TESE
618

TESE - 618

Escola Federal de Engenharia de Itajubá

SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA MANCAL RADIAL DE DESLIZAMENTO HIDRODINÂMICO

AMÉRICO TETUO MIYAZIMA

25/04/90

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca
MAUÁ
Itajubá

SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA MANCAL RADIAL DE DESLIZAMENTO HIDRODINÂMICO

AMÉRICO TETUO MIYAZIMA

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Biblioteca
MAUÁ

"SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA MANCAL RADIAL DE DESLIZAMENTO HIDRODINÂMICO"

AMÉRICO TETUO MIYAZIMA

ORIENTADORES:
Orientador: PROF. PhD. VILMAR ARTHUR SCHWARZ
Co-orientador: PROF. MSc. NELSON MANZANARES FILHO

ITAJUBÁ - MG

DATA 25/04/1990
PROC.
PED. PPG
LIV.
Cz$ DOAÇÃO

CLASS. 621.822.5:621.89:519.6(043.2)
CUTT. M618S
TOMBO 618

Ministério da Educação
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

ANEXO II

FOLHA DE JULGAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA

Título da Dissertação "Solução Analítica e Numérica da Equação de Reynolds para Mancal Radial de Deslizamento Hidrodinâmico"

Autor: Américo Tetuo Miyazima

JULGAMENTO

EXAMINADORES	CONCEITO	RUBRICA
1º	A	
2º	A	
3º	A+	
4º	A	

Resultado Médio: Conceito A, ou seja, aprovado

Observações:

Itajubá, 21 de Dezembro de 1989.

Dr. Mário Francisco Mucheroni - USP-SC
1º Examinador

Prof. Nelson Manzanares Filho - EFEI
2º Examinador

Prof. Genésio José Menon - EFEI
3º Examinador

Prof. Vilmar Arthur Schwarz - EFEI
4º Examinador e Orientador

AGRADECIMENTOS

Aos muitos que, de alguma maneira, contribuiram para a realização desta dissertação; em particular:

-Professor Dr. Marcio Tadeu de Almeida, orientador acadêmico, pelo apoio e incentivo prestado até a concretização do presente trabalho.

-Aos orientadores PhD. Vilmar Arthur Schwarz e MsC. Nelson Manzanares Filho pela valiosa orientação e pelo apoio ilimitado.

-Professor MsC. Ernani Ferreira da Silva, pela participação na elaboração da apostila de Cálculo Numérico, cuja aplicação na dissertação foi de extrema importância.

-Professor Dr. Genésio José Menon, pelo estímulo e pelas sugestões recebidas.

-Professora Lourdes Ossako Inoue, pelo apoio recebido na redação dos originais deste trabalho.

RESUMO

Inicialmente foi desenvolvido um estudo teórico sobre a lubrificação de mancais radiais para condições limites que permitem a solução analítica da equação de Reynolds da lubrificação hidrodinâmica.

Em seguida, o método numérico das diferenças finitas foi aplicado para solução da equação de Reynolds mediante desenvolvimento de um programa de computador que fornece os "parâmetros resultantes ou dependentes" para um mancal real ou finito, para qualquer relação L/D.

Finalmente, um programa de computador foi desenvolvido para determinação da distribuição de temperatura e parâmetros resultantes num mancal.

Uma análise comparativa dos resultados obtidos foi realizada.

ABSTRACT

Initially, a theoretycal study on the hydrodynamic lubrication of journal bearings was carried out for the limiting conditions which allows the analytical solution of the Reynolds equation, viz, the infinitely long bearing and the short bearing.

Further, the finite difference method was applied for the solution of the Reynolds equation for the hydrodynamic lubrification of the "finite bearing", for any L/D ratio.

Finally, a computer program was developed for the simultaneous calculation of the "resultant or dependente parameters" and temperature distribution within a journal bearing.

A comparative analysis of the results was also performed.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS 1
RESUMO II
ABSTRACT III
SUMÁRIO IV
LISTA DE SÍMBOLOS VIII
LISTA DE FIGURAS XI
LISTA DE TABELAS XIV

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO 1
1.1 - Generalidades 1
1.2 - Princípio de funcionamento 2
1.3 - Fundamentos e objetivos 4

CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 7
2.1 - Introdução 7

CAPÍTULO 3 - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS 15
3.1 - Introdução 15
3.2 - Hipóteses simplificadoras 16
3.3 - Equação de Reynolds 17

CAPÍTULO 4 - SOLUÇÕES ANÁLITICAS DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS .. 20
4.1 - Introdução 20
4.2 - Espessura do filme de óleo 20
4.3 - Solução da equação de Reynolds para um mancal infinitamente curto 22
4.3.1 - Adaptação da equação de Reynolds 22
4.3.2 - Distribuição de pressão hidrodinâmica 23
4.3.2.1 - Equação genérica da distribuição de pressão 23
4.3.2.2 - Posição do pico de pressão no plano central 24
4.3.2.3 - Pressão máxima no plano central 25
4.3.3 - Capacidade de carga e número de Sommerfeld 25
4.3.4 - Ângulo de ação da carga 28
4.3.5 - Vazão de lubrificante 28

4.3.5.1 - Vazão circunferencial de entrada 29
4.3.5.2 - Vazão circunferencial de saída 30
4.3.5.3 - Vazão axial 30
4.3.5.4 - Relação de vazões 31
4.3.6 - Atrito e perda de potência 32
4.3.6.1 - Força de atrito 32
4.3.6.2 - Coeficiente de atrito 34
4.3.6.3 - Momento de atrito e perda de potência 35
4.3.7 - Elevação de temperatura do lubrificante 35
4.4 - Solução da equação de Reynolds para um mancal infinitamente longo 37
4.4.1 - Adaptação da equação de Reynolds 37
4.4.2 - Distribuição da pressão hidrodinâmica 38
4.4.2.1 - Equação genérica da distribuição de pressão 38
4.4.2.2 - Posição angular da pressão máxima 41
4.4.2.3 - Pressão hidrodinâmica máxima 42
4.4.3 - Capacidade de carga e número de Sommerfeld 42
4.4.4 - Ângulo de ação da carga 45
4.4.5 - Vazão de lubrificante 45
4.4.6 - Atrito e perda de potência 46
4.4.6.1 - Força de atrito 46
4.4.6.2 - Coeficiente de atrito 47
4.4.6.3 - Momento de atrito e perda de potência 47
4.4.7 - Elevação da temperatura do lubrificante 47
4.5 - Parâmetros resultantes - solução analítica 48

CAPÍTULO 5 - SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA MANCAIS FINITOS 51
5.1 - Introdução 51
5.2 - Aproximação por diferenças finitas da equação de Reynolds para mancal curto 51
5.3 - Solução da equação de diferenças finitas por iteração 58
5.3.1 -Método de sobre-relaxação sucessiva 58
5.4 - Condições de contorno do filme de óleo 59
5.4.1 - Condição de Sommerfeld/Gumbel 60
5.5 - Critério de convergência 61

5.6 - Estudo da malha para solução da equação de Reynolds por diferenças finitas 62
5.7 - Cálculo de parâmetros resultantes do mancal curto .. 64
5.7.1 - Capacidade de carga 64
5.7.2 - Posição angular da espessura mínima do filme de óleo 67
5.7.3 - Número de Sommerfeld 67
5.7.4 - Coeficiente de atrito 68
5.7.5 - Vazão de lubrificante 70
5.7.5.1 - Vazão lateral 70
5.7.5.2 - Vazão de entrada 71
5.7.5.3 - Vazão de saída 72
5.7.5.4 - Vazão total 73
5.7.5.5 - Relação de vazões 73
5.7.6 - Elevação da temperatura 73
5.7.7 - Pressão máxima e ângulo desta posição 74
5.8 - Aproximação por diferenças finitas da equação de Reynolds para mancal longo 75
5.9 - Parâmetros resultantes - solução numérica computacional 77

CAPÍTULO 6 - ANÁLISE DOS RESULTADOS 84
6.1 - Análise comparativa dos resultados 115
6.2 - Análise do comportamento dos parâmetros 116

CAPITULO 7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES 118
7.1 - Conclusões 118
7.1.1 - Considerações gerais 118
7.1.2 - Balanço térmico e cálculo das temperaturas de trabalho 119
7.2 - Sugestões para trabalho futuro 119

REFERÊNCIAS

BIBLIOGRAFIA

APÊNDICE A - Integral de Sommerfeld

APÊNDICE B - Solução da integral de capacidade de carga para mancal curto

APÊNDICE C - Solução da integral de capacidade de carga para mancal longo

APÊNDICE D - Uma técnica numérica para solução da equação de Reynolds para mancal finito

APÊNDICE E - Carga adimensional

APÊNDICE F - Capacidade de carga - integração pelo método de Simpson

APÊNDICE G - Diagrama de blocos para cálculo dos parâmetros resultantes - balanço térmico

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres Latinos

- c - folga radial
- cp - calor específico do lubrificante
- C_1 - constante de integração
- C_2 - constante de integração
- d - diâmetro do munhão
- D - diâmetro da bucha
- e - excentricidade
- f - coeficiente de atrito
- F - força
- F_a - força de atrito
- F_r - componente da força radial
- $\bar{F}_r$ - força radial (adimensional)
- F_t - componente da força tangencial
- $\bar{F}_t$ - força tangencial (adimensional)
- h - espessura do filme de óleo
- h_o - espessura mínima do filme de óleo
- H - espessura do filme de óleo (adimensional)
- J - equivalente mecânico do calor
- L - comprimento axial da bucha
- L/D - relação entre comprimento e diâmetro do eixo
- m - número de malha tomando a direção do movimento de rotação do eixo (x)
- M_a - momento de atrito
- n - número de malha tomando a direção da largura do eixo (z)
- N - velocidade de rotação
- p - pressão no filme de óleo
- $\bar{p}$ - pressão no filme de óleo (adimensional)
- p - pressão específica
- p_{max} - pressão máxima
- $\bar{p}_{max}$ - pressão máxima (adimensional)
- q_x - vazão na direção radial (x)
- q_z - vazão na direção axial (z)
- Q - vazão total do lubrificante

Q_l - vazão lateral do lubrificante

Q_e - vazão de entrada do lubrificante

Q_c - vazão de saída do lubrificante

r - raio do munhão

R - raio da bucha

S - numero de Sommerfeld

t_e - temperatura do lubrificante na entrada da cunha de óleo

t_m - temperatura média do filme de lubrificante

t_s - temperatura do lubrificante na saída da cunha de óleo

u - velocidade do flúido na direção x

U - velocidade superficial na direção x

w_{ot} - fator de convergência do método da sobre-relaxação

x - coordenada na direção de movimento

$\bar{x}$ - coordenada na direção de movimento (adimensional)

y - coordenada vertical da espessura do filme

z - coordenada perpendicular na direção de movimento

$\bar{z}$ - coordenada perpendicular na direção de movimento (adimensional)

Caracteres Gregos

γ - mudança de variável angular de Sommerfeld $\gamma = \frac{\varepsilon + \cos\theta}{1 + \varepsilon . \cos\theta}$

δ - passo da integração pela regra de Simpson

Δ - capacidade de carga (adimensional)

ΔP_{ot} - perda de potência

Δ_r - capacidade de carga radial (adimensional)

Δ_t - capacidade de carga tangencial (adimensional)

Δt - elevação de temperatura

ε - excentricidade específica

η - viscosidade absoluta

θ - ângulo de posição da pressão

θ_{max} - posição do pico de pressão máxima

$\theta_{P_{max}}$ - posição do pico de pressão máxima em relação à linha de carga

λ - constante empírica

π - número irracional 3,141592654

ρ - peso por unidade de volume do lubrificante

τ - tensão de cisalhamento do filme de óleo

ϕ - posição angular da espessura mínima do filme de óleo

ψ - fator de convergência do processo iterativo

ω - velocidade angular

Operadores

d -diferencial total

∂ -diferencial parcial

$\int$ -integral

LISTA DE FIGURAS

1.1 - Princípio de funcionamento do mancal radial de deslizamento 2
1.2 - Mancal e distribuição da pressão hidrodinâmica 3
2.1 - Mancal e eixo concêntrico 8
2.2 - Esquema do banco de ensaio de mancal radial investigado por Tower 9
2.3 - Esquema de curva de pressão num mancal radial hidrodinâmico 10
3.1 - Representação esquemática da lubrificação hirodinâmica 15
3.2 - Sistemas de eixos cartesianos 16
4.1 - Configuração básica de um mancal radial hidrodinâmico 21
4.2 - Distribuição da pressão hidrodinâmica - mancal curto 23
4.3 - Distribuição da pressão hidrodinâmica e componentes de carga 26
4.4 - Distribuição de vazão de lubrificante 29
4.5 - Distribuição da pressão hidrodinâmica - mancal longo 38
5.1 - Desenvolvimento de um mancal radial 52
5.2 - Desenvolvimento da malha num mancal radial 54
5.3 - Distribuição de pressão - condição de Sommerfeld ... 60
5.4 - Malha de iterações 61
5.5 - Posição da pressão máxima 74
6.1 - Comparação de ε x S para L/D=1/8 84
6.2 - Comparação de ho/c x S para L/D=1/8 85
6.3 - Comparação de S x ϕ para L/D=1/8 85
6.4 - Comparação de S x f(R/c) para L/D=1/8 86
6.5 - Comparação de S x $\theta_{P_{max}}$ para L/D=1/8 86
6.6 - Comparação de ε x S para L/D=1/4 87
6.7 - Comparação de ho/c x S x para L/D=1/4 88
6.8 - Comparação de S x Δ para L/D=1/4 88
6.9 - Comparação de S x ϕ para L/D=1/4 89
6.10 - Comparação de S x f(R/c) para L/D=1/4 89
6.11 - Comparação de S x Q1/RcCNL para L/D=1/4 90

6.12 - Comparação de S x Q/RcNL para L/D=1/4 90
6.13 - Comparação de S x Q1/Q para L/D=1/4 91
6.14 - Comparação de S x ρ.cp.J.Δt/P para L/D=1/4 91
6.15 - Comparação de S x P/P_{max} para L/D=1/4 92
6.16 - Comparação de S x $\theta_{P_{max}}$ para L/D=1/4 92
6.17 - Comparação de ε x S para L/D=1/2 93
6.18 - Comparação de ho/c x S para L/D=1/2 94
6.19 - Comparação de S x Δ para L/D=1/2 94
6.20 - Comparação de S x ϕ para L/D=1/2 95
6.21 - Comparação de S x f(R/c) para L/D=1/2 95
6.22 - Comparação de S x Q1/RcNL para L/D=1/2 96
6.23 - Comparação de S x Q/RcNL para L/D=1/2 96
6.24 - Comparação de S x Q1/Q para L/D=1/2 97
6.25 - Comparação de S x ρ.cp.J.Δt/P para L/D=1/2 97
6.26 - Comparação de S x P/P_{max} para L/D=1/2 98
6.27 - Comparação de S x P_{max}/P para L/D=1/2 98
6.28 - Comparação de S x $\theta_{P_{max}}$ para L/D=1/2 99
6.29 - Comparação de ε x S para L/D=1 100
6.30 - Comparação de ho/c x S para L/D=1 100
6.31 - Comparação de S x Δ para L/D=1 101
6.32 - Comparação de S x ϕ para L/D=1 101
6.33 - Comparação de S x f(R/c) para L/D=1 102
6.34 - Comparação de S x Q1/RcNL para L/D=1 102
6.35 - Comparação de S x Q/RcNL para L/D=1 103
6.36 - Comparação de S x Q1/Q para L/D=1 103
6.37 - Comparação de S x ρ.cp.J.Δt/P para L/D=1 104
6.38 - Comparação de S x P/P_{max} para L/D=1 104
6.39 - Comparação de S x P_{max}/P para L/D=1 105
6.40 - Comparação de S x $\theta_{P_{max}}$ para L/D=1 105
6.41 - Comparação de ε x S para L/D=2 106
6.42 - Comparação de ho/c x S para L/D=2 107
6.43 - Comparação de S x ϕ para L/D=2 107
6.44 - Comparação de S x f(R/c) para L/D=2 108
6.45 - Comparação de S x Q1/RcNL para L/D=2 108
6.46 - Comparação de ε x S para L/D=4 109
6.47 - Comparação de ho/c x S para L/D=4 110
6.48 - Comparação de S x Δ para L/D=4 110

6.49 - Comparação de S x ϕ para L/D=4 111
6.50 - Comparação de S x f(R/c) para L/D=4 111
6.51 - Comparação de S x Q/RcNL para L/D=4 112
6.52 - Comparação de S x ρ.cp.J.Δt/P para L/D=4 112
6.53 - Comparação de S x P/P_{max} para L/D=4 113
6.54 - Comparação de S x P_{max}/P para L/D=4 113
6.55 - Comparação de S x $\theta_{P_{max}}$ para L/D=4 114

LISTA DE TABELAS

4.1 - Parâmetros resultantes da solução analítica - mancal curto 49
4.2 - Parâmetros resultantes da solução analítica - mancal longo 50
5.1 - Tabela comparativa de malha e parâmetros resultantes para L/D = 1 e ε = 0,5 62
5.2 - Tabela comparativa de malha e parâmetros resultantes para L/D = 1 e ε = 0,1 62
5.3 - Tabela comparativa de malha e parâmetros resultantes para L/D = 1 e ε = 0,9 63
5.4 - Relação de malhas em função de ε 63
5.5 - Parâmetros resultantes da solução numérica para L/D=1/8 78
5.6 - Parâmetros resultantes da solução numérica para L/D=1/4 79
5.7 - Parâmetros resultantes da solução numérica para L/D=1/2 80
5.8 - Parâmetros resultantes da solução numérica para L/D=1 81
5.9 - Parâmetros resultantes da solução numérica para L/D=2 82
5.10 - Parâmetros resultantes da solução numérica para L/D=4 (mancal longo) 83
6.1 - Desvio máximo entre os resultados dos parâmetros dependentes do método numérico do autor e outros pesquisadores para L/D=1/8 87
6.2 - Desvio máximo entre os resultados dos parâmetros dependentes do método numérico do autor e outros pesquisadores para L/D=1/4 93
6.3 - Desvio máximo entre os resultados dos parâmetros dependentes do método numérico do autor e outros pesquisadores para L/D=1/2 99
6.4 - Desvio máximo entre os resultados dos parâmetros dependentes do método numérico do autor e outros pesquisadores para L/D=1 106

6.5 - Desvio máximo entre os resultados dos parâmetros dependentes do método numérico do autor e outros pesquisadores para L/D=2 109
6.6 - Desvio máximo entre os resultados dos parâmetros dependentes do método numérico do autor e outros pesquisadores para L/D=4 114

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - GENERALIDADES

O propósito da lubrificação é separar duas superfícies que deslizam uma sobre a outra pela interposição de uma película de algum material que possa ser cisalhado sem causar qualquer dano às superfícies. O processo de deslizamento deverá ter a menor resistência de atrito possível.

O objetivo maior da lubrificação é obter um filme de lubrificante com espessura suficiente para garantir que não ocorra nenhum contato entre as superfícies em deslizamento relativo, eliminando-se o desgaste. O tipo de lubrificação que ocorre na maioria dos mancais de deslizamento é conhecido como lubrificação hidrodinâmica ou de película plena. O lubrificante, em praticamente todos os casos, é óleo mineral. Água, ar ou lubrificantes sintéticos podem ser empregados em condições extremas de temperatura ou velocidade.

Historicamente, foi somente a partir da Revolução Industrial, com o aumento da precisão das peças mecânicas e o consequênte aumento das velocidades rotacionais, que a lubrificação hidrodinâmica se tornou o tipo normal de lubrificação e passou a ser amplamente estudada.

Os primeiros estudos de um eixo e mancal lubrificados, funcionando sob condições totalmente hidrodinâmicas, foram os de von Pauli, em 1849, e os de Hirn em 1854. Tower, em 1883 e 1885, descobriu experimentalmente que havia uma considerável pressão gerada em tais mancais. Entusiasmado com a descoberta de Tower, Reynolds, em 1886, desenvolveu uma extensa análise matemática sobre a lubrificação hidrodinâmica e mostrou

que era necessária uma película em forma de cunha, para gerar uma pressão de óleo, a chamada "pressão hidrodinâmica". Este famoso trabalho é o fundamento no qual se baseia toda a subsequente teoria da lubrificação.

1.2 - PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO

A Figura 1.1 abaixo mostra um mancal radial de deslizamento nas três fases distintas de operação.

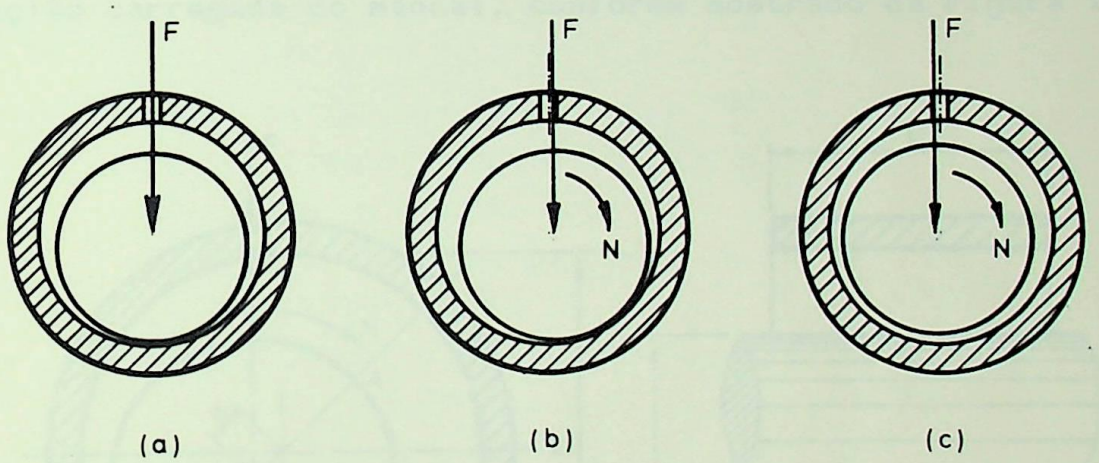


Fig. 1.1 - Princípio de funcionamento do mancal radial de deslizamento.

A Figura 1.1a mostra o mancal com o eixo em repouso, observando-se o contato munhão/bucha na parte inferior, e a folga máxima na parte superior.

A Figura 1.1b mostra o que ocorre no instante da partida ou início de rotação do munhão. Devido ao contato metálico inicial, o munhão tende a subir pela parede interna da bucha, no sentido contrário da rotação, deslocando-se para a direita, conforme mostrado na Fig. 1.1b.

Finalmente, a Figura 1.1c mostra a posição normal de trabalho após algumas poucas rotações do munhão. Devido à propriedade de aderência do lubrificante às superfí-

cies metálicas, este é arrastado pelo munhão giratório para o espaço convergente entre o munhão e a bucha. Uma vez naquela posição, o óleo encontra cada vez menor espaço disponível, à medida que é arrastado pelo munhão na direção da rotação. Sendo o óleo incompressível, a única coisa que pode acontecer é que o mesmo gera uma pressão interna, a chamada pressão hidrodinâmica. Esta pressão depende da velocidade de rotação N, da viscosidade η do lubrificante, da folga do mancal, do diâmetro d e comprimento L do munhão e da carga aplicada F.

Se esta pressão hidrodinâmica for suficientemente elevada, haverá a separação completa entre o munhão e a bucha, estabelecendo-se um filme de óleo de espessura mínima h_o na região carregada do mancal, conforme mostrado na Figura 1.2.

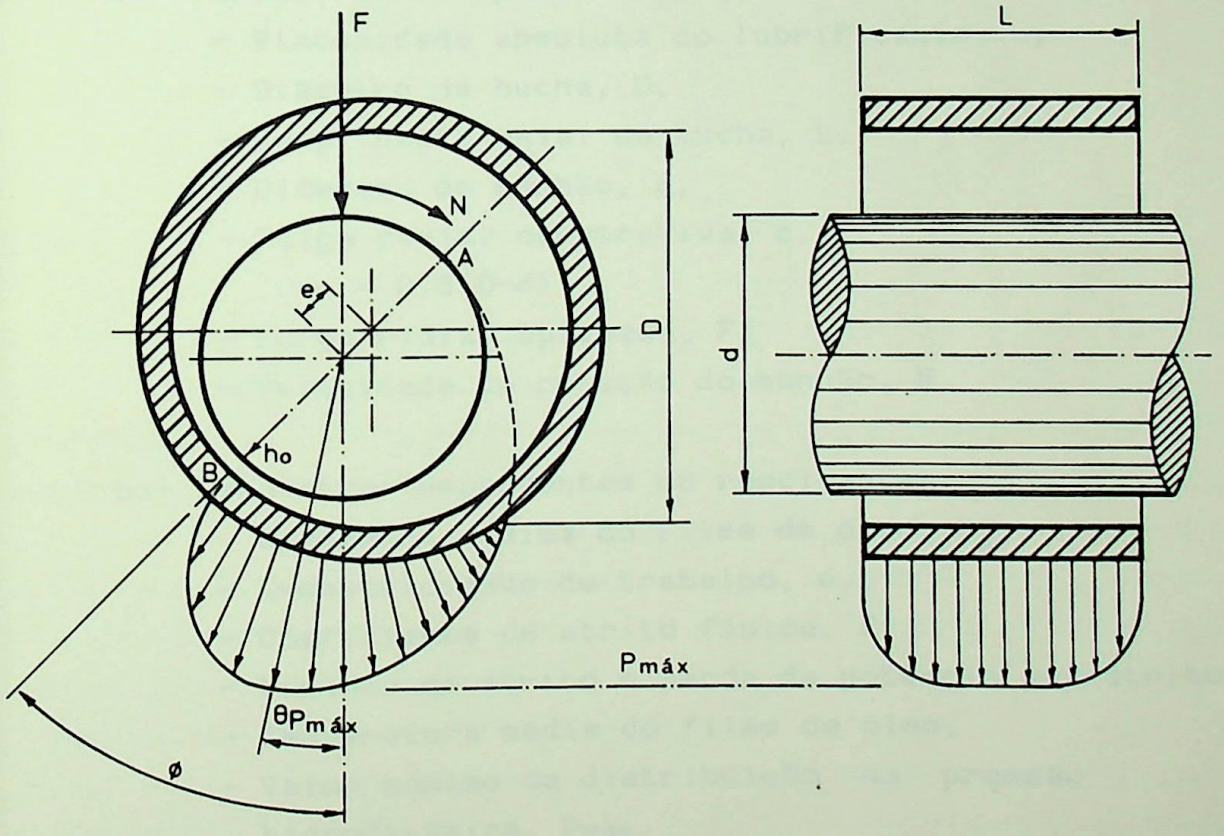


Fig. 1.2 - Mancal e distribuição da pressão hidrodinâmica.

Num mancal típico, de 360°, conforme mostrado na Figura 1.2, a pressão hidrodinâmica no filme de óleo começa a

desenvolver-se no ponto A, onde a folga começa a convergir. A pressão aumenta gradativamente até atingir o valor máximo, passando a diminuir em seguida, até atingir o valor mínimo no ponto B, um pouco adiante da posição de espessura mínima h_o do filme de óleo.

1.3 - FUNDAMENTOS E OBJETIVOS

Os parâmetros que definem um mancal radial de deslizamento hidrodinâmico representados esquematicamente na Figura 1.2, podem ser classificados em dois grupos:

a)- Parâmetros independentes, que são:
- Viscosidade absoluta do lubrificante, η,
- Diâmetro da bucha, D,
- Comprimento axial da bucha, L,
- Diâmetro do munhão, d,
- Folga radial construtiva, c,
  $c = 0,5(D-d)$
- Força radial aplicada, F,
- Velocidade de rotação do munhão, N.

b)- Parâmetros dependentes ou resultantes:
- Espessura mínima do filme de óleo, h_o,
- Excentricidade de trabalho, e,
- Coeficiente de atrito fluido, f,
- Momento de atrito e perda de potência por atrito,
- Temperatura média do filme de óleo,
- Valor máximo da distribuição da pressão hidrodinâmica, P_{max},
- Posição angular da pressão hidrodinâmica máxima, $\theta_{P_{max}}$,
- Posição angular da espessura mínima do filme de óleo, ϕ,
- Vazão lateral, Q_1,

- Vazão de entrada, Q_e,
- Vazão de saída, Q_c,
- Vazão total, Q.

Com base nessa classificação, a análise preditiva do comportamento operacional de um mancal radial de deslizamento tem sido feita mediante o uso de tabelas ou gráficos desenvolvidos por Raimondi e Boyd [01], Cameron e Wood [02], e outros pesquisadores.

Essas tabelas ou gráficos fornecem (para um número limitado de relações L/D) os valores dos parâmetros dependentes ou resultantes, em função do chamado "Número de Sommerfeld" ou "Número Característico do Mancal", que é um agrupamento adimensional dos parâmetros independentes fixados pelo projetista, isto é:

$$S = \frac{\eta . N}{P} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \qquad (1.1)$$

onde $P = \frac{F}{L.D}$ é a "pressão específica".

A maior dificuldade que se apresenta ao projetista de um mancal prende-se ao fato de que a viscosidade dos óleos lubrificantes varia com a temperatura. Assim sendo, a viscosidade é uma função da temperatura, a qual depende da perda de potência, que por sua vez é uma função da viscosidade.

Isso gera um problema envolvendo variáveis acopladas não linearmente, que pode, no entanto, ser resolvido iterativamente, considerando-se o balanço térmico entre o calor gerado por unidade de tempo (perda de potência) no mancal e a "capacidade de dissipação de calor" do sistema.

Essas dificuldades motivaram o desenvolvimento da presente dissertação, que tem os seguintes objetivos principais:

a)- Obter analíticamente a solução da equação de Reynolds da lubrificação hidrodinâmica, para mancais radiais completos,

b)- Aplicar o método numérico das diferenças finitas para determinar os chamados "parâmetros resultantes", para quaisquer relações L/D, a partir da equação de Reynolds,

c)- Desenvolver um programa computacional para cálculo desses "parâmetros resultantes", incluindo a temperatura média de trabalho do mancal e a viscosidade do óleo,

d)- Apresentar os resultados para uma faixa relativamente ampla de relações de L/D, em forma de tabelas ou gráficos, incluindo a comparação com os valores obtidos por outros pesquisadores.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 - INTRODUÇÃO

Os mancais radiais de deslizamento hidrodinâmico têm a mais longa história de estudos científicos, relativamente a qualquer outro tipo de mancal.

Alguns dos artigos pioneiros dessa história não são facilmente encontrados na forma original. Por essa razão, esses artigos serão comentados a partir de dados relatados por Cameron [03].

O primeiro trabalho publicado em mancais de deslizamento foi elaborado por von Pauli, conforme Cameron [03], em 1847/48, que mediu coeficientes de atrito da ordem de 0.003 em mancais ferroviários, confirmando a ocorrência de lubrificação hidrodinâmica.

Em segundo lugar pode-se mencionar os trabalhos de Hirn e Petroff que mediram o atrito com o objetivo de analisar tipos de lubrificantes, tais como óleos animais e vegetais, óleos minerais, água e ar.

Hirn, conforme Cameron [03], foi o primeiro a observar que a lubrificação de um mancal é uma função da viscosidade do lubrificante, da velocidade do eixo, assim como da carga aplicada.

A principal contribuição de Petroff, conforme Cameron [03], foi a conceituação definitiva de que o atrito em mancais hidrodinâmicos é devido essencialmente à viscosidade do fluido lubrificante e não à sua densidade (conforme alguns de seus contemporâneos propunham), nem tampouco ao contato metálico entre as superfícies em deslizamento relativo entre si.

Baseando-se na lei de Newton para um escoamento viscoso e na hipótese de que o munhão girava concentricamente em relação à bucha, Petroff desenvolveu a sua famosa equação da força de atrito, como segue:

$$F_{\alpha} = \frac{\eta . U}{c} \pi . D . L \qquad (2.1)$$

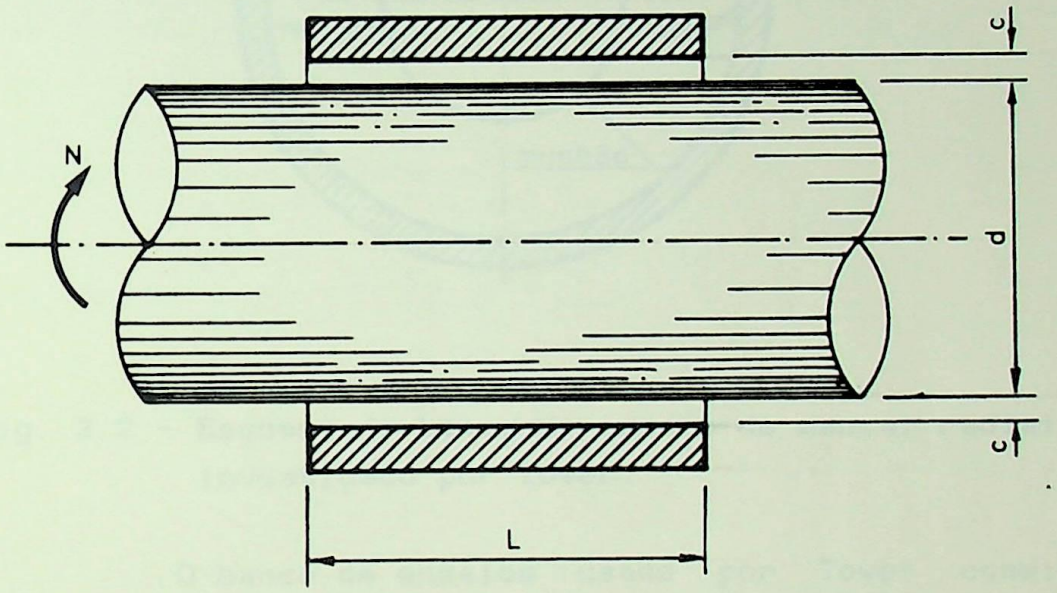


Fig. 2.1 - Mancal e eixo concêntrico.

O trabalho que constituiu uma aproximação para o estudo experimental de atrito lubrificado, veio de Beauchamp Tower [04].

A teoria da lubrificação hidrodinâmica originou-se no laboratório de Beauchamp Tower, nos primórdios dos anos de 1880, na Inglaterra. Tower tinha estado ocupado no estudo do atrito em mancais ferroviários. Foi um acidente durante o desenrolar dos testes de laboratório, que incitou Tower a olhar o problema com mais detalhes e que resultou na descoberta que eventualmente orientou o desenvolvimento da teoria.

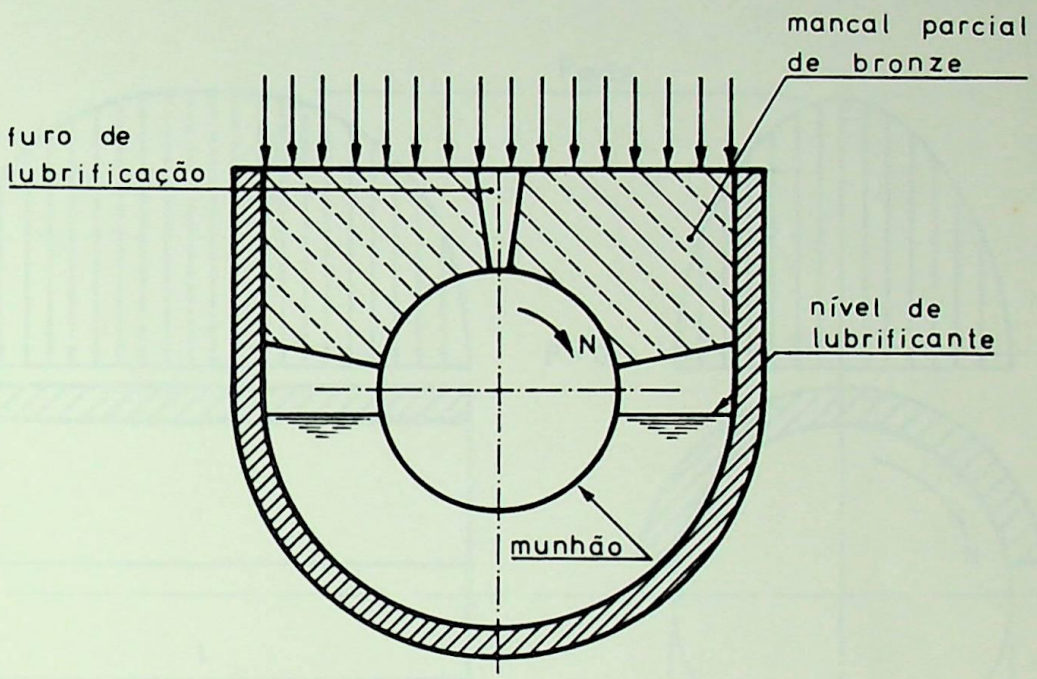


Fig. 2.2 - Esquema do banco de ensaio de mancal radial investigado por Tower.

O banco de ensaios usado por Tower consistia essencialmente de um mancal com um arco de 157° e tendo lubrificação por banho de óleo, conforme indicado na Figura 2.2. O mancal continha um furo para lubrificação de 1/2 polegada de diâmetro na parte superior. Mas quando o aparelho era colocado em movimento, o óleo fluía para fora através deste furo.

Para evitar isto Tower usou uma rolha de cortiça, mas esta foi lançada fora. Colocou então um tarugo de madeira no furo. Quando este foi também lançado fora, Tower constatou que estava no limiar da descoberta. Um medidor de pressão conectado ao furo indicou uma pressão superior ao dobro da carga unitária do mancal.

Finalmente, ele investigou as pressões na película de lubrificante , ao longo do diâmetro e do comprimento do mancal, e verificou que havia uma distribuição

de pressão com a configuração mostrada na Figura 2.3.

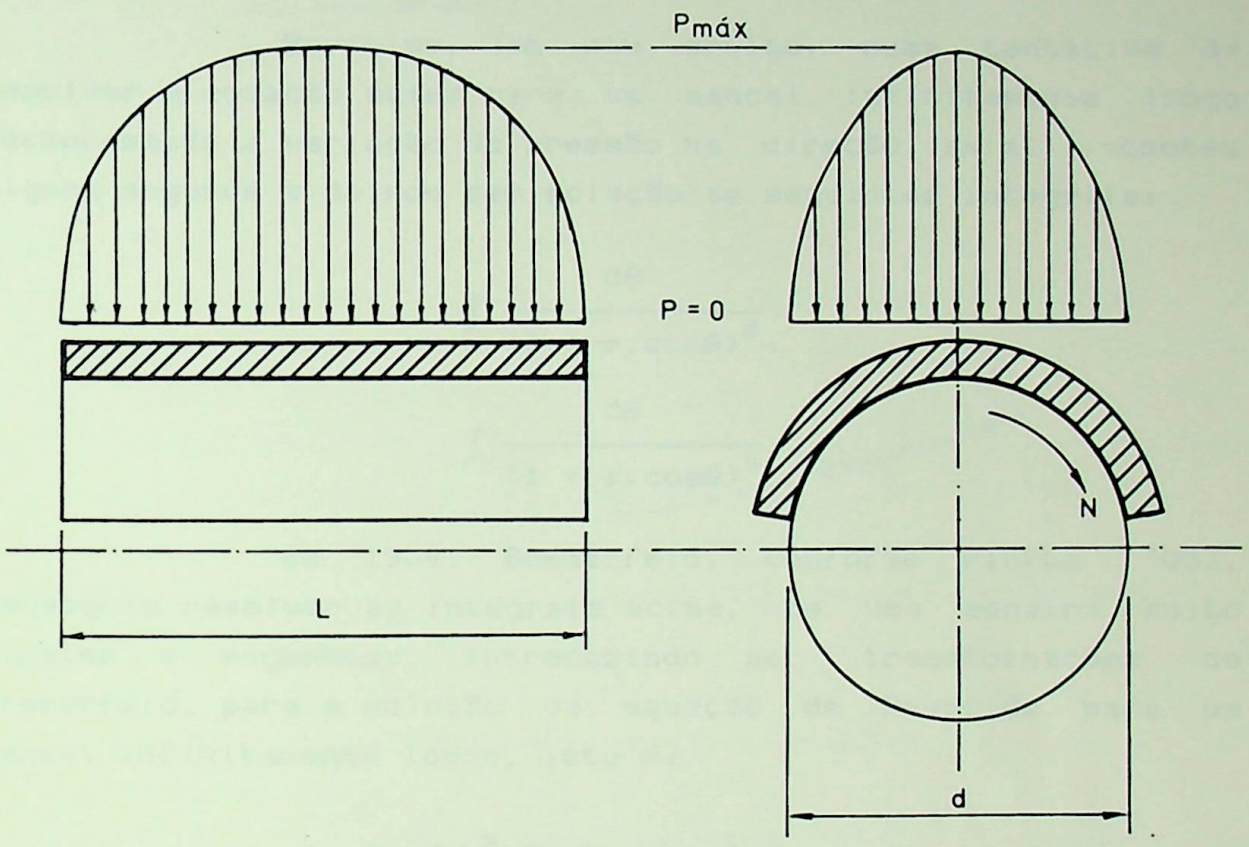


Fig. 2.3 - Esquema de curva de pressão num mancal radial hidrodinâmico.

Os coeficientes de atrito medidos por Tower foram também da ordem de milésimos, muito reduzidos com relação ao esperado na época.

Após essas evidências incontestáveis da ocorrência de lubrificação hidrodinâmica em mancais de deslizamento, Reynolds, conforme Pinkus [05], em 1886, publicou um artigo com cerca de 80 páginas. No artigo, Reynolds estabelece os fundamentos físicos e matemáticos, básicos da "ciência da lubrificação hidrodinâmica", de maneira muito clara e convincente. Por essa razão, a assim chamada "equação de Reynolds da lubrificação hidrodinâmica" faz parte obrigatória de qualquer texto sobre mancais de deslizamento, como segue:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right] = 6U\frac{dh}{dx} \qquad (2.2)$$

Reynolds, em seu artigo, numa tentativa de resolver a equação acima para um mancal infinitamente longo (desprezando a variação da pressão na direção axial) cometeu alguns enganos e deixou sem solução as seguintes integrais:

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2}$$

e

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3}$$

Em 1904, Sommerfeld, conforme Pinkus [05], conseguiu resolver as integrais acima, de uma maneira muito simples e engenhosa, introduzindo as transformações de Sommerfeld, para a solução da equação de Reynolds para um mancal infinitamente longo, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right] = 6U\frac{dh}{dx} \qquad (2.3)$$

A falta de uma formação em engenharia levou Sommerfeld a admitir uma distribuição anti-simétrica da pressão hidrodinâmica no filme de óleo, sem cavitação. Foi essa hipótese absurda que permitiu a continuidade do estudo da lubrificação hidrodinâmica e que permaneceu interrompida por cerca de 20 anos, após Reynolds.

Vários pesquisadores surgiram e, baseando-se na transformada de Sommerfeld, deram prosseguimento ao avanço científico da lubrificação hidrodinâmica.

Michell em 1929, conforme Pinkus [05], teve a idéia de considerar um mancal infinitamente curto, ao contrário de seus antecessores, isto é, desprezando o primeiro termo da Equação (2.2), ao invés do segundo, resultando:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right] = 6U\frac{dh}{dx} \qquad (2.4)$$

Em 1930, Cardulo [06] integrou a Equação (2.3), obtendo a distribuição da pressão hidrodinâmica no filme de óleo.

Em 1952, Ocvirk, conforme Pinkus [05], conseguiu desenvolver uma solução completa para os chamados mancais curtos, podendo ser aplicada nas relações L/D até 1/2, que é a faixa de projeto da maioria dos mancais modernos. Contudo o método de Ocvirk não pode ser aplicado para mancais cujo filme de óleo não começe em h_{max}, nem para sapatas com arcos menores que 180° e nem tampouco para corrediças e mancais axiais.

Dois importantes conjuntos de soluções surgiram para mancais finitos, antes do desenvolvimento tecnológico na área computacional.

Em 1949, Cameron e Wood [02], usando o método de relaxação de Southwell, apresentaram soluções na faixa de L/D=1/4 até ∞.

Em 1954, Sassenfeld e Walter [07], apresentaram soluções para mancais com arcos de 360° e 180°; usaram um algoritmo Gaussiano a fim de resolver suas equações de diferenças finitas.

Tanto as soluções de Cameron e Wood como as de Sassenfeld e Walter envolvem uma quantidade excessiva de cálculos, mas seus métodos para resolver as equações diferenciais podem ser considerados como precursores dos métodos numéricos com auxílio de computador.

No ano de 1956, Pinkus [08] foi o primeiro a usar um computador na solução da equação de Reynolds, usando o método das diferenças finitas e condições de contorno apropriadas. Ele obteve soluções não só para mancais circulares, mas também elípticos e outras configurações, para relações de L/D iguais a 1/4, 1/2 e 1.

Um aspecto muito importante do trabalho de Pinkus foi a conclusão de que a obtenção de soluções para mancais radiais de geometrias diferentes, incluindo os não

circulares, recai simplesmente no uso de soluções genéricas para sapatas de vários parâmetros L/D, β, θ, ε e ϕ. Agrupando-as então convenientemente pode-se obter o mancal da configuração específica desejada.

Em 1958, Raimondi e Boyd [01], apresentaram soluções completas (com resultados em forma de tabelas e gráficos de projeto) para mancais de arcos iguais a 60°, 120°, 180° e 360° e relações L/D = 1/4, 1/2, 1 e ∞.

Em 1959, Hays [09], apresentou soluções completas para mancais radiais, empregando o método variacional.

Em 1982, Siew e Reason [10], elaboraram programas computacionais para mancais desalinhados, lubrificação forçada e mancal poroso. Estes programas, além de calcular parâmetros dependentes, executam a plotagem da curva de pressão em três dimensões, dando ao projetista uma visão global do comportamento do mancal.

Allaire et alii [11], em 1985, apresentaram um procedimento para solução numérica da equação de Reynolds utilizando o método de elementos finitos, com base na técnica de Galerkin. Foram avaliados efeitos de desalinhamento do eixo, turbulência e viscosidade variável.

Gero e Ettles [12], em 1986, desenvolveram um estudo comparativo de várias soluções da equação de Reynolds por diferenças finitas e elementos finitos. Assim puderam avaliar os métodos em termos de precisão, custo computacional e complexidades dos programas.

Prashad [13], em 1988, apresentou uma análise do comportamento térmico operacional de mancais radiais hidrodinâmicos, envolvendo a correlação entre os parâmetros de funcionamento e a "Integral de viscosidade", que por sua vez relaciona a viscosidade do óleo lubrificante e sua temperatura à saída da cunha de óleo (vazão Q_c) com a capacidade de carga do mancal. Três óleos lubrificantes foram analisados, partindo da hipótese de que na região carregada do mancal, temperaturas de até 120° C podem ser admitidas para um óleo lubrificante. Dentre as conclusões de Prashad, de que o uso de óleo de maior

viscosidade implica na necessidade de maior relação de folga c/r e maior elevação da temperatura na região carregada do mancal, pode-se destacar a conclusão de que o fornecimento de uma vazão de óleo maior que a vazão através do filme de lubrificante contribui apenas para refrigerar o óleo que sai do mancal, mas não contribui eficazmente para refrigerar o mancal.

CAPÍTULO 3

DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS

3.1 - INTRODUÇÃO

Conforme mostrado na Figura 3.1, um munhão girando no interior de uma bucha estacionária arrasta o óleo lubrificante (que adere às superfícies metálicas) para dentro do espaço estreito em forma de cunha, de tal maneira que uma pressão é gerada nesse fluido (no espaço convergente-cunha de óleo).

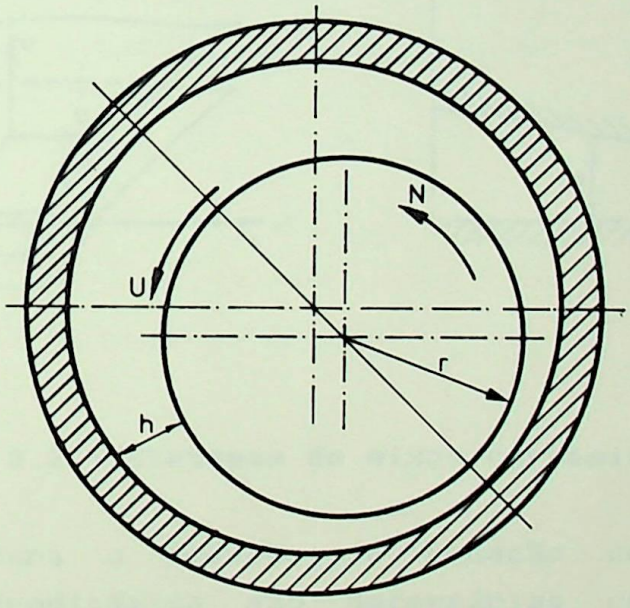


Fig. 3.1 - Representação esquemática da lubrificação hidrodinâmica.

Dependendo da folga construtiva entre o munhão e a bucha, da velocidade de rotação N, bem como da viscosidade do fluido, a magnitude dessa pressão será suficiente para suportar a carga do munhão sobre a bucha, separando-os

completamente, constituindo a assim chamada lubrificação hidrodinâmica de película espessa.

Neste capítulo será apresentado um desenvolvimento da equação de Reynolds que rege a distribuição de pressão num filme de lubrificante. O desenvolvimento será feito para a situação mostrada na Figura 3.2, em coordenadas cartesianas. As componentes de velocidade nas direções x, y, z são respectivamemte, u, v, w, sendo y a direção ao longo da espessura h = h(x,z) do filme de óleo. A pressão do filme de óleo é p. As seguintes condições de contorno serão consideradas:

$$\text{em } y = 0 \Rightarrow u = U,\ v = 0,\ w = 0,$$
$$\text{em } y = h \Rightarrow u = 0,\ v = 0,\ w = 0.$$

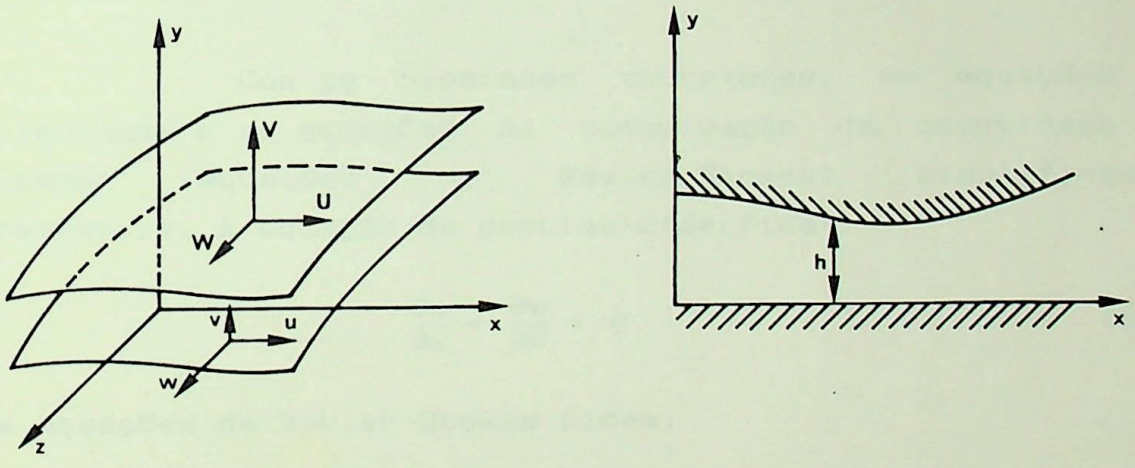


Fig. 3.2 - Sistemas de eixos cartesianos.

Para a dedução da equação de Reynolds da lubrificação hidrodinâmica, são necessárias certas hipóteses simplificadoras, conforme o Item seguinte.

3.2 - HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

Várias hipóteses simplificadoras serão consideradas no equacionamento da lubrificação hidrodinâmica.

São elas:

1)- Escoamento laminar, incompressível, permanente de um fluido Newtoniano, com viscosidade, η, constante;
2)- Força de inércia e de campo desprezadas;
3)- Componente de velocidade ao longo do filme, v, desprezível em relação às demais (u e w);
4)- Variações de velocidade nas direcões x e z desprezíveis em relação às variações na direção y. Isso equivale a considerar apenas as tensões no plano xz (τ_{yx} e τ_{yz}).

