TESE
537

"ANÁLISE, PROJETO E SÍNTESE DOS SISTEMAS DE DADOS AMOSTRADOS COM REALIMENTAÇÃO.

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

Tése de Mestrado:

"ANÁLISE, PROJETO E SÍNTESE DOS SISTEMAS DE DADOS AMOSTRADOS COM REALIMENTAÇÃO.

Marilena Schirmanoff Cavalhieri

Itajubá - Minas Gerais

1 9 7 4

Biblioteca MAUÁ Itajubá

CLASS. 519.71 : 517.44 (043.2)
CUTT. C376a
TOMO 537

SINOPSE

Trata-se, este trabalho, de uma apresentação matemática concisa da análise dos sistemas de dados amostrados.

Propomos aqui uma filosofia para o tratamento dos referidos sistemas por métodos convencionais, desenvolvendo-os numa sucessão lógica.

Estudamos detalhadamente uma técnica de projeto diferente para sintetizar os sistemas.

Finalmente desenvolvemos a análise da transformada Z dos sistemas, sem referência a função impulso, obtendo assim resultados precisos.

Abstract

This work is about a mathematical concise presentation of the sampled data systems analysis.

We propose here a philosophy to the dealing of the referied systems as by conventional methods, developing them in a logic succession.

We shall detailedly study a different project technique to systematise the systems.

Finally we shall develop the Z transformed analysis of the systems, without refering to the impulse.function, them obtaining precise results.

Prefácio

Durante o último meio século, aumentou consideravelmente o interesse e as atividades na área da Teoria dos Sistemas Discretos ou de Dados Amostrados pelos Engenheiros e Teóricos de Sistemas.

Esta atividade e o grande interesse foi motivado pelo avanço realizado na Tecnologia dos computadores digitais e ao lado da extensa aplicação na análise e projeto de sistemas.

Vários métodos de análise e projeto de sistemas discretos foram propostos e aplicados. Isto inclue os processos de amostragem, reconstrução de dados e entre eles as técnicas de transformadas.

Um método de transformada, o qual é amplamente aplicada a análise, é o método da transformada Z.

Sua utilização é análoga a transformada de Laplace quando a teoria dos sistemas contínuos.

Neste trabalho, o método da transformada Z é extensamente desenvolvido e aplicado à muitas áreas da teoria dos sistemas discretos. Esta matéria é de interesse dos Engenheiros e Teóricos de Sistemas, portanto parte do material aqui desenvolvido é também de interesse dos Matemáticos. Consequentemente, muito dos teoremas e lemas são provados com algum rigor matemático. Por outro lado, certos teoremas são citados sem prova, os problemas de convergência não são rigorosamente abordados e muito dos itens que não foram provados, citaremos a referência para que o leitor possa facilmente achar as deduções rigorosas da teoria.

Os sinais de dados amostrados ou discretos são caracterizados pelo fato de que os sinais dos dados aparecem em um ou mais pontos do sistema como uma sequência de pulsos ou número.

O componente que distingue os sistemas de dados amostrados é o sampler ou amostrador, é nele que o sinal contínuo é convertido num trem de pulso.

A análise do sampler é simplificada se certas ferramentas matemáticas são introduzidas, particularmente a transformada Z e a teoria associada.

O problema de estabilidade dos sistemas lineares discretos e a distribuição de raizes dentro do circulo são discutidos em detalhes.

Damos enfase ao projeto de sistemas de dados amostrados dando uma visão ao projetista como simplificar a análise, para melhor entendimento do comportamento dos sistemas entre instantes amostrados. Foi selecionado a configuração de um simples sistema, comum na literatura dos sistemas de dados amostrados, para dar ao leitor um melhor entendimento do comportamento de cada sistema, o qual se torna evidente para um iniciante.

Por fim apresentamos um desenvolvimento mais rigoroso, desde que as dificuldades associadas com as funções impulso são evitadas, então os sistemas de dados amostrados e suas propriedades são estudados sem referência a função impulso.

Extensa tabela de transformada Z e função transferência estão no apendice.

Tentamos coletar uma completa bibliografia de todas as publicações relativas as sistemas de controle que são citadas nos textos e destes os trabalhos de:

Jury, E. I.	32	até	46
Lago, G. V.	56	e	57
Ragazzini, J. R.	81	ã	82
Linville, W. K.and Sittler, R.W.	65	e	66
Philips, C. L., Lowry, J.L.and Cavim, R. K.	80		

foram particularmente usados ao se escrever esta tese.

I - SIMBOLOS, CONVENÇÕES E NOMENCLATURA

I - 1 — SIMBOLOS ADOTADOS

a_m — singularidade usada na secção 4.6

B_k, C_k, D_k, Ro — termos definidos na seção 6.7 pela equação(6-34)

$c(t)$ — sequência de saída utilizada na seção 4-13 e nos capítulos 5, 6, 7 e 8.

$C(Z)$ — saída do último amostrador (transformada Z de c(t)) definida na seção 4-13 e utilizada nos capítulos 5, 6, 7, 8.

C_n — (n = - ∞ até ∞) coeficiente das séries definidas na seção 4-13

$C_n(mT)$ — saída amostrada, definida na seção 4-13 pela equação (4-115).

c_1, c_2 — constantes usadas na seção 4-8-1.

$S(t)$ — função delta definidas nas seções 2-5 e 4-4.

$S(k)$ — função delta unitária definida na equação (4-95) secão 4-11

∇_n — determinante com n variações em sinal utilizado na seção 6-6.

$E(Z)$ — Transformada Z do sinal de erro, definido no capítulo 5.

e^{cT} — raio do criculo onde c é a abcissa de convergência nos limites da integral inversa da transformada de Laplace, seção (4-6).

$f'(t)$ — derivada de primeira ordem de $f(t)$

$f''(t)$ — derivada de segunda ordem de $f(t)$

$f(t)$ — função contínua no domínio do tempo, definido no capítulo 2

$f^*(t)$ — função amostrada

$F(s)$ — transformada de Laplace de $f(t)$

$F^*(s)$ — transformada de Laplace de $f^*(t)$

$f(nT)$ — valor da função $f(t)$ para instantes amostrados com a condição de aproximarmos um trem de pulsos por um trem de impulsos, seção 4-4.

$F(Z)$ — transformada Z de $f^*(t)$ definida na seção 4-2 pela equação (4-3)

$F_1(Z), F_2(Z)$ — transformada Z unilateral e bilateral respectivamente, definidas na seção 4-3 pela equação(4-5

$f(nT)Z^{-n}$ — ($n = 0$ até ∞) série de potências em Z definidas na seção 4-4 pela equação (4-15).

$g_i(t)$ — ($i = 1, 2, \ldots, m$) é a resposta do extrapolador para a amostra $f|(n-i)\,T|$, na seção 8-2

$G_{Tx}^*(s)$ — função transferência com atraso de Tx segundos, seção 7-8

I — contorno fechado, o qual engloba a origem do plano definido na seção 4-6.

λm — frequência complexa, seção 4-4

λk — polos de $F(w)$, definida na seção 4-4, equação (4-26)

plano w — definido pelas relações (6-6) e (6-7) da seção 6-2.

Pk — (k = 1, 2, ... n) número de produtos definido' na seção 6-7 pelas equações (6-36), (6-37) e (6-38)

ρg — raio de absoluta convergência utilizado na seção 4-8-7

ρa — raio de absoluta convergência seção 4-5

ρ — circulo de convergência seção 4-5

T(Z) — função transferência de um sistema fechado definido na seção 6-3-1, pela equação (6-13)

T — contorno que engloba todas as singularidades, ' seção 4-6

$\mu(k)$ — função degrau definida na seção 4-11 pela equação (4-95)

$x(k)h(n-k)$ — (k = 0 até n) somatória da convulução, definida na seção 4-8-5 pela equação (4-74)

Zn — singularidade de típica de G(Z) definida na seção 6-2 pela equação (6-4).

Zm — singularidade típica de F(Z) definida na seção 6-2 pela equação (6-2)

Zi — raizes da equação caracteristica na seção 6-3-1

I - 2 — CONVENÇÕES

a) As equações, figuras, tabelas e quadros serão especificados sempre por dois números: o primeiro se refere ao capítulo e o segundo à ordem de aparecimento no capítulo (seção).

b) Os números entre colchetes no decorrer do texto referem- se à Bibliografia citada na página 251

I - 3 — NOMECLATURA ADOTADA

Clamp ou Boxcar — filtro extrapolador de ordem zero

Closed form — forma fechada

Hold de ordem zero — filtro extrapolador de ordem zero

Hold de primeira ordem — filtro extrapolador de primeira ordem.

Método "Root Locus"— método do lugar das raízes.

Método"Transfer Locus"— método do lugar de transferência das raízes

Shift Forward — avanço

Sampler — amostrador de dados ou chave de amostragem

Sistema Hold — Sistema mantedor ou Sistema de filtros extrapoladores.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor FERNANDO JOSÉ CONSTANTI, orientador da Tése, pela consciência profissional e boa vontade com que orientou a realização deste trabalho.

Somos sinceramente gratos aos professores Czeslau Lubomiro Barzack, Amadeu Casal Caminha, José Abel Royo dos Santos, Ignácio Sergio Miranda Ferreira, pelo incentivo constante e decisivo apoio na realização deste trabalho.

Ao professor Hermínio Braga Pedroso da Universidade Federal de Goiás, pelo estímulo e colaboração.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa do qual fui bolsista durante dois anos.

Aos professores, assim como a todos os funcionários da E.F.E.I. que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a execução deste trabalho.

A meus pais, Victório e Afonsina que me possibilitaram essa vitória.

A meu esposo Roberto, o qual tem sido em muitos anos um importante "partner" nesta aventura.

"Elaboration of theory through observation and improvement of observation through theory is the best method of arriving at the truth".

M. V. LOMONOSOV.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. - Desenvolvimento histórico.

Inicialmente [65], o homem procurou na propria força ou nas bestas de carga, suprir as energias para o trabalho. Pelo uso de simples esquemas de maquinas, tais como, a roda e a alavanca, o homem acompanhou os grandes feitos, como as construções das altas piramides do Egito, vias publicas e aquedutos Romanos. Primeiro suplantou sua energia e a das bestas, utilizando a potencia das fontes naturais tais como o vento, para a navegação a vela, moinhos de vento, e quedas d'água para mover roldanas. A invenção da maquina a vapor foi um marco no progresso do homem, e desde então o homem tem procurado novas e convenientes fontes de energia.

Consta que os árabes [25] já no começo da era cristã, tenham construido os primeiros controles de nível do líquido por meio de valvulas acionadas por boia. Tambem muito antigos, e preferidos até o seculo XVII foram os relógios d'água (clepsidrae); neles uma valvula acionada por boia controla o nível do recipiente em cuja base há um orifício; mantido assim o nível constante, a vazão do orifício tambem o é;

num segundo reservatório que coleta a saída do primeiro, o nivel cresce proporcionalmente ao tempo; uma boia com' um cursor, neste segundo vaso, indica o tempo sobre uma' escala linear.

Meikle (1750) [14] construiu um dos primeiros aparelhos de natureza diferente, para o ajuste automático do eixo da helice de um moinho de vento na melhor posição relativamente ao vento; como os moinhos tinham a - tingido consideráveis dimensões a motorização, tambem a vento, empregada pelo aparelho era extremamente importante.

Quase quarenta anos depois, James Watt apresentou o seu regulador de velocidade para motores a vapor, cujo funcionamento é hoje bem conhecido.

Há mais de cem anos, o grande Mascwell, 1868, analisou, usando equações diferenciais, a estabilidade do regulador de Watt.

Paralelamente aos referidos acontecimentos da engenharia mecanica e eletrica, a matemática desenvolvia ' alguns metodos indispensáveis ao estudo da realimenta - ção.

Em 1730 DeMoivre [17] introduziu o conceito de funções geradoras " (a qual é atualmente identica a transformada Z) para a teoria da probabilidade. O conceito ' das funções geradoras foi posteriormente extensivamente' usado por Laplace [54] e outros na teoria da probabilidade.

Em 1779, Laplace deu início a teoria da transformada de Laplace, antecedendo ao trabalho de Fourier; ambas as transformações são bases das teorias de controle' a realimentação (e das comunicações) .

DeMoivre e Laplace [17,55,82] desenvolveram a ' forma de transformada para o calculo, que poderia ser ' aplicada a solução de equações diferença linear.

Vinte anos depois, Cauchy contribuiu com sua teoria das funções da variavel complexa.

A aproximação de DeMoivre e Laplace foi adaptada' para a solução de filtros pulsados e sistemas de dados amostrados por HureWicz, 1877 [28], que proporcionou muito das bases do grande trabalho para o metodo de transformada para a analise dos sistemas de dados amostrados. Estes sistemas são referidos como discretos devido a natureza discreta dos sinais ou informações que deles flu-

em. Então uma nova disciplina da teoria dos sistemas está sendo desenvolvido para ser conhecido como teoria ' dos sistemas discretos. Subsequentes investigações [3, 81,3,4,53,75,82] ampliaram esse trabalho. O resultado desses esforços foi o desenvolvimento e refinamento da chamada transformada Z e suas aplicações para a analise e sintese dos sistemas de dados amostrados.

A transformada Z é inteiramente analoga a transformada de Laplace e as aplicações desta ultima para ' os sistemas contínuos.

O método da transformada Z constitui um dos metodos de transformada que pode ser aplicado a solução' das equações diferença linear [32,33,39] Na segunda ' metade do seculo XIX, os navios, de crescente tonelagem, passaram a exigir alguma forma de servomecanismo' isto é, de controle remoto para o leme, com precisão e alta potencia; inicialmente a motorização foi a vapor' porque só muito depois apareceram os processos hidraulicos e eletricos .

Na decada de 1930 - 40 o emprego da realimentação nos amplificadores eletronicos, com possibilidade' de experimentação facil, foi causa de grande progresso no uso conciente da realimentação. Com o principio e'

as teorias então desenvolvidas, reduziu-se asquantidades de tentativascaras e intuitivamente guiadas, que antes eram necessarias para atingir um equipamento de controle aceitável. É verdade que muita construção experimental foi substituída por experiencia em papel: as teorias dessa década permitiam projetos por tentativas.Mas também é certo que foram essas as ferramentas da engenharia para desenvolver os variados e urgentes tipos de servomecanismos da 2a. Guerra Mundial e da grande maioria das aplicações industriais até hoje.

A primeira analise dos sistemas de controle à realimentação deve-se a Maxwell, em "On Governors",1868

Outro grande passo foi o critério de estabilidade de Routh e, independentemente, Hurewicz, em 1877.

Mais dai em diante o progresso da teoria foi lento e pequeno até que em 1927, Black escreveu a equação fundamental de um amplificador a realimentação, baseada no conceito da função transferencia, e demonstrou as grandes vantagens de um sistema fechado.

Os engenheiros, trabalhando com servomecanismos, compreenderam imediatamente que a teoria de Black e as subsequentes contribuição de Nyquist e Bode são direta-

mente aplicaveis a um servo.

A lei geral da estabilidade e da precisão das regulagens retroativas (critério de Myquist e relação de Bode) foram estabelecisos em 1932 por teoricos da Bell Telephone Cº, durante o estudo do caso particular dos ' amplificadores a contra-reação .

Seguiu-se, então, uma explosão de idéias novas e aperfeiçoamentos que teve no conceito da função de transferencia o seu elemento fecundante.

Durante a ultima decada, sistemas de controle com realimentação e malhas ativas tem tornado importante e aumentado demais os ramos da engenharia.

Simultaneamente, houve um enorme interesse nas ' caracteristicas dinamicas do sistema, em contraste, com a facilidade de entendimento das características estáticas.

Desenvolveram-se e refinaram-se as tecnicas de analise e sintese dos sistemas de realimentação.

1.2. - Importancia tecnologica dos Sistemas de Controle.

O conceito mais importante em controle automatico é o de realimentação.

O numero de aplicações intencionais dos sistemas' de controle com realimentação nos aparelhos domesticos e industriais, é incalculável. Para o funcionamento satisfatório de: nas residencias, aquecimento central de água, condicionamento de ar, refrigeração, manutenção de nível de caixa d'água, controle automatico de volume ou ganho nos receptores de radio, alta fidelidade na reprodução de fitas e discos; nos automoveis, regulador automatico de voltagem, valvula termostática para fluxo da água no motor, direção hidráulica; na industria, os estabilizadores de voltagem alternada e contínua, os de velocidade, de temperatura, de pressão, de nível de líquidos e sólidos, de pH, as máquinas - ferramentadas automáticas, os laminadores, os grupos auxiliares para a produção de energia eletrica .

Nos meios de transporte áereo e maritimo há enorme variedade de sistemas a realimentação, às vezes muito complexos e precisos; nos laboratórios, a maioria dos' aparelhos de medida de alta precisão e estabilidade dependem fundamentalmente da realimentação.

Dentre essas aplicações pode-se distinguir:reguladores, sistemas cujo objetivo primordial é manter as variaveis de saidas constantes ou lentamente variáveis no' tempo; servomecanismos ou servo-sistemas, cujo objetivo' primordial é manter as variaveis de saída iguais as de entrada, mas ambas em geral variando:

Alguns dos maiores servomecanismos já construídos são os rádio-telescópios: no Jodrel Bank controla-se com precisão de milimetro a posição de uma estrutura de 2000 toneladas.

O Controle de processo refere-se a processo químico, térmico, metalúrgico, etc., e geralmente precisa de resposta relativamente lenta; mas no controle global do processo de uma fabrica, atinge-se geralmente complexidade elevada em virtude do numero de variáveis de entrada' de saída e das perturbações bem como porque se deseja uma qualidade global de complicada expressão matemática.

Há ainda a classe de controle a realimentação no' qual o sinal em um ou mais pontos aparecem como um trem' de pulsos, tais controles são conhecidos como:controle ' de dados amostrados ou controle discreto.

Os controles de dados amostrados são usados numa enorme variedade de aplicações. Talvez o esquema que tem dado a maior impetuosidade a teoria dos dados amostrados é o uso dos computadores digitais [67] nos sistemas de controle com realimentação. Os computadores digitais operam só com os numeros discretos, e os dados transmitidos através deles ocorrem periodicamente em amostras ao contrario do que nos sinais contínuos. Desde que os computadores digitais operam só um número no tempo, qualquer mudança no sinal atuante o computador digital oferece um novo número, e o calculo precisa ser repetido periodicamente.

Uma das maiores vantagens da utilização dos sistemas de dados amostrados com realimentação é que o controlador pode ser programado para dar a execução dinamica e a estabilidade será muito superior do que a melhor de todos dos sistemas contínuos.

Outras aplicações dos servos de dados amostrados chegam em conecção com sistemas de radar de exploração- [108], com detectores pulsados nos sistemas de modulação de amplitude , e com sistemas de modulação de fase.

As vantagens possíveis [14] com a aplicação correta da realimentação são diversas; mas podemos resumí-

las em:

a) saída com potencia determinada pelo atuador final mas com precisão determinada pelos equipamentos de medida e pelos primeiros ampliadores de sinal, que são ' de pequena potência;

b) redução das consequências de:

1º - perturbação externas e internas na fonte de energia, na carga e nos ampliadores;

2º - características não lineares de certos componentes, especialmente na parte de alta potencia.

CAPÍTULO 2

CARACTERÍSTICAS DE AMOSTRAGEM

2.1. - Introdução.

A operação de amostragem consiste em se examinar o sinal contínuo para intervalos de tempo iguais, T. A informação resultante é uma sequencia de pulsos ou números, dando valor para o sinal nos particulares instantes amostrados.

Portanto, o processo que converte dados contínuos em uma sequencia de pulsos é chamado "processo de amostragem".

2.2. - Processos de Amostragem [73,82,90,13]

Sistemas discretos ou sistemas de dados amostrados, são sistemas dinamicos nos quais uma ou mais variáveis podem mudar só em instantes discretos do tempo.

Em destaque, para a sua caracterização temos que os dados aparecem em um ou mais lugares do sistema como um trem de pulsos ou números.

Processo de Amostragem é o processo que converte dados contínuos em um trem de pulsos.

O processo de amostragem é representado esquematicamente na fig (2-1) onde vemos a função contínua f(t) que é convertida por meio de uma chave, a qual se fecha' todo T segundos, na função discreta f*(t).

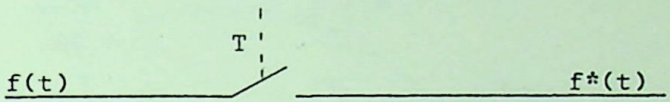


fig. 2-1 - Representação esquematica da operação' de amostragem.

O intervalo de tempo entre dois instantes discretos é tomado, suficientemente pequeno para que os dados' possam ser aproximados por interpolação [61] .

Na saída da chave temos f*(t) (função amostrada) que é um trem de pulsos ou numeros cujos valores ' são:

f(0),f(T),f(2T),.....f(nT) onde

nT = instante de tempo amostrado quando a chave está fechada

T = intervalo amostrado.

Obs: - O asteristico em f*(t) implica na versão a mostrada da função do tempo f(t) [82.]

A operação de amostragem é vista na fig (2-2) onde vemos a variação de interesse f(t).

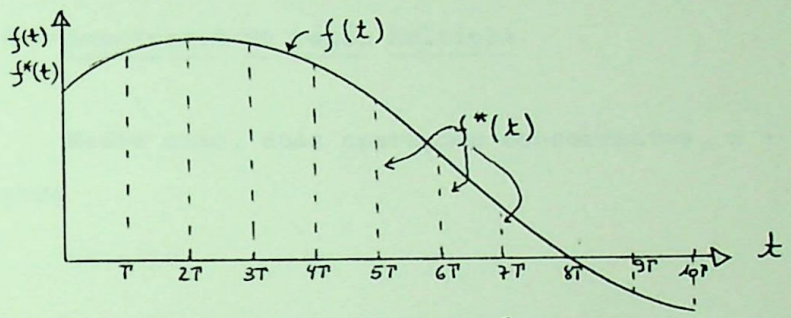


fig. 2-2- Amostragem de uma variável f(t)

Há varios tipos de operações amostradas de importancia pratica explicaremos algumas como seguem.

1 - Amostragem Periódica [13]

São definidas só para uma sequencia de pontos separados no tempo, isto é , eles são funções de variável' discreta.

$$tn = nT \quad (n = 0,1,2.....)$$

e são igualmente espaçadas.

2 - Amostragem de Ordem Multipla .

A amostra de tn é repetida periodicamente ou

$$t_{n+k} = tn = cte \quad \text{para todo } n.$$

3 - Amostragem de razão Multipla.

Neste caso, duas operações concorrentes, o - correm para

$$tn = pt_1$$

$$tn = qt_2$$

onde

t_1, t_2 = constantes

p e q = inteiros

4 - Amostragem Aleatória.

Neste caso, os instantes amostrados são aleatórios ou tn é uma variável aleatoria.

Neste Trabalho trataremos só de casos onde a amostragem é periodica.

2.3. Sinal.

É uma variação no estado de um trajeto de transmissão de comunicação, o qual representa a informação sendo transferida de um ponto à outro [7].

Vários tipos de sinais específicos são definidos num sistema de controle de malha fechada.

O sinal de entrada da malha é um sinal externo aplicado a malha de controle com realimentação, usualmente sinonimos com "Comando".

O sinal de saída da malha é o sinal controlado extraído da malha de controle com realimentação .

O sinal de malha com realimentação é o sinal deduzido como uma função do sinal de saída da malha e realimentado para o "ponto de mistura" para propositos de controle.

O sinal de malha atuante é deduzido pela "mistura" do sinal de entrada da malha e o sinal de realimentação da malha.

O sinal de erro da malha (ou sinal de erro) é o sinal de malha atuante naqueles casos onde um erro ' de malha exista.

O erro de malha é o desejado menos o valor a - tual do sinal de saída da malha.

O sinal de retorno da malha é um tipo específi- co de sinal de entrada da malha o qual retorna via uma malha de controle com realimentação para um "ponto de soma" em resposta a um sinal de entrada da malha a - plicado aquele "ponto de soma", e subtraído do sinal ' de entrada da malha.

O sinal diferença da malha é um tipo especifico de sinal de malha atuante; o sinal de saída de um ponto de soma de uma malha de controle com realimentação' produzido por um particular sinal de entrada da malha' aplicado àquele ponto de soma.

Nos sistemas de dados amostrados o erro ou si - nal de comando chegam em intervalos discretos, melhor' do que continuamente.

2.3.1. - Classificação de Sinais.

Quando os sistemas são capazes de mudar a qualquer instante de tempo o sistema é dito ser contínuo, portanto, salvo descontinuidades isoladas, estes sinais tomam a forma de curvas "polidas" fig (2-3a)

Pela designação de sinais analogos, nos referimos as funções do tempo, sendo que a maioria dos sinais físicos pertencem a esta categoria com raras exceções.

A onda telegrafica é uma excessão, pois, tem dois valores, aberto-fechado, apesar de ser uma função de t , como uma variável contínua.

Sinais restritos nesta faixa são ditos ser de "amplitude - discreta" ou "quantizada".

A fig. (2-3b) mostra uma versão de multiníveis quantizada da fig (2-2a)

Os computadores dígitais produzem em forma digital (usualmente numeros binarios) os sinais quantizados. Num sistema de controle quando se introduz um computador digital devemos usar um conversor analogo - digital e digital analogo.

A conversão do sinal análogo para o correspondente sinal digital (número binário) é aproximado, pois, o sinal análogo pode assumir um número infinito de valores onde a variedade de diferentes números os quais podem ser formado por um conjunto de dígitos é limitada.

Quantização [13] é, portanto, este processo de aproximação.

Definimos os sinais discretos para os caso em que os instantes amostrados sejam igualmente espaçados ou

$$tn = nT \quad (n = 0, 1, 2...)$$

Uma subclasse dos sinais discretos são os sinais digitais, os quais são simultaneamente discretos no ttempo e quantizados em valor. (fig. 2.3d).

2.4 - AMOSTRADOR (SAMPLER) [13, 55, 81, 82, 90, 91, 96]

Nos sistemas discretos o elemento essencial é o atrador ou "sampler".

O amostrador ou "sampler" é o componente que distin

gue um sistema de dados amostrados de um sistema contínuo, converte um sinal contínuo de entrada f(t) em um trem de pulsos f*(t) (saída) espaçados de T segundos e com altura proporcional a amplitude de f(t) nos instantes amostrasdos fig. (2.4)

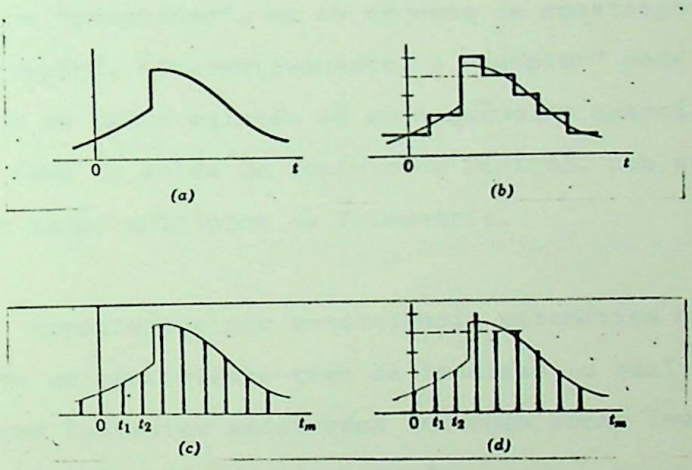


fig (2.3) Classificação de Sinais

a) análogo

b) quantizado

c) discreto

d) digital

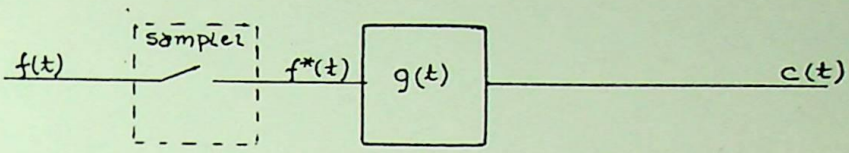


fig. 2.4 - Amostrador em uma malha.

A frequência $w_o = \frac{2\pi}{T}$ é chamada frequência de amostragem. Fisicamente, o "sampler" pode ser uma chave mecânica, tal como um "comutador", ou um esquema de amostragem eletrônico ou "chopper". Alternativamente, o "sampler" pode ser só figurativo e os dados existem só em sequências quantizadas(amostradas), como na saída do Computador Digital, num grande Radar ou em dados multiplos da Telemetria.

Aproximamos por conveniência matemática o trem de pulsos por um conveniente trem de impulsos, o qual em seus respectivos instantes amostrados tem suas áreas iguais aos valores das funções do tempo amostrado.

Na prática, a duração da amostragem é muito pequena em comparação com o conjunto de tempo do sistema e o ganho do amplificador mostra que o amostrador é multiplicado por um fator igual a duração de tempo do pulso amostrado. Entre os instantes amostrados, o amostrador ou "sampler" não transmite informações.

Usaremos durante esse trabalho só a denominação "sampler".

2.5 - Operação de Amostragem [9, 18, 51, 55, 91]

Consideremos, por simplicidade que o sampler é uma ' simples chave mecânica a qual se fecha todo T segundos. '' fig. (2.5).

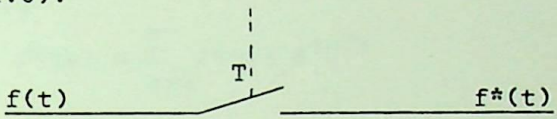


fig. 2.5 - Operação de amostragem.

Sejam f(t) e f*(t) respectivamente as funções de entrada e saída, poderemos ter a seguinte relação:

$$f^*(t) = f(t)\ \delta(t) \qquad (2.1)$$

onde

$\delta(t)$ = trem de impulsos unitários

(função delta)

$$\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \qquad (2.2)$$

logo a equação (2.1) pode ser escrita como:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\ \delta(t-nT) \qquad (2.3)$$

Os valores negativos de n são absurdos em virtude de considerarmos que f(t) tende a zero para valores negativos de t.

Tomando a transformada de Laplace [18, 22, 97, 109, 111] da equação (2.1) temos:

$$\mathcal{L}\left[f^*(t)\right] = F^*(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\,\delta(t)\right] \qquad (2.4)$$

portanto

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{-nTs} \qquad (2.5)$$

Mas como a função delta pode ser expressa pela série complexa de Fourier, então:

$$\delta(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=\infty}^{\infty} e^{jnw_o t} \qquad (2.6)$$

substituindo (2.6) na equação (2.1) e transformando o resultado da série termo a termo resulta:

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jnw_o) \qquad (2.7)$$

F(s) = Transformada de Laplace de f(t)

$w_s = \frac{2\pi}{T}$ frequência de amostragem

T = período amostrado

Comparando (2.5) e (2.7) temos

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s+jnw_s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{-nTs} \qquad (2.8)$$

Essa igualdade foi descoberta a mais de um século ' por Poisson e a equação (2.8) é essencialmente equivalente a regra da somatoria de Poisson.

No caso de todos os valores de f(nT) serem iguais a unidade para os tempos positivos, a transformada de Laplace de F*(s) dado pela equação (2.5), pode ser expressa como:

$$f(nT) = U(t)$$

$$\mathcal{L}\left[U(t)\right] = 1$$

logo:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = 1+e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts}+\ldots+e^{nTs} \qquad (2.9)$$

Mas a equação (2.9) é a reconhecida progressão geométrica em e^{-Ts} a qual pode ser expressa por:

$$F^*(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \qquad (2.10)$$

Podemos ainda obter de outro modo, a transformada ' de Laplace para um esquema de amostragem impulso unitário, fazendo uso do fato de que a função de amostragem $\sigma(t)$ é ' periódica e pode ser expressa como uma série de Fourier.

Expandindo $\sigma(t)$ numa série de Fourier, obtemos:

$$\sigma(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Cn \exp(jw_s nt) \qquad (2.11)$$

Onde Cn representa os coeficientes da série exponencial.

Estes coeficientes podem facilmente serem determinados através da série de impulso - unitário pela integral.

$$Cn = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \exp(-jw_s nt)\, dt \qquad (2.12)$$

Mas, desde que a área de qualquer impulso - unitário é igual a unidade, a integral é também igual a unidade e todos os coeficientes de Fourier podem ser expressos por

$$Cn = \frac{1}{T} \qquad (2.13)$$

Substituindo a equação (2.13) na (2.11) obtemos:

$$\delta(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(j\, n\, w_s\, t) \qquad (2.14)$$

onde a equação (2.14) é a expressão para a série de Fourier da função amostrada.

A expressão para f*(t) pode ser obtida substituindo a equação (2.14) na equação (2.1)

Obtemos então:

$$f^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \exp(j\, w_s nt) \qquad (2.15)$$

onde:

$w_s = \frac{2\pi}{T}$ representa a frequência de amostragem em

radianos.

ou seja:

$$f^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \exp(j \frac{2\pi}{T} nt) \qquad (2.16)$$

A trnasformada de Laplace da equação (2.15) é:

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s+jnw_s) \qquad (2.17)$$

No caso de $f(t) = U(t) = 1$ e $\mathcal{L}|U(t)| = \mathcal{L}|1| = \frac{1}{s}$

(2.18)

a função amostrada será dada por:

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s+jnw_s} \qquad (2.19)$$

Mas como (2.19) é uma somatória infinita ela não' pode ser usada na "Closed form", portanto torna-se menos usada. Ela não mostra claramente as propriedades periódicas' da transformada de Laplace da função amostrada.

2.6 - Espectro de Frequência [32, 33, 60, 73, 82,' 90]

Da equação (2.19) podemos expressar o expectro de frequência, substituindo $s = jw$, logo:

$$F^*(jw) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j(w+nw_s)} \qquad (2.20)$$

Usualmente expressamos o expectro de frequência' de uma função amostrada como:

$$F^*(jw) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(w+nw_s)] \qquad (2.21)$$

Da equação (2.20) verificamos que o espectro da ' frequência é periódica em w_s. Na fig (2.6) temos uma distribuição espectral com frequência de corte do sinal de entrada designado por w_s, a seguir na fig (2.7) vemos o efeito ' de um sampler, se o sinal de entrada f(t) tiver a mesma distribuição espectral.

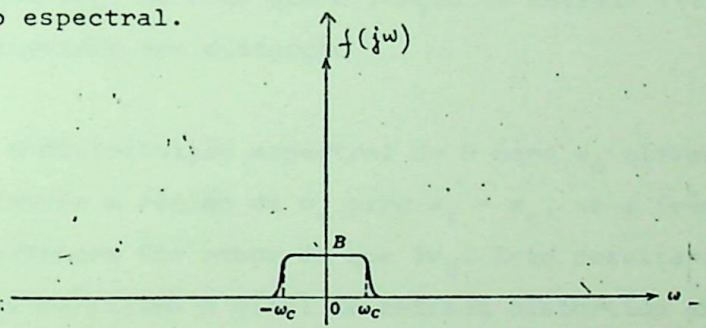


fig. 2.6 - Espectro de frequência de 1 função a

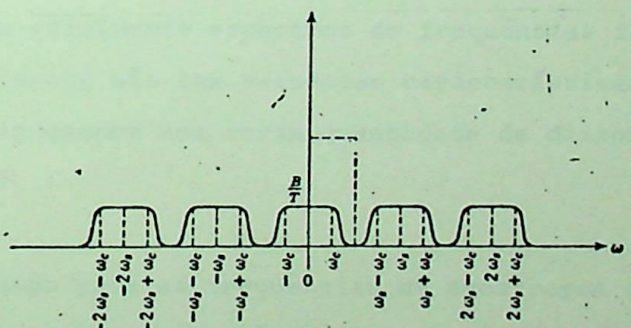


fig. 2.7 - Espectro de frequência da função amostrada.

2.7 - Relação entre W_c e W_s [60, 116]

Verificamos do item anterior, baseado na fig(2.7), que se a função passar através de um filtro de passa-baixas, como nos mostra a linha tracejada, poderíamos recuperar a função f(t).

Se a mais alta frequência de entrada for w_c, de acordo com Shannon [94], a frequência amostrada precisa ser maior do que $2w_c$, de modo que a função de entrada f(t) possa ser recuperada sem distorção.

A distribuição espectral de 0 para w_c ultrapassará parcialmente a região de w_s para $w_s - w_c$, se a frequência de amostragem for menor do que $2w_c$. Isto resultaria de recobrar-se no filtro o sinal de entrada distorcido encoberta pela porção da primeira faixa. Portanto desde que os sinais não tem geralmente espectros de frequências finitas e os filtros ideais não tem respostas características o sinal recobrado tem sempre uma certa quantidade de distorção, chamada "ondas".

Então para as frequências de amostragem e seus harmônios isto ocorre e será tratado como ruídos dos sistemas de dados amostrados.

Os sistemas de dados amostrados estão sujeitos ao problema de recobrar os sinais e os sinais imperfeitos recobrados sempre produzem efeitos de ondas na saída de cada sistema.

Limitações básicas na capacidade de informação dos sistemas de dados amostrados resultam da perda induzida pelos processos de amostragem. Este fenômeno será melhor entendido se estudarmos o teorema de amostragem.

2.8 - Teorema de Amostragem [73, 82, 86, 90, 116]

Consideremos o teorema de amostragem desenvolvido por Shannon [82, 94, 116], o qual nos é de importância, pois, nos dá a frequência mínima de amostragem necessária para reconstruir o sinal original de um sinal amostrado.

O espectro de Fourier F(jw) do sinal f(t) está no gráfico (2.8) desenhado por uma linha sólida. Neste sinal f(t) não possui componentes de frequência acima de w_c rad/seg.

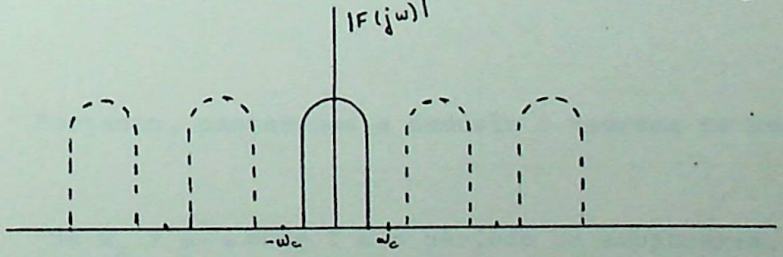


fig. 2.8 - Um espectro de frequência.

Uma representação conveniente deste espectro é dado pelo significado da série de Fourier cujo período fundamental é $2w_c$. Esta representação produz espectros adicionais mostrado nas linhas pontilhadas na fig.(2.8), mas estas não são consequência se considerarmos a representação válida só para a faixa de frequência de $-w_c$ até w_c rad/seg.

O período do espectro pode ser representado por meio da série de Fourier em w com uma frequência fundamental de $2w_c$ como segue:

$$F(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Cn \exp(-j \frac{n\pi}{w_c} w) \qquad (2.22)$$

onde os Cn são os vários coeficientes da série exponencial definida por:

$$Cn = \frac{1}{2w_c} \int_{-w}^{w} F(w) \exp(j \frac{n\pi}{w_c} w)\, dw \qquad (2.23)$$

O significado desta representação é que, se todos os valores de Cn podem ser obtidos, o espectro de Fourier F(jw) é totalmente definido e o sinal é totalmente esperificado.

