

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Atratores Pullback para Problemas Parabólicos envolvendo o p-Laplaciano

Marcos Alexandre Rabelo de Lima

Itajubá, Fevereiro de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marcos Alexandre Rabelo de Lima

Atratores Pullback para Problemas Parabólicos envolvendo o p-Laplaciano

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Mariza Stefanello Simsen

**Fevereiro de 2015
Itajubá - MG**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marcos Alexandre Rabelo de Lima

Atratores Pullback para Problemas Parabólicos envolvendo o p-Laplaciano

Dissertação aprovada por banca examinadora em 09 de Fevereiro de 2015, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciências em Matemática.**

Banca examinadora:

Prof^a. Dr^a. Mariza Stefanello Simsen (Orientadora)

Prof^a. Dr^a. Ana Claudia Pereira

Prof^a. Dr^a. Rita de Cássia Dornelas Sodré Broche

Itajubá - MG

2015

Ao meu pai Leonel que lutou junto comigo por esta conquista.

Agradecimentos

Agradeço todos que fizeram parte desta jornada, colegas e professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UNIFEI que muito me motivaram e deram assistência, contribuindo diretamente na minha formação.

À Deus que me deu saúde e força para superar as dificuldades enfrentadas durante todo o mestrado.

Ao meu pai, o qual me inspiro a dedicação, força de vontade e honestidade, e que muito me apoiou em todos os momentos. Meu agradecimento a minha amiga Suene pela amizade durante o mestrado e ter me apoiado bastante durante esta jornada.

À minha orientadora, Prof^a. Dr^a. Mariza Stefanello Simsen, pela disponibilidade nos atendimentos referentes à disciplina de Análise e, principalmente, no suporte durante todo trabalho de dissertação, os quais contribuíram muito na minha formação, que é uma profissional que me espelha muito para seguir minha carreira.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Marcos Alexandre Rabelo de Lima

“É preciso força pra sonhar e perceber que a estrada vai além do que se vê.”
Los Hermanos.

Resumo

Este trabalho apresenta o estudo do comportamento assintótico do problema parabólico envolvendo o p-Laplaciano da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(t) - \operatorname{div} (D_\lambda(t) |\nabla u_\lambda(t)|^{p-2} \nabla u_\lambda(t)) + |u_\lambda(t)|^{p-2} u_\lambda(t) = B(t, u_\lambda) \\ u_\lambda(\tau) = u_{0\lambda}, \end{cases}$$

sob condição de fronteira Neumann homogênea, apresentando o operador e algumas de suas propriedades, existência de solução forte e estimativas da solução para este problema posto numa forma abstrata e provamos que o processo de evolução associado a este problema tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}^\lambda(t) : t \in \mathbb{R}\}$ e que essa família de atratores pullback é semicontínua superiormente com respeito aos parâmetros de difusão D_λ .

Palavras-chave: processos de evolução, atrator pullback, p-Laplaciano.

Abstract

This paper presents the study of the asymptotic behavior of the parabolic problem involving the p-Laplacian of the form

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(t) - \operatorname{div} (D_\lambda(t) |\nabla u_\lambda(t)|^{p-2} \nabla u_\lambda(t)) + |u_\lambda(t)|^{p-2} u_\lambda(t) = B(t, u_\lambda) \\ u_\lambda(\tau) = u_{0\lambda}, \end{cases}$$

under homogeneous Neumann boundary condition, with the operator and some of its properties, the existence of strong solution and estimates of the solution to this problem post in an abstract form and prove that the evolution process associated to this problem has an attractor pullback $\{\mathcal{A}^\lambda(t) : t \in \mathbb{R}\}$ and that this family of attractors pullback is semi continues superiorly with respect to diffusion parameters D_λ .

Keywords: evolution processes, pullback attractor, p-Laplacian.

Índice

Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	1
2 Preliminares	3
2.1 Uma coletânea de resultados	3
2.2 Os espaços $L^p(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$	11
2.3 O espaço $L^p(0, T; X)$	13
2.4 Operador maximal monótono em espaços de Hilbert	14
3 Existência de atratores pullback	17
3.1 Processos de evolução e atratores pullback	17
3.2 Processos pullback assintoticamente compactos	24
3.3 A medida de não-compacidade de Kuratowski	34
4 Existência e semicontinuidade superior de atratores pullback para problemas parabólicos não-autônomos envolvendo o p-Laplaciano	38
4.1 O operador e as propriedades	38
4.2 Existência de Soluções	49
4.3 Estimativas da solução	55
4.4 Semicontinuidade superior de atratores pullback	60
Bibliografia	66

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho, o qual foi baseado nos artigos [1, 2], estudaremos o comportamento assintótico do problema parabólico envolvendo o p-Laplaciano da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(t) - \operatorname{div}(D_\lambda(t)|\nabla u_\lambda(t)|^{p-2}\nabla u_\lambda(t)) + |u_\lambda(t)|^{p-2}u_\lambda(t) = B(t, u_\lambda(t)) \\ u_\lambda(\tau) = u_{0\lambda}, \end{cases}$$

sob condição de fronteira Neumann homogênea, onde $p > 2$, $u_{0\lambda} \in L^2(\Omega)$, Ω é um domínio limitado suave em \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, $D_\lambda \in L^\infty([\tau, T] \times \Omega)$ com $0 < \beta \leq D_\lambda(t, x) \leq M$ q.t.p em $[\tau, T] \times \Omega$, $\lambda \in [0, \infty)$ e para cada parâmetro $\lambda \in [0, \infty)$, temos $|D_\lambda(s, x) - D_\lambda(t, x)| \leq C_\lambda |s - t|^{\theta_\lambda}$ para todo $x \in \Omega, s, t \in [\tau, T]$, para alguma constante positiva θ_λ e C_λ . Além disso, $D_\lambda \rightarrow D_{\lambda_1}$ em $L^\infty([\tau, T] \times \Omega)$ quando $\lambda \rightarrow \lambda_1$ e $B : [\tau, T] \times L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ satisfaz:

- H1.** Existe $L \geq 0$ tal que $\|B(t, x_1) - B(t, x_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq L\|x_1 - x_2\|_{L^2(\Omega)}$ para todo $t \in [\tau, T]$ e $x_1, x_2 \in L^2(\Omega)$;
- H2.** Para todo $x \in L^2(\Omega)$ a aplicação $t \mapsto B(t, x)$ pertence a $L^2(\tau, T; L^2(\Omega))$;
- H3.** A aplicação $t \mapsto \|B(t, 0)\|_{L^2(\Omega)}$ é não decrescente, absolutamente contínua e limitada em subconjuntos compactos de \mathbb{R} .

Estudaremos um resultado de existência e unicidade de solução forte e estimativas da solução para este problema posto na forma abstrata

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + A_H(t)u(t) = B(t, u(t)), \\ u(\tau) = u_0 \end{cases}$$

em que $A_H(t)$ é um operador maximal monótono.

Provaremos que para cada $\lambda \in [0, \infty)$ o processo de evolução associado a este problema tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}^\lambda(t) : t \in \mathbb{R}\}$ e mostramos que a família de atratores pullback para este processo tem semicontinuidade superior com respeito aos parâmetros de difusão D_λ .

Primeiramente, no Capítulo 2, apresentamos definições e resultados importantes da teoria de espaços métricos, Medida e Integração, Análise Funcional, Espaços de Sobolev e Operador Maximal Monótono.

No Capítulo 3, apresentamos as definições de processos de evolução e semigrupos, com exemplos, e alguns resultados desta teoria, com ênfase nos resultados de existência de atratores pullback para um processo de evolução e processos pullback assintoticamente compactos.

Por fim, no Capítulo 4, apresentamos um problema parabólico envolvendo o p-Laplaciano como anteriormente, no qual estudamos a existência e semicontinuidade superior de atratores

pullback para o processo de evolução associado a este problema. Para tanto, consideramos o operador $A(t)$ definido em $X := W^{1,p}(\Omega)$ com $2 < p < +\infty$, tal que para cada $u \in X$ associa-se o seguinte elemento de X^* , $A(t)u : X \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$A(t)u(v) := \int_{\Omega} D(t,x)|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2}u(x)v(x)dx$$

e estudamos suas propriedades. Em seguida, estudamos a existência de soluções e estimativas da solução, e por último, um resultado de existência de atratores pullback para o processo de evolução associado ao problema acima e outro resultado de semicontinuidade superior da família de atratores pullback com respeito à variação do parâmetro λ .

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados utilizados ao longo deste trabalho.

2.1 Uma coletânea de resultados

As definições e resultados dessa seção podem ser encontrados em [5, 6, 8, 11, 14, 15, 18].

Definição 2.1.1 *Uma métrica num conjunto X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y , de modo que para quaisquer $x, y, z \in X$, vale*

- (1) $d(x, x) = 0$;
- (2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;
- (3) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 2.1.2 *Um espaço métrico é um conjunto M munido de uma métrica d e denotamos por (M, d) ou, simplesmente M , deixando subtendida qual a métrica d está sendo considerada.*

Definição 2.1.3 *Seja X um espaço métrico. Um ponto $x \in X$ diz-se aderente a um subconjunto A de X quando $d(x, A) = 0$, isto é, para cada $\varepsilon > 0$ existe $y \in A$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$.*

Definição 2.1.4 *O fecho de um conjunto A num espaço métrico X é o conjunto dos pontos de X que são aderentes a A e indicamos por \bar{A} .*

Definição 2.1.5 *Um subconjunto A de um espaço métrico X diz-se denso em X quando $\bar{A} = X$.*

Definição 2.1.6 *Um conjunto A de um espaço métrico X chama-se fechado quando $A = \bar{A}$.*

Observação 2.1.1 *Dizer que um conjunto A num espaço métrico X é fechado, significa que, se $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, então $x \in A$.*

Proposição 2.1.1 *Para todo subconjunto A de um espaço métrico X , seu fecho \bar{A} é fechado.*

Observação 2.1.2 Se A é um conjunto num espaço métrico X , \bar{A} é o menor conjunto fechado de X que contém A , no seguinte sentido: se B é fechado de X e $A \subset B$, então $\bar{A} \subset B$.

Proposição 2.1.2 Os subconjuntos fechados de um espaço métrico satisfazem

- (1) a reunião $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ de um número finito de subconjuntos fechados A_1, \dots, A_n de um espaço métrico X é um subconjunto fechado de X ;
- (2) a interseção $A = \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ de uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ (finita ou infinita) de subconjuntos fechados A_λ de um espaço métrico X é um subconjunto fechado de X .

Seja A um subconjunto de um espaço métrico X . Uma *cobertura* de A é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$.

Se existe um subconjunto $J \subset L$ tal que, para cada $x \in A$, ainda se pode obter $\lambda \in J$ com $x \in C_\lambda$, isto é, $X \subset \bigcup_{\lambda \in J} C_\lambda$, então a subfamília $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in J}$ chama-se uma *subcobertura* de \mathcal{C} .

Uma cobertura $A \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ diz-se *aberta* quando cada conjunto C_λ , $\lambda \in L$, é aberto em X . A cobertura $A \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ diz-se *finita* quando L é um conjunto finito.

Definição 2.1.7 Um espaço métrico X chama-se *compacto* quando toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.

Definição 2.1.8 Um conjunto A de um espaço métrico (X, d) chama-se *relativamente compacto* se o seu fecho \bar{A} é compacto.

Teorema 2.1.1 Um conjunto A de um espaço métrico (X, d) é relativamente compacto se, e somente se, toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tem uma subsequência convergente.

Definição 2.1.9 Um conjunto A de um espaço métrico (X, d) chama-se *precompacto* se para todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de pontos de X tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}(x_i, \varepsilon)$, onde para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $\mathcal{B}(x_i, \varepsilon)$ é uma bola aberta de centro x_i e raio ε .

Teorema 2.1.2 Um conjunto relativamente compacto em um espaço métrico é precompacto.

Proposição 2.1.3 Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto.

Proposição 2.1.4 A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.

Proposição 2.1.5 Se X é compacto, toda função real contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em X . Mais precisamente: existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.

Definição 2.1.10 Sejam x_0 um ponto e A um subconjunto de um espaço métrico X . Definimos a *distância do ponto x_0 ao conjunto A* como o número real

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} d(x_0, x).$$

Definição 2.1.11 Definimos a distância entre os conjuntos não-vazios A e B de um espaço métrico X como

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Observação 2.1.3 Se A e B são como na definição anterior tais que $A \cap B \neq \emptyset$, tem-se $d(A, B) = 0$.

Definição 2.1.12 Um subconjunto A de um espaço métrico X chama-se limitado quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$ para quaisquer $x, y \in A$.

Definição 2.1.13 Definimos o diâmetro de um conjunto limitado A de um espaço métrico X como o menor dos números $c > 0$ tais que $d(x, y) \leq c$ para quaisquer $x, y \in A$, isto é, o número real

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Definição 2.1.14 Uma norma num espaço vetorial X sobre um corpo \mathbb{E} (real ou complexo) é uma aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

- (i) $\|\xi\| \geq 0$, para todo $\xi \in X$, e $\|\xi\| = 0$ se, e somente se, $\xi = 0$;
- (ii) $\|\alpha\xi\| = |\alpha|\|\xi\|$, para todo $\xi \in X$ e $\alpha \in \mathbb{E}$ ($\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{E} = \mathbb{C}$);
- (iii) $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$, para quaisquer $\xi, \eta \in X$.

Definição 2.1.15 Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Uma sequência $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $(X, \|\cdot\|)$ é uma sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > M$ implica em $\|\xi_m - \xi_n\| < \varepsilon$.

Definição 2.1.16 Um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em $(X, \|\cdot\|)$ é convergente.

Definição 2.1.17 Um operador linear entre os espaços vetoriais X e Y é uma aplicação $T : \text{dom } T \subset X \rightarrow Y$ em que seu domínio $\text{dom } T$ é um subespaço vetorial e

$$T(\xi + \alpha\eta) = T(\xi) + \alpha T(\eta)$$

para quaisquer $\xi, \eta \in \text{dom } T$ e todo $\alpha \in \mathbb{E}$ ($\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{E} = \mathbb{C}$). Se $Y = \mathbb{E}$, $T : \text{dom } T \subset X \rightarrow Y$ é chamado de funcional linear.

Definição 2.1.18 Se X é um espaço normado, então o espaço de Banach $B(X, \mathbb{E})$ será denotado por X^* e chamado de espaço dual de X . Cada elemento de X^* é chamado de funcional linear contínuo em X . A norma em X^* será dada por

$$\|f\|_{X^*} = \sup \{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Quando $f \in X^*$ e $x \in X$, denotaremos por $\langle f, x \rangle = f(x)$ e diremos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^*, X}$ é o produto escalar na dualidade X^*, X .

Definição 2.1.19 O espaço bidual, X^{**} de X é o espaço dual de X^* , isto é, $X^{**} = (X^*)^*$. A norma em X^{**} será dada por

$$\|f\|_{X^{**}} = \sup \{f(g) : g \in X^*, \|g\|_{X^*} \leq 1\}.$$

Observação 2.1.4 Como X^* é um espaço de Banach, está definido $X^{**} = (X^*)^*$. Há uma forma natural de identificar elementos de X com elementos do seu bidual: a cada $\xi \in X$ associa-se $\hat{\xi} \in X^{**}$ por

$$\hat{\xi}(f) := f(\xi), \text{ para } f \in X^*.$$

Definição 2.1.20 Sejam X e Y espaços normados. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é uma imersão isométrica quando $\|f(x) - f(y)\|_Y = \|x - y\|_X$ para todo $x, y \in X$.

Definição 2.1.21 Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetora.

Observação 2.1.5 A aplicação $\hat{\cdot} : X \rightarrow X^{**}$ mencionada na Observação 2.1.4 é uma imersão isométrica linear e conseqüentemente injetora.

Definição 2.1.22 Se a aplicação $\hat{\cdot}$ é sobrejetora, então o espaço normado X é chamado de espaço reflexivo. Em outras palavras X é reflexivo se ele é isomorfo a X^{**} e o isomorfismo sendo dado por essa aplicação.

Definição 2.1.23 Sejam $1 \leq p < \infty$ e um espaço de medida (X, Σ, μ) . O espaço $L^p_\mu(X)$ é definido como o conjunto de todas as funções complexas mensuráveis em X tais que

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Teorema 2.1.3 Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida finito. Então, $L^p_\mu(X)$ é um espaço reflexivo para $1 < p < \infty$.

Lema 2.1.1 Sejam a e b números reais positivos e $q \geq 1$. Então,

$$(a + b)^q \leq 2^{q-1} (a^q + b^q).$$

Definição 2.1.24 Um produto interno no espaço vetorial X é uma função de $X \times X$ em \mathbb{E} que para cada $(\xi, \eta) \in X \times X$ associa-se o elemento $\langle \xi, \eta \rangle \in \mathbb{E}$ e que satisfaz

- (i) $\langle \xi + \eta, \vartheta \rangle = \langle \xi, \vartheta \rangle + \langle \eta, \vartheta \rangle$ para todo $\xi, \eta, \vartheta \in X$;
- (ii) $\langle \alpha \xi, \eta \rangle = \alpha \langle \xi, \eta \rangle$ para todo $\xi, \eta \in X$ e $\alpha \in \mathbb{E}$;
- (iii) $\langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \xi, \eta \rangle}$ para todo $\xi, \eta \in X$;
- (iv) $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in X$ e $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ se, e somente se, $\xi = 0$.

Proposição 2.1.6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja X um espaço com produto interno. Então, para $\xi, \eta \in X$, vale a desigualdade

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\|_X \|\eta\|_X,$$

onde $\|\xi\|_X = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$.

Definição 2.1.25 Um espaço de Hilbert H é um espaço com produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno.

Teorema 2.1.4 (Teorema da Representação de Riesz) *Seja H um espaço de Hilbert. Dado $f \in H^*$ existe um único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

para todo $x \in H$. Além disso,

$$\|f\|_{H^*} = \|y\|_H.$$

Em particular, $H^* = H$ no sentido que esses espaços são isometricamente isomorfos.

Definição 2.1.26 *Sejam X e Y espaços normados. Dizemos que $X \subset Y$ com imersão contínua se existe $c > 0$ tal que para todo $x \in X$*

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$$

e a inclusão $X \subset Y$ é densa se $\overline{X^Y} = Y$.

Lema 2.1.2 (Desigualdade de Young) *Sejam $\theta, \theta' > 1$ expoentes conjugados, ou seja, $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$. Então para quaisquer números reais positivos a, b temos que*

$$ab \leq \frac{1}{\theta}a^\theta + \frac{1}{\theta'}b^{\theta'}.$$

Definição 2.1.27 *Seja X um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge fracamente a $\xi \in X$ se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = f(\xi)$$

para todo $f \in X^*$. Iremos denotar essa convergência por $\xi_n \rightharpoonup \xi$.

Definição 2.1.28 *Uma sequência $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (X, \|\cdot\|_X)$ converge a $\xi \in X$ se $\|\xi_n - \xi\|_X \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Iremos denotar essa convergência por $\xi_n \rightarrow \xi$.*

Proposição 2.1.7 *Sejam X um espaço de Banach e $\{x_n\}$ uma sequência em X . Temos:*

- (i) $x_n \rightarrow x$ se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ para todo $f \in X^*$;
- (ii) se $x_n \rightarrow x$, então $x_n \rightharpoonup x$;
- (iii) Se $x_n \rightarrow x$, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;
- (iv) Se $x_n \rightarrow x$ e se $f_n \rightarrow f$ fortemente em X^* (isto é, $\|f_n - f\|_{X^*} \rightarrow 0$), então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Lema 2.1.3 (Desigualdade de Gronwall-Bellman) *Sejam $\tau, T \in \mathbb{R}, \tau < T$. Sejam $m \in L^1(\tau, T, \mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ q.t.p em (τ, T) e $a \geq 0$ uma constante. Seja $\phi : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que verifica*

$$\phi(t) \leq a + \int_{\tau}^t m(s)\phi(s)ds,$$

para todo $t \in [\tau, T]$. Então,

$$\phi(t) \leq ae^{\int_{\tau}^t m(s)ds},$$

para todo $t \in [\tau, T]$.

Lema 2.1.4 (Desigualdade de Gronwall) *Sejam $\tau, T \in \mathbb{R}$, $\tau < T$. Sejam $m \in L^1(\tau, T, \mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ q.t.p em (τ, T) e $a \geq 0$ uma constante. Seja $\phi : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua verificando*

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_{\tau}^t m(s)\phi(s)ds,$$

para todo $t \in [\tau, T]$. Então,

$$|\phi(t)| \leq a + \int_{\tau}^t m(s)ds,$$

para todo $t \in [\tau, T]$.

Lema 2.1.5 *Seja $y : [\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva absolutamente contínua onde $\tau \in \mathbb{R}$, a qual satisfaz para cada $t \geq \tau$*

$$\dot{y} + \gamma y^R \leq \delta,$$

com $R > 1$, $\gamma > 0$ e $\delta : [\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva absolutamente contínua e não decrescente limitada em limitados. Então, para cada $t \geq \tau$ temos

$$y(t) \leq \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}} + \frac{1}{(\gamma(R-1)(t-\tau))^{\frac{1}{R-1}}}.$$

Demonstração: Se $y(\tau) \leq \left(\frac{\delta(\tau)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}}$, então para cada $t \geq \tau$, $y(t) \leq \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}}$. De fato, suponha que para algum $t \geq \tau$, $y(t) > \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}}$. Então, teremos que para algum $t_0 \in [\tau, t)$, $y(t_0) = \left(\frac{\delta(t_0)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}}$. Logo,

$$\dot{y}(t_0) + \gamma \left[\left(\frac{\delta(t_0)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}} \right]^R \leq \delta(t_0) \Rightarrow \dot{y}(t_0) \leq 0.$$

Assim, y atinge a função $\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}}$ decrescendo. Como δ é não decrescente, para cada $t \geq \tau$ temos que $y(t) \leq \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}} + \frac{1}{(\gamma(R-1)(t-\tau))^{\frac{1}{R-1}}}$.

Se $y(\tau) > \left(\frac{\delta(\tau)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}}$, suponha que $y(t) > \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}}$ para algum $t_0 > \tau$. Então,

$$\delta(t) \geq \dot{y}(t) + \gamma y^R(t) \geq \dot{y}(t) + \gamma \left[\left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}} \right]^R = \dot{y}(t) + \delta(t).$$

Isto implica que $\dot{y}(t) \leq 0$, para cada $t = t_0$. Como δ é não decrescente a partir de t_0 , $y(t) \leq \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}}$, e então, $y(t) \leq \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}} + \frac{1}{(\gamma(R-1)(t-\tau))^{\frac{1}{R-1}}}$ para $t \geq t_0$.

