GRACIELA R. CALZOLARI CAPPI

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca
MAUÁ
Itajubá

# A ANÁLISE DOS MODELOS DE TRANSFORMADORES DE POTÊNCIA PARA ESTUDOS DE TRANSITÓRIOS ELETROMAGNÉTICOS

ORIENTADOR: Prof. João R. Cogo
CO-ORIENTADOR: Prof. Antonio E. Hermeto

Trabalho de Dissertação apresentado à Coordenação dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Itajubá, Junho de 1990.

CLASS. 621.314.222.001.63(043.2)
CUTT. C171a
TOMBO 625

EFEI / BIBLIOTECA

ESTE LIVRO DEVE SER DEVOLVIDO NA ÚLTIMA DATA CARIMBADA.

| | | |
|---|---|---|
| 15.01.91 | | |
| 23/04/91 | | |
| 24/09/91 | | |
| 13.02.91 | | |
| 31.5.93 | | |
| 13.02.02 | | |
| 10/05/02 | | |
| 12/08/14 | | |
| | | |
| | | |
|

Aos meus pais César e Ada e
ao meu esposo Cláudio.

# AGRADECIMENTOS

- Meu especial agradecimento ao Brasil, ao Programa de Estudantes-Convênio de Pós-Graduação - PEC/PG, e à Escola Federal de Engenharia de Itajubá (EFEI) por ter sido aceita nos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

- Ao Professor Dr. Hermann W. Dommel pelo esclarecimento de dúvidas e pelas sugestões quanto ao conteúdo deste trabalho.

- Ao Professor Dr. João R. Cogo, orientador atento deste trabalho de dissertação.

- Ao Professor Dr. Antonio E. Hermeto, pelas valiosas sugestões e esclarecimentos de dúvidas durante todo o desenvolvimento deste trabalho e amigo nos momentos difíceis.

- Ao Professor Maurílio Pereira Coutinho, pelo esclarecimento de dúvidas na parte de programação e pelo apoio computacional.

- À todos os funcionários do Centro de Processamento de Dados (CPD), sempre prestativos e amáveis no desempenho de suas funções.

- Ao Sr. Ronaldo Ivo Firmo, responsável pelos trabalhos de datilografia, pela motivação demonstrada.

- Ao Sr. Argemiro dos Santos, executor dos desenhos constantes no trabalho.

- À cidade de Itajubá, que me acolheu com carinho.

# ÍNDICE

pág.

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO ..... 01

CAPÍTULO II - MODELAGEM DE TRANSFORMADORES PARA USO EM SIMULAÇÃO EM COMPUTADORES DIGITAIS ..... 03

1 - Introdução ..... 03
2 - Modelagem dos Transformadores ..... 04
2.1 - Primeiro modelo de transformador monofásico de N enrolamentos ..... 04
2.1.1 - Transformador monofásico de dois enrolamentos ..... 04
2.1.1-1 - Características e obtenção das matrizes do modelo [R]-[L] ..... 11
2.1.1-2 - Características e obtenção das matrizes do modelo $[R]-[L]^{-1}$ ..... 18
2.1.2 - Transformador monofásico de N enrolamentos. 21
2.1.2-1 - Modelo [R]-[L] do transformador de N enrolamentos ..... 21
2.1.2-2 - Modelo $[R]-[L]^{-1}$ do transformador de N enrolamentos ..... 22
2.2 - Segundo modelo de transformador monofásico de N enrolamentos ..... 36
2.2.1 - Transformador monofásico de dois enrolamentos ..... 36
2.2.2 - Transformador monofásico de N enrolamentos. 43
2.3 - Terceiro modelo de transformador monofásico de N enrolamentos ..... 46
2.3.1 - Fórmulas para obter o valor aproximado das perdas no núcleo ..... 47
2.3.2 - Modelagem das perdas ..... 48
2.3.2-1 - Primeiro modelo ..... 48
2.3.2-2 - Segundo modelo ..... 50

2.4 - Quarto modelo de transformador monofásico de N enrolamentos ..... 52
2.4.1 - Transformador monofásico de dois enrolamentos ..... 53
2.4.1-1 - Modelo $[R]-[L]^{-1}$ ..... 53
2.4.1-2 - Modelo [R]-[L] ..... 55
2.4.2 - Transformador monofásico de N enrolamentos. 58
2.5 - Modelagem para bancos de transformadores ..... 58
2.6 - Primeiro modelo de transformador trifásico ..... 58
2.6.1 - Transformador trifásico de dois enrolamentos ..... 58
2.6.1-1 - Modelo [R]-[L] ..... 58
2.6.1-2 - Modelo $[R]-[L]^{-1}$ ..... 67
2.7 - Segundo modelo de transformador trifásico ..... 71
2.7.1 - Transformador trifásico de dois enrolamentos ..... 72
2.7.1-1 - Modelo [R]-[L] ..... 72
2.7.1-2 - Modelo $[R]-[L]^{-1}$ ..... 72
2.8 - Terceiro modelo de transformador trifásico ..... 75
2.8.1 - Modelagem das perdas ..... 75
2.9 - Quarto modelo de transformador trifásico ..... 77
2.9.1 - Modelo $[R]-[L]^{-1}$ ..... 77
2.9.2 - Modelo [R]-[L] ..... 80
2.10 - Modelagem de autotransformadores ..... 80
2.10.1 - Autotransformador monofásico de dois enrolamentos ..... 80
2.10.2 - Autotransformador monofásico de três enrolamentos ..... 81
2.10.3 - Modelagem para bancos de autotransformadores ..... 83
2.10.4 - Autotransformador trifásico ..... 83
2.11 - Implementação computacional dos modelos do transformador no programa UBC-EFEI ..... 83
2.11.1 - Introdução ..... 84
2.11.2 - Matriz de condutâncias de ramo ..... 85
2.11.3 - Matriz de condutâncias nodais ..... 87

2.11.3-1 - Primeiro procedimento ..... 87
2.11.3-2 - Segundo procedimento ..... 88
2.11.4 - Obtenção das tensões e correntes de ramo num transformador para cada instante de tempo ..... 93
2.11.5 - Perdas no núcleo ..... 93
2.11.6 - Saturação do núcleo ..... 94
2.11.7 - Aspectos complementares ..... 94
2.11.7-1 - Relação entre a matriz de admitâncias de ramos e a matriz de admitância nodal ..... 94
2.11.7-2 - Relação entre $[G_r]$ e $[G_{NT}]$ ... 96
2.11.7-3 - Fatoração de $[G_N]$ com $[G_{NT}]$ singular ..... 97
2.11.7-4 - Entrada de dados ..... 99
2.12 - Saturable transformer component ..... 100
2.12.1 - Modelagem de transformador ideal monofásico de dois enrolamentos ..... 100
2.12.2 - Modelagem utilizando "saturable transformer component" ..... 103
2.13 - Conexão em triângulo flutuante ..... 108

CAPÍTULO III - MODELAGEM DIGITAL DE ELEMENTOS - NÃO LINEARES - VARIANTES COM O TEMPO ..... 110

1 - Introdução ..... 110
2 - Teoria ..... 111
2.1 - Método da compensação ..... 111
2.1.1 - Considerações gerais ..... 111
2.1.2 - Desenvolvimento teórico para um elemento não linear ..... 112
2.1.3 - Desenvolvimento teórico para N elementos não lineares ..... 118
2.1.4 - Característica de um indutor não linear ... 123

2.2 - Representação por fontes de corrente com um tempo de atraso Δt ..... 125
2.3 - Linearização por segmentos das características: Enlace de fluxo - corrente
tensão - corrente ..... 126
2.4 - Método da rede equivalente ..... 131
3 - Problemas com as Modelagens ..... 134
3.1 - Problemas com o método de compensação ..... 134
3.2 - Problemas com o método de linearização por segmentos ..... 135
3.3 - Problema comum aos dois métodos ..... 137
4 - Subrotina NONLIN ..... 138
4.1 - Introdução ..... 138
4.2 - Teoria ..... 139
4.2.1 - Formulação matemática da curva corrente x enlace de fluxo ..... 139
4.2.2 - Formulação matemática da curva corrente x corrente x tensão ..... 142
4.2.3 - Formulação matemática da subrotina NONLIN . 143
4.2.3-1 - N indutores não lineares ..... 143
4.2.3-2 - M indutores e N-M resistências .. 147
5 - Exemplos de Aplicação da Subrotina NONLIN ..... 151
5.1 - Introdução ..... 151
5.2 - Descrição do sistema elétrico de potência ..... 151
5.3 - Sobretensões sustentadas ..... 152
5.3.1 - Introdução ..... 152
5.3.2 - Estudos feitos ..... 155
5.3.3 - Resultados obtidos ..... 159
5.3.4 - Análise dos resultados ..... 164
5.4 - Sobretensões de manobra ..... 167
5.4.1 - Introdução ..... 167
5.4.2 - Estudos feitos ..... 169
5.4.3 - Resultados obtidos ..... 175
5.4.4 - Análise dos resultados ..... 182

CAPÍTULO IV - MODELOS DE TRANSFORMADORES DE POTÊNCIA OBTIDOS COM BASE EM CIRCUITOS MAGNÉTICOS ..... 185

1 - Introdução ..... 185
2 - Teoria ..... 185
2.1 - Obtenção de um circuito magnético equivalente ..... 186
2.2 - Derivação do circuito elétrico equivalente ao circuito magnético equivalente obtido ..... 191
2.2.1 - Equivalência entre as leis de nós e malhas dos circuitos elétricos e magnéticos ..... 191
2.2.2 - Equivalência entre as relutâncias dos circuitos magnéticos e as indutâncias dos circuitos elétricos equivalentes ..... 193
2.2.3 - Circuito elétrico equivalente ..... 194
2.3 - Aplicação do princípio topológico da dualidade .... 194
3 - Modelagem de Transformadores Monofásicos de Dois enrolamentos ..... 198
3.1 - Transformador tipo núcleo ..... 199
3.2 - Transformador tipo couraça ..... 204
3.3 - Determinação dos parâmetros dos modelos obtidos nos ítens 3.1 e 3.2 ..... 209
3.3.1 - Modelo 2 para transformadores tipo núcleo e tipo couraça ..... 209
3.3.2 - Modelo 1 para transformadores tipo núcleo e tipo couraça ..... 210
4 - Modelagem de Transformadores Monofásicos de Três Enrolamentos ..... 210
4.1 - Transformador tipo núcleo ..... 211
4.2 - Determinação dos parâmetros dos modelos ..... 217
5 - Modelagem de Bancos de Transformadores ..... 218
6 - Modelagem de Transformadores Trifásicos ..... 218
6.1 - Transformador trifásico do tipo núcleo ..... 218
6.2 - Determinação dos parâmetros dos modelos ..... 229
6.2.1 - Ensaio a vazio de sequência positiva ..... 230
6.2.2 - Ensaio a vazio de sequência zero ..... 232

6.2.3 - Ensaios de curto-circuito de sequência positiva ..... 233
6.2.4 - Ensaios de curto-circuito de sequência zero 235

CAPÍTULO V - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS .. 238

ANEXO I - OBTENÇÃO DA CARACTERÍSTICA ENLACE DE FLUXO x INTENSIDADE DE CORRENTE ($\lambda$ x i) A PARTIR DA CURVA DO ENSAIO A VAZIO $V_{rms} \times I_{rms}$ ..... 240

1 - Introdução ..... 240
2 - Hipóteses Adotadas ..... 241
3 - Desenvolvimento Matemático ..... 241
4 - Exemplo ..... 247

ANEXO II - SUBROTINA NONLIN ..... 252

1 - Introdução ..... 252
2 - "Cartões" de Dados de Entrada ..... 253
2.1 - Cartão de ramo para o primeiro elemento não linear 253
2.2 - Cartões de parâmetros ..... 254
2.3 - Cartão de ramo para os restantes elementos não lineares ..... 256
3 - Saídas da Subrotina NONLIN ..... 256
4 - Observações ..... 257

BIBLIOGRAFIA ..... 258

# C A P Í T U L O  I

## INTRODUÇÃO

# CAPÍTULO I

# INTRODUÇÃO

O planejamento apropriado e a operação correta de um sistema elétrico de potência requer um número muito grande de estudos com o objetivo fundamental de analisar o seu comportamento face as diferentes perturbações que possam nele acontecer.

Os estudos de transitórios eletromagnéticos fornecem parte da análise que é feita nos sistemas elétricos de potência para atingir os propósitos acima mencionados.

A análise de transitórios eletromagnéticos é feita através da utilização dos TNA (Transient Network Analyzer) e de programas digitais.

Dentro dos programas digitais destaca-se o programa EMTP, inicialmente desenvolvido pelo Dr. Hermann W. Dommel. Face a grande importância desse programa e a sua longa utilização, resolveu-se desenvolver este trabalho de dissertação, com os seguintes objetivos:

- analisar os modelos de transformadores monofásicos e trifásicos, assim como auto-transformadores, já disponíveis.
- apresentar os aspectos computacionais envolvidos na implementação dos mesmos.
- analisar a representação de elementos não lineares.
- desenvolver uma subrotina para a representação simultânea de indutores não lineares, para ser incorporada ao programa de transitórios (UBC-EFEI) disponível na EFEI.
- obter modelos de transformadores monofásicos e trifásicos utilizando o princípio topológico da dualidade.

Os três primeiros tópicos foram desenvolvidos, principalmente, com base na referência [11], enquanto o último tópico baseou-se na referência [9].

No capítulo II são apresentados os desenvolvimentos

teóricos para a obtenção de modelos de transformadores e auto-transformadores, monofásicos e trifásicos. Destaca-se que os modelos obtidos não são válidos para estudos que envolvam altas frequências.

No capítulo III é feita uma análise dos métodos utilizados para a modelagem de elementos não lineares, com especial ênfase na representação de indutores não lineares, com o objetivo de modelar a saturação do núcleo de transformadores. Este capítulo apresenta também a formulação matemática do método de compensação generalizado, utilizado pela subrotina NONLIN, para a modelagem simultânea de indutores não lineares, assim como indutores e resistências não lineares.

No Anexo II faz-se uma descrição dos cartões de dados de entrada, necessários para a execução da subrotina NONLIN.

O capítulo IV apresenta os desenvolvimentos teóricos para a obtenção de modelos magnéticos dos transformadores, assim como a aplicação do princípio topológico da dualidade em tais modelos com a finalidade de obter os circuitos elétricos correspondentes. Estes modelos não são válidos para estudos que envolvam altas frequências.

Finalmente, o capítulo V apresenta as conclusões finais deste trabalho assim como sugestões para estudos futuros.

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca
MAUÁ
B.M

# C A P Í T U L O  I I

## MODELAGEM DE TRANSFORMADORES PARA USO EM SIMULAÇÃO EM COMPUTADORES DIGITAIS

# CAPÍTULO II

# MODELAGEM DE TRANSFORMADORES PARA USO EM SIMULAÇÃO EM COMPUTADORES DIGITAIS

## 1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, serão feitos desenvolvimentos teóricos para a obtenção de modelos matemáticos de transformadores. Os estudos abrangem modelos para transformadores monofásicos, bancos de transformadores monofásicos e transformadores trifásicos.

Os modelos que serão desenvolvidos, terão como característica fundamental a de que seus parâmetros poderão ser calculados a partir dos dados de ensaios usuais fornecidos pelos fabricantes.

Serão obtidos modelos com diferentes graus de aproximação das características eletromagnéticas de funcionamento dos transformadores, face às exigências dos estudos a realizar e dos dados disponíveis.

Serão apresentados os aspectos computacionais envolvidos na implementação desses modelos em um programa para computador digital.

Neste trabalho o programa foi o de cálculo de transitórios eletromagnéticos desenvolvido pelo Dr. H.W. Dommel da "University of British Columbia" e implantado, pelo próprio, na EFEI, chamado de agora em diante UBC-EFEI.

# 2 - MODELAGEM DOS TRANSFORMADORES

Nos seguintes ítens serão desenvolvidos vários modelos matemáticos de transformadores.

## 2.1 - Primeiro Modelo de Transformador Monofásico de N Enrolamentos

Para o desenvolvimento deste modelo adotaram-se as seguintes hipóteses:

a - O material ferromagnético do núcleo possui uma característica fluxo x intensidade de corrente linear.

b - As perdas no núcleo (histerese e Foucault) não foram consideradas.

c - As capacidades distribuidas dos enrolamentos foram desprezadas.

### 2.1.1 - Transformador monofásico de dois enrolamentos

Considere-se o transformador da figura 1.

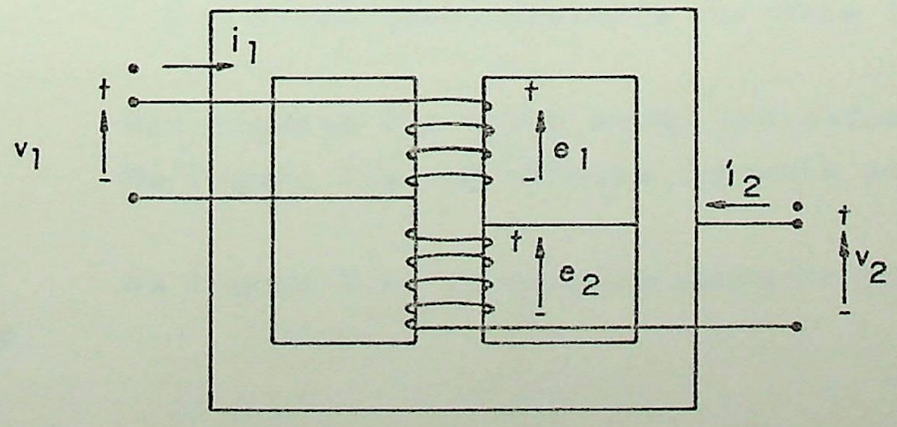



FIGURA 1: Transformador de dois enrolamentos com núcleo envolvido.

No que será feito a seguir as grandezas utilizadas são exprimidas em valores atuais.

Na figura 1 tem-se:

$v_1$ e $v_2$ - são as tensões instantâneas nos terminais.

$i_1$ e $i_2$ - são as correntes instantâneas.

$e_1$ e $e_2$ - são as tensões instantâneas induzidas no primário e secundário devido à variação do enlace dos fluxos no tempo.

Os fluxos que enlaçam cada espira dos enrolamentos primário e secundário são:

$$\varphi_1 = \varphi_{f1} + \varphi_{21} + \varphi_{12} \quad (1)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{f2} + \varphi_{12} + \varphi_{21} \quad (2)$$

onde nas equações (1) e (2) tem-se:

$\varphi_1$ e $\varphi_2$ - são os fluxos totais que enlaçam cada espira do primário e do secundário.

$\varphi_{f1}$ e $\varphi_{f2}$ - são os fluxos de dispersão em cada espira do primário e do secundário devidos às correntes $i_1$ e $i_2$.

$\varphi_{21}$ - é o fluxo mútuo devido à corrente $i_1$

$\varphi_{12}$ - é o fluxo mútuo devido à corrente $i_2$.

Nas figuras 2.a e 2.b estão indicados os fluxos:

Na figura 2.a, só circula corrente pelo enrolamento primário.

Na figura 2.b, só circula corrente pelo enrolamento secundário.

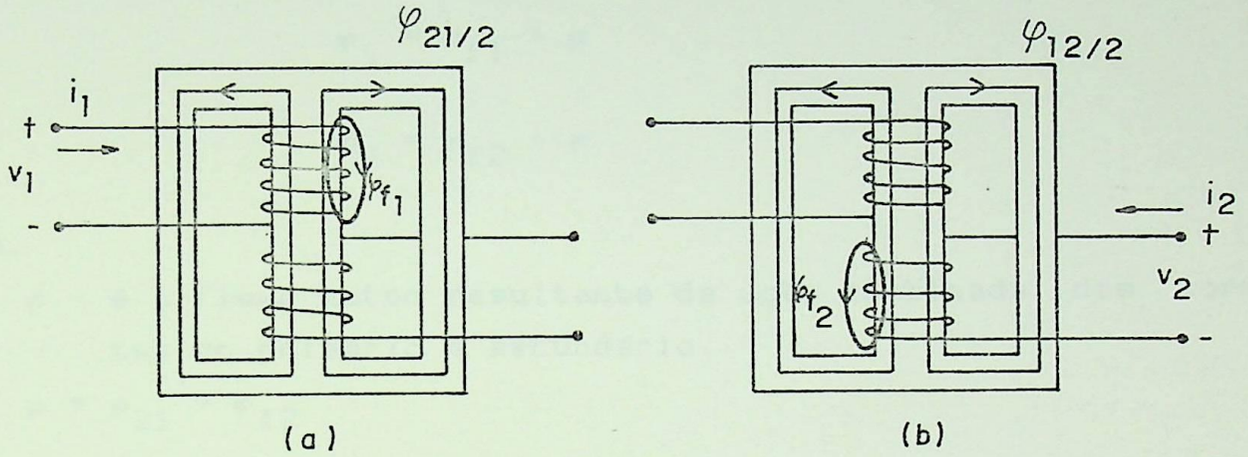



FIGURA 2: Caminhos dos fluxos que enlaçam espiras dos enrolamentos.

As relações entre as tensões nos terminais, correntes e fluxos nos enrolamentos do transformador são obtidas pelas equações:

$$v_1 = R_1 \, i_1 + \frac{d\,\lambda_1}{dt} \tag{3}$$

$$v_2 = R_2 \, i_2 + \frac{d\,\lambda_2}{dt} \tag{4}$$

onde:

$R_1$ e $R_2$ - são as resistências em corrente alternada dos enrolamentos primário e secundário.

$\lambda_1$ e $\lambda_2$ - são os enlaces de fluxos instantâneos dos enrolamentos primário e secundário.

Então:

$$\lambda_1 = N_1 \varphi_1 \tag{5}$$

$$\lambda_2 = N_2 \varphi_2 \tag{6}$$

onde:

$N_1$ - número de espiras do enrolamento primário.

$N_2$ - número de espiras do enrolamento secundário.

As equações (1) e (2) podem ser re-escritas de duas maneiras:

a) De um primeiro modo:

$$\varphi_1 = \varphi_{f1} + \varphi \tag{7}$$

$$\varphi_2 = \varphi_{f2} + \varphi \tag{8}$$

onde:

$\varphi$ - é o fluxo mútuo resultante da ação combinada das correntes do primário e secundário.

$\varphi = \varphi_{21} + \varphi_{12}$

Substituindo-se as equações (7) e (8) nas equações (5) e (6), e estas nas equações (3) e (4), obtém-se:

$$v_1 = R_1 i_1 + N_1 \frac{d\varphi_{f1}}{dt} + N_1 \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v_2 = R_2 i_2 + N_2 \frac{d\varphi_{f2}}{dt} + N_2 \frac{d\varphi}{dt}$$

onde:

$$e_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt}$$

$$e_2 = N_2 \frac{d\varphi}{dt}$$

então:

$$v_1 = R_1 i_1 + N_1 \frac{d\varphi_{f1}}{dt} + e_1 \tag{9}$$

$$v_2 = R_2 i_2 + N_2 \frac{d\varphi_{f2}}{dt} + e_2 \tag{10}$$

Os fluxos de dispersão são quase proporcionais às intensidades das correntes que os produzem pois os caminhos dos fluxos de dispersão são pelo ar na maior parte de seu percurso. Então, pode-se definir coeficientes de auto-indução para estes

fluxos como sendo dado por:

$$L_{f1} \triangleq \frac{N_1 \varphi_{f1}}{i_1} \tag{11}$$

$$L_{f2} \triangleq \frac{N_2 \varphi_{f2}}{i_2} \tag{12}$$

Substituindo-se as equações (11) e (12) nas equações (9) e (10), obtém-se:

$$v_1 = R_1 \, i_1 + L_{f1} \frac{di_1}{dt} + e_1$$

$$v_2 = R_2 \, i_2 + L_{f2} \frac{di_2}{dt} + e_2$$

b) De um segundo modo:

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12} \tag{13}$$

$$\varphi_2 = \varphi_{22} + \varphi_{21} \tag{14}$$

onde:

$$\varphi_{11} = \varphi_{f1} + \varphi_{21}$$

$$\varphi_{22} = \varphi_{f2} + \varphi_{12}$$

$\varphi_{11}$ - é o fluxo total em cada espira do primário devido a corrente do primário somente.

$\varphi_{22}$ - é o fluxo total em cada espira do secundário devido à corrente do secundário somente.

Com base na hipótese a) do ítem 2.1 pode-se definir:

$$L_1 \triangleq \frac{\lambda_{11}}{i_1} = \frac{N_1 \varphi_{11}}{i_1} \tag{15}$$

$$L_2 \triangleq \frac{\lambda_{22}}{i_2} = \frac{N_2 \varphi_{22}}{i_2} \tag{16}$$

$$M \triangleq \frac{\lambda_{21}}{i_1} = \frac{N_2 \varphi_{21}}{i_1} = \frac{\lambda_{12}}{i_2} = \frac{N_1 \varphi_{12}}{i_2} \tag{17}$$

onde:

$\lambda_{11}$ e $\lambda_{22}$ - são os enlaces de fluxos totais devidos às correntes $i_1$ e $i_2$, respectivamente.

$\lambda_{21}$ - é o enlace de fluxo que envolve o enrolamento secundário devido à corrente $i_1$

$\lambda_{12}$ - é o enlace de fluxo que envolve o enrolamento primário devido à corrente $i_2$.

Das equações (15), (16) e (17) obtém-se as seguintes expressões:

$$\varphi_{11} = \frac{L_1 \, i_1}{N_1} \tag{18}$$

$$\varphi_{22} = \frac{L_2 \, i_2}{N_2} \tag{19}$$

$$\varphi_{21} = \frac{M \, i_1}{N_2} \tag{20}$$

$$\varphi_{12} = \frac{M \, i_2}{N_1} \tag{21}$$

Substituindo as equações (18) à (21) nas equações (13) e (14), vem:

$$\varphi_1 = \frac{L_1 \, i_1}{N_1} + \frac{M \, i_2}{N_1} \tag{22}$$

$$\varphi_2 = \frac{L_2 \, i_2}{N_2} + \frac{M \, i_1}{N_2} \tag{23}$$

Substituindo as equações (22) e (23) nas equações (5) e (6) e estas nas equações (3) e (4), obtém-se:

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \tag{24}$$

$$v_2 = R_2 \, i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \tag{25}$$

Re-escrevendo a equação (15):

$$L_1 = \frac{N_1 \varphi_{11}}{i_1} = \frac{N_1 (\varphi_{f1} + \varphi_{21})}{i_1}$$

$$L_1 = \frac{N_1 \, \varphi_{f1}}{i_1} + \frac{N_1 \, \varphi_{21}}{i_1}$$

$$L_1 = L_{f1} + \frac{N_1}{i_1} \cdot \frac{M \, i_1}{N_2}$$

$$L_1 = L_{f2} + \frac{N_1}{N_2} M$$

definindo:

$$a \triangleq \frac{N_1}{N_2}$$

tem-se:

$$L_1 = L_{f1} + a \, M \tag{26}$$

Fazendo o mesmo com a equação (16), vem:

$$L_2 = L_{f2} + \frac{1}{a} M \qquad (27)$$

Substituindo as equações (26) e (27) nas equações (24) e (25), obtém-se:

$$v_1 = R_1 i_1 + (L_{f1} + a M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = R_2 i_2 + (L_{f2} + \frac{1}{a} M) \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

As duas últimas equações na forma matricial ficam:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{f1} + aM & M \\ M & L_{f2} + \frac{1}{a} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} di_1 / dt \\ di_2 / dt \end{bmatrix} \qquad (28)$$

Estas equações conduzem ao "modelo [R], [L]" do transformador monofásico de dois enrolamentos.

## 2.1.1-1 - CARACTERÍSTICAS E OBTENÇÃO DAS MATRIZES DO MODELO: [R] E [L]

A equação matricial (28) em regime permanente senoidal fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega(L_{f1} + aM) & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega(L_{f2} + \frac{1}{a} M) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

ou também:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \qquad (29)$$

onde:

$$\dot{Z}_{11} = R_1 + j\omega(L_{f1} + aM)$$

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} = j\,\omega\,M$$

$$\dot{Z}_{22} = R_2 + j\,\omega(L_{f2} + \frac{1}{a}\,M)$$

Em por unidade (p.u.) tem-se:

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{V}_1}{V_{B1}} = \dfrac{\dot{Z}_{11}\ \dot{I}_1}{Z_{B1}\ I_{B1}} + \dfrac{\dot{Z}_{12}\ \dot{I}_2}{Z_{B1}\ I_{B1}} \\ \dfrac{\dot{V}_2}{V_{B2}} = \dfrac{\dot{Z}_{21}\ \dot{I}_1}{Z_{B2}\ I_{B2}} + \dfrac{\dot{Z}_{22}\ \dot{I}_2}{Z_{B2}\ I_{B2}} \end{cases}$$

onde:

$V_{B1}$ - tensão base do lado primário
$Z_{B1}$ - impedância base do lado primário
$I_{B1}$ - corrente base do lado primário
$V_{B2}$ - tensão base do lado secundário
$Z_{B2}$ - impedância base do lado secundário
$I_{B2}$ - corrente base do lado secundário

com

$$\frac{V_{B1}}{V_{B2}} = \frac{N_1}{N_2} = a$$

$$V_{B1} = Z_{B1}\ I_{B1}$$

$$V_{B2} = Z_{B2}\ I_{B2}$$

obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{V}_1\ pu = \dot{Z}_{11}\ pu\ \ \dot{I}_1\ pu + \dfrac{\dot{Z}_{12}\ \dot{I}_2}{a\ Z_{B2}\ I_{B2}} \\ \dot{V}_2\ pu = \dfrac{\dot{Z}_{21}\ \dot{I}_1}{Z_{B1}\ I_{B1}}\ a + \dot{Z}_{22}\ pu\ \dot{I}_2\ pu \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \dot{V}_1 \text{ pu} = \dot{Z}_{11} \text{ pu } \dot{I}_1 \text{ pu} + \dfrac{\dot{Z}_{12}}{a\ Z_{B2}} \dot{I}_2 \text{ pu} \\ \dot{V}_2 \text{ pu} = \dfrac{\dot{Z}_{21}\ a}{Z_{B1}} \dot{I}_1 \text{ pu} + \dot{Z}_{22} \text{ pu } \dot{I}_2 \text{ pu} \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \text{ pu} \\ \dot{V}_2 \text{ pu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}'_{11} & \dot{Z}'_{12} \\ \dot{Z}'_{21} & \dot{Z}'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \text{ pu} \\ \dot{I}_2 \text{ pu} \end{bmatrix} \qquad (30)$$

onde na equação (30) tem-se:

$$\dot{Z}'_{11} = \dot{Z}_{11} \text{ pu}$$

$$\dot{Z}'_{12} = \frac{\dot{Z}_{12}}{a\ Z_{B2}} \text{ pu}$$

$$\dot{Z}'_{21} = \frac{\dot{Z}_{21}\ a}{Z_{B1}} \text{ pu}$$

$$\dot{Z}'_{22} = \dot{Z}_{22} \text{ pu}$$

Propriedades da matriz $[\dot{Z}']$ definida na equação (30)

1 - A matriz é simétrica: $\dot{Z}'_{12} = \dot{Z}'_{21}$

$$\frac{\dot{Z}_{12}}{a\ Z_{B2}} = \frac{\dot{Z}_{21}\ a}{Z_{B1}}$$

A igualdade é certa devido a que:

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21}$$

e

$$\frac{Z_{B1}}{Z_{B2}} = a^2$$

2 - A diferença entre os elementos $\dot{Z}'_{11}$ e $\dot{Z}'_{12}$ é a resistência (pu) do enrolamento primário acrescida da reatância de dispersão (pu) do mesmo enrolamento.

$$\dot{Z}'_{11} = R_1 \text{ pu} + j\, X_{f1} \text{ pu} + \frac{a\, \dot{Z}_{12}}{Z_{B1}} \text{ pu}$$

$$\dot{Z}'_{12} = \frac{\dot{Z}_{12}}{a\, Z_{B2}} \text{ pu}$$

$$\dot{Z}'_{11} - \dot{Z}'_{12} = R_1 \text{ pu} + j\, X_{f1} \text{ pu}$$

De maneira análoga:

$$\dot{Z}'_{22} \text{ pu} - \dot{Z}'_{21} \text{ pu} = R_2 \text{ pu} + j\, X_{f2} \text{ pu}$$

3 - Os elementos da diagonal são muito próximos

$$\dot{Z}'_{11} \text{ pu} - \dot{Z}'_{22} \text{ pu} = R_1 \text{ pu} + jX_{f1} \text{ pu} - (R_2 \text{ pu} + jX_{f2} \text{ pu}) =$$

$$= (R_1 \text{ pu} - R_2 \text{ pu}) + j(X_{f1} \text{ pu} - X_{f2} \text{ pu})$$

4 - Os ítens 1), 2) e 3) provam que a matriz $[\dot{Z}']$ é quase singular.

Veremos que se a matriz $[\dot{Z}']$ é quase singular a matriz $[\dot{Z}]$ em valores atuais também é quase singular.

Definimos a matriz diagonal $[V_{BASE}]$ como:

$$\left[V_{BASE}\right] = \begin{bmatrix} V_{B1} & 0 \\ 0 & V_{B2} \end{bmatrix}$$

com $V_{B1}$ e $V_{B2}$ já definidos. Seja $S_{BASE}$ a potência base de todo o sistema.

As seguintes equações relacionam os valores atuais de correntes e tensões com os respectivos valores em pu.

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{B1} & 0 \\ 0 & V_{B2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \text{ pu} \\ \dot{V}_2 \text{ pu} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \text{ pu} \\ \dot{I}_2 \text{ pu} \end{bmatrix} = \frac{1}{S_{BASE}} \begin{bmatrix} V_{B1} & 0 \\ 0 & V_{B2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a equação (30) pela matriz $[V_{BASE}]$ à esquerda fica:

$$\begin{bmatrix} V_{B1} & 0 \\ 0 & V_{B2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \text{ pu} \\ \dot{V}_2 \text{ pu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{B1} & 0 \\ 0 & V_{B2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Z}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \text{ pu} \\ \dot{I}_2 \text{ pu} \end{bmatrix}$$

ou também:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{B1} & 0 \\ 0 & V_{B2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Z}' \end{bmatrix} \frac{1}{S_{BASE}} \begin{bmatrix} V_{B1} & 0 \\ 0 & V_{B2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

Comparando esta última equação com a equação (29) conclui-se que:

$$\begin{bmatrix} \dot{Z} \end{bmatrix} = \frac{1}{S_{BASE}} \begin{bmatrix} V_{B1} & 0 \\ 0 & V_{B2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Z}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{B1} & 0 \\ 0 & V_{B2} \end{bmatrix}$$

e se a matriz $[\dot{Z}']$ é quase singular a matriz $[\dot{Z}]$ também é porque:

$$\det [\dot{Z}] = \frac{1}{S_{BASE}} \det^2 \begin{bmatrix} V_{B1} & 0 \\ 0 & V_{B2} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \dot{Z}' \end{bmatrix}$$

A matriz $[\dot{Z}]$ da equação (29) pode-se exprimir como:

$$[\dot{Z}] = [R] + j\omega[L]$$

sendo a matriz [L] também quase singular

- ENSAIO A VAZIO

Excitando o enrolamento primário e deixando em aberto o secundário, na equação (30) tem-se:

$$\dot{V}_1 = \dot{Z}'_{11}\ \dot{I}_1$$

$$\dot{Z}'_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}$$

De um ensaio usual a vazio pode-se então obter a parte imaginária de $\dot{Z}'_{11}$. Neste modelo as perdas no núcleo estão sendo desconsideradas.

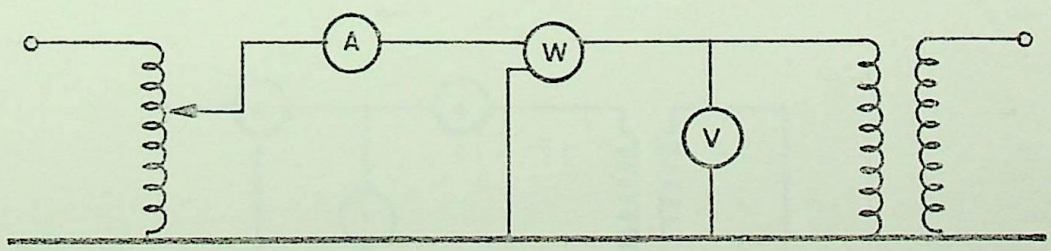



FIGURA 3: Ensaio a vazio de um transformador

Usando-se a terceira propriedade da matriz $[\dot{Z}']$ pode-se assumir a mesma parte imaginária para a $\dot{Z}'_{22}$. A parte real de $\dot{Z}'_{11}$ e $\dot{Z}'_{22}$ é a resistência elétrica na frequência industrial dos enrolamentos primário e secundário, respectivamente.

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ B.M

- ENSAIO DE CURTO-CIRCUITO

Excitando o enrolamento primário e curto-circuitando o secundário na equação (30), tem-se:

$$\dot{V}_1 = \dot{Z}'_{11}\ \dot{I}_1 + \dot{Z}'_{12}\ \dot{I}_2$$

$$0 = \dot{Z}'_{12}\ \dot{I}_1 + \dot{Z}'_{22}\ \dot{I}_2$$

ou também

$$\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = \dot{Z}^{curto}_{12} = \dot{Z}'_{11} - \frac{\dot{Z}'^{\,2}_{12}}{\dot{Z}'_{22}}$$

De um ensaio usual de curto-circuito pode-se obter a $\dot{Z}^{curto}_{12}$, e calcular então $\dot{Z}'_{12} = \dot{Z}'_{21}$

$$\dot{Z}'_{12} = \dot{Z}'_{21} = \sqrt{(\dot{Z}'_{11} - \dot{Z}^{curto}_{12})\ \dot{Z}'_{22}}$$

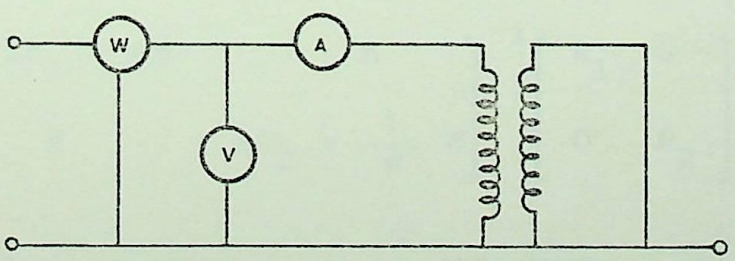



FIGURA 4: Conexões para o ensaio de curto-circuito.

- RESTRIÇÕES DO MODELO [R]-[L]

Devido à propriedade 2) as impedâncias de curto-circuito ficam representadas indiretamente na matriz $[\dot{Z}']$ pelas diferenças $\dot{Z}'_{11} - \dot{Z}'_{12}$ pu e $\dot{Z}'_{22} - \dot{Z}'_{21}$ pu.

Tudo isto indica a necessidade de calcular os elementos de [Z'] com muita precisão (tipicamente 5 ou 6 dígitos).

Isto poderia ser uma grande limitação do modelo [R] - [L].

Além disto, o modelo [R]-[L] exige que a corrente de excitação não seja desprezada; caso isto ocorra, os elementos da matriz [L] ficam "infinitos".

## 2.1.1-2. - CARACTERÍSTICAS E OBTENÇÃO DAS MATRIZES DO MODELO: $[R]-[L]^{-1}$

Re-escrevendo a equação matricial (28)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Lf_1 + a\,M & M \\ M & Lf_2 + \frac{1}{a} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} di_1/dt \\ di_2/dt \end{bmatrix}$$

ou também:

$$\begin{bmatrix} di_1/dt \\ di_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Lf_1 + aM & M \\ M & Lf_2 + \frac{1}{a} M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} Lf_1 + aM & M \\ M & Lf_2 + \frac{1}{a} M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad (31)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} Lf_1 + aM & M \\ M & Lf_2 + \frac{1}{a} M \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (Lf_2 + \frac{1}{a} M)/\Delta & -M/\Delta \\ -M/\Delta & (Lf_1 + aM)/\Delta \end{bmatrix}$$

onde nas matrizes anteriores

$$\Delta = Lf_1 Lf_2 + M\left(a\,Lf_2 + \frac{Lf_1}{a}\right)$$

Calculando o limite dos termos da equação (31) para $M \longrightarrow \infty$ :

$$\lim_{M\to\infty}\begin{bmatrix} di_1/dt \\ di_2/dt \end{bmatrix} = \lim_{M\to\infty}\begin{bmatrix} (Lf_2 + \frac{1}{a}M)/\Delta & -M/\Delta \\ -M/\Delta & (Lf_1 + aM)/\Delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \lim_{M\to\infty}\begin{bmatrix} (Lf_2 + \frac{1}{a}M)/\Delta & -M/\Delta \\ -M/\Delta & (Lf_1 + aM)/\Delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

resulta então:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Lf_1 + a^2Lf_2} & \frac{-a}{L_{f1} + a^2Lf_2} \\ \frac{-a}{Lf_1 + a^2Lf_2} & \frac{a^2}{Lf_1 + a^2Lf_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{Lf_1 + a^2Lf_2} & \frac{-a}{L_{f1} + a^2Lf_2} \\ \frac{-a}{Lf_1 + a^2Lf_2} & \frac{a^2}{Lf_1 + a^2Lf_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Estas equações conduzem ao "modelo [R] - [L]$^{-1}$" do transformador monofásico de dois enrolamentos. Onde:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \qquad (32)$$

$$[L]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{Lf_1 + a^2 Lf_2} & \dfrac{-a}{L_{f1} + a^2 Lf_2} \\ \dfrac{-a}{Lf_1 + a^2 Lf_2} & \dfrac{a^2}{Lf_1 + a^2 Lf_2} \end{bmatrix} \qquad (33)$$

As expressões (32) e (33) mostram que foi obtido um modelo para transformador monofásico de dois enrolamentos, no qual foi ignorada a corrente de excitação. Isto não poderia ser feito com o modelo [R] - [L] descrito. Ressalta-se que:

$$[L]^{-1} = \lim_{M \longrightarrow \infty} [L]^{-1}$$

sem ramo magnetizante — com ramo magnetizante

PROPRIEDADES DA MATRIZ $[L]^{-1}$:

1) Em regime senoidal permanente:

$$[\omega L]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{Xf_1 + a^2 Xf_2} & \dfrac{-a}{X_{f1} + a^2 Xf_2} \\ \dfrac{-a}{Xf_1 + a^2 Xf_2} & \dfrac{a^2}{Xf_1 + a^2 Xf_2} \end{bmatrix} \qquad (34)$$

onde:

$Xf_1 + a^2 Xf_2 = X_{cc}$ (reatância de curto-circuito)

Fazendo então o ensaio de curto-circuito como indicado na figura 4 pode-se obter a matriz (34).

2) A matriz $[L]^{-1}$ é singular

A notação de $[L]^{-1}$ é encontrada em muitos manuais

das diferentes versões do programa EMTP, a rigor não tem significado matemático rigoroso. Usa-se para destacar o fato já mencionado de que é:

$$[L]^{-1} = \lim_{M \longrightarrow \infty} [L]^{-1}$$

com ramo magnetizante

## 2.1.2 - TRANSFORMADOR MONOFÁSICO DE N ENROLAMENTOS

Fazendo a extensão para um transformador com N enrolamentos utilizando-se os conceitos e raciocínios feitos para dois enrolamentos obtém-se:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & R_2 & & & 0 \\ . & & \ddots & & \\ . & & & \ddots & \\ . & & & & \\ 0 & & & & R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ . \\ . \\ . \\ i_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2N} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ L_{N1} & \cdots & \cdots & L_{NN} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ . \\ . \\ . \\ i_N \end{bmatrix} \tag{35}$$

onde:

$v_1, v_2, \ldots v_N$ - são as tensões instantâneas (de ramo) nos terminais de cada enrolamento.

$i_1, i_2, \ldots i_N$ - são as correntes instantâneas (de ramo) nos enrolamentos.

$R_1, R_2, \ldots R_N$ - são as resistências elétricas em corrente alternada de cada bobina.

$L_{11}, L_{12}, \ldots L_{NN}$ - são as indutâncias próprias e mútuas dos enrolamentos com ramos magnetizantes.

### 2.1.2-1 - MODELO [R]-[L] DO TRANSFORMADOR DE N ENROLAMENTOS

A equação matricial (35) conduz ao modelo [R]-[L]. As mesmas características e restrições do modelo

[R]-[L] para um transformador de dois enrolamentos mantêm-se para o modelo [R]-[L] do transformador de N enrolamentos.

Mantendo-se também os mesmos ensaios para a obtenção do modelo.

## 2.1.2-2 - MODELO $[R]-[L]^{-1}$ DO TRANSFORMADOR DE N ENROLAMENTOS

### 2.1.2-2.1 - DEFINIÇÃO DAS MATRIZES [R] E $[L]^{-1}$

Re-escrevendo a equação (35) em notação compacta:

$$[v] = [R][i] + \left[\begin{matrix} L \\ crm \end{matrix}\right] \frac{d}{dt} [i]$$

onde:

$\left[\begin{matrix} L \\ crm \end{matrix}\right]$ - é a matriz de indutâncias próprias e mútuas dos enrolamentos com ramos magnetizantes, matriz de ramos

ou também:

$$\frac{d}{dt} [i] = \left[\begin{matrix} L \\ crm \end{matrix}\right]^{-1} [v] - \left[\begin{matrix} L \\ crm \end{matrix}\right]^{-1} [R]\ [i] \qquad (36)$$

Em regime senoidal permanente a equação (35) fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} & \cdots & \dot{Z}_{1N} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} & \cdots & \dot{Z}_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dot{Z}_{N1} & \cdots\cdots & & \dot{Z}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_N \end{bmatrix} \qquad (37)$$

onde:

$[\dot{Z}] = [R] + j\omega\left[\begin{matrix} L \\ crm \end{matrix}\right]$ - é a matriz de impedâncias de ramo onde, obrigatoriamente, estão inclusos os ramos magnetizantes.

Invertendo-se a matriz $[\dot{Z}]$ na equação (37), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \cdots & \dot{Y}_{1N} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \cdots & \dot{Y}_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dot{Y}_{N1} & \cdots\cdots & & \dot{Y}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_N \end{bmatrix} \qquad (38)$$

onde:

$[\dot{Y}]$ - é a matriz de admitâncias de ramo onde estão inclusos os ramos magnetizantes.

No desenvolvimento a seguir não serão consideradas as resistências dos ramos pois nesse caso:

$$[\dot{Z}] = [R] + j\omega \begin{bmatrix} L \\ crm \end{bmatrix}$$

e

$$[\dot{Y}] = [\dot{Z}]^{-1} = \left[ [R] + j\omega \begin{bmatrix} L \\ crm \end{bmatrix} \right]^{-1}$$

e a partir da $[\dot{Y}]$ não se pode identificar as matrizes $[R]^{-1}$ e $\begin{bmatrix} L \\ crm \end{bmatrix}^{-1}$ separadamente. Desprezando-se a matriz [R] resulta então:

$$[\dot{Z}] = j\omega \begin{bmatrix} L \\ crm \end{bmatrix}$$

e

$$[\dot{Y}] = [\dot{Z}]^{-1} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} L \\ crm \end{bmatrix}^{-1}$$

ou

$$\boxed{j\omega\, [\dot{Y}] = \begin{bmatrix} L \\ crm \end{bmatrix}^{-1}} \qquad (39)$$

Sejam $L_{10}$, $L_{20}$, ..., $L_{NO}$ as indutâncias dos ramos magnetizantes. Calculando o limite dos termos da equação (36) para $L_{10} \longrightarrow \infty$, resulta:

$\vdots$

$L_{NO} \longrightarrow \infty$

$$\lim_{\substack{L_{10}\to\infty \\ \vdots \\ L_{NO}\to\infty}} \frac{d[i]}{dt} = \lim_{\substack{L_{10}\to\infty \\ \vdots \\ L_{NO}\to\infty}} \left[\begin{matrix} L \\ crm \end{matrix}\right]^{-1} [v] - \lim_{\substack{L_{10}\to\infty \\ \vdots \\ L_{NO}\to\infty}} \left[\begin{matrix} L \\ crm \end{matrix}\right]^{-1} [R]\,[i]$$

ou também:

$$\frac{d[i]}{dt} = [L]^{-1}[v] - [L]^{-1}[R][i] \qquad (40)$$

onde:

$$[L]^{-1} = \lim_{\substack{L_{10}\to\infty \\ \vdots \\ L_{NO}\to\infty}} \left[\begin{matrix} L \\ crm \end{matrix}\right]^{-1}$$

$[L]^{-1}$: sem ramos magnetizantes

$\left[\begin{matrix} L \\ crm \end{matrix}\right]^{-1}$: com ramos magnetizantes

Pela equação (39) pode-se escrever:

$$[L]^{-1} = \lim_{\substack{L_{10}\to\infty \\ \vdots \\ L_{NO}\to\infty}} \left[\begin{matrix} L \\ crm \end{matrix}\right]^{-1} = \lim_{\substack{y_{10}\to 0 \\ \vdots \\ y_{NO}\to 0}} j\omega\,[\dot{Y}] \qquad (41)$$

As equações (40) e (41) conduzem ao modelo $[R]-[L]^{-1}$ do transformador de N enrolamentos sem ramos magnetizantes.

## 2.1.2-2.2 - PROCEDIMENTO DE OBTENCAO DE $[L]^{-1}$

Consideremos o transformador de N enrolamentos da figura 5.

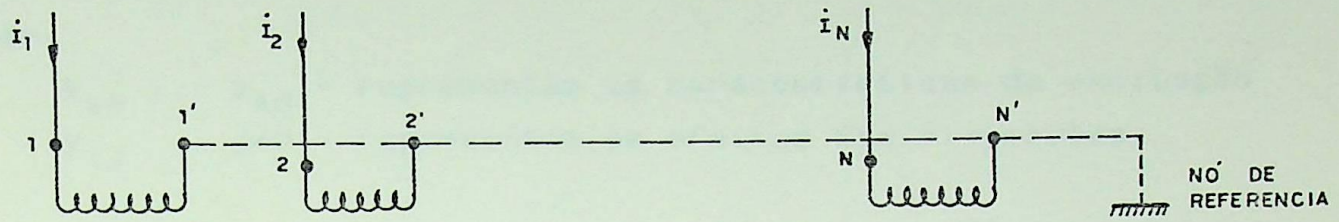



FIGURA 5: Diagrama mostrando um transformador de N enrolamentos.

Considerando que os terminais 1', 2', ... N' da mesma polaridade dos enrolamentos do transformador estão conectados, resulta que:

a) As tensões de ramo coincidem com as tensões nodais

b) As correntes de ramo coincidem com as correntes injetadas

c) As admitâncias de ramo são também as admitâncias nodais.

O transformador com N enrolamentos tem:

N admitâncias próprias; e

$\frac{N(N-1)}{2}$ admitâncias mútuas independentes.

Para o caso particular de quatro enrolamentos, um circuito equivalente poderia ser:

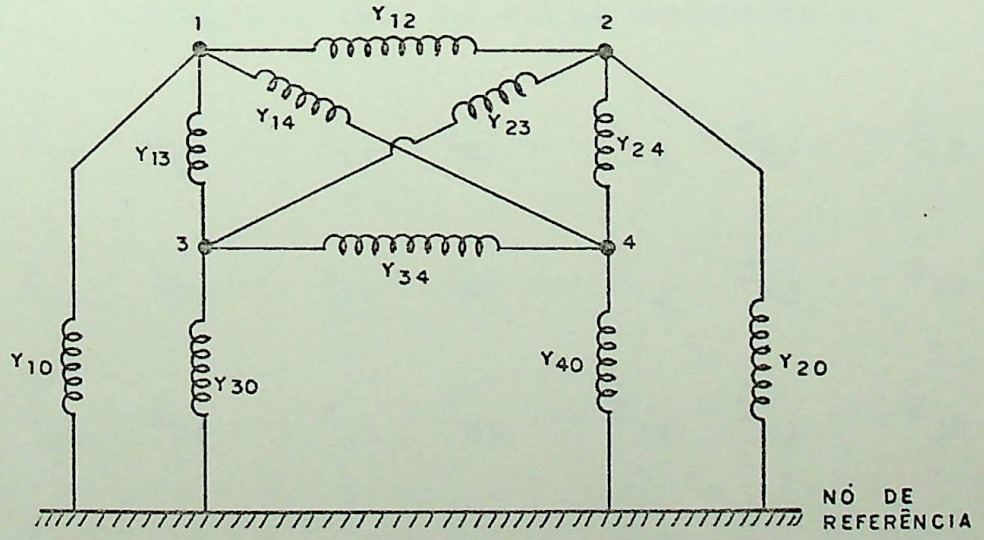



FIGURA 6: Circuito equivalente para um transformador de quatro enrolamentos (em pu).

onde:

$y_{10} \ldots y_{40}$ - representam as características de excitação

$y_{ij}$ $\quad j \neq 0$ - representam os efeitos das dispersões.

Observação Importante:

A partir deste ponto, toda a análise será desenvolvida em por unidade (pu) e com os taps dos transformadores nas posições nominais.

Em lugar de trabalhar com as tensões de ramo, se trabalhará com as diferenças das tensões de ramo com respeito a um ramo de referência. Seja o ramo N, por exemplo, o escolhido como referência.

As expressões para essas tensões $\dot{V}_1 - \dot{V}_N$, $\dot{V}_2 - \dot{V}_N$, $\dot{V}_3 - \dot{V}_N$, ... $\dot{V}_{N-1} - \dot{V}_N$ são obtidas da equação (37) e dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 - \dot{V}_N \\ \dot{V}_2 - \dot{V}_N \\ \vdots \\ \dot{V}_{N-1} - \dot{V}_N \end{bmatrix} = \left[\dot{Z}'\right] \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_N \end{bmatrix} \qquad (42)$$

onde a matriz $[\dot{Z}']$ tem N-1 linhas e N colunas.

A matriz $[\dot{Z}']$ na forma expandida é:

$$[\dot{Z}'] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} - \dot{Z}_{N1} & \ldots & \dot{Z}_{1i} - \dot{Z}_{Ni} & \ldots & \dot{Z}_{1j} - \dot{Z}_{Nj} & \ldots & \dot{Z}_{1N} - \dot{Z}_{NN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dot{Z}_{i1} - \dot{Z}_{N1} & \ldots & \dot{Z}_{ii} - \dot{Z}_{Ni} & \ldots & \dot{Z}_{ij} - \dot{Z}_{Nj} & \ldots & \dot{Z}_{iN} - \dot{Z}_{NN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dot{Z}_{j1} - \dot{Z}_{N1} & \ldots & \dot{Z}_{ji} - \dot{Z}_{Ni} & \ldots & \dot{Z}_{jj} - \dot{Z}_{Nj} & \ldots & \dot{Z}_{jN} - \dot{Z}_{NN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dot{Z}_{N-1,1} - \dot{Z}_{N1} & \ldots & \dot{Z}_{N-1,i} - \dot{Z}_{Ni} & \ldots & \dot{Z}_{N-1,j} - \dot{Z}_{Nj} & \ldots & \dot{Z}_{N-1,N} - \dot{Z}_{NN} \end{bmatrix}$$

A partir deste ponto, os ramos magnetizantes serão desprezados; tem-se então:

$$\sum_{k=1}^{N} \dot{I}_k \ (pu) = 0 \qquad (43)$$

Desde que a soma das correntes dos N enrolamentos é zero, qualquer deles pode ser considerado como circuito de retorno das correntes dos outros enrolamentos. Isto significa que tem-se (N - 1) circuitos independentes. Por exemplo, os circuitos independentes são:

$$1 - N, \ 2 - N, \ \ldots \ (N - 1) - N$$

conforme ilustrado nas figuras 7 e 8.

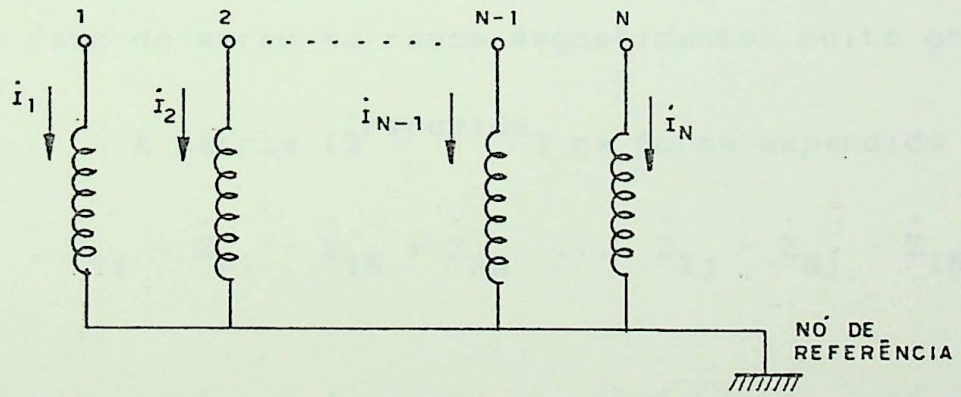



FIGURA 7: Transformador de N enrolamentos com uma referência comum.

As tensões $\dot{V}_1 - \dot{V}_N$, $\dot{V}_2 - \dot{V}_N$ ... $\dot{V}_{N-1} - \dot{V}_N$ são N - 1 tensões independentes.

Impondo a equação (43) na equação (42) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 - \dot{V}_N \\ \dot{V}_2 - \dot{V}_N \\ \vdots \\ \dot{V}_{N-1} - \dot{V}_N \end{bmatrix} = \left[\dot{Z}^{reduzida}\right] \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_{N-1} \end{bmatrix} \qquad (44)$$

onde a matriz $[\dot{Z}^{reduzida}]$ tem N-1 linhas e N-1 colunas.

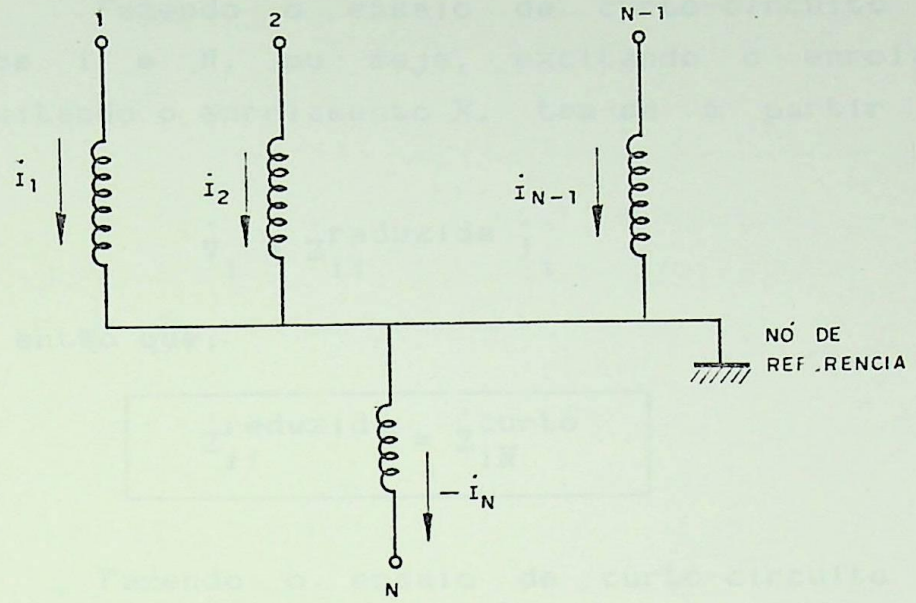



FIGURA 8: Transformador de N enrolamentos com uma referência comum e com o enrolamento N como circuito de retorno.

As tensões e correntes são supostas as mesmas devido ao fato de serem os ramos magnetizantes muito grandes.

A matriz $[\dot{Z}^{reduzida}]$ na forma expandida é:

$$\begin{bmatrix} \cdots \dot{Z}_{1i} - \dot{Z}_{Ni} - \dot{Z}_{1N} + \dot{Z}_{NN} & \cdots & \dot{Z}_{1j} - \dot{Z}_{Nj} - \dot{Z}_{1N} + \dot{Z}_{NN} \cdots \\ \vdots & & \\ \cdots \dot{Z}_{ii} - \dot{Z}_{Ni} - \dot{Z}_{iN} + \dot{Z}_{NN} & \cdots & \dot{Z}_{ij} - \dot{Z}_{Nj} - \dot{Z}_{iN} + \dot{Z}_{NN} \cdots \\ \vdots & & \\ \cdots \dot{Z}_{ji} - \dot{Z}_{Ni} - \dot{Z}_{jN} + \dot{Z}_{NN} & \cdots & \dot{Z}_{jj} - \dot{Z}_{Nj} - \dot{Z}_{jN} + \dot{Z}_{NN} \cdots \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

É importante salientar que ao desprezar as correntes magnetizantes a matriz $[\dot{Z}]$ da equação (37) fica com os seus termos "infinitos". No entanto, a matriz $[\dot{Z}^{reduzida}]$ existe devido ao fato, que será demonstrado, de que seus termos podem ser calculados dos dados dos ensaios de curto-circuito, os quais não são influenciados pelos ramos magnetizantes.

Fazendo o ensaio de curto-circuito entre os enrolamentos i e N, ou seja, excitando o enrolamento i e curto-circuitando o enrolamento N, tem-se a partir da equação (44):

$$\dot{V}_i = \dot{Z}_{ii}^{reduzida}\ \dot{I}_i$$

Conclui-se então que:

$$\boxed{\dot{Z}_{ii}^{reduzida} = \dot{Z}_{iN}^{curto}} \qquad (45)$$

Fazendo o ensaio de curto-circuito entre os enrolamentos i e k, ou seja, excitando o enrolamento i e curto-circuitando o enrolamento k, tem-se a partir da equação (44):

$$\dot{V}_i - \dot{V}_N = \dot{Z}_{ii}^{red}\ \dot{I}_i + \dot{Z}_{ik}^{red}\ \dot{I}_k$$

$$-\dot{V}_N = \dot{Z}_{ki}^{red}\ \dot{I}_i + \dot{Z}_{kk}^{red}\ \dot{I}_k$$

Da equação (43), tem-se:

$$\dot{I}_i + \dot{I}_k = 0$$

Substituindo esta equação nas anteriores, resulta:

$$\dot{V}_i = (\dot{Z}_{ii}^{red} - 2\,\dot{Z}_{ik}^{red} + \dot{Z}_{kk}^{red})\,\dot{I}_i$$

$$\left.\frac{\dot{V}_i}{\dot{I}_i}\right|_{\dot{V}_k = 0} = \dot{Z}_{ik}^{curto}$$

Pela equação (45), tem-se:

$$\dot{Z}_{ii}^{red} = \dot{Z}_{iN}^{curto}$$

$$\dot{Z}_{kk}^{red} = \dot{Z}_{kN}^{curto}$$

resulta então:

$$\dot{Z}^{red}_{ik} = \frac{1}{2}\left[\dot{Z}^{.curto}_{iN} + \dot{Z}^{.curto}_{kN} - \dot{Z}^{.curto}_{ik}\right] \qquad (46)$$

As fórmulas (45) e (46) demonstram que todos os elementos da matriz $[\dot{Z}^{reduzida}]$ podem ser calculados a partir dos dados de ensaio de curto-circuito fornecidos usualmente pelo fabricante.

Neste modelo as partes resistiva e indutiva de cada ramo estão separadas. Isto quer dizer que a matriz $[\dot{Z}^{reduzida}]$ será construida considerando somente a parte reativa das impedâncias dos ensaios de curto-circuito, ou seja:

$$X^{curto}_{ik} = \sqrt{\left(Z^{curto}_{ik}\right)^2 - \left(R_i + R_k\right)^2} \qquad [pu]$$

onde:

$Z^{curto}_{ik}$ - é o módulo da impedância de curto-circuito entre os enrolamentos i e k

$R_i + R_k$ - é a soma das resistências elétricas dos enrolamentos i e k

A matriz $[\dot{Z}^{reduzida}]$ é simétrica. Comparando-se os elementos (ij) e (ji) tem-se:

$$\dot{Z}_{ij} - \dot{Z}_{Nj} - \dot{Z}_{iN} + \dot{Z}_{NN} \stackrel{?}{=} \dot{Z}_{ji} - \dot{Z}_{Ni} - \dot{Z}_{jN} + \dot{Z}_{NN}$$

A igualdade está correta pois a matriz $[\dot{Z}]$ é simétrica.

Invertendo-se a matriz $[\dot{Z}^{reduzida}]$ na equação (44), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_{N-1} \end{bmatrix} = \left[\dot{Y}^{reduzida}\right] \begin{bmatrix} \dot{V}_1 - \dot{V}_N \\ \dot{V}_2 - \dot{V}_N \\ \vdots \\ \dot{V}_{N-1} - \dot{V}_N \end{bmatrix} \qquad (47)$$

Escola Federal de Engen
Biblioteca
MAUÁ
B M

onde:

$$[\dot{Y}^{reduzida}] = [\dot{Z}^{reduzida}]^{-1}$$

Considerando a corrente $\dot{I}_i$ na equação (47), resulta:

$$\dot{I}_i = \dot{Y}^{red}_{i1} (\dot{V}_1 - \dot{V}_N) + \dot{Y}^{red}_{i2} (\dot{V}_2 - \dot{V}_N) + \ldots +$$

$$+ \dot{Y}_{i\ N-1} (\dot{V}_{N-1} - \dot{V}_N)$$

Reordenando os termos desta última equação:

$$\dot{I}_i = \dot{Y}^{red}_{i1} \dot{V}_1 + \dot{Y}^{red}_{i2} \dot{V}_2 + \ldots + \dot{Y}^{red}_{iN-1} \dot{V}_{N-1} -$$

$$- (\dot{Y}^{red}_{i1} + \dot{Y}^{red}_{i2} + \ldots + \dot{Y}^{red}_{iN-1}) \dot{V}_N$$

ou seja

$$\dot{I}_i = \dot{Y}^{red}_{i1} \dot{V}_1 + \dot{Y}^{red}_{i2} \dot{V}_2 + \ldots + \dot{Y}^{red}_{iN-1} \dot{V}_{N-1} +$$

$$+ \dot{Y}^{red}_{iN} \dot{V}_N$$

onde:

$$\dot{Y}^{red}_{iN} = - \sum_{k=1}^{N-1} \dot{Y}^{red}_{ik} \qquad (48)$$

Adotando-se o mesmo procedimento para as outras correntes, vem:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}^{red}_{11} & \dot{Y}^{red}_{12} & \ldots\ldots & \dot{Y}^{red}_{1N-1} & \dot{Y}^{red}_{1N} \\ \vdots & & & & \\ \dot{Y}^{red}_{N-11} & \dot{Y}^{red}_{N-12} & \ldots\ldots & \dot{Y}^{red}_{N-1\ N-1} & \dot{Y}^{red}_{N-1\ N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_N \end{bmatrix} \qquad (49)$$

onde a matriz de admitâncias tem N-1 filas e N colunas.