Portanto, passaremos a deduzir o teorema de amostragem.

"Se $w_s = \frac{2\pi}{T}$, onde T é o período de amostragem, for

maior do que $2w_c$ ou

$$w_s > 2w_c$$

onde $2w_c$ corresponde ao espectro de frequência do sinal contínuo f(t), então o sinal f(t) pode ser reconstruído completamente do sinal amostrado f*(t)."

Seja $\lim_{s \to \infty} s\,F(s) = f(0_+) = 0$ (2.24)

definiremos

$$F(s) = \mathcal{L}\,[f(t)] \tag{2.25}$$

Mas de acordo com a equação (2.17) a transformada de Laplace do sinal amostrado f*(t) é dado por:

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jw_s n) \tag{2.26}$$

Substituindo s = jw na última equação obtemos o ' espectro de frequência para F*(s).

$$\left| F^*(jw) \right| = \frac{1}{T} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left[j(w + w_s n)\right] \right| =$$

$$= \ldots + \frac{1}{T} \left| F\,[j(w-w_s)] \right| + \frac{1}{T} \left| F(jw) \right| +$$

$$+ \frac{1}{T} \left| F\,[j(w+w_s)] \right| + \ldots\ldots \tag{2.27}$$

No espectro da frequência temos

$|F(jw)| / T$ = componente primário.

$|F[j(w \pm w_s n)]| / T$ = componente complementar

$|F^*(jw)|$ versus w, está representado no gráfico da fig (2.9).

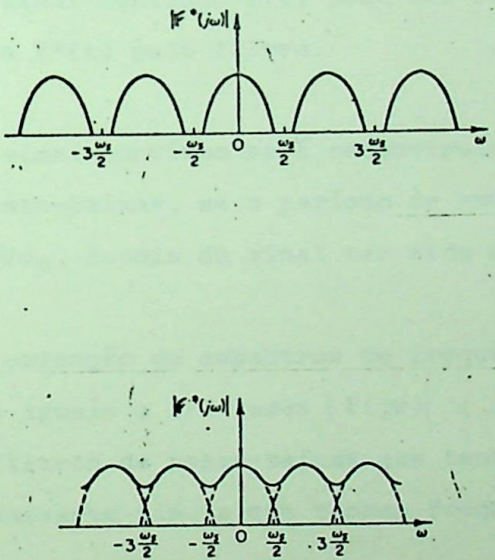


fig (2.9) Gráfico de $|F^*(jw)|$ versus w

Se $w_s < 2w_c$ ou

$T > \frac{\pi}{w_c}$

nenhum dos dois componentes de $|F^*(jw)|$ aparecerá como desejavamos no gráfico de $|F^*(jw)|$ versus w. Concluimos, agora que se somente se

$ws > 2w_c$ ou

$T < \frac{\pi}{w_c}$

O sinal contínuo f(t) pode ser reproduzido do sinal amostrado f*(t) pelo filtro.

O sinal contínuo será reconstruído pelo uso de um filtro de passa-baixas, se o período de amostragem for menor do que π/w_c, depois do sinal ter sido amostrado.

A obtenção de espectros de frequência para a saída do filtro iguais a 1/T vezes $|F(jw)|$, deverá ser feita através de filtros de passa-baixas que tenham a característica de só passarem sinais que tenham frequências menores do que w_c.

O circuito dos samplers dos sistemas discretos tem características de filtros de passa-baixas o que reduz

os componentes de alta frequência, torna o sinal amostrado polido grasseiramente e reproduz o sinal contínuo original.

CAPÍTULO 3

RECONSTRUÇÃO DE DADOS

3.1 - INTRODUÇÃO

Na prática a maioria dos sistemas de controle são tipos de esquemas contínuos ou análogos, o que torna necessário que os dados sejam reconstruídos durante os intervalos entre as amostras.

Para a construção de uma função contínua usam-se os data-holds, que são elementos, que utilizam uma sequência de dados amostrados e a tornam uma função contínua.

Os data-holds ou extrapoladores de dados são filtros de passa-baixas, os quais passam o espectro original e rejeitam o lado do espectro falso, o qual resulta do processo de amostragem.

O procedimento de amostragem vem de um sinal, o qual é fisicamente um trem de pulsos, e os quais podem ser representados matematicamente por um trem de impulsos, a fim de facilitar os cálculos.

É definida pelo envoltório do trem de pulsos a resposta desejada do sistema.

3.2 - O SISTEMA HOLD [33, 61, 67, 81, 82, 107]

O sistema hold tem por função reconstruir aproximadamente a função original, de um trem de impulsos gerados por meio de um sampler.

A reconstrução dos dados é acompanhada por um processo reiterativo de extrapolação das amostras precedentes [61], utilizando uma regra de extrapolação, ou fórmula a qual calcula a probabilidade do declive ou curvatura dos dados análogos originais entre os valores de amostras dados.

Esquemas eletrônicos os quais executam esta extrapolação, são também conhecidos como "filtros desamostradores" ou "extrapoladores".

Devido a natureza aleatória das funções do tempo a serem reconstruídos, não nos é possível realizar um perfeito circuíto hold, pois, caso contrário os sistemas de dados amostrados tornariam-se identicos aos sistemas contínuos.

Ao se realizar um projeto de um sistema ou circuíto hold deseja-se uma aproximação exata da função original, mas, isto geralmente ocasiona grandes atrasos acarretando a instabilidade do sistema.

A síntese do circuito hold, [78] estabelece um ' compromisso entre as exigências de estabilidade e a execu-' ção dinâmica por um lado, e do outro a aproximação exata da função original e a redução do conteúdo de ondas na saída ' do sistema .

A mais simples forma de sistema hold é o chamado tipo "Clamp", e os mais sofisticados são os que se ba-' seiam em funções de interpolação polinominal descritos por' Portner e Stoneman [77] .

3.3 - Aspectos do Projeto do Sistema hold [81, 82]

A geração de uma aproximação para a função do tempo original entre dois instantes amostrados t_n e t_{n+1}, de ' seus valores para os instantes amostrados precedentes t_n, ' t_{n-1} , t_{n-2}, ..., é essencialmente um problema da extrapolação.

No método de geração efetiva mas não ótima, a aproximação desejada é baseada nas considerações de expansão em série de potências de f(t) no intervalo típico de

$$t_n = nT \qquad \text{para}$$

$$t_{n+1} = (n+1)T$$

$$f(t) = f(nT) + f'(nT)(t-nT) + f''\frac{(nT)}{2}(t-nT)^2+.....$$

(3.1)

onde os asterísticos indicam as derivadas de f(t) para tn = nT

É necessário calcularmos os coeficientes da equação (3.1) afim de obtermos as derivadas da função f(t) para o início do intervalo em questão.

Essas derivadas devem ser estimadas a partir dos dados amostrados, desde que, haja informações a respeito de f(t) e calculadas só para os instantes amostrados.

Para obtermos as derivadas de f(t), o número mínimo de pulsos a ser considerado precisa ser igual a ordem da derivada desejada mais um. Isto é, para calcularmos a primeira derivada só dois pulsos são utilizados:

$$f'(nT) = \frac{1}{T}\{f(nT) - f[(n-1)T]\} \qquad (3.2)$$

e a segunda derivada é dada por:

$$f''(nT) = \frac{1}{T}\{f'(nT) - f'[(n-1)T]\}$$

$$= \frac{1}{T^2}\{f(nT) - 2f[(n-1)T] + f[(n-2)T]\} \qquad (3.3)$$

Os sistemas de controle com realimentação geralmente não utilizam os sistemas de ordem mais altas, devido aos inumeros atrasos de fase, o que dificulta a estabilidade do sistema.

Usa-se em geral só o primeiro termo da equação (3.1), isto resulta no que chamamos de circuito "Clamp" ou "Boxcar", isto é, um hold de ordem zero.

3.4 - HOLD DE ORDEM ZERO [13, 33, 36, 82]

Consideremos a equação

$$f(T) = f(nT) + f'(nT)(T-nT)+f''\frac{(nT)}{2}(t-nT)^2+..... \qquad (3.4)$$

Geralmente, só o primeiro termo é usado e do ponto de vista prático é a mais importante forma de circuito hold.

A saída de um "boxcar" é mantida no valor da última amostra, até aumentar ou diminuir o valor da última amostra: assim a forma de onda da saída exibe uma série de degraus, ou estabelece a sua saída num nível igual ou proporcional ao módulo do pulso de entrada, e então muda sozinho quando novo

pulso for aplicado .

A forma de reconstrução da saída de um circuito hold de ordem zero é vista na fig 3.1

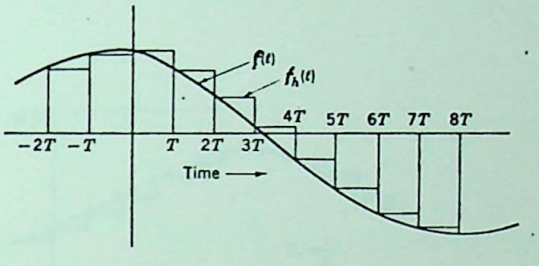


fig (3.1) Reconstrução de f(t) por um data hold de ordem zero.

Este esquema faz uma aproximação de degraus para a função original tomando valores de amostras instantaneas e mantendo-se para todo o intervalo amostrado T, como mostra a fig (3.2)

Pela fig.(3.2) vemos que um filtro adicional de passa-baixas não se faz necessário se T for suficientemente pequeno, isto é, uma razão de alta amostragem.

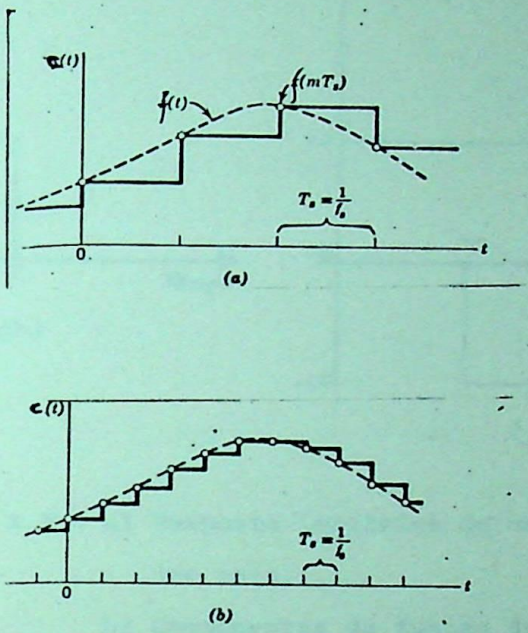


fig 3.2 - Reconstrução aproximada usando um circuito hold de ordem zero.

a) razão de baixa amostragem

b) razão de alta amostragem.

A função transferência de um circuito hold de ordem zero pode ser determinada baseada na resposta impulsiva' fig (3.3).

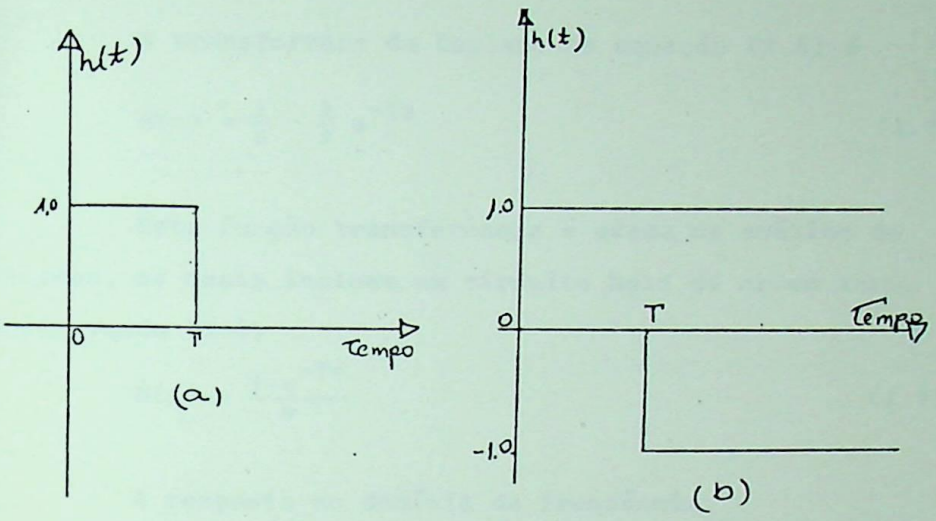


fig 3.3 - a) Resposta impulsiva de um hold de ordem zero.

b) Componentes da função de grau equivalente.

A função transferência pode também ser obtida por superposição de um degrau positivo no tempo zero, e um degrau negativo T segundos depois, onde T é o período amostrado fig(3.3).

A resposta impulsiva é dada por

$$h(t) = U(t) - U(t-T) \qquad (3.5)$$

onde $U(t)$ é a função degrau unitário.

A transformada de Laplace da equação (3.5) é

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ts} \qquad (3.6)$$

Esta função transferência é usada na análise de sistemas, os quais incluem um circuito hold de ordem zero. Reescrevendo (3.6)

$$H(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \qquad (3.7)$$

A resposta no domínio da frequência

$$H(jw) = \frac{1-e^{-jwT}}{jw} \qquad (3.8)$$

3.5 - AMPLITUDE E FASE DE UM HOLD DE ORDEM ZERO [33, 60, 82]

Reescrevendo e reagrupando os termos da equação (3.8) obtemos:

$$H(jw) = \frac{\exp(-j\frac{wT}{2})\left[\exp(j\frac{wT}{2}) - \exp(-j\frac{wT}{2})\right]}{jw} \qquad (3.9)$$

$$H(jw) = \frac{\frac{2}{w}\exp(-j\frac{wT}{2})\left[\exp(j\frac{wT}{2}) - \exp(-j\frac{wT}{2})\right]}{2j} \qquad (3.10)$$

mas

$$\text{sen } \frac{wT}{2} = \frac{\exp(j\frac{wT}{2}) - \exp(-j\frac{wT}{2})}{2j} \qquad (3.11)$$

levando (3.11) em (3.10)

$$H(jw) = \frac{2}{w}\left[\exp(-j\frac{wT}{2})\right] \text{sen } \frac{wT}{2} \qquad (3.12)$$

Obteremos $\frac{\text{sen } x}{x}$ se multiplicarmos o numerador e o denominador por T/2.

$$H(jw) = \frac{T \text{ sen } (\frac{wT}{2})}{\frac{wT}{2}} \angle -\frac{wT}{2} \qquad (3.13)$$

A resposta de frequência da amplitude e fase de H(jw) são mostrados na fig (3.4).

A resposta de frequência do hold de ordem zero é de passa-baixas com todo o corte ocorrendo para as frequências de n/T cps, onde n é um inteiro.

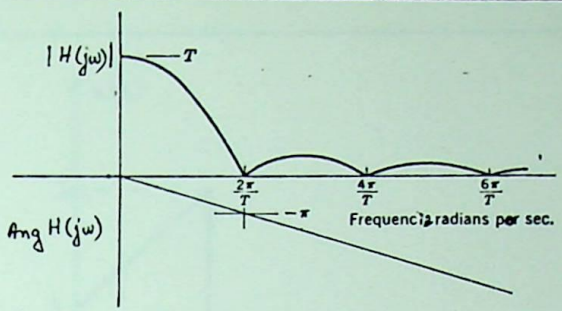


fig. 3.4 - Resposta de Frequência de Amplitude e Fase de um hold de ordem zero.

3.6 - HOLD DE PRIMEIRA ORDEM [33, 82, 84]

A função extrapolada de um hold de primeira ordem é linear, e tem uma rampa determinada pelas duas últimas amostras. fig (3.5). A resposta impulsiva de um hold de primeira ordem é visto na fig (3.6).

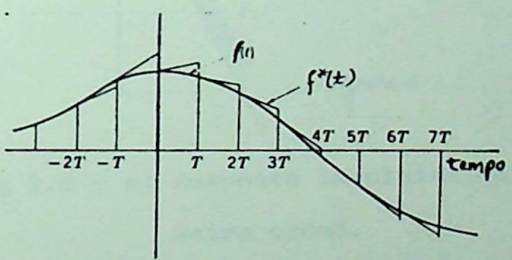


fig 3.5 - Reconstrução de f(t) por um hold de primeira ordem.

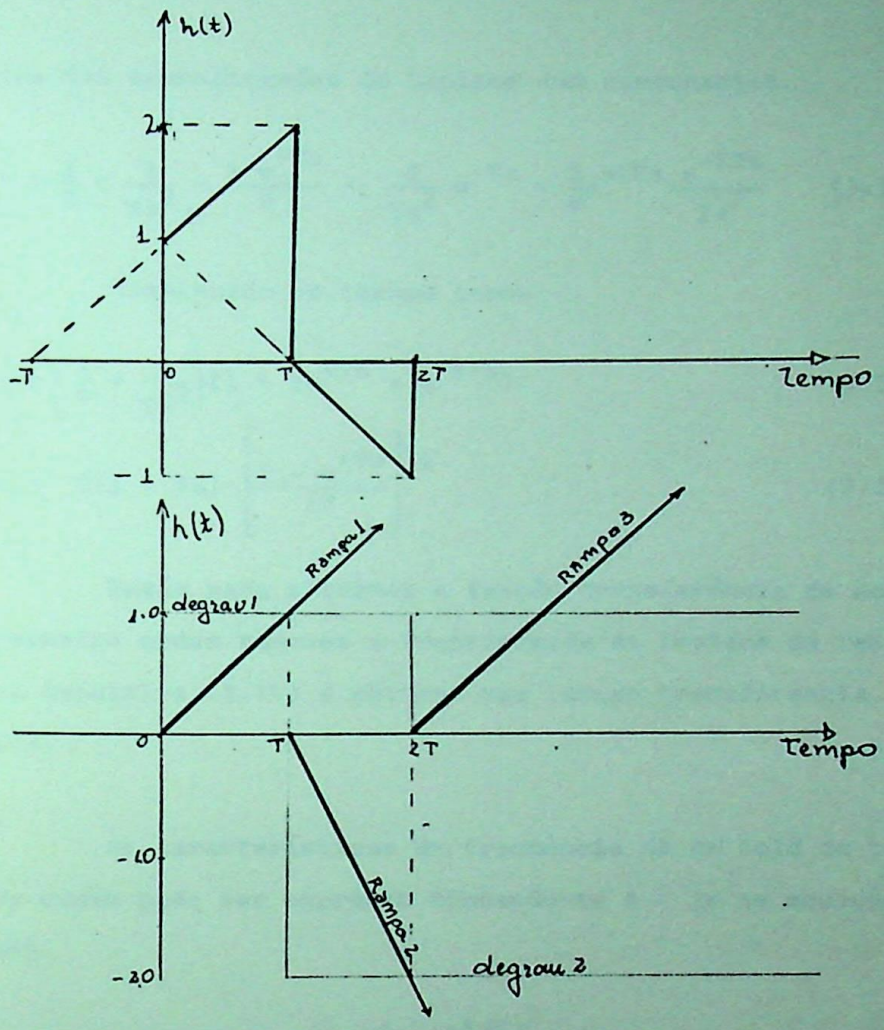


fig 3.6 - a) Resposta impulsiva de um hold de primeira ordem.

b) Componentes das Funções Degrau e Rampa equivalentes.

A transformada de Laplace da resposta impulsiva é

a soma das transformadas de Laplace dos componentes.

$$H(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{Ts^2} - \frac{2\,e^{-Ts}}{s} - \frac{2}{Ts^2}\,e^{-Ts} + \frac{1}{s}e^{-2Ts} + \frac{e^{-2Ts}}{Ts^2} \qquad (3.14)$$

Combinando os termos temos

$$H(s) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{Ts^2}\right)(1 - 2e^{-Ts} + e^{-2Ts}) \qquad (3.15)$$

$$H(s) = T(1 - Ts)\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{Ts}\right]^2 \qquad (3.16)$$

Então para obtermos a função transferência de hold de primeira ordem tomamos a transformada de Laplace da res-' posta impulsiva (3.14) e obtemos sua função transferência em (3.16).

As características da frequência de um hold de primeira ordem pode ser expresso trocando-se s = jw na equação' (3.16).

$$H(jw) = T(1+jwT)\left(\frac{1-e^{-jwT}}{jwT}\right)^2 \qquad (3.17)$$

A fim de obtermos a amplitude e características de fase, reagrupamos a equação (3.17)

$$H(jw) = T\sqrt{1+w^2T^2}\,(e^{-jwT})\,\frac{4}{w^2T^2} \times \left[\exp\frac{(j\frac{wT}{2} - \exp(-j\frac{wT}{2})}{2j}\right]^2 \angle tg^{-1}wT \qquad (3.18)$$

mas

$$\text{sen}^2 \frac{wT}{2} = \left[\frac{\exp(j \frac{wT}{2} - \exp(-j \frac{wT}{2})}{2j} \right]^2 \qquad (3.19)$$

substituindo na equação (3.18)

$$H(jw) = T\sqrt{1 + w^2T^2} \left[\frac{\text{sen} \frac{wT}{2}}{\frac{wT}{2}} \right]^2 \angle \text{tg}^{-1} wT - wT \qquad (3.20)$$

3.7 - RESPOSTA DE FREQUÊNCIA DE AMPLITUDE E FASE DE UM HOLD DE PRIMEIRA ORDEM

A resposta de frequência de amplitude para este esquema de extrapolação é análogo ao do hold de ordem zero. A resposta da equação (3.20) é vista na figura (3.7).

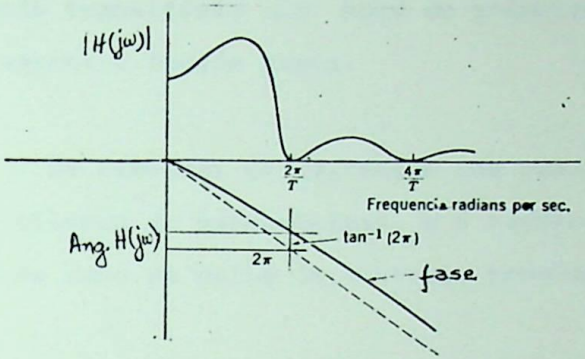


fig 3.7 - Resposta de Amplitude e Fase de um hold de primeira ordem.

O eixo de fase introduzido pelo hold de primeira ordem é aproximadamente duas vezes o do hold de ordem zero.

3.8 - CONCLUSÕES ENTRE O HOLD DE ORDEM ZERO E HOLD DE PRIMEIRA ORDEM.

A diferença de maior destaque entre as duas respostas características de frequência é que o hold de primeira ordem torna acentuada algumas frequências na faixa de passagem, enquanto que o hold de ordem zero reproduz só uma função degrau, ou sinal perfeitamente constante depois de

um período transitório ... o hold de primeira ordem reproduz' perfeitamente a função rampa.

Os sistemas de controles com realimentação são comumente filtros de passa-baixas, e o excesso de atrasos nos' desvios de fase da malha de controle provocam instabilidade.

O desvio de fase médio do hold de ordem zero é aproximadamente a metade do desvio de fase do hold de primeira ordem.

Por exemplo para $w = \frac{2\pi}{T}$ o hold de primeira ordem ' introduz um desvio de fase de $2\pi + tg^{-1} 2\pi$ (ao redor de 279^{o}) enquanto que o hold de ordem zero introduz um eixo de fase ' de -180^{o}.

Finalizando, a introdução de cada hold num sistema' de controle com realimentação, normalmente complica o problema de estabilidade e devido a isto os sistemas hold de primeira ordem, não são usuais em sistemas de controle com realimentação.

3.9 - HOLDS DE MAIS ALTA ORDEM [82, 85]

São capazes de reproduzirem perfeitamente as funções que são derivadas de mais alta ordem. Não são geralmente utilizados pelos sistemas de controle com realimentação por causarem atrasos de fases, que dificultam a estabilidade da malha.

Transmitem em maior quantidade componentes de altas frequências, aumentando o nível de ruídos do sistema. Geralmente em vista disto, os holds de ordem zero são achados adequados para muitos dos sistemas práticos.

CAPÍTULO 4

TRANSFORMADA Z.

4.1 - INTRODUÇÃO.

Na literatura da Engenharia encontramos a transformada Z, como uma ferramenta para estudar o comportamento dos sistemas de dados amostrados. Ela foi desenvolvida através de modificações da transformada de Laplace.

O desenvolvimento e a extensa aplicação da transformada Z, deve-se a utilização dos computadores digitais nos sistemas. Estes sistemas são referidos como discretos, devido a natureza discreta dos sinais ou informações que deles fluem.

Na análise de sistemas discretos no tempo por meio da transformada Z, os sinais discretos no tempo são substituídos por suas respectivas transformadas; o sistema é representado por uma "função de transferência discreta no tempo" que, como no caso contínuo, pode ser obtida pela combinação algébrica das funções de transferência discretas de seus componentes. A transformada Z da resposta discreta no tempo será igual ao produto da função de transferência do sistema pela transformada Z do sinal de entrada.

A resposta real no domínio do tempo (discreta) se

rá obtida por inversão da transformada Z da saída.

As principais diferenças entre a transformada de Laplace e a transformada Z são: a função elementar na qual os sinais são decompostos para obter a transformada Z é Z^n (Z é uma variável complexa), em vez de e^{st}; a transformada Z é definida como uma soma em vez de integral.

4.2 - DEFINIÇÃO DA TRANSFORMADA Z [1, 15, 33, 48, 82, 107]

A transformada Z de um sinal discreto f*(t) é definido como uma série de potências de Z^{-1}, cujos coeficientes são as amplitudes dos sinais discretos e descreve o comportamento do sinal para instantes de amostragem de acôrdo com Ragazzini e Zadeh [82] .

A transformada Z será deduzida em três etapas:

1º Os valores dos sinais serão dados para os determinados instantes de amostragem. (Será simbolizada com um asterístico, notação esta usada por Ragazzini e Zadeh [82], mas a adição do asterístico é supérflua, uma vez que

Z é o argumento e isto implica diretamente que a transformada está associada com a função do tempo definida para instantes de amostragem).

2º A transformada de Laplace desta sucessão de amostras é considerada como sendo F*(s), denominada transformada estrelada de S.

3º A transformada de Laplace de uma função de amostragem é: $F^*(s) \triangleq \mathcal{L}\left[f^*(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{-sTn}$ (4.1)

Torna-se conveniente fazer a substituição da variável

$$Z = e^{sT} \tag{4.2}$$

Levando (4.2) em (4.1)

$$F_1(Z) \triangleq \left\{ \mathcal{L}\left[f^*(t)\right] \right\}_{e^{sT}=Z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, Z^{-n} \tag{4.3}$$

Consideremos agora a equação (4.3) como a definição de uma nova transformada, desde que substituamos uma função de n por uma nova função de Z. Seja T=1 e então por definição:

$$\mathcal{Z}\left[f(n)\right] \triangleq F(Z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, Z^{-n}$$

$$= f(0) + f(1)\, Z^{-1} + f(2)\, Z^{-2} + \ldots. \qquad (4.4)$$

Pelos frequentes usos na engenharia, usa-se de preferência as potências negativas Z^{-n}.

Exemplo [32]

Para obter a transformada Z de f(t) = t, usamos a equação (4.4) como segue:

$$F(z) = \mathcal{Z}\left[f(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, Z^{-n}$$

$$= TZ^{-1} + 2TZ^{-2} + 3TZ^{-3} + \ldots.$$

$$= TZ^{-1}\left[1 + 2Z^{-1} + 3Z^{-2} + \ldots\right] = \frac{TZ}{(Z-1)^2} \quad \text{para} \left|Z\right| > 1$$

4.3 - TRANSFORMADA Z UNILATERAL E BILATERAL [25, 33, 82, 103]

Como no caso da transformada de Laplace podemos definir a transformada Z como:

a) Unilateral

b) bilateral

O comportamento dos sistemas de dados amostrados as vezes requer só tempo positivo, isto quando a entrada tal como uma função rampa ou degrau é aplicada, analogamente aos sistemas contínuos.

No caso em que a entrada é uma função aleatória e considerada para qualquer tempo, isto é, negativo ou positivo então usamos a transformada Z bilateral como a análoga ' transformada de Laplace bilateral.

Por definição, a transformada Z unilateral e bilateral são respectivamente

$$Z_1 \left[f(n)\right] = F_1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, Z^{-n} \qquad (4.5)$$

$$Z_2 \left[f(n)\right] = F_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{0} f(n)\, Z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, Z^{-n} - f(0)Z^{0}$$

É necessário subtrair o termo central f(0), porque ele aparece duas vezes na somatória, como o último termo da primeira somatória e como o primeiro termo da segunda somatória.

Desde que f(n) seja o coeficiente da série Z^{-n}, isto nos mostra que o desenvolvimento da forma fechada em série de potências em Z^{-n} "gerará" o sinal.

Assim a transformada Z pode ser descrita como uma função geratriz [88], para os sinais discretos aos quais corresponde e é fechadamente relacionada a função geratriz usada por Hurewioz [28]. As funções geratrizes, nas quais notamos a equivalência com a transformada Z, foram introduzidas, por Laplace e extensivamente usadas por ele em conecção com as soluções das equações diferenças. As potências negativas, Z^{-n} são mais usadas que as positivas Z_n, porque isto está de acordo com o uso mais frequente em engenharia. Na literatura matemática sobre funções geratrizes e em alguma literatura sobre sistemas de controle a dados amostrados, os coeficientes das potências positivas de Z, geralmente correspondem aos valores de f(n) para n positivo.

Se $f(n) = 0$ para $n < 0$, as transformadas unilateral e bilateral serão identicas. Se $f(n) \neq 0$ para $n < 0$ as duas definições fornecem expressões diferentes e serão contínuas para $t = nT$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ou para cada $f(nT^-)$ e $f(nT^+)$ onde ambas existem para todo n inteiro não negativo.

A transformada Z bilateral fornece informações aos

valores do sinal f(n), para todos os instantes discretos nos quais são definidos e leva informações dos valores de f(n) ' só para n não negativo.

A transformada Z unilateral

$$F_1(Z(= f(0) + f(1)\ Z^{-1} + f(2)\ Z^{-2} + \ldots . \qquad (4.6)$$

é tida como a parte principal da série de Laurents ao redor do ponto z = 0 acrescentado da constante f(0). Converge exteriormente ao círculo centrado na origem como mostra a fig 4.1

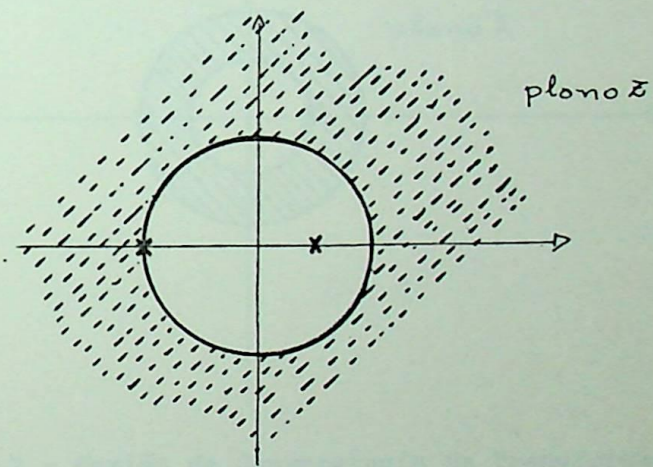


fig 4.1 - Região de Convergência da Transformada Z unilateral x = denota singularidades.

A transforamada Z bilateral

$$F_2(Z) = ... f(-2)Z^2 + f(-1)Z + f(0) + f(1)\, Z^{-1} + ... \quad (4.7)$$

também define uma série de Laurents ao redor do ponto z = 0, mas neste caso as potências positivas de Z também estão presentes; portanto ela converge no interior de um anel de centro na origem. fig (4.2)

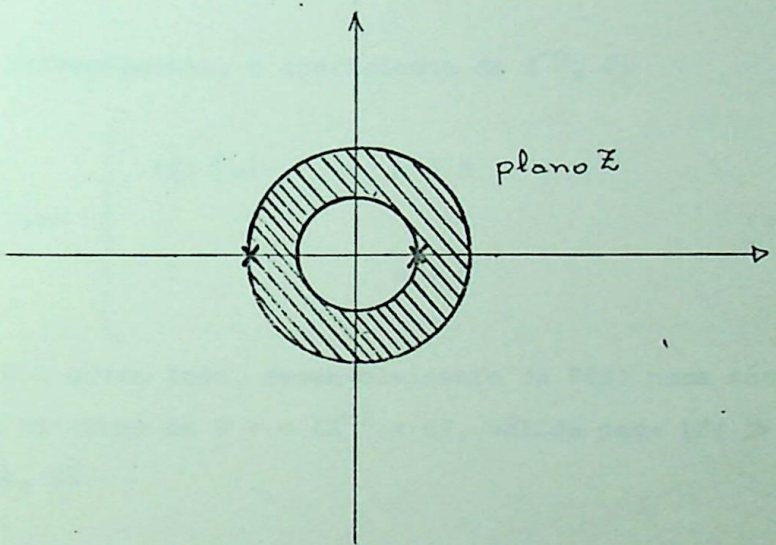


fig 4.2 - Região de Convergência da Transformada Z bilateral.

Portanto para conhecermos o sinal discreto f(n) da transformada, torna-se necessário conhecermos a transformada Z unilateral ou bilateral. Ilustraremos no seguinte exemplo

Exemplo: Considere a função

$$F(Z) = \frac{Z^2 - 4Z + 1}{Z^2 - \frac{5}{2}Z + 1} = 1 - \frac{1}{Z-2} + \frac{1/2}{Z-1/2} \qquad (4.7)$$

O desenvolvimento de F(Z) em uma série de Laurents no anel $1/2 < |Z| < 2$ dá:

$$F(Z) = ... + (\tfrac{1}{2})^2 Z^2 + \tfrac{1}{2} Z + 2 + \tfrac{1}{2} Z^{-1} + (\tfrac{1}{2})^2 Z^{-2} + ... \qquad (4.8)$$

Evidentemente, o coeficiente de Z^{-n}, é:

$$f(n) \begin{cases} (\frac{1}{2})^{|n|} & n \neq 0 \\ 2 & n = 0 \end{cases} \qquad (4.9)$$

Por outro lado, desenvolvimento de F(Z) numa série de Taylor em torno de $Z = \infty$ ($Z^{-1} = 0$), válida para $|Z| > 2$ ($|Z^{-1}| < \frac{1}{2}$), dá

$$F(Z) = 1 + \tfrac{1}{2} Z^{-1} + (\tfrac{1}{2})^2 Z^2 + ... - 2Z^{-1} - 2^2 Z^{-2} - .... \qquad (4.10)$$

e o coeficiente de Z^{-n} é

$$f(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n - 2^n & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \qquad (4.11)$$

Vemos assim que as duas expressões para f(n) são bem diferentes.

A transformada Z bilateral é primordialmente útil para questões envolvendo problemas estocásticos estacionários, em que não se pode supor f(n) = 0 para n < 0. Na maioria dos outros casos a transformada Z unilateral pode ser usada.

Usaremos neste trabalho a transformada Z unilateral sem o subscrito 1, a qual levará informações de funções do tempo correspondentes aos instantes de amostragem.

4.4 - DEDUÇÃO MATEMÁTICA DA TRANSFORMADA Z [25, 32, 82, 102, 112]

De acordo com o capítulo 2, vimos que a transformada de Laplace de um trem de impulsos f*(t) é dada pela trans

formada estrelada de s, F*(s), a qual é representada pela somatória infinita vista na equação (2.5)

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{-nTs} \qquad (4.12)$$

f(nT) = valor da função f(t) para instantes amostrados e com a condição que aproximamos um trem de pulsos por um trem de impulsos.

F*(s) contem uma frequência complexa como expoente em e^{sT}. A transformada Z é obtida fazendo a substituição

$$Z = e^{sT} \qquad (4.13)$$

$$s = (\log Z)/T \qquad (4.14)$$

A equação (4.12) é então como uma série de potências em Z.

$$F^*(s) = F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, Z^{-n} \qquad (4.15)$$

$$F^*(s) = F^*\left(\frac{\log Z}{T}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, Z^{-n} \qquad (4.16)$$

onde

$$F(z) = F^*(s) = \mathcal{L}\left[f^*(t)\right] = \mathcal{Z}\left[f(t)\right] \tag{4.17}$$

portanto

$$\mathcal{Z}\left[f(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, Z^{-n} \tag{4.18}$$

Usando a integral de contorno rigorosamente poderemos obter também as características da Transformada Z.

Como expressaremos na equação (2.1)

$$f^*(t) = f(t)\,\delta(t) \tag{4.19}$$

a função amostrada é representada como o produto de duas funções do tempo, cuja transformada de Laplace é obtida pelo processo da convolução complexa. Apliquemos o teorema da convolução complexa

$$\mathcal{L}\left[f_1(t)\, f_2(t)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(w)\, F_2(s-w)\, dw \tag{4.20}$$

de modo que

$$f_1(t) = f(t)$$

$$f_2(t) = \delta(t)$$

onde para $n \geqslant 0$

$$\delta(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \ldots.$$

Tomando a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \ldots = \frac{1}{1- e^{-Ts}} \qquad (4.21)$$

$$F_2(s-w) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-Tn(s-w)} = \frac{1}{1- e^{-T(s-w)}} \qquad (4.22)$$

logo levando a equação (4.22) em (4.20) temos

$$\mathcal{L}\left[f(t)\,\delta(t)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(w)\,\frac{1}{1- e^{-T(s-w)}}\,dw \qquad (4.23)$$

O cálculo de (4.23) [82, 113] é acompanhado através da integral de contorno pela integração da tragetória fechada ao longo do eixo imaginário para circundar a metade esquerda e a metade direita do plano e calculamos os resíduos, para os vários polos englobados.

É notado que, para sistemas estáveis, todos os polos de F(w) pertence a metade esquerda do plano s, como mostra a fig 4.3. Por outro lado, os polos do segundo termo no integrando de (4.23) são infinitos em número, ocorrendo para

a frequência complexa λm, para a qual o ângulo do termo exponencial é $m2\pi$, onde m é um inteiro. A condição para que o ângulo do termo exponencial seja multiplicado por 2π é que

$$m = s - j\frac{2\pi m}{T} \qquad (4.24)$$

para todo valor integral de m.

Então a segunda função em 4.23 tem um número infinito de polos separados por $j2\pi$, distribuídos ao longo do eixo imaginário como mostra a fig 4.3.

A tragetória de integração é distribuída ao longo do eixo imaginário pela constante C, é é mostrada na figura, através de C que mostra todos os polos de F(w) pertencentes a esquerda desta linha. Para aplicar o método dos resíduos, um contorno fechado de integração é formado abrangendo à direita ou a esquerda de C, resultando no contorno marcado F_1^2 ou F_2^2. Está visto, que se o englobamento é afetado pela direita, havendo um número infinito de polos englobados, se o englobamento é afetado pela esquerda só um número finito de polos contidos em F(w) será englobado. Esta condição resulta no número infinito ou número finito de resíduos, dependendo dos dados.

