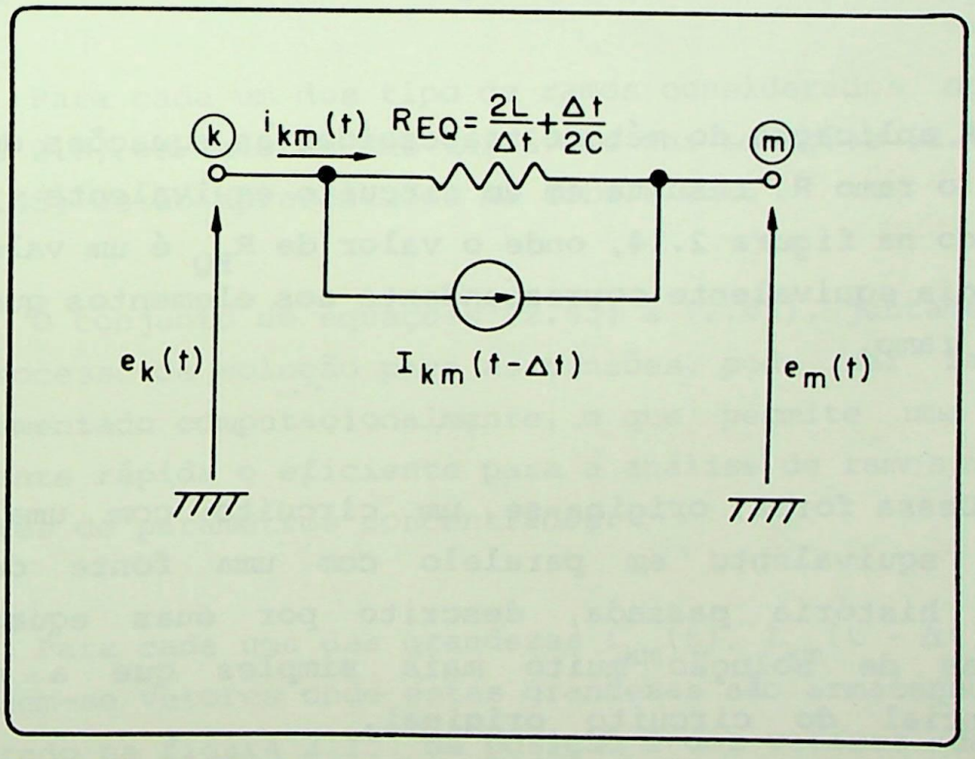


FIGURA 2.13 - Circuito equivalente resultante da aplicação do método trapezoidal à equação de um ramo LC

2.9 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS DA MODELAGEM ATRAVÉS DE PARÂMETROS CONCENTRADOS

Podem-se adotar três equações básicas para os sete tipos de ramos considerados nos itens anteriores :

$$i_{km}(t) = G \left[e_k(t) - e_m(t) \right] + I_{km}(t - \Delta t) \qquad (2.43)$$

$$I_{km}(t - \Delta t) = K \left[e_k(t - \Delta t) - e_m(t - \Delta t) \right] + H\, i_{km}(t - \Delta t) - J \qquad (2.44)$$

$$e_c(t) = e_c(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2C} \left[i_{km}(t) + i_{km}(t - \Delta t) \right] \qquad (2.45)$$

A aplicação do método trapezoidal às equações dos ramos, exceto o ramo R, resulta em um circuito equivalente como o mostrado na figura 2.14, onde o valor de R_{EQ} é um valor de resistência equivalente correspondente aos elementos que constituem o ramo.

Dessa forma, origina-se um circuito com uma resistência equivalente em paralelo com uma fonte de corrente de história passada, descrito por duas equações algébricas de solução muito mais simples que a equação diferencial do circuito original.

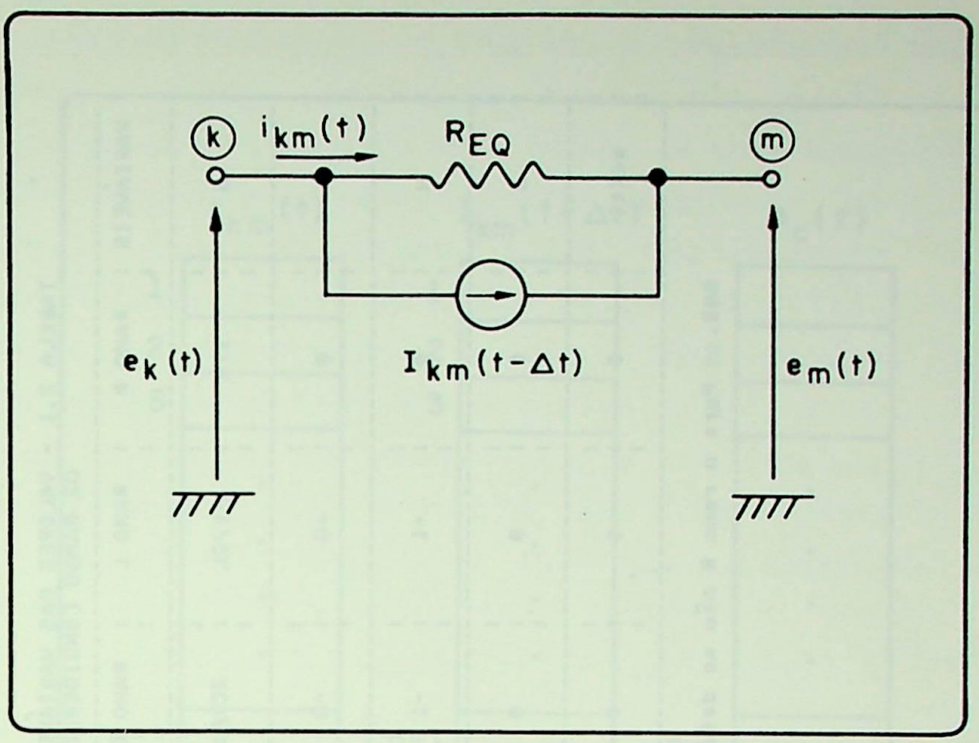


FIGURA 2.14 – Circuito equivalente resultante da aplicação do método trapezoidal à equação de um ramo modelado através de parâmetros concentrados

Para cada um dos tipo de ramos considerados nos itens 2.2 a 2.8, os valores das variáveis das equações (2.43),(2.44) e (2.45) estão apresentados na tabela 2.1.

O conjunto de equações (2.43) a (2.45), juntamente com um processo de solução para as tensões, pode ser facilmente implementado computacionalmente, o que permite uma solução bastante rápida e eficiente para a análise de ramos modelados através de parâmetros concentrados.

Para cada uma das grandezas $i_{km}(t)$, $I_{km}(t - \Delta t)$ e $e_c(t)$, definem-se vetores onde estas grandezas são armazenadas, como mostrado na figura 2.15. Na posição 1 dos vetores da figura 2.15 são armazenados os valores do ramo 1, na posição 2,os do ramo 2, e assim sucessivamente.

TABELA 2.1 - VALORES DAS VARIÁVEIS DAS EQUAÇÕES (2.43), (2.44) E (2.45), PARA CADA UM DOS TIPOS DE RAMOS CONSIDERADOS

VARIÁVEIS	RAMO R	RAMO L	RAMO C	RAMO RL	RAMO RLC	RAMO RC	RAMO LC
G	1/R	$\Delta t/2L$	$2C/\Delta t$	$1/(R + 2L/\Delta t)$	$1/(R + 2L/\Delta t + \Delta t/2C)$	$1/(R + \Delta t/2C)$	$1/(2L/\Delta t + \Delta t/2C)$
K	0	+G	-G	+G	+G	+G	+G
H	0	+1	-1	$-G(R - 2L/\Delta t)$	$-G(R - 2L/\Delta t + \Delta t/2C)$	-1	$-G(-2L/\Delta t + \Delta t/2C)$
J	0	0	0	0	$+2\ G\ ec(t-\Delta t)$	$+2\ G\ ec(t-\Delta t)$	$+2\ G\ ec(t-\Delta t)$
ec(t)	0	0	0	0	EQUAÇÃO (2.45)	EQUAÇÃO (2.45)	EQUAÇÃO (2.45)

OBS. - Para o ramo R não se definem valores de história passada, $Ikm(t-\Delta t)=0$

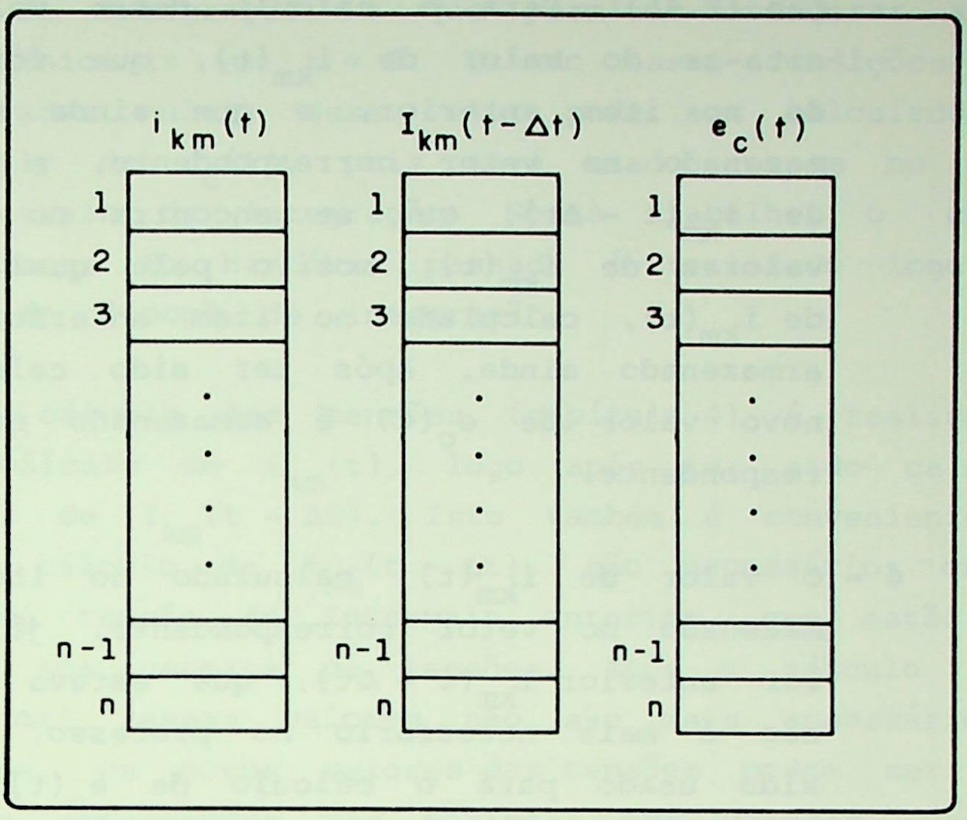


FIGURA 2.15 - Vetores onde são armazenados as grandezas $i_{km}(t)$, $I_{km}(t-\Delta t)$ e $e_c(t)$

A sequência de cálculo para esses valores é muito importante, pois permitirá a criação de apenas uma posição para cada um desses valores, para cada ramo. A sequência correta é a seguinte :

1 - calcula-se o valor de $I_{km}(t-\Delta t)$, através da equação (2.44), e atualizam-se as posições, correspondentes a cada ramo, no vetor que contém os valores de $I_{km}(t-\Delta t)$.

2 - calcula-se o valor de $i_{km}(t)$, através da equação (2.43), porém, nesta etapa, esse valor não deverá ser armazenado no vetor que contém os valores de $i_{km}(t)$.

3 - calcula-se o valor de $e_c(t)$, através da equação (2.45). Para o cálculo desse valor, necessita-se do valor de $i_{km}(t)$, que foi calculado no item anterior, e que ainda não foi armazenado no vetor correspondente, e do valor de $i_{km}(t - \Delta t)$, que se encontra no vetor com valores de $i_{km}(t)$, motivo pelo qual o valor de $i_{km}(t)$, calculado no item anterior, não foi armazenado ainda. Após ter sido calculado, o novo valor de $e_c(t)$ é armazenado no vetor correspondente.

4 - O valor de $i_{km}(t)$, calculado no item 2, é armazenado no vetor correspondente, já que o valor anterior $i_{km}(t - \Delta t)$, que estava armazenado, não é mais necessário no processo, após ter sido usado para o cálculo de $e_c(t)$.

Nota-se que, se esse cálculo fosse realizado em outra sequência, haveria necessidade de se definirem outros vetores para armazenamento das quantidades do intervalo de tempo anterior. Do ponto de vista de solução, isto não altera os resultados, porém apresenta o inconveniente de produzir um aumento nos requisitos de memória computacional. Para se evitar isso, deve-se calcular o valor de $e_c(t)$ para cada ramo, logo que se tenha calculado o valor de $i_{km}(t)$ para o mesmo ramo. Dessa forma, para o mesmo ramo calculam-se esses dois valores juntos. Se o cálculo fosse realizado separadamente, para cada ramo, haveria a necessidade de se definirem dois vetores com os valores de $i_{km}(t)$ e $i_{km}(t - \Delta t)$, necessários para o cálculo de $e_c(t)$, o que corresponderia a um vetor adicional.

Já o valor de $I_{km}(t - \Delta t)$ pode ser calculado de maneira independente. É conveniente que esse cálculo se

ja realizado para todos os ramos logo no início do "loop" de integração, o que permite considerar as condições iniciais em t = 0. Quando essas condições forem consideradas nulas, esse valor pode ser calculado após o cálculo de $e_c(t)$, pois será usado apenas no próximo intervalo de integração. Neste trabalho, o cálculo dos valores de história passada é realizado logo no início do "loop" de integração.

O cálculo das tensões (capítulo 4) é realizado antes do cálculo de $i_{km}(t)$, logo após ter sido calculado o valor de $I_{km}(t - \Delta t)$. Isto também é conveniente, pois, para o cálculo de $I_{km}(t - \Delta t)$, são necessários os valores de tensão do intervalo anterior, que estão armazenados nos vetores de tensões. Após o cálculo de $I_{km}(t - \Delta t)$, esses valores não são mais necessários. Dessa forma, os novos valores das tensões podem ser calculados e armazenados nas posições dos valores anteriores.

O fluxograma mostrado na figura 2.16 apresenta a sequência de processamento adotada neste trabalho, para a modelagem de elementos de sistemas elétricos de potência através de parâmetros concentrados.

Deve-se observar que, para o primeiro intervalo de integração, $t = \Delta t$, os valores definidos para $t - \Delta t$ se referem às condições iniciais do sistema. Têm-se, nesse caso, duas opções :

- considerar-se como condições iniciais os valores de regime permanente em t = 0,
- considerar-se todas as condições iniciais em t= 0 como sendo nulas.

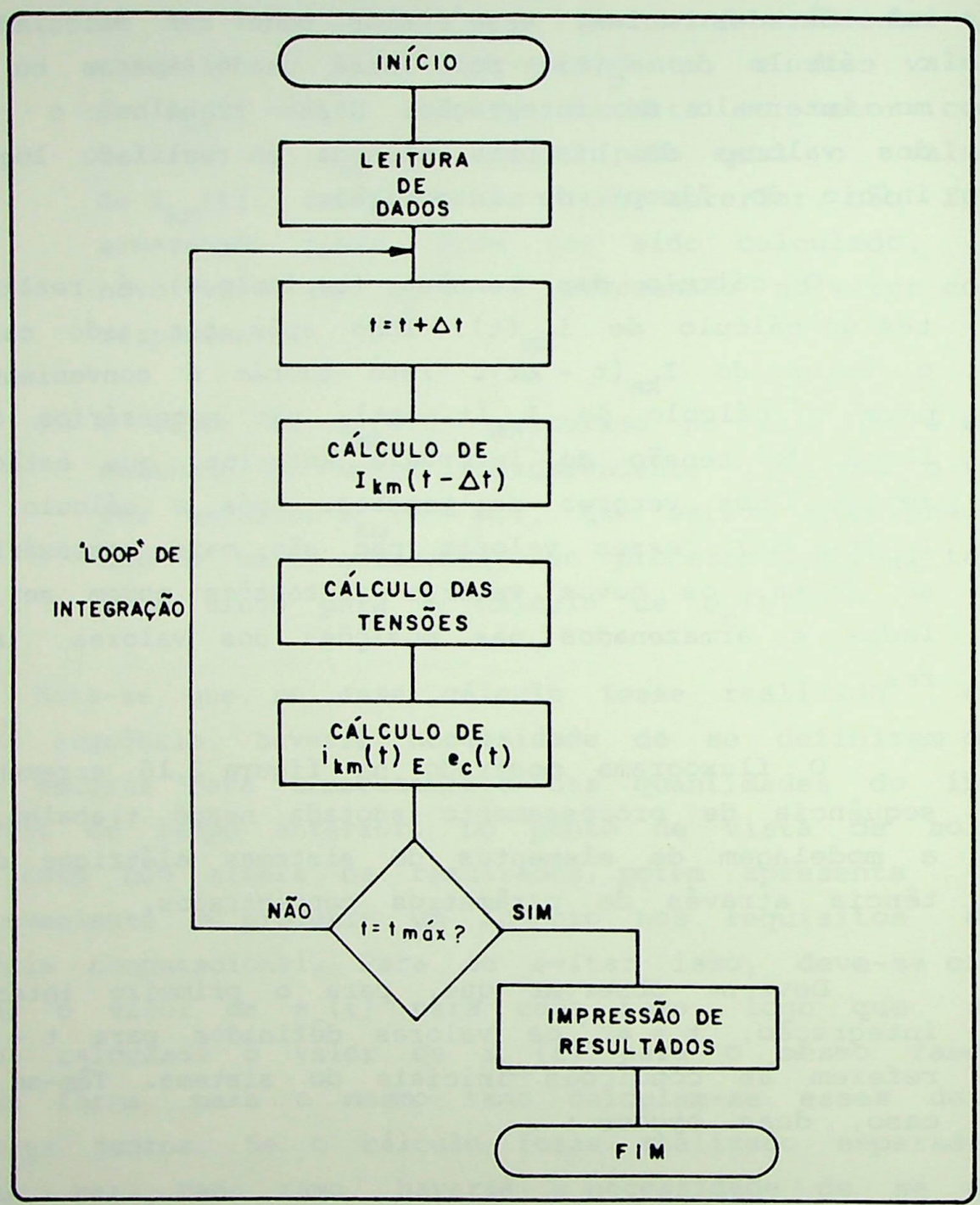


FIGURA 2.16 - Fluxograma básico para processamento de ramos modelados através de parâmetros concentrados

O programa EMTP considera as duas situações, sendo que os valores iniciais podem ser fornecidos ou então calculados pelo próprio programa. Quando não se especifica nada, as condições iniciais são consideradas nulas.

Neste trabalho, todas as condições iniciais são consideradas nulas.

2.10- EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA MODELAGEM ATRAVÉS DE PARÂMETROS CONCENTRADOS

Considere-se a figura 2.17, onde são mostrados dois ramos genéricos de um sistema elétrico qualquer.

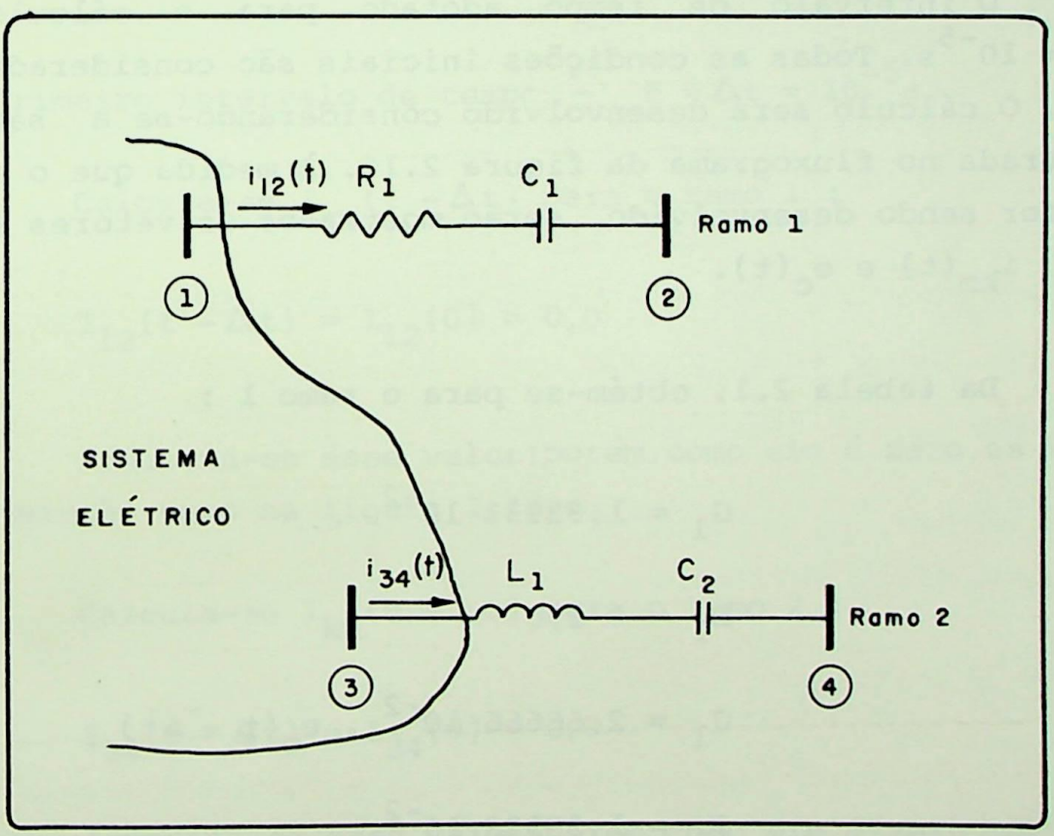


FIGURA 2.17 - Ramos genéricos de um sistema elétrico qualquer

Admite-se que todo o restante do sistema está modelado de alguma outra forma, e que seja possível, em cada intervalo de tempo, obter os valores de tensão em cada barra do sistema, através de um processo qualquer.

Os parâmetros para cada ramo são :

- Ramo 1 - $C_1 = 0,2\ \mu F = 2,0\ 10^{-7}\ F$

$R_1 = 50,0\ \Omega$

- Ramo 2 - $L_1 = 0,25\ mH = 25,0\ 10^{-5}\ H$

$C_2 = 0,4\ \mu F = 4,0\ 10^{-7}\ F$

O intervalo de tempo adotado para o cálculo foi $\Delta t = 10^{-5} s$. Todas as condições iniciais são consideradas nulas. O cálculo será desenvolvido considerando-se a sequência mostrada no fluxograma da figura 2.16. À medida que o processo for sendo desenvolvido, serão mostrados os vetores $I_{km}(t - \Delta t)$, $i_{km}(t)$ e $e_c(t)$.

Da tabela 2.1, obtém-se para o ramo 1 :

$G_1 = 1,33333\ 10^{-2}$ ...

$H_1 = - 1,0$

$J_1 = 2,66666\ 10^{-2} \cdot e_c(t - \Delta t)$

$K_1 = 1,33333\ 10^{-2}$

Da tabela 2.1, obtém-se para o ramo 2 :

$G_2 = 1,6\ 10^{-2}$

$$H_2 = 0,6$$

$$J_2 = 3,2\ 10^{-2}\ e_c(t - \Delta t)$$

$$K_2 = 1,6\ 10^{-2}$$

Na situação inicial (t = 0), como os valores das condições iniciais são nulos, os vetores $I_{km}(t - \Delta t)$, $i_{km}(t)$ e $e_c(t)$ se encontram como mostrado na figura 2.18-a.

Para o cálculo de $i_{km}(t)$, $I_{km}(t - \Delta t)$ e $e_c(t)$, serão utilizadas as equações (2.43), (2.44) e (2.45).

Os cálculos serão realizados apenas para os dois primeiros intervalos de tempo.

- Primeiro intervalo de tempo - $t = \Delta t = 10^{-5}$s

Calcula-se $I_{km}(t - \Delta t)$ para o ramo 1 :

$$I_{12}(t - \Delta t) = I_{12}(0) = 0,0$$

Armazena-se esse valor;porém,como ele é zero,os vetores se mantêm como na figura 2.18-a.

Calcula-se $I_{km}(t - \Delta t)$ para o ramo 2 :

$$I_{34}(t - \Delta t) = I_{34}(0) = 0,0$$

Armazena-se esse valor;porém,como ele é zero,os vetores se mantêm como na figura 2.18-a.

Suponha-se que para as tensões tenham sido encontrados

os seguintes valores :

$$e_1(t) = e_1(\Delta t) = 1,3$$

$$e_2(t) = e_2(\Delta t) = 1,0$$

$$e_3(t) = e_3(\Delta t) = 1,1$$

$$e_4(t) = e_4(\Delta t) = 0,9$$

O processo completo para o cálculo das tensões está descrito no capítulo 4.

Calcula-se $i_{km}(t)$ para o ramo 1 :

$$i_{12}(t) = i_{12}(\Delta t) = 1,33333\ 10^{-2} \left[1,3 - 1,0 \right] + 0 =$$

$$= 3,99999\ 10^{-3}$$

Este valor ainda não é armazenado, calcula-se primeiramente o valor de $e_c(t)$:

$$e_{c1}(t) = e_{c1}(\Delta t) = 0 + 25,0 \left[3,99999\ 10^{-3} + 0 \right] =$$

$$= 9,99998\ 10^{-2}$$

Agora, os valores de $e_c(t)$ e $i_{km}(t)$, para o ramo 1, são armazenados, e os vetores ficam como mostrado na figura 2.18-b.

Calcula-se o valor de $i_{km}(t)$ para o ramo 2 :

$$i_{34}(t) = i_{34}(\Delta t) = 1,6\ 10^{-2} \left[1,1 - 0,9 \right] + 0 =$$

$$= 3,2\ 10^{-3}$$

Este valor ainda não é armazenado, calcula-se primeiramente o valor de $e_c(t)$:

$$e_{c2}(t) = e_{c2}(\Delta t) = 0 + 12,5 \left[3,2\ 10^{-3} + 0 \right] =$$

$$= 4,0\ 10^{-2}$$

Agora, os novos valores de $e_c(t)$ e $i_{km}(t)$, para o ramo 2, são armazenados, como mostrado na figura 2.18-c, o que corresponde ao fim do primeiro intervalo de integração.

Nota-se que o cálculo de $I_{km}(t - \Delta t)$ foi realizado de uma só vez para todos os ramos. Já os cálculos de $i_{km}(t)$ e $e_c(t)$ foram realizados juntos para cada ramo, o que evita que se criem vetores adicionais para armazenamento de $i_{km}(t - \Delta t)$ ou $i_{km}(t)$. Dessa forma, após o valor anterior de $i_{km}(t)$, que corresponde a $i_{km}(t - \Delta t)$, ter sido utilizado no cálculo de $e_c(t)$, o novo valor de $i_{km}(t)$ é armazenado no lugar do valor anterior.

- Segundo intervalo de tempo - $t = 2\Delta t = 2\ 10^{-5}$ s

No início deste intervalo, os vetores se encontram como no final do primeiro intervalo (figura 2.18-c), repetidos por conveniência na figura 2.19-a.

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca
MAUÁ
B.M

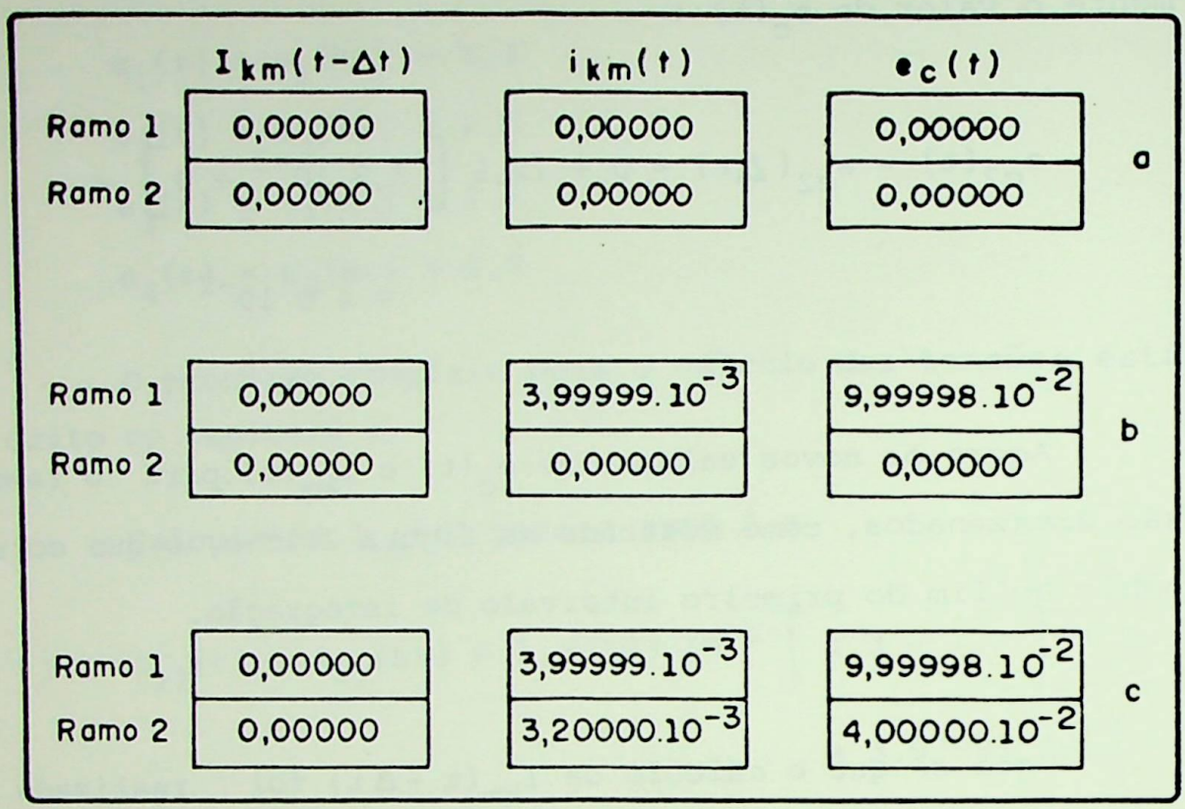


FIGURA 2.18 – Situação dos vetores de $I_{km}(t-\Delta t)$, $i_{km}(t)$ e $e_c(t)$ no primeiro intervalo de tempo.

a – Valores em $t = 0$ e após o cálculo de $I_{km}(t-\Delta t)$ para os dois ramos.

b – Valores após o cálculo de $i_{km}(t)$ e $e_c(t)$ para o ramo 1.

c – Valores após o cálculo de $i_{km}(t)$ e $e_c(t)$ para o ramo 2.

. . .

Calcula-se $I_{km}(t - \Delta t)$ para o ramo 1 :

$$I_{12}(t - \Delta t) = I_{12}(\Delta t) = 1,33333\ 10^{-2} \left[1,3 - 1,0 \right] -$$

$$- 3,99999\ 10^{-3} - (2,66666\ 10^{-2})\ (9,99998\ 10^{-2})$$

$$I_{12}(t - \Delta t) = - 2,66666\ 10^{-3}$$

Este novo valor é armazenado, e os vetores ficam como mostrado na figura 2.19-b.

Calcula-se $I_{km}(t - \Delta t)$ para o ramo 2 :

$$I_{34}(t - \Delta t) = I_{34}(\Delta t) = 1,6\ 10^{-2} \left[1,1 - 0,9 \right] +$$

$$+ 0,6\ (3,2\ 10^{-3}) - (3,2\ 10^{-2})$$

$$I_{34}(t - \Delta t) = 3,84\ 10^{-3}$$

Este novo valor é armazenado, e os vetores ficam como mostrado na figura 2.19-c.

Suponha-se que para as tensões tenham sido encontrados os seguintes valores :

$$e_1(t) = e_1(2\Delta t) = 1,4$$

$$e_2(t) = e_2(2\Delta t) = 0,95$$

$$e_3(t) = e_3(2\Delta t) = 1,5$$

$$e_4(t) = e_4(2\Delta t) = 1,1$$

Calcula-se $i_{km}(t)$ para o ramo 1 :

$$i_{12}(t) = i_{12}(2\Delta t) = 1,33333\ 10^{-2} \left[1,4 - 0,95 \right] -$$

$$- 2,66666\ 10^{-3}$$

$$i_{12}(t) = 3,33333\ 10^{-3}$$

Este valor ainda não é armazenado, calcula-se primeiramente o valor de $e_c(t)$:

$$e_{c1}(t) = e_{c1}(2\Delta t) = 9,99998\ 10^{-2} + 25,0 \left[3,33333\ 10^{-3} + \right.$$

$$\left. + 3,99999\ 10^{-3} \right]$$

$$e_{c1}(t) = 2,83333\ 10^{-1}$$

Agora, os novos valores de $e_c(t)$ e $i_{km}(t)$, para o ramo 1, são armazenados, sendo que os vetores ficam como mostrado na figura 2.19-d.

Calcula-se o valor de $i_{km}(t)$ para o ramo 2 :

$$i_{34}(t) = i_{34}(2\Delta t) = 1,6\ 10^{-2} \left[1,5 - 1,1 \right] + 3,84000\ 10^{-3}$$

$$i_{34}(t) = 1,024\ 10^{-2}$$

Este valor ainda não é armazenado, calcula-se primeiramente o valor de $e_c(t)$:

$$e_{c2}(t) = e_{c2}(2\Delta t) = 4,0\ 10^{-2} + 12,5 \left[1,024\ 10^{-2} + \right.$$

$$\left. + 3,2\ 10^{-3} \right]$$

$$e_{c2}(t) = 2,08\ 10^{-1}$$

Agora, os novos valores de $e_c(t)$ e $i_{km}(t)$ são armazenados, sendo que os vetores ficam como mostrado na figura 2.19-e.

Para este segundo intervalo, como existem alterações de todos os valores, ficam mais claras as observações feitas após os cálculos do primeiro intervalo.

	$I_{km}(t-\Delta t)$	$i_{km}(t)$	$e_c(t)$	
Ramo 1	0,00000	$3,99999.10^{-3}$	$9,99998.10^{-2}$	a
Ramo 2	0,00000	$3,20000.10^{-3}$	$4,00000.10^{-2}$	
Ramo 1	$-2,66666.10^{-3}$	$3,99999.10^{-3}$	$9,99998.10^{-2}$	b
Ramo 2	0,00000	$3,20000.10^{-3}$	$4,00000.10^{-2}$	
Ramo 1	$-2,66666.10^{-3}$	$3,99999.10^{-3}$	$9,99998.10^{-2}$	c
Ramo 2	$3,84000.10^{-3}$	$3,20000.10^{-3}$	$4,00000.10^{-2}$	
Ramo 1	$-2,66666.10^{-3}$	$3,33333.10^{-3}$	$2,83333.10^{-1}$	d
Ramo 2	$3,84000.10^{-3}$	$3,20000.10^{-3}$	$4,00000.10^{-2}$	
Ramo 1	$-2,66666.10^{-3}$	$3,33333.10^{-3}$	$2,83333.10^{-1}$	e
Ramo 2	$3,84000.10^{-3}$	$1,02400.10^{-2}$	$2,08000.10^{-1}$	

FIGURA 2.19 - Situação dos vetores de $I_{km}(t-\Delta t)$, $i_{km}(t)$ e $e_c(t)$ no segundo intervalo de tempo.

a - Valores iniciais do segundo intervalo.

b - Valores após o cálculo de $I_{km}(t-\Delta t)$ para o ramo 1.

c - Valores após o cálculo de $I_{km}(t-\Delta t)$ para o ramo 2.

d - Valores após o cálculo de $i_{km}(t)$ e $e_c(t)$ para o ramo 1.

e - Valores após o cálculo de $i_{km}(t)$ e $e_c(t)$ para o ramo 2.

O processo deve continuar de maneira semelhante para os próximos intervalos, até que se atinja o tempo máximo estabelecido para a simulação.

2.11 - CONCLUSÕES

Nota-se, pelos itens anteriores, que a aplicação do método trapezoidal às equações de ramos modelados através de parâmetros concentrados permite transformar um conjunto de n equações diferenciais em um conjunto de 2n equações algébricas simples. As duas equações algébricas, resultantes para cada ramo, representam fisicamente um circuito como o mostrado na figura 2.14, com uma resistência equivalente R_{EQ} em paralelo com uma fonte de corrente que contém a história passada do circuito.

A solução das equações diferenciais que, com a aplicação do método trapezoidal passa a ser a solução de um conjunto de equações algébricas, é feita computacionalmente através de um "loop" de integração numérica, cujo intervalo de integração(Δt) deve ser definido juntamente com o valor t_{max}, que indica o tempo máximo de simulação. Durante o "loop" de integração, o programa dá acréscimos de Δt ao tempo até que se atinja o valor de t_{max}.

A modelagem apresentada permite representar sistemas monofásicos, como os ramos que foram considerados neste capítulo, como também sistemas com n fases, desde que para os mesmos não seja necessário considerar o acoplamento entre as fases do sistema. A modelagem de ramos acoplados, através de parâmetros concentrados, está apresentada no capítulo 5.

CAPÍTULO 3 - REPRESENTAÇÃO DE FONTES DE TENSÃO E DE CORRENTE

3.1 - INTRODUÇÃO

A análise de transitórios eletromagnéticos não requer o uso de modelos sofisticados de fontes de tensão. Normalmente, o modelo utilizado é o de fonte ideal ($Z_{fonte} = 0$), como mostrado na figura 3.1-a.

Uma outra possibilidade é a representação clássica da máquina síncrona, como mostrado na figura 3.1-b. Neste último caso, a impedância da fonte é representada por um ramo modelado através de parâmetros concentrados, como descrito no capítulo 2. Tal representação pode também ser usada quando se modela uma parte do sistema através de um equivalente de Thevenin. Neste caso, trocam-se os valores de v(t) e Z_{fonte}, na figura 3.1-b, por $V_{Thevenin}$ e $Z_{Thevenin}$, respectivamente.

Quando a análise de transitórios eletromagnéticos exige o conhecimento do comportamento dinâmico da máquina síncrona, como é o caso de estudos de rejeição de cargas, são necessários modelos mais sofisticados. Nesses casos,deve-se levar em consideração todos os enrolamentos da máquina e os reguladores de tensão e de velocidade.

As fontes de corrente, na maioria dos estudos de transitórios em sistemas elétricos de potência, são consideradas nulas, visto que toda a excitação é representada através de fontes de tensão. Elas são utilizadas apenas em alguns casos especiais, como na representação de descargas atmosféricas em linhas de transmissão e em subestações, e em estudos de TRV.

Tanto as fontes de tensão como as de corrente podem ser representadas através de uma função matemática que define uma forma de onda em função do tempo, caracterizando, portanto, um valor correspondente de tensão ou corrente em cada intervalo de tempo.

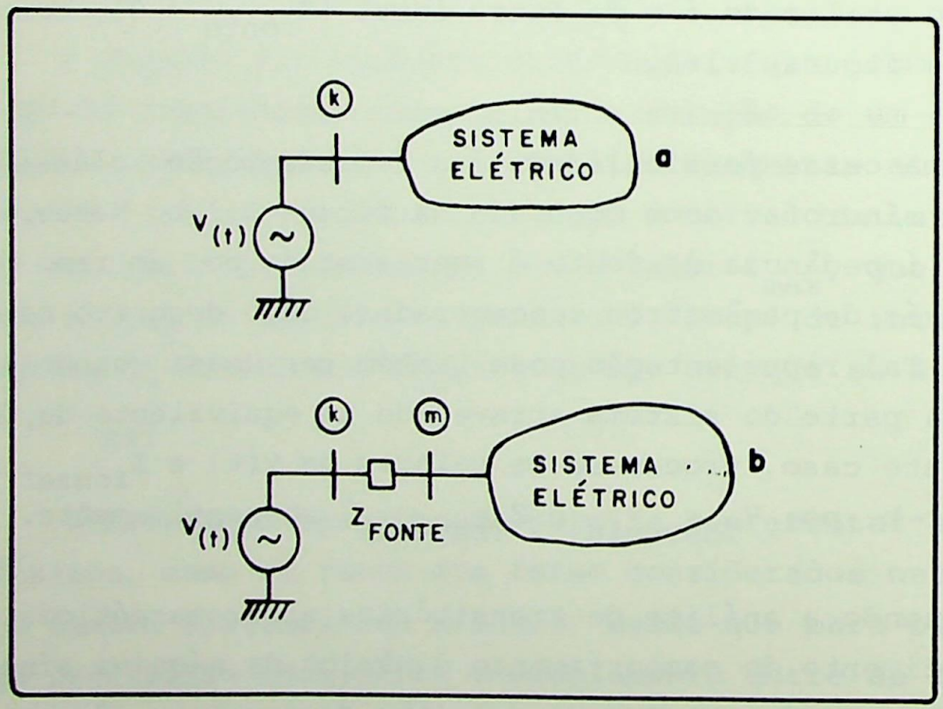


FIGURA 3.1 - Representação de fonte de tensão: ideal (a) e clássica (b)

As formas de onda podem ser definidas como funções matemáticas conhecidas (seno, cosseno, degrau, etc) ou então podem ser definidas ponto a ponto. Neste último caso, pode-se citar, por exemplo, a análise do desempenho de um equipamento na presença de uma determinada frente de onda que não pode ser representada através de uma função matemática comum.

Neste trabalho, são considerados apenas quatro tipos de funções matemáticas que definem as formas de onda das fontes: cossenoidal, degrau, rampa limitada por degrau e rampa de dupla inclinação, que são usadas para fontes de tensão e corrente. As combinações desses tipos de formas de onda também poderão ser usadas.

O programa EMTP, além de possuir esses tipos de fontes, apresenta alguns outros, e permite, também, a representação de uma forma de onda diferente das que possui, através da especificação de um conjunto de pontos que defina essa nova forma de onda. O EMTP possui, ainda, o modelo completo de máquina síncrona (código 59), que permite a representação de reguladores de tensão e velocidade, através da modelagem desses equipamentos na TACS (subrotina para análise transitória de sistemas de controle).

Neste capítulo, estão descritas as características de cada forma de onda e as associações possíveis de diferentes formas de onda. São apresentados, também, uma análise do erro que ocorre na representação de fontes e as alternativas para diminuir esse erro.

3.2 - FORMA DE ONDA COSSENOIDAL (Figura 3.2)

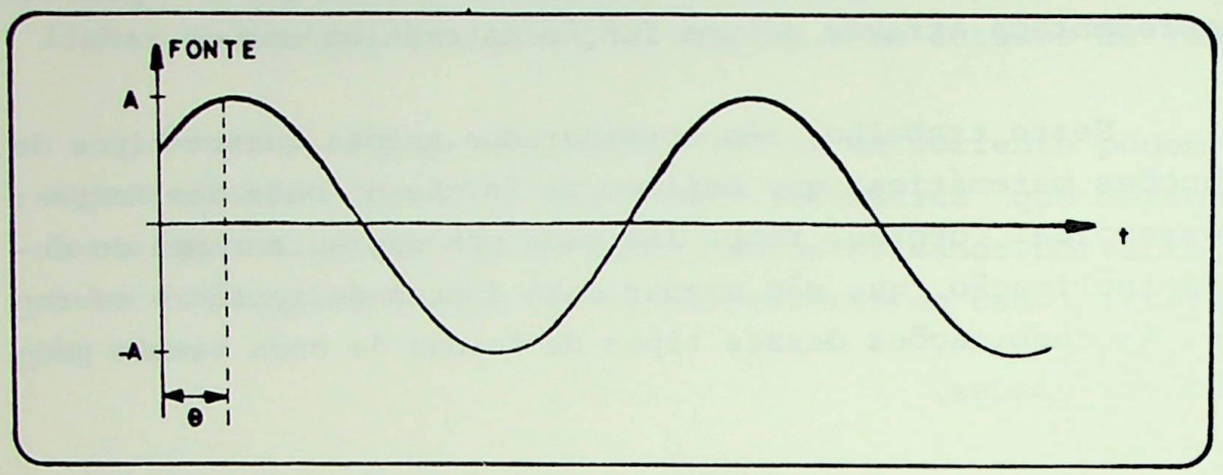


FIGURA 3.2 - Forma de onda cossenoidal para fontes

Para este tipo de fonte, os parâmetros necessários são :

- A - amplitude da forma de onda, que corresponde ao valor máximo da função cosseno, ou seja, os valores V_{max} ou I_{max} das fontes de tensão e corrente, respectivamente.

- Θ - defasagem da tensão ou da corrente. Esta variável indica que o máximo positivo da função cosseno ocorre a Θ graus antes de t = 0 (adiantado) para $\Theta > 0$ graus, e Θ graus após t = 0 (atrasado) para $\Theta < 0$ graus.

A equação (3.1) é a equação matemática que define o valor da fonte para a forma de onda cossenoidal.

$$\text{fonte} = A \cos (2 \pi ft + \Theta) \qquad (3.1)$$

onde :

f - freqüência da fonte

t - tempo decorrido no processo de simulação

A escolha de $\Theta = 90^{\circ}$ permite representar uma função senoidal já que :

$$A \cos (2 \pi ft + 90^{\circ}) = A \text{ sen } (2 \pi ft) \qquad (3.2)$$

Como exemplo, pode-se considerar um sistema trifásico equilibrado, com sequência de fases ABC, cujo diagrama fasorial está mostrado na figura 3.3. Neste caso, consideram-se três fontes monofásicas defasadas de 120° para representar o sistema trifásico.

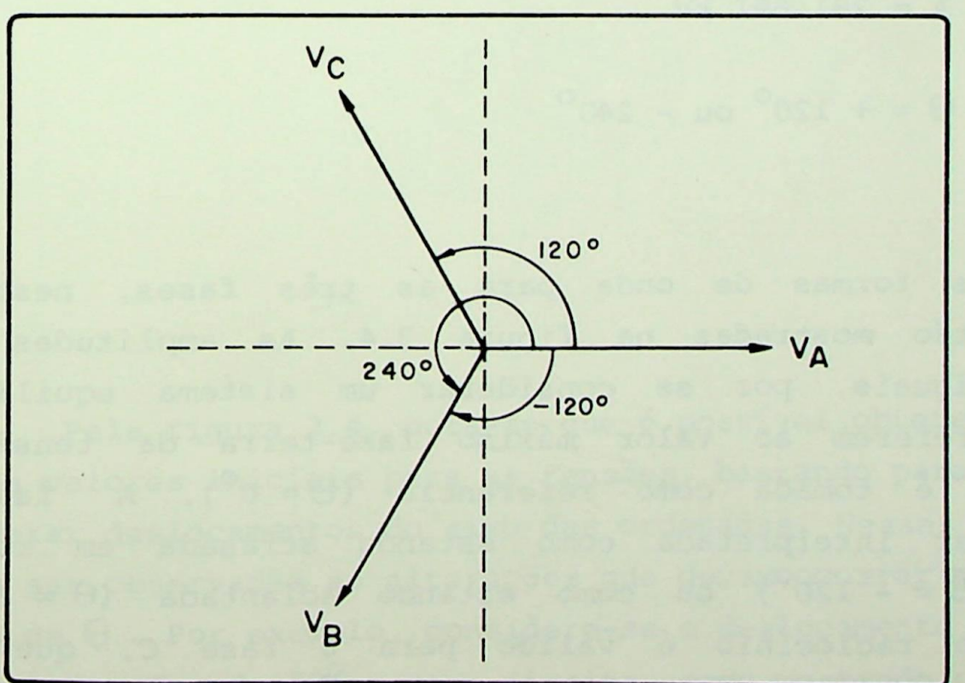


FIGURA 3.3 - Diagrama fasorial de tensões para um sistema trifásico equilibrado

Considerando-se a tensão do sistema como sendo 345 kV e a sequência de fases ABC, os parâmetros para cada uma das fases serão :

- FASE A

$$A = \frac{345}{\sqrt{3}} \sqrt{2} = 281{,}691 \text{ kV}$$

$$\Theta = 0^{\circ}$$

- FASE B

$$A = 281{,}691 \text{ kV}$$

$$\Theta = -120^{\circ} \text{ ou } 240^{\circ}$$

- FASE C

$$A = 281{,}691 \text{ kV}$$

$$\Theta = +120^{\circ} \text{ ou } -240^{\circ}$$

As formas de onda para as três fases, neste caso, estão mostradas na figura 3.4. As amplitudes são todas iguais, por se considerar um sistema equilibrado, e se referem ao valor máximo fase-terra da tensão. A fase A é tomada como referência ($\Theta = 0^{\circ}$). A fase B pode ser interpretada como estando atrasada em relação a A ($\Theta = -120^{\circ}$) ou como estando adiantada ($\Theta = 240^{\circ}$). O mesmo raciocínio é válido para a fase C, que pode ser considerada adiantada ($\Theta = +120^{\circ}$) ou atrasada ($\Theta = -240^{\circ}$) em relação à fase A.

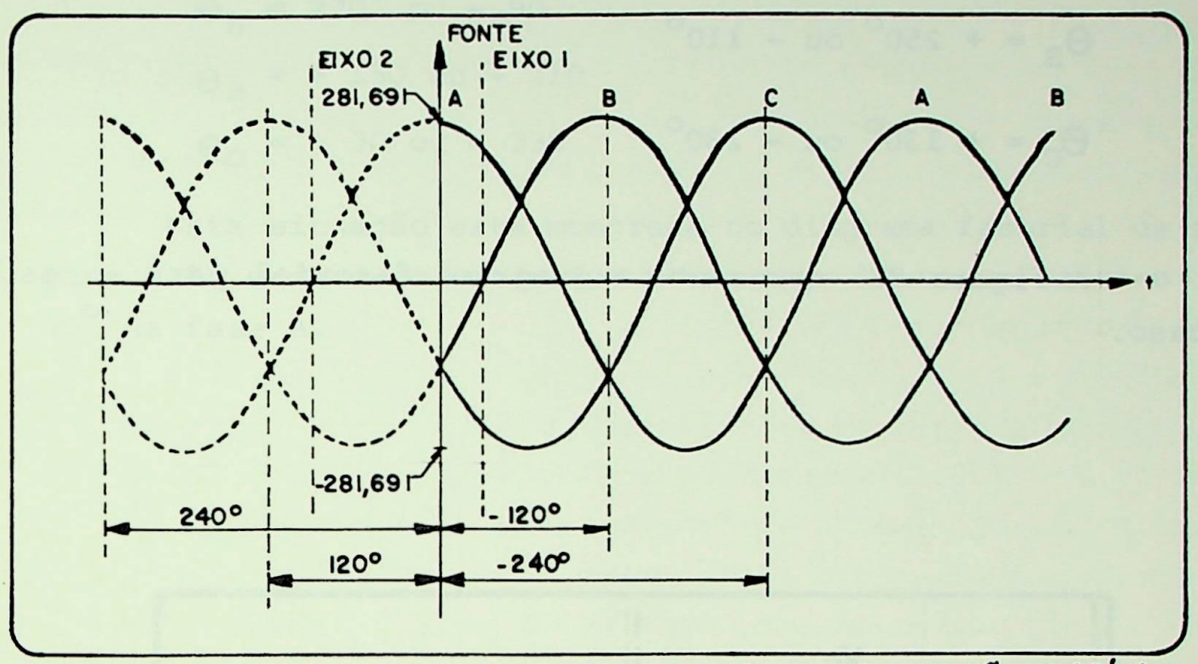


FIGURA 3.4 - Formas de onda de uma fonte de tensão trifásica cossenoidal

Pela figura 3.4, nota-se que é possível obterem-se vários valores iniciais para as tensões, bastando para isso considerar deslocamentos do eixo das ordenadas. Nesses casos, devem ser observadas as alterações que devem ocorrer nos valores de Θ . Por exemplo, considere-se o deslocamento do eixo das ordenadas de 10° para a direita, como mostrado na figura 3.4 pelo eixo 1. Isso corresponde a dizer que a fase A passa a estar 10° adiantada em relação à condição original da figura 3.4.

Nessa situação, os valores de Θ para as três fases serão :

$$\Theta_A = + 10^\circ \text{ ou } - 350^\circ$$

$$\Theta_B = + 250^\circ \text{ ou } - 110^\circ$$

$$\Theta_C = + 130^\circ \text{ ou } - 230^\circ$$

A figura 3.5 apresenta o diagrama fasorial para este caso.

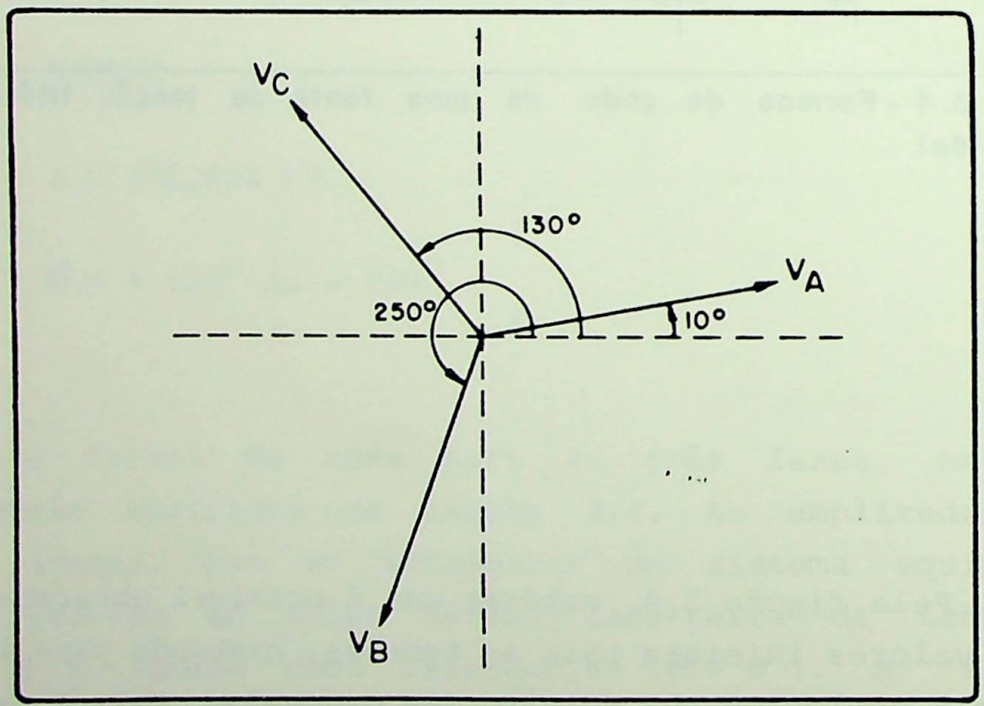


FIGURA 3.5 - Diagrama fasorial para o caso em que se considera o eixo 1 tracejado na figura 3.4

Algumas vezes é conveniente especificar as fontes com formas de onda senoidais. Este caso corresponde a deslocar o eixo das ordenadas para a posição do eixo 2,em tracejado na figura 3.4. Nessa situação, os valores de Θ para cada uma das fases serão :

$$\Theta_A = 270^\circ \text{ ou } -90^\circ$$

$$\Theta_B = +150 \text{ ou } -210$$

$$\Theta_C = +30 \text{ ou } -330$$

Esta situação está mostrada no diagrama fasorial da figura 3.6, e deve-se notar que neste caso houve um atraso de 90° na fase A.

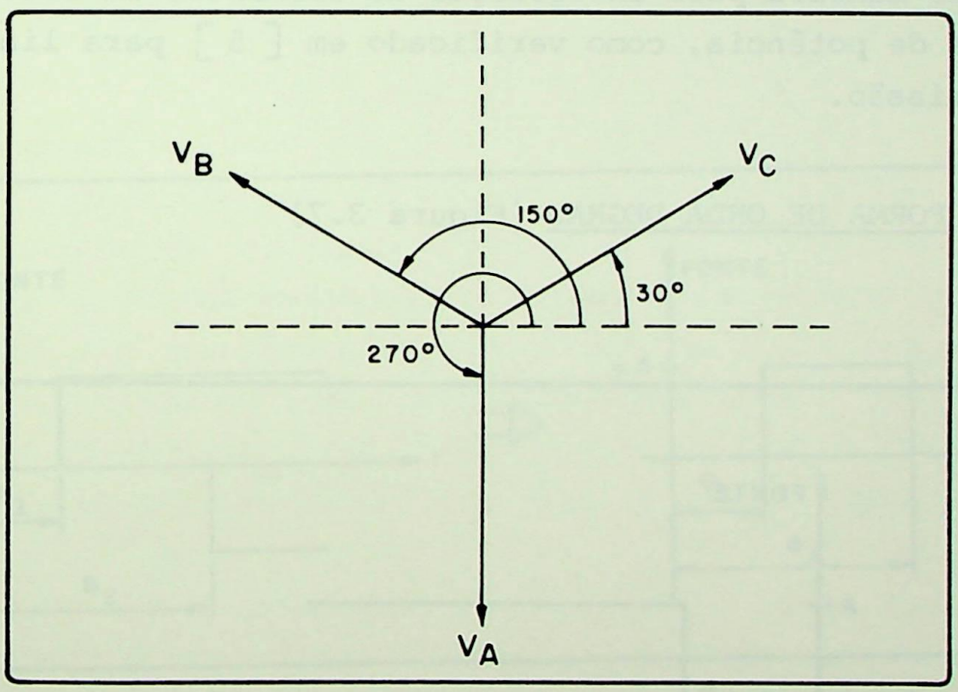


FIGURA 3.6 - Diagrama fasorial para o caso em que se considera o eixo 2 tracejado na figura 3.4

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca
MACÁ
B.M

Pelas diversas possibilidades de valores de θ, principalmente quando se trata de representação de sistemas trifásicos, deve-se recorrer ao auxílio de um diagrama fasorial para que se possa garantir os ângulos de 120° de defasagem entre as três fases.

Como a função matemática utilizada é o cosseno, deve-se considerar o diagrama fasorial básico da figura 3.3, e, também, como básicas, as formas de onda para as três fases, como mostrado na figura 3.4. Para cada uma das novas situações a considerar, o ponto t = 0 corresponderá ao cruzamento dos eixos das abscissas e das ordenadas.

A ênfase dada na definição correta dos valores de θ deve-se ao fato, como mencionado em [3] e [4], de que o instante de chaveamento da tensão influi nos níveis de sobretensões de manobra para energização de elementos em sistemas elétricos de potência, como verificado em [5] para linhas de transmissão.

3.3 - FORMA DE ONDA DEGRAU (Figura 3.7)

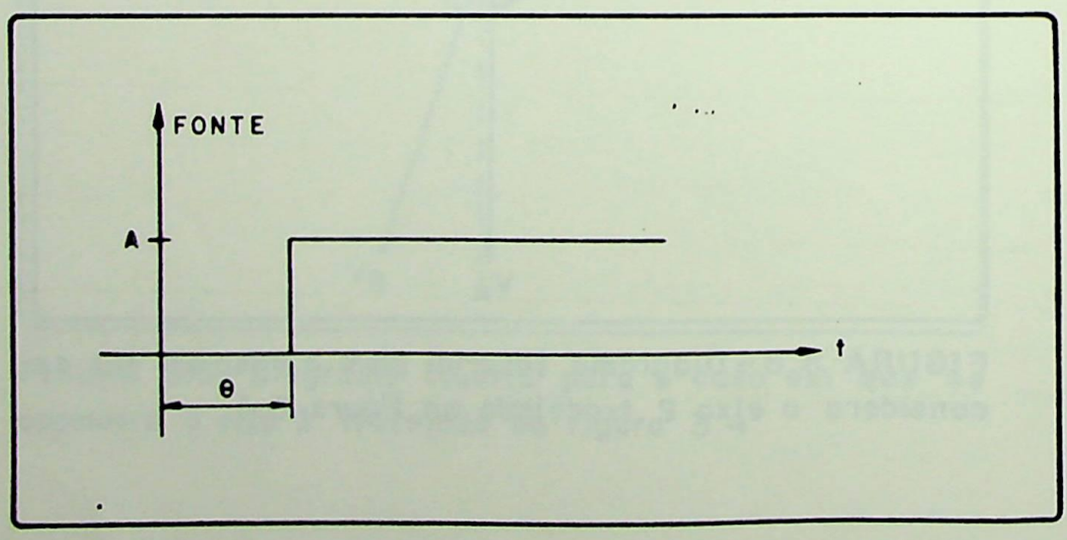


FIGURA 3.7 - Forma de onda degrau

Para este caso, os parâmetros necessários são :

A - amplitude do degrau

Θ - tempo a partir do qual se define o degrau

O valor da expressão da fonte está mostrado nas equações (3.3) e (3.4) :

$$\text{fonte} = 0 \text{ para } t < \Theta \tag{3.3}$$

$$\text{fonte} = A \text{ para } t \geqslant \Theta \tag{3.4}$$

Deve-se observar que a duração do degrau é infinita e só pode ser anulado com a aplicação de um outro degrau de amplitude simétrica, como mostrado na figura 3.8.

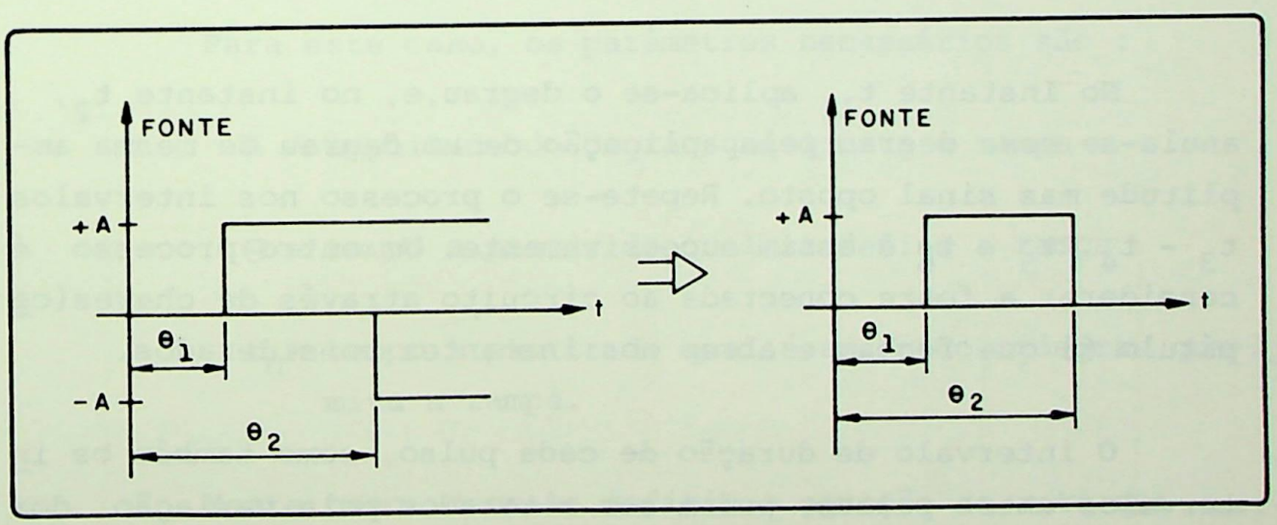


FIGURA 3.8 – Anulação de um degrau pela aplicação de um outro degrau de amplitude igual mas de sinal contrário

Através da composição de diversos degraus, outras funções podem ser obtidas, tais como pulsos , como mostrado na figura 3.9.

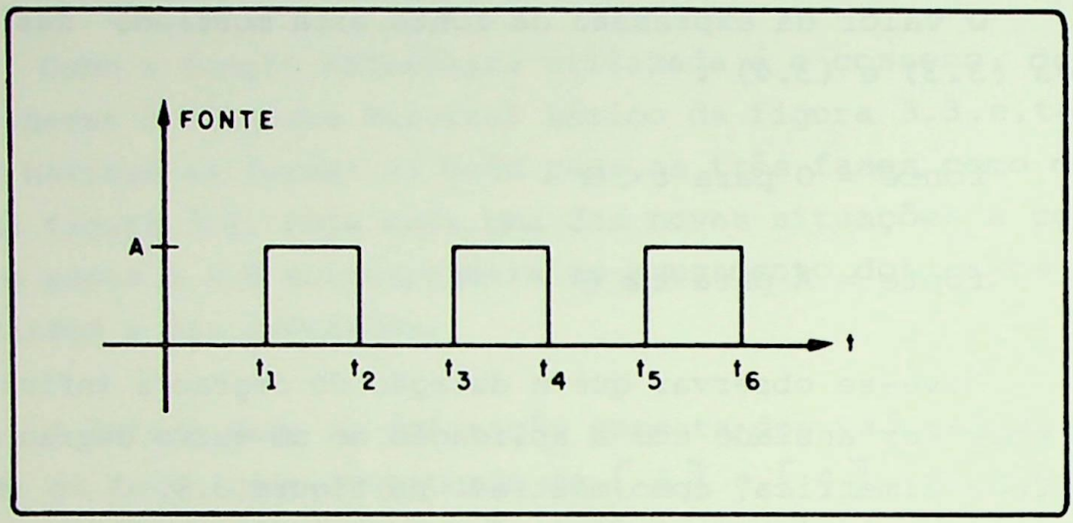


FIGURA 3.9 - Função pulso para fontes, obtida a partir da composição de várias funções degrau

No instante t_1, aplica-se o degrau, e, no instante t_2, anula-se esse degrau pela aplicação de um degrau de mesma amplitude mas sinal oposto. Repete-se o processo nos intervalos $t_3 - t_4$, $t_5 - t_6$ e assim sucessivamente. Um outro processo é considerar a fonte conectada ao circuito através de chaves (capítulo 6) que fecham e abrem nos instantes considerados.

O intervalo de duração de cada pulso, como também os intervalos entre pulsos, podem ser alterados pela variação dos valores t_i indicados na figura 3.9.

Embora possível, esse tipo de representação não é muito adequado, pois implica na especificação de um grande conjunto de dados com o objetivo de representar apenas um elemento.

3.4 - FORMA DE ONDA RAMPA LIMITADA POR DEGRAU (Figura 3.10)

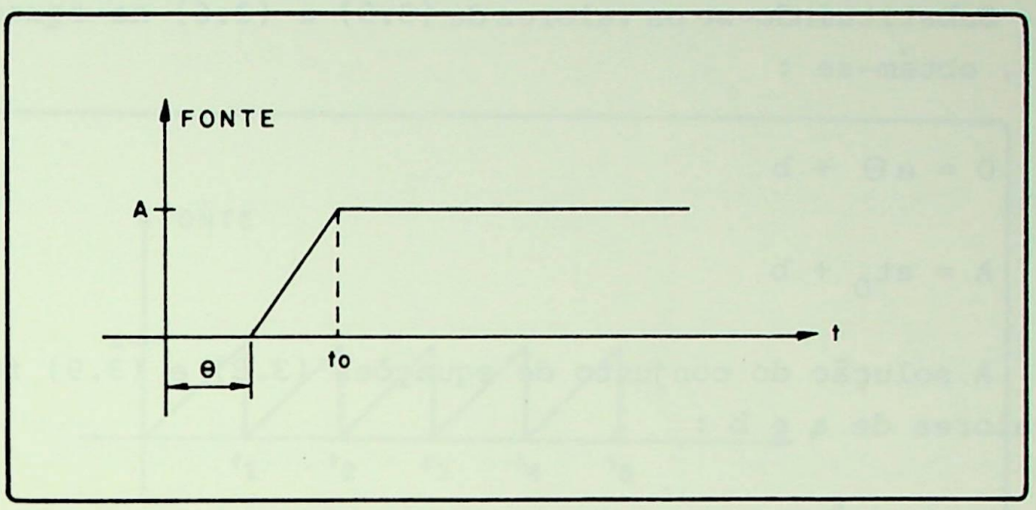


FIGURA 3.10 - Forma de onda rampa limitada por degrau

Para este caso, os parâmetros necessários são :

A - amplitude do degrau que limita a rampa

Θ - tempo a partir do qual se define a rampa

t_0 - tempo a partir do qual é aplicado o degrau que limita a rampa.

Neste caso, deve-se definir a equação da reta que corresponde à rampa entre Θ e t_0. Para este intervalo, é válido escrever :

$$t = \Theta \quad \Rightarrow \quad \text{fonte} = 0 \tag{3.5}$$

$$t = t_0 \quad \Rightarrow \quad \text{fonte} = A \tag{3.6}$$

A equação da rampa, que corresponde à equação da reta, é dada por :

$$\text{fonte} = at + b \tag{3.7}$$

Substituindo-se os valores de (3.5) e (3.6) na equação (3.7), obtém-se :

$$0 = a\Theta + b \tag{3.8}$$

$$A = at_0 + b \tag{3.9}$$

A solução do conjunto de equações (3.8) e (3.9) fornece os valores de a e b :

$$a = \frac{A}{(t_0 - \Theta)} \tag{3.10}$$

$$b = \frac{-A}{(t_0 - \Theta)}\,\Theta \tag{3.11}$$

Para obter-se a equação final da rampa, substituem-se os valores de (3.10) e (3.11) em (3.7) :

$$\text{fonte} = \frac{A}{(t_0 - \Theta)}\,(t - \Theta) \tag{3.12}$$

Dessa maneira, a forma de onda rampa limitada por degrau fica bem definida a partir do conjunto de equações a seguir :

$$\text{fonte} = 0 \quad \text{para } t < \Theta \tag{3.13}$$

$$\text{fonte} = \frac{A}{(t_0 - \Theta)}\,(t - \Theta) \text{ para } \quad \Theta \leqslant t < t_0 \tag{3.14}$$

$$\text{fonte} = A \quad \text{para } t \geqslant t_0 \tag{3.15}$$

A partir desta forma de onda, podem ser obtidas outras, como a mostrada na figura 3.11.

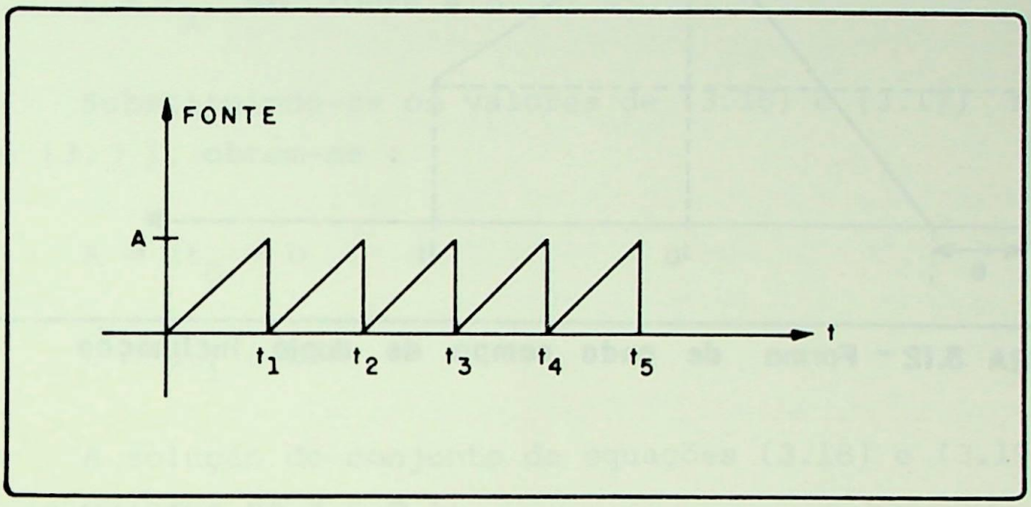


FIGURA 3.11 – Forma de onda obtida a partir da composição da forma de onda rampa limitada por degrau

A forma de onda mostrada na figura 3.11 pode ser obtida por um processo semelhante ao apresentado para a função pulso (figura 3.9). Também são válidas, neste caso, as mesmas restrições feitas para o caso da função pulso.

3.5 - FORMA DE ONDA RAMPA DE DUPLA INCLINAÇÃO (Figura 3.12)

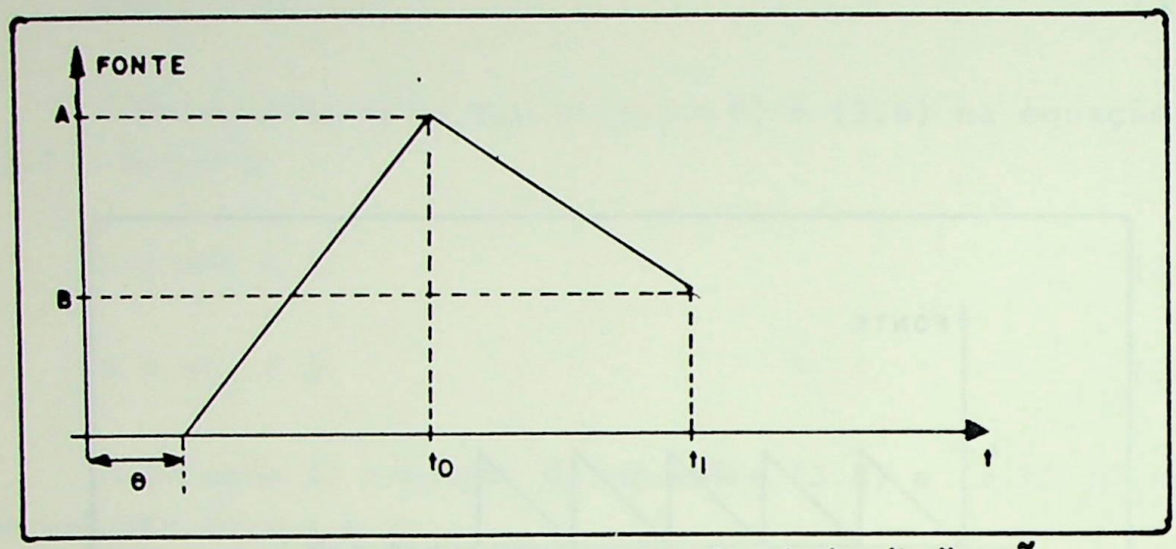


FIGURA 3.12 - Forma de onda rampa de dupla inclinação

Os parâmetros necessários para essa forma de onda são :

A - valor máximo da função

B - valor final da função

Θ - tempo a partir do qual se define a função

t_0- tempo no qual se atinge o valor máximo da função

t_1- tempo no qual se atinge o valor final da função. Este parâmetro deve ser igual ao tempo máximo de simulação (t_{max}), para permitir que a função seja definida inteiramente dentro do intervalo de simulação.

Para a primeira rampa é válida a equação (3.12),definida para a função rampa limitada por degrau. Já para a segunda rampa,é necessário definir sua equação. Neste caso, é válido escrever :

$$t = t_0 \Rightarrow \text{fonte} = A \tag{3.16}$$

$$t = t_1 \Rightarrow \text{fonte} = B \tag{3.17}$$

Substituindo-se os valores de (3.16) e (3.17) na equação (3.7), obtém-se :

$$A = at_0 + b \tag{3.18}$$

$$B = at_1 + b \tag{3.19}$$

A solução do conjunto de equações (3.18) e (3.19) fornece os valores de a e b :

$$a = \frac{(B - A)}{(t_1 - t_0)} \tag{3.20}$$

$$b = \frac{At_1 - Bt_0}{(t_1 - t_0)} \tag{3.21}$$

Substituindo-se (3.20) e (3.21) em (3.7), obtém-se a equação da segunda rampa :

$$\text{fonte} = \frac{1}{(t_1 - t_0)} \left[(B - A)t + At_1 - Bt_0 \right] \tag{3.22}$$

Dessa forma, a função rampa de dupla inclinação fica caracterizada pelo conjunto de equações a seguir :

$$\text{fonte} = 0 \quad \text{para} \quad t < \Theta \tag{3.23}$$

$$\text{fonte} = \frac{A}{(t_0 - \theta)} (t - \theta) \quad \text{para} \quad \theta < t \leq t_0 \qquad (3.24)$$

$$\text{fonte} = \frac{1}{(t_1 - t_0)} \left[(B - A)t + At_1 - Bt_0 \right]$$

$$\text{para } t_0 < t \leq t_1 \qquad (3.25)$$

Este tipo de forma de onda pode ser utilizado, por exemplo, para representar frentes de onda de tensão e corrente incidentes em subestações, devidas às descargas atmosféricas.

Além das quatro formas de onda apresentadas, para fontes de tensão e de corrente, ainda é possível obter outras através de composições dessas quatro formas, como as mostradas nas figuras 3.13-a e b, por exemplo.

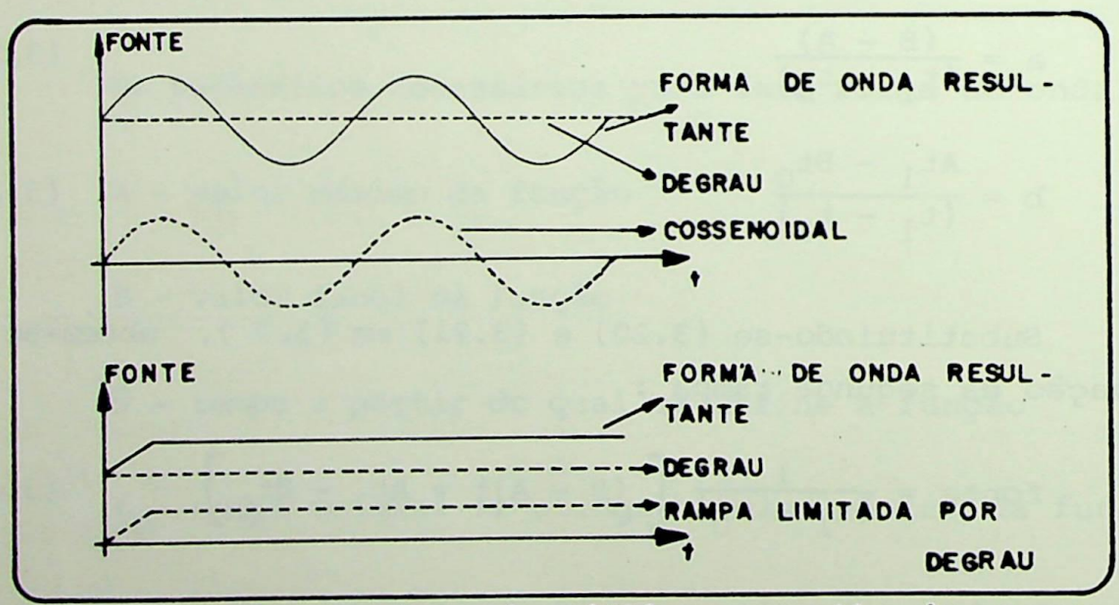


FIGURA 3.13 - Formas de onda obtidas a partir da composição de outras formas de onda

Neste trabalho, é possível considerar até um máximo de cinco formas de onda associadas para compor uma outra forma de onda não comum.

3.6 - PROBLEMAS QUE OCORREM NA REPRESENTAÇÃO DE FONTES

O processo de cálculo dos valores de fontes é desenvolvido intervalo a intervalo. Para o caso de uma fonte de tensão cossenoidal, por exemplo, tem-se :

$t = \Delta t$ - fonte = $A\cos(2\pi f \Delta t + \Theta)$

$t = 2\Delta t$ - fonte = $A\cos(4\pi f \Delta t + \Theta)$

$t = 3\Delta t$ - fonte = $A\cos(6\pi f \Delta t + \Theta)$

. . .
. . .
. . .

$t = t_{max}$ - fonte = $A\cos(2\pi f \ t_{max} + \Theta)$

Nota-se, portanto, que o processo é discreto, isto é,os valores são determinados para cada intervalo de tempo. Devido a esta característica do processo, poderão ocorrer casos onde a forma de onda que será considerada no cálculo não corresponde à função que se deseja realmente representar, apesar de os valores nos instantes considerados serem corretos. A figura 3.14 mostra um exemplo deste tipo de problema. Notam-se , nessa figura, as diferenças entre as duas representações. A função representada é definida através de uma interpolação linear. Um ponto importante é que o pico que ocorre na função desejada não está sendo considerado, o que pode levar a resultados incorretos. Existem basicamente duas soluções possíveis para este tipo de problema :

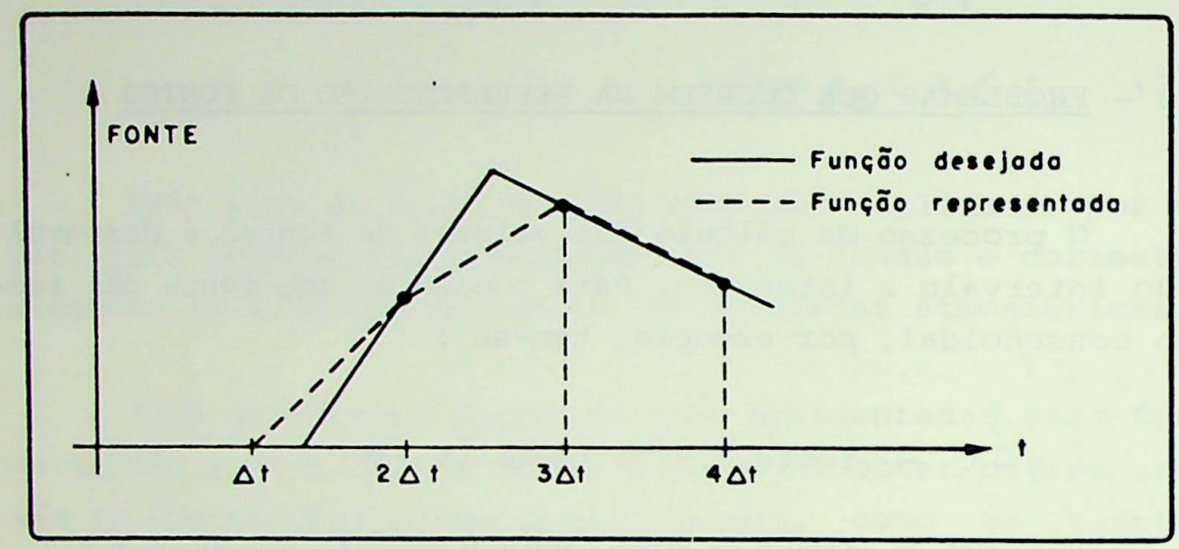


FIGURA 3.14 - Erro que ocorre na representação de fontes devido ao processo de discretização do tempo

1 - Deve-se tentar ajustar os parâmetros de tempo da forma de onda, para múltiplos inteiros do intervalo Δt (figura 3.15).

Neste caso, a função representada coincide exatamente com a função que se deseja representar.

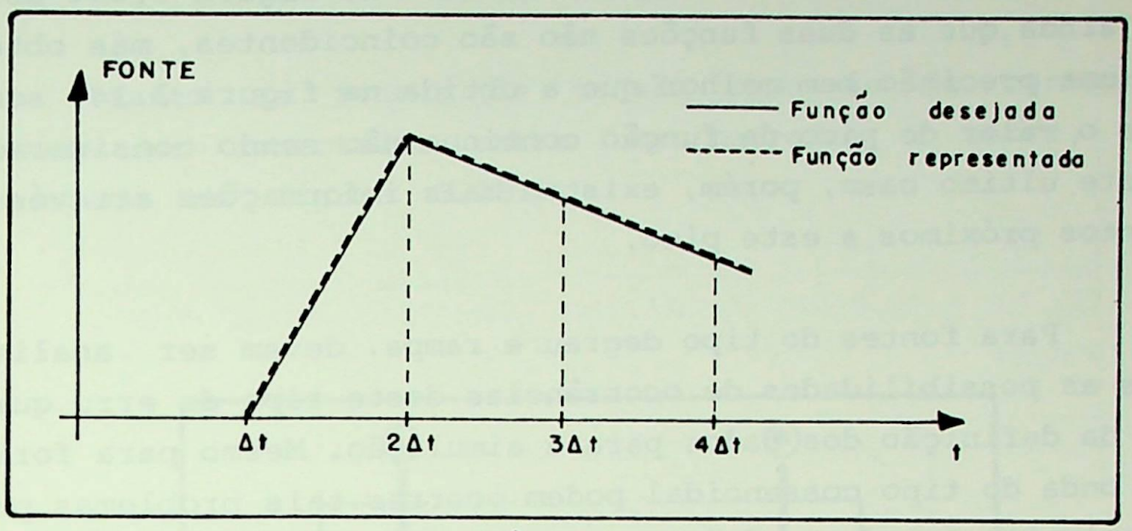


FIGURA 3.15 - Ajuste dos parâmetros de tempo da forma de onda, como múltiplos inteiros do intervalo Δt

2 - Deve-se reduzir o tamanho do intervalo Δt (figura 3.16).

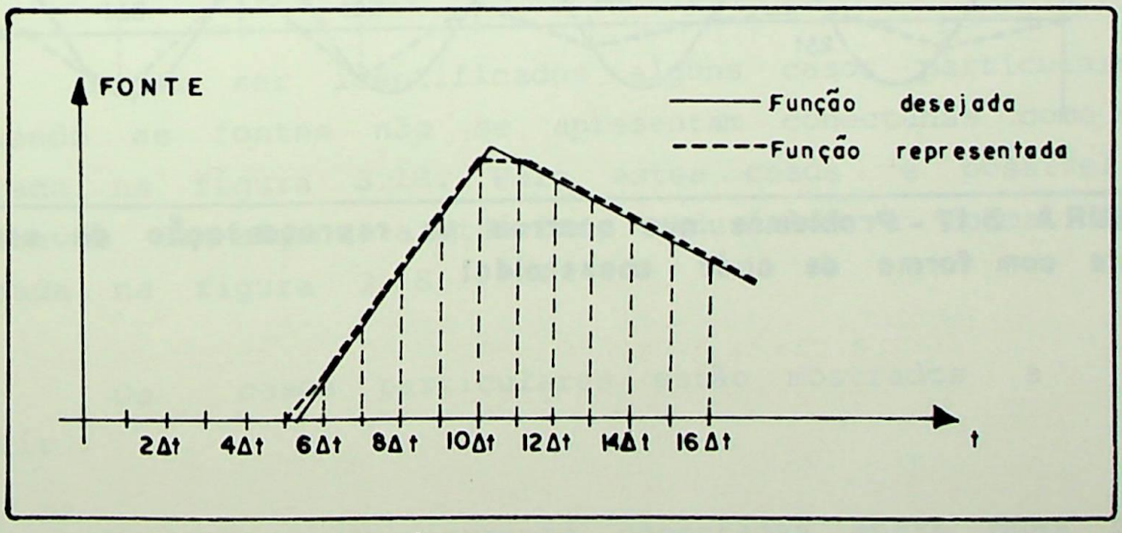


FIGURA 3.16 - Redução do intervalo Δt

No caso da figura 3.16 foi adotado como intervalo Δt um valor três vezes menor que o adotado na figura 3.14. Nota-se, ainda, que as duas funções não são coincidentes, mas obtém-se uma precisão bem melhor que a obtida na figura 3.14, sendo que o valor de pico da função continua não sendo considerado. Neste último caso, porém, existem mais informações através de pontos próximos a este pico.

Para fontes do tipo degrau e rampa, devem ser analisadas as possibilidades de ocorrências deste tipo de erro, quando da definição dos dados para a simulação. Mesmo para formas de onda do tipo cossenoidal podem ocorrer tais problemas, principalmente quando se definem grandes intervalos de tempo, como mostrado na figura 3.17.

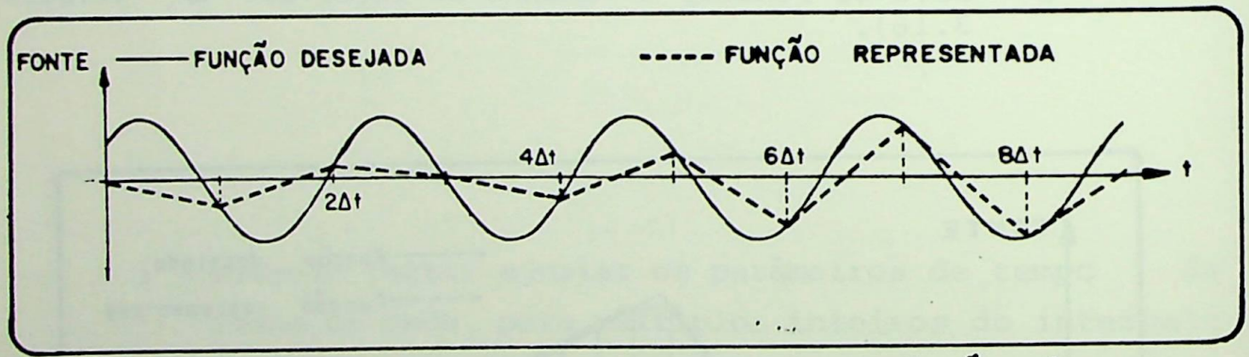


FIGURA 3.17 - Problemas que ocorrem na representação de uma fonte com forma de onda cossenoidal

Para o caso da figura 3.17, a solução é a redução do intervalo Δt.

3.7 - CARACTERÍSTICAS ESPECIAIS DAS FONTES

Tanto as fontes de tensão como as de corrente devem ser conectadas entre uma barra e a terra, como mostrado na figura 3.18.

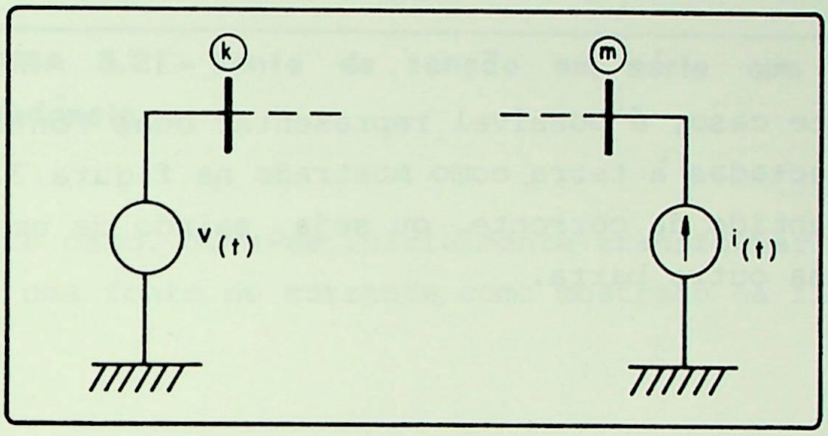


FIGURA 3.18 - Representação de fontes de tensão e corrente

Podem ser identificados alguns casos particulares, quando as fontes não se apresentam conectadas como mostrado na figura 3.18. Para estes casos é possível, através de alguns artifícios, reduzí-los à forma mostrada na figura 3.18.

Os casos particulares estão mostrados a seguir :

A - fontes de corrente conectadas entre duas barras (figura 3.19).

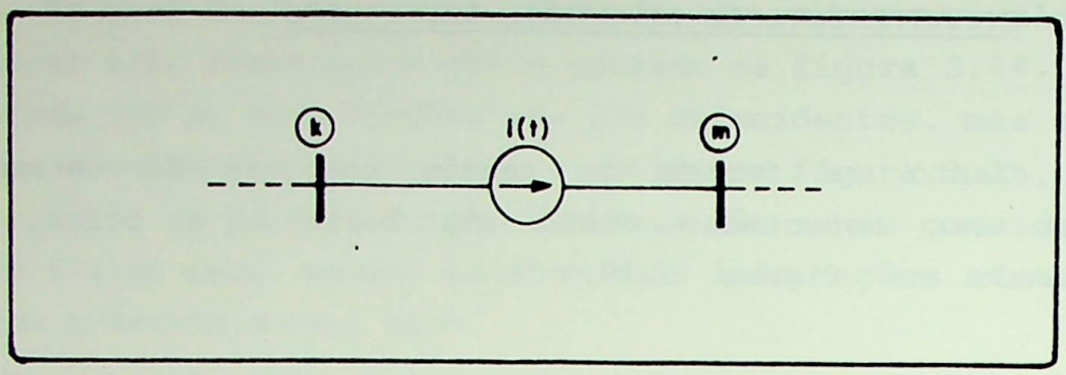


FIGURA 3.19 - Fonte de corrente conectada entre duas barras

Neste caso, é possível representar duas fontes de corrente conectadas à terra, como mostrado na figura 3.20, mantendo-se o sentido da corrente, ou seja, saindo de uma barra e entrando na outra barra.

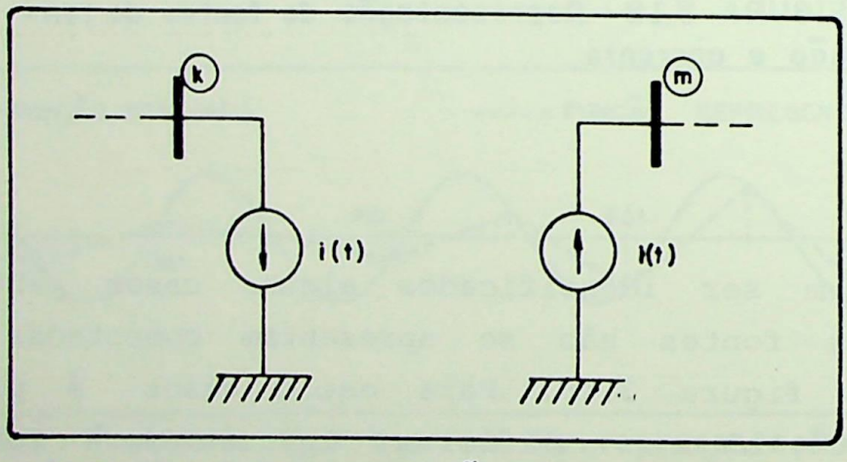


FIGURA 3.20- Representação de uma fonte de corrente conectada entre duas barras

Deve-se observar que esta representação de fontes de corrente não traz nenhuma alteração para os valores de impedância das barras k e m .

B - fontes de tensão conectadas entre duas barras através de uma impedância Z_i (figura 3.21).

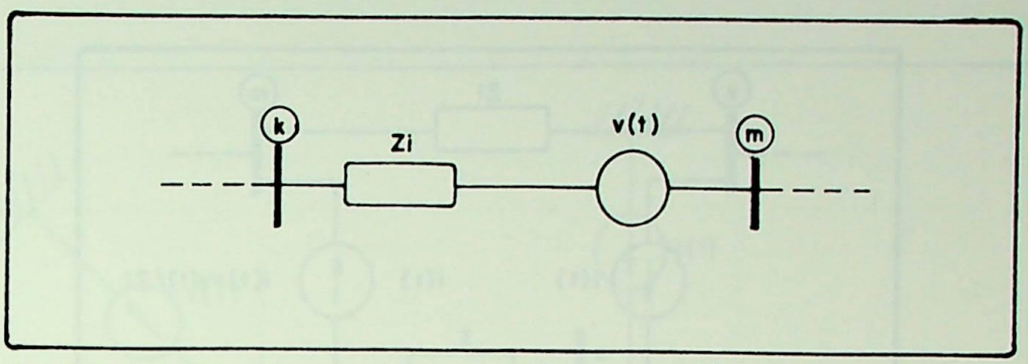


FIGURA 3.21 - Fonte de tensão em série com uma impedância

Neste caso, deve-se inicialmente transformar a fonte de tensão em uma fonte de corrente, como mostrado na figura 3.22.

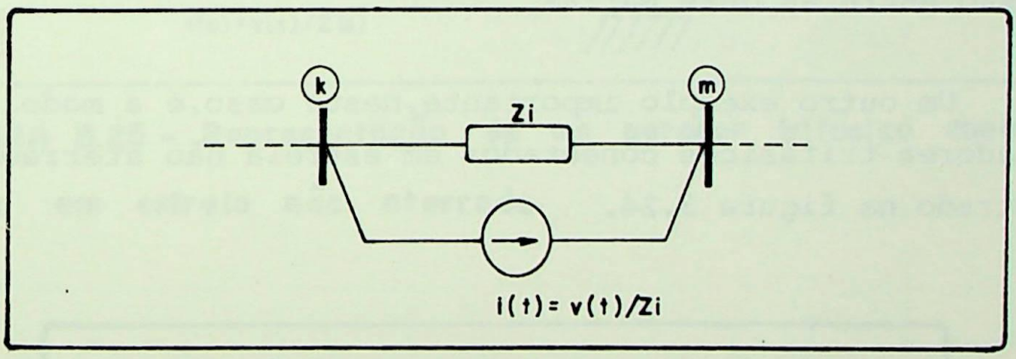


FIGURA 3.22- Circuito equivalente de uma fonte de tensão conectada entre duas barras

A transformação citada corresponde a transformar um circuito equivalente de Thevenin em um circuito equivalente de Norton.

A figura 3.22 mostra uma fonte de corrente conectada entre duas barras e, como mencionado no item A, basta transfor

mar esta fonte de corrente em outras duas,conectadas entre cada barra do ramo e a terra, como mostrado na figura 3.23.

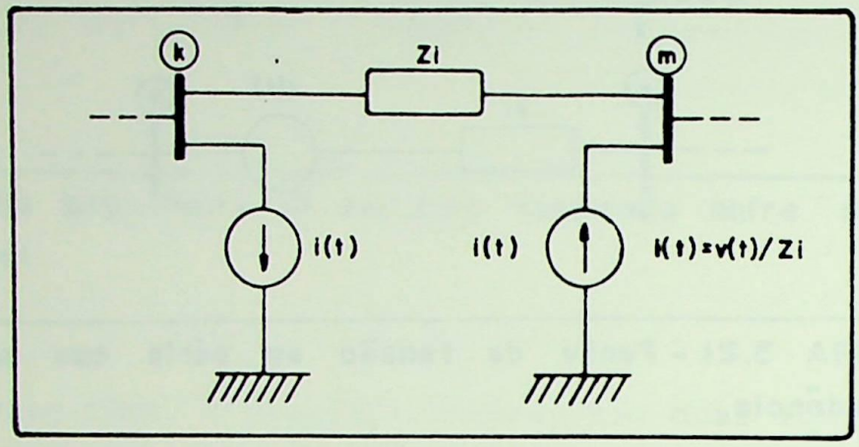


FIGURA 3.23 - Representação de uma fonte de tensão conectada entre duas barras

Caso Z_i seja zero, não se pode representar a fonte de tensão entre as duas barras.

Um outro exemplo importante,neste caso,é a modelagem de geradores trifásicos conectados em estrela não aterrada, como mostrado na figura 3.24.

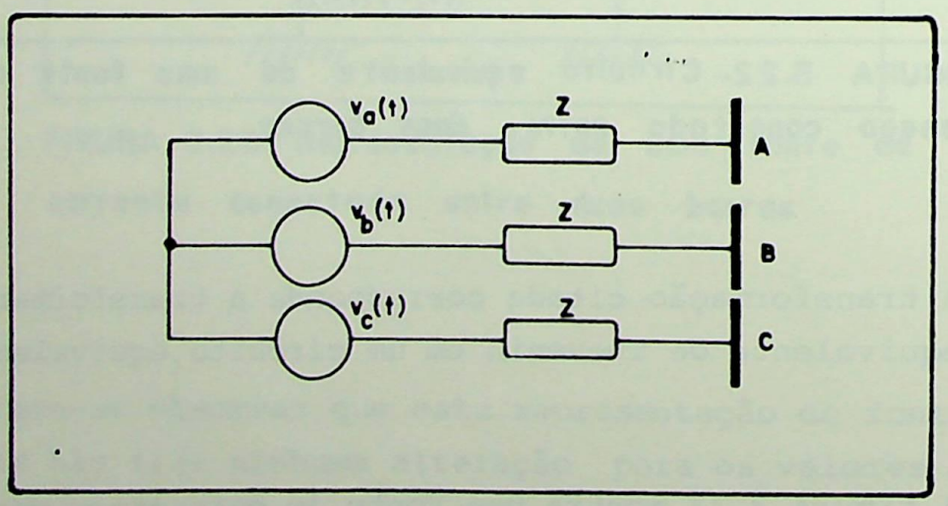


FIGURA 3.24 - Gerador trifásico conectado em estrela não aterrada

Cada uma das fases, neste caso, pode ser representada como na figura 3.23. Desta forma, o gerador ficaria representado como na figura 3.25.

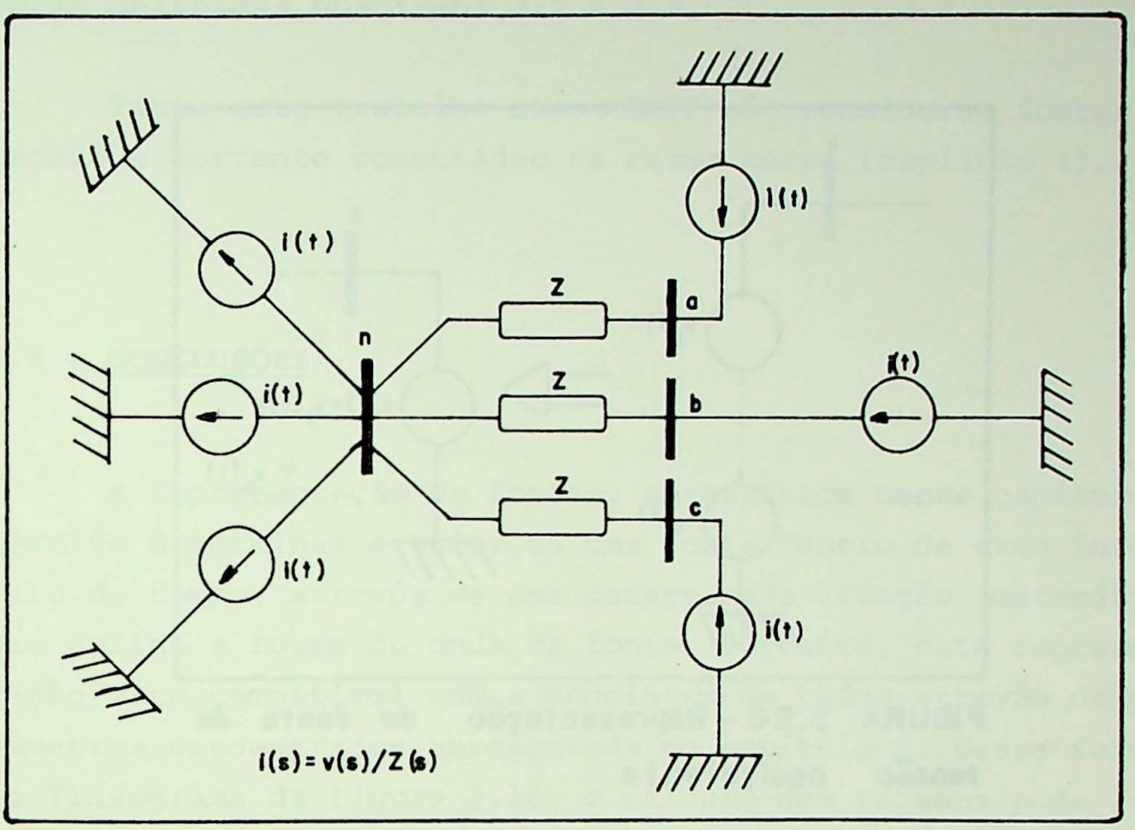


FIGURA 3.25 - Representação de um gerador trifásico conectado em estrela não aterrada

Normalmente, os geradores estão conectados em estrela aterrada e, portanto, a representação de três fontes monofásicas ideais conectadas à terra e defasadas de 120° é aceitável. Esta é a representação normalmente usada, pois não existe interesse nos valores atrás da barra do gerador para a maioria dos estudos. Quando esses valores são necessários, deve-se usar um modelo completo de máquina.

Além desses casos particulares, convém observar que, como citado no item 3.5, é possível considerar-se associações de fontes de tensão (figura 3.26) e de fontes de corrente (figura 3.27).

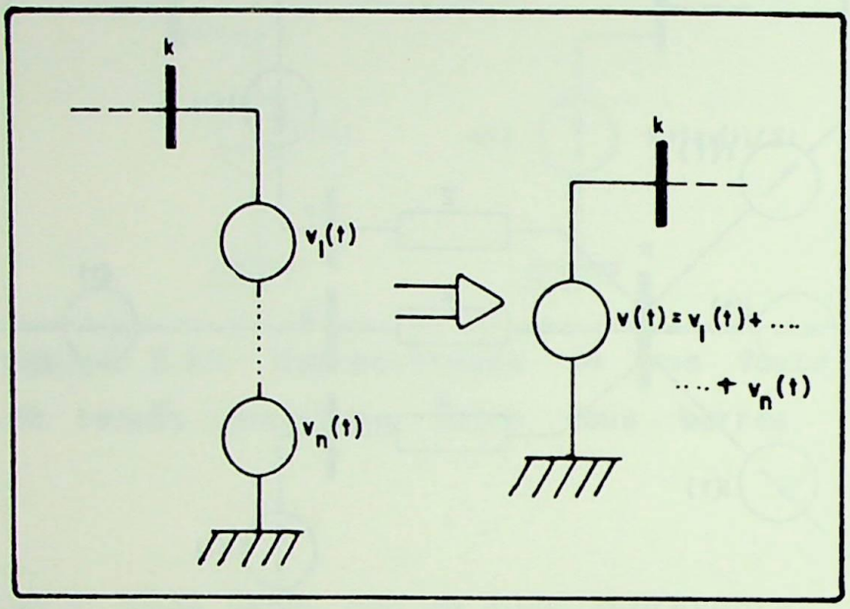


FIGURA 3.26 - Representação de fonte de tensão equivalente

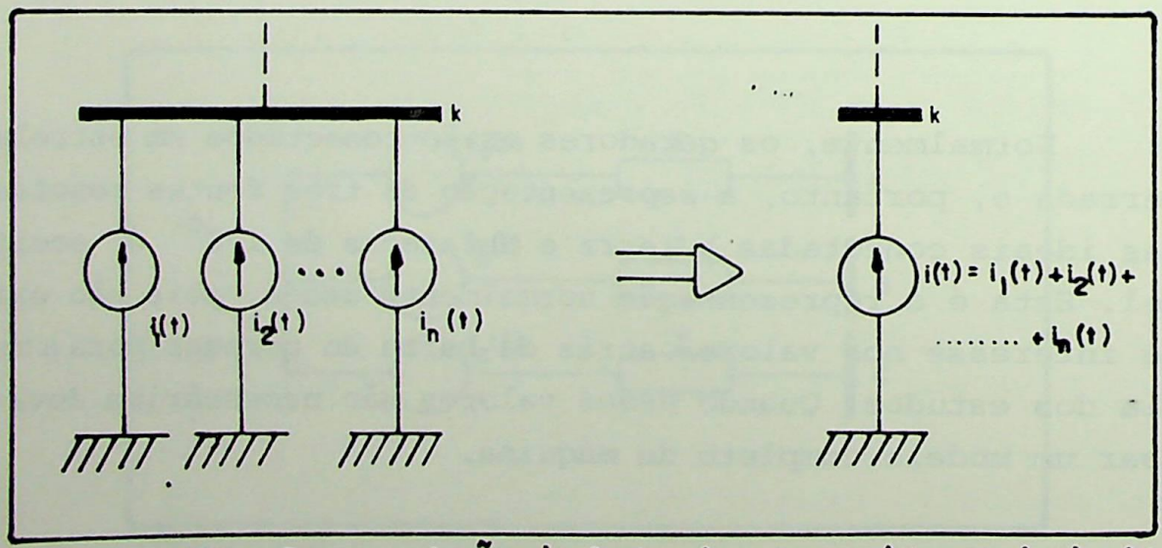


FIGURA 3.27 - Representação de fonte de corrente equivalente

A representação de uma associação de fontes em uma única fonte equivalente, como mostrado nas figuras 3.26 e 3.27 , permite a representação de formas de onda bastante complexas, bastando fazer uma composição a partir das formas de ondas que foram definidas nos itens 3.2 a 3.5.

Tanto este trabalho como o EMTP não consideram fontes de tensão e corrente conectadas na mesma barra (capítulo 4).

3.8 - CONCLUSÕES

A representação de fontes, apresentada neste capítulo , permite determinar o valor de uma fonte dentro de cada intervalo de tempo, através de uma determinada função matemática que define a forma de onda da fonte. Portanto, esta representação está compatível com a modelagem de ramos através de parâmetros concentrados apresentada no capítulo 2. Dessa forma, no fluxograma da figura 2.16, o cálculo das tensões pode ser desmembrado em três partes :

1 - cálculo dos valores das fontes de corrente

2 - cálculo dos valores das fontes de tensão

3 - cálculo dos valores de tensão nas barras que não apresentam fontes de tensão.

Embora o primeiro item não se refira exatamente a valores de tensão, deve-se observar que os valores das fontes de corrente serão necessários para o cálculo dos valores desconhecidos de tensão (capítulo 4).

A escolha do valor de Δt é muito importante para não

permitir erros na representação de fontes. Deve-se procurar reduzir o erro ao mínimo possível para evitar que isso prejudique os resultados da simulação. Portanto, antes da representação de qualquer tipo de fonte, deve-se fazer uma análise minuciosa dos parâmetros e providenciar ajustes que possam reduzir os erros da modelàgem.

CAPÍTULO 4 - EQUACIONAMENTO MATEMÁTICO PARA O CÁLCULO DAS TENSÕES

4.1 - INTRODUÇÃO

Na análise de sistemas elétricos de potência, em regime permanente, o processo de equacionamento matemático normalmente utilizado é a análise nodal. Isto ocorre principalmente devido às características da matriz de admitância nodal, que é simétrica, esparsa e de simples montagem. Esses três fatores são importantíssimos do ponto de vista de implementação computacional, pois permitem o desenvolvimento de algoritmos mais simples e uma grande economia nos requisitos de memória computacional.

Para a análise em regime transitório, que é o objetivo deste trabalho, também é possível a utilização da análise nodal. Esse método, junto com as equações algébricas decorrentes da aplicação do método trapezoidal às equações diferenciais dos sistemas elétricos, será utilizado para desenvolvimento do processo de cálculo das tensões.

Para as correntes de ramos, o processo de cálculo utilizado está apresentado no capítulo 2, e se baseia na aplicação do método trapezoidal às equações dos ramos modelados através de parâmetros concentrados.

Neste capítulo, além do equacionamento matemático que envolve toda a análise matricial e o processo de ordenação e fatoração de matrizes, são apresentados também todos os aspectos computacionais associados ao cálculo das tensões.

4.2 - EQUACIONAMENTO BÁSICO PARA O CÁLCULO DAS TENSÕES

Para o desenvolvimento do processo de cálculo das tensões, será considerado o sistema mostrado na figura 4.1.

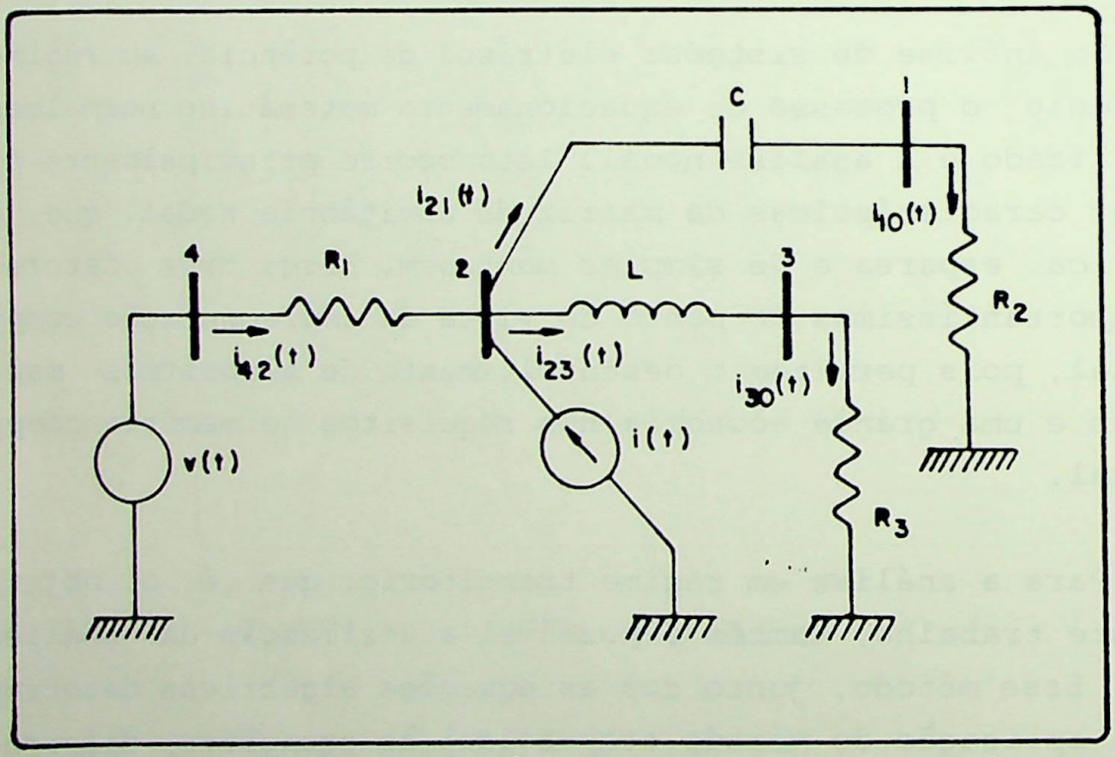


FIGURA 4.1 - Sistema exemplo para desenvolvimento do processo de cálculo das tensões

Para a aplicação do processo de análise nodal ao sistema da figura 4.1, deve-se transformar a fonte de tensão, que está conectada à barra 4, em uma fonte de corrente equivalente, o que corresponde à eliminação da barra 4, como está mostrado na figura 4.2.

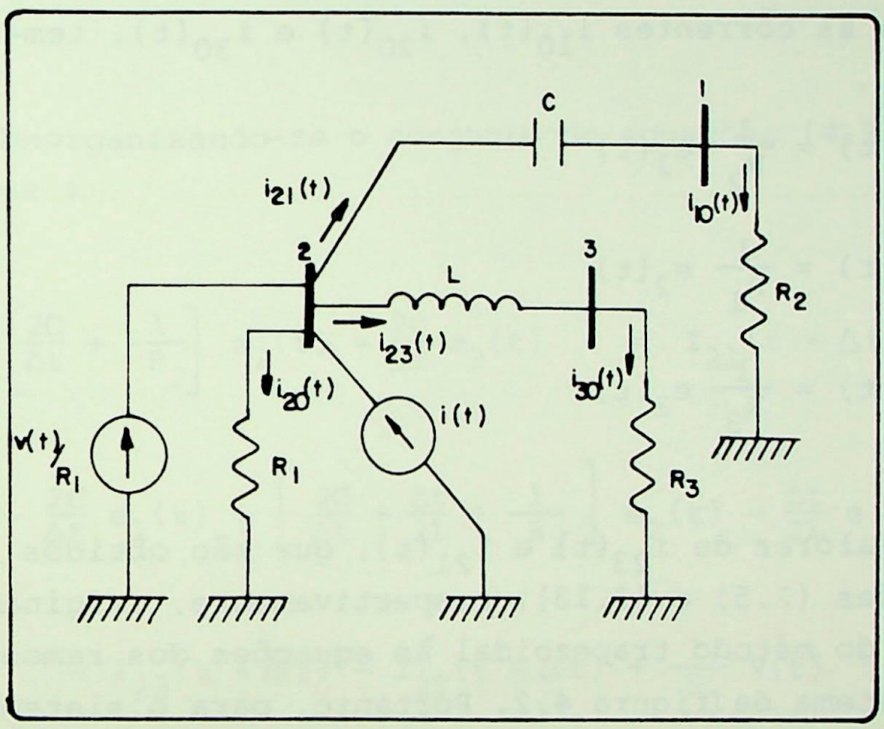


FIGURA 4.2 - Sistema da figura 4.1 com a fonte de corrente equivalente à fonte de tensão

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

Para cada uma das barras do sistema da figura 4.2, obtém-se uma equação nodal :

$$\text{barra 1} \rightarrow i_{21}(t) - i_{10}(t) = 0 \qquad (4.1)$$

$$\text{barra 2} \rightarrow i(t) + v(t)\,\frac{1}{R_1} - i_{21}(t) - i_{23}(t) - i_{20}(t) = 0 \qquad (4.2)$$

$$\text{barra 3} \rightarrow i_{23}(t) - i_{30}(t) = 0 \qquad (4.3)$$

Para as correntes $i_{10}(t)$, $i_{20}(t)$ e $i_{30}(t)$, tem-se :

$$i_{10}(t) = \frac{1}{R_2}\, e_1(t) \qquad (4.4)$$

$$i_{20}(t) = \frac{1}{R_1}\, e_2(t) \qquad (4.5)$$

$$i_{30}(t) = \frac{1}{R_3}\, e_3(t) \qquad (4.6)$$

Os valores de $i_{23}(t)$ e $i_{21}(t)$, que são obtidos através das equações (2.5) e (2.13), respectivamente, originam-se da aplicação do método trapezoidal às equações dos ramos 2-3 e 2-1 do sistema da figura 4.2. Portanto, para o sistema da figura 4.2, resultam as seguintes equações para $i_{23}(t)$ e $i_{21}(t)$:

$$i_{23}(t) = \frac{\Delta t}{2L}\, e_2(t) - \frac{\Delta t}{2L}\, e_3(t) + I_{23}(t - \Delta t) \qquad (4.7)$$

$$i_{21}(t) = \frac{2C}{\Delta t}\, e_2(t) - \frac{2C}{\Delta t}\, e_1(t) + I_{21}(t - \Delta t) \qquad (4.8)$$

Substituindo-se as equações (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8), no conjunto de equações (4.1) a (4.3), resulta :

$$\frac{2C}{\Delta t} e_2(t) - \frac{2C}{\Delta t} e_1(t) + I_{21}(t - \Delta t) - \frac{1}{R_2} e_1(t) = 0 \quad (4.9)$$

$$i(t) + v(t) \frac{1}{R_1} = \frac{2C}{\Delta t} e_2(t) - \frac{2C}{\Delta t} e_1(t) + I_{21}(t - \Delta t) +$$

$$+ \frac{\Delta t}{2L} e_2(t) - \frac{\Delta t}{2L} e_3(t) + I_{23}(t - \Delta t) + \frac{1}{R_1} e_2(t) \quad (4.10)$$

$$\frac{\Delta t}{2L} e_2(t) - \frac{\Delta t}{2L} e_3(t) + I_{23}(t - \Delta t) - \frac{1}{R_3} e_3(t) = 0 \quad (4.11)$$

Reorganizando-se o conjunto de equações (4.9) a (4.11) , obtém-se :

$$\left[\frac{2C}{\Delta t} + \frac{1}{R_2}\right] e_1(t) - \frac{2C}{\Delta t} e_2(t) = I_{21}(t - \Delta t) \quad (4.12)$$

$$- \frac{2C}{\Delta t} e_1(t) + \left[\frac{2C}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R_1}\right] e_2(t) - \frac{\Delta t}{2L} e_3(t) = i(t) -$$

$$- I_{23}(t - \Delta t) - I_{21}(t - \Delta t) + \frac{1}{R_1} v(t) \quad (4.13)$$

$$- \frac{\Delta t}{2L} e_2(t) + \left[\frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R_3}\right] e_3(t) = I_{23}(t - \Delta t) \quad (4.14)$$

Colocando-se o conjunto de equações (4.12) a (4.14) na forma matricial, obtém-se :

$$\begin{bmatrix} \frac{2C}{\Delta t} + \frac{1}{R_2} & -\frac{2C}{\Delta t} & \\ -\frac{2C}{\Delta t} & \frac{2C}{\Delta t}+\frac{\Delta t}{2L}+\frac{1}{R_1} & -\frac{\Delta t}{2L} \\ & -\frac{\Delta t}{2L} & \frac{\Delta t}{2L}+\frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i(t) \\ 0 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} -I_{21}(t-\Delta t) \\ I_{21}(t-\Delta t)+ \\ I_{23}(t-\Delta t) \\ -I_{23}(t-\Delta t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1/R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \end{bmatrix} \qquad (4.15)$$

No segundo membro da equação (4.15) identificam-se três valores de correntes :

- o primeiro vetor contém a fonte de corrente i(t) injetada na barra 2 do sistema (figura 4.1);
- o segundo vetor contém as fontes de corrente de história passada, que aparecem devido a aplicação do método trapezoidal às equações dos ramos da figura 4.2;
- o terceiro vetor, que resulta no produto $1/R_1$ v(t), corresponde à fonte de corrente (figura 4.2) equivalente à fonte de tensão que existia originariamente na barra 4 (figura 4.1).

Na equação (4.15), é necessária uma melhor identificação de seus elementos de forma a facilitar o desenvolvimento de um algoritmo eficiente para implementação computacional. Isto se-

rá feito considerando-se o equacionamento nodal aplicado a um sistema elétrico genérico.

Na análise em regime transitório de um sistema elétrico genérico, para o qual foi aplicado o método trapezoidal às equações dos ramos, é possível escrever :

$$[Y]\,[e] = [i'] \tag{4.16}$$

O vetor de correntes pode ser dividido em outros dois :

$$[Y]\,[e] = [i] - [I] \tag{4.17}$$

onde :

$[i]$ - vetor de fontes de corrente injetadas em cada uma das barras do sistema.

$[I]$ - vetor que contém as fontes de corrente de histó ria passada, que aparecem devido à aplicação do método trapezoidal às equações dos ramos do sistema original.

Portanto, nota-se pela equação (4.17), que o processo de análise nodal está sendo utilizado para análise de regime transitório, associado à aplicação do método trapezoidal às equações do sistema original.

O interesse nesse tipo de estudo é a determinação dos valores de tensão. Porém, poderão existir barras no sistema com valores conhecidos de tensão. É o que acontece com a barra 4 do sistema mostrado na figura 4.1, onde :

$$e_4(t) = v(t) \tag{4.18}$$

No entanto, existem outras barras no sistema que apresentam valores desconhecidos de tensão, como acontece com as barras 1, 2 e 3, para o sistema mostrado na figura 4.1.

É conveniente, então, considerar esses dois aspectos na equação (4.17). Além disso, a equação (4.16), da qual se origina a equação (4.17), é válida apenas quando se consideram fontes de corrente no sistema. Como poderão existir p barras com fontes de tensão, que definirão os valores de tensão nessas barras, em termos de equacionamento matemático resultará um conjunto de n equações e n-p incógnitas. Portanto, p equações devem ser eliminadas, o que corresponde à eliminação de p barras do sistema, como está apresentado na figura 4.2, para o sistema mostrado na figura 4.1, com a eliminação da barra 4.

Na equação (4.17), designando-se as barras com valores desconhecidos de tensão com um sub-índice A e as barras com valores conhecidos de tensão com um sub-índice B, obtém-se :

$$\left[\begin{array}{c|c} [Y_{AA}] & [Y_{AB}] \\ \hline [Y_{BA}] & [Y_{BB}] \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} [e_A] \\ \hline [e_B] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} [i_A] \\ \hline [i_B] \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} [I_A] \\ \hline [I_B] \end{array}\right] \qquad (4.19)$$

Da equação (4.19), resultam duas equações; porém, como uma delas deve ser eliminada, obtém-se :

$$[Y_{AA}]\,[e_A] + [Y_{AB}]\,[e_B] = [i_A] - [I_A] \qquad (4.20)$$

ou ainda :

$$[Y_{AA}]\,[e_A] = [i_A] - [I_A] - [Y_{AB}]\,[e_B] \qquad (4.21)$$

O particionamento da equação (4.17) e a posterior eliminação de uma das equações originadas deste particionamento, equação (4.19), corresponde exatamente ao mesmo processo apresentado inicialmente de transformar as fontes de tensão em fontes de corrente equivalentes.

Com a equação (4.21) é fácil identificar cada elemento da equação (4.15). Deve-se observar, na equação (4.21), que o termo $[Y_{AB}]\,[e_B]$ caracteriza justamente as fontes de corrente equivalentes às fontes de tensão que existiam originariamente no sistema.

A equação (4.21) será a equação utilizada para o cálculo das tensões. Com esta equação, os valores do vetor $[e_A]$ são obtidos a partir de um processo de fatoração da matriz $[Y_{AA}]$, conhecidos os valores do lado direito dessa equação.

Nos itens a seguir, será descrito como são obtidos e tratados computacionalmente cada um dos elementos da equação (4.21).

4.3 - MONTAGEM DAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$

As matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ são construídas seguindo-se as mesmas regras de construção das matrizes de admitância nodal. A diferença está na maneira de se considerarem os elementos de ramos. Enquanto que para a matriz de admitância nodal considera-se simplesmente o valor do parâmetro do ramo, para $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ considera-se a resistência equivalente ao parâmetro do ramo, devida à aplicação do método trapezoidal, como foi mostrado no capítulo 2.

A matriz $[Y_{AA}]$, como é a matriz de admitância relacionada às barras com valores desconhecidos de tensão, sempre será uma matriz quadrada, já que suas linhas e colunas correspondem exatamente ao número de barras com valores desconhecidos de tensão.

Para a matriz $[\,Y_{AB}\,]$, tem-se que as suas linhas correspondem às barras com valores desconhecidos de tensão e suas colunas correspondem às barras com valores conhecidos de tensão. Portanto, a matriz $[\,Y_{AB}\,]$ não é necessariamente uma matriz quadrada.