Para cada $t \in [\tau, t_0]$ escreva $z(t) = y(t) - \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}} \geq 0$. Como $a^R + b^R \leq (a+b)^R$, se a e b são positivos e $R \geq 1$, temos

$$y(t)^R = \left(z(t) + \left(\frac{\delta(t)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{R}} \right)^R \geq z(t)^R + \frac{\delta(t)}{\gamma}.$$

Portanto,

$$\dot{z}(t) + \gamma z(t)^R \geq \dot{y}(t) - \frac{\delta(t)^{\frac{1}{R}-1}}{R\gamma^{\frac{1}{R}}} \dot{\delta}(t) + \gamma y(t)^R - \delta(t).$$

Como por hipótese $\dot{y}(t) + \gamma y(t)^R - \delta(t) \leq 0$ e δ é uma função positiva e não decrescente, temos que

$$\dot{z}(t) + \gamma z(t)^R \leq 0.$$

Integrando de τ a t , temos

$$\int_{\tau}^t z(s)^{-R} \dot{z}(s) ds \leq \int_{\tau}^t -\gamma ds.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \frac{z(t)^{1-R}}{1-R} - \frac{z(\tau)^{1-R}}{1-R} \leq -\gamma(t-\tau) \\ \Rightarrow & z(t)^{1-R} \leq z(\tau)^{1-R} + \gamma(R-1)(t-\tau) \\ \Rightarrow & z(t)^{R-1} \geq \frac{1}{\gamma(R-1)(t-\tau)} \\ \Rightarrow & z(t) \leq \frac{1}{[\gamma(R-1)(t-\tau)]^{\frac{1}{R-1}}}. \end{aligned}$$

Portanto, temos para cada $t \in [\tau, t_0]$

$$y(t) = z(t) + \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}} \leq \left(\frac{\delta(t)}{\gamma}\right)^{\frac{1}{R}} + \frac{1}{[\gamma(R-1)(t-\tau)]^{\frac{1}{R-1}}}.$$

Isto conclui a prova. ■

Lema 2.1.6 (Lema Uniforme de Gronwall) *Sejam g, h, y funções positivas com \dot{y} , g, h e y localmente integráveis em $[t_0, \infty]$ com*

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h.$$

Seja $R > 0$ fixo e suponha que para cada $t \geq t_0$ tenhamos

$$\int_t^{t+R} g(s) ds \leq a_1(t), \quad \int_t^{t+R} h(s) ds \leq a_2(t), \quad \int_t^{t+R} y(s) ds \leq a_3(t).$$

Então, para cada $t \geq t_0$, temos

$$y(t+R) \leq \left(\frac{a_3(t)}{R} + a_2(t) \right) e^{a_1(t)}.$$

Demonstração: Seja $t_0 \leq t \leq \theta \leq s \leq \tau \leq t + R$. Multiplicando $\frac{dy}{d\tau} - gy \leq h$ por $e^{-\int_s^\tau g(\sigma)d\sigma}$, obtemos

$$\frac{d}{d\tau} \left(y(\tau) e^{-\int_s^\tau g(\sigma)d\sigma} \right) \leq h(\tau) e^{-\int_s^\tau g(\sigma)d\sigma} \leq h(\tau).$$

Integrando em τ de θ a $t + R$, vem:

$$\begin{aligned} y(t+R) e^{-\int_s^{t+R} g(\sigma)d\sigma} - y(\theta) e^{-\int_s^\theta g(\sigma)d\sigma} &\leq \int_\theta^{t+R} h(\tau) d\tau \leq \int_t^{t+R} h(\tau) d\tau \leq a_2(t) \\ \Rightarrow y(t+R) &\leq y(\theta) e^{-\int_s^\theta g(\sigma)d\sigma + \int_s^{t+R} g(\sigma)d\sigma} + a_2(t) e^{\int_s^{t+R} g(\sigma)d\sigma} \\ \Rightarrow y(t+R) &\leq (y(\theta) + a_2(t)) e^{\int_\theta^{t+R} g(\sigma)d\sigma} \\ \Rightarrow y(t+R) &\leq (y(\theta) + a_2(t)) e^{a_1(t)}. \end{aligned}$$

Integrando em θ de t a $t + R$,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+R} y(t+R) d\theta &\leq \int_t^{t+R} y(\theta) e^{a_1(t)} d\theta + \int_t^{t+R} a_2(t) e^{a_1(t)} d\theta \\ \Rightarrow Ry(t+R) &\leq e^{a_1(t)} \int_t^{t+R} y(\theta) d\theta + a_2(t) e^{a_1(t)} \int_t^{t+R} d\theta \leq e^{a_1(t)} a_3(t) + a_2(t) e^{a_1(t)} R. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $t \geq t_0$, temos

$$y(t+R) \leq \left(\frac{a_3(t)}{R} + a_2(t) \right) e^{a_1(t)}.$$

■

Lema 2.1.7 (Desigualdade de Tartar) Seja $p \geq 2$. Então, para todo $a, b \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ temos

$$\langle \|a\|^{p-2}a - \|b\|^{p-2}b, a - b \rangle \geq \gamma_0 \|a - b\|^p,$$

onde γ_0 é positivo e depende apenas de p e de m .

Se $1 < p < 2$, então, para todo $a, b \in \mathbb{R}^m$, temos

$$\langle \|a\|^{p-2}a - \|b\|^{p-2}b, a - b \rangle \leq \gamma_1 \|a - b\|^p,$$

onde γ_1 depende apenas de p e de m .

Lema 2.1.8 Seja y uma função positiva absolutamente contínua em $(0, \infty)$ que satisfaz

$$y' + \gamma y^p \leq \delta$$

com $p > 1, \gamma > 0, \delta \geq 0$. Então, para $t \geq 0$,

$$y(t) \leq \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{p}} + (\gamma(p-1)t)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Teorema 2.1.5 (Teorema da Convergência Dominada) Seja $f_n : (X, m, \mu) \rightarrow \mathbb{C}$ uma sequência de funções mensuráveis e seja $g : (X, m, \mu) \rightarrow [0, \infty]$ em $L_\mu^1(X)$ de forma que

$$|f_n(x)| \leq g(x),$$

para todo $x \in X$ e

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

existe para todo $x \in X$. Então,

- (i) $f \in L^1_\mu(X)$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) = 0$;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dx = \int_X f(x) d\mu(x)$.

2.2 Os espaços $L^p(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$

Os resultados desta seção e da seção seguinte podem ser encontrados em [5, 7, 8, 14, 16, 17]. Dado Ω um aberto do \mathbb{R}^n , $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis à Lebesgue $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $x \mapsto |u(x)|^p$ é integrável em Ω , no sentido de Lebesgue. A norma de $u \in L^p(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mensuráveis à Lebesgue e essencialmente limitadas em Ω , isto é, existe $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C$ q.t.p $x \in \Omega$. Cada constante C é denominada majorante essencial de $|u|$ e a norma de $u \in L^\infty(\Omega)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C; |u(x)| \leq C, \text{ q.t.p } x \in \Omega\} = \text{sup ess } |u|.$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, munido de sua respectiva norma torna-se um espaço de Banach.

Teorema 2.2.1 (Desigualdade de Hölder e Minkowski) *Se p e q são expoentes conjugados e $f, g : (X, m, \mu) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mensuráveis, valem:*

- (a) (**Desigualdade de Hölder**). *Se $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$,*

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

- (b) (**Desigualdade de Minkowski**). *Para todo $1 \leq p < \infty$,*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Definição 2.2.1 *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, \dots, n \right\},$$

onde a derivada $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ é definida pela expressão

$$- \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi = \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposição 2.2.1 O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.

Proposição 2.2.2 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, limitado, conexo com fronteira suave e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$. Temos

(i) Se $1 \leq p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;

(ii) Se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, \infty)$;

(iii) Se $p > n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,

com imersões contínuas. Além disso, se $p > n$, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ temos

$$|u(x) - u(y)| \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \|x - y\|^\alpha$$

q.t.p em Ω , com $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ e c dependendo somente de Ω, p, n . Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.2.2 (Rellich-Kondrachov) Suponha Ω limitado de classe C^1 . Temos

(i) se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p')$ onde $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;

(ii) se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$;

(iii) se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$

com imersões compactas. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com imersões compactas para todo p .

Definição 2.2.2 Seja $1 \leq p < \infty$, $W_o^{1,p}(\Omega)$ designa o fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.

Observação 2.2.1 Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então, em geral, $W_o^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$.

As funções de $W_o^{1,p}(\Omega)$ são “a grosso modo” as funções de $W^{1,p}(\Omega)$ que “se anulam sobre $\partial\Omega$ ”.

Corolário 2.2.1 (Desigualdade de Poincaré) Suponha que Ω é um aberto limitado. Então existe uma constante C , dependendo de Ω e p , tal que

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$$

para todo $u \in W_o^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p}$ é uma norma sobre $W_o^{1,p}(\Omega)$ que é equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

O espaço $W_o^{1,p}(\Omega)$ munido da norma induzida por $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável para $1 \leq p < \infty$ e é reflexivo se $1 < p < \infty$.

2.3 O espaço $L^p(0, T; X)$

Definição 2.3.1 *Seja X um espaço de Banach e $0 < T < \infty$.*

- (a) *O espaço $C^m([0, T]; X)$ com $m = 1, 2, \dots$ consiste de todas as funções $u : [0, T] \rightarrow X$ que são m vezes diferenciáveis e cujas derivadas são contínuas em $[0, T]$. A norma neste espaço é dada por*

$$\|u\| := \sum_{i=0}^m \max_{0 \leq t \leq T} \|u^{(i)}(t)\|_X. \quad (2.1)$$

Aqui, apenas as derivadas a esquerda e as derivadas a direita precisam existir nos pontos $t = 0$ e $t = T$ respectivamente. Na expressão acima, $u^{(0)} = u$.

- (b) *O espaço $L^p(0, T; X)$ com $1 \leq p < \infty$ consiste de todas as funções mensuráveis $u :]0, T[\rightarrow X$ cuja norma*

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (2.2)$$

Quando $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(0, T; X)$ o espaço vetorial das classes de funções $u :]0, T[\rightarrow X$ mensuráveis à Lebesgue e essencialmente limitadas em $]0, T[$, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|u(t)\|_X \leq C, \quad \text{q.t.p } t \in]0, T[$$

e a norma de $u \in L^\infty(0, T; X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{C; \|u(t)\|_X \leq C, \text{ q.t.p } t \in]0, T[\} = \text{sup ess } \|u(t)\|_X.$$

Proposição 2.3.1 *Sejam $m = 0, 1, \dots$, $1 \leq p < \infty$, X_1 e X_2 espaços de Banach sobre \mathbb{E} . Então:*

- (a) *$C^m([0, T]; X_1)$ com a norma (2.1) é um espaço de Banach sobre \mathbb{E} .*
 (b) *$L^p(0, T; X_1)$ com a norma (2.2) é um espaço de Banach sobre \mathbb{E} .*
 (c) *$C([0, T], X_1)$ é denso em $L^p(0, T; X_1)$ e a imersão $C([0, T], X_1) \subseteq L^p(0, T; X_1)$ é contínua.*
 (d) *O conjunto de todos os polinômios $w : [0, T] \rightarrow X_1$, isto é*

$$w(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

com $a_i \in X_1$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$ e $n = 0, 1, \dots$ é denso em $C([0, T]; X_1)$ e $L^p(0, T; X_1)$.

- (e) *Se X_1 é um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_1}$, então $L^2(0, T; X_1)$ é também um espaço de Hilbert com produto interno*

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0, T; X_1)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_{X_1} dt.$$

- (f) *$L^p(0, T; X_1)$ é separável caso X_1 seja separável e $1 \leq p < \infty$.*
 (g) *Se $1 < p < \infty$ e X_1 é uniformemente convexo então $L^p(0, T; X_1)$ é uniformemente convexo.*
 (h) *Se $X_1 \subseteq X_2$ com imersão contínua e $1 \leq q \leq r \leq \infty$, então*

$$L^r(0, T; X_1) \subseteq L^q(0, T; X_2)$$

com imersão contínua.

2.4 Operador maximal monótono em espaços de Hilbert

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [5, 6, 7, 10, 13].

Seja H um espaço de Hilbert sobre \mathbb{R} . Um operador é uma aplicação de H em $\mathcal{P}(H)$ (conjunto das partes de H). Se para todo $x \in H$, o conjunto Ax contém no máximo um elemento dizemos que A é um operador unívoco em H , caso contrário dizemos que A é multívoco. O domínio de A é o conjunto $\mathcal{D}(A) = \{x \in H : Ax \neq \emptyset\}$ e a imagem de A é o conjunto

$$\mathcal{R}(A) = \bigcup_{x \in H} Ax.$$

Identificaremos A com seu gráfico em $H \times H$, isto é, $A = \{(x, y) : y \in Ax\}$. O operador A^{-1} é o operador cujo gráfico é simétrico ao de A , isto é, $x \in A^{-1}y \iff y \in Ax$; evidentemente $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$.

O conjunto dos operadores de H é parcialmente ordenado pela inclusão dos gráficos: $A \subset B$ se, e somente se, para todo $x \in H$, $Ax \subset Bx$.

Definição 2.4.1 Dizemos que um operador A em H é monótono se, para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$,

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0,$$

ou, mais precisamente, para todo $y_1 \in Ax_1$ e para todo $y_2 \in Ax_2$,

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

A noção de operador monótono em um espaço de Hilbert aparece como um caso particular de operador monótono de um espaço de Banach no seu dual.

Definição 2.4.2 Seja X é um espaço de Banach real. Um operador $A : X \rightarrow X^*$ é dito ser monótono se para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$,

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle_{X^*, X} \geq 0,$$

ou, mais precisamente, para todo $y_1 \in Ax_1$ e para todo $y_2 \in Ax_2$,

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle_{X^*, X} \geq 0,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^*, X}$ é o produto escalar na dualidade X, X^* .

Definição 2.4.3 Um operador monótono $A : X \rightarrow X^*$ é dito ser maximal monótono se ele não está propriamente contido em qualquer outro operador monótono de X em X^* .

Definição 2.4.4 Seja X um espaço de Banach com dual X^* . Uma função convexa e própria em X é uma função $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ para o qual existe $u_0 \in X$ com $\varphi(u_0) < \infty$ e satisfaz a desigualdade

$$\varphi((1-t)u + tv) \leq (1-t)\varphi(u) + t\varphi(v)$$

para todo $u, v \in X$ e $t \in [0, 1]$.

Definição 2.4.5 A função $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ é dita ser semicontínua inferiormente (s.c.i) se

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n)$$

para toda sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $u_n \rightarrow u$ em X .

Dada uma função $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convexa, própria e s.c.i, denotamos por $\mathcal{D}(\varphi)$, o domínio de φ , o conjunto

$$D(\varphi) = \{u \in X : \varphi(u) < \infty\}.$$

Definição 2.4.6 Dada uma função $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convexa, própria e s.c.i, a subdiferencial $\partial\varphi$ de φ é a aplicação $\partial\varphi : X \rightarrow X^*$ dada por

$$\partial\varphi(u) = \{f \in X^* : \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_{X^*, X}, \forall v \in \mathcal{D}(\varphi)\}.$$

Denotamos $\mathcal{D}(\partial\varphi) = \{u \in X : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$.

Observação 2.4.1 A subdiferencial $\partial\varphi$ é monótona em X .

De fato, se $y_1 \in \partial\varphi(x_1)$ e $y_2 \in \partial\varphi(x_2)$, temos em particular

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geq \langle y_1, x_2 - x_1 \rangle_{X^*, X} \text{ e } \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \geq \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle_{X^*, X}.$$

Assim, somando estas duas desigualdades, obtemos

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle_{X^*, X} \geq 0.$$

Teorema 2.4.1 Seja X um espaço de Banach real e $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i. Então $\partial\varphi : X \rightarrow X^*$ é um operador maximal monótono.

Definição 2.4.7 Seja X um espaço de Banach. Dizemos que um operador $A : X \rightarrow X^*$ é coercivo se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\langle Au_j, u_j \rangle_{X^*, X}}{\|u_j\|_X} = \infty$$

para qualquer sequência $(u_j) \subset X$, com

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_X = \infty.$$

Definição 2.4.8 Seja X um espaço de Banach. Um operador $A : X \rightarrow X^*$ chama-se hemicontínuo quando para todo $u, v \in X$,

$$A(u + \lambda v) \rightarrow Au$$

quando $\lambda \rightarrow 0$.

Corolário 2.4.1 Seja X um espaço de Banach reflexivo. Um operador $A : X \rightarrow X^*$ monótono, coercivo e hemicontínuo é sobrejetivo, isto é, $A(X) = X^*$.

Teorema 2.4.2 Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja $A : X \rightarrow X^*$ um operador monótono e hemicontínuo. Então, A é maximal monótono.

Teorema 2.4.3 Seja X um espaço de Banach reflexivo, X^* o seu dual e H é um espaço de Hilbert com $X \subset H \subset X^*$ com imersões contínuas e densas. Seja $A : X \rightarrow X^*$ um operador monótono, unívoco, definido em todo X , coercivo e hemicontínuo. Então, o operador A_H , a realização de A em H definido por

$$\mathcal{D}(A_H) = \{x \in X : Ax \in H\}, \quad A_H(u) = A(u), u \in \mathcal{D}(A_H)$$

é maximal monótono em H .

Lema 2.4.1 *Seja H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i e seja $u \in W^{1,2}(0, T; H)$ tal que $u(t) \in D(\partial\varphi)$ q.t.p $t \in]0, T[$. Suponha que exista $g \in L^2(0, T; H)$ tal que $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ q.t.p $t \in]0, T[$. Então a função $t \mapsto \varphi(u(t))$ é absolutamente contínua em $[0, T]$ e vale a igualdade*

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \left\langle h(t), \frac{du}{dt}(t) \right\rangle_H$$

q.t.p $t \in]0, T[$ e para toda $h(\cdot) \in \partial\varphi(u(\cdot))$.

Capítulo 3

Existência de atratores pullback

Neste capítulo, tendo como base [1] e [12], estudaremos a teoria de atrator pullback para processos de evolução em espaços métricos. Primeiramente, definimos a noção de processos de evolução e semigrupos, apresentando alguns exemplos. Em seguida, apresentamos o conceito de processo de evolução pullback limitado, atração, absorção, família invariante e solução global para um processo de evolução. Definimos também processo de evolução pullback assintoticamente compacto e pullback limitado dissipativo. Após esses conceitos desenvolvidos, trabalhamos com os conjuntos ω -limite pullback, que descrevem o comportamento assintótico do processo de evolução. Apresentamos o teorema (Teorema 3.2.4) que garante a existência de atrator pullback para processos de evolução. No final do capítulo, apresentamos a definição e algumas propriedades da medida da não-compacidade de Kuratowski, e usamos estas propriedades para a prova do teorema que dá condições para que um processo de evolução seja pullback fortemente assintoticamente compacto.

Assumimos neste capítulo que X é um espaço métrico com a métrica d e denotaremos por $C(X)$ o conjunto das funções contínuas de X em X .

3.1 Processos de evolução e atratores pullback

Definição 3.1.1 *Um processo de evolução em X é uma família de aplicações $\{S(t, s) : X \rightarrow X, t \geq s \in \mathbb{R}\} \subset C(X)$ que satisfaz as seguintes propriedades*

- (i) $S(t, t) = I$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde I é aplicação identidade em X ;
- (ii) $S(t, s) = S(t, \tau)S(\tau, s)$ para todo $t \geq \tau \geq s$;
- (iii) $\{(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t \geq s\} \times X \ni (t, s, x) \mapsto S(t, s)x \in X$ é contínua.

$S(t, s)$ toma cada estado x do sistema no instante inicial s e evoluciona para o estado $S(t, s)x$ do sistema no tempo final t , onde $-\infty < s \leq t < \infty$. Observemos que, para um $\sigma \in \mathbb{R}$ fixo, o operador $S(\sigma + \tau, \tau)$ pode ser um operador distinto para cada valor de $\tau \in \mathbb{R}$. Isto indica que, além do tempo decorrido σ , também o instante inicial τ pode desempenhar um papel importante no processo de evolução.

Os processos $\{S(t, s) : t \geq s\}$ para os quais $S(t, s) = S(t - s, 0)$ para todo $t \geq s$ são chamados **processos de evolução autônomos**.

Definição 3.1.2 *Um semigrupo é uma família $\{T(t) : t \geq 0\}$ que satisfaz*

- (i) $T(0) = I$;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$;

(iii) $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

Dado um processo de evolução autônomo $\{S(t-s, 0), t \geq s\}$, a família de operadores $\{T(t) : t \geq 0\}$ dada por $T(t) := S(t, 0)$, $t \geq 0$ é um semigrupo.

De fato, $T(0) = S(0, 0) = I$ e $T(t+s) = S(t+s, 0) = S(t+s, \tau)S(\tau, 0)$, para todo $t+s \geq \tau \geq 0$, portanto, $T(t+s) = S(t+s-\tau, 0)S(\tau, 0)$. Em particular, para $\tau = s$ temos

$$T(t+s) = S(t, 0)S(s, 0) = T(t)T(s).$$

Como $\{t-s \in \mathbb{R} : t \geq s\} \times X \ni (t-s, x) \rightarrow S(t-s)x \in X$ é contínua, então $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua. Logo, $\{T(t) = S(t, 0) : t \geq 0\}$ é um semigrupo.

Reciprocamente, dado um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, a família $\{S(t, s) : t \geq s\}$ definida por $S(t, s) = T(t-s)$, $t \geq s$ é um processo de evolução.

De fato, $S(t, t) = T(t-t) = T(0) = I$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $t \geq \tau \geq s$,

$$S(t, \tau)S(\tau, s) = T(t-\tau)T(\tau-s) = T(t-\tau+\tau-s) = T(t-s) = S(t, s).$$

Como $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua, segue que $\{t-s \in \mathbb{R}^+ : t \geq s\} \times X \ni (t-s, x) \rightarrow T(t-s)x \in X$ é contínua. Logo, $\{S(t, s) = T(t-s) : t \geq s\}$ é um processo de evolução.

Note que num processo de evolução autônomo $\{S(t, s) = S(t-s, 0) : t \geq s\}$, a evolução do estado x ocupado no instante s para o estado $S(t+s, s)x (= S(t+s-s, 0)x = S(t, 0)x)$ ocupado no instante $t+s$ é independente de s e depende apenas de t . Assim, num processo de evolução autônomo, o tempo decorrido determina a evolução.

Para um processo de evolução autônomo $\{S(t-s, 0); t \geq s\}$, o comportamento das soluções quando $t \rightarrow \infty$, chamado a **dinâmica forwards**, é o mesmo que o comportamento das soluções quando $s \rightarrow -\infty$, chamado a **dinâmica pullback**. Para os processos de evolução gerais, estes dois limites dinâmicos ou comportamentos assintóticos não estão relacionados e podem produzir propriedades qualitativas completamente distintas (Veja [4]).

Usaremos a notação abreviada $S(t, s) = S(t-s)$, $t \geq s$ para processos de evolução autônomos e dizemos que o processo de evolução autônomo $\{S(t-s) : t \geq s\}$ é o processo associado ao semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$.

Vejamos alguns exemplos de processos de evolução e de semigrupos (ver [9]).

Exemplo 3.1.1 Seja $X = \mathbb{R}^n$ espaço euclidiano com a métrica usual. A aplicação $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $S(t, s, x) := (t-s+x_1, \dots, t-s+x_n)$ com $t \geq s$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ é dada em coordenadas da base canônica de \mathbb{R}^n é um processo de evolução em \mathbb{R}^n .

De fato, S é claramente contínua, $S(t, t)x = (t-t+x_1, \dots, t-t+x_n) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, isto é, $S(t, t) = I$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} S(t, \tau)S(\tau, s)x &= S(t, \tau)(\tau-s+x_1, \dots, \tau-s+x_n) \\ &= (t-\tau+\tau-s+x_1, \dots, t-\tau+\tau-s+x_n) \\ &= (t-s+x_1, \dots, t-s+x_n) \\ &= S(t, s)x, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq \tau \geq s$, portanto, $S(t, \tau)S(\tau, s) = S(t, s)$ para todo $t \geq \tau \geq s$.

Exemplo 3.1.2 Seja $X = \mathbb{R}$ com a métrica usual. A aplicação $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $S(t, s, x) := xe^{t-s}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ com $t \geq s$ define um processo de evolução em \mathbb{R} .

Exemplo 3.1.3 Seja $X = \mathbb{R}^2$ espaço euclidiano com a métrica usual. A aplicação $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $S(t, s, (x, y)) := (xe^{t-s}, ye^{t-s})$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $t \geq s$, onde (x, y) é dada em coordenadas da base canônica de \mathbb{R}^2 define um processo de evolução em \mathbb{R}^2 .

De fato, é fácil ver que S é contínua e $S(t, t)(x, y) = (x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \in \mathbb{R}$, isto é, $S(t, t) = I$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \geq \tau \geq s$, temos

$$\begin{aligned} S(t, \tau)S(\tau, s)(x, y) &= S(t, \tau) (xe^{\tau-s}, ye^{\tau-s}) \\ &= (xe^{\tau-s}e^{t-\tau}, ye^{\tau-s}e^{t-\tau}) \\ &= (xe^{t-s}, ye^{t-s}) \\ &= S(t, s)(x, y). \end{aligned}$$

Logo, $S(t, \tau)S(\tau, s) = S(t, s)$ para todo $t \geq \tau \geq s$.

Exemplo 3.1.4 Seja $X = \mathbb{R}^2$ com a métrica usual. A aplicação $T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(t, x) = (t + x_1, t + x_2)$, onde $x = (x_1, x_2)$ é dada em coordenadas da base canônica de \mathbb{R}^2 define um semigrupo em \mathbb{R}^2 .

De fato, vemos facilmente que T é contínua e $T(0)x = (0 + x_1, 0 + x_2) = (x_1, x_2) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, portanto, $T(0) = I$. Além disso, para todo $t, s \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} T(t+s)x &= ((t+s) + x_1, (t+s) + x_2) \\ &= (t + (s + x_1), t + (s + x_2)) \\ &= T(t)(s + x_1, s + x_2) \\ &= T(t)T(s)x. \end{aligned}$$

Logo, $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

Exemplo 3.1.5 Seja $X = \mathbb{R}^2$ com a métrica usual. A aplicação $T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(t, (x, y)) = (e^{-t}x, e^{-t}y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \geq 0$ define um semigrupo em \mathbb{R}^2 .

Com efeito, claramente T é contínua e $T(0, (x, y)) = (x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, logo $T(0) = I$. Também, para todo $t, s \geq 0$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$T(t+s)(x, y) = (e^{-t-s}x, e^{-t-s}y) = (e^{-t}e^{-s}x, e^{-t}e^{-s}y)$$

e

$$T(t)T(s)(x, y) = T(t)(e^{-s}x, e^{-s}y) = (e^{-t}e^{-s}x, e^{-t}e^{-s}y).$$

Logo, $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

Exemplo 3.1.6 Seja $X = \mathbb{R}^2$ com a métrica usual. A aplicação $T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(t, (x, y)) = (a^t x, a^t y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \geq 0$, onde $a > 0$ define um semigrupo em \mathbb{R}^2 .