Da equação (43) pode-se escrever

$$\dot{I}_N = - \sum_{k=1}^{N-1} \dot{I}_k \qquad (50)$$

Substituindo em (50) as expressões das correntes dadas pela equação (49) tem-se:

$$\dot{I}_N = \left[ - \sum_{k=1}^{N-1} \dot{Y}^{red}_{1k} \right] \dot{V}_1 + \left[ - \sum_{k=1}^{N-1} \dot{Y}^{red}_{2k} \right] \dot{V}_2 +$$

$$+ \ \ldots \ + \left[ - \sum_{k=1}^{N-1} \dot{Y}^{red}_{Nk} \right] \dot{V}_N$$

Acrescentando esta última equação à equação (49), resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}^{red}_{11} & \dot{Y}^{red}_{12} & \ldots\ldots & \dot{Y}^{red}_{1N-1} & \dot{Y}^{red}_{1N} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \dot{Y}^{red}_{1N} & \dot{Y}^{red}_{2N} & \ldots\ldots & \dot{Y}^{red}_{N-1\ N} & \dot{Y}^{red}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_N \end{bmatrix}$$

onde:

$$\dot{Y}^{red}_{NN} = - \sum_{k=1}^{N-1} \dot{Y}^{red}_{Nk} \qquad (51)$$

Re-escrevendo-a na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_N \end{bmatrix} = [\dot{Y}^{*}] \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_N \end{bmatrix} \qquad (52)$$

Cumpre-se que:

$$[L]^{-1} = j\omega\,[\dot{Y}^{*}] \qquad (53)$$

## 2.1.2-2.3 - DEMONSTRAÇÃO DE QUE A MATRIZ OBTIDA NO ÍTEM ANTERIOR SATISFAZ A DEFINIÇÃO DO ÍTEM 2.1.2-2.1

A seguir, será visto que a matriz $[\dot{Y}^{*}]$, obtida pelo procedimento do ítem anterior, é a matriz que resulta de não considerar os ramos magnetizantes na matriz $[\dot{Y}]$, definida na equação (38), ou seja:

$$[\dot{Y}^{*}] = \lim_{\substack{y10 \to 0 \\ y_{NO} \to 0}} [\dot{Y}]$$

e pela equação (41), cumpre-se então que:

$$[L]^{-1} = j\omega\,[\dot{Y}^{*}]$$

Ao considerar uma referência comum como indicado na figura 5 e com base em:

a) As tensões de ramo coincidem com as tensões nodais

b) As correntes de ramo coincidem com as correntes injetadas

c) As admitâncias de ramo são também as admitâncias nodais.

como já foi mencionado, pode-se construir a matriz de admitâncias de ramo a partir do circuito equivalente obtendo- se:

$$[\dot{Y}] = \begin{bmatrix} \dot{y}_{10} + \dot{y}_{12} + \ldots + \dot{y}_{1N} & -\dot{y}_{12} & \cdots & -\dot{y}_{1N} \\ -\dot{y}_{12} & \dot{y}_{20} + \dot{y}_{21} + \ldots + \dot{y}_{2N} & \cdots & -\dot{y}_{2N} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ -\dot{y}_{N1} & \cdots & y_{NO} + y_{N1} + \ldots & y_{N N} \end{bmatrix}$$

onde:

$\dot{y}_{10} \ldots \dot{y}_{NO}$ representam as características de excitação

$\dot{y}_{ij}$ $y \neq 0$ representam as dispersões magnéticas dos enrolamentos

Não considerar os ramos magnetizantes na matriz $[\dot{Y}]$ é equivalente a calcular os limites dos seus termos para:

$$\dot{y}_{10} \longrightarrow 0$$
$$\dot{y}_{20} \longrightarrow 0$$
$$\vdots$$
$$\dot{y}_{NO} \longrightarrow 0$$

A matriz $[\dot{Y}']$ assim obtida é:

$$[\dot{Y}'] = \lim_{\substack{\dot{y}_{10} \longrightarrow 0 \\ \dot{y}_{20} \longrightarrow 0 \\ \vdots \\ \dot{y}_{NO} \longrightarrow 0}} [\dot{Y}]$$

A relação entre tensões e correntes está dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_N \end{bmatrix} = [\dot{Y}'] \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_N \end{bmatrix} \qquad (54)$$

Sejam agora os seguintes ensaios:

Por exemplo, excita-se o enrolamento 1 e curto-circuitam-se os outros. Pela equação (52), tem-se:

$$\frac{\dot{I}_1}{V_1} = \dot{Y}^*_{11}$$

$$\frac{\dot{I}_2}{V_1} = \dot{Y}^*_{21}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\dot{I}_N}{V_1} = \dot{Y}^*_{N1}$$

Fazendo o mesmo ensaio com o circuito equivalente sem os ramos magnetizantes, pelo equação (54) resulta:

$$\frac{\dot{I}_1}{V_1} = \dot{y}_{12} + \dot{y}_{13} + \ldots + \dot{y}_{1N} = \dot{Y}'_{11}$$

$$\frac{\dot{I}_2}{V_1} = -\dot{y}_{12} = \dot{Y}'_{12}$$

$$\frac{\dot{I}_N}{V_1} = -\dot{y}_{1N} = \dot{Y}'_{1N}$$

Fazendo o mesmo ensaio para os outros enrolamentos, conclui-se que:

$$[\dot{Y}^*] = \lim_{\substack{y_{10} \longrightarrow 0 \\ \vdots \\ y_{NO} \longrightarrow 0}} [\dot{Y}]$$

ou então

$$\boxed{[L]^{-1} = j\omega[\dot{Y}^*]} \qquad (53)$$

Foi obtido um modelo para transformador monofásico

de N enrolamentos no qual foram ignorados os ramos magnetizantes. Isto não poderia ser feito com o modelo [R] - [L].

A matriz $[L]^{-1}$ é singular pois os ramos magnetizantes foram ignorados, e embora a notação empregada não tenha significado matemático rigoroso, é a mais utilizada.

Na obtenção do modelo foi assumida uma referência comum. Sempre que não se trabalhe em altas frequências as correntes de ramo e as tensões de ramo ficam invariantes, ou seja, as condições elétricas do transformador não mudam ao escolher uma referência comum.

Pelo exposto, conclui-se que o modelo obtido permite trabalhar com todos os 2N terminais do transformador separados.

## 2.2 - Segundo Modelo de Transformador Monofásico de N Enrolamentos

Este modelo terá além das características do modelo do ítem 2.1 a influência da corrente magnetizante na parte linear da característica fluxo-intensidade de corrente.

### 2.2.1 - Transformador monofásico de dois enrolamentos

MODELO [R]-[L]

Este modelo como foi descrito no ítem 2.1.1 já levou em consideração a corrente magnetizante, característica exigida para a obtenção do mesmo.

MODELO $[R]-[L]^{-1}$

Na figura 9 pode-se observar uma característica típica de enlace de fluxo versus intensidade de corrente

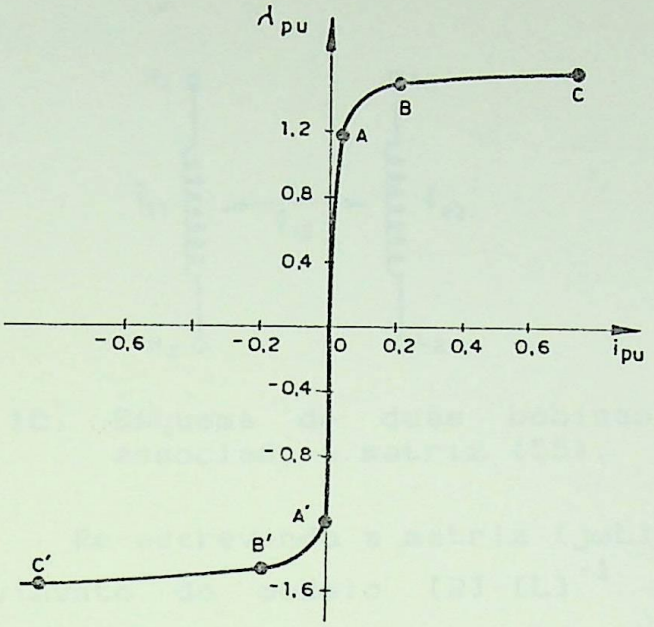



FIGURA 9: Curva típica ([16]).

Na região linear (OA e OA´) o termo $d\lambda/di$ é muito grande o qual implica que a indutância magnetizante é alta. Na região da saturação (BC e B´C´), o termo $d\lambda/di$ é muito pequeno o qual implica que a indutância magnetizante de saturação é pequena.

Ao acrescentar a admitância magnetizante no modelo $[R]-[L]^{-1}$ serão obtidas diferentes matrizes $[\dot{Y}]_{ramo}$ que serão diferentes aproximações da matriz $[\dot{Y}]_{ramo}$ obtida da equação (28) em regime senoidal permanente e desprezando as resistências. Esta, na forma expandida, é:

$$[\dot{Y}]_{ramo} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \dfrac{Xf_2 + X_m}{Xf_1Xf_2 + X_m(Xf_1 + Xf_2)} & \dfrac{-X_m}{Xf_1Xf_2 + X_m(Xf_1 + Xf_2)} \\ \dfrac{-X_m}{Xf_1Xf_2 + X_m(Xf_1 + Xf_2)} & \dfrac{Xf_1 + X_m}{Xf_1Xf_2 + X_m(Xf_1 + Xf_2)} \end{bmatrix} \qquad (55)$$

Esta matriz pode associar-se a duas bobinas mutuamente acopladas como indicado na figura 10.

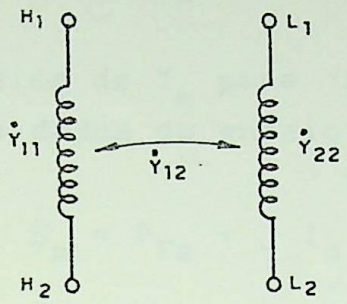



FIGURA 10: Esquema de duas bobinas mutuamente acopladas associado à matriz (55).

Re-escrevendo a matriz $[j\omega L]^{-1}$ (equação 34) obtida no desenvolvimento do modelo $[R]-[L]^{-1}$ e trabalhando em por unidade (pu), tem-se:

$$[j\omega L]^{-1} = [Y^*] = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \frac{1}{Xf_1 + Xf_2} & \frac{-1}{Xf_1 + Xf_2} \\ \frac{-1}{Xf_1 + Xf_2} & \frac{1}{Xf_1 + Xf_2} \end{bmatrix} \qquad (56)$$

Foi assumido que os "taps" do transformador estão na posição nominal. Esta matriz pode também associar-se a duas bobinas mutuamente acopladas como indicada na figura 11.

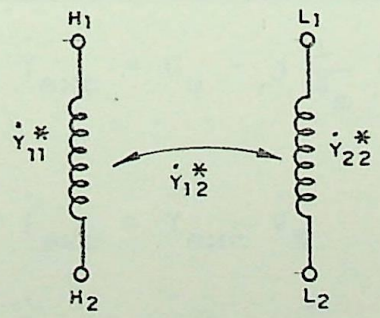



FIGURA 11: Esquema de duas bobinas mutuamente acopladas associado à matriz (56).

A seguir, será obtida a admitância magnetizante e depois se estudará sua incorporação na matriz (56) para obter diferentes aproximações da matriz $[Y]_{ramo}$ da equação (55).

ENSAIO PARA A OBTENÇÃO DE $\dot{Y}_m$

O valor de $\dot{Y}_m$ pode ser determinado a partir do ensaio a vazio. Dos dados do ensaio tem-se:

$$\dot{S}_m = P_{Fe} + j\, I_m\, V_N$$

onde:

$P_{Fe}$ - perdas no núcleo

$I_m$ - corrente magnetizante

$V_N$ - tensão nominal.

então

$$R_m = \frac{V_N^2}{P_{Fe}} \quad [\Omega]$$

Trabalhando em por unidade [pu]: Com $S_N$ e $V_N$ potência e tensão base, respectivamente.

$$R_m\ pu = \frac{V_N^2}{P_{Fe}} \frac{S_N}{V_N^2} = \frac{S_N}{P_{Fe}}$$

$$\boxed{G_m = \frac{1}{R_m} = \frac{P_{Fe}}{S_N} \quad [pu]} \qquad (57)$$

$$\dot{Y}_{exc} = G_m - j\,\frac{1}{X_m} \quad [mho]$$

$$\dot{I}_{exc} = \dot{Y}_{exc}\,\dot{V}_N$$

$$\frac{\dot{I}_{exc}}{V_N} = G_m - j\,\frac{1}{X_m} \quad [mho]$$

Trabalhando em por unidade [pu]:

$$\frac{\dot{I}_{exc}}{V_N} \cdot \frac{V_N^2}{S_N} = G_m \text{ pu} - j \frac{1}{X_m} \text{ pu}$$

Calculando os módulos resulta:

$$\frac{I_{exc}}{I_N} = \sqrt{G_m^2 \text{ pu} + \frac{1}{X_m^2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{X_m} \text{ pu} = \sqrt{\left(\frac{I_{exc}}{I_N}\right)^2 - G_m^2 \text{ pu}}} \qquad (58.a)$$

Não levando em conta as perdas tem-se:

$$\boxed{\frac{1}{X_m} \text{ pu} = \frac{I_{exc}}{I_N}} \qquad (58.b)$$

e

$$\boxed{\dot{Y}_m = -j \frac{1}{X_m} \text{ pu}} \qquad (59)$$

1) Primeira maneira de incorporar a admitância magnetizante

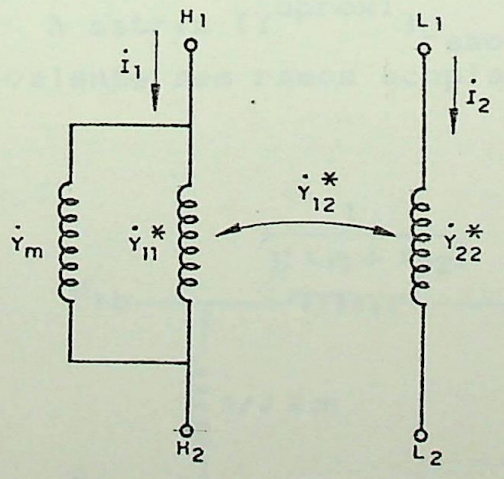



FIGURA 12: Incorporação de $\dot{Y}_m$ na figura 11.

As novas equações com o ramo magnetizante são:

$$\dot{I}_1 = \dot{Y}^{*}_{11}(\dot{V}_{H1} - \dot{V}_{H2}) + \dot{Y}^{*}_{12}(\dot{V}_{L1} - \dot{V}_{L2}) +$$

$$+ \dot{Y}_m(\dot{V}_{H1} - \dot{V}_{H2})$$

$$\dot{I}_2 = \dot{Y}^{*}_{22}(\dot{V}_{L1} - \dot{V}_{L2}) + \dot{Y}^{*}_{12}(\dot{V}_{H1} - \dot{V}_{H2})$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}^{*}_{11} + \dot{Y}_m & \dot{Y}^{*}_{12} \\ \dot{Y}^{*}_{12} & \dot{Y}^{*}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_{H1} - \dot{V}_{H2} \\ \dot{V}_{L1} - \dot{V}_{L2} \end{bmatrix}$$

ou também:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [\dot{Y}^{aprox1}]_{ramo} \begin{bmatrix} \dot{V}_{H1} - \dot{V}_{H2} \\ \dot{V}_{L1} - \dot{V}_{L2} \end{bmatrix}$$

A matriz:

$$[L]^{-1} = j\omega\,[\dot{Y}^{aprox1}]_{ramo}$$

é junto com a matriz [R] o modelo [R]-$[L]^{-1}$ do transformador de dois enrolamentos com ramo magnetizante.

A matriz $[\dot{Y}^{aprox1}]_{ramo}$ pode-se obter do seguinte circuito equivalente sem ramos acoplados.

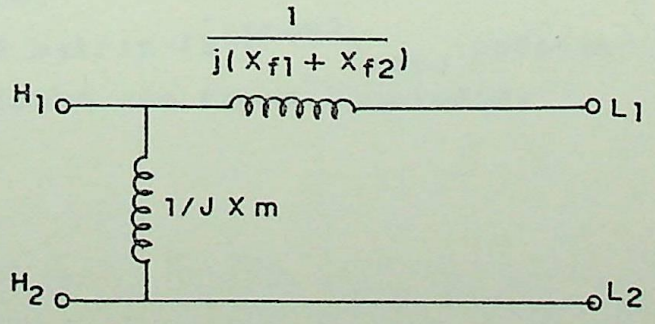



FIGURA 13: Circuito equivalente das bobinas mutuamente acopladas da figura 12 (em pu).

2) Segunda maneira de incorporar a admitância magnetizante

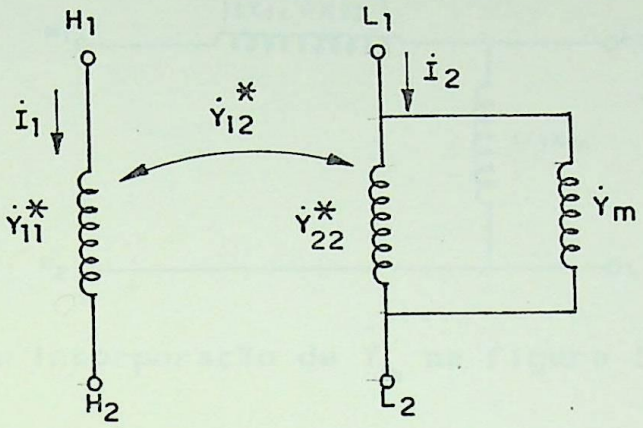



FIGURA 14: Incorporação de $\dot{Y}_m$ na figura 11.

As equações na forma matricial ficam:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}^*_{11} & \dot{Y}^*_{12} \\ \dot{Y}^*_{12} & \dot{Y}^*_{22}+\dot{Y}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_{H1} - \dot{V}_{H2} \\ \dot{V}_{L1} - \dot{V}_{L2} \end{bmatrix}$$

ou também

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [\dot{Y}^{aprox2}]_{ramo} \begin{bmatrix} \dot{V}_{H1} - \dot{V}_{H2} \\ \dot{V}_{L1} - \dot{V}_{L2} \end{bmatrix}$$

A matriz:

$$[L]^{-1} = j\omega[\dot{Y}^{aprox2}]_{ramo}$$

é junto com a matriz [R] o modelo $[R]-[L]^{-1}$ do transformador com ramo magnetizante.

A matriz $[\dot{Y}^{aprox2}]_{ramo}$ pode-se obter do seguinte circuito equivalente sem ramos acoplados:

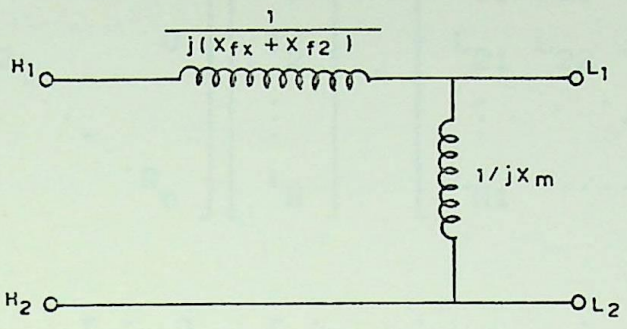



FIGURA 15: Incorporação de $\dot{Y}_m$ na figura 14 (em pu).

OBSERVAÇÕES:

a) Ressalta-se que as novas matrizes $[L]^{-1}$ não são singulares porém muito mal condicionadas porque $\dot{Y}_m$ tem um valor muito pequeno.

b) Invertendo-se as matrizes $[L]^{-1}$ obtidas, pode-se ter modelos [R]-[L] alternativos do transformador monofásico com ramo magnetizante.

c) Pode-se observar que as matrizes: $[\dot{Y}^{aprox1}]_{ramo}$ e $[\dot{Y}^{aprox2}]_{ramo}$ são diferentes da matriz $[\dot{Y}]_{ramo}$ apresentada em (55).

d) Por considerações físicas o melhor modelo é aquele que incorpora o ramo magnetizante nos terminais do enrolamento mais próximo do núcleo.

## 2.2-2 - TRANSFORMADOR MONOFÁSICO DE N ENROLAMENTOS

MODELO [R]-[L]

São válidas as mesmas considerações feitas para o transformador monofásico de dois enrolamentos.

MODELO $[R]-[L]^{-1}$

Para uma melhor compreensão serão re-escritas as equações (35), (38), (40) e (53).

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ L_{N1} & \cdots & & L_{NN} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \cdots & \dot{Y}_{1N} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \cdots & \dot{Y}_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \dot{Y}_{N1} & \cdots & & \dot{Y}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_N \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\frac{d[i]}{dt} = [L]^{-1}[v] - [L]^{-1}[R][i] \tag{40}$$

$$[L]^{-1} = j\omega\,[\dot{Y}^{*}] \tag{53}$$

O modelo $[R]-[L]^{-1}$ definido pela equação (40) utiliza as matrizes [R] dadas na equação (35) e a matriz $[L]^{-1}$ definida na equação (53). Ao se acrescentar na matriz $[\dot{Y}^{*}]$ o ramo magnetizante se obterão diferentes aproximações da matriz $[\dot{Y}]$ definida na equação (38) e obtida a partir da equação (35) em regime senoidal permanente e desprezando as resistências.

A matriz $[\dot{Y}]$ da equação (38) pode associar-se a N bobinas mutuamente acopladas como indicado na figura 16.

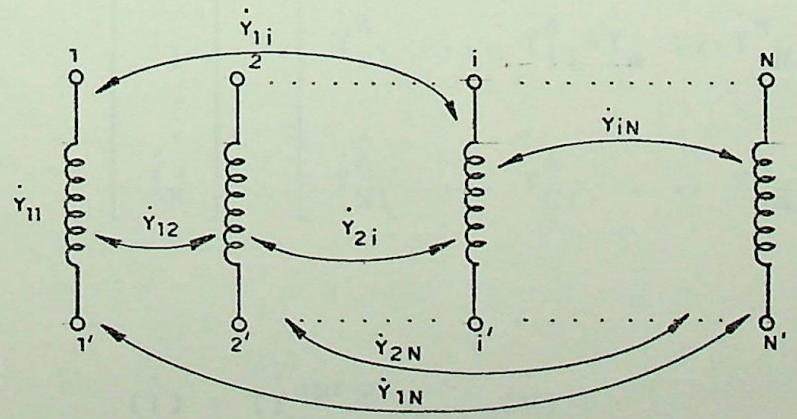



FIGURA 16: Esquema de N bobinas mutuamente acopladas associado à matriz $[\dot{Y}]$ da equação (38).

A matriz $[\dot{Y}^*]$ obtida no desenvolvimento do modelo $[R]-[L]^{-1}$ também representa N bobinas mutuamente acopladas, porém sem ramos magnetizantes.

Vai se trabalhar em por unidade (pu), assumindo os taps do transformador nas posições nominais.

Se faz a hipótese de que a corrente magnetizante circula por uma única admitância, desprezando-se as outras.

A incorporação do ramo magn tizante poderá ser feita, em princípio, em qualquer dos N enrolamentos.

Fazendo-a no i-ésimo enrolamento tem-se o esquema mostrado na figura 17.

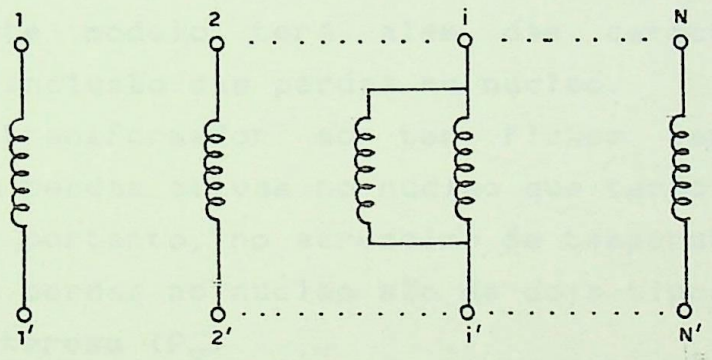



FIGURA 17: Incorporação de $\dot{Y}_m$ nas N bobinas mutuamente acopladas associadas à matriz da equação (53).

As equações com o ramo magnetizante são:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \vdots \\ \dot{I}_i \\ \vdots \\ \dot{I}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}^*_{11} & \cdots & \dot{Y}^*_{1i} & \cdots & \dot{Y}^*_{1N} \\ \vdots & & & & \\ \dot{Y}^*_{i1} & \cdots & \dot{Y}^*_{ii}+\dot{Y}_m & \cdots & \dot{Y}^*_{iN} \\ \vdots & & & & \\ \dot{Y}^*_{N1} & \cdots & \dot{Y}^*_{Ni} & \cdots & \dot{Y}^*_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 - V_1' \\ \vdots \\ \dot{V}_i - V_i' \\ \vdots \\ \dot{V}_N - V_N' \end{bmatrix}$$

ou também

$$[\dot{I}] = [\dot{Y}^{aprox}]_{ramo}[\dot{V}]$$

A matriz:

$$[L]^{-1} = j\omega\,[\dot{Y}^{aprox}]_{ramo}$$

é junto com a matriz [R] o modelo [R]-$[L]^{-1}$ do transformador com ramo magnetizante.

OBSERVAÇÕES:
São válidos os ítens a), b) e d) escritos para o transformador de dois enrolamentos do ítem 2.2-1.

## 2.3 - Terceiro Modelo de Transformador Monofasico de N Enrolamentos

Este modelo terá além das características do segundo modelo a inclusão das perdas no núcleo.

O transformador ao ter fluxos variáveis com o tempo apresentará perdas ativas no núcleo que terão influência no seu rendimento e, portanto, no acréscimo de temperatura, etc.

As perdas no núcleo são de dois tipos:

a) Perdas por histerese ($P_H$)
b) Perdas por correntes de Foucault ($P_F$).

a) O fenômeno conhecido pelo nome de histerese é o resultado da propriedade do material de conservar sua imantação, ou seja, a de opor-se a uma variação do estado magnético.
A perda por histerese é a energia convertida em calor devido ao fenômeno da histerese.

b) As perdas por correntes de Foucault são originadas por correntes no material magnético, as quais produzem um aquecimento por efeito Joule. Estas correntes são produzidas devido às forças eletromotrizes induzidas nas lâminas do material que compõem o núcleo devido a fluxos magnéticos variáveis.

A soma das perdas por histerese e correntes de

Foucault recebe o nome de perda total no núcleo ($P_{HF}$).

### 2.3.1 - FÓRMULAS PARA OBTER O VALOR APROXIMADO DAS PERDAS NO NÚCLEO

A energia dissipada por histerese no núcleo por unidade de volume e por ciclo, é a área da região delimitada pelo "loop" B-H.

Uma fórmula empírica que permite relacionar estas perdas com $B_{max}$ e f é:

$$P_H = K_1 (B_{max})^a (f)^b$$

onde $K_1$ é uma constante que depende do material do núcleo.

Na referência [24] a = 3 e b = 1, na referência [11] a = 2,7 e b = 1,5. Se considerarmos a = b = 2 as perdas por histerese poderão ser modelados por uma resistência ou condutância constantes porque:

$$P_H = K_1 . B_{max}^{\ 2} . f^2 \qquad (60)$$

com variação senoidal do fluxo, tem-se:

$$E_{max} = N \phi_{max} \omega$$

$$\phi_{max} = B_{max} . A_{Fe}$$

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{N \omega A_{Fe}}$$

Substituindo na fórmula (60) e trabalhando em valores eficazes, vem:

$$P_H = \frac{E_{rms}^{\ 2}}{\frac{2N^2 n^2 A_{Fe}^{\ 2}}{K_1}}$$

onde a resistência de histerese ($R_H$) está dada pela expressão:

$$R_H = \frac{2N^2 n^2 A_{Fe}}{K_1}$$

As perdas por correntes de Foucault calculadas na referência [1] estão dadas pela expressão:

$$P_F = K_2 B_{max}^2 f^2 \qquad (61)$$

onde $K_2$ é uma constante que depende do material do núcleo. Fazendo o mesmo raciocínio, obtém-se:

$$R_F = \frac{2N^2 n^2 A_{Fe}^2}{K_2}$$

Conclui-se então que as perdas totais no núcleo podem ser modeladas por uma resistência de valor:

$$R_m = \frac{R_F \cdot R_H}{R_H + R_F}$$

## 2.3.2 - Modelagem das perdas

A modelagem será a mesma para os modelos [R]-[L] e $[R]-[L]^{-1}$ obtidos no ítem anterior, para transformadores monofásicos de 2 e N enrolamentos.

### 2.3.2-1 - primeiro modelo

Um primeiro modelo é uma resistência constante incorporada nos terminais do enrolamento mais próximo do núcleo ($R_m$).

a) O valor da resistência $R_m$ é obtido dos dados de ensaio a vazio, como já foi mencionado no ítem 2.2. Re-escrevendo a equação (57) resulta:

$$R_m = \frac{S_N}{P_{Fe}} \quad pu \tag{57}$$

onde:

$$P_{Fe} = P_{HF}$$

b) Uma maneira alternativa para o cálculo de $R_m$

Nos terminais do enrolamento mais próximo do núcleo tem-se:

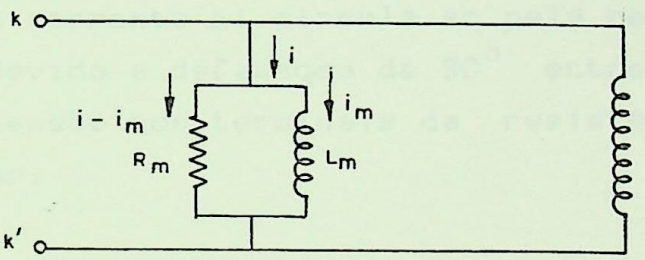



FIGURA 18: Circuito equivalente para o ramo k-k'.

Considere-se a seguir o laço enlace de fluxo x intensidade de corrente à frequência industrial dado na figura 19.

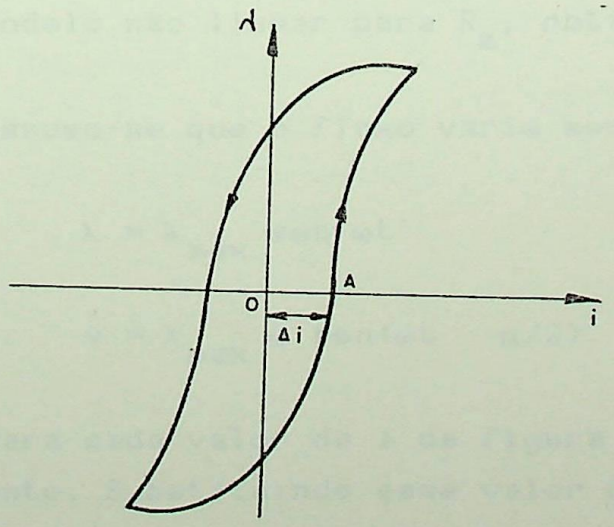



FIGURA 19: Característica λ x i.

O valor de $R_m$ é obtido da equação (62).

$$R_m = \frac{v_{max}}{\Delta i} \tag{62}$$

onde:

$v_{max}$ é o valor de pico de tensão nos terminais k-k'
$\Delta i$ é o valor da corrente indicado na figura 19.

Da figura 19 quando $\lambda$ é igual a zero o valor de corrente é $\Delta i$ (ponto A). Agora, como o fluxo é igual a zero não circula corrente pelo ramo magnetizante $L_m$ da figura 18, conclui-se que a corrente $\Delta i$ circula só pela resistência $R_m$.

Devido a defasagem de $90^o$ entre fluxo e tensão, quando $\lambda = 0$ a tensão nos terminais da resistência $R_m$ é máxima sendo o seu valor:

$$v_{max} = \omega \lambda_{max}$$

Com $\Delta i$ circulando pela resistência e com uma tensão nos terminais $v_{max}$ o valor de $R_m$ fica determinado pela equação (62).

## 2.3.2-2 - SEGUNDO MODELO

Modelo não linear para $R_m$, obtido como indicado a seguir.

Assume-se que o fluxo varia senoidalmente, então:

$$\lambda = \lambda_{max} \text{ sen } \omega t \tag{63}$$

e

$$v = \lambda_{max} \omega \text{ sen}(\omega t - \pi/2) \tag{64}$$

Para cada valor de i da figura 19 obtém-se o valor de $\lambda$ correspondente. Substituindo esse valor de $\lambda$ na equação (63) obtém-se $\omega t$, substituindo esse valor de $\omega t$ na equação (64) obtém-se v que a tensão nos terminais de $R_m$.

Calcula-se agora a corrente pela resistência $R_m$. Para isso, da figura 20, dado $\lambda$, obtém-se $i_m$, corrente que circula pela indutância $L_m$.

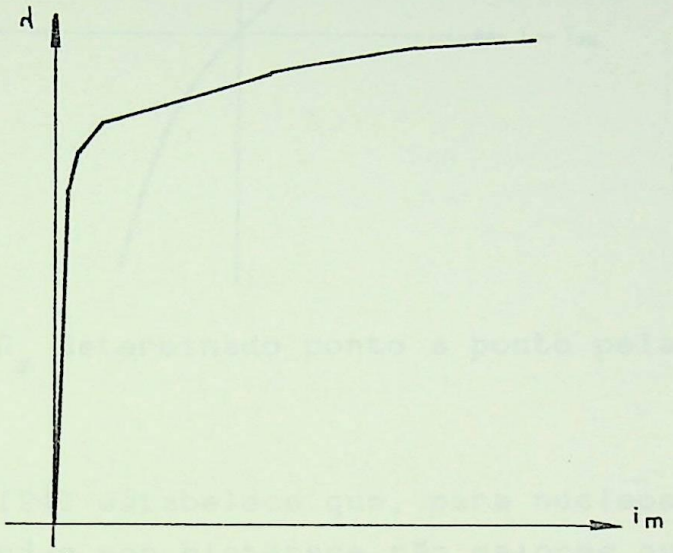



FIGURA 20: Enlace de fluxo $\lambda$ x corrente magnetizante.

O valor da corrente por $R_m$ será então (ver figura 18):

$$i_{Rm} = i - i_m$$

e o valor de $R_m$ é:

$$R_m = \frac{v}{i - i_m} \qquad (65)$$

Graficamente, a equação (65) é:

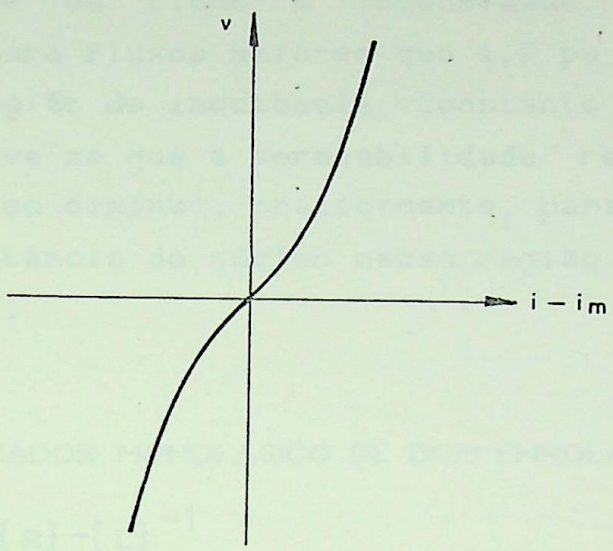



FIGURA 21: $R_m$ determinado ponto a ponto pela equação (65).

OBSERVAÇÕES:

a) A referência [24] estabelece que, para núcleos do tipo aço-silício as perdas por histerese são maiores que as perdas por correntes de Foucault, tipicamente a relação entre elas é de 3. E para núcleos do tipo aço de grão orientado as perdas por histerese são menores que as perdas por correntes de Foucault, tipicamente, a relação entre eles é 0,67.
A referência [25] estabelece que o valor típico não é 0,67 e sim 0,33.

b) Os modelos obtidos para as perdas totais no núcleo não modificam a matriz [R] dos modelos [R]-[L] e $[R]-[L]^{-1}$, sendo necessário acrescentar um ramo extra de resistência para fazer a modelagem.

## 2.4 - Quarto Modelo de Transformador Monofásico de N Enrolamentos

Neste modelo será incluido o efeito da saturação do núcleo do transformador. Se for necessária a inclusão das perdas do núcleo, as mesmas serão modeladas como foi feito no modelo apresentado no ítem 2.3.

Na figura 9 pode-se observar uma característica

típica de enlace de fluxo x intensidade de corrente. Nessa característica para fluxos maiores que 1,2 pu (ponto de joelho) entra-se numa região de indutância constante chamada região de saturação. Observa-se que a permeabilidade relativa do material que forma o núcleo diminui, praticamente, para a unidade (razão pela qual a indutância do núcleo nessa região é chamada indutância de núcleo de ar).

## 2.4.1 - TRANSFORMADOR MONOFÁSICO DE DOIS ENROLAMENTOS

### 2.4.1-1 - MODELO $[R]-[L]^{-1}$

#### 2.4.1-1.1 - SEM A INCLUSÃO PRÉVIA DO RAMO MAGNETIZANTE LINEAR

Para simular a saturação do núcleo adiciona-se um ramo extra de indutância não linear. Esta indutância não linear terá como curva representativa a característica $\lambda = f(i)$ do núcleo do transformador. Este ramo não linear terá que ser incorporado nos terminais do enrolamento mais próximo do núcleo que deveria apresentar os menores valores para o fluxo de dispersão.

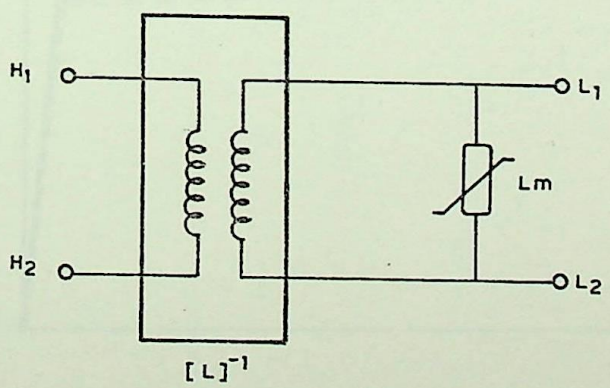



FIGURA 22: Esquema de transformador de dois enrolamentos com a inclusão do ramo magnetizante, modelo $[R]-[L]^{-1}$

onde na figura 22 tem-se:

$L_m$ - indutância não linear.

Na figura 14 assim como neste desenvolvimento foi suposto que o enrolamento secundário é o mais próximo do núcleo.

Em geral, o fabricante fornece a curva de saturação como tensão eficaz em função da corrente eficaz. Para o modelo necessita-se a curva $\lambda = f(i)$ a qual é obtida da curva dada pelo fabricante (vide o procedimento descrito no Anexo I o qual teve sua implementação computacional num programa auxiliar chamado CONVERT no UBC-EFEI).

A curva dada pelo fabricante pode ter sido medida no enrolamento primário ou secundário. Este fato será levado em conta na modelagem conforme segue:

a) A medida foi feita no enrolamento secundário. A curva $\lambda = f(i)$ obtida não necessita de nenhuma correção.

b) A medida foi feita no lado primário. Da curva $\lambda = f(i)$ obtida deve-se subtrair a indutância de dispersão para obter a característica $\lambda = f(i)$ referida ao lado secundário. Ou seja, para ter a curva $\lambda = f(i)$ como se fosse medida no secundário.

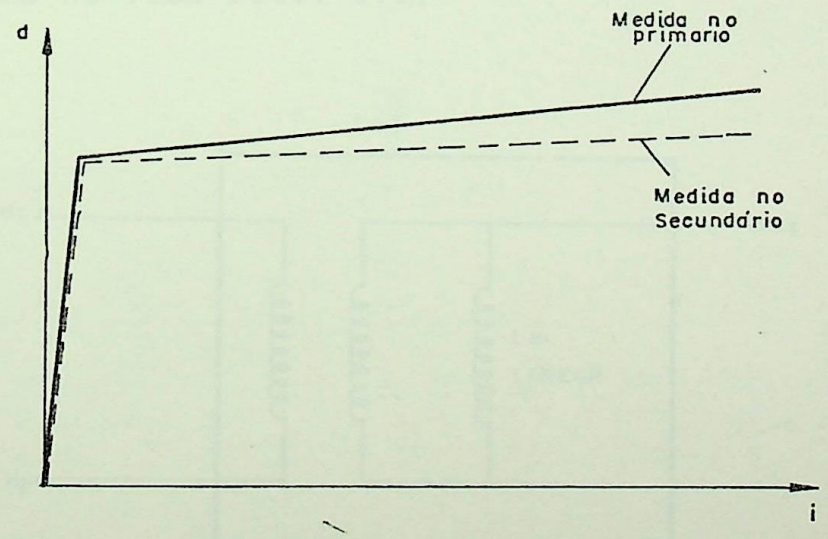



FIGURA 23: Características λxi medidas do lado primário e secundário.

É importante ressaltar o seguinte:

- A subtração na região linear não é importante, pois:

$$L_{m\ linear} >> L_{dispersão}$$

- A subtração é importante na região saturada pois:
  $L_m$ saturada é da mesma ordem que $L_{dispersão}$

### 2.4.1-1.2 - COM A INCLUSÃO PRÉVIA DO RAMO MAGNETIZANTE LINEAR

Neste caso deve-se subtrair da matriz $[L]^{-1}$ o valor $1/L_m$ do elemento i-ésimo da diagonal, sendo i o enrolamento mais próximo do núcleo (ver ítem 2.2.1). Agora repete-se o procedimento descrito no ítem 2.4.1-1.1.

### 2.4.1-2 - MODELO [R]-[L]

Este modelo como foi descrito no ítem 2.1.1 tem incluido o ramo magnetizante linear, característica indispensável para a obtenção do mesmo.

Com respeito à curva tensão eficaz em função da corrente eficaz dada pelo fabricante, continuam sendo válidas as observações feitas no ítem 2.4.1-1.1.

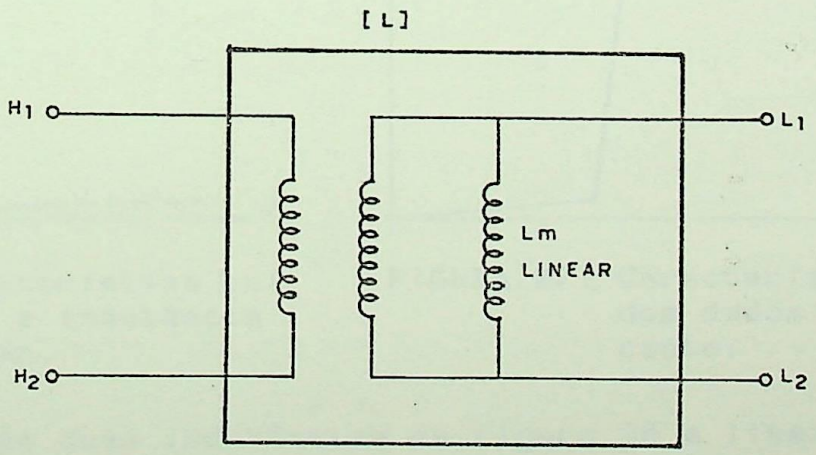



FIGURA 24: Esquema de transformador de dois enrolamentos modelo [R]-[L].

Para simular a saturação do núcleo adiciona-se um ramo extra de indutância não linear modificada como indicado na figura 25.

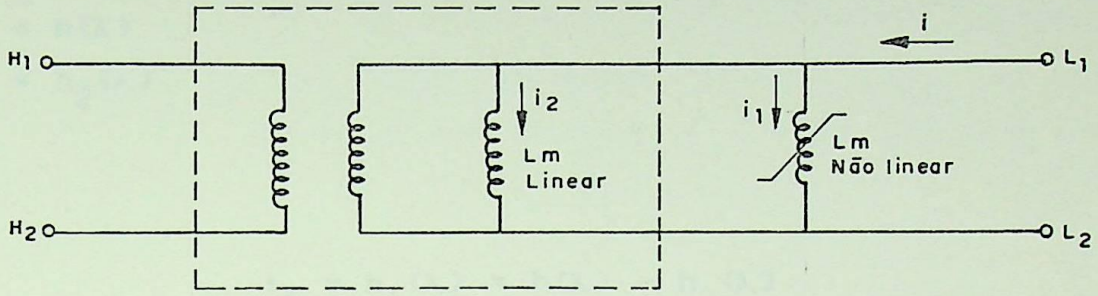



FIGURA 25: Inclusão da indutância não linear no esquema da figura 24.

Esta indutância não linear modificada terá como curva representativa $\lambda = g(i)$ obtida como indicado a seguir.

Na figura 26 está indicada a característica λxi da indutância linear e na figura 27 a característica λxi obtida dos dados do fabricante.

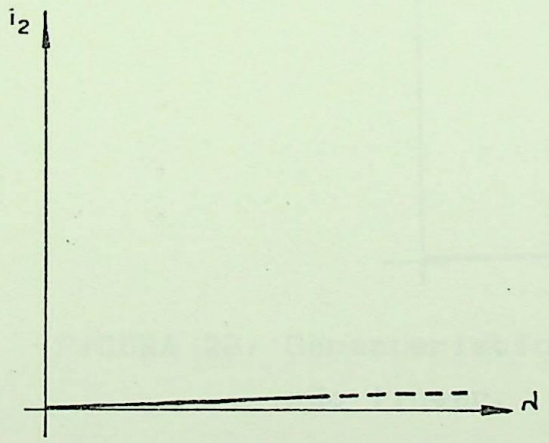



FIGURA 26: Característica λxi para a indutância linear.

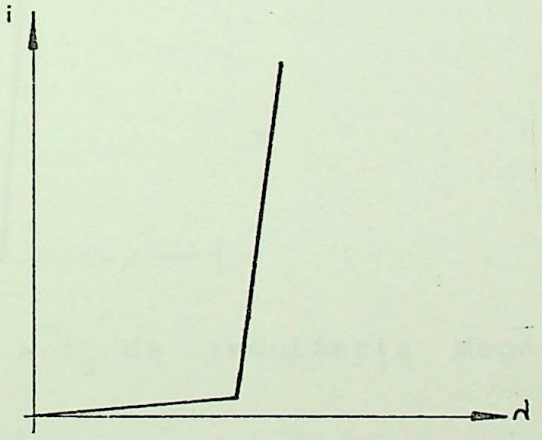



FIGURA 27: Característica λxi dos dados do fabricante.

As duas indutâncias da figura 25 a linear e a não linear tem a mesma tensão em seus terminais.

$$v = \frac{d\lambda}{dt} \qquad \lambda = \int v \, . \, dt$$

então o enlace de fluxo é o mesmo para as duas indutâncias.

Por outro lado:

$$i_1 = i - i_2$$

onde:

$$i = h(\lambda)$$

$$i_2 = h_2(\lambda)$$

então:

$$i_1 = h_1(\lambda) = h(\lambda) - h_2(\lambda)$$

Fazendo esta diferença graficamente, obtém-se a característica corrente x enlace de fluxo da indutância não linear modificada como ilustra a figura 28.

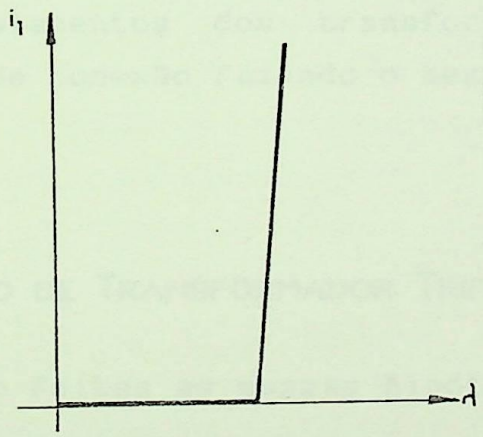



FIGURA 28: Característica $\lambda$ x $i_1$ da indutância magnetizante não linear.

OBSERVAÇÃO:

O desenvolvimento matemático necessário para a modelagem da indutância não linear poderá ser feito por algum dos seguintes métodos:

- Linearização por segmentos da característica $\lambda = f(i)$
- Método da compensação
- Método da rede equivalente
- Representação por fontes de corrente com um tempo de atraso $\Delta t$.

Estes métodos matemáticos serão analisados no Capítulo III.

### 2.4.2 - Transformador monofásico de N enrolamentos

Todas as considerações feitas para os modelos [R]-[L] e $[R]-[L]^{-1}$ de dois enrolamentos serão válidas para N enrolamentos.

## 2.5 - Modelagem para Bancos de Transformadores

A modelagem das unidades monofásicas de um banco poderá ser feita utilizando os modelos desenvolvidos nos ítens anteriores.

Como os terminais dos modelos coincidem com os terminais dos enrolamentos dos transformadores pode-se então representar o tipo de conexão fazendo o mesmo com os terminais dos modelos.

## 2.6 - Primeiro Modelo de Transformador Trifásico

Serão feitas as mesmas hipóteses que no ítem 2.1.

### 2.6.1 - Transformador trifásico de dois enrolamentos

#### 2.6.1-1 - modelo [R]-[L]

O transformador trifásico de dois enrolamentos pode ser considerado como seis bobinas mutuamente acopladas:

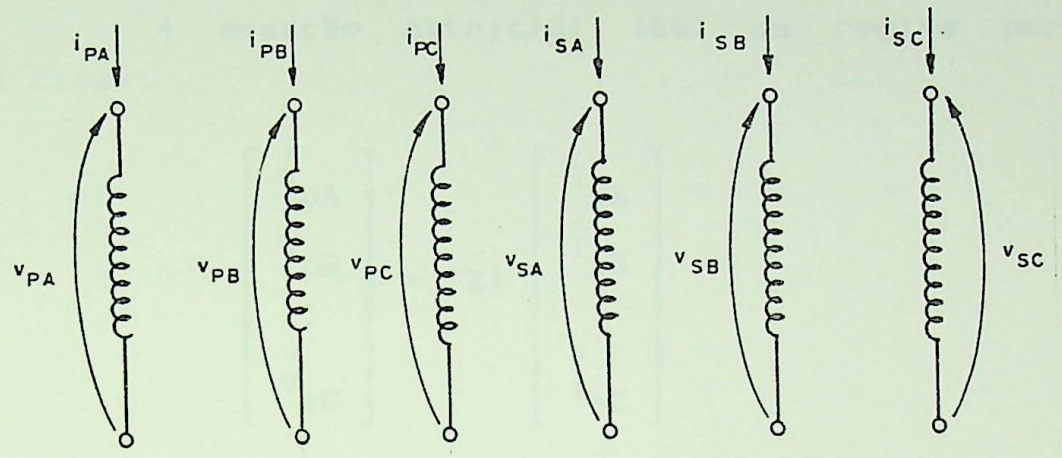



FIGURA 29: Esquema do transformador trifásico de dois enrolamentos.

onde:

$i_{pA}$, $i_{pB}$, $i_{pC}$ são as intensidades de corrente instantâneas nas bobinas do primário

$i_{sA}$, $i_{sB}$, $i_{sC}$ são as intensidades de corrente instantâneas nas bobinas do secundário

$v_{pA}$, $v_{pB}$, $v_{pC}$ são as tensões instantâneas nos terminais das bobinas do primário

$v_{sA}$, $v_{sB}$, $v_{sC}$ são as tensões instantâneas nos terminais das bobinas do secundário.

As relações entre as tensões e correntes de ramo são fornecidas pela equação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_{pA} \\ v_{pB} \\ \vdots \\ v_{sC} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} i_{pA} \\ i_{pB} \\ \vdots \\ i_{sC} \end{bmatrix} + [L] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{pA} \\ i_{pB} \\ \vdots \\ i_{sC} \end{bmatrix} \qquad (66)$$

Esta equação conduz ao "modelo [R]-[L]" do transformador trifásico.

- OBTENÇÃO DAS MATRIZES DO MODELO: [R] E [L]

A equação matricial (66) em regime permanente senoidal fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{pA} \\ \dot{V}_{pB} \\ \vdots \\ \dot{V}_{sC} \end{bmatrix} = [\dot{Z}] \begin{bmatrix} \dot{I}_{pA} \\ \dot{I}_{pB} \\ \vdots \\ \dot{I}_{sC} \end{bmatrix} \qquad (67)$$

onde:

$$[\dot{Z}] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \dot{Z}^{p}_{AA} & \dot{Z}^{p}_{AB} & \dot{Z}^{p}_{AC} & \dot{Z}^{pS}_{AA} & \dot{Z}^{pS}_{AB} & \dot{Z}^{pS}_{AC} \\ \hline \dot{Z}^{p}_{AB} & \dot{Z}^{p}_{BB} & \dot{Z}^{p}_{BC} & \dot{Z}^{pS}_{AB} & \dot{Z}^{pS}_{BB} & \dot{Z}^{pS}_{BC} \\ \hline \dot{Z}^{p}_{AC} & \dot{Z}^{p}_{BC} & \dot{Z}^{p}_{CC} & \dot{Z}^{pS}_{AC} & \dot{Z}^{pS}_{BC} & \dot{Z}^{pS}_{CC} \\ \hline \dot{Z}^{pS}_{AA} & \dot{Z}^{pS}_{AB} & \dot{Z}^{pS}_{AC} & \dot{Z}^{S}_{AA} & \dot{Z}^{S}_{AB} & \dot{Z}^{S}_{AC} \\ \hline \dot{Z}^{pS}_{AB} & \dot{Z}^{pS}_{BB} & \dot{Z}^{pS}_{BC} & \dot{Z}^{S}_{AB} & \dot{Z}^{S}_{BB} & \dot{Z}^{S}_{BC} \\ \hline \dot{Z}^{pS}_{AC} & \dot{Z}^{pS}_{BC} & \dot{Z}^{pS}_{CC} & \dot{Z}^{S}_{AC} & \dot{Z}^{S}_{BC} & \dot{Z}^{S}_{CC} \\ \hline \end{array} \qquad (68)$$

Em (68) tem-se:

$\dot{Z}^{P}_{AA}, \ldots, \dot{Z}^{S}_{CC}$ - são as impedâncias próprias das bobinas do primário e secundário, respectivamente.

$\dot{Z}^{P}_{AB}$ é a impedância mútua entre as bobinas A e B do primário.

$\dot{Z}^{S}_{BC}$ é a impedância mútua entre as bobinas B e C do secundário.

$\dot{Z}^{PS}_{AC}$ é a impedância mútua entre as bobinas A e C, sendo a bobina A do primário e a bobina C do secundário.

A figura ilustra basicamente como as bobinas do transformador estão situadas em um núcleo trifásico.

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

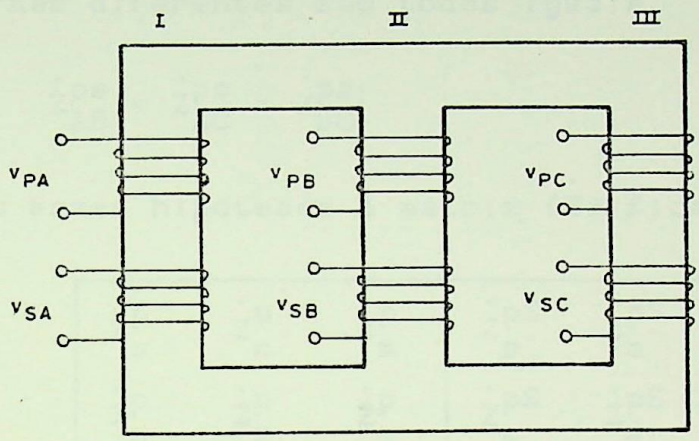



FIGURA 30: Disposição usual das bobinas em um núcleo trifásico.

Observa-se que as impedâncias mútuas entre as bobinas das pernas I e II são diferentes das impedâncias mútuas entre as bobinas das pernas I e III. Para levar isto em conta deveria-se considerar o transformador como seis bobinas acopladas e são necessários 6 ensaios a vazio com 21 medidas considerando que $\dot{Z}_{ik} = \dot{Z}_{ki}$.

Este número de medições não é fornecido pelo fabricante usualmente. Devido a isto serão feitas as seguintes aproximações:

a) As impedâncias mútuas entre as bobinas do primário são todas iguais:

$$\dot{Z}^{P}_{AB} = \dot{Z}^{P}_{AC} = \dot{Z}^{P}_{BC}$$

b) As impedâncias mútuas entre as bobinas do secundário são todas iguais.

$$\dot{Z}^{S}_{AB} = \dot{Z}^{S}_{AC} = \dot{Z}^{S}_{BC}$$

c) As impedâncias mútuas entre as bobinas de uma mesma perna são todas iguais.

$$\dot{Z}^{ps}_{AA} = \dot{Z}^{ps}_{BB} = \dot{Z}^{ps}_{CC}$$

d) As impedâncias mútuas entre as bobinas do secundário e do primário em pernas diferentes são todas iguais.

$$\dot{Z}^{ps}_{AB} = \dot{Z}^{ps}_{AC} = \dot{Z}^{ps}_{BC}$$

Com essas hipóteses a matriz $[\dot{Z}]$ fica:

$$[\dot{Z}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \dot{Z}^{p}_{s} & \dot{Z}^{p}_{m} & \dot{Z}^{p}_{m} & \dot{Z}^{pS}_{s} & \dot{Z}^{pS}_{m} & \dot{Z}^{pS}_{m} \\ \dot{Z}^{p}_{m} & \dot{Z}^{p}_{s} & \dot{Z}^{p}_{m} & \dot{Z}^{pS}_{m} & \dot{Z}^{pS}_{s} & \dot{Z}^{pS}_{m} \\ \dot{Z}^{p}_{m} & \dot{Z}^{p}_{m} & \dot{Z}^{p}_{s} & \dot{Z}^{pS}_{m} & \dot{Z}^{pS}_{m} & \dot{Z}^{pS}_{s} \\ \hline \dot{Z}^{pS}_{s} & \dot{Z}^{pS}_{m} & \dot{Z}^{pS}_{m} & \dot{Z}^{S}_{s} & \dot{Z}^{S}_{m} & \dot{Z}^{S}_{m} \\ \dot{Z}^{pS}_{m} & \dot{Z}^{pS}_{s} & \dot{Z}^{pS}_{m} & \dot{Z}^{S}_{m} & \dot{Z}^{S}_{s} & \dot{Z}^{S}_{m} \\ \dot{Z}^{pS}_{m} & \dot{Z}^{pS}_{m} & \dot{Z}^{pS}_{s} & \dot{Z}^{S}_{m} & \dot{Z}^{S}_{m} & \dot{Z}^{S}_{s} \end{array}\right] \qquad (69)$$

Subdividindo a matriz $[\dot{Z}]$ da equação (67) em quatro submatrizes como indicado na equação (69) e as matrizes colunas de tensão e corrente em duas submatrizes colunas respectivamente, resulta:

$$\left[\begin{array}{c} \dot{V}_{p} \\ \hline \dot{V}_{s} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \dot{Z}^{pp} & \dot{Z}^{ps} \\ \hline \dot{Z}^{ps} & \dot{Z}^{ss} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \dot{I}_{p} \\ \hline \dot{I}_{s} \end{array}\right] \qquad (70)$$

A matriz $[\dot{Z}]$ da equação (69) pode-se-lhe associar duas "bobinas" mutuamente acopladas como indicado a seguir.

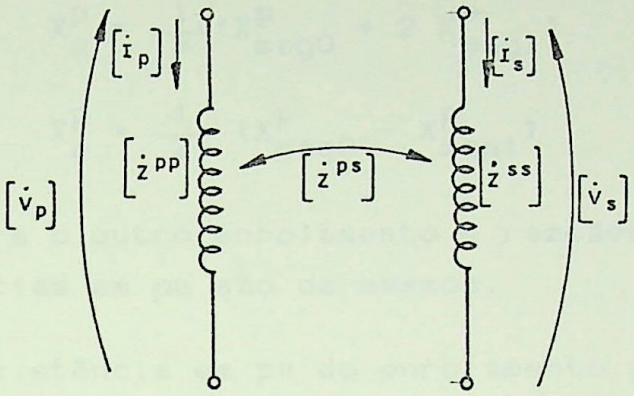



FIGURA 31: Esquema de transformador trifásico de dois enrolamentos.

Analisando a equação (70) e a figura 31 conclui-se que a extensão de um transformador monofásico de dois enrolamentos para um transformador trifásico de dois enrolamentos será feita, substituindo-se cada elemento escalar da matriz [Z] do transformador monofásico por submatrizes de dimensões 3x3 e os escalares tensões e correntes por submatrizes colunas de dimensões 3x1.

- ENSAIOS

Para o transformador trifásico de dois enrolamentos tem-se os seguintes ensaios:

a) ensaio a vazio de sequência positiva;
b) ensaio a vazio de sequência zero;
c) ensaio de curto-circuito de sequência positiva;
d) ensaio de curto-circuito de sequência zero.

A seguir, se trabalhará em por unidade (pu). Dos ensaios a) e b) e utilizando a equação (58.b) obtém-se:

$X^{p}_{mag1}$ (reatância magnetizante de sequência positiva)

$X^{p}_{mag0}$ (reatância magnetizante de sequência zero).

As relações entre as reatâncias de fase e as reatâncias sequenciais estão dadas pelas equações:

$$X_s^p = \frac{1}{3}(X_{mag0}^p + 2\,X_{mag1}^p) \qquad (71)$$

$$X_m^p = \frac{1}{3}(X_{mag0}^p - X_{mag1}^p) \qquad (72)$$

Para o outro enrolamento é razoável supor que os valores de reatâncias em pu são os mesmos.

$R_s^p = R^p$ (resistência em pu do enrolamento primário)

$R_s^s = R^s$ (resistência em pu do enrolamento secundário).

resulta:

$$\dot{Z}_s^p = R_s^p + j\,X_s^p \qquad \text{(própria)}$$

$$\dot{Z}_m^p = j\,X_m^p \qquad \text{(mútua)}$$

$$\dot{Z}_s^s = R_s^s + jX_s^p \qquad \text{(própria)}$$

$$\dot{Z}_m^s = \dot{Z}_m^p \qquad \text{(mútua)}$$

Então as submatrizes $[\dot{Z}^{pp}]$ e $[\dot{Z}^{ss}]$ da equação (70) ficam:

$$[\dot{Z}^{pp}] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_s^p & \dot{Z}_m^p & \dot{Z}_m^p \\ \dot{Z}_m^p & \dot{Z}_s^p & \dot{Z}_m^p \\ \dot{Z}_m^p & \dot{Z}_m^p & \dot{Z}_s^p \end{bmatrix}$$

$$[\dot{Z}^{ss}] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_s^s & \dot{Z}_m^s & \dot{Z}_m^s \\ \dot{Z}_m^s & \dot{Z}_s^s & \dot{Z}_m^s \\ \dot{Z}_m^s & \dot{Z}_m^s & \dot{Z}_s^s \end{bmatrix}$$

Dos ensaios c) e d) obtém-se:

$\dot{Z}_{ps1}^{curto}$ (impedância de curto-circuito de sequência positiva)

$\dot{Z}_{ps0}^{curto}$ (impedância de curto-circuito de sequência zero)

Impondo as condições do ensaio de curto-circuito na equação (70), obtém-se:

$$\left[\dot{V}_{p}^{curto}\right] = \left[\dot{Z}^{pp}\right]\left[\dot{I}_{p}^{curto}\right] + \left[\dot{Z}^{ps}\right]\left[\dot{I}_{s}^{curto}\right]$$

$$\left[\ 0\ \right] = \left[\dot{Z}^{ps}\right]\left[\dot{I}_{p}^{curto}\right] + \left[\dot{Z}^{ss}\right]\left[\dot{I}_{s}^{curto}\right]$$

Aplicando a transformação de Fortescue às equações acima, resultam para cada sequência as seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{V}_{p1}^{curto} = \dot{Z}_{1}^{p}\ \dot{I}_{p1}^{curto} + \dot{Z}_{1}^{ps}\ \dot{I}_{s1}^{curto} \\ 0 = \dot{Z}_{1}^{ps}\ \dot{I}_{p1}^{curto} + \dot{Z}_{1}^{s}\ \dot{I}_{s1}^{curto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{V}_{p0}^{curto} = \dot{Z}_{0}^{p}\ \dot{I}_{p0}^{curto} + \dot{Z}_{0}^{ps}\ \dot{I}_{s0}^{curto} \\ 0 = \dot{Z}_{0}^{ps}\ \dot{I}_{p0}^{curto} + \dot{Z}_{0}^{s}\ \dot{I}_{s0}^{curto} \end{cases}$$

onde:

$\dot{Z}_{1}^{p}$, $\dot{Z}_{0}^{p}$ - impedâncias de sequência positiva e zero da matriz $[\dot{Z}^{pp}]$

$\dot{Z}_{1}^{ps}$, $\dot{Z}_{0}^{ps}$ - impedâncias de sequência positiva e zero da matriz $[\dot{Z}^{ps}]$

$\dot{Z}_{1}^{s}$, $\dot{Z}_{0}^{s}$ - impedâncias de sequência positiva e zero da matriz $[\dot{Z}^{ss}]$

mas como:

$$\frac{\dot{V}_{p1}^{curto}}{\dot{I}_{p1}^{curto}} = \dot{Z}_{ps1}^{curto}$$

$$\frac{\dot{V}_{p0}^{curto}}{\dot{I}_{p0}^{curto}} = \dot{Z}_{ps0}^{curto}$$

obtém-se então:

$$\dot{Z}_1^{ps} = \sqrt{\left(\dot{Z}_1^{p} - \dot{Z}_{ps1}^{curto}\right)\dot{Z}_1^{s}}$$

$$\dot{Z}_0^{ps} = \sqrt{\left(\dot{Z}_0^{p} - \dot{Z}_{ps0}^{curto}\right)\dot{Z}_0^{s}}$$

As relações entre as impedâncias de fase e as impedâncias sequenciais estão dadas pelas equações:

$$\dot{Z}_s^{ps} = \frac{1}{3}\left(\dot{Z}_0^{ps} + 2\,\dot{Z}_1^{ps}\right) \qquad (73)$$

$$\dot{Z}_m^{ps} = \frac{1}{3}\left(\dot{Z}_0^{ps} - \dot{Z}_1^{ps}\right) \qquad (74)$$

Então a submatriz $[\dot{Z}^{ps}]$ da equação (70) fica:

$$[Z^{ps}] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_s^{ps} & \dot{Z}_m^{ps} & \dot{Z}_m^{ps} \\ \dot{Z}_m^{ps} & \dot{Z}_s^{ps} & \dot{Z}_m^{ps} \\ \dot{Z}_m^{ps} & \dot{Z}_m^{ps} & \dot{Z}_s^{ps} \end{bmatrix}$$

- RESTRIÇÕES DO MODELO [R]-[L]

As restrições e propriedades da matriz $[\dot{Z}]$ do transformador monofásico de dois enrolamentos descritas no ítem 2.1.1-1 são válidas também para o modelo do transformador trifásico de dois enrolamentos.

## 2.6.1-2. Modelo $[R]-[L]^{-1}$

A extensão do modelo $[R]-[L]^{-1}$ desenvolvido para um transformador monofásico de N enrolamentos para um transformador trifásico de N enrolamentos será feito substituindo as quantidades escalares por quantidades matriciais. Neste ítem a extensão será feita considerando-se N = 2.

- CONSTRUÇÃO DAS MATRIZES [R] E $[L]^{-1}$

A seguir se trabalhará em pu e com os "taps" nas posições nominais.

a) Matriz [R]

Os elementos da diagonal são as resistências em corrente alternada de cada bobina. Os elementos fora da diagonal são nulos.

b) Matriz $[L]^{-1}$

O enrolamento secundário será considerado como circuito de retorno.

De acordo com o desenvolvimento feito para um transformador monofásico de N enrolamentos (neste caso, N = 2) no ítem 2.1.2-2, tem-se da equação (44), trabalhando só com a parte reativa:

$$[\dot{V}_p - \dot{V}_s] = [\dot{X}^{red}_{pp}][\dot{I}_p]$$

com:

$$\dot{X}^{red}_{pp} = j\dot{X}^{curto}_{ps} \qquad (45)$$

Fazendo agora a extensão para trifásico ao invés de ter uma matriz $[\dot{X}^{red}_{pp}]$ de dimensões 1x1, se terá uma matriz de dimensões 3x3 como indicado a seguir:

$$[\dot{X}^{red}_{pp}] = \dot{j} \begin{bmatrix} X^{red}_{pps} & X^{red}_{ppm} & X^{red}_{ppm} \\ X^{red}_{ppm} & X^{red}_{pps} & X^{red}_{ppm} \\ X^{red}_{ppm} & X^{red}_{ppm} & X^{red}_{pps} \end{bmatrix}$$

Os elementos desta matriz calculam-se da seguinte maneira:

Para o transformador trifásico de dois enrolamentos tem-se dois ensaios de curto-circuito, dos quais obtém-se:

$X^{curto}_{ps1}$ (reatância de curto-circuito de sequência positiva)

$X^{curto}_{ps0}$ (reatância de curto-circuito de sequência zero).

As relações entre as reatâncias de fase e as reatâncias sequenciais estão dadas pelas equações:

$$X^{red}_{pps} = \frac{1}{3}\left[X^{curto}_{ps0} + 2\,X^{curto}_{ps1}\right]$$

$$X^{red}_{ppm} = \frac{1}{3}\left[X^{curto}_{ps0} + X^{curto}_{ps1}\right]$$

Na obtenção de $[\dot{Y}^{*}]$ no ítem 2.1.2-2 se fez a inversão da $[\dot{X}^{reduzida}]$ e logo se completou a matriz. Esses passos para o transformador monofásico com N = 2 são:

$$[\dot{X}^{red}_{pp}]^{-1} = [\dot{Y}^{red}_{pp}]$$

Para obter a matriz completa, utilizam-se as equações (48) e (51):

$$\dot{Y}^{red}_{ps} = -\dot{Y}^{red}_{pp}$$

$$\dot{Y}^{red}_{ss} = -\dot{Y}^{red}_{sp} = \dot{Y}^{red}_{pp}$$

Para a matriz completa, vem:

$$[\dot{Y}^{*}] = \begin{bmatrix} \dot{Y}^{red}_{pp} & -\dot{Y}^{red}_{pp} \\ -\dot{Y}^{red}_{pp} & \dot{Y}^{red}_{pp} \end{bmatrix} \qquad (75)$$

Repetindo estas etapas para o transformador trifásico tem-se:

A matriz obtida da inversão de $[\dot{X}^{red}_{pp}]$ é dada na equação (76)

$$[\dot{Y}^{red}_{pp}] = \begin{bmatrix} \dot{Y}^{red}_{pps} & \dot{Y}^{red}_{ppm} & \dot{Y}^{red}_{ppm} \\ \dot{Y}^{red}_{ppm} & \dot{Y}^{red}_{pps} & \dot{Y}^{red}_{ppm} \\ \dot{Y}^{red}_{ppm} & \dot{Y}^{red}_{ppm} & \dot{Y}^{red}_{pps} \end{bmatrix} \qquad (76)$$

Para obter a matriz completa $[\dot{Y}^{*}]$ no caso trifásico se substitui o escalar $\dot{Y}^{red}_{pp}$ pela matriz da equação (76) na equação (75).