3.3 - EQUAÇÃO DE REYNOLDS

Com as hipóteses anteriores, as equações de continuidade e as equações de conservação da quantidade de movimento (equações de Navier-Stokes) simplificam-se sobremaneira. A equação da continuidade fica:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (3.1)$$

e as equações de Navier-Stokes ficam:

(direção x) $$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y} \qquad (3.2)$$

(direção y) $$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (3.3)$$

(direção z) $$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (3.4)$$

A Equação (3.3) mostra que, nesse caso, a pressão depende apenas de x e z, isto é, p=p(x,z).

As equações de quantidade de movimento em x e z,

(3.2) e (3.4) podem ser integradas em y, duas vezes, considerando-se em seguida as condições de contorno. Resultam as seguintes expressões:

$$u = \frac{1}{2.\eta}\frac{\partial p}{\partial x}(y^2 - y.h) + U\left[\frac{h - y}{h}\right], \qquad (3.5)$$

$$w = \frac{1}{2.\eta}\frac{\partial p}{\partial z}(y^2 - y.h) . \qquad (3.6)$$

É importante conhecer os fluxos unitários de vazão, assim definidos

$$q_x = \int_o^h u.dy \qquad (3.7)$$

$$q_z = \int_o^h w.dy \qquad (3.8)$$

Substituindo-se a Equação (3.5) em (3.7) e (3.6) em (3.8), obtém-se, após a integração:

$$q_x = -\frac{h^3}{12.\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{U.h}{2}, \qquad (3.9)$$

$$q_z = -\frac{h^3}{12.\eta}\frac{\partial p}{\partial x} . \qquad (3.10)$$

Por outro lado, a equação de continuidade pode ser integrada em y, de 0 a h, da seguinte forma:

$$\int_o^h \frac{\partial u}{\partial x}.dy + \int_o^h \frac{\partial w}{\partial z}.dy = 0 . \qquad (3.11)$$

Aplicando-se a regra de Leibnitz [14] a cada um dos termos da Equação (3.11), tem-se:

$$\int_o^h \frac{\partial u}{\partial x}.dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_o^h u.dy - u(h).\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial q_x}{\partial x}, \qquad (3.12)$$

$$\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z}.dy = \frac{\partial}{\partial z}\int_0^h w.dy - \overset{\nearrow}{w(h)}.\overset{0}{\frac{\partial h}{\partial z}} = \frac{\partial q_z}{\partial z} \quad . \qquad (3.13)$$

Logo, a equação da continuidade fica:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \quad . \qquad (3.14)$$

Finalmente, substituindo as Equações (3.9) e (3.10) em (3.14), resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right] = 6.U\frac{\partial h}{\partial x} \qquad (3.15)$$

que é a forma clássica da célebre equação de Reynolds.

Neste trabalho, a equação de Reynolds na forma da Equação (3.15) será aplicada à situação de um mancal radial hidrodinâmico conforme a Figura 3.1. Para isso é necessário desprezar a influência da curvatura da superfície do mancal (bucha e munhão), o que é possível no caso da pequena relação h/r. Essa hipótese adicional será admitida, sendo o escoamento considerado entre as superfícies planas resultantes do desenvolvimento cilíndrico da bucha e do munhão.

CAPÍTULO 4

SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS

4.1 - INTRODUÇÃO

A equação bidimensional de Reynolds, isto é, a Equação (3.18) só pode ser resolvida analiticamente mediante a consideração de hipóteses simplificadoras, conforme já comentado anteriormente.

Normalmente dois casos particulares são analisados:

1)- Mancal infinitamente curto,
2)- Mancal infinitamente longo.

Inicialmente, no entanto, torna-se necessário equacionar convenientemente a espessura h da película de lubrificante, em termos da configuração geométrica do mancal, Figura 4.1.

A forma da película será expressa em função da coordenada x, na direção do movimento, de tal modo que a equação de Reynolds poderá ser integrada analiticamente, para qualquer um dos dois casos ideais teóricos acima, obtendo-se então os "parâmetros dependentes" resultantes, listados no Capítulo 1. Estas grandezas serão obtidas também, para o caso real de um mancal de comprimento finito, no Capítulo 5, mediante aplicação do método numérico das diferenças finitas.

4.2 - ESPESSURA DO FILME DE ÓLEO

A Figura 4.1 mostra um mancal radial constituído pela bucha de centro O e raio R_1 e o munhão de centro C e raio

R_2. Como se pode observar, o munhão está localizado excentricamente em relação à bucha, sendo a excentricidade $\overline{OC}$ representada pela letra e. Todas as distâncias angulares são medidas a partir da posição de espessura máxima do filme, isto é, onde o prolongamento da linha $\overline{CO}$ corta a superfície da bucha em G. Assim sendo, um ponto B qualquer da bucha forma um ângulo θ=GOB com a linha de centros $\overline{CO}$. A distância $\overline{OB}$ é o raio R_1 da bucha e intercepta o munhão em A, de tal forma que $\overline{AB}$ = h é a espessura genérica do filme de óleo.

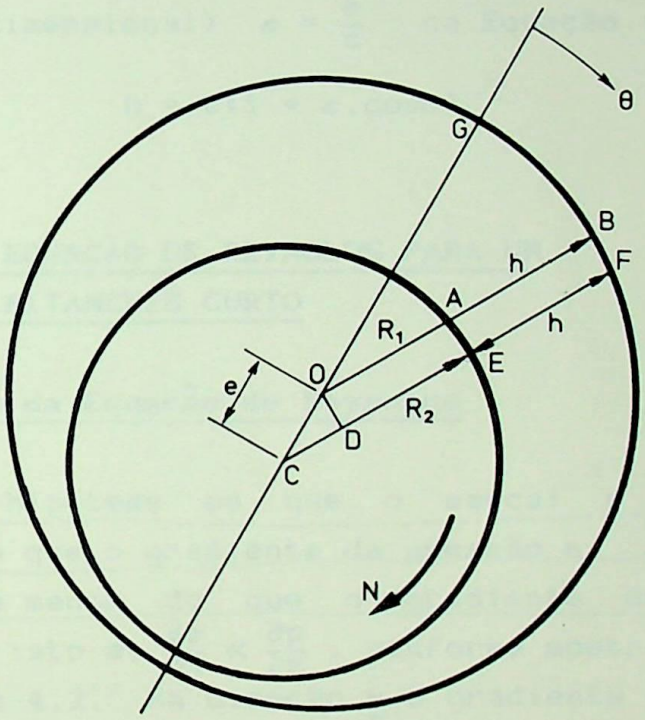


Fig. 4.1 - Configuração básica de um mancal radial hidrodinâmico.

Traçando-se uma paralela a $\overline{OB}$, a partir de C, esta intercepta o munhão em E e a bucha em F. Considerando que a excentricidade $\overline{OC}$ é muito pequena pode-se admitir que $\overline{AB} \simeq \overline{EF}$.

Traçando-se então uma perpendicular a $\overline{CE}$, a partir de O e interceptando a reta $\overline{CE}$ em D, pode-se escrever:

$$h \simeq \overline{EF} = \overline{OB} - \overline{DE} = \overline{OB} - (\overline{CE} - \overline{CD}) \qquad (4.1)$$

Do triângulo CDO, tem-se:

$$\overline{CD} = e.\cos\theta \qquad (4.2)$$

Além disso, da Figura 4.1, pode-se observar que $\overline{OB} - \overline{CE} = R_1 - R_2 = c$ (sendo c a folga radial construtiva do mancal).

Portanto, substituindo-se na Equação (4.1), a espessura h do filme de óleo pode ser expressa por:

$$h = c + e.\cos\theta \qquad (4.3)$$

Alternativamente, introduzindo-se a excentricidade específica (adimensional) $\varepsilon = \frac{e}{c}$ na Equação (4.3), tem-se:

$$h = c(1 + \varepsilon.\cos\theta) \qquad (4.4)$$

4.3 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA UM MANCAL INFINITAMENTE CURTO

4.3.1 - Adaptação da Equação de Reynolds

A hipótese de que o mancal é infinitamente curto implica em que o gradiente de pressão na direção x do movimento é muito menor do que o gradiente de pressão na direção axial z, isto é, $\frac{\partial p}{\partial x} \ll \frac{\partial p}{\partial z}$, conforme mostrado esquematicamente na Figura 4.2. Na direção x o gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial x}$ é da ordem de $\frac{p}{B}$ e na direção axial z o gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial z}$ é da ordem de $\frac{p}{L}$. Sendo L « B tem-se:

$$\frac{p}{L} \gg \frac{p}{B}, \text{ logo } \frac{\partial p}{\partial x} \ll \frac{\partial p}{\partial z}$$

mancal curto

Isto significa que o termo $\frac{\partial p}{\partial x}$ da Equação (3.15) pode ser desprezado relativamente ao têrmo $\frac{\partial p}{\partial z}$, de tal modo que esta se reduz à Equação (2.4), transcrita a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6U\frac{dh}{dx}$$

Sendo h uma função somente de x, essa equação pode ser expressa

da seguinte forma:

$$\frac{d^2p}{dz^2} = \frac{6.U.\eta}{h^3}\frac{dh}{dx} \qquad (4.5)$$

Esta equação foi primeiramente desenvolvida por Michell, conforme Pinkus [05], como comentado anteriormente no Capítulo 2.

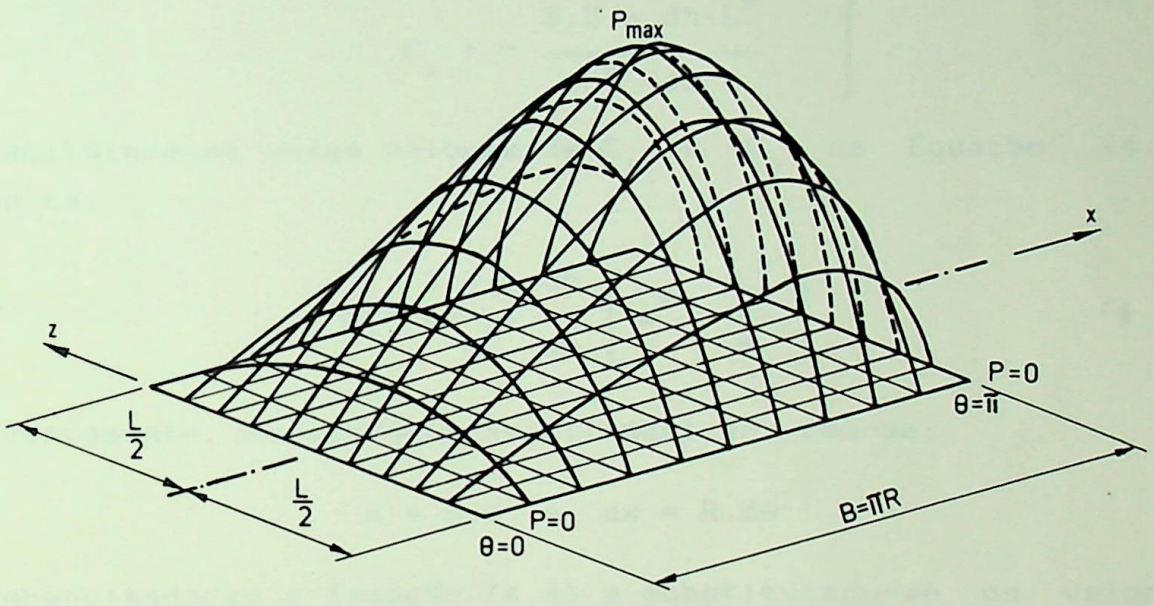


Fig. 4.2 - Distribuição da pressão hidrodinâmica - mancal curto

4.3.2 - Distribuição de Pressão Hidrodinâmica

4.3.2.1 - Equação Genérica da Distribuição de Pressão

Integrando-se duas vêzes a Equação (4.5) obtém-se:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{6.U.\eta}{h^3}\frac{dh}{dx}z + C_1 \qquad (4.6)$$

$$p = \frac{3.U.\eta}{h^3}\frac{dh}{dx}z^2 + C_1.z + C_2 \qquad (4.7)$$

Pode-se observar na Figura 4.2 que a pressão é igual a zero nas duas extremidades do mancal, onde $z = \pm \frac{L}{2}$. Da mesma maneira, a Figura 4.2 também mostra a simetria existente na distribuição de pressão relativamente ao plano z=0, de modo que $\frac{dp}{dz} = 0$ para z=0.

Substituindo-se essas condições de contorno nas Equações (4.6) e (4.7), obtém-se:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{C}_1 &= 0 \\ \mathbb{C}_2 &= -\frac{3.U.\eta}{h^3}\frac{dh}{dx}\frac{L^2}{4} \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

Substituindo-se esses valores de $\mathbb{C}_1$ e $\mathbb{C}_2$ na Equação (4.7) resulta:

$$p = \frac{3.U.\eta}{h^3}\frac{dh}{dx}\left[z^2 - \frac{L^2}{4} \right] \qquad (4.9)$$

Evidentemente, em coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$x = R.\theta \quad \text{e} \quad dx = R.d\theta$$

Diferenciando-se a Equação (4.4) e substituindo-se os valores acima, obtém-se:

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{c.\varepsilon.\text{sen}\theta}{R} \qquad (4.10)$$

Substituindo-se a Equação (4.10) em (4.9) resulta:

distribuição de pressões

$$p = \frac{3.U.\eta.\varepsilon.\text{sen}\theta}{R.c^2.(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3}\left[\frac{L^2}{4} - z^2 \right] \qquad (4.11)$$

4.3.2.2 - Posição do Pico de Pressão no Plano Central

Conforme mostrado na Figura 4.2, a pressão hidrodinâmica gerada no filme de óleo passa por um valor máximo no plano central (z = 0), numa posição angular $\theta_{P_{max}}$ que pode

ser facilmente determinada pelo método clássico do cálculo diferencial.

Diferenciando-se a Equação (4.11) em relação a variável angular θ e igualando-se a zero, conforme mostrado por Dubois e Ocvirk [15], obtém-se:

$$\theta_{P_{max}} = \arccos\left[\frac{1 - (1 + 24.\varepsilon^2)^{1/2}}{4.\varepsilon}\right] \qquad (4.12)$$

4.3.2.3 - Pressão Máxima no Plano Central

Substituindo-se θ por $\theta_{P_{max}}$ dado pela Equação (4.12) na Equação (4.11) obtém-se o valor do pico de pressão hidrodinâmica no filme de óleo, no plano central médio do mancal (z = 0), isto é:

$$P_{max} = \frac{3.U.\eta.L^2}{4.R.c^2}\left[\frac{\varepsilon.\mathrm{sen}\theta_{P_{max}}}{(1 + \varepsilon.\cos\theta_{P_{max}})^3}\right] \qquad (4.13)$$

4.3.3 - Capacidade de Carga e Número de Sommerfeld

A capacidade de carga de um mancal curto pode ser determinada mediante integração da equação de pressão e usando a chamada "Condição de Sommerfeld/Gumbel", que é uma das três hipóteses que têm sido consideradas relativamente à distribuição circunferencial de pressão no filme de óleo. Segundo a condição ou hipótese de Sommerfeld/Gumbel, a pressão no filme de lubrificante começa a se desenvolver na posição de espessura máxima, isto é, $\theta = 0$, e termina na posição de espessura mínima, isto é, $\theta = \pi$, desprezando-se a pressão na região compreendida entre $\pi \leq \theta \leq 2.\pi$, conforme mostrado esquematicamente na Figura 4.3.

Arbitrando-se os eixos F_r e F_t, conforme a Figura 4.3, as integrações das pressões na película de óleo do mancal nas direções desses eixos darão as componentes F_r e F_t

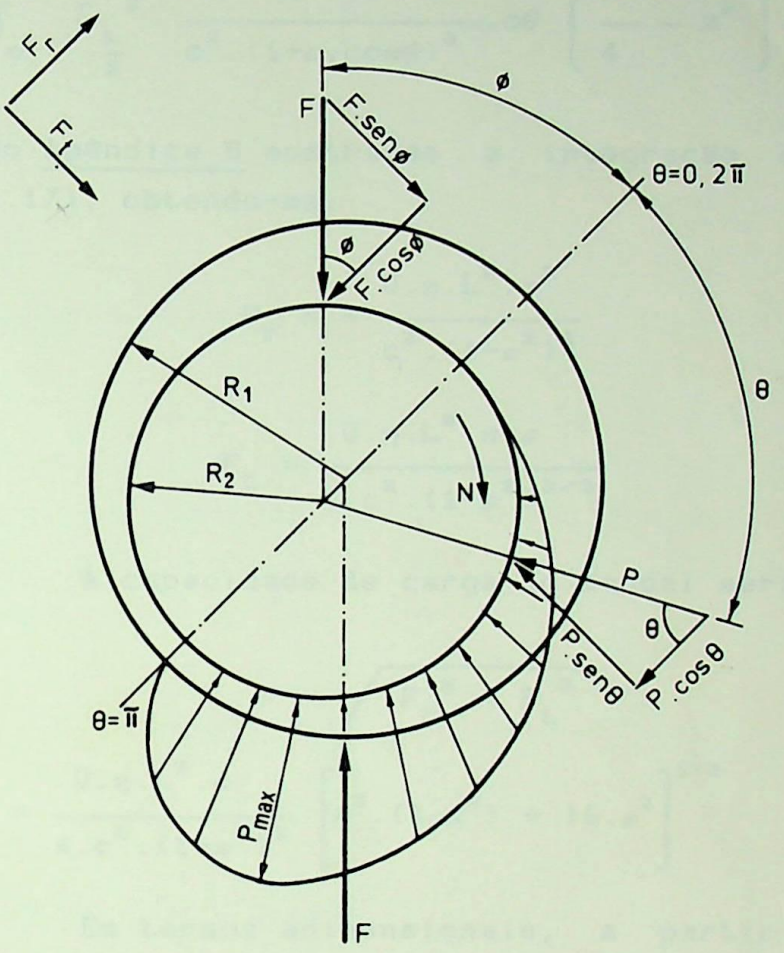


Fig. 4.3 - Distribuição da pressão hidrodinâmica e componentes de carga.

da força resultante F, isto é:

$$F_r = \int_0^{\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} p.R.\cos\theta.d\theta.dz \qquad (4.14)$$

$$F_t = \int_0^{\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} p.R.\operatorname{sen}\theta.d\theta.dz \qquad (4.15)$$

Substituindo-se a Equação (4.11) em (4.14) e (4.15) obtém-se:

$$F_r = \int_0^{\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{3.U.\eta.\varepsilon.\operatorname{sen}\theta.\cos\theta}{c^2.(1+\varepsilon.\cos\theta)^3}.d\theta \left[\frac{L^2}{4} - z^2\right].dz \qquad (4.16)$$

$$F_t = \int_0^{\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{3.U.\eta.\varepsilon.\text{sen}^2\theta}{c^2.(1+\varepsilon.\cos\theta)^3}.d\theta \left[\frac{L^2}{4} - z^2\right].dz \qquad (4.17)$$

No Apêndice B mostra-se a integração das Equações (4.16) e (4.17), obtendo-se:

$$F_r = - \frac{U.\eta.L^3.\varepsilon^2}{c^2.(1-\varepsilon^2)^2} \qquad (4.20)$$

e

$$F_t = \frac{U.\eta.L^3.\pi.\varepsilon}{4.c^2.(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \qquad (4.21)$$

A capacidade de carga do mancal será:

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_t^2} \qquad (4.22)$$

$$F = \frac{U.\eta.L^3.\varepsilon}{4.c^2.(1-\varepsilon^2)^2} \left[\pi^2.(1-\varepsilon^2) + 16.\varepsilon^2\right]^{1/2} \qquad (4.23)$$

Em termos adimensionais, a partir da Equação (4.23), a capacidade de carga pode ser representada como segue:

$$\Delta = \frac{F}{\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2 L.R} = \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left[\pi^2.(1-\varepsilon^2) + 16.\varepsilon^2\right]^{1/2} \qquad (4.24)$$

Definindo-se $P = \frac{F}{L.D}$ como a pressão específica do mancal (força dividida pela área projetada) e sabendo-se que $U = \pi.D.N$, pode-se obter, da Equação (4.23):

$$\frac{\eta.N}{P}.\left(\frac{R}{c}\right)^2.\left(\frac{L}{D}\right)^2 = \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\pi.\varepsilon} \left[\frac{1}{\pi^2(1-\varepsilon^2) + 16.\varepsilon^2}\right]^{1/2} \qquad (4.25)$$

Sendo $S = \frac{\eta.N}{P}.\left(\frac{R}{c}\right)^2$ o chamado número de Sommerfeld, tem-se:

$$S\left[\frac{L}{D}\right]^2 = \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\pi.\varepsilon}\left[\frac{1}{\pi^2(1-\varepsilon^2)+16.\varepsilon^2}\right]^{1/2} \qquad (4.26)$$

que expressa a relação entre o Número de Sommerfeld S, a relação $\frac{L}{D}$ e a excentricidade específica ε.

4.3.4 - Ângulo de Ação da Carga

A posição angular da linha de ação da carga F com relação ao local de espessura mínima do filme de óleo (ou ponto de maior proximidade munhão/bucha) é o ângulo de ação, ϕ. De acôrdo com a Figura 4.3 e as Equações (4.21) e (4.20), pode-se obter:

$$tg\ \phi = -\frac{F_t}{F_r} = \frac{\pi}{4}.\frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon} \qquad (4.27)$$

4.3.5 - Vazão de Lubrificante

Existem três componentes de vazão de lubrificante a serem consideradas num mancal radial hidrodinâmico, conforme mostrado esquematicamente na Figura 4.4, que são:

- Vazão lateral ou axial total (duas extremidades), Q_l,
- Vazão circunferencial de entrada, Q_e, na posição de folga máxima entre munhão e bucha,
- Vazão circunferencial de saída, Q_c, na posição de espessura mínima, também chamada de vazão circulante ou bombeada.

Pode-se, portanto, estabelecer a seguinte relação entre essas componentes de vazão:

$$Q_l = Q_e - Q_c \qquad (4.28)$$

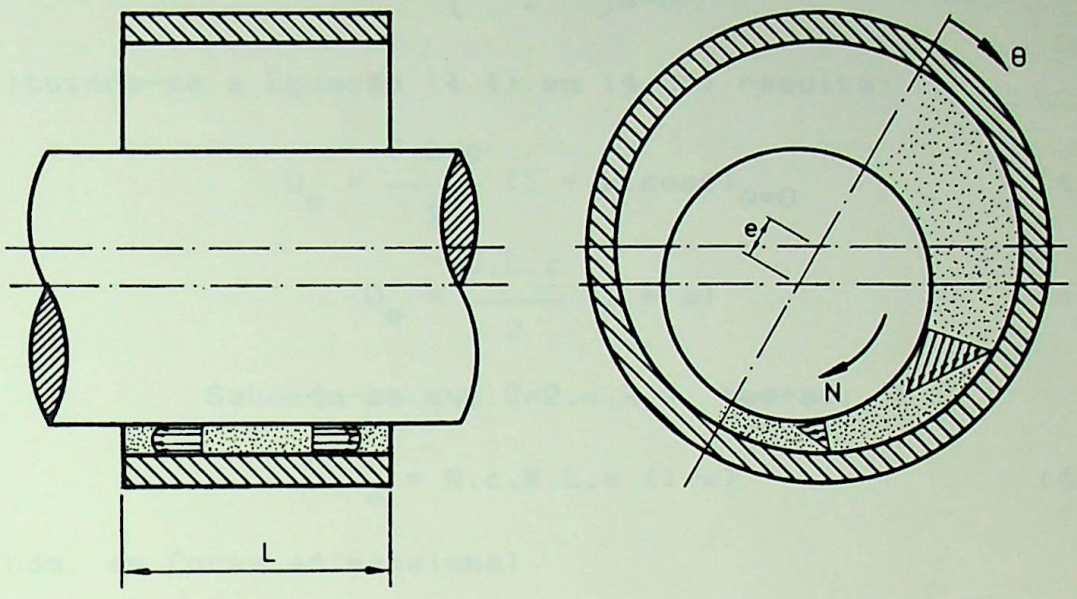


Fig. 4.4 - Distribuição de vazão de lubrificante.

4.3.5.1 - Vazão Circunferencial de Entrada

A vazão circunferencial na entrada da cunha de óleo, isto é, na posição angular $\theta = 0$, pode ser calculada pela seguinte equação:

$$Q_e = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \left(q_x . dz\right)_{\theta=0} \qquad (4.29)$$

Substituindo-se em (4.29) o valor de q_x dado pela Equação (3.10) resulta:

$$Q_e = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \left(\frac{U.h}{2} - \frac{h^3}{12.\eta} . \frac{dp}{dx} \right)_{\theta=0} dz \qquad (4.30)$$

Considerando-se a hipótese em questão de que $P = 0$ para o intervalo angular $0 \leq \theta \leq \pi$ (Condição de Sommerfeld/Gumbel) então deve-se ter $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{R.d\theta} = 0$ para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Assim sendo, a Equação (4.30) resulta:

$$Q_e = \left[\frac{U.h.L}{2} \right]_{\theta=0} \qquad (4.31)$$

Substituindo-se a Equação (4.4) em (4.31) resulta:

$$Q_e = \frac{U.L.c}{2} (1 + \varepsilon.\cos\theta)_{\theta=0} \qquad (4.32)$$

ou

$$Q_e = \frac{U.L.c}{2} (1 + \varepsilon) \qquad (4.33)$$

Sabendo-se que $U=2.\pi.R.N$, tem-se:

$$Q_e = R.c.N.L.\pi\ (1+\varepsilon) \qquad (4.34)$$

ou ainda, em forma adimensional

$$\frac{Q_e}{R.c.N.L} = \pi\ (1+\varepsilon) \qquad (4.35)$$

4.3.5.2 - Vazão Circunferencial de Saída

A vazão circunferencial Q_c na saída da cunha de óleo pode ser calculada exatamente como a de entrada, bastando simplesmente tomar a Equação (4.32) mas para $\theta = \pi$, isto é:

$$Q_c = \frac{U.L.c}{2} (1 + \varepsilon.\cos\theta)_{\theta=\pi} \qquad (4.36)$$

ou

$$Q_c = R.c.N.L.\pi\ (1-\varepsilon) \qquad (4.37)$$

ou, finalmente, em forma adimensional:

$$\frac{Q_c}{R.c.N.L} = \pi\ (1-\varepsilon) \qquad (4.38)$$

4.3.5.3 - Vazão Axial

Conforme descrito anteriormente, o lubrificante adere à superfície do munhão rotativo e é arrastado na direção

circunferencial, no sentido convergente da "cunha de óleo", gerando a pressão hidrodinâmica. Esta atinge um valor máximo no plano médio circunferencial do mancal e cai a zero (pressão atmosférica) nas duas extremidades axiais, conforme mostrado na Figura 4.2. Devido a esse gradiente axial de pressão, parte do lubrificante escoa axialmente para as extremidades, constituindo a vazão axial ou lateral, Q_l.

Uma maneira de se calcular essa vazão lateral seria mediante a integração do escoamento de lubrificante na direção $\underline{z}$, em qualquer posicão angular $\underline{\theta}$, que é:

$$q_z = - \frac{h^3}{12.\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \qquad (4.39)$$

Esta equação servirá de base para o cálculo da vazão lateral em um mancal de comprimento finito no Capítulo 5.

Outra maneira, mais simples, para se calcular a vazão Q_l é considerar a diferença entre as vazões circunferenciais na entrada e na saída da cunha de óleo, nas posições angulares $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, respectivamente, o que corresponde a aplicar a Equação (4.28).

Substituindo-se as Equações (4.34) e (4.37) em (4.28), obtém-se:

$$Q_l = R.c.N.L.2.\pi.\varepsilon \qquad (4.40)$$

ou, em forma adimensional

$$\frac{Q_l}{R.c.N.L} = 2.\pi.\varepsilon \qquad (4.41)$$

4.3.5.4 - Relação de Vazões

A razão entre as vazões lateral Q_l e de entrada (ou total) Q_e será utilizada na equação da elevação de temperatura do lubrificante no mancal, a ser deduzida no Item 4.3.7.

Das Equações (4.41) e (4.35) obtém-se:

$$\frac{Q_l}{Q_e} = \frac{2.\varepsilon}{(1 + \varepsilon)} \qquad (4.42)$$

$C_L = \frac{U}{h} - \frac{h}{2.\eta}\frac{dP}{dx}$ (3.4)

4.3.6 - Atrito e Perda de Potência

(3.5) $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\frac{dP}{dx}y + C_L$

4.3.6.1 - Força de Atrito

2a condições de contorno

Mesmo para o caso em estudo, da lubrificação hidrodinâmica com separação total entre a superfície cilíndrica externa do munhão rotativo e a superfície interna da bucha (mancal propriamente dito), há uma resistência à rotação do munhão, devido ao cisalhamento da película de lubrificante entre as superfícies em questão.

Essa resistência, ou força de atrito, pode ser equacionada a partir da lei de Newton para um escoamento viscoso, Equação (3.3), e das condições de equilíbrio de um elemento de fluido da película de lubrificante, Equação (3.2), ou ainda, da Equação (3.5), resultante da combinação dessas duas, conforme deduzido no Item 3.3.

Substituindo-se as constantes de integração C_1 e C_2 dadas pela Equação (3.7) na Equação (3.5) obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\left(y - \frac{h}{2}\right)\frac{dp}{dx} + \frac{U}{h} \qquad (4.43)$$

Substituindo-se a Equação (4.43) em (3.3), a tensão de cisalhamento do filme de lubrificante na superfície do munhão (y = h) resulta:

$$\tau = \eta\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{h}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{\eta.U}{h} \qquad (4.44)$$

A força de atrito fluido F_α pode então ser obtida pelo produto da tensão de cisalhamento τ pela área do mancal de largura L e comprimento circunferencial $B=2.\pi.R$, isto é:

$$F_\alpha = \int_0^L \int_0^B \tau . dx . dz = \int_0^L \int_0^B \tau . R . d\theta . dz \qquad (4.45)$$

ou, aplicando-se a Equação (4.44):

$$F_\alpha = \int_0^L \left[\int_0^B \frac{h}{2} \frac{dp}{R.d\theta} R.d\theta + \int_0^B \frac{\eta . U}{h} . R . d\theta . \right] dz \qquad (4.46)$$

De acôrdo com a condição de distribuição de pressão de Sommerfeld/Gumbel a Equação (4.46) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$F_\alpha = \int_0^L \int_0^\pi \left[\frac{h}{2} dp \right] . dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\frac{\eta . U}{h} R . d\theta \right] dz \qquad (4.47)$$

Resolvendo a primeira integral por partes, obtém-se:

$$\int_0^L \int_0^\pi \left[\frac{h}{2} dp \right] . dz = \int_0^L \left[\left| \frac{h . p}{2} \right|_0^\pi - \frac{p}{2} . dh \right] dz \qquad (4.48)$$

Sabendo-se, das condições de contôrno, que $p = 0$ tanto para $\theta = 0$ como para $\theta = \pi$ e substituindo-se também a diferencial $dh = -c . \varepsilon . \text{sen}\theta . d\theta$ (obtida de $\frac{h}{c} = 1 + \varepsilon . \cos\theta$) na Equação (4.48), obtém-se:

$$\int_0^L \int_0^\pi \left[\frac{h}{2} dp \right] . dz = \int_0^L \int_0^\pi \frac{p}{2} c . \varepsilon . \text{sen}\theta . d\theta . dz \qquad (4.49)$$

Substituindo-se então as Equações (4.49) e (4.4) na Equação (4.47), resulta:

$$F_\alpha = \int_0^L \int_0^\pi \frac{1}{2} p . c . \varepsilon . \text{sen}\theta . d\theta . dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\eta . U . R . d\theta}{c . (1 + \varepsilon . \cos\theta)} dz \qquad (4.50)$$

A partir da Equação (4.15) e da Figura (4.3) pode-se concluir que o primeiro termo do segundo membro da Equação (4.50) é simplesmente igual a $F . \text{sen}\phi . c . \frac{\varepsilon}{2.R}$, de modo que a Equação (4.50) pode ser escrita como segue:

$$F_\alpha = \frac{\varepsilon . c}{2 . R} F . \text{sen}\phi + \frac{\eta . U . R . L}{c} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon . \cos\theta)} \qquad (4.51)$$

Conforme mostrado no Apêndice A, a integral

indicada no segundo termo do segundo membro da Equação (4.51) foi resolvida por Sommerfeld, de modo que a força de atrito, Equação (4.51) resulta finalmente:

$$F_{\alpha} = \frac{\varepsilon.c}{2.R} F.\text{sen}\phi + \frac{\eta.U.R.L.2.\pi}{c.(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \qquad (4.52)$$

Para o caso de um mancal de alta velocidade de rotação e baixa carga, a excentricidade tende a zero, isto é, o munhão gira concêntrico com a bucha (mancal de Petroff) e a Equação (4.52) reduz-se à equação de Petroff da força de atrito, Equação (2.1).

4.3.6.2 - Coeficiente de Atrito

Considerando-se a definição básica de coeficiente de atrito como sendo a relação entre a força de atrito F_{α} e a carga F aplicada ao mancal, tem-se:

$$f = \frac{F_{\alpha}}{F} = \frac{\varepsilon.c}{2.R} F.\text{sen}\phi + \frac{2.\pi.\eta.U.R.L}{F.c.(1-\varepsilon^2)^{1/2}}$$

Para o caso de lubrificação completa (sem contato metálico entre o munhão e a bucha) o coeficiente de atrito $\underline{f}$ é da ordem de 0.001. Por essa razão, por questões de escala de representação gráfica, costuma-se multiplicar $\underline{f}$ por $\frac{R}{c}$ (em geral $\frac{R}{c} \simeq 1000$), obtendo-se:

$$f\left(\frac{R}{c}\right) = \frac{\varepsilon.\text{sen}\phi}{2} + \left(\frac{R}{c}\right)^2 \frac{2.\pi.\eta.U.L}{F.(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \qquad (4.53)$$

Pode-se representar também a "variável do coeficiente de atrito", $f\left(\frac{R}{c}\right)$, em função do número de Sommerfeld, Equação (1.1), ou somente em função de $\underline{\varepsilon}$ e da relação $\frac{L}{D}$, isto é:

$$f\left(\frac{R}{c}\right) = \frac{\varepsilon.\text{sen}\phi}{2} + \frac{2.\pi^2.S}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \qquad (4.54)$$

ou

$$f\left[\frac{R}{c}\right] = \frac{\varepsilon.\text{sen}\phi}{2} + \frac{2.\pi}{\left(\frac{L}{D}\right)^2} \cdot \frac{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}{\varepsilon\left[\pi^2\ (1-\varepsilon^2) + 16.\varepsilon^2\right]^{1/2}} \qquad (4.55)$$

4.3.6.3 - Momento de Atrito e Perda de Potência

O momento ou torque de atrito, M_a, do mancal é simplesmente igual ao produto da força de atrito F_a pelo raio R, isto é:

$$M_a = F_a.R = \frac{\varepsilon.c}{2} F.\text{sen}\phi + \frac{2.\pi.\eta.U.R^2.L}{c.(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \qquad (4.56)$$

A perda de potência ou calor gerado no mancal é igual ao produto da força de atrito, Equação (4.52), pela velocidade tangencial U, isto é:

$$\Delta P_{ol} = \frac{U.\varepsilon.c}{2.R} F.\text{sen}\phi + \frac{2.\pi.\eta.U^2.R.L}{c.(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \qquad (4.57)$$

4.3.7 - Elevação da Temperatura do Lubrificante

Para se determinar a elevação da temperatura do lubrificante, desde a entrada $\theta = 0$ até a saída $\theta = \pi$, costuma-se admitir que o calor gerado por atrito no mancal (perda de potência) é totalmente transferido para o lubrificante. Essa hipótese é tanto mais correta, quanto maior for a velocidade de rotação do munhão.

Uma expressão típica para se calcular a temperatura média t_m de trabalho do filme de lubrificante é a seguinte:

$$t_m = t_e + \lambda(t_s - t_e) \qquad (4.58)$$

onde:

t_m = temperatura média do filme de lubrificante

(temperatura básica para se definir a viscosidade do lubrificante),

t_e = temperatura do lubrificante na entrada da cunha de óleo ($\theta = 0$),

t_s = temperatura do lubrificante na saída da cunha de óleo ($\theta = \pi$),

λ = constante empírica; $\lambda = 0,5$ segundo Raimondi e Boyd [01] e $\lambda = 0,8$ de acôrdo com Cameron [03]; no entanto, resultados experimentais evidenciam que λ varia para cada mancal específico e é bastante influenciado pela velocidade de rotação e pela folga construtiva do mancal.

Adotando-se $\lambda = 0,5$, a temperatura do lubrificante que sai pelas faces laterais do mancal será igual a $(t_s + t_e)/2$ e da equação do balanço de energia resulta:

$$\frac{F_\alpha . U}{J} + Q_e . \rho . c_p . t_e = (Q_e - Q_l) . \rho . c_p . t_s + Q_l . \rho . c_p . \frac{t_e + t_s}{2} \qquad (4.59)$$

reagrupando-se, resulta:

$$\frac{F_\alpha . U}{J} = Q_e . \rho . c_p . (t_s - t_e) - Q_l . \rho . c_p . \frac{t_s - t_e}{2} \qquad (4.60)$$

colocando-se $(Q_e . \rho . c_p)$ em evidência:

$$\frac{F_\alpha . U}{J} = Q_e . \rho . c_p . \left[\Delta t - \frac{Q_l}{Q_e} \frac{\Delta t}{2} \right] \qquad (4.61)$$

Finalmente, considerando-se que $F_\alpha = f.F = f.P.2.R.L$ e que $U = 2.\pi.R.N$, obtém-se o chamado "Parâmetro da Elevação de Temperatura", isto é:

$$\frac{\rho . c_p . J . \Delta t}{P} = \frac{f . 2 . R . L . 2 . \pi . R . N}{Q_e \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Q_l}{Q_e} \right)} \qquad (4.62)$$

ou

$$\frac{\rho . c_p . J . \Delta t}{p} = \frac{f . \frac{R}{c}}{\frac{Q_e}{R . c . N . L}} . \frac{4 . \pi}{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{Q_l}{Q_e} \right)} \qquad (4.63)$$

Portanto, para o caso de um mancal "infinitamente curto", substituindo-se as Equações (4.35) e (4.42) na Equação (4.63), obtém-se a seguinte relação entre o "Parâmetro da Elevação de Temperatura" e o "Parâmetro do Coeficiente de Atrito $f . \frac{R}{c}$ ":

$$\frac{\rho . c_p . J . \Delta t}{p} = 4 . f \left(\frac{R}{c} \right) \qquad (4.64)$$

Deve ser observado que a Equação (4.64) só é válida para um mancal curto, ao passo que a Equação (4.63) é geral e pode ser aplicada para um mancal finito qualquer, como será visto no Capítulo 5, incluindo-se o caso de mancal infinitamente longo.

4.4 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA UM MANCAL INFINITAMENTE LONGO.

4.4.1 - Adaptação da Equação de Reynolds

Quando a relação $\frac{L}{D}$ do mancal é grande ($\frac{L}{D} \geq 4$), pode-se desprezar a vazão axial Q_l, de tal maneira que, hipoteticamente, não haverá variação da pressão hidrodinâmica na direção axial $\underline{z}$, conforme mostrado na Figura 4.5. Assim sendo, o segundo têrmo do primeiro membro de Equação (3.15) torna-se nulo e a equação de Reynolds se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 6 . U \frac{\partial h}{\partial x} \qquad (4.65)$$

Como h é uma função somente de x, essa equação pode ser

expressa da seguinte forma:

$$h^3 \frac{d^2p}{dx^2} = 6.U.\eta \frac{dh}{dx} \qquad (4.66)$$

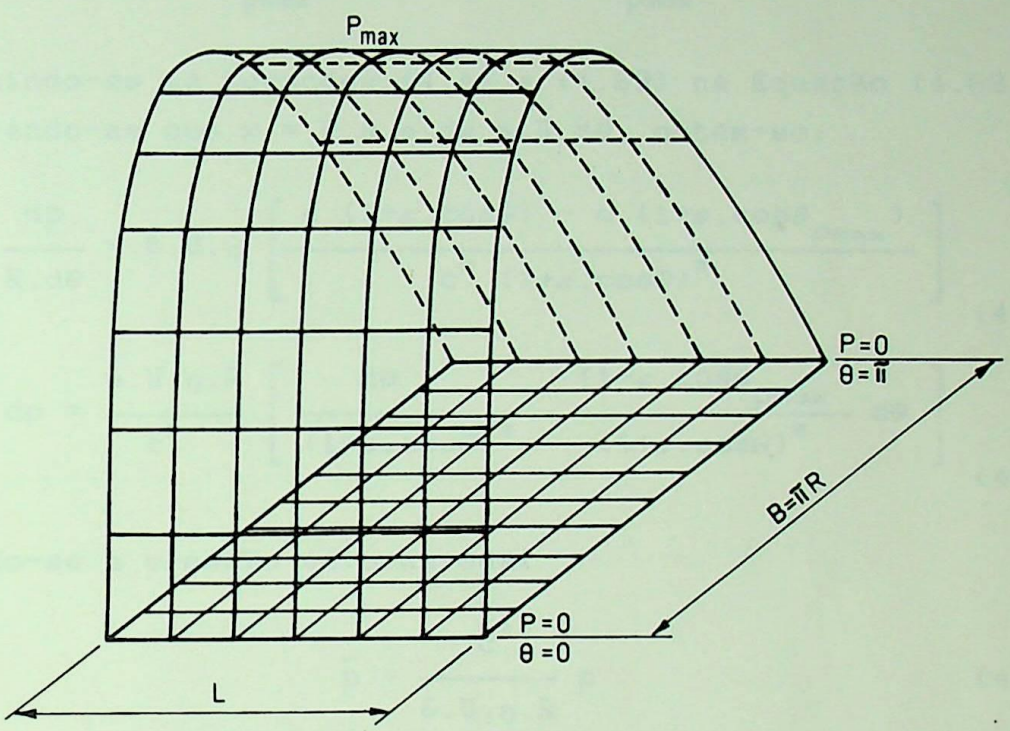


Fig. 4.5 - Distribuição da pressão hidrodinâmica - mancal longo

4.4.2 - Distribuição da Pressão Hidrodinâmica

4.4.2.1 - Equação Genérica da Distribuição de Pressão

Integrando-se a Equação(4.66) obtém-se:

$$h^3 \frac{dp}{dx} = 6.U.\eta.h + C_1 \qquad (4.67)$$

Indicando-se por h_{pmax} a espessura do filme de lubrificante na posição onde a pressão hidrodinâmica atinge o valor máximo ($\frac{dp}{dx} = 0$), pode-se determinar a constante de integração C_1, isto é:

$$C_1 = - 6.U.\eta.h_{pmax}$$

e a Equação (4.67) toma a seguinte forma:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6.U.\eta}{h^3} (h - h_{pmax}) \qquad (4.68)$$

onde

$$h_{pmax} = c.(1 + \varepsilon.\cos\theta_{pmax}) \qquad (4.69)$$

Substituindo-se as Equações (4.4) e (4.69) na Equação (4.68) e considerando-se que $x = R.\theta$ e $dx = R.d\theta$, obtém-se:

$$\frac{dp}{R.d\theta} = 6.U.\eta \left[\frac{c.(1+\varepsilon.\cos\theta) - c.(1+\varepsilon.\cos\theta_{pmax})}{c^3\ (1+\varepsilon.\cos\theta)^3} \right] \qquad (4.70)$$

ou

$$dp = \frac{6.U.\eta.R}{c^2} \left[\frac{d\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^2} - \frac{(1+\varepsilon.\cos\theta_{pmax})}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^3} d\theta \right] \qquad (4.71)$$

Definindo-se a pressão adimensional

$$\bar{p} = \frac{c^2}{6.U.\eta.R} p \qquad (4.72)$$

tem-se:

$$d\bar{p} = \frac{c^2}{6.U.\eta.R} dp \qquad (4.73)$$

Substituindo-se a Equação (4.71) em (4.73), resulta:

$$d\bar{p} = \frac{d\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^2} - \frac{(1+\varepsilon.\cos\theta_{pmax})}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^3} d\theta \qquad (4.74)$$

Integrando-se a Equação (4.74), resulta:

$$\bar{p} = \int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^2} - (1+\varepsilon.\cos\theta_{pmax}) \int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^3} + C_2 \qquad (4.75)$$

As integrais da Equação (4.75) estão resolvidos no Apêndice A, as Equações (A.10) e (A.12), isto é:

$$\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^2} = \frac{\gamma - \varepsilon.\operatorname{sen}\gamma}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \qquad (4.76)$$

$$\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^3} = \frac{\gamma - 2.\varepsilon.\operatorname{sen}\gamma + \varepsilon^2.\frac{\gamma}{2} + \frac{\varepsilon^2.\operatorname{sen}2\gamma}{4}}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \qquad (4.77)$$

Além disso, de acôrdo com a Equação (A.2), tem-se:

$$1 + \varepsilon.\cos\theta = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon.\cos\gamma} \qquad (4.78)$$

Para a posição onde a pressão passa pelo valor máximo a Equação (4.78) resulta:

$$1 + \varepsilon.\cos\theta_{p_{max}} = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon.\cos\gamma_{p_{max}}} \qquad (4.79)$$

Substituindo-se as Equações (4.76), (4.77) e (4.79) na Equação (4.75) obtém-se:

$$\bar{p} = \frac{\gamma-\varepsilon.\operatorname{sen}\gamma}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} - \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon.\cos\gamma_{p_{max}}}\left[\frac{\gamma-2.\varepsilon.\operatorname{sen}\gamma+\varepsilon^2(\frac{\gamma}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\gamma}{4})}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}}\right] + \mathbb{C}_2 \qquad (4.80)$$

Sabe-se que $\bar{p} = 0$ para $\theta = 0$ (isto é $\gamma = 0$), portanto, a constante de integração $\mathbb{C}_2$ é igual a zero, de modo que a Equação (4.80) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\bar{p} = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\left[\gamma-\varepsilon.\operatorname{sen}\gamma - \frac{\gamma-2.\varepsilon.\operatorname{sen}\gamma+\varepsilon^2(\frac{\gamma}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\gamma}{4})}{1-\varepsilon.\cos\gamma_{p_{max}}}\right] \qquad (4.81)$$

Substituindo-se a condição de contorno $\bar{p}=0$ para $\gamma = \theta = 2\pi$ (ver Apêndice A) na Equação (4.81), obtém-se:

$$1 - \varepsilon.\cos\gamma_{p_{max}} = \frac{2+\varepsilon^2}{2} \qquad (4.82)$$

Substituindo-se a Equação (4.82) em (4.81) obtém-se:

$$\bar{p} = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\left[\gamma - \varepsilon.\operatorname{sen}\gamma - \frac{(2\gamma - 4.\varepsilon.\operatorname{sen}\gamma + \varepsilon^2\gamma + \varepsilon^2.\frac{\operatorname{sen}2\gamma}{2})}{2+\varepsilon^2}\right] \qquad (4.83)$$

Finalmente, substituindo-se a propriedade trigonométrica $sen2\gamma = 2.cos\gamma.sen\gamma$ na Equação (4.83), simplificando-se e agrupando-se convenientemente pode-se obter:

$$\bar{p} = \frac{\varepsilon.sen\gamma}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left[\frac{2 - \varepsilon(\varepsilon + cos\gamma)}{2 + \varepsilon^2} \right] \qquad (4.84)$$

O objetivo da presente análise é obter uma relação entre a pressão hidrodinâmica e a variável angular θ, portanto, deve-se substituir $sen\gamma$ e $cos\gamma$ em função de $\underline{\theta}$, na Equação (4.84). Para isso, pode-se obter $sen\gamma$ da Equação (A.4), isto é:

$$sen\gamma = (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \frac{sen\theta}{1 + \varepsilon.cos\theta} \qquad (4.85)$$

Similarmente, a partir da Equação (A.1) obtém-se:

$$(\varepsilon + cos\gamma) = \frac{\varepsilon(2 + \varepsilon.cos\theta) + cos\theta}{1 + \varepsilon.cos\theta} \qquad (4.86)$$

Substituindo-se as Equações (4.85) e (4.86) em (4.84), simplificando-se e agrupando-se convenientemente, resulta:

$$\bar{p} = \frac{\varepsilon.sen\theta.(2 + \varepsilon.cos\theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon.cos\theta)^2} \qquad (4.87)$$

que é a equação genérica que fornece o valor da pressão adimensional para qualquer posição angular $\underline{\theta}$ em um mancal infinitamente longo.

4.4.2.2 - Posição Angular da Pressão Máxima

Para se determinar o angulo θ_{pmax} de um mancal infinitamente longo, pode-se proceder exatamente como no Item 4.3.2.2 (para um mancal curto), isto é, derivar a Equação (4.87) e igualar a zero.

No entanto, para o presente caso, o ângulo θ_{pmax}

(ou $\gamma_{p_{max}}$) já foi introduzido como condição de contorno no Item 4.4.2.1 e pode ser determinado diretamente das Equações (4.82) e (4.79). Substituindo-se a Equação (4.82) em (4.79) obtém-se:

$$1 + \varepsilon.\cos\theta_{p_{max}} = \frac{2.(1 - \varepsilon^2)}{(2 + \varepsilon^2)} \qquad (4.88)$$

ou, finalmente:

$$\cos\theta_{p_{max}} = \frac{-3.\varepsilon}{2 + \varepsilon^2} \qquad (4.89)$$

4.4.2.3 - Pressão Hidrodinâmica Máxima

Para se obter o valor da pressão hidrodinâmica máxima no filme de lubrificante (Figura 1.2), basta substituir-se a variável angular $\underline{\theta}$ por $\theta_{p_{max}}$. Portanto, substituindo-se a Equação (4.89) em (4.87), obtém-se:

$$\bar{p}_{max} = \frac{\varepsilon.\mathrm{sen}\theta_{p_{max}}(2 + \varepsilon.\cos\theta_{p_{max}})}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon.\cos\theta_{p_{max}})^2} \qquad (4.90)$$

ou

$$\bar{p}_{max} = \frac{\varepsilon.\left[1 - \left[\frac{3.\varepsilon}{2 + \varepsilon^2}\right]^2\right]^{1/2}.(4 - \varepsilon^2)}{4.(1 - \varepsilon^2)^2} \qquad (4.91)$$

Evidentemente, para se obter as pressões dimensionais (por exemplo, em N/m^2) basta aplicar a Equação (4.72), isto é, basta multiplicar as Equações (4.87) e (4.91) por $6.U.\eta.R/c^2$.

4.4.3 - Capacidade de Carga e Número de Sommerfeld

De uma maneira semelhante ao procedimento dos Itens 4.3.3 e 4.3.4, considerando-se a Figura 4.3, é possível determinar o valor da força externa $\underline{F}$, em magnitude e direção que equilibrarará a pressão hidrodinâmica gerada no filme de

óleo.

Na Figura 4.3, representando-se por $\underline{p}$ a pressão que atua num elemento infinitesimal de comprimento angular $R.d\theta$ na superfície da bucha, a um angulo $\underline{\theta}$ com a linha de centros (eixo F_r), pode-se escrever que a força resultante por unidade de comprimento axial nesse elemento de "área" será:

$$dF = p.R.d\theta \tag{4.92}$$

Essa força elementar resultante pode ser decomposta em uma componente dF_r na direção da linha de centros $\overline{OC}$, Figura 4.3, e numa componente dF_t, na direção normal à linha de centros, isto é:

$$dF_r = p.R.d\theta.\cos\theta \tag{4.93}$$

e

$$dF_t = p.R.d\theta.\operatorname{sen}\theta \tag{4.94}$$

Integrando-se essas componentes elementares de forças sobre todo o campo de pressões, Figura 4.3, tem-se:

$$F_r = L \int_o^{\pi} p.R.\cos\theta.d\theta \tag{4.95}$$

e

$$F_t = L \int_o^{\pi} p.R.\operatorname{sen}\theta.d\theta \tag{4.96}$$

A diferença entre as Equações (4.14) e (4.95), bem como a diferença entre as Equações (4.15) e (4.96), deve-se ao fato de, por hipótese, não haver variação de pressão na direção axial em um mancal infinitamente longo.