Com efeito, T é claramente contínua e $T(0)(x, y) = (x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \geq 0$, ou seja, $T(0) = I$. Além disso, para todo $t, s \geq 0$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$T(t+s)(x, y) = (xa^{t+s}, ya^{t+s}) = (xa^s a^t, ya^s a^t) = T(t)(xa^s, ya^s) = T(t)T(s)(x, y).$$

Logo, $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

Para um processo de evolução $\{S(t, s) : t \geq s\}$ e um conjunto $B \subset X$, definimos:

(a) Para cada $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ com $t \geq s$, a **imagem** de B por $S(t, s)$,

$$S(t, s)B := \{S(t, s)x : x \in B\}.$$

(b) A **órbita** de B a partir do instante $s \in \mathbb{R}$,

$$\gamma^s(B) := \bigcup_{t \geq s} S(t, s)B.$$

(c) A **órbita pullback** de B no instante $t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma_p(B, t) := \bigcup_{s \leq t} S(t, s)B.$$

Definição 3.1.3 Se $\gamma_p(B, t)$ é limitada para cada subconjunto limitado B de X e para cada $t \in \mathbb{R}$, $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é dito **pullback limitado**.

Definição 3.1.4 Seja $\{S(t, s) : t \geq s\}$ um processo de evolução. Dado $t \in \mathbb{R}$, dizemos que um conjunto $K(t) \subset X$ **atrai pullback** um subconjunto C de X no instante t sob a ação de $\{S(t, s) : t \geq s\}$ se

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, s)C, K(t)) = 0.$$

Uma família $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ **atrai pullback subconjuntos limitados** de X sob a ação de $\{S(t, s) : t \geq s\}$ se $K(t)$ atrai pullback todos subconjuntos limitados de X no instante t sob a ação de $\{S(t, s) : t \geq s\}$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Neste trabalho, quando usarmos a expressão “**atrai**” fica subtendido que atrai no sentido pullback.

Definição 3.1.5 Sejam A e B subconjuntos de X . Dizemos que A **atrai** B pelo semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(S(t)B, A) = 0.$$

Definimos a seguir a noção de absorção de um conjunto pela ação do processo de evolução, da qual introduzimos o conceito de dissipatividade do processo de evolução.

Definição 3.1.6 Dado $t \in \mathbb{R}$, $B(t) \subset X$ **absorve pullback** subconjuntos limitados de X no instante t se, para cada subconjunto limitado B de X , existe $T = T(t, B) \leq t$ tal que

$$S(t, s)B \subset B(t), \text{ para todo } s \leq T(t, B).$$

Uma família $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ **absorve pullback** subconjuntos limitados de X se $B(t)$ absorve pullback conjuntos limitados no instante t , para cada $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.1.7 Se existe uma família $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de conjuntos limitados que absorve pullback subconjuntos limitados (pontos, compactos) de X então dizemos que o processo de evolução $\{S(t,s); t \geq s\}$ é **pullback limitado (ponto, compacto) dissipativo**.

Observação 3.1.1 Na Definição 3.1.4, o tempo final é mantido fixo enquanto que o tempo inicial retrocede para $-\infty$. Note que isto não é o mesmo que voltar no tempo. A evolução é sempre até um instante t a partir de um instante inicial s que tende a $-\infty$.

Definimos agora os conceitos de conjuntos invariantes por um processo de evolução e por um semigrupo, que são um dos requisitos para definir o atrator pullback e o atrator global, respectivamente.

Definição 3.1.8 Seja $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma família de subconjuntos de X . Dizemos que esta família é **invariante** pelo processo de evolução $\{S(t,s); t \geq s\}$ se

$$S(t,s)B(s) = B(t), \text{ para todo } t \geq s.$$

Definição 3.1.9 Uma família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos compactos de X é dita um **atrator pullback** para o processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s\}$ se

- (i) for invariante por $\{S(t,s) : t \geq s\}$,
- (ii) atrai pullback subconjuntos limitados de X ,
- (iii) e é minimal no seguinte sentido: se há uma outra família invariante $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que atrai pullback subconjuntos limitados de X , então $\mathcal{A}(t) \subseteq C(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.1.10 Seja B um subconjunto de X . Dizemos que B é invariante pelo semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ se

$$S(t)B = B, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Definição 3.1.11 Um conjunto $\mathcal{A} \subseteq X$ é um **atrator global** para o semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ se

- (i) \mathcal{A} é compacto;
- (ii) \mathcal{A} é invariante;
- (iii) \mathcal{A} atrai cada subconjunto limitado de X .

O resultado a seguir mostra que o atrator global para o semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ e o atrator pullback para o processo de evolução autônomo $\{S(t-s) : t \geq s\}$ são essencialmente os mesmos.

Lema 3.1.1 Um processo de evolução autônomo $\{S(t-s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ se, e somente se, o semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ tem um atrator global \mathcal{A} e em qualquer dos casos $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Suponha que $\{S(t-s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$. É claro que $\{S(t) : t \geq 0\}$ tem um atrator global \mathcal{A} e que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Além disso, a família $\{\tilde{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A} : t \in \mathbb{R}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X . Segue da minimalidade de $\mathcal{A}(t)$ que $\tilde{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A} \supset \mathcal{A}(t)$, e portanto, $\{S(t) : t \geq 0\}$ tem um atrator global \mathcal{A} e $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, se $\{S(t) : t \geq 0\}$ tem um atrator global \mathcal{A} , então é claro que a família constante $\{\mathcal{A}(t) = \mathcal{A} : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante pelo processo $\{S(t-s) : t \geq s\}$, $\mathcal{A}(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t-s) : t \geq s\}$ e $\mathcal{A}(t)$ é compacto para cada $t \in \mathbb{R}$. A minimalidade de $\mathcal{A}(t)$ decorre do fato de que \mathcal{A} é limitado e $S(t,s)\mathcal{A} = S(t-s)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, para todo $t \geq s$. ■

Exemplo 3.1.7 Considere o semigrupo em \mathbb{R}^2 definido pela aplicação $T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(t, (x, y)) = (a^t x, a^t y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \geq 0$ com $0 < a < 1$, como vimos no Exemplo 3.1.6. O conjunto $\mathcal{A} = \{(0, 0)\}$ é um atrator global para este semigrupo.

De fato, claramente \mathcal{A} é compacto e invariante. Assim, basta mostrar que \mathcal{A} atrai todo subconjunto limitado de \mathbb{R}^2 . Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ limitado. Então, existe $M > 0$ tal que $\|(x, y)\| \leq M$, para todo $(x, y) \in B$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $\tau > 0$ tal que $a^\tau < \frac{\varepsilon}{M}$. Logo, para todo $t \geq \tau$ temos

$$\|T(t)(x, y)\| = \|(a^t x, a^t y)\| = a^t \|(x, y)\| \leq a^\tau \|(x, y)\| \leq a^\tau M < \varepsilon,$$

para todo $(x, y) \in B$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\tau > 0$ tal que $\text{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) < \varepsilon$, para todo $t \geq \tau$, de onde

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) = 0.$$

Logo, \mathcal{A} atrai B e segue que \mathcal{A} é um atrator global para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Do lema anterior, segue que o processo de evolução $\{S(t-s) : t \geq s\}$ associado a este semigrupo tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A} = \{(0, 0)\}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observemos que a exigência da minimalidade na definição de atrator pullback é adicional relativamente à teoria de atratores para semigrupos. A minimalidade exigida é essencial para garantir a unicidade dos atratores pullback. A inclusão dessa exigência está relacionada ao enfraquecimento da propriedade de invariância imposta pela natureza não autônoma dos processos de evolução gerais. Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo e $\{S(t-s) : t \geq s\}$ é o processo de evolução autônomo associado a ele, pode existir uma família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de conjuntos compactos e invariantes que atrai pullback subconjuntos limitados e não é minimal. De fato, considere o processo de evolução autônomo dado por $\{S(t-s)x_0 = e^{-(t-s)}x_0, x_0 \in \mathbb{R}, t \geq s\}$ associado ao semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$. A família $\{[-ce^{-t}, ce^{-t}] : t \in \mathbb{R}, c \geq 0\}$ de conjuntos compactos de \mathbb{R} é invariante sob a ação de $\{S(t-s)x_0 = e^{-(t-s)}x_0, x_0 \in \mathbb{R}, t \geq s\}$, pois fazendo $[-ce^{-t}, ce^{-t}] = B(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $c \geq 0$, vem: Se $x \in B(s)$ então $-ce^{-s} \leq x \leq ce^{-s}$, logo $S(t-s)x = e^{-(t-s)}x$ é tal que

$$\begin{aligned} -ce^{-(t-s)}e^{-s} &\leq e^{-(t-s)}x \leq ce^{-(t-s)}e^{-s} \\ \Rightarrow -ce^{-t} &\leq e^{-(t-s)}x \leq ce^{-t}. \end{aligned}$$

Portanto, $S(t-s)x \in B(t)$, logo $S(t-s)B(s) \subset B(t)$. Por outro lado, se $x \in B(t)$, então $-ce^{-t} \leq x \leq ce^{-t}$ e $e^{(t-s)}x \in B(s)$. Como $S(t-s)(e^{(t-s)}x) = x$, segue que $x \in S(t-s)B(s)$. Logo, $B(t) \subset S(t-s)B(s)$ e então $S(t-s)B(s) = B(t)$. Além disso, $B(t) = [-ce^{-t}, ce^{-t}]$ atrai pullback todos os subconjuntos limitados de \mathbb{R} sob a ação de $\{S(t-s) = e^{-(t-s)}x_0, x_0 \in \mathbb{R}, t \geq s\}$ no instante t para cada $t \in \mathbb{R}$, uma vez que, dado um subconjunto limitado A de \mathbb{R} ,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t-s)A, B(t)) = 0.$$

Agora, observe que a família $\{[-e^{-t}, e^{-t}] : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos compactos de \mathbb{R} é invariante e atrai subconjuntos limitados de \mathbb{R} no instante t sob a ação de $\{S(t-s) = e^{-(t-s)}x_0, x_0 \in \mathbb{R}, t \geq s\}$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Mas, por outro lado, para $c > 1$ temos

$$[-e^{-t}, e^{-t}] \subset [-ce^{-t}, ce^{-t}].$$

Logo, $\{[-ce^{-t}, ce^{-t}] : t \in \mathbb{R}, c \geq 0\}$ não é minimal.

Definição 3.1.12 *Uma solução global para um processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é uma função $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que*

$$S(t,s)\xi(s) = \xi(t), \text{ para todo } t \geq s.$$

Dizemos que a solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ de um processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é backwards limitada se existe um $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\{\xi(t) : t \leq \tau\}$ é um subconjunto limitado de X .

Exemplo 3.1.8 *Considere o processo de evolução $\{S(t,s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \geq s\}$ definido por $S(t,s)x = xe^{t-s}$, para todo $x \in \mathbb{R}, t \geq s$, como vimos no Exemplo 3.1.2. A função $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\xi(t) = e^t$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é uma solução global backwards limitada para este processo.*

De fato, para $t \geq s$,

$$S(t,s)\xi(s) = \xi(s)e^{t-s} = e^s e^{t-s} = e^t = \xi(t).$$

Ainda, $\{e^t : t \leq 0\} \subset [0, 1]$.

Exemplo 3.1.9 *Claramente, a função nula $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \xi(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ é uma solução global para o processo dado no exemplo anterior. Como para todo $\tau \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{\xi(t) : t \leq \tau\} = \{0\}$ é um subconjunto limitado de \mathbb{R} , então ξ é backwards limitada.*

Observação 3.1.2 (ver [I]) *a) Se exigirmos que o atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tem a propriedade de que $\bigcup_{s \leq \tau} \mathcal{A}(s)$ é limitado para cada $\tau \in \mathbb{R}$, a exigência de que o atrator pullback é minimal na Definição 3.1.9 pode ser retirada.*

b) Se um processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução backwards limitada, então $\xi(t) \in \mathcal{A}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

c) se $\{\mathcal{A}(t); t \in \mathbb{R}\}$ é um atrator pullback para o processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s\}$ e $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$

é limitado para todo $t \in \mathbb{R}$, então $\mathcal{A}(t)$ é dado por

$$\mathcal{A}(t) = \{\xi(t) : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ é uma solução global backwards limitada para } \{S(t,s); t \geq s\}\},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

3.2 Processos pullback assintoticamente compactos

Vamos definir agora a noção de processo de evolução pullback assintoticamente compacto que é naturalmente associada com processos de evolução que possuem um atrator pullback, como veremos nos Teoremas 3.2.2 e 3.2.3. Este conceito é útil nas aplicações para obter a existência de atratores pullback para um processo de evolução.

Definição 3.2.1 Um processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s\}$ em um espaço métrico X é dito **pullback assintoticamente compacto** se, para cada $t \in \mathbb{R}$, sequência $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $(-\infty, t]$ e sequência limitada $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X tais que $s_k \rightarrow -\infty$, quando $k \rightarrow \infty$ e $\{S(t, s_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é limitado, a sequência $\{S(t, s_k)x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente.

Definiremos agora as semiórbitas positivas e, a partir daí, introduziremos o conceito de semigrupo limitado.

Definição 3.2.2 Dado um conjunto $B \subset X$ limitado, sua **semitrajétória** ou **semiórbita** ou **órbita positiva** relativa ao semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ é o conjunto

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x),$$

onde $\gamma^+(x) = \{S(t)x : t \in \mathbb{R}^+\}$ é a **semitrajétória positiva** de x .

Definição 3.2.3 Dizemos que um semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ é **limitado** se a semiórbita positiva $\gamma^+(B)$ ou, equivalente, $\bigcup_{0 \leq t} S(t)B$ é limitada para cada conjunto limitado $B \subset X$, isto é, se a semiórbita positiva de qualquer conjunto limitado de X for limitada em X .

Observação 3.2.1 Dado um conjunto $B \subset X$ limitado, a semitrajétória de B relativa ao semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ e a órbita pullback de B no instante $t \in \mathbb{R}$ relativa ao processo evolução autônomo $\{S(t-s) : t \geq s\}$ são os mesmos, isto é, $\gamma^+(B) = \gamma_p(B, t)$.

De fato,

$$\gamma_p(B, t) = \bigcup_{s \leq t} S(t, s)B = \bigcup_{s \leq t} S(t-s)B = \bigcup_{0 \leq t} S(t)B = \gamma^+(B).$$

Definição 3.2.4 Sejam A e B subconjuntos de X . Dizemos que B **absorve** A sob a ação do semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$, se existe $\tau \geq 0$ tal que $S(t)A \subset B$, para todo $t \geq \tau$. Dizemos que B absorve um ponto $x \in X$, se existe $\tau_x \geq 0$ tal que $S(t)x \in B$, para todo $t \geq \tau_x$.

Definição 3.2.5 Um semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ é dito **limitado dissipativo** (**ponto dissipativo**), se existe um subconjunto limitado B de X tal que B absorve todo subconjunto limitado (ponto) de X sob a ação de $\{S(t) : t \geq 0\}$.

Definição 3.2.6 Um Semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ é chamado **assintoticamente compacto**, se para toda sequência limitada (x_n) em X e toda sequência (t_n) em \mathbb{R}^+ , com $t_n \rightarrow +\infty$, a sequência $(S(t_n)x_n)$ em X possui uma subsequência convergente.

Da teoria de semigrupos é conhecido o seguinte resultado (ver [1])

Teorema 3.2.1 Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo, as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\{S(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global;
- (ii) $\{S(t) : t \geq 0\}$ é limitado dissipativo e assintoticamente compacto;
- (iii) $\{S(t) : t \geq 0\}$ é limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto.

A condição (ii) dá a seguinte caracterização de processos autônomos que têm atratores pullback

Teorema 3.2.2 *Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo, o processo de evolução autônomo $\{S(t-s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback se, e somente se, for pullback assintoticamente compacto e pullback limitado dissipativo.*

Demonstração: O processo de evolução autônomo $\{S(t-s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback se, e somente se, o semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ tem um atrator global (pelo Lema 3.1.1) se, e somente se, $\{S(t) : t \geq 0\}$ é limitado dissipativo e assintoticamente compacto (pelo Teorema 3.2.1) se, e somente se, o processo de evolução autônomo $\{S(t-s) : t \geq s\}$ for pullback assintoticamente compacto e pullback limitado dissipativo. ■

Por outro lado, da condição (iii) temos

Teorema 3.2.3 *Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo, o processo de evolução autônomo $\{S(t-s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback se, e somente se, $\{S(t-s) : t \geq s\}$ é pullback limitado, pullback ponto dissipativo e pullback assintoticamente compacto.*

Definição 3.2.7 *Seja $\{S(t,s) : t \geq s\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X e B um subconjunto de X . O conjunto ω -limite pullback de B no instante t é definido por*

$$\omega(B,t) := \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} S(t,s)B}$$

ou, equivalente,

$$\omega(B,t) = \{y \in X : \text{existem sequências } \{s_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ em } (-\infty, t], s_k \rightarrow -\infty, \text{ quando } k \rightarrow \infty \text{ e } \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ em } B, \text{ tal que } y = \lim_{k \rightarrow \infty} S(t, s_k)x_k\}. (\star)$$

Note que, por definição, o conjunto ω -limite pullback é fechado, pois é interseção de fechados.

O teorema a seguir dá uma caracterização de processos de evolução com atrator pullback. É um resultado muito utilizado para obter existência de atratores pullback em aplicações (ver [18, 19, 20, 21, 22]) para o caso autônomo.

Teorema 3.2.4 *Seja $\{S(t,s) : t \geq s\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X . Então, as seguintes afirmações são equivalentes*

- (i) $\{S(t,s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$;
- (ii) Existe uma família de conjuntos compactos $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que atrai pullback subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t,s) : t \geq s\}$.

Em qualquer dos casos,

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B, t) : B \subset X \text{ limitado}\}}$$

e $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é minimal no sentido de que, se existe outra família de conjuntos fechados e limitados $\{\hat{\mathcal{A}}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que atrai pullback subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t, s) : t \geq s\}$, então $\mathcal{A}(t) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Antes da prova deste teorema, vejamos o lema a seguir que será útil para a prova do mesmo.

Lema 3.2.1 *Seja $\{S(t, s) : t \geq s\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X . Se $B \subset X$, então $S(t, s)\omega(B, s) \subset \omega(B, t)$ para cada $t \geq s$. Se B é tal que $\omega(B, s)$ é compacto e atrai pullback B no instante s , então para cada $t \geq s$, temos*

$$S(t, s)\omega(B, s) = \omega(B, t).$$

Demonstração: Se $\omega(B, s) = \emptyset$, não há o que mostrar. Suponha $\omega(B, s) \neq \emptyset$ e seja $y \in \omega(B, s)$. Então, existem sequências $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $(-\infty, s]$, $s_k \rightarrow -\infty$, quando $k \rightarrow \infty$ e $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em B , tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(s, s_k)x_k = y.$$

Pela continuidade de $S(t, s)$, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(t, s)S(s, s_k)x_k = S(t, s)y.$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(t, s_k)x_k = S(t, s)y$$

Assim, $S(t, s)y \in \omega(B, t)$. Logo, $S(t, s)\omega(B, s) \subset \omega(B, t)$ para cada $t \geq s$.

Resta mostrar que, se $\omega(B, s)$ é compacto e atrai pullback B , então $\omega(B, t) \subset S(t, s)\omega(B, s)$ para cada $t \geq s$. Seja $x \in \omega(B, t)$. Então, existem sequências $\sigma_k \rightarrow -\infty$, quando $k \rightarrow \infty$, $\sigma_k \leq t$ e $x_k \in B$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tais que $S(t, \sigma_k)x_k \rightarrow x$, quando $k \rightarrow \infty$. Como $\sigma_k \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow \infty$, $\sigma_k \leq t$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_k \leq s$ para todo $k \geq k_0$, para $s \in (-\infty, t]$. Logo,

$$S(t, s)S(s, \sigma_k)x_k = S(t, \sigma_k)x_k \rightarrow x,$$

pois $t \geq s \geq \sigma_k$, para todo $k \geq k_0$. Como $\omega(B, s)$ atrai pullback B no instante s , temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(S(s, \sigma_k)x_k, \omega(B, s)) = 0.$$

Disto e da compacidade de $\omega(B, s)$, segue que $\{S(s, \sigma_k)x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência (que continuaremos denotando $\{S(s, \sigma_k)x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$) convergindo para algum $y \in \omega(B, s)$. Da continuidade de $S(t, s)$, resulta que

$$S(t, s)S(s, \sigma_k)x_k \rightarrow S(t, s)y.$$

Pela unicidade do limite, $S(t, s)y = x$. Logo $\omega(B, t) \subset S(t, s)\omega(B, s)$, para todo $t \geq s$, como queríamos mostrar. ■

Demonstração do Teorema 3.2.4: (i) \Rightarrow (ii) : Suponha que $\{S(t, s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Então, pela Definição 3.1.9, cada $\mathcal{A}(t)$ é compacto e atrai pullback subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t, s) : t \geq s\}$.

(ii) \Rightarrow (i) : Suponha que (ii) ocorre. Então, para cada subconjunto limitado B de X e para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, s)B, K(t)) = 0.$$

Assim, se $y \in \omega(B, t)$, então $y \in K(t)$ por (\star) . Portanto, $\omega(B, t) \subset K(t)$, para todo subconjunto limitado B de X e para cada $t \in \mathbb{R}$.

Afirmção 3.2.1 $\omega(B, t)$ atrai B .

De fato, se $\omega(B, t)$ não atrai B , existiriam $\varepsilon > 0$, seqüências $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R} , $s_k \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em B tais que

$$\text{dist}(S(t, s_k)x_k, \omega(B, t)) > \varepsilon \quad (3.1)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $K(t)$ atrai B no instante t , temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t, s_k)x_k, K(t)) = 0.$$

Consequentemente, $\{S(t, s_k)x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergindo para algum $x_0 \in K(t)$. Portanto, $x_0 \in \omega(B, t)$, o que contraria (3.1). Logo, a afirmação segue.

Seguindo, como $\omega(B, t) \subset K(t)$, $\omega(B, t)$ é fechado e $K(t)$ é compacto, então $\omega(B, t)$ é compacto para cada t . Assim, $\omega(B, s)$ é compacto e atrai pullback B no instante s . Pelo Lema 3.2.1, segue que $S(t, s)\omega(B, s) = \omega(B, t)$, para cada $t \geq s$, logo $\omega(B, t)$ é invariante. Defina $\mathcal{A}(t)$ por

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B, t) : B \subset X \text{ limitado}\}}.$$

Como $\omega(B, t) \subset K(t)$ para cada $B \subset X$ limitado, segue que $\mathcal{A}(t)$ é compacto. Além disso, $\mathcal{A}(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X . De fato, como $\omega(B, t) \subset \mathcal{A}(t)$ para $B \subset X$ limitado e $\omega(B, t)$ atrai pullback B no instante t , isto é,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, s)B, \omega(B, t)) = 0,$$

então

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, s)B, \mathcal{A}(t)) = 0.$$

Logo, $\mathcal{A}(t)$ atrai pullback B .

Afirmção 3.2.2 A invariância de $\mathcal{A}(t)$ segue da invariância das famílias $\{\omega(B, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

De fato, dado $x_0 \in \mathcal{A}(s)$, $x_0 \in \overline{\bigcup \{\omega(B, s) : B \subset X \text{ limitado}\}}$, portanto, existe $x_n \in \omega(B_n, s)$, $B_n \subset X$ limitado para cada $n \in \mathbb{N}$ com $x_n \rightarrow x_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, $S(t, s)x_n = y_n \in \omega(B_n, t)$ pelo Lema 3.2.1 e, pela continuidade de $S(t, s)$, temos que $y_n \rightarrow S(t, s)x_0$ implicando em $S(t, s)x_0 \in \mathcal{A}(t)$. Assim, $S(t, s)\mathcal{A}(s) \subset \mathcal{A}(t)$.

Por outro lado, se $y_0 \in \mathcal{A}(t)$, existe $y_n \in \omega(B_n, t)$, $B_n \subset X$ limitado com $y_n \rightarrow y_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Da invariância da família $\omega(B_n, t)$, temos $S(t, s)\omega(B_n, s) = \omega(B_n, t)$ para todo $t \geq s$. Assim, existe $x_n \in \omega(B_n, s)$ tal que $S(t, s)x_n = y_n$. Mas cada $S(t, s)x_n \in S(t, s)\omega(B_n, s) \subset S(t, s)\mathcal{A}(s)$,

pois $\omega(B_n, s) \subset \mathcal{A}(s)$. Assim, como $S(t, s)\mathcal{A}(s)$ é compacto (pois $S(t, s)$ é contínuo e $\mathcal{A}(s)$ é compacto) e não depende de n e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S(t, s)\mathcal{A}(s)$, segue que

$$y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t, s)x_n \in S(t, s)\mathcal{A}(s).$$

Portanto, $\mathcal{A}(t) \subset S(t, s)\mathcal{A}(s)$. Logo, $S(t, s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t)$ para todo $t \geq s$ e $\mathcal{A}(t)$ é invariante. Agora, se $\{\hat{\mathcal{A}}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é outra família de conjuntos compactos que é invariante e atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t , pela definição de ω -limite pullback, temos $\omega(B, t) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(t)$ para todo subconjunto limitado B de X e para cada $t \in \mathbb{R}$. Daí, segue que $\mathcal{A}(t) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(t)$, mostrando que $\mathcal{A}(t)$ é minimal. Assim $\mathcal{A}(t)$ é um atrator pullback para o processo de evolução $\{S(t, s) : t \geq s\}$, como queríamos mostrar. ■

Lema 3.2.2 *Seja $\{S(t, s) : t \geq s\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X . Se B é um subconjunto não vazio de X tal que $\bigcup_{s \leq s_0} S(t, s)B$ é compacto, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq t$, então $\omega(B, t)$ é não vazio, compacto, invariante e $\omega(B, t)$ atrai pullback B no instante t .*

Demonstração: Como B é não vazio, existe $x \in B$ tal que

$$S(t, s)x \in \bigcup_{s \leq \sigma} S(t, s)B \subset \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} S(t, s)B} \subset \overline{\bigcup_{s \leq s_0} S(t, s)B}$$

para cada $\sigma \leq s_0 \leq t$. Assim, como $\overline{\bigcup_{s \leq s_0} S(t, s)B}$ é compacto, obtemos que $\overline{\bigcup_{s \leq \sigma} S(t, s)B}$ é não vazio e compacto para cada $\sigma \leq s_0 \leq t$. Como

$$\omega(B, t) = \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} S(t, s)B},$$

segue que $\omega(B, t)$ é não vazio e compacto.

