

TESE

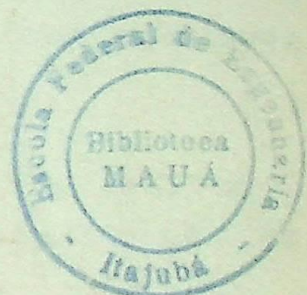
765

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ESTUDO DE PROBLEMAS CONJUGADOS DE
TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO NATURAL
EM CAVIDADES RETANGULARES COM CONDUÇÃO NA
PARTIÇÃO E NAS PAREDES LATERAIS

PAULO MOHALLEM GUIMARÃES



ORIENTADOR:

PROF. DR. GENÉSIO JOSÉ MENON

ITAJUBÁ - M.G.

1992

CLASS. 536.24(0432)
 COTT. G 963 e
 TOMO 765

EFEI / BIBLIOTECA.

ESTE LIVRO DEVE SER DEVOLVIDO NA
ÚLTIMA DATA CARIMBADA .

26/12/95	27/1/95	
03/03/95	12.3.95	
16/3/95	16/02/06	
29/3/95	28/02/96	
05/04/95	12.3.96	
12/04/95	04/03/07	
19/04/95	24.3.97	
2/5/95	11.4.97	
18/5/95	13.12.2001	
25/5/95		
08/06/95	14/04/05	
20.6.95		
04-07-95		
17-7-95		
01.8.95		
18-8-95		
31/08/95		
14/9/95		
01.10.95		
16.10.95		
31/10/95		
14-11-95		

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Prof. Dr. Genésio José Menon, pela paciência e dedicação prestadas no decorrer deste trabalho.

Àqueles cuja amizade foi o maior incentivo para a realização deste trabalho, em particular aos amigos e colegas do curso de pós-graduação.

A todos os professores e funcionários da EFEI que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização do presente trabalho.

A Messias Tadeu Salgado, pela confecção dos desenhos.

RESUMO

No presente trabalho são estudados problemas conjugados de transferência de calor por convecção natural em cavidades retangulares com condução na partição e nas paredes laterais. São analisadas três situações: cavidades com paredes laterais e sem partição, cavidades sem paredes laterais e com partição e, finalmente, cavidades com paredes laterais e com partição. São estudados, nas duas últimas situações, o efeito da posição da partição situada no topo das cavidades e o efeito da altura da partição no número de Nusselt. Considera-se o escoamento laminar, bidimensional e não permanente, embora, todos os resultados sejam apresentados para o regime permanente. Admite-se que duas superfícies da cavidade são mantidas isotérmicas nas temperaturas quente (T_h) e fria (T_c) e que as outras duas superfícies são mantidas isoladas termicamente.

As equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia são resolvidas numericamente utilizando-se o método de elementos finitos, considerando-se os elementos isoparamétricos quadráticos quadrilaterais com oito nós. São determinadas as distribuições da função corrente, temperatura adimensional, vorticidade e o número de Nusselt médio em função dos parâmetros térmicos e geométricos e das propriedades físicas do meio. Os resultados são apresentados considerando-se os seguintes parâmetros: número de Prandtl (Pr) igual a 0,733; número de Grashof (Gr) entre 10^4 e 10^6 ; razão entre as difusividades térmicas do sólido e do fluido ($D = \alpha_s/\alpha_f$) entre 1 e 10^4 ; ângulo de inclinação (α) entre -90° e 30° ; razão de aspecto ($RA = H/L$) igual a 1 e 2; espessura adimensional da parede resfriada ($E_1 = e_1/L$) igual a 0 e 0,1; espessura adimensional da parede aquecida ($E_2 = e_2/L$) igual a 0 e 0,1; espessura adimensional da partição ($E_p = e_p/L$) igual a 0,05; altura adimensional da partição ($H_p = h_p/H$) igual a 0, 1/3 e 2/3; distância adimensional da partição em relação à superfície fria ($L_p = l_p/L$) igual a 1/3, 1/2 e 2/3.

ABSTRACT

In this work, a study of natural convection heat transfer in rectangular enclosures with a conductive partition and conductive side walls is performed. Three situations are analysed: enclosures with side walls and without partition; enclosures without side walls and with partition and, finally, enclosures with side walls and partition. The effect of the position and the height of a top partition in the Nusselt number are studied in the last two situations. It is considered an unsteady state of a bidimensional laminar flow, although all the results are presented for the steady state. It's assumed that the two external surfaces of the enclosure are maintained isothermal at the hot temperature (T_h) and cold temperature (T_c), while the top and bottom surfaces remain insulated.

The governing equations of conservation of mass, momentum and energy are solved numerically by the use of finite element method with isoparametric quadratic quadrilateral eight-nodal elements. The distribution of the stream function, nondimensional temperature, vorticity and the average Nusselt number are obtained in function of the thermal and geometrical parameters and the physical properties of the medium. The results are presented by considering the following parameters: Prandtl number (Pr) equal to 0.733; Grashof number (Gr) from 10^4 to 10^6 ; thermal diffusivity ratio ($D = \alpha_s/\alpha_f$) from 1 to 10^4 ; inclination angle from -90° to 30° ; aspect ratio ($Ra = H/L$) equal to 1 and 2; nondimensional thickness of the cooled wall ($E_1 = e_1/L$) of 0 and 0.1; nondimensional thickness of the heated wall ($E_2 = e_2/L$) of 0 and 0.1; nondimensional thickness of the partition ($E_p = e_p/L$) of 0.05; nondimensional height of the partition ($H_p = h_p/H$) of 0, $1/3$, and $2/3$; nondimensional distance of the partition to the cold surface ($L_p = l_p/L$) of $1/3$, $1/2$ and $2/3$.

CONTEÚDO

	Página
RESUMO	i
ABSTRACT	ii
CONTEÚDO	iii
SIMBOLOGIA	vi
ÍNDICE DAS TABELAS	xiv
ÍNDICE DAS FIGURAS	xv
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	
1.1 - Generalidades	1
1.2 - Revisão da Literatura	4
1.3 - Delineamento deste Trabalho	8
CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	
2.1 - Análise Teórica	11
2.2 - Adimensionalização do Problema	16
2.3 - Número de Nusselt Local e Médio	20
CAPÍTULO 3 - MÉTODO DE SOLUÇÃO	
3.1 - Introdução	23
3.2 - Elemento Isoparamétrico Quadrático Quadrilateral com Oito Nós	23
3.3 - Funções de Forma	25
3.4 - Desenvolvimento das Equações de Conservação Utilizando o Método de Elementos Finitos	26
3.4.1 - Forma matricial para os elementos em termos de função corrente	26

3.4.2 - Forma matricial para os elementos em termos de temperatura adimensional	34
3.4.3 - Forma matricial para os elementos em termos de vorticidade	37
3.5 - Integração Numérica	39
3.6 - Algoritmo de Solução	42
 CAPÍTULO 4 - RESULTADOS	
4.1 - Introdução	55
4.2 - Comparação de Resultados para Cavidades de Geometria Quadrada e Retangular sem Paredes Laterais e sem Partição	55
4.3 - Resultados do Presente Trabalho para Cavidades de Geometria Quadrada e Retangular com Paredes Laterais e sem Partição	59
4.4 - Resultados do Presente Trabalho para Cavidades de Geometria Quadrada sem Paredes Laterais e com Partição	68
4.5 - Resultados do Presente Trabalho para Cavidades de Geometria Quadrada com Paredes Laterais e com Partição	85
 CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	
5.1 - Conclusões	97
5.2 - Contribuição do Presente Trabalho	100
5.3 - Sugestões para Trabalhos Futuros	100
 APÊNDICE A1 - AVALIAÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA PARA O ELEMENTO QUADRÁTICO QUADRILATERAL	
APÊNDICE A2 - MÉTODO VARIACIONAL PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL INDEPENDENTE DO TEMPO	A5
APÊNDICE A3 - MÉTODO VARIACIONAL PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DEPENDENTE DO TEMPO	A9

APÊNDICE A4 - DEMONSTRAÇÃO DE $dx dy = |\det[J]| d\xi d\eta$ A14

APÊNDICE A5 - TÉCNICA DA QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE A16

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS A21

Símbolo	Designação	Página
acoeficiente	A2
A^eárea do elemento	A11
$[A]$matriz coluna global	A2
$[B^e]$matriz das derivadas parciais das funções de forma para o elemento	A2
c_{p_f}calor específico a pressão constante para o fluido	14
c_{p_s}calor específico a pressão constante para o sólido	15
$[C^e]$matriz capacitância do elemento	A11
$[C]$matriz capacitância global	A11
ccoeficiente	A2
Ddiferencial das derivadas	16
e_1espessura da parede restrita	11
e_2espessura da parede aquecida	11
e_pespessura da partição	11
e_respessura radial da parede restrita	15

SIMBOLOGIA

CARACTERES LATINOS

Símbolo	Designação	Página
acoeficiente	A2
A^eárea do elemento	A11
$[A]$matriz coluna global	43
$[B^e]$matriz das derivadas parciais das funções de forma para o elemento	A6
c_{p_f}calor específico a pressão constante para o fluido	14
c_{p_s}calor específico a pressão constante para o sólido	15
$[C^e]$matriz capacitância do elemento	A11
$[C]$matriz capacitância global	A11
Ccoeficiente	A2
Drazão das difusividades	16
e_1espessura da parede resfriada	11
e_2espessura da parede aquecida	11
e_pespessura da partição	11
E_1espessura adimensional da parede resfriada	16

E_2espessura adimensional da parede aquecida	16
E_pespessura adimensional da partição	16
Enúmero de elementos	A8
Ffunção	A1
gaceleração da gravidade	14
Gfunção	A1
Grnúmero de Grashof	16
$\{g^e\}$matriz das derivadas parciais da grandeza ϕ para o elemento	A6
hcoeficiente local de transferência de calor por convecção	21
\bar{h}coeficiente médio de transferência de calor por convecção	21
Haltura da cavidade	11
h_paltura da partição	11
H_paltura adimensional da partição	16
Ifuncional	A5
$[J]$matriz Jacobiana do elemento	27
K_fcondutividade térmica do fluido	14
K_scondutividade térmica do sólido	15
$[K_\psi^e]$matriz de rigidez da função corrente pa-	26

	ra o elemento	
$[K_{\theta}^e]$matriz de rigidez da temperatura adimensional para o elemento	34
$[K_{\omega}^e]$matriz de rigidez da vorticidade para o elemento	37
$[K]$matriz de rigidez global	A8
$[K_{\psi}]$matriz de rigidez global para a função corrente	42
$[K_{\theta}]$matriz de rigidez global para a temperatura adimensional	42
$[K_{\omega}]$matriz de rigidez global para a vorticidade	42
Lcomprimento da cavidade	11
l_pdistância da partição com a superfície S_1	11
L_pdistância adimensional da partição com relação a superfície S_1	16
mnúmero de pontos de integração na direção ξ	A19
nnúmero de pontos de integração na direção η	A19
Nfunção de forma do elemento	25
$[N]$matriz função de forma para o elemento	A6
Nunúmero de Nusselt médio	21

Nu_Lnúmero de Nusselt local	21
ppressão	14
Ppressão adimensional	17
Prnúmero de Prandtl	16
qfluxo de calor local	21
Q_ψ^efunção especificada para a função corrente no elemento	26
Q_θ^efunção especificada para a temperatura adimensional no elemento	34
Q_ω^efunção especificada para a vorticidade no elemento	37
Q_ϕ^efunção especificada no elemento	A6
Q_ϕfunção especificada no domínio	A5
Ranúmero de Rayleigh ($Ra = Gr.Pr$)	4
RArazão de aspecto	16
$\{R_\psi^e\}$vetor força do elemento para a função corrente	26
$\{R_\theta^e\}$vetor força do elemento para a temperatura adimensional	34
$\{R_\omega^e\}$vetor força do elemento para vorticidade	37
$\{R\}$vetor força	A8
$\{R_\psi\}$vetor força global para a função corrente	42

Vcomponente de velocidade adimensional do fluido na direção Y	16
Wpeso para o ponto de integração numérica	39
xcoordenada global	14
Xcoordenada global adimensional	16
ΔXincremento de distância no eixo X	20
ycoordenada global	14
Ycoordenada global adimensional	16
ΔYincremento de distância no eixo Y	20

CARACTERES GREGOS

Símbolo	Designação	Página
αângulo de inclinação com a horizontal	16
α_fdifusividade térmica do fluido	18
α_sdifusividade térmica do sólido	18
βcoeficiente de expansão volumétrica do fluido	14
δparâmetro	A5
Δincremento	20
ηcoordenada local adimensional	23
θtemperatura adimensional	16
λparâmetro	A9

νviscosidade cinemática do fluido	14
ξcoordenada local adimensional	23
ρ_fmassa específica do fluido	14
ρ_smassa específica do sólido	15
τtempo adimensional	16
$\Delta\tau$incremento de tempo adimensional	A12
ϕfunção escalar	23
ϕ_ofunção escalar especificada no contorno	A5
Φvalor da função escalar no ponto nodal	A6
φfunção de geometria do elemento	25
ψfunção corrente	18
ψ_ovalor da função corrente distante ΔX ou ΔY da superfície em contato com o fluido	20
ωvorticidade	18
ω_ovalor da vorticidade na superfície em contato com o fluido	20
Ωdomínio	3
Ω_fdomínio fluido	3
Ω_sdomínio sólido	3