Em termos adimensionais, a partir da Equação (4.72), as Equações (4.95) e (4.96) resultam:

$$\bar{F}_r = \frac{F_r}{6.U.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2.L} = \int_o^{\pi} \bar{p}.\cos\theta.d\theta \tag{4.97}$$

e

$$\bar{F}_t = \frac{F_t}{6.U.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2.L} = \int_o^{\pi} \bar{p}.\operatorname{sen}\theta.d\theta \tag{4.98}$$

Integrando-se por partes as Equação (4.97) e

(4.98), obtém-se:

$$\bar{F}_r = \left| \bar{p}.\text{sen}\theta \right|_o^{\pi} - \int_o^{\pi} \frac{d\bar{p}}{d\theta}.\text{sen}\theta.d\theta \qquad (4.99)$$

e

$$\bar{F}_t = \left| \bar{p}.\text{sos}\theta \right|_o^{\pi} - \int_o^{\pi} \frac{d\bar{p}}{d\theta}.\cos\theta.d\theta \qquad (4.100)$$

Lembrando que $p = 0$ para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, obtém-se:

$$\bar{F}_r = - \int_o^{\pi} \frac{d\bar{p}}{d\theta}.\text{sen}\theta.d\theta \qquad (4.101)$$

e

$$\bar{F}_t = \int_o^{\pi} \frac{d\bar{p}}{d\theta}.\cos\theta.d\theta \qquad (4.102)$$

Substituindo-se a Equação (4.89) em (4.74) obtém-se:

$$\frac{d\bar{p}}{d\theta} = \frac{1}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^2} - \frac{2.(1-\varepsilon^2)}{2+\varepsilon^2}.\frac{1}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^3} \qquad (4.103)$$

Finalmente, conforme mostrado no Apêndice C, substituindo-se a Equação (4.103) em (4.101) e (4.102), efetuando-se as integrações têrmo a têrmo e agrupando-as convenientemente, obtêm-se as componentes adimensionais de força, isto é:

$$\bar{F}_r = \frac{-2.\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)(2 + \varepsilon^2)} \qquad (4.104)$$

e

$$\bar{F}_t = \frac{-\pi.\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2} (2 + \varepsilon^2)} \qquad (4.105)$$

A magnitude da força externa $\bar{F}$ (capacidade de carga do mancal) que equilibrará a pressão hidrodinâmica gerada no filme de óleo será:

$$\bar{F} = \sqrt{\bar{F}_r^{\,2} + \bar{F}_t^{\,2}} \qquad (4.106)$$

ou

$$\bar{F} = \sqrt{\left[\frac{-2.\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)}\right]^2 + \left[\frac{\pi.\varepsilon.(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)}\right]^2} \qquad (4.107)$$

ou

$$\Delta = \bar{F} = \frac{\varepsilon.[\pi^2 - \varepsilon^2.(\pi^2-4)]^{1/2}}{(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)} \qquad (4.108)$$

Para se obter a capacidade de carga F, dimensional, basta multiplicar a Equação (4.108) pelo termo adimensionalizante dado na Equação (4.97) ou (4.98), obtendo-se:

$$F = 6.U.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2.L\left\{\frac{\varepsilon.[\pi^2 - \varepsilon^2.(\pi^2-4)]^{1/2}}{(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)}\right\} \qquad (4.109)$$

O número de Sommerfeld, S, pode ser, obtido pela substituição de $P = \frac{F}{L.D}$ e $U = \pi.D.N$ na Equação (4.109), resultando:

$$S = \frac{\eta.N}{P}\left(\frac{R}{c}\right)^2 = \frac{1}{6.\pi}\left\{\frac{(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)}{\varepsilon.[\pi^2 - \varepsilon^2.(\pi^2-4)]^{1/2}}\right\} \qquad (4.110)$$

4.4.4 - Ângulo de Ação da Carga

O ângulo ϕ que define a direção da força F relativamente à posição de espessura mínima do filme de óleo é dado por:

$$tg\ \phi = \frac{F_t}{F_r} = \frac{\pi}{2}\frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon} \qquad (4.111)$$

4.4.5 - Vazão de Lubrificante

Dentro da hipótese em consideração de que o mancal é "infinitamente longo", não há vazão axial, de modo que

a vazão circunferencial de lubrificante pode ser obtida simplesmente pela substituição das Equações (4.68) e (4.88) na Equação (3.10) e integrando-se, isto é:

$$Q = \int_0^L \left\{ \frac{h.U}{2} - \frac{h^3}{12.\eta} \frac{6.U.\eta}{h^2} \left[h - \frac{2.c\ (1 - \varepsilon^2)}{(2 + \varepsilon^2)} \right] \right\} dz \qquad (4.112)$$

Simplificando-se e agrupando-se convenientemente resulta:

$$Q = U.c.L \frac{(1 - \varepsilon^2)}{(2 + \varepsilon^2)} \qquad (4.113)$$

Sabendo-se que $U=2.\pi.R.N$ obtém-se:

$$Q = 2.\pi.R.c.N.L \frac{(1 - \varepsilon^2)}{(2 + \varepsilon^2)} \qquad (4.114)$$

que é a vazão circulante em qualquer posição angular de um mancal infinitamente longo.

Em termos adimensionais, obtém-se:

$$\frac{Q}{R.c.N.L} = 2.\pi \frac{(1 - \varepsilon^2)}{(2 + \varepsilon^2)} \qquad (4.115)$$

4.4.6 - Atrito e Perda de Potência

4.4.6.1 - Força de Atrito

A força de atrito fluido que se opõe à rotação do munhão de um "mancal longo" é a mesma obtida para um "mancal curto", dada pela Equação (4.52). No entanto, deve-se observar que os valores de $\underline{F}$ e de $\text{sen}\phi$ devem ser obtidos a partir das Equações (4.109) e (4.111) para um "mancal longo" e a partir das Equações (4.23) e (4.27) para um "mancal curto".

4.4.6.2 - Coeficiente de Atrito

Substituindo-se o valor de $\underline{F}$ dado pela Equação (4.109) na Equação (4.53), obtém-se o "Parâmetro do Coeficiente de Atrito", isto é:

$$f\left[\frac{R}{c}\right] = \frac{\varepsilon.\mathrm{sen}\phi}{2} + \frac{\pi\,(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{3.\varepsilon\,[\pi^2(1-\varepsilon^2)+4.\varepsilon^2\,]^{1/2}} \qquad (4.116)$$

onde, $\mathrm{sen}\phi$ deve ser obtido a partir da Equação (4.111), para qualquer valor de ε.

4.4.6.3 - Momento de Atrito e Perda de Potência

Novamente, tanto o momento de atrito como a perda de potência no "mancal longo" podem ser calculados pelas Equações (4.56) e (4.57), desde que os valores de $\underline{F}$ e de $\mathrm{sen}\phi$ sejam obtidos a partir das Equações (4.109) e (4.111), respectivamente.

4.4.7 - Elevação da Temperatura do Lubrificante

Lembrando-se que para um "mancal longo" a hipótese básica é de que não há vazão lateral, o "Parâmetro da Elevação da Temperatura" pode ser obtida da Equação (4.63), considerando-se que $Q_1 = 0$, resultando portanto:

$$\frac{\rho.c_p.J.\Delta t}{p} = 4.\pi\,\frac{f\left[\frac{R}{c}\right]}{\frac{Q}{R.c.N.L}} \qquad (4.117)$$

Os valores de f(R/c) e de Q/RcNL devem ser obtidos das Equações (4.116) e (4.115), respectivamente.

4.5 - PARÂMETROS RESULTANTES - SOLUÇÃO ANALÍTICA

As Tabelas 4.1 e 4.2 foram montadas a partir das equações desenvolvidas para mancais curto e longo. Para mancal curto foi considerada a relação de L/D=1/8 e para mancal longo a relação L/D=4. Foi considerada em ambos os casos uma excentricidade específica, ε, variando de 0,1 até 0,97.

A carga adimensional Δ é obtida da Equação (4.24) para mancal curto e da Equação (4.108) para mancal longo.

O ângulo de ação da carga ϕ é obtido através da Equação (4.27) para mancal curto e da Equação (4.111) para mancal longo.

O número de Sommerfeld (S) é obtido da Equação (4.26) para mancal curto e Equação (4.110) para mancal longo.

O coeficiente de atrito f(R/c) é obtido das Equações (4.55) e (4.116) para mancal curto e longo, respectivamente.

A vazão lateral Ql/RcNL é obtida da Equação (4.41) para mancal curto, e não existe para mancal longo, conforme mostrado neste Capítulo.

A vazão de entrada Qe/RcNL é obtida da Equação (4.35) para mancal curto.

A vazão que circula Qc/RcNL é obtida da Equação (4.38) para mancal curto e Equação (4.115) para mancal longo.

A vazão total Q/RcNL é a soma da vazão lateral e da vazão que circula.

A relação de vazões Ql/Q é obtida dividindo-se a Equação (4.41) por (4.35) para mancal curto.

A elevação da temperatura do lubrificante $\rho.cp.J.\Delta t/P$ é obtida da Equação (4.64) para mancal curto e da Equação (4.117) para mancal longo.

A pressão máxima P_{max} é obtida da Equação (4.13) para mancal curto e da Equação (4.91) para mancal longo.

A posição do pico de pressão (P_{max}) no plano central θ_{max} é obtida da Equação (4.12) para mancal curto e da

Equação (4.89) para mancal longo.

A relação de pressões P_{max}/P é obtida da Equação (4.13) e (4.91) para mancal curto e longo, respectivamente. Em ambos os casos, P é a pressão específica do mancal.

TABELA 4.1 - Parâmetros resultantes da solução analítica - mancal curto

ε	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	0.950	0.970
h_o/c	0.900	0.800	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.030
Δ	0.005	0.011	0.018	0.029	0.047	0.080	0.151	0.358	1.500	6.128	17.159
ϕ	82.708	75.431	68.178	60.940	53.680	46.321	38.704	30.500	20.826	14.475	11.136
S	63.359	29.516	17.419	10.909	6.787	4.002	2.110	0.889	0.212	0.052	0.019
f(R/c)	1257.000	594.742	360.584	235.135	154.900	98.960	58.532	29.437	9.767	3.402	1.600
Q_ℓ/R_cNL	0.628	1.257	1.885	2.513	3.142	3.770	4.398	5.027	5.655	5.969	6.095
Qe/R_cNL	3.456	3.770	4.084	4.398	4.712	5.027	5.341	5.655	5.969	6.126	6.189
Q_c/R_cNL	2.827	2.513	2.199	1.885	1.571	1.257	0.942	0.628	0.314	0.157	0.094
Q/R_cNL	3.456	3.770	4.084	4.398	4.712	5.027	5.341	5.655	5.969	6.126	6.189
Q_ℓ/Q	0.182	0.333	0.462	0.571	0.667	0.750	0.824	0.889	0.947	0.974	0.985
$\frac{\rho c_p J \Delta t}{p}$	5028.001	2378.966	1442.336	940.541	619.602	395.841	234.129	117.749	39.069	13.609	6.399
$\theta_{máx}$	106.492	120.000	130.393	138.590	145.374	151.284	156.724	162.079	167.979	171.706	173.636
$P_{máx}$	0.005	0.011	0.020	0.036	0.065	0.127	0.285	0.847	5.118	29.835	108.228
$\theta P_{máx}$	9.200	15.431	18.572	19.530	19.054	17.605	15.428	12.580	8.805	6.180	4.771
$P/P_{máx}$	0.513	0.484	0.446	0.403	0.359	0.313	0.265	0.211	0.147	0.103	0.079
$P_{máx}/P$	1.951	2.065	2.242	2.478	2.786	3.195	3.778	4.730	6.823	9.737	12.614

TABELA 4.2 - Parâmetros resultantes da solução analítica - mancal longo

ε	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	0.950	0.970
h_o/c	0.900	0.800	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.030
Δ	0.157	0.317	0.482	0.659	0.859	1.106	1.458	2.081	3.813	7.178	11.636
ϕ	86.339	82.596	78.679	74.472	69.819	64.477	58.035	49.675	37.263	27.307	21.488
S	0.337	0.167	0.110	0.081	0.062	0.048	0.036	0.025	0.014	0.007	0.005
f(R/c)	6.736	3.471	2.424	1.927	1.643	1.454	1.303	1.144	0.903	0.685	0.548
$Q_\ell/RcNL$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Qe/R_cNL	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Q_c/R_cNL	3.095	2.957	2.736	2.443	2.094	1.704	1.287	0.857	0.425	0.211	0.126
Q/R_cNL	3.095	2.957	2.736	2.443	2.094	1.704	1.287	0.857	0.425	0.211	0.126
Q_ℓ/Q	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\frac{\rho cpJ\Delta t}{p}$	27.353	14.751	11.135	9.910	9.855	10.722	12.722	16.772	26.698	40.791	54.525
$\theta máx$	98.584	107.105	115.507	123.749	131.810	139.704	147.498	155.380	163.915	169.086	171.687
$Pmáx$	0.101	0.205	0.320	0.453	0.621	0.862	1.269	2.160	5.508	14.652	30.707
$\theta Pmáx$	4.923	9.701	14.186	18.221	21.629	24.181	25.533	25.055	21.178	16.393	13.175
$P/Pmáx$	0.782	0.772	0.754	0.728	0.691	0.642	0.574	0.482	0.346	0.245	0.189
$Pmáx/P$	1.279	1.296	1.326	1.374	1.446	1.558	1.741	2.076	2.890	4.082	5.278

CAPÍTULO 5

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA MANCAIS FINITOS

5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, inicialmente será apresentada a adimensionalização da equação de Reynolds. Para o cálculo da pressão será aplicado o método numérico de diferenças finitas por iteração. Aplicou-se o método da sobre-relaxação sucessiva com critério de parada entre iterações, obtendo-se o valor da pressão na malha. Para o cálculo de parâmetros resultantes aplicou-se o método de integração numérica de Simpson, utilizando-se os valores da pressão. Os valores de P_{max} e $\theta_{P_{max}}$ foram obtidos diretamente da malha de distribuição de pressão no plano central, mediante uma interpolação do tipo "spline" cúbica.

5.2 - APROXIMAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA MANCAL CURTO

Conforme deduzido no Capítulo 3, a Equação (3.15) de Reynolds para um mancal finito é:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right] = 6.U\frac{\partial h}{\partial x} \qquad (5.1)$$

Para representar a equação (5.1) em forma adimensional, os seguintes parâmetros adimensionais serão utilizados:

$$\bar{p} = \frac{p}{\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2} \tag{5.2}$$

$$\bar{x} = \frac{x}{\pi.D} \tag{5.3}$$

$$\bar{z} = \frac{z}{L} \tag{5.4}$$

$$H = \frac{h}{c} \tag{5.5}$$

A Figura 5.1, mostra esquematicamente um mancal, de largura $\underline{L}$ e diâmetro $\underline{D}$, desenvolvido segundo o seu comprimento circunferencial $\pi.D$.

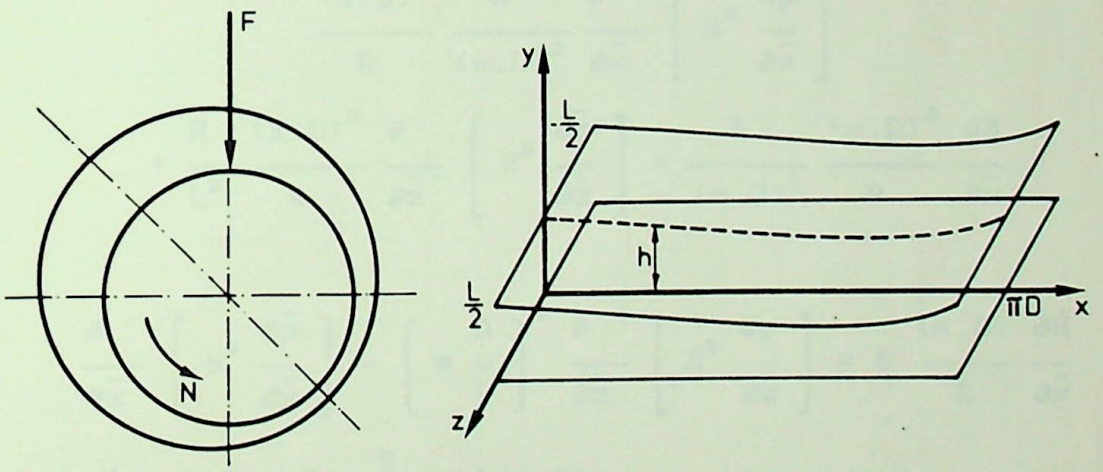


Fig. 5.1 - Desenvolvimento de um mancal radial.

Substituindo as Definições (5.2), (5.3), (5.4) e (5.5) na Equação (5.1) e lembrando que $U = \omega.R$, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial(\bar{x}.\pi.D)}\left[\frac{(Hc)^3}{\eta}\frac{\partial(\bar{p}.\omega.\eta.(R/c)^2)}{\partial(\bar{x}.\pi.D)}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial(\bar{z}.L)} \left[\frac{(Hc)^3}{\eta} \frac{\partial(\bar{p}.\omega.\eta.(R/c)^2)}{\partial(\bar{z}.L)} \right] = 6.\omega.R \frac{\partial(Hc)}{\partial(\bar{x}.\pi.D)}$$

ou

$$\frac{c.\omega.R^2}{\pi.D.\pi.D} \frac{\partial}{\partial\bar{x}} \left[H^3 \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} \right] + \frac{c.\omega.R^2}{L.L} \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left[H^3 \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}} \right] = \frac{c.\omega.R.6}{\pi.D} \frac{\partial H}{\partial\bar{x}}$$

ou

$$c.\omega.R^2 \left\{ \frac{1}{(\pi.D)^2} \frac{\partial}{\partial\bar{x}} \left[H^3 \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} \right] + \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left[H^3 \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}} \right] \right\} =$$

$$= c.\omega.R \frac{6}{\pi.D} \frac{\partial H}{\partial\bar{x}}$$

Multiplicando ambos os membros por $\frac{(\pi.D)^2}{R}$, tem-se:

$$\frac{(\pi.D)^2}{R} \frac{R}{(\pi.D)^2} \frac{\partial}{\partial\bar{x}} \left[H^3 \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} \right]$$

$$+ \frac{R}{L^2} \frac{(\pi.D)^2}{R} \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left[H^3 \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}} \right] = \frac{6}{(\pi.D)^1} \frac{(\pi.D)^2}{R} \frac{\partial H}{\partial\bar{x}}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}} \left[H^3 \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} \right] + \left(\pi \frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left[H^3 \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}} \right] = 6 \frac{(\pi.D)}{R} \frac{\partial H}{\partial\bar{x}}$$

Lembrando-se que $R = \frac{D}{2}$, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}} \left[H^3 \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} \right] + \left(\pi \frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left[H^3 \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}} \right] = 12.\pi \frac{\partial H}{\partial\bar{x}} \qquad (5.6)$$

Diferenciando a Equação (5.6) e lembrando-se que para um mancal perfeitamente alinhado, $\underline{H}$ é somente uma função de $\bar{x}$, isto é $H=f(\bar{x})$, tem-se:

$$3H^2 \frac{dH}{d\bar{x}} \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + H^3 \frac{\partial^2\bar{p}}{\partial\bar{x}^2} + \left(\pi \frac{D}{L} \right)^2 H^3 \frac{\partial^2\bar{p}}{\partial\bar{z}^2} = 12.\pi \frac{dH}{d\bar{x}} \qquad (5.7)$$

Considerando-se o mancal desenvolvido conforme mostrado na Figura 5.2, tanto o comprimento circunferencial $\pi.D$, como o comprimento axial $\underline{L}$ são representados por valores que variam no intervalo de $\underline{0}$ a $\underline{1}$, mediante utilização das Equações (5.3) e (5.4).

O comprimento circunferencial na direção $\bar{x}$ é dividido em "m" malhas iguais, de tal forma que o comprimento de uma malha é:

$$h = \frac{1}{m} \tag{5.8}$$

Similarmente, a largura adimensional na direção $\bar{z}$ é dividida em "n" malhas de comprimento igual a:

$$k = \frac{1}{n} \tag{5.9}$$

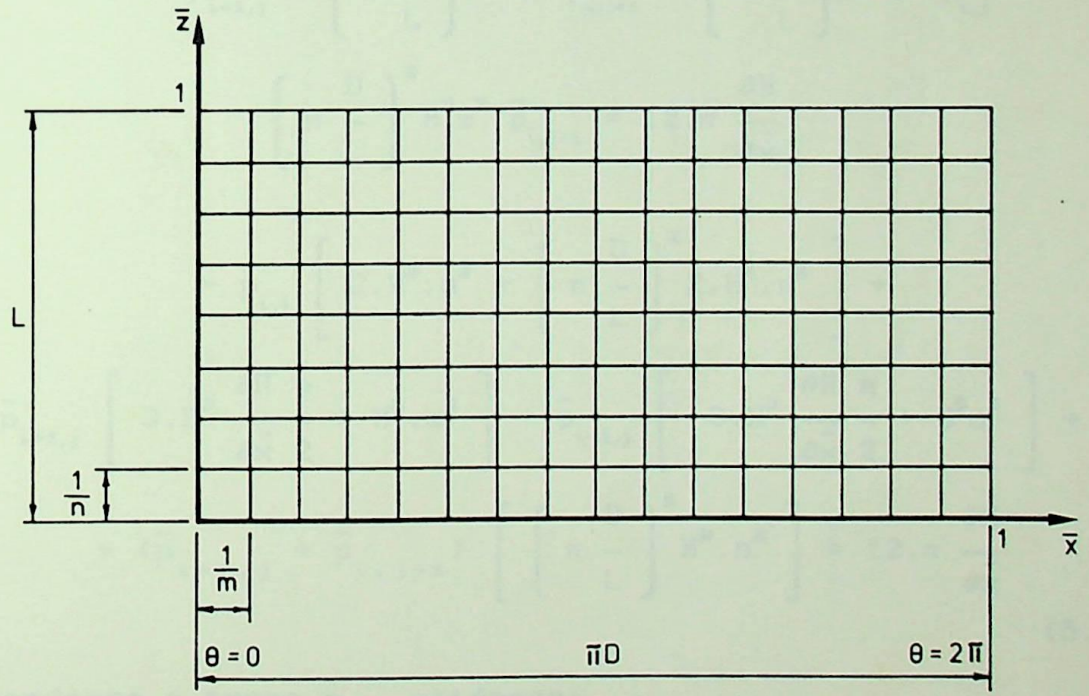


Fig. 5.2 - Desenvolvimento da malha num mancal radial.

Assim sendo, as derivadas, de segunda e de primeira ordem, de $\bar{p}$ em relação a $\underline{x}$ e de $\bar{p}$ em relação a $\underline{z}$ podem ser expressas em forma de diferenças finitas a partir das Equações (5.8), (5.9), (D.13), (D.14) e (D.15), isto é:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} = (\bar{p}_{i+1,j} - 2.\bar{p}_{i,j} + \bar{p}_{i-1,j})m^2 \qquad (5.10)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{z}^2} = (\bar{p}_{i,j+1} - 2.\bar{p}_{i,j} + \bar{p}_{i,j-1})n^2 \qquad (5.11)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = (\bar{p}_{i+1,j} - \bar{p}_{i-1,j})\frac{m}{2} \qquad (5.12)$$

Substituindo-se as Equações (5.10), (5.11) e (5.12) em (5.7), resulta:

$$3.H^3\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}\frac{m}{2}\bar{p}_{i+1,j} - 3.H^3\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}\frac{m}{2}\bar{p}_{i-1,j} + H^3m^2\,\bar{p}_{i+1,j} - 2.H^3m^2\,\bar{p}_{i,j}$$

$$+ H^3m^2\,\bar{p}_{i-1,j} + \left(\pi\frac{D}{L}\right)^2 H^3m^2\,\bar{p}_{i,j+1} - \left(\pi\frac{D}{L}\right)^2 H^3m^2\,\bar{p}_{i,j} +$$

$$\left(\pi\frac{D}{L}\right)^2 H^3m^2\,\bar{p}_{i,j+1} = 12.\pi\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}$$

ou

$$-\bar{p}_{i,j}\left[2.H^3.m^2 + \left(\pi\frac{D}{L}\right)^2 2.H^3.n^2\right] +$$

$$\bar{p}_{i+1,j}\left[3.H^3\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}\frac{m}{2} + H^3.m^2\right] + \bar{p}_{i-1,j}\left[-3.H^3\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}\frac{m}{2} + H^3m^2\right] +$$

$$+ (\bar{p}_{i-1,j} + \bar{p}_{i,j-1})\left[\left(\pi\frac{D}{L}\right)^2 H^3.n^2\right] = 12.\pi\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \qquad (5.13)$$

Isolando-se o termo $\bar{p}_{i,j}$, obtém-se:

$$\bar{p}_{i,j}\left[2.H^3.m^2 + \left(\pi\frac{D}{L}\right)^2 2.H^3.n^2\right] =$$

$$\bar{p}_{i+1,j}\left[3.H^2\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}\frac{m}{2} + H^3.m^2\right] + \bar{p}_{i-1,j}\left[-3.H^2\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}\frac{m}{2} + H^3.m^2\right] +$$

$$+ (\bar{p}_{i,j+1} + \bar{p}_{i,j-1}) \left[\left(\pi \frac{D}{L} \right)^2 H^3 . n^2 \right] - 12.\pi \frac{\partial H}{\partial \bar{x}}$$

ou

$$\bar{p}_{i,j} = \bar{p}_{i+1,j} \left[\frac{3.H^3 \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{m}{2} + H^3 . m^2}{2.H^3 . m^2 + \left(\pi \frac{D}{L} \right)^2 2.h^3 . n^2} \right] +$$

$$+ \bar{p}_{i-1,j} \left[\frac{-3.H^3 \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{m}{2} + H^3 . m^2}{2.H^3 . m^2 + \left(\pi \frac{D}{L} \right)^2 2.h^3 . n^2} \right] +$$

$$+ (\bar{p}_{i,j+1} + \bar{p}_{i,j-1}) \left[\frac{\left(\pi \frac{D}{L} \right)^2 H^3 n^2}{2.H^3 . m^2 + \left(\pi \frac{D}{L} \right)^2 2.h^3 . n^2} \right] -$$

$$- \left[\frac{12.\pi \frac{\partial H}{\partial \bar{x}}}{2.H^3 . m^2 + \left(\pi \frac{D}{L} \right)^2 2.h^3 . n^2} \right]$$

ou

$$\bar{p}_{i,j} = \bar{p}_{i+1,j} \left[\frac{\left(m^2 + 3 \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{m}{2.H} \right)}{2.(m^2 + \left(\pi \frac{D}{L} n \right)^2)} \right] +$$

$$+ \bar{p}_{i+1,j} \left[\frac{\left(m^2 - 3 \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{m}{2.H} \right)}{2.(m^2 + \left(\pi \frac{D}{L} n \right)^2)} \right] +$$

$$+ (\bar{p}_{i,j+1} + \bar{p}_{i,j-1}) \left[\frac{\left(\pi \frac{D}{L} n \right)}{2.(m^2 + \left(\pi \frac{D}{L} n \right)^2)} \right] -$$

$$- \left[\frac{\left(\frac{12.\pi}{H^3} \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \right)}{2.\left(m^2 + \left(\pi \frac{D}{L} n \right)^2\right)} \right] \tag{5.14}$$

Para facilitar a programação computacional, a Equação (5.14), pode ser representada da seguinte maneira:

$$\bar{p}_{i,j} = \mathbb{C}_{1_i} \bar{p}_{i+1,j} + \mathbb{C}_{2_i} \bar{p}_{i-1,j} + \mathbb{C}_3.(\bar{p}_{i,j+1} + \bar{p}_{i,j-1}) + \mathbb{C}_{4_i} \tag{5.15}$$

onde:

$$\mathbb{A}k = \frac{1}{2.\left[m^2 + (\pi.n.D/L)^2\right]} \tag{5.16}$$

$$\mathbb{C}_{1_i} = \mathbb{A}k.\left[m^2 + 3 \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{m}{2.H}\right] \tag{5.17}$$

$$\mathbb{C}_{2_i} = \mathbb{A}k.\left[m^2 - 3 \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{m}{2.H}\right] \tag{5.18}$$

$$\mathbb{C}_3 = \mathbb{A}k.\left[n.\pi.\frac{D}{L}\right]^2 \tag{5.19}$$

$$\mathbb{C}_{4_i} = - \mathbb{A}k.\left[12 \frac{\pi}{H^3} \frac{\partial H}{\partial \bar{x}}\right] \tag{5.20}$$

É ainda necessário definir o termo $\partial H/\partial \bar{x}$ da Equação (5.7). Isto pode ser feito pela consideração da teoria básica de mancais radiais hidrodinâmicos conforme sequência abaixo.

A espessura $\underline{h}$ do filme de óleo, Equação (4.4), repetida aqui por conveniência, é:

$$h = c(1 + \varepsilon.\cos\theta) \tag{5.21}$$

Evidentemente, tem-se:

$$x = R.\theta \tag{5.22}$$

Substituindo a Equação (5.3) em (5.22), resulta:

$$\theta = 2.\pi.\bar{x} \tag{5.23}$$

Substituindo a Equação (5.23) em (5.21), tem-se:

$$H = \frac{h}{c} = 1 + \varepsilon.\cos(2\pi\bar{x}) \tag{5.24}$$

Diferenciando-se em relação a $\bar{x}$, obtém-se:

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} = \frac{dH}{d\bar{x}} = -2.\pi.\varepsilon.\mathrm{sen}(2\pi\bar{x}) \tag{5.25}$$

Conforme a Figura 5.2, pode-se verificar que:

$$\bar{x} = \frac{i - 1}{m} \tag{5.26}$$

e

$$\bar{z} = \frac{j - 1}{n} \tag{5.27}$$

Neste ítem vimos a equação de Reynolds na forma de diferenças finitas. Nos ítens seguintes serão apresentadas as condições de contôrno do problema e o método de solução da equação de Reynolds.

5.3 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS POR ITERAÇÃO

5.3.1 - Método da Sobre-relaxação Sucessiva

Este método pode resultar em aceleração de convergência, podendo também resultar em considerável desaceleracão. De acordo com este método a pressão em um nó é calculada como:

$$\bar{p}_{i,j}^{k+1} = \bar{p}_{i,j}^{k} + w_{ot}.(\bar{p}_{i,j}^{k+1} - \bar{p}_{i,j}^{k}) \tag{5.28}$$

onde w_{ot} = fator de sobre-relaxação e $\bar{p}^{k}_{i,j}$ e $\bar{p}^{k+1}_{i,j}$ são as pressões em um nó para duas iterações sucessivas.

A equação de Reynolds expressa na forma de sobre-relaxação sucessiva é:

$$\bar{p}_{i,j} = \bar{p}_{i,j} + w_{ot}\,[C_{1_i}\,\bar{p}_{i+1,j} + C_{2_i}\,\bar{p}_{i-1,j} + C_3(\bar{p}_{i,j+1} + \bar{p}_{i,j-1}) + C_{4_i} - \bar{p}_{i,j}] \tag{5.29}$$

Quando ocorre $w_{ot} = 1$, isto recai na equação de Gauss-Seidel. Normalmente, o valor de w_{ot} está compreendido entre 1 e 2.

O valor de w_{ot} para acelerar a convergência, foi deduzido por Lloyd e McCallion [16], dependendo da relação L/D e dos tamanhos das malhas nas direções circunferencial e radial:

$$w_{ot} = 2.\left[\,1 - \frac{(1-\lambda^2)^{1/2}}{\lambda^2}\,\right] \tag{5.30}$$

onde:

$$\lambda = 1 - \frac{\pi^2.\left[4 + \left(\pi.\frac{D}{L}\right)^2\right]}{2.\left[m^2 + \left(\pi.\frac{D.n}{L}\right)^2\right]} \tag{5.31}$$

Deve-se observar que a Equação (5.30) é somente uma análise numérica, mas que dá bons resultados.

5.4 - CONDIÇÕES DE CONTORNO DO FILME DE ÓLEO

A condição de contorno usada nesta dissertação é a de Sommerfeld/Gumbel.

5.4.1 - Condição de Sommerfeld/Gumbel

A condição de contorno de Sommerfeld resulta em uma curva de pressão anti-simétrica em relação a π, conforme mostrado na Figura 5.3.

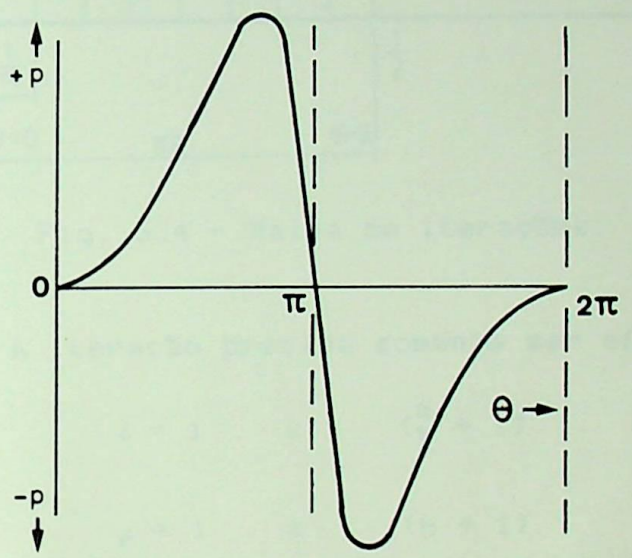


Fig. 5.3 - Distribuição de pressão - condição de Sommerfeld.

A condição de contorno requerida é:

$$\bar{p} = 0 \qquad \text{para} \qquad \theta = 0,\ \pi,\ 2\pi \tag{5.32}$$

Esta condição resulta em pressões negativas da mesma ordem das pressões positivas.

Gumbel sugeriu que, desprezando-se as pressões negativas, obter-se-iam parâmetros mais realísticos do mancal.

Esta suposição pode então ser usada para diminuir o campo de iteração, conforme mostrado na Figura 5.4.

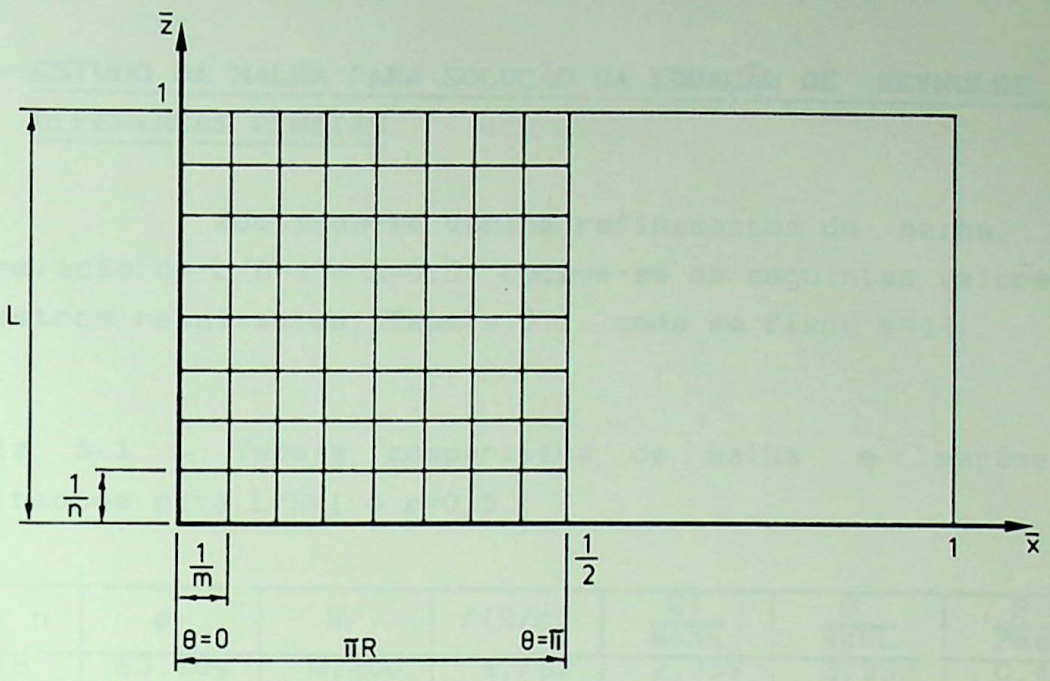


Fig. 5.4 - Malha de iterações.

A iteração precisa somente ser efetuada para

$$i = 1 \quad a \quad (\frac{m}{2} + 1)$$

e

$$j = 1 \quad a \quad (n + 1)$$

com $\bar{p}_{i,j} = 0$ para $i = 1$ e para $i = (\frac{m}{2} + 1)$, para qualquer valor de j.

5.5 - CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Em qualquer método numérico torna-se necessário estabelecer um critério de parada. No caso do método de sobre-relaxação sucessiva usa-se como critério de parada a seguinte expressão:

$$| \bar{p}^{k+1}_{i,j} - \bar{p}^{k}_{i,j} | \leq \psi | \bar{p}^{k+1}_{i,j} | \qquad (5.32)$$

onde ψ é o fator de convergência do processo iterativo.

5.6 - ESTUDO DA MALHA PARA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS POR DIFERENÇAS FINITAS

Adotando-se vários refinamentos de malha, para uma relação de L/D=1 e ε=0,5, obteve-se os seguintes valores de parâmetros resultantes, Tabela 5.1, onde se fixou m=44:

Tabela 5.1 – Tabela comparativa de malha e parâmetros resultantes para L/D=1 e ε=0,5.

m x n	ϕ	S	f(R/c)	$\frac{Q1}{RcNL}$	$\frac{Q}{RcNL}$	$\frac{P}{Pmax}$
44x8	63,204	0,200	4,762	2,353	3,933	0,435
44x12	63,173	0,200	4,887	2,378	3,958	0,435
44x16	63,162	0,199	4,951	2,387	3,967	0,435
44x20	63,158	0,199	4,989	2,392	3,972	0,435

Verifica-se que, nesse caso, a malha 44x16 já apresenta um bom resultado, já que não há variação significativa dos resultados para malhas mais refinadas.

Fixando-se, agora, n=16 e variando o valor de m, para o caso de L/D=1 e ε=0,1 resultaram os valores indicados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 - Tabela comparativa de malha e parâmetros resultantes para L/D=1 e ε=0,1.

m x n	ϕ	S	f(R/c)	$\frac{Q1}{RcNL}$	$\frac{Q}{RcNL}$	$\frac{P}{Pmax}$
8x16	83,867	1,370	30,503	0,483	3,331	0,542
14x16	86,385	1,396	25,178	0,470	3,308	0,526
20x16	84,838	1,397	28,430	0,477	3,311	0,531
26x16	85,320	1,399	25,920	0,474	3,307	0,529
32x16	84,890	1,399	27,812	0,476	3,308	0,527
38x16	85,105	1,400	26,182	0,475	3,306	0,528
44x16	84,904	1,400	27,523	0,476	3,307	0,528

Análogamente, para ε=0,9 , resultaram os valores dados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 - Tabela comparativa de malha e parâmetros resultantes para L/D=1 e ε=0,9.

m x n	ϕ	S	f(R/c)	$\frac{Q1}{RcNL}$	$\frac{Q}{RcNL}$	$\frac{P}{Pmax}$
26x16	32,794	0,024	1,449	4,195	4,517	0,182
32x16	29,191	0,021	1,425	4,244	4,564	0,238
38x16	31,612	0,023	1,420	4,265	4,585	0,227
44x16	30,016	0,022	1,461	4,282	4,600	0,232
50x16	31,231	0,023	1,422	4,290	4,608	0,226
56x16	30,379	0,022	1,469	4,297	4,615	0,238
62x16	31,090	0,023	1,426	4,301	4,619	0,233
68x16	30,556	0,022	1,470	4,306	4,622	0,235

Da observação das Tabelas 5.2 e 5.3, verifica-se que o valor de ε exerce uma influência significativa sobre o refinamento de malha necessário para se obter resultados satisfatórios. Assim, para ε=0,1 a malha com m entre 26 e 32 é aceitável, enquanto que para ε=0,9 torna-se necessário utilizar m maiores, entre 62 e 68.

A Tabela 5.4 mostra a relação de dependência entre malhas e excentricidade ε, considerada na obtenção dos resultados deste trabalho.

Tabela 5.4 - Relação de malhas em função de ε.

ε	m x n
0,1	28 x 16
0,2	32 x 16
0,3	36 x 16
0,4	40 x 16
0,5	44 x 16
0,6	48 x 16
0,7	52 x 16
0,8	56 x 16
0,9	60 x 16
0,95	64 x 16
0,97	64 x 16

A Tabela 5.4 também foi aplicada para valores de L/D diferentes de 1. Uma análise semelhante à anterior foi feita para valores de L/D iguais a 1/8 e 2. Os resultados obtidos seguem a mesma tendência daqueles correspondentes a L/D=1, sob o aspecto de refinamento de malha.

5.7 - CÁLCULO DE PARÂMETROS RESULTANTES - MANCAL CURTO

Os parâmetros mais utilizados para a análise de um mancal hidrodinâmico são:

a) Capacidade de carga;
b) Posição ângular da espessura mínima do filme de óleo;
c) Número de Sommerfeld;
d) Coeficiente de atrito;
e) Vazão lateral;
f) Vazão de entrada;
g) Vazão de saída;
h) Vazão total;
i) Relação das vazões;
j) Elevação da temperatura;
k) Pessão máxima e ângulo desta posição;
l) Relação de pressões.

5.7.1 - Capacidade de Carga

- Condição de Gumbel

A carga será calculada em duas componentes que são:

a) - A componente radial da carga é:

$$F_r = \int_o^L \int_o^\pi p.R.\cos\theta.d\theta.dz \qquad (5.34)$$

b) - A componente tangencial é:

$$F_t = \int_o^L \int_o^\pi p.R.\mathrm{sen}\theta.d\theta.dz \qquad (5.35)$$

As equações (5.34) e (5.35) são agora adimensionalizadas usando as definições anteriores. Conforme o Apêndice E, tem-se:

$$\frac{F_r}{\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2 R.L} = 2.\pi \int_o^1 \int_o^{1/2} \bar{p}.\cos(2.\pi.\bar{x}).d\bar{x}.d\bar{z} \qquad (5.36)$$

e

$$\frac{F_t}{\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2 R.L} = 2.\pi \int_o^1 \int_o^{1/2} \bar{p}.\mathrm{sen}(2.\pi.\bar{x}).d\bar{x}.d\bar{z} \qquad (5.37)$$

Agora, considerando-se que:

$$\Delta_r = \frac{F_r}{\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2 R.L} \qquad (5.38)$$

e

$$\Delta_t = \frac{F_t}{\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2 R.L} \qquad (5.39)$$

tem-se:

$$\Delta_r = 2.\pi \int_o^1 \int_o^{1/2} \bar{p}.\cos(2.\pi.\bar{x}).d\bar{x}.d\bar{z} \qquad (5.40)$$

e

$$\Delta_t = 2.\pi \int_o^1 \int_o^{1/2} \bar{p}.\mathrm{sen}(2.\pi.\bar{x}).d\bar{x}.d\bar{z} \qquad (5.41)$$

Sabe-se que o carregamento total é:

$$F = \sqrt{F_t^{\,2} + F_r^{\,2}} \qquad (5.42)$$

que é equivalente a

$$\Delta = \sqrt{\Delta_t^{\,2} + \Delta_r^{\,2}} \qquad (5.43)$$

onde Δ é o parametro de carga adimensional

$$\Delta = \frac{F}{\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2 R.L} \qquad (5.44)$$

Para obter Δ é necessário integrar Δr e Δt. A integração das Equações (5.40) e (5.41) foi efetuada pela regra

de Simpson, mostrada no Apêndice F.

Considerando-se então a Equação (5.40) com condição de simetria em torno de $(\frac{n}{2} + 1)$ e final da pressão do filme em $(\frac{m}{2} + 1)$, tem-se:

$$\Delta_r = 2.\pi \int_{j=1}^{j=n+1} \int_{i=1}^{i=m/2+1} -\bar{p}_{i,j} \cos[2.\pi.(\frac{i-1}{m})].d\bar{x}.d\bar{z} \qquad (5.45)$$

tomando-se:

$$F_{rj} = \int_{i=1}^{i=m/2+1} -\bar{p}_{i,j} \cos[2.\pi.(\frac{i-1}{m})].d\bar{x} \qquad (5.46)$$

tem-se:

$$F_{rj} = \frac{-2}{3m} \sum_{i=2}^{m/4} \bar{p}(2i-1).\cos[2.\pi.(\frac{2i-2}{m})] -$$

$$- \frac{4}{3m} \sum_{i=2}^{m/4+1} \bar{p}(2i-2).\cos[2.\pi.(\frac{2i-3}{m})] \qquad (5.47)$$

Então, integrando F_r em relação a $\bar{z}$, tem-se:

$$F_r = \frac{1}{3n} [F_{r^1} + F_{r\frac{n}{2}+1} + 2(\sum_{j=2}^{n/4} F_r(2j-1)) + 4(\sum_{j=2}^{n/4+1} F_r(2j-2))] \qquad (5.48)$$

Finalmente, a Equação (5.45) pode ser expressa como:

$$\Delta_r = 4.\pi.F_r \qquad (5.49)$$

Aplicando-se um desenvolvimento similar para a Equação (5.41), e escrevendo na forma de diferenças finitas, tem-se:

$$\Delta_t = 2.\pi \int_{j=1}^{j=n+1} \int_{i=1}^{i=m/2+1} \bar{p}_{i,j} \operatorname{sen}[2.\pi.(\frac{i-1}{m})].d\bar{x}.d\bar{z} \qquad (5.50)$$

tomando-se:

$$F_{t_j} = \int_{i=1}^{i=m/2+1} \bar{p}_{i,j} \, \text{sen}[2.\pi.(\frac{i-1}{m})].d\bar{x} \qquad (5.51)$$

tem-se:

$$F_{t_j} = \frac{2}{3m} \sum_{i=2}^{m/4} \bar{p}(2i-1)\text{sen}[2.\pi.(\frac{2i-2}{m})] +$$

$$+ \frac{4}{3m} \sum_{i=2}^{m/4} \bar{p}(2i-2)\text{sen}[2.\pi.(\frac{2i-3}{m})] \qquad (5.52)$$

Aplicando-se a regra de Simpson novamente para integrar F_{t_j} na direção $\bar{z}$, tem-se:

$$F_t = \frac{1}{3n} [F_{t^1} + F_{t_{\frac{n}{2}+1}} + 2(\sum_{j=2}^{n/4} F_t(2j-1)) + 4(\sum_{j=2}^{n/4+1} F_t(2j-2))] \qquad (5.53)$$

Finalmente a equação (5.50) pode ser expressa como:

$$\Delta_t = 4.\pi.F_t \qquad (5.54)$$

5.7.2 - Posição Angular da Espessura Mínima do Filme de Óleo

A posição angular ϕ da espessura mínima h_o será:

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{F_t}{F_r} \right] \qquad (5.55)$$

ou

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{\Delta_t}{\Delta_r} \right] \qquad (5.56)$$

onde os valores de Δ_t e Δ_r foram previamente calculados.

5.7.3 - Número de Sommerfeld

O número de Sommerfeld, pode ser obtido pela

substituição de $P=\frac{F}{L.D}$ e $\omega=2.\pi.N$ na Equação (5.44), resultando:

$$\Delta = \frac{P.L.D}{2.\pi.N.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2 R.L} \qquad (5.57)$$

Portanto, substituindo-se a Equação (1.1) na Equação (5.57), tem-se:

$$S = \frac{1}{\pi.\Delta} \qquad (5.58)$$

5.7.4 - Coeficiente de Atrito

Já foi visto que a tensão de cisalhamento no filme de fluido é dada por:

$$\tau_x = \left(\frac{2y - h}{2}\right)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta U}{h} \qquad (5.59)$$

Para y = h, tem-se:

$$\tau_x = \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta U}{h} \qquad (5.60)$$

Portanto, a força de atrito atuante num elemento de fluido do filme de óleo será:

$$dF_\alpha = \left(\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta U}{h}\right) R.d\theta.dz \qquad (5.61)$$

O momento elementar de atrito será:

$$dM_\alpha = dF_\alpha.R \qquad (5.62)$$

$$dM_\alpha = dF_\alpha.R = \left(\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta.U}{h}\right) R^2.d\theta.dz \qquad (5.63)$$

O momento total ou torque atuante no eixo será

obtido pela integração ao longo de todo o mancal, isto é:

$$M_{\alpha} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{L} \left[\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta . U}{h} \right] R^2 . d\theta . dz \qquad (5.64)$$

Substituindo os termos adimensionais na Equação (5.64), tem-se:

$$M_{\alpha} = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \left[\frac{H.c}{2} \frac{\partial (p.\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2)}{\partial(\pi.D.\bar{x})} + \frac{\eta.\omega.R}{H.c} \right] R^2 . d(2.\pi.\bar{x}) . d(\bar{z}.L) \qquad (5.65)$$

$$M_{\alpha} = \omega.\eta.R^2.2.\pi.L \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \left[\frac{H.c}{2} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{1}{\pi.2.R} . \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \frac{R}{H.c} \right] d\bar{x} . d\bar{z} \qquad (5.66)$$

Reajustando-se a equação tem-se:

$$\frac{M_{\alpha}}{\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2 R^2 . L} = 2.\pi \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \left[\frac{H}{4.\pi} . \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{H} \right] d\bar{x} . d\bar{z} \qquad (5.67)$$

Considerando-se que

$$M = \frac{M_{\alpha}}{\omega.\eta.R^2.(\frac{R}{c}).L} \qquad (5.68)$$

tem-se:

$$M = 2.\pi \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \left[\frac{H}{4\pi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{H} \right] d\bar{x} . d\bar{z} \qquad (5.69)$$

De maneira que o coeficiente de atrito será:

$$f = \frac{F_{\alpha}}{F} \qquad (5.70)$$

onde F_{α} é a força de atrito total atuando no mancal, isto é:

$$F_{\alpha} = \frac{M_{\alpha}}{R} \qquad (5.71)$$

Agora, da Equação (5.43), tem-se:

$$F = \Delta \left[\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^{2}.R.L \right] \qquad (5.72)$$

Combinando-se as Equações. (5.70), (5.71) e (5.72), tem-se (levando em conta também a Equação (5.44)):

$$f = \frac{M_{\alpha}}{F.R} = \frac{M_{\alpha}}{\Delta(\omega.\eta.R.(\frac{R}{c})^{2}.L)R} = \frac{M_{\alpha}}{\Delta(\omega.\eta.R^{2}.(\frac{R}{c}).L).(\frac{R}{c})} \qquad (5.73)$$

$$f(\frac{R}{c}) = \frac{M_{\alpha}}{\Delta(\omega.\eta.R^{2}.(\frac{R}{c}).L)} \qquad (5.74)$$

logo, das Equações (5.74) e (5.68), resulta:

$$f\left(\frac{R}{c}\right) = \frac{M_{\alpha}}{\Delta} \qquad (5.75)$$

onde $f(\frac{R}{c})$ é um coeficiente adimensional da variável de atrito.

O valor de M_{α} é obtido integrando-se a Equação (5.67), pelo método de Simpson.