Agora, mostremos que $\omega(B, t)$ atrai pullback B no instante t . Suponha que isto não ocorra. Então, existe $\varepsilon > 0$ e seqüências $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em B , $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R} com $\sigma_k \leq t$, $\sigma_k \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow \infty$, tal que

$$\text{dist}(S(t, \sigma_k)x_k, \omega(B, t)) > \varepsilon \quad (3.2)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\overline{\bigcup_{s \leq s_0} S(t, s)B}$ é compacto e

$$\{S(t, \sigma_k)x_k : k \geq k_0\} \subset \overline{\bigcup_{s \leq s_0} S(t, s)B}$$

para algum $k_0 \in \mathbb{N}$, $\{S(t, \sigma_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência convergindo para algum $y \in \omega(B, t) = \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} S(t, s)B}$, o que contraria (3.2). Logo, $\omega(B, t)$ atrai pullback B no instante t .

Pelo Lema 3.2.1, segue a invariância de $\omega(B, t)$ e o resultado segue. ■

Lema 3.2.3 *Se $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é um processo de evolução pullback assintoticamente compacto e B é um subconjunto não vazio limitado de X tal que $\overline{\bigcup_{\tau \leq s_0} S(t, \tau)B}$ é limitado, para algum $s_0 \in (-\infty, t]$, então $\omega(B, t)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai pullback B no instante t .*

Demonstração: Primeiramente, note que, para quaisquer seqüências $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ em $B \subset X$ e $\{s_k : k \in \mathbb{N}\}$ em $(-\infty, s_0]$, $s_k \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow \infty$, temos que $\{S(t, s_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é limitada, pois

$$S(t, s_k)x_k \in \overline{\bigcup_{\tau \leq s_0} S(t, \tau)B} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback assintoticamente compacto, a seqüência $\{S(t, s_k)x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente (que continuaremos denotando $\{S(t, s_k)x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$), isto é, existe $y \in X$ tal que

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} S(t, s_k)x_k.$$

Daí, segue que $y \in \omega(B, t)$ e $\omega(B, t)$ é não vazio.

Agora, dada uma seqüência $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\omega(B, t)$, existem $x_k \in B$ e $s_k \in (-\infty, s_0]$, $s_k \leq -k$ tal que

$$d(S(t, s_k)x_k, y_k) \leq \frac{1}{k}$$

devido a (\star) . Como $\{S(t, s_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência convergente, segue que $\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência convergente e $\omega(B, t)$ é compacto.

Mostremos agora que $\omega(B, t)$ atrai pullback B no instante t . Se $\omega(B, t)$ não atrai pullback B no instante t , existe $\varepsilon > 0$ e seqüências $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset B$ e $s_k \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow \infty$, tal que

$$\text{dist}(S(t, s_k)x_k, \omega(B, t)) > \varepsilon. \quad (3.3)$$

Como $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback assintoticamente compacto, existe um $y \in X$ e uma subsequência de $\{S(t, s_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ (que continuaremos denotando $\{S(t, s_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$) tal que

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} S(t, s_k)x_k.$$

Assim, $y \in \omega(B, t)$, contrariando (3.3). Logo, $\omega(B, t)$ atrai pullback B no instante t .

Finalmente, como $\omega(B, t)$ é compacto e atrai pullback B no instante t , segue do Lema 3.2.1 que $S(t, s)\omega(B, s) = \omega(B, t)$ para todo $t \geq s$, isto é, $\omega(B, t)$ é invariante e o lema está provado. ■

Os próximos teoremas fornecem resultados alternativos para provar existência de atratores pullback.

Teorema 3.2.5 *Se $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então*

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B, t) : B \subset X \text{ limitado}\}}$$

é fechado, invariante, atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t , e a família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é minimal entre as famílias $\{\mathcal{B}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tal que $\mathcal{B}(t)$ é fechado e atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t .

Demonstração: Como $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback limitado dissipativo, existe uma família $\{\mathcal{B}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de conjuntos limitados que absorve pullback subconjuntos limitados de X no instante t , para cada $t \in \mathbb{R}$. Assim, dado $t \in \mathbb{R}$, para cada subconjunto limitado B de X , existe $T = T(t, B) \leq t$ tal que $S(t, s)B \subset \mathcal{B}(t)$, para todo $s \leq T = T(t, B)$, donde

$$\bigcup_{s \leq T} S(t, s)B \subset B(t) \quad \Rightarrow \quad \overline{\bigcup_{s \leq T} S(t, s)B} \subset \overline{B(t)}.$$

Como $\overline{B(t)}$ é limitado, segue que $\overline{\bigcup_{s \leq T} S(t, s)B}$ é limitado para algum $T \in (-\infty, t]$. Assim estamos nas hipóteses do Lema 3.2.3. Logo, dado um subconjunto limitado não vazio B de X , $\omega(B, t)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai pullback B no instante t . Assim, se

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B, t) : B \subset X \text{ limitado}\}},$$

então, pelo que vimos na prova do Teorema 3.2.4, $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é fechado, invariante e atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t .

Para concluir a prova, se $\{\mathcal{B}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família tal que $\mathcal{B}(t)$ é fechado e atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t , novamente pelo que vimos na prova do Teorema 3.2.4, temos que $\omega(B, t) \subset \mathcal{B}(t)$ para cada subconjunto limitado B de X . Consequentemente, $\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{B}(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$, uma vez que $\mathcal{A}(t)$ é o menor fechado que contém $\bigcup \{\omega(B, t) : B \subset X \text{ limitado}\}$. Portanto, $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é minimal entre as famílias de conjuntos fechados que atraem pullback subconjuntos limitados de X no instante t e a prova está concluída. ■

Observe que o teorema acima não conclui a compacidade de $\mathcal{A}(t)$. Para obter a compacidade de cada seção faz-se hipóteses adicionais sobre os processos de evolução.

Definição 3.2.8 Dizemos que um processo de evolução $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é **pullback fortemente limitado dissipativo** se, para cada $t \in \mathbb{R}$, existir um subconjunto limitado $B(t)$ de X que absorve pullback subconjuntos limitados de X no instante τ para cada $\tau \leq t$; isto é, dado um subconjunto limitado B de X e $\tau \leq t$, existe $S_0(\tau, B)$ tal que $S(\tau, s)B \subset B(t)$, para todo $s \leq S_0(\tau, B)$.

Note que na definição anterior, a família $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ não precisa ter união limitada. No entanto, podemos escolhê-la de modo que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\bigcup_{s \leq t} B(s)$ é limitada.

O teorema a seguir dá condições suficientes para a existência de um atrator pullback.

Teorema 3.2.6 Se um processo de evolução $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então $\{S(t, s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ com a propriedade que $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$ é limitada para cada $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Se $\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B, t) : B \subset X \text{ limitado}\}}$, decorre do Teorema 3.2.5 que $\mathcal{A}(t)$ é fechado, invariante, atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t e que $\mathcal{A}(t)$ é minimal entre os conjuntos fechados que atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t . Do fato de que $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, existe um subconjunto limitado $B(t)$ de X que absorve pullback subconjuntos limitados de X no instante τ para cada $\tau \leq t$.

Afirmção 3.2.3 $\omega(B(t), t)$ atrai pullback todo subconjunto limitado de X no instante t .

De fato, como $\omega(B(t), t)$ atrai pullback $B(t)$ no instante t , basta mostrar que, dado um subconjunto limitado D de X , $\omega(D, t) \subset \omega(B(t), t)$. De fato, se $\omega(D, t) \not\subset \omega(B(t), t)$ e se $\omega(B(t), t)$ não atrai pullback D no instante t , existe $\varepsilon > 0$ e $\{x_n\} \subset D$, $s_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que

$$\text{dist}(S(t, s_n)x_n, \omega(B(t), t)) > \varepsilon$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Do fato de que $\omega(D, t) \subset \omega(B(t), t)$, segue que

$$\text{dist}(S(t, s_n)x_n, \omega(D, t)) > \varepsilon \quad (3.4)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback assintoticamente compacto e a sequência $\{S(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, pois $S(t, s)D \subset B(t)$ para $s \leq S_0$, pois $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, $\{S(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente, isto é, existe $y \in X$ tal que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t, s_n)x_n$. Daí, $y \in \omega(D, t)$ e isso contraria (3.4). Mostraremos então que $\omega(D, t) \subset \omega(B(t), t)$. Se $x_0 \in \omega(D, t)$, existem sequências $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $(-\infty, t]$ com $s_k \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow \infty$, e $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em D tal que $S(t, s_k)x_k \rightarrow x_0$ quando $k \rightarrow \infty$. Como $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, dada uma sequência $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $\tau_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, existe uma sequência $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $\sigma_n \leq \tau_n$ tal que $S(\tau_n, s)D \subset B(t)$, para todo $s \leq \sigma_n(\tau_n)$.

Dado que $s_k \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow \infty$, então para cada τ_n existe $k_n \geq n$ tal que $s_{k_n} \leq \tau_n$ e $S(\tau_n, s_{k_n})x_{k_n} \in B(t)$ (pois $S(\tau_n, s_{k_n})x_{k_n} \in S(\tau_n, s_{k_n})D \subset B(t)$). Assim,

$$S(t, s_{k_n})x_{k_n} = S(t, \tau_n)S(\tau_n, s_{k_n})x_{k_n} \in S(t, \tau_n)B(t).$$

Portanto, $x_0 \in \omega(B(t), t)$, logo $\omega(D, t) \subset \omega(B(t), t)$, e a afirmação segue.

Desta afirmação e do fato de que $\omega(B(t), t)$ é fechado e $\mathcal{A}(t)$ é minimal entre os conjuntos fechados que atraem pullback subconjuntos limitados de X no instante t , segue que $\mathcal{A}(t) \subset \omega(B(t), t)$. Consequentemente, como $\mathcal{A}(t)$ é fechado e $\omega(B(t), t)$ é compacto, $\mathcal{A}(t)$ é compacto. Assim, $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um atrator pullback para o processo de evolução $\{S(t, s) : t \geq s\}$.

Além disso, como $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, para cada subconjunto limitado D de X , $\omega(D, \tau) \subset \overline{B(t)}$, para todo $\tau \leq t$. De fato, para qualquer $x_0 \in \omega(D, \tau)$, existe uma sequência $\{s_n\}$ em $(-\infty, \tau]$ com $s_n \rightarrow -\infty$ e $\{x_n\}$ em D tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\tau, s_n)x_n = x_0.$$

Daí, $S(\tau, s_n)x_n \in B(t)$, para todo n suficientemente grande (pois existe $S_0(\tau, D)$ tal que $S(\tau, s_n)D \subset B(t)$ para todo $s_n \leq S_0(\tau, D)$). Portanto, $x_0 \in \overline{B(t)}$ e isto implica que

$$\mathcal{A}(t) \subset \overline{B(t)}, \quad \forall t \geq s, \quad (3.5)$$

já que $\mathcal{A}(t)$ é o menor fechado que contém $\bigcup\{\omega(B, t) : B \subset X \text{ limitado}\}$. De (3.5), obtemos

$$\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s) \subset \overline{B(t)},$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, de onde $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$ e o teorema está provado. ■

Para provar (em aplicações) que um processo é assintoticamente compacto, teremos de assumir que o processo de evolução é pullback fortemente limitado conforme definido a seguir.

Definição 3.2.9 Dizemos que um processo de evolução $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é **pullback fortemente limitado** se, para cada subconjunto limitado B de X e $t \in \mathbb{R}$, $\bigcup_{s \leq t} \gamma_p(B, s)$ é limitado.

Observação 3.2.2 Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo, $\{S(t-s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado se, e somente se, $\{S(t-s) : t \geq s\}$ é pullback limitado se, e somente se, $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo limitado.

De fato, $\{S(t-s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado se, e somente se, para cada subconjunto limitado B de X e $t \in \mathbb{R}$, $\bigcup_{s \leq t} \gamma_p(B, s)$ é limitada se, e somente se, $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo limitado.

Apresentaremos um resultado (Teorema 3.2.8) que permite concluir existência de atrator pullback sem ter que provar que o processo é pullback fortemente limitado dissipativo. Para isto precisamos das seguintes definições.

Definição 3.2.10 Dizemos que um processo de evolução $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é **pullback fortemente assintoticamente compacto** se, para cada $t \in \mathbb{R}$, sequência limitada $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ em X , sequências $\{s_k : k \in \mathbb{N}\}$, $\{\tau_k : k \in \mathbb{N}\}$ com $t \geq \tau_k \geq s_k$ e $\tau_k - s_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, então $\{S(\tau_k, s_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto. Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo, $\{S(t-s) : t \geq s\}$ é pullback assintoticamente compacto se, e somente se, $\{S(t) : t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto. O processo $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é chamado **fortemente compacto** se, para cada instante t e $B \subset X$ existe um $T_B \geq 0$ e um conjunto compacto $K \subset X$ tal que $S(\tau, s)B \subset K$ para todo $s \leq \tau \leq t$ com $\tau - s \geq T_B$.

Definição 3.2.11 Seja $\{S(t, s) : t \geq s\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X . Dizemos que um conjunto limitado $B(t)$ de X **pullback absorve fortemente pontos** (subconjuntos compactos) de X no instante t se, para cada $x \in X$ (subconjunto compacto K de X), existe $\sigma_x > 0$ ($\sigma_k > 0$) tal que $S(\tau, s)x \in B(t)$ ($S(\tau, s)K \subset B(t)$) para todo $s \leq \tau \leq t$ com $\tau - s \geq \sigma_x$ ($\tau - s \geq \sigma_k$). Dizemos que $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é **pullback fortemente ponto dissipativo (compacto dissipativo)** se, para todo $t \in \mathbb{R}$, existe um subconjunto limitado $B(t) \subset X$ que pullback absorve fortemente pontos (subconjuntos compactos) de X no instante t .

Observação 3.2.3 Se um conjunto $B(t)$ pullback absorve fortemente pontos (subconjuntos compactos/subconjuntos limitados) de X em t , então ele pullback absorve fortemente pontos (subconjuntos compactos/subconjuntos limitados) de X em τ para todo $\tau \leq t$. Além disso, se $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo, então $\{S(t-s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente ponto dissipativo (compacto dissipativo) se, e somente se, $\{S(t-s) : t \geq s\}$ é pullback ponto dissipativo (compacto dissipativo) se, e somente se, $\{S(t) : t \geq 0\}$ é ponto dissipativo (compacto dissipativo).

Lema 3.2.4 Seja $\{S(t, s) : t \geq s\}$ um processo de evolução pullback fortemente ponto dissipativo, pullback assintoticamente compacto e pullback fortemente limitado. Se, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, a família $\{S(\tau, \tau - \sigma) : \tau \leq t\}$ é equicontínua em cada $x \in X$, então $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente compacto dissipativo.

Demonstração: Do fato de que o processo $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente ponto dissipativo, seja $B(t)$ um subconjunto limitado de X que absorve fortemente pontos de X no instante t com $t \in \mathbb{R}$ fixo. Para $\tau \leq t$, seja $B^1(t) = \{x \in X : d(x, y) < 1 \text{ para algum } y \in B(t)\}$ e $C(\tau) = \gamma_p(\overline{B^1(t)}, \tau)$.

Afirmção 3.2.4 $C(\tau)$ é um subconjunto limitado de X que absorve fortemente pontos de X no instante τ .

De fato, para $x \in \overline{B^1(t)}$, existe uma sequência $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B^1(t)$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Como $x_n \in B^1(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $d(x_n, y) < 1$ para algum $y \in B(t)$. Assim,

$$n > n_0 \Rightarrow d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) < \varepsilon + 1,$$

de onde concluímos que $\overline{B^1(t)}$ é um subconjunto limitado de X . Como o processo $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado, segue que $\bigcup_{s \leq \tau} \gamma_p(\overline{B^1(t)}, s)$ é limitado, portanto, $C(\tau) = \gamma_p(\overline{B^1(t)}, \tau)$ é limitado. Observe também que $B(t) \subset C(\tau)$.

Agora, mostraremos que $C(\tau)$ absorve fortemente pontos de X no instante τ . Para tanto, devemos mostrar que, para cada $x \in X$, existe $\sigma_x > 0$ tal que $S(r, s)x \in C(\tau)$ para todo $s \leq r \leq \tau$ com $r - s \geq \sigma_x$. Como $B(t)$ absorve fortemente pontos de X no instante t , dado $x \in X$, existe $\sigma_x > 0$ tal que se $s + \sigma_x \leq r \leq t$ temos que $S(r, s)x \in B(t)$, e como $B(t) \subset C(\tau)$ e $\tau \leq t$, segue que $S(r, s)x \in C(\tau)$, para todo $s \leq r \leq \tau$ com $r - s \geq \sigma_x$ e a afirmação segue.

Devido a equicontinuidade do processo, se K é compacto e $x \in K$, existem $v_x \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon_x > 0$ tal que $S(r, r - v_x)(\mathcal{B}_{\varepsilon_x}(x)) \subset B^1(t)$, para todo $r \leq \tau$. Como $B^1(t) \subset C(\tau)$, segue que $S(\tau, r - v_x)(\mathcal{B}_{\varepsilon_x}(x)) \subset C(\tau)$ para todo $r \leq \tau$. Do fato de que K é compacto, existe um $p \in \mathbb{N}^*$ e $x_1, x_2, \dots, x_p \in K$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$$

e para $\sigma_K = \max\{\sigma_{x_i} : 1 \leq i \leq p\}$, temos

$$S(\tau, r - \sigma_K)K \subset C(\tau),$$

para todo $r - \sigma_K \leq r \leq \tau \leq t$ com $\tau - (r - \sigma_K) = \tau - r + \sigma_K \geq \sigma_K$. Como $\{S(t, s) : s \leq t\}$ é pullback fortemente limitado, então $\bigcup_{\tau \leq t} C(\tau)$ é limitado. Portanto, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\bigcup_{\tau \leq t} C(\tau)$ é um subconjunto limitado de X que pullback absorve fortemente subconjuntos compactos de X no instante t , e segue que $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente compacto dissipativo, como queríamos mostrar. ■

Teorema 3.2.7 *Se um processo $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente compacto dissipativo e pullback fortemente assintoticamente compacto, então $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo.*

Demonstração: Do fato de que $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente compacto dissipativo, existe um $B(t)$ fechado e limitado que pullback absorve fortemente subconjuntos compactos de X no instante t .

Primeiramente, provemos que, para cada subconjunto limitado D de X , temos $\omega(D, \tau) \subset B(t)$, para cada $\tau \leq t$. De fato, se $y \in \omega(D, \tau)$, existe uma sequência $\{s_k : k \in \mathbb{N}\}$ com $s_k \leq \tau$, $s_k \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$ tal que

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} S(\tau, s_k)x_k = y \\ \Rightarrow & \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(S(\tau, s_k)x_k, y) = 0, \end{aligned}$$

de onde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(S(\tau, s_k)x_k, \omega(D, \tau)) = 0.$$

Tome $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ com $\tau \geq r_k \geq s_k$ e $\min\{\tau - r_k, r_k - s_k\} \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Assim, se $\min\{r - r_k, r_k - s_k\} = r - r_k$, temos $r - r_k \leq r_k - s_k$ e como $r - r_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, temos $r_k - s_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Por outro lado, se $\min\{r - r_k, r_k - s_k\} = r_k - s_k$, também temos $r_k - s_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Assim, usando o fato de que $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente assintoticamente compacto, $\{S(r_k, s_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto. Como $\{S(r_k, s_k)x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset X$ e X é um espaço métrico, existe uma subsequência de $\{S(r_k, s_k)x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, que continuaremos denotando $\{S(r_k, s_k)x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $z \in X$ tal que $z_k := S(r_k, s_k)x_k \rightarrow z$ quando $k \rightarrow \infty$. Como $B(t)$ pullback absorve fortemente subconjuntos compactos de X no instante t e o conjunto $K = \{z_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{z\} \subset X$ é compacto, existe um $\sigma_k \in \mathbb{N}$ tal que $S(\tau, s_k)K \subset B(t)$ para todo $s_k \leq \tau \leq t$ sempre que $\tau - s_k \geq \sigma_k$. Assim, para todo k suficientemente grande,

$$S(\tau, s_k)x_k = S(\tau, r_k)S(r_k, s_k)x_k = S(\tau, r_k)z_k \in S(\tau, r_k)K \subset B(t).$$

Portanto,

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} S(\tau, s_k)x_k \in B(t),$$

pois $B(t)$ é fechado, de onde mostramos que $\omega(D, \tau) \subset B(t)$, para cada $\tau \leq t$. Como $\omega(D, \tau)$ atrai pullback D no instante τ , resulta que $B(t)$ atrai pullback D no instante τ , para cada $\tau \leq t$. Logo, o processo $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, como queríamos mostrar. ■

Como consequência imediata do Teorema 3.2.6, temos o teorema a seguir.

Teorema 3.2.8 *Se um processo $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente compacto dissipativo e pullback fortemente assintoticamente compacto, então $\{S(t, s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ com a propriedade que $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Pelo teorema anterior, $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo. Por hipótese, $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente assintoticamente compacto, e portanto, é pullback assintoticamente compacto. Do Teorema 3.2.6, o resultado segue. ■

Teorema 3.2.9 *Seja $\{S(t, s) : t \geq s\}$ um processo de evolução com a propriedade que, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\tau > 0$, $\{S(s, s - \tau) : t \geq s\}$ é equicontínuo em x para cada $x \in X$. Se o processo $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente ponto dissipativo, pullback fortemente limitado e pullback fortemente assintoticamente compacto, então $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo. Consequentemente, $\{S(t, s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ com a propriedade que $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Pelo Lema 3.2.4, $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente compacto dissipativo. Por hipótese, $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente assintoticamente compacto. Do Teorema 3.2.7, segue que $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo e do Teorema 3.2.6, $\{S(t, s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ com a propriedade que $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$ e o resultado segue. ■

3.3 A medida de não-compacidade de Kuratowski

Veremos nesta seção a definição e propriedades básicas da medida de não-compacidade de Kuratowski (ver [3] para mais detalhes) e um resultado de compacidade fortemente assintótica.

Definição 3.3.1 *Seja X um espaço métrico e $A \subset X$. A medida de não-compacidade de Kuratowski é definida por:*

$$\alpha(A) = \inf \{ \delta > 0 : A \text{ tem uma cobertura finita de diâmetro} < \delta \}.$$

Lema 3.3.1 *Seja X um espaço métrico e α a medida de Kuratowski. Temos:*

- (1) $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \bar{A}$ é compacto;
- (2) Se X é um espaço de Banach e $A_1, A_2 \subset X$, então $\alpha(A_1 + A_2) \leq \alpha(A_1) + \alpha(A_2)$;
- (3) Se $A_1 \subset A_2$, então $\alpha(A_1) \leq \alpha(A_2)$;
- (4) $\alpha(A_1 \cup A_2) \leq \max \{ \alpha(A_1), \alpha(A_2) \}$;
- (5) $\alpha(\bar{A}) = \alpha(A)$;
- (6) $\alpha(kA) = |k| \alpha(A)$, para todo $k \in \mathbb{R}$.

Para a prova deste lema, ver [3].

Lema 3.3.2 *Seja X um espaço métrico completo e $\{F_n\}$ uma sequência decrescente de conjuntos não vazios, limitados e fechados tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(F_n) = 0.$$

Então, $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ é não vazio e compacto.