Usando o englobamento do lado direito, vemos realmente que os resíduos que resultam para os vários polos descritos por (4.24) será

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - j \frac{2\pi n}{T}) \qquad (4.25)$$

Se, agora a Tragetória de integração é fechada à esquerda, é visto na fig 4.3 que só um número finito de polos de F(w) será englobado, e que haverá um número finito de resíduos para se calcular. Se os vários polos de F(w) são designados por λ_K , então o valor da integral é dado por $2\pi j$ vezes os resíduos para aqueles polos:

$$F^*(s) = \sum_{\substack{\text{polos} \\ \text{de} \\ F(w)}} \text{res.} \left[F(\lambda_K) \frac{1}{1 - e^{-T(s - \lambda_K)}} \right] \qquad (4.26)$$

Se e^{Ts} é trocado pela variável auxiliar Z, (4.26) podè ser escrita como:

$$F(Z) = \sum_{\substack{\text{polos de} \\ F(w)}} \text{res.} \left[F(\lambda_K) \frac{1}{1 - e^{\lambda_K T} Z^{-1}} \right] \qquad (4.27)$$

Esta expressão mostra claramente, que para todos os sistemas cuja transformada de Laplace F(w) tem um número fi-

nito de polos, a transformada Z é um polinômio finito em Z ou Z^{-1}, Também notamos que a ordem do polinômio em Z não é de maior ordem do que em w.

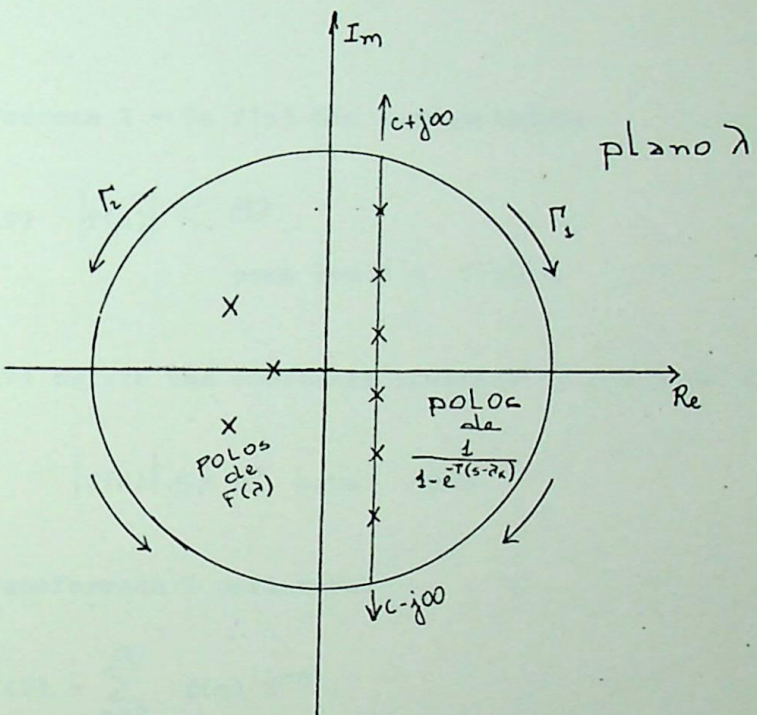


fig 4.3 - Contorno usado no cálculo da integral de

convolução complexa.

4.5 - CONVERGÊNCIA [92]

Teorema 1 - Se f(n) tem a propriedade

1º) $|f(n)| < \infty$

para todo n finito.

2º) Existe uma constante positiva N, r e K tal que

$$|f(n)| \leq K\, r^n \quad \text{para} \quad n \geq N$$

então a transformada Z unilateral

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, Z^{-n}$$

converge absolutamente para $\rho = |Z| > r$

Prova:

Seja $$F(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, Z^{-n} + \sum_{n=N}^{\infty} f(n)\, Z^{-n} \qquad (4.28)$$

Assim $$\left|F(Z)\right| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left|f(n)\right| \rho^{-n} + \sum_{n=N} \left|f(n)\right| \rho^{-n} \qquad (4.29)$$

Pela propriedade 1, existe um número M (o qual pode depender de N) tal que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left|f(n)\right| \rho^{-n} \leq M \sum_{n=0}^{N-1} \rho^{-n} \qquad (4.30)$$

Pela propriedade 2,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left|f(n)\right| \rho^{-n} \leq K \sum_{n=N}^{\infty} (r/\rho)^n \qquad (4.31)$$

$$\left|F(Z)\right| \leq M \frac{1 - \rho^{-n}}{1 - \rho^{-1}} + K \sum_{n=K}^{\infty} (r/\rho)^n \qquad (4.32)$$

A primeira soma é finita para todo ρ e $N<\infty$, e a segunda soma a qual é uma série geométrica é finita para todo $\rho > r$. c.q.d.

Observação: - O menor valor de r tal que F(Z) converge absolutamente para $\rho = |Z| > r$ é chamado raio de absoluta convergência de F(Z) e denotado por ρa. O raio de absoluta convergência é análogo a abscissa de convergência absoluta da transformada de Lapalce.

Teorema 2 - Se F(Z) converge absolutamente quando $|z| > \rho_a$, então F(Z) converge uniformimente quando $|z| > \rho_a$ e F(Z) é analítica na região $\rho > \rho_a$.

Na 2ª parte deste teorema vemos que as singularidades de F(Z) precisam petencer ao interior ou a um círculo de raio ρ_a centrado na origem. Em geral, o círculo passa atraves das singularidades de F(Z) a qual é a maior distância da origem.

4.6 - INVERSÃO DA TRANSFORMADA Z [45, 51, 73, 82, 91]

A função discreta f(t) para t = nT ou f(nT) pode ser obtida de F(Z) por um processo chamado Transformada Z inversa. Este processo é simbolicamente denotado por:

$$f(nT) = \mathcal{Z}^{-1} F(z) \qquad (4.33)$$

onde F(Z) é a transformada Z de f(t) ou f(nT).

O método utilizado para obtermos a transformada Z inversa é consequência da conveniência, a seguir discutire -

mos os vários métodos.

1º) Método: Tabela

O método mais simples é consultar uma Tabela. Ver apendice .

2º) Método da série de Potências

Quando F(Z) é dado como uma função analitica para $|Z| > R$ (e para $Z = \infty$), o valor de f(nT) pode ser realmente obtido como o coeficiente de Z^{-n} na expansão em série de potências (série de Taylor) de F(Z) como uma função de Z^{-1}.

Mas desde que F(Z) pode ser expandido da seguinte maneira;

$$F(Z) = f(0T) + f(T)\, Z^{-1} + \ldots f(KT)\, Z^{-K} + \ldots + f(nT)\, Z^{-n} + \ldots \qquad (4.34)$$

e se F(Z) é dado como a razão de dois polinômios em Z^{-1}, os coeficientes f(0T), ..., f(nT) são obtidos como segue:

$$F(Z) = \frac{p_o + p_1 Z^{-1} + p_2 Z^{-2} + \ldots + p_n Z^{-n}}{q_o + q_1 Z^{-1} + q_2 Z^{-2} + \ldots + q_n Z^{-n}} \qquad (4.35)$$

$$= f(0T) + f(T)\, Z^{-1} + f(2T)\, Z^{-2} + \ldots$$

onde

$$p_o = f(0T)\, q_o$$

$$p_1 = f(T)\, q_o + f(0T)\, q_1 \qquad (4.36)$$

$$\vdots$$

$$p_n = f(nT)\, q_o + f(n-1)\, Tq_1 + f(n-2)\, Tq_2 + \ldots +$$

$$\ldots + f(0T)\, q_n$$

Observamos que f(nT) pode ser obtido pela divisão sintética do numerador pelo denominador.

Exemplo [82]

Obter a transformada Z inversda de F(Z).

$$F(Z) = \frac{1}{1 - 1,2\, Z^{-1} + 0,2\, Z^{-2}} \qquad (4.37)$$

Expandindo em série de potências por longa divisão

$$1 - 1,2\,Z^{-1} + 0,2\,Z^{-2} \;\Big|\; \frac{1}{1+1,2\,Z^{-1}+1,24\,Z^{-2}+1,248\,Z^{-3}+\ldots}$$

$$\underline{1}$$

$$-1,2\,Z^{-1} + 0,2\,Z^{-2}$$

$$\underline{1,2\,Z^{-1} - 1,44\,Z^{-2} + 0,24\,Z^{-3}}$$

$$1,24\,Z^{-2} - 0,24\,Z^{-3}$$

$$\underline{-1,24\,Z^{-2} - 1,488\,Z^{-3} + 0,248\,Z^{-4}}$$

$$1,248\,Z^{-3} \ldots\ldots\text{etc}$$

3º) Método da Expansão em Fração Parcial

Se F(Z) é uma função racional de Z, analítica no ∞, pode ser expressa pela expansão em fração parcial.

$$F(Z) = F_1(Z) + F_2(Z) + F_3(Z) + \ldots \qquad (4.38)$$

A inversa desta equação f(nT) pode ser obtida como a soma das inversas individuais obtidas da expansão, isto é:

$$f(nT) = \mathcal{Z}^{-1}\,F(Z) = \mathcal{Z}^{-1}\left[F_1(Z)\right] + \mathcal{Z}^{-1}\left[F_2(Z)\right] + \ldots \qquad (4.39)$$

4º) Método: Fórmula da Integral Complexa

Podemos também representar o coeficiente f(nT) como

uma integral complexa. Desde que F(Z) pode ser vista como uma série de Laurents, podemos multiplicar F(Z) na equação (4.34) por Z^{n-1} e integrarmos ao redor do círculo no qual $|Z| = R_o$, $R_o > R$ ou qualquer trajetória fechada simples ou exterior do local onde F(Z) é analítica. A integral resulta, $2\pi j$ vezes o resíduo do integrando, o qual é, neste caso, f(nT) o coeficiente de Z^{-1}. Assim

$$\oint_{\Gamma} F(Z)\, Z^{n-1}\, dZ = f(nT) \cdot 2\pi j \qquad (4.40)$$

ou

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(Z)\, Z^{n-1}\, dZ \qquad (4.41)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

O contorno Γ engloba todas as singularidades de F(Z) como mostra a fig 4.4

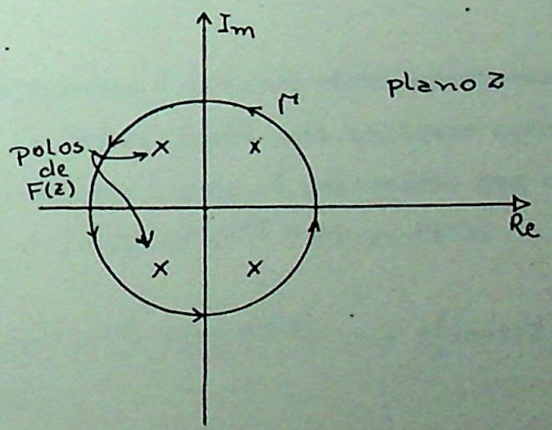


fig 4.4 - Contorno de integração no plano Z

O contorno da integral na fig (4.41) pode ser calculado quando F(Z) tem só singularidades isoladas com o uso da fórmula da integral de Cauchy.

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(Z)\, Z^{-n-1} dZ = \sum \text{resíduos de } F(Z)\, Z^{n-1} \quad (4.42)$$

Em geral se a integral I for definida por

$$I = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} Z^{n}\, dZ \quad (4.43)$$

onde Γ é um contorno fechado o qual engloba a origem do plano Z então

$$\begin{aligned} I &= 0 \qquad K > -1 \\ I &= 1 \qquad K = -1 \\ I &= 0 \qquad K < -1 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Esse teorema é provado considerando-se um círculo de contorno e generalizado para qualquer outro contorno que englobe a origem. Donde, é necessário que o contorno inclua todos os polos de Z^{n-1} F(Z) ou F(Z).

$$F(Z)\, Z^{n-1} = f(0)\, Z^{-1} + f(T)\, Z^{n-2} + \ldots + f\left[(n-1)T\right] Z^{-0} + f(nT) Z^{-1} + \ldots \quad (4.45)$$

onde

f(nT) soma dos resíduos do produto $F(Z)\ Z^{n-1}$ e seus polos , dentro do círculo de convergência de F(Z).

Quando n=0, $F(Z)\ Z^{n-1}$ pode ter um polo na origem e então o resíduo de $F(Z)\ Z^{-1}$ precisa ser calculado. O mapeamento do eixo imaginário do plano s pode ser visto como um círculo unitário do plano Z, e os polos de F(s) para um sistema estável são localizados à esquerda do eixo imaginário , os polos de F(Z) estão contidos no interior do círculo unitário. Usualmente o contorno fechado é tomado como um círculo unitário.

Generalizemos o círculo unitário para um círculo de raio e^{cT}, onde c é a abscissa de convergência nos limites da integral inversa da transformada de Laplace. O contorno no plano s vai de $c-j\infty$ até $c+j\infty$, isto é, uma linha vertical distando c a direita do eixo imaginário mas

$$Z = e^{Ts} \tag{4.46}$$

substituindo

$$s = c + jw \tag{4.47}$$

obtemos

$$Z = e^{cT}\ e^{jwT} = e^{cT}(\cos wT + j \operatorname{sen} wT) \tag{4.48}$$

O eixo imaginário ou vertical do plano s é dividido

em faixas de largura ws/4; onde ws = $\frac{2\pi}{T}$

Para $w = ws/4$

$$e^{jwT} = e^{j\pi/2} \tag{4.49}$$

Para $w = -ws/4$

$$e^{jwT} = e^{-j\pi/2} \tag{4.50}$$

Para $w = ws/2$

$$e^{jwT} = e^{j\pi} \tag{4.51}$$

Para $w = 3\ ws/4$

$$e^{jwT} = e^{j3\pi/2} \tag{4.52}$$

Para $w = ws$

$$e^{jwT} = e^{j2\pi} \tag{4.53}$$

O contorno de $c - j\infty$ até $c+j\infty$ é mapeado no círculo com raio e^{cT}. Para $c = 0$ o círculo é unitário. Ver fig (4.5)

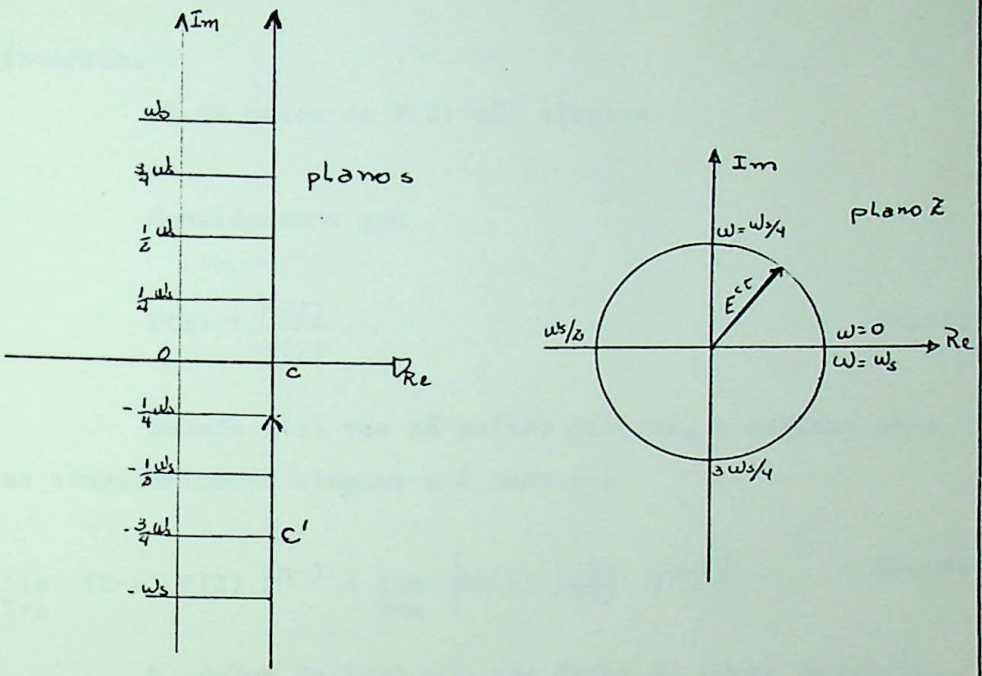


fig 4.5 - Mapeamento de c' do plano s no círculo do plano Z.

Portanto provamos a equação (4.42)

$$f(nT) = \sum \text{resíduos de } F(Z)\, Z^{n-1} \qquad (4.54)$$

Os seguintes casos são discutidos para a fórmula da

inversão.

a) Os polos de F(Z) são simples.

Consideremos que

$$F(z) = \frac{H(Z)}{G(Z)} \tag{4.55}$$

Quando G(Z) tem só raízes simples, o resíduo para as singularidades simples a é dado por

$$\lim_{Z \to a} (Z-a)\, F(Z)\, Z^{n-1} = \lim_{Z \to a} \left[(Z-a)\, \frac{H(Z)}{G(Z)}\, Z^{n-1} \right] \tag{4.56}$$

b) Polos de F(Z) não são dados na forma fatorada, mas são simples.

O resíduo para uma singularidade a_m é

$$\left[\frac{H(Z)}{G(Z)}\, Z^{n-1} \right]_{Z=a_m} \tag{4.57}$$

onde

$$G(Z) = \frac{d\, G(Z)}{dZ} \tag{4.58}$$

4.7 - PARES DE TRANSFORMADA Z [1, 32, 33, 40, 81, 82]

Análoga a tabela de pares de transformada de Laplace, podemos construir uma tabela de pares de transformada Z

Para sinplificar a notação adotaremos f(t) para representar uma função contínua em conecção com o par de transformada de Laplace e o símbolo f*(t) para significar a função amostrada, a qual é descrita para os diferentes instantes amostrados em conecção com a transformada Z. Definimos

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) \tag{4.59}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) \tag{4.60}$$

$$\mathcal{Z}\left[f(t)\right] = F(Z) \tag{4.61}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[F(Z)\right] = f(nT) \text{ ou } f^*(t) \tag{4.62}$$

A transformada Z inversa nos dá f*(t) ou f(nT) e não pode unicamente determinar f(t) de f*(t).

Portanto, é importante notar que a "inversa da ,

transformada Z não é única", [81 pp. 226]

Ver tabela de pares de transformada no apendice

4.8 - PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA Z [1, 11, 15,25, 32, 33, 82]

4.8.1 - LINEARIDADE - TEOREMA DA LINEARIDADE

Sejam $f_1(t)$ e $f_2(t)$ funções com as respectivas transforamdas Z, $F_1(Z)$ e $F_2(Z)$, então a transformada Z de $f(t) = f_1(t) \pm f_2(t)$ é dada pela soma ou diferença das transformadas $F_1(Z)$ e $F_2(Z)$.

Seja Z um operador linear no espaço linear de todas as funções transformáveis $\mathcal{Z}[f(t)]$, $(t \geqslant 0)$ [10]

Para todas as constantes c_1 e c_2

$$\mathcal{Z}\left[c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_1 f_1(nT) \pm c_2 f_2(nT)\right] Z^{-n}$$

$$= c_1 \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT)\, Z^{-n} \pm c_2 \sum_{n=0}^{\infty} f_2(nT)\, Z^{-n}$$

$$= c_1 \mathcal{Z}\left[f_1(t)\right] \pm c_2 \mathcal{Z}\left[f_2(t)\right]$$

$$= c_1 F_1(Z) \pm c_2 F_2(Z) \qquad (4.63)$$

4.8.2 - TEOREMA DE SHIFTING

4.8.2a) "Shift Forward", (Avanço)

Se $\mathcal{Z}\left[f(t)\right] = F(Z)$,

$$\mathcal{Z}\left[f(n+1)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)\, Z^{-n} = \mathcal{Z} \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) Z^{-(n+1)}$$

(4.64)

Façamos uma mudança na variável da somatória

$$K = n + 1$$

então

$$\mathcal{Z}\left[f(n+1)\right] = \mathcal{Z} \sum_{K=1}^{\infty} f(K)\, Z^{-K}$$

$$= Z\left[f(1)\, Z^{-1} + f(2)\, Z^{-2} + \ldots\right] \qquad (4.65)$$

Podemos fazer a soma a partir de K = 0 pela adição

e subtração do mesmo termo:

$$\mathcal{Z}\left[f(n+1)\right] = Z\left[-f(0) + f'0) + f(1)Z^{-1}+f(2)Z^{-2}+ \ldots..\right]$$

$$\mathcal{Z}\left[f(n+1)\right] = -Z\ f(0) + Z\sum_{K=0}^{\infty} f(K)Z^{-K}=ZF(Z) - Z\ f(0) \quad (4.66)$$

O par de operação é

$f(n+1)$	$Z\ F(Z) - Z\ f(0)$

De modo análogo o teorema de Shifting pode ser ex - tendido para os pares:

$f(n+2)$	$Z^2F(Z) - Z^2\ f(0) - Z\ f(1)$
$f(n+3)$	$Z^3F(Z) - Z^3\ f(0) - Z^2\ f(1) - Z\ f(2)$
$f(n+a)$, a 0	$Z^aF(Z)- Z^af(0)-Z^{a-1}f(1)...-Zf(a-1)$ (4.67)

Verificamos então que:

a) A operação shifting é transformada em operações algébricas em Z.

b) as condições iniciais são introduzidas.

Generalizando temos

$$\mathcal{Z}\left[f(n+a)\right] = \sum_{j=a}^{\infty} f(j)\, Z^{-j+a} = Z^{a} \sum_{j=a}^{\infty} f(j)\, Z^{-j}$$

$$= Z^{a}\left[\sum_{j=a}^{\infty} f(j)\, Z^{-j} - \sum_{j=0}^{a-1} f(j)\, Z^{-j}\right]$$

$$= Z^{+a}\left[F(Z) - \sum_{j=0}^{a-1} f(j)\, Z^{-j}\right] \qquad (4.68)$$

Quando o deslocamento está na direção oposta remos:

4.8.2b) Bacward Shift (atraso)

$$\mathcal{Z}\left[f(n-a)\, U(n-a)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n-a)\, U(n-a)\, Z^{-n}$$

$$= Z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} f(n-a)\, U(n-a)\, Z^{-(n-a)} \qquad (4.69)$$

Seja

$$K = n - a$$

a mudança na variável da somatória.

$$\mathcal{Z}\left[f(n-a)\, U(n-a)\right] = Z^{-a} \sum_{K=-a}^{\infty} f(K)\, U(K)\, Z^{-K}$$

$$= Z^{-a} \sum_{K=0}^{\infty} f(K)\, Z^{-K} = Z^{-a}F(Z) \qquad (4.70)$$

O degrau unitário torna igual a zero todos os termos com K negativo, como requerido para unicidade.

4.8.3 - MULTIPLICAÇÃO POR n

$$\mathcal{Z}\left[n\ f(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)\ Z^{-n} = -Z \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \left[-nZ^{-n-1}\right] \qquad (4.71)$$

O termo do colchete é uma derivada com respeito a Z

$$\mathcal{Z}\left[nf(n)\right] = -Z \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{d}{dZ} Z^{-n}$$

$$= -Z \frac{d}{dZ} \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\ Z^{-n} = -Z \frac{d}{dZ} F(Z) \qquad (4.72)$$

4.8.4 - MUDANÇA DE ESCALAR

Seja

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[F(\frac{Z}{a})\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\ (\frac{Z}{a})^{-n}\right]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[F(\frac{Z}{a})\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a^n\ f(n)\ Z^{-n}\right]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[F\left(\frac{Z}{a}\right)\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{Z\left[a^n\ f(n)\right]\right\}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[F\left(\frac{Z}{a}\right)\right] = a^n\ f(n) \qquad (4.73)$$

4.8.5 - CONVOLUÇÃO

A transformada Z da somatória da convolução é o produto da transformada Z das duas funções.

Se o sistema é causal e invariante e se a entrada inicia-se em n=0, temos

$$y(n) = \sum_{K=0}^{n} x(K)\ h(n-K) \qquad (4.74)$$

a qual é chamada um somatório de convolução [91], pois ela envolve as mesmas operações (girar, deslocar, multiplicar e somar)que as de uma integral de convolução.

Para provar esta propriedade, começamos com a soma de convolução (4.74), correspondente à saída de um sistema causal invariante no tempo, com entrada x(n) começando em n=0, e com resposta h(n) à função unidade.

Tomando a transformada Z de ambos os lados em 4.74 obtemos

$$\mathcal{Z}\left[y(n)\right] = Y(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n} \sum_{K=0}^{n} h(n-K)\ x\ (K)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n} \sum_{K=0}^{\infty} h(n-K)\ x\ (K)$$

invertendo a ordem das somatórias

$$Y(Z) = \sum_{K=0}^{\infty} x(K) \sum_{n=0}^{\infty} h(n-K)\ Z^{-n}$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} x(K)\ Z^{-n} \sum_{l=-K}^{\infty} h(l)\ Z^{-l}$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} x(K)\ Z^{-K} \sum_{l=0}^{\infty} h(l)\ Z^{-l} \qquad (4.75)$$

pois por hipotese $h(l) = 0$ para $l < 0$

Assim, a transformada Z da soma de convolução é o produto, das transformadas Z das duas funções. Pode-ser observado que se a transformada Z bilateral fosse usada, h(n) não teria de corresponder a um sistema causal e x(n) não teria de começar em n=0.

4.8.6 - Somatória Finita $\left[1, 33, 102\right]$

Seja

$$\sum_{K=0}^{n} f(K) \triangleq g(n) \tag{4.76}$$

calculemos

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{K=0}^{n} f(K)\right]$$

poderemos escrever uma relação entre valores sucessivos de uma soma

$$g(n) = g(n-1)\ U\ (n-1) + f(n) \tag{4.77}$$

Essa equação diferença pode ser transformada usando-se a equação (4.70).

Definimos

$$G(Z) \triangleq \mathcal{Z}\left[g(n)\right] \tag{4.78}$$

$$F(Z) \triangleq \mathcal{Z}\left[f(n)\right] \tag{4.79}$$

e a equação (4.77) torna-se

$$G(Z) = Z^{-1} \cdot G(Z) + F(Z) \tag{4.80}$$

resolvendo (4.80) temos

$$G(Z) = \frac{F(Z)}{1 - Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-1} F(Z) \tag{4.81}$$

logo temos o par

$$\sum_{K=0}^{n} f(K) \quad \Bigg| \quad \frac{Z}{Z-1} F(Z)$$

4.8.7 - PRODUTO DE DUAS FUNÇÕES [33]

$$\mathcal{Z}\left[f(n)\, g(n)\right] \triangleq \sum_{n=0} f(n)\, g(n)\, Z^{-n} \tag{4.82}$$

Pela integral da inversão

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F(w)}{w}\, w^{n}\, dw \tag{4.83}$$

onde Γ é um contorno que engloba as singularidades do integrando. (vide item 4.6).

Aplicando 4.83 em (4.82)

$$\mathcal{Z}\left[f(n)\ g(n)\right] = \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\ Z^{-n} \quad \frac{F(w)}{w}\ w^{n} dw \qquad (4.84)$$

As condições realmente impostas em f(n) e g(n) no ' teorema 1 (convergência) são suficientes para permitir uma ' troca na ordem da integração e soma.

Assim

$$\mathcal{Z}\left[f(n)\ g(n)\right] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F(w)}{w} \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\ (Zw^{-1})^{-n} dw \qquad (4.85)$$

A somatória em (4.85) é reconhecida como $G(Zw^{-1})$ e converge uniformemente para $|Zw^{-1}| > \rho_g$, onde ρ_g é o raio de absoluta convergencia de $G(Zw^{-1})$.

Assim $G(Zw^{-1})$ converge para $|w| \angle |z| / \rho_g$.

Desde que F(w) converge para $|w| > \rho_f$, onde ρ_f é o raio de convergência da integral (4.85) é anular a qual separa as singularidades de $F(w)/w$ e estas de $G(Zw^{-1})$

Assim

$$\mathcal{Z}\left[f(n)\ g(n)\right] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F(w)\ G(Zw^{-1})}{w} dw \qquad (4.86)$$

4.9 - TEOREMA DO VALOR INICIAL [33, 48]

O valor inicial de uma sequência de pulsos pode ser obtida da função F(Z) a qual pode ser expandida em uma série de potências de Z^{-1}.

$$F(Z) = f(0) + \frac{f(1)}{Z} + \frac{f(2)}{Z^2} + \ldots + \frac{f(nT)}{Z^n} + \ldots. \qquad (4.89)$$

Fazendo Z tender ao infinito, obtemos só o primeiro termo da equação (4.89)

O teorema do valor inicial da transformada Z é então dado por

$$f(0) = \lim_{Z \to \infty} F(Z) \qquad (4.90)$$

4.10 - TEOREMA DO VALOR FINAL [32, 33, 82]

Para provar o teorema do valor final usaremos o método da derivada para a transformada de Laplace, seja!

$$\mathcal{Z}\left[f(n+1) - f(n)\right] = \lim_{n \to \infty} \sum_{K=0}^{n} \left[f(K+1) - f(K)\right] Z^{-K} \qquad (4.91)$$

de acordo com a equação (4.90) escrevemos a transformada de ambos os lados:

$$ZF(Z) - Zf(0) - F(Z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=0}^{n} \left[f(K+1) - f(K)\right]Z^{-n} \qquad (4.92)$$

Fazendo $Z \to 1$ em ambos os lados de (4.92)

$$\lim_{Z\to 1} (Z-1)\, F(Z) - f(0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=0}^{n} \left[f(K+1) - f(K)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left[f(1)-f(0)\right] + \left[f(2)-f(1)\right] + \ldots\ldots + \right.$$

$$\left. + \left[f(n) - f(n-1)\right] + \left[f(n+1)-f(n)\right] \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[-f(0) + f(n+1)\right] = -f(0)+f(\infty)$$

(4.93)

então quando existe o limite temos:

$$f(\infty) = \lim_{Z\to 1} (Z-1)\, F(Z) \qquad (4.94)$$

Portanto o teorema do valor final pode ser estabelecido como uma consequência do limite da equação (4.93), onde $f(\infty)$ é o valor final da amostra da sequência $f^*(t)$ cuja transformada Z é $F(Z)$.

4.11 - FUNÇÕES DE SINGULARIDADES [13, 33]

A função unitária delta é definida por

$$\delta(K) \begin{cases} 1 & \text{para} \quad K=0 \\ 0 & \text{para} \quad K \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\left[\delta(K)\right] = \sum_{K=0}^{\infty} 1\, Z^{-K} = Z^{-0} = 1 \tag{4.95}$$

A função degrau discreto é definida como:

$$\mu(K) \begin{cases} 0 & K < 0 \\ 1 & K \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.96}$$

$$\mathcal{Z}\left[\mu(K)\right] = \sum_{K=0}^{\infty} \mu(K)\, Z^{-K} = \sum_{K=0}^{\infty} Z^{-K} \tag{4.97}$$

$\sum_{K=0}^{\infty} Z^{-K}$ converge para $\frac{Z}{Z-1}$ quando $|Z| > 1$

$$\mathcal{Z}\left[\mu(K)\right] = \frac{Z}{Z-1} \tag{4.98}$$

4.12 - MULTIPLICAÇÃO COMPLEXA (CONVULAÇÃO REAL)

Se $f_1(t)$ e $f_2(t)$ tem as transformadas Z, $F_1(Z)$ e $F_2(Z)$ então

$$F_1(Z)\ F_2(Z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{K=0}^{n} f_1(KT)\ f_2(n-K)T\right]$$

Prova: Por definição

$$F_1(Z)\ F_2(Z) = \sum_{K=0}^{\infty} f_1(KT)\ Z^{-K}\ F_2(Z)$$

Mas da equação

$$\mathcal{Z}\left[f(t-nT)\mu(t-nT)\right] = Z^{-n} \sum_{K=0}^{\infty} f(KT)\ Z^{-K}$$

$$= Z^{-n}\ F(Z)$$

do teorema de Shifting vem:

$$Z^{-K}\ F_2(Z) = \mathcal{Z}\left[f_2(t-KT)\right]$$

Assim

$$F_1(Z)\ F_2(Z) = \sum_{K=0}^{\infty} f_1(KT)\ \mathcal{Z}\left[f_2(t-KT)\right]$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} f_1(KT) \sum_{n=0}^{\infty} f_2\left[(n-K)T\right] Z^{-n}$$

Mas $f(nT) = 0$ para $n < 0$ e portanto

$$F_1(Z)\ F_2(Z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{K=0}^{n} f_1(KT)\ f_2(n-K)T\right] \qquad (4.99)$$

4.13 - FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA AMOSTRADA OU FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA PULSADA [4, 26, 29, 80, 82]

Na análise de sistemas lineares o conceito de maior valor é o de função transferência, a qual relaciona a saída e a entrada do sistema.

A transformada de Laplace de uma resposta impulsiva é a função transferência de um sistema contínuo, cuja execução é descrita por um conjunto de equações lineares com coeficientes constrantes.

A transformada Z de uma resposta impulsiva é definida como a função transferência amostrada, ou função transferência pulsada do sistema linear amostrado. A dedução da função transferência pulsada utiliza a somatória de convolução , tal como a dedução da função transferência contínua utiliza a integral de convolução.

Para a dedução usaremos o esquema da fig 4.6.

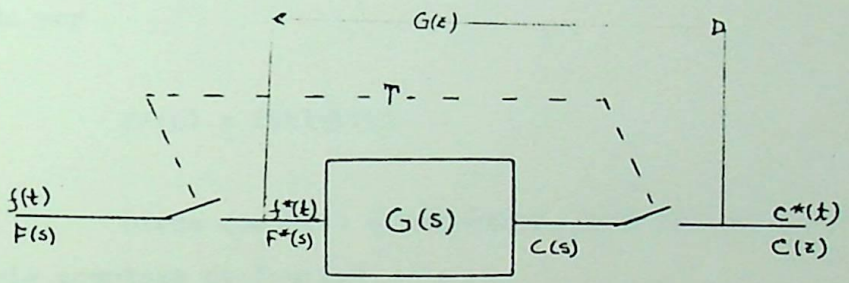


fig 4.6 - Sistema Linear pulsado mostrando a definição de função de transferência pulsada.

Uma sequência pulsada f*(t) é aplicada a entrada do elemento contínuo, o qual tem uma função transferência G(s), a saída é sincronizadamente amostrada para produzir a sequência de saída c*(t).

Se F(Z) e C(Z) são as transformadas Z das sequências de entrada e saída, respectivamente, então G(Z) é a função transferência pulsada que as relaciona. A transformada Z de g(t) é

$$G(Z) = \mathcal{Z}\left[g(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT)\, Z^{-n} \qquad (4.100)$$

De acordo com a equação (2.1) a função amostrada é dada por

$$f^*(t) = f(t)\,\delta(t) \qquad (4.101)$$

Desde que $\delta(t)$ é periódica, pode ser expandido numa série complexa de Fourier

$$\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jnw_s t) \qquad (4.102)$$

onde $w_s = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência de amostragem em radianos por segundo.

Os coeficientes de Fourier C_n nos é dado por

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \exp(-jnw_s t)\, dt = \frac{1}{T}\int_{0-}^{0+} \delta(t)\, dt$$

$$C_n = \frac{1}{T} \qquad (4.103)$$

Substituindo a equação (4.103) na equação (4.102), dá:

$$\delta(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(jnw_s t) \qquad (4.104)$$

logo

$$f^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \exp(jnw_s t) \qquad (4.105)$$

Tomando a transformada de Laplace

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s+jnw_s) \qquad (4.106)$$

Usamos o sinal "mais" no lugar do sinal "menos" na translação complexa, pois n é limite de menos infinito para mais infinito.

A transformada de Laplace de c(t) nos é dado por

$$C(s) = G(s)\, F^*(s) \qquad (4.107)$$

C(s) é uma função contínua apesar de F*(s) ser amostrada pois

$$c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(t-nT)\, f(nT) \qquad (4.108)$$

A transformada de Laplace da função amostrada é da-

da pela somatória dos termos envolvendo a transformada de Laplace da função original com a translação complexa.

Na simples representação da fig 4.6, consideramos que as chaves são sincronizadas, isto é os números de saída são liberados simultaneamente com o ingresso de um novo número.

Se houver um atraso significante na saída, o número de saída será sincronizado por um tempo fixado pelo número de entrada

Então

$$C^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s+jnw_s)\, F^*(s+jnw_s) \qquad (4.109)$$

$F^*(s)$ é uma função periódica

$$F^*(s) = F^*(s + jnw_s) \qquad (4.110)$$

Podemos reescrever a equação (4.109) como:

$$C^*(s) = F^*(s)\, \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jnw_s) \qquad (4.111)$$

Mas pela equação (4.110) temos:

$$C^*(s) = F^*(s)\, G^*(s) \qquad (4.112)$$

ou

$$C(Z) = F(Z)\, G(Z) \qquad (4.113)$$

onde

G(Z) é a função transferência pulsada ou amostrada.

$$G(Z) = \frac{C(Z)}{F(Z)} \qquad (4.114)$$

Um componente particular da saída é a resposta impulsiva resultando da n-ésima amostra f(nT) como vemos na fig (4.7)

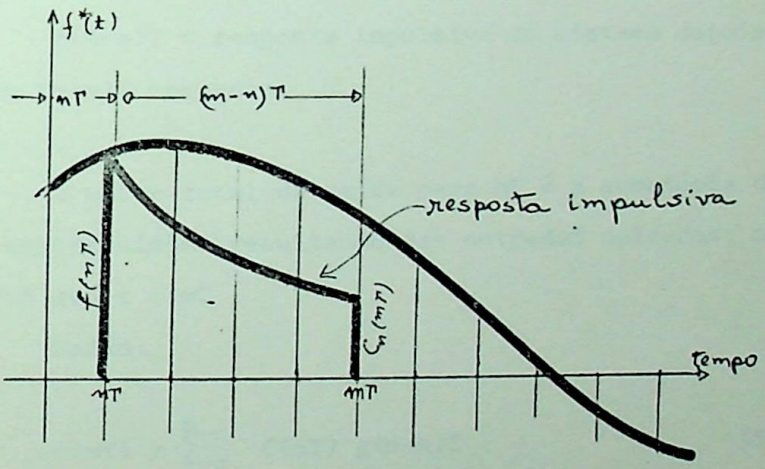


fig (4.7) - Contribuição de f(nT) para m-esima saída pulsada de um sistema linear cuja , função transferência é G(s).

A figura nos mostra a contribuição da saída resultante da aplicação de um impulso cuja área é f(nT) sendo amostrada para o m-ésimo instarte [82].

Esta contribuição para o valor total da saída da amostra c(mT) é denominada $C_n(mT)$ e é dada por

$$C_n(mT) = f(nT)\, g(m-n)T \qquad (4.115)$$

onde

g(m-n)T = resposta impulsiva do sistema depois de passarem (m-n)T segundos.

O valor total da saída para mT é a somatória de todas as contribuições resultando das entradas pulsadas, na faixa de t=0 até t = mT

Então:

$$c(mT) = \sum_{n=0}^{m} f(nT)\, g(m-n)T \qquad (4.116)$$

Podemos extender o limite para o infinito pois, a resposta impulsiva é zero para todos os argumentos negativos. Assim

$$C(mT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, g(m-n)T \qquad (4.117)$$

Esta somatória é análoga a da integral de convolução nos sistemas contínuos e é referida como soma de convolução.