Para a montagem dessas duas matrizes, processam-se todos os ramos do sistema considerado, que tenham sido modelados através de parâmetros concentrados. Nesse processamento, são possíveis quatro alternativas diferentes :

1 - As duas barras do ramo considerado apresentam valores desconhecidos de tensão (figura 4.3-a). Para este ramo, existem duas linhas e duas colunas correspondentes na matriz $[\,Y_{AA}\,]$. Entra-se, portanto, com o valor de admitância do ramo ($1/R_{EQ}$) nas diagonais correspondentes a essas linhas e com o valor negativo ($-1/R_{EQ}$) nas posições correspondentes fora da diagonal, como está mostrado na figura 4.3-b. Para este caso, não existem elementos na matriz $[\,Y_{AB}\,]$.

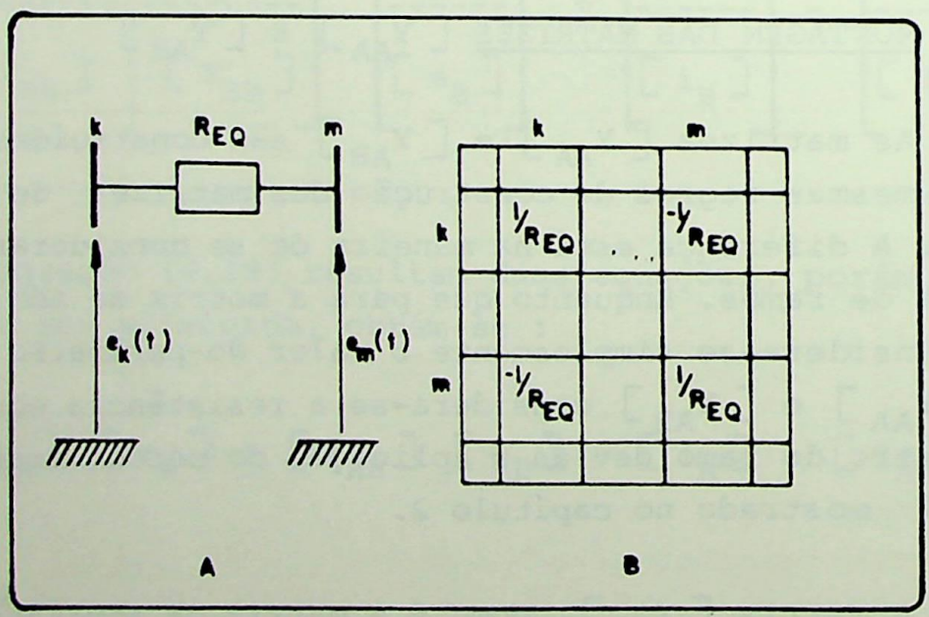


FIGURA 4.3 - A-)ramo com barras que apresentam valores desconhecidos de tensão, B-)matriz $[Y_{AA}]$ correspondente ao ramo k-m

2 - Uma das barras do ramo considerado apresenta valor desconhecido de tensão, enquanto a outra está conectada à terra (figura 4.4-a).

Para este caso, existem uma linha e uma coluna na matriz $[\,Y_{AA}\,]$, correspondentes à barra com valor desconhecido de tensão. Como o ramo corresponde a um elemento "shunt", existe apenas a contribuição $(1/R_{EQ})$ na posição da diagonal da linha correspondente à barra com valor desconhecido de tensão, como está mostrado na figura 4.4-b. Neste caso, também, não existem elementos na matriz $[\,Y_{AB}\,]$.

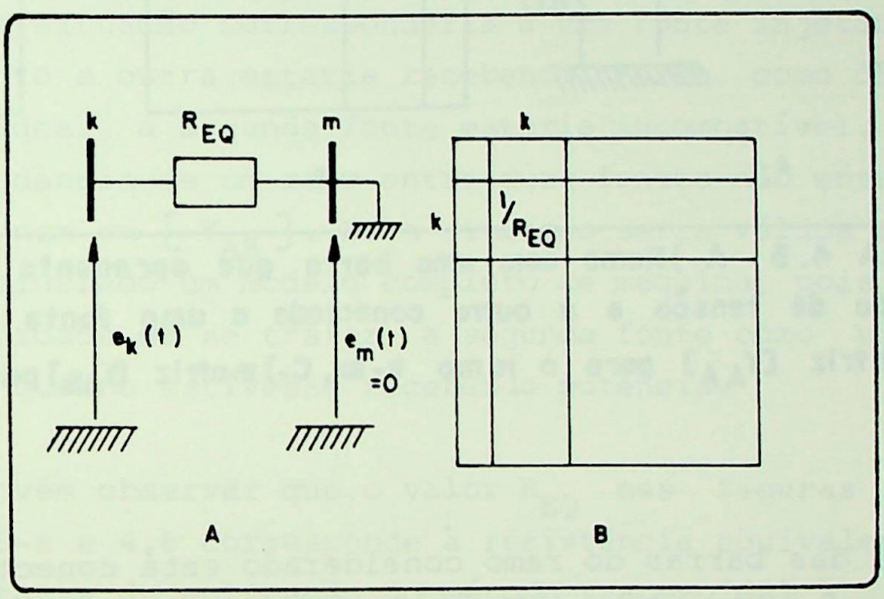


FIGURA 4.4 - A-)Ramo que apresenta uma barra com valor desconhecido de tensão e a outra conectada à terra, B-)matriz $[Y_{AA}]$ para o ramo k-m

3 - Uma das barras do ramo considerado apresenta valor desconhecido de tensão, enquanto a outra apresenta uma fonte de tensão (figura 4.5-a).

Para este caso, existem uma linha e uma coluna correspondentes à barra com valor desconhecido de tensão na matriz $[\,Y_{AA}\,]$; portanto, existe a contribuição $(1/R_{EQ})$ para a diagonal da linha. Para a barra com valor conhecido de tensão, existe uma coluna correspondente na matriz $[\,Y_{AB}\,]$,

na qual também existe uma linha correspondente à barra com valor desconhecido de tensão. Nesta posição, entra-se com a contribuição ($-1/R_{EQ}$). As matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ ficam como mostrado nas figuras 4.5-b e 4.5-c.

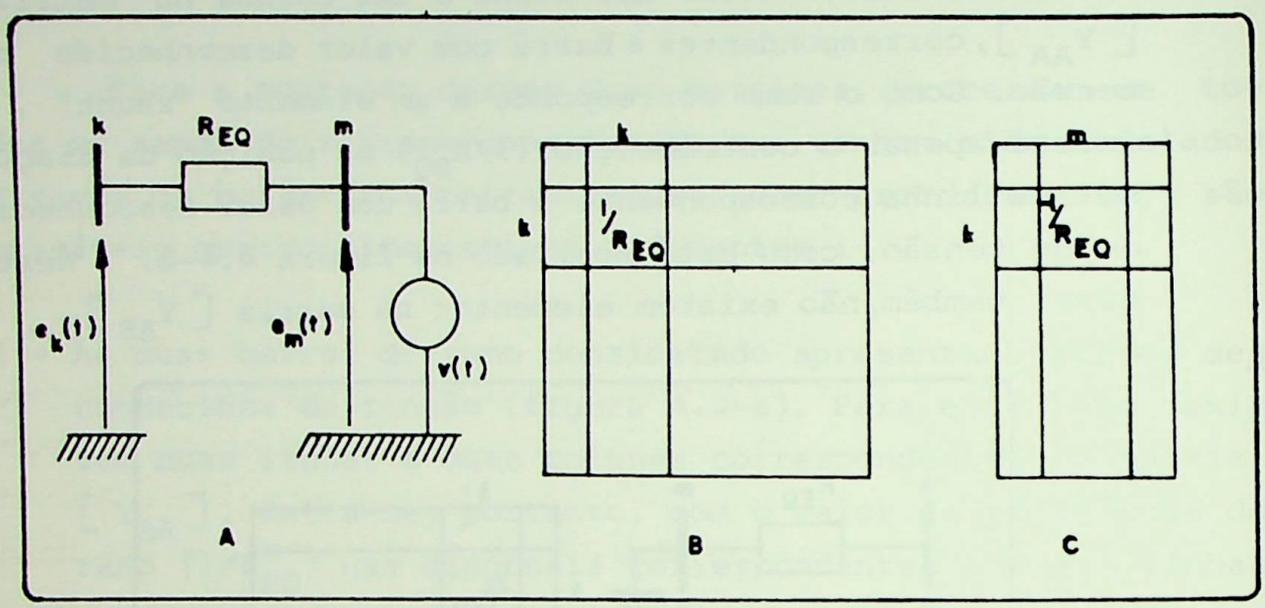


FIGURA 4.5 - A-)Ramo com uma barra que apresenta valor desconhecido de tensão e a outra conectada a uma fonte de tensão, B-)matriz $[Y_{AA}]$ para o ramo k-m, C-)matriz $[Y_{AB}]$ para o ramo k-m

4 - Uma das barras do ramo considerado está conectada a uma fonte de tensão, enquanto a outra está conectada à terra (figura 4.6).

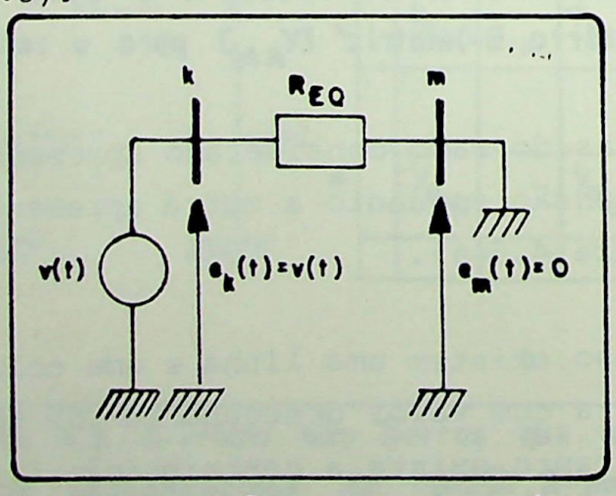


FIGURA 4.6 - Ramo com uma barra conectada a uma fonte de tensão e outra conectada à terra

Neste caso, tem-se um elemento "shunt" conectado a uma barra com fonte de tensão. Este valor deve entrar na diagonal da linha correspondente a esta barra. Porém, esta diagonal não se encontra nem em $[Y_{AA}]$ e nem em $[Y_{AB}]$; portanto, o valor do parâmetro desse ramo não é considerado na montagem das duas matrizes.

As outras alternativas possíveis, ramos conectados entre duas fontes de tensão e ramos conectados entre duas barras conectadas à terra,não são consideradas, e o programa que foi desenvolvido aponta erro de dados para essas condições. Para o segundo caso, é elementar a justificativa. Para o primeiro caso, a situação corresponderia a uma fonte injetando potência enquanto a outra estaria recebendo. Porém, como o modelo é de fonte ideal, a segunda fonte estaria incompatível. Além disso, a impedância de um ramo entre duas fontes não entra nem em $[Y_{AA}]$ e nem em $[Y_{AB}]$. Esta situação seria válida apenas se fosse considerado um modelo completo de máquina, pois haveria a possibilidade de se tratar a segunda fonte como um motor síncrono, quando estivesse recebendo potência.

Convém observar que o valor R_{EQ} nas figuras 4.3-a , 4.4-a, 4.5-a e 4.6 corresponde à resistência equivalente do ramo, resultante da aplicação do método trapezoidal à equação que descreve o comportamento físico desse ramo, como mostrado no capítulo 2.

Para exemplificar, serão montadas as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ para o sistema da figura 4.1. Inicialmente, para facilitar a montagem, o sistema da figura 4.1 será transformado em um sistema equivalente, com a transformação dos parâmetros de ramos em parâmetros equivalentes devido a aplicação do método trapezoidal às equações de ramos. O sistema transformado está mostrado na figura 4.7.

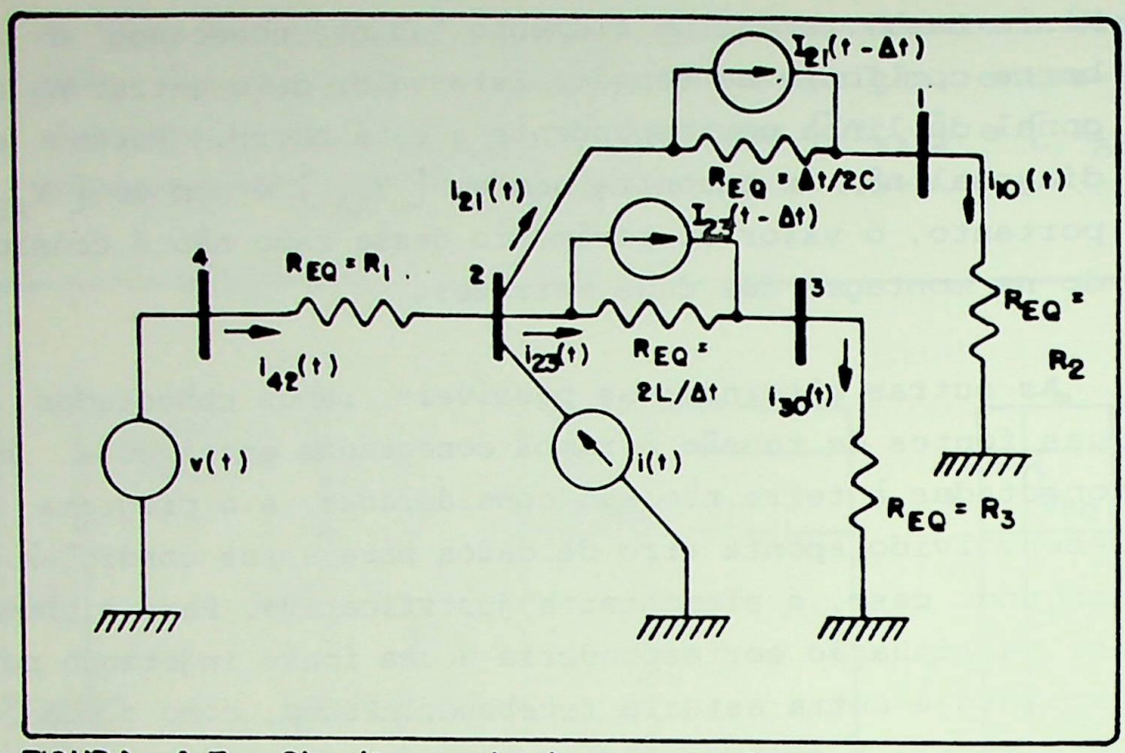


FIGURA 4.7 - Circuito equivalente ao da figura 4.1, obtido a partir da aplicação do método trapezoidal às equações dos ramos

Considerando-se o sistema equivalente mostrado na figura 4.7, será montada inicialmente a matriz [Y] para todo o sistema :

$$[Y] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{2C}{\Delta t} + \frac{1}{R_2} & -\frac{2C}{\Delta t} & & \\ \hline -\frac{2C}{\Delta t} & \frac{2C}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R_1} & -\frac{\Delta t}{2L} & -\frac{1}{R_1} \\ \hline & -\frac{\Delta t}{2L} & \frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R_3} & \\ \hline & -\frac{1}{R_1} & & \frac{1}{R_1} \\ \hline \end{array} \end{array} \qquad (4.22)$$

As linhas mais fortes indicadas na matriz [Y] da equa

ção (4.22) indicam o particionamento realizado na matriz para separar as barras com valores conhecidos de tensão (4) das barras com valores desconhecidos de tensão (1, 2 e 3), caracterizando, dessa forma, as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$:

$$[Y_{AA}] = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{2C}{\Delta t} + \frac{1}{R_2} & -\frac{2C}{\Delta t} & \\ 2 & -\frac{2C}{\Delta t} & \frac{2C}{\Delta t}+\frac{\Delta t}{2L}+\frac{1}{R_1} & -\frac{\Delta t}{2L} \\ 3 & & -\frac{\Delta t}{2L} & \frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R_3} \end{array} \qquad (4.23)$$

$$[Y_{AB}] = \begin{array}{c|c} & 4 \\ 1 & \\ 2 & -\frac{1}{R_1} \\ 3 & \end{array} \qquad (4.24)$$

As matrizes de admitâncias apresentam duas características muito importantes, que devem ser citadas : a sua natureza esparsa e a simetria. A esparsidade deve ser levada em consideração no seu armazenamento, o que diminui os requisitos de memória computacional. A exploração da esparsidade foi considerada neste trabalho e está descrita no apêndice B. A exploração da simetria da matriz $[Y_{AA}]$ permite também reduzir os requisitos de memória, porém, esta característica não foi levada em consideração neste trabalho, pelo fato de tornar o desenvolvimento computacional mais complexo.

4.4 - MONTAGEM DOS VETORES $[e_B]$ E $[i_A]$

O vetor $[e_B]$ é o vetor que contém os valores de tensão nas barras que apresentam valores conhecidos de tensão, no caso, as fontes de tensão. Cada uma de suas linhas corresponde a uma barra com valor conhecido de tensão.

O vetor $[i_A]$ é um vetor que contém os valores de correntes injetadas em cada barra com valor desconhecido de tensão. Essas correntes injetadas correspondem às fontes de corrente. Cada uma de suas linhas corresponde a uma barra com valor desconhecido de tensão.

Os dois vetores, portanto, estão relacionados às fontes de tensão e corrente do sistema. Para o sistema da figura 4.1, esses dois vetores seriam :

$$[e_B] = \begin{array}{c|c} 4 & v(t) \end{array} \qquad (4.25)$$

$$[i_A] = \begin{array}{c|c} 1 & i(t) \\ \hline 2 & 0 \\ \hline 3 & 0 \end{array} \qquad (4.26)$$

Em cada intervalo de tempo, durante o processo computacional, é calculado o valor da fonte em função do valor do tempo e de uma função matemática que define a forma de onda da fonte, como mostrado no capítulo 3.

4.5 - MONTAGEM DO VETOR $[I_A]$

O vetor $[I_A]$ contém as contribuições das fontes de corrente de história passada, $I_{km}(t - \Delta t)$, para cada uma das barras com valores desconhecidos de tensão. Para a montagem desse vetor, todos os ramos do sistema considerado, que tenham sido modelados através de parâmetros concentrados, são processados. Nesse processamento, são possíveis quatro alternativas diferentes :

1 - As duas barras do ramo considerado apresentam valores desconhecidos de tensão.

A aplicação do método trapezoidal a um ramo desse tipo resulta no circuito equivalente da figura 4.8-a. Nesse caso, como as duas barras apresentam valores desconhecidos de tensão, no vetor $[I_A]$ existe uma linha correspondente a cada uma das barras. Para a barra k a contribuição é positiva e para a barra m é negativa, como mostrado na figura 4.8-b.

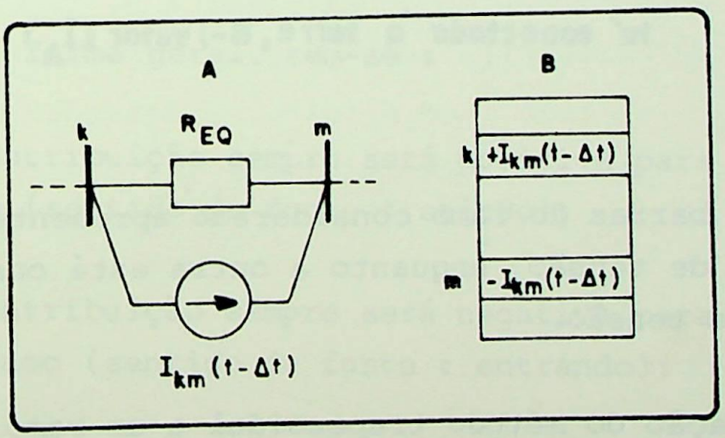


FIGURA 4.8 - A-)circuito equivalente resultante da aplicação do método trapezoidal a um ramo que apresenta barras com valores desconhecidos de tensão, B-)vetor $[I_A]$

2 - Uma das barras do ramo considerado apresenta valor desconhecido de tensão, enquanto a outra está conectada à terra.

A aplicação do método trapezoidal a um ramo desse tipo resulta no circuito equivalente da figura 4.9-a. Nesse caso, existe uma linha no vetor $[\ I_A\ ]$ correspondente à barra k. Como a fonte está saindo de k , o valor da contribuição será positivo, como mostrado na figura 4.9-b.

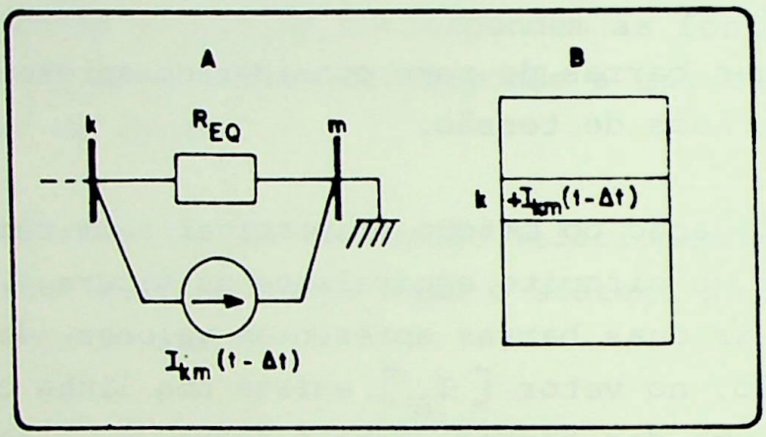


FIGURA 4.9 - A-)circuito equivalente resultante da aplicação do método trapezoidal a um ramo que apresenta uma barra com valor desconhecido de tensão e a outra está conectada à terra, B-) vetor $[I_A]$

3 - Uma das barras do ramo considerado apresenta valor desconhecido de tensão, enquanto a outra está conectada a uma fonte de tensão.

A aplicação do método trapezoidal a um ramo desse tipo resulta no circuito equivalente da figura 4.10. Nesse caso, existe uma linha no vetor $[\ I_A\ ]$ correspondente à barra k . Como a fonte está saindo de k , o valor da contribuição será positivo, como mostrado na figura 4.9-b.

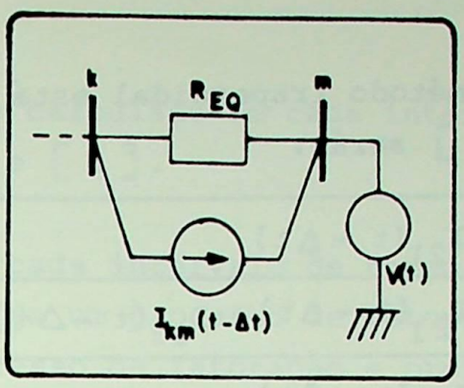


FIGURA 4.10 - Circuito equivalente resultante da aplicação do método trapezoidal a um ramo que apresenta uma barra com valor desconhecido de tensão e a outra está conectada a uma fonte de tensão

4 - Uma das barras do ramo considerado está conectada a uma fonte de tensão, enquanto a outra está conectada à terra.

Como neste caso nenhuma das barras apresenta uma linha correspondente no vetor $[\ I_A\ ]$, este ramo não é considerado para a montagem deste vetor.

De uma forma geral, tem-se :

- a contribuição sempre será positiva para a barra emissora do ramo (sentido da fonte : saindo);

- a contribuição sempre será negativa para a barra receptora do ramo (sentido da fonte : entrando);

- quando uma das barras for a terra, considera-se o sentido da fonte de corrente de história passada para a terra. Dessa forma, a contribuição para a outra barra será positiva.

Para o sistema exemplo da figura 4.1, cujo equivalente

devido à aplicação do método trapezoidal está mostrado na figura 4.7, o vetor $[I_A]$ será :

$$[I_A] = \begin{array}{c|l} 2 & - I_{21}(t - \Delta t) \\ \hline 3 & + I_{21}(t - \Delta t) + I_{23}(t - \Delta t) \\ \hline 4 & - I_{23}(t - \Delta t) \end{array} \qquad (4.27)$$

Para este caso, existem duas fontes saindo (+) da barra 2 e entrando (-) nas barras 1 e 3 .

4.6 - CÁLCULO DO VETOR $[e_A]$

O vetor $[e_A]$ contém os valores de tensão nas barras onde esses valores são desconhecidos. Portanto, cada linha deste vetor corresponde a uma barra com valor desconhecido de tensão.

Na equação (4.21), todos os valores do lado direito são determinados em cada intervalo de tempo. Dessa forma, após os cálculos dos termos do lado direito, a equação (4.21) torna-se :

$$[Y_{AA}] [e_A] = [I] \qquad (4.28)$$

onde o vetor $[I]$ corresponde a :

$$[I] = + [i_A] - [I_A] - [Y_{AB}] [e_B] \qquad (4.29)$$

Portanto, da equação (4.28), conclui-se que o valor de

$[e_A]$ deve ser calculado em cada intervalo de tempo em função de $[Y_{AA}]$ e $[I]$.

Logo, em cada intervalo de tempo, o valor de $[e_A]$ é obtido através de um processo de fatoração aplicado à matriz $[Y_{AA}]$. O processo de fatoração é preferido em relação ao processo tradicional de inversão, pois permite, através de um processo conveniente de ordenação de linhas, que a natureza esparsa de $[Y_{AA}]$ seja mantida. Os processos de ordenação e fatoração estão descritos, respectivamente, nos apêndices C e D.

A matriz $[Y_{AA}]$ é fatorada uma única vez antes do início do processo de integração. As matrizes elementares resultantes do processo de fatoração são utilizadas em cada intervalo de tempo para obtenção do vetor $[e_A]$, através do processo descrito no apêndice E.

Dessa forma, o fluxograma mostrado na figura 2.16 se altera e fica como mostrado na figura 4.11.

4.7 - EXEMPLO DE CÁLCULO DE TENSÕES PARA UM CIRCUITO SIMPLES

Considere-se o sistema exemplo mostrado na figura 4.12. Os valores dos parâmetros desse sistema são :

$R_1 = 5,0 \ \Omega$

$L = 0,05 \ mH = 5,10^{-5} H$

$R_2 = 5,0 \ \Omega$

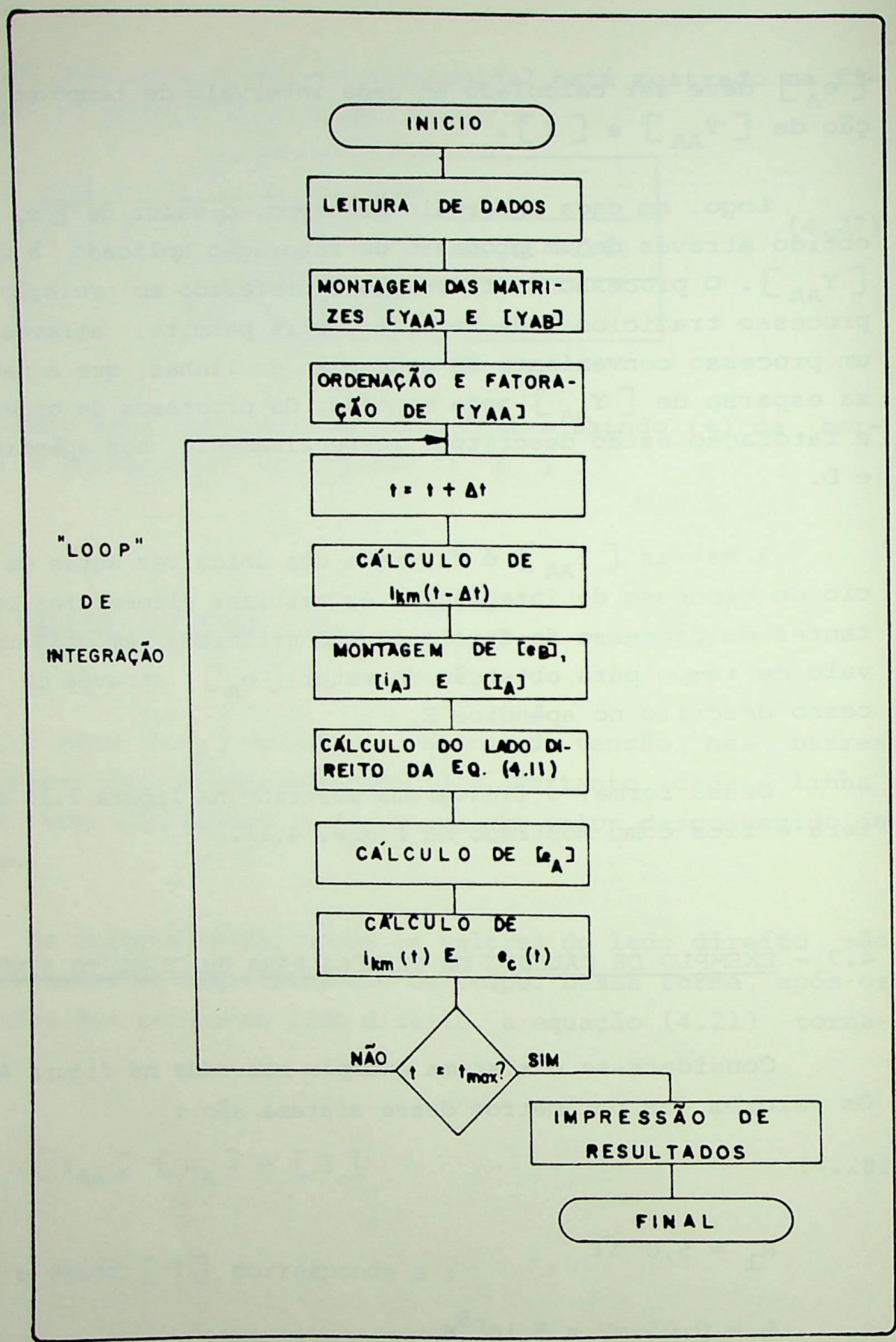


FIGURA 4.11 - Fluxograma completo para processamento de ramos modelados através de parâmetros concentrados

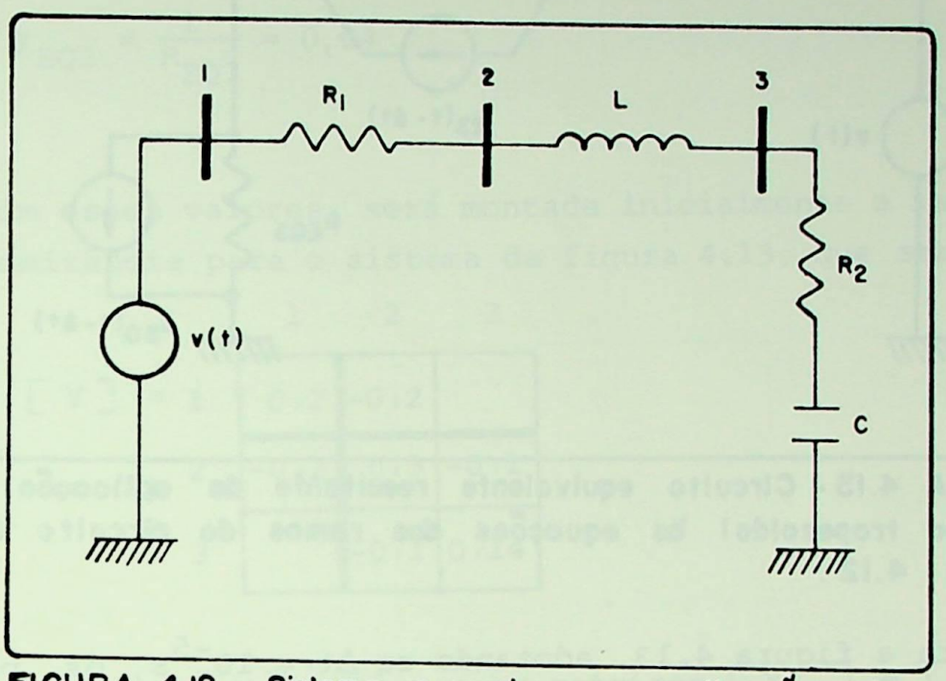


FIGURA 4.12 - Sistema exemplo para aplicação do processo de cálculo das tensões

$C = 0,25\ \mu F = 2,5\ 10^{-7} F$

$v(t) = 1,0 \cos (2\pi ft + \Theta)$ com $f = 60$ Hz e $\Theta = 0^{o}$

Na figura 4.13 está mostrado o circuito equivalente, obtido a partir da aplicação do método trapezoidal às equações dos ramos da figura 4.12.

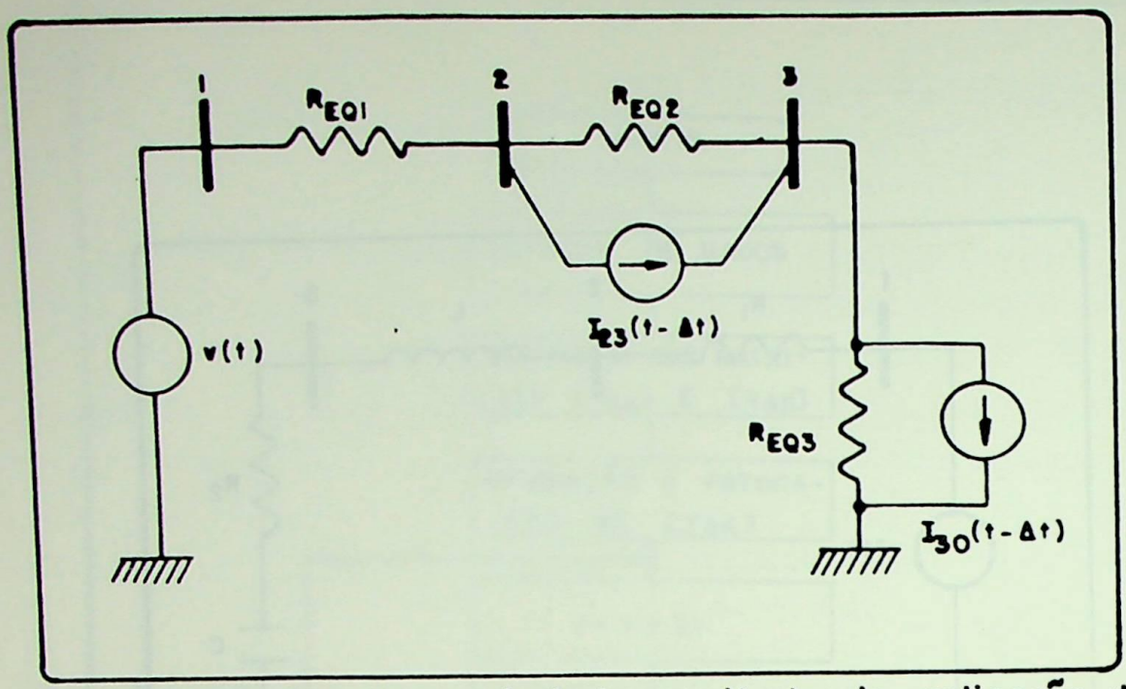


FIGURA 4.13 - Circuito equivalente resultante da aplicação do método trapezoidal às equações dos ramos do circuito da figura 4.12.

Para a figura 4.13, adotando-se $\Delta t = 10^{-5}$s, os parâmetros do sistema equivalente serão :

$$R_{EQ1} = R_1 = 5,0$$

$$R_{EQ2} = \frac{2L}{\Delta t} = \frac{2(5\ 10^{-5})}{10^{-5}} = 10,0$$

$$R_{EQ3} = R_2 + \frac{\Delta t}{2C} = 5 + \frac{10^{-5}}{2(2,5\ 10^{-7})} = 25,0$$

Os cálculos serão desenvolvidos de acordo com a sequência mostrada no fluxograma da figura 4.11.

A - MONTAGEM DAS MATRIZES $[\ Y_{AA}\ ]$ E $[\ Y_{AB}\ ]$

As admitâncias dos ramos da figura 4.13 são :

$$Y_{EQ1} = \frac{1}{R_{EQ1}} = 0,2$$

$$Y_{EQ2} = \frac{1}{R_{EQ2}} = 0,1$$

$$Y_{EQ3} = \frac{1}{R_{EQ3}} = 0,04$$

Com esses valores, será montada inicialmente a matriz de admitância para o sistema da figura 4.13, que será :

$$[Y] = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0,2 & -0,2 & \\ 2 & -0,2 & 0,3 & -0,1 \\ 3 & & -0,1 & 0,14 \end{array}$$

Da matriz $[Y]$, obtêm-se as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$:

$$[Y_{AA}] = \begin{array}{c|cc} & 2 & 3 \\ \hline 2 & 0,3 & -0,1 \\ 3 & -0,1 & 0,14 \end{array}$$

$$[Y_{AB}] = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 2 & -0,2 \\ 3 & \end{array}$$

B - ORDENAÇÃO E FATORAÇÃO DA MATRIZ $[Y_{AA}]$

O processo de ordenação a ser usado é o indicado no apêndice C, porém, como neste caso as duas linhas apresentam o mesmo número de elementos, o processo de fatoração poderá ser iniciado por qualquer uma das linhas. Será considera-

da a mesma ordem natural, primeiro a linha 2 e depois a linha 3.

O processo de fatoração é o mesmo indicado no apêndice D, que resulta na seguinte tabela de fatores :

	2	3	
2	3,33333	- 0,33333	- linha 2
3	- 0,10000	9,37497	- linha 3

As matrizes fatores, neste caso, serão :

$$[U_1] = \begin{bmatrix} 1 & + 0,33333 \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 3,33333 & \\ & 9,37497 \end{bmatrix}$$

Como mostrado no apêndice E, as matrizes $[L_i]$ não são necessárias e a matriz $[U_2]$ corresponde à matriz unidade. Para este caso, a equação de solução será :

$$[U_1]\,[D]\,[U_1]^t\,[I] = [e_A] \qquad (4.30)$$

Todos os próximos cálculos a serem realizados referem-se ao primeiro intervalo de integração, $t = \Delta t$.

C - CÁLCULO DE $I_{km}(t - \Delta t)$

Para o cálculo de $I_{km}(t - \Delta t)$, todas as condições iniciais serão consideradas nulas.

Para o ramo 1 não se define este valor, pois trata-se de um ramo com resistência.

Para os ramos 2 e 3 serão utilizadas as equações (2.6) e (2.37), respectivamente.

Para cada um dos ramos, obtém-se :

- Ramo 1

$$I_{12}(t - \Delta t) = 0,000000$$

- Ramo 2

$$I_{23}(t - \Delta t) = 0,1 \left[0,000000 - 0,000000 \right] + 0,000000 =$$

$$= 0,000000$$

- Ramo 3

$$I_{30}(t - \Delta t) = 0,04 \left[0,000000 - 0,000000 \right] - 0,04 \ (25)$$

$$0,000000 - 2(0,04)\ 0,000000 = 0,000000$$

Para o vetor com os valores de $I_{km}(t - \Delta t)$, tem-se :

$I_{km}(t - \Delta t)$

0,000000	Ramo 1
0,000000	Ramo 2
0,000000	Ramo 3

D - MONTAGEM DE $[e_B]$

Para o vetor $[e_B]$, deve-se definir o valor da fonte de tensão na barra 1 :

$$(t) = 1\rho \cos (2 \pi 60 \ 10^{-5}) = 0,999993$$

Portanto, para o vetor $[e_B]$, tem-se :

$$[e_B] = \begin{array}{l} 1 \\ \end{array} \boxed{0,999993}$$

E - MONTAGEM DE $[i_A]$

Como não existem fontes de corrente no sistema, todas as posições do vetor $[i_A]$ serão nulas, ou seja :

$$[i_A] = \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0,000000 \\ \hline 0,000000 \\ \hline \end{array}$$

F - MONTAGEM DE $[I_A]$

Para o vetor $[I_A]$, as contribuições serão :

$$[I_A] = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{array}{|l|} \hline + I_{23}(t - \Delta t) \\ \hline - I_{23}(t - \Delta t) + I_{30}(t - \Delta t) \\ \hline \end{array}$$

Como todos os valores de história passada são nulos no primeiro intervalo de integração, o vetor $[I_A]$ será :

$$[I_A] = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{array}{|l|} \hline 0,000000 \\ \hline 0,000000 \\ \hline \end{array}$$

G - MONTAGEM DO VETOR QUE CORRESPONDE AO LADO DIREITO DA EQUAÇÃO (4.21)

Esse vetor corresponde ao termo independente da equação (4.21), que, neste caso, vale :

$$[I] = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{array}{|l|} \hline 0,000000 \\ \hline 0,000000 \\ \hline \end{array} \quad [i_A]$$

$$- \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{array}{|l|} \hline 0,000000 \\ \hline 0,000000 \\ \hline \end{array} \quad [I_A]$$

$$- \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{array}{|l|} \hline -0,2 \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad [Y_{AB}]$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{array}{|l|} \hline 0,999993 \\ \hline \end{array} \quad [e_B]$$

$$[I] = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{array}{|l|} \hline +0,199999 \\ \hline 0,000000 \\ \hline \end{array}$$

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

H - CÁLCULO DOS VALORES DE $[e_A]$

Para o cálculo do vetor $[e_A]$, recorre-se ao processo apresentado no apêndice E, utilizando-se, portanto, a equação (4.30) :

1	
+0,33333	1

$[U_1]^t$

+0,199999
+0,066666

$[I_1]$

$$[U_1]^t[I] = [I_1]$$

+0,199999
0,000000

$[I]$

3,33333	
	9,37497

$[D]$

+0,666663
+0,624992

$[I_2]$

$$[D]\,[I_1] = [I_2]$$

+0,199999
+0,066666

$[I_1]$

1	+0,33333
	1

$[U_1]$

+0,874992	2
+0,624992	3

$[e_A]$ → vetor de tensões

$$[U_1]\,[I_2] = [e_A]$$

+0,666663
+0,624992

$[I_2]$

I - CÁLCULO DE $i_{km}(t)$

Para o cálculo de $i_{km}(t)$ serão utilizadas as equações (2.1), (2.5) e (2.36), respectivamente para os ramos 1 , 2 e 3.

- RAMO 1

$$i_{12}(t) = 0,2 \left[0,999993 - 0,874992 \right] = 0,025000$$

- RAMO 2

$$i_{23}(t) = 0,1 \left[0,874992 - 0,624992 \right] + 0,00000 = 0,025000$$

- RAMO 3

$$i_{30}(t) = 0,04 \left[0,624992 - 0,00000 \right] + 0,00000 = 0,025000$$

Portanto, para o vetor com os valores de $i_{km}(t)$, tem-se :

$i_{km}(t)$	
0,025000	Ramo 1
0,025000	Ramo 2
0,025000	Ramo 3

J - CÁLCULO DE $e_c(t)$

É necessário o cálculo de $e_c(t)$ apenas para o ramo 3. Utilizando-se a equação (2.10), obtém-se :

$$e_{c30}(t) = 0,000000 + 20 \left[0,025000 + 0,000000 \right] =$$

$$= 0,500000$$

Para o vetor com os valores de $e_c(t)$, tem-se :

$e_c(t)$	
0,000000	Ramo 1
0,000000	Ramo 2
0,500000	Ramo 3

Dessa forma, os cálculos estão completos para o primeiro intervalo de integração.

Para o segundo intervalo não é necessário executar novamente os itens A e B , pois as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ são montadas uma única vez e $[Y_{AA}]$ é fatorada apenas no início do processo. Portanto, para o segundo intervalo de tempo ($t = 2.10^{-5}$), basta repetir os itens C a J .

C - CÁLCULO DE $I_{km}(t - \Delta t)$

- RAMO 1 - não se define este valor

$$I_{12}(t - \Delta t) = 0,000000$$

- RAMO 2 - equação (2.6)

$$I_{23}(t) = 0,1 \left[0,874992 - 0624992 \right] + 0,025000 = 0,050000$$

- RAMO 3 - equação (2.37)

$$I_{30}(t - \Delta t) = 0,04 \left[0,624992 - 0,00000 \right] - 0,04 \ (25)$$

$$(0,025000) - 2(0,04)\ 0,5 = -0,040000$$

Para o vetor com os valores de $I_{km}(t - \Delta t)$, tem-se :

$I_{km}(t - \Delta t)$	
0,000000	Ramo 1
0,050000	Ramo 2
-0,040000	Ramo 3

D - MONTAGEM DE $[e_B]$

Deve-se definir o valor da fonte de tensão na barra 1 :

$$v(t) = 1,0 \cos (2 \pi \ 60 \ 2 \ 10^{-5}) = 0,999972$$

Portanto, para o vetor $[e_B]$, tem-se :

$$[e_B] = \begin{matrix} 1 \\ \end{matrix} \boxed{0,999972}$$

E - MONTAGEM DE $[i_A]$

$$[i_A] = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} 0,000000 \\ 0,000000 \end{matrix}}$$

F - MONTAGEM DE $[I_A]$

De acordo com as contribuições já definidas no primeiro intervalo de integração, tem-se :

$$[I_A] = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,050000 \\ -0,090000 \end{bmatrix}$$

G - MONTAGEM DO VETOR QUE CORRESPONDE AO LADO DIREITO DA EQUAÇÃO (4.21)

$$[I] = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 \end{bmatrix} - \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,050000 \\ -0,090000 \end{bmatrix} - \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0,2 \\ \end{bmatrix} \quad 1 \quad \begin{bmatrix} 0,999972 \end{bmatrix}$$

$[i_A]$ $[I_A]$ $[Y_{AB}]$ $[e_B]$

$$[I] = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,149994 \\ 0,090000 \end{bmatrix}$$

H - CÁLCULO DOS VALORES DE $[e_A]$

O processo é o mesmo utilizado para o primeiro intervalo de integração utilizando-se o vetor $[I]$ atualizado.

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ +0,33333 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0,149994 \\ 0,139998 \end{bmatrix} \; [I_1]$$

$[U_1]^t$

$$[U_1]^t [I] = [I_1] \qquad \begin{bmatrix} 0,149994 \\ 0,090000 \end{bmatrix} \; [I]$$

3,333333	
	9,37497

$[D]$

0,499979
1,312477

$[I_2]$

$[D]\ [I_1] = [I_2]$

0,149994
0,139998

$[I_1]$

1	+ 0,33333
	1

$[U_1]$

0,937467	2	
1,312477	3	$[e_A]$ → vetor de tensões

$[U_1]\ [I_2] = [e_A]$

0,499979
1,412477

$[I_2]$

I - CÁLCULO DE $i_{km}(t)$

- RAMO 1 - equação (2.1)

$$i_{12}(t) = 0,2 \left[0,999972 - 0,937467 \right] = 0,012501$$

- RAMO 2 - equação (2.5)

$$i_{23}(t) = 0,1 \left[0,937467 - 1,312477 \right] + 0,050000 =$$

$$= 0,012499$$

- RAMO 3 - equação (2.36)

$$i_{30}(t) = 0,04 \left[1,312477 - 0,000000 \right] + (- 0,040000) =$$

$$= 0,012499$$

Para o vetor com os valores de $i_{km}(t)$, tem-se :

$i_{km}(t)$	
0,012501	Ramo 1
0,012499	Ramo 2
0,012499	Ramo 3

J - CÁLCULO DE $e_c(t)$

- RAMO 3 - equação (2.10)

$$e_{c30}(t) = 0,500000 + 20 \left[0,012499 + 0,0250000 \right] =$$

$$= 1,24998$$

Para o vetor com os valores de $e_c(t)$, tem-se :

$e_c(t)$	
0,000000	Ramo 1
0,000000	Ramo 2
1,249980	Ramo 3

Dessa forma, os cálculos para o segundo intervalo de integração estão completos. O processo deve continuar até que

se atinja o valor t_{max}, que corresponde ao tempo máximo de simulação, como está indicado no fluxograma da figura 4.11.

Como o fluxograma da figura 4.11 é genérico, poderão ocorrer situações onde haverá o processamento, mas este não será de interesse para o problema em análise, como é o caso deste exemplo para a montagem do vetor $[\, i_A \,]$ e o cálculo dos valores de $e_c(t)$ para o ramos 1 e 2.

Para o circuito da figura 4.12, que é um circuito série, deve-se encontrar o mesmo valor de corrente de ramos. Para o primeiro intervalo, os valores encontrados são todos iguais (0,025000). Já no segundo, para o ramo 1 foi encontrado um valor diferente (diferença de 2.10^{-6}). Nota-se que é muito importante considerar os valores numéricos com a maior precisão possível. Computacionalmente, isso é possível trabalhando-se com variáveis definidas em dupla precisão.

Além dos cálculos de tensões de barras, é possível obter os valores das tensões de ramos a partir dos valores de tensões de barras :

$$e_{km}(t) = e_k(t) - e_m(t) \qquad (4.31)$$

O programa que foi desenvolvido considera o cálculo das tensões de ramos, como mostrado na equação (4.31).

Caso a barra emissora seja a terra, a diferença será obtida entre a barra receptora e a terra (zero).

Para o exemplo que foi desenvolvido, as tensões de ramos são :

- PRIMEIRO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO

$$e_{12}(t) = e_1(t) - e_2(t) = 0,999993 - 0,874992 = 0,125001$$

$$e_{23}(t) = e_2(t) - e_3(t) = 0,874992 - 0,624992 = 0,250000$$

$$e_{30}(t) = e_2(t) - 0 = 0,624992$$

- SEGUNDO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO

$$e_{12}(t) = 0,999972 - 0,937467 = 0,062505$$

$$e_{23}(t) = 0,937467 - 1,312477 = - 0,375010$$

$$e_{30}(t) = 1,312477 - 0 = 1,312477$$

4.8 - CONCLUSÕES

O processo apresentado para solução das tensões, associando a aplicação do método trapezoidal e as técnicas nodais, permite obter uma solução bastante simples.

Baseando-se na equação (4.21), é possível implementar qualquer novo modelo neste trabalho, bastando para isso providenciar as alterações necessárias nos elementos dessa equação para o novo modelo, e desenvolver sub-rotinas que possam considerar de maneira isolada as características particulares desse novo modelo. Estes desenvolvimentos serão vistos nos capítulos subseqüentes com a apresentação dos novos modelos.

O programa EMTP - versão BPA utiliza, para o cálculo das tensões, o mesmo processo apresentado neste capítulo, enquanto que a versão UBC utiliza a fatoração LU, que corresponde a um processo de solução menos eficiente computacionalmente.

CAPÍTULO 5 - MODELAGEM DE RAMOS DE SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA ATRAVÉS DE PARÂMETROS CONCENTRADOS CONSIDERANDO O EFEITO DE ACOPLAMENTO

5.1 - INTRODUÇÃO

A modelagem de parâmetros concentrados apresentada no capítulo 2 considera apenas ramos monofásicos. Considere-se , por exemplo, um ramo trifásico com resistências e indutâncias, como mostrado na figura 5.1.

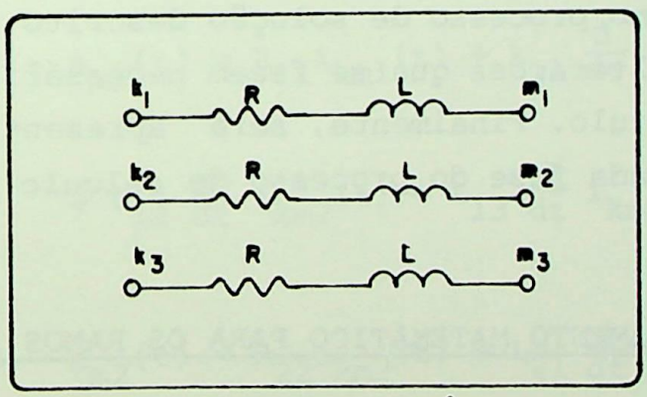


FIGURA 5.1 - Ramo trifásico com resistências R e indutâncias L

Cada uma das fases do ramo trifásico pode ser modelada através de parâmetros concentrados, como se fossem um ramo monofásico simples independente. Aplicando-se o método trapezoidal às equações de cada uma das fases,obtém-se circuitos equi

valentes, como o mostrado para o ramo RL do item 2.5, do capítulo 2. Dessa forma, toda a teoria desenvolvida nos capítulos 2 e 4 pode ser aplicada a esses tipos de ramos. Embora o exemplo considere um ramo trifásico, é possível considerar ramos com n fases, sendo que cada uma das fases será tratada como um ramo monofásico independente.

Quando se considera o acoplamento existente entre as fases do ramo trifásico, não é mais possível tratar cada uma das fases de forma independente, já que cada uma delas influencia as outras duas. Dessa forma, o equacionamento apresentado no capítulo 2 não pode ser usado, e um novo equacionamento, que considere o acoplamento, deve ser desenvolvido.

Neste capítulo será apresentada a modelagem de ramos de sistemas elétricos de potência, através de parâmetros concentrados, considerando o efeito de acoplamento. Além do equacionamento, que se baseia no método trapezoidal, também serão mostrados os aspectos computacionais relacionados com a modelagem. Outro aspecto importante é que essa modelagem permite utilizar o mesmo processo de solução descrito no capítulo 4 , sendo que as alterações que se fazem necessárias estão descritas neste capítulo. Finalmente, será apresentado um exemplo que descreve cada fase do processo de cálculo para o modelo.

5.2 - EQUACIONAMENTO MATEMÁTICO PARA OS RAMOS ACOPLADOS

Considere-se um ramo trifásico com resistências e indutâncias, como o mostrado na figura 5.2, onde é considerado o acoplamento indutivo entre as três fases do sistema. Para os ramos dessa figura, é possível escrever as seguintes equações:

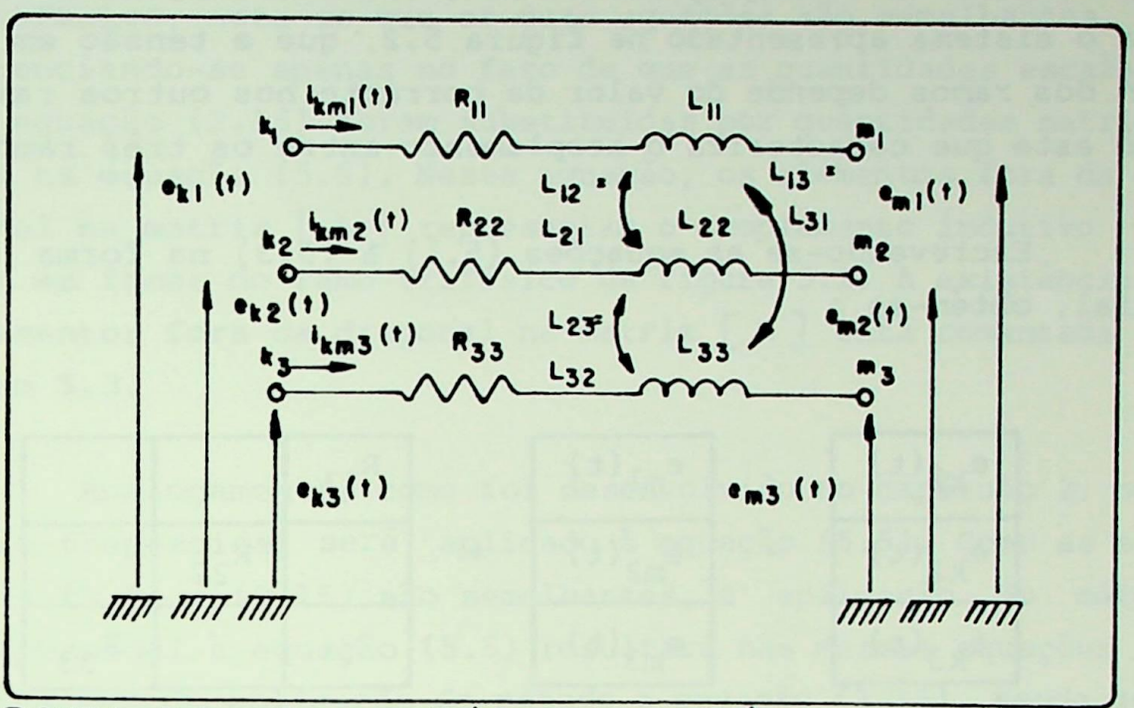


FIGURA 5.2 - Ramo trifásico com resistências e indutâncias, considerando o acoplamento indutivo

$$e_{k1}(t) - e_{m1}(t) = R_{11} i_{km1}(t) + L_{11} \frac{d}{dt} i_{km1}(t) + L_{12} \frac{d}{dt} i_{km2}(t) + L_{13} \frac{d}{dt} i_{km3}(t) \qquad (5.1)$$

$$e_{k2}(t) - e_{m2}(t) = R_{22} i_{km2}(t) + L_{21} \frac{d}{dt} i_{km1}(t) + L_{22} \frac{d}{dt} i_{km2}(t) + L_{23} \frac{d}{dt} i_{km3}(t) \qquad (5.2)$$

$$e_{k3}(t) - e_{m3}(t) = R_{33} i_{km3}(t) + L_{31} \frac{d}{dt} i_{km1}(t) + L_{32} \frac{d}{dt} i_{km2}(t) + L_{33} \frac{d}{dt} i_{km3}(t) \qquad (5.3)$$

Através das equações (5.1), (5.2) e (5.3), nota-se, para o sistema apresentado na figura 5.2, que a tensão em cada um dos ramos depende do valor da corrente nos outros ramos, fato este que caracteriza o acoplamento entre os três ramos.

Escrevendo-se as equações (5.1) a (5.3) na forma matricial, obtém-se :

$$\begin{bmatrix} e_{k1}(t) \\ e_{k2}(t) \\ e_{k3}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{m1}(t) \\ e_{m2}(t) \\ e_{m3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & & \\ & R_{22} & \\ & & R_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{km1}(t) \\ i_{km2}(t) \\ i_{km3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{km1}(t) \\ i_{km2}(t) \\ i_{km3}(t) \end{bmatrix} \qquad (5.4)$$

A partir da equação (5.4) obtém-se a equação (5.5), que descreve de uma forma genérica o comportamento físico de um ramo RL trifásico, considerando o acoplamento entre as fases desse ramo.

$$[e_k(t)] - [e_m(t)] = [R]\ [i_{km}(t)] + [L]\ \frac{d}{dt}\ [i_{km}(t)] \qquad (5.5)$$

Comparando-se a equação (5.5) com a equação (2.15) do

capítulo 2, que descreve o comportamento físico de um ramo RL monofásico, nota-se que as duas equações são semelhantes, diferenciando-se apenas no fato de que as quantidades escalares da equação (2.15) foram substituídas por quantidades matriciais na equação (5.5). Nesta equação, os elementos fora da diagonal na matriz [L] representam o acoplamento indutivo entre as fases do ramo trifásico da figura 5.2. A existência de elementos fora da diagonal na matriz [R] está comentada no item 5.3.

Analogamente, como foi desenvolvido no capítulo 2, o método trapezoidal será aplicado à equação (5.5). Como as equações (5.5) e (2.15) são semelhantes, a aplicação do método trapezoidal à equação (5.5) resultará nas mesmas equações resultantes da aplicação do método à equação (2.15), sendo que, ao invés de serem consideradas quantidades escalares, serão consideradas quantidades matriciais. Portanto, para a equação (5.5) resultará as equações (5.6) e (5.7) , que correspondem exatamente às equações (2.21) e (2.22) com as quantidades escalares substituídas por quantidades matriciais, ou seja :

$$[i_{km}(t)] = [G] \left[[e_k(t)] - [e_m(t)] \right] + [I_{km}(t - \Delta t)] \quad (5.6)$$

$$[I_{km}(t - \Delta t)] = [G] \left[\left[\frac{2}{\Delta t} [L] - [R] \right] [i_{km}(t - \Delta t)] + \right.$$

$$\left. + [e_k(t - \Delta t)] - [e_m(t - \Delta t)] \right] \quad (5.7)$$

onde :

$$[G] = [Z]^{-1} \quad (5.8)$$

$$[Z] = [R] + \frac{2}{\Delta t} [L] \quad (5.9)$$

É possível obter outras formas para as equações (5.6) e (5.7), como mostrado em [9].

Pode-se considerar,a partir deste caso, a situação particular quando não existem resistências no ramo trifásico.Neste caso a equação diferencial que descreve o comportamento do ramo é a equação (5.10), que corresponde à equação (5.5) com $[R] = 0$.

$$[e_k(t)] - [e_m(t)] = [L] \frac{d}{dt} [i_{km}(t)] \qquad (5.10)$$

Portanto, as equações resultantes da aplicação do método trapezoidal à equação (5.10)correspondem às equações (5.6) a (5.9), considerando $[R] = 0$, ou seja :

$$[i_{km}(t)] = [G] \left[[e_k(t)] - [e_m(t)] \right] + [I_{km}(t - \Delta t)] \qquad (5.11)$$

$$[I_{km}(t - \Delta t)] = [G] \left[\frac{2}{\Delta t} [L] [i_{km}(t)] + [e_k(t - \Delta t)] - [e_m(t - \Delta t)] \right] \qquad (5.12)$$

onde :

$$[G] = [Z]^{-1} \qquad (5.13)$$

$$[Z] = \frac{2}{\Delta t} [L] \qquad (5.14)$$

Até agora considerou-se apenas o acoplamento indutivo, porém, também é possível considerar simultaneamente o acoplamento capacitivo. Considere-se a figura 5.3 onde é mostrado um ramo trifásico com acoplamento capacitivo e indutivo.

Para este caso, considera-se o modelo π , que é usado para representação de linhas de transmissão em estudos de regime permanente, sendo que a capacitância total está dividida em duas partes, concentradas uma em cada extremo do ramo.

Para o sistema apresentado na figura 5.3, da mesma ma-

neira como foi feito para o acoplamento indutivo (5.2), é possível a partir das equações para cada um dos ramos do sistema, obter uma equação matricial que descreva o comportamento desse ramo. Por simplificação, para esse caso, considerou-se diretamente as equações matriciais, sendo que para facilitar a indicação das grandezas matriciais envolvidas considerou-se a figura 5.4.

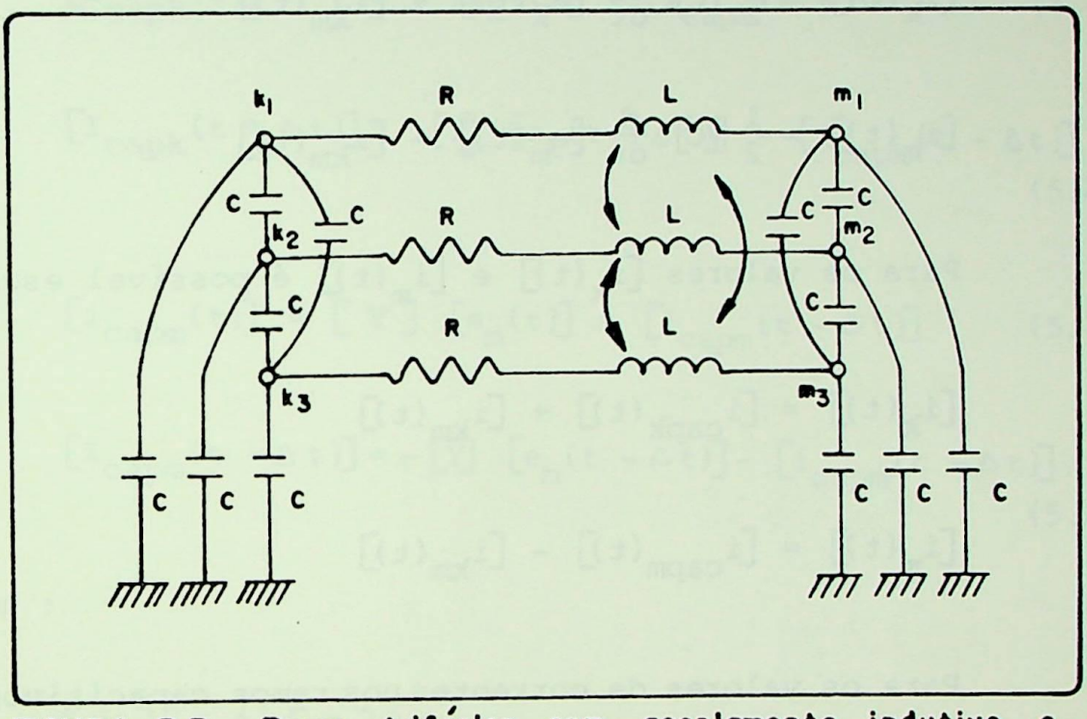


FIGURA 5.3 - Ramo trifásico com acoplamento indutivo e capacitivo

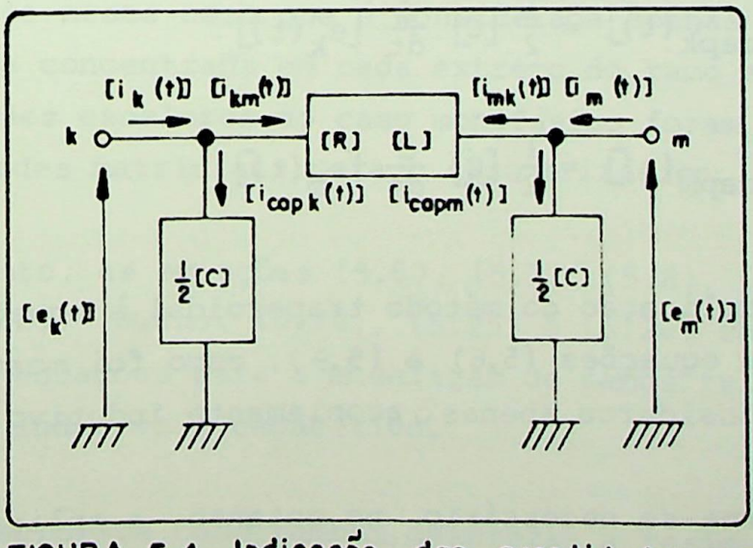


FIGURA 5.4 - Indicação das quantidades matriciais da figura 5.3

Da figura 5.4 obtém-se as equações que descrevem o comportamento físico do ramo :

$$[e_k(t)] - [e_m(t)] = [R]\,[i_{km}(t)] + [L]\,\frac{d}{dt}\,[i_{km}(t)] \qquad (5.15)$$

$$[i_k(t)] = \frac{1}{2}\,[C]\,\frac{d}{dt}\,[e_k(t)] + [i_{km}(t)] \qquad (5.16)$$

$$[i_m(t)] = \frac{1}{2}\,[C]\,\frac{d}{dt}\,[e_m(t)] - [i_{km}(t)] \qquad (5.17)$$

Para os valores $[i_k(t)]$ e $[i_m(t)]$ é possível escrever :

$$[i_k(t)] = [i_{capk}(t)] + [i_{km}(t)] \qquad (5.18)$$

$$[i_m(t)] = [i_{capm}(t)] - [i_{km}(t)] \qquad (5.19)$$

Para os valores de correntes nos ramos capacitivos, obtém-se :

$$[i_{capk}(t)] = \frac{1}{2}\,[C]\,\frac{d}{dt}\,[e_k(t)] \qquad (5.20)$$

$$[i_{capm}(t)] = \frac{1}{2}\,[C]\,\frac{d}{dt}\,[e_m(t)] \qquad (5.21)$$

A aplicação do método trapezoidal à equação (5.15) resulta nas equações (5.6) a (5.9), como foi mostrado no caso em que se considerou apenas o acoplamento indutivo.

Torna-se necessário, no entanto, a aplicação do método trapezoidal às equações (5.20) e (5.21), que descrevem o comportamento dos ramos capacitivos. Essas duas equações são se-

melhantes à equação (2.8), do capítulo 2, que descreve o comportamento do ramo com capacitância. A aplicação do método trapezoidal às equações (5.20) e (5.21) resulta nas equações (5.22) a (5.25), semelhantes às equações (2.13) e (2.14), que resultaram da aplicação do método trapezoidal à equação (2.8).

$$[i_{capk}(t)] = [Y]\,[e_k(t)] + [I_{capk}(t - \Delta t)] \qquad (5.22)$$

$$[I_{capk}(t - \Delta t)] = -[Y]\,[e_k(t - \Delta t)] - [i_{capk}(t - \Delta t)] \qquad (5.23)$$

$$[i_{capm}(t)] = [Y]\,[e_m(t)] + [I_{capm}(t - \Delta t)] \qquad (5.24)$$

$$[I_{capm}(t - \Delta t)] = -[Y]\,[e_m(t - \Delta t)] - [i_{capm}(t - \Delta t)] \qquad (5.25)$$

onde :

$$[Y] = \frac{1}{\Delta t}\,[C] \qquad (5.26)$$

Nota-se, neste caso, que é considerada apenas metade da capacitância concentrada em cada extremo do ramo e, novamente as quantidades escalares do caso monofásico foram substituídas por quantidades matriciais para o caso trifásico.

Portanto, as equações (5.6), (5.7), (5.8), (5.9), (5.18), (5.19), (5.22), (5.23), (5.24), (5.25) e (5.26) constituem o conjunto de equações para a modelagem de ramos trifásicos com acoplamento indutivo e capacitivo.

Pode-se, neste caso também, desprezar a resistência, o que implica em considerar $[R] = 0$ no conjunto de equações citado anteriormente. É possível também considerar apenas o aco-

plamento capacitivo concentrado em uma das extremidades do ramo. Considerando-se, por exemplo, o acoplamento capacitivo concentrado na barra k, obtém-se a equação (5.27), que descreve o comportamento físico do ramo.

$$[i_k(t)] = [C] \frac{d}{dt} [e_k(t)] \qquad (5.27)$$

Aplicando-se o método trapezoidal à equação (5.27), resultam as equações (5.28) e (5.29).

$$[i_k(t)] = [Y] [e_k(t)] + [I_k(t - \Delta t)] \qquad (5.28)$$

$$[I_k(t - \Delta t)] = - [Y] [e_k(t - \Delta t)] - [i_k(t - \Delta t)] \qquad (5.29)$$

com

$$[Y] = \frac{2}{\Delta t} [C] \qquad (5.30)$$

As equações obtidas neste caso são semelhantes às equações do ramo capacitivo do modelo monofásico (capítulo 2), diferenciando-se delas apenas no fato de que, neste caso, toda a capacitância está concentrada em um dos extremos do ramo.

Para os ramos acoplados também é possível transformar uma equação diferencial em duas equações algébricas, sendo que estas podem ser resolvidas pelo processo mostrado no capítulo 4. Existem diferenças na montagem dos elementos da equação de solução geral (4.11) que serão descritas mais adiante. Embora o desenvolvimento do modelo com acoplamento tenha sido aplicado apenas a sistemas trifásicos, é possível estender essa modelagem para sistemas com n fases, sendo que as equações que foram apresentadas continuam válidas.

5.3 - OBTENÇÃO DAS MATRIZES [G] E [Y]

As matrizes [G] e [Y] caracterizam respectivamente os acoplamentos indutivo e capacitivo. A matriz [G] é obtida a partir da inversão de [Z], ou seja :

$$[G] = [Z]^{-1} \tag{5.31}$$

Neste caso,é utilizado o processo de inversão de Shipley-Colleman [10], visto que além de [Z] ser uma matriz cheia, é de pequena dimensão, o que não justifica a utilização de um processo mais complexo,como o mostrado no apêndice D.

Para a matriz [Z], quando se considera o acoplamento indutivo com indutâncias e resistências, tem-se :

$$[Z] = [R] + \frac{2}{\Delta t} [L] \tag{5.32}$$

Para o caso particular onde [R] = 0, resulta

$$[Z] = \frac{2}{\Delta t} [L] \tag{5.33}$$

A matriz [Y] é obtida diretamente a partir da matriz de capacitâncias :

$$[Y] = \frac{2}{\Delta t} [C] \tag{5.34}$$

A equação (5.34) é válida quando se considera o acoplamento capacitivo concentrado em uma das barras do ramo. Quando são considerados simultaneamente os acoplamentos indutivo e capacitivo,a matriz [C] é concentrada metade em cada ex-

tremo do ramo, e a equação (5.34) se modifica :

$$[Y] = \frac{2}{\Delta t}[C]\frac{1}{2} = \frac{1}{\Delta t}[C] \qquad (5.35)$$

Pelas equações apresentadas, nota-se que as matrizes [G] e [Y] são obtidas a partir das matrizes de parâmetros do sistema, [R], [L] e [C]. Para cada uma dessas matrizes, tem-se :

A - Matriz de resistências [R]

- os elementos da diagonal correspondem às resistências próprias dos ramos,

- os elementos fora da diagonal normalmente são nulos, exceção feita ao caso de se modelarem linhas de transmissão considerando-se os efeitos da correção de Carson [11], que introduzem elementos fora da diagonal na matriz.

B - Matriz de indutâncias [L]

- os elementos da diagonal correspondem às indutâncias próprias dos ramos,

- os elementos fora da diagonal correspondem às indutâncias mútuas entre os ramos.

C - Matriz de capacitâncias [C]

- os elementos da diagonal correspondem à soma de todas as capacitâncias conectadas à barra sendo considerada,

- os elementos fora da diagonal correspondem ao valor negativo das capacitâncias entre as duas barras consideradas.

Quando se consideram linhas de transmissão modeladas por parâmetros concentrados com acoplamento, as matrizes [R] , [L] e [C] são obtidas como indicado em [11], pelo programa "LINE CONSTANTS". Para os outros casos, quando não se dispõe dessas matrizes, pode-se obtê-las a partir dos parâmetros de sequência. Da teoria de componentes simétricas, tem-se :

$$[V_F] = [T] [V_S] \qquad (5.36)$$

$$[I_F] = [T] [I_S] \qquad (5.37)$$

onde :

$[V_F]$ - vetor de tensões em quantidades de fase

$[I_F]$ - vetor de correntes em quantidades de fase

$[V_S]$ - vetor de tensões em quantidades de componentes simétricas

$[I_S]$ - vetor de correntes em quantidades de componentes simétricas

$[T]$ - matriz de transformação das componentes simétricas

Para um sistema elétrico genérico, tem-se :

$$[V_F] = [Z_F] [I_F] \qquad (5.38)$$

onde :

$[Z_F]$ - matriz de impedâncias em quantidades de fase

Substituindo-se as equações (5.36) e (5.37) na equação (5.38), obtém-se :

Escola Federal de Engenharia Biblioteca MAUÁ BIM

$$[T]\,[V_S] = [Z_F]\,[T]\,[I_S] \qquad (5.39)$$

$$[V_S] = [T]^{-1}\,[Z_F]\,[T]\,[I_S] \qquad (5.40)$$

Da equação (5.40), resulta :

$$[V_S] = [Z_S]\,[I_S] \qquad (5.41)$$

$$[Z_S] = [T]^{-1}\,[Z_F]\,[T] \qquad (5.42)$$

onde :

$[Z_S]$ - matriz de impedâncias em quantidades de componentes simétricas

Da equação (5.42) ainda é possível obter-se :

$$[Z_F] = [T]\,[Z_S]\,[T]^{-1} \qquad (5.43)$$

Para os elementos da equação (5.43), tem-se :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \qquad [T]^{-1} = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}$$

$$[Z_S] = \begin{bmatrix} Z_0 & & \\ & Z_1 & \\ & & Z_1 \end{bmatrix}$$

Deve-se notar que a matriz $[Z_S]$ é diagonal, e que o valor da impedância de sequência negativa foi adotado igual ao da impedância de sequência positiva.

Resolvendo-se a equação (5.43) para esses valores, obtém-se :

$$[\,Z_F\,] = \begin{array}{|c|c|c|}\hline Z_P & Z_M & Z_M \\ \hline Z_M & Z_P & Z_M \\ \hline Z_M & Z_M & Z_P \\ \hline \end{array}$$

onde os valores de Z_P e Z_M são definidos da seguinte maneira :

$$Z_P = \frac{1}{3}\,(Z_0 + 2Z_1) \qquad (5.44)$$

$$Z_M = \frac{1}{3}\,(Z_0 - Z_1) \qquad (5.45)$$

A partir dos valores de Z_P e Z_M obtém-se os valores de R_P, R_M, L_P e L_M, como indicado nas equações (5.46) e (5.47).

$$Z_P = R_P + j\omega L_P \qquad (5.46)$$

$$Z_M = R_M + j\omega L_M \qquad (5.47)$$

Analogamente, a matriz $[\,C\,]$ é obtida a partir dos parâmetros de componentes simétricas :

$$C_P = \frac{1}{3}\,(C_0 + 2C_1) \qquad (5.48)$$

$$C_M = \frac{1}{3}\,(C_0 - C_1) \qquad (5.49)$$

Embora este processo tenha sido aplicado a sistemas trifásicos, é possível utilizá-lo para sistemas com n fases. Neste caso, os valores de Z_P, Z_M, C_P e C_M ficam definidos da seguinte maneira :

$$Z_P = \frac{Z_0 + (n-1)\,Z_1}{n} \qquad (5.50)$$

$$Z_M = \frac{Z_0 - Z_1}{n} \qquad (5.51)$$

$$C_P = \frac{C_0 + (n - 1)\, C_1}{n} \qquad (5.52)$$

$$C_M = \frac{C_0 - C_1}{n} \qquad (5.53)$$

5.4 - MONTAGEM DAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$

Para ramos monofásicos, o valor da impedância de ramo é definido por um valor escalar Z_{km}. Portanto, nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ entra-se com o valor de admitância $1/Z_{km}$, como descrito no capítulo 4.

Para ramos trifásicos, sem considerar o acoplamento, como mostrado na figura 5.1, cada uma das fases deve ser tratada de maneira independente, sendo que a montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ segue as regras descritas no capítulo 4. Nesse caso, a matriz $[Y_{AA}]$ fica como mostrado na figura 5.5.

Para um sistema trifásico com acoplamento indutivo, como o mostrado na figura 5.2, tem-se quantidades matriciais ao invés de quantidades escalares. O acoplamento indutivo fica caracterizado através de uma matriz de impedâncias. A partir da inversão de $[Z]$, obtém-se $[G]$, que corresponde à matriz de admitâncias de ramos. Deve-se observar que tanto $[Z]$ como $[G]$ são matrizes de ramos, ou seja, na matriz $[G]$ o valor G_{11} corresponde a admitância própria do ramo 1. Já o valor G_{12} corresponde a admitância entre os ramos 1 e 2.

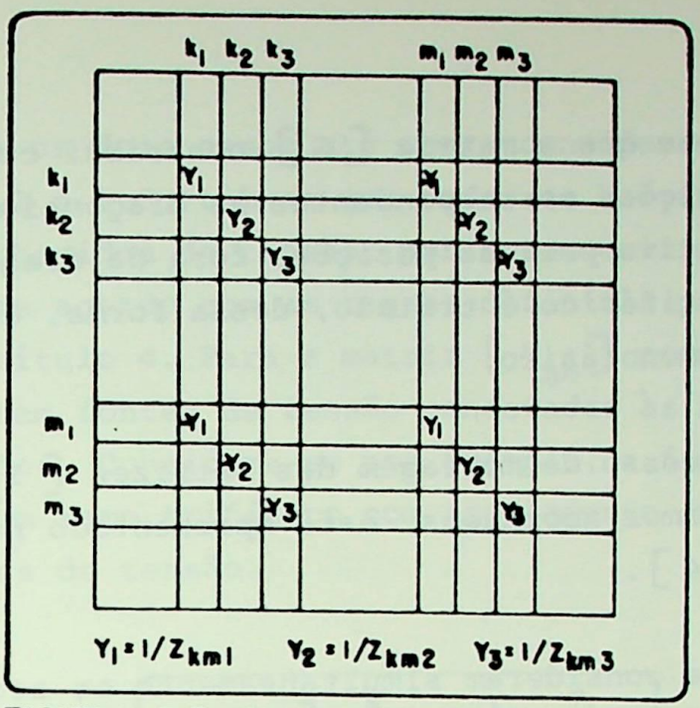


FIGURA 5.5 - Matriz $[Y_{AA}]$ correspondente ao ramo trifásico da figura 5.1

Para a montagem das matrizes $[\,Y_{AA}\,]$ e $[\,Y_{AB}\,]$ para ramos trifásicos acoplados, em analogia com a técnica usada para ramos monofásicos, entra-se com uma matriz ao invés de um elemento escalar, nas posições correspondentes às barras do ramo acoplado, como mostrado na matriz $[\,Y_{AA}\,]$ da figura 5.6 , para o ramo trifásico acoplado da figura 5.2.

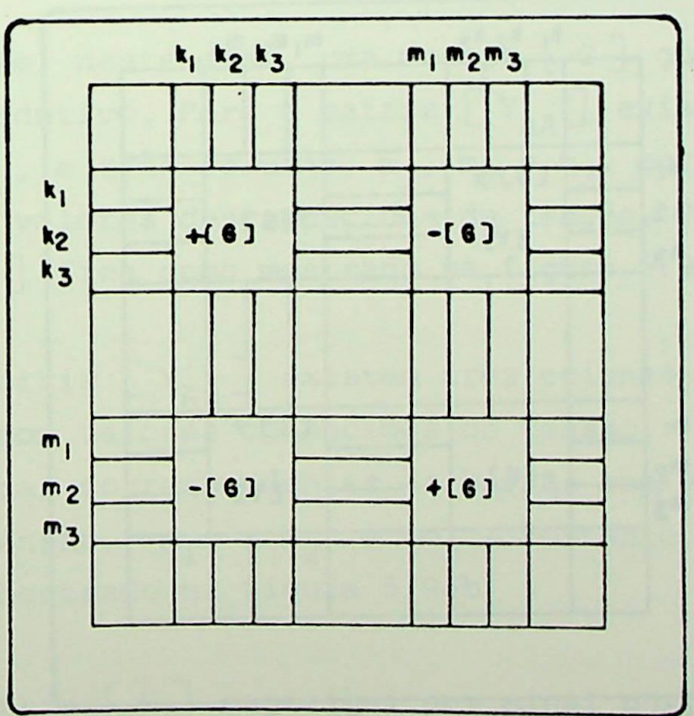


FIGURA 5.6 - Matriz $[Y_{AA}]$ para o ramo trifásico acoplado da figura 5.2

Observa-se que a matriz [G] contribui com sinal positivo para as posições correspondentes às diagonais (k-k e m-m), e com sinal negativo para as posições fora da diagonal (k-m e m-k). O ramo trifásico é tratado, dessa forma, como se fosse um único ramo monofásico.

Este processo de montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, considerando ramos acoplados, está apresentado nas referências [9, 12, 13, 14].

Quando se consideram simultaneamente os acoplamentos indutivo e capacitivo, como mostrado na figura 5.3, além da matriz [G] tem-se a matriz [Y], que representa o acoplamento capacitivo. Como se considera a capacitância concentrada metade em cada extremo do ramo e conectada entre a barra e a terra, ela recebe o mesmo tratamento de uma ramo "shunt" em um sistema monofásico, ou seja, contribui apenas nas posições correspondentes à diagonal principal da matriz $[Y_{AA}]$, como mostrado na figura 5.7.

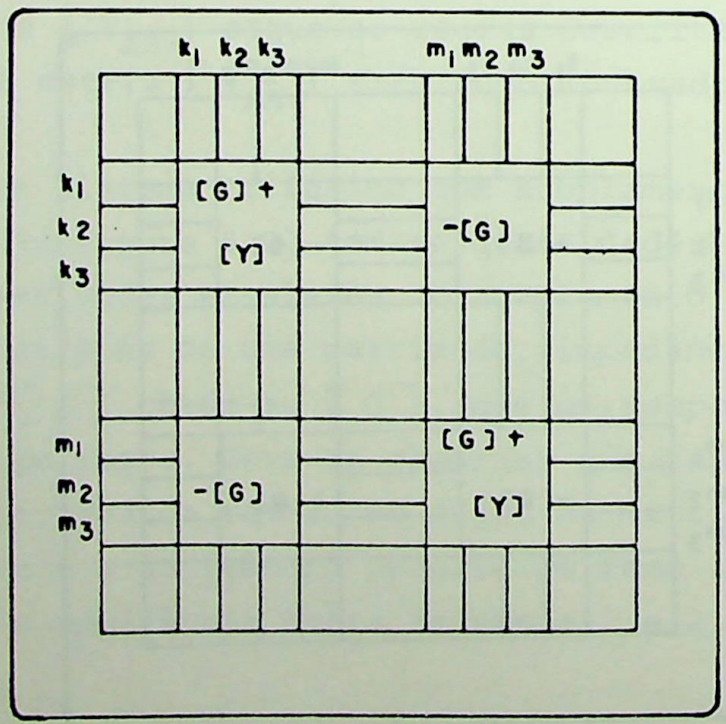


FIGURA 5.7 - Matriz $[Y_{AA}]$ para o ramo trifásico da figura 5.3

Para os dois casos até agora considerados, baseados nas figuras 5.2 e 5.3, tem-se que todas as barras apresentam valores desconhecidos de tensão, portanto, existe apenas a matriz $[\,Y_{AA}\,]$, de acordo com as regras definidas para a sua montagem no capítulo 4. Para a matriz $[\,Y_{AB}\,]$ considera-se o caso onde existem fontes de tensão conectadas às barras dos ramos considerados. Considere-se por exemplo, a figura 5.8, onde é mostrado um ramo trifásico com acoplamento indutivo e conectado à fontes de tensão.

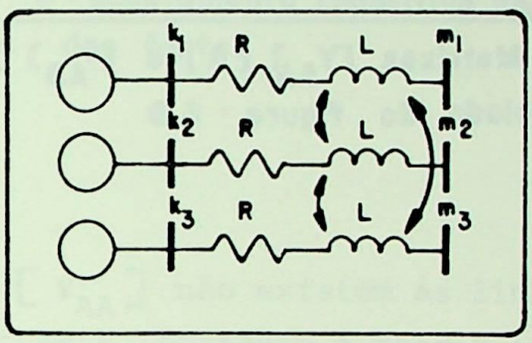


FIGURA 5.8 - Ramo trifásico com acoplamento indutivo e conectado à fontes de tensão

Existe, neste caso, uma matriz $[\,G\,]$ que define o acoplamento indutivo. Para a matriz $[\,Y_{AA}\,]$ existem três linhas, m_1, m_2 e m_3, e três colunas, m_1, m_2 e m_3, correspondentes às barras com valores desconhecidos de tensão. Portanto, a matriz $[\,Y_{AA}\,]$ fica como mostrado na figura 5.9-a.

Na matriz $[\,Y_{AB}\,]$ existem três colunas correspondentes às barras com valores conhecidos de tensão, k_1, k_2 e k_3 e três linhas correspondentes às barras com valores desconhecidos de tensão, m_1, m_2 e m_3. Portanto, a matriz $[Y_{AB}]$ fica como mostrado na figura 5.9-b.

A matriz $[\,G\,]$ contribui com sinal positivo para a posição correspondente à diagonal (k-k), que aparece na matriz

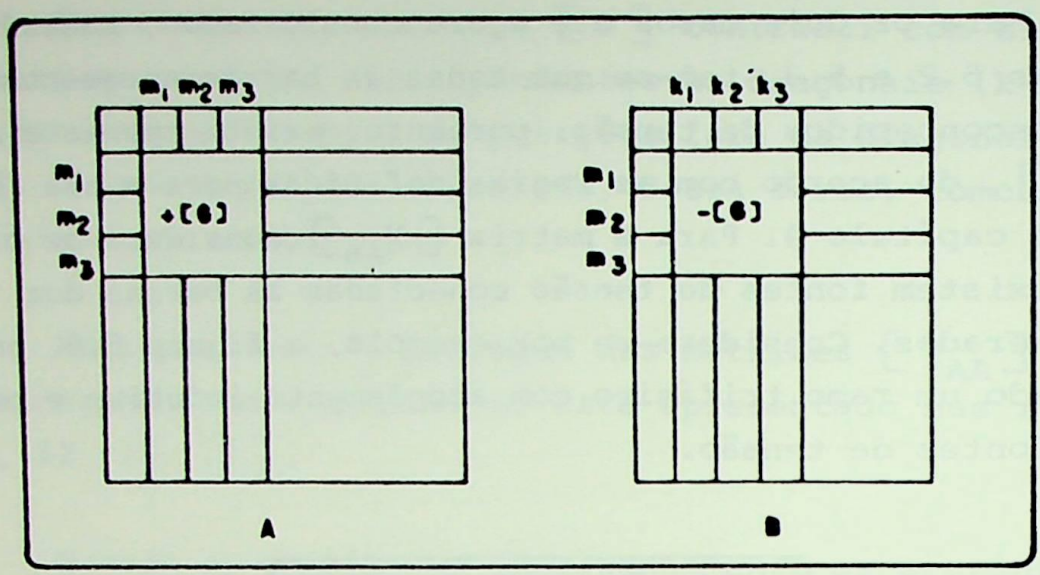


FIGURA 5.9 - Matrizes $[Y_{AA}]$ (A) e $[Y_{AB}]$ (B) para o ramo trifásico acoplado da figura 5.8

$[\ Y_{AA}\ ]$, e com sinal negativo para a posição fora da diagonal (m-k), que aparece na matriz $[\ Y_{AB}\ ]$. Neste exemplo, novamente, o ramo trifásico acoplado foi tratado como se fosse um único ramo monofásico, e as mesmas regras já apresentadas para este último, foram utilizadas para o ramo acoplado.

Para o sistema da figura 5.8, caso fossem considerados, além do acoplamento indutivo, também o acoplamento capacitivo, teria-se uma matriz $[\ Y\ ]$ correspondente ao acoplamento capacitivo. Como essa matriz contribui apenas para as diagonais, na matriz $[\ Y_{AA}\ ]$ da figura 5.9-a, para a diagonal de m, teria-se $[\ G\ ] + [\ Y\ ]$, ao invés de $[\ G\ ]$.

Existem casos onde, mesmo definindo-se um acoplamento, não haverá nenhuma influência nas matrizes $[\ Y_{AA}\ ]$ e $[\ Y_{AB}\ ]$. Considere-se, por exemplo, a figura 5.10, onde é mostrado um ramo trifásico com acoplamento capacitivo concentrado nas barras da fonte de tensão.

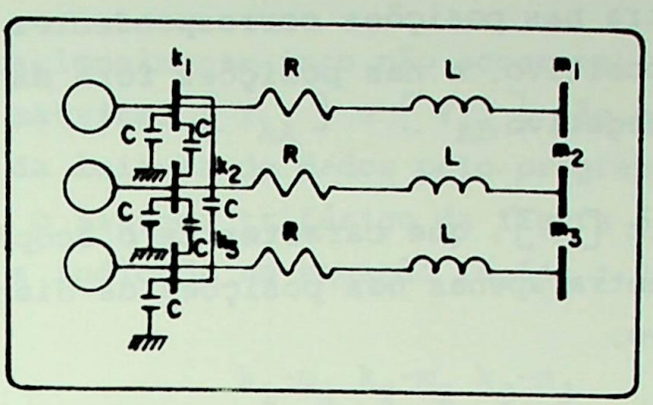


FIGURA 5.10 - Ramo trifásico considerando o acoplamento capacitivo nas barras das fontes

Na matriz $[Y_{AA}]$ não existem as linhas e colunas correspondentes às barras k, portanto a matriz $[Y]$, neste caso, não contribui para a montagem de $[Y_{AA}]$. Na matriz $[Y_{AB}]$ existem as posições fora da diagonal correspondentes a k e m, porém, como $[Y]$ contribui apenas para as posições correspondentes às diagonais, não contribuirá para a montagem de $[Y_{AB}]$.

A matriz $[G]$ pode apresentar o mesmo tratamento da matriz $[Y]$, quando se considera um ramo trifásico com acoplamento indutivo conectado à terra. Nesse caso, a matriz $[G]$ contribui apenas para as posições correspondentes às diagonais.

Para a montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ para ramos acoplados, de uma maneira geral, tem-se :

- são válidas as mesmas regras apresentadas para os ramos monofásicos. Cada ramo acoplado é tratado como se fosse um único ramo monofásico, dessa forma, nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ entra-se com uma matriz ao invés de um valor escalar.

- a matriz [G], que caracteriza o acoplamento indutivo, entra nas posições correspondentes à diagonal com sinal positivo, e nas posições fora da diagonal com sinal negativo,

- a matriz [Y], que caracteriza o acoplamento capacitivo, entra apenas nas posições da diagonal com sinal positivo,

- a matriz [G] pode apresentar o mesmo comportamento da matriz [Y], quando se considera um ramo com acoplamento indutivo conectado à terra,

- embora os exemplos apresentados considerem apenas sistemas trifásicos, o processo pode ser aplicado a sistemas com n fases.

Pelas observações e pelos casos apresentados nota-se que a montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, a partir das matrizes [G] e [Y], é bastante simples. Porém, existem condições particulares, que não estão visíveis nos casos apresentados, e que tornam a montagem dessas matrizes um pouco mais complexa. Essas condições particulares e os respectivos algoritmos para a montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ estão apresentados no próximo item.

...

5.5 - ALGORITMO PARA A MONTAGEM DAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$ CONSIDERANDO O PROCESSAMENTO DAS MATRIZES [G] E [Y]

Em todos os casos apresentados no item anterior, a disposição de linhas e colunas nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ era sequencial, ou seja, k_2 estava logo após k_1 e k_3 após k_2, como mostrado na figura 5.9. Nota-se, nesses casos, que o posicionamento das matrizes [G] e [Y] nas matrizes $[Y_{AA}]$ e

$[Y_{AB}]$ é simples, e está bem visível nos casos apresentados.

Computacionalmente isto não acontece, pois as linhas e colunas das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ são criadas de acordo com a ordem da leitura de dados pelo programa. Considere-se, por exemplo, o sistema trifásico da figura 5.8, e uma matriz $[G]$, como a indicada na equação (5.54) :

$$[G] = \begin{array}{c|ccc} & k_1-m_1 & k_2-m_2 & k_3-m_3 \\ k_1 - m_1 & G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ k_2 - m_2 & G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ k_3 - m_3 & G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{array} \qquad (5.54)$$

Considere-se que as linhas e colunas das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ não estejam em ordem sequencial. Dessa forma, essas matrizes ficam como indicado na figura 5.11.

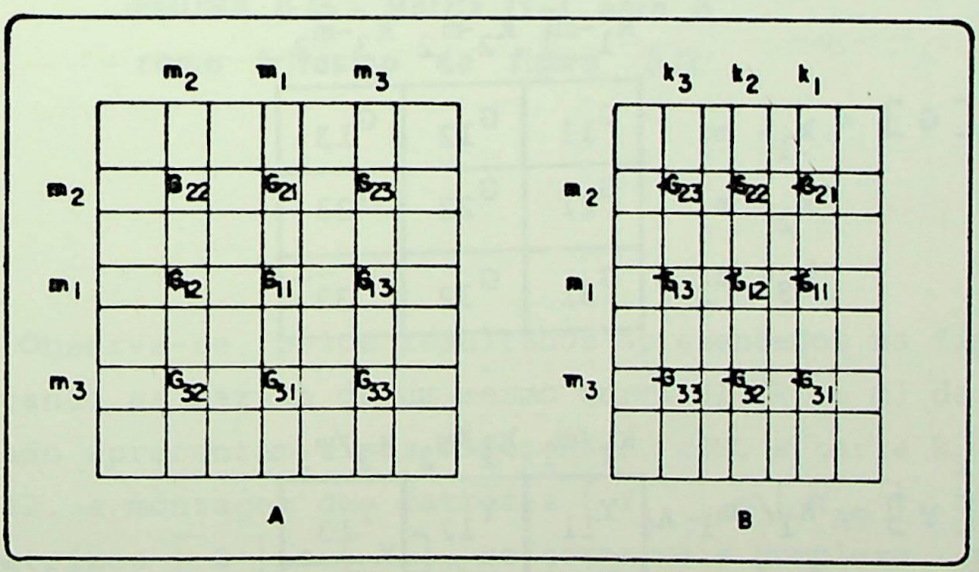


FIGURA 5.11 - Matrizes $[Y_{AA}]$(A) E $[Y_{AB}]$(B) para o ramo trifásico da figura 5.8 considerando a ordem de linhas e colunas não sequencial

Existem ainda outros casos particulares que mostram características importantes da montagem de $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$. Considere-se, por exemplo, o sistema trifásico com acoplamento indutivo e capacitivo mostrado na figura 5.12, onde apenas a barra k_1 está conectada a uma fonte de tensão.

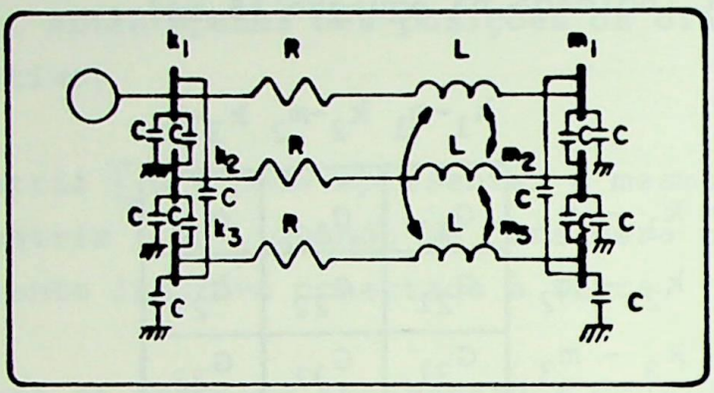


FIGURA 5.12 - Ramo trifásico com acoplamento indutivo e capacitivo

As matrizes $[G]$ e $[Y]$, que descrevem o acoplamento indutivo e capacitivo, estão mostradas a seguir :

$$[G] = \begin{array}{c} \\ k_1 - m_1 \\ k_2 - m_2 \\ k_3 - m_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k_1-m_1 & k_2-m_2 & k_3-m_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[Y] = \begin{array}{c} \\ k_1 / m_1 \\ k_2 / m_2 \\ k_3 / m_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k_1/m_1 & k_2/m_2 & k_3/m_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

Para facilitar a montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, será montada inicialmente a matriz de admitâncias $[Y_T]$ para todo o sistema, como está mostrado na figura 5.13. As matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ estão mostradas na figura 5.14.

	k_2	k_3	m_1	m_2	m_3	k_1
k_2	$G_{22}+Y_{22}$	$G_{23}+Y_{23}$	$-G_{21}$	$-G_{22}$	$-G_{23}$	$G_{21}+Y_{21}$
k_3	$G_{32}+Y_{32}$	$G_{33}+Y_{33}$	$-G_{31}$	$-G_{32}$	$-G_{33}$	$G_{31}+Y_{31}$
m_1	$-G_{12}$	$-G_{13}$	$G_{11}+Y_{11}$	$G_{12}+Y_{12}$	$G_{13}+Y_{13}$	$-G_{11}$
m_2	$-G_{22}$	$-G_{23}$	$G_{21}+Y_{21}$	$G_{22}+Y_{22}$	$G_{23}+Y_{23}$	$-G_{21}$
m_3	$-G_{32}$	$-G_{33}$	$G_{31}+Y_{31}$	$G_{32}+Y_{32}$	$G_{33}+Y_{33}$	$-G_{31}$
k_1	$G_{12}+Y_{12}$	$G_{13}+Y_{13}$	$-G_{11}$	$-G_{12}$	$-G_{13}$	$G_{11}+Y_{11}$

FIGURA 5.13 - Matriz $[Y_T]$ para o ramo trifásico da figura 5.12

Observa-se, pelos resultados apresentados na figura 5.14, que quando as barras de um mesmo terminal (k ou m) de um ramo acoplado apresentam tipos diferentes, como a barra k_1 na figura 5.12, a montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, a partir das matrizes $[G]$ e $[Y]$, se torna mais complexa, porém, as regras gerais apresentadas no item anterior contuam válidas para esses casos. Nos exemplos apresentados no item anterior, onde o ramo acoplado era tratado como um ramo monofásico único, era possível identificar facilmente as posições a

serem ocupadas pelas matrizes [G] e [Y], dentro das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$. Nos resultados apresentados na figura 5.14 nota-se que as matrizes [G] e [Y] contribuem de forma parcial para a montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, devido justamente ao fato das barras do terminal k, do ramo acoplado da figura 5.12, não serem do mesmo tipo (barra k_1 conectada a uma fonte de tensão).

Ressalta-se que, embora o sistema apresentado na figura 5.12 possa ser considerado um caso particular, praticamente tal situação poderá ocorrer, como no caso de uma falha no processo de abertura de um dos pólos do disjuntor de uma fonte, mantendo assim, uma das fases dessa fonte conectada ao sistema.

Pelos dois exemplos apresentados neste item, figuras 5.11 e 5.14, conclue-se que, um algoritmo eficiente para montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, a partir das matrizes [G] e [Y], deve considerar cada um dos ramos que compõem

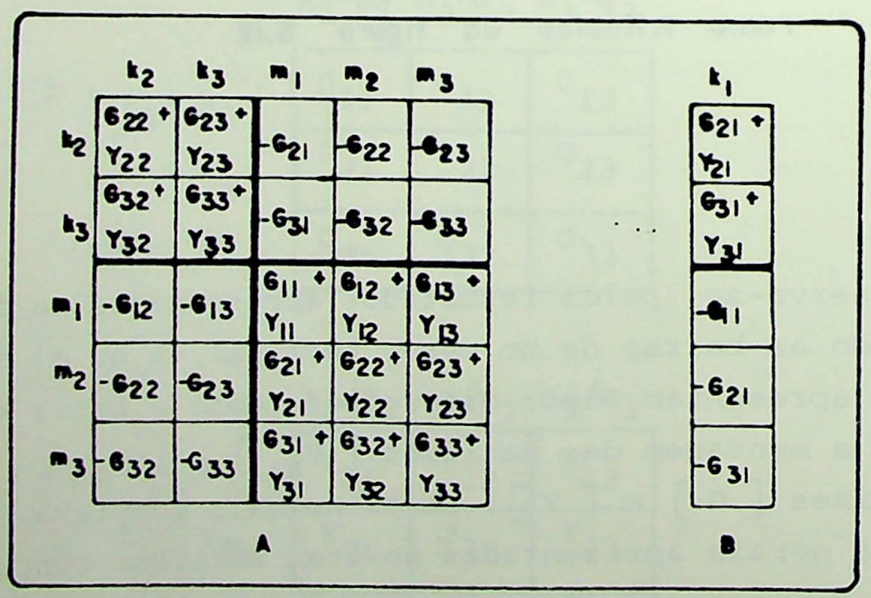


FIGURA 5.14 - Matrizes $[Y_{AA}]$ (A) E $[Y_{AB}]$ (B) para o sistema da figura 5.12

o ramo acoplado de maneira independente, e considerar também o tipo das barras terminais do ramo acoplado.

A seguir será descrito o processo geral de montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, a partir do processamento dos elementos das matrizes $[G]$ e $[Y]$.

Para um elemento da matriz $[G]$, que corresponde à admitância entre dois ramos, $k_i - m_i$ e $k_j - m_j$, para cada uma das posições na matriz $[Y_{AA}]$ ou $[Y_{AB}]$, tem-se :

- caso esteja-se considerando uma posição correspondente à diagonal ($k_{i/j} - k_{i/j}$ ou $m_{i/j} - m_{i/j}$), a contribuição do elemento para as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ será com sinal positivo. Considera-se aqui, como elementos da diagonal, além das posições $k_i - k_i$ e $m_i - m_i$, as posições do tipo $k_i - k_j$ e $m_i - m_j$. O conceito de diagonal, neste caso, está associado às barras de um mesmo terminal do ramo acoplado.

- caso esteja-se considerando uma posição fora da diagonal ($k_{i/j} - m_{i/j}$ ou $m_{i/j} - k_{i/j}$), a contribuição do elemento para as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ será com sinal negativo. O conceito de fora da diagonal, neste caso, está associado aos elementos entre barras de terminais diferentes do ramo acoplado.

- para identificar se uma determinada posição pertence à matriz $[Y_{AA}]$ ou $[Y_{AB}]$, devem ser observadas as regras definidas no capítulo 4, ou seja, as linhas e colunas da matriz $[Y_{AA}]$ correspondem às barras com valores desconhecidos de tensão, enquanto que para $[Y_{AB}]$ tem-se que as linhas correspondem às barras com valores desconhecidos de tensão, enquanto as colunas correspondem às barras com valores conhecidos de tensão, as fontes de tensão.

Os elementos da matriz $[Y]$, pelo fato desta ser uma matriz de admitâncias de barras, contribuem sempre com sinal positivo, e apenas para as posições correspondentes às diagonais, k_i e m_i ou k_i ou m_i, dependendo se o acoplamento é considerado metade em cada extremo do ramo, ou concentrado em apenas um extremo (k ou m), respectivamente.

Considere-se, por exemplo, o elemento G_{11} da matriz $[G]$ da equação (5.54). Este valor corresponde à admitância própria do ramo $k_1 - m_1$. Pelo que foi apresentado, este elemento ocupa as seguintes posições nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$:

$k_1 - k_1 \quad - \quad + G_{11}$

$k_1 - m_1 \quad - \quad - G_{11}$

$m_1 - k_1 \quad - \quad - G_{11}$

$m_1 - m_1 \quad - \quad + G_{11}$

Para o elemento G_{12}, que corresponde à admitância mútua entre os ramos $k_1 - m_1$ e $k_2 - m_2$, analogamente tem-se as seguintes posições :

$k_1 - k_2 \quad - \quad + G_{12}$

$k_1 - m_2 \quad - \quad - G_{12}$

$m_1 - k_2 \quad - \quad - G_{12}$

$m_1 - m_2 \quad - \quad + G_{12}$

Como a matriz $[G]$ é simétrica, $G_{12} = G_{21}$, para G_{21} tem se :

$$k_2 - k_1 \quad - \quad + G_{21} = + G_{12}$$

$$k_2 - m_1 \quad - \quad - G_{21} = - G_{12}$$

$$m_2 - k_1 \quad - \quad - G_{21} = - G_{12}$$

$$m_2 - m_1 \quad - \quad + G_{21} = + G_{12}$$

Portanto, cada elemento da diagonal da matriz $[G]$ dá origem, no máximo, a quatro elementos nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$. Cada elemento fora da diagonal da matriz $[G]$, como esta é simétrica, dá origem, no máximo, a oito elementos nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$.

Dessa forma ficam definidas as posições a serem ocupadas nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, porém não se identifica em que matrizes estão essas posições. Esse aspecto é definido em função do tipo das barras terminais do ramo acoplado. Considera-se 5 tipos de combinações de conexões de ramo (figura 5.15), em função dos tipos de barras considerados neste trabalho : com valores desconhecidos de tensão, conectadas à fontes de tensão e concectadas à terra.

A tabela 5.1 apresenta as combinações possíveis entre dois ramos (25 casos), e indica em função dessas combinações as posições a serem ocupadas nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$. Os ramos são considerados dois a dois, visto que os elementos da matriz $[G]$, correspondem às admitâncias entre ramos. De maneira a simplificar a análise, foram considerados apenas os processamentos do elemento G_{11}, cujas posições a serem ocupadas nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ foram indicadas por ., e do elemento $G_{12} = G_{21}$, cujas posições ocupadas nas mesmas matrizes foram indicadas por x. Para facilitar a análise dos re

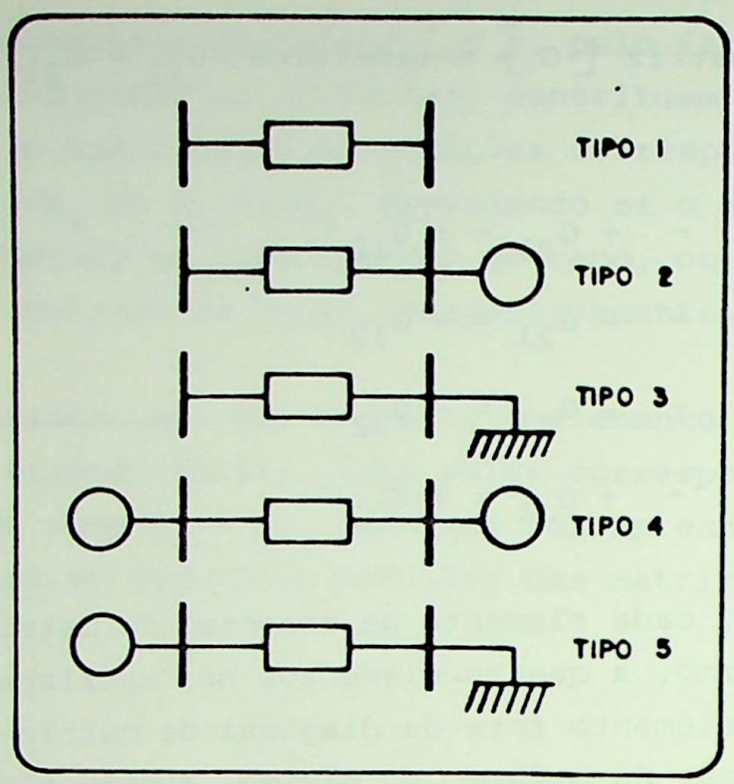


FIGURA 5.15 - Tipos de conexões de ramos

sultados da tabela 5.1, a figura 5.16-a mostra a matriz de admitâncias para todo o sistema $[Y_T]$, indicando apenas as posições a serem ocupadas pelos elementos $G_{11}(.)$ e $G_{12} = G_{21}(x)$.

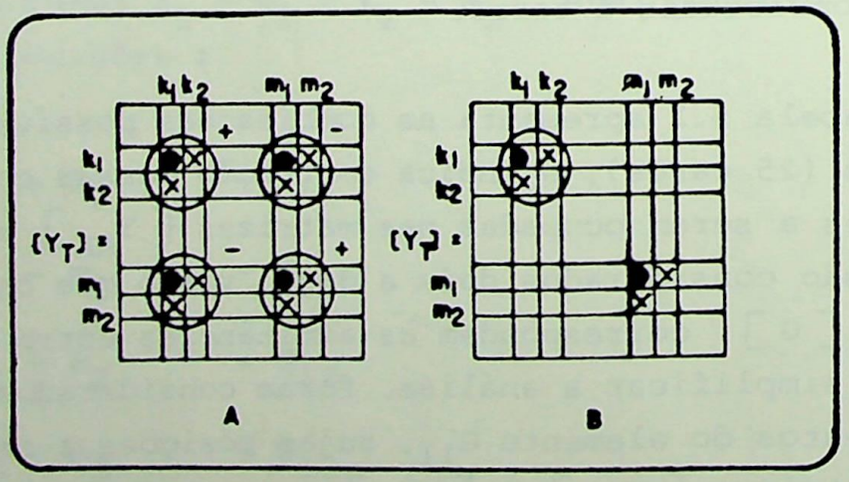
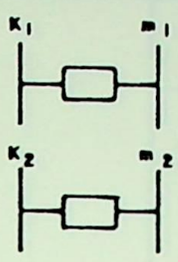
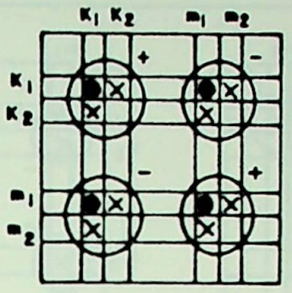
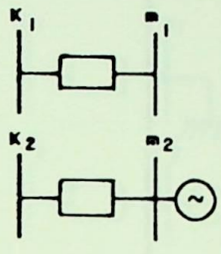
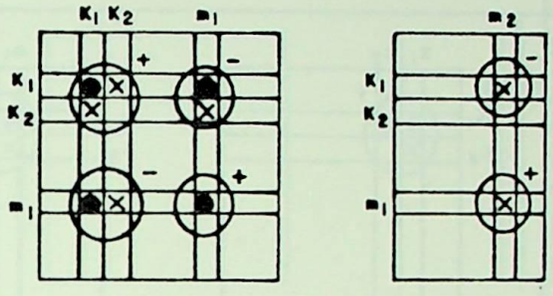
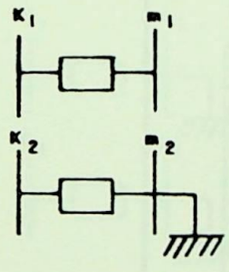
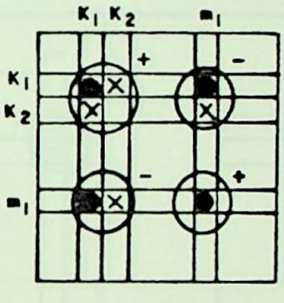
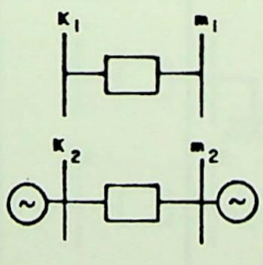
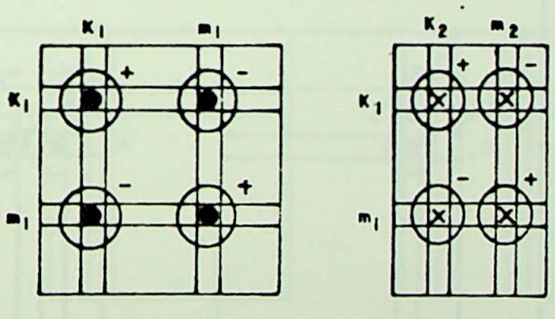
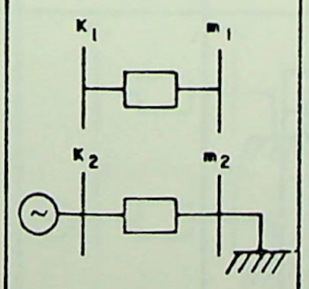
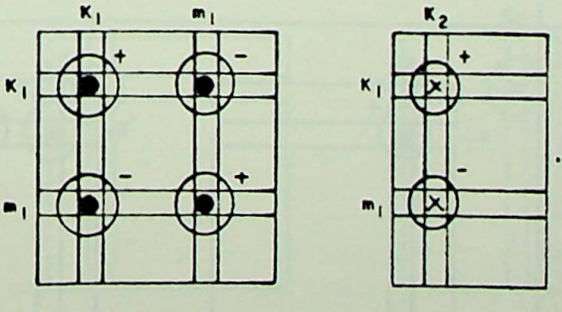
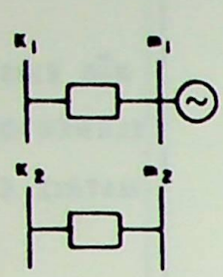
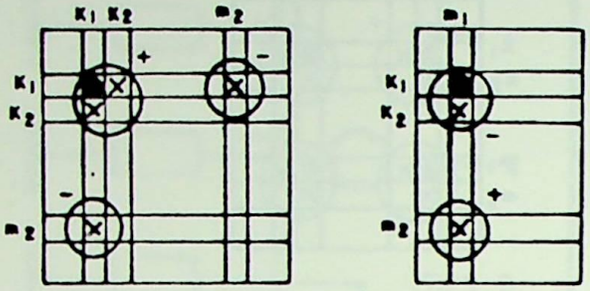
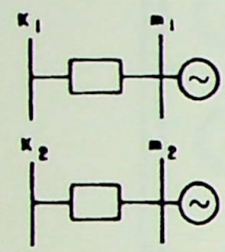
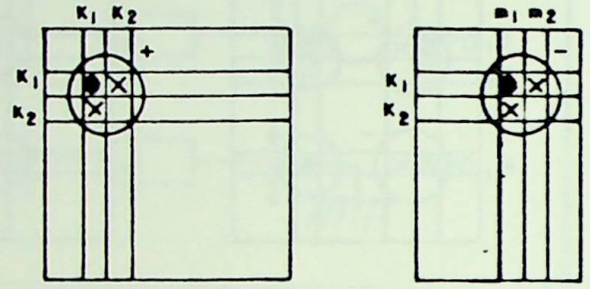
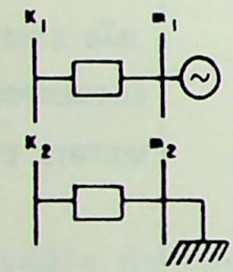
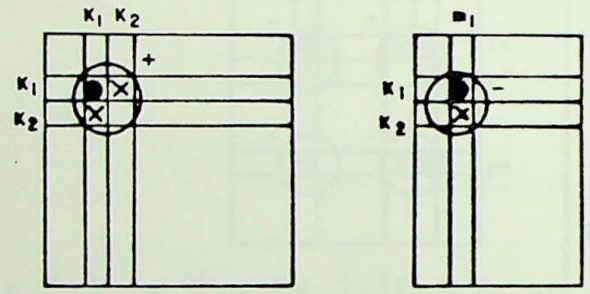
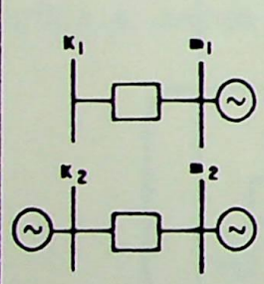
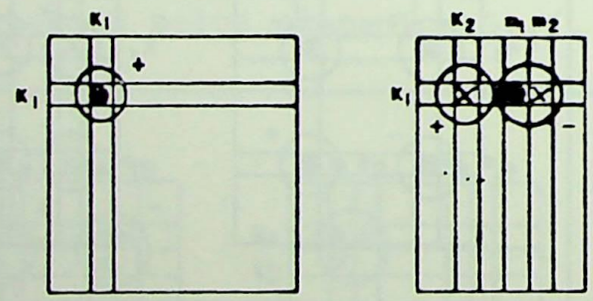
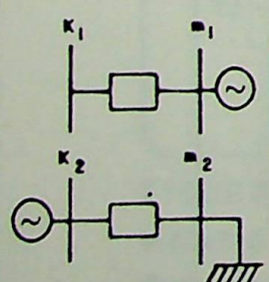
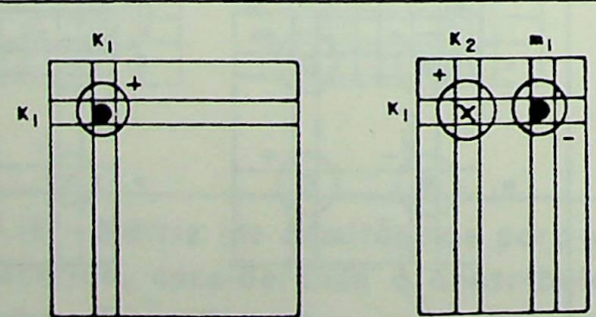
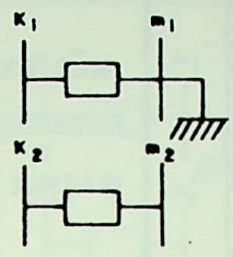
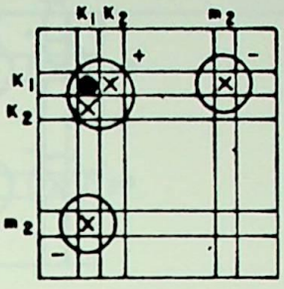
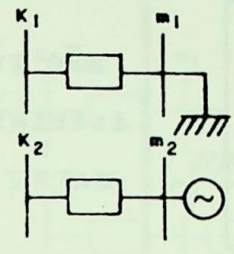
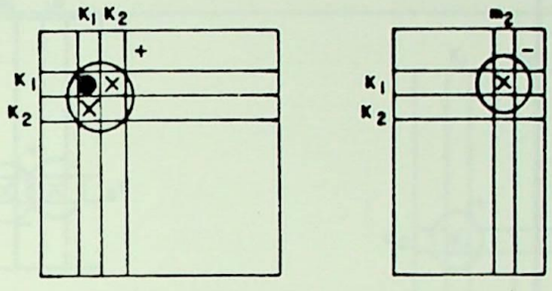
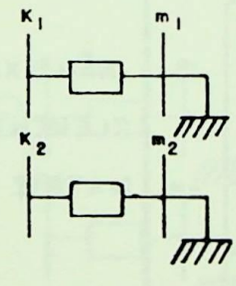
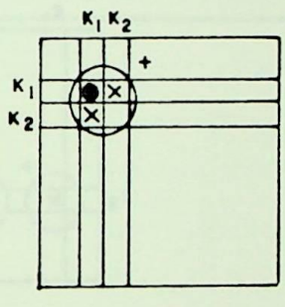
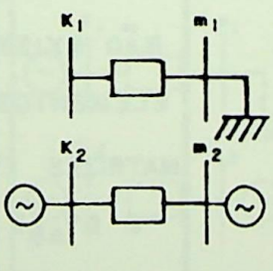
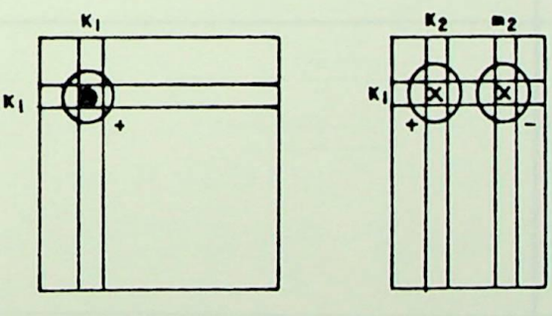
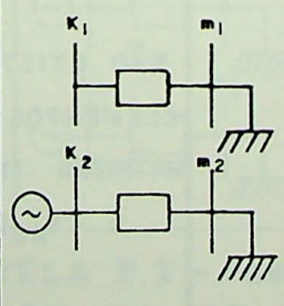
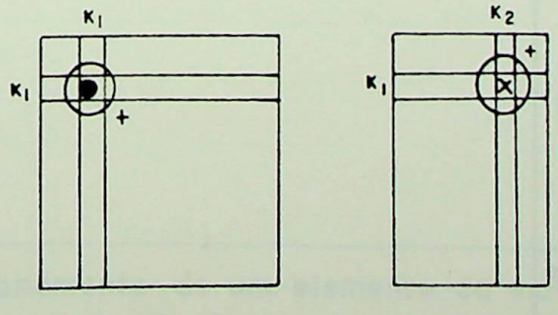


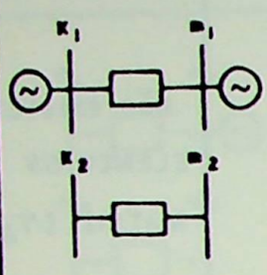
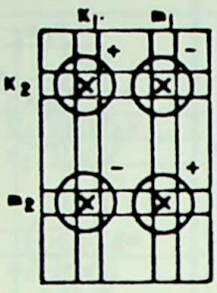
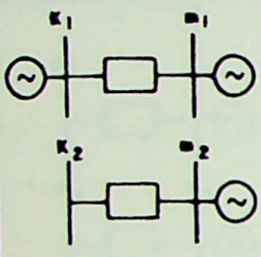
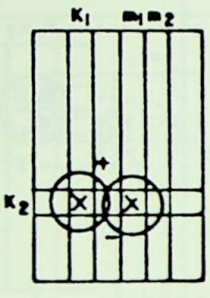
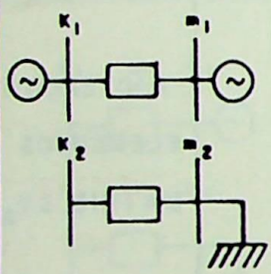
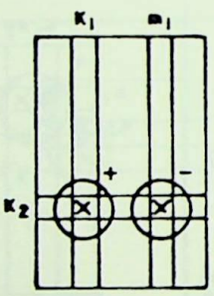
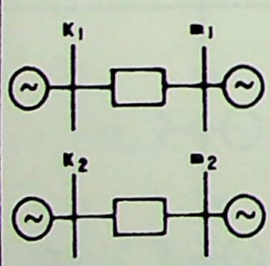
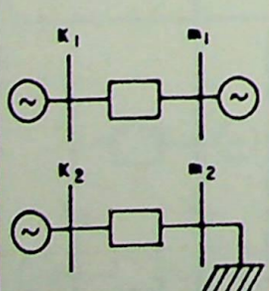
FIGURA 5.16 - Matriz de admitâncias para um sistema genérico, considerando a contribuição dos elementos G_{11} e $G_{12} = G_{21}$ da matriz [G] (A) e dos elementos Y_{11} e $Y_{12} = Y_{21}$ da matriz [Y] (B)

CASO	CONEXÃO DOS RAMOS	MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$	OBSERVAÇÕES
1			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AB}]$
2			
3			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AB}]$
4			
5			

CASO	CONEXÃO DOS RAMOS	MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$	OBSERVAÇÕES
6			
7			
8			
9			
10			

CASO	CONEXÃO DOS RAMOS	MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$	OBSERVAÇÕES
11			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AB}]$
12			
13			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AB}]$
14			
15			

Biblioteca MAUÁ BIM EFEI

CASO	CONEXÃO DOS RAMOS	MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$	OBSERVAÇÕES
16			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AA}]$
17			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AA}]$
18			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AA}]$
19			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$
20			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$

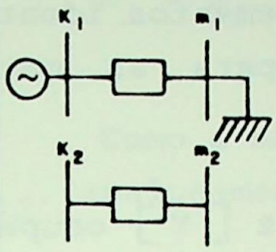
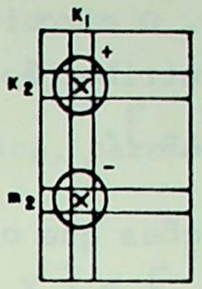
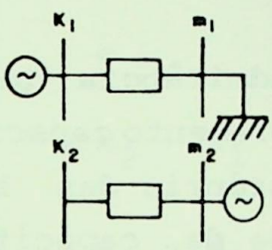
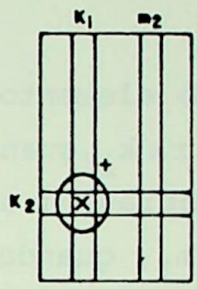
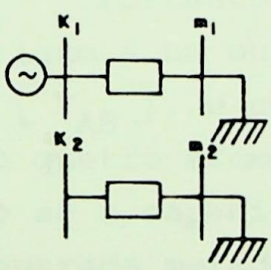
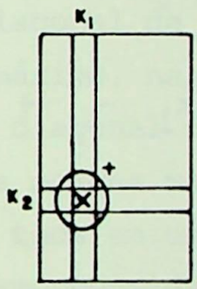
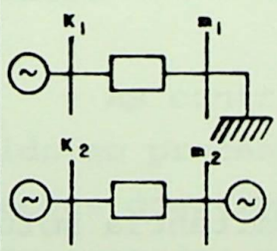
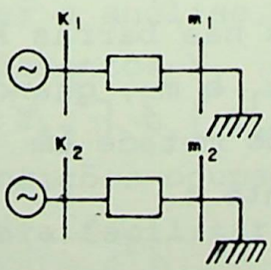
CASO	CONEXÃO DOS RAMOS	MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$	OBSERVAÇÕES
21			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AA}]$
22			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AA}]$
23			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AA}]$
24			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$
25			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$

TABELA 5.1 – Posicionamento de um elemento da matriz [G] nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ em função do tipo de conexão de ramos.