Demonstração: Escolha $x_n \in F_n$ para $n \geq 1$. Pelo Lema 3.3.1 temos, $\alpha(\{x_n\}_{n \geq 1}) = \alpha(\{x_n\}_{n \geq k})$, para todo $k \geq 1$ e $\{x_n\}_{n \geq k} \subset F_k$. Assim, $\alpha(\{x_n\}_{n \geq 1}) = 0$ e isto implica que a sequência $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ é relativamente compacta (veja o Lema 3.3.1(1)). Podemos assumir que $x_n \rightarrow x$ em X . Evidentemente $x \in F$ e assim $F \neq \emptyset$. Também, $\alpha(F) \leq \alpha(F_n)$ para todo $n \geq 1$, portanto $\alpha(F) = 0$. Uma vez que F é fechado, pois é interseção de fechados, concluímos que F é compacto. ■

Em aplicações, para provar que um processo é pullback fortemente assintoticamente compacto, usamos o resultado a seguir.

Teorema 3.3.1 *Seja $\{S(t, s) : t \geq s\}$ um processo pullback fortemente limitado tal que $S(t, s) = T(t, s) + U(t, s)$, onde $U(t, s)$ é fortemente compacto e existe uma função não-crescente*

$$K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

com $K(\sigma, r) \rightarrow 0$ quando $\sigma \rightarrow \infty$, e para todo $s \leq t$ e $x \in X$ com $\|x\| \leq r$, $\|T(t, s)x\| \leq K(t - s, r)$. Então o processo $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente assintoticamente compacto.

Demonstração: Seja $\{x_n\} \subset B$ com $B \subset X$ limitado e $t_n, s_n \in \mathbb{R}$ com $t_n - s_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $t \geq t_n \geq s_n$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Denotemos

$$B_t = \bigcup_{\tau \leq t} \gamma_p(B, \tau).$$

Como $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado, B_t é limitado, e considere $r \geq 0$ tal que $\|x\| \leq r$ para todo $x \in B_t$. Definamos os conjuntos

$$J_j = \{S(t_n, s_n)x_n : n \geq j\}.$$

Para cada x_n , temos

$$S(\tau_n, s_n)x_n \in S(\tau_n, s_n)B \subset \bigcup_{s_n \leq \tau_n} S(\tau_n, s_n)B = \gamma_p(B, \tau_n) \subset \bigcup_{\tau_n \leq t} \gamma_p(B, \tau_n) \subset B_t \subset B(0, r) := B_r,$$

com $\tau_n = \frac{(t_n - s_n)}{2}$ (isto é, $t_n \geq \tau_n \geq s_n$). Portanto, para cada x_n , temos

$$S(t_n, s_n)x_n = S(t_n, \tau_n)S(\tau_n, s_n)x_n \subset S(t_n, \tau_n)B_r. \quad (3.6)$$

De (3.6) e do Lema 3.3.1, resulta que

$$\begin{aligned} \alpha(J_j) &= \alpha(\{S(t_n, s_n)x_n : n \geq j\}) \\ &\leq \alpha(\{S(t_n, \tau_n)B_r : n \geq j\}) \\ &= \alpha(\{T(t_n, \tau_n)B_r + U(t_n, \tau_n)B_r : n \geq j\}) \\ &\leq \alpha(\{T(t_n, \tau_n)B_r : n \geq j\}) + \alpha(\{U(t_n, \tau_n)B_r : n \geq j\}). \end{aligned}$$

Como $U(t, s)$ é fortemente compacto e $B_r \subset X$, existe $T_B \geq 0$ e um subconjunto compacto $K \subset X$ tal que $U(\tau, s)B_r \subset K$, para todo $t \geq \tau \geq s$ e $\tau - s \geq T_B$. Daí, se $t_j - \tau_j \geq T_B$ temos $U(t_n, \tau_n)B_r \subset K$ para $n \geq j$, e pelo Lema 3.3.1, segue que, se $t_j - \tau_j \geq T_B$ temos

$$\alpha(\{U(t_n, \tau_n)B_r : n \geq j\}) = 0$$

uma vez que $\overline{\{U(t_n, \tau_n)B_r : n \geq j\}}$ é compacto. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$ tal que $t_j - \tau_j \geq T_B$, temos

$$\alpha(J_j) \leq \alpha(\{T(t_n, \tau_n)B_r : n \geq j\}).$$

Do fato de que $\|T(t_n, \tau_n)x\| \leq K(t_n - \tau_n, r)$ para $x \in B_r$, segue que

$$\alpha(J_j) \leq K(t_j - \tau_j, r).$$

Como $t_j - \tau_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$, segue da hipótese que

$$0 \leq \alpha(J_j) \leq K(t_j - \tau_j, r) \rightarrow 0$$

quando $j \rightarrow \infty$.

Afirmção 3.3.1 $\alpha(J_1) = \alpha(J_j)$.

De fato, como $J_j \subset J_1$, pelo Lema 3.3.1, temos $\alpha(J_j) \leq \alpha(J_1)$. Reciprocamente, novamente pelo Lema 3.3.1,

$$\begin{aligned} \alpha(J_1) &= \alpha(\{S(t_n, s_n)x_n : 1 \leq n \leq j-1\} \cup \{S(t_n, s_n)x_n : n \geq j\}) \\ &\leq \max\{\alpha(\{S(t_n, s_n)x_n : 1 \leq n \leq j-1\}), \alpha(\{S(t_n, s_n)x_n : n \geq j\})\}. \end{aligned}$$

Como $\overline{\{S(t_n, s_n)x_n : 1 \leq n \leq j-1\}}$ é compacto, pelo Lema 3.3.1, obtemos

$$\alpha(\{S(t_n, s_n)x_n : 1 \leq n \leq j-1\}) = 0.$$

Logo,

$$\alpha(J_1) \leq \alpha(\{S(t_n, s_n)x_n : n \geq j\}) = \alpha(J_j).$$

Segue que $\alpha(J_1) = \alpha(J_j)$, implicando em

$$\alpha(J_1) \rightarrow 0, \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Portanto, $\alpha(\{S(t_n, s_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}) = \alpha(J_1) = 0$, e pelo Lema 3.3.1, $\overline{\{S(t_n, s_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é compacto, isto é, $\{S(t_n, s_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto, como queríamos mostrar. ■

Para processos de evolução que são pullback fortemente limitado, o teorema a seguir, cuja prova é imediata a partir do Teorema 3.3.1, dá condições suficientes para um processo de evolução ser pullback assintoticamente compacto.

Teorema 3.3.2 *Seja $\{S(t, s) : t \geq s\}$ um processo pullback fortemente limitado tal que $S(t, s) = T(t, s) + U(t, s)$, onde $U(t, s)$ é compacto e existe uma função não-crescente*

$$K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

com $K(\sigma, r) \rightarrow 0$ quando $\sigma \rightarrow \infty$, e para todo $s \leq t$ e $x \in X$ com $\|x\| \leq r$, $\|T(t, s)x\| \leq K(t - s, r)$. Então o processo $\{S(t, s) : t \geq s\}$ é pullback assintoticamente compacto.

Capítulo 4

Existência e semicontinuidade superior de atratores pullback para problemas parabólicos não-autônomos envolvendo o p-Laplaciano

Neste capítulo, no qual foi baseado em [2], estudamos o comportamento assintótico do problema parabólico envolvendo o p-Laplaciano da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(t) - \operatorname{div}(D_\lambda(t)|\nabla u_\lambda(t)|^{p-2}\nabla u_\lambda(t)) + |u_\lambda(t)|^{p-2}u_\lambda(t) = B(t, u_\lambda(t)) \\ u_\lambda(\tau) = u_{0\lambda}, \end{cases} \quad (4.1)$$

sob condição de fronteira Neumann homogênea, onde $p > 2$, $u_{0\lambda} \in L^2(\Omega)$, Ω é um domínio limitado suave em \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, $D_\lambda \in L^\infty([\tau, T] \times \Omega)$ com $0 < \beta \leq D_\lambda(t, x) \leq M$ q.t.p em $[\tau, T] \times \Omega$, $\lambda \in [0, \infty)$ e para cada parâmetro $\lambda \in [0, \infty)$, temos $|D_\lambda(s, x) - D_\lambda(t, x)| \leq C_\lambda |s - t|^{\theta_\lambda}$ para todo $x \in \Omega, s, t \in [\tau, T]$, para alguma constante positiva θ_λ e C_λ . Além disso, $D_\lambda \rightarrow D_{\lambda_1}$ em $L^\infty([\tau, T] \times \Omega)$ quando $\lambda \rightarrow \lambda_1$ e $B : [\tau, T] \times H \rightarrow H$ satisfaz:

- H1.** Existe $L \geq 0$ tal que $\|B(t, x_1) - B(t, x_2)\|_H \leq L\|x_1 - x_2\|_H$ para todo $t \in [\tau, T]$ e $x_1, x_2 \in H$;
- H2.** Para todo $x \in H$ a aplicação $t \mapsto B(t, x)$ pertence a $L^2(\tau, T; H)$;
- H3.** A aplicação $t \mapsto \|B(t, 0)\|_H$ é não decrescente, absolutamente contínua e limitada em subconjuntos compactos de \mathbb{R} .

Veremos que para cada $\lambda \in [0, \infty)$, o processo de evolução deste problema tem um atrator pullback e mostramos que a família de atratores pullback para este processo tem semicontinuidade superior em λ_1 .

4.1 O operador e as propriedades

Nesta seção apresentamos o operador e provamos algumas de suas propriedades.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ um domínio limitado (aberto e conexo) e suave, $H := L^2(\Omega)$ e $X := W^{1,p}(\Omega)$ com $2 < p < +\infty$. Então, H é um espaço de Hilbert real e X é um espaço de Banach reflexivo. Do teorema de Rellich-Kondrachov, sabemos que $W^{1,p}(\Omega)$ está compactamente contido em $L^p(\Omega)$, para todo $p \geq 1$. Mas $L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ continuamente, para todo $p > 2$.

Logo, $W^{1,p}(\Omega)$ está compactamente contido em $L^2(\Omega)$, para todo $p > 2$. Temos também que a inclusão $X \subset H$ é densa, pois

$$H = L^2(\Omega) = \overline{W_0^{1,p}(\Omega)}^H \subset \overline{W^{1,p}(\Omega)}^H \subset \overline{H}^H = H,$$

logo $\overline{X}^H = H$. Visto que $X \subset H$, considerando o operador restrição temos que $H^* \subset X^*$. Logo, temos $X \subset H \subset X^*$ com inclusões contínuas e densas.

Seja $D : [\tau, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em $L^\infty([\tau, T] \times \Omega)$ tal que $|D(s, x) - D(t, x)| \leq C|s - t|^\theta$ para todo $x \in \Omega, s, t \in [\tau, T]$ e constantes positivas θ e C e suponha que existem constantes positivas, β e M , tal que

$$0 < \beta \leq D(t, x) \leq M \quad (4.2)$$

para quase todo ponto (t, x) em $[\tau, T] \times \Omega$. Aqui, q denota o expoente conjugado de p .

Considere o operador $A(t)$ definido em X tal que para cada $u \in X$ associa-se o seguinte elemento de X^* , $A(t)u : X \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$A(t)u(v) := \int_{\Omega} D(t, x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx \quad (4.3)$$

Observação 4.1.1 (a) $\nabla u(x) \nabla v(x)$ é o produto escalar $\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)$ em \mathbb{R}^n .

(b) Usaremos também a notação natural $\langle A(t)u, v \rangle_{X^*, X}$ para indicar $A(t)u(v)$.

O operador $A(t) : X \rightarrow X^*$ acima dado por (4.3) está bem definido, pois para cada $v \in X$, temos

$$\begin{aligned} A(t)u(v) &= \int_{\Omega} D(t, x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx \\ &\leq \left| \int_{\Omega} D(t, x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} D(t, x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx \right| + \left| \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |D(t, x)| |\nabla u(x)|^{p-1} |\nabla v(x)| dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1} |v(x)| dx. \end{aligned}$$

De (4.2) e usando a Desigualdade de Hölder, resulta em

$$\begin{aligned} A(t)u(v) &\leq M \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-1} |\nabla v(x)| dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1} |v(x)| dx \\ &\leq M \|\nabla u\|_p^{p-1} \|\nabla v\|_p + \|u\|_p^{p-1} \|v\|_p < \infty, \end{aligned}$$

uma vez que $|\nabla u|, |\nabla v|, u, v \in L^p(\Omega)$.

Observe que $A(t)u$ é linear, e mostraremos mais adiante (veja Lema 4.1.4) que existe uma constante positiva C tal que

$$\|A(t)u\|_{X^*} \leq C \|u\|_X^{p-1},$$

para todo $u \in X$ e $t \in]\tau, T[$. Logo $A(t)u$ é limitado. Assim, para cada $u \in X$, $A(t)u \in X^*$ e $A(t)$ está bem definido.

Lema 4.1.1 O operador $A(t) : X \rightarrow X^*$ é monótono para cada $t \in [\tau, T]$.

Demonstração: Fixe $t \in [\tau, T]$ e sejam $u, v \in X$. Para cada $x \in \Omega$ fixado, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle A(t)u - A(t)v, u - v \rangle_{X^*, X} &= \langle A(t)u, u - v \rangle_{X^*, X} - \langle A(t)v, u - v \rangle_{X^*, X} \\
&= \int_{\Omega} D(t, x) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla(u - v) dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} u (u - v) dx - \\
&\quad - \left(\int_{\Omega} D(t, x) |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla(u - v) dx + \int_{\Omega} |v|^{p-2} v (u - v) dx \right) \\
&= \int_{\Omega} D(t, x) (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) (\nabla u - \nabla v) dx + \\
&\quad + \int_{\Omega} (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) (u - v) dx.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Tartar e de (4.2), segue que

$$\begin{aligned}
\langle A(t)u - A(t)v, u - v \rangle_{X^*, X} &\geq \int_{\Omega} D(t, x) \left(\frac{1}{2}\right)^p |\nabla u(x) - \nabla v(x)|^p dx + \\
&\quad + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\right)^p |u(x) - v(x)|^p dx \geq \\
&\geq \beta \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\right)^p |\nabla u(x) - \nabla v(x)|^p dx + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\right)^p |u(x) - v(x)|^p dx \geq \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

e o lema está provado. ■

Lema 4.1.2 *O operador $A(t) : X \rightarrow X^*$ é coercivo para cada $t \in [\tau, T]$.*

Demonstração: Queremos mostrar que, para qualquer $\{u_j\} \subset X$ com

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_X = \infty,$$

tem-se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\langle A(t)u_j, u_j \rangle_{X^*, X}}{\|u_j\|_X} = \infty.$$

Seja $u \in X$ e $t \in [\tau, T]$. Então, usando (4.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle A(t)u, u \rangle_{X^*, X} &= \int_{\Omega} D(t, x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla u(x) dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} u(x) u(x) dx \\
&= \int_{\Omega} D(t, x) |\nabla u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} |u(x)|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} D(t, x) |\nabla u(x)|^p dx + \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \\
&\geq \beta \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx + \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \\
&= \beta \|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_p^p &= \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p \right)^p \\
&= \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_p + \dots + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|_p \right)^p \\
&\geq \frac{1}{n} \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_p^p + \dots + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|_p^p \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p,
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\langle A(t)u, u \rangle_{X^*, X} &\geq \beta \|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p \\
&\geq \frac{\beta}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p + \|u\|_p^p \\
&\geq C \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p + \|u\|_p^p \right) \\
&= C \|u\|_X^p,
\end{aligned}$$

onde $C = C(n, \beta)$ é uma constante positiva. Assim, se $\{u_j\} \subset X$ é uma sequência tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_X = \infty$, então $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_X^{p-1} = \infty$ e

$$\langle A(t)u_j, u_j \rangle_{X^*, X} \geq C \|u_j\|_X^p = C \|u_j\|_X \|u_j\|_X^{p-1},$$

isto é,

$$\frac{\langle A(t)u_j, u_j \rangle_{X^*, X}}{\|u_j\|_X} \geq C \|u_j\|_X^{p-1},$$

donde

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\langle A(t)u_j, u_j \rangle_{X^*, X}}{\|u_j\|_X} = \infty,$$

e o resultado segue. ■

Lema 4.1.3 *O operador $A(t) : X \rightarrow X^*$ é hemicontínuo para cada $t \in [\tau, T]$.*

Demonstração: Precisamos mostrar que para todo $u, v \in X$, tem-se

$$A(t)(u + sv) \rightharpoonup A(t)u$$

em X^* quando $s \rightarrow 0$. Pela Proposição 2.1.7 e pelo fato de X ser reflexivo, basta mostrarmos que

$$\langle A(t)(u + sv), \varphi \rangle_{X^*, X} \rightarrow \langle A(t)u, \varphi \rangle_{X^*, X}$$

para todo $\varphi \in X$.

Sejam $u, v, \varphi \in X$, $s \in (-1, 1)$ e considere

$$\begin{aligned} f_s(x) &:= D(t, x) |\nabla(u(x) + sv(x))|^{p-2} \nabla(u(x) + sv(x)) \nabla\varphi(x), \\ f(x) &:= D(t, x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla\varphi(x), \\ g_s(x) &:= |u(x) + sv(x)|^{p-2} (u(x) + sv(x)) \varphi(x) \text{ e} \\ g(x) &:= |u(x)|^{p-2} u(x) \varphi(x). \end{aligned}$$

Então, usando (4.3), obtemos

$$\begin{aligned} & \left| \langle A(t)(u + sv), \varphi \rangle_{X^*, X} - \langle A(t)u, \varphi \rangle_{X^*, X} \right| = \\ & = |A(t)(u + sv)(\varphi) - A(t)u(\varphi)| = \\ & = \left| \int_{\Omega} D(t, x) |\nabla(u(x) + sv(x))|^{p-2} \nabla(u(x) + sv(x)) \nabla\varphi(x) dx + \right. \\ & + \int_{\Omega} |u(x) + sv(x)|^{p-2} (u(x) + sv(x)) \varphi(x) dx - \\ & - \left(\int_{\Omega} D(t, x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla\varphi(x) dx + \right. \\ & \left. \left. + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} u(x) \varphi(x) dx \right) \right| = \\ & = \left| \int_{\Omega} f_s(x) dx + \int_{\Omega} g_s(x) dx - \left(\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Omega} g(x) dx \right) \right| = \\ & = \left| \int_{\Omega} [f_s(x) - f(x)] dx + \int_{\Omega} [g_s(x) - g(x)] dx \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\Omega} [f_s(x) - f(x)] dx \right| + \left| \int_{\Omega} [g_s(x) - g(x)] dx \right| \leq \\ & \leq \int_{\Omega} |f_s(x) - f(x)| dx + \int_{\Omega} |g_s(x) - g(x)| dx. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} f_s(x) &= \lim_{s \rightarrow 0} D(t, x) |\nabla(u(x) + sv(x))|^{p-2} \nabla(u(x) + sv(x)) \nabla\varphi(x) \\ &= D(t, x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla\varphi(x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$. Analogamente, vemos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} g_s(x) = g(x),$$

para todo $x \in \Omega$.

Observe também que, usando (4.2),

$$\begin{aligned} |f_s(x)| &= |D(t, x) |\nabla(u(x) + sv(x))|^{p-2} \nabla(u(x) + sv(x)) \nabla\varphi(x)| \\ &= D(t, x) |\nabla(u(x) + sv(x))|^{p-1} |\nabla\varphi(x)| \\ &\leq M |\nabla(u(x) + sv(x))|^{p-1} |\nabla\varphi(x)| \\ &\leq M (|\nabla u(x)| + |s| |\nabla v(x)|)^{p-1} |\nabla\varphi(x)|. \end{aligned}$$

Note que $p - 1 > 1$, pois $p > 2$. Pelo Lema 2.1.1, segue que

$$\begin{aligned} (|\nabla u(x)| + |s||\nabla v(x)|)^{p-1} &\leq 2^{p-2} (|\nabla u(x)|^{p-1} + |s|^{p-1} |\nabla v(x)|^{p-1}) \\ &\leq 2^{p-2} (|\nabla u(x)|^{p-1} + |\nabla v(x)|^{p-1}), \end{aligned}$$

uma vez que $|s|^{p-1} < 1$. Assim,

$$\begin{aligned} |f_s(x)| &\leq M (|\nabla u(x)| + |s||\nabla v(x)|)^{p-1} |\nabla \varphi(x)| \\ &\leq M 2^{p-2} (|\nabla u(x)|^{p-1} + |\nabla v(x)|^{p-1}) |\nabla \varphi(x)| \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$, $s \in (-1, 1)$. De forma análoga, obtemos

$$|g_s(x)| \leq 2^{p-2} (|u(x)|^{p-1} + |v(x)|^{p-1}) |\varphi(x)|$$

para todo $x \in \Omega$, $s \in (-1, 1)$. Como $u, v, \varphi \in X = W^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$ ($p - 1 > 1$), temos que $L^{p-1}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Portanto,

$$\int_{\Omega} |2^{p-2} (|\nabla u(x)|^{p-1} + |\nabla v(x)|^{p-1}) |\nabla \varphi(x)| dx < \infty,$$

implicando em

$$h(x) := 2^{p-2} (|\nabla u(x)|^{p-1} + |\nabla v(x)|^{p-1}) |\nabla \varphi(x)| \in L^1(\Omega),$$

para todo $x \in \Omega$. Pelo mesmo motivo,

$$\ell(x) := 2^{p-2} (|u(x)|^{p-1} + |v(x)|^{p-1}) |\varphi(x)| \in L^1(\Omega),$$

para todo $x \in \Omega$.

Observe que estamos nas hipóteses do teorema da Convergência Dominada. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{s \rightarrow 0} \left| \langle A(t)(u + sv), \varphi \rangle_{X^*, X} - \langle A(t)u, \varphi \rangle_{X^*, X} \right| \\ &\leq \lim_{s \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} |f_s(x) - f(x)| dx + \int_{\Omega} |g_s(x) - g(x)| dx \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\Omega} |f_s(x) - f(x)| dx + \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\Omega} |g_s(x) - g(x)| dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \langle A(t)(u + sv), \varphi \rangle_{X^*, X} = \langle A(t)u, \varphi \rangle_{X^*, X},$$

para todo $\varphi \in X$ e a prova está concluída. ■

Provamos que o operador $A(t) : X \rightarrow X^*$ é monótono, coercivo e hemicontínuo. Pelo Teorema 2.4.2 e Corolário 2.4.1, $A(t) : X \rightarrow X^*$ é maximal monótono e $A(t)(X) = X^*$.

Lema 4.1.4 *Existe uma constante positiva C tal que*

$$\|A(t)u\|_{X^*} \leq C \|u\|_X^{p-1}$$

para todo $u \in X$ e $t \in]\tau, T[$.

Demonstração: Sejam $u \in X$ e $t \in]\tau, T[$. Sabemos que

$$\|A(t)u\|_{X^*} = \sup_{\|v\|_X \leq 1} |A(t)u(v)|.$$

Para $v \in X$, temos

$$\begin{aligned} |A(t)u(v)| &= \left| \int_{\Omega} D(t,x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} D(t,x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx \right| + \left| \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} D(t,x) |\nabla u(x)|^{p-1} |\nabla v(x)| dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1} |v(x)| dx \\ &\leq M \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-1} |\nabla v(x)| dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1} |v(x)| dx. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |A(t)u(v)| &\leq M \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-1} |\nabla v(x)| dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1} |v(x)| dx \\ &\leq M \|\nabla u(x)\|_q^{p-1} \|\nabla v(x)\|_p + \|u(x)\|_q^{p-1} \|v(x)\|_p. \end{aligned}$$

Como para $\|v\|_X = \|v\|_p + \|\nabla v\|_p \leq 1$ temos $\|v\|_p \leq 1$ e $\|\nabla v\|_p \leq 1$, segue que

$$|A(t)u(v)| \leq M \|\nabla u(x)\|_q^{p-1} + \|u(x)\|_q^{p-1}.$$

Portanto, pela definição de supremo, obtemos

$$\begin{aligned} \|A(t)u\|_{X^*} &\leq M \|\nabla u(x)\|_q^{p-1} + \|u(x)\|_q^{p-1} \\ &\leq C(M) (\|\nabla u(x)\|_q + \|u(x)\|_q)^{p-1}. \end{aligned}$$

Dáí e do fato de que $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ com inclusão contínua, segue que

$$\begin{aligned} \|A(t)u\|_{X^*} &\leq C(n, p, M) (\|\nabla u(x)\|_p + \|u(x)\|_p)^{p-1} \\ &= C(n, p, M) \|u\|_X^{p-1}, \end{aligned}$$

onde $C(n, p, M) > 0$, como queríamos mostrar. ■

Lema 4.1.5 *Existe uma constante positiva W tal que*

$$\langle A(t)u, u \rangle \geq W \|u\|_X^p$$

para todo $u \in X$ e $t \in]\tau, T[$.

Demonstração: Sejam $u \in X$ e $t \in]\tau, T[$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle A(t)u, u \rangle &= \int_{\Omega} D(t, x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla u(x) dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} u(x) u(x) dx \\
&= \int_{\Omega} D(t, x) |\nabla u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} |u(x)|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} D(t, x) |\nabla u(x)|^p dx + \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \\
&\geq \beta \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx + \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \\
&= \beta \|\nabla u(x)\|_p^p + \|u(x)\|_p^p \\
&\geq \frac{\beta}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p + \|u(x)\|_p^p \\
&\geq W \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p + \|u(x)\|_p^p \right) \\
&= W \|u\|_X^p,
\end{aligned}$$

onde $W = W(n, \beta)$ é uma constante positiva e o lema está provado. ■

Lema 4.1.6 *Se $u \in L^p(\tau, T, X)$ então a aplicação $A(\cdot)u(\cdot) : [\tau, T] \rightarrow X^*$ é mensurável.*

Demonstração: Fixe $w \in X$. É suficiente provar que a função $A_w : [\tau, T] \rightarrow X^*$ dada por $A_w(t) = A(t)w$ é contínua.