A matriz $[\dot{Y}^{*}]$ então fica:

$$[\dot{Y}^{*}] = \left[\begin{array}{c|c} [\dot{Y}^{red}_{pp}] & -[\dot{Y}^{red}_{pp}] \\ \hline -[\dot{Y}^{red}_{pp}] & [\dot{Y}^{red}_{pp}] \end{array}\right] \qquad (77)$$

Finalmente, para o transformador trifásico de dois enrolamentos obtém-se:

$$[L]^{-1} = j\omega[\dot{Y}^{*}]$$

Ressalte-se que na obtenção do modelo foram ignorados os ramos magnetizantes, o que implica que a matriz $[L]^{-1}$ é singular. Todas as considerações feitas no modelo $[R]$-$[L]^{-1}$ do transformador monofásico continuam sendo válidas aqui.

Para a obtenção do "primeiro modelo" de um transformador trifásico de N enrolamentos será feita uma extensão, conceitualmente, igual à feita para o caso de dois enrolamentos.

OBSERVAÇÃO

A extensão descrita para a obtenção dos modelos [R]-[L] e $[R]-[L]^{-1}$ exige trabalhar com os valores dos ensaios de curto-circuito de sequência zero.

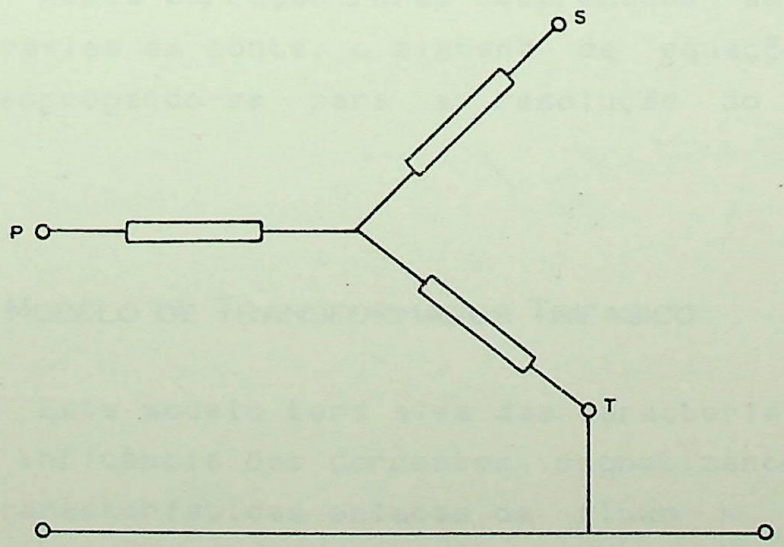
Se o transformador tiver um ou mais de um enrolamento ligado em triângulo o valor da impedância de curto-circuito de sequência zero deverá ser corrigida no caso em que o triângulo não for aberto durante o ensaio.

EXEMPLO

Transformador trifásico de três enrolamentos com conexões: $Y_{\frac{1}{2}}\, Y_{\frac{1}{2}}\, \Delta$

Ao se fazer o ensaio de curto-circuito entre os enrolamentos primário e secundário com o triângulo fechado, este oferecerá um caminho de curto-circuito para as correntes de sequência zero, o que mostra a necessidade da correção.

Utilizando-se o circuito equivalente em estrela e trabalhando em por unidade resulta para a sequência zero.




$$X^{\Delta}_{ps} = X_p + \frac{X_s\, X_T}{X_S + X_T}$$

$$X_{PT} = X_P + X_T$$

$$X_{ST} = X_S + X_T$$

Resolvendo este sistema de equações, tem-se:

$$X_P = X_{PT} - \sqrt{X_{ST}\, X_{PT} - X_{PS}^{\Delta}\, X_{ST}}$$

$$X_s = X_{ST} - X_{PT} + X_P$$

$$X_T = X_{PT} - X_P$$

Então as novas reatâncias de curto-circuito de sequência zero são:

$$X_{PS} = X_P + X_S$$

$$X_{PT} = X_P + X_T$$

$$X_{ST} = X_S + X_T$$

Nesta correção foram desprezadas as resistências. No caso de levá-las em conta, o sistema de equações acima fica não linear, empregando-se para a resolução do mesmo métodos numéricos.

## 2.7 - Segundo Modelo de Transformador Trifasico

Este modelo terá além das características do modelo do ítem 2.6 a influência das correntes magnetizantes nas partes lineares das características enlaces de fluxo x intensidade de corrente.

## 2.7.1 - TRANSFORMADOR TRIFÁSICO DE DOIS ENROLAMENTOS

### 2.7.1-1 - MODELO [R]-[L]

Este modelo como foi descrito no ítem 2.6.1-1 já levou em consideração a corrente magnetizante, característica exigida para a obtenção do mesmo.

### 2.7.1-2 - MODELO $[R]-[L]^{-1}$

No desenvolvimento feito para um transformador monofásico de N enrolamentos, a inclusão do ramo magnetizante foi feita em princípio num enrolamento qualquer. Esta inclusão do ponto de vista matricial implicou na adição de uma admitância magnetizante escalar ao elemento da diagonal representativo desse enrolamento na matriz $[\dot{Y}^*]$.

A extensão para o caso trifásico é feita adicionando-se ao invés de uma admitância magnetizante escalar uma submatriz de dimensões 3x3 de admitâncias à submatriz 3x3 da diagonal representativa desse enrolamento na matriz $[\dot{Y}^*]$ mostrada na equação (77).

OBTENÇÃO DA MATRIZ $[L]^{-1}$

Para o transformador trifásico tem-se dois ensaios a vazio: de sequência positiva e de sequência zero.

Utilizando a equação (58.b) com os dados obtidos dos ensaios a vazio resultam os valores de sequência positiva e sequência zero para a reatância magnetizante:

$$\frac{1}{X_{m1}} = \frac{I_{exc1}}{I_N} \quad [pu]$$

$$\frac{1}{X_{mo}} = \frac{I_{exc0}}{I_N} \quad [pu]$$

Os valores dos elementos da matriz de admitâncias magnetizantes próprios e mútuos obtém-se das equações:

$$\dot{Y}_{mag\ s} = \frac{1}{3}(\dot{Y}_{mag0} + 2\,\dot{Y}_{mag1}) \tag{78}$$

$$\dot{Y}_{mag\ m} = \frac{1}{3}(\dot{Y}_{mag0} - \dot{Y}_{mag1}) \tag{79}$$

onde:

$$\dot{Y}_{mag0} = -j\,\frac{1}{X_{mo}}$$

$$\dot{Y}_{mag1} = -j\,\frac{1}{X_{m1}}$$

então a matriz de admitâncias magnetizantes fica:

$$[\dot{Y}_{mag}] = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{mag\ s} & \dot{Y}_{mag\ m} & \dot{Y}_{mag\ m} \\ \dot{Y}_{mag\ m} & \dot{Y}_{mag\ s} & \dot{Y}_{mag\ m} \\ \dot{Y}_{mag\ m} & \dot{Y}_{mag\ m} & \dot{Y}_{mag\ s} \end{bmatrix}$$

Supondo que o enrolamento secundário esteja mais próximo do núcleo a equação (77) com os ramos magnetizantes fica:

$$\left[\dot{Y}^{*}_{modificada}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \left[\dot{Y}^{red}_{pp}\right] & -\left[\dot{Y}^{red}_{pp}\right] \\ \hline -\left[\dot{Y}^{red}_{pp}\right] & \left[\dot{Y}_{mag}\right] + \left[\dot{Y}^{red}_{pp}\right] \end{array}\right]$$

Finalmente:

$$[L]^{-1} = j\omega\,[\dot{Y}^{*}_{modificada}]$$

OBSERVAÇÕES:

a) Ressalte-se que a nova matriz $[L]^{-1}$ não é singular, porém muito mal condicionada, porque os elementos da matriz $[Y_{mag}]$ tem valores muito pequenos.

b) Invertendo-se a matriz $[L]^{-1}$ pode-se obter um modelo [R]-[L] alternativo.

c) Por considerações físicas o melhor modelo é aquele que incorpora os ramos magnetizantes nos terminais das bobinas do enrolamento mais próximo do núcleo.

d) A extensão descrita para a obtenção do primeiro modelo na forma [R]-[L] no ítem 2.6.1-1 e do segundo modelo na forma $[R]-[L]^{-1}$ no ítem 2.7.1-2 exige trabalhar com os valores do ensaio a vazio de sequência zero.

Se o transformador tiver um ou mais de um enrolamento ligados em triângulo, o ensaio a vazio de sequência zero transforma-se num ensaio de curto-circuito entre o enrolamento excitado e o enrolamento em triângulo no caso em que o mesmo não seja aberto durante o ensaio.

Pode-se ter três situações diferentes:

1) Se o fabricante fornece os dados do ensaio a vazio de sequência zero com os enrolamentos em triângulo abertos, então utilizam- se as equações (78) e (79).

2) Se o fabricante fornece os dados do ensaio a vazio de sequência zero com os enrolamentos em triângulo fechados, para a obtenção dos modelos o melhor é utilizar valores típicos para a corrente de excitação. No caso de fazer estudos de transitórios com os enrolamentos deltas abertos, os modelos continuam sendo adequados.

3) Estando na situação 2) e não dispondo de valores típicos, qualquer valor razoável pode ser utilizado para a corrente de excitação de sequência zero, desde que o enrolamento ligado em triângulo forneça um caminho de curto-circuito de baixa impedância para as correntes de sequência zero. No caso de se fazer estudos de transitórios com os enrolamentos deltas abertos os modelos ficam inadequados.

e) Para os transformadores trifásicos de cinco pernas e para os de três pernas "shell type" a corrente de excitação linear é pequena tanto a de sequência positiva e zero. Para os transformadores trifásicos de três pernas (a fluxos nulos) a corrente de excitação de sequência zero é maior que a corrente de excitação de sequência positiva.

Para a obtenção do "segundo modelo" de um transformador trifásico de N enrolamentos, será feita uma extensão conceitualmente igual àquela feita para o caso de 2 enrolamentos.

## 2.8 - Terceiro Modelo de Transformador Trifásico

Este modelo terá além das características do segundo modelo a inclusão das perdas no núcleo.

Todas as considerações feitas no ítem 2.3 ao respeito do tipo de perdas e origem das mesmas continuam sendo válidas.

### 2.8.1 - Modelagem das perdas

A modelagem será a mesma para os modelos [R]-[L] e $[R]-[L]^{-1}$ obtidos no ítem anterior.

No desenvolvimento para transformadores monofásicos de 2 e N enrolamentos a inclusão das perdas foi modelada pela incorporação de uma resistência constante nos terminais do enrolamento mais próximo do núcleo. A extensão para o caso trifásico é feita incorporando-se ao invés de uma resistência escalar constante uma submatriz de dimensões 3x3 de resistências constantes nos terminais das bobinas do enrolamento mais próximo do núcleo.

OBTENÇÃO DA MATRIZ $[R_m]$

Para o transformador trifásico tem-se dois ensaios a vazio: de sequência positiva e de sequência zero. Utilizando a equação (57) com os dados obtidos dos ensaios a vazio resultam os valores de sequência positiva e sequência zero para a condutância de perdas:

$$G_{m1} = \frac{P_{Fe1}}{S_b} \quad [pu]$$

$$G_{m0} = \frac{P_{Fe0}}{S_b} \quad [pu]$$

onde:

$P_{Fe1}$ e $P_{Fe0}$ são as potências ativas a vazio de sequência positiva e zero, respectivamente.

Os valores dos elementos da matriz de resistências $[R_m]$ próprios e mútuos obtem-se das equações:

$$R_s^m = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{G_{m0}} + \frac{2}{G_{m1}}\right) \quad [pu]$$

$$R_m^m = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{G_{m0}} - \frac{1}{G_{m1}}\right) \quad [pu]$$

então a matriz de resistências fica:

$$[R_m] = \begin{bmatrix} R_s^m & R_m^m & R_m^m \\ R_m^m & R_s^m & R_m^m \\ R_m^m & R_m^m & R_s^m \end{bmatrix} \quad [pu]$$

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

OBSERVAÇÕES

a) O modelo obtido para as perdas totais no núcleo não modificam a matriz [R] dos modelos [R]-[L] e $[R]-[L]^{-1}$

b) A modelagem das perdas é feita acrescentando-se três ramos extras de resistências acopladas.
c) No transformador de três pernas (com fluxos nulos) as perdas no ensaio a vazio de sequência zero são maiores que as obtidas no ensaio a vazio de sequência positiva, pois os fluxos nas pernas são iguais devendo retornar pelo ar e pelo tanque com perdas adicionais por correntes de Foucault no tanque.

## 2.9 - Quarto Modelo de Transformador Trifásico

Neste modelo será incluido o efeito da saturação do núcleo do transformador. Se for necessária a inclusão das perdas do núcleo, as mesmas serão modeladas como foi feito no ítem 2.8.

A modelagem que será feita a seguir é para um transformador trifásico com núcleo de três pernas (com fluxos nulos).

### 2.9.1 - Modelo $[R]-[L]^{-1}$

A modelagem será feita considerando-se:
a) região não-saturada
b) região saturada.

a) Nesta região os acoplamentos entre todas as bobinas dos enrolamentos são muito fortes pois as relutâncias dos circuitos magnéticos são muito baixas.
Nesta região, a modelagem será feita como descrito no ítem 2.7.

b) Nesta região, os acoplamentos entre todas as bobinas dos enrolamentos são muito débeis, pois as relutâncias dos circuitos magnéticos são muito altas, a permeabilidade magnética do núcleo é próxima à unidade.
Devido a isto, a idéia para simular a saturação é modelar cada perna em separado, ou seja, os modelos ficam desacoplados.

Como a parte linear já foi incorporada ao modelo, a parte não-linear será representada por 3 (três) indutâncias não-lineares modificadas, desacopladas. Cada uma das indutâncias não-lineares terá uma característica $\lambda = f(i)$ como a seguir:

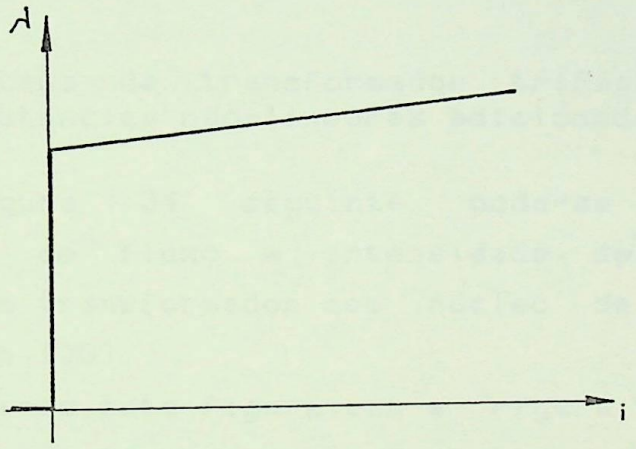



FIGURA 32: Característica $\lambda$ x i para as indutâncias não-lineares.

da qual foi subtraída a parte linear. Esta característica é obtida excitando uma bobina de uma perna. O melhor seria excitar a bobina da perna do meio, e a medição ser feita na bobina da perna mais próxima do núcleo para ter as menores fugas possíveis.

As três indutâncias não-lineares serão incorporadas nos terminais do enrolamento mais próximo do núcleo.

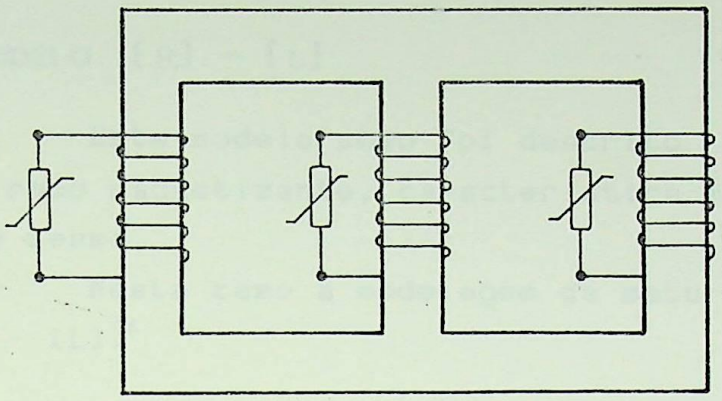


FIGURA 33: Esquema de transformador trifásico com as indutâncias não-lineares adicionadas.

Na figura 34 seguinte pode-se observar a característica enlace de fluxo x intensidade de corrente de sequência zero para um transformador com núcleo de três pernas extraída da referência [20].

Comparando esta figura com a figura 9, conclui-se que a mesma não é tão não-linear como a outra, atingindo-se a saturação para valores de corrente muito maiores do que os obtidos para a sequência positiva. Por esta razão não se considera a sequência zero na modelagem da saturação.

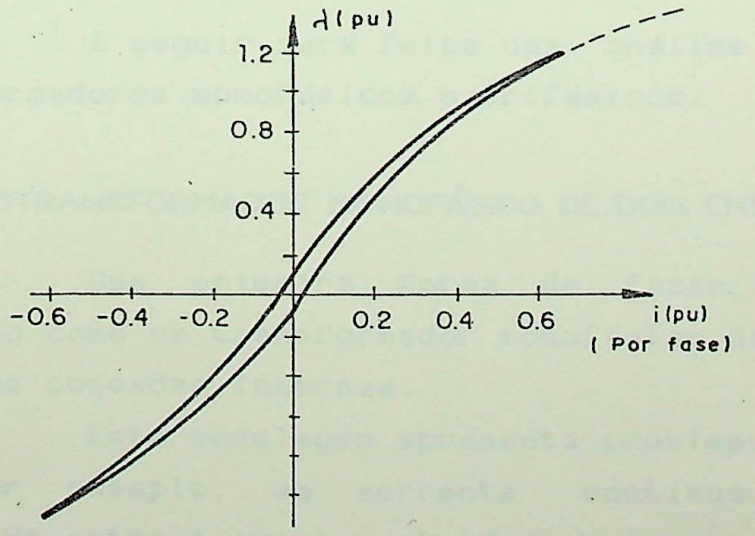



FIGURA 34: Característica λ x i de sequência zero para núcleo de três pernas.

### 2.9.2 - MODELO [R] - [L]

Este modelo como foi descrito no ítem 2-6 tem incluido o ramo magnetizante, característica indispensável para a obtenção do mesmo.

Neste caso a modelagem da saturação é feita como no modelo $[R] - [L]^{-1}$.

OBSERVAÇÕES:

a) O desenvolvimento matemático necessário para a modelagem das indutâncias não lineares, poderá ser feito por algum dos métodos indicados no item 2.4.1.

b) No caso do transformador de cinco pernas, uma possível modelagem da saturação é feita com 3 (três) indutâncias não-lineares da mesma forma que para um transformador de três pernas. Atualmente a empresa Ontario Hydro está desenvolvendo um modelo que levaria em conta a saturação nas pernas que não tem enrolamentos.

## 2.10 - MODELAGEM DE AUTOTRANSFORMADORES

A seguir será feita uma análise da modelagem de autotransformadores monofásicos e trifásicos.

### 2.10.1 - AUTOTRANSFORMADOR MONOFÁSICO DE DOIS ENROLAMENTOS

Uma primeira forma de fazer a modelagem é considerá-lo como um transformador monofásico de dois enrolamentos ignorando as conexões internas.

Esta modelagem apresenta problemas em frequências baixas. Por exemplo, em corrente contínua a relação de transformação entre o enrolamento de baixa e o enrolamento de alta é zero, porém no autotransformador a relação vale $R_c/R_s + R_c$.

Onde:

$R_c$ - resistência do enrolamento comum

$R_s$ - resistência do enrolamento série

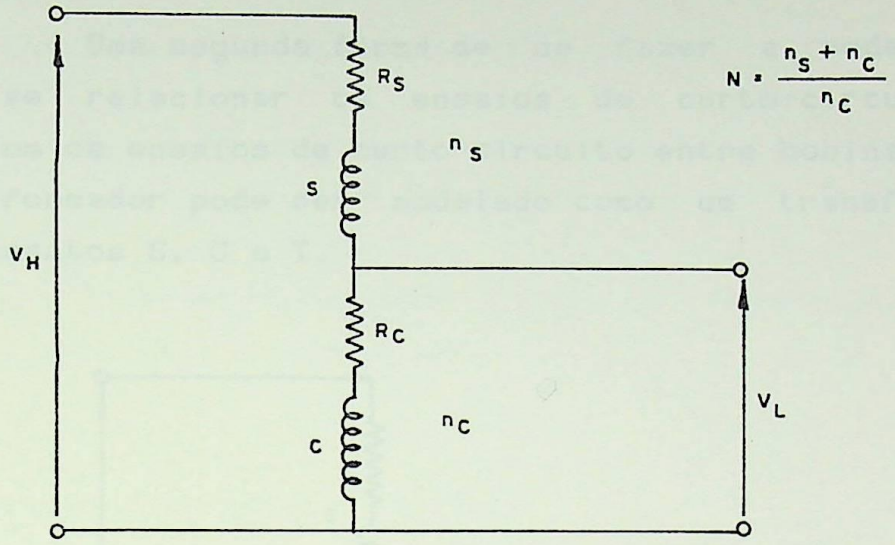



FIGURA 35:Esquema do autotransformador de 2 bobinados.

Uma segunda forma de se fazer a modelagem é relacionar os ensaios de curto-circuito entre terminais com os ensaios de curto-circuito entre enrolamentos, então o auto transformador pode ser modelado como um transformador de dois enrolamentos S e C.

A equação que relaciona o ensaio de curto-circuito entre terminais e o ensaio de curto-circuito entre os enrolamentos é conforme [16] dada por:

$$\dot{Z}_{CS}\ pu = \dot{Z}_{HL}\ pu \left(\frac{N}{N-1}\right)$$

Tendo o valor de $\dot{Z}_{CS}$ e os dados do ensaio a vazio pode-se agora utilizar os modelos [R] - [L] ou [R] - $[L]^{-1}$ desenvolvidos para transformador monofásico de dois enrolamentos.

## 2.10.2 - AUTOTRANSFORMADOR MONOFÁSICO DE TRÊS ENROLAMENTOS

Uma primeira forma de se fazer a modelagem é considerá-lo como um transformador monofásico de três enrolamentos ignorando as conexões internas. A restrição apresentada por este modelo para dois enrolamentos continua sendo válida.

Uma segunda forma de se fazer a modelagem é a seguinte: se relacionar os ensaios de curto-circuito entre terminais com os ensaios de curto-circuito entre bobinados, então o autotransformador pode ser modelado como um transformador de três enrolamentos S, C e T.

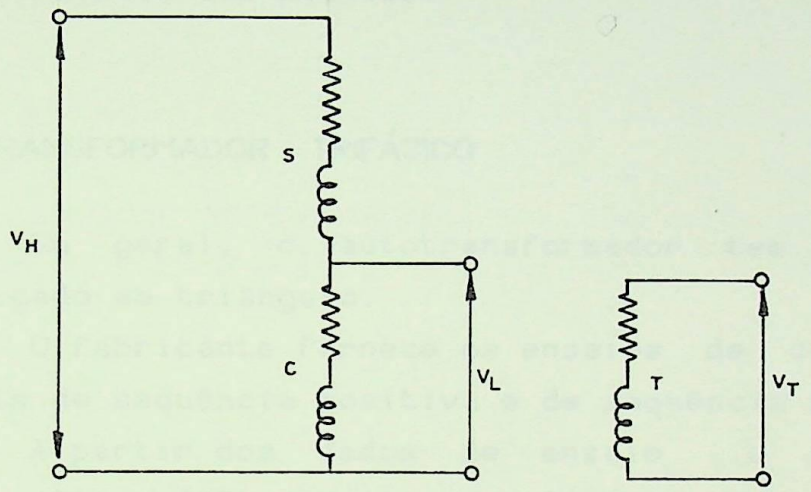



FIGURA 36: Esquema de autotransformador de três bobinados.

As equações que relacionam os ensaios de curto-circuito entre terminais e os ensaios de curto-circuito entre enrolamentos são conforme [16] dadas por:

$$\dot{Z}_{SC}\ pu = \dot{Z}_{HL}\ pu \left(\frac{N}{N-1}\right) \tag{80}$$

$$\dot{Z}_{CT}\ pu = \frac{N-1}{N}\ \dot{Z}_{LT}\ pu \tag{81}$$

$$\dot{Z}_{ST}\ pu = N^2 \dot{Z}_{HT}\ pu + \frac{1}{N-1}\ \dot{Z}_{LH}\ pu - \frac{1}{N}\ \dot{Z}_{LT}\ pu \tag{82}$$

Tendo os valores de $\dot{Z}_{CS}$, $\dot{Z}_{CT}$ e $\dot{Z}_{ST}$ e os dados do ensaio a vazio pode-se agora utilizar os modelos [R] - [L] ou $[R] - [L]^{-1}$ desenvolvidos para transformador monofásico de N enrolamentos, fazendo N = 3.

### 2.10.3 - Modelagem para bancos de autotransformadores

A modelagem das unidades monofásicas de um banco poderá ser feita utilizando os modelos desenvolvidos nos ítens 2.10.1 e 2.10.2.

Pode-se representar o tipo de conexão fazendo-se o mesmo com os terminais dos modelos.

### 2.10.4 - Autotransformador trifásico

Em geral, o autotransformador tem um terceiro enrolamento ligado em triângulo.

O fabricante fornece os ensaios de curto-circuito entre terminais de sequência positiva e de sequência zero.

A partir dos dados de ensaio e aplicando as equações (80), (81) e (82) para a sequências positiva e zero, obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{Z}_{SC1} & e & \dot{Z}_{SC0} \\ \dot{Z}_{CT1} & e & \dot{Z}_{CT0} \\ \dot{Z}_{ST1} & e & \dot{Z}_{ST0} \end{cases}$$

Tendo os valores acima referidos, assim como os dados dos ensaios a vazio de sequência zero e sequência positiva, pode-se agora utilizar os modelos [R] - [L] ou [R] - $[L]^{-1}$ desenvolvidos para transformador trifásico de três enrolamentos.

## 2.11 - Implementação Computacional dos Modelos do Tranformador no UBC - EFEI

Até aqui foram desenvolvidos diferentes modelos matemáticos de transformador. Neste ítem se analisará sua

incorporação ao programa UBC-EFEI assim como se estudarão outros aspectos complementares.

## 2.11.1 - Introdução

As técnicas de modelagem digital utilizadas no UBC-EFEI para os componentes de um sistema elétrico de potência o transformam em uma rede de condutâncias com fontes de corrente (independentes e da história passada) e fontes de tensão para cada instante de tempo t. A esta rede pode-se então aplicar a Análise Nodal para calcular as tensões nodais dos barramentos no instante t. A equação matricial da análise nodal para um instante t é:

$$\left[\begin{array}{c|c} [G_{AA}] & [G_{AB}] \\ \hline [G_{AB}] & [G_{BB}] \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} [v_A(t)] \\ \hline [v_B(t)] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} [i_A(t)] \\ \hline [i_B(t)] \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} [I_A(t-\Delta t)] \\ \hline [I_B(t-\Delta t)] \end{array}\right]$$

onde:

$[G_N]$ - matriz de condutância nodal do sistema

$[G_{AA}]$ - matriz de condutâncias nodais para barramentos de tensão desconhecida

$[G_{AB}]$ - matriz de condutância nodal entre os barramentos de tensão conhecida e desconhecida.

$[v_A(t)]$ - vetor de tensões nodais dos barramentos de tensão desconhecidas.

$[v_B(t)]$ - vetor de tensões nodais dos barramentos de tensão conhecida (fontes de tensão).

$[i_A(t)]$ - vetor de fontes de corrente independentes injetadas nos barramentos de tensão desconhecida

$[I_A(t-\Delta t)]$ - vetor de fonte de corrente da história passada injetadas nos barramentos de tensão desconhecida

$\Delta t$ - passo de integração

Reescrevendo a equação anterior em forma particionada:

$$\left[G_{AA}\right]\left[v_A(t)\right] + \left[G_{AB}\right]\left[v_B(t)\right] = \left[i_A(t)\right] + \left[I_A(t-\Delta t)\right] \qquad (83)$$

A seguir será obtida a matriz de condutâncias de ramo para os modelos do transformador, transformando-a em uma matriz de contutâncias nodais. Logo se fará uma análise da incorporação desta última matriz nas matrizes $[\ G_{AA}]$ e $[\ G_{AB}]$ do sistema.

## 2.11.2 - MATRIZ DE CONDUTANCIAS DE RAMOS

A equação diferencial matricial que exprime as relações entre as tensões de ramos e as correntes de ramos num transformador é:

$$\left[v_r(t)\right] = \left[\ L\ \right] \frac{d\left[i_r(t)\right]}{dt} + \left[\ R\ \right]\left[i_r(t)\right] \qquad (84)$$

onde:

$\left[v_r(t)\right]$ - vetor que contém as tensões de ramos dos enrolamentos

$\left[i_r(t)\right]$ - vetor que contém as correntes de ramos dos enrolamentos

$\left[\ L\ \right]$ - matriz de indutâncias de ramos

$\left[\ R\ \right]$ - matriz de resistências dos enrolamentos

Estas matrizes $[\ R\ ]$, $[\ L\ ]$ e $[\ L\ ]^{-1}$ são obtidas nos modelos já desenvolvidos nos ítens anteriores.

Reescrevendo a equação (84):

$$\frac{d\left[i_r(t)\right]}{dt} = \left[\ L\ \right]^{-1}\left[\ v_r(t)\right] - \left[\ L\ \right]^{-1}\left[\ R\ \right]\left[\ i_r(t)\right] \qquad (85)$$

Aplicando nela o método de resolução numérica de equações diferenciais denominado método trapezoidal, tem-se:

$$\left[i_r(t)\right] - \left[i_r(t-\Delta t)\right] = \left[\,L\,\right]^{-1}\left(\left[v_r(t)\right] + \left[v_r(t-\Delta t)\right]\right) \cdot \frac{\Delta t}{2} -$$

$$- \left[\,L\,\right]^{-1}\left[\,R\,\right]\left(\left[i_r(t)\right] + \left[i_r(t-\Delta t)\right]\right) \cdot \frac{\Delta t}{2} \qquad ===>$$

$$\left\{\left[\,U\,\right] + \frac{\Delta t}{2}\left[\,L\,\right]^{-1}\left[\,R\,\right]\right\}\left[i_r(t)\right] =$$

$$= \left\{\frac{\Delta t}{2}\left[\,L\,\right]^{-1}\right\}\left[v_r(t)\right] + \left[I^*\left(t-\Delta t\right)\right] \qquad (86)$$

com

$$\left[I^*(t-\Delta t)\right] = \left[i_r(t-\Delta t)\right] + \frac{\Delta t}{2}\left[\,L\,\right]^{-1}\left[v_r(t-\Delta t)\right] -$$

$$- \frac{\Delta t}{2}\left[\,L\,\right]^{-1}\left[\,R\,\right]\left[i_r(t-\Delta t)\right] \qquad ===>$$

$$\left[I^*(t-\Delta t)\right] = \left[\left[\,U\,\right] - \frac{\Delta t}{2}\left[\,L\,\right]^{-1}\left[\,R\,\right]\right]\left[i_r(t-\Delta t)\right] +$$

$$+ \frac{\Delta t}{2}\left[\,L\,\right]^{-1}\left[v_r(t-\Delta t)\right]$$

Reescrevendo a equação (86):

$$\left[i_r(t)\right] = \left[\,G_r\,\right]\left[v_r(t)\right] + \left[I\,(t-\Delta t)\right] \qquad (87)$$

Onde:

$$\left[ G_r \right] = \left[ \left[ U \right] + \frac{\Delta t}{2} \left[ L \right]^{-1} \left[ R \right] \right]^{-1} \cdot \frac{\Delta t}{2} \left[ L \right]^{-1} \qquad (88)$$

(matriz de condutância de ramo)

$$\left[ I(t-\Delta t) \right] = \left[ \left[ U \right] + \frac{\Delta t}{2} \left[ L \right]^{-1} \left[ R \right] \right]^{-1} \cdot \left[ I^{*}(t-\Delta t) \right] \qquad (89)$$

$[ U ]$ - matriz indentidade

A equação (85) é a equação implentada no UBC-EFEI, trabalhando-se com a mesma na forma (87).

## 2.11.3 - MATRIZ DE CONDUTÂNCIAS NODAIS

A seguir serão descritos dois procedimentos para a obtenção da matriz de condutâncias nodais a partir da matriz $[G_r]$.

### 2.11.3-1 - PRIMEIRO PROCEDIMENTO :

As relações entre os valores de ramo e nodal são dados pelas seguintes equações :

$$\left[ i_{nodal}\ (t) \right] = \left[ C \right] \left[ i_r\ (t) \right] \qquad (90)$$

$$\left[ v_r\ (t) \right] = \left[ C \right]^t \left[ v_{nodal}\ (t) \right] \qquad (91)$$

onde:

$[ C ]$ - matriz de conexão nó-ramo

$[ C ]^t$ - matriz de conexão ramo-nó

Multiplicando a equação (87) pela matriz [ C ] como fator à esquerda resulta:

$$\left[ C \right] \left[ i_r \ (t) \right] = \left[ C \right] \left[ G_r \right] \left[ v_r (t) \right] + \left[ C \right] \left[ I(t-\Delta t) \right]$$

Substituindo nesta última equação as equações (90) e (91):

$$\left[ i_{nodal} \ (t) \right] = \left[ C \right] \left[ G_r \right] \left[ C \right]^t \left[ v_{nodal} \ (t) \right] + \left[ C \right] \left[ I(t - \Delta t) \right]$$

A matriz $[C].[G_r].[C]^t$ é então a matriz de condutâncias nodais procurada. A mesma é incorporada à matriz $[ G_N ]$ nodal do sistema.

## 2.11.3-2 - SEGUNDO PROCEDIMENTO

Este é o procedimento utizado no UBC-EFEI devido ao fato de que o primeiro procedimento exige que as barras conectadas aos enrolamentos do transformador sejam colocadas todas juntas e em forma sequencial na matriz de condutâncias nodais do sistema.

A incorporação das condutâncias próprias e mútuas da matriz $[G_r]$ da equação (88) na matriz de condutâncias nodais do sistema é feita de acordo com as regras desenvolvidas a seguir.

Seja o seguinte sistema elétrico de potência (SEP) em regime permanente:

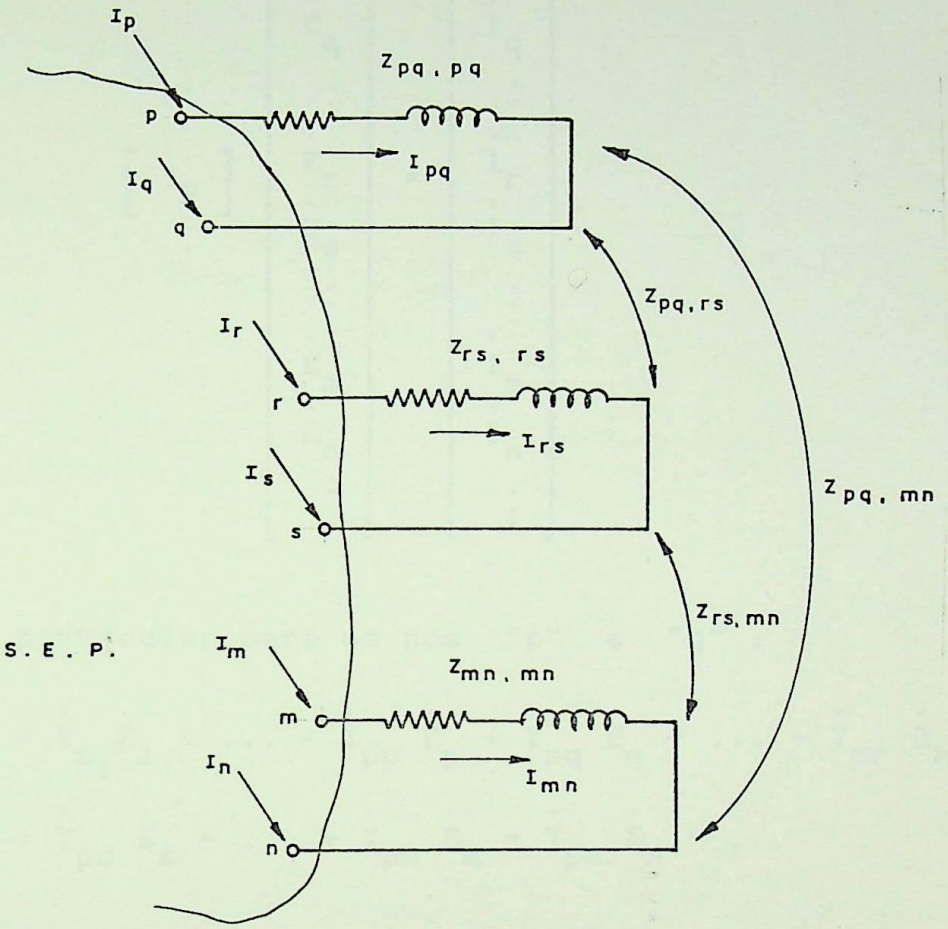



FIGURA 37: SEP com ramos mutuamente acoplados p, q, r, s, m, e n são barramentos ou nodos do SEP.

$I_p$, $I_q$, $I_r$, $I_s$, $I_m$ e $I_n$ - são correntes externas injetadas nos barramentos.

a) Tiram-se os ramos mutuamente acoplados e contrói-se para o resto do sistema a matriz $[Y_N]$ de admitâncias nodais da maneira usual. Pela análise nodal tem-se:

$$\left[\dot{Y}_N\right]\begin{bmatrix}\vdots\\ \dot{E}_p\\ \dot{E}_q\\ \vdots\\ \dot{E}_r\\ \dot{E}_s\\ \vdots\\ \dot{E}_m\\ \dot{E}_n\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vdots\\ \dot{I}_p\\ \dot{I}_q\\ \vdots\\ \dot{I}_r\\ \dot{I}_s\\ \vdots\\ \dot{I}_m\\ \dot{I}_n\\ \vdots\end{bmatrix}$$

Em particular para os nós "p" e "q" :

$$\dot{I}_p = \dot{Y}_{p_1}\dot{E}_1 + \ldots + \dot{Y}_{pp}\dot{E}_p + \dot{Y}_{pq}\dot{E}_q + \ldots + \dot{Y}_{pr}\dot{E}_r + \\ + \dot{Y}_{ps}\dot{E}_s + \ldots + \dot{Y}_{pm}\dot{E}_m + \dot{Y}_{pn}\dot{E}_n + \ldots$$

$$\dot{I}_q = \dot{Y}_{q_1}\dot{E}_1 + \ldots + \dot{Y}_{qp}\dot{E}_p + \dot{Y}_{qq}\dot{E}_q + \ldots + \dot{Y}_{qr}\dot{E}_r + \\ + \dot{Y}_{qs}\dot{E}_s + \ldots + \dot{Y}_{qm}\dot{E}_m + \dot{Y}_{qn}\dot{E}_n + \ldots$$

b) Constrói-se a matriz de impedâncias próprias e mútuas dos ramos mutuamente acoplados:

$$\left[\dot{Z}_r\right] = \begin{array}{c|ccc} & pq & rs & mn \\ \hline pq & \dot{Z}_{pq,pq} & \dot{Z}_{pq,rs} & \dot{Z}_{pq,mn} \\ rs & \dot{Z}_{rs,pq} & \dot{Z}_{rs,rs} & \dot{Z}_{rs,mn} \\ mn & \dot{Z}_{mn,pq} & \dot{Z}_{mn,rs} & \dot{Z}_{mn,mn} \end{array}$$

Fazendo a inversão da matriz $[\dot{Z}_r]$, obtém-se:

$$[\dot{Y}_r] = \begin{array}{c|ccc} & pq & rs & mn \\ \hline pq & \dot{Y}_{pq,pq} & \dot{Y}_{pq,rs} & \dot{Y}_{pq,mn} \\ rs & \dot{Y}_{rs,pq} & \dot{Y}_{rs,rs} & \dot{Y}_{rs,mn} \\ mn & \dot{Y}_{mn,pq} & \dot{Y}_{mn,rs} & \dot{Y}_{mn,mn} \end{array}$$

Para as correntes nos ramos acoplados tem-se as seguintes expressões:

$$\dot{I}_{pq} = \dot{Y}_{pq,pq}\,(\dot{E}_p - \dot{E}_q) + \dot{Y}_{pq,rs}\,(\dot{E}_r - \dot{E}_s) + \dot{Y}_{pq,mn}\,(\dot{E}_m - \dot{E}_n) \qquad (92.a)$$

$$\dot{I}_{rs} = \dot{Y}_{rs,pq}\,(\dot{E}_p - \dot{E}_q) + \dot{Y}_{rs,rs}\,(\dot{E}_r - \dot{E}_s) + \dot{Y}_{rs,mn}\,(\dot{E}_m - \dot{E}_n) \qquad (92.b)$$

$$\dot{I}_{mn} = \dot{Y}_{mn,pq}(\dot{E}_p - \dot{E}_q) + \dot{Y}_{mn,rs}(\dot{E}_r - \dot{E}_s) + \dot{Y}_{mn,mn}(\dot{E}_m - \dot{E}_n) \qquad (92.c)$$

c) Incorporação dos ramos acoplados ao SEP:

$$\dot{I}_p = \dot{Y}_{p1}\dot{E}_1 + \ldots + \dot{Y}_{pp}\dot{E}_p + \dot{Y}_{pq}\dot{E}_q + \ldots + \dot{I}_{pq} \qquad (93)$$

$$\dot{I}_q = \dot{Y}_{q1}\dot{E}_1 + \ldots + \dot{Y}_{qp}\dot{E}_p + \dot{Y}_{qq}\dot{E}_q + \ldots + \dot{I}_{qp} \qquad (94)$$

$$\dot{I}_r = \dot{Y}_{r1}\dot{E}_1 + \ldots + \dot{Y}_{rr}\dot{E}_r + \ldots + \dot{I}_{rs}$$

$$\dot{I}_s = \dot{Y}_{s1}\dot{E}_1 + \ldots + \dot{Y}_{sr}\dot{E}_r + \dot{Y}_{ss}\dot{E}_s + \ldots + \dot{I}_{sr}$$

$$\dot{I}_m = \dot{Y}_{m1}\dot{E}_1 + \ldots + \dot{Y}_{mm}\dot{E}_m + \ldots + \dot{I}_{mn}$$

$$\dot{I}_n = \dot{Y}_{n1}\dot{E}_1 + \ldots + \dot{Y}_{nm}\dot{E}_m + \dot{Y}_{nn}\dot{E}_n + \dot{I}_{nm}$$

Cumprem-se as seguintes relações:

$$\dot{I}_{pq} = -\dot{I}_{qp}$$

$$\dot{I}_{rs} = -\dot{I}_{sr}$$

$$\dot{I}_{mn} = -\dot{I}_{nm}$$

Considerando-se as equações (93) e (94), e substituindo nelas a equação (92.a), reordenando os termos, tem-se:

$$\dot{I}_p = \dot{Y}_{p1}\dot{E}_1 + \ldots + (\dot{Y}_{pp} + \dot{Y}_{pq,pq})\dot{E}_p +$$

$$+ (\dot{Y}_{pq} - \dot{Y}_{pq,pq})\dot{E}_q + \ldots + (\dot{Y}_{pr} + \dot{Y}_{pq,rs})\dot{E}_r +$$

$$+ (\dot{Y}_{ps} - \dot{Y}_{pq,rs})\dot{E}_s + \ldots + (\dot{Y}_{pm} + \dot{Y}_{pq,mn})\dot{E}_m +$$

$$+ (\dot{Y}_{pn} - \dot{Y}_{pq,mn})\dot{E}_n + \ldots$$

$$\dot{I}_q = \dot{Y}_{q1}\dot{E}_1 + \ldots + (\dot{Y}_{qp} - \dot{Y}_{pq,pq})\dot{E}_p +$$

$$+ (\dot{Y}_{qq} + \dot{Y}_{pq,pq})\dot{E}_q + \ldots + (\dot{Y}_{qr} - \dot{Y}_{pq,rs})\dot{E}_r +$$

$$+ (\dot{Y}_{qs} + \dot{Y}_{pq,rs})\dot{E}_s + \ldots + (\dot{Y}_{qm} - \dot{Y}_{pq,mn})\dot{E}_m +$$

$$+ (\dot{Y}_{qn} + \dot{Y}_{pq,mn})\dot{E}_n + \ldots$$

Daqui, tiram-se as seguintes regras para fazer a incorporação:

1) Uma admitância própria do tipo $\dot{Y}_{pq,pq}$
   i) é adicionada nas posições pp e qq na matriz $[\dot{Y}_N]$
   ii) é subtraida nas posições pq e qp na matriz $[\dot{Y}_N]$

2) Uma admitância mútua do tipo $\dot{Y}_{pq,rs}$:
   i) é adicionada nas posições pr e qs na matriz $[\dot{Y}_N]$
   ii) é subtraida nas posições ps e qr na matriz $[\dot{Y}_N]$

Em regime transitório estas regras aqui obtidas aplicam-se às condutâncias próprias e mútuas da matriz $[G_r]$.

### 2.11.4 - Obtenção das tensões e correntes de ramo num transformador para cada instante de tempo

A partir da equação (83) calculam-se as tensões nodais do sistema das barras de tensões desconhecidas.

No caso de um transformador, para a obtenção das tensões de ramo, o que se faz é identificar para cada bobinado (ramo) os nós extremos e logo fazer as diferenças das tensões nodais correspondentes.

Tendo as tensões de ramo do transformador, calculam-se as correntes nos enrolamentos utilizando a equação (87).

### 2.11.5 - Perdas no núcleo

Como já foi mencionado, as perdas são modeladas em um transformador monofásico como um ramo de resistência concentrado. Para um transformador trifásico usa-se a modelagem de ramos mutuamente acoplados do UBC-EFEI, com as matrizes [L] e [C] iguais a zero.

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

## 2.11.6 - SATURACAO DO NUCLEO

Os procedimentos matemáticos foram mencionados no ítem 2.4.1. Uma análise e implementação computacional dos mesmos, será feita no Capítulo III.

## 2.11.7 - ASPECTOS COMPLEMENTARES

### 2.11.7-1 - RELACAO ENTRE A MATRIZ DE ADMITANCIAS DE RAMOS E A MATRIZ DE ADMITANCIA NODAL

A seguir será apresentado um procedimento para a obtenção da matriz de admitâncias nodais e o circuito Lattice, para um transformador monofásico de dois enrolamentos.

À matriz de admitâncias de ramo do referido transformador pode-se-lhe associar duas bobinas mutuamente acopladas como indicado na figura 38. Em regime permanente e trabalhando em por unidade (p.u), tem-se:

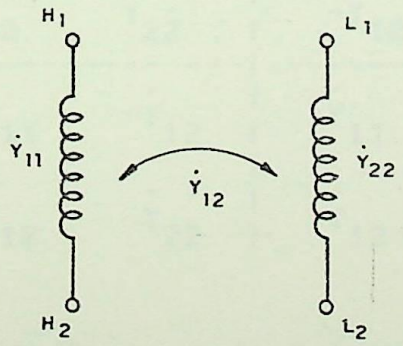



FIGURA 38: Esquema de transformador monofásico com N = 2.

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{H1-H2} \\ \dot{I}_{L1-L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} \\ \dot{Y}_{12} & \dot{Y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_{H1} - \dot{V}_{H2} \\ \dot{V}_{L1} - \dot{V}_{L2} \end{bmatrix} \qquad (95)$$

onde na equação (95) as correntes, as diferenças de tensões e admitâncias são valores de ramo.

Sejam:

$\dot{I}_{H1-H2}$ corrente injetada no nó H1

$-\dot{I}_{H1-H2}$ corrente injetada no nó H2

$\dot{I}_{L1-L2}$ corrente injetada no nó L1

$-\dot{I}_{L1-L2}$ corrente injetada no nó L2

A equação (95) pode ainda ser escrita:

$$\dot{I}_{H1-H2} = \dot{Y}_{11}\,\dot{V}_{H1} + \dot{Y}_{12}\,\dot{V}_{L1} - \dot{Y}_{11}\,\dot{V}_{H2} - \dot{Y}_{12}\,\dot{V}_{L2}$$

$$\dot{I}_{L1-L2} = \dot{Y}_{12}\,\dot{V}_{H1} + \dot{Y}_{22}\,\dot{V}_{L1} - \dot{Y}_{12}\,\dot{V}_{H2} - \dot{Y}_{22}\,\dot{V}_{L2}$$

Em forma matricial e considerando as correntes injetadas resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{H1-H2} \\ \dot{I}_{L1-L2} \\ -\dot{I}_{H1-H2} \\ -\dot{I}_{L1-L2} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & -\dot{Y}_{11} & -\dot{Y}_{12} \\ \dot{Y}_{12} & \dot{Y}_{22} & -\dot{Y}_{12} & -\dot{Y}_{22} \\ \hline -\dot{Y}_{11} & -\dot{Y}_{12} & \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} \\ -\dot{Y}_{12} & -\dot{Y}_{22} & \dot{Y}_{12} & \dot{Y}_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{V}_{H1} \\ \dot{V}_{L1} \\ \dot{V}_{H2} \\ \dot{V}_{L2} \end{bmatrix} \qquad (96)$$

Conclui-se então que a matriz nodal tem a forma:

$$\left[\dot{Y}_N\right] = \left[\begin{array}{c|c} \left[\dot{Y}_r\right] & -\left[\dot{Y}_r\right] \\ \hline -\left[\dot{Y}_r\right] & \left[\dot{Y}_r\right] \end{array}\right] \qquad (97)$$

Da equação acima, pode-se tirar um circuito equivalente, como o indicado a seguir:

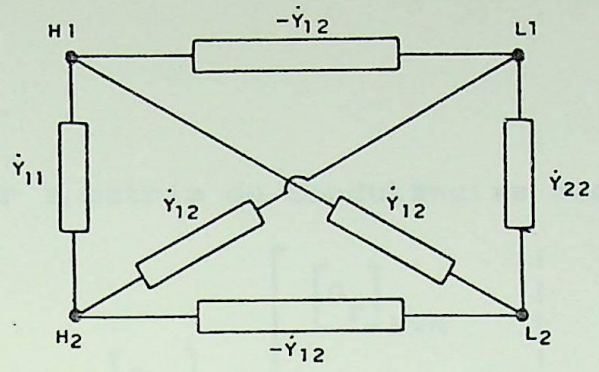



FIGURA 39: Circuito Lattice do transformador monofásico com N = 2

Escolhendo os nós H2 e L2 como uma referência comum, tem-se:

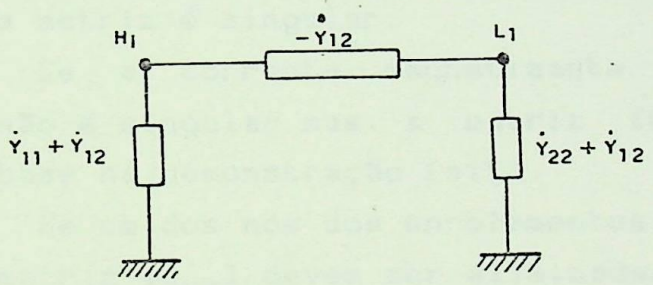



FIGURA 40: Circuito Lattice do transformador com uma referência comum.

Este é o conhecido circuito equivalente do transformador monofásico de dois enrolamentos, para estudos de load-flow, curto-circuito, etc.

## 2.11.7-2 - RELACAO ENTRE $[G_r]$ E $[G_{NT}]$

Como já foi estudado, a matriz $[L]^{-1}$ de um transformador monofásico ou trifásico sem o ramo magnetizante é singular.

Devido a este fato, a matriz $[G_r]$ da equação (88) é também singular. Vai-se provar que a matriz de condutâncias nodais do transformador sem o ramo magnetizante é também singular no caso de se ter N ramos separados (não ligados entre si).

Colocando em ordem adequada os nós dos enrolamentos

do transformador a matriz de condutâncias nodais tem a forma:

$$[G_{NT}] = \left[\begin{array}{c|c} [G_r]_{N\times N} & -[G_r]_{N\times N} \\ \hline -[G_r]_{N\times N} & [G_r]_{N\times N} \end{array}\right]_{2N\times 2N}$$

Considerando a coluna j e a j+N observa-se que as duas são proporcionais, sendo a constante de proporcionalidade igual a -1. Conclui-se que o determinante da matriz $[G_{NT}]$ é zero e, portanto, a matriz é singular.

Se a corrente magnetizante for considerada, a matriz $[G_r]$ não é singular mas a matriz $[G_{NT}]$ continua sendo singular com base na demonstração feita.

Se um dos nós dos enrolamentos do transformador for aterrado, na matriz $[G_{NT}]$ devem ser eliminadas a fila e coluna correspondentes ao nó aterrado. A nova matriz de condutâncias nodais obtida, permanece singular com base na demonstração feita.

## 2.11.7-3 - FATORAÇÃO DE $[G_N]$ COM $[G_{NT}]$ SINGULAR

Como já foi visto no ítem 2.11.7-2 a matriz de condutâncias nodais do transformador é singular.

Isto pode ou não criar problemas na fatoração da matriz de condutância nodal do sistema, dependendo da configuração da rede em estudo.

A seguir, serão expostos dois exemplos:

Exemplo 1:

A rede está constituida conforme indicado:

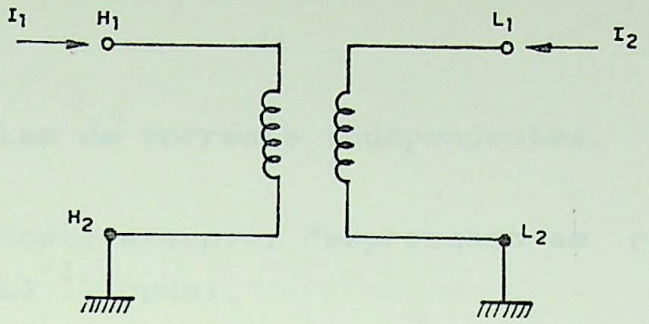



FIGURA 41: Rede exemplo constituida por um transformador monofásico com N = 2 em vazio.

$I_1$ e $I_2$ são fontes de corrente independentes.

Neste exemplo, desprezando as resistências tem-se que $[G_r] = \frac{\Delta t}{2} [L]^{-1}$, onde:

$$\left[ L \right]^{-1} = j\omega \begin{bmatrix} \dot{y} & -\dot{y}a \\ -\dot{y}a & \dot{y}a^2 \end{bmatrix}$$

a - Relação de Transformação

Devido à referência escolhida a matriz $[G_r]$ é também a matriz de condutâncias nodais da rede. Resulta para este caso que a matriz $[G_N]$ é singular e, portanto, não é possível fatorá-la.

Exemplo 2

A rede está constituida conforme indicado:

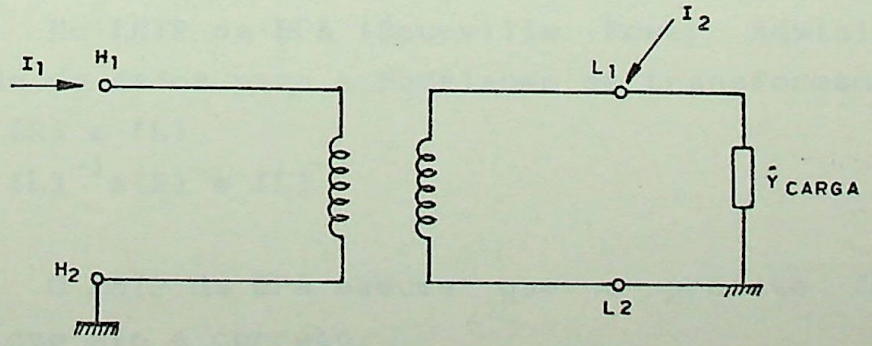



FIGURA 42: Rede exemplo constituida por um transformador monofásico com N = 2 em carga.

onde:

$I_1$ e $I_2$ são fontes de corrente independentes.

Neste exemplo, desprezando as resistências tem-se que $[G_r] = \frac{\Delta t}{2} [L]^{-1}$, onde:

$$\left[ L \right]^{-1} = j\omega \begin{bmatrix} \dot{y} & -\dot{y}a \\ -\dot{y}a & \dot{y}a^2 \end{bmatrix}$$

a - Relação de Transformação

A matriz de condutâncias nodais da rede é:

$$\left[G_N\right] = \begin{bmatrix} y & -ya \\ -ya & ya^2 + y_{carga} \end{bmatrix}$$

Resulta para este caso, que a matriz $[G_N]$ é não singular, portanto, é possível fatorá-la.

## 2.11.7-4 - ENTRADA DE DADOS

No UBC-EFEI a entrada de dados para a modelagem de transformadores é:

i) matrizes [R] e [L]

ii) matrizes [R] e $[L]^{-1}$

obtidas do programa: "Three-phase transformer program".

No EMTP da BPA (Boneville Power Administration - USA) a entrada de dados para a modelagem de transformadores é:

i) matrizes [R] e [L]

ii) matrizes $[L]^{-1}*[R]$ e $[L]^{-1}$

O EMTP da BPA assume que o produto $[L]^{-1}*[R]$ é simétrico, o que não é correto.

Para contornar o problema, pode-se assumir que o

produto $[L]^{-1}*[R]$ é zero, introduzir $[L]^{-1}$ e representar as resistências dos enrolamentos ([R]), como ramos concentrados.

## 2.12 - SATURABLE TRANSFORMER COMPONENT

O "Saturable Transformer Component" é uma opção que apresenta o EMTP (da BPA) para a modelagem de transformadores monofásicos de até só três (3) enrolamentos.

Este modelo baseia-se na representação de um transformador ideal monofásico de dois enrolamentos.

### 2.12.1 - MODELAGEM DO TRANSFORMADOR IDEAL MONOFÁSICO DE DOIS ENROLAMENTOS

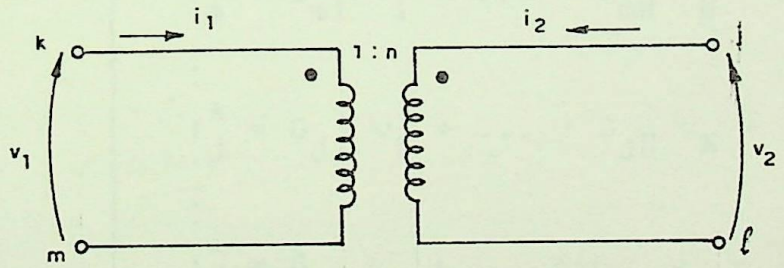



FIGURA 43: Transformador ideal monofásico com N = 2.

Para o transformador ideal são válidas as seguintes equações:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n} \qquad (98)$$

$$\frac{i_1}{i_2} = -n \qquad (99)$$

A equação (98) pode ser escrita na forma:

$$n\,v_k - n\,v_m - (v_j - v_\ell) = 0 \qquad (100)$$

Para a rede sem o transformador ideal a análise nodal fornece a equação:

$$\left[G_N\right]_{N\times N}\left[\ v\ \right]_{N\times 1} = \left[i^*\right]_{N\times 1} \qquad (101)$$

Assume-se que os nós k, m, $\ell$ e j já foram incluidos na equação (101).

As novas equações nodais com a incorporação do transformador ideal são:

$$\begin{cases} i_1^* = G_{11}\ v_1 + G_{12}\ v_2 + \ldots + G_{1N}\ v_N \\ \vdots \\ i_k^* = G_{k1}\ v_1 + \ldots + G_{kN}\ v_N + i_1 \\ \vdots \\ i_m^* = G_{m1}\ v_1 + \ldots + G_{mN}\ v_N - i_1 \\ \vdots \\ i_j^* = G_{j1}\ v_1 + \ldots + G_{jN}\ v_N + i_2 \\ \vdots \\ i_\ell^* = G_{\ell 1}\ v_1 + \ldots + G_{\ell N}\ v_N - i_2 \\ \vdots \\ 0 = -n\ v_k + n\ v_m + (v_j - v_\ell) \end{cases} \qquad (102)$$

Considerando a corrente $i_2$ como mais uma variável, a equação (99) pode ser escrita na forma:

$$i_1 = -n\ i_2 \qquad (103)$$

Substituindo a equação (103) na equação (102) e utilizando notação matricial fica:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & 0 & \\ \hline & & & & & & & & -n & k \\ \hline & & & & & & & & \vdots & \\ \hline & & & & & & & & n & m \\ \hline & & & & & & & & \vdots & \\ \hline & & & & & & & & 1 & j \\ \hline & & & & & & & & \vdots & \\ \hline & & & & & & & & -1 & \ell \\ \hline 0 \ \ldots & -n & \ldots & n & \ldots & 1 & \ldots & -1 & \ldots & 0 \\ & k & & m & & j & & \ell & & \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ \vdots \\ v_m \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_\ell \\ \vdots \\ i_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} i_1^* \\ \vdots \\ i_k^* \\ \vdots \\ i_m^* \\ \vdots \\ i_j^* \\ \vdots \\ i_\ell^* \\ \vdots \\ i_N^* \\ 0 \end{array}\right]$$

$\left[ G_N \right]_{N \times N}$

A nova matriz $[G]_{(N+1)\times(N+1)}$ não é mais uma matriz de condutâncias devido a que a fila e coluna acrescentadas são adimensionadas (ou adimensionais).

OBSERVAÇÕES:

a) Esta modelagem não pode ser utilizada para um transformador defasador ("phase shifter").

b) O processo de fatoração da matriz $[G_N]_{(N+1)\times(N+1)}$ não pode ser feito se a equação (100) tiver seus coeficientes na primeira fila desta matriz, porque o primeiro pivô seria zero.
No caso geral o zero desaparece; caso contrário o processo de fatoração seria interrompido com uma mensagem de erro.

c) Se o transformador está em vazio, $i_2 = 0$, e o processo de fatoração falha devido ao fato de que a nova matriz $[G_N]_{(N+1)(N+1)}$ tem uma coluna com todos seus elementos nulos.

d) O transformador ideal pode também ser simulado por oito ramos de resistências e um nó extra, porque acrescentam de igual modo a matriz $[G_N]_{N\times N}$.

O circuito é indicado a seguir.

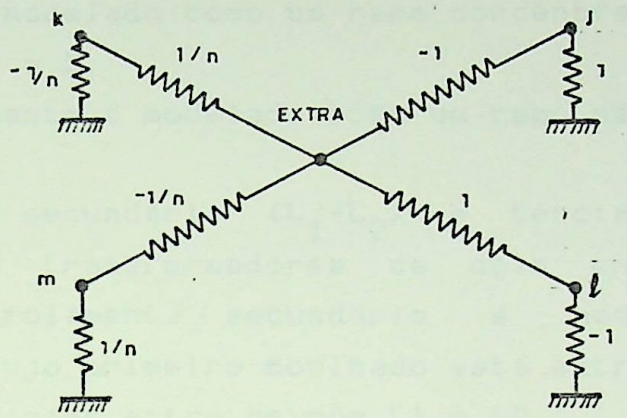



FIGURA 44: Circuito equivalente do transformador ideal da figura 43.

## 2.12.2 - MODELAGEM UTILIZANDO "SATURABLE TRANSFORMER COMPONENT"

Seja um transformador monofásico de três enrolamentos:

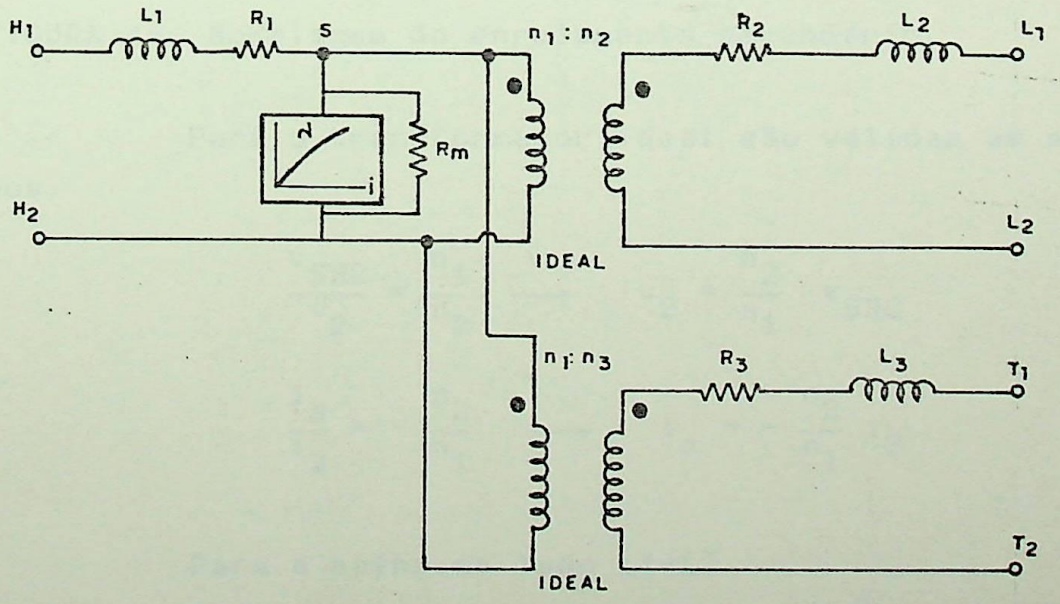



FIGURA 45: Esquema de transformador monofásico com N = 3.

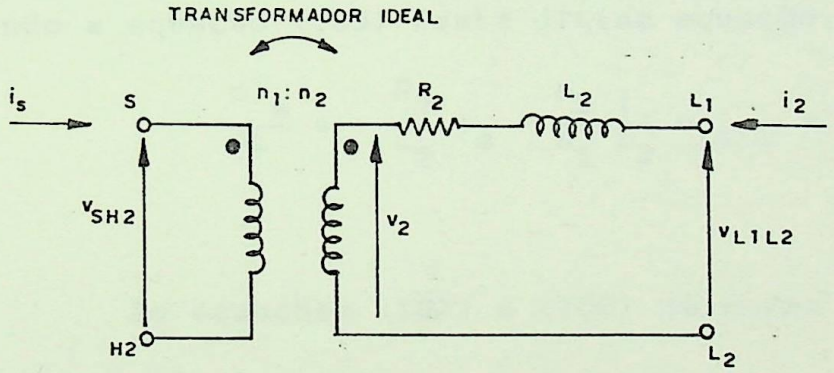
A modelagem é feita da seguinte maneira:

a) O ramo $L_1$-$R_1$ é modelado como um ramo concentrado não acoplado entre os nós H1 e S.

b) O ramo magnetizante é modelado como um ramo não linear entre os nós S e H2.

c) Os enrolamentos secundário ($L_1$-$L_2$) e terciário ($T_1$-$T_2$) são modelados como transformadores de dois enrolamentos. Por exemplo, o enrolamento secundário é modelado como um transformador cujo primeiro bobinado está entre os nós S e H2, e o segundo bobinado entre os nós L1 e L2.

A seguir serão desenvolvidas as equações para fazer a modelagem indicada no ítem c).




Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

FIGURA 46: Modelagem do enrolamento secundário.