ÍNDICES

Símbolo	Designação	Página
eelemento	23
iponto nodal	28
jponto de integração	A19
kponto de integração	A19
pponto do elemento	25
rgrau do polinômio de integração	A17

ÍNDICE DAS TABELAS

Tabela	Designação	Página
4.1	Comparação de resultados para a geometria quadrada sem paredes laterais e sem partição com $Gr = 2 \times 10^4$; $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$	58
4.2	Comparação de resultados para as geometrias quadrada e retangular sem paredes laterais e sem partição com $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$	58
4.3	Comparação de resultados para a geometria quadrada sem paredes laterais e sem partição com $Pr = 0,733$; $RA = 1$; $E_1 = E_2 = 0$ e $\alpha = 0^\circ$	59
4.4	Resultados do número de Nusselt médio para cavidades com paredes laterais e sem partição com diferentes RA , D e Gr com $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$ e $\alpha = 0^\circ$	66
4.5	Resultados do número de Nusselt médio para cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição onde $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$	76
4.6	Resultados do número de Nusselt médio para cavidades quadradas com paredes laterais e com partição onde $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$	91

ÍNDICE DAS FIGURAS

Figura	Designação	Página
1.1	Geometria da cavidade	2
2.1	Geometria do problema	12
2.2	Condições de contorno	12
2.3	Parâmetros geométricos adimensionais	13
3.1	Modelo composto de subdomínios	24
3.2	Elemento isoparamétrico quadrático quadrilateral com oito nós	24
3.3	Elemento quadrático quadrilateral com oito nós e nove pontos de integração	41
3.4	Elemento quadrático quadrilateral com oito nós e dezesseis pontos de integração	41
3.5	Matriz global {A}	45
3.6	Fluxograma do programa computacional	46
4.1	Geometria quadrada com as condições de contorno	56
4.2	Malha (9 x 9) para a geometria quadrada	56
4.3	Cavidade quadrada com paredes laterais e sem partição com condições de contorno para $\alpha = 0^\circ$	61
4.4	Cavidade retangular com paredes laterais	61

- e sem partição com condições de contorno para $\alpha = 0^\circ$
- 4.5 Número de Nusselt médio versus número de elementos para geometria quadrada e retangular com paredes laterais e sem partição com $Pr = 0,733$; $D = 10^3$; $E_1 = E_2 = 0,1$ e $\alpha = 0^\circ$ 62
- 4.6 Desvio em porcentagem versus número de elementos para geometria com $RA = 1$; $D = 10^3$; $E_1 = E_2 = 0,1$ e $\alpha = 0^\circ$ 63
- 4.7 Desvio em porcentagem versus número de elementos para geometria com $RA = 2$; $D = 10^3$; $E_1 = E_2 = 0,1$ e $\alpha = 0^\circ$ 65
- 4.8 Tempo de CPU por iteração versus o número de elementos 66
- 4.9 Número de Nusselt médio versus número de Grashof para cavidades quadradas com paredes laterais e sem partição com $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$; $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$ 67
- 4.10 Cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$ 75
- 4.11 Número de Nusselt médio em função do número de Grashof para cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $RA = 1$; $D = 10$ e $\alpha = 0^\circ$ 77
- 4.12 Malhas típicas usadas no presente trabalho 78

- 4.13 Distribuição da função corrente para cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$; $\alpha = 0^\circ$ e $Gr = 10^4$ 79
- 4.14 Distribuição da temperatura adimensional para cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$; $\alpha = 0^\circ$ e $Gr = 10^4$ 80
- 4.15 Distribuição da função corrente para cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$; $\alpha = 0^\circ$ e $Gr = 10^5$ 81
- 4.16 Distribuição da temperatura adimensional para cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$; $\alpha = 0^\circ$ e $Gr = 10^5$ 82
- 4.17 Distribuição da função corrente e da temperatura adimensional para cavidade inclinada com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $L_p = 1/2$; $H_p = 2/3$; $D = 10$; $RA = 1$; $\alpha = 30^\circ$; $Gr = 10^4$ e 10^5 83
- 4.18 Distribuição da função corrente e da temperatura adimensional para cavidade inclinada com partição para $\alpha = -30^\circ$; -60° ; -90° e $Gr = 10^5$ 84
- 4.19 Cavidades quadradas com paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$ e 90

- $\alpha = 0^\circ$
- 4.20 Número de Nusselt médio em função do número de Grashof para cavidades quadradas com paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$. 92
- 4.21 Distribuição da função corrente para cavidades quadradas com paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$; $\alpha = 0^\circ$; $L_p = 1/2$; $H_p = 2/3, 1/3, 0$; $Gr = 10^4$ e 10^5 93
- 4.22 Distribuição da temperatura adimensional para cavidades quadradas com paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$; $\alpha = 0^\circ$; $L_p = 1/2$; $H_p = 2/3, 1/3, 0$; $Gr = 10^4$ e 10^5 94
- 4.23 Distribuição da função corrente e da temperatura adimensional para cavidade inclinada com paredes laterais e partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$; $E_p = 0,05$; $L_p = 1/2$; $H_p = 2/3$; $D = 10$; $RA = 1$; $\alpha = 30^\circ$; $Gr = 10^4$ e 10^5 95
- 4.24 Distribuição da função corrente e da temperatura adimensional para cavidade inclinada com partição e paredes laterais para $\alpha = -30^\circ$; -60° ; -90° e $Gr = 10^5$ 96
- A1.1 Elemento quadrático quadrilateral com oito nós e a função de interpolação ϕ^e A3
- A3.1 Esquema da diferença finita central para a derivada $d\phi/d\tau$ A13

A4.1	Coordenadas X Y e $\xi \eta$	A14
A5.1	Função $f(\xi)$	A16
A5.2	Elemento com um ponto de integração	A19
A5.3	Elemento com quatro pontos de integração	A20
A5.4	Elemento com nove pontos de integração	A20
A5.5	Elemento com dezesseis pontos de integração	A20

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Generalidades

O estudo da transferência de calor por convecção natural em fluidos confinados dentro de cavidades retangulares tem sido extensamente tratado nos últimos anos devido a sua importância em certas aplicações na engenharia, como por exemplo: coletores de energia solar, onde fica caracterizado o efeito da convecção natural no espaço existente entre o absorvedor e a cobertura; janelas com vidro duplo, visando a minimização do fluxo de calor; isolamento de reatores nucleares por cavidades contendo gases; isolamento de cabines de aeronaves; aquecimento de ambientes; etc.

No estudo da convecção natural em cavidade retangular é frequente admitir que ela seja constituída por duas superfícies mantidas isotérmicas, uma com temperatura fria e outra com temperatura quente, e duas superfícies que podem apresentar como condições de contorno o isolamento térmico, a variação linear de temperatura ou a condução de calor.

Recentemente, têm sido publicados trabalhos que tratam da redução nas perdas de calor por convecção natural devido às alterações na geometria da cavidade. Uma alteração que se mostrou significativa para a redução das perdas de calor por convecção é a colocação de partições junto a uma das superfícies da cavidade.

No presente trabalho estuda-se a convecção natural numa cavidade retangular inclinada com relação à horizontal que possui uma partição condutora fixada junto à superfície superior S_3 e duas paredes laterais condutoras, conforme mostra a figura 1.1. Considera-se que as superfícies S_1 e S_2 são mantidas isotérmicas nas temperaturas fria e quente, T_c e T_h , respectivamente, e que as superfícies S_3 são mantidas isoladas termicamente. As superfícies S_4 e S_5 representam as superfícies das paredes laterais que estão em contato com o meio fluido e a

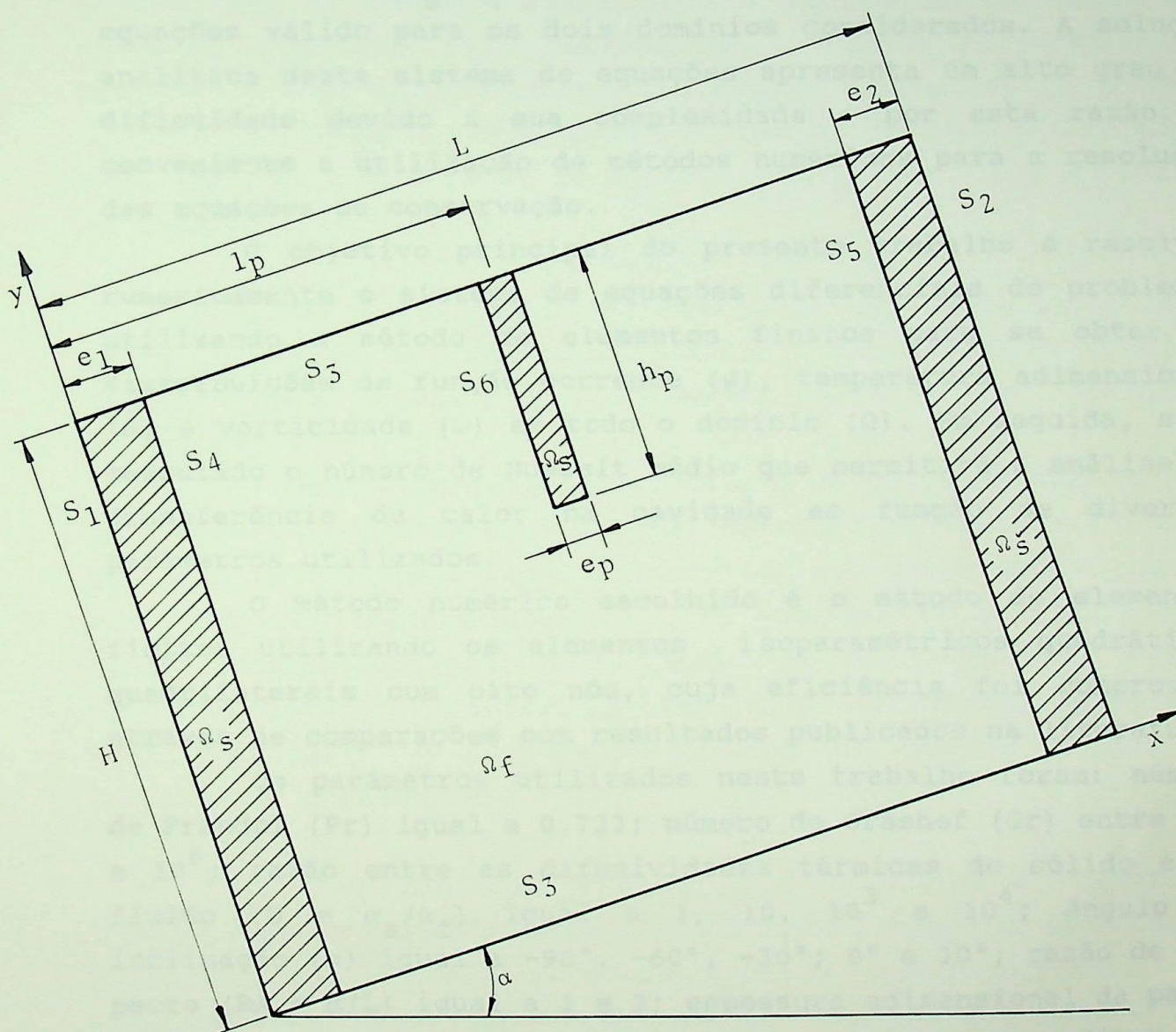


Figura 1.1 - Geometria da cavidade.

superfície S_6 representa a superfície da partição que está em contato com o meio fluido.

No estudo teórico da convecção natural em cavidades torna-se necessário resolver as equações de conservação, que se constituem num sistema de equações diferenciais parciais não lineares que podem ser acopladas em termos de função corrente, temperatura adimensional e vorticidade. Como este trabalho é um estudo de problema conjugado de transferência de calor com convecção natural no domínio fluido (Ω_f) e condução pura no domínio sólido (Ω_s), faz-se necessário obter um sistema de equações válido para os dois domínios considerados. A solução analítica deste sistema de equações apresenta um alto grau de dificuldade devido a sua complexidade e por esta razão, é conveniente a utilização de métodos numéricos para a resolução das equações de conservação.

O objetivo principal do presente trabalho é resolver numericamente o sistema de equações diferenciais do problema, utilizando o método de elementos finitos para se obter as distribuições de função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e vorticidade (ω) em todo o domínio (Ω). Em seguida, será calculado o número de Nusselt médio que permitirá a análise da transferência de calor na cavidade em função de diversos parâmetros utilizados.

O método numérico escolhido é o método de elementos finitos utilizando os elementos isoparamétricos quadráticos quadrilaterais com oito nós, cuja eficiência foi comprovada através de comparações com resultados publicados na literatura.