Considere $t_n \rightarrow t$ em $[\tau, T]$. Queremos mostrar que $A_w(t_n) \rightarrow A_w(t)$ em X^* .

Usando (4.3) e o fato de que $|D(s, x) - D(t, x)| \leq C|s - t|^\theta$ para todo $x \in \Omega, s, t \in [\tau, T]$, para alguma constante positiva θ e C , temos que

$$\begin{aligned}
\|A_w(t_n) - A_w(t)\|_{X^*} &= \|A(t_n)w - A(t)w\|_{X^*} \\
&= \sup_{\|v\|_X \leq 1} |(A(t_n)w - A(t)w)(v)| \\
&= \sup_{\|v\|_X \leq 1} |A(t_n)w(v) - A(t)w(v)| \\
&= \sup_{\|v\|_X \leq 1} \left| \int_{\Omega} (D(t_n, x) - D(t, x)) |\nabla w(x)|^{p-2} \nabla w(x) \nabla v(x) dx \right| \\
&\leq \sup_{\|v\|_X \leq 1} \int_{\Omega} |D(t_n, x) - D(t, x)| |\nabla w(x)|^{p-1} |\nabla v(x)| dx \\
&\leq \sup_{\|v\|_X \leq 1} C |t_n - t|^\theta \int_{\Omega} |\nabla w(x)|^{p-1} |\nabla v(x)| dx \\
&= C |t_n - t|^\theta \sup_{\|v\|_X \leq 1} \int_{\Omega} |\nabla w(x)|^{p-1} |\nabla v(x)| dx.
\end{aligned}$$

Sabemos que p e q são expoentes conjugados e $p > 2$, e portanto, $p, q > 1$. Pela Desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
|\nabla w(x)|^{p-1} |\nabla v(x)| &\leq \frac{1}{q} (|\nabla w(x)|^{p-1})^q + \frac{1}{p} (|\nabla v(x)|)^p \\
&= \frac{1}{q} |\nabla w(x)|^{q(p-1)} + \frac{1}{p} (|\nabla v(x)|)^p \\
&= \frac{1}{q} |\nabla w(x)|^p + \frac{1}{p} (|\nabla v(x)|)^p.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|A_w(t_n) - A_w(t)\|_{X^*} &\leq C|t_n - t|^\theta \sup_{\|v\|_{X^*} \leq 1} \int_{\Omega} |\nabla w(x)|^{p-1} |\nabla v(x)| dx \\
&\leq C|t_n - t|^\theta \sup_{\|v\|_{X^*} \leq 1} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{q} |\nabla w(x)|^p + \frac{1}{p} |\nabla v(x)|^p \right) dx \\
&= C|t_n - t|^\theta \sup_{\|v\|_{X^*} \leq 1} \left[\int_{\Omega} \frac{1}{q} |\nabla w(x)|^p + \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla v(x)|^p dx \right] \\
&= C|t_n - t|^\theta \sup_{\|v\|_{X^*} \leq 1} \left[\frac{1}{q} \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{p} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p \right] \\
&\leq C|t_n - t|^\theta \sup_{\|v\|_{X^*} \leq 1} \left[\frac{1}{q} \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{p} \left(\|v\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p \right) \right] \\
&\leq C|t_n - t|^\theta \sup_{\|v\|_{X^*} \leq 1} \left[\frac{1}{q} \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)}^p + C(p) \left(\|v\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^p \right] \\
&= C|t_n - t|^\theta \sup_{\|v\|_{X^*} \leq 1} \left[\frac{1}{q} \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)}^p + C(p) \|v\|_X^p \right] \\
&\leq C|t_n - t|^\theta \left(\frac{1}{q} \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)}^p + C(p) \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$0 \leq \|A_w(t_n) - A_w(t)\|_{X^*} \leq C|t_n - t|^\theta \left(\frac{1}{q} \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)}^p + C(p) \right).$$

Como

$$C|t_n - t|^\theta \left(\frac{1}{q} \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)}^p + C(p) \right) \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$, pois $t_n \rightarrow t$ em $[\tau, T]$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_w(t_n) - A_w(t)\|_{X^*} = 0,$$

implicando em $A_w(t_n) \rightarrow A_w(t)$ em X^* , como queríamos mostrar. \blacksquare

Sabemos que $X = W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach Reflexivo e $H = L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert tais que $X \subset H \subset X^*$ com inclusões contínuas e densas e que o operador não-linear $A(t) : X \rightarrow X^*$ é Monótono, Coercivo e Hemicontínuo. Pelo Teorema 2.4.3, concluímos que o operador $A_H(t)$, a realização de $A(t)$ em H dado por

$$\mathcal{D}(A_H(t)) = \{x \in X : A(t)x \in H\} \text{ e } A_H(t)(x) = A(t)x, \text{ se } x \in \mathcal{D}(A_H(t))$$

é maximal monótono em H , para cada $t \in [\tau, T]$.

Agora provaremos que a aplicação $\varphi(t) : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$\varphi(t)(u) = \begin{cases} \frac{1}{p} [\int_{\Omega} D(t,x) |\nabla u|^p dx + \int_{\Omega} |u|^p dx], & \text{se } u \in W^{1,p}(\Omega) \\ +\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.4)$$

é convexa, própria e semicontínua inferiormente, e que o operador $A_H(t)$ é o subdiferencial $\partial\varphi(t)$ de $\varphi(t)$, o que faremos logo em seguida.

Teorema 4.1.1 Para cada $t \in [\tau, T]$, $\varphi(t)$ é convexa, própria e semicontínua inferiormente.

Demonstração: Provemos primeiro que $\varphi(t)$ é convexa e própria. Para tanto, seja $u \in X = W^{1,p}(\Omega)$. Então $u, \nabla u \in L^p(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned}\varphi(t)(u) &= \frac{1}{p} \left[\int_{\Omega} D(t,x) |\nabla u|^p dx + \int_{\Omega} |u|^p dx \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[M \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \int_{\Omega} |u|^p dx \right] < \infty.\end{aligned}$$

Sejam $u, v \in X$ e $s \in [0, 1]$. Então,

$$\begin{aligned}\varphi(t)(su + (1-s)v) &= \frac{1}{p} \left[\int_{\Omega} D(t,x) |\nabla(su + (1-s)v)|^p dx + \int_{\Omega} |su + (1-s)v|^p dx \right] \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} D(t,x) |\nabla(s\nabla u + (1-s)\nabla v)|^p dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |su + (1-s)v|^p dx \\ &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} D(t,x) (s|\nabla u| + (1-s)|\nabla v|)^p dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} (s|u| + (1-s)|v|)^p dx \\ &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} D(t,x) (s|\nabla u|^p + (1-s)|\nabla v|^p) dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} (s|u|^p + (1-s)|v|^p) dx \\ &= s \int_{\Omega} \frac{1}{p} D(t,x) |\nabla u|^p dx + (1-s) \int_{\Omega} \frac{1}{p} D(t,x) |\nabla v|^p dx + s \int_{\Omega} \frac{1}{p} |u|^p dx + \\ &+ (1-s) \int_{\Omega} \frac{1}{p} |v|^p dx \\ &= s \frac{1}{p} \left[\int_{\Omega} D(t,x) |\nabla u|^p dx + \int_{\Omega} |u|^p dx \right] + \\ &+ (1-s) \frac{1}{p} \left[\int_{\Omega} D(t,x) |\nabla v|^p dx + \int_{\Omega} |v|^p dx \right] \\ &= s\varphi(t)(u) + (1-s)\varphi(t)(v).\end{aligned}$$

Logo, $\varphi(t)$ é convexa e própria.

Para mostrar que $\varphi(t)$ é semicontínua inferiormente, devemos mostrar que

$$\varphi(t)(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(t)(u_n)$$

para toda sequência (u_n) com $u_n \rightarrow u$ em $H = L^2(\Omega)$. Seja, então (u_n) uma sequência com $u_n \rightarrow u$ em $H = L^2(\Omega)$. Se $\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(t)(u_n) = +\infty$, então

$$\varphi(t)(u) = +\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(t)(u_n).$$

Caso contrário, se $\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(t)(u_n) = a < +\infty$, então existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset X$ de (u_n) tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t)(u_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \left[\int_{\Omega} D(t,x) |\nabla u_{n_k}|^p dx + \int_{\Omega} |u_{n_k}|^p dx \right] = a.$$

Como $\varphi(t)(u_{n_k}) \rightarrow a$ quando $k \rightarrow \infty$, temos que $\varphi(t)(u_{n_k})$ é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|\varphi(t)(u_{n_k})| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim concluímos que $\|u_{n_k}\|_X$ é uma sequência limitada no espaço de Banach reflexivo $X = W^{1,p}(\Omega)$. Logo, (u_{n_k}) possui uma subsequência (que continuaremos denotando (u_{n_k})) tal que $u_{n_k} \rightharpoonup v$ em X , para algum $v \in X$. Como $H^* \subset X^*$, temos que

$u_{n_k} \rightharpoonup v$ em H e pela unicidade do limite fraco, $u = v \in X$. Considerando agora a subdiferencial $\partial\varphi(t)$ de $\varphi(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \langle \partial\varphi(t)(u), u_{n_k} - u \rangle_{X^*, X} \leq \varphi(t)(u_{n_k}) - \varphi(t)(u) \\ \Rightarrow & \langle \partial\varphi(t)(u), u_{n_k} - u \rangle_{X^*, X} + \varphi(t)(u) \leq \varphi(t)(u_{n_k}), \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em X e $\varphi(t)(u) \in X^*$, segue que

$$\langle \partial\varphi(t)(u), u_{n_k} - u \rangle_{X^*, X} \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow \infty$. Logo, quando $k \rightarrow \infty$, temos

$$\varphi(t)(u) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t)(u_{n_k}) = a = \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(t)(u_n).$$

■

Teorema 4.1.2 $A_H(t)$ é a subdiferencial $\partial\varphi(t)$ de $\varphi(t)$ para cada $t \in [\tau, T]$.

Demonstração: Como $\varphi(t)$ é convexa, própria e semicontínua inferiormente, pelo Teorema 2.4.1, $\partial\varphi(t)$ é maximal monótono em $L^2(\Omega)$. Mostremos que $-\operatorname{div}(D(t, x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u = \partial\varphi(t)(u)$. Como ambos são maximais monótonos, basta mostrarmos uma das inclusões. Mostraremos que $-\operatorname{div}(D(t, x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u \subset \partial\varphi(t)(u)$.

Seja $u \in \mathcal{D}(-\operatorname{div}(D(t, x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u)$ e $v = -\operatorname{div}(D(t, x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u$. Então, para cada $\xi \in X$,

$$\begin{aligned} \langle v, \xi - u \rangle &= \langle A_H(t)u, \xi - u \rangle \\ &= \int_{\Omega} D(t, x)|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) (\nabla \xi(x) - \nabla u(x)) dx + \\ &+ \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2}u(x) (\xi(x) - u(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} D(t, x)|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) \nabla \xi(x) dx - \int_{\Omega} D(t, x)|\nabla u(x)|^p dx + \\ &+ \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2}u(x) \xi(x) dx - \int_{\Omega} |u(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Portanto, considerando q o expoente conjugado de p , temos

$$\begin{aligned} \langle v, \xi - u \rangle + \int_{\Omega} D(t, x)|\nabla u(x)|^p dx + \int_{\Omega} |u(x)|^p dx &= \int_{\Omega} D(t, x)|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) \nabla \xi(x) dx + \\ &+ \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2}u(x) \xi(x) dx \leq \int_{\Omega} D(t, x)|\nabla u(x)|^{p-1} |\nabla \xi(x)| dx + \\ &+ \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1} |\xi(x)| dx \leq \frac{1}{q} \int_{\Omega} D(t, x)|\nabla u(x)|^p dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} D(t, x) |\nabla \xi(x)|^p dx + \\ &+ \frac{1}{q} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\xi(x)|^p dx = \frac{1}{q} \left[\int_{\Omega} D(t, x)|\nabla u(x)|^p dx + \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right] + \\ &+ \frac{1}{p} \left[\int_{\Omega} D(t, x) |\nabla \xi(x)|^p dx + \int_{\Omega} |\xi(x)|^p dx \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle v, \xi - u \rangle + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left[\int_{\Omega} D(t, x)|\nabla u(x)|^p dx + \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right] &\leq \\ &\leq \frac{1}{p} \left[\int_{\Omega} D(t, x) |\nabla \xi(x)|^p dx + \int_{\Omega} |\xi(x)|^p dx \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle v, \xi - u \rangle + \varphi(t)(u) \leq \varphi(t)(\xi)$$

ou, de forma equivalente,

$$\langle v, \xi - u \rangle \leq \varphi(t)(\xi) - \varphi(t)(u),$$

para todo $\xi \in X = W^{1,p}(\Omega)$. Se $\xi \in L^2(\Omega) \setminus W^{1,p}(\Omega)$, então $\varphi(t)(\xi) = \infty$ e vale a desigualdade acima. Isso mostra que $v \in \partial\varphi(t)(u)$. Segue que $A_H(t) = \partial\varphi(t)$, como queríamos mostrar. ■

4.2 Existência de Soluções

Seja $\tau \in \mathbb{R}$ e $T > \tau$. Consideremos a família de operadores não lineares $A(t) : X \rightarrow X^*$, $t \in [\tau, T]$, definida na seção anterior, que satisfaz:

- I. $A(t)$ é monótono e hemicontínuo de X em X^* para quase todo $t \in]\tau, T[$;
- II. A função $A(\cdot)u(\cdot) : [\tau, T] \rightarrow X^*$ é mensurável para cada $u \in L^p(\tau, T, X)$;
- III. Existe uma constante C tal que $\|A(t)u\|_{X^*} \leq C(\|u\|_X^{p-1} + 1)$, para $u \in X$ e $t \in]\tau, T[$;
- IV. Existem constantes α, W ($W > 0$) tal que $\langle A(t)u, u \rangle \geq W\|u\|_X^p + \alpha$, para $u \in X$ e $t \in]\tau, T[$.

Proposição 4.2.1 (Teorema 4.2 em [10].) *Sejam $u_0 \in H$ e $f \in L^q(\tau, T, X^*)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, existe uma única função $u(t)$ a qual toma valores em X^* , que é absolutamente contínua em $[\tau, T]$ e satisfaz*

$$\begin{aligned} u &\in L^p(\tau, T, X) \cap C([\tau, T]; H), \\ \frac{du}{dt} &\in L^q(\tau, T, X^*), \\ \frac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) &= f(t), \quad \text{q.t.p. em }]\tau, T[, \\ u(\tau) &= u_0. \end{aligned}$$

Proposição 4.2.2 *Se $f, g \in L^2(\tau, T; H)$ e u, v são as soluções (dada pela Proposição 4.2.1) das equações*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) = f(t), \\ u(\tau) = u_0 \in H \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt}(t) + A(t)v(t) = g(t), \\ v(\tau) = v_0 \in H, \end{cases}$$

então para $\tau \leq s < t \leq T$, temos

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leq \|u(s) - v(s)\|_H + \int_s^t \|f(r) - g(r)\|_H dr.$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} &\left(\frac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) \right) - \left(\frac{dv}{dt}(t) + A(t)v(t) \right) = f(t) - g(t) \\ \Rightarrow &\frac{d}{dt}(u(t) - v(t)) + A(t)u(t) - A(t)v(t) = f(t) - g(t). \end{aligned}$$

Multiplicando a última equação por $u(t) - v(t)$, vem:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(u(t) - v(t)), u(t) - v(t) \right\rangle_{X^*, X} + \langle A(t)u(t) - A(t)v(t), u(t) - v(t) \rangle_{X^*, X} &= \\ &= \langle f(t) - g(t), u(t) - v(t) \rangle. \end{aligned}$$

Da monotocidade de $A(t)$, segue que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(u(t) - v(t)), u(t) - v(t) \right\rangle_{X^*, X} &\leq \left\langle \frac{d}{dt}(u(t) - v(t)), u(t) - v(t) \right\rangle_{X^*, X} + \\ &+ \langle A(t)u(t) - A(t)v(t), u(t) - v(t) \rangle_{X^*, X} \\ &= \langle f(t) - g(t), u(t) - v(t) \rangle, \end{aligned}$$

de onde

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - v(t)\|_H^2 \leq \langle f(t) - g(t), u(t) - v(t) \rangle, \quad (4.5)$$

uma vez que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - v(t)\|_H^2 = \left\langle \frac{d}{dt}(u(t) - v(t)), u(t) - v(t) \right\rangle_{X^*, X}.$$

Integrando (4.5) de s a t para $\tau \leq s < t \leq T$, obtemos

$$\frac{1}{2} \|u(t) - v(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \|u(s) - v(s)\|_H^2 + \int_s^t \langle f(r) - g(r), u(r) - v(r) \rangle dr. \quad (4.6)$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\frac{1}{2} \|u(t) - v(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \|u(s) - v(s)\|_H^2 + \int_s^t \|f(r) - g(r)\|_H \|u(r) - v(r)\|_H dr. \quad (4.7)$$

Note que $m(r) := \|f(r) - g(r)\|_H \geq 0$ q.t.p $r \in]s, T[$ e $m \in L^2(s, T; \mathbb{R}) \subset L^1(s, T; \mathbb{R})$. Além disso, $a := \|u(s) - v(s)\|_H \geq 0$ e a função $\phi : [s, T] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $t \mapsto \phi(t) := \|u(t) - v(t)\|_H$ é contínua e tal que verifica (4.7), para todo $t \in [s, T]$. Segue do Lema de Gronwall que

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leq \|u(s) - v(s)\|_H + \int_s^t \|f(r) - g(r)\|_H dr$$

para $\tau \leq s < t \leq T$, como queríamos mostrar. ■

Proposição 4.2.3 *Se $f, g \in L^2(\tau, T; X^*)$ e u, v são as soluções (dada pela Proposição 4.2.1) das equações*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) = f(t), \\ u(\tau) = u_0 \in H \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt}(t) + A(t)v(t) = g(t), \\ v(\tau) = v_0 \in H, \end{cases}$$

então para $\tau \leq s < t \leq T$,

$$\|u(t) - v(t)\|_H^2 \leq \|u(s) - v(s)\|_H^2 + 2 \int_s^t \|f(r) - g(r)\|_{X^*} \|u(r) - v(r)\|_X dr.$$

Demonstração: Da mesma forma que obtemos (4.6) na prova da proposição anterior, obtemos

$$\frac{1}{2} \|u(t) - v(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \|u(s) - v(s)\|_H^2 + \int_s^t \langle f(r) - g(r), u(r) - v(r) \rangle_{X^*, X} dr.$$

para $\tau \leq s < t \leq T$.

Multiplicando a última desigualdade por 2 e usando o fato de que

$$\langle f(r) - g(r), u(r) - v(r) \rangle_{X^*, X} \leq \|f(r) - g(r)\|_{X^*} \|u(r) - v(r)\|_X,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_H^2 &\leq \|u(s) - v(s)\|_H^2 + 2 \int_s^t \langle f(r) - g(r), u(r) - v(r) \rangle_{X^*, X} dr \\ &\leq \|u(s) - v(s)\|_H^2 + 2 \int_s^t \|f(r) - g(r)\|_{X^*} \|u(r) - v(r)\|_X dr, \end{aligned}$$

para $\tau \leq s < t \leq T$ e o resultado segue. \blacksquare

A seguir, definiremos solução forte e solução fraca para nosso problema.

Definição 4.2.1 a) Uma **solução forte** da equação $\frac{du}{dt}(t) + A_H(t)u(t) = B(t, u(t))$, onde $B : [\tau, T] \times H \rightarrow H$ satisfaz $H1$, $H2$ e $H3$, é toda função $u \in C([\tau, T]; H)$, absolutamente contínua em todo compacto de (τ, T) verificando: $u(t) \in \mathcal{D}(A_H)$ e $\frac{du}{dt}(t) + A_H(t)u(t) = B(t, u(t))$ q.t.p $t \in (\tau, T)$.

b) Dizemos que $u \in C([\tau, T]; H)$, é uma **solução fraca** da equação $\frac{du}{dt}(t) + A_H(t)u(t) = B(t, u(t))$ se existem sequências $f_n \in L^1(\tau, T; H)$ e $u_n \in C([\tau, T]; H)$ tal que u_n é uma solução forte da equação $\frac{du_n}{dt}(t) + A_H(t)u_n(t) = B(t, f_n(t))$ e $u_n \rightarrow u$ uniformemente em $[\tau, T]$.

Consideremos o problema (4.1) na forma abstrata

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + A_H(t)u(t) = B(t, u(t)), \\ u(\tau) = u_0, \end{cases} \quad (4.8)$$

onde $B : [\tau, T] \times H \rightarrow H$ satisfaz $H1, H2$ e $H3$.

Teorema 4.2.1 Se $B : [\tau, T] \times H \rightarrow H$ satisfaz $H1, H2$ e $u_0 \in H$, então existe uma única solução forte do problema (4.8), isto é, existe $u \in C([\tau, T]; H)$, tal que

$$\frac{du}{dt}(t) + A_H(t)u(t) = B(t, u(t))$$

q.t.p em $[\tau, T]$ e $u(\tau) = u_0$.

Demonstração: Primeiro, provemos a existência. Para tanto, fixe $s \in [\tau, T]$ e seja $t \in [\tau, T]$. Como B satisfaz $H1$, existe $L \geq 0$ tal que

$$\|B(t, u(t)), B(t, u(s))\|_H \leq L \|u(t) - u(s)\|_H.$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} \|B(t, u(t))\|_H^2 &= \|B(t, u(t)) - B(t, u(s)) + B(t, u(s))\|_H^2 \\ &\leq (\|B(t, u(t)) - B(t, u(s))\|_H + \|B(t, u(s))\|_H)^2 \\ &\leq (L \|u(t) - u(s)\|_H + \|B(t, u(s))\|_H)^2 \\ &= L^2 \|u(t) - u(s)\|_H^2 + 2L \|u(t) - u(s)\|_H \|B(t, u(s))\|_H + \|B(t, u(s))\|_H^2. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young, temos

$$2L\|u(t) - u(s)\|_H \|B(t, u(s))\|_H \leq \frac{4L^2}{2} \|u(t) - u(s)\|_H^2 + \frac{1}{2} \|B(t, u(s))\|_H^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|B(t, u(t))\|_H^2 &\leq L^2 \|u(t) - u(s)\|_H^2 + 2L^2 \|u(t) - u(s)\|_H^2 + \frac{1}{2} \|B(t, u(s))\|_H^2 + \|B(t, u(s))\|_H^2 \\ &= 3L^2 \|u(t) - u(s)\|_H^2 + \frac{3}{2} \|B(t, u(s))\|_H^2 \\ &\leq 4(L^2 \|u(t) - u(s)\|_H^2 + \|B(t, u(s))\|_H^2). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Afirmação 4.2.1 *Se $u \in C(\tau, T, H)$, então $g(t) := B(t, u(t)) \in L^2(\tau, T, H)$.*

De fato, como $u(s) \in H$ e B satisfaz $H2$, então $t \mapsto B(t, u(s)) \in L^2(\tau, T, H)$. Daí e observando que $[\tau, T] \ni t \mapsto \|u(t) - u(s)\|_H^2$ é uma função contínua no compacto $[\tau, T]$ e usando (4.9), vem:

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2(\tau, T, H)}^2 &= \int_{\tau}^T \|g(t)\|_H^2 dt = \int_{\tau}^T \|B(t, u(t))\|_H^2 dt \\ &\leq \int_{\tau}^T 4(L^2 \|u(t) - u(s)\|_H^2 + \|B(t, u(s))\|_H^2) dt \\ &= 4L^2 \int_{\tau}^T \|u(t) - u(s)\|_H^2 dt + 4 \int_{\tau}^T \|B(t, u(s))\|_H^2 dt \\ &\leq 4L^2 \int_{\tau}^T C dt + 4 \int_{\tau}^T \|B(t, u(s))\|_H^2 dt \\ &= 4L^2 C(T - \tau) + 4 \int_{\tau}^T \|B(t, u(s))\|_H^2 dt < \infty, \end{aligned}$$

onde $C = \sup_{t \in [\tau, T]} \|u(t) - u(s)\|_H^2 \in \mathbb{R}$. Logo, $g(t) \in L^2(\tau, T, H)$.

Seguindo, como $H \subset X^*$ com inclusão contínua, resulta da Proposição 2.3.1 que $L^2(\tau, T, H) \subset L^2(\tau, T, X^*)$.

Seja $u_0 \in H$. Considere a sequência iterada definida como segue: $u_0(t) = u_0$ e u_{n+1} é a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_{n+1}(t) + A(t)u_{n+1}(t) = B(t, u_n(t)) := g_n(t), & t > \tau, \\ u_{n+1}(\tau) = u_0. \end{cases}$$

Como $B(t, u_n(t)), B(t, u_{n-1}(t)) \in L^2(\tau, T, H)$, então $g_n(t), g_{n-1}(t) \in L^2(\tau, T, H)$, e como u_{n+1} e u_n são as soluções dos problemas

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_{n+1}(t) + A(t)u_{n+1}(t) = g_n(t), \\ u_{n+1}(\tau) = u_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} u_n(t) + A(t)u_n(t) = g_{n-1}(t), \\ u_n(\tau) = u_0, \end{cases}$$

respectivamente, pela Proposição 4.2.2, para $\tau \leq s < t \leq T$, temos

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_H \leq \|u_{n+1}(\tau) - u_n(\tau)\|_H + \int_{\tau}^t \|g_n(r) - g_{n-1}(r)\|_H dr.$$

Como $\|u_{n+1}(\tau) - u_n(\tau)\|_H = 0$, segue que

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_H \leq \int_{\tau}^t \|B(t, u_n(r)) - B(t, u_{n-1}(r))\|_H dr.$$

Daí e pelo fato de que B satisfaz $H1$, obtemos

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_H \leq \int_{\tau}^t L \|u_n(r) - u_{n-1}(r)\|_H dr,$$

para todo $t \in [\tau, T]$ e $n \in \mathbb{N}$.

Agora, mostremos por indução que vale a desigualdade

$$L \int_{\tau}^t \|u_n(r) - u_{n-1}(r)\|_H dr \leq \frac{(Lt)^n}{n!} \|u_1 - u_0\|_{L^\infty(\tau, T; H)}. \quad (4.10)$$

Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} L \int_{\tau}^t \|u_1(r) - u_0(r)\|_H dr &\leq L \sup_{r \in [\tau, T]} \|u_1(r) - u_0\|_H \int_{\tau}^t dr \\ &= L(t - \tau) \|u_1 - u_0\|_{L^\infty(\tau, T; H)} \\ &\leq Lt \|u_1 - u_0\|_{L^\infty(\tau, T; H)}. \end{aligned}$$

Logo, (4.10) vale para $n = 1$. Suponha que (4.10) vale para n , isto é,

$$L \int_{\tau}^t \|u_n(r) - u_{n-1}(r)\|_H dr \leq \frac{(Lt)^n}{n!} \|u_1 - u_0\|_{L^\infty(\tau, T; H)} \quad (4.11)$$

e mostremos que vale para $n + 1$. De fato, usando (4.11), temos

$$\begin{aligned} L \int_{\tau}^t \|u_{n+1}(r) - u_n(r)\|_H dr &\leq L \int_{\tau}^t \frac{(Lr)^n}{n!} \|u_1 - u_0\|_{L^\infty(\tau, T; H)} dr \\ &= \frac{L^{n+1}}{n!} \|u_1 - u_0\|_{L^\infty(\tau, T; H)} \int_{\tau}^t r^n dr \\ &\leq \frac{(L)^{n+1}}{n!} \|u_1 - u_0\|_{L^\infty(\tau, T; H)} \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{\tau^{n+1}}{n+1} \right) \\ &\leq \frac{(Lt)^{n+1}}{n!(n+1)} \|u_1 - u_0\|_{L^\infty(\tau, T; H)} \\ &= \frac{(Lt)^{n+1}}{(n+1)!} \|u_1 - u_0\|_{L^\infty(\tau, T; H)}. \end{aligned}$$

Logo, (4.10) vale para todo $n \in \mathbb{N}$ e a desigualdade segue. Dessa forma,

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_H \leq \frac{(Lt)^n}{n!} \|u_1 - u_0\|_{L^\infty(\tau, T; H)} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$, e então, $\{u_n\}$ converge uniformemente para uma solução fraca u de (4.8) com $u(\tau) = u_0$.

Observe que $u_n \rightarrow u$ em $C([\tau, T]; H)$. Portanto, $g_n \rightarrow g$ em $L^1(\tau, T, H)$, pois

$$\begin{aligned} \|g_n - g\|_{L^1(\tau, T, H)} &= \int_{\tau}^T \|g_n(t) - g(t)\|_H dt \\ &= \int_{\tau}^T \|B(t, u_n(t)) - B(t, u(t))\|_H dt \\ &\leq L \int_{\tau}^T \|u_n(t) - u(t)\|_H dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Como $g(t) := B(t, u(t)) \in L^2(\tau, T, H) \subset L^2(\tau, T, X^*)$ e $u_0 \in H$, pela Proposição 4.2.1 existe uma única função $y(t)$ que satisfaz

$$\frac{dy}{dt}(t) + A(t)y(t) = g(t) := B(t, u(t)) \quad (4.12)$$

q.t.p em $]\tau, T[$ e $y(\tau) = u_0$. Assim, y e u_n são as soluções das equações

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) + A(t)y(t) = g(t), \\ y(\tau) = u_0 \in H \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}u_n(t) + A(t)u_n(t) = g_{n-1}(t), \\ u_{n-1}(\tau) = u_0 \in H. \end{cases}$$

respectivamente, onde $g, g_{n-1} \in L^2(\tau, T, H)$. Portanto, da Proposição 4.2.2, para $\tau \leq t \leq T$, temos

$$\|y(t) - u_n(t)\|_H \leq \|y(\tau) - u_n(\tau)\|_H + \int_{\tau}^t \|g(\gamma) - g_{n-1}(\gamma)\|_H d\gamma.$$

Como $\|y(\tau) - u_n(\tau)\|_H = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|y(t) - u_n(t)\|_H &\leq \int_{\tau}^t \|g(\gamma) - g_{n-1}(\gamma)\|_H d\gamma \\ &= \int_{\tau}^t \|B(\gamma, u(\gamma)) - B(\gamma, u_{n-1}(\gamma))\|_H d\gamma \\ &\leq L \int_{\tau}^t \|u(\gamma) - u_{n-1}(\gamma)\|_H d\gamma, \end{aligned}$$

uma vez que B satisfaz $H1$. Daí e pelo fato de que $\{u_{n-1}\}$ converge uniformemente para u em $[\tau, T]$, temos que $u_n \rightarrow y$ em $C([\tau, T]; H)$. Pela unicidade do limite, segue que $u = y$, e então, de (4.12) existe $u \in C([\tau, T]; H)$ tal que

$$\frac{du}{dt}(t) + A_H(t)u(t) = B(t, u(t))$$

q.t.p em $]\tau, T[$ e $u(\tau) = u_0$, logo u é uma solução forte de (4.8) e a existência está provada.

Agora provemos a unicidade. Suponha que u e v são soluções do problema (4.8), isto é,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + A_H(t)u(t) = B(t, u(t)), \\ u(\tau) = u_0. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt}(t) + A_H(t)v(t) = B(t, v(t)), \\ v(\tau) = u_0. \end{cases}$$

Então,

$$\frac{d}{dt}(u(t) - v(t)) + A_H(t)u(t) - A_H(t)v(t) = B(t, u(t)) - B(t, v(t)).$$

Multiplicando a equação acima por $u(t) - v(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(u(t) - v(t)), u(t) - v(t) \right\rangle_{X^*, X} &+ \langle A_H(t)u(t) - A_H(t)v(t), u(t) - v(t) \rangle_{X^*, X} = \\ &= \langle B(t, u(t)) - B(t, v(t)), u(t) - v(t) \rangle_H \end{aligned}$$

Daí e pela monotocidade de $A_H(t)$, vem:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - v(t)\|_H^2 \leq \langle B(t, u(t)) - B(t, v(t)), u(t) - v(t) \rangle_H.$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e que B satisfaz $H1$, resulta em

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - v(t)\|_H^2 &\leq \|B(t, u(t)) - B(t, v(t))\|_H \|u(t) - v(t)\|_H \\ &\leq L \|u(t) - v(t)\|_H \|u(t) - v(t)\|_H \\ &= L \|u(t) - v(t)\|_H^2. \end{aligned}$$

Integrando de τ a t , $t \in [\tau, T]$ e usando o fato de que $\frac{1}{2} \|u(\tau) - v(\tau)\|_H^2 = 0$, obtemos

$$\frac{1}{2} \|u(t) - v(t)\|_H^2 \leq + \int_{\tau}^t L \|u(s) - v(s)\|_H^2 ds,$$

para todo $t \in [\tau, T]$.

Considerando $m : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $m(t) = 2L$, para todo $t \in [\tau, T]$, $\phi : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = \|u(t) - v(t)\|_H^2$, para todo $t \in [\tau, T]$, vemos que $m \in L^1(\tau, T, \mathbb{R})$, pois

$$\int_{\tau}^T m(t) dt = \int_{\tau}^T 2L dt = 2L(T - \tau) < \infty,$$

$m \geq 0$ q.t.p em (τ, T) e ϕ é contínua. Assim, pelo lema de Gronwall-Bellmann para $a = 0$, resulta que

$$0 \leq \|u(t) - v(t)\|_H^2 \leq 0 \cdot e^{\int_{\tau}^t 2L dt} = 0 \cdot e^{2L(T-\tau)},$$

para todo $t \in [\tau, T]$. Logo, $u = v$ e o teorema está provado. \blacksquare

4.3 Estimativas da solução

Nesta seção, provaremos algumas estimativas em H e em X da solução $u(t, u_{\tau})$ de (4.8).

Teorema 4.3.1 *Seja $u(\cdot, u_{\tau}) \in C([\tau, \infty); H)$ uma solução global de (4.8). Então, existe uma constante T_1 e uma função não decrescente $B_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\|u(t, u_{\tau})\|_H \leq B_1(t), \quad (4.13)$$

para todo $t \geq T_1 + \tau$.

Demonstração: Multiplicando a equação (4.8) por $u(t)$ e usando $\langle \frac{du}{dt}(t), u(t) \rangle_H = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2$, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + \langle A_H(t)u(t), u(t) \rangle = \langle B(t, u(t)), u(t) \rangle.$$

Como $u(t) \in X$, pelo Lema 4.1.5, temos que

$$\langle A_H(t)u(t), u(t) \rangle \geq W \|u(t)\|_X^p,$$

$t \in]\tau, T[$, para algum $W > 0$. Daí, usando o fato de que B satisfaz $H1$ e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + W \|u(t)\|_X^p &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + \langle A_H(t)u(t), u(t) \rangle \\ &= \langle B(t, u(t)), u(t) \rangle \\ &= \langle B(t, u(t)) - B(t, 0) + B(t, 0), u(t) \rangle \\ &= \langle B(t, u(t)) - B(t, 0), u(t) \rangle + \langle B(t, 0), u(t) \rangle \\ &\leq \|B(t, u(t)) - B(t, 0)\|_H \|u(t)\|_H + \|B(t, 0)\|_H \|u(t)\|_H \\ &\leq L \|u(t)\|_H \|u(t)\|_H + \|B(t, 0)\|_H \|u(t)\|_H \\ &= L \|u(t)\|_H^2 + \|B(t, 0)\|_H \|u(t)\|_H. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Como a inclusão $X \subset H$ é contínua, existe $C > 0$ tal que $\|u\|_X \geq C\|u\|_H$, de onde $\|u\|_X^p \geq C_1\|u\|_H^p$, onde $C_1 = C^p > 0$. Assim, de (4.14) e da última desigualdade, resulta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + C_1 W \|u(t)\|_H^p &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + W \|u(t)\|_X^p \\ &\leq L \|u(t)\|_H^2 + \|B(t, 0)\|_H \|u(t)\|_H. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sejam $\theta := \frac{p}{2} > 1$, $\theta' := \frac{\theta}{\theta-1}$ e $\varepsilon > 0$. Note que $\theta, \theta' > 1$ e $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$ e sabemos que p e q são expoentes conjugados. Note também que

$$\frac{L}{\varepsilon}, \varepsilon \|u(t)\|_H^2, C_2(t) = \|B(t, 0)\|_H, \varepsilon \|u(t)\|_H > 0.$$

Pela Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} L \|u(t)\|_H^2 + \|B(t, 0)\|_H \|u(t)\|_H &= \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon \|u(t)\|_H^2 + \frac{C_2(t)}{\varepsilon} \varepsilon \|u(t)\|_H \\ &\leq \frac{1}{\theta'} \left(\frac{L}{\varepsilon} \right)^{\theta'} + \frac{1}{\theta} (\varepsilon \|u(t)\|_H^2)^{\theta} + \frac{1}{q} \left(\frac{C_2(t)}{\varepsilon} \right)^q + \frac{1}{p} (\varepsilon \|u(t)\|_H)^p \\ &= \frac{1}{\theta'} \left(\frac{L}{\varepsilon} \right)^{\theta'} + \frac{1}{\theta} \varepsilon^{\theta} \|u(t)\|_H^p + \frac{1}{q} \left(\frac{C_2(t)}{\varepsilon} \right)^q + \frac{1}{p} \varepsilon^p \|u(t)\|_H^p. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Escolha $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\gamma := C_1 W - \frac{1}{\theta} \varepsilon_0^{\theta} - \frac{1}{p} \varepsilon_0^p > 0.$$

Portanto, de (4.15) e (4.16), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + \gamma (\|u(t)\|_H^2)^{\frac{p}{2}} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + \left(C_1 W - \frac{1}{\theta} \varepsilon_0^{\theta} - \frac{1}{p} \varepsilon_0^p \right) (\|u(t)\|_H^2)^{\frac{p}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + C_1 W \|u(t)\|_H^p - \frac{1}{\theta} \varepsilon_0^{\theta} \|u(t)\|_H^p - \frac{1}{p} \varepsilon_0^p \|u(t)\|_H^p \\ &\leq \frac{1}{\theta'} \left(\frac{L}{\varepsilon_0} \right)^{\theta'} + \frac{1}{q} \left(\frac{C_2(t)}{\varepsilon_0} \right)^q. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Se

$$\delta(t) := \frac{2}{\theta'} \left(\frac{L}{\varepsilon_0} \right)^{\theta'} + \frac{2}{q} \left(\frac{C_2(t)}{\varepsilon_0} \right)^q, \quad \tilde{\gamma} = 2\gamma, \quad y(t) = \|u(t)\|_H^2,$$

de (4.17), vem que

$$\begin{aligned} y'(t) + \tilde{\gamma} y(t)^{\frac{p}{2}} &= \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + 2\gamma (\|u(t)\|_H^2)^{\frac{p}{2}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + 2\gamma (\|u(t)\|_H^2)^{\frac{p}{2}} \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + \gamma (\|u(t)\|_H^2)^{\frac{p}{2}} \right] \\ &\leq \frac{2}{\theta'} \left(\frac{L}{\varepsilon_0} \right)^{\theta'} + \frac{2}{q} \left(\frac{C_2(t)}{\varepsilon_0} \right)^q \\ &= \delta(t), \end{aligned}$$

para todo $t \geq \tau$. Assim, estamos nas hipóteses do Lema 2.1.5. Logo, para $t - \tau \geq 0$,

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \left(\frac{\delta(t)}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p}{2} - 1\right)(t - \tau)\right)^{-\frac{2}{p-2}} \\ &= \left(\frac{\delta(t)}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p-2}{2}\right)(t - \tau)\right)^{-\frac{2}{p-2}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Seja $T_1 > 0$ com $t - \tau \geq T_1$, tal que

$$\left[\tilde{\gamma}\left(\frac{p-2}{2}\right)T_1\right]^{-\frac{2}{p-2}} \leq 1.$$

Daí e usando (4.18), obtemos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_H^2 = y(t) &\leq \left(\frac{\delta(t)}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p-2}{2}\right)(t - \tau)\right)^{-\frac{2}{p-2}} \\ &\leq \left(\frac{\delta(t)}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\tilde{\gamma}\left(\frac{p-2}{2}\right)T_1\right)^{-\frac{2}{p-2}} \\ &\leq \left(\frac{\delta(t)}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{2}{p}} + 1, \end{aligned}$$

de onde,

$$\|u(t)\|_H \leq \left(\left(\frac{\delta(t)}{\tilde{\gamma}}\right)^{\frac{2}{p}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} := B_1(t),$$

para todo $t \geq T_1 + \tau$, onde $B_1(t)$ é não decrescente por $H3$ e o resultado segue. \blacksquare

Teorema 4.3.2 *Seja $u(\cdot, u_\tau) \in C([\tau, \infty); H)$ uma solução global de (4.8). Então, existe uma constante T_2 e uma função não decrescente $B_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\|u(t, u_\tau)\|_X \leq B_2(t),$$

para todo $t \geq T_2 + \tau$.

Demonstração: Seja $u(t, u_\tau)$ uma solução global de (4.8). Então, pelo Lema 2.4.1,

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)(u(t)) = \left\langle \partial\varphi(t)(u(t)), \frac{du}{dt}(t) \right\rangle_H.$$

Como $u(t, u_\tau)$ é solução global de (4.8) e $A_H(t)$ é o subdiferencial $\partial\varphi(t)$ de $\varphi(t)$, isto é, $A_H(t) = \partial\varphi(t)$, da equação (4.8), temos que

$$\partial\varphi(t)u(t) = B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t). \quad (4.19)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(t)(u(t)) &= \left\langle B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t), \frac{du}{dt}(t) \right\rangle_H \\
&= (-1)(-1) \left\langle B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t), \frac{du}{dt}(t) \right\rangle_H \\
&= - \left\langle B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t), -\frac{du}{dt}(t) \right\rangle_H \\
&= - \left\langle B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t), B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t) - B(t, u(t)) \right\rangle_H \\
&= - \left\langle B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t), B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t) \right\rangle_H - \\
&\quad - \left\langle B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t), -B(t, u(t)) \right\rangle_H \\
&= - \left(\left\| B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 - \left\langle B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t), B(t, u(t)) \right\rangle_H \right) \\
&= - \left\| B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 + \left\langle B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t), B(t, u(t)) \right\rangle_H.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-schwarz e a Desigualdade de Young, vem:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(t)(u(t)) &\leq - \left\| B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 + \left\| B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t) \right\|_H \|B(t, u(t))\|_H \\
&\leq - \left\| B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 + \frac{1}{2} \left\| B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 + \frac{1}{2} \|B(t, u(t))\|_H^2 \\
&= -\frac{1}{2} \left\| B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 + \frac{1}{2} \|B(t, u(t))\|_H^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)(u(t)) + \frac{1}{2} \left\| B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \|B(t, u(t))\|_H^2.$$

Como

$$\frac{1}{2} \left\| B(t, u(t)) - \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 \geq 0$$

e B satisfaz H1, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(t)(u(t)) &\leq \frac{1}{2} \|B(t, u(t))\|_H^2 \\
&= \frac{1}{2} \|B(t, u(t)) - B(t, 0) + B(t, 0)\|_H^2 \\
&\leq \frac{1}{2} (\|B(t, u(t)) - B(t, 0)\|_H + \|B(t, 0)\|_H)^2 \\
&\leq \frac{1}{2} (L \|u(t)\|_H + C(t))^2,
\end{aligned}$$

onde $C(t) = \|B(t, 0)\|_H$. Daí e pelo Teorema 4.3.1, obtemos

$$\frac{d}{dt} \varphi(t)(u(t)) \leq \frac{1}{2} (LB_1(t) + C(t))^2 = \frac{1}{2} K_1(t)^2$$

para todo $t \geq T_1 + \tau$, onde $K_1(t) = LB_1(t) + C(t)$, T_1 é uma constante e $B_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não decrescente.

Da definição de subdiferencial, temos

$$\begin{aligned} \varphi(t)(0) - \varphi(t)(u(t)) &\geq \langle \partial\varphi(t)(u(t)), 0 - u(t) \rangle_{H^*, H} \\ \Rightarrow \varphi(t)(u(t)) &\leq \langle \partial\varphi(t)(u(t)), u(t) \rangle_{H^*, H}. \end{aligned}$$

Assim, da última desigualdade, de (4.13), (4.19) e usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de que B satisfaz $H1$, vem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 + \varphi(t)(u(t)) &\leq \left\langle \frac{d}{dt} u(t), u(t) \right\rangle_H + \langle \partial\varphi(t)(u(t)), u(t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} u(t) + \partial\varphi(t)(u(t)), u(t) \right\rangle \\ &= \langle B(t, u(t)), u(t) \rangle_H \\ &= \|B(t, u(t)) - B(t, 0) + B(t, 0)\|_H \|u(t)\|_H \\ &\leq (\|B(t, u(t)) - B(t, 0)\|_H + \|B(t, 0)\|_H) \|u(t)\|_H \\ &\leq (L\|u(t)\|_H + \|B(t, 0)\|_H) \|u(t)\|_H \\ &\leq (LB_1(t) + C(t)) B_1(t) \\ &= K_1(t) B_1(t), \end{aligned} \tag{4.20}$$

para todo $t \geq T_1 + \tau$.

Fixando $r > 0$ e integrando ambos os lados de (4.20) em $(t, t+r)$ para $t \geq T_1 + \tau$, temos

$$\frac{1}{2} \|u(t+r)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 + \int_t^{t+r} \varphi(s)(u(s)) ds \leq \int_t^{t+r} K_1(s) B_1(s) ds,$$

donde

$$\begin{aligned} \int_t^{t+r} \varphi(s)(u(s)) ds &\leq \frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 + \int_t^{t+r} K_1(s) B_1(s) ds \\ &\leq \frac{1}{2} B_1(t)^2 + \int_t^{t+r} K_1(s) B_1(s) ds =: a_3(t). \end{aligned}$$

Considere $y(s) = \varphi(s)(u(s))$, $g = 0$ e $h(s) = \frac{1}{2} K_1(s)^2$. Então,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+r} g(s) ds &= 0 =: a_1(t), \\ \int_t^{t+r} h(s) ds &= \int_t^{t+r} \frac{1}{2} K_1(s)^2 ds =: a_2(t), \\ \int_t^{t+r} y(s) ds &= \int_t^{t+r} \varphi(s)(u(s)) ds \leq a_3(t). \end{aligned}$$

Note que y, g, h são funções positivas, com

$$\dot{y}(t) = \left\langle \partial\varphi(t)(u(t)), \frac{d}{dt} u(t) \right\rangle,$$

\dot{y} , y , g e h localmente integráveis, tais que

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t)(u(t)) \leq \frac{1}{2}K_1(t)^2 = h(t) = 0 \cdot \varphi(t)(u(t)) + h(t) = g(t)y(t) + h(t),$$

para todo $t \geq T_1 + \tau$, com $r > 0$ fixo.

Note que estamos nas hipóteses do Lema Uniforme de Gronwall. Logo,

$$y(t+r) \leq \left(\frac{a_3(t)}{r} + a_2(t) \right) e^{a_1(t)} = \left(\frac{a_3(t)}{r} + a_2(t) \right) e^0 =: \tilde{\gamma}_1(t) \quad (4.21)$$

para todo $t \geq T_1 + \tau$.

Agora, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \|u(\ell)\|_X^p &= \frac{1}{p} (\|\nabla u(\ell)\|_p^p + \|u(\ell)\|_p^p) \\ &\leq C \frac{1}{p} \left[\int_{\Omega} D(\ell, x) |\nabla u(\ell)|^p dx + \int_{\Omega} |u(\ell)|^p dx \right]. \end{aligned}$$

Como $u(\ell) \in X = W^{1,p}(\Omega)$, de (4.4), temos que

$$\frac{1}{p} \left[\int_{\Omega} D(\ell, x) |\nabla u(\ell)|^p dx + \int_{\Omega} |u(\ell)|^p dx \right] = \varphi(\ell)(u(\ell)).$$

Assim,

$$\frac{1}{p} \|u(\ell)\|_X^p \leq C \varphi(\ell)(u(\ell)) = C y(\ell).$$

De (4.21), temos que $y(\ell) = y(\ell - r + r) \leq \tilde{\gamma}_1(\ell - r)$, para todo $\ell - r \geq T_1 + \tau$, isto é, $y(\ell) \leq \tilde{\gamma}_1(\ell - r)$, para todo $\ell \geq T_1 + \tau + r$. Logo,

$$\frac{1}{p} \|u(\ell)\|_X^p \leq C \tilde{\gamma}_1(\ell - r), \quad (4.22)$$

para todo $\ell \geq T_1 + \tau + r$.

Para $B_2(t) := (pC\tilde{\gamma}_1(t))^{\frac{1}{p}}$ e $T_2 := T_1 + r$, de (4.22), resulta que

$$\|u(t)\|_X \leq (pC\tilde{\gamma}_1(t))^{\frac{1}{p}} = B_2(t),$$

para todo $t \geq T_2 + \tau$, onde $B_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é não decrescente e o teorema está provado. \blacksquare

4.4 Semicontinuidade superior de atratores pullback

Nessa seção provaremos que o processo de evolução associado com o problema (4.8) tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}^\lambda(t) : t \in \mathbb{R}\}$ e que a família de atratores pullback é semicontínua superiormente com respeito aos parâmetros de difusão D_λ .

Seja $u(t)$ uma solução global do problema (4.8). Defina $U(t, \tau) : H \rightarrow H$ por

$$U(t, \tau)u_0 = u(t, \tau, u_0), \quad u_0 \in H, t \geq \tau \in \mathbb{R}. \quad (4.23)$$

Note que $U(t, \tau)$ está bem definido, pois dado $u_0 \in H$, temos $U(t, \tau)u_0 = u(t, \tau, u_0) \in H$.

Afirmção 4.4.1 (4.23) define um processo de evolução em H .

De fato, $U(t, t)u_0 = u(t, t, u_0) = u_0$, para todo $u_0 \in H$ e $t \in \mathbb{R}$, isto é, $U(t, t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_0 \in H$ e $u_0 = U(s, \tau)w_0$, com $t \geq s \geq \tau$, temos que $U(t, \tau)w_0$ e $U(t, s)U(s, \tau)w_0$ são soluções de (4.8) com $u(s) = u_0$, pois

$$U(t, \tau)w_0 = u(t, \tau, w_0) \text{ e } U(t, s)U(s, \tau)w_0 = U(t, s)u_0 = u(t, s, u_0).$$

Assim, pela unicidade de solução do problema (4.8), temos que $U(t, \tau)w_0 = U(t, s)U(s, \tau)w_0$, $w_0 \in H$, isto é, $U(t, \tau) = U(t, s)U(s, \tau)$, para todo $t \geq s \geq \tau$. Além disso,

$$\{(t, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t \geq \tau\} \times H \ni (t, \tau, x) \mapsto U(t, \tau)x \in H$$

é contínua, uma vez que $U(t, \tau)x$, $x \in H$, $t \geq \tau$ é solução de (4.8), e a afirmação segue.

Dizemos que o processo $\{U(t, \tau) : H \rightarrow H, t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ definido como em (4.23) é o processo de evolução associado ao problema (4.8).

O teorema a seguir, garante a existência de um atrator pullback para o processo de evolução associado ao problema (4.8).

Teorema 4.4.1 O processo de evolução associado com o problema (4.8) tem um atrator pullback.

Demonstração: Pelo Teorema 3.2.4, é suficiente provar que existe uma família $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos compactos de H que atrai pullback subconjuntos limitados de H no instante t .

Seja $\{U(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ o processo associado ao problema (4.8) e considere a família de conjuntos $K(t) = \overline{\mathcal{B}_X(0, B_2(t))^H}$ de H , onde $B_2(t)$ é a função dada no Teorema 4.3.2, do qual $\|u(t, u_\tau)\|_X \leq B_2(t)$, para todo $t \geq T_2 + \tau$ e $u(\cdot, u_\tau)$ é a solução global de (4.8).

Observe que cada $K(t)$ é compacto em H , pois $\mathcal{B}_X(0, B_2(t))$ é limitado em X e $X \subset H$ compactamente.

Afirmção 4.4.2 $K(t)$ atrai pullback conjuntos limitados de H no instante t .

De fato, se $B \subset H$ é limitado e $u_0 \in B$, então pelo Teorema 4.3.2,

$$U(t, \tau)u_0 = u(t, \tau, u_0) \in \mathcal{B}_X(0, B_2(t))$$

para $\tau \leq t - T_2$. Assim

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}_H(U(t, \tau)B, K(t)) = 0$$

e da Definição 3.1.4, a afirmação segue. Logo, $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família de conjuntos compactos de H que atrai subconjuntos limitados de H no instante t , como queríamos mostrar. ■

Considere a família de funções $D_\lambda \in L^\infty([\tau, T] \times \Omega)$ com $0 < \beta \leq D_\lambda(t, x) \leq M$ em $[\tau, T] \times \Omega$, $\lambda \in [0, \infty)$, $D_\lambda \rightarrow D_{\lambda_1}$ em $L^\infty([\tau, T] \times \Omega)$ quando $\lambda \rightarrow \lambda_1$. Além disso, consideremos a família de operadores $A_\lambda(t) : X \rightarrow X^*$ definida por

$$A_\lambda(t)u(v) := \int_\Omega D_\lambda(t, x) |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_\Omega |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx. \quad (4.24)$$

Vamos considerar $B : [\tau, T] \times H \rightarrow H$ satisfazendo H1 – H3 e usaremos $A_\lambda(t) = (A_\lambda)_H(t)$.

Utilizando os Teoremas 4.2.1 e 4.4.1, temos a existência de uma única solução (forte) u_λ do problema (4.1) que define um processo de evolução $\{U_\lambda(t, \tau) : H \rightarrow H, t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ no espaço H e este processo tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}^\lambda(t) : t \in \mathbb{R}\} =: \mathcal{A}^\lambda$.

Observação 4.4.1 *Seja u_λ uma solução do problema (4.1). Pelos Teoremas 4.3.1 e 4.3.2, temos, respectivamente, $\|u_\lambda(t)\|_H \leq B_1(t)$, para todo $t \geq T_1 + \tau$, $\lambda \in [0, \infty)$ e $\|u_\lambda(t)\|_X \leq B_2(t)$ para todo $t \geq T_2 + \tau$, $\lambda \in [0, \infty)$. Como consequência,*

$$\overline{\bigcup_{\lambda \in [0, \infty)} \mathcal{A}^\lambda(\tau)}^H$$

é um subconjunto compacto de H , para cada $\tau \in \mathbb{R}$, devido a caracterização do atrator dada no Teorema 3.2.4.

A seguir, damos significado à semicontinuidade superior de uma família de atratores pull-back.

Definição 4.4.1 *Diremos que $\{\mathcal{A}^\lambda(t) : t \in \mathbb{R}\}$, $\lambda \in [0, \infty)$ é semicontínua superiormente em λ_1 , se para cada $t \in \mathbb{R}$,*

$$\text{dist} \left(\mathcal{A}^\lambda(t), \mathcal{A}^{\lambda_1}(t) \right) \rightarrow 0$$

quando $\lambda \rightarrow \lambda_1$.

O teorema a seguir, prova a continuidade do fluxo. Esse resultado é fundamental para a prova da semicontinuidade superior dos atratores pullback.

Teorema 4.4.2 *Seja $\{U_\lambda(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ o processo de evolução gerado pelo problema (4.1). Se $\{u_{0\lambda} : \lambda \in [0, \infty)\}$ é um conjunto limitado em X e $u_{0\lambda} \rightarrow u_{0\lambda_1}$ em H quando $\lambda \rightarrow \lambda_1$, então $U_\lambda(t, \tau)u_{0\lambda} \rightarrow U_{\lambda_1}(t, \tau)u_{0\lambda_1}$ em H quando $\lambda \rightarrow \lambda_1$, uniformemente para t em subconjuntos compactos de \mathbb{R} .*

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)) + A_\lambda(t)u_\lambda(t) - A_{\lambda_1}(t)u_{\lambda_1}(t) &= \left(\frac{d}{dt}u_\lambda(t) + A_\lambda(t)u_\lambda(t) \right) - \\ &- \left(\frac{d}{dt}u_{\lambda_1}(t) + A_{\lambda_1}(t)u_{\lambda_1}(t) \right). \end{aligned}$$

Usando a equação (4.8) e $A_\lambda(t) = (A_\lambda)_H(t)$, temos

$$\frac{d}{dt} (u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)) + A_\lambda(t)u_\lambda(t) - A_{\lambda_1}(t)u_{\lambda_1}(t) = B(t, u_\lambda(t)) - B(t, u_{\lambda_1}(t)),$$

q.t.p $t \in [\tau, T]$. Multiplicando a última equação por $u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)$ e usando o fato de que B satisfaz H_1 e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)), u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t) \right\rangle_H + \langle A_\lambda(t)u_\lambda(t) - A_{\lambda_1}(t)u_{\lambda_1}(t), u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t) \rangle_H &= \\ = \langle B(t, u_\lambda(t)) - B(t, u_{\lambda_1}(t)), u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t) \rangle_H & \\ \leq \|B(t, u_\lambda(t)) - B(t, u_{\lambda_1}(t))\|_H \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H & \\ \leq L \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H & \\ = L \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2. & \end{aligned}$$

(4.25)

Por outro lado, usando (4.24) temos

$$\begin{aligned}
& \langle A_\lambda(t)u_\lambda(t) - A_{\lambda_1}(t)u_{\lambda_1}(t), u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t) \rangle_{X^*, X} = \\
& = A_\lambda(t)u_\lambda(t) (u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)) - A_{\lambda_1}(t)u_{\lambda_1}(t) (u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)) = \\
& = \int_{\Omega} D_\lambda |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1}) dx + \int_{\Omega} |u_\lambda|^{p-2} u_\lambda (u_\lambda - u_{\lambda_1}) dx - \\
& - \int_{\Omega} D_{\lambda_1} |\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1} (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1}) dx - \int_{\Omega} |u_{\lambda_1}|^{p-2} u_{\lambda_1} (u_\lambda - u_{\lambda_1}) dx \\
& = \int_{\Omega} (D_\lambda |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda - D_{\lambda_1} |\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}) (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1}) dx + \\
& + \int_{\Omega} (|u_\lambda|^{p-2} u_\lambda - |u_{\lambda_1}|^{p-2} u_{\lambda_1}) (u_\lambda - u_{\lambda_1}) dx \\
& = \int_{\Omega} (D_\lambda |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda - D_{\lambda_1} |\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}) (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1}) dx + \\
& + \int_{\Omega} (D_\lambda - D_{\lambda_1}) (|\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}) (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1}) dx - \\
& - \int_{\Omega} (D_\lambda - D_{\lambda_1}) (|\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}) (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1}) dx + \\
& + \int_{\Omega} (|u_\lambda|^{p-2} u_\lambda - |u_{\lambda_1}|^{p-2} u_{\lambda_1}) (u_\lambda - u_{\lambda_1}) dx \\
& = \int_{\Omega} (|u_\lambda|^{p-2} u_\lambda - |u_{\lambda_1}|^{p-2} u_{\lambda_1}) (u_\lambda - u_{\lambda_1}) dx + \\
& + \int_{\Omega} (D_\lambda - D_{\lambda_1}) (|\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}) (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1}) dx + \\
& + \int_{\Omega} [(D_\lambda |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda - D_{\lambda_1} |\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}) - \\
& - (D_\lambda - D_{\lambda_1}) (|\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1})] (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1}) dx \\
& = \int_{\Omega} (|u_\lambda|^{p-2} u_\lambda - |u_{\lambda_1}|^{p-2} u_{\lambda_1}) (u_\lambda - u_{\lambda_1}) dx + \\
& + \int_{\Omega} (D_\lambda - D_{\lambda_1}) (|\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}) (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1}) dx + \\
& + \int_{\Omega} (D_\lambda |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda - D_{\lambda_1} |\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1} - D_\lambda |\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1} + \\
& + D_{\lambda_1} |\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}) (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1}) dx \\
& = \int_{\Omega} (|u_\lambda|^{p-2} u_\lambda - |u_{\lambda_1}|^{p-2} u_{\lambda_1}) (u_\lambda - u_{\lambda_1}) dx + \\
& + \int_{\Omega} D_\lambda (|\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda - |\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}) dx + \\
& + \int_{\Omega} (D_\lambda - D_{\lambda_1}) (|\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}) (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1}) dx \geq \\
& \geq \int_{\Omega} (|u_\lambda|^{p-2} u_\lambda - |u_{\lambda_1}|^{p-2} u_{\lambda_1}) (u_\lambda - u_{\lambda_1}) dx + \\
& + \beta \int_{\Omega} (|\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda - |\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}) (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1}) dx + \\
& + \int_{\Omega} (D_\lambda - D_{\lambda_1}) (|\nabla u_{\lambda_1}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}) (\nabla u_\lambda - \nabla u_{\lambda_1}) dx.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Tartar, existem constantes $C_1, C_2 \geq 0$, ambas independentes de λ , tal

que

$$\begin{aligned}
& \langle A_\lambda(t)u_\lambda(t) - A_{\lambda_1}(t)u_{\lambda_1}(t), u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t) \rangle_{X^*, X} \geq \\
& \geq C_2 \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_p^p + \beta C_1 \|\nabla u_\lambda(t) - \nabla u_{\lambda_1}(t)\|_p^p + \\
& + \int_\Omega (D_\lambda(t, x) - D_{\lambda_1}(t, x)) (|\nabla u_{\lambda_1}(t)|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}(t)) (\nabla u_\lambda(t) - \nabla u_{\lambda_1}(t)) dx.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Assim, de (4.25) e (4.26), obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 + \beta C_1 \|\nabla u_\lambda(t) - \nabla u_{\lambda_1}(t)\|_p^p + C_2 \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_p^p + \\
& + \int_\Omega (D_\lambda(t, x) - D_{\lambda_1}(t, x)) (|\nabla u_{\lambda_1}(t)|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}(t)) (\nabla u_\lambda(t) - \nabla u_{\lambda_1}(t)) dx \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 + \langle A_\lambda(t)u_\lambda(t) - A_{\lambda_1}(t)u_{\lambda_1}(t), u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t) \rangle_{X^*, X} \\
& \leq L \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 + \\
& + \int_\Omega (D_\lambda(t, x) - D_{\lambda_1}(t, x)) (|\nabla u_{\lambda_1}(t)|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}(t)) (\nabla u_\lambda(t) - \nabla u_{\lambda_1}(t)) dx \\
& \leq L \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2.
\end{aligned}$$

Logo, usando a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 \leq L \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 - \\
& - \int_\Omega (D_\lambda(t, x) - D_{\lambda_1}(t, x)) (|\nabla u_{\lambda_1}(t)|^{p-2} \nabla u_{\lambda_1}(t)) (\nabla u_\lambda(t) - \nabla u_{\lambda_1}(t)) dx \\
& \leq L \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 + \\
& + \sup_{\text{ess}_{x \in \Omega}} |D_\lambda(t, x) - D_{\lambda_1}(t, x)| \int_\Omega |\nabla u_{\lambda_1}(t)|^{p-2} |\nabla u_{\lambda_1}(t)| |\nabla u_\lambda(t) - \nabla u_{\lambda_1}(t)| dx \leq \\
& \leq \|D_\lambda(t, \cdot) - D_{\lambda_1}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u_{\lambda_1}(t)|^{p-2} |\nabla u_{\lambda_1}(t)| (|\nabla u_\lambda(t)| + |\nabla u_{\lambda_1}(t)|) dx + \\
& + L \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 \\
& = \|D_\lambda(t, \cdot) - D_{\lambda_1}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \left[\int_\Omega |\nabla u_{\lambda_1}(t)|^{p-1} |\nabla u_\lambda(t)| dx + \int_\Omega |\nabla u_{\lambda_1}(t)|^p dx \right] + \\
& + L \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 \\
& \leq L \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 + \|D_\lambda - D_{\lambda_1}\|_{L^\infty([\tau, T] \times \Omega)} (\|\nabla u_{\lambda_1}\|_p^{p-1} \|\nabla u_\lambda\|_p + \|\nabla u_{\lambda_1}\|_p^p)
\end{aligned}$$

q.t.p $t \in (\tau, T)$.

Por H3, a função $B_2(t)$ dada no Teorema 4.3.2 é limitada em subconjuntos compactos de \mathbb{R} , do qual temos $\|u_\lambda(t)\|_X \leq B_2(t)$, para todo $t \geq T_2 + \tau$. Como

$$\|u_\lambda(t)\|_X = \|u_\lambda(t)\|_p + \|\nabla u_\lambda(t)\|_p,$$

segue que $\|u_\lambda(t)\|_p, \|\nabla u_\lambda(t)\|_p < \infty$. Portanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 \leq L \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 + M \|D_\lambda - D_{\lambda_1}\|_{L^\infty([\tau, T] \times \Omega)}$$

q.t.p $t \in (\tau, T)$ e $\lambda \in [0, \infty)$, onde $M > 0$ é uma constante. Integrando a última desigualdade de τ a t , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 &\leq \frac{1}{2} \|u_\lambda(\tau) - u_{\lambda_1}(\tau)\|_H^2 + \int_\tau^t L \|u_\lambda(s) - u_{\lambda_1}(s)\|_H^2 ds + \\ &+ M \int_\tau^t \|D_\lambda - D_{\lambda_1}\|_{L^\infty([\tau, T] \times \Omega)} ds. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 &\leq \|u_{0\lambda} - u_{0\lambda_1}\|_H^2 + 2M(t - \tau) \|D_\lambda - D_{\lambda_1}\|_{L^\infty([\tau, T] \times \Omega)} + \\ &+ \int_\tau^t 2L \|u_\lambda(s) - u_{\lambda_1}(s)\|_H^2 ds. \end{aligned}$$

Do fato de que $t - \tau \leq t \leq T$, resulta que

$$\begin{aligned} \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 &\leq \|u_{0\lambda} - u_{0\lambda_1}\|_H^2 + 2MT \|D_\lambda - D_{\lambda_1}\|_{L^\infty([\tau, T] \times \Omega)} + \\ &+ \int_\tau^t 2L \|u_\lambda(s) - u_{\lambda_1}(s)\|_H^2 ds. \end{aligned}$$

Note que $\phi : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2$, para todo $t \in [\tau, T]$ é contínua,

$$a := \|u_{0\lambda} - u_{0\lambda_1}\|_H^2 + 2MT \|D_\lambda - D_{\lambda_1}\|_{L^\infty([\tau, T] \times \Omega)} \geq 0$$

e $m : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $m(t) = 2L$, para todo $t \in [\tau, T]$ é tal que $m \in L^1(\tau, T, \mathbb{R})$ e $m \geq 0$ q.t.p em (τ, T) . Pela Desigualdade de Gronwall-Bellman, segue que

$$\begin{aligned} \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_1}(t)\|_H^2 &\leq \left(\|u_{0\lambda} - u_{0\lambda_1}\|_H^2 + 2MT \|D_\lambda - D_{\lambda_1}\|_{L^\infty([\tau, T] \times \Omega)} \right) e^{\int_\tau^t 2L ds} \\ &= \left(\|u_{0\lambda} - u_{0\lambda_1}\|_H^2 + 2MT \|D_\lambda - D_{\lambda_1}\|_{L^\infty([\tau, T] \times \Omega)} \right) e^{2L(t-\tau)} \\ &\leq \left(\|u_{0\lambda} - u_{0\lambda_1}\|_H^2 + \|D_\lambda - D_{\lambda_1}\|_{L^\infty([\tau, T] \times \Omega)} \right) \tilde{M} \end{aligned}$$

em subconjuntos compactos de \mathbb{R} , com $\tilde{M} = \tilde{M}(M, T)$. Como $u_{0\lambda} \rightarrow u_{0\lambda_1}$ em H e $D_\lambda \rightarrow D_{\lambda_1}$ em $L^\infty([\tau, T] \times \Omega)$ quando $\lambda \rightarrow \lambda_1$, segue que

$$u_\lambda(t) \rightarrow u_{\lambda_1}(t)$$

em H quando $\lambda \rightarrow \lambda_1$ uniformemente para t em subconjuntos compactos de \mathbb{R} , ou seja,

$$U_\lambda(t, \tau)u_{0\lambda} \rightarrow U_{\lambda_1}(t, \tau)u_{0\lambda_1}$$

em H quando $\lambda \rightarrow \lambda_1$ uniformemente para t em compactos de \mathbb{R} e o teorema está provado. ■

Teorema 4.4.3 A família de atratores pullback $\{\mathcal{A}^\lambda(t) : t \in \mathbb{R}\}$, $\lambda \in [0, \infty)$ é semicontínua superiormente em λ_1 .

Demonstração: Provemos que para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\text{dist} \left(\mathcal{A}^\lambda(t), \mathcal{A}^{\lambda_1}(t) \right) \rightarrow 0$$

quando $\lambda \rightarrow \lambda_1$.

Como $\mathcal{A}^{\lambda_1} := \{\mathcal{A}^{\lambda_1}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um atrator pullback para o processo de evolução $\{U_{\lambda_1}(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ em H , tem-se que $\mathcal{A}^{\lambda_1}(t)$ atrai pullback todos os subconjuntos limitados de H no instante t , para cada $t \in \mathbb{R}$. Seja $\tau \in \mathbb{R}$ tal que

$$\text{dist}_H \left(U_{\lambda_1}(t, \tau)B(\tau), \mathcal{A}^{\lambda_1}(t) \right) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.27)$$

onde $B(\tau)$ é um conjunto limitado em H e $\bigcup_{\lambda \in [0, \infty)} \mathcal{A}^\lambda(\tau) \subset B(\tau)$.

Da invariância de $\mathcal{A}^\lambda := \{\mathcal{A}^\lambda(t) : t \in \mathbb{R}\}$, temos $U_\lambda(t, \tau)\mathcal{A}^\lambda(\tau) = \mathcal{A}^\lambda(t)$ para cada $t \geq \tau$. Pelo teorema anterior, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que para todo $|\lambda - \lambda_1| < \delta$, tem-se

$$\sup_{\psi_\lambda \in \mathcal{A}^\lambda(\tau)} \|U_\lambda(t, \tau)\psi_\lambda - U_{\lambda_1}(t, \tau)\psi_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{dist}_H \left(\mathcal{A}^\lambda(t), \mathcal{A}^{\lambda_1}(t) \right) &= \text{dist}_H \left(U_\lambda(t, \tau)\mathcal{A}^\lambda(\tau), \mathcal{A}^{\lambda_1}(t) \right) \\ &= \sup_{\psi_\lambda \in \mathcal{A}^\lambda(\tau)} \text{dist}_H \left(U_\lambda(t, \tau)\psi_\lambda, \mathcal{A}^{\lambda_1}(t) \right) \\ &\leq \sup_{\psi_\lambda \in \mathcal{A}^\lambda(\tau)} \left\{ \text{dist}_H \left(U_\lambda(t, \tau)\psi_\lambda, U_{\lambda_1}(t, \tau)\psi_\lambda \right) + \right. \\ &\quad \left. + \text{dist}_H \left(U_{\lambda_1}(t, \tau)\psi_\lambda, \mathcal{A}^{\lambda_1}(t) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Como $\psi_\lambda \in \mathcal{A}^\lambda(\tau) \subset \bigcup_{\lambda \in [0, \infty)} \mathcal{A}^\lambda(\tau) \subset B(\tau)$, de (4.27) resulta que

$$\text{dist}_H \left(U_{\lambda_1}(t, \tau)\psi_\lambda, \mathcal{A}^{\lambda_1}(t) \right) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo, para todo $|\lambda - \lambda_1| < \delta$,

$$\text{dist} \left(\mathcal{A}^\lambda(t), \mathcal{A}^{\lambda_1}(t) \right) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

isto é,

$$\text{dist} \left(\mathcal{A}^\lambda(t), \mathcal{A}^{\lambda_1}(t) \right) \rightarrow 0$$

quando $\lambda \rightarrow \lambda_1$ e o resultado segue. ■

Bibliografia

- [1] Caraballo T., Carvalho A.N., L. Langa J.A., Rivero F., “*Existence of pullback attractors for pullback asymptotically compact processes*”, *Nonlinear Analysis*, n.72, p.1967-1976, 2010.
- [2] Sinsem J., N. Nascimento M.J.D., Sinsem M.S., “*Existence and upper semicontinuity of pullback attractors for non-autonomous p -Laplacian parabolic problems*”. *J. Math. Anal. Appl.*, n.413, p.685-699, 2014.
- [3] Gasinski., L., Papageorgiou, N.S., *Nonlinear Analysis - Series in Mathematical Analysis and Applications*, Taylor & Francis Group, Vol. 9, 2006.
- [4] D. Cheban, P.E. Kloeden, B. Schmalfuß, “*The relationship between pullback, forwards and global attractors of nonautonomous dynamical systems*”, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, n.2, p.125-144, 2002.
- [5] Pereira, Ana Claudia. *Sistemas de Inclusões Diferenciais Governadas pelo p -Laplaciano*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de São Carlos, 2004.
- [6] Capelato, Érika. *Atrator no Sentido Pullback e Trajetórias Completas Extremas para Problemas Governados pelo p -Laplaciano*. Tese de doutorado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de São Carlos, 2011.
- [7] V. Barbu, *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*, New York: Springer, 2010.
- [8] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1970.
- [9] Raminelli, Stephanie Akemi. *Atratores globais para ações de semigrupos*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 2013.
- [10] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space*, Noordhoff International, 1976.
- [11] Lima E.L., *Espaços métricos*, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2011.
- [12] C. Alexandre N., L. José A., R. James C., *Attractors for infinite - dimensional non - autonomous dynamical systems*. New York: Springer, 2013.
- [13] H. Brézis, *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, Amsterdam/New York: Math Studies, vol. 5, North-Holland, 1973.

- [14] A.R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1978.
- [15] C.R. Oliveira, *Introdução a análise funcional*, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, Impa, 2010.
- [16] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*, II/A, New York: Linear Monotone Operators, Springer-Verlag, 1990.
- [17] R.E. Showalter, *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Differential Equations*, American Mathematical Society, 1997.
- [18] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, 1988.
- [19] J.K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative System*, American Mathematical Society, 1989.
- [20] O. Ladyzhenskaya, *Attractors for semigroups and evolution equations*, in: *Lezioni Lincee (Lincei Lectures)*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [21] J.C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical System. An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors*, in: *Cambridge Text in Applied Mathematics*, 2001.
- [22] G. Raugel, “*Global Attractor in Partial Differential Equations*”, preprint.