A identificação de quais posições estão nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, é lógico, depende dos tipos das barras que compõem o ramo acoplado. O circuito que envolve os elementos identifica o sinal da contribuição desses elementos para as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$.

As posições que os elementos da matriz $[Y]$ ocupam nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, são as seguintes :

- para o elemento Y_{11}, que indica a admitância própria da barra k_1, quando se considera o acoplamento capacitivo concentrado em uma única barra, ou a própria das barras k_1 e m_1, quando é considerado metade da capacitância concentrada em cada barra do ramo, tem-se respectivamente :

  $k_1 - k_1 - \quad + Y_{11}$

  e

  $k_1 - k_1 - \quad + Y_{11}$

  $m_1 - m_1 - \quad + Y_{11}$

- para o elemento Y_{12}, que indica a admitância mútua entre as barras k_1 e k_2, quando o acoplamento capacitivo é considerado concentrado apenas nas barras k, ou a mútua entre as barras k_1 e k_2 e m_1 e m_2, quando o acoplamento capacitivo é concentrado metade em cada barra do ramo, tem-se respectivamente :

  $k_1 - k_2 \quad - + Y_{12}$

  e

$$k_1 - k_2 \; - \; + Y_{12}$$

$$m_1 - m_2 \; - \; + Y_{12}$$

Como a matriz $[\,Y\,]$ é simétrica, para o elemento $Y_{21} = Y_{12}$, analogamente tem-se :

$$k_1 - k_2 \; - \; + Y_{21} = + Y_{12}$$

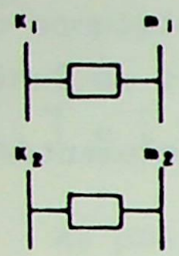
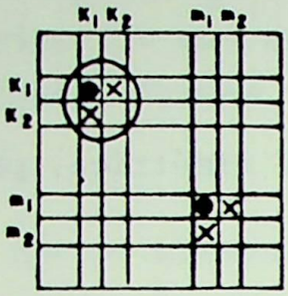
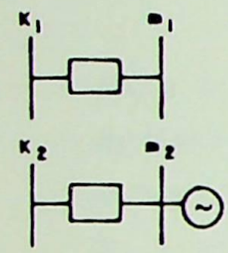
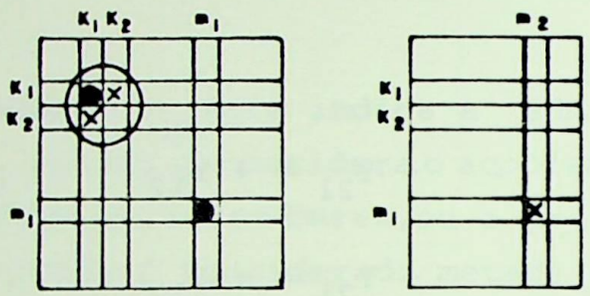
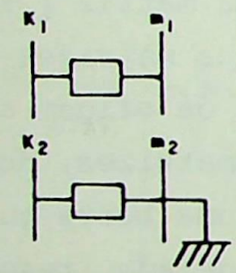
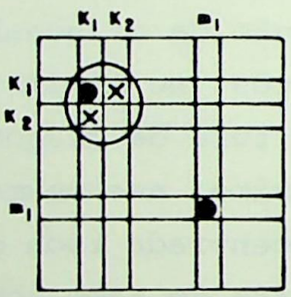
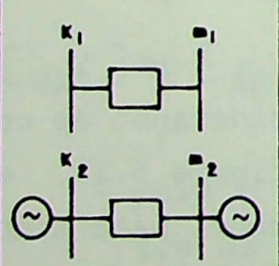
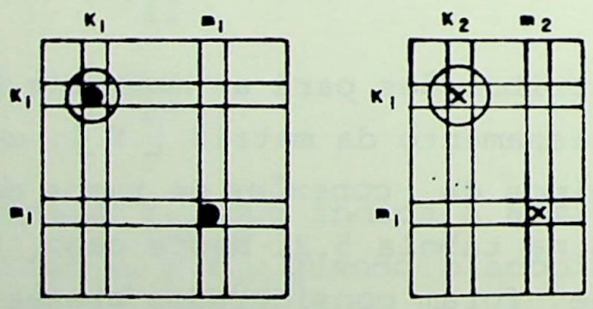
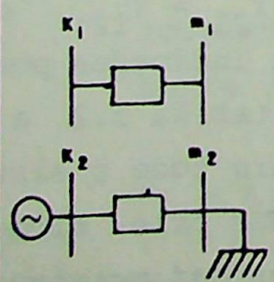
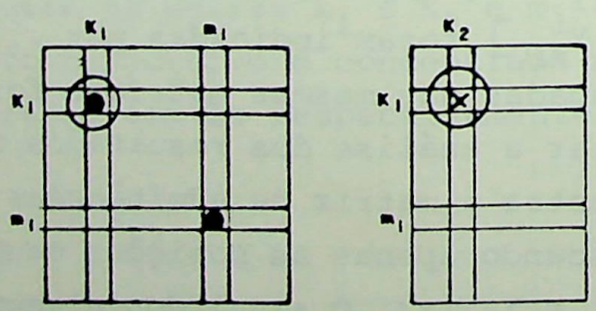
e

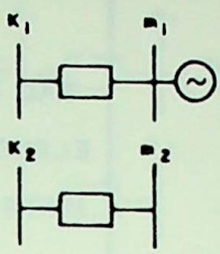
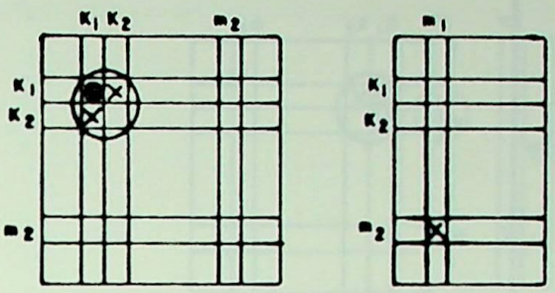
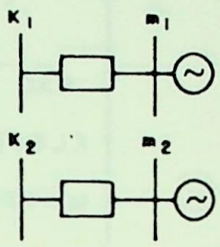
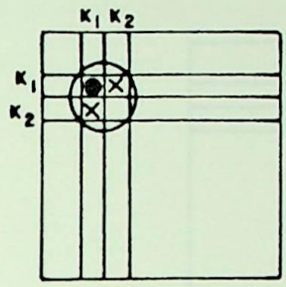
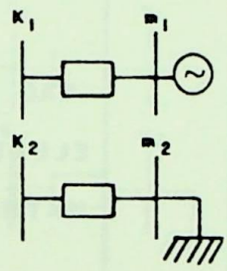
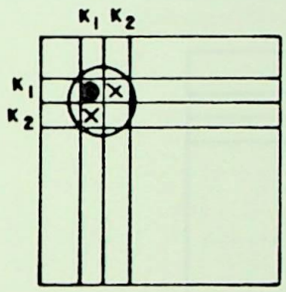
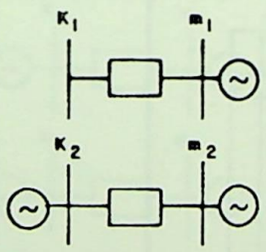
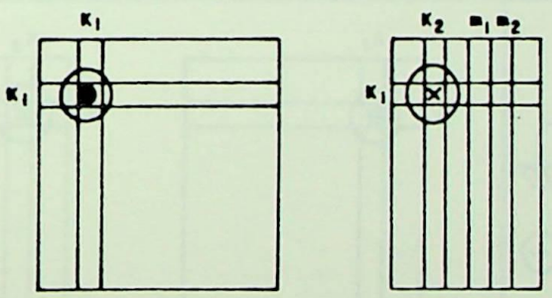
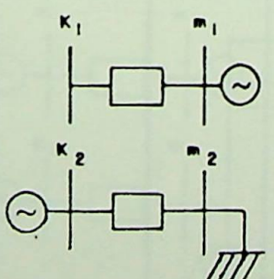
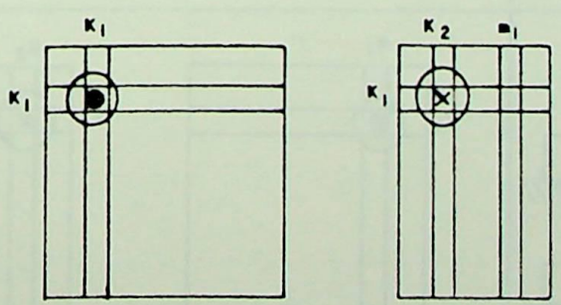
$$k_2 - k_1 \; - \; + Y_{21} = + Y_{12}$$

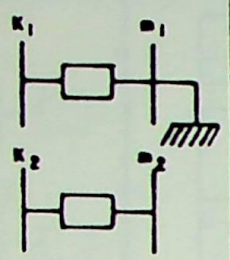
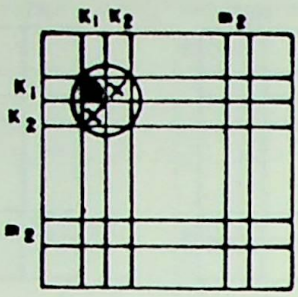
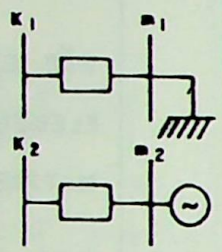
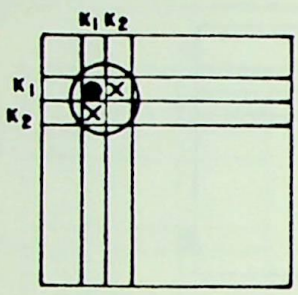
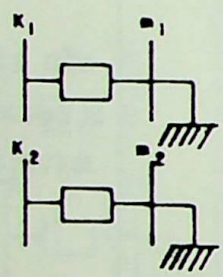
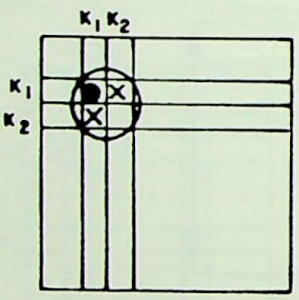
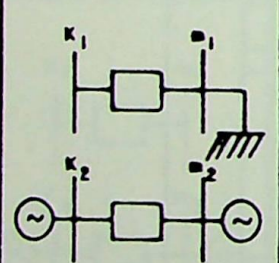
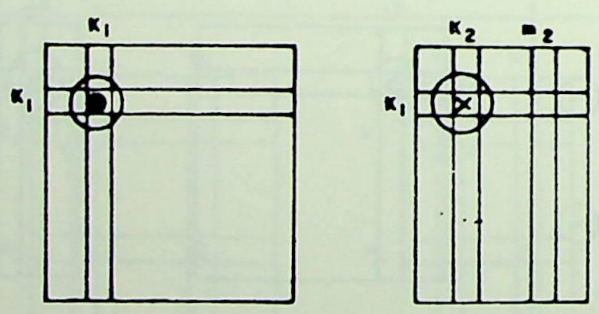
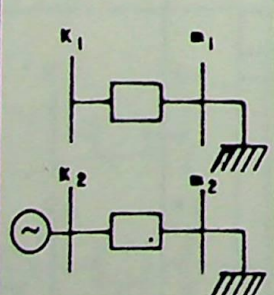
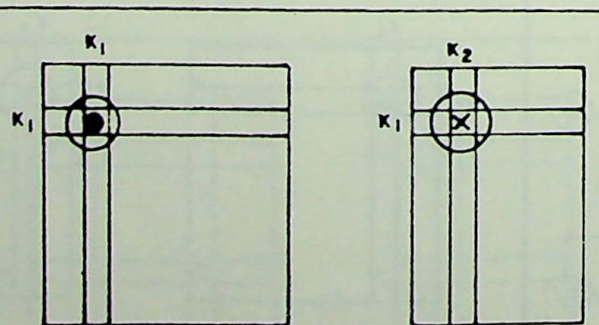
$$m_2 - m_1 \; - \; + Y_{21} = + Y_{12}$$

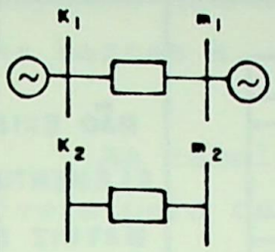
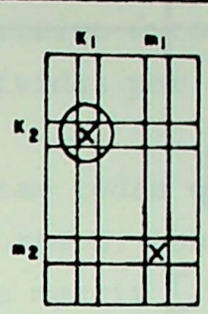
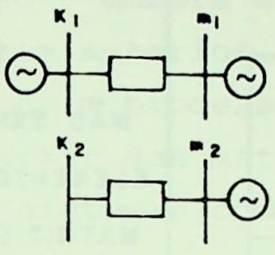
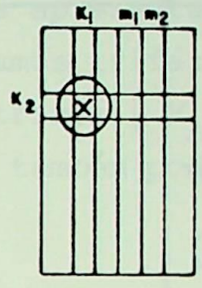
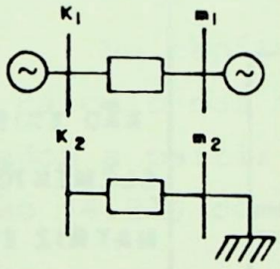
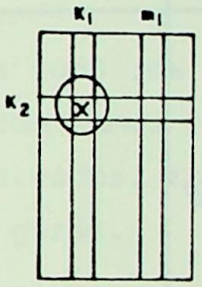
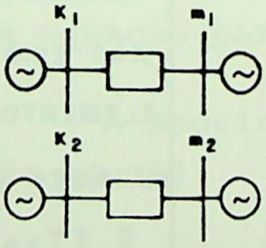
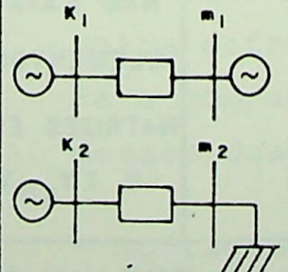
Portanto, cada elemento da diagonal da matriz $[\,Y\,]$ dá origem a um ou dois elementos, no máximo, nas matrizes $[\,Y_{AA}\,]$ e $[\,Y_{AB}\,]$, e cada elemento fora da diagonal dá origem a dois ou quatro elementos, no máximo, nas mesmas matrizes, dependendo se a capacitância é concentrada toda em uma barra ou concentrada metade em cada barra do ramo considerado, respectivamente.

As contribuições para as matrizes $[\,Y_{AA}\,]$ e $[\,Y_{AB}\,]$, devido ao processamento da matriz $[\,Y\,]$, considerando as combinações dos tipos de conexões de ramos da figura 5.15, estão apresentadas na tabela 5.2. Neste caso, também, para simplificar a análise, foram considerados apenas o processamento dos elementos Y_{11}, cujas posições a serem ocupadas nas matrizes $[\,Y_{AA}\,]$ e $[\,Y_{AB}\,]$ foram indicadas por ., e $Y_{21} = Y_{12}$, cujas posições ocupadas nas mesmas matrizes foram indicadas por x . Para facilitar a análise dos resultados da tabela 5.2, a figura 5.16-b mostra a matriz de admitâncias para todo o sistema, $[\,Y_T\,]$, indicando apenas as posições ocupadas pelos elementos $Y_{11}(.)$ e $Y_{12} = Y_{21}(x)$. O sinal dos elementos nas matrizes

CASO	CONEXÃO DOS RAMOS	MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$	OBSERVAÇÕES
1			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AB}]$
2			
3			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AB}]$
4			
5			

CASO	CONEXÃO DOS RAMOS	MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$	OBSERVAÇÕES
6			
7			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AB}]$
8			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AB}]$
9			
10			

CASO	CONEXÃO DOS RAMOS	MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$	OBSERVAÇÕES
11			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AB}]$
12			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AB}]$
13			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AB}]$
14			
15			

CASO	CONEXÃO DOS RAMOS	MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$	OBSERVAÇÕES
16			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AA}]$
17			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AA}]$
18			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AA}]$
19			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$
20			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$

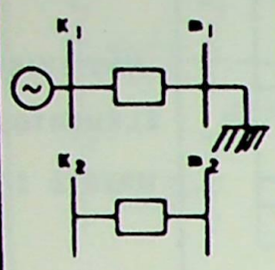
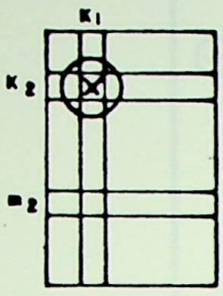
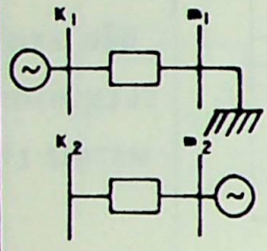
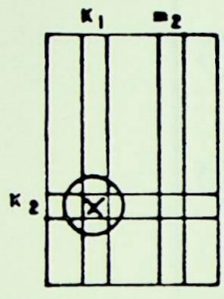
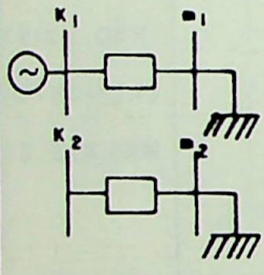
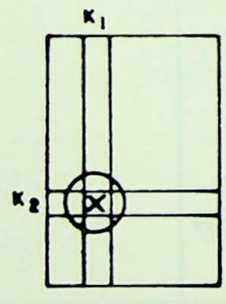
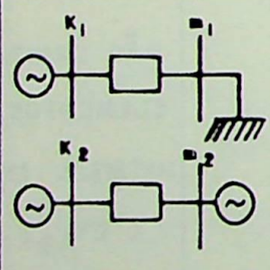
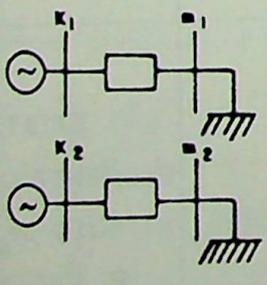
CASO	CONEXÃO DOS RAMOS	MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$	OBSERVAÇÕES
21			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AA}]$
22			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AA}]$
23			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NA MATRIZ $[Y_{AA}]$
24			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$
25			NÃO EXISTEM ELEMENTOS NAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$

TABELA 5.2 – Posicionamento de um elemento da matriz [Y] nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ em função do tipo de conexão de ramos.

$[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ sempre será positivo. As posições que são ocupadas quando o acoplamento capacitivo é concentrado apenas nas barras k, estão indicadas envolvidas por um círculo.

As tabelas 5.1 e 5.2 apresentam todas as combinações possíveis para os tipos de conexões de ramos, tanto para os elementos da matriz $[G]$, como para a matriz $[Y]$.

Embora a maioria dos exemplos apresentados neste e no item anterior, considerem apenas ramos trifásicos acoplados, todo o processo de montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, a partir das matrizes $[G]$ e $[Y]$, também poderá ser aplicado a sistemas com n fases.

5.6 - ALTERAÇÕES NA EQUAÇÃO DE SOLUÇÃO

No capítulo 4 foi apresentada toda uma metodologia para o cálculo das tensões em sistemas com ramos monofásicos, modelados a partir de parâmetros concentrados. Foi definida a equação (4.21) como equação de solução geral.

Com a introdução do modelo de parâmetros concentrados, considerando o acoplamento, deve-se alterar os elementos dessa equação para permitir a inclusão deste novo modelo.

A seguir serão analisados cada um dos elementos da equação (4.21).

A - MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$

Para este novo modelo essas matrizes são montadas de maneira diferente, como foi apresentado nos itens 5.4 e 5.5. Para compatibilizar os dois modelos dividiu-se a montagem dessas duas matrizes em duas fases :

- montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ considerando os ramos modelados por parâmetros concentrados sem acoplamento,

- montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ considerando os ramos com acoplamento modelados por parâmetros concentrados. Esta fase consiste apenas em completar a montagem iniciada na fase 1.

B - VETORES $[e_A]$, $[e_B]$ e $[i_A]$

Esses vetores são montados e obtidos como descrito no capítulo 4. Com a inclusão do modelo de ramos acoplados, ao invés de se ter apenas uma posição para cada barra, tem-se n posições, uma para cada fase de um ramo com n fases. Para o sistema da figura 5.8, ao invés de se ter apenas uma posição correspondente à barra m , tem-se três, m_1 , m_2 e m_3 , uma para cada fase.

C - VETOR $[I_A]$

Para o caso de ramos monofásicos são válidas todas as observações feitas no capítulo 4. Para o caso de ramos trifásicos, sem considerar o acoplamento, basta considerar cada uma das fases do ramo trifásico como um ramo monofásico independente.

Quando se considera um ramo trifásico acoplado indutivamente, de acordo com a equação (5.12), tem-se três fontes de história passada que estão conectadas entre as barras de cada fase do ramo trifásico. Dessa forma, essas fontes de história passada contribuem para o vetor $[I_A]$ como indicado no capítulo 4 para os ramos monofásicos.

Quando se considera o acoplamento capacitivo concentrado em uma barra trifásica, o tratamento é análogo ao descrito anteriormente, quando o acoplamento é apenas indutivo.

Quando se considera simultaneamente os dois acoplamentos, tem-se para cada uma das barras do sistema trifásico duas contribuições de fontes de história passada, uma devido ao

acoplamento indutivo e outra devido ao acoplamento capacitivo, como mostrado na figura 5.17-a. O vetor $[I_A]$ fica como mostrado na figura 5.17-b.

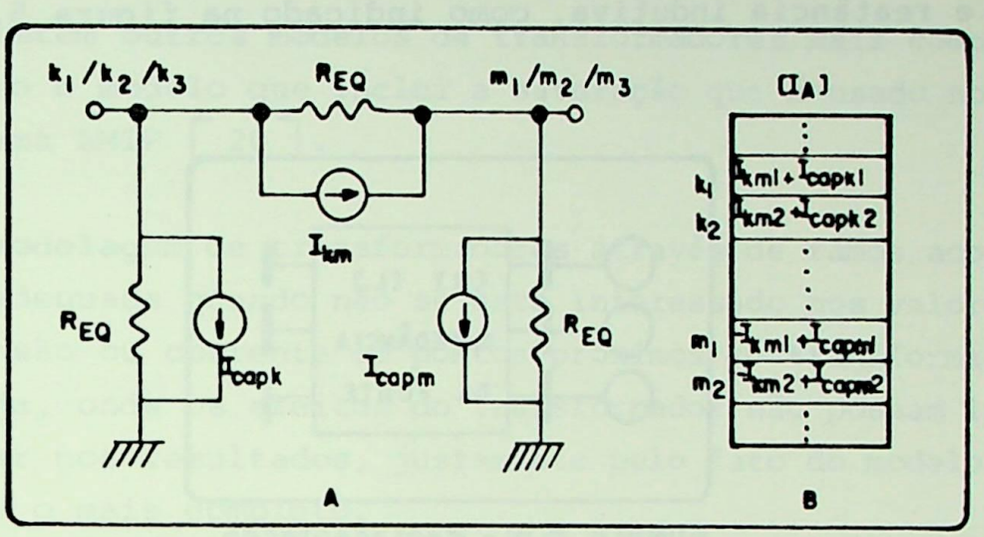


FIGURA 5.17 - A -) fontes de corrente de história passada para cada uma das fases de um ramo trifásico com acoplamento indutivo e capacitivo, B-) vetor $[I_A]$

O fluxograma mostrado na figura 4.10, no capítulo 4, continua válido, sendo que para os ramos acoplados são calculadas grandezas matriciais ao invés de grandezas escalares.

5.7 - APLICAÇÕES DO MODELO NA REPRESENTAÇÃO DE ELEMENTOS DOS SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

Para o modelo de ramos acoplados, podem ser identificadas várias aplicações, entre elas, a modelagem de linhas de transmissão, que está descrita no capítulo 7. Algumas das outras aplicações serão apresentadas a seguir :

A - IMPEDÂNCIAS PARA FONTES DE TENSÃO TRIFÁSICAS

Neste caso, considera-se apenas o acoplamento indutivo, e define-se um valor de impedância da fonte com resistência e reatância indutiva, como indicado na figura 5.18.

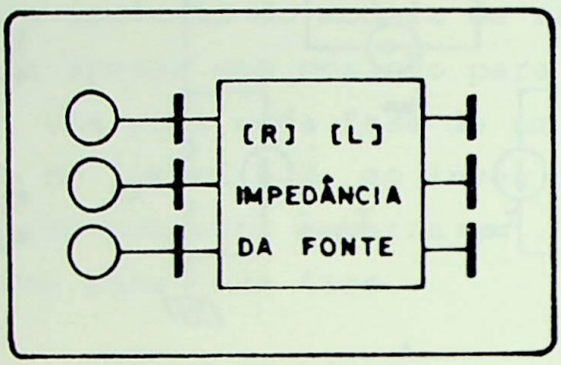


FIGURA 5.18 - Representação de impedâncias de fontes

Normalmente, nestes casos, a matriz [R] quase sempre apresenta elementos fora da diagonal com valores nulos. Este modelo permite também representar o equivalente de Thevenin atrás de uma determinada barra do sistema.

B - MODELAGEM DE TRANSFORMADORES

Como citado em [18], é possível representar transformadores através deste modelo de parâmetros acoplados, utilizando a matriz de indutância [L]. Essa matriz é obtida a partir dos parâmetros de sequência, como mostrado nas equações (5.44) e (5.45).

Na referência [15] é mostrado um exemplo onde é feito um equivalente de um transformador de três enrolamentos e a impedância da fonte, caracterizando uma outra maneira de representar o transformador através de ramos acoplados.

As referências [15], [16] e [17] indicam como se obtém as matrizes [R] e [L] a partir de dados de testes de transformadores, e mostra como incluir o ramo de magnetização na modelagem.

Existem outros modelos de transformadores mais complexos, como o modelo que inclui a saturação que é usado no programa EMTP [20].

A modelagem de transformadores através de ramos acoplados é adequada quando não se está interessado nos valores de tensão ou corrente em pontos próximos ao transformador, ou seja, onde os efeitos do transformador não possam influenciar nos resultados, justamente pelo fato do modelo não ser o mais completo.

5.8 - EXEMPLO DE CÁLCULO PARA UM RAMO TRIFÁSICO ACOPLADO

A seguir, será mostrado um exemplo que apresenta todo o processo de cálculo para ramos acoplados, de acordo com o fluxograma da figura 4.10. Será considerado o ramo trifásico com acoplamento indutivo e capacitivo, esquematizado na figura 5.19.

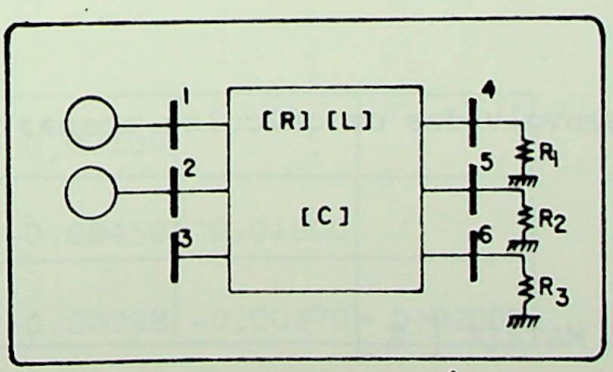


FIGURA 5.19 - Ramo trifásico com acoplamento indutivo e capacitivo

Os dados do ramo trifásico são :

$v_1(t) = 1{,}00 \angle 0^\circ$

$v_2(t) = 1{,}00 \angle 120^\circ$

$[R] =$

1,50		
	1,50	
		1,50

(Ω)

$[L] =$

0,0320		
0,00920	0,0280	
0,00810	0,0130	0,0290

(mH)

$[C] =$

0,21		
-0,04500	0,19	
-0,00980	-0,0370	0,20

(μF)

$R_1 = R_2 = R_3 = 10{,}0$

$\Delta t = 10^{-5}$

Serão desenvolvidos os cálculos apenas para dois intervalos de tempo.

A - MONTAGEM DA MATRIZ [Z]

A matriz [Z] é obtida a partir da equação (5.32) :

$$[Z] = \begin{bmatrix} 7,90 & & \\ 1,84 & 7,10 & \\ 1,62 & 2,60 & 7,30 \end{bmatrix}$$

B - OBTENÇÃO DA MATRIZ [G]

A matriz [G] é obtida da equação (5.31), através da inversão da matriz [Z] :

$$[G] = \begin{bmatrix} 0,1373226932 & & \\ -0,028092195 & 0,1677171076 & \\ -0,0204689118 & -0,0535007019 & 0,1605837619 \end{bmatrix}$$

C - OBTENÇÃO DA MATRIZ [Y]

A matriz [Y] é obtida a partir da equação (5.35) :

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0,02100 & & \\ -0,00450 & 0,01900 & \\ -0,00098 & -0,00370 & 0,02000 \end{bmatrix}$$

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

D - MONTAGEM DAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$

Inicialmente monta-se as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ para os ramos sem acoplamento. Como neste caso existem apenas três ramos monofásicos e que não estão conectados à fonte, não existirão elementos na matriz $[Y_{AB}]$. Na matriz $[Y_{AA}]$ entra-se com os valores $1/R_1$, $1/R_2$ e $1/R_3$ nas posições correspondentes às diagonais das barras 4, 5 e 6. Após isso, completa-se a montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, incluindo as contribuições dos ramos acoplados. Neste exemplo, o processo será feito em ordem contrária para caracterizar melhor o processo de montagem das matrizes. Com este intuíto será montada a matriz $[Y_T]$ para todo o sistema, considerando apenas os ramos acoplados e seguindo todas as regras definidas para montagem de $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ apresentadas no item 5.4.

O traço forte na matriz $[Y_T]$ indica as posições onde foram colocadas as matrizes $[G]$ e $[Y]$. A linha tracejada indica as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$. Considerando a contribuição dos elementos dos ramos sem acoplamento, para as posições 4, 5 e 6 da diagonal de $[Y_{AA}]$, resulta para $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$:

$[Y_{AA}]$ =

	3	4	5	6
3	0,1805837619	0,0204689118	0,0535007019	-,1605837619
4	0,0204689118	0,2583226932	-0,032592195	-,0214489118
5	0,0535007019	-0,032592195	0,2867171076	-,0572007019
6	-,1605837619	-,0214489118	-,0572007019	0,2805837619

$[Y_T] =$

	[G] + [Y]			- [G]		
	1	2	3	4	5	6
1	-0,1373226932 + 0,02100	-0,028092195 + - 0,00450	-0,0204689118 + -0,00098	-0,1373226932	0,028092195	0,0204689118
2	-0,028092195 + - 0,00450	0,1677171076 + 0,01900	-0,0535007019 + - 0,0037	0,028092195	-0,1677171076	0,0535007019
3	-0,0204689118 + - 0,00098	-0,0535007019 + - 0,00370	0,1605837619 + 0,02000	0,0204689118	0,0535007019	-0,1605837619
4	-0,1373226932	0,028092195	0,0204689118	0,1373226932 + 0,02100	-0,028092195 + - 0,00450	-0,0204689118 + - 0,00098
5	0,028092195	-0,1677171076	0,0535007019	-0,028092195 + - 0,00450	0,1677171076 + 0,01900	-0,0535007019 + - 0,0037
6	0,0204689118	0,0535007019	-0,1605837619	-0,0204689118 + - 0,00098	-0,0535007019 + - 0,00370	+0,1605837619 + 0,02000

$[Y_{AB}]$ - [G] $[Y_{AA}]$ [G] + [Y]

$[Y_{AB}]$ =

	1	2
3	-0,0214489118	-0,0572007019
4	-0,1373226932	0,028092195
5	0,028092195	-0,1677171076
6	0,0204689118	0,0535007019

E - ORDENAÇÃO E FATORAÇÃO DA MATRIZ $[Y_{AA}]$

Os processos de ordenação e fatoração a serem utilizados são os apresentados nos apêndices C e D. Neste caso, a ordenação será a ordem natural das linhas, e a tabela de fatores resultante do processo de fatoração será :

```
5,537596457  0,1133485735  0,2962652973  -0,8892480709 - linha 1
             3,906210766  -0,1510001366  -0,0126833549 - linha 2
                          3,773163721    -0,0381678113 - linha 3
                                         7,280262285   - linha 4
```

Como foi mencionado no apêndice D, para a tabela de fatores é necessário armazenar apenas o triângulo superior.

F - CÁLCULOS PARA O PRIMEIRO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO, $t = \Delta t$

- Cálculo dos vetores de história passada

Para os ramos acoplados serão utilizadas as equações (5.7), (5.23) e (5.25). Para os ramos sem acoplamento (ramo R) não se define este valor, e como os valores iniciais são nulos, tem-se :

$$\left[I_{capk}(t - \Delta t) \right] = \left[I_{capm}(t - \Delta t) \right] = \left[I_{km}(t - \Delta t) \right] =$$

$$= \begin{array}{|c|l} \hline 0,0 & \text{ramo 1-4} \\ \hline 0,0 & \text{ramo 2-5} \\ \hline 0,0 & \text{ramo 3-6} \\ \hline \end{array}$$

- Cálculo das fontes de corrente - vetor $\left[i_A \right]$

Neste caso não existem fontes de correntes :

$$\left[i_A \right] = \begin{array}{cc} 3 & \boxed{0,0} \\ 4 & \boxed{0,0} \\ 5 & \boxed{0,0} \\ 6 & \boxed{0,0} \end{array}$$

- Cálculo das fontes de tensão - vetor $\left[e_B \right]$

Será utilizada a equação (3.1) :

$e_1 = 1,0 \cos (2 \pi 60 \, 10^{-5} + 0^{o}) = 0,9999928939$

$e_2 = 10 \cos (2\pi 60.10^{-5} + 120^{o} \pi/360) = 0,4967316158$

O vetor $[e_B]$ será :

$$[e_B] = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,9999928939 \\ 0,4967316158 \end{bmatrix}$$

- Montagem do vetor $[I_A]$

Como todos os valores de história passada são nulos, resulta para o vetor $[I_A]$:

$$[I_A] = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

- Montagem do vetor de termos independentes

Este vetor corresponde ao lado direito da equação (4.21), ou seja, a equação (4.30) :

$$[I] = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} +0,0498621565 \\ +0,123367436 \\ +0,0552183945 \\ -0,0470442564 \end{bmatrix}$$

- Cálculo do vetor $[\, e_A \,]$

Partindo-se da tabela de fatores, obtém-se as matrizes fatores, que, juntamente com o vetor $[\, I \,]$ fornecem o valor de $[\, e_A \,]$. Utilizando-se o processo apresentado nc apêndice E, o vetor $[e_A]$ fica definido a partir da seguinte equação :

$$[\, U_1 \,]\,[\, U_2 \,]\,[\, U_3 \,]\,[\, D \,]\,[\, U_3 \,]^t\,[\, U_2 \,]^t\,[\, U_1 \,]^t\,[\, I \,] = [\, e_A \,] \qquad (5.55)$$

Resolvendo-se a equação (5.55), resulta para o vetor de tensões $[\, e_A \,]$:

$$[\, e_A \,] = \begin{array}{cc} 3 & \boxed{0{,}1615034414} \quad e_3(t) \\ 4 & \boxed{0{,}4939691413} \quad e_4(t) \\ 5 & \boxed{0{,}2199583966} \quad e_5(t) \\ 6 & \boxed{0{,}0073586637} \quad e_6(t) \end{array}$$

- Cálculo das correntes de ramos

Para os ramos acoplados serão utilizadas as equações (5.6), (5.22), (5.24), (5.18) e (5.19). Para os ramos sem acoplamento será utilizada a equação (2.1). Portanto, para os ramos acoplados, tem-se :

$$[\, i_{km}(t) \,] = \begin{array}{ll} \boxed{0{,}0585582014} & \text{ramo 1-4} \\ \boxed{0{,}0239574321} & \text{ramo 2-5} \\ \boxed{-0{,}0004121688} & \text{ramo 3-6} \end{array}$$

$$[\, i_{capk}(t) \,] = \begin{array}{|l|l|} \hline 0,0186062851 & \text{ramo 1-0} \\ \hline 0,0043403699 & \text{ramo 2-0} \\ \hline 0,0004121688 & \text{ramo 3-0} \\ \hline \end{array}$$

$$[\, i_{capm}(t) \,] = \begin{array}{|l|l|} \hline 0,0093763277 & \text{ramo 4-0} \\ \hline 0,0019291213 & \text{ramo 5-0} \\ \hline -0,0011507626 & \text{ramo 6-0} \\ \hline \end{array}$$

$$[\, i_{k}(t) \,] = \begin{array}{|c|} \hline 0,0771644865 \\ \hline 0,028297802 \\ \hline 0,0 \\ \hline \end{array}$$

$$[\, i_{m}(t) \,] = \begin{array}{|l|} \hline -0,0491818737 \\ \hline -0,0220283108 \\ \hline -0,0007385938 \\ \hline \end{array}$$

As correntes nos ramos sem acoplamento são :

$i_{40}(t) = 0,0493969141$

$i_{50}(t) = 0,0219958397$

$i_{60}(t) = 0,0007358664$

Esses valores de corrente devem ser iguais aos do vetor $[\, i_{m}(t) \,]$ com sinal contrário. Neste caso, os valores não

são exatamente iguais, o que sugere o uso de uma precisão maior.

G - CÁLCULOS PARA O SEGUNDO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO, $t = 2\Delta t$

- Cálculo dos vetores de história passada

Serão utilizadas as equações (5.7), (5.23) e (5.25), para os ramos acoplados :

Para o ramo série, tem-se :

$$\left[I_{km}(t - \Delta t) \right] = \begin{array}{|l|l|} \hline 0,0949860337 & \text{ramo 1-4} \\ \hline 0,0407295818 & \text{ramo 2-5} \\ \hline 0,0068153115 & \text{ramo 3-6} \\ \hline \end{array}$$

Para os ramos capacitivos, tem-se :

$$\left[I_{capk}(t - \Delta t) \right] = \begin{array}{|l|l|} \hline -0,0372125702 & \text{ramo 1-0} \\ \hline -0,0086807318 & \text{ramo 2-0} \\ \hline -0,0008243376 & \text{ramo 3-0} \\ \hline \end{array}$$

$$\left[I_{capm}(t - \Delta t) \right] = \begin{array}{|l|l|} \hline -0,0187526554 & \text{ramo 4-0} \\ \hline -0,0038582426 & \text{ramo 5-0} \\ \hline -C,0023015252 & \text{ramo 6-0} \\ \hline \end{array}$$

Para os ramos monofásicos (ramo R) não se define valor de história passada.

- Cálculo das fontes de corrente - vetor $[\, i_A \,]$

$$[\, i_A \,] = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

- Cálculo das fontes de tensão - vetor $[\, e_B \,]$

$$[\, e_B \,] = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,9999715757 \\ 0,493456172 \end{bmatrix}$$

- Montagem do vetor $[\, I_A \,]$

Como os valores de história passada não são nulos, define-se o vetor $[\, I_A \,]$ da seguinte maneira :

$$[\, I_A \,] = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} +I_{km3} + I_{capk3} \\ -I_{km1} + I_{capm1} \\ -I_{km2} + I_{capm2} \\ -I_{km3} + I_{capm3} \end{bmatrix}$$

Substituindo-se valores, resulta :

$$[\,I_A\,] = \begin{array}{c|c} 3 & +0,0059909739 \\ \hline 4 & -0,1137386891 \\ \hline 5 & -0,0445878244 \\ \hline 6 & -0,0045137863 \end{array}$$

- Montagem do vetor de termos independentes

$$[\,I\,] = \begin{array}{c|c} 3 & 0,0436833676 \\ \hline 4 & 0,237195212 \\ \hline 5 & 0,0992574698 \\ \hline 6 & -0,0423547952 \end{array}$$

- Cálculo das tensões

$$[\,e_A\,] = \begin{array}{c|c|l} 3 & 0,0211056499 & e_3(t) \\ \hline 4 & 0,980279794 & e_4(t) \\ \hline 5 & 0,4591340862 & e_5(t) \\ \hline 6 & 0,0296245805 & e_6(t) \end{array}$$

- Cálculo das correntes de ramos

Para os ramos acoplados, tem-se :

$$[\,i_{km}(t)\,] = \begin{array}{c|l} 0,0969003527 & \text{ramo 1-4} \\ \hline 0,0463885662 & \text{ramo 2-5} \\ \hline 0,0032079846 & \text{ramo 3-6} \end{array}$$

$$[\, i_{capk}(t) \,] = \begin{array}{|l|l|} \hline -0,0184544034 & \text{ramo 1-0} \\ \hline -0,0038830355 & \text{ramo 2-0} \\ \hline -0,0032079846 & \text{ramo 3-0} \\ \hline \end{array}$$

$$[\, i_{capm}(t) \,] = \begin{array}{|l|l|} \hline -0,0002619152 & \text{ramo 4-0} \\ \hline 0,000344435 & \text{ramo 5-0} \\ \hline 0,0002345465 & \text{ramo 6-0} \\ \hline \end{array}$$

$$[\, i_{k}(t) \,] = \begin{array}{|l|} \hline 0,078449493 \\ \hline 0,0425055307 \\ \hline 0,0000000000 \\ \hline \end{array}$$

$$[\, i_{m}(t) \,] = \begin{array}{|l|} \hline -0,0971622679 \\ \hline -0,0460441312 \\ \hline -0,0029734381 \\ \hline \end{array}$$

Para os ramos sem acoplamento, tem-se :

$i_{40}(t) = 0,0980279794$

$i_{50}(t) = 0,04591340862$

$i_{60}(t) = 0,00296245805$

As correntes nos ramos sem acoplamento devem ser iguais às correntes injetadas em $\underline{m}$, $[i_m(t)]$, com sinal contrário. No-

ta-se,também neste caso,que os valores são aproximadamente iguais, e que uma precisão maior deve ser considerada para os cálculos.

A corrente injetada na barra 3, nos dois intervalos é nula, o que está correto pelo fato de não existir nenhuma fonte conectada na barra 3.

Como o número de operações matemáticas envolvido é muito grande, a tendência é o crescimento dos erros devidos aos arredondamentos sucessivos. Faz-se necessário trabalhar com uma precisão elevada. No programa que foi desenvolvido, todas as variáveis estão definidas em dupla precisão, justamente para que o resultado apresente um maior número de algarismos significativos corretos.

5.9 - CONCLUSÕES

A modelagem apresentada neste capítulo permite a representação de sistemas com qualquer número de fases,considerando os acoplamentos indutivo e capacitivo. As aplicações especiais, tais como linhas de transmissão e transformadores,produzem resultados aceitáveis, sendo que tais elementos devem utilizar este modelo apenas quando não estiverem próximos dos pontos de interesse para análise, de tal forma que, erros na representação não influenciem nos resultados. Quando o estudo exige o conhecimento de valores de tensões e correntes em linhas e transformadores, modelos mais sofisticados desses elementos devem ser utilizados.

O processo computacional utilizado é o mesmo apresentado para ramos sem acoplamento, sendo que as quantidades escalares são substituídas por quantidades matriciais. A equação (4.21) continua sendo a equação de solução geral, porém, a

montagem dos seus elementos deve respeitar os aspectos mencionados no item 5.6.

O EMTP também contém o modelo de ramos acoplados, e apresenta modelos mais complexos para a representação de transformadores, considerando inclusive, a saturação do núcleo.

CAPÍTULO 6 - MODELAGEM DE CHAVES

6.1 - INTRODUÇÃO

As chaves são componentes muito importantes dentro dos sistemas elétricos de potência, sendo que entre as suas funções principais destacam-se :

- interligação de partes de um sistema elétrico,como na energização de uma linha de transmissão que interliga dois sistemas elétricos, ou na conexão de componentes do sistema, como na energização de transformadores,capacitores e reatores.
- isolamento de partes ou componentes de um sistema elétrico, como na abertura de um disjuntor para eliminação de uma falta, ou na retirada de serviço de algum componente por motivo de manutenção.

Do ponto de vista de desempenho do sistema elétrico,torna-se necessário uma análise do comportamento do sistema frente a operações de chaveamento, visto que tais operações além de provocarem uma alteração na topologia do sistema, provocam variações bruscas nos valores de corrente e tensão.

Os modelos de chaves apresentados neste capítulo não se referem aos modelos físicos em si, mas apresentam as características básicas desses modelos, e também se adaptam às necessidades dos estudos de transitórios eletromagnéticos. Os mode

los são considerados lineares, sendo que características tipicamente não lineares, como o arco elétrico, não são consideradas. Os modelos também consideram as chaves como sendo ideais, ou seja, quando abertas apresentam resistência infinita, e quando fechadas apresentam resistência nula.

Através dos modelos apresentados neste capítulo, torna-se possível a representação de disjuntores, chaves seccionadoras, centelhadores e quaisquer fenômenos físicos que possam ser representados adequadamente através de um desses modelos.

Neste capítulo, além de uma descrição detalhada de alguns modelos de chaves, são apresentados também, para cada um desses modelos, algumas aplicações, as restrições de uso e todo o aspecto computacional envolvido com os processos de abertura e de fechamento. Ao final do capítulo, é apresentado um exemplo numérico que complementa o desenvolvimento teórico e o aspecto computacional da modelagem.

6.2 - MODELOS DE CHAVES

Entre os modelos existentes e utilizados em programas digitais, destacam-se :

- chaves controladas por tempo
- chaves controladas por tensão
- chaves semicondutoras
- chaves estatísticas
- chaves sistemáticas

No programa computacional desenvolvido neste trabalho, consideraram-se apenas os três primeiros modelos. Já o programa EMTP - versão BPA [20], além de considerar todos esses modelos, considera outros que estão disponíveis na TACS (Transient Analysis of Control Systems).

A seguir, serão descritas as características de cada um desses modelos.

6.2.1 - CHAVES CONTROLADAS POR TEMPO

Neste modelo de chave, os processos de abertura e fechamento são controlados através do tempo. Para o processo de abertura, utiliza-se também a corrente.

Os parâmetros necessários para se definir este modelo são :

t_{fech} - tempo de fechamento da chave

t_{aber} - tempo de abertura da chave

i_{marg} - margem de corrente que define a faixa de corrente para a qual poderá ocorrer a abertura da chave

Assim sendo, o fechamento e a abertura da chave ficam definidos da seguinte maneira :

- a chave será fechada no instante de tempo mais próximo, logo após ter decorrido o tempo de fechamento (t_{fech});
- a chave será aberta no instante de tempo mais próximo após ter decorrido o tempo de abertura (t_{aber}), logo que a corrente passe por zero, quando a margem de corrente for definida igual a zero, ou logo que o valor da corrente esteja dentro da faixa definida pela margem de corrente ou passe por zero, quando a margem de corrente for diferente de zero.

Deve-se observar que os valores dos tempos de fechamento (t_{fech}) e de abertura (t_{aber}) nem sempre são múltiplos do intervalo de tempo (Δt) do processo de integração numérica

(capítulo 4). Nesses casos, o programa que foi desenvolvido ajusta esses valores para o múltiplo de Δt mais próximo. Definem-se, dessa maneira, o tempo de fechamento ajustado ($t_{fech\ ajust}$) e o tempo de abertura ajustado ($t_{aber\ ajust}$).

Para o processo de fechamento, no tempo $t = t_{fech\ ajust}$, os cálculos serão realizados considerando-se a chave aberta, e apenas no próximo instante de tempo, $t = t_{fech\ ajust} + \Delta t$, os cálculos serão realizados considerando-se a chave fechada. Considera-se que a chave não fecha instantâneamente, ou seja, entre os instante $t = t_{fech\ ajust}$ e $t = t_{fech\ ajust} + \Delta t$ estão ocorrendo alterações lineares no sistema devidas ao fechamento da chave. Ressalta-se que esta é apenas uma interpretação física do fenômeno, já que, do ponto de vista computacional, é indiferente o fechamento em $t = t_{fech\ ajust}$ ou $t = t_{fech\ ajust} + \Delta t$.

Para melhor entendimento do processo de abertura deve-se recorrer ao fluxograma da figura 4.11. Nota-se, no mesmo, que as correntes são calculadas apenas após o cálculo das tensões, ou seja, ao final do processo de cálculo de cada instante de tempo. Portanto, no início do processo de cálculo de cada instante de tempo, o único valor de corrente que se conhece é o valor da corrente do instante de tempo anterior. Dessa forma, para o tempo $t = t_{aber\ ajust}$ conhece-se apenas o valor da corrente no tempo $t = t_{aber\ ajust} - \Delta t$. Portanto, se a chave for aberta no instante $t = t_{aber\ ajust}$ estará sendo considerado o valor de corrente do instante de tempo anterior, que corresponde a um tempo para o qual a chave ainda deveria estar fechada. Assim sendo, apenas no tempo $t = t_{aber\ ajust} + \Delta t$ é que será possível conhecer o valor da corrente no tempo $t = t_{aber\ ajust}$, que corresponde ao tempo para o qual a chave deve-se abrir. Dessa forma, o valor $t = t_{aber\ ajust} + \Delta t$ corresponde ao tempo para o qual a chave estará apta a abrir, e a abertura ocorrerá apenas se o critério de corrente for satisfeito.

Para o processo de abertura, é necessário conhecer-se os dois últimos valores de corrente, anteriores ao instante de tempo considerado, para que se possa verificar se a corrente passou por zero. A passagem da corrente por zero ficará caracterizada quando houver uma troca de sinais entre esses dois valores de corrente.

Da maneira como foram apresentados, os processos de abertura e fechamento podem parecer complexos, porém, exemplificando como será feito a seguir, esses processos tornam-se mais compreensíveis.

Suponha-se, por exemplo, uma chave para a qual tenha sido definido um valor de tempo de fechamento como o mostrado na figura 6.1. Neste caso, como o valor de t_{fech} está mais próximo de $t = 8\Delta t$, internamente o programa ajusta esse valor para $t_{fech\ ajust} = 8\Delta t$. Nesse instante, os cálculos são realizados considerando-se a chave ainda aberta, e apenas no próximo instante de tempo, $t = 9\Delta t$, é que os cálculos serão realizados considerando-se a chave fechada. Nota-se, portanto, que o fechamento da chave não ocorre instantâneamente.

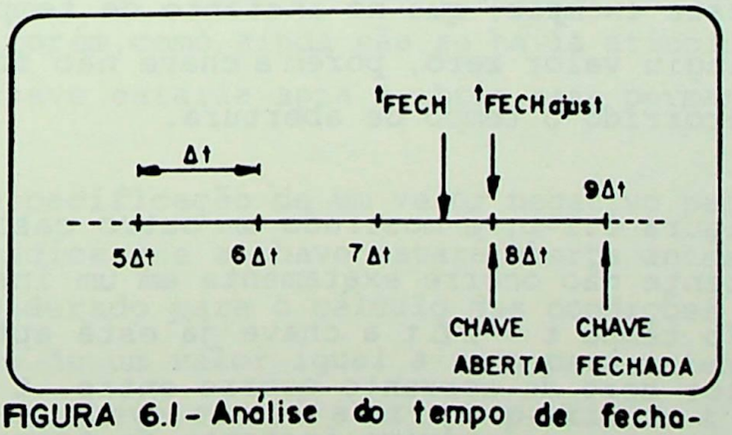


FIGURA 6.1 - Análise do tempo de fechamento para chaves controlados por tempo

A especificação de um valor de $t_{fech} < 0$ indica que a chave está fechada antes de t = 0 (início do estudo). Esta informação é importante para o cálculo das condições iniciais. A especificação de um valor de $t_{fech} = 0$ indica que a chave é fechada no início da análise transitória, e que para o cálculo das condições iniciais a chave é considerada aberta. A especificação de $t_{fech} > t_{max}$ indica que a chave não fecha durante todo o período de estudo.

Para a abertura, como mencionado, deve-se considerar o tempo de abertura e a margem de corrente. Na figura 6.2-a o tempo de abertura está definido com um valor intermediário entre $3\Delta t$ e $4\Delta t$. Internamente o programa ajusta este valor para $t_{aber\ ajust} = 4\Delta t$, e no instante $t = 5\Delta t$ a chave está apta a abrir. Porém, nota-se que, para o tempo $t = 5\Delta t$ o valor de corrente que se conhece é o do instante de tempo $t = 4\Delta t$, que não é zero. Portanto, a chave não será aberta em $t = 5\Delta t$. Ao final dos cálculos para o tempo $t = 5\Delta t$, é calculado o valor da corrente e encontra-se o valor zero. Dessa maneira, no próximo instante de tempo, $t = 6\Delta t$, para o qual o único valor de corrente conhecido será o do instante de tempo anterior, $t = 5\Delta t$, a chave será aberta, já que o valor de corrente encontrado em $t = 5\Delta t$ foi zero. No tempo $t = 6\Delta t$ os cálculos serão realizados considerando-se a chave aberta. Deve-se observar, neste exemplo, que no instante de tempo $t = 2\Delta t$ a corrente atingiu valor zero, porém a chave não foi aberta pois não havia decorrido o tempo de abertura.

Na figura 6.2-b, é mostrado um outro caso onde o valor zero de corrente não ocorre exatamente em um instante múltiplo de Δt. No tempo $t = 2\Delta t$ a chave já está apta a abrir, sendo que o valor zero de corrente ocorre entre $t = 2\Delta t$ e $t = 3\Delta t$. Portanto, no próximo instante de tempo, $t = 4\Delta t$, a corrente é forçada para zero e a chave será aberta. Parece, à primeira vista, que a chave deveria ser aberta em $t = 3\Delta t$, logo após a corrente ter passado por zero. Porém, de acordo com o

fluxograma da figura 4.11, as correntes são calculadas apenas no final de cada instante de tempo. Portanto, apenas no final do processo de cálculo do tempo $t = 3\Delta t$ é que será calculado o valor negativo de corrente. Dessa forma, no próximo instante de tempo, $t = 4\Delta t$, comparando-se os valores de corrente dos dois últimos instantes de tempo, $t = 2\Delta t$ e $t = 3\Delta t$, será possível identificar a passagem da corrente por zero, e considerar a abertura da chave, forçando-se a corrente para zero.

Esses dois casos apresentados (figura 6.2-a e b) consideram valor nulo para a margem de corrente. Quando este valor é considerado, identificam-se duas situações importantes, mostradas nas figuras 6.2-c e 6.2-d. No primeiro caso, figura 6.2-c, no tempo $t = 2\Delta t$ a chave está apta a abrir, e no instante de tempo $t = 4\Delta t$ a corrente atinge um valor dentro da faixa definida pela margem de corrente (i_{marg}). Portanto, no próximo instante de tempo, $t = 5\Delta t$, a chave será aberta, forçando a corrente para zero. No segundo caso, figura 6.2-d, a chave está apta a abrir em $t = 2\Delta t$. Entre os instantes de tempo $t = 3\Delta t$ e $t = 4\Delta t$ a corrente passa por zero. Portanto, mesmo sem esse valor de corrente estar dentro da faixa definida por i_{marg}, a chave será aberta em $t = 5\Delta t$, justamente devido à passagem da corrente por zero. Nesses dois casos, em $t = \Delta t$ o valor da corrente se encontrava dentro da faixa definida por i_{marg}, porém, como ainda não se havia atingido o tempo para o qual a chave estaria apta a abrir, esta permaneceu fechada.

A especificação de um valor negativo para o tempo de abertura indica que a chave estará aberta antes de $t = 0$, o que é considerado para o cálculo das condições iniciais. A especificação de um valor igual a zero para o tempo de abertura indica que a chave estará aberta a partir de $t = 0$, ou seja, apenas no início da análise transitória.

Em termos computacionais, é necessário definir se a

chave está aberta ou fechada inicialmente, ou seja, t_{aber} ou t_{fech} deve ser negativo.

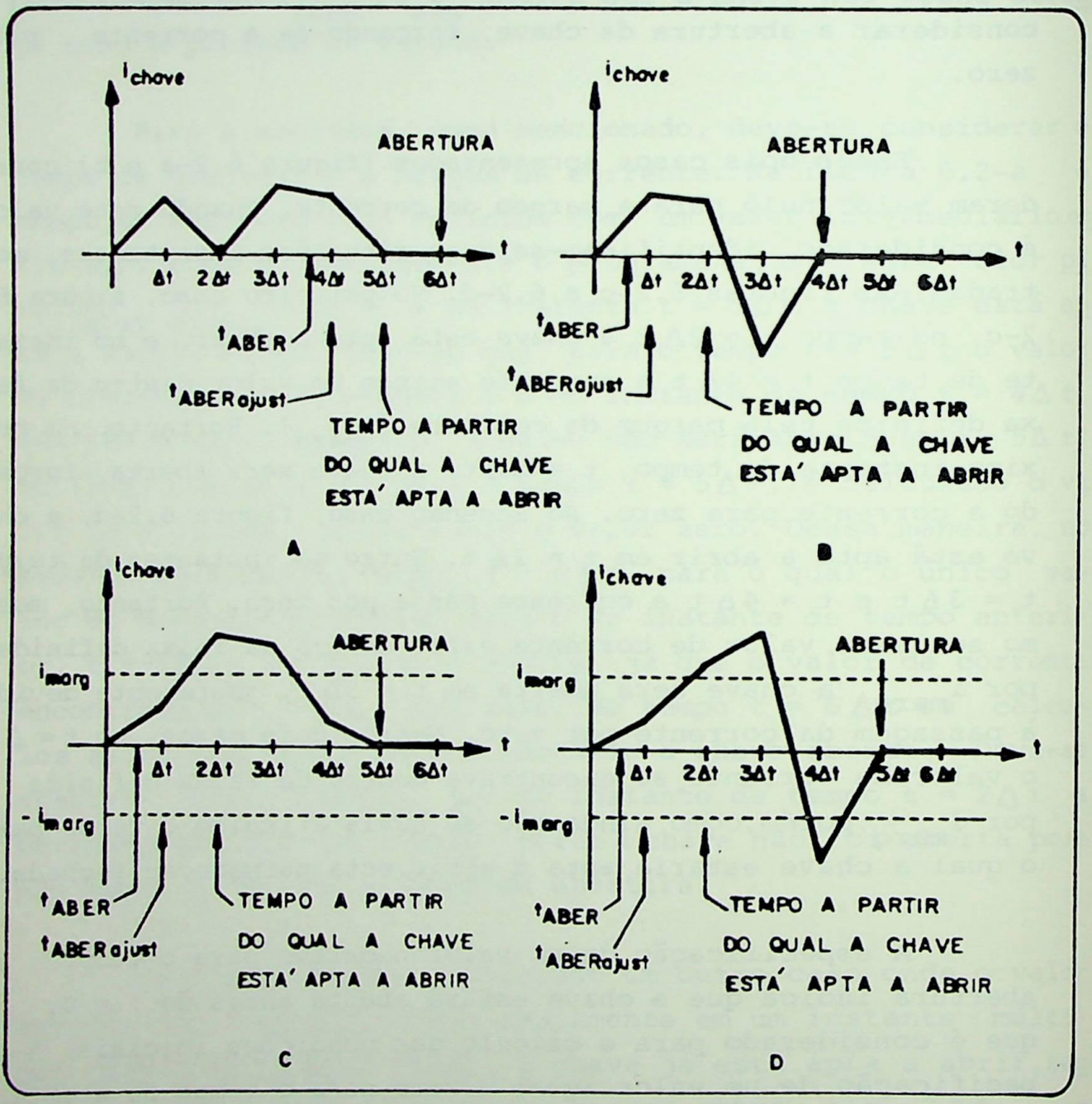


FIGURA 6.2 - Análise do processo de abertura para as chaves controladas por tempo

6.2.2 - CHAVES CONTROLADAS POR TENSÃO

Neste modelo de chave, o fechamento é controlado por tempo e tensão, e a abertura é controlada por tempo e corrente. Os parâmetros necessários são :

t_{fech} - tempo de fechamento da chave

V_{desc} - tensão de descarga da chave, valor acima do qual a chave será fechada

i_{marg} - margem de corrente, que define uma faixa para a qual poderá ocorrer a abertura da chave

t_{cond} - tempo que a chave permanece conduzindo

Os processos de abertura e fechamento desse modelo ficam definidos da seguinte maneira :

- o fechamento da chave ocorrerá no instante de tempo mais próximo, após ter decorrido o tempo de fechamento (t_{fech}), logo que o valor da tensão sobre a chave seja igual ou maior que a tensão de descarga (V_{desc});

- a abertura da chave ocorrerá no instante de tempo mais próximo após decorrido o tempo de condução (t_{cond}), logo que a corrente passe por zero, quando a margem de corrente for definida igual a zero, ou logo que a corrente atinja um valor dentro da faixa definida pela margem de corrente ou passe por zero, quando a margem de corrente for diferente de zero.

Para este modelo de chave, os tempos de fechamento e de condução, quando não são múltiplos inteiros do intervalo de tempo (Δt), também deverão ser ajustados para o múlti-

plo de Δt mais próximo, definindo-se, dessa maneira, os valores de $t_{fech\ ajust}$ e $t_{cond\ ajust}$.

Embora não esteja apresentado no fluxograma da figura 4.11, as alterações que devem ser efetuadas nas matrizes do sistema, devido à alteração do estado de uma chave, são feitas antes do cálculo das tensões. Portanto, como já foi visto para as correntes e apresentado no item anterior, o valor de tensão que se conhece no início do cálculo para cada instante de tempo corresponde ao valor de tensão calculado no instante de tempo anterior. Dessa maneira, considera-se que a chave estará apta a fechar apenas no tempo $t = t_{fech\ ajust} + \Delta t$, e não em $t = t_{fech\ ajust}$. Observa-se, ainda, que o fechamento só será efetuado se o valor da tensão na chave for igual ou superior ao valor da tensão de descarga (V_{desc}).

Após o fechamento, a chave permanecerá conduzindo por um tempo correspondente a $t_{cond\ ajust}$. Portanto, o tempo de abertura passa a ser definido como sendo $t_{aber} = t_{fech\ ajust} + t_{cond\ ajust}$, e são válidas, para este modelo, as mesmas observações feitas para o processo de abertura do modelo de chave controlada por tempo (item 6.2.1). Deve-se observar que esse ajuste para o valor do tempo de abertura trata-se de um ajuste preliminar, visto que o fechamento só será efetivado se o critério de tensão for satisfeito. Dessa forma, deve-se atualizar o tempo de abertura acrescentado o valor Δt a esse ajuste preliminar, a cada vez que o fechamento não se efetivar devido ao critério de tensão.

Como foi apresentado no item 6.2.1, são necessários, no mínimo, dois valores de corrente para verificar se houve passagem da corrente por zero, o que significa que, após o fechamento da chave, esta deverá permanecer conduzindo, no mínimo, durante dois instervalos de tempo. Portanto, o valor mínimo de $t_{cond\ ajust}$ será $2\Delta t$. Quando o tempo de condução for especificado com um valor menor que este mínimo, o programa que foi

desenvolvido ajustará esse valor para $2\Delta t$.

Após a abertura da chave, poderá ocorrer um novo fechamento, desde que o critério de tensão seja novamente satisfeito. Esse novo tempo de fechamento será definido como sendo $t_{fech\ ajust} = t_{aber} + 2\Delta t$, valor este que deverá ser atualizado a cada vez que o critério de abertura da chave não for satisfeito.

O método trapezoidal, utilizado neste trabalho, apresenta, para algumas aplicações específicas, oscilações numéricas em torno da solução correta (apêndice F). Devido a isso, para satisfazer o critério de tensão do processo de fechamento, toma-se como valor de tensão na chave a média dos dois últimos valores calculados, justamente para evitar que as oscilações numéricas causem uma falsa alteração do estado da chave. O fator $2\Delta t$, que aparece no cálculo de $t_{fech\ ajust}$, permite que a chave se mantenha aberta, no mínimo, por dois intervalos de tempo, de forma que se possam obter os dois valores de tensão na chave, necessários na verificação do critério de tensão para o fechamento.

Portanto, de forma a se terem, no mínimo, dois valores anteriores de tensão para verificar o critério de fechamento da chave, o valor mínimo do tempo de fechamento inicial deverá ser igual a $3\Delta t$, valor este que é ajustado internamente pelo programa quando for especificado com um valor menor que este mínimo.

Nota-se, para este modelo, que é possível ocorrerem em um período de simulação vários ciclos de fechamento - abertura de chaves. O tempo de fechamento, que é fornecido inicialmente ao programa, se caracteriza como tempo inicial para os vários ciclos que poderão ocorrer no período de simulação. Os casos exemplos que se seguem servirão para melhor exemplificar esse segundo modelo de chave.

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca
MACÁ
BIM

Para o caso de fechamento, considere-se a figura 6.3-a, onde t_{fech} está especificado com um valor intermediário entre $t = \Delta t$ e $t = 2\Delta t$. O programa, internamente, neste caso, ajusta o tempo de fechamento para $t_{fech\ ajust} = 2\Delta t$. Portanto, já a partir de $t = 3\Delta t$ a chave estará apta a fechar. No instante $t = 4\Delta t$ o valor da tensão na chave é superior ao valor da tensão de descarga, V_{desc}. Dessa forma, no próximo instante de tempo, $t = 5\Delta t$, a chave será fechada, forçando a tensão na chave para zero. Nota-se, neste caso, que no instante $t = \Delta t$, embora a tensão na chave fosse superior a V_{desc}, como ainda não havia decorrido o tempo de fechamento, a chave se manteve aberta.

Na figura 6.3-b, a chave está apta a fechar a partir de $t = 4\Delta t$. Em $t = 4\Delta t$, a tensão na chave atinge um valor igual a V_{desc}; portanto, em $t = 5\Delta t$ a chave será fechada, forçando a tensão na chave para zero.

Na figura 6.3-c é considerado um exemplo de abertura. A chave é fechada no instante $t = 3\Delta t$. O valor de t_{cond}, como é um pouco menor que $2\Delta t$, é ajustado internamente pelo programa ($t_{cond\ ajust} = 2\Delta t$). Dessa forma, em $t = 5\Delta t$ a chave está apta a abrir. Como neste caso a margem de corrente é nula, a abertura da chave ocorrerá no próximo instante de tempo após detectado a passagem da corrente por zero, o que acontece entre $t = 6\Delta t$ e $t = 7\Delta t$. Portanto, a chave será aberta em $t = 8\Delta t$, forçando a corrente para zero.

Na figura 6.3-d é mostrado o processo de abertura considerando-se a margem de corrente. Em $t = 3\Delta t$ a chave foi fechada. Em $t = 5\Delta t$, já decorreu o tempo de condução, t_{cond}, e a chave está apta a abrir. No instante $t = 6\Delta t$ a corrente atinge um valor dentro da faixa definida pela margem de corren-

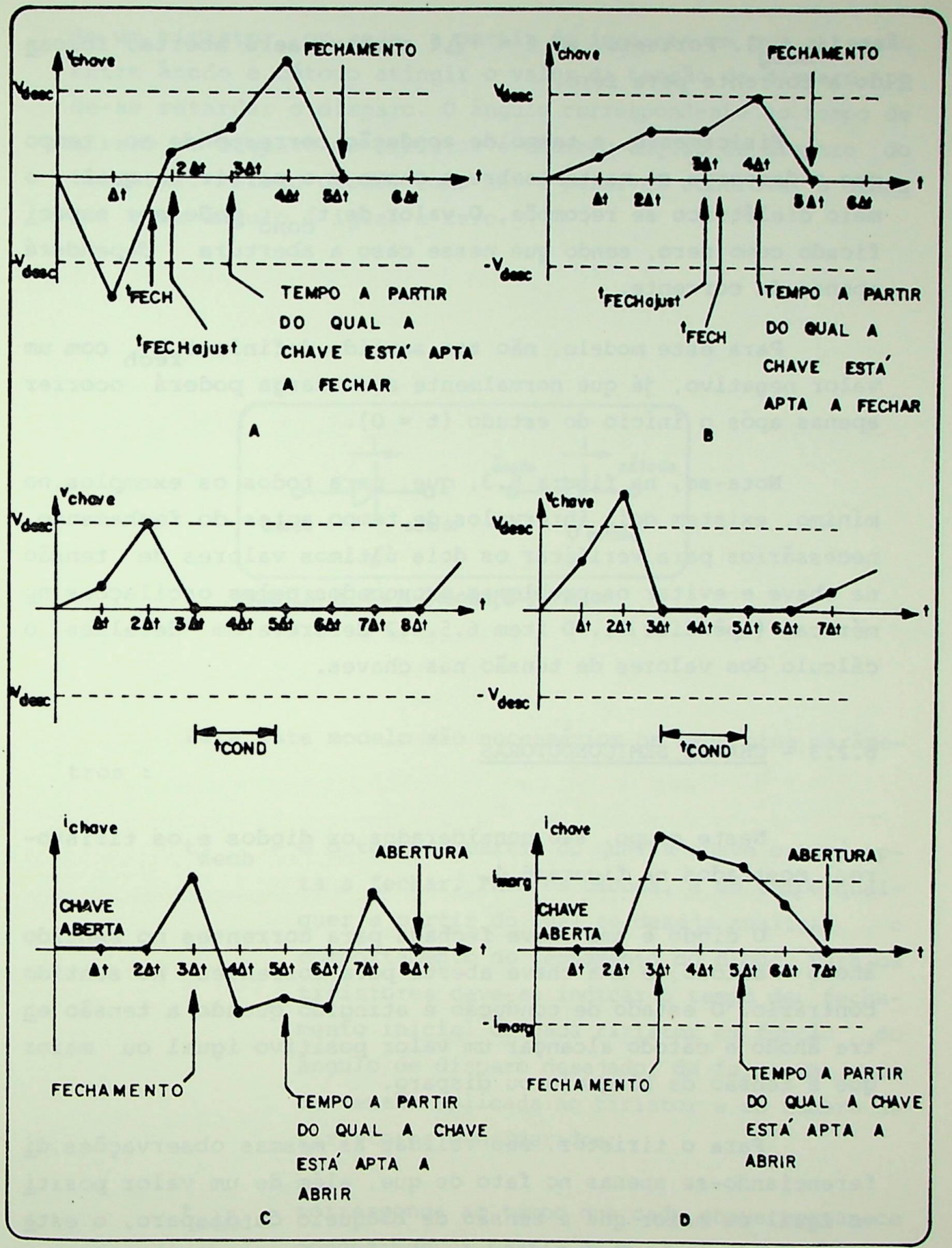


FIGURA 6.3 - Análise dos processos de fechamento e de abertura para as chaves controladas por tensão

te (i_{marg}). Portanto, em $t = 7\Delta t$ a chave será aberta, forçando a corrente para zero.

Fisicamente, o tempo de condução corresponde ao tempo que a descarga se mantém sobre a chave e a partir do qual o meio dielétrico se recompõe. O valor de t_{cond} pode ser especificado como zero, sendo que nesse caso a abertura dependerá apenas da corrente.

Para este modelo, não tem sentido definir t_{fech} com um valor negativo, já que normalmente a descarga poderá ocorrer apenas após o início do estudo ($t = 0$).

Nota-se, na figura 6.3, que, para todos os exemplos, no mínimo, existem dois intervalos de tempo antes do fechamento, necessários para verificar os dois últimos valores de tensão na chave e evitar os problemas provocados pelas oscilações numéricas (apêndice F). O item 6.5.4.2 descreve em detalhes o cálculo dos valores de tensão nas chaves.

6.2.3 - CHAVES SEMICONDUTORAS

Neste grupo, são considerados os diodos e os tiristores, mostrados na figura 6.4.

O diodo é uma chave fechada para correntes no sentido ânodo - cátodo, e uma chave aberta para correntes no sentido contrário. O estado de condução é atingido quando a tensão entre ânodo e cátodo alcançar um valor positivo igual ou maior que a tensão de bloqueio ou disparo.

Para o tiristor, são válidas as mesmas observações, diferenciando-se apenas no fato de que, além de um valor positivo igual ou maior que a tensão de bloqueio ou disparo, o estado de condução será atingido apenas quando o tiristor receber um sinal de disparo através de um sistema de controle de disparo. Devido a isso, é possível controlar o ângulo de disparo

de um tiristor, ou seja, a partir do instante em que a tensão entre ânodo e cátodo atingir o valor da tensão de disparo, pode-se retardar o disparo. O ângulo correspondente ao tempo de atraso no disparo do tiristor é chamado ângulo de disparo do tiristor. Para o diodo, como não é possível controlar o disparo, esse ângulo é igual a zero.

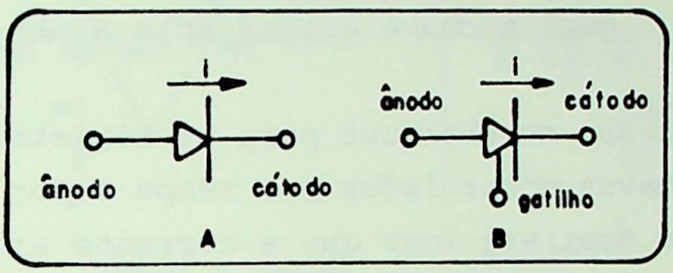


FIGURA 6.4 - A-) diodo, B-) tiristor

Para este modelo são necessários os seguintes parâmetros :

t_{fech} - é o tempo a partir do qual a chave estará apta a fechar. Para os diodos, é um tempo qualquer a partir do qual se deseja analisar o comportamento do fechamento do diodo. Para os tiristores deve-se indicar o tempo de fechamento inicial de cada tiristor em função do ângulo de disparo desejado, da forma da onda de tensão aplicada ao tiristor e do número de tiristores considerados;

t_{cond} - corresponde ao tempo que cada chave permanece conduzindo, a partir do qual a chave estará apta a abrir. Caso este valor seja especificado com um valor menor que $2\Delta t$, será ajustado

pelo programa que foi desenvolvido para $2\Delta t$, pelos mesmos motivos apresentados para o modelo de chave controlada por tensão;

V_{disp} - corresponde ao valor da tensão de disparo ou de bloqueio, a partir do qual o diodo passará a conduzir e o tiristor estará apto a conduzir;

i_{marg} - define a faixa positiva de corrente para a qual a chave estará apta a abrir.

O processo de abertura para os tiristores e diodos é o mesmo das chaves controladas por tempo e por tensão, sendo que a abertura ocorrerá logo que a corrente atinja um valor negativo (o tiristor e o diodo conduzem apenas no sentido ânodo - cátodo, sentido este para o qual as correntes são consideradas positivas) ou um valor dentro da faixa definida pela margem de corrente (i_{marg}).

Na figura 6.5-a está mostrado um caso onde a chave (tiristor ou diodo) está apta a abrir a partir de $t = 5\Delta t$, tempo este definido a partir do tempo de fechamento ($t = 3\Delta t$) e do tempo de condução ($t_{cond} = 2\Delta t$). Nota-se que nesse instante a chave não será aberta pois a corrente apresenta um valor positivo. Já no instante de tempo $t = 6\Delta t$ a corrente atinje um valor negativo; portanto, no próximo instante de tempo, $t = 7\Delta t$, a chave será aberta.

Na figura 6.5-b está mostrado um outro caso idêntico ao anterior, diferenciando-se apenas no fato de que, nesse caso, foi especificada também uma margem de corrente. No instante $t = 5\Delta t$ a chave está apta a abrir, porém, nesse instante de tempo a corrente atingiu um valor superior ao definido pela margem de corrente. Nota-se que, no instante $t = 4\Delta t$, embora a corrente tenha atingido um valor dentro da faixa definida pe-

la margem de corrente, a chave não se abriu, pois não havia decorrido o tempo de condução (t_{cond}). Finalmente, no instante $t = 7\Delta t$ a corrente atinge um valor dentro da faixa definida pela margem de corrente; e, portanto, no próximo instante de tempo, $t = 8\Delta t$, a chave será aberta.

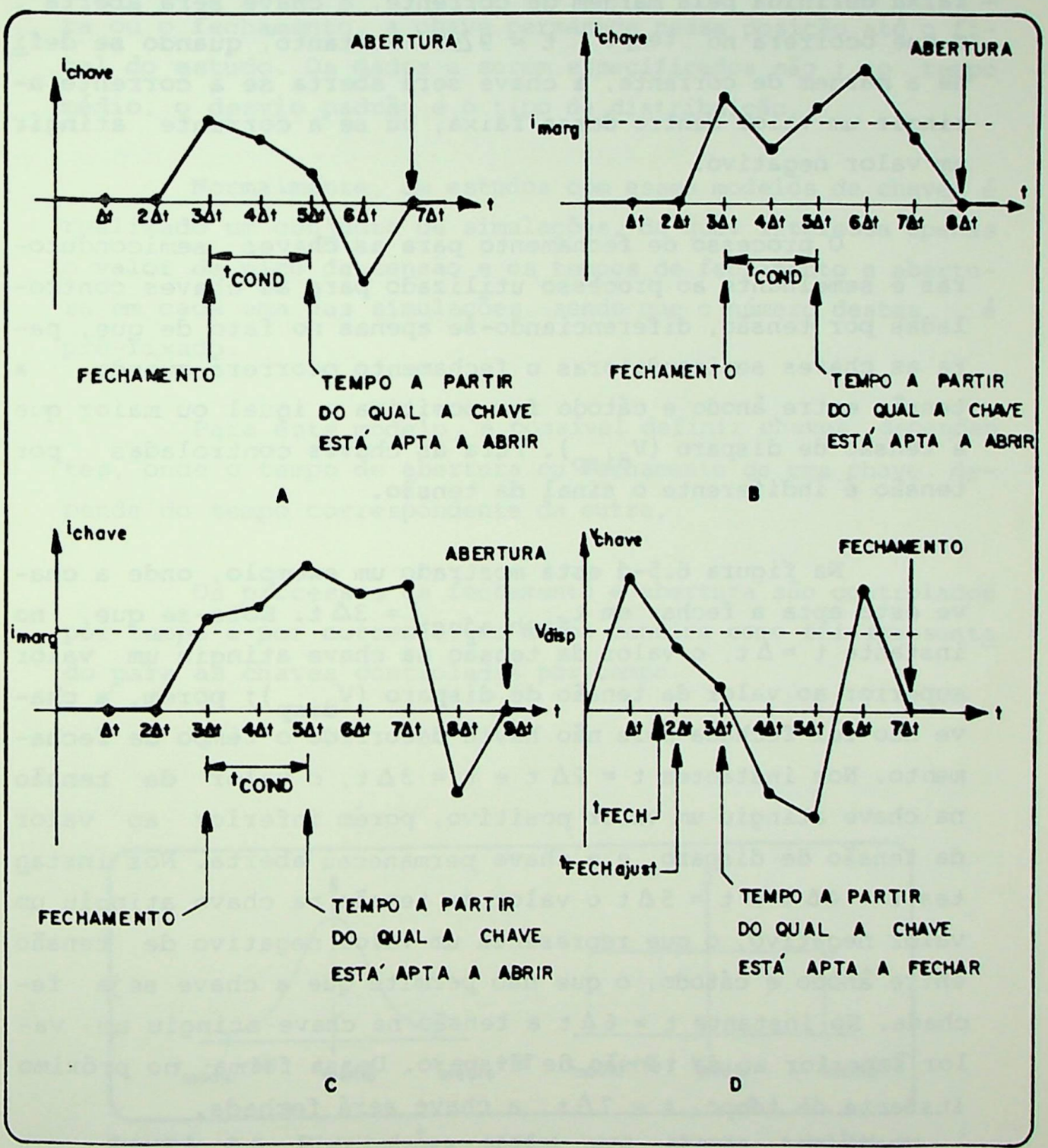


FIGURA 6.5 - Análise dos processos de abertura e de fechamento para as chaves semicondutoras

Na figura 6.5-c está mostrado um outro caso semelhante aos anteriores, onde também está definido o valor de margem de corrente. A partir do tempo $t = 5\Delta t$ a chave está apta a abrir. No tempo $t = 8\Delta t$ a corrente atinge um valor negativo, e embora não tenha atingido um valor dentro da faixa definida pela margem de corrente, a chave será aberta, o que ocorrerá no tempo $t = 9\Delta t$. Portanto, quando se define a margem de corrente, a chave será aberta se a corrente atingir um valor dentro dessa faixa, ou se a corrente atingir um valor negativo.

O processo de fechamento para as chaves semicondutoras é semelhante ao processo utilizado para as chaves controladas por tensão, diferenciando-se apenas no fato de que, para as chaves semicondutoras o fechamento ocorrerá quando a tensão entre ânodo e cátodo for positiva e igual ou maior que a tensão de disparo (V_{disp}). Para as chaves controladas por tensão é indiferente o sinal da tensão.

Na figura 6.5-d está mostrado um exemplo, onde a chave está apta a fechar em $t_{fech\ ajust} = 3\Delta t$. Nota-se que, no instante $t = \Delta t$, o valor da tensão na chave atingiu um valor superior ao valor da tensão de disparo (V_{disp}); porém, a chave não foi fechada pois não havia decorrido o tempo de fechamento. Nos instantes $t = 2\Delta t$ e $t = 3\Delta t$, o valor da tensão na chave atingiu um valor positivo, porém inferior ao valor da tensão de disparo, e a chave permaneceu aberta. Nos instantes $t = 4\Delta t$ e $t = 5\Delta t$ o valor da tensão na chave atingiu um valor negativo, o que representa um valor negativo de tensão entre ânodo e cátodo, o que não permite que a chave seja fechada. No instante $t = 6\Delta t$ a tensão na chave atingiu um valor superior ao da tensão de disparo. Dessa forma, no próximo instante de tempo, $t = 7\Delta t$, a chave será fechada.

6.2.4 - CHAVES ESTATÍSTICAS

Para este modelo de chave,os tempos de abertura e fechamento são gerados aleatoriamente de acordo com uma distribuição de Gauss ou uniforme (figura 6.6-a e b). Após a abertura ou o fechamento, a chave permanece nessa posição até o final do estudo. Os dados a serem especificados são : o tempo médio, o desvio padrão e o tipo de distribuição.

Normalmente, em estudos com esses modelos de chaves é realizado um conjunto de simulações, do qual interessa apenas o valor de pico da tensão e os tempos de fechamento e abertura em cada uma das simulações, sendo que o número destas é pré-fixado.

Para este modelo, é possível definir chaves dependentes, onde o tempo de abertura ou fechamento de uma chave depende do tempo correspondente da outra.

Os processos de fechamento e abertura são controlados por tempo e por corrente, da mesma maneira como foi apresentado para as chaves controladas por tempo.

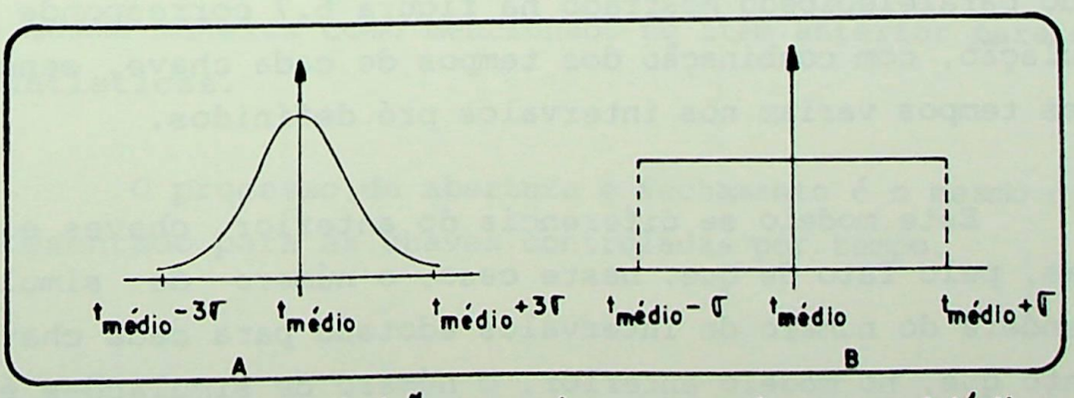


FIGURA 6.6 - Distribuições usadas para chaves estatísticas: A-) Gauss, B-) uniforme

6.2.5 - CHAVES SISTEMÁTICAS

Para este modelo de chave, os tempos de fechamento e de abertura variam regularmente em intervalos que são uniformemente distribuídos, dentro de uma faixa pré definida através de valores iniciais e finais. Após a abertura ou o fechamento, a chave permanecerá nessa posição até o final do estudo. Os parâmetros necessários para este tipo de chave são: número de intervalos da distribuição uniforme, tempo inicial e tamanho do intervalo.

Normalmente, em estudos com esse modelo de chave, são realizadas várias simulações, das quais interessam apenas os valores de pico das tensões e os tempos de abertura e fechamento em cada uma das simulações. O número de simulações pode ser visualizado pela figura 6.7, onde são consideradas três chaves com os seguintes intervalos :

chave 1 - 3 intervalos

chave 2 - 4 intervalos

chave 3 - 5 intervalos

O número de simulações possíveis corresponde ao produto dos intervalos de cada chave, 3 x 4 x 5 = 60. A cada ponto do paralelepípedo mostrado na figura 6.7 corresponde uma simulação, com combinação dos tempos de cada chave, sendo que esses tempos variam nos intervalos pré definidos.

Este modelo se diferencia do anterior, chaves estatísticas, pelo fato de que, neste caso, o número de simulações dependerá do número de intervalos adotado para cada chave, enquanto que, no modelo anterior, o número de simulações é definido diretamente pelo usuário do modelo.

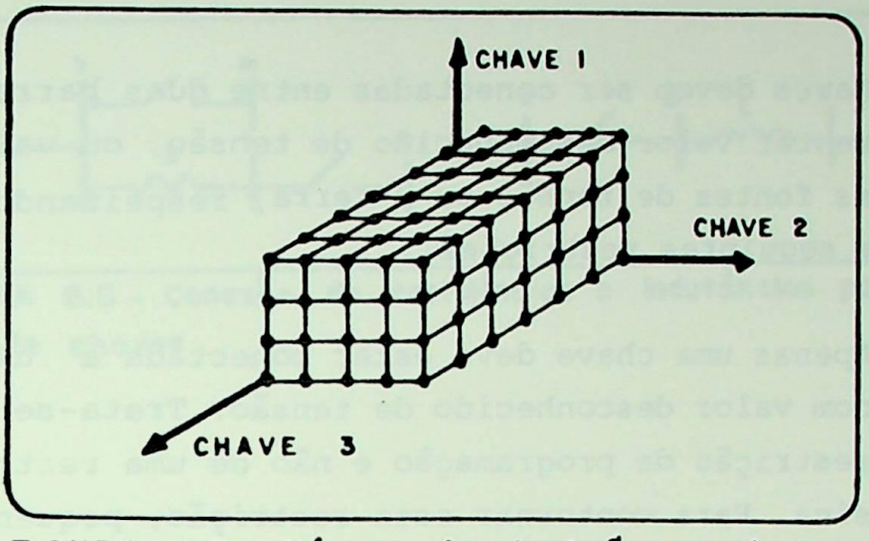


FIGURA 6.7 - Número de simulações possíveis para os modelos de chaves sistemáticas

Deve-se tomar cuidado com este modelo de chave, devido ao grande número de simulações que pode resultar em virtude da escolha do número de intervalos para cada chave. É possível, também, definir chaves dependentes para este modelo , da mesma maneira como mencionado no item anterior para chaves estatísticas.

O processo de abertura e fechamento é o mesmo que foi apresentado para as chaves controladas por tempo.

6.3 - REGRAS PARA UTILIZAÇÃO DOS MODELOS DE CHAVES

As chaves devem ser conectadas entre duas barras, que podem apresentar valor desconhecido de tensão, ou valor conhecido, como as fontes de tensão ou a terra, respeitando-se, no entanto, as seguintes restrições :

a - Apenas uma chave deve estar conectada a uma barra com valor desconhecido de tensão. Trata-se de uma restrição de programação e não de uma restrição física. Para contornar esta restrição, pequenos valores de resistência ou indutância podem ser conectados para separar as chaves, como mostrado na figura 6.8. Valores de resistências podem provocar um mau condicionamento da matriz $[Y_{AA}]$, já que a sua contribuição é definida por 1/R. Dessa forma, para um pequeno valor de resistência tem-se um valor 1/R grande. É preferível, portanto, usar indutâncias . Por exemplo : para $\Delta t = 50\mu s$, adotando-se um valor de indutância de 12,5μH, resultará a seguinte resistência equivalente, devida a aplicação do método trapezoidal (equação 2.5) :

$$R_{EQ} = \frac{2.12,5.10^{-6}}{50.10^{-6}} = 0,5$$

O valor da contribuição 1/R na matriz $[Y_{AA}]$ será:

$$\frac{1}{R_{EQ}} = 2,0$$

que é um valor pequeno e não provoca o mau condicionamento da matriz.

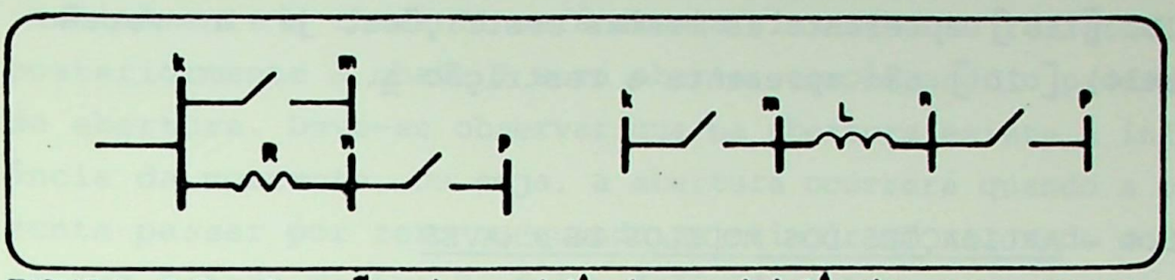


FIGURA 6.8 - Conexão de resistências e indutâncias para separação de chaves

b - Barras conectadas às fontes de tensão ou à terra poderão apresentar qualquer número de chaves a elas conectadas (figura 6.9).

c - Não são permitidas chaves entre duas barras que estejam conectadas às fontes de tensão ou conectadas à terra.

d - Quando uma fonte de corrente é conectada à uma fonte de tensão através de uma chave, a fonte de corrente será ignorada quando do fechamento da chave.

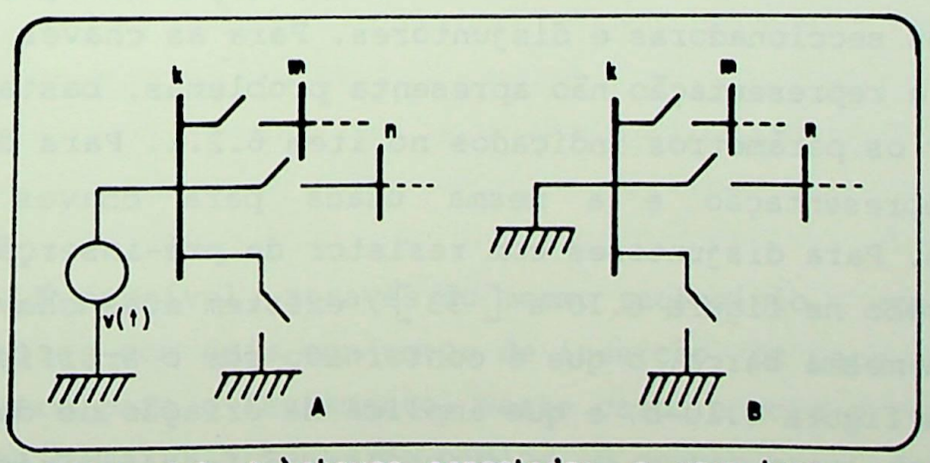


FIGURA 6.9 - A-) chaves conectadas a uma barra com fonte de tensão, B-) chaves conectadas à terra

Todas essas restrições foram consideradas no desenvolvimento computacional deste trabalho. O programa EMTP - versão UBC [18] apresenta as mesmas restrições, já a versão BPA (M34) [20] não apresenta a restrição a.

6.4 - APLICAÇÕES DOS MODELOS DE CHAVES

A seguir estão descritas algumas aplicações para cada um dos modelos de chaves. Além daqueles que são considerados neste trabalho, são apresentadas também as aplicações dos outros modelos, citados no item 6.2.

Outras aplicações especiais dos modelos de chaves poderão ser consideradas, desde que se possam adotar simplificações no comportamento do sistema ou do fenômeno físico a ser analisado, de tal forma que este possa ser representado de forma adequada por um dos modelos apresentados neste trabalho.

6.4.1 - CHAVES CONTROLADAS POR TEMPO

Esse modelo é usado principalmente para representar chaves seccionadoras e disjuntores. Para as chaves seccionadoras, a representação não apresenta problemas, bastando especificar os parâmetros indicados no item 6.2.1. Para disjuntores a representação é a mesma usada para chaves seccionadoras. Para disjuntores com resistor de pré-inserção, como mostrado na figura 6.10-a [33], existem duas chaves conectadas à mesma barra, o que é contornado com o artifício mostrado na figura 6.10-b, e que implica na criação de duas barras adicionais. Neste caso, a chave I será fechada inicialmente, inserindo o resistor, e posteriormente a chave II será fechada, retirando o resistor do circuito. O tempo de permanência

do resistor no circuito corresponde à diferença entre os tempos de fechamento das chaves I e II. No processo de abertura, inicialmente a chave II será aberta, inserindo o resistor, e posteriormente a chave I será aberta, completando o processo de abertura. Deve-se observar que na abertura existe a influência da corrente, ou seja, a abertura ocorrerá quando a corrente passar por zero ou quando se atingir um valor de corrente que esteja dentro da faixa definida pela margem de corrente.

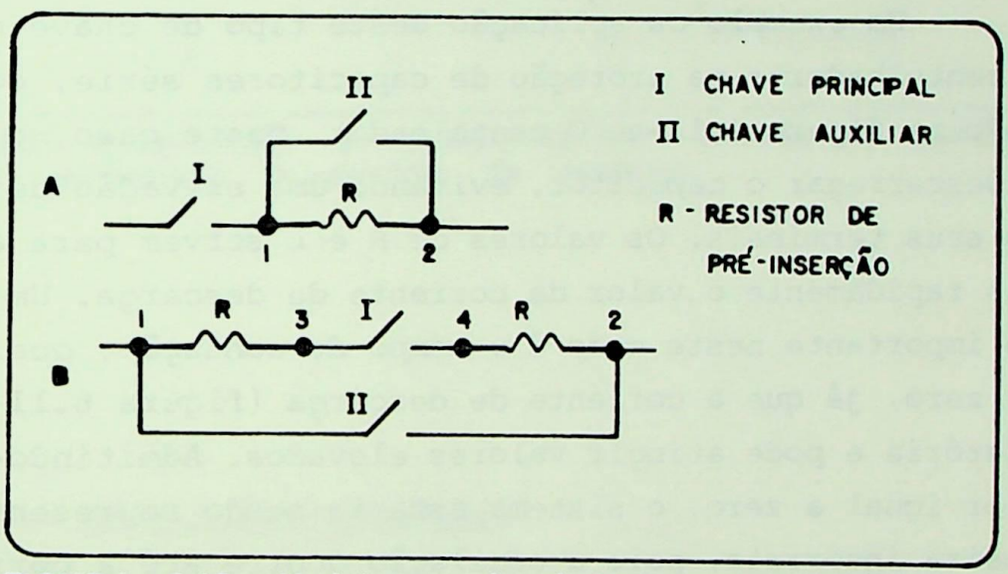


FIGURA 6.10 - Modelagem de disjuntores com resistores de pré-inserção

É possível, através do mesmo raciocínio, considerar disjuntores com dois conjuntos de inserção, um para a abertura e outro para o fechamento. Neste caso, embora o religamento possa demorar dezenas de ciclos, é conveniente, do ponto de vista do estudo, considerar um tempo pequeno para não prolongar o processamento computacional.

6.4.2 - CHAVES CONTROLADAS POR TENSÃO

Este modelo de chave é utilizado principalmente nos seguintes casos :

- representação de centelhadores
- representação de descargas através de isoladores
- representação de fenônemos similares dependentes de tensão, que provoquem rompimento do nível de isolamento

Um exemplo da aplicação deste tipo de chave é o uso de centelhadores na proteção de capacitores série, como mostrado na figura 6.11-a. O centelhador, neste caso, é usado para descarregar o capacitor, evitando uma elevação de tensão nos seus terminais. Os valores de R e L servem para amortecer mais rapidamente o valor da corrente de descarga. Um parâmetro importante neste caso é o tempo de condução, que não pode ser zero, já que a corrente de descarga (figura 6.11-b) é oscilatória e pode atingir valores elevados. Admitindo-se este valor igual a zero, o sistema estaria sendo representado de maneira incorreta, pois a oscilação ocorre até a corrente se anular. Portanto, o tempo de condução a ser considerado é o indicado na figura 6.11-b, para o caso de margem de corrente nula. Caso fosse considerada uma margem de corrente maior que zero, o valor do tempo de condução poderia ser um pouco menor. Deve-se observar que o tempo de condução do centelhador é função de alguns outros parâmetros que não são considerados no modelo, tais como espaçamento, nível de tensão e taxa de variação da tensão.

Existem casos em que poderão ocorrer oscilações numéricas superpostas aos valores verdadeiros de tensão, como mostrado no apêndice F. Devido a esse fato, usa-se o valor médio das tensões dos dois últimos instantes de tempo , para veri

ficar se foi atingido o valor de tensão de descarga V_{desc} (item 6.5.4.2).

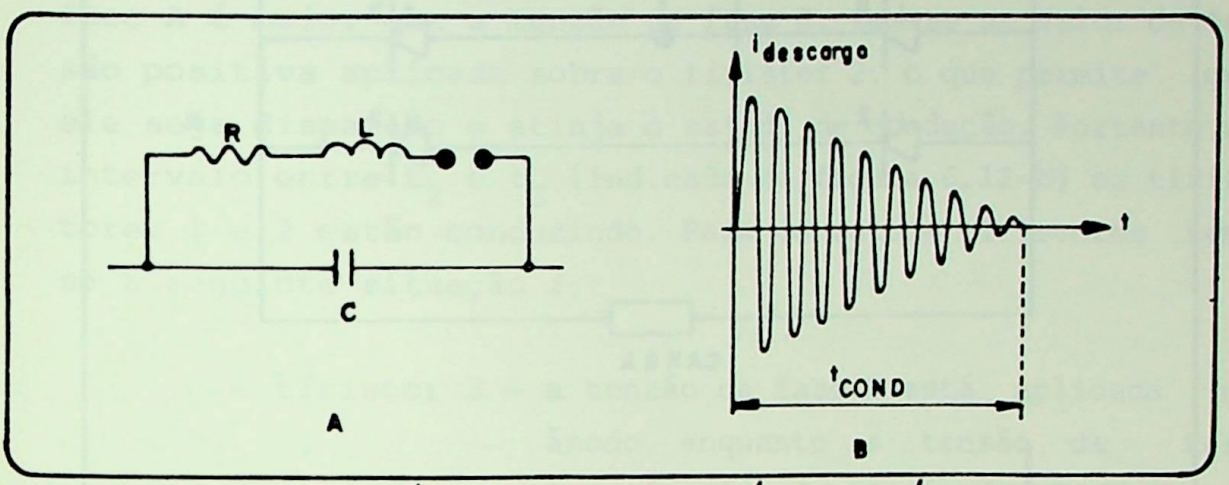


FIGURA 6.11 - A-) proteção de capacitores série através de centelhadores, B-) forma oscilatória da corrente de descarga

6.4.3 - CHAVES SEMICONDUTORAS

Os tiristores normalmente são utilizados nas pontes conversoras, com o objetivo de transformar correntes AC em DC e vice-versa. Na figura 6.12-a está mostrada uma ponte conversora trifásica a tiristores, e na figura 6.12-b está mostrada a forma das ondas de tensão correspondentes às fases A, B e C, indicando a ordem e o tempo em que cada tiristor é chaveado. A cada 60° um novo tiristor é chaveado, sendo que cada tiristor permanecerá conduzindo por um intervalo de tempo correspondente a 120°. Para o tiristor 1, por exemplo, a tensão da fase A, a partir do instante t_1, está aplicada diretamente no ânodo. Considerando-se que todos os outros tiristores estejam

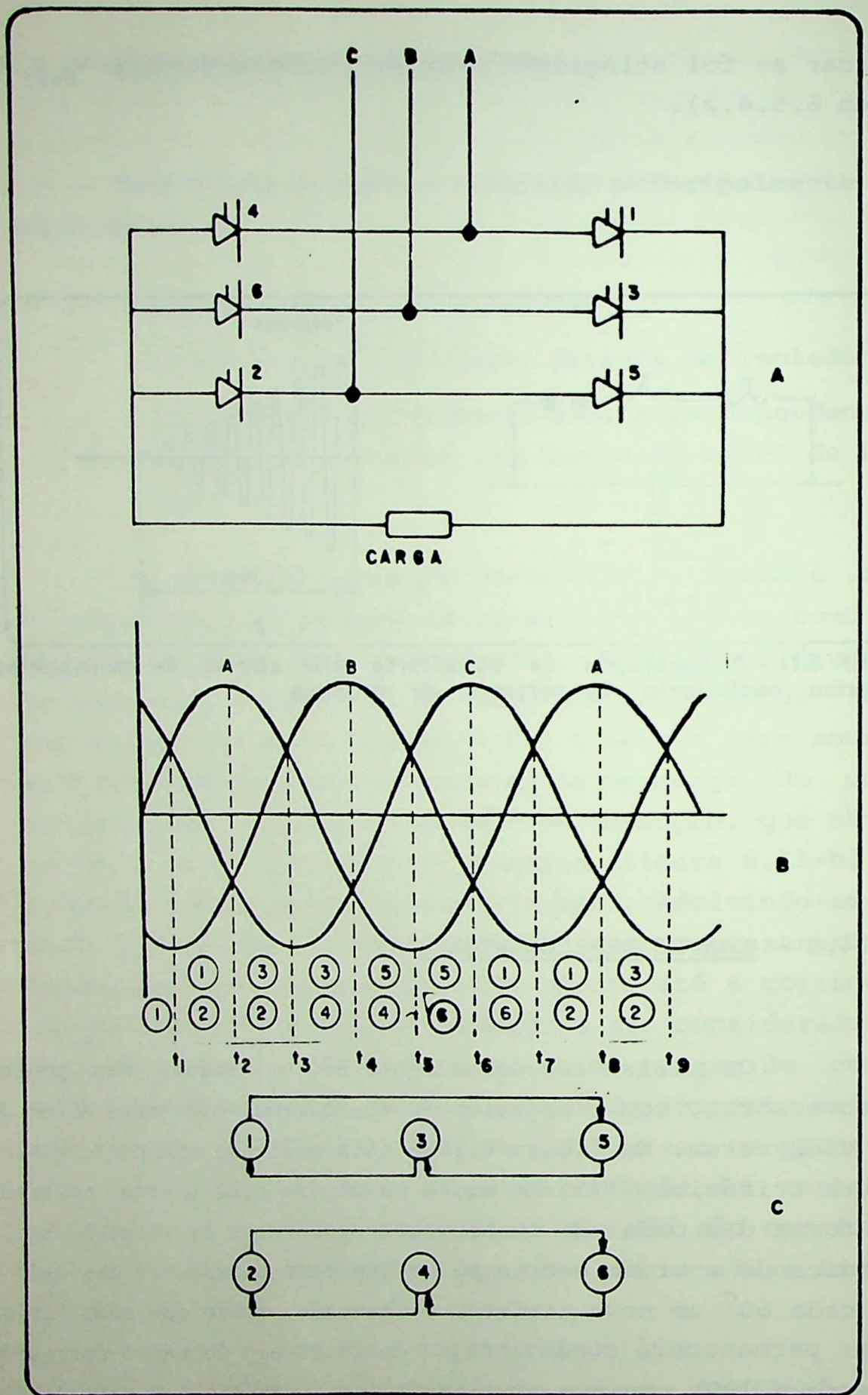


FIGURA 6.12 - A-) ponte retificadora trifásica a tiristores, B-) onda senoidal aplicada à ponte, C-) ordem em que os tiristores são disparados

bloqueados, tem-se, portanto, uma tensão nula aplicada no cátodo do tiristor 1. Dessa maneira, a tensão aplicada sobre o tiristor 1 é positiva, o que fará com que este atinja o estado de condução. A partir do instante t_2, tem-se a tensão da fase A aplicada sobre o ânodo do tiristor 2, enquanto sobre o cátodo está aplicada a tensão da fase C. Como a tensão da fase A é maior que a tensão da fase C, tem-se um valor de tensão positiva aplicada sobre o tiristor 2, o que permite que ele seja disparado e atinja o estado de condução. Portanto,no intervalo entre t_2 e t_3 (indicado na figura 6.12-b) os tiristores 1 e 2 estão conduzindo. Para os outros tiristores tem-se a seguinte situação :

- tiristor 3 - a tensão da fase B está aplicada no ânodo, enquanto a tensão da fase A está aplicada no cátodo. Como a tensão da fase A é maior, sobre o tiristor está aplicada uma tensão negativa, garantindo que o mesmo permaneça bloqueado.

- tiristor 4 - a tensão da fase A está aplicada no cátodo, e no ânodo está aplicada a tensão da fase C. Como a tensão na fase A é maior que a tensão na fase C, sobre este tiristor também está aplicada uma tensão negativa, garantindo que este tiristor também se mantenha bloqueado.

- tiristor 5 - a tensão da fase C está aplicada sobre o ânodo e a tensão da fase A está aplicada sobre o cátodo. Como, sobre este tiristor também está aplicada uma tensão negativa, este também permanecerá bloqueado.

- tiristor 6 - a tensão da fase B está aplicada no cátodo, enquanto a tensão da fase C está aplicada no ânodo. Como a tensão da fase B é maior que a tensão da fase C, este tiristor também se manterá bloqueado.

Deve-se observar que, no intervalo entre t_2 e t_3, a tensão que está aplicada sobre a carga vale :

$$V_A - V_C = V_{AC}$$

Portanto, tem-se que nos cátodos dos tiristores 3 e 5 (lado direito da ponte e bloqueados) aparece a tensão V_A, e nos ânodos dos tiristores 4 e 6 (lado esquerdo da ponte e bloqueados) aparece a tensão V_C.

A partir do instante t_3 a tensão da fase B passa a ficar mais positiva do que a tensão da fase A. Dessa forma, sobre o tiristor 3 aparece uma tensão positiva (fase B no ânodo, e fase A no cátodo, pelo fato de o tiristor 1 estar ainda conduzindo), o que permite que o tiristor 3 seja disparado e atinja o estado de condução. No instante em que este tiristor começar a conduzir, aparecerá no cátodo do tiristor 1 a tensão da fase B, que é maior que a tensão da fase A, causando, portanto, o bloqueio do tiristor 1. A partir desse instante, portanto, os tiristores 2 e 3 são os únicos que estarão conduzindo, e todos os outros estarão bloqueados.

A partir do instante t_4, o tiristor 4 passa a conduzir e o 2 é bloqueado; a partir do instante t_5, o tiristor 5 passa a conduzir e o 3 é bloqueado; a partir do instante t_6, o tiristor 6 passa a conduzir e o 4 é bloqueado; a partir do instante t_7, o tiristor 1 passa a conduzir e o 5 é bloqueado, e o processo continua dessa forma para os outros ciclos. Na

figura 6.12-b, estão indicados os tiristores que estão conduzindo a cada instante de tempo, e na figura 6.12-c está indicada a ordem em que cada tiristor, de cada lado da ponte entra em condução. Deve-se observar que, a cada instante de tempo, dois tiristores devem estar conduzindo, um de cada lado da ponte.

Para o disparo de cada um dos tiristores, foi considerado como referência o ponto de cruzamento das tensões, ou seja, o ponto a partir do qual a tensão de uma fase passa a ser mais positiva que a de outra fase. Porém, é possível controlar o disparo dos tiristores, retardando-o de um ângulo qualquer. Na figura 6.13 estão mostradas as formas de onda de tensão para diferentes ângulos de disparos. Para o ponto de cruzamento das tensões assume-se o ângulo $\alpha = 0^{o}$. Para os outros ângulos esse ponto de cruzamento é a referência.Por exemplo, para um ângulo de disparo $\alpha = 30^{o}$, o disparo ocorrerá após ter decorrido um tempo correspondente a um ângulo de 30°, contado a partir do ponto de referência ($\alpha = 0^{o}$). Para valores do ângulo de disparo entre 0° e 90° a ponte conversora funciona como um retificador, e para ângulos entre 90° e 180° funciona como um inversor.

Quando um tiristor está bloqueado e recebe o sinal de disparo para entrar em condução, um outro tiristor deverá estar saindo do estado de condução. Este processo não é instantâneo, e demora um tempo correspondente ao que é chamado ângulo de comutação, γ. Na figura 6.14 está mostrado um caso em que o tiristor 3 está entrando em condução e o tiristor 1 está sendo bloqueado. Este ângulo de comutação vale aproximadamente 15°.

Se ao invés de tiristores, for considerada uma ponte conversora a diodos, serão válidas as mesmas observações, diferenciando-se apenas no fato de que, para os diodos, não é possível controlar o ângulo de disparo (ângulo $\alpha = 0^{o}$), ou seja, considera-se como instante de disparo o ponto de cruzamen

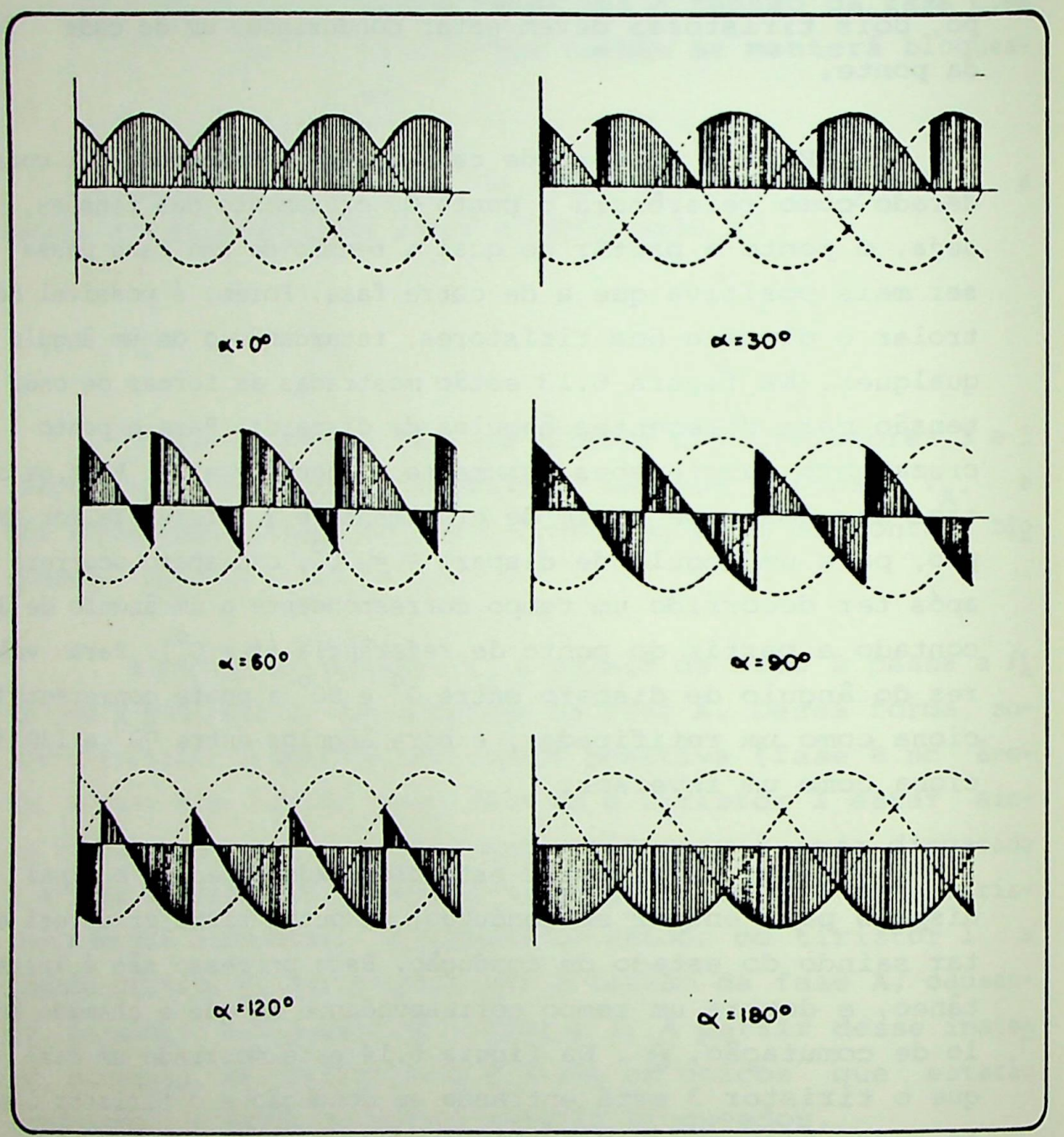


FIGURA 6.13 - Formas de onda para diferentes ângulos de disparo de um tiristor

to das tensões.

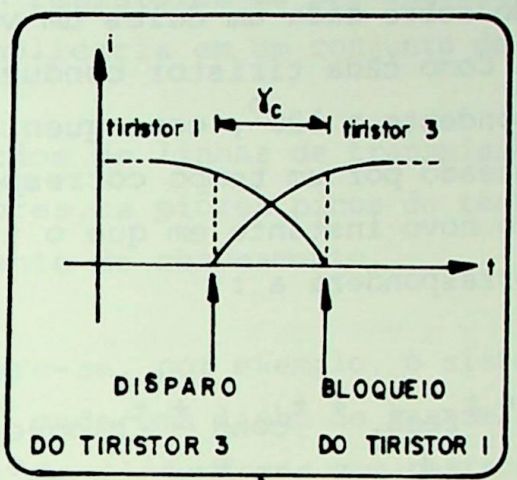


FIGURA 6.14 - Ângulo de comutação do tiristor

Para a representação dos tiristores ou dos diodos em pontes conversoras, foram consideradas as seguintes restrições:

- não serão consideradas formas de onda distorcidas a aplicadas diretamente ao tiristor ou diodo. Isto é devido principalmente à dificuldade de detectar o ponto em que os tiristores ou diodos deveriam ser disparados. Para o diodo considerado sozinho, não é válida esta restrição, já que apenas é necessário saber se a tensão é positiva e maior ou igual a V_{disp}.

- os ângulos de disparo devem ser fornecidos ao pro-

grama, especificados como tempos de fechamento inicial, considerando-se fontes trifásicas senoidais atrás da ponte conversora. Através desse tempo de fechamento inicial e do tempo de condução dos tiristores, define-se o tempo de abertura de cada um deles, que corresponderá ao instante em que aparecerá aplicado sobre cada um deles um valor negativo de tensão. Como cada tiristor conduz durante um tempo correspondente a 120°, consequentemente, permanecerá bloqueado por um tempo correspondente a 240°. Portanto, o novo instante em que o tiristor será disparado corresponderá a :

$$t_{fech_2} = t_{fech_1} + t_{cond} + t_{bloqueio} \qquad (6.1)$$

(t_{cond}: 120°; $t_{bloqueio}$: 240°)

- t_{fech_2}: instante do segundo disparo
- t_{fech_1}: tempo de fechamento inicial (1º disparo)
- t_{cond}: tempo que o tiristor permanece conduzindo
- $t_{bloqueio}$: tempo que o tiristor permanece bloqueado

Para os diodos, não é necessário identificar o tempo de fechamento inicial, pois não é possível controlar o ângulo de disparo, e apenas o critério de tensão é suficiente para definir o tempo exato de fechamento. Dessa forma, é possível identificar os transitórios iniciais para os diodos, c que não é possível para os tiristores.

Neste item, considerou-se apenas a aplicação de tiristores e diodos às pontes conversoras trifásicas. Porém, esses modelos podem ter outras aplicações, desde que sejam respeitadas as restrições mencionadas anteriormente.

6.4.4 - CHAVES ESTATÍSTICAS

Em estudos que envolvam disjuntores, é muito difícil definir os valores exatos dos instantes de fechamento e de abertura de cada um dos pólos. Isso pode ficar mais complexo quando se consideram resistores de pré-inserção, que para um sistema trifásico implicaria em um conjunto de seis chaves.

Em estudos de linhas de transmissão, energizadas a partir de disjuntores, os piores picos de tensão são normalmente função do instante de chaveamento.

Considere-se, por exemplo, o sistema mostrado na figura 6.15 [22], onde uma linha de transmissão trifásica é energizada a partir de disjuntores com resistores de pré-inserção. Neste caso, têm-se seis chaves, cujos tempos de fechamento podem apresentar várias combinações possíveis.

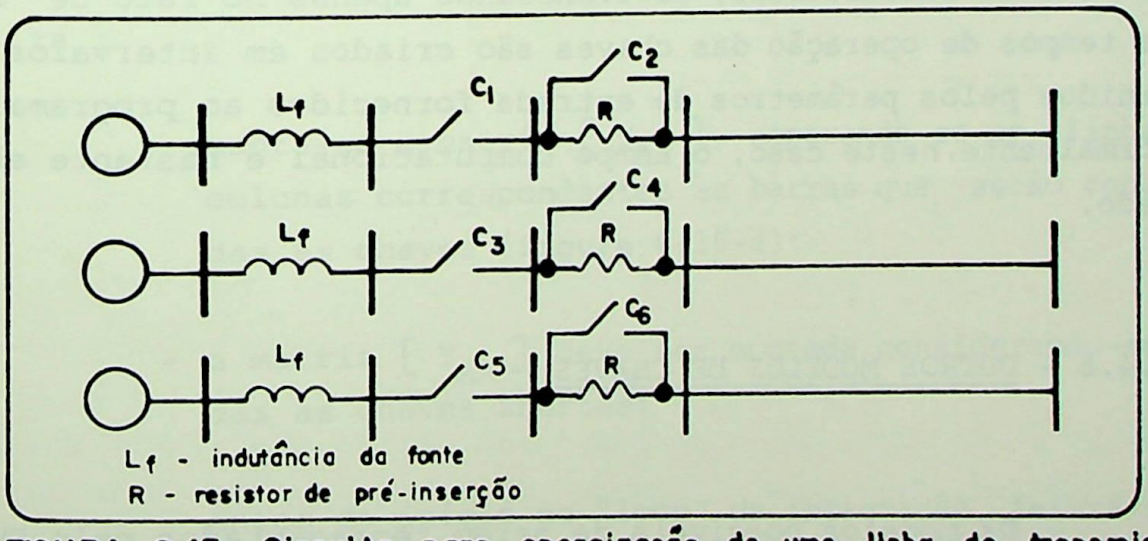


FIGURA 6.15 - Circuito para energização de uma linha de transmissão trifásica a partir de disjuntor com resistor de pré-inserção

Escola ... de Irajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

Com o uso de chaves estatísticas, os tempos de fechamento são criados aleatoriamente de acordo com uma distribuição de Gauss ou uniforme. Normalmente são realizadas várias simulações, e os resultados que o programa fornece para cada simulação são os tempos de fechamento de cada chave e os valores de tensão e de corrente especificados.

Para o caso mostrado na figura 6.15, deve-se usar chaves estatísticas dependentes, já que a chave C_2 deve ser fechada depois da chave C_1, após ter decorrido o tempo de permanência do resistor de pré-inserção no circuito.

O uso deste modelo de chave demanda um tempo computacional muito elevado, pois requer a execução do programa n vezes, onde n é o número de simulações desejadas.

6.4.5 - CHAVES SISTEMÁTICAS

Este modelo de chave apresenta o mesmo comportamento das chaves estatísticas, diferenciando apenas no fato de que os tempos de operação das chaves são criados em intervalos definidos pelos parâmetros de entrada fornecidos ao programa. Normalmente, neste caso, o tempo computacional é bastante elevado.

6.4.6 - OUTROS MODELOS DE CHAVES

Os modelos possíveis de serem representados pelo EMTP-versão BPA, através da TACS, se aplicam principalmente a sistemas de controle, e compreendem um conjunto muito grande de combinações possíveis, que estão descritos no manual do programa [20].

6.5 - PROCESSO COMPUTACIONAL APLICADO AOS MODELOS DE CHAVES

Para os modelos apresentados nos capítulos anteriores, as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ eram montadas antes do início do processo de cálculo das tensões e eram utilizadas dessa maneira até o final do processo de cálculo, sendo que a matriz $[Y_{AA}]$ era fatorada uma única vez.

Quando no sistema em análise existem chaves, a alteração do estado dessas chaves leva a alterações na topologia do sistema, e, portanto, também deve levar a alterações nas matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, que são montadas em função da topologia do sistema.

Além disso, para a matriz $[Y_{AA}]$, é necessário executar uma nova fatoração sempre que houver uma alteração de estado de uma chave, o que causa um aumento no tempo de processamente computacional.

Para contornar esse problema, reduzindo o tempo computacional, é possível executar o processamento da segunte maneira :

- monta-se a matriz $[Y_{AA}]$, separando-se as linhas e colunas correspondentes às barras que estão conectadas às chaves (figura 6.16-a);

- a matriz $[Y_{AA}]$ deve ser montada considerando-se todas as chaves abertas;

- antes do início do "loop" de integração, fatora-se na matriz $[Y_{AA}]$, somente a parte que envolve as linhas e colunas correspondentes às barras que não estão conectadas às chaves (figura 6.16-b);

- dessa forma, obtém-se a matriz reduzida (figura 6.16-b), que contém as informações das barras que estão conectadas às chaves, e uma tabela de fatores parcial (figura 6.16-b), que contém as informações das barras que não estão conectadas às chaves e que apresentam valores desconhecidos de tensão. A partir deste ponto, ao invés de se trabalhar com a matriz $[\ Y_{AA}\ ]$, trabalha-se com a matriz reduzida e a tabela de fatores;

- a cada alteração do estado de uma chave basta alterar a matriz reduzida e refatorá-la, completando o processo de fatoração da matriz $[\ Y_{AA}\ ]$.