Desde que a função transferência pulsada é a relação entre a transformada estrela de s da entrada e saída do sistema.

$$C^*(s) = F^*(s)\, G^*(s) \tag{4.118}$$

ou é a relação da transformada Z entre a entrada e saída do sistema

$$C(Z) = F(Z)\, G(Z) \tag{4.119}$$

podemos definir C(Z) como

$$C(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} c(mT)\, Z^{-m} \tag{4.120}$$

Substituindo (4.116) em (4.120)

$$C(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, g(m-n)T Z^{-m} \tag{4.121}$$

Façamos K = m-n, para simplificar a dupla somatória

em (4.121). Eliminando m inteiro, e substituindo por seu equivalente a somatória pode ser reagrupada:

$$C(Z) \sum_{K=-n}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, g(KT) Z^{-n} Z^{-K} \qquad (4.122)$$

Notamos que para os sistemas físicos realizáveis, g(KT) tem valor zero para todos os valores negativos de K, tal que o limite superior da primeira somatória em K pode ter o seu menor limite trocado por zero. Notamos, também que vários elementos em (4.122) são funções ou de K ou de n, tal que podem ser separadas na seguinte forma.

$$C(Z) = \sum_{K=0}^{\infty} g(KT)\, Z^{-K} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, Z^{-n} \qquad (4.123)$$

A segunda somatória em (4.123) é reconhecida como sendo a transformada Z, F(Z), da entrada da sequência pulsada f*(t). A primeira é definida como G(Z).

$$G(Z) = \sum_{K=0}^{\infty} g(KT)\, Z^{-K} \qquad (4.124)$$

Usando a definição, C(Z) é dado por

$$C(Z) = G(Z)\, F(Z) \qquad (4.125)$$

A relação entre a entrada e a saída é dada por (4.125) e G(Z) é chamada função transferência pulsada.

CAPÍTULO V

SISTEMAS DE DADOS AMOSTRADOS

5.1 - INTRODUÇÃO

Sistemas de dados amostrados são estruturas de elementos lineares interconectados caracterizados pelo fato, de que, os samplers podem ser localizados em um ou mais pontos.

As regras para a interconecção dos elementos dos ' sistemas amostrados não são inteiramente análogas à dos sistemas lineares contínuos, pois dependem da localização dos ' samplers.

Os dados podem ser amostrados em vários lugares da malha, mais do que um sampler pode ser usado para um único ' sistema.

Procederemos neste capítulo determinando a função' transferência Z dos sistemas de dados amostrados. (ver apendice).

5.2 - SISTEMAS DE DADOS AMOSTRADOS DE MALHA ABERTA [33, 46, 47, 82]

Por definição, um sistema de dados amostrados é um grupo de elementos dinamicos interconectados no qual os da-' dos amostrados aparecem em um ou mais pontos do sistema como uma sequência de números.

A mais simples forma desta interconecção é o chamado sistema de dados amostrados de malha aberta, o qual vemos na fig (5.1)

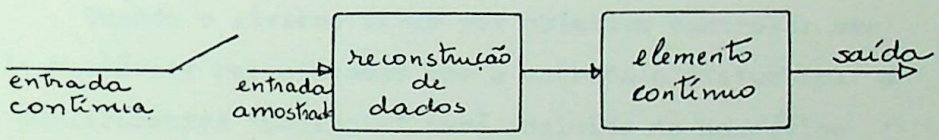


fig 5.1 - Sistema de dados amostrados de malha aberta.

A operação de amostragem é realizada pela chave, a qual se fecha momentaneamente cada T segundos, (período de ' amostragem).

A saída da chave temos uma sequência de amostras ' as quais serão reconstruídas, antes de serem aplicadas ao elemento contínuo. De modo geral a saída deste elemento é a saída do sistema.

5.3 - SISTEMAS DE DADOS AMOSTRADOS DE MALHA FECHADA OU COM REALIMENTAÇÃO [27, 33, 46, 82]

É denominado Sistema de dados amostrados com realimentação, se a configuração do sistema inclue elementos nos' quais as variáveis de saída retornam para a entrada e se um ou mais samplers estão incluídos.

Quando o sistema tiver por objetivo controlar uma' ou mais variáveis relacionadas com a entrada e disturbios o termo qualificativo "Controle" será incluído no nome (vide ' fig (5.2)).

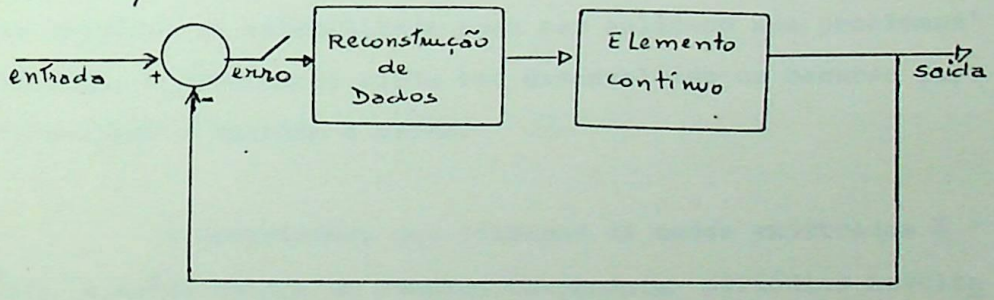


fig (5.2) Típico Sistema de Controle de Dados Amostrados com Realimentação.

O sinal de erro neste sistema é amostrado a seguir reconstituído e então, aplicado ao elemento contínuo.

Neste elemento ou elementos contínuos podem estar incluídos a planta ou processo do sistema contendo amplificadores, instrumentos e atuadores.

A configuração mais usual consta de um controlador digital, o qual aceita uma sequência de números geralmente lineares e produz uma sequência de números na saída. Sua execução pode ser realizada através de um computador dígital ou através de componentes analogico-digitais. (fig. 5-3)

Todos os problemas dos sistemas contínuos podem ser estudados através dos sistemas de controle de dados amostrados com realimentação. Precisando ser deduzido e adaptado um critério de estabilidade para ser aplicado aos problemas físicos, e precisando ainda ser desenvolvido um recurso para relacionar a entrada e saída.

A propriedade dos sistemas de dados amostrados é que, a saída contém um pequeno componente periódico resultado de um sinal intermitente dentro do sistema ocasionando pela operação de amostragem. A esta variação periódica chamamos de Ondulação (ripple)

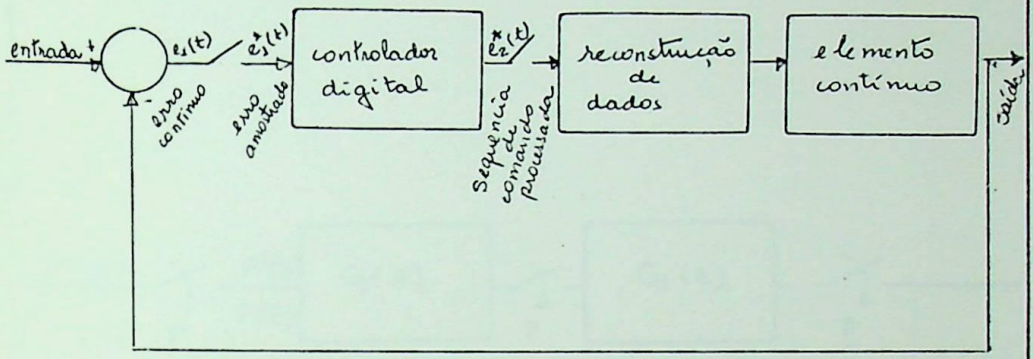


fig 5.3 - Sistema de Controle de Dados Amostrados' com Realimentação usando Controlador Digital.

5.4 - APLICAÇÕES DA TRANSFORMADA Z PARA SISTEMAS ' DE DADOS AMOSTRADOS DE MALHA ABERTA [32, 33, 56, 82]

Analisemos os dois elementos lineares (fig 5.4) conectados em cascata separados por samplers sincronizados, ' cujas funções transferênciais individuais são $G_1(Z)$ e $G_2(Z)$.

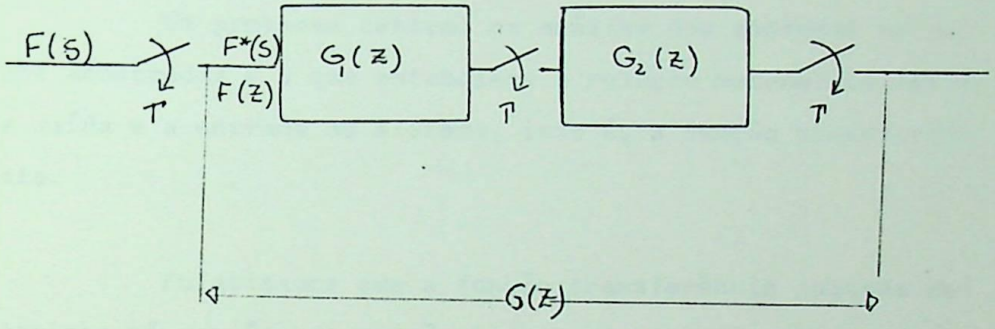


fig. 5.4 - Elementos contínuos em Cascata separados por samplers sincronizados

O propósito do sistema é reproduzir o sinal de comando em forma de ondas. Sua capacidade para isto depende das localizações dos samplers.

Usualmente polimos os dados amostrados pela introdução de filtros, em adição quando dois ou mais samplers são utilizados, eles são sincronizados.

A função entrada F(s) é pulsada e toda a sequência de saída pulsada é dada por $C_2(Z)$ enquanto que a sequência ' de pulsos intermediárias que constitui a saída do primeiro ' elemento e a entrada do segundo é $C_1(Z)$.

Um problema central na análise dos sistemas de dados amostrados é o que estabelece a relação matemática entre a saída e a entrada do sistema, isto é, a função transferência.

Enfatizamos que a função transferência pulsada relaciona só a saída da sequência pulsada para a entrada da sequência pulsada $\left[24,\ 60\right]$, isto é:

$$C_1(Z) = F(Z)\ G_1(Z) \qquad (5.1)$$

A transformada Z da saída do último amostrador em termos de $C_1(Z)$ é

$$C_2(Z) = C_1(Z)\ G_2(Z) \qquad (5.2)$$

Substituindo a equação (5.1) na (5.2) remos

$$C_2(Z) = F(Z)\ G_1(Z)\ G_2(Z) \qquad (5.3)$$

Concluimos que toda a função transferência pulsada de dois elementos, os quais são separados por um sampler sin

cronizado é o produto das funções transferências pulsadas dos elementos individuais [72].

Consideremos, agora, a configuração na qual o sampler não separa os elementos em cascata fig (5.5)

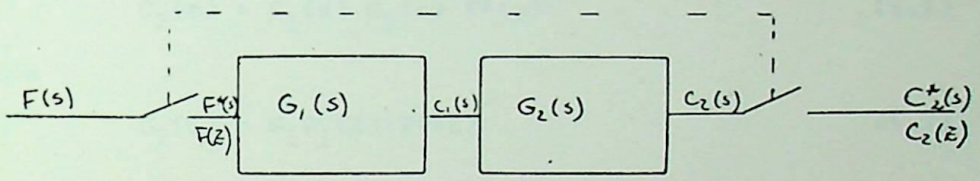


fig 5.5 - Elementos contínuos em cascata não separados por um sampler.

Se os elementos produzem saída contínua entre os instantes amostrados e são contínuos o sistema da fig 4.5 se torna realizável.

A excitação do segundo é uma função contínua $C_1(t)$ cuja transformada de Laplace é $C_1(s)$, a transformada de Laplace da função impulso de entrada é $F(s)$ e cuja saída do sampler é denotada por $F^*(s)$ a função transferência é:

$$C_1(s) = G_1(s)\, F^*(s) \qquad (5.4)$$

A função de saída do segundo sampler tem por transformada de Laplace $C_2(s)$.

$$C_2(s) = G_2(s)\, C_1(s) \tag{5.5}$$

Levando a equação (5.4) na equação (5.5) vem:

$$C_2(s) = G_1(s)\, G_2(s)\, F^*(s) \tag{5.6}$$

onde

$$C_2(Z) = G_1G_2(Z)\, F^*(Z) \tag{5.7}$$

Ressaltamos que

$$G_1(Z)\, G_2(Z) \neq G_1G_2(Z) \tag{5.8}$$

Um exemplo nos mostrará essa diferença:

Seja

$$G_1(s) = \frac{1}{s+a} \tag{5.9}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s+b} \tag{5.10}$$

De acordo com a tabela I do apendice

$$G_1(Z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{Z}{Z-e^{-aT}} \tag{5.11}$$

$$G_2(Z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+b}\right] = \frac{Z}{Z-e^{-bT}} \tag{5.12}$$

De acordo com a fig (5.4)

$$G(Z) = G_1(Z)\, G_2(Z) \tag{5.13}$$

logo

$$G(Z) = \frac{Z^2}{(Z-e^{-aT})\,(Z-e^{-bT})} \tag{5.14}$$

Para o sistema da fig (5.5)

$$G(Z) = G_1\, G_2(Z) \tag{5.15}$$

onde

$$G_1G_2(Z) = \mathcal{Z}\left[G_1(s)\, G_2(s)\right] \tag{5.16}$$

$$\therefore \quad G_1(s)\, G_2\,(s) = \frac{1}{(s+a)\,(s+b)} \tag{5.17}$$

expandindo em funções parciais

$$G_1(s)\, G_2(s) = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{s+a} + \frac{1}{a-b}\,\frac{1}{s+b} \tag{5.18}$$

A transformada Z da equação (5.18) pode ser obtida por inspecção na tabela I - aperdice

$$G_1G_2(Z) = \frac{1}{b-a}\,\frac{Z}{Z-e^{-aT}} + \frac{1}{a-b}\,\frac{Z}{Z-e^{-bT}} \tag{5.19}$$

Observemos então a grande diferença entre as equa-

ções (5.19) e (5.14).

Notamos ainda que as duas expressões tem os mesmos polos, mas não os mesmos zeros.

5.5 - APLICAÇÕES DA TRANSFORMADA Z PARA SISTEMAS DE DADOS AMOSTRADOS COM REALIMENTAÇÃO [83, 91, 96, 107]

Como diversos samplers podem ser usados num sistema, as funções transferênciais pulsadas terão diversos valores.

As mais simples possibilidades são mostradas nos diagramas de bloco da fig (5.6) onde o sampler é representado por uma chave.

fig 5.6 - Tipos de Amostragem num sistema de malha fechada.

fig 5.6a) sinal amostrado de entrada

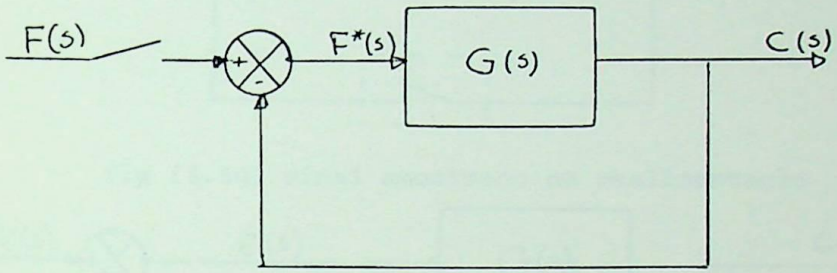


fig 5.6b) sinal de erro amostrado no canal

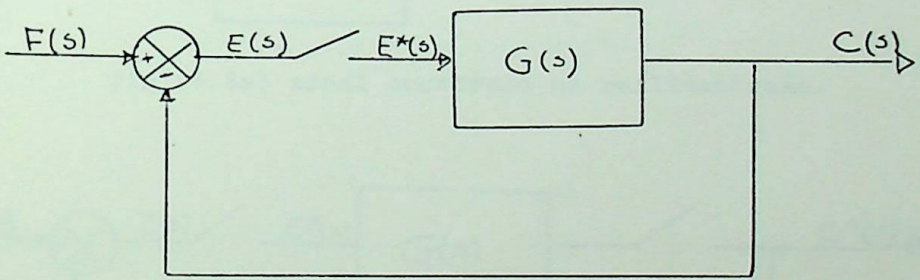
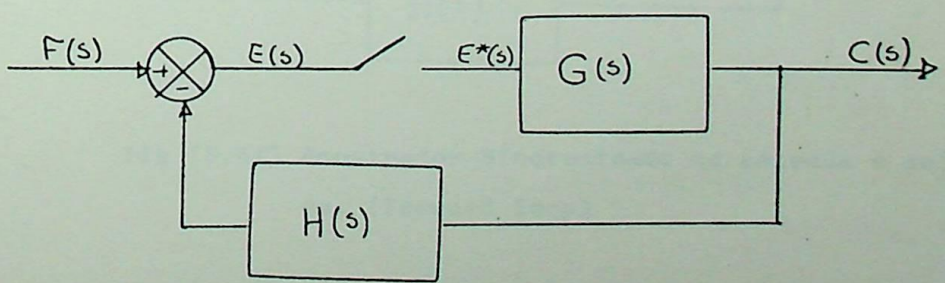


fig 5.6c) sinal de erro amostrado com elemento na' realimentação



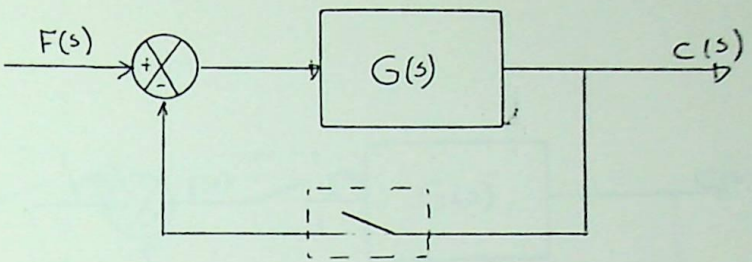


fig (5.6d) sinal amostrado na realimentação

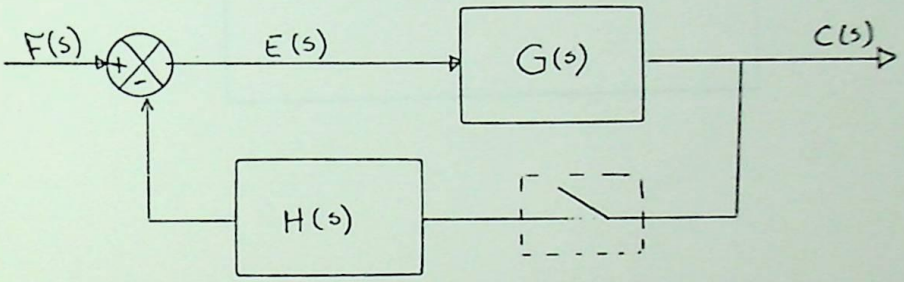


fig (5.6e) sinal amostrado na realimentação.

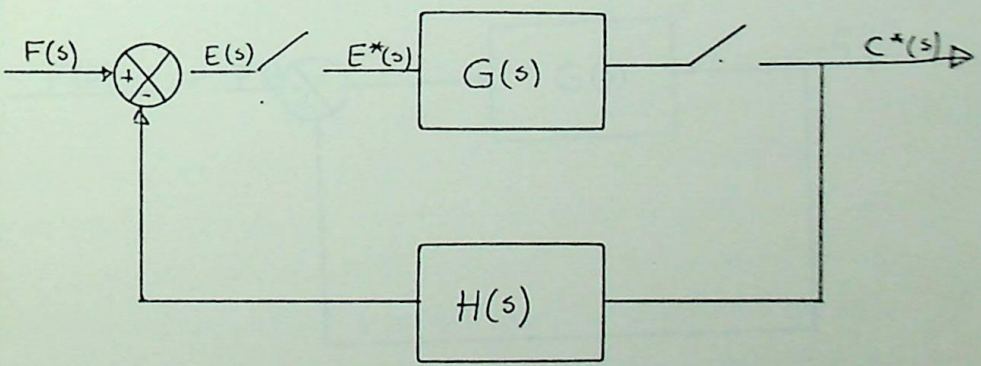


fig (5.6f) Amostrador Sincronizado na entrada e saída. (Forward loop)

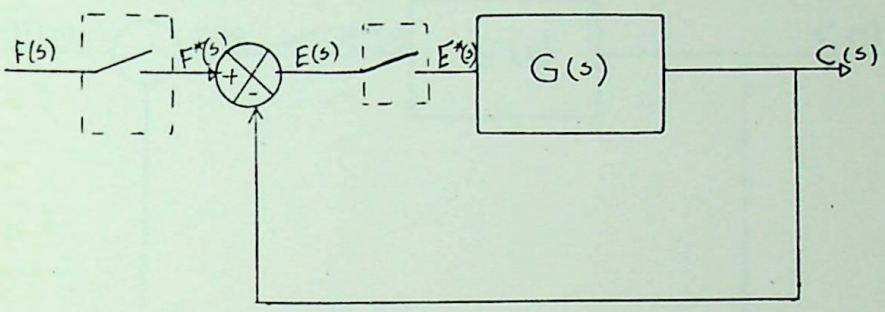


fig 5.6g) Entrada e erro amostrado.

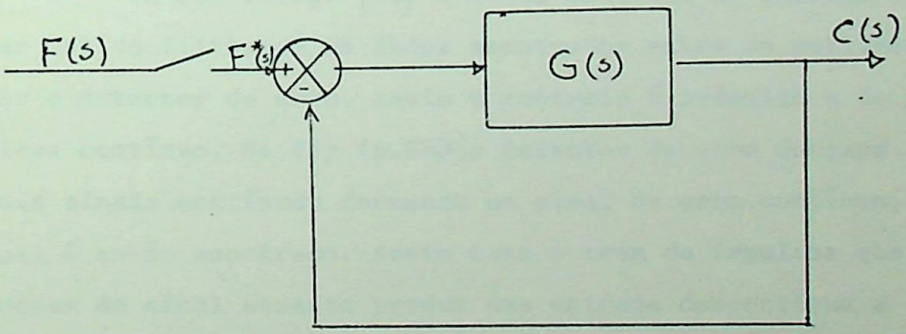


fig 5.6h) Amostragem na entrada e na realimentação.

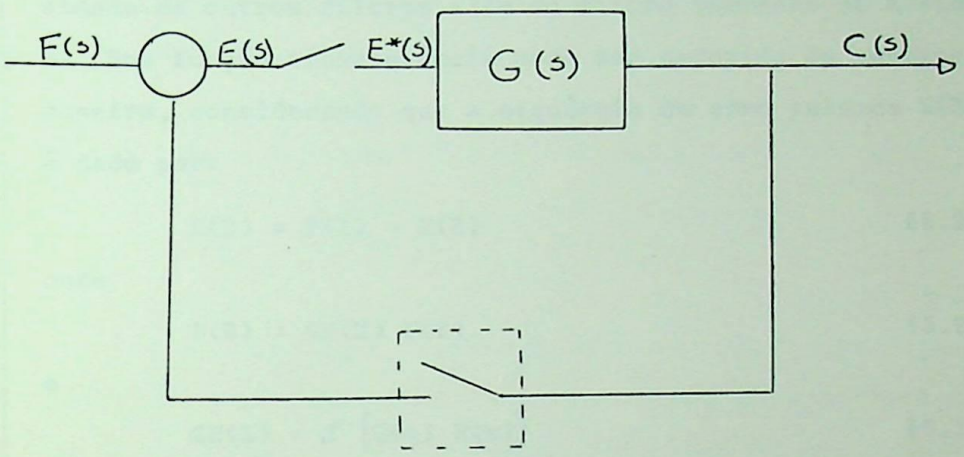


fig 5.6i) Amostragem no erro e na realimentação

Na fig (5.6a) [96] o sinal contínuo de entrada pode ser obtido filtrando os dados amostrados antes de realimentar o detector de erro, assim o controle é reduzido a um problema contínuo. Na fig (5.6b,c) o detector de erro compara dois sinais contínuos formando um sinal de erro contínuo, o qual é então amostrado. Neste caso o trem de impulsos que provem do sinal atuante produz uma entrada descontínua a qual por breve intervalo de tempo, torna a malha aberta, seguido de um breve intervalo de tempo no qual não há sinal, então outro impulso é aplicado, etc. A entrada pulsada produz mudanças em C(s) afetando a amplitude e polaridade. Para

tornar-se estável e reduzir o erro para zero, não há necessidade de outros filtros além do filtro inerente ao sistema. Sua função transferência pode ser deduzida da seguinte maneira, considerando que a sequência de erro pulsada E(Z)' é dado por:

$$E(Z) = F(Z) - B(Z) \tag{5.20}$$

onde

$$B(Z) = GH(Z)\, E(Z) \tag{5.21}$$

e

$$GH(Z) = \mathcal{Z}\left[G(s)\, H(s)\right] \tag{5.22}$$

Substituindo a equação (5-21)na equação (5-20)temos

$$E(Z) = F(Z) - GH(Z)\, E(Z) \tag{5.23}$$

donde

$$E(Z) = \frac{F(Z)}{1+GH(Z)} \tag{5.24}$$

Desde que

$$C(Z) = G(Z)\, E(Z) \tag{5.25}$$

então substituindo a eq. 5.24 na eq. (5.25) temos

$$C(Z) = \frac{G(Z).F(z)}{1 + GH(Z)} \tag{5.26}$$

A equação (5.26) é a relação entre a entrada e a saída da transformada Z de uma sequência amostrada.

Neste ponto,o tratamento de Linvill [56, 63, 64,

65, 66] difere do proposto por Ragazzini e Zadeh [81] pois' Linvill prefere trabalhar com C(s) enquanto Ragazzini e Zadeh concentram sua atenção em C(Z).

De acordo com Linvill a equação (5.26) seria

$$C(s) = \frac{G(s)\ F^*(s)}{1 + HG^*(s)} \qquad (5.27)$$

Na fig (5.6d) mostra um sistema com sampler na tra getória de realimentação, o trem de pulsos é interior a malha e a análise é requerida para determinar ambas; a estabi lidade e a execução.

O detector de erros compara a entrada contínua ' F(Z) com um trem de impulsos representados por C(s). Para

$$F(Z) \neq 0 \qquad (5.28)$$

$$E(Z) = F(Z) \qquad (5.29)$$

durante os intervalos das amostras. O sistema opera como um sistema de malha aberta, exceto durante os instantes amos-' trados, não sendo portanto, um sistema de controle com realimentação.

Na fig (5.6e) temos um sistema com sinal amostrado

na realimentação seguido de um elemento H(s) e novamente esse sistema, como o anterior opera em malha aberta, exceto ' durante os instantes amostrados, e não é um sistema de controle com realimentação.

Deduziremos sua função transferência

$$E(s) = F(s) - B(s) \tag{5.30}$$

$$B(s) = H(s)\, C^*(s) \tag{5.31}$$

levando a equação (5.31) na (5.30) vem:

$$E(s) = F(s) - H(s)\, C^*(s) \tag{5.32}$$

e

$$C(s) = G(s)\, E(s) \tag{5.33}$$

logo obtemos:

$$C(s) = G(s)\, F(s) - G(s)\, H(s)\, C^*(s) \tag{5.34}$$

então

$$C(Z) = \mathcal{Z}\left[C(s)\right] = FG(s) - HG(Z)\, C(Z) \tag{5.35}$$

$$E^*(s) = \frac{F^*(s)}{1 + H^*(s)\, G^*(s)} \qquad (5.41)$$

substituindo a equação (5.41) na equação (5.38)

$$C^*(s) = \frac{F^*(s)\, G^*(s)}{1 + H^*(s)\, G^*(s)} \qquad (5.42)$$

$$\mathcal{L}\left[C^*(s)\right] = C(Z) = \frac{F(Z)\, G(Z)}{1 + H(Z)\, G(Z)} \qquad (5.43)$$

Na fig (5.5h) a saída do detector de erro indica o ' verdadeiro erro só para instantes amostrados, desde que para ' um dado instante a amplitude de entrada é comparada com a amplitude de C(s). A amostra de entrada é sincronizada com o erro do sampler, portanto só o verdadeiro erro passa através do sampler. O resultado é o mesmo de um sinal de entrada contínua e erro amostrado.

Na fig (5.6h) são amostrados os sinais de entrada e realimentação simultaneamente, e o sinal de erro pode ser formado só pela subtração de impulsos. Os trens de impulsos formados pelo detector de erros são alimentados no sistema devido a sincronização dos samplers e o resultado é idêntico àquele formado pelo de erro amostrado.

Na fig (5.6i) vemos que no instante em que a trajetória da realimentação forma um impulso e este é subtraído de F(s) aparece então no detector de erro um verdadeiro si-

nal de erro. Então pela sincronização do erro do sampler com a realimentação do sampler o sistema pode receber a indicação de erro. Portanto, isto é, eqùivalente a um único erro amostrado com sinal de entrada e realimentação contínuos.

5.6 - CONCLUSÃO

Todos os sistemas básicos de dados amostrados são efetivamente representados por um único caso de sampler com canal de erro.

CAPÍTULO 6

ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DISCRETOS LINEARES.

6.1 - INTRODUÇÃO

Nos sistemas lineares discretos o mais simples problema de projeto envolve a questão do máximo ganho admissível se o sistema deseja ser absolutamente estável.

As condições necessárias e suficientes para o problema de estabilidade nos sistemas lineares contínuos é que as raízes de F(s) (equação característica do sistema) pertençam a metade esquerda do plano s. Isto foi estudado e resolvido analiticamnete pelos critérios de Hurwitz - Routh [28] e de Liénard - Chipart [33, 62]

As condições necessárias e suficientes para o problema de estabilidade nos sistemas lineares discretos é que as raízes de F(Z) (equação características do sistema discreto) pertençam ao interior do círculo unitário no plano Z [33, 99]. Este teste de estabilidade é de grande importância. Por exemplo, a estabilidade de regimes periódicos em sistemas não lineares com trechos de características lineares, o teste de estabilidade de sistemas lineares com aleatórias variações de parâmetros, a convergência da regra interativa computacional, usando computador digital, a estabilidade de limite de ciclos nos sistemas discretos não lineares, a estabilidade das equa-

ções diferença com coeficientes constantes ou variáveis e muitos outros, todos se reduzem para o teste de estabilidade dentro do círculo unitário.

Outras condições foram estudadas por Schur [89], Cohn [16] e Marden [69] mas por serem testes muito complicados não foram realmente aplicados aos sistemas de projeto e análise.

Nos sistemas contínuos a estabilidade pode ser investigada por três técnicas bem conhecidas!

1 - O teste de Routh

2 - O diagrama de Nyquist

3 - Método Root-Locus

Cada uma dessas técnicas podem ser aplicadas para a análise dos sistemas discretos de malha fechada [10, 12, 69, 108, 110].

Neste capítulo discutiremos e tentaremos mostrar as dificuldades associadas aos métodos acima descritos.

6.2 - DEFINIÇÃO DE ESTABILIDADE [32, 33]

Um sistema discreto linear é considerado estável se para toda entrada limitada, correponder sempre uma saída limitada [32]

Estas saídas são consideradas só para os instantes amostrados.

A condição de estabilidade pode ser obtida se separarmos a saída (resposta do sistema) em termos transitórios e estacionários.

Isto pode ser facilmente demonstrado se escrevemos, a transformada Z da saída C(Z) como

$$C(Z) = F(Z)\ G(Z) \qquad (6.1)$$

onde

F(Z) = transformada Z da entrada

G(Z) = transformada Z da função transferência.

A saída relacionada com a parte estacionária (ou devido a função de entrada) pode ser obtida da fórmula da trans

formada Z como a soma dos seguintes termos típicos.

$$\text{resíduo de } \left[F(Z)\ G(Z) \right] \Big|_{Z=Zm} \quad Z_m^{n-1} \tag{6.2}$$

onde Z_m é uma singularidade típica de F(Z). Desde que a entrada é limitada, isto é

$$|Z_m| \leq 1 \tag{6.3}$$

então a parte da saída resultante desta entrada é também limitada.

Analogamente o termo transitório típico da saída pode ser escrita

$$\text{resíduo de } \left[G(Z)\ F(Z) \right] \Big|_{Z=Z_K} \quad Z_K^{n-1} \tag{6.4}$$

onde Z_K é uma singularidade típica de G(Z). A seguinte condição deve existir para que a saída seja limitada.

$$|Z_k| \leq 1 \tag{6.5}$$

ou todos os polos (singularidades) de G(Z) pertençam ao círculo unitário ou ao seu interior.

Quando uma singularidade está no círculo unitário , isto é, $|Z_K| = 1$, então do ponto de vista físico cada sistema seria olhado como instável, desde que uma pequena mudança nas constantes físicas podem levar as singularidades críticas do limite para o interior do círculo unitário, causando a instabilidade atual.

Em resumo, podemos estabelecer o seguinte teorema , fundamental: "Se todos os pontos singulares da função transferência dos sistemas discretos G(Z) estão localizados no interior do círculo unitário o sistema é estável. Se pelo menos , um ponto singular está fora ou no círculo unitário o sistema é instável.

6.3 - CRITÉRIO MODIFICADO DE ROUTH-HURWITZ [18, 32, 51, 73]

Este critério determina qual dos polos da função do sistema de malha fechada pertencem a metade direita do plano complexo, nos sistemas contínuos.

A estabilidade dos sistemas de controle de dados amostrados não pode ser determinada pela aplicação direta do

critério de Routh - Hurwitz. POis o critério de Routh -Hurwitzs nos diz que a presença ou ausencia das raízes da equação característica do sistema, com parte real positiva, é respectivamente indicação de instabilidade ou estabilidade.

Portanto, nos é possível aplicar a transformação da equação característica em Z, que transformará a região exterior ao círculo unitário no plano Z para a metade direita de um plano auxiliar, e a região interior ao círculo unitário para a metade esquerda deste plano.

Esta transformação é conhecida como transformação bilinear. Nos problemas dos sistemas de controle a transformação bilinear tem sido aplicada por Oldenbourg e Sartórius [74]

A transformação bilinear

$$Z = \frac{w + 1}{w - 1} \qquad (6.6)$$

ou

$$w = \frac{Z + 1}{Z - 1} \qquad (6.7)$$

é o mais simples mapeamento do círculo unitário na metade esquerda do plano w. Sendo que o plano w é definido pelas relações (6.6) ou (6.7).

Logo, se a região fechada $|Z| \leq 1$ é mapeada na região $Re[w] \leq 0$ de um plano auxiliar w, temos a condição de estabilidade de Routh - Hurwitz.

O n-ésimo grau polinominal em Z pode ser convertido na razão para o n-ésimo grau polinomial em w por meio da transformação bilinear

$$Z = \frac{w + 1}{w - 1} \tag{6.8}$$

O exterior do círculo unitário [108] no domínio Z é mapeado 1:1 na metade direita do plano w. A condição para a estabilidade então requer a ausencia de zeros na metade direita do plano no numerador polinomial da função w.

Desde que ambos Z e w são complexos [82] passaremos a mostrar a relação existente entre o plano Z e o plano w.

$$Z = x + jy \tag{6.9}$$

$$w = \mu + jv \tag{6.10}$$

Substituindo essas expressões na relação (6.7), temos

$$w = \frac{(x^2 + y^2) - 1}{(x - 1)^2 + y^2} - j \frac{2y}{(x - 1)^2 + y^2} \tag{6.11}$$

Mas desde que

$$Z = x + jy$$

então (6.12)

$$\left|\frac{Z}{Z}\right|^2 = x^2 + y^2$$

Para todos os valores de Z cujo modulo for maior do que a unidade, a parte real de w é positiva e para todos os valores de Z cujo modulo for menor do que a unidade a parte real de w é negativa. Eis a diferença, toda a região do plano Z a qual pertence externamente ao círculo unitário é transfor da direita do plano w e toda região que pertence ao interior do círculo unitário do plano Z é transformada na metade es - querda do plano w. Isto está ilustrado na fig (6.1) onde as regiões denominadas A e B são regiões correspondentes nos seus planos respectivos

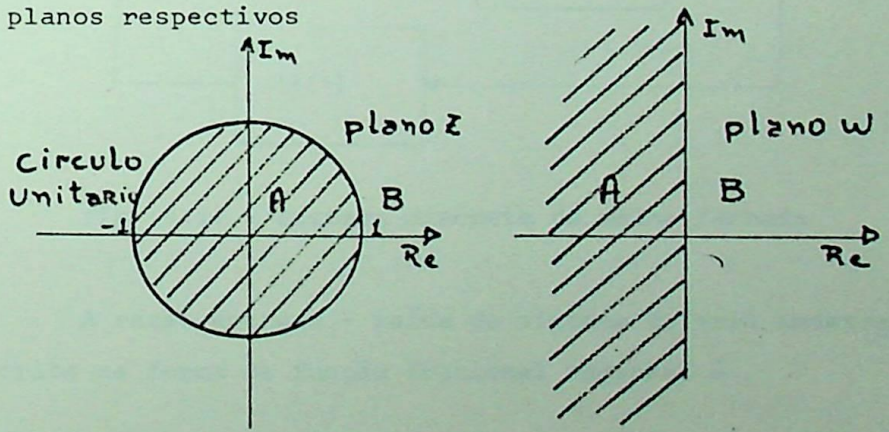


fig 6.1 - Regiões correspondentes no plano Z e w.

6.3.1 - ANÁLISE DE ESTABILIDADE [90]

A função transferência do sistema fechada na forma de uma função fracional racional nos é dado por

$$T(Z) = \frac{C(Z)}{F(Z)} \qquad (6.13)$$

onde C(Z) e F(Z) são polinômios.

Discutiremos a estabilidade do sistema de malha fechada mostrado na (fig 6.2) no plano Z.

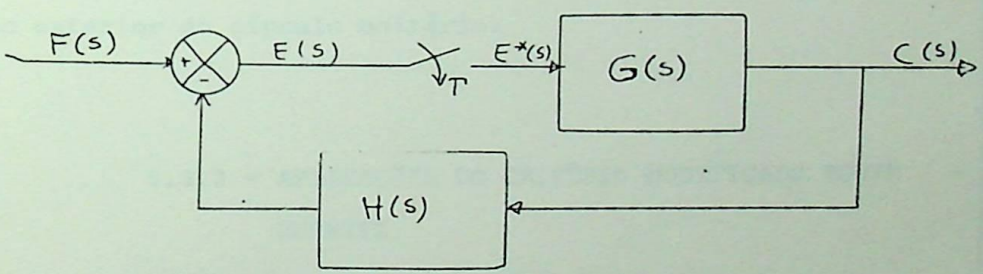


fig (6.2) - Sistema discreto de malha fechada

A razão entrada - saída do sistema de erro amostrado escrita na forma de função fracional racional é

$$\frac{C(Z)}{F(Z)} = \frac{G(s)}{1+GH(s)} \qquad (6.14)$$

O denominador polinomial, quando o conjunto é igual a zero é a equação caracterísitca do sistema e sua estabilidade pode ser determida pela localização das raízes

$$1 + GH(Z) = 0 \qquad (6.15)$$

Portanto todas as raízes Z_i da equação característica precisam pertencer ao interior do círculo unitário para a estabilidade, ou

$$|Z_i| < 1 \qquad i = 1, 2, 3... \qquad (6.16)$$

e torna-se instável se alguns polos da malha fechada pertencem ao exterior do círculo unitário.