Os parâmetros utilizados neste trabalho foram: número de Prandtl (Pr) igual a 0,733; número de Grashof (Gr) entre 10^4 e 10^6 ; razão entre as difusividades térmicas do sólido e do fluido ($D = \alpha_s/\alpha_f$) igual a 1, 10, 10^3 e 10^4 ; ângulo de inclinação (α) igual a -90° , -60° , -30° ; 0° e 30° ; razão de aspecto ($RA = H/L$) igual a 1 e 2; espessura adimensional da parede resfriada ($E_1 = e_1/L$) igual a 0 e 0,1; espessura adimensional da parede aquecida ($E_2 = e_2/L$) igual a 0 e 0,1; espessura adimensional da partição ($E_p = e_p/L$) igual a 0 e 0,05; altura adimensional da partição ($H_p = h_p/H$) igual a 0, 1/3 e 2/3; distância adimensional da partição em relação à superfície S_1 ($L_p = l_p/L$) igual a 1/3, 1/2 e 2/3.

1.2 - Revisão da Literatura

1.2.1 - Convecção natural em cavidade retangular

Batchelor [1], em 1954, realizou o primeiro trabalho analítico que se conhece através da literatura sobre convecção natural em cavidade retangular.

Poots [2], em 1958, obteve a primeira solução numérica para o tipo de problema citado acima, utilizando uma série de funções ortogonais para representar a função corrente e a temperatura. Os resultados obtidos tinham a precisão de quatro algarismos significativos, para valores do número de Rayleigh (Ra) até 10^4 , com a razão de aspecto (RA) igual a 1 e o número de Prandtl (Pr) igual a 0,73.

Wilkes e Churchill [3], em 1966, apresentaram um dos primeiros trabalhos numéricos usando o método de diferenças finitas para estudar a convecção natural em cavidade retangular.

As duas superfícies horizontais da cavidade retangular foram mantidas isoladas, e as duas superfícies verticais foram mantidas isotérmicas, sendo uma mantida com temperatura quente e a outra com temperatura fria. As equações de vorticidade e temperatura adimensional foram resolvidas com um método implícito de diferenças finitas. Os resultados encontrados foram obtidos para RA = 1 e o número de Grashof (Gr) até 10^5 e para RA igual a 2 e 3 com Gr = 2×10^4 .

Em 1974, Ozoe et al. [4 , 5] estudaram a convecção natural numa cavidade retangular inclinada. O método de solução utilizado foi o de diferenças finitas para resolver as equações de conservação em termos da função corrente, vorticidade e temperatura adimensional. Adotou-se, na referência [4], Pr = 10, RA = 1, Ra até 8×10^3 e o ângulo de inclinação com a horizontal entre 0° e 90° . Na referência [5] considerou-se Pr = 1, RA = 1, 2, 3 e 4, Ra = 2×10^3 , 4×10^3 e 8×10^3 e o ângulo de inclinação entre 0° e 180° . Foram comparados os números de Nusselt para o ângulo de inclinação

90° com aqueles encontrados por Wilkes e Churchill [3], encontrando-se boa concordância.

Em 1976, a transferência de calor por convecção natural em cavidade retangular foi estudada experimentalmente por Arnold et al. [6], sendo considerado $RA = 1, 3, 6$ e 12 , Ra até 10^6 e ângulos de inclinação entre 0° e 180° . Foi verificado que os números de Nusselt mínimos ocorriam para ângulos de inclinação com a horizontal entre 30° e 70° , sendo fixados os números de Rayleigh como parâmetros para cada geometria estudada. De acordo com os autores, o valor mínimo do número de Nusselt é causado pela transição do escoamento transversal unicelular para o escoamento composto de células transversais e longitudinais.

Lee [7], em 1979, apresentou uma excelente revisão da literatura sobre a convecção natural em cavidades retangulares.

Menon [8], em 1989, estudou a convecção natural transiente no interior de uma cavidade retangular inclinada de um ângulo α em relação a horizontal. O método de solução utilizado foi o método de diferenças finitas para se determinar o número de Nusselt médio em função do número de Grashof (Gr), da razão de aspecto (RA) e do ângulo de inclinação da cavidade (α). Os parâmetros variados no problema foram $Gr = 10^4, 10^5$ e 10^6 , $\alpha = 30^\circ, 60^\circ$ e 90° , $RA = 1, 2$ e 3 e $Pr = 0,733$. Foram, ainda, feitas comparações com os resultados obtidos por De Vahl Davis [9] e Behnia et al. [10] encontrando excelente concordância.

1.2.2 - Convecção natural em cavidade retangular com partições

Jetli et al. [11], em 1986, estudaram a convecção natural numa cavidade quadrada parcialmente dividida por duas partições condutoras, uma superior e outra inferior, com duas superfícies verticais laterais, uma com temperatura fria e outra com temperatura quente, e duas superfícies horizontais condutoras.

As grandezas variadas foram o número de Rayleigh igual a 10^4 e $3,55 \times 10^5$ e a razão de condutividades igual a 2 e 500, considerando três disposições das partições. A primeira posição tem a partição superior próxima da superfície quente e a partição inferior próxima da superfície fria; a segunda posição tem as duas partições localizadas no centro da cavidade e na terceira posição a partição superior está próxima da superfície fria e a partição inferior está próxima da superfície quente.

Foi verificado que a posição das partições tem um maior efeito na transferência de calor do que a razão de condutividades para os dois números de Rayleigh considerados, sendo que a primeira posição tem o maior número de Nusselt.

Acharya e Jetli [12], em 1990, estudaram a transferência de calor por convecção natural numa cavidade quadrada, parcialmente dividida, considerando as superfícies horizontais condutoras. Uma partição condutora foi fixada na base da cavidade. As superfícies verticais da cavidade foram mantidas isotérmicas, sendo uma mantida com temperatura quente e a outra com temperatura fria.

Foi encontrado que para números de Rayleigh (Ra) iguais a 10^5 e 10^6 o escoamento tem maiores velocidades na região compreendida entre a partição e a superfície quente ocorrendo uma separação do escoamento atrás da partição. Para números de Rayleigh mais altos ($Ra \approx 10^{10}$) apareceu uma recirculação entre a partição e a superfície fria.

Foi verificado que a altura da partição tem um efeito bem maior na transferência de calor do que a posição da partição.

Kangni et al. [13], em 1991, estudaram a convecção natural numa cavidade retangular com múltiplas partições verticais, completas, condutoras e com espessura finita. Foram consideradas duas superfícies verticais, uma com temperatura fria e outra com temperatura quente, e duas superfícies horizontais adiabáticas.

Foi verificado que o aumento da espessura das partições diminui a transferência de calor. Para números de Rayleigh menores que 10^4 , o regime de transferência de calor é

predominantemente condutivo e o aumento da espessura da partição reduz pouco a transferência de calor. Já para maiores valores de Rayleigh, o regime é predominantemente convectivo e o aumento da espessura reduz bastante a transferência de calor.

Foi notado que a transferência de calor decresce com o aumento do número de partições. A redução do número de Nusselt é mais acentuada a medida que o número de Rayleigh aumenta.

Verificou-se que o número de Nusselt decresce a medida que se aumenta a distância das partições com relação a superfície fria, sendo que este efeito se torna menos acentuado a medida que as partições se aproximam do centro da cavidade. Foi notado que o número de Nusselt é uma função decrescente da razão de aspecto da cavidade.

Um estudo numérico foi apresentado por Chen e Ko [14], em 1991, para a convecção natural numa cavidade retangular com comprimento igual ao dobro da altura. A cavidade é dividida por uma partição parcial fixada na superfície horizontal superior. As condições de contorno do problema consideram duas superfícies verticais mantidas com fluxo de calor uniforme e duas superfícies horizontais adiabáticas.

O fluido de trabalho é a água com o número de Prandtl igual a 7.

Neste trabalho foram examinados e discutidos os efeitos de uma abertura situada no centro da partição, do número de Rayleigh modificado e da razão de condutividades.

Foi verificado que a transferência de calor aumenta com o aumento do número de Rayleigh modificado e com o aumento da abertura na partição.

Notou-se que o efeito das razões de condutividades iguais a 0,02; 1 e 50, na transferência de calor, foi desprezível para todos os números de Rayleigh modificados até 10^8 .

Fernandes [15], em 1991, estudou teoricamente a convecção natural no interior de uma cavidade retangular inclinada de um ângulo α com relação à horizontal, contendo partições diatérmicas com espessuras desprezíveis fixadas junto à superfície fria. As superfícies laterais da cavidade foram

mantidas isotérmicas nas temperaturas quente e fria. Para as outras duas superfícies da cavidade foram considerados dois tipos de condições de contorno: adiabática e variação linear de temperatura.

Utilizou-se um método explícito de diferenças finitas para se resolver as equações de conservação na forma adimensional.

Os parâmetros geométricos envolvidos foram: razão de aspecto variando de 1 a 5, ângulos de inclinação entre 0° e 60° e número de partições variando de 0 a 5 com comprimentos adimensionais iguais a 0; 0,25; 0,5 e 0,75. Os parâmetros térmicos usados foram: números de Prandtl iguais a 0,71 e 0,733, número de Rayleigh variando de 10^3 a 10^6 e número de Grashof entre 10^4 e 10^6 .

Mostrou-se que a colocação de partições na superfície fria da cavidade tem o efeito de diminuir as perdas de calor por convecção natural no interior da cavidade.

1.3 - Delineamento deste Trabalho

O presente trabalho tem por principal objetivo resolver numericamente as equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia, a fim de se obter as distribuições da função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e vorticidade (ω), seguindo-se com o cálculo dos números de Nusselt local e médio.

Para atingir este objetivo, este trabalho será desenvolvido da seguinte forma:

Capítulo 2 - Formulação do Problema

Neste capítulo serão apresentadas inicialmente as equações gerais de conservação na forma dimensional, respectivamente acompanhadas das simplificações necessárias, bem como das condições de contorno. Estas equações são analisadas tanto para o domínio fluido (Ω_f) como para o domínio sólido (Ω_s).

Em seguida, as equações de conservação são apresentadas em termos de função corrente, temperatura adimensional e

vorticidade, seguindo-se do desenvolvimento das expressões para se calcular os números de Nusselt local e médio em duas superfícies da cavidade a ser estudada.

Capítulo 3 - Método de solução

Neste capítulo desenvolve-se o método numérico a ser empregado na resolução do problema. Optou-se pela aplicação do método de elementos finitos utilizando-se o elemento isoparamétrico quadrático quadrilateral com oito nós.

Inicialmente faz-se o desenvolvimento das equações de conservação para o elemento, seguindo-se de uma análise global considerando todo o domínio (Ω). É apresentado o desenvolvimento da técnica da quadratura de Gauss-Legendre para a integração numérica, onde o cálculo analítico de integrais é complexo.

Finalmente, faz-se o desenvolvimento de um programa computacional para solucionar os sistemas de equações globais acoplados em termos de função corrente, temperatura adimensional e vorticidade seguindo-se do cálculo dos números de Nusselt local e médio.

Capítulo 4 - Resultados

Neste capítulo faz-se inicialmente o teste do programa computacional comparando-se os resultados do presente trabalho com aqueles conhecidos na literatura.

São apresentados finalmente os resultados do presente trabalho variando-se parâmetros geométricos da cavidade, tais como, as espessuras adimensionais das paredes laterais (E_1 , E_2); a espessura, a altura e a posição adimensionais da partição (E_p , H_p , L_p); a razão de aspecto (RA) e o ângulo de inclinação (α); e variando-se parâmetros térmicos como o número de Grashof (Gr) e a razão entre as difusividades (D) mantendo-se o número de Prandtl (Pr) igual a 0,733.

Capítulo 5 - Conclusões e Recomendações

Neste capítulo são apresentadas as principais

conclusões obtidas no presente trabalho, bem como as suas contribuições mais importantes.

Faz-se ainda algumas recomendações de interesse para futuros trabalhos sobre análise teórica de convecção natural em cavidades.

Apêndices Teóricas

No apêndice A1 são avaliadas as funções de forma para o elemento quadrático quadrilateral com oito nós.

Nos apêndices A2 e A3 faz-se, respectivamente, o desenvolvimento do método variacional para as equações diferenciais independente e dependente do tempo.

No apêndice A4 faz-se uma demonstração matemática que decorre da transformação das coordenadas globais (X , Y) para as coordenadas locais (ξ , η).

No apêndice A5 é desenvolvida a técnica da quadratura de Gauss-Legendre para a integração numérica. Neste apêndice são obtidas as coordenadas dos pontos de integração situados dentro de cada elemento com as respectivas coordenadas (ξ , η) e pesos W .

Finalmente, são apresentadas as referências bibliográficas consultadas para a elaboração deste trabalho.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 - Análise Teórica

O presente trabalho estuda a convecção natural no interior de uma cavidade retangular de altura H e comprimento L , conforme a figura 2.1, onde duas paredes sólidas e condutoras da cavidade têm espessura e_1 e e_2 . Uma partição sólida e condutora de espessura e_p e altura h_p está fixada na parte superior da cavidade a uma distância l_p da superfície S_1 .