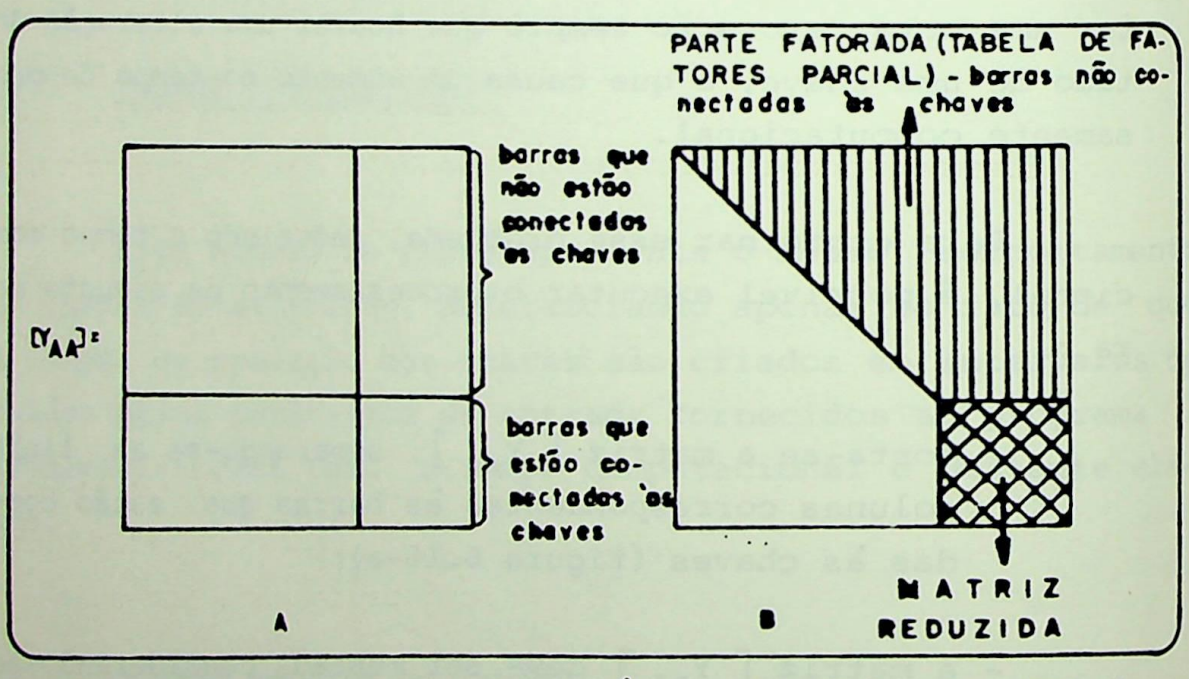


FIGURA 6.16 - Processo de fatoração parcial, A-) matriz $[Y_{AA}]$ original apresentando a divisão entre barras que estão e não conectadas às chaves, B-) tabela de fatores parcial e matriz reduzida

No início do processo de cálculo, os estados de cada uma das chaves são ajustados de acordo com os seus tempos de fechamento e abertura, isto é, se $t_{fech} \leq 0$ fecha-se a chave e se $t_{abre} \leq 0$ mantém-se a chave aberta. Com esses ajustes dos estados das chaves, são feitas as alteração necessárias na matriz $[\ Y_{AB}\ ]$, na tabela de fatores parcial e na matriz reduzida, e o processo de fatoração é aplicado à matriz reduzida, dando origem à tabela de fatores completa, que será utilizada para o cálculo dos valores de tensão para o primeiro instante de tempo. Observa-se que o processo de fatoração neste estágio é apenas completado, já que antes do início do "loop" de integração tinha-se executado uma fatoração parcial.

A partir do segundo intervalo de integração, cada nova alteração no estado de uma chave deverá levar à alterações nas matrizes do sistema e a uma nova fatoração da matriz reduzida. Deve-se observar que, embora possam existir linhas e colunas na matriz reduzida que não tenham sofrido quaisquer alterações, as que se fizerem necessárias devidas à abertura ou fechamento de alguma chave deverão ser realizadas em cima da última versão da matriz reduzida, e o processo de fatoração deverá ser aplicado a todas as linhas e colunas da matriz reduzida, completando-se a tabela de fatores parcial que foi obtida antes do início do "loop" de integração.

Deve-se observar que não é necessário o acerto dos estados das chaves para $t \leq 0$, visto que neste trabalho não é considerada uma análise de regime permanente antes do início do processo de análise em regime transitório ($t = 0$).

A figura 6.16-b mostra a tabela de fatores. Nota-se que uma parte desta apresenta colunas correspondentes às barras que não estão conectadas às chaves, enquanto que as últimas colunas correspondem às barras que estão conectadas às chaves. Portanto, quando existe alteração do estado de uma chave, essas colunas deverão sofrer alterações. As linhas da tabela de fatores,

como correspondem às barras que não estão conectadas às chaves, não sofrem quaisquer alterações.

Na figura 6.16-b também está mostrada a matriz reduzida, cujas linhas e colunas correspondem às barras que estão conectadas às chaves. Portanto, a alteração do estado de uma chave leva à alterações nas linhas e colunas da matriz reduzida.

Para a matriz $[\ Y_{AB}\ ]$ tem-se que as colunas correspondem às barras conectadas às fontes de tensão, enquanto que as linhas correspondem às barras com valores desconhecidos de tensão, que podem ou não estarem conectadas às chaves. Portanto, para a matriz $[\ Y_{AB}\ ]$, as alterações se processam apenas nas linhas.

As alterações que se processam na matriz reduzida, na tabela de fatores e na matriz $[\ Y_{AB}\ ]$, quando da alteração do estado de uma chave, dependem do tipo das barras terminais da chave. Devido a isso, foram considerados três tipos de chaves (figura 6.17), classificados em função do tipo das barras terminais :

Tipo 1 - uma das barras apresenta valor conhecido de tensão (fonte de tensão), enquanto que a outra apresenta valor desconhecido de tensão;

Tipo 2 - uma das barras está conectada à terra (valor conhecido de tensão : zero), enquanto que a outra apresenta valor desconhecido de tensão;

Tipo 3 - as duas barras apresentam valor desconhecido de tensão.

O próximo item descreve as alterações que são realizadas na matriz reduzida, na tabela de fatores e na matriz

$[Y_{AB}]$, em função de cada um desses tipos de chaves. Deve-se observar que os modelos de chaves (item 6.2) não influenciam em nada as alterações que são necessárias, eles apenas definem como é o processo de abertura e fechamento das chaves.

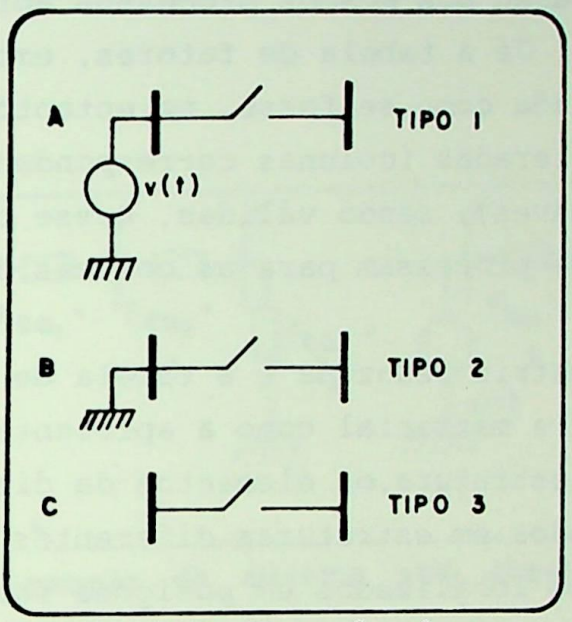


FIGURA 6.17- Tipos de chaves

Além das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, que são modificadas devido à alteração do estado de uma chave, os outros elementos da equação geral de solução (4.21) também sofrem alterações correspondentes. Além desses, outros aspectos, tais como o cálculo das correntes e tensões nas chaves, serão descritos em detalhes neste item.

6.5.1 - PROCESSO DE FECHAMENTO DAS CHAVES

Todas as alterações que são necessárias na tabela de fatores, na matriz reduzida e na matriz $[Y_{AB}]$, quando do fechamento de uma chave, estão descritas em detalhes a seguir. Essas alterações dependem do tipo de chave (figura 6.17) considerado.

Deve-se observar, que durante o processo de cálculo, não se trabalha com a matriz $[Y_{AA}]$, mas sim com a tabela de fatores e a matriz reduzida, que são estruturas matriciais originadas a partir da aplicação do processo de fatoração (apêndice D) à matriz $[Y_{AA}]$ original. A matriz reduzida apresenta a mesma estrutura da matriz $[Y_{AA}]$ original, sendo válido portanto, a aplicação dos mesmos processos apresentados para a matriz $[Y_{AA}]$. Já a tabela de fatores, embora não seja uma matriz, é tratada como se fosse, no entanto apenas as suas colunas serão alteradas (colunas correspondentes às barras conectadas às chaves), sendo válidas, nesse caso, as mesmas alterações que se processam para as colunas da matriz $[Y_{AA}]$.

Para a matriz reduzida e a tabela de fatores, considera-se uma estrutura matricial como a apresentada no apêndice B. Neste tipo de estrutura, os elementos da diagonal das matrizes estão armazenados em estruturas diferentes daquelas usadas para os elementos localizados em posições fora da diagonal. Devido a este fato, no programa que foi desenvolvido neste trabalho, as alterações devidas ao fechamento de chaves, são realizadas de maneira independente, para os elementos da diagonal e fora da diagonal.

6.5.1.1 - CHAVE DO TIPO 1

Para este tipo de chave, uma das barras do ramo apresenta valor desconhecido de tensão e a outra está conectada a uma fonte de tensão, apresentando portanto, um valor conhecido de tensão.

Na figura 6.18-a, está apresentado um sistema elétrico genérico com uma chave do tipo 1 aberta. Na figura 6.18-b, está apresentado o mesmo sistema com a chave fechada. Nota-se que a barra 2 foi eliminada devido ao fechamento da chave.

Como a chave é considerada ideal, fisicamente, a tensão que aparecerá na barra 2 será a mesma da fonte de tensão da barra 1, embora computacionalmente, considere-se a eliminação da barra 2. Os valores de R_{EQ}, indicados na figura, correspondem aos valores de resistência equivalente resultantes da aplicação do método trapezoidal às equações de cada um dos ramos.

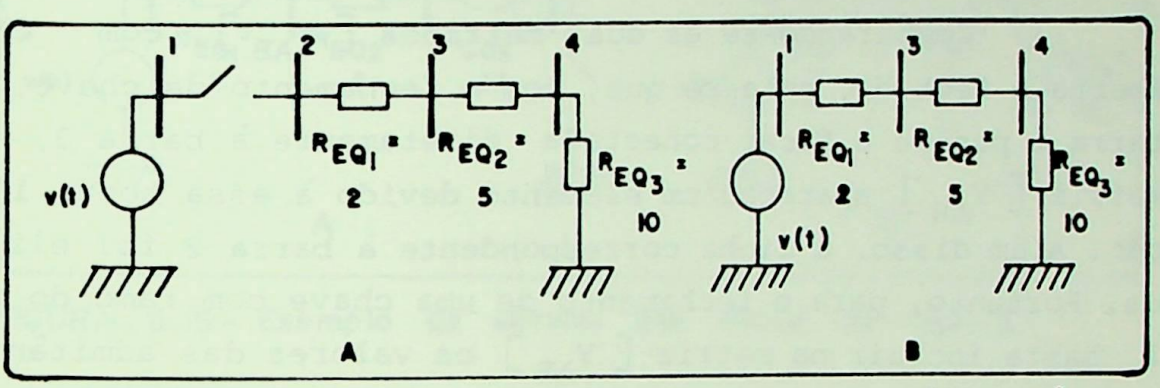


FIGURA 6.18 - Exemplo de sistema com chave do tipo I

Para o sistema mostrado na figura 6.18-a, as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ serão :

$$[Y_{AA}] = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ 3 & -0,5 & 0,7 & -0,2 \\ 4 & 0 & -0,2 & 0,3 \end{array} \qquad [Y_{AB}] = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{array}$$

Para o sistema mostrado na figura 6.18-b, as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ serão :

$$[Y_{AA}] = \begin{array}{c|cc} & 3 & 4 \\ 3 & 0,7 & -0,2 \\ 4 & -0,2 & 0,3 \end{array} \quad . [Y_{AB}] = \begin{array}{c|c} & 1 \\ 3 & -0,5 \\ 4 & 0 \end{array}$$

Comparando-se as duas matrizes $[Y_{AA}]$, com chave aberta e fechada, nota-se que, com o fechamento da chave, basta eliminar a linha e a coluna correspondente à barra com valor desconhecido de tensão, neste caso, a barra 2.

Comparando-se as duas matrizes $[Y_{AB}]$, com chave aberta e fechada, nota-se que, com o fechamento da chave, a barra 1 passou a ficar conectada diretamente à barra 3, e na matriz $[Y_{AB}]$ apareceu um elemento devido à essa nova ligação. Além disso, a linha correspondente à barra 2 foi eliminada. Portanto, para o fechamento de uma chave com ramo do tipo 1, basta incluir na matriz $[Y_{AB}]$ os valores das admitâncias dos ramos que estavam conectados à barra com valor desconhecido de tensão, eliminando-se posteriormente a linha correspondente à essa barra, neste caso, a barra 2. Deve-se observar, neste caso, que o novo valor que aparece na matriz $[Y_{AB}]$ encontrava-se inicialmente na matriz $[Y_{AA}]$ (linha 2/coluna 3), indicando a ligação da barra 2 com a barra 3. Este processo corresponde a criar na matriz $[Y_{AB}]$ as novas ligações elétricas que surgiram devido ao fechamento da chave.

...

6.5.1.2 - CHAVE DO TIPO 2

Para este tipo de chave, uma das barras do ramo apresenta valor desconhecido de tensão e a outra está conectada à terra, apresentando, portanto, valor conhecido de tensão (valor igual a zero).

Na figura 6.19-a, está apresentado um sistema elétrico genérico com uma chave do tipo 2 aberta. Na figura 6.19-b,

está apresentado o mesmo sistema com a chave fechada. Nota-se que, com o fechamento da chave, houve a eliminação da barra 4, já que esta passou a ficar conectada diretamente à terra, assumindo, portanto, um valor de tensão igual a zero.

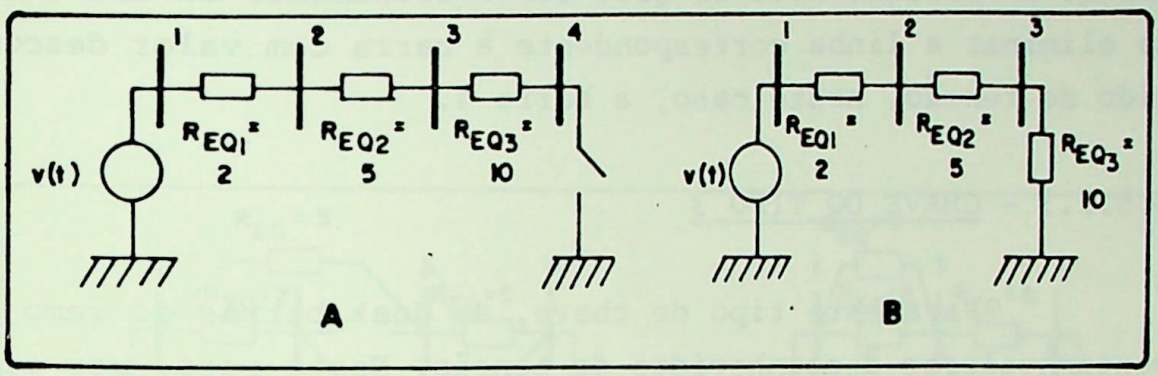


FIGURA 6.19- Exemplo de sistema com chave do tipo 2

Para o sistema mostrado na figura 6.19-a, as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ serão :

$$[Y_{AA}] = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{|ccc|} \hline 0,7 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 0,3 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,1 \\ \hline \end{array} \end{array} \qquad [Y_{AB}] = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline -0,5 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Para o sistema mostrado na figura 6.19-b, as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ serão :

$$[Y_{AA}] = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline 0,7 & -0,2 \\ -0,2 & 0,3 \\ \hline \end{array} \end{array} \qquad [Y_{AB}] = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline -0,5 \\ 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Comparando-se as duas matrizes $[Y_{AA}]$, com chave aberta e fechada, nota-se que, com o fechamento da chave, basta eliminar a linha e a coluna correspondente à barra com valor desconhecido de tensão, neste caso, a barra 4. Este é o mesmo processo utilizado para a chave do tipo 1.

Comparando-se as duas matrizes $[Y_{AB}]$, com chave aberta e fechada, nota-se que, com o fechamento da chave basta eliminar a linha correspondente à barra com valor desconhecido de tensão, neste caso, a barra 4.

6.5.1.3 - CHAVE DO TIPO 3

Para este tipo de chave, as duas barras do ramo apresentam valores desconhecidos de tensão. Neste caso, por ocasião do fechamento da chave, uma das barras deve ser eliminada e a outra deve ser mantida. A barra a ser eliminada deve ser aquela que apresenta o menor número (critério adotado neste trabalho).

Na figura 6.20-a, está apresentado um sistema elétrico genérico com uma chave do tipo 3 aberta. Na figura 6.20-b, está apresentado o mesmo sistema com a chave fechada. Nota se que, com o fechamento da chave, a barra 2 foi eliminada e a barra 3 foi mantida ($2 < 3$). Fisicamente, as barras 2 e 3 passam a ser uma única barra.

Para o sistema mostrado na figura 6.20-a, as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ serão :

$$[Y_{AA}] = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 3 & 0 & 0,2 & -0,2 \\ 4 & -0,5 & -0,2 & 0,8 \end{array} \qquad [Y_{AB}] = \begin{array}{c|c} & 1 \\ 2 & -0,5 \\ 3 & -0,2 \\ 4 & 0 \end{array}$$

Para o sistema mostrado na figura 6.20-b, as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ serão :

$$[Y_{AA}] = \begin{array}{c|cc} & 3 & 4 \\ \hline 3 & 1,2 & -0,7 \\ 4 & -0,7 & 0,8 \end{array} \qquad [Y_{AB}] = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 3 & -0,7 \\ 4 & 0 \end{array}$$

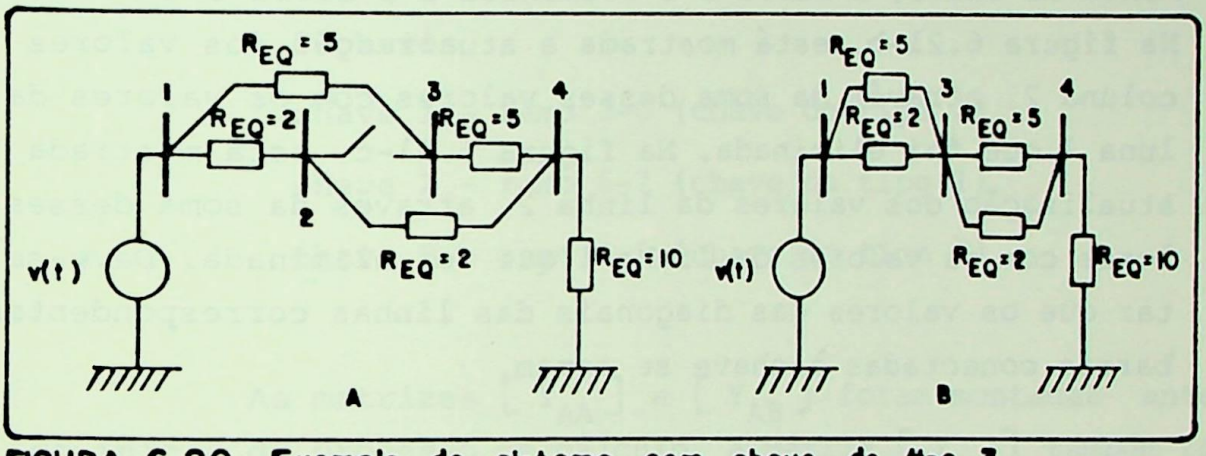


FIGURA 6.20 - Exemplo de sistema com chave do tipo 3

Comparando-se as duas matrizes $[Y_{AA}]$, com chave aberta e fechada, nota-se que, com o fechamento da chave, deve-se eliminar a barra que apresenta o menor número, neste caso, a barra 2, e aos valores da linha e coluna correspondentes à barra que se mantém, neste caso a barra 3, devem ser adicionados os valores da linha e coluna correspondentes à barra a ser eliminada (barra 2).

Comparando-se as duas matrizes $[Y_{AB}]$, com chave aberta e fechada, nota-se que, com o fechamento da chave, de-

ve-se eliminar a linha correspondente à barra de menor número, neste caso, a barra 2, e aos valores da linha correspondente à barra que se mantém, neste caso, a barra 3, devem ser adicionados os valores de linha correspondente à barra a ser eliminada (barra 2).

A figura 6.21 apresenta o processo de evolução da alteração da matriz $[Y_{AA}]$, devida ao fechamento de uma chave do tipo 3. Na figura 6.21-a, está apresentada uma matriz para um sistema elétrico genérico, de tal forma que, no fechamento da chave, a barra 1 é eliminada e a barra 2 é mantida. Na figura 6.21-b, está mostrada a atualização dos valores da coluna 2, através da soma desses valores com os valores da coluna 1 que foi eliminada. Na figura 6.21-c, está mostrada a atualização dos valores da linha 2, através da soma desses valores com os valores da linha 1 que foi eliminada. Deve-se notar que os valores das diagonais das linhas correspondentes às barras conectadas à chave se somam.

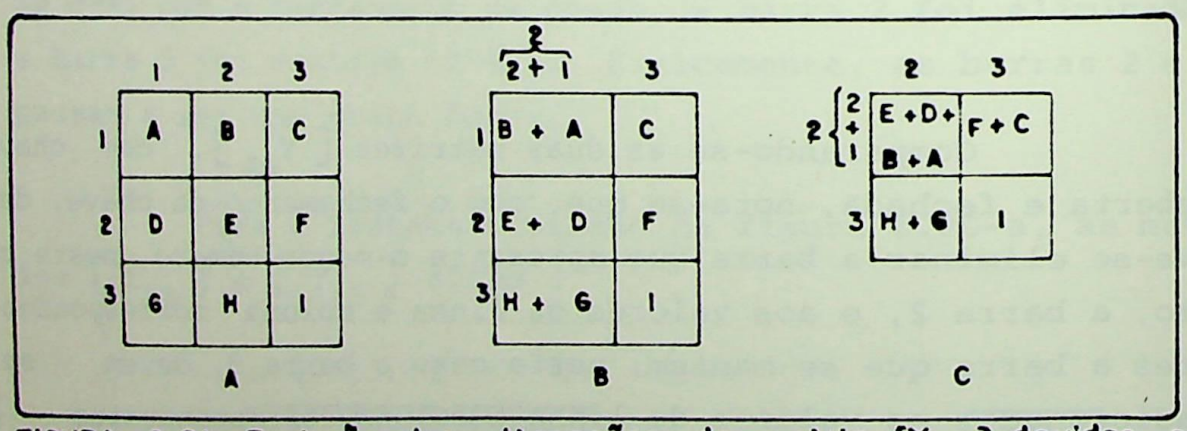


FIGURA 6.21 - Evolução das alterações da matriz $[Y_{AA}]$ devidas ao fechamento de uma chave do tipo 3

6.5.1.4 - EXEMPLO PARA O PROCESSO DE FECHAMENTO DAS CHAVES

Considere-se um sistema elétrico qualquer com as seguintes características :

- 9 barras
- 6 barras (1 a 6) apresentam valor desconhecido de tensão
- 3 barras (7 a 9) estão conectadas às fontes de tensão
- 3 chaves

  chave 1 - ramo 3-0 (chave do tipo 2)

  chave 2 - ramo 6-7 (chave do tipo 1)

  chave 3 - ramo 4-5 (chave do tipo 3)

As matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ foram montadas antes do início do processo de cálculo. A matriz $[Y_{AA}]$ também foi fatorada, obtendo-se a tabela de fatores e a matriz reduzida. Deve-se observar que para a montagem da matriz $[Y_{AA}]$ considerou-se que todas as chaves estavam abertas. A tabela de fatores, a matriz reduzida e a matriz $[Y_{AB}]$ estão mostradas a seguir :

- tabela de fatores

	1	2	3	4	5	6
1	10,0	15,0	11,0	12,0	13,0	14,0
2		20,0	16,0	17,0	18,0	19,0

(6.2)

- matriz reduzida

	3	4	5	6
3	9,82	1,11	1,47	1,48
4	2,22	5,47	3,33	4,44
5	5,98	5,55	3,75	5,99
6	3,11	6,66	3,12	4,98

(6.3)

- matriz $[Y_{AB}]$

	7	8	9
1	2,45	1,23	4,56
2	7,89	3,21	3,48
3	0,0	0,0	0,0
4	0,0	0,0	0,0
5	0,0	0,0	0,0
6	0,0	0,0	0,0

(6.4)

A seguir será mostrado o processo de fechamento para as três chaves, de acordo com as regras que foram apresentadas no item anterior.

A - Fechamento da chave 1 - ramo 3-0 (chave do tipo 2)

Para a tabela de fatores, basta eliminar a coluna correspondente à barra 3 :

	1	2	4	5	6
1	10,0	15,0	12,0	13,0	14,0
2		20,0	17,0	18,0	19,0

(6.5)

Para a matriz reduzida, basta eliminar a linha e a coluna correspondentes à barra 3 :

	4	5	6
4	5,47	3,33	4,44
5	5,55	3,75	5,99
6	6,66	3,12	4,98

(6.6)

Para a matriz $[\ Y_{AB}\ ]$, basta eliminar a linha correspondente à barra 3 :

	7	8	9
1	2,45	1,23	4,56
2	7,89	3,21	3,48
4	0,0	0,0	0,0
5	0,0	0,0	0,0
6	0,0	0,0	0,0

(6.7)

As matrizes (6.5) a (6.7) apresentam a estrutura do sistema, considerando-se a chave 1 fechada e as chaves 2 e 3 abertas.

B - Fechamento da chave 2 - ramo 6-7 (chave do tipo 1)

Para a tabela de fatores, basta eliminar a coluna correspondente à barra com valor desconhecido de tensão (barra 6) :

	1	2	4	5
1	10,0	15,0	12,0	13,0
2		20,0	17,0	18,0

(6.8)

Para a matriz reduzida, basta eliminar a linha e a coluna correspondentes à barra 6 :

	4	5
4	5,47	3,33
5	5,55	3,75

(6.9)

Para a matriz $[Y_{AB}]$, basta eliminar a linha correspondente à barra 6 :

	7	8	9
1	2,45	1,23	4,56
2	7,89	3,21	3,48
4	0,0	0,0	0,0
5	0,0	0,0	0,0

(6.10)

Analisando-se a tabela de fatores original (equação 6.2) e a matriz reduzida original (equação 6.3), nota-se que a barra 6 está ligada às barras 1, 2, 3, 4 e 5. Portanto, com a eliminação da barra 6, devida ao fechamento da chave, a barra 7 passará a ficar ligada com as barras que anteriormente eram ligadas à barra 6. Dessa forma, na matriz $[Y_{AB}]$ deverão aparecer essas novas ligações. Como as barras 1 e 2 já estão ligadas à barra 7 (equação 6.10) bastará adicionar a essa posição (7-1 e 7-2) os valores de admitâncias dos ramos 6-1 e 6-2. As barras 4 e 5 não estavam ligadas à barra 7 bastará, então, incluir as admitâncias dos ramos 6-4 e 6-5 nas po-

sições (7-4 e 7-5) correspondentes da matriz $[\ Y_{AB}\ ]$. Para a barra 3, não é necessária essa alteração, visto que essa barra já foi eliminada devido ao fechamento da chave 1. Como neste exemplo conhecem-se apenas os valores dos elementos das matrizes, que estão modificados devido ao processo de fatoração, exceção feita a matriz $[\ Y_{AB}\ ]$, será considerado o valor y como sendo a admitância dos ramos que estavam ligados à barra 6 (6-1, 6-2, 6-3, 6-4 e 6-5). Portanto, a matriz $[\ Y_{AB}\ ]$ resultante será :

	7	8	9
1	2,45 + y	1,23	4,56
2	7,89 + y	3,21	3,48
4	y	0,0	0,0
5	y	0,0	0,0

(6.11)

As matrizes (6.8), (6.9) e (6.11) apresentam a estrutura do sistema, considerando-se as chaves 1 e 2 fechadas, enquanto que a chave 3 permanece aberta.

C - Fechamento da chave 3 - ramo 4-5(chave do tipo 3)

Como esta chave é do tipo 3, uma das barras deverá ser eliminada e a outra deverá ser mantida. Considerando se que a numeração original das barras seja a mesma adotada neste exemplo, a barra 4 deverá ser eliminada e a barra 5 deverá ser mantida.

Na tabela de fatores, deve-se eliminar a coluna 4, e atualizar os valores da coluna 5 através da soma com os valores da coluna 4, o que resultará :

	1	2	4 + 5 → 5
1	10,0	15,0	25,0
2		20,0	35,0

(6.12)

Para a matriz reduzida, deve-se eliminar a linha e a coluna correspondentes à barra 4 e atualizar a linha e a coluna correspondentes à barra 5, através da soma com os valores da linha e coluna correspondentes à barra 4, o que resultará :

	4 + 5 → 5
4	5,47 + 3,33
5	5,55 + 3,75

(6.13)

	4 + 5 → 5
4 + 5 { 5	18,10

(6.14)

Para a matriz $[Y_{AB}]$, basta eliminar a linha correspondente à barra 4 e atualizar os valores da linha correspondente à barra 5, através da soma com os valores da linha correspondente à barra 4, o que resultará :

	7	8	9
1	2,45 + y	1,23	4,56
2	7,89 + y	3,21	3,48
5	2y	0,0	0,0

(6.15)

As matrizes mostradas nas equações (6.12),(6.14) e (6.15) correspondem às matrizes resultantes do fechamento das três chaves. Nota-se que, durante todo o processo de alteração das matrizes, na tabela de fatores, as colunas que correspondem às barras que não estão conectadas às chaves (barras 1 e 2) não sofreram quaisquer alterações. A partir deste estágio ou de qualquer outro anterior, onde todas as alterações para um determinado fechamento de chave tenham sido realizados, pode-se completar o processo de fatoração na matriz reduzida, obtendo-se a tabela de fatores completa. Sempre que houver uma nova alteração do estado de uma chave, deve-se recorrer a última versão da matriz reduzida e da tabela de fatores, executar as alterações e completar o processo de fatoração.

Quanto ao exemplo numérico, deve-se observar que todas as matrizes são cheias, enquanto que na realidade elas não são tão cheias devido à esparsidade, e também pelo fato de que a matriz reduzida é simétrica, o que não acontece na equação (6.3). Foram escolhidas estas matrizes com estes valores simplesmente com o objetivo de mostrar as operações que são necessárias quando do fechamento de uma chave.

6.5.2 - PROCESSO DE ABERTURA DAS CHAVES

Quando da abertura de uma chave, as linhas e colunas correspondentes às barras que foram eliminadas quando do fechamento da chave, deverão ser novamente incluídas nas estruturas matriciais da tabela de fatores,

da matriz reduzida e da matriz $[Y_{AB}]$. Dessa forma, deve-se montar as linhas e/ou colunas novamente, com todos os seus valores, eliminando-se, no entanto, os valores que estejam em linhas e/ou colunas que tenham sido eliminadas devido ao fechamento de outras chaves. Para tanto, deve-se observar, que é necessário armazenar os valores originais das estruturas matriciais, que correspondem aos valores obtidos antes do "loop" de integração, situação esta na qual se considera que todas as chaves estão abertas, e portanto, existe uma linha e uma coluna correspondentes a cada uma das barras do sistema.

Em termos computacionais o processo de abertura pode ser tratado de duas formas diferentes :

- o processo de abertura é desenvolvido de forma inversa ao processo de fechamento;

- a cada abertura de chave repete-se todo o processo de fechamento, considerando-se que todas as outras chaves do sistema mantiveram o mesmo estado, abertas ou fechadas.

O primeiro caso corresponderia a desenvolver, a cada abertura, o inverso de todas as operações que foram desenvolvidas quando do fechamento (item 6.5.1). Porém, aparecem certos casos particulares para os quais o processo de abertura não é exatamente o inverso do processo de fechamento. Entre tais casos particulares pode-se citar a abertura de uma chave quando ainda existe uma chave do tipo 3 que permanece fechada. Neste caso, a linha e coluna a serem incluídas poderão apresentar valores nas posições referentes a linha/coluna que se manteve devido ao fechamento dessa outra cha-

ve. Dessa forma, o valor a ser incluído não corresponderá ao valor das estruturas matriciais originais , mas deverá considerar o fato de que esta outra chave ainda está fechada. Este aspecto torna o algoritmo computacional mais complexo.

O segundo caso corresponde a executar novamente o processo de fechamento para as outras chaves que ainda permanecem fechadas. Para exemplificar este caso considere-se o mesmo exemplo apresentado para o processo de fechamento (item 6.5.1.4). As matrizes das equações (6.12), (6.14) e (6.15) consideram que as três chaves estão fechadas. Suponha-se que a chave 3 seja aberta . Ao invés de partir dessas três equações e considerar a inclusão da linha e coluna 4, correspondentes à barra 4 que foi eliminada no fechamento, considera-se, a partir das estruturas matriciais originais, equações (6.2), (6.3) e (6.4), o fechamento das chaves 1 e 2. Obtêm-se dessa forma, as equações (6.8), (6.9) e (6.11), que consideram as chaves 1 e 2 fechadas e a chave 3 aberta.

Nota-se que o segundo caso é mais simples, e além disso permite que o mesmo conjunto de instruções computacionais poderá ser utilizado tanto pelo processo de abertura como pelo processo de fechamento. Neste trabalho, para o processo de abertura adotou-se o segundo caso.

6.5.3 - ALTERAÇÕES NA EQUAÇÃO DE SOLUÇÃO GERAL

A equação (4.21) constitui a equação de solução geral utilizada para o cálculo das tensões de barra. Quando em um sistema elétrico existem chaves, a alteração do estado de uma dessas chaves levará a alterações nos elementos dessa equação.

As alterações necessárias para as matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, quando do fechamento ou abertura de uma chave, foram apresentadas nos itens anteriores.

Para o vetor $[e_B]$ não ocorrem alterações, visto que este contém apenas as barras conectadas às fontes de tensão e estas, quando conectadas a alguma chave, se mantêm quando do fechamento da chave (tipo 1).

Para os outros vetores da equação (4.21), $[e_A]$, $[i_A]$ e $[I_A]$, ocorrerão alterações sempre que houver a abertura ou o fechamento de alguma chave. Essas alterações serão descritas a seguir para cada um desses vetores.

6.5.3.1 - ALTERAÇÕES NO VETOR $[e_A]$

O vetor $[e_A]$ contém os valores de tensão que são calculados a cada intervalo de tempo dentro do "loop" de integração.

Quando no sistema considerado todas as chaves estão abertas, o processo de cálculo das tensões é o que está apresentado no capítulo 4, pois, neste caso, as duas barras terminais do ramo com chave ainda existem.

Quando a chave se fecha, uma das barras é eliminada e a tensão na barra que se mantém será função do tipo de chave.

Deve-se observar que a eliminação da barra, quando do fechamento de uma chave, simplesmente caracteriza um artifício do algorítmo computacional. Fisicamente, as barras terminais das chaves correspondem,por exemplo, aos pólos de um disjuntor. Quando o disjuntor está aberto, existe um valor de tensão para cada um dos pólos. Quando o disjuntor se fecha, a tensão que aparece nos dois pólos se diferencia apenas pela queda de tensão interna no meio dielétrico entre os dois pólos. Se o disjuntor for considerado ideal, ou seja, resistência interna nula, a tensão que aparece nos dois pólos após o fechamento será a mesma.

Neste trabalho, consideram-se apenas chaves ideais, portanto a tensão que aparece nas duas barras após o fechamento será a mesma. Porém, devido ao artifício utilizado para o algorítmo computacional, uma das barras é eliminada no fechamento, e o processo de cálculo determina de maneira direta o valor de tensão na barra que se manteve. Após o cálculo de todos os valores de tensão em todas as barras, inclusive nas que se mantiveram devido aos fechamentos das chaves, determinam-se os valores de tensão nas barras que foram eliminadas devido aos fechamentos, de acordo com o tipo de chave (figura 6.17), igualando-se o valor da tensão que foi definido para a barra que se manteve no fechamento.

Para cada um dos tipos de chaves, o valor de tensão na barra que foi eliminada, devido ao fechamento da chave, é definido da seguinte maneira :

- chave do tipo 1 - para este tipo, quando a chave se fecha, a barra com valor desconhecido de tensão é eliminada e a barra com valor conhecido de tensão, que está conectada a uma fonte de tensão, é mantida. O valor da tensão na barra que foi eliminada será o mesmo da fonte de tensão que está na barra que se manteve, como está mostrado na fi

gura 6.22-a.

- chave do tipo 2 - para este tipo, a barra com valor desconhecido de tensão é eliminada no fechamento, sendo que a outra barra, como representa a terra, não é considerada e apresenta valor nulo de tensão. Portanto, após o fechamento da chave, para a barra com valor desconhecido de tensão assume-se valor igual a zero, como mostrado na figura 6.22-b.

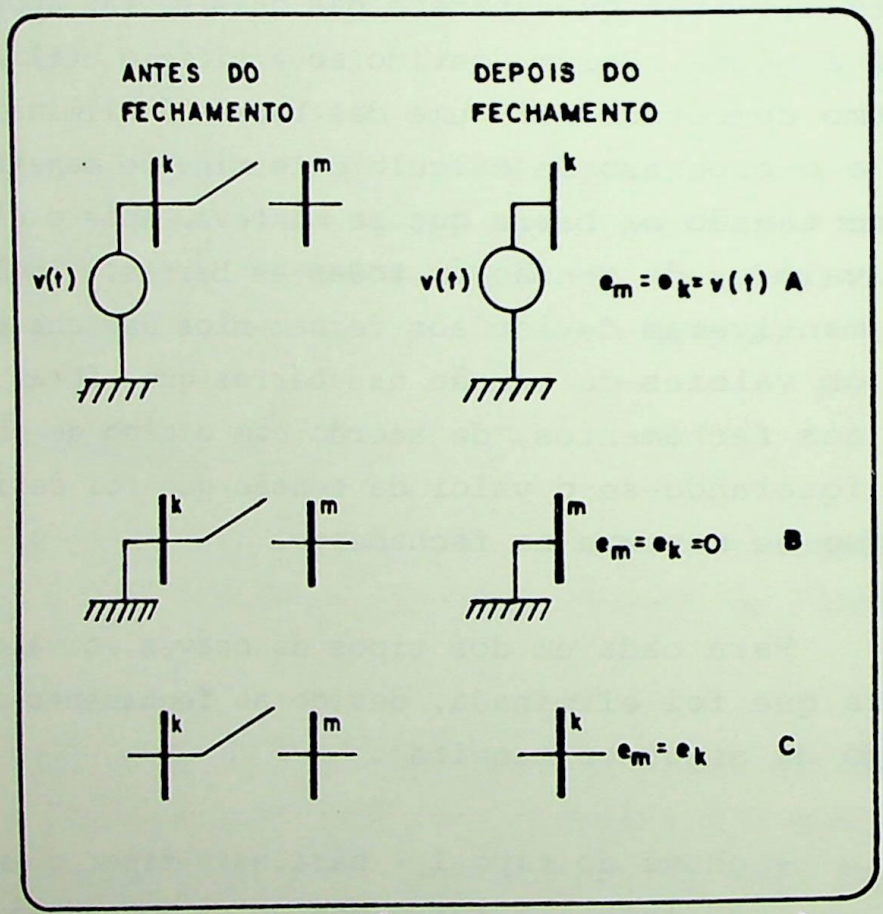


FIGURA 6.22 - Alterações no vetor $[e_A]$, A-)chave do tipo 1, B-)chave do tipo 2, C-)chave do tipo 3

- chave do tipo 3 - para este tipo, as duas barras apresentam valor desconhecido de tensão, e uma delas é eliminada no fechamento. Para a barra que se manteve (k), o valor de tensão é determinado durante o processo de cálculo. Como a chave é considerada ideal, assume-se para a barra que foi eliminada (m) o mesmo valor de tensão que foi calculado para a barra k, como mostrado na figura 6.22-c.

6.5.3.2 - ALTERAÇÕES NO VETOR $[\, i_A \,]$

Para o vetor $[\, i_A \,]$, deve-se observar, com o fechamento de alguma chave, o que ocorre com as fontes de corrente que estão conectadas às barras que são eliminadas. As alterações, nesse caso, serão também feitas em função do tipo de chave.

- chave do tipo 1 - como está mostrado na figura 6.23-a, com o fechamento da chave a barra com valor desconhecido de tensão, a qual está conectada à fonte de corrente é eliminada. Neste caso, a fonte de corrente passa a ficar conectada à mesma barra da fonte de tensão. Como isso não é possível, como foi mostrado no item 6.3, a fonte de tensão se sobrepõe à fonte de corrente e esta é eliminada. Consequentemente, deve-se eliminar a posição correspondente à barra que está conectada a fonte de corrente, no vetor $[\, i_A \,]$.

- chave do tipo 2 - para este tipo, quando a chave se fecha, como está mostrado na figura 6.23-b, a barra com valor desconhecido de tensão, que está conectada a fonte de corrente, passa a ficar

conectada à terra. Portanto, como não existe a posição correspondente à terra, basta eliminar no vetor $[\, i_A \,]$ a posição correspondente à barra com valor desconhecido de tensão.

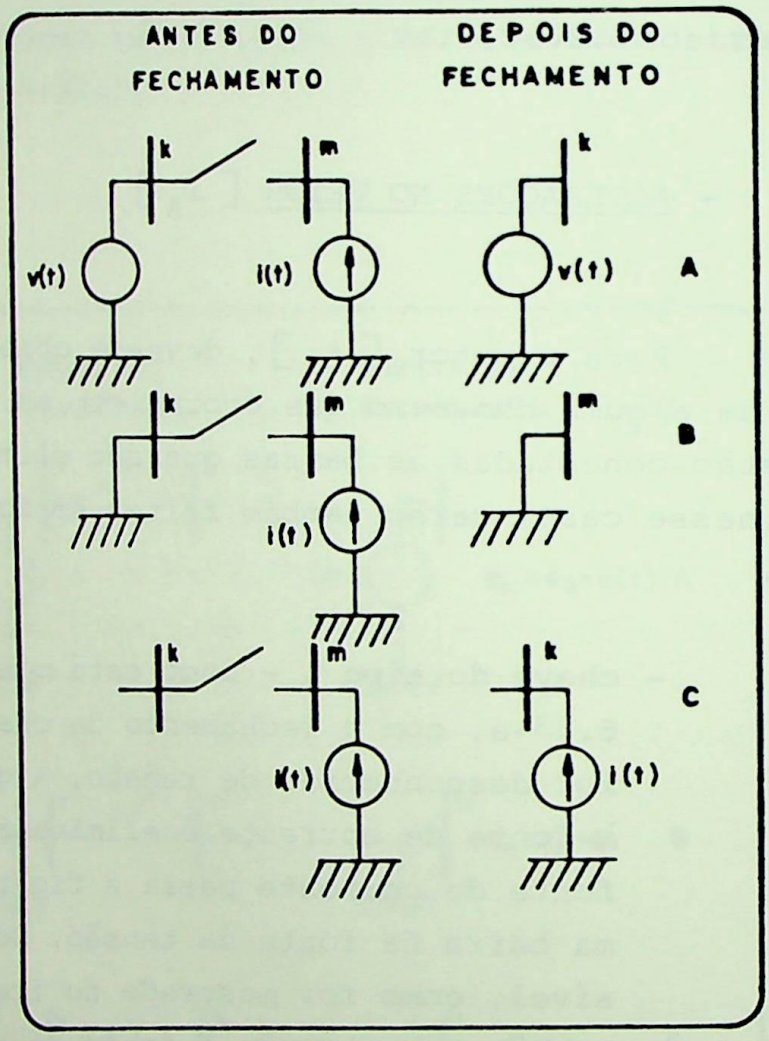


FIGURA 6.23- Alterações no vetor $[i_A]$, A-)chave do tipo 1, B-)chave do tipo 2, C-)chave do tipo 3

- chave do tipo 3 - para este tipo,como mostrado na figura 6.23-c, quando do fechamento uma das barras é eliminada (m) e a outra é mantida (k). Caso exista alguma fonte de corrente na barra que será eliminada (m), como na figura 6.23-c, com o fechamento da chave deve-se considerar a fonte de corrente injetando na barra que será mantida (k). Em termos do vetor $[\, i_A \,]$, deve-se somar a posição correspondente à barra que será eliminada (m) com a posição correspondente à barra que será mantida (k), o que equivale a atualização da posição correspondente à barra que será mantida (k). Posteriormente, deve-se eliminar no vetor $[\, i_A \,]$ a posição correspondente à barra que será eliminada (m). Na atualização, deve-se somar os valores das posições correspondentes à barra que será eliminada com aqueles correspondentes à barra que será mantida, pelo fato de que, na barra que será mantida (k) poderão existir outras fontes de corrente conectadas. Caso existam fontes de correntes conectadas apenas à barra que será mantida (k) , não é necessário nenhuma atualização de valores , e apenas elimina-se no vetor $[\, i_A \,]$, a posição correspondente à barra que será eliminada (m).

6.5.3.3 - ALTERAÇÕES NO VETOR $[\, I_A \,]$

O vetor $[\, I_A \,]$ contém as informações das contribuições das fontes de corrente de história passada para cada uma das barras com valor desconhecido de tensão. Quando existem chaves no sistema considerado, a alteração do estado dessas chaves leva também a alterações nesse vetor. Essas alterações também são função do tipo de chave.

- chave do tipo 1 - quando ocorre o fechamento da chave, a barra conectada à fonte de tensão se mantém, portanto todas as fontes de corrente de história passada, conectadas à barra com valor desconhecido de tensão, passam a ficar conectadas à barra com fonte de tensão. Como as fontes de tensão se sobrepõem às fontes de corrente, essas serão eliminadas, bastanto, para isso, eliminar no vetor $[I_A]$ a posição correspondente à barra com valor desconhecido de tensão.

- chave do tipo 2 - para este tipo, quando a chave se fecha, as fontes de corrente que estavam conectadas à barra com valor desconhecido de tensão passam a ficar conectadas diretamente à terra, não influenciando, portanto, no sistema. Neste caso, também, basta eliminar no vetor $[I_A]$, a posição correspondente à barra com valor desconhecido de tensão.

- chave do tipo 3 - para este tipo quando há o fechamento da chave, as contribuições das fontes de corrente de história passada que estavam na barra que foi eliminada deverão ser consideradas na barra que se manteve. Em termos do vetor $[I_A]$ isso é feito atualizando-se os valores correspondentes à posição da barra que se manteve, somando-se com os valores correspondentes à barra que foi eliminada. Posteriormente, elimina-se no vetor $[I_A]$ a posição correspondente à barra que foi eliminada.

6.5.4 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS PARTICULARES DOS MODELOS DE CHAVES

Para os modelos de chaves existem alguns aspectos computacionais particulares que devem ser considerados, entre os quais destacam-se os cálculos dos valores de correntes e de tensões nas chaves. Estes cálculos são importantes e envolvem algumas particularidades, pois deles depende o processo de abertura e fechamento das chaves. Estes dois casos serão considerados a seguir, separadamente.

6.5.4.1 - CÁLCULO DOS VALORES DE CORRENTES NAS CHAVES

Os valores de correntes nas chaves são importantes, pois deles depende todo o processo de abertura, independentemente do modelo de chave considerado.

O cálculo da corrente é feito de maneira diferente para cada tipo de chave.

- chave do tipo 1 - na figura 6.24-a, está mostrada uma chave deste tipo, indicando-se os ramos conectados à barra com valor desconhecido de tensão. Para o valor de corrente na chave, tem-se :

$$i_{ch} = i_1 + i_2 + \ldots + i_n \qquad (6.16)$$

onde os valores 1, 2 ...,n correspondem aos ramos conectados à barra com valor desconhecido de tensão.

- chave do tipo 2 - na figura 6.24-b, está mostrada uma chave deste tipo, apresentando-se os ramos que es

tão conectados à barra com valor desconhecido de tensão. Para o valor de corrente na chave, tem-se :

$$i_{ch} = i_1 + i_2 + \ldots + i_n \qquad (6.17)$$

onde os valores 1, 2, ..., n correspondem aos ramos conectados à barra com valor desconhecido de tensão.

- chave do tipo 3 - na figura 6.24-c está mostrada uma chave deste tipo, apresentando os ramos conectados às duas barras com valores desconhecidos de tensão. Para o valor de corrente na chave, tem-se :

$$-i_{1k} - i_{2k} - \ldots - i_{nk} = i_{ch} = i_{1m} + i_{2m} + \ldots + i_{nm} \qquad (6.18)$$

onde os valores 1k, 2k, ..., nk correspondem aos ramos conectados à barra k e os valores 1m, 2m, ..., nm correspondem aos ramos conectados à barra m.

Computacionalmente criou-se um vetor que contém a indicação dos ramos que estão conectados a cada uma das chaves.

- para as chaves do tipo 1 e 2, este vetor contém a indicação dos ramos conectados à barra com valor desconhecido de tensão (barra m - figura 6.24-a e b);

- para as chaves do tipo 3, como as duas barras a-

presentam valor desconhecido de tensão, é indiferente o lado da chave que se considere para o cálculo da corrente, equação (6.18). Optou-se, então, pelos ramos conectados à barra que se mantém durante o fechamento da chave.

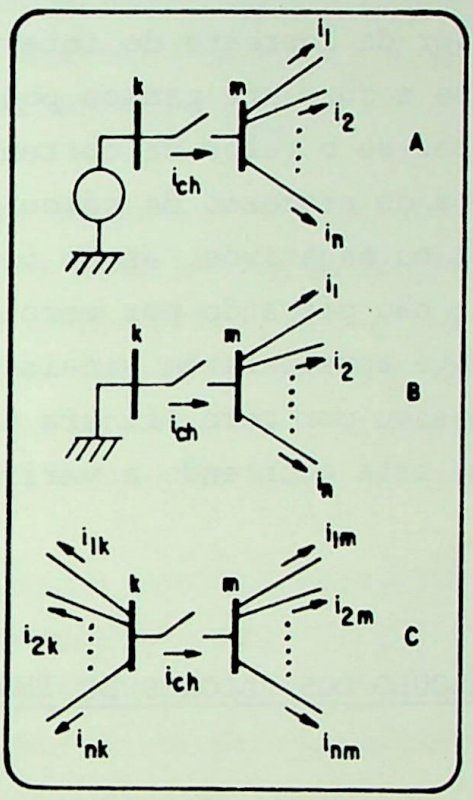


FIGURA 6.24 - Cálculo de corrente nas chaves, A-)tipo 1, B-)tipo 2, C-) tipo 3

Durante o "loop" de integração, após os cálculos de tensão, são calculados os valores de corrente em cada um dos ramos do sistema considerado. Após obtidos esses valores, calcula-se as correntes nas chaves através da soma das correntes dos ramos indicados no vetor mencionado. Esses cálculos são realizados ao final de cada intervalo do processo de integra-

ção numérica.

No início de cada intervalo do processo de cálculo, é verificado se alguma chave deve ser aberta. Para que a chave seja aberta, a corrente nesse intervalo deve ser igual a zero ou passar por zero, ou atingir um valor dentro da faixa definida pela margem de corrente. Para a primeira e a terceira situações, basta verificar o valor de corrente calculado no intervalo de tempo anterior. Para a segunda situação, apenas com o valor da corrente do intervalo anterior não é possível definir se a corrente passou por zero. É necessário, portanto, conhecer-se o valor da corrente na chave nos dois últimos intervalos do processo de cálculo. Se os dois valores forem positivos ou negativos, estes indicam que a corrente manteve o sinal, não passando por zero. Se os dois últimos valores de corrente apresentarem sinais opostos, isto indica que a corrente passou por zero (figura 6.2-b); portanto, nesse intervalo, onde está ocorrendo a verificação, a chave deverá ser aberta.

6.5.4.2 - CÁLCULO DOS VALORES DE TENSÕES NAS CHAVES

Quando as chaves estão fechadas, o valor de tensão sobre elas é zero, pelo fato de que, neste trabalho, os modelos de chaves são considerados ideais.

Quando as chaves estão abertas, a tensão é calculada através da diferença dos valores de tensão das barras terminais, que poderão ser barras conectadas a fontes de tensão, barras conectadas à terra ou barras com valores desconhecidos de tensão.

Os valores de tensão para as chaves abertas são importantes para as chaves controladas por tensão, cujo fecha-

mento depende deste valor atingir o valor da tensão de descarga definido para a chave. Portanto, quando a tensão na chave atingir o valor da tensão de descarga, a chave será fechada.

Porém, o processo numérico utilizado neste trabalho pode apresentar certas oscilações numéricas (figura 6.25), que correspondem às oscilações em torno do valor correto de tensão. Nota-se, nessa figura, que o valor da tensão na chave apresenta uma oscilação em torno do valor correto, que corresponde ao valor médio das oscilações. O valor correto da tensão na chave está indicado como V_{ch} na figura 6.25.

Nota-se que, se para a verificação do fechamento da chave fossem tomados os valores com oscilação numérica, já no primeiro intervalo do processo, $t = \Delta t$, a tensão na chave estaria acima do valor da tensão de descarga definida para a chave, enquanto que, na verdade, o valor correto (V_{ch}) está bem abaixo do valor da tensão de descarga.

Para contornar o problema da oscilação numérica, adota-se como valor de tensão na chave, para efeito de comparação com o valor de tensão de descarga, uma média dos dois últimos valores calculados de tensão, valor este definido como V_{cheque} :

$$V_{cheque} = \frac{V(t - \Delta t) + V(t - 2\Delta t)}{2} \qquad (6.19)$$

$$V_{chave} = V_{cheque} \qquad (6.20)$$

Portanto, considera-se como valor de tensão na chave (6.20) o valor definido pela equação (6.19).

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

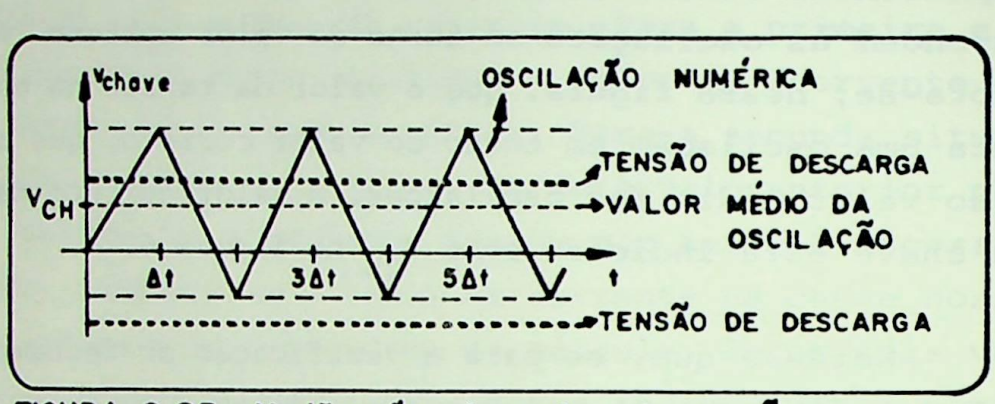


FIGURA 6.25 - Verificação do valor de tensão na chave

Para os casos onde ocorrem as oscilações numéricas, é possível, portanto, obter-se o valor correto de tensão na chave. Para os casos onde não ocorrem oscilações numéricas, este processo não implicará em erros, visto que o valor da tensão caracteriza uma função praticamente contínua, sem muitas variações bruscas, principalmente se o intervalo de tempo for suficientemente pequeno. Maiores detalhes sobre o tamanho do intervalo de tempo serão apresentados no capítulo 8.

O apêndice F descreve as causas e as soluções para o problema das oscilações numéricas.

6.5.5 - FLUXOGRAMA PARA O PROCESSO DE CÁLCULO DOS MODELOS DE CHAVES

Devido às várias alterações necessárias para os modelos de chaves, o fluxograma apresentado na figura 4.10 sofre algumas alterações e acréscimos e fica como mostrado na figura 6.26. As fases definidas no fluxograma para os modelos de chaves estão descritas neste capítulo a partir do item 6.5.

Basicamente, deve-se verificar a cada intervalo de tempo, dentro do "loop" de integração, se houve alguma alteração de estado de alguma chave. Se alguma chave for fechada o processamento será desenvolvido como foi apresentado no item 6.5.1. Se alguma chave for aberta, o processamento será desenvolvido como foi apresentado no item 6.5.2. Após as alterações da matriz reduzida, da tabela de fatores e da matriz $[\,Y_{AB}\,]$, a matriz reduzida deverá ser refatorada de maneira a se obter a tabela de fatores completa, com a qual serão calculados os valores de tensão. Após esse cálculo, determinam-se os valores de tensão nas chaves, e, após o cálculo das correntes de ramos calculam-se as correntes nas chaves.

6.6 - EXEMPLO DE CÁLCULO PARA OS MODELOS DE CHAVES

A figura 6.27-a mostra o circuito para o qual será apresentado o desenvolvimento do processo de cálculo para o modelo de chave controlada por tempo. Os parâmetros do circuito apresentado na figura 6.27-a, são :

$$R_1 = R_2 = 5{,}0\ \Omega$$

$$C = 1\ \mu F = 10^{-6} F$$

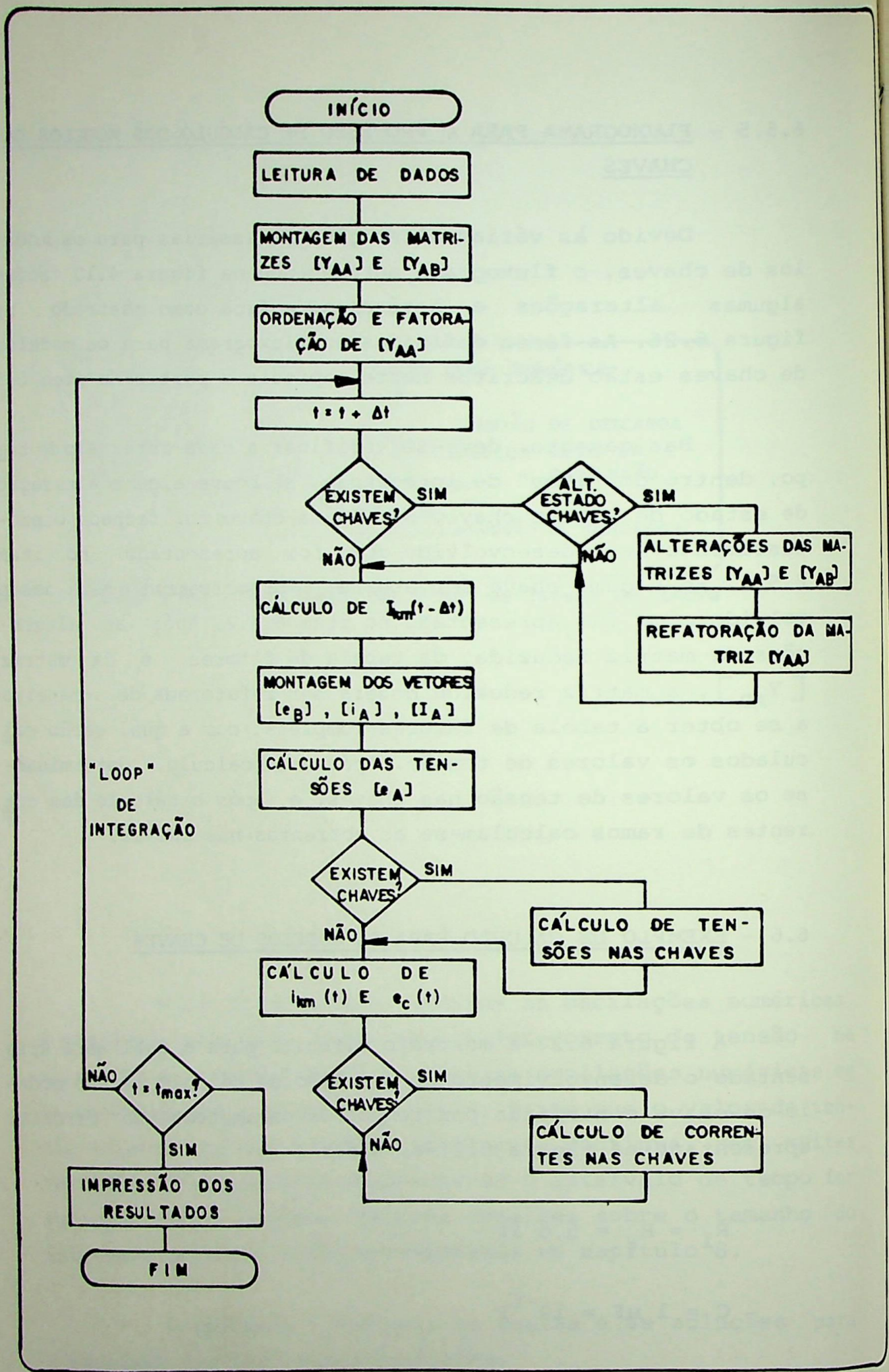


FIGURA 6.26- Fluxograma que considera o modelo de chave.

$L = 0,01\ mH = 10^{-5} H$

$t_{aber} = -1$

$t_{fech} = 0,75\ 10^{-5}$ } chave controlada por tempo

$v(t) = 1 \cos (2\pi ft + 0^{o})$

$f = 60\ Hz$

Considerando-se o intervalo de integração, $\Delta t = 10^{-5}$, para a indutância e a capacitância correspondem, respectivamente, as seguintes resistências equivalentes, R_{EQ} (figuras 2.5 e 2.3), devidas à aplicação do método trapezoidal :

$$R_{EQ} = \frac{2.10^{-5}}{10^{-5}} = 2,0$$

$$R_{EQ} = \frac{10^{-5}}{2.10^{-6}} = 5,0$$

A seguir, estão descritas cada uma das fases do processo de cálculo.

A - Ajustes dos tempos de abertura e fechamento das chaves

Como o tempo de abertura está especificado com um valor negativo, indica que a chave está aberta antes de t = 0. Esta informação seria importante para o cálculo das condições iniciais, porém, neste trabalho, estes cálculos não são realizados, e as condições iniciais são consideradas nulas.

O tempo de fechamento é ajustado para o múltiplo inteiro de Δt mais próximo do valor especificado. Neste caso, este tempo é ajustado para $t_{fech} = \Delta t$, portanto, a chave será fechada logo no primeiro intervalo de tempo.

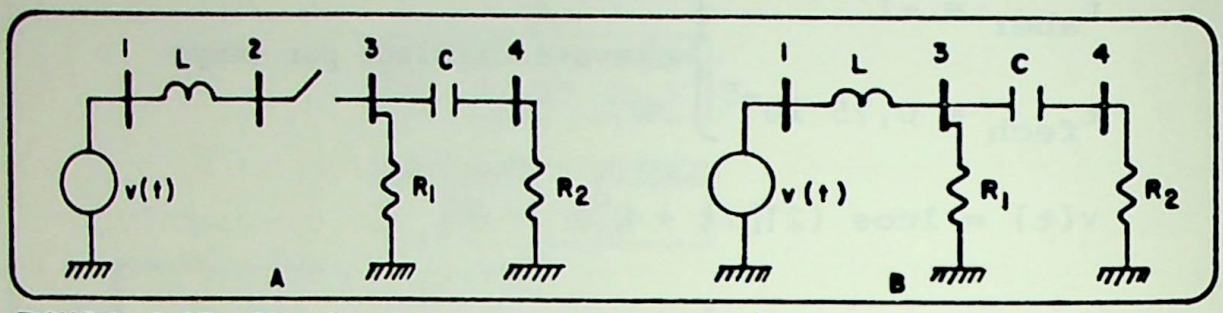


FIGURA 6.27 - Circuito para exemplo de cálculo, A-) chave aberta, B-) chave fechada

B - Montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$

Para a montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, deve se observar que as barras conectadas às chaves (barras 2 e 3) devem estar nas posições inferiores dessas matrizes, e as chaves devem ser consideradas abertas. Para o circuito apresentado na figura 6.27-a, portanto, resulta :

$$[Y_{AA}] = \begin{array}{c|ccc} & 4 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 0,7 & 0,0 & -0,2 \\ 2 & 0,0 & 0,5 & 0,0 \\ 3 & -0,2 & 0,0 & 0,7 \end{array}$$

(4: sem chaves; 2 e 3: com chaves)

$$[Y_{AB}] = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 4 & 0,0 \\ 2 & -0,5 \\ 3 & 0,0 \end{array}$$

C - Ordenação e Fatoração de $[Y_{AA}]$

Será adotada a mesma ordenação para a qual foi construída a matriz $[Y_{AA}]$, ou seja, barras 4, 2 e 3.

A fatoração, como mostrado no apêndice D, será realizada apenas para a linha e coluna 4, que correspondem a única barra que não está conectada à chave. A matriz modificada fica como está indicado a seguir, sendo que a matriz reduzida está indicada pelo traço mais forte.

$[Y_{AA\ modif}]$ =

	4	2	3
4	1,0	0,0	-0,285714285
2		0,5	0,0
3		0,0	0,642857142

matriz reduzida

Para a tabela de fatores parcial, tem-se :

4	2	3	
1,428571428	0,0	-0,285714285	- linha 4 (primeira linha) da matriz

Deve-se notar, neste caso, que a linha e a coluna 4, que correspondem à barra 4, constituem a primeira linha e a primeira coluna da tabela de fatores.

D - Preparação de dados de chaves

Deve-se montar o vetor que indica os ramos conectados à chave, que servirá para o cálculo da corrente na chave. Neste caso, o valor da corrente na chave será a soma das correntes nos ramos 3-4 e 3-0.

E - Processamento do primeiro intervalo de integração ($t = \Delta t = 10^{-5}$)

- Verificação da existência de abertura ou fechamento de chaves

Como t_{fech} foi ajustado para Δt, a chave deverá ser fechada no primeiro intervalo de integração. Como a barra 2 apresenta número menor que a barra 3, esta será eliminada,e com a chave fechada o sistema fica como mostrado na figura 6.27-b.

O fechamento da chave levará a alterações na matriz reduzida e na tabela de fatores parcial. Em termos matriciais, o fechamento da chave corresponde a somar os valores da linha e coluna 2 aos valores da linha e coluna 3, e, após, eliminar a linha e coluna 2. Portanto, para a matriz reduzida, resulta :

1,142857142	matriz reduzida

Para a tabela de fatores, o processo é o mesmo, e portanto, resultará :

4	3	
1,428571428	-0,285714285	linha 4 (primeira linha da matriz)

A partir da matriz reduzida, deve-se completar a fatoração, que resultará na seguinte tabela de fatores :

4	3	
1,428571428	-0,285714285	linha 4 (primeira linha da matriz)
	0,875000000	linha 3 (segunda linha da matriz)

As matrizes fatores, de acordo com o apêndice D , são :

$$[U_1]^t = \begin{bmatrix} 1 & \\ 0,285714285 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[U_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0,285714285 \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1,428571428 & \\ & 0,875000000 \end{bmatrix}$$

Observa-se que, de acordo com o apêndice E, a equação para o cálculo das tensões será :

$$[U_1]\,[D]\,[U_1]^t\,[I] = [e_A] \qquad (6.21)$$

A matriz $[Y_{AB}]$ também se altera da mesma maneira, portanto, somando-se as linhas 2 e 3, resulta :

$$[Y_{AB}] = \begin{array}{c} \\ 4 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \begin{bmatrix} 0,0 \\ -0,5 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Cálculo dos valores de história passada

Como as condições iniciais são nulas, todos os valores de história passada são nulos para o primeiro intervalo de integração.

- Montagem dos vetores de fontes de corrente, $[i_A]$, e vetores de fontes de tensão, $[e_B]$

Como não existem fontes de corrente, para o vetor $[i_A]$, tem-se :

$$[i_A] = \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

Para a fonte de tensão na barra 1, de acordo com a equação (3.1), tem-se :

$$v(t) = 1,0 \cos (2\pi\ 60.10^{-5}) = 0,999992989$$

Portanto, para o vetor $[e_B]$, tem-se :

$$[e_B] = \begin{bmatrix} 0,999992989 \end{bmatrix}$$

- Montagem do vetor $[I_A]$

Como os valores de história passada, $I_{km}(t - \Delta t)$, são nulos, para o vetor $[I_A]$, tem-se :

$$[I_A] = \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

- Montagem do vetor de termos independentes

Da equação (4.29), resulta :

$$[I] = \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,000000000 \\ 0,499996494 \end{bmatrix}$$

- Cálculo das tensões

Usando a equação (6.21), obtém-se :

$$[e_A] = \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,124999123 \\ 0,437496932 \end{bmatrix} \begin{matrix} e_4(t) \\ e_3(t) \end{matrix}$$

Como a chave está fechada, as tensões nas barras 2 e 3 são iguais :

$$e_2(t) = e_3(t) = 0,437496932$$

- Cálculo das correntes de ramos

Para os ramos R, L e C serão usadas, respectivamente, as equações (2.1), (2.5) e (2.13). Para cada um dos ramos da figura 6.27-b, tem-se :

$$\text{ramo com L} - i_{13}(t) = \frac{1}{2}\left[0,999992989 - 0,437496932\right] + 0,0$$

$$i_{13}(t) = 0,281248028$$

$$\text{ramo com } R_1 - i_{30}(t) = \frac{1}{2}\left[0,437496932\right]$$

$$i_{30}(t) = 0,218748466$$

$$\text{ramo com C} - i_{34}(t) = \frac{1}{5}\left[0,437496932 - 0,124999123\right] + 0,0$$

$$i_{34}(t) = 0,062499561$$

$$\text{ramo com } R_2 - i_{40}(t) = \frac{1}{2}\left[0,124999123\right]$$

$$i_{40}(t) = 0,062499561$$

As correntes $i_{34}(t)$ e $i_{40}(t)$ são iguais, pelo fato de o circuito ser série.

- Cálculo da corrente na chave

Para o valor de corrente na chave, obtém-se :

$$i_{ch}(t) = i_{34}(t) + i_{30}(t) = 0,281248027$$

A corrente na chave é igual a corrente na indutância L, que está em série com a chave, como pode-se ver pela figura 6.27-a.

F - Processamento do segundo intervalo de integração ($t = 2\Delta t = 2\ 10^{-5}$)

- Verificação da existência de abertura ou fechamento de chave

No instante $t = 2\Delta t$, a chave continua fechada.

- Cálculo dos valores de história passada

Para os ramos L e C, serão utilizadas as equações (2.6) e (2.14), respectivamente. Para os ramos com resistências não se define este valor.

$$\text{ramo com L - } I_{13}(t - \Delta t) = \frac{1}{2}\left[0,999992989 - 0,437496932\right] + 0,281248028$$

$$I_{13}(t - \Delta t) = 0,562496056$$

$$\text{ramo com C - } I_{34}(t - \Delta t) = -\frac{1}{5}\left[0,437496932 - 0,124999123\right] - 0,062499561$$

$$I_{34}(t - \Delta t) = -0,124999123$$

ramo com R_1 - $I_{30}(t - \Delta t) = 0,0$

ramo com R_2 - $I_{40}(t - \Delta t) = 0,0$

- Montagem dos vetores de fontes de corrente, $[i_A]$, e de fontes de tensão, $[e_B]$

Para o vetor de fontes de corrente, como estas não existem, tem-se :

$$[\, i_A \,] = \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

Para a fonte de tensão na barra 1, tem-se :

$$v(t) = 1\cos(2\pi.60.2.10^{-5}) = 0,99997158$$

O vetor de fontes de tensão, $[\, e_B \,]$, será :

$$[\, e_B \,] = \boxed{0,99997158}$$

- Montagem do vetor $[\, I_A \,]$

Para o vetor $[\, I_A \,]$, tem-se :

$$[\, I_A \,] = \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -I_{34} \\ -I_{13}+I_{34} \end{bmatrix}$$

Substituindo-se valores, resulta :

$$[\, I_A \,] = \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} +\ 0,124999123 \\ -\ 0,687495179 \end{bmatrix}$$

- Montagem do vetor de termos independentes

Da equação (4.29), resulta :

$$[I] = \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0,124999123 \\ 1,187480969 \end{bmatrix}$$

- Cálculo das tensões

Utilizando-se a equação (6.21), obtém-se :

$$[e_A] = \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,109371557 \\ 1,007796067 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} e_4(t) \\ e_3(t) \end{matrix}$$

Como a chave está fechada, a tensão na barra 2 é igual à da barra 3, ou seja :

$$e_2(t) = e_3(t) = 1,007796067$$

- Cálculo das correntes de ramos

ramo com L - $i_{13}(t) = \frac{1}{2} [0,99997158 - 1,007796067] +$

$$+ 0,562496056$$

$$i_{13}(t) = 0,558583812$$

ramo com R_1 - $i_{30}(t) = \frac{1}{2} [1,007796067]$

$$i_{30}(t) = 0,503898033 \quad .$$

ramo com C - $i_{34}(t) = \frac{1}{5} [1,007796067 - 0,109371557] -$

$$- 0,124999123$$

$$i_{34}(t) = 0,054685779$$

ramo com R_2 - $i_{40}(t) = \frac{1}{2}$ [0,109371557]

$$i_{40}(t) = 0{,}054685778$$

As correntes i_{34} e i_{40} são iguais, pelo fato de o circuito ser série.

- Cálculo da corrente na chave

$$i_{ch}(t) = i_{30}(t) + i_{34}(t) = 0{,}558583812$$

A corrente na chave é igual à corrente na indutância L, que está em série com a chave, como mostrado na figura 6.27-a.

O processo de cálculo continua dessa maneira até que se atinja o tempo máximo de simulação, t_{max}.

6.7 - CONCLUSÕES

Os modelos de chaves apresentados neste trabalho consideram o fechamento da chave no instante de tempo mais próximo, após ter decorrido o $t_{fech\ ajust}$, e a abertura no instante de tempo mais próximo após a passagem da corrente por zero. Para o fechamento, o processo adotado não é crítico, já que para um disjuntor, por exemplo, existem vários tempos envolvidos no processo de fechamento : atuação da proteção, envio de sinal para o disjuntor, acionamento do mecanismo de fechamento e fechamento dos pólos. Portanto, se o intervalo de tempo (Δt) adotado for pequeno, a suposição feita no processo de fechamento é satisfatória. Para a abertura, o mais correto seria que a chave fosse aberta no instante da passagem da corrente por zero. Em termos computacionais isso poderia ser realizado a-

através de uma reinicialização da contagem do tempo, como mostrado na figura 6.28. Dessa forma, no instante em que a corrente passasse por zero, a chave seria aberta, e a contagem de tempo se reiniciaria a partir desse instante. Logicamente, o tempo total deve ser atualizado para se levar em consideração essa reinicialização. A referência [21] menciona uma outra referência (Kulicke), que utiliza o processo de reinicialização de variáveis.

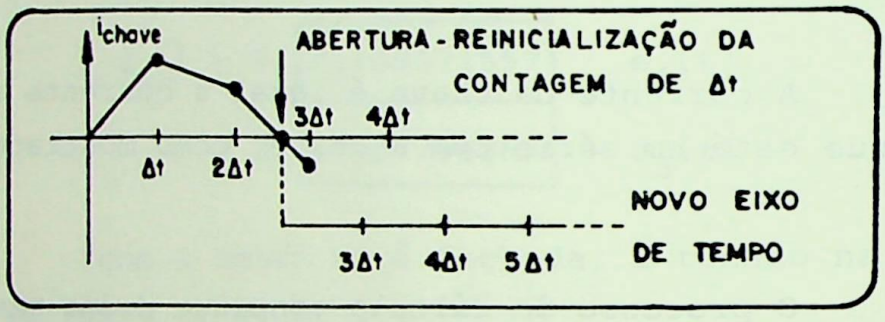


FIGURA 6.28 - Processo de reinicialização da contagem de tempo

O programa que foi desenvolvido permite a inclusão de outras características dos modelos de chaves aqui considerados. Entre tais características pode-se, por exemplo, citar :

- o arco elétrico em disjuntores e todas as suas implicações, como as reignições que podem ocorrer, as características do dielétrico, o material dos contatos, a velocidade de fechamento dos pólos, etc.
- a taxa de variação da tensão e o espaçamento entre as hastes de diferentes tipos de centelhadores.

Para inclusão dessas e de outras características, e também de outros modelos, basta desenvolver subrotinas específicas para executar tais funções, e proceder a pequenas alterações na estrutura computacional já montada.

CAPÍTULO 7 - MODELAGEM DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

7.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, serão apresentados os modelos de linhas de transmissão. A metodologia utilizada se baseia no método das características de Bergeron [9, 14], que é a mesma metodologia empregada no programa EMTP [18, 20].

Inicialmente, será desenvolvida uma modelagem através de parâmetros concentrados, baseando-se no modelo de ramos acoplados apresentado no capítulo 5. Posteriormente, será desenvolvida uma modelagem a parâmetros distribuídos, considerando-se linhas de transmissão transpostas e não transpostas. Nesta etapa, para os sistemas com n fases, será considerada a aplicação da teoria modal, que está descrita no Apêndice G. Após o desenvolvimento dos modelos matemáticos, será analisada, em detalhes, toda a parte computacional envolvida com a modelagem, principalmente as alterações que se processam na equação geral de solução (4.21). Ao final do capítulo, é apresentado um exemplo numérico que descreve todas as etapas do processo de cálculo para os modelos de linhas de transmissão.

7.2 - MODELAGEM DE LINHAS DE TRANSMISSÃO ATRAVÉS DE PARÂMETROS CONCENTRADOS

Para estudos de regime permanente, as linhas de transmissão são representadas através de parâmetros concentrados, como o modelo π (figura 7.1-a), que é utilizado nos programas de fluxo de potência. Esta representação é adequada, visto que, nessa condição, uma linha de transmissão pode ser representada através de seu equivalente monofásico, pois supõe-se uma operação equilibrada do sistema elétrico.

Para análise em regime transitório, porém, é necessário considerar as influências que uma fase provoca nas outras, já que, nessa condição, podem ocorrer situações de operação desequilibrada. Dessa forma, o modelo apresentado na figura 7.1-a não será adequado para representar a linha de transmissão. Assim sendo, para considerar o efeito de acoplamento entre as fases, considera-se o modelo apresentado esquematicamente na figura 7.1-b.

Observa-se, pela figura 7.1-b, que os valores escalares R, L e C/2 da figura 7.1-a foram substituídos por grandezas matriciais $[R]$, $[L]$ e $[C/2]$, de tal forma que os elementos fora da diagonal nessas matrizes representam exatamente o efeito de acoplamento que existe entre as diversas fases de uma linha de transmissão. Este modelo caracteriza um ramo acoplado como o descrito no item 5.2 do capítulo 5. Através das equações apresentadas nesse item, nota-se, para este modelo, que o valor do tempo (τ) que uma onda de tensão ou corrente, que sai do terminal emissor, demora para alcançar o terminal receptor, será sempre igual a Δt. Portanto, se a linha de transmissão apresentar um valor real do tempo de viagem da onda de tensão ou corrente diferente de Δt, o que normalmente pode acontecer, a resposta no extremo receptor estará incorreta. Uma forma de contornar esse problema é considerar a cone-

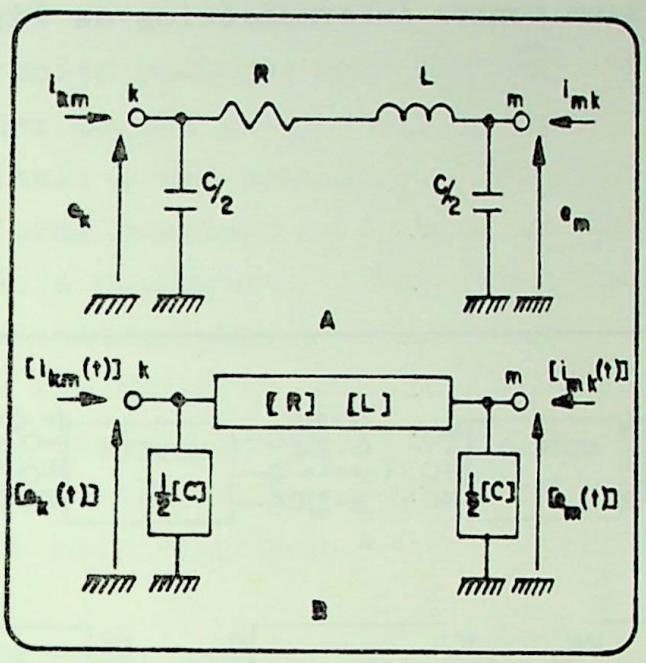


FIGURA 7.1 - Modelo π a parâmetros concentrados utilizado para análise das linhas de transmissão em regime permanente (A) e em regime transitório (B)

xão de vários π em cascata (figura 7.2-a), de maneira a produzir, para o modelo de ramo acoplado, um valor de tempo de viagem da onda quase igual ao valor real. A conexão de vários π permite ainda a representação de linhas de transmissão transpostas, como mostrado na figura 7.2-b, de forma que cada π possa representar um determinado trecho da transposição. Nota-se, portanto, que o modelo π é mais adequado para representar linhas não transpostas, ou então trechos de transposição de linhas transpostas. Para essas, ainda é possível considerar-

se o efeito da transposição, representando-o por um elemento adequado, como mostrado na figura 7.2-b. Este último aspecto permitirá, também, por exemplo, a representação de compensação de reativos em pontos intermediários da linha de transmissão.

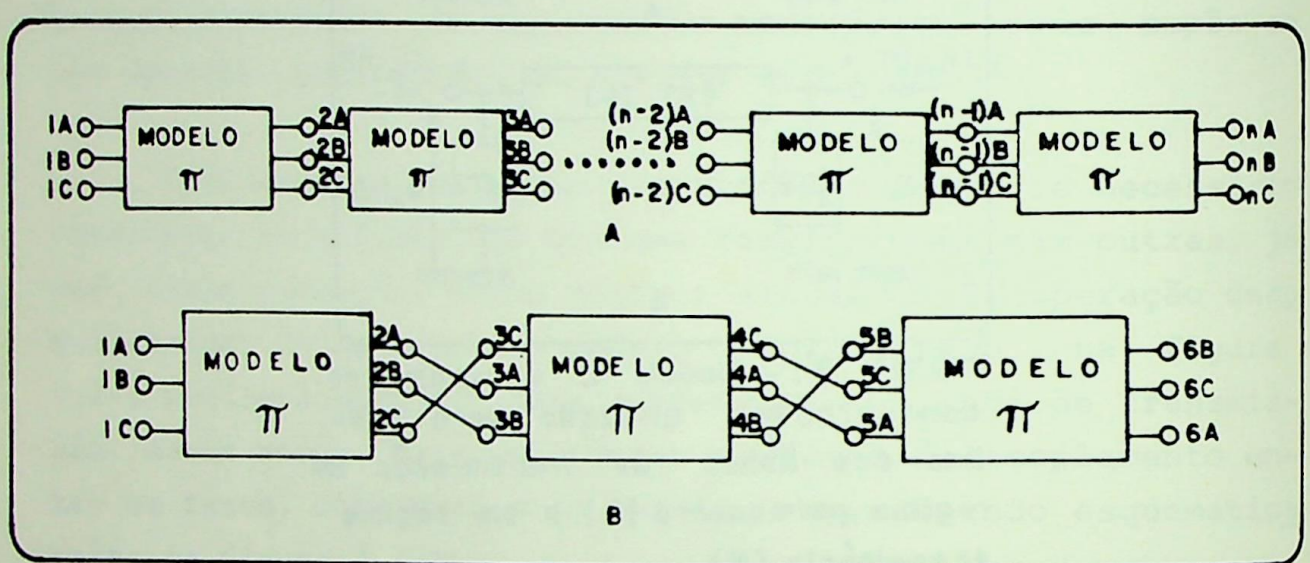


FIGURA 7.2 - A-) modelo π em cascata para uma linha de transmissão não transposta, B-) modelo π em cascata representando um ciclo completo de transposição para uma linha de transmissão transposta

Este modelo é mais indicado para ser usado na representação de linhas curtas. As linhas longas, transpostas ou não transpostas, também podem ser representadas, porém, o número de π em cascata a ser usado é basicamente uma função do comprimento da linha, bem como depende da experiência do usuário. Convém ressaltar que, como se trata de uma representação a parâmetros concentrados, quanto maior o número de π utilizados, mais exata será a representação.

7.3 - MODELAGEM DE LINHAS DE TRANSMISSÃO ATRAVÉS DE PARÂMETROS DISTRIBUÍDOS - SISTEMAS MONOFÁSICOS

Um circuito pode ser dito a parâmetros distribuídos quando a sua menor porção produz uma alteração de tensão no sentido longitudinal, e uma alteração de corrente no sentido transversal, conforme mostrado na figura 7.3. Na prática, todos os circuitos são a parâmetros distribuídos, porém, podem ser feitas certas simplificações e considerá-los a parâmetros concentrados, como foi feito no item 7.2. Ressalta-se, no entanto, que a representação a parâmetros distribuídos é mais exata e produz melhores resultados, embora apresente um equacionamento matemático mais complexo.

Considere-se, por exemplo, o trecho infinitesimal de uma linha de transmissão apresentado na figura 7.3, onde os valores R, L, G e C, correspondem, respectivamente, aos valores de resistência, indutância, condutância e capacitância por unidade de comprimento.

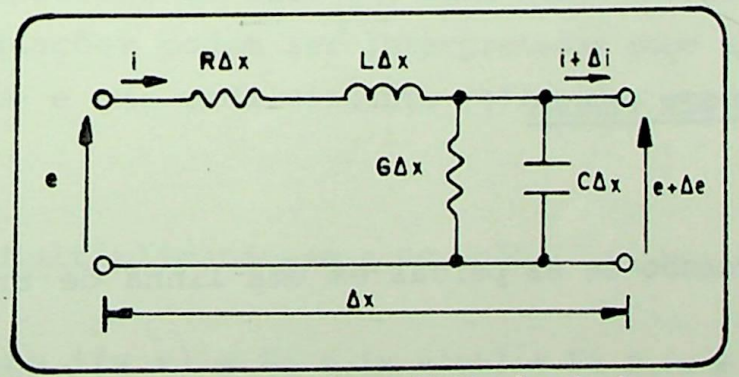


FIGURA 7.3 - Trecho infinitesimal de uma linha de transmissão

As grandezas instantâneas na figura 7.3, corrente i e tensão v, são dependentes do tempo e do comprimento, ou seja:

$$i = i(t,x) \tag{7.1}$$

$$e = e(t,x) \tag{7.2}$$

Baseando-se na referência [28], e na figura 7.3, obtêm-se as seguintes equações para a linha de transmissão :

$$\frac{\partial e}{\partial x} = Ri - L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = Ge - C\frac{\partial e}{\partial t} \tag{7.4}$$

As equações (7.3) e (7.4) são denominadas de equações fundamentais de propagação das linhas de transmissão, e serão consideradas, a seguir, para o estudo das linhas de transmissão representadas a parâmetros distribuídos.

Serão considerados dois modelos básicos a parâmetros distribuídos : sem perdas e com perdas (ou com resistências concentradas).

7.3.1 - MODELO SEM PERDAS

Desprezando-se as perdas em uma linha de transmissão, tem-se :

$$R = 0 \tag{7.5}$$

$$G = 0 \tag{7.6}$$

Substituindo-se esses valores nas equações fundamentais de propagação, (7.3) e (7.4), resultará :

$$\frac{\partial e}{\partial x} = - L \frac{\partial i}{\partial t} \qquad (7.7)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = - C \frac{\partial e}{\partial t} \qquad (7.8)$$

Para estas equações, a solução dada por D'Alambert [9, 14] tem a seguinte forma geral :

$$i(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \qquad (7.9)$$

$$e(x,t) = Zo\ f_1(x - vt) - Zo\ f_2(x + vt) \qquad (7.10)$$

$$Zo = \sqrt{L/C} \qquad (7.11)$$

$$v = 1/\sqrt{LC} \qquad (7.12)$$

onde o valor Zo é a impedância de surto da linha de transmissão, e v é a velocidade de propagação da onda de tensão ou de corrente.

As funções f_1 e f_2 são arbitrárias e dependem das condições iniciais do caso que está sendo analisado.Fisicamente, estas equações podem ser interpretadas como uma onda viajante incidente e uma onda viajante refletida, como mostrado na figura 7.4.

Multiplicando-se a equação (7.9) por Zo, obtém-se :

$$Zo\ i(x,t) = Zo\ f_1(x - vt) + Zo\ f_2(x + vt) \qquad (7.13)$$

Somando-se e subtraindo-se as equações (7.10)e(7.13), obtém-se :

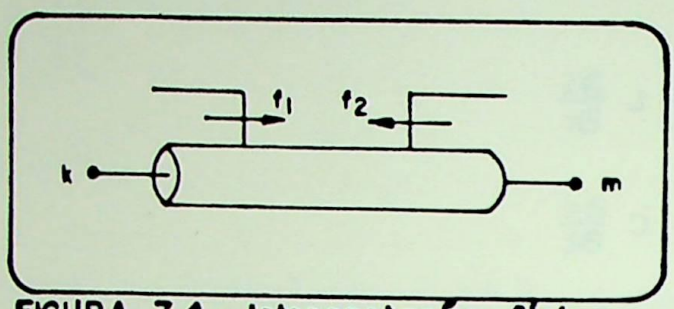


FIGURA 7.4 - Interpretação física das funções f_1 e f_2

$$e(x,t) + Zo\ i(x,t) = 2\ Zo\ f_1(x - vt) \qquad (7.14)$$

$$e(x,t) - Zo\ i(x,t) = -2\ Zo\ f_2(x + vt) \qquad (7.15)$$

A expressão (e + Zoi) na equação (7.14) é constante enquanto (x - vt) for constante. Da mesma forma, na equação (7.15), a expressão (e - Zoi) é constante enquanto (x + vt) for constante. As expressões (x - vt) e (x + vt), constantes, são chamadas características da equação diferencial.

O significado da equação (7.14), para (x - vt) constante, pode ser interpretado da seguinte maneira : suponha-se um observador viajando ao longo da linha na direção positiva de x, com velocidade v. Os termos (x - vt) e consequentemente (e + Zoi) permanecerão constantes. O termo (x - vt) varia com o tempo, porém, como o observador viaja à mesma velocidade constante, v, no mesmo sentido, a sua coordenada relativa será x - vt + vt = x . Se, em cada um desses x, o observador tirasse uma fotografia do perfil de tensões, ter-se-ia um valor constante. De maneira análoga, se o observador viajasse no

sentido contrário, veria o valor (e - Zoi) também constante. Caso houvesse n observadores estacionados ao longo de x, cada um veria um valor diferente de tensão a cada instante.

Conclui-se, então, que o valor de tensão que deixa o nó k é o mesmo valor que chega ao nó m, visto que a linha não apresenta distorção na forma da onda por ser considerada sem perdas.

O tempo de viagem para a onda ir de um extremo a outro da linha é definido por :

$$\tau = \frac{\ell}{v} = \ell \sqrt{LC} \qquad (7.16)$$

onde ℓ é o comprimento da linha.

Portanto, a tensão (e + Zoi) no extremo m, no instante $(t - \tau)$, será a mesma do terminal k no instante (t), ou seja :

$$e_m(t - \tau) + Zoi_{mk}(t - \tau) = e_k(t) + \\ + Zo \left[- i_{km}(t) \right] \qquad (7.17)$$

Analogamente, obtém-se :

$$e_k(t - \tau) + Zoi_{km}(t - \tau) = e_m(t) + \\ + Zo \left[- i_{mk}(t) \right] \qquad (7.18)$$

Das equações (7.17) e (7.18), obtém-se :

$$i_{km}(t) = \frac{1}{Zo} e_k(t) + I_k(t - \tau) \qquad (7.19)$$

$$I_k(t - \tau) = - \frac{1}{Zo} e_m(t - \tau) - i_{mk}(t - \tau) \qquad (7.20)$$

Escola Politécnica de Engenharia
Biblioteca MAUÁ BIM

$$i_{mk}(t) = \frac{1}{Zo}\, e_m(t) + I_m(t - \tau) \qquad (7.21)$$

$$I_m(t - \tau) = -\frac{1}{Zo}\, e_k(t - \tau) - i_{km}(t - \tau) \qquad (7.22)$$

Os valores $I_k(t - \tau)$ e $I_m(t - \tau)$ são conhecidos como fontes equivalentes de corrente, e contêm, no instante t, a história passado do sistema.

As equações (7.19) a (7.22) representam a solução exata das equações das linhas de transmissão sem perdas, e são usadas por Bergeron em seu método gráfico. Esse método é chamado método das características de Bergeron, devido às características da equação diferencial, $(x - vt)$ e $(x + vt)$.

Essas equações constituem o circuito equivalente apresentado na figura 7.5-b, para uma linha de transmissão sem perdas, como a mostrada na figura 7.5-a.

Topologicamente, os terminais k e m não estão conectados, porém os efeitos da reflexão da onda incidente de tensão de um nó ao outro estão contidos nas fontes de corrente $I_k(t - \tau)$ e $I_m(t - \tau)$. Por exemplo, para a tensão no terminal k no instante t, a fonte de corrente $I_k(t - \tau)$ apresenta uma contribuição que corresponde à onda incidente de tensão que saiu do terminal m no instante $t - \tau$, e que no instante t chegou ao terminal k. Trata-se, portanto, da onda de tensão que refletiu no terminal m e atingiu, após ter viajado durante o tempo τ, o terminal k.

A escolha do método das características de Bergeron para descrever o modelo de linhas de transmissão está fundamentada justamente no fato de que este se adapta ao método trapezoidal, que é utilizado para resolver as equações diferenciais dos elementos que são modelados através de parâmetros concentrados (capítulos 2 e 5).

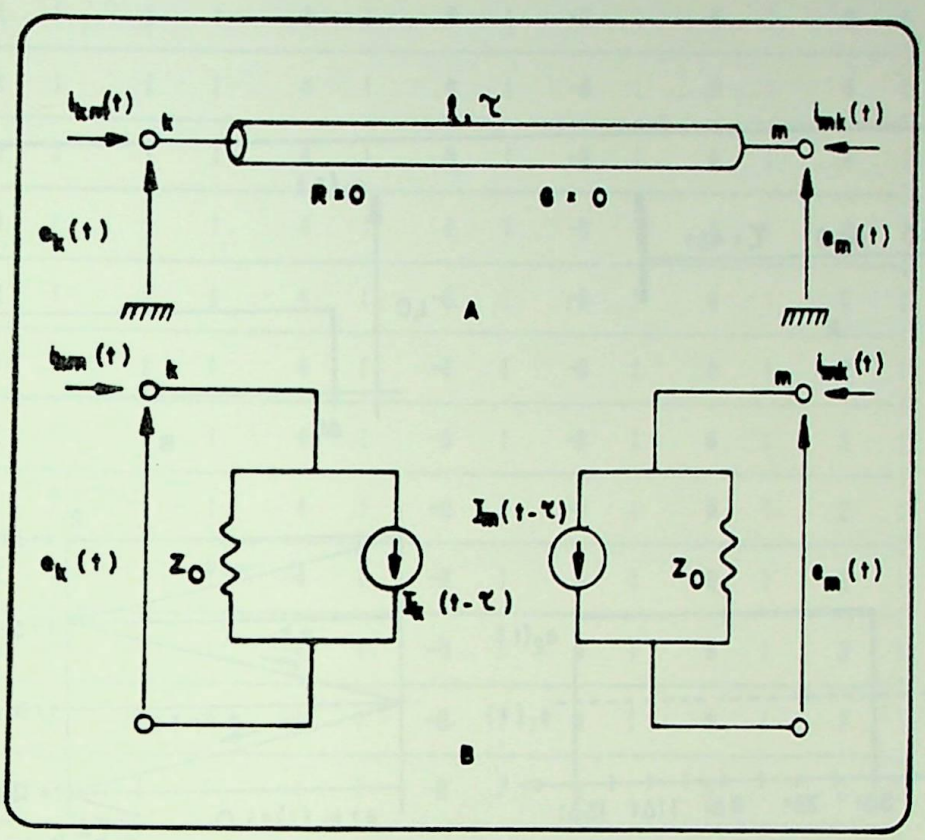


FIGURA 7.5 - A -) linha de transmissão sem perdas, B -) circuito equivalente

Para exemplificar este modelo, será considerado o sistema apresentado na figura 7.6-a. Para efeito de exemplo, considerou-se apenas uma das fases da linha de transmissão apresentada no exemplo do item G.6 do apêndice G, cuja impedância de surto é igual a 250Ω.

Para o tempo de viagem da onda na linha, adotou-se $4\Delta t$. As condições iniciais são nulas. A fonte de tensão está mostrada na figura 7.6-b. Os resultados estão apresentados na tabela 7.1, junto com as equações que foram utilizadas para

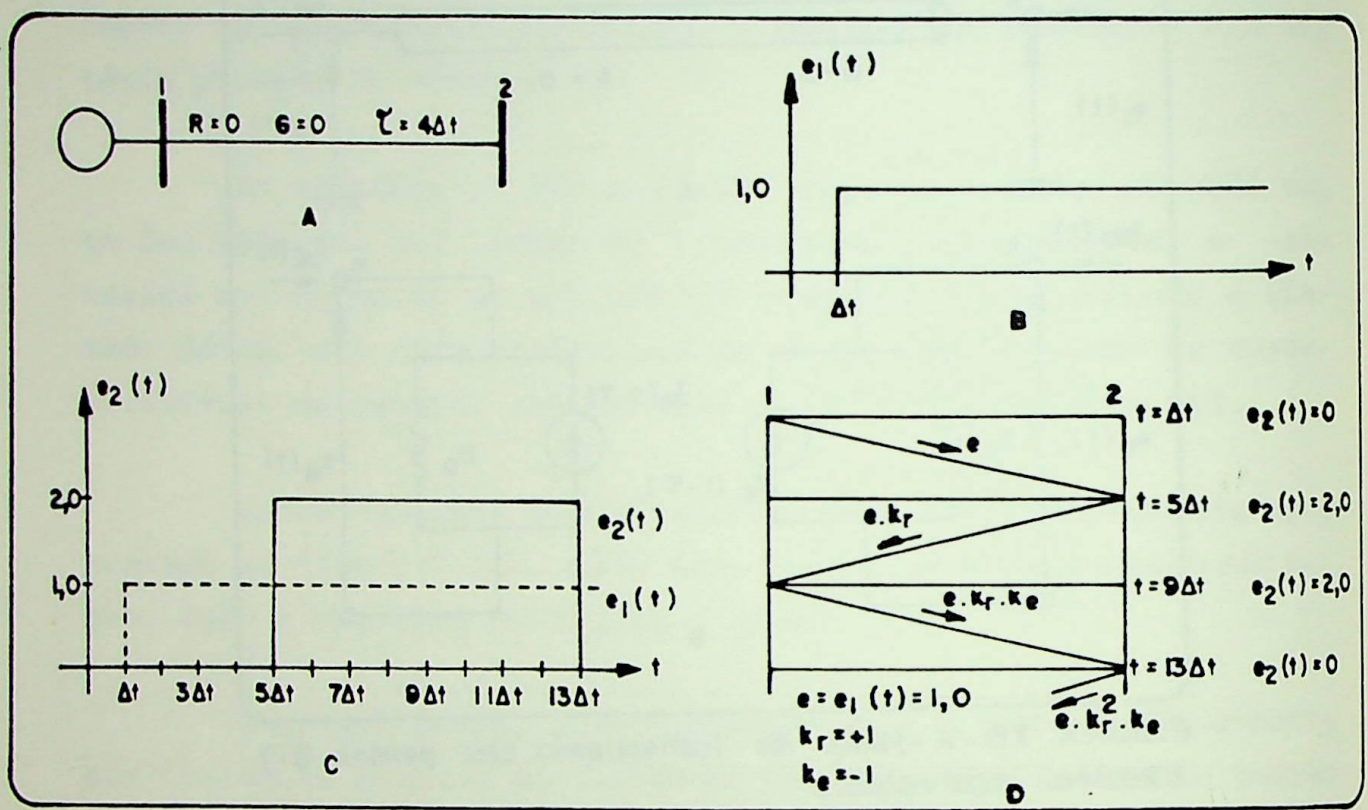


FIGURA 7.6 - A -)linha de transmissão considerada como exemplo para o modelo sem perdas, B-)fonte de tensão - barra 1 , C-)tensão no extremo da linha - barra 2, D-) diagrama de treliços de Bewley

obtenção desses resultados. A figura 7.6-c apresenta o resultado de tensão no extremo da linha, barra 2, em relação ao valor de tensão na barra 1 (fonte de tensão).

TABELA 7.1 - RESULTADOS DO EXEMPLO APRESENTADO NA FIGURA 7.6, CONSIDERANDO O MODELO SEM PERDAS

intervalo	e1(t)	ikm(t)	Ik(t-τ)	Im(t-τ)	imk(t)	e2(t)
Δt	1	4	0	-8	0	0
$2\Delta t$	1	4	0	-8	0	0
$3\Delta t$	1	4	0	-8	0	0
$4\Delta t$	1	4	0	-8	0	0
$5\Delta t$	1	4	-8	-8	0	2
$6\Delta t$	1	4	-8	-8	0	2
$7\Delta t$	1	4	-8	-8	0	2
$8\Delta t$	1	4	-8	-8	0	2
$9\Delta t$	1	-4	-8	0	0	2
$10\Delta t$	1	-4	-8	0	0	2
$11\Delta t$	1	-4	-8	0	0	2
$12\Delta t$	1	-4	-8	0	0	2
$13\Delta t$	1	-4	0	0	0	0
$14\Delta t$	1	-4	0	0	0	0
$15\Delta t$	1	-4	0	0	0	0
$16\Delta t$	1	-4	0	0	0	0
$17\Delta t$	1	4	0	-8	0	0

$$I_k(t - \tau) = - \frac{1}{Zo} \; e_2(t - \tau) \qquad (7.23)$$

$$I_m(t - \tau) = - \frac{1}{Zo} \; e_1(t - \tau) - i_{km}(t - \tau) \qquad (7.24)$$

$$e_m(t) = - Zo \; I_m(t - \tau) \qquad (7.25)$$

$$i_{km}(t) = \frac{1}{Zo} \; e_1(t) + I_k(t - \tau) \qquad (7.26)$$

$$i_{mk}(t) = 0 \qquad (7.27)$$

Pelos resultados, percebe-se que o valor da tensão no terminal receptor dobrou de valor após decorrido o tempo de viagem da onda, $4\Delta t$. Este valor de tensão está correto, visto que a linha de transmissão está aberta no receptor, e nesse caso o valor da tensão pode ser obtido através da teoria das ondas viajantes, ou seja, o valor da tensão no extremo receptor corresponderá à soma das componentes de onda incidente e refletida. Os resultados em termos da teoria das ondas viajantes está apresentado na figura 7.6-d, onde os valores k_e e k_r correspondem aos coeficientes de reflexão de cada um dos extremos da linha.

7.3.2 - MODELO COM RESISTÊNCIAS CONCENTRADAS

O modelo anterior não é muito realista, pois despreza as perdas e a distorção. As referências [9, 13, 14, 18 e 20] mencionam também o modelo sem distorção, que também não considera as perdas, porém, através da introdução de uma constante de atenuação nas equações da linha sem perdas, (7.19) a (7.22), permite que as perdas sejam consideradas de maneira indireta.

Desprezando-se a condutância G, e considerando-se as perdas devidas apenas à resistência série, é possível concentrar resistências no modelo de linha sem perdas, de tal forma que essas resistências produzam as perdas que ocorrem nas linhas de transmissão. Essas resistências podem ser concentradas em vários pontos da linha, dividindo-se o comprimento desta em várias secções. Basicamente, não existem diferenças se forem concentradas resistências em muitos ou em poucos lugares. Resultados semelhantes foram obtidos concentrando-se resistências em 3, 60 e 360 pontos de uma linha de transmissão [14].

O modelo a ser apresentado neste capítulo considera a resistência concentrada em três lugares : R/4 nos extremos e R/2 no meio da linha, como mostrado na figura 7.7-a. Este modelo pode ser considerado tão exato quanto o anterior, visto que R é bem menor que a impedância de surto da linha (Zo).

Para a obtenção das equações deste modelo, inicialmente será considerada a divisão da linha apresentada na figura 7.7-a em dois trechos iguais, como mostrado na figura 7.7-b.

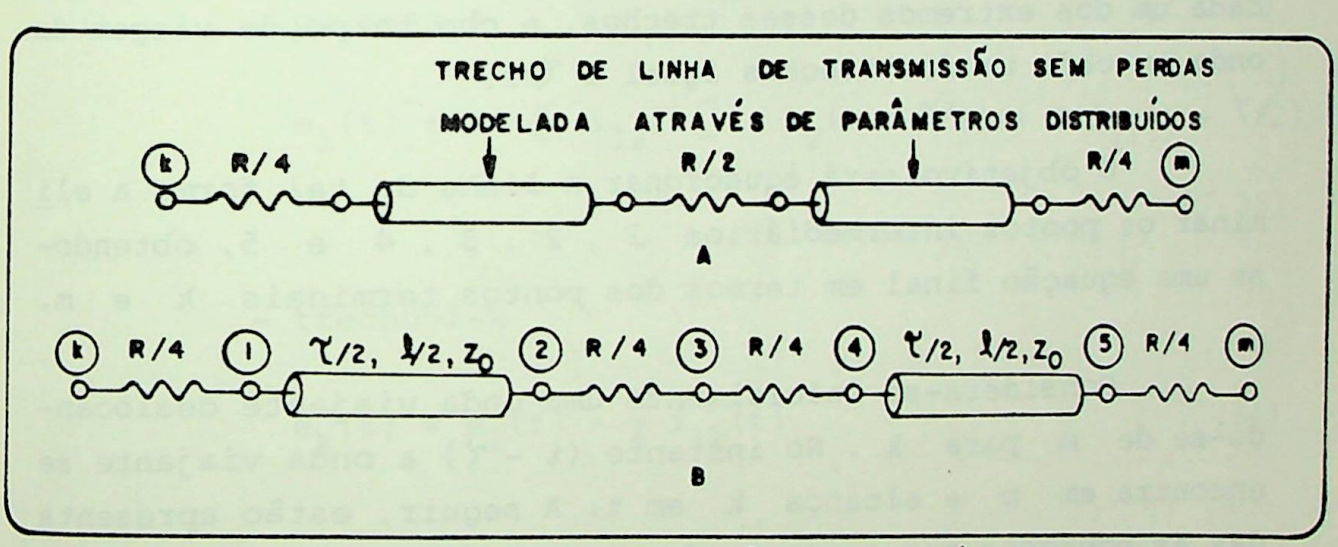


FIGURA 7.7 - Modelo de linha de transmissão com resistências concentradas

Ressalta-se que o valor da resistência concentrada a ser considerada é o valor total da resistência da linha, ou seja :

$$R = R_u \ell \tag{7.28}$$

onde R_u é o valor da resistência por unidade de comprimento, e ℓ é o comprimento da linha. O programa que foi desenvolvido neste trabalho realiza este cálculo, sendo necessário fornecer como dados de entrada, o valor por unidade de comprimento e o comprimento da linha. Todos os outros parâmetros das linhas de transmissão também deverão ser os valores por unidade de comprimento.

Nota-se, na figura 7.7-b, que a linha da figura 7.7-a foi dividida em dois trechos iguais, com R/4 concentrado em cada um dos extremos desses trechos, e com tempo de viagem da onda em cada um dos trechos igual a $\tau/2$.

O objetivo será equacionar a linha de tal forma a eliminar os pontos intermediários 1 , 2 , 3 , 4 e 5, obtendo-se uma equação final em termos dos pontos terminais k e m.

Considera-se inicialmente uma onda viajante deslocando-se de m para k . No instante $(t - \tau)$ a onda viajante se encontra em m e alcança k em t. A seguir, estão apresentadas as equações que correspondem a cada um dos trechos considerados na figura 7.7-b.

- trecho m - 5

$$e_5(t - \tau) = e_m(t - \tau) - \frac{R}{4} i_{m5}(t - \tau) \tag{7.29}$$

- trecho 5-4

A equação para este trecho da linha é obtida de maneira análoga à equação (7.17), ou seja :

$$e_4(t - \tau/2) + Zo\,[-\,i_{45}(t - \tau/2)] = e_5(t - \tau) + Zoi_{54}(t - \tau) \qquad (7.30)$$

- trecho 4-3

$$e_3(t - \tau/2) = e_4(t - \tau/2) - \frac{R}{4}\, i_{43}(t - \tau/2) \qquad (7.31)$$

- trecho 3-2

$$e_2(t - \tau/2) = e_3(t - \tau/2) - \frac{R}{4}\, i_{32}(t - \tau/2) \qquad (7.32)$$

- trecho 2-1

Para este trecho, como se trata de uma linha de transmissão, tem-se a mesma situação do trecho 5-4, ou seja :

$$e_1(t) + Zo\,[-\,i_{12}(t)] = e_2(t - \tau/2) + Zoi_{21}(t - \tau/2) \qquad (7.33)$$

- trecho 1-k

$$e_k(t) = e_1(t) - \frac{R}{4}\, i_{1k}(t) \qquad (7.34)$$

De acordo com a figura 7.7-b, e considerando-se a onda viajante se deslocando de m para k, ainda pode-se escrever:

$$i_{m5}(t - \tau) = i_{54}(t - \tau) = i_{mk}(t - \tau) \qquad (7.35)$$

$$i_{45}(t - \tau/2) = -\,i_{43}(t - \tau/2) = -i_{32}(t - \tau/2) = -\,i_{21}(t - \tau/2) \qquad (7.36)$$

$$i_{12}(t) = -i_{1k}(t) = i_{km}(t) \qquad (7.37)$$

Substituindo-se as equações (7.35) a (7.37), nas equações (7.29) a (7.34), e reescrevendo-se essas últimas, obtém-se :

$$e_5(t - \tau) = e_m(t - \tau) - \frac{R}{4} i_{mk}(t - \tau) \qquad (7.38)$$

$$e_4(t - \tau/2) + Zoi_{32}(t - \tau/2) = e_5(t - \tau/2) + \\ + Zoi_{mk}(t - \tau) \qquad (7.39)$$

$$e_4(t - \tau/2) = e_3(t - \tau/2) + \frac{R}{4} i_{32}(t - \tau/2) \qquad (7.40)$$

$$e_2(t - \tau/2) = e_3(t - \tau/2) - \frac{R}{4} i_{32}(t - \tau/2) \qquad (7.41)$$

$$e_1(t) - Zo\, i_{km}(t) = e_2(t - \tau/2) + Zoi_{32}(t - \tau/2) \qquad (7.42)$$

$$e_1(t) = e_k(t) - \frac{R}{4} i_{km}(t) \qquad (7.43)$$

Substituindo-se (7.38) e (7.40) em (7.39), obtém-se :

$$e_m(t - \tau) + (Zo - \frac{R}{4}) i_{mk}(t - \tau) = e_3(t - \tau/2) + \\ + (Zo + \frac{R}{4}) i_{32}(t - \tau/2) \qquad (7.44)$$

Esta equação corresponde exatamente ao equacionamento do trecho m-3.

Substituindo-se (7.41) e (7.43) em (7.42), obtém-se :

$$e_3(t - \tau/2) + (Zo - \frac{R}{4}) i_{32}(t - \tau/2) = \\ = e_k(t) - (Zo + \frac{R}{4}) i_{km}(t) \qquad (7.45)$$

Esta equação corresponde, portanto, ao equacionamento do trecho entre 3 e k .

Será considerada, agora, uma onda viajante deslocando se de k para m. No instante $(t - \tau)$, a onda viajante se encontra em k, e, no instante t, alcança m. A seguir estão apresentadas as equações que correspondem a cada um dos trechos considerados na figura 7.7-b.

- trecho k-1

$$e_1(t - \tau) = e_k(t - \tau) - \frac{R}{4} i_{k1}(t - \tau) \qquad (7.46)$$

- trecho 1-2

$$e_2(t - \tau/2) + Zo\,[- i_{21}(t - \tau/2)] = e_1(t - \tau) + Zoi_{12}(t - \tau) \qquad (7.47)$$

- trecho 2-3

$$e_3(t - \tau/2) = e_2(t - \tau/2) - \frac{R}{4} i_{23}(t - \tau/2) \qquad (7.48)$$

- trecho 3-4

$$e_4(t - \tau/2) = e_3(t - \tau/2) - \frac{R}{4} i_{34}(t - \tau/2) \qquad (7.49)$$

- trecho 4-5

$$e_5(t) + Zo\,[- i_{54}(t)] = e_4(t - \tau/2) + Zoi_{45}(t - \tau/2) \qquad (7.50)$$

- trecho 5-m

$$e_m(t) = e_5(t) - \frac{R}{4} i_{5m}(t) \qquad (7.51)$$

De acordo com a figura 7.7-b, e considerando-se a onda viajante se deslocando de k para m, ainda pode-se escrever:

$$i_{k1}(t - \tau) = i_{12}(t - \tau) = i_{km}(t - \tau) \qquad (7.52)$$

$$i_{21}(t - \tau/2) = - i_{23}(t - \tau/2) = - i_{34}(t - \tau/2) =$$

$$= - i_{45}(t - \tau/2) = i_{32}(t - \tau/2) \qquad (7.53)$$

$$i_{54}(t) = - i_{5m}(t) = i_{mk}(t) \qquad (7.54)$$

Substituindo-se as equações (7.52) a (7.54) nas equações (7.46) a (7.51), e reescrevendo-se essas últimas, obtém-se :

$$e_1(t - \tau) = e_k(t - \tau) - \frac{R}{4} i_{km}(t - \tau) \qquad (7.55)$$

$$e_2(t - \tau/2) - Zoi_{32}(t - \tau/2) = e_1(t - \tau) +$$

$$+ Zoi_{km}(t - \tau) \qquad (7.56)$$

$$e_2(t - \tau/2) = e_3(t - \tau/2) - \frac{R}{4} i_{32}(t - \tau/2) \qquad (7.57)$$

$$e_4(t - \tau/2) = e_3(t - \tau/2) + \frac{R}{4} i_{32}(t - \tau/2) \qquad (7.58)$$

$$e_5(t) - Zoi_{mk}(t) = e_4(t - \tau/2) - Zoi_{32}(t - \tau/2) \qquad (7.59)$$

$$e_5(t) = e_m(t) - \frac{R}{4} i_{mk}(t) \qquad (7.60)$$

Substituindo-se (7.55) e (7.57) em (7.56), obtém-se :

$$e_k(t - \tau) + (Zo - \frac{R}{4}) i_{km}(t - \tau) = e_3(t - \tau/2) -$$

$$-(Zo + \frac{R}{4}) i_{32}(t - \tau/2) \qquad (7.61)$$

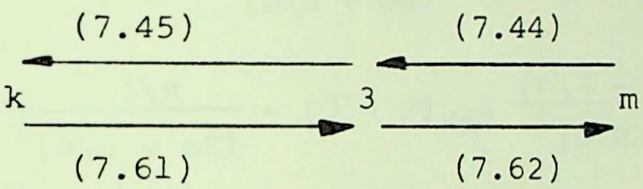
Esta equação corresponde exatamente ao equacionamento do trecho k-3.

Substituindo-se (7.58) e (7.60) em (7.59), obtém-se :

$$e_3(t - \tau/2) - (Zo - \frac{R}{4})\, i_{32}(t - \tau/2) = e_m(t) - (Zo + \frac{R}{4})\, i_{mk}(t) \qquad (7.62)$$

Esta equação corresponde exatamente ao equacionamento do trecho 3-m.

Na situação atual resultaram, portanto, quatro equações, esquematizadas como indicado a seguir :



As equações (7.44) e (7.45) são válidas quando se considera o deslocamento da onda viajante de m para k, e as equações (7.61) e (7.62) de k para m. Essas equações estão definidas em função das tensões e correntes nas barras k, m e 3. Como interessam apenas as condições nas barras k e m, essas equações serão associadas, de maneira a eliminar a influência dos valores da barra 3.

Adicionando-se as equações (7.44) e (7.61), obtém-se:

$$e_m(t - \tau) + (Zo - \frac{R}{4})\, i_{mk}(t - \tau) + e_k(t - \tau) + (Zo - \frac{R}{4})\, i_{km}(t - \tau) = 2e_3(t - \tau/2) \qquad (7.63)$$

Pela equação (7.63), nota-se que foi eliminada uma das

incógnitas, $i_{32}(t - \tau/2)$, e ficou-se apenas com uma outra, $e_3(t - \tau/2)$. Dividindo-se a equação (7.45) por (Zo - R/4), e a equação (7.61) por (Zo + R/4), e subtraindo-se a segunda da primeira, obtém-se :

$$\frac{(Zo + R/4)}{Zo} e_k(t) - \frac{(Zo + R/4)^2}{Zo} i_{km}(t) + \frac{(Zo - R/4)}{Zo} e_k(t - \tau) +$$

$$+ \frac{(Zo - R/4)^2}{Zo} i_{km}(t - \tau) = 2e_3(t - \tau/2) \qquad (7.64)$$

Na equação (7.64), também eliminou-se a incógnita $i_{32}(t - \tau/2)$. Portanto, igualando-se as equações (7.63) e (7.64), elimina-se a outra incógnita, $e_3(t - \tau/2)$:

$$i_{km}(t) = \frac{1}{(Zo + R/4)} e_k(t) - \frac{Zo}{(Zo + R/4)^2} e_m(t - \tau) -$$

$$- \frac{Zo(Zo - R/4)}{(Zo + R/4)^2} i_{mk}(t - \tau) - \frac{R/4}{(Zo + R/4)^2} e_k(t - \tau) -$$

$$- \frac{R/4(Zo - R/4)}{(Zo + R/4)^2} i_{km}(t - \tau) \qquad (7.65)$$

Por conveniência, dividindo-se a equação (7.65) em outras duas, obtém-se :

$$i_{km}(t) = \frac{1}{(Zo + R/4)} e_k(t) + I_k(t - \tau) \qquad (7.66)$$

$$I_k(t - \tau) = - \frac{Zo}{(Zo + R/4)^2} \left[e_m(t - \tau) + (Zo - R/4) \right.$$

$$\left. i_{mk}(t - \tau) \right] - \frac{R/4}{(Zo + R/4)^2} \left[e_k(t - \tau) + (Zo - R/4) \right.$$

$$\left. i_{km}(t - \tau) \right] \qquad (7.67)$$

As equações (7.66) e (7.67) compreendem duas equações do modelo de linha com resistências concentradas, considerando-se apenas os valores para o lado k. É necessário, também , desenvolver as equações para o lado m, o que será feito através de um processo semelhante ao que foi aplicado para o nó k.

A partir das equações (7.44) e (7.61), obteve-se a equação (7.63), que apresenta apenas uma incógnita, $e_3(t - \tau/2)$. Será necessário, portanto, obter uma outra equação, de maneira a eliminar essa incógnita.

Dividindo-se a equação (7.44) por (Zo + R/4) e a equação (7.62) por (Zo - R/4), e subtraindo-se a segunda da primeira, obtém-se :

$$\frac{(Zo + R/4)}{Zo}\, e_m(t) - \frac{(Zo + R/4)^2}{Zo}\, i_{mk}(t) + \frac{(Zo - R/4)}{Zo}$$

$$e_m(t - \tau) + \frac{(Zo - R/4)^2}{Zo}\, i_{mk}(t - \tau) =$$

$$= 2e_3(t - \tau/2) \qquad (7.68)$$

Nesta equação também eliminou-se uma das incógnitas , $i_{32}(t - \tau/2)$. Igualando-se as equações (7.63) e (7.68), elimina-se $e_3(t - \tau/2)$:

$$i_{mk}(t) = \frac{1}{(Zo + R/4)}\, e_m(t) - \frac{R/4}{(Zo + R/4)^2}\, e_m(t - \tau) -$$

$$- \frac{R/4(Zo - R/4)}{(Zo + R/4)^2}\, i_{mk}(t - \tau) - \frac{Zo}{(Zo + R/4)^2}\, e_k(t - \tau) -$$

$$- \frac{Zo(Zo - R/4)}{(Zo + R/4)^2} \; i_{km}(t - \tau) \qquad (7.69)$$

Por conveniência, dividindo-se a equação (7.69) em outras duas, obtém-se :

$$i_{mk}(t) = \frac{1}{(Zo + R/4)} \; e_m(t) + I_m(t - \tau) \qquad (7.70)$$

$$I_m(t - \tau) = - \frac{Zo}{(Zo + R/4)^2} \left[e_k(t - \tau) + (Zo - R/4) \right.$$

$$\left. i_{km}(t - \tau) \right] - \frac{R/4}{(Zo + R/4)^2} \left[e_m(t - \tau) + (Zo - R/4) \right.$$

$$\left. i_{mk}(t - \tau) \right] \qquad (7.71)$$

Portanto, as equações (7.70) e (7.71) compreendem duas equações do modelo de linha com resistências concentradas, considerando-se apenas os valores para o lado m .

Dessa forma, para o modelo de linhas de transmissão com resistências concentradas, definem-se quatro equações : (7.66), (7.67), (7.70) e (7.71). Essas equações podem ser verificadas considerando-se R = 0, o que seria considerar a linha sem perdas, equações (7.19) a (7.22).

Nota-se, nas equações para o modelo com resistências concentradas, que para o valor de história passada, além da influência dos valores do outro terminal, existe também a influência dos valores do mesmo terminal, devida às reflexões que ocorrem no meio da linha pelo fato de esta ter sido dividida em duas (figura 7.7). Este aspecto pode ser comprovado através do diagrama de treliças de Bewley [33], apresentado

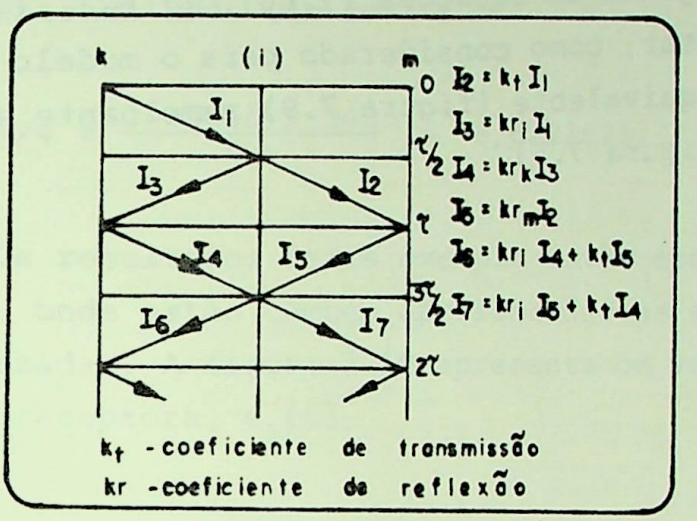


FIGURA 7.8 - Diagrama de treliças de Bewley apresentando as características do modelo com resistências concentradas

na figura 7.8. No instante 2τ, o valor da onda incidente que alcança o terminal k (I_6) corresponde a uma composição dos valores das ondas I_4 ($k_{Ri}I_4$) e I_5(k_TI_5), que no instante τ partiram, respectivamente, dos terminais k e m. O valor $k_{Ri}I_4$ corresponde à parcela de I_4 que reflete no meio da linha. A outra parcela de I_4 é transmitida em direção a m, e compõe uma das parcelas de I_7(figura 7.8). O valor k_TI_5 corresponde à parcela de I_5 que é transmitida em direção a k. A outra parcela de I_5 que é refletida, compõe a outra parcela de I_7 (figura 7.8). Portanto, tanto I_6 como I_7 são compostas de parcelas dos dois extremos.

Convém ressaltar que, no modelo com perdas, existia

apenas a influência dos valores da outra barra terminal, que correspondia à influência das ondas que refletiam no outro extremo, e no instante $(t - \tau)$ alcançavam novamente o ponto de partida.

O conjunto de equações (7.66), (7.67), (7.70) e (7.71) pode representar, como considerado para o modelo sem perdas, um circuito equivalente (figura 7.9) semelhante ao do modelo sem perdas (figura 7.5).

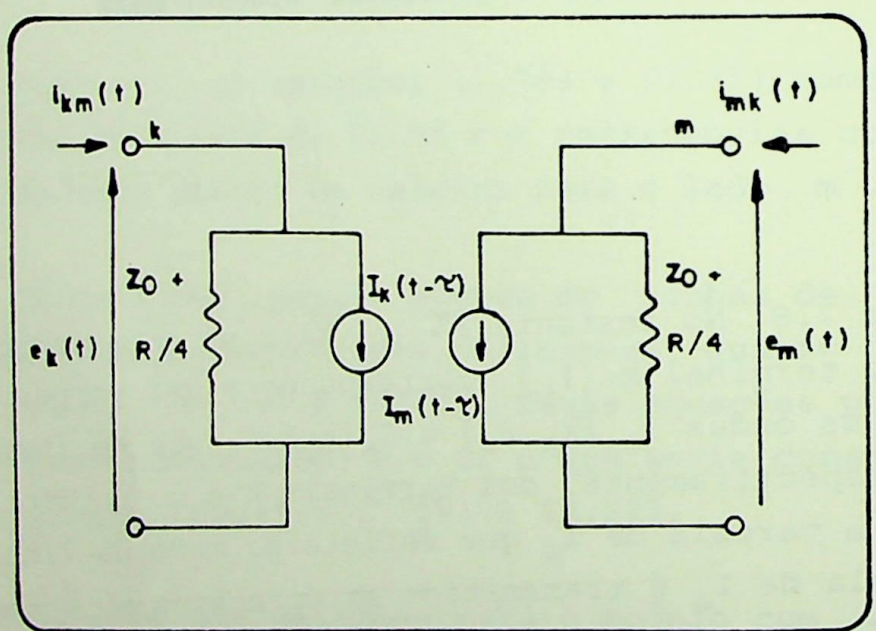


FIGURA 7.9 - Circuito equivalente de uma linha de transmissão para o modelo com resistências concentradas

Para exemplificar este modelo, será considerado o mesmo exemplo apresentado para o modelo sem perdas (figura 7.6). Para os valores de resistência por unidade de comprimento, e o comprimento da linha, adotaram-se, respectivamente , 0,10055 Ω/km e 343 km. Dessa forma, para o valor de resistência concentrada R/4, tem-se :

$$R/4 = \frac{0,10055 \times 343}{4} = 8,6221625$$

Os resultados deste exemplo estão apresentados na tabela 7.2, onde estão também apresentadas as equações que foram utilizadas. A figura 7.10 apresenta os valores de tensão na barra receptora, $e_2(t)$.