6.3.2 - APLICAÇÕES DO CRITÈRIO MODIFICADO ROUTH - HURWITZ

Exemplo 1 [73] Consideremos um sistema discreto mostrado na fig (6.3). A transferência de malha aberta é

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

A transformada Z de G(s) é

$$G(Z) = \frac{10(1-e^{-1})Z}{(Z-1)(Z-e^{-1})}$$

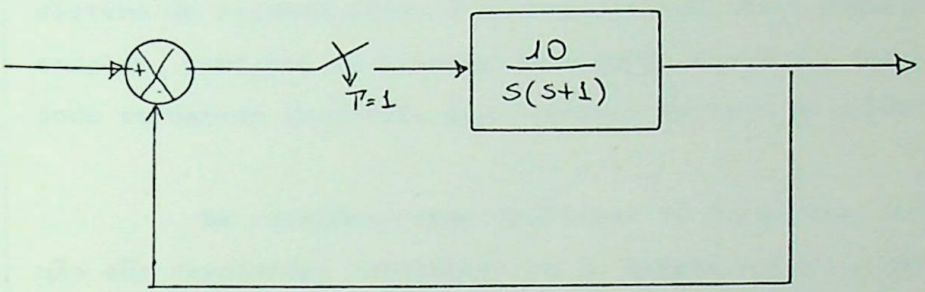


fig (6.3) Sistema discreto de malha fechada

A equação caracterísitca 1 + G(Z) = 0, torna-se

$$(Z-1)\ (Z-e^{-1}) + 10(1-e^{-1})Z = 0$$

Mas e^{-1} = 0,368, poderemos simplificar a equação caracterísitca para:

$Z^2 + 4,952Z + 0,368 = 0$ da qual as raízes achadas são

$Z_1 = -0,076$

$Z_2 = -4,876$

Então uma das raízes da equação característica tem um módulo maior que a unidade e o sistema é instável.

É importante notar que na ausência do sampler, o sistema de segunda ordem é sempre estável, na presença de um sampler, portanto um sistema de segunda ordem tal como este pode tornar-se instável, para grandes valores de ganho.

As equações caracterísitcas de mais altas ordens , não são resolvidas facilmente em Z. Nestes casos, é conveniente transformarmos a equação caracterísitcas em Z num polinômio em w pelo uso da transformação

$$Z = \frac{w + 1}{w - 1}$$

e aplicamos o critério de estabilidade de Routh para o polinômio resultante.

A equação característica

$Z^2 + 4,952Z + 0,368$ pela transformação torna-se

$$\left(\frac{w + 1}{w - 1}\right)^2 + 4,952 \left(\frac{w + 1}{w - 1}\right) + 0,368 = 0$$

ou $\quad 6,32\, w^2 + 1,264w - 3,584 = 0$

A matriz de Routh é:

w^2	6,32	-3,584
w^1	1,264	0,0
w^o	-3,584	

Há uma mudança de sinal na primeira coluna da matriz de Routh. Então há uma raiz na metade direita do plano w, a qual implica que há uma raiz exterior ao círculo unitario no plano Z. Isto corresponde ao resultado obtido previamente.

Exemplo 2 - [90]

Consideremos um sistema em que a função transferência T(Z) de todo o sistema é:

$$T(Z) = \frac{C(Z)}{F(Z)} = \frac{0,092\ (Z + 0,718)}{(Z-0,8)(Z-0,04)}$$

Multiplicando ambos os fatores do denominador, obtemos:

$$T(Z) = \frac{0,092\ (Z + 0,718)}{Z^2 - 1,20Z + 0,320}$$

Tornando o denominador de T(Z) = 0, a equação carac

terística do sistema é:

$$Z^2 - 1,20Z + 0,320 = 0$$

Usando a transformação bilinear temos:

$$\left(\frac{w + 1}{w - 1}\right)^2 - 1,20\,\frac{w + 1}{w - 1} + o,320 = 0$$

Simplificando esta expressão obtemos:

$$w^2 + 11,30w + 21,0 = 0$$

Aplicando o critério de Routh-Hurwitz temos:

W^2	1	21,0
w^1	11.30	0,0
w^o	21,0	

Desde que não há sinal de inversão na coluna es - querda da matriz de Routh, este sistema não tem polos na metade direita do plano w, ou exterior ao círculo unitário no plano Z, e é portanto estável.

6.4 - CRITÉRIO DE ESTABILIDADE USANDO TRANSFER LOCUS [82, 90, 108]

A função de transferência pulsada mais comum nos sistemas de realimentação com um ou mais samplers nos é dado por:

$$T(Z) = \frac{G(Z)}{1+GH(Z)} \qquad (6.17)$$

Mesmo que surjam mudanças devido a outros prototipos, o denominador de T(Z) contém como caracterísitca um polinômio da forma 1 + K(Z), onde K(Z) é malha da função transferência pulsada.

Consideremos afim de facilitar os calculos, a equação caracterísitca dos sistemas de controle de dados amostrados tendo um sampler no canal de erro:

$$1 + GH(s) = 0 \qquad (6.18)$$

Afim de analizarmos a estabilidade do sistema, determinaremos as raízes desta equação pertencentes ao exterior do círculo unitário do plano Z, pela aplicação do teorema de mapeamento de Cauchy o qual está sujeito ao criterio de Nyquist nos sistemas contínuos.

De acordo com a disposição feita no ítem 4.6, um contorno fechado tendo um raio unitário é examinado no plano Z. A área englobada pelo contorno cobre toda a região exterior ao círculo unitário como veremos na fig (6.4)

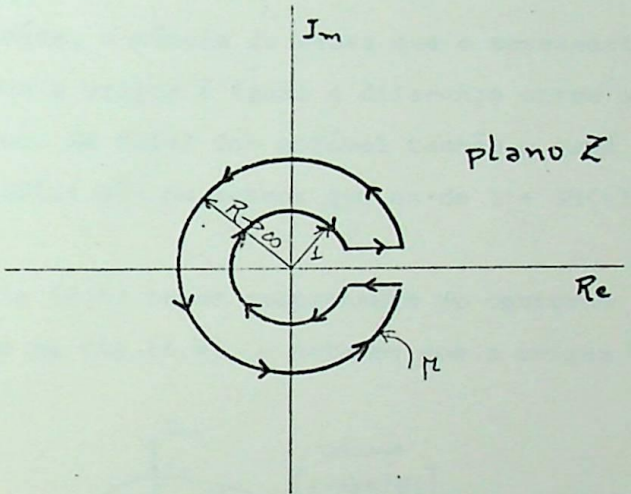


fig (6.4) Contorno usado para englobar os polos no plano Z exteriores ao círculo unitário.

O teorema do mapeamento de Cauchy estabelece que : (vide secção 4.6). Se um contorno fechado engloba os polos e zeros de uma função então o número de vezes que o mapeamento deste contorno engloba a origem no plano da função é igual a diferença entre os números de zeros e polos então englobados [82].

O mapeamento do contorno checado na fig (6.4), no

plano 1 + GH(s) indicará pelo englobamento da origem, a diferença entre os zeros e polos desta função de acordo com o teorema de Cauchy.O englobamento ou a falta deste indica uma condição de instabilidade ou estabilidade respectivamente.

Portanto, o número de vezes que o mapeamento deste contorno engloba a origem é igual a diferença entre o número de polos e zeros. Se GH(s) for estável também o será 1+GH(s), e os polos de GH(s) são os mesmos que os de 1 + GH(s) [33].

Na fig (6.5) temos omapeamento do contorno anteriormente visto na fig (6.4), e notamos que a origem é também englobada.

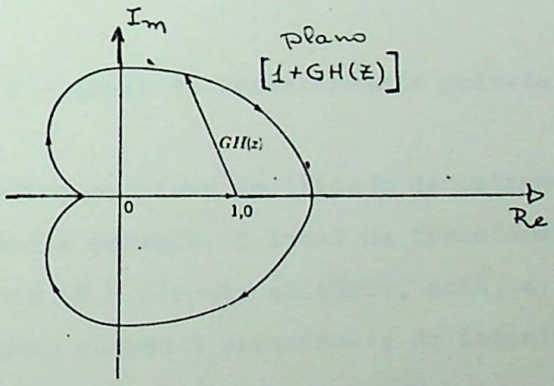


fig 6.5 - Mapeamento típico do contorno no plano 1 + GH(s)

É conveniente, tal como nos sistemas contínuos o deslocamento do eixo imaginário para o ponto (1,0) como ilus

traremos na fig (6.6). Devido ao deslocamento do eixo, consideraremos só GH(s) e estudamos o englobamento do ponto (-1,0) melhor do que na origem.

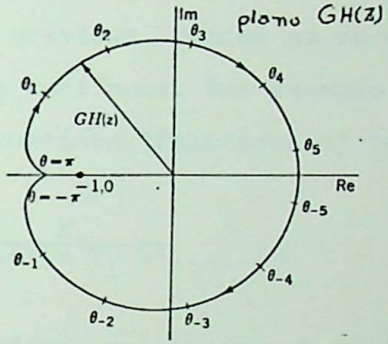


fig 6.6 - Local da Transferência pulsada

Ao gráfico do plano modificado denominamos de local da transferência pulsada. O local da transferência pulsada é exencialmente só o círculo unitário, pois, a função GH(s) tende a zero, quando Z aproxima-se do infinito.

Como o módulo da variável complexa Z é unitário, o ângulo θ desta variável é o parâmetro que varia de ponto a ponto na fig (6.6) do local da transferência pulsada.

Na prática só a metade do local da transferência

pulsada é desenhada, pois, as funções transferências pulsadas são razões de polinômios racionais em Z, como vimos na equação (6.17) onde os termos componentes de GH(s) são conjugados, logo as somas e razões de termos conjugados são conjugados. A função transferência pulsada "feedforward" GH(Z) em muitas aplicações práticas, contém um ou mais integradores entre os elementos contínuos. Por exemplo, uma função típica de transferência contínua "feedforward" tem a forma:

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + T_1 s)} \ldots \qquad (6.19)$$

Expandindo na maneira usual em frações parciais,

$$G(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{1 + T_1 s} + \ldots \qquad (6.20)$$

Tomando a transformada Z da equação (6.20), resulta

$$G(Z) = \frac{A}{1 - Z^{-1}} + \frac{B/T_1}{1 - \exp(-T/T_1)\, Z^{-1}} + \ldots \qquad (6.21)$$

Notamos que no plano s a função transferência contínua G(s) tem um polo na origem, o que faz com que a função transferência pulsada G(Z) tenha um polo em (1,0) no plano Z

A presença deste polo poderia causar uma descontinuidade se o contorno a ser mapeado for exatamente aquele !

mostrado na fig (6.4). Portanto é necessário gerar uma pequena curva semicircular ao redor do polo, afim de estabilizar uma conecção entre os seguimentos do contorno. Isto é visto na fig (6.7)

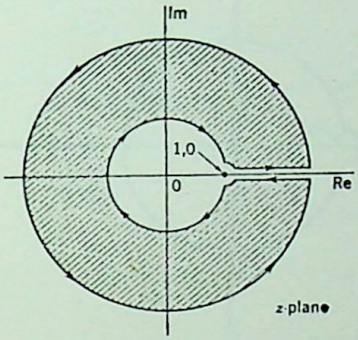


fig (6.7) Contorno usado pelas funções transferências pulsadas as quais possuem polos no ponto (1,0)

A curva é convenientemente orientada para incluir este polo no interior do círculo unitário, como ilustra a figura.

Procede-se de maneira identica no caso de haver polos complexos com módulos unitários.

Desde que os valores de GH(Z) tendem a zero para valores infinitos de Z, e desde que o segmento do contorno através do eixo real cancela-se no limite, só o círculo unitário e sua curva são usualmente mapeados, conforme fig (6.8).

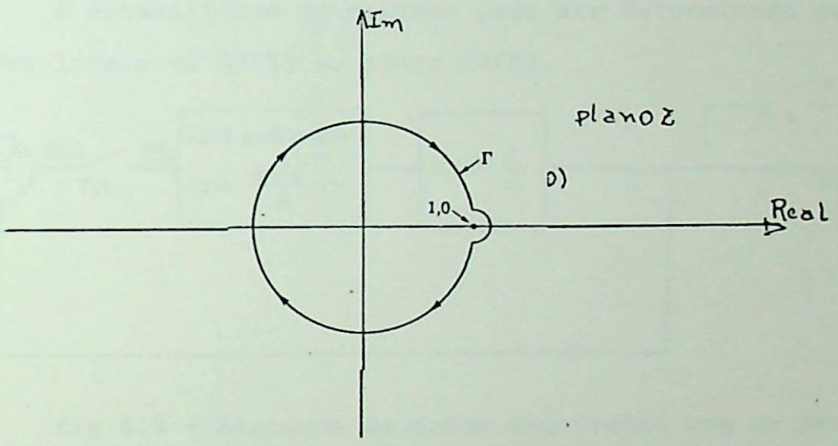


fig (6.8) Contorno reduzido para mapeamento de valores práticos de GH(S).

Daremos a seguir uma aplicação do método [90]

Exemplo 1 - O sistema de controle de dados amostrados fornecidos pela fig (6.9), contém um sampler no canal de erro seguido de um circuito de ordem zero e um integrador puro. Determinaremos se o sistema é estável quando K=1, o valor máximo de K antes do sistema tornar-se instável, e a resposta do sistema para uma entrada unitária. O tempo de amostragem é

de um segundo.

a) Estabilidade do sistema K = 1

A estabilidade do sistema pode ser determinada pelo exame dos locais de GH(Z) no plano GH(Z)

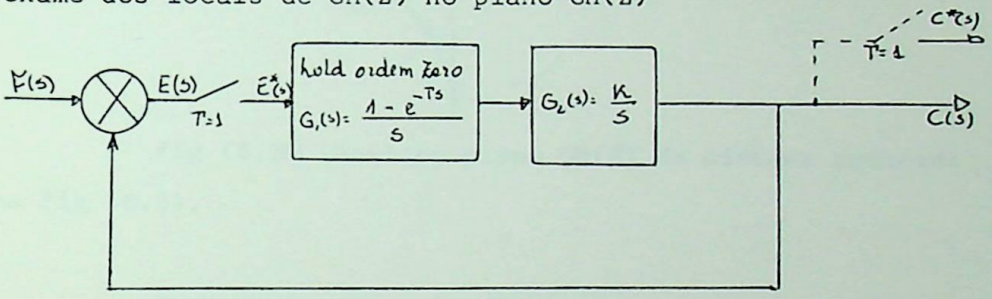


fig 6.9 - Sistemas de dados amostrados com um pro - cesso de integração

A função transferência de Laplace para GH(Z), é $G_1(s)\ G_2(s)\ H(s)$ e igual a

$$G_1(s)\ G_2(s)\ H(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-s}}{s^2} \qquad (6.22)$$

Da tabela II no apendice , temos que a função transferência Z de GH(Z) correspondente a equação (6.21) é

$$GH(Z) = \frac{1}{Z-1} \qquad (6.23)$$

O local de GH(Z) no plano GH(Z) é mostrado na fig (6.10)

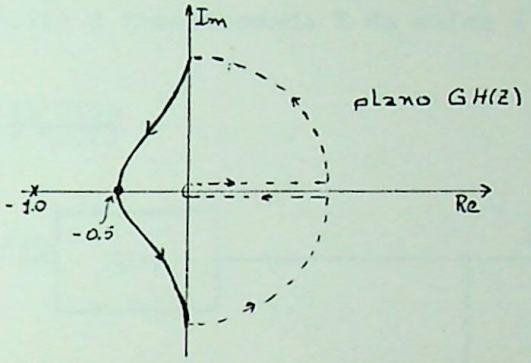


fig (6.10) LOcal no plano GH(Z) do sistema mostrado na fig (6.9).

Desde que os locais não englobam o ponto (-1,0), o critério de estabilidade de Nyquist está satisfeito e o sistema é estável.

b) Valor máximo de ganho.

O valor máximo de ganho K, isto é, teoricamente possível antes do sistema tornar-se instável, pode também ser achado no local de GH(Z) no plano GH(Z). Isto é ilustrado na fig (6.10).

Pode facilmente ser visto que se o ganho for dobrado o local passará através do ponto (-1,0), portanto, o valor máximo de K antes do sistema tornar-se instável é 2.

c) Resposta do sistema para uma entrada unitária.

Da fig (6.11) a transformada Z da saída é igual:

$$C(Z) = \frac{F(Z)\ G(Z)}{1 + HG(Z)} \qquad (6.24)$$

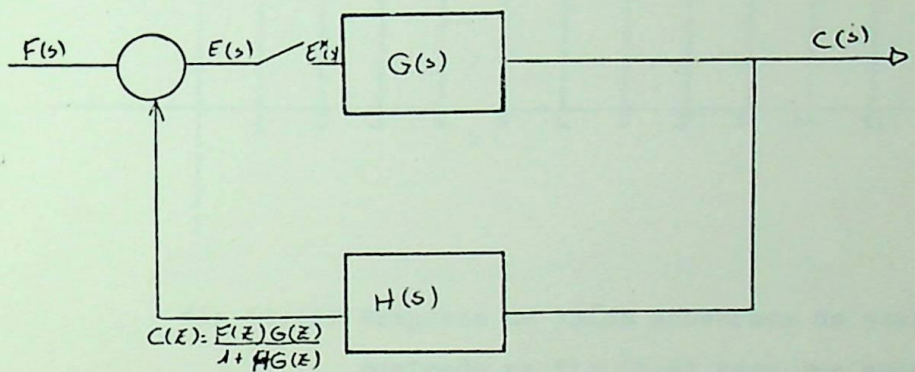


fig (6.11) Sistema de dados amostrados com um Sampler no canal de erro.

Da tabela I do apendice a transformada Z de um degrau unitário é

$$F(Z) = \frac{Z}{Z-1} \qquad (6.25)$$

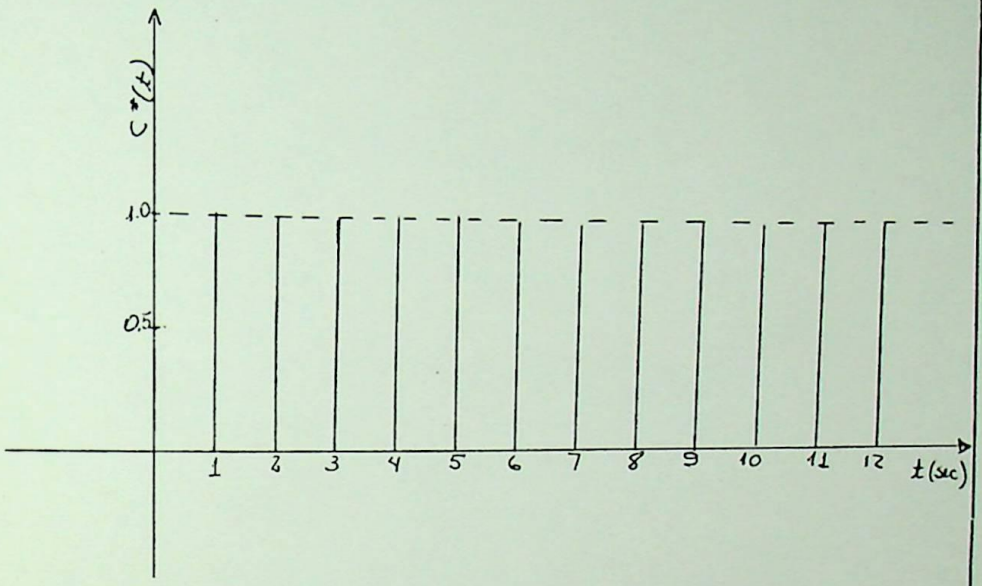


fig (6.12) Resposta de saída amostrada do sistema mostrado na fig (6.9) para uma entrada de grau unitário.

Substituindo as equações (6.23) e (6.25) na equação (6.24) obtemos

$$C(Z) = \frac{1}{Z-1} \qquad (6.26)$$

Expandindo a equação (6.26) em série de potências, em Z, e tomando a transformada Z inversa, a resposta da saída pode ser verificada gráficamente. O resultado é

$$C(Z) = Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3} + Z^{-4} + \ldots \qquad (6.27)$$

ou

$$C^*(t) = \delta(t-1) + \delta(t-2) + \delta(t-3) + \delta(t-4) + \ldots \quad (6.28)$$

que está mostrado graficamente mostrado na fig (6.12).

6.5 - TESTE DE ESTABILIDADE DIRETAMENTE APLICADO NO PLANO Z [32]

Afim de evitar transformações como no caso (6.2), aproximações lógicas e usuais para os problemas de estabilidade são utilizadas para obtermos critérios de estabilidade diretamente no plano Z.

Tais critérios de estabilidade, foram primeiramente estabelecidos por Shur- Cohn [43, 44] em 1922 e depois discutidos por Fujiwara [21] em 1924.

6.6 - CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE SHUR - COHN [43, 44, 21]

Este critério dificilmente é utilizado pelos enge -

nheiros para os sistemas de maior ordem, por ser muito trabalhoso.

A forma original do critério de Shur - Cohn para coeficientes complexos pode ser estabelecido como segue:

O sistema de controle de dados amostrados é estável se uma sequência de determinantes de Shur - Cohn, $1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_j, \ldots, \Delta_n$ tem n variações em sinal.

Outra maneira de estabelecer este critério de estabilidade é que: o polinômio:

$F(Z) = A_o + A_1 Z + A_2 Z^2 + A_j Z^j + \ldots + A_n Z^n$ (230) tem todas as raízes interiores ao círculo unitário como vemos na fig (6.13), se e somente se

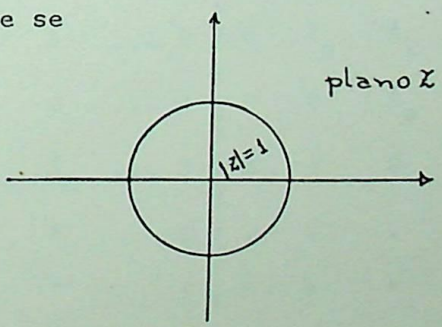


fig 6.13 - Círculo unitário no plano Z

$$\begin{cases} |\Delta_j| < 0 & \ldots \quad j \text{ impar} \\ |\Delta_j| > 0 & \ldots \quad j \text{ par} \end{cases}$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix}
A_o & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & An & An-1 & An-2 & \ldots & A_{n-j+1} \\
A_1 & A_o & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & An & An-1 & \ldots & A_{n-j+2} \\
A_2 & A_1 & A_o & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & An & \ldots & A_{n-j+3} \\
A_3 & A_2 & A_1 & A_o & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{n-j+4} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
A_{j-1} & A_{j-2} & A_{j-3} & A_{j-4} & \ldots & A_o & 0 & 0 & 0 & & A_n \\
\bar{A}_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \bar{A}_o & \bar{A}_1 & \bar{A}_2 & \ldots & \bar{A}_{j-1} \\
\bar{A}_{n-1} & \bar{A}_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \bar{A}_o & \bar{A}_1 & \ldots & \bar{A}_{j-2} \\
\bar{A}_{n-2} & \bar{A}_{n-1} & \bar{A}_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \bar{A}_o & \ldots & \bar{A}_{j-3} \\
\bar{A}_{n-3} & \bar{A}_{n-2} & \bar{A}_{n-1} & \bar{A}_n & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \bar{A}_{j-4} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\bar{A}_{n-j+1} & \bar{A}_{n-j+2} & \ldots & \ldots & \ldots & \bar{A}_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & \bar{A}_o
\end{vmatrix} \qquad (6.28)$$

Sendo $j = 1, 2 \ldots, n$ e $\bar{A}_j$ = conjugado complexo de A_j

Considerando que todos os coeficientes da equação característica são reais então o determinante de Δ_i é simétrico em relação a diagonal principal.

É interessante observar que se as condições do critério de estabilidade de Shur - Cohn não são satisfeitas nos verificamos que a equação característica tem pelo menos uma raiz a qual pertence ao exterior do círculo unitário no plano Z.

Diversificando do critério de Routh - Hurwitz este critério não indica o número de raízes, as quais estão exteriores ou pertençam ao círculo unitário.

Recentemente este critério foi significativamente simplificado, e três formas de critério de estabilidade foram deduzidos.

a) O análogo ao de Hurwitz - Lienard - Chipart,
b) análogo ao de Routh
c) método de expansão fracional contínua para o caso contínuo.

Exemplo: Para o sistema de controle amostrado da fig (6.14) temos a seguinte função transferência

$$T(Z) = \frac{C(Z)}{F(Z)} = \frac{45(Z + 2)}{(Z-2)(Z-0,5)} \qquad (6.29)$$

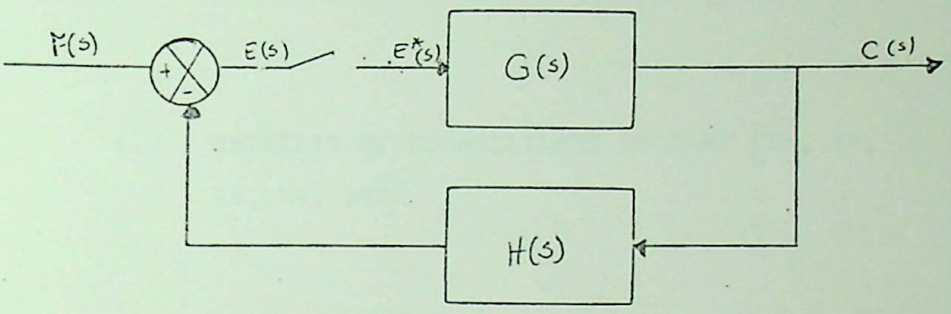


fig 6.14 - Sistema de controle de dados amostrados

Multiplicando ambos os fatores do denominador e igualando o conjunto a zero

$$Z^2 - 2,5Z + 1 = 0 \qquad (6.30)$$

O determinante Δ_1 desta equação é dado por:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_o & A_n \\ \bar{A}_n & \bar{A}_o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.31)$$

Portanto, a sequência de determinantes de Shur - Cohn para este simples caso é:

1,0

Desde que Δ_1 não é menor do que zero, este sistema é instável de acordo com o critério de Shur - Cohn.

6.7 - CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE JURY [11, 15, 16 43, 44, 101]

A formação deste critério foi baseada nos trabalhos de Rouche [118] Cohn [16] e Marden [69]. É apresentada, na forma tabelada análoga a tabela de Routh usada para estabilidade na metade esquerda do plano s, e requer cálculos de determinantes de segunda ordem os quais podem ser facilmente programados em computador digital.

O critério de estabilidade de Jury inicia-se mostrando que a condição necessária e suficiente para que o seguinte polinômio

$$F(Z) = A_o + A_1 Z^2 + A_2 Z^2 + \ldots + A_K Z^K + \ldots + A_n Z^n$$

$$A_n > 0 \qquad (6.32)$$

tenha todas as suas raízes interiores ao círculo unitário pode ser obtida pela formação da seguinte tabela da equação ca

racterística (6.32) [32]

linha	Z^o	Z^1	Z^2	...	Z^{n-K}	...	Z^{n-1}	Z^n
1	A_o	A_1	A_2	...	A_{n-K}	...	A_{n-1}	A_n
2	A_n	A_{n-1}	A_{n-2}	...	A_K	...	A_1	A_o
3	B_o	B_1	B_2	...	...	...	B_{n-1}	
4	B_{n-1}	B_{n-2}	B_{n-3}	...	...	...	B_o	
5	C_o	C_1	C_2	...	...	C_{n-2}		
6	C_{n-2}	C_{n-3}	C_{n-4}	...	...	C_o		
.	.	.	.	...	.			
.	.	.	.	...	.			
.	.	.	.	...	.			
2n-5	S_o	S_1	S_2	S_3				
2n-4	S_3	S_2	S_1	S_o				
2n-3	R_o	R_1	R_2					

(6.33)

Notamos que os elementos das linhas pares consiste dos coeficientes das linhas impares escritas em ordem reversa.

Os termos B_K, C_K, D_K e R_o são definidos como

$$B_K = \begin{vmatrix} A_o & A_{n-K} \\ A_n & A_K \end{vmatrix}$$

$$C_K = \begin{vmatrix} B_o & B_{n-1-K} \\ B_{n-1} & B_K \end{vmatrix}$$

$$D_K = \begin{vmatrix} C_o & C_{n-2-K} \\ C_{n-2} & C_K \end{vmatrix}$$

$$R_o = \begin{vmatrix} S_o & S_3 \\ S_3 & S_o \end{vmatrix}$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} S_o & S_1 \\ S_3 & S_2 \end{vmatrix}$$

A condição necessária e suficiente para que todas as raizes da equação caracteristica pertençam ao interior do círculo unitário no plano Z é que:

$$\left[1 + GH\ (1)\right] > 0 \qquad (6.34)$$

$$\begin{cases} [1 + GH(-1)] > 0 & \text{para n par} \\ < 0 & \text{para n impar} \end{cases}$$

e os coeficientes

$$\left.\begin{array}{l} |A_o| < A_n \\ |B_o| < |B_{n-1}| \\ |C_o| > |C_{n-2}| \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ |R_o| > |R_2| \end{array}\right\} \text{(n-1) condições} \qquad (6.35)$$

Verificamos na tabela de que R_1 não é necessário aos cálculos; assim o cálculo correspondente envolvendo os termos nas linhas 2n-4 e 2n-5 tornam-se redundantes [32]

O número de raízes interiores ao círculo unitário, se nenhuma das precedentes tornam-se iguais, é dado pelo número dos produtos P_K, K = 1, 2, ..., n, os quais são negativos quando:

$$P_1 = \left[|A_o| - A_n\right] \qquad (6.36)$$

$$P_2 = \left[|A_o| - A_n\right]\left[B_o - B_{n-1}\right] \qquad (6.37)$$

$$\vdots$$

$$P_n = \left[|A_o| - A_n\right]\left[|B_o| - |B_{n-1}|\right] \cdots - \cdots$$

$$\cdots \left[|R_o| - |R_2|\right]\left[|R_o^2 - R_2^2| - |R_o R_1 - R_1 R_2|\right] \qquad (6.38)$$

A diferença entre n e esse número produz o número de raizes exteriores ao círculo unitário.

ex.: 32 $F(Z) = 3 - 2Z - \frac{3}{2} Z^2 + Z^3$ (6.39)

Aplicando a condição $F(-1) = F(Z)\Big|_{Z=-1} = \frac{5}{2} > 0$ para n = 3

então o sistema é instável

Portanto a tabela não precisa ser calculada.

Para obtermos a informação do número de raízes exteriores ao círculo unitário nos temos

linha	Z^0	Z^1	Z^2	Z^3
1	3	-2	$-\frac{3}{2}$	1
2	1	$-\frac{3}{2}$	-2	3
3	8	$-\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	

(6.40)

$P_1 = |A_o| - A_n = 3 - 1 = 2 > 0$ (6.41)

$P_2 = 2\left[|B_o| - |B_{n-1}|\right] = 2(8 + \frac{5}{2}) > 0$ (6.42)

$P_3 = \text{pos. pos.}\left\{\left|8^2 - (\frac{5}{2})^2\right| - \left|8(-\frac{9}{2}) - \frac{9}{2}(\frac{5}{2})\right|\right\} > 0$ (6.43)

Portanto não existe nenhuma raiz interior ao círculo unitário e todas as três são exteriores ao círculo uni-

tário. Podemos notar que a condição $\left[\left|R_o^2 - R_2^2\right| - \left|R_oR_1 - R_1R_2\right|\right]$ pode ser obtida de F(-1) F(1) e a multiplicação de outras condições. .

Por exemplo neste caso o sinal destes termos é e - quivalente ao sinal de F(-1) F(1) isto é:

$$\text{sinal}\left[\left|R_o^2 - R_2^2\right| - \left|R_oR_1 - R_1R_2\right|\right] = \text{sinal } F(-1)\ F(1)$$

Exemplo [32]

$$F(Z) = 0.0025 + 0,08Z + 0,4126Z^2 - 1,368Z^3 + Z^4$$

$$n = 4 \qquad (6.44)$$

linha	Z^o	Z^1	Z^2	Z^3	Z^4
1	0,0025	0,08	0,4126-	-1,368	1
2	1	-1,368	0,4126	0,08	0,0025
3	= -1	1,368	-0,4116	-0,0834	
4	-0,0834	0,4116	1,368	-1	
5	0,9936	-0,402	0,5256		

(6.45)

Teste de estabilidade

$$F(1) = 0,1271 > 0 \qquad (6.46)$$

$$F(-1) = 2,703 > 0 \qquad (6.47)$$

$$\left|A_o\right| < \left|A_n\right| \qquad 0,0025 < 1$$

$$|B_o| > |B_{n-1}| \qquad 1 > 0{,}0834$$

$$|C_o| > |C_{n-2}| \qquad 0{,}9936 > 0{,}5256$$

O sistema é estável.

6.8 - ROOT LOCUS PARA SISTEMA DE DADOS AMOSTRADOS [82]

A função transferência pulsada dos elementos, geralmente achada nos sistemas de controle de dados amostrados com realimentação, tem só polos simples ou multiplos como singularidades e estão na forma de razões de polinômios em Z ou Z^{-1}. A condição de estabilidade de tais sistemas tornam se claros se expandirmos a função transferência pulsada em frações parciais. Se G(Z) é da forma:

$$G(Z) = \frac{a_o + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \ldots + a_m Z^{-m}}{1 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \ldots + b_n Z^{-n}} \qquad (6.48)$$

onde as condições de realização física requer que o termo 1 esteja presente no denominador [82] e se as várias raízes do denominador são designadas por Z_i, então G(Z) pode ser expandida em frações parciais como:

$$G(Z) = a_o + \frac{C_1}{1 + Z_1 Z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - Z_2 Z^{-1}} + \ldots + \frac{C_n}{1 - Z_n Z^{-1}} \qquad (6.49)$$

Se a entrada do sistema é um impulso, então a sequência pulsada no domínio do tempo que resulta é simplesmente

$$g(KT) = a_o + C_1(Z_1)^K + C_2(Z_2)^K + \ldots + C_n(Z_n)^K \qquad (6.50)$$

Se as raízes do denominador de (6.48) são os polos da função transferência pulsada G(Z) tendo módulo maior do que a unidade, é evidente que a resposta impulsiva g(KT) do sistema de dados amostrados será aumentada sem contorno como os vários valores inteiros do aumento K sem contorno.

A condição de estabilidade de que G(Z) não contém polos exteriores ao círculo unitário do plano Z, isto é, nitidamente visto nesta aproximação.

Há dificuldades em se obter, nos sistemas de dados amostrados de mais alta ordem, as raízes da equação características a qual determina os polos de toda a função transferência pulsada.

Os polos da resposta de toda a função transferência pulsada K(Z) são as raízes da equação característica, cu

ja forma é:

$$1 + GH(Z) = 0 \qquad (6.51)$$

onde GH(Z) é a malha da função transferência pulsada.

Como nos sistemas contínuos o método "Root - Locus" é empregado só para estimar ou obter exatamente a localização das raízes de (6.51) no plano complexo.

Neste caso, necessitamos encontrar todos os valores de Z no plano complexo Z que satisfaça a condição:

$$GH(Z) = 1\angle \pi \pm 2\pi n \qquad (6.52)$$

Como em toda a igualdade entre variáveis complexas (6.52) implica em duas igualdades separadas, uma estabelecendo que as amplitudes são iguais e a outra que os ângulos sejam iguais.

Em vista do fato de que muitos sistemas práticos , os quais contém ou são projetados com ganho constante que podem ser ajustados, a relação de amplitude é considerada sem importância.

Por outro lado, a relação de fase é uma propriedade

do sistema que reflete as características orgânicas dos componentes compreendendo o sistema e é, portanto, de primordial importância.

Então, um "Root Locus" é desejado em todos os pontos em que os "locus" satisfaz a relação de fase implicita ' em (6.52), usando o ganho como parâmetro.

A relação que descreve o Root-Locus é

$$\text{Ang}\left[GH(Z)\right] = \pi \pm 2\pi n \qquad (6.53)$$

Está visto que, exceto para uma mudança na variável s para Z e o uso do plano Z em vez do plano s, o problema da (6.53) é identico aquele de fazer o gráfico de um "Root Locus" de um sistema contínuo de malha fechada.

6.9 - OSCILAÇÃO HIDDEN [42]

É sempre compreensível que os sistemas devam ser estáveis. Nos sistemas lineares, isto implica que, para uma entrada contornada a resposta da saída precisa ser contornada. Nos sistemas de dados amostrados, este critério é altera

do estabelecendo que: um sistema de dados amostrados é estável se a saída sequência pulsada é contornada quando a entrada sequência pulsada for também contornada.

Tomamos conhecimento de que as saídas contínuas podem não ser contornadas, por possuirem oscilações de aumento de amplitude, ainda que uma sequência pulsada deduzida daqui possa ser contornada.

Vemos na fig (6.15), este efeito, isto é, através da oscilação está aumentando sem contorno, os cruzamentos com os zeros, que são sincronizados com o sampler.

Esta "Oscilação Hidden" foi introduzida por Barker [3] e estudada por outros investigadores [42]

Estas oscilações aparecem nas respostas devido a certas formas de função transferência de malha aberta G(s). [42]. Se a resposta impulsiva destas funções é oscilatória, então estas oscilações ocorrem na resposta, e se o período amostrado for maior ou igual a metade do período destas oscilações, o método da transformada Z falha ao indicar a sua presença.

A "transformada Z modificada" pode ser usada com

vantagens neste caso, sendo um método direto e simples, detectando a presença destas oscilações e indicando os seus valores.

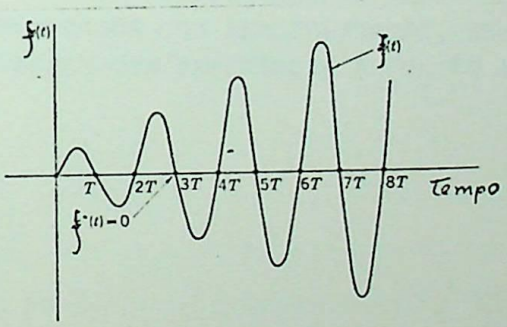


fig 6.15 - Exemplo de uma função do tempo com "Oscilação Hidden".

CAPÍTULO 7

O PROJETO DE SISTEMAS DE DADOS AMOSTRADOS COM REALIMENTAÇÃO, ESTUDADOS COM REFERÊNCIA A FUNÇÃO IMPULSO

7.1 - INTRODUÇÃO

Há uma classe inteiramente distinta de servo mecanismos, os quais operam com dados amostrados, isto é, sistemas para os quais o sinal atuante (entrada) é representado por amostras para regulares intervalos de tempo, com a informação contida na amplitude das amostras [67].

A análise ou projeto de um sistema de dados amostrados a primeira vista parece ser um problema desencorajante.

A presença das operações de amostragem nos sistemas de dados amostrados fazem com que os engenheiros se encontrem a frente de um problema totalmente diferente daquele que eles estão acostumados [65]. Essa primeira impressão é grandemente intensificada quando os engenheiros consultam a literatura. Geralmente a literatura dos sistemas de dados amostrados, se preocupa em enfatizar as diferenças entre os sistemas de dados e os sistemas convencionais. A analogia entre os sistemas de dados amostrados são de fato muito mais importantes do que suas diferenças. Neste Capítulo não provaremos em detalhes esta tese de analogia.