A superfície S_1 é mantida isotérmica numa temperatura fria (T_c) e a superfície S_2 é mantida isotérmica numa temperatura quente (T_h), conforme figura 2.2. As superfícies S_3 são mantidas isoladas termicamente.

Este trabalho estuda um problema conjugado de transferência de calor por convecção natural que ocorre no domínio fluido (Ω_f) e a condução pura de calor que ocorre no domínio sólido (Ω_s) mostrado na figura 2.2.

As equações de conservação governantes do problema serão analisadas tanto para o domínio fluido como para o domínio sólido.

Para o domínio fluido (Ω_f) considera-se que o regime é não permanente, o escoamento é incompressível, bidimensional e laminar, a função dissipação viscosa é desprezada, as propriedades do fluido são constantes, exceto a densidade nos termos de empuxo.

Mediante as considerações acima, as equações de conservação na forma dimensional são:

Para o fluido:

i) Continuidade

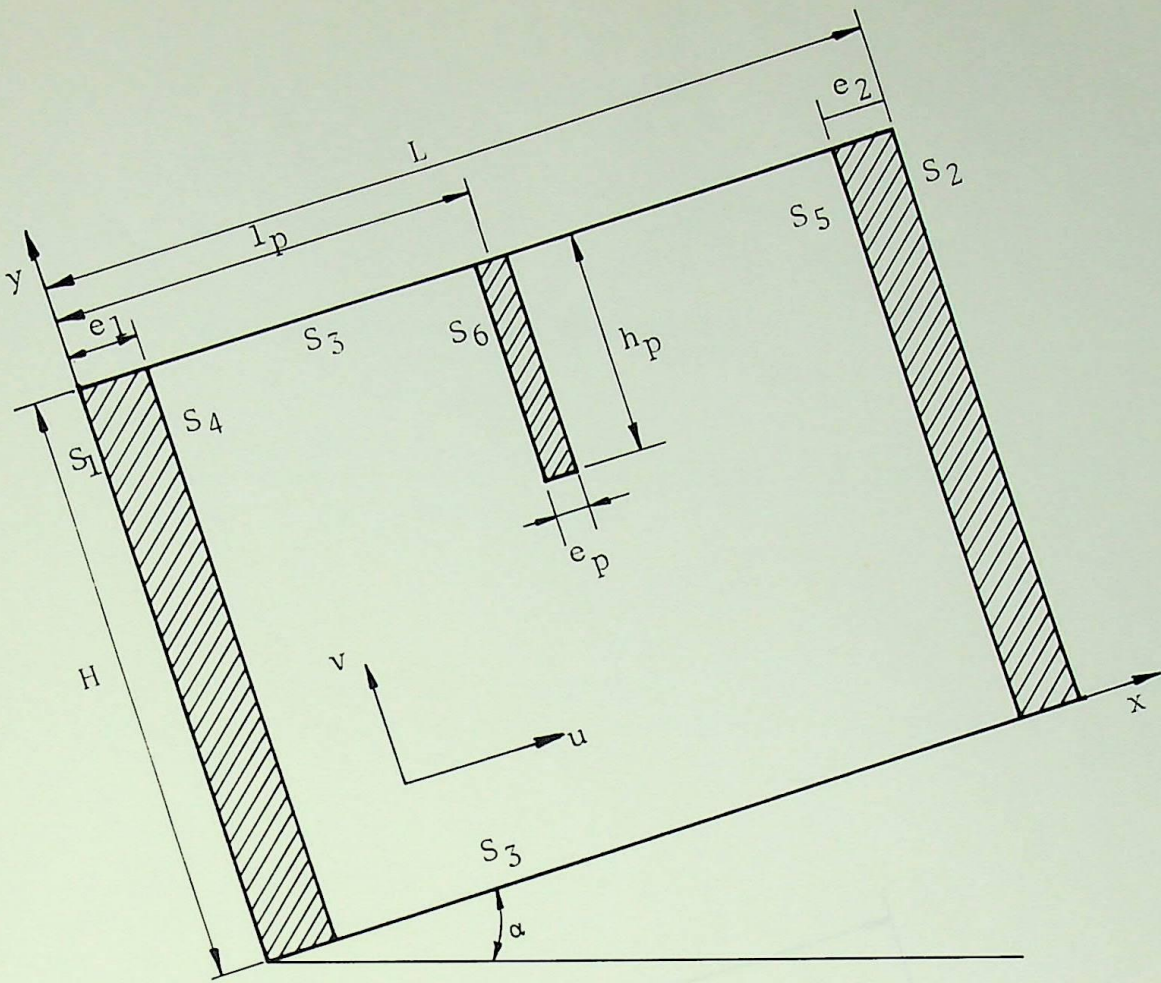


Figura 2.1 - Geometria do problema.

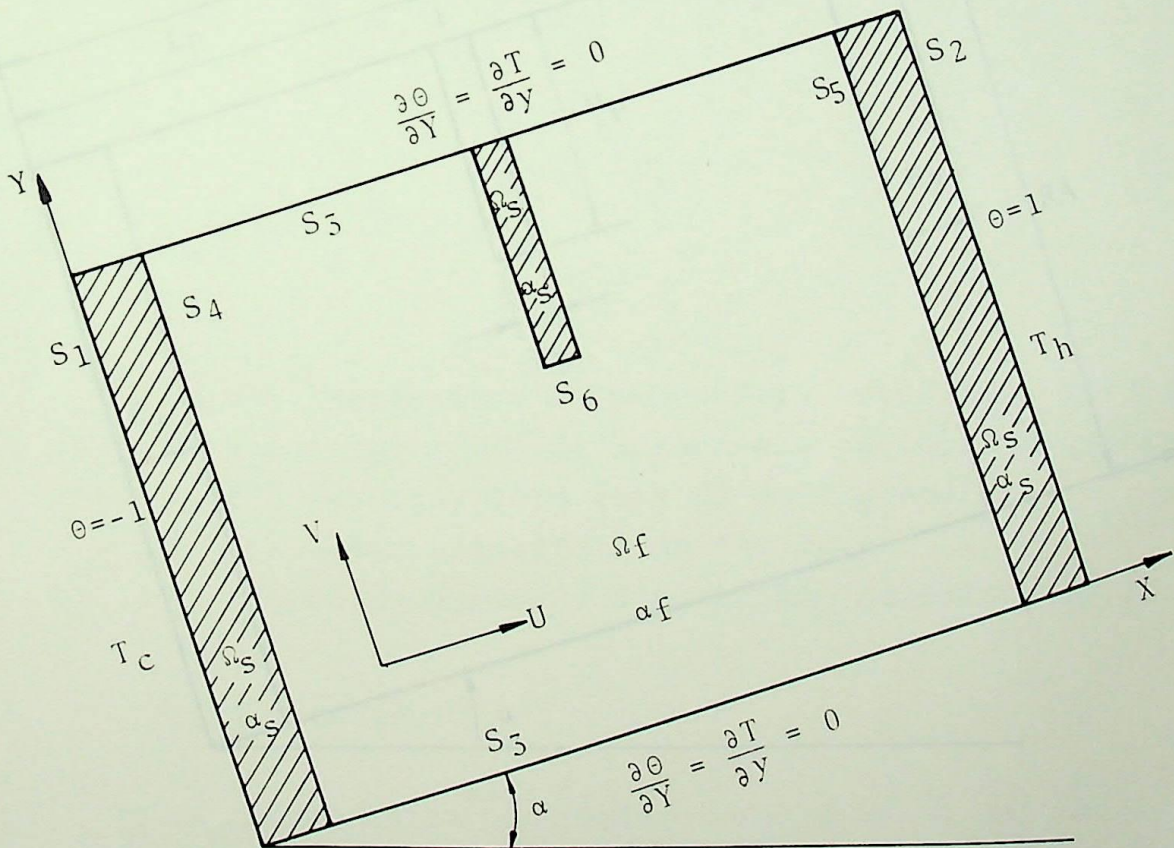


Figura 2.2 - Condições de contorno.

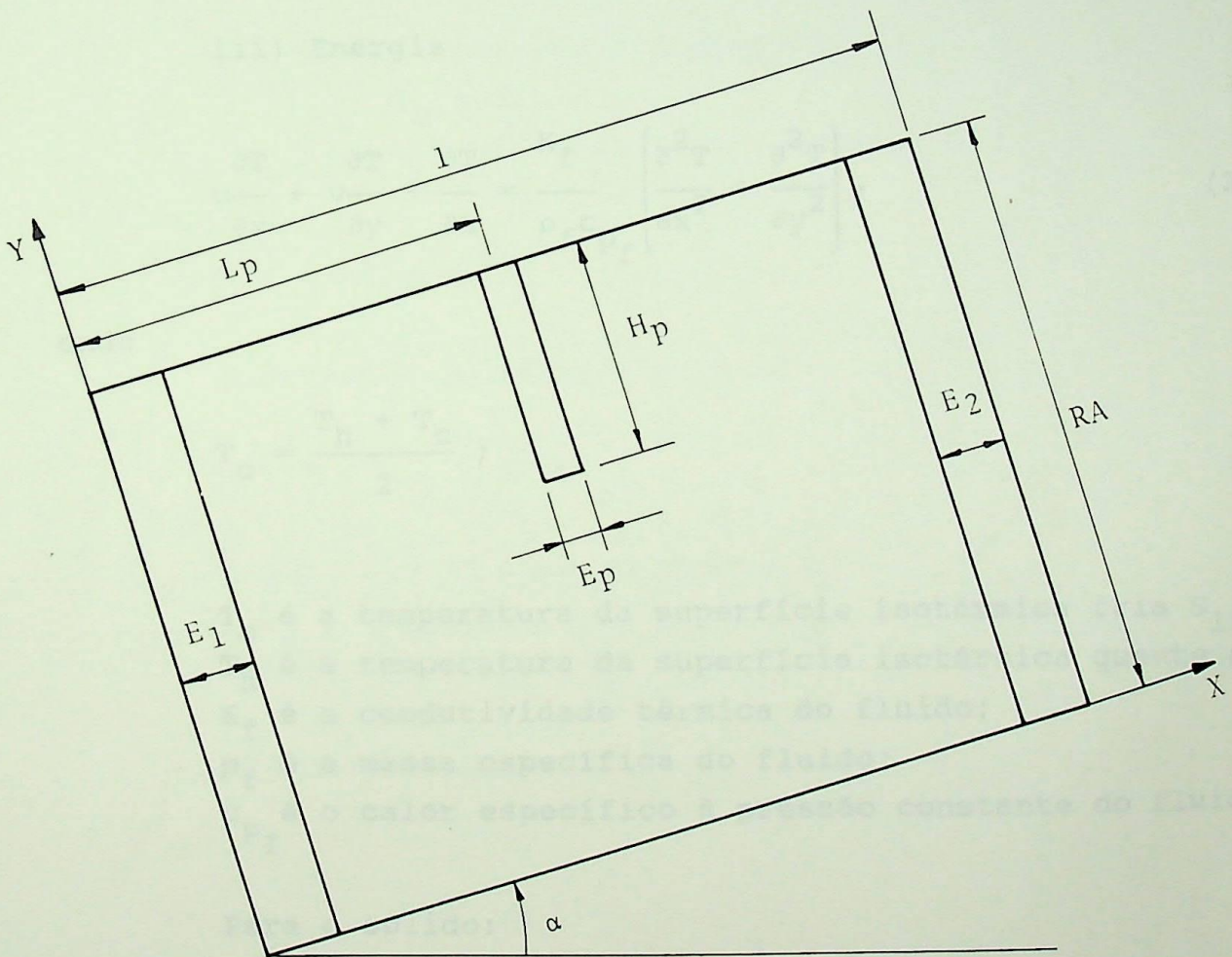


Figura 2.3 - Parâmetros geométricos adimensionais.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (2.1)$$

ii) Quantidade de movimento

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + g\beta(T - T_0) \operatorname{sen} \alpha + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (2.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} + g\beta(T - T_0) \operatorname{cos} \alpha + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \quad (2.3)$$

iii) Energia

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K_f}{\rho_f c_{p_f}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right); \quad (2.4)$$

onde

$$T_0 = \frac{T_h + T_c}{2};$$

T_c é a temperatura da superfície isotérmica fria S_1 ;
 T_h é a temperatura da superfície isotérmica quente S_2 ;
 K_f é a condutividade térmica do fluido;
 ρ_f é a massa específica do fluido;
 c_{p_f} é o calor específico à pressão constante do fluido.

Para o sólido:

As componentes de velocidade u e v são nulas no domínio sólido. A equação da energia para regime não permanente no domínio sólido (Ω_s) é dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K_s}{\rho_s c_{p_s}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right); \quad (2.5)$$

onde

K_s é a condutividade do sólido;

ρ_s é massa específica do sólido;

c_{p_s} é o calor específico à pressão constante do sólido.

As condições iniciais e de contorno da presente análise mostradas na figura 2.2 são:

i) Condições iniciais ($t=0$)

$$u = v = 0 \quad (\text{em todo o domínio } \Omega); \quad (2.6)$$

$$T = T_0 = \frac{T_c + T_h}{2} \quad (\text{em todo o domínio } \Omega); \quad (2.7)$$

ii) Condições de contorno ($t>0$)

Superfície isotérmica fria S_1

$$u = v = 0, \quad T = T_c; \quad (2.8)$$

Superfície isotérmica quente S_2

$$u = v = 0, \quad T = T_h; \quad (2.9)$$

Superfície isolada S_3

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (2.10)$$

Deve-se observar, também, que as componentes das velocidades do fluido junto às paredes e à partição devem ser nulas.

$$u = v = 0 \text{ em } S_4, S_5 \text{ e } S_6. \quad (2.11)$$

2.2 - Adimensionalização do Problema

No sentido de generalizar a solução numérica do problema, são definidas as seguintes grandezas adimensionais:

$$\tau = \frac{\nu t}{L^2}; \quad X = \frac{x}{L}; \quad Y = \frac{y}{L}; \quad \theta = \frac{T - T_o}{T_h - T_o};$$

$$U = \frac{uL}{\nu}; \quad V = \frac{vL}{\nu}; \quad P = \frac{pL^2}{\nu^2};$$

$$Gr = \frac{g\beta(T_h - T_c)L^3}{\nu^2}; \quad Pr = \frac{\rho_f \nu c_p}{K_f}; \quad D = \frac{\alpha_s}{\alpha_f};$$

$$RA = \frac{H}{L}; \quad E_1 = \frac{e_1}{L}; \quad E_2 = \frac{e_2}{L}; \quad E_p = \frac{e_p}{L};$$

$$H_p = \frac{h_p}{H}; \quad L_p = \frac{l_p}{L}. \quad (2.12)$$

Os parâmetros envolvidos no problema, podem ser:

a) Parâmetros geométricos (conforme figura 2.3)

RA é a razão de aspecto;

E_1 é a espessura adimensional da parede resfriada;

E_2 é a espessura adimensional da parede aquecida;

E_p é a espessura adimensional da partição;

H_p é a altura adimensional da partição;

L_p é a distância adimensional da partição;

α é o ângulo de inclinação com a horizontal.

b) Parâmetros térmicos

Gr é o número de Grashof;

Pr é o número de Prandtl;

D é a razão das difusividades do sólido e do fluido.

Substituindo a equação (2.12) em (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5), o problema em questão é estabelecido pelas equações adimensionais da continuidade, quantidade de movimento e energia que se seguem:

Para o fluido:

i) Continuidade

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0; \quad (2.13)$$

ii) Quantidade de movimento

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial U}{\partial \tau} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{Gr}{2} \theta \operatorname{sen} \alpha + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right); \quad (2.14)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial \tau} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{Gr}{2} \theta \operatorname{cos} \alpha + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right); \quad (2.15)$$

iii) Energia

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (2.16)$$

Para o sólido:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{D}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (2.17)$$

A razão das difusividades do sólido e do fluido (D), é definida por:

$$D = \frac{\alpha_s}{\alpha_f}; \quad (2.18)$$

onde

$$\alpha_f = \frac{K_f}{\rho_f c_p f} ; \quad \alpha_s = \frac{K_s}{\rho_s c_p s} . \quad (2.19)$$

Referindo-se à figura 2.2, as seguintes condições iniciais e de contorno são especificadas:

i) Condições iniciais ($\tau=0$)

$$U = V = \theta = 0 \quad (\text{em todo o domínio } \Omega); \quad (2.20)$$

ii) Condições de contorno ($\tau>0$)

Superfície isotérmica fria S_1

$$U = V = 0, \quad \theta = -1, \quad (2.21)$$

Superfície isotérmica quente S_2

$$U = V = 0, \quad \theta = 1, \quad (2.22)$$

Superfície isolada S_3

$$U = V = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0. \quad (2.23)$$

As componentes das velocidades adimensionais junto às paredes e à partição devem ser nulas, assim:

$$U = V = 0 \quad \text{em } S_4, S_5 \text{ e } S_6. \quad (2.24)$$

As definições de função corrente e vorticidade são introduzidas, respectivamente, pelas seguintes relações:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = - \frac{\partial \psi}{\partial X} \quad \text{e} \quad (2.25)$$

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}. \quad (2.26)$$

Das relações (2.25) e (2.26), tem-se que:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0. \quad (2.27)$$

Considerando, ainda, as equações (2.16), (2.17) e (2.25), resulta a seguinte equação da energia, válida para a região sólida e fluida:

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{D}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}. \quad (2.28)$$

Na equação (2.28), tem-se que :

$$\psi = 0 \text{ e } D = \alpha_s / \alpha_f \quad (\text{para } \Omega_s); \quad (2.29a)$$

$$D = 1 \quad (\text{para } \Omega_f). \quad (2.29b)$$

Nota-se que, com as definições dadas pela equação (2.25), a equação da continuidade (2.13), fica satisfeita.

Os termos referentes à pressão, nas equações (2.14) e (2.15), podem ser eliminados derivando-se a equação (2.14) em relação a Y e a equação (2.15) em relação a X. Em seguida, subtraindo as equações e substituindo as definições dadas por (2.25) e (2.26), resulta que:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} + \frac{Gr}{2} \left(\cos \alpha \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \alpha \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (2.30)$$

As equações (2.27), (2.28) e (2.30) formam um sistema de equações diferenciais não lineares e acopladas, respectivamente, em termos da função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e vorticidade (ω), com as seguintes condições iniciais e de contorno:

i) Condições iniciais ($\tau=0$)

$$\psi = \theta = \omega = 0 \quad (\text{em todo o domínio } \Omega); \quad (2.31)$$

ii) Condições de contorno ($\tau > 0$)

Superfície isotérmica fria S_1

$$\psi = \omega = 0, \quad \theta = -1; \quad (2.32)$$

Superfície isotérmica quente S_2

$$\psi = \omega = 0, \quad \theta = 1; \quad (2.33)$$

Superfície isolada S_3

$$\psi = 0, \quad \omega_0 = -\frac{2\psi_0}{(\Delta Y)^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0. \quad (2.34)$$

As condições nas superfícies internas S_4 e S_5 e nas superfícies laterais da partição S_6 são:

$$\psi = 0, \quad \omega_0 = -\frac{2\psi_0}{(\Delta X)^2}. \quad (2.35)$$

As condições no topo da partição S_6 são:

$$\psi = 0, \quad \omega_0 = -\frac{2\psi_0}{(\Delta Y)^2}; \quad (2.36)$$

onde ω_0 representa a vorticidade nas superfícies em contato com o fluido e ψ_0 é o valor da função corrente, distante ΔX ou ΔY da superfície, sobre a qual estão sendo analisadas as condições de contorno.

No capítulo seguinte, as equações (2.27), (2.28) e (2.30), juntamente com as condições iniciais (2.31) e as condições de contorno (2.32) a (2.36), são solucionadas numericamente através do método de elementos finitos utilizando o elemento quadrático quadrilateral.

2.3 - Número de Nusselt Local e Médio

O sistema formado pelas equações (2.27), (2.28) e (2.30) é resolvido, simultaneamente, utilizando o método de

elementos finitos, com o objetivo de se determinar as distribuições das funções ψ , θ e ω .

Conhecendo-se essas distribuições é possível calcular o número de Nusselt local e médio em função de parâmetros geométricos e térmicos do problema.

Os números de Nusselt local e médio são definidos, respectivamente, como:

$$Nu_L = \frac{hH}{K_f}; \quad (2.37)$$

$$Nu = \frac{\bar{h}H}{K_f}; \quad (2.38)$$

onde h é o coeficiente local de transferência de calor por convecção, \bar{h} é o coeficiente médio de transferência de calor por convecção e K_f é a condutividade térmica do fluido.

Os coeficientes de transferência de calor local e médio são definidos, respectivamente, como:

$$h = \frac{q}{T_h - T_c}; \quad (2.39)$$

$$\bar{h} = \frac{1}{S} \int_S h \, dS; \quad (2.40)$$

onde S pode representar as superfícies isotérmicas S_1 ou S_2 e q é o fluxo de calor local na área elementar dS .

Aplicando a lei de Fourier na superfície S , tem-se que:

$$q = - K_f \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_S. \quad (2.41)$$

Das equações (2.37), (2.39) e (2.41) resulta que o número de Nusselt local é:

$$Nu_L = \frac{hH}{K_f} = - \frac{H}{(T_h - T_c)} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_S. \quad (2.42)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais $X = x/H$ e $\theta = (T - T_0)/(T_h - T_0)$ na equação (2.42), vem:

$$Nu_L = - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_S. \quad (2.43)$$

Os números de Nusselt local e médio nas superfícies isotérmicas S_1 e S_2 podem ser escritos, respectivamente, como:

Para a superfície isotérmica fria S_1 :

$$Nu_L = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0}; \quad (2.44a)$$

$$Nu = - \frac{1}{RA} \int_0^{RA} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} dY. \quad (2.44b)$$

Para a superfície isotérmica quente S_2 :

$$Nu_L = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=1}; \quad (2.45a)$$

$$Nu = - \frac{1}{RA} \int_0^{RA} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=1} dY. \quad (2.45b)$$

Os números de Nusselt local e médio são dependentes de diversos parâmetros e podem ser escritos, respectivamente, na seguinte forma:

$$Nu_L = Nu_L(RA, E_1, E_2, E_p, H_p, L_p, \alpha, Pr, Gr, D); \quad (2.46)$$

$$Nu = Nu(RA, E_1, E_2, E_p, H_p, L_p, \alpha, Pr, Gr, D). \quad (2.47)$$

Os sete primeiros parâmetros que aparecem nas relações (2.46) e (2.47) são parâmetros geométricos e os três últimos são parâmetros térmicos.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE SOLUÇÃO

3.1 - Introdução

No presente trabalho será utilizado o método de elementos finitos utilizando o elemento isoparamétrico quadrilateral com oito nós para se resolver as equações de conservação (2.27), (2.28) e (2.30) e para se obter o número de Nusselt médio (Nu) dado pelas equações (2.44b) e (2.45b).

O conceito fundamental do método de elementos finitos é que qualquer quantidade contínua, tal como função corrente, temperatura adimensional ou vorticidade, pode ser aproximada por um modelo discreto composto de funções contínuas ϕ^e definidas sob um número finito de subdomínios, conforme figura 3.1.

As vantagens para se aplicar este método são:

- . A propriedade material não tem que ser a mesma;
- . Pode ser aplicado em superfícies complexas onde a variação da quantidade ϕ implica no uso de elementos de alta ordem, obtendo-se assim resultados mais precisos.
- . O tamanho do elemento pode ser variado e assim sendo, tem-se a capacidade de efetuar discretizações seletivas, concentrando maior número de elementos nas regiões onde se esperam maiores variações das incógnitas;
- . Facilidade de adaptação à fronteira do domínio de solução, simplificando a aplicação das condições de contorno.

3.2 - Elemento Isoparamétrico Quadrático Quadrilateral com Oito Nós

A figura 3.2 mostra o elemento isoparamétrico quadrático quadrilateral com oito nós.

As funções de forma N servem para determinar a variação da grandeza ϕ^e , que é uma função quadrática em ξ e η ; e as

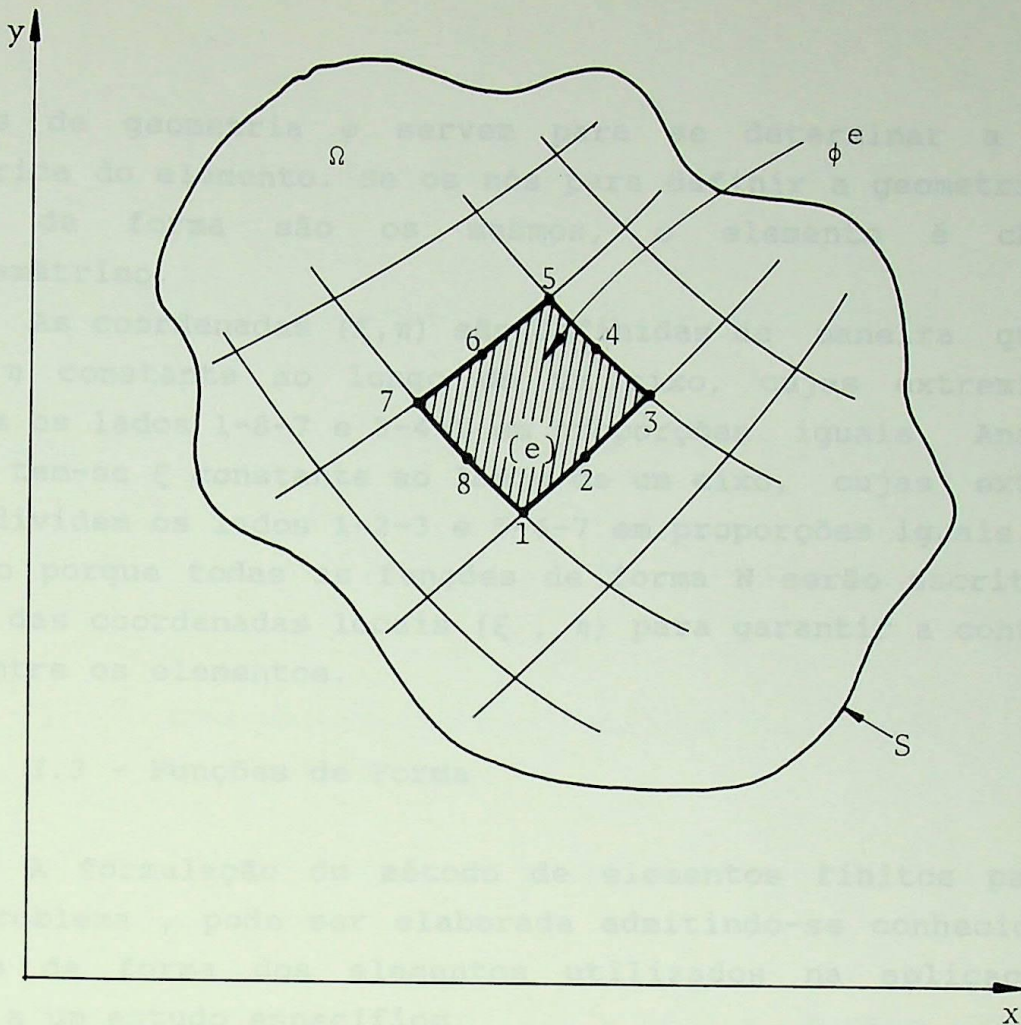


Figura 3.1 - Modelo composto de subdomínios.

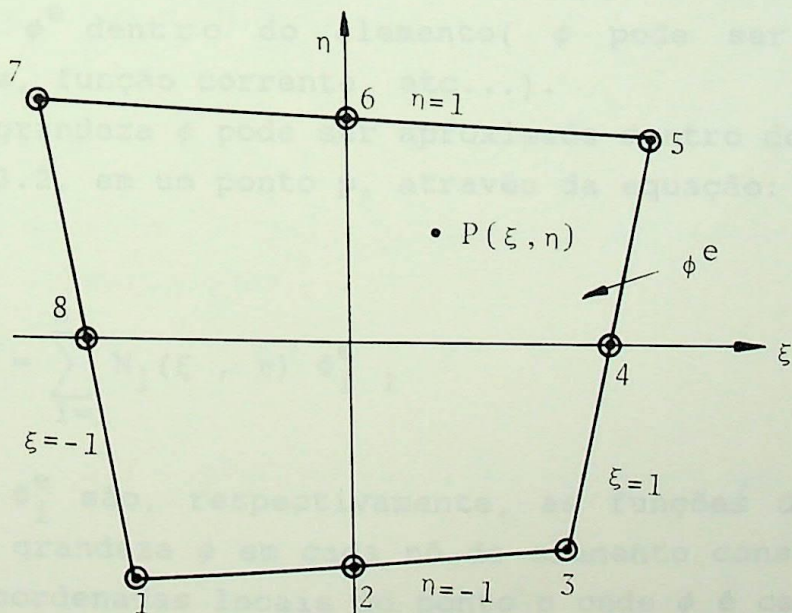


Figura 3.2 - Elemento isoparamétrico quadrático quadrilateral com oito nós.

- pontos para definir a função de forma.
- pontos para definir a forma geométrica.

funções de geometria ϕ servem para se determinar a forma geométrica do elemento. Se os nós para definir a geometria e a função de forma são os mesmos, o elemento é chamado isoparamétrico.

As coordenadas (ξ, η) são definidas de maneira que se tenha η constante ao longo de um eixo, cujas extremidades dividem os lados 1-8-7 e 3-4-5 em proporções iguais. Analogamente, tem-se ξ constante ao longo de um eixo, cujas extremidades dividem os lados 1-2-3 e 5-6-7 em proporções iguais. Isto é feito porque todas as funções de forma N serão escritas em termos das coordenadas locais (ξ, η) para garantir a continuidade entre os elementos.

3.3 - Funções de Forma

A formulação do método de elementos finitos para um dado problema, pode ser elaborada admitindo-se conhecidas as funções de forma dos elementos utilizados na aplicação do método a um estudo específico.

As funções de forma podem ser estudadas independentemente do problema que está sendo formulado. Através dessas funções de forma pode-se determinar a variação de uma grandeza ϕ^e dentro do elemento (ϕ pode ser temperatura, vorticidade, função corrente, etc...).

A grandeza ϕ pode ser aproximada dentro do elemento (e) da figura 3.2, em um ponto p , através da equação:

$$\phi_p^e = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \Phi_i^e ; \quad (3.1)$$

onde N_i e Φ_i^e são, respectivamente, as funções de forma e os valores da grandeza ϕ em cada nó do elemento considerado e ξ e η são as coordenadas locais do ponto p onde ϕ é calculada.

As funções de forma para o elemento isoparamétrico quadrático quadrilateral com oito nós, avaliadas no apêndice A1, são:

$$\begin{aligned}
N_1 &= -\frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta); & N_2 &= \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1-\eta); \\
N_3 &= -\frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta); & N_4 &= \frac{1}{2} (1+\xi)(1-\eta^2); \\
N_5 &= -\frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta); & N_6 &= \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1+\eta); \\
N_7 &= -\frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta); & N_8 &= \frac{1}{2} (1-\xi)(1-\eta^2). \quad (3.2)
\end{aligned}$$

3.4 - Desenvolvimento das Equações utilizando o Método de Elementos Finitos

3.4.1 - Forma matricial para os elementos em termos da função corrente

Reescrevendo a equação (2.27) para a função corrente, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + Q_\psi = 0; \quad (3.3)$$

onde

$$Q_\psi = \omega. \quad (3.4)$$

Da equação (A2.1a), do apêndice A2, fazendo $\phi = \psi$, $Q_\phi = Q_\psi$ e $\delta = 1$, resulta que:

$$[K_\psi^e] \{\psi^e\} = -\{R_\psi^e\}; \quad (3.5)$$

onde

$$[K_\psi^e] = \int_V e [B^e]^T [B^e] dV = \int_A e [B^e]^T [B^e] dXdY; \quad (3.6)$$

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X} & \frac{\partial N_2}{\partial X} & \frac{\partial N_3}{\partial X} & \frac{\partial N_4}{\partial X} & \frac{\partial N_5}{\partial X} & \frac{\partial N_6}{\partial X} & \frac{\partial N_7}{\partial X} & \frac{\partial N_8}{\partial X} \\ \frac{\partial N_1}{\partial Y} & \frac{\partial N_2}{\partial Y} & \frac{\partial N_3}{\partial Y} & \frac{\partial N_4}{\partial Y} & \frac{\partial N_5}{\partial Y} & \frac{\partial N_6}{\partial Y} & \frac{\partial N_7}{\partial Y} & \frac{\partial N_8}{\partial Y} \end{bmatrix}; \quad (3.7)$$

$$\{R_{\psi}^e\} = - \int_A e^{Q_{\psi}^e} [N]^T dx dy; \quad (3.8)$$

$$Q_{\psi}^e = \omega^e = [N] \{\omega^e\}. \quad (3.9)$$

A matriz $[K_{\psi}^e]$ é a matriz de rigidez para a função corrente, $\{R_{\psi}^e\}$ é o vetor força para a função corrente e Q_{ψ} é a uma função especificada.

Portanto, o cálculo da matriz de rigidez envolve, inicialmente, o cálculo da matriz $[B^e]$, que por sua vez, precisa da determinação das derivadas das funções de forma relativamente ao sistema global (X,Y). Estas derivadas podem ser obtidas sem se explicitar as funções N_p em função de X e Y.

As derivadas $\partial N_p / \partial X$ e $\partial N_p / \partial Y$ na equação (3.7) podem ser obtidas, facilmente, a partir das derivadas $\partial N_p / \partial \xi$ e $\partial N_p / \partial \eta$.

Através da utilização dos conceitos de derivação parcial, tem-se que:

$$\frac{\partial N_p}{\partial \xi} = \frac{\partial N_p}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial N_p}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \xi}; \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial N_p}{\partial \eta} = \frac{\partial N_p}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial N_p}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \eta}. \quad (3.11)$$

As equações (3.10) e (3.11) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_p}{\partial \eta} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial X} \\ \frac{\partial N_p}{\partial Y} \end{pmatrix}; \quad (3.12)$$

onde $[J]$ é a matriz Jacobiana, definida como:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

A equação (3.12) pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial X} \\ \frac{\partial N_p}{\partial Y} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_p}{\partial \eta} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Sejam as seguintes funções de transformação:

$$X = \sum_{i=1}^8 \varphi_i X_i; \quad (3.15)$$

e

$$Y = \sum_{i=1}^8 \varphi_i Y_i; \quad (3.16)$$

onde

X e Y são as coordenadas globais em qualquer ponto p do elemento, X_i e Y_i são as coordenadas globais do i -ésimo nó do elemento e φ_i são as funções de geometria do i -ésimo nó do elemento, isto é, as funções que definem a forma geométrica do elemento.

Como o elemento é isoparamétrico, então:

$$X = \sum_{i=1}^8 N_i X_i; \quad (3.17)$$

$$Y = \sum_{i=1}^8 N_i Y_i; \quad (3.18)$$

onde

N_i são as funções de forma do i -ésimo nó do elemento que dependem das coordenadas locais (ξ , η) do ponto p .

Substituindo as equações (3.2) nas equações (3.17) e (3.18), vem:

$$\begin{aligned}
 X = & -\frac{1}{4} (1-\xi) (1-\eta) (1+\xi+\eta) X_1 + \frac{1}{2} (1-\xi^2) (1-\eta) X_2 \\
 & -\frac{1}{4} (1+\xi) (1-\eta) (1-\xi+\eta) X_3 + \frac{1}{2} (1+\xi) (1-\eta^2) X_4 \\
 & -\frac{1}{4} (1+\xi) (1+\eta) (1-\xi-\eta) X_5 + \frac{1}{2} (1-\xi^2) (1+\eta) X_6 \\
 & -\frac{1}{4} (1-\xi) (1+\eta) (1+\xi-\eta) X_7 + \frac{1}{2} (1-\xi) (1-\eta^2) X_8; \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y = & -\frac{1}{4} (1-\xi) (1-\eta) (1+\xi+\eta) Y_1 + \frac{1}{2} (1-\xi^2) (1-\eta) Y_2 \\
 & -\frac{1}{4} (1+\xi) (1-\eta) (1-\xi+\eta) Y_3 + \frac{1}{2} (1+\xi) (1-\eta^2) Y_4 \\
 & -\frac{1}{4} (1+\xi) (1+\eta) (1-\xi-\eta) Y_5 + \frac{1}{2} (1-\xi^2) (1+\eta) Y_6 \\
 & -\frac{1}{4} (1-\xi) (1+\eta) (1+\xi-\eta) Y_7 + \frac{1}{2} (1-\xi) (1-\eta^2) Y_8. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Logo os termos da matriz [J] podem ser escritos como:

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \eta}. \quad (3.21)$$

Em termos matriciais, a matriz Jacobiana [J] fica:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_5}{\partial \xi} & \frac{\partial N_6}{\partial \xi} & \frac{\partial N_7}{\partial \xi} & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} & \frac{\partial N_7}{\partial \eta} & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_4 & Y_4 \\ X_5 & Y_5 \\ X_6 & Y_6 \\ X_7 & Y_7 \\ X_8 & Y_8 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Uma vez conhecidas as expressões das funções de forma, pode-se determinar suas derivadas com relação a ξ e η . São elas:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (2\xi + \eta - 2\xi\eta - \eta^2);$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (\xi + 2\eta - \xi^2 - 2\xi\eta);$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \xi(\eta - 1);$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = \frac{1}{2} (\xi^2 - 1);$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (2\xi - 2\xi\eta - \eta + \eta^2);$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (-\xi^2 + 2\eta - \xi + 2\xi\eta);$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \frac{1}{2} (1 - \eta^2);$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = -\eta(1 + \xi);$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (2\xi + 2\xi\eta + \eta + \eta^2);$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (\xi^2 + 2\eta + \xi + 2\xi\eta);$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = -\xi(1 + \eta);$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = \frac{1}{2} (1 - \xi^2);$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (2\xi - \eta + 2\xi\eta - \eta^2);$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (-\xi + \xi^2 + 2\eta - 2\xi\eta);$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = \frac{1}{2} (\eta^2 - 1);$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \eta} = \eta(\xi - 1). \quad (3.23)$$

Deve-se em seguida, ser determinada $[J]^{-1}$, que vale:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \eta} & - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \xi} \\ - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \xi} \end{bmatrix}; \quad (3.24)$$

sendo que

$$\det[J] = \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}. \quad (3.25)$$

Substituindo-se a equação (3.24) em (3.23), resulta:

$$\frac{\partial N_p}{\partial X} = \frac{1}{\det[J]} \left[\left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \eta} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \xi} - \left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \xi} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \eta} \right]; \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial N_p}{\partial Y} = \frac{1}{\det[J]} \left[\left(-\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \eta} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \xi} + \left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \xi} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \eta} \right]. \quad (3.27)$$

Os elementos da matriz [B] são funções das coordenadas locais (ξ , η), assim, o termo $dXdY$ da equação (3.6) também deve ser escrito em termos de coordenadas locais (ver apêndice A4). Assim:

$$dXdY = |\det[J]| d\xi d\eta. \quad (3.28)$$

Portanto, a integral de área da equação (3.6) pode ser transformada em uma integral dupla no sistema de coordenadas locais (ξ , η), como segue:

$$[K_{\psi}^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^e(\xi, \eta)]^T [B^e(\xi, \eta)] |\det[J]| d\xi d\eta; \quad (3.29)$$

que é a matriz de rigidez para a função corrente nas coordenadas locais (ξ , η).

Na matriz $[B^e]$, o ponto p assume os valores nodais 1, 2, 3, ..., 6, 7 e 8. Então substituindo as equações (3.26) e (3.27) em (3.7), resulta:

$$[B^e] = \frac{1}{\det[J]} \left[\begin{array}{l} \left[\left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \eta} \right] \frac{\partial N_1}{\partial \xi} - \left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \xi} \right] \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \right] \dots \\ \left[\left[-\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \eta} \right] \frac{\partial N_1}{\partial \xi} + \left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \xi} \right] \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \right] \dots \\ \dots \left[\left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \eta} \right] \frac{\partial N_8}{\partial \xi} - \left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \xi} \right] \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \right] \\ \dots \left[\left[-\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \eta} \right] \frac{\partial N_8}{\partial \xi} + \left[\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \xi} \right] \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \right] \end{array} \right] \cdot \quad (3.30)$$

Reescrevendo-se a equação (3.8), vem:

$$\{R_\psi^e\} = - \int_A e Q_\psi^e [N]^T dx dy; \quad (3.31)$$

onde

$$Q_\psi^e = \omega^e = [N] \{\omega^e\}. \quad (3.32)$$

Substituindo-se a equação (3.32) em (3.31), vem:

$$\{R_\psi^e\} = - \int_A e [N]^T [N] \{\omega^e\} dx dy. \quad (3.33)$$

A matriz $\{R_\psi^e\}$ está escrita em termos das coordenadas globais X e Y. Portanto é necessária a troca dessas coordenadas X e Y, pelas coordenadas locais ξ e η .

Das equações (3.28) e (3.33), resulta:

onde A^e é a área de cada elemento;

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X} & \frac{\partial N_2}{\partial X} & \frac{\partial N_3}{\partial X} & \frac{\partial N_4}{\partial X} & \frac{\partial N_5}{\partial X} & \frac{\partial N_6}{\partial X} & \frac{\partial N_7}{\partial X} & \frac{\partial N_8}{\partial X} \\ \frac{\partial N_1}{\partial Y} & \frac{\partial N_2}{\partial Y} & \frac{\partial N_3}{\partial Y} & \frac{\partial N_4}{\partial Y} & \frac{\partial N_5}{\partial Y} & \frac{\partial N_6}{\partial Y} & \frac{\partial N_7}{\partial Y} & \frac{\partial N_8}{\partial Y} \end{bmatrix}; \quad (3.40)$$

$$\{R_\theta^e\} = - \int_A Q_\theta^e [N]^T dx dy; \quad (3.41)$$

e

$$Q_\theta^e = \frac{\partial \psi^e}{\partial X} \frac{\partial \theta^e}{\partial Y} - \frac{\partial \psi^e}{\partial Y} \frac{\partial \theta^e}{\partial X}. \quad (3.42)$$

A matriz $[K_\theta^e]$ é a matriz de rigidez para temperatura adimensional, $\{R_\theta^e\}$ é o vetor força para temperatura adimensional e Q_θ é uma função especificada.

Pode-se observar que a equação (3.38) é igual à equação (3.6) multiplicada por D/Pr . Então por analogia, tem-se:

$$[K_\theta^e] = \frac{D}{Pr} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^e(\xi, \eta)]^T [B^e(\xi, \eta)] |\det[J]| d\xi d\eta. \quad (3.43)$$

A matriz $[B^e]$ é dada pela equação (3.30) e $|\det[J]|$ é dado pela equação (A4.5).

Os termos da equação (3.42) podem ser escritos como:

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial X} = \frac{\partial N_1}{\partial X} \psi_1^e + \frac{\partial N_2}{\partial X} \psi_2^e + \frac{\partial N_3}{\partial X} \psi_3^e + \frac{\partial N_4}{\partial X} \psi_4^e + \dots + \frac{\partial N_8}{\partial X} \psi_8^e; \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial Y} = \frac{\partial N_1}{\partial Y} \psi_1^e + \frac{\partial N_2}{\partial Y} \psi_2^e + \frac{\partial N_3}{\partial Y} \psi_3^e + \frac{\partial N_4}{\partial Y} \psi_4^e + \dots + \frac{\partial N_8}{\partial Y} \psi_8^e; \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial X} = \frac{\partial N_1}{\partial X} \theta_1^e + \frac{\partial N_2}{\partial X} \theta_2^e + \frac{\partial N_3}{\partial X} \theta_3^e + \frac{\partial N_4}{\partial X} \theta_4^e + \dots + \frac{\partial N_8}{\partial X} \theta_8^e; \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial Y} = \frac{\partial N_1 \theta_1^e}{\partial Y} + \frac{\partial N_2 \theta_2^e}{\partial Y} + \frac{\partial N_3 \theta_3^e}{\partial Y} + \frac{\partial N_4 \theta_4^e}{\partial Y} + \dots + \frac{\partial N_8 \theta_8^e}{\partial Y}; \quad (3.47)$$

ou

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial X} = \sum_{p=1}^8 \frac{\partial N_p \psi_p^e}{\partial X}; \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial Y} = \sum_{p=1}^8 \frac{\partial N_p \psi_p^e}{\partial Y}; \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial X} = \sum_{p=1}^8 \frac{\partial N_p \theta_p^e}{\partial X}; \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial Y} = \sum_{p=1}^8 \frac{\partial N_p \theta_p^e}{\partial Y}. \quad (3.51)$$

Esses termos têm que ser colocados em função das coordenadas locais (ξ, η) . Então, substituindo as equações (3.26) e (3.27) nas equações (3.48) a (3.51), resulta:

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial X} = \frac{1}{\det[J]} \sum_{p=1}^8 \left\{ \left[\left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \eta} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \xi} - \left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \xi} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \eta} \right] \psi_p^e \right\}; \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial Y} = \frac{1}{\det[J]} \sum_{p=1}^8 \left\{ \left[\left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \xi} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \eta} - \left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \eta} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \xi} \right] \psi_p^e \right\}; \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial X} = \frac{1}{\det[J]} \sum_{p=1}^8 \left\{ \left[\left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \eta} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \xi} - \left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i Y_i}{\partial \xi} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \eta} \right] \theta_p^e \right\}; \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial Y} = \frac{1}{\det[J]} \sum_{p=1}^8 \left\{ \left[\left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \xi} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \eta} - \left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i X_i}{\partial \eta} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \xi} \right] \theta_p^e \right\}. \quad (3.55)$$

A equação (3.41) pode ser escrita de forma análoga a equação (3.31), na seguinte forma:

$$\{R_\theta^e\} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q_\theta^e(\xi, \eta) [N(\xi, \eta)]^T |\det[J]| d\xi d\eta; \quad (3.56)$$

onde Q_θ^e é obtida pela equação (3.42), cujos termos podem ser calculados pelas equações (3.52) a (3.55).

As equações (3.43) e (3.56) serão integradas através da técnica numérica de Gauss-Legendre descrita no item 3.5.

3.4.3 - Forma matricial para os elementos em termos de vorticidade

Reescrevendo a equação (2.30) da vorticidade, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + Q_\omega = 0; \quad (3.57)$$

onde

$$Q_\omega = \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} + \frac{\text{Gr}}{2} \left(\cos \alpha \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \alpha \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right). \quad (3.58)$$

Da equação (A3.1a), do apêndice A3, fazendo $\phi = \omega$, $Q_\phi = Q_\omega$, $\lambda = 1$, $\delta = 1$, resulta que:

$$([K_\omega^e] + \frac{2}{\Delta \tau} [C^e]) \{\omega^e\}_{\text{novo}} = \frac{2}{\Delta \tau} [C^e] \{\omega^e\}_{\text{velho}} - \{R_\omega^e\}; \quad (3.59)$$

onde

$$[K_\omega^e] = \int_V e^{[B^e]^T} [B^e] dV = \int_A e^{[B^e]^T} [B^e] dx dy; \quad (3.60)$$

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X} & \frac{\partial N_2}{\partial X} & \frac{\partial N_3}{\partial X} & \frac{\partial N_4}{\partial X} & \frac{\partial N_5}{\partial X} & \frac{\partial N_6}{\partial X} & \frac{\partial N_7}{\partial X} & \frac{\partial N_8}{\partial X} \\ \frac{\partial N_1}{\partial Y} & \frac{\partial N_2}{\partial Y} & \frac{\partial N_3}{\partial Y} & \frac{\partial N_4}{\partial Y} & \frac{\partial N_5}{\partial Y} & \frac{\partial N_6}{\partial Y} & \frac{\partial N_7}{\partial Y} & \frac{\partial N_8}{\partial Y} \end{bmatrix}; \quad (3.61)$$

$$\{R_{\omega}^e\} = - \int_A e^{Q_{\omega}^e} [N]^T dx dy; \quad (3.62)$$

e

$$Q_{\omega}^e = \frac{\partial \psi^e}{\partial X} \frac{\partial \omega^e}{\partial Y} - \frac{\partial \psi^e}{\partial Y} \frac{\partial \omega^e}{\partial X} + \frac{Gr}{2} \left(\cos \alpha \frac{\partial \theta^e}{\partial X} - \sin \alpha \frac{\partial \theta^e}{\partial Y} \right). \quad (3.63)$$

A matriz $[K_{\omega}^e]$ é a matriz de rigidez para vorticidade, $\{R_{\omega}^e\}$ é o vetor força para vorticidade e Q_{ω}^e é uma função especificada.

Pode-se observar que a equação (3.6) é semelhante à equação (3.60). Assim, aplicando a transformação de coordenadas, vem:

$$[K_{\omega}^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^e(\xi, \eta)]^T [B^e(\xi, \eta)] |\det[J]| d\xi d\eta. \quad (3.64)$$

A matriz $[B^e]$ é dada pela equação (3.30) e $|\det[J]|$ é dado pela equação (A4.5).

Os termos $\partial \psi^e / \partial X$, $\partial \psi^e / \partial Y$, $\partial \theta^e / \partial X$ e $\partial \theta^e / \partial Y$, da equação (3.63), já estão apresentados pelas equações (3.52) a (3.55), respectivamente. Resta saber, agora, os termos $\partial \omega^e / \partial X$ e $\partial \omega^e / \partial Y$ nas coordenadas locais (ξ, η) . Assim, de modo análogo, obtém-se:

$$\frac{\partial \omega^e}{\partial X} = \frac{1}{\det[J]} \sum_{p=1}^8 \left\{ \left[\left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i^Y}{\partial \eta} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \xi} - \left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i^Y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \eta} \right] \omega_p^e \right\}; \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial \omega^e}{\partial Y} = \frac{1}{\det[J]} \sum_{p=1}^8 \left\{ \left[\left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i^X}{\partial \xi} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \eta} - \left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i^X}{\partial \eta} \right) \frac{\partial N_p}{\partial \xi} \right] \omega_p^e \right\}. \quad (3.66)$$

A equação (3.62) pode ser escrita em termos de ξ e η , na seguinte forma:

$$\{R_{\omega}^e\} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q_{\omega}^e(\xi, \eta) [N(\xi, \eta)]^T |\det[J]| d\xi d\eta; \quad (3.67)$$

onde Q_ω é calculado pelas equações (3.63), (3.52) a (3.55), (3.65) e (3.66).

As equações (3.64) e (3.67) serão integradas numericamente através da técnica de Gauss-Legendre, como mostrado no item seguinte.

3.5 - Integração Numérica

Para o cálculo das matrizes de rigidez $[K_\psi^e]$, $[K_\theta^e]$ e $[K_\omega^e]$ e das matrizes $\{R_\psi^e\}$, $\{R_\theta^e\}$ e $\{R_\omega^e\}$ no elemento descrito anteriormente, é necessário o cálculo de integrais onde o cálculo analítico é muito trabalhoso e não usual, pois estas matrizes são funções da matriz $[B^e]$ e da matriz Jacobiana inversa $[J]^{-1}$, cujos elementos são funções das coordenadas locais (ξ, η) .

Existem várias técnicas de integração numérica e neste trabalho será abordada a técnica da Quadratura de Gauss-Legendre. Esta técnica tem como base a escolha de determinados pontos dentro do elemento com o objetivo de se alcançar uma melhor precisão na solução das integrais. No apêndice A5 é mostrado como se faz a escolha destes pontos de integração e os respectivos pesos W .

Do apêndice A5, pode-se escrever que as integrais das equações (3.28), (3.34), (3.43), (3.56), (3.64) e (3.67) são, respectivamente:

$$[K_\psi^e] = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n [B^e(\xi_j, \eta_k)]^T [B^e(\xi_j, \eta_k)] |\det[J]| W_j W_k; \quad (3.68)$$

$$\{R_\psi^e\} = - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n [N^e(\xi_j, \eta_k)]^T [N^e(\xi_j, \eta_k)] \{\omega^e\} |\det[J]| W_j W_k; \quad (3.69)$$

$$[K_\theta^e] = \frac{D}{Pr} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n [B^e(\xi_j, \eta_k)]^T [B^e(\xi_j, \eta_k)] |\det[J]| W_j W_k; \quad (3.70)$$

$$\{R_{\theta}^e\} = - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n Q_{\theta}^e(\xi_j, \eta_k) [N^e(\xi_j, \eta_k)]^T |\det[J]| w_j w_k; \quad (3.71)$$

$$[K_{\omega}^e] = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n [B^e(\xi_j, \eta_k)]^T [B^e(\xi_j, \eta_k)] |\det[J]| w_j w_k; \quad (3.72)$$

$$\{R_{\omega}^e\} = - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n Q_{\omega}^e(\xi_j, \eta_k) [N^e(\xi_j, \eta_k)]^T |\det[J]| w_j w_k. \quad (3.73)$$

Os valores de m e n são obtidos equacionando-se $(2m - 1)$ para o grau maior de ξ e $(2n - 1)$ para o grau maior de η na integral. Para as equações (3.68), (3.69), (3.70) e (3.72), o valor de m e n é igual a três, resultando em um elemento com nove pontos de integração. Para as equações (3.71) e (3.73), o valor de m e n é igual a quatro, resultando em um elemento com dezesseis pontos de integração. O valor igual de m e n para cada caso significa uma mesma ordem da potência de ξ e η . Os dois elementos considerados podem ser vistos, respectivamente, pelas figuras 3.3 e 3.4.

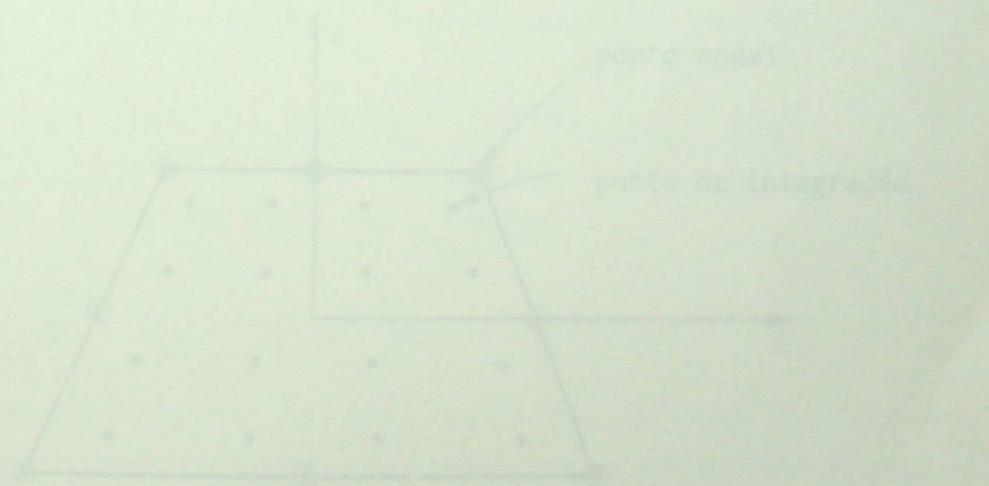


Figura 3.4 - Elemento quadrático-quadrilátero com oito nós e dezesseis pontos de integração.

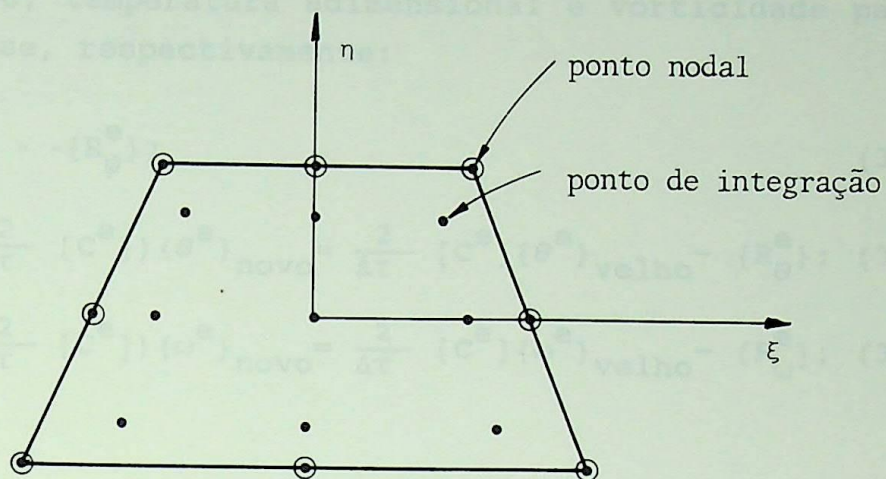


Figura 3.3 - Elemento quadrático quadrilateral com oito nós e nove pontos de integração.

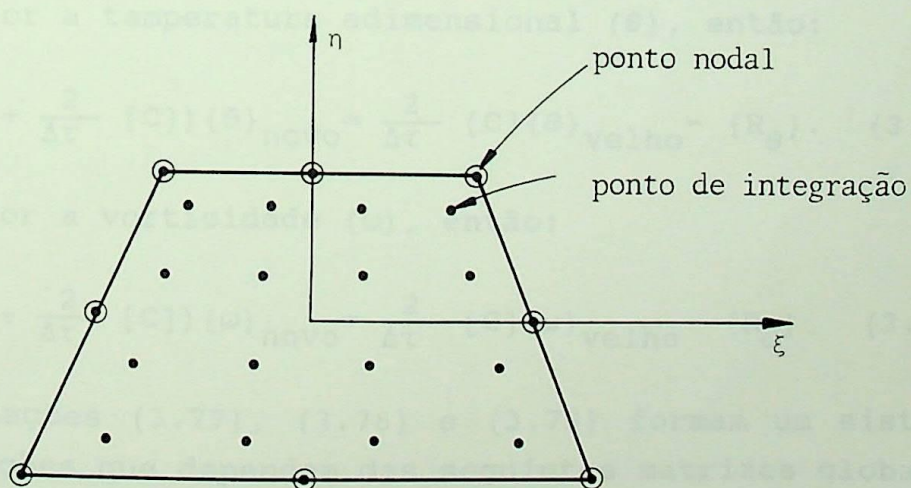


Figura 3.4 - Elemento quadrático quadrilateral com oito nós e dezesseis pontos de integração.

3.6 - Algoritmo de solução

Reescrevendo as equações (3.5), (3.35) e (3.59), para a função corrente, temperatura adimensional e vorticidade para o elemento, tem-se, respectivamente:

$$[K_{\psi}^e] \{\psi^e\} = -\{R_{\psi}^e\}; \quad (3.74)$$

$$([K_{\theta}^e] + \frac{2}{\Delta\tau} [C^e]) \{\theta^e\}_{\text{nov}} = \frac{2}{\Delta\tau} [C^e] \{\theta^e\}_{\text{vel}} - \{R_{\theta}^e\}; \quad (3.75)$$

$$([K_{\omega}^e] + \frac{2}{\Delta\tau} [C^e]) \{\omega^e\}_{\text{nov}} = \frac{2}{\Delta\tau} [C^e] \{\omega^e\}_{\text{vel}} - \{R_{\omega}^e\}; \quad (3.76)$$

onde

$[K_{\psi}^e]$, $\{R_{\psi}^e\}$, $[K_{\theta}^e]$, $\{R_{\theta}^e\}$, $[K_{\omega}^e]$, $\{R_{\omega}^e\}$ e $[C^e]$ são dadas, respectivamente, pelas equações (3.68) a (3.73) e (3.39).

Os apêndices A2 e A3 mostram como são formadas as matrizes globais para o cálculo da distribuição da grandeza ϕ no domínio Ω .

Se ϕ for a função corrente (ψ), então:

$$[K_{\psi}] \{\psi\} = -\{R_{\psi}\}. \quad (3.77)$$

Se ϕ for a temperatura adimensional (θ), então:

$$([K_{\theta}] + \frac{2}{\Delta\tau} [C]) \{\theta\}_{\text{nov}} = \frac{2}{\Delta\tau} [C] \{\theta\}_{\text{vel}} - \{R_{\theta}\}. \quad (3.78)$$

Se ϕ for a vorticidade (ω), então:

$$([K_{\omega}] + \frac{2}{\Delta\tau} [C]) \{\omega\}_{\text{nov}} = \frac{2}{\Delta\tau} [C] \{\omega\}_{\text{vel}} - \{R_{\omega}\}. \quad (3.79)$$

As equações (3.77), (3.78) e (3.79) formam um sistema global de equações que dependem das seguintes matrizes globais:

$$[K_{\psi}] = \sum_{e=1}^E [K_{\psi}^e]; \quad (3.80)$$

$$\{R_\psi\} = \sum_{e=1}^E \{R_\psi^e\}; \quad (3.81)$$

$$[K_\theta] = \sum_{e=1}^E [K_\theta^e]; \quad (3.82)$$

$$\{R_\theta\} = \sum_{e=1}^E \{R_\theta^e\}; \quad (3.83)$$

$$[K_\omega] = \sum_{e=1}^E [K_\omega^e]; \quad (3.84)$$

$$\{R_\omega\} = \sum_{e=1}^E \{R_\omega^e\}; \quad (3.85)$$

$$[C] = \sum_{e=1}^E [C^e]; \quad (3.86)$$

onde E é o número de elementos.

As equações (3.77) a (3.79) podem ser escritas, respectivamente, de forma mais compacta como:

$$[\tilde{K}_\psi] \{\psi\}^\tau = \{\tilde{R}_\psi(\omega^{\tau-\Delta\tau})\}; \quad (3.87)$$

$$[\tilde{K}_\theta] \{\theta\}^\tau = \{\tilde{R}_\theta(\psi^\tau, \theta^{\tau-\Delta\tau})\}; \quad (3.88)$$

$$[\tilde{K}_\omega] \{\omega\}^\tau = \{\tilde{R}_\omega(\psi^\tau, \theta^\tau, \omega^{\tau-\Delta\tau})\}. \quad (3.89)$$

As matrizes $[\tilde{K}_\psi]$, $[\tilde{K}_\theta]$ e $[\tilde{K}_\omega]$ terão os seus coeficientes mantidos constantes, pois o incremento de tempo $\Delta\tau$ será um parâmetro fixo para cada iteração. Essas matrizes são simétricas e de banda. Com o objetivo de reduzir a área de armazenamento e o tempo de cálculo computacional, os coeficientes dessas matrizes que compõem a diagonal principal e as diagonais superiores não nulas, foram armazenados na forma da matriz coluna global $\{A\}$, como mostra a figura 3.5.

As matrizes $\{\psi\}^\tau$, $\{\theta\}^\tau$ e $\{\omega\}^\tau$ são incógnitas e devem ser calculadas para cada tempo τ . A matriz $\{\tilde{R}_\psi(\omega^{\tau-\Delta\tau})\}$ possui coeficientes que são dependentes da vorticidade ω que é avaliada para o tempo $\tau-\Delta\tau$. As matrizes $\{\tilde{R}_\theta(\psi^\tau, \theta^{\tau-\Delta\tau})\}$ e $\{\tilde{R}_\omega(\psi^\tau, \theta^\tau, \omega^{\tau-\Delta\tau})\}$ são interpretadas de forma semelhante.

Foi desenvolvido um programa computacional com o objetivo de resolver as equações (3.87), (3.88) e (3.89) para obter as distribuições da função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e a vorticidade (ω) e os números de Nusselt local e médio para as superfícies S_1 e S_2 .

O número de Nusselt local (Nu_L) e o número de Nusselt médio (Nu) são dados por:

Para a superfície S_1

$$Nu_L = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta^e}{\partial X} \right)_{X=0} ; \quad (3.90a)$$

$$Nu = - \frac{1}{RA} \int_0^{RA} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta^e}{\partial X} \right)_{X=0} dY ; \quad (3.90b)$$

Para a superfície S_2

$$Nu_L = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta^e}{\partial X} \right)_{X=1} ; \quad (3.91a)$$

$$Nu = - \frac{1}{RA} \int_0^{RA} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta^e}{\partial X} \right)_{X=1} dY ; \quad (3.91b)$$

onde $\partial \theta^e / \partial X$ é dada pela equação (3.54).

A figura 3.6 mostra o fluxograma do programa computacional desenvolvido. Os passos da solução numérica e alguns detalhes do programa são apresentados a seguir, na sequência dos blocos do fluxograma.