Para o transformador ideal são válidas as seguintes relações:

$$\frac{v_{SH2}}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} \longrightarrow v_2 = \frac{n_2}{n_1} v_{SH2} \qquad (104)$$

$$\frac{i_s}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1} \longrightarrow i_s = -\frac{n_2}{n_1} i_2 \qquad (105)$$

Para a malha do lado L1-L2:

$$-v_{L1L2} + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + v_2 = 0 \qquad (106)$$

Substituindo a equação (104) na equação (106), tem-se:

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i_2 + \frac{1}{L_2} v_{L1L2} - \frac{n_2}{n_1}\frac{1}{L_2} v_{SH2} \qquad (107)$$

Derivando a equação (105) resulta:

$$\frac{di_s}{dt} = -\frac{n_2}{n_1}\frac{di_2}{dt}$$

Substituindo nesta última equação a equação (107)

$$\frac{di_s}{dt} = \frac{R_2}{L_2}\frac{n_2}{n_1} i_2 - \frac{n_2}{n_1}\frac{1}{L_2} v_{L1L2} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{1}{L_2} v_{SH2}$$

Substituindo a equação (105) nesta última equação:

$$\frac{di_s}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i_s - \frac{n_2}{n_1}\frac{1}{L_2} v_{L1L2} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{1}{L_2} v_{SH2} \qquad (108)$$

As equações (107) e (108) na forma matricial ficam:

$$\begin{bmatrix} di_s/dt \\ di_2/dt \end{bmatrix} = \frac{1}{L_2}\begin{bmatrix} (n_2/n_1)^2 & -(n_2/n_1) \\ -(n_2/n_1) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{SH2} \\ v_{L1L2} \end{bmatrix} -$$

$$-\begin{bmatrix} R_2/L_2 & 0 \\ 0 & R_2/L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_s \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad (109)$$

A equação (109) modela o circuito da figura 46. Um raciocínio semelhante se faz para o enrolamento terciário, obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} di'_s/dt \\ di_3/dt \end{bmatrix} = \frac{1}{L_3} \begin{bmatrix} (n_3/n_1)^2 & -(n_3/n_1) \\ -(n_3/n_1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{SH2} \\ v_{T1T2} \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} R_3/L_3 & 0 \\ 0 & R_3/L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_s \\ i_3 \end{bmatrix}$$

d) Os valores $R_1$, $L_1$, $R_2$, $L_2$, $R_3$ e $L_3$ são obtidos dos dados de ensaios de curto-circuito, isto é:

$$\dot{Z}_H = \frac{1}{2} (\dot{Z}_{HL} + \dot{Z}_{HT} - \dot{Z}_{LT}) \text{ [pu]}$$

$$\dot{Z}_L = \frac{1}{2} (\dot{Z}_{LH} + \dot{Z}_{LT} - \dot{Z}_{HT}) \text{ [pu]}$$

$$\dot{Z}_T = \frac{1}{2} (\dot{Z}_{TH} + \dot{Z}_{TL} - \dot{Z}_{HL}) \text{ [pu]}$$

Após calculados estes valores em pu convertem-se a valores atuais considerando as respectivas tensões base em cada enrolamento. Tendo os valores das impedâncias $\dot{Z}_H$, $\dot{Z}_L$, $\dot{Z}_T$ (em [Ω]) resulta:

$$\dot{Z}_H\ (\Omega) = R_1 + j\omega L_1$$

$$\dot{Z}_L\ (\Omega) = R_2 + j\omega L_2$$

$$\dot{Z}_T\ (\Omega) = R_3 + j\omega L_3$$

OBSERVAÇÕES:

1) O modelo "saturable transformer component" em regime permanente é obtido do conhecido circuito equivalente em estrela:

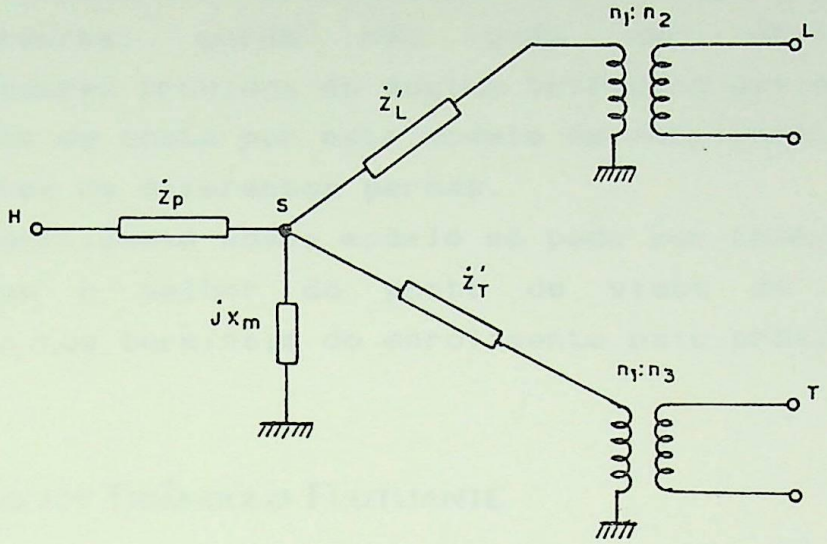



FIGURA 47: Circuito equivalente em valores atuais de transformador monofásico com N = 3.

Refletindo as impedâncias $\dot{Z}_L'$ e $\dot{Z}_T'$ a seus enrolamentos correspondentes resulta o circuito equivalente em valores atuais:

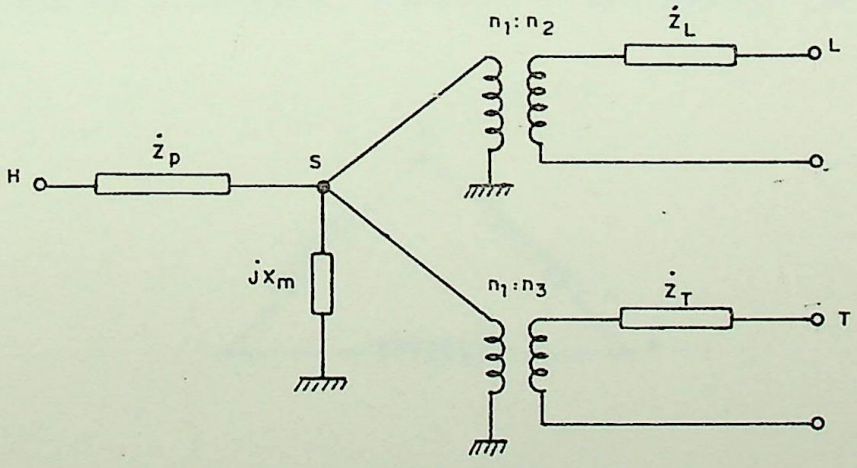



FIGURA 48: Idem figura 47 só que com as impedâncias $\dot{Z}_L'$ e $\dot{Z}_T'$ refletidas.

2) Este modelo não pode ser utilizado para mais de três enrolamentos, porque o circuito estrela não é mais válido.

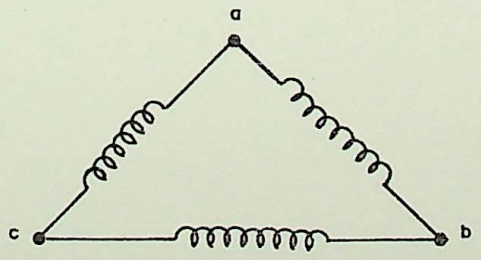
3) Este modelo pode ser utilizado para a modelagem de bancos de transformadores, porém não pode ser utilizado para transformadores providos de núcleo trifásico devido a que não são levados em conta por este modelo os acoplamentos entre os enrolamentos de diferentes pernas.
4) O ramo magnetizante neste modelo só pode ser conectado ao ponto S sendo que o melhor do ponto de vista da modelagem, é conectá-lo nos terminais do enrolamento mais próximo do núcleo.

## 2.13 - Conexão em Triângulo Flutuante

Os transformadores trifásicos assim como os auto transformadores trifásicos tem em geral um enrolamento ligado em triângulo para resolver o problema do terceiro harmônico na corrente de excitação.

Se nenhuma carga for conectada ou for conectada em triângulo, ao enrolamento em delta este apresentará tensões nodais indefinidas estando as tensões de ramo perfeitamente definidas.

Como o UBC-EFEI trabalha com tensões nodais acontecerá que durante a fatoração da matriz $[G_N]$ de condutâncias nodais se terá um pivô zero, ficando interrompido o procedimento de cálculo.




Para resolver este problema pode-se:

a) Aterrar um dos nós do triângulo.
b) Colocar em um dos nós ou em todos eles resistências de valor

muito grande ou capacitâncias de valor muito pequeno da ordem das capacitâncias de dispersão.

# C A P Í T U L O  I I I

## MODELAGEM DIGITAL DE ELEMENTOS:

- NÃO LINEARES

- VARIANTES COM O TEMPO

# CAPÍTULO III

## MODELAGEM DIGITAL DE ELEMENTOS:
## - NÃO LINEARES
## - VARIANTES COM O TEMPO

## 1 - INTRODUÇÃO

A simulação digital de transitórios eletromagnéticos em um sistema elétrico é feita modelando-se todos os seus componentes. Entre os componentes do sistema elétrico alguns podem ser não lineares, por exemplo: pára-raios com gaps, pára-raios de óxido de zinco, reatores de núcleo saturável, indutâncias não lineares para a representação da saturação do núcleo de um transformador, disjuntores, etc.

Devido ao fato destes elementos não serem lineares tem-se então um conjunto de equações diferenciais não lineares que definem seus comportamentos.

O cálculo das correntes e tensões nos ramos do sistema, no domínio do tempo poderia ser feito de duas maneiras:

a) Aplicar técnicas de resolução de equações diferenciais não lineares.

b) Modificar os métodos desenvolvidos para redes lineares de tal modo que abranjam os elementos não-lineares.

A metodologia empregada em programas digitais de simulação é a descrita no ítem b) pois neste caso o tempo total de solução não aumenta excessivamente já que o número de elementos não lineares normalmente é pequeno.

Neste capítulo se fará uma descrição dos métodos para a modelagem de elementos não lineares dando ênfase especial na representação de indutores não lineares.

Foi desenvolvida para esta dissertação a subrotina

NONLIN que permite fazer a modelagem simultânea de indutores não lineares, assim como indutores e resistências não-lineares, utilizando-se o "método da compensação generalizado". Esta subrotina foi incorporada ao programa UBC-EFEI.

## 2 - TEORIA

Alguns dos métodos para a modelagem de elementos não lineares são:

a - Método da compensação.
b - Representação por fontes de corrente com um tempo de atraso Δt
c - Linearização por segmentos das características:
    enlace de fluxo x corrente
    tensão x corrente
d - Método da rede equivalente.

### 2.1 - Método de Compensação

#### 2.1.1 - Considerações gerais

Este método está baseado nos teoremas:

- Teorema da superposição
- Teorema da substituição.

O "teorema da substituição" estabelece que: se por um ramo de uma rede circula uma corrente "i" e a tensão entre seus terminais é "v" o mesmo pode ser substituido por outro ramo sempre que a tensão nos terminais deste novo ramo seja "v" quando circule a corrente "i" nele. A utilização mais frequente deste teorema é substituir uma impedância ou resistência por uma fonte de tensão ou de corrente.

## 2.1.2 - Desenvolvimento teórico para um elemento não linear

A seguir, será feito o desenvolvimento teórico do método da compensação para <u>um</u> elemento não linear, que permite calcular as tensões nodais do sistema no instante $t_o$ suposto escolhido um passo de integração $\Delta t$. O procedimento se aplicará sucessivamente para cada instante de tempo.

Considere-se que o elemento não linear está colocado entre os nós "p" e "q" como indicado na figura 1 a seguir.

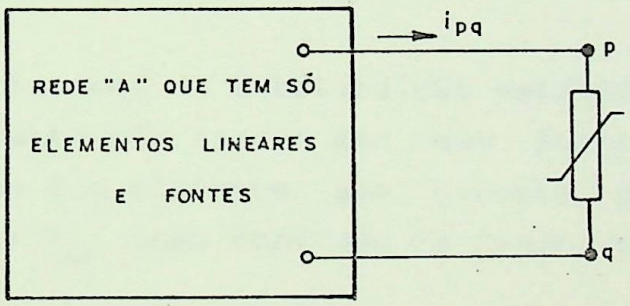



FIGURA 1: Esquema de uma rede linear com apenas um elemento não linear.

O procedimento para a obtenção das tensões nodais do sistema no instante $t_o$ pode-se subdividir em três etapas:

<u>1ª Etapa</u>: Substituição do elemento não linear por uma fonte de corrente de valor $i_{pq}(t_o)$.

<u>2ª Etapa</u>: Determinação do valor da corrente $i_{pq}(t_o)$

<u>3ª Etapa</u>: Aplicação do teorema de superposição como indicado na figura a seguir.

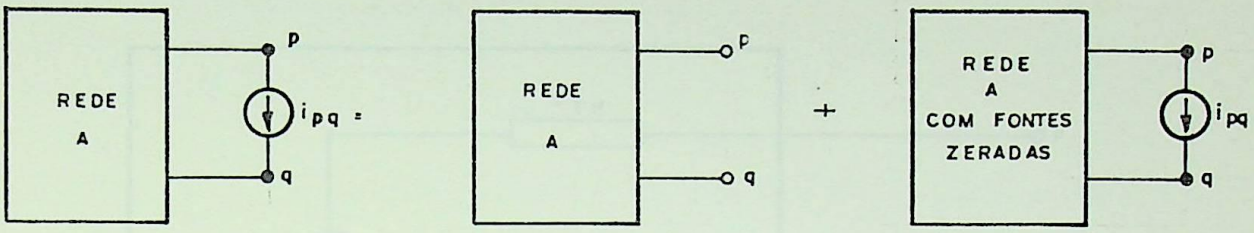



FIGURA 2: Aplicação do teorema de superposição para uma rede linear com apenas um elemento não linear, no instante $t_o$

A seguir, serão descritas as etapas acima referidas:

1ª Etapa:

O teorema da substituição estabelece que se pode substituir o elemento não linear por uma fonte de corrente de valor $i_{pq}$ (to) que é a corrente que circula pelo elemento não linear no instante $t_o$, como indicado na figura a seguir.

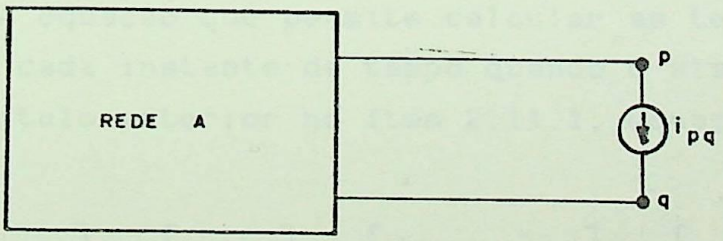



FIGURA 3: Esquema de uma rede linear com o único elemento não linear substituido por uma fonte de corrente, no instante $t_o$.

2ª Etapa: Determinação de $i_{pq}$ (to)

Tira-se o elemento não linear do sistema elétrico, ficando só a rede A indicada nas figuras 1 e 3 que contém só elementos lineares e fontes.

Calcula-se para a mesma o circuito equivalente de

Thevenin visto dos nós p e q como indicado na figura a seguir.

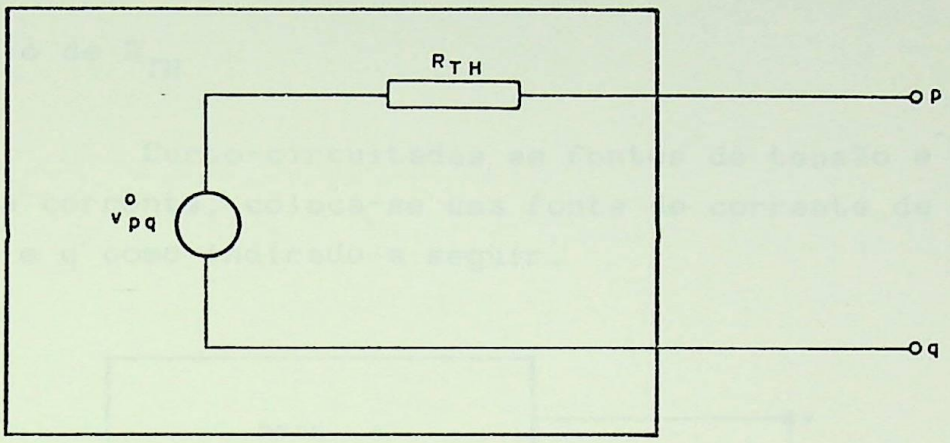



FIGURA 4: Circuito equivalente de Thevenin da parte linear da rede.

onde na figura 4, tem-se:

$R_{TH}$ - resistência equivalente de Thevenin

$v^o_{pq}$ - tensão equivalente de Thevenin.

a) Cálculo de $v^o_{pq}$

A equação que permite calcular as tensões nodais de um sistema para cada instante de tempo quando o sistema é linear foi dada no capítulo anterior no ítem 2.11.1, equação (83) e será aqui re-escrita:

$$\left[G_{AA}\right]\left[v_A(t)\right] = \left[i_A(t)\right] + \left[I_A(t - \Delta t)\right] - \left[G_{AB}\right]\left[v_B(t)\right] \qquad (1)$$

Da equação (1) obtém-se as tensões nodais a vazio, ou seja:

$$\left[v^o_A(to)\right] = \left[G_{AA}\right]^{-1}\left(\left[i_A(to)\right] + \left[I_A(t_o - \Delta t)\right] - \left[G_{AB}\right]\left[v_B(t_o)\right]\right)$$

Neste vetor $[v^o_A(t_o)]$ estão incluidas as tensões: $v^o_p$ e $v^o_q$

então

$$v^{o}_{pq} = v^{o}_{p} - v^{o}_{q}$$

b) Cálculo de $R_{TH}$

Curto-circuitadas as fontes de tensão e abertas as fontes de corrente, coloca-se uma fonte de corrente de 1[A] entre os nós p e q como indicado a seguir.

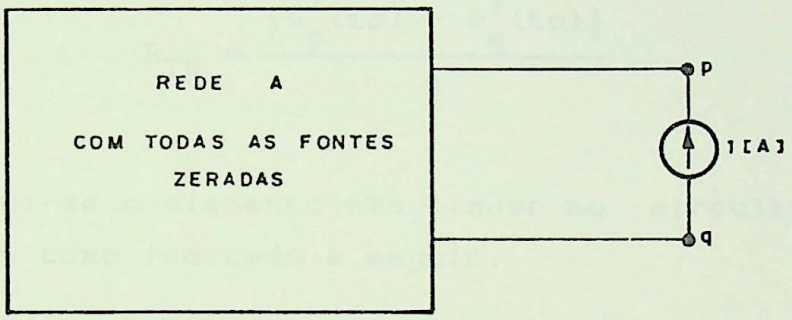



FIGURA 5: Esquema equivalente para obtenção de $R_{TH}$.

No termo a direita da equação (1) tem-se:

$$\left[v_B(t_o)\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \end{array}\right]$$

$$\left[I_A(t_o-\Delta t)\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \end{array}\right]$$

$$\left[i_A(t_o)\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ +1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longrightarrow \ p \\ \longrightarrow \ q \\ \\ \\ \end{array}$$

Da equação (1), obtém-se:

$$\left[v_A^1(t_o)\right] = \left[G_{AA}\right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ +1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde o índice 1 indica o número do elemento não linear.
Então:

$$R_{TH} = \frac{\left| v_p^1(to) - v_q^1(to) \right|}{1}$$

c) Agora inclui-se o elemento não linear no circuito equivalente de Thevenin como indicado a seguir.

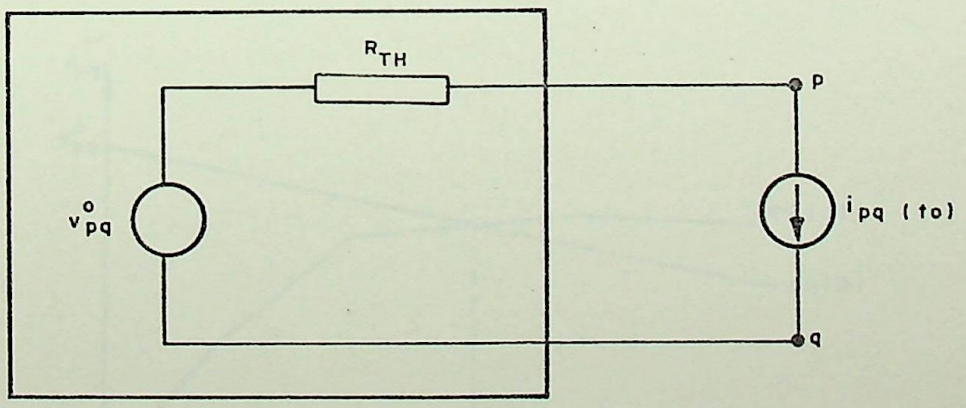



FIGURA 6: Circuito equivalente de Thevenin com o elemento não-linear.

Do circuito da figura 6 obtém-se a seguinte equação:

$$v_p(t_o) - v_q(t_o) = v_{pq}(t_o) = v^o_{pq} - R_{TH}\, i_{pq}(t_o) \qquad (2)$$

Por outro lado, a não linearidade é usualmente expressa como uma função não linear dada por:

$$v_{pq} = f(i_{pq}) \qquad (3)$$

As equações (2) e (3) constituem um sistema de equações não lineares com incógnitas $v_{pq}(t_o)$ e $i_{pq}(t_o)$.

Se a equação (3) tiver uma formulação analítica então o sistema pode ser resolvido pelo método numérico de Newton-Raphson por exemplo.

Se a equação (3) for dada ponto a ponto como indicado na figura 7, tem-se que desenvolver um algorítmo de busca para a obtenção de $i_{pq}(t_o)$.

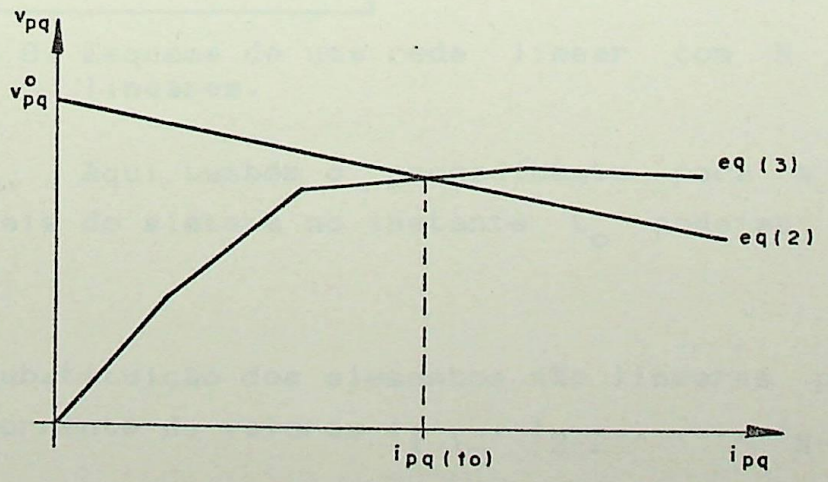



FIGURA 7: Gráficos das equações (2) e (3).

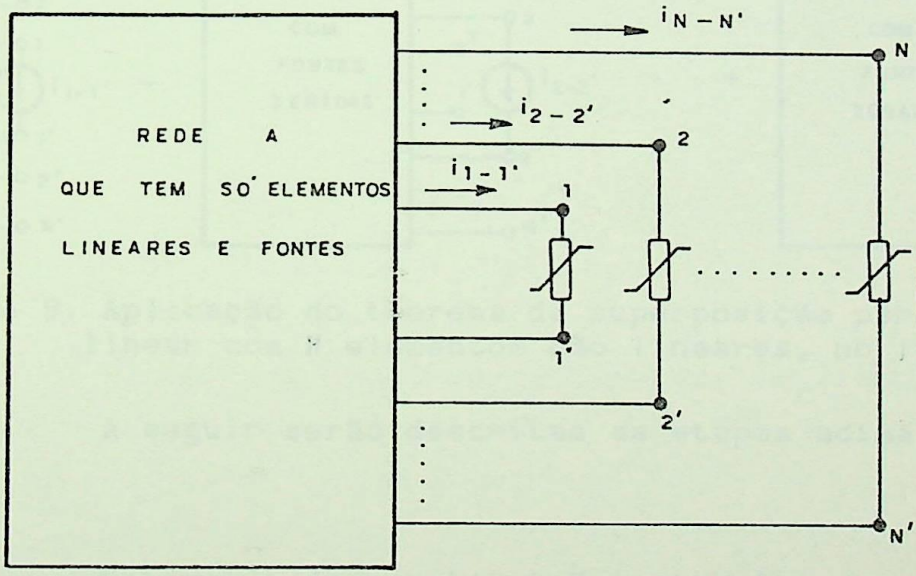
3ª Etapa

Aplicando o teorema da superposição já que a rede "A" é linear, pode-se obter as tensões nodais através da equação (4).

$$\left[v_A(t_o)\right] = \left[v_A^o(t_o)\right] - i_{pq}(t_o)\left[v_A^1(t_o)\right] \qquad (4)$$

## 2.1.3 - Desenvolvimento teórico para N elementos nao lineares

Considera-se que os elementos não lineares estão colocados entre os pares de nós: 1-1', 2-2', ..., N-N' como indicado na figura 8.




Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca
MAUÁ
BIM

FIGURA 8: Esquema de uma rede linear com N elementos não lineares.

Aqui também o procedimento para a obtenção das tensões nodais do sistema no instante $t_o$ pode-se subdividir em três etapas;

1ª Etapa: Substituição dos elementos não lineares por fontes de corrente de valores $i_{1-1'}$, $i_{2-2'}$, ..., $i_{N-N'}$

2ª Etapa: Determinação dos valores das correntes $i_{1-1'}$, $i_{2-2'}$, ... $i_{N-N'}$

3ª Etapa: Aplicação do teorema de superposição como indicado na figura a seguir.

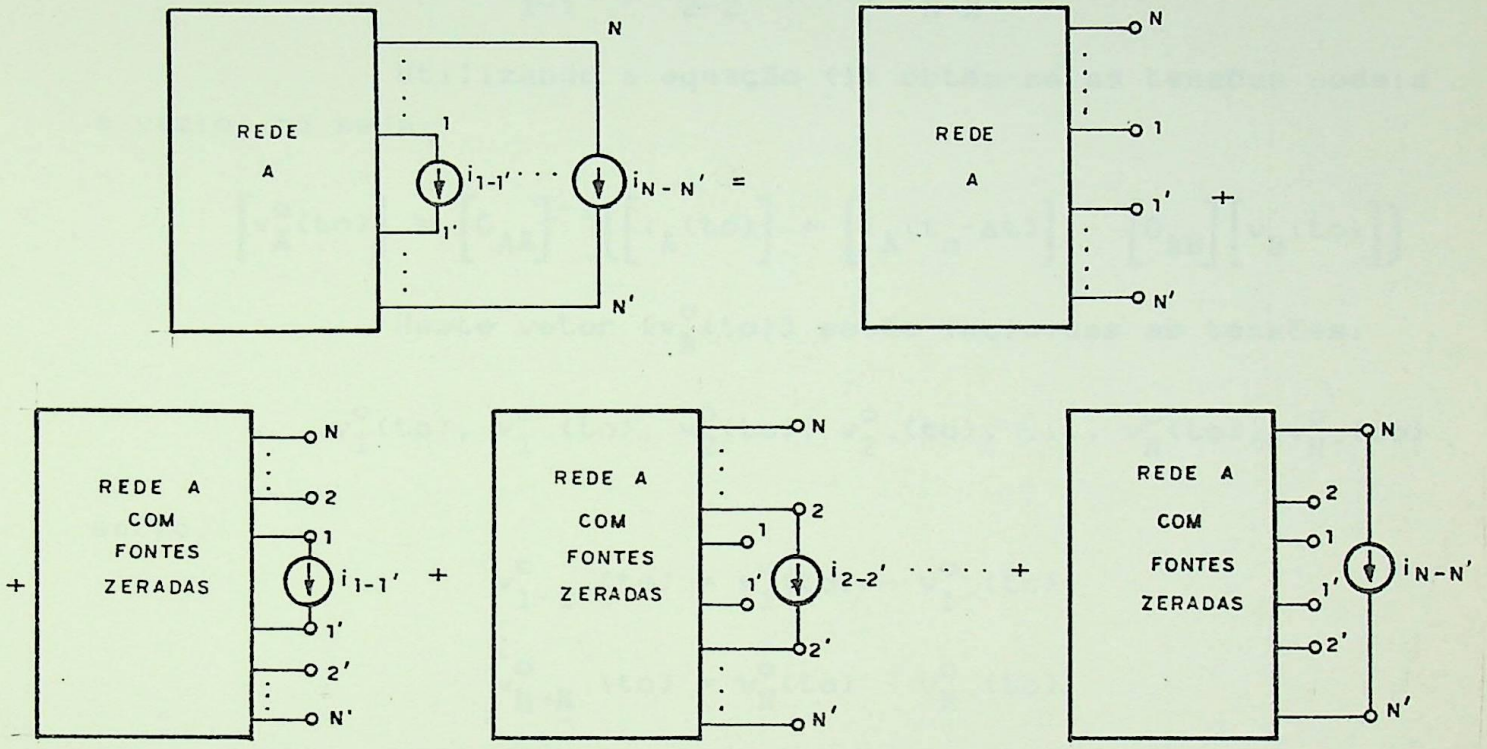



FIGURA 9: Aplicação do teorema de superposição para uma rede linear com N elementos não lineares, no instante $t_o$.

A seguir serão descritas as etapas acima referidas.

1ª Etapa

O teorema da substituição estabelece que se pode substituir cada elemento não linear por fontes de corrente de valores $i_{1-1'}(to)$, $i_{2-2'}(to)$, ..., $i_{N-N'}(to)$ que são as correntes que circulam pelos elementos não lineares respectivos no instante $t_o$.

2ª Etapa: Determinação das correntes $i_{1-1'}(to)$, $i_{2-2'}(to)$ ... $i_{N-N'}(to)$

Tiram-se agora os elementos não lineares do sistema elétrico ficando só a rede que contém elementos lineares e fontes. Calcula-se para a mesma o circuito equivalente de Thevenin visto

dos pares de nós: 1-1', 2-2', ... N-N' da seguinte forma:

a) Cálculo das tensões a vazio

$$v^{o}_{1-1'}\ ,\ v^{o}_{2-2'}\ ,\ \cdots\ v^{o}_{N-N'}$$

Utilizando a equação (1) obtém-se as tensões nodais a vazio, ou seja:

$$\left[v^{o}_{A}(to)\right] = \left[G_{AA}\right]^{-1}\left(\left[i_{A}(to)\right] + \left[I_{A}(t_{o}-\Delta t)\right] - \left[G_{AB}\right]\left[v_{B}(to)\right]\right)$$

Neste vetor $[v^{o}_{A}(to)]$ estão incluidas as tensões:

$$v^{o}_{1}(to),\ v^{o}_{1'}(to),\ v^{o}_{2}(to),\ v^{o}_{2'}(to),\ \ldots,\ v^{o}_{N}(to),\ v^{o}_{N'}(to)$$

então:

$$\begin{aligned} v^{o}_{1-1'}(to) &= v^{o}_{1}(to) - v^{o}_{1'}(to) \\ &\vdots \\ v^{o}_{N-N'}(to) &= v^{o}_{N}(to) - v^{o}_{N'}(to) \end{aligned}$$

b) Cálculo de $[R_{TH}]$

Neste caso, ao invés de ter uma resistência, tem-se uma matriz de resistências equivalentes de Thevenin vistas dos pares de nós: 1-1', 2-2' ... N-N'.

Curto-circuitadas as fontes de tensão e abertas as fontes de corrente, coloca-se uma fonte de corrente de 1[A] entre os nós j-j', deixando os outros pares de nós correspondentes aos outros elementos não lineares em vazio.

Da equação (1) obtém-se:

$$[v_{A}{}^{j}(to)] = [G_{AA}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ +1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \longrightarrow\ j \\ \longrightarrow\ j' \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

onde o índice j é o número do elemento não linear. Então, a coluna j da matriz de resistências de Thevenin é calculada da seguinte forma:

$$R_{TH\ 1j} = (v_1^j(to) - v_{1'}^j(to))/1.$$

$$R_{TH\ 2j} = (v_2^j(to) - v_{2'}^j(to))/1.$$

$$\vdots$$

$$R_{TH\ jj} = (v_j^j(to) - v_{j'}^j(to))/1.$$

$$\vdots$$

$$R_{TH\ Nj} = (v_N^j(to) - v_{N'}^j(to))/1.$$

Repetindo o procedimento para os outros pares de nós onde estavam ligados os elementos não lineares, tem-se:

$$\left[R_{TH}\right] = \begin{array}{c} \\ 1\text{-}1' \\ \vdots \\ j\text{-}j' \\ \vdots \\ N\text{-}N' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (1) & & & (j) & & & (N) \\ 1\text{-}1' & \ldots & & j\text{-}j' & \ldots & & N\text{-}N' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

c) Agora, incluem-se os elementos não lineares no circuito equivalente de Thevenin, obtendo então a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} v_{1-1'}(to) \\ v_{2-2'}(to) \\ \vdots \\ v_{N-N'}(to) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^o_{1-1'} \\ v^o_{2-2'} \\ \vdots \\ v^o_{N-N'} \end{bmatrix} - \left[R_{TH}\right] \begin{bmatrix} i_{1-1'}(to) \\ i_{2-2'}(to) \\ \vdots \\ i_{N-N'}(to) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Por outro lado, as não-linearidades de cada elemento são expressas como funções não lineares do tipo:

$$\left.\begin{aligned} v_{1-1'} &= f_1(i_{1-1'}) \\ v_{2-2'} &= f_2(i_{2-2'}) \\ &\vdots \\ v_{N-N'} &= f_N(i_{N-N'}) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

As equações (6) em forma matricial ficam:

$$\begin{bmatrix} v_{1-1'} \\ v_{2-2'} \\ \vdots \\ v_{N-N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(i_{1-1'}) \\ f_2(i_{2-2'}) \\ \vdots \\ f_N(i_{N-N'}) \end{bmatrix} \qquad (7)$$

As equações (5) e (7) constituem um sistema de equações não-lineares com incógnitas:

$$v_{1-1'}(to) \quad \ldots \quad v_{N-N'}(to)$$

$$i_{1-1'}(to) \quad \ldots \quad i_{N-N'}(to)$$

O sistema pode ser resolvido pelo método numérico de Newton-Raphson, por exemplo.

3ª Etapa:

Aplicando o teorema de superposição, já que a rede "A" é linear, pode-se obter as tensões nodais através da equação (8).

$$\left[v_A(to)\right] = \left[v_A^o(to)\right] - i_{1-1'}(to)\left[v_A^1(to)\right] - i_{2-2'}(to)\left[v_A^2(to)\right] -$$

$$- \ldots - i_{j-j'}(to)\left[v_A^j(to)\right] - \ldots - i_{N-N'}(to)\left[v_A^N(to)\right] \qquad (8)$$

## 2.1.4 - Característica de um indutor não linear

Nos ítens anteriores foi escrito que a não linearidade é expressa como uma função não-linear v = f(i). Para o caso de pára-raios de óxido de zinco essa função pode ser da forma:

$$i = k\, v^{\alpha}$$

k, $\alpha$ - constantes

A seguir será obtida a função não linear para o caso de um indutor não linear.

Seja a característica enlace de fluxo x corrente como indicada na figura 10 a seguir.

$$\lambda = f(i) \qquad (9)$$

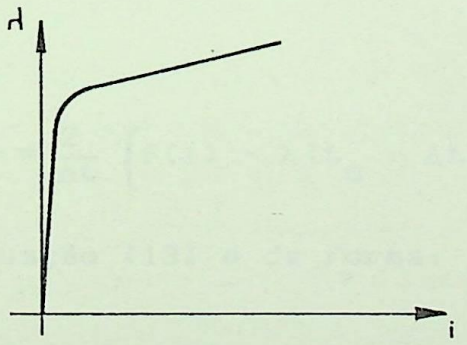



FIGURA 10: Característica enlace de fluxo x corrente de um indutor não linear, no primeiro quadrante.

Pela lei de Faraday-Lenz, sabe-se que:

$$v(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt} \qquad (10)$$

onde:

v(t) tensão nos terminais do indutor não linear no instante t

$\lambda(t)$ fluxo que enlaça o indutor não linear no instante t.

Integrando a equação (10) no intervalo $[t - \Delta t, t]$ resulta:

$$\int_{t-\Delta t}^{t} v(t)dt = \lambda(t) - \lambda(t - \Delta t) \qquad (11)$$

Aplicando na equação (11) o método trapezoidal de integração obtém-se:

$$\frac{\Delta t}{2}\left[v(t) + v(t - \Delta t)\right] = \lambda(t) - \lambda(t - \Delta t)$$

ou também

$$\lambda(t) = \frac{\Delta t}{2} v(t) + \lambda(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} v(t - \Delta t) \qquad (12)$$

Igualando as equações (9) e (12) para um instante $t_o$:

$$\frac{\Delta t}{2} v(to) + \lambda(to - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} v(to - \Delta t) = f(i)$$

ou também

$$v(t_o) = \frac{2}{\Delta t}\left[f(i) - \lambda(t_o - \Delta t) - \frac{\Delta t}{2} v(t_o - \Delta t)\right] \qquad (13)$$

A equação (13) é da forma:

$$v(t_o) = F(i, t_o) \qquad (14)$$

Conclui-se que para uma indutância não linear tem-se uma função v = f(i) para cada instante de tempo, coisa que não acontece com resistências não lineares.

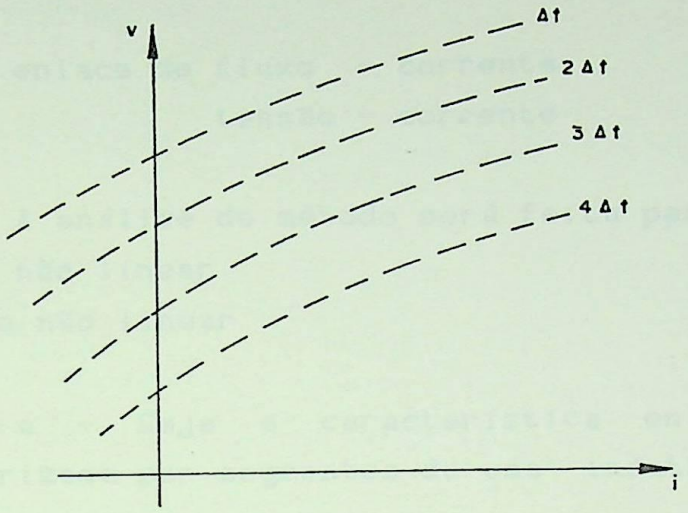



FIGURA 11: Característica tensão-corrente para um indutor não linear para t = Δt, 2Δt, ...

## 2.2 - Representação por Fontes de Corrente com um Tempo de Atraso Δt

Neste método aplica-se também o teorema da substituição, ou seja, cada ramo não-linear é substituido por uma fonte de corrente. A substituição é feita da seguinte forma:

Assume-se que as tensões nodais e as correntes e tensões de ramo vão ser calculadas no instante t, ou seja, que em t - Δt se conhece a corrente pelo ramo não linear.

Então o elemento não linear é substituido por uma fonte de corrente cujo valor é a corrente pelo ramo no instante t - Δt, isto significa adotar um valor atrasado no tempo em Δt.

Este método exige que a corrente no ramo não mude muito de um intervalo para outro no tempo, assim como o passo de integração deve ser pequeno.

## 2.3 - Linearização por Segmentos das Características

enlace de fluxo - corrente
tensão - corrente

A análise do método será feita para:

a - Indutância não linear
b - Resistência não linear

a - Seja a característica enlace de fluxo x corrente linearizada por segmentos de uma indutância não linear como indicado na figura a seguir.

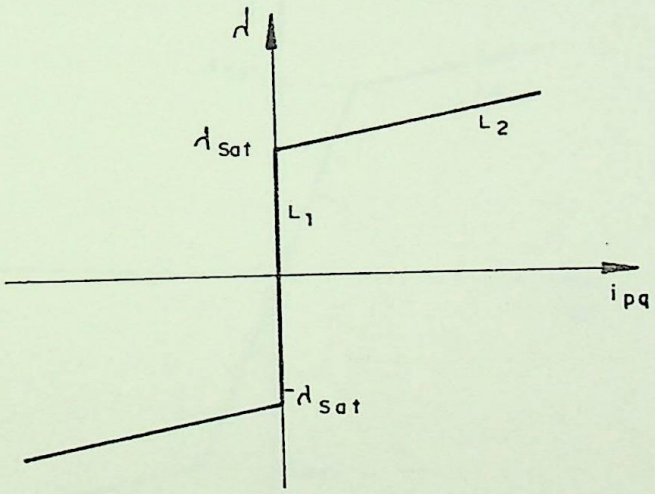



FIGURA 12: Característica λ = f(i) linearizada.

Esta característica pode ser modelada como uma indutância linear de valor L2 em série com uma chave ideal.

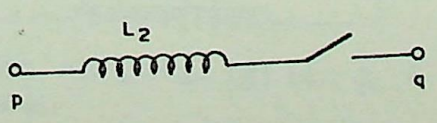



FIGURA 13: Modelo da característica λ = f(i) linearizada, da figura 12.

O enlace de fluxo é calculado independentemente da posição da chave como sendo:

$$\lambda(t) = \int_{t-\Delta t}^{t} (v_p - v_q)dt + \lambda(t - \Delta t)$$

Enquanto $|\lambda| < |\lambda \text{ sat}|$ a chave permanecerá aberta e para $|\lambda| > |\lambda \text{ sat}|$ a chave permanecerá fechada.

Se a característica enlace de fluxo - corrente for do tipo mostrado na figura 14 a mesma será modelada como indicado na figura 15.

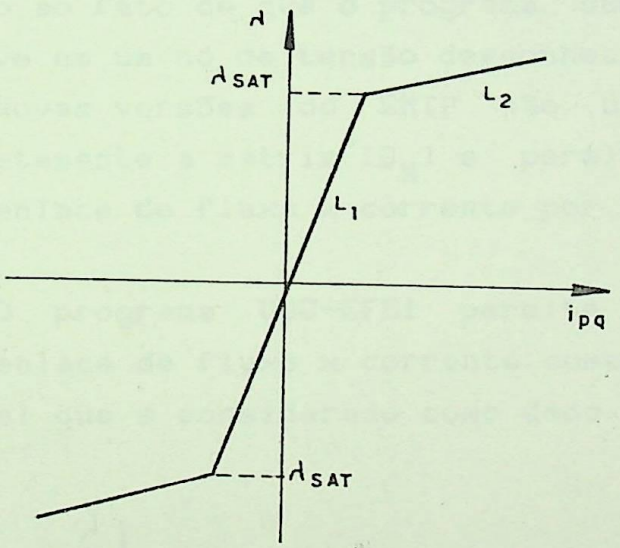



FIGURA 14: Característica $\lambda = f(i)$ linearizada.

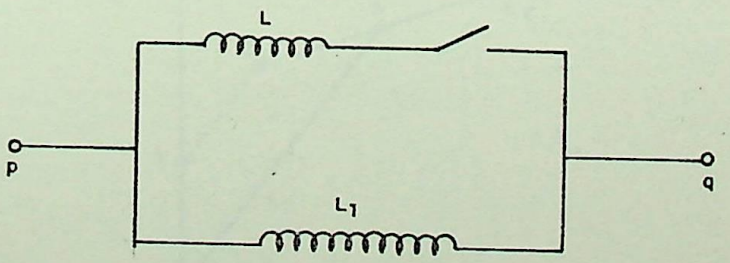



FIGURA 15: Modelo da característica $\lambda = f(i)$ linearizada, da figura 14.

onde:

$L = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 - L_2}$ e $L_1$ são indutâncias lineares.

O critério para a abertura ou fechamento da chave é o mesmo que para o caso anterior.

Se a característica enlace de fluxo-corrente for linearizada por três segmentos uma nova indutância linear em série com uma chave ideal deverá ser acrescentada em paralelo entre os nós p e q.

Se um dos nós p ou q for de tensão conhecida poder-se-ia repetir o procedimento anterior para quatro ou mais segmentos, caso contrário não se pode simular mais de três segmentos devido ao fato de que o programa UBC-EFEI não permite mais de uma chave em um nó de tensão desconhecida.

Novas versões do EMTP não utilizam as chaves, modificando diretamente a matriz $[G_N]$ e permitindo linearizar a característica enlace de fluxo x corrente por qualquer número de segmentos.

O programa UBC-EFEI permite a simulação da característica enlace de fluxo x corrente começando de um enlace de fluxo residual que é considerado como dado de entrada.

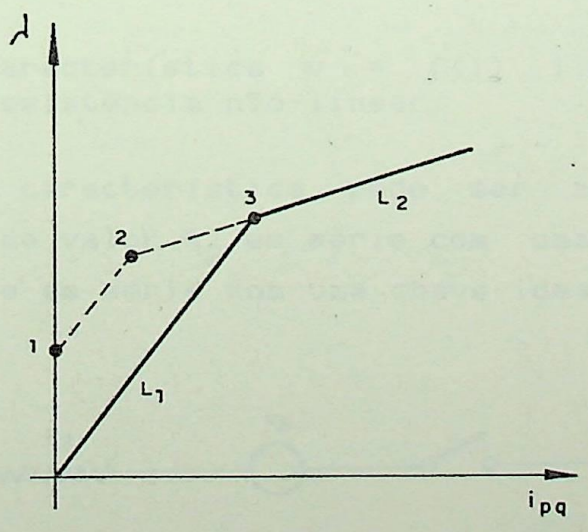



FIGURA 16: Característica $\lambda = f(i)$ descrita na simulação começando com um enlace de fluxo residual.

Na simulação iniciada no ponto 1 e que vai até o

ponto 2, a indutância utilizada é $L_1$, a partir do ponto 2 a usa-se a indutância $L_2$.

É importante o cálculo do enlace de fluxo $\lambda$ para o ponto 2 porque, desta forma, a simulação pode percorrer a curva real sem "overshoot".

b - Seja a característica tensão-corrente linearizada por segmentos de uma resistência não linear como indicado na figura a seguir.

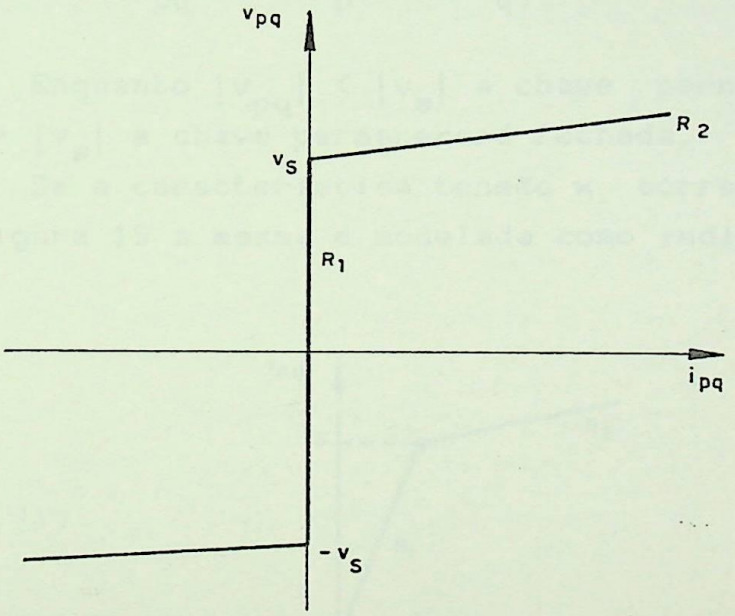
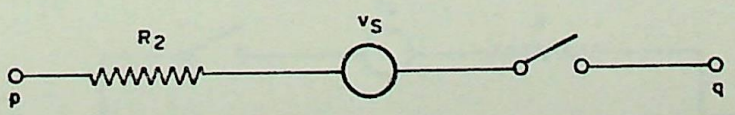



FIGURA 17: Característica v = f(i) linearizada de uma resistência não-linear.

Esta característica pode ser modelada como uma resistência linear de valor $R_2$ em série com uma fonte ideal de tensão de valor $v_s$ e em série com uma chave ideal.




ou

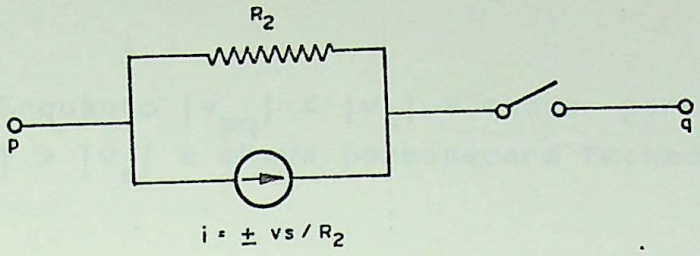



FIGURA 18: Modelos da característica v = f(i) linearizada da figura 17.

A tensão $v_{pq}$ é calculada independentemente da posição da chave como:

$$v_{pq}(t) = v_p(t) - v_q(t)$$

Enquanto $|v_{pq}| < |v_s|$ a chave permanecerá aberta, quando $|v_{pq}| > |v_s|$ a chave permanecerá fechada.

Se a característica tensão x corrente for aquela mostrada na figura 19 a mesma é modelada como indicado na figura 20.

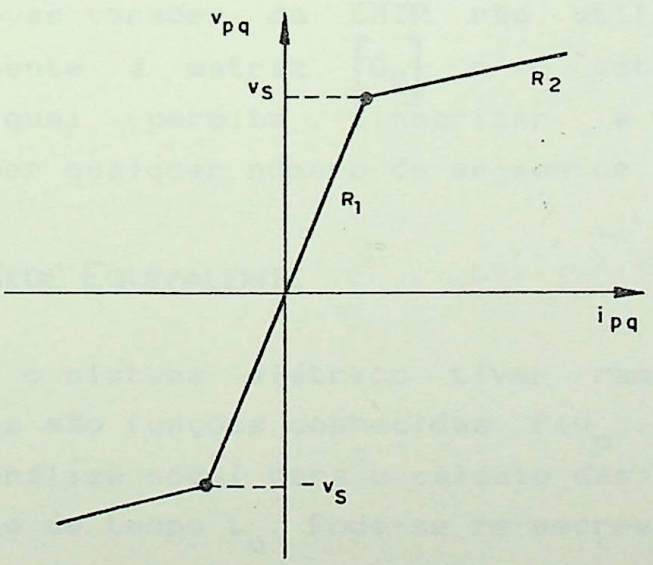



FIGURA 19: Característica v = f(i) linearizada.

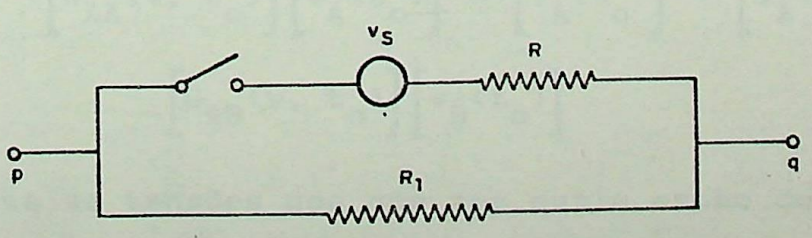



FIGURA 20: Modelo da característica v = f(i) linearizada da figura 19.

Enquanto $|v_{pq}| < |v_s|$ a chave permanecerá aberta, quando for $|v_{pq}| > |v_s|$ a chave permanecerá fechada. O valor de R é tal que:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2}$$

Se a característica tensão-corrente for linearizada por três segmentos uma nova resistência linear de valor R' em série com uma fonte ideal de tensão de valor $v_s'$ e em série com uma chave ideal deverá ser acrescentada em paralelo entre os nós p e q.

Se um dos nós p ou q for de tensão conhecida pode-se repetir o procedimento anterior para quatro ou mais segmentos, caso contrário não se pode simular mais de três segmentos devido ao fato de que o programa UBC-EFEI não permite mais de uma chave em um nó de tensão desconhecida.

Novas versões do EMTP não utilizam as chaves, modificam diretamente a matriz $[G_N]$ e o vetor de correntes injetadas, o qual permite linearizar a característica tensão-corrente por qualquer número de segmentos.

## 2.4 - Método da Rede Equivalente

Se o sistema elétrico tiver ramos não lineares cujas condutâncias são funções conhecidas $f(v_p, v_q, t)$ pode-se então aplicar a análise nodal para o cálculo das tensões nodais do mesmo num instante de tempo $t_o$. Pode-se re-escrever a equação (1).

$$[G_{AA}(v, t_o)][v_A(t_o)] = [i_A(t_o)] + [I_A(t_o - \Delta t)] - [G_{AB}(v, t_o)][v_B(t_o)] \qquad (15)$$

onde v representa as tensões dos nós aos quais estão conectados os ramos não lineares.

Devem-se distinguir dois casos:

Biblioteca MAUÁ BIM de Engenharia de Irajubá - EFEI

a) As condutâncias dos ramos não lineares são só funções do tempo.
b) As condutâncias dos ramos não lineares são funções do tempo e/ou das tensões nodais.

a) Neste caso, para obter todas as tensões nodais do sistema no instante $t_o$ deve-se triangular a matriz de condutâncias nodais $\left[G_{AA}(t_o)\right]$.

Isto deve ser feito para cada instante de tempo o qual acarreta um tempo grande de solução.

Para reduzir o tempo de solução pode-se fazer a triangularização na submatriz que contém só os nós aos quais estão conectados os ramos não lineares.

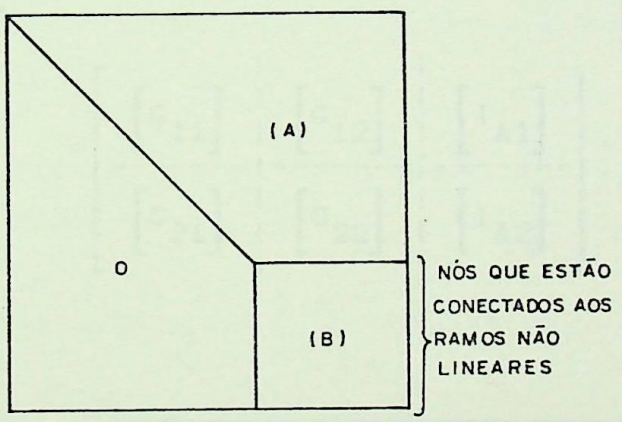



FIGURA 21: Esquema da matriz $\left[G_{AA}(t_o)\right]$.

Para cada instante de tempo só se tem que triangularizar a submatriz [B], sendo que a triangularização parcial [A] permanece fixa se não houver mudanças na topologia da rede.

b) Neste caso para a resolução da equação matricial (15) deve-se empregar um método numérico de resolução, por exemplo Newton-Raphson.

Isto deve ser feito para cada instante de tempo o qual acarreta um tempo grande de solução.

Para reduzir este tempo pode-se resolver ao invés de todo o sistema o sistema parcial descrito a seguir. Particiona-

se a equação matricial (15) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} [G_{11}] & [G_{12}] \\ [G_{21}] & [G_{22}(v,t_o)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [v_{A1}(t_o)] \\ [v_{A2}(t_o)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{A1} \\ I_{A2} \end{bmatrix}$$

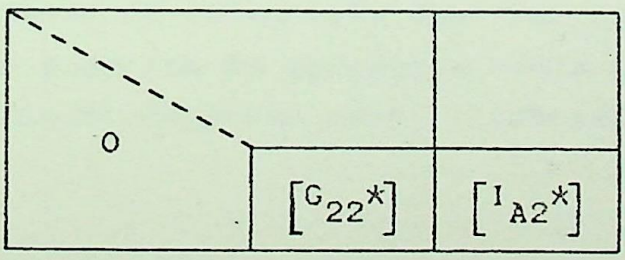
onde:

$[v_{A2}(t_o)]$ contém as tensões nodais dos nós aos que estão conectados os ramos não lineares.

Se faz agora uma triangularização parcial da seguinte matriz

$$\left[\begin{array}{c|c|c} [G_{11}] & [G_{12}] & [I_{A1}] \\ \hline [G_{21}] & [G_{22}] & [I_{A2}] \end{array}\right]$$

obtendo-se:




onde:

$$[G_{22}^*] = [G_{22}] - [G_{21}] \cdot [G_{11}]^{-1} [G_{12}]$$

$$[I_{A2}^*] = [I_{A2}] - [G_{21}] \cdot [G_{11}]^{-1} \cdot [I_{A1}]$$

Então, o sistema parcial a resolver, pelo método de Newton-Raphson, por exemplo, é:

$$\left[G_{22}^{*}\right]\left[v_{A2}(t_o)\right] = \left[I_{A2}^{*}\right]$$

conhecidas agora estas tensões nodais, completa-se o processo de triangularização com a matriz $\left[G_{22}^{*}\right]$.

## 3 - PROBLEMAS COM AS MODELAGENS

No ítem 2 foram apresentados quatro métodos para a representação de elementos não-lineares.

Deles, os dois mais utilizados são:

a - Método de compensação;

b - Linearização por segmentos das características:
enlace de fluxo x corrente
tensão x corrente

A seguir, serão apresentados alguns problemas que estes métodos podem apresentar nas simulações.

### 3.1 - PROBLEMAS COM O MÉTODO DE COMPENSAÇÃO

Se o passo de integração ($\Delta t$) for muito grande para a simulação em estudo poderiam-se apresentar dois problemas:

- Uma histerese artificial negativa como ilustrado na figura a seguir.

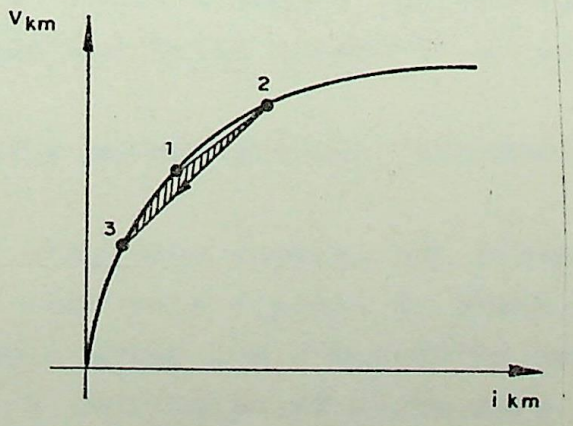



FIGURA 22: Histerese negativa.

Na figura 22 a simulação começa no ponto 1, indo para o ponto 2 e logo para o ponto 3, resultando assim uma histerese artificial negativa.

- A amostra de pontos é pequena; devido a este fato, poderá ocorrer que a forma da curva que está sendo considerada no cálculo não corresponda à função que se deseja realmente representar, apesar de que os valores nos pontos 1, 2, 3 e 4 são corretos.

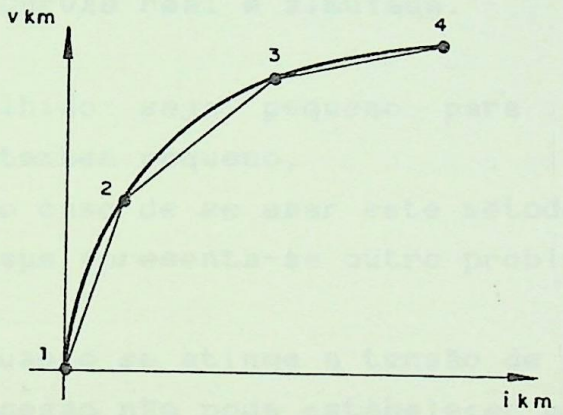



FIGURA 23: Curvas real e aproximada.

Na figura 23 a curva de traço mais fino é a que está sendo considerada na simulação.

## 3.2 - Problemas com o Método de Linearização por Segmentos

Na figura a seguir, estão representadas duas curvas $v_{km} = f(i_{km})$ sendo uma delas a real e a outra a descrita pela simulação.

Este método provoca "overshoot" devido ao seguinte fato:

A simulação começa, por exemplo, no ponto 1, indo para o ponto 2 e logo para o ponto 3. Neste último ponto é que se sabe que a tensão é maior que a tensão no ponto 4 sendo, portanto, necessário mudar a inclinação da curva para os pontos a seguir produzindo-se então o "overshoot". É necessário que o passo de

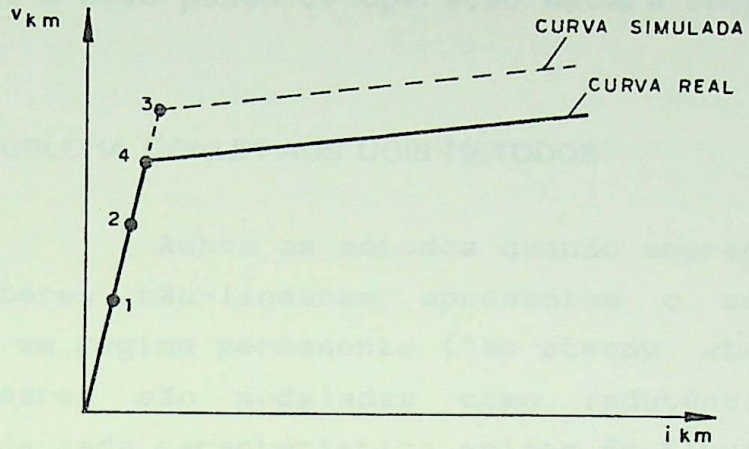



FIGURA 24: Curvas real e simulada.

integração escolhido seja pequeno para que o "overshoot" resultante seja também pequeno.

No caso de se usar este método para a modelagem de pára-raios com gaps apresenta-se outro problema como descrito a seguir:

Quando se atinge a tensão de descarga a metodologia empregada no processo não pode estabelecer qual é o novo ponto de operação do pára-raio na curva $v_{km} = f(i_{km})$, e é por isto que o usuário tem que fornecer como dado de entrada qual é o segmento em que se encontra o novo ponto de operação.

Uma maneira de evitar este problema é a utilização da característica linearizada indicada na figura 25.

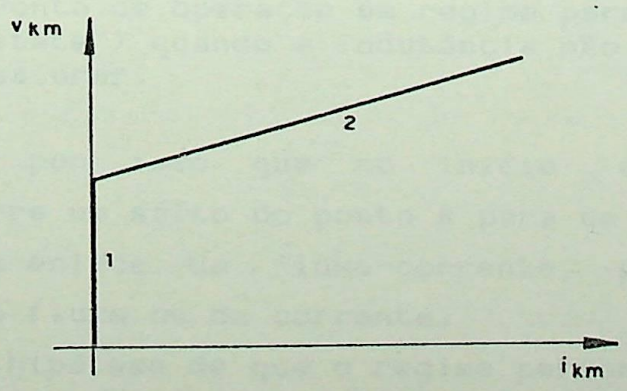



FIGURA 25: Característica linearizada por duas inclinações.

Na figura 25 nota-se que ao se atingir a tensão de

descarga o novo ponto de operação estará sempre no segmento 2.

## 3.3 - Problema Comum aos Dois Métodos

Ambos os métodos quando empregados para a modelagem de indutores não-lineares apresentam o seguinte problema: na solução em regime permanente ("ac steady state") as indutâncias não-lineares são modeladas como indutâncias lineares (região linear de cada característica enlace de fluxo-corrente).

Pode acontecer que as indutâncias não lineares saturem em regime permanente, mas como estão modeladas como indutâncias lineares seu ponto de operação A ficará como indicado na fig. 26 não pertencendo à curva enlace de fluxo x corrente.

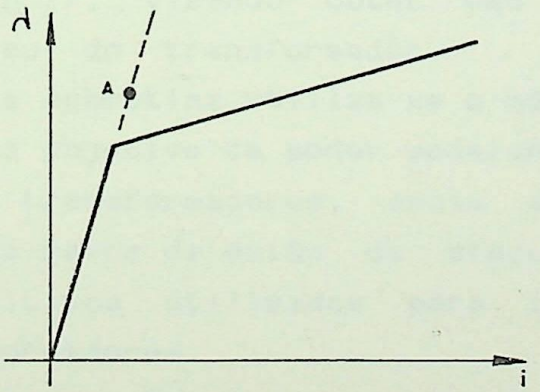



FIGURA 26: Ponto de operação em regime permanente ("ac steady state") quando a indutância não linear teria que saturar.

É por isso que no início da simulação de transitórios ocorre um salto do ponto A para um ponto na região saturada da curva enlace de fluxo-corrente, podendo ocorrer o salto no valor do fluxo ou da corrente.

A hipótese de que o regime permanente ("ac steady state") trabalha só com a frequência fundamental é questionável devido ao fato de que a indutância não linear ao saturar irá injetar harmônicos de corrente na rede.

No capítulo 12 da referência [11] e na referência [28] tem descrições de um método de inicialização que leva em consideração os harmônicos injetados na rede.

Uma maneira de minimizar o problema em regime permanente ("ac steady state") é fazer uma rotação dos fasores de tensão das fontes tal que um destes fasores tenha fase zero. Como os fluxos estão defasados $90^{o}$ em relação as tensões, um deles terá valor zero no regime permanente e os outros terão um valor de 86,6% de seu valor de pico.

# 4 - SUBROTINA NONLIN

## 4.1 - INTRODUÇÃO

Neste trabalho foi desenvolvida a subrotina NONLIN em linguagem Fortran 77, visando obter uma nova modelagem da saturação do núcleo do transformador.

Nesta subrotina utiliza-se o método de compensação "generalizado" com o objetivo de poder modelar simultaneamente a saturação de vários transformadores, assim como, poder modelar simultaneamente pára-raios de óxido de zinco e indutores não-lineares, estes últimos utilizados para a representação da saturação de transformadores.

Por limitações impostas pelo programa principal, é possível com a subrotina NONLIN modelar simultaneamente:

- até dois conjuntos de três indutores não-lineares cada um;
- três indutores e três resistências não-lineares, estas últimas utilizadas para a representação de pára-raios de óxido de zinco.

Esta subrotina foi incorporada ao Programa de Transitórios da UBC disponível na EFEI (UBC-EFEI).

## 4.2 - Teoria

Na utilização da subrotina NONLIN são necessários os valores de alguns parâmetros, os quais são fornecidos pelo programa APROX, desenvolvido durante este trabalho. A seguir, serão apresentadas as formulações matemáticas utilizadas no programa APROX e na subrotina NONLIN.

### 4.2.1 - Formulação matemática da curva corrente x enlace de fluxo

Seja a característica corrente x enlace de fluxo como a indicada na figura 27 a seguir, suposta dada ponto a ponto.

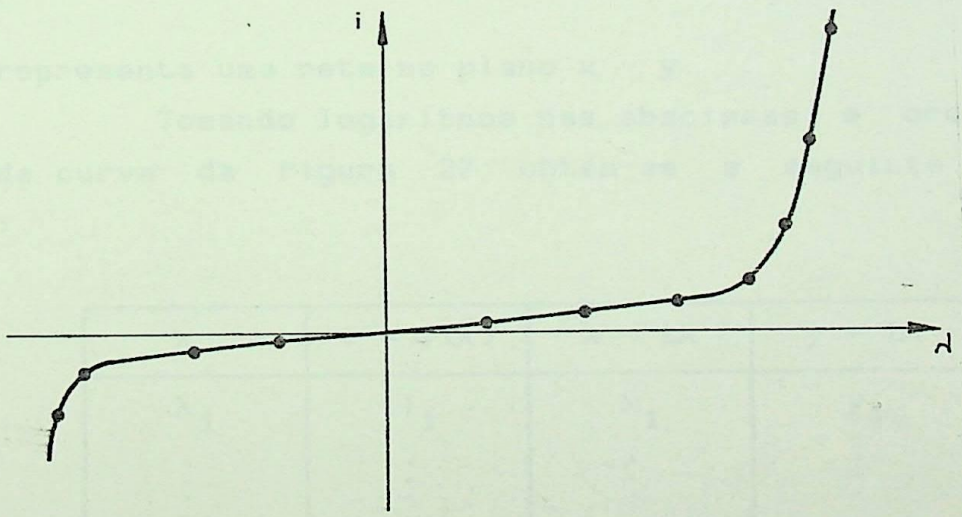



FIGURA 27: Característica corrente x enlace de fluxo dada ponto a ponto.

O objetivo é, conhecidos os pontos da curva da figura 27, encontrar os valores dos parâmetros reais "α" e "a" da equação (16) (a qual é somente válida no primeiro quadrante), que melhor aproximem a característica corrente x enlace de fluxo.

$$i = \left[\frac{\lambda}{a}\right]^{\alpha} \qquad (16)$$

A seguir será feito o cálculo dos parâmetros reais

"α" e "a".

Tomando logarítmos na equação (16) resulta:

$$Li = \alpha \cdot L\lambda - \alpha\, La \qquad (17)$$

Definindo-se as novas variáveis:

$$y = Li$$

$$x = L\lambda$$

$$b = -\alpha\, La$$

a equação (17) fica:

$$y = \alpha\, x + b \qquad (18)$$

a qual representa uma reta no plano x - y.

Tomando logarítmos nas abscissas e ordenadas dos pontos da curva da figura 27 obtém-se a seguinte tabela de valores:

| $\lambda$ | $i = f(\lambda)$ | $x = L\lambda$ | $y = Li$ |
|---|---|---|---|
| $\lambda_1$ | $i_1$ | $x_1$ | $y_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\lambda_n$ | $i_n$ | $x_n$ | $y_n$ |

Para a determinação dos valores de "α" e "b" emprega-se o método dos mínimos quadrados, resultando

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ n & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema linear de equações conduz aos valores de "b" e "α". Tendo o valor de "b" resulta:

$$a = e^{-b/\alpha}$$

O método acima descrito foi implementado computacionalmente num programa em linguagem FORTRAN 77 denominado APROX.

Neste programa a entrada de dados é via terminal, os dados solicitados pelo mesmo são:

- número total de pontos
- abscissa e ordenada de cada ponto.

A saída do programa APROX, contém:

- os valores de "α" e "a";
- as abscissas dos pontos;
- as ordenadas reais dos pontos;
- as ordenadas obtidas com a equação (16);
- o erro relativo para cada ordenada.

A equação utilizada no método de compensação, para a simulação da saturação do núcleo de um transformador, é:

$$i = \left(\frac{|\lambda|}{a}\right)^{\alpha} . \text{ sign } \lambda \qquad (19)$$

Na equação (19) foram feitas as seguintes hipóteses:

- a histerese foi ignorada;
- a curva corrente x enlace de fluxo, $i = f(\lambda)$ foi assumida simétrica com respeito a origem, isto é, $i(\lambda) = -i(-\lambda)$.

## 4.2.2 - Formulação Matemática da Curva Corrente x Tensão

Seja a característica corrente x tensão como a indicada na figura 28 a seguir, suposta dada ponto a ponto.