5.7.5 - Vazão de Lubrificante

De maneira análoga ao que foi desenvolvido no Item 4.3.5, as três componentes da vazão serão consideradas, como segue:

5.7.5.1 - Vazão Lateral

A vazão na direção axial (lateral) será:

$$q_z = - \frac{h^3}{12.\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \qquad (5.76)$$

Representando-se por "q_l" a vazão lateral em uma das extremidades, tem-se:

$$q_l = \int_o^{2\pi} \left[\frac{-h^3}{12.\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right]_{z=o} R.d\theta \qquad (5.77)$$

A vazão lateral total (pelas duas extremidades do mancal) será:

$$\frac{Q_l}{R.c.N.L} = \frac{2.q_l}{R.c.N.L} = \frac{2}{R.c.N.L} \int_o^{2\pi} \left[\frac{-h^3}{12.\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right]_{z=o} R.d\theta \qquad (5.78)$$

Substituindo-se os termos adimensionais, tem-se:

$$\frac{Q_l}{R.c.N.L} = \frac{2}{R.c.N.L} \int_o^1 \left[\frac{-(Hc)^3}{12.\eta} \frac{\partial(\bar{p}\omega\eta(\frac{R}{c})^2)}{\partial(\bar{z}L)} \right] R.d(2.\pi.\bar{x})$$

ou

$$\frac{Q_l}{R.c.N.L} = \frac{2.R.2.R.\pi.\omega}{N.L^2.12} \int_o^1 \left[- H^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right] d\bar{x}$$

ou, lembrando-se de que $\omega = 2.\pi.N$, tem-se:

$$\frac{Q_l}{R.c.N.L} = - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{D}{L} \right)^2 \int_o^1 \left[H^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right]_{z=o} d\bar{x} \qquad (5.79)$$

Aplicando-se a Equação (D.11) do Apêndice D, na Equação (5.79), obtem-se a vazão lateral.

5.7.5.2 - Vazão de Entrada

A vazão de óleo que entra no início da curva de pressão hidrodinâmica é:

$$Q_e = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \left(\frac{U.h}{2} - \frac{h^3}{12.\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\theta=\theta_1} dz \qquad (5.80)$$

Integrando-se a Equação (5.75), tem-se:

$$Q_e = \left(\frac{U.h.L}{2} \right)_{\theta=\theta_1} - \left(\frac{h^3}{12.\eta} \int \frac{\partial p}{\partial x} dz \right)_{\theta=\theta_1} \qquad (5.81)$$

Substituindo-se os termos adimensionais, tem-se:

$$Q_e = \frac{\pi DNHcL}{2} - \frac{(Hc)^3}{12\eta} \int_o^1 \left[\frac{\partial(\bar{p}\omega\eta(\frac{R}{c})^2}{\partial(\bar{x}\pi D)} \right] d(\bar{z}L)$$

Reajustando

$$\frac{Q_e}{R.c.N.L} = \left[\pi H - \frac{H^3}{12} \int_o^1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} d\bar{z} \right]_{\theta=\theta_1} \qquad (5.82)$$

onde θ_1=0.

Usando-se a Equação (D.11) do Apêndice D, na Equação (5.82), obtém-se a vazão de entrada.

5.7.5.3 - Vazão de Saída

A vazão que circula circunferencialmente passando pelo ponto ho, conforme mostrado na Figura 1.2, é:

$$Q_c = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \left(\frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\theta=\theta_2} dz \qquad (5.83)$$

Integrando-se a Equação (5.83), tem-se:

$$Q_c = \left(\frac{U.h.L}{2} \right)_{\theta=\theta_2} - \left(\frac{h^3}{12.\eta} \int \frac{\partial p}{\partial x} dz \right)_{\theta=\theta_2} \qquad (5.84)$$

Substituindo-se os termos adimensionais, tem-se:

$$Q_c = \frac{\pi DNHcL}{2} \quad \frac{(Hc)^3}{12\eta} \int_0^1 \left[\frac{\partial(\bar{p}\omega\eta(\frac{R}{c})^2)}{\partial(\bar{x}\pi D)} \right] d(\bar{z}L)$$

Reajustando

$$\frac{Q_c}{R.c.N.L} = \left[\pi H - \frac{H^3}{12} \int_0^1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} d\bar{z} \right]_{\theta=\theta_2} \qquad (5.85)$$

onde $\theta_2 = \pi$.

Usando-se a Equação (D.12) do Apêndice D, na Equação (5.85), obtém-se a vazão de saída.

5.7.5.4 - Vazão Total

Conforme já foi definido no Item 4.3.5, a vazão total é a vazão na entrada cunha de óleo, isto é:

$$Q = Q_e = Q_l + Q_c \qquad (5.86)$$

5.7.5.5 - Relação das Vazões

Obtém-se esta relação através da divisão da Equação (5.97) pela Equação (5.86):

$$\frac{Q_l}{Q} = \frac{\frac{Q_l}{R.c.N.L}}{\frac{Q}{R.c.N.L}} \qquad (5.87)$$

5.7.6 - Elevação da Temperatura

No caso de um mancal "infinitamente curto" foi obtida a Equação (4.64) da relação entre a "variável da elevação de temperatura" e a "variável do coeficiente de atrito f(R/c)", isto é:

$$\frac{\rho.cp.J.\Delta t}{p} = 4.f\left[\frac{R}{c} \right] \qquad (5.88)$$

5.7.7 - Pressão Máxima e Ângulo desta Posição

Os valores de θ_{max} , e P_{max} (Figura 5.5) foram obtidos através de uma interpolação do tipo "spline" cúbica [17] com os resultados numéricos da distribuição de pressão no plano central do mancal. A interpolação permite determinar com precisão satisfatória o ponto correspondente a $dp/d\theta = 0$.

Encontrando-se o valor da pressão máxima e seu ângulo correspondente, θ_{max} , o valor de θ_{Pmax} foi calculado através da Equação (5.89), isto é:

$$\theta_{Pmáx} = \theta_{máx} - 180^{\circ} + \phi \qquad (5.89)$$

sendo o ângulo ϕ obtido da Equação (5.56).

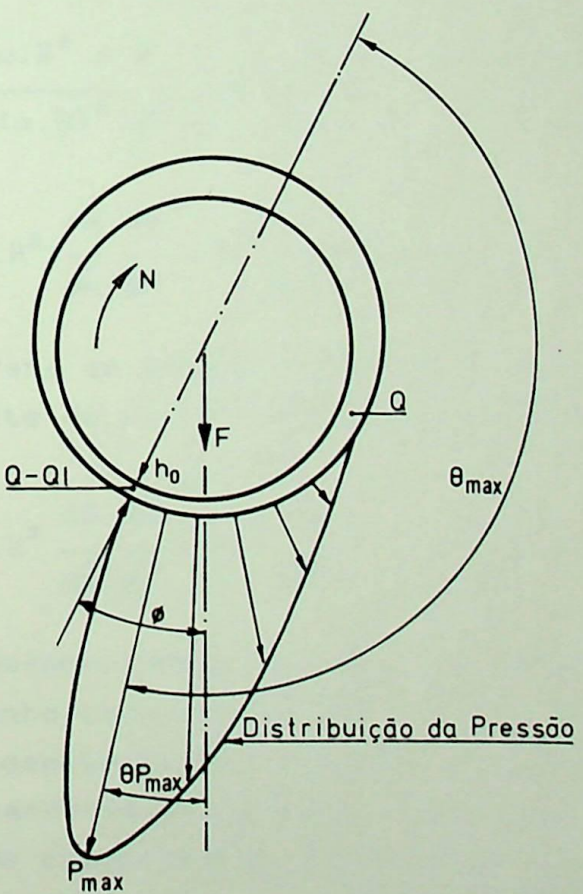


Fig. 5.5.- Posição da Pressão Máxima.

5.8 - APROXIMAÇÃO POR DIFERENCAS FINITAS DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA MANCAL LONGO

Como já foi visto no Item 4.4.1, a equação para mancal longo é dada pela Equação (4.65) que é:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right] = 6.U\frac{\partial h}{\partial x} \qquad (5.90)$$

Para obter esta equação, na forma adimensional, basta substituir as Equações (5.2), (5.3) e (5.5) em (5.90). Lembrando-se que $U=\omega.R$, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial(\bar{x}.\pi.D)}\left[\frac{(Hc)^3}{\eta}\frac{\partial(\bar{p}.\omega.\eta.(R/c)^2)}{\partial(\bar{x}.\pi.D)}\right] = 6.\omega.R\frac{\partial(Hc)}{\partial(\bar{x}.\pi.D)}$$

ou

$$\frac{\omega.R^2.c}{(\pi.D)^2}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left[H^3\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}\right] = 6.\frac{\omega.R.c}{\pi.D}\frac{\partial H}{\partial\bar{x}}$$

ou

$$3.H^2\frac{\partial H}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + H^3\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial\bar{x}^2} = 12.\pi.\frac{\partial H}{\partial\bar{x}} \qquad (5.91)$$

Para um mancal perfeitamente alinhado, onde H é uma função somente de $\bar{x}$, ou seja $H=f(\bar{x})$, obtém-se:

$$3.H^2\frac{dH}{d\bar{x}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + H^3\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial\bar{x}^2} = 12.\pi.\frac{dh}{d\bar{x}} \qquad (5.92)$$

Desenvolvendo-se o mancal conforme a Figura 5.2, tanto o comprimento circunferencial $\pi.D$, como o comprimento axial L são representados por valores que variam no intervalo de 0 a 1, utilizando-se as Equação (5.3) e (5.4).

Os comprimentos nas direções $\bar{x}$ e $\bar{z}$ são dados pelas Equações (5.8) e (5.9) respectivamente, sendo a primeira na direção circunferencial e a segunda na direção axial.

Substituindo-se as Equações (5.10) e (5.12) em

(5.91), tem-se:

$$3.H^2 \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{m}{2} \bar{p}_{i+1,j} - 3.H^2 \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{m}{2} \bar{p}_{i-1,j} + H^3.m^2.\bar{p}_{i+1,j} -$$

$$- 2.H^3.m^2.\bar{p}_{i,j} + H^3.m^2.\bar{p}_{i-1,j} = 12.\pi.\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}$$

Isolando-se o termo $\bar{p}_{i,j}$, obtém-se:

$$\bar{p}_{i,j} = \bar{p}_{i+1,j} \left(3.H^2 \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{m}{2} + H^3.m^2 \right) \frac{1}{2.H^3.m^2} +$$

$$\bar{p}_{i-1,j} \left(- 3.H^2 \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{m}{2} + H^3.m^2 \right) \frac{1}{2.H^3.m^2} - 12.\pi. \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{1}{2.H^3.m^2}$$

ou

$$\bar{p}_{i,j} = \bar{p}_{i+1,j} \left(\frac{3}{4.H.m} \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \right) +$$

$$+ \bar{p}_{i-1,j} \left(\frac{- 3}{4.H.m} \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \right) - \frac{6.\pi}{H^3.m^2} \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \qquad (5.93)$$

A Equação (5.93) pode ser representada da seguinte maneira:

$$\bar{p}_{i,j} = \mathbb{C}5_i . \bar{p}_{i+1,j} + \mathbb{C}6_i . \bar{p}_{i+1,j} + \mathbb{C}7_i \qquad (5.94)$$

$$\mathbb{C}5_i = \frac{3}{4.H.m} \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \qquad (5.95)$$

$$\mathbb{C}6_i = \frac{- 3}{4.H.m} \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \qquad (5.96)$$

$$\mathbb{C}7_i = \frac{6.\pi}{H^3.m^2} \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \qquad (5.97)$$

Os termos $\partial H/\partial \bar{x}$ e $\bar{x}$ da Equação (5.93) podem ser obtidos das Equações (5.25) e (5.26), respectivamente.

Aplicando-se a mesma solução da equação de diferenças finitas por iteração do Item 5.3, porém com a formula da pressão para mancal longo, tem-se:

$$\bar{p}_{i,j} = \bar{p}_{i,j} + w_{ot}\left[\mathbb{C}5_i \cdot \bar{p}_{i+1,j} + \mathbb{C}6_i \cdot \bar{p}_{i+1,j} + \mathbb{C}7_i - \bar{p}_{i,j}\right] \qquad (5.98)$$

onde w_{ot} é obtida pela Equação (5.30).

As condições de contorno do filme de óleo e critério de convergência são as mesmas dos Itens 5.4 e 5.5 respectivamente.

5.9 - PARÂMETROS RESULTANTES - SOLUÇÃO NUMÉRICA COMPUTACIONAL

Um programa computacional, cujo diagrama de blocos está mostrado no Apêndice G, foi elaborado para resolver as equações desenvolvidas nos Itens 5.2 a 5.8, possibilitando assim a obtenção dos resultados mostrados nas Tabelas 5.5 a 5.10.

Para o caso de mancal curto foram consideradas as relações de L/D=1/8, 1/4, 1 e 2, e para mancal longo a relaçãoL/D=4. Os valores de excentricidade específica, ε, foram variados de 0,1 a 0,97 por conveniência, para fins de comparação.

A relação de pressões P_{max}/P é obtida, conforme Reason e Siew [18]:

$$\frac{P_{max}}{P} = \frac{2.P_{max}}{\Delta} \qquad (5.99)$$

e a sua inversa, é:

$$\frac{P}{P_{max}} = \frac{\Delta}{2.P_{max}} \; . \qquad (5.100)$$

TABELA 5.5 - Parâmetros resultantes da solução numérica para L/D = 1/8

ε	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	0.950	0.970
h_o/C	0.900	0.800	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.030
Δ	0.005	0.011	0.018	0.029	0.046	0.077	0.145	0.335	1.312	4.823	12.200
ϕ	82.792	75.602	68.435	61.283	54.112	46.846	39.335	31.259	21.751	15.478	12.121
S	63.781	29.751	17.598	11.061	6.919	4.113	2.198	0.950	0.243	0.066	0.026
f(R/c)	1270.729	599.023	362.804	236.952	156.815	101.071	60.751	31.548	11.392	4.516	2.402
$Q_e/RcNL$	0.625	1.250	1.875	2.500	3.125	3.751	4.376	5.001	5.626	5.937	6.058
$Q_c/RcNL$	3.456	3.770	4.084	4.398	4.712	5.026	5.340	5.654	5.969	6.126	6.188
$Q_\ell/RcNL$	2.828	2.513	2.199	1.885	1.571	1.257	0.943	0.629	0.315	0.157	0.095
$Q/RcNL$	3.453	3.764	4.075	4.386	4.697	5.008	5.319	5.630	5.941	6.094	6.152
Q_ℓ/Q	0.181	0.332	0.460	0.570	0.665	0.749	0.823	0.888	0.947	0.974	0.985
$\frac{\rho cpH\Delta t}{p}$	5085.383	2398.442	1453.362	949.680	628.806	405.481	243.840	126.684	45.772	18.153	9.663
$\theta máx$	106.714	120.375	130.000	138.600	144.818	150.000	156.462	160.715	167.400	171.000	173.250
$P máx$	0.005	0.011	0.020	0.035	0.064	0.122	0.269	0.769	4.255	21.125	69.290
$\theta P máx$	9.506	15.977	18.435	19.883	18.931	16.846	15.796	11.974	9.152	6.479	5.371
$P máx/P$	1.949	2.061	2.234	2.463	2.763	3.153	3.710	4.589	6.484	8.761	11.359
$P/P máx$	0.513	0.485	0.448	0.406	0.362	0.317	0.270	0.218	0.154	0.114	0.088

TABELA 5.6 - Parâmetros resultantes da solução numérica para L/D = 1/4

ε	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	0.950	0.970
h_o/C	0.900	0.800	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.030
Δ	0.020	0.042	0.070	0.111	0.175	0.288	0.522	1.145	3.973	12.522	27.916
ϕ	83.028	76.072	69.131	62.196	55.229	48.155	40.822	32.900	23.452	17.041	13.451
S	16.260	7.612	4.530	2.874	1.823	1.106	0.610	0.278	0.080	0.025	0.011
$f(R/c)$	324.033	153.396	93.600	61.833	41.612	27.495	17.180	9.547	4.009	1.918	1.184
$Q_\ell/RcNL$	0.615	1.231	1.847	2.463	3.079	3.696	4.314	4.934	5.554	5.862	5.978
$Q_e/RcNL$	3.455	3.769	4.083	4.397	4.711	5.025	5.339	5.653	5.967	6.124	6.187
$Q_c/RcNL$	2.828	2.514	2.200	1.886	1.572	1.258	0.944	0.630	0.315	0.158	0.095
$Q/RcNL$	3.443	3.745	4.047	4.349	4.651	4.954	5.258	5.563	5.870	6.020	6.073
Q_ℓ/Q	0.179	0.329	0.456	0.566	0.662	0.746	0.820	0.887	0.946	0.974	0.984
$\frac{\rho c_p J \Delta t}{p}$	1298.610	615.951	376.575	249.244	168.050	111.234	69.618	38.741	16.289	7.802	4.823
$\Theta_{máx}$	105.429	119.250	129.000	136.800	144.000	149.250	155.077	160.072	166.800	170.438	172.688
$P_{máx}$	0.019	0.043	0.078	0.134	0.236	0.441	0.928	2.482	11.787	48.960	138.685
Θ_P	8.457	15.322	18.132	18.996	19.230	17.406	15.899	12.972	10.253	7.479	6.139
$P_{máx}/P$	1.945	2.050	2.211	2.424	2.701	3.061	3.555	4.336	5.933	7.820	9.936
$P/P_{máx}$	0.514	0.488	0.452	0.413	0.370	0.327	0.281	0.231	0.169	0.128	0.101

TABELA 5.7 - Parâmetros resultantes da solução numérica para L/D = 1/2

ε	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	0.950	0.970
h_o/C	0.900	0.800	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.030
Δ	0.073	0.154	0.254	0.390	0.593	0.930	1.572	3.093	8.834	23.019	45.232
ϕ	83.717	77.430	71.114	64.733	58.230	51.505	44.370	36.425	26.506	19.413	15.279
S	4.376	2.070	1.254	0.816	0.537	0.342	0.202	0.103	0.036	0.014	0.007
f(R/c)	87.280	41.847	26.102	17.815	12.551	8.836	6.040	3.844	2.041	1.205	0.844
$Q_e/RcNL$	0.580	1.161	1.742	2.326	2.911	3.500	4.093	4.691	5.294	5.591	5.699
$Q_c/RcNL$	3.454	3.767	4.080	4.393	4.706	5.019	5.333	5.646	5.960	6.117	6.179
$Q_\ell/RcNL$	2.829	2.516	2.203	1.889	1.575	1.261	0.946	0.632	0.316	0.158	0.095
$Q/RcNL$	3.409	3.677	3.945	4.215	4.486	4.761	5.039	5.323	5.610	5.750	5.794
Q_ℓ/Q	0.170	0.316	0.442	0.552	0.649	0.735	0.812	0.881	0.944	0.972	0.984
$\frac{\rho cpJ\Delta t}{p}$	351.632	169.830	106.711	73.360	52.042	36.879	25.362	16.223	8.654	5.127	3.604
$\theta_{máx}$	104.143	117.000	127.000	134.100	141.546	147.750	153.000	158.786	165.600	169.313	172.688
$P_{máx}$	0.070	0.155	0.272	0.453	0.755	1.321	2.546	5.973	22.593	76.543	188.666
$\theta P_{máx}$	7.860	14.430	18.114	18.833	19.775	19.255	17.371	15.211	12.107	8.726	7.967
$P_{máx}/P$	1.931	2.014	2.146	2.321	2.545	2.840	3.238	3.863	5.115	6.650	8.342
$P/P_{máx}$	0.518	0.496	0.466	0.431	0.393	0.352	0.309	0.259	0.195	0.150	0.120

TABELA 5.8 - Parâmetros resultantes da solução numérica para L/D = 1

ε	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	0.950	0.970
h_o/C	0.900	0.800	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.030
Δ	0.228	0.473	0.757	1.113	1.596	2.316	3.537	6.077	14.245	31.978	57.852
ϕ	84.880	79.717	74.437	68.956	63.162	56.895	49.881	41.568	30.451	22.125	17.218
S	1.399	0.673	0.420	0.286	0.199	0.137	0.090	0.052	0.022	0.010	0.006
f(R/c)	27.962	13.748	8.946	6.487	4.951	3.860	2.998	2.241	1.469	0.995	0.745
$Q_\ell/RcNL$	0.476	0.953	1.430	1.908	2.387	2.867	3.348	3.828	4.301	4.526	4.603
$Q_e/RcNL$	3.450	3.759	4.068	4.378	4.688	4.998	5.308	5.619	5.929	6.085	6.147
$Q_e/RcNL$	2.832	2.521	2.208	1.895	1.580	1.265	0.950	0.634	0.317	0.159	0.095
Q/RcNL	3.309	3.474	3.639	3.803	3.967	4.132	4.297	4.461	4.618	4.685	4.699
Q_ℓ/Q	0.144	0.274	0.393	0.502	0.602	0.694	0.779	0.858	0.931	0.966	0.980
$\frac{\rho c_p J \Delta t}{p}$	114.433	57.632	38.456	28.615	22.430	17.972	14.362	11.057	7.482	5.165	3.905
$\theta_{máx}$	101.571	112.500	122.000	130.500	137.455	144.000	150.923	157.500	165.000	168.750	172.688
$\theta P_{máx}$	0.216	0.460	0.768	1.194	1.836	2.907	4.972	9.969	30.433	89.570	204.868
$P_{máx}$	6.451	12.217	16.437	19.456	20.617	20.896	20.804	19.068	15.451	10.876	9.906
$P_{máx}/P$	1.897	1.947	2.028	2.145	2.302	2.510	2.811	3.281	4.273	5.602	7.082
$P/P_{máx}$	0.527	0.514	0.493	0.466	0.434	0.398	0.356	0.305	0.234	0.179	0.141

TABELA 5.9 - Parâmetros resultantes da solução numérica para L/D = 2

ε	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	0.950	0.970
h_o/C	0.900	0.800	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.030
Δ	0.492	1.005	1.565	2.212	3.011	4.092	5.758	8.931	18.340	37.707	65.205
ϕ	85.755	81.447	76.976	72.229	67.058	61.243	54.418	45.873	33.749	24.345	18.775
S	0.647	0.317	0.203	0.144	0.106	0.078	0.055	0.036	0.017	0.008	0.005
f(R/c)	12.989	6.570	4.477	3.454	2.844	2.422	2.078	1.734	1.283	0.929	0.715
$Q_\ell/RcNL$	0.297	0.593	0.886	1.176	1.461	1.740	2.013	2.277	2.528	2.643	2.681
$Q_e/RcNL$	3.443	3.745	4.047	4.350	4.653	4.957	5.261	5.566	5.872	6.029	6.089
$Q_c/RcNL$	2.838	2.529	2.217	1.902	1.586	1.270	0.953	0.635	0.318	0.159	0.095
$Q/RcNL$	3.135	3.122	3.103	3.078	3.048	3.010	2.965	2.912	2.846	2.802	2.776
Q_ℓ/Q	0.095	0.190	0.286	0.382	0.479	0.578	0.679	0.782	0.888	0.943	0.966
$\frac{\rho c p J \Delta t}{p}$	54.656	29.222	21.150	17.427	15.426	14.224	13.331	12.285	10.191	7.882	6.260
$\theta_{máx}$	99.000	109.125	118.000	126.000	134.182	141.000	148.847	156.215	165.000	168.750	172.688
$\theta P_{máx}$	0.446	0.925	1.476	2.161	3.087	4.486	6.932	12.404	33.450	93.008	208.132
$P_{máx}$	4.755	10.572	14.976	18.230	21.240	22.243	23.265	22.088	18.749	13.095	11.463
$P_{máx}/P$	1.814	1.840	1.886	1.953	2.051	2.193	2.408	2.778	3.648	4.933	6.384
P/P	0.551	0.543	0.530	0.512	0.488	0.456	0.415	0.360	0.274	0.203	0.157

TABELA 5.10 - Parâmetros resultantes da solução numérica para L/D = 4 (mancal longo)

ε	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	0.950	0.970
h_o/C	0.900	0.800	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.030
Δ	0.909	1.831	2.786	3.808	4.967	6.398	8.441	12.079	22.270	42.590	70.913
ϕ	86.299	82.531	78.593	74.367	69.688	64.250	57.786	49.368	36.709	26.471	20.310
S	0.350	0.174	0.114	0.084	0.064	0.050	0.038	0.026	0.014	0.007	0.004
f(R/c)	7.069	3.688	2.634	2.155	1.896	1.733	1.600	1.443	1.166	0.887	0.699
$Q_\ell/RcNL$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$Q_e/RcNL$	3.432	3.723	4.015	4.309	4.603	4.902	5.200	5.486	5.786	5.959	6.017
$Q_c/RcNL$	2.845	2.540	2.227	1.912	1.594	1.275	0.956	0.637	0.318	0.159	0.095
$Q/RcNL$	2.845	2.540	2.227	1.912	1.594	1.275	0.956	0.637	0.318	0.159	0.095
Q_ℓ/Q	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\frac{\rho cpJ\Delta t}{p}$	31.217	18.247	14.859	14.165	14.947	17.082	21.041	28.491	46.035	70.089	91.987
$\Theta_{máx}$	99.000	106.875	116.000	124.200	131.728	140.250	148.154	155.572	164.400	168.750	172.688
$P_{máx}$	0.607	1.238	1.928	2.733	3.754	5.220	7.697	13.168	34.137	93.697	208.637
$\Theta_{P_{máx}}$	5.299	9.406	14.593	18.567	21.415	24.501	25.941	24.939	21.110	15.222	12.998
$P_{máx}/P$	1.334	1.352	1.384	1.435	1.511	1.632	1.824	2.180	3.066	4.400	5.884
$P/P_{máx}$	0.749	0.740	0.722	0.697	0.662	0.613	0.548	0.459	0.326	0.227	0.170

CAPÍTULO 6

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo será feita uma comparação entre os resultados obtidos pelo autor nos Capítulos 4 e 5, com os de outros pesquisadores, tais como Raimondi e Boyd [01], Frene [19] e Cameron [03].

A discussão será feita com base nas figuras apresentadas em seguida. Para cada relação de L/D foi feita uma tabela, estabelecendo o desvio máximo entre os resultados do autor e os dos pesquisadores acima.

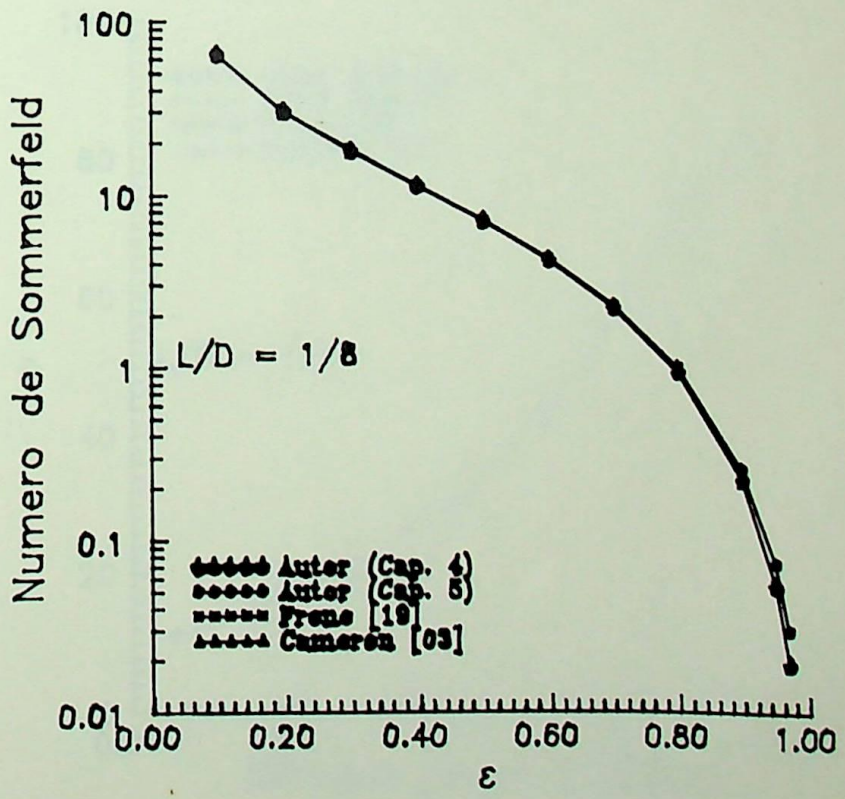


Fig. 6.1 - Comparação de ε x S para L/D=1/8

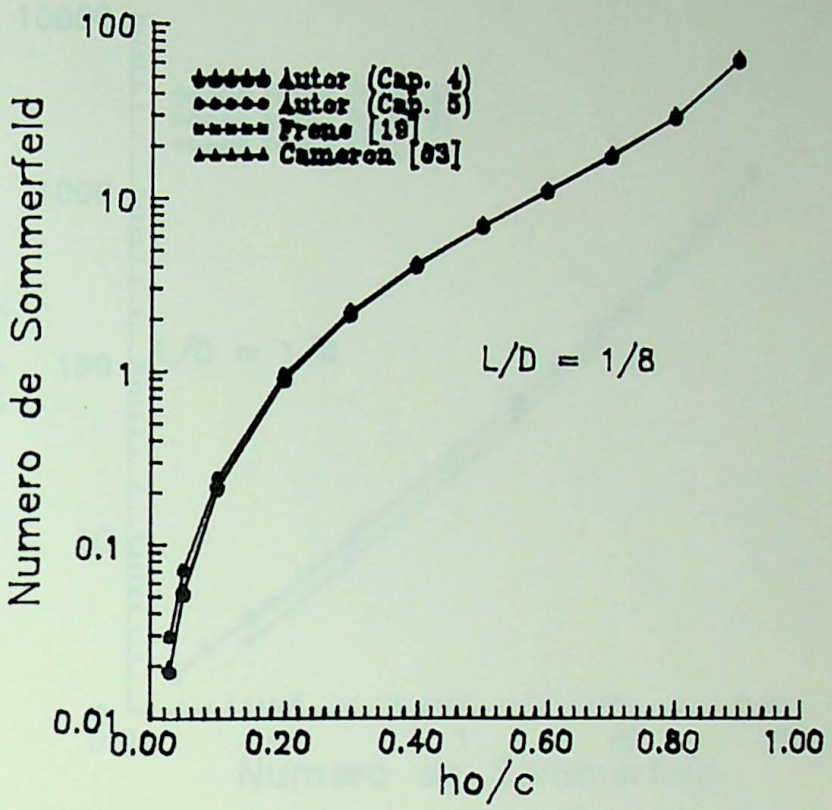


Fig. 6.2 - Comparação de ho/c x S para L/D=1/8

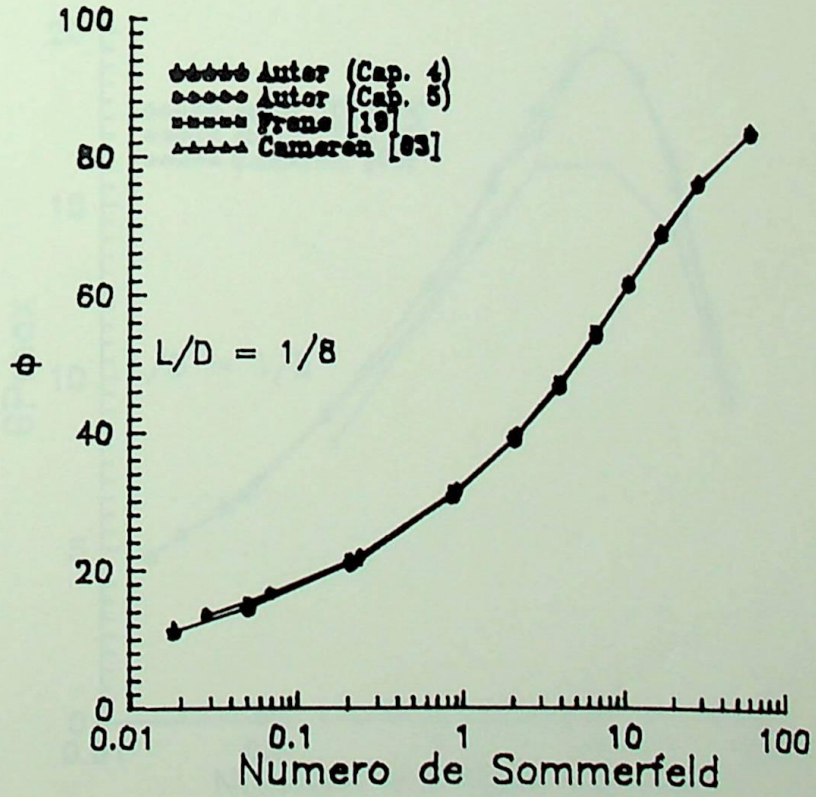


Fig. 6.3 - Comparação de S x ϕ para L/D=1/8

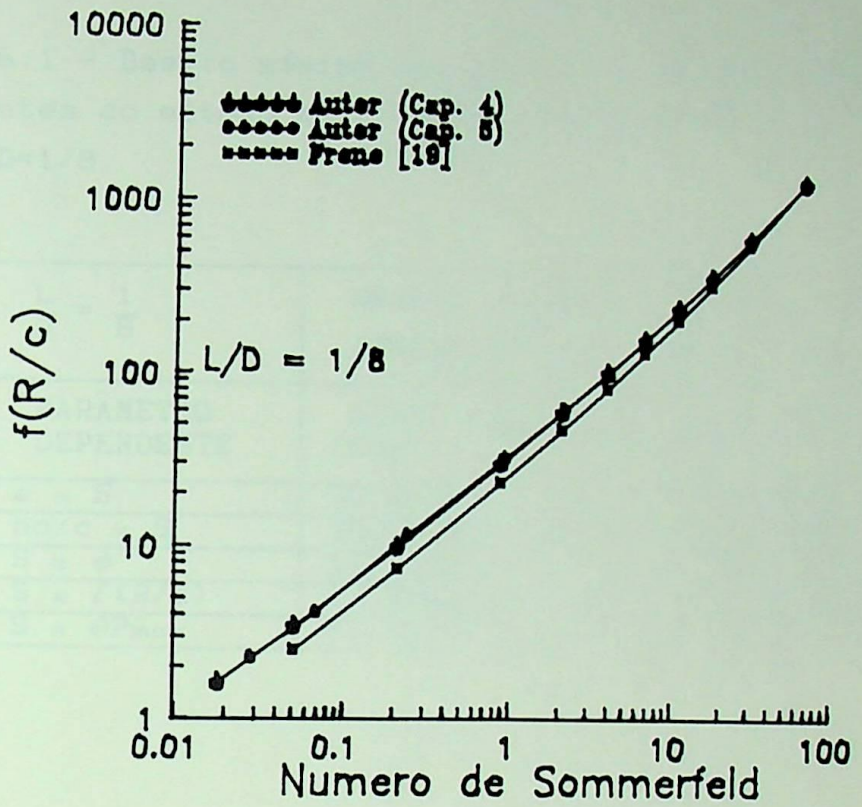


Fig. 6.4 - Comparação de S x f(R/c) para L/D=1/8

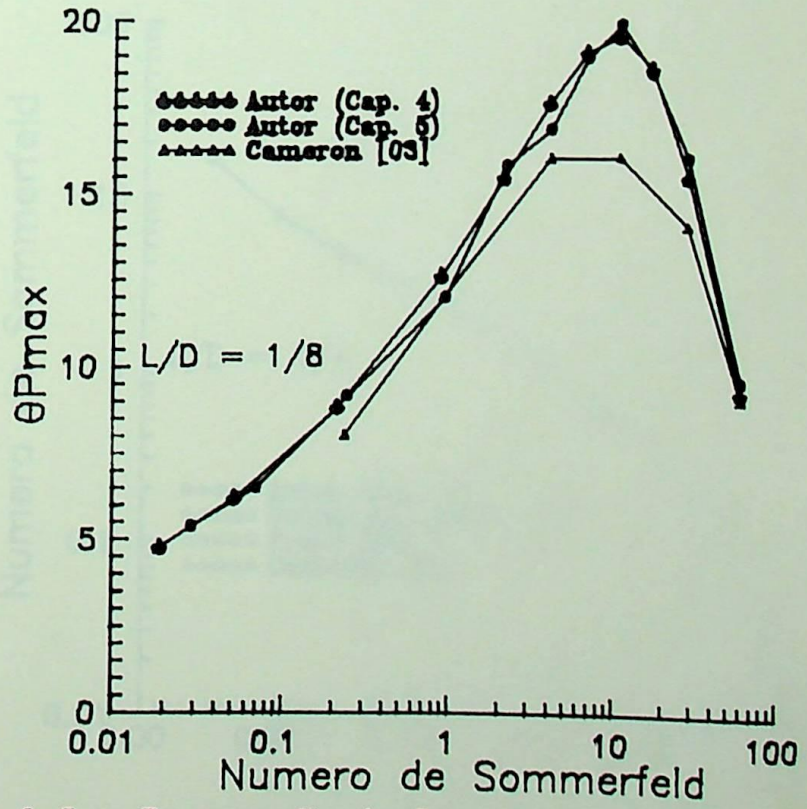


Fig. 6.5 - Comparação de S x $\theta_{P_{max}}$ para L/D=1/8

Tabela 6.1 - Desvio máximo entre os resultados dos parâmetros dependentes do método numérico do autor e outros pesquisadores para L/D=1/8.

$\frac{L}{D} = \frac{1}{8}$		DESVIO MÁXIMO ENTRE RESULTADOS NUMÉRICOS DO AUTOR (Cap. 5) E			
Fig.	PARÂMETRO DEPENDENTE	AUTOR (Cap.4)	Ref.[01]	Ref.[13]	Ref.[03]
6.1	$\varepsilon \times S$	35,862%	–	25,760%	3,292%
6.2	ho/c x S	35,862%	–	25,760%	3,292%
6.3	S x ϕ	17,037%	–	8,781%	3,452%
6.4	S x f(R/c)	27,960%	–	39,152%	–
6.5	S x $\theta Pmax$	11,171%	–	–	19,529%