Estudaremos a filosofia do tratamento dos sistemas

de dados amostrados através das técnicas convencionais e ilustraremos esta filosofia pelo uso dessas técnicas numa sucessão lógica de problemas - exemplos.

A principal vantagem da analogia realizável entre sistemas contínuos e sistemas de dados amostrados torna-se um problema de projeto. Sistema de projeto é uma arte compreendida entre o que é desejado num certo sistema e o que é fisicamente realizável.

O processo de amostragem simplifica e complica o projeto do sistema de controle. Devido a malha ser fechada só durante instantes amostrados, o sistema opera mais tempo em malha aberta e o cálculo da resposta é um simples problema de analise de malha aberta.

A intermitência do fechamento da malha introduz, portanto, problemas de estabilidade não existentes nos sistemas contínuos. Discutiremos certas idéias básicas relativas ao projeto de sistemas de dados amostrados, particularmente a maneira na qual a simplificação introduzida na amostragem pode ser utilizada no projeto. Apresentaremos o método da resposta impulso do projeto, que é o mais aplicável para casos simples e especiais de sistemas de dados amostrados e daremos enfase ao método da transformada Z.

7.2 - COMPONENTES DO SISTEMA DE DADOS AMOSTRADOS [38, 56, 81, 96]

Uma simples malha de um sistema de malha fechada com realimentação é mostrado na fig (7.1)

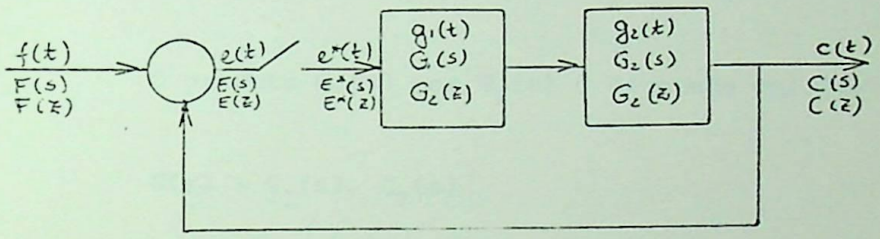


fig 7.1 - Sistema de dados amostrados com realimentação.

O problema de projeto difere do sistema de malha fechada convencional só em virtude da característica do sampler Este é representado por uma chave, a qual se fecha todo T_1 segundos e se abre todo T_2 segundos, onde T é o período de amostragem.

$$T = T_1 + T_2 \qquad (7.1)$$

Os pulsos, isto é, T_1, tem duração de tempo finito,

o qual é pequeno comparado com os intervalos de tempo (T_2 e T) entre as amostras.

Na fig (7.1) temos

$G_1(s)$ = compensação da malha ou sistema de controle
$G_2(s)$ = função transferência dos elementos do controlador

O produto $G_1(s)$ por $G_2(s)$ é denotado por G(s)

$$G(s) = G_1(s).\ G_2(s) \qquad (7.2)$$

Na entrada do sampler temos o sinal atuante contínuo e(t), e na sua saída o sinal atuante na forma amostrada, $e^*(t)$

Nas analises matemáticas usualmente consideramos $e^*(t)$ como um impulso melhor do que um pulso, tais impulsos tem suas áreas de valor igual aos valores das funções amostradas, para os respectivos instantes amostrados.

A duração do pulso T_1 é pequena comparada com o tempo do sistema e o ganho do amplificador imediato ao sampler é multiplicado por um fator igual a duração do tempo do pulso amostrado [81].

Daremos enfase inicialmente ao projeto, a fim de encontrarmos especificações expressas nos termos das características desejadas da resposta da função degrau, desde que o método pode ser ampliado se considerarmos outras entradas aperiódicas.

7.3 - SIMPLICIDADE DA RESPOSTA DO SISTEMA [38, 56]

Os sistemas de dados amostrados são atualmente atrativos, considerando-se as investigações em vista de suas potencialidades e aplicações nos vários ramos da engenharia.

Desde que os métodos mais poderosos para a análise dos sistemas contínuos estão baseados nas aproximações amostradas das funções contínuas.

Devido a sua natureza os sistemas de dados amostrados serão mais facilmente analizados do que seus correspondentes sistemas contínuos.

Esta simplicidade baseia-se no fato de que para os sistemas de dados amostrados com realimentação, o sistema opera mais tempo com a malha aberta, exceto para os instantes a -

mostrados.

A resposta do sistema de dados amostrados com realimentação da fig (7.1) é simplesmente a soma das respostas impulsos ponderadas de g.

Consideremos que uma arbitrária função entrada f(t) seja aplicada, à malha g permanece inexitada até o primeiro instante amostrado t_o, e após esse instante g é excitado por um impulso de área

$$e(t_o) = f(t_o) - c(t_o) \tag{7.3}$$

No intervalo $t_o < t < t_o + T$ temos

$$c(t) = g(t).e\ (t_o) \tag{7.4}$$

onde

c(t) = resposta impulso de g.

No segundo período amostrado outro impulso de área , $e(t_1)$ é aplicado para g.

A resposta c(t) agora é a soma das duas respostas impulsos pois g é uma superposição hold linear. A resposta desejada pode ser calculada através de um período requerido de períodos amostrados.

A saída durante o n-ésimo intervalo é simplesmente a soma de n-ponderado, respostas impulsos atrasadas, em contraste com os sistemas contínuos; onde a saída é a convolução do sinal atuante e g(t).

c(t) pode ser calculado através de poucos períodos amostrados desde que sejam aplicados ao sistema funções aperiodicos tais como a função degrau unitário ou função rampa unitária.

7.4 - APROXIMAÇÃO DA TRANSFORMADA Z [56, 81]

Tentaremos neste item, [81] indicar uma maneira na qual a pesquisa física da execução do sistema pode ser utilizada no projeto; de fato, uma extensa variedade de problemas de projeto pode ser resolvido só com este raciocínio físico e sem a introdução dos mais poderosos métodos matemáticos.

A analise e projeto de todos os sistemas de dados amostrados é simplificada se certas ferramentas matemáticas são introduzidas, particularmente a transformada Z e a teoria associada.

A transformada Z leva informações acerca da correspondente função do tempo só para instantes amostrados.

Existe um número infinito de sistemas de dados amostrados que fornecem os mesmos valores para as respostas dos instantes amostrados portanto devemos utilizar técnicas diferentes para obtermos a natureza da resposta completa. É importante notar que, a transformada de vários sistemas de dados amostrados não é única [81].

O significado desta ambiquidade é ilustrada pelos quatro sistemas mostrados na fig 7.2.

A resposta da função degrau de cada um dos quatro sistemas tem exatamente os mesmos valores para os instantes amostrados, mas as curvas são remarcadamente diferentes como nos mostra a fig (7.3)

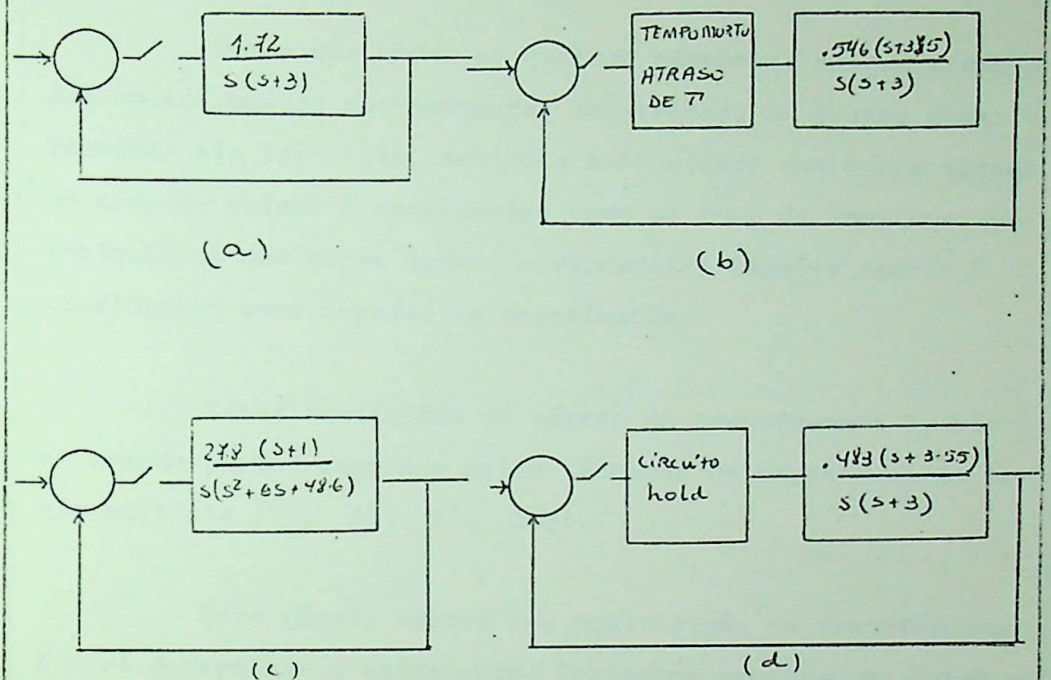


fig. 7.2 - Quatro sistemas com a mesma transformada Z para T = 1 segundo.

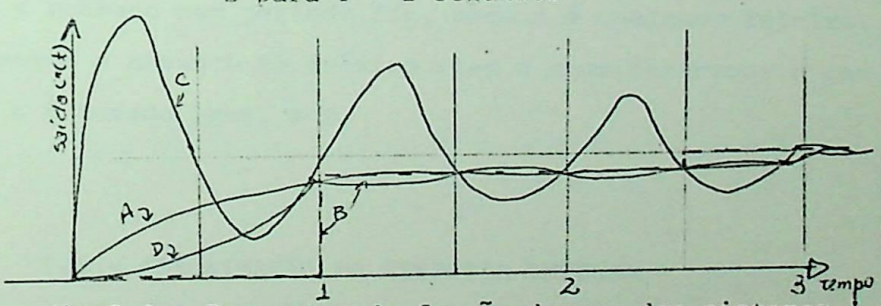


fig 7.3 - Respostas da fun ão degrau dos sistemas da fig 7.2. (AIEE, pt II, Vol. 73, Ap.and Ind., pp 248).

Desde que todas as quatros respostas passam através dos mesmos pontos nos instantes amostrados, as quatro trans - formadas são idênticas, devido a ambiquidade que surge quando um trem de pulsos é considerado como um trem de impulsos: uma ambiquidade que surge quando o verdadeiro impulso também é considerado como impulso na aproximação.

Estas limitações do método da transformada Z, são em grande parte removidas pelas técnicas de amostragem de razão multipla [50, 65, 82, 108].

Este método mostra uma modificação da transformada Z para determinar a saída entre instantes amostrados. Exten - sões dessa teoria tem considerado o caso onde a saída do sampler é operado num período T/n, onde n é qualquer inteiro, discutiremos o assunto no próximo item e consideraremos o caso onde n é tomado igual a 2.

7.5 - APROXIMAÇÃO DA RESPOSTA IMPULSO ANÁLISE [56, 78, 79]

A análise do sistema de dados amostrados, visto na

fig (7.4) mostra as características básicas e as vantagens da aproximação da resposta impulso. E verificaremos que a analise baseada na resposta impulso do sistema de malha aberta é ' capaz de nos completar as informações acerca da saída do sistema.

Se não desejarmos um gráfico da saída contínua, a ' saída para intervalos regulares pode ser determinada.

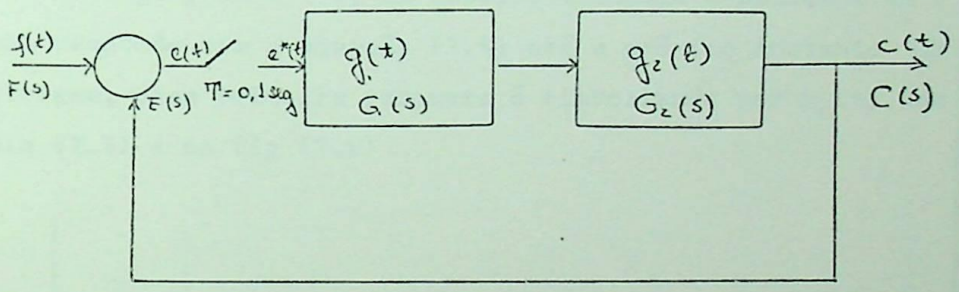


fig 7.4 - Sistema de dados amostrados com T = 0,1 segundos.

Da fig 7.4 temos que

$$G(s) = \frac{13,4}{s(s+10)} \text{ para } T=0,1 \text{ seg.} \qquad (7.5)$$

Consideramos o sistema em repouso e então aplicamos na entrada, f(t), uma função degrau unitário e obtemos a res-

posta de g no domínio do tempo.

$$g(t) = 1{,}34 \left[1 - \exp(-10t) \right] \qquad (7.6)$$

Se considerarmos depois da aplicação do degrau t = 0 a primeira amostragem ocorrerá com o sinal atuante igual a unidade.

Logo para t = 0, um impulso unitário é aplicado em g o qual responde com a equação (7.6) até o próximo instante de amostragem, essa primeira resposta é simbolizada por $g_o(t)$ na tabela (7.1) e na fig (7.5)

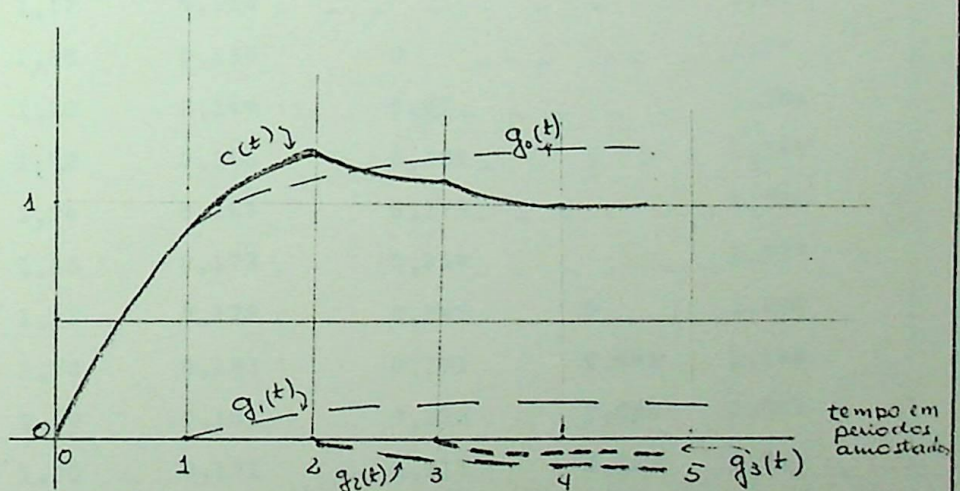


fig 7.5 - Respostas do sistema simples.

TABELA 7.1 - Resposta do Sistema Simples.

t	$\beta_0=1$ $g_0(t)$	$\beta_1=0,154$ $g_1(t)$	$\beta_2=0,29$ $g_2(t)$	$\beta_3=0,204$ $g_3(t)$	c(t)
0	0				0
0,02	0,242				-0,242
0,04	0,442				0,442
0,06	0,605				0,605
0,08	0,738				0,738
0,10	0,846	0			0,846
0,12	0,935	0,037			0,972
0,14	1,01	0,068			1,078
0,16	1,07	0,093			1,163
0,18	1,12	0,114			1,234
0,20	1,16	0,130	0		1,29
0,22	1,19	0,144	0,07		1,264
0,24	1,22	0,156	0,129		1,247
0,26	1,24	0,165	0,175		1,23
0,28	1,26	0,173	0,214		1,219
0,30	1,27	0,179	0,245	0	1,204
0,32	1,28	0,183	0,271	0,049	1,143
0,34	1,29	0,188	0,293	0,090	1,095
0,36	1,30	0,191	0,311	0,123	1,057
0,38	1,31	0,194	0,325	0,150	1,029
0,40	1,32	0,196	0,336	0,173	1,01

Da tabela 7.1 vem que no final de um período amostrado a saída alcançou o valor de 0,846, e o erro é de 0,154 e então um impulso de área 0,154 é aplicado em g.

Isto é

$$g_o(t) = 1,34(1 - e^{-10t}) \tag{7.7}$$

portanto para t = 0,10 o valor de $g_o(t)$ é igual a 0,846

$$e_1 = e_o - g_o(t) \tag{7.8}$$

$$e_1 = 1 - 0,846 \tag{7.9}$$

$$e_1 = 0,154 \tag{7.10}$$

Para obtermos $g_1(t)$ simplesmente multiplicamos a coluna $g_o(t)$ por e_1 e deslocamos de uma quantidade correspondente a um período amostrado, isto é!

$$g(0,12) = 1,34 \left[1 - e^{-10(0,12)} \right]$$

$$g(0,12) = 0,935 \tag{7.11}$$

$$g_1(0,12) = 0,242 \cdot 0,154$$

$$g_1(0,12) = 0,037\ 268 \tag{7.12}$$

$$g_1(0,14) = 0,442 \cdot 0,154$$

$$g_1(0,14) = 0,068068 \tag{7.13}$$

A saída c(t) entre T e 2T segundos é

$$c(t) = g_o(t) + g_1(t) \qquad (7.14)$$

$$c(0,12) = 0,935 + 0,037$$

$$c(0,12) = 0,972 \qquad (7.15)$$

.
.
.

Então o gráfico da tabela (7.1) é construído e mostrado na fig (7.5). Ao examinarmos o gráfico da fig(7.5) notamos que a saída c(t) cai rapidamente devido a natureza de $g_o(t)$.

7.6 - SAÍDA ENTRE INSTANTES AMOSTRADOS UTILIZANDO - SE O MÉTODO DA TRANSFORMADA Z [73, 82, 108]

A transformada Z pode ser usada para calcular rapidamente a saída de um sistema de dados amostrados para os instantes amostrados.

Qualquer transformada Z de um sistema c(Z) expandida em de uma série de potências nos é dado por:

$$c(Z) = A_o + A_1 Z^{-1} + A_2 Z^{-2} + \ldots\ldots\ldots \quad (7.16)$$

Esta série de potências em Z^{-1} é identica com a transformada Z de uma sequência impulso. A transformada Z inversa no domínio do tempo é'

$$c(t) = A_o \delta(t) + A_1 \delta(t-T) + A_2 \delta(t-2T) + \ldots\ldots \quad (7.17)$$

onde os vários A's são áreas de cada impulso e a potência de Z é a ordem ou tempo no qual cada impulso existe. Considere - mos a equação (7.5)

$$G(s) = \frac{13,4}{s(s+10)} = 1,34 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+10}\right) \text{ para } T = 0,1 \text{ seg.}$$

G(Z) é achado como

$$G(Z) = 1,34 \left(\frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{Z-e^{-1}}\right) \quad (7.18)$$

$$G(Z) = \frac{0,846\ Z}{Z^2-1,368Z+0,368} \quad (7.19)$$

Quando a entrada f(t) é uma função degrau unitário, E(Z) é achado como:

$$E(Z) = \frac{F(Z)}{1+G(Z)} = \frac{Z^2-0,368Z}{Z^2-0,522Z+0,368} \quad (7.20)$$

A transformada Z usual da saída é:

$$C(Z) = E(Z)\ G(Z) = E(z) \cdot \frac{0,846\ Z}{Z^2-0,522Z+0,368}$$

$$= \frac{0,846}{Z} + \frac{1,29}{Z^2} + \frac{1,20}{Z^3} + \frac{1,01}{Z^4} + \ldots (7.21)$$

Portanto de acordo com a definição em (7.17) temos' a transformada inversa.

$$c(t) = 0,846\ \delta(t-T) + 1,29\ \delta(t-2T) + 1,20\ \delta(t-3T) + 1,01\ \delta(t-4T) + \ldots$$

(7.22)

Para os instantes amostrados este resultado concorda com a tabela 7.1, obtida de modo direto.

A curva de (7.22) concorda com a curva mostrada na fig.' (7.5).

Mas, neste caso o projetor não tem imformações entre os instantes amostrados. Portanto passaremos a descrever' um método que nos dá informações entre os instantes amostrados.

O polimento da curva, isto é, a união dos pontos dados é só aproximado. Se quizermos obter informação na resposta entre os instantes amostrados necessitaremos usar um "método da transformada Z modificada" que é um método de amostragem submultipla [32, 38, 39, 41, 42, 82, 90, 108].

A definição da transformada Z descrita neste capítulo, baseia-se na usada por Ragazzini e Zadeh [81]. Como consequência desta definição a expansão de C(Z), numa série de potências em 1/Z, coloca em evidência as sucessivas amplitudes' amostradas de c(t).

C(Z) é obtida com auxílio da Tabela I, apendice .

A conversão de C(s) em C(Z) é acompanhada pela expansão em frações parciais de c(s), identificando-se termo a termo, com a tabela. Nesta aplicação básica a transformada Z de C(Z) não contém informações acerca do comportamento do atual c(t) entre os instantes amostrados.

Uma aproximação para o cálculo da curva envolve o uso de um sampler fictício para a saída do sistema cujo período é uma fração da sequência da entrada [65].

Este método utiliza um sampler, cujo período é a ne

tade do período do sampler da entrada, para a saída do sistema de dados amostrados.

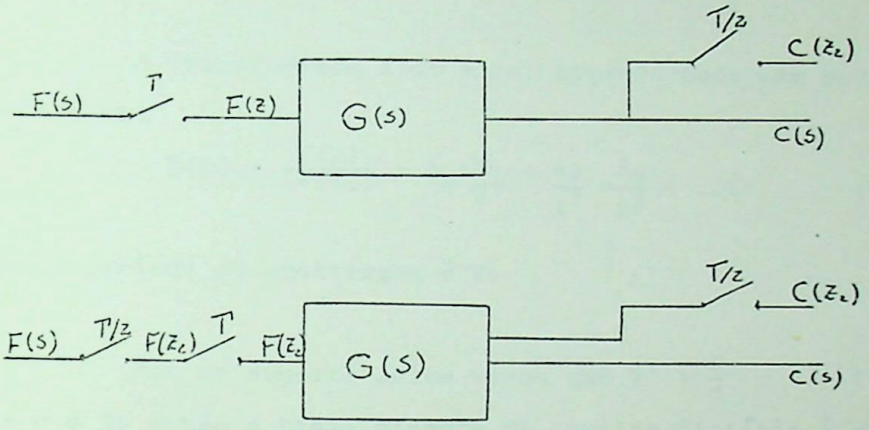


fig (7.6) a) Sistema de dados amostrados com dupla razão de saída.

b) Sistema equivalente

Na fig (7.6a) vemos que a entrada do intervalo de amostragem é T, enquanto que a saída para o intervalo de amostragem é T/2.

Kranc [50] considerou o caso onde a saída do sampler é operada para um período T/n onde n é qualquer inteiro. Neste item consideraremos n = 2.

No sistema de malha fechada (o sampler colocado após

o esquema de medida de erro), o sinal atuante e*(t) é um trem de impulsos para a frequência de amostragem.

A transformada Z do sinal atuante pode ser expandida na forma

$$E(Z) = \frac{F(Z)}{1+G(Z)} = A_o + \frac{A_1}{Z} + \frac{A_2}{Z^2} + \frac{A_3}{Z^3} + \ldots \qquad (7.23)$$

onde o período de amostragem é T.

Mas no exposto acima vemos que $T' = \frac{T}{n}$ (7.24)

com n = 2, então o sinal atuante do sampler fictício é representado por

$$E'(Z)\Big|_{T'=T/2} = A_o + \frac{0}{Z} + \frac{A_1}{Z^2} + \frac{0}{Z^3} + \frac{A_2}{Z^4} + \frac{0}{Z^5} + \frac{A_3}{Z^6} + \ldots\ldots \qquad (7.25)$$

onde o tempo entre os valores sucessivos correspondentes a T' e aos A's são os mesmos que na equação (7.23).

Operando a saída do sampler fictício para duas vezes a frequência de entrada do sampler, um valor da saída contínua para pontos intermediários do intervalo básico amostrado, é obtido.

Enquanto não definimos toda a onda (ripple), isto nos dá uma peça adicional de informações a qual permite ao projetor estimar o verdadeiro valor da onda (ripple) sobre to

do o intervalo.

É visto que a entrada do sampler se fecha para todos os outros intervalos amostrados da saída do sampler [82].

Isto sugere o uso da variável auxiliar Z, a qual é definida por

$$Z = e^{\frac{Ts}{2}} \tag{7.26}$$

Portanto façamos

$$Z = Z^2 \tag{7.27}$$

Para obtermos a relação entre a razão dupla da saída amostrada e a entrada da sequência pulsada, (referência é feita na fig (7.6b) a operação do sampler no intervalo básico T' é precedido por outra operação do sampler no intervalo T/2.

A transformada Z da sequência pulsada da entrada aplicada para sistema contínuo é F(Z), mas pela equação (7.27) a sequência de entrada é realmente dada por:

$$F(Z) = F(Z^2) \tag{7.28}$$

Fisicamente, isto significa que as amostras de f'(t) correspondentes a um número impar de períodos, são todos zero ver fig (7.7).

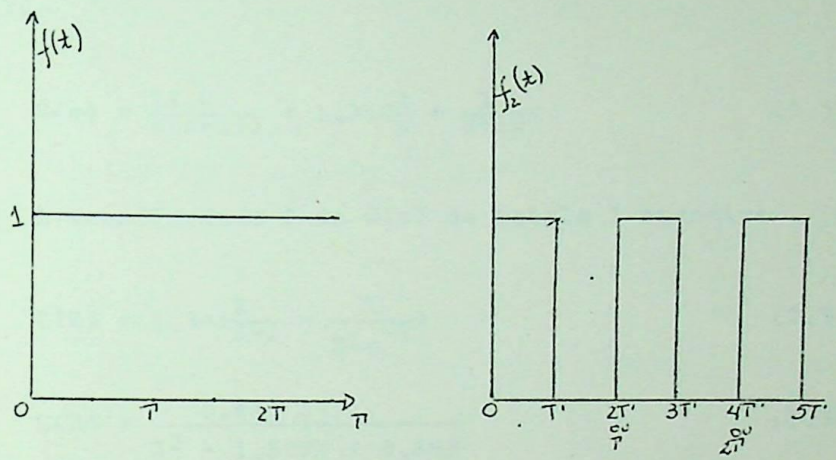


fig 7.7 - Entrada sintética (forma de onda entre amostragem irrelevante). [108]

Podemos agora da equação (7.23) encontrar $E'(Z)$

$$E'(Z) = \frac{F(Z^2)}{1+G(Z^2)} \tag{7.29}$$

e a transformada da saída de $C'(Z)$ como:

$$C'(Z) = \frac{F(Z^2)}{1+G(Z^2)} G'(Z) \tag{7.30}$$

Na qual $G'(Z)$ é a transformada Z de G(s) com respeito a T' e $F(Z^2)$ e $G(Z^2)$ são as transformadas Z de F(s) e G(s) com respeito a T, mas com Z trocado por Z^2.

Tomemos G(s) da equação (7.5) como exemplo (ver fig (7.8).

$$G(s) = \frac{13,4}{s(s+10)} = 1,34\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+10}\right) \qquad (7.31)$$

A transformada Z de G(s) da tabela I apendice é

$$G(Z) = 1,34\left(\frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{Z-e^{-1}}\right) \qquad (7.32)$$

$$G(Z) = \frac{0,846\ Z}{Z^2 - 1,368Z + 0,368} \qquad (7.33)$$

Com a entrada degrau unitário E(Z) vale:

$$\frac{E(Z)}{1+G(Z)} = \frac{Z^2 - 0,368\ Z}{Z^2 - 0,522Z + 0,368} \qquad (7.34)$$

e

$$E(Z) = \frac{Z^4 - 0,368\ Z^2}{Z^4 - 0,522\ Z^2 + 0,368} \qquad (7.35)$$

$G'(Z)$ dá

$$G'(Z) = 1,34\ \left(\frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{Z-e^{-0,5}}\right) \qquad (7.36)$$

$$G'(Z) = \frac{0,526\ Z}{Z^2 - 1,607\ Z + 0,607} \qquad (7.37)$$

A saída é descrita pela transformada Z

$$C'(Z) = \frac{0,526\,Z^5 - 0,194\,Z^3}{Z^6 - 1,6072Z^5 + 0,085Z^4 + 0,838Z^3 + 0,052Z^2 - 0,592Z + 0,223} \qquad (7.38)$$

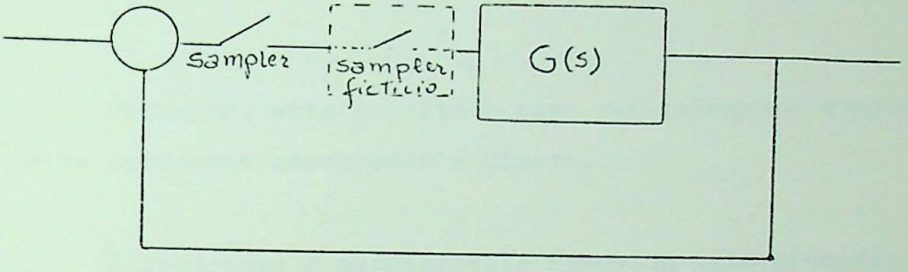


fig (7.8) Sistema simples com sampler fictício.

Quando a equação (7.38) é expandida em longa divisão do numerador pelo denominador, os primeiros termos são:

$$C'(Z) = 0 + \frac{0,526}{Z} + \frac{0,846}{Z^2} + \frac{1,12}{Z^3} + \frac{1,29}{Z^4} + \ldots \qquad (7.39)$$

a qual por inversão, pelo precedimento normal, dá:

$$C^*(t) = 0 + 0,526\,\delta(T/2) + 0,846\,\delta(2T/2) +$$

$$+ 1,12\,\delta(3T/2) + 1,29\,\delta(4T/2) + \ldots \qquad (7.40)$$

Por contraste, a transformada Z normal, na razão básica C(Z), a sua inversão dá:

$$C^*(t) = 0+0,526\,\delta(T') +0,846\,\delta(2T')+1,12\,\delta(3T')+1,29\,\delta(4T')+.....$$

(7.41)

Este resultado concorda com a curva de c(t) na fig ' (7.5).

Portanto, este resultado para determinar as respos - tas entre instantes amostrados é direto.

A incerteza é parcialmente removida pelo procedimento de acharmos um submultiplo do período amostrado.

A única dificuldade vem do caso de conhecer $G'(Z)$ de G(s) ou G(Z).

7.7 - CONCLUSÃO

Comparando os métodos usados nos ítens (7.5) e (7.6) vemos que, na prática é raramente necessário calcular apuradamente mais do que a resposta dos pontos amostrados atuais. O ' conhecimento da natureza gráfica da natureza de g(t) autoriza o projetor a checar uma aproximação de respostas entre pontos amostrados, sem elaborar calculos.

7.8 - A SAÍDA PARA QUALQUER PONTO NO PERÍODO DE AMOSTRAGEM [55]

Usaremos agora uma técnica para achar a saída para qualquer tempo, Tx segundos depois do instante amostrado.

O sistema a ser considerado é o da fig (7.4) enquanto na fig (7.9) mostra um circuito hipotético acrescido do artifício a ser usado nesta técnica.

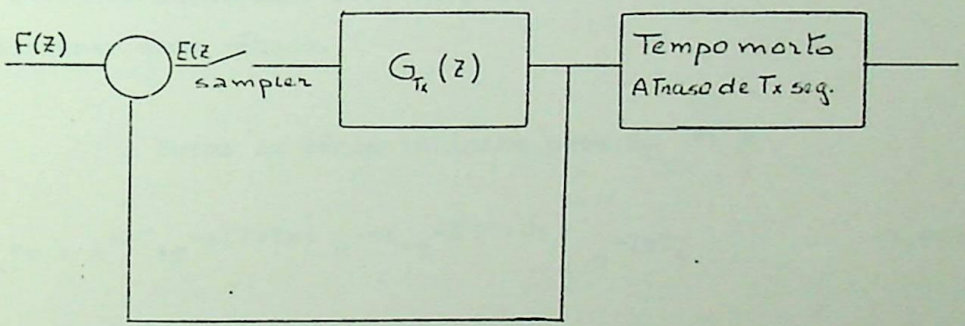


fig (7.9) Sistema Hipotético usado para encontrar a saída para qualquer tempo.

O sinal $e^*(t)$ é um trem de impulsos para os instantes amostrados. E(Z) contém todas as informações que estão con

tidas em e*(t). Portanto, toda a informação, exceto aquela para os instantes amostrados é rejeitada quando G(Z) é obtida de g(t). Quando E(Z) e G(Z) são multiplicados juntos no domínio Z a correspondente ocorrência no domínio do tempo é a convolução do trem de impulsos de E(Z) com o trem de impulsos (ou valores de G(Z).

Consequentemente, o mesmo tipo de operação pode ser executada para obtermos uma nova função $G_{Tx}(Z)$ dos valores de g(t) para um conjunto de pontos que ocorrem T_x segundos depois do instante amostrado. Por exemplo, $g(t) = e^{-aT}$ é usado para demonstrar esse método.

A forma da série infinita para G_{T_x} *s é

$$G_{Tx}*s = e^{-aT} + e^{-a(T+Tx)}\ e^{-sT} + e^{-a(2T+Tx)}\ e^{-2sT} + \ldots\ldots \qquad (7.42)$$

Quando o termo e^{-aTx} é fatorado, o termo da série infinita pode ser simplificado e com a mudança da variável $Z=e^{sT}$ a equação (7.42) pode ser escrita como

$$G_{Tx}(Z) = \frac{e^{-aTx}}{Z-e^{-aT}} \qquad (7.43)$$

Uma pequena lista da transformada Z e a correspondente transformada Z modificada são dados na tabela (7.II)

Tabela 7.II

Pequena lista de Transformada Z Modificada

G(Z)	$G_{Tx}(Z)$
$\frac{Z}{Z-1}$	$\frac{Z}{Z-1}$
$\frac{TZ}{(Z-1)^2}$	$\frac{TxZ}{Z-1} + \frac{TZ}{(Z-1)^2}$
$\frac{Z}{Z-e^{-aT}}$	$\frac{e^{-aTx}Z}{Z-e^{-aT}}$

O exemplo considerado para demonstrar essa técnica é o circuito da fig (7.9) com

$$G(s) = \frac{13.4}{s(s+10)}$$

Conforme vimos nos equações (7.18), (7.19), (7.20) e (7.21) C(Z) é dado por!

$$C(Z) = \frac{0,846}{Z} + \frac{1,29}{Z^2} + \frac{1,20}{Z^3} + \frac{1,01}{Z^4} + \ldots \qquad (7.44)$$

A transformada Z modificada é tomada termo a termo de G(Z) pelo uso dos pares de Transformada da tabela (7.II). Quando consideramos T_x= 0,02 segundos, o resultado é:

$$G_{0,02}(Z) = 1,34\left[\left(\frac{Z}{Z-1}\right) - \frac{e^{-0,2}Z}{Z-e^{-1}}\right]$$

$$= \frac{0,242\ Z^2 + 0,605\ Z}{(Z-1)(Z-0,368)} \qquad (7.45)$$

A transformada Z da saída 0,02 segundos depois do instante amostrado é:

$$C_{0,02}(Z) = E(Z)\ G_{0,02}(Z) = \frac{Z}{Z-1} \cdot G_{0,02}(Z) =$$

$$= \frac{0,242\ Z^3 + 0,605\ Z^2}{Z^3-1,522Z^2+0,890Z-0,368} \qquad (7.46)$$

Os primeiros termos da solução são colocados em evidência por dividirmos o numerador pelo denominador:

$$C_{0,02}(Z) = 0,242 + \frac{0,973}{Z} + \frac{1,265}{Z^2} + \frac{1,149}{Z^3} + \ldots \qquad (7.47)$$

$$c_{0,02}(t)=0,242\ \delta(t)+0,973\ \delta(t-T)+1,265\delta(t-2T)+1,149\delta(t-3T)+\ldots \qquad (7.48)$$

Estes passos são repetidos com T_x= 0,06 segundos.

$$G_{0,06}(Z) = 1,34\ \left(\frac{Z}{Z-1} - \frac{e^{-0,6}Z}{Z-e^{-1}}\right)$$

$$= \frac{0,605\ Z^2 + 0,243\ Z}{(Z-1)(Z-0,368)} \qquad (7.49)$$

$C_{0,06}(Z)$ torna-se

$$C_{0,06}(Z) = \frac{0,605\ Z^3 + 0,243\ Z^2}{Z^3 - 1,522\ Z^2 + 0,890\ Z - 0,368} \qquad (7.50)$$

o qual quando expandido dá

$$C_{0,06}(Z) = 0,605 + \frac{1,165}{Z} + \frac{1,237}{Z^2} + \frac{1,063}{Z^3} + \ldots \qquad (7.51)$$

$$C_{0,06}(t) = 0,605\delta(t) + 1,165\delta(t-T) + 1,237\delta(t-2T) + 1,063\delta(t-3T) + \ldots \qquad (7.52)$$

Os pontos de $C_{0,02}(t)$ são mostrados na fig (7.10) marcados com um X e os pontos de $C_{0,06}(t)$ são marcados com um ponto.

A curva da fig (7.10) é obtida pelo uso da aproximação da resposta impulso. (item 7.5).

Por essa técnica muitos pontos podem ser achados entre os instantes amostrados. O denominador de $C_{Tx}(Z)$ permanece o mesmo; portanto, para cada valor de T_x um novo numerador precisa ser achado.

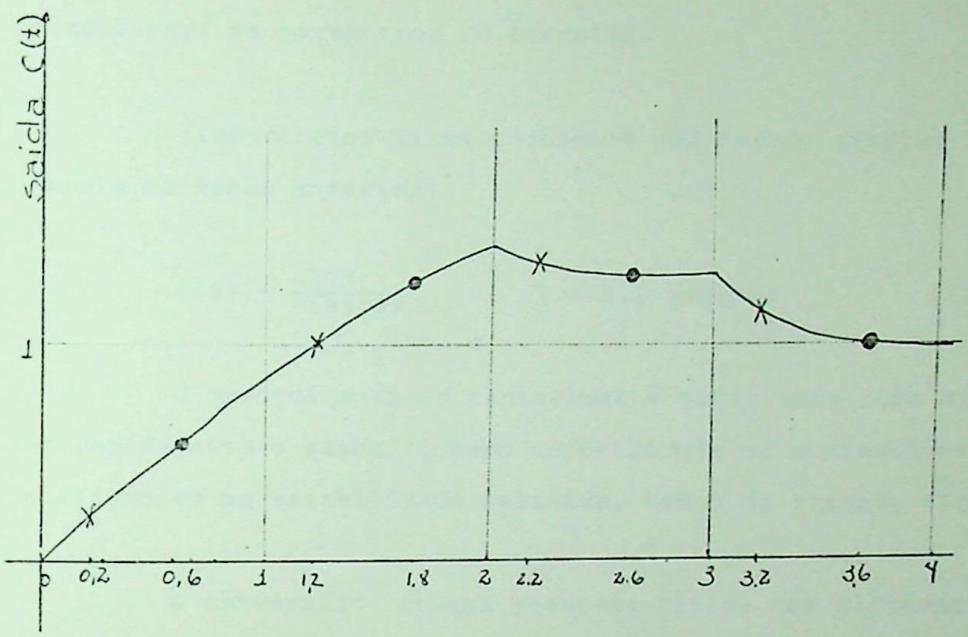


fig (7.10) Resposta da fig (7.9) mostrando pontos para $Tx = 0,02T$ e $T_x = 0,06\ T$.