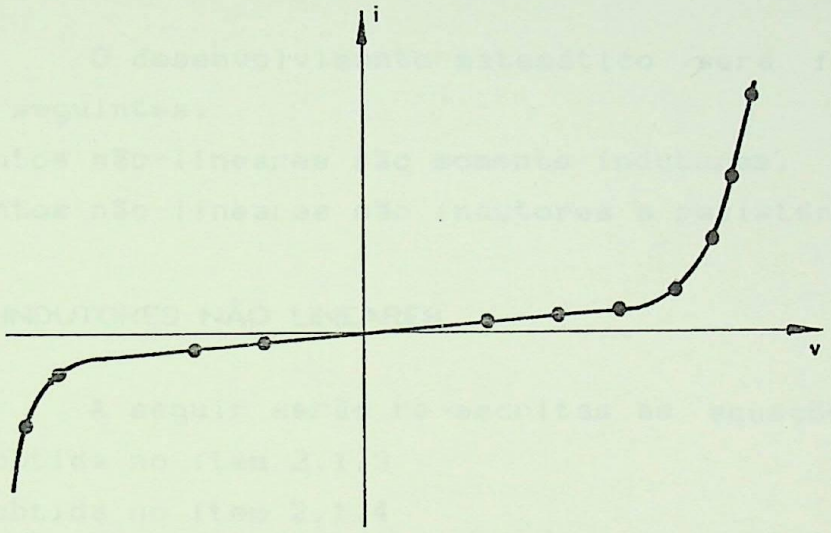



FIGURA 28: Característica corrente x tensão dada ponto a ponto.

O objetivo é, conhecidos os pontos da curva da figura 28, encontrar os valores dos parâmetros reais "$\beta$" e "b" da equação (20) (a qual é somente válida no primeiro quadrante), que melhor aproximem a característica corrente x tensão.

$$i = \left(\frac{v}{b}\right)^{\beta} \qquad (20)$$

A obtenção dos parâmetros "$\beta$" e "b" é feita utilizando o procedimento descrito no ítem 4.2.1, utilizando-se o programa APROX.

A equação utilizada no método de compensação, para a simulação de um pára-raio de óxido de zinco, é:

$$i = \left(\frac{|v|}{b}\right)^{\beta} \cdot \text{sign}\,(v) \qquad (21)$$

Na equação (21) foi feita a hipótese de que a característica corrente x tensão é simétrica com respeito à origem.

### 4.2.3 - Formulação matemática da subrotina NONLIN

O desenvolvimento matemático será feito para os dois casos seguintes:

- os elementos não-lineares são somente indutores;
- os elementos não-lineares são indutores e resistências.

#### 4.2.3-1 - N indutores não lineares

A seguir serão re-escritas as equações:

(5) obtida no ítem 2.1.3

(12) obtida no ítem 2.1.4

(19) obtida no ítem 4.2.1

deste capítulo, para um instante $t_o$.

A equação (5) do ítem 2.1.3 em notação compacta fica:

$$\left[v_{km}(t_o)\right] = \left[v_{km}{}^{o}(t_o)\right] - \left[R_{TH}\right]\left[i_{km}(t_o)\right] \qquad (22)$$

A equação (12) do ítem 2.1.4 para N elementos não-lineares em notação compacta fica:

$$\left[\lambda_{km}(t_o)\right] = \frac{\Delta t}{2}\left[v_{km}(t_o)\right] + \left[b(t_o - \Delta t)\right] \qquad (23)$$

onde:

$$\left[b(t_o - \Delta t)\right] = \left[\lambda_{km}(t_o - \Delta t)\right] + \frac{\Delta t}{2}\left[v_{km}(t_o - \Delta t)\right] \qquad (24)$$

A equação (19) do ítem 4.2.1 para N elementos não-lineares em notação compacta fica:

$$\left[i_{km}\right] = \left[\left(\frac{|\lambda_{km}|}{a_{km}}\right)^{\alpha_{km}} \cdot \text{sign}(\lambda_{km})\right] \qquad (25)$$

A seguir, será obtida a equação:

$$\left[i_{km}(t_o)\right] = \left[g(v_{km}(t_o)\right] \qquad (26)$$

Substituindo a equação (23) na (25), obtém-se:

$$\left[i_{km}(t_o)\right] = \left[\left(\frac{1}{a_{km}} \left|\frac{\Delta t}{2} v_{km}(t_o) + b(t_o - \Delta t\right|\right)^{\alpha_{km}} \cdot \text{sign}\left(\frac{\Delta t}{2} v_{km}(t_o) + b(t_o - \Delta t)\right)\right] \qquad (26)$$

A seguir, será obtida a equação:

$$\left[v_{km}(t_o)\right] - \left[v_{km}{}^{o}(t_o)\right] + \left[R_{TH}\right]\left[g(v_{km}(t_o)\right] = \left[\ 0\ \right] \qquad (27)$$

Esta equação é obtida substituindo-se a equação (26) na equação (22)

$$\left[v_{km}(t_o)\right] - \left[v_{km}{}^{o}(t_o)\right] + \left[R_{TH}\right] \cdot \left[\left(\frac{1}{a_{km}} \left|\frac{\Delta t}{2} v_{km}(t_o) + b(t_o - \Delta t)\right|\right)^{\alpha_{km}} \cdot \text{sign}\left(\frac{\Delta t}{2} v_{km}(t_o) + b(t_o - \Delta t)\right)\right] = \left[\ 0\ \right] \qquad (27)$$

A equação (27) pode ser re-escrita como:

$$\left[F\left(v_{km}(t_o)\right)\right] = \left[F\left(v_{km}\right)\right] = \left[\,0\,\right] \qquad (28)$$

A equação (28) representa um conjunto de N equações não-lineares cujas incógnitas são as N tensões de ramo dos elementos não lineares.

A resolução da equação (28) é feita empregando o método numérico de Newton-Raphson.

Aplicando a fórmula de Taylor para funções de várias variáveis, na forma compacta, para o valor $\left[v_{kmo}\right]$, têm-se:

$$\left[F(v_{km})\right] = \left[F(v_{kmo})\right] + \left.\frac{\partial\,[F(v_{km})]}{\partial[v_{km}]}\right|_{[v_{km}]=[v_{kmo}]} \cdot \left(\left[v_{km}\right] - \left[v_{kmo}\right]\right) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2[F(v_{km})]}{\partial^2[v_{km}]}\right|_{[v_{km}]=[v_{kmo}]} \cdot \left[v_{km}\right] - [v_{kmo}]\Big)^2 + \ldots \qquad (29)$$

Sendo $\left[v_{km}^{*}\right]$ a solução da equação (28) e substituindo-a na equação (29) resulta:

$$\left[\,0\,\right] = \left[F(v_{kmo})\right] + \left.\frac{\partial\,[F(v_{km})]}{\partial[v_{km}]}\right|_{[v_{km}]=[v_{kmo}]} \cdot \left(\left[v_{km}^{*}\right] - \left[v_{kmo}\right]\right) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2[F(v_{km})]}{\partial^2[v_{km}]}\right|_{[v_{km}]=[v_{kmo}]} \cdot \left[v_{km}^{*}\right] - [v_{kmo}]\Big)^2 + \ldots$$

Sendo $\left[v_{kmo}\right]$ próximo a $\left[v_{km}^{*}\right]$ pode-se desprezar os termos de ordem $\geq 2$, resultando:

$$\left[\ 0\ \right] \cong \left[F(v_{kmo})\right] + \left.\frac{\partial[F(v_{km})]}{\partial[v_{km}]}\right|_{[v_{km}] = [v_{kmo}]} \cdot \left(\left[v_{km}*\right] - \left[v_{kmo}\right]\right) \quad (30)$$

$$\left[v_{km}*\right] \cong \left[v_{kmo}\right] - \left[\left.\frac{\partial[F(v_{km})]}{\partial[v_{km}]}\right|_{[v_{km}]= [v_{kmo}]}\right]^{-1} \cdot \left[F(v_{kmo})\right] \quad (31)$$

A equação (31) sugere o seguinte processo iterativo para o cálculo numérico do vetor $[v_{km}*]$:

$$\left[v_{km}^{(h+1)}\right] = \left[v_{km}^{(h)}\right] + \left[\Delta v_{km}^{(h)}\right] \quad (32)$$

$$\left[\Delta v_{km}^{(h)}\right] = -\left[J^{(h)}\right]^{-1} \cdot \left[F^{h}(v_{km})\right] \quad (33)$$

onde:

h é o número de iteração

$$\left[J^{(h)}\right] = \left.\frac{\partial[F(v_{km})]}{\partial[v_{km}]}\right|_{[v_{km}] = [v_{km}^{(h)}]} \quad (34)$$

é a matriz jacobiana na h-ésima iteração.

A seguir, será obtida a expressão geral da matriz jacobiana.

$$\left[\ J\ \right] = \frac{\partial[F(v_{km})]}{\partial[v_{km}]}$$

Derivando-se a equação (27), em ordem a $\left[v_{km}\right]$, obtém-se:

$$\left[\ J\ \right] = \left[\ U\ \right] + \left[R_{TH}\right] \frac{\partial[g(v_{km})]}{\partial[v_{km}]} \quad (35)$$

onde:

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

$$\frac{\partial[g(v_{km})]}{\partial[v_{km}]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g1}{\partial v1} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial g2}{\partial v2} & 0 \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \frac{\partial gN}{\partial vN} \end{bmatrix} \qquad (36)$$

Para o elemento não-linear i, tem-se:

$$\frac{\partial gi}{\partial vi} = \alpha_i \frac{\Delta t}{2a_i} \left[ \left| \frac{\Delta t}{2} v_i(t_o) + b_i(t_o - \Delta t) \right| / a_i \right]^{\alpha_i - 1} \qquad (37)$$

As equações (35), (36) e (37) permitem obter a matriz jacobiana para cada iteração.

Para começar o processo iterativo escolhem-se os seguintes valores iniciais:

$$\left[ v_{km}^{inicial}(t_o) \right] = \left[ v_{km}^{o}(t_o) \right] - \left[ R_{TH} \right] \left[ i_{km}(t_o - \Delta t) \right] \qquad (38)$$

onde:

$\left[ i_{km}(t_o - \Delta t) \right]$ é o vetor que contém os valores das correntes nos elementos não lineares no "step" anterior

## 4.2.3-2 - M INDUTORES E N-M RESISTÊNCIAS NÃO LINEARES

A seguir serão re-escritas as equações:

(22) e (26) do ítem anterior

(21) obtida no ítem 4.2.2

deste capítulo, para um instante $t_o$.

O teorema de Thevenin aplicado aos N ramos não lineares fornece a seguinte equação:

$$\underset{N\times 1}{\left[ v_{km}(t_o) \right]} = \underset{N\times 1}{\left[ v_{km}^{o}(t_o) \right]} - \underset{N\times N}{\left[ R_{TH} \right]} \underset{N\times 1}{\left[ i_{km}(t_o) \right]} \qquad (22)$$

Para os M indutores não lineares, tem-se:

$$\left[i_{km}(t_o)\right]_{Mx1} = \left[\left(\frac{1}{a_{km}}\left|\frac{\Delta t}{2} \cdot v_{km}(t_o) + b(t_o - \Delta t)\right|\right)^{\alpha_{km}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \operatorname{sign}\left(\frac{\Delta t}{2} \cdot v_{km}(t_o) + b(t_o - \Delta t)\right)\right]_{Mx1} \qquad (26)$$

onde o vetor $\left[b(t_o - \Delta t)\right]$ está dado pela equação (24).

A equação (21) do ítem 4.2.1 para N-M resistências não lineares em notação compacta fica:

$$\left[i_{km}(t_o)\right]_{(N-M)x1} = \left[\left(\frac{|v_{km}(t_o)|}{b_{km}}\right)^{\beta_{km}} \cdot \operatorname{sign} v_{km}(t_o)\right]_{(N-M)x1} \qquad (39)$$

Com base nas equações (26) e (39) o vetor de corrente $\left[i_{km}(t_o)\right]_{Nx1}$ pode ser expresso na forma:

$$\left[i_{km}(t_o)\right]_{Nx1} = \left[\begin{array}{c} \left[g\left(v_{km}(t_o)\right)\right]_{Mx1} \\ \hline \left[f\left(v_{km}(t_o)\right)\right]_{(N-M)x1} \end{array}\right]_{Nx1} \qquad (40)$$

Substituindo a equação (40) na equação (22) resulta:

$$\left[v_{km}(t_o)\right]_{Nx1} = \left[v^{o}_{km}(t_o)\right]_{Nx1} - \left[R_{TH}\right]_{NxN} \cdot \left[\begin{array}{c} \left[g\left(v_{km}(t_o)\right)\right]_{Mx1} \\ \hline \left[f\left(v_{km}(t_o)\right)\right]_{(N-M)x1} \end{array}\right]_{Nx1} \qquad (41)$$

A equação (41) pode ser re-escrita como:

$$\left[G\left(v_{km}(t_o)\right)\right] = \left[G(v_{km})\right] = \left[\,0\,\right] \qquad (42)$$

A equação (42) representa um conjunto de N equações

não lineares, cujas incógnitas são as N tensões de ramo dos elementos não lineares.

Como no caso anterior a resolução da equação (42) é feita utilizando-se o método numérico de Newton-Raphson. São, portanto, válidas as equações (32), (33) e (34) que por uma questão de clareza serão aqui re-escritas.

$$\left[v_{km}^{(h+1)}\right] = \left[v_{km}^{(h)}\right] + \left[\Delta v_{km}^{(h)}\right] \tag{32}$$

$$\left[\Delta v_{km}^{(h)}\right] = -\left[J^{(h)}\right]^{-1} \cdot \left[G_{(v_{km})}^{(h)}\right] \tag{33}$$

$$\left[J^{(h)}\right] = \left.\frac{\partial\left[G(v_{km})\right]}{\partial\left[v_{km}\right]}\right|_{[v_{km}] = [v_{km}^{(h)}]} \tag{34}$$

A seguir será obtida a expressão geral da matriz jacobiana. Derivando-se a equação (41) em ordem a $[v_{km}]$, obtém-se:

$$\left[\,J\,\right] = \left[\,U\,\right] + \left[\,R_{TH}\,\right] \frac{\partial\left[\dfrac{\left[\left[g\left(v_{km}\right)\right]\right]}{\left[\left[f\left(v_{km}\right)\right]\right]}\right]}{\partial\left[v_{km}\right]} \tag{43}$$

com:

$$\frac{\partial \begin{bmatrix} [g(v_{km})] \\ \hline [f(v_{km})] \end{bmatrix}}{\partial [v_{km}]} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial g_1}{\partial v_1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\partial g_M}{\partial v_M} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial f_1}{\partial v_{M+1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial f_{N-M}}{\partial v_N} \end{array}\right]$$

onde para o indutor não linear i, tem-se:

$$\frac{\partial g_i}{\partial v_i} = \alpha_i \frac{\Delta t}{2a_i} \left( \left| \frac{\Delta t}{2} v_i(t_o) + b_i(t_o - \Delta t) \right| / a_i \right)^{\alpha_i - 1} \qquad (37)$$

e para a resistência não linear j, tem-se:

$$\frac{\partial f_j}{\partial v_j} = \frac{\beta_j}{b_j} \left( \frac{|v_j|}{b_j} \right)^{\beta_j - 1} \qquad (44)$$

As equações (43), (37) e (44) permitem obter a matriz jacobiana para cada iteração.

Para começar o processo iterativo, como no caso anterior, utiliza-se a equação (38).

Os procedimentos acima descritos foram implementados computacionalmente na subrotina NONLIN em linguagem FORTRAN 77, incorporada ao programa UBC-EFEI.

No Anexo II é descrito para a subrotina NONLIN:

- "cartões" de dados de entrada
- saídas da subrotina
- fluxograma.

# 5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA SUBROTINA NONLIN

## 5.1. Introdução

Neste ítem é apresentado um sistema elétrico de potência, no qual foram feitos os seguintes estudos:

- Sobretensões sustentadas que provocaram a saturação de um transformador de potência.
- Sobretensões de manobra devidas à energização de uma linha de transmissão.

Cada estudo foi feito utilizando a subrotina NONLIN e também utilizando outros modelos de elementos não lineares disponíveis no programa de transitórios UBC-EFEI.

Finalmente, apresenta-se, para cada caso, uma análise e comparação dos resultados obtidos com os diferentes modelos, permitindo assim fazer uma avaliação dos novos modelos implementados.

## 5.2. Descrição do Sistema Elétrico de Potência

Na figura 29 a seguir é apresentado o esquema unifilar do sistema em estudo:

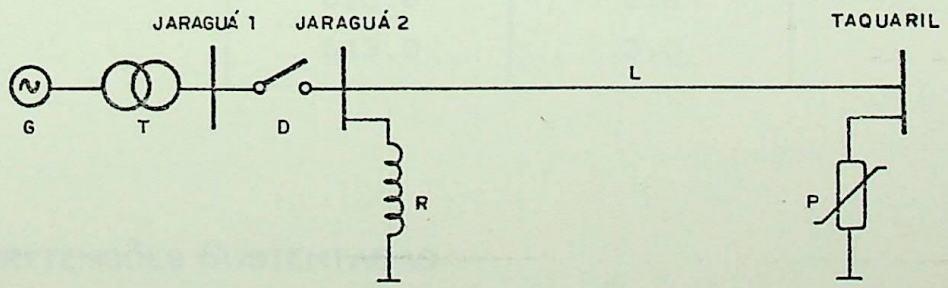



FIGURA 29: Esquema unifilar.

Nesta figura, tem-se:

G - gerador
T - transformador elevador
R - reator de compensação em derivação
D - disjuntor
L - linha de transmissão
P - pára-raio de óxido de zinco.

Os valores dos parâmetros dos diferentes componentes do sistema, foram tirados das referências [29] e [30] com exceção dos pára-raios.

A seguir será feita uma pequena descrição de como foi modelado cada elemento:

- Para os geradores e transformadores foi calculado o equivalente de Thevenin para cada sequência, visto do barramento de Jaguará1 de 345[kV]. A partir das reatâncias sequenciais de Thevenin $X_0$, $X_1$ e $X_2$ foi calculada a matriz de reatâncias próprias e mútuas.
- A partir das reatâncias sequenciais do reator de compensação foi calculada a matriz de reatâncias próprias e mútuas do mesmo.
- Foram adicionadas no barramento Jaguará1 três resistências em paralelo com três indutores não lineares para a representação das indutâncias magnetizantes e as perdas do núcleo do transformador equivalente.
- A linha foi modelada por parâmetros distribuidos.
- Os pára-raios de óxido de zinco foram representados através da seguinte característica tensão x corrente.

| v[kV] | i[kA] |
|---|---|
| 607.0 | 1.0 |
| 628.0 | 2.0 |
| 643.0 | 3.0 |

## 5.3 - Sobretensões Sustentadas

### 5.3.1 - Introdução

Foi escolhido como caso a estudar as sobretensões sustentadas presentes no sistema elétrico de potência do ítem anterior após a energização da linha desde o extremo emissor, Jaguará, com o extremo receptor, Taquaril, em vazio.

O esquema unifilar correspondente está indicado na

figura a seguir.

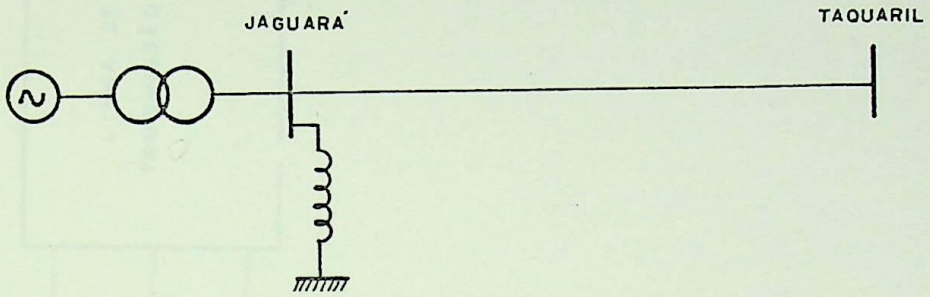



FIGURA 30: Esquema unifilar para o estudo das sobretensões sustentadas.

Neste caso, os parâmetros das fontes de tensão foram escolhidos da seguinte forma:

- Valor de pico

$$V_{max} = \frac{345 \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 10^3 = 282.0 \times 10^3 \text{ [V]}$$

- As funções que definem as fontes são do tipo $v = V_{max}.\cos(\omega t+\theta)$, os valores dos ângulos $\theta$ foram tais que os enlaces de fluxo do "ac steady state" resultaram pequenos.

Na figura 31, está indicado o esquema do sistema da figura 30 utilizado nos cálculos das sobretensões sustentadas.

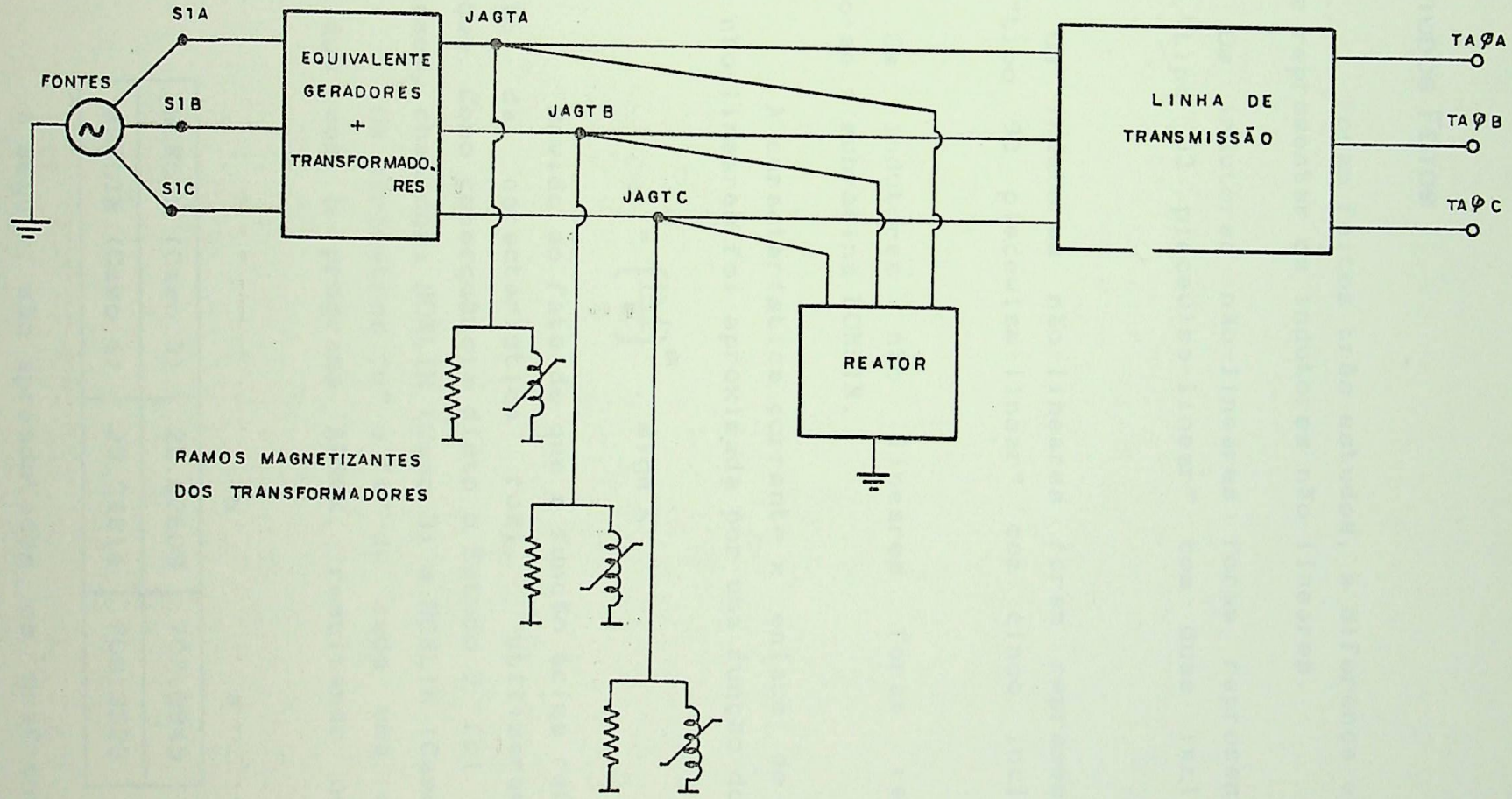



FIGURA 31: Esquema do sistema da figura 30 utilizado nos cálculos das sobretensões sustentadas.

## 5.3.2. - Estudos Feitos

Foram feitos três estudos, a diferença entre eles é a forma de representar os indutores não-lineares.

Estudo 1: Os indutores não-lineares foram representados pelo elemento "tipo 93 piecewise-linear" com duas inclinações (2 slopes).

Estudo 2: Os indutores não-lineares foram representados pelo elemento "tipo 93 piecewise-linear" com cinco inclinações (5 slopes).

Estudo 3: Os indutores não lineares foram representados utilizando-se a subrotina NONLIN.

A característica corrente x enlace de fluxo dos indutores não-lineares foi aproximada por uma função do tipo:

$$i = \left(\frac{|\lambda|}{a}\right)^{\alpha} . \text{ sign } \lambda$$

Devido ao fato de que a função acima referida é uma aproximação da característica real, utilizaram-se duas aproximações. Como consequência disto o Estudo 3 foi subdividido em dois casos, chamados: NONLIN (Caso 3) e NONLIN (Caso 4).

Os parâmetros "$\alpha$" e "a" de cada uma das funções foram obtidos com o programa APROX, resultando os seguintes valores:

| | $\alpha$ | a |
|---|---|---|
| NONLIN (Caso 3) | 22.62609 | 707.0945 |
| NONLIN (Caso 4) | 23.24614 | 708.3523 |

A seguir, são apresentados os gráficos das duas funções de aproximação obtidas para o estudo. Em cada gráfico foram plotadas a característica real (I) e a característica aproximada (IAPROX).

É também apresentado o arquivo de dados que foi utilizado neste estudo.

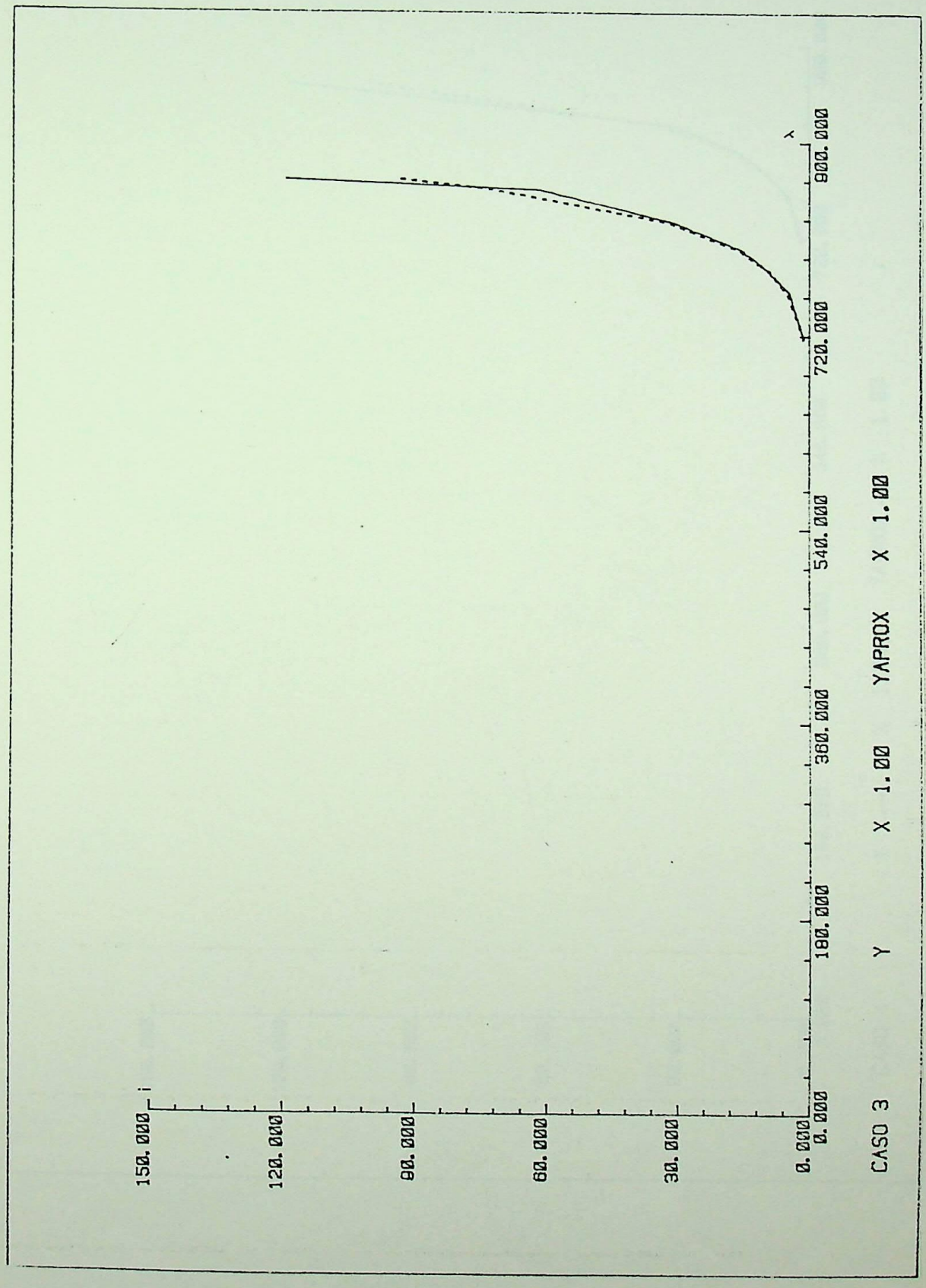



FIGURA 32: Características real e aproximada dos indutores não lineares - CASO 3.

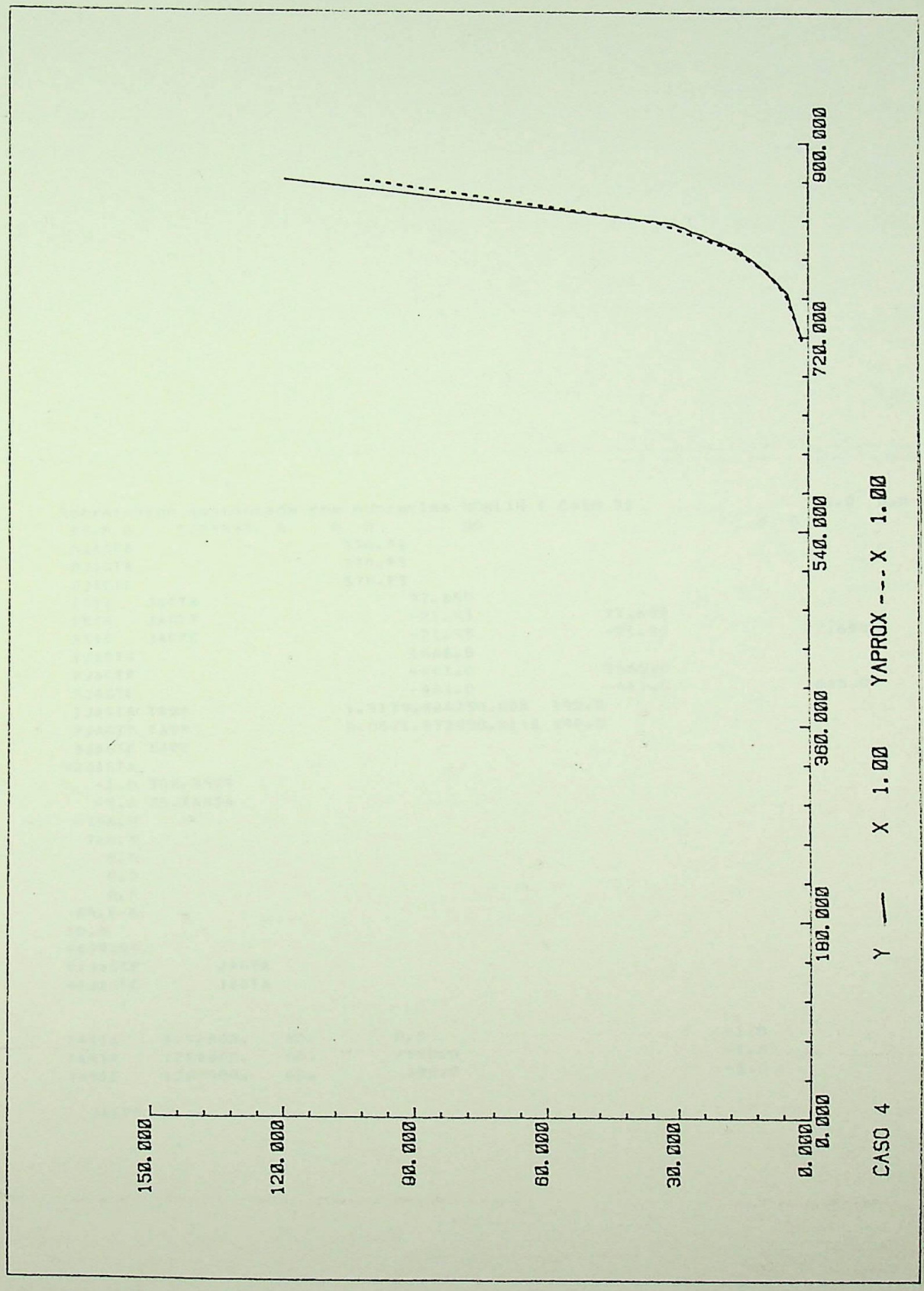



FIGURA 33: Características real e aproximada dos indutores não lineares - CASO 4.

Arqui

ARQ_NONLIN



```
Sobretensao sustentada com subrotina NONLIN ( CASO 3)                    60.0  0.0
 85.E-6     0.08333  0     0  0         00                              0  0
 0JAGTA                    370.E3
 0JAGTB                    370.E3
 0JAGTC                    370.E3
 1S1A    JAGTA                  77.650
 2S1B    JAGTB                  -21.95              77.650
 3S1C    JAGTC                  -21.95              -21.95          77.650
 1JAGTA                         1666.0
 2JAGTB                         -461.0              1666.0
 3JAGTC                         -461.0              -461.0          1666.0
 1JAGTA TADA               1.3179.884250.008  398.0
 2JAGTB TADB               0.0571.373950.0118 398.0
 3JAGTC TADC                                                                1
92JAGTA
   -1.0 708.3523
   -3.6 23.24614
 -756.9
  760.5
    0.0
    0.0
    0.0
 85.E-6
10.0
9999999.                                                                    2
92JAGTB        JAGTA                                                        3
92JAGTC        JAGTA


14S1A    1282000.   60.        0.0                          -1.0
14S1B    1282000.   60.       -120.0                        -1.0
14S1C    1282000.   60.        120.0                        -1.0

  JAGTB
```

- Arquivo correspondente ao Estudo 3.

0,0 16,67

## 5.3.3 - Resultados Obtidos

Foram plotadas as tensões nos extremos emissor e receptor da linha Jaguará-Taquaril para os diferentes estudos já mencionados.

Os gráficos correspondentes são apresentados a seguir, assim como os gráficos tirados da referência [29].

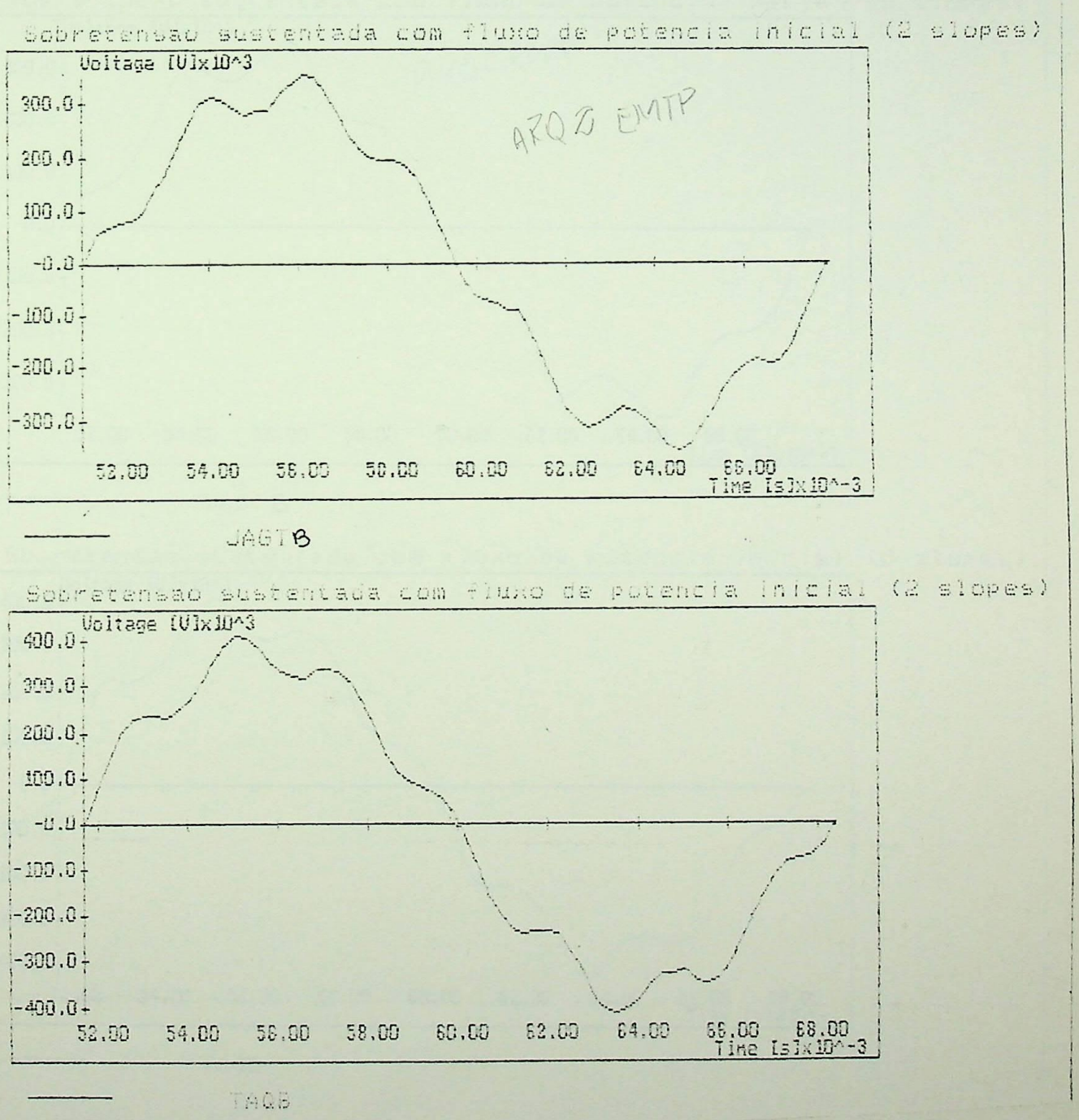



FIGURA 34: Tensões nos barramentos Jaguará e Taquaril correspondentes ao Estudo 1.

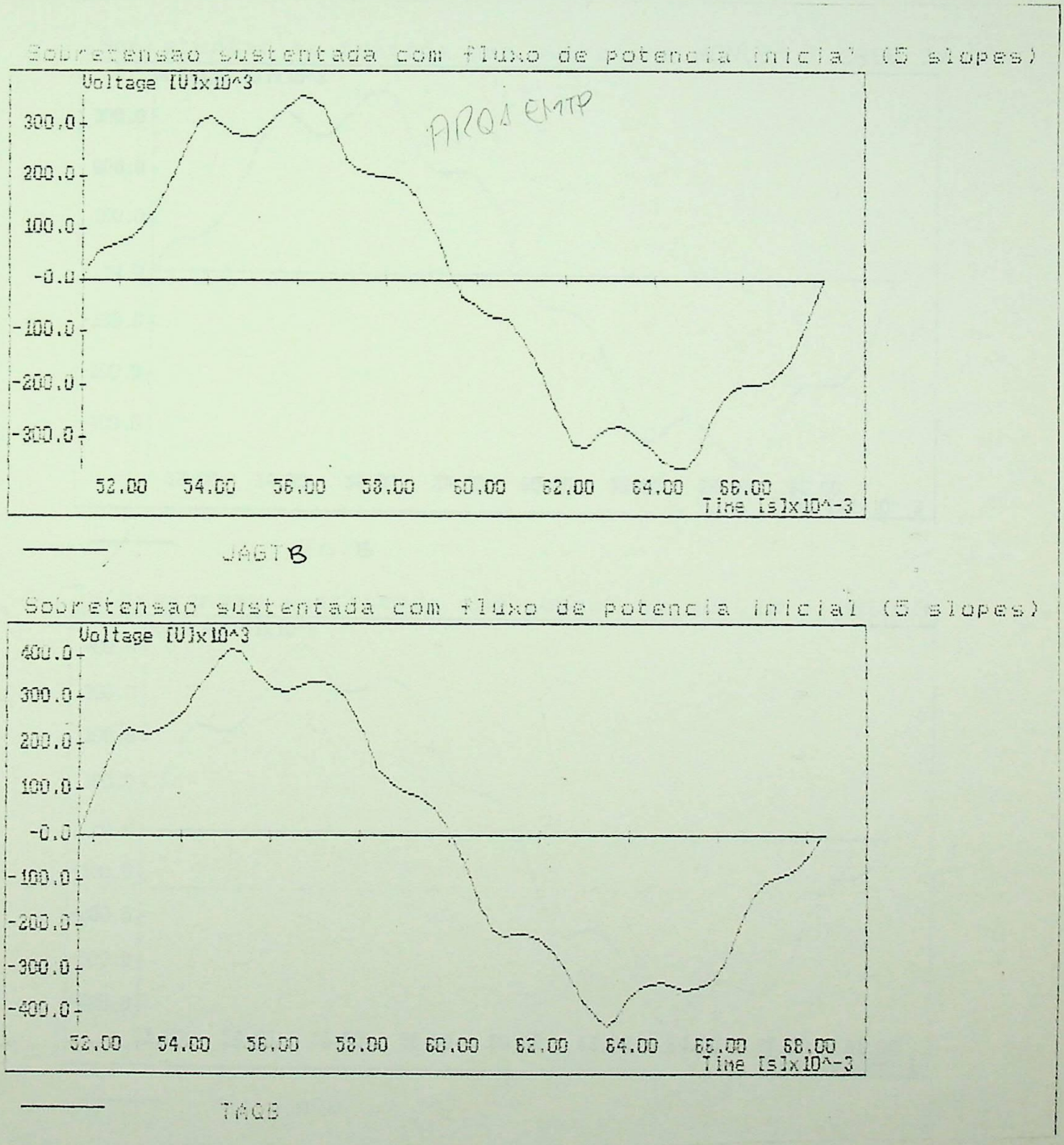



FIGURA 35: Tensões nos barramentos Jaguará e Taquaril correspondentes ao Estudo 2.

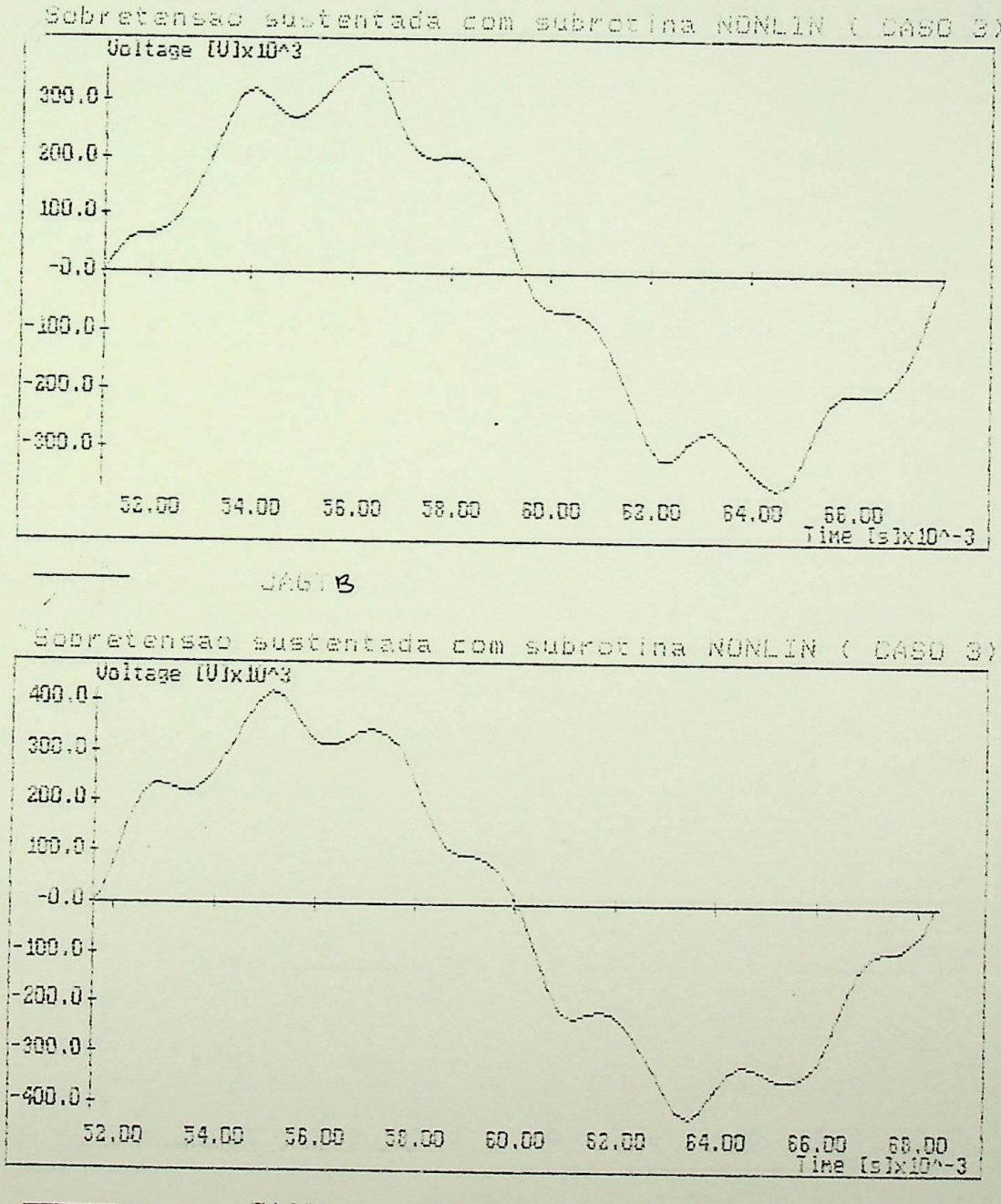



FIGURA 36: Tensões nos barramentos Jaguará e Taquaril correspondentes ao Estudo 3 NONLIN (Caso 3).

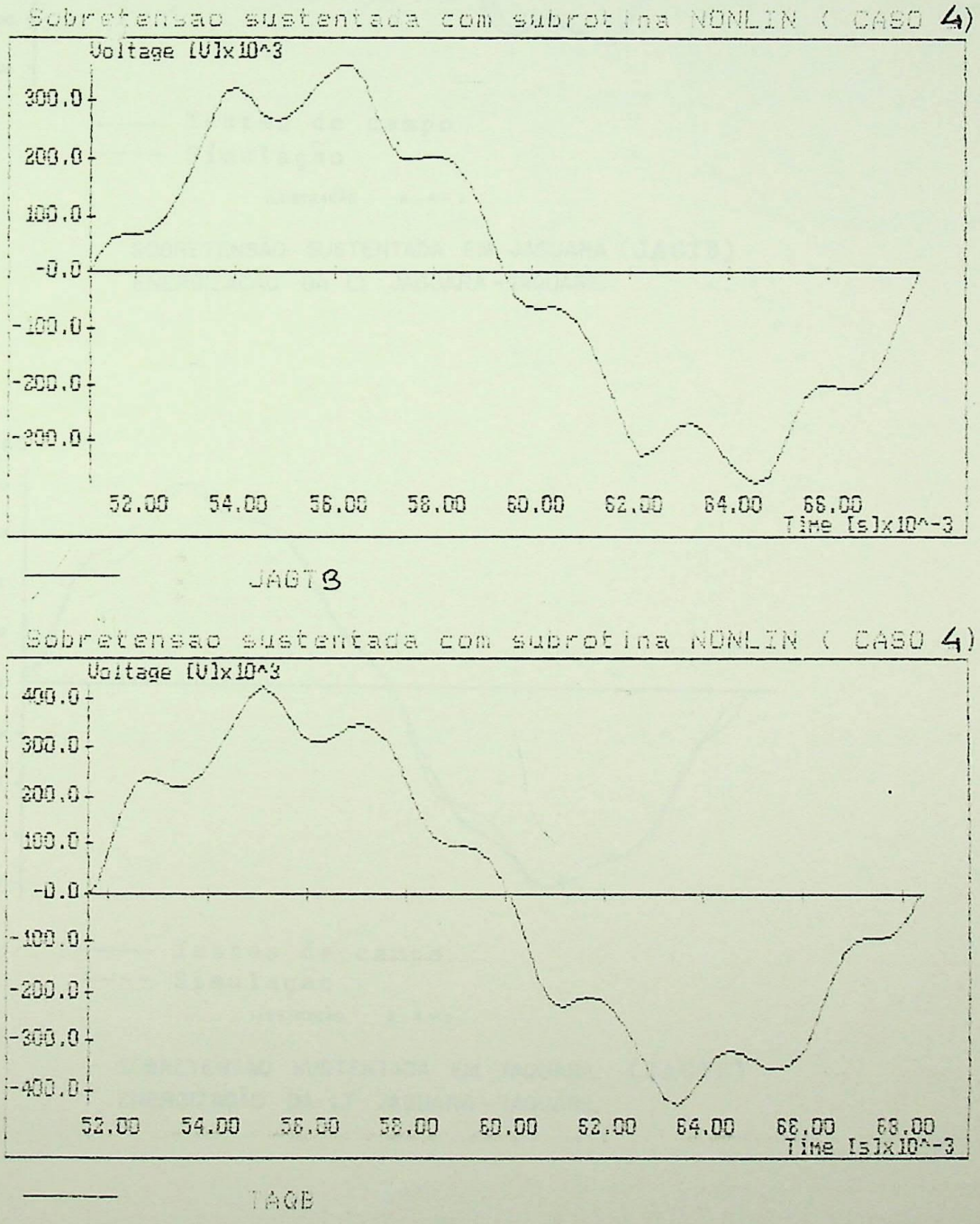
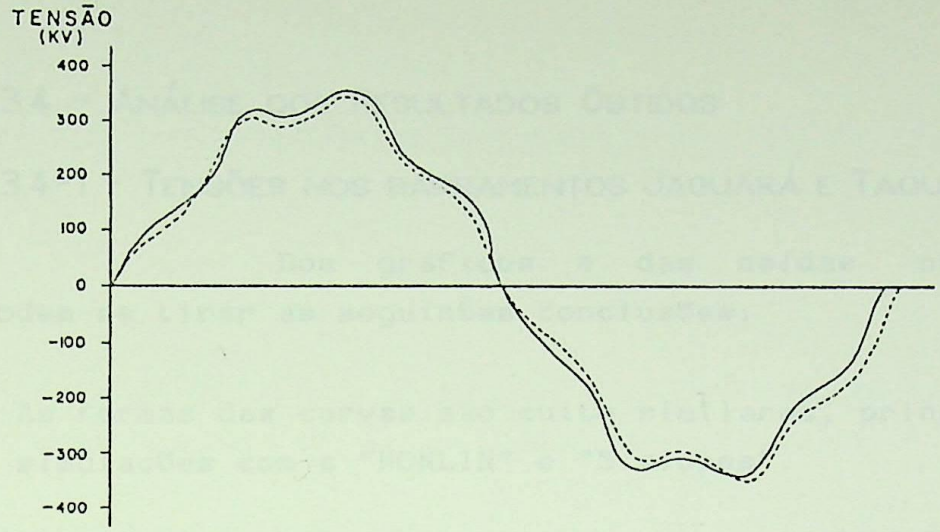



FIGURA 37: Tensões nos barramentos Jaguará e Taquaril correspondentes ao Estudo 3 - NONLIN (Caso 4).

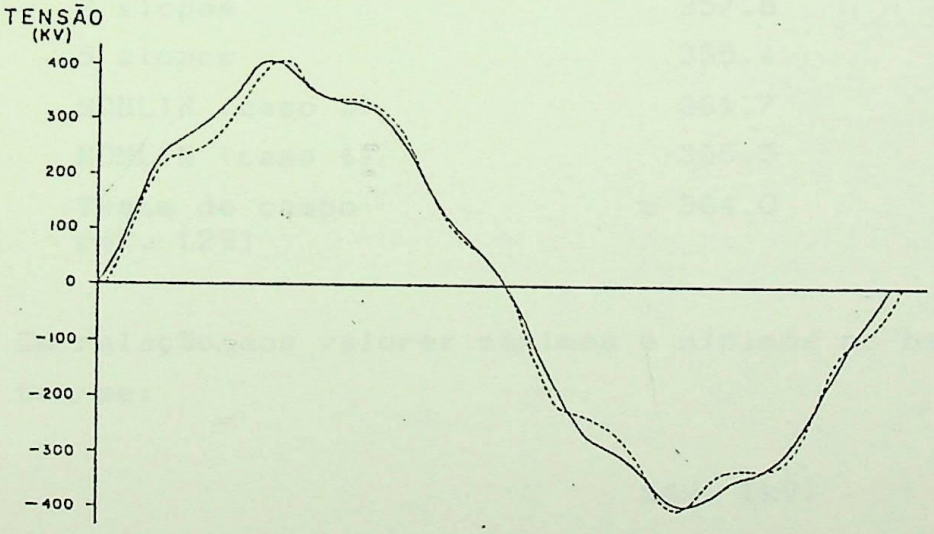



——— Testes de campo
---- Simulação

ILUSTRAÇÃO 8.4-1

SOBRETENSÃO SUSTENTADA EM JAGUARA (JAGTB)
ENERGIZAÇÃO DA LT JAGUARA-TAQUARIL

BH/GSP/12




——— Testes de campo
---- Simulação

ILUSTRAÇÃO 8.4-2

SOBRETENSÃO SUSTENTADA EM TAQUARIL (JAGTB)
ENERGIZAÇÃO DA LT JAGUARA-TAQUARIL

BH/GSP/12

FIGURA 38: Gráficos tirados da referência [29].

## 5.3.4 - Análise dos Resultados Obtidos

### 5.3.4-1 - Tensões nos barramentos Jaguará e Taquaril

Dos gráficos e das saídas numéricas obtidos podem-se tirar as seguintes conclusões:

- As formas das curvas são muito similares, principalmente para as simulações com a "NONLIN" e "5 slopes".

- As diferenças nos valores para um mesmo $\Delta t$ são muito pequenas $\approx 5\%$.

- Em relação aos valores máximos e mínimos no barramento Jaguará, tem-se:

| | Máx. [kV] | Min. [kV] |
|---|---|---|
| 2 slopes | 357.8 | -363.7 |
| 5 slopes | 355.4 | -360.1 |
| NONLIN (caso 3) | 361.7 | -369.2 |
| NONLIN (caso 4) | 365.5 | -373.7 |
| Teste de campo ref. [29] | $\approx$ 364.0 | $\approx$ -360.0 |

- Em relação aos valores máximos e mínimos no barramento Taquaril, tem-se:

| | Máx. [kV] | Min. [kV] |
|---|---|---|
| 2 slopes | 410.5 | -410.9 |
| 5 slopes | 417.4 | -427.9 |
| NONLIN (caso 3) | 420.1 | -426.7 |
| NONLIN (caso 4) | 424.4 | -431.4 |
| Teste de campo ref. [29] | $\approx$ 419.0 | $\approx$ -414.0 |

Observa-se a concordância entre os valores das simulações e entre estes e os valores de teste de campo.

## 5.3.4-2 - CORRENTES PELOS RAMOS NÃO LINEARES E ENLACES DE FLUXO NELES

Dos gráficos e das saídas numéricas obtidas, podem-se tirar as seguintes conclusões:

- No caso de usar a subrotina NONLIN as mudanças nas correntes são mais suaves (não se fecham e abrem chaves).

- As formas das curvas das correntes são muito similares.

- Na simulação com a subrotina NONLIN os pontos sobre a curva $\lambda = f(i)$ não apresentam a histerese artificial indicada no ítem 3.1.

- No caso de usar "piecewise linear inductances" com 2 e 5 slopes os overshoots são pequenos (ítem 3.2).

- O modelo "5 slopes piecewise linear inductance" para o indutor não-linear é o indicado a seguir.

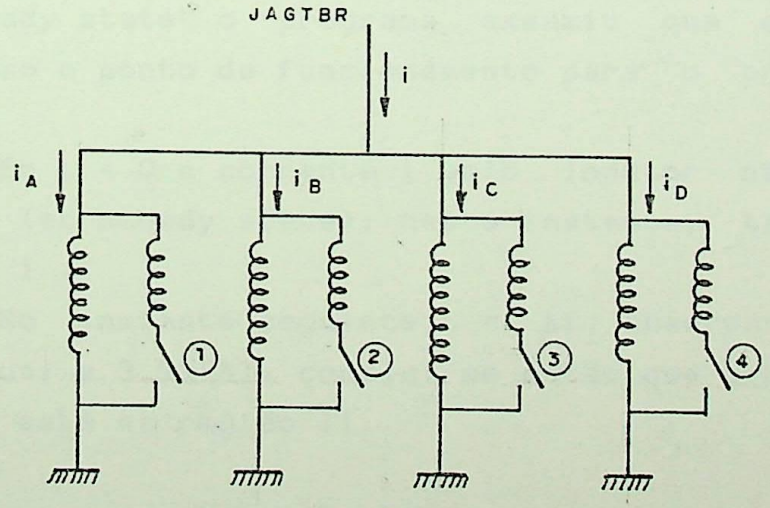



FIGURA 39: Modelo "5 slopes piecewise linear inductance" do indutor não-linear.

Com este modelo obtém-se para o indutor não linear colocado na fase B do barramento Jaguará, a característica enlace de fluxo x corrente indicada a seguir:

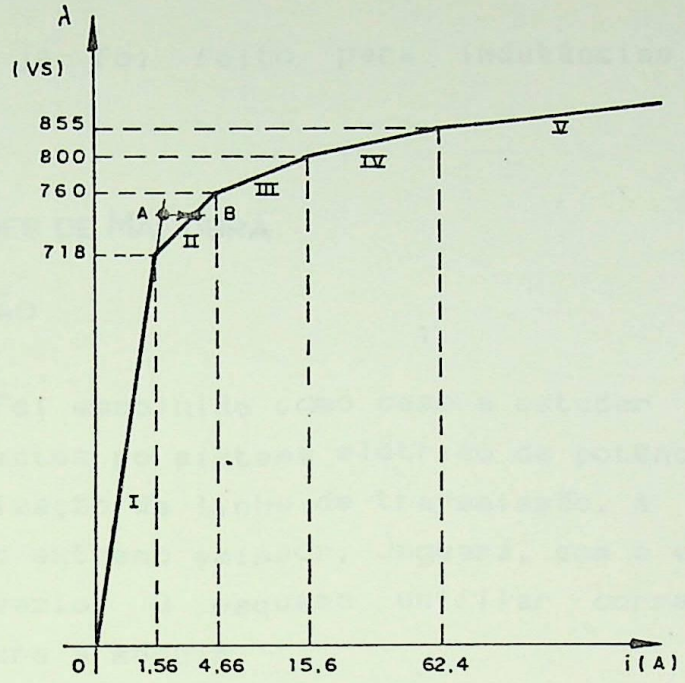



FIGURA 40: Característica enlace de fluxo x corrente para o indutor não linear colocado na fase B do barramento Jaguará.

Para t = 0 tem-se que o enlace de fluxo no indutor não linear é 756.3 Vs, portanto, o ponto de funcionamento já estaria na região II da curva da figura 40. Mas como foi feita uma solução "ac steady state" o programa assumiu que o indutor é linear e por isso o ponto de funcionamento para o programa é o "A".

Em t = 0 a corrente i pelo indutor não linear é igual a 1.64[A] (ac steady state); neste instante, também deverá fechar a chave 1 .

No instante seguinte t = Δt observa-se que a corrente i é igual a 3.92[A]; conclui-se então que o novo ponto de funcionamento B está na região II.

- Até agora, quando utiliza-se no UBC-EFEI o método de compensação generalizado os elementos não lineares não são considerados no regime permanente ("ac steady state") e, por isso, as correntes nos elementos não lineares são nulas para t = 0 o qual não é correto. Para levar isto em consideração teria-se que incluir uma indutância linear para cada indutor não linear no "ac steady

state" como já foi feito para indutâncias não lineares monofásicas.

## 5.4 - Sobretensões de Manobra

### 5.4.1 - Introdução

Foi escolhido como caso a estudar as sobretensões de manobra presentes no sistema elétrico de potência do ítem 5.2 quando da energização da linha de transmissão. A energização foi simulada desde o extremo emissor, Jaguará, com o extremo receptor, Taquaril, em vazio. O esquema unifilar correspondente está indicado na figura a seguir.

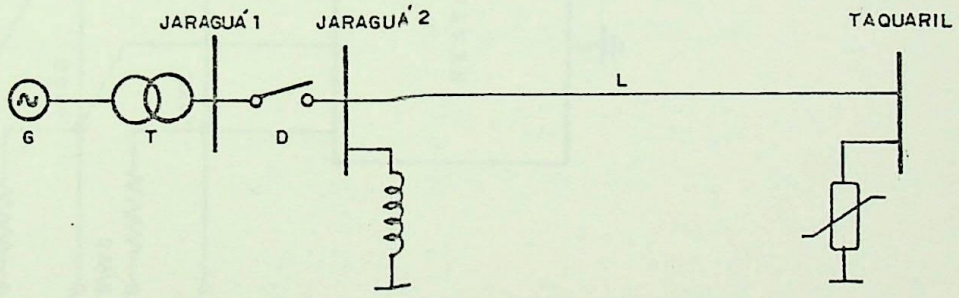



FIGURA 41: Esquema unifilar para o estudo de sobretensões de manobra.

Neste caso, os parâmetros das fontes de tensão foram escolhidos da seguinte forma:

- Valor de pico

$$V_{max} = \frac{0.95 \times 345 \times \sqrt{2} \times 10^3}{\sqrt{3}} = 267.607 \times 10^3 \quad [V]$$

- As funções que definem as fontes são do tipo $v = V_{max}.\cos(\omega t+\theta)$, os valores dos ângulos $\theta$ foram tais que os enlaces de fluxo do "ac steady state" resultaram pequenos.

Na figura 42, está indicado o esquema do sistema da figura 41 utilizado nos cálculos das sobretensões de manobra.

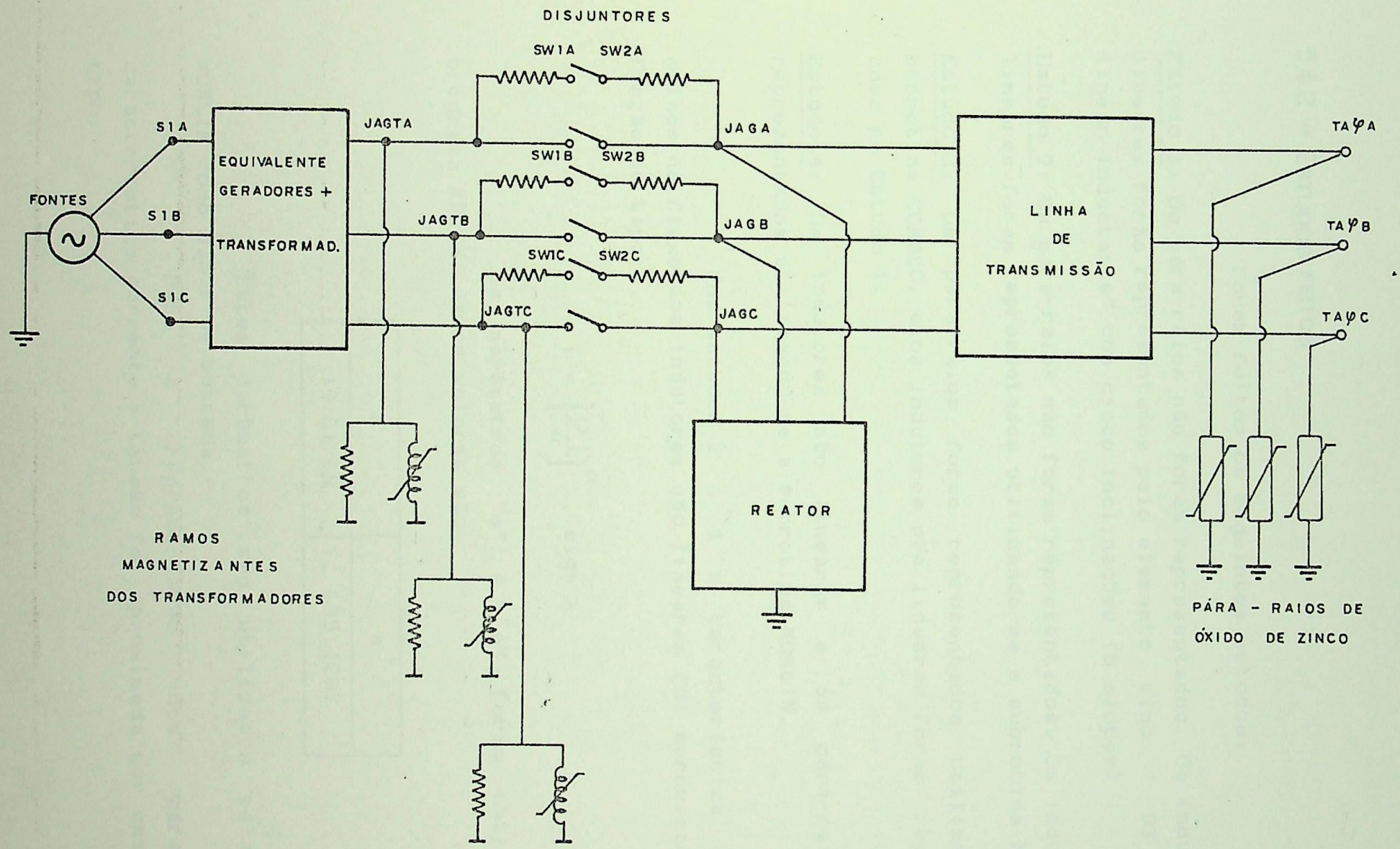



FIGURA 42: Esquema do sistema da figura 41 utilizado nos cálculos das sobretensões de manobra - Estudos 3 e 4.

## 5.4.2 - Estudos feitos

Foram feitos os seguintes estudos:

Estudo 1: Os pára-raios não foram representados. Os indutores não lineares foram representados pelo elemento tipo " 93 piecewise linear inductance" com cinco inclinações (5 slopes).

Estudo 2: Os pára-raios não foram representados. Os indutores não lineares foram representados utilizando-se a subrotina NONLIN.

Estudo 3: Os pára-raios foram representados utilizando-se a subrotina CONNEC, e os indutores não lineares foram representados como no Estudo 1.

Estudo 4: Os indutores não lineares e os pára-raios foram representados utilizando-se a subrotina NONLIN.

Nos estudos 2 e 4 a característica corrente x enlace de fluxo dos indutores não lineares foi aproximada por uma função do tipo:

$$i = \left(\frac{|\lambda|}{a}\right)^{\alpha} . \text{sign } \lambda$$

Os parâmetros "$\alpha$" e "a" foram obtidos com o programa APROX; estes valores são:

| $\alpha$ | a |
|---|---|
| 19.61768 | 699.4287 |

Estes parâmetros são utilizados pela subrotina NONLIN como dados de entrada.

Para a representação dos pára-raios a característica corrente x tensão foi aproximada por uma função do tipo:

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

$$i = \left(\frac{|v|}{b}\right)^{\beta} . \text{ sign } v$$

Os parâmetros "$\beta$" e "b" foram obtidos com o programa APROX; estes valores são:

| $\beta$ | b |
|---|---|
| 19.16011 | 422999.8 |

Estes parâmetros são utilizados pelas subrotinas CONNEC e NONLIN como dados de entrada.

A seguir, são apresentados os gráficos das funções de aproximação para os indutores não lineares e para os pára-raios. Em cada gráfico foram plotadas a característica real (I) e a característica aproximada (IAPROX).

São também apresentados os arquivos de dados que foram utilizados nos estudos 2 e 4.