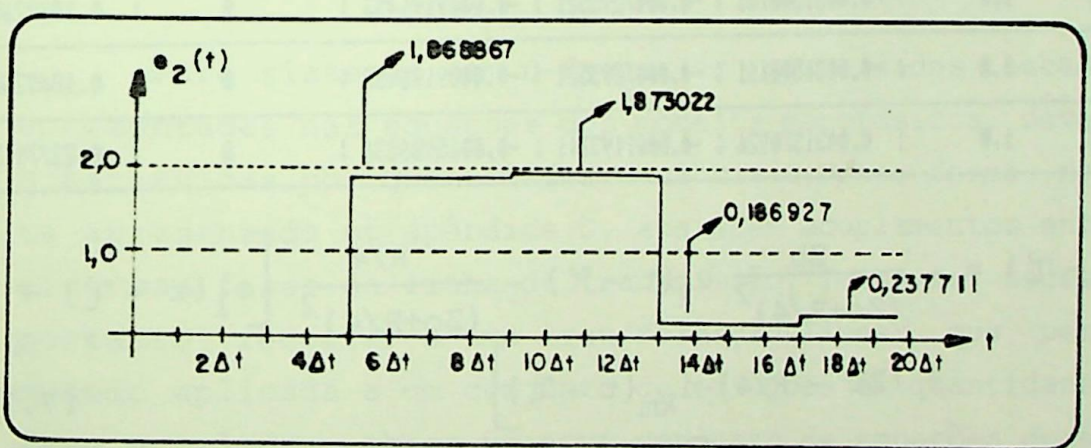


FIGURA 7.10 - Tensão no extremo receptor da linha de transmissão do exemplo da figura 7.6 para o modelo com resistências concentradas

TABELA 7.2 - RESULTADOS DO EXEMPLO APRESENTADO NA FIGURA 7.6, CONSIDERANDO O MODELO COM RESISTÊNCIAS CONCENTRADAS

intervalo	e1(t)	ikm(t)	Ik(t-ϒ)	Im(t-ϒ)	imk(t)	e2(t)
Δt	1.0	0.0038666446	-0.0002492235	-0.0072262469	0	0
2Δt	1.0	0.0038666446	-0.0002492235	-0.0072262469	0	0
3Δt	1.0	0.0038666446	-0.0002492235	-0.0072262469	0	0
4Δt	1.0	0.0038666446	-0.0002492235	-0.0072262469	0	0
5Δt	1.0	0.0036174211	-0.0072268009	-0.0072423105	0	1.868867602
6Δt	1.0	0.0036174211	-0.0072268009	-0.0072423105	0	1.868867602
7Δt	1.0	0.0036174211	-0.0072268009	-0.0072423105	0	1.868867602
8Δt	1.0	0.0036174211	-0.0072268009	-0.0072423105	0	1.868867602
9Δt	1.0	-0.0036093798	-0.0070174607	-0.0007227797	0	1.873022014
10Δt	1.0	-0.0036093798	-0.0070174607	-0.0007227797	0	1.873022014
11Δt	1.0	-0.0036093798	-0.0070174607	-0.0007227797	0	1.873022014
12Δt	1.0	-0.0036093798	-0.0070174607	-0.0007227797	0	1.873022014
13Δt	1.0	-0.0031508161	-0.0007295521	-0.0009191453	0	0.1869268606
14Δt	1.0	-0.0031508161	-0.0007295521	-0.0009191453	0	0.1869268606
15Δt	1.0	-0.0031508161	-0.0007295521	-0.0009191453	0	0.1869268606
16Δt	1.0	-0.0031508161	-0.0007295521	-0.0009191453	0	0.1869268606
17Δt	1.0	0.0031370926	-0.0009193711	-0.0065986836	0	0.2377113402

$$I_k(t-\tau) = -\frac{Zo}{(Zo+R/4)^2}\, e_2(t-\tau) - \frac{R/4}{(Zo+R/4)^2}\left[e_1(t-\tau) + (Zo - R/4)\, i_{km}(t-\tau)\right] \tag{7.72}$$

$$I_m(t-\tau) = -\frac{Zo}{(Zo+R/4)^2}\left[e_1(t-\tau) + (Zo - R/4)\, i_{km}(t-\tau)\right] - \frac{R/4}{(Zo+R/4)^2}\, e_2(t-\tau) \tag{7.73}$$

$$e_m(t) = -(Zo + R/4)\, I_m(t-\tau) \tag{7.74}$$

$$i_{km}(t) = \frac{1}{(Zo+R/4)}\, e_1(t) + I_k(t-\tau) \tag{7.75}$$

$$i_{mk}(t) = 0 \tag{7.76}$$

Comparando-se os resultados do modelo sem perdas, figura 7.6, e do modelo com resistências concentradas (com perdas), figura 7.10, nota-se que a introdução da resistência produz um amortecimento no valor de tensão. Os intervalos onde aparece a tensão no terminal receptor são os mesmos, porém, o valor da tensão para o modelo com resistências concentradas é menor. Nota-se também que, para o intervalo entre $13\Delta t$ e $17\Delta t$, onde os valores são nulos para o modelo sem perdas (figura 7.6), para o modelo com resistências concentradas o valor da tensão não se anula. Isto ocorre pelo fato de que a componente de tensão que atinge o terminal receptor da linha, nesses instantes, sofreu um amortecimento devido à própria resistência da linha, e portanto apresenta um valor menor que o da tensão anteriormente aplicada nesse terminal, sendo que, dessa forma, a tensão no terminal receptor não se anulará.

7.4 - MODELAGEM DE LINHAS DE TRANSMISSÃO ATRAVÉS DE PARÂMETROS DISTRIBUÍDOS - SISTEMAS COM n FASES

Para sistemas com n-fases, as quantidades escalares, apresentadas nas equações dos modelos monofásicos, devem ser substituídas por quantidades matriciais.Dessa forma, como está apresentado no apêndice G, aparecem acoplamentos entre as diversas fases da linha de transmissão. Torna-se necessário, portanto, recorrer a uma transformação linear que permita, quando aplicada a um conjunto de equações em quantidades de fase acopladas, obter um novo conjunto de equações desacopladas. A transformação linear utilizada neste trabalho é a teoria modal, que está apresentada no apêndice G. Utilizando-se esta transformação e os modelos de linhas de transmissão apresentados anteriormente (item 7.3), é possível modelar linhas de transmissão com n fases, transpostas e não transpostas.

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

7.4.1 - MODELO SEM PERDAS

Para um sistema com n fases, as quantidades escalares das equações (7.19), (7.20), (7.21) e (7.22), válidas para o modelo sem perdas, deverão ser substituídas por quantidades matriciais,como mostrado nas equações (7.77) a (7.80).

$$[\, i_{km}(t)\,] = [\, Zo\,]^{-1}[\, e_k(t)\,] + [\, I_k(t-\tau)\,] \quad (7.77)$$

$$[I_k(t-\tau)] = -[Zo]^{-1}[e_m(t-\tau)] - [i_{mk}(t-\tau)] \quad (7.78)$$

$$[i_{mk}(t)] = [Zo]^{-1}\,[e_m(t)] + [I_m(t-\tau)] \quad (7.79)$$

$$[I_m(t-\tau)] = -[Zo]^{-1}\,[e_k(t-\tau)] - [i_{km}(t-\tau)] \quad (7.80)$$

Aplicando-se ao conjunto de equações (7.77) a (7.80) as transformações modais apresentadas nas equações (G.13) e (G.14), resultará :

$$[Ti]\,[i_{km}(t)_{modal}] = [Zo]^{-1}\,[Te]\,[e_k(t)_{modal}] + \\ + [Ti]\,[\,I_k(t-\tau)_{modal}] \quad (7.81)$$

$$[\,Ti\,]\,[I_k(t-\tau)_{modal}] = -\,[\,Zo\,]^{-1}[\,Te\,]\,[e_m(t-\tau)_{modal}] - \\ - [\,Ti\,]\,[i_{mk}(t-\tau)_{modal}] \quad (7.82)$$

$$[\,Ti\,]\,[i_{mk}(t)_{modal}] = [\,Zo\,]^{-1}\,[\,Te\,]\,[e_m(t)_{modal}] + \\ + [\,Ti\,]\,[I_m(t-\tau)_{modal}] \quad (7.83)$$

$$[\,Ti\,]\;[I_m(t-\tau)_{modal}] = -[\,Zo\,]^{-1}[\,Te\,]\;[e_k(t-\tau)_{modal}] -$$

$$-\;[\,Ti\,]\;[\,i_{km}(t-\tau)_{modal}] \qquad (7.84)$$

Da equação (G.65) resulta :

$$[Zo_{modal}]^{-1} = [\,Ti\,]^{-1}[\,Zo\,]^{-1}\,[\,Te\,] \qquad (7.85)$$

Substituindo-se a equação (7.85) nas equações (7.81) a (7.84) , e reescrevendo-se essas equações, obtém-se :

$$[i_{km}(t)_{modal}] = [Zo_{modal}]\;[e_k(t)_{modal}] +$$

$$+\;[I_k(t-\tau)_{modal}] \qquad (7.86)$$

$$[I_k(t-\tau)_{modal}] = -[Zo_{modal}]^{-1}[e_m(t-\tau)_{modal}] -$$

$$-\;[i_{mk}(t-\tau)_{modal}]. \qquad (7.87)$$

$$[i_{mk}(t)_{modal}] = [Zo_{modal}]^{-1}[e_m(t)_{modal}] +$$

$$+\;[I_m(t-\tau)_{modal}] \qquad (7.88)$$

$$[I_m(t-\tau)_{modal}] = -[Zo_{modal}]^{-1}[e_k(t-\tau)_{modal}] -$$

$$-\;[i_{km}(t-\tau)_{modal}] \qquad (7.89)$$

A matriz de impedâncias de surto modais, $[Zo_{modal}]$, é uma matriz diagonal; portanto, para um sistema trifásico, por exemplo, as equações independentes para um dos extremos da linha de transmissão serão :

$$i_{km}(t)_{modol} = \frac{1}{Zo_{modol}}\,e_k(t)_{modol} + I_k(t-\tau)_{modol} \qquad (7.90)$$

$$i_{km}(t)_{modo2} = \frac{1}{Zo_{modo2}} e_k(t)_{modo2} + I_k(t - \tau)_{modo2} \quad (7.91)$$

$$i_{km}(t)_{modo3} = \frac{1}{Zo_{modo3}} e_k(t)_{modo3} + I_k(t - \tau)_{modo3} \quad (7.92)$$

$$I_k(t - \tau)_{modo1} = - \frac{1}{Zo_{modo1}} e_m(t - \tau)_{modo1} - i_{mk}(t - \tau)_{modo1} \quad (7.93)$$

$$I_k(t - \tau)_{modo2} = - \frac{1}{Zo_{modo2}} e_m(t - \tau)_{modo2} - i_{mk}(t - \tau)_{modo2} \quad (7.94)$$

$$I_k(t - \tau)_{modo3} = - \frac{1}{Zo_{modo3}} e_m(t - \tau)_{modo3} - i_{mk}(t - \tau)_{modo3} \quad (7.95)$$

Para o terminal m resultam equações semelhantes.

Nas equações (7.77) a (7.80), em quantidades de fase, tem-se o acoplamento entre as várias fases. Já com a aplicação da transformação modal, obtém-se o conjunto de equações (7.86) a (7.89) totalmente desacopladas e independentes, o que pode ser comprovado pelo conjunto de equações (7.90) a (7.95), válidas para o terminal k de uma linha genérica.

7.4.2 - MODELO COM RESISTÊNCIAS CONCENTRADAS

As equações (7.66), (7.67), (7.70) e (7.71) são válidas para o modelo monofásico. Para o modelo com n fases, as quantidades escalares devem ser substituídas por quantidades matriciais, ou seja :

$$[i_{km}(t)] = ([\,Zo\,] + [\,R/4\,])^{-1}[e_k(t)] + [I_k(t - \tau)] \qquad (7.96)$$

$$[I_k(t - \tau)] = ([\,Zo\,] + [\,R/4\,])^{-2}\Big\{-[\,Zo\,]\Big[[e_m(t - \tau)] + ([\,Zo\,] - [\,R/4\,])\;[i_{mk}(t - \tau)]\Big] - [\,R/4\,]$$

$$\Big[[e_k(t - \tau)] + ([\,Zo\,] - [\,R/4\,])\;[i_{km}(t - \tau)]\Big]\Big\} \qquad (7.97)$$

$$[i_{mk}(t)] = ([Zo] + [R/4])^{-1}\,[e_m(t)] + [I_m(t - \tau)] \qquad (7.98)$$

$$[I_m(t - \tau)] = ([Zo] + [R/4])^{-2}\Big\{-[R/4]\Big[[e_m(t - \tau)] + ([Zo] - [R/4])\;[i_{mk}(t - \tau)]\Big] - [Zo]\Big[[e_k(t - \tau)] + ([Zo] - [R/4])\;[i_{km}(t - \tau)]\Big]\Big\} \qquad (7.99)$$

A esse conjunto de equações deve-se aplicar as transformações modais, definidas nas equações (G.13) e (G.14), que resultará em :

$$[Ti]\;[i_{km}(t)_{modal}] = ([Zo] + [R/4])^{-1}[Te]\,[e_k(t)_{modal}] + [Ti]\cdot[I_k(t - \tau)_{modal}] \qquad (7.100)$$

$$[Ti]\,[I_k(t - \tau)_{modal}] = ([Zo] + [R/4])^{-2}\Big\{-[Zo]\Big[[Te]\,[e_m(t - \tau)_{modal}] + ([Zo] - [R/4])\;[Ti]\,[i_{mk}(t - \tau)_{modal}]\Big] - [R/4]\Big[[Te]\,[e_k(t - \tau)_{modal}] + ([Zo] - [R/4])[Ti]\,[i_{km}(t - \tau)_{modal}]\Big]\Big\} \qquad (7.101)$$

$$[Ti][i_{mk}(t)_{modal}] = ([Zo] + [R/4])^{-1}[Te][e_m(t)_{modal}] +$$

$$+ [Ti][I_m(t - \tau)_{modal}] \qquad (7.102)$$

$$[Ti][I_m(t - \tau)_{modal}] = ([Zo] + [R/4])^{-2}\Big\{- [R/4]\Big[[Te]$$

$$[e_m(t - \tau)_{modal}] + ([Zo] - [R/4])[Ti]$$

$$[i_{mk}(t - \tau)_{modal}]\Big] - [Zo]\Big[[Te][e_k(t - \tau)_{modal}] +$$

$$+ ([Zo] - [R/4])[Ti][i_{km}(t - \tau)_{modal}]\Big]\Big\} \qquad (7.103)$$

Essas equações ainda podem ser escritas da seguinte maneira :

$$[i_{km}(t)_{modal}] = [Ti]^{-1}([Zo] + [R/4])^{-1}[Te][e_k(t)_{modal}] +$$

$$+ [I_k(t - \tau)_{modal}] \qquad (7.104)$$

$$[I_k(t - \tau)_{modal}] = [Ti]^{-1}([Zo] + [R/4])^{-2}\Big\{- [Zo]\Big[[Te]$$

$$[e_m(t - \tau)_{modal}] + ([Zo] - [R/4])[Ti]$$

$$[i_{mk}(t - \tau)_{modal}]\Big] - [R/4]\Big[[Te]$$

$$[e_k(t - \tau)_{modal}] + ([Zo] - [R/4])$$

$$[Ti][i_{km}(t - \tau)_{modal}]\Big]\Big\} \qquad (7.105)$$

$$[i_{mk}(t)_{modal}] = [Ti]^{-1}([Zo] + [R/4])^{-1}[Te][e_m(t)_{modal}] +$$

$$+ [I_m(t - \tau)_{modal}] \qquad (7.106)$$

$$[I_m(t-\tau)_{modal}] = [Ti]^{-1}([Zo]+[R/4])^{-2}\Big\{-[R/4]\Big[[Te]$$
$$[e_m(t-\tau)_{modal}] + ([Zo]-[R/4])[Ti]$$
$$[i_{mk}(t-\tau)_{modal}]\Big] - [Zo]\Big[[Te][e_k(t-\tau)_{modal}] +$$
$$+ ([Zo]-[R/4])[Ti][i_{km}(t-\tau)_{modal}]\Big]\Big\} \qquad (7.107)$$

As equações (7.104) a (7.107), embora sejam aplicadas ao modelo com resistências concentradas, poderão ser caracterizadas como equações gerais para os modelos de linhas de transmissão, já que, ao se considerar $[R] = 0$, chega-se às mesmas equações que foram definidas para o modelo sem perdas, (7.86) a (7.89).

As equações (7.104) a (7.107) ainda serão alteradas para considerar o tipo de linha de transmissão, transposta ou não transposta, e para considerar aspectos computacionais envolvidos com a modelagem.

7.5 - CONSIDERAÇÕES SOBRE LINHAS DE TRANSMISSÃO TRANSPOSTAS E NÃO TRANSPOSTAS

Para uma linha de transmissão, a variação de tensão por unidade de comprimento é expressa através da equação :

$$-\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} \qquad (7.108)$$

onde os índices i = 1,2,...,n, indicam os n condutores que compõem a linha de transmissão, incluindo os condutores que compõem cada uma das fases e os cabos pára-raios.

A partir da equação (7.108) é possível, através de uma eliminação de variáveis [11], obter uma matriz com os condutores equivalentes de fase, como mostrado na equação (7.109).

$$-\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ e_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{AA} & Z_{AB} & Z_{AC} \\ Z_{BA} & Z_{BB} & Z_{BC} \\ Z_{CA} & Z_{CB} & Z_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} \qquad (7.109)$$

Neste caso, não se considera variação de posição dos condutores, e portanto a linha é tratada como não transposta.

Para uma linha de transmissão, é possível considerar a transposição, cujo objetivo é evitar os desequilíbrios de tensão e corrente, através da alteração das posições relativas de um condutor em relação a outro, o que produz um equilíbrio das impedâncias mútuas entre as fases. Seja, por exemplo, o trecho de linha apresentado na figura 7.11, para o qual considera-se um ciclo completo de transposição.

Nota-se, na figura 7.11, que cada uma das fases ocupa uma determinada posição em cada trecho considerado.

A variação de tensão que ocorre para a linha toda é definida como a soma das variações parciais em cada um dos trechos considerados :

$$\begin{bmatrix} d_{e_A}/dx \\ d_{e_B}/dx \\ d_{e_C}/dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{ei_I}/dx \\ d_{ej_I}/dx \\ d_{ek_I}/dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{ej_{II}}/dx \\ d_{ek_{II}}/dx \\ d_{ei_{II}}/dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{ek_{III}}/dx \\ d_{ei_{III}}/dx \\ d_{ej_{III}}/dx \end{bmatrix} \qquad (7.110)$$

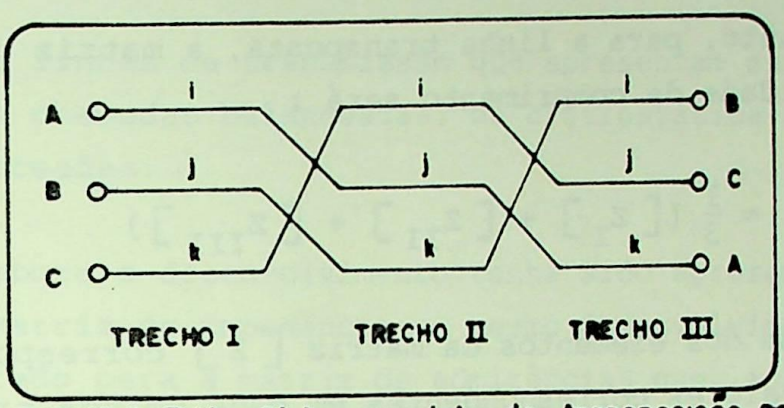


FIGURA 7.11 - Ciclo completo de transposição para uma linha de transmissão transposta

Para cada um dos ciclos de transposição apresentados na figura 7.11, tem-se :

$$[Z_I] = \begin{bmatrix} Z_{ii} & Z_{ij} & Z_{ik} \\ Z_{ji} & Z_{jj} & Z_{jk} \\ Z_{ki} & Z_{kj} & Z_{kk} \end{bmatrix} \qquad (7.111)$$

$$[Z_{II}] = \begin{bmatrix} Z_{jj} & Z_{jk} & Z_{ji} \\ Z_{kj} & Z_{kk} & Z_{ki} \\ Z_{ij} & Z_{ik} & Z_{ii} \end{bmatrix} \qquad (7.112)$$

$$[Z_{III}] = \begin{bmatrix} Z_{kk} & Z_{ki} & Z_{kj} \\ Z_{ik} & Z_{ii} & Z_{ij} \\ Z_{jk} & Z_{ji} & Z_{jj} \end{bmatrix} \qquad (7.113)$$

As matrizes são montadas obedecendo-se a ordem original das fases A, B, C, e os índices i, j e k indicam as posições de cada fase em cada trecho do ciclo de transposição(figura 7.11).

Portanto, para a linha transposta, a matriz de impedâncias por unidade de comprimento será :

$$[Z] = \frac{1}{3}([Z_I] + [Z_{II}] + [Z_{III}]) \qquad (7.114)$$

onde cada um dos elementos da matriz $[Z]$ corresponde a uma média dos valores correspondentes em cada um dos trechos do ciclo de transposição (figura 7.11). Convém observar que as matrizes das equações (7.111) a (7.113) são simétricas, ou seja :

$$Z_{ik} = Z_{ki} \qquad (7.115)$$

$$Z_{ij} = Z_{ji} \qquad (7.116)$$

$$Z_{jk} = Z_{kj} \qquad (7.117)$$

Admitindo-se que :

$$Z_p = \frac{1}{3}(Z_{ii} + Z_{jj} + Z_{kk}) \qquad (7.118)$$

$$Z_m = \frac{1}{3}(Z_{ij} + Z_{jk} + Z_{ki}) \qquad (7.119)$$

e substituindo-se esses valores na equação (7.114), obtém-se:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_p & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_p & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_p \end{bmatrix} \qquad (7.120)$$

onde os valores Z_p e Z_m correspondem, respectivamente, aos valores de impedância própria e mútua para a linha como um todo.

As linhas de transmissão que apresentam essa característica são chamadas balanceadas, ou eletrostática e indutivamente balanceadas.

Embora o desenvolvimento tenha sido apresentado apenas para a matriz de impedâncias,o mesmo desenvolvimento pode ser apresentado para a matriz de admitâncias que, analogamente,resultará em :

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_p & Y_m & Y_m \\ Y_m & Y_p & Y_m \\ Y_m & Y_m & Y_p \end{bmatrix} \qquad (7.121)$$

Nota-se, portanto, que é possível tratar as linhas de transmissão transpostas como balanceadas, visto que o objetivo da transposição é justamente equilibrar o efeito das impedâncias mútuas de uma fase na outra.

Caso se considere, por exemplo, uma linha de transmissão parcialmente transposta , como o caso mostrado na figura 7.12, com apenas dois trechos de transposição, a linha, embora transposta, não será considerada balanceada. Neste caso , definem-se matrizes de impedâncias e admitâncias para cada um dos trechos, sendo que os valores finais dessas matrizes serão :

$$[Z] = \frac{1}{2} \left([Z_I] + [Z_{II}] \right) \qquad (7.122)$$

$$[Y] = \frac{1}{2} \left([Y_I] + [Y_{II}] \right) \qquad (7.123)$$

onde os índices I e II indicam os trechos de transposição.

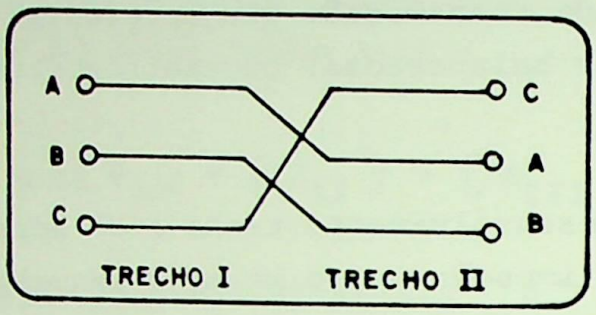


FIGURA 7.12 - Linha de transmissão transposta não balanceada

Praticamente, pode-se considerar a transposição contínua em linhas reais, e dessa forma tratar a linha como balanceada.

Para obtenção das quantidades modais correspondentes às linhas transpostas e não transpostas, deve-se recorrer ao processo apresentado no apêndice G. Para as linhas transpostas, destaca-se que :

$$[\,Ti\,] = [\,Te\,] \tag{7.124}$$

$$[\,Ti\,]^{-1} = [\,Te\,]^{-1} \tag{7.125}$$

O apêndice G apresenta, também, de forma simplificada , um tratamento especial para os circuitos duplos de linhas de transmissão transpostas e não transpostas.

7.6 - EQUAÇÕES GERAIS DOS MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

As equações (7.104) a (7.107), apresentadas no item 7.4.2, compreendem as equações gerais para os modelos de linhas de transmissão. Observa-se, no entanto, que esse conjunto de equações apresenta variáveis em quantidades modais e de fase, tornando-se conveniente, portanto, transformar todas as variáveis que estão em quantidades de fase em quantidades modais.

Considerando-se a equação (G.65), obtém-se :

$$[\,Zo\,] = [\,Te\,]\,[Zo_{modal}]\,[\,Ti\,]^{-1} \qquad (7.126)$$

$$[\,R/4\,] = [\,Te\,]\,[\,R/4_{modal}]\,[\,Ti\,]^{-1} \qquad (7.127)$$

Expandindo-se as equações (7.104)a(7.107), e substituindo-se as equações (7.126) e (7.127) nesse conjunto de equações, obtém-se :

$$[i_{km}(t)_{modal}] = \underline{[Ti]^{-1}([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}]}$$
$$\underline{[Ti]^{-1})^{-1}[Te]}[e_k(t)_{modal}] + [I_k(t - \tau)_{modal}] \qquad (7.128)$$

$$[I_k(t - \tau)_{modal}] = -\underline{[Ti]^{-1}([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te]}$$
$$\underline{[R/4_{modal}][Ti]^{-1})^{-2}([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1})}$$
$$\underline{[Te]}[e_m(t - \tau)_{modal}] - \underline{[Ti]^{-1}([Te]}$$
$$\underline{[Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})^{-2}}$$
$$\underline{([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1})([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} -}$$

$$- [Te]\ [R/4_{modal}][Ti]^{-1})[Ti][i_{mk}(t-\tau)_{modal}] -$$

$$- [Ti]^{-1}([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}]$$

$$[Ti]^{-1})^{-2}([Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})\ [Te]$$

$$[e_k(t-\tau)_{modal}] - [Ti]^{-1}([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} +$$

$$+ [Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})^{-2}([Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})$$

$$([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} - [Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})[Ti]$$

$$[i_{km}(t-\tau)_{modal}] \qquad (7.129)$$

$$[i_{mk}(t)_{modal}] = [Ti]^{-1}([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}]$$

$$[Ti]^{-1})^{-1}[Te][e_m(t)_{modal}] + [I_m(t-\tau)_{modal}] \qquad (7.130)$$

$$[I_m(t-\tau)_{modal}] = - [Ti]^{-1}([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te]$$

$$[R/4_{modal}][Ti]^{-1})^{-2}([Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})$$

$$[Te][e_m(t-\tau)_{modal}] - [Ti]^{-1}([Te][Zo_{modal}]$$

$$[Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}]\ [Ti]^{-1})^{-2}[Te]$$

$$[R/4_{modal}][Ti]^{-1})([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} - [Te]$$

$$[R/4_{modal}][Ti]^{-1})\ [Ti][i_{mk}(t-\tau)_{modal}] -$$

$$- [Ti]^{-1}([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}]$$

$$[Ti]^{-1})^{-2}\ ([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1})[Te]$$

$$[e_k(t-\tau)_{modal}] - [Ti]^{-1}\ [Te][Zo_{modal}]\ [Ti]^{-1} +$$

$$+([Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})^{-2}\ ([Te][Zo_{modal}]\ [Ti]^{-1})$$

$$([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} - [Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})$$

$$[Ti][i_{km}(t-\tau)_{modal}] \qquad (7.131)$$

No conjunto de equações (7.128) a (7.131), existem várias expressões, que estão grifadas, que podem ser simplificadas.

$$\underline{[Ti]^{-1}\ ([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})^{-1}\ [Te]} =$$

$$= [Ti]^{-1}\left[[Te]([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])\ [Ti]^{-1}\right]^{-1}[Te] =$$

$$= [Ti]^{-1}[Ti]\ ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}[Te] =$$

$$= \underline{([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}} \qquad (7.132)$$

$$\underline{[Ti]^{-1}([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})^{-2}\ ([Te]}$$

$$\underline{[Zo_{modal}][Ti]^{-1})\ [Te]} =$$

$$[Ti]^{-1}\ ([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})^{-1}$$

$$([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})^{-1}$$

$$([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1})\ [Te] =$$

$$= [Ti]^{-1}[Ti]\ ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}\ [Te]^{-1}[Ti]$$

$$([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}\ [Te]^{-1}[Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1}[Te] =$$

$$= \underline{([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}[Ti]\ ([Zo_{modal}] +}$$

$$+ [R/4_{modal}])^{-1}[Zo_{modal}][Ti]^{-1}[Te] \qquad (7.133)$$

$$[Ti]^{-1}([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})^{-2}$$

$$([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1})([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} -$$

$$- [Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})\ [Ti] =$$

$$[Ti]^{-1}([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})^{-1}$$

$$([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})^{-1}$$

$$([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1})\ [Te]([Zo_{modal}] -$$

$$- [R/4_{modal}])\ [Ti]^{-1}[Ti] =$$

$$= [Ti]^{-1}[Ti]\ ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}\ [Te]^{-1}[Ti]$$

$$([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}\ [Te]^{-1}[Te][Zo_{modal}]$$

$$[Ti]^{-1}[Te]\ ([Zo_{modal}] - [R/4_{modal}]) =$$

$$= ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}\ [Te]^{-1}[Ti]\ ([Zo_{modal}] +$$

$$+ [R/4_{modal}])^{-1}\ [Zo_{modal}][Ti]^{-1}[Te]\ ([Zo_{modal}] -$$

$$- [R/4_{modal}]) \qquad (7.134)$$

De maneira análoga às equações (7.133) e (7.134), obtém se :

$$[Ti]^{-1}([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})^{-2}$$

$$\underline{([Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})\ [Te]} =$$

$$= \underline{([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}\ [Te]^{-1}[Ti]\ ([Zo_{modal}] +}$$

$$\underline{[R/4_{modal}])^{-1}[R/4_{modal}]\ [Ti]^{-1}[Te]} \qquad (7.135)$$

$$\underline{[Ti]^{-1}\ ([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1} + [Te][R/4_{modal}]\underline{[Ti]^{-1})^{-2}}}$$

$$\underline{([Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})([Te][Zo_{modal}][Ti]^{-1}} -$$

$$\underline{-[Te][R/4_{modal}][Ti]^{-1})\ [Ti]} =$$

$$= \underline{([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}[Ti]\ ([Zo_{modal}] +}$$

$$\underline{+ [R/4_{modal}])^{-1}\ [R/4_{modal}][Ti]^{-1}[Te]\ ([Zo_{modal}] -}$$

$$\underline{- [R/4_{modal}])} \qquad (7.136)$$

Substituindo-se as equações (7.132) a (7.136) nas equações (7.128) a (7.131), resulta :

$$[i_{km}(t)_{modal}] = ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[e_k(t)_{modal}] +$$

$$+ [I_k(t - \tau)_{modal}] \qquad (7.137)$$

$$[I_k(t - \tau)_{modal}] = - ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}[Ti]$$

$$([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Zo_{modal}][Ti]^{-1}[Te]$$

$$[e_m(t - \tau)_{modal}] - ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}$$

$$[Ti]\ ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Zo_{modal}][Ti]^{-1}[Te]$$

$$([Zo_{modal}] - [R/4_{modal}])[i_{mk}(t - \tau)_{modal}] - ([Zo_{modal}] +$$

$$+ [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}[Ti]\ ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}$$

$$[R/4_{modal}][Ti]^{-1}[Te][e_k(t-\tau)_{modal}] - ([Zo_{modal}] +$$

$$+ [R/4_{modal}])^{-1}\ [Te]^{-1}[Ti]([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}$$

$$[R/4_{modal}][Ti]^{-1}[Te]\ ([Zo_{modal}] - [R/4_{modal}])$$

$$[i_{km}(t-\tau)_{modal}] \qquad (7.138)$$

$$[i_{mk}(t)_{modal}] = ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[e_m(t)_{modal}] +$$

$$+ [I_m(t-\tau)_{modal}] \qquad (7.139)$$

$$[I_m(t-\tau)_{modal}] = -([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}[Ti]$$

$$([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[R/4_{modal}][Ti]^{-1}[Te]$$

$$[e_m(t-\tau)_{modal}] - ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}[Ti]$$

$$([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[R/4_{modal}][Ti]^{-1}[Te]$$

$$([Zo_{modal}] - [R/4_{modal}])[i_{mk}(t-\tau)_{modal}] - ([Zo_{modal}] +$$

$$+ [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}[Ti]\ ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}$$

$$[Zo_{modal}][Ti]^{-1}[Te][e_k(t-\tau)_{modal}] - ([Zo_{modal}] +$$

$$+ [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}[Ti]\ ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}$$

$$[Zo_{modal}][Ti]^{-1}[Te]\ ([Zo_{modal}] - [R/4_{modal}])$$

$$[i_{km}(t-\tau)_{modal}] \qquad (7.140)$$

A partir do conjunto de equações (7.137) a (7.140), é possível escrever quatro equações gerais :

$$[i_{km}(t)_{modal}] = [A]\,[e_k(t)_{modal}] + [I_k(t-\tau)_{modal}] \quad (7.141)$$

$$[I_k(t-\tau)_{modal}] = [B]\,[e_m(t-\tau)_{modal}] + [C]\,[i_{mk}(t-\tau)_{modal}] + [D]\,[e_k(t-\tau)_{modal}] + [E]\,[i_{km}(t-\tau)_{modal}] \quad (7.142)$$

$$[i_{mk}(t)_{modal}] = [A]\,[e_m(t)_{modal}] + [I_m(t-\tau)_{modal}] \quad (7.143)$$

$$[I_m(t-\tau)_{modal}] = [B]\,[e_k(t-\tau)_{modal}] + [C]\,[i_{km}(t-\tau)_{modal}] + [D]\,[e_m(t-\tau)_{modal}] + [E]\,[i_{mk}(t-\tau)_{modal}] \quad (7.144)$$

As matrizes [A], [B], [C], [D] e [E], correspondem a :

$$[A] = ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1} \quad (7.145)$$

$$[B] = -([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}[Ti]\,([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Zo_{modal}][Ti]^{-1}[Te] =$$

$$-[A][Te]^{-1}[Ti][A][Zo_{modal}][Ti]^{-1}[Te] \quad (7.146)$$

$$[C] = -([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}[Ti]([Zo_{modal}] +$$

$$+ [R/4_{modal}])^{-1}[Zo_{modal}][Ti]^{-1}[Te]([Zo_{modal}] -$$

$$- [R/4_{modal}]) = [B]([Zo_{modal}] - [R/4_{modal}]) \quad (7.147)$$

$$[D] = -([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}[Ti]([Zo_{modal}] +$$

$$+ [R/4_{modal}])^{-1}[R/4_{modal}][Ti]^{-1}[Te] =$$

$$- [A][Te]^{-1}[Ti][A][R/4_{modal}][Ti]^{-1}[Te] \quad (7.148)$$

$$[E] = -([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}[Te]^{-1}[Ti]([Zo_{modal}] +$$

$$+ [R/4_{modal}])^{-1}[R/4_{modal}][Ti]^{-1}[Te]([Zo_{modal}] -$$

$$- [R/4_{modal}]) = [D]([Zo_{modal}] - [R/4_{modal}]) \quad (7.149)$$

Nos itens anteriores, basicamente foram considerados quatro modelos de linhas de transmissão :

1 - linhas transpostas sem perdas

2 - linhas transpostas com resistências concentradas

3 - linhas não transpostas sem perdas

4 - linhas não transpostas com resistências concentradas

Para cada um desses modelos, as matrizes $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ e $[E]$, ficam definidas da seguinte maneira :

1 - linhas transpostas sem perdas

$$[A] = [Zo_{modal}]^{-1} \quad (7.150)$$

$$[B] = -[Zo_{modal}]^{-1} = -[A] \quad (7.151)$$

$$[C] = -[U] \quad (7.152)$$

onde $[U]$ é a matriz unitária

$$[D] = 0 \quad (7.153)$$

$$[E] = 0 \quad (7.154)$$

2 - linhas transpostas com resistências concentradas

$$[A] = ([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1} \quad (7.155)$$

$$[B] = -([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-2}[Zo_{modal}] =$$

$$= -[A]^2[Zo_{modal}] \quad (7.156)$$

$$[C] = -([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-2}[Zo_{modal}]$$

$$[Zo_{modal}] - [R/4_{modal}] = [B]([Zo_{modal}] -$$

$$- [R/4_{modal}]) \quad (7.157)$$

$$[D] = -([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-2}[R/4_{modal}] =$$

$$= -[A]^{-2}[R/4_{modal}] \quad (7.158)$$

$$[E] = -([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-2}[R/4_{modal}]$$

$$([Zo_{modal}] - [R/4_{modal}]) =$$

$$= [D]([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}]) \quad (7.159)$$

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

3 - linhas não transpostas sem perdas

$$[A] = [Zo_{modal}]^{-1} \tag{7.160}$$

$$[B] = -[Zo_{modal}]^{-1} = -[A] \tag{7.161}$$

$$[C] = -[U] \tag{7.162}$$

onde $[U]$ é a matriz unitária.

$$[D] = 0 \tag{7.163}$$

$$[E] = 0 \tag{7.164}$$

4 - linhas não transpostas com resistências concentradas

Para este caso, que é o mais geral, são válidas as equações (7.145) a (7.149).

Do ponto de vista computacional, é conveniente a definição dessas matrizes parâmetros $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ e $[E]$, visto que elas são montadas antes do início do "loop" de integração , e dentro do "loop" de integração têm-se apenas os produtos de uma matriz por um vetor. Caso se considerasse a montagem das equações dentro do "loop" de integração, o tempo de processamento de cada intervalo de integração seria grande, o que contribuiria para aumentar o tempo de processamento global.

Para uma linha monofásica, consideram-se as mesmas equações do modelo de linhas transpostas, porém considerando-se :

$$[Ti] = [Ti]^{-1} = 1 \tag{7.165}$$

Portanto, para sistemas monofásicos as equações serão :

$$i_{km}(t) = A\, e_k(t) + I_k(t - \tau) \tag{7.166}$$

$$I_k(t - \tau) = B\, e_m(t - \tau) + C\, i_{mk}(t - \tau) + \\ + D\, e_k(t - \tau) + E\, i_{km}(t - \tau) \tag{7.167}$$

$$i_{mk}(t) = A\, e_m(t) + I_m(t - \tau) \tag{7.168}$$

$$I_m(t - \tau) = B\, e_k(t - \tau) + C\, i_{km}(t - \tau) + \\ + D\, e_m(t - \tau) + E\, i_{mk}(t - \tau) \tag{7.169}$$

Para os modelos com resistências concentradas, os parâmetros A, B, C, D e E nas equações (7.166) a (7.169), valem :

$$A = 1/(Zo + R/4) \tag{7.170}$$

$$B = - \frac{1}{(Zo + R/4)^2}\, Zo \tag{7.171}$$

$$C = - \frac{1}{(Zo + R/4)^2}\, Zo\, (Zo - R/4) \tag{7.172}$$

$$D = - \frac{1}{(Zo + R/4)^2}\, R/4 \tag{7.173}$$

$$E = - \frac{1}{(Zo + R/4)^2}\, R/4\, (Zo - R/4) \tag{7.174}$$

Para o modelo sem perdas, os parâmetros A, B, C, D e E, nas equações (7.166) a (7.169), valem : .

$$A = 1/Zo \tag{7.175}$$

$$B = - 1/Zo \tag{7.176}$$

$$C = -1 \tag{7.177}$$

$$D = 0 \qquad (7.178)$$

$$E = 0 \qquad (7.179)$$

7.7 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS DOS MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

A figura 7.13 apresenta um fluxograma geral, incluindo os modelos de linhas de transmissão. De acordo com esse fluxograma, observam-se os seguintes aspectos.

- o processo de cálculo e a equação geral de solução (4.21), para os modelos de linhas de transmissão, são os mesmos dos outros modelos considerados neste trabalho;

- os valores de história passada $[I_k(t - \tau)]$ e $[I_m(t - \tau)]$ são calculados em quantidades modais, de acordo com as equações apresentadas no item 7.6;

- após obtidos todos os valores da equação de solução geral, calculam-se os valores de tensão em quantidades de fase. Através da aplicação da transformação modal, obtêm-se os valores de tensão nas barras terminais das linhas de transmissão em quantidades modais :

$$[e_k(t)_{modal}] = [Te]^{-1}[e_k(t)] \qquad (7.180)$$

$$[e_m(t)_{modal}] = [Te]^{-1}[e_m(t)] \qquad (7.181)$$

Nota-se que apenas os valores das tensões das barras terminais das linhas de transmissão são transformados em quantidades modais. Como os valores modais são ne-

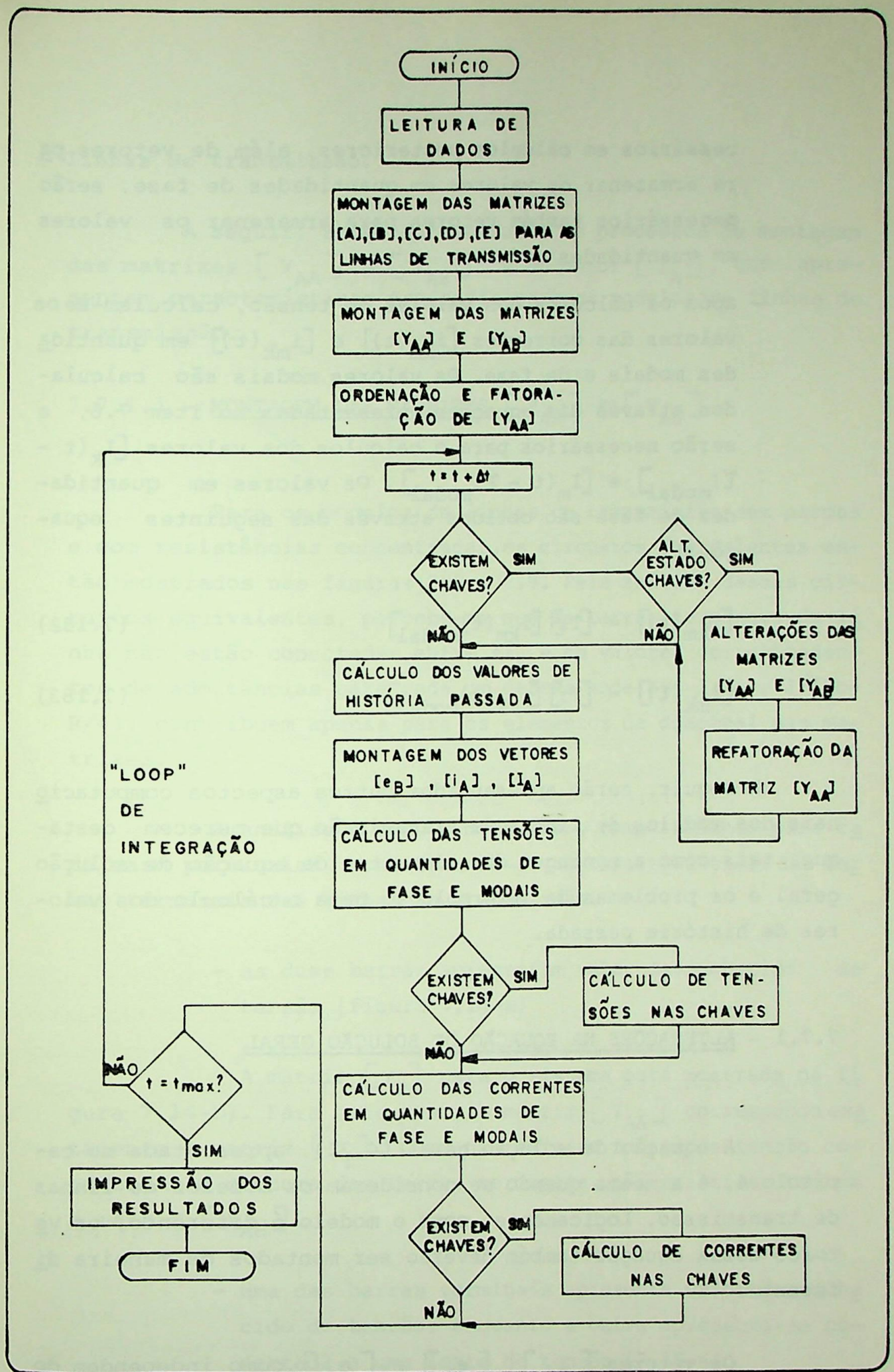


FIGURA 7.13 - Fluxograma que considera o modelo de linha de transmissão

cessários em cálculos posteriores, além de vetores para armazenar os valores em quantidades de fase, serão necessários também vetores para armazenar os valores em quantidades modais.

- após os cálculos dos valores de tensão, calculam-se os valores das correntes $[i_{km}(t)]$ e $[i_{mk}(t)]$ em quantidades modais e de fase. Os valores modais são calculados através das equações apresentadas no item 7.6, e serão necessários para o cálculos dos valores $[I_k(t - \tau)_{modal}]$ e $[I_m(t - \tau)_{modal}]$. Os valores em quantidades de fase são obtidos através das seguintes equações :

$$[i_{km}(t)] = [Ti]\,[i_{km}(t)_{modal}] \qquad (7.182)$$

$$[i_{mk}(t)] = [Ti]\,[i_{mk}(t)_{modal}] \qquad (7.183)$$

A seguir, serão apresentados outros aspectos computacionais dos modelos de linhas de transmissão que merecem destaque, tais como a montagem dos elementos da equação de solução geral e os problemas de interpolação para o cálculo dos valores de história passada.

7.7.1 - ALTERAÇÕES NA EQUAÇÃO DE SOLUÇÃO GERAL

A equação de solução geral (4.21), apresentada no capítulo 4, é a mesma quando se consideram os modelos de linhas de transmissão. Logicamente, como o modelo é diferente, os vetores dessa equação também deverão ser montados de maneira diferente.

Os vetores $[i_A]$, $[e_B]$ e $[e_A]$, como independem do modelo sendo considerado, não apresentam nenhuma alteração nos seus processos de montagem, quando se considera o modelo de

linhas de transmissão.

A seguir, serão apresentados os processos de montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, e do vetor $[I_A]$, que apresentam características especiais para os modelos de linhas de transmissão.

7.7.1.1 - MONTAGEM DAS MATRIZES $[Y_{AA}]$ E $[Y_{AB}]$

Para os modelos de linhas de transmissão sem perdas e com resistências concentradas,os circuitos equivalentes estão mostrados nas figuras 7.5 e 7.9. Pela análise desses circuitos equivalentes, percebe-se que as barras terminais da linha não estão conectadas entre si, e os valores correspondentes de admitâncias para cada um desses modelos, 1/Zo e 1/(Zo+ R/4), contribuem apenas para os elementos da diagonal das matrizes.

A análise a seguir mostrará o comportamento para cada caso particular, considerando-se as características das barras terminais das linhas de transmissão.

- as duas barras apresentam valor desconhecido de tensão (figura 7.14-a)

A matriz $[Y_T]$ para o sistema está mostrada na figura 7.14-b). Para este caso, a matriz $[Y_{AA}]$ corresponde exatamente à matriz $[Y_T]$. Como não existem fontes de tensão conectadas a nenhuma das barras terminais, não existirá também a matriz $[Y_{AB}]$.

- uma das barras terminais apresenta valor desconhecido de tensão, enquanto a outra apresenta-se conectada a uma fonte de tensão (7.15-a)

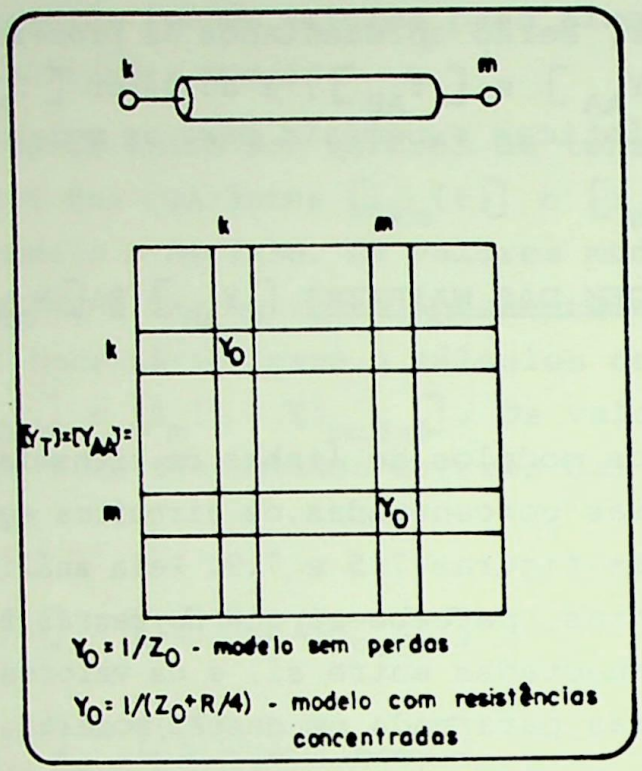


FIGURA 7.14 - Matrizes $[Y_T]$ e $[Y_{AA}]$ para uma linha de transmissão cujas barras terminais apresentam valores desconhecidos de tensão

As figuras 7.15-b e 7.15-c apresentam as matrizes $[Y_T]$ e $[Y_{AA}]$ para este caso. Para a matriz $[Y_{AB}]$ não existem elementos, visto que para essa matriz contribuem apenas os elementos que estão fora da diagonal na matriz $[Y_T]$.

Caso se considerasse a fonte de tensão conectada à barra k, a situação seria a mesma, bastando trocar as posições indicadas com m por k, na figura 7.15.

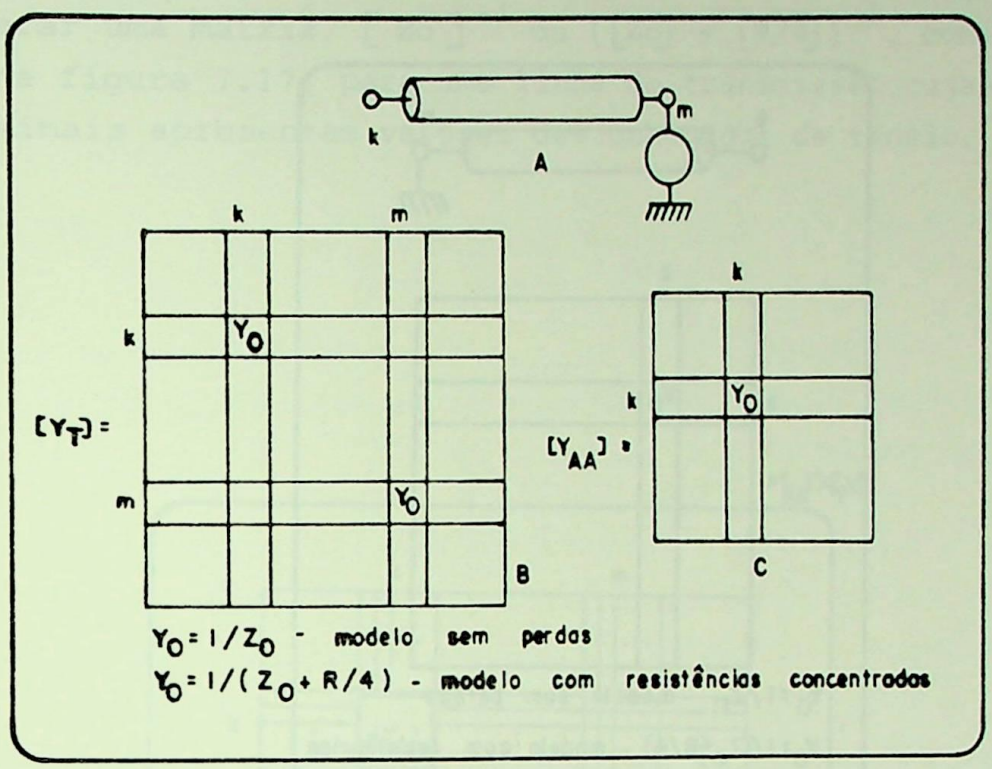


FIGURA 7.15 - Matrizes $[Y_T]$ e $[Y_{AA}]$ para uma linha de transmissão que apresenta uma das barras conectadas a uma fonte de tensão

- uma das barras terminais apresenta valor desconhecido de tensão, e a outra barra está conectada à terra (figura 7.16-a)

Neste caso, não existe nenhuma linha ou coluna correspondente à barra m na matriz $[Y_T]$. Portanto, a matriz $[Y_{AA}]$ será a própria matriz $[Y_T]$. Como não existem barras conectadas às fontes de tensão, não existem elementos na matriz $[Y_{AB}]$.

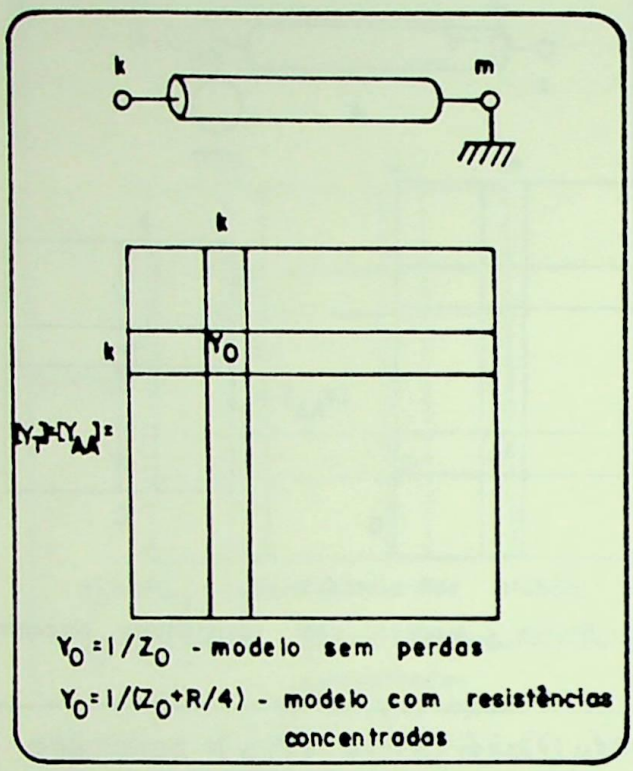


FIGURA 7.16 - Matrizes $[Y_T]$ e $[Y_{AA}]$ para uma linha de transmissão que apresenta uma das barras conectadas à terra

Os valores de admitâncias considerados nesses três casos, como indicado pelas figuras 7.14, 7.15 e 7.16, correspondem às admitâncias dos modelos sem perdas e com resistências concentradas.

Este equacionamento básico, apresentado através desses três casos, é válido apenas para sistemas monofásicos. Nessa situação, entra-se com um valor escalar na posição correspondente da matriz $[\,Y_{AA}\,]$.

Para um sistema com n fases, ao invés de se considerar apenas um valor escalar, 1/Zo ou 1/(Zo + R/4),deve-se considerar uma matriz, $[\ Zo\ ]^{-1}$ ou $([Zo] + [R/4])^{-1}$, como indicado na figura 7.17, para uma linha de transmissão cujas barras terminais apresentam valores desconhecidos de tensão.

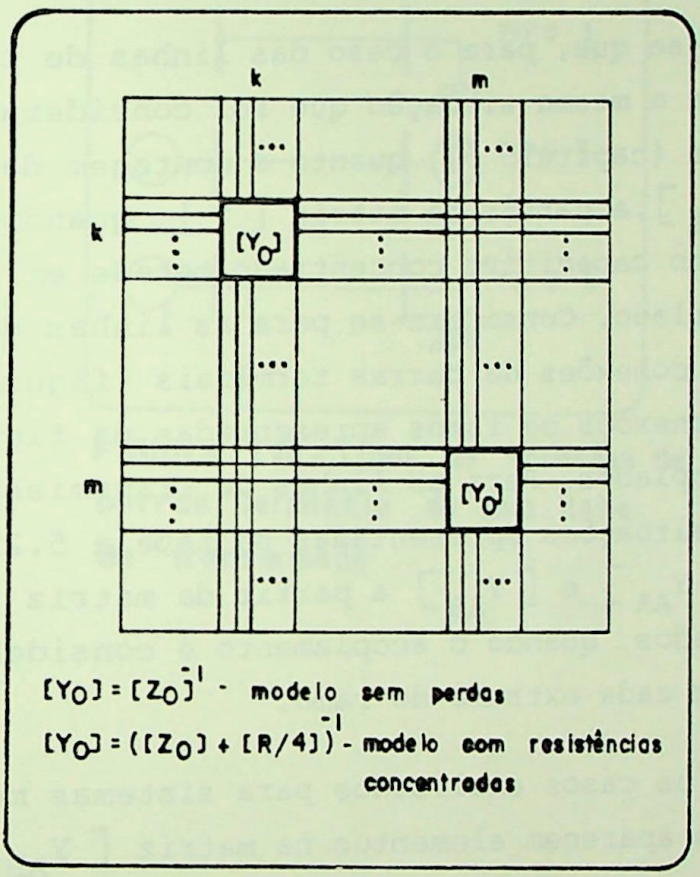


FIGURA 7.17 - Montagem da matriz de admitâncias para um sistema com n fases

Neste caso, os valores que entram nas matrizes devem estar em quantidades de fase. Para os modelos sem perdas e com resistências concentradas, respectivamente, tem-se :

$$[Zo]^{-1} = [Ti]\,[Zo_{modal}]^{-1}\,[Te]^{-1} \qquad (7.184)$$

$$([Zo] + [R/4])^{-1} = [Ti]\,([Zo_{modal}] + [R/4_{modal}])^{-1}\,[Te]^{-1} \qquad (7.185)$$

Os valores de $[Zo_{modal}]$ são calculados como indicado na equação (G.66) do apêndice G. Os valores de $[R/4_{modal}]$ são dados conhecidos do sistema.

Nota-se que, para o caso das linhas de transmissão a n fases, tem-se a mesma situação que foi considerada para os ramos acoplados (capítulo 5), quanto à montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$, a partir da matriz $[Y]$, quando se considera o acoplamento capacitivo concentrado metade em cada extremo do ramo acoplado. Considera-se para as linhas de transmissão 5 tipos de conexões de barras terminais (figura 7.18), semelhantes às conexões de ramos apresentadas na figura 5.15 para os ramos acoplados. Para as linhas de transmissão são válidas as mesmas situações apresentadas na tabela 5.2 (montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ a partir da matriz $[Y]$) para os ramos acoplados, quando o acoplamento é considerado concentrado metade em cada extremo do ramo.

Para os casos analisados para sistemas monofásicos, em nenhum deles aparecem elementos na matriz $[Y_{AB}]$. Já para sistemas a n fases, podem surgir situações onde aparecem elementos na matriz $[Y_{AB}]$, como os casos que são apresentados para o modelo de ramos acoplados, no capítulo 5, que apresenta maiores detalhes sobre estes casos.

Em termos computacionais, considerou-se uma única rotina para montagem das matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ para as linhas de transmissão e para o modelo de ramos acoplados (capítulo 5). Para o caso de sistemas monofásicos, considera-se a linha como sendo transposta, e assume-se uma matriz de transformação como a indicada na equação (7.165).

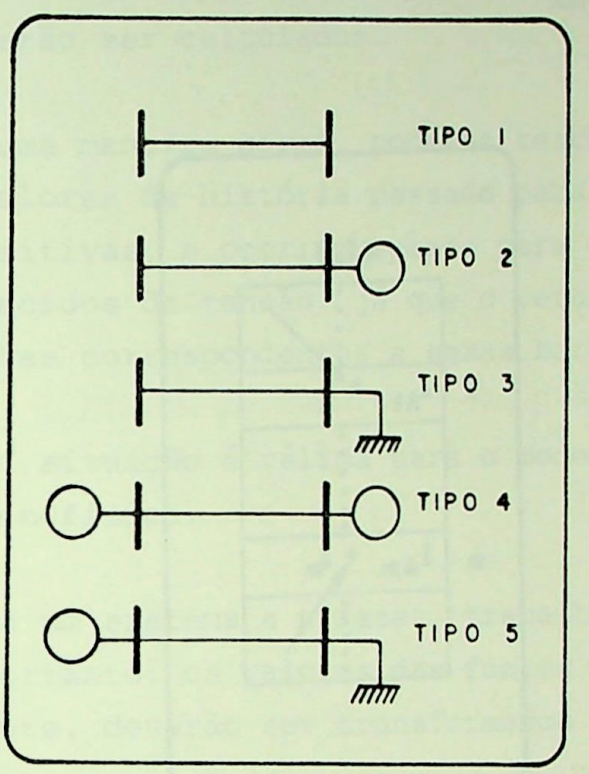


FIGURA 7.18 - Tipos de conexões de barras terminais de uma linha de transmissão

7.7.1.2 - MONTAGEM DO VETOR $[I_A]$

As fontes de história passada para os modelos de linhas de transmissão, $I_k(t - \tau)$ e $I_m(t - \tau)$, estão conectadas aos circuitos equivalentes desses modelos, como indicado nas

figuras 7.5 e 7.9, respectivamente, para os modelos sem perdas e com resistências concentradas. Como essas fontes estão conectadas entre a barra e a terra, e o sentido da corrente é para a terra, elas contribuirão para o vetor $[\ I_A\ ]$ com sinal positivo, como indicado na figura 7.19.

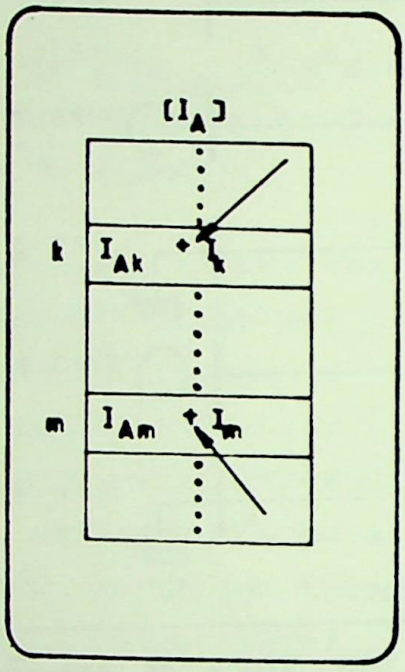


FIGURA 7.19 - Montagem do vetor $[I_A]$ para os modelos de linhas de transmissão

Para o caso apresentado na figura 7.19, considera-se que as duas barras terminais da linha apresentam valor desconhecido de tensão, e, nessa situação, tem-se para o vetor $[\ I_A\ ]$ uma contribuição $I_k(t - \tau)$ na posição k e uma contribuição $I_m(t - \tau)$ na posição m.

Quando apenas uma das barras (k ou m) apresentar valor desconhecido de tensão, a contribuição para o vetor $[I_A]$ será em valor positivo, porém apenas para uma das linhas do vetor (k ou m), dependendo de qual barra apresentar valor desconhecido de tensão.

Quando as duas barras apresentam valor conhecido de tensão (fonte ou terra), não existe nenhuma contribuição para o vetor $[\ I_A\ ]$. Embora, neste caso, os valores de $I_k(t - \tau)$ e $I_m(t - \tau)$ não sejam necessários para a montagem do vetor $[I_A]$, eles serão necessários para o cálculo de $i_{km}(t)$ e $i_{mk}(t)$, e portanto, deverão ser calculados.

De uma maneira geral, pode-se resumir que as contribuições dos valores de história passada para o vetor $[\ I_A\ ]$ serão sempre positivas, e ocorrem apenas para as barras com valores desconhecidos de tensão, já que o vetor $[\ I_A\ ]$ apresenta apenas linhas correspondentes a essas barras.

Esta situação é válida para o modelo de linha de transmissão monofásica.

Para um sistema a n fases, trabalha-se com quantidades modais. Portanto, os valores das fontes de história passada, inicialmente, deverão ser transformados em quantidades de fase :

$$[I_k(t - \tau)] = [Ti]\,[I_k(t - \tau)_{modal}] \qquad (7.186)$$

$$[I_m(t - \tau)] = [Ti]\,[I_m(t - \tau)_{modal}] \qquad (7.187)$$

Neste caso, ao invés de se entrar com um valor escalar no vetor $[\ I_A\ ]$, entra-se com um vetor, como mostrado na figura 7.20.

Deve-se observar, ainda, que para um sistema a n fases, são válidos os mesmos aspectos apresentados para o modelo monofásico, quanto ao tipo de barra terminal da linha de transmissão.

Tanto para o modelo monofásico como para o modelo a

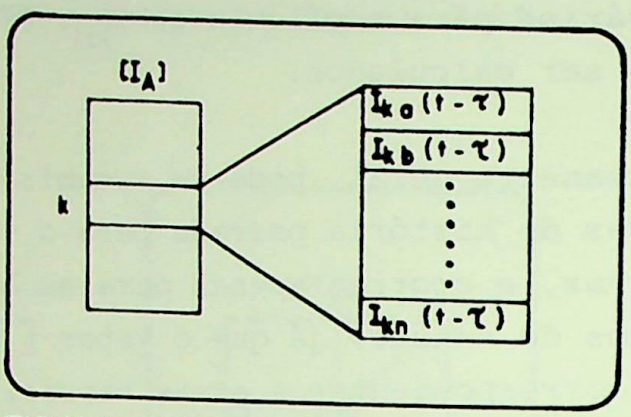


FIGURA 7.20 - Montagem do vetor $[I_A]$ para linhas de transmissão com n fases

n fases observa-se que os valores de história passada estão armazenados no seus respectivos vetores. Quando esses valores são necessários para a montagem de $[\ I_A\ ]$, nem sempre encontra-se no vetor o valor correspondente a $(t - \tau)$, pelo fato de que o intervalo de tempo Δt nem sempre é múltiplo inteiro de τ. Nesses casos particulares, deve-se proceder a uma interpolação, de forma a se obter o valor correto de história passada.

7.7.2 - INTERPOLAÇÃO PARA O CÁLCULO DOS VALORES DE HISTÓRIA PASSADA

Nas equações apresentadas para o modelo de parâmetros distribuídos, são necessários os valores de história passada,

$I_k(t - \tau)$ e $I_m(t - \tau)$. Para obtê-los, basta recorrer a uma posição nos vetores onde eles se encontram armazenados, como mostrado esquematicamente na figura 7.21-a. Para este caso, considera-se que o tempo de viagem da onda, τ, é um múltiplo inteiro do intervalo de integração Δt :

$$\tau = n\,\Delta t \qquad (7.188)$$

n - inteiro

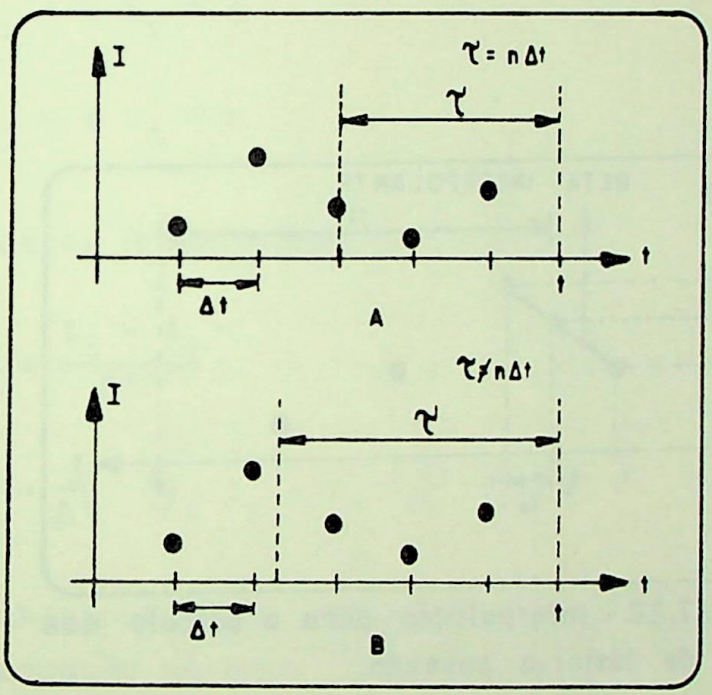


FIGURA 7.21 - Obtenção dos valores de história passada para $\tau = n\Delta t$ (A) e para $\tau \neq n\Delta t$ (B)

Caso τ não seja um múltiplo inteiro de Δt, ou seja :

$$\tau \neq n \Delta t \qquad (7.189)$$

como indicado esquematicamente na figura 7.21-b, deve-se recorrer a um processo de interpolação matemática para determinação dos valores de história passada no instante t. Como as tensões e correntes são funções contínuas, é de se esperar que não ocorram grandes variações de seus valores dentro de um intervalo Δt. Considerando-se que esse intervalo de tempo seja suficientemente pequeno, adota-se a interpolação linear entre os pontos t_i e t_j (figura 7.22), para determinação dos valores de história passada.

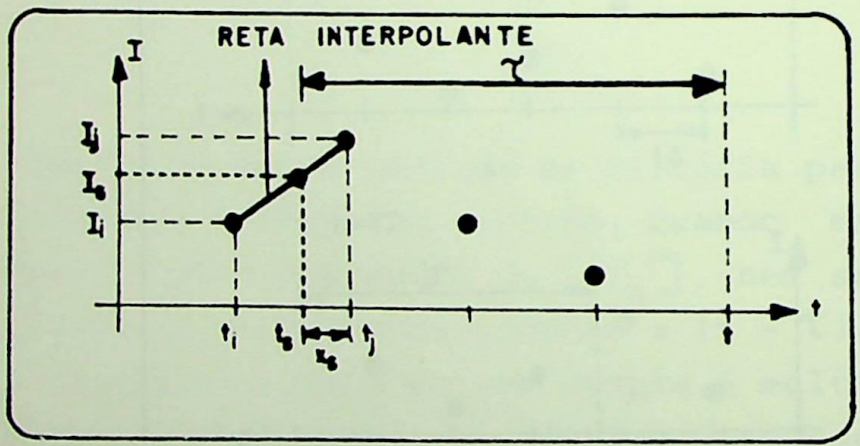


FIGURA 7.22 - Interpolação para o cálculo dos valores de história passada

O valor da grandeza interpolada será calculado da maneira apresentada a seguir. A equação da reta interpolante é definida como sendo :

$$y = ax + b \tag{7.190}$$

Da figura 7.22, obtém-se :

$$x = t_i \quad \Rightarrow \quad y = I_i \tag{7.191}$$

$$x = t_j \quad \Rightarrow \quad y = I_j \tag{7.192}$$

Substituindo-se esses valores na equação (7.190), obtém-se :

$$I_i = a\, t_i + b \tag{7.193}$$

$$I_j = a\, t_j + b \tag{7.194}$$

Dessas duas equações, obtém-se :

$$a = \frac{I_j - I_i}{\Delta t} \tag{7.195}$$

$$b = \frac{1}{\Delta t} \left[I_i\, t_j - I_j\, t_i \right] \tag{7.196}$$

Substituindo-se esses valores na equação (7.190), obtém-se a equação da reta interpolante :

$$I_s = \frac{I_j - I_i}{\Delta t}\, t_s + \frac{1}{\Delta t} \left[I_i\, t_j - I_j\, t_i \right] \tag{7.197}$$

Da figura 7.22, obtém-se o valor de t_s :

$$t_s = t_i + (\Delta t - x_s) \tag{7.198}$$

Para se determinar o número de vezes que Δt é maior que τ, faz-se :

$$N = \frac{\tau}{\Delta t} \tag{7.199}$$

Como está-se considerando o caso em que τ não é múltiplo inteiro de Δt, o número N apresentará uma parte inteira e uma parte decimal. A partir de sua parte decimal, é possível definir o valor de x_s :

$$x_s = |N - INT(N)| \Delta t \tag{7.200}$$

onde o valor INT(N) corresponde à parte inteira de N.

Para os valores de t_i e t_j, tem-se :

$$t_j = (t - \tau) + x_s \tag{7.201}$$

$$t_i = t_j - \Delta t \tag{7.202}$$

Portanto, com as equações (7.197) a (7.202), obtém-se o valor da grandeza a ser interpolada. O valor t corresponde ao tempo atual, para o qual está sendo calculado o valor de história passada.

No caso para o qual o valor de τ não é um múltiplo inteiro de Δt, deve-se armazenar uma posição a mais para permitir a interpolação, ou seja, como mostrado na figura 7.22, deve-se armazenar até a posição t_i, que corresponde ao valor I_i.

O processo de interpolação linear apresentado neste item apresenta bons resultados, já que tanto a tensão quanto a corrente apresentam-se quase que lineares entre dois instantes consecutivos de tempo.

O problema da interpolação poderá ser evitado, ajustando-se o valor de τ para o múltiplo inteiro mais próximo de Δt. Dessa forma, ter-se-ia :

$$\tau_{ajustado} = n \Delta t \tag{7.203}$$

que corresponde a um acréscimo $\Delta\tau$ no tempo de viagem da onda,

$$\Delta\tau = \tau_{ajustado} - \tau \tag{7.204}$$

Como o valor de τ é calculado em função do comprimento da linha, um aumento no tempo de viagem da onda corresponderá a um aumento no comprimento ℓ da linha :

$$\Delta\ell = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{LC}} \tag{7.205}$$

Dessa forma, os parâmetros totais da linha sofrerão acréscimos correspondentes :

$$L_{total} = L\ (\ell + \Delta\ell) \tag{7.206}$$

$$C_{total} = C\ (\ell + \Delta\ell) \tag{7.207}$$

$$R_{total} = R\ (\ell + \Delta\ell) \tag{7.208}$$

Caso essa alteração de comprimento seja muito grande, isso poderá alterar muito os resultados. Como os parâmetros da linha podem ser considerados dentro de uma precisão de $\pm$ 10%, qualquer arredondamento de τ que provoque uma variação de comprimento dentro dessa faixa poderá ser considerado aceitável, porém, mesmo assim a interpolação é preferível.

Normalmente, o modelo a parâmetros distribuídos deve

ser usado para uma linha de comprimento ℓ . Porém, às vezes,é importante o conhecimento dos valores de tensão em pontos intermediários da linha. Nesses casos, a linha poderá ser dividida em várias secções de parâmetros distribuídos, como mostrado na figura 7.23.

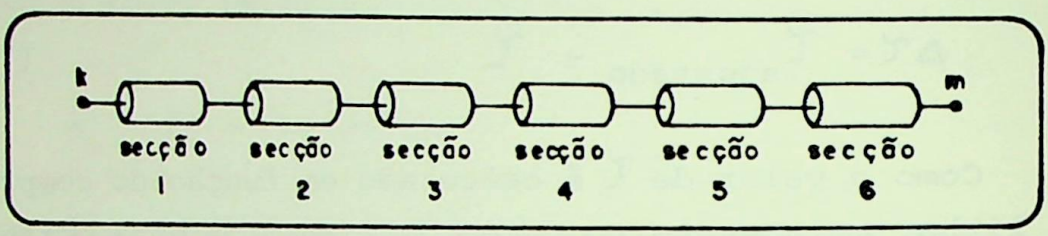


FIGURA 7.23 - Linha de transmissão dividida em várias secções de parâmetros distribuídos

Adotando-se para cada secção um tempo de viagem da onda τ que não seja um múltiplo inteiro de Δt, aparecerá no terminal receptor um erro acumulado correspondente à propagação de erros em cada uma das secções consideradas.

Para contornar os problemas de interpolação, nesse caso, podem ser adotadas as seguintes medidas :

A - definir o tempo de viagem da onda em cada secção , como sendo igual a Δt ou um múltiplo inteiro de Δt.

B - caso não seja possível proceder como no item A ,

pode-se ajustar o valor de τ para o múltiplo inteiro de Δt mais próximo.

C - uma melhor alternativa seria definir o tempo de viagem da onda, τ, em todas as secções, como sendo múltiplo inteiro de Δt, menos na última secção, para a qual o tempo deveria ser a diferença entre τ_{total} e a soma dos tempos τ das secções anteriores.

Por exemplo, considere-se o caso de uma linha com τ igual a 113ms. Para o valor de Δt adotou-se 10ms. A linha será dividida em 11 secções iguais. Para as 10 primeiras adota se o tempo de viagem da onda igual a 10ms. Para a última secção, adota-se como τ o tempo restante, ou seja :

$$\tau = 113 - 10 \times 10 = 13ms$$

Portanto, não se tem um múltiplo de Δt na última secção. Dessa forma, é necessário uma interpolação apenas para a última secção da linha, sendo que o erro ficará restrito apenas a esta última secção, não havendo problemas de acumulação de erros, o que aconteceria se as secções apresentassem um tempo de viagem da onda que não fosse múltiplo inteiro de Δt.

A seguir, serão apresentados três casos exemplos, através dos quais é possível identificar os problemas que aparecem devido à interpolação.

Caso 1 - Para este caso, será considerada uma linha de transmissão monofásica (figura 7.24-a) em que o tempo de viagem da onda é igual a 15ms. Para a impedância de surto, adotou-se $Zo=1\Omega$ apenas para facilitar os cálculos. Para o intervalo de integração, adotou-se 3ms. As equações consideradas para esse caso são aquelas do modelo sem perdas,

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

(7.19) a (7.22). Da equação de solução geral (4.21), resulta:

$$[Y_{AA}]\,[e_A] = -\,[I_A] \qquad (7.209)$$

ou ainda :

$$e_m = -\,I_{km}(t - \tau) \qquad (7.210)$$

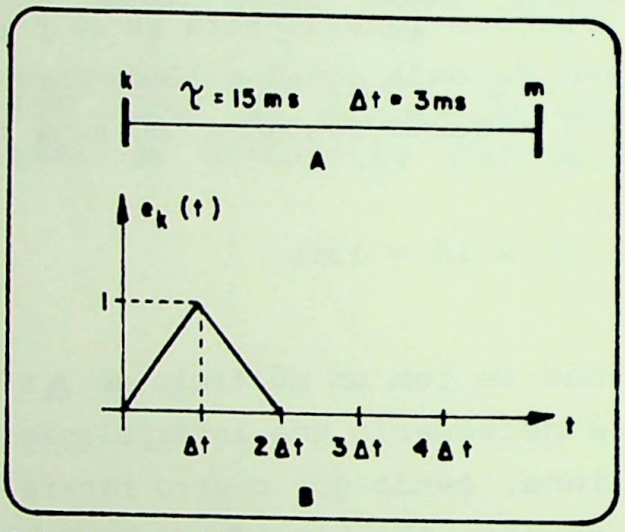


FIGURA 7.24 - Caso I - exemplo dos problemas de interpolação: A-) linha de transmissão, B-) tensão no terminal emissor (k)

Para a barra emissora, considerou-se uma fonte de tensão com a forma de onda apresentada na figura 7.24-b. As condições iniciais foram consideradas nulas.

Através das equações mencionadas, chegou-se aos valores apresentados na tabela 7.3. A tensão no terminal receptor da linha está mostrada na figura 7.25. Nota-se que esta é igual a 2 pu, pois, como a linha está aberta, nesse ponto a tensão será a soma das componentes incidente e refletida. Observa-se que a mesma forma de onda do emissor (figura 7.24) atingiu o terminal receptor da linha após decorrido o tempo τ.

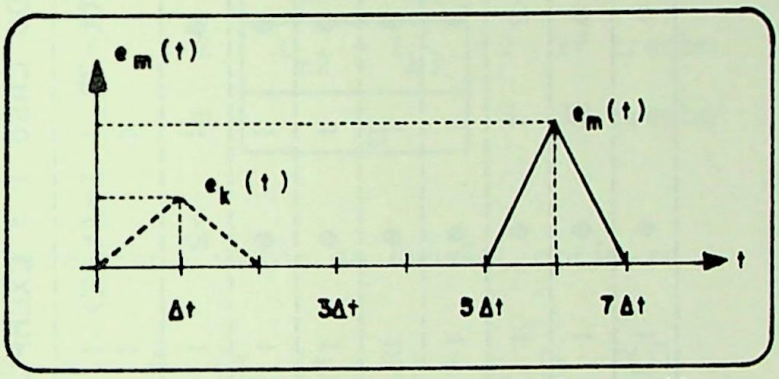


FIGURA 7.25 - Caso 1 - exemplo dos problemas de interpolação - resultados de tensão no terminal receptor da linha (barra m)

Caso 2 - Neste caso considera-se a mesma linha de transmissão do caso 1, dividida em três secções iguais (figura 7.26-a), para as quais o tempo de viagem da onda é 5ms. Para o intervalo de integração, adotou-se 2,5ms. Neste caso, considera-se também o modelo sem perdas. De acordo com a equação de solução geral, resultam as seguintes equações para análise deste caso :

TABELA 7.3 - RESULTADOS DO CASO 1 : EXEMPLO DOS PROBLEMAS DE INTERPOLAÇÃO

INTERVALO	TEMPO (us)	Ik(t-τ)	Im(t-τ)	ek(t)	em(t)	ikm(t)	imk(t)
1	3.0	0	-2	1	0	1	0
2	6.0	0	0	0	0	0	0
3	9.0	0	0	0	0	0	0
4	12.0	0	0	0	0	0	0
5	15.0	0	0	0	0	0	0
6	18.0	-2	0	0	2	0	0
7	21.0	0	0	0	0	0	0
8	24.0	0	0	0	0	0	0

$$[Y_{AA}]\ [e_A] = -[I_A] \tag{7.211}$$

$$[Y_{AA}] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & m \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline & 2 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \tag{7.212}$$

$$[e_A] = \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline e_2 \\ \hline e_m \\ \hline \end{array} \tag{7.213}$$

$$[I_A] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ m \end{array} \begin{array}{|c|} \hline I_{m1} + I_{k2} \\ \hline I_{m2} + I_{k3} \\ \hline I_m \\ \hline \end{array} \begin{array}{ll} 1 & 1º \text{ trecho} \\ 2 & 2º \text{ trecho} \\ 3 & 3º \text{ trecho} \end{array} \tag{7.214}$$

Para cada valor de tensão, obtém-se :

$$e_1 = -\frac{1}{2}\ [I_{m1}(t - \tau) + I_{k2}(t - \tau)] \tag{7.215}$$

$$e_2 = -\frac{1}{2}\ [I_{m2}(t - \tau) + I_{k3}(t - \tau)] \tag{7.216}$$

$$e_3 = -\ [I_m(t - \tau)] \tag{7.217}$$

A solução desse conjunto de equações resulta os valores apresentados na tabela 7.4. Os valores de tensão estão apresentados na figura 7.26-b. Nota-se que os valores encontrados neste caso, para o terminal m, são exatamente iguais aos valores encontrados no caso 1 (figura 7.25). Ressalta-se, neste exemplo, o fato de τ ser um múltiplo inteiro de Δt, caso onde não ocorrem aproximações devidas à interpolação.

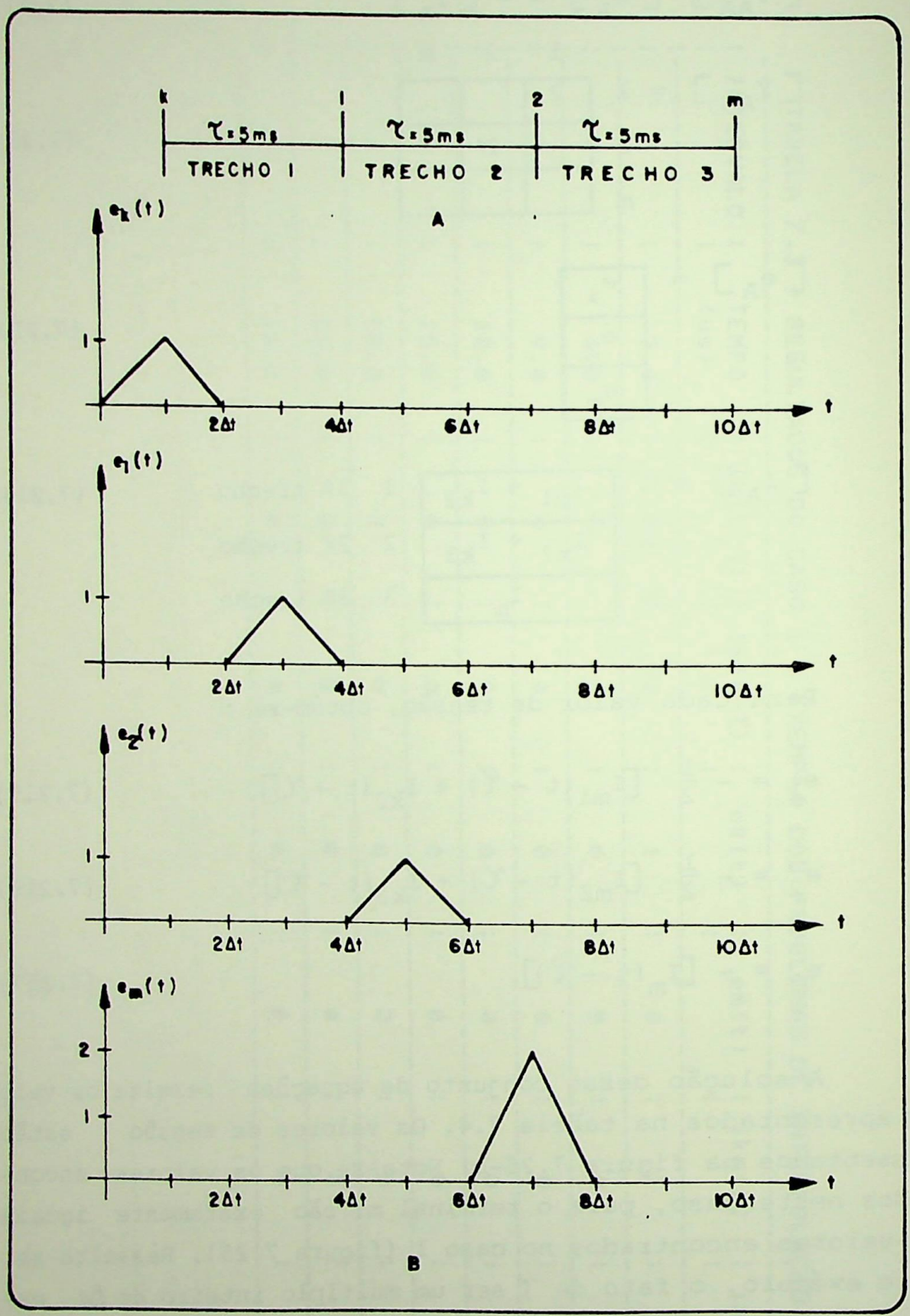


FIGURA 7.26 - Caso 2 - exemplo dos problemas de interpolação: A-)linha de transmissão dividida em três secções, B-) tensões nos terminais das secções

TABELA 7.4 - RESULTADOS DO CASO 2 : EXEMPLO DOS PROBLEMAS DE INTERPOLAÇÃO

INTERVALO	TEMPO	TRECHO 1						TRECHO 2						TRECHO 3					
	(us)	Ik1(t-ϑ)	Im1(t-ϑ)	ek(t)	e1(t)	ik1(t)	Ik(t)	Ik2(t-ϑ)	Im2(t-ϑ)	e1(t)	e2(t)	i12(t)	i21(t)	Ik3(t-ϑ)	Im3(t-ϑ)	e2(t)	em(t)	i2m(t)	Im2(t)
1	2.5	0	-2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
2	5.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	7.5	0	0	0	1	0	-1	0	-2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	10.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	12.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	-2	1	0	1	0
6	15.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	17.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	2	0	0
8	20.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Deve-se observar, ainda, que a forma de onda de tensão no terminal emissor é a mesma que foi considerada para o caso 1, figura 7.24-b. Porém, como os intervalos adotados nos dois casos são diferentes, 3ms para o caso 1 e 2,5ms para o caso 2, o pico de tensão no terminal emissor ocorre em tempos diferentes, 2,5ms para o caso 1 e 3,0ms para o caso 2. Consequentemente, para o terminal receptor esse pico também ocorrerá em tempos diferentes, 18ms para o caso 1 e 17,5ms para o caso 2. Porém, em ambos os casos, a forma de onda no terminal receptor é a mesma, sendo que o pico máximo nesse terminal ocorre exatamente 15ms após ter ocorrido no terminal emissor, o que corresponde exatamente ao tempo de viagem da onda.

Caso 3 - Será considerado o mesmo exemplo do caso 2, alterando-se o valor de Δt para 3ms. A tabela 7.5 apresenta os valores resultantes para este caso. Os valores de tensão em cada barra estão apresentados na figura 7.27. Nota-se, por essa figura, que os valores de tensão se apresentam distorcidos devido ao fato de que o tempo de viagem da onda (τ) em cada trecho não é múltiplo inteiro de Δt ($\tau \neq n \Delta t$).

Para o caso 3, é válida a mesma observação feita para o caso 2, em relação à forma de onda de tensão no terminal emissor da linha e do valor do intervalo de tempo Δt. Neste caso, o pico de tensão no terminal emissor ocorre em 3ms, e no terminal receptor ocorre em 18ms. Nota-se, portanto, que o pico no terminal receptor ocorre 15ms após ter ocorrido no terminal emissor, o que corresponde ao tempo de viagem da onda.

Devido aos problemas de interpolação, o pico máximo do valor de tensão no extremo da linha (0.888) é 55,5 % menor que o valor encontrado para os casos 1 e 2 (2.0). Nota-se, também, devido à interpolação, que a forma de onda apresenta-se distorcida no terminal receptor.

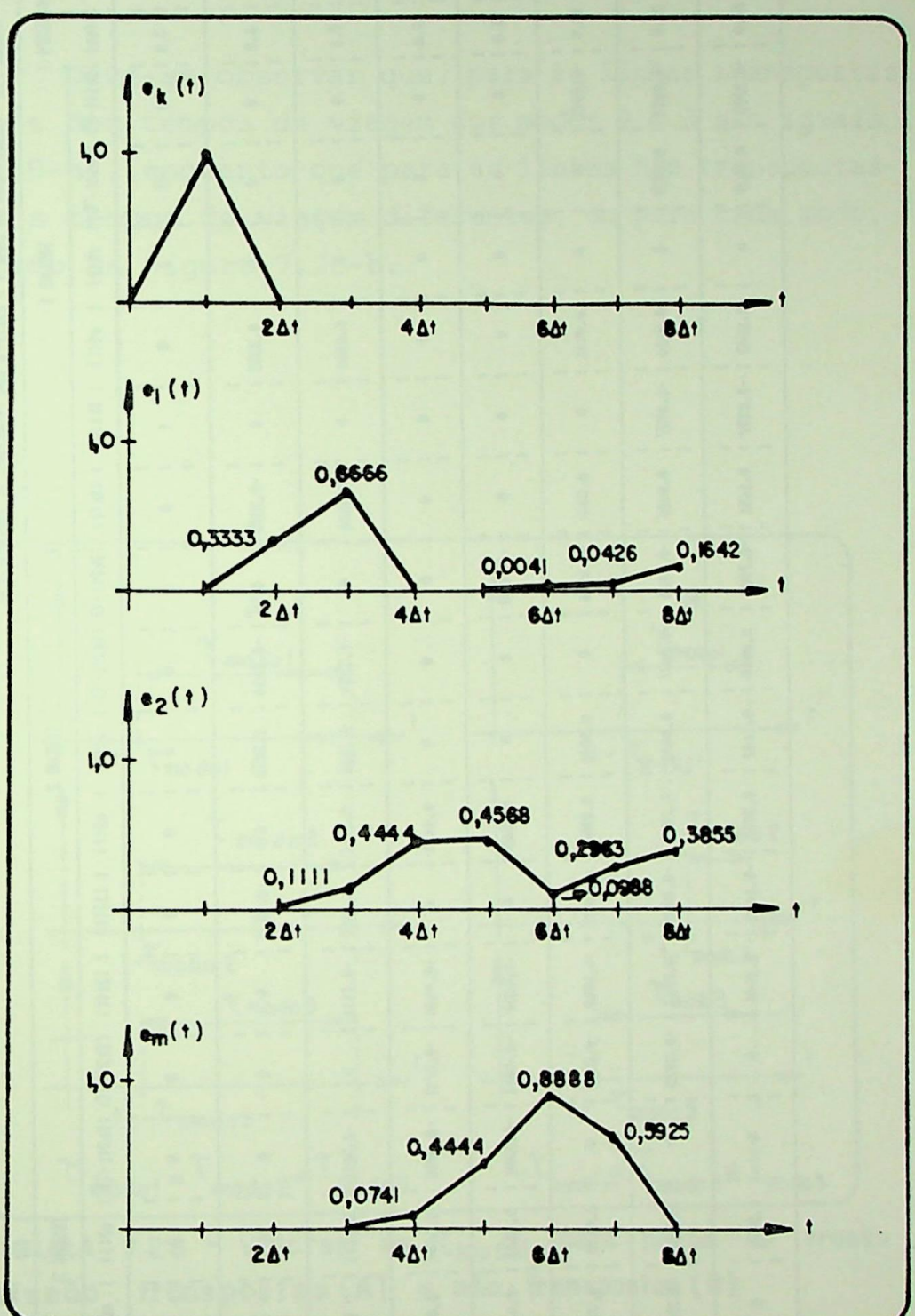


FIGURA 7.27 - Caso 3 - exemplo dos problemas de interpolação - resultados de tensão

TABELA 7.5 - RESULTADOS DO CASO 3 : EXEMPLO DOS PROBLEMAS DE INTERPOLAÇÃO

INTERVALO	TEMPO	TRECHO 1						TRECHO 2						TRECHO 3					
	(us)	Ih1(t-Ď	Ia1(t-Ď	e1(t)	e1(t)	ih1(t)	iIh(t)	Ih2(t-Ď	Ia2(t-Ď	e1(t)	e2(t)	i12(t)	i21(t)	Ih3(t-Ď	Ia3(t-Ď	e2(t)	e3(t)	i2a(t)	ia2(t)
1	3.0	0	-2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	6.0	0	0	0	0.3333	0	-0.3333	0	-0.6666	0.3333	0	0.3333	0	0	0	0	0	0	0
3	9.0	0	0	0	0.6666	0	-0.6666	0	-1.3334	0.6666	0.1111	0.6666	-0.1111	0	-0.2222	0.1111	0	0.1111	0
4	12.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.4444	0	-0.4444	-0.0741	-0.0000	0.4444	0.0741	0.4444	0
5	15.0	0	0	0	0	0	0	-0.0248	0	0	0.4568	0	-0.4320	-0.4444	-0.0000	0.4568	0.4444	0.4320	0
6	18.0	-0.0082	0	0	0.0041	0	0.0041	-0.1976	0	0.0041	0.0988	-0.0042	0.0988	-0.0000	0	0.0988	0.0000	-0.0988	0
7	21.0	-0.0852	0.0027	0	0.0426	-0.0027	0.0426	-0.5926	-0.0027	0.0426	0.2963	-0.0398	0.2963	-0.5925	0	0.2963	0.5925	-0.2963	0
8	24.0	-0.3293	0.0339	0	0.1642	-0.0339	0.1651	-0.7901	0.0009	0.1642	0.3955	-0.1651	0.3946	0	0	0.3955	0	-0.3955	0

Para um sistema com n fases, são válidas as mesmas observações, diferenciando-se apenas no fato de que os valores $(t - \tau)$ estão em quantidades modais, e, portanto, cada um dos modos deverá ser tratado como um sistema monofásico.

Deve-se observar que, para as linhas transpostas, os valores dos tempos de viagem dos modos 2 e 3 são iguais (figura 7.28-a), enquanto que para as linhas não transpostas têm-se três tempos de viagem diferentes, um para cada modo, como mostrado na figura 7.28-b.

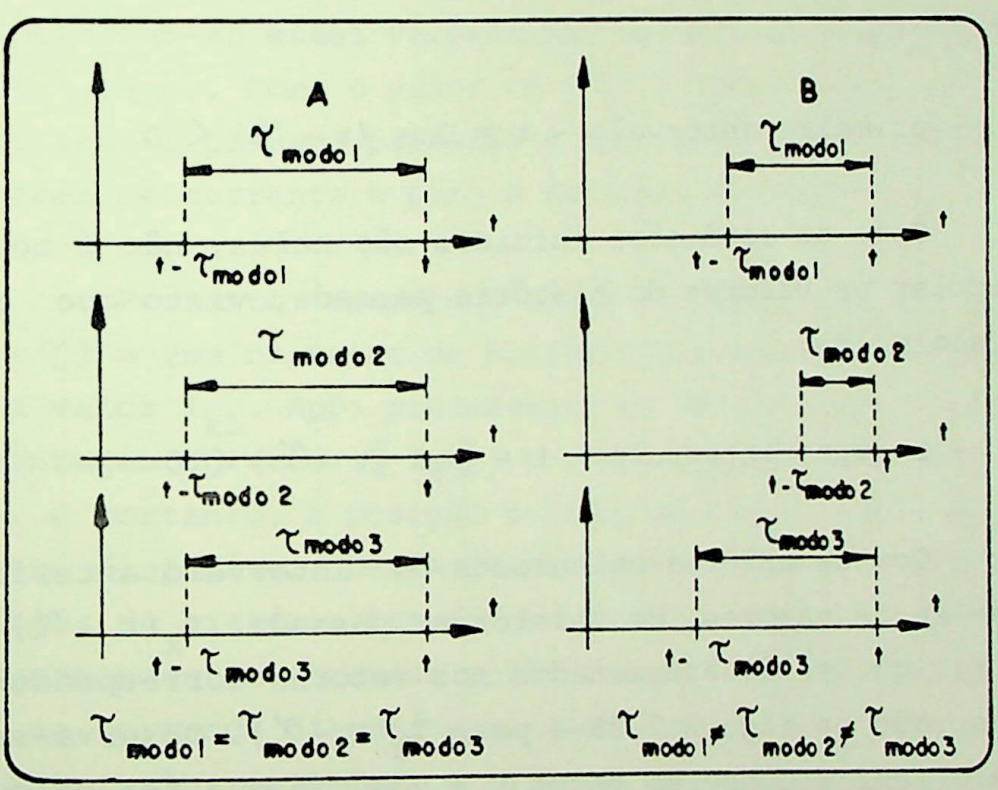


FIGURA 7.28 - Valores de τ_{modal} para linhas de transmissão transpostas (A) e não transpostas (B)

7.7.3 - ARMAZENAMENTO DOS VALORES DE HISTÓRIA PASSADA

Os valores de história passada, $[I_k(t - \tau)_{modal}]$ e $[I_m(t - \tau)_{modal}]$, são calculados a cada intervalo de tempo, e serão necessários apenas no tempo $(t - \tau)$, para o cálculo dos valores de $[i_{km}(t)_{modal}]$ e $[i_{mk}(t)_{modal}]$, e para a montagem do vetor $[I_A]$. Torna-se necessário, portanto, armazenar todo o conjunto de valores correspondentes ao intervalo de tempo entre $(t - \tau)$ e t.

Suponha-se, por exemplo, que se esteja analisando um caso no qual se adotou Δt igual a 2ms, e que apresenta uma linha de transmissão monofásica com τ igual a 6ms. O processamento dos valores de história passada se faz da seguinte maneira :

- primeiro intervalo - t = 2ms $(t - \tau) < 0$

Como as condições iniciais são nulas, não é necessário calcular os valores de história passada, visto que esses também são nulos.

- segundo intervalo - t = 4ms $(t - \tau) < 0$

Com os valores calculados no intervalo anterior, calculam-se os valores de história passada, $I_k(t - \tau)$ e $I_m(t - \tau)$, que serão armazenados nos vetores correspondentes, como mostrado na figura 7.29-a para $I_k(t - \tau)$. Observa-se que esse valor corresponde ao tempo t = 2ms, já que foi calculado em função de valores definidos no intervalo anterior. Como $t - \tau < 0$, os valores de história passada não contribuirão para o cálculo dos valores de corrente, nem para a montagem do vetor $[I_A]$.

- terceiro intervalo - t = 6ms $(t - \tau) = 0$

Tem-se a mesma situação dos intervalos anteriores . Novamente calculam-se os valores de história passada e armazenam-se os mesmos nos vetores correspondentes (figura 7.29-b). Esses valores correspondem ao tempo t = 4ms, pois foram calculados em função dos valores definidos no intervalo anterior. Como $(t - \tau) = 0$, os valores de história passada não contribuirão para o cálculo dos valores de corrente, e nem para a montagem do vetor $[I_A]$.

- quarto intervalo - t = 8ms $(t - \tau) = 2ms$

Inicialmente, calculam-se os valores de história passada em função dos valores definidos no intervalo anterior, e armazenam-se esses valores nos vetores correspondentes (figura 7.29-c). Como o valor $(t - \tau)$ é igual a 2ms, os valores de história passada passarão a contribuir para o cálculo dos valores de corrente e para a montagem do vetor $[I_A]$.

Portanto, recorrendo-se à posição correspondente a $(t - \tau) = 2ms$ no vetor de história passada $I_k(t - \tau)$, encontra-se o valor I_{kl}. Após processados os cálculos das correntes e a montagem do vetor $[I_A]$, o valor I_{kl} não será mais necessário, e portanto, a posição correspondente no vetor $I_k(t - \tau)$ estará disponível. Dessa forma, não é necessário armazenar os valores de história passada de maneira sequencial nos vetores correspondentes, bastará então reaproveitar as posições que vão se tornando disponíveis. Assim sendo, para o quinto e sexto intervalos de tempo, o vetor de história passada $I_k(t - \tau)$ fica como indicado nas figuras 7.29-d e 7.29-e. Embora a figura mostre apenas o vetor $I_k(t - \tau)$, o processo é o mesmo para o vetor $I_m(t - \tau)$.

Nota-se, portanto, que não é necessário definir vetores muito grandes, em termos computacionais, para armazena-

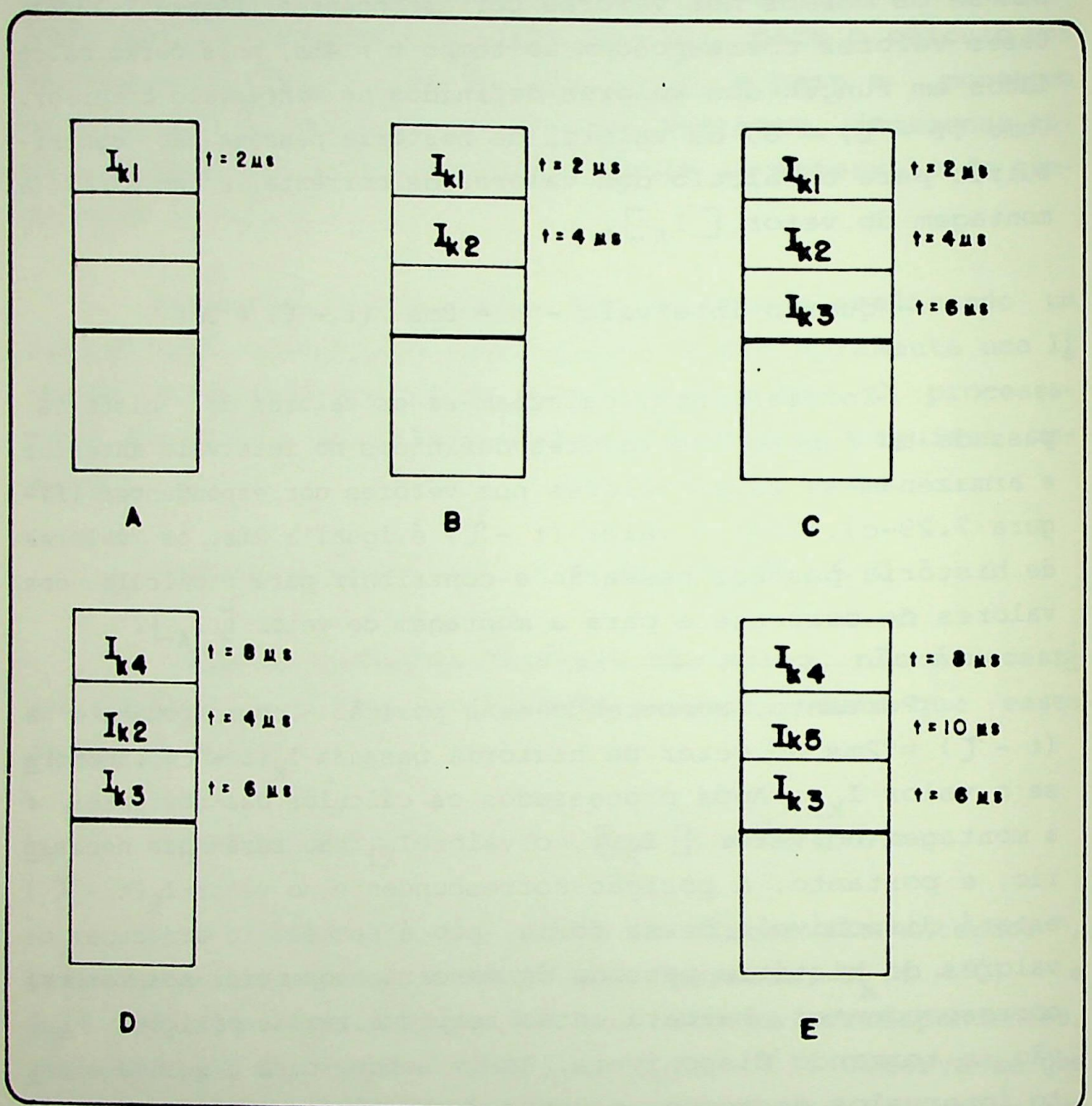


FIGURA 7.29 - Vetor $I(t-\tau)$ - valores de história passada calculados no intervalo n de tempo, em função dos valores calculados no intervalo n - 1, A-) n=2, B-) n=3, C-) n=4, D-) n=5, E-) n=6

mento dos valores de história passada, já que, recorrendo a um rodízio e a uma redistribuição das posições que vão-se tornando disponíveis, torna-se necessário armazenar apenas um número de valores correspondente à relações $\tau/\Delta t$. Neste exemplo (figura 7.29), a relação vale 3, portanto, serão necessárias apenas três posições nos vetores de história passada, $I_k(t - \tau)$ e $I_m(t - \tau)$.

A maior vantagem desse sistema de rodízio é o reduzido número de posições necessárias para armazenar os valores de história passada, o que reduz os gastos de memória. Caso se adotasse o processo de armazenamento sequencial, o número de posições seria muito superior e poderia até atingir valores proibitivos.

Nota-se nas figuras 7.21-b e 7.22, para os casos em que τ não é múltiplo inteiro de Δt, que é necessário recorrer a uma interpolação linear para se calcularem os valores de história passada no instante $t - \tau$, que serão necessários para o cálculo dos valores de corrente e para a montagem do vetor $[I_A]$. Nesses casos, é necessário armazenar um valor a mais nos vetores de história passada. Este procedimento corresponde a aproximar para o inteiro superior mais próximo o valor da relação $\tau/\Delta t$, que define o número de posições necessárias nos vetores de história passada.

Para sistemas com n fases, por exemplo sistemas trifásicos, tem-se a situação mostrada na figura 7.30.

Neste caso, tem-se, para cada um dos valores do vetor $[I_k(t - \tau)]$, a mesma situação indicada na figura 7.29, ou seja, em cada intervalo de tempo para o qual $(t - \tau) > 0$, existe uma posição no vetor de história passada I_k que define o valor de $I_k(t - \tau)$. Para o exemplo trifásico da figura 7.30, existem três conjuntos de posições no vetor de história passada, uma para cada modo, com tamanho definido pela relação

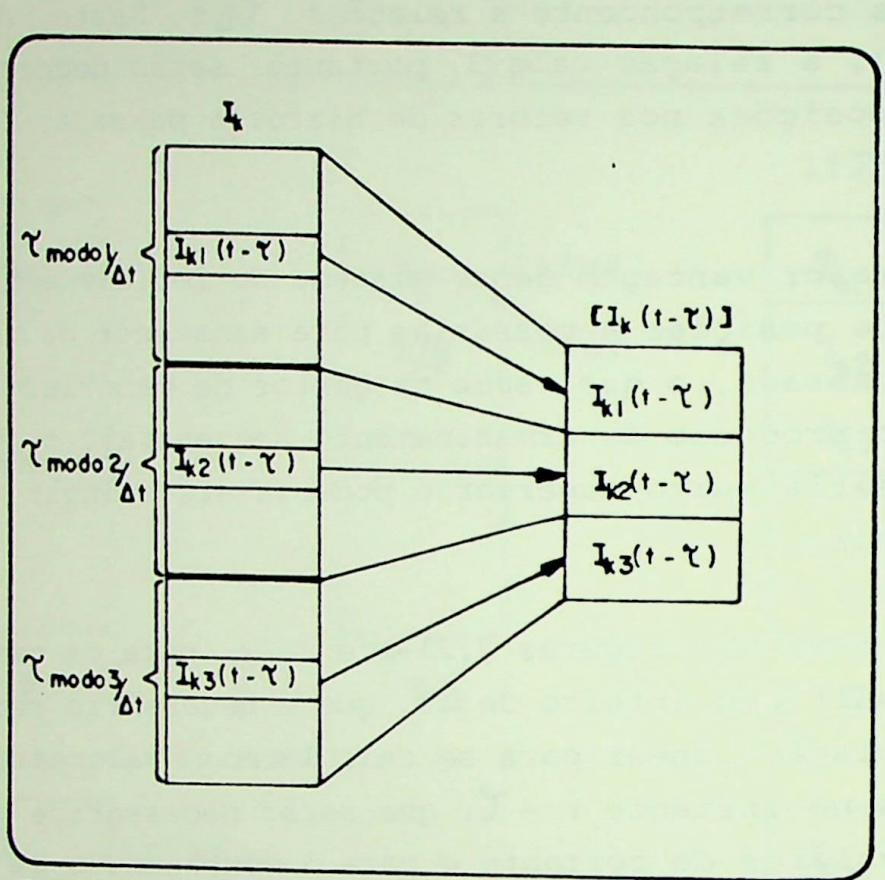


FIGURA 7.30 - Vetor de armazenamento dos valores de história passada para sistemas com n fases

$\tau_{modoi}/\Delta t$. Embora o exemplo considere o valor $I_k(t-\tau)$, o processo é o mesmo para o valor $I_m(t-\tau)$. São válidas as mesmas observações do caso monofásico, quanto à criação de uma posição a mais para o caso de τ_{modoi} não ser um múltiplo inteiro de Δt.

7.8 - EXEMPLO

Como exemplo para o modelo de linhas de transmissão, será considerada a linha de transmissão transposta apresentada na figura 7.31. Os parâmetros modais por unidade de comprimento são :

- sequência zero

$X_L = 1,878\ \Omega/km$

$B_c = 0,19\ 10^{-11}$ MHO/km

- sequência positiva

$X_L = 0,91923\ \Omega/km$

$B_c = 0,24\ 10^{-11}$ MHO/km

Observa-se que, para o modelo de linhas transpostas, os parâmetros modais são os mesmos obtidos através da transformação de componentes simétricas, daí o fato de receberem os nomes de sequência positiva e zero.

Como a resistência da linha é nula, será utilizado o modelo sem perdas. Ressalta-se aqui, novamente, que, para o modelo com perdas, embora seja fornecido o valor da resistência por unidade de comprimento, o modelo considera o valor total de resistência da linha,concentrada em três pontos diferentes (item 7.3.2).

- comprimento da linha - 60 km

- fontes de tensão senoidal

$e_1 = 281,691\ \text{sen}(\omega t - 90^{\circ})$

$$e_2 = 281,691 \text{ sen } (\omega t - 210^{\circ})$$

$$e_3 = 281,691 \text{ sen } (\omega t + 30^{\circ})$$

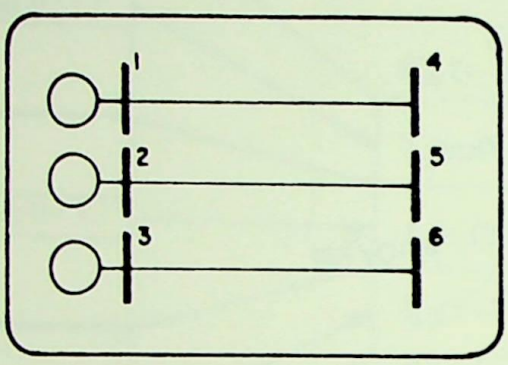


FIGURA 7.31 - Linha de transmissão considerada como exemplo para desenvolvimento dos cálculos dos modelos de linhas

Adotou-se para o intervalo de integração Δt, o valor $0,2\ 10^{-6}$ s.

Os valores correspondentes de indutância e capacitância serão :

- sequência zero

$$L_o = 4,9815497\ 10^{-3}\ H$$

$$C_o = 5,0399065\ 10^{-15}\ F$$

- sequência positiva

$$L_1 = 2,4383333\ 10^{-3}\ H$$

$$C_1 = 6,3661977\ 10^{-15}\ F$$

Da equação (G.66), obtêm-se os valores das impedâncias de surto modal.

$$Zo_{modo0} = 9,9419367\ 10^{+5}$$

$$Zo_{modo1} = Zo_{modo2} = 6,1888004\ 10^{+5}$$

Portanto, a matriz de impedâncias de surto em quantidades modais será :

$$[Zo_{modal}] = \begin{bmatrix} 9,9419367\ 10^{+5} & & \\ & 6,1888004\ 10^{+5} & \\ & & 6,1888004\ 10^{+5} \end{bmatrix}$$

Das equações (7.12) e (7.16),obtêm-se os valores de velocidade modal de propagação e do tempo de progagação modal , para cada um dos modos :

$$v_{modo0} = 1,9957518\ 10^{+8}\ km/s$$

$$v_{modo1} = v_{modo2} = 2,5381273\ 10^{+8}\ km/s$$

$$\tau_{modo0} = 3,0063859\ 10^{-7}\ s$$

$$\tau_{modo1} = \tau_{modo2} = 2{,}3639476\ 10^{-7}\ s$$

Como os valores de τ não são múltiplos inteiros de Δt, haverá a necessidade de interpolação para o cálculo dos valores de história passada.

Para este caso, como a linha de transmissão é transposta, utiliza-se a transformação de Karrenbauer (equações G.82 e G.83).

A partir de $[Zo_{modal}]$, obtém-se :

$$[Zo_{modal}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}0058402\ 10^{-6} & & \\ & 1{,}615822\ 10^{-6} & \\ & & 1{,}615822\ 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Da equação (7.184), obtém-se $[\ Zo\ ]^{-1}$ em quantidades de fase, ou seja :

$$[\ Zo\ ]^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}4124947\ 10^{-6} & -2{,}0332727\ 10^{-7} & -2{,}0332727\ 10^{-7} \\ -2{,}0332727\ 10^{-7} & 1{,}4124947\ 10^{-6} & -2{,}0332727\ 10^{-7} \\ -2{,}0332727\ 10^{-7} & -2{,}0332727\ 10^{-7} & 1{,}4124947\ 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Das equações (7.150), (7.151) e (7.152), obtêm-se as matrizes $[\ A\ ]$, $[\ B\ ]$ e $[\ C\ ]$:

$$[A] = [Zo_{modal}]^{-1}$$

$$[B] = -[A]$$

$$[C] = -[U]$$

onde $[U]$ é a matriz unitária.

Ressalta-se que, como neste exemplo considera-se um modelo de linha de transmissão sem perdas (R = 0), as matrizes $[D]$ e $[E]$ serão nulas, como mostrado nas equações (7.153) e (7.154).

De acordo com a figura (7.29), apenas as barras 4, 5 e 6 apresentam-se com valor desconhecido de tensão, e, portanto, apenas essas barras apresentam linhas e colunas correspondentes na matriz $[Y_{AA}]$, a qual será igual à inversa de $[Zo]$:

$$[Y_{AA}] = [Zo]^{-1} \qquad (7.218)$$

De acordo com o circuito equivalente das linhas de transmissão, decorrente da aplicação do método das características de Bergeron às equações diferenciais de uma linha de transmissão, as barras terminais desta ficam totalmente desconectadas. Dessa forma, não existirão elementos na matriz $[Y_{AB}]$.

Fatorando-se a matriz $[Y_{AA}]$, de acordo com o processo apresentado no apêndice D, obtém-se a seguinte tabela de fatores :

	coluna 1	coluna 2	coluna 3
linha 1	$7,0796726.10^{+5}$	$-1,4394904.10^{-1}$	$-1,4394904.10^{-1}$
linha 2	$-2,0332727.10^{-7}$	$7,2294769.10^{+5}$	$-1,6815476.10^{-1}$
linha 3	$-2,0332727.10^{-7}$	$-2,0625417.10^{-6}$	$7,4398464.10^{+5}$

A partir da tabela de fatores, e de acordo com o apêndice D, obtêm-se as seguintes matrizes fatores :

$$[U_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1,4394904\ 10^{-1} & 1,4394904\ 10^{-1} \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[U_2] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1,6815476\ 10^{-1} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 7,0796726\ 10^{+5} & & \\ & 7,2294769\ 10^{+5} & \\ & & 7,4398464\ 10^{+5} \end{bmatrix}$$

De acordo com o apêndice E, com a equação a seguir, obtém-se os valores de tensão nas barras com valores desconhecidos :

$$[U_1]\ [U_2]\ [D]\ [U_2]^t\ [U_1]^t\ [I] = [e_A] \qquad (7.219)$$

onde o vetor $[I]$ corresponde ao termo independente da equação de solução geral, (4.21).

A seguir, serão desenvolvidos os cálculos para os dois primeiros intervalos de tempo, de acordo com o fluxograma apresentado na figura 7.13.

A - primeiro intervalo de tempo - $t = 0{,}2\ 10^{-6}$

Para as correntes de história passada, $[I_k(t - \tau)]$ e $[I_m(t - \tau)]$, não é necessário nenhum cálculo para o primeiro intervalo, visto que todas as condições iniciais são consideradas nulas.

Para o vetor $[e_B]$, de acordo com a equação (3.1), obtém-se :

$$[e_B] = \begin{array}{|l|l} \hline 2{,}1239001.10^{-2} & \text{(barra 1)} \\ \hline -2{,}4396218.10^{+2} & \text{(barra 2)} \\ \hline +2{,}4394094.10^{+2} & \text{(barra 3)} \\ \hline \end{array}$$

Para o cálculo das correntes $[i_{km}(t)]$ e $[i_{mk}(t)]$, são necessários os valores de tensão em quantidades modais. Portanto, para o vetor $[e_B]$, de acordo com a equação (7.180), resulta :

$$[e_{Bmodal}] = \begin{array}{|l|l} \hline -3{,}3301.10^{-7} & \text{(barra 1)} \\ \hline 8{,}1327806.10^{+1} & \text{(barra 2)} \\ \hline -8{,}1306567.10^{+1} & \text{(barra 3)} \\ \hline \end{array}$$

Da equação de solução geral, para este exemplo, resultará :

$$[Y_{AA}]\ [e_A] = -[i_A] - [I_A] - [Y_{AB}]\ [e_B] \qquad (7.220)$$

Como os vetores $[\,i_A\,]$, $[\,I_A\,]$ e a matriz $[\,Y_{AB}\,]$ são nulos, para o vetor $[\,e_A\,]$, no primeiro intervalo de tempo, resultará :

$$[\,e_A\,] = 0$$

Para o valor de $[i_{km}(t)_{modal}]$, de acordo com a equação (7.141), obtém-se :

$$[i_{km}(t)_{modal}] = \begin{bmatrix} -3,3495485.10^{-13} \\ 1,3141126.10^{-4} \\ -1,3137694.10^{-4} \end{bmatrix}$$

Em quantidades de fase, de acordo com a equação (7.182), tem-se :

$$[i_{km}(t)] = \begin{bmatrix} 3,4319962.10^{-8} \\ -3,9419946.10^{-4} \\ 3,9416514.10^{-4} \end{bmatrix}$$

Os valores de $[i_{mk}(t)_{modal}]$ e $[i_{mk}(t)]$ podem ser calculados através das equações (7.143) e (7.183), porém, como os valores de $[e_m(t)]$ e $[I_k(t - \tau)]$ são nulos, os valores de $[i_{mk}(t)]$ também são nulos. Isto é justificado pelo fato de que o tempo de viagem da onda de tensão τ é superior ao intervalo Δt, e, portanto, para esse primeiro intervalo, a onda de tensão ainda não chegou ao outro extremo da linha.

B - segundo intervalo de tempo - $t = 0{,}4\ 10^{-6}$

Os valores de história passada $[I_k(t - \tau)_{modal}]$ e $[I_m(t - \tau)_{modal}]$, são calculados em função dos valores de tensão e corrente calculados no intervalo anterior, e das equações (7.142) e (7.144). Portanto, de acordo com essas equações, obtém-se :

$$[I_k(t - \tau)_{modal}] = 0$$

$$[I_m(t - \tau)_{modal}] = \begin{bmatrix} +6{,}6989964.10^{-13} \\ -2{,}6282252.10^{-4} \\ +2{,}6275388.10^{-4} \end{bmatrix}$$

Da equação (3.1), obtém-se o vetor $[\ e_B\ ]$:

$$[\ e_B\ ] = \begin{bmatrix} 4{,}2478002.10^{-2} \\ -2{,}439728\ .10^{+2} \\ 2{,}4393032.10^{+2} \end{bmatrix}$$

Este valor também será necessário em quantidades modais; portanto, da equação (7.180), obtém-se :

$$[e_{Bmodal}] = \begin{bmatrix} -\ 6{,}66.10^{-7} \\ +8{,}1338426.10^{+1} \\ -8{,}1295947.10^{+1} \end{bmatrix}$$

Para o vetor $[\ I_A\ ]$, deve-se entrar com os valores de história passada, no caso, os valores $I_m(t - \tau)$. Neste segundo intervalo, tem-se :

$$t - \tau_{modo0} = 2(0,2\ 10^{-6}) - 3,0063859\ 10^{-7} = 9,936142\ 10^{-8}$$

$$t - \tau_{modo1} = t - \tau_{modo2} =$$

$$= 2(0,2\ 10^{-6}) - 2,3639476\ 10^{-7} =$$

$$= 1,6360524\ 10^{-7}$$

Como neste intervalo o vetor $[I_k(t - \tau)_{modal}]$ é nulo, o vetor $[I_A]$ será igual ao vetor $[I_m(t - \tau)_{modal}]$, sendo que haverá a necessidade de interpolação, visto que os valores que estão no vetor $[I_m(t - \tau)_{modal}]$ estão referidos a um tempo múltiplo de Δt, enquanto no vetor $[\ I_A\ ]$ deve-se entrar com os valores correspondentes ao tempo $(t - \tau)$.