7.9 - APROXIMAÇÃO DA RESPOSTA IMPULSO. PROJETO. [41, 42, 56]

Há dois problemas básicos na teoria dos instantes de controle com realimentação: a) o ajuste do ganho

b) a determinação de valores apro-

priados para os parametros do circuito.

Ilustraremos esses problemas nos termos simples do exemplo da seção anterior

$$G(s) = \frac{10K}{s(s+10)} \qquad T = 0,1 \text{ segundo} \qquad (7.53)$$

O procedimento de tentativas é suficiente para ajustar rapidamente o ganho K, para encontrar-se as costumeiras especificações na estabilidade relativa, tempo de avanço, etc.

O sobressalto de uma resposta típica nos sistemas de controle com realimentação é (uma porcentagem do valor final) uma medida da estabilidade relativa do sistema. Os valores permissíveis de sobressalto dependem da aplicação do sistema e varia de 0 a 1 por cento nos casos de certas medidas de equipamento, de 5 a 10 por cento nos amplificadores de videos, e de 25 por cento em diante são aceitáveis em certos servomecanismos [108].

Por exemplo, se o sobressalto desejado for especificado, um valor de K é escolhido e a curva c(t) é desenvolvida até o primeiro máximo ser alcançado.

Se o sobressalto é muito grande, um valor pequeno de

K é escolhido e a analise repetida.

Com um pouco de experiencia o valor próprio de K pode ser estabilizado com uma ou duas tentativas.

Com K no valor de 1,34, o exemplo do procedente item demonstra a solução com um sobressalto ao redor de 29%.

A intuição dentro dos problemas mais gerais de sistemas de parametros fixos pode ser obtido do estudo do efeito da variação de aT na resposta do sistema com período amostrado T e

$$G(s) = \frac{a\ K}{s(s+a)} \qquad (7.54)$$

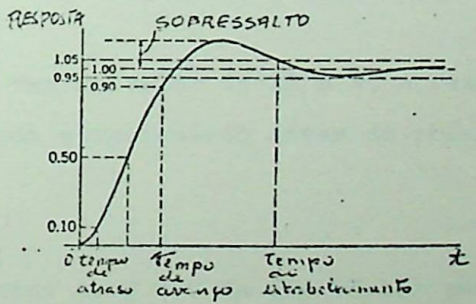


fig 7.11 - Resposta típica para uma função de entrada degrau unitário.

Se um valor máximo de sobressalto é especificado (25 a 30 por cento neste ítem) um valor apropriado de K e a correspondente forma da resposta pode ser determinada para algum valor de aT.

Calculemos a transformada Z de G(s), isto é:

$$G(s) = \frac{aK}{s(s+a)} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s+a} \qquad (7.55)$$

de acordo com a Tabela I apendice IV temos

$$G(Z) = \frac{KZ}{Z-1} - \frac{KZ}{Z-e^{-aT}} = \frac{K(1-e^{-aT})}{Z^2-(1+e^{-aT})\,Z + e^{aT}} \qquad (7.56)$$

a qual dá:

$$\frac{G(Z)}{1+G(Z)} = \frac{K(1-e^{-aT})\,Z}{Z^2+K(1-e^{-aT}) - (1+e^{-aT})\,Z+e^{-aT}} \qquad (7.57)$$

Se aT tem um valor igual a 5, a resposta g(t) terá ' alcançado o estado estacionário antes do próximo instante amostrado.

As partes A, B e C da fig (7.12) mostram a natureza de c(t) quando K varia.

A proposito, o sistema da parte B com K igual a unidade será preferido.

A única vantagem do sistema da parte C é que tem um suave tempo de avanço, mas isto é certamente ponderado pela natureza oscilatória da resposta.

Por essa razão o valor do ganho nunca é estabelecido maior do que o módulo, para que a curva c(t) alcance a unidade no final de um período amostrado.

Continuando nossas investigações para aT igual a 2,5 1,5, 1,0 e 0,5 temos a curva representada na fig (7.13) nas partes A, B, C e D respectivamente

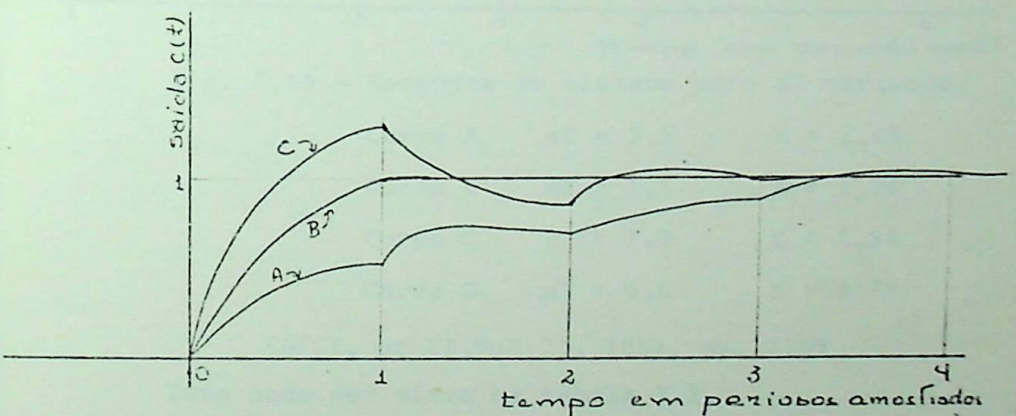


fig. 7.12 - Resposta do sistema com aT=5 e K variando.

Curva A K = 0,5

Curva B K = 1

Curva C K = 1,25

(AIEE,pt II,Vol 73,App.and.Ind.,1954,pp 250)

Como aT é decrescente o módulo de c(t) depois de um período decresce e mais períodos amostrados são exigidos para' que a curva c(t) alcance seu valor máximo.

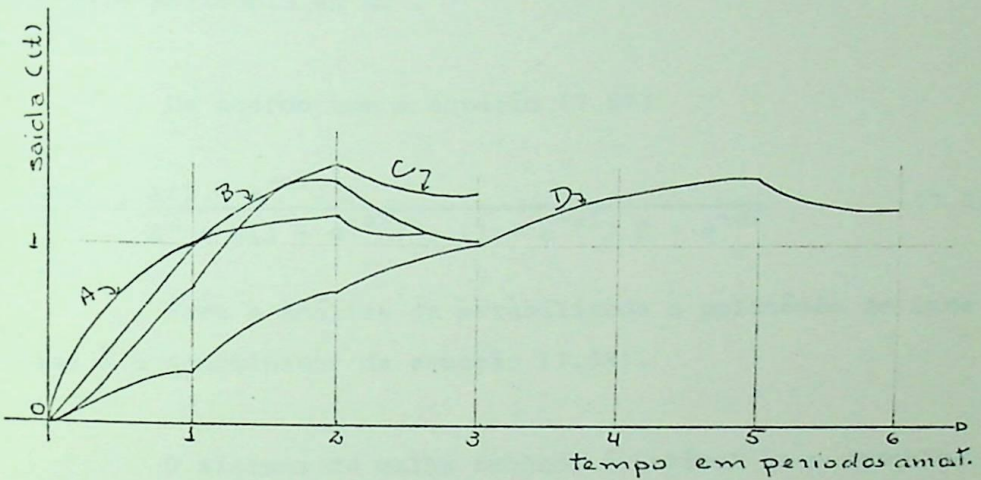


fig. 7.13 - Resposta do sistema para aT variando.

Curva A	aT = 2,5	K = 1,09
Curva B	aT = 1,5	K = 1,29
Curva C	aT = 1,0	K = 1,34
Curva D	aT = 0,5	K = 0,77

(AIEE, pt II,Vol 73, 1954, pp. 250)

Isto pode ser visto na tabela 7.3.

O teste de estabilidade é simplificado se o domínio Z é considerado. O sistema é estável se não há zeros exteriores ao círculo unitário, desde que a transformada Z mapea a metade esquerdado plano s no interior do círculo unitário no plano Z.

A estabilidade pode ser determinada pela investigação da localização dos zeros de $\frac{G(Z)}{1+G(Z)}$, zeros estes determinados pelo polinômio em Z.

De acordo com a equação (7.57)

$$\frac{G(Z}{1+G(Z)} = \frac{K(1 - e^{-aT}) Z}{Z^2 + K(1 - e^{-aT}) - (1 + e^{-aT}) Z + e^{-aT}} \qquad (7.58)$$

Para a análise de estabilidade o polinômio de interesse é o denominador da equação (7.58).

O sistema de malha fechada é estável se o denominador não possui zeros exteriores ao círculo unitário no plano Z Quando o polinômio p(Z) é quadrático e temcoeficientes reais e se o coeficiente em Z^2 é unitário, a condição necessária e suficiente para que p(Z) não tenha zeros exteriores ao círculo unitário e':

$$|p(0)| < 1 \qquad (7.59)$$

$$p(1) > 0 \qquad (7.60)$$

$$p(-1) > 0 \qquad (7.61)$$

O critério expresso pelas equações (7.59), (7.60) e (7.61) podem ser estabelecidos heuristicamente. Se ambos os zeros ficam dentro do círculo unitário, $|p(0)|$, o módulo do pro

duto dos zeros precisa ser menor que a unidade. Se os dois zeros compreendem um par de conjugados complexos, eles estão então automaticamente no interior do círculo unitário.

Existe a possibilidade de dois zeros reais, um interior ao círculo e outro exterior e com o produto menor do que a unidade.

Desde que p(Z) é positivo quando Z tende para $\pm\infty$, portanto a condição $p(1) > 0$ não assegura um único zero real no eixo real positivo exterior ao círculo unitário e $p(-1) > 0$ exclue a existência de um zero no eixo real negativo de módulo maior do que a unidade.

$$p(Z) = Z^2 + K(1 - e^{-aT}) - (1 + e^{-aT})\,Z + e^{-aT} \qquad (7.62)$$

O sistema é estável se:

$$|p(0)| = |e^{-aT}| < 1 \qquad (7.63)$$

$$p(1) = K(1 - e^{-aT}) > 0 \qquad (7.64)$$

$$p(-1) = -K(1 - e^{-aT}) + 2(1 + e^{-aT}) > 0 \qquad (7.65)$$

onde a equação (7.63) é verdadeira para todo aT maior do que zero e para todo K. A equação (7.64) é verdadeira para todo aT positivo e para todo K.

Finalmente a equação (7.65) coloca um contorno no ganho

$$K_{max} = 2\,\frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}} \tag{7.66}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right] = g(t) = K(1 - e^{-aT}) \tag{7.67}$$

Substituindo o valor de K_{max} na equação (7.67) calculamos o valor de g(T) isto é:

$$g(T)_{max} = 2(1 + e^{-aT}) \tag{7.68}$$

donde $c(t) = g(t)\, e^{*}(t)$ para uma entrada impulso unitário temos

$$C(T)_{max} = 2(1 + e^{-aT}) \tag{7.69}$$

Este procedimento é válido só para sistemas de segunda ordem.

De modo geral, procedimentos específicos são úteis para estabelecer a estabilidade em termos da transformada Z [69]

7.10 - APROXIMAÇÃO DA RESPOSTA IMPULSO - SÍNTESE [56]

Quanto mais liberdade for admitida ao projetista e os problemas mais compreensivas forem consideradas, torna-se necessário formar as respostas características para encontrar especificações arbitrárias. Em termos do projeto dos sistemas de dados amostrados a sintese envolve a reformulação da resposta impulso $g(t)$.

Esta reformulação da função do tempo pode ser acompanhada por uma variedade de modos alcançando a mais pura síntese, para simplificar a extensão da análise.

Idealisticamente, o projetista simplesmente força o sistema afim de obter o comportamento desejado. Os polos e zeros de $G_2(s)$ não desejados, na função transferência do sistema controlador, são canceladas por zeros e polos de $G_1(s)$, e as frequências críticas reinseridas são selecionadas para produzir um sistema, o qual encontre as especificações da execução.

Se o sistema necessita efetuar uma compensação direta, isto o torna inconvenientemente complexo, a resposta impulso pode ser obtida de modo mais indireto. Por exemplo, $G_2(s)$ convencionalmente inclui um polo na origem, isto é, $G_2(s)$ pode ser escrito como $T(s)/s$. A resposta impulso $g_2(t)$ é então simplesmente a resposta da função degrau de um sistema com a função transferência $T(s)$. Assim, toda a literatura e conhecimen-

to relativo aos efeitos das várias configurações polo - zero ' podemser utilizadaspara lembrar a reformulação de $g_2(t)$ ou a função degrau para T(s).

Se o projetista dá maior realce a análise do que a síntese, os polos de $G_2(s)$ podem ser modificados um a um até a ' resposta apropriada ser obtida. Por exemplo, um problema de projeto típico precisa decrescer o tempo de avanço e ter um ajuste de tempo enquanto sai da mudança de sobresalto. A aproximação é ilustrada com as especificações:

$$G_2(s) = 500K/s(s+10)\ (s+50) \qquad (7.70)$$

$$T = 0{,}05 \text{ seg}$$

Desde que tem um polo para -10, o qual essencialmente limita o tempo de avanço, está claro que $G_1(s)$ efetivamente moverá este polo mais para a esquerda no plano s. Se $G_1(s)$ é

$$G_1(s) = \frac{5(s + 10)}{s + 50} \qquad (7.71)$$

O polo move-se para -50 e G(s) torna-se

$$G(s) = \frac{2\ 500\ K}{(s+50)^2 s} \qquad (7.72)$$

Se considerarmos K de maneira a encontrarmos o sobre

salto desejado resulta a curva traçada na parte B da fig (7.14) em contraste com a curva da parte A para a resposta sem compensação.

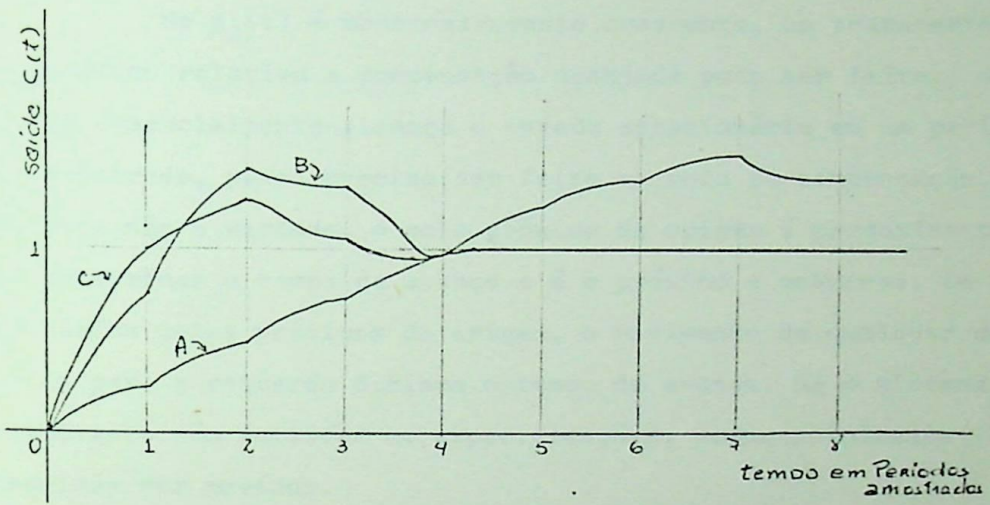


fig. 7.14 - Resposta de um sistema sintetizado.
(AIEE, pt.II, Vol.73, App.and Ind.,pp250)

As mais severas especificações de compensação podem ser encontradas por movermos o polo para -10, o mais longe à esquerda com

$$G_1(s) = \frac{10(s+10)}{(s+100)} \qquad (7.73)$$

A parte C da fig (7.14) mostra o resultado depois de K ser ajustado para fazer c(T) igual a unidade, neste caso o sobressalto é de 17 por cento.

Com uma pequena experiência o projetor pode examinar

$G_2(s)$ e T, e em vários casos vemos a necessidade de examinar $G_1(s)$.

Se $g_2(t)$ é monotonicamente crescente, um tratamento específico relativo a compensação desejada pode ser feita. Se $g_2(t)$ essencialmente alcança o estado estacionário em um período amostrado, pouco precisa ser feito no modo de compensação. Se isto não é verdade, o polo próximo da origem é predominante em determinar o tempo de avanço e é o próximo a mover-se. Se há vários polos próximos da origem, o movimento de qualquer um deles para a esquerda diminue o tempo de avanço. Se o sistema, resultante não satisfaz as especificações, polos adicionais precisam ser movidos.

Visto que relações análogas às equações (7.66) e (7.69) não podem ser deduzidas pára o caso geral monotônico crescente pode ser estabelecido que K_{max} e $c(T)_{max}$ são ambos iguais ou maiores do que 2. Se um sistema está designado com c(T) igual ou menor do que a unidade, o sistema opera abaixo do limite de estabilidade e cada valor máximo sucessivo é menor que o precedente.

Se $g_2(t)$ é oscilatório, tratamentos gerais são mais dificultosos. Em certos casos o ganho para a estabilidade absoluta mostra-se como um resultado das oscilações, mas em outros

casos, ainda que o ganho para a estabilidade absoluta não é afetado, K tem que ser dado para um valor menor afim de encontrar o sobressalto requerido e toda a resposta é mais lenta.

A curva desejada g(t) é aquela que alcança a faixa de 80 a 100 por cento de seu valor estacionário num período amostrado e cai no estado estacionário rapidamente. Em muitos casos um exame de $g_2(t)$ indica a natureza da compensação de malha requerida.

TABELA III - SUMÁRIO DE PROJETO

AT	Sobressalto Porcentagem	K	Kmax	c(T)	$c(T)_{max}$	Período para máximo
5	0	1	2	1	203	1
2,5	8	1,09	2,36	1	2,16	2
1,5	22,5	1,29	3,15	1	2,45	2
1,0	29	1,34	4,32	0,846	2,74	2
0,5	26,9	0,77	8,18	0,303	3,22	5

(AIEE, pt II, vol.73, Ap. and Ind., pp 247-253)

7.11 - LIMITAÇÕES DA APROXIMAÇÃO DA RESPOSTA IMPULSO [17, 21, 54, 56, 69, 81, 86]

7.11 - LIMITAÇÕES DA APROXIMAÇÃO DA RESPOSTA IMPULSO

A aproximação da resposta impulso não é realmente aplicável para a determinação do ganho máximo quando os polos de $G^*(Z)/1+G^*(Z)$ movem-se fora do círculo unitário, em qualquer ponto sem ser sobre o eixo real negativo.

Este modo de instabilidade pode acontecer num sistema de segunda ordem com um atraso de tempo ou circuito hold.

O que resta ao projetista que se utiliza da aproximação resposta impulso é, estimar o ganho e determinar a estabilidade do sistema após a sua longa saída.

Se a entrada do sistema é uma função senoidal, uma situação análoga ocorre, quando tentamos encontrar a saída do estado estacionário.

O envoltório da saída e largura da faixa podem ser encontradas diretamente quando usamos a transformada Z. Se utilizamos a aproximação da resposta impulso e o período de amostragem não é um período senoidal subharmônico a curva c(t) nunca se repete e há dificuldade para se reconhecer as condições de estado estacionário.

Se os dois métodos de análise são combinados o envoltório pode ser achado pelo método da transformada Z e a saída

entre os intantes amostrados pela aproximação da resposta im - pulso, dando uma saída provida de todas as informações.

CAPÍTULO 8

ANALISE DE SISTEMAS DE DADOS AMOSTRADOS ESTUDADOS SEM REFERÊNCIA A FUNÇÃO IMPULSO

8.1 - INTRODUÇÃO

A análise da transformada Z nos sistemas de dados amostrados, nos dá, à primeira vista, a impressão de que este método de análise é aproximado e que não se pode confiar para obtermos resultados apurados [27]. Esta impressão é devido a:

1) A transformada Z é usualmente relacionada com a função impulso no domínio do tempo, e temos o conhecimento de que a função impulso não existe num sistema físico.

2º) A relação da função impulso da transformada Z para sistemas físicos é justificada, por estabelecermos que sobre certas condições, a função impulso é uma boa aproximação de um pulso de largura finita.

Desejamos mostrar neste capítulo que as funções impulsos são conveniencias matemáticas e que as funções impulsos relacionadas a transformada Z não aparecem (e não são estabelecidas para aparecer) nos modelos dos sistemas físicos. Mostraremos que se data - holds ou extrapoladores de dados estão presentes no sistema de controle [51], o método de análise da transformada Z é exata. O método de análise da transformada Z será aproximado, e deverá ser usado com cuidado se es-

quemas "holds" não forem usados.

Portanto, todos os aspectos serão analisados sem referência a função impulso.

8.2 - ANÁLISE DA TRANSFORMADA Z [80]

Nos sistemas de dados amostrados, os quais possuem um "sampler" e um elemento "hold", podemos aplicar o método de análise da transformada Z.

O "sampler" e o esquema "hold" examinam a amplitude do sinal de entrada f(t) e calculam o sinal de saída c(t) por um esquema predeterminado de extrapolação.

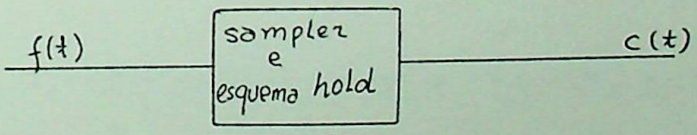


fig (8.1) Sampler e esquema hold ou caixa "sample and hold"

Por definição [115] de uma caixa "Sample and hold",

fig (8.1), se f(t) é sua entrada, então sua saída é uma parte da função constante $f_o(t)$ especificada por:

$$f_o(t) = f(nT) \qquad nT < t < (n+1)T \tag{8.1}$$

para todo n inteiro

Se f(t) for descontínuo para t = nT então, f(nT+) será usado [115] e se exibir uma descontinuidade para o instante de amostragem t_1, então o valor amostrado de $f(t_1+)$ é usado como o valor amostrado de $f(t_1)$. Notamos que se o esquema de extrapolação for fisicamente realizável, a saída $c(t_1)$ para qualquer tempo t_1, precisa ser determinada inteiramente dos valores amostrados de f(t) para $t \leq t_1$.

No caso de amostragem periódica, a saída de um extrapolador geral linear durante o n-ésimo intervalo amostrado pode ser expresso por

$$C_n(t) = \Big\{ f(nT) \left[1+g_o(t-nT)\right] + f\left[(n-1)T\right] g_1(t-nT) +$$

$$\ldots + f\left[(n-m)T\right] g_m(t-nT) \Big\} \cdot \Big\{ \mu(t-nT) - \mu\left[t-(n+1)T\right] \Big\} \tag{8.2}$$

$$nT \leq t < (n+1)T$$

onde

$g_i(t)$, $i = 1,2, \ldots, m$ é a resposta do extrapolador para a amostra $f\left[(n-i)T\right]$

A expressão de $C_n(t)$ é simplesmente a superposição de um conjunto de respostas ponderadas para todas as amostras anteriores de f(t) desde (n-m)T até nT.

Como na prática desejamos c(nT) = f(nT) para todo n, o sinal de entrada f(t) é extrapolada deste modo.

c(t) para qualquer tempo t, $0 \leq t \leq \infty$, é dado por:

$$c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_m(t) \tag{8.3}$$

$$\mathcal{L}\left[C_n(t)\right] = C_n(s) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(s) = C(s) \tag{8.4}$$

portanto

$$C_n(s) = f(nT)\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right] e^{-nTs} + \sum_{K=0}^{m} f\left[(n-K)T\right] G_K(s)\, e^{-nTs} -$$

$$- \sum_{K=0}^{m} f\left[(n-K)T\right] \mathcal{L}\left\{g_K(t-nT)\,\mu\left[t-(n+1)T\right]\right\} \tag{8.5}$$

A equação (8.5) pode ser reescrita como

$$C_n(s) = f(nT)\, e^{-nTs}\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right\} + \sum_{K=0}^{m} f\left[(n-K)T\right] e^{-nTs}\left\{G_K(s) -\right.$$

$$\left. - \mathcal{L}\left[g_K(t) - \mu(n-T)\right]\right\}. \tag{8.6}$$

$$C(s) = \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right] \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{-nTs} +$$

$$+ \sum_{K=0}^{m} \left\{G_K(s) - \mathcal{L}\left[g_K(t)\,\mu(t-T)\right]\right\} \sum_{n=0}^{\infty} f\left[(n-K)T\right] e^{-mTs} \qquad (8.7)$$

A fim de simplificar a notação façamos na equação

$$\sum_{n=0}^{\infty} f\left[(n-K)T\right] e^{-nTs} \quad , \quad (n-K) = p \qquad (8.8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f\left[(n-K)T\right] e^{-nTs} = \sum_{p=-K}^{\infty} f(pT)\, e^{(p+K)Ts} = e^{-KTs} \sum_{p=0}^{\infty} f(pT) e^{-pTs}$$

(8.9)

Desde que $f(t) = 0$, para $t < 0$ substituindo (8.9) em (8.7), temos:

$$C(s) = \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} + \sum_{K=0}^{m} e^{-KTs} \left\{G_K(s) - \mathcal{L}\left[g_K(t)\,\mu(t-T)\right]\right\}\right] \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs}$$

(8.10)

Definindo

$$G_h(s) \triangleq \frac{1 - e^{-Ts}}{s} + \sum_{K=0}^{m} e^{-nTs} \left\{G_K(s) - \mathcal{L}\left[g_K(t)\,\mu(t-T)\right]\right\} \qquad (8.11)$$

$$\therefore \quad C(s) = G_K(s) \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{-nTs} \qquad (8.12)$$

Essa equação representa a saída de um sampler e um esquema hold representado na fig (8.2)

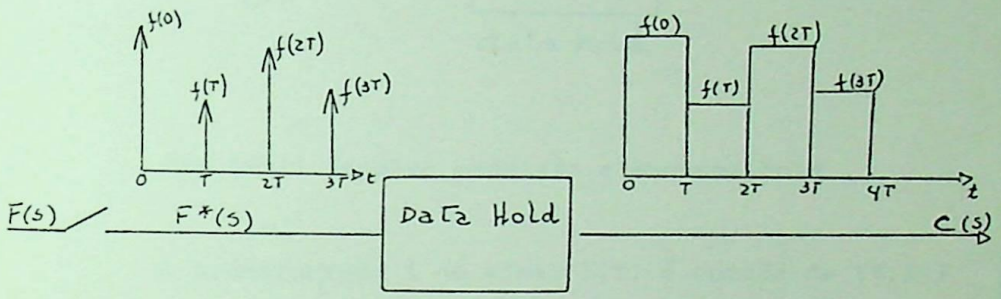


fig (8.2) Representação gráfica de C(s) dado pela equação (8.12).

Desde que $G_h(s)$ é independente de f(t) e a somatória

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{-nTs} \qquad (8.13)$$

é dependente só de f(t) e do período de amostragem T, então a equação descreve o sistema da fig (8.3) ou (8.2) tão bem quanto o da fig (8.1)

Na fig (8.2, 8.3) F*(s) é definido da equação (8.12) como

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{-nTs} \qquad (8.14)$$

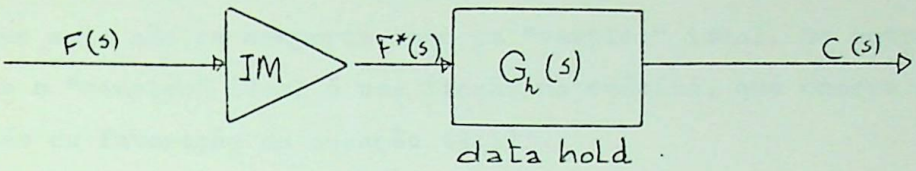


fig (8.3) Impulso modulado e esquema hold

A transformada Z do sinal f(t) é obtida de (8.14) isto é:

$$F(Z) = F^*(s)\Big|_{s=(1/T)\ln Z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, Z^{-n} \qquad (8.15)$$

Na analise dos sistemas de dados amostrados, é considerado ser mais conveniente utilizarmos o sistema equivalente da fig (8.3) do que o sistema da fig (8.1).

É possível analisarmos os sistemas de dados amostrados considerando só as características terminais do sistema da fig (8.1) [70] .

Por definição, a transformada de Laplace da saída do Impulso Modulador (representado por I.M. na fig (8.3) ou "sampler" ideal é dado pela equação (8.14) quando a entrada é

f(t). Enfatizamos que o"sampler" físico por mais aperfeiçoado que seja não se comporta como um "sampler" ideal. De outro lado o "sampler" ideal é uma ficção matemática, que ocorre através da fatoração da equação (8.12).

A transformada inversa de F*(s), produz a função impulso do número do tempo e este sinal não aparece nos sistemas físicos e nem tampouco implica na existência da função impulso nos sistemas físicos.

8.3 - PROPRIEDADES DE ANÁLISE DA TRANSFORMADA Z. [51, 80, 108, 115]

Desenvolveremos as propriedades da análise da transformada Z sem nos referirmos a função impulso.

A finalidade deste item é deduzir a equação

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s+jnw_s) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta f(nT)}{2} e^{-nTs} \qquad (8.16)$$

[80] a qual é aplicável para o caso em que a função amostrada f(t), é uma função com transformada de Laplace e não contém impulsos para os instantes amostrados.

Deduziremos (8.16) utilizando o teorema dos resíduos de Cauchy [13, 82, 115] .

Se F(s) é a transformada de Laplace de f(t), então [22] .

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\lambda)\, e^{t\lambda}\, d\lambda \qquad (8.17)$$

para $t = nT$

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\lambda)\, e^{nT\lambda} d\lambda \qquad (8.18)$$

Se f(t) é descontínuo para o instante amostrado, f(nT) é o valor de f(t) quando t aproxima-se pela direita [115]

A propriedade da transformada inversa de Laplace [108] é que

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{g(t^-) + g(t^+)}{2} \qquad (8.19)$$

onde $g(t^-)$ indica o limite de g(t) pela esquerda e $g(t^+)$ indica o limite de g(t) pela direita.

Portanto, se f(t) é descontínuo para t = nT, (8.18)

torna-se

$$\frac{f(nT^+)+f(nT^-)}{2} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\lambda)\, e^{-nT\lambda}\, d\lambda \qquad (8.20)$$

Então, de (8.20), $f(nT^+)$, pode ser expresso como:

$$f(nT^+) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\lambda)\, e^{nT\lambda}\, d\lambda + \frac{\Delta f(nT)}{2} \qquad (8.20)$$

$$\Delta f(nT) = f(nT^+) - f(nT^-) \qquad (8.21)$$

onde $\Delta f(nT)$ é a amplitude de uma descontinuidade de f(t), para $t = nT$

Multiplicando (8.21) por e^{-nTs} vem:

$$f(nT^+)\, e^{-nTs} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\lambda)\, e^{-nT(s-\lambda)}\, d\lambda + \frac{\Delta f(nT) e^{-nTs}}{2}$$

(8.23)

No caso geral em que f(t) pode ser descontínua para qualquer instante amostrados, a substituição de (8.23) em (8.24) resulta

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT(s-\lambda)}\, d\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta f(nT)}{2} e^{-nTs}$$

(8.24)

Para $\left|e^{-nT(s-\lambda)}\right| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT(s-\lambda)} = \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \qquad (8.25)$$

A substituição de (8.25) em (8.24) dá:

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\lambda) \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} d\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta f(nT) e^{-nTs}}{2}$$

(8.26)

A integral em (8.26) é calculado de acordo com o item (4.4) fig (4.3) ou [82, 113] integrando ao redor das trajetórias Γ_1 ou Γ_2 mostradas na fig (8.4)

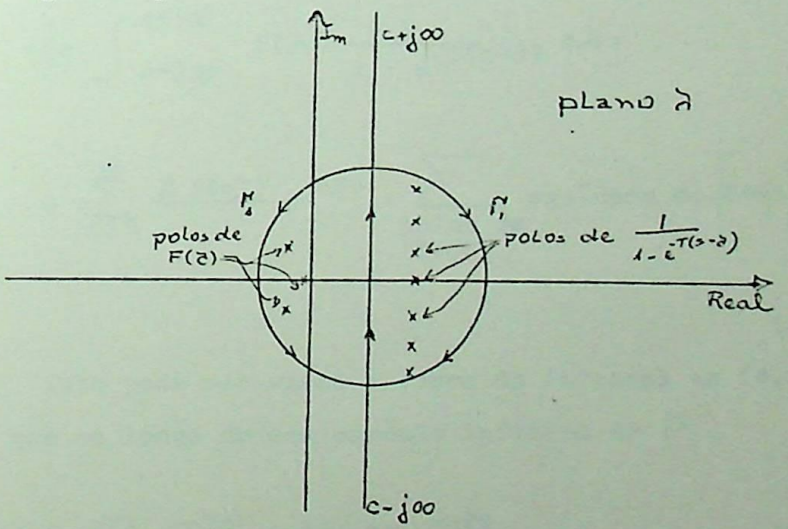


fig 8.4 - Trajetória do contorno de integração

O cálculo da integral ao redor de Γ_1 ou Γ_2, utilizando o teorema dos resíduos de Cauchy [113] dá:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\lambda)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}}\,d\lambda = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s+jnw_s) \qquad (8.27)$$

Substituindo (8.27) em (8.25) obtemos

$$F^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s+jnw_s) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta fnT}{2}\, e^{-nTs} \qquad (8.28)$$

Se a integral de (8.26) é calculada usando a tragetória Γ_2 o resultado é

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\lambda)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}}\,d\lambda =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta f(nT)}{2}\, e^{-nTs} + \sum_{\substack{\text{polos de}\\ F(\lambda)}} \text{resíduos de}\left[F(\lambda)\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}}\right]$$

(8.29)

Isto pode ser visto a forma da integral em (8.24) e notando que ao longo do semicirculo infinito de Γ_2,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left[\lambda F(\lambda)\, e^{nT\lambda}\, e^{-nTs}\right] = \Delta f(nT)\, e^{-nTs} \qquad (8.30)$$

Deduziremos agora a equação (8.30)

O termo geral da integral em (8.24) pode ser expresso como:

$$\frac{e^{-nTs}}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\lambda)\, e^{nT\lambda}\, d\lambda = \frac{e^{-nTs}}{2\pi j}\oint F(\lambda)e^{nT\lambda}d\lambda - \frac{e^{-nTs}}{2\pi j} F(\lambda)e^{nT}$$

(8.31)

onde a trajetória Γ_2 refere-se a fig (8.4) e a segunda integral do lado direito de (8.31) é tomada ao redor do semicirculo infinito de Γ_2.

Neste semicirculo, λ pode ser expresso como:

$$\lambda = R\, e^{j\theta} \qquad (8.33)$$

com λ e R arbitrariamente grande.

A segunda integral de (8.31) pode ser expressa como

$$\frac{e^{-nTs}}{2\pi j}\oint F(\lambda)\, e^{nT\lambda}d\lambda = \frac{e^{-nTs}}{2\pi j}\int_{\Gamma_2}^{-\pi/2} F(Re^{j\theta})e^{nTRe^{j\theta}} jRe^{j\theta}d\theta$$

(8.33)

Considerando o lado direito de (8.33). Desejamos calcular

$$\frac{e^{-nTs}}{2\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \left[\lim_{R\to\infty} Re^{j\theta} F(Re^{j\theta})\, e^{nTR}\, e^{j\theta} d\theta \right] \qquad (8.34)$$

Para o cálculo desta integral, seja:

$$e(t) = f(t + nT)\,\mu(t) \qquad (8.35)$$

então

$$E(s) = \int_0^{\infty} f(t + nT)\, e^{-st}\, dt \qquad (8.36)$$

Seja t + nT = X. Então (8.36) pode ser expressa como:

$$E(s) = \int_{nT}^{\infty} f(X)\, e^{-s(X-nT)}\, dX \qquad (8.37)$$

ou

$$E(s) = e^{nTs} \left[\int_0^{\infty} f(X)\, e^{-sX}\, dX - \int_0^{nT} f(X)\, e^{-sX}\, dX \right] \qquad (8.38)$$

Então trocando s com λ em (8.38)

$$E(\lambda) = e^{nT\lambda} F(\lambda) - e^{nT} \int_0^{nT} f(X)\, e^{-\lambda X}\, dX \qquad (8.39)$$

Multiplicando (8.39) por λ e reagrupando temos:

$$\lambda F(\lambda)\, e^{nT\lambda} = \lambda E(\lambda) + \int_0^{nT} \lambda f(X)\, e^{-\lambda(X-nT)}\, dX \qquad (8.40)$$

Então (8.34) torna-se:

$$\frac{e^{-nTs}}{2\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \lim_{R\to\infty} \left[Re^{j\theta} F(Re^{j\theta})\, e^{nTRe^{j\theta}}\, d\theta \right] =$$

$$= \frac{e^{-nTs}}{2\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \left[\lim_{R\to\infty} Re^{j\theta}\, F(Re^{j\theta}) + \right.$$

$$\left. + \lim_{R\to\infty} Re^{j\theta} \int_0^{nT} e(X)\, e^{-Re^{j\theta}(x-nT)}\, dx \right] d\theta \qquad (8.41)$$

Do teorema do valor inicial e de (8.35)

$$\lim_{R\to\infty} R\, e^{j\theta}\, E(R\, e^{j\theta}) = e(0^+) = f(nT^+) \qquad (8.42)$$

Agora consideremos a integral com respeito a X em (8.41). Fazendo:

$$x = -y + nT$$

$$\lim_{R\to\infty} R\, e^{j\theta} \int_0^{nT} f(x)\, e^{-R\, e^{j\theta}(x-nT)}\, dx =$$

$$= -\lim_{R\to\infty} R\, e^{j\theta} \int_{nT}^{0} f(nT-y)\, e^{yRe^{j\theta}}\, dy \qquad (8.43)$$

$$= \lim_{R\to\infty} R\, e^{j\theta} \int_0^{nT} f(nT-y)\, e^{yRe^{j\theta}}\, dy$$

Trocando R por $-\rho$, (8.43) pode ser expressa como:

$$\lim_{\rho\to-\infty} -\rho e^{j\theta} \int_0^{nT} f(nT-y)\, e^{-y\rho e^{j\theta}}\, dy =$$

$$= - \lim_{\rho \to -\infty} \int_0^{\infty} f(nT-y) \left[\mu(y) - \mu(y-nT) \right] e^{-y\rho e^{j\theta}} \, dy =$$

$$= -e(nT^-) \qquad (8.44)$$

pelo teorema do valor inicial.

Então, de (8.41), (8.42), (8.44) e (8.33) pode ser expressa como:

$$\frac{e^{-nTs}}{2\pi j} \oint F(\lambda) \, e^{nT\lambda} \, d\lambda = \frac{e^{-nTs}}{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi/2} \left[f(nT^+) - f(nT^-) \right] d\theta =$$

$$= \frac{f(nT^+) - f(nT^-)}{2} \, e^{-nTs} \qquad (8.45)$$

Então (8.45) é vista ser a mesma que (8.30).