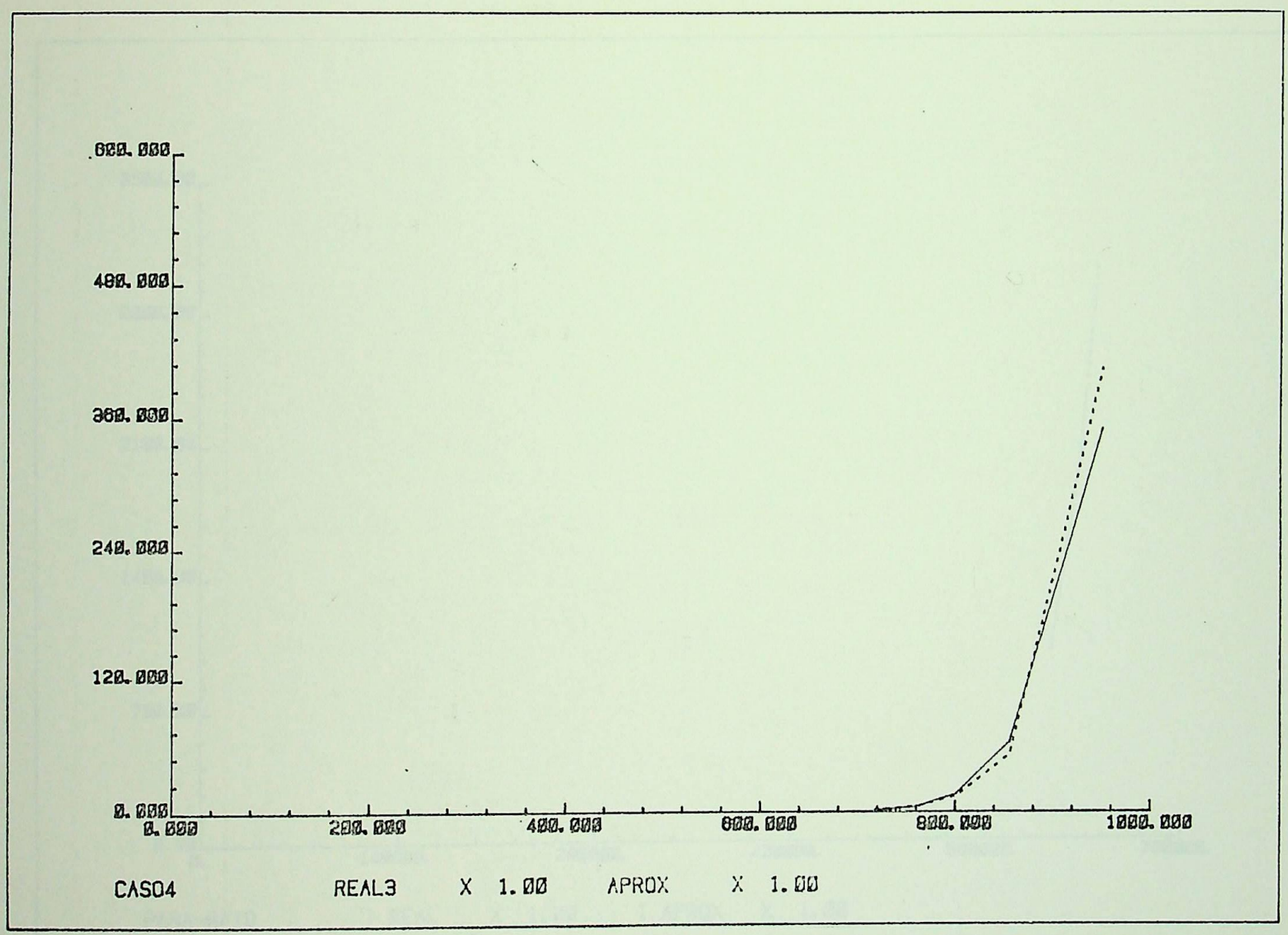



FIGURA 43: Características real e aproximada dos indutores não lineares.

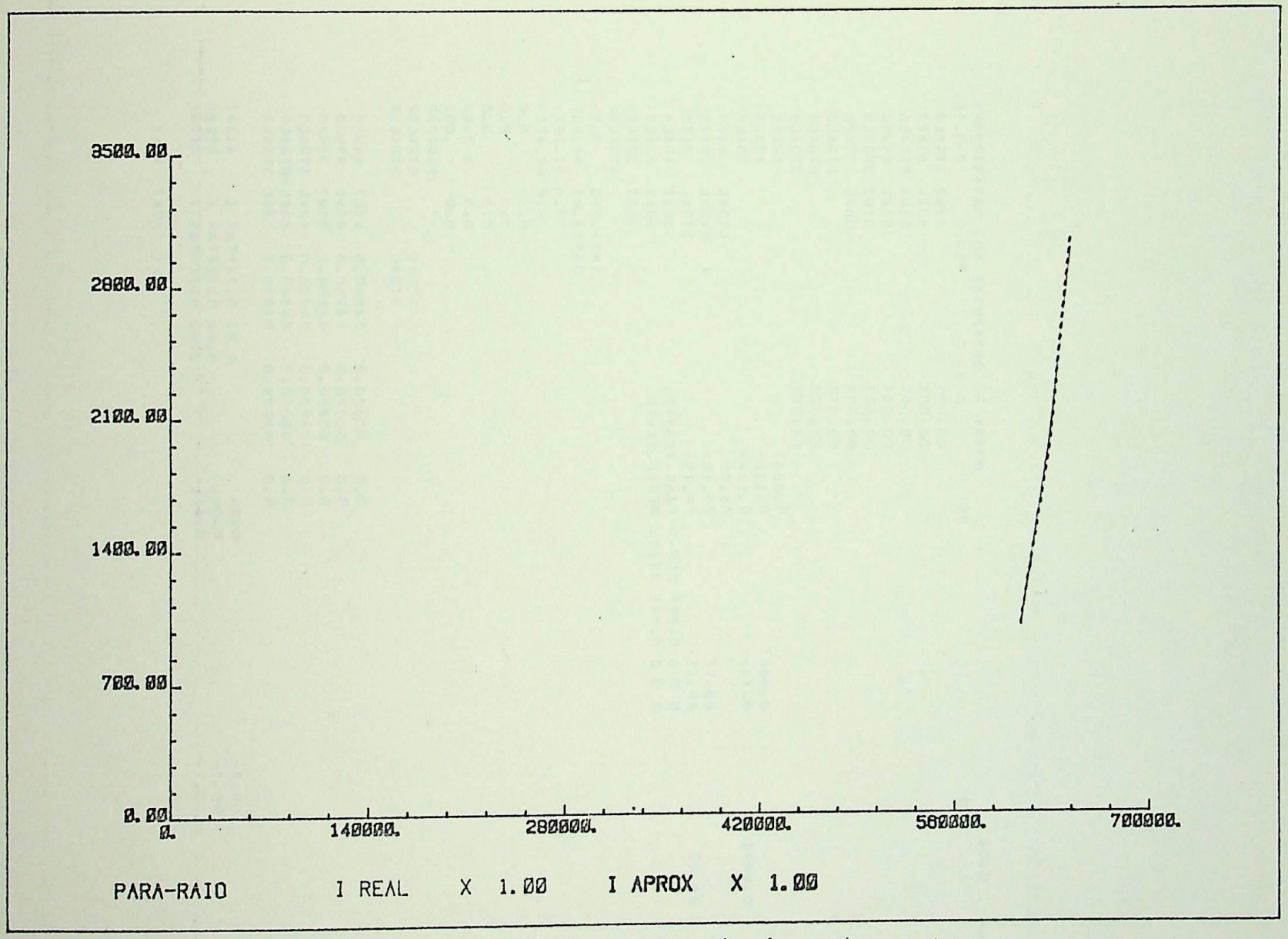



FIGURA 44: Características real e aproximada dos pára-raios.

```
ENERGIZACAO COM SATURACAO DE TRAFO                                          60.0    0.0
50.E-6      0.025       0  0 0          00                          0
 0JAGTA SW1A                  200.00
 0SW2A  JAGA                  200.00
 0JAGTB SW1B                  200.00
 0SW2B  JAGB                  200.00
 0JAGTC SW1C                  200.00
 0SW2C  JAGC                  200.00
 0JAGTA                       370.E3
 0JAGTB                       370.E3
 0JAGTC                       370.E3
 1JAGA                              1666.0
 2JAGB                              -461.0              1666.0
 3JAGC                              -461.0              -461.0          1666.0
 1S1A   JAGTA                        77.65
 2S1B   JAGTB                       -21.95               77.65
 3S1C   JAGTC                       -21.95              -21.95           77.65
-1JAGA  TAOA                 -.321831.2669 0.008 398.0 0 0 0
-2JAGB  TAOB                 -.03419.37478 -.0118 398.0 0 0 0
-3JAGC  TAOC
92JAGTA
-1.0    699.4287
709.98  19.61768
-355.16 0.0
-354.83 0.0
0.0      1.0
0.0      0.0
0.0      0.0
50.E-6   0.0
100.     0.0
9999999.
92JAGTB        JAGTA
92JAGTC        JAGTA

 0SW1A  SW2A  0.00845   0.05500   0.0
 0SW1B  SW2B  0.00715   0.05500   0.0
 0SW1C  SW2C  0.00810   0.05500   0.0
 0JAGTA JAGA  0.01585   0.05500   0.0
 0JAGTB JAGB  0.01445   0.05500   0.0
 0JAGTC JAGC  0.01510   0.05500   0.0

14S1A    1 267811.0 60.0            90.0                    -1.00
14S1B    1 267811.0 60.0           -30.0                    -1.00
14S1C    1 267811.0 60.0           210.0                    -1.00

  TADA  TAOB  TAOC
```

- Arquivo correspondente ao Estudo 2.

NOVO_CASO2
NRQ_NONLIN
NONLIN_EMTP

NOVO_CASO1
NOVO_CASO2
NOVO_CASO3

```
ENERGIZACAO COM SATURACAO DE TRAFO E PARA-RAIOS (NONLIN)              60.0    0.0
50.E-6      0.075       0  0 0          00                        0
 0JAGTA SW1A                200.00
 0SW2A  JAGA                200.00
 0JAGTB SW1B                200.00
 0SW2B  JAGB                200.00
 0JAGTC SW1C                200.00
 0SW2C  JAGC                200.00
 0JAGTA                     370.E3
 0JAGTB                     370.E3
 0JAGTC                     370.E3
 1JAGA                           1666.0
 2JAGB                           -461.0              1666.0
 3JAGC                           -461.0              -461.0          1666.0
 1S1A   JAGTA                     77.65
 2S1B   JAGTB                    -21.95               77.65
 3S1C   JAGTC                    -21.95              -21.95           77.65
-1JAGA  TAOA                .321831.2669 0.008 398.0 0 0 0 0
-2JAGB  TAOB                .03419.37478 .0118 398.0 0 0 0 0
-3JAGC  TAOC
92JAGTA                                                                      1
-1.0    699.4287
709.98  19.61768
-355.16 422999.8
-354.83 19.16011
0.0      -1.0
0.0
0.0
50.E-6
100.
9999999.
92JAGTB        JAGTA                                                         2
92JAGTC        JAGTA                                                         3
92TAOA         JAGTA                                                        41
92TAOB         JAGTA                                                        51
92TAOC         JAGTA                                                        61

 0SW1A  SW2A  0.00845   0.05500   0.0
 0SW1B  SW2B  0.00715   0.05500   0.0
 0SW1C  SW2C  0.00810   0.05500   0.0
 0JAGTA JAGA  0.01585   0.05500   0.0
 0JAGTB JAGB  0.01445   0.05500   0.0
 0JAGTC JAGC  0.01510   0.05500   0.0

14S1A    1 267811.0 60.0            90.0                    -1.0
14S1B    1 267811.0 60.0           -30.0                    -1.0
14S1C    1 267811.0 60.0           210.0                    -1.0
```

- Arquivo correspondente ao Estudo 4.

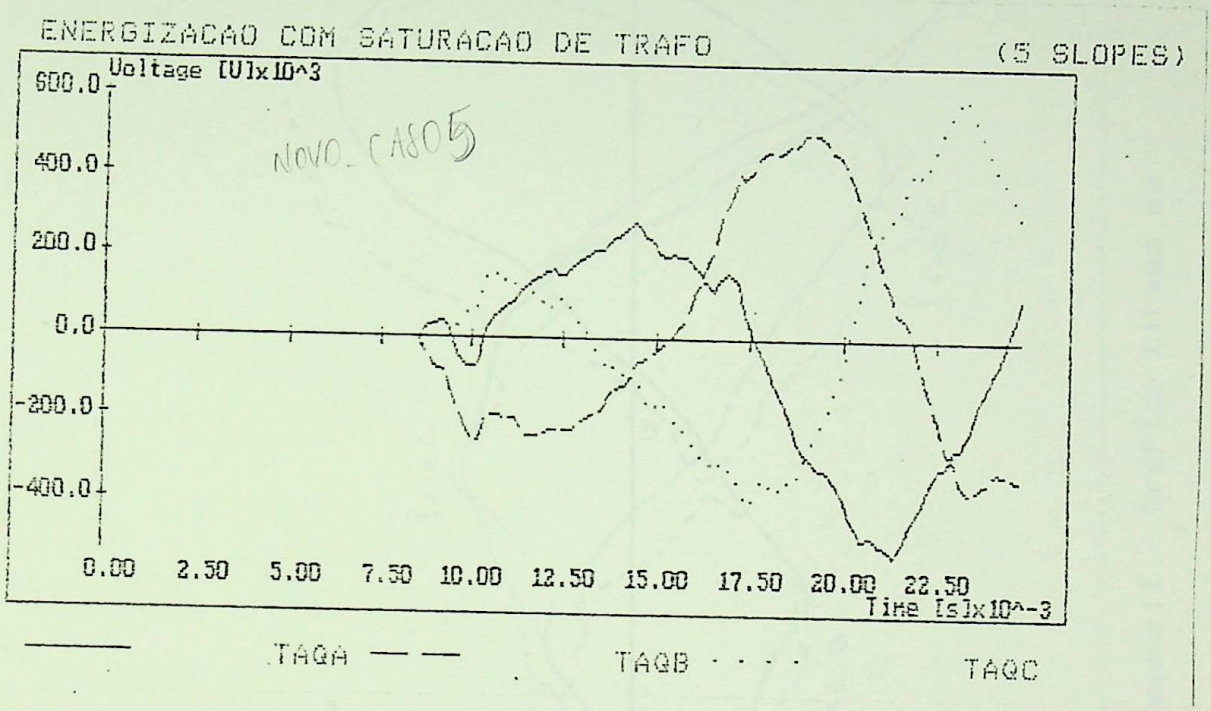
### 5.4.3 - Resultados obtidos

Para os estudos 1 e 2 foram plotadas as tensões no extremo receptor Taquaril.

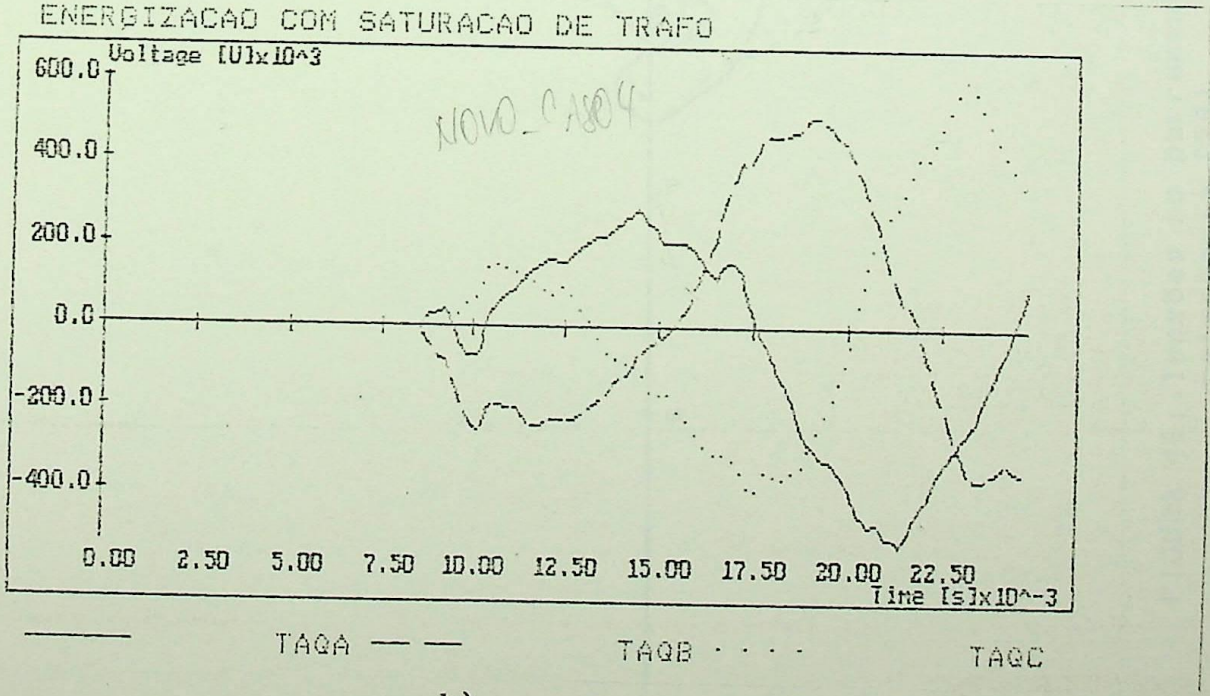
Para os estudos 3 e 4 foram plotados:

- tensões no extremo receptor Taquaril;
- correntes pelos pára-raios situados no barramento Taquaril;
- tensões no barramento Jaguará1 antes dos disjuntores (JAGTA, JAGTB e JAGTC no esquema da figura 42;
- tensões no barramento Jaguará2 depois dos disjuntores (JAGA, JAGB e JAGC no esquema da figura 42).

Estes gráficos são apresentados a seguir, assim como os gráficos tirados da referência [29].




a)




b)

FIGURA 45: Tensões no barramento Taquaril
a) Estudo 1
b) Estudo 2.

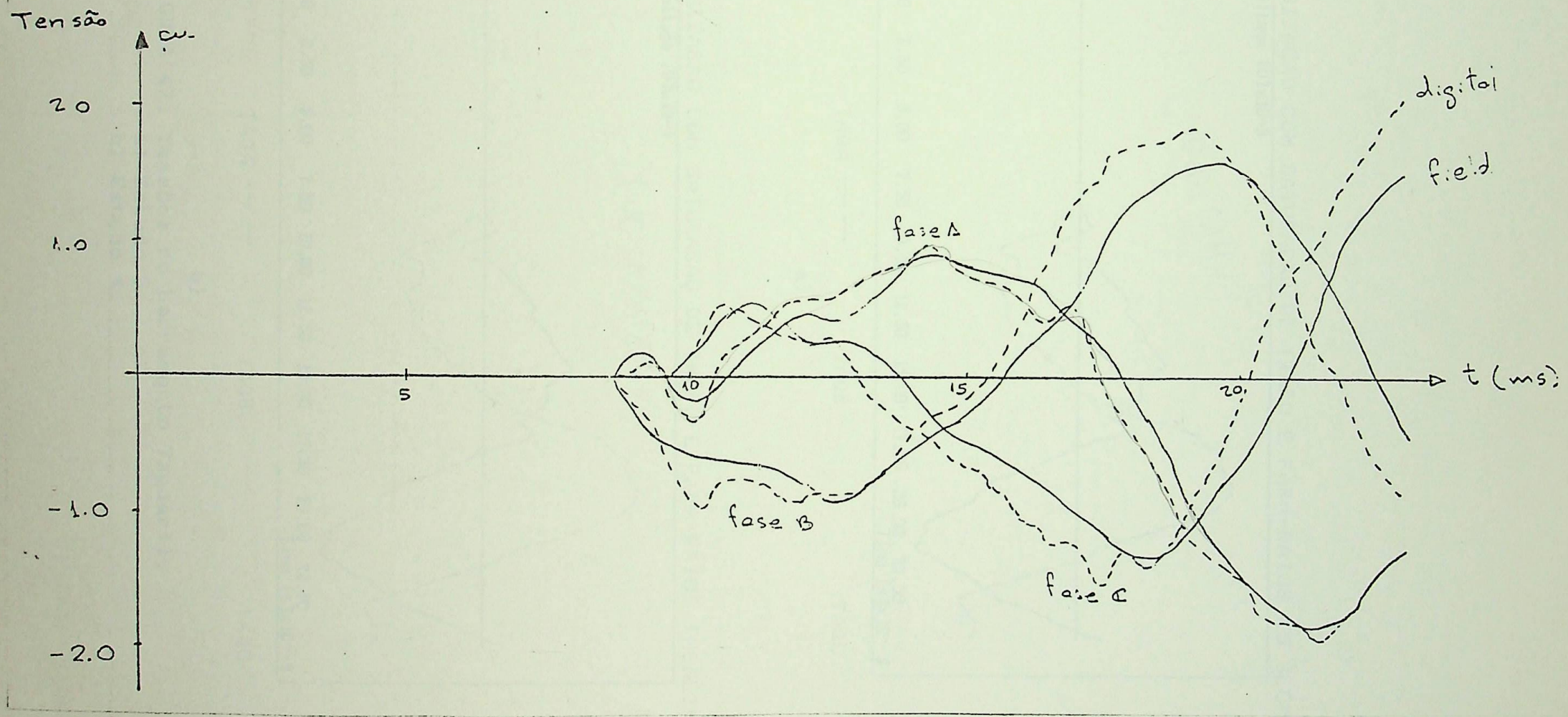
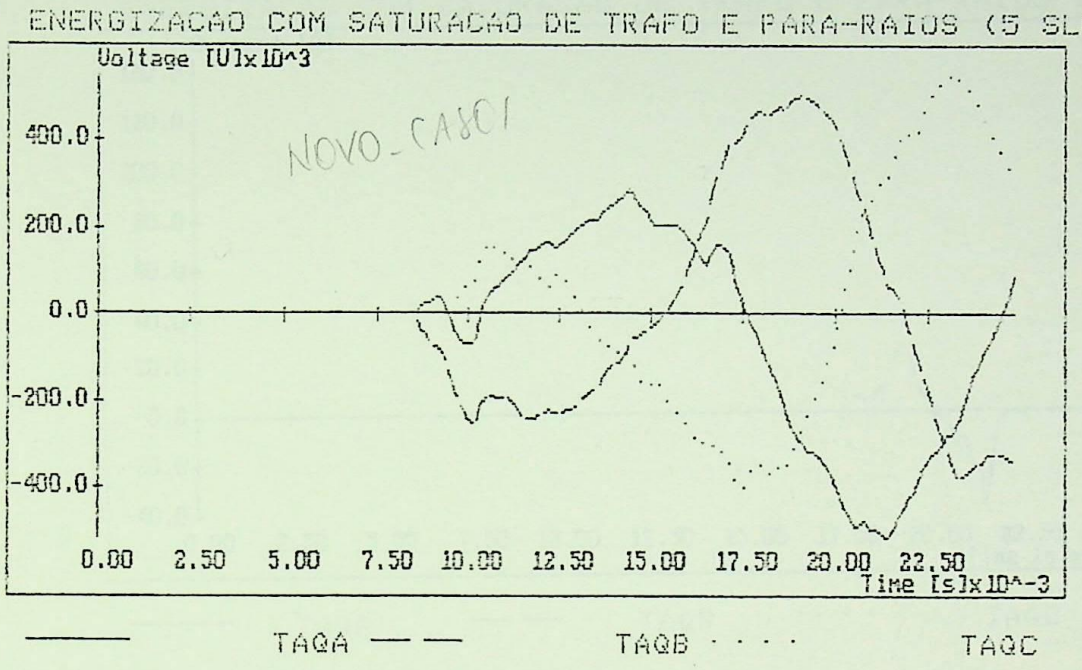
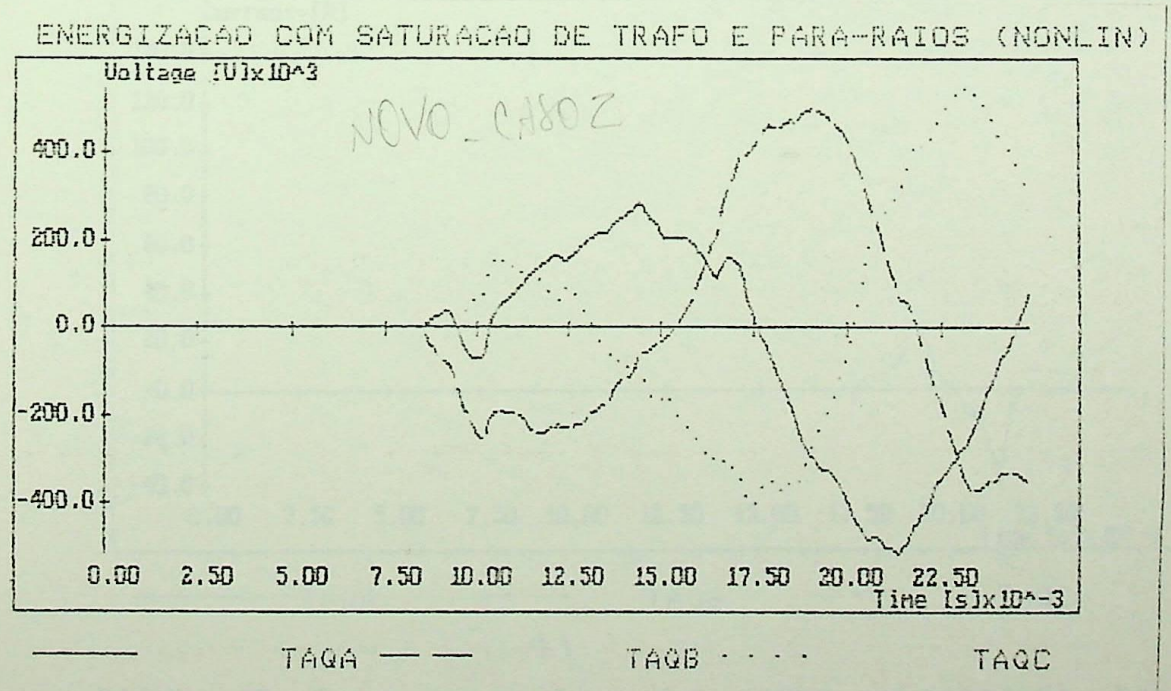



FIGURA 46: Tensões no barramento Taquaril - Gráfico tirado da referência [29].

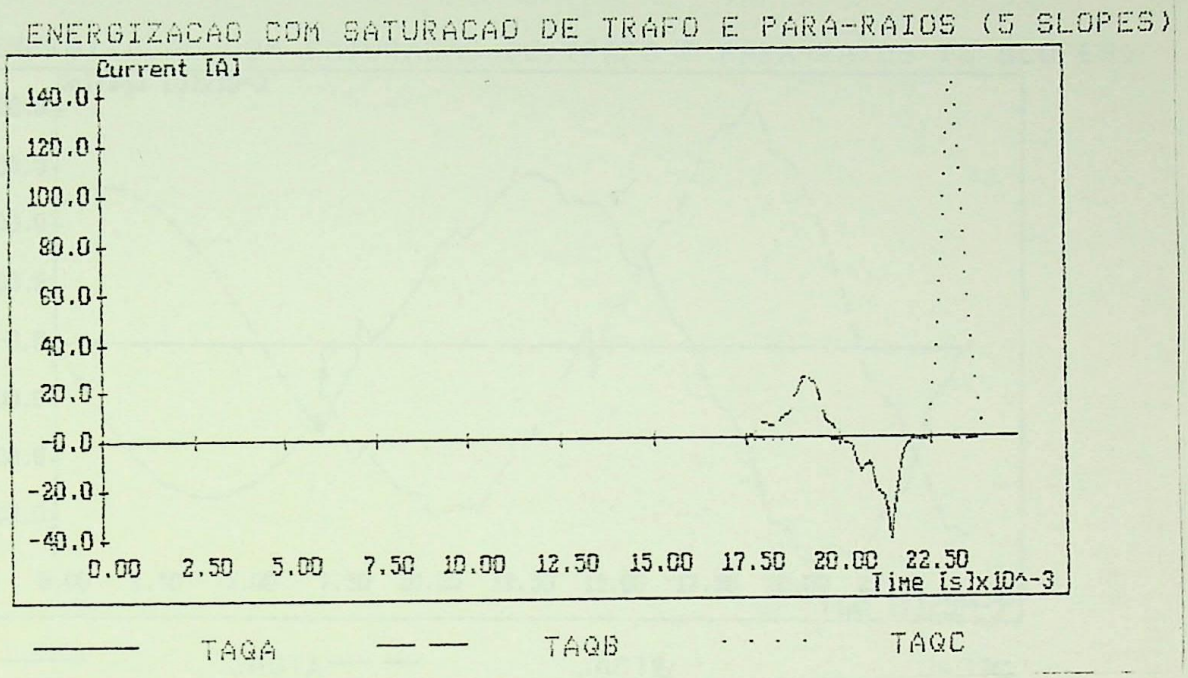



a)

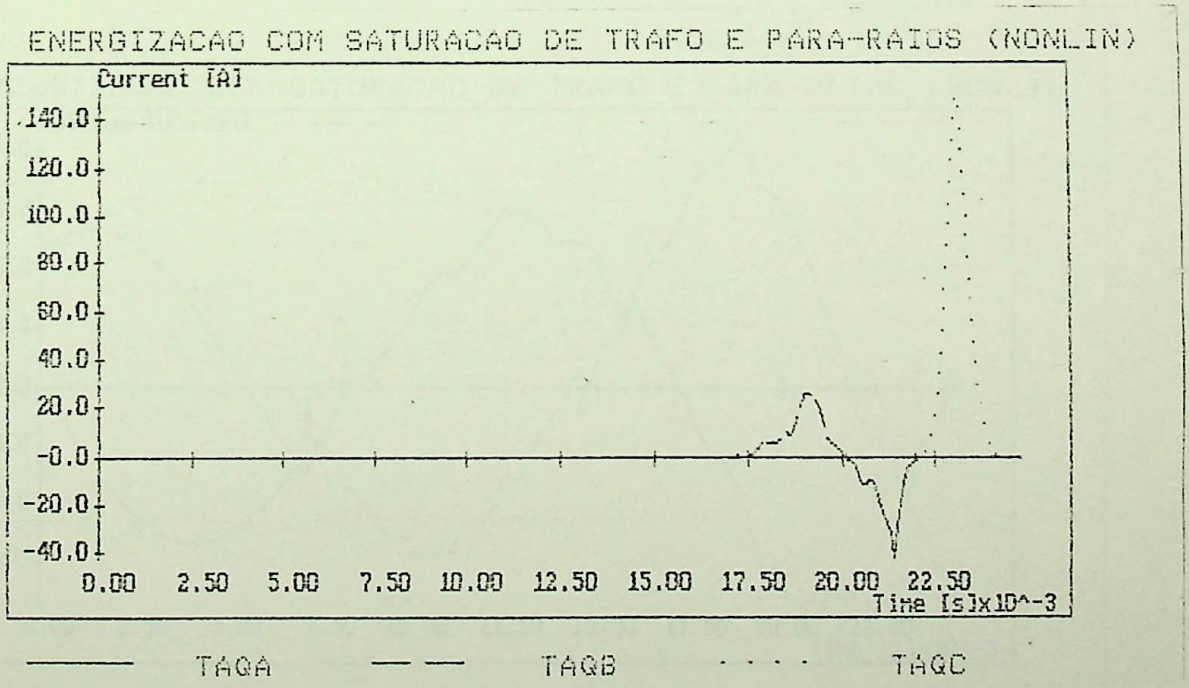



b)

FIGURA 47: Tensões no barramento Taquaril.
a) Estudo 3
b) Estudo 4.

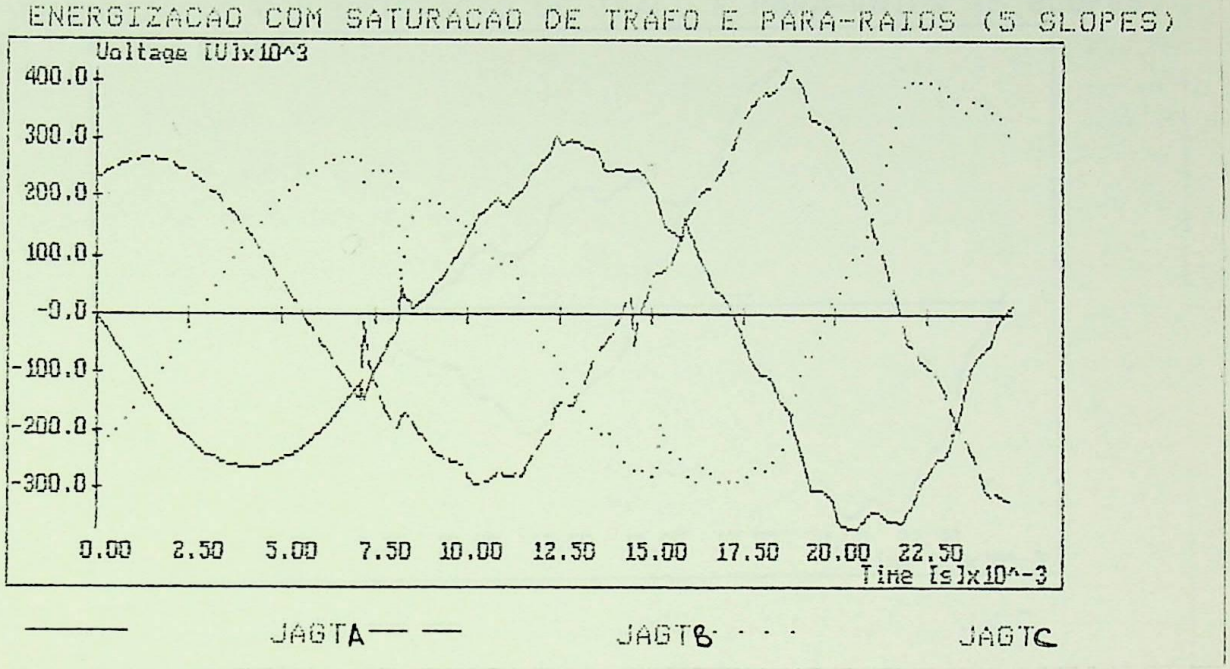



a)

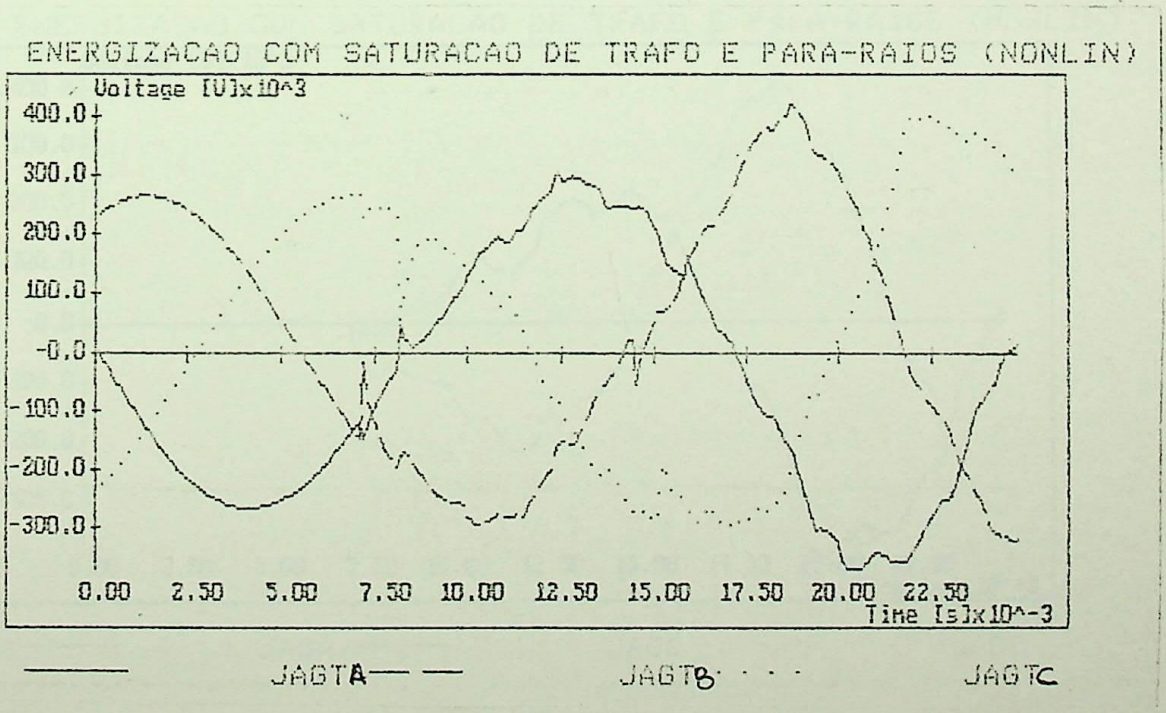



b)

FIGURA 48: Correntes pelos pára-raios situados no barramento Taquaril.
a) Estudo 3
b) Estudo 4.



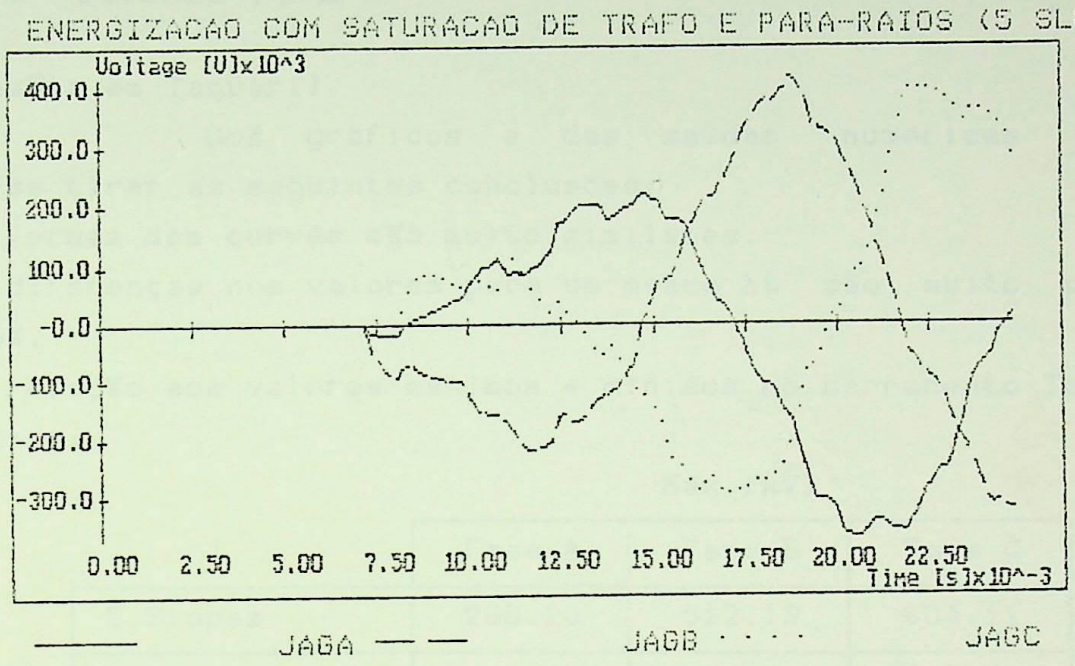

a)



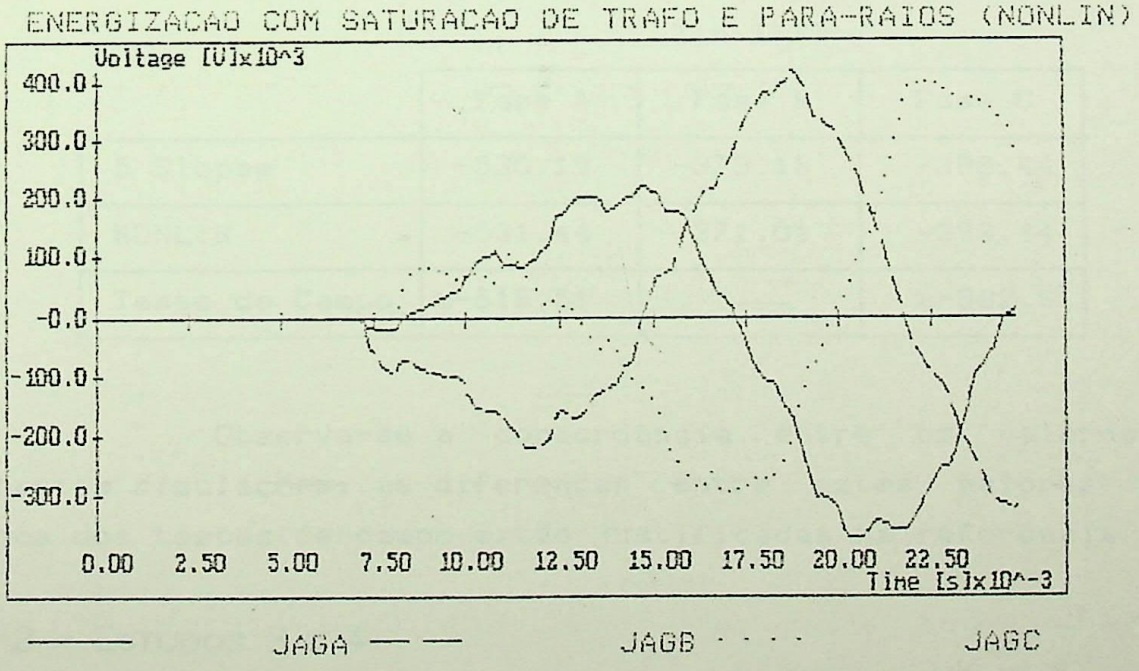

b)

FIGURA 49: Tensões no barramento Jaguará1
a) Estudo 3
b) Estudo 4

NOVO_CASO1




b) "




a)

FIGURA 50: Tensões no barramento Jaguará2
a) Estudo 3
b) Estudo 4.

## 5.4.4 - Analise dos resultados obtidos

### 5.4.4-1 - Estudos 1 e 2

- Tensões em Taquaril

Dos gráficos e das saídas numéricas obtidas pode-se tirar as seguintes conclusões:

- As formas das curvas são muito similares.
- As diferenças nos valores para um mesmo $\Delta t$ são muito pequenos $\approx 5\%$.
- Em relação aos valores máximos e mínimos no barramento Taquaril, tem-se:

Máx [kV]

| | Fase A | Fase B | Fase C |
|---|---|---|---|
| 5 Slopes | 288.20 | 512.13 | 604.11 |
| NONLIN | 288.33 | 513.28 | 607.80 |
| Teste de Campo | ≈258.25 | ≈449.56 | —— |

Min [kV]

| | Fase A | Fase B | Fase C |
|---|---|---|---|
| 5 Slopes | -530.19 | -373.16 | -398.44 |
| NONLIN | -531.44 | -371.01 | -398.44 |
| Teste de Campo | ≈-516.51 | —— | ≈-382.6 |

Observa-se a concordância entre os valores das diferentes simulações; as diferenças entre estes valores e os obtidos dos testes de campo estão justificadas na referência [30].

### 5.4.4-2 - Estudos 3 e 4

- Tensões no barramento Taquaril e correntes pelos pára-raios ubicados nesse barramento.

Dos gráficos e das saídas numéricas obtidas pode-se

tirar as seguintes conclusões:

- As formas das curvas são muito similares.
- As diferenças nos valores para um mesmo Δt são muito pequenas ≈ 5%.
- Em relação aos valores máximos e mínimos de tensão no barramento Taquaril, tem-se:

Máx [kV]

| | Fase A | Fase B | Fase C |
|---|---|---|---|
| 5 Slopes | 288.20 | 501.21 | 548.48 |
| NONLIN | 288.33 | 502.02 | 549.60 |

Min [kV]

| | Fase A | Fase B | Fase C |
|---|---|---|---|
| 5 Slopes | -513.19 | -374.54 | -398.4 |
| NONLIN | -513.96 | -369.23 | -397.65 |

- Em relação às correntes máximas, em valor absoluto, pelos pára-raios ubicados no barramento Taquaril, tem-se:

(A)

| | Fase A | Fase B | Fase C |
|---|---|---|---|
| 5 Slopes | 40.615 | 25.809 | 145.11 |
| NONLIN | 41.778 | 26.615 | 150.94 |

Observa-se a concordância entre os valores das diferentes simulações.

Comparando as tensões em Taquaril dos estudos 3 e 4 com as dos estudos 1 e 2 pode-se observar como os pára-raios limitam as sobretensões no extremo receptor da linha.

- Tensões no barramento Jaguará1

Dos gráficos e das saídas numéricas obtidas pode-se

tirar as seguintes conclusões:

- As formas das curvas são muito similares.
- As diferenças nos valores para um mesmo Δt são muito pequenas ≈ 5%.
- Em relação aos valores máximos e mínimos no barramento, tem-se:

Máx [kV]

| | Fase A | Fase B | Fase C |
|---|---|---|---|
| 5 Slopes | 299.68 | 422.08 | 402.69 |
| NONLIN | 299.77 | 421.60 | 401.89 |

Min [kV]

| | Fase A | Fase B | Fase C |
|---|---|---|---|
| 5 Slopes | -372.64 | -325.00 | -294.69 |
| NONLIN | -372.68 | -323.75 | -294.67 |

Observa-se a concordância entre os valores das diferentes simulações.

Comparando as tensões em Jaguará1 dos estudos 3 e 4 com as dos estudos 1 e 2 pode-se concluir que as formas das curvas são muito similares e as diferenças nos valores para um mesmo Δt muito pequenas.

# C A P Í T U L O  I V

## MODELOS DE TRANSFORMADORES DE POTÊNCIA OBTIDOS COM BASE EM CIRCUITOS MAGNÉTICOS

# CAPÍTULO IV

# MODELOS DE TRANSFORMADORES DE POTÊNCIA OBTIDOS COM BASE EM CIRCUITOS MAGNÉTICOS

## 1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é a obtenção de modelos de transformadores de potência para estudos de transitórios eletromagnéticos com base em circuitos magnéticos.

Tais circuitos magnéticos resultam de assumir, para o transformador, determinados caminhos para os seus diferentes fluxos magnéticos.

A aplicação nestes circuitos do princípio topológico da dualidade, conduz aos circuitos elétricos desejados dos transformadores.

Estes modelos circuitais com elementos concentrados e desacoplados apresentam-se como uma alternativa aos modelos matriciais obtidos no capítulo II.

A obtenção de novos modelos permite:

- dispor de mais modelos para as simulações de transitórios eletromagnéticos e, portanto, ter mais possibilidades de escolha do modelo que melhor se ajuste para uma particular aplicação.
- fazer uma comparação com os modelos matriciais do Capítulo II e observar assim as simplificações feitas na obtenção dos mesmos.

## 2 - TEORIA

A primeira e mais difícil etapa na obtenção de um circuito elétrico equivalente é a redução dos fluxos magnéticos que se têm na estrutura magnética do transformador, para um circuito magnético com relutâncias concentradas. Para isto, tem que ser determinados os diferentes caminhos de fluxo na estrutura, e esta etapa é determinante porque o circuito elétrico equivalente obtido depende dos caminhos escolhidos. Quanto mais precisa seja a

distribuição de fluxos adotada mais exato será o circuito elétrico equivalente, porém maior será o gráu de complexidade do circuito magnético equivalente.

A segunda etapa consiste na obtenção do circuito elétrico equivalente ao circuito magnético de relutâncias concentradas, o que será feito pelo princípio topológico da dualidade quando este for plano.

A seguir, será feito um exemplo para se ter uma melhor compreensão do procedimento.

## 2.1 - Obtenção de um Circuito Magnético Equivalente

Vai ser derivado um circuito magnético equivalente para o sistema magnético simples da figura 1.

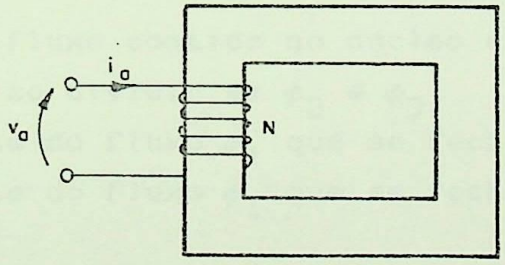



FIGURA 1: Sistema magnético simples.

O sistema é constituido por um núcleo de material magnético com um enrolamento de N espiras, excitado por uma fonte de tensão $v_a$ e percorrido por uma corrente $i_a$.

Consideremos nele dois caminhos de fluxo:

a) Caminho "1" que se fecha pelo núcleo.

b) Caminho "2" que percorre parte do núcleo e que depois se fecha no ar.

Na figura 2 a seguir estão indicados esses

caminhos.

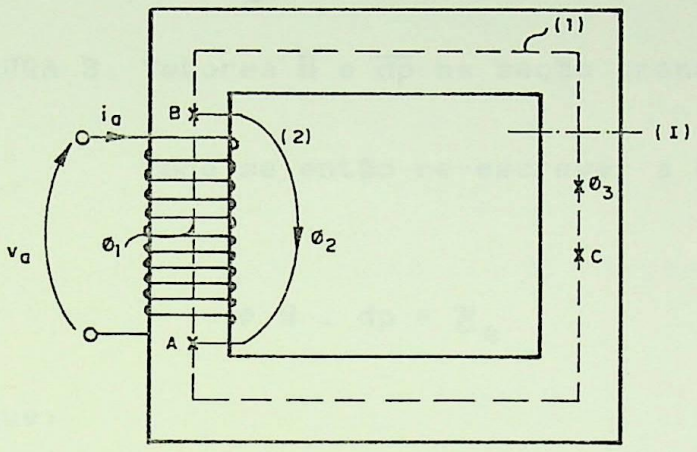



FIGURA 2: Caminhos de fluxo considerados no sistema magnético simples da figura 1.

onde:

$\phi_1$ é o fluxo contido no núcleo entre os pontos A e B, que vai se dividir em $\phi_2$ e $\phi_3$

$\phi_2$ parte do fluxo $\phi_1$ que se fecha pelo ar

$\phi_3$ parte do fluxo $\phi_1$ que se fecha pelo núcleo

A lei de Ampere para o caminho "1" estabelece que:

$$\oint \mathbb{H} \cdot \overline{dp} = Ni_a = \mathfrak{F}_a \qquad (1)$$

onde:

$\mathbb{H}$ - vetor intensidade de campo magnético

$\overline{dp}$ - vetor deslocamento

$\mathfrak{F}_a$ - força magnetomotriz.

Neste caso $\mathbb{H}$ e $\overline{dp}$ são vetores como os indicados na figura 3, para uma seção transversal I do núcleo, indicada na figura 2.

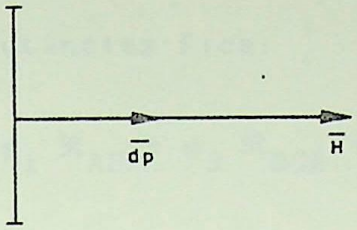



FIGURA 3: Vetores $\overline{H}$ e $\overline{dp}$ na seção transversal 1.

Pode-se então re-escrever a equação (1) da seguinte forma:

$$\oint \overline{H} \cdot dp = \mathfrak{F}_a \qquad (2)$$

Tem-se que:

$$\overline{B} = \mu \cdot \overline{H} \qquad (3)$$

$$\Phi = \int_S \overline{B} \times \overline{ds} \qquad (4)$$

onde:

- $\overline{B}$ vetor densidade de fluxo magnético
- $\mu$ permeabilidade magnética
- $\phi$ fluxo magnético
- $S$ área da seção onde se calcula o fluxo

Substituindo (3) e (4) na equação (2) resulta:

$$\oint \frac{\Phi}{\mu S} \cdot dp = \mathfrak{F}_a \qquad (5)$$

Pode-se dividir o caminho "1" fechado em duas partes de A $\longrightarrow$ B e de B $\longrightarrow$ A (passando por C) como indicado na figura 2. A equação (5) é decomposta como a soma de duas parcelas, e considerando que os fluxos são constantes em cada trecho, tem-se então:

$$\phi_1 \int_{A \to B} \frac{dp}{\mu S} + \phi_3 \int_{B \to A} \frac{dp}{\mu S} = \mathfrak{F}_a \qquad (6)$$

ou em função das relutâncias fica:

$$\phi_1 \mathcal{R}_{AB} + \phi_3 \mathcal{R}_{BCA} = \mathcal{F}_a \tag{7}$$

onde:

$\mathcal{R}_{AB} = \int_{A \longrightarrow B} \frac{dp}{\mu S}$ relutância correspondente ao trecho A⟶B do núcleo (8)

$\mathcal{R}_{BCA} = \int_{B \longrightarrow A} \frac{dp}{\mu S}$ relutância correspondente ao trecho B⟶A do núcleo

ou em função das forças magnetizantes fica:

$$\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_a \tag{9}$$

onde:

$\mathcal{F}_1 = \mathcal{R}_{AB} \cdot \phi_1$ força magnetomotriz correspondente à relutância $\mathcal{R}_{AB}$ (10)

$\mathcal{F}_3 = \mathcal{R}_{BCA} \cdot \phi_3$ força magnetomotriz correspondente à relutância $\mathcal{R}_{BCA}$

Para o caminho "2" obtêm-se as seguintes equações:

$$\phi_1 \mathcal{R}_{AB} + \phi_2 \mathcal{R}_f = \mathcal{F}_a \tag{11}$$

onde:

$\mathcal{R}_f = \int_{\substack{A \longrightarrow B \\ \text{no ar}}} \frac{dp}{\mu S}$ relutância correspondente ao trecho A⟶B no ar

ou também:

$$\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_a \tag{12}$$

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ B.V.

onde:

$\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{R}_f \cdot \phi_2$ força magnetomotriz correspondente a relutância $\mathfrak{R}_f$

A partir das equações (7) e (11) é possível construir o circuito magnético equivalente do sistema magnético simples da figura 1 como indicado na figura 4 a seguir.

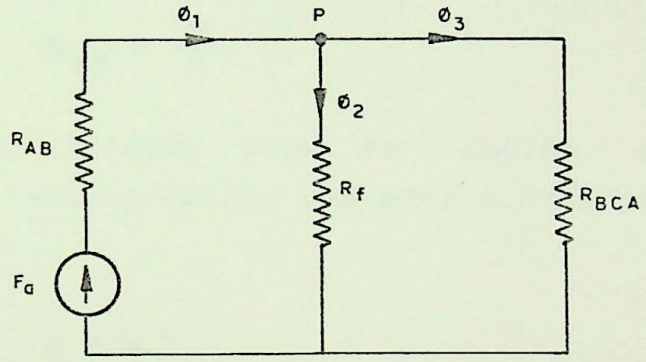



FIGURA 4: Circuito magnético equivalente do sistema magnético simples da figura 1.

Cumpre-se no circuito magnético equivalente que:

- A soma das forças magnetomotrizes ao longo de uma malha é zero.
- No ponto P a soma algébrica dos fluxos é zero.

No circuito magnético equivalente da figura 4 aparecem relutâncias como elementos concentrados, as quais podem ser calculadas como explicado a seguir.

Por definição, tem-se que:

$$\mathfrak{R}_{XY} = \int_{X \longrightarrow Y} \frac{dp}{\mu S}$$

Se o caminho $X \longrightarrow Y$ for no ar, a permeabilidade magnética $\mu$ é praticamente constante, resultando então:

$$\Re_{XY} = \frac{\overline{\ell}}{\mu S} \qquad (13)$$

onde:

$\overline{\ell}$ - comprimento médio do caminho X⟶Y

Se o caminho X⟶Y for no material magnético, então $\mu$ não é constante, não sendo válida a equação (13). Da definição de força magnetomotriz:

$$\mathfrak{F} = \Re_{XY}\phi$$

Pode-se exprimir a relutância como:

$$\Re_{XY} = \frac{\mathfrak{F}}{\phi} \qquad (14)$$

Esta relação pode ser obtida, ponto a ponto, redimensionando a característica BxH para o material magnético com o uso das equações:

$$\phi = B.S$$

$$\mathfrak{F} = H.\overline{\ell}$$

## 2.2 - Derivacao do Circuito Eletrico Equivalente ao Circuito Magnetico Equivalente Obtido

A seguir, são descritas as diferentes etapas envolvidas na obtenção do circuito elétrico equivalente ao circuito magnético equivalente da figura 4.

### 2.2.1 - Equivalencia entre as leis de nos e malhas dos circuitos eletricos e magneticos

Vai-se supor que cada um dos fluxos $\phi_1$, $\phi_2$ e $\phi_3$ interage com uma bobina fictícia de N espiras. As tensões induzidas nessas bobinas pela lei de Faraday-Lenz são:

$$v_1 = N \frac{d\phi_1}{dt}$$

$$v_2 = N \frac{d\phi_2}{dt} \qquad (15)$$

$$v_3 = N \frac{d\phi_3}{dt}$$

No nó P do circuito magnético da figura 4, tem-se:

$$\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = 0 \qquad (16)$$

Derivando a equação (16) em relação a t e multiplicando a mesma por N, obtém-se:

$$v_1 - v_2 - v_3 = 0 \qquad (17)$$

Conclui-se que, a uma equação de nó de fluxos no circuito magnético, corresponde uma equação de malha no circuito elétrico equivalente.

Sejam $i_1$, $i_2$, e $i_3$ as correntes nas bobinas fictícias que produzem os fluxos $\phi_1$, $\phi_2$ e $\phi_3$.

Considerando a malha esquerda do circuito magnético equivalente da figura 4, tem-se:

$$\mathcal{F}_a = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \qquad (12)$$

A equação (12) em termos de correntes pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$Ni_a = Ni_1 + Ni_2$$

ou também

$$i_a = i_1 + i_2 \qquad (18)$$

Para a malha direita, obtém-se:

$$\mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_2 = 0 \qquad (19)$$

ou também:

$$i_3 - i_2 = 0 \qquad (20)$$

Conclui-se que a cada equação de malha de forças magnetomotrizes no circuito magnético, corresponde uma equação de nó no circuito elétrico equivalente.

## 2.2.2 - EQUIVALENCIA ENTRE AS RELUTANCIAS DOS CIRCUITOS MAGNETICOS E AS INDUTANCIAS DOS CIRCUITOS ELETRICOS EQUIVALENTES

Para a bobina fictícia percorrida pela corrente $i_1$ é válida a seguinte equação:

$$\mathfrak{R}_{AB} \cdot \phi_1 = N\, i_1 \qquad (21)$$

Pela lei de Faraday-Lenz para essa bobina fictícia, tem-se:

$$v_1 = N \frac{d\phi_1}{dt} \qquad (22)$$

Substituindo a equação (21) na equação (22) tem-se:

$$v_1 = \frac{N^2}{\mathfrak{R}_{AB}} \frac{di_1}{dt} \qquad (23)$$

ou seja, à relutância $\mathfrak{R}_{AB}$ do circuito magnético corrsponde uma indutância $L_{AB}$ no circuito elétrico, de valor:

$$L_{AB} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}_{AB}} \qquad (24)$$

Procedimento similar se faz para as outras relutâncias do circuito magnético equivalente da figura 4.

## 2.2.3 - Circuito elétrico equivalente

Com base nos resultados obtidos nos ítens 2.2.1 e 2.2.2 e utilizando-se as equações: (17), (18), (20) e (24) pode-se sintetizar o circuito elétrico equivalente ao circuito magnético equivalente da figura 4, como indicado a seguir na figura 5.

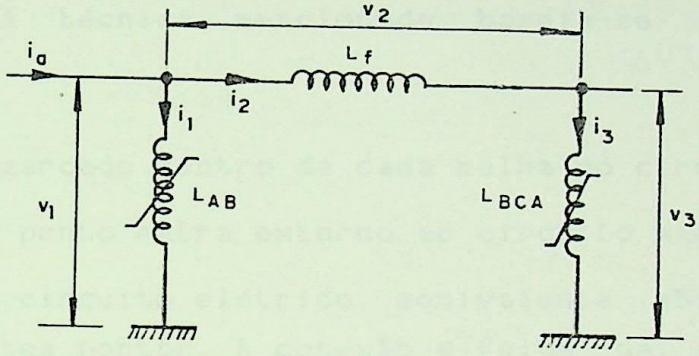



FIGURA 5: Circuito elétrico equivalente ao circuito magnético da figura 4.

OBSERVAÇÃO:

Da figura 5 e da equação (18), conclui-se que à força magnetomotriz associada à bobina real de N espiras percorrida pela corrente $i_a$ ($\mathfrak{F}_a = Ni_a$), corresponde uma fonte de corrente $i_a$.

## 2.3 - Aplicação do Princípio Topológico da Dualidade

Com base nos ítens 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 ficou estabelecida uma dualidade entre a lei de nó no circuito magnético e a lei de malha no circuito elétrico, a lei de malha no circuito magnético e a lei de nó no circuito elétrico, assim como entre relutância e indutância e finalmente entre força magnetomotriz e corrente injetada.

Com base no acima referido e no caso de se ter um circuito magnético plano, pode-se aplicar o princípio topológico da dualidade.

Esta técnica topológica permite obter o circuito

elétrico equivalente diretamente, não sendo necessário derivar as equações de nós e malhas no circuito magnético nem as suas equações duais. Isto apresenta uma grande vantagem quando se trabalha com circuitos magnéticos complexos.

Os elementos do circuito elétrico obtido com a utilização da técnica topológica são calculados a partir dos resultados do ítem 2.2.2.

A técnica mencionada baseia-se nas seguintes regras:

1 - Um ponto é marcado dentro de cada malha do circuito magnético.

2 - Marca-se um ponto extra externo ao circuito magnético.

3 - Os ramos do circuito elétrico equivalente são obtidos pela conexão destes pontos. A conexão é feita da seguinte forma: Desenha-se uma linha entre dois pontos, a qual deve passar através de um elemento comum às duas malhas correspondentes a esses pontos. Se houver mais de um elemento comum, deve-se desenhar uma linha entre os dois pontos para cada um deles.

4 - Os pontos marcados são os nós do circuito elétrico equivalente

5 - Se a linha que une dois pontos passa através de uma relutância, coloca-se no circuito elétrico uma indutância entre esses nós. Se a linha passa através de uma fonte de força magnetomotriz coloca-se uma fonte de corrente entre esses nós.

Na figura 6 estão marcados os pontos assim como desenhadas as linhas que os unem, para o circuito magnético da figura 4.

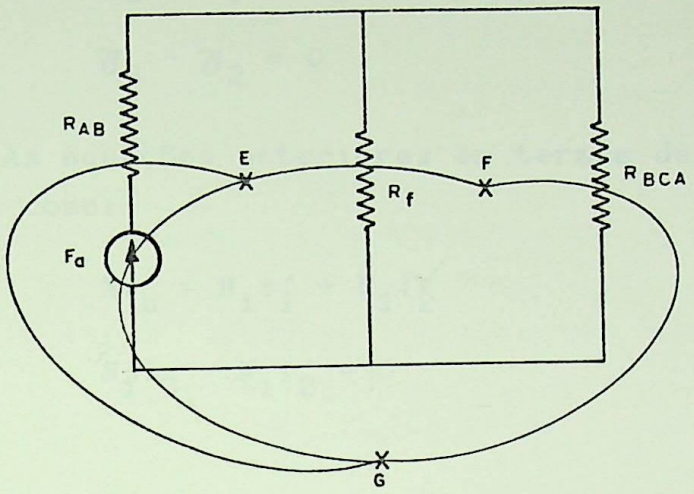



FIGURA 6: Circuito magnético da figura 4 com os pontos marcados e as linhas desenhadas.

A execução das regras 4 e 5 conduz finalmente ao circuito elétrico equivalente procurado, como indicado na figura 7 a seguir.

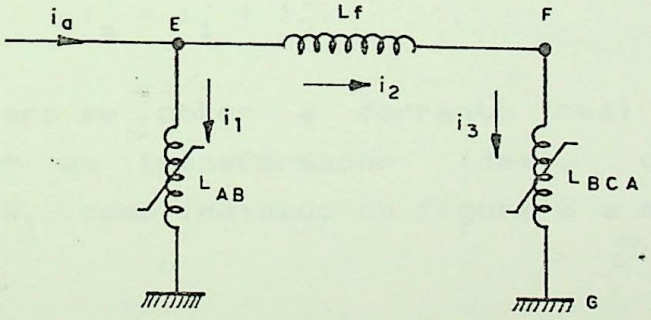



FIGURA 7: Circuito elétrico equivalente ao circuito magnético da figura 4.

OBSERVAÇÃO:

No desenvolvimento feito, o número de espiras das bobinas fictícias foi escolhido igual ao número de espiras da bobina do sistema magnético simples da figura 1, podendo-se ter escolhido um número qualquer de espiras. Vai-se supor que a escolha do número de espiras das bobinas fictícias fosse $N_1$.

Por uma questão de clareza repetem-se as equações (12) e (19):

$$\mathfrak{F}_a = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 \tag{12}$$

$$\mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_2 = 0 \tag{19}$$

As equações anteriores em termos de corrente podem ser re-escritas como:

$$Ni_a = N_1 i_1' + N_1 i_2' \tag{25}$$

$$N_1 i_3' - N_1 i_2' = 0 \tag{26}$$

ou

$$i_a' = \frac{N}{N_1} i_a = i_1' + i_2' \tag{27}$$

$$i_3' - i_2' = 0 \tag{28}$$

Da equação (27), conclui-se que a nova corrente injetada no nó E do circuito elétrico equivalente da figura 7 é:

$$i_a' = i_1' + i_2'.$$

Para se obter a corrente real injetada $i_a$, é necessário ligar um transformador ideal, com relação de transformação $N:N_1$, como indicado na figura 8 a seguir.

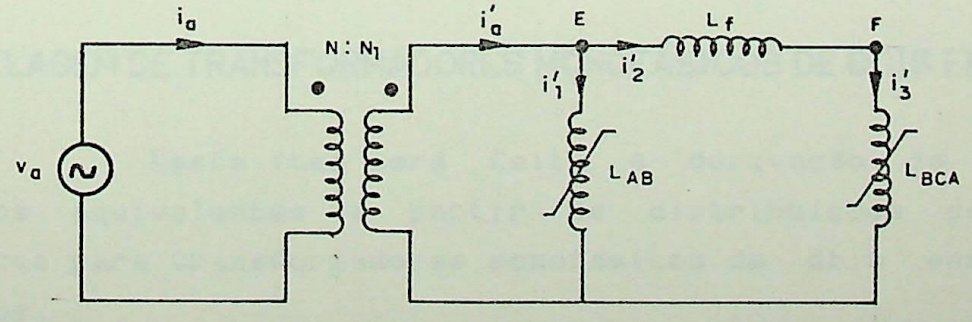



FIGURA 8: Circuito elétrico equivalente ao circuito magnético da figura 4 quando $N_1 \neq N$.

Conclui-se então que, a escolha arbitrária do número de espiras das bobinas fictícias, resulta na inclusão de transformadores ideais com relações de transformação adequadas, no circuito elétrico equivalente.

Para se ter um circuito elétrico equivalente que represente de forma mais real o sistema magnético em estudo, pode-se incorporar a resistência associada à bobina real de N espiras no circuito da figura 8, obtendo-se o circuito indicado na figura 9 a seguir.

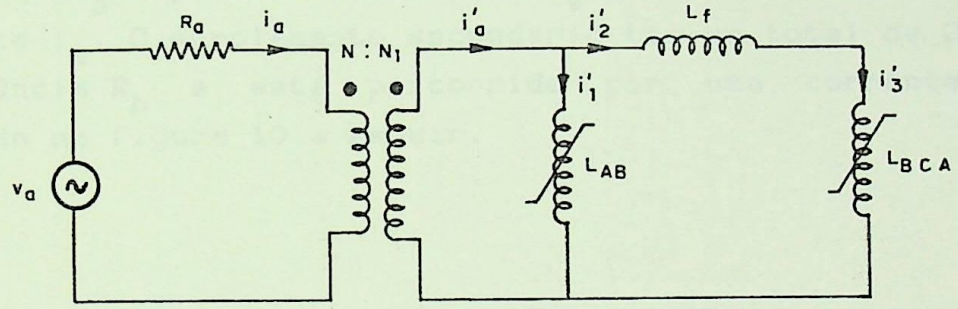



FIGURA 9: Circuito da figura 8 com a resistência da bobina incorporada.

Para se ter uma melhor representação do sistema magnético em estudo podem também ser incorporadas ao circuito elétrico equivalente, resistências em paralelo com as indutâncias não lineares, associadas às perdas por histerese e por correntes de Foucault do elemento não-linear.

## 3 - MODELAGEM DE TRANSFORMADORES MONOFÁSICOS DE DOIS ENROLAMENTOS

Neste ítem será feita a derivação de circuitos elétricos equivalentes a partir de distribuições de fluxos magnéticos para transformadores monofásicos de dois enrolamentos dos tipos:

- tipo núcleo;
- tipo couraça.

utilizando-se a técnica topológica descrita no ítem 2.3 deste capítulo.

Após a obtenção destes modelos será apresentada uma comparação com os modelos desenvolvidos no Capítulo II, observando assim as simplificações feitas neles.

## 3.1 - Transformador Tipo Núcleo

Considere-se um transformador monofásico do tipo núcleo de enrolamentos concêntricos. O enrolamento primário tem um total de $2N_a$ espiras, resistência $R_a$ e está percorrido por uma corrente $i_a$. O enrolamento secundário tem um total de $2N_b$ espiras, resistência $R_b$ e está percorrido por uma corrente $i_b$, como indicado na figura 10 a seguir.

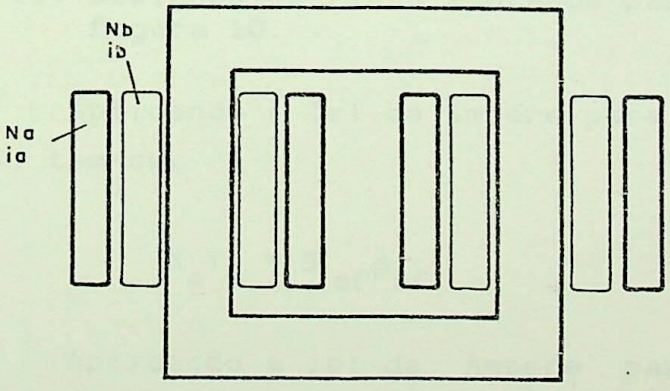



FIGURA 10: Transformador monofásico do tipo núcleo com dois enrolamentos concêntricos.

Na figura 11, a seguir, estão indicados os principais caminhos de fluxo adotados na estrutura magnética do transformador em estudo. Como já foi mencionado, o gráu de complexidade do circuito magnético assim como o circuito elétrico equivalente, dependem da escolha das distribuições dos fluxos magnéticos.

Considere-se a presença de quatro tipos de fluxo:

- $\phi_a$ é o fluxo contido no núcleo entre os pontos A e B e os pontos C e D.
- $\phi_{ab}$ é o fluxo mútuo que está contido no núcleo.
- $\phi_{af}$ é o fluxo de dispersão do primário que se fecha inteiramente no ar.
- $\phi_{bf}$ é a parte do fluxo de dispersão do secundário que se fecha pelo ar.

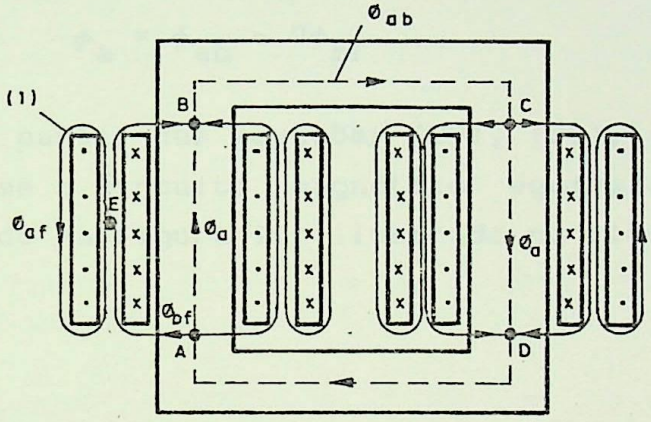



FIGURA 11: Caminhos de fluxo adotados para o transformador da figura 10.

Aplicando a lei de Ampére para o caminho 1 indicado na figura 11, tem-se:

$$N_a i_a = \mathcal{R}_{af}\phi_{af} \tag{29}$$

Aplicando a lei de Ampére para o caminho AEBA, tem-se:

$$N_b i_b = \mathcal{R}_{bf}\phi_{bf} - \mathcal{R}_{AB}\phi_a \tag{30}$$

Aplicando a lei de Ampére para o caminho ABCDA, tem-se:

$$2N_a i_a - 2N_b i_b = 2\mathcal{R}_{AB}\phi_a + (\mathcal{R}_{BC} + \mathcal{R}_{DA})\phi_{ab}$$

ou

$$N_a i_a - N_b i_b = \mathcal{R}_{AB}\phi_a + \left[\frac{\mathcal{R}_{BC} + \mathcal{R}_{DA}}{2}\right]\phi_{ab} \qquad (31)$$

As outras equações a considerar são:

$$\mathcal{F}_a = N_a i_a \qquad (32)$$

$$\mathcal{F}_b = N_b i_b \qquad (33)$$

$$\phi_a = \phi_{ab} - 2\phi_{bf} \qquad (34)$$

A partir das equações (29), (30), (31), (32), (33) e (34) constrói-se o circuito magnético equivalente ao sistema magnético indicado na figura 11, ilustrado na figura 12 a seguir.

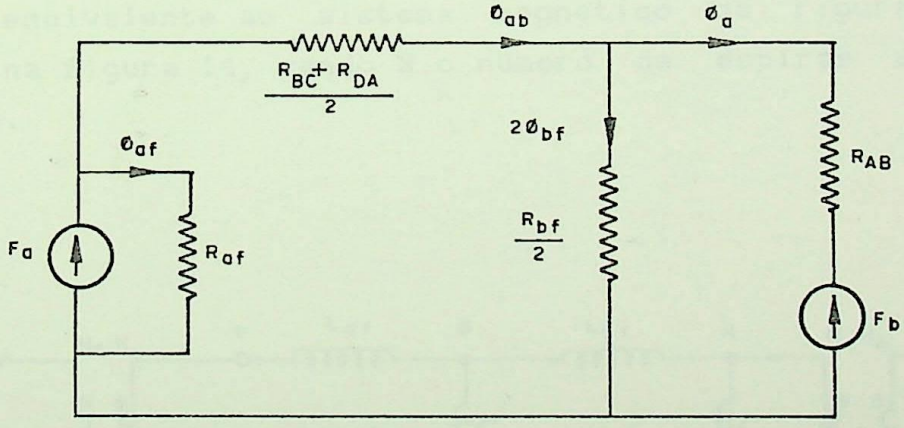



FIGURA 12: Circuito magnético equivalente ao sistema magnético da figura 11.

Como o circuito magnético da figura 12 é plano, pode-se aplicar a técnica topológica do ítem 2.3 resultando:

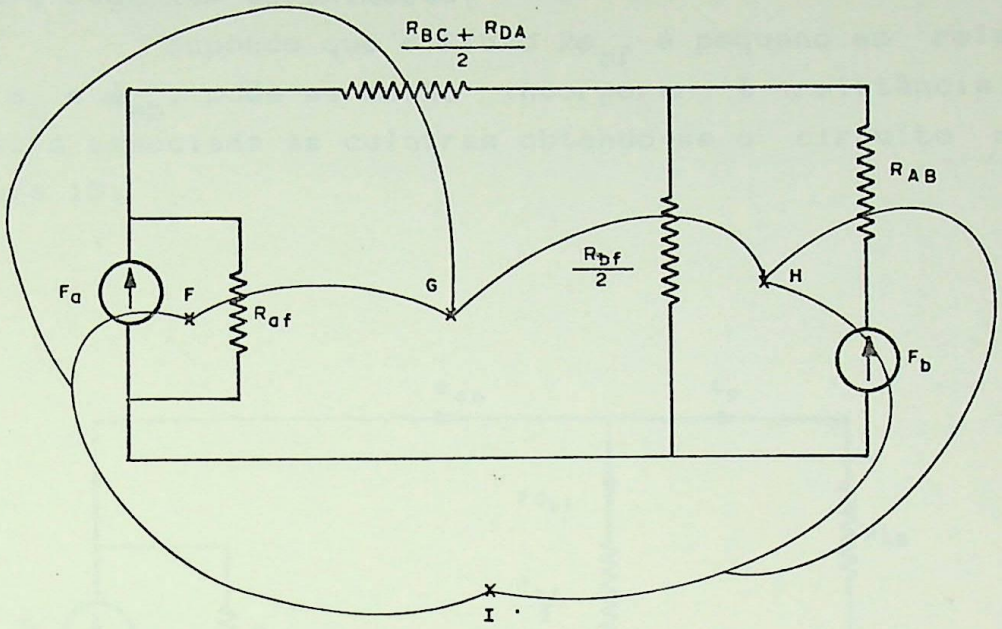



FIGURA 13: Circuito magnético da figura 12 com os pontos marcados e as linhas desenhadas.

A partir da figura 13 pode-se construir o circuito elétrico equivalente ao sistema magnético da figura 10, como indicado na figura 14, sendo N o número de espiras das bobinas fictícias.

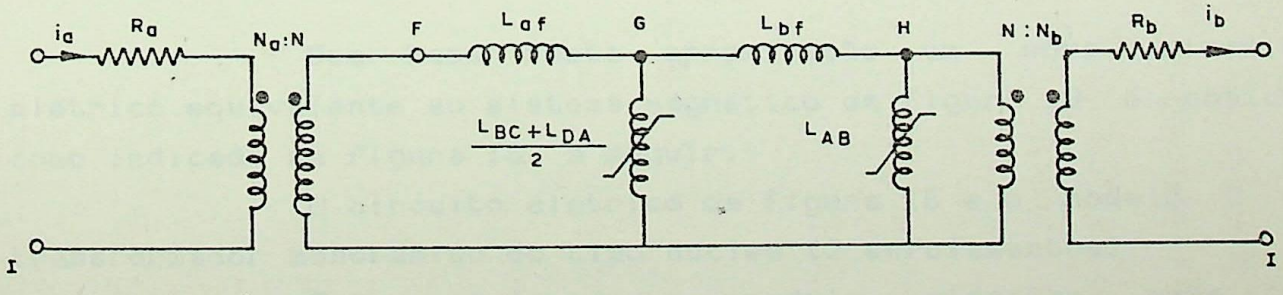



FIGURA 14: Circuito elétrico equivalente ao sistema magnético da figura 10.

O circuito elétrico da figura 14 é o modelo 1 do transformador monofásico tipo núcleo de dois enrolamentos.

A partir do modelo 1 outro modelo será obtido

fazendo a seguinte aproximação:

Supondo que o fluxo $2\phi_{bf}$ é pequeno em relação aos fluxos $\phi_a$ e $\phi_{ab}$, pode-se então incorporar à relutância $\Re_{AB}$ a relutância associada às culatras obtendo-se o circuito magnético da figura 15.

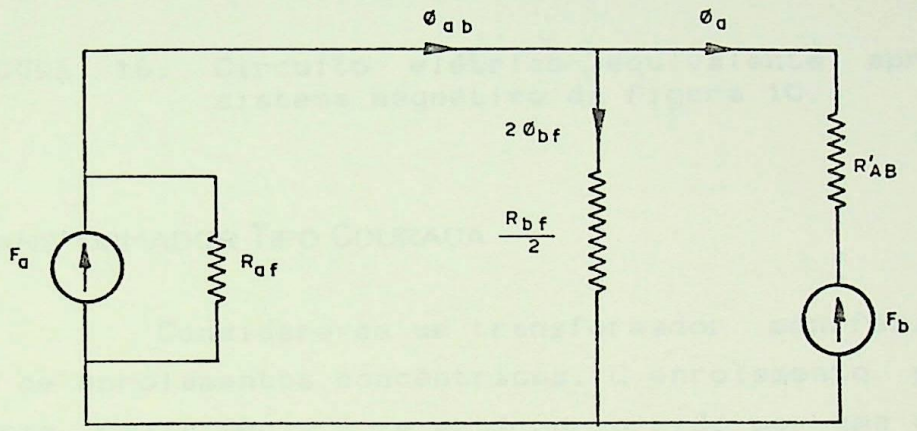



FIGURA 15: Circuito magnético equivalente simplificado do circuito da figura 12.

onde:

$$\Re'_{AB} = \Re_{AB} + \frac{\Re_{BC} + \Re_{DA}}{2}$$

Com base nesta aproximação um novo circuito elétrico equivalente ao sistema magnético da figura 10 é obtido, como indicado na figura 16, a seguir.

O circuito elétrico da figura 16 é o modelo 2 do transformador monofásico do tipo núcleo (2 enrolamentos).

Este modelo é o modelo clássico para um transformador monofásico de dois enrolamentos, já apresentado no Capítulo II.

A etapa feita para se chegar ao modelo 2 mostra a simplificação que ficou implícita no modelo apresentado no Capítulo II.

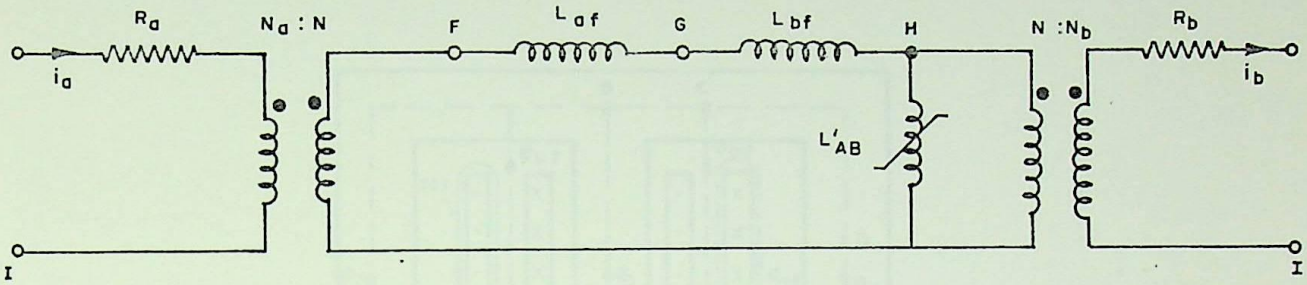



FIGURA 16: Circuito elétrico equivalente aproximado ao sistema magnético da figura 10.

## 3.2 - Transformador Tipo Couraça

Considere-se um transformador monofásico do tipo couraça de enrolamentos concêntricos. O enrolamento primário tem $N_a$ espiras, resistência $R_a$ e está percorrido por uma corrente $i_a$. O enrolamento secundário tem $N_b$ espiras, resistência $R_b$ e está percorrido por uma corrente $i_b$. Este último enrolamento é o que está mais próximo da perna central do núcleo como indicado na figura 17 a seguir.

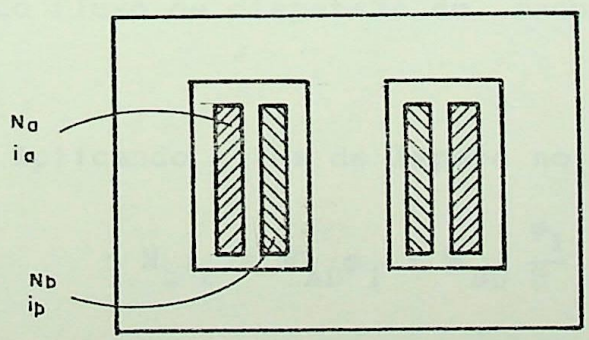



FIGURA 17: Transformador monofásico do tipo couraça.

Na figura 18, a seguir, estão indicados os principais caminhos de fluxo adotados na estrutura magnética do transformador em estudo.

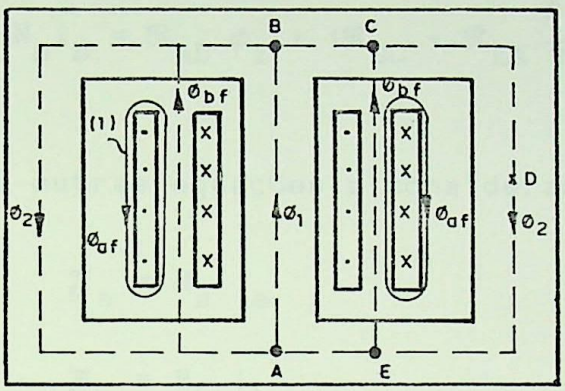



FIGURA 18: Caminhos de fluxo adotados para o transformador da figura 17.

Considere-se a presença de quatro tipos de fluxo:

- $\phi_1$ é o fluxo na perna central contido no núcleo entre os pontos A e B.
- $\phi_2$ é o fluxo que percorre parte das culatras e as pernas externas do núcleo.
- $\phi_{af}$ é o fluxo de dispersão do primário que se fecha inteiramente no ar.
- $\phi_{bf}$ é parte do fluxo de dispersão do secundário que se fecha pelo ar.

Aplicando a lei de Ampére no caminho ABCEA, tem-se:

$$- N_b i_b = \mathcal{R}_{AB}\phi_1 + \mathcal{R}_{BC}\frac{\phi_1}{2} - \mathcal{R}_{bf}\phi_{bf} + \mathcal{R}_{AE}\frac{\phi_1}{2}$$

ou

$$-N_b i_b = \mathcal{R}_{AB}\phi_1 + (\mathcal{R}_{BC} + \mathcal{R}_{EA})\frac{\phi_1}{2} - \mathcal{R}_{bf}\phi_{bf} \quad (35)$$

Aplicando a lei de Ampére no caminho (1) da figura 18, tem-se:

$$N_a i_a = \mathcal{R}_{af}\phi_{af} \quad (36)$$

Aplicando a lei de Ampére para o caminho ABCDEA, tem-se:

$$N_a i_a - N_b i_b = \mathcal{R}_{AB}\,\phi_1 + (\mathcal{R}_{BC} + \mathcal{R}_{EA})\frac{\phi_1}{2} + \mathcal{R}_{CDE}\,\phi_2 \qquad (37)$$

As outras equações a considerar são:

$$\mathcal{F}_a = N_a\, i_a \qquad (38)$$

$$\mathcal{F}_b = N_b\, i_b \qquad (39)$$

$$\frac{\phi_1}{2} = \phi_2 - \phi_{bf} \qquad (40)$$

A partir das equações (35), (36), (37), (38), (39) (40) constrói-se o circuito magnético equivalente ao sistema magnético indicado na figura 17, ilustrado na figura 19 a seguir.

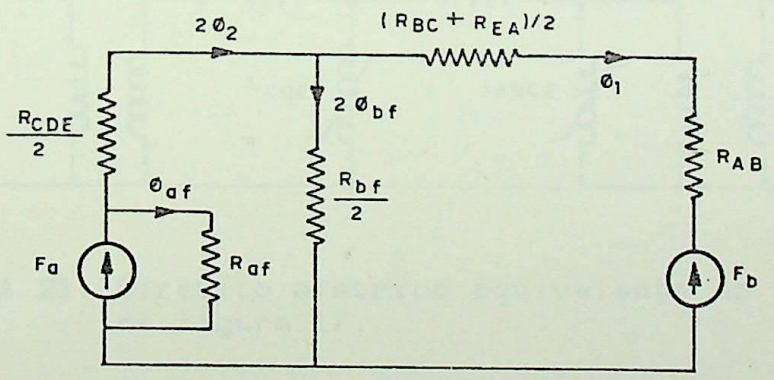



FIGURA 19: Circuito magnético equivalente ao sistema magnético da figura 18.

Como o circuito magnético da figura 19 é plano, pode-se aplicar a técnica topológica do ítem 2.3, resultando:

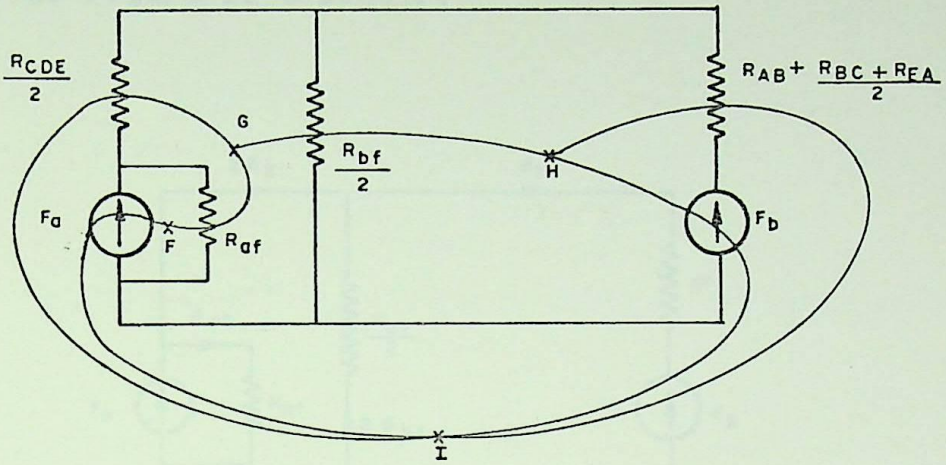



FIGURA 20: Circuito magnético da figura 19 com os pontos marcados e as linhas desenhadas.

A partir da figura 20 pode-se construir o circuito elétrico equivalente ao sistema magnético da figura 17, como indicado na figura 21, sendo N o número de espiras das bobinas fictícias.

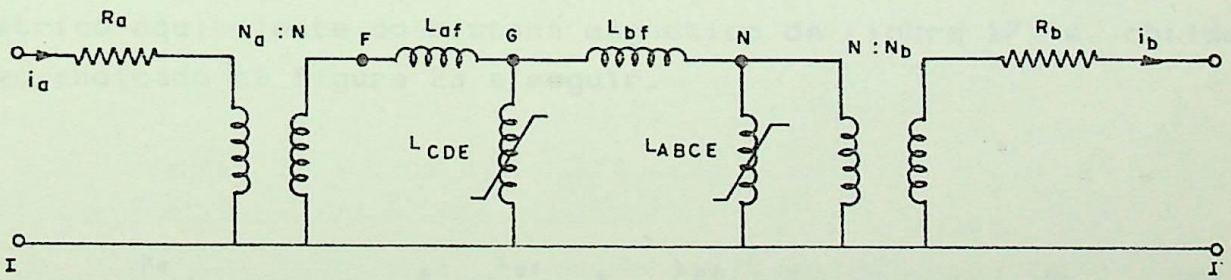



FIGURA 21: Circuito elétrico equivalente ao sistema magnético da figura 17.

O circuito elétrico da figura 21 é o modelo 1 do transformador monofásico tipo couraça de dois enrolamentos.

A partir do modelo 1, outro modelo será obtido fazendo a seguinte aproximação.

Supondo que o fluxo $2\phi_{bf}$ é pequeno em relação ao fluxo $\phi_1$, pode-se então incorporar à relutância

$(\mathcal{R}_{BC} + \mathcal{R}_{EA})/2 + \mathcal{R}_{AB}$ a relutância $\mathcal{R}_{CDE}/2$, obtendo-se o circuito magnético da figura 22 a seguir.

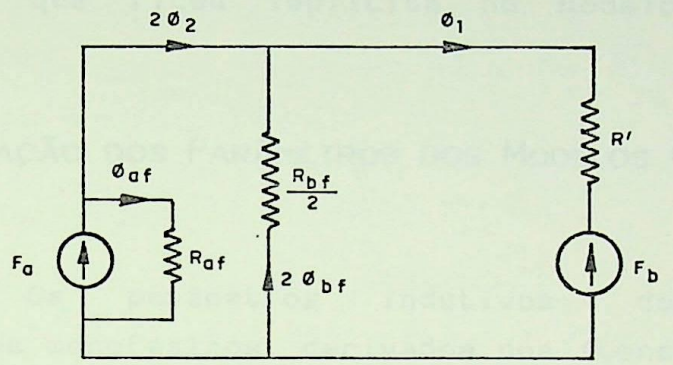



FIGURA 22: Circuito magnético equivalente simplificado do circuito da figura 19.

onde:

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{AB} + \frac{\mathcal{R}_{BC} + \mathcal{R}_{EA}}{2} + \frac{\mathcal{R}_{CDE}}{2}$$

Com base nesta aproximação um novo circuito elétrico equivalente ao sistema magnético da figura 17 é obtido, como indicado na figura 23 a seguir.

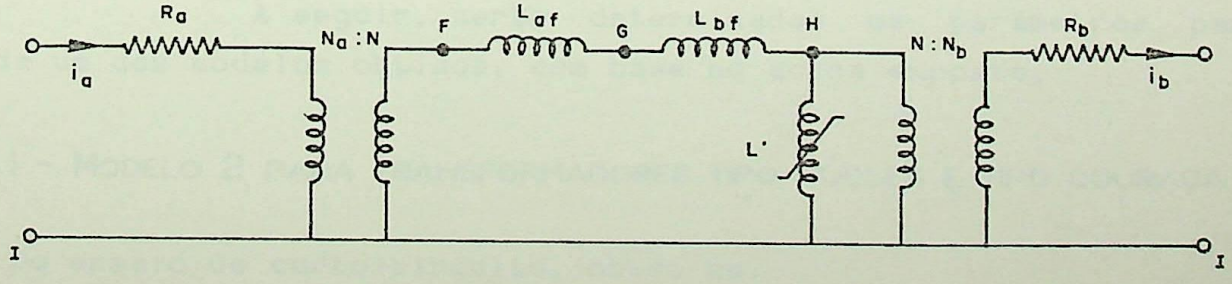



FIGURA 23: Circuito elétrico equivalente aproximado ao sistema magnético da figura 17.

O circuito elétrico da figura 23 é o modelo 2 do transformador monofásico do tipo couraça (2 enrolamentos).

Este modelo é o modelo clássico para um transformador monofásico de dois enrolamentos já apresentado no Capítulo II.

A etapa feita para chegar ao modelo 2 mostra a simplificação que ficou implícita no modelo apresentado no Capítulo II.

## 3.3 - Determinação dos Parâmetros dos Modelos Obtidos nos Ítens 3.1 e 3.2

Os parâmetros indutivos dos modelos de transformadores monofásicos, derivados nos ítens 3.1 e 3.2, podem ser calculados através de equações do tipo dado pela equação (24). O valor de relutância é calculado pela equação (13), no caso de se ter permeabilidade magnética constante, mas isto implica em conhecer as características geométricas dos transformadores, as quais não são disponíveis, na grande maioria dos casos.

No caso de se ter relutâncias não lineares, deve-se usar a equação (14) com a característica B x H do material magnético, re-dimensionada como indicado no ítem 2.1. Porém, o re-dimensionamento exige conhecer as características da geometria dos transformadores.

Apresenta-se como opção para a determinação dos parâmetros dos modelos, a realização de ensaios a vazio e de curto-circuito nos transformadores.

A seguir, serão determinados os parâmetros para cada um dos modelos obtidos, com base no acima exposto,

### 3.3.1 - Modelo 2 para transformadores tipo núcleo e tipo couraça

a) Do ensaio de curto-circuito, obtém-se:

$$\dot{Z}_{cc} \cong (R_a + R_b') + j\omega(L_{af}' + L_{bf}')$$

onde $R_b'$, $L_{af}'$ e $L_{bf}'$ são os valores referidos ao primário de $R_b$, $L_{af}$ e $L_{bf}$, respectivamente.

b) As resistências $R_a$ e $R_b$ podem ser medidas num ensaio DC e logo corrigidas para 60 [Hz].

c) Da curva $V_{rms}$ x $I_{rms}$, obtida no ensaio a vazio, pode-se determinar a característica $\lambda$ x i para o indutor não linear, utilizando o procedimento descrito no Anexo I.
Se a curva foi obtida do lado secundário, não é necessário fazer nenhuma modificação.
Se a curva foi obtida do lado primário, é necessário subtrair a soma das indutâncias de fugas.

d) Do ensaio a vazio obtém-se a potência ativa consumida, a qual permite calcular a resistência $R_{HF}$ que representa as perdas por histerese e correntes de Foucault do núcleo, sendo ligada em paralelo com o indutor não linear.

### 3.3.2 - MODELO 1 PARA TRANSFORMADORES TIPO NÚCLEO E TIPO COURAÇA

As resistências dos enrolamentos, assim como as indutâncias de dispersão podem ser determinadas pelo procedimento já descrito no ítem 3.3.1.

Poderia-se elaborar um procedimento para a determinação dos valores dos indutores na região linear, porém, na região não linear, a corrente é distorcida, apresentando harmônicos de diferentes frequências, tornando difícil a determinação dos valores dos indutores nesta região.

## 4 - MODELAGEM DE TRANSFORMADORES MONOFÁSICOS DE TRÊS ENROLAMENTOS

O procedimento feito no ítem 3 é válido também para transformadores monofásicos de três enrolamentos.

Será aqui apresentada como exemplo, a derivação do circuito elétrico equivalente a partir das distribuições de fluxos magnéticos, para um transformador monofásico de três enrolamentos do tipo núcleo.

## 4.1 - Transformador Tipo Núcleo

Considere-se um transformador monofásico do tipo núcleo de enrolamentos concêntricos. O enrolamento primário tem um total de $2N_a$ espiras, resistência $R_a$ e está percorrido por uma corrente $i_a$. O enrolamento secundário tem um total de $2N_b$ espiras, resistência $R_b$ e está percorrido por uma corrente $i_b$. O enrolamento terciário tem um total de $2N_c$ espiras, resistência $R_c$ e está percorrido por uma corrente $i_c$, como indicado na figura 24 a seguir.

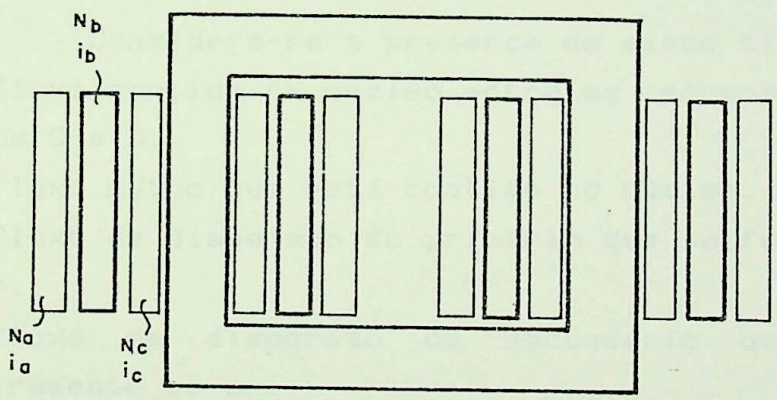



FIGURA 24: Transformador monofásico do tipo núcleo com três enrolamentos concêntricos.

Na figura 25 a seguir estão indicados os principais caminhos de fluxo adotados na estrutura magnética do transformador em estudo.

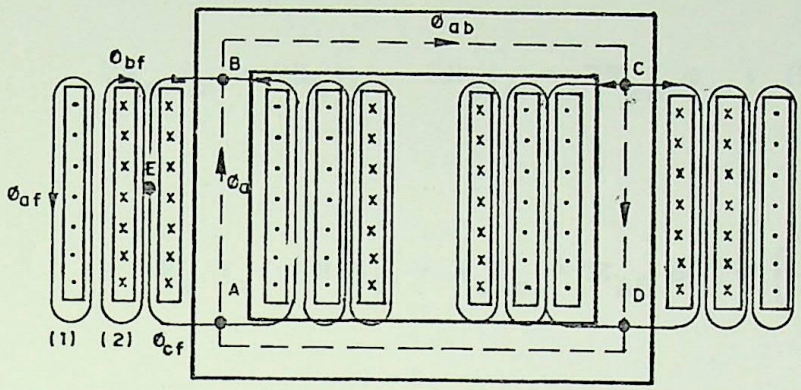



FIGURA 25: Caminhos de fluxo adotados para o transformador da figura 24.

Considera-se a presença de cinco tipos de fluxo:

- $\phi_a$ é o fluxo contido no núcleo entre os pontos A e B e os pontos C e D.
- $\phi_{ab}$ é o fluxo mútuo que está contido no núcleo.
- $\phi_{af}$ é o fluxo de dispersão do primário que se fecha inteiramente no ar.
- $\phi_{bf}$ é o fluxo de dispersão do secundário que se fecha inteiramente no ar.
- $\phi_{cf}$ é a parte do fluxo de dispersão do terciário que se fecha pelo ar.

Aplicando a lei de Ampére para os caminhos 1 e 2 indicados na figura 25, tem-se:

$$N_a \, i_a = \Re_{af} \, \phi_{af} \tag{41}$$

$$N_b \, i_b = \Re_{bf} \, \phi_{bf} \tag{42}$$

Aplicando a lei de Ampére para o caminho AEBA, tem-se:

$$N_c \, i_c = \Re_{cf} \, \phi_{cf} - \Re_{AB} \, \phi_a \tag{43}$$

Aplicando a lei de Ampére para o caminho ABCDA, tem-se:

$$2N_a\, i_a - 2N_b i_b - 2N_c i_c = 2\Re_{AB}\, \phi_a + (\Re_{BC} + \Re_{DA})\phi_{ab}$$

ou

$$N_a\, i_a - N_b i_b - N_c i_c = \Re_{AB}\, \phi_a + \left(\frac{\Re_{BC} + \Re_{DA}}{2}\right)\phi_{ab} \qquad (44)$$

As outras equações a considerar são:

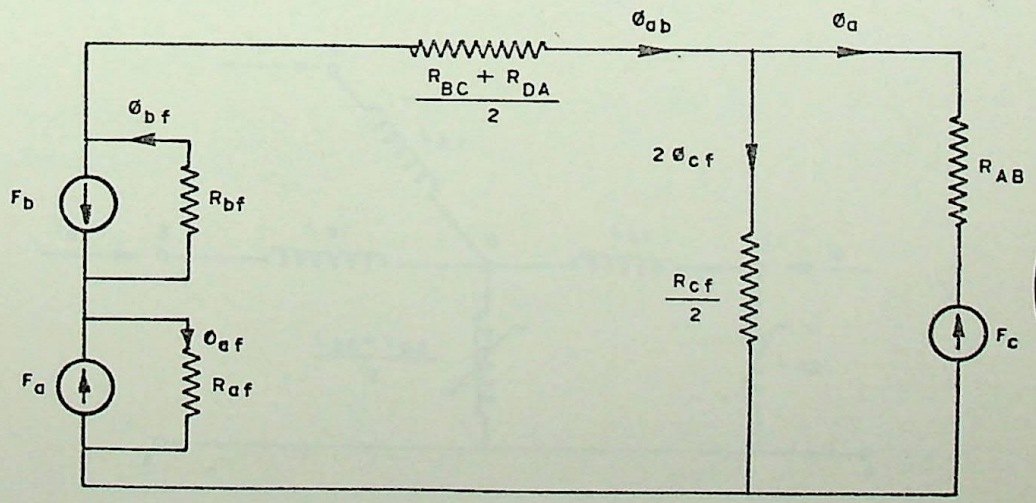
$$\mathcal{F}_a = N_a\, i_a \qquad (45)$$

$$\mathcal{F}_b = N_b\, i_b \qquad (46)$$

$$\mathcal{F}_c = N_c\, i_c \qquad (47)$$

$$\phi_a = \phi_{ab} - 2\phi_{cf} \qquad (48)$$

A partir das equações (41) a (48), constrói-se o circuito magnético equivalente ao sistema magnético indicado na figura 25, ilustrado na figura 26 a seguir.




Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

FIGURA 26: Circuito magnético equivalente ao sistema magnético da figura 25.

Como o circuito magnético da figura 26 é plano, pode-se aplicar a técnica topológica do ítem 2.3, resultando:

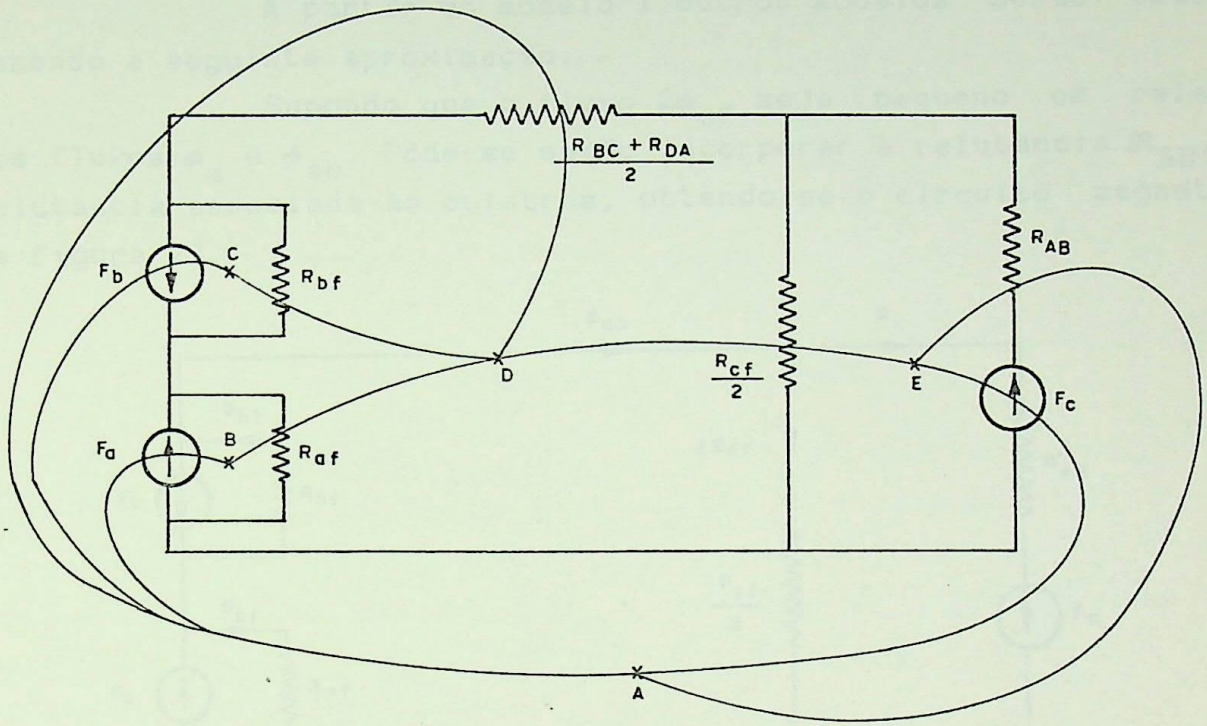



FIGURA 27: Circuito magnético da figura 26 com os pontos marcados e as linhas desenhadas.

A partir da figura 27, pode-se construir o circuito elétrico equivalente ao sistema magnético da figura 24, como indicado na figura 28. Os transformadores ideais não serão desenhados para simplificar a figura.

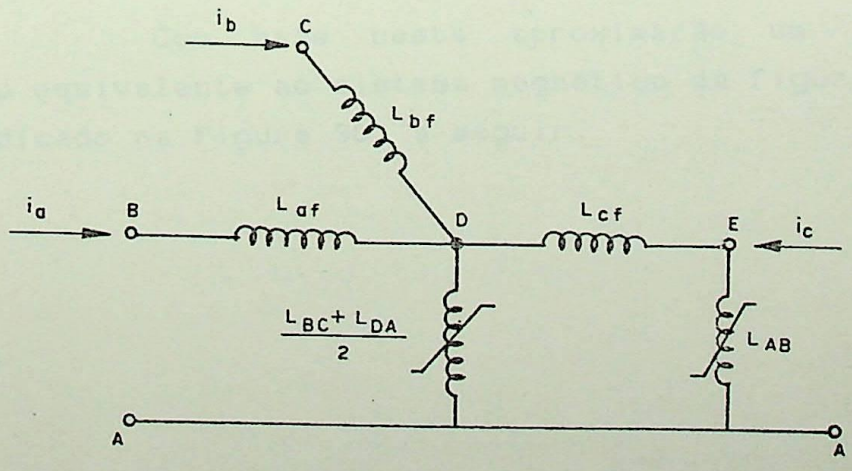



FIGURA 28: Circuito elétrico equivalente ao sistema magnético da figura 24.

O circuito elétrico da figura 28 é o modelo 1 do transformador monofásico tipo núcleo de três enrolamentos.

A partir do modelo 1 outros modelos serão obtidos fazendo a seguinte aproximação:

Supondo que o fluxo $2\phi_{cf}$ seja pequeno em relação aos fluxos $\phi_a$ e $\phi_{ab}$. Pode-se então incorporar à relutância $\Re_{AB}$, a relutância associada às culatras, obtendo-se o circuito magnético da figura 29.

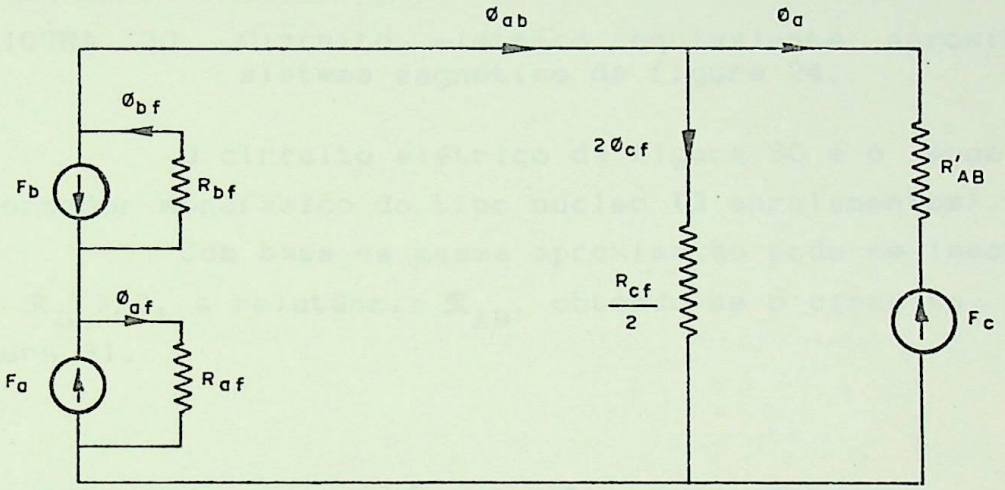



FIGURA 29: Circuito magnético equivalente simplificado do circuito da figura 26.

onde:

$$\Re'_{AB} = \Re_{AB} + \frac{\Re_{BC} + \Re_{DA}}{2}$$

Com base nesta aproximação um novo circuito elétrico equivalente ao sistema magnético da figura 24 é obtido, como indicado na figura 30, a seguir.

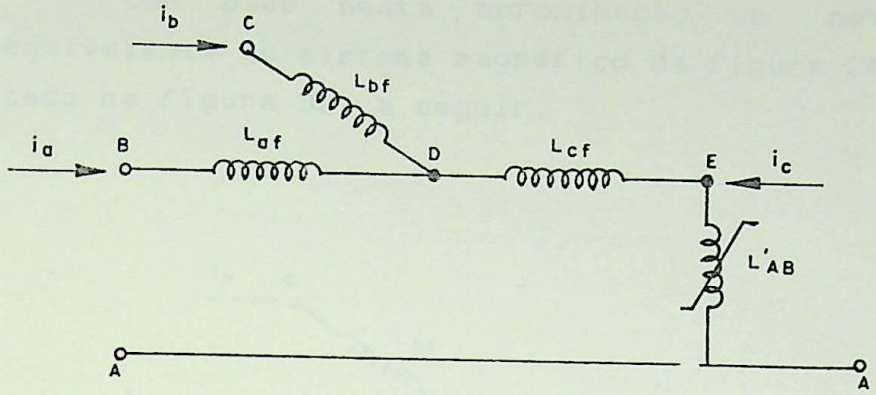



FIGURA 30: Circuito elétrico equivalente aproximado ao sistema magnético da figura 24.

O circuito elétrico da figura 30 é o modelo 2 do transformador monofásico do tipo núcleo (3 enrolamentos).

Com base na mesma aproximação pode-se incorporar à $(\mathcal{R}_{BC} + \mathcal{R}_{DA})/2$, a relutância $\mathcal{R}_{AB}$, obtendo-se o circuito magnético da figura 31.

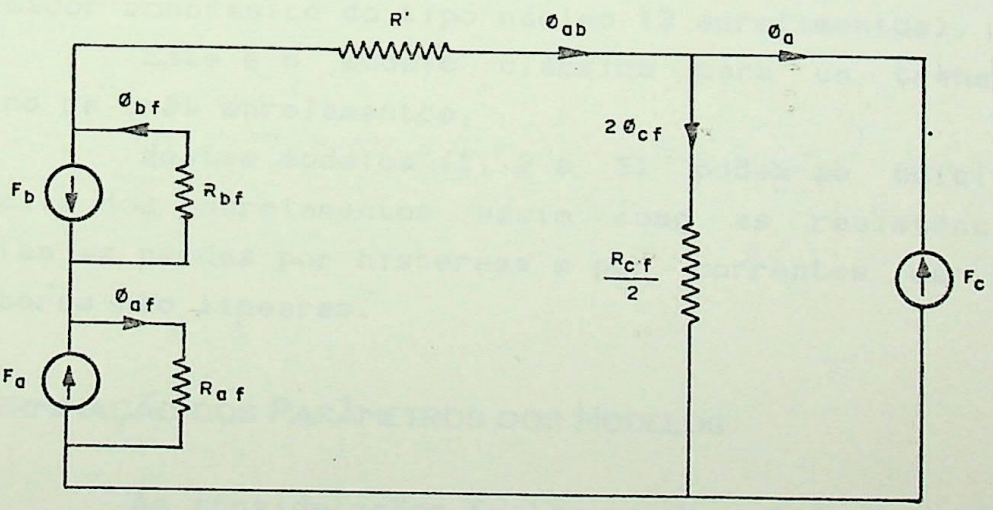



FIGURA 31: Circuito magnético equivalente simplificado do circuito da figura 26.

onde:

$$\mathcal{R}' = \frac{\mathcal{R}_{BC} + \mathcal{R}_{DA}}{2} + \mathcal{R}_{AB}$$

Com base nesta aproximação um novo circuito elétrico equivalente ao sistema magnético da figura 24 é obtido, como indicado na figura 32, a seguir.

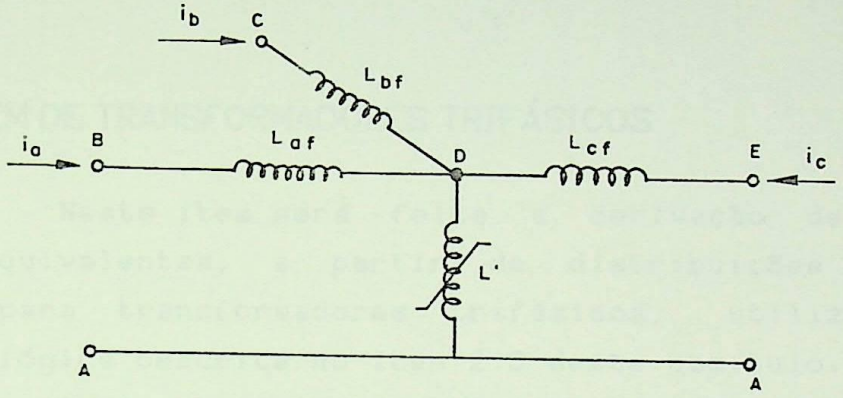



FIGURA 32: Circuito elétrico equivalente aproximado.

O circuito elétrico da figura 32 é o modelo 3 do transformador monofásico do tipo núcleo (3 enrolamentos).

Este é o modelo clássico para um transformador monofásico de três enrolamentos.

Nestes modelos (1, 2 e 3) podem-se adicionar as resistências dos enrolamentos assim como as resistências que representam as perdas por histerese e por correntes de Foucault dos indutores não lineares.

## 4.2 - Determinação dos Parâmetros dos Modelos

As considerações feitas no ítem 3.3 continuam sendo válidas aqui.

Para a determinação dos parâmetros a partir dos ensaios, tem-se que trabalhar com os ensaios a vazio e de curto-circuito usuais nos transformadores monofásicos de três enrolamentos.

## 5 - MODELAGEM DE BANCOS DE TRANSFORMADORES

A modelagem de um banco de transformadores é feita ligando-se de forma adequada os modelos obtidos para unidades monofásicas de dois ou três enrolamentos.

## 6 - MODELAGEM DE TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS

Neste ítem será feita a derivação de circuitos elétricos equivalentes, a partir de distribuições de fluxos magnéticos para transformadores trifásicos, utilizando-se a técnica topológica descrita no ítem 2.3 deste capítulo.

Para o transformador trifásico do tipo couraça não se faz um desenvolvimento especial porque a distribuição dos fluxos é muito similar a dos bancos de transformadores e pode ser estudada como tal.

### 6.1 - Transformador Trifásico do Tipo Núcleo

Será considerado aqui, o transformador trifásico de três enrolamentos, já que a derivação do circuito elétrico equivalente para um transformador trifásico de dois enrolamentos, é muito similar.

Considere-se um transformador trifásico do tipo núcleo de enrolamentos concêntricos. O enrolamento primário tem $N_1$ espiras, resistência $R_1$ e está percorrido por correntes $i_{1a}$, $i_{1b}$ e $i_{1c}$, respectivamente. O enrolamento secundário tem $N_2$ espiras, resistência $R_2$ e está percorrido por correntes $i_{2a}$, $i_{2b}$ e $i_{2c}$, respectivamente.

O enrolamento terciário tem $N_3$ espiras, resistência $R_3$ e está percorrido por correntes $i_{3a}$, $i_{3b}$ e $i_{3c}$, respectivamente.

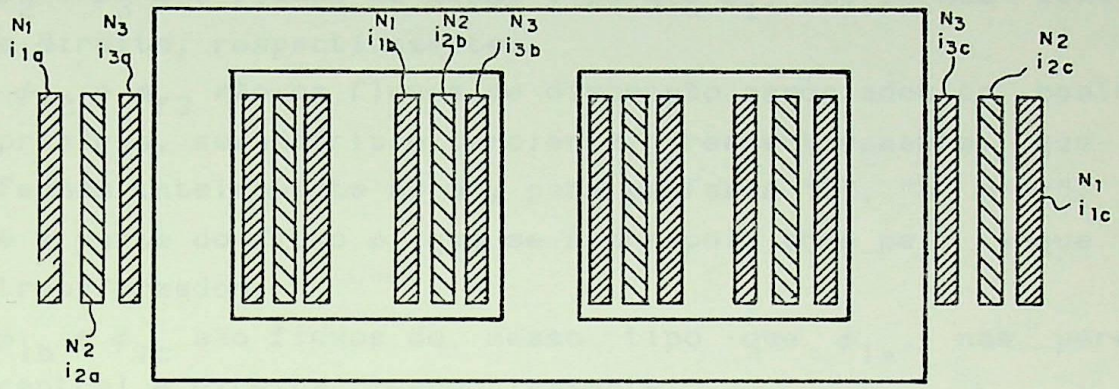



FIGURA 33: Transformador trifásico do tipo núcleo de três enrolamentos.

Na figura 34 a seguir, estão indicados os principais caminhos de fluxo adotados na estrutura magnética do transformador em estudo.

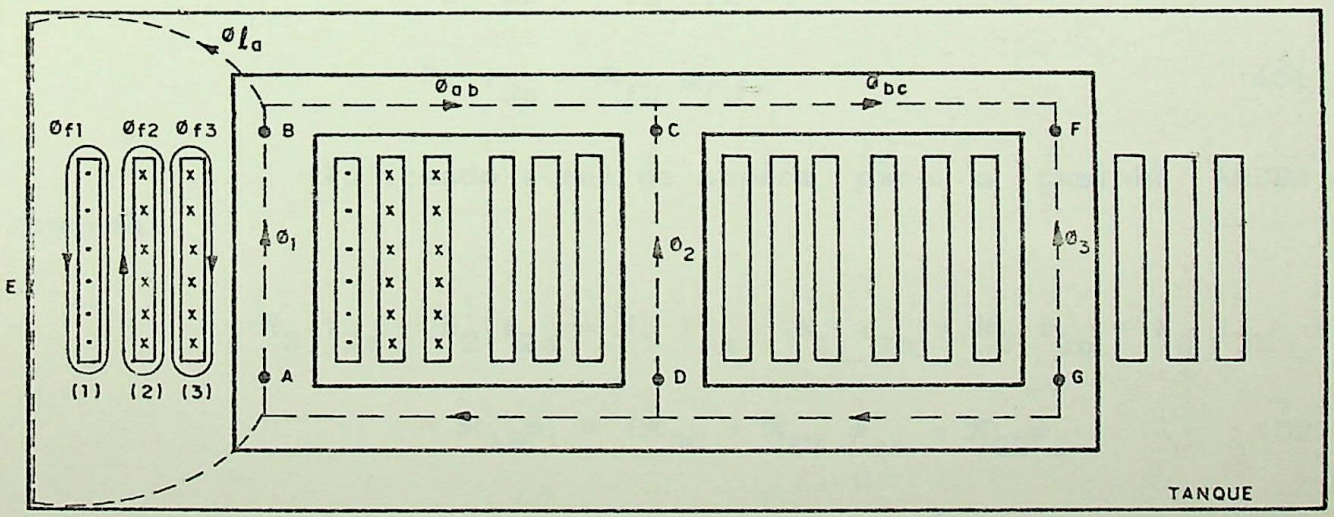



FIGURA 34: Caminhos de fluxo adotados para o transformador da figura 33.

Considera-se a presença de quatro tipos de fluxo:

- $\phi_1$ é o fluxo na perna esquerda contido no núcleo entre os

pontos A e B.

$\phi_2$ e $\phi_3$ são fluxos do mesmo tipo que $\phi_1$, nas pernas central e direita, respectivamente.

- $\phi_{f1}$, $\phi_{f2}$ e $\phi_{f3}$ são os fluxos de dispersão associados às bobinas primária, secundária e terciária, respectivamente, que se fecham inteiramente no ar, para as fases "a", "b" e "c".
- $\phi_{1a}$ é a parte do fluxo $\phi_1$ que se fecha pelo ar e pelo tanque do transformador.

  $\phi_{1b}$ e $\phi_{1c}$ são fluxos do mesmo tipo que $\phi_{1a}$, nas pernas central e direita, respectivamente.
- $\phi_{ab}$ é o fluxo mútuo entre as fases "a" e "b", contido no núcleo.

  $\phi_{bc}$ é o fluxo mútuo entre as fases "b" e "c", contido no núcleo.

Aplicando a lei de Ampére para os caminhos (1), (2) e (3) indicados na figura 34, tem-se:

$$N_1 \, i_{1a} = \Re_{f1} \, \phi_{f1} \tag{49}$$

$$N_2 \, i_{2a} = \Re_{f2} \, \phi_{f2} \tag{50}$$

$$N_3 \, i_{3a} = \Re_{f3} \, \phi_{f3} \tag{51}$$

Aplicando a lei de Ampére para o caminho ABCDA, tem-se:

$$- N_3 \, i_{3a} - N_2 \, i_{2a} + N_1 \, i_{1a} - N_1 \, i_{1b} + N_2 \, i_{2b} + N_3 \, i_{3b} =$$

$$= \Re_{AB} \phi_1 + (\Re_{BC} + \Re_{DA}) \phi_{ab} - \Re_{CD} \phi_2 \tag{52}$$

Aplicando a lei de Ampére para o caminho ABEA, tem-se:

$$N_1 \, i_{1a} - N_2 \, i_{2a} - N_3 \, i_{3a} = \Re_{AB} \, \phi_1 + \Re_{1a} \, \phi_{1a} \tag{53}$$

As outras equações a considerar são:

$$\mathcal{F}_{1a} = N_1 \, i_{1a} \tag{54}$$

$$\mathcal{F}_{2a} = N_2 \, i_{2a} \tag{55}$$

$$\mathcal{F}_{3a} = N_3 \, i_{3a} \tag{56}$$

$$\phi_1 = \phi_{1a} + \phi_{ab} \tag{57}$$

Equações similares podem ser derivadas aplicando-se a lei de Ampére aos diferentes caminhos envolvendo as pernas central e direita.

A partir das equações (49) a (57) e levando em consideração o acima exposto constrói-se o circuito magnético equivalente ao sistema magnético indicado na figura 34, ilustrado na figura 35.

Como o circuito magnético da figura 35 é plano, pode-se aplicar a técnica topológica do ítem 2.3, obtendo-se a figura 36.

A partir da figura 36, pode-se construir o circuito elétrico equivalente ao sistema magnético da figura 33, como indicado na figura 37.

Para simplificar a figura, não foram desenhados os transformadores ideais, colocando-se fontes de corrente em seu lugar.

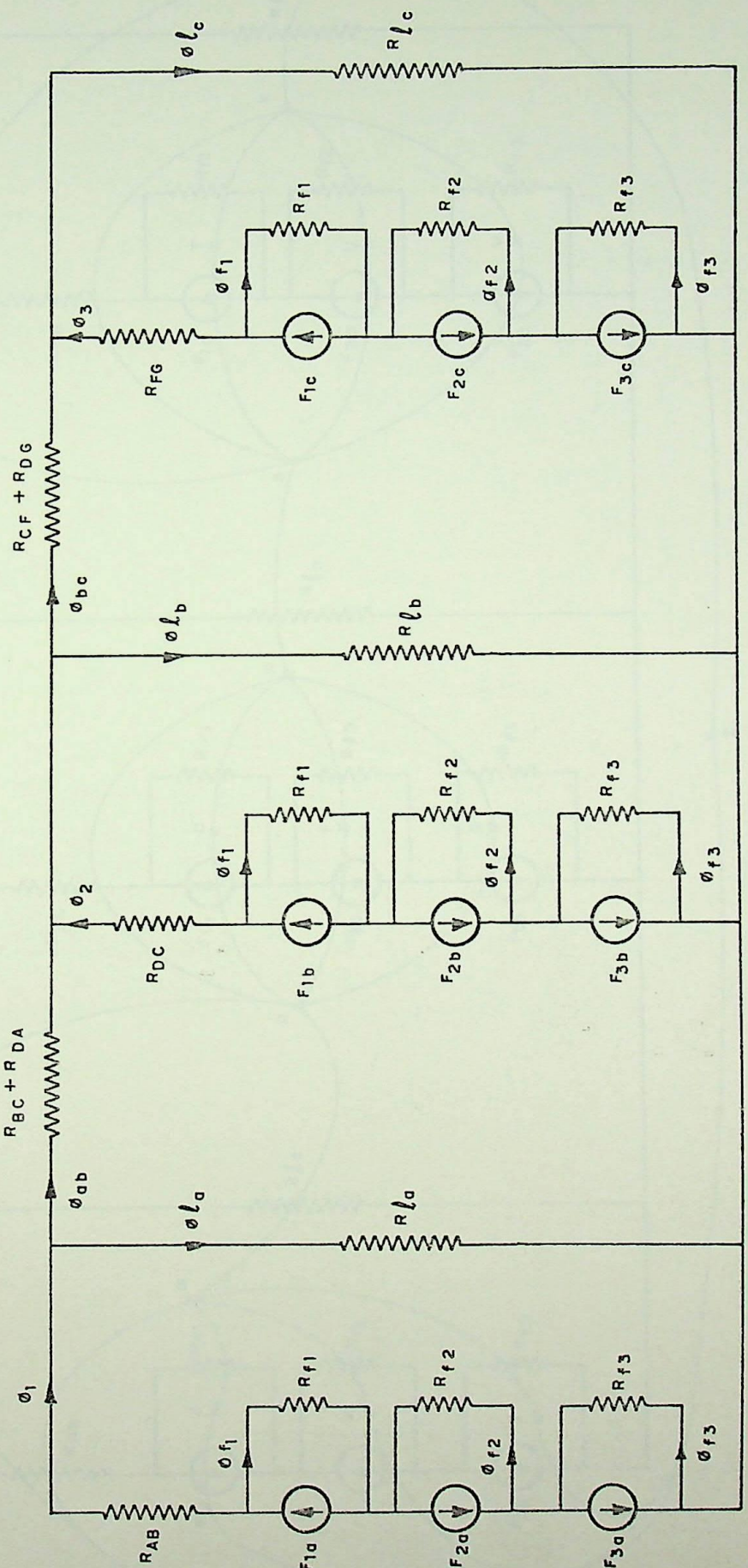



FIGURA 35: Circuito magnético equivalente ao sistema magnético da figura 34.

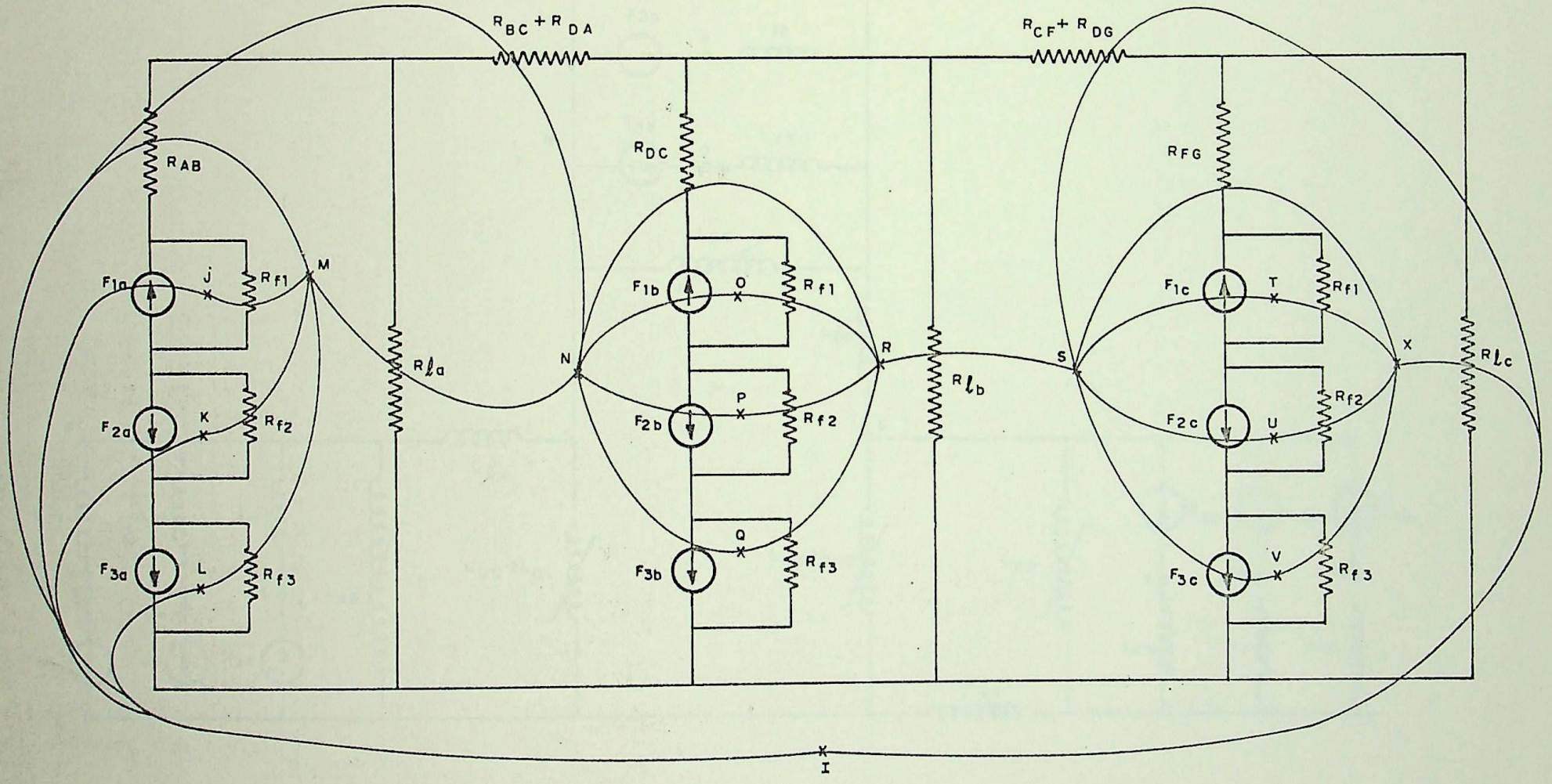



FIGURA 36: Circuito magnético da figura 35 com os pontos marcados e as linhas desenhadas.

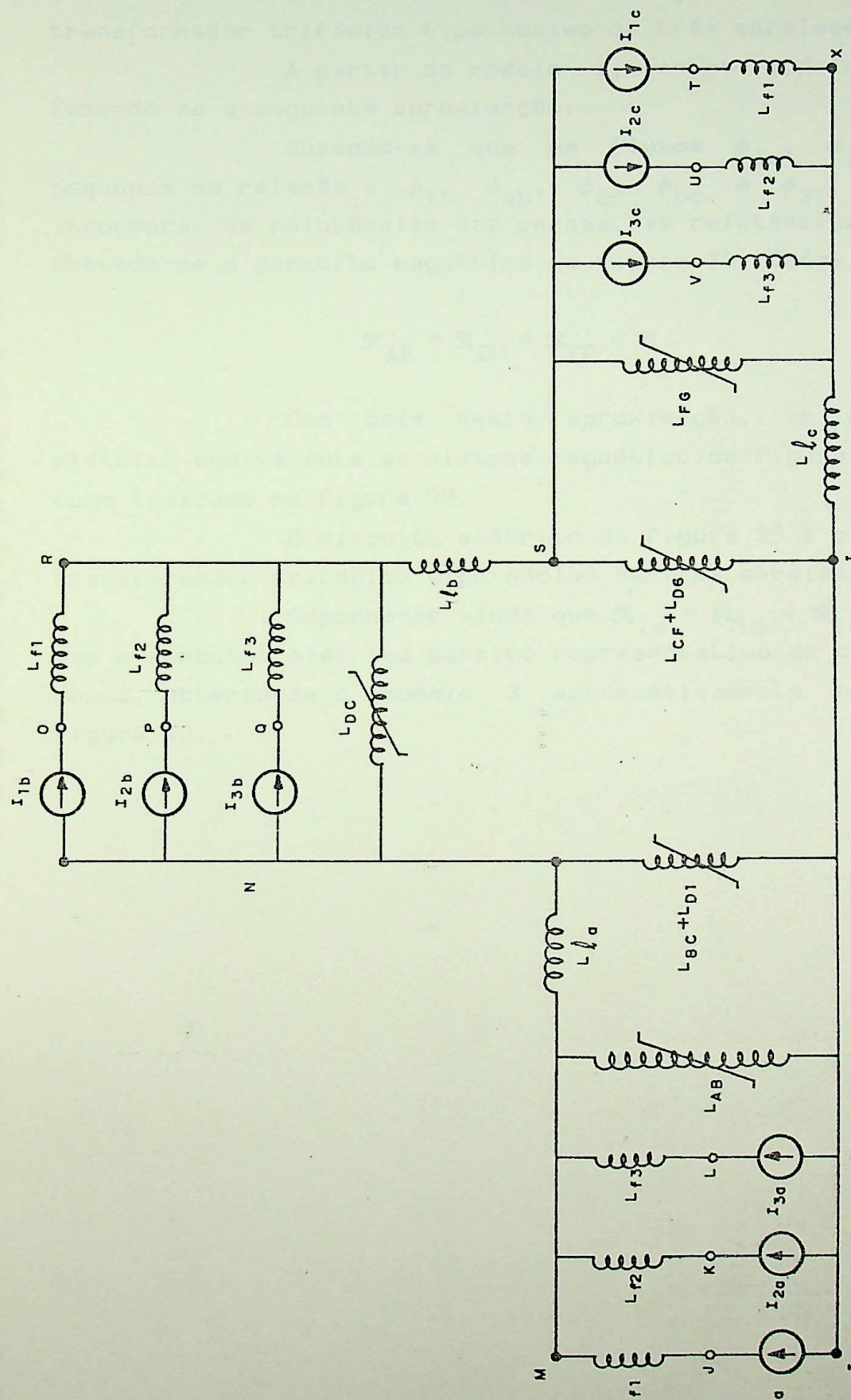



FIGURA 37: Circuito elétrico equivalente ao sistema magnético da figura 33.

O circuito elétrico da figura 37 é o modelo 1 do transformador trifásico tipo núcleo de três enrolamentos.

A partir do modelo 1, outro modelo será obtido fazendo-se a seguinte aproximação:

Supondo-se que os fluxos $\phi_{1a}$, $\phi_{1b}$ e $\phi_{1c}$ são pequenos em relação a $\phi_1$, $\phi_{ab}$, $\phi_2$, $\phi_{bc}$ e $\phi_3$, pode-se então incorporar às relutâncias das pernas, as relutâncias das culatras, obtendo-se o circuito magnético da figura 38. Onde:

$$\mathcal{R}'_{AB} = \mathcal{R}'_{DC} = \mathcal{R}'_{FG} = \mathcal{R}$$

Com base nesta aproximação, um novo circuito elétrico equivalente ao sistema magnético da figura 33 é obtido, como indicado na figura 39.

O circuito elétrico da figura 39 é o modelo 2 do transformador trifásico tipo núcleo de três enrolamentos.

Supondo-se ainda que $\mathcal{R}_{1a} = \mathcal{R}_{1b} = \mathcal{R}_{1c} = \mathcal{R}_1$, resulta que o circuito elétrico passivo representativo de cada perna é o mesmo, obtendo-se o modelo 3 esquemáticamente representado na figura 40.

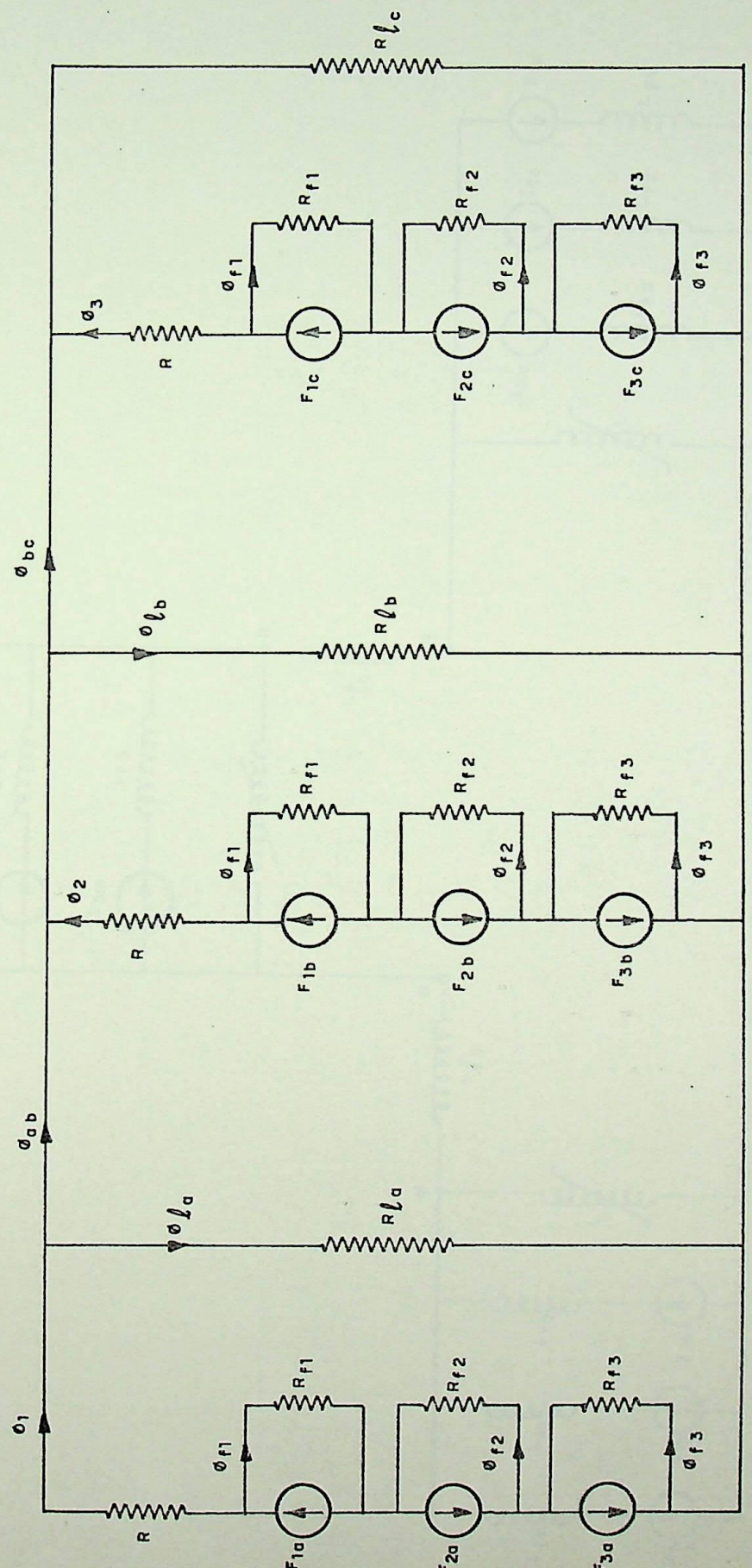



FIGURA 38: Circuito magnético equivalente simplificado do circuito da figura 35.

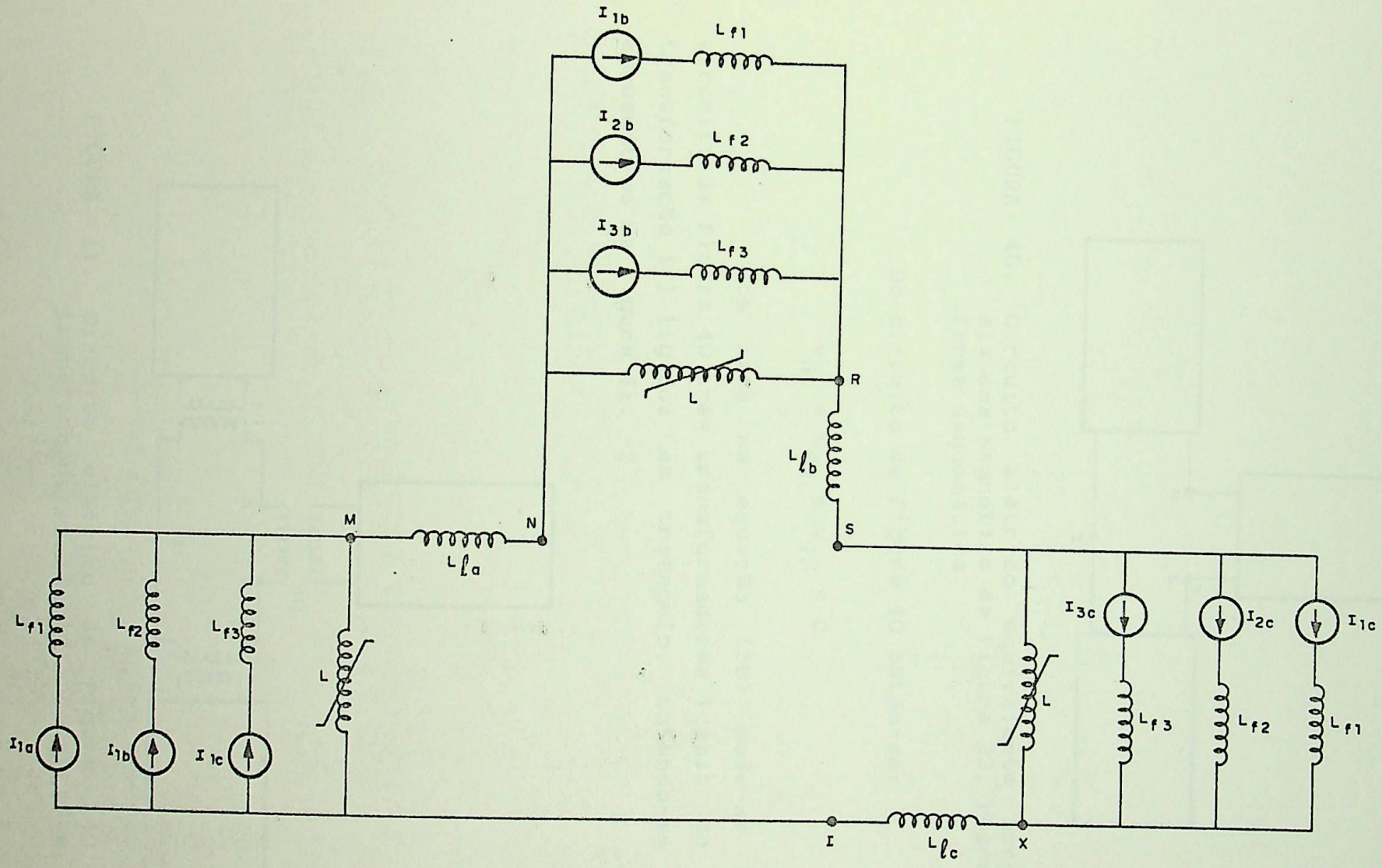



FIGURA 39: Circuito elétrico equivalente aproximado ao sistema magnético da figura 33.

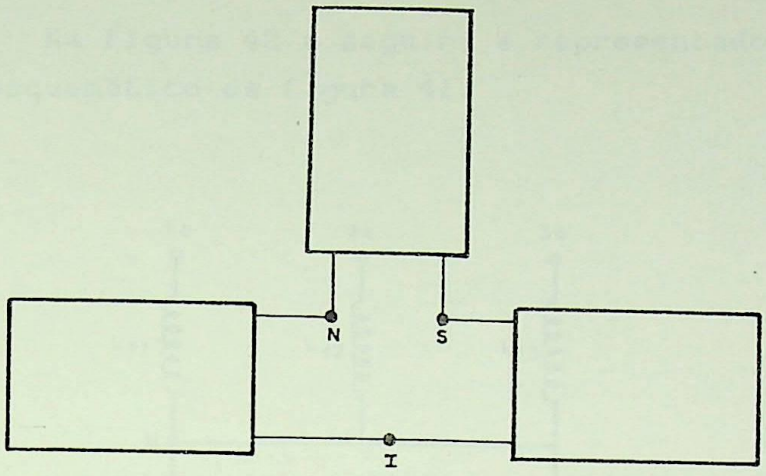



FIGURA 40: Circuito elétrico equivalente aproximado ao sistema magnético da figura 33, representado em forma esquemática.

Do circuito da figura 40 obtém-se:

$$v_{NI} + v_{SN} + v_{IS} = 0 \qquad (58)$$

Com base na equação (58) pode-se inserir ao circuito da figura 40 três transformadores ideais de relação de transformação 1:1 ligados em triângulo, obtendo-se o circuito esquemático da figura 41.

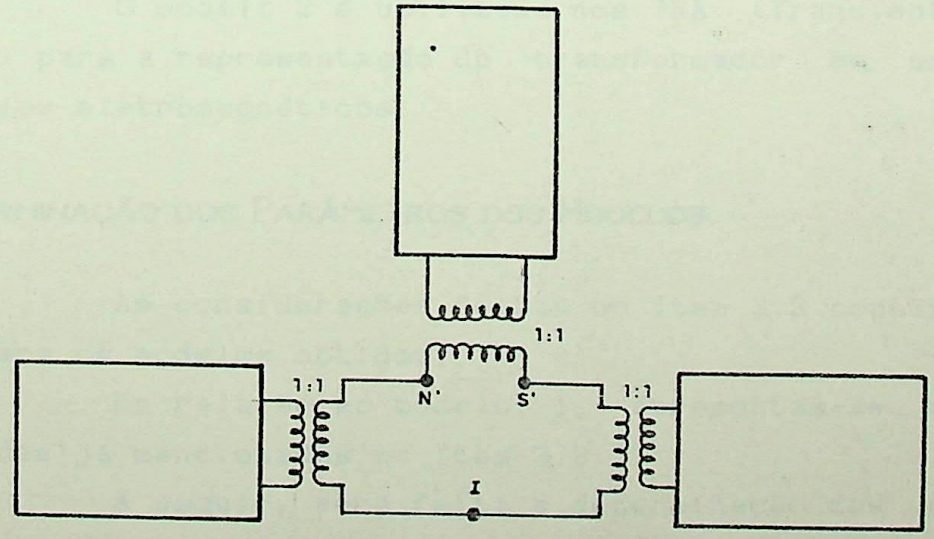



FIGURA 41: Circuito elétrico da figura 40 com três transformadores ideais incorporados.

Na figura 42 a seguir, é representado um dos blocos do circuito esquemático da figura 41.

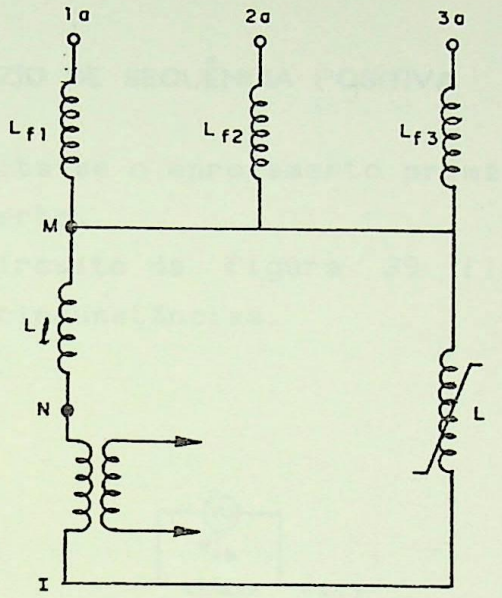



FIGURA 42: Circuito elétrico representativo de um dos blocos do circuito da figura 41.

Para se obter o modelo 3 é necessário considerar três circuitos iguais ao da figura 42, ligando-se os transformadores ideais em triângulo.

O modelo 3 é utilizado nos TNA (Transient Network Analyzers) para a representação do transformador em estudos de transitórios eletromagnéticos.

## 6.2 - Determinação dos Parâmetros dos Modelos

As considerações feitas no ítem 3.3 continuam sendo válidas para os modelos obtidos.

Em relação ao modelo 1, apresentam-se as mesmas dificuldades já mencionadas no ítem 3.3.2.

A seguir, será feita a determinação dos parâmetros do modelo 3, a partir dos dados de ensaios fornecidos pelo fabricante.

Vai-se trabalhar com o circuito da figura 39,

supondo que:

$$L_{1a} = L_{1b} = L_{1c} = L_1$$

## 6.2.1 - Ensaio a vazio de sequência positiva

Excita-se o enrolamento primário deixando os outros enrolamentos em aberto.

O circuito da figura 39 fica como indicado na figura 43, nestas circunstâncias.

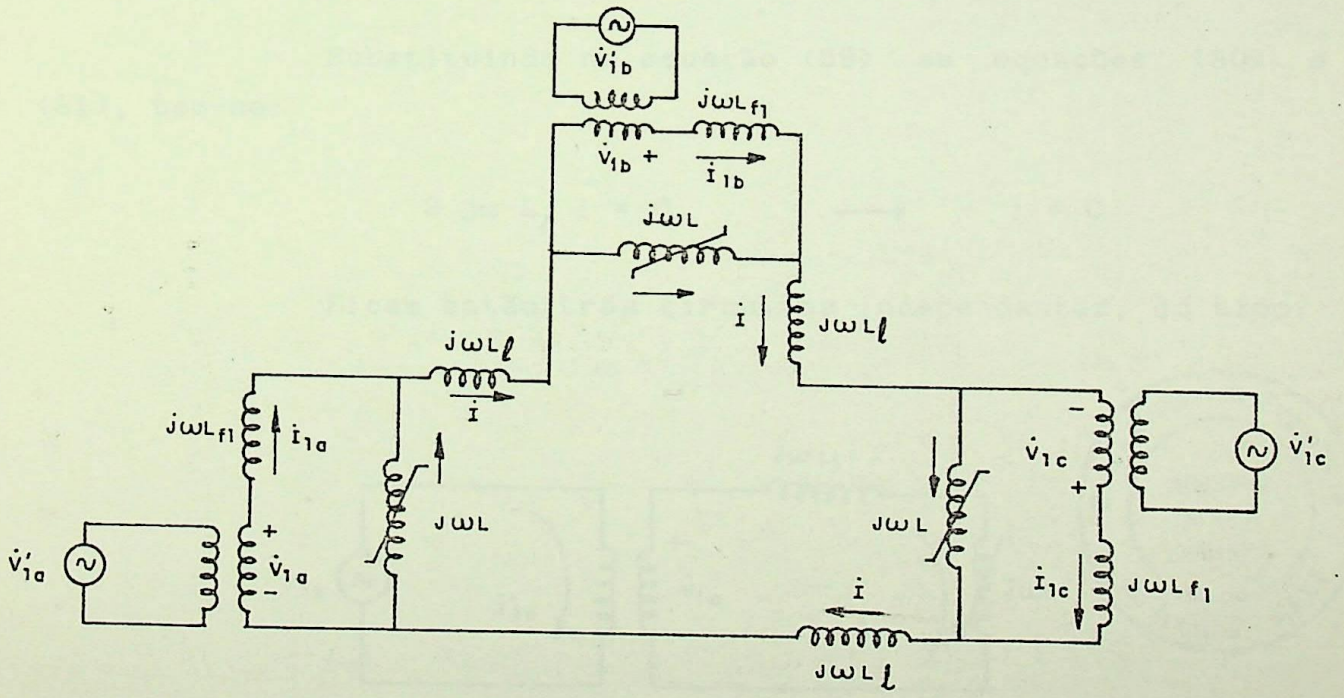



FIGURA 43: Circuito do ensaio a vazio obtido da figura 39.

A malha externa fornece:

$$-\dot{V}_{1a} + j\omega L_{f1}\,\dot{I}_{1a} + j\omega\,L_\ell \dot{I} - \dot{V}_{1b} + j\omega\,L_{f1}\,\dot{I}_{1b} +$$

$$+ j\omega\,L_\ell\,\dot{I} - \dot{V}_{1c} + j\omega\,L_{f1}\,\dot{I}_{1c} + j\omega\,L_\ell\,\dot{I} = 0$$

ou

$$-(\dot{V}_{1a} + \dot{V}_{1b} + \dot{V}_{1c}) + 3j\omega L_{\ell}\dot{I} + j\omega L_{f1}(\dot{I}_{1a} +$$

$$+ \dot{I}_{1b} + \dot{I}_{1c}) = 0 \qquad (59)$$

Como o sistema de tensões aplicadas é equilibrado, tem-se:

$$\dot{V}_{1a} + \dot{V}_{1b} + \dot{V}_{1c} = 0 \qquad (60)$$

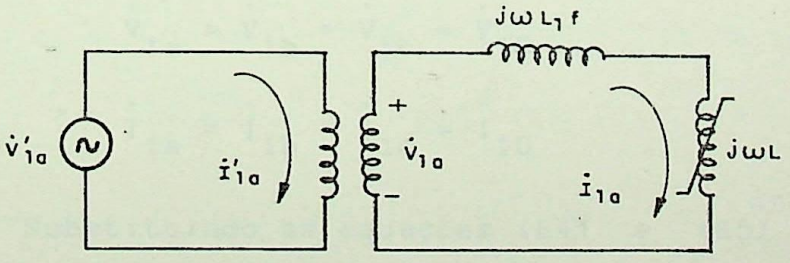
Como o sistema passivo é equilibrado, tem-se:

$$\dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b} + \dot{I}_{1c} = 0 \qquad (61)$$

Substituindo na equação (59) as equações (60) e (61), tem-se:

$$3\ j\omega\ L_{\ell}\ \dot{I} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \dot{I} = 0$$

Ficam então três circuitos independentes, do tipo:




Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

FIGURA 44: Circuito equivalente do ensaio a vazio para a fase "a".

Resulta então que:

$$\frac{\dot{V}'_{1a}}{\dot{I}'_{1a}} \cong j\omega\ (L'_{1f} + L') \qquad (62)$$

Da curva $V_{rms} \times I_{rms}$, obtida no ensaio a vazio,

pode-se determinar a característica $\lambda \times i$ para o indutor não linear L, utilizando o procedimento descrito no Anexo I e subtraindo logo à mesma a indutância de dispersão do primário.

### 6.2.2 - Ensaio a vazio de sequência zero

Excita-se o enrolamento primário deixando os outros enrolamentos em aberto. O circuito da figura 39 fica como indicado na figura 43.

Re-escrevendo a equação (59), tem-se:

$$-(\dot{V}_{1a} + \dot{V}_{1b} + \dot{V}_{1c}) + 3j\omega L_{\ell} \dot{I} + j\omega L_{f1}(\dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b} + \dot{I}_{1c}) = 0 \qquad (59)$$

A malha interna que só contém os ramos $j\omega L$ e $j\omega L_{\ell}$ fornece a equação:

$$j\omega L(\dot{I} - \dot{I}_{1a}) + j\omega L_{\ell} \dot{I} + j\omega L(\dot{I} - \dot{I}_{1b}) + j\omega L_{\ell} \dot{I} + j\omega L(\dot{I} - \dot{I}_{1c}) + j\omega L_{\ell} \dot{I} = 0 \qquad (63)$$

Neste caso, tem-se:

$$\dot{V}_{1a} = \dot{V}_{1b} = \dot{V}_{1c} = \dot{V}_{10} \qquad (64)$$

$$\dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1b} = \dot{I}_{1c} = \dot{I}_{10} \qquad (65)$$

Substituindo as equações (64) e (65) na equação (59), resulta:

$$-3\dot{V}_{10} + 3j\omega L_{\ell} \dot{I} + 3j\omega L_{f1} \dot{I}_{10} = 0$$

ou

$$-\dot{V}_{10} + j\omega L_{\ell} \dot{I} + j\omega L_{f1} \dot{I}_{10} = 0 \qquad (66)$$

Substituindo as equações (64) e (65) na equação

(63), resulta:

$$3j\omega L_\ell \dot{I} + 3j\omega L \dot{I} - 3 j\omega L \dot{I}_{10} = 0$$

ou

$$j\omega(L + L_\ell)\dot{I} - j\omega L \dot{I}_{10} = 0 \qquad (67)$$

Da equação (67) obtém-se:

$$\dot{I} = \frac{L}{L + L_\ell} \dot{I}_1 \cong \dot{I}_1$$

Substituindo esta última equação na equação (66) resulta:

$$\dot{V}_{10} = j\omega(L_\ell + Lf_1)\dot{I}_{10}$$

ou também:

$$\frac{\dot{V}'_{10}}{\dot{I}'_{10}} \cong j\omega(L'_\ell + L'_{f1}) \qquad (68)$$

Do ensaio a vazio de sequência zero pode-se então determinar o valor de $j\omega L_\ell$.

## 6.2.3 - Ensaios de curto-circuito de sequencia positiva

Será estudado o curto-circuito primário-secundário, ou seja:

- enrolamento primário excitado (P-exc)
- enrolamento secundário curto-circuitado (S-curto)
- enrolamento terciário em aberto (T-aberto).

O circuito da figura 39 fica como indicado na figura 45, nestas circunstâncias.

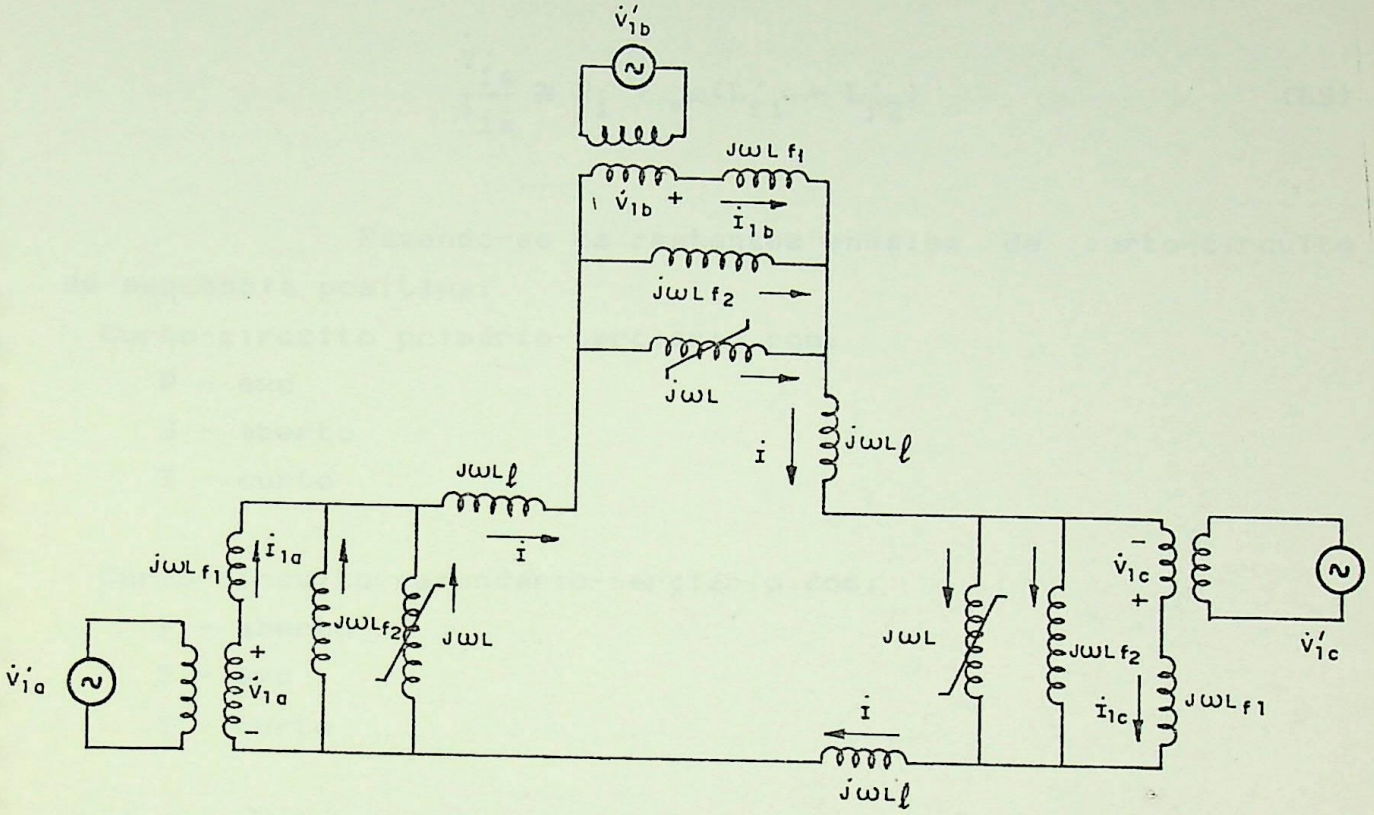



FIGURA 45: Circuito do ensaio de curto-circuito primário-secundário obtido da figura 39.

A equação (59) da malha externa fornece:

$$\dot{I} = 0$$

Ficam três circuitos independentes, do tipo mostrado na figura 46.

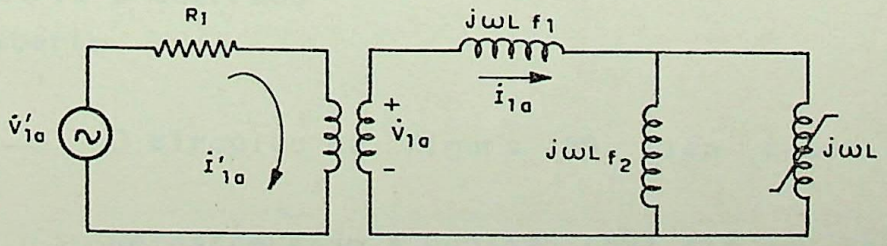



FIGURA 46: Circuito equivalente do ensaio de curto-circuito primário-secundário da fase "a".

Como $L >> Lf_2$, resulta:

$$\frac{\dot{V}'_{1a}}{I'_{1a}} \cong R_1 + j\omega(L'_{f1} + L'_{f2}) \qquad (69)$$

Fazendo-se os restantes ensaios de curto-circuito de sequência positiva:

- Curto-circuito primário-terciário com:
  - P - exc
  - S - aberto
  - T - curto

- Curto-circuito secundário-terciário com:
  - P - aberto
  - S - exc
  - T - curto

obtém-se um sistema linear de três equações com incógnitas $L'_{f1}$, $L'_{f2}$ e $L'_{f3}$. A resolução do mesmo permite calcular as indutâncias de dispersão dos enrolamentos.

### 6.2.4 - Ensaios de curto-circuito de sequência zero

Será estudado o curto-circuito primário-secundário, ou seja:

- P - exc
- S - curto e aterrado
- T - aberto

O circuito da figura 39 fica como indicado na figura 45.

Re-escrevendo a equação (59) com as condições das equações (64) e (65), obtém-se a equação (66):

$$-\dot{V}_{10} + j\omega L_{\ell}\,\dot{I} + j\omega L_{f1}\,\dot{I}_{10} = 0 \qquad (66)$$

Escrevendo a equação de malha interna que só contém os ramos $j\omega L_{f2}$ e $j\omega L_{\ell}$ e desprezando-se a corrente pelos ramos não-lineares fica:

$$j\omega L_{f2}(\dot{I} - \dot{I}_{10}) + j\omega L_{\ell}\,\dot{I} + j\omega L_{f2}(\dot{I} - \dot{I}_{10}) + j\omega L_{\ell}\,\dot{I} +$$

$$+ j\omega L_{f2}(\dot{I} - \dot{I}_{10}) + j\omega L_{\ell}\,\dot{I} = 0$$

ou

$$j\omega(L_{\ell} + L_{f2})\dot{I} - j\omega L_{f2}\,\dot{I}_{10} = 0 \qquad (70)$$

Obtendo-se o valor de $\dot{I}$ da equação (70) e substituindo-se na equação (66), tem-se:

$$-\dot{V}_{10} + j\omega\left(\frac{L_{\ell}\,L_{f2}}{L_{f2} + L_{\ell}} + Lf_1\right)\dot{I}_{10} = 0$$

ou

$$\dot{V}_{10} = j\omega\left(\frac{Ll\,Lf_2}{Lf_2 + Ll} + Lf_1\right)\dot{I}_{10} \qquad (71)$$

Esta equação pode ser obtida do circuito seguinte:

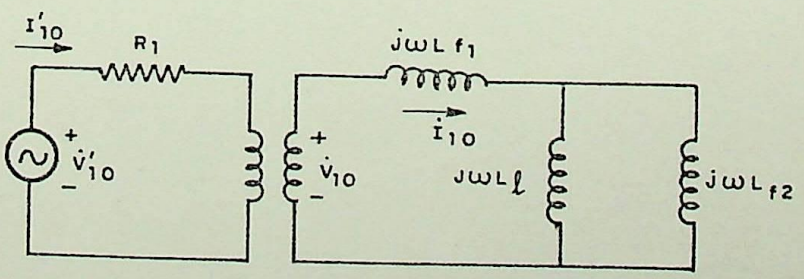



FIGURA 47: Circuito do ensaio de curto-circuito primário-secundário de sequência zero.

Foi suposta a circulação de corrente de sequência zero no enrolamento secundário, caso contrário ele ficará em aberto.

Os outros ensaios de curto-circuito de sequência zero dão, no caso de circulação de correntes homopolares, circuitos do tipo indicado na figura 47. Neste caso, os ensaios de curto-circuito de sequência zero, fornecem três equações a mais que as necessárias.

A comparação dos valores das impedâncias de curto-circuito de sequência zero, obtidos dos ensaios dados pelo fabricante com os valores calculados através das equações do tipo da equação (71), permite avaliar as aproximações feitas na obtenção do modelo 3.

Considerações similares às feitas para o modelo 3 podem ser extendidas para o modelo 2.

- a comparação exaustiva dos modelos [R]-[L] e $[R]-[L]^{-1}$
- desenvolver e/ou aperfeiçoar modelos de histerese para obter fluxos residuais confiáveis.
- desenvolver e/ou aperfeiçoar modelos de transformadores que sejam válidos em estudos que envolvam altas frequências.
- acrescentar no "ac steady state" as indutâncias das regiões lineares de indutores não lineares quando os mesmos são modelados simultaneamente, utilizando-se o método da compensação generalizado.
- considerar distribuições de fluxos mais detalhados permitindo assim obter outros modelos através de circuitos equivalentes.
- desenvolver procedimentos para a determinação dos parâmetros dos modelos nos casos em que os dados dos ensaios usuais, fornecidos pelos fabricantes, não são suficientes.

# CAPÍTULO V

# CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

# CAPÍTULO V

## CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

O objetivo principal do capítulo II foi apresentar e justificar alguns dos modelos de transformadores disponíveis nas diferentes versões do EMTP, assim como apresentar os aspectos computacionais envolvidos na implementação dos mesmos, de forma a permitir aos usuários dos programas um maior conhecimento da modelagem utilizada.

Os desenvolvimentos feitos no capítulo III tiveram como finalidade principal modelar simultaneamente elementos não lineares utilizando o método da compensação generalizado. Foi desenvolvida para esta dissertação a subrotina NONLIN que permite fazer a modelagem simultânea de indutores não lineares, assim como indutores e resistências não lineares, utilizando-se o método da compensação generalizado. Esta subrotina foi incorporada ao programa UBC-EFEI. Os resultados obtidos com a subrotina NONLIN, nos diferentes estudos feitos, permitem concluir que a modelagem desenvolvida torna-se uma boa alternativa ao elemento tipo "piece wise linear".

Os desenvolvimentos descritos no capítulo IV permitem observar as simplificações que ficam implícitas em alguns dos modelos do capítulo II e avaliar o gráu de exatidão dos mesmos, concluir que é possível obter modelos através de circuitos equivalentes mais exatos considerando-se outras distribuições de fluxo além das consideradas, observar que nos modelos mais exatos obtidos com o procedimento descrito no capítulo IV a determinação dos parâmetros exige em geral o conhecimento da geometria do transformador.

Durante a elaboração deste trabalho observou-se que alguns tópicos são merecedores de estudos mais aprofundados, para continuar a desenvolver novos modelos de transformadores e/ou aperfeiçoar os já existentes. Alguns de tais tópicos são:

# A N E X O  I

## OBTENÇÃO DA CARACTERÍSTICA ENLACE DE FLUXO - INTENSIDADE DE CORRENTE ($\lambda$ x i) A PARTIR DA CURVA DO ENSAIO A VAZIO $V_{RMS}$ x $I_{RMS}$

# ANEXO I

## OBTENÇÃO DA CARACTERÍSTICA ENLACE DE FLUXO - INTENSIDADE DE CORRENTE (λ x i) A PARTIR DA CURVA DO ENSAIO A VAZIO Vrms x Irms

### 1 - Introdução

Neste apêndice será feita uma descrição de um desenvolvimento matemático para a obtenção da curva λ x i a partir dos dados do ensaio a vazio de um transformador.

A necessidadede desta curva é devida ao fato de se poder modelar as características magnéticas não lineares do núcleo do transformador em estudos de transitórios eletromagnéticos.

Quando um transformador satura gera harmônicos de corrente, observando-se que o espectro da corrente saturada possui amplitudes significativas nos harmônicos de ordem mais baixa. Os harmônicos de corrente podem ocasionar sobretensões na rede dependendo da característica de impedância em função da frequência da mesma. A geração de harmônicos fica determinada pela característica λ x i. Considere-se na figura 1.a a característica λ x i simplificada. A partir desta característica pode-se determinar o valor de $X_{SAT} = \omega L_{SAT}$ como indicado.

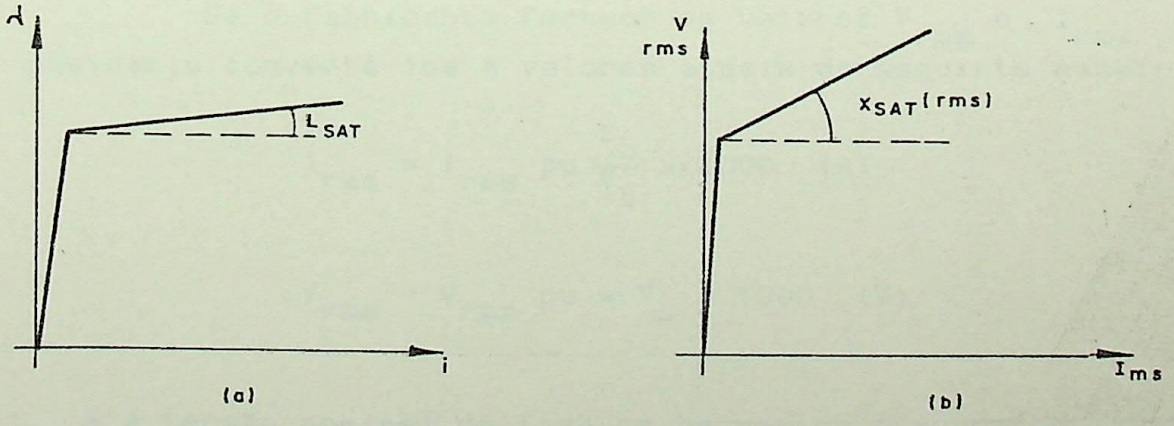



FIGURA 1: Características simplificadas:
a) λ x i
b) $V_{rms}$ x $I_{rms}$

Considere-se na figura 1.b a característica $V_{rms} \times I_{rms}$ simplificada. A partir dela pode-se determinar o valor de $X_{SAT}$ (rms) como indicado. É importante ressaltar que os valores de $X_{SAT}$ são diferentes:

$$X_{SAT} \text{ (rms)} \cong 1.5 \text{ a } 2.5 \; X_{SAT}$$

e portanto, diferentes resultados podem ser obtidos nas simulações usando-se um ou outro valor.

## 2 - Hipoteses Adotadas

a) As perdas por histerese são desprezadas

b) A curva $\lambda = \lambda(i)$ é uma função ímpar, isto é $\lambda(-i) = -\lambda(i)$

c) Assume-se que a curva $\lambda = \lambda(i)$ será dada ponto a ponto e que é válida a utilização da interpolação linear

d) A curva $V_{rms} \times I_{rms}$ é dada ponto a ponto pelo fabricante.

## 3 - Desenvolvimento Matematico

Se o fabricante fornece os valores $V_{rms}$ e $I_{rms}$ em pu é necessário convertê-los a valores atuais da seguinte maneira:

$$I_{rms} = I_{rms} \text{ pu } \frac{S_b}{V_b} \times 1000 \quad \text{(A)}$$

$$V_{rms} = V_{rms} \text{ pu} \times V_b \times 1000 \quad \text{(V)}$$

onde:

$V_b$ é a tensão nominal de fase em bornes do ramo magnetizante em kV

$S_b$ é a potência base monofásica em MVA.

Pela lei de Faraday-Lenz, tem-se:

$$v = - \frac{d\lambda}{dt}$$

supondo fluxo senoidal e desprezando a queda de tensão na impedância de dispersão resulta:

com

$$\lambda = \lambda_{max} \operatorname{sen}\omega t$$

$$v = -\omega \lambda_{max} \cos\omega t$$

então

$$V_{max} = \omega \lambda_{max}$$

$$\boxed{\lambda_{max} = \frac{\sqrt{2}\ V_{rms}}{\omega}} \qquad (1)$$

Esta fórmula permite obter os valores de pico do fluxo a partir das tensões rms.

A seguir será desenvolvido um procedimento para a obtenção dos valores de pico da corrente.

Sejam as curvas $V_{rms} \times I_{rms}$ e $\lambda \times i$ como mostradas na figura 2.

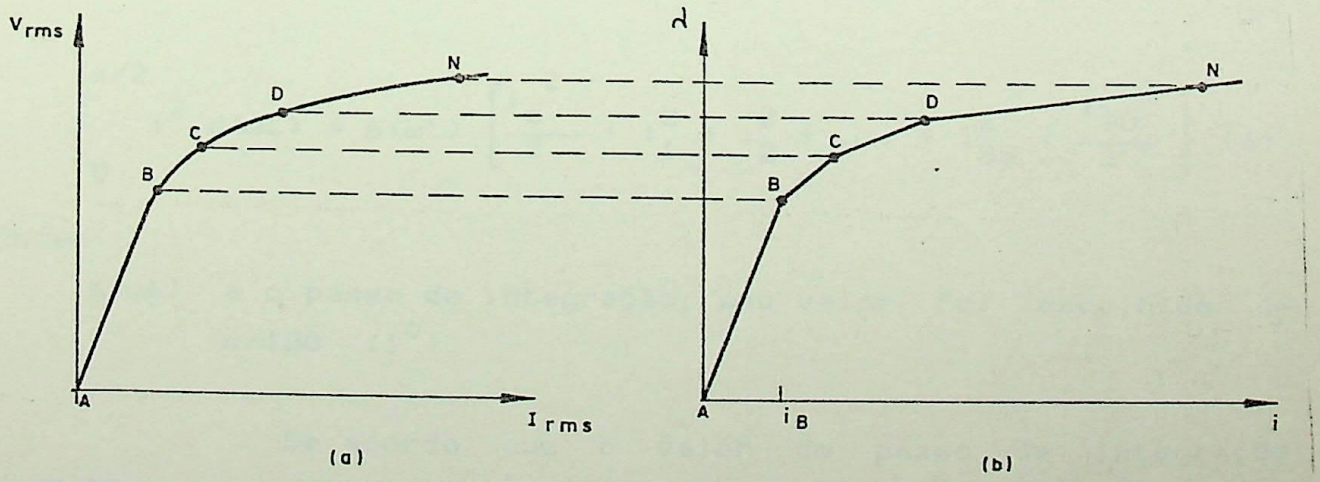



FIGURA 2: Características:
a - $V_{rms} \times I_{rms}$
b - $\lambda \times i$

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

As ordenadas da fig. 1 já foram multiplicadas por $\sqrt{2}/\omega$. Assumindo que a região AB das curvas é linear, o valor de pico da corrente é por exemplo para o ponto B:

$$i_B = \sqrt{2}\ I_{B\ rms} \qquad (2)$$

Esta fórmula só é válida para os pontos entre A e B.

Interessa agora a obtenção dos valores de pico de correntes para os outros pontos (C, D, ... N). A seguir serão obtidas fórmulas para o cálculo de $i_N$ supondo que as correntes dos outros pontos (B, C, D, ... N-1) são conhecidas. As fórmulas obtidas serão as mesmas para os pontos C, D, ... N-1.

$$I_{N\ rms} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} i^2 d(\omega t)} \qquad (3)$$

O intervalo de integração $[0, \pi/2]$ é devido às simetrias da curva $i^2$ em relação aos eixos $\omega t = \pi$ e $\omega t = \pi/2$.

Para o cálculo da integral utiliza-se um método numérico, neste caso, o método trapezoidal.

Aplicando o mesmo resulta:

$$\int_0^{\pi/2} i^2\, d(\omega t) = \Delta(\omega t)\left[\frac{i_o^2}{2} + i_1^2 + i_2^2 + \ldots + i_{89}^2 + \frac{i_{90}^2}{2}\right] \qquad (4)$$

Onde:

$\Delta(\omega t)$ é o passo de integração; seu valor foi escolhido de $\pi/180$ $(1^o)$.

De acordo com o valor do passo de integração resulta:

$i_0$ valor da corrente para $\omega t \longrightarrow 0^o$

$i_1$ valor da corrente para $\omega t \longrightarrow 1^o$

$\vdots$

$i_{90}$ valor da corrente para $\omega t \longrightarrow 90^o$

Então substituindo a equação (4) na equação (3) e elevando ao quadrado obtém-se:

$$90(I_{N\ rms})^2 = \frac{i_o^2}{2} + i_1^2 + \ldots + i_{89}^2 + \frac{i_{90}^2}{2} \qquad (5)$$

A seguir, será analisado como calcular os valores: $i_o, i_1, \ldots, i_{90}$

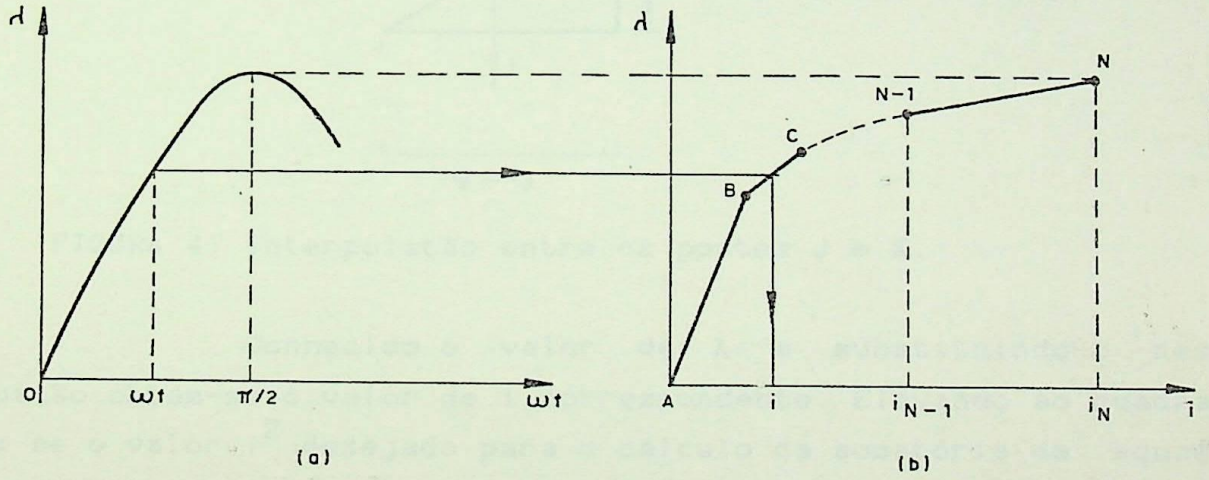



FIGURA 3: Características: a) $\lambda \times \omega t$
b) $\lambda \times i$

Para $\omega t = 0 \longrightarrow i_o = 0$

Para cada valor de $\omega t$ da curva $\lambda = \lambda(\omega t)$ tem-se o valor do enlace de fluxo correspondente. Tendo este valor para o cálculo do valor da corrente se fará interpolação linear.

Para fazer a interpolação linear tem-se que distinguir duas regiões:

a) As regiões AB, BC, CD, ..., N-2 N-1 para as quais se conhecem as coordenadas dos pontos A, B, C, ..., N-2, N-1.

b) A região N-1 N na qual só se conhece as coordenadas do ponto N-1.

Suponha-se agora que se faz a interpolação entre os pontos J e K de coordenadas conhecidas.

A equação da reta que passa pelos pontos J e K é:

$$i = i_J + \frac{i_k - i_J}{\lambda_k - \lambda_J} (\lambda - \lambda_J) \qquad (6)$$

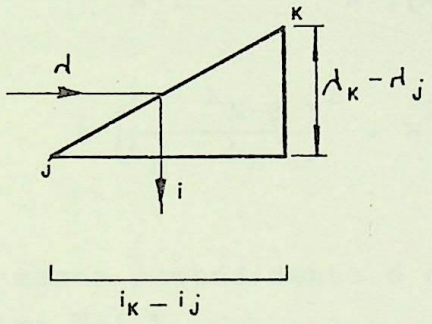



FIGURA 4: Interpolação entre os pontos J e K.

Conhecido o valor de $\lambda$ e substituindo-o nesta equação obtém-se o valor de i correspondente. Elevando ao quadrado tem-se o valor $i^2$ desejado para o cálculo da somatória da equação (5). Este mesmo procedimento é o que se faz para todos os outros pontos entre A e N-1.

Suponha-se agora que se faz a interpolação na região N-1 N:

Re-escrevendo a equação da reta que passa pelos pontos N-1 e N:

$$i = i_{N-1} + \frac{i_N - i_{N-1}}{\lambda_N - \lambda_{N-1}} (\lambda - \lambda_{N-1}) \qquad (7)$$

Nesta equação, além da incógnita i, tem-se a incógnita $i_N$ que é o valor procurado. Seja

$$x = i_N - i_{N-1}$$

Conhecido o valor de $\lambda$ e substituindo-o na equação (7) tem-se a seguinte expressão:

$$i = i_{N-1} + \frac{\lambda - \lambda_{N-1}}{\lambda_N - \lambda_{N-1}} \cdot x \qquad (8)$$

ou seja, o valor de i na interpolação fica como uma função da nova incógnita x. Elevando ao quadrado tem-se o valor de $i^2$, o qual será substituido na equação (5)

$$i^2 = i_{N-1}^2 + 2 \cdot i_{N-1}\left(\frac{\lambda - \lambda_{N-1}}{\lambda_N - \lambda_{N-1}}\right) \cdot x +$$

$$+ \left(\frac{\lambda - \lambda_{N-1}}{\lambda_N - \lambda_{N-1}}\right)^2 \cdot x^2 \qquad (9)$$

Este mesmo procedimento é o que se faz para todos os outros pontos entre N-1 N.

Então a equação (5) pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\boxed{90.(I_{N\ rms})^2 = a + bx + cx^2} \qquad (10)$$

onde:

a, b e c são coeficientes constantes e conhecidos.

A equação (10) é uma equação de segundo grau na incógnita x, resolvendo-a e tomando a raiz positiva conhece-se agora:

$$\boxed{i_N = x + i_{N-1}} \qquad (11)$$

OBSERVAÇÕES

a) Este apêndice está baseado num manuscrito do Dr. H.W. Dommel datado de Novembro 20, 1972, referência [19].

b) Este procedimento para a obtenção da curva λxi foi implementado no UBC-EFEI num programa auxiliar chamado CONVERT.

## 4 - Exemplo

A seguir será feito um exemplo de aplicação. Seja a tabela I onde está dada a curva $V_{rms} \times I_{rms}$.

TABELA I: Curva $V_{rms} \times I_{rms}$ em p.u. com potência base por fase de 50[MVA] e tensão base de fase de 635.1[kV].

| $V_{rms}$ (pu) | $I_{rms}$ (pu) |
|---|---|
| 0. | 0. |
| 0.9 | 0.0056 |
| 1.0 | 0.0150 |
| 1.1 | 0.0401 |

Passando a valores atuais seguindo o procedimento do ítem 3, tem-se:

TABELA II: Curva $V_{rms} \times I_{rms}$ em valores atuais.

| $V_{rms}$ (V) | $I_{rms}$ (A) | PONTO |
|---|---|---|
| 0. | 0. | A rms |
| 571590.0 | 0.440875 | B rms |
| 635100.0 | 1.180916 | C rms |
| 698610.0 | 3.156983 | D rms |

Usando agora a equação (1) passando de valores de tensão rms a valores de pico de enlace de fluxo, tem-se:

TABELA III: Passagem de $V_{rms}$ a $\lambda$ de pico usando a equação (1)

| $V_{rms}$ (V) | $\lambda$(Vs) | PONTO |
|---|---|---|
| 0. | 0. | A |
| 571590.0 | 2144.22 | B |
| 635100.0 | 2382.46 | C |
| 698610.0 | 2620.71 | D |

A seguir, serão calculadas as correntes correspondentes aos $\lambda$ dados na tabela III.

Para o ponto A $\longrightarrow$ $i_A = 0$

Considere-se agora na figura 5 o ponto B.

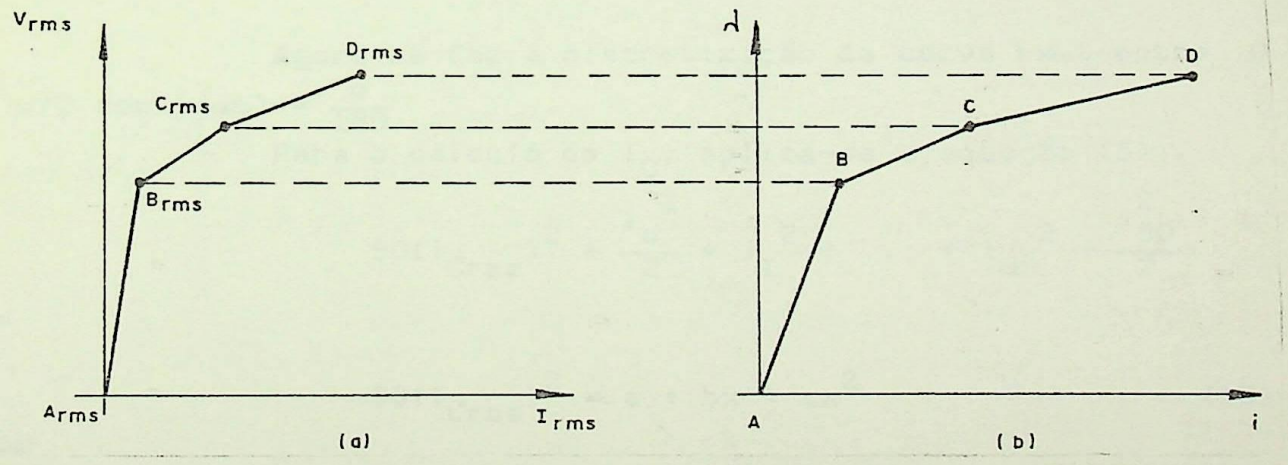



FIGURA 5: Características para o exemplo.
a) $V_{rms} \times I_{rms}$
b) $\lambda \times i$

Para este ponto que pertence à região linear é válida a equação (2), resultando:

$$i_B = \sqrt{2} \times 0.440875 = 0.6235 \text{ [A]}$$

Se calculará agora a corrente $i_C$; para isso, considere-se a figura 6.

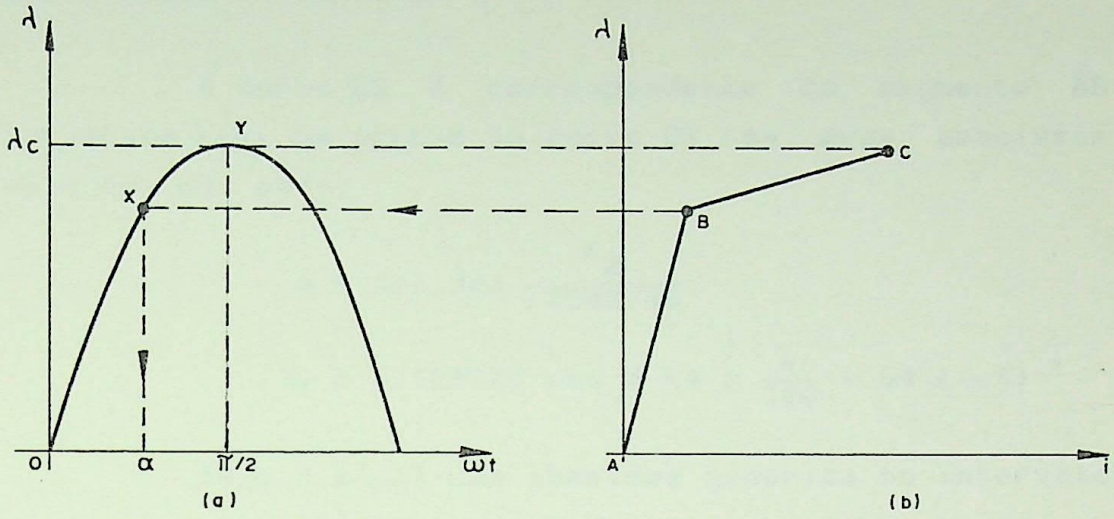



FIGURA 6: Características:
a) λC x ωt
b) λ x i

onde:

$$\lambda_C = 2382.46\ \text{sen}\omega t \qquad (12)$$

Agora se faz a discretização da curva λxωt entre 0 e $\pi/2$ com $\Delta(\omega t) = \frac{\pi}{180}$

Para o cálculo de $i_C$, aplica-se a equação (5):

$$90(I_{Crms})^2 = \frac{i_o^2}{2} + i_1^2 + \ldots + i_{89}^2 + \frac{i_{90}^2}{2}$$

ou

$$90(I_{Crms})^2 = a + bx + cx^2 \qquad (13)$$

com

$$I_{Crms} = 1.180916$$

$$x = i_C - i_B$$

$$x = i_C - 0.6235$$

A discretização total é decomposta em duas discretizações parciais.

a) Discretização da curva OX

A curva OX é correspondente do segmento AB da característica λxi. Os pontos da curva OX tem suas abscissas no intervalo [0, α], onde:

$$\alpha = \text{Arc sen} \frac{\lambda_B}{2382.46}$$

$$\alpha = 1.119775 \text{ rad} \cong 64 \times \frac{\pi}{180} = 64\ \Delta(\omega t)$$

Seja n.Δ(ωt) uma abscissa genérica no intervalo [0, α].

Dado n . Δ(ωt), encontra-se o valor de λ correspondente pela equação (12) e encontra-se o valor de i substituindo na equação (6) da reta, onde J ≡ A e K ≡ B.

$$i = \frac{0.6235}{2144.22} \cdot \lambda$$

Todos os pontos da curva OX contribuem para o coeficiente "a" da equação (13).

Por exemplo, para $1.\Delta(\omega t) = \frac{\pi}{180} \longrightarrow$

$$\lambda = 41.57966 \longrightarrow i = 0.01209 \longrightarrow i_1^2 = 0.000146$$

b) Discretização da curva XY

A curva XY é correspondente do segmento BC da característica λxi. Os pontos da curva XY tem suas abscissas no intervalo [α, π/2]. Seja n . Δ(ωt) uma abscissa genérica do intervalo [α, π/2].

Dado n . Δ(ωt) encontra-se o valor de λ correspondente pela equação (12) e encontra-se o valor de $i^2$ como função de x dado pela equação (9); neste caso, N-1 ≡ B e N ≡ C.

$$i^2 = i_B^2 + 2 \cdot i_B \cdot \left(\frac{\lambda - \lambda_B}{\lambda_C - \lambda_B}\right) x + \left(\frac{\lambda - \lambda_B}{\lambda_C - \lambda_B}\right)^2 x^2$$

Por exemplo, para 65 $\Delta(\omega t)$

$$\lambda = 2159.24$$

$$i_{65}^2 = 0.388752 + 0.078618\ x + 0.003975\ x^2$$

Os pontos da curva XY contribuem na equação (13) para os coeficientes "a", "b" e "c".

Determinados os coeficientes "a", "b" e "c" se resolve a equação (13) e tomando a raiz positiva determina-se $i_C$.

O procedimento feito para a obtenção de $i_C$ repete-se agora para a obtenção de $i_D$.

# A N E X O  I I

## SUBROTINA NONLIN

# ANEXO II

# SUBROTINA NONLIN

## 1 - INTRODUÇÃO

A subrotina NONLIN como já mencionado usa o método de compensação generalizado. Este método é também utilizado no UBC-EFEI para pára-raios de óxido de zinco. Nesse programa, a resolução do sistema de equações não lineares correspondentes é feita na subrotina CONNEC.

A subrotina NONLIN é chamada pela subrotina CONNEC quando um flag é ativado indicando a presença de indutores não lineares, ou de indutores não lineares e pára-raios de óxido de zinco, como indicado na figura 1.

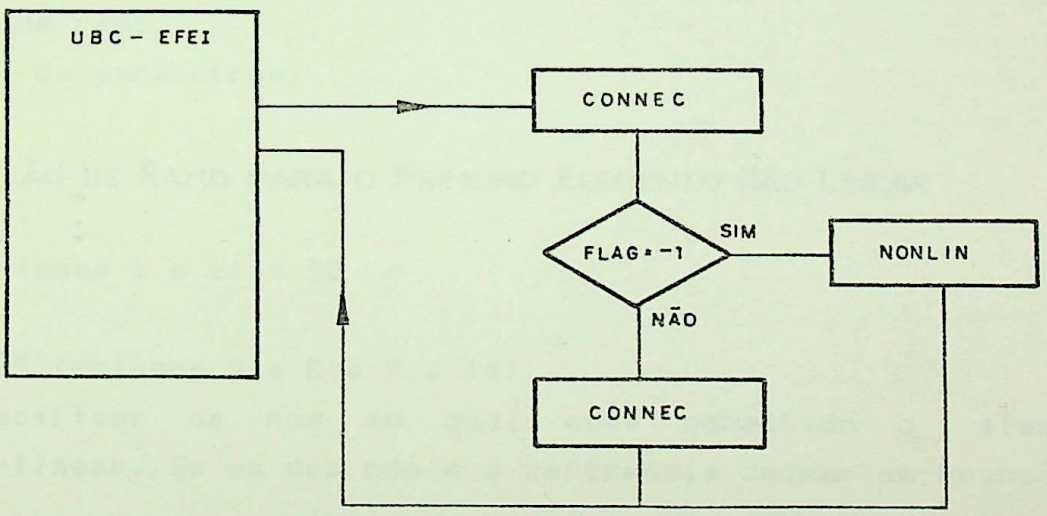



FIGURA 1: Fluxograma relacionando as subrotinas CONNEC e NONLIN com o programa UBC-EFEI.

A subrotina NONLIN é chamada pela subrotina CONNEC e esta pelo programa UBC-EFEI para cada instante de tempo. A subrotina CONNEC transfere à subrotina NONLIN:

- a matriz $[R_{TH}]$ equivalente de Thevenin;
- as correntes nos elementos não lineares no "step" ou passo anterior: $i_{km}(t - \Delta t)$;
- as tensões de ramo a vazio em bornes dos elementos não lineares: $[v_{km}^{o}(t)]$;

- as tensões de ramo nos elementos não lineares no "step" anterior $[v_{km}(t - \Delta t)]$
- o número de elementos não lineares.

Estes dados são fornecidos à subrotina CONNEC pelo programa principal.

## 2 - "CARTÕES" DE DADOS DE ENTRADA

Os cartões de dados de entrada para a subrotina NONLIN adicionam-se no conjunto de cartões para ramos lineares e não-lineares no arquivo do caso em estudo.

A seguir são descritos os cartões, na ordem em que devem ser preenchidos no arquivo de dados.

Para o primeiro elemento não linear, tem-se:

- cartão de ramo.
- cartões de parâmetros.

### 2.1 - Cartão de Ramo para o Primeiro Elemento Não Linear

ITYPE (colunas 1 e 2) = 92

NODE NAMES (colunas 3 a 8 e 9 a 14)

Especificar os nós ao qual está conectado o elemento não-linear. Se um dos nós é a referência deixar em branco.

IPHASE (Coluna 79)

É para numerar os elementos não-lineares, por 1 para este primeiro elemento.

IOUT (coluna 80)

= 1 A corrente de ramo será incluida na saída, substituida pela potência instantânea se IPOWER = 1 no cartão de tempo.

= 2 A tensão de ramo será incluida na saída.

= 3 A corrente de ramo (ou potência instantânea) e a tensão de ramo serão incluidas na saída.

## 2.2 - Cartões de Parâmetros

| 1 X 8 | 9 Y 16 |
|---|---|
| X(1) | Y(1) |
| X(2) | Y(2) |
| X(3) | Y(3) |
| X(4) | Y(4) |
| X(5) | Y(5) |
| X(6) | |
| X(7) | |
| X(8) | |
| X(9) | |
| 9999999. | |

VETOR X (Colunas 1 a 8)

X(1) = -1 é chamada a subrotina NONLIN

X(2) Enlace de fluxo inicial no primeiro indutor não-linear

X(3) Enlace de fluxo inicial no segundo indutor não-linear

⋮

X(7) Enlace de fluxo inicial no sexto indutor não-linear.

OBS: No caso de ter um número de indutores não-lineares menor que seis, colocar 0.0 nos enlaces de fluxos iniciais correspondentes.

X(8) Valor do passo de integração $\Delta t$ no caso em estudo

X(9) Tolerância em volts para o processo de Newton-Raphson.

VETOR Y (Colunas 9 a 16)

- Somente indutores não lineares

Neste caso o vetor Y deve ser preenchido da

seguinte forma:

$Y(1) = a_1$
$Y(2) = \alpha_1$
} parâmetros dos três primeiros indutores não lineares

$Y(3) = a_2$
$Y(4) = \alpha_2$
} parâmetros dos três restantes indutores não lineares

$Y(5) = 1.0$

OBSERVAÇÃO: No caso de ter só três indutores não lineares, fazer

$$a_2 = \alpha_2 = 0.0$$

- Três indutores e três resistências não lineares

Neste caso o vetor Y deve ser preenchido da seguinte forma:

$Y(1) = a$
$Y(2) = \alpha$
} parâmetros dos três indutores não lineares

$Y(3) = b$
$Y(4) = \beta$
} parâmetros das três resistências não lineares

$Y(5) = -1.0$

O significado dos parâmetros "a" e "$\alpha$" estão explicados no ítem 4.2.1 do capítulo III e o significado dos parâmetros "b" e "$\beta$" estão explicados no ítem 4.2.2 do mesmo capítulo.

OBSERVAÇÃO:

Poderia-se designar um "a" e um "$\alpha$" para cada indutor, assim como um "b" e um "$\beta$" para cada resistência, mas isto requer um aumento nas dimensões dos vetores X e Y, fixadas pelo programa principal em 10 cada um, e uma pequena modificação

Escola Federal de Engenharia Biblioteca Mauá

na subrotina NONLIN.

Devido a que toda a informação necessária é transferida num único conjunto de cartões de parâmetros, o segundo até o N-ésimo elemento não linear somente tem cartão de ramo.

## 2.3 - Cartão de Ramo para os Restantes Elementos Não Lineares

ITYPE (Colunas 1 e 2) = 92

NODE NAMES (Colunas 3 a 8 e 9 a 14)
O conteúdo é o mesmo que no ítem 2.1.

NODE NAMES OF REFERENCE BRANCH (Colunas 15 a 20 e 21 a 26)
Colocam-se como nomes dos nós dos ramos de referência os nomes dos nós extremos do primeiro elemento não linear.

IPHASE (Coluna 79)
Colocar 2 para o segundo elemento, 3 para o terceiro, etc., na ordem consecutiva.

IOUT (Coluna 80)
O conteúdo é o mesmo que no ítem 2.1.

Exemplos de arquivos de dados já foram apresentados nos ítens 5.3.2 e 5.4.2 do Capítulo III.

# 3 - SAÍDAS DA SUBROTINA NONLIN

A subrotina calcula as tensões nos terminais dos elementos não lineares, as correntes que circulam por eles, assim como os enlaces de fluxo nos indutores não lineares.

Ao programa principal retornam:

- as correntes pelos ramos não lineares;

- os enlaces de fluxo.

As correntes serão usadas na equação (8) do capítulo III, ítem 2.1.3 para a obtenção das tensões nodais no sistema para o instante de tempo considerado. Isto é feito pelo programa principal.

## 4 - OBSERVACÕES

Parte dos dados de entrada são os enlaces de fluxos iniciais nos indutores não-lineares. Para obter estes valores é necessário rodar um caso em regime permanente ("ac steady state"). Substituindo-se os elementos não-lineares por elementos lineares por trechos ("type 93 piecewise linear").

# BIBLIOGRAFIA

1 - E.E. Staff - M.I.T - "Circuitos Magnéticos y Transformadores" Reverté-Barcelona-Buenos Aires-México - 1965.

2 - L.F. Blume, A. Boyajian, G. Camilli, T.C. Lennox, S. Minneci, V.M. Montsinger - "Transformer Engineering" - John Wiley & Sons, Inc. - New York-London-Sydney - 1951.

3 - Kostenko, M.; Piotrovski, L. - "Máquinas Elétricas: Máquinas de Corrente Contínua e Transformadores" - Ed. Lopes da Silva - Porto - 1979.

4 - A. Langsdorf - "Teoría de las Máquinas de Corriente Alternada" McGraw Hill - 1979.

5 - J. Arrillaga, C.P. Arnold, B.J. Harker - "Computer Modelling of Electrical Power Systems" - John Wiley - New York - 1983.

6 - O.G.L. Dahl - "Electric Circuits - Theory and Applications" - McGraw Hill - New York - 1928.

7 - H.H. Skilling - "Circuitos en Ingeniería Elétrica" - Ed. Continental - México - 1962.

8 - D. Soares Ramos, E. Mário Dias - "Sistemas Elétricos de Potência" - Vol. 1 e 2 - Guanabara Dois S.A. - 1983.

9 - G.R. Slemon - "Equipamentos Magnetoelétricos: Transdutores, Transformadores e Máquinas" - Ed. LTC - Rio de Janeiro - 1974.

10- M.G. Gardner, J.L. Barnes - "Transients in Linear Systems" - John Wiley, New York, 1942.

11- H.W. Dommel - "Electromagnetic Transients Program - Reference Manual - (EMTP Theory Book)" - 1986.

12- H.W. Dommel, I.I. Dommel - "Transients Program - User's Manual" - University of British Columbia - Vancouver, Canada - 1987.

13- H.W. Dommel - "Three-Phase Transformer Program - User's Manual" - University of British Columbia - Vancouver, Canada - 1980.

14- A. Reigado Costa de Oliveira - "Modelos e Técnicas Computacionais Utilizadas no Programa EMTP para Cálculo de Transitórios Eletromagnéticos" - Tese de Mestrado - EFEI - 1988.

15- M. Fissassi Ushikubo - "Modelagem Digital de Componentes do Sistema Elétrico de Potência para Aplicação em Estudos de Sobretensões e Sobrecorrentes Transitórias e Sustentadas"- Tese de Mestrado - EFEI - 1986.

16- A.E. Hermeto - "Componentes de Sistemas Elétricos" - CESE/ Mestrado - EFEI - 1988.

17- J.R. Cogo - "Sobretensões nos Sistemas Elétricos de Potência"- CESE/Mestrado - EFEI - 1988.

18- H.W. Dommel - "Transformer Models in the Simulation of Electro magnetic Transients" - 5th Power Systems Computation Conference, Cambridge, Inglaterra - September/1975.

19- H.W. Dommel - "Computation of $\psi/i$ Curve from $V_{rms}/I_{rms}$ Curve"- Manuscrito - Novembro 1972.

20- E.P. Dick, W. Watson - "Transformer Models for Transients Studies Based on Field Measurements" - IEEE Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-100, pp. 409-419, January 1981.

21- H.W. Dommel - "Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multiphase Networks" - IEEE Trans Power App. Syst., Vol. PAS-88, pp. 388-399, April 1969.

22- W.E. Feero, J.A. Juves, R.W. Long - "Circuit Breaker and Transformer Models for the Solution of Wavy Propagation in Distributed Parameter Systems" - IEEE - PAS 1971, Vol. 90, nº 3.

23- R.B. Shipley, D. Coleman and C.F. Watts - "Transformer Circuits for Digital Studies" - AIEE Trans., pt III, vol. 81, pp. 1028-1031, February 1963.

24- Westinghouse Electric Corp. - "Electrical Transmission and Distribution Reference Book" - 1964.

25- G.W. Swift - "Power Transformer Core Behaviour Under Transient Conditions" - IEEE Trans. Power App. Syst., Vol PAS-90, pp 2206-2210, September/October 1971.

26- H.W. Dommel - "Nonlinear and Time Varying Elements in Digital Simulation of Electromagnetic Transients" IEEE Trans. PAS Vol 90 - Nº 6 - pp 2561, 2567, Nov/Dec 1971.

27- W.F. Tinney - "Compensation Methods for Network Solutions by Triangular Factorization" - Proc. Power Industry Computer Applications Conference, Boston, Mass, May, 24-26, 1971.

28- H.W. Dommel, A. Yan, Shi Wei - "Harmonics from Transformer Saturation" - IEEE Trans. Power Delivery, Vol PWRD-1, pp 209-215, April 1986.

29- C.A.F. Cunha e H.W. Dommel - "Reprodução por Computador de Testes de Campo na LT 345 kV Jaguará-Taquaril" - Paper BH/GSP/12 apresentado no "II Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica" em Belo Horizonte, Brasil, 1973.

30- H.W. Dommel, A. Yan, R.J. Ortiz de Marcano, A.B. Miliani - "Case Studies for Electromagnetic Transients" - University of British Columbia, Vancouver, Canadá, May 1983.

31- Colin Cherry - "The Duality Between Interlinked Electric and Magnetic Circuits and the Formation of Transformer Equivalent Circuits" - Proceedings of the Physical Society B, 1949.

32- G.R. Slemon - "Equivalent Circuits for Transformer and Machines Including Non-linear Effects" - Proceedings of the IEE Part IV, 1953.

33- C.M. Arturi - "Reti Magnetiche Equivalenti de Dispositivi Elettromagnetici Statici a piú Avvolgimenti- Parte I - Considerazioni Teoriche, Parte II - Applicazioni - L´Energia Elettrica - Nº 1 - 1989.

DATA 01 / 11 / 1990
PROC.
PED. PPG
LIV.
Cz$ DOAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
BIBLIOTECA MAUÁ – BIM
Este livro deve ser devolvido na última data abaixo

| | | |
|---|---|---|
| 03/09/14 | | |
| 15/10/14 | | |
| | | |
| | | |
|