Para o primeiro modo, tem-se :

$$t = 0 \longrightarrow I_m = 0$$

$$t = 0,2\ 10^{-6} \longrightarrow I_m = +\ 6,6989964\ 10^{-13}$$

Usando-se a interpolação linear, obtém-se :

$$I_s = +\ 3,3454982\ 10^{-6}\ ts$$

$$t_s = (t - \tau) = 9,936141\ 10^{-8}$$

$$I_s = 3,3473592\ 10^{-13}$$

Para o segundo modo, tem-se :

$$t = 0 \longrightarrow I_m = 0$$

$$t = 0,2\ 10^{-6} \longrightarrow I_m = -\ 2,6282252\ 10^{-4}$$

Usando-se a interpolação linear, obtém-se :

$$I_s = -\ 1,3141126\ 10^{+3} ts$$

$$t_s = (t - \tau) = 1,6360524\ 10^{-7}$$

$$I_s = -\ 2,1499571\ 10^{-4}$$

Para o terceiro modo, tem-se :

$$t = 0 \longrightarrow I_m = 0$$

$$t = 0,2\ 10^{-6} \longrightarrow I_m = +\ 2,6275388\ 10^{-4}$$

Usando-se interpolação linear, obtém-se :

$$I_s = +\ 1,3137694\ 10^{3}\ ts$$

$$t_s = (t - \tau) = 1,6360524\ 10^{-7}$$

$$I_s = +\ 2,1493956\ 10^{-4}$$

Portanto, o vetor $[\ I_A\ ]$, em quantidades modais, será :

$$[I_{Amodal}] = \begin{array}{|c|}\hline +3,3473592\ 10^{-13} \\ \hline -2,1499571\ 10^{-4} \\ \hline +2,1493956\ 10^{-4} \\ \hline \end{array}$$

O valor correspondente em quantidades de fase, de acordo com a equação (7.186), será :

$$[\,I_A\,] = \begin{bmatrix} -5{,}6149665.10^{-8} \\ +6{,}4493098.10^{-4} \\ -6{,}4487483.10^{-4} \end{bmatrix}$$

Para obter-se o valor das tensões nas barras desconhecidas, basta recorrer à equação (7.220).

Portanto, o valor de $[\,e_A\,]$ será :

$$[\,e_A\,] = \begin{bmatrix} 3{,}475134\ .10^{-2} \\ -3{,}9913492.10^{+2} \\ 3{,}9910018.10^{+2} \end{bmatrix}$$

Em quantidades modais, de acordo com a equação (7.181), tem-se :

$$[e_{Amodal}] = \begin{bmatrix} 3{,}78.10^{-6} \\ +1{,}3305656.10^{+2} \\ -1{,}3302181.10^{+2} \end{bmatrix}$$

Portanto, para as correntes, de acordo com a equação (7.141), tem-se :

$$[i_{km}(t)_{modal}] = \begin{bmatrix} -6{,}6988957.10^{-13} \\ 1{,}3142842.10^{-4} \\ -1{,}3135978.10^{-4} \end{bmatrix}$$

Em quantidades de fase, de acordo com a equação (7.182), tem-se :

$$[i_{km}(t)] = \begin{bmatrix} 6,8637833.10^{-8} \\ -3,9421662.10^{-4} \\ 3,9414798.10^{-4} \end{bmatrix}$$

Para o cálculo do vetor $[i_{mk}(t)_{modal}]$, de acordo com a equação (7.143), é necessário proceder a uma interpolação para os valores de $I_m(t - \tau)_{modal}$. Neste caso, usa-se o mesmo valor interpolado usado para o cálculo de $[I_A]$, o que resulta:

$$[i_{mk}(t)_{modal}] = \begin{bmatrix} 4,1368119.10^{-12} \\ 6,8923.10^{-12} \\ -7,0778.10^{-12} \end{bmatrix}$$

Em quantidades de fases, de acordo com a equação (7.183), tem-se :

$$[i_{mk}(t)] = \begin{bmatrix} 3,9513119.10^{-12} \\ -1,6725588.10^{-11} \\ 2,5184712.10^{-11} \end{bmatrix}$$

Nota-se que, para o segundo intervalo de integração, como já decorreu o tempo τ, uma onda de tensão já alcançou o extremo da linha, e, em consequência, apareceu uma corrente nas três fases da linha.

Para os outros intervalos, o processo continua da mesma forma. Nota-se a importância de uma representação adequada, em termos computacionais, das variáveis numéricas utilizadas, visto a ordem de grandeza que essas variáveis podem assumir. No programa desenvolvido neste trabalho, todas as variáveis reais foram definidas em dupla precisão.

7.9 - CONCLUSÕES

Os modelos apresentados neste capítulo são bastante simples, e apresentam resultados satisfatórios, principalmente o modelo com resistências concentradas, que também é disponível no programa EMTP [20], e que se constitui no modelo mais utilizado para a representação das linhas de transmissão.

A metodologia apresentada considerou os parâmetros das linhas de transmissão constantes, embora na realidade esses parâmetros sejam dependentes da frequência, principalmente os de sequência zero. A figura 7.32 apresenta a variação dos parâmetros de uma linha de transmissão com a frequência. A partir de uma metodologia matemática mais rigorosa, é possível desenvolver-se uma análise do desempenho de uma linha de transmissão, considerando-se a dependência da frequência. As tensões e correntes no domínio do tempo devem ser transformadas para o domínio da frequência, de maneira a apresentar todo o seu espectro de frequência. Para cada uma dessas frequências, conhecidos os parâmetros nessa frequência, devem ser calculados os novos valores de tensão e corrente em algum outro ponto da linha de transmissão, e através de uma transformação inversa obtêm-se novamente as quantidades no domínio do tempo. Dessa forma, esses novos valores de tensão e corrente no domínio do tempo apresentarão toda a influência da frequência nos parâmetros da linha.

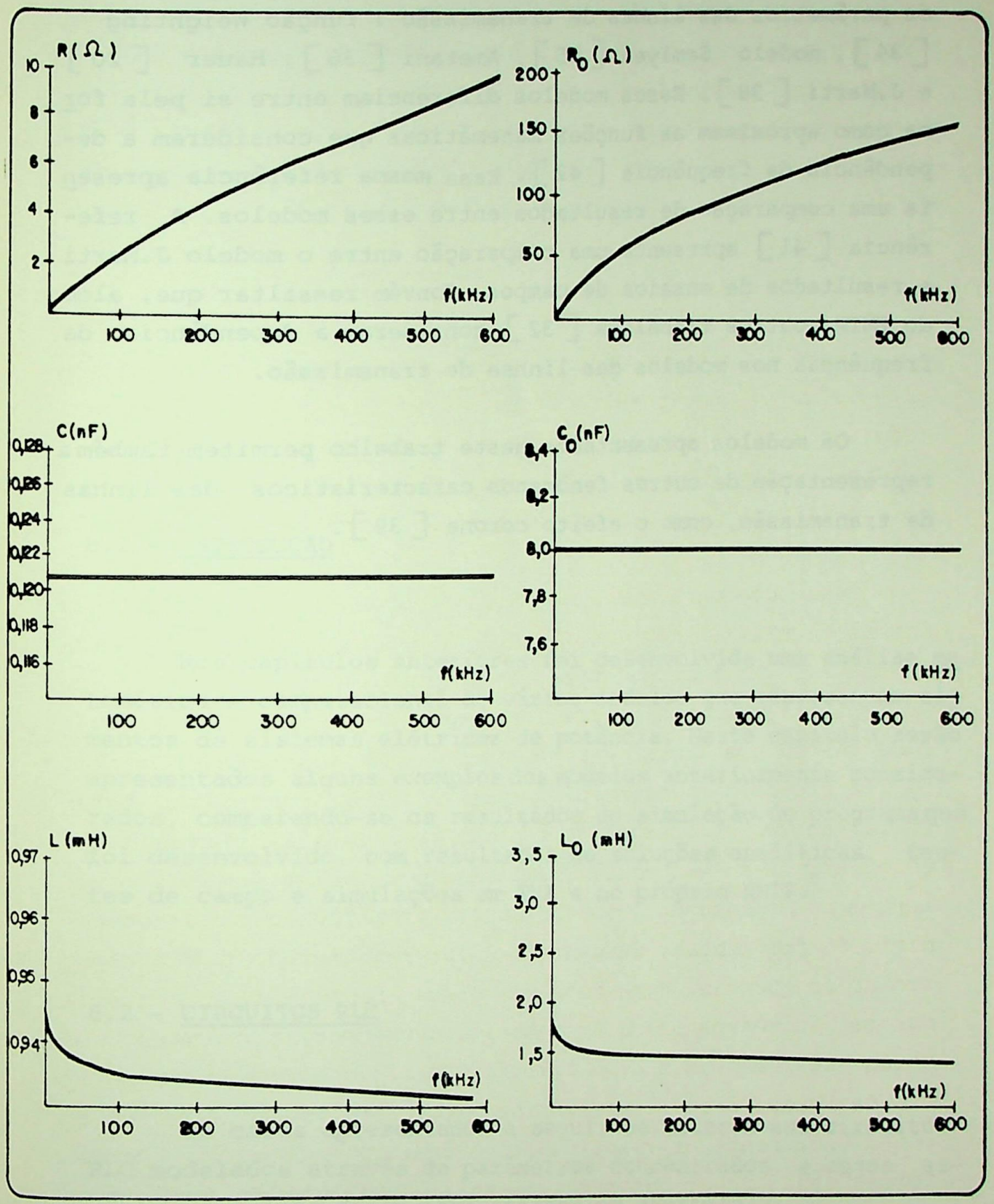


FIGURA 7.32 - Variação dos parâmetros de uma linha de transmissão com a frequência

O programa EMTP-versão BPA [20] apresenta, atualmente, cinco modelos que consideram a dependência da frequência para os parâmetros das linhas de transmissão : função Weighting [34], modelo Semlyen [35], Ametani [36], Hauer [20] e J.Marti [38]. Esses modelos diferenciam entre si pela forma como aproximam as funções matemáticas que consideram a dependência da frequência [42]. Essa mesma referência apresenta uma comparação de resultados entre esses modelos. A referência [41] apresenta uma comparação entre o modelo J.Marti e resultados de ensaios de campos. Convém ressaltar que, além do EMTP, outros trabalhos [32] consideram a dependência da frequência nos modelos das linhas de transmissão.

Os modelos apresentados neste trabalho permitem também a representação de outros fenômenos característicos das linhas de transmissão, como o efeito corona [39].

CAPÍTULO 8 - SIMULAÇÃO DE CASOS EXEMPLOS

8.1 - INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores foi desenvolvida uma análise matemática e computacional de vários modelos que representam elementos de sistemas elétricos de potência. Neste capítulo serão apresentados alguns exemplos dos modelos anteriormente considerados, comparando-se os resultados de simulação do programa que foi desenvolvido, com resultados de soluções analíticas, testes de campo e simulações em TNA e no próprio EMTP.

8.2 - CIRCUITOS RLC

Os casos apresentados a seguir se referem aos circuitos RLC modelados através de parâmetros concentrados, e cujos aspectos teóricos foram apresentados no capítulo 2.

O primeiro caso a ser analisado é o circuito RC apresentado na figura 8.1, na qual estão mostrados também, os parâme-

tros adotados na simulação. Considera-se que após o fechamento da chave 1 (ramo 1-2), a fonte de tensão (degrau unitário) ficará conectada a um circuito série formado pela resistência R_1 e pela capacitância C. Nessa condição o capacitor será carregado até atingir o valor de tensão da fonte. Decorrido esse tempo para carregamento do capacitor, a chave 1 será aberta e a chave 2 (ramo 2-4) será fechada. Nessa nova condição, a capacitância C se descarrega através da resistência R_2.

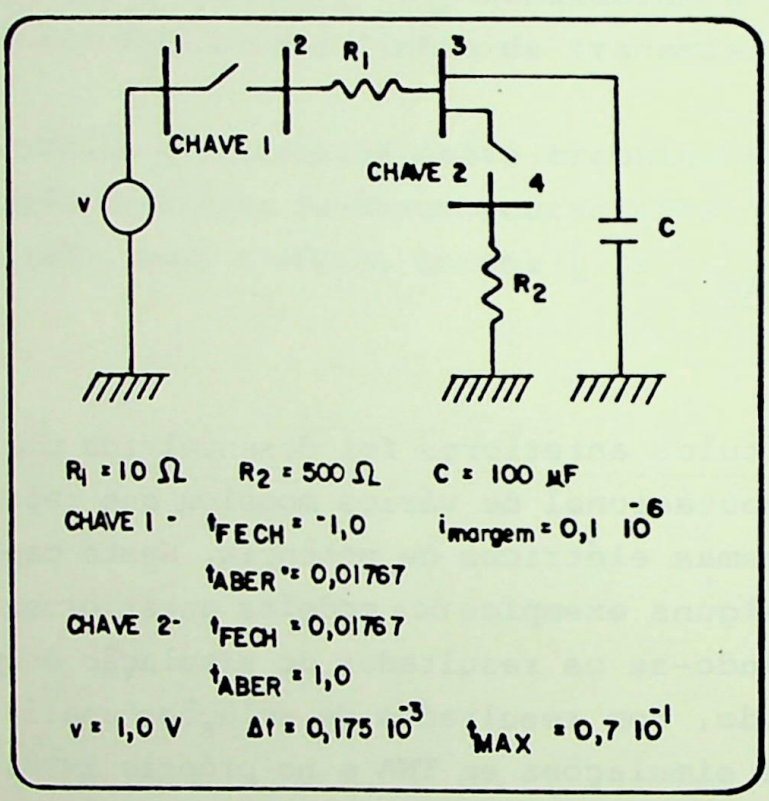


FIGURA 8.1 - Circuito RC

Partindo-se da equação diferencial que descreve o comportamento de um ramo RC, é possível escrever as seguintes equações para a corrente e para a tensão aplicada ao capacitor :

- após o fechamento da chave 1 :

$$i(t) = \frac{v}{R_1} \; e^{-\frac{1}{R_1 C} t} \qquad (8.1)$$

$$Vc(t) = v \left[1 - e^{-\frac{1}{R_1 C} t} \right] \qquad (8.2)$$

- após a abertura da chave 1 e fechamento da chave 2 :

$$i(t) = - \frac{v}{R_2} \; e^{- \frac{1}{R_2 C} t'} \qquad (8.3)$$

$$Vc(t) = v \; e^{- \frac{1}{R_2 C} t'} \qquad (8.4)$$

Deve-se observar que no instante de abertura da chave 1 e fechamento da chave 2, considera-se que já decorreu um tempo suficiente para que a tensão aplicada ao capacitor se iguale a da fonte de tensão.

A abertura da chave 1 e o fechamento da chave 2 estão ocorrendo entre os intervalos $101\Delta t$ e $102\Delta t$, ou seja, no instante $101\Delta t$ os cálculos são desenvolvidos considerando-se as chaves 1 e 2, respectivamente, fechada e aberta, e no instante $102\Delta t$ considera-se que as mesmas estejam, respectivamente, aberta e fechada.

Na solução analítica, após a abertura da chave 1 e o fechamento da chave 2, equações (8.3) e (8.4), considera-se uma reinicialização da contagem de tempo, ou seja, para $t' = 0$ corresponde o tempo $t = 0{,}17675\ 10^{-1}$ $(101\Delta t)$. Dessa forma, o valor do tempo t' considerado nas equações (8.3) e (8.4), em função do tempo de simulação t, é definido da seguinte maneira :

$$t' = t - 0{,}17675\ 10^{-1} \qquad (8.5)$$

As figuras 8.2 e 8.3, e a tabela 8.1, apresentam os perfis de tensão e corrente no capacitor, considerando-se os resultados obtidos pelo programa que foi desenvolvido neste trabalho, pelo EMTP e pela solução analítica das equações (8.1), (8.2), (8.3) e (8.4).

Nota-se pelos resultados apresentados na tabela 8.1, que os valores encontrados pelos dois programas, o da tese e o EMTP, são iguais. Nota-se também, através das figuras 8.2 e 8.3, que os valores encontrados através da solução analítica são praticamente iguais aqueles encontrados pelos dois programas, diferenciando-se apenas nos valores iniciais, como se comprova pela tabela 8.1.

É interessante observar, neste caso, o comportamento dos modelos de chaves. Adotou-se o modelo de chave controlada por tempo. Para a chave 1, como t_{fech} é igual a - 1,0, considera-se que a chave estava aberta antes de t = 0. Para o tempo de abertura definiu-se o valor $0{,}1767\ 10^{-1}$, que foi ajustado internamente pelo programa de tese para o valor de $t_{aber\ ajust} = 0{,}17675\ 10^{-1}$ (múltiplo mais próximo de Δt). Portanto, a partir do próximo intervalo de tempo a chave estava apta a abrir, e exatamente nesse instante de tempo, $t = 0{,}1785\ 10^{-1}$, a chave foi aberta, visto que o critério de corrente foi satisfeito ($i_{chave} < i_{margem}$). Para a chave 2 definiu-se t_{fech} igual a $0{,}1767\ 10^{-1}$, valor este que foi ajustado internamente pelo programa de tese para $t_{fech\ ajust} = 0{,}17675\ 10^{-1}$, que é o múltiplo de Δt mais próximo. Portanto, a partir desse instante a chave estava apta a fechar, o que ocorreu exatamente nesse instante. Para o tempo de abertura considerou-se o valor 1,0, que é maior que o tempo máximo de simulação. Dessa forma, portanto, a chave 2 não será aberta durante o processo de simulação.

Para o EMTP os valores de t_{aber} para a chave 1, e t_{fech} para a chave 2, foram definidos com o valor $0{,}175\ 10^{-1}$. Tanto a abertura da chave 1, como o fechamento da chave 2 ocorreram

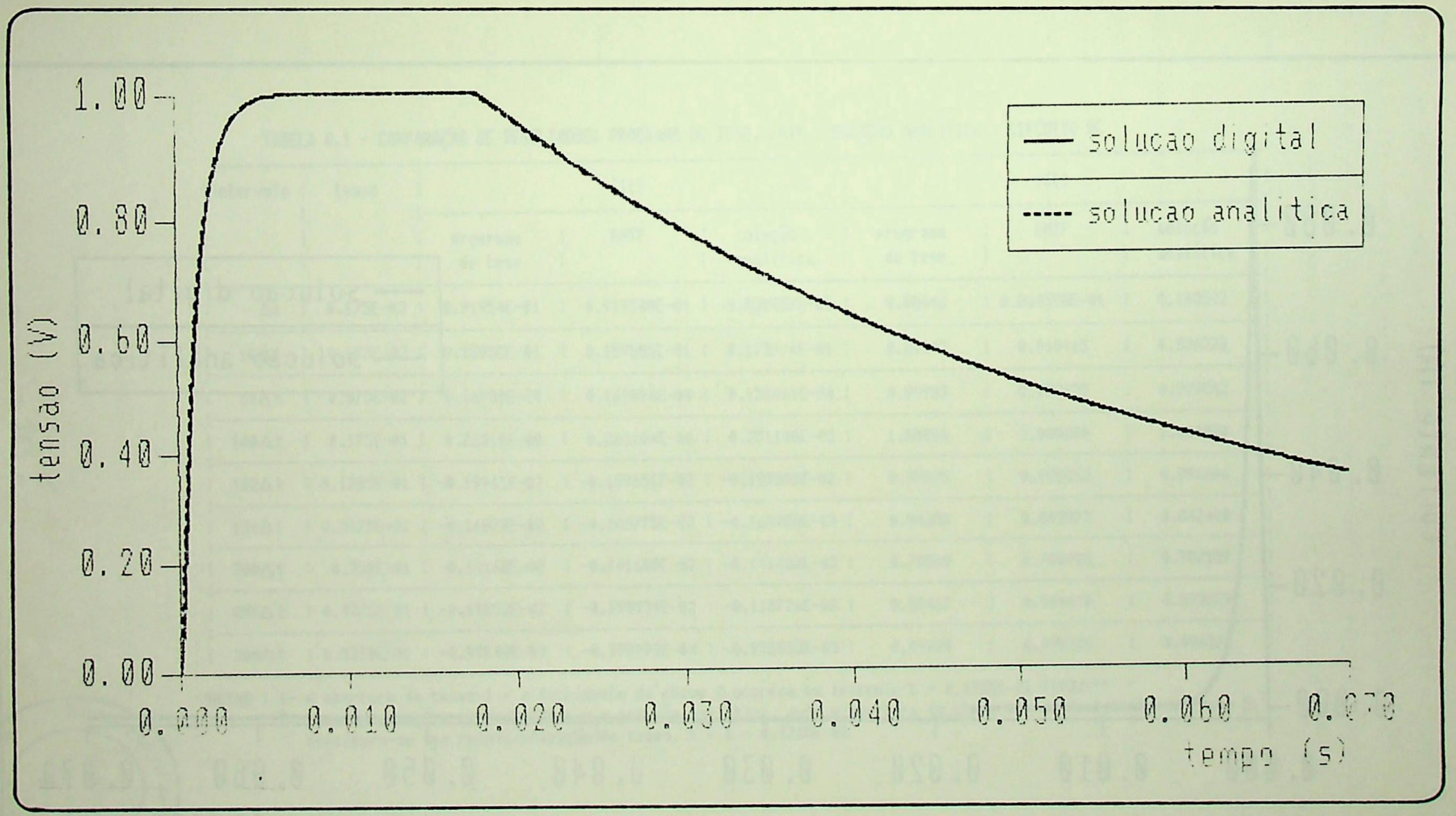


FIGURA 8.2 - Tensão aplicada ao capacitor da figura 8.1 - soluções digital e analítica

8.3 - Corrente através do capacitor da figura 8.1 - soluções digital e analítica

TABELA 8.1 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS: PROGRAMA DE TESE, EMTP E SOLUÇÃO ANALÍTICA - CIRCUITO RC

intervalo	tempo	i(t)			v(t)		
		programa de tese	EMTP	solução analítica	programa de tese	EMTP	solução analítica
Δt	0.175E-03	0.91954E-01	0.919540E-01	0.839457E-01	0.08046	0.804598E-01	0.160543
10Δt	0.175E-02	0.18958E-01	0.189585E-01	0.173774E-01	0.81042	0.810415	0.826226
50Δt	0,875E-02	0.16980E-04	0.169804E-04	0.158461E-04	0.99983	0.999830	0.999842
100Δt	0.175E-01	0.26310E-08	0.263104E-08	0.251100E-08	1.00000	1.000000	1.000000
102Δt	0.1785E-01	-0.19965E-02	-0.199651E-02	-0.199301E-02	0.99825	0.998253	0.996506
150Δt	0.2625E-01	-0.16878E-02	-0.168775E-02	-0.168480E-02	0.84388	0.843877	0.842400
200Δt	0.350E-01	-0.14168E-02	-0.141680E-02	-0.141432E-02	0.70840	0.708498	0.707159
250Δt	0.4375E-01	-0.11893E-02	-0.118934E-02	-0.118726E-02	0.59467	0.594670	0.593629
300Δt	0.5250E-01	-0.99840E-03	-0.998399E-03	-0.996653E-03	0.49920	0.499200	0.498326

NOTAS : 1- A abertura da chave 1 e o fechamento da chave 2 ocorrem no instante t = 0.1785E-01 (102Δt)
2- Para as equações correspondentes a solução analítica, após a abertura da chave 1 e do fechamento da chave 2, considera-se uma reinicialização do tempo, t' = t - 0.1765E-01

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ B.M

apenas no intervalo 0,1785 10^{-1}. Conclui-se, dessa forma, que entre o programa EMTP [20] e o programa de tese, existe uma diferença entre os valores de t_{fech} e t_{aber} correspondente a Δt. Convém ressaltar que para a versão EFEI do EMTP [18] os ajustes para os tempos de fechamento e abertura são os mesmos adotados para o programa de tese.

A figura 8.4 apresenta um circuito RL, cujos parâmetros utilizados para a simulação também estão apresentados na mesma figura. Neste caso considera-se que a chave está fechada antes de t = 0 (t_{fech} = - 1,0), e será aberta no instante t = 0,42 10^{-2}.

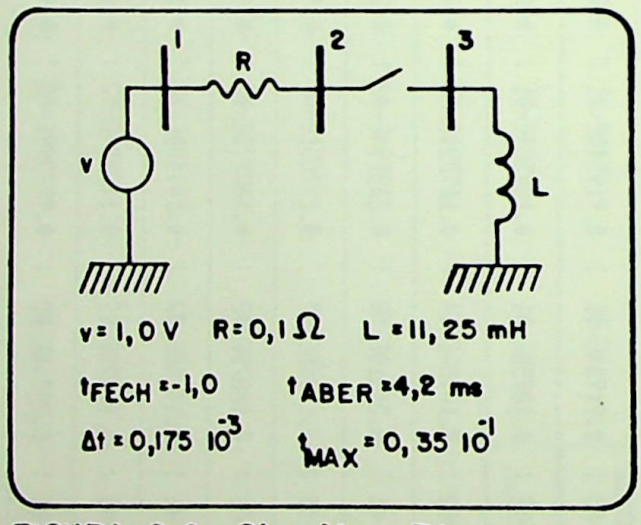


FIGURA 8.4 - Circuito RL

Para este circuito os valores de corrente e tensão aplicada ao indutor são definidos pelas seguintes equações :

$$i(t) = \frac{v}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right] \qquad (8.6)$$

$$V_L(t) = v\, e^{-\frac{R}{L} t} \qquad (8.7)$$

As figuras 8.5 e 8.6 apresentam os perfis de tensão e corrente no indutor. Da mesma forma como apresentado para o circuito RC na tabela 8.1, a tabela 8.2 apresenta uma comparação dos valores de tensão e corrente no indutor, através dos resultados obtidos pelo programa de tese, pelo EMTP e pela solução analítica das equações (8.6) e (8.7).

Para este caso também adotou-se o modelo de chave controlada por tempo; no entanto, neste caso aparece uma característica especial desse modelo de chave. Definiu-se um valor para a margem de corrente de 1,5, o que significa que no instante em que a corrente atingir um valor inferior a essa corrente, e desde que já tenha decorrido o tempo de abertura, a chave se abrirá, forçando a corrente para zero.

Pelo resultado apresentado na figura 8.5, nota-se que após a abertura da chave, o valor de tensão aplicada ao indutor não se anulou, ficando oscilando com amplitude constante.O apêndice F analisa de uma forma mais detalhada os problemas das oscilações numéricas, e recomenda, para este caso,como uma das soluções para eliminar tais oscilações, a colocação de um resistor de amortecimento em paralelo com o indutor. A figura 8.7 apresenta os resultados de tensão no indutor para diversos valores do resistor de amortecimento.

A figura 8.8 apresenta um outro exemplo de circuito RLC, com o objetivo de diferenciar as oscilações numéricas das oscilações naturais que podem ocorrer em um sistema elétrico. Con-

tensao (V)
-200
-100
0
100
200
0.0000
0.0050
0.0100
0.0150
0.0200
0.0250
0.0300
0.0350
tempo (s)

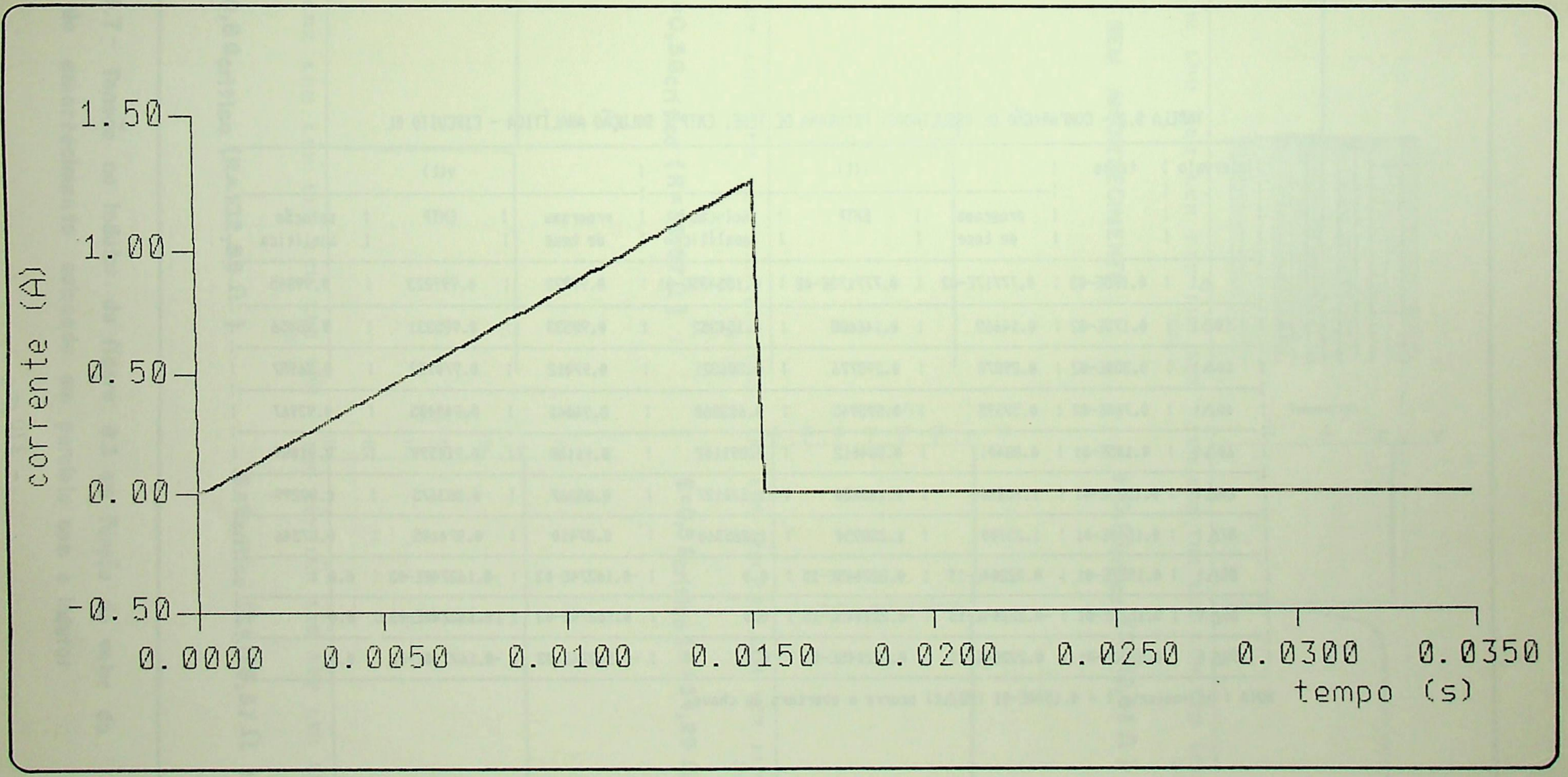
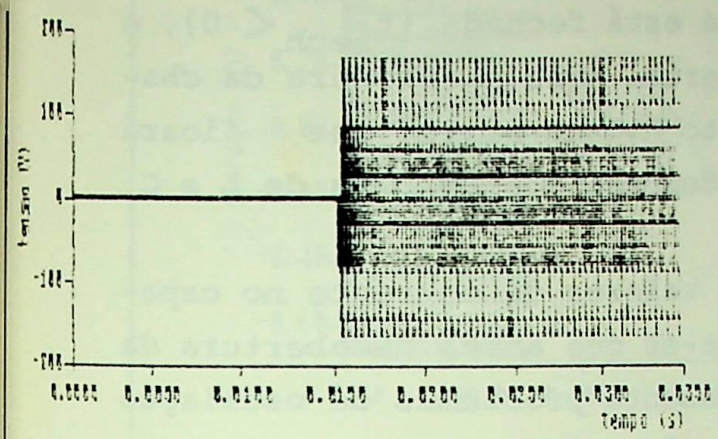


FIGURA 8.6 - Corrente através do indutor da figura 8.3

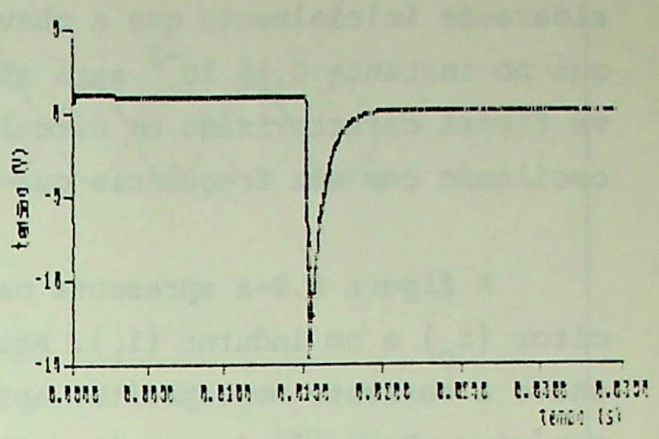
TABELA 8.2 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS: PROGRAMA DE TESE, EMTP E SOLUÇÃO ANALÍTICA - CIRCUITO RL

intervalo	tempo	i(t)			v(t)		
		programa de tese	EMTP	solução analítica	programa de tese	EMTP	solução analítica
Δt	0.175E-03	0.77717E-02	0.777173E-02	0.155435E-01	0.99922	0.999223	0.99845
10Δt	0.175E-02	0.14669	0.146688	0.154352	0.98533	0.985331	0.98456
20Δt	0,350E-02	0.29878	0.298776	0.306321	0.97012	0.970122	0.96937
40Δt	0.700E-02	0.59595	0.595945	0.603260	0.94041	0.940405	0.93967
60Δt	0.105E-01	0.88401	0.884012	0.891102	0.91160	0.911599	0.91089
80Δt	0.1522E-01	1.16330	1.163250	1.170127	0.88367	0.883675	0.88299
87Δt	0.1540E-01	1.25900	1.258950	1.265360	0.87410	0.874105	0.87346
88Δt	0.1557E-01	0.22204E-15	0.222045E-15	0.0	-0.16274E-03	-0.162740E-03	0.0
89Δt	0.1575E-01	-0.22204E-15	-0.222045E-15	0.0	0.16274E-03	0.162740E-03	0.0
90Δt	0.5250E-01	0.22204E-15	0.222045E-15	0.0	-0.16274E-03	-0.162740E-03	0.0

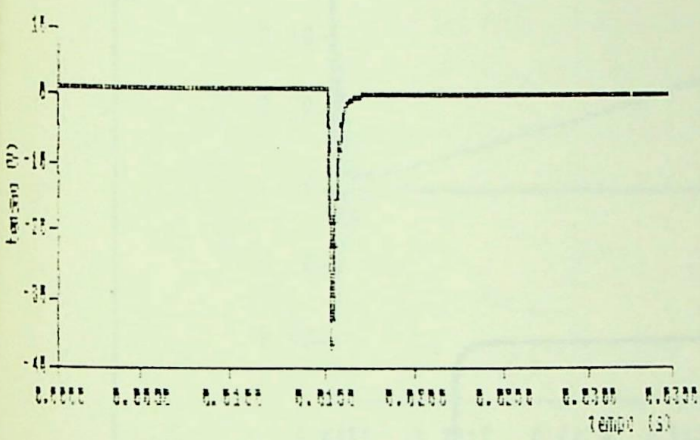
NOTA : no instante t = 0.1540E-01 (88Δt) ocorre a abertura da chave



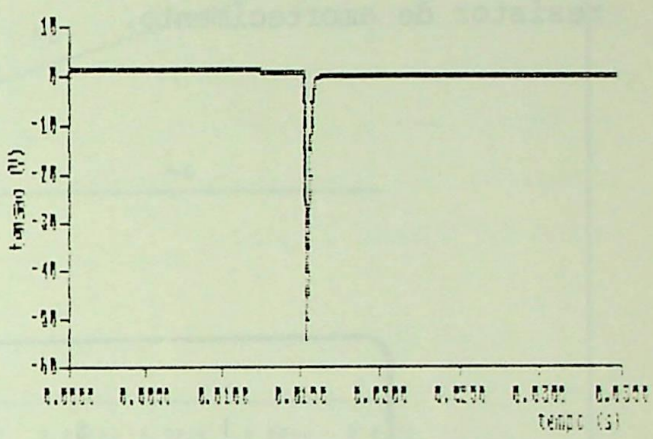
SEM AMORTECIMENTO



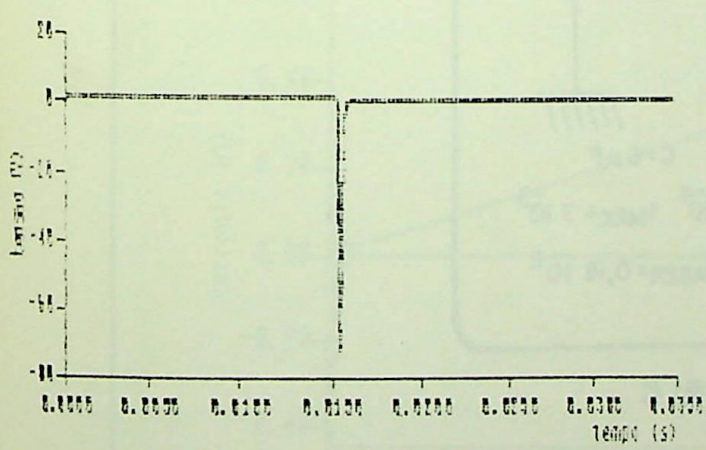
$G = 0{,}1\,G_{crítico}$ ($R = 12{,}86\ \Omega$)



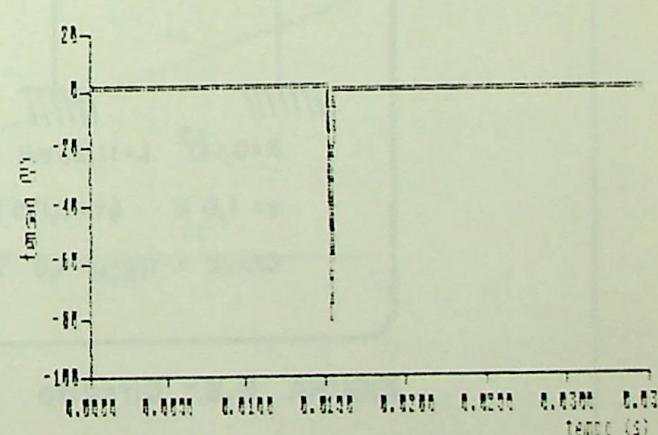
$G = 0{,}3\,G_{crítico}$ ($R = 38{,}57\ \Omega$)



$G = 0{,}5\,G_{crítico}$ ($R = 64{,}29\ \Omega$)



$G = 0{,}8\,G_{crítico}$ ($R = 102{,}86\ \Omega$)



$G = G_{crítico}$ ($R = 128{,}57\ \Omega$)

FIGURA 8.7 - Tensão no indutor da figura 8.3 em função do valor do resistor de amortecimento colocado em paralelo com o indutor

sidera-se inicialmente que a chave está fechada ($t_{fech} < 0$), e que no instante $0{,}16\ 10^{-2}$ será aberta. Após a abertura da chave ficará caracterizado um circuito RLC em série, que ficará oscilando com uma frequência que depende dos valores de L e C.

A figura 8.9-a apresenta os valores de corrente no capacitor (i_c) e no indutor (i_L). Nota-se que antes da abertura da chave a corrente no capacitor apresenta problemas de oscilação numérica. Para eliminar tal oscilação colocou-se um resistor de amortecimento em série com o capacitor, como recomendado no apêndice F. As figuras 8.9-b e 8.9-c apresentam os valores de corrente no capacitor e no indutor para diferentes valores do resistor de amortecimento.

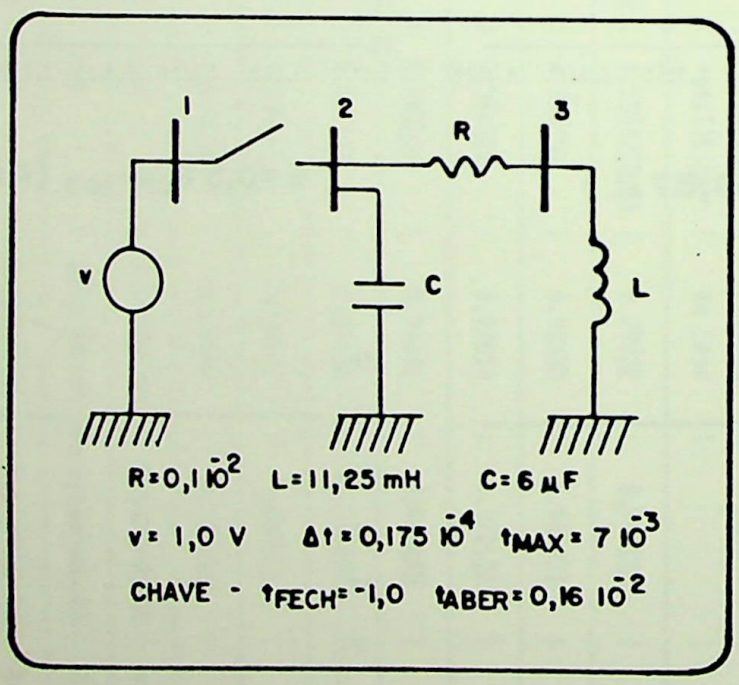
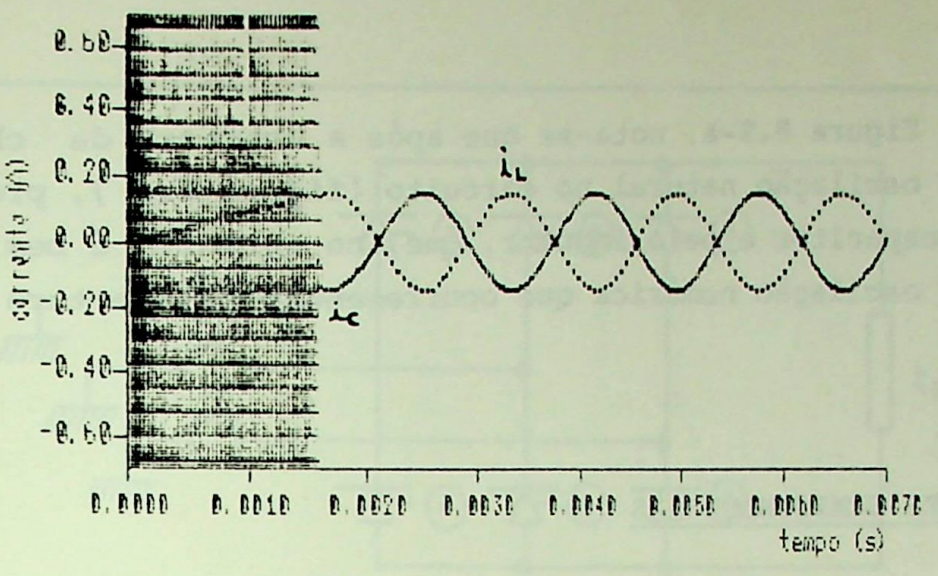
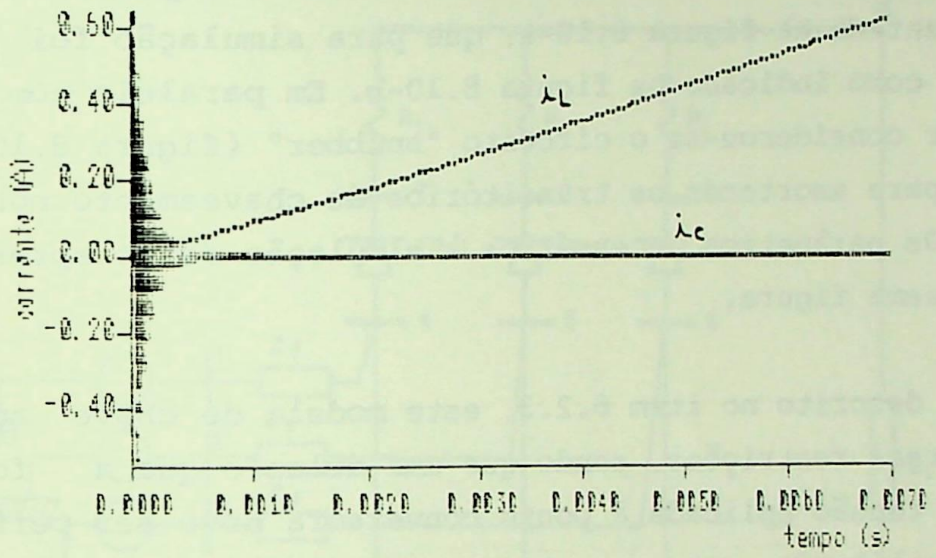


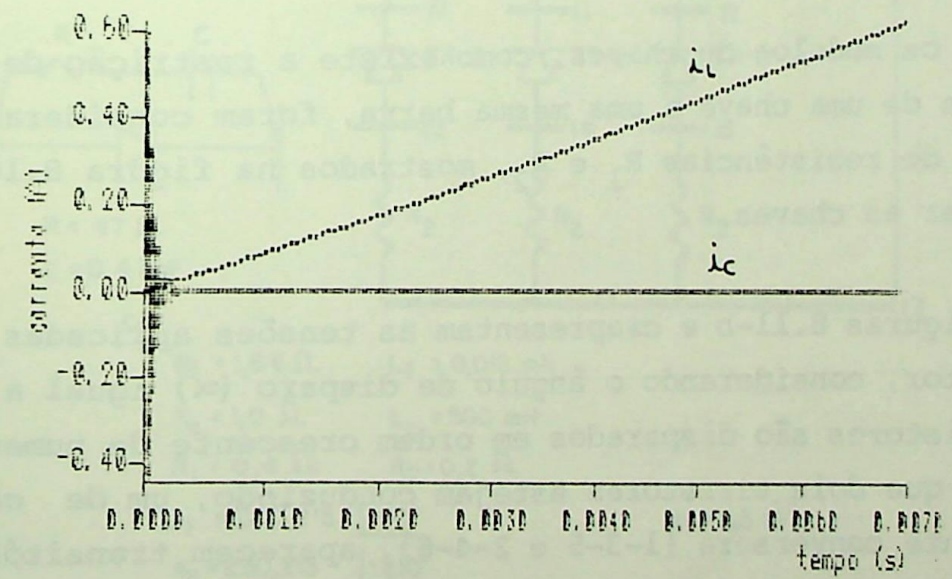
FIGURA 8.8 - Circuito RLC



SEM AMORTECIMENTO



G = 0,5 $G_{crítico}$ (R = 109 Ω)



G = $G_{crítico}$ (R = 219 Ω)

FIGURA 8.9- Corrente no indutor e no capacitor da figura 8.8 em função do valor do resistor de amortecimento colocado em série com o capacitor

Pela figura 8.9-a, nota-se que após a abertura da chave ocorre uma oscilação natural no circuito (figura F.2), provocada pelo capacitor e pelo indutor, que, no entanto, é bem diferente da oscilação numérica que ocorre antes da abertura da chave.

8.3 - CHAVES SEMICONDUTORAS

Para a análise deste modelo considerou-se a ponte conversora apresentada na figura 8.10-a, que para simulação foi representada como indicado na figura 8.10-b. Em paralelo com cada tiristor considerou-se o circuito "snubber" (figura 8.10-c) utilizado para amortecer os transitórios de chaveamento nos tiristores. Os parâmetros necessários à simulação estão apresentados na mesma figura.

Como descrito no item 6.2.3, este modelo de chave apresenta diversas restrições, sendo que uma delas é que a forma de onda de tensão aplicada à ponte conversora deve ser perfeitamente equilibrada, como a mostrada para as fontes (barras 1, 2 e 3), na figura 7.11-a.

Para os modelos de chaves, como existe a restrição de conectar mais de uma chave a uma mesma barra, foram considerados os valores de resistências R_1 e R_2, mostrados na figura 8.10-b, para separar as chaves.

As figuras 8.11-b e c apresentam as tensões aplicadas em cada tiristor, considerando o ângulo de disparo (α) igual a zero. Os tiristores são disparados em ordem crescente de numeração, e até que dois tiristores estejam conduzindo, um de cada lado da ponte conversora (1-3-5 e 2-4-6), aparecem transitórios de tensão sobre os tiristores (aproximadamente até o instante 5ms).

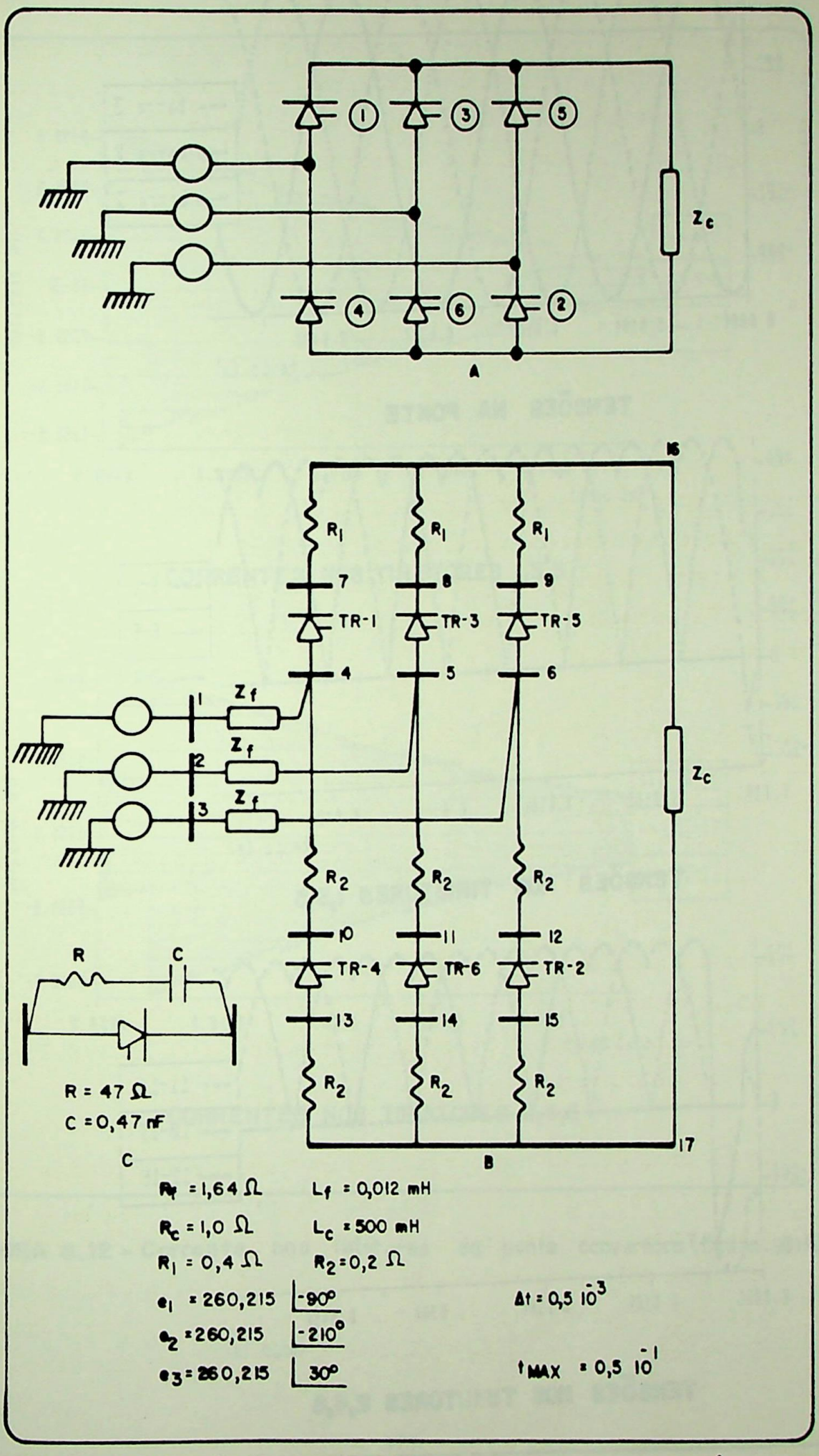
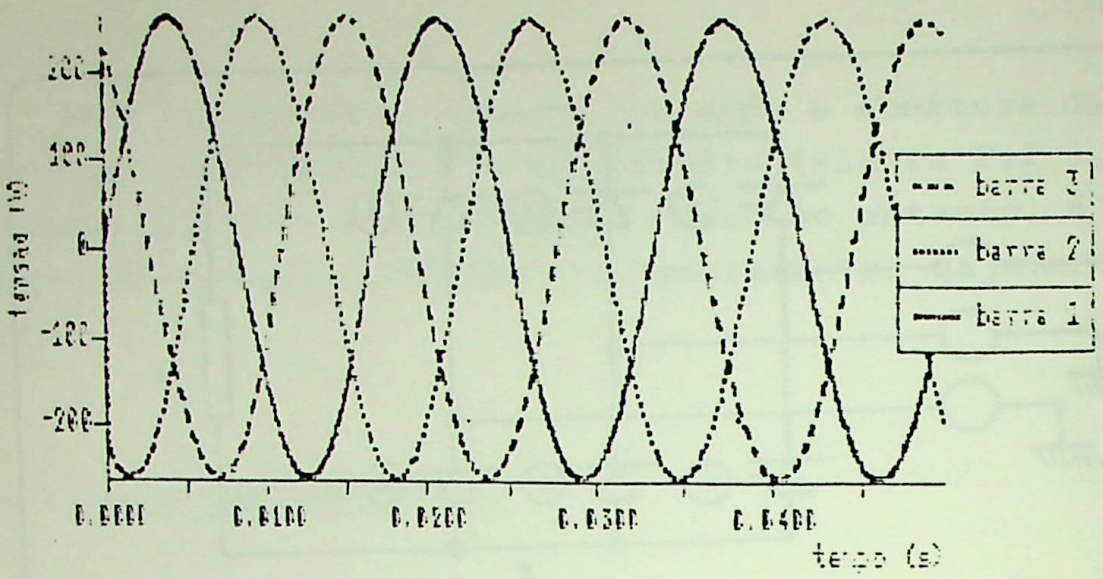
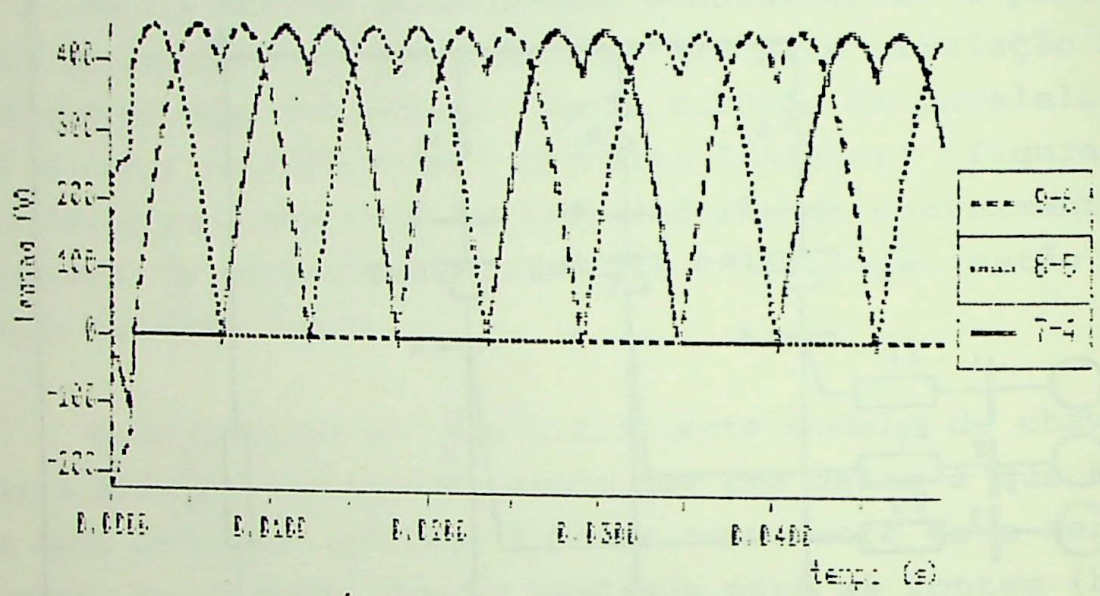


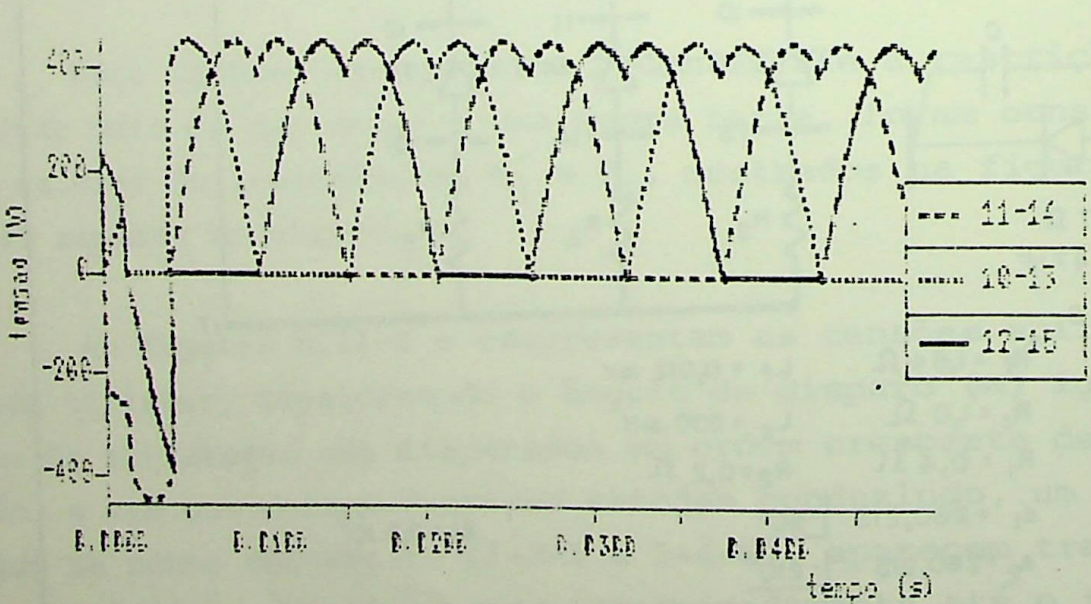
FIGURA 8.10 - Chave semicondutora - ponte conversora trifásica



TENSÕES NA FONTE

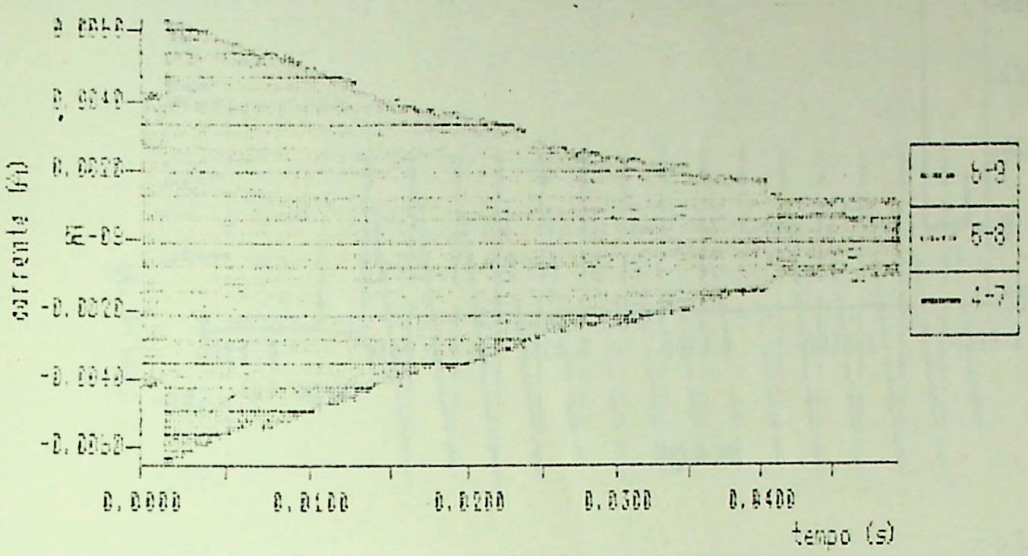


TENSÕES NOS TIRISTORES 1,3,5

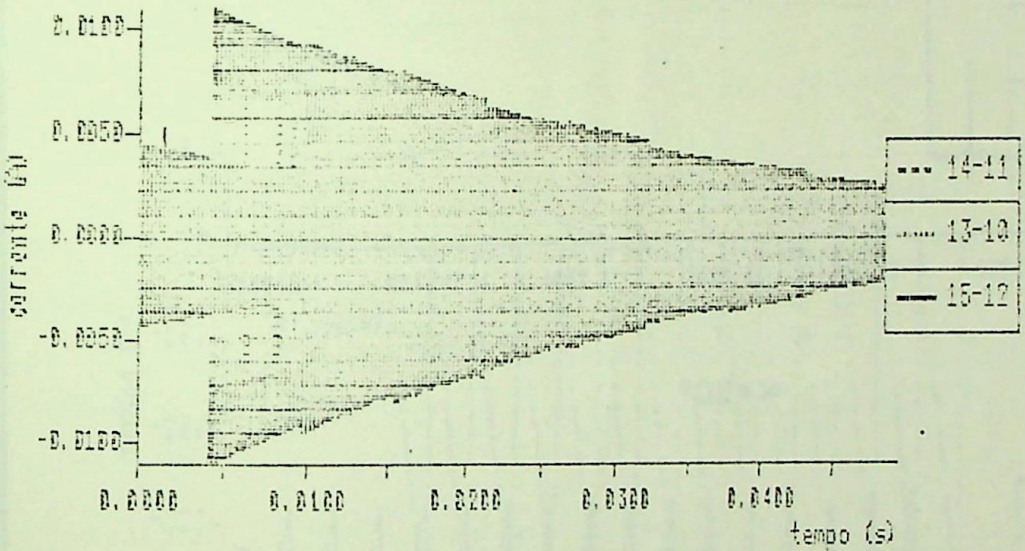


TENSÕES NOS TIRISTORES 2,4,6

FIGURA 8.11-Tensões para o modelo de chaves semicondutoras

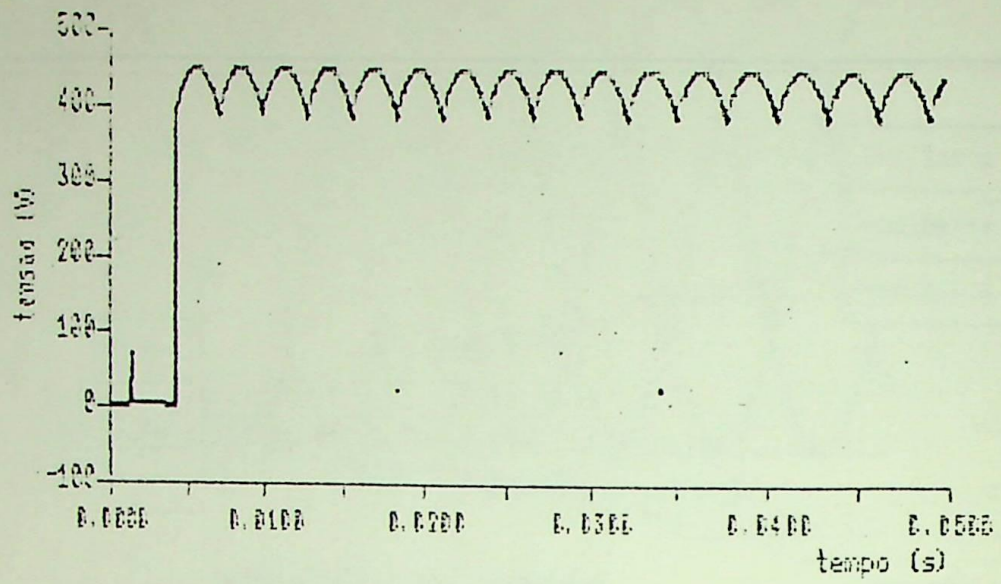


CORRENTES NOS TIRISTORES 1,3,5

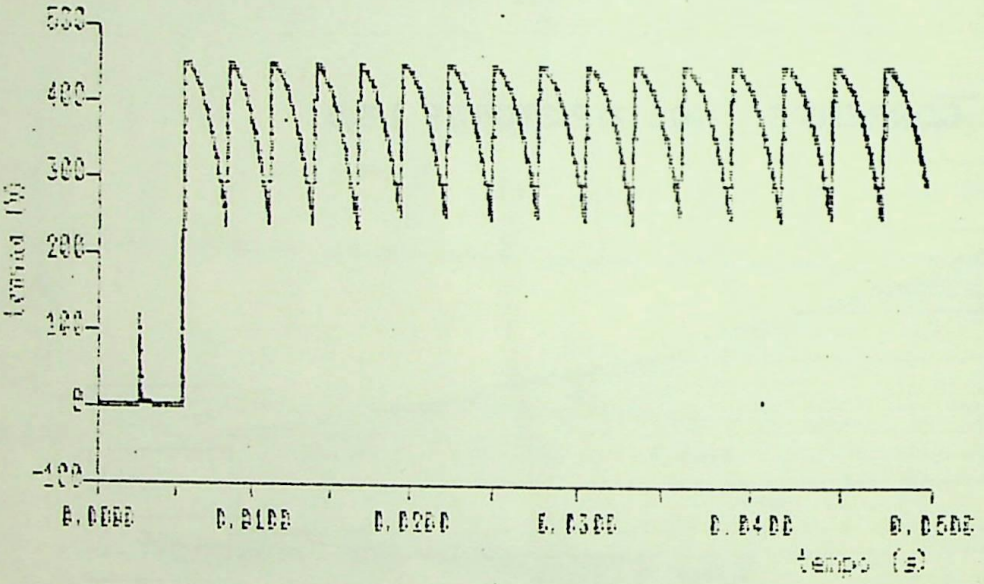


CORRENTES NOS TIRISTORES 2,4,6

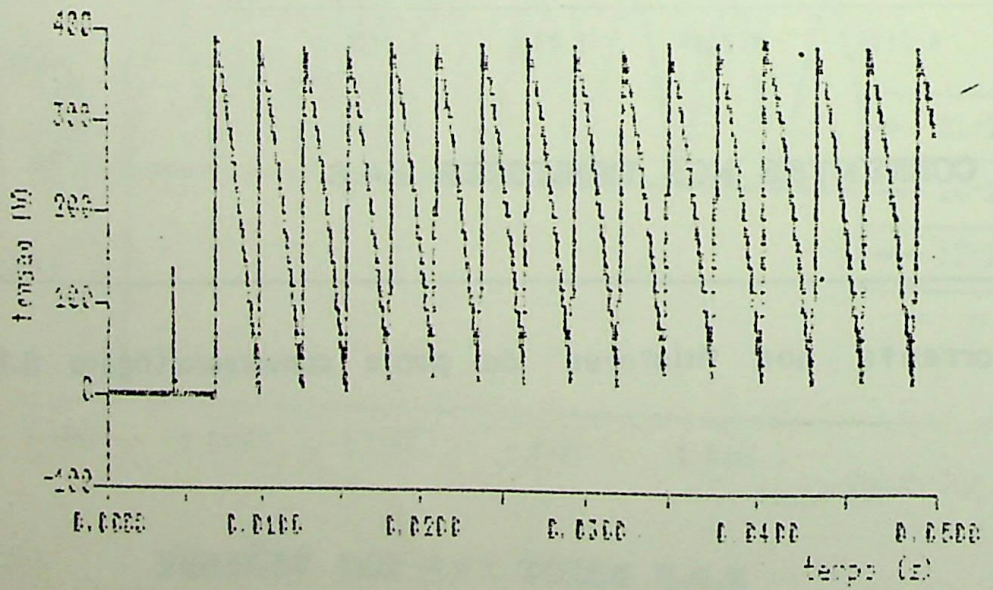
FIGURA 8.12 - Corrente nos tiristores da ponte conversora (figura 8.10)



$\alpha = 0°$

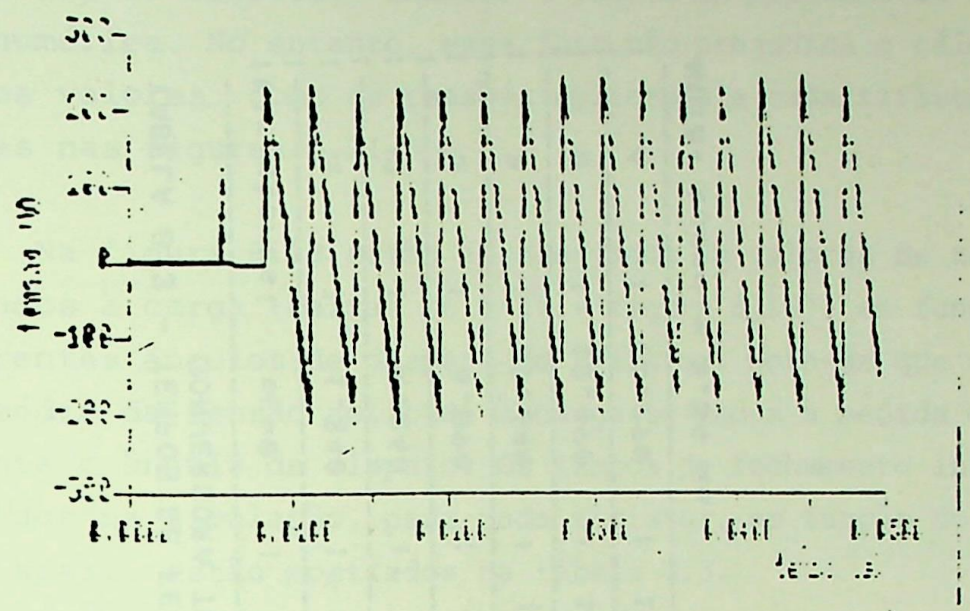


$\alpha = 30°$

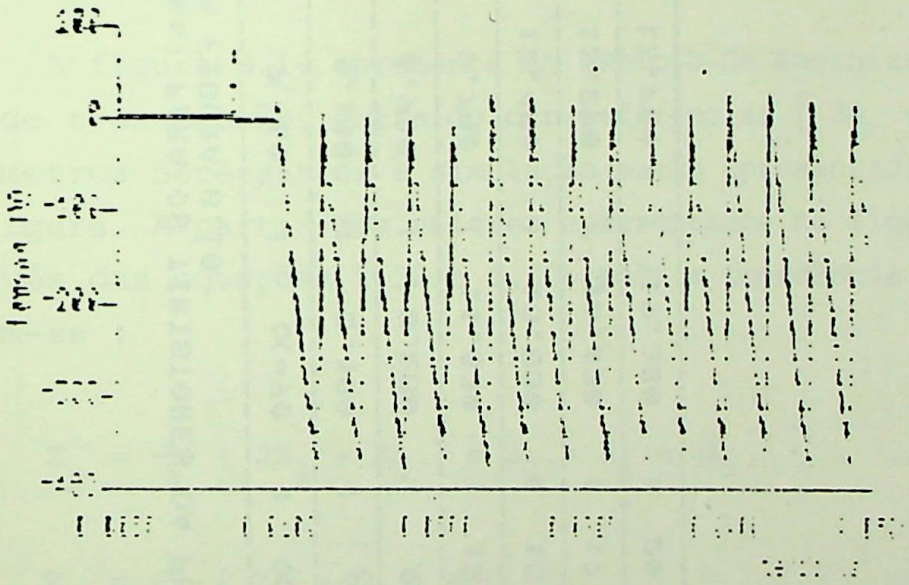


$\alpha = 60°$

FIGURA 8.13 - Tensões aplicadas à carga em função do ângulo de disparo



$\alpha = 90°$



$\alpha = 120°$

FIGURA 8.13 - (continuação)

TABELA 8.3 - TEMPOS DE FECHAMENTO (ms) PARA OS TIRISTORES DA PONTE CONVERSORA TRIFÁSICA DA FIGURA 8.10

tiristores	α=0	α=30	α=60	α=90	α=120
1	1.340	2.680	4.140	5.480	6.940
2	4.240	5.480	6.940	8.280	9.690
3	6.890	8.280	9.740	11.030	12.490
4	9.640	11.030	12.490	13.830	15.290
5	12.490	13.830	15.290	16.630	17.970
6	15.290	16.630	17.980	19.330	20.650

NOTA: tcond = 5.54 ms

As figuras 8.12-a e b apresentam as correntes em cada um dos tiristores. Nota-se nesses casos, que devido a presença do capacitor do circuito "snubber", ocorre um problema de oscilação numérica. No entanto, esse fato não prejudica o cálculo de outros valores, como as tensões aplicadas a cada tiristor mostradas nas figuras 8.11-b e c.

Na figura 8.13 estão apresentados os valores de tensão aplicados à carga (barras 16 e 17 - figura 8.10), em função de diferentes ângulos de disparo do tiristor. Nota-se que o valor médio da tensão aplicada à carga se reduz à medida que se aumenta o ângulo de disparo. Os tempos de fechamento inicial adotados na simulação, para cada tiristor, em função do ângulo de disparo, estão mostrados na tabela 8.3.

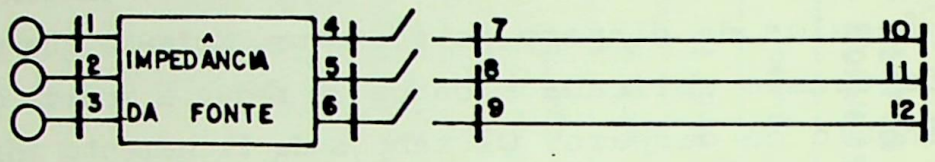
8.4 - LINHAS DE TRANSMISSÃO

A figura 8.14 apresenta um exemplo de energização de linha de transmissão, extraído das referências [34, 43, 44].Os parâmetros necessários à simulação estão apresentados na mesma figura. A partir dos valores apresentados na figura 8.14, e através das equações 5.32 e 5.33, para a impedância da fonte , obtém-se :

$$Z_p = \frac{1}{3} (2Z_1 + Zo) = Z_1 = R_1 + jX_1$$

$$Z_m = \frac{1}{3} (Zo - Z_1) = 0$$

Como os elementos das matrizes dos ramos acoplados apresentam posições fora da diagonal iguais a zero (Zm = 0), não existe o acoplamento entre os ramos da fonte. Dessa forma, cada ramo da fonte pode ser representado através do modelo a parâmetros concentrados sem acoplamento.



● IMPEDÂNCIA DA FONTE: $R_1 = R_0 = 6,7\ \Omega$

$X_1 = X_0 = 127\ \Omega$

● LINHA DE TRANSMISSÃO: $Z_1 = 0,04 + j0,318\ \Omega$ /km

$Z_0 = 0,26 + j1,015\ \Omega$ /km

$C_1 = 11,86$ nF/km

$C_0 = 7,66$ nF/km

$\ell = 202,8$ km

● FONTE DE TENSÃO: $e_A = 1,0 \angle -90°$ f = 50 Hz

$e_B = 1,0 \angle -210°$

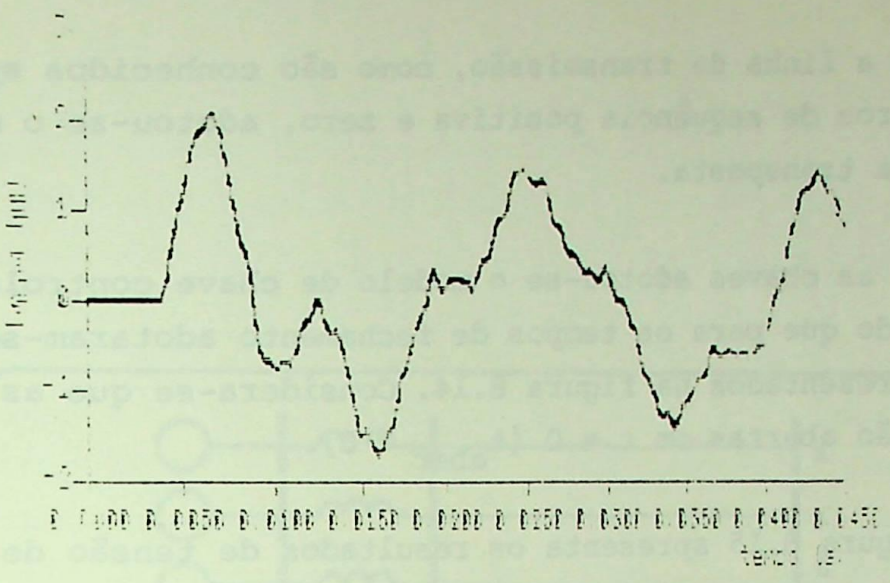
$e_C = 1,0 \angle 30°$

● CHAVES: 4 - 7 - $t_{FECH} = 3,05$ ms

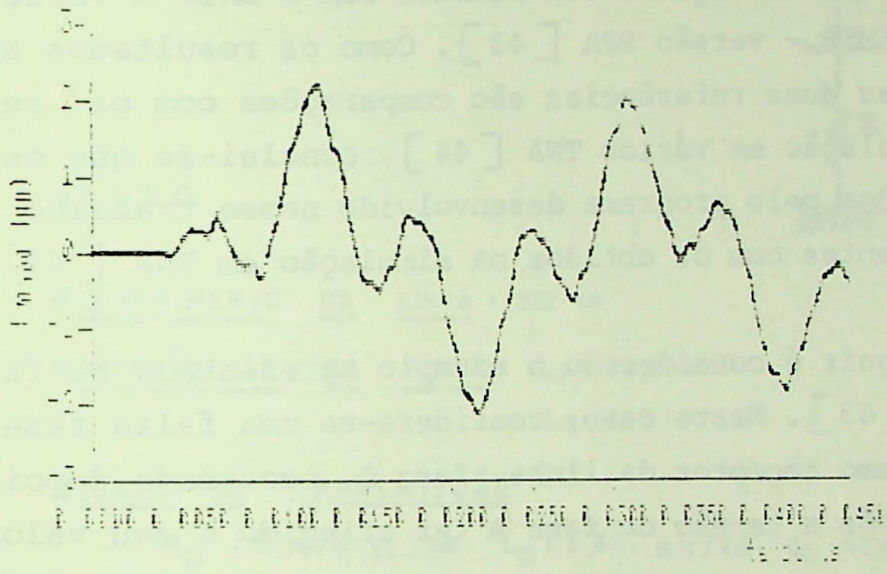
5 - 8 - $t_{FECH} = 8,05$ ms

6 - 9 - $t_{FECH} = 5,55$ ms

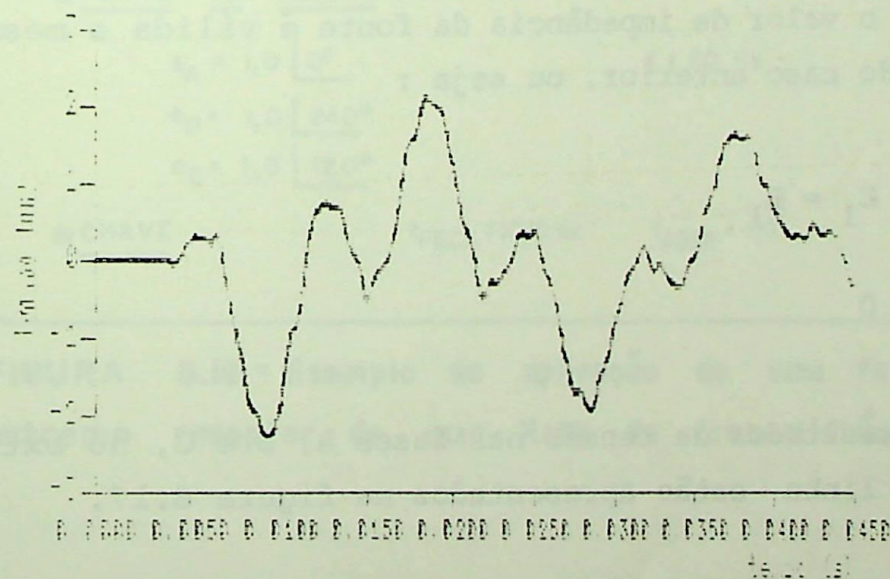
FIGURA 8.14 - Exemplo de energização de linha de transmissão



FASE A (BARRA 10)



FASE B (BARRA 11)



FASE C (BARRA 12)

FIGURA 8.15 - Tensões de energização no extremo da linha de transmissão da figura 8.14

Para a linha de transmissão, como são conhecidos apenas os parâmetros de sequência positiva e zero, adotou-se o modelo de linha transposta.

Para as chaves adotou-se o modelo de chave controlada por tempo, sendo que para os tempos de fechamento adotaram-se os valores apresentados na figura 8.14. Considera-se que as três chaves estão abertas em t = 0 ($t_{aber} = 0$).

A figura 8.15 apresenta os resultados de tensão de energização no extremo da linha, barras 10, 11 e 12. Esses resultados são exatamente iguais aos obtidos com o EMTP - versão UBC [41], e EMTP - versão BPA [43]. Como os resultados apresentados nessas duas referências são comparações com os resultados de simulação em vários TNA [44], conclui-se que os resultados obtidos pelo programa desenvolvido nesse trabalho também estão coerentes com os obtidos na simulação em TNA [44].

A seguir é considerado o exemplo apresentado na figura 8.16 [41, 43]. Neste caso, considera-se uma falta fase terra no extremo receptor da linha, fase C, ocorrendo depois de 10,15ms, após a tensão da fase A ter atingido o seu valor de pico.

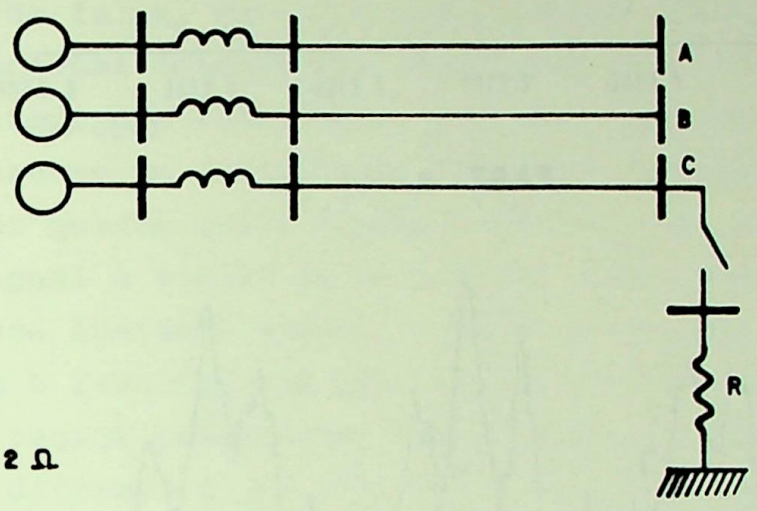
Para o valor de impedância da fonte é válida a mesma consideração do caso anterior, ou seja :

$$Z_p = Z_1 = L_1$$

$$Z_m = 0$$

Os resultados de tensão nas fases A, B e C, no extremo receptor, da linha estão apresentados na figura 8.17.

O caso apresentado nas referências [41, 43] considera uma condição pré falta em cada uma das fases da linha de trans

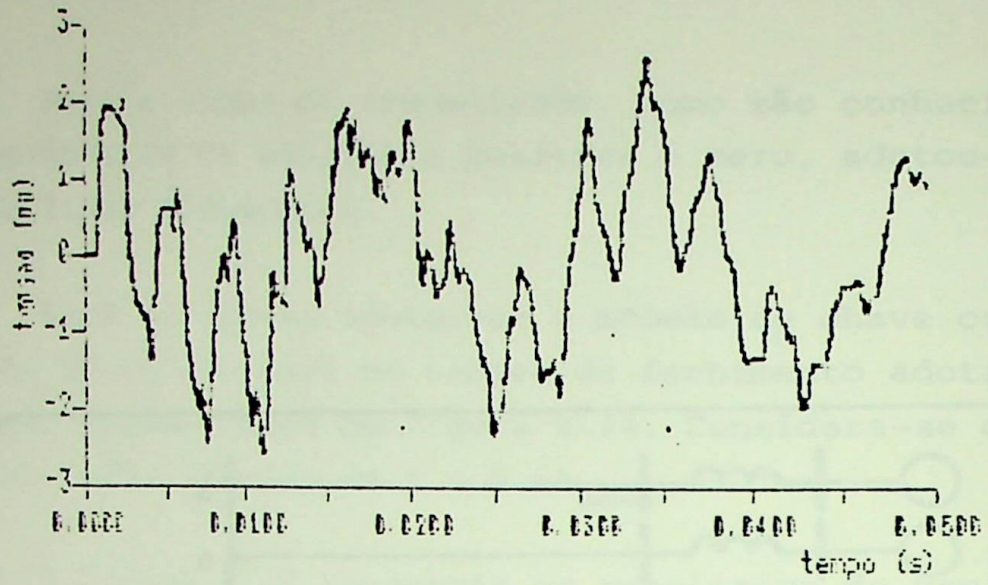


- R = 2 Ω
- COMPRIMENTO DA LINHA = 222 km
- IMPEDÂNCIAS DA FONTE : L_1 = 39,8 mH
  $L_0 / L_1 = 1$
- LINHA DE TRANSMISSÃO

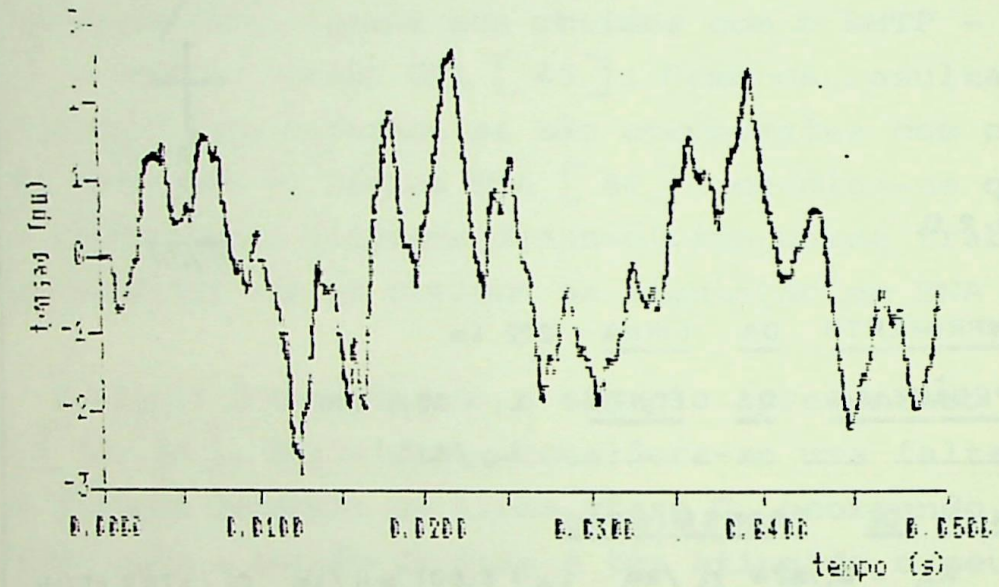
  R_0 = 0,1874 Ω/km L_0 = 3,601 mH/km C_0 = 7,52 nF/km
  R_1 = 0,0174 Ω/km L_1 = 0,967 mH/km C_1 = 12,03 nF/km
- FONTE DE TENSÃO

  $e_A = 1,0 \angle 0°$ f = 60 Hz
  $e_B = 1,0 \angle 240°$
  $e_C = 1,0 \angle 120°$
- CHAVE t_{FECH} = 10,10 ms t_{ABER} = -1,0

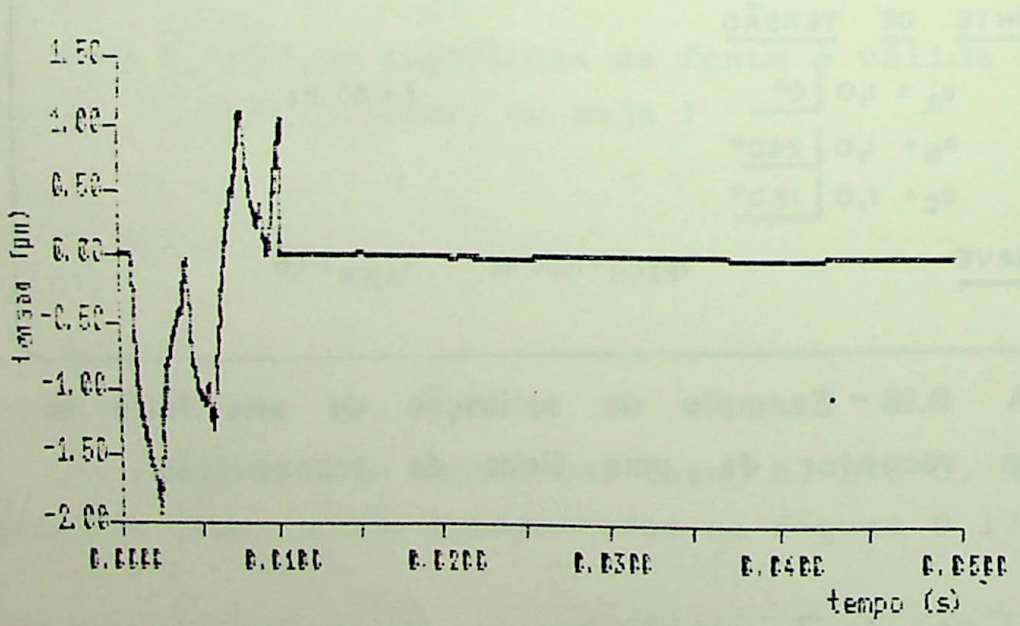
FIGURA 8.16 - Exemplo de aplicação de uma falta no extremo receptor de uma linha de transmissão



FASE A



FASE B



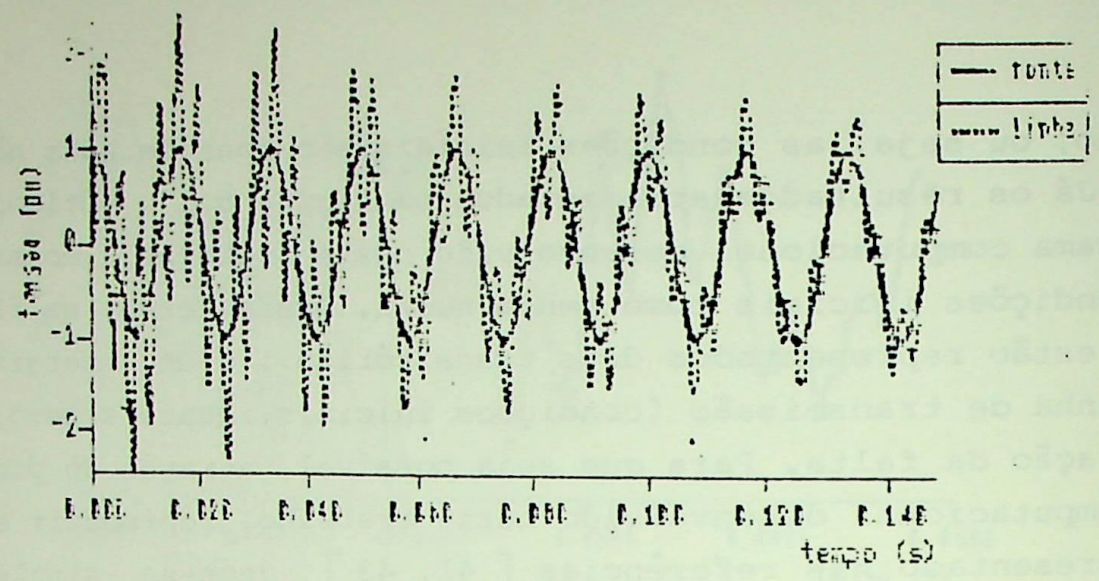
FASE C

FIGURA 8.17 - Tensões no extremo receptor da linha da figura 8.16

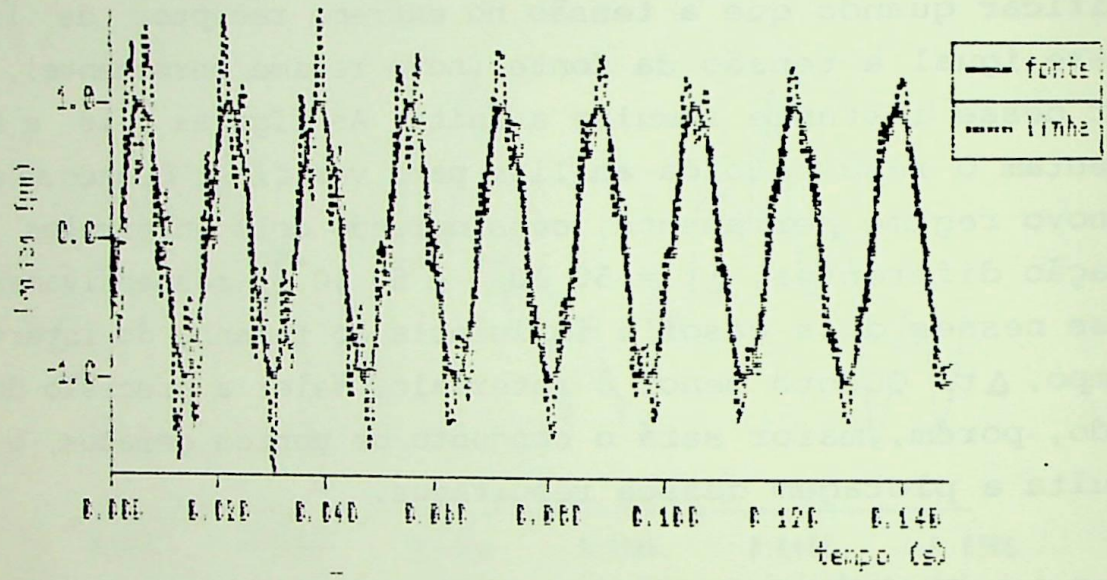
missão, ou seja, as condições iniciais são consideradas não nulas. Já os resultados apresentados na figura 8.17, obtidos do programa computacional desenvolvido neste trabalho, considera as condições iniciais como sendo nulas. Dessa forma, na figura 8.17 estão representados dois transitórios : o de energização da linha de transmissão (condições iniciais iguais a zero) e a simulação da falta. Para que seja possível, através do programa computacional desenvolvido neste trabalho, reproduzir o caso apresentado nas referências [41, 43], deve-se simular o sistema durante um determinado tempo, sem considerar a falta, e verificar quando que a tensão no extremo receptor da linha torna-se igual à tensão da fonte (novo regime permanente), e a partir desse instante simular a falta. As figuras 8.18 e 8.19 apresentam o resultado da análise para verificar quando se atinge o novo regime permanente, considerando dois intervalos de simulação diferentes, $\Delta t = 50\ 10^{-6}$ e $50\ 10^{-5}$, respectivamente. Nota-se nesses dois casos a influência do tamanho do intervalo de tempo, Δt. Quanto menor o intervalo, maior a precisão do resultado, porém, maior será o conjunto de pontos gerados, o que dificulta a plotagem desses resultados.

Pelos resultados apresentados na figura 8.18,nota-se que mesmo após 140ms ainda aparece uma tensão oscilatória no extremo receptor. Em compensação, quando se utiliza $\Delta t = 50\ 10^{-5}$(figura 8.19), não é mais possível identificar essa oscilação de tensão. Na figura 8.20 está apresentada uma outra simulação considerando $\Delta t = 50\ 10^{-5}$ e t_{max} = 250ms. Neste caso, com um tempo de simulação maior, torna-se mais difícil verificar quando se atinge o novo regime permanente. Porém, dada a dificuldade de se obter uma melhor plotagem dos resultados, admite-se que já no instante 200ms atingiu-se um novo regime permanente.

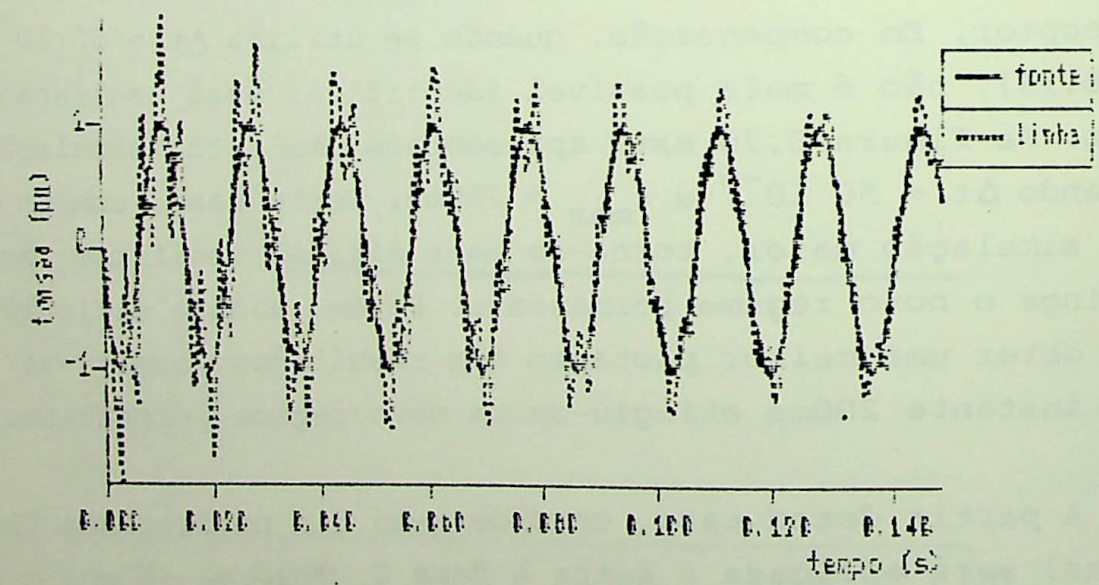
A partir desse caso, considera-se que no instante (200 + 10,15ms) será aplicada a falta à fase C. Observa-se que o instante 200ms corresponde, aproximadamente, ao instante para o qual ocorre o pico de tensão na fase A (figura 8.20), e como



FASE A

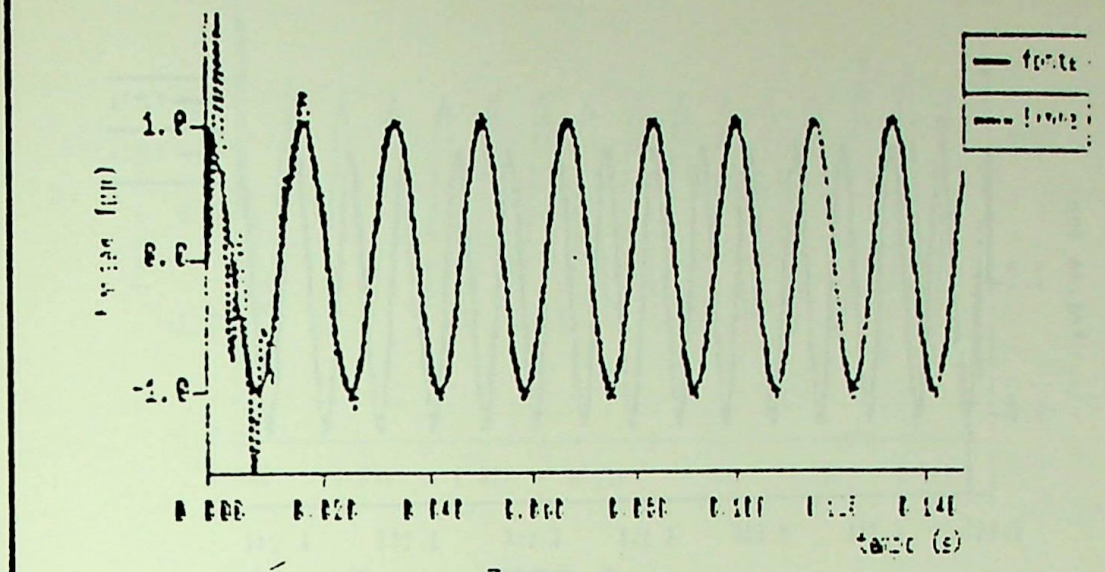


FASE B

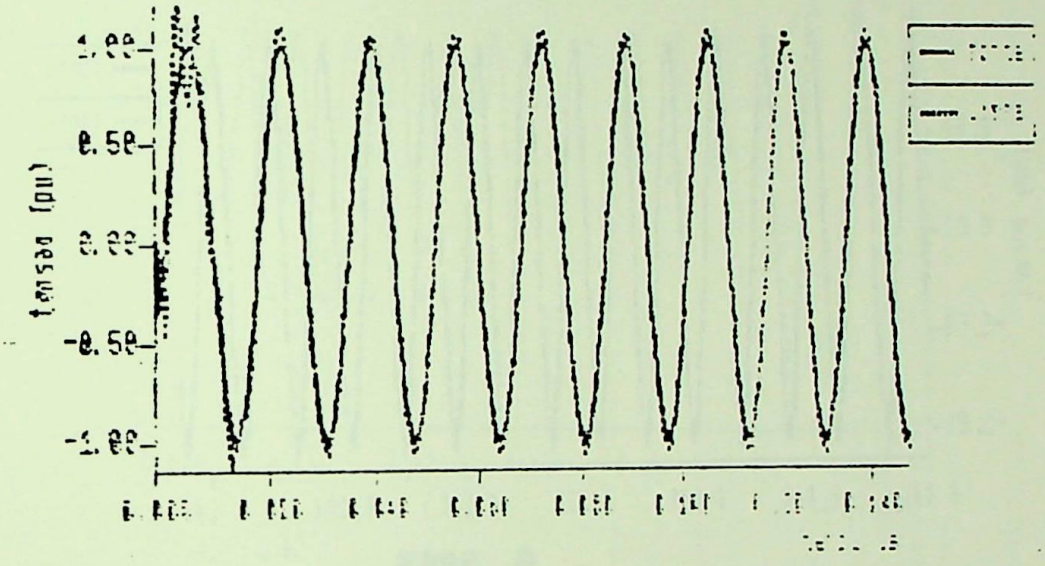


FASE C

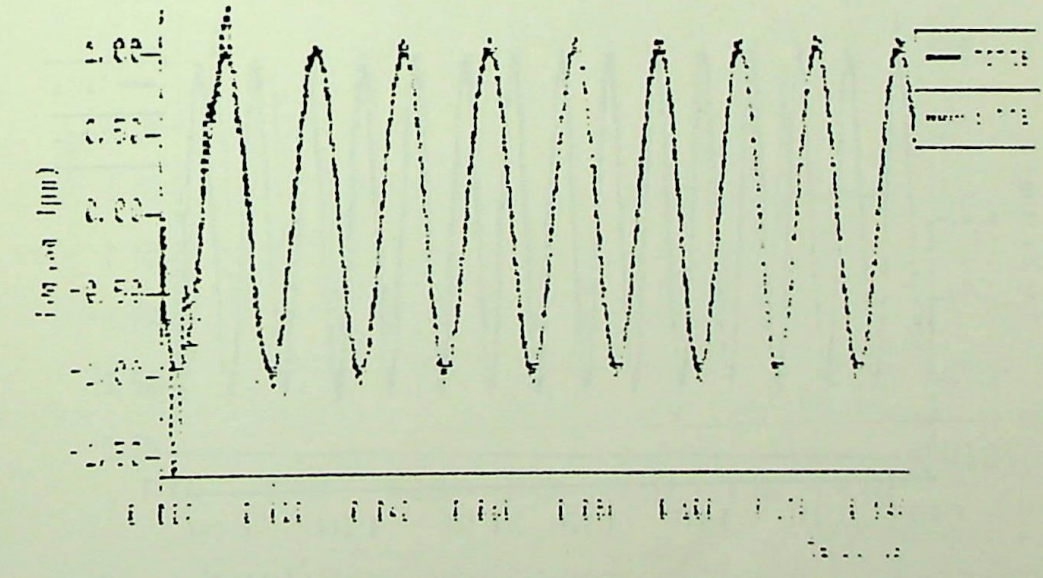
FIGURA 8.18 - Análise para verificar quando se atinge o novo regime permanente ($\Delta t = 50\ 10^{-6}$)



FASE A

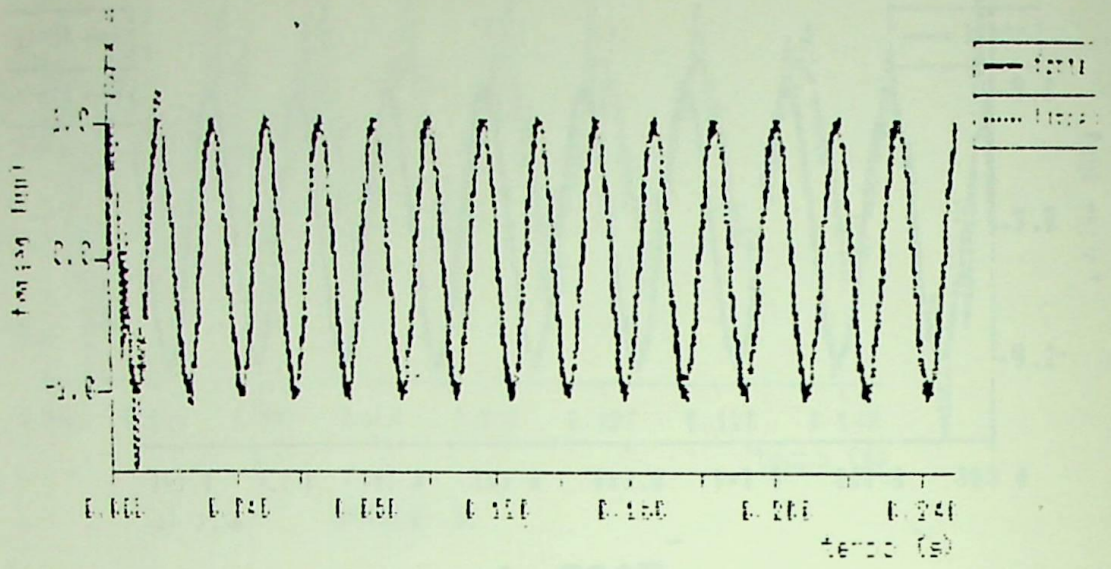


FASE B

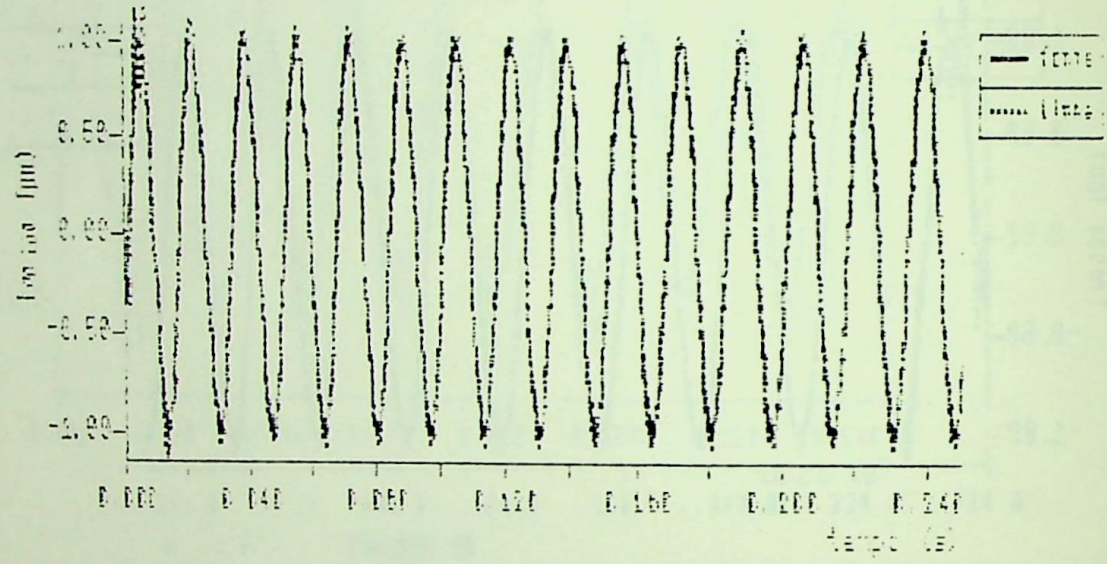


FASE C

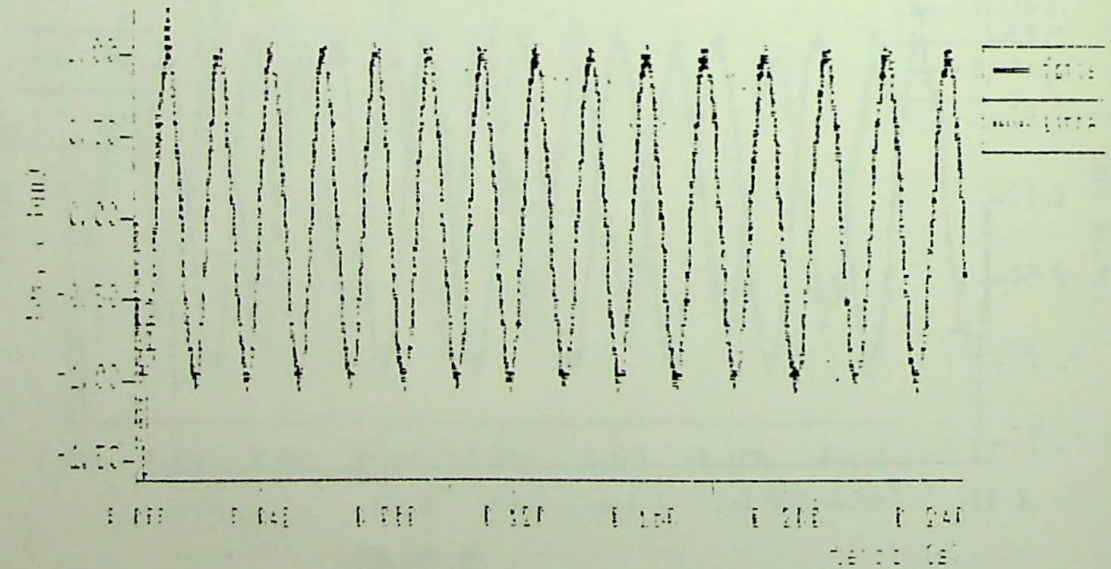
FIGURA 8.19 - Análise para verificar quando se atinge o novo regime permanente ($\Delta t = 50\ 10^{-5}$)



FASE A

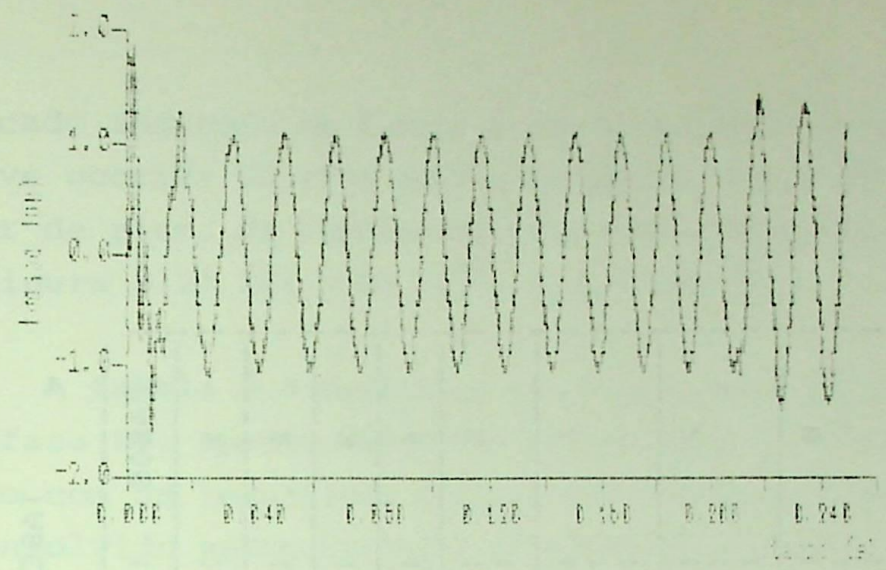


FASE B

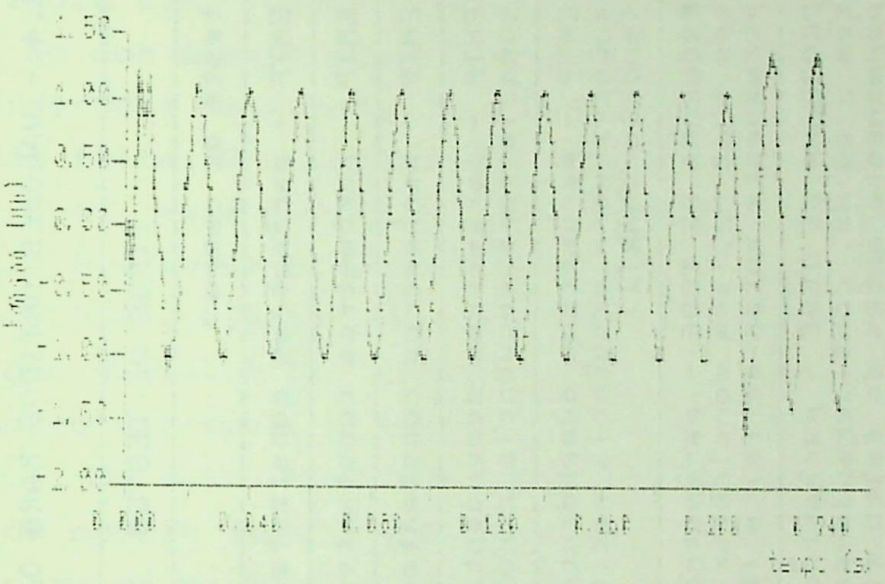


FASE C

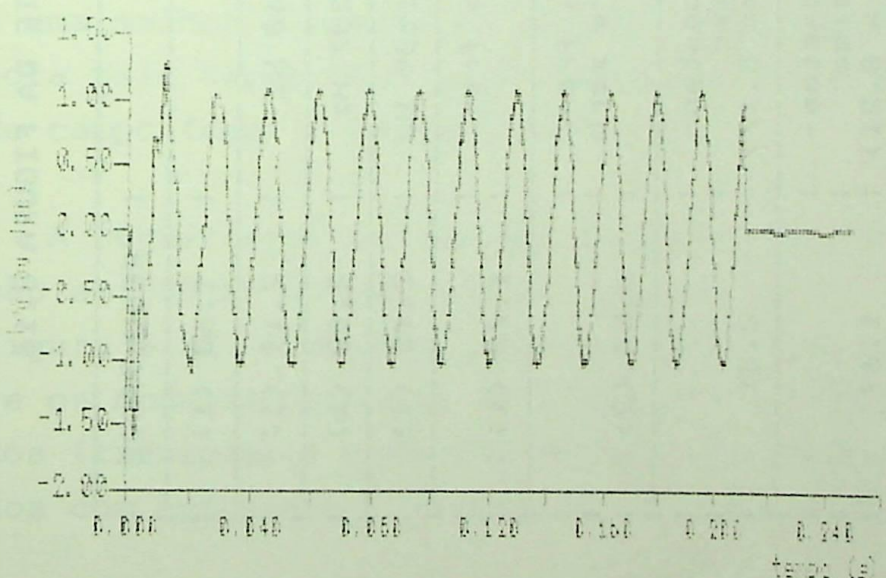
FIGURA 8.20- Análise para verificar quando se atinge o novo regime permanente ($\Delta t = 50\ 10^{-5}$, $t_{MAX}=0,25$)



FASE A



FASE B



FASE C

FIGURA 8.21 - Simulação de falta na fase C, após ter-se iniciado um novo regime permanente

TABELA 8.4 - VALORES OBTIDOS PARA O TESTE DA FIGURA 8.16

CASOS	TIPOS DE TESTES	RESULTADOS
1	- teste de campo	1.60 (1)
2	- EMTP - parâmetros constantes a 60 Hz	2.11 (1)
3	- EMTP - parâmetros constantes a 237 Hz	2.02 (1)
4	- EMTP - parâmetros constantes a 1000 Hz	2.05 (1)
5	- EMTP - parâmetros dependentes da frequência para sequência zero	1.77 (1)
6	- EMTP - parâmetros dependentes da frequência para sequência positiva e zero (modelo JMARTI)	1.57 (2)
7	- PROGRAMA DE TESE - parâmetros constantes a 60 Hz, sem considerar regime permanente antes da falta (figura 8.17)	2.81
8	- PROGRAMA DE TESE - parâmetros constantes a 60 Hz, considerando-se regime permanente antes da falta (figura 8.21)	1.69

NOTAS : (1) - Valores correspondentes às referências [41,43]

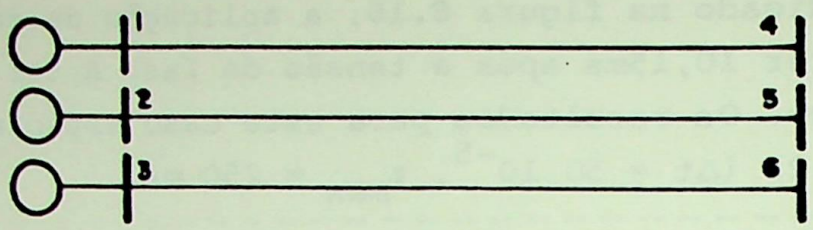
(2) - Valores correspondentes às referências [38,41]

indicado indicado na figura 8.16, a aplicação da falta na fase C deve ocorrer 10,15ms após a tensão da fase A ter atingido seu valor de pico. Os resultados para este caso estão apresentados na figura 8.21 ($\Delta t = 50\ 10^{-5}$, $t_{max} = 250$ ms).

A tabela 8.4 mostra os resultados da maior tensão de pico (fase B), apresentados nas referências [41, 43], em comparação com os resultados obtidos com o programa computacional desenvolvido neste trabalho (figuras 8.17 e 8.21). Pelos valores apresentados nessa tabela nota-se que o resultado mostrado na figura 8.17 (caso 7 - tabela 8.4), apresenta-se bem superior ao dos demais casos, visto que, como já foi comentado, são considerados dois transitórios : energização da linha e aplicação da falta. O resultado mostrado na figura 8.21 (caso 8 - tabela 8.4), está próximo do valor de teste de campo (caso 1 - tabela 8.4) e do valor encontrado com o modelo JMarti (caso 6- tabela 8.4). Ressalta-se, no entanto, que para este caso, a simulação da falta foi iniciada a partir de uma condição inicial um pouco diferente da considerada para os demais casos da tabela 8.4. Um outro resultado importante apresentado nessa tabela é o do modelo JMarti, que considera a dependência da frequência para os parâmetros de sequência positiva e zero (caso 6 - tabela 8.4). Como mencionado no capítulo 7, este modelo considera uma melhor modelagem do sistema, e seus resultados, como se nota pela tabela 8.4, estão bem próximos dos valores do teste de campo (caso 1 - tabela 8.4).

A seguir será considerado como exemplo, a linha de transmissão em 500 kV da figura G.4, esquematicamente representada na figura 8.22. O objetivo principal deste caso é a comparação entre os modelos de linhas de transmissão a parâmetros distribuídos (transpostas e não transpostas) e a parâmetros concentrados com acoplamento (conexão de vários π em série).

Para os modelos de linhas transpostas e não transpostas foram considerados os parâmetros apresentados na figura 8.22.



● COMPRIMENTO DA LINHA = 343 Km

● PARÂMETROS DE SEQUÊNCIA POSITIVA E ZERO

R_0 = 0,32368 Ω/Km X_0 = 1,1703 Ω/Km C_0 = 7,9898 nF/Km

R_1 = 0,024785 Ω/Km X_1 = 0,36351 Ω/Km C_1 = 12,079 nF/Km

● PARÂMETROS MODAIS À FREQUÊNCIA DE 60 Hz

	R(Ω/Km)	X(Ω/Km)	B(S/Km)
modo 1	0,32185	1,1631	0,30271 E-05
modo 2	0,025491	0,39822	0,41982 E-05
modo 3	0,024077	0,32802	0,49114 E-05

$$[Ti] = \begin{bmatrix} 0,6191\ E-03 & 0,18057E-15 & 0,34983\ E-03 \\ 0,27387E-02 & -0,33671E-15 & -0,26007\ E-02 \\ 0,6191\ E-03 & -0,16701\ E-15 & 0,34983\ E-03 \end{bmatrix}$$

● MATRIZES [R'] (Ω/Km), [X'] (Ω/Km), [C'] (F/Km)

$$[R'] = \begin{bmatrix} 0,12324 & & \\ 0,10055 & 0,12678 & \\ 0,097792 & 0,10055 & 0,12324 \end{bmatrix}$$

$$[X'] = \begin{bmatrix} 0,6332 & & \\ 0,28591 & 0,63091 & \\ 0,23499 & 0,28591 & 0,6332 \end{bmatrix}$$

$$[C'] = \begin{bmatrix} 0,10599\ E-07 & & \\ -0,17758\ E-08 & 0,10949\ E-07 & \\ -0,53719\ E-09 & -0,17758\ E-08 & 0,10599\ E-07 \end{bmatrix}$$

● FONTE DE TENSÃO

$e_1 = 1,0 \angle 0°$

$e_2 = 1,0 \angle 120°$

$e_3 = 1,0 \angle 240°$

FIGURA 8.22 - Linha de transmissão típica em 500 kV

Para a representação a parâmetros concentrados considerou-se a conexão de 1, 6 e 9π em série, como mostrado na figura 8.23. Para esse caso considerou-se também, a possibilidade de simular linhas transpostas e não transpostas (figuras 8.23-a e b). Os valores das matrizes $[R]$, $[X]$ e $[B]$, que caracterizam cada π , são determinados da seguinte maneira :

$$[R] = [R'] \ell/n \tag{8.8}$$

$$[X] = [X'] \ell/n \tag{8.9}$$

$$[B] = [B'] \ell/n \tag{8.10}$$

onde, os valores $[R']$, $[X']$ e $[B']$ correspondem às matrizes por unidade de comprimento (figura 8.22), ℓ é o comprimento da linha e n é o número de π considerados na representação.

Os resultados de simulação para o modelo a parâmetros distribuídos, transposta e não transposta, estão apresentados, respectivamente nas figuras 8.24 e 8.25. Para o modelo a parâmetros concentrados os resultados estão apresentados nas figuras 8.26 a 8.30, respectivamente para as seguintes representações : 1π - não transposta, 6 π - transposta e não transposta e 9 π - transposta e não transposta.