Então (8.28) pode também ser expressa como:

$$F^*(s) = \sum_{\substack{\text{polos de} \\ F(\lambda)}} \text{resíduos de} \left[F(\lambda) \, \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right] \qquad (8.46)$$

8.4 - FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA PULSADA

Desenvolveremos esta propriedade sem nos referirmos

a função impulso [3, 32, 80, 82, 108]

Consideremos o sistema da fig (8.5), onde as chaves são usadas para indicar amostragem ideal.

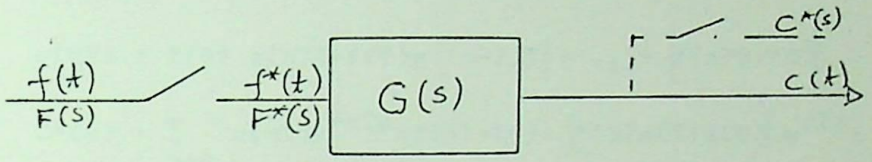


fig (8.5) Sistema de dados amostrados

F(Z) nos é dado por (8.15)

$$F(Z) = F^*(s)\Big|_{s = (1/T)\ \ln Z} = \sum_{n=0} f(nT)\ Z^{-n} \qquad (8.47)$$

Portanto, desejamos encontrar C(Z) como uma função de F(Z). Consideremos que a função transferência do "data holds" está incluída em G(s).

De acordo com o item (4.12) temos:

$$C(s) = G(s)\ F^*(s)$$

onde

$$C(s) = G(s)\ \left[f(0) + f(T)\ e^{-Ts} + \ldots.\right] \qquad (8.48)$$

Seja

$$g(t) = L^{-1} \quad G(s) \tag{8.49}$$

(a qual é geralmente chamada resposta impulso), a transformada inversa de Laplace é:

$$c(t) = f(0)\, g(t) + f(T)\, g(t-T) + \ldots \tag{8.50}$$

então

$$c(nT) = f(0)\, g(nT) + f(T) g\left[(n-1)T\right] + \ldots + \left[f(nT) g(0)\right]$$

$$C^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c(nT) e^{-nTs} = f(0)g(0) + \left[f(0)g(T)g(0)\right] e^{-Ts} +$$

$$+ \left[f(0)\, g(2T) + f(T) + g(T) + f(2T)g(0)\right] e^{-2Ts} + \ldots \tag{8.51}$$

$$C^*(s) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{-nTs}\right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} g(nT) e^{-nTs}\right] = F^*(s)G^*(s) \tag{8.52}$$

e o resultado desejado é então

$$C(Z) = G(Z)\, F(Z) \tag{8.53}$$

portanto esta relação entre a entrada e a saída é conhecida como função transferência pulsada e

$$G(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT)\, Z^{-n} \tag{8.54}$$

Todas as outras propriedades da análise da transformada Z estão deduzidas nos livros textos dos sistemas de controle de dados amostrados, [1, 73, 81], nos quais as funções

impulsos não aparecem nas deduções, sendo que estas deduções não serão portanto deduzidas aqui.

CAPÍTULO 9

DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

9.1 - DISCUSSÃO

O objetivo deste trabalho é fazer um sumário da análise dos sistemas de dados amostrados, desenvolvidos matematimente da seguinte maneira:

a) explicando os processos de amostragem

b) fazendo a reconstrução de dados amostrados entre os instantes amostrados

c) unificando a aproximação da transformada Z para os sistemas de dados amostrados, Shanon [94], Hurwitz [28] e Linvill [66]. A relação de Shannon envolve a transformada de Fourier da entrada e saída amostrada; a relação de Hurwitz é baseada no uso das chamadas funções geratrizes; enquanto as relações de Linvill envolve diretamente a transformada de Laplace da entrada e saída, obtendo uma expressão para a saída de todos os tempos apesar de maior trabalho.

d) formulando relações entrada-saída para os vários tipos de cada sistema.

e) tratando cada sistema considerando o sampler como invariante no tempo.

O uso da função estrelada, F*(s), no lugar de somas

infinitas é conveniente [108] , pois esta notação facilita as manipulações quando se trata de sistemas de dados amostrados' e faz a sistematização da tabela 1 no apendice, fica mais fácil de se entender.

Como notamos, no caso de transformadas estreladas ' (i. é. no caso funções amostradas) a transformada Z e S são exatamente equivalentes.

Então, o uso da transformada Z não envolve aproximações, e sim oferece certas conveniências.

Uma vantagem foi notada, Z é mais fácil de se escrever do que e^{sT}. A outra é que o número infinito de pólos e zeros das funções estreladas S são trocados por um conjunto finito no plano Z. Portanto, a ambiguidade para o ponto no infinito no plano S, (devido a singularidade essencial), é contornada pelo uso da transformada Z.

Quando a saída do sampler for considerada como um ' trem de impulso modulados melhor do que uma sequência comum ' da entrada do sampler, o sampler tem todas as propriedades do familiar modulador de amplitude pulso e pode ser tratado pela convencional transformada de Laplace.

Se o sistema for tratado no domínio da frequência, não há diferença entre a aproximação da transformada Z e a antiga transformada de Laplace.

Quando os sinais em qualquer ponto são amostras discretas, suas transformadas são amostras periódicas e é conveniente o uso da variável $Z=e^{sT}$, enquanto que se os sinais forem contínuos suas transformadas são aperiódicas, então é conveniente usarmos a variável S.

A atitude por parte dos Engenheiros de que os métodos da transformada Z e da transformada de Laplace são equivalentes e que eles podem mudar de um para outro conforme a conveniência, é correto matematicamente, tão bem quanto conveniente.

Descrevemos um método pelo qual encontramos a unificação das aproximações das transformadas Z e Laplace no sentido de que construimos um procedimento sistemático determinando ambas as saídas das transformadas Z e Laplace como vemos na tabela 11 apendice .

Sendo de grande interesse para a Engenharia de controle, tentamos encontrar um método poderoso para o projeto e síntese dos sistemas de dados amostrados.

A análise pelo método da resposta impulso [108] pode ser mais ou menos trabalhoso, dependendo particularmente do sistema, mas tem a desvantagem de ser difícil a sua aplicação para a síntese.

A análise e síntese com a transformada Z não modificada, é prática para alguns sistemas mas tem limitações desejadas ao produzir suas respostas entre os instantes amostrados.

A utilização do sampler fictício para duas vezes (ou n vezes) a razão do esquema de amostragem atual foi correlacionado com trabalhos prévios [65, 82], e sua introdução permitiu que eliminassemos parcialmente uma desvantagem e permitiu nos o cálculo da saída para submúltiplos do período amostrado. E ao aplicarmos a transformada Z modificada obtivemos uma técnica para acharmos a saída para qualquer tempo, (removendo assim toda as desvantagens), Tx segundos depois do instante amostrado.

Desenvolvemos o método da análise da transformada Z para sistemas de controle de dados amostrados sem nos referirmos a função impulso, abandonando assim a impressão de que o método da transformada Z fosse aproximado e que não pudessemos obter resultados apurados.

9.2 - CONCLUSÃO

A teoria apresentada (no capítulo 7) sobre a transformada Z oferecida uma incerteza acerca do comportamento do sistema entre os instantes amostrados. Essa incerteza doi parcialmente removida pela aplicação do método pelo qual obtivemos na saída submúltiplos dos períodos amostrados e inteiramente removida pelo uso da transformada Z modificada.

O método da transformada Z da uma figura compreensiva de estabilidade absoluta, mas este não é o problema dos Engenheiros que estão tentando encontrar especificações como o sobressalto máximo. A aproximação da resposta impulso pode ser usada para fornecermo ganho e dar as especificações do sobressalto, e um exame de $g_2(t)$ em muitos casos indica a natureza da compensação de malha necessária para se encontrar as especificações, então o método ótimo de projeto para uma grande variedade de sistemas de dados amostrados é o projeto baseado no gráfico da resposta impulso do sistema de malha aberta e neste caso a transformada Z e o diagrama de Nyquist são usados para aumentar a circuspeção do projetor.

A seguir (no capítulo 8) introduzimos o conceito de que a análise da transformada Z pode ser feita sem a introdu-

ção da função impulso.

Vimos então, que o uso da função impulso é desnecessário no desenvolvimento das propriedades da análise da transformada Z dos sistemas de controle de dados amostrados. Este' conceito é desnecessário, pois sua utilização nos dá a impressão de que a análise da transformada Z é aproximado, portanto este desenvolvimento é mais rigoroso, desde que as dificuldades matemáticas associadas com a função impulso sejam evitadas.

APENDICE

TABELA I

TABELA DE TRANSFORMADA Z

No.	$F_s(s)$	$f(nT)$	$F_s(z)$
1	1	$\delta(nT)$	z^{-0}
2	e^{-kTs}	$\delta(n-k)T$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
4	$\frac{1}{s^2}$	nT	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(nT)^2$	$\frac{T^2}{2}\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
6	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{3!}(nT)^3$	$\frac{T^3}{6}\left[\frac{3z^{-2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^4}+\frac{z^{-1}(1+2z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}\right]$
7	$\frac{1}{s^m}$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\delta^{m-1}}{\delta a^{m-1}}(e^{-anT})$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\delta^{m-1}}{\delta a^{m-1}}\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
8	$\frac{1}{s+a}$	e^{-anT}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	nTe^{-anT}	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(nT)^2e^{-anT}$	$\frac{T^2}{2}\frac{e^{-aT}z^{-1}(1+e^{-aT}z^{-1})}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$
11	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\delta^{m-1}}{\delta a^{m-1}}(e^{-anT})$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\delta^{m-1}}{\delta a^{m-1}}\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
12	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-anT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
13	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(anT-1+e^{-anT})$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{a(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
14	$\frac{a}{s^3(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}(anT)^2-anT+1-e^{-anT}\right]$	$\frac{T^2}{2}\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}-\frac{T}{a}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}+\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{a^2(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$

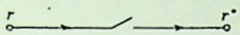
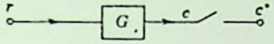
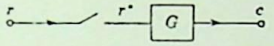
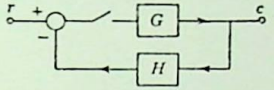
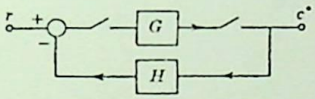
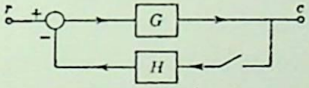
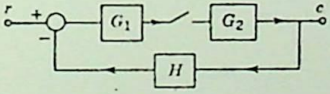
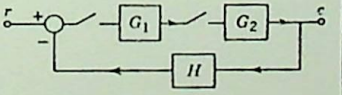
TABELA DE TRANSFORMADA Z

No.	$F_s(s)$	$f(nT)$	$F_s(z)$
15	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$(e^{-anT}-e^{-bnT})$	$\frac{e^{-aT}-e^{-bT}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
16	$\frac{n}{(s+a)^2}$	$(1-anT)e^{-anT}$	$\frac{1-e^{-aT}(1+aT)z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
17	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-anT}(1+anT)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1-(1-aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
18	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bnT}-ae^{-anT}$	$\frac{(b-a)-z^{-1}(be^{-aT}-ae^{-bT})}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
19	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin anT$	$\frac{\sin aTz^{-1}}{1-(2\cos aT)z^{-1}+z^{-2}}$
20	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos anT$	$\frac{1-(\cos aT)z^{-1}}{1-(2\cos aT)z^{-1}+z^{-2}}$
21	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh anT$	$\frac{\sinh aTz^{-1}}{1-(2\cosh aT)z^{-1}+z^{-2}}$
22	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh anT$	$\frac{1-(\cosh aT)z^{-1}}{1-(2\cosh aT)z^{-1}+z^{-2}}$
23	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-anT}\cos bnT$	$\frac{1-e^{-aT}\cos bTz^{-1}}{1-2e^{-aT}(\cos bT)z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}$
24	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-anT}\sin bnT$	$\frac{e^{-aT}\sin bTz^{-1}}{1-2e^{-aT}(\cos bT)z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}$
25	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1-\frac{be^{-anT}-ae^{-bnT}}{(b-a)}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{(be^{-bT}-ae^{-aT})z^{-1}-(b-a)}{(b-a)(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
26	$F_s(s+a)$	$e^{-anT}f(nT)$	$F_s(e^{aT}z)$
27	$e^{-kTs}F_s(z)$	$f(n-k)T$	$z^{-k}F_s(z)$

(Reproduzida de Ragazzini, J.R. and Flanklin, G.F., Sampled - data Control Systems, Maxgraw-Hill Book Co., New York, 1958).

TABELA II

TRANSFORMADA Z DA SAÍDA PARA OS SISTEMAS DE DADOS AMOSTRADOS

Sistema	Transformada de Laplace da saída C(s)	Transformada Z da saída C(Z)
(1) 	$R^*(s)$	$R(z)$
(2) 	$GR^*(s)$	$GR(z)$
(3) 	$G(s)R^*(s)$	$G(z)R(z)$
(4) 	$\frac{G(s)\,R^*(s)}{1+HG^*(s)}$	$\frac{G(z)\,R(z)}{1+HG(z)}$
(5) 	$\frac{G^*(s)R^*(s)}{1+H^*(s)G^*(s)}$	$\frac{G(z)R(z)}{1+H(z)G(z)}$
(6) 	$G(s)\left[R(s)-\frac{H^*(s)RG^*(s)}{1+HG^*(s)}\right]$	$\frac{RG(z)}{1+HG(z)}$
(7) 	$\frac{G_2(s)RG_1^*(s)}{1+HG_1G_2^*(s)}$	$\frac{G_2(z)RG_1(z)}{1+HG_1(z)G_2(z)}$
(8) 	$\frac{G_2(s)G_1^*(s)R^*(s)}{1+G_1^*(s)G_2H^*(s)}$	$\frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1+G_1(z)G_2H(z)}$

Reproduzida de J.R.Ragazzini e L.A.Zadeh, The Analysis of Sampled-data Systems, Trans. AIEE, Vol 71, pt II, pp.225-234, november 1952.

BIBLIOGRAFIA

B I B L I O G R A F I A

1 - Aseltine, John A.
Transform Method in Linear System Analysis
Mc Graw-Hill Book co.
New York - 1958

2 - Ahrendt and Taplin
Automatic Feedback Control
Mc Graw-Hill Book co.
New York - 1951

3 - Barker R. H.
The Pulse Transfer Function and its Application to
Sampling Servo Systems
Proc. I.E.E. Vol 99 pp 202 - 317
London 1952

4 - Barker, R. H.
The Theory of Pulse - Monitored Servos and Their
Use for Prediction.
Rept 1046, Signal Research and Developnent
Establishment Christchurch, Hants.
England, november 1950

5 - Bergen, Arthur R.
Sampled. Data Prosessing Technique for
Feedback Control Systems.
Trans. AIEE vol. 75 pt. II. pp 236-247
London 1954

6 - Bertran, John E.
Factors in the Design of Digital Controllers for
Sampled - Data Feedback Systems

6 - Bertran, John E.
Factors in the Design of Digital Controllers for
Sampled - Data Feedback Systems
Transations AIEE, vol 75, pt II - pp. 151-159
London, July 1956

6 - Bibbero, Robert J.
Dictionary of Automatic Control
Reinhold Publishing Corporation
New York, 1960

8 - Bode, H. W., and Shannon, C. E.
A Simplified Derivation of Linear
Least Squares Smoothing and
Prediction Theory.
Proc. IRE, vol 38, nº 44, pp. 417-425
London, April 1950

9 - Brown, William M.
Analysis of Linear Time Invariant Systems
McGraw-Hill Book Co.
New York, 1963

10- Brown, B. M.
Application of Finite Difference
Operators to Linear Systems
Proceedings of the D.S.I.R.
Conference on Automatic Control,
Butterworths Scientific Publications
London, 1951

11 - Brown, B. M.
The Mathematical Theory of Linear Systems.
John Wiley and Sons, pp. 119-152
New York, 1961

12 - Brown, G. S. and Campbell, D. P.
Principles of Servomechanisms
John Wiley and Sons, pp. 185-188
New York, 1948

13 - Carlson, A. Bruce and Frederick, K. Dean.
Linear Systems in Communication and Control.
John Wiley and Sons, Inc
New York, 1971

14 - Castrucci, Plínio
Controle Automático. Teoria e Projeto
Editora Edgard Bucher, Ltda
S. Paulo, 1969.

15 - Cheng, D. K.
Analysis of Linear Systems
Addison - Wesley - Publishing Co.
Reading.
Massa chussets, 1959

16 - Cohn, A.
Uber die Anzahl der Würzelm einer
Algebraischen Gleichung in Einen Kreise.
Math, 2, vol 14. pp. 110-148
August, 1922.

17 - De Moivre
Miscellanes Analytica de Seriebus et Quatratoris
London, 1730

18 - Fodor, Gyorgy
Laplace Transforms.
Akadémiai Kiadó
Budapest - 1965

19 - Franklin, G. F.
The Optimum Synthesis of Sampled - Data Systems
Tech. Rept. T-6/B, Departament of
Electrical Engineering
Columbia University
New York, Sept. 1955

20 - Freeman, H. and Lowens chuss, O.
Bibliography of Sampled - Data Control Systems and
Z-Transform Aplication.
IRE Trans. Automatic Control (PGAC).
March, 1958

21 - Fujiwara, M.
Uber die Algebraischen Gleichung deren Wurzeem in
Einem Kreise oder in Einer Halbebene liegen
Math. Zeitschs. vol 24, pp. 160-169
1926.

22 - Gardner, M. F. and Barnes J. L.
Transients in Linear Systems
John Wiley and Sons, Inc. pp. 354-356
New York, 1942

23 - Gantmacher, F. R.
The Theory of Matrices
Chelsea Publishing Co. Vol.2
New York, 1968

24- Gold, Bernard and Rader, Charles M.
Digital Processing of Signals.
Mc Graw- Hill Co.
New York, 1968

25- Helm, H. A.
The Z-Transformation.
B.S.T. Journal
Vol. 38 nº1
1956

26- Higgins, T. J. and Osterlei, Robert E.
General Theory of Finite Z-Transforms
andApplication to Analysis of Discrete
Systems.
I.E.E.E. Conference Paper nº CP.63-970
Presented At Toronto ,Ont.
Canada, June 1963.

27- Holt Smith, C., Lawden,D.F. and Bailey,A.E.
Characteristics of Sampling Servo Systems
Proc. D.S.I.R.Conf. on Automatic Control.
Butterworth'sScientific Publication.
A. Tustin, Ed.
London, 1952

28- Hurwitz, W.
Filters and Servo Systems with Pulsed-Data.
in James, H.M.;Nichols ,N.B. and Phillips, R.S.
Theory of Servo- Mechanisms, Chap.5,
Radiation Laboratory Series, Vol.25
Mc Graw-Hill Book Co.
New York, 1947

29- Iwens,R.P.
Application of The Z- Transform to Sequential Ci
Circuits.
Master of Science Project, Dept .of Eltrical En-
gineering.
University of California.
Berkelly,January- 1964.

30- James, H.M., Nichols N.B. and Phillips, R.S.
Theory of Servomechanisms.
Mc Graw-Hill Book Co. Vol.25, Chapter 6.
New York ,1947

31- Jury, E.I.
Correlation Between Root Locus And Trasient Response of Sampled-Data Control Systems.
Trans. A.I.E.E.
January, 1956

32- Jury, E.I.
Theory and Appication of the Z-Transform Method
John Wiley and Sons.
New York. 1962

33- Jury, E.I.
Sampled -Data Control Systems.
John Wiley and Sons
New York , 1958

34- Jury,E.I.
The Effect of Pole and Zero Locatins on the Tran-- sients Response of Sampled -Data Systems.
A.I.E.E. Trans. 1955

35- Jury, E.I.
Analysis and Synthesis of Sampled Data Control Systems
AIEE Transactions vol 73, pt I Sept. 1954

36- Jury, E. I.
Analysis and Synthesis of Sampled Data Control Systems
Tcknical Report T-1/B
Columbia University
New York, oct. 1953

37- Jury, E.I.
On the Roots of a Real Polynomial Inside the Unit Circle and
and a Stability Criterion for Linear Discrete Systems
Congress Proceeding

38- Jury, E.I.
Additions to the Modfied Z-Transform Method
IRE - Wescon Convention Record part 1V , pp. 136-156
1957

39- Jury E.I.
Synthesis and Critical Study of Ssmpled Data Control
Systems
AIEE Transactions vol 75, part 11 pp. 141 - 151
july 1956

40- Jury, E.I.
Table of Z Transfor and Modified Z Transform Various sampled Data Systems Configurations
G. Farmanfarma
Report nº 136A , IBID.

41- Jury, E.I.
Discrete Compensation of Sampled Data and Continuons "

Control Systems.
W. Schroeder Report nº 154
Eletronics Research Laboratory University of California
Berkeley, California Series 60
1955

42- Jury,E.I.
Hidden Oscillations in Sampled Data Control Systems.
AIEE Trans. pp. 381 394
january 1957

43- Jury, E.I.
A Simplified Stability Criterion for Linear Discrete Systems
Proc. IRE, 50, pp. 1493
1962

44- Jury, E.I. and Blanchard,J.
A Stability Test for Linear Discrete in Table Form.
Proc. IRE, 49,
1947 (1961)

45- Jury,E.I. and Galtieni,C.A.
A note on the Inverse Z Transform
IRE Trans. Circuit Theory.,vol CT-9
september - 1961

46- Johnson, G.W. and Lindorff, D.P.
Transient Analysis of Sampled Data Control Systems.
Trans. AIEE; vol 74, part 11, pp 147 - 153
july 1954

47- Kalman, R.E. and Bertran, J.E.

General Synthesis Procedure for Computer Control of
Single and Multiple Loop Systems.
Trans. AIEE, vol 56, part 11
1957

48- Kaplan,W.
Operational Methods for Linear Systems.

Addisson- Wesley Publishing Co.
Reading
Massachutts - 1962

49- Kovanitz, P.
Generalized Discrete Analog of the Zadeh - Ragazzini
Problem Avtomatica i Telemekhanika vol 27, nº 2
Moscou, april 15, 1965

50- Kranc, G.M.
Multi-Rate Sampled Systems
Tech. Rept. T-14/B D.E.E.
Columbia University.
New York, may, 7 , 1956

51- Ku, Y.H..
Transient Circuit Analysis
D. Van Nostrand Company
1961

52- Kuo, B.C.
Analysis and Synthesis of Sampled Data Control Systems
Englewood, Cliffs, N.T.
Prentice - Hall
1963

53- Laming, J.H. and Battin, R.H.
Random Process in Automatic Control.
Mc Graw - Hill Book Co.
New York 1956

54- Laplace, P.S.
Theorie Analytique de Probabilities, part 1, Du Calcul des Functions Generatrices.
Paris 1812

55- Lago, G.V.
Additions to Z- Transformation.
Theory for Sampled-Data Systems.
Trans. AIEE, vol 75, part 11, pp. 403 - 408
january 1955

56- Lago, G.V.
The Analysis and Design of Sampled Data Systems.
Ph.D. Thesis. Purdue University.
Lafayette, may 1954

57- Lago, G.V. and Truxal, J.G.
The Design of Sampled-Data Feedback Systems.
AIEE Transactions, vol. 73, part 11.
London, november 1954

58- Latil, Pierre
Introduction à la Cybernétique
La Pensée Artificielle
Libraire Gallimard
1968

59- Lawden, D.F.
A General Theory of Sampling Servo Systems.
Proceedings I.E.E. , Vol.98 Pt. 1V pp. 225-234.
London , October 1951

60- Lloid, S. P., and McMillan , B.
Linear Least Squares Filtering and Prediction of Sampled Signals .
Proc. Symposium on Modern Network Synthesis Polytechnic Institute of Brooklyn, April 1955.

61- Lees, A.B.
Interpolation and Estrapolation of SAmpled - Data .
Trans. A.I.E.E. Professional Group on Information Theory.
Vol. IT- 2 Nº1
London, March 1956.

62- LIenard and Chipart.
Sur la Signe de la Partie Réele des Racines dúne Equation Algebrique .
J. Math. Pures Appl. 96) Vol 10 pp291- 346
France, 1914

62- Linvill, W.K.
Sampled Data Control Systems Studied Through Comparison of Sampling with Amplitude Modulations.
A.I.E.E. Transactions Vol. 70
London, 1951

64- Linvill, W.K. and Sittler , R.W.
Extension of Conventional Techniques to the Design of Sampled Data Systems
Conventional Record of IRE pt. 1 pp99-104
New York 1953

65- Linvill, W.K. And Salzer, J.M.
Analysis of Control Systems Involving Digital Computers.
Proceedings IRE ,Vol. 41 N°7 pp901-906
New York, 1953

66- Linvill,W.K. and Sittler, R.W.
Design of Sampled Data System by Extension of Conver-
tional Techniques .
Project Whirlwind Report R-222 Inst. of Tech.
Massachussets, 1953

67- MacColl, L.A.
Fundamental Theory of Servomechaniams.
D.Van Nostrand Company. Chapter10
New Yokk, 1945

68- Maitra, K.K. and Sarachik, P,E.
Digital Compensation of Continuous Data Feedback
Control Systems.
Trans. A.I.E.E., Vol. 76 pt. 11 N°24
London, May 1956

68- Marden ,M.
The Geometry of the Zeros of a Polynommial in a Complex
Variable.
Americ. Math. Soc. pp 152-157
New York 1949

70- McDaniel, W.L. and Phillips,C.L.
The X- TRansforma and its Use in Sampled Data
System Analysis
J.Franklin Inst. Vol.284 1967

71- Minorsky, N.
Non Linear Control Systems Automatic and Manual Control

Proceedings of the Cranfield Conference 1951, Edited by A. Tustin pp309- 318
London ,L952

72- Murphy, G. L. and Brown ,R.G.
An Approximate Trnsfer Funtion for Analysis and Design Pulsed Servos.
Tras. A.I.E.E., Vol.71, Pt. 11.pp435-440
London, 1952

73- Ogata, Katsuhiko
Modern COntrol Engineering.
Ed. Pretice Hall
1972

74- Oldenbourg, R.C. and Sartorios, H.
The Dynamics of Automatic Control (book)
American Society of Mechanical Enginees. Chapter 5
New York, 1948

75- Oliv er, B.M., Pierce, J.R. and Shannon, C.E.
The Philosophyof Pulse Code Modulation
Prc. IRE ,Vol. 36, Nº11, pp1324- 1331
November 1947

76- Porter, B.
Stability Criteria for Linear Dynamical Systems.
Oliver and Boid
Edimburg , 1967

77- Porter, A. and Stoneman, F.
A New Approach to the Design of Pulse Monitored Servo System.
Journal, Institution of Electrical Engineers. Vol. 97 pt. 11 ,pp597-610.
London, 1950

78- Perov, V.P.
Synthesisof Sampled data Circuits and Systems with Sampled Data Feedback
Avtomatika i Telemekhanika
Vol. 18 Nº12
Moscou, October 1957

79- Pshenichnyi, B.N.
Syntesis of Linear Pulse Systems
Avtomatica i Telemekhamika , vol. 27 nº 5 pp. 28-36
Moscou october 12 , 1965

80- Philips, C.L., Loury, J.L. and Cavin, R.K. 111
On the starred Transform and Z Transform Sampled Data Control Systems Without Reference to Impulse.
IEEE Trans. Automatic Control Vol. AC-11 pp.760
october , 1966 and june 1968

81- Ragazzini, J.R. and Zadeh, L.A.
Analysis of Sampled Data Systems
Trans. IEEE vol 71, part 11, pp, 225 -232
London 1952

82- Ragazzini, R. John and Franklin, Gene F.
Sampled Data Control Systems
Mc Graw Hill Book Co
New York, 1958

83 - Ragazzini, J.R. and Bergen, A.R.
a Mathematical Technique for the
Abalysis of linear Systens.
Proc. IRE, vol. 42, nº 11 pp. 1645-1651
November, 1954

84 - Ray mond, F. H.
Analysis of Descontínuous Servomechanismg
Annales de Telecommunication. Vol. 4.
Paris 1949

85 - Raven, H. Francis -
Automatic Control Engineering
Mc Graw-Hill Book Co.
Kogakusha Co.
Tokyo, 1961

86 - Salzer, J. M.
Frequency Analysis of Figital
Computers Operating in Real Time
Proc IRE, vol 42, nº 2, pp. 457-466
Februany, 1954

87 - Samuelson, P. A.
Conditions that the Roots of a Polynomial
Be Less Than Unity in Absolutic Volue
Am. Math. Statcs. vol 12, pp. 360-364
1941.

88 - Seal, H. L.
The Historical Development of the Use
of Generating Functions in Probability Theory.
Mitteilungen der Vereineigung Schweizerincher
Verische rungs Mathematiker, vol 49.
Bern, Swizerland, 1949.

89 - Schur, I
Uber Potenzeihen, die im Innerm des EinheitsKreises
beschrankt Sind Journal fur Mathe matik Vol 147 pp.205 -
232 - 1917

90 - Shinners, M. Stanley.
Control Systems Design
John Wiley and Sons
New York 1964

91 - Schwarz, R. J. and miller, K. S.
Analysis of a sampling servo Mechanism.
Journal of Applied. Playsics. vol 21 pp. 290-294
New York, April 1950

92 - Schwarz, R. J. and Friedland, B.
Linear Systems
Mc Graw Hill Book Co.
New York 1965

93 - Slonczeswski, Tadeu
Controles a realimentação
Mc Graw-Hill do Brasil
S. Paulo, 1973

94 - Shannon, C.
The Philosophy of Pulse Code Modulation
Proc IRE, 36, nº 11
November 1948

95 - Stone, W. M.
A list of Generalized Laplace Transforms
Journal of Science Iowa State College
(Ames, Iowa) vol. 22, pp. 215-225
Ames, Aphil 1948

96 - Thaler, George I. and Brown, Robert. O.
Analysis and Design of Feedback Control Systems
Mc Graw Hill Book Co.
2ª edição 1960

97 - Thomson, W. T.
Paplace Trnasformation. Chapter 7
Prentice Hall
New York 1950

98 - Tsipkin, Y. Z.
Frequency Method of Analyzing
Intermi Hent Regulating Systems
Automatica i Telemekhamica
Vol 14, nº 1. pp. 11-33
Moscow, 1953

99 - Tsipkin, Y. Z.
Theory of Intermithent Regulation
Avtomatica i Telemekhamica
Vol 10, nº 3, pp. 189-224
Moscow, 1949

100 - Tsypkin, Y. Z.
Theory of Linear Sampled - Data
Systems
State Press for Physics and
Mathematical Literature
Moscow, 1963.

101 - Tsypkin, Y. Z.
Theory of Pulse Systems
State for Physics and Mathematical Literature
Moscow, 1958

102 - Tsypkin, Y. Z.
Elements of Theory of Numerical Automatic Systens
Automatic and Remote Control
Proceedings First int Congress IFAC
Butterworths pp. 286-294
London, 1961

103 - Tsypkin, Y. Z.
Investigation of Stability of Periodic
States in Nonlinear Pulse Automatic Systems
Automatic and Remote Control
Academic Press. Vol 22, nº 6. pp. 614-623
New York, june 1961

104 - Tschauner, J.
A general Formulation of Stability
Constraints, for Sampled Data Systems
IEEE. Proc. Vol 51 Nº 4
April, 1963

105 - Trata Kowskii, G. P.
Application of Simulation in Analyzing
Linear Pulse Systemswith Variable
Parameters.
Avtomatica i Telemekhanika
Vol 20 pp. 559-566
Moscow, 1959

106 - Thomson, W. E.
On two Sided - Z trandform
IRE Trans. Circuit Theory
Vol 3 p. 156
July 1956

107 - Tou, J. T.
Digital and Sampled - Data Control System
Mc Graw Hill Book Co.
New York 1959

108 - Truxal, John G.
Automatic Feedback Control System
Sybthesis
Mc Graw Hill Book Co.
Tokyo 1955

109 - Thomson, W. T.
Laplace Transformation
Prentice Hall, chapter 7
New York 1950

110 - Wall, H. S.
Analytic Theory of Contimed Fractions
D. Van Nostrand Co. pp. 178-182
New York 1948

111 - Widder, D. V.
The Laplace Transform
Princeton University Press
Princeton, New Jersey 1946

112 - Willie Jr., C. R.
Advanced Engineering Mathematics
Mc Graw Hill
Student Edition

113 - Wilts, C. H.
Principles of Feedback Control
Reading, Mass. Addison - Wesley pp. 261-265
Massachuts 1960

114 - Wheelon, A. D.
on the Summation of Infinite Séries in
Closed Form
J. Appl. Plys. Vol. 25, pp. 113-118.
1954

115 - Zadeh, Lotfi A. and Desoer, Charles A.
Linear System Theory
Mc Graw Hill Book Co.
New York 1963

116 - Zadeh, Lotfi A.
Frequerky Analysis of Variables
Networks.
Proceedings, Institute of Radio
Engineers, vol 38, pp. 291-299
New York 1950

117 - Zadeh, Lotfi A.
Time - Dependent Heaviside
Operators.
Journal of Mathematics and Physics
Vol. 30 pp. 73-78
Combridge, Mass. 1951

118 - Rouché, E.
Memoire Sue la Série de Lagrange
J. Ecole Polytech. Vol. 22 pp. 217-218
1862.

ÍNDICE

ÍNDICE

	Página
SINOPSE	III
ABSTRACT	IV
PREFÁCIO	V
SIMBOLOS, CONVENÇÕES E NOMECLATURA	VIII
AGRADECIMENTOS	XII
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	001
1.1 - Desenvolvimento Histórico	002
1.2 - Importância Tecnológica dos Sistemas de Controle	008
CAPÍTULO 2 - CARACTERÍSTICAS DE AMOSTRAGEM	012
2.1 - Introdução	013
2.2 - Processos de Amostragem	013
2.3 - Sinal	017
2.3.1 - Classificação de Sinais	018
2.4 - Amostrador (sampler)	020
2.5 - Operação de Amostragem	023
2.6 - Espectro de Frequência	027
2.7 - Relação entre w_c e w_s	029
2.8 - Teorema de Amostragem	030
CAPÍTULO 3 - RECONSTRUÇÃO DE DADOS	036
3.1 - Introdução	037
3.2 - O Sistema Hold	038
3.3 - Aspectos do Projeto do Sistema hold	039
3.4 - Hold de Ordem Zero	041
3.5 - Amplitude e Fase de um Hold de Ordem Zero	045
3.6 - Hold de Primeira Ordem	047
3.7 - Resposta de Frequência de Amplitude e Fase de um Hold de Primeira ordem	050

	Página
3.8 - Conclusões entre o Hold de Ordem Zero e Hold de Primeira ordem	051
3.9 - Holds de mais Alta Ordem	053
CAPÍTULO 4 - TRANSFORMADA Z	054
4.1 - Introdução	055
4.2 - Definição da Transformada Z	056
4.3 - Transformada Z Unilateral e Bilateral	058
4.4 - Dedução Matemática da Transformada Z	064
4.5 - Convergência	071
4.6 - Inversão da Transformada Z	073
4.7 - Pares de Transformada Z	083
4.8 - Propriedades da Transformada Z	084
4.8.1 - Linearidade - Teorema da Linearidade	084
4.8.2 - Teorema de Shifting	085
4.8.3 - Multiplicação por N	088
4.8.4 - Mudança de Escalar	088
4.8.5 - Convolução	089
4.8.6 - Somatória Finita	091
4.8.7 - Produto de Duas Funções	092
4.9 - Teorema do Valor Inicial	094
4.10 - Teorema do Valor Final	094
4.11 - Funções de Singularidades	096
4.12 - Multiplicação Complexa	097
4.13 - Função Transferência Amostrada ou Pulsada	098
CAPÍTULO 5 - SISTEMAS DE DADOS AMOSTRADOS	108
5.1 - Introdução	109
5.2 - Sistemas de Dados Amostrados de Malha Aberta	109

Página

5.3 - Sistemas de Dados Amostrados de Malha Fechada -- 111
5.4 - Aplicações da Transformada Z para Sistemas de Dados Amostrados de Malha Aberta ---------- 113
5.5 - Aplicações da Transformada Z para Sistemas de Dados Amostrados com Realimentação ---------- 119
5.6 - Conclusão ---------- 129

CAPÍTULO 6 - ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DISCRETOS LINEARES ---------- 130

6.1 - Introdução ---------- 131
6.2 - Definição de Estabilidade ---------- 133
6.3 - Critério Modificado de Routh-Hurwitz ---------- 135
6.3.1 - Análise de Estabilidade ---------- 139
6.3.2 - Aplicações do Critério Modificado de Routh-Hurwitz ---------- 140
6.4 - Critério de Estabilidade Usando Transfer-Locus - 145
6.5 - Teste de Estabilidade Diretamente Aplicado no Plano Z ---------- 156
6.6 - Critério de Estabilidade de Shur-Cohn ---------- 156
6.7 - Critério de Estabilidade de Jury ---------- 161
6.8 - Root Locus para Sistema de Dados Amostrados ---- 167
6.9 - Oscilação Hidden ---------- 170

CAPÍTULO 7 - O PROJETO DE SISTEMAS DE DADOS AMOSTRADOS COM REALIMENTAÇÃO, ESTUDADOS COM REFERÊNCIA A FUNÇÃO IMPULSO ---------- 173

7.1 - Introdução ---------- 174
7.2 - Componentes do Sistema de Dados Amostrados ----- 176
7.3 - Simplicidade da Resposta do Sistema ---------- 178
7.4 - Aproximação da Transformada Z ---------- 180

Página

7.5 - Aproximação da Resposta Impulso. Análise -------- 183
7.6 - Saída entre Instantes Amostrados Utilizando-se o Método da Transformada Z ---------- 188
7.7 - Conclusão ---------- 198
7.8 - A Saída para Qualquer Ponto no Período de Amostragem ---------- 199
7.9 - Aproximação da Resposta Impulso. Projeto -------- 204
7.10 - Aproximação da Resposta Impulso ---------- 213
7.11 - Limitações da Aproximação da Resposta Impulso -- 218

CAPÍTULO 8 - ANÁLISE DE SISTEMAS DE DADOS AMOSTRADOS ESTUDADOS SEM REFERÊNCIA A FUNÇÃO IMPULSO -- 220

8.1 - Introdução ---------- 221
8.2 - Análise da Transformada Z ---------- 222
8.3 - Propriedades de Análise da Transformada Z ------- 228
8.4 - Função Transferência Pulsada ---------- 236

CAPÍTULO 9 - DISCUSSÃO E CONCLUSÃO ---------- 240

9.1 - Discussão ---------- 241
9.2 - Conclusão ---------- 245
APENDICE ---------- 247
A-1 - Tabela de Transformada Z ---------- 248
A-2 - Transformada Z da Saída para os Sistemas de Dados Amostrados ---------- 250
BIBLIOGRAFIA ---------- 251
ÍNDICE ---------- 274

DATA 21 / 10 / 1988
PROC.
PED. BIM
LIV.
Cz$ DOAÇÃO

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200537
NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA