ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca
MAUÁ
Itajubá

ESTUDO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO MISTA NO INTERIOR DE TUBOS HORIZONTAIS CONCÊNTRICOS E EXCÊNTRICOS

MÁRCIA MENDES RIBEIRO

ORIENTADOR :
PROF. DR. GENÉSIO JOSÉ MENON

ITAJUBÁ - MG
1992

CLASS. 536.2;532.537;519.6(043.2)
CUTT. R484e
TOMBO 748

EFEI / BIBLIOTECA

ESTE LIVRO DEVE SER DEVOLVIDO NA ÚLTIMA DATA CARIMBADA.

29/09/94	15-12-95	27.07.98
19.10.94	08/02/95	11-08-98
03-11-94	04.03.97	27.8.98
21-11-94	24/03/97	12-9-98
05.12-94	29.4.97	26-9-98
22/12/94	26.4.97	10-10-98
08/09/95	29-5-97	20-10-98
29/02/95	10.6.97	04.11.98
08/03/95	24.6.97	24.11.98
25/3/95	02.7.97	05.12.98
03/04/95	22/7/97	18.12.98
01/05/95	07/08/97	12-01-99
19.6.95	25/08/97	24/02/99
05/07/95	04/09/97	06.06.00
19/7/95	25-9-97	20/06/00
04/08/95	13/10/97	05/07/00
18/8/95	29/10/97	20/07/00
18/09/95	03-11-97	
6/10/95	05.12.97	
25/10/95	26-12-97	
9-11-95	19/01/98	
28.11.95		

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Genésio José Menon, pela compreensão e dedicação prestadas no decorrer deste trabalho.

Aos professores Américo Tetuo Miyazima, Paulo Shigueme Ide e Sebastião Fernandes pelo apoio prestado na confecção desta dissertação.

A todos cuja amizade foi o maior incentivo para a realização deste trabalho, em especial aos amigos da pós-graduação.

A todos os professores e funcionários da EFEI que, direta ou indiretamente, contribuiram para a realização do presente trabalho.

A Messias Tadeu Salgado, pela confecção dos desenhos.

A Matilde B. Pereira pela excelente datilografia nas figuras.

À minha mãe
Georgina

RESUMO

No presente trabalho analisa-se a convecção mista laminar entre tubos horizontais concêntricos e excêntricos. Considera-se dois tipos de condições de contorno : no caso 1 o tubo externo é isolado e o tubo interno tem fluxo de calor uniforme axialmente e temperatura da parede uniforme circunferencialmente e para o caso 2, as condições de contorno são inversas. Foi utilizado o método de elementos finitos para resolver as equações de conservação na forma adimensional. O número de Nusselt médio Nu e o fator de atrito f, são calculados em função de diversos parâmetros geométricos e térmicos. Os parâmetros geométricos envolvidos são: razão de raios(RR) 3,0 e 5,0 , ângulo de inclinação(α) 0^0 e 30^0, excentricidade adimensional(E) 0, 0,25 , 0,50 , -0,25 e -0,50. Os parâmetros térmicos usados são: número de Prandtl(Pr) 0,70 , número de Rayleigh(Ra) variando de 0 a 3.10^5. Verifica-se que o escoamento secundário originado pela convecção mista pode alterar bastante os perfis de velocidade e temperatura e resultar num aumento significativo da transferência de calor.

ABSTRACT

In the present work, a mixed laminar convection between concentric and eccentric tubes is analysed. Two types of boundary conditions are considered : in case 1, the external tube is insulated and the internal one is submitted to a uniform axial heat flux, having constant temperature along the circumference. In case 2, the boundary conditions are reversed. The finite element method was used to solve the conservation equations in nondimensional form. The average Nusselt number, Nu and the friction factor, f, are determined in terms of various geometrical and thermal parameters. The geometrical parameters involved in question are : radius ratio(RR) 3 and 5, the angle of inclination(α) 0° and 30°, nondimensonal eccentricity(E) 0.25, 0.50, -0.25 and -0.50. The thermal parameters are : Prandtl number(Pr) 0.70, Rayleigh number(Ra), varying from 0 to 3.10^{5}. It was verified that the secondary flow caused by the mixed convection can change substantially the velocity and temperature profiles and can cause a significant increase in heat transfer.

CONTEÚDO

PÁGINA

RESUMO ---------- i

ABSTRACT ---------- ii

CONTEÚDO ---------- iii

SIMBOLOGIA ---------- v

ÍNDICE DAS TABELAS ---------- viii

ÍNDICE DAS FIGURAS ---------- ix

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 - Generalidades ---------- 1

1.2 - Revisão da Literatura ---------- 3

1.3 - Delineamento Deste Trabalho ---------- 5

CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 - Análise Teórica ---------- 9

2.2 - Adimensionalização das Equações --------- 11

2.3 - Parâmetros da Análise ---------- 18

CAPÍTULO 3 - MÉTODO DE SOLUÇÃO

3.1 - Desenvolvimento das Equações Utilizando o Método de Elementos Finitos ---------- 21

3.2 - Forma Matricial para os Elementos em Termos da Função Corrente ---------- 22

3.3 - Forma Matricial para os Elementos em Termos de Velocidade Adimensional ---------- 26

3.4 - Forma Matricial para os Elementos em Termos de Temperatura Adimensional ---------- 29

3.5 - Forma Matricial para os Elementos em Termos da Vorticidade ---------- 33

3.6 - Algorítmo de Solução ---------- 36

CAPÍTULO 4 - RESULTADOS
4.1 - Introdução ---------- 40
4.2 - Comparação de Resultados para Geometria Retangular ---------- 40
4.3 - Comparação de Resultados para Tubos ----- 44
4.4 - Comparação de Resultados para Geometria de Cilindros Concêntricos ---------- 46
4.5 - Resultados Teóricos do Presente Trabalho - 49

CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES
5.1 - Conclusões ---------- 94
5.2 - Contribuições do Presente Trabalho ------ 95
5.3 - Recomendações para Trabalhos Futuros ---- 96

APÊNDICE A1 - NÚMEROS ADIMENSIONAIS
A1.1 - Número de Nusselt ---------- 97
A1.2 - Fator de Atrito ---------- 98

APÊNDICE A2 - O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
A2.1 - Introdução ---------- 100
A2.2 - Equações para Elementos Triangulares --- 100
A2.3 - Cálculo dos Gradientes ---------- 104

APÊNDICE A3 - MÉTODO VARIACIONAL PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL INDEPENDENTE DO TEMPO
A3.1 - Introdução ---------- 105
A3.2 - Método Variacional ---------- 105

APÊNDICE A4 - MÉTODO VARIACIONAL PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DEPENDENTE DO TEMPO
A4.1 - Introdução ---------- 109
A4.2 - Método Variacional ---------- 109
A4.3 - Matriz do Elemento $[C^e]$ ---------- 111
A4.4 - Aproximação do Termo $d\{\phi\}/d\tau$ ---------- 112

APÊNDICE A5 - FLUXOGRAMA DO PROGRAMA COMPUTACIONAL
A5.1 - Introdução ---------- 115
A5.2 - Descrição dos Blocos do Fluxograma ----- 115

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ---------- 121

SIMBOLOGIA

Caracteres Latinos

Ca	constante na equação da energia, sendo igual a 1 para o caso 1 e igual a RR para caso 2
$[C^e]$	matriz de capacitância do elemento
c_p	calor específico a pressão constante
d	diâmetro hidráulico
e	excentricidade
E	excentricidade adimensional
f	fator de atrito
g	aceleração da gravidade
Gr	número de Grashof
h	coeficiente local de transferência de calor por convecção
$\overline{h}$	coeficiente médio de transferência de calor por convecção
I	funcional
k	condutividade térmica do fluido
$[K]^e$	matriz do elemento
$[K]$	matriz global
n	direção normal à superfície
Δn	variação na direção normal à superfície
N	função de forma
Nu	número de Nusselt médio
$[N^e]$	matriz da função de forma do elemento
m	número de nós do elemento
p	pressão
P	pressão adimensional
Pr	número de Prandtl
q	fluxo de calor local por unidade de área
$\overline{q}$	fluxo de calor médio por unidade de área
Q'	fluxo de calor por unidade de comprimento
Q_ϕ	função especificada
Q_ψ	função especificada da função corrente
Q_ω	função especificada da vorticidade
Q_θ	função especificada da temperatura

Q_w	função especificada da velocidade
$\{R_\phi\}^e$	vetor força do elemento da função de campo ϕ
$\{R_\phi\}$	vetor força global da função de campo ϕ
$\{R\}^e$	vetor força do elemento
$\{R\}$	vetor força global
Ra	número de Rayleigh
Re	número de Reynolds
R_i	raio do tubo interno
R_o	raio do tubo externo
RR	razão de raios
S	superfície do contorno
S_1	superfície do tubo interno
S_2	superfície do tubo externo
T	temperatura
T_b	temperatura média
T_w	temperatura da parede
Δt	incremento de tempo
t	tempo
u	velocidade do fluido na direção x
U	velocidade adimensional do fluido na direção x
v	velocidade do fluido na direção y
V	velocidade adimensional do fluido na direção y
w	velocidade do fluido na direção z
W	velocidade adimensional do fluido na direção z
x	coordenada transversal
y	coordenada longitudinal
z	coordenada axial

Caracteres Gregos

α	ângulo de inclinação
β	coeficiente de expansão volumétrica do fluido
δ	parâmetro
Δ	área do elemento triangular
ε	número de elementos
θ	temperatura adimensional
θ_b	temperatura média adimensional do fluido

λ	parâmetro
μ	viscosidade dinâmica do fluido
ν	viscosidade cinemática do fluido
ρ	massa específica
τ	tempo adimensional
$\Delta\tau$	incremento de tempo adimensional
ψ	função corrente
ψ_o	função corrente a uma distância Δn da parede
ω	vorticidade
Ω	domínio

Índices Inferiores

b	médio
w	parede
i	ponto nodal i
j	ponto nodal j
k	ponto nodal k

Índices Superiores

e	elemento
-	médio

ÍNDICE DAS TABELAS

Tabela	Descrição	Página
3.1	Parâmetros da equação (3.1) ----------	21
4.1	Comparação de resultados para a geometria retangular da figura 4.1; Pr=0,73 ----------	43
4.2	Comparação de resultados para tubos da figura 4.2; Pr=0,7 e ReRa=0 ----------	44
4.3	Comparação de resultados para a geometria de cilindros concêntricos da figura 4.3; Pr=0,7 ----------	48
4.4	Nu_0 e $(fRe)_0$ em função da razão de raios (RR) e da excentricidade (E) para o caso 1 considerando Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ----------	49
4.5	Valores de Nu e fRe em função do número de Rayleigh para o caso 1 considerando RR=5, Pr=0,7 e $\alpha=30^0$ ----------	56
4.6	Nu_0 e $(fRe)_0$ em função da razão de raios (RR) e da excentricidade (E) para o caso 2 considerando Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ----------	74

ÍNDICE DAS FIGURAS

Figura	Descrição	Página
1.1	Geometria do caso 1 ----------	2
1.2	Geometria do caso 2 ----------	2
2.1	Geometria e condições de contorno. (a) Caso 1; (b) Caso 2 ----------	12
2.2	Parâmetros geométricos. (a) Excentricidade positiva; (b) Excentricidade negativa ----------	20
4.1	Condições de contorno da geometria retangular estudada por Cheng e Hwang [10]. (a) Geometria do problema; (b) Domínio computacional ----------	41
4.2(a)	Condições de contorno para tubo ----------	45
4.2(b)	Malhas utilizadas para escoamento em tubo, conforme a tabela 4.2 ----------	45
4.3	Condições de contorno para a geometria de cilindros concêntricos estudada por Nieckele e Patankar [22] ----------	47
4.4	Malhas típicas de elementos finitos utilizadas no presente trabalho.(a) Malha para geometria com $\alpha \neq 0^0$; (b) Malha para geometria com $\alpha = 0^0$ ---	50
4.5	Relação Nu/Nuo versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^0$ ----------	57
4.6	Relação Nu/Nuo versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$ ----------	58

4.7 Nu versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^0$ ---------- 59

4.8 Nu versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$ ---------- 60

4.9 Relação Nu/Nuo versus a excentricidade(E) para o caso 1; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ---------- 61

4.10 Nu versus a excentricidade(E) para o caso 1; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ---------- 62

4.11 Relação $fRe/(fRe)_0$ versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^0$ ---------- 63

4.12 Relação $fRe/(fRe)_0$ versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$ ---------- 64

4.13 fRe versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^0$ ---------- 65

4.14 fRe versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$ ---------- 66

4.15 Relação $fRe/(fRe)_0$ versus a excentricidade(E) para o caso 1; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ---------- 67

4.16 fRe versus a excentricidade(E) para o caso 1; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ---------- 68

4.17 Relação R versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ---------- 69

4.18 Distribuições da função corrente, temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 1, com RR=5, Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ---------- 70

4.19 Distribuições da função corrente, temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 1, com $Ra=3.10^4$, Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ------ 71

4.20 Distribuições da função corrente, temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 1, com RR=5, E=0,25 , Pr=0,7 e $\alpha=30^0$ ---------- 72

4.21 Distribuições da função corrente, temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 1, com RR=5, $Ra=3.10^4$, Pr=0,7 e $\alpha=30^0$ ---------- 73

4.22 Relação Nu/Nuo versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^0$ ---------- 78

4.23 Relação Nu/Nuo versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$ ---------- 79

4.24 Nu versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^0$ ---------- 80

4.25 Nu versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$ ---------- 81

4.26 Relação Nu/Nuo versus a excentricidade(E) para o caso 2; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ---------- 82

4.27 Nu versus a excentricidade(E) para o caso 2; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ---------- 83

4.28 Relação $fRe/(fRe)_0$ versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^0$ ---------- 84

4.29 Relação $fRe/(fRe)_0$ versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$ ---------- 85

4.30 fRe versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^0$ ---------- 86

4.31 fRe versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$ ---------- 87

4.32 Relação $fRe/(fRe)_0$ versus a excentricidade(E) para o caso 2; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ---------- 88

4.33 fRe versus a excentricidade(E) para o caso 2; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ---------- 89

4.34 Relação R versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ---------- 90

4.35 Distribuições da função corrente, temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 2, com RR=5, Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ---------- 91

4.36 Distribuições da função corrente, temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 2, com $Ra=3.10^4$, Pr=0,7 e $\alpha=0^0$ ---------- 92

4.37 Distribuições da função corrente, temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 2, com RR=5, E=0,5 , $Ra=3.10^4$ e Pr=0,7 ---------- 93

A2.1 Domínio de solução e elemento triangular com função de interpolação linear ---------- 101

A4.1 Esquema de diferença finita central para a derivada $d\phi/d\tau$ ---------- 113

A5.1 Fluxograma do programa computacional ---------- 116

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Generalidades

No escoamento de um fluido no interior de dutos horizontais, o aquecimento do fluido faz com que efeitos de empuxo criem escoamentos secundários na seção transversal. Os escoamentos secundários se superpõem ao escoamento principal que ocorre na direção axial podendo aumentar significantemente a transferência de calor. No caso de tubos anulares horizontais, o escoamento secundário pode alterar fortemente os perfis de velocidade e temperatura e resultar em aumento significante da transferência de calor.

O problema da transferência de calor convectiva mista no interior de tubos horizontais anulares é de grande interesse devido às várias aplicações tecnológicas como reatores nucleares, resfriamento de componentes eletrônicos, isolamento da fuselagem de avião, linhas de transmissão elétrica subterrâneas, trocadores de calor designados para processos químicos, indústrias alimentícias e aplicações biomédicas.

No presente trabalho estuda-se numericamente a convecção mista no interior de tubos horizontais concêntricos e excêntricos. Serão consideradas duas condições de contorno chamadas de caso 1 e caso 2, conforme figuras 1.1 e 1.2. Para o caso 1, o tubo interno tem temperatura da parede uniforme circunferencialmente e uma taxa de transferência de calor axialmente uniforme e o tubo externo é considerado adiabático. No caso 2, o tubo interno é considerado adiabático e o tubo externo tem temperatura da parede uniforme circunferencialmente e uma taxa de transferência de calor axialmente uniforme.

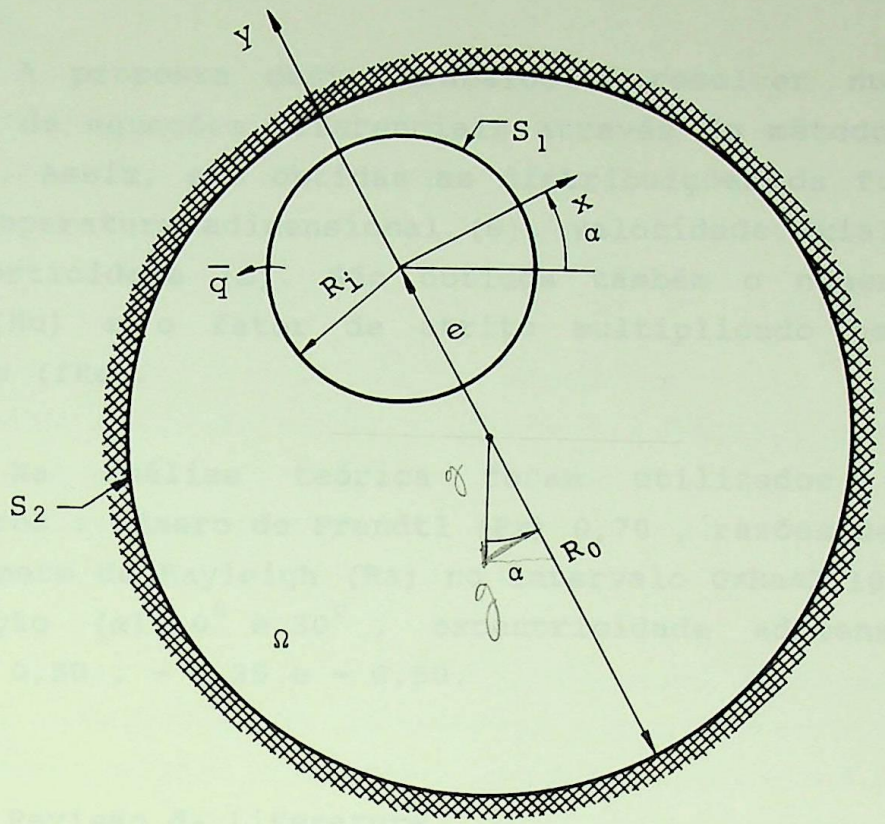


Figura 1.1 - Geometria do caso 1.

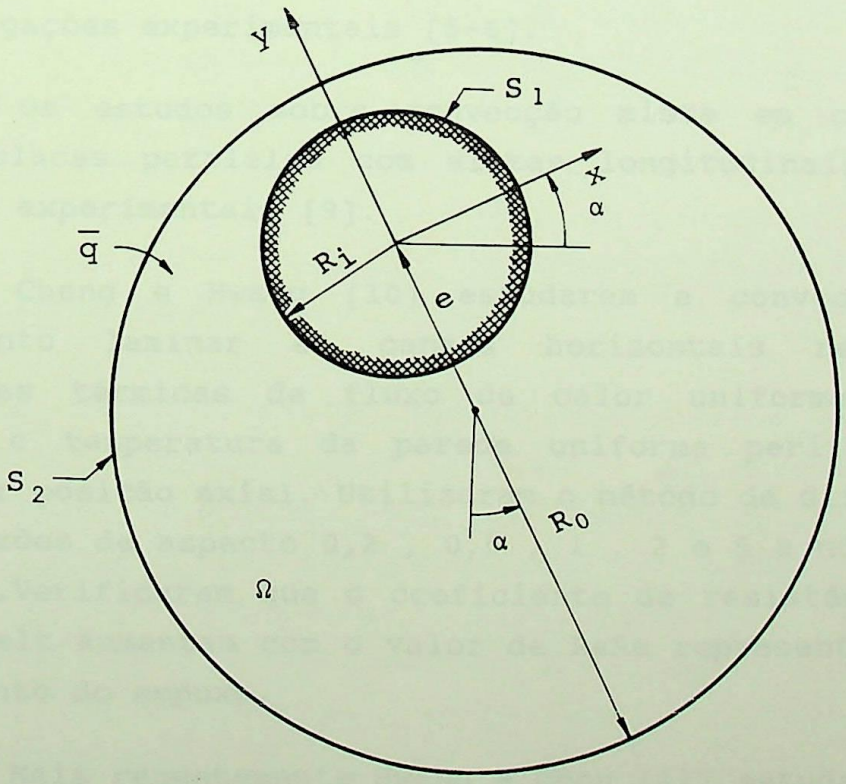


Figura 1.2 - Geometria do caso 2.

A proposta deste trabalho é resolver numericamente o sistema de equações diferenciais através do método de elementos finitos. Assim, são obtidas as distribuições da função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ), velocidade axial adimensional (W), vorticidade (ω). São obtidos também o número de Nusselt médio (Nu) e o fator de atrito multiplicado pelo número de Reynolds (fRe).

Na análise teórica foram utilizados os seguintes parâmetros : número de Prandtl (Pr) 0,70 , razões de raios (RR) 3 e 5, número de Rayleigh (Ra) no intervalo $0 \leq Ra \leq 3.10^5$, ângulo de inclinação (α) 0° e 30° , excentricidade adimensional (E) 0 , 0,25 , 0,50 , - 0,25 e - 0,50.

1.2 - Revisão da Literatura

Existem vários estudos que examinam a convecção natural entre dois tubos concêntricos e/ou excêntricos isotérmicos. Entre estes estudos incluem-se os trabalhos numéricos [1-4] e investigações experimentais [5-6].

Os estudos sobre convecção mista em canal horizontal entre placas paralelas com aletas longitudinais são numéricos [7-8] e experimentais [9].

Cheng e Hwang [10] estudaram a convecção mista para escoamento laminar em canais horizontais retangulares sob condições térmicas de fluxo de calor uniforme axialmente na parede e temperatura da parede uniforme perifericamente para qualquer posição axial. Utilizaram o método de diferenças finitas para razões de aspecto 0,2 , 0,5 , 1 , 2 e 5 e número de Prandtl Pr=0,73.Verificaram que o coeficiente de resistência e o número de Nusselt aumentam com o valor de ReRa representando os efeitos do aumento do empuxo.

Mais recentemente Hwang e Chou [11] estudaram a convecção mista em canal retangular horizontal com escoamento laminar desenvolvido hidrodinamicamente e termicamente. A análise

numérica utilizou o método de diferenças finitas e considerou a condição de contorno de fluxo de calor uniforme axialmente e perifericamente na superfície externa da parede do canal. Foi considerado também o efeito da condução de calor periférica na parede do canal.

O estudo da convecção mista em tubos horizontais com condição de fluxo de calor uniforme foi feito por [12-13] e para temperatura da parede uniforme por Ou e Cheng [14]. A condição de temperatura da parede uniforme em tubo semi-circular foi estudada por Manglik e Bergles [15].

Shannon e Depew [16] estudaram experimentalmente a convecção mista laminar em um tubo com fluxo de calor uniforme. Foram feitas várias medições locais para o cálculo do número de Nusselt, número de Reynolds, número de Prandtl e número de Grashof. O número de Reynolds variou de 120 a 2300, número de Grashof acima de $2{,}5.10^5$, número de Graetz de 1,5 a 1000.

Chen e Hsieh [17] estudaram a convecção mista em um tubo com aquecimento axial uniforme e temperatura da parede uniforme perifericamente, mantendo uma placa adiabática inserida no centro do tubo. Obtiveram resultados do número de Nusselt para número de Rayleigh (Ra) variando de 10^3 a 10^6, número de Prandtl (Pr) 0,70 e 7,0 e ângulo de inclinação da placa (δ) 0°, 45° e 90°. A análise numérica utilizou o método de volumes finitos com malha 97x44. Verificaram que o escoamento secundário aumenta a transferência de calor.

A convecção mista laminar desenvolvida em tubos anulares concêntricos com uma parede aquecida e uma parede adiabática, ou duas paredes aquecidas foi analisada experimentalmente por Hattori e Kotake [18] e numericamente por Hattori [19]. Nguyen et al. [20] estudaram a convecção mista da água entre dois cilindros isotérmicos concêntricos. Mojtabi e Caltagirone [21] estudaram a convecção mista laminar entre dois cilindros isotérmicos concêntricos para o ar.

Nieckele e Patankar [22] estudaram a convecção mista laminar em tubos horizontais concêntricos com aquecimento

uniforme axialmente e temperatura da parede uniforme circunferencialmente no tubo interno e isolado no tubo externo. Utilizaram o algorítmo SIMPLER, com malha 29x22, sendo a malha uniforme na direção θ e mais refinada próximo à parede na direção radial. Os resultados do número de Nusselt foram obtidos para razão de raios RR= 1,5 , 2 ,3 e 5. O número de Rayleigh variou de 10^4 a 10^7 e o número de Prandtl Pr= 0,70 ,5 ,10 e ∞. Foi verificado que as forças de empuxo exercem influência significante sobre a transferência de calor em tubos anulares horizontais concêntricos.

Kaviany [23] estudou a convecção mista laminar em tubos anulares horizontais concêntricos com aquecimento uniforme no tubo interno e isolado no tubo externo. A análise teórica considerou razão de raios R= 1,25 , número de Prandtl Pr= 0,70 , 7 e 70, número de Rayleigh (Ra) na faixa de 10^5 a 10^9. Foi utilizado o método de diferenças finitas com malhas uniformes 16x61. A comparação de seus resultados com os de Nieckele e Patankar [22] mostrou boa concordância. Foi observado que a estrutura do escoamento muda de uma célula (para cada lado) para duas células de convecção quando o número de Rayleigh aumenta.

Não se conhece, até o momento, qualquer trabalho que estude a convecção mista laminar desenvolvida em tubos anulares horizontais excêntricos, o que justifica o estudo apresentado neste trabalho.

1.3 - Delineamento Deste Trabalho

Será apresentada, a seguir, uma síntese dos conteúdos dos capítulos seguintes desta dissertação.

-capítulo 2 : Formulação do Problema

Neste capítulo são apresentadas as equações de conservação na forma dimensional com as condições iniciais e de contorno.

Visando reduzir o número de parâmetros envolvidos no problema as equações de conservação na forma dimensional, juntamente com as condições iniciais e de contorno, são escritas na forma adimensional em função da temperatura adimensional (θ), velocidade axial adimensional (W), vorticidade (ω) e função corrente (ψ).

São estudados dois casos :

. caso 1 : O tubo externo é isolado e o tubo interno tem fluxo de calor uniforme axialmente e temperatura da parede uniforme circunferencialmente.

. caso 2 : O tubo externo tem fluxo de calor uniforme axialmente e temperatura da parede uniforme circunferencialmente e o tubo interno é isolado.

São apresentados também as definições do número de Nusselt médio (Nu) e do fator de atrito (f), que dependem dos seguintes parâmetros:

Parâmetros Geométricos

$E=e/R_o$ (Excentricidade adimensional),

$RR=R_o/R_i$ (Razão de raios),

α (Ângulo de inclinação),

Parâmetros Térmicos

Pr (Número de Prandtl),

Ra (Número de Rayleigh).

-capítulo 3 : Método de Solução

O método de solução utilizado é o método de elementos finitos. Neste capítulo as equações de conservação adimensionais são escritas na forma matricial para o elemento e na forma global.

-capítulo 4 : Resultados

Com o objetivo de testar o programa computacional desenvolvido foram feitas comparações de resultados do número de

Nusselt e fator de atrito do presente trabalho com resultados de Cheng e Hwang [10] e Kays [25] para geometria retangular.

Foi comparado também o resultado do número de Nusselt para convecção forçada (Nu_0) com o valor apresentado por Kays [25] para escoamento de fluidos em tubos com a condição de contorno de fluxo de calor uniforme axialmente e temperatura da parede uniforme circunferencialmente.

Comparou-se ainda os resultados deste trabalho com aqueles obtidos por Nieckele e Patankar [22] para o caso de tubos horizontais concêntricos.

Finalmente são apresentados os resultados do número de Nusselt médio e do fator de atrito, para os casos 1 e 2 do presente trabalho, em função dos diversos parâmetros geométricos e térmicos. São mostradas as distribuições da função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e da velocidade adimensional axial (W).

-capítulo 5 : Conclusões

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões obtidas no trabalho, bem como as suas contribuições mais importantes.

Faz-se ainda algumas recomendações de interesse para futuros trabalhos.

-Apêndices

No apêndice A1 são mostradas as deduções do número de Nusselt e do fator de atrito.

No apêndice A2 é feita uma explanação sobre o método de elementos finitos.

Nos apêndices A3 e A4 são mostrados o método variacional para equação diferencial independente e dependente do tempo, respectivamente.

No apêndice A5 é mostrado o fluxograma do programa computacional.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 - Análise Teórica

As equações de conservação para o estudo de convecção mista em tubos horizontais excêntricos apresentados terão as seguintes considerações :

a) regime não permanente;
b) escoamento bidimensional e laminar;
c) escoamento incompressível;
d) a função dissipação viscosa foi desprezada;
e) as propriedades do fluido são constantes, exceto a densidade nos termos de empuxo;
f) desacoplamento da pressão na direção axial.

Mediante as considerações acima as equações de conservação são :

i) continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad (2.1)$$

ii) quantidade de movimento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\beta(T-T_w)\operatorname{sen}\alpha + \upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g\beta(T-T_w)\cos\alpha + \upsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \upsilon\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad (2.4)$$

iii) energia

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right). \qquad (2.5)$$

A figura 2.1 mostra a geometria dos tubos horizontais excêntricos e as condições de contorno do problema. Serão considerados dois casos. No caso 1, o tubo externo será considerado isolado, enquanto que o tubo interno tem uma temperatura da superfície uniforme e um fluxo de calor uniforme axialmente. No caso 2 as condições são inversas, isto é, o tubo interno será considerado isolado, enquanto que o tubo externo tem uma temperatura da superfície uniforme e um fluxo de calor uniforme axialmente.

As componentes de velocidade do fluido na parede u, v e w são nulas. A taxa constante de aumento da temperatura do fluido T na direção axial será relacionada à taxa média de transferência de calor por meio de um balanço de calor total, na seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_w}{dz} = \frac{dT_b}{dz} = Q'/[\ \rho c_p \bar{w}\pi(R_o^2 - R_i^2)\ ]\ , \qquad (2.6)$$

onde: $Q' = \bar{q}2\pi R_i$ para o caso 1 ,

$Q' = \bar{q}2\pi R_o$ para o caso 2 .

As condições iniciais e de contorno da presente análise são :

i) condições iniciais (para os casos 1 e 2):

para t=0 :

$$u = v = = w = 0, \quad T = T_w \ (\text{em } \Omega)\ , \qquad (2.7a)$$

ii) condições de contorno :

para t>0 :

Para o caso 1 :

$$T = T_w \qquad (\text{em } S_1), \tag{2.7b}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \qquad (\text{em } S_2), \tag{2.7c}$$

$$u = v = w = 0 \qquad (\text{em } S_1 + S_2). \tag{2.7d}$$

Para o caso 2 :

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \qquad (\text{em } S_1), \tag{2.7e}$$

$$T = T_w \qquad (\text{em } S_2), \tag{2.7f}$$

$$u = v = w = 0 \qquad (\text{em } S_1 + S_2). \tag{2.7g}$$

onde n é o vetor normal as superfícies S_1 e S_2 do domínio Ω, mostrado na figura 2.1.

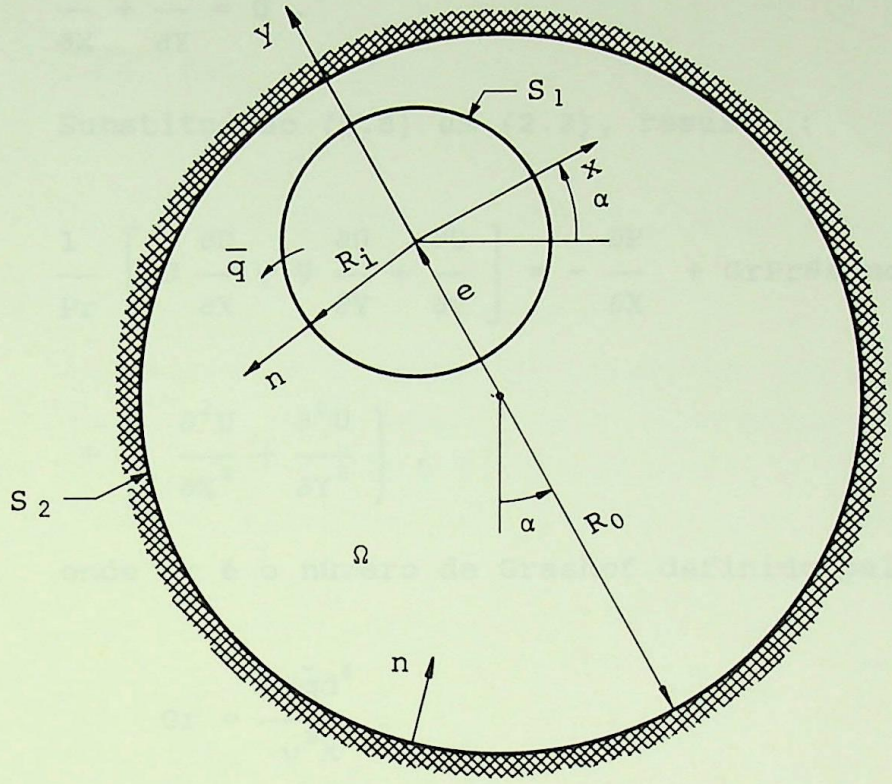
2.2 - Adimensionalização das Equações

Visando generalizar a análise teórica, são introduzidas a seguir as seguintes grandezas adimensionais :

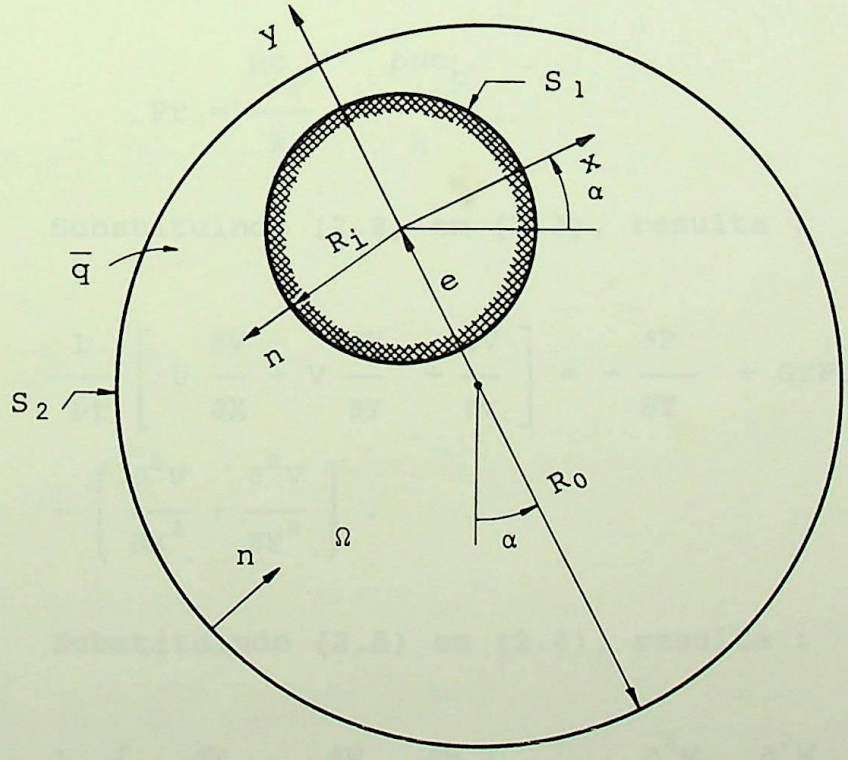
$$\tau = \frac{\alpha t}{d^2}, \quad X = \frac{x}{d}, \quad Y = \frac{y}{d}, \quad U = \frac{ud}{\alpha},$$

$$V = \frac{vd}{\alpha}, \quad W = \frac{w}{-\frac{d\bar{p}}{dz}\frac{d^2}{\mu}}, \quad P = \frac{p^* d^2}{\rho \upsilon \alpha}, \tag{2.8}$$

$$\theta = \frac{T - T_w}{\bar{q}d/k}, \quad d = 2(R_0 - R_i).$$



(a)



(b)

Figura 2.1 - Geometria e condições de contorno.
(a) caso 1; (b) caso 2.

Substituindo (2.8) em (2.1), resulta :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \ . \qquad (2.9)$$

Substituindo (2.8) em (2.2), resulta :

$$\frac{1}{Pr}\left[U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial U}{\partial \tau}\right] = -\frac{\partial P}{\partial X} + GrPr\theta sen\alpha +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) , \qquad (2.10)$$

onde Gr é o número de Grashof definido pela relação :

$$Gr = \frac{g\beta \bar{q} d^4}{\upsilon^2 k} , \qquad (2.11)$$

e Pr é o número de Prandtl definido pela relação :

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\rho \upsilon c_p}{k} . \qquad (2.12)$$

Substituindo (2.8) em (2.3), resulta :

$$\frac{1}{Pr}\left[U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\right] = -\frac{\partial P}{\partial Y} + GrPr\theta cos\alpha +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) . \qquad (2.13)$$

Substituindo (2.8) em (2.4), resulta :

$$\frac{1}{Pr}\left[U\frac{\partial W}{\partial X} + V\frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial \tau}\right] = 1 + \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} . \qquad (2.14)$$

Substituindo (2.8) em (2.5), resulta :

$$U\frac{\partial\theta}{\partial X} + V\frac{\partial\theta}{\partial Y} + \frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{4\ W\ Ca}{(RR+1)\overline{W}} = \frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}\ . \qquad (2.15)$$

Onde Ca = 1 para caso 1,
Ca = RR para caso 2.

Os valores de Ca são diferentes decorrentes da equação (2.6).

Os termos de pressão que aparecem nas equações (2.10) e (2.13) podem ser eliminados . Isto é conseguido derivando-se a equação (2.10) em relação a Y, e a equação (2.13) em relação a X.Em seguida, as equações são subtraídas, resultando :

$$\frac{1}{Pr}\left[U\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}\right) + V\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}\right) + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}\right)\right]$$

$$= Ra\cos\alpha\frac{\partial\theta}{\partial X} - Ra\,\mathrm{sen}\alpha\frac{\partial\theta}{\partial Y} + \frac{\partial^2}{\partial X^2}\left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}\right). \qquad (2.16)$$

onde Ra é o número de Rayleigh definido como :

$$Ra = Gr.Pr\ . \qquad (2.17)$$

A vorticidade ω é introduzida pela seguinte relação :

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}\ . \qquad (2.18)$$

Substituindo (2.18) em (2.16), vem :

$$\frac{1}{Pr}\left[U\frac{\partial\omega}{\partial X} + V\frac{\partial\omega}{\partial Y} + \frac{\partial\omega}{\partial\tau}\right] = Ra\left(\cos\alpha\frac{\partial\theta}{\partial X} - \mathrm{sen}\alpha\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2\omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial Y^2}\ . \qquad (2.19)$$

A função corrente ψ é introduzida pela seguinte relação :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \qquad e \qquad V = - \frac{\partial \psi}{\partial X} \, . \tag{2.20}$$

Com a definição dada por (2.20), a equação da continuidade (2.8) fica satisfeita .

Das equações (2.18) e (2.20), resulta :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = - \omega \, . \tag{2.21}$$

Das equações (2.14) e (2.20), resulta :

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial \tau} \right] = 1 + \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \, . \tag{2.22}$$

Das equações (2.15) e (2.20), vem :

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{4WCa}{(RR+1)\overline{W}} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) . \tag{2.23}$$

Das equações (2.19) e (2.20), vem :

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} + \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right] = Ra \left(\cos\alpha \frac{\partial \theta}{\partial X} - \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \, . \tag{2.24}$$

Reescrevendo as equações (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), resultam respectivamente :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0 \, , \tag{2.25}$$

$$Pr\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\partial W}{\partial X} + Pr \right) = \frac{\partial W}{\partial \tau} , \qquad (2.26)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{4\ W\ Ca}{(RR+1)\overline{W}} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} , \qquad (2.27)$$

$$Pr\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\partial \omega}{\partial X} + RaPr\left(\cos\alpha \frac{\partial \theta}{\partial X} - \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)$$

$$= \frac{\partial \omega}{\partial \tau} . \qquad (2.28)$$

As equações (2.25), (2.26), (2.27) e (2.28) representam as equações de conservação em termos da função corrente (ψ), velocidade adimensional (W), temperatura adimensional (θ) e vorticidade (ω) , tendo sido eliminada a pressão.

As condições iniciais e de contorno consideradas no item 2.1, na forma adimensional, são :

i) condições iniciais (para os casos 1 e 2):
para $\tau = 0$:

$$\psi = \theta = \omega = W = 0 \qquad (\text{em } \Omega) , \qquad (2.29)$$

ii) condições de contorno :
para $\tau > 0$:

Para o caso 1 :

$$\theta = 0 \qquad (\text{em } S_1) , \qquad (2.27a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \qquad (\text{em } S_2) , \qquad (2.27b)$$

$$\psi_W = 0 \qquad (\text{em } S_1 + S_2) , \qquad (2.25a)$$

$$\omega_w = - \frac{2\psi_0}{(\Delta n)^2} \qquad (\text{em } S_1 + S_2) \; . \qquad (2.28a)$$

Para o caso 2 :

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \qquad (\text{em } S_1) \; , \qquad (2.27c)$$

$$\theta = 0 \qquad (\text{em } S_2) \; , \qquad (2.27d)$$

$$\psi_w = 0 \qquad (\text{em } S_1 + S_2) \; , \qquad (2.25b)$$

$$\omega_w = - \frac{2\psi_0}{(\Delta n)^2} \qquad (\text{em } S_1 + S_2) \; . \qquad (2.28b)$$

Onde S_1, S_2, são as superfícies no contorno do domínio Ω, mostrado na figura 2.1. A equação (2.29) estabelece a condição inicial para ψ, θ, W e ω em todo o domínio Ω. As equações (2.27a) e (2.27d) estabelecem que a temperatura adimensional na superfície quente é 0. As equações (2.27b) e (2.27c) indicam que o fluxo de calor através das superfícies S_2 e S_1, respectivamente, são nulos. As equações (2.25a) e (2.25b) estabelecem a condição de impermeabilidade no contorno. Nas equações (2.28a) e (2.28b), ω_w representa a vorticidade do fluido junto ao contorno e ψ_0 é o valor da função corrente num ponto situado a pequena distância Δn do contorno.

As equações de conservação (2.25), (2.26), (2.27) e (2.28) podem ser escritas na seguinte forma condensada :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + Q_\psi = 0 \qquad (2.30)$$

$$Pr \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + Q_W = \frac{\partial W}{\partial \tau} \qquad (2.31)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + Q_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \qquad (2.32)$$

$$Pr\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + Q_\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \qquad (2.33)$$

onde:

$$Q_\psi = \omega \ , \qquad (2.30a)$$

$$Q_W = \left(\frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\partial W}{\partial X} \right) + Pr \ , \qquad (2.31a)$$

$$Q_\theta = \left(\frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) - \frac{4\ W\ Ca}{(RR+1)\overline{W}} \ , \qquad (2.32a)$$

$$Q_\omega = \frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\partial \omega}{\partial X} + RaPr\left(\cos\alpha \frac{\partial \theta}{\partial X} - \text{sen}\alpha \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) . \qquad (2.33a)$$

Embora as equações de conservação sejam para regime não permanente, os resultados obtidos no presente trabalho são para regime permanente.

2.3 - Parâmetros da Análise

As equações (2.30), (2.31), (2.32) e (2.33) formam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. A solução simultânea desse sistema de equações foi obtida através do método de elementos finitos, com o objetivo de determinar as distribuições das funções ψ, θ, W e ω. Conhecendo-se essas ditribuições é possível calcular o número de Nusselt médio e o fator de atrito em função de parâmetros geométricos e térmicos do problema .

O número de Nusselt médio Nu e o fator de atrito f estão definidos no apêndice A2, pelas seguintes relações :

i) Número de Nusselt médio para a superfície S_1 para o caso 1 e

S_2 para o caso 2 :

$$Nu = -\frac{1}{\theta_b} \tag{2.34}$$

ii) Fator de Atrito :

$$fRe = \frac{2}{\bar{W}} \tag{2.35}$$

O número de Nusselt médio (Nu) e o fator de atrito (f) podem ser escritos na seguinte forma :

$$Nu = Nu(E, RR, \alpha, Pr, Ra). \tag{2.36a}$$

$$f = f(E, RR, \alpha, Pr, Ra). \tag{2.36b}$$

Os três primeiros parâmetros que aparecem nas relações (2.36) são parâmetros geométricos e os parâmetros Pr e Ra são parâmetros térmicos, definidos como:

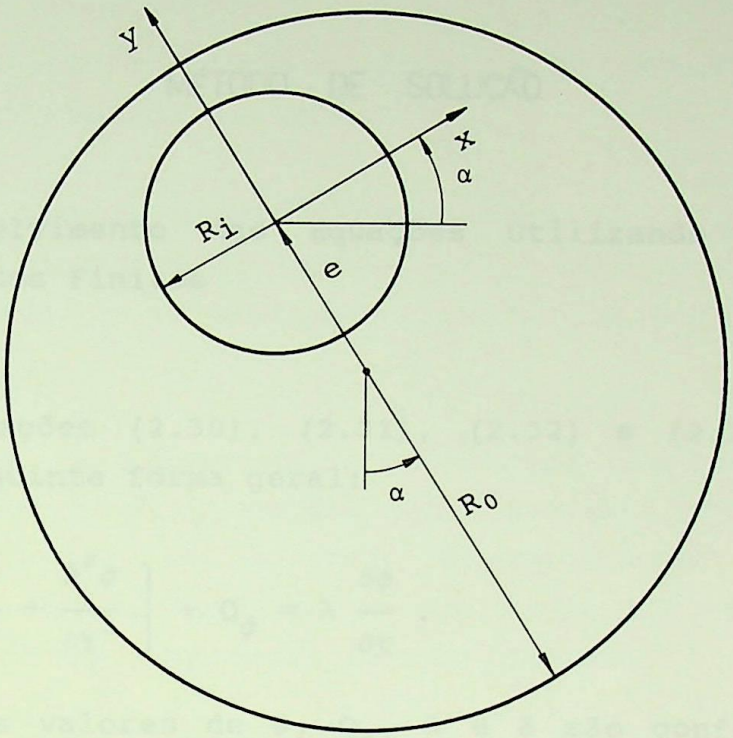
Parâmetros Geométricos

$E = e/R_0$ (Excentricidade adimensional),
$RR = R_0/R_i$ (Razão de raios),
α (ângulo de inclinação),

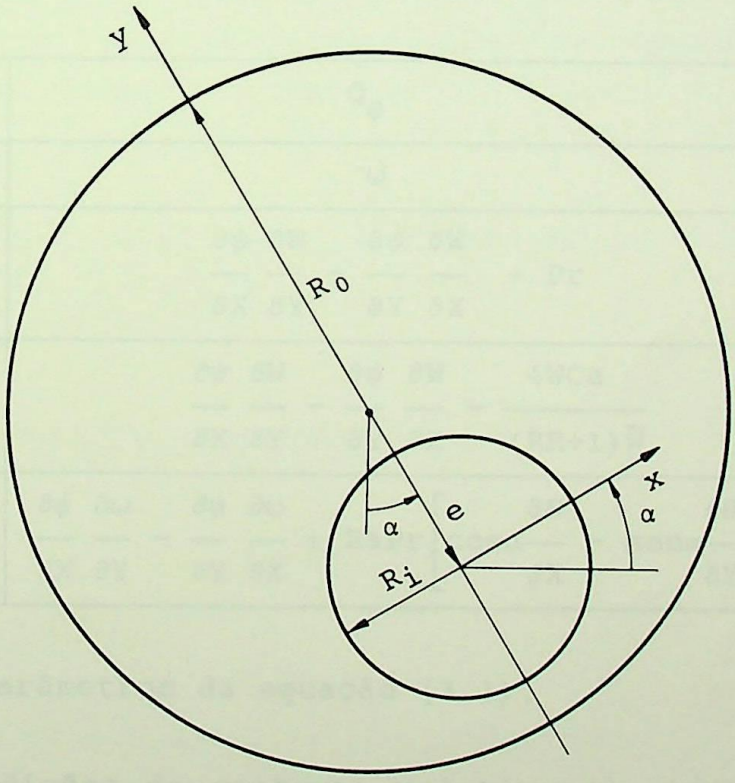
Parâmetros Térmicos

$Pr = \mu c_p/k$ (Número de Prandtl),
$Ra = \rho c_p g\beta\bar{q}d^4/\upsilon k^2$ (Número de Rayleigh).

A figura 2.2 mostra os parâmetros geométricos R_0, R_i, e, α. Deve ser observado que a excentricidade (e) pode ser positiva ou negativa, dependendo da posição do tubo interno. As figuras 2.2 (a) e (b) mostram respectivamente os casos de excentricidade positiva e negativa.



(a)



(b)

Figura 2.2 - Parâmetros geométricos. (a) Excentricidade positiva; (b) Excentricidade negativa.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE SOLUÇÃO

3.1 - Desenvolvimento das Equações Utilizando o Método de Elementos Finitos

As equações (2.30), (2.31), (2.32) e (2.33) podem ser escritas na seguinte forma geral:

$$\delta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \, . \qquad (3.1)$$

Onde os valores de ϕ, Q_ϕ, λ e δ são conforme a tabela abaixo:

ϕ	λ	δ	Q_ϕ	Equação
ψ	0	1	ω	(2.30)
W	1	Pr	$\frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\partial W}{\partial X} + Pr$	(2.31)
θ	1	1	$\frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\partial W}{\partial X} - \frac{4WCa}{(RR+1)\overline{W}}$	(2.32)
ω	1	Pr	$\frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\partial \omega}{\partial X} + RaPr\left[\cos\alpha\frac{\partial \theta}{\partial X} - sen\alpha\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right]$	(2.33)

Tabela 3.1 - Parâmetros da equação (3.1).

As condições de contorno relativas às equações (2.30) a (2.33) podem ser assim escritas:

$$\phi = \phi(X,Y), \qquad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \qquad (3.1b)$$

A condição de contorno dada pelas equações (2.28a) e (2.28b) deve ser tratada separadamente.

Para a solução numérica da equação (3.1), juntamente com as condições de contorno (3.1a) e (3.1b), será usado o método de elementos finitos. A escolha desse método se deve às seguintes vantagens :

i) facilidade de adaptação às geometrias complexas,
ii) facilidade na aplicação das condições de contorno,
iii) capacidade de se efetuar discretizações apropriadas, concentrando maior número de elementos nas regiões onde se esperam maiores variações das incógnitas.

Uma apresentação do método de elementos finitos é feita no apêndice A2. Neste apêndice é feita uma introdução ao método de elementos finitos e são apresentadas as equações das funções de forma para o elemento triangular e o cálculo do gradiente.

3.2 - Forma Matricial para os Elementos em Termos da Função Corrente

Da equação (3.1) fazendo-se $\phi = \psi$, $Q_\phi = Q_\psi$, $\lambda = 0$ e $\delta = 1$, resulta:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + Q_\psi = 0 \ , \qquad (3.2)$$

onde Q_ψ é dado pela equação (2.30a), como sendo:

$$Q_\psi = \omega \ . \qquad (3.2a)$$

No apêndice A3 mostra-se que as equações (3.2) e (3.2a) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\left[K_\psi\right]^e\left\{\psi\right\}^e = -\left\{R_\psi\right\}^e \ , \tag{3.3}$$

Os coeficientes das matrizes na equação (3.3) são dados pelas equações (A3.12), (A3.13) e (A3.6), na forma:

$$\left[K_\psi\right]^e = \int_{v^e}\left[B^e\right]^T\left[B^e\right]dV \ , \tag{3.4}$$

$$\left\{R_\psi\right\}^e = -\int_{v^e} Q_\psi^e\left[N^e\right]^T dV + \int_{s^e} q^e\left[N^e\right]dS \ , \tag{3.5}$$

$$\left[B^e\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial X} & \dfrac{\partial N_j}{\partial X} & \dfrac{\partial N_k}{\partial X} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial Y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial Y} & \dfrac{\partial N_k}{\partial Y} \end{bmatrix} . \tag{3.6}$$

Substituindo (A2.9) em (3.6), vem:

$$\left[B^e\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{b_i}{2\Delta} & \dfrac{b_j}{2\Delta} & \dfrac{b_k}{2\Delta} \\ \dfrac{c_i}{2\Delta} & \dfrac{c_j}{2\Delta} & \dfrac{c_k}{2\Delta} \end{bmatrix} , \tag{3.7}$$

$$\left[B^e\right]^T = \begin{bmatrix} \dfrac{b_i}{2\Delta} & \dfrac{c_i}{2\Delta} \\ \dfrac{b_j}{2\Delta} & \dfrac{c_j}{2\Delta} \\ \dfrac{b_k}{2\Delta} & \dfrac{c_k}{2\Delta} \end{bmatrix} . \tag{3.8}$$

Substituindo (3.7) e (3.8) em (3.4), vem:

$$\left[K_{\psi}\right]^{e} = \int_{v^e} \frac{1}{4\Delta^2} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dV =$$

$$= \frac{1}{4\Delta^2} \begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k \\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k \\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k \end{bmatrix} \int_{v^e} dV \ . \qquad (3.9)$$

Admitindo a espessura do elemento unitária, o elemento volume é dV=1.dS. Assim, tem-se que:

$$\int_{v^e} dV = \int_{s^e} dS = \Delta \ . \qquad (3.10)$$

Substituindo (3.10) em (3.9), vem:

$$\left[K_{\psi}\right] = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k \\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k \\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k \end{bmatrix} . \qquad (3.11)$$

A função Q_{ψ}^{e} pode ser escrita na forma:

$$Q_{\psi}^{e} = \omega^{e} = \left[N^{e}\right]\left\{\omega\right\}^{e} \ . \qquad (3.12)$$

As matrizes $\left[N^{e}\right]$ e $\left[N^{e}\right]^{T}$ são dadas, respectivamente, por:

$$\left[N^{e}\right] = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} , \qquad (3.13)$$

$$\left[N^{e}\right]^{T} = \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} . \qquad (3.14)$$

Onde N_i, N_j, N_k são dados pelas equações (A2.6a), (A2.6b) e (A2.6c).

Substituindo as equações (3.13) e (3.14) em (3.5), e observando que $q^e=0$ e $dV=1.dS$, resulta a seguinte equação:

$$\left\{R_\psi\right\} = - \int_{S^e} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} dS =$$

$$= - \int_{S^e} \begin{bmatrix} N_iN_i & N_iN_j & N_iN_k \\ N_jN_i & N_jN_j & N_jN_k \\ N_kN_i & N_kN_j & N_kN_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} dS \ . \qquad (3.15)$$

Da equação (7.34) da referência [24], tem-se que:

$$\int_{S^e} N_i^a \, N_j^b \, N_K^c \, dS = \frac{a!\ b!\ c!}{(a+b+c+2)!} \, 2\Delta \ . \qquad (3.16)$$

Das equacões (3.15) e (3.16), resulta que:

$$\left\{R_\psi\right\}^e = - \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} . \qquad (3.17)$$

Os resultados obtidos para as equações (3.2) e (3.2a), em termos de função corrente, podem ser resumidos na seguinte forma:

$$\left[K_\psi\right]^e \left\{\psi\right\}^e = - \left\{R_\psi\right\}^e \ , \qquad (3.18)$$

onde:

$$\left[K_\psi\right]^e = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k \\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k \\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k \end{bmatrix} . \qquad (3.19)$$

$$\left\{\psi\right\}^e = \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} , \qquad (3.20)$$

$$\left\{R_\psi\right\}^e = -\frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} . \qquad (3.21)$$

3.3 - Forma Matricial para os Elementos em Termos de Velocidade Adimensional

Da equação (3.1) fazendo-se $\phi = W$, $Q_\phi = Q_w$, $\lambda = 1$ e $\delta = Pr$, resulta :

$$Pr\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}\right) + Q_w = \frac{\partial W}{\partial \tau} , \qquad (3.22)$$

onde Q_w é dado pela equação (2.31a), como sendo:

$$Q_w = \frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\partial W}{\partial X} + Pr . \qquad (3.22a)$$

No apêndice A4 mostra-se que as equações (3.22) e (3.22a) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\left(\left[K_w\right]^e + \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]^e\right)\left\{W\right\}^e_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]^e\left\{W\right\}^e_{velho} - \left\{R_w\right\}^e . \qquad (3.23)$$

Os coeficientes das matrizes na equação (3.23) são dados pelas equações (A4.12), (A4.8c) e (A4.8d), na forma:

$$\left[C\right]^e = \frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \qquad (3.24)$$

$$\left[K_w\right]^e = Pr\int_e \left[B^e\right]^T\left[B^e\right]dV , \qquad (3.25)$$

$$\left\{R_w\right\}^e = -\int_{V^e}^{V}\left[N^e\right]^T Q_w^e\, dV + \int_{S^e}\left[N^e\right]^T q^e\, dS . \qquad (3.26)$$

A resolução da equação (3.25) é obtida de modo semelhante àquele da equação (3.11), resultando:

$$\left[K_w\right]^e = \frac{Pr}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k \\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k \\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k \end{bmatrix} . \quad (3.27)$$

A função Q_w dada pela equação (3.22a), pode ser escrita para o elemento da seguinte forma:

$$Q_w^e = \left(\frac{\partial\psi^e}{\partial X}\frac{\partial W^e}{\partial Y} - \frac{\partial\psi^e}{\partial Y}\frac{\partial W^e}{\partial X} + Pr \right) . \quad (3.28)$$

As funções ψ^e e W^e do elemento podem ser assim escritas:

$$\psi^e = \left[N^e\right]\left\{\psi\right\}^e , \quad (3.29)$$

$$W^e = \left[N^e\right]\left\{W\right\}^e . \quad (3.30)$$

Das equações (A2.9a) e (A2.9b) resulta que:

$$\frac{\partial\psi^e}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta}\left(b_i\psi_i+b_j\psi_j+b_k\psi_k\right) , \quad (3.31a)$$

$$\frac{\partial\psi^e}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta}\left(c_i\psi_i+c_j\psi_j+c_k\psi_k\right) , \quad (3.31b)$$

$$\frac{\partial W^e}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta}\left(b_iW_i+b_jW_j+b_kW_k\right) , \quad (3.31c)$$

$$\frac{\partial W^e}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta}\left(c_iW_i+c_jW_j+c_kW_k\right) . \quad (3.31d)$$

Substituindo as equações (3.31) e (3.28) e rearranjando vem:

$$Q_w^e = \frac{1}{4\Delta^2}\left[\left(b_i\psi_i+b_j\psi_j+b_k\psi_k\right)\left(c_iW_i+c_jW_j+c_kW_k\right) - \left(c_i\psi_i+c_j\psi_j+c_k\psi_k\right)\left(b_iW_i+b_jW_j+b_kW_k\right)\right] + Pr \quad . \tag{3.32}$$

Da equação (3.26), observando-se que Q_w^e é constante dentro de cada elemento e que $q^e = 0$, vem:

$$\left\{R_w\right\}^e = - Q_w^e \int_{v^e} \left[N^e\right]^T dV \quad . \tag{3.33}$$

Considerando-se que dV= 1.dS, de (3.33), vem:

$$\left\{R_w\right\}^e = - Q_w^e \int_{S^e} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dS \quad . \tag{3.34}$$

Das equações (3.16) e (3.34), tem-se que:

$$\left\{R_w\right\}^e = - \frac{\Delta Q_w^e}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad . \tag{3.35}$$

Substituindo (3.32) em (3.35):

$$\left\{R_w\right\}^e = \left[- \frac{1}{12\Delta} \left(b_i\psi_i+b_j\psi_j+b_k\psi_k \right) \left(c_iW_i+c_jW_j+c_kW_k \right) + \frac{1}{12\Delta} \left(c_i\psi_i+c_j\psi_j+c_k\psi_k \right) \left(b_iW_i+b_jW_j+b_kW_k \right) - \frac{Pr\Delta}{3} \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= - \begin{Bmatrix} A \\ A \\ A \end{Bmatrix} \quad . \tag{3.36}$$

Onde:

$$A = \frac{1}{12\Delta}\left[\left(b_i\psi_i+b_j\psi_j+b_k\psi_k \right)\left(c_iW_i+c_jW_j+c_kW_k \right) - \left(c_i\psi_i+c_j\psi_j+c_k\psi_k \right)\left(b_iW_i+b_jW_j+b_kW_k \right)\right] + \frac{\Delta}{3} Pr \quad . \tag{3.37}$$

Os resultados obtidos para as equações (3.22) e (3.22a), em termos da velocidade adimensional, podem ser resumidos na seguinte forma:

$$\left(\left[K_w\right]^e + \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]^e\right)\left\{W\right\}^e_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]^e\left\{W\right\}^e_{velho} - \left\{R_w\right\}^e . \tag{3.38}$$

Onde:

$$\left[K_w\right]^e = \frac{Pr}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k \\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k \\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k \end{bmatrix}, \tag{3.39}$$

$$\left[C\right]^e = \frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{3.40}$$

$$\left\{R_w\right\}^e = -\begin{Bmatrix} A \\ A \\ A \end{Bmatrix} . \tag{3.41}$$

3.4 - Forma Matricial para os Elementos em Termos de Temperatura Adimensional

Da equação (3.1) fazendo-se $\phi = \theta$, $Q_\phi = Q_\theta$, $\lambda = 1$, resulta:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2} + Q_\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\tau} , \tag{3.42}$$

Onde Q_θ é dado pela equação (2.32a), como sendo:

$$Q_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial X}\frac{\partial\theta}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y}\frac{\partial\theta}{\partial X} - \frac{4WCa}{(RR+1)\overline{W}} \qquad (3.42a)$$

No apêndice A4 mostra-se que as equações (3.42) e (3.42a) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\left(\left[K_\theta\right]^e + \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]^e\right)\left\{\theta\right\}^e_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]^e\left\{\theta\right\}^e_{velho} - \left\{R_\theta\right\}^e . \qquad (3.43)$$

Os coeficientes das matrizes na equação (3.43) são dados pelas equações (A4.12), (A4.8c) e (A4.8d), na forma:

$$\left[C\right]^e = \frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (3.44)$$

$$\left[K_\theta\right]^e = Pr\int_{v^e}\left[B^e\right]^T\left[B^e\right]dV , \qquad (3.45)$$

$$\left\{R_\theta\right\}^e = -\int_{v^e}\left[N^e\right]^T Q_w^e\, dV + \int_{s^e}\left[N^e\right]^T q^e\, dS . \qquad (3.46)$$

A resolução da equação (3.35) é obtida de modo semelhante àquele da equação (3.11), resultando:

$$\left[K_\theta\right]^e = \frac{1}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k \\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k \\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k \end{bmatrix}, \qquad (3.47)$$

A função Q_θ dada pela equação (3.42a), pode ser escrita para o elemento da seguinte forma:

$$Q_\theta^e = \left(\frac{\partial\psi^e}{\partial X}\frac{\partial\theta^e}{\partial Y} - \frac{\partial\psi^e}{\partial Y}\frac{\partial\theta^e}{\partial X}\right) - \frac{4W^eCa}{(RR+1)\overline{W}} \qquad (3.48)$$

As funções ψ^e, θ^e e W^e do elemento podem ser assim escritas:

$$\psi^e = \left[N^e\right]\left\{\psi\right\}^e \quad , \tag{3.49}$$

$$\theta^e = \left[N^e\right]\left\{\theta\right\}^e \quad , \tag{3.50}$$

$$W^e = \left[N^e\right]\left\{W\right\}^e \quad . \tag{3.51}$$

Das equações (A.2.9a) e (A.2.9b) resulta que:

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta}\left(b_i\psi_i + b_j\psi_j + b_k\psi_k\right) \quad , \tag{3.52a}$$

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta}\left(c_i\psi_i + c_j\psi_j + c_k\psi_k\right) \quad , \tag{3.52b}$$

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta}\left(b_i\theta_i + b_j\theta_j + b_k\theta_k\right) \quad , \tag{3.52c}$$

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta}\left(c_i\theta_i + c_j\theta_j + c_k\theta_k\right) \quad . \tag{3.52d}$$

Substituindo as equações (3.52) em (3.48) e rearranjando vem:

$$Q_\theta^e = \frac{1}{4\Delta^2}\Big[\left(b_i\psi_i + b_j\psi_j + b_k\psi_k\right)\left(c_i\theta_i + c_j\theta_j + c_k\theta_k\right) - \left(c_i\psi_i + c_j\psi + c_k\psi_k\right)\left(b_i\theta_i + b_j\theta_j + b_k\theta_k\right)\Big] - \frac{4W^e Ca}{(RR+1)\overline{W}} \quad . \tag{3.53}$$

Da equação (3.46), observando que Q^e é constante dentro de cada elemento e que $q^e = 0$, vem que:

$$\left\{R_\theta\right\}^e = - Q_\theta^e \int_{V^e} \left[N^e\right]^T dV \quad . \tag{3.54}$$

Considerando que dV = 1.dS, de (3.54), vem que:

$$\left\{R_\theta\right\}^e = - Q_\theta^e \int_{S^e} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dS \ . \qquad (3.55)$$

Das equações (3.16) e (3.55), vem que:

$$\left\{R_\theta\right\}^e = - \frac{\Delta Q_\theta^e}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \qquad (3.56)$$

Substituindo (3.53) em (3.56) vem:

$$\left\{R_\theta\right\}^e = \left[- \frac{1}{12\Delta} \left(b_i\psi_i+b_j\psi_j+b_k\psi_k \right) \left(c_i\theta_i \ k\theta_k \right) + \frac{1}{12\Delta} \left(c_i\psi_i+c_j\psi_j+c_k\psi_k \right) \left(b_i\theta_i+b_j\theta_j+b_k\theta_k \right) \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \frac{\Delta \ Ca}{3(RR+1)\overline{W}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_i \\ W_j \\ W_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B \\ B \\ B \end{Bmatrix} +$$

$$+ \frac{\Delta \ Ca}{3(RR+1)\overline{W}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_i \\ W_j \\ W_k \end{Bmatrix} . \qquad (3.57)$$

Onde:

$$B = \frac{1}{12\Delta} \left[-\left(b_i\psi_i+b_j\psi_j+b_k\psi_k \right) \left(c_i\theta_i+c_j\theta_j+c_k\theta_k \right) + \left(c_i\psi_i+ \right. \right.$$

$$\left. \left. +c_j\psi_j c_k\psi_k \right) \left(b_i\theta_i+b_j\theta_j+b_k\theta_k \right) \right] . \qquad (3.58)$$

Os resultados obtidos para as equações (3.42) e (3.42a), em termos da temperatura adimensional, podem ser resumidos na seguinte forma:

$$\left(\left[K_\theta\right]^e + \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]^e\right)\left\{\theta\right\}^e_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]^e\left\{\theta\right\}^e_{velho} - \left\{R_\theta\right\}^e . \tag{3.59}$$

Onde:

$$\left[K_\theta\right]^e = \frac{1}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k \\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k \\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k \end{bmatrix}, \tag{3.60}$$

$$\left[C\right]^e = \frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{3.61}$$

$$\left\{R_\theta\right\}^e = \begin{Bmatrix} B \\ B \\ B \end{Bmatrix} + \frac{\Delta\ Ca}{3(RR+1)\overline{W}}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} W_i \\ W_j \\ W_k \end{Bmatrix} . \tag{3.62}$$

3.5 - Forma Matricial para os Elementos em Termos da Vorticidade

Da equação (3.1) fazendo-se $\phi = \omega$, $Q_\phi = Q_\omega$, $\lambda = 1$ e $\delta = Pr$, resulta:

$$Pr\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial Y^2}\right) + Q_\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\tau} , \tag{3.63}$$

onde Q_ω é dado pela equação (2.33a), como sendo:

$$Q_\omega = \frac{\partial\psi}{\partial X}\frac{\partial\omega}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y}\frac{\partial\omega}{\partial X} + RaPr\left(\cos\alpha\frac{\partial\theta}{\partial X} - \operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right) . \tag{3.63a}$$

No apêndice A4 mostra-se que as equações (3.63) e (3.63a) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\left(\left[K_\omega\right]^e + \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]^e\right)\left\{\omega\right\}^e_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]^e\left\{\omega\right\}^e_{velho} - \left\{R_\omega\right\}^e . \tag{3.64}$$

Os coeficientes das matrizes na equação (3.64) são dados pelas equações (A4.12), (A4.8c) e (A4.8d), e são obtidos de forma semelhante à apresentada no item 3.3, como sendo:

$$\left[K_\omega\right]^e = \frac{Pr}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k \\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k \\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k \end{bmatrix} . \tag{3.65}$$

$$\left[C\right]^e = \frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \tag{3.66}$$

$$\left\{R_\omega\right\}^e = - Q^e_\omega \int_{V^e} \left[N^e\right]^T dV . \tag{3.67}$$

A função Q^e_ω pode ser escrita como sendo:

$$Q^e_\omega = \frac{\partial\psi^e}{\partial X}\frac{\partial\omega^e}{\partial Y} - \frac{\partial\psi^e}{\partial Y}\frac{\partial\omega^e}{\partial X} + RaPr\left(\cos\alpha\,\frac{\partial\theta^e}{\partial X} - \operatorname{sen}\alpha\,\frac{\partial\theta^e}{\partial Y}\right) . \tag{3.68}$$

Da equação (A2.9) tem-se que:

$$\frac{\partial\psi^e}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta}\left(b_i\psi_i+b_j\psi_j+b_k\psi_k\right) , \tag{3.69a}$$

$$\frac{\partial\psi^e}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta}\left(c_i\psi_i+c_j\psi_j+c_k\psi_k\right) , \tag{3.69b}$$

$$\frac{\partial\theta^e}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta}\left(b_i\theta_i+b_j\theta_j+b_k\theta_k\right) , \tag{3.69c}$$

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i\theta_i + c_j\theta_j + c_k\theta_k) \ , \qquad (3.69d)$$

$$\frac{\partial \omega^e}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta} (b_i\omega_i + b_j\omega_j + b_k\omega_k) \ , \qquad (3.69e)$$

$$\frac{\partial \omega^e}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i\omega_i + c_j\omega_j + c_k\omega_k) \ . \qquad (3.69f)$$

Das equações (3.16) e (3.67), observando que Q_ω^e é constante para o elemento, vem que:

$$\left\{R_\omega\right\}^e = - Q_\omega^e \int_{s^e} \left[N^e\right]^T dS = - \frac{\Delta Q_\omega^e}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \qquad (3.70)$$

Definem-se os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} D = {} & \frac{1}{4\Delta^2} \left(b_i\psi_i + b_j\psi_j + b_k\psi_k \right)\left(c_i\omega_i + c_j\omega_j + c_k\omega_k \right) - \\ & \frac{1}{4\Delta^2} \left(c_i\psi_i + c_j\psi_j + c_k\psi_k \right)\left(b_i\omega_i + b_j\omega_j + b_k\omega_k \right) + \\ & \frac{RaPr}{2\Delta} \cos\alpha \left(b_i\theta_i + b_j\theta_j + b_k\theta_k \right) - \\ & \frac{RaPr}{2\Delta} \operatorname{sen}\alpha \left(c_i\theta_i + c_j\theta_j + c_k\theta_k \right) . \end{aligned} \qquad (3.71)$$

Os resultados obtidos para as equações (3.63) e (3.63a) podem ser escritos na seguinte forma matricial:

$$\left(\left[K_\omega\right]^e + \frac{2}{\Delta\tau} \left[C\right]^e \right) \left\{\omega\right\}^e_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau} \left[C\right]^e \left\{\omega\right\}^e_{velho} - \left\{R_\omega\right\}^e . \qquad (3.72)$$

Onde:

$$\left[K_{\omega}\right]^{e} = \frac{1}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} , \quad (3.73)$$

$$\left[C\right]^{e} = \frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \quad (3.74)$$

$$\left\{R_{\omega}\right\}^{e} = \begin{Bmatrix} D \\ D \\ D \end{Bmatrix} . \quad (3.75)$$

3.6 - Algorítmo de Solução

Nos itens 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 foram obtidas as equações para os elementos em termos de função corrente, velocidade axial adimensional, temperatura adimensional e vorticidade. Os apêndices A3 e A4 mostram como as matrizes globais podem ser formadas a partir das equações dos elementos (3.18), (3.38), (3.59) e (3.72), das quais podem ser escritas, respectivamente, as seguintes matrizes globais:

$$\left[K_{\psi}\right] \left\{\psi\right\} = - \left\{R_{\psi}\right\} , \quad (3.76)$$

$$\left(\left[K_{w}\right] + \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]\right)\left\{W\right\}_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]\left\{W\right\}_{velho} - \left\{R_{w}\right\} , \quad (3.77)$$

$$\left(\left[K_{\theta}\right] + \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]\right)\left\{\theta\right\}_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau}\left[C\right]\left\{\theta\right\}_{velho} - \left\{R_{\theta}\right\} , \quad (3.78)$$

$$\left(\left[K_{\omega} \right] + \frac{2}{\Delta\tau} \left[C \right] \right) \left\{ \omega \right\}_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau} \left[C \right] \left\{ \omega \right\}_{velho} - \left\{ R_{\omega} \right\} . \tag{3.79}$$

As equações (3.76), (3.77), (3.78) e (3.79) podem ser escritas, respectivamente, de forma mais compacta como:

$$\left[\tilde{K}_{\psi} \right] \left\{ \psi \right\}^{\tau} = \left\{ \tilde{R}_{\psi} \right\} , \tag{3.76a}$$

$$\left[\tilde{K}_{W} \right] \left\{ W \right\}^{\tau} = \left\{ \tilde{R}_{w} \right\} , \tag{3.77a}$$

$$\left[\tilde{K}_{\theta} \right] \left\{ \theta \right\}^{\tau} = \left\{ \tilde{R}_{\theta} \right\} , \tag{3.78a}$$

$$\left[\tilde{K}_{\omega} \right] \left\{ \omega \right\}^{\tau} = \left\{ \tilde{R}_{\omega} \right\} . \tag{3.79a}$$

As equações (3.76a), (3.77a), (3.78a) e (3.79a) formam um sistema de equações acopladas. Estas equações serão resolvidas individualmente numa sequência que será comentada brevemente.

As matrizes $\left[\tilde{K}_{\psi} \right]$, $\left[\tilde{K}_{W} \right]$, $\left[\tilde{K}_{\theta} \right]$ e $\left[\tilde{K}_{\omega} \right]$ terão os seus coeficientes mantidos constantes, pois o incremento de tempo $\Delta\tau$ será um parâmetro que assume um valor fixo para cada iteração. Essas matrizes são simétricas e de banda. Com o objetivo de reduzir a área de armazenamento e o tempo de cálculo computacional, os coeficientes da matriz que compõem a diagonal principal e as diagonais superiores não nulas foram armazenados na forma de uma matriz coluna.

As matrizes $\left\{ \psi \right\}^{\tau}$, $\left\{ W \right\}^{\tau}$, $\left\{ \theta \right\}^{\tau}$ e $\left\{ \omega \right\}^{\tau}$ são incógnitas e devem ser calculadas para cada tempo τ.

As matrizes $\left\{ \tilde{R}_{\psi} \right\}$, $\left\{ \tilde{R}_{W} \right\}$, $\left\{ \tilde{R}_{\theta} \right\}$ e $\left\{ \tilde{R}_{\omega} \right\}$, podem ser escritas na seguinte forma :

$$\left\{ \tilde{R}_{\psi} \right\} = \left\{ \tilde{R}_{\psi}(\omega^{\tau-\Delta\tau}) \right\} \tag{3.76b}$$

$$\left\{ \tilde{R}_{W} \right\} = \left\{ \tilde{R}_{W}(\psi^{\tau},\ W^{\tau-\Delta\tau}) \right\} \tag{3.77b}$$

$$\left\{ \tilde{R}_{\theta} \right\} = \left\{ \tilde{R}_{\theta}(\psi^{\tau},\ W^{\tau},\ \theta^{\tau-\Delta\tau}) \right\} \tag{3.78b}$$

$$\left\{ \tilde{R}_{\omega} \right\} = \left\{ \tilde{R}_{\omega}(\psi^{\tau},\ \theta^{\tau},\ \omega^{\tau-\Delta\tau}) \right\} \tag{3.79b}$$

A matriz $\left\{ \tilde{R}_{\psi} \right\}$ dada por (3.76b) possui coeficientes que são dependentes da vorticidade ω, sendo essa avaliada para o tempo $\tau-\Delta\tau$. As matrizes $\left\{ \tilde{R}_{W} \right\}$, $\left\{ \tilde{R}_{\theta} \right\}$ e $\left\{ \tilde{R}_{\omega} \right\}$ têm interpretações semelhantes à anterior e indicam a dependência das variáveis ψ, W, θ e ω com o tempo para a qual elas devem ser avaliadas.

Um programa computacional foi desenvolvido com o objetivo de resolver as equações (3.76a), (3.77a), (3.78a) e (3.79a) para obter as distribuições das funções ψ, W, θ e ω e calcular o número de Nusselt médio e o fator de atrito em função dos parâmetros discutidos no item 2.3.

O sistema de equações mencionado acima é resolvido na seguinte sequência: primeiramente é resolvida a equação (3.76a), sendo obtida a distribuição de função corrente. Em seguida é resolvida a equação (3.77a) determinando-se a velocidade axial adimensional. Logo após é calculada a temperatura adimensional, resolvendo-se a equação (3.78a) e por fim a vorticidade no interior do domínio através da equação (3.79a).

Com as equações (2.28a) e (2.28b) calcula-se a vorticidade no contorno.

O tempo é incrementado e o processo de cálculo repetido até que o número de Nusselt médio (Nu) e o fator de atrito (f) tenham convergência.

No apêndice A5 são apresentados mais detalhes do método de solução e o fluxograma do programa computacional desenvolvido.

O programa computacional desenvolvido foi processado no computador CYBER-930 da Escola Federal de Engenharia de Itajubá. No capítulo seguinte serão apresentados os resultados obtidos e as comparações feitas para geometria retangular, tubos e cilindros concêntricos. Finalmente, são apresentados os resultados do presente trabalho para os casos 1 e 2.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

4.1 - Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos pelo programa computacional na solução de problemas de convecção mista, utilizando o método de elementos finitos.

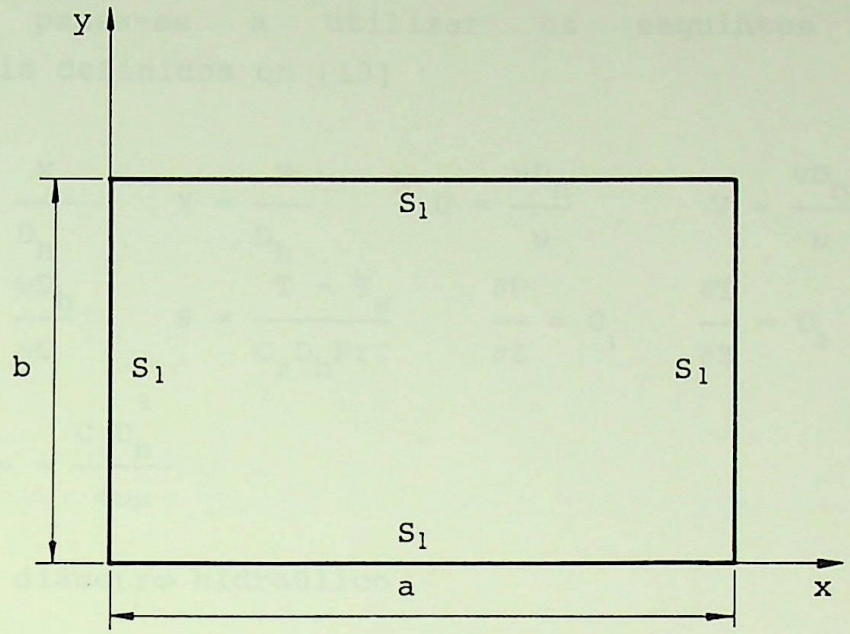
Para testar o programa computacional, os resultados do presente trabalho para as geometrias retangular, tubos e cilindros concêntricos, foram comparados com os resultados disponíveis na literatura.

4.2 - Comparação de Resultados para Geometria Retangular

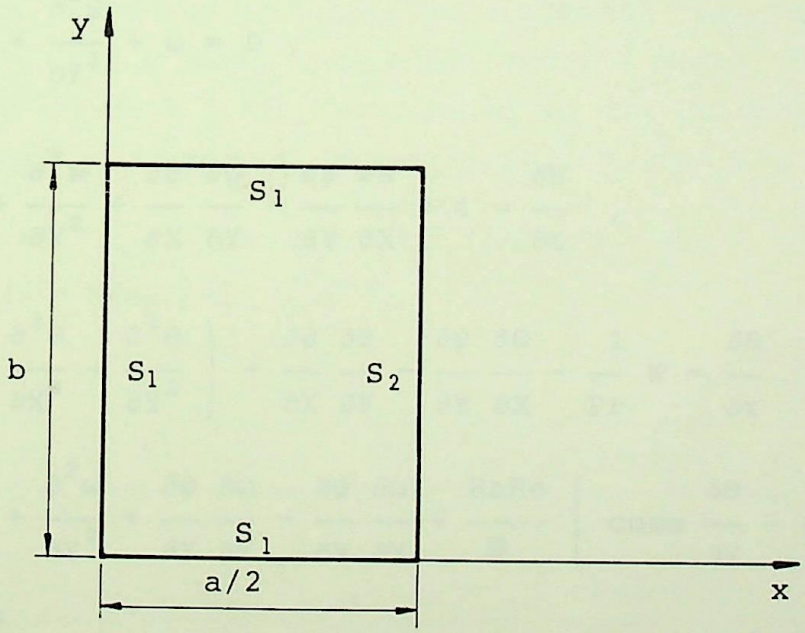
Cheng & Hwang [10] estudaram a convecção mista laminar em canais horizontais retangulares usando o método de diferenças finitas. Foi considerada a condição de contorno de fluxo de calor axialmente uniforme na parede e temperatura da parede uniforme perifericamente para qualquer posição axial.A figura 4.1 mostra a geometria e as condições de contorno utilizadas. Devido à simetria da geometria o tempo computacional pode ser reduzido, utilizando o domínio computacional mostrado na figura 4.1 (b).

As equações de conservação para análise deste problema são aquelas apresentadas no capítulo 2, ou seja, equações (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5).

A adimensionalização das equações de conservação utilizada no trabalho de Cheng e Hwang [10] é diferente daquela apresentada no capítulo 2 deste trabalho.



(a) Geometria do problema



(b) Domínio computacional

Figura 4.1 - Condições de contorno da geometria retangular estudada por Cheng e Hwang [10].

Com o objetivo de comparar os resultados dos dois trabalhos, passa-se a utilizar os seguintes parâmetros adimensionais definidos em [10] :

$$X = \frac{x}{D_h} \qquad Y = \frac{x}{D_h} \qquad U = \frac{uD_h}{\upsilon} \qquad V = \frac{vD_h}{\upsilon}$$

$$W = \frac{wD_h}{\upsilon C} \qquad \theta = \frac{T - T_w}{C_2 D_h PrC} \qquad \frac{\partial P}{\partial Z} = C_1 \qquad \frac{\partial T}{\partial Z} = C_2$$

$$\frac{Re}{\bar{w}} = - \frac{C_1 D_h^3}{4\upsilon\mu} \tag{4.1}$$

onde D_h é o diâmetro hidraúlico

Procedendo de forma semelhante àquela apresentada no item 2.2, pode se obter as seguintes equações na forma adimensional :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial Y^2} + \omega = 0 \ , \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial\psi}{\partial X}\frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y}\frac{\partial W}{\partial X} + 4 = \frac{\partial W}{\partial\tau} \ , \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial X}\frac{\partial\theta}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y}\frac{\partial\theta}{\partial X} - \frac{1}{Pr} W = \frac{\partial\theta}{\partial\tau} \ , \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial Y^2} + \frac{\partial\psi}{\partial X}\frac{\partial\omega}{\partial Y} - \frac{\partial\psi}{\partial Y}\frac{\partial\omega}{\partial X} + \frac{RaRe}{\bar{W}}\left(\cos\alpha\frac{\partial\theta}{\partial X} - \operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right) =$$

$$= \frac{\partial\omega}{\partial\tau} \ . \tag{4.5}$$

As condições iniciais e de contorno, consideradas conforme a figura 4.1 (b), são:

i) condições iniciais (τ=0) :

$$\psi = \theta = \omega = W = 0 \tag{4.6}$$

ii) condições de contorno ($\tau>0$) :

$$\theta = \psi = W = 0 \qquad \text{(em } S_1\text{)} \qquad (4.7)$$

$$\omega = \frac{\partial\theta}{\partial X} = \frac{\partial\psi}{\partial X} = \frac{\partial W}{\partial X} = 0 \qquad \text{(em } S_2\text{)} \qquad (4.8)$$

$$\omega_w = -\frac{2\psi_0}{\delta^2} \qquad \text{(em } S_1\text{)} \qquad (4.9)$$

onde ψ_0 representa a função corrente a uma pequena distância δ do contorno.

A tabela 4.1 mostra a comparação dos resultados da razão Nu / Nuo para vários valores de ReRa e razões de aspecto 1 e 2. O número de Prandtl utilizado é 0.73.

Observando-se os desvios, nota-se que os resultados concordam muito bem com aqueles de Cheng e Hwang [10], sendo que o desvio não chega à 1.0%. Comparando-se com os valores dados por Kays [25] para a convecção forçada, os resultados são excelentes.

Neste trabalho foi utilizado o método de elementos finitos e malhas 16x16 e 25x25.

		REF.[10]	REF.[25]	PRESENTE TRABALHO	
ReRa	γ	Nu/Nuo	Nu	Nu/Nuo (desvio%)	Nu (desvio%)
0,0	1,0	1,00	3,63	1,00 (0,0)	3,593 (-1,02)
$1{,}386.10^4$	1,0	1,02	-	1,016 (-0,39)	3,650
$3{,}953.10^4$	1,0	1,10	-	1,09 (-0,91)	3,915
$1{,}030.10^5$	1,0	1,25	-	1,24 (-0,80)	4,460
0,0	2,0	1,00	4,11	1,00 (0,0)	4,113 (0,07)
$1{,}408.10^5$	2,0	1,16	-	1,17 (0,86)	4,809

Tabela 4.1 - Comparação de resultados para a geometria retangular da figura 4.1; Pr=0,73.

4.3 - Comparação de Resultados para Tubos

Os resultados do teste do programa computacional para convecção forçada em tubos são comparados com o valor dado por Kays [25]. A condição de contorno utilizada é de fluxo de calor uniforme axialmente e temperatura da parede constante circunferencialmente. A figura 4.2(a) mostra a geometria e as condições de contorno utilizadas. Na tabela 4.2 são apresentados os resultados do número de Nusselt médio, considerando-se Pr=0,7. Na figura 4.2(b) são mostradas as malhas utilizadas para comparação, conforme a tabela 4.2. Verifica-se que as malhas que apresentaram melhor resultado são (c) e (d) ou seja, 3x20 e 3x24.

Uma análise dos resultados apresentados na tabela 4.2 revela boa concordância. O maior desvio foi de 3,02% e o menor de 0,25%.

REF.[25]	PRESENTE TRABALHO		
Nu	Malha	Nu	Desvio [%]
4,364 (mod. 1.17 [25] KAYS)	(a) 3x12	4,419	1,26
	(b) 3x16	4,395	0,66
	(c) 3x20	4,382	0,41
	(d) 3x24	4,375	0,25
	(e) 4x12	4,496	3,02
	(f) 4x16	4,473	2,50
	(g) 4x20	4,463	2,27
	(h) 4x24	4,456	2,11

Tabela 4.2 - Comparação de resultados para tubos da figura 4.2; Pr=0,7, ReRa=0.

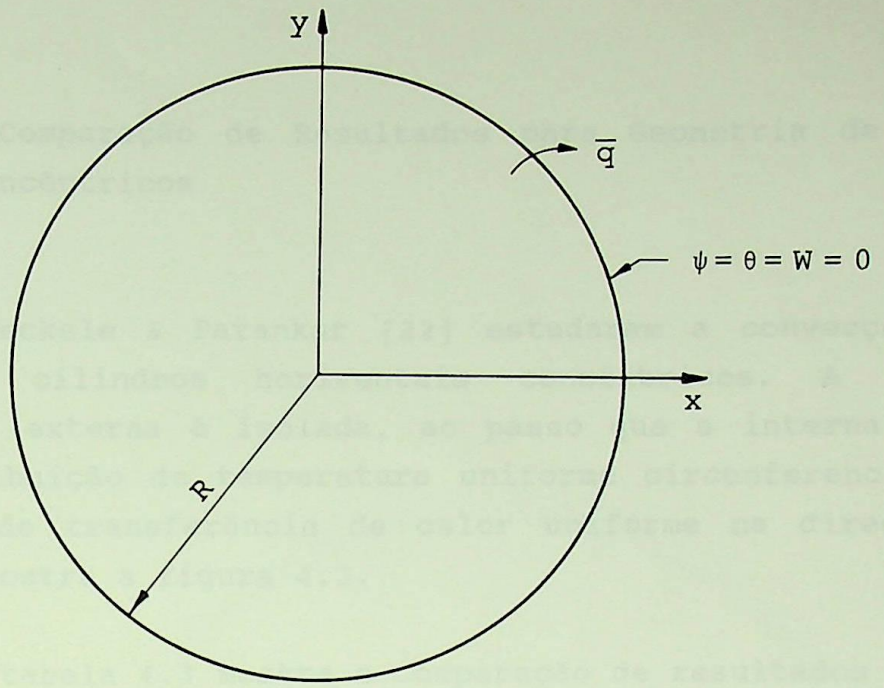


Figura 4.2 (a) - Condições de contorno para tubo.

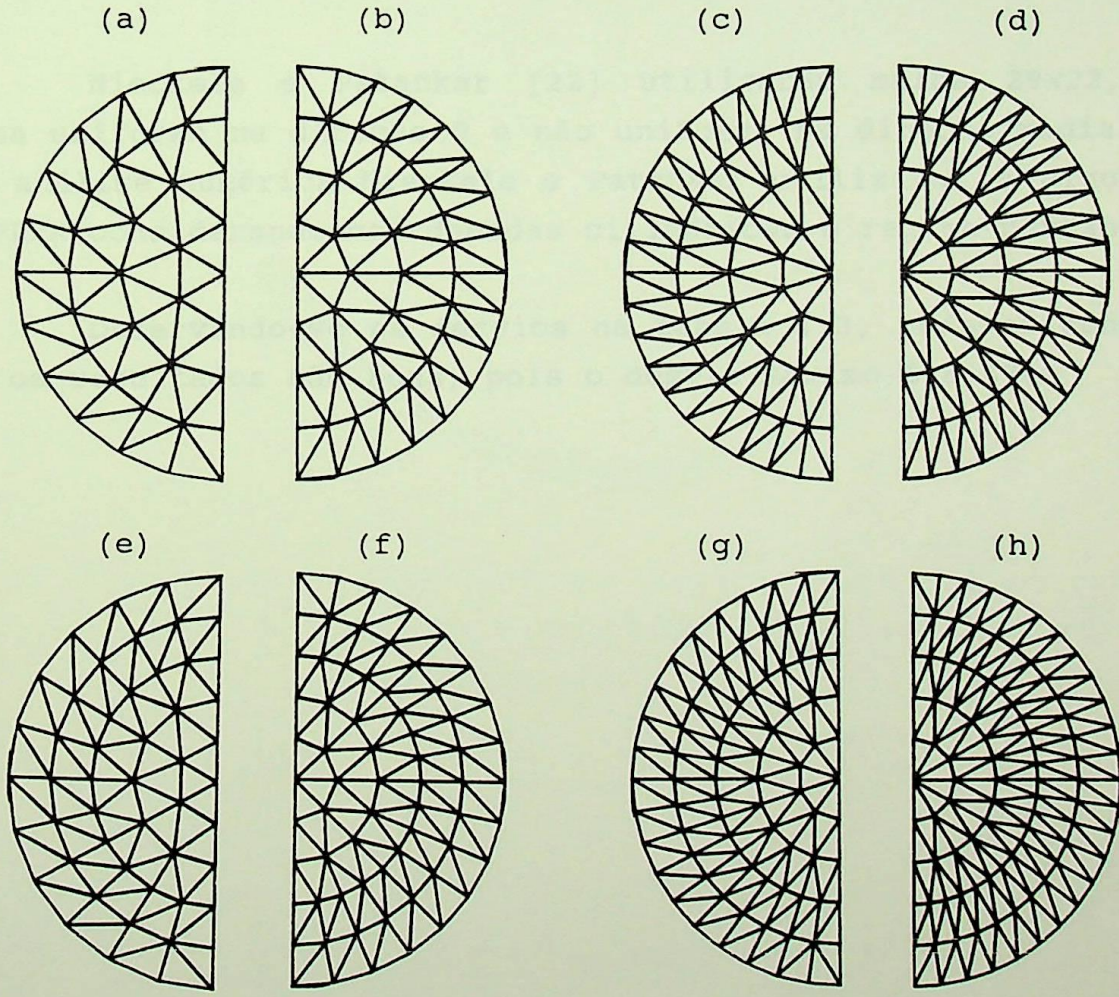


Figura 4.2(b) - Malhas utilizadas para escoamento em tubo, conforme a tabela 4.2.

4.4 - Comparação de Resultados para Geometria de Cilindros Concêntricos

Nieckele & Patankar [22] estudaram a convecção laminar mista em cilindros horizontais concêntricos. A superfície cilíndrica externa é isolada, ao passo que a interna apresenta uma distribuição de temperatura uniforme circunferencialmente e uma taxa de transferência de calor uniforme na direção axial, conforme mostra a figura 4.3.

A tabela 4.3 mostra a comparação de resultados para Nu_o, Nu/Nu_o, $(fRe)_0$ e $fRe/(fRe)_0$ para razões de aspecto 1,5 , 2,0 , 3,0 e 5,0 , número de Rayleigh 0, 10^5 e 10^6 e número de Prandtl 0,70.

Nieckele e Patankar [22] utilizaram malha 29x22, com malha uniforme na direção θ e não uniforme na direção radial. Em sua análise numérica Nieckele e Patankar utilizaram o algorítmo SIMPLER considerando coordenadas cilíndricas e regime permanente.

Observando-se os desvios na tabela 4.3, pode-se concluir que os resultados são bons, pois o desvio máximo é 6,67%.

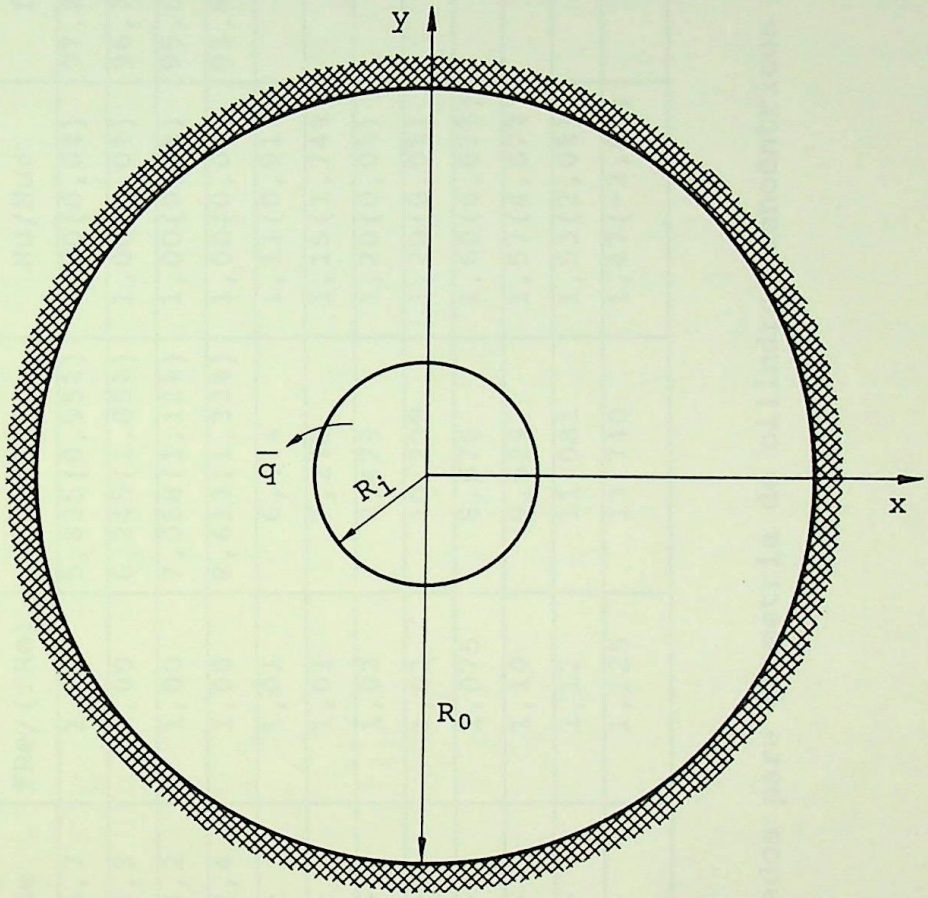


Figura 4.3 - Condições de contorno para a geometria de cilindros concêntricos estudada por Nieckele e Patankar [22].

		REFERÊNCIA [22]				PRESENTE TRABALHO			
Ra	RR	Nu	Nu/Nuo	fRe	$fRe/(fRe)_0$	Nu	Nu/Nuo	fRe	$fRe/(fRe)_0$
0	1,5	5,78	1,00	95,7	1,00	5,835(0,95%)	1,00(0,0%)	97,230(1,6%)	1,00(0,0%)
	2,0	6,18	1,00	95,3	1,00	6,245(1,05%)	1,00(0,0%)	96,744(1,52%)	1,00(0,0%)
	3,0	6,98	1,00	94,2	1,00	7,058(1,12%)	1,00(0,0%)	95,687(1,58%)	1,00(0,0%)
	5,0	8,50	1,00	92,4	1,00	8,613(1,33%)	1,00(0,0%)	93,891(1,61%)	1,00(0,0%)
10^5	1,5	-	1,10	-	1,01	6,474	1,11(0,91%)	98,347	1,01(0,0%)
	2,0	-	1,15	-	1,01	7,278	1,15(1,74%)	98,517	1,02(0,99%)
	3,0	-	1,20	-	1,02	8,479	1,20(0,0%)	97,973	1,02(0,0%)
	5,0	-	1,20	-	1,02	10,299	1,20(0,0%)	96,269	1,03(0,98%)
10^6	1,5	-	1,50	-	1,075	8,576	1,60(6,67%)	105,340	1,08(0,47%)
	2,0	-	1,50	-	1,10	9,529	1,57(4,67%)	107,237	1,11(0,91%)
	3,0	-	1,50	-	1,12	11,081	1,53(2,0%)	108,561	1,12(0,89%)
	5,0	-	1,50	-	1,125	13,740	1,47(-2,0%)	107,763	1,125(2,22%)

Tabela 4.3 - Comparação de resultados para geometria de cilindros concêntricos da figura 4.3; Pr=0,7.

4.5 - Resultados Teóricos do Presente Trabalho

O programa computacional desenvolvido mostrou-se satisfatório para as geometrias retangular, tubos e de cilindros concêntricos. Portanto, será utilizado para se obter os resultados para a geometria de cilindros excêntricos.

Os resultados teóricos de transferência de calor por convecção mista no interior de tubos horizontais excêntricos são analisados neste item. São considerados os casos 1 e 2, já descrito nos capítulos 1 e 2.

Na figura 4.4 são mostradas as malhas utilizadas no presente trabalho. Para o ângulo de inclinação $\alpha=0^{o}$ é utilizada apenas metade da geometria devido à simetria e para ângulo de inclinação $\alpha\neq0^{o}$ usa-se a geometria inteira porque não há simetria.

_CASO 1 : Tubo Externo Isolado e Tubo Interno com Fluxo de Calor Uniforme Axialmente e Temperatura da Parede Uniforme Circunferencialmente

A tabela 4.4 mostra o número de Nusselt(Nuo) e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds$(fRe)_{o}$ para convecção forçada pura, considerando o número de Prandtl fixado em 0,7. São considerados como parâmetros a razão de raios(RR) e a excentricidade(E).

E	RR = 3		RR = 5	
	Nuo	$(fRe)_{o}$	Nuo	$(fRe)_{o}$
0,50	2,69	58,67	4,32	68,22
0,25	4,38	82,48	6,48	85,94
0	7,06	96,87	8,64	95,20
-0,25	4,38	82,48	6,48	85,94
-0,50	2,69	58,67	4,32	68,22

Tabela 4.4 - Nuo e $(fRe)_{o}$ em função da razão de raios(RR) e da excentricidade(E) para o caso 1 considerando Pr=0,7 e $\alpha=0^{o}$.

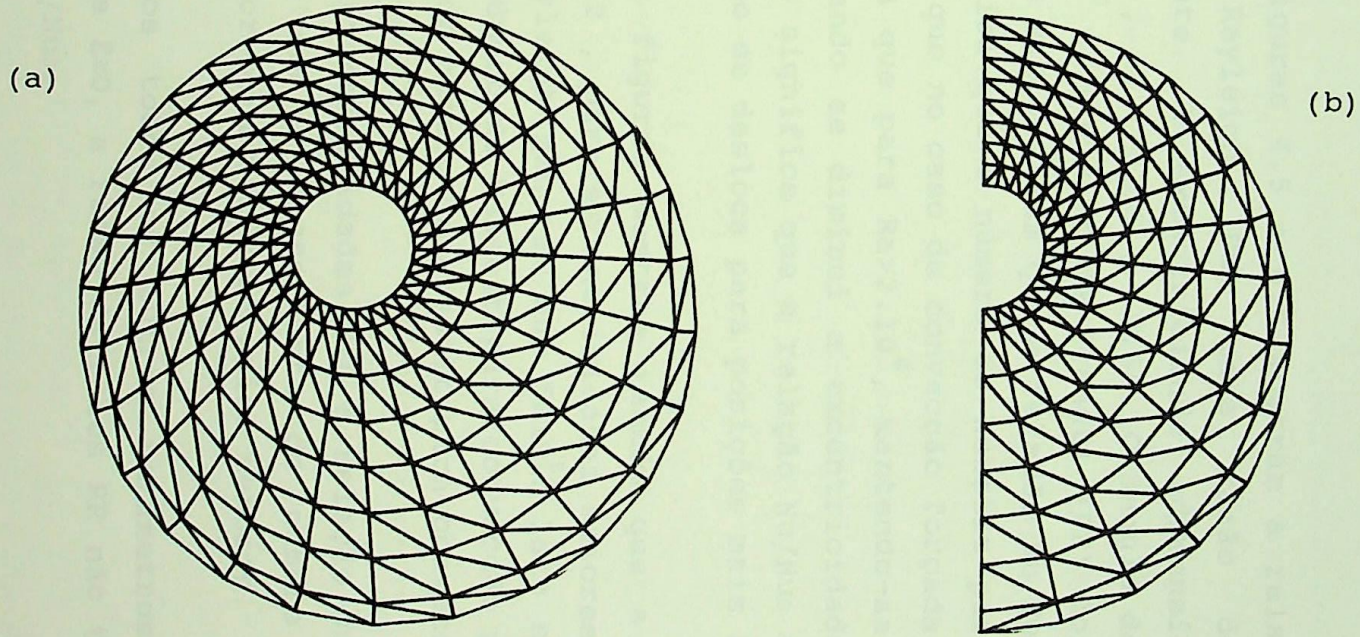


Figura 4.4 - Malhas típicas de elementos finitos utilizadas no presente trabalho. (a) Malha para geometria com $\alpha \neq 0^0$, (b) Malha para geometria com $\alpha = 0^0$.

Esta tabela mostra que Nu_o e $(fRe)_o$ dependem da razão de raios (RR), do número de Prandtl e do valor absoluto da excentricidade (E).

Observa-se que $(fRe)_o$ é maior para razão de raios maiores, exceto para E=0 e Nu_o é sempre maior para razão de raios maiores para uma dada excentricidade.

As figuras 4.5 e 4.6 mostram a relação Nu/Nu_o versus o número de Rayleigh (Ra) para razão de raios 3 e 5, respectivamente. A excentricidade adimensional (E) varia de -0,25, -0,50 , 0, 0,25 , 0,50. O ângulo de inclinação (α) foi mantido em 0° e o número de Prandtl (Pr) foi fixado em 0,7. As figuras 4.5 e 4.6 mostram que a relação Nu/Nu_o é sempre maior que 1, o que indica que o número de Nusselt para convecção mista é sempre maior que no caso de convecção forçada pura. Estas figuras mostram ainda que para $Ra>2.10^4$, mantendo-se fixado o número de Rayleigh, quando se diminui a excentricidade, a relação Nu/Nu_o aumenta. Isto significa que a relação Nu/Nu_o aumenta a medida que o tubo interno se desloca para posições mais baixas.

Estas figuras mostram também que a relação Nu/Nu_o não ultrapassa 1,2 , para excentricidades maiores ou iguais a 0,25 e número de Rayleigh menores que $5x10^5$. Isto significa que nestas situações o número de Nusselt para convecção mista não ultrapassa 20% do valor do número de Nusselt para convecção forçada pura.

Para excentricidades E<0 a relação Nu/Nu_o tem um aumento significativo com o crescimento do número de Rayleigh. Este aumento é maior para razão de raios menores.

Fixados todos os outros parâmetros e considerando a excentricidade $E\geq 0$, a razão de raios RR não tem muita influência na relação Nu/Nu_o.

Nas figuras 4.7 e 4.8 são apresentados Nu versus o número de Rayleigh considerando, respectivamente, os mesmos parâmetros das figuras 4.5 e 4.6.

As figuras 4.7 e 4.8 mostram que os maiores valores do

número de Nusselt ocorrem para número de Rayleigh $Ra>10^5$ quando a excentricidade E=-0,25 e para $Ra<10^5$ quando a excentricidade E=0.

Apesar disto, as figuras 4.5 e 4.6 mostram que a relação Nu/Nu_0 é máxima quando a excentricidade E=-0,50.

As figuras 4.7 e 4.8 mostram ainda que para excentricidade E>0 o número de Rayleigh quase não influencia o número de Nusselt.

Quando o número de Rayleigh é pequeno ($\leq 10^4$) o efeito convectivo é pequeno sendo predominante o efeito condutivo.Isto justifica o fato das curvas do número de Nusselt versus o número de Rayleigh para excentricidade 0,50 e -0,50 ou 0,25 e -0,25 tenderem a um mesmo valor quando $Ra\leq 10^4$.

Das figuras 4.5 a 4.8 se verifica que para E≤0 as maiores relações Nu/Nu_0 ocorrem para razões de raios menores. Entretanto os maiores valores do número de Nusselt(Nu) ocorrem para razões de raios maiores.

As figuras 4.9 e 4.10 mostram a relação Nu/Nu_0 e o número de Nusselt Nu, respectivamente, versus a excentricidade E para número de Rayleigh variando de 0 a 3.10^5, número de Prandtl Pr=0,7, ângulo de inclinação $\alpha=0^0$ e razão de raios RR=3 e 5.

As figuras 4.9 e 4.10 reforçam as afirmações feitas anteriormente, sendo possível a comparação entre as duas razões de raios.

As figuras 4.11 e 4.12 mostram a relação $fRe/(fRe)_0$ versus o número de Rayleigh, com os mesmos parâmetros das figuras anteriores. A figura 4.11 mostra que para RR=3 quando se fixa o número de Rayleigh, a relação $fRe/(fRe)_0$ tem valor máximo para E= -0,5 e valor mínimo para E=0. A figura 4.12 mostra que para RR=5 em toda faixa de número de Rayleigh calculados, a relação $fRe/(fRe)_0$ é maior para E= -0,50 e menor para E= 0,25.

Pelas figuras 4.11 e 4.12 pode-se notar que o aumento em $fRe/(fRe)_0$ é substancialmente menor que o correspondente aumento

de Nu/Nuo. Por exemplo, para RR=5, $Ra=10^5$ e E=-0,50 a relação Nu/Nuo=2,0 e $fRe/(fRe)_0=1,15$.

As figuras 4.13 e 4.14 apresentam fRe versus o número de Rayleigh. Verifica-se que fRe tem máximo valor para E=0 e valor mínimo para E=0,50 para ambas as razões de raios.

Pelas figuras 4.13 e 4.14 o valor de fRe para número de Rayleigh fixo diminui a medida que a excentricidade aumenta em valor absoluto.

A quantidade fRe indica a influência do escoamento secundário sobre o escoamento axial.

A relação $fRe/(fRe)_0$ é maior para razão de raios menores, exceto para E=0. Ao contrário, fRe é maior para razão de raios maiores, exceto para E=0. A justificativa disto é que para razão de raios menores o escoamento secundário é mais forte que para razão de raios maiores. No caso concêntrico(E=0), quando a razão de raios é pequena o duto anular parece um longo canal fino onde o escoamento axial é controlado pela tensão de cisalhamento. Portanto, um forte escoamento secundário é incapaz de apreciável alteração no perfil de velocidade axial. Para o caso excêntrico o mesmo não ocorre e o perfil de velocidade axial é alterado pelo escoamento secundário.

As figuras 4.15 e 4.16 mostram a relação $fRe/(fRe)_0$ e fRe, respectivamente, versus a excentricidade E para número de Rayleigh variando de 0 a 3.10^5, número de Prandtl Pr=0,7, ângulo de inclinação $\alpha=0^o$ e razão de raios RR=3 e 5.

Pelas figuras 4.15 e 4.16 podem ser verificadas as afirmações feitas acima, pois há a possibilidade de comparação entre as duas razões de raios.

A figura 4.17 mostra a relação R versus o número de Rayleigh, sendo que a relação R representa o acréscimo percentual do número de Nusselt em relação ao fator de atrito.

$$R = \frac{\dfrac{Nu-Nu_o}{Nu_o}}{\dfrac{fRe-(fRe)_o}{(fRe)_o}} \quad (\%) \qquad (4.10)$$

A figura 4.17 mostra que para excentricidades negativas a relação R aumenta quando o número de Rayleigh aumenta e o inverso ocorre para excentricidades E≥0.

As figuras 4.18 a 4.21 mostram as distribuições da temperatura adimensional(θ), função corrente(ψ) e velocidade axial adimensional(W) em função dos diversos parâmetros envolvidos. Nos casos onde o ângulo de inclinação α é igual a zero, existe simetria do escoamento com relação ao eixo vertical. Neste caso estão representados numa mesma figura o campo da função corrente à esquerda e o campo da temperatura adimensional à direita. Nestas figuras são apresentados logo abaixo das distribuições os valores correspondentes de ψ, θ e W. A convenção usada é a seguinte: logo após ψ apresenta-se entre parenteses o valor mínimo de ψ, seguido do valor máximo de ψ e por último o incremento de ψ. Sequência semelhante é apresentada para θ e W. Devido as condições de contorno, a velocidade axial adimensional e a função corrente são nulas junto ao contorno, a temperatura adimensional θ é nula no tubo interno e devido ao isolamento do tubo externo as isotermas são normais à superfície do tubo externo.

Na figura 4.18 são mostrados os efeitos do número de Rayleigh(Ra) e excentricidade adimensional (E) nas distribuições de ψ, θ e W.

Para E=0,25 e $Ra=3.10^4$ existe um escoamento secundário fraco com dois vórtices simétricos. O vórtice superior gira no sentido anti-horário e o inferior no sentido horário. O vórtice inferior não aparece na figura devido a pequena intensidade do escoamento na região inferior do tubo externo. O campo de velocidade W é pouco afetado pelo escoamento secundário.

Para E=0,25 e Ra=3.10^5 o escoamento secundário é mais intenso devido ao aumento do número de Rayleigh. Continuam a existir dois vórtices simétricos, porém com intensidades maiores. Os campos de velocidade (W) e temperatura (θ) não são muito alterados com o aumento do número de Rayleigh.

Para E=-0,25 e Ra=3.10^4 o escoamento secundário tem uma única célula de convecção simétrica girando no sentido anti-horário. O escoamento secundário é mais forte do que para o mesmo número de Rayleigh e E=0,25. A velocidade axial máxima sempre ocorre na região de maior espaço entre as paredes do canal.

Para E=-0,25 e Ra=3.10^5 novamente existe intensificação do escoamento secundário devido ao aumento do número de Rayleigh. Nesta situação os campos de velocidade e temperatura são bastante alterados. Na região inferior do tubo externo as temperaturas são pequenas. O campo de velocidade tem dois pontos de velocidade máxima.

Na figura 4.19 são mostrados os efeitos da razão de raios(RR) e da excentricidade(E). Como visto anteriormente o escoamento secundário é mais forte quando o tubo interno está em posições mais baixas, ou seja, a excentricidade é menor que zero. Nota-se que para razão de raios menores a intensidade do escoamento secundário é maior.

A figura 4.20 mostra os efeitos do número de Rayleigh(Ra) e do ângulo de inclinação(α). Verifica-se que quando os tubos estão inclinados há mais de uma célula de convecção. O escoamento secundário é mais forte quando $\alpha \neq 0^o$. Os campos de velocidade W e temperatura θ são pouco afetados pelo aumento do número de Rayleigh. Quando se aumenta o número de Rayleigh aparecem mais células de convecção e o escoamento secundário é mais intenso.

Na figura 4.21 são mostrados os efeitos da excentricidade(E) e do ângulo de inclinação(α). Do mesmo modo que para $\alpha=0^o$, o escoamento secundário é mais forte quando a excentricidade é negativa para $\alpha=30^o$, ou seja, quando o tubo interno se desloca para posições mais baixas. Quando o tubo está

inclinado o escoamento secundário é mais intenso, os campos de temperatura e velocidade são pouco afetados pelo escoamento secundário quando comparados com $\alpha=0^{o}$.

Na tabela 4.5 são apresentados alguns valores de Nu e fRe em função do número de Rayleigh para razão de raios RR=5 e ângulo $\alpha=30^{o}$.

Ra	E = 0,25		E = -0,25	
	Nuo	$(fRe)_o$	Nuo	$(fRe)_o$
0	6,48	86,17	6,48	86,17
10^4	6,60	86,26	6,65	86,35
3.10^4	6,90	86,62	7,62	87,55
10^5	7,44	88,40	9,91	90,66
3.10^5	8,02	92,34	12,20	93,63

Tabela 4.5 - Valores de Nu e fRe em função do número de Rayleigh para o caso 1 considerando RR=5, Pr=0,7 e $\alpha=30^{o}$.

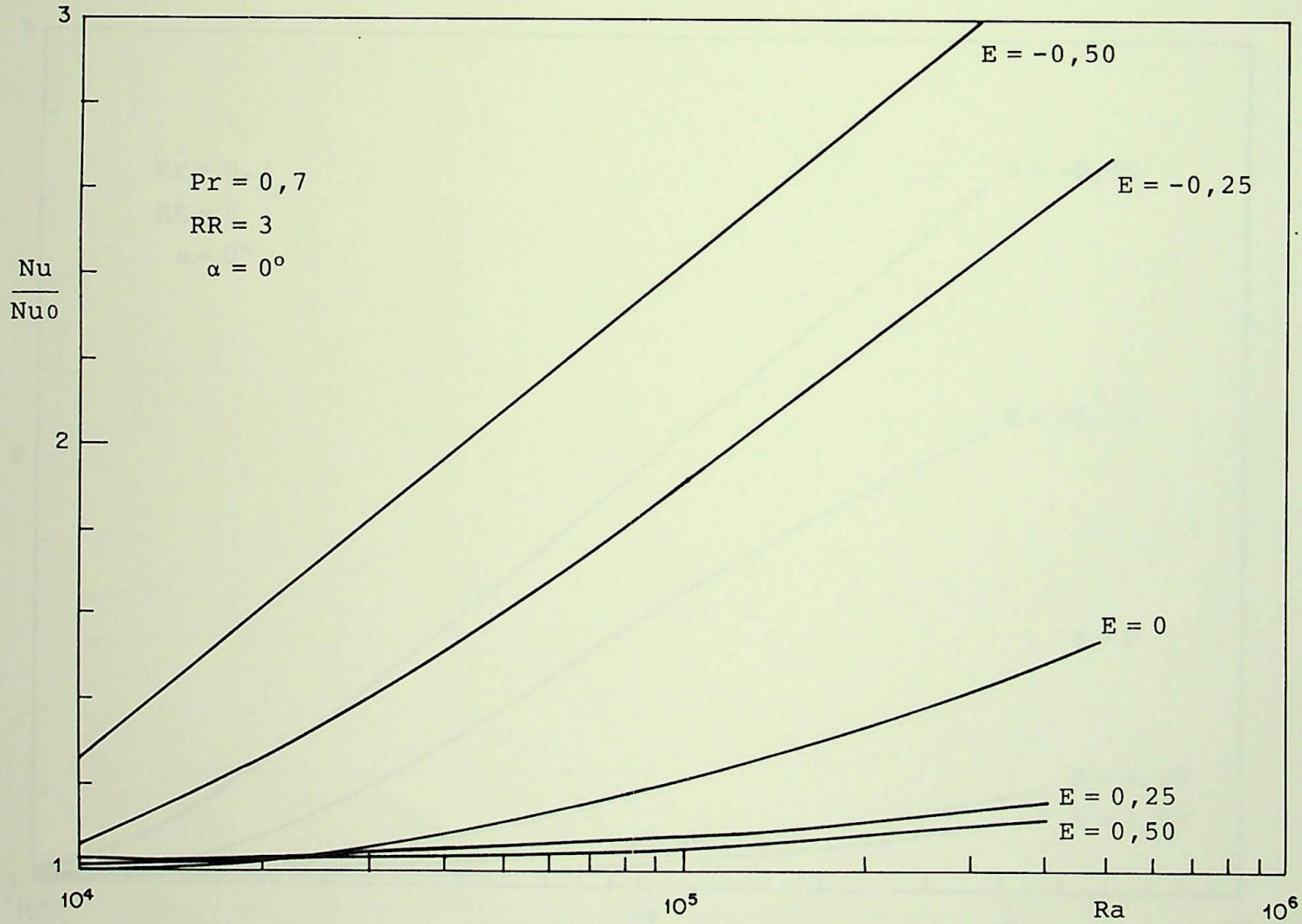


Figura 4.5 - Relação Nu/Nuo versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^0$.

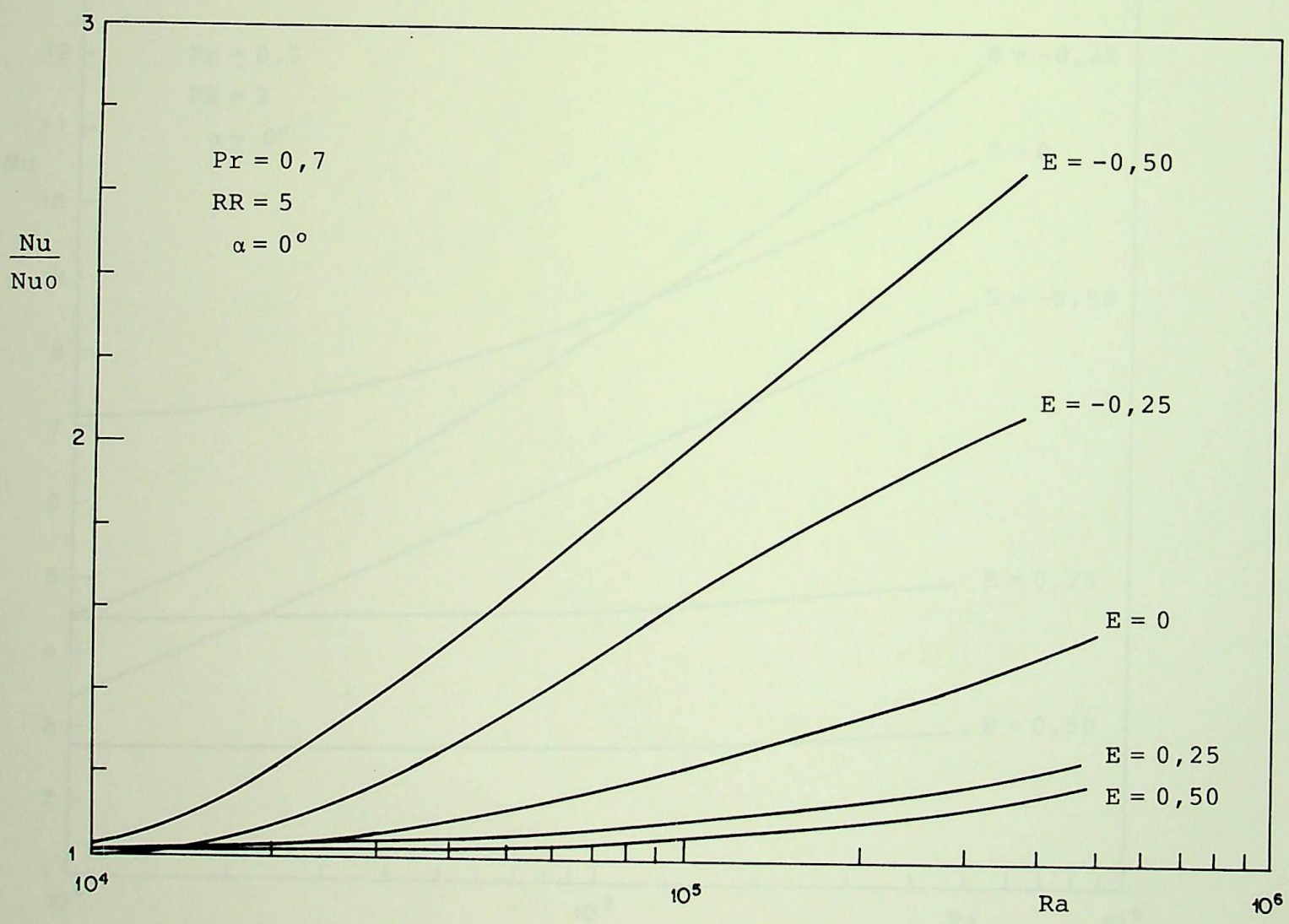


Figura 4.6 - Relação Nu/Nuo versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$.

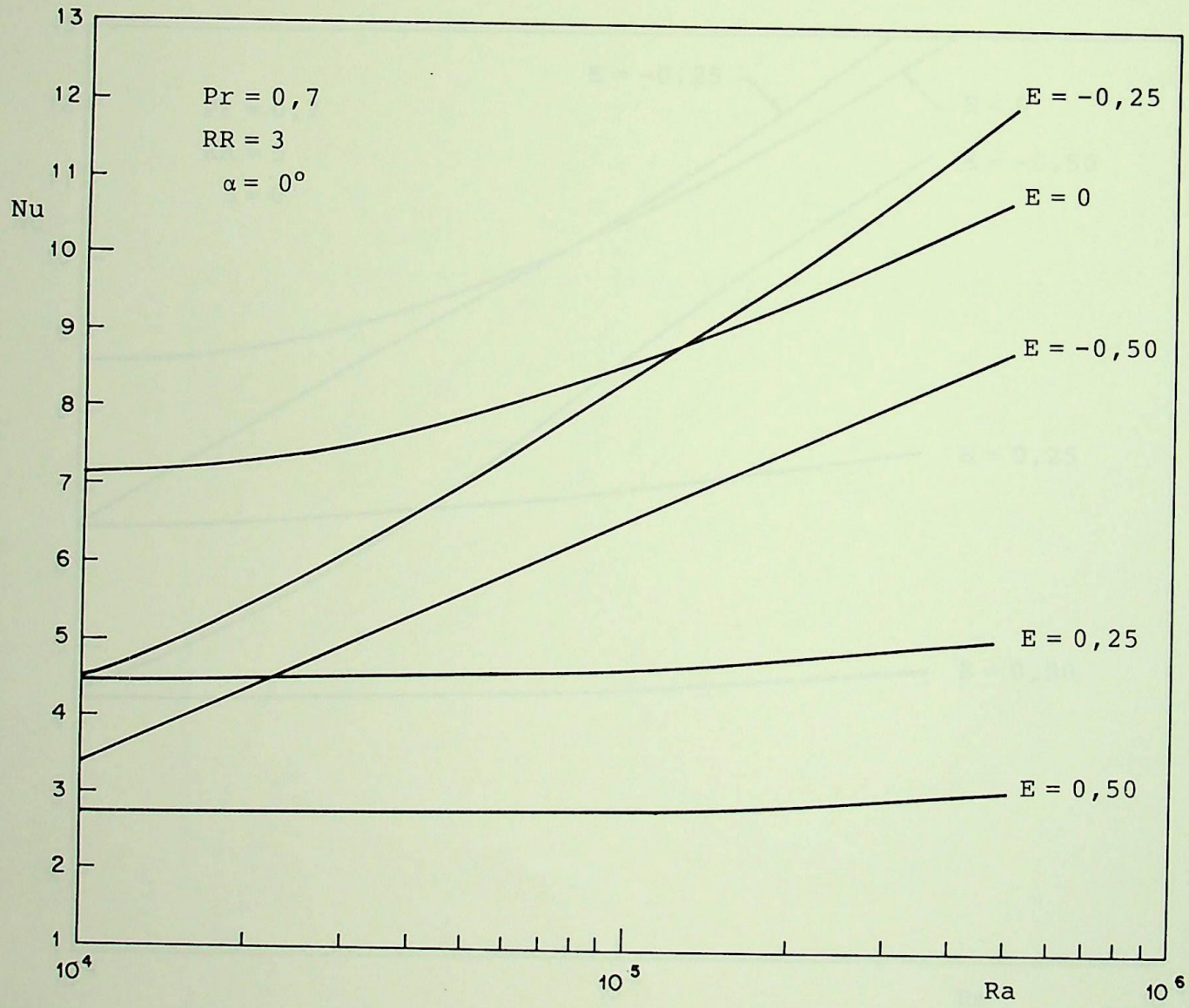


Figura 4.7 - Nu versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^{o}$.

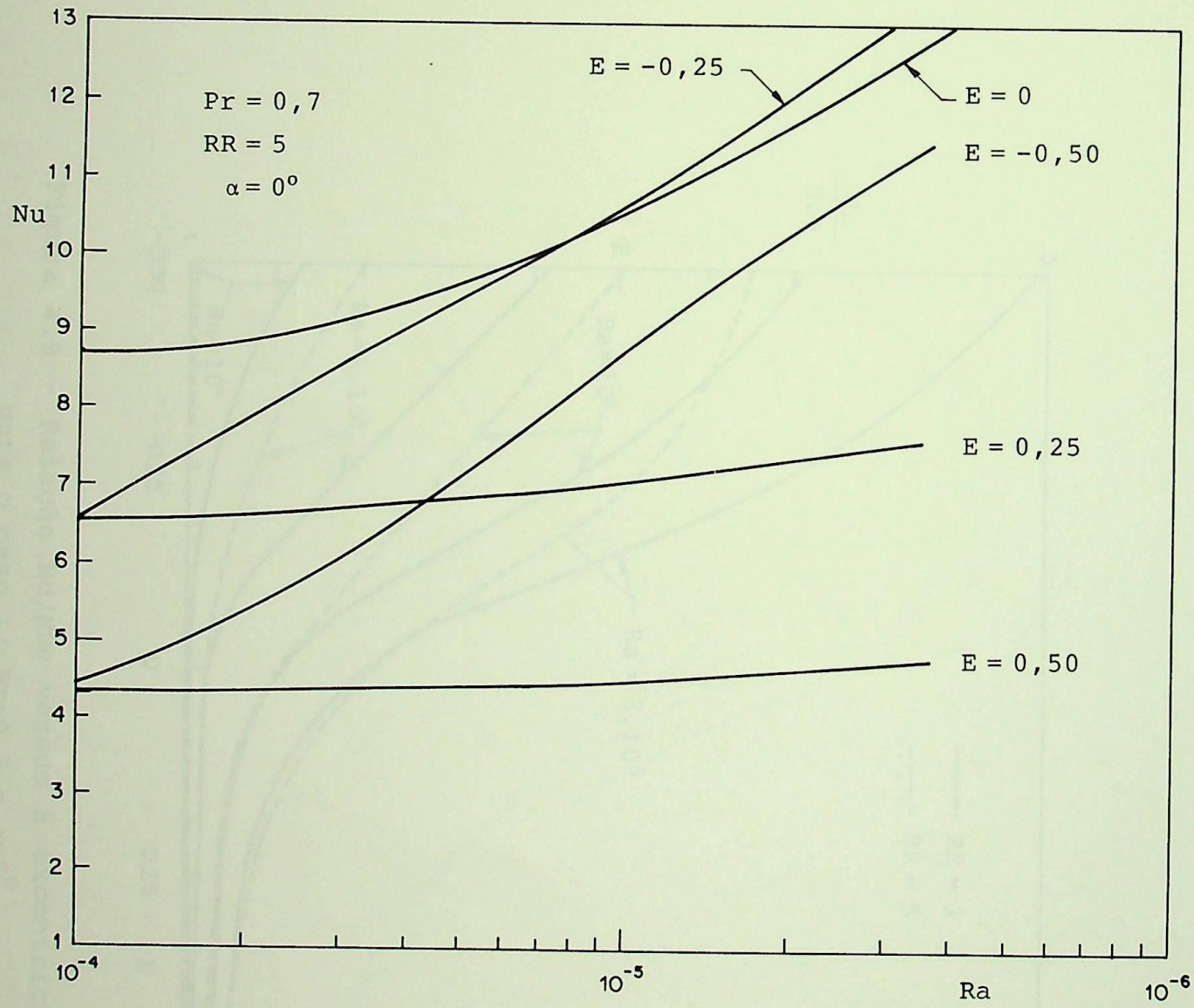


Figura 4.8 - Nu versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$.

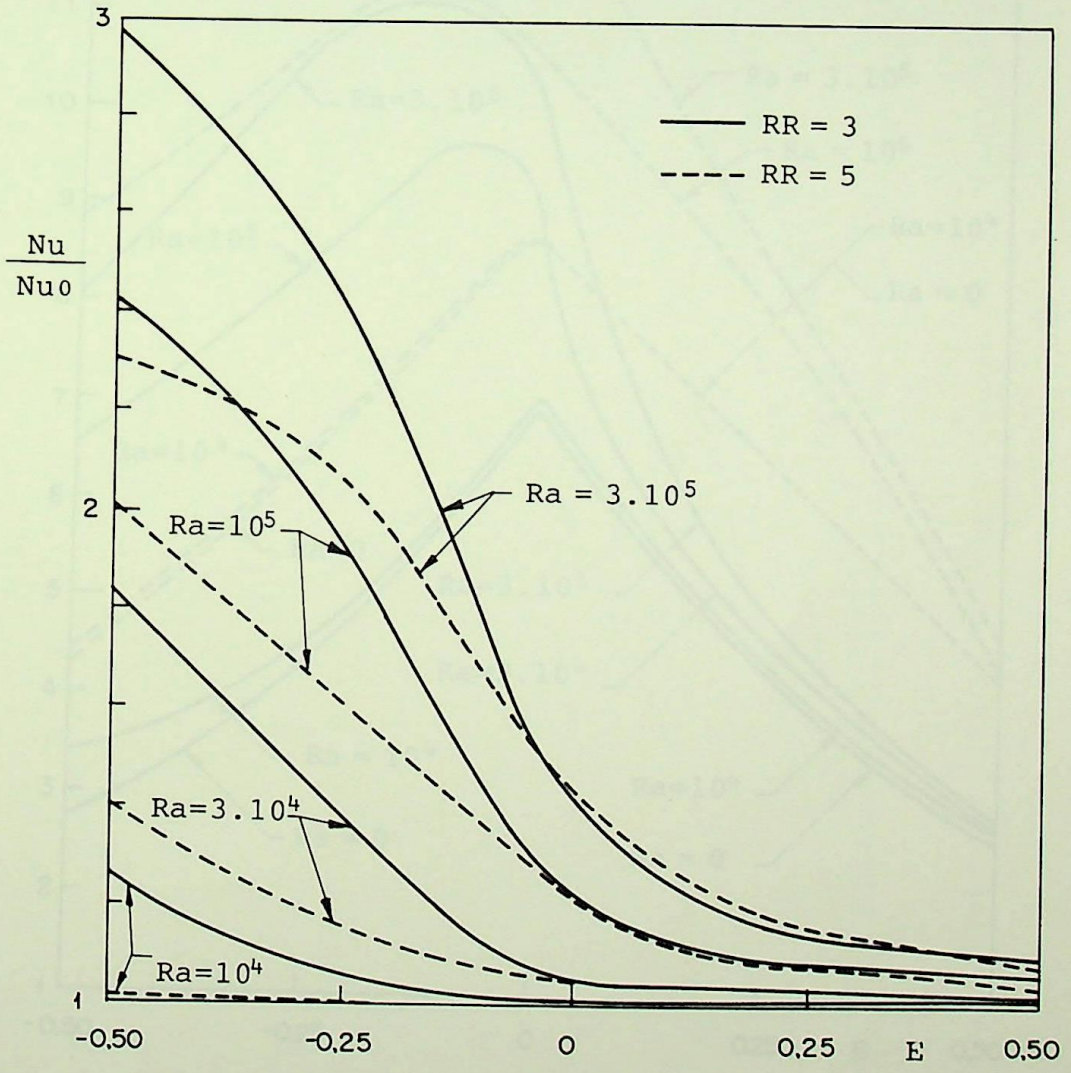


Figura 4.9 - Relação Nu/Nuo versus a excentricidade (E) para o caso 1; Pr=0,7 e $\alpha=0^{o}$.

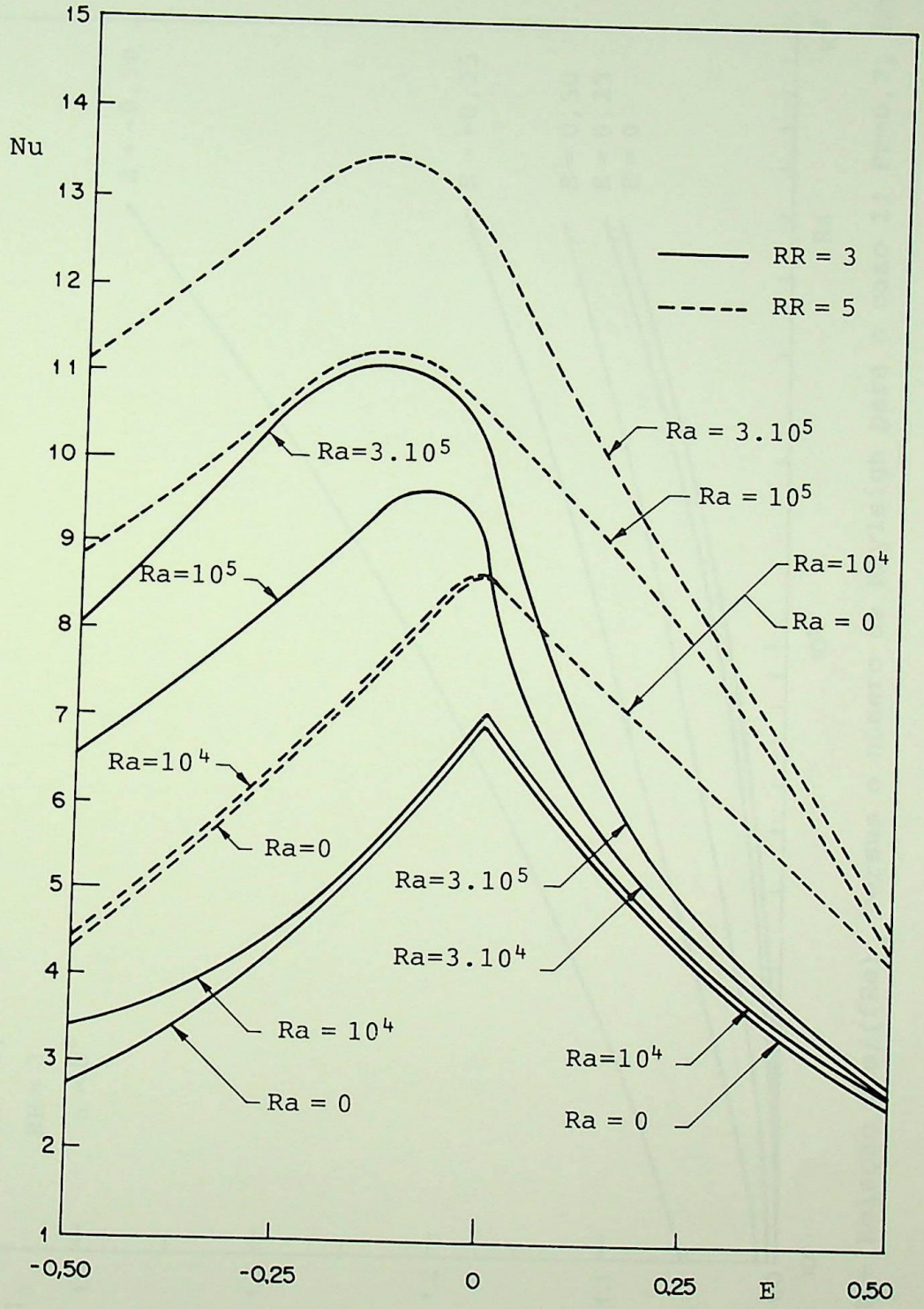


Figura 4.10 - Nu versus a excentricidade (E) para o caso 1; Pr=0,7 e $\alpha=0^{0}$.

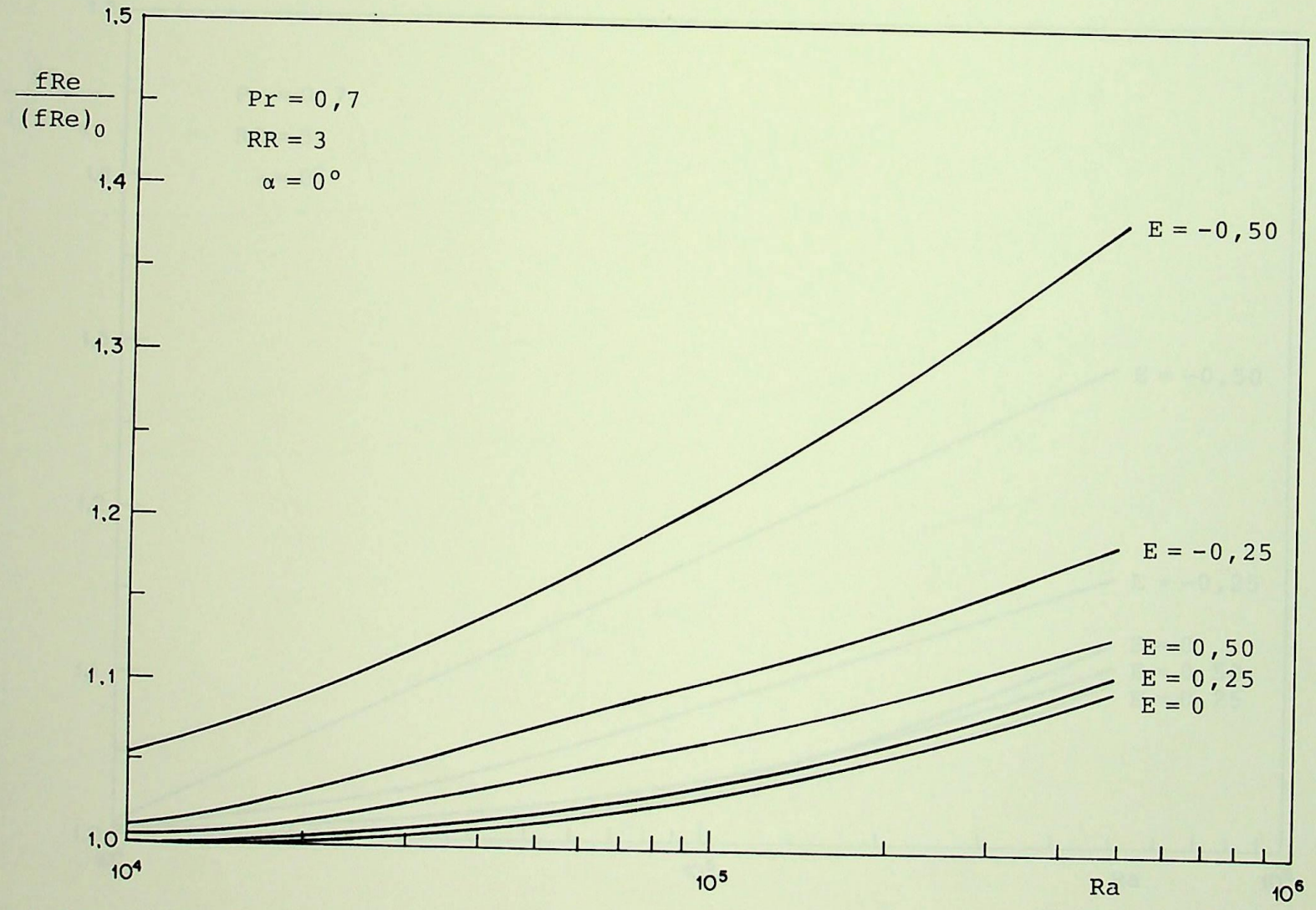


Figura 4.11 - Relação $fRe/(fRe)_0$ versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^0$.

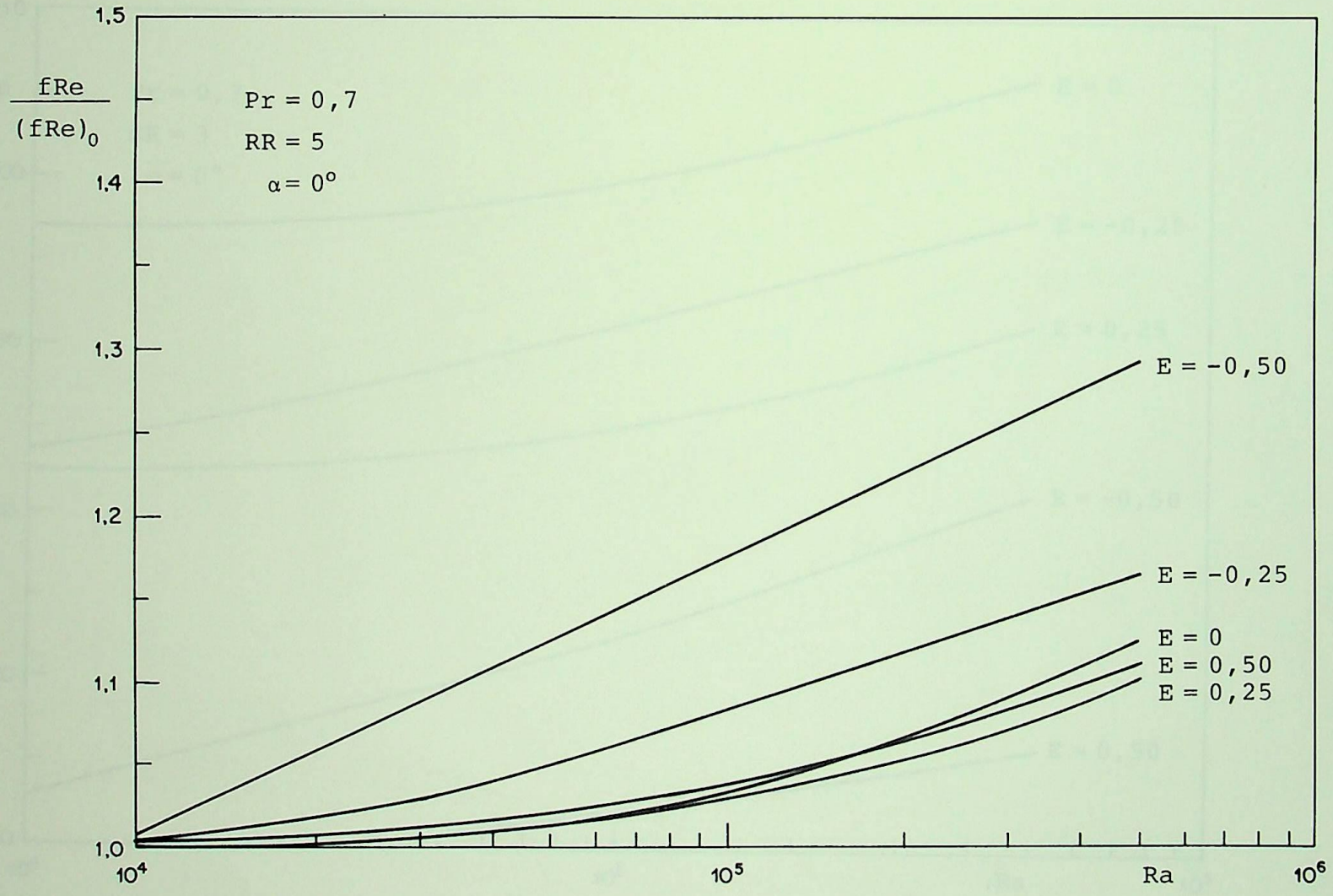


Figura 4.12 - Relação $fRe/(fRe)_0$ versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$.

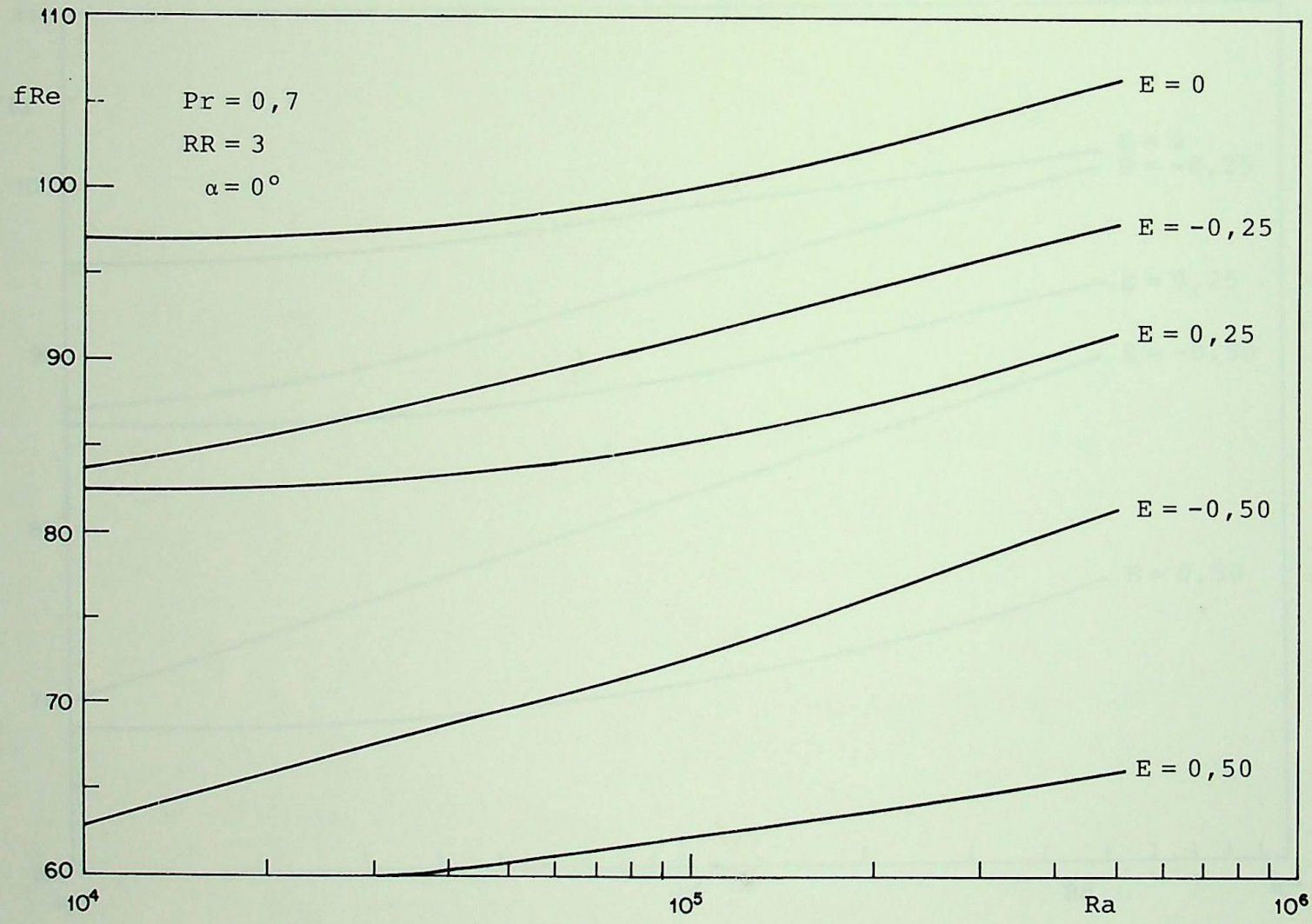


Figura 4.13 - fRe versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^0$.

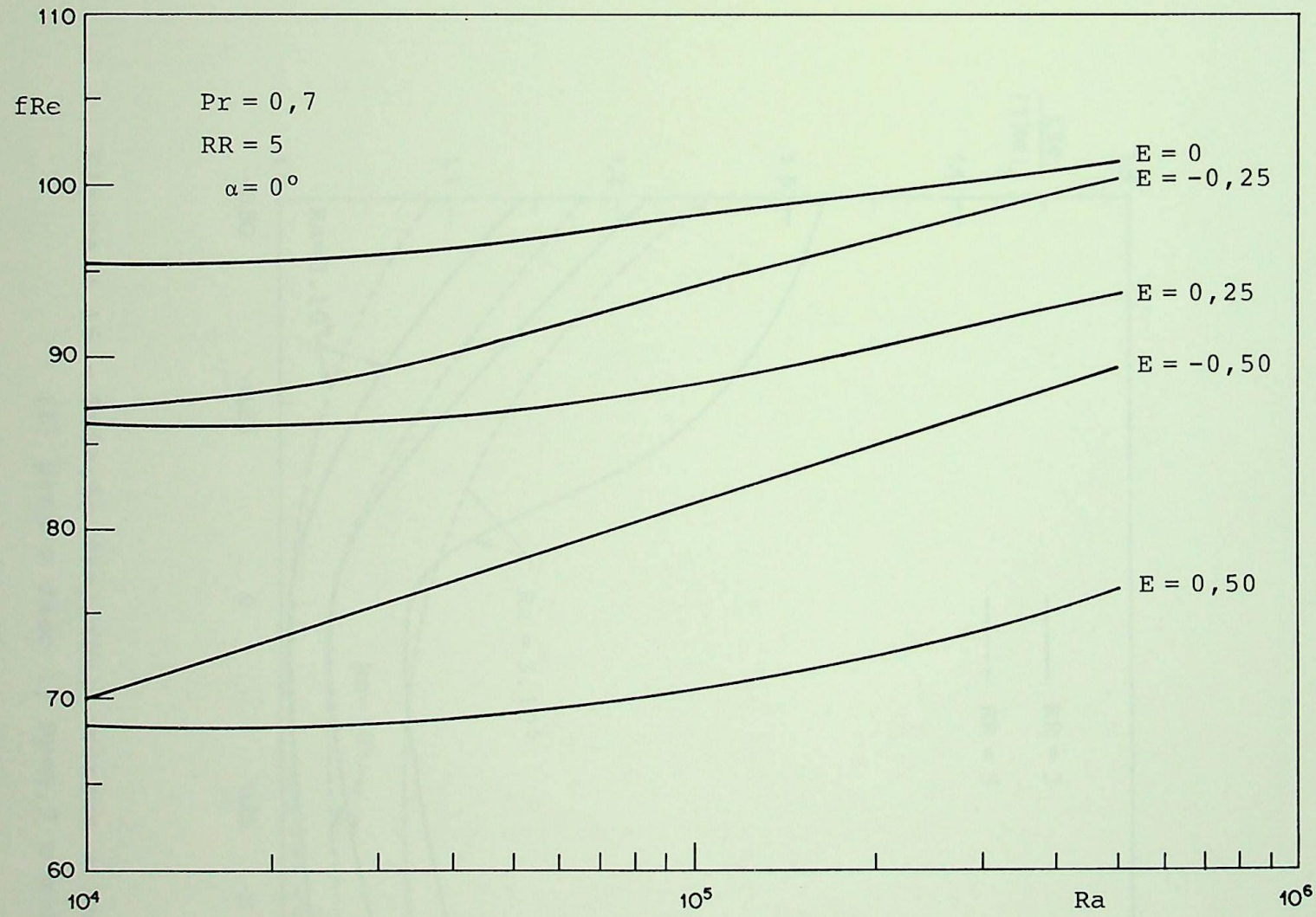


Figura 4.14 - fRe versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$.

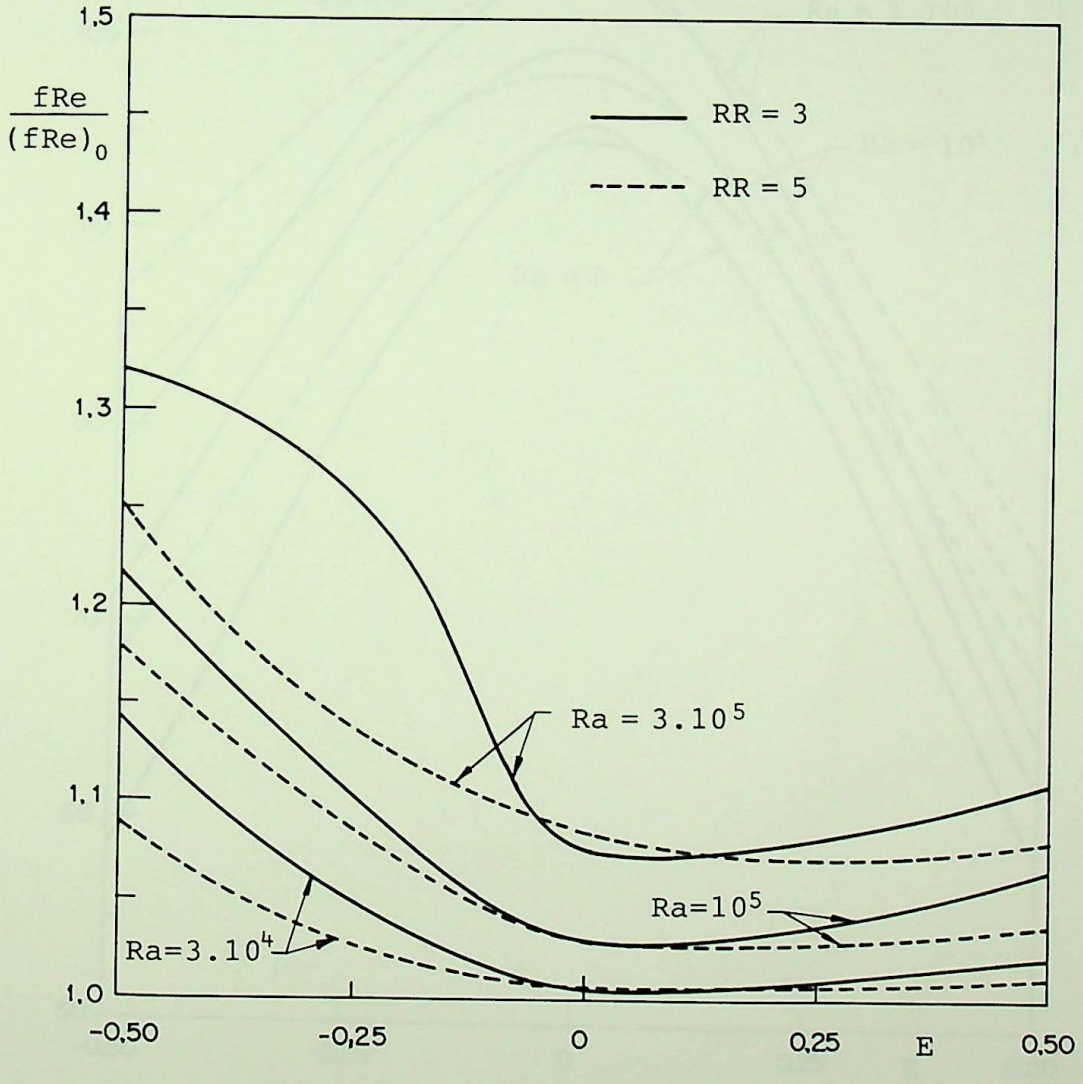


Figura 4.15 - Relação $fRe/(fRe)_0$ versus a excentricidade (E) para o caso 1; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$.

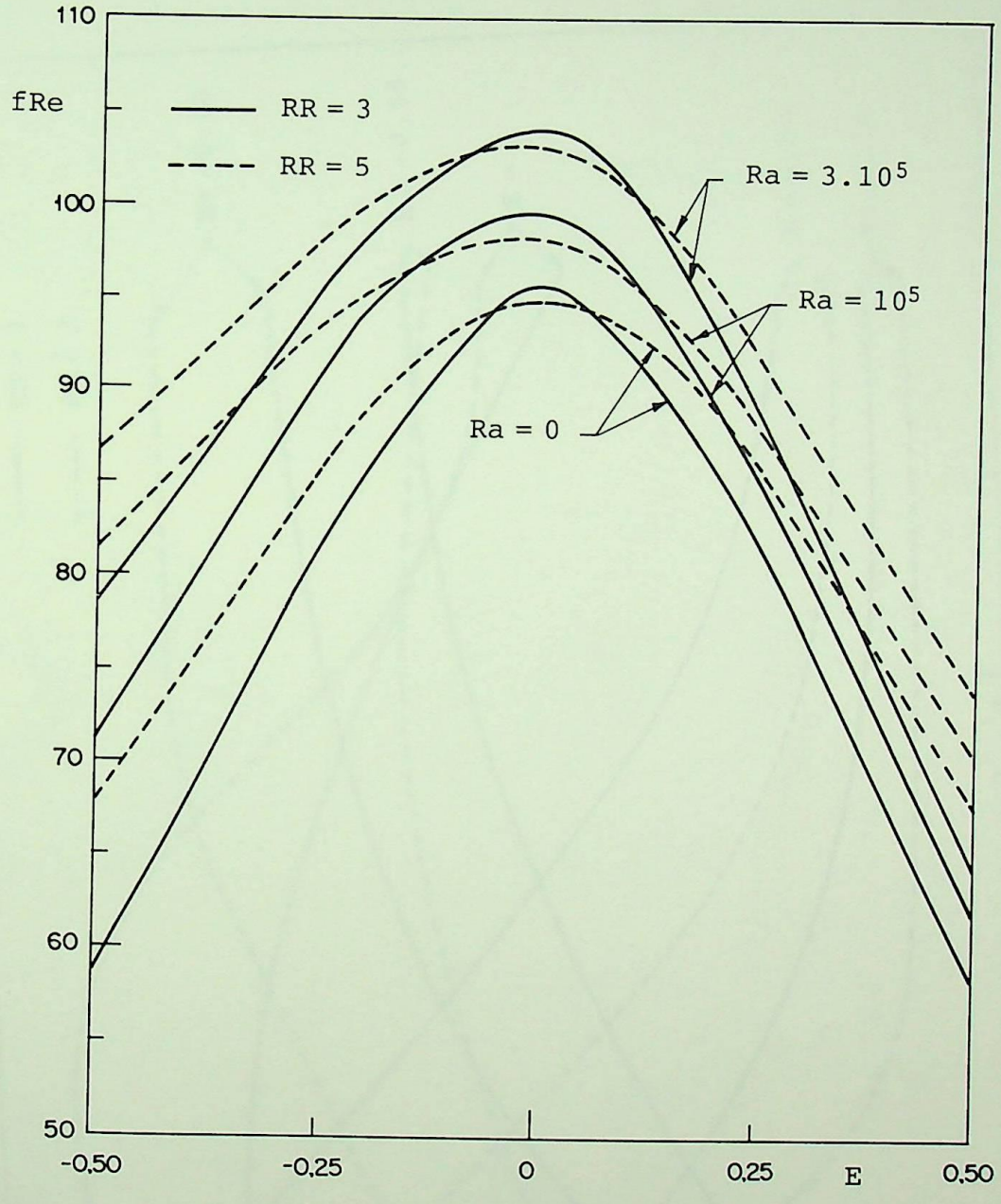


Figura 4.16 - fRe versus a excentricidade (E) para o caso 1; Pr=0,7 e $\alpha=0^{0}$.

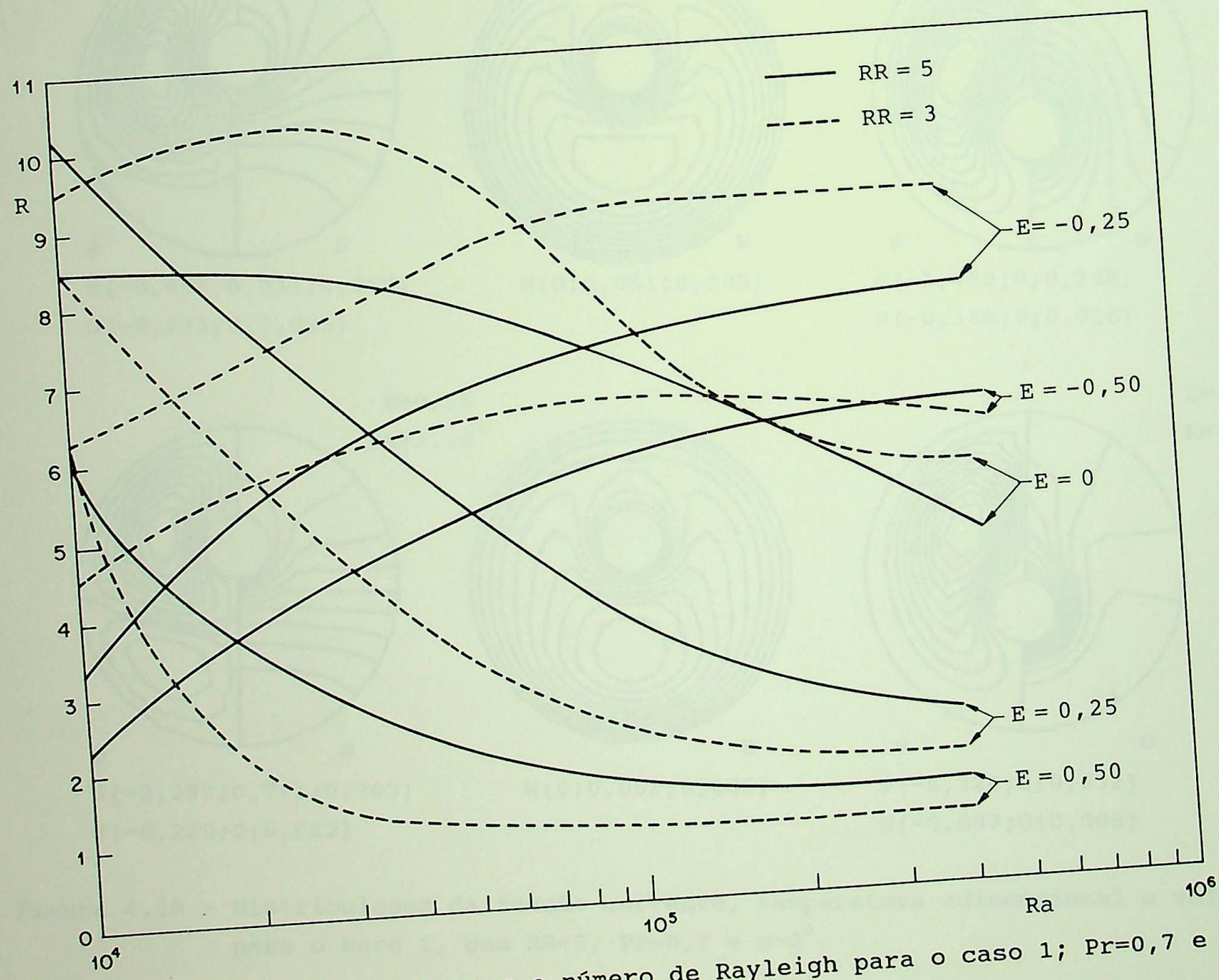


Figura 4.17 - Relação R versus o número de Rayleigh para o caso 1; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$.

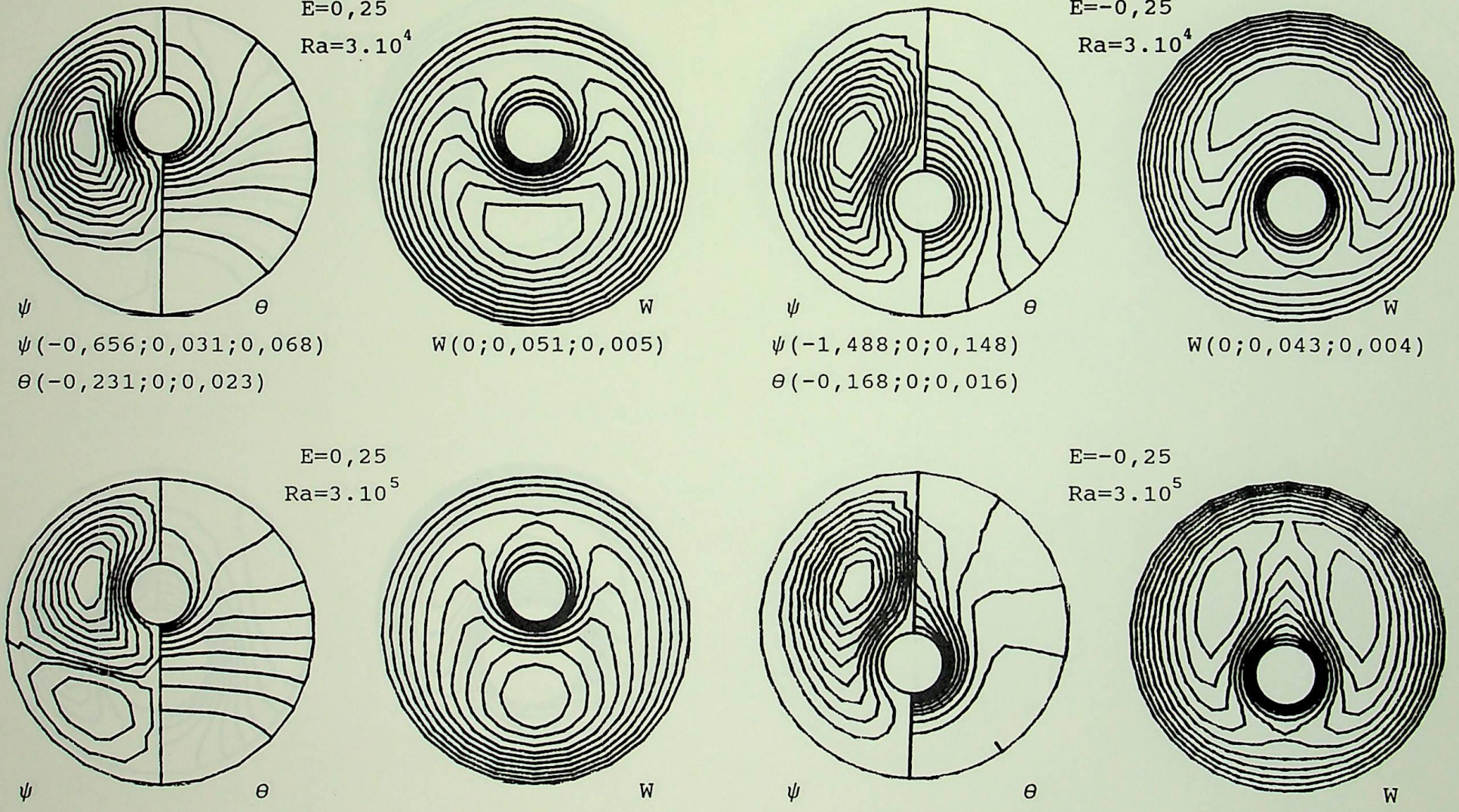


Figura 4.18 - Distribuições da função corrente, temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 1, com RR=5, Pr=0,7 e $\alpha=0^{o}$.

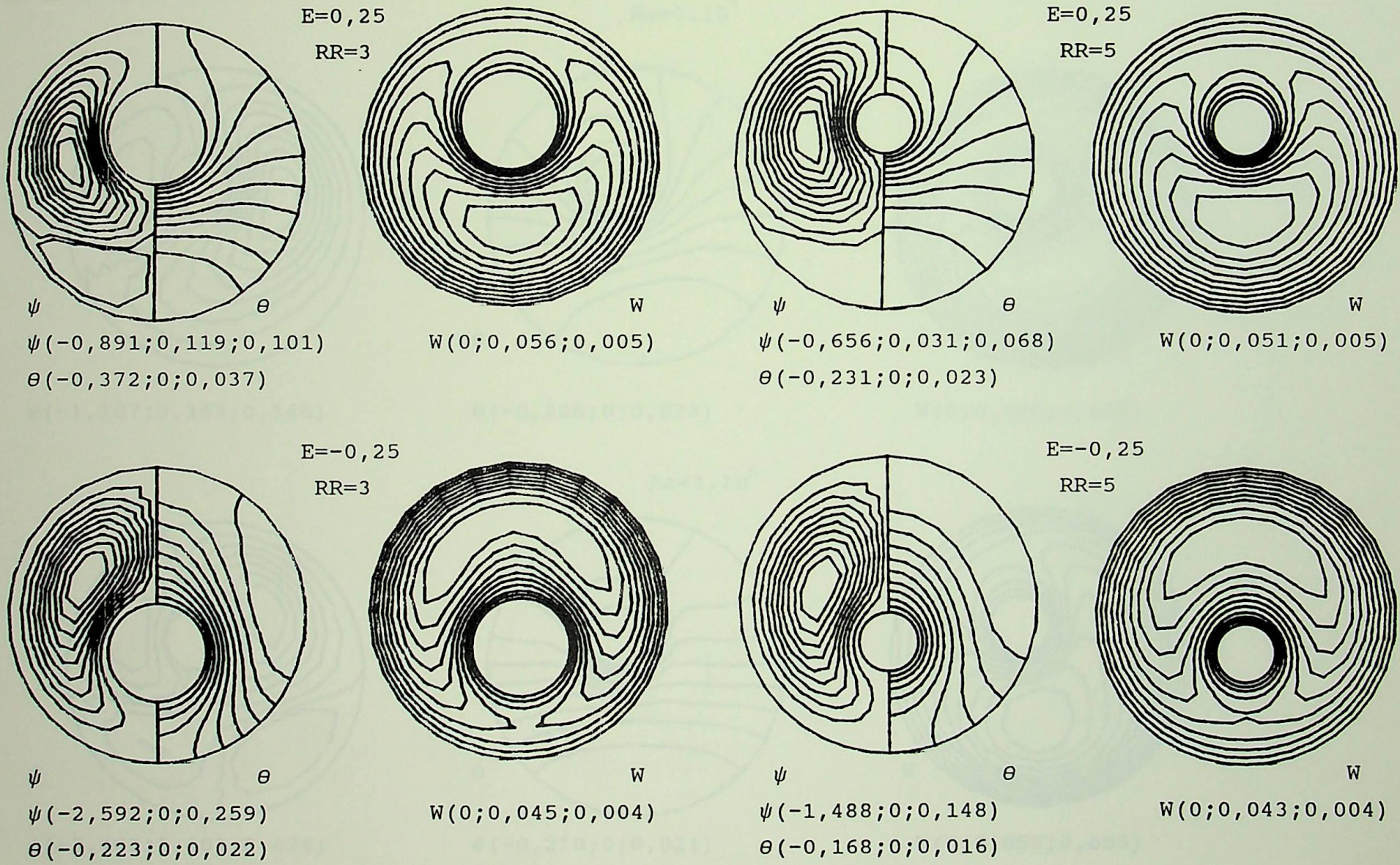
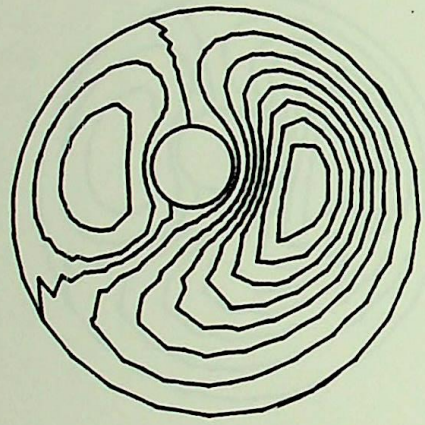
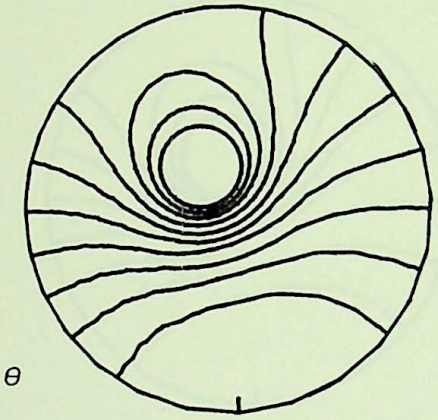


Figura 4.19 - Distribuições da função corrente, temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 1, com $Ra=3.10^4$, $Pr=0,7$ e $\alpha=0^o$.

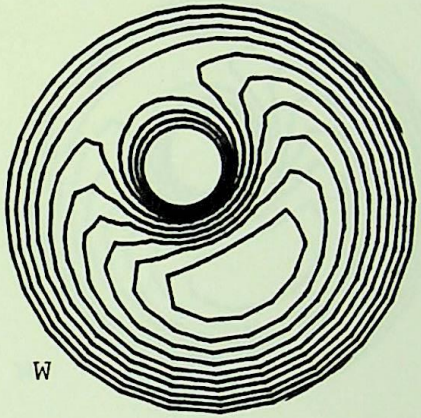
$Ra=3.10^4$



ψ



θ



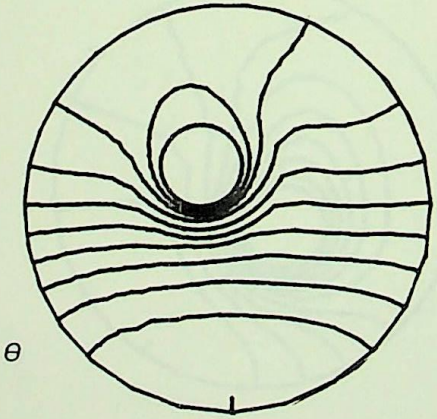
W

$\psi(-1,107;0,353;0,146)$ $\theta(-0,226;0;0,022)$ W(0;0,050;0,005)

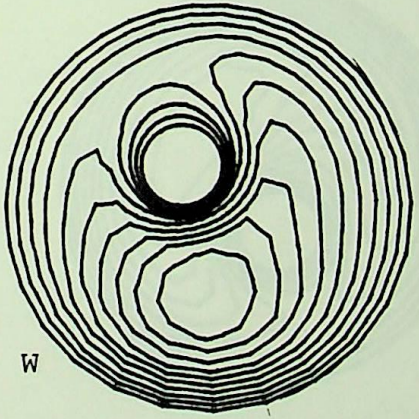
$Ra=3.10^5$



ψ



θ

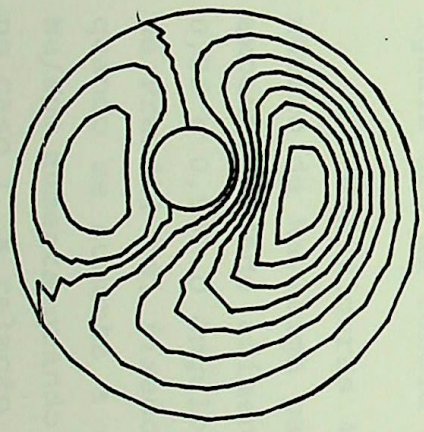


W

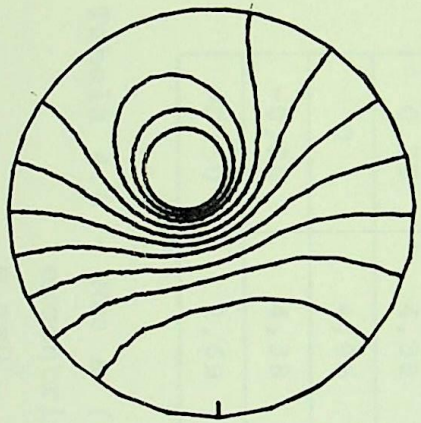
$\psi(-3,161;1,601;0,476)$ $\theta(-0,210;0;0,021)$ W(0;0,050;0,005)

Figura 4.20 - Distribuições da função corrente,temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 1, com RR=5, E=0,25, Pr=0,7 e $\alpha=30^0$.

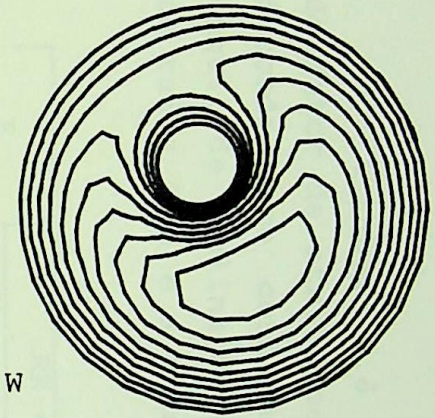
E=0,25



ψ



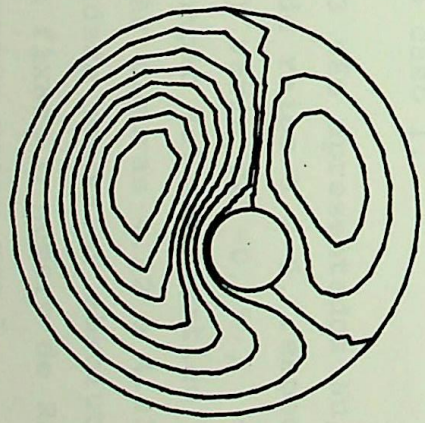
θ



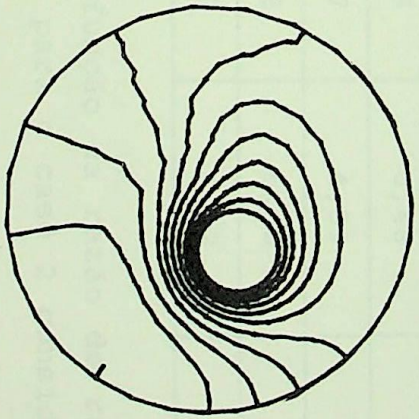
W

$\psi(-1,107;0,353;0,146)$ $\theta(-0,226;0;0,022)$ W(0;0,050;0,005)

E=-0,25



ψ



θ



W

$\psi(-0,534;2,238;0,227)$ $\theta(-0,190;0;0,019)$ W(0;0,047;0,004)

Figura 4.21 - Distribuições da função corrente,temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 1, com RR=5, $Ra=3.10^4$, Pr=0,7 e $\alpha=30^o$.

-CASO 2 : Tubo Externo com Fluxo de Calor Uniforme Axialmente e Temperatura da Parede Uniforme Circunferencialmente e Tubo Interno Isolado

A tabela 4.6 mostra o número de Nusselt(Nuo) e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds$(fRe)_0$ para convecção forçada pura considerando número de Prandtl fixado em 0,7 e ângulo de inclinação 0°. São considerados como parâmetros a razão de raios (RR) e a excentricidade (E).

E	RR = 3		RR = 5	
	Nuo	$(fRe)_0$	Nuo	$(fRe)_0$
0,50	2,69	58,67	4,32	68,22
0,25	4,38	82,48	6,48	85,94
0	4,96	96,87	4,89	95,20
-0,25	4,38	82,48	6,48	85,94
-0,50	2,69	58,67	4,32	68,22

Tabela 4.6 - Nuo e $(fRe)_0$ em função da razão de raios(RR) e da excentricidade(E) para o caso 2 considerando Pr=0,7 e $\alpha=0^o$.

Como $(fRe)_0$ depende apenas da geometria os valores são iguais aos da tabela 4.4 para o caso 1.

Nas figuras 4.22 e 4.23 são apresentados Nu/Nuo versus o número de Rayleigh para razão de raios 3 e 5, respectivamente. A excentricidade adimensional (E) varia de -0,25 , -0,50 , 0 , 0,25 e 0,50. O ângulo de inclinação (α) foi mantido 0° e o número de Prandtl foi fixado em 0,7. As figuras 4.22 e 4.23 mostram que quando se aumenta a excentricidade em valor absoluto, a relação Nu/Nuo aumenta quando se mantém fixado o número de Rayleigh. Como no caso 1, a relação Nu/Nuo é sempre maior que 1.

As figuras 4.24 e 4.25 mostram Nu versus Ra, considerando os mesmos parâmetros das figuras 4.22 e 4.23, respectivamente.

Verifica-se que os valores máximos de Nu são para E=0.

Pelas figuras 4.24 e 4.25 nota-se que o número de Nusselt não é muito afetado pelo valor absoluto da excentricidade.

Como visto anteriormente, as curvas de Nu versus Ra para excentricidade 0,50 e -0,50 ou 0,25 e -0,25 tendem a um mesmo valor quando $Ra \leq 10^4$.

As figuras 4.26 e 4.27 mostram a relação Nu/Nuo e Nu, respectivamente, versus a excentricidade(E) para número de Rayleigh variando de 10^4 a 10^5, número de Prandtl Pr=0,7, ângulo de inclinação $\alpha=0^0$ e razão de raios RR= 3 e 5.

Pela figura 4.26 verifica-se que a relação Nu/Nuo é sempre maior para razão de raios menores, exceto para valores próximos da excentricidade E=0.

Na figura 4.27 é visto que o número de Nusselt(Nu) é sempre maior para razão de raios maiores, exceto em torno de excentricidade E=0 e próximo de número de Rayleigh $Ra=10^4$. Pode ser visto claramente que as curvas são simétricas reforçando a afirmação de que o número de Nusselt não é muito afetado pelo valor absoluto da excentricidade.

Nas figuras 4.28 e 4.29 são mostradas as relações $fRe/(fRe)_0$ versus o número de Rayleigh com os mesmos parâmetros das figuras anteriores. Nota-se que o comportamento é semelhante ao das figuras 4.22 e 4.23, respectivamente.

Como para o número de Nusselt, a relação $fRe/(fRe)_0$ aumenta quando se aumenta a excentricidade em valor absoluto mantendo-se fixo o número de Rayleigh.

Pelas figuras 4.30 e 4.31, que mostram fRe versus Ra, nota-se que o valor máximo de fRe ocorre para E=0, com comportamento semelhante ao de Nu apresentado nas figuras 4.24 e 4.25.

As figuras 4.32 e 4.33 mostram a relação $fRe/(fRe)_0$ e

fRe, respectivamente, versus a excentricidade(E) para número de Rayleigh variando de 10^4 a 3.10^5, número de Prandtl Pr=0,7, ângulo de inclinação α-0° e razão de raios RR=3 e 5.

Pela figura 4.32 verifica-se que para E= -0,50 e 0,50 a relação $fRe/(fRe)_0$ é sempre maior para razão de raios menor. Na faixa entre E= -0,25 e 0,25 e para número de Rayleigh $Ra>10^5$ os valores de $fRe/(fRe)_0$ são menores para razão de raios menor.

Na figura 4.33 é visto que fRe é sempre maior para razão de raios maiores em toda faixa de excentricidade(E) e número de Rayleigh(Ra), exceto para $Ra\leq3.10^4$ e excentricidade próxima de E=0.

A figura 4.34 mostra o fator R, definido pela equação (4.10), versus o número de Rayleigh considerando número de Prandtl Pr=0,7 e ângulo de inclinação α-0°. Como já foi mencionado o fator R representa o acréscimo percentual do número de Nusselt em relação ao fator de atrito.

A figura 4.34 mostra que para razão de raios RR=5 e excentricidade E<0 a relação R cresce quando o número de Rayleigh aumenta e decresce para E≥0 com o aumento do número de Rayleigh. Para razão de raios RR=3 e excentricidade E≠0 a relação R cresce e decresce com o aumento do número de Rayleigh e para E=0 quando Rayleigh aumenta a relação R diminui.

As figuras 4.35 a 4.37 mostram as distribuições da temperatura adimensional(θ), função corrente(ψ) e velocidade axial adimensional(W) em função dos diversos parâmetros envolvidos. Como no caso 1, são adotadas as mesmas convenções descritas anteriormente. Vale observar que a função corrente e a velocidade axial adimensional são iguais a zero no contorno. Como a superfície do tubo interno é isolada as linhas de temperatura são perpendiculares à superfície do tubo interno.

Na figura 4.35 são mostrados os efeitos da excentricidade(E) e do número de Rayleigh(Ra) nas distribuições de ψ, θ e W.

Nota-se que há apenas uma célula de convecção simétrica girando no sentido horário. O escoamento secundário é mais intenso quando se aumenta o número de Rayleigh.

Para E=-0,25 o campo de velocidade é bastante alterado quando se aumenta o número de Rayleigh. O campo de velocidade W tem dois pontos de máximo.

A figura 4.36 mostra os efeitos da razão de raios(RR) e excentricidade(E) nas distribuições de ψ, θ e W.

Para RR=3 e E=-0,25 aparecem duas células de convecção simétricas. A razão de raios não influencia muito as distribuições de ψ, θ e W. Para razão de raios menores o escoamento secundário é mais intenso quando comparados os mesmos parâmetros.

Ao contrário do caso 1, quando a excentricidade é positiva o escoamento secundário é mais intenso, ou seja, neste caso quando o tubo interno se desloca para posições superiores o escoamento secundário é mais intenso.

A figura 4.37 mostra os efeitos do ângulo de inclinação(α) nas distribuições de ψ, θ e W. Verifica-se que o escoamento secundário é mais intenso quando $\alpha=30^{o}$. Nota-se que os campos de temperatura e velocidade não são muito afetados pelo escoamento secundário.

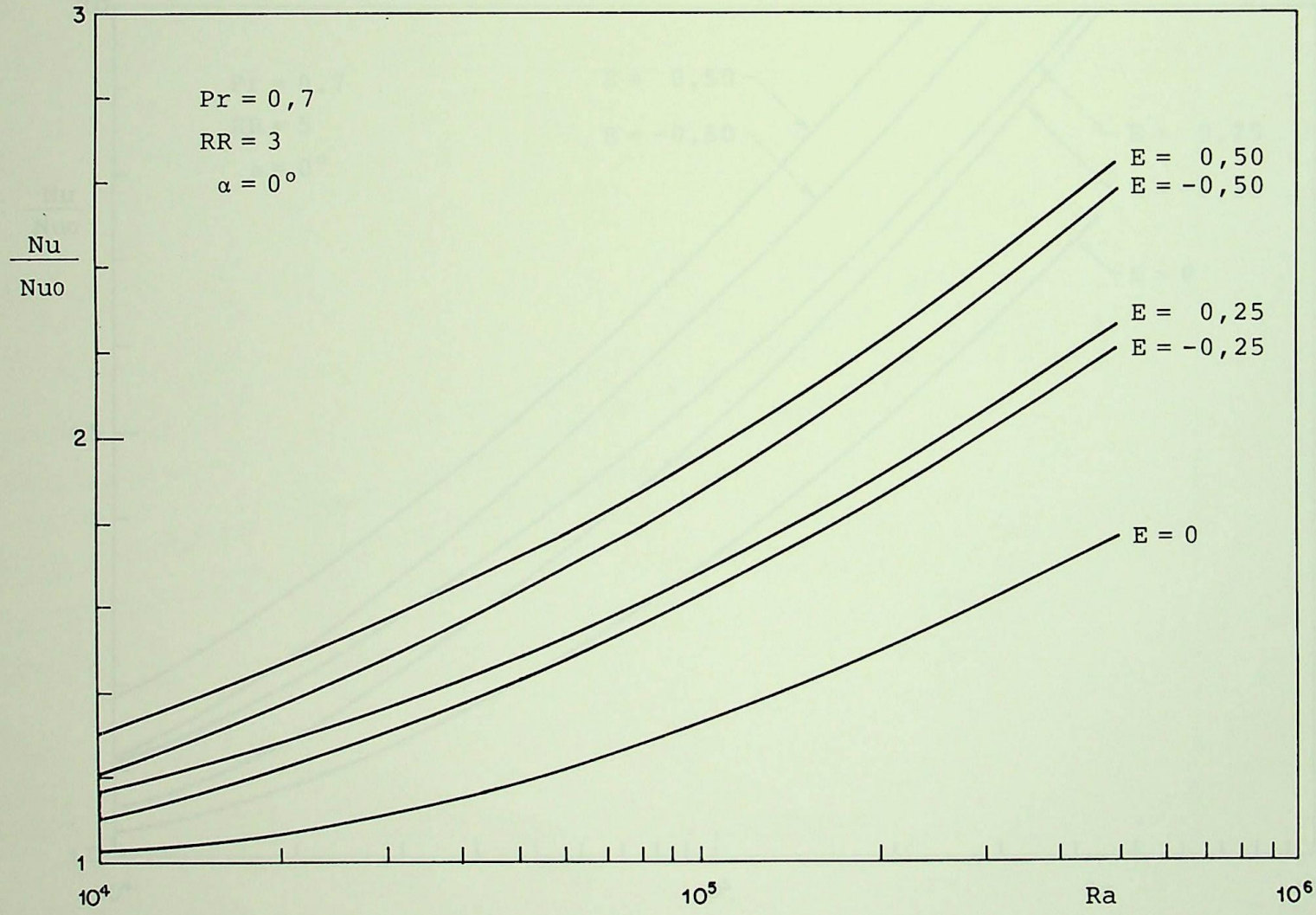


Figura 4.22 - Relação Nu/Nuo versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^{o}$.

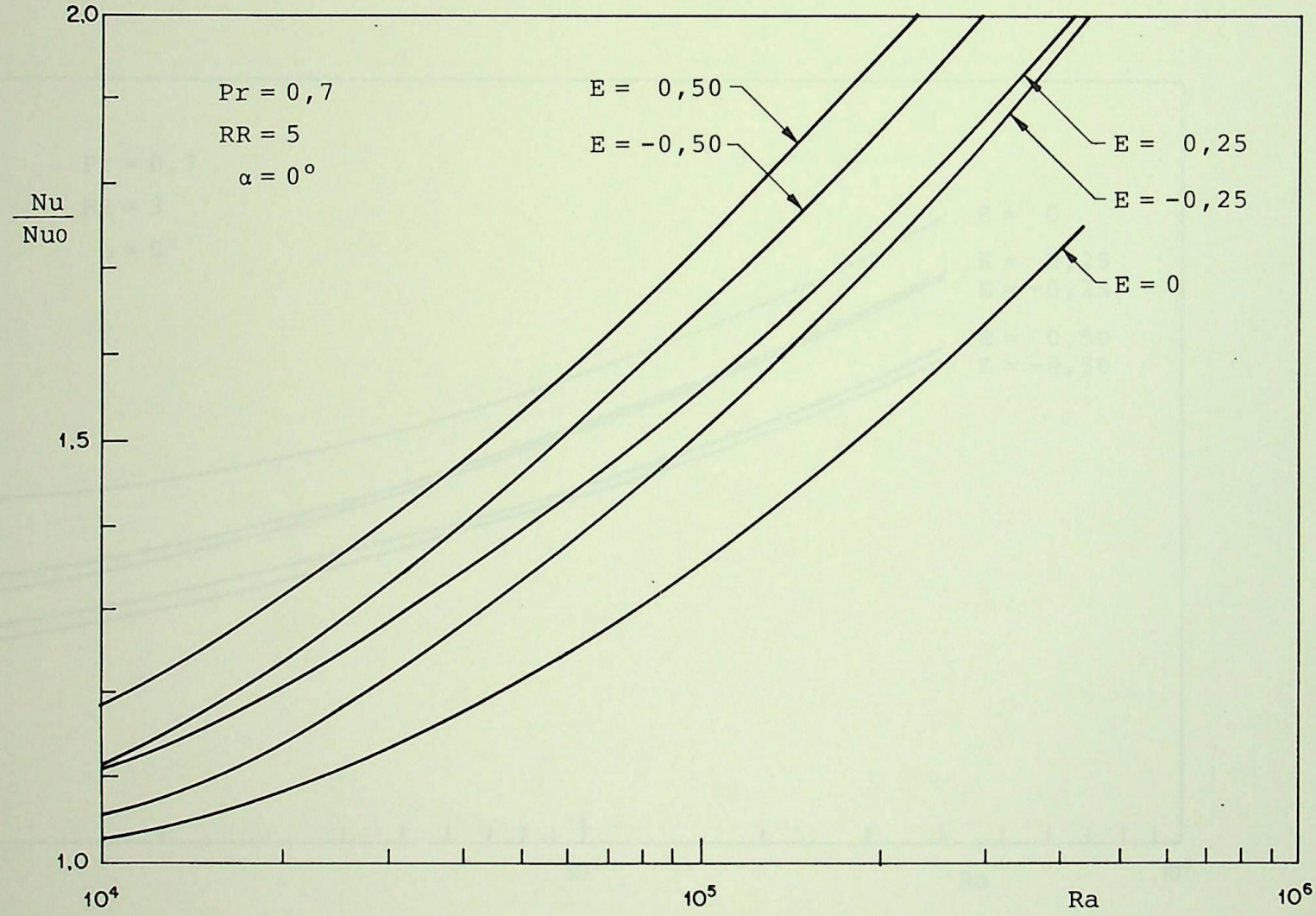


Figura 4.23 - Relação Nu/Nuo versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^{0}$.

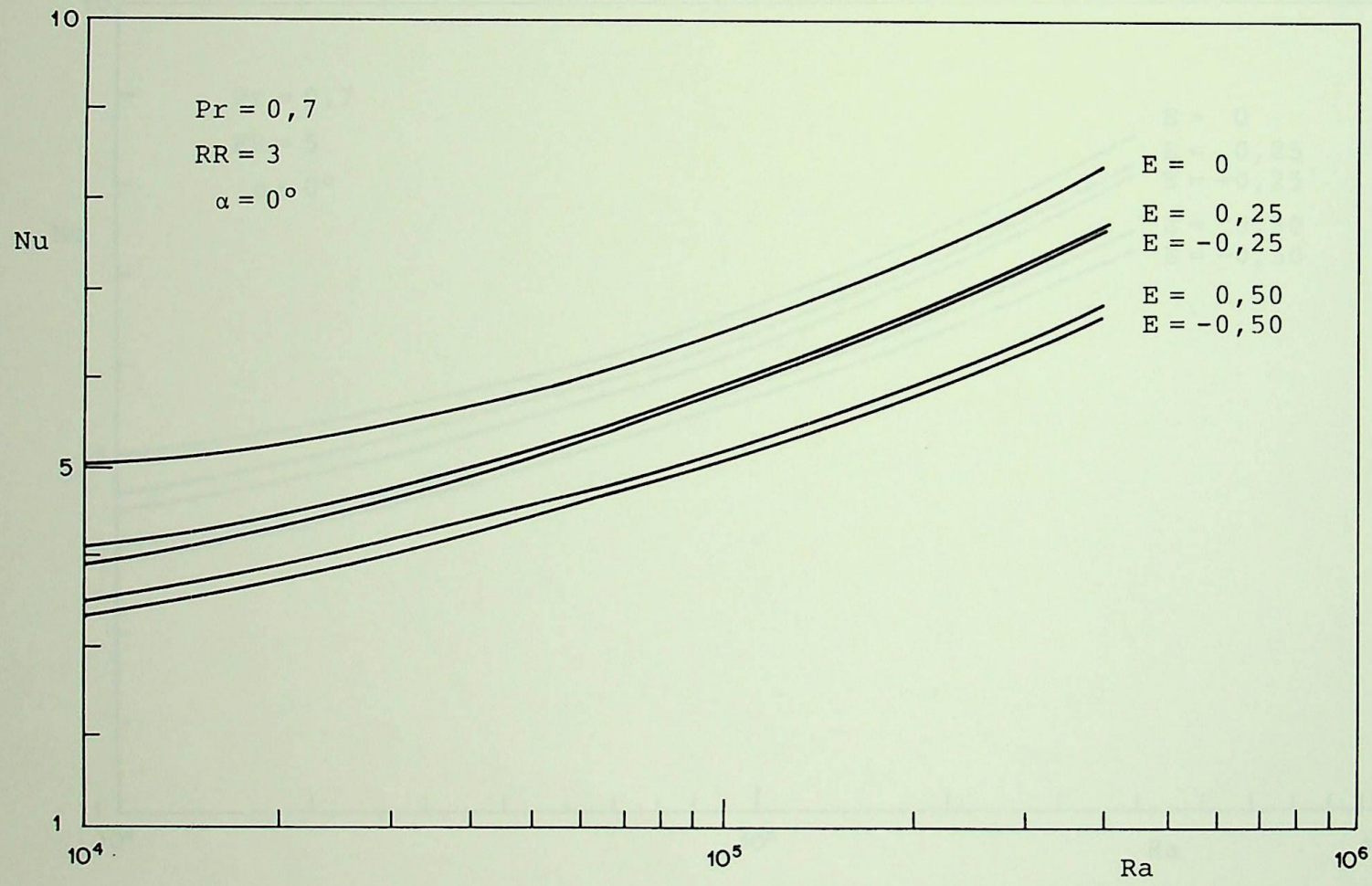


Figura 4.24 - Nu versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^0$.

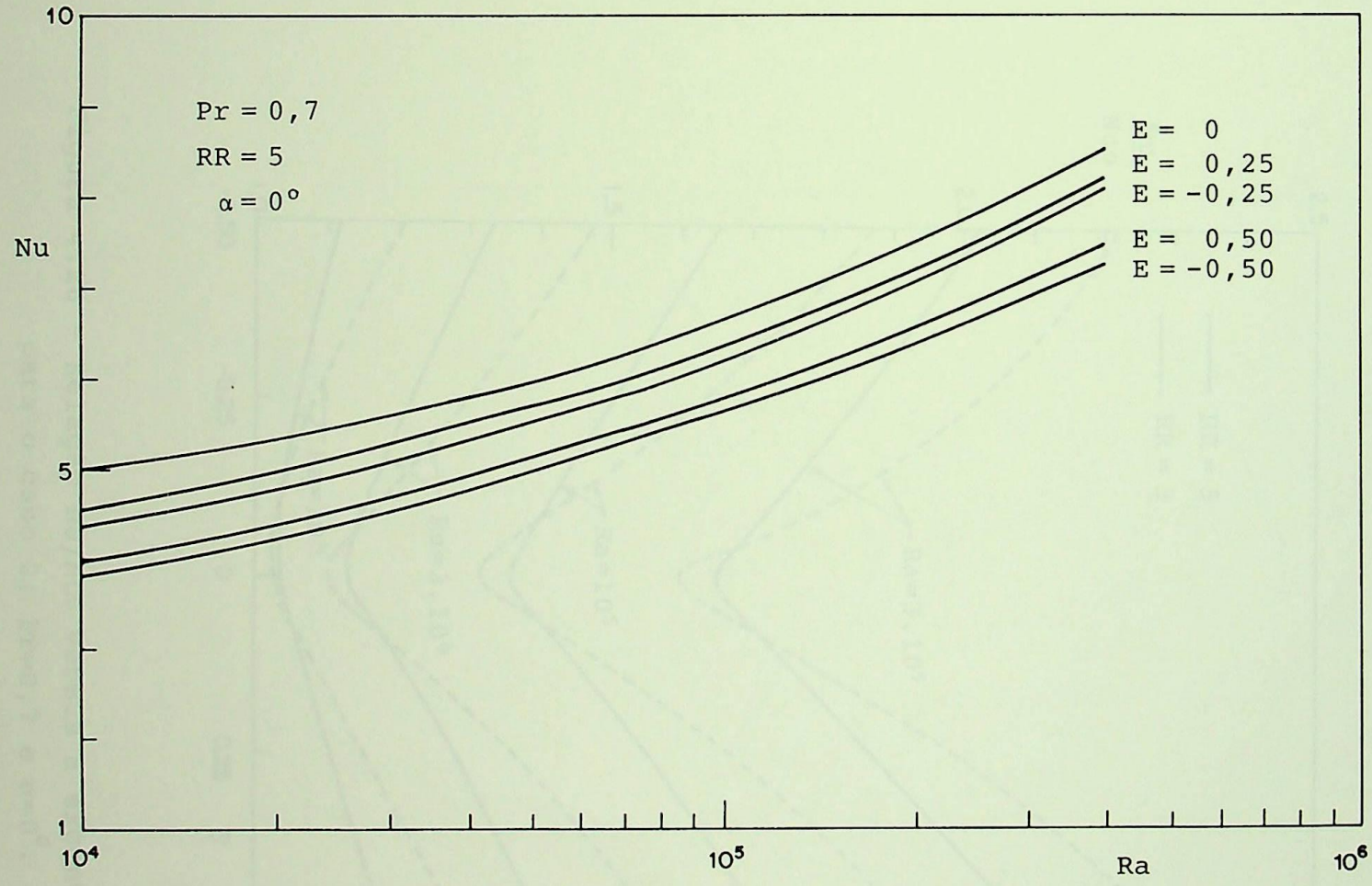


Figura 4.25 - Nu versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$.

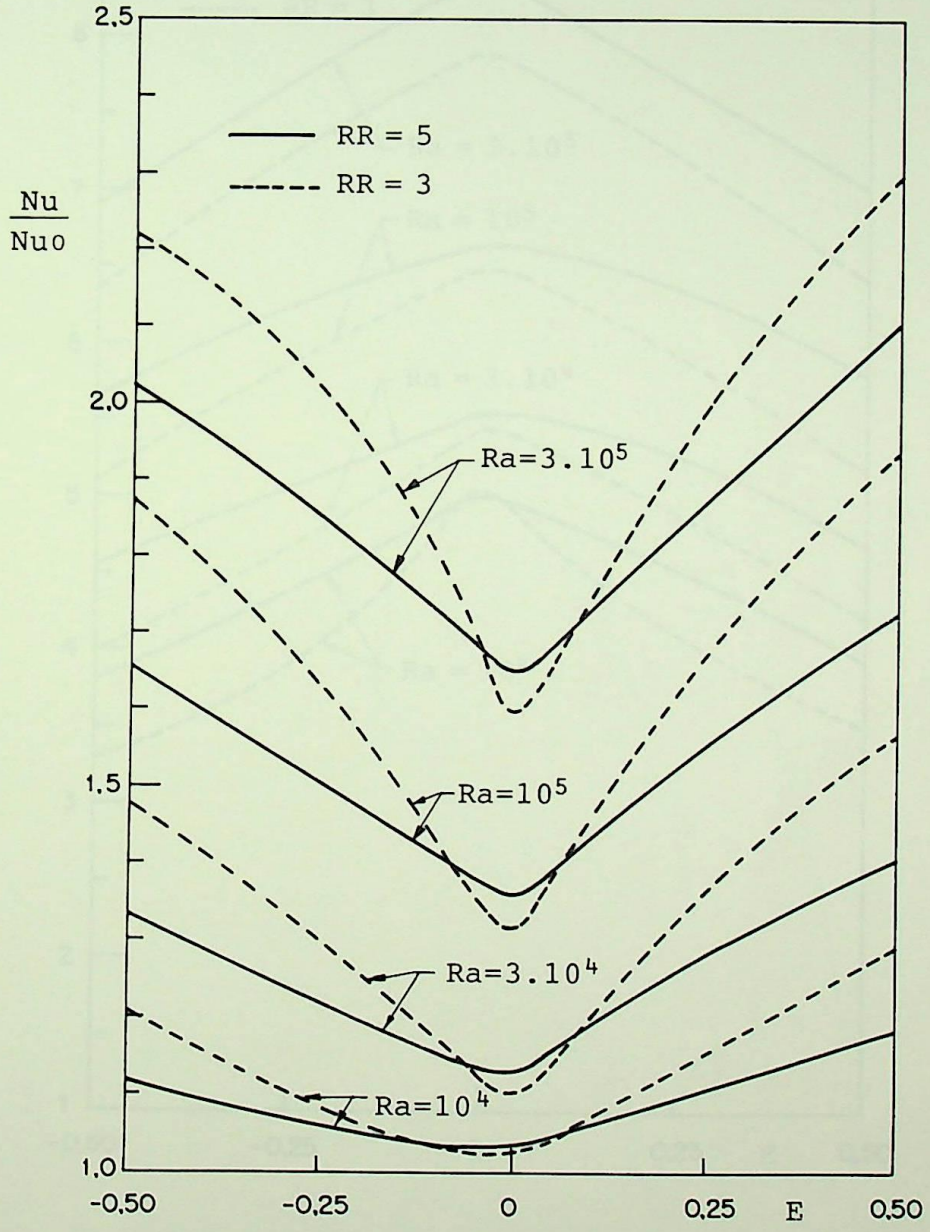


Figura 4.26 - Relação Nu/Nuo versus a excentricidade (E) para o caso 2; Pr=0,7 e $\alpha=0^{o}$.

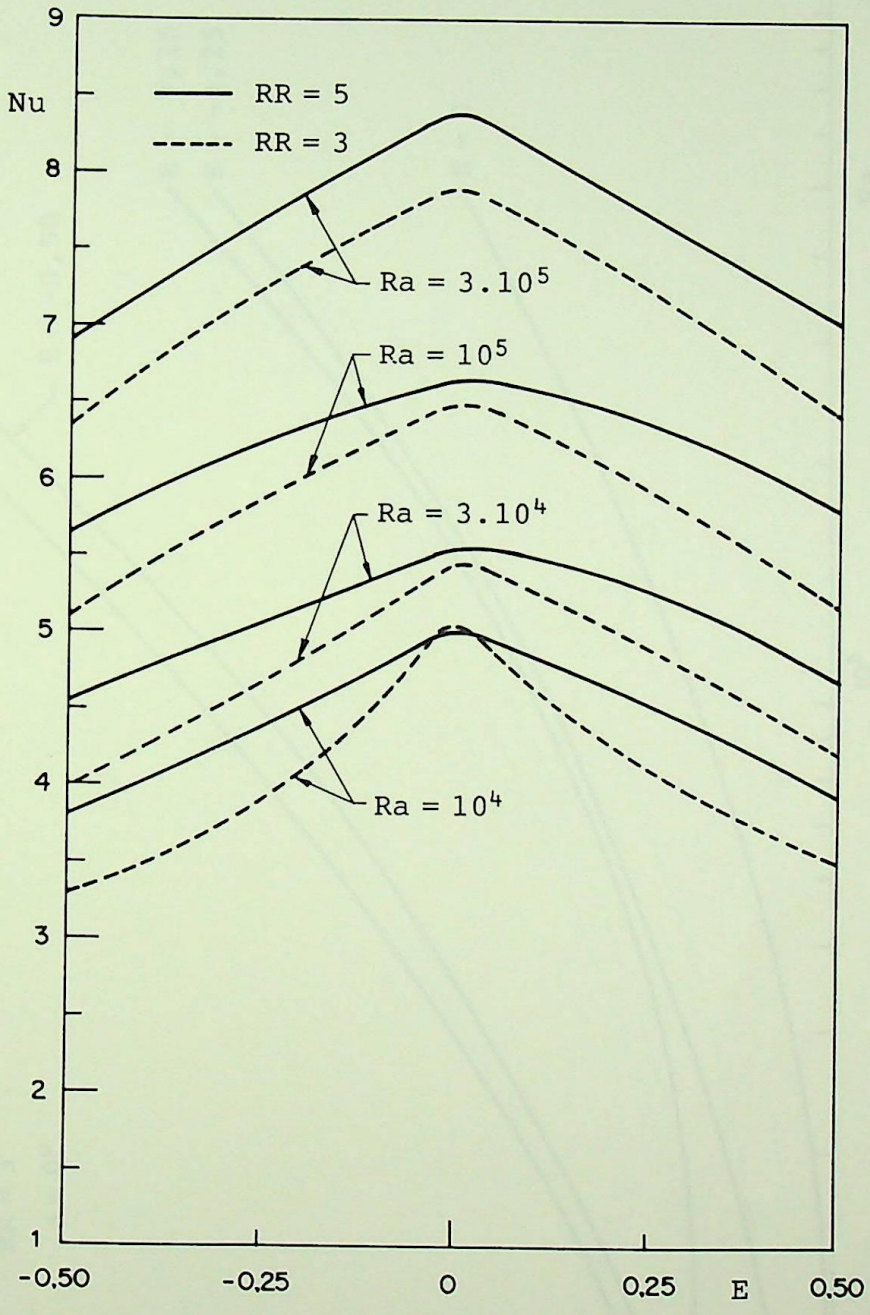


Figura 4.27 - Nu versus a excentricidade (E) para o caso 2; Pr=0,7 e $\alpha=0^{0}$.

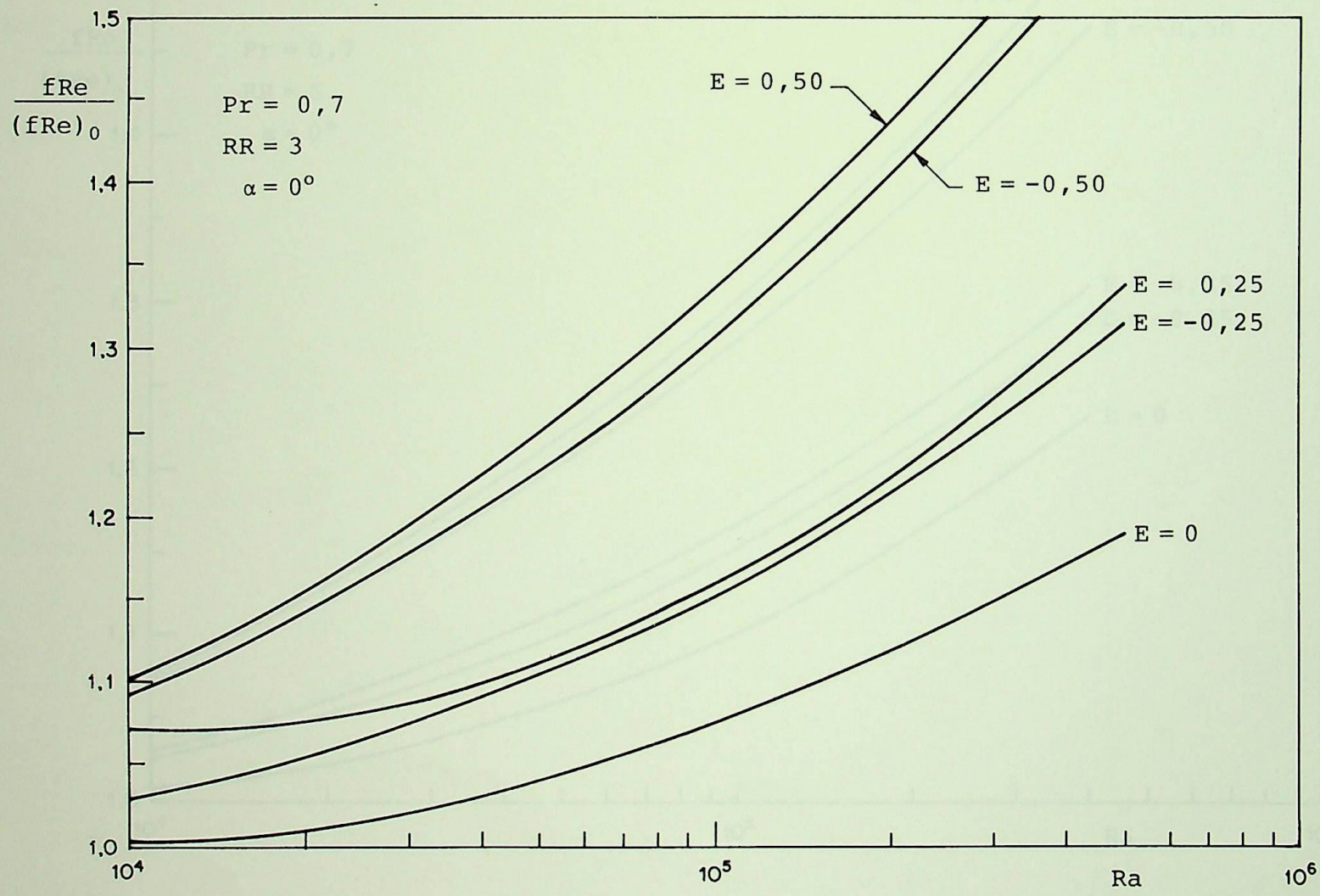


Figura 4.28 - Relação $fRe/(fRe)_0$ versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^0$.

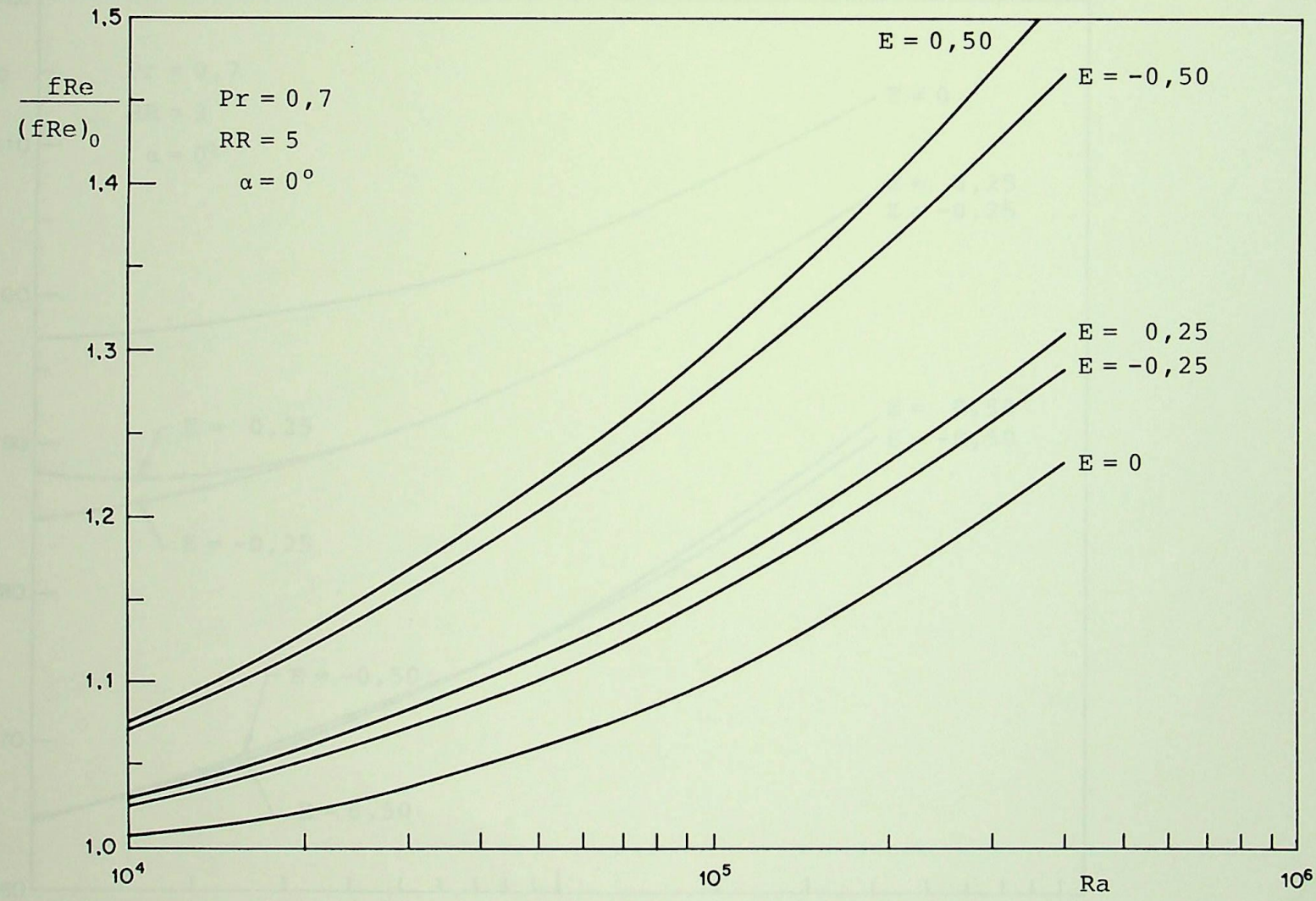


Figura 4.29 - Relação $fRe/(fRe)_0$ versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^0$.

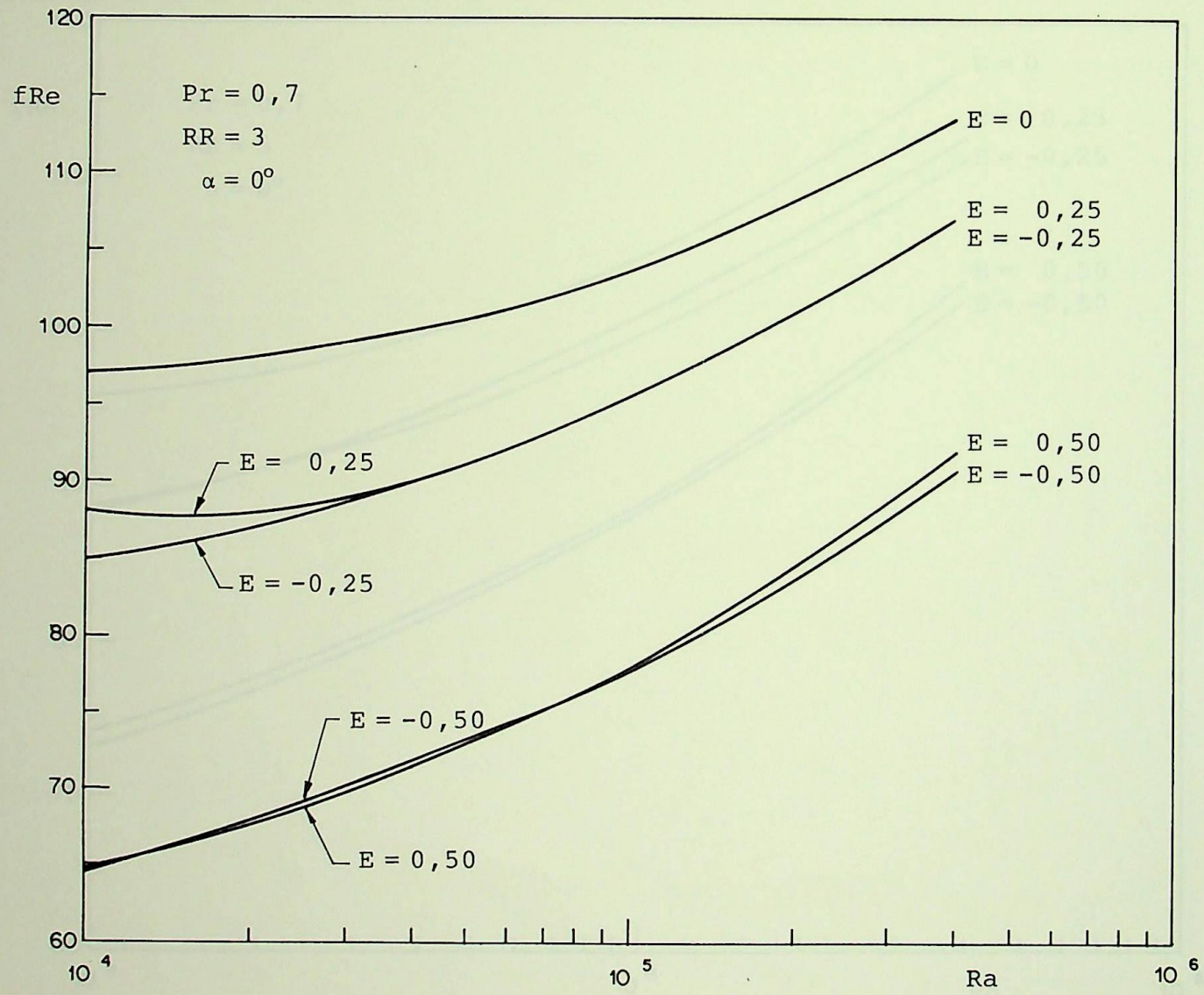


Figura 4.30 - fRe versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=3 e $\alpha=0^{o}$.

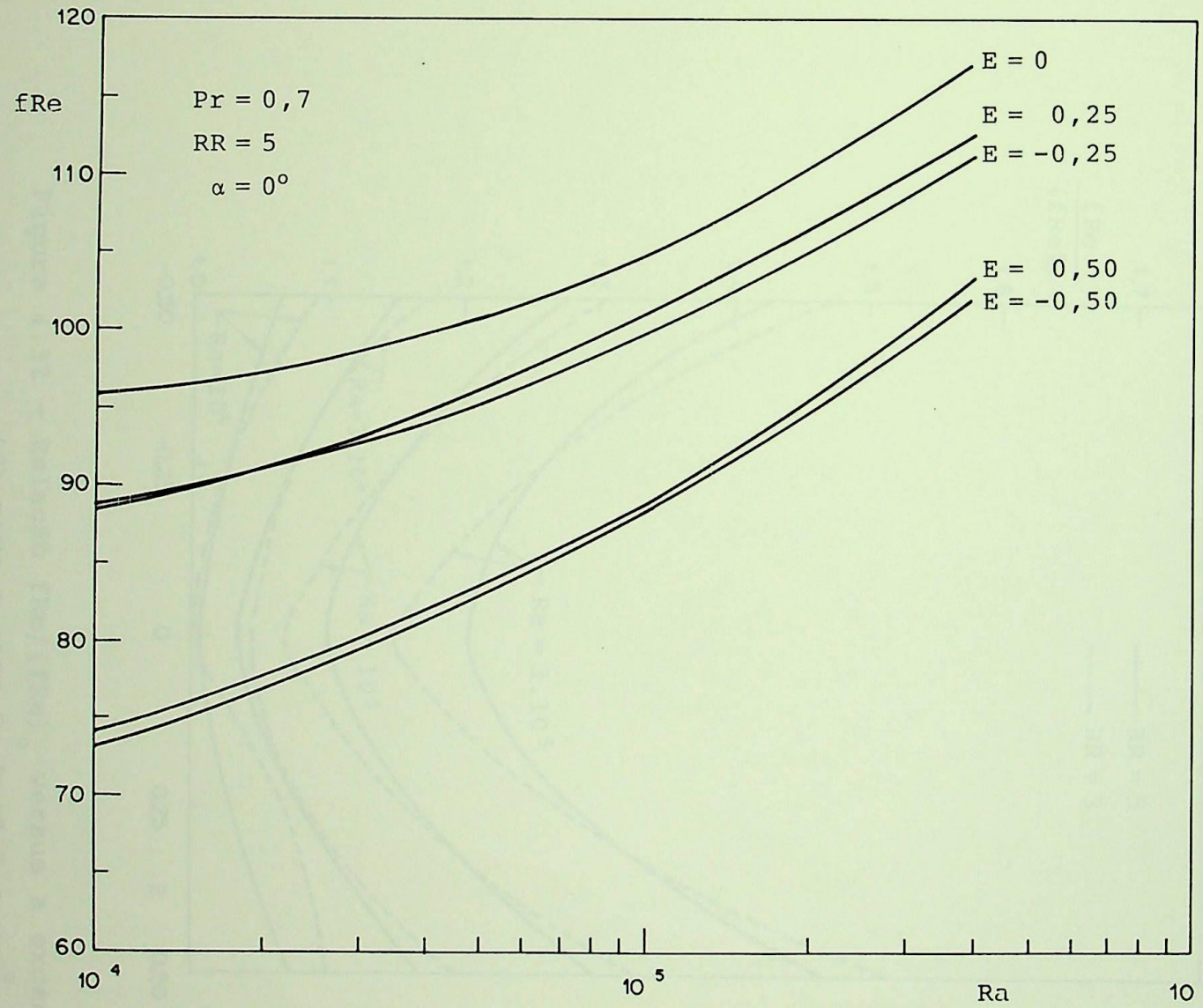


Figura 4.31 - fRe versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7, RR=5 e $\alpha=0^{0}$.

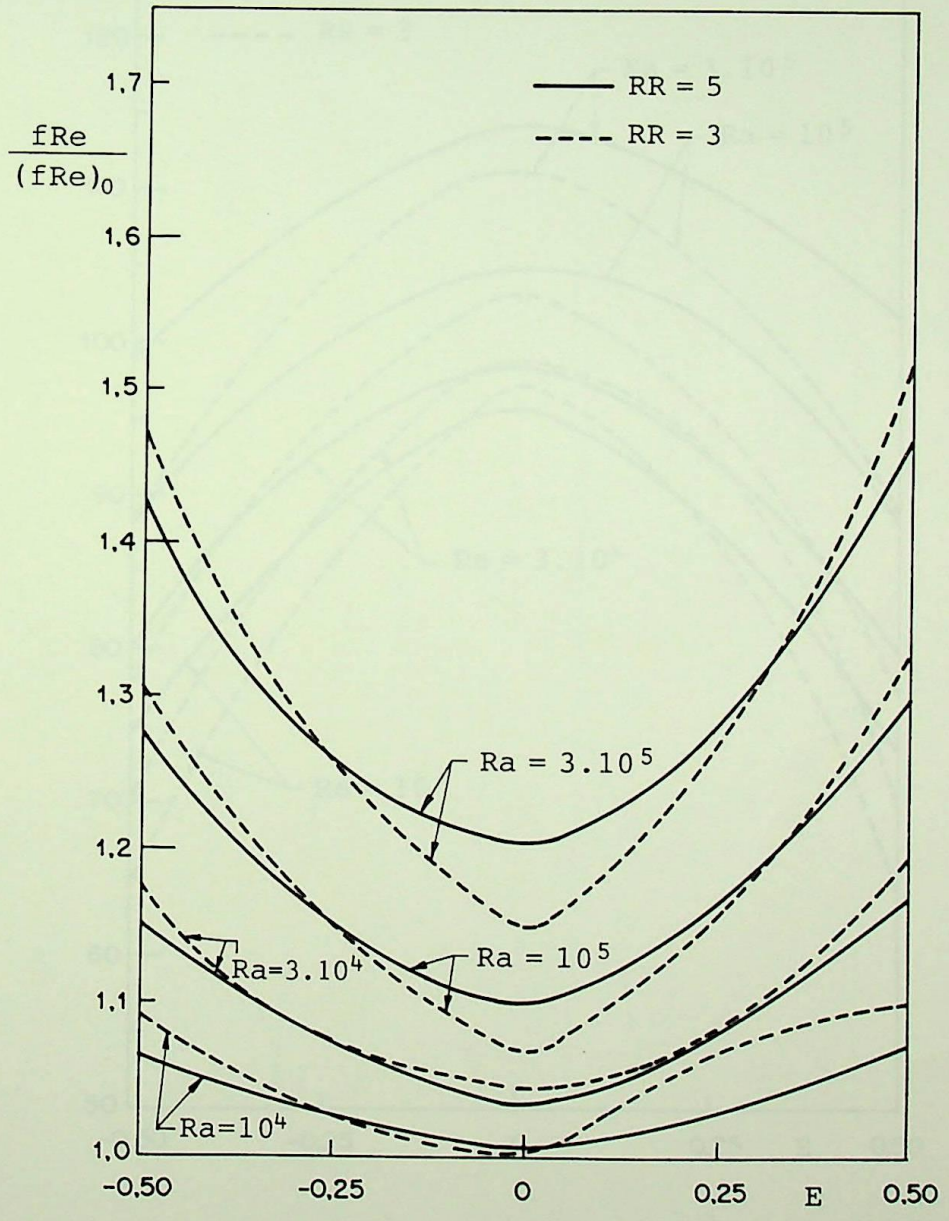


Figura 4.32 - Relação $fRe/(fRe)_0$ versus a excentricidade (E) para o caso 2; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$.

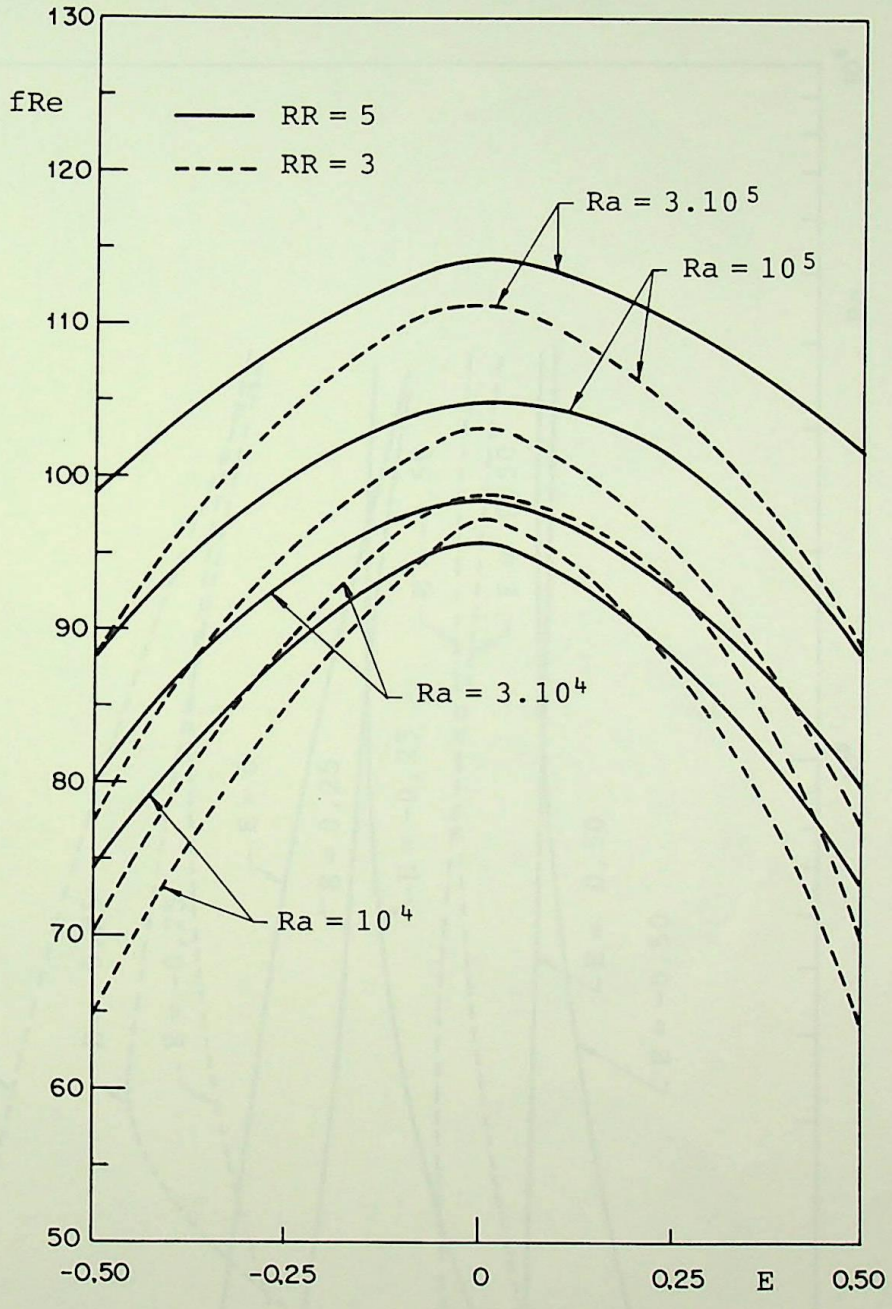


Figura 4.33 - fRe versus a excentricidade (E) para o caso 2; Pr=0,7 e $\alpha=0^{o}$.

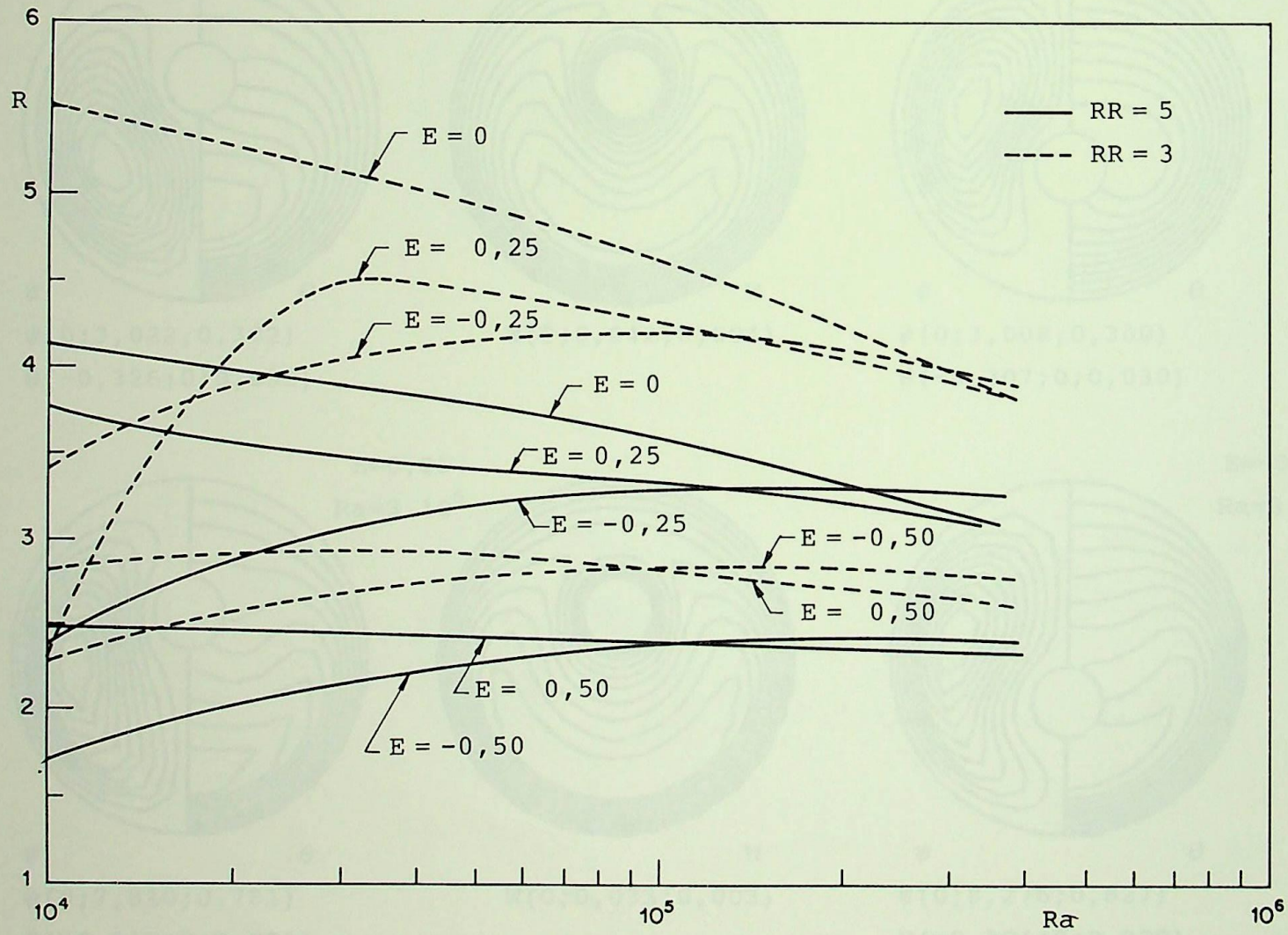


Figura 4.34 - Relação R versus o número de Rayleigh para o caso 2; Pr=0,7 e $\alpha=0^0$.

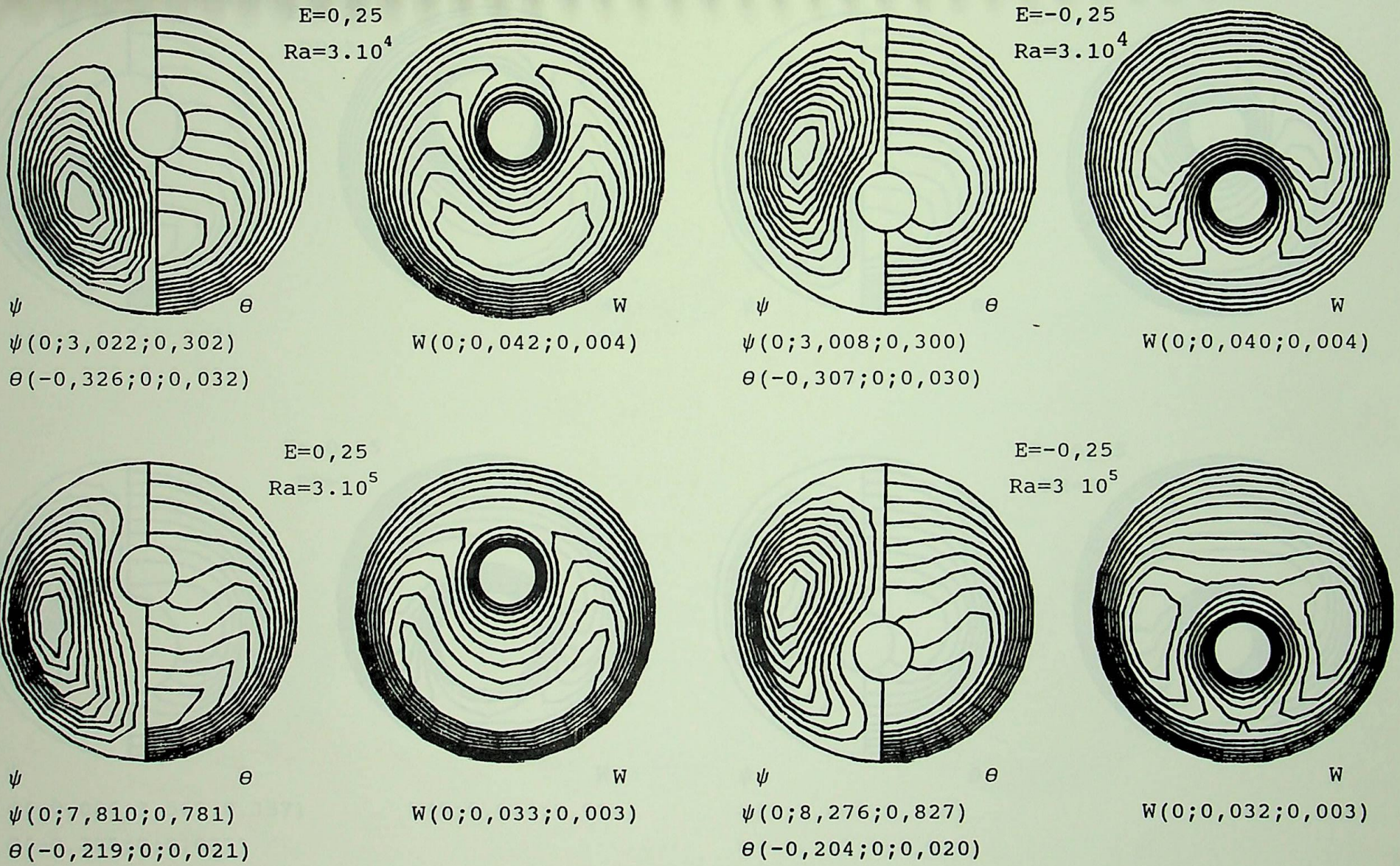


Figura 4.35 - Distribuições da função corrente, temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 2, com RR=5, Pr=0,7 e $\alpha=0^{o}$.

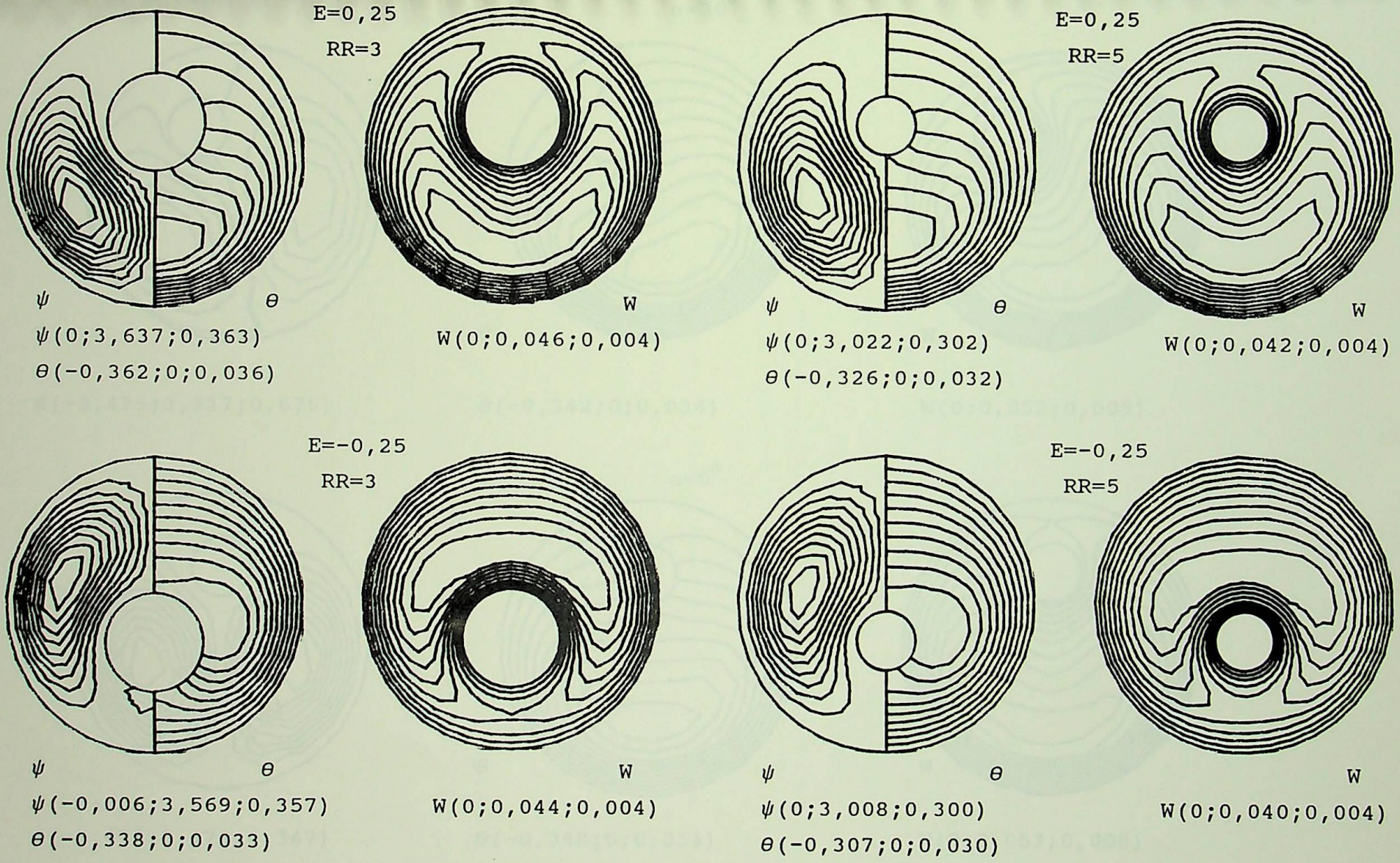
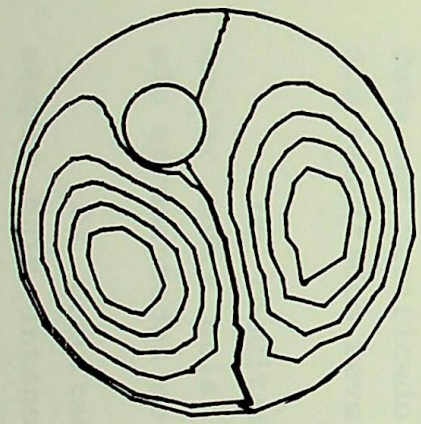
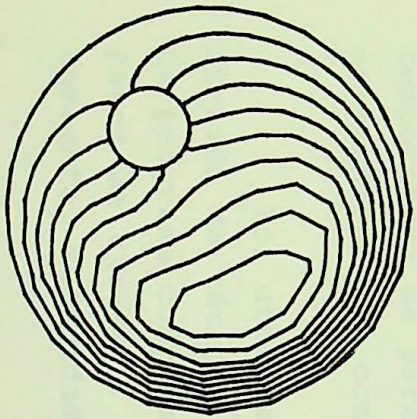


Figura 4.36 - Distribuições da função corrente, temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 2, com $Ra=3.10^4$, $Pr=0,7$ e $\alpha=0^o$.

$\alpha=30^{0}$



ψ



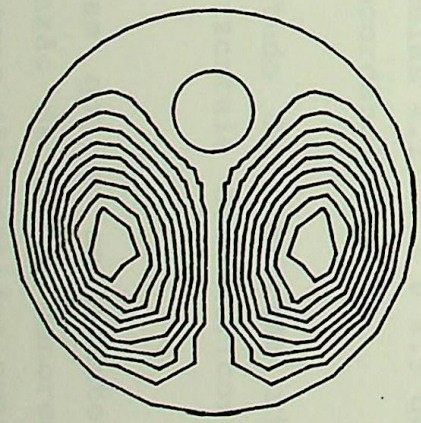
θ



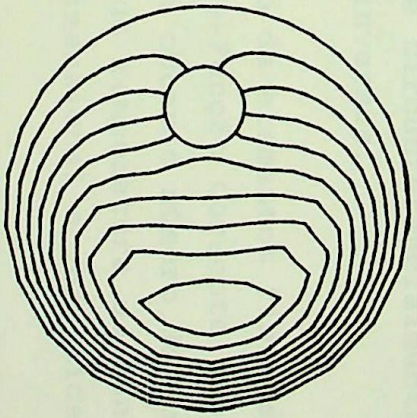
W

$\psi(-3,435;3,317;0,675)$ $\theta(-0,342;0;0,034)$ W(0;0,052;0,005)

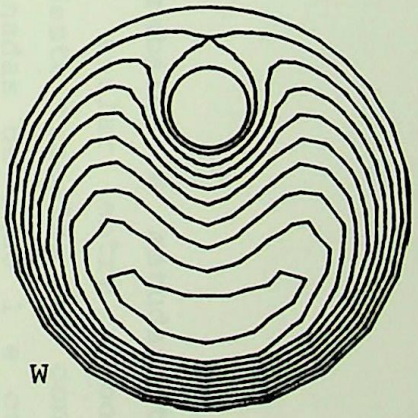
$\alpha=0^{0}$



ψ



θ



W

$\psi(-3,473;3,473;0,347)$ $\theta(-0,348;0;0,034)$ W(0;0,053;0,005)

Figura 4.37 - Distribuições da função corrente,temperatura adimensional e velocidade axial adimensional para o caso 2, com RR=5, E=0,5, $Ra=3.10^{4}$ e Pr=0,7.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

5.1 - Conclusões

O objetivo deste trabalho é estudar teoricamente a convecção mista no espaço anular entre tubos horizontais concêntricos e excêntricos. Neste trabalho são consideradas duas condições de contorno denominadas de caso 1 e caso 2 conforme mostram as figuras 1.1 e 1.2. No caso 1 o tubo externo é isolado e o tubo interno tem fluxo de calor uniforme axialmente e temperatura da parede uniforme circunferencialmente; e no caso 2 as condições de contorno são inversas.

Foi utilizado o método de elementos finitos triangulares, através da técnica Vorticidade-Função Corrente. Foi desenvolvido um programa computacional para obter o número de Nusselt médio, o fator de atrito e os campos de temperatura adimensional, função corrente, velocidade axial adimensional e vorticidade.

Para testar o programa computacional desenvolvido foram feitas comparações de resultados para geometria retangular, tubos e de cilindros concêntricos conforme os itens 4.2, 4.3 e 4.4. Pode ser verificado pelas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 que a comparação dos resultados revela boa concordância.

Os resultados do estudo da convecção mista no espaço anular entre dois tubos horizontais concêntricos e excêntricos são apresentados no item 4.5.

Os resultados mostram que o escoamento secundário é sempre mais intenso para razão de raios menores em ambos os casos,quando os outros parâmetros são mantidos constantes.

O escoamento secundário é mais intenso quando o tubo

interno se desloca para posições inferiores(E<0) para o caso 1. O inverso ocorre para o caso 2, ou seja, o escoamento secundário é mais intenso quando o tubo interno se desloca para posições superiores(E>0).

Nos dois casos o número de Nusselt é maior para tubos concêntricos, exceto para $Ra>10^5$ no caso 1. Isto acontece apesar da relação Nu/Nu_0 ser quase sempre menor para tubos concêntricos quando comparado com tubos excêntricos.

O mesmo comportamento é visto para fRe que é sempre maior para tubos concêntricos do que para tubos excêntricos.O aumento de $fRe/(fRe)_0$ é substancialmente menor do que o aumento de Nu/Nu_0.

Foi observado que para os casos de $\alpha=30^0$ o escoamento secundário é mais intenso que para $\alpha=0^0$, quando os outros parâmetros são mantidos constantes.

O número de Nusselt é maior para o caso 1 do que para o caso 2, considerando os mesmos parâmetros.

O escoamento secundário originado pela convecção mista pode alterar os perfis de velocidade e temperatura, relativos ao caso de convecção forçada pura e resultar num aumento significativo da transferência de calor.

Não se conhece até o presente momento, resultados teóricos e experimentais que possam ser comparados com os casos 1 e 2 do presente trabalho. Os resultados 1 e 2 do presente trabalho serão úteis no estudo e projeto de equipamentos térmicos. Acredita-se assim que os objetivos propostos neste trabalho tenham sido atingidos.

5.2 - Contribuições do Presente Trabalho

A principal contribuição do presente trabalho é que o estudo da convecção mista em tubos excêntricos com os dois tipos

de condições de contorno é inédito.

Outra contribuição importante é a aplicação do método de elementos finitos neste tipo de problema. Não se tem conhecimento de trabalhos deste tipo que usem o método de elementos finitos. A maioria dos trabalhos neste assunto utilizam os métodos de diferenças finitas e volumes finitos.

5.3 - Recomendações para Trabalhos Futuros

Como o presente trabalho abre novos rumos, os seguintes estudos podem ser feitos:

1- Estudo da convecção mista em tubos verticais e inclinados ;

2- Estudo da convecção mista em tubos horizontais excêntricos, com o tubo interno aletado ;

3- Estudo da convecção mista com escoamento laminar desenvolvido em tubos anulares verticais;

4- Estudo da convecção mista em tubos com paredes de espessuras finitas e condutoras.

5- Obter resultados numéricos para a transferência de calor e atrito para os casos 1 e 2 estudados, considerando vários ângulos de inclinação α.

APÊNDICE A1

NÚMEROS ADIMENSIONAIS

Os parâmetros adimensionais utilizados neste trabalho são discutidos neste apêndice.

A1.1 - Número de Nusselt

Os fluxos de calor local e médio são definidos como:

$$q = h\ (\ T_w - T_b\ ) \qquad \text{(A1.1)}$$

$$\bar{q} = \bar{h}\ (\ T_w - T_b\ ) \qquad \text{(A1.2)}$$

onde T_w é a temperatura da parede e T_b é a temperatura média do fluido.

Os números de Nusselt local e médio são definidos :

$$Nu_L = \frac{hd}{k}\ , \qquad \text{(A1.3)}$$

$$Nu = \frac{\bar{h}d}{k}\ , \qquad \text{(A1.4)}$$

onde h e $\bar{h}$ são os coeficientes de transferência de calor por convecção local e médio, d é o diâmetro hidráulico e k é a condutividade térmica do fluido.

Substituindo (A1.1) e (A1.2) em (A1.3) e (A1.4), vem:

$$Nu_L = \frac{qd}{k(T_w - T_b)}\ , \qquad \text{(A1.5)}$$

$$Nu = \frac{\bar{q}d}{k(T_w - T_b)} , \qquad (A1.6)$$

A temperatura média do fluido T_b e a temperatura média adimensional do fluido θ_b são definidas, respectivamente, por :

$$T_b = \frac{\iint TWrdrd\theta}{\iint Wrdrd\theta} , \qquad (A1.7)$$

$$\theta_b = \frac{T_b - T_w}{\bar{q}d/k} . \qquad (A1.8)$$

Portanto:

$$Nu = - \frac{\bar{q}d/k}{T_b - T_w} , \qquad (A1.9)$$

$$Nu = - \frac{1}{\theta_b} . \qquad (A1.10)$$

A1.2 - Fator de Atrito

O fator de atrito f, é definido como:

$$f = \frac{(-d\bar{p}/dz)d}{1/2\rho\bar{w}^2} . \qquad (A1.11)$$

A velocidade média adimensional do fluido $\bar{W}$ e o número de Reynolds Re são dados por :

$$\bar{W} = \frac{\bar{w}}{-\frac{d\bar{p}}{dz}\frac{d^2}{\mu}} , \qquad (A1.12)$$

$$Re = \frac{\rho\bar{w}d}{\mu} . \qquad (A1.13)$$

Substituindo (A1.12) e (A1.13) em (A1.11), tem-se:

$$f = \frac{(-d\bar{p}/dz)d}{1/2\rho\bar{W}^2(-d\bar{p}/dz)^2d^4/\mu^2} = \frac{2}{\rho\bar{W}^2(-\bar{d}p/dz)d^3/\mu^2}\ , \qquad \text{(A1.14)}$$

$$f = \frac{2}{\bar{W}Re}\ . \qquad \text{(A1.15)}$$

Portanto:

$$fRe = \frac{2}{\bar{W}}\ . \qquad \text{(A1.16)}$$

APÊNDICE A2

O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

A2.1 - Introdução

Seja a equação diferencial bidimensional:

$$\delta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \quad . \tag{A2.1}$$

Para a solução dessa equação será utilizado o método de elementos finitos, descrito neste apêndice.

A figura A2.1 mostra o domínio no plano (X,Y) para a solução da equação (A2.1). O domínio é dividido em elementos triangulares. A cada triângulo corresponde um elemento e cada vértice do triângulo é denominado ponto nodal ou nó. Para cada ponto nodal associa-se um valor da grandeza ϕ; admite-se que a grandeza ϕ^e varia linearmente em cada elemento.

A2.2 - Equações para Elementos Triangulares

A distribuição da grandeza ϕ^e no elemento (e) é aproximada, portanto, pela seguinte equação:

$$\phi^e = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y \quad . \tag{A2.2}$$

Para os pontos nodais i, j, k resultam respectivamente as seguintes equações:

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i \quad , \tag{A2.2a}$$

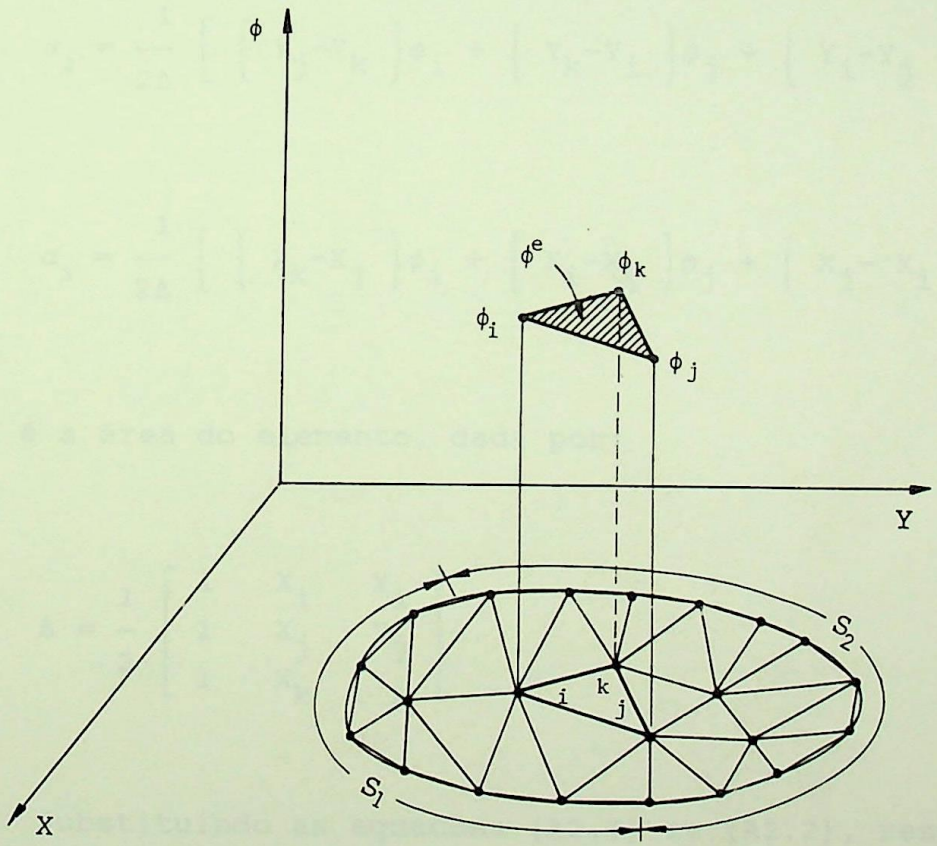


Figura A2.1 - Domínio de solução e elemento triangular com função de interpolação linear.

$$\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j \ , \qquad \text{(A2.2b)}$$

$$\phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k \ . \qquad \text{(A2.2c)}$$

Resolvendo o sistema de equações (A2.2a), (A2.2b) e (A2.2c), resulta:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta}\left[\left(X_j Y_k - X_k Y_j \right)\phi_i + \left(X_k Y_i - X_i Y_k \right)\phi_j + \left(X_i Y_j - X_j Y_i \right)\phi_k \right] , \qquad \text{(A2.3a)}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\Delta}\left[\left(Y_j - Y_k \right)\phi_i + \left(Y_k - Y_i \right)\phi_j + \left(Y_i - Y_j \right)\phi_k \right] , \qquad \text{(A2.3b)}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta}\left[\left(X_k - X_j \right)\phi_i + \left(X_i - X_k \right)\phi_j + \left(X_j - X_i \right)\phi_k \right] , \qquad \text{(A2.3c)}$$

onde Δ é a área do elemento, dada por:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix} . \qquad \text{(A2.4)}$$

Substituindo as equações (A2.3) em (A2.2), resulta:

$$\phi^e = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k \ , \qquad \text{(A2.5)}$$

onde:

$$N_i = \frac{1}{2\Delta}\left[\, a_i + b_i X + c_i Y \,\right] , \qquad \text{(A2.6a)}$$

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j ,$$

$$b_i = Y_j - Y_k ,$$

$$c_i = X_k - X_j ,$$

$$N_j = \frac{1}{2\Delta}\left[\, a_j + b_j X + c_j Y \,\right] , \qquad \text{(A2.6b)}$$

$$a_j = X_k Y_i - Y_i X_k ,$$

$$b_j = Y_k - Y_i ,$$

$$c_j = X_i - X_k ,$$

$$N_k = \frac{1}{2\Delta}\left[\, a_k + b_k X + c_k Y \,\right] , \qquad \text{(A2.6c)}$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i ,$$

$$b_k = Y_i - Y_j ,$$

$$c_k = X_j - X_i .$$

A equação (A2.5) pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\phi^e(X,Y) = \sum_{e=1}^{\varepsilon} \phi^e(X,Y) = \sum_{e=1}^{\varepsilon} \left[\, N^e \,\right] \left\{\, \phi \,\right\}^e , \qquad \text{(A2.7)}$$

onde se deve considerar que dentro do elemento e no contorno do elemento :

$$\phi^e = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k ,$$

e

$\phi^e = 0$, fora do elemento.

A2.3 - Cálculo dos Gradientes

As funções N_i, N_j e N_k são denominadas funções de forma do elemento, sendo lineares com relação às variáveis X e Y. Desse modo, os gradientes em ambas as direções, X ou Y, serão constantes em cada elemento.

Os gradientes nas direções X e Y são, respectivamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial N_i}{\partial X} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial X} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial X} \phi_k \ , \qquad \text{(A2.8a)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{\partial N_i}{\partial Y} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial Y} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial Y} \phi_k \ , \qquad \text{(A2.8b)}$$

Mas

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial X} = \frac{b_\beta}{2\Delta} \qquad \text{com } \beta=i,j,k \ , \qquad \text{(A2.9a)}$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial Y} = \frac{c_\beta}{2\Delta} \qquad \text{com } \beta=i,j,k \ , \qquad \text{(A2.9b)}$$

Portanto de (A2.8) e (A2.9), resulta:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta} \left(b_i\phi_i + b_j\phi_j + b_k\phi_k \right) \ , \qquad \text{(A2.10a)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta} \left(c_i\phi_i + c_j\phi_j + c_k\phi_k \right) \ . \qquad \text{(A2.10b)}$$

APÊNDICE A3

MÉTODO VARIACIONAL PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL INDEPENDENTE DO TEMPO

A3.1 - Introdução

Seja a equação diferencial bidimensional independente do tempo:

$$\delta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = 0 \ , \qquad \text{(A3.1a)}$$

com as condições de contorno:

$$\phi = \phi_0(X,Y) \ , \qquad \text{(A3.1b)}$$

$$q = \frac{\partial \phi}{\partial n} \ , \qquad \text{(A3.1c)}$$

onde ϕ é uma função escalar, $\phi_0(X,Y)$ uma função especificada no contorno, Q_ϕ é uma função especificada no domínio, q é o fluxo de através da superfície S do contorno e δ é um parâmetro que assume valor constante.

A3.2 - Método Variacional

Do cálculo variacional sabe-se que o funcional equivalente das equações (A3.1) é dado por:

$$I = \int_V \frac{1}{2} \left[\delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 + \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)^2 - 2Q_\phi . \phi \right] dV + \int_S q\phi dS \ . \tag{A3.2}$$

A função ϕ que minimiza o funcional dado pela equação (A3.2) é a solução das equações (A3.1).

O funcional para o elemento (e) é dado por:

$$I^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} \left[\delta \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right)^2 + \delta \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right)^2 \right] dV - \int_{V^e} Q_\phi^e . \phi^e dV$$

$$+ \int_{S^e} q^e . \phi^e dS \ . \tag{A3.3}$$

A equação (A3.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$I^e = \delta \int_{V^e} \frac{1}{2} \left\{ \phi \right\}^{eT} \left[B^e \right]^T \left[B^e \right] \left\{ \phi \right\}^e dV$$

$$- \int_{V^e} Q_\phi^e \left[N^e \right] \left\{ \phi \right\}^e dV + \int_{S^e} q^e \left[N^e \right] \left\{ \phi \right\}^e dS \ , \tag{A3.4}$$

Onde:

$$\phi^e = \left[N^e \right] \left\{ \phi \right\}^e \ , \tag{A3.5}$$

$$\left\{ \phi^e \right\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial X}^e \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial Y}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial X}^e & \dfrac{\partial N_2}{\partial X}^e & \cdots & \dfrac{\partial N_m}{\partial X}^e \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial Y} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial Y} & \cdots & \dfrac{\partial N_m^e}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_m \end{Bmatrix}^e \tag{A3.6}$$

Ou na forma condensada:

$$\left\{ g^e \right\} = \left[B^e \right] \left\{ \phi \right\}^e , \qquad \text{(A3.7)}$$

onde m é o número de pontos nodais do elemento, $[B^e]$ contém as derivadas das funções de forma do elemento.

A minimização do funcional I^e é dada por:

$$\frac{\partial I^e}{\partial \{\phi\}^e} = 0 , \qquad \text{(A3.8)}$$

Substituindo a equação (A3.4) na equação (A3.8), obtém-se para cada termo:

$$\frac{\partial}{\partial \{\phi\}^e} \int_{V^e} \delta \frac{1}{2} \left\{ \phi \right\}^{eT} \left[B^e \right]^T \left[B^e \right] \left\{ \phi \right\}^e dV =$$

$$= \int_{V^e} \delta \left[B^e \right]^T \left[B^e \right] \left\{ \phi \right\}^e dV , \qquad \text{(A3.9a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\phi\}^e} \int_{V^e} Q_\phi^e \left[N^e \right] \left\{ \phi \right\}^e dV = \int_{V^e} \left[N^e \right]^T Q_\phi^e \, dV , \qquad \text{(A3.9b)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\phi\}^e} \int_{S^e} q^e \left[N^e \right] \left\{ \phi \right\}^e dS = \int_{S^e} \left[N^e \right]^T q^e dS . \qquad \text{(A3.9c)}$$

Somando-se os segundos membros das equações (A3.9), vem:

$$\frac{\partial I^e}{\partial \{\phi\}^e} = \int_{V^e} \delta \left[B^e \right]^T \left[B^e \right] \left\{ \phi \right\}^e dV - \int_{V^e} \left[N^e \right]^T Q_\phi^e \, dV +$$

$$+ \int_{S^e} \left[N^e \right]^T q^e dS = 0 . \qquad \text{(A3.10)}$$

A equação (A3.10) pode ser escrita na seguinte forma condensada:

$$\left[K \right]^e \left\{ \phi \right\}^e + \left\{ R \right\}^e = 0 \ , \qquad \text{(A3.11)}$$

onde:

$$\left[K \right]^e = \delta \int_{V^e} \left[B^e \right]^T \left[B^e \right] dV \ , \qquad \text{(A3.12)}$$

$$\left\{ R \right\}^e = \int_{V^e} - \left[N^e \right]^T Q_\phi^e \, dV + \int_{S^e} \left[N^e \right]^T q^e dS \ . \qquad \text{(A3.13)}$$

A minimização do funcional I é dada por:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\phi\}} = \frac{\partial}{\partial \{\phi\}} \sum_{e=1}^{\varepsilon} I^e = \sum_{e=1}^{\varepsilon} \frac{\partial I^e}{\partial \{\phi\}^e} = 0 \ . \qquad \text{(A3.14)}$$

Substituindo a equação (A3.11) em (A3.14) resulta:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\phi\}} = \sum_{e=1}^{\varepsilon} \left(\left[K \right]^e \left\{ \phi \right\}^e + \left\{ R \right\}^e \right) = 0 \ . \qquad \text{(A3.15)}$$

A equação (A3.15) pode ser escrita na seguinte forma matricial global:

$$\left[K \right] \left\{ \phi \right\} + \left\{ R \right\} = 0 \ , \qquad \text{(A3.16)}$$

Onde:

$$\left[K \right] = \sum_{e=1}^{\varepsilon} \delta \int_{V^e} \left[B^e \right]^T \left[B^e \right] dV \ , \qquad \text{(A3.17)}$$

$$\left[R \right] = \sum_{e=1}^{\varepsilon} \int_{V^e} - \left[N^e \right]^T Q_\phi^e \, dV + \sum_{e=1}^{\varepsilon} \int_{S^e} \left[N^e \right]^T q^e dS \ . \qquad \text{(A3.18)}$$

APÊNDICE A4

MÉTODO VARIACIONAL PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DEPENDENTE DO TEMPO

A4.1 - Introdução

Seja a equação diferencial bidimensional dependente do tempo:

$$\delta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} , \qquad \text{(A4.1a)}$$

com as condições de contorno:

$$\phi = \phi_0(X,Y) , \qquad \text{(A4.1b)}$$

$$q = \frac{\partial \phi}{\partial n} , \qquad \text{(A4.1c)}$$

onde ϕ é uma função escalar, $\phi_0(X,Y)$ uma função especificada no contorno, Q_ϕ é uma função especificada no domínio, q é o fluxo através da superfície S do contorno, λ e δ são parâmetros que assumem valores constantes e τ é o tempo adimensional.

A4.2 - Método Variacional

A equação (A4.1a) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\delta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + \left(Q_\phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) = 0 . \qquad \text{(A4.2)}$$

O funcional equivalente das equações (A4.1) é dado por:

$$I = \int_V \frac{1}{2}\left[\delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 + \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)^2 - 2 \left(Q_\phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) \phi \right] dV + \int_S q\phi dS \ , \qquad \text{(A4.3)}$$

A função ϕ que minimiza o funcional é a solução da equação (A4.1) e $(Q_\phi - \lambda \partial\phi/\partial\tau)$ é uma função especificada.

O funcional para o elemento (e) é dado por:

$$I^e = \int_{V^e} \frac{1}{2}\left[\delta \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right)^2 + \delta \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right)^2 \right] dV + \int_{S^e} q^e \phi^e dS + \int_{V^e} - \left[Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right] \phi^e dV \ . \qquad \text{(A4.4)}$$

A equação (A4.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$I = \sum_{e=1}^{\varepsilon} \frac{\delta}{2} \int_{V^e} \left\{ \phi \right\}^{eT} \left[B^e \right]^T \left[B^e \right] \left\{ \phi \right\}^e dV + \sum_{e=1}^{\varepsilon} \int_{S^e} q^e \left[N \right]^e \left\{ \phi \right\}^e dS + I_Q \ , \qquad \text{(A4.5a)}$$

onde $\phi^e = \left[N^e \right] \left\{ \phi \right\}^e$, $\left[B^e \right]$ é definido pela equação (A3.6) e I_Q é dado por:

$$I_Q = \sum_{e=1}^{\varepsilon} \left\{ \int_{V^e} - \left[N^e \right] \left\{ \phi \right\}^e Q_\phi^e \, dV + \int_{V^e} \lambda \left[N^e \right] \left\{ \phi \right\}^e \left[N^e \right] \frac{\partial \{\phi\}^e}{\partial \tau} \, dV \right\} . \qquad \text{(A4.5b)}$$

A minimização da equação (A4.5a) é dada por:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\phi\}} = \sum_{e=1}^{\varepsilon} \frac{\partial I^e}{\partial \{\phi\}^e} = 0 \ . \qquad \text{(A4.6)}$$

A minimização do termo I_Q é dada por:

$$\frac{\partial I_Q}{\partial \{\phi\}} = \sum_{e=1}^{\varepsilon} \int_{V^e} - Q_\phi^e \left[N^e \right]^T dV + \sum_{e=1}^{\varepsilon} \left[\int_{S^e} \lambda \left[N^e \right]^T \left[N^e \right] dV \right] \frac{\partial \{\phi\}}{\partial \tau} \ . \qquad \text{(A4.7)}$$

O primeiro e o segundo termo da equação (A4.5a), já minimizados, conforme mostra o apêndice A3, somados à equação (A4.7), produzem o resultado:

$$\left[C \right] \frac{\partial \{\phi\}}{\partial \tau} + \left[K \right] \left\{ \phi \right\} + \left\{ R \right\} = 0 \ , \qquad \text{(A4.8a)}$$

onde:

$$\left[C \right] = \sum_{e=1}^{\varepsilon} \int_{V^e} \lambda \left[N^e \right]^T \left[N^e \right] dV \ , \qquad \text{(A4.8b)}$$

$$\left[K \right] = \sum_{e=1}^{\varepsilon} \int_{V^e} \delta \left[B^e \right]^T \left[B^e \right] dV \ , \qquad \text{(A4.8c)}$$

$$\left\{ R \right\} = \sum_{e=1}^{\varepsilon} \int_{V^e} - Q_\phi^e \left[N^e \right]^T dV + \sum_{e=1}^{\varepsilon} \int_{S^e} q^e \left[N^e \right]^T dS \ . \qquad \text{(A4.8d)}$$

A4.3 - Matriz do Elemento $\left[C^e \right]$

A matriz do elemento $\left[C^e \right]$ é dada por:

$$\left[C^e \right] = \int_{V^e} \lambda \left[N^e \right]^T \left[N^e \right] dV \ . \qquad \text{(A4.9)}$$

A matriz de forma para um elemento triangular é dada pela equação (3.7) da seguinte forma:

$$\left[N^e \right] = \left[N_i \quad N_j \quad N_k \right] , \tag{A4.10}$$

onde N_i, N_j e N_k são dados pelas equações (A2.6a), (A2.6b) e (A2.6c).

Considerando o elemento de espessura unitária, tem-se que dV=1.dS. Assim, das equações (A4.9) e (A4.10) vem:

$$\left[C^e \right] = \int_S \lambda \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \left[N_i \quad N_j \quad N_k \right] dS . \tag{A4.11}$$

Das equações (3.16) e (A4.11), vem:

$$\left[C^e \right] = \frac{\lambda \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \tag{A4.12}$$

onde Δ é a área do elemento dada pela equação (A2.4).

A4.4 - Aproximação do Termo $d\{\phi\}/d\tau$

A figura A4.1 mostra os valores ϕ_0 e ϕ_1 assumidos pela função ϕ, respectivamente, no tempo τ e $\tau+\Delta\tau$.

Usando-se um esquema de diferença finita central o termo $d\phi/d\tau$ pode ser escrito na seguinte forma:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\Delta\tau} \tag{A4.13}$$

A derivada da grandeza ϕ para os pontos nodais no domínio do tempo pode ser calculada pela equação:

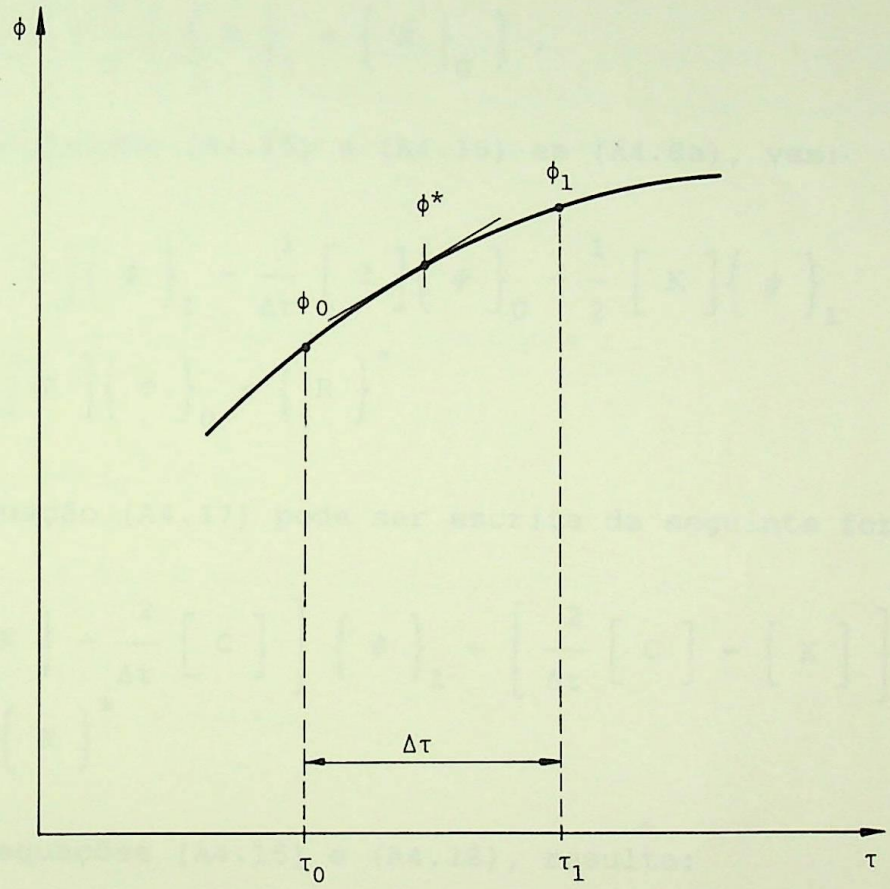


Figura A4.1 - Esquema de diferença finita central para a derivada $d\phi/d\tau$.

$$\frac{\partial\{\phi\}}{\partial\tau} = \frac{d\{\phi\}}{d\tau} = \frac{1}{\Delta\tau}\left(\left\{ \phi \right\}_1 - \left\{ \phi \right\}_0 \right) = \left\{ \phi \right\} \qquad \text{(A4.14)}$$

As matrizes $\left\{ \phi \right\}$ e $\left\{ R \right\}$ devem ser avaliadas como:

$$\left\{ \phi \right\}^* = \frac{1}{2}\left(\left\{ \phi \right\}_1 + \left\{ \phi \right\}_0 \right), \qquad \text{(A4.15)}$$

$$\left\{ R \right\}^* = \frac{1}{2}\left(\left\{ R \right\}_1 + \left\{ R \right\}_0 \right), \qquad \text{(A4.16)}$$

Substituindo (A4.15) e (A4.16) em (A4.8a), vem:

$$\frac{1}{\Delta\tau}\left[C \right]\left\{ \phi \right\}_1 - \frac{1}{\Delta\tau}\left[C \right]\left\{ \phi \right\}_0 + \frac{1}{2}\left[K \right]\left\{ \phi \right\}_1 - \frac{1}{2}\left[K \right]\left\{ \phi \right\}_0 + \left\{ R \right\}^* \qquad \text{(A4.17)}$$

A equação (A4.17) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left[\left[K \right] + \frac{2}{\Delta\tau}\left[C \right] \right]\left\{ \phi \right\}_1 = \left[\frac{2}{\Delta\tau}\left[C \right] - \left[K \right] \right]\left\{ \phi \right\}_0 - 2\left\{ R \right\}^* \qquad \text{(A4.18)}$$

Das equações (A4.15) e (A4.18), resulta:

$$\left[\left[K \right] + \frac{2}{\Delta\tau}\left[C \right] \right]\left\{ \phi \right\}^* = \frac{2}{\Delta\tau}\left\{ \phi \right\}_0 - \left\{ R \right\}^* \qquad \text{(A4.19)}$$

A equação (A4.19) pode ser escrita na seguinte forma final:

$$\left[\left[K \right] + \frac{2}{\Delta\tau}\left[C \right] \right]\left\{ \phi \right\}_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau}\left[C \right]\left\{ \phi \right\}_{velho} - \left\{ R \right\} \qquad \text{(A4.20)}$$

APÊNDICE A5

FLUXOGRAMA DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

A5.1 - Introdução

A figura A5.1 mostra o fluxograma do programa computacional desenvolvido. Os passos da solução numérica e alguns detalhes do programa computacional, apresentados em seguida, foram baseados na referência [26].

A5.2 - Descrição dos Blocos do Fluxograma

1) Leitura de dados (bloco 1)

Os dados lidos no início do programa são:

- número de pontos nodais;
- número máximo de iterações;
- razão de raios;
- excentricidade;
- ângulo de inclinação;
- número de Prandtl;
- número de Rayleigh.

2) Geração de malhas (bloco 2)

O programa computacional possui uma subroutina para geração de malha com elementos triangulares. Esta subroutina calcula as coordenadas dos pontos nodais, a topologia dos elementos. Os resultados obtidos podem ser utilizados para desenhar com o auxílio do "plotter" do computador a malha da geometria analisada.

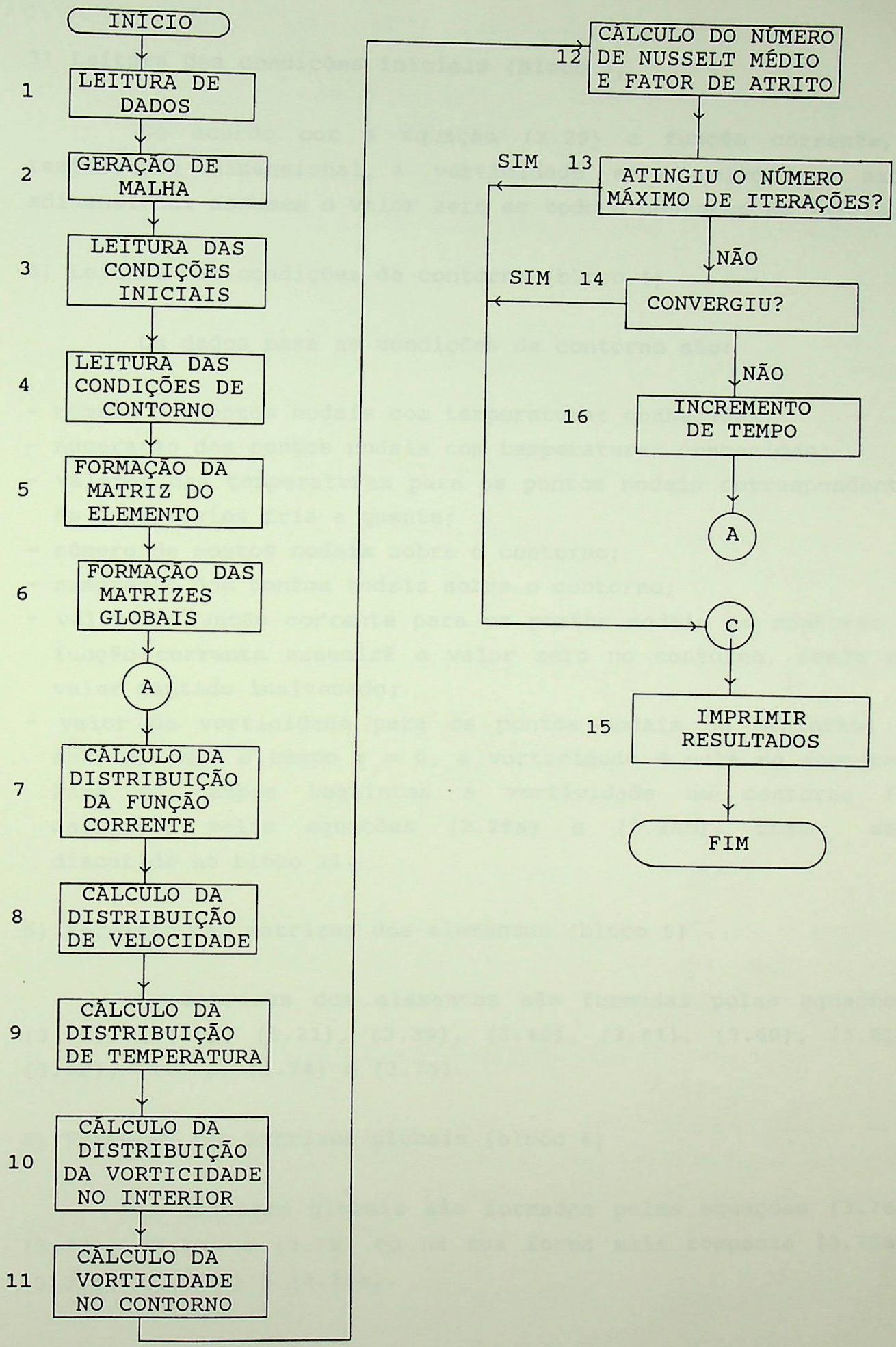


Figura A5.1 - Fluxograma do programa computacional

3) Leitura das condições iniciais (bloco 3)

De acordo com a equação (2.29) a função corrente, a temperatura adimensional, a vorticidade e a velocidade axial adimensional assumem o valor zero em todo o contorno no início.

4) Leitura das condições de contorno (bloco 4)

Os dados para as condições de contorno são:

- número de pontos nodais com temperaturas conhecidas;
- numeração dos pontos nodais com temperaturas conhecidas;
- valores das temperaturas para os pontos nodais correspondentes às superfícies fria e quente;
- número de pontos nodais sobre o contorno;
- numeração dos pontos nodais sobre o contorno;
- valor da função corrente para os pontos nodais no contorno. A função corrente assumirá o valor zero no contorno, sendo este valor mantido inalterado;
- valor da vorticidade para os pontos nodais no contorno. No início, para o tempo $\tau = 0$, a vorticidade é nula no contorno. Para os tempos seguintes a vorticidade no contorno foi calculada pelas equações (2.28a) e (2.28b), como será discutido no bloco 11.

5) Formação das matrizes dos elementos (bloco 5)

As matrizes dos elementos são formadas pelas equações: (3.19), (3.20), (3.21), (3.39), (3.40), (3.41), (3.60), (3.61), (3.62), (3.73), (3.74) e (3.75).

6) Formação das matrizes globais (bloco 6)

As matrizes globais são formadas pelas equações (3.76), (3.77), (3.78) e (3.79) ou na sua forma mais compacta (3.76a), (3.77a), (3.78a) e (3.79a).

7) Cálculo da distribuição da função corrente (bloco 7)

A distribuição da função corrente ψ para o tempo τ é obtida resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela equação (3.76a). A matriz $\left\{ \tilde{R}_{\psi} \right\}$ tem seus coeficentes dependentes da vorticidade ω, a qual deve ser avaliada na iteração anterior, isto é, para o tempo $\tau-\Delta\tau$.

Na solução da equação (3.76a) é necessário impor a condição de contorno dada pela equação (3.1a), isto é, a função corrente assume o valor nulo junto ao contorno.

8) Cálculo da distribuição de velocidade axial (bloco 8)

A distribuição de velocidade axial W para o tempo τ é obtida resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela equação (3.77a). Os coeficientes da matriz $\left\{ \tilde{R}_{W} \right\}$ dependem das funções ψ e W avaliadas, respectivamente, para o tempo τ e $\tau-\Delta\tau$.

Na solução da equação (3.77a) a condição de contorno dada por (3.1a) foi imposta, ou seja, a velocidade axial junto ao contorno é nula.

9) Cálculo da distribuição de temperatura (bloco 9)

A distribuição de temperatura θ para o tempo τ é obtida resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela equação (3.78a). Os coeficientes da matriz $\left\{ \tilde{R}_{\theta} \right\}$ dependem das funções ψ, W avaliadas para o tempo τ e θ avaliada para o tempo $\tau-\Delta\tau$.

Na solução da equação (3.78a) a condição de contorno dada pela equação (3.1a) foi imposta sobre a superfície S_2 do contorno e a condição de contorno dada pela equação (3.1b) foi imposta sobre a superfície S_1 do contorno.

10) Cálculo da distribuição de vorticidade no interior (bloco 10)

A distribuição de vorticidade no interior, para o tempo

τ, é obtida resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela equação (3.79a). Os coeficientes da matriz $\left\{ \tilde{R}_{\omega} \right\}$ dependem de ψ, θ e ω, onde ψ e θ devem ser avaliados para o tempo τ e ω para o tempo $\tau-\Delta\tau$.

Na solução da equação (3.79a) consideram-se conhecidas as vorticidades nos pontos nodais do contorno.

11) Cálculo da vorticidade no contorno (bloco 11)

As vorticidades nos pontos nodais do contorno são calculadas pelas equações (2.28a) e (2.28b) sendo que ψ_0 é o valor da função corrente distante Δn do contorno e avaliada para o tempo τ.

12) Cálculo do número de Nusselt médio e do fator de atrito (bloco 12)

O número de Nusselt médio Nu, é calculado pela equação (2.34) e o fator de atrito f, pela equação (2.35).

13) Verificação do limite máximo de iterações (bloco 13)

Quando o número de iterações atinge o limite máximo estabelecido, o programa é interrompido.

14) Verificação de convergência (bloco 14)

Considera-se que houve convergência ou que se atingiu o regime permanente quando se verificar o seguinte critério:

$$\sum_{I=1}^{n} \left[Nu^{\tau} - Nu^{\tau-\Delta\tau} \right] \leq 10^{-4} , \qquad (A5.1)$$

Onde a somatória representa a soma dos n últimos valores da iteração. Na maioria dos casos estudados adotou-se $100 \leq n \leq 200$.

15) Imprimir resultados (bloco 15)

Os resultados para as distribuições de ψ, W, θ e ω, bem como o número de Nusselt médio e o fator de atrito podem ser obtidos para o tempo τ.

16) Incremento de tempo (bloco 16)

Se o critério dado pela equação (A5.1) for obedecido, o processo de cálculo é interrompido. Caso contrário, o tempo é incrementado e o processo de cálculo é reiniciado a partir de A (vide figura A5.1).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Powe, R. E., Carley, C. T. e Carruth, S. L., A Numerical Solution for Natural Convection in Cylindrical Annuli, Journal of Heat Transfer, Vol. 93, pp. 210-220, 1971.

[2] Projahn, U., Rieger, H. e Beer, H., Numerical Analysis of Laminar Natural Convection Between Concentric and Eccentric Cylinders, Numerical Heat Transfer, Vol. 4, pp. 131-146, 1981.

[3] Cho, C. H., Chang, K. S. e Park, K. H., Numerical Simulation of Natural Convection in Concentric and Eccentric Horizontal Cylindrical Annuli, Journal of Heat Transfer, Vol. 104, pp. 624-630, 1982.

[4] Tsui, Y. T. e Tremblay, B., On Transient Natural Convection in the Annulus Between Concentric Horizontal Cylinders with Isothermal Surfaces, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 27, No. 1, pp. 103-111, 1984.

[5] Powe, R. E., Carley, C. T. e Bishop, E. H., Free Convective Flow Patterns in Cylindrical Annuli, Journal of Heat Transfer, Vol. 91, pp. 310-314, 1969.

[6] Kuehn, T. H. e Golstein, R. J., An Experimental Study of Natural Convection Heat Transfer in Concentric and Eccentric Horizontal Cylindrical Annuli, Journal of Heat Transfer, Vol. 100, pp. 635-640, 1978.

[7] Acharya, S. e Patankar, S. V., Laminar Mixed Convection in a Shrouded Fin Array, Journal of Heat Transfer, Vol. 103, pp. 559-565, 1981.

[8] Maughan, J. R. e Incropera, F. P., Mixed Convection Heat Transfer with Longitudinal Fins in a Horizontal Parallel Plate Channel : Part I - Numerical Results, Journal of Heat Transfer, Vol. 112, pp. 612-618, 1990.

[9] Maughan, J. R. e Incropera, F. P., Mixed Convection Heat Transfer with Longitudinal Fins in a Horizontal Parallel Plate Channel : Part II - Experimental Results, Vol. 112, pp. 619-624, 1990.

[10] Cheng, K. C. e Hwang, G. J., Numerical Solution for Combined Free and Forced Laminar Convection in Horizontal Rectangular Channels, Journal of Heat Transfer, Vol. 91, pp. 59-66, 1969.

[11] Hwang, G. J. e Chou, F. C., Effect of Wall Conduction on Combined Free and Forced Laminar Convection in Horizontal Rectangular Channels, Journal of Heat Transfer, Vol. 109, pp. 936-942, 1987.

[12] Faris, G. N. e Viskanta, R., An Analysis of Laminar Combined Forced and Free Convection Heat Transfer in a Horizontal Tube, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 12, pp. 1295-1309, 1969.

[13] Chou, F. C. e Hwang, G. J., Numerical Analysis of the Graetz Problem with Natural Convection in a Uniformly Heated Horizontal Tube, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 31, No. 6, pp. 1299-1308, 1988.

[14] Cheng, K. C. e Ou, J. W., Natural Convection Effects on Graetz Problem in Horizontal Isothermal Tubes, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 20, pp. 953-960, 1977.

[15] Manglik, R. M. e Bergles, A. E., Laminar Flow Heat Transfer in a Semi-Circular Tube with Uniform Wall Temperature, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 31, No. 3, pp. 625-636, 1988.

[16] Shannon, R. L. e Depew, C. A., Combined Free Forced Laminar Convection in a Horizontal Tube with Uniform Heat Flux, Journal of Heat Transfer, Vol. 90, pp. 353-357, 1968.

[17] Chen, J. D. e Hsieh, S. S., Buoyancy Effect on the

Laminar Forced Convection in a Horizontal Tube with a Longitudinal Thin Plate Insert, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 35, No. 1, pp.263-267,1992.

[18] Hattori, N. e Kotake, S., Combined Free and Forced Convection Heat Transfer Fully Developed Flow in in Horizontal Tubes (experiments), Bull. JSME, Vol. 8, pp. 861-868,1978.

[19] Hattori, N., Combined Free and Forced Convection Heat Transfer for Fully Developed Flow in Horizontal Concentric Annuli (numerical analysis), Heat Transfer - Jap. Res, Vol. 8, pp. 27-48, 1979.

[20] Nguyen, T. H., Vasseur, P., Robillard, L. e Shekar, B. C., Combined Free and Forced Convection of Water Between Horizontal Concentric Cylinders, Journal of Heat Transfer, Vol. 105, pp. 498-504, 1983.

[21] Mojtabi, A. e Caltagirone, J. P., Analyse du Transfert de Chaleur en Convection Mixte Laminaire entre deux Cylindres Coaxiaux Horizontaux, Int. J. Heat Transfer, Vol. 23, pp. 1369-1375, 1980.

[22] Nieckele, A. O. e Patankar, S. V., Laminar Mixed Convection in a Concentric Annulus with Horizontal Axis, Journal of Heat Transfer, Vol. 107, pp. 902-909, 1985.

[23] Kaviany, M., Laminar Combined Convection in a Horizontal Annulus Subject to Constant Heat Flux Inner Wall and Adiabatic Outer Wall, Journal of Heat Transfer, Vol. 108, pp. 392-397, 1986.

[24] Zienkiewcz, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, Mc. Graw-Hill, London, 1971.

[25] Kays, W. M., Convective Heat and Mass Transfer, 2nd ed., Mc. Graw-Hill, 1975.

[26] Nascimento, M. A. R., Estudo Teórico de Convecção Natural em Coletores Concentradores com Absorvedor Cilíndrico, Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá, 1988.

[27] Kakaç, S., Shah, R. K. e Aung, W., Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer, John Wiley & Sons, 1987.

Ministério da Educação
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

A N E X O I

PRONUNCIAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

A Banca Examinadora, abaixo assinada, nomeada por Portaria nº 417 de 18/12/92, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: "**Estudo da Transfêrencia de Calor por Convecção Mista no Interior de Tubos Horizontais Concêntricos e Excêntricos**" apresenta pronunciamento no sentido de que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá solicite ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) a expedição do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica, na Área de Conversão de Energia, satisfeitas as demais exigências regimentais, a **Márcia Mendes Ribeiro.**

Itajubá, 18 de Dezembro de 1992.

Profª Angela Nieckele
1º Examinador - PUC

Prof. Vilmar Arthur Schawrz
2º Examinador - EFEI

Prof. Genésio José Menon
3º Examinador - Orientador - EFEI

Ministério da Educação
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

A N E X O I I

FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

Título da Dissertação *"Estudo da Tranferência de Calor por Convecção Mista no Interior de Tubos Horizontais Concêntricos e Excêntricos"*

Autor: MÁRCIA MENDES RIBEIRO

JULGAMENTO

EXAMINADORES	CONCEITO	RUBRICA
1º	A+	
2º	A*	
3º	A+	
4º	xxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxx

Resultado Médio: Conceito A+, ou seja, APROVADA COM DISTINÇÃO

Observações: _____

Itajubá, 18 de Dezembro de 1992.

Profª Angela Nieckele
1º Examinador - PUC

Prof. Vilmar Arthur Schawrz
2º Examinador - EFEI

Prof. Genésio José Menon
3º Examinador - Orientador - EFEI

DATA 22/03/1994
PROC.
PED. PPG
LIV.
Cz$ DOAÇÃO

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200748
NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA

536.2:532.537:519.6(043.2)
FICHA 01 T. 748
EFEI / Biblioteca Mauá
R484e
RIBEIRO, M. M.
Estudo da transferência de calor por convecção mista no interior de tubos...

N.o Registro	Devolver e
[illegible]	22/09/9[illegible]

EFEI
BIBLIOTECA MAUÁ

Esta publicação deverá ser devolvida dentro do prazo estipulado.

O leitor é responsável pela publicação em seu poder.