As figuras 8.31 a 8.36 apresentam uma comparação entre os valores de tensão no extremo da linha da figura 8.22 (fases A, B e C), modelada como transposta e não transposta através de parâmetros concentrados (1, 6 e 9 π em cascata). Tanto para a linha transposta, como para a linha não transposta, nota-se que praticamente não existem diferenças modelando-se a linha com 6 ou 9 π . Os valores de pico obtidos para a representação com 9 π são um pouco maiores que os obtidos com 6 π . Para a linha não transposta nota-se que a representação com 1π não produz bons resultados. Como se trata de uma representação a

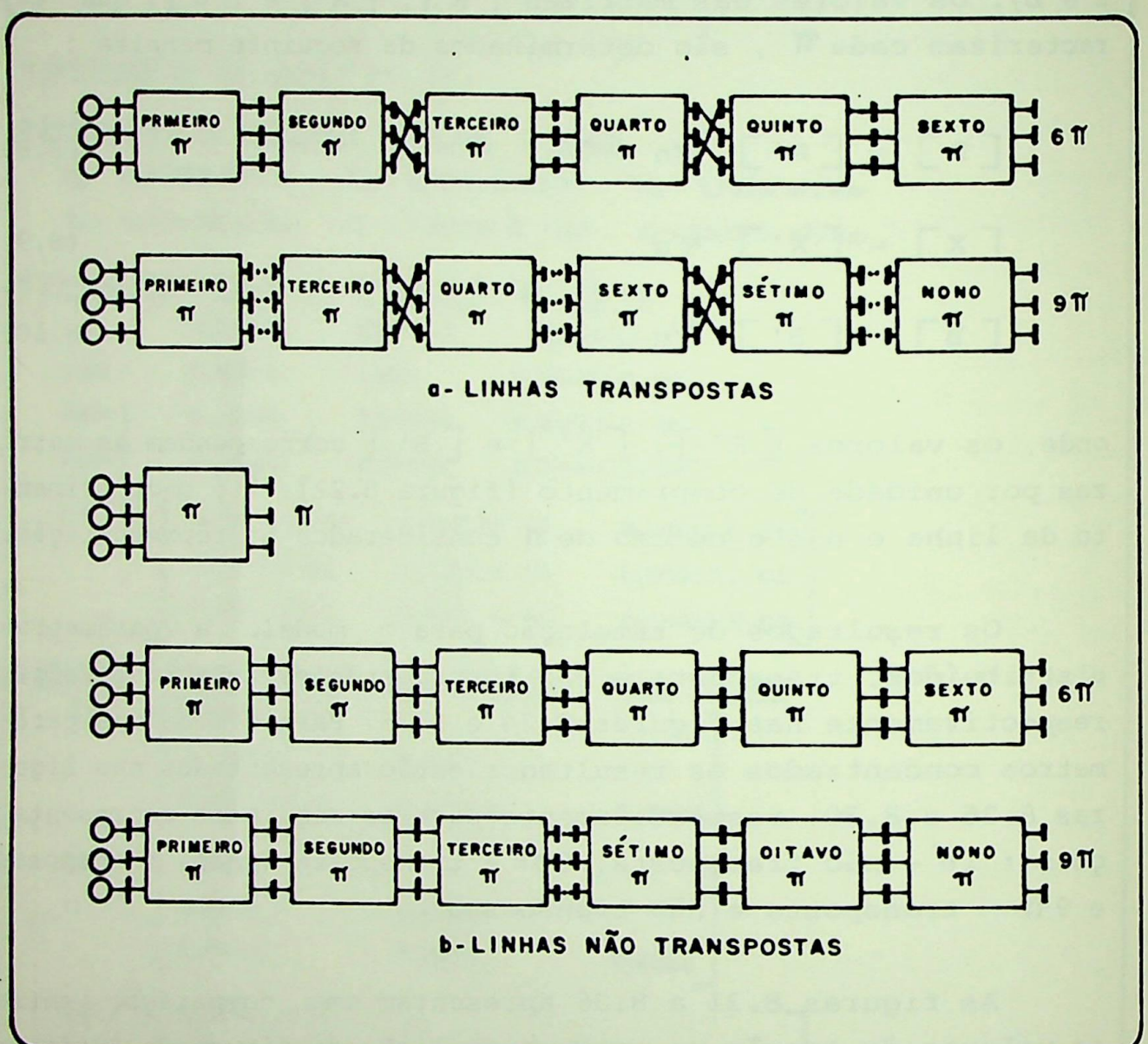
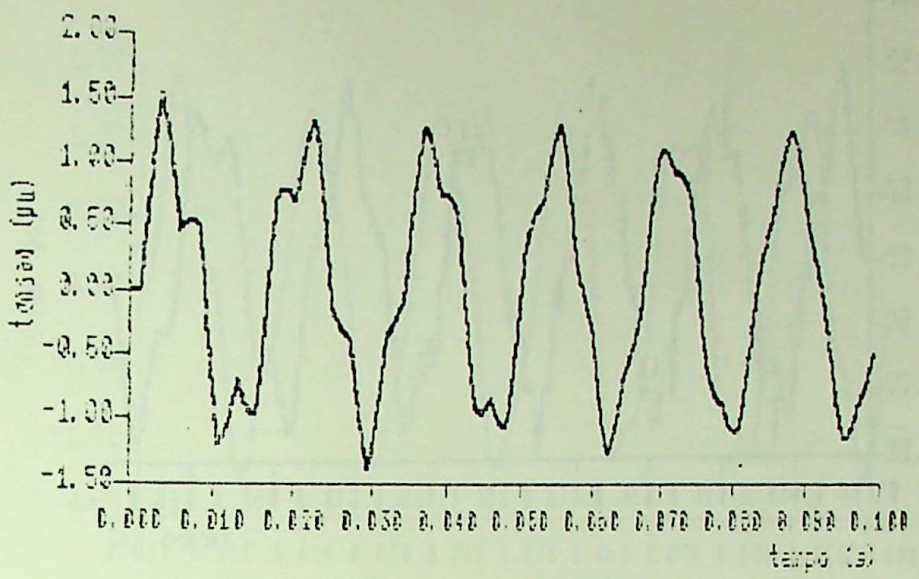
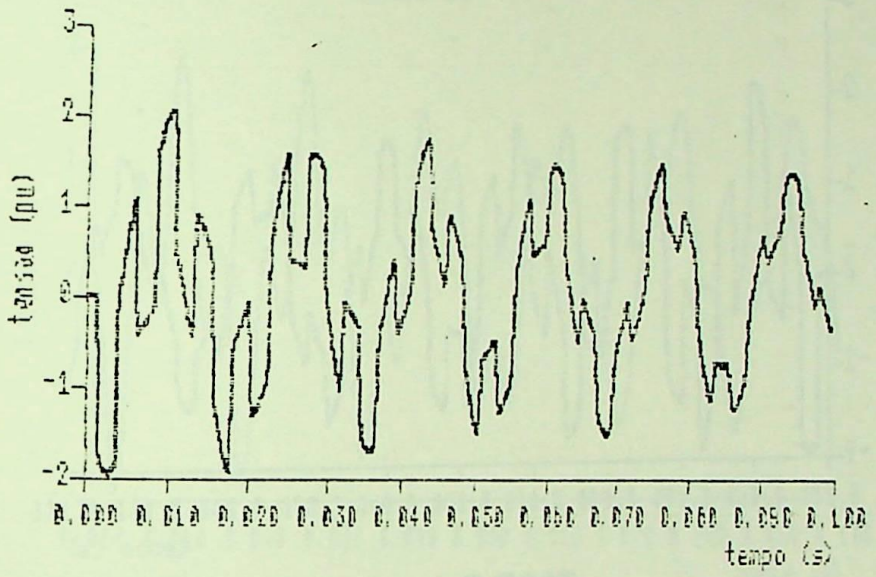


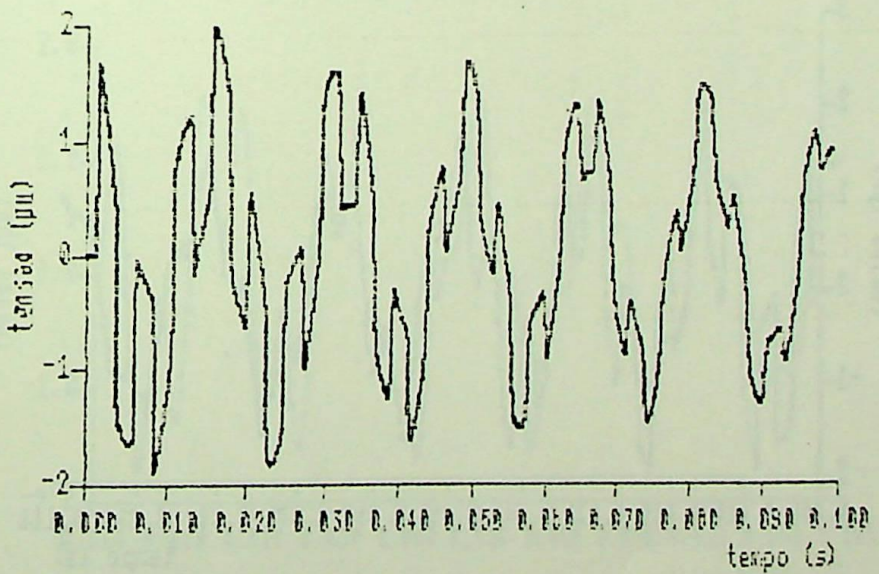
FIGURA 8.23 - Representação de linhas transpostas através da conexão série de π modelados através de parâmetros concentrados.



FASE A

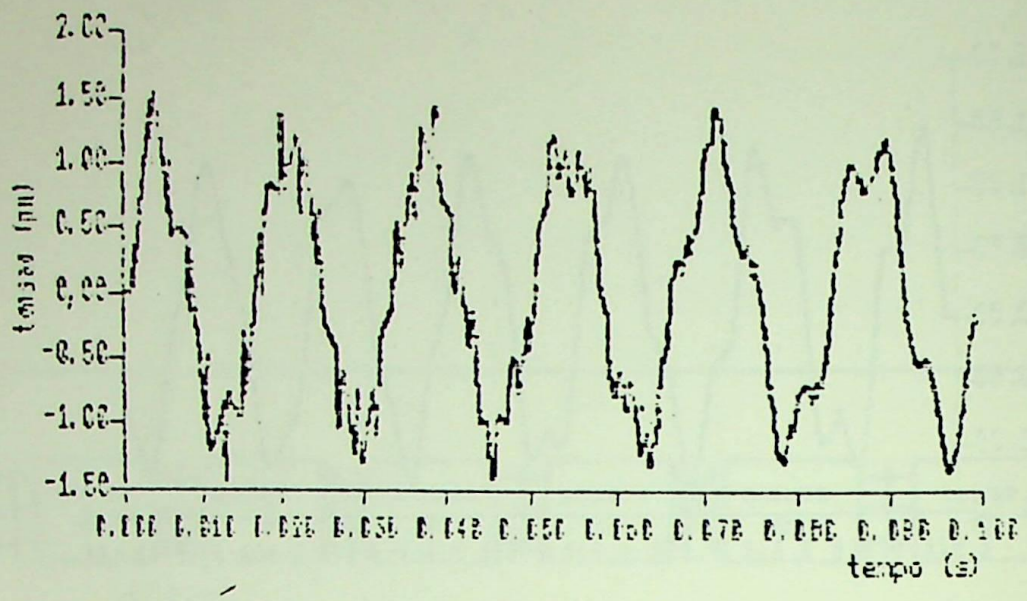


FASE B

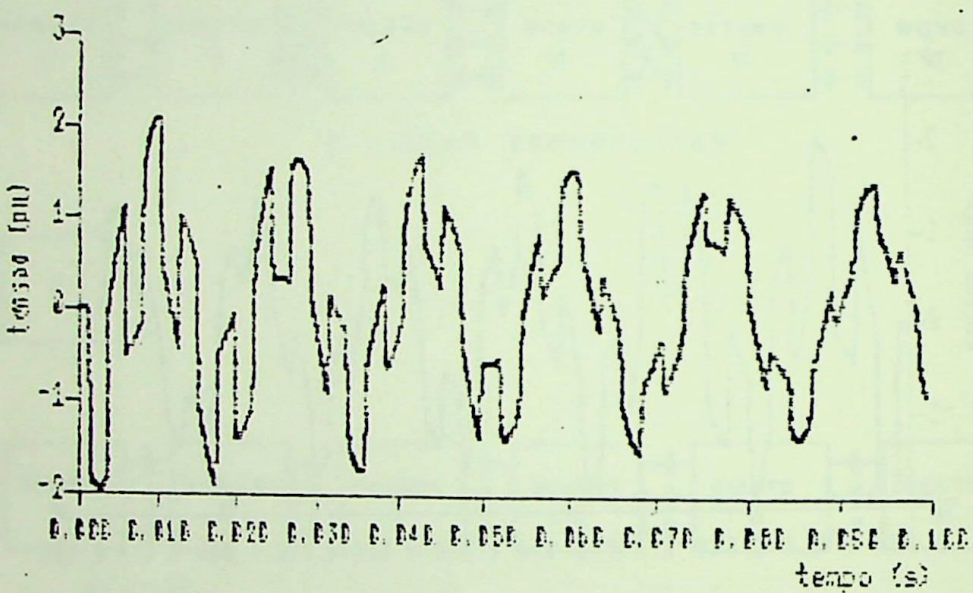


FASE C

FIGURA 8.24 - Linha de transmissão modelada a parâmetros distribuidos - transposta



FASE A

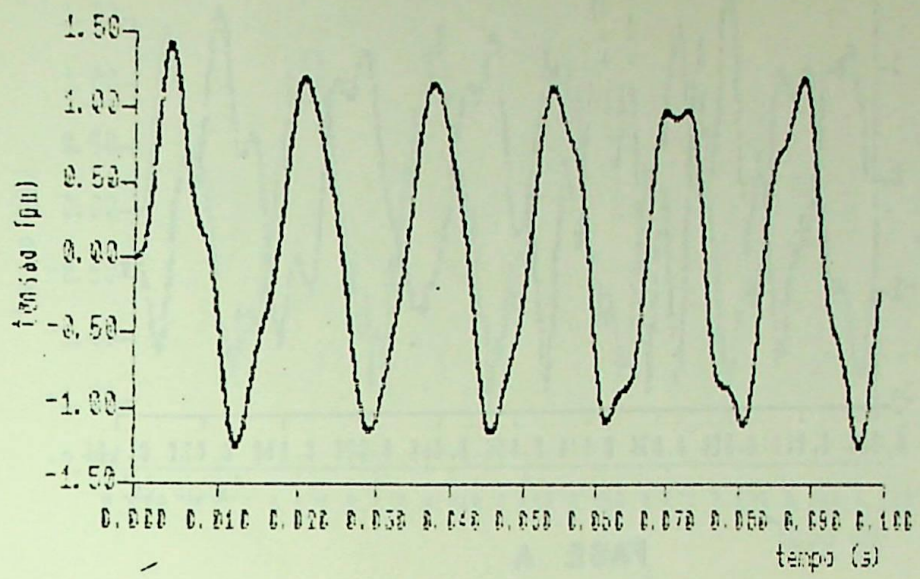


FASE B



FASE C

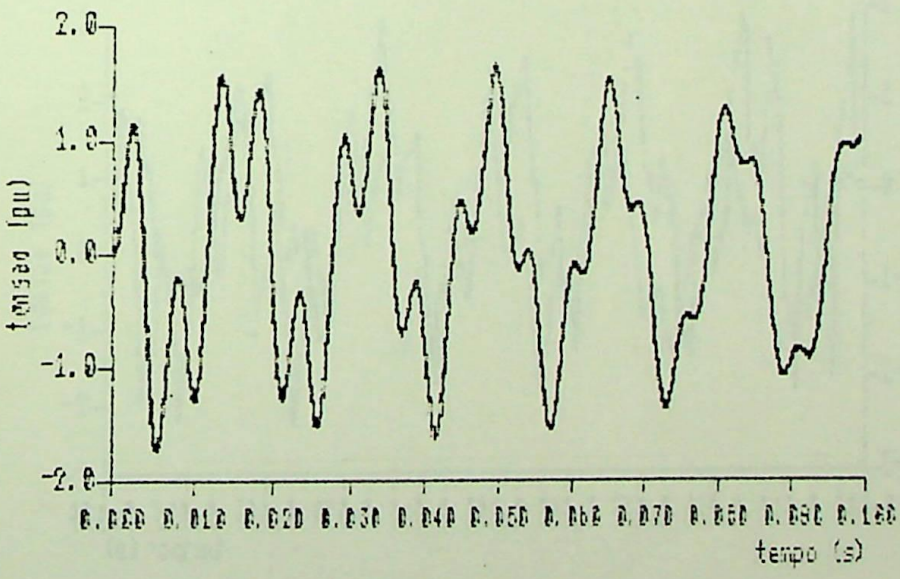
FIGURA 8.25 - Linha de transmissão modelada a parâmetros distribuídos - não transposta



FASE A



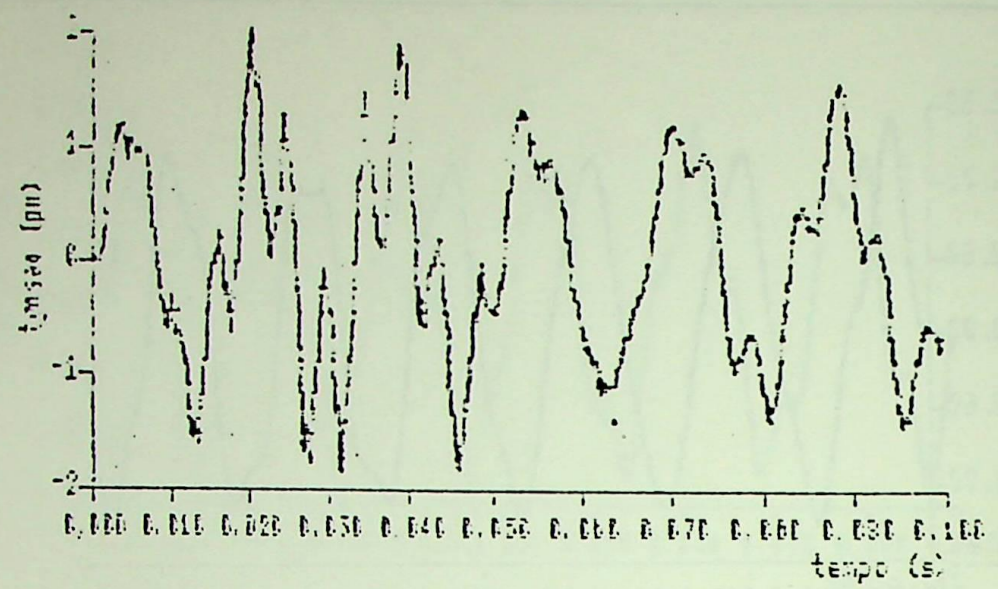
FASE B



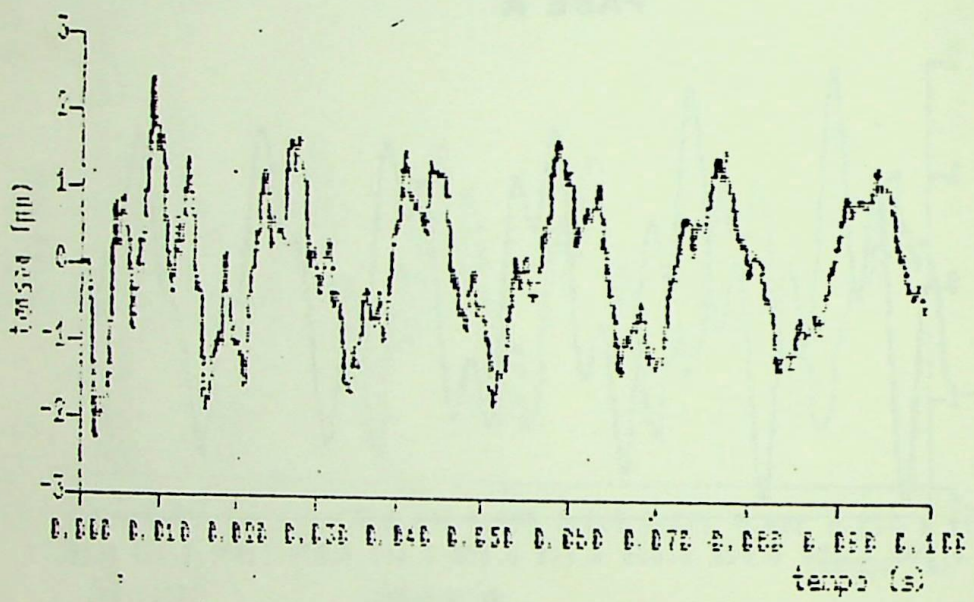
FASE C

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - E
Biblioteca
MAUÁ
B.M

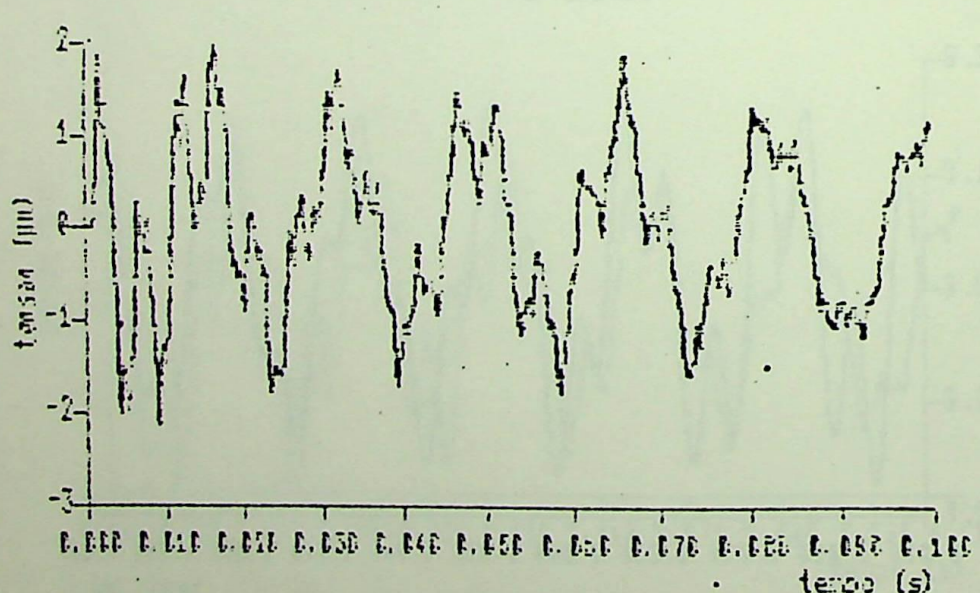
FIGURA 8.26 - Linha de transmissão modelada a parâmetros concentrados - Π



FASE A



FASE B



FASE C

FIGURA 8.27 - Linha de transmissão modelada a parâmetros concentrados. (TT - transposta

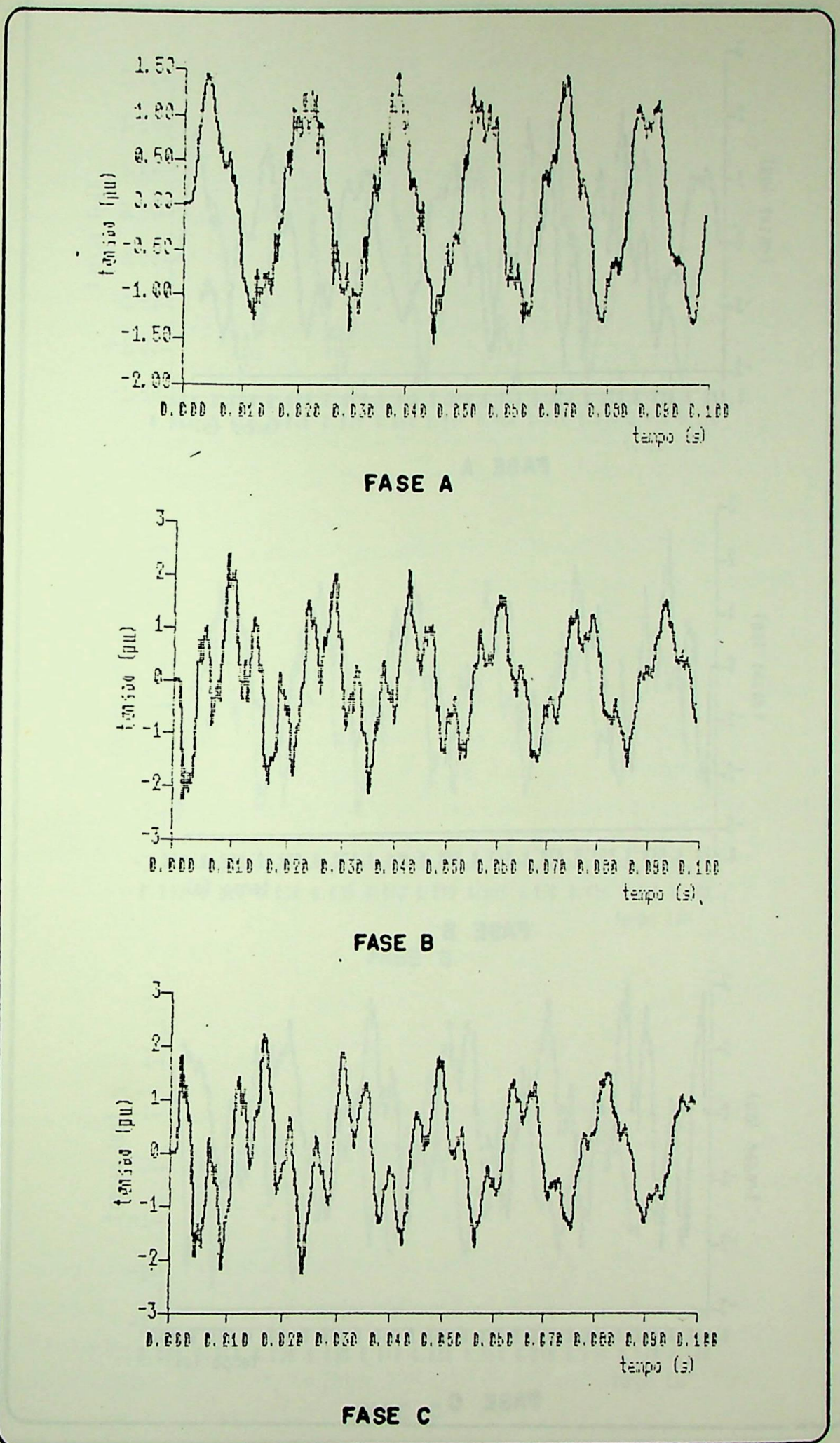
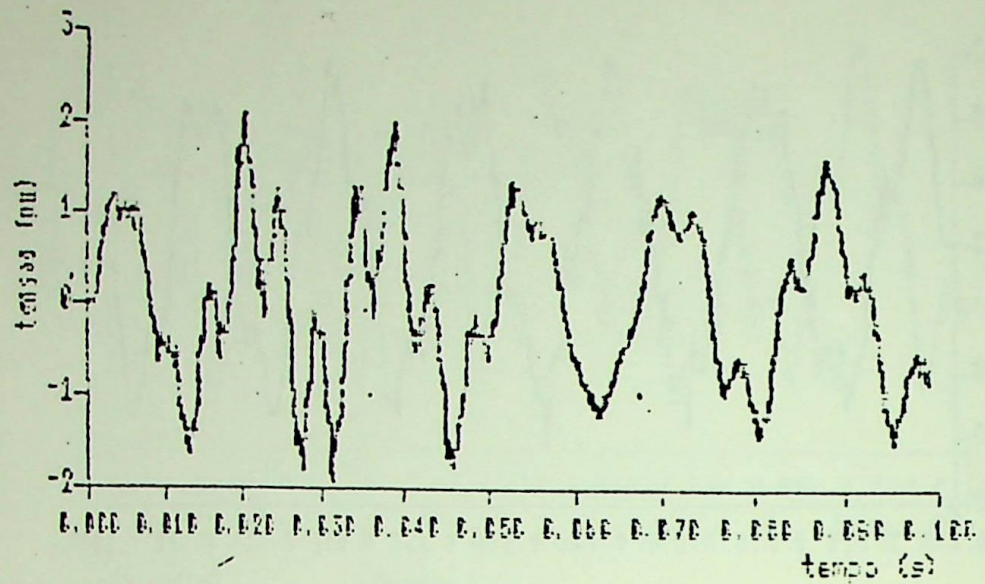
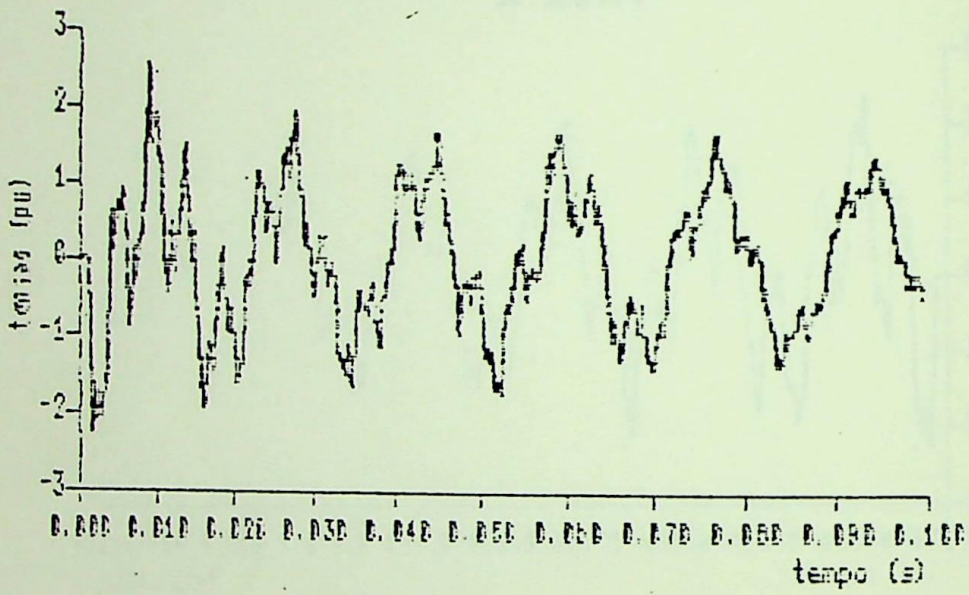


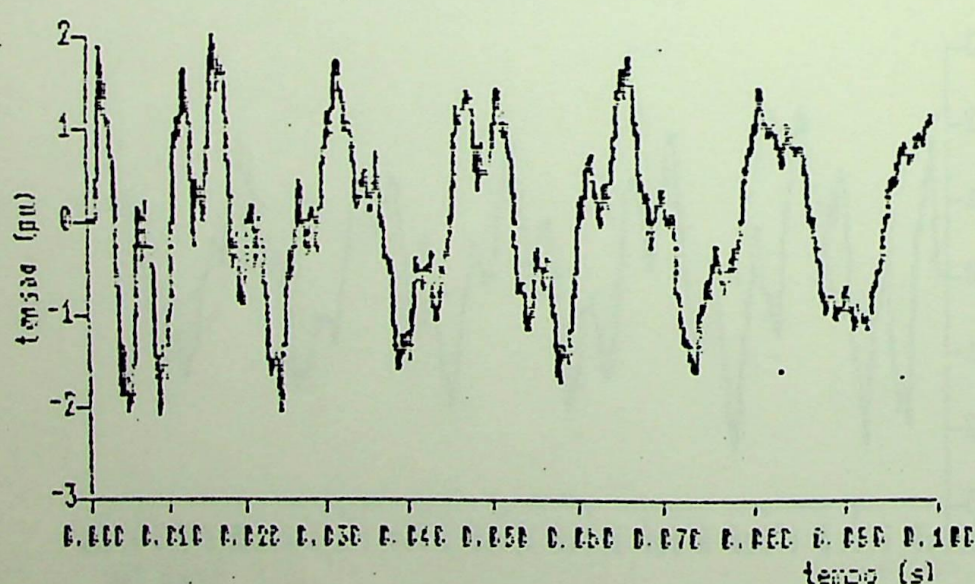
FIGURA 8.28- Linha de transmissão modelada a parâmetros concentrados- 6 π - não transposta



FASE A

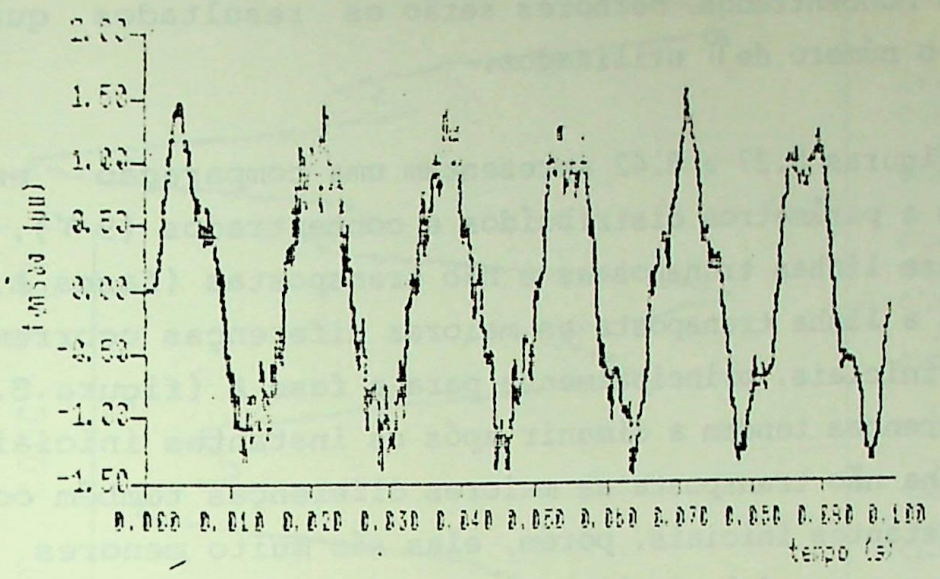


FASE B

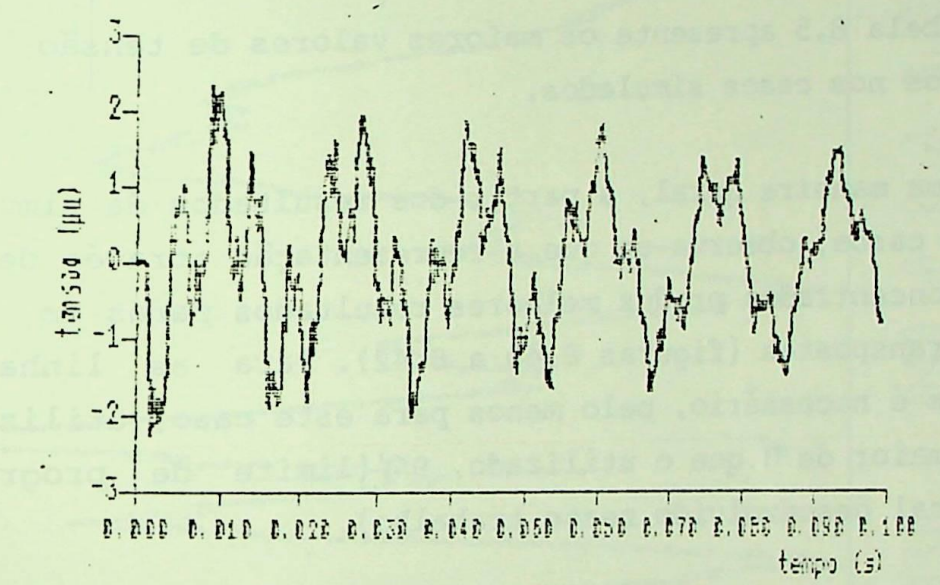


FASE C

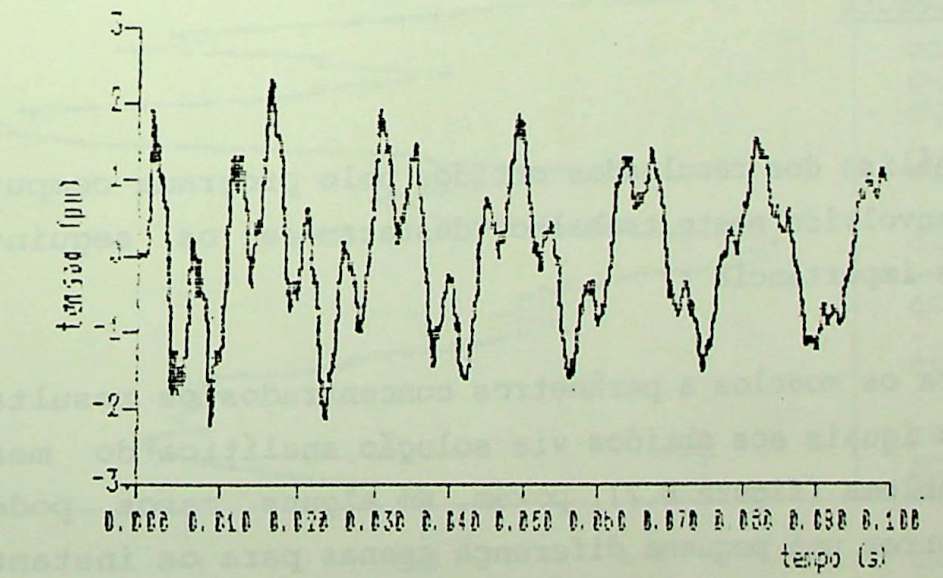
FIGURA 8.29 - Linha de transmissão modelada a parâmetros concentrados - 9ª - transposta



FASE A



FASE B



FASE C

FIGURA 8.30- Linha de transmissão modelada a parâmetros concentrados - π - não transposta

parâmetros concentrados, melhores serão os resultados quanto maior for o número de π utilizados.

As figuras 8.37 a 8.42 apresentam uma comparação entre os modelos a parâmetros distribuídos e concentrados (9 π), considerando-se linhas transpostas e não transpostas (fases A, B e C). Para a linha transposta as maiores diferenças ocorrem nos instantes iniciais, principalmente para a fase A (figura 8.37). Essas diferenças tendem a dimunir após os instantes iniciais. Para a linha não transposta as maiores diferenças também ocorrem nos instantes iniciais, porém, elas são muito menores que as obtidas com o modelo de linha transposta.

A tabela 8.5 apresenta os maiores valores de tensão de pico obtidos nos casos simulados.

De uma maneira geral, a partir dos resultados da simulação desses casos, observa-se que a representação através de parâmetros concentrados produz melhores resultados paras as linhas não transpostas (figuras 8.40 a 8.42). Para as linhas transpostas é necessário, pelo menos para este caso, utilizar um número maior de π que o utilizado, 9 π (limite de programa computacional desenvolvido neste trabalho).

8.5 - CONCLUSÕES

Na análise dos resultados obtidos pelo programa computacional desenvolvido neste trabalho, destacam-se os seguintes aspectos de importância :

- para os modelos a parâmetros concentrados os resultados são iguais aos obtidos via solução analítica do mesmo problema (figura 8.2), porém, em alguns casos poderá ocorrer uma pequena diferença apenas para os instantes

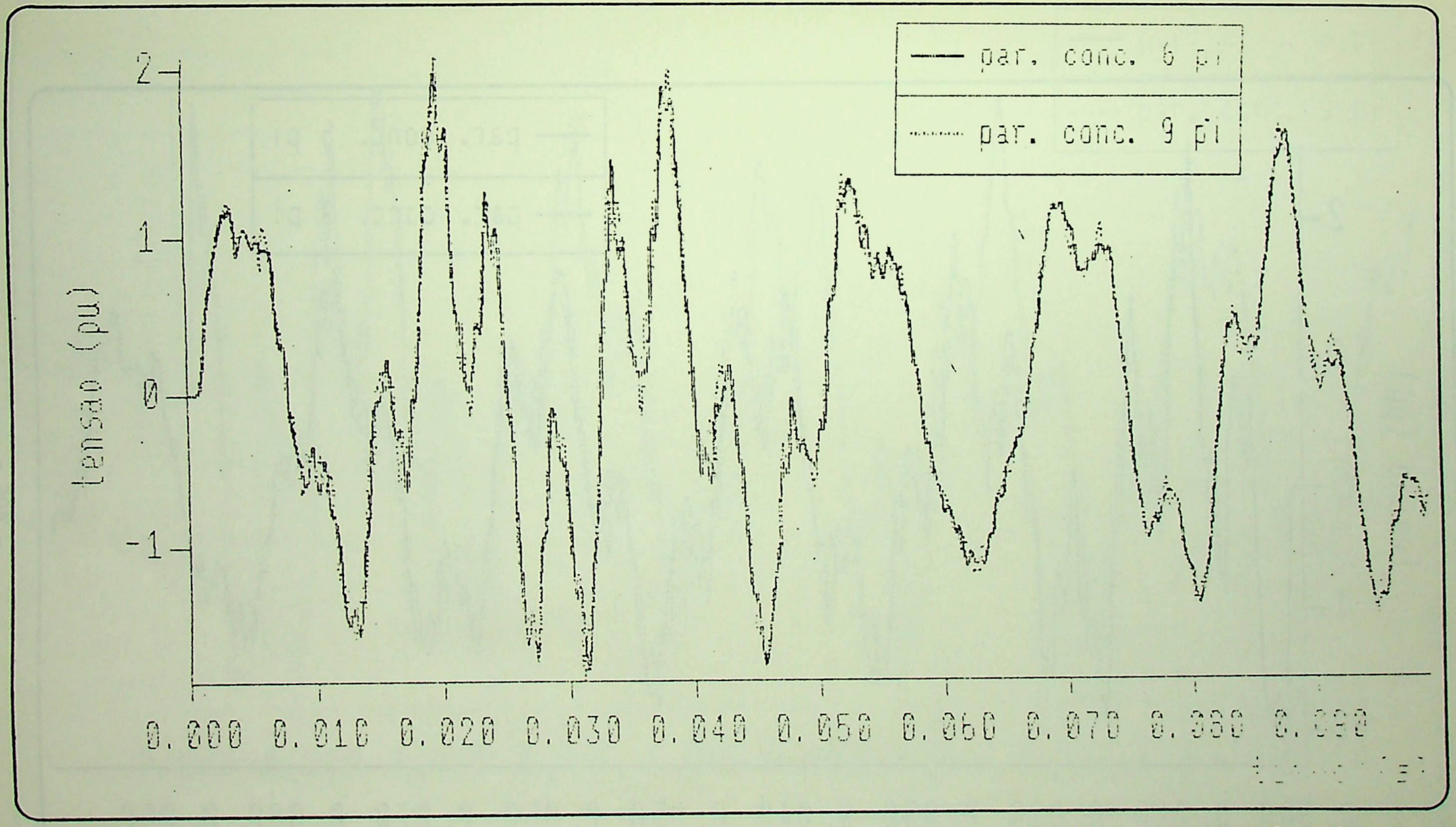
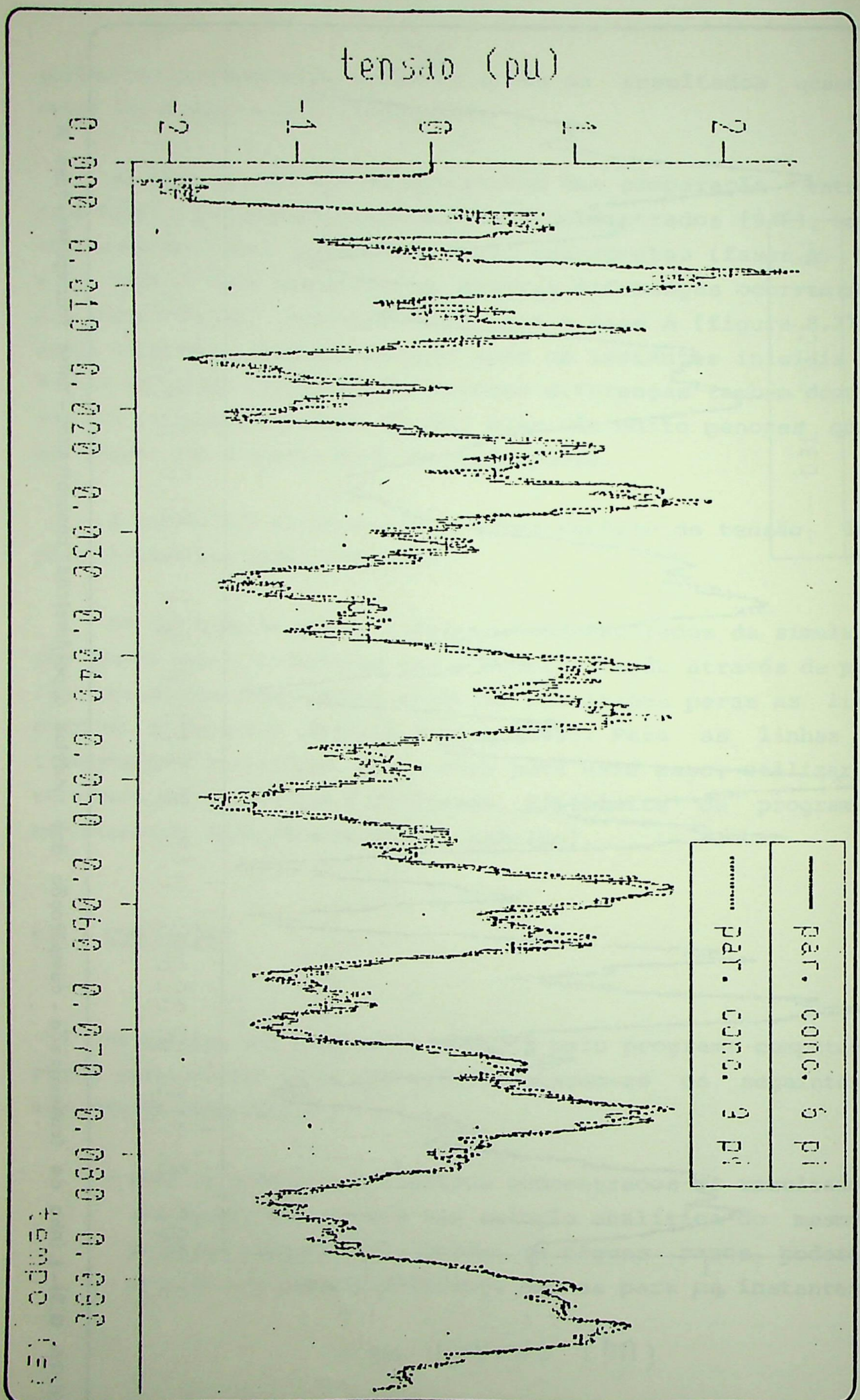


FIGURA 8.31 - Linha de transmissão - comparação dos modelos a parâmetros concentrados - linha transposta - fase A


tensao (pu)
-2
-1
0
1
2
0.000
0.010
0.020
0.030
0.040
0.050
0.060
0.070
0.080
0.090
tempo (s)
par. conc. 6 pi
par. conc. 9 pi

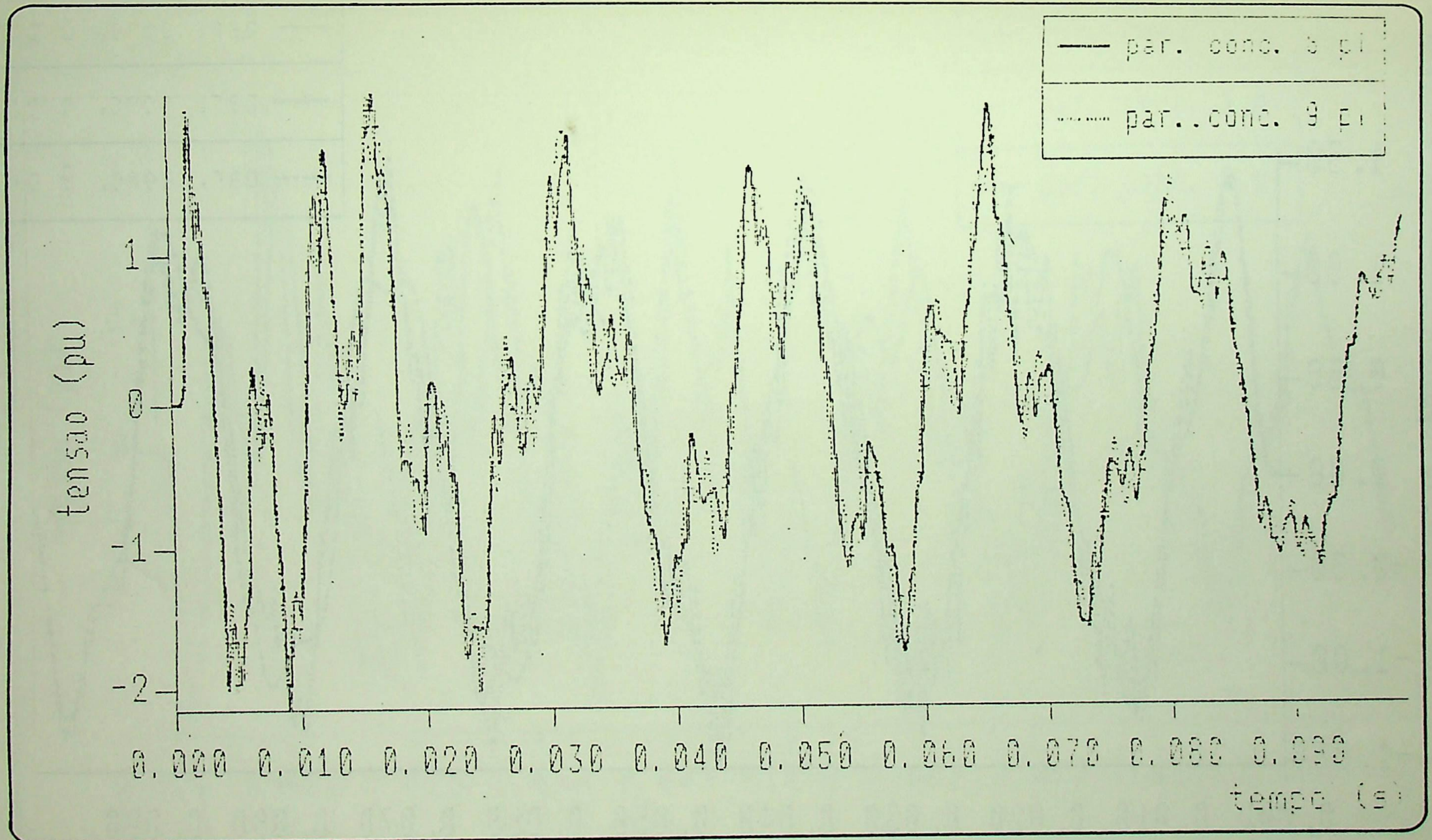
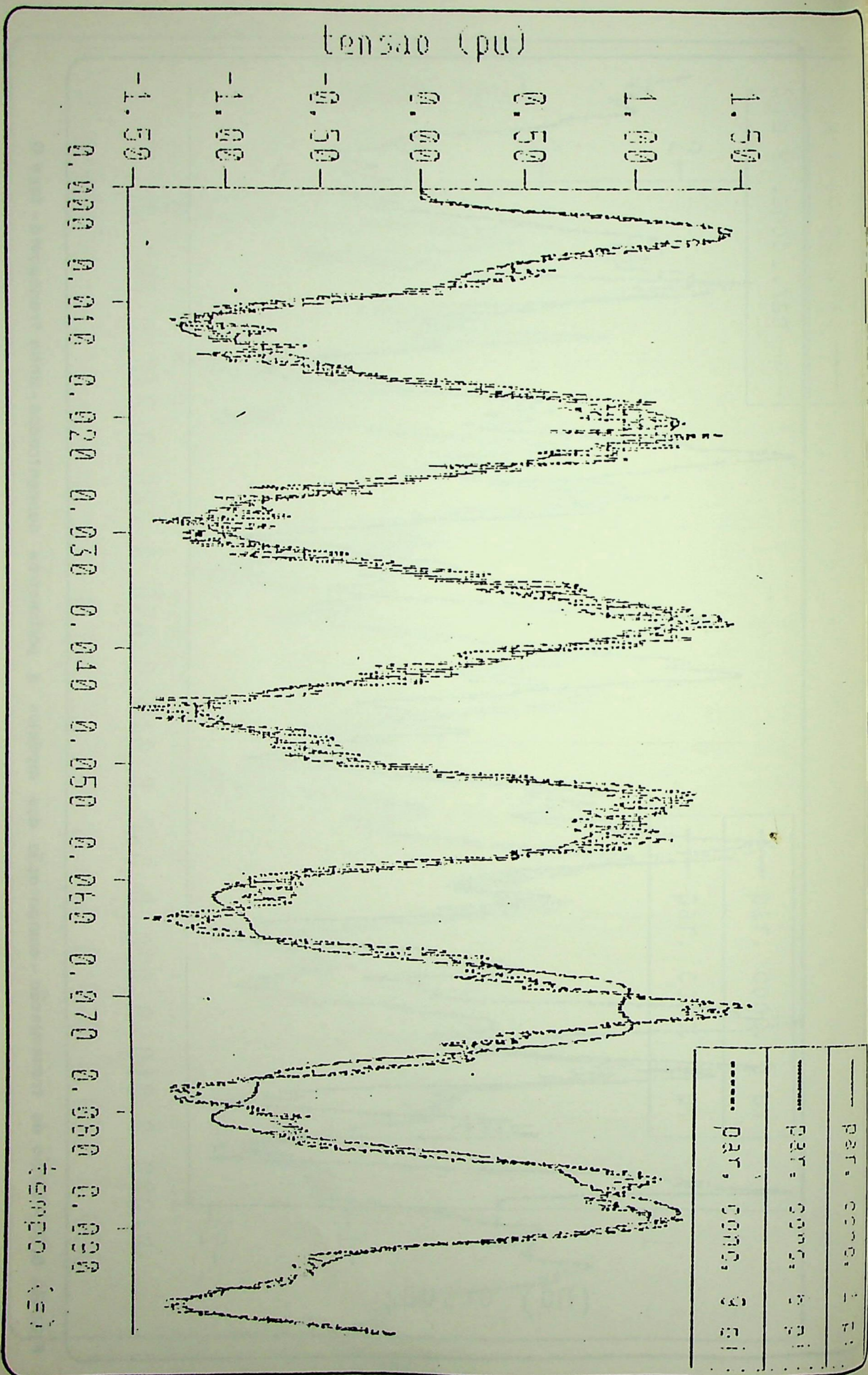


FIGURA 8.33 - Linha de transmissão - comparação dos modelos a parâmetros concentrados - linha transposta - fase C


tensao (pu)
-1.50
-1.00
-0.50
0.00
0.50
1.00
1.50
0.000
0.010
0.020
0.030
0.040
0.050
0.060
0.070
0.080
0.090
tempo (s)
par. conc. 1 pi
par. conc. 2 pi
par. conc. 3 pi

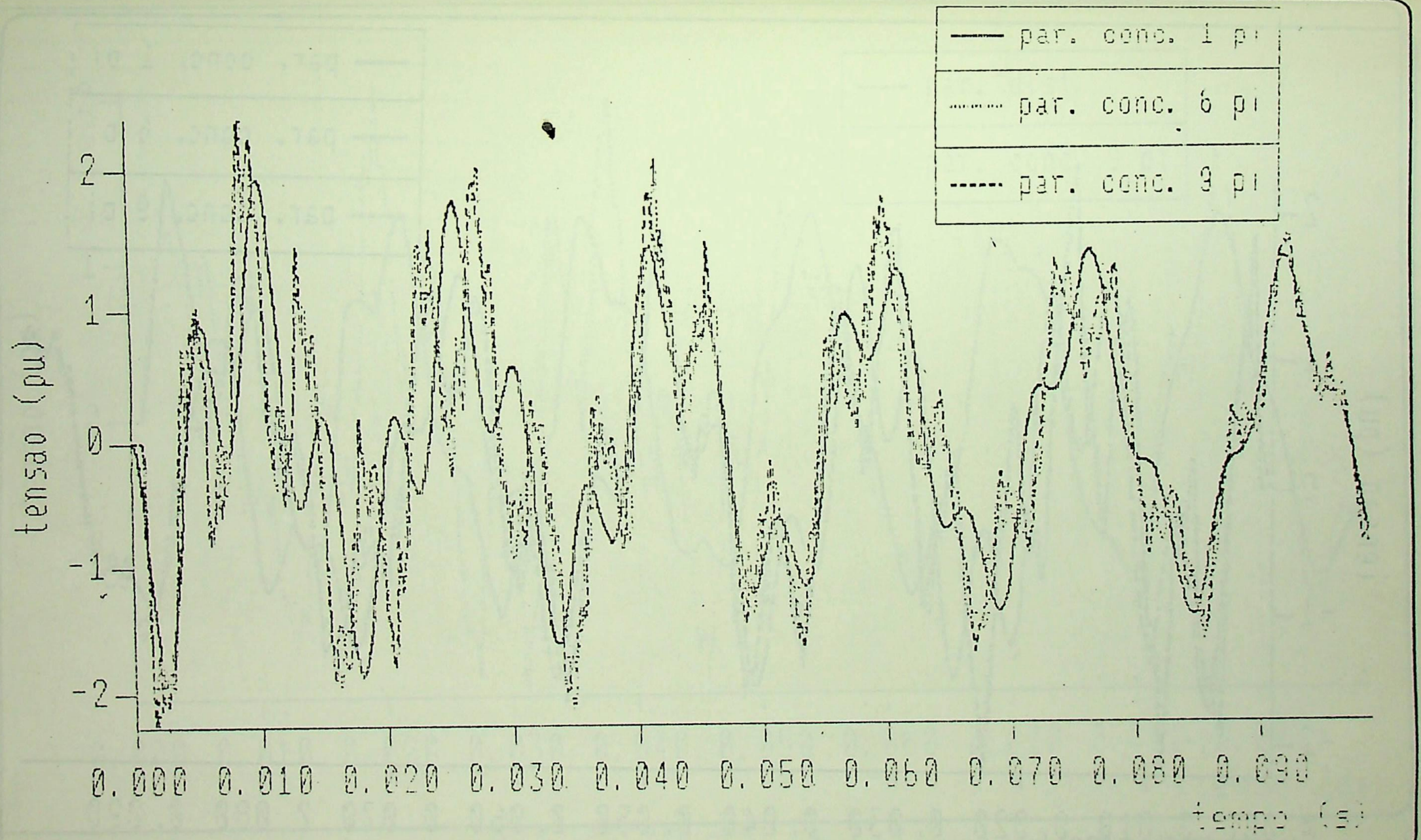
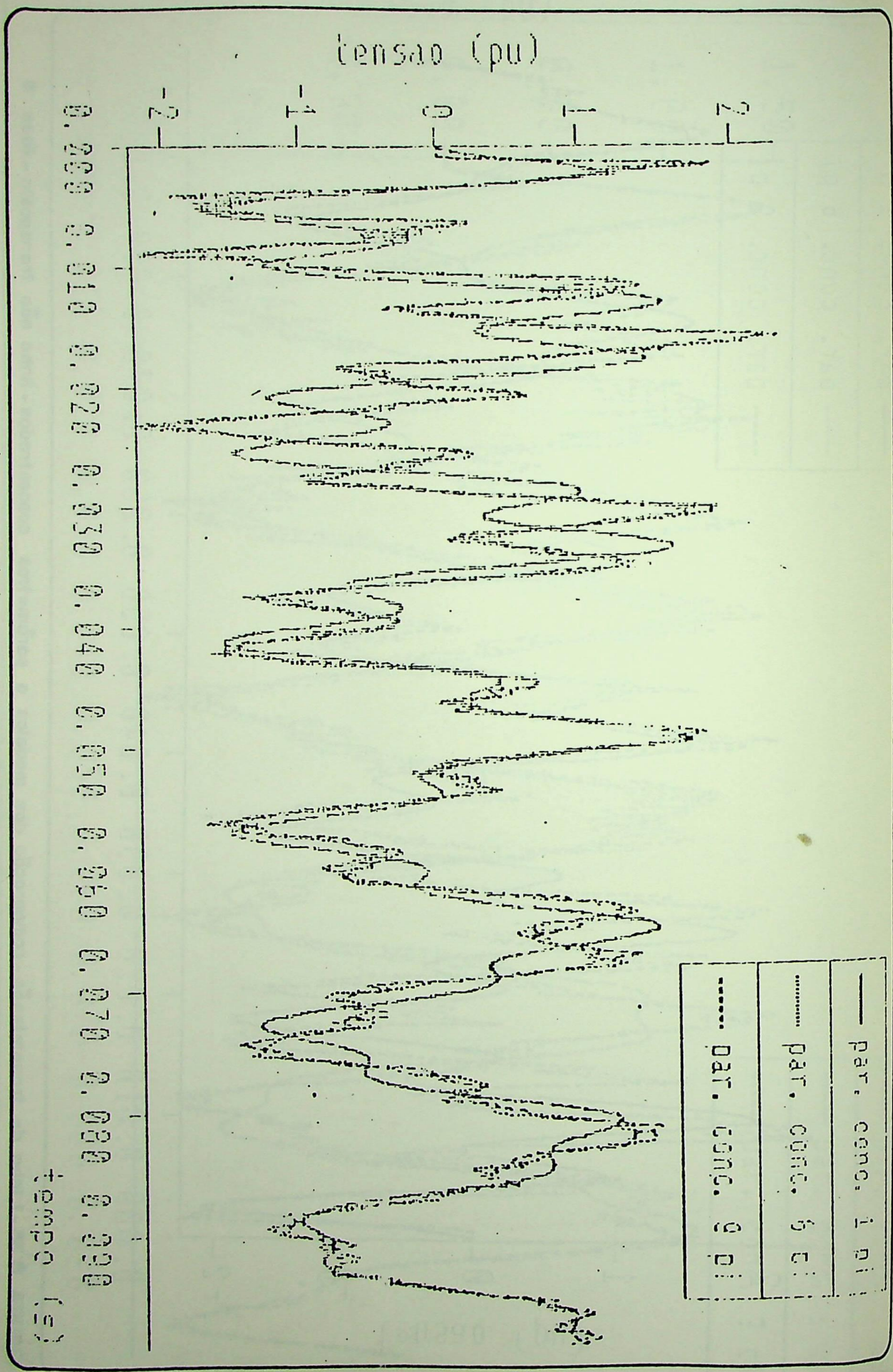


FIGURA 8.35 - Linha de transmissão - comparação dos modelos a parâmetros concentrados - linha não transposta - fase B


tensao (pu)
-2
-1
0
1
2
0.000 0.010 0.020 0.030 0.040 0.050 0.060 0.070 0.080 0.090
tempo (s)
par. conc. 1 pi
par. conc. 6 pi
par. conc. 9 pi

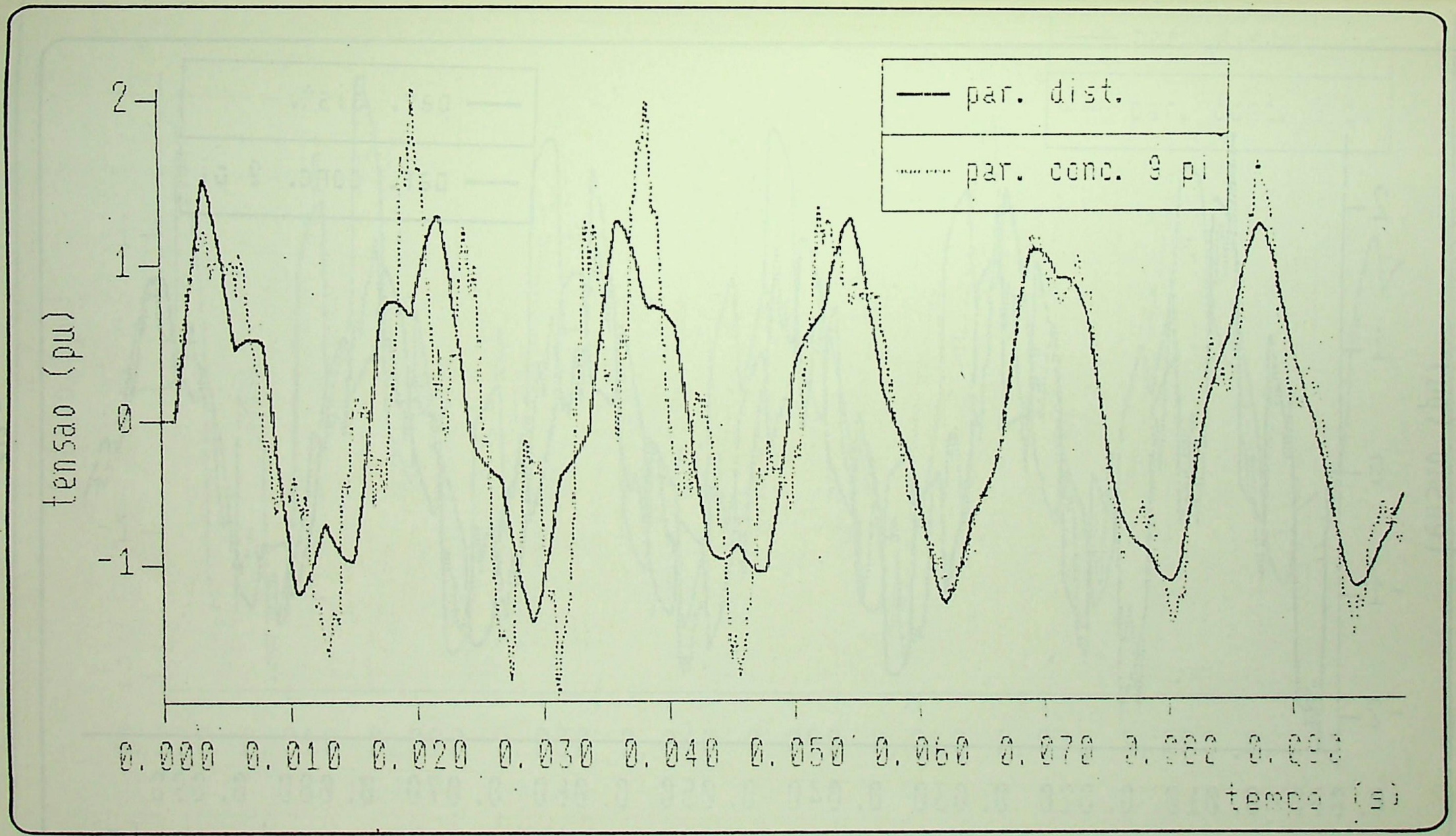


FIGURA 8.37- Linha de transmissão - comparação entre os modelos a parâmetros concentrados (9π) e distribuidos - linha transposta - fase A

FIGURA 8.38 - Linha de transmissão - comparação entre os modelos e parâmetros concentrados (91%) e distribuídos -

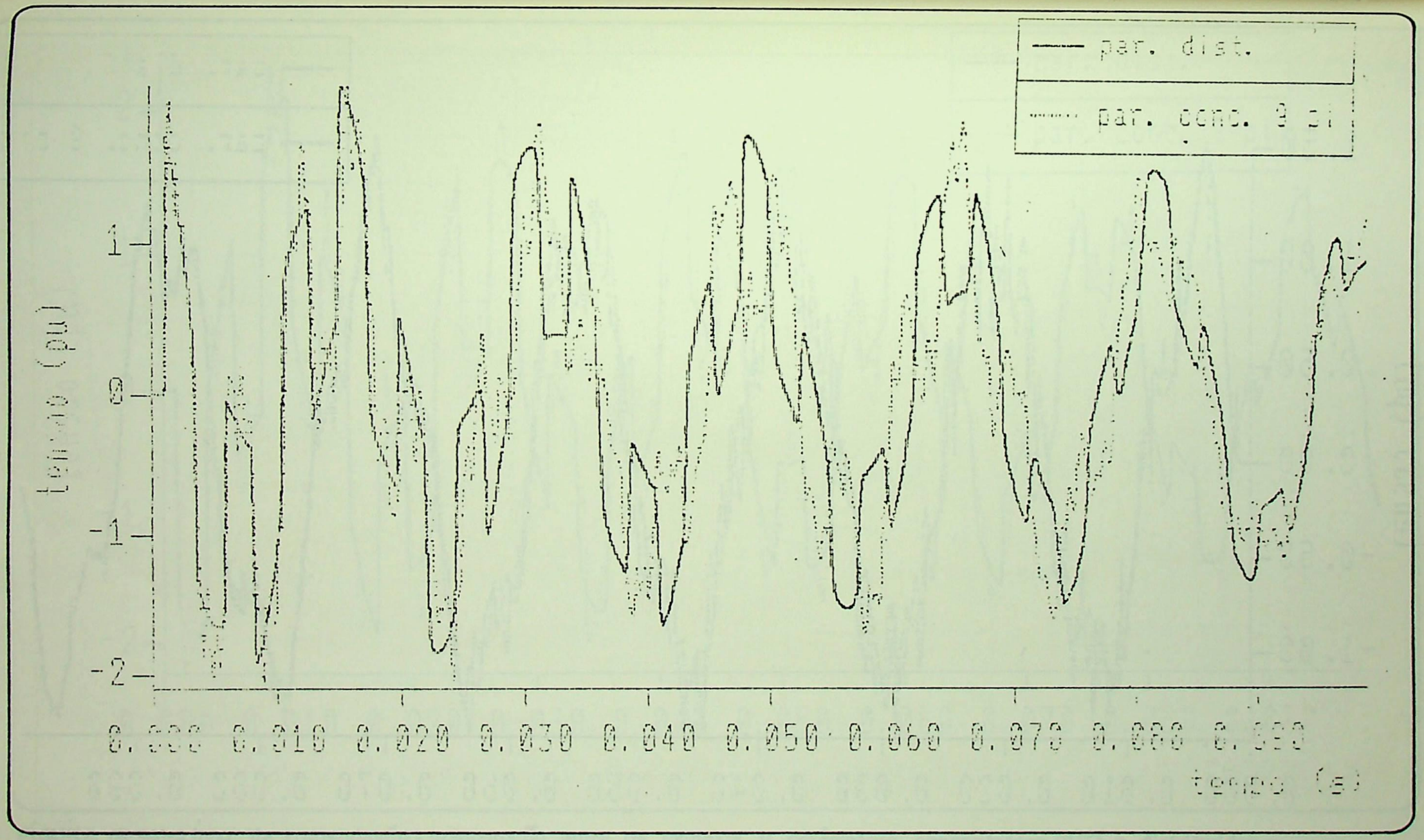


FIGURA 8.39 - Linha de transmissão - comparação entre os modelos a parâmetros concentrados (9π) e distribuidos - linha transposta - fase C

FIGURA 8.40 - Linha de transmissão - comparação entre os modelos a parâmetros concentrados (PI) e distribuídos -

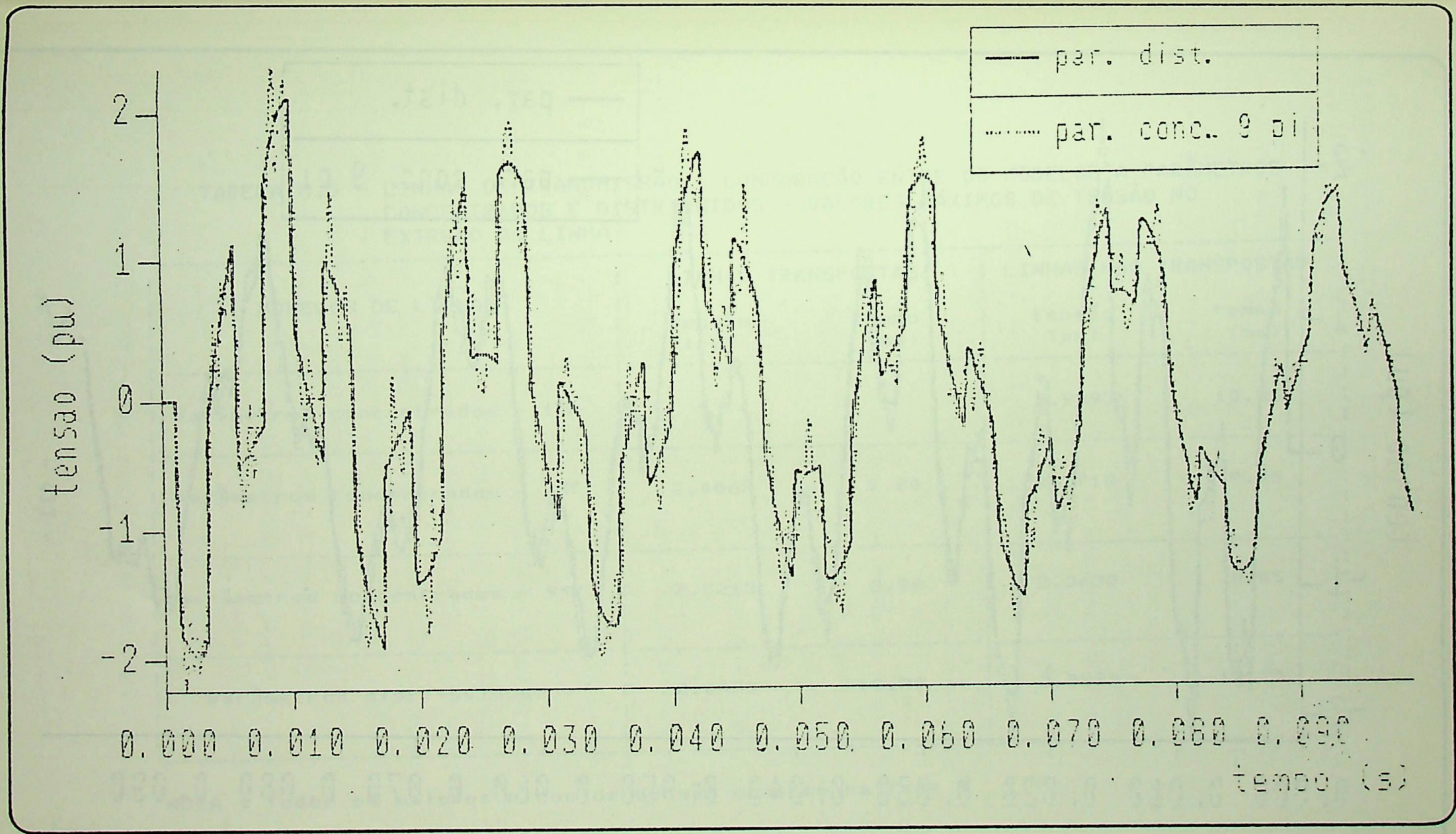


FIGURA 8.41- Linha de transmissão - comparação entre os modelos a parâmetros concentrados (9π) e distribuídos - linha não transposta - fase B

tensao (pu)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
2.4
2.6
2.8
3.0
3.2
3.4
3.6
3.8
4.0
4.2
4.4
4.6
4.8
5.0
5.2
5.4
5.6
5.8
6.0
6.2
6.4
6.6
6.8
7.0
7.2
7.4
7.6
7.8

TABELA 8.5 - LINHAS DE TRANSMISSÃO - COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS A PARÂMETROS CONCENTRADOS E DISTRIBUIDOS - VALORES MÁXIMOS DE TENSÃO NO EXTREMO DA LINHA

MODELOS DE LINHAS	LINHAS TRANSPOSTAS		LINHAS NAO TRANSPOSTAS	
	tensão (pu)	tempo (ms)	tensão (pu)	tempo (ms)
parâmetros concentrados - 1π	-	-	1.9393	10.35
parâmetros concentrados - 6π	2.4063	9.00	2.3718	8.95
parâmetros concentrados - 9π	2.5213	8.90	2.3632	8.85
parâmetros distribuidos	2.0475	10.20	2.0833	10.25

NOTA : Todos os maiores picos de tensão ocorrem na fase B

iniciais (figura 8.3). Os resultados também são exatamente iguais aos obtidos via EMTP (tabelas 8.1 e 8.2).

- para os modelos de chaves, os tempos de fechamento e abertura são diferentes para o programa EMTP - versão BPA [20], porém iguais aos da versão UBC [18].

- os problemas de oscilações numéricas (figura 8.5), podem ser solucionados através da introdução de um elemento amortecedor no sistema, como o resistor que foi colocado em paralelo com o indutor da figura 8.4. O grau de amortecimento que se obtém, depende do valor desse resistor (figura 8.7).

- o modelo de chave semicondutora (tiristor - figura 8.10), embora apresente algumas restrições quanto a sua utilização (capítulo 6), produz bons resultados (figura 8.11 e 8.12),mesmo considerando-se a variação do ângulo de disparo (α).

- o tamanho do intervalo de tempo (Δt) a ser adotado,depende da precisão que se deseje para representar o fenômeno físico a ser estudado (figuras 8.18 e 8.19).

- o fato de se considerar as condições iniciais como sendo nulas, pode ser contornado através de uma simulação para verificar o instante em que se atinge o novo regime permanente (figura 8.20). Conhecido esse tempo, inicia-se a simulação do fenômeno que se deseja estudar, porém, considerando-se o tempo anteriormente definido como sendo o tempo a partir do qual deverão ser contados os tempos do caso que se deseja simular (figura 8.21).

- os modelos de linhas de transmissão apresentam os mesmos resultados do programa EMTP e TNA (figura 8.15).

- as diferenças entre os modelos de linhas de transmissão a parâmetros distribuídos e concentrados são maiores para os casos em que se considera linhas transpostas (figuras 8.37 a 8.39).

- a representação de linhas de transmissão através de parâmetros concentrados será mais exata quanto maior for o número de π em cascata utilizados.

APÊNDICE A - O MÉTODO TRAPEZOIDAL

A.1 - INTRODUÇÃO

A análise de transitórios eletromagnéticos em sistemas elétricos de potência requer normalmente a solução de um conjunto de equações diferenciais. O uso da simulação digital para tais análises só é possível recorrendo-se aos métodos numéricos. Neste trabalho, para a solução de equações diferenciais, foi adotado o método trapezoidal.

Este método foi considerado inicialmente aplicado à solução numérica de integrais. Deduzido a partir desta aplicação, surge o método trapezoidal aplicado à solução de equações diferenciais.

A aplicação deste método, na análise de transitórios em sistemas elétricos, apresenta a vantagem principal de transformar um conjunto de equações diferenciais em um conjunto de equações algébricas de solução bastante simples.

A.2 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Os processos de integração numérica têm como objetivo definir o valor de uma integral dentro de um intervalo definido:

$$I = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \qquad (A.1)$$

Gráficamente, o valor da integral pode ser interpretado como a área sob a curva que define a função f(x) no intervalo entre x_{n-1} e x_n, como mostrado pela parte hachureada da figura A.1.

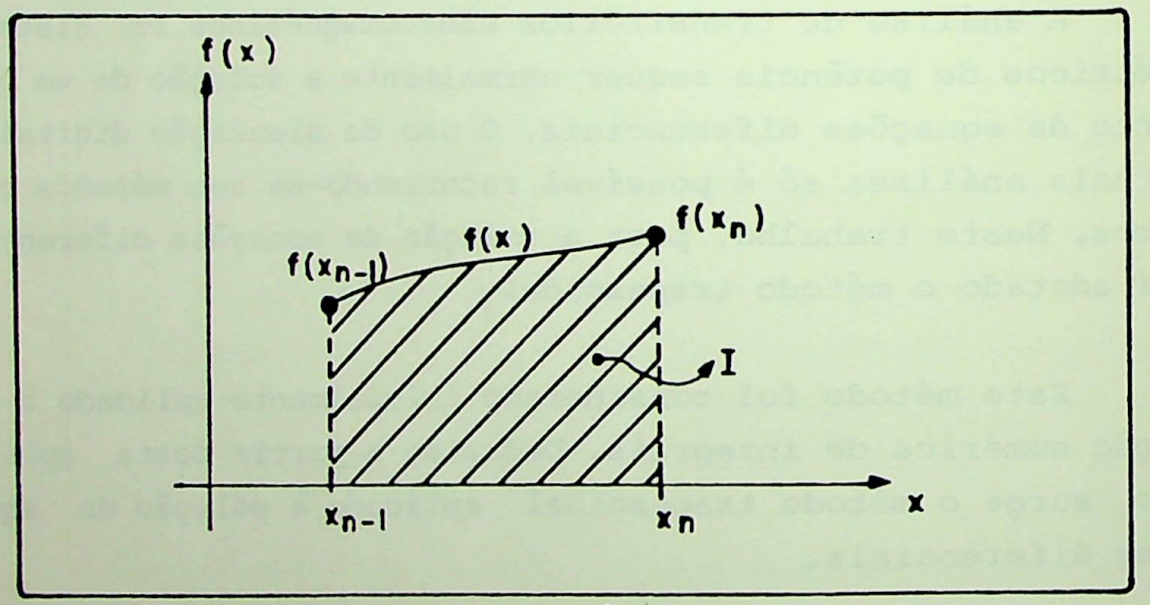


FIGURA A.1 - Representação gráfica da integral de uma função f(x) no intervalo x_{n-1} a x_n

De uma maneira geral, os processos numéricos de solução de integrais usam um polinômio para aproximar a função no intervalo compreendido entre x_{n-1} e x_n. Outro fator que influi na precisão do resultado é o intervalo Δx definido como :

$$\Delta x = x_n - x_{n-1} \qquad (A.2)$$

O erro que se comete é proporcional a Δx. Quanto menor o valor de Δx, melhor será a precisão do resultado.

O método trapezoidal usa a interpolação linear p(x) para aproximar a função f(x), o que acaba caracterizando uma figura trapezoidal (origem do nome do método), como mostrado na figura A.2.

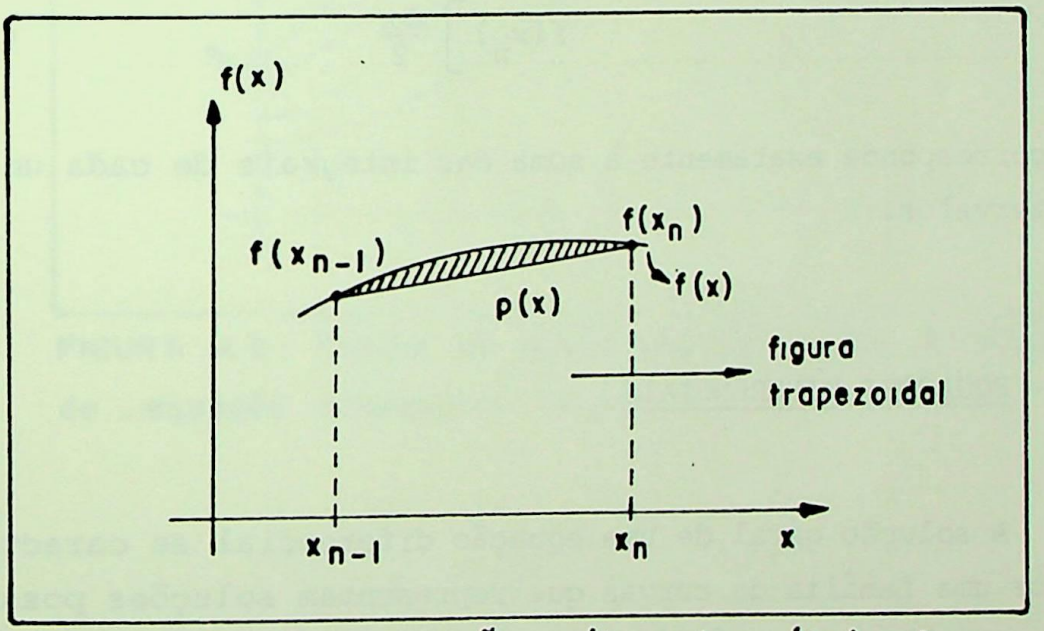


FIGURA A.2 - Representação gráfica do método de integração trapezoidal

O erro que se comete nesse caso está mostrado na figura A.2 em hachureado,e compreende exatamente à área entre a função verdadeira f(x) e o polinômio p(x) resultante da interpolação linear.

A área da figura trapezoidal define o valor da integral no intervalo entre x_{n-1} e x_n :

$$I = \left[f(x_{n-1}) + f(x_n) \right] \frac{\Delta x}{2} \qquad (A.3)$$

A equação (A.3) define o valor numérico da integral para cada intervalo Δx. Para uma função cujo intervalo de integração tenha sido subdividido em n intervalos Δx, o valor total da integral será :

$$I_t = \left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right] \frac{\Delta x}{2} \qquad (A.4)$$

que corresponde exatamente à soma das integrais de cada um dos n intervalos.

A.3 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A solução geral de uma equação diferencial se caracteriza por uma família de curvas que representam soluções possíveis para o problema em análise. Dada, por exemplo, a equação diferencial :

$$\frac{dy}{dx} = y \qquad (A.5)$$

a solução geral será :

$$y = c\, e^{x} \qquad (A.6)$$

que graficamente caracteriza as curvas mostradas na figura A.3.

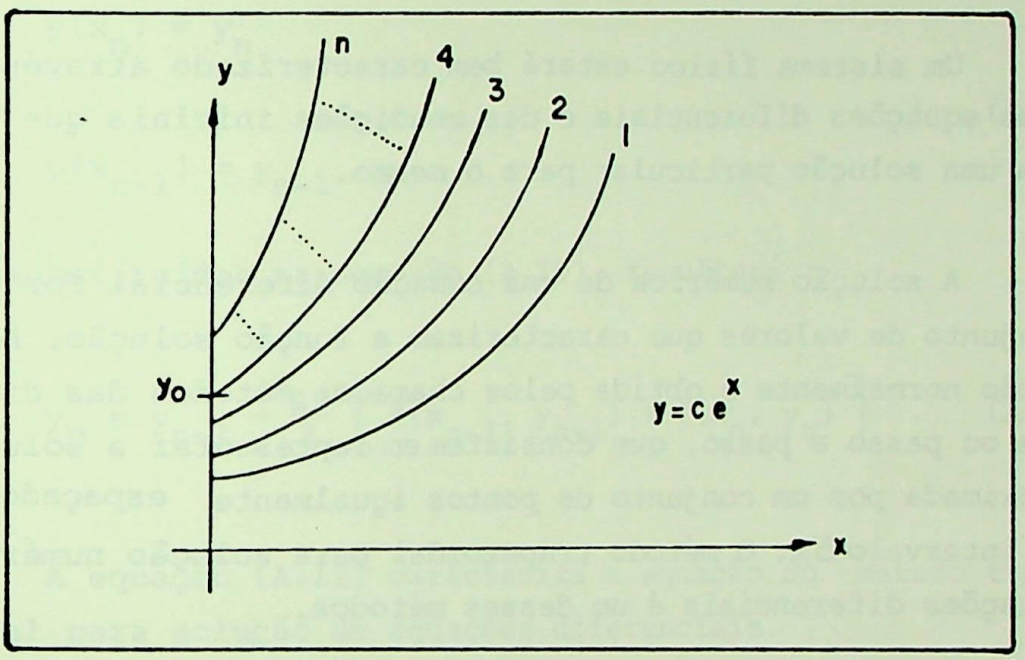


FIGURA A.3 - Família de curvas que representam a solução da equação diferencial (A.5)

A solução particular para o sistema em análise deve ser única. Portanto, deve-se definir um valor que permita a obtenção da solução particular. Esse valor é chamado de condição ini

cial. Para a equação (A.5), pode-se definir o seguinte valor , por exemplo :

$$y\ (x_0) = y_0 \tag{A.7}$$

que caracteriza a curva 4 na figura A.3, definindo, portanto , uma solução única para a equação diferencial (A.5).

Vários casos podem ser mostrados caracterizando a importância da definição das condições iniciais [1].

Um sistema físico estará bem caracterizado através de suas equações diferenciais e das condições iniciais que definam uma solução particular para o mesmo.

A solução numérica de uma equação diferencial fornece um conjunto de valores que caracterizam a função solução. Esta solução normalmente é obtida pelos chamados métodos das diferenças ou passo a passo, que consistem em representar a solução aproximada por um conjunto de pontos igualmente espaçados de um intervalo Δx. O método trapezoidal para solução numérica de equações diferenciais é um desses métodos.

Considere-se a seguinte equação diferencial :

$$\frac{dy}{dx} = f\left[\, x,\ y(x)\right] \tag{A.8}$$

Integrando-se a equação (A.8) no intervalo x_{n-1} a x_n, resulta :

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f\left[\, x,\ y(x)\right]\, dx \tag{A.9}$$

Aplicando-se o método de integração trapezoidal,como mostrado na equação (A.3), obtém-se :

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + \frac{\Delta x}{2}\left[f\left[x_{n-1},\, y(x_{n-1}) \right] + f\left[x_n\ ,\, y(x_n) \right] \right] \qquad (A.10)$$

Como a solução é obtida por aproximação, tem-se que :

$$\begin{aligned} y(x_n) &= y_n \\ y(x_{n-1}) &= y_{n-1} \end{aligned} \qquad (A.11)$$

que substituídos na equação (A.10), resultará :

$$y_n = y_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_{n-1},\, y_{n-1}) + f(x_n,\, y_n) \right] \qquad (A.12)$$

A equação (A.12) caracteriza a equação do método trapezoidal para solução de equações diferenciais.

Como para o cálculo de y_n precisa-se apenas de y_{n-1}, ou seja, um único valor, tem-se um método de uma única etapa. Também, como o valor y_n aparece nos dois lados da equação tem-se um método implícito que exige portanto, uma solução iterativa.

Na aplicação deste método na análise de sistemas elétricos, não é necessário recorrer a uma solução iterativa, pois é possível obter o valor da função $f(x_n, y_n)$ independentemente do valor de y_n, o que torna o método explícito.

Características matemáticas adicionais do método tra-

pezoidal, aplicado à solução de equações diferenciais, podem ser encontrados em [1] e [2].

A.4 - CONCLUSÕES

Pela equação (A.12), percebe-se a vantagem de utilização do método trapezoidal, já que uma equação diferencial, (A.8), foi transformada em uma equação algébrica simples, (A.12).

Neste trabalho, o método trapezoidal será aplicado às equações diferenciais que descrevem o comportamento físico dos sistemas elétricos. A aplicação mais comum deste método é na modelagem de ramos através de parâmetros concentrados, que está descrita no capítulo 2. Uma outra aplicação é na modelagem de ramos através de parâmetros concentrados considerando o acoplamento, que está descrita no capítulo 5.

APÊNDICE B - TRATAMENTO COMPUTACIONAL PARA MATRIZES ESPARSAS

B.1 - INTRODUÇÃO

A maioria dos programas de computadores,para análise de sistemas elétricos de potência, utiliza a matriz de admitância nodal. Essa matriz apresenta duas características principais : a simetria e a esparsidade, que,exploradas convenientemente,permitem reduzir os requisitos de memória computacional para o armazenamento dessas matrizes. Esse nível de esparsidade pode atingir valores superiores a 99 % [19],enquanto que a matriz de impedância nodal, também usada em alguns programas, é uma matriz praticamente cheia, o que aumenta muito os requisitos de memória computacional. Esta diferença fundamental justifica o uso da matriz de admitância ao invés da matriz de impedância.

Para um sistema de 100 barras, por exemplo, corresponde uma matriz de admitância 100 x 100, o que equivale a 10 000 posições de memória. Admitindo-se um índice de esparsidade de 90 %, por exemplo, têm-se 9 000 elementos nulos e apenas 1 000 elementos não nulos. Portanto,estão sendo reservadas 10 000 posições e apenas 1 000 estão com valores não nulos. Considerando-se a simetria, tem-se :

$$N + \underbrace{(1\,000 - N)/2}_{\text{elementos fora da diagonal (não nulos)}} = \underbrace{550}_{\text{elementos não nulos}} \qquad N = 100$$

elementos da diagonal

Portanto, neste caso existem 550 elementos que devem ser armazenados, pois é necessário apenas o armazenamento do triângulo superior ou inferior da matriz.

Torna-se claro que é importante levar em consideração essas características da matriz de admitância nodal, para diminuir os requisitos de memória computacional. O objetivo da exploração da esparsidade será o armazenamento apenas dos elementos não nulos.

Os elementos dentro de uma matriz podem ser localizados de várias maneiras diferentes. Considere-se, por exemplo, o elemento x na matriz da figura B.1.

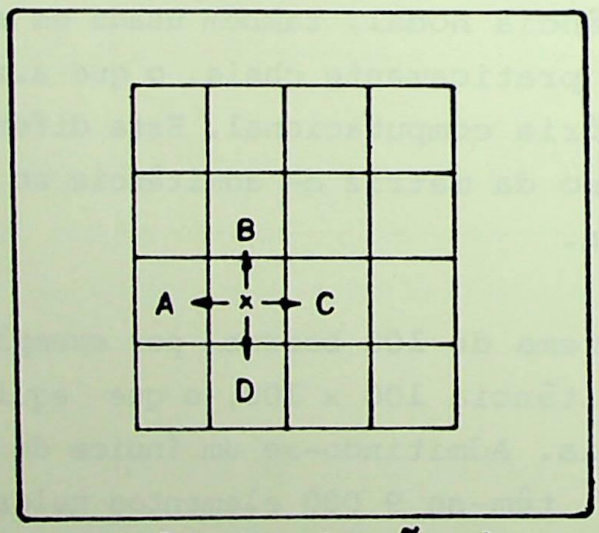


FIGURA B.1 - Localização de um elemento x dentro de uma matriz

Existem 4 possibilidades para a localização correta do elemento x :

1 - indicação do elemento anterior na mesma linha (A)

2 - indicação do elemento anterior na mesma coluna (B)

3 - indicação do próximo elemento na mesma linha (C)

4 - indicação do próximo elemento na mesma coluna (D)

A técnica utilizada neste trabalho é a 3 .

B.2 - O ARMAZENAMENTO DE MATRIZES ESPARSAS

Considere-se a seguinte matriz de admitância nodal :

	1	2	3	4
1	55,0	- 5,0		- 6,0
2	- 5,0	70,0		- 8,0
3			62,0	
4	- 6,0	- 8,0		81,0

Essa matriz pode ser armazenada em vetores,como mostrado na figura B.2.

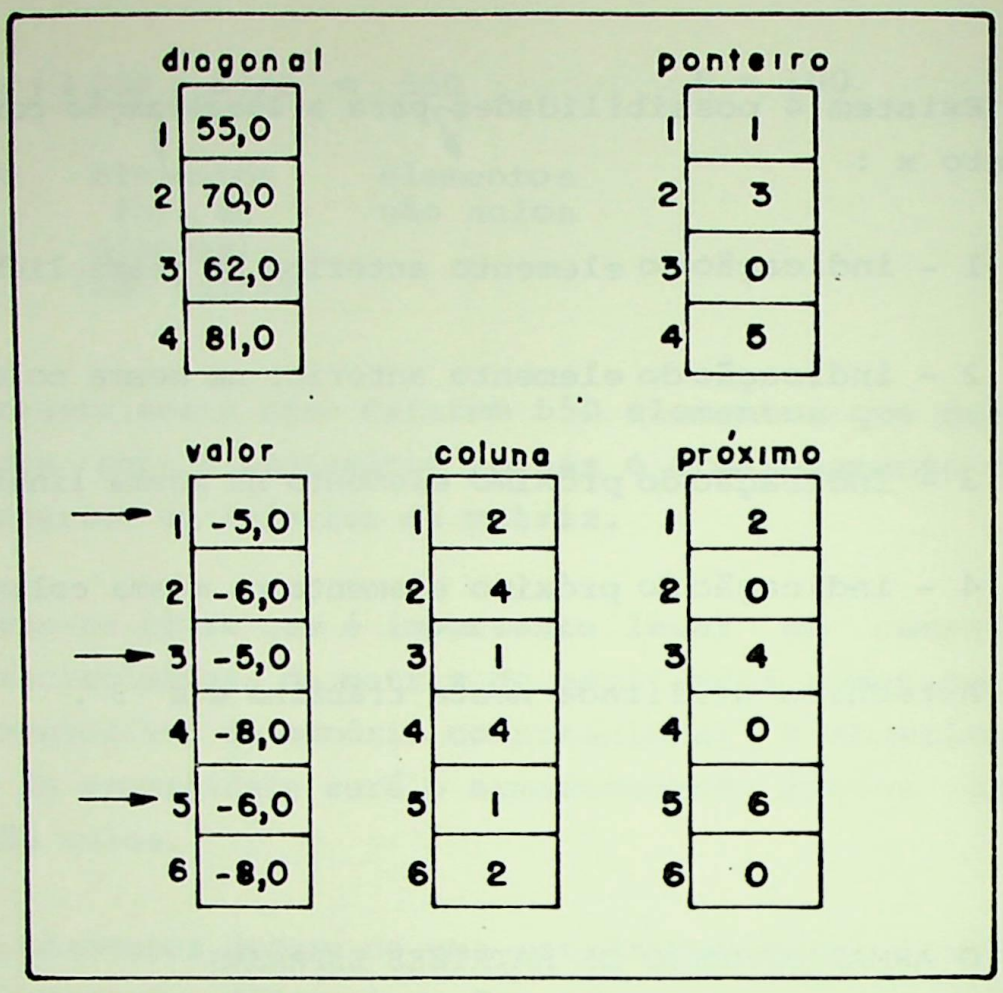


FIGURA B.2 - Vetores utilizados para armazenamento da matriz de admitâncias nodais

O significado de cada um destes vetores está mostrado a seguir :

DIAGONAL - este vetor contém, para cada linha da matriz, o valor do elemento da diagonal. Por exemplo, na posição 2 está o valor 70,0, que corresponde ao elemento da diagonal da linha 2.

PONTEIRO - este vetor indica, para cada linha da matriz, a posição nos vetores VALOR, COLUNA e PRÓXIMO, do primeiro elemento fora da diagonal. Quando esse valor for zero, indica que não existem elementos nessa linha. Por exemplo, para a linha 2 está indicada a posição 3, o que significa que o primeiro elemento da linha 2 está na posição 3 dos veto-

res VALOR, COLUNA e PRÓXIMO. Isto pode ser confirmado pelo valor - 5,0 encontrado na posição 3 do vetor VALOR, e que corresponde ao primeiro elemento fora da diagonal situado na linha 3. Já para a linha 3, tem-se o valor 0 (zero), indicando que não existem elementos fora da diagonal na linha 3, como se pode notar na matriz.

VALOR - este vetor contém os valores dos elementos fora da diagonal. Por exemplo, para a linha 2 o vetor PONTEIRO indica a posição 3, que significa que o valor - 5,0, encontrado no vetor VALOR, corresponde ao primeiro elemento fora da diagonal na linha 2.

COLUNA - este vetor indica a coluna onde está localizado cada elemento fora da diagonal. Considerando-se o mesmo exemplo apresentado para o vetor VALOR, tem-se na posição 3 do vetor COLUNA o valor 1, que indica que o valor - 5,0, que está na linha 2, está localizado na coluna 1.

PRÓXIMO - este vetor indica, para cada elemento fora da diagonal, a posição nos vetores VALOR, COLUNA e PRÓXIMO, do próximo elemento na mesma linha. Para o mesmo exemplo mostrado para os vetores VALOR e COLUNA, tem-se que na posição 3 do vetor PRÓXIMO está o valor 4, que indica que o próximo elemento da linha 2, após o valor - 5,0, está na posição 4 dos vetores VALOR, COLUNA e PRÓXIMO. Já na posição 4 tem-se o valor - 8,0 para o vetor VALOR, 4 para o vetor COLUNA e 0 (zero) para o vetor PRÓXIMO. Esses valores indicam que, após o valor - 5,0 na linha 2, está o valor - 8,0 na coluna 4 e que o próximo valor na mesma linha está na posição 0 (zero). Esse zero indica que não existem mais elementos nessa linha.

A dimensão de cada um desses vetores é definida da seguinte maneira :

DIAGONAL - apresenta dimensão igual à ordem matriz a ser armazenada, já que deve conter os elementos da diagonal da matriz.

PONTEIRO - apresenta dimensão igual à do vetor DIAGONAL.

VALOR - este vetor deve conter todos os elementos diferentes de zero fora da diagonal da matriz. A dimensão pode ser determinada através da equação (B.1) :

$$DIM = NEDZ - DIAG \qquad (B.1)$$

onde :

DIM - dimensão do vetor.

DIAG - número de elementos da diagonal, que é igual à dimensão da matriz.

NEDZ - número de elementos diferentes de zero na matriz. Este valor é definido a partir do índice de esparsidade da matriz. Por exemplo, para um sistema com 100 barras obtém-se uma matriz 100 x 100, ou seja, 10 000 elementos. Admitindo-se um índice de esparsidade de 90 %, resultam 9 000 elementos nulos na matriz e apenas 1 000 elementos diferentes de zero. Portanto, neste caso, o valor de NEDZ será igual a 1 000, e o valor de DIM será 900.

COLUNA - apresenta dimensão igual à do vetor VALOR.

PRÓXIMO - apresenta dimensão igual à do vetor VALOR.

A representação mostrada não considerou a simetria da matriz, simplesmente para não aumentar a complexidade computacional no manuseio da matriz.

Além desta representação para exploração da esparsidade, existem outras baseadas nas quatro possibilidades citadas no item B.1 e apresentadas na figura B.1.

B.3 - CONCLUSÕES

A comparação dos requisitos de memória considerando-se a exploração ou não da esparsidade, para um sistema de 100 barras, com um índice de esparsidade de 90 %, mostra :

- sem considerar a exploração da esparsidade, são necessárias 10 000 posições de memória.

- considerando a exploração da esparsidade, para cada um dos vetores que foram definidos, são necessárias as seguintes posições de memória :

  DIAGONAL - 100 posições
  PONTEIRO - 100 posições
  VALOR - 900 posições
  COLUNA - 900 posições
  PRÓXIMO - 900 posições

  o que totaliza 2 900 posições de memória.

Nota-se, portanto, que a exploração da esparsidade apresenta uma grande economia de memória computacional, de 10 000 para 2 900 posições de memória. Neste caso, apenas 29 % das posições necessárias inicialmente é que serão efetivamente utilizadas. Quanto maior o sistema a ser considerado, maiores se

rão os ganhos, pois a tendência é o índice de esparsidade ser maior ainda. Para um sistema de 1 000 barras, com um índice de esparsidade da ordem de 99 %, esse ganho será de 1 000 000 para 29 000. Neste caso, apenas 2,9 % das posições inicialmente necessárias é que serão efetivamente utilizadas.

Embora neste trabalho não tenha sido considerada a simetria, esta contribui para reduzir ainda mais os requisitos de memória, pois permite o armazenamento apenas do triângulo superior ou inferior da matriz.

APÊNDICE C - ORDENAÇÃO DE MATRIZES

C.1 - INTRODUÇÃO

Os processos de fatoração de matrizes consistem em manipulações de linhas e colunas, que produzem a eliminação e criação de novos elementos nessas matrizes.

Em estudos de sistemas elétricos de potência, costuma-se trabalhar com a matriz de admitância nodal, que é esparsa. É conveniente que, mesmo submetendo-se essa matriz a algum processo de manipulação de suas linhas ou colunas, como a fatoração, possa ser mantida a estrutura original de esparsidade, com o objetivo de reduzir os requisitos de memória computacional.

A ordenação consiste justamente em um processo de seleção de linhas e colunas a serem processadas, de forma a minimizar o preenchimento da matriz original, mantendo-se a mesma estrutura de esparsidade.

Considere-se, por exemplo, a matriz mostrada na figura C.1-a. Suponha-se que nessa matriz seja aplicado um processo qualquer de fatoração, e que as linhas ou colunas dessa matriz

sejam processadas na sua ordem natural. O resultado dessa fatoração genérica está mostrado na figura C.1-b.

A análise dessa figura mostra quatro novos elementos marcados em círculo, o que indica que houve um preenchimento da matriz original, não se mantendo a mesma estrutura de esparsidade original.

Suponha-se que o mesmo processo de fatoração seja aplicado à mesma matriz, mas que o processamento das linhas seja feito na ordem 4 , 1 , 3 , 2 . O resultado está mostrado na figura C.1-c.

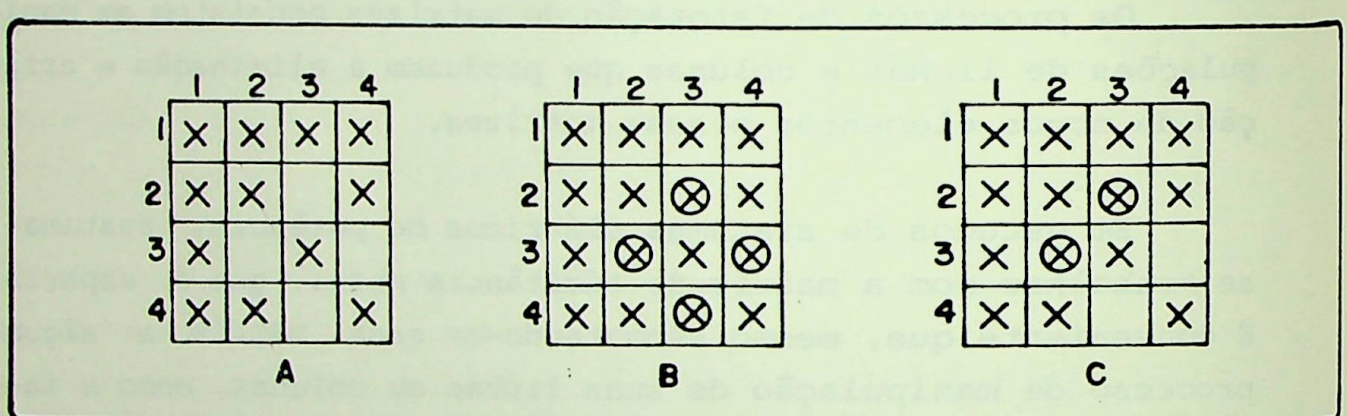


FIGURA C.1- Exemplo genérico de ordenação, A-)matriz original, B-)fatoração realizada com a ordenação natural das linhas, C-)fatoração realizada na seguinte ordem de linhas: 4,1,3 e 2

Na figura C.1-c, nota-se que houveram dois preenchimentos, indicados em círculo, portanto um resultado bem melhor que o mostrado na figura C.1-b. Nota-se que é possível definir várias ordenações das linhas para processamento, sendo que estas ordenações poderão produzir resultados diferentes em termos de preenchimento da matriz original.

Deve-se, portanto, definir um processo que selecione uma ordenação ótima ou quase ótima, e que apresente um tempo reduzido de processamento.

C.2 - ESQUEMAS DE ORDENAÇÃO

Basicamente, é possível definir três esquemas de ordenação:

1 - Esquema 1 - consiste na ordenação das linhas ou colunas, de acordo com o número de elementos diferentes de zero fora da diagonal. Quando duas ou mais colunas apresentarem o mesmo número de elementos diferentes de zero, deve-se escolher uma delas arbitrariamente.

2 - Esquema 2 - consiste na ordenação das linhas ou colunas de acordo com o número de elementos diferentes de zero fora da diagonal, em cada fase da fatoração. Quando duas ou mais linhas apresentarem o mesmo número de elementos diferentes de zero fora da diagonal, deve-se escolher uma delas arbitrariamente.

3 - Esquema 3 - consiste na ordenação das linhas ou colunas, de forma que, a cada fase da fatoração, a linha a ser escolhida deve ser aquela que introduza o menor número de elementos diferentes de zero.

Percebe-se que o esquema 1 é o mais rápido, seguido dos

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca
MAUÁ
BIM

esquemas 2 e 3. O esquema 3 apresenta uma ordenação quase ótima, porém seu tempo de computação é elevadíssimo, sendo que cada fase desse esquema corresponde ao tempo total do esquema 2. Os esquemas 2 e 3 requerem a simulação da fatoração, sem calcular valores, apenas analisando os preenchimentos. Dessa forma, o processo de ordenação corresponde aproximadamente a 80 % do tempo computacional de uma seqüência : ordenação, fatoração, solução.

Uma vez definida a ordenação, esta pode ser usada repetidamente, mesmo que os valores numéricos da matriz se alterem, e desde que seja mantida a mesma estrutura da matriz original.

C.3 - ALGORITMO PARA APLICAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROCESSO DE ORDENAÇÃO

O algoritmo utilizado para aplicação computacional foi o da matriz de incidência, [6], junto com o esquema 2 de ordenação. Um outro algoritmo que pode ser utilizado é o da teoria dos grafos [6], que será apresentado apenas para dar uma visualização do processo de ordenação.

Considere-se a figura C.2-a, onde é mostrada uma matriz genérica,para a qual se deseja definir a ordenação para aplicação em um processo de fatoração. Os números à direita da matriz indicam o número de elementos diferentes de zero fora da diagonal em cada uma das linhas.

No processo da matriz de incidência, eliminam-se os elementos da coluna correspondente à linha que está sendo processada, exceto os elementos de linhas já processadas. Sempre que mais de um elemento tenha sido eliminado em uma coluna, deve-

se analisar a possibilidade de criação de novos elementos.Considere-se, por exemplo, a eliminação dos elementos $Y_{ji} \neq 0$ e $Y_{jk} \neq 0$ da coluna j. Deve-se, neste caso, criar os elementos Y_{ik} e Y_{ki}, desde que ainda não existam.

A matriz de incidência da matriz original da figura C.2-a está mostrada na figura C.2-b. Considerando-se essa matriz, o processo de ordenação será iniciado pela linha com menor número de elementos diferentes de zero fora da diagonal,e continua dessa forma para as próximas linhas a serem processadas.

Inicialmente, serão processadas as linhas 6 e 7 ,respectivamente, já que ambas têm apenas um elemento diferente de zero fora da diagonal. A matriz de incidência resultante está mostrada na figura C.2-c, sendo que os elementos eliminados estão indicados por um zero, e o círculo no elemento da diagonal indica que a linha correspondente já foi processada.

As linhas 2 , 3 e 4 passam a apresentar o mesmo número de elementos diferentes de zero fora da diagonal. Escolhe-se arbitrariamente a linha 4 . O processamento desta linha leva à eliminação dos elementos $Y_{14} \neq 0$ e $Y_{54} \neq 0$. Deve-se, portanto, verificar se existe o elemento Y_{15}. Como já existe, não é necessário criar elementos adicionais.Dessa forma, a matriz de incidência fica como indicado na figura C.2-d.

As linhas 1 , 2 , 3 e 5 passam a apresentar o mesmo número de elementos diferentes de zero fora da diagonal . Escolhe-se arbitrariamente a linha 5. O processamento desta linha leva à eliminação dos elementos $Y_{15} \neq 0$ e $Y_{35} \neq 0$. Deve-se, portanto, verificar se existe o elemento Y_{13}. Como não existe esse elemento, criam-se os elementos Y_{13} e Y_{31},que são indicados por p na figura C.2-e.

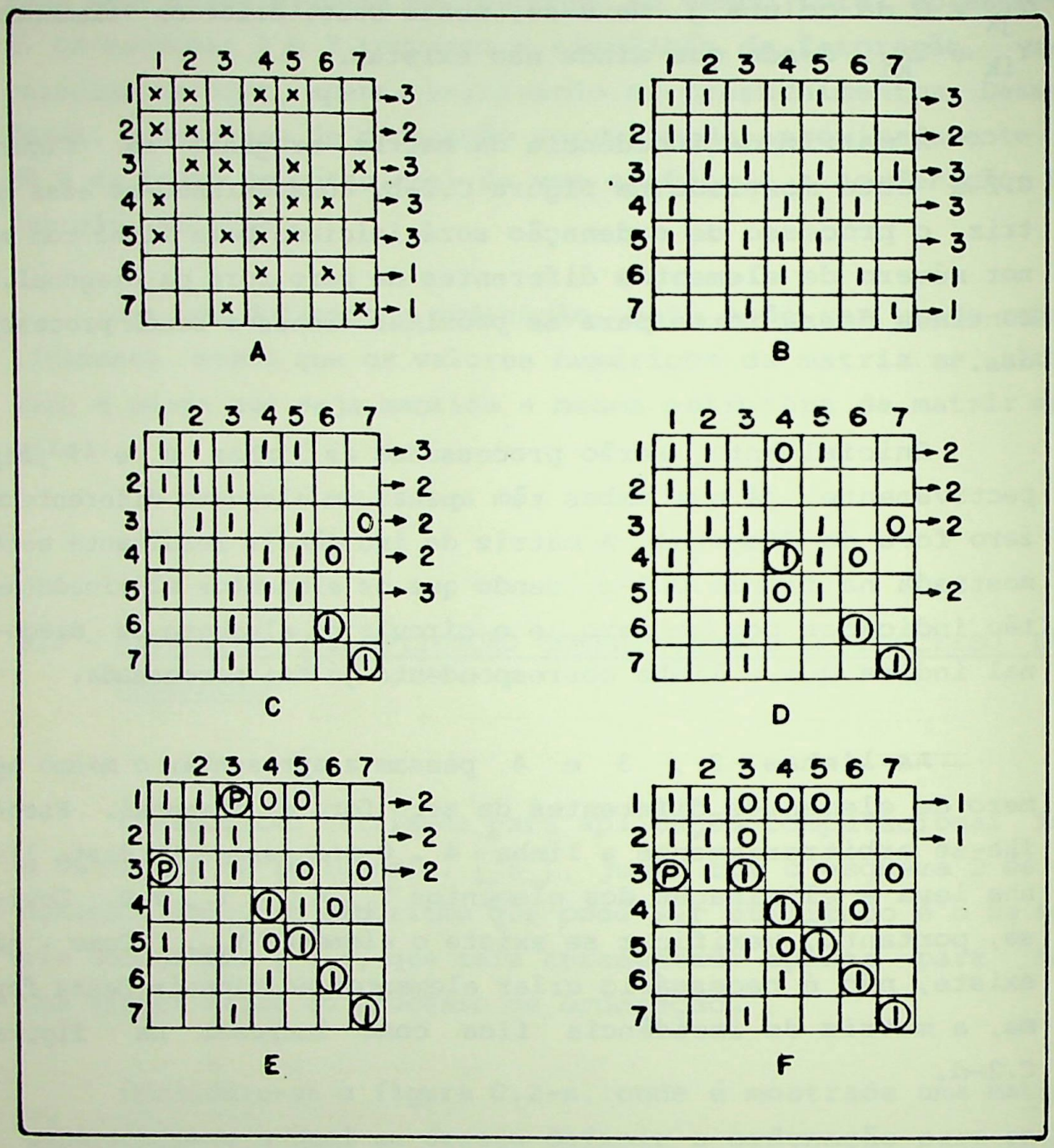


FIGURA C.2 - Processo de ordenação utilizando a matriz de incidência, A-) matriz original, B-) matriz de incidência da matriz original, C-) eliminação das linhas 6 e 7, D-) eliminação da linha 4, E-) eliminação da linha 5, F-) eliminação da linha 3.

As linhas 1 , 3 e 5 passam a ter o mesmo número de elementos diferentes de zero fora da diagonal. Escolhe-se arbitrariamente a linha 3 . O processamento desta linha leva à eliminação dos elementos $Y_{13} \neq 0$ e $Y_{23} \neq 0$. Portanto, deve-se verificar se existe o elemento Y_{12}. Como o mesmo já existe, não é necessário criar nenhum elemento adicional. Portanto, a matriz de incidência ficará como indicado na figura C.2-f.

Dessa forma, as linhas 1 e 2 passam a ter apenas um elemento diferente de zero fora da diagonal. O processamento da linha 2 leva à eliminação dos elementos fora da diagonal na linha 1 , que,portanto, não será processada.Dessa forma, a ordenação ficará definida pela ordem em que as linhas foram processadas : 7 , 6 , 4 , 5 , 3 , 2 , 1 .

Neste caso, foi utilizado o esquema 2 de ordenação. Caso fosse utilizado o esquema 1,por exemplo, obter-se-ia a seguinte ordenação : 7 , 6 , 2 , 1 , 3 , 4 , 5 . Nota-se que as duas ordenações são diferentes. Caso fosse utilizado o esquema 3 é quase certo que se obteria uma outra ordenação,que, sem dúvida, seria a melhor.

O processo da teoria dos grafos considera a eliminação dos nós de menor grau (número de ramos conectados a cada nó). Quando a eliminação de um nó leva à eliminação de ramos, que correspondiam a uma ligação entre outros dois nós, um novo ramo deverá ser adicionado, quando não existir,entre esses dois nós. Graficamente, o esquema 2 de ordenação pode ser verificado através desta técnica, como mostrado na figura C.3. A ordenação ficará definida pela ordem em que os nós foram eliminados : 7 , 6 , 4 , 5 , 3 , 2 , 1 . Portanto, foi encontrada a mesma ordenação que foi definida para o processo da matriz de incidência.

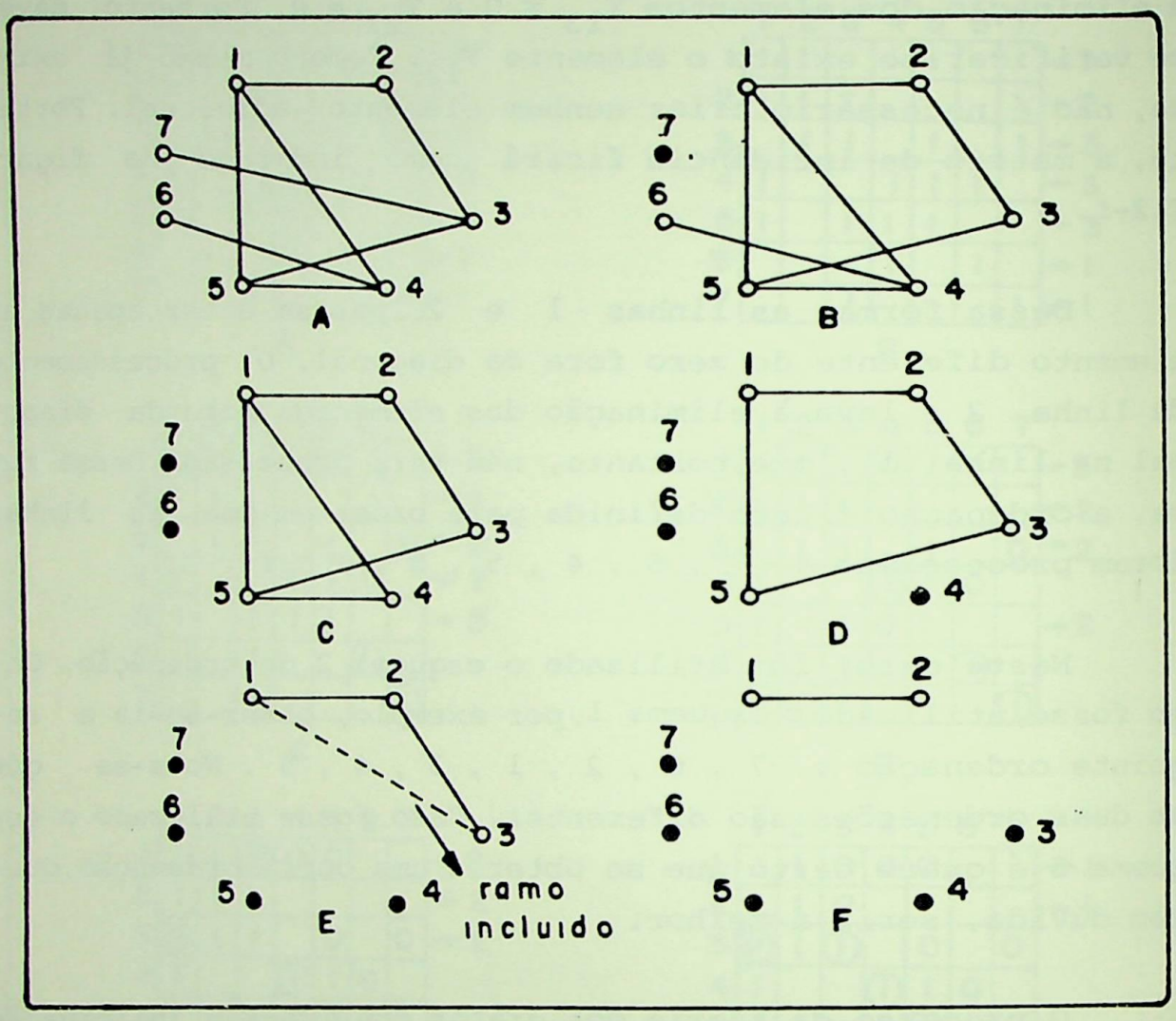


FIGURA C.3 - Grafos correspondentes ao processo de ordenação da matriz da figura C.2, A-) grafo correspondente à matriz original, B-) eliminação do nó 7, C-) eliminação do nó 6, D-) eliminação do nó 4, E-) eliminação do nó 5, F-) eliminação do nó 3

C.4 - CONCLUSÕES

O esquema 2 de ordenação, que é o esquema adotado neste trabalho, embora não seja o melhor esquema, produz bons resultados, além de apresentar um tempo de processamento reduzido.

O algoritmo da matriz de incidência torna o desenvolvimento computacional bastante simples e muito eficiente.

Deve-se observar que o processo computacional é aplicado apenas sobre a estrutura da matriz, não sendo realizado nenhum cálculo. Esses cálculos serão realizados apenas no processo de fatoração.

APÊNDICE D - FATORAÇÃO DE MATRIZES

D.1 - INTRODUÇÃO

A solução para os vetores de tensão, como mostrado na equação (D.1),

$$[Y]\ [E] = [I] \tag{D.1}$$

exige a inversão da matriz $[Y]$, resultando a equação (D.2).

$$[E] = [Y]^{-1}[I] \tag{D.2}$$

Enquanto a matriz $[Y]$ é esparsa, a matriz $[Y]^{-1}$ não é, sendo praticamente cheia. Portanto, a inversão produzirá um aumento nos requisitos de memória computacional.

Os processos de fatoração de matrizes, [7], constituem alternativas que evitam essa inversão e produzem os mesmos resultados. Além disso, para a matriz resultante do processo de fatoração, é possível manter a mesma estrutura de esparsidade da matriz $[Y]$ original.

O processo de fatoração utilizado neste trabalho, [8], fornece uma tabela de fatores, a partir da qual se obtêm matrizes elementares denominadas matrizes fatores, que, arranjadas convenientemente, produzem a matriz inversa, como está apresentado no Apêndice E.

Um processo de ordenação, como mostrado no Apêndice C , deve ser utilizado para manter a estrutura de esparsidade da matriz original.

A seguir estão apresentadas a metodologia para obtenção e as características das tabelas de fatores e das matrizes fatores.

D.2 - OBTENÇÃO DA TABELA DE FATORES SEM CONSIDERAR A ORDENAÇÃO

Para obtenção da tabela de fatores é aplicado o processo de eliminação de Gauss. A ordem em que as linhas serão processadas será a ordem natural.

Considere-se a matriz [Y] mostrada na equação (D.3), para a qual se deseja obter a tabela de fatores :

$$[Y] = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \qquad (D.3)$$

A seguir será apresentado o processamento de cada uma das linhas, mostrando-se as etapas do processo de eliminação de Gauss.

- Processamento da primeira linha - linha 1

Pelo fato de ser a primeira linha a ser processada, basta dividir toda a linha pelo elemento da diagonal, o que corresponde à normalização da linha :

1	-1/3	-1/3	0	- (linha 1)/3

A matriz [Y] modificada fica como mostrado na equação(D.4):

$$[Y] = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(D.4)}$$

Para a tabela de fatores,tem-se :

$\frac{1}{3}$ $\quad -\frac{1}{3}$ $\quad -\frac{1}{3}$ $\quad 0$ - linha 1

onde :

- o termo correspondente à diagonal é o inverso do elemento da diagonal antes da normalização da linha,

- os termos situados à direita da diagonal são os termos resultantes da última modificação, ou seja, os termos após a normalização.

- Processamento da segunda linha - linha 2

Na linha 2 da matriz da equação (D.4) deve-se eliminar o

elemento situado à esquerda da diagonal. Esta eliminação é possível através de uma combinação linear com a linha 1 :

1	-1/3	-1/3	0	- (linha 1).(+1)

Somando-se com a linha 2, obtém-se :

0	5/3	-1/3	0	- linha 2 modificada

Normalizando-se a linha 2 modificada, obtém-se :

0	1	-1/5	0	- linha 2 normalizada

Neste caso, a matriz [Y] da equação (D.4) se modifica, e fica como mostrado na equação (D.5) :

$$[\,Y\,] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \text{(D.5)}$$

Para a tabela de fatores, tem-se :

1/3	-1/3	-1/3	0	- linha 1
-1	3/5	-1/5	0	- linha 2

onde, para a linha 2, tem-se :

- para o termo da diagonal e os elementos situados à direi-

ta da diagonal, são válidas as mesmas observações feitas para a linha 1,

- para o elemento que está situado à esquerda da diagonal, tem-se que o valor correspondente na tabela de fatores é o anterior à alteração realizada nesta coluna através da combinação linear. Portanto, corresponde ao valor que estava na linha 2 da matriz da equação (D.4), antes da combinação linear das linhas 1 e 2.

- Processamento da terceira linha - linha 3

Na linha 3 da matriz da equação (D.5) deve-se eliminar o elemento que está situado à esquerda da diagonal. Isto é possível através de uma combinação linear com a linha 1 :

	1	-1/3	-1/3	0

- (linha 1).(+1)

Somando-se com a linha 3, obtém-se :

	0	-1/3	5/3	-1

- linha 3 modificada

Nota-se que ainda existe um elemento situado à esquerda da diagonal, que surgiu da combinação linear das linhas 1 e 3, e, portanto, deve ser eliminado através de uma combinação linear das linhas 2 e 3 :

	0	1/3	-1/15	0

- (linha 2).(1/3)

Somando-se com a linha 3 modificada, obtém-se :

0	0	8/5	-1

- linha 3 modificada

Normalizando-se a linha 3 modificada, obtém-se :

0	0	1	-5/8

- linha 3 normalizada

A matriz [Y] modificada fica como mostrado na equação (D.6):

$$[\,Y\,] = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(D.6)}$$

Para a tabela de fatores, tem-se :

1/3	-1/3	-1/3	0	- linha 1
-1	3/5	-1/5	0	- linha 2
-1	-1/3	5/8	-5/8	- linha 3

onde, para a linha 3, tem-se :

- para o elemento da diagonal e para os elementos situados à direita da diagonal são válidas as mesmas observações feitas para a linha 1,

- o elemento situado à esquerda da diagonal na coluna 1 corresponde ao elemento da linha 3 antes da eliminação, portanto ao elemento da matriz da equação (D.5),

- o elemento situado à esquerda da diagonal, na coluna 2 , corresponde ao elemento que existia nessa posição antes da eliminação desse elemento na segunda modificação da linha 3, ou seja, ao valor que surgiu nesta linha devido à combinação linear das linhas 3 e 1.

- Processamento da quarta linha - linha 4

Neste caso, deve-se eliminar apenas o elemento correspondente à terceira coluna, já que os outros são nulos, como mostrado na matriz da equação (D.6). Essa eliminação é possível através da combinação linear das linhas 4 e 3 :

0	0	+1	-5/8	- (linha 3).(+1)

Somando-se com a linha 4, obtém-se :

0	0	0	3/8	- linha 4 modificada

Normalizando-se a linha 4 modificada, obtém-se :

0	0	0	1	- linha 4 normalizada

A matriz [Y] modificada fica como mostrado na equação (D.7) :

$$[Y] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -5/8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{(D.7)}$$

A tabela de fatores definitiva será :

1/3	-1/3	-1/3	0	- linha 1
-1	3/5	-1/5	0	- linha 2
-1	-1/3	5/8	-5/8	- linha 3
0	0	-1	8/3	- linha 4

onde, para a linha 4, tem-se :

- para o elemento da diagonal é válida a mesma observação feita para a linha 1,

- não existem elementos situados à direita da diagonal para este caso,

- aos elementos situados à esquerda da diagonal, nas colunas 1 e 2, correspondem os próprios valores da matriz da equação (D.6), pois são zeros e não foi necessário realizar nenhuma combinação linear para eliminá-los. Ao elemento da coluna 3 corresponde o valor da matriz da equação (D.6), antes da combinação linear das linhas 3 e 4, realizada para eliminar esse elemento.

Dessa forma, a obtenção da tabela de fatores pode ser

esquematizada da seguinte forma :

- aplica-se o processo de eliminação de Gauss separadamente a cada linha da matriz, de acordo com a ordenação definida,

- todos os elementos situados em colunas correspondentes às linhas já processadas devem ser eliminados através de combinações lineares com as linhas já processadas,

- após todos os elementos situados em colunas correspondentes às linhas já processadas terem sido eliminados, a linha deve ser normalizada,

- os elementos na tabela de fatores correspondentes à linha sendo processada serão :

  . o elemento da diagonal corresponde ao inverso do elemento da diagonal da linha antes da normalização,

  . os elementos localizados em colunas correspondentes a linhas que não tenham sido processadas ainda são os valores encontrados após a normalização da linha,

  . os elementos localizados em colunas correspondentes a linhas que já tenham sido processadas são os valores na linha antes da eliminação desses elementos através de uma combinação linear.

D.3 - OBTENÇÃO DA TABELA DE FATORES CONSIDERANDO A ORDENAÇÃO

Considere-se a mesma matriz da equação (D.3) e a seguinte ordenação : 2 , 4 , 1 e 3 . O processo de obtenção da tabela de fatores será o mesmo apresentado no item D.2, sendo

que, para auxiliar na identificação dos elementos da tabela de fatores, foi adotada a seguinte simbologia para os seus elementos :

- elemento envolvido por círculo indica o elemento da diagonal,

- elemento envolvido por um quadrado indica o elemento localizado em uma coluna correspondente a uma linha que já tenha sido processada,

- elemento que não está envolvido por nenhum símbolo indica o elemento localizado em uma coluna correspondente a uma linha que não tenha sido processada ainda.

A seguir, será mostrado o processamento de cada uma das linhas, de acordo com a nova ordenação. Para a tabela de fatores, são válidas as observações do item anterior.

- Processamento da primeira linha - linha 2

Normalizando-se a linha, obtém-se :

-1/2	1	0	0

- linha 2 normalizada

A matriz [Y] modificada fica como mostrado na equação (D.8). A seta indica a linha que foi processada :

$$[\,Y\,] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & -1 & -1 & 0 \\ \hline -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \leftarrow \qquad \text{(D.8)}$$

Para a tabela de fatores, tem-se :

-1/2	(1/2)	0	0	- linha 2

- Processamento da segunda linha - linha 4

Não existe necessidade de se eliminar nenhum elemento, e nem de se realizar a normalização, já que o valor da diagonal é 1.

A matriz [Y] modificada fica como mostrado na equação (D.9):

$$[Y] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & -1 & -1 & 0 \\ \hline -1/2 & 1 & 0 & 0 \leftarrow \\ \hline -1 & 0 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \leftarrow \\ \hline \end{array} \qquad (D.9)$$

Para a linha 4 da tabela de fatores, tem-se :

-1/2	(1/2)	0	0	- linha 2
0	[0]	-1	(1)	- linha 4

- Processamento da terceira linha - linha 1

Deve-se eliminar o elemento na coluna 2, através de uma combinação linear com a linha 2 :

-1/2	1	0	0	- (linha 2).(+1)

Somando-se com a linha 1, obtém-se :

5/2	0	-1	0

- linha 1 modificada

Normalizando-se a linha 1 modificada, obtém-se :

1	0	-2/5	0

- linha 1 normalizada

A matriz [Y] modificada fica como mostrado na equação (D.10):

$$[Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/5 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(D.10)}$$

Para a linha 1 na tabela de fatores, tem-se :

(2/5)	[-1]	-2/5	[0]	- linha 1
-1/2	(1/2)	0	0	- linha 2
0	[0]	-1	(1)	- linha 4

- Processamento da quarta linha - linha 3

Deve-se eliminar o elemento da coluna 4, através de uma combinação linear com a linha 4 :

0	0	-1	1

- (linha 4).(+1)

Somando-se com a linha 3, obtém-se :

-1	0	1	0

- linha 3 modificada

Como surgiu um novo elemento na coluna 1, este deve ser eliminado através de uma combinação linear com a linha 1 :

1	0	-2/5	0

- (linha 1).(+1)

Somando-se com a linha 3 modificada, obtém-se :

0	0	3/5	0

- linha 3 modificada

Normalizando-se a linha 3 modificada, obtém-se :

0	0	1	0

- linha 3 normalizada

A matriz $[Y]$ modificada fica como mostrado na equação (D.11):

$$[Y] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & -2/5 & 0 \\ \hline -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \qquad \text{(D.11)}$$

A tabela de fatores definitiva será :

2/5	$\boxed{-1}$	-2/5	$\boxed{0}$	-	linha 1
-1/2	1/2	0	0	-	linha 2
$\boxed{-1}$	$\boxed{0}$	5/3	$\boxed{-1}$	-	linha 3
0	$\boxed{0}$	-1	1	-	linha 4

Comparando-se as tabelas de fatores obtidas nos itens D.2 e D.3, nota-se que são diferentes devido a ordenação adotada em cada caso ser também diferente.

D.4 - MATRIZES FATORES

As matrizes fatores são obtidas a partir da tabela de fatores e são definidas como indicado a seguir.

- Matriz $\left[U_i \right]_i$

$$
\begin{array}{c}
\\
\\
i \\
\\
\\
\\
\\
\\
\\
\\
\\
\\
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & -u_{i,i+1} & -u_{i,i+2} & \cdots & -u_{i,n} & & & & & & \\
 & & & \cdot & & & & & & & & & \\
 & & & & \cdot & & & & & & & & \\
 & & & & & \cdot & & & & & & & \\
 & & & & & & \cdot & & & & & & \\
 & & & & & & & \cdot & & & & & \\
 & & & & & & & & \cdot & & & & \\
 & & & & & & & & & \cdot & & & \\
 & & & & & & & & & & \cdot & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
$$

Os valores u correspondem aos valores do triângulo superior da tabela de fatores, e são considerados na matriz fator com sinal oposto ao da tabela de fatores.

- Matriz $[Li]$

$$
\begin{array}{c} \\ i \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} & & & & i & & & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & 1 \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & \\
 & & -\ell_{i,i+1} & \ddots & & & & & \\
 & & -\ell_{i,i+2} & & \ddots & & & & \\
 & & \vdots & & & \ddots & & & \\
 & & \vdots & & & & \ddots & & \\
 & & \vdots & & & & & 1 & \\
 & & -\ell_{i,n} & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Os valores ℓ correspondem aos valores do triângulo inferior da tabela de fatores, e são considerados na matriz fator com sinal oposto ao da tabela de fatores.

- Matriz $[Di]$

$$
\begin{array}{c} \\ i \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} & & & & i & & & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & & d_i & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Os valores de d correspondem aos elementos da diagonal da tabela de fatores.

Baseando-se nessas considerações, para o item D.2 as matrizes fatores são :

- Matrizes $[U_i]$

$[U_1]$ =

1	+1/3	+1/3	0
	1		
		1	
			1

$[U_2]$ =

1			
	1	+1/5	0
		1	
			1

$[U_3]$ =

1			
	1		
		1	+5/8
			1

A matriz $[U_4]$ corresponde à matriz unidade.

- Matrizes $[L_i]$

$[L_1]$ =

1			
+1	1		
+1		1	
0			1

$[L_2]$ =

1			
	1		
	+1/3	1	
	0		1

$[L_3] =$

1			
	1		
		1	
		+1	1

A matriz $[L_4]$ corresponde à matriz unidade.

- Matrizes $[D_i]$

$[D_1] =$

1/3			
	1		
		1	
			1

$[D_2] =$

1			
	3/5		
		1	
			1

$[D_3] =$

1			
	1		
		5/8	
			1

$[D_4] =$

1			
	1		
		1	
			8/3

Para o item D.3, como foi adotada uma ordenação diferente da natural, a obtenção das matrizes fatores não é tão simples. Para a tabela de fatores do item D.3, em relação a tabela de fatores do item D.2, é possível fazer as seguintes observações :

- os elementos que não estão envolvidos por nenhum símbolo correspondem aos elementos do triângulo superior,

- os elementos que estão envolvidos por um quadrado correspondem aos elementos do triângulo inferior,

- os elementos que estão envolvidos por um círculo correspondem aos elementos da diagonal.

Estas observações são válidas devido à ordenação adotada. Considerando-se estas observações e as regras de montagem das matrizes fatores, para a tabela de fatores obtida no item D.3, tem-se :

- Matriz $[U_i]$

$[U_1]$ =

1			
+1/2	1	0	0
		1	
			1

$[U_2]$ =

1			
	1		
		1	
0		+1	1

$[U_3]$ =

1		+2/5	
	1		
		1	
			1

A matriz $[U_4]$ corresponde à matriz unidade.

- Matrizes $[L_i]$

$$[L_1] = \begin{bmatrix} 1 & +1 & & \\ & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{bmatrix} \qquad [L_2] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & +1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[L_3] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ +1 & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $[L_4]$ corresponde à matriz unidade.

- Matrizes $[D_i]$

$$[D_1] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad [D_2] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$[D_3] =$

2/5			
	1		
		1	
			1

$[D_4] =$

1			
	1		
		5/3	
			1

O índice i de cada matriz indica a ordem de processamento definida pela ordenação. Para o item D.2, i = 1 equivale à linha 1, por isso a matriz $[U_1]$, nesse caso, apresenta elementos não nulos fora da diagonal apenas na linha 1. Para o caso do item D.3, i = 1 equivale à linha 2, por isso a matriz $[U_1]$, nesse caso, apresenta elementos não nulos fora da diagonal apenas na linha 2. Portanto, a ordenação das linhas da matriz original define a montagem das matrizes fatores.

Para os itens D.2 e D.3, as matrizes fatores são diferentes pelo fato de as tabelas de fatores serem também diferentes, devido à ordenação diferente utilizada nos dois casos.

D.5 - TRATAMENTO COMPUTACIONAL DO PROCESSO DE FATORAÇÃO

O processamento até aqui tratado considera o processo de eliminação de Gauss, através da eliminação de linhas. Computacionalmente, é mais vantajoso o processo de eliminação de colunas.

Em algumas aplicações particulares da fatoração é necessária a retenção de algumas informações da matriz original, como acontece na matriz $[Y]$ quando se considera a existência de chaves conectadas às barras do sistema elétrico (capítulo 6), como mostrado na figura D.1.

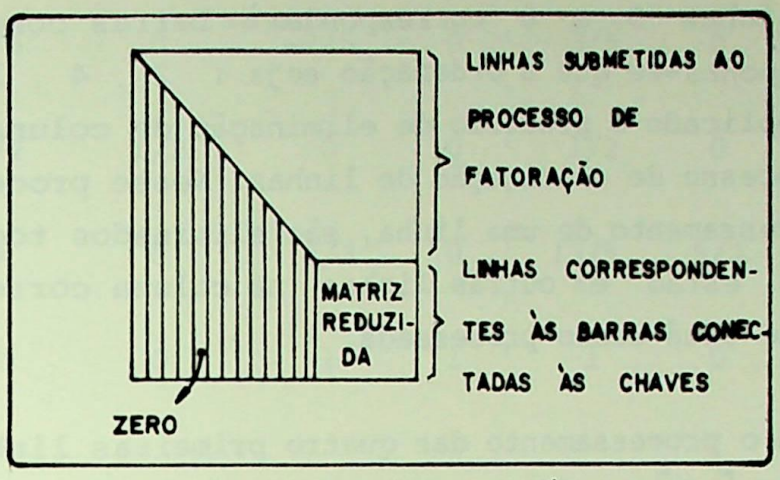


FIGURA D.1 - Processo de fatoração parcial

Como mostrado na figura D.1,o processo de eliminação de colunas é mais conveniente, pois no processamento da primeira linha correspondente a uma barra conectada a uma chave, todos os elementos situados à esquerda da diagonal já estarão zerados, caracterizando uma matriz reduzida. As linhas a serem processadas devem ser ordenadas convenientemente de tal forma que se concentrem nas últimas posições da matriz aquelas correspondentes às barras conectadas às chaves.

Considere-se, por exemplo, a matriz mostrada na equação (D.12) :

$$[Y] = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\ 3 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \\ \hline 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & \\ 6 & & & 1 & & & 2 \end{array} \qquad \text{(D.12)}$$

As linhas 5 e 6 correspondem às barras conectadas às chaves. Suponha-se que a ordenação seja : 2 , 4 , 1 , 3 , e que seja aplicado o processo de eliminação de colunas ao invés do processo de eliminação de linhas. Nesse processo, quando do processamento de uma linha, são eliminados todos os elementos que estão em outras linhas na coluna correspondente à linha que está sendo processada.

Após o processamento das quatro primeiras linhas, resulta a matriz [Y] modificada da equação (D.13) :

$$[Y] = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -2/5 & 0 & 3/5 & 0 \\ 2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13/3 & 5/3 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -35/3 & -10/3 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10/3 & 1/3 \end{array} \qquad \text{(D.13)}$$

A matriz reduzida será :

	5	6
5	-35/3	-10/3
6	-10/3	1/3

A tabela de fatores resultante, até este ponto, será :

2/5	0	-2/5	0	3/5	0	-	linha 1
-1/2	1/2	0	0	1/2	0	-	linha 2
0	0	5/3	0	13/5	5/3	-	linha 3
0	0	-1	1	1	0	-	linha 4

Dessa forma é possível realizar alterações na matriz reduzida, por exemplo, considerar a operação de uma chave,e completar o processo de fatoração, sem haver necessidade de se repetir todo o processo novamente desde o início.

D.6 - CONCLUSÕES

No processo considerado não existe necessidade de armazenamento das matrizes fatores,que são elementares. Portanto, apenas a tabela de fatores será armazenada, o que pode ser feito no lugar da matriz [Y], desde que esta não seja mais necessária no processamento.

Nota-se também, comparando os resultados dos itens D.2, sem ordenação, e D.3, com ordenação, que é possível definir uma ordenação que não altere a estrutura de esparsidade da matriz original. Para o primeiro caso nota-se, pela tabela de fatores em comparação com a matriz original, equação (D.3) , que houve dois preenchimentos adicionais, enquanto que para o caso com ordenação não houve nenhum preenchimento.

Este processo de fatoração também é conveniente do ponto de vista mostrado no item D.5, porque permite que apenas parte da matriz seja fatorada, permitindo que a fatoração seja apenas completada, ao invés de ser executada novamente de maneira completa, para alterações na matriz reduzida.

Em termos de tempo de processamento, este método de fatoração é muito mais rápido que o processo de inversão de matrizes.

APÊNDICE E - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

E.1 - INTRODUÇÃO

Como foi apresentado no apêndice D, equações (D.1) e (D.2), a solução do vetor de tensões [E] exige a fatoração da matriz [Y] para não se recorrer ao processo de inversão. A partir das matrizes fatores, que também foram obtidas no apêndice D, é possível obter-se uma solução para o vetor de tensões, equivalente à que se obteria com a inversão de [Y].

O processo de solução apresentado neste apêndice se baseia na referência [8], a mesma usada para a fatoração. Além do equacionamento matemático do processo de solução, também são apresentados neste apêndice dois exemplos, um considerando a ordenação e outro não.

E.2 - EQUACIONAMENTO MATEMÁTICO DO PROCESSO DE SOLUÇÃO

Baseando-se em [8], a equação (D.2) pode ser escrita em função das matrizes fatores, como mostrado na equação(E.1):

$$[U_1] \ldots [U_{n-1}]\ [U_n]\ [L_n]\ [D_n]\ [L_{n-1}]\ [D_{n-1}] \ldots$$

$$\ldots [L_1]\ [D_1]\ [I] = [E] \qquad (E.1)$$

Comprova-se, portanto, que é possível obter-se a inversa da matriz [Y] através de um produto das matrizes fatores. Como as matrizes [Y] dos sistemas elétricos são simétricas, é possível escrever :

$$[L_j] = [D_j] [U_j]^t [D_j]^{-1} \qquad (E.2)$$

Substituindo-se a equação (E.2) na equação (E.1), obtém-se:

$$[U_1] \ldots [U_{n-1}] [U_n] \left[[D_n] [U_n]^t [D_n]^{-1} \right] [D_n] \left[[D_{n-1}] [U_{n-1}]^t [D_{n-1}]^{-1} \right] [D_{n-1}] \ldots \left[[D_1] [U_1]^t [D_1]^{-1} \right] [D_1] [I] = [E] \qquad (E.3)$$

Cancelando-se os termos do tipo $[D_i]^{-1}[D_i]$ na equação (E.3), resulta :

$$[U_1] \ldots [U_{n-1}] [U_n] [D_n] [U_n]^t [D_{n-1}] [U_{n-1}]^t \ldots \ldots [D_1] [U_1]^t [I] = [E] \qquad (E.4)$$

Os produtos $[U_i]^t [D_j]$ são comutativos sempre que $i > j$:

$$[U_i]^t [D_j] = [D_j] [U_i]^t \qquad (E.5)$$

Além disso, é possível escrever-se :

$$[D_n] [D_{n-1}] [D_{n-2}] \ldots [D_2] [D_1] = [D] \qquad (E.6)$$

Substituindo-se as equações (E.5) e (E.6) em (E.4), resulta :

$$[U_1] \ldots [U_{n-1}] [U_n] [D] [U_n]^t [U_{n-1}]^t [U_{n-2}]^t \ldots$$

$$\ldots [U_2]^t [U_1]^t [I] = [E] \qquad (E.7)$$

A equação (E.7) consiste na equação geral para a solução dos valores de tensão. Para esta equação, são válidas as seguintes observações :

- O produto $[D] [U_n]^t [U_{n-1}]^t [U_{n-2}]^t \ldots [U_2]^t [U_1]^t$ é chamado de fase de eliminação ;

- O produto $[U_1] [U_2] \ldots [U_{n-1}] [U_n]$ é chamado de fase de substituição;

- Como as matrizes $[L_i]$ não são necessárias, pelo fato de a matriz $[Y]$ ser simétrica, é necessário armazenar apenas os elementos correspondentes ao triângulo superior da tabela de fatores;

- Como as matrizes $[U_i]$ são elementares, a obtenção da transposta $[U_i]^t$ é bastante simples;

- Este tipo de equação é mais facilmente resolvido quando se faz o produto indicado na ordem inversa. Dessa forma, sempre tem-se o produto de uma matriz por um vetor, e não de duas matrizes, como indicado na equação.

E.3 - PROCESSO DE SOLUÇÃO SEM CONSIDERAR A ORDENAÇÃO

Serão consideradas as matrizes fatores encontradas para o item D.2 e mostradas no item D.4 do apêndice D. Será considerado o seguinte vetor de correntes:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 2,0 \\ 3,0 \\ 4,0 \end{bmatrix}$$

Para este caso, a equação (E.7) torna-se :

$$[U_1]\,[U_2]\,[U_3]\,[U_4]\,[D]\,[U_4]^t\,[U_3]^t\,[U_2]^t\,[U_1]^t\,[I] = [E] \qquad \text{(E.8)}$$

Neste caso, as matrizes $[U_4]$ e $[U_4]^t$ correspondem à matriz unidade. Resolvendo-se a equação (E.8) na ordem inversa, resulta o seguinte vetor de tensões :

$$[E] = \begin{bmatrix} 6,0 \\ 4,0 \\ 13,0 \\ 17,0 \end{bmatrix}$$

E.4 - PROCESSO DE SOLUÇÃO CONSIDERANDO A ORDENAÇÃO

Serão consideradas as matrizes fatores encontradas para o item D.3 e mostradas no item D.4 do apêndice D. Será considerado o mesmo vetor $[I]$ do item anterior. A equação (E.8) continua válida e neste caso também as matrizes $[U_4]$ e $[U_4]^t$ são as matrizes unidade. Resolvendo-se a equação (E.8) na or

dem inversa, resulta o seguinte vetor de tensões :

$$[E] = \begin{bmatrix} 6,0 \\ 4,0 \\ 13,0 \\ 17,0 \end{bmatrix}$$

E.5 - CONCLUSÕES

Pelos resultados encontrados nos itens E.3 e E.4, nota-se que ordenações diferentes não alteram os resultados. Como o processo de solução envolve apenas matrizes elementares, o mesmo é de implementação computacional bastante simples, e apresenta um tempo computacional pequeno, mesmo se comparado a outros métodos de fatoração, como também em relação ao próprio processo de inversão de matrizes. Nota-se também, que pelo fato de o produto da equação (E.7) ser realizado na ordem inversa, o número de operações matemáticas envolvidas será reduzido.

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca
MAUÁ
B.M.

APÊNDICE F - OSCILAÇÕES NUMÉRICAS

F.1 - INTRODUÇÃO

O método trapezoidal, que está descrito no apêndice A , quando é aplicado à solução de equações diferenciais, poderá apresentar uma oscilação numérica superposta à solução correta. Tais oscilações ocorrem quando as variáveis que estão sendo diferenciadas sofrem súbitas alterações. Essas oscilações, como ocorrem em torno da solução correta, embora produzam uma solução errada, não prejudicam a análise do problema que está sendo examinado, visto que é possível identificá-las e eliminá-las.

Para melhor caracterizar o que são as oscilações numéricas, será desenvolvido um exemplo a seguir. Considere-se a equação diferencial (F.1) :

$$y = \frac{dx}{dt} \qquad (F.1)$$

A aplicação do método trapezoidal (equação A.12) à equação (F.1) resultará em :

$$y_n = - y_{n-1} + \frac{2}{\Delta t} x_n - \frac{2}{\Delta t} x_{n-1} \qquad (F.2)$$

A solução da equação diferencial deve fornecer como resultado uma função y,que dependerá de t. Admitindo-se que x seja a função mostrada na figura F.1-a, a solução analítica da equação diferencial (F.1) será aquela mostrada na figura F.1-b

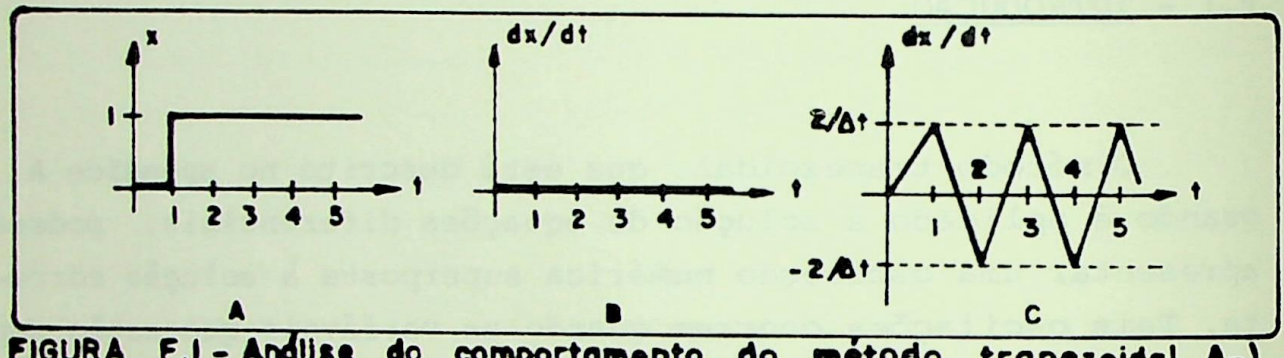


FIGURA F.1 - Análise do comportamento do método trapezoidal, A-) função x, B-) solução analítica de dx/dt, C-) solução numérica de dx/dt

Considerando-se a solução numérica da equação (F.1), através do método trapezoidal, equação (F.2), obtém-se :

- para $t = t_1$

$$y_1 = 0 + \frac{2}{\Delta t} \cdot 1 - 0 = \frac{2}{\Delta t}$$

- para $t = t_2$

$$y_2 = -\frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta t} \cdot 1 - \frac{2}{\Delta t} \cdot 1 = -\frac{2}{\Delta t}$$

- para $t = t_3$

$$y_3 = +\frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta t} \cdot 1 - \frac{2}{\Delta t} \cdot 1 = \frac{2}{\Delta t}$$

e assim sucessivamente.

A solução numérica está mostrada na figura F.1-c. Nota se, neste caso, que esta solução apresenta uma oscilação numérica constante em torno do valor correto. Isto acontece porque ocorreu uma variação súbita na variável que estava sendo diferenciada, x , em $t = t_1$. A análise de uma função tipo senoidal, por exemplo, mostra que não haverá tais problemas, já que esta função é bem mais suave. Deve-se observar, também , que quanto menor for o valor do intervalo de tempo (Δt), menores serão as oportunidades de ocorrência de oscilações numéricas, pois de um intervalo para outro a variação de x será pequena.

As oscilações numéricas não devem ser confundidas com as oscilações naturais [24], que aparecem nos sistemas elétricos devidas à presença de capacitores e indutores. A figura F.2 apresenta um resumo dos tipos de resposta que poderão ocorrer para um circuito RLC. Para o último caso, resposta oscilatória (R = 0), as oscilações natural e numérica poderão ser confundidas, caso a frequência da oscilação natural seja próxima à frequência da oscilação numérica ($1/2\Delta t$). Para outros valores de frequência natural, aparecerá uma oscilação numérica sobreposta à oscilação natural. Para os outros casos de oscilação natural apresentados na figura F.2, é bem mais difícil confundir os dois tipos de oscilações.

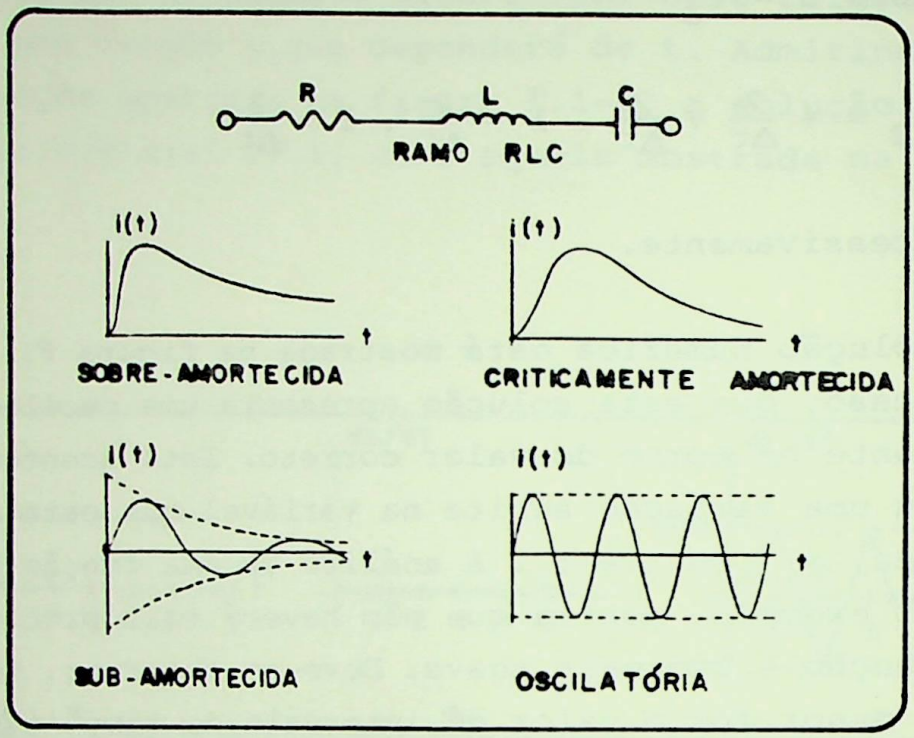


FIGURA F.2 - Tipos de respostas que ocorrem para um circuito RLC (oscilações naturais)

Neste apêndice, além das causas das oscilações numéricas, são apresentadas também as situações onde elas ocorrem e os meios para eliminá-las.

F.2 - SITUAÇÕES ONDE OCORREM AS OSCILAÇÕES NUMÉRICAS

A referência [21] menciona três causas principais de oscilações numéricas :

- alterações súbitas na topologia do sistema devidas ao fechamento ou à abertura de chaves;
- alterações do ponto de operação (regiões linear e não linear) de elementos não lineares;
- discrepâncias entre as soluções de regime permanente e de regime transitório.

A segunda e a terceira causas não serão discutidas, visto que neste trabalho não são considerados elementos não lineares e não é realizado nenhum cálculo de regime permanente para determinação de condições iniciais.

A primeira causa, como está relacionada ao modelo de chave, será discutida em detalhes.

As oscilações, nesse caso, ocorrem para os valores de tensão aplicada sobre um indutor, quando da abertura de uma chave, e para os valores de corrente através de capacitores , quando do fechamento de uma chave. A seguir, os dois casos serão discutidos separadamente.

F.2.1 - TENSÃO ATRAVÉS DE UM INDUTOR QUANDO DA ABERTURA DE UMA CHAVE

A tensão sobre um indutor é definida pela equação (F.3).

$$V = L \frac{di}{dt} \qquad (F.3)$$

Como foi mencionado no item F.1, a oscilação ocorre justamente devido à presença da derivada di/dt na equação (F.3).

Aplicando-se o método trapezoidal à equação (F.3), obtém-se :

$$V_L(t + \Delta t) = \frac{2L}{\Delta t} i(t + \Delta t) - \frac{2L}{\Delta t} i(t) - V_L(t) \qquad (F.4)$$

Admite-se que a abertura da chave ocorra em t_0, quando a corrente está em zero, ou seja :

$$i\ (t_0) = 0 \qquad (F.5)$$

Portanto, para $t_0 + \Delta t$, tem-se :

$$i\ (t_0 + \Delta t) = 0 \qquad (F.6)$$

pois a chave já está aberta. Substituindo-se esses valores na equação (F.4), para $t = t_0$, obtém-se :

$$V_L(t_0 + \Delta t) = \frac{2L}{\Delta t} .0 - \frac{2L}{\Delta t} .0 - V_L\ (t_0) = - V_L(t_0)$$

Para $t = t_0 + 2\Delta t$, obtém-se :

$$V_L(t_0 + 2\Delta t) = \frac{2L}{\Delta t} .0 - \frac{2L}{\Delta t} .0 - \underbrace{\left[- V_L(t_0 + \Delta t) \right]}_{V_L(t_0)} = V_L(t_0)$$

Portanto, para os próximos intervalos de tempo, os valores de corrente continuam nulos, e os valores de tensão ficam oscilando em torno de zero com uma amplitude constante $V_L(t_0)$.

Um exemplo desse caso está mostrado na figura F.3 [25], para o qual, antes da abertura da chave, tem-se :

$$V_1(t) = V(t) - V_R - V_L \qquad (F.7)$$

Após a abertura da chave, obtém-se :

$$V_1(t) = V(t) \qquad V_R = V_L = 0 \qquad (F.8)$$

Quando se considera a abertura da chave em t_{aber}, figura F.3-b, a corrente cai a zero e a tensão $V_1(t)$ (curva tracejada, figura F.3-b) passa a ser igual à tensão da fonte , V(t). A solução mostrada na figura F.3-b corresponde à solução correta.

Porém, a solução numérica se apresenta errada, devido à oscilação numérica, como está mostrado nas figuras F.3-c e F.3-d.

De acordo com a equação (F.8), tem-se que $V_R = 0$, porém, devido à oscilação numérica, o valor V_L não será nulo, e a equação (F.8) torna-se :

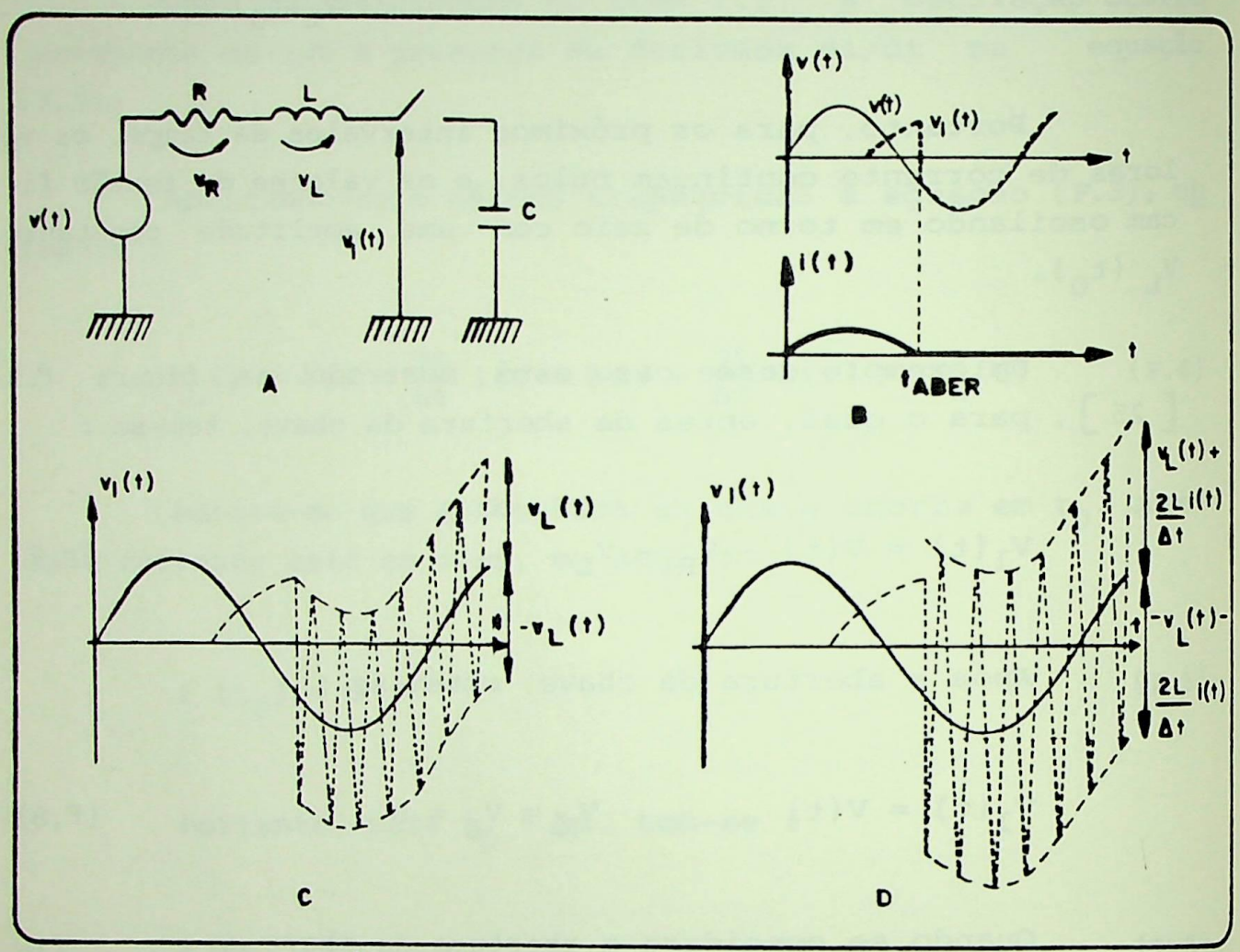


FIGURA F.3 - Oscilação numérica de tensão sobre um indutor devida à abertura de uma chave: A-) circuito considerado, B-) tensão e corrente no circuito antes e depois da abertura da chave (solução teórica), C-) oscilação numérica considerando a abertura da chave no zero de corrente, D-) oscilação numérica considerando a abertura da chave com valor de corrente diferente de zero

$$V_1(t) = V(t) \pm V_L(t) \qquad (F.9)$$

onde o valor $\pm V_L(t)$ representa o valor de tensão que caracteriza a oscilação numérica sobre o indutor. Esta oscilação numérica está mostrada na figura F.4-a. A tensão $V_1(t)$ fica oscilando em torno de V(t) com uma amplitude constante igual a V_L. Convém observar que na solução numérica todos os resultados estão corretos, exceto V_L.

Caso fosse considerada a abertura da chave com um valor de corrente diferente de zero, ter-se-ia :

$$i(t_0) \neq 0 \qquad i(t_0 + \Delta t) = 0 \qquad (F.10)$$

Substituindo-se esses valores na equação (F.4), obtém-se :

- para $t = t_0$

$$V_L(t_0 + \Delta t) = \frac{2L}{\Delta t}.0 - \frac{2L}{\Delta t} i(t_0) - V_L(t_0)$$

$$V_L(t_0 + \Delta t) = -\left[\frac{2L}{\Delta t} i(t_0) + V_L(t_0) \right]$$

- para $t = t_0 + \Delta t$

$$V_L(t_0 + 2\Delta t) = \frac{2L}{\Delta t}.0 - \frac{2L}{\Delta t}.0 + \left[\frac{2L}{\Delta t} i(t_0) + V_L(t_0) \right]$$

$$V_L(t_0 + 2\Delta t) = \left[\frac{2L}{\Delta t} i(t_0) + V_L(t_0) \right]$$

A partir desse tempo, os valores continuam os mesmos, apresentando oscilação numérica. Nota-se, nesse caso, (figura F.3-d), que o valor da oscilação numérica é maior que o do

caso anterior, quando se considerou a abertura no instante em que a corrente passou por zero. Portanto, quanto maior o valor de corrente durante o processo de abertura da chave, maiores serão as amplitudes das oscilações numéricas.

F.2.2 - CORRENTE ATRAVÉS DE UM CAPACITOR QUANDO DO FECHAMENTO DE UMA CHAVE

A corrente através de um capacitor está definida na equação (F.11).

$$i = C \frac{dv}{dt} \qquad (F.11)$$

Como foi mencionado inicialmente (item F.1), a oscilação ocorre justamente devida à presença da derivada dv/dt na equação (F.11).

A aplicação do método trapezoidal à equação (F.11) resulta em :

$$i(t) = - \frac{2C}{\Delta t} V(t) + \frac{2C}{\Delta t} V(t - \Delta t) - i\ (t - \Delta t) \qquad (F.12)$$

Considerando-se o circuito mostrado na figura F.4-a, e admitindo-se que o fechamento da chave ocorra em $t = t_0$, tem-se :

$$i(t_0) \neq 0$$

$$i(t_0 - \Delta t) = 0$$

$$V(t_0) \neq 0$$

$$V(t_0 - \Delta t) = 0$$

Substituindo-se esses valores na equação (F.12), para $t = t_0$, obtém-se :

$$i(t_0) = -\frac{2C}{\Delta t}.V(t_0) + \frac{2C}{\Delta t}.0 - 0 = \frac{2C}{\Delta t}.V(t_0) = \frac{2C}{\Delta t}V$$

Para $t = t_0 + \Delta t$, obtém-se :

$$i(t_0 + \Delta t) = -\frac{2C}{\Delta t}V(t_0 + \Delta t) + \frac{2C}{\Delta t}V(t_0) - \frac{2C}{\Delta t}.V$$

$$V(t_0 + \Delta t) = V(t_0) = V$$

$$i(t_0 + \Delta t) = -\frac{2C}{\Delta t}.V$$

Para os próximos intervalos de tempo, os valores de corrente ficam oscilando com amplitude constante e igual a $\frac{2C}{\Delta t}V$. Esta solução numérica está mostrada na figura F.4-b.

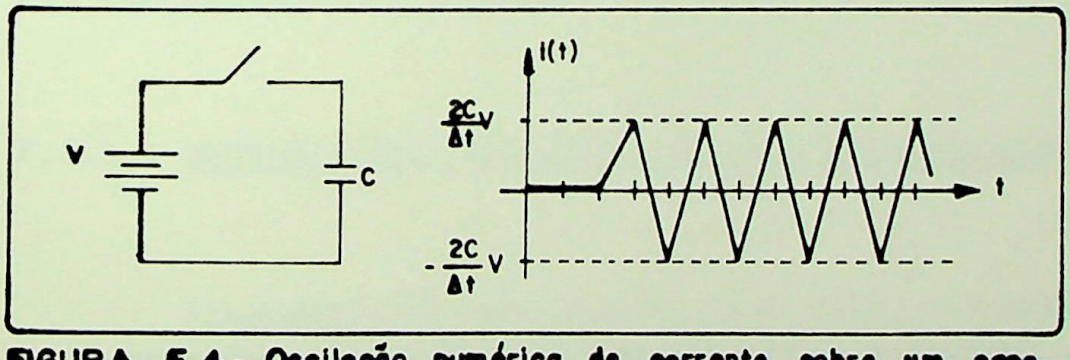


FIGURA F.4 - Oscilação numérica de corrente sobre um capacitor devida ao fechamento de uma chave, A-) sistema considerado, B-) oscilação numérica

Para o circuito considerado neste exemplo, quando ocorrer o fechamento da chave aparecerá aplicado no capacitor o mesmo valor de tensão da fonte. Portanto, não circulará nenhuma corrente pelo capacitor, e haverá uma oscilação numérica de amplitude constante em torno do valor correto, que é zero.

Este problema de oscilação normalmente ocorre quando se trabalha com modelo π de linhas de transmissão (figura F.5), sendo que, nesse caso, apenas o valor da corrente no primeiro capacitor (C_1) está errado.

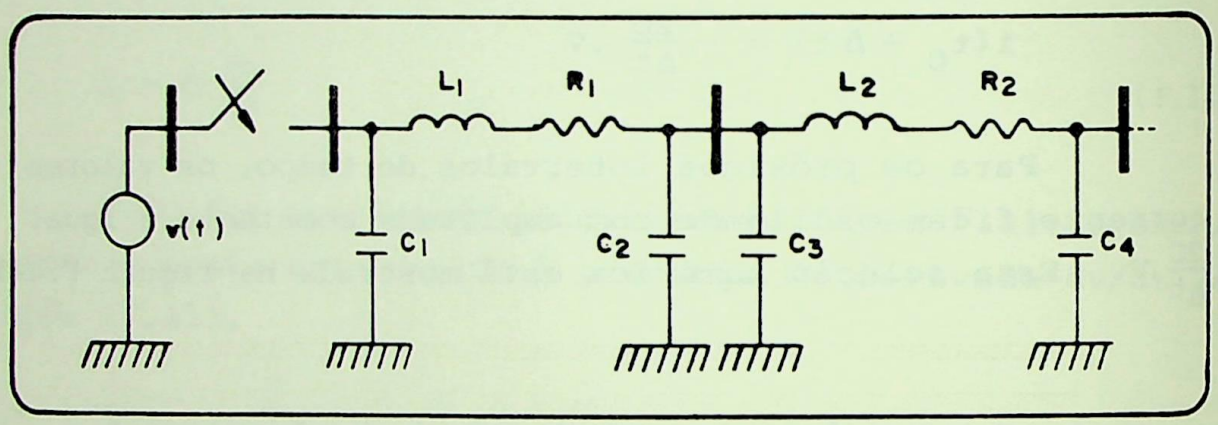


FIGURA F.5 - Modelo π em cascata para linhas de transmissão

F.3 - PROCESSOS DE ELIMINAÇÃO DAS OSCILAÇÕES NUMÉRICAS

Basicamente existem três processos para eliminação das oscilações numéricas :

- melhor modelagem do sistema a ser analisado;

- amortecimento dos sinais antes da diferenciação;

- introdução de elementos amortecedores.

A seguir serão descritos esses processos.

F.3.1 - MELHOR MODELAGEM DO SISTEMA A SER ANALISADO

Considere-se, como exemplo, o sistema mostrado na figura F.3-a, que apresenta as oscilações numéricas mostradas nas figuras F.3-c e F.3-d. Para melhorar o modelo, será considerado que parte da capacitância que está concentrada em um único extremo da chave seja concentrada no outro extremo da chave.

Praticamente isto realmente acontece, visto que existem capacitâncias para a terra nas buchas terminais de chaves. Portanto, modifica-se o circuito da figura F.3-a, resultando aquele que está mostrado na figura F.6, sendo que dessa forma as oscilações mostradas nas figuras F.3-a e F.3-d são completamente eliminadas.

F.3.2 - AMORTECIMENTO DOS SINAIS ANTES DA DIFERENCIAÇÃO

Considere-se, como exemplo, neste caso, a função apresentada na figura F.1-a. Para amortecimento do sinal de entrada, o degrau unitário x(t) será amortecido da seguinte maneira :

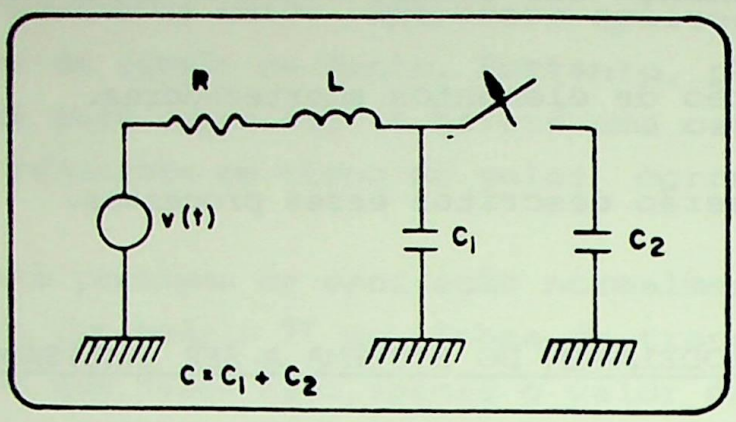


FIGURA F.6 - Circuito da figura F.3-A considerando a capacitância total dividida entre os dois terminais da chave

$$x'(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(t_{-1}) \right] \qquad (F.13)$$

Este sinal amortecido está mostrado na figura F.7-a , e a solução gráfica da derivada de x'(t) está mostrada na figura F.7-b. Substituindo-se valores na equação (F.2),obtém-se a solução numérica :

- para $t = t_1$

$$y_1 = 0 + \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{\Delta t} \cdot 0 = \frac{1}{\Delta t}$$

- para $t = t_2$

$$y_2 = -\frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta t} \cdot 1 - \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

- para $t = t_3$

$$y_3 = 0 + \frac{2}{\Delta t} .1 - \frac{2}{\Delta t} .1 = 0$$

Nota-se, portanto, que a oscilação numérica foi praticamente eliminada (ainda existe uma solução errada nos dois primeiros intervalos de tempo), como mostrado na figura F.7-c.

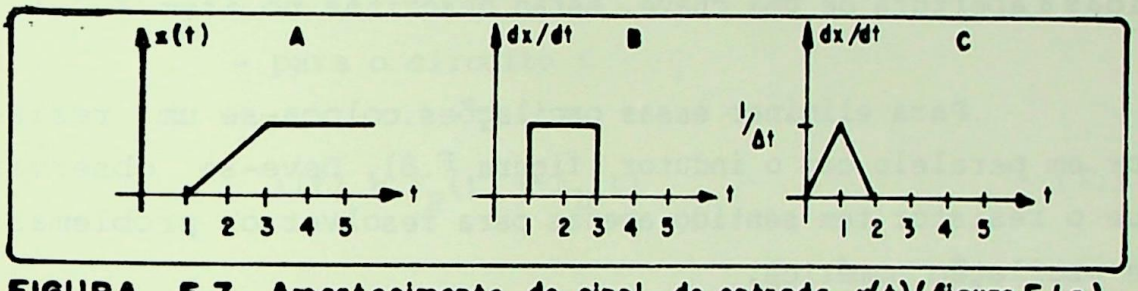


FIGURA F.7 - Amortecimento do sinal de entrada x(t) (figura F.1-a) antes da diferenciação, A-) sinal amortecido, B-) solução gráfica, C-) solução numérica

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - E.F.E.I.
Biblioteca
MAUÁ

F.3.3 - INTRODUÇÃO DE ELEMENTOS AMORTECEDORES

Para este caso, são consideradas duas situações diferentes :

- introdução de elementos amortecedores em circuitos com indutores, para os quais a oscilação numérica

ocorre quando da abertura de uma chave;

- introdução de elementos amortecedores em circuitos com capacitores, para os quais a oscilação numérica ocorre quando do fechamento de uma chave.

Estas duas situações particulares serão descritas a seguir.

F.3.3.1 - CIRCUITOS COM INDUTORES

As oscilações numéricas que ocorrem neste caso, devidas à abertura de uma chave, estão descritas no item F.2.1.

Para eliminar essas oscilações, coloca-se um resistor em paralelo com o indutor (figura F.8). Deve-se observar que o resistor tem sentido apenas para resolver os problemas de oscilação numérica.

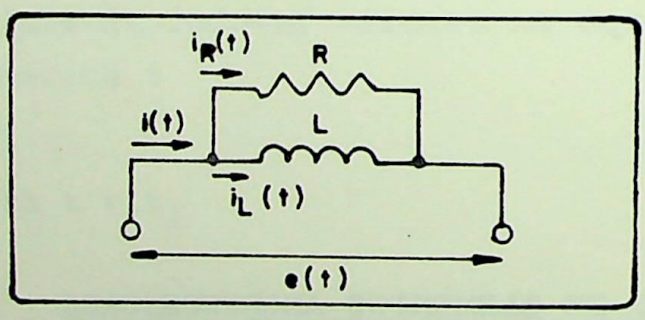


FIGURA F.8 - Resistor colocado em paralelo com um indutor para eliminação de oscilações numéricas

Neste caso, podem-se escrever as seguintes equações:

- para o indutor :

$$i_L(t) = \frac{\Delta t}{2L} e(t) + i_L(t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L} e(t - \Delta t) \quad (F.14)$$

- para o resistor :

$$i_R(t) = \frac{1}{R} e(t) \quad (F.15)$$

$$i_R(t - \Delta t) = \frac{1}{R} e(t - \Delta t) \quad (F.16)$$

- para o circuito :

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) \quad (F.17)$$

$$i(t - \Delta t) = i_R(t - \Delta t) + i_L(t - \Delta t) \quad (F.18)$$

Substituindo-se (F.14) e (F.15) em (F.17), obtém-se :

$$\frac{\Delta t}{2L} e(t) + i_L(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L} e(t - \Delta t) + \frac{1}{R} e(t) = i(t) \quad (F.19)$$

De (F.18), obtém-se :

$$i_L(t - \Delta t) = i(t - \Delta t) - i_R(t - \Delta t) \quad (F.20)$$

Substituindo-se (F.16) em (F.20), obtém-se :

$$i_L(t - \Delta t) = i(t - \Delta t) - \frac{1}{R} e(t - \Delta t) \quad (F.21)$$

Substituindo-se (F.21) em (F.19), obtém-se :

$$\frac{\Delta t}{2L}\, e(t) + i(t - \Delta t) - \frac{1}{R}\, e(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L}\, e(t - \Delta t) + \frac{1}{R}\, e(t) = i(t) \qquad \text{(F.22)}$$

$$e(t)\left[\frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R}\right] = i(t) - i(t - \Delta t) - e(t - \Delta t)\left[\frac{\Delta t}{2L} - \frac{1}{R}\right] \qquad \text{(F.23)}$$

ou ainda :

$$e(t) = \frac{1}{\frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R}}\left[i(t) - i(t - \Delta t)\right] - \frac{\left[\frac{\Delta t}{2L} - \frac{1}{R}\right]}{\left[\frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R}\right]}\, e(t - \Delta t) \qquad \text{(F.24)}$$

Considerando-se a corrente antes da abertura como sendo um degrau unitário, obtém-se para os valores de tensão:

$$e(t_1) = e_1 = \frac{1}{\frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R}}$$

$$e(t_2) = e_2 = -\frac{1}{\frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R}}\, \frac{\left[\frac{\Delta t}{2L} - \frac{1}{R}\right]}{\left[\frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R}\right]} = -\frac{\left[\frac{\Delta t}{2L} - \frac{1}{R}\right]}{\left[\frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R}\right]^2}$$

$$e(t_3) = e_3 = +\frac{\left[\frac{\Delta t}{2L} - \frac{1}{R}\right]^2}{\left[\frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R}\right]^3}$$

$$\vdots$$

$$e(t_n) = e_n = k \frac{\left[\frac{\Delta t}{2L} - \frac{1}{R}\right]^{n-1}}{\left[\frac{\Delta t}{2L} + \frac{1}{R}\right]^{n}}$$

$k = +1$ para n impar

$k = -1$ para n par

Dependendo do valor de R, pode-se ter uma oscilação sub ou super amortecida. O caso de amortecimento crítico, ou seja, a anulação do valor e(t), já no segundo intervalo, ocorre para :

$$R_{crítico} = \frac{2L}{\Delta t} \qquad (F.25)$$

Substituindo-se nos valores de $e(t_1)$ e $e(t_2)$, encontrados anteriormente, obtém-se :

$$e(t_1) = \frac{1}{2 \cdot \frac{\Delta t}{2L}} = \frac{L}{\Delta t}$$

$$e(t_2) = 0$$

sendo que os valores $e(t_3), e(t_4), \ldots, e(t_n)$, também serão nulos.

Percebe-se que, quanto mais próximo do valor de $R_{crítico}$, melhor será o amortecimento. Para valores do resistor de amortecimento muito menores que $R_{crítico}$, o pico da oscilação numérica será menor, e o tempo de duração será um pouco maior. As referências [24] e [26] mencionam o seguinte valor como o mais apropriado para o resistor de amortecimento:

$$R \leq \frac{6\pi}{\Delta t} L \qquad \text{(F.26)}$$

Este valor é obtido através de uma análise de erros [26]. A escolha adequada do resistor de amortecimento depende da quantidade de amortecimento que se deseja, e do erro que é tolerável dentro de uma determinada faixa de interesse [21].

A introdução do resistor de amortecimento reduz o erro da solução numérica, porém aumenta as perdas, introduzindo um erro de fase, que aumenta com a frequência [21].

F.3.3.2 - CIRCUITOS COM CAPACITORES

As oscilações numéricas que ocorrem neste caso, devidas ao fechamento de uma chave, estão apresentadas no item F.2.2.

Para eliminar essas oscilações, coloca-se um resistor em série com o capacitor (figura F.9). Deve-se observar que o resistor tem sentido apenas para resolver os problemas de oscilações numéricas.

Das equações (2.34), (2.36) e (2.37), obtém-se para o ramo da figura F.10 :

$$i(t) = \frac{1}{R + \frac{\Delta t}{2C}} e(t) + \frac{1}{R + \frac{\Delta t}{2C}} e(t - \Delta t) -$$

$$- \frac{1}{R + \frac{\Delta t}{2C}} R + \frac{\Delta t}{2C} i(t - \Delta t) -$$

$$- 2 \frac{1}{R + \frac{\Delta t}{2C}} e_c(t - \Delta t) \qquad \text{(F.27)}$$

$$e_c(t) = e_c(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2C}\left[i(t) + i(t - \Delta t) \right] \qquad (F.28)$$

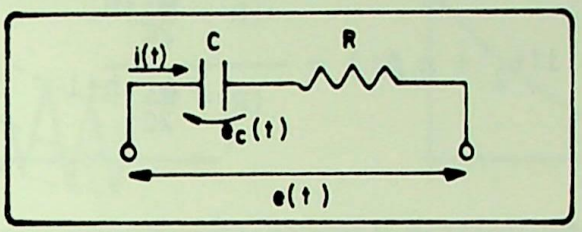


FIGURA F.9 - Resistor colocado em série com um capacitor para eliminação de oscilações numéricas

Considerando-se que no sistema seja aplicada uma tensão contínua igual a 1 V, e que a fonte seja chaveada em t_1, aparecerão no sistema, após o chaveamento da fonte, os seguintes valores de corrente :

$$i(t_1) = \frac{1}{R + \frac{\Delta t}{2C}} .1 + \frac{1}{R + \frac{\Delta t}{2C}} .0 - \frac{1}{R + \frac{\Delta t}{2C}}\left[R + \frac{\Delta t}{2C} \right].0 -$$

$$- 2. \frac{1}{R + \frac{\Delta t}{2C}} = \frac{1}{R + \frac{\Delta t}{2C}}$$

$$i(t_2) = i(t_1 + \Delta t) = \frac{R - \frac{\Delta t}{2C}}{(R + \frac{\Delta t}{2C})^2}$$

$$i(t_3) = i(t_1 + 2\Delta t) = \frac{(R - \frac{\Delta t}{2C})^2}{(R + \frac{\Delta t}{2C})^3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$i(t_n) = i(t_1 + n\,\Delta t) = \frac{(R - \frac{\Delta t}{2C})^n}{(R + \frac{\Delta t}{2C})^{n+1}}$$

A referência [25] menciona o seguinte valor como mais apropriado para o resistor de amortecimento :

$$R \cong 0,15\ \frac{\Delta t}{2C} \qquad \text{(F.29)}$$

onde $\Delta t/2C$ corresponde ao valor crítico para o resistor de amortecimento.

Deve-se observar que ,com a introdução do resistor de amortecimento ,a resposta do sistema dependerá da constante de tempo RC do circuito, ou seja :

- para $RC < \Delta t$ haverá uma oscilação amortecida (figura F.10-a)

- para $RC > \Delta t$ não haverá oscilação numérica e o valor da corrente tende para zero, como mostrado na figura F.10-b.

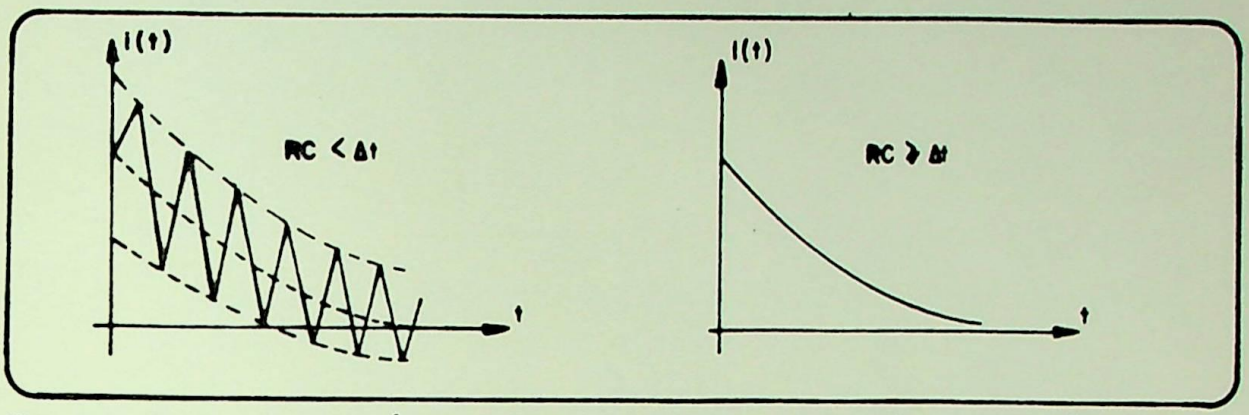


FIGURA F.10 - Característica de amortecimento devida à introdução do resistor de amortecimento em série com um capacitor

F.4 - CONCLUSÕES

As oscilações numéricas ocorrem em determinados casos, porém não chegam a prejudicar a análise que está sendo realizada, pois ocorrem com uma amplitude constante em torno da solução correta.

O meio mais utilizado para eliminação das oscilações é a introdução de elementos amortecedores, que, dentro de uma determinada faixa de frequência [21], introduzem erros desprezíveis.

Embora este apêndice tenha apresentado o problema das oscilações numéricas apenas para ramos com parâmetros concentrados desacoplados, estas também aparecem em ramos mutuamente acoplados modelados através de parâmetros concentrados [25].

O programa EMTP, versão UBC [18], apresenta uma opção de plotagem de resultados que permite que se tome uma média de dois valores. Dessa forma, é possível, pelo menos para plotagem, eliminar as oscilações numéricas.

APÊNDICE G - TEORIA MODAL APLICADA ÀS LINHAS DE TRANSMISSÃO

G.1 - INTRODUÇÃO

Para uma análise em regime permanente, é possível estudar uma linha de transmissão através de um circuito monofásico representativo de uma das fases. Neste tipo de representação, o sistema é considerado equilibrado e perfeitamente simétrico.

Para uma linha de transmissão a n fases, em reçime permanente, é válido escrever :

$$\left[\frac{de}{dx} \right] = - [Z] [i] \qquad (G.1)$$

$$\left[\frac{di}{dx} \right] = - [Y] [e] \qquad (G.2)$$

onde $[Z]$ é a matriz de impedâncias série da linha, $[Y]$ é a matriz de admitâncias "shunt", $[e]$ e $[i]$ correspondem aos vetores de tensão e corrente no terminal emissor de um trecho infinitesimal de uma linha de transmissão (figura 7.3) e

$[de/dx]$ e $[di/dx]$ correspondem as variações de tensão e de corrente ao longo do comprimento dx desse trecho infinitesimal.

Ressalta-se que essas duas equações representam sistemas com n fases, onde as quantidades escalares, normalmente utilizadas para sistemas monofásicos, foram substituídas por quantidades matriciais .

Das equações (G.1) e (G.2), obtém-se :

$$\left[\frac{d^2e}{dx^2}\right] = [Z]\,[Y]\,[e] \qquad (G.3)$$

$$\left[\frac{d^2i}{dx^2}\right] = [Y]\,[Z]\,[i] \qquad (G.4)$$

Fazendo-se :

$$[Z]\,[Y] = [P] \qquad (G.5)$$

e, como as matrizes $[Z]$ e $[Y]$ são simétricas, ou seja :

$$[Z] = [Z]_t \qquad (G.6)$$

$$[Y] = [Y]_t \qquad (G.7)$$

obtém-se :

$$[Y]\,[Z] = [Y]_t[Z]_t = ([Z]\,[Y])_t = ([P])_t = [P]_t \qquad (G.8)$$

Substituindo-se as equações (G.5) e (G.8) nas equações

(G.3) e (G.4), obtém-se :

$$\left[\frac{d^2e}{dx^2}\right] = [P]\,[e] \tag{G.9}$$

$$\left[\frac{d^2i}{dx^2}\right] = [P]_t\,[i] \tag{G.10}$$

Expandindo-se, por exemplo, a equação (G.9), obtém-se :

$$\frac{d^2}{dx^2}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots\cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots\cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots\cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{G.11}$$

ou ainda :

$$\begin{aligned} \frac{d^2e_1}{dx^2} &= P_{11}e_1 + P_{12}e_2 + \ \ldots\ + P_{1n}e_n \\ \frac{d^2e_2}{dx^2} &= P_{21}e_1 + P_{22}e_2 + \ \ldots\ + P_{2n}e_n \\ &\vdots \\ \frac{d^2e_n}{dx^2} &= P_{n1}e_1 + P_{n2}e_2 + \ \ldots\ + P_{nn}e_n \end{aligned} \tag{G.12}$$

Através do conjunto de equações (G.12), percebe-se o acoplamento existente entre as diversas fases de uma linha de transmissão, ou seja, a tensão em cada uma das fases depende dos valores de tensão em todas as outras fases. O mesmo raciocínio é válido para as correntes.

Além do acoplamento, outros problemas aparecem na análise de linhas de transmissão, tais como :

- circuitos duplos de linhas de transmissão localizados na mesma torre ou em torres próximas. Neste caso, além do acoplamento existente entre as fases de um mesmo circuito, existe também o acoplamento entre os dois circuitos;
- influência da terra, que caracteriza um condutor adicional; dos cabos pára-raios, que são utilizados para proteção da linha de transmissão, e dos contra-pesos ("buried wires" ou "counterpoise"), que estão enterrados nos pés de cada torre, em regiões que apresentam alta resistividade. Neste caso, além de se considerarem os acoplamentos entre as fases da linha de transmissão, devem também ser considerados os acoplamentos existentes entre as fases e a terra (ou aos contra-pesos, ou a ambos), e entre as fases e os cabos pára-raios;
- desequilíbrios provocados pela não transposição, ou transposição em trechos longos;
- desequilíbrios provocados pelas fontes de alimentação, que obrigatoriamente não operam de forma equilibrada;
- surtos de tensão provocados por manobras de energização e desenergização das linhas de transmissão;
- surtos de tensão provocados por descargas atmosféricas.

Esses casos, por si só, já mostram o quanto é complexo um conjunto formado por uma linha de transmissão, e mostram tam

bém a importância de se representarem todos os condutores que compõem esse conjunto.

A solução de um conjunto de equações diferenciais, como o conjunto de equações (G.12), é extremamente complexa. Torna-se necessário, portanto, recorrer a uma metodologia que permita tratar cada uma das fases de uma linha de transmissão de maneira independente, como é feito para as análises em regime permanente, quando se considera o sistema equilibrado e simétrico.

Através de uma transformação linear de variáveis, similar às componentes simétricas, é possível obter, a partir de um sistema de n fases acopladas, um conjunto de n sistemas monofásicos independentes, cuja solução matemática é muito mais simples.

Neste trabalho, são utilizadas as transformações modais [28, 29, 30], as quais serão apresentadas neste apêndice.

G.2 - TEORIA MODAL APLICADA À SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO COM N FASES

A teoria modal [28] trata da aplicação de transformações lineares a um conjunto de variáveis linearmente dependentes, de forma a se obter um outro conjunto de variáveis linearmente independentes. Para o caso das linhas de transmissão, é possível aplicar uma transformação linear às variáveis em quantidades de fase acopladas, obtendo-se um conjunto de variáveis em quantidades modais desacopladas. Após ter sido encontrada a solução em quantidades modais, aplica-se uma transformação inversa a essas variáveis, de forma a obter-se a solução em quantidades de fase. A aplicação da transformação modal está esquematicamente mostrada na figura G.1.

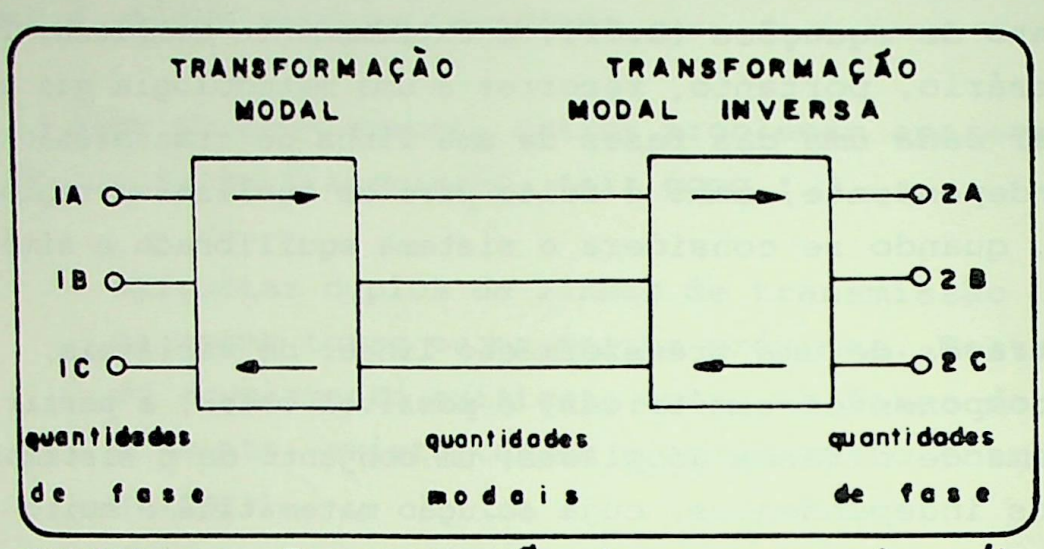


FIGURA 6.1 - Esquematização do processo de cálculo para linhas de transmissão, considerando a aplicação da teoria modal

Admitindo-se que seja aplicada a seguinte transformação aos valores de tensão e corrente :

$$[\, e \,] = [\, Te \,]\, [\, e_{modal} \,] \qquad (G.13)$$

$$[\, i \,] = [\, Ti \,]\, [\, i_{modal} \,] \qquad (G.14)$$

$$[\, e_{modal} \,] = [\, Te \,]^{-1}\, [\, e \,] \qquad (G.15)$$

$$[\, i_{modal} \,] = [\, Ti \,]^{-1} [\, i \,] \qquad (G.16)$$

onde $[\, Te \,]$ é a matriz de transformação linear de tensões, e $[\, Ti \,]$ a matriz de transformação linear de correntes.

Substituindo-se as equações (G.13) e (G.14), nas equações (G.9) e (G.10), obtém-se :

$$\frac{d^2}{dx^2} [\, Te \,] [e_{modal}] = [\, P \,] [\, Te \,] [e_{modal}] \qquad (G.17)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} [\, Ti \,] [i_{modal}] = [\, P \,]_t [\, Ti \,] [i_{modal}] \qquad (G.18)$$

que ainda resultam em :

$$\left[\frac{d^2 e_{modal}}{dx^2} \right] = [\, Te \,]^{-1} [\, P \,] [\, Te \,] [e_{modal}] \qquad (G.19)$$

$$\left[\frac{d^2 i_{modal}}{dx^2} \right] = [\, Ti \,]^{-1} [\, P \,]_t [\, Ti \,] [i_{modal}] \qquad (G.20)$$

Das equações (G.19) e (G.20), obtém-se :

$$[\, \gamma e^2 \,] = [\, Te \,]^{-1} [\, P \,] [\, Te \,] \qquad (G.21)$$

$$[\, \gamma i^2 \,] = [\, Ti \,]^{-1} [\, P \,]_t [\, Ti \,] \qquad (G.22)$$

Dessa forma, para as equações (G.19) e (G.20), obtém-se:

$$\left[\frac{d^2 e_{modal}}{dx^2}\right] = [\gamma e^2]\ [e_{modal}] \qquad (G.23)$$

$$\left[\frac{d^2 i_{modal}}{dx^2}\right] = [\gamma i^2]\ [i_{modal}] \qquad (G.24)$$

Portanto, para que a transformação linear, apresentada nas equações (G.13) a (G.16), produza o desacoplamento das equações (G.23) e (G.24), as matrizes de transformação [Te] e [Ti] devem ser obtidas de tal forma que as matrizes $[\gamma e^2]$ e $[\gamma i^2]$ sejam diagonais. Embora o produto apresentado nas equações (G.21) e (G.22), matematicamente não implique em que o resultado seja uma matriz diagonal, a referência [28] apresenta um desenvolvimento matemático que demonstra, para este caso particular, que as matrizes $[\gamma e^2]$ e $[\gamma i^2]$ são diagonais.

O desacoplamento pode ser verificado, expandindo-se, por exemplo, a equação (G.23) :

$$\frac{d^2}{dx^2}\begin{bmatrix} e_{modo1} \\ e_{modo2} \\ \vdots \\ e_{modon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma e_1^2 & & & \\ & \gamma e_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma e_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{modo1} \\ e_{modo2} \\ \vdots \\ e_{modon} \end{bmatrix} \qquad (G.25)$$

ou ainda :

$$\frac{d^2 e_{modo1}}{dx^2} = \gamma e_1^2 \; e_{modo1}$$

$$\frac{d^2 e_{modo2}}{dx^2} = \gamma e_2^2 \; e_{modo2}$$

(G.26)

$$\frac{d^2 e_{modon}}{dx^2} = \gamma e_n^2 \; e_{modon}$$

Para as correntes é possível desenvolver o mesmo raciocínio, e obter equações análogas às obtidas para as tensões.

A partir do conjunto de equações (G.26), conclui-se que:

- a transformação modal apresenta, como característica principal, o fato de produzir o desacoplamento entre as fases de uma linha de transmissão. Enquanto no conjunto de equações (G.12) existe um acoplamento entre as n fases, no conjunto de equações (G.26) não existe mais esse acoplamento.
- pelo fato de estarem desacopladas, cada uma das equações de (G.26) apresenta uma solução matemática bastante simples, semelhante às soluções que são obtidas para as equações dos sistemas monofásicos.

Da equação (G.21), obtém-se :

$$[\,P\,]\,[\,Te\,] = [\,Te\,]\,[\gamma e^2\,] \qquad (G.27)$$

A partir dessa equação matricial [28], obtém-se :

$$\det\left(\left[P\right] - \left[e^2\right]\right) = 0 \qquad \text{(G.28)}$$

Portanto, para que $\left[\gamma e^2\right]$ seja diagonal, a equação (G.28) deve ser satisfeita.

Os valores da matriz de transformação $\left[Te\right]$ podem ser determinados pela equação [28] :

$$\left(\left[P\right] - \left[\gamma e^2\right]\right) Te_i = 0 \qquad \text{(G.29)}$$

onde Te_i corresponde a uma das colunas da matriz $\left[Te\right]$. Como o determinante de $\left(\left[P\right] - \left[\gamma e^2\right]\right)$ é igual a zero, expandindo-se a equação matricial (G.29) obtém-se um sistema de equações homogêneas simultâneas, nas quais as incógnitas são os n elementos de Te_i. Portanto, um dos valores de Te_i deverá ser arbitrado, sendo que os outros valores serão obtidos a partir do sistema de equações que se origina de (G.29).

A análise das equações (G.28) e (G.29) caracteriza um problema de autovalores e autovetores, onde os elementos da matriz $\left[\gamma e^2\right]$ correspondem aos quadrados dos autovalores da matriz $\left[P\right]$, e cada uma das colunas da matriz $\left[Te\right]$ caracteriza um autovetor associado a cada um desses autovalores. Na teoria dos autovalores e autovetores essas matrizes são denominadas matrizes modais.

Como as matrizes $\left[P\right]$ e $\left[P\right]_t$ são simétricas, os seus autovalores são idênticos. Portanto, é válido escrever :

$$\left[\gamma e^2\right] = \left[\gamma i^2\right] \qquad \text{(G.30)}$$

Dessa forma, das equações (G.21) e (G.22), obtém-se :

$$\left[P\right] = \left[Te\right]\left[\gamma e^2\right]\left[Te\right]^{-1} \qquad \text{(G.31)}$$

$$[P]_t = [Ti]\,[\gamma i^2]\,[Ti]^{-1} \qquad (G.32)$$

De (G.32), obtém-se :

$$[P] = ([Ti]\,[\gamma i^2]\,[Ti]^{-1})_t \qquad (G.33)$$

$$[P] = [Ti]_t^{-1}\,[\gamma i^2]\,[Ti]_t \qquad (G.34)$$

Igualando-se (G.31) e (G.34), obtém-se :

$$[Te]\,[\gamma e^2]\,[Te]^{-1} = [Ti]_t^{-1}\,[\gamma i^2]\,[Ti]_t \qquad (G.35)$$

Considerando-se as equações (G.30) e (G.35), obtém-se :

$$[Te] = [Ti]_t^{-1} \qquad (G.36)$$

$$[Te]^{-1} = [Ti]_t \qquad (G.37)$$

ou ainda :

$$[Ti] = [Te]_t^{-1} \qquad (G.38)$$

Nota-se que é necessário determinar apenas uma das matrizes de transformação, visto que a outra poderá ser obtida diretamente através de uma das equações (G.36) a (G.38).

Convém observar que $[P]$ e $[P]_t$ apresentam os mesmos autovalores, porém apresentam autovetores diferentes. O número de autovalores de uma matriz é definido pela dimensão dessa matriz, ou seja, uma matriz 3 x 3 apresenta 3 autovalores.

O item G.4 descreve de maneira mais completa os processos de obtenção das matrizes de transformação.

G.3 - PARÂMETROS MODAIS

Como mostrado na figura (G.1), a solução para as equações das linhas de transmissão é encontrada em quantidades modais, sendo que inicialmente os valores de fase são transformados em quantidades modais, e, após a solução ter sido encontrada, aplica-se a transformação inversa. Nota-se que, durante o processo de cálculo, deve-se trabalhar apenas com as quantidades modais. Portanto, vários parâmetros das linhas de transmissão deverão ser definidos em termos das quantidades modais, tais como : as matrizes de impedâncias e admitâncias, a matriz de impedências características, a velocidade de propagação e o tempo de viagem da onda.

G.3.1 - MATRIZES DE IMPEDÂNCIAS MODAIS - $[Z_{modal}]$ E DE ADMITÂNCIAS MODAIS $[Y_{modal}]$

Substituindo-se os valores das equações (G.13) e (G.14), nas equações (G.1) e (G.2), obtém-se :

$$\frac{d}{dx} [Te] [e_{modal}] = - [Z] [Ti] [i_{modal}] \qquad (G.39)$$

$$\frac{d}{dx} [Ti] [i_{modal}] = - [Y] [Te] [e_{modal}] \qquad (G.40)$$

Essas duas equações ainda podem ser escritas da seguinte forma :

$$\left[\frac{de_{modal}}{dx} \right] = - \left[Te \right]^{-1} \left[Z \right] \left[Ti \right] \left[i_{modal} \right] \quad (G.41)$$

$$\left[\frac{di_{modal}}{dx} \right] = - \left[Ti \right]^{-1} \left[Y \right] \left[Te \right] \left[e_{modal} \right] \quad (G.42)$$

Da equação (G.41), obtém-se :

$$\left[Z_{modal} \right] = \left[Te \right]^{-1} \left[Z \right] \left[Ti \right] \quad (G.43)$$

onde $\left[Z_{modal} \right]$ é a matriz de impedâncias modais.

Da equação (G.42), obtém-se :

$$\left[Y_{modal} \right] = \left[Ti \right]^{-1} \left[Y \right] \left[Te \right] \quad (G.44)$$

onde $\left[Y_{modal} \right]$ é a matriz de admitâncias modais.

Substituindo-se os valores das equações (G.43) e (G.44) nas equações (G.41) e (G.42), obtém-se :

$$\left[\frac{de_{modal}}{dx} \right] = - \left[Z_{modal} \right] \left[i_{modal} \right] \quad (G.45)$$

$$\left[\frac{di_{modal}}{dx} \right] = - \left[Y_{modal} \right] \left[e_{modal} \right] \quad (G.46)$$

Derivando-se as duas expressões, obtém-se :

$$\left[\frac{d^2 e_{modal}}{dx^2} \right] = - \left[Z_{modal} \right] \left[\frac{di_{modal}}{dx} \right] \quad (G.47)$$

$$\left[\frac{d^2 i_{modal}}{dx^2}\right] = - \left[Y_{modal} \right] \left[\frac{de_{modal}}{dx}\right] \qquad (G.48)$$

Substituindo-se as equações (G.46) e (G.45) nas equações (G.47) e (G.48), respectivamente, obtém-se :

$$\left[\frac{d^2 e_{modal}}{dx^2}\right] = \left[Z_{modal} \right] \left[Y_{modal} \right] \left[e_{modal} \right] \qquad (G.49)$$

$$\left[\frac{d^2 i_{modal}}{dx^2}\right] = \left[Y_{modal} \right] \left[Z_{modal} \right] \left[i_{modal} \right] \qquad (G.50)$$

Comparando-se as equações (G.23) e (G.24), com as equações (G.49) e (G.50), obtém-se :

$$\left[Z_{modal} \right] \left[Y_{modal} \right] = \left[\gamma e^2 \right] \qquad (G.51)$$

$$\left[Y_{modal} \right] \left[Z_{modal} \right] = \left[\gamma i^2 \right] \qquad (G.52)$$

Como as matrizes $\left[\gamma e^2 \right]$ e $\left[\gamma i^2 \right]$ são diagonais, para que as equações (G.51) e (G.52) sejam verdadeiras, as matrizes $\left[Z_{modal} \right]$ e $\left[Y_{modal} \right]$ também deverão ser diagonais. Deve-se, observar, no entanto, que matemáticamente para que o produto apresentado nessas equações seja diagonal, não é necessário que as duas matrizes, $\left[Z_{modal}\right]$ e $\left[Y_{modal}\right]$, sejam diagonais. Neste caso, porém, isto ocorre, como pode ser comprovado pelas equações (G.45) e (G.46) ou (G.47) e (G.48), já que, em termos de componentes modais, as equações são desacopladas, o que é possível apenas se $\left[Z_{modal}\right]$ e $\left[Y_{modal}\right]$ forem diagonais.

G.3.2 - MATRIZES DE IMPEDÂNCIAS E ADMITÂNCIAS CARACTERÍSTICAS EM QUANTIDADES MODAIS

Para as equações das linhas de transmissão em quantidades modais, também é válido considerar a teoria das onda viajantes [28]. Seja, por exemplo, a solução [28] da equação diferencial de tensão, (G.23), apenas para o modo i :

$$e_{modoi} = V_i^+ \; e^{-\gamma e_i x} + V_i^- \; e^{+\gamma e_i x} \qquad (G.53)$$

onde V_i^+ e V_i^- são constantes que representam as condições iniciais.

A partir da equação (G.53), conclui-se que a cada componente modal estão associados uma onda incidente e uma onda refletida, e também uma constante de propagação, γe_i, que corresponde a :

$$\gamma e_i = \sqrt{\gamma e^2_i} \qquad (G.54)$$

onde, γe^2_i é um dos autovalores da matriz [P]. Portanto, cada autovalor da matriz [P] representa o quadrado da constante de propagação associada a cada uma das componentes modais.

Como os autovalores das matrizes [P] e $[P]_t$ são iguais, equação (G.30), têm-se que as mesmas constantes de propagação associadas às tensões estão também associadas às correntes.

Deve-se observar que cada uma das colunas das matrizes [Te] e [Ti] corresponde a um modo de propagação. Esses modos de propagação são definidos a partir de cada autovalor e correspondem ao autovetor associado a este autovalor.

Através das equações (G.45) e (G.46), nota-se que cada modo de tensão (ou corrente) só está relacionado, e portanto, só dá origem ao modo de corrente (ou tensão) correspondente.

Da equação (G.53), obtém-se :

$$\frac{de_{modoi}}{dx} = - \gamma e_i \; e^{-\gamma e_i x} \; V_i^+ + \gamma e_i \; e^{+\gamma e_i x} \; V_i^- \qquad (G.55)$$

De (G.45), para o modo i, obtém-se :

$$i_{modoi} = - Z_{modoi}^{-1} \; \frac{de_{modoi}}{dx} \qquad (G.56)$$

Substituindo-se (G.55) em (G.56), obtém-se :

$$i_{modoi} = - Z_{modoi}^{-1} \left[-\gamma e_i \; e^{-\gamma e_i x} \; V_i^+ + \gamma e_i \; e^{+\gamma e_i x} \; V_i^- \right] \qquad (G.57)$$

ou ainda :

$$i_{modoi} = - Z_{modoi}^{-1} \; \gamma e_i \left[e^{-\gamma e_i} \; V_i^+ - e^{+\gamma e_i x} \; V_i^- \right] \qquad (G.58)$$

Na equação (G.58), o valor $Z_{modoi}^{-1} \; \gamma e_i$ apresenta dimensões de uma admitância. Generalizando, define-se :

$$[Yo_{modal}] = [Z_{modal}]^{-1} \; [\gamma e] \qquad (G.59)$$

onde $[Yo_{modal}]$ é a matriz de admitâncias características em quantidades modais. Consequentemente, obtém-se :

$$[Zo_{modal}] = [Yo_{modal}]^{-1} = [Z_{modal}]\,[\gamma e]^{-1} \qquad (G.60)$$

onde $[Zo_{modal}]$ é a matriz de impedâncias características em quantidades modais.

Como as matrizes $[Z_{modal}]$ e $[\gamma e]$ são diagonais, as matrizes $[Zo_{modal}]$ e $[Yo_{modal}]$ também são diagonais.

Deve-se observar, nas equações (G.59) e (G.60), que se está usando a matriz $[\gamma e]$ e não $[\gamma e^2]$. Os valores de $[\gamma e]$ são encontrados a partir de $[\gamma e^2]$, através da equação (G.54).

A impedância característica em quantidades modais poderá ser também definida, através do conceito de ondas viajantes. Por definição, tem-se :

$$Zo = \frac{e_d}{i_d} = \frac{e_r}{i_r} \qquad (G.61)$$

onde Zo é a relação entre os valores de tensão e corrente das ondas incidentes (d) e refletidas (r). Para um sistema a n fases, a partir da equação (G.61), obtém-se :

$$[e_d] = [Zo]\,[i_d] \qquad (G.62)$$

Aplicando-se em (G.62) as transformações definidas nas equações (G.13) e (G.14), obtém-se :

$$[Te]\,[e_{d_{modal}}] = [Zo]\,[Ti]\,[i_{d_{modal}}] \qquad (G.63)$$

$$[e_{d_{modal}}] = [Te]^{-1}\,[Zo]\,[Ti]\,[i_{d_{modal}}] \qquad (G.64)$$

Portanto, da equação (G.64) resulta :

$$[\,Zo_{modal}\,] = [\,Te\,]^{-1}[\,Zo\,]\,[\,Ti\,] \qquad (G.65)$$

onde $[\,Zo_{modal}\,]$ é a matriz de impedâncias características em quantidades modais, e também será uma matriz diagonal.

A partir dos valores de $[\,Zo_{modal}\,]$, para cada uma das componentes modais, obtém-se :

$$Zo_{modoi} = \sqrt{\frac{Z_{modoi}}{Y_{modoi}}} \qquad (G.66)$$

$$Z_{modoi} = R_{modoi} + jwL_{modoi} \qquad (G.67)$$

$$Y_{modoi} = jwC_{modoi} \qquad (G.68)$$

G.3.3 - VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO MODAL E TEMPO DE VIAGEM MODAL

Para uma linha de transmissão, representada através de seu equivalente monofásico, pode-se escrever :

$$\gamma = \alpha + j\beta \qquad (G.69)$$

onde γ é constante de propagação, α é a constante de atenuação e β é a constante de fase. Para a velocidade de propagação, tem se :

$$V = \frac{w}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (G.70)$$

e, consequentemente, o tempo de viagem da onda na linha será :

$$\tau = \frac{\ell}{v} = \ell\sqrt{LC} \qquad (G.71)$$

onde ℓ é o comprimento da linha de transmissão e τ é o tempo que as ondas incidente e refletida demoram para ir de um extremo a outro da linha.

Para as componentes modais, também são válidas as equações (G.69) a (G.71), sendo que, para cada uma delas tem-se :

$$\tau_{modoi} = \ell\sqrt{L_{modoi}\ C_{modoi}} \qquad (G.72)$$

$$v_{modoi} = \frac{1}{\sqrt{L_{modoi}\ C_{modoi}}} \qquad (G.73)$$

$$\gamma_{e_i} = \gamma_{i_i} = \alpha_i + j\beta_i \qquad (G.74)$$

Observa-se, que, para cada um dos modos, os parâmetros τ e v devem ser calculados de forma independente.

G.4 - MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO

Para que se obtenha a transformação das quantidades de fase em quantidades modais, resultando no desacoplamento das equações das linhas de transmissão, é necessário que se faça uma escolha adequada das matrizes de transformação. Tal escolha, que depende de alguns aspectos que serão discutidos a seguir, depende também do tipo de linha que se deseja representar : linhas transpostas ou não transpostas. Em função desses dois tipos de linhas de

transmissão, esse item apresenta os processos para obtenção e as características das principais matrizes de transformação.

G.4.1 - LINHAS NÃO TRANSPOSTAS

Para linhas não transpostas, as matrizes de transformação são obtidas a partir do cálculo dos autovalores e autovetores das matrizes [P] e $[P]_t$. Pelas equações (G.36) e (G.38), nota-se que é necessário obter apenas uma das matrizes, [Te] ou [Ti], já que a outra pode ser obtida a partir de uma das equações mencionadas. Neste trabalho, considera-se apenas a matriz [Ti], sendo que a matriz [Te] é obtida através da equação (G.36).

A matriz de transformação obtida a partir desse processo de cálculo está na forma complexa e varia com a frequência, podendo-se, porém, considerá-la constante dentro de uma determinada faixa de frequência. A parte imaginária de seus elementos é muito pequena e pode ser desprezada, sem que isso implique em erros significativos [13, 14, 18] no processo de solução.

A referência [7] apresenta vários métodos para o cálculo de autovalores e autovetores, sendo os mais indicados os métodos LR e QR.

Neste trabalho, para o cálculo das matrizes de transformação, utiliza-se o programa "Line Constants" [11], que emprega o método LR modificado, e fornece como resultados, além de vários parâmetros modais, a matriz [Ti].

As referências [31, 32] apresentam exemplos mostrando a variação dos valores da matriz de transformação com a frequência. Nota-se que até um valor de frequência da ordem de

10 kHz, faixa na qual ocorrem a maioria dos transitórios de interesse, pode-se considerar a matriz praticamente constante. Nota-se, também, como já foi mencionado, que os valores correspondentes à parte imaginária dos elementos da matriz de transformação são muito pequenos.

G.4.2 - LINHAS TRANSPOSTAS

Para as linhas transpostas, as matrizes $[Z]$ e $[Y]$, são da seguinte forma :

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_p & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_p & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_p \end{bmatrix} \qquad (G.75)$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_p & Y_m & Y_m \\ Y_m & Y_p & Y_m \\ Y_m & Y_m & Y_p \end{bmatrix} \qquad (G.76)$$

onde :

Z_p, Y_p - são os elementos próprios das matrizes de impedâncias e admitâncias, respectivamente, para uma linha de transmissão transposta.

Z_m, Y_m - são os elementos mútuos das matrizes de impedâncias e admitâncias, respectivamente, e que indicam os acoplamentos existentes entre as fases de uma linha de transmissão transposta.

Portanto, para o caso particular de uma linha de transmissão transposta, tem-se :

$$[P] = [P]_t \qquad (G.77)$$

Como mostrado na equação (G.30), os autovalores das duas matrizes, $[P]$ e $[P]_t$, são iguais. Portanto, recorrendo-se à equação (G.29), que apresenta o cálculo dos autovetores, que são as colunas das matrizes de transformação, conclui-se que :

$$[Te] = [Ti] = [T] \qquad (G.78)$$

Nota-se, portanto, que, tanto para as correntes como para as tensões, utiliza-se a mesma matriz de transformação.

Além disso, como para linhas transpostas considera-se um equilíbrio entre as fases, devido aos ciclos de transposição, é possível considerar transformações lineares que são típicas de estudos de regime permanente, como as componentes simétricas. Para as linhas não transpostas isto não é válido, visto que o desequilíbrio ocorre para todas as fases, e a aplicação de uma transformação linear, do tipo componentes simétricas introduziria acoplamentos entre sequências, o que logicamente seria desvantajoso, já que a aplicação da transformação linear tem como objetivo produzir um desacoplamento nas equações das linhas de transmissão.

As transformações mais comuns, e que podem ser usadas para linhas transpostas, estão citadas a seguir :

A - Componentes simétricas

Esta transformação apresenta o inconveniente de se

apresentar na forma complexa. As matrizes de transformação nes se caso são :

$$[T]^{-1} = [Te]^{-1} = [Ti]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \qquad (G.79)$$

$$[T] = [Te] = [Ti] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \qquad (G.80)$$

B - Componentes $\alpha\beta 0$

Neste caso, as matrizes de transformação apresentam a vantagem de serem reais.

$$[T] = [Te] = [Ti] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{1/2} & \sqrt{3/2} \\ 1 & -\sqrt{1/2} & -\sqrt{3/2} \end{bmatrix} \qquad (G.81)$$

$$[T]^{-1} = [Te]^{-1} = [Ti]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} \\ 0 & +\sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} \end{bmatrix} \qquad (G.82)$$

C - Transformação de Karrembauer [9,11,13,14,18,20]

É a mais indicada para estudos de transitórios pelos seguintes aspectos :

- as matrizes de transformação são reais;
- estrutura simples;
- são válidas para qualquer número de fases.

$$[T] = [Te] = [Ti] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-N & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-N & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-N \end{bmatrix} \quad \text{(G.83)}$$

$$[T]^{-1} = [Te]^{-1} = [Ti]^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \cdot \\ 1 & 0 & \dots\dots & & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(G.84)}$$

N - Número de fases da linha de transmissão

Para o caso particular de um sistema trifásico tem-se:

$$[T] = [Te] = [Ti] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad (G.85)$$

$$[T]^{-1} = [Te]^{-1} = [Ti]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (G.86)$$

Na equação (G.85), cada uma das colunas dessa matriz de transformação é chamada de modo de propagação, que, fisicamente, são interpretados da seguinte forma :

- o primeiro modo corresponde a um "loop" formado por todas as fases em paralelo, com retorno pela terra e pelos cabos pára-raios. Esse modo é chamado de modo de retorno pela terra. Pela semelhança desse modo com o de sequência zero das componentes simétricas , ele também é chamado de modo de sequência zero.

- os outros modos correspondem a um "loop" formado pela primeira fase e retorno pela 2ª, 3ª, 4ª ... nª fase. São chamados de modos aéreos, e também pela semelhança com o modo de sequência positiva das componentes simétricas, são também chamados de modos de sequência positiva.

Dessa forma, a matriz de impedâncias modais, $[Z_{modal}]$, resultante da aplicação da transformação de Karrembauer, será:

$$[Z_{modal}] = \begin{bmatrix} Z_{zero} & & & & \\ & Z_{pos} & & & \\ & & Z_{pos} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & Z_{pos} \end{bmatrix} \qquad (G.87)$$

Comparando-se uma matriz $[Z_{modal}]$, obtida a partir da aplicação de transformação de Karrembauer, e outra obtida a partir da aplicação da transformação de componentes simétricas, observa-se que as duas são exatamente iguais. Portanto, os valores de impedâncias modais, equação (G.86), poderão ser obtidos através das mesmas equações que são válidas para as componentes simétricas, ou seja :

$$Z_{zero} = Z_p + (N - 1)\, Z_m \qquad (G.88)$$

$$Z_{pos} = Z_p - Z_m \qquad (G.89)$$

A partir das quantidades modais, também é possível definir as quantidades de fase :

$$Z_p = \frac{1}{N} \left[Z_{zero} + (N - 1)\, Z_{pos} \right] \qquad (G.90)$$

$$Z_m = \frac{1}{N} \left(Z_{zero} - Z_{pos} \right) \qquad (G.91)$$

N - Número de fases da linha de transmissão.

Para as capacitâncias, obtêm-se equações semelhantes à

quelas obtidas para as impedâncias :

$$C_{zero} = C_s + (N - 1) C_m \qquad (G.92)$$

$$C_{pos} = C_p - C_m \qquad (G.93)$$

$$C_p = \frac{1}{N} \left[C_{zero} + (N - 1) C_{pos} \right] \qquad (G.94)$$

$$C_m = \frac{1}{N} (C_{zero} - C_{pos}) \qquad (G.95)$$

Realmente, é discutível se os valores descritos nas equações (G.88) e (G.89) podem ser chamados de sequência zero e positiva. Porém, eles são idênticos àqueles obtidos através das matrizes de transformação das componentes simétricas.

Considerando-se os diversos tipos de transformações lineares utilizados para linhas transpostas, conclui-se que :

- para as componentes $\alpha\beta 0$, além do fato de as matrizes serem reais, identifica-se a seguinte vantagem adicional :

$$[T]^{-1} = [T]_t \qquad (G.96)$$

Não é necessário, portanto, recorrer a algum processo de inversão de matrizes, para obter $[T]^{-1}$.

- é desvantajoso o uso das transformações de componentes simétricas, pelo fato de essas matrizes serem complexas.

- o uso da transformação de Karrembauer apresenta as seguintes vantagens : as matrizes são esparsas, o que diminui o número de operação matemáticas, a in-

versa não precisa ser calculada, pois já está disponível, a implementação computacional é muito mais simples, não há necessidade de armazenar a matriz , pois esta é muito simples, e pode ser aplicada a um sistema com n fases.

Neste trabalho, para linhas transpostas, consideram-se as matrizes de transformação de Karrembauer.

As matrizes de transformação apresentadas são normalizadas. Algumas referências também consideram matrizes não normalizadas, porém o fato de a matriz ser ou não normalizada não altera os resultados.

G.5 - ANÁLISE PARA CIRCUITOS DUPLOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

Para os casos onde se consideram linhas de transmissão de circuito duplos [20] em torres paralelas ou na mesma torre, não é possível utilizar as transformações apresentadas para as linhas transpostas e não transpostas.

Considerem-se, por exemplo, os dois circuitos duplos apresentados na figura G.2.

Para o caso da figura G.2-a tem-se, para a matriz de impedâncias, [Z] :

$$[Z] = \frac{1}{9} \left[Z_{1^{o}\text{trecho}} \right] + \left[Z_{2^{o}\text{trecho}} \right] + \ldots + \left[Z_{9^{o}\text{trecho}} \right] \qquad \text{(G.97)}$$

que resulta em :

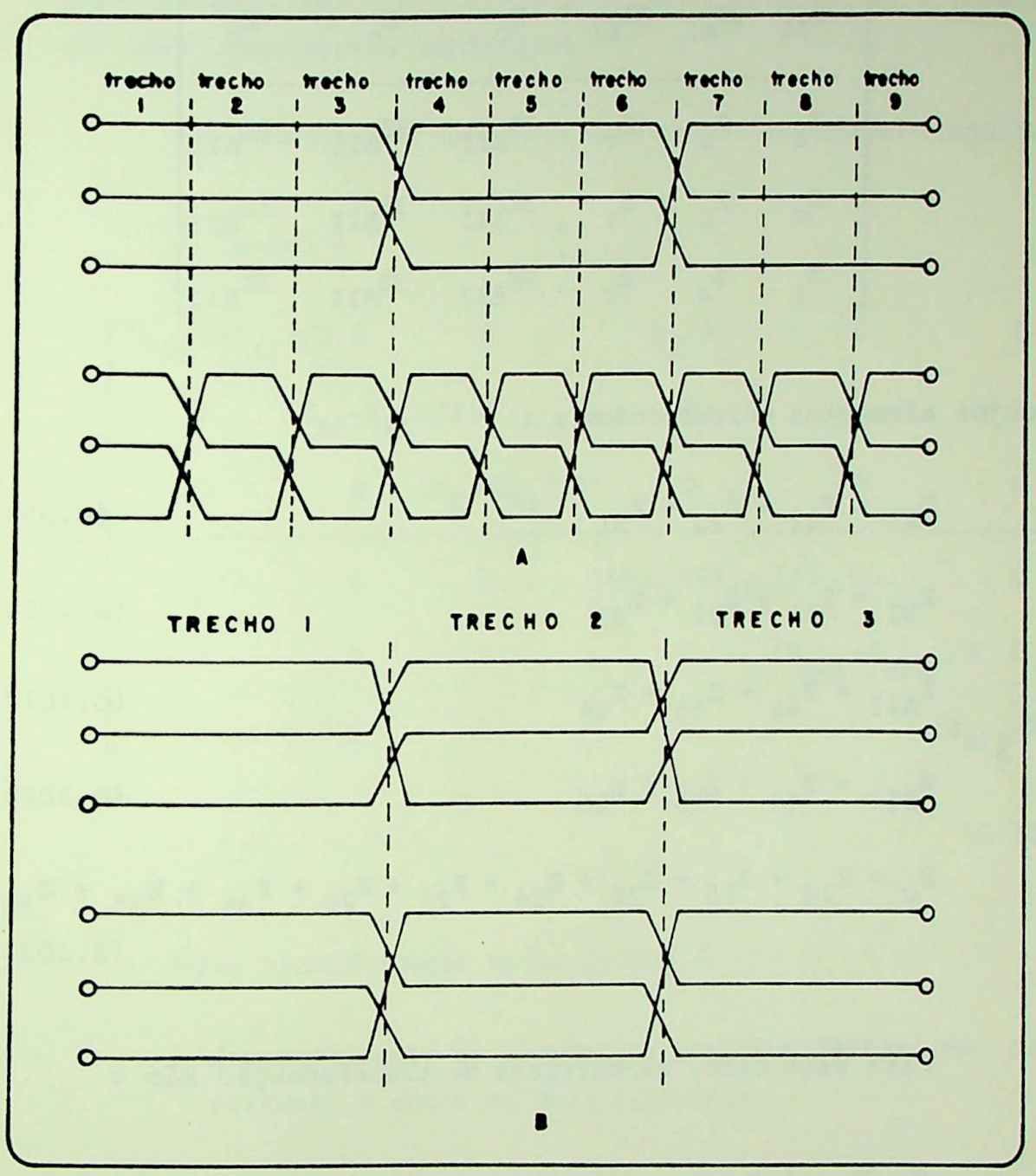


FIGURA 6.2 - Circuitos duplos de linhas de transmissão

$$[Z] = \frac{1}{9}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 3Z_{BI} & 3Z_{AI} & 3Z_{AI} & Z_c & Z_c & Z_c \\ 3Z_{AI} & 3Z_{BI} & 3Z_{AI} & Z_c & Z_c & Z_c \\ 3Z_{AI} & 3Z_{AI} & 3Z_{BI} & Z_c & Z_c & Z_c \\ \hdashline Z_c & Z_c & Z_c & 3Z_{BII} & 3Z_{AII} & 3Z_{AII} \\ Z_c & Z_c & Z_c & 3Z_{AII} & 3Z_{BII} & 3Z_{AII} \\ Z_c & Z_c & Z_c & 3Z_{AII} & 3Z_{AII} & 3Z_{BII} \end{array}\right] \qquad (G.98)$$

cujos elementos correspondem a :

$$Z_{AI} = Z_{12} + Z_{23} + Z_{31} \qquad (G.99)$$

$$Z_{BI} = Z_{11} + Z_{22} + Z_{33} \qquad (G.100)$$

$$Z_{AII} = Z_{45} + Z_{56} + Z_{64} \qquad (G.101)$$

$$Z_{BII} = Z_{44} + Z_{55} + Z_{66} \qquad (G.102)$$

$$Z_c = Z_{14} + Z_{15} + Z_{16} + Z_{24} + Z_{25} + Z_{26} + Z_{34} + Z_{35} + Z_{36} \qquad (G.103)$$

Para este caso, as matrizes de transformação são :

$$[T] = \left[\begin{array}{c:c} [T'] & 0 \\ \hdashline 0 & [T'] \end{array}\right] \qquad (G.104)$$

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} [T']^{-1} & 0 \\ 0 & [T']^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(G.105)}$$

onde as matrizes $[T']$ e $[T']^{-1}$ são as matrizes de transformação das componentes simétricas.

Para a matriz de impedâncias em quantidades modais resultará:

$$[Z_{modal}] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc:ccc} (Z_{BI}+2Z_{AI})/3 & 0 & 0 & Z_c/3 & 0 & 0 \\ 0 & (Z_{BI}-Z_{AI})/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (Z_{BI}-Z_{AI})/3 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline Z_c/3 & 0 & 0 & (Z_{BII}+2Z_{AII})/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (Z_{BII}-Z_{AII})/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (Z_{BII}-Z_{AII})/3 \end{array}\right]$$

(G.106)

Essa transformação modal produz :

- desacoplamento de sequência positiva dentro de cada circuito e entre os dois circuitos;

- desacoplamento de sequência zero dentro de cada circuito;

- acoplamento de sequência zero entre os dois circuitos.

Considere-se, como outro exemplo, o circuito duplo apresentado na figura G.2-b . Para este caso, a matriz de impedâncias em quantidades de fase será :

$$[Z] = \frac{1}{3}\left[\begin{array}{ccc:ccc} Z_{BI} & Z_{AI} & Z_{AI} & Z_k & Z_\ell & Z_m \\ Z_{AI} & Z_{BI} & Z_{AI} & Z_m & Z_k & Z_\ell \\ Z_{AI} & Z_{AI} & Z_{BI} & Z_\ell & Z_m & Z_k \\ \hdashline Z_k & Z_m & Z_\ell & Z_{BII} & Z_{AII} & Z_{AII} \\ Z_\ell & Z_k & Z_m & Z_{AII} & Z_{BII} & Z_{AII} \\ Z_m & Z_\ell & Z_k & Z_{AII} & Z_{AII} & Z_{BII} \end{array}\right] \qquad \text{(G.107)}$$

onde, para os valores da matriz tem-se :

$$Z_{AI} = Z_{12} + Z_{23} + Z_{31} \qquad \text{(G.108)}$$

$$Z_{BI} = Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} \qquad \text{(G.109)}$$

$$Z_{AII} = Z_{45} + Z_{56} + Z_{64} \qquad \text{(G.110)}$$

$$Z_{BII} = Z_{44} + Z_{55} + Z_{66} \qquad \text{(G.111)}$$

$$Z_k = Z_{14} + Z_{25} + Z_{36} \qquad \text{(G.112)}$$

$$Z_\ell = Z_{15} + Z_{26} + Z_{34} \qquad \text{(G.113)}$$

$$Z_m = Z_{16} + Z_{24} + Z_{35} \qquad \text{(G.114)}$$

Utilizando-se a mesma transformação modal do caso anterior, equações (G.104) e (G.105), obtém-se para a matriz $[Z_{modal}]$:

$$[Z_{modal}] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc:cccc}
\frac{Z_{BI}+2Z_{AI}}{3} & 0 & 0 & & \frac{Z_k+Z_\ell+Z_m}{3} & 0 & 0 & \\
0 & \frac{Z_{BI}-Z_{AI}}{3} & 0 & & 0 & \frac{Z_k+a^2Z_\ell+aZ_m}{3} & 0 & \\
0 & 0 & \frac{Z_{BI}-Z_{AI}}{3} & & 0 & 0 & \frac{Z_k+aZ_\ell+a^2Z_m}{3} & \\
\hdashline
\frac{Z_k+Z_\ell+Z_m}{3} & 0 & 0 & & \frac{Z_{BII}+2Z_{AII}}{3} & 0 & 0 & \\
0 & \frac{Z_k+aZ_\ell+a^2Z_m}{3} & 0 & & 0 & \frac{Z_{BII}-Z_{AII}}{3} & 0 & \\
0 & 0 & \frac{Z_k+a^2Z_\ell+aZ_m}{3} & & 0 & 0 & \frac{Z_{BII}-Z_{AII}}{3} &
\end{array}\right] \qquad \text{(G.115)}$$

Da matriz da equação (G.115), conclui-se que :

- não existem acoplamentos de sequência dentro de cada circuito;
- existem acoplamentos de todas as sequências entre os dois circuitos.

Essas equações são válidas para arranjo não simétrico dos dois circuitos (Figura G.3-b). Para arranjo simétrico dos condutores dos dois circuitos, (Figura G.3-a), tem-se :

$$Z_\ell = Z_m \qquad \text{(G.116)}$$

$$Z_{posI-II}=Z_{posII-I}=Z_{negI-II}=Z_{negII-I} = \frac{Z_k-Z_\ell}{3} \qquad \text{(G.117)}$$

A partir dos casos apresentados, conclui-se que, para a análise de circuitos duplos de linhas de transmissão, deve-se recorrer a matrizes de transformações especiais, visto que, para esses casos a matriz de transformação de Karrembauer não pro

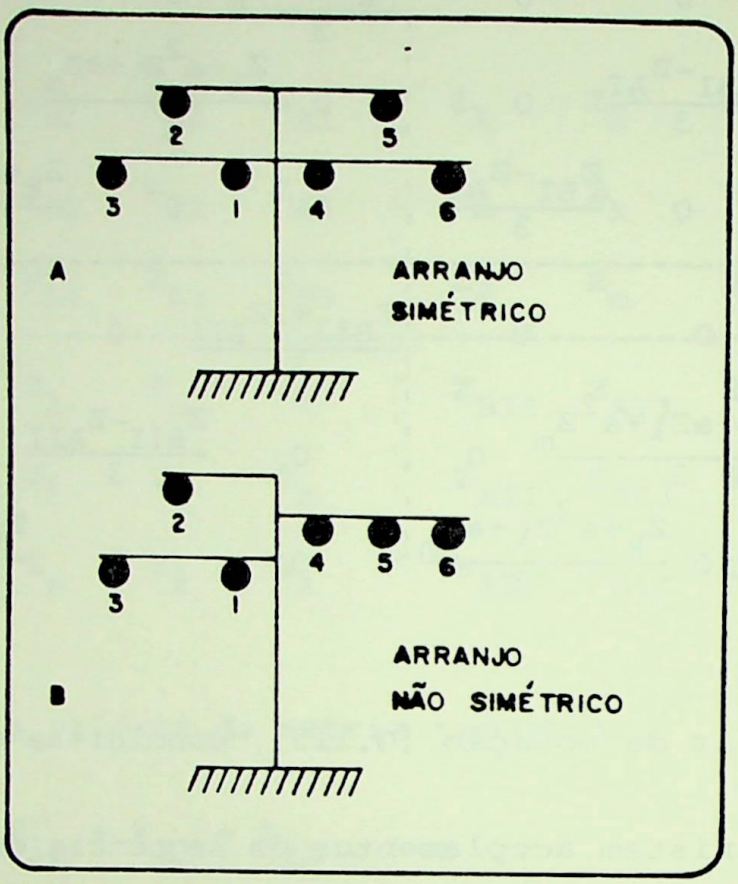


FIGURA G.3 - Arranjos para circuitos duplos de linhas de transmissão

duz o desacoplamento. Além das matrizes de transformação apresentadas nas equações (G.104) e (G.105), que são complexas, a referência [13] menciona outras, que apresentam a vantagem de seus elementos serem reais. Deve-se salientar que as diferentes matrizes de transformação que podem ser utilizadas, diferenciam entre si pelos tipos de acoplamentos a que dão origem.

As referências [13] e [20] apresentam uma série de outros aspectos associados a representação de circuitos duplos.

Deve-se ressaltar, que no programa computacional desenvolvido neste trabalho, não considerou-se a modelagem de circuitos duplos. O programa EMTP - versão BPA considera esse modelo.

G.6 - EXEMPLO PARA OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS

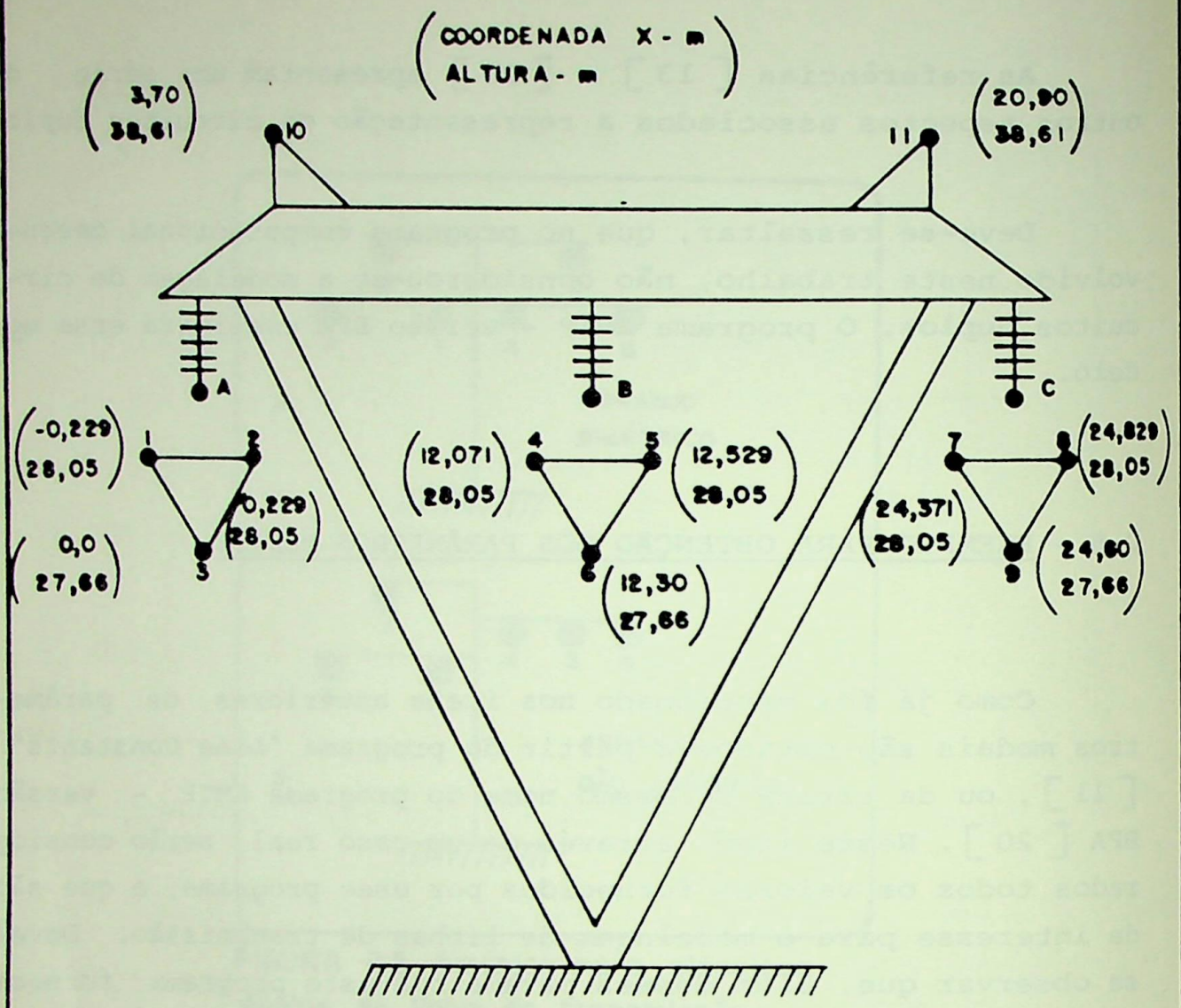
Como já foi mencionado nos itens anteriores, os parâmetros modais são obtidos a partir do programa "Line Constants" [11], ou da rotina de mesmo nome do programa EMTP - versão BPA [20]. Neste item através de um caso real, serão considerados todos os valores fornecidos por esse programa, e que são de interesse para a modelagem de linhas de transmissão. Deve-se observar que, além desses parâmetros este programa fornece uma série de outras informações, que, no entanto, não são de interesse para este trabalho.

Como exemplo, será considerada uma linha de transmissão típica em 500 kV. As características dessa linha estão apresentadas na figura G.4.

Para a linha de transmissão apresentada na figura G.4,os parâmetros em termos de componentes simétricas e modais, que o programa "Line Constants" fornece, estão apresentados a seguir :

- parâmetros de sequência zero e positiva

$$C_o = 0,79898\ 10^{-8}\ \text{F/km}$$



CONDUTORES - Tipo ACSR 900 MCM RUDDY

Diâmetro externo - ACSR - 28,74 mm / ACO - 7,185 mm

$R_{50°C}$ = 0,0709797 Ω/km

PARA-RAIOS - Tipo EHS - 7 fios - 7/16"

Diametro - 11,11 mm

$R_{50°C}$ = 3,276 Ω/km

ALTURA MÉDIA DOS CABOS = 0,8 DA ALTURA DOS CONDUTORES NA TORRE

COMPRIMENTO = 342,711 km

RESISTIVIDADE DO SOLO - 100 Ω m

FIGURA 6.4 - Estrutura típica de uma linha de transmissão em 500 kV

$$C_1 = C_2 = 0{,}12079\ 10^{-7} \quad F/km$$

$$Z_o = 0{,}32368 + j\ 0{,}11703\ 10^{+1} \quad ,$$

$$Z_1 = Z_2 = 0{,}24795\ 10^{-1} + j\ 0{,}36351$$

- parâmetros modais

resistência /km	reatância /km	susceptância /km	
0,32185	0,11631 10^{+1}	0,30271 10^{-5}	modo 1
0,25451 10^{-1}	0,39822	0,41982 10^{-5}	modo 2
0,24077 10^{-1}	0,32802	0,49114 10^{-5}	modo 3

$$[\,Ti\,] = \begin{bmatrix} 0{,}59266 + j\ 0{,}6191\ 10^{-3} & -\ 0{,}70711 + j\ 0{,}18057\ 10^{-15} & -0{,}41313 + j\ 0{,}34983\ 10^{-3} \\ 0{,}54543 + j\ 0{,}27387\ 10^{-2} & -\ 0{,}90318\ 10^{-15} + j\ 0{,}33671\ 10^{-15} & 0{,}81157 - j\ 0{,}26007\ 10^{-2} \\ 0{,}59266 + j\ 0{,}6191\ 10^{-3} & 0{,}70711 - j\ 0{,}16701\ 10^{-15} & -0{,}41313 + j\ 0{,}34983\ 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Embora o programa forneça também a parte imaginária de $[\,Ti\,]$, ela é desprezada por ser muito pequena em relação à parte real.

Deve-se observar que os parâmetros denominados de sequência são utilizados para as linhas transpostas, e os denominados modais são utilizados para as linhas não transpostas.

TABELA G.1 - VARIAÇÃO DA MATRIZ [T] EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA

	1	2	3	
1	0.59266	-0.70711	-0.41313	
2	0.54543	-0.90318E-15	0.81157	f = 60 Hz
3	0.59266	0.70711	-0.41313	
1	0.59425	-0.70711	-0.41166	
2	0.54182	-0.18968E-14	0.81298	f = 300 Hz
3	0.59425	0.70711	-0.41166	
1	0.59709	-0.70711	-0.40902	
2	0.53554	-0.18798E-14	0.81564	f = 600 Hz
3	0.59709	0.70711	-0.40902	
1	0.59901	-0.70711	-0.40722	
2	0.53138	-0.22400E-14	0.81752	f = 1507 Hz
3	0.59901	0.70711	-0.40722	
1	0.59853	-0.70711	-0.40767	
2	0.53243	-0.56051E-14	0.81706	f = 3007 Hz
3	0.59853	0.70711	-0.40767	
1	0.59619	-0.70565	-0.40911	
2	0.53753	-0.15669E-13	0.81387	f = 9509 Hz
3	0.59619	0.70565	-0.40911	
1	0.59561	-0.70558	-0.40962	
2	0.53880	-0.19275E-13	0.81330	f = 11972 Hz
3	0.59561	0.70558	-0.40962	
1	0.59113	-0.70555	-0.41373	
2	0.54853	-0.11206E-12	0.80920	f = 60000 Hz
3	0.59113	0.70555	-0.41373	

É interessante observar, também, a variação que ocorre na matriz [Ti] em função da variação de frequência, como mostrado na tabela G.1.

G.7 - CONCLUSÕES

As transformações lineares apresentadas constituem uma ferramenta muito útil para a análise de transitórios em sistemas elétricos, visto que tais transformações apresentam como característica principal, a propriedade de se obter a partir de um conjunto de n equações acopladas, um outro conjunto de n equações desacopladas.

Para as linhas transpostas, adotou-se a transformação de Karrembauer, pelas vantagens que apresentam em relação às outras transformações.

Para as linhas não transpostas, deve-se obter a matriz de transformação através do cálculo de autovalores e autovetores. Para este trabalho, utilizou-se o programa "Line Constants" [20], que além da matriz de transformação modal, fornece também os parâmetros modais das linhas de transmissão.

BIBLIOGRAFIA

1 - Numerical initial value problems in ordinary differential equations - C. William Gear - Prentice Hall, Inc. - New Jersey - 1971

2 - An introduction to numerical analysis - Kendall E. Atkinson - Wiley - 1978

3 - Sobretensões nos sistemas elétricos de potência - João Roberto Cogo - CESE/Mestrado - EFEI - 1984

4 - Anotações do grupo de estudo sobre o programa EMTP - visita do Prof. H.W.Dommel à EFEI - 1983

5 - Programa para cálculo de sobretensões - Trabalho apresentado no curso de Sobretensões - Mestrado/EFEI - 1982

6 - Matrizes esparsas em redes de potência - Técnicas de operação - Marciano Morozowski Filho - LTC Editora/FEESC - 1981

7 - Métodos computacionais aplicados a sistemas elétricos de potência - José Abel Royo dos Santos - CESE/Mestrado - EFEI - 1983

8 - Direct solutions of sparse network equations by optimaly ordered triangular factorization - W.F. Tinney e J.W. Walker - Proceedings of the IEEE - Vol. 55 - nº 11 - Novembro/1979 - páginas 1801/1805

9 - A method for solving transient phenomena in multiphase systems - H.W. Dommel - Proceedings 2nd Power Systems Computation Conference - Estocolmo - Suécia - (Rept. 5.8) - 1966

10 - Grandes sistemas elétricos - Métodos matriciais - Hommer E. Brown - LTC Editora/EFEI - 1977

11 - Overhead line parameters program - User's Manual - The University of British Columbia - Vancouver, B.C., Canadá

12 - Sistemas elétricos de potência - Regime permanente - Vol 2 - Dorel Soares Ramos e Eduardo Mário Dias - Editora Guanabara Dois S/A - Rio de Janeiro - 1983

13 - Computation of electromagnetic transients - H. W. Dommel e W. S. Meyer - Proceedings of the IEEE - Vol 62 - nº 7 - Julho/1974 - páginas 983/993

14 - Digital computer solution of electromagnetic transients in single - phase and multiphase networks - H. W. Dommel - IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems - Vol PAS 88 - nº 44 - Abril/1969 - páginas 388/399

15 - Transformer models in the simulation of electromagnetic transients - H. W. Dommel - 5th Power Systems Computation Conference, Cambridge - Inglaterra - Setembro/1975

16 - Three - phase transformer program - User's manual - The University of British Columbia - Vancouver - B.C. - Canadá

17 - Matrix representation of three-phase n-winding transformers for steady-state in transients studies - V. Brandwajn, H.W.Dommel e I.I.Dommel - IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems - Vol PAS 101 - nº 6 - Junho/1982

18 - Transient's Program - User's Manual - H.W.Dommel e I.I. Dommel - The University of British Columbia - Vancouver-B.C. - Canadá

19 - Análise de sistemas elétricos - Júlio César Tiburcio - CESE/Mestrado - EFEI - 1982

20 - EMTP - Rule Book - versões M21 - M29 - M34

21 - Numerical oscillations in the transients analysis of circuits with implicit integration methods - V.Brandwajn e H.W.Dommel - 26th Midwest Symposium on Circuits and Systems - Puebla - México - Agosto/1983

22 - Present day digital computer solution - Procedures and Programs - W.S.Meyer - Digital Simulation of Electrical Transient Phenomena - IEEE Tutorial Course - 1980

23 - Programa para análise de transitórios eletromagnéticos (BPA - EMTP) - Relatório SCEL/CEC - Vol 1 - GCOI - Subcomitê de Estudos Elétricos - Novembro/1978

24 - Network analysis - M.E.Van Valkemburg - Segunda edição - Prentice Hall, Inc. - Englewood Cliffs - New Jersey - 1964

25 - Eliminating numerical oscillations in trapezoidal integration - F.Alvarado - Curso sobre a utilização do EMTP na análise de transitórios em sistemas de potência - ELETROBRÁS - Rio de Janeiro - 1983

26 - Damping of numerical noise in the EMTP solution - V.Brandwajn - Transients Program memorandum - MMED - 20/09/81- páginas 15/24

27 - Curso sobre compensadores estáticos - A.C.Guimarães, J.R. Cogo e J.C.Oliveira - CEMIG/FUPAI - Belo Horizonte - 1982

28 - Linhas de transmissão - Renato de Aquino Faria Nunes - CESE/MESTRADO - EFEI - 1982

29 - Application of matrix methods to the solution of transients waves phenomena in polyphase systems - L.M.Wedepohl- Proceedings of IEE - vol 110 - nº 12 - Dezembro/1963 - páginas 2200/2212

30 - Propagation on overhead transmission lines I - Theory of modal analysis - D.E. Hedman - IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems - Vol PAS - 84 - Março/1965 - páginas 200/205

31 - Propagation on overhead transmission lines II - Earth conduction effects and practical results - D.E.Hedman - IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems - Vol PAS -84 Março/1965 - páginas 205/211

32 - Cálculo digital de fenômenos transitórios em sistemas elétricos de potência - Sérgio Gomes de Machado - Tese de Mestrado - EFEI - 1982

33 - Traveling waves on transmission systems - L.V.Bewley - segunda edição - 1963 - Dover Publications, Inc., New York

34 - Numerical modelling of frequency - dependent transmission line parameters in a electromagnetic transients program - W.S.Meyer e H.W.Dommel - IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems - Vol PAS - 93 - Setembro/Outubro/1974 - páginas 1401/1409

35 - Contributions to the theory of calculation of electromagnetic transients on transmission lines with frequency dependent parameters - A.Semlyen - IEEE PES Winter meeting - Vancouver, B.C. - Canadá - Julho/1979

36 - A highly efficient method for calculating transmission line transients - A.Ametani - IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems - Vol PAS-95, Setembro/Outubro-1976 - páginas 1545/1551

37 - Digital simulation of electrical transient phenomena - IEEE Tutorial Course - 81EH0173-5 - PWR - 1980

38 - Accurate modelling of frequency-dependent transmission lines in electromagnetic transient simulations - J.R.Marti - IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems - Vol PAS 101 - nº 1 - Janeiro/1982 - páginas 147/155

39 - Wave propagation characteristic of cables - A.Ametani - IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems - Vol PAS-99 - nº 2 - Março/Abril - 1980 - páginas 499/505

40 - Non-linear corona models in an electromagnetic transients program (EMTP) - K.C.Lee - IEEE PES Winter Meeting - New York - 1983

41 - State of the art of overvoltage simulations - H.W.Dommel e J.R.Cogo - Seminário de Pesquisa - EFEI - 1983

42 - Influência da variação dos parâmetros de linhas de transmissão com a frequência na simulação digital de transitórios eletromagnéticos - Neun Kong Lai Song, Paulo Ricardo Laudanna - BSB/GSP/IO - VII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica - Brasília - 1984

43 - Cases studies for electromagnetic transients - H.W.Dommel, A.Yan, R.J.O.Marcano e A.B.Miliani - The University of British Columbia - Vancouver - B.C. - Canadá - 1983

44 - The calculation of switching surges - I - A comparasion of transient network analyser results - W.G. 13.05 - Electra - 1971 - páginas 67/78

AMAURI REIGADO COSTA DE OLIVEIRA

CEMIG

PO/ES4 - Divisão de Planejamento da Estrutura do Sistema

Av. Barbacena, 1200 - 12º Al

Tel - (035) 349.2835