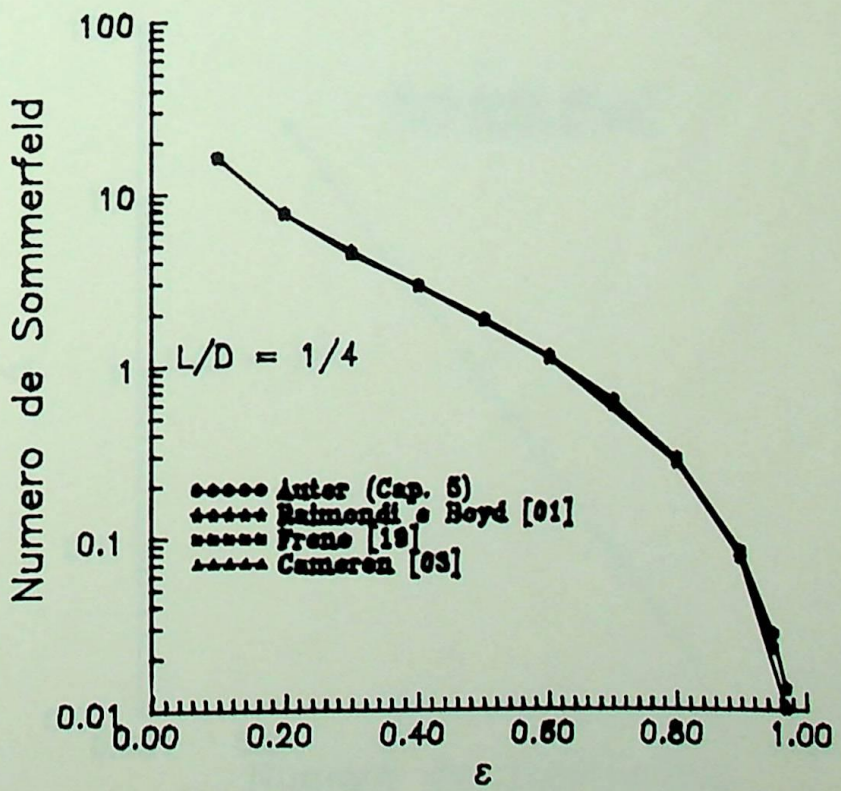


Fig. 6.6 - Comparação de $\varepsilon \times S$ para L/D=1/4

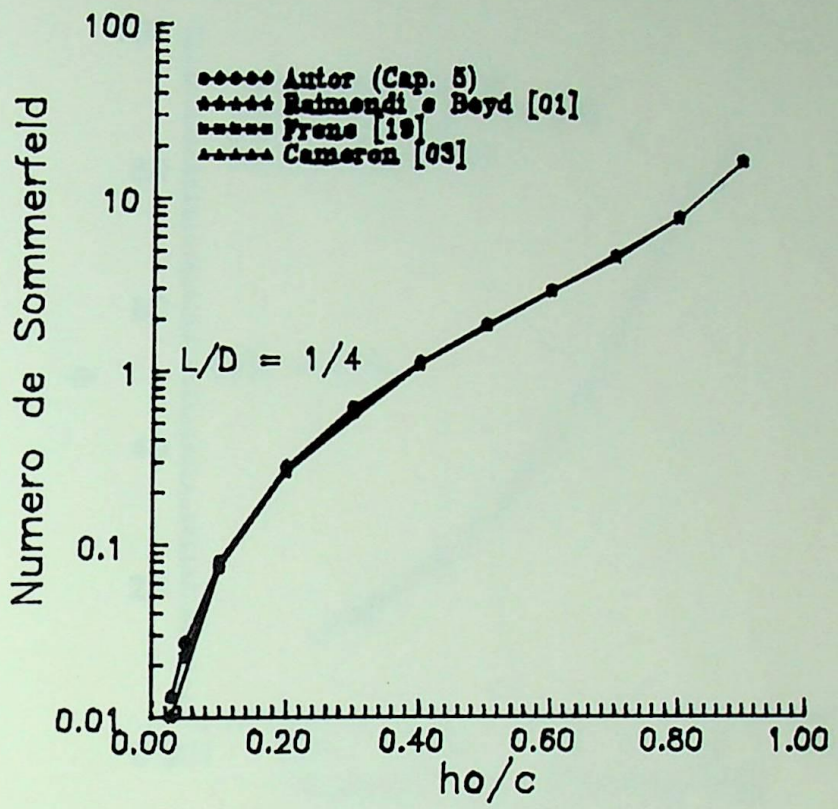


Fig. 6.7 - Comparação de ho/c x S para L/D=1/4

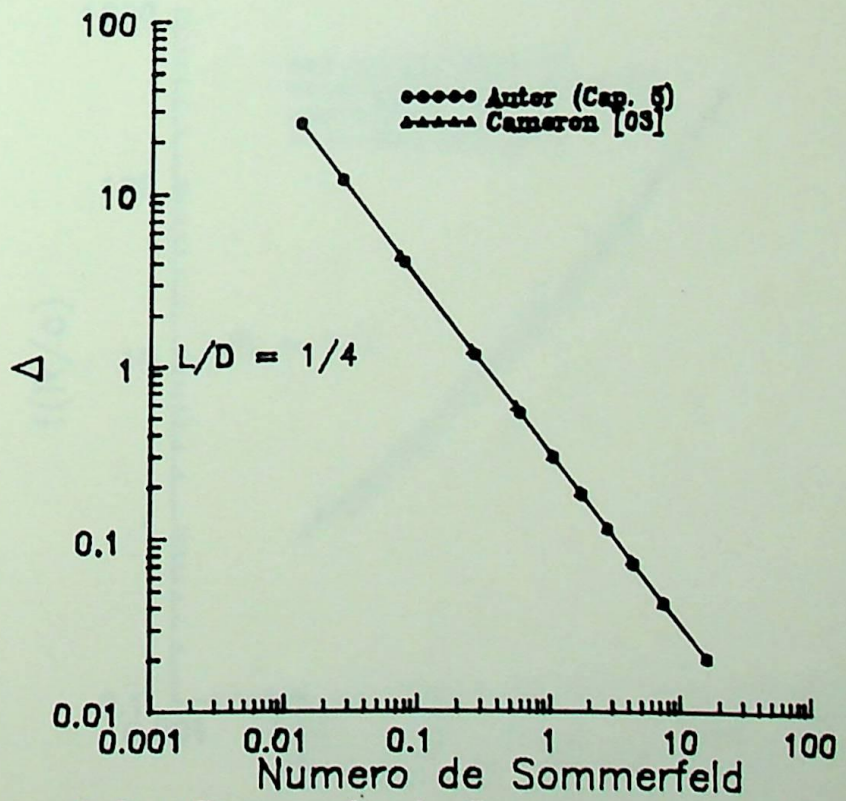


Fig. 6.8 - Comparação de S x Δ para L/D=1/4

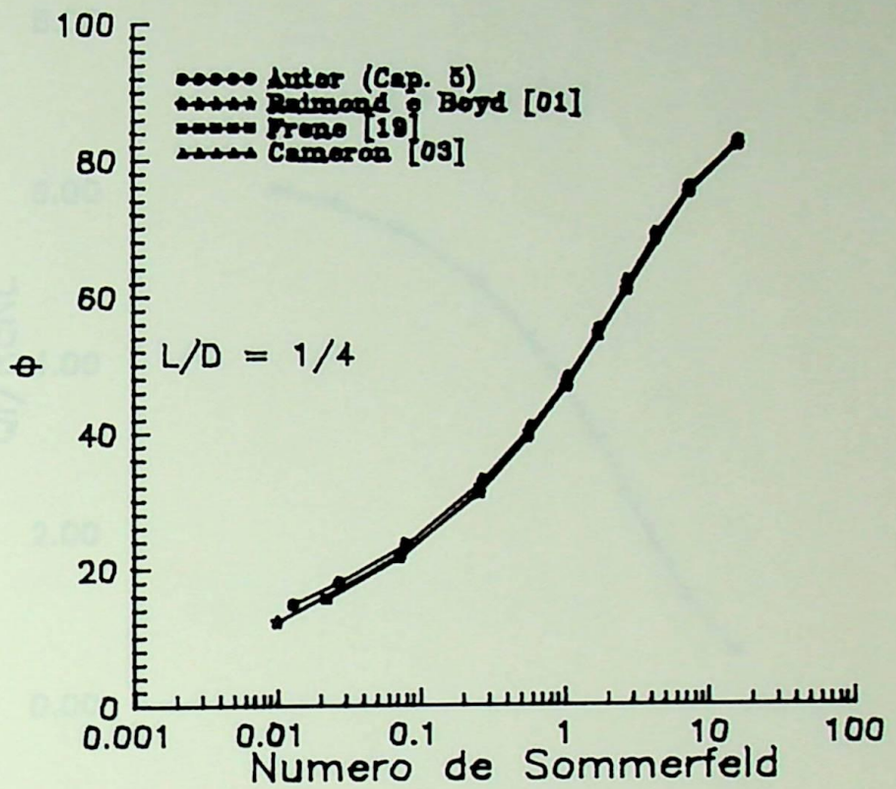


Fig. 6.9 - Comparação de S x ϕ para L/D=1/4

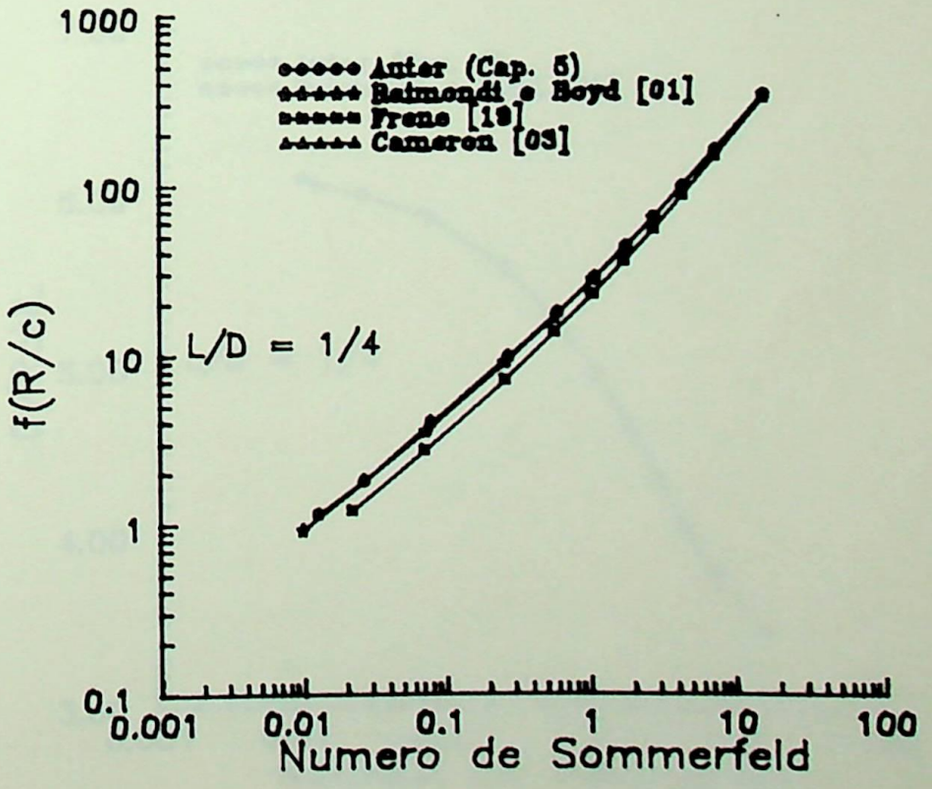


Fig. 6.10 - Comparação de S x f(R/c) para L/D=1/4

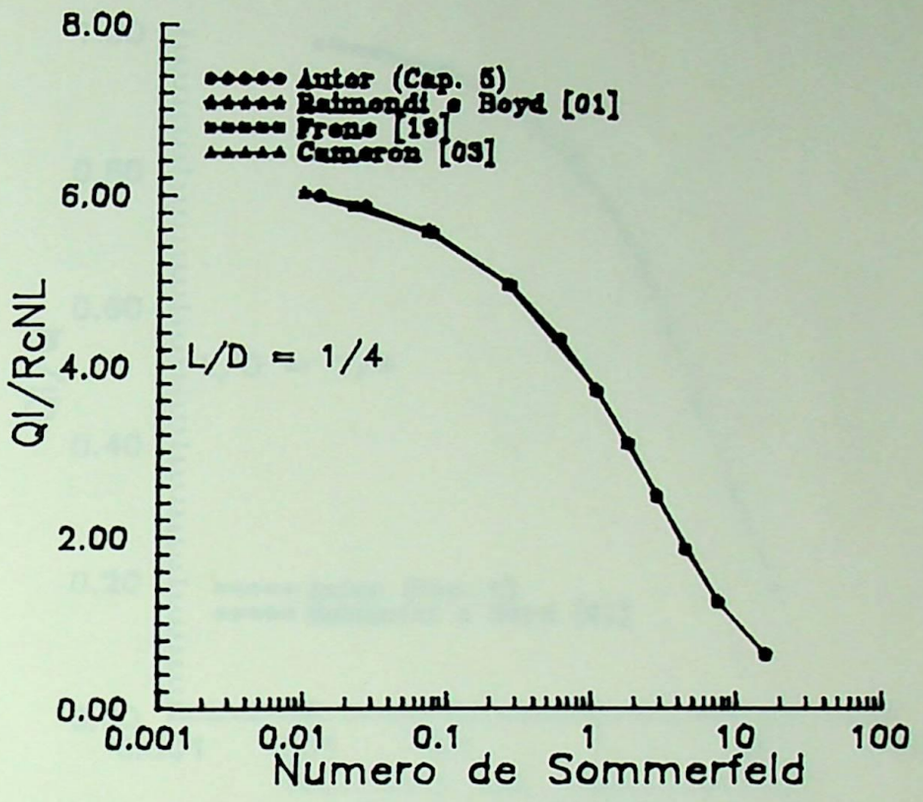


Fig. 6.11 - Comparação de S x Ql/RcNL para L/D=1/4

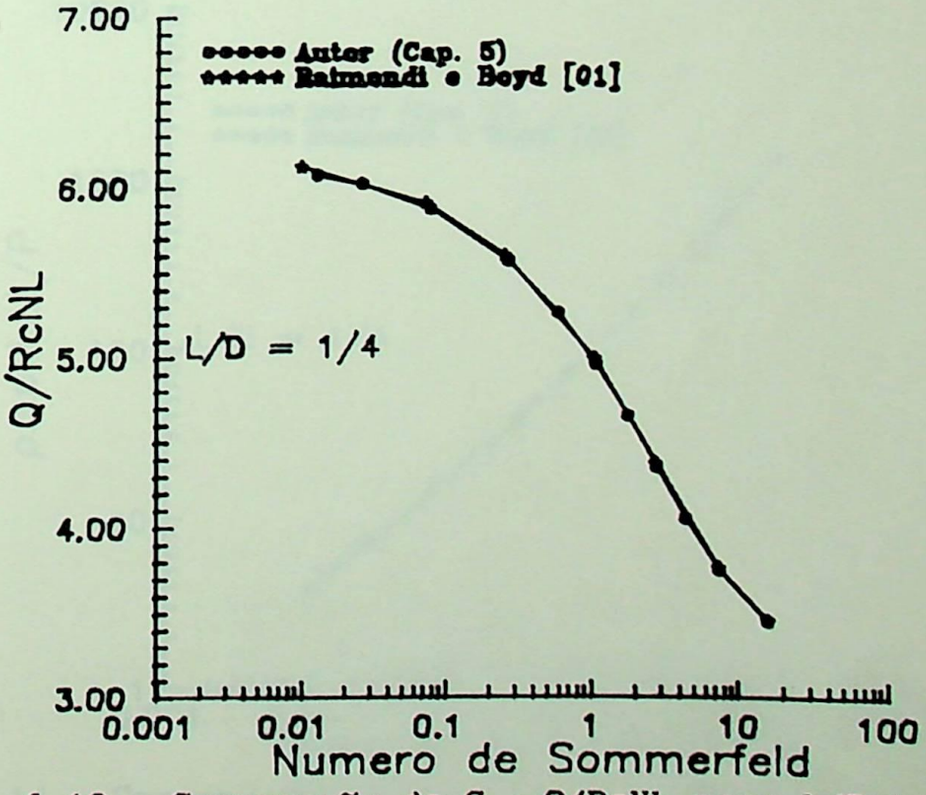


Fig. 6.12 - Comparação de S x Q/RcNL para L/D=1/4

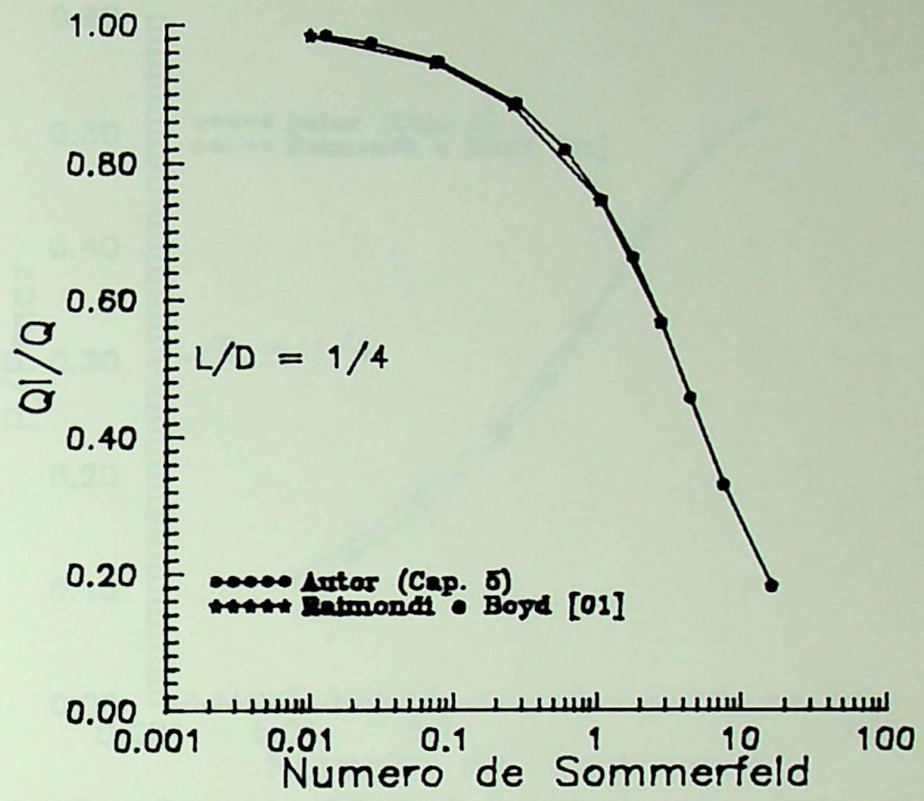


Fig. 6.13 - Comparação de S x Ql/Q para L/D=1/4

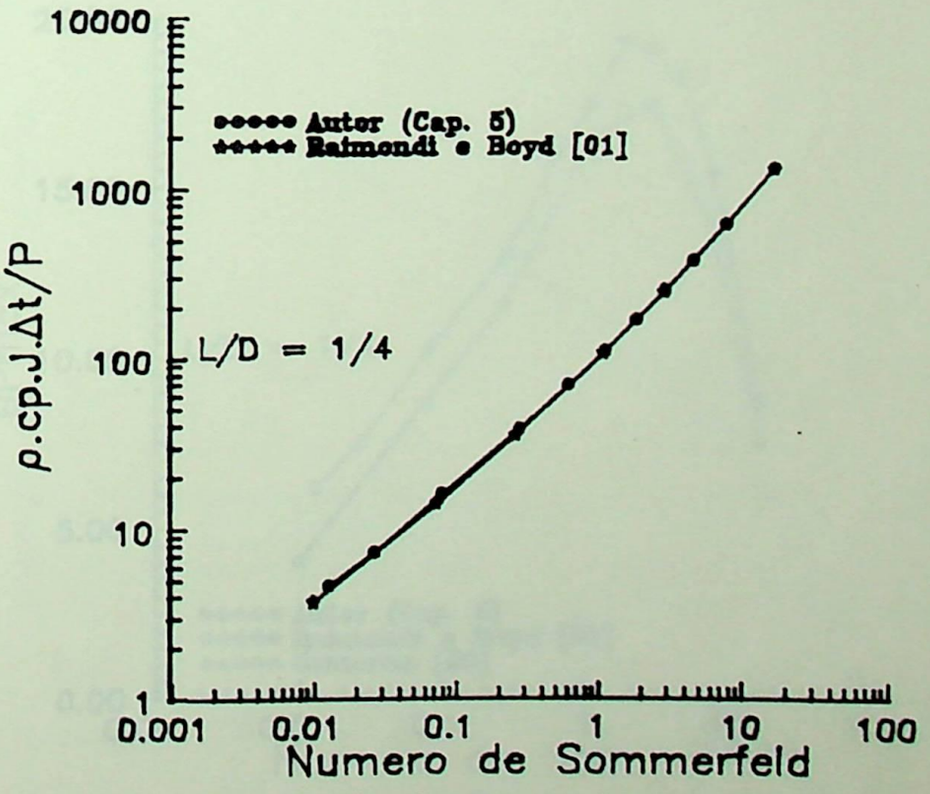


Fig. 6.14 - Comparação de S x ρ.cp.J.Δt/P para L/D=1/4

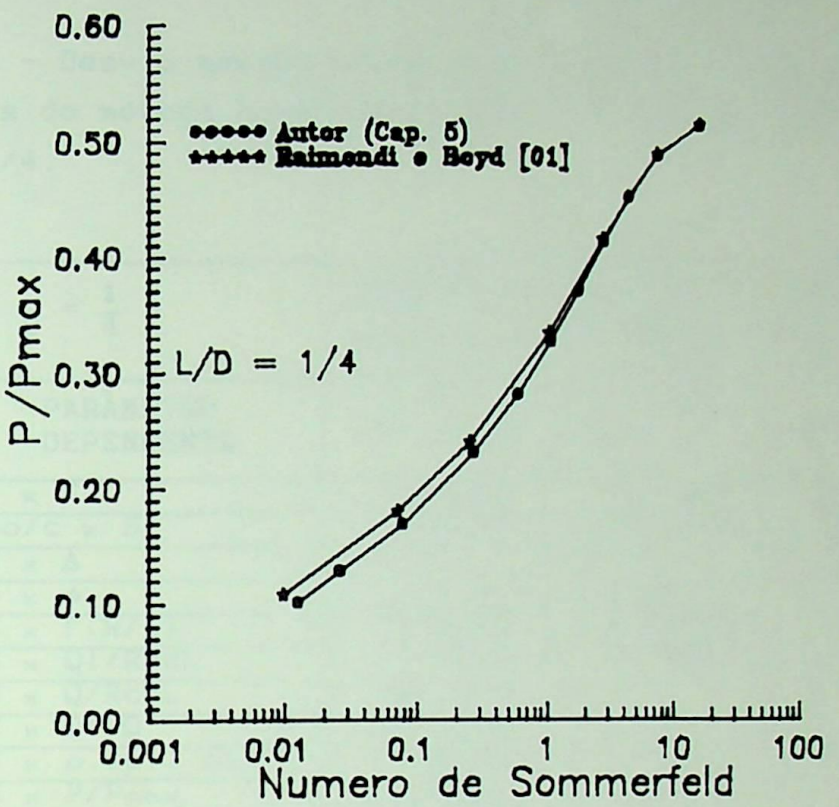


Fig. 6.15 - Comparação de S x P/Pmax para L/D=1/4

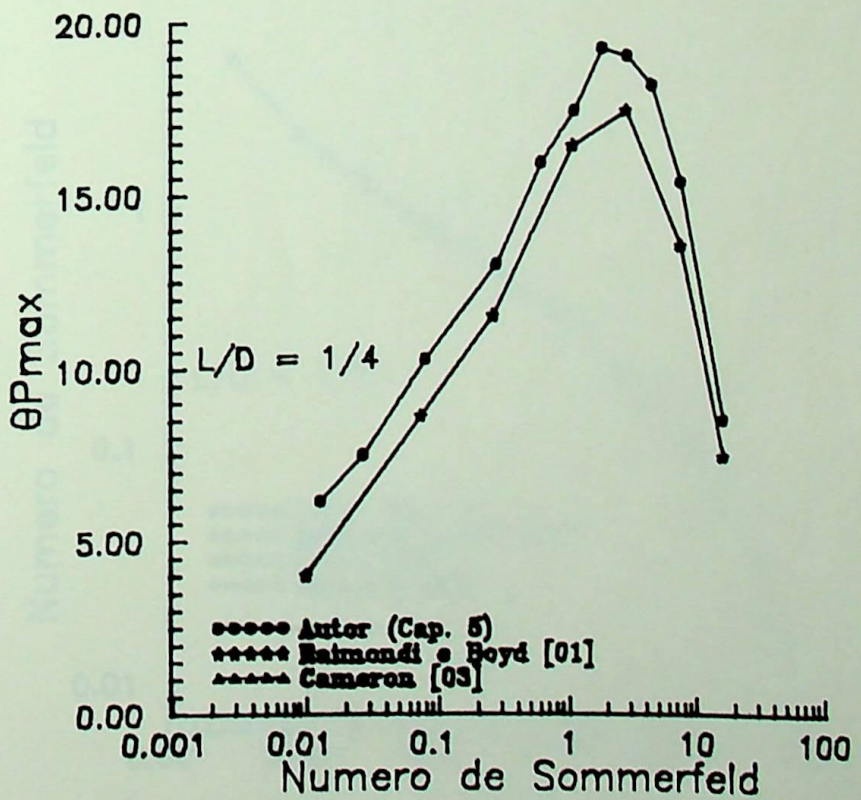


Fig. 6.16 - Comparação de S x $\theta_{P_{max}}$ para L/D=1/4

Tabela 6.2 - Desvio máximo entre os resultados dos parâmetros dependentes do método numérico do autor e outros pesquisadores para L/D=1/4.

$\frac{L}{D} = \frac{1}{4}$		DESVIO MÁXIMO ENTRE RESULTADOS NUMÉRICOS DO AUTOR (Cap. 5) E		
Fig.	PARÂMETRO DEPENDENTE	Ref.[01]	Ref.[13]	Ref.[03]
6.6	$\varepsilon \times S$	22,307%	18,148%	22,307%
6.7	$ho/c \times S$	22,307%	18,148%	22,307%
6.8	$S \times \Delta$	–	–	-8,733%
6.9	$S \times \phi$	17,062%	13,711%	17,198%
6.10	$S \times f(R/c)$	19,264%	33,035%	11,660%
6.11	$S \times Q1/RcNL$	-0,975%	-0,487%	-0,975%
6.12	$S \times Q/RcNL$	-0,773%	–	–
6.13	$S \times Q1/Q$	-0,558%	–	–
6.14	$S \times \rho.cp.J.\Delta t/P$	19,836%	–	–
6.15	$S \times P/P_{max}$	-6,930%	–	–
6.16	$S \times \theta P_{max}$	34,842%	–	34,842%

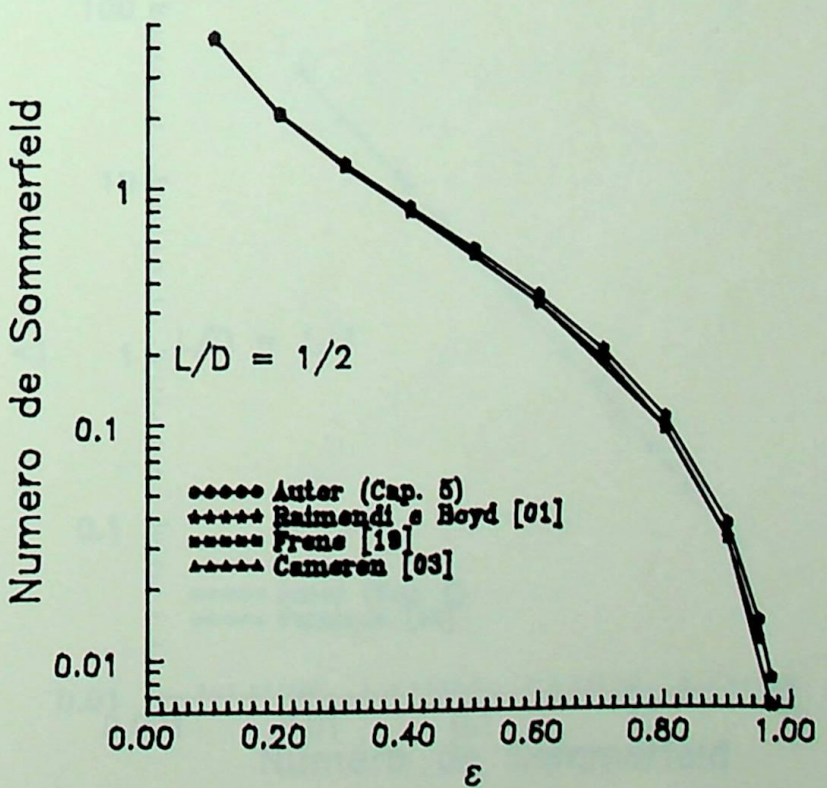


Fig. 6.17 - Comparação de $\varepsilon \times S$ para L/D=1/2

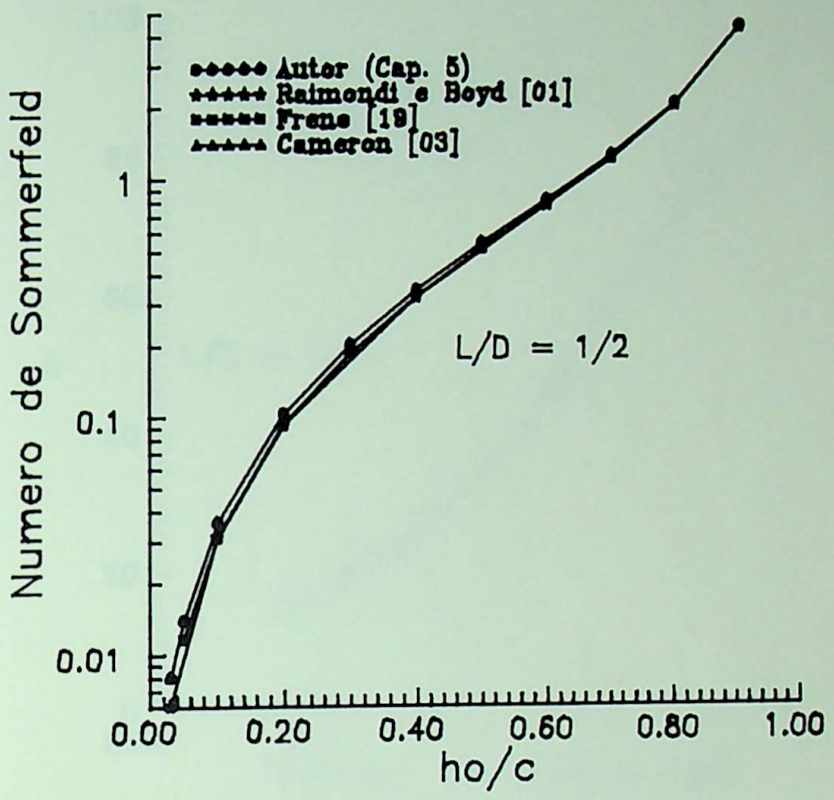


Fig. 6.18 - Comparação de ho/c x S para L/D=1/2

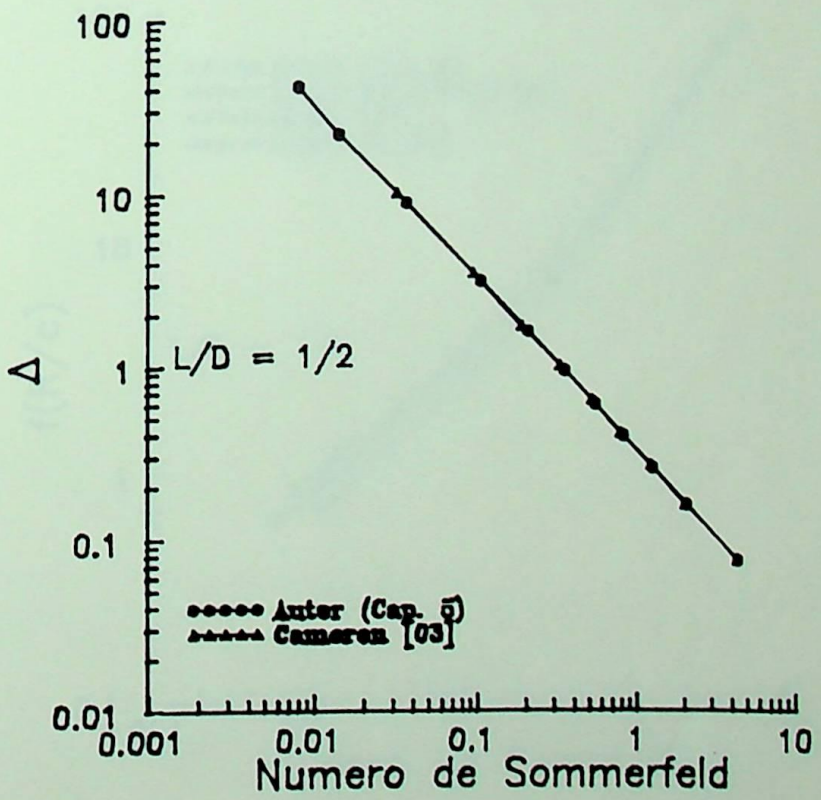


Fig. 6.19 - Comparação de S x Δ para L/D=1/2

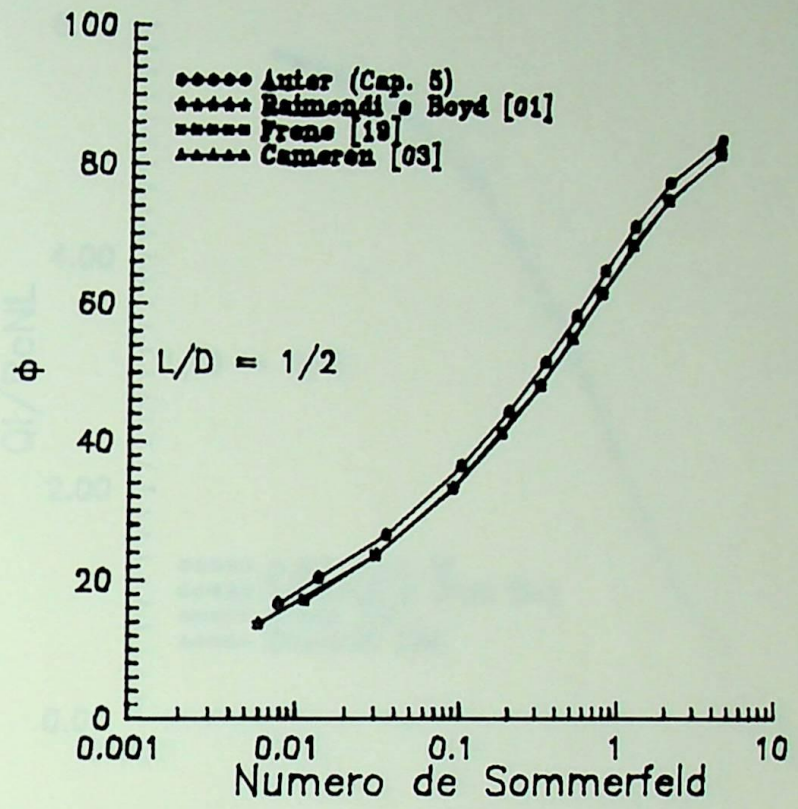


Fig. 6.20 - Comparação de S x ϕ para L/D=1/2

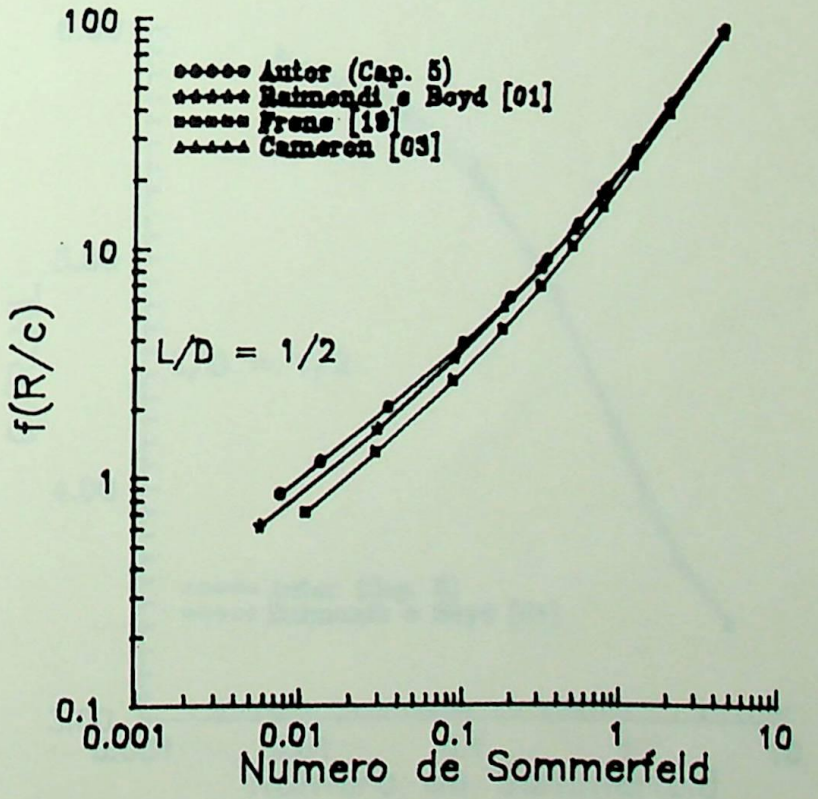


Fig. 6.21 - Comparação de S x f(R/c) para L/D=1/2

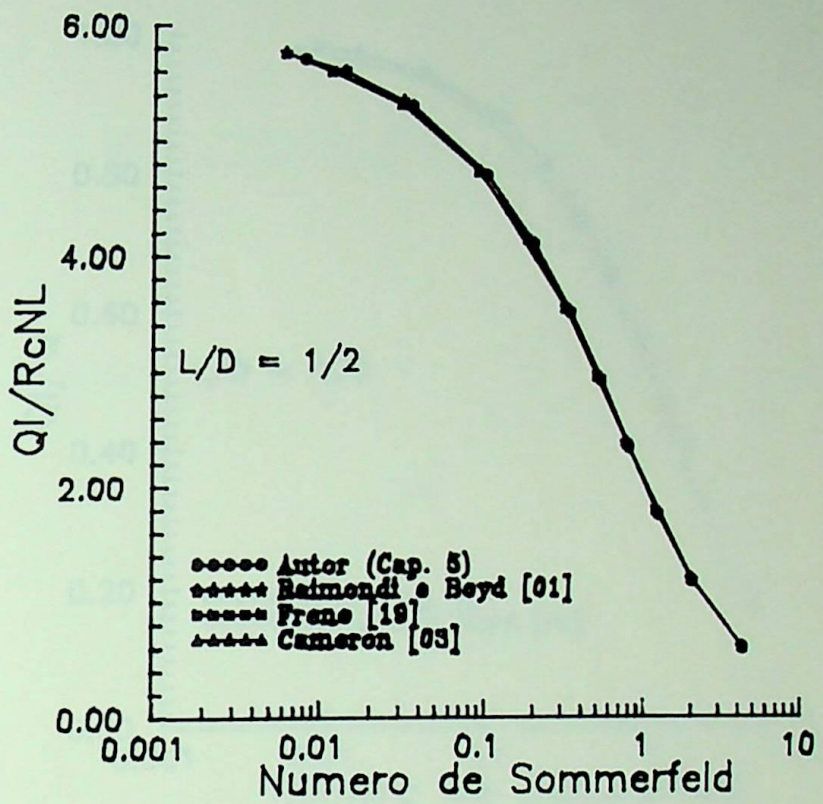


Fig. 6.22 - Comparação de S x Ql/RcNL para L/D=1/2

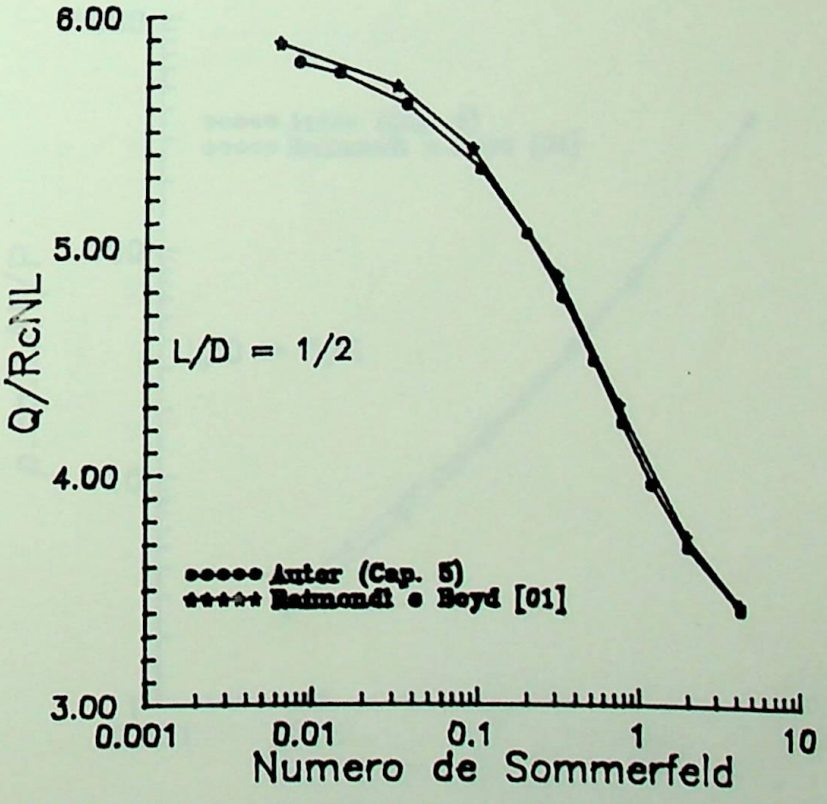


Fig. 6.23 - Comparação de S x Q/RcNL para L/D=1/2

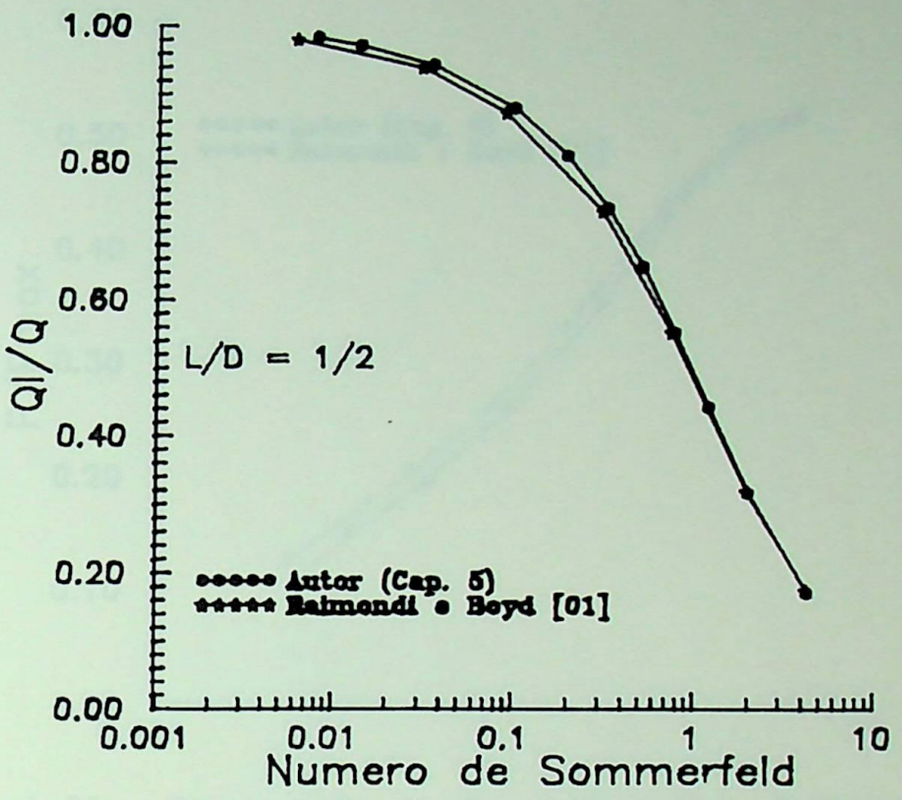


Fig. 6.24 - Comparação de S x Ql/Q para L/D=1/2

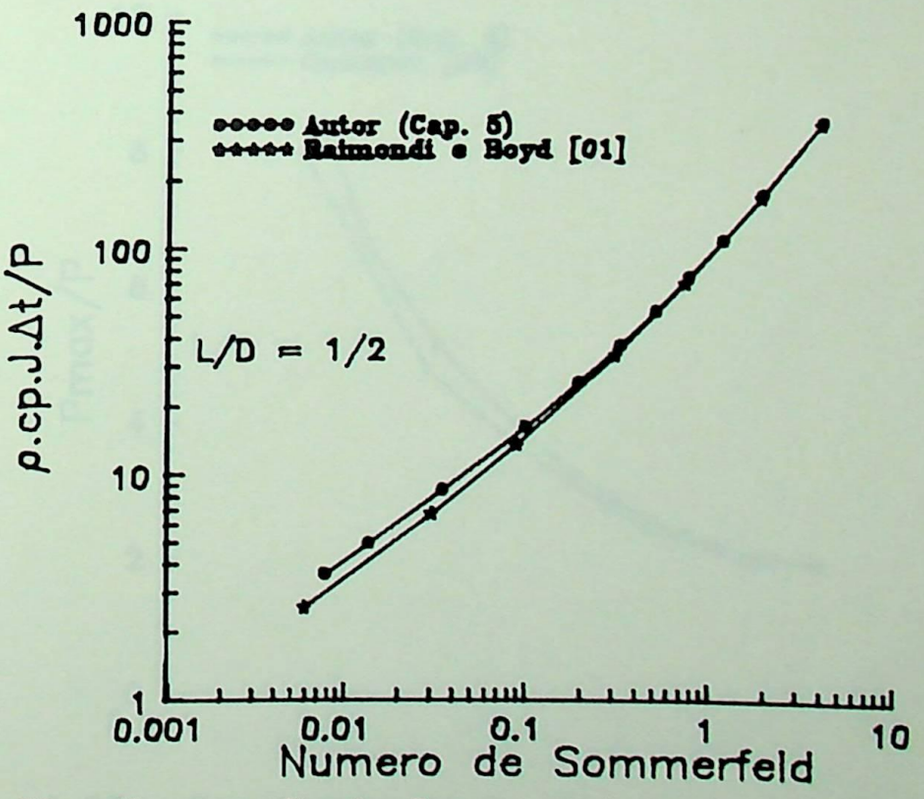


Fig. 6.25 - Comparação de S x ρ.cp.J.Δt/P para L/D=1/2

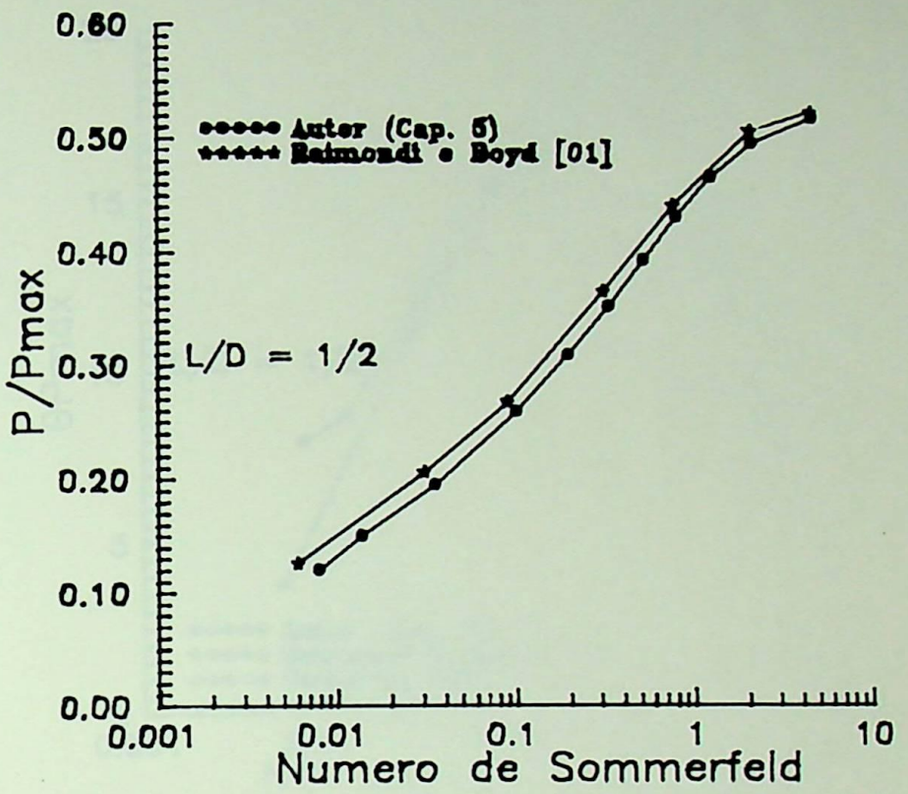


Fig. 6.26 - Comparação de S x P/P_{max} para L/D=1/2

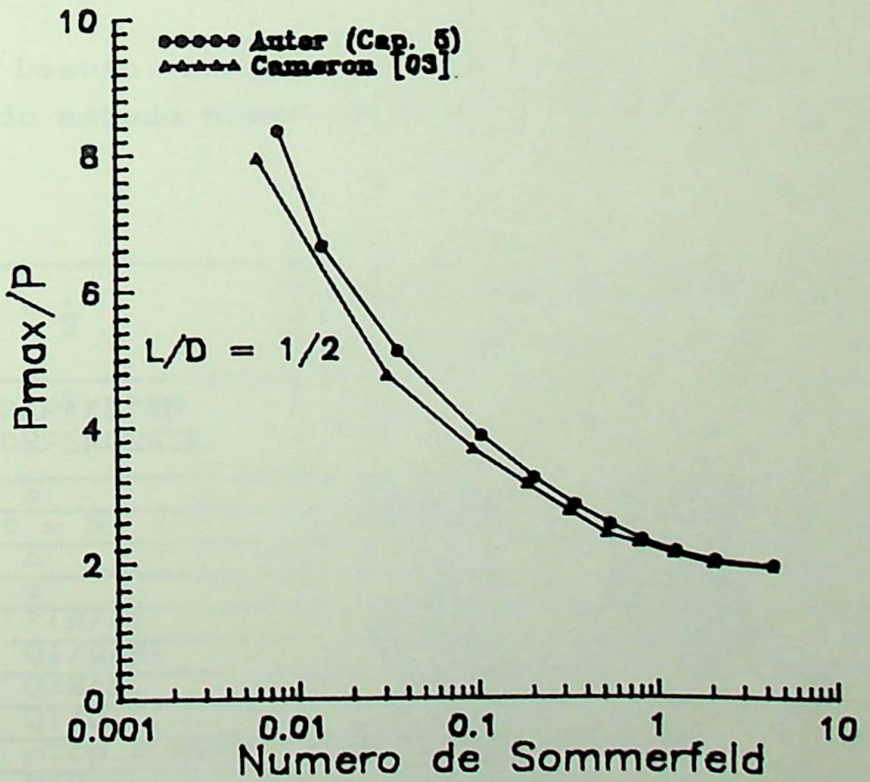


Fig. 6.27 - Comparação de S x P_{max}/P para L/D=1/2

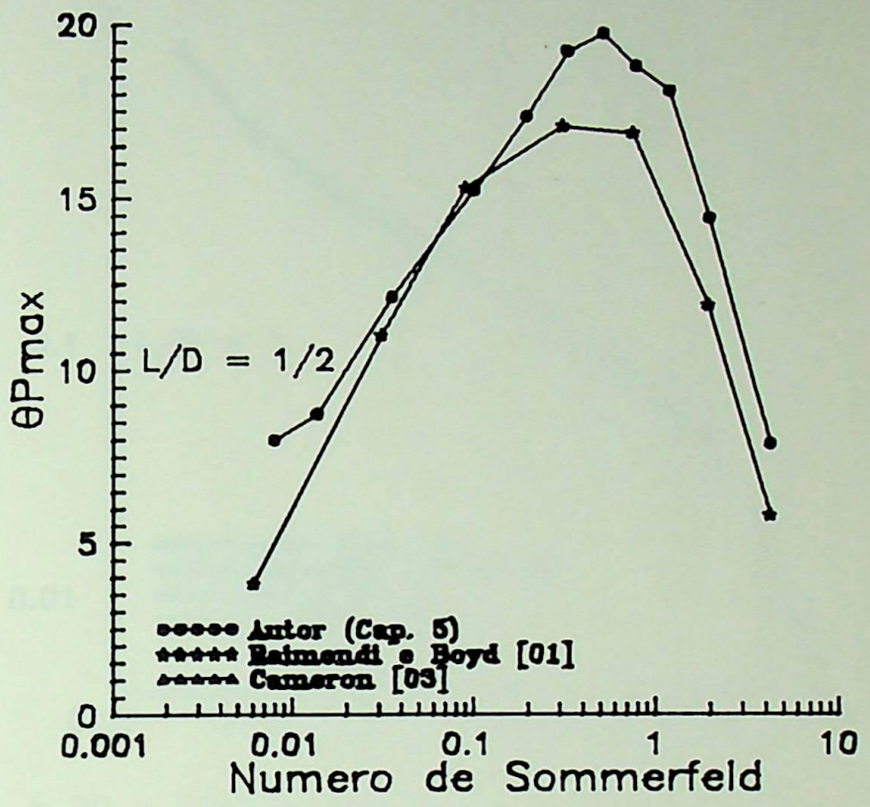


Fig. 6.28 - Comparação de S x $\theta_{P_{max}}$ para L/D=1/2

Tabela 6.3 - Desvio máximo entre os resultados dos parâmetros dependentes do método numérico do autor e outros pesquisadores para L/D=1/2.

$\frac{L}{D} = \frac{1}{2}$		DESVIO MÁXIMO ENTRE RESULTADOS NUMÉRICOS DO AUTOR (Cap. 5) E		
Fig.	PARÂMETRO DEPENDENTE	Ref.[01]	Ref.[13]	Ref.[03]
6.17	ε x S	23,875%	17,142%	23,875%
6.18	ho/c x S	23,875%	17,142%	23,875%
6.19	S x Δ	–	–	-14,331%
6.20	S x ϕ	17,078%	16,342%	17,380%
6.21	S x f(R/c)	27,467%	39,810%	20,039%
6.22	S x Q1/RcNL	-2,310%	-1,551%	-1,891%
6.23	S x Q/RcNL	-1,869%	–	–
6.24	S x Q1/Q	-1,764%	–	–
6.25	S x ρ.cp.J.Δt/P	28,631%	–	–
6.26	S x P/Pmax	-5,641%	–	–
6.27	S x Pmax/P	–	–	7,135%
6.28	S x θPmax	52,303%	–	52,303%

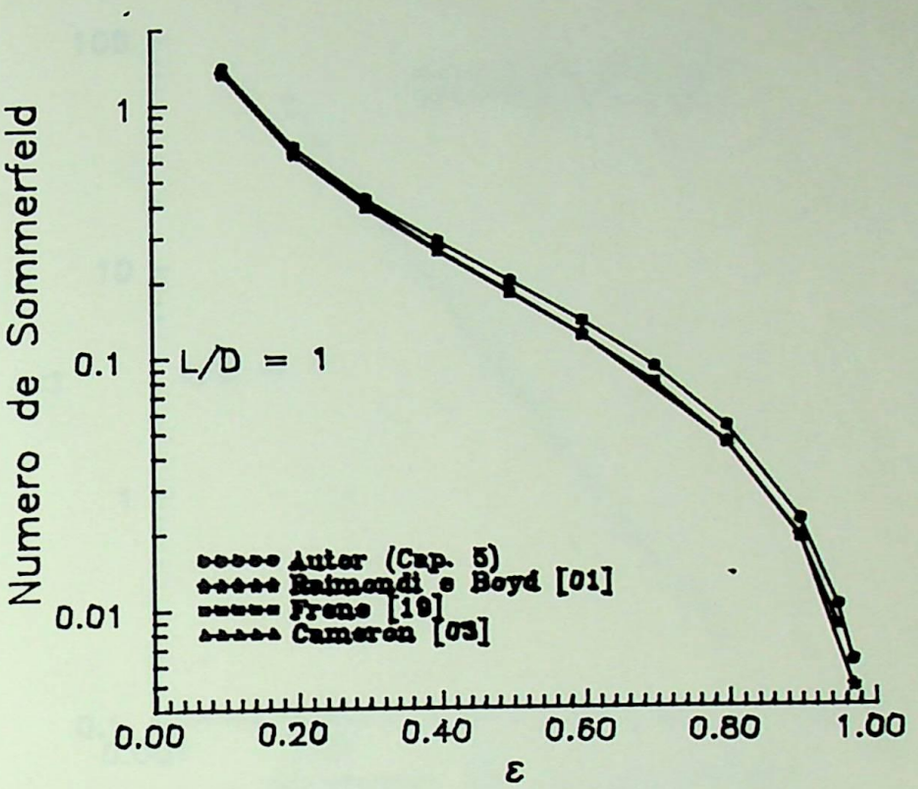


Fig. 6.29 - Comparação de ε x S para L/D=1

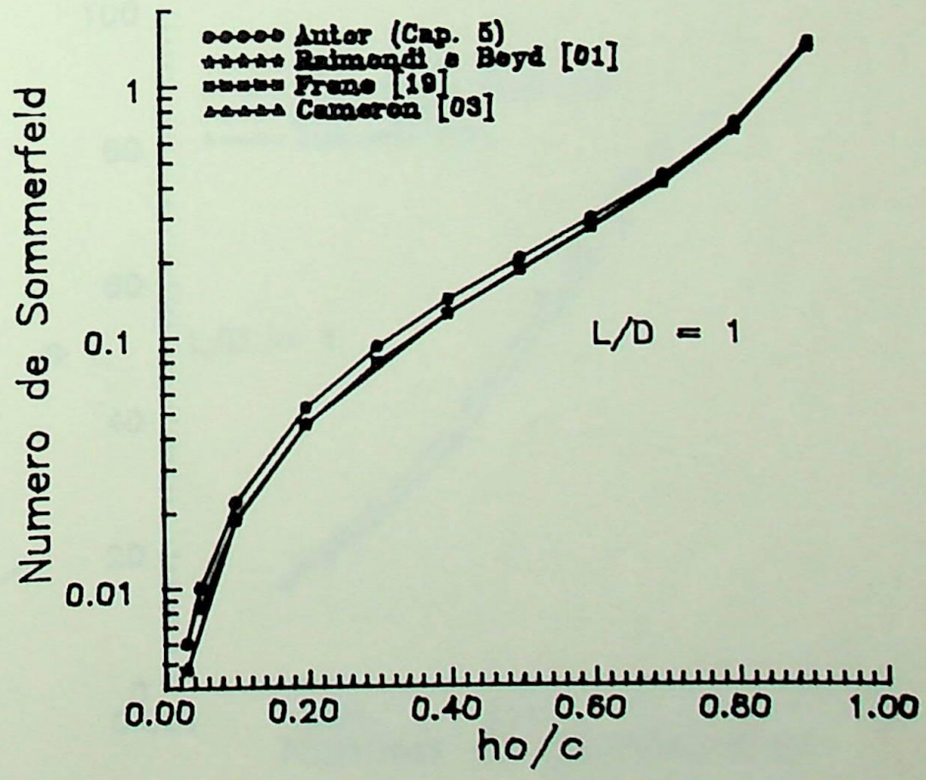


Fig. 6.30 - Comparação de ho/c x S para L/D=1

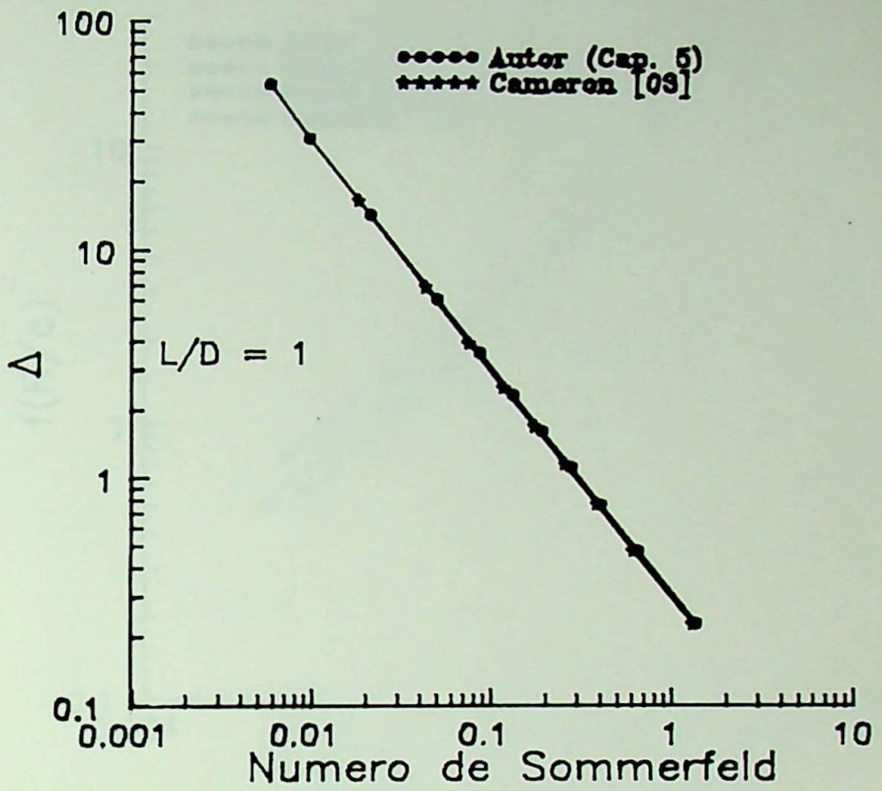


Fig. 6.31 - Comparação de S x Δ para L/D=1

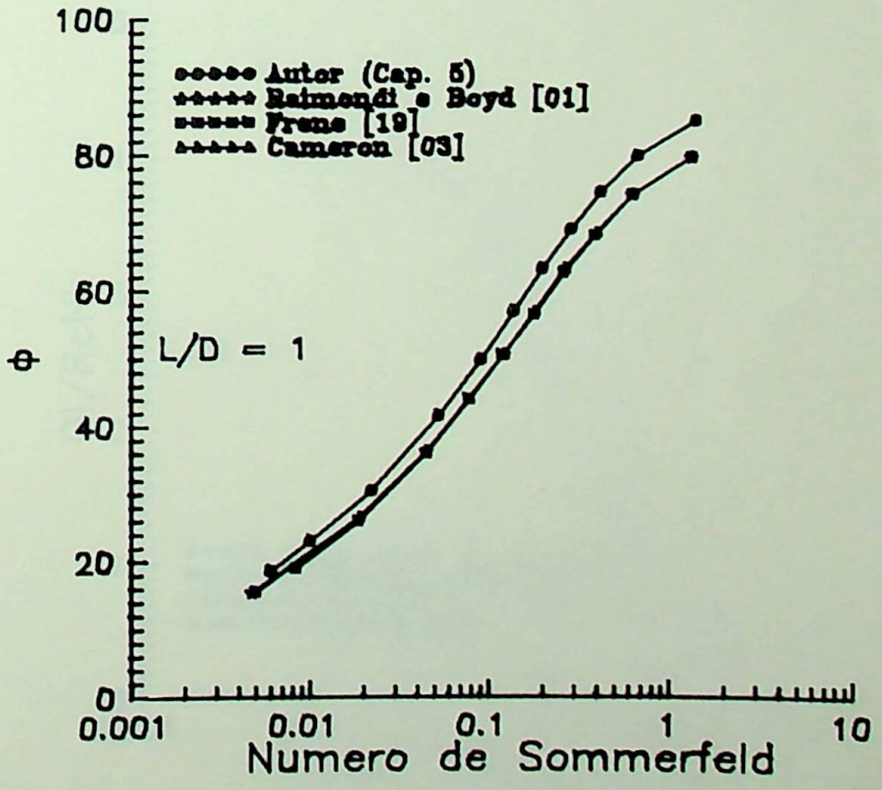


Fig. 6.32 - Comparação de S x ϕ para L/D=1

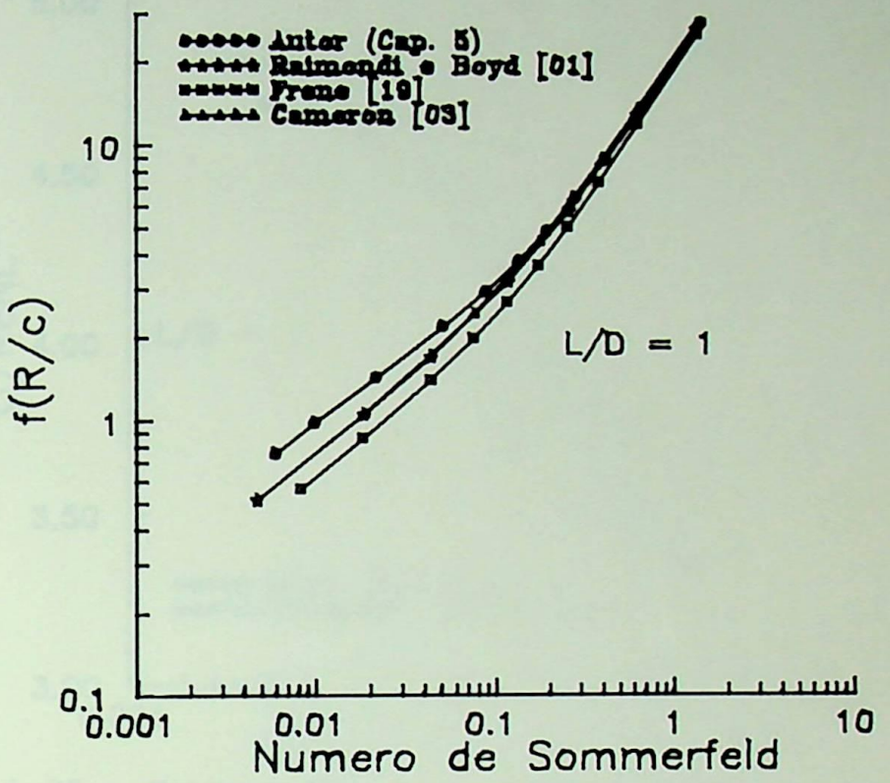


Fig. 6.33 - Comparação de S x f(R/c) para L/D=1

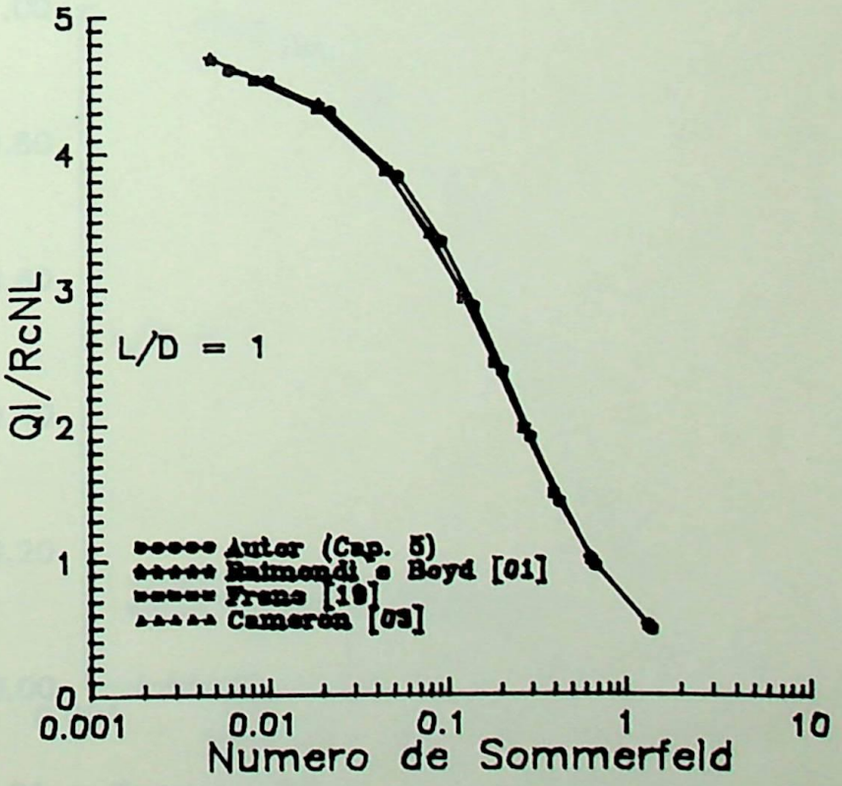


Fig. 6.34 - Comparação de S x Ql/RcNL para L/D=1

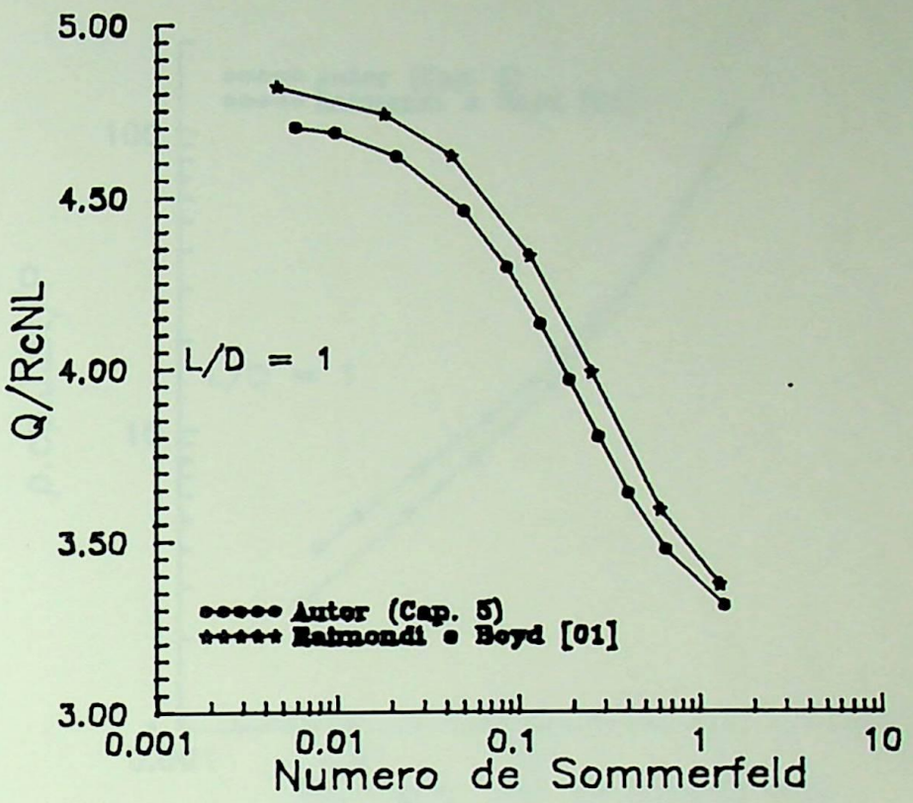


Fig. 6.35 - Comparação de S x Q/RcNL para L/D=1

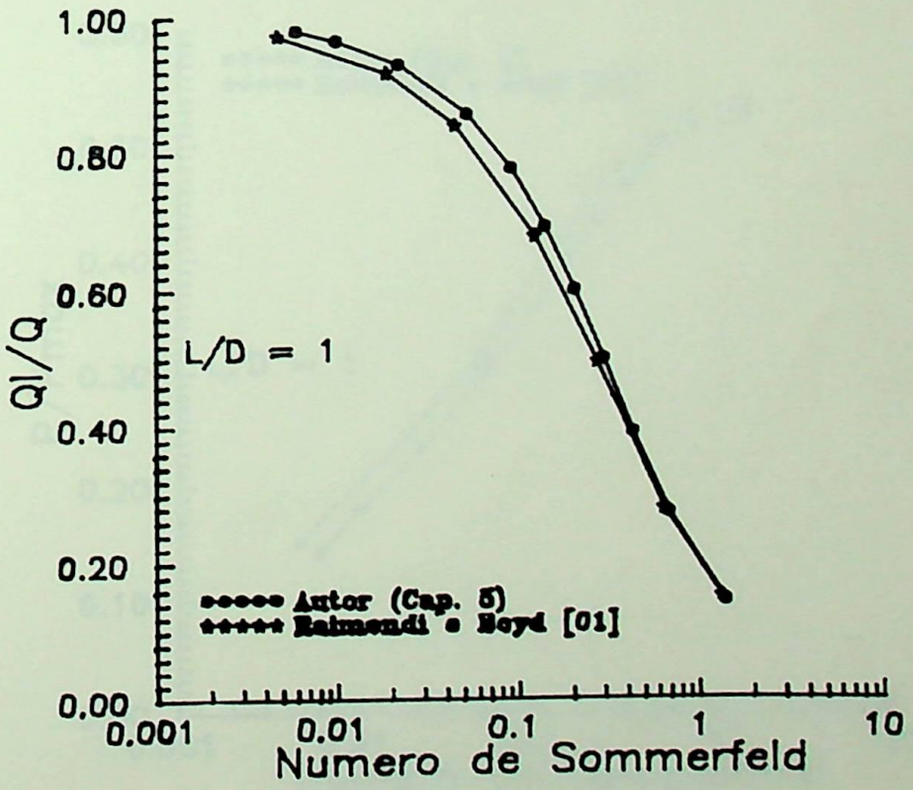


Fig. 6.36 - Comparação de S x Ql/Q para L/D=1

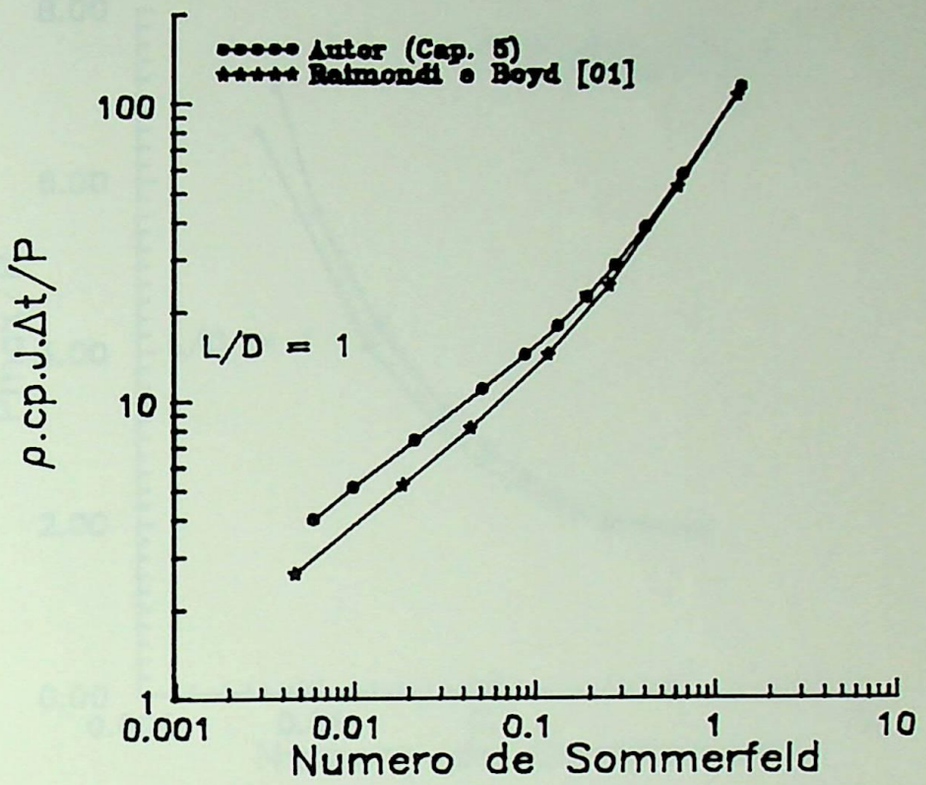


Fig. 6.37 - Comparação de S x ρ.cp.J.Δt/P para L/D=1

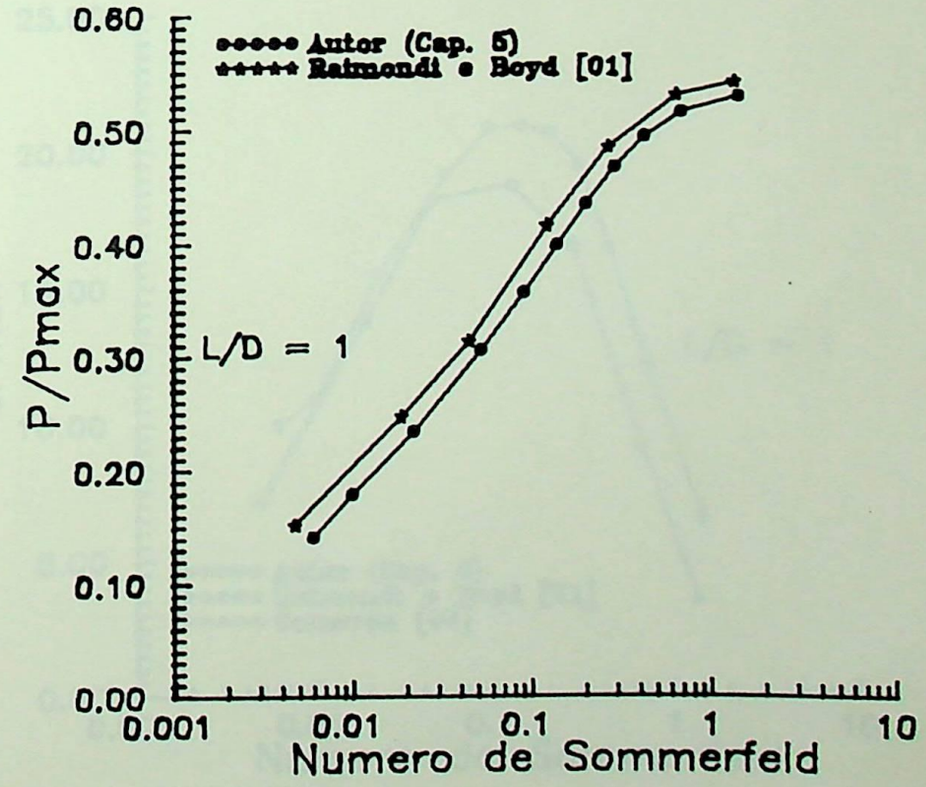


Fig. 6.38 - Comparação de S x P/P_{max} para L/D=1

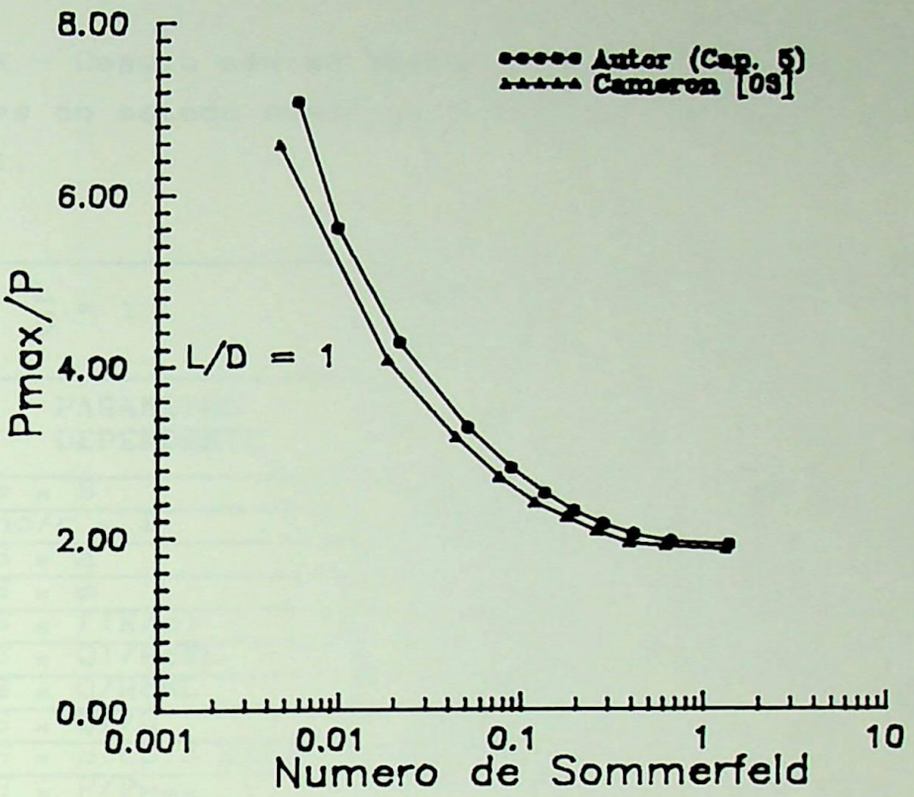


Fig. 6.39 - Comparação de S x P_{max}/P para L/D=1

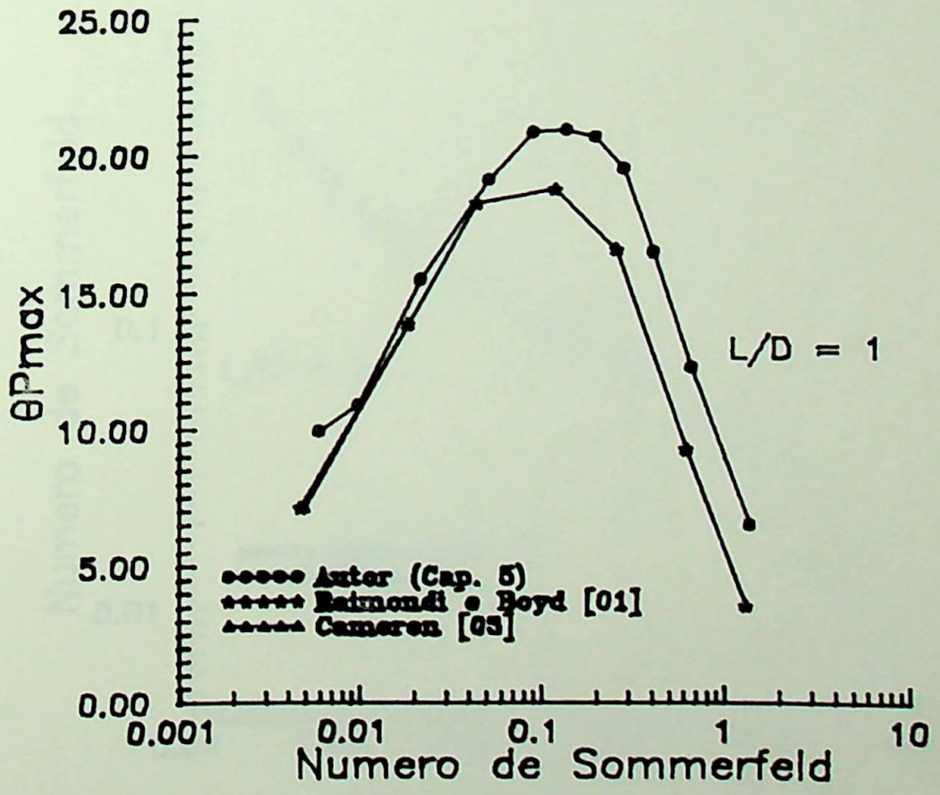


Fig. 6.40 - Comparação de S x $\theta_{P_{max}}$ para L/D=1

Tabela 6.4 - Desvio máximo entre os resultados dos parâmetros dependentes do método numérico do autor e outros pesquisadores para L/D=1.

$\frac{L}{D} = 1$		DESVIO MÁXIMO ENTRE RESULTADOS NUMÉRICOS DO AUTOR (Cap. 5) E		
Fig.	PARÂMETRO DEPENDENTE	Ref.[01]	Ref.[13]	Ref.[03]
6.29	$\varepsilon \times S$	21,000%	16,900%	21,000%
6.30	$ho/c \times S$	21,000%	16,900%	21,000%
6.31	$S \times \Delta$	–	–	92,654%
6.32	$S \times \phi$	16,738%	17,588%	16,576%
6.33	$S \times f(R/c)$	31,739%	42,492%	26,080%
6.34	$S \times Q1/RcNL$	-6,197%	-5,672%	-5,042%
6.35	$S \times Q/RcNL$	-4,917%	–	–
6.36	$S \times Q1/Q$	-4,166%	–	–
6.37	$S \times \rho.cp.J.\Delta t/P$	33,873%	–	–
6.38	$S \times P/Pmax$	-7,042%	–	–
6.39	$S \times Pmax/P$	–	–	7,088%
6.40	$S \times \theta Pmax$	28,326%	–	28,326%

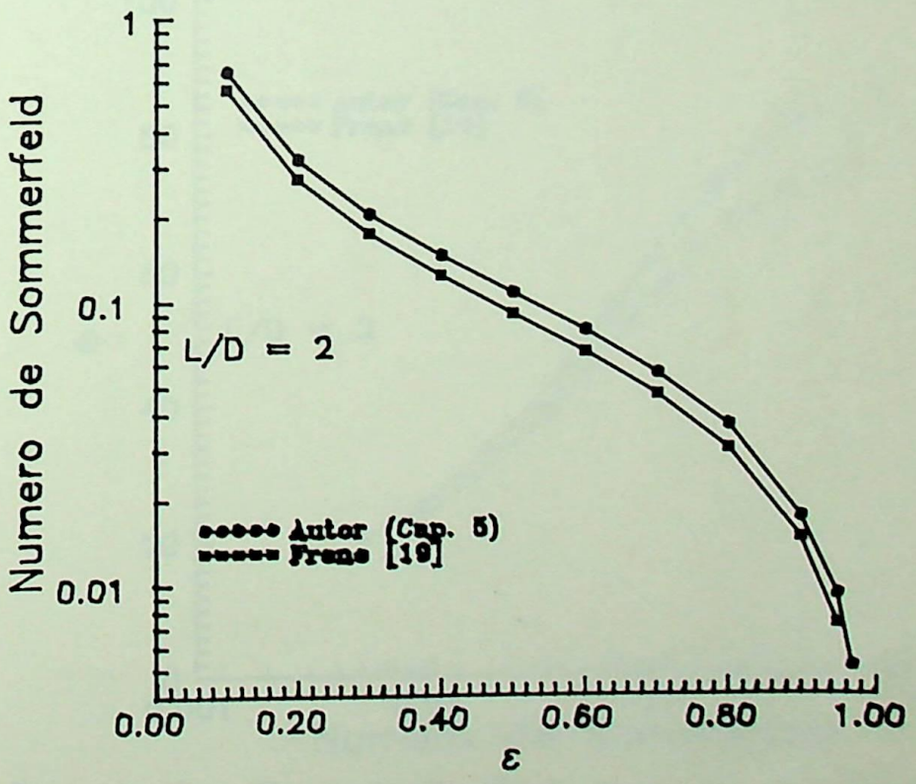


Fig. 6.41 - Comparação de $\varepsilon \times S$ para L/D=2

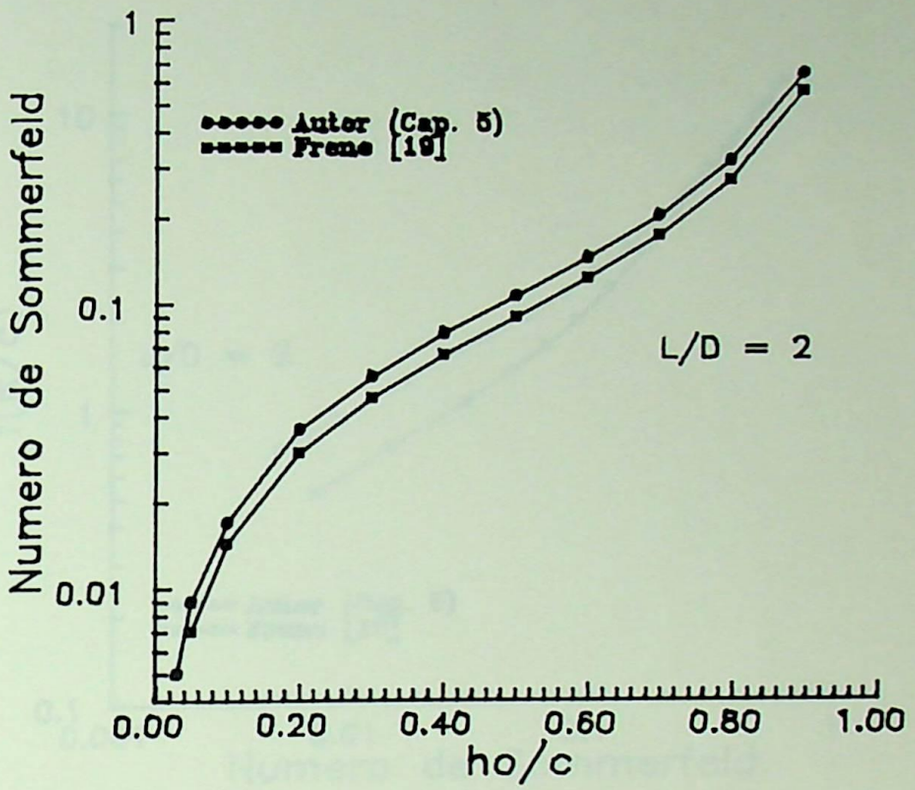


Fig. 6.42 - Comparação de ho/c x S para L/D=2

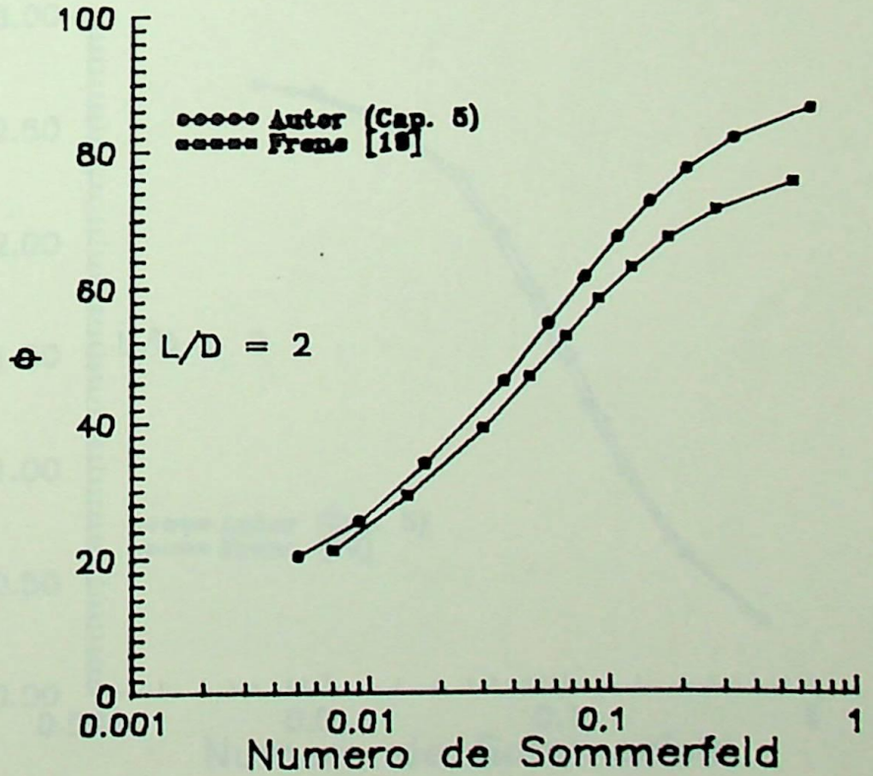


Fig. 6.43 - Comparação de S x ϕ para L/D=2

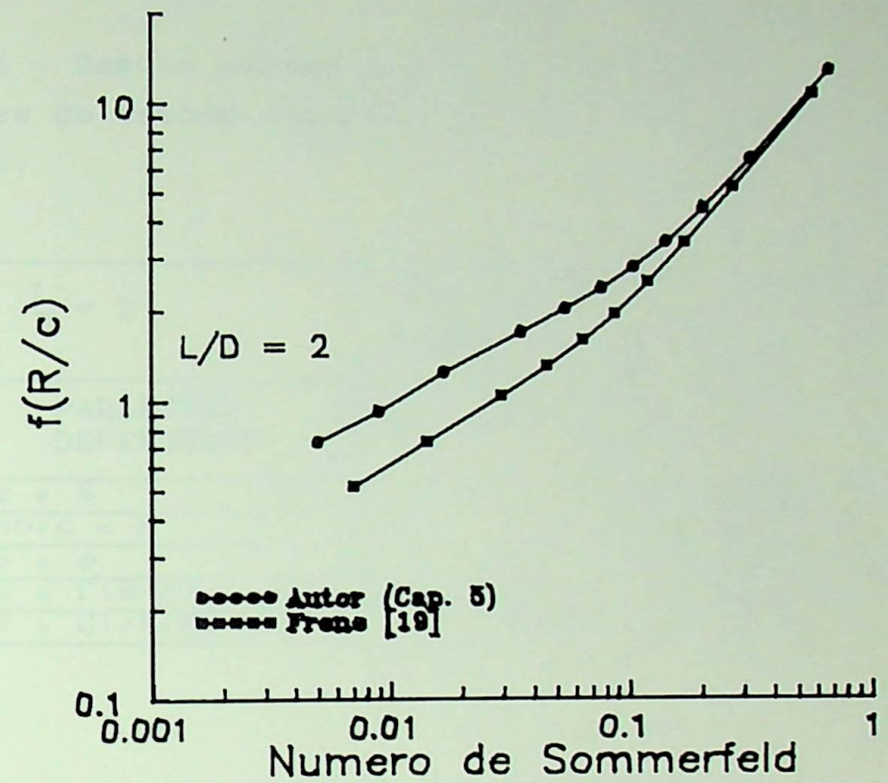


Fig. 6.44 - Comparação de S x f(R/c) para L/D=2

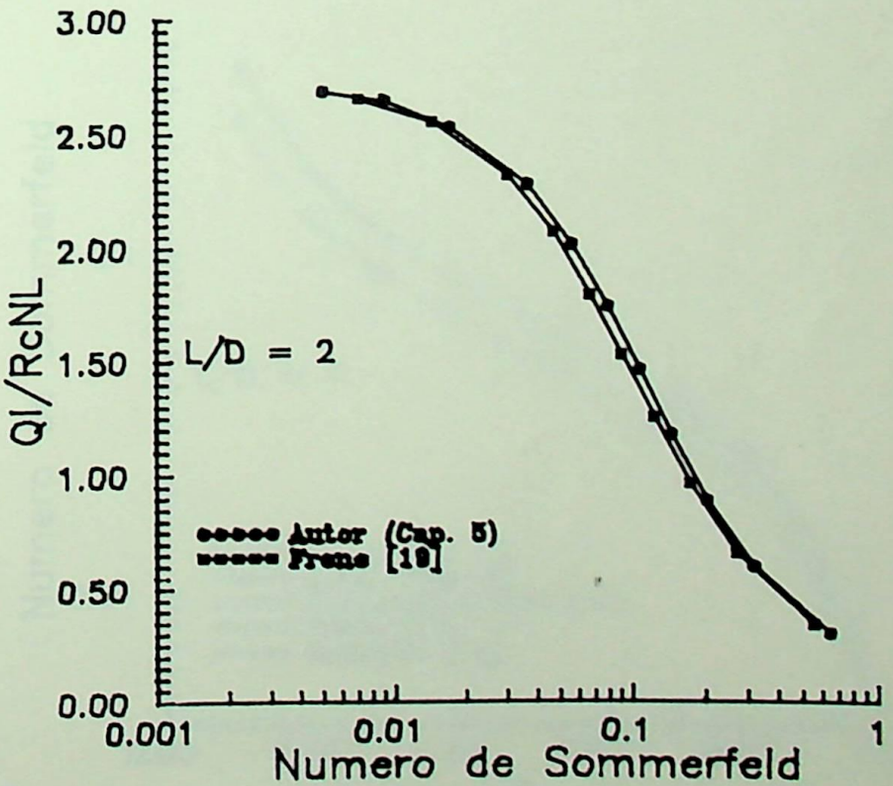


Fig. 6.45 - Comparação de S x Ql/RcNL para L/D=2

Tabela 6.5 - Desvio máximo entre os resultados dos parâmetros dependentes do método numérico do autor e outros pesquisadores para L/D=2.

$\frac{L}{D} = 2$		DESVIO MÁXIMO ENTRE RESULTADOS NUMÉRICOS DO AUTOR (Cap. 5) E		
Fig.	PARÂMETRO DEPENDENTE	Ref.[01]	Ref.[13]	Ref.[03]
6.41	$\varepsilon \times S$	–	21,444%	–
6.42	$ho/c \times S$	–	21,444%	–
6.43	$S \times \phi$	–	17,005%	–
6.44	$S \times f(R/c)$	–	43,865%	–
6.45	$S \times Q1/RcNL$	–	-13,468%	–

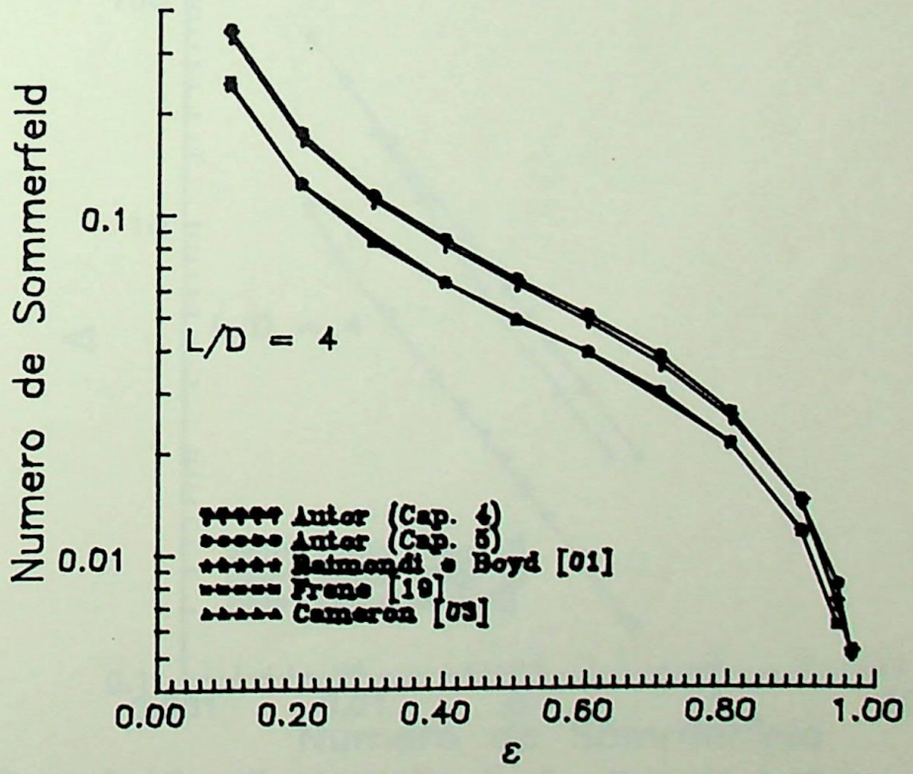


Fig. 6.46 - Comparação de $\varepsilon \times S$ para L/D=4

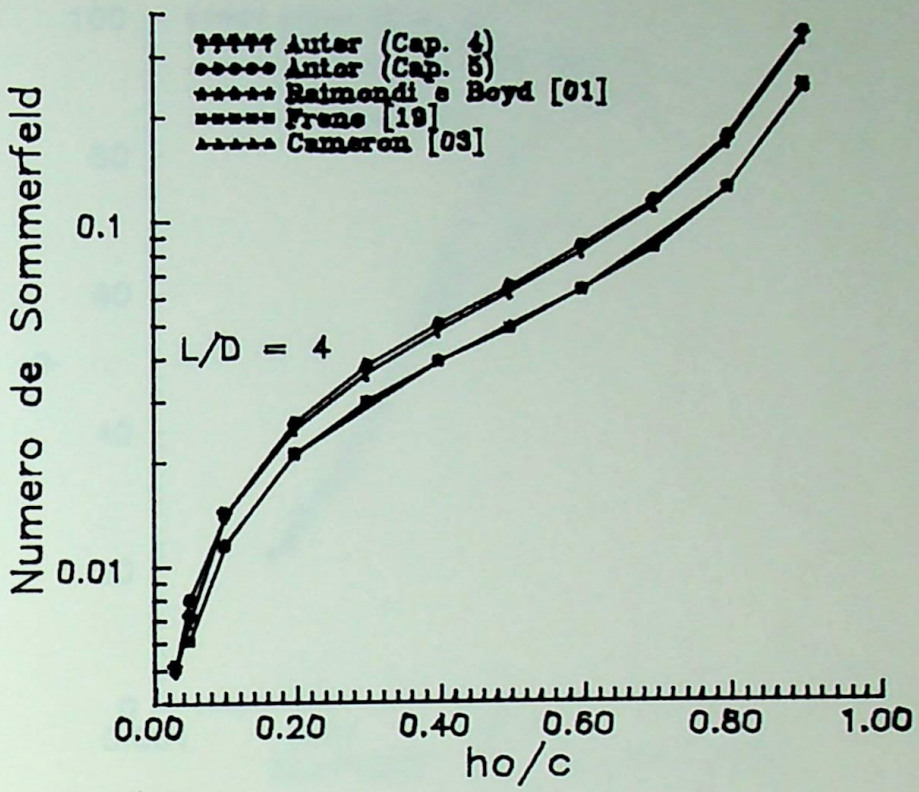


Fig. 6.47 - Comparação de ho/c x S para L/D=4

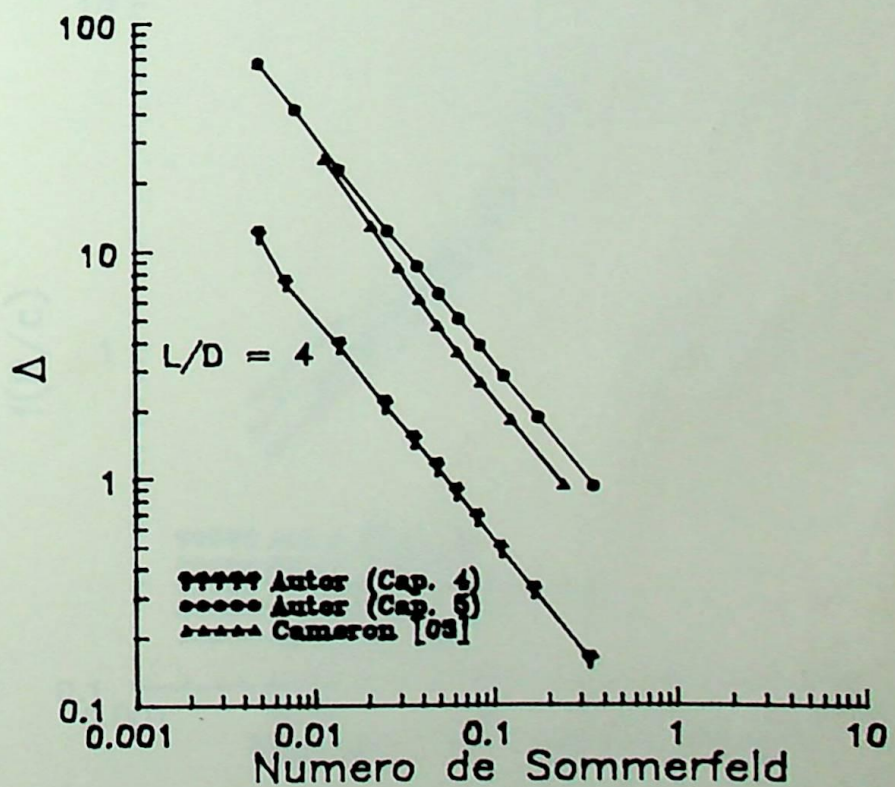


Fig. 6.48 - Comparação de S x Δ para L/D=4

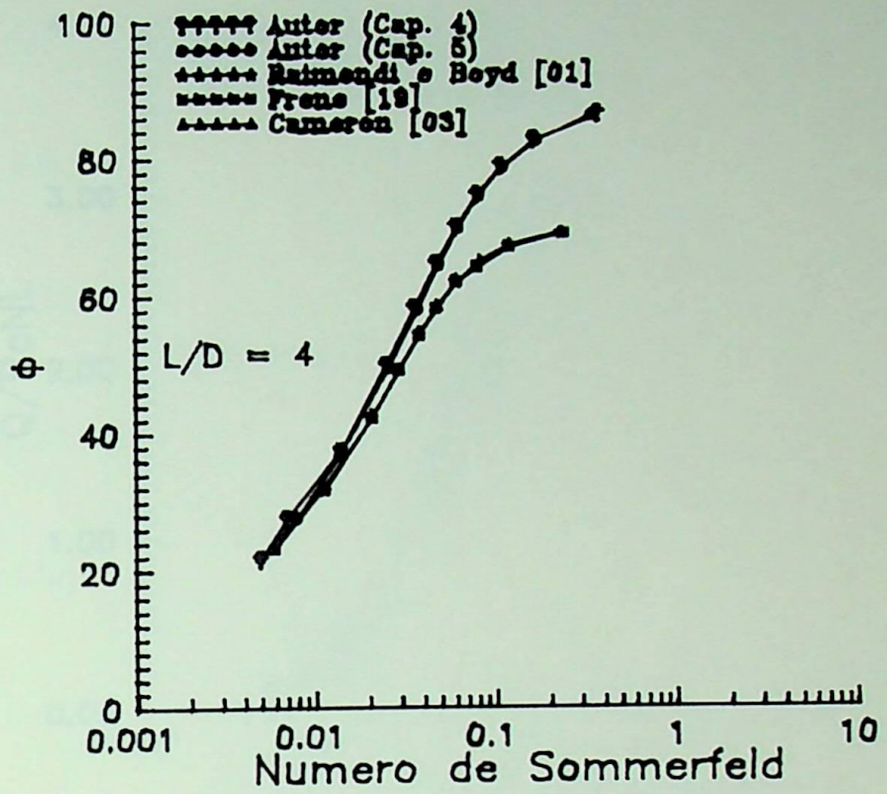


Fig. 6.49 - Comparação deS x ϕ para L/D=4

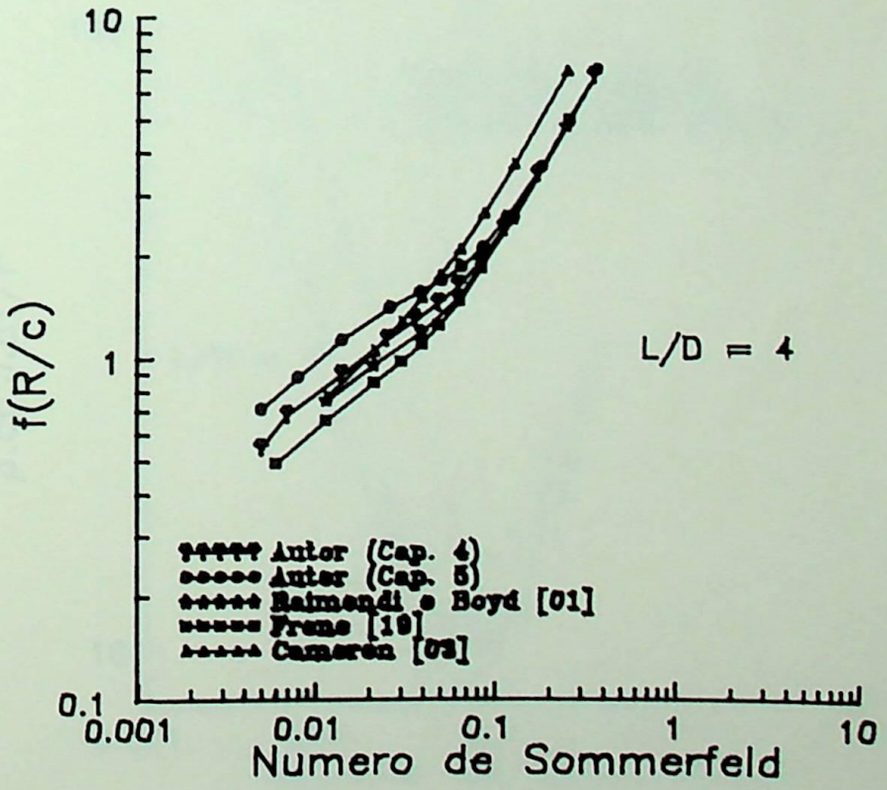


Fig. 6.50 - Comparação de S x f(R/c) para L/D=4

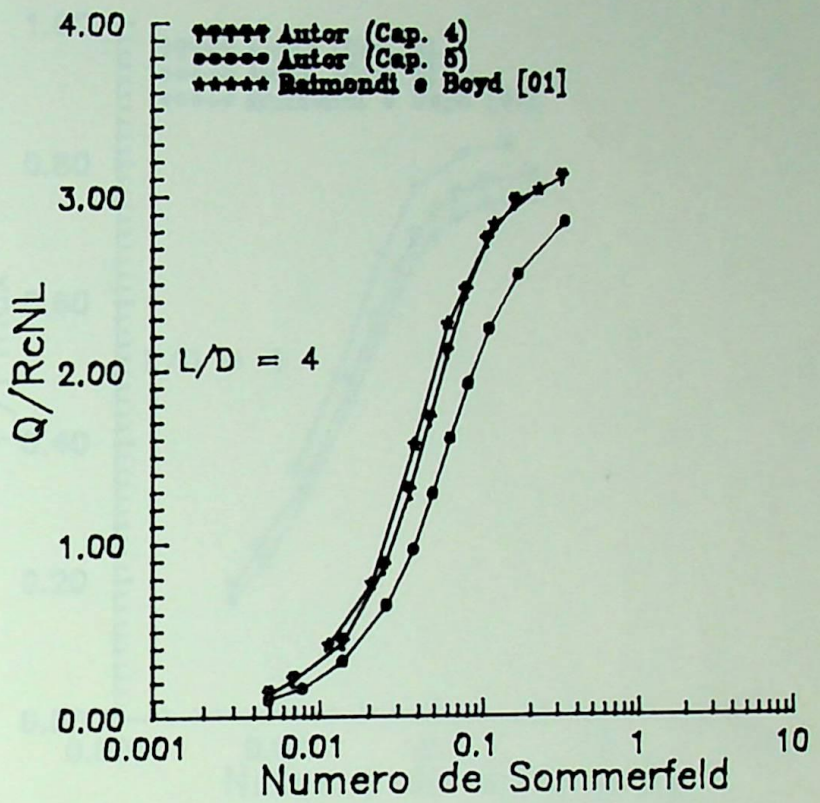


Fig. 6.51 - Comparação de S x Q/RcNL para L/D=4

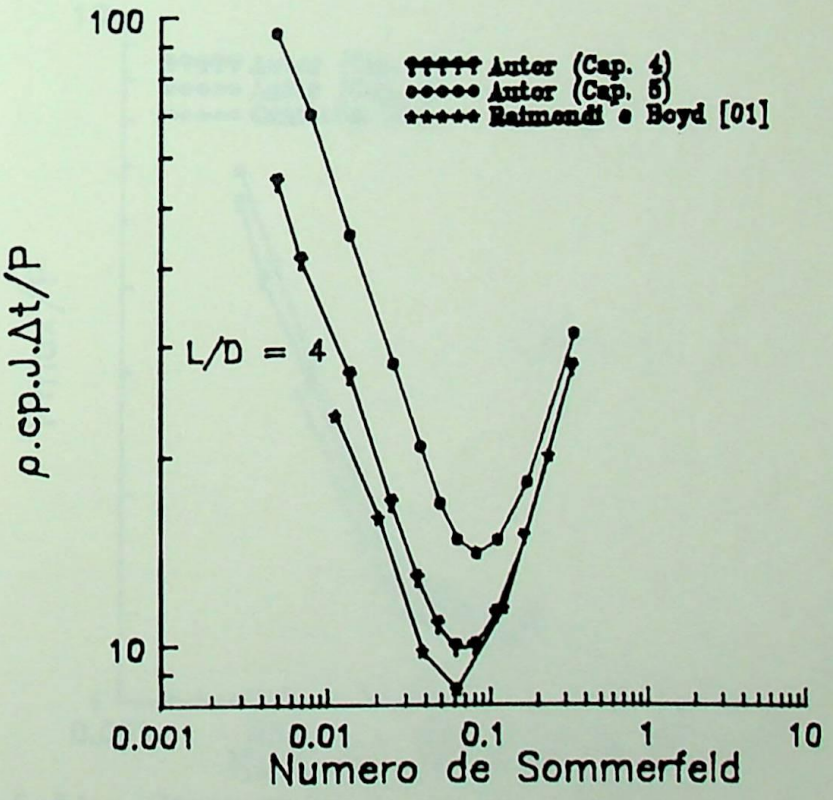


Fig. 6.52 - Comparação de S x ρ.cp.J.Δt/P para L/D=4

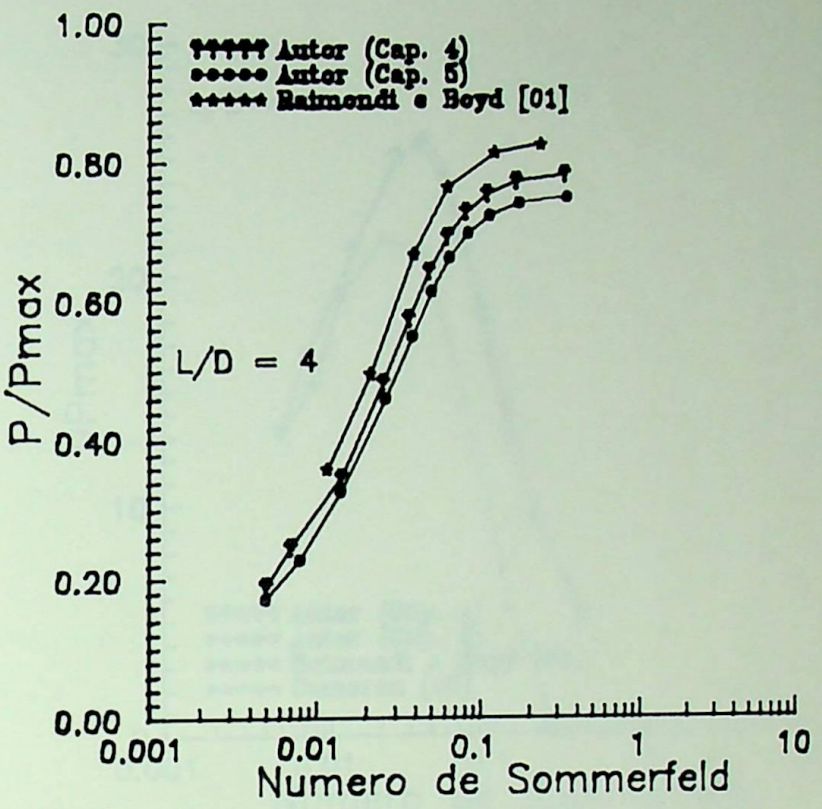


Fig. 6.53 - Comparação de S x P/P_{max} para L/D=4

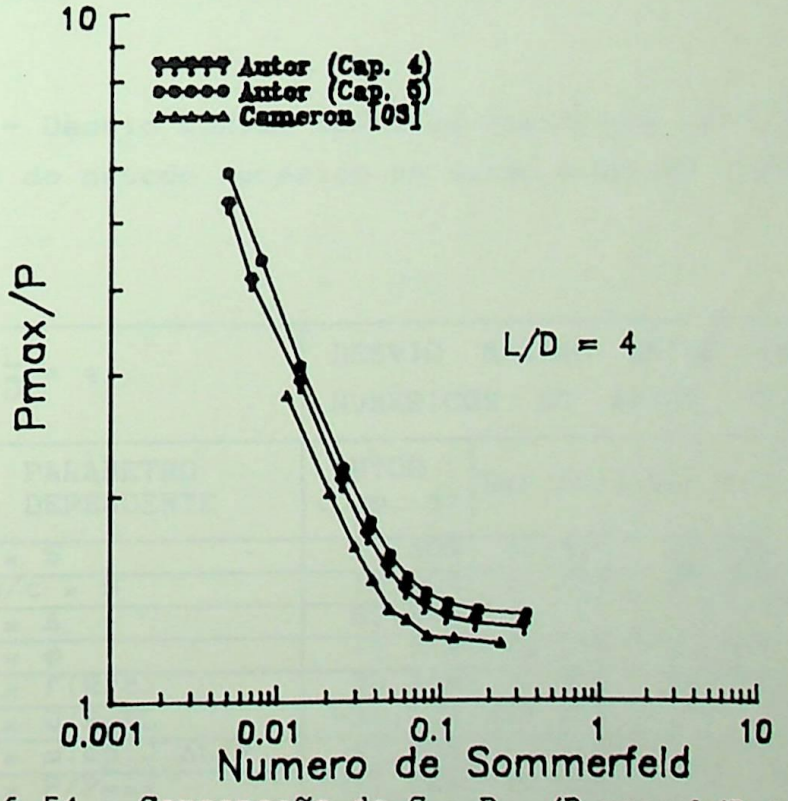


Fig. 6.54 - Comparação de S x P_{max}/P para L/D=4

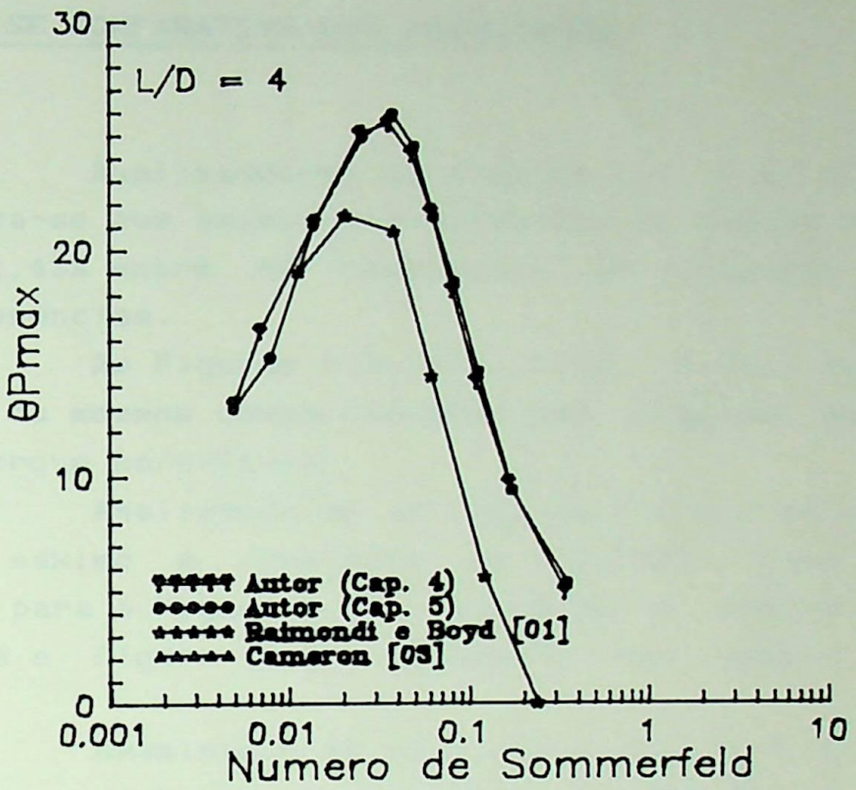


Fig. 6.55 - Comparação de S x $\theta_{P_{max}}$ para L/D=4

Tabela 6.6 - Desvio máximo entre os resultados dos parâmetros dependentes do método numérico do autor e outros pesquisadores para L/D=4.

$\frac{L}{D} = 4$		DESVIO MÁXIMO ENTRE RESULTADOS NUMÉRICOS DO AUTOR (Cap. 5) E			
Fig.	PARÂMETRO DEPENDENTE	AUTOR (Cap. 4)	Ref.[01]	Ref.[13]	Ref.[03]
6.46	ε x S	12,50%	31,43%	29,43%	31,43%
6.47	ho/c x S	12,50%	31,43%	29,43%	31,43%
6.48	S x Δ	82,89%	–	–	-11,74%
6.49	S x ϕ	-1,51%	19,93%	20,05%	19,93%
6.50	S x f(R/c)	23,14%	33,45%	44,05%	32,22%
6.51	S x Q/RcNL	-34,62%	-29,25%	–	–
6.52	S x ρ.cp.J.Δt/P	41,90%	48,51%	–	–
6.53	S x P/Pmax	-11,18%	-10,28%	–	–
6.54	S x Pmax/P	10,29%	–	–	10,40%
6.55	S x θPmax	46,23%	40,46%	–	40,46%

6.1 - ANÁLISE COMPARATIVA DOS RESULTADOS

Analisando-se as Figuras 6.1, 6.6, 6.17, 6.29 e 6.41 observa-se que existe uma diferença de desvio variando de 3,292% a 31,43% entre os resultados do presente autor com outras referências.

As Figuras 6.2, 6.7, 6.18, 6.30, 6.42 e 6.47 apresentam os mesmos comportamentos das figuras anteriormente citadas, porque $ho/c=(1-\varepsilon)$.

Analisando-se as Figuras 6.8 e 6.19 nota-se que o desvio máximo é crescente de -8,733% para -14,331%, entretanto para a Figura 6.31, obteve-se o desvio máximo de 92,654%. Já a Figura 6.48 apresenta uma desvio máximo de 82,89%.

Examinando-se as Figuras 6.3, 6.9, 6.20, 6.32, e 6.43, nota-se que houve uma variação em torno de 17% e na Figura 6.49, obteve-se a variação em torno de 20%.

Analisando-se as Figuras 6.4, 6.10, 6.21, 6.33, 6.44 e 6.50 verificou-se que o desvio máximo variou de 11,660% a 44,05%.

Verificando-se as figuras 6.11, 6.22, 6.34 e 6.45 obteve-se uma variação crescentes de -0,487% a -13,468%.

Examinando-se as figuras 6.12, 6.23 e 6.35, obteve-se as variações crescentes de -0,773% até -4,917%. Para mancal longo na Figura 6.51 o desvio máximo é de -34,62%.

Verificando-se as Figuras 6.13, 6.24 e 6.36, há uma variação crescente de diferenças máximas de -0,558% a 4,166%.

Examinando-se as Figuras 6.14, 6.25 e 6.37, neste caso houve também uma variaçao crescente de 19,836% a 33,873% de desvio máximo. Para a Figura 6.52 observa-se um desvio máximo de 48,51%.

Analisando-se as Figuras 6.15, 6.26, 6.38 e 6.53 apresentou-se uma variação de -5,641% a -11,18%.

Verificando-se as Figuras 6.27, 6.39 e 6.54 obteve-se uma variação crescente de 7,135% a 10,40%.

Examinando-se as Figuras 6.5, 6.16, 6.28, 6.40 e 6.55 a variação oscila de 11,171% a 52,303%.

Concluindo, verifica-se em alguns casos uma variação relativamente grande em relação aos demais pesquisadores, porque foi considerada a condição de contorno de Sommerfeld/Gumbel, enquanto que outros usaram a condição de Reynolds.

6.2 - ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DOS PARÂMETROS

Conforme foi mencionado no Capítulo 1, o projetista usa os "parâmetros resultantes" obtidas pela fixação inicial dos chamados "parâmetros independentes". Dentro desta idéia, as seguintes comparações podem ser feitas pela análise do comportamento dos parâmetros, conforme as figuras apresentadas neste Capítulo.

Analisando-se as figuras em geral, verifica-se que valor muito reduzido do número de Sommerfeld (por exemplo S<0.08) implicam nas seguintes deficiências no comportamento do mancal:

- $\frac{P_{max}}{p}$ "elevado"
- $\frac{h_o}{c}$ "reduzido"
- Ângulo ϕ e θP_{max} "reduzidos", o que implica em pequena área efetiva de suporte de carga do mancal.

Tem sido comprovado em aplicações reais, que a pressão hidrodinâmica máxima "P_{max}" não deve ultrapassar um valor de cerca de três vezes a pressão específica "P", pois, do contrário poderão surgir falhas prematuras do revestimento de Babbitt do mancal, por exemplo. Por outro lado, analisando-se as Figuras 6.21, 6.25, e 6.28 pode-se concluir que valores muito elevados do Número de Sommerfeld (por exemplo, S > 2)

também não são recomendáveis, pois resultaria em grande perda de potência por atrito, grande elevação da temperatura de trabalho do mancal e reduzida área efetiva de contato.

Portanto, para L/D=1/2 poder-se-ia sugerir uma faixa recomendável para o Número de Sommerfeld, compreendida entre $0,2 < S < 3$, por exemplo. De maneira semelhante poder-se-ia sugerir que, para L/D=1/4 a seguinte faixa de S pode ser recomendada:

$$0,8 < S < 8$$

No caso das figuras de espessura mínima do filme de óleo ho/c, observa-se claramente que quanto menor o Número de Sommerfeld, menor o valor de ho/c. Portanto, deve-se evitar condições de projeto com S reduzido, para que não ocorra contato metálico decorrente de pequenos valores de espessura mínima do filme de óleo.

Das figuras de coeficiente de atrito f(R/c), percebe-se que esta variável cresce à medida que aumenta o número de Sommerfeld. Evidentemente, valores elevados de f(R/c) implicam em altas temperaturas de funcionamento, o que pode ser prejudicial ao óleo lubrificante e também, eventualmente, aos materiais do mancal. Conforme pode-se observar na Figura 6.55, por exemplo, as curvas de θP_{max} não apresentam a mesma uniformidade das outras variáveis, para os resultados obtidos pelo autor. Existem oscilações, mas isto decorre da forma em que foi obtido este resultado, conforme mencionado no Item 5.7 do Capítulo 5. Apesar da imprecisão dos valores de θP_{max}, o conhecimento prévio dos ângulos θP_{max} e ϕ é muito importante no posicionamento de ranhuras de lubrificação no mancal.

Na prática recomenda-se uma faixa de valores de ε, da ordem de $0,3 \leq \varepsilon \leq 0,7$, para dimensionamento de mancais radiais hidrodinâmicos de uma maneira geral. Essa recomendação decorre de problemas de alinhamento (montagem) e das conclusões citadas acima, relativamente à dependência entre os "parâmetros resultantes" e o Número de Sommerfeld (considerando que este é uma função da excentricidade específica ε).

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1 - CONCLUSÕES

7.1.1 - Considerações Gerais

Um estudo teórico sobre a lubrificação hidrodinâmica de mancais radiais de deslizamento foi desenvolvido. Considerando que se trata de um assunto extremamente amplo, o estudo foi limitado ao caso de lubrificação "plena" (sem contato metálico entre o munhão e a bucha) e mancal completo (bucha inteiriça ou bipartida envolvendo completamente o munhão na superfície cilíndrica de "contato").

Considerando-se então as condições de contorno de Sommerfeld/Gumbel, foi desenvolvido um programa computacional para obtenção dos "parâmetros resultantes ou dependentes", empregando o método numérico das diferenças finitas.

Foi feita uma análise comparativa dos resultados obtidos, tendo-se observado algumas diferenças entre os valores numéricos de "parâmetros dependentes" obtidos pelo autor e os de outros pesquisadores, principalmente no que diz respeito ao coeficiente de atrito fluido e elevação de temperatura do lubrificante. Uma razão aparente da obtenção de um coeficiente de atrito mais elevado no presente trabalho, relativamente aos de outros autores, pode ser atribuída ao fato dos mesmos terem considerado o atrito fluido somente na região carregada do mancal, isto é, na região de distribuição da pressão hidrodinâmica.

7.1.2 - Balanço Térmico e Cálculo das Temperaturas de Trabalho

Conforme mencionado no Ítem 1.3, os "parâmetros dependentes ou resultantes" são calculados a partir de um agrupamento conveniente dos "parâmetros independentes" (fixados inicialmente e ajustados se necessário) incluindo-se a viscosidade dinâmica do lubrificante utilizado. No entanto, a viscosidade depende da temperatura de trabalho do lubrificante, a qual depende do coeficiente de atrito, que por sua vez é uma função da viscosidade. Para sanar essa dificuldade, um programa computacional foi desenvolvido para calcular as temperaturas operacionais de vários pontos do mancal, inclusive a temperatura média do filme de óleo e a consequente viscosidade do mesmo a essa temperatura, conforme descrito por Schwarz e Miyazima [21], Anexo 1.

Os dois programas computacionais foram então englobados, de tal maneira que todos os "parâmetros dependentes" podem ser obtidos diretamente do computador, incluindo a distribuição de temperaturas, possibilitando assim realizar uma análise preditiva do comportamento operacional do mancal.

A utilização desse programa é de grande validade, não só num projeto de máquina, como também num estudo de modificações das condições de trabalho de um mancal já instalado. Por exemplo, o usuário do programa pode investigar o efeito da utilização de lubrificantes diferentes, prever os efeitos do desgaste ou variação da folga do mancal, dentre várias outras alternativas de análise do funcionamento do mesmo.

7.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHO FUTURO

Durante o desenvolvimento do presente estudo, uma série de idéias para trabalhos futuros ficou evidenciada, não só do ponto de vista teórico/computacional, como também no campo experimental.

Do ponto de vista de aplicação de métodos numéricos, o método dos elementos finitos, por exemplo, abre amplas frentes de investigações, tais como um estudo da distribuição tridimensional de temperaturas num mancal, deformações térmicas diferenciais (mudanças da folga), desalinhamentos, etc...

No campo experimental destaca-se imediatamente a idéia da construção de bancos de ensaios para obtenção em laboratório dos "parâmetros dependentes" e distribuição de temperaturas, para várias condições de trabalho, incluindo-se a variação de forças aplicadas, velocidades, óleos lubrificantes, desalinhamentos, etc...

REFERÊNCIAS

[01] RAIMONDI A.A. & BOYD, J. A solution for the finite journal bearing and its aplication to analys and design. Part I, II and III. *Trans. ASLE*, Vol.1, p.159-209, apr, 1958

[02] CAMERON, A. & WOOD, W.L. The full journal bearing. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, Vol.161, p.59-72, 1949

[03] CAMERON, A. *The principles of lubrication*, London, Longmans Green, 1966. 591 p.

[04] SHIGLEY, S.J. *Elementos de maquinas*, Rio de Janeiro, Livros Técnicos Científicos, Vol.2, 1984. 349-700 p.

[05] PINKUS, O. The Reynolds centennial: A brief history of the theory of hydrodynamic lubrication. *Trans. ASME; Journal of Tribology*. 109(1):1-20, jan, 1987

[06] CARDULLO, F.E. Some practical deductions from the theory of lubrication of short cylindrical bearings. *Trans. ASME*, Vol.52, p.143-53, 1930

[07] SASSENFELD, H. & WALTHER, A. Journal bearing calculations. *VDI Forschungsheft 411*, ausgabe B, Band 20, 1954

[08] PINKUS, O. Analysis of elliptical bearings. *Trans. ASME*, Vol.78, p.965-73, jul, 1956

[09] HAYS, D.F. A variational approach to lubrication problems and the solution of the finite journal bearing. *Trans. ASME*, Vol.81, mar, p.13-23, 1959

[10] SIEW, A.H. & REASON, B.R. The computer aided design entitu (C.A.D.E.) a new approach to journal bearing design. *In: AGARD Conference Proceedings n. 323 - Problems in Bearings and Lubrication*, Otawa, Canada, 1982, p.23.1-23.37

[11] ALLAIRE, P.E. et alii A pressure-parameter method for finite-element solutions of Reynold's equation. *Trans. ASLE*, Vol.28, 2, p.150-58, 1985

[12] GERO, L.R. & ETTLES, C.M.McC. An evaluation of finite difference and finite element methods for the solution of the Reynolds equation. *Trans. ASLE*, Vol. 29, 2, p.166-72, 1986

[13] PRASHAD, H. The effects of viscosity and clearance on the performance of hydrodynamic journal bearings. *Trans. ASLE*, Vol.31, 1, p.113-19, 1988

[14] SPIEGEL, M.R. *Manual de fórmulas e tabelas matemáticas.* São Paulo, McGraw-Hill, 1973. 270 p.

[15] DUBOIS,G.B. & OCVIRCK, F.W. Analytical derivation and experimental evaluation of short bearing approximation of full journal bearings. *NACA tech. rept. 1157*, p.1199-230, 1953

[16] LLOYD, T. & McCALLION, H. Recent developments in fluid film lubrication theory. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol.182, Pt. 3A, 1967-68, p.36-50

[17] HEILBORN, J. *Science and engineering prograns apple II edition*, Berkeley, California, OSBORNE/McGraw-Hill, 1981, 223 p.

[18] REASON, B.R. & SIEW, A.H. A numerical solution to the coupled problem of the hydrodinamic porous journal bearing. *In: Int. Conf. on Numerical Methods for Coupled Problems*, Univ. of Swansea, U.K., sep., 1981, p.769-780

[19] Frêne, J. Paliers lisses cylindriques. *Techniques de L'ingenieur*, Vol. B5-II, p. B671,1 1-4, 1982

[20] CAMERON, A. *Basic lubrication theory*, New York, 2.ed., John Wiley, 1976, 195 p.

[21] SCHWARZ, V.A. & MIYAZIMA, A.T. Mancais radiais de deslizamento - análise preditiva do comportamento térmico operacional. *In: Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, 10, Rio de Janeiro, 1989. p.359-62. V.2

BIBLIOGRAFIA

[01] KARELITZ. G.B. Performance of oil-ring bearings. *Trans. ASME*, Vol.52, p.57-70, 1930

[02] KINGSBURY, A. On problems in the theory of fluid-film lubrication, with an experimental method of solution. *Trans. ASME*, Vol.53, p.59-75, 1931

[03] KINGSBURY, A. Optimum conditions in journal bearings. *Trans. ASME*, Vol.54, p.123-48, 1932

[04] NEEDS, S.J. Effects of side leakage in 120-degree centrally supported journal bearings. *Trans. ASME*, Vol.56, p.721-32, 1934, Vol.57, p.135-38, 1935

[05] CHRISTOPHERSON, D.G. A new mathematical method for the solution of film lubrication problems. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, Vol.146, p.126-35, 1941

[06] WATERS, E.O. Characteristics of centrally supported journal bearings. *Trans. ASME*, Vol.64, p.711-19, oct, 1942

[07] FRANKEL, A. Calculation of the performance characteristics of plain bearings. *The Enginner's Digest*, 3(5):223-28, may, 1946, 3(6):400-03, august, 1946, 3(9):465-68, sep, 1946

[08] BOYD, J. & RAIMONDI, A.A. Applying bearing theory to the analysis and design of journal bearings I and II. *Trans. ASME*, Vol.73, Part I, p. 298-309, Part II, p. 310-16, 1951

[09] CARTER, D.S. & PRINCETON, N.J. An eletrical method for determining journal-bearing characteristics. *Journal of Applied Mechanics*, Vol.19, p.114-18, mar, 1952

[10] MCKEE, S.A. Oil flow in plain journal bearings. *Trans. ASME*, 74(3):841-48, Jul, 1952

[11] WILCOCK, D.F. & ROSEMBLATT, M. Oil flow, key factor in sleeve-bearing performance. *Trans. ASME*, 74(3):849-66, jul, 1952

[12] PINKUS, O. Solution of Reynolds' equation for finite journal bearings. *Trans. ASME*, Vol.80, p.858-64, 1958

[13] OCVIRK, F.W. & DUBOIS, G.B. Surface finish and clearance effects on journal-bearing load capacity and friction. *Trans. ASME: Journal of Basic Engineering*, 81(2):245-53, jun, 1959

[14] SHAWKI, G.S.A. Journal-bearing design. *Product Engineering*, Vol.31, p.31-36, aug, 1960

[15] PINKUS, O. Solution of Reynolds equation for arbitrarily loaded journal bearings. *Trans. ASME: Journal of Basic Engineering*, 83(2):145-52, jun, 1961

[16] HAYS, D.F. Oil flow in a full journal bearing. *Trans. ASME: Journal of Basic Engineering*, 83(2):312-14, jun, 1961

[17] FEDOR, J.V. Journal bearings with arbitrary position of source II. *Trans ASME: Journal of Basic Engineering*, 83(4):589-94, dec, 1961

[18] RAMACHANDRA, S. A solution of Reynolds equation for a full finite journal bearing. *Trans. ASME: Journal of Basic Engineering*. 83(4):589-594, dec., 1961

[19] SEIREG, A. & EZZAT, H Optimun design of hydrodynamic journal bearings *Trans. ASME: Journal Lubrication Technology*, 91(3):516-23, jul, 1969

[20] DOWSON, D. & ASHTON, J.N. Optimum computerized design of hydrodynamic journal bearings. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.18, p.215-22, 1976

[21] DOWSON, D. et alii Optimization methods applied to hydrodynamic bearing design. *Int. for Num. Meth. Eng.*, Vol.11, p.1005-27, 1977

[22] ROHDE, S.M. & LI, D.F. A generalized short bearing theory. *Trans. ASME: Journal Lubrication Technology*, 102(3):278-82, jul, 1980

[23] BARRETT, L.E. et alii A finite lenght bearing correction fator for short bearing theory. *Trans. ASME: Journal Lubrication Technology*, Vol.102, july, 1980, p.283-90

[24] REASON, B.R. & NARANG, I.P. Rapid design and performance evaluation of steady-state journal bearings - A technique amenables to programmable hand calculators. *Trans. ASLE*, 25(4):429-44, 1982

[25] REASON, B.R. & SIEW, A.H. A numerical solution for the design and performance evaluation of journal bearing with misaligment. *Inst. Mech. Engrs.*, Vol.196 n. C9, p.77-85, sep, 1982

[26] HANSEN, P.K. & LUND, J.W. An analytical study of the heat balance for a journal bearing. *In: AGARD Conference Proceedings n. 323 - Problems in Bearings and Lubrication*, Otawa, Canada, 1982, p.25.1-25.11

[27] BUCKHOLZ, R.H. & HWANG, B. The accuracy of short bearing theory for Newtonian lubricants. *Trans. ASME: Journal of Tribology*, Vol.108, jan, 1986, p.73-79

[28] GROSS W.A. et alii *Fluid film lubrication*, New York, John Wiley, 1980. 774 p.

[29] NEALE, M.J. *Tribology handbook*, London, Butterworth, 1973. pag. irreg.

[30] FULLER, D.D. *Teoria y practica de la lubricacion*, Madrid, Ediciones Interciencia, 1961. 543 p.

[31] ALBUQUERQUE, O.A.L.P. *Lubrificação*, São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1975. 143 p.

APÊNDICE A

INTEGRAL DE SOMMMERFELD

A engenhosa transformada de Sommerfeld, conforme Cameron [20], relaciona uma variável angular γ (puramente matemática) com a variável angular θ, de acôrdo com a seguinte equação:

$$\cos\gamma = \frac{\varepsilon + \cos\theta}{1 + \varepsilon.\cos\theta} \qquad \text{(A.1)}$$

Analisando-se a Equação (A.1) pode-se concluir que as duas variáveis angulares θ e γ são iguais entre si para três valores distintos que são:

$$\theta = \gamma = 0$$
$$\theta = \gamma = \pi$$
$$\theta = \gamma = 2\pi$$

A Equação (A.1) pode ser manipulada de várias maneiras, no sentido de resolver várias expressões e integrais que surgem no equacionamento da lubrificação hidrodinâmica (Capítulo 4), como segue:

$$\varepsilon.\cos\gamma = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon.\cos\theta}{1 + \varepsilon.\cos\theta}$$

$$1 - \varepsilon.\cos\gamma = 1 - \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon.\cos\theta}{1 + \varepsilon.\cos\theta}$$

$$1 - \varepsilon.\cos\gamma = \frac{1 + \varepsilon.\cos\theta - \varepsilon^2 - \varepsilon.\cos\theta}{1 + \varepsilon.\cos\theta}$$

$$1 - \varepsilon.\cos\gamma = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon.\cos\theta}$$

$$1 + \varepsilon.\cos\theta = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon.\cos\gamma} \qquad (A.2)$$

Diferenciando ambos os membros, tem-se:

$$- \varepsilon.\operatorname{sen}\theta.d\theta = - \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)^2} \varepsilon.\operatorname{sen}\gamma.d\gamma \qquad (A.3)$$

Sabendo-se que $\operatorname{sen}\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sqrt{1 - \left[\frac{\varepsilon + \cos\theta}{1 + \varepsilon.\cos\theta}\right]^2}$

resulta:

$$\operatorname{sen}\gamma = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2 - (\varepsilon + \cos\theta)^2}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2}}$$

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{[\ 1 + 2.\varepsilon.\cos\theta + \varepsilon^2.\cos^2\theta - \varepsilon^2 - 2.\varepsilon.\cos\theta - \cos^2\theta\ ]^{1/2}}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)}$$

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{[(1 - \varepsilon^2) - \cos^2\theta(1 - \varepsilon^2)]^{1/2}}{1 + \varepsilon.\cos\theta}$$

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{[(1 - \varepsilon^2)(1 - \cos^2\theta)]^{1/2}}{1 + \varepsilon.\cos\theta}$$

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}\ (\operatorname{sen}^2\theta)^{1/2}}{1 + \varepsilon.\cos\theta}$$

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}\ \operatorname{sen}\theta}{1 + \varepsilon.\cos\theta} \qquad (A.4)$$

Substituindo-se a Equação (A.4) em (A.3), tem-se:

$$- \varepsilon.\operatorname{sen}\theta.d\theta = - \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)^2} \frac{\varepsilon.(1 - \varepsilon^2)^{1/2}\ \operatorname{sen}\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)} d\gamma$$

$$d\theta = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)^2\ (1 + \varepsilon.\cos\theta)} d\gamma \qquad (A.5)$$

Substituindo-se a Equação (A.2) na (A.5):

$$d\theta = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)^2 \quad \frac{(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)}} d\gamma$$

$$d\theta = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)} d\gamma \qquad (A.6)$$

As seguintes integrais devem ser resolvidas:

$$I = \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)} \qquad (A.7)$$

Substituindo-se as Equações (A.2) e (A.6) em (A.7), tem-se:

$$I = \int \frac{1}{\frac{(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)}} \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)} d\gamma$$

$$I = \int \frac{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)}{(1 - \varepsilon^2)} \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)} d\gamma$$

$$I = \int \frac{d\gamma}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)} = \frac{\gamma}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \qquad (A.8)$$

$$II = \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} \qquad (A.9)$$

Agora, substituindo as Equações (A.2) e (A.6) em (A.9), tem-se:

$$II = \int \frac{1}{\left[\frac{(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)}\right]^2} \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)} d\gamma$$

$$II = \int \frac{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)} d\gamma$$

$$II = \int \frac{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}\, d\gamma$$

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} = \frac{(\gamma - \varepsilon.\operatorname{sen}\gamma)}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \qquad (A.10)$$

$$III = \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} \qquad (A.11)$$

Novamente, substituindo as Equações (A.2) e (A.6) em (A.11) e lembrando-se que:

$$\cos^2\gamma = \frac{(1 + \cos 2\gamma)}{2}$$

obtém-se:

$$III = \int \frac{1}{\left[\dfrac{(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)}\right]^3} \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)}\, d\gamma$$

$$III = \int \frac{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)^3}{(1 - \varepsilon^2)^3} \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)}\, d\gamma$$

$$III = \int \frac{(1 - \varepsilon.\cos\gamma)^2}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}}\, d\gamma$$

$$III = \int \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} (1 - 2.\varepsilon.\cos\gamma + \varepsilon^2.\cos^2\gamma)\, d\gamma$$

$$III = \int \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left[1 - 2.\varepsilon.\cos\gamma + \varepsilon^2 \left[\frac{1 + \cos 2\gamma}{2} \right] \right] d\gamma$$

$$III = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left[\gamma - 2.\varepsilon.\operatorname{sen}\gamma + \frac{\varepsilon^2\gamma}{2} + \left[\frac{\varepsilon^2.\operatorname{sen} 2\gamma}{4} \right] \right]$$

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} = \frac{\gamma - 2.\varepsilon.\operatorname{sen}\gamma + \dfrac{\varepsilon^2\gamma}{2} + \left[\dfrac{\varepsilon^2.\operatorname{sen} 2\gamma}{4}\right]}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \qquad (A.12)$$

APÊNDICE B

SOLUÇÃO DA INTEGRAL DE CAPACIDADE DE CARGA PARA MANCAL CURTO

Tomando-se a Equação (4.16):

$$F_r = \int\int \frac{3.U.\eta.\varepsilon.\text{sen}\theta.\cos\theta}{c^2(1+\varepsilon.\cos\theta)^3}\, d\theta.\left(\frac{L^2}{4} - z^2\right)dz \qquad (B.1)$$

Resolvendo primeiramente

$$I_o = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \left(\frac{L^2}{4} - z^2\right) dz \qquad (B.2)$$

$$I_o = \left| \frac{L^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}$$

$$I_o = \left[\frac{L^2}{4}.\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{3}.\left(\frac{L}{2}\right)^3\right] - \left[\frac{L^2}{4}.\left(-\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{3}.\left(-\frac{L}{2}\right)^3\right]$$

$$I_o = \frac{L^3}{8} - \frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{8} - \frac{L^3}{24} = \frac{L^3}{4} - \frac{L^3}{12} = \frac{3.L^3 - L^3}{12}$$

$$I_o = \frac{L^3}{6} \qquad (B.3)$$

$$F_r = \frac{3.U.\eta}{c^2}\,\frac{L^3}{6}\int_o^{\pi} \frac{\varepsilon.\text{sen}\theta.\cos\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^3}\, d\theta \qquad (B.4)$$

$$I_1 = \int_o^{\pi} \frac{\varepsilon.\text{sen}\theta.\cos\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^3}\, d\theta \qquad (B.5)$$

Considerando-se a identidade,

$$\frac{\cos\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)} = \frac{\varepsilon.\cos\theta + 1 - 1}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)}$$

tem-se:

$$I_1 = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)} \right] \frac{\varepsilon.\operatorname{sen}\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} \, d\theta \qquad (B.6)$$

$$I_1 = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\pi} \frac{-\varepsilon.\operatorname{sen}\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} \, d\theta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\pi} \frac{-\varepsilon.\operatorname{sen}\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} \, d\theta$$

$$I_1 = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\pi} \frac{d(1 + \varepsilon.\cos\theta)}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} \, d\theta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\pi} \frac{d(1 + \varepsilon.\cos\theta)}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} \, d\theta$$

$$I_1 = \left| \frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)} \right|_0^{\pi} - \left| \frac{1}{2.\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} \right|_0^{\pi}$$

$$I_1 = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left[\frac{1}{(1 - \varepsilon)} - \frac{1}{(1 + \varepsilon)} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1 - \varepsilon)^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \right] \right\}$$

$$I_1 = \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)} - \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^2}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\varepsilon.\operatorname{sen}\theta.\cos\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} \, d\theta = \frac{-2.\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \qquad (B.7)$$

$$F_r = \frac{3.U.\eta}{c^2} \frac{L^3}{6} \frac{-2.\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}$$

$$F_r = -\frac{U.\eta.L^3.\varepsilon^2}{c^2(1-\varepsilon^2)^2} \qquad (B.8)$$

$$F_t = \int\int \frac{3.U.\eta.\varepsilon.\operatorname{sen}^2\theta}{c^2(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} \, d\theta.\left(\frac{L^2}{4} - z^2 \right) dz \qquad (B.9)$$

Substituindo-se a Equação (B.3) em (B.9), resulta:

$$F_t = \frac{3.U.\eta}{c^2}\,\frac{L^3}{6}\int_o^{\pi}\frac{\varepsilon.\text{sen}^2\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^3}\,d\theta \qquad (B.10)$$

$$I_2 = -\int_o^{\pi}\text{sen}\theta\,\frac{-\varepsilon.\text{sen}\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^3}\,d\theta \qquad (B.11)$$

Integrando-se por partes, tem-se:

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$u = \text{sen}\theta$$

$$du = \cos\theta.d\theta$$

$$dv = \frac{-\varepsilon.\text{sen}\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^3}\,d\theta$$

$$v = \frac{-1}{2(1+\varepsilon.\cos\theta)^2}$$

Portanto:

$$\int_o^{\pi}\text{sen}\theta\,\frac{-\varepsilon.\text{sen}\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^3}\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_o^{\pi}\frac{\cos\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^2}\,d\theta$$

conforme:

$$u.v = \left|\frac{-\text{sen}\theta}{2(1+\varepsilon.\cos\theta)^2}\right|_o^{\pi} = 0$$

Considerando-se a identidade:

$$\frac{\cos\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^2} = \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon.\cos\theta)} - \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon.\cos\theta)^2} \qquad (B.12)$$

tem-se:

$$I_2 = -\frac{1}{2}\int_o^{\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon.\cos\theta)} - \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon.\cos\theta)^2}\right]d\theta$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\varepsilon(1+\varepsilon.\cos\theta)} - \int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\varepsilon(1+\varepsilon.\cos\theta)^2}\right]$$

Usando-se as integrais I e II, do Apêndice A, isto é, Equaçãoes (A.8) e (A.10), tem-se:

$$I_2 = -\frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\gamma}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{(\gamma-\varepsilon.\mathrm{sen}\gamma)}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\right|_0^{\pi}\right\}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\pi}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{(\pi-\varepsilon.\mathrm{sen}\pi)}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\right] - \left[\frac{0}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{(0-\varepsilon.\mathrm{sen}0)}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\right]\right\}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\pi}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{\pi}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\right]\right.$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{\pi.(1-\varepsilon^2)-\pi}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\pi-\pi.\varepsilon^2-\pi}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\right].$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\varepsilon.\mathrm{sen}^2\theta}{(1+\varepsilon.\cos\theta)^3}\,d\theta = \frac{\pi.\varepsilon}{2.(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \qquad (B.13)$$

$$F_t = \frac{3.U.\eta}{c^2}\,\frac{L^3}{6}\,\frac{\pi.\varepsilon}{2.(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$$

$$F_t = \frac{U.\eta.L^3.\pi.\varepsilon}{4.c^2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \qquad (B.14)$$

APÊNDICE C

SOLUÇÃO DA INTEGRAL DE CAPACIDADE DE CARGA PARA MANCAL LONGO

Tomando-se a Equação (4.101):

$$F_r = - \int_o^{\pi} \frac{d\bar{p}}{d\theta} \operatorname{sen}\theta . d\theta \qquad (C.1)$$

Substituindo-se a Equação (4.103) em (C.1), tem-se:

$$F_r = - \int_o^{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} - \frac{2(1 - \varepsilon^2)}{(2 + \varepsilon^2)} \frac{\operatorname{sen}\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} \right] d\theta$$

ou

$$F_r = - \int_o^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} d\theta - \frac{2(1 - \varepsilon^2)}{(2 + \varepsilon^2)} \int_o^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} d\theta \qquad (C.2)$$

$$I_1 = \int_o^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} d\theta \qquad (C.3)$$

$$I_1 = - \frac{1}{\varepsilon} \int_o^{\pi} \frac{d(1 + \varepsilon.\cos\theta)}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} d\theta$$

$$I_1 = \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{1}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)} \right|_o^{\pi}$$

$$I_1 = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{(1 - \varepsilon)} - \frac{1}{(1 + \varepsilon)} \right]$$

$$\int_o^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} d\theta = \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)} \qquad (C.4)$$

$$I_2 = - \int_o^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} d\theta \qquad (C.5)$$

$$I_2 = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\pi} \frac{-\varepsilon.\text{sen}\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3}\, d\theta$$

$$I_2 = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\pi} \frac{d(1 + \varepsilon.\cos\theta)}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3}\, d\theta$$

$$I_2 = \frac{1}{2.\varepsilon}\left| \frac{-1}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} \right|_0^{\pi}$$

$$I_2 = \frac{1}{2.\varepsilon}\left[\frac{-1}{(1 - \varepsilon)^2} + \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \right]$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\text{sen}\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3}\, d\theta = \frac{-2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \qquad (C.7)$$

$$F_r = \frac{-2}{(1 - \varepsilon^2)} - \frac{2(1 - \varepsilon^2)}{(2 + \varepsilon^2)} \frac{-2}{(1 - \varepsilon^2)^2}$$

$$F_r = \frac{-2.\varepsilon^2}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)} \qquad (C.8)$$

$$F_t = -\int_0^{\pi} \frac{d\bar{p}}{d\theta} \cos\theta.d\theta \qquad (C.9)$$

Substituindo-se a Equação (4.103) em (C.9), tem-se:

$$F_r = -\int_0^{\pi} \left[\frac{\cos\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} - \frac{2(1 - \varepsilon^2)}{(2 + \varepsilon^2)} \frac{\cos\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} \right] d\theta$$

ou

$$F_t = -\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2}\, d\theta + \frac{2(1 - \varepsilon^2)}{(2 + \varepsilon^2)} \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3}\, d\theta \qquad (C.10)$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2}\, d\theta \qquad (C.11)$$

Considerando-se a identidade:

$$\frac{\cos\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} = \frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)} - \frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} \qquad (C.12)$$

tem-se:

$$I_3 = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)} - \frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} \right] d\theta$$

ou

$$I_3 = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)} - \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} \qquad (C.13)$$

Usando-se as integrais I e II, do Apêndice A, isto é, Equações (A.8) e (A.10), obtém-se:

$$I_3 = \left| \frac{\gamma}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{(\gamma - \varepsilon.\mathrm{sen}\gamma)}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right|_0^{\pi}$$

$$I_3 = \left\{ \left[\frac{\pi}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{(\pi - \varepsilon.\mathrm{sen}\pi)}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{0}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{(0 - \varepsilon.\mathrm{sen}0)}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right] \right\}$$

$$I_3 = \left[\frac{\pi}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{\pi}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right]$$

$$I_3 = \left[\frac{\pi.(1 - \varepsilon^2) - \pi}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right] = \left[\frac{\pi - \pi.\varepsilon^2 - \pi}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right]$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} d\theta = - \frac{\pi.\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \qquad (C.14)$$

$$I_4 = \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} d\theta \qquad (C.15)$$

Considerando-se a identidade:

$$\frac{\cos\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} = \frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} - \frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} \qquad (C.16)$$

tem-se:

$$I_4 = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} - \frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} \right] d\theta$$

ou

$$I_4 = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)^2} - \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\varepsilon(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} \qquad (C.17)$$

Usando-se as integrais I e II, do Apêndice A, isto é, Equações (A.10) e (A.12), tem-se:

$$I_4 = \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{(\gamma - \varepsilon.\mathrm{sen}\gamma)}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} - \frac{\gamma - 2.\varepsilon.\mathrm{sen}\gamma + \frac{\varepsilon^2\gamma}{2} + \frac{\varepsilon^2.\mathrm{sen}2\gamma}{4}}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \right|_0^{\pi}$$

$$I_4 = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left[\frac{\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} - \frac{\pi + \frac{\varepsilon^2.\pi}{2}}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \right] - \left[\frac{0}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} - \frac{0}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \right] \right\}$$

$$I_4 = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\pi.(1 - \varepsilon^2) - \pi - \frac{\varepsilon^2.\pi}{2}}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \right] = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\pi - \pi.\varepsilon^2 - \pi - \frac{\pi.\varepsilon^2}{2}}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \right]$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{(1 + \varepsilon.\cos\theta)^3} d\theta = - \frac{3.\pi.\varepsilon}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \qquad (C.18)$$

Substituindo-se as Equações (C.14) e (C.18) em (C.9), obtém-se:

$$F_t = \frac{\pi.\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} + \frac{2(1 - \varepsilon^2)}{(2 + \varepsilon^2)} \frac{-3.\pi.\varepsilon}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}}$$

$$F_t = \frac{\pi.\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} - \frac{3.\pi.\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

$$F_t = \frac{-\pi.\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}(2 + \varepsilon^2)} \qquad (C.19)$$

APÊNDICE D

UMA TÉCNICA NUMÉRICA PARA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS PARA MANCAL FINITO.

Aproximação de derivadas por Diferenças Finitas

Quando uma função u e suas derivadas assumem valores finitos e são funções contínuas de x, pelo teorema de Taylor, tem-se:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{1}{2} h^2 u''(x) + \frac{1}{6} h^3 u'''(x) + \ldots \qquad (D.1)$$

e

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{1}{2} h^2 u''(x) - \frac{1}{6} h^3 u'''(x) + \ldots \qquad (D.2)$$

Somando as equações (D.1) e (D.2) tem-se:

$$u(x+h) + u(x-h) = 2.u(x) + h^2 u''(x) + O(h^4) \qquad (D.3)$$

Onde $O(h^4)$ significa que os termos de quarta ordem ou mais alta ordem são desprezados.

Reagrupando a Equação (D.3) resulta:

$$u''(x) = \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{h^2}[u(x+h) - 2.u(x) + u(x+h)] \qquad (D.4)$$

Subtraindo a Equação (D.2) da Equação(D.1), tem-se:

$$u(x+h) - u(x-h) = 2.hu'(x) + \frac{1}{3} h^3 u'''(x) \qquad (D.5)$$

Desprezando os termos de terceira ou mais alta ordem e reajustando a Equação (D.5), resulta:

alta ordem e reajustando a Equação (D.5), resulta:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2.h}\,[u(x+h) - u(x-h)] \qquad (D.6)$$

O resultado da Equação (D.6) pode ser visto na Figura D1.

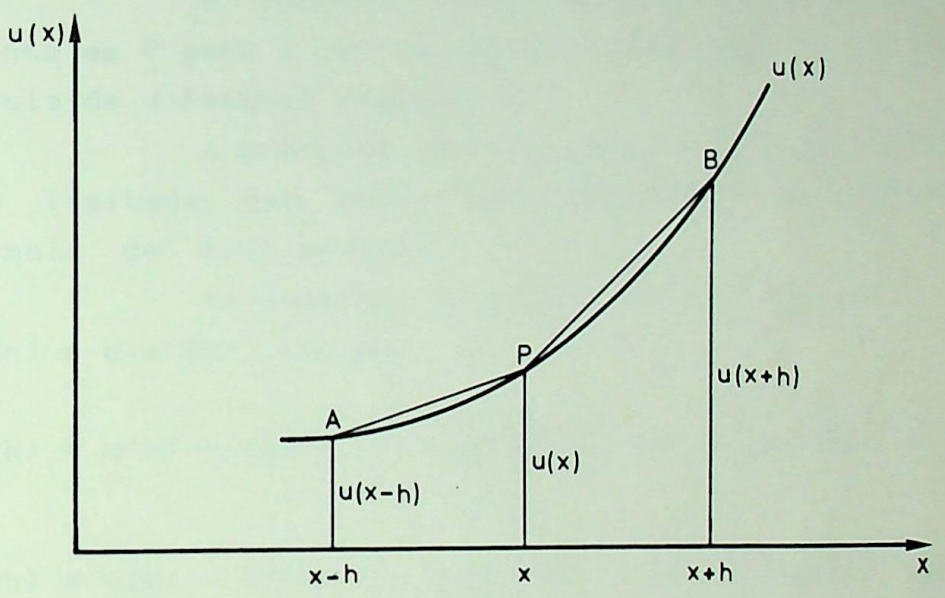


Fig. D1 - Aproximação por diferenças finitas.

A Figura D1 mostra claramente que a inclinação da tangente em P se aproxima da inclinação da corda AB e é chamada de "aproximação de diferença central".

Fórmulas de Diferença Progressiva e Diferença Regressiva

Na Equação (D.1), se os termos de h^2 e maior ordem são desprezados, tem-se:

$$u'(x) = \frac{1}{h}\,[u(x+h) - u(x)] \qquad (D.7)$$

A Equação (D.7) aproxima a inclinação da

tangente em P para a inclinação da corda PB e é designada como "fórmula de diferença progressiva".

Considerando a Equação (D.2), se os termos de h^2 e de ordens superiores são desprezados, então:

$$u'(x) = \frac{1}{h}[u(x) - u(x-h)] \qquad (D.8)$$

A Equação (D.8) aproxima a inclinação da tangente em P para a inclinação da corda PA, e é designada "fórmula de diferença regressiva".

A precisão das Equações (D.7) e (D.8) é um tanto limitada. Uma melhor aproximação pode ser obtida usando a fórmula de três pontos.

Estendendo a série de Taylor para definir u(x+2h) e u(x-2h), tem-se:

$$u(x+2h) = u(x) + (2h)u'(x) + \frac{1}{2}(2h)^2u''(x) + \frac{1}{6}(2h)^3u'''(x) + \ldots \qquad (D.9)$$

$$u(x-2h) = u(x) - (2h)u'(x) + \frac{1}{2}(2h)^2u''(x) - \frac{1}{6}(2h)^3u'''(x) + \ldots \qquad (D.10)$$

Multiplicando a Equação (D.1) por quatro e subtraindo da Equação (D.9), e desprezando termos de terceira e mais alta ordem, resulta:

$$u'(x) = \frac{1}{2.h}[4.u(x+h) - u(x+2h) - 3.u(x)] \qquad (D.11)$$

A Equação (D.11) é denominada de aproximação de diferenças progresivas de três pontos para a inclinação da tangente em P.

Similarmente, multiplicando a Equação (D.2) por quatro e subtraindo da Equação (D.10), resulta:

$$u'(x) = \frac{1}{2.h}[u(x-2h) - 4.u(x-h) + 3.u(x)] \qquad (D.12)$$

Onde a Equação (D.12) é denominada de aproximação de diferenças regressivas de três pontos para a inclinação da tangente em P.

Notação para Funções de Várias Variáveis

Seja u uma função das variáveis independentes x e z.

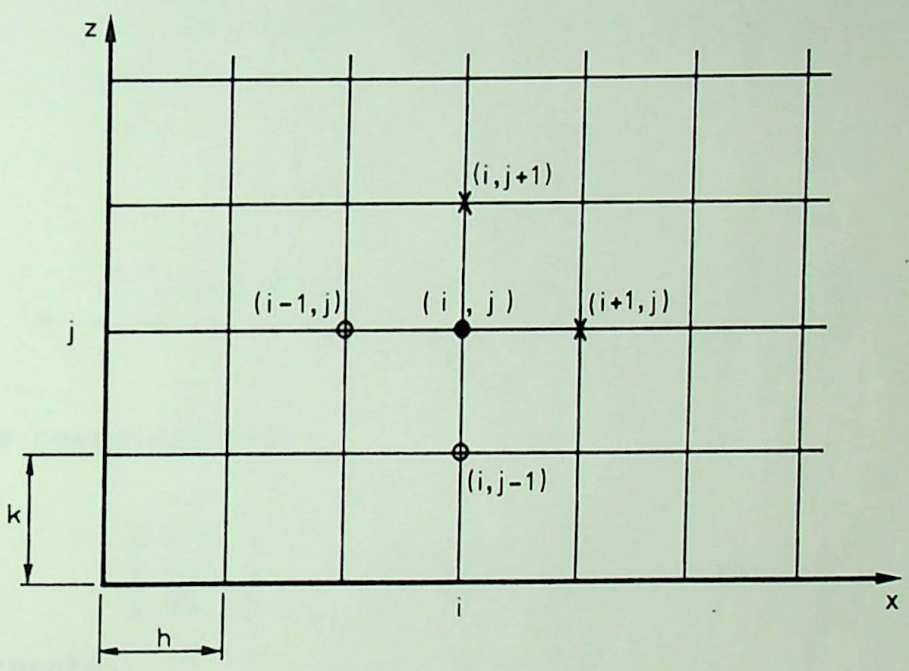


Fig. D2 - Notação de diferenças finitas.

O plano x-z é então subdividido em conjuntos de retângulos iguais, de lados:

$$\delta(x) = h \quad e \quad \delta(z) = k$$

como mostrado na Figura D2.

Seja um ponto P no plano x-z (Figura D2) de coordenadas:

$$x = ih \quad e \quad z = jk$$

onde i e j são inteiros.

O valor da função u no ponto P pode ser denotado por:

$$(u)_P = u(ih, jk) = u_{i,j}$$

Esta notação pode ser estendida para qualquer número de variáveis, incluindo tempo ou espaço.

Fórmulas de Derivadas por Diferenças Finitas

Da equação (D.4), a derivada segunda em P é:

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_P = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{i,j} =$$

$$= \frac{u\,[(i+1)h, jk] - 2u\,[ih, jk] + u\,[(i,1)h, jk]}{h^2}$$

ou mais resumidamente:

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \qquad (D.13)$$

similarmente,

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} \qquad (D.14)$$

As derivadas primeiras podem ser também expressas da mesma forma:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} \quad u_{i-1,j}}{2.h} \qquad (D.15)$$

e

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2.k} \qquad (D.16)$$

APÊNDICE E

CARGA ADIMENSIONAL

Tomando-se a Equação (5.34):

$$F_r = \int_0^1 \int_0^{\pi} p.R.\cos\theta.d\theta.dz \qquad (E.1)$$

Substituindo-se os termos adimensionais, tem-se:

$$\frac{F_r}{\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2} = \int_0^1 \int_0^{\pi} \bar{p}.R.\cos(2.\pi.\bar{x}).d(2.\pi.\bar{x}).d(\bar{z}.L)$$

ou

$$\frac{F_r}{\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2 R.L} = 2.\pi \int_0^1 \int_0^{1/2} \bar{p}.\cos(2.\pi.\bar{x}).d(\bar{x}).d(\bar{z}) \qquad (E.2)$$

Tomando-se agora a Equação (5.35):

$$F_t = \int_0^1 \int_0^{\pi} p.R.\sen\theta.d\theta.dz \qquad (E.3)$$

Substituindo-se os termos adimensionais, tem-se:

$$\frac{F_t}{\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2} = \int_0^1 \int_0^{\pi} \bar{p}.R.\sen(2.\pi.\bar{x}).d(2.\pi.\bar{x}).d(\bar{z}.L)$$

ou

$$\frac{F_t}{\omega.\eta.\left(\frac{R}{c}\right)^2 R.L} = 2.\pi \int_0^1 \int_0^{1/2} \bar{p}.\sen(2.\pi.\bar{x}).d(\bar{x}).d(\bar{z}) \qquad (E.4)$$

APÊNDICE F

CAPACIDADE DE CARGA - INTEGRAÇÃO PELO MÉTODO DE SIMPSON

Para obter o parâmetro de carga adimensional Δ é necessário integrar as Equações (5.39) e (5.40). A integração será efetuada pela regra de Simpson. A função f(u) deve ser integrada no intervalo u_o até u_n. A regra de Simpson estabelece que:

$$\int_{u_o}^{u_n} f(u).du = \frac{\delta}{3}\,[f_o + 4f_1 + 2f_2 + \ldots + 4f_{n-1} + f_n] \qquad (F.1)$$

ou

$$\int_{u_o}^{u_{2n}} f(u).du = \frac{\delta}{3}\,[f_o + f_{2n} + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n-2}) + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1})] \qquad (F.2)$$

A nomenclatura utilizada é mostrada na Figura F1.

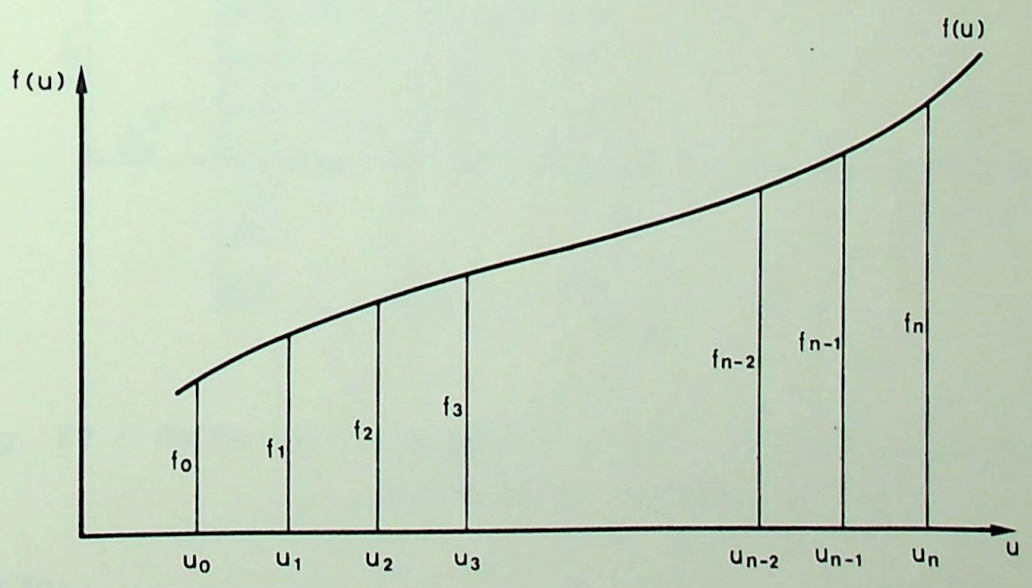


Fig. F1 - Nomenclatura para a regra de Simpson.

A equação (5.39), tem a forma:

A equação (5.39), tem a forma:

$$\Delta_r = 2.\pi \int_0^1 \int_0^{1/2} -\bar{p}.\cos[2.\pi.(\frac{i-1}{m})].d\bar{x}.d\bar{z} \qquad (F.3)$$

Escrevendo-se esta equação na forma de diferenças finitas, tem-se:

$$\Delta_r = 2.\pi \int_{j=1}^{j=n+1} \int_{i=1}^{i=m/2+1} -\bar{p}_{i,j} \cos[2.\pi.(\frac{i-1}{m})].d\bar{x}.d\bar{z} \qquad (F.4)$$

Considerando um mancal perfeitamente alinhado a integração precisa ser somente efetuada para um quarto do mancal, para $1 \leq i \leq m/2+1$ e $1 \leq j \leq n/2+1$, devido à simetria, conforme mostrado na Figura F2.

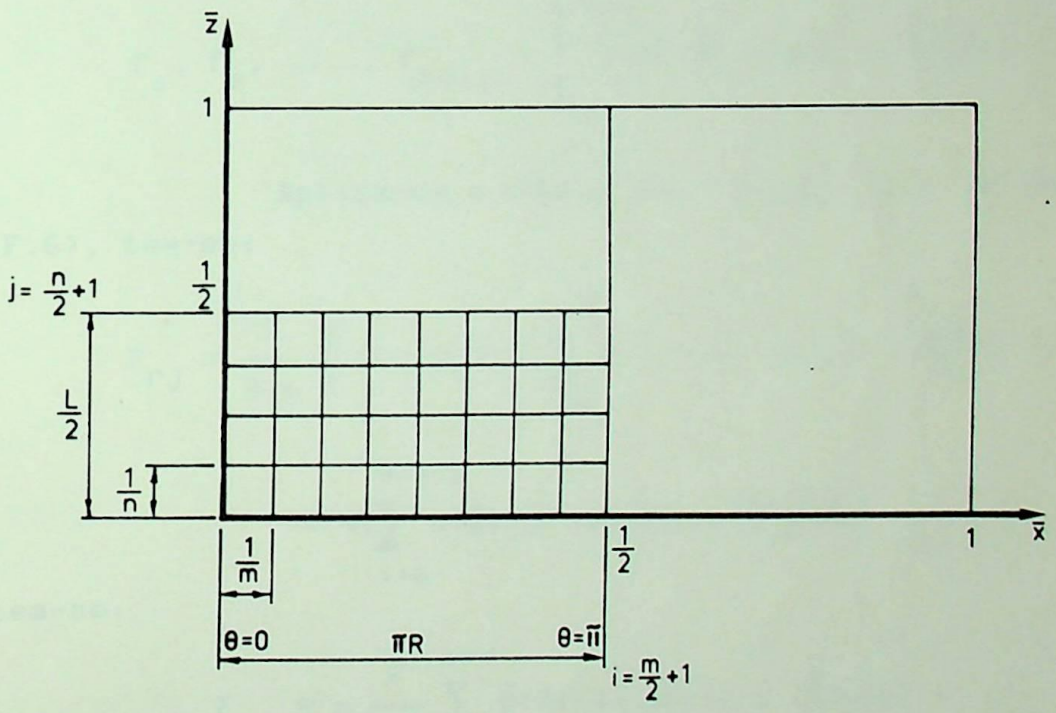


Fig. F2 - Malha para integração conforme a condição de contorno de Sommerfeld/Gumbel.

Então:

$$\Delta_r = 4.\pi \int_{j=1}^{j=n/2+1} \int_{i=1}^{i=m/2+1} -\bar{p}_{i,j} \cos[2.\pi.(\frac{i-1}{m})].d\bar{x}.d\bar{z} \qquad (F.5)$$

Fazendo:

$$F_{rj} = \int_{i=1}^{i=m/2+1} -\bar{p}_{i,j} \cos[2.\pi.(\frac{i-1}{m})].d\bar{x} \qquad (F.6)$$

Pela regra de Simpson, a Equação (F.2), tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} \delta = \frac{1}{m} \\ f_o = 0 \\ f_{2n} = 0 \end{array}\right\} \text{ condição de contorno de Gumbel}$$

$$f_2, f_4, \ldots, f_{2n-2} = \sum_{i=2}^{m/4} \bar{p}(2i-1).\cos[2.\pi.(\frac{2i-2}{m})]$$

$$f_1, f_3, \ldots, f_{2n-1} = \sum_{i=2}^{m/4+1} \bar{p}(2i-2).\cos[2.\pi.(\frac{2i-3}{m})]$$

Aplicando a regra de Simpson para a Equação (F.6), tem-se:

$$F_{rj} = \frac{-1}{3.m}\left\{ 0 + 0 + 2.\sum_{i=2}^{m/4} \bar{p}(2i-1).\cos[2.\pi.(\frac{2i-2}{m})] + \right.$$

$$\left. + 4.\sum_{i=2}^{m/4+1} \bar{p}(2i-2).\cos[2.\pi.(\frac{2i-3}{m})]\right\}$$

tem-se:

$$F_{rj} = -\frac{2}{3.m}\sum_{i=2}^{m/4} \bar{p}(2i-1).\cos[2.\pi.(\frac{2i-2}{m})] +$$

$$-\frac{4}{3.m}\sum_{i=2}^{m/4+1} \bar{p}(2i-2).\cos[2.\pi.(\frac{2i-3}{m})] \qquad (F.7)$$

Calculando a Equação (F.7) resultará em uma série de valores para:

$$F_{rj} \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq \frac{n}{2} + 1$$

Aplicando-se a regra de Simpson novamente para integrar F_{rj} em relação a $\bar{z}$, tem-se:

$$\delta = \frac{1}{n}$$

$$f_o = F_r(1)$$

$$f_{2n} = F_r(\frac{n}{2}+1)$$

$$f_2, f_4, \ldots, f_{2n-2} = \sum_{j=2}^{n/4} F_r(2j-1)$$

$$f_1, f_3, \ldots, f_{2n-1} = \sum_{j=2}^{n/4+1} F_r(2j-2)$$

Integrando F_r em relação a $\bar{z}$, tem-se:

$$F_r = \frac{1}{3.n}\left[F_r(1) + F_r(\frac{n}{2}+1) + 2.\sum_{j=2}^{n/4} F_r(2j-1) + 4.\sum_{j=2}^{n/4+1} F_r(2j-2)\right] \qquad (F.8)$$

Finalmente, a Equação (F.5) pode ser expressa como:

$$\Delta_r = 4.\pi.F_r \qquad (F.9)$$

Aplicando-se um desenvolvimento similar para a Equação (5.40), tem-se:

$$\Delta_t = 2.\pi \int_o^1 \int_o^{1/2} \bar{p}.\,\mathrm{sen}[2.\pi.(\frac{i-1}{m})].d\bar{x}.d\bar{z} \qquad (F.10)$$

e escrevendo-se na forma de diferenças finitas, tem-se:

$$\Delta_t = 2.\pi \int_{j=1}^{j=n+1} \int_{i=1}^{i=m/2+1} \bar{p}_{i,j} \, \text{sen}[2.\pi.(\frac{i-1}{m})].d\bar{x}.d\bar{z} \qquad (F.11)$$

Considerando-se apenas a metade do mancal para $1 \leq j \leq \frac{n}{2} + 1$, tem-se:

$$\Delta_t = 2.\pi \int_{j=1}^{j=n/2+1} \int_{i=1}^{i=m/2+1} \bar{p}_{i,j} \, \text{sen}[2.\pi.(\frac{i-1}{m})].d\bar{x}.d\bar{z} \qquad (F.12)$$

sendo

$$F_{t_j} = \int_{i=1}^{i=m/2+1} \bar{p}_{i,j} \, \text{sen}[2.\pi.(\frac{i-1}{m})].d\bar{x} \qquad (F.13)$$

Aplicando-se a regra de Simpson, tem-se:

$$F_{t_j} = \frac{1}{3.m} \left\{ 0 + 0 + 2.\sum_{i=2}^{m/4} \bar{p}(2i-1).\text{sen}[2.\pi.(\frac{2i-2}{m})] + \right.$$

$$\left. + 4.\sum_{i=2}^{m/4+1} \bar{p}(2i-2).\text{sen}[2.\pi.(\frac{2i-3}{m})] \right\}$$

Reajustando-se os termos, tem-se:

$$F_{t_j} = \frac{2}{3.m} \sum_{i=2}^{m/4} \bar{p}(2i-1)\text{sin}[2.\pi.(\frac{2i-2}{m})] +$$

$$+ \frac{4}{3.m} \sum_{i=2}^{m/4+1} \bar{p}(2i-2)\text{sin}[2.\pi.(\frac{2i-3}{m})] \qquad (F.14)$$

Aplicando a regra de Simpson novamente para integrar F_{t_j} na direção $\bar{z}$, tem-se:

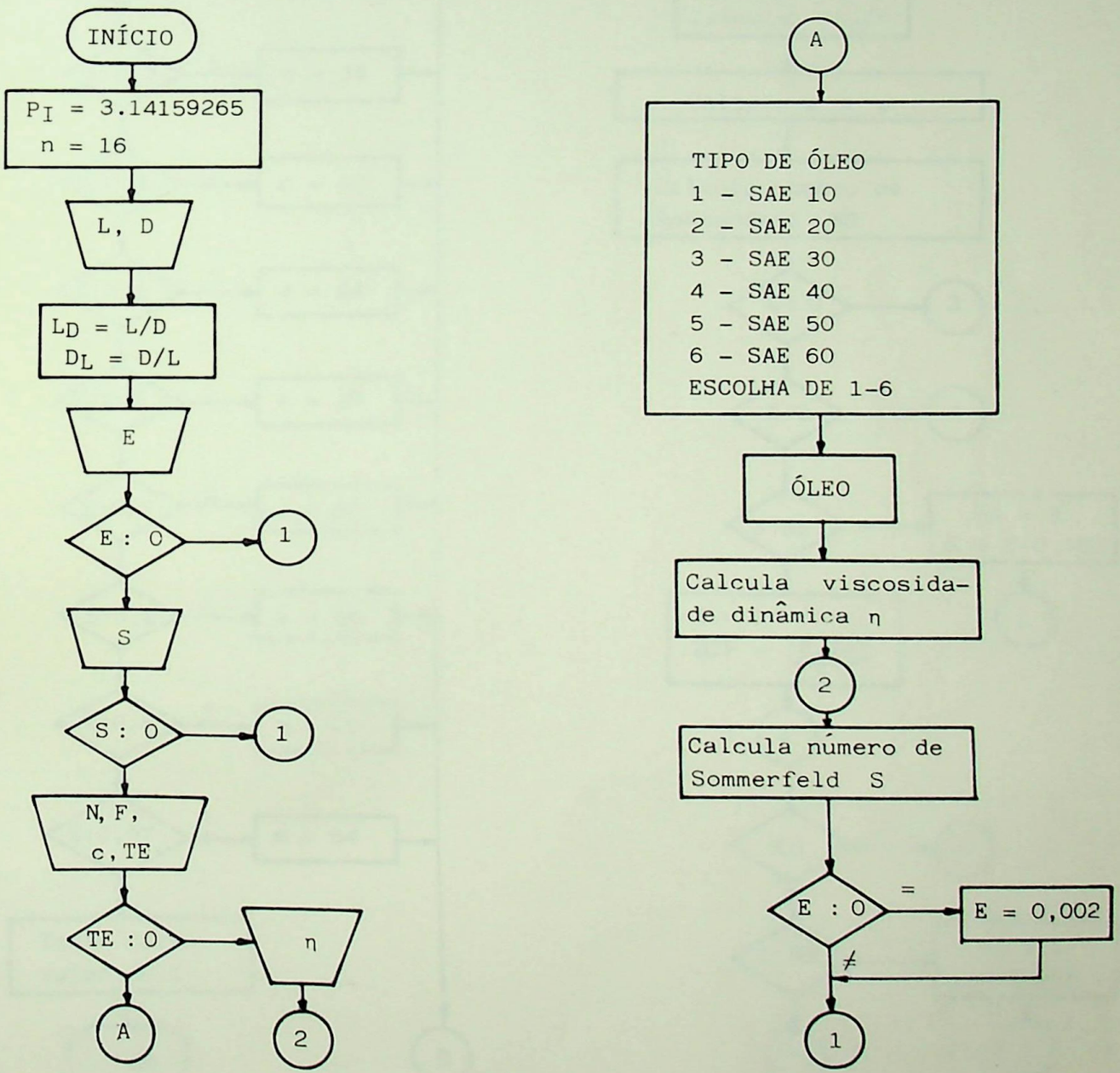
$$F_t = \frac{1}{3.n} \left[F_t(1) + F_t(\frac{n}{2}+1) + 2.\sum_{j=2}^{n/4} F_t(2j-1) + 4.\sum_{j=2}^{n/4+1} F_t(2j-2) \right] \qquad (F.15)$$

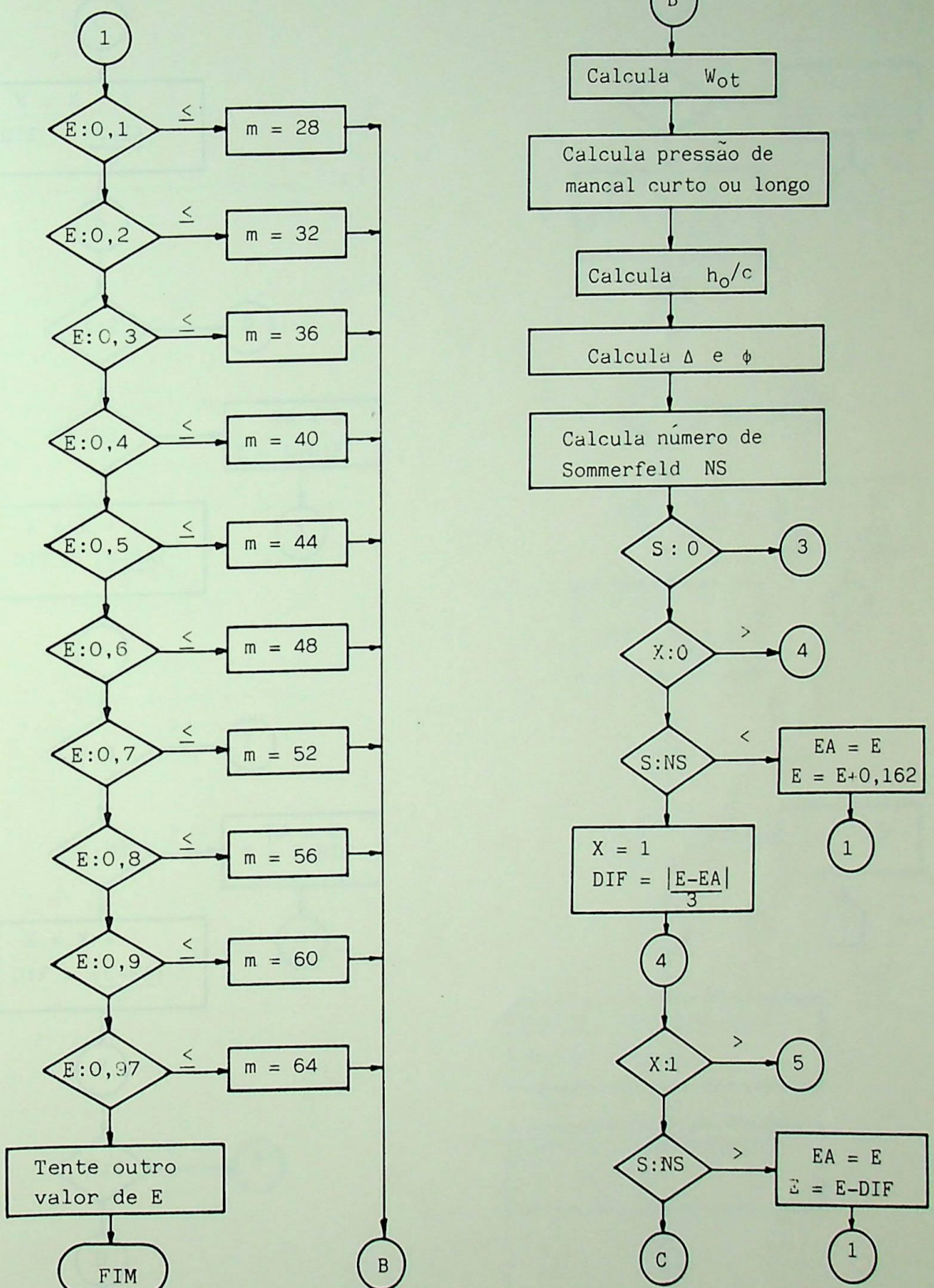
Finalmente a Equação (F.11) pode ser expressa como:

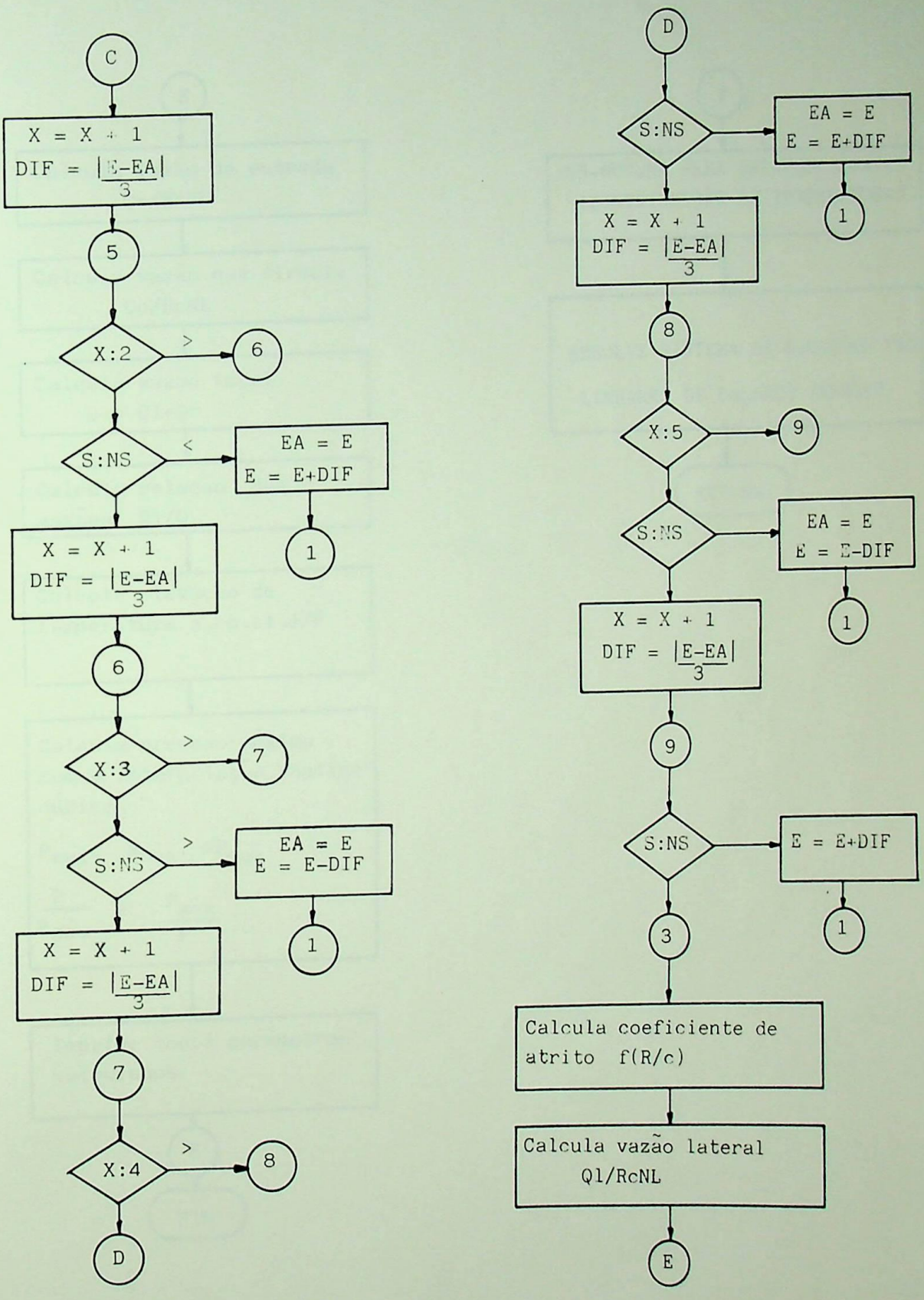
$$\Delta_t = 4.\pi.F_t \qquad (F.16)$$

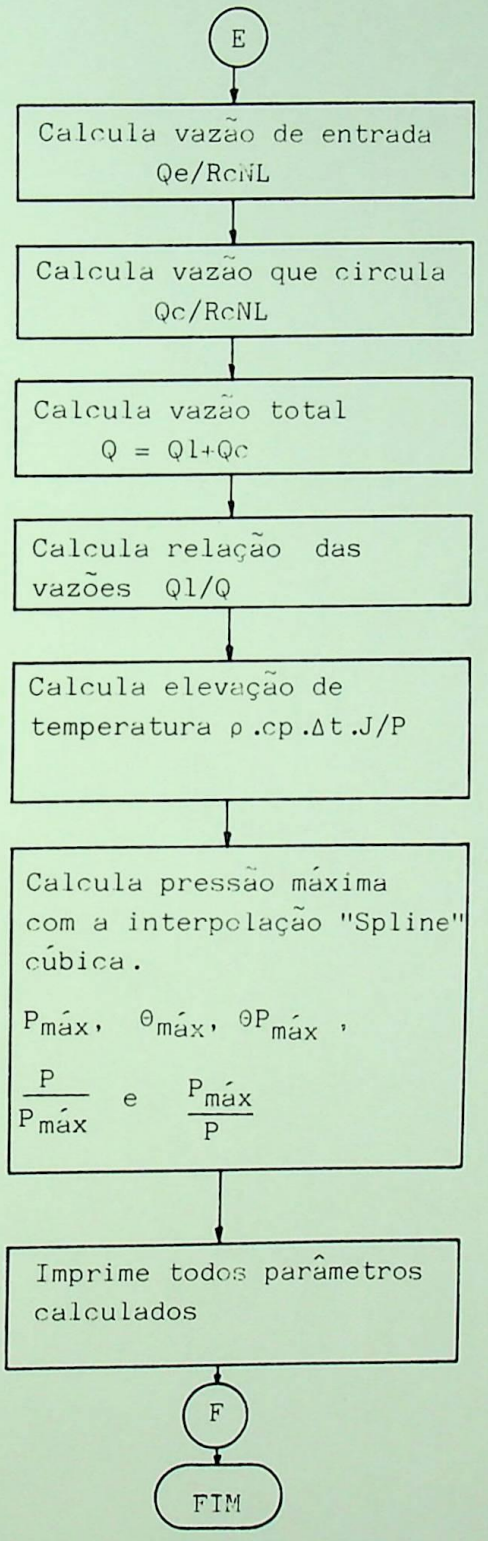
APÊNDICE G

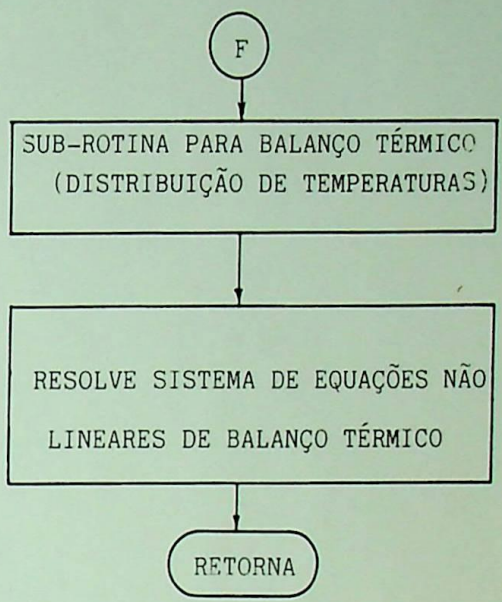
PROGRAMA PARA CALCULAR PARÂMETROS RESULTANTES - BALANÇO TÉRMICO (DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS)




1
E:0,1
≤
m = 28
E:0,2
≤
m = 32
E:0,3
≤
m = 36
E:0,4
≤
m = 40
E:0,5
≤
m = 44
E:0,6
≤
m = 48
E:0,7
≤
m = 52
E:0,8
≤
m = 56
E:0,9
≤
m = 60
E:0,97
≤
m = 64
Tente outro valor de E
FIM
B
B
Calcula Wot
Calcula pressão de mancal curto ou longo
Calcula ho/c
Calcula Δ e ϕ
Calcula número de Sommerfeld NS
S : 0
3
X:0
>
4
S:NS
<
EA = E
E = E+0,162
1
X = 1
DIF = |E-EA| / 3
4
X:1
>
5
S:NS
>
EA = E
E = E-DIF
C
1


C
X = X + 1
DIF = |E-EA| / 3
5
X:2
>
6
S:NS
<
EA = E
E = E+DIF
1
X = X + 1
DIF = |E-EA| / 3
6
X:3
>
7
S:NS
>
EA = E
E = E-DIF
1
X = X + 1
DIF = |E-EA| / 3
7
X:4
>
8
D
D
S:NS
EA = E
E = E+DIF
1
X = X + 1
DIF = |E-EA| / 3
8
X:5
9
S:NS
EA = E
E = E-DIF
1
X = X + 1
DIF = |E-EA| / 3
9
S:NS
E = E+DIF
1
3
Calcula coeficiente de atrito f(R/e)
Calcula vazão lateral Ql/RcNL
E


E
Calcula vazão de entrada Qe/RcNL
Calcula vazão que circula Qc/RcNL
Calcula vazão total Q = Ql+Qc
Calcula relação das vazões Ql/Q
Calcula elevação de temperatura ρ.cp.Δt.J/P
Calcula pressão máxima com a interpolação "Spline" cúbica.
$P_{máx}$, $\theta_{máx}$, $\theta P_{máx}$,
$\frac{P}{P_{máx}}$ e $\frac{P_{máx}}{P}$
Imprime todos parâmetros calculados
F
FIM


F
SUB-ROTINA PARA BALANÇO TÉRMICO (DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS)
RESOLVE SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES DE BALANÇO TÉRMICO
RETORNA

ANEXO 1

X CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, RIO DE JANEIRO, RJ (DEZEMBRO, 1989)
10th BRAZILIAN CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING

MANCAIS RADIAIS DE DESLIZAMENTO - ANÁLISE PREDITIVA DO COMPORTAMENTO TÉRMICO OPERACIONAL

Vilmar Arthur Schwarz
Américo Tetuo Miyazima
Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Caixa Postal 50
37500 - Itajubá (MG) - Brasil

PEM
PROGRAMA DE ENGENHARIA MECÂNICA
COPPE/UFRJ

RESUMO

O comportamento operacional de um mancal hidrodinâmico depende essencialmente da viscosidade do lubrificante na temperatura média do filme de óleo. A determinação exata dessa temperatura média é extremamente difícil, para não dizer impossível. No presente artigo, um método computacional relativamente simples para o cálculo da distribuição de temperaturas no mancal é apresentado, juntamente com algumas equações que possibilitam calcular diretamente as "variáveis dependentes" principais que definem o comportamento operacional de um mancal radial hidrodinâmico, para relações L/D≤1. Um exemplo de aplicação é também apresentado.

INTRODUÇÃO

Normalmente, as variáveis que definem um mancal radial de deslizamento hidrodinâmico são representadas esquematicamente conforme a figura 1.

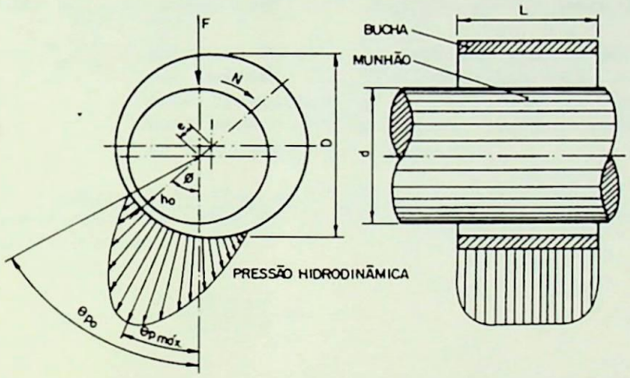


Fig. 1. Mancal e distribuição da pressão hidrodinâmica.

Essas variáveis podem ser classificadas em dois grupos, a saber:

a) Variáveis independentes (ou ajustáveis pelo projetista) que são:
   - . viscosidade do lubrificante, η;
   - . dimensões básicas do mancal: diâmetro D e comprimento L;
   - . folga radial construtiva, c c = 0,5(D-d) onde d = diâmetro do munhão;
   - . força radial aplicada, F;
   - . velocidade de rotação do munhão, N;

b) Variáveis dependentes ou resultantes:
   - . espessura mínima do filme de óleo, h_o;
   - . excentricidade de trabalho, e;
   - . coeficiente de atrito fluido, f;
   - . momento de atrito e perdas de potência por atrito;
   - . temperatura média do filme do óleo;
   - . valor máximo da curva de distribuição da pressão hidrodinâmica, P_{max};
   - . posição angular do final da curva de pressão hidrodinâmica, Θ_{Po};
   - . posição angular da pressão hidrodinâmica máxima, Θ_{Pmax};
   - . posição angular da espessura mínima do filme de óleo, ϕ.

Com base nessa classificação, a análise preditiva do comportamento operacional de um mancal radial de deslizamento tem sido feita mediante o uso de tabelas ou gráficos desenvolvidos por Raimondi & Boyd [1], e outros.

Essas tabelas e gráficos fornecem (para um número limitado de relações L/D) os valores das variáveis dependentes ou resultantes, em função do chamado "Número de Sommerfeld" ou "Número Característico do Mancal", que é um agrupamento adimensional das variáveis independente fixadas pelo projetista, isto é

$$S = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \cdot \frac{N \cdot \eta}{P}$$

onde $P = \frac{F}{L \cdot D}$ é a "pressão específica".

A maior dificuldade que se apresenta ao projetista de um mancal prende-se ao fato de que a viscosidade dos óleos lubrificantes varia muito com a temperatura. Assim sendo, a variável "independente" depende da variável "dependente" que é a temperatura e esta depende da perda de potência, que por sua vez é uma função da viscosidade.

Isso gera um problema extremamente complexo, mas que pode, no entanto, ser resolvido, considerando-se o equilíbrio térmico entre o calor gerado por unidade de tempo (perda de potência) no mancal e a "capacidade de dissipação de calor" do sistema, conforme descrito a seguir.

DETERMINAÇÃO DAS TEMPERATURAS DE TRABALHO

Equilíbrio Térmico. Para determinar as temperaturas de vários pontos (nós) do mancal, pode-se empregar o "Método do Balanço Térmico", conforme descrito por Welty [2] e representado esquematicamente na Figura 2.

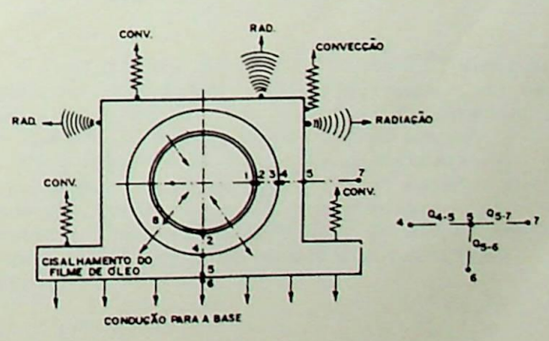


Fig. 2. Esquema teórico da distribuição de temperaturas e dissipação de calor.

Como o próprio nome indica, o método consiste em gualar o fluxo de calor que entra nesse nó (adicionado) calor gerado nesse nó - se houver) ao calor que sai) nó, por unidade de tempo.

A título de ilustração, considere-se a figura 2, om a seguinte seleção arbitrária de nós "i" e tempera uras "t_i":

Nó 1 - Superfície externa do munhão - t_1
Nó 2 - Superfície interna da bucha - t_2
Nó 3 - Superfície externa da bucha - t_3
Nó 4 - Superfície interna da caixa - t_4
Nó 5 - Superfície externa da caixa - t_5
Nó 6 - Superfície da base - t_6
Nó 7 - Temperatura ambiente - t_7
Nó 8 - Filme de óleo - t_8
Nó 9 - Superfície do eixo a uma distância "ℓ" do nó 1 - t_9

Aplicando-se, por exemplo, as condições de equilí rio térmico aos nós 1, 2, 4 e 5 obtém-se as equações), (2), (3) e (4), como segue:

$$Q_{1-2} + Q_{1-9} = P_m \cdot (Q_g - Q_o) \quad (1)$$

$$Q_{1-2} + P_b \cdot (Q_g - Q_o) = Q_{2-3} \quad (2)$$

$$Q_{3-4} = Q_{4-5} \quad (3)$$

$$Q_{4-5} = Q_{5-7} + Q_{5-6} \quad (4)$$

ıde: $Q_{i,j}$ = transferência de calor do nó "i" para o nó "j";

P_m, P_b = parcelas do calor gerado por atrito no mancal (menos o calor Q_o, retirado por um óleo circulante, se houver), que se distribuem para o munhão e para a bucha (isso será discutido mais adiante).

Equações Básicas de Transferência de Calor. A condução radial de calor do nó 2 para o nó 3 pode ser representada por:

$$Q_{2-3} = \frac{2k \cdot \pi \cdot L(t_2 - t_3)}{\ln(r_3/r_2)} \quad (5)$$

ıde: k = 105 a 115 [W/m °C] (condutividade térmica do latão, por exemplo).

Segundo Wong [3], a equação (5) pode ser modifica da seguinte maneira, para o caso de condução radial calor da superfície cilíndrica interna da caixa de mancal, para suas superfícies externas verticais e rizontais (se for o caso):

$$Q_{4-5} = \frac{2k \cdot \pi \cdot L(t_4 - t_5)}{\ln\left|\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{r_4}\right|} \quad (6)$$

ıde: k = 45 a 60 [W/m °C] para aços e ferros fundidos comuns;
a,b = lados maior e menor de uma superfície retangular;
L = largura axial da caixa do mancal.

A condução interfacial de calor entre os nós 5 e (bem como também entre os nós 3 e 4) pode ser repre ntada por:

$$Q_{5-6} = H_c \cdot A(t_6 - t_7) \quad (7)$$

de: H_c = 10.000 a 20.000 [W/m²K], segundo dados das referências [4, 5 e 6].

A dissipação de calor do nó 5 para o ambiente en oba os processos de transferência de calor por convec o natural ou forçada e radiação, podendo ser represen da pela seguinte equação:

$$Q_{5-7} = f_c \cdot A(t_5 - t_7) + \sigma \cdot \varepsilon \cdot A\left|(t_5 + 273{,}15) - (t_7 - 273{,}15)^4\right| \quad (8)$$

onde: $\sigma = 5{,}76 \cdot 10^{-8}$ [W/m²K⁴]
ε = emissividade da superfície; ε = 0,6 a 0,8 para ligas ferrosas normais.

Dados sobre o coeficiente de convecção f_c e emissividade ε, podem ser encontrados em [5].

Pode-se demonstrar que a transferência de calor entre o munhão e a bucha, através do filme de óleo, se dá preponderantemente por condução e pode ser representada por:

$$Q_{1-2} = \frac{k}{c} \cdot A(t_1 - t_2) \quad (9)$$

onde: k = 0,130 [W/m °C], para óleos minerais em condições normais de trabalho.

Aplicando a condição de equilíbrio térmico ao nó 9, tem-se:

$$Q_{1-9} + Q_{ext.} = Q_{9-7} \quad (10)$$

$$Q_{1-9} = \frac{k}{\ell} A(t_1 - t_9) \quad (11)$$

onde: A = área da secção transversal do munhão;
ℓ = distância entre os nós 1 e 9.

A dissipação de calor do nó 9 para o ambiente pode ser representada pela equação (8), bastando, evidentemente, substituir o índice 5 (referente ao nó 5) pelo índice 9. Além disso, para o caso de uma superfície cilíndrica giratória, o coeficiente f_c na equação (8) deve ser substituido pela equação (12), isto é:

$$f_c = \frac{k}{D} 0{,}076 \cdot R_e^{0,7} \quad (12)$$

onde: $R_e = \frac{\omega \cdot D^2}{\nu}$, Número de Reynolds;
ω = velocidade angular do eixo;
ν = viscosidade cinemática do fluido adjacente.

O termo $Q_{ext.}$ na equação (10) é de grande importância nos cálculos e foi introduzido para levar em conta o fluxo de calor de fontes externas, tais como outros mancais montados no mesmo eixo, vedadores, etc..

Alternativamente, quando a temperatura t_{10} de um determinado nó 10 sobre o eixo for conhecida, o termo $Q_{ext.}$ pode ser substituido por Q_{10-9}, dado por uma equação do tipo da equação (11).

Equações de Geração de Calor e outras. O calor gerado pelo atrito no mancal pode ser calculado pela seguinte equação:

$$Q_g = f \cdot F \cdot D \cdot \pi \cdot N \quad (13)$$

O coeficiente de atrito fluido "f" depende principalmente da viscosidade do lubrificante, na temperatura média do filme de óleo, ou, mais exatamente, do Número de Sommerfeld e da relação L/D do mancal.

No presente trabalho, uma modificação foi introduzida ao Número de Sommerfeld, de tal maneira que resultou uma só "curva" (para qualquer relação L/D) para representar a "variável coeficiente de atrito modificado" em função do "Número de Sommerfeld modificado", SM como segue:

$$\left(\frac{L}{D}\right)^2 \cdot \frac{r}{c} \cdot f = 0{,}56 + 19{,}2 \cdot SM \quad (14)$$

Como o próprio nome indica, o método consiste em ualar o fluxo de calor que entra nesse nó (adicionado calor gerado nesse nó - se houver) ao calor que sai nó, por unidade de tempo.

A título de ilustração, considere-se a figura 2, m a seguinte seleção arbitrária de nós "i" e tempera ras "t_i":

Nó 1 - Superfície externa do munhão - t_1
Nó 2 - Superfície interna da bucha - t_2
Nó 3 - Superfície externa da bucha - t_3
Nó 4 - Superfície interna da caixa - t_4
Nó 5 - Superfície externa da caixa - t_5
Nó 6 - Superfície da base - t_6
Nó 7 - Temperatura ambiente - t_7
Nó 8 - Filme de óleo - t_8
Nó 9 - Superfície do eixo a uma distância "ℓ" do nó 1 - t_9

Aplicando-se, por exemplo, as condições de equilí io térmico aos nós 1, 2, 4 e 5 obtém-se as equações), (2), (3) e (4), como segue:

$$Q_{1-2} + Q_{1-9} = P_m \cdot (Q_g - Q_o) \quad (1)$$

$$Q_{1-2} + P_b \cdot (Q_g - Q_o) = Q_{2-3} \quad (2)$$

$$Q_{3-4} = Q_{4-5} \quad (3)$$

$$Q_{4-5} = Q_{5-7} + Q_{5-6} \quad (4)$$

de: $Q_{i,j}$ = transferência de calor do nó "i" para o nó "j";

P_m, P_b = parcelas do calor gerado por atrito no mancal (menos o calor Q_o, retirado por um óleo circulante, se houver), que se distribuem para o munhão e para a bucha (isso será discutido mais adiante).

Equações Básicas de Transferência de Calor. A con ção radial de calor do nó 2 para o nó 3 pode ser re esentada por:

$$Q_{2-3} = \frac{2k \cdot \pi \cdot L(t_2 - t_3)}{\ln(r_3/r_2)} \quad (5)$$

de: k = 105 a 115 [W/m °C] (condutividade térmica do latão, por exemplo).

Segundo Wong [3], a equação (5) pode ser modifica da seguinte maneira, para o caso de condução radial calor da superfície cilíndrica interna da caixa de mancal, para suas superfícies externas verticais e rizontais (se for o caso):

$$Q_{4-5} = \frac{2k \cdot \pi \cdot L(t_4 - t_5)}{\ln\left|\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{r_4}\right|} \quad (6)$$

de: k = 45 a 60 [W/m °C] para aços e ferros fundidos comuns;
a,b = lados maior e menor de uma superfície retangular;
L = largura axial da caixa do mancal.

A condução interfacial de calor entre os nós 5 e (bem como também entre os nós 3 e 4) pode ser repre ntada por:

$$Q_{5-6} = H_c \cdot A(t_5 - t_6) \quad (7)$$

de: H_c = 10.000 a 20.000 [W/m²K], segundo dados das referências [4, 5 e 6].

A dissipação de calor do nó 5 para o ambiente en ba os processos de transferência de calor por convec natural ou forçada e radiação, podendo ser represen a pela seguinte equação:

$$Q_{5-7} = f_c \cdot A(t_5 - t_7) + \sigma \cdot \varepsilon \cdot A\left|(t_5 + 273{,}15)^4 - (t_7 - 273{,}15)^4\right| \quad (8)$$

onde: $\sigma = 5{,}76 \cdot 10^{-8}$ [W/m²K⁴]

ε = emissividade da superfície; ε = 0,6 a 0,8 para ligas ferrosas normais.

Dados sobre o coeficiente de convecção f_c e emissividade ε, podem ser encontrados em [5].

Pode-se demonstrar que a transferência de calor entre o munhão e a bucha, através do filme de óleo, se dá preponderantemente por condução e pode ser representada por:

$$Q_{1-2} = \frac{k}{c} \cdot A(t_1 - t_2) \quad (9)$$

onde: k = 0,130 [W/m °C], para óleos minerais em condições normais de trabalho.

Aplicando a condição de equilíbrio térmico ao nó 9, tem-se:

$$Q_{1-9} + Q_{ext.} = Q_{9-7} \quad (10)$$

$$Q_{1-9} = \frac{k}{\ell} A(t_1 - t_9) \quad (11)$$

onde: A = área da secção transversal do munhão;
ℓ = distância entre os nós 1 e 9.

A dissipação de calor do nó 9 para o ambiente po de ser representada pela equação (8), bastando, evidentemente, substituir o índice 5 (referente ao nó 5) pelo índice 9. Além disso, para o caso de uma superfície cilíndrica giratória, o coeficiente f_c na equação (8) deve ser substituido pela equação (12), isto é:

$$f_c = \frac{k}{D} 0{,}076 \cdot R_e^{0{,}7} \quad (12)$$

onde: $R_e = \frac{\omega \cdot D^2}{\nu}$, Número de Reynolds;

ω = velocidade angular do eixo;
ν = viscosidade cinemática do fluido adjacente.

O termo $Q_{ext.}$ na equação (10) é de grande importância nos cálculos e foi introduzido para levar em conta o fluxo de calor de fontes externas, tais como outros mancais montados no mesmo eixo, vedadores, etc..

Alternativamente, quando a temperatura t_{10} de um determinado nó 10 sobre o eixo for conhecida, o termo $Q_{ext.}$ pode ser substituido por Q_{10-9}, dado por uma equação do tipo da equação (11).

Equações de Geração de Calor e outras. O calor gerado pelo atrito no mancal pode ser calculado pela seguinte equação:

$$Q_g = f \cdot F \cdot D \cdot \pi \cdot N \quad (13)$$

O coeficiente de atrito fluido "f" depende principalmente da viscosidade do lubrificante, na temperatura média do filme de óleo, ou, mais exatamente, do Número de Sommerfeld e da relação L/D do mancal.

No presente trabalho, uma modificação foi introduzida ao Número de Sommerfeld, de tal maneira que resultou uma só "curva" (para qualquer relação L/D) para representar a "variável coeficiente de atrito modificada" em função do "Número de Sommerfeld modificado", SM como segue:

$$\left(\frac{L}{D}\right)^{0,5} \cdot \frac{r}{c} \cdot f = 0{,}56 + 19{,}2 \cdot SM \quad (14)$$

$$SM = \left(\frac{L}{D}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{r}{c}\right)^{2} \cdot \frac{N \cdot \eta}{P} \qquad (15)$$

de: $\alpha = 2 - \frac{L}{D}$ para $\frac{L}{D} \leq 1$

$\alpha = \frac{D}{L}$ para $\frac{L}{D} \geq 1$.

A figura 3 mostra a "curva", ou melhor, a reta e representa a variação do "coeficiente de atrito modificado" em função do "Número de Sommerfeld modificado". A figura 3 mostra também, devidamente equacionados, as igualmente importantes variáveis adimensionais e definem o comportamento de um mancal:

Vazão lateral, $\bar{Q} = \frac{Q}{r \cdot c \cdot N \cdot L}$,

Espessura mínima do filme de óleo, $\frac{h_o}{c}$.

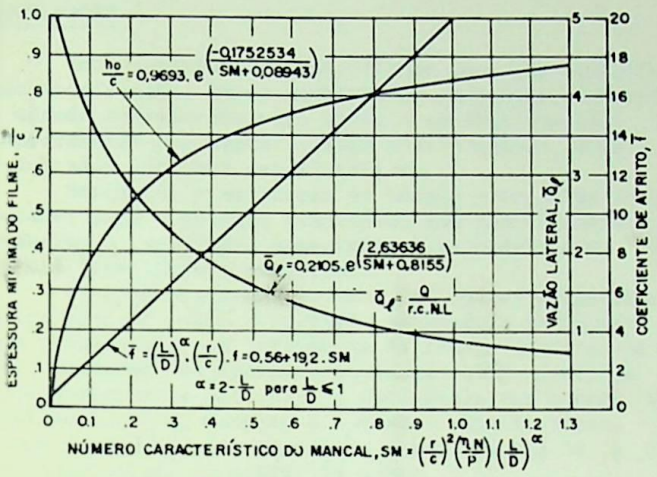


Fig. 3. Variáveis dependentes versus "SM".

A espessura mínima do filme de óleo, h_o, quando comparada com a rugosidade combinada das superfícies de trabalho do munhão e da bucha, define o "grau de lubrificação" obtido, ou, em outras palavras, informa ao projetista quanto à possibilidade de haver ou não contato metálico e consequente desgaste do mancal.

A vazão lateral, Q_ℓ, além de definir a capacidade do sistema de suprimento de lubrificante, é importante para o cálculo da quantidade de calor Q_o retirado pelo óleo num sistema de lubrificação por circulação.

Essa quantidade de calor pode ser calculada pela seguinte equação:

$$Q_o = Q_\ell \cdot Cp \cdot \rho \cdot (t_s - t_e) \cdot 4186 \ [W] \qquad (16)$$

onde: Q_ℓ = vazão de lubrificante, [m³/s],
Cp = calor específico do lubrificante, 0,45 a 0,5 [Cal/g °C],
ρ = massa específica do lubrificante, [kg/m³],
t_s = temperatura do óleo na saída do mancal, [°C],
t_e = temperatura do óleo na entrada, [°C].

Observação: segundo alguns resultados experimentais, a temperatura t_s, pode ser considerada como igual à temperatura do munhão, ou da bucha (a menor das duas).

Finalmente, para possibilitar todos os cálculos posteriormente, por meio de computador, a viscosidade absoluta η foi representada pela equação (17), isto é:

$$\log \log(\eta + 0,6) = K_1 \cdot \log(t_m + 273,15) + K_2 \qquad (17)$$

onde: $t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$, é a temperatura média do filme de óleo no mancal,
log = logaritmo de base decimal.

A tabela a seguir mostra os valores de K_1 e K_2 para alguns dos óleos mais comumente utilizados para a lubrificação de mancais de deslizamento.

Óleo	K_1	K_2
ISO 46	-4,01195	10,21927
ISO 68	-4,07849	10,42759
ISO 100	-4,08400	10,47994
ISO 150	-3,65831	9,45667

Equilíbrio Térmico - Equacionamento Final. Substituindo-se as equações de transferência de calor, isto é, as equações (5), (6), ..., (9), (11) e (14), bem como as equações (13), ..., (17), nas equações de equilíbrio térmico (1), (2), (3), (4) e (10), obtém-se finalmente um sistema de n equações em t_i (i = 1 a n, onde n = = número de nós selecionados para definir a distribuição de temperaturas no mancal; quanto maior n maior a precisão dos resultados).

Para resolver esse sistema de n equações (muitas delas não lineares) a n incógnitas, ou seja, para calcular as temperaturas dos n nós, um programa FORTRAN foi desenvolvido. Além disso, o programa fornece também como dados de saída, as "variáveis dependentes" que definem o comportamento operacional do mancal.

A figura 4 mostra os resultados obtidos para um mancal de diâmetro 60 mm, largura 30 mm e folga radial c = 0,06 mm (as demais dimensões podem ser aproximadas da figura 4, uma vez que o desenho está em escala). Cada "quadrado" na figura 4 representa as temperaturas calculadas para os casos de lubrificação sem ou com circulação "externa" de óleo.

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E SUGESTÕES

Distribuição de Temperaturas e "Variáveis Resultantes". Numa tentativa de estabelecer termos de comparação relativamente aos resultados experimentais, com mancais de rolamento, obtidos por Schwarz [5], as dimensões do mancal de deslizamento mostrado na figura 4 foram convenientemente adotadas para substituir um dos rolamentos testados, enquanto que as dimensões da caixa foram mantidas e um lubrificante de menor viscosidade foi utilizado.

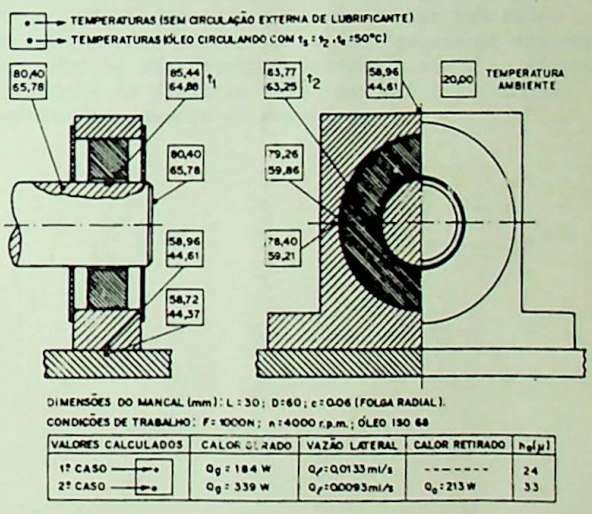


Fig. 4. Distribuição de temperaturas.

Dentro dessa perspectiva, as temperaturas calculadas (figura 4) apresentaram uma boa concordância com os dados experimentais da Ref. 5, para uma perda de potência praticamente idêntica, tanto para o rolamento como para o mancal de deslizamento.

É importante citar que os fatores P_m e P_b, das equações (1) e (2), foram fixados como iguais a 30% e 70%, respectivamente, em função dos resultados experimentais da Ref. 5 e outros. Alternativamente, na falta de dados experimentais, poder-se-ia ter fixado $P_m = P_b =$ = 50%.

Como era de se esperar, as temperaturas calculadas resultaram cerca de 24% menores para o caso de lubrificação com circulação de óleo, conforme mostrado na figura 4.

Consequentemente, devido ao aumento da viscosida
e do lubrificante, tanto a espessura mínima do filme
e óleo como o calor gerado no mancal resultaram maio
es, relativamente ao caso de lubrificação sem circula
ão "externa", ao passo que a vazão resultou menor, con
orme pode ser observado na tabela logo abaixo da figu
a 4.

"Variáveis Dependentes Unificadas". As curvas e
quações mostradas na figura 3 são válidas com exatidão
ara um mancal de relação L/D = 1/2, podendo, no entan
o, serem aplicadas, com erro insignificante, para
uaisquer relações L/D < 1, desde que se tenha $h_o/C \geq$
0,5. Para $h_o/C < 0,5$ e $L/D \neq 1/2$, erros crescentes de
té 10% são introduzidos à medida que a espessura míni
a adimensional h_o/C diminue.

A generalização dessas curvas e equações, para
uaisquer relações L/D, é um dos objetivos para um pró
mo artigo englobando todas as variáveis dependentes.

ONCLUSÕES

Embora possa ser classificado como uma simplifica
ão considerável de um problema extremamente complexo,
método apresentado para cálculo da distribuição de
emperaturas num mancal radial hidrodinâmico, conduz a
esultados bastante satisfatórios.

Portanto, a aplicação do método e programa de com
utador para o cálculo simultâneo das temperaturas de
rabalho e "variáveis dependentes" do mancal é de gran
e utilidade para o projetista.

Deve-se observar, no entanto, que as temperaturas
alculadas só terão a precisão necessária se houver um
om conhecimento da influência de fontes externas de ca
or, conforme considerado na equação (10). Conforme se
ode observar na Ref. [5], a influência dos outros man
ais do banco de ensaios é bastante significativa, po
endo contribuir com um calor externo de até 30 a 35%
o calor gerado no mancal em teste.

Outro fator importante é a condução de calor da
aixa do mancal para a base da máquina, conforme obser
ado também nos resultados experimentais da Ref. [5].

REFERÊNCIAS

[1] Raimondi, A.A. & Boyd, J., A solution for the journal bearing and its application to analysis and design. Part I, II and III. Trans. ASME, V. 1, pp.159-174, pp.175-193, pp.194-209, april, (1958)

[2] Welty, J.R., Engineering Heat Transfer, John Wiley and Sons, pp.38-65, (1974).

[3] Wong, H.Y., Heat Transfer for Engineers, Longman Inc., New York, pp.18-22, (1977).

[4] Reason, B.R. & Schwarz, V.A., A thermal prediction for extending in-servive life or roller bearing assemblies. NBS Special Publication 640, MFPG, National Bureau of Standards, Washington D.C., USA, pp.295-325, (1981).

[5] Schwarz, V.A., Experimental and Analytical Studies on Temperature Distributions in Bath Lubricated Radial Roller Bearing Assemblies. Ph.D. Thesis, Cranfield Institute of Technology, (1982).

[6] Schwarz, V.A. & Reason, B.R., Mitigation of thermal hazards in rolling contact bearings through correlated computer analysis. AGARD Conference Proceedings nº 323. Problems in Bearings and Lubrication, Ottawa, Canadá, pp.9-1 to 9-16, NTIS, (1982).

ABSTRACT

The working behaviour of a hydrodynamic journal bearing depend essentially on the lubricant viscosity at the average oil film temperature. The analytical determination of this temperature is extremely complex, due to the proper variation of the lubricant viscosity with temperature and to the difficulty on the formulation of suitable heat transfer coefficients.

In this paper, a simple computational method is presented for the prediction of the spacial temperature distribution within a journal bearing unit, including the oil film temperature. A few design equations for the calculation of the so called "dependent variables"- which define the bearing behaviour - are also presented, for lenght to diameter relations $L/D \leq 1$. Finally, an application example is presented.

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200618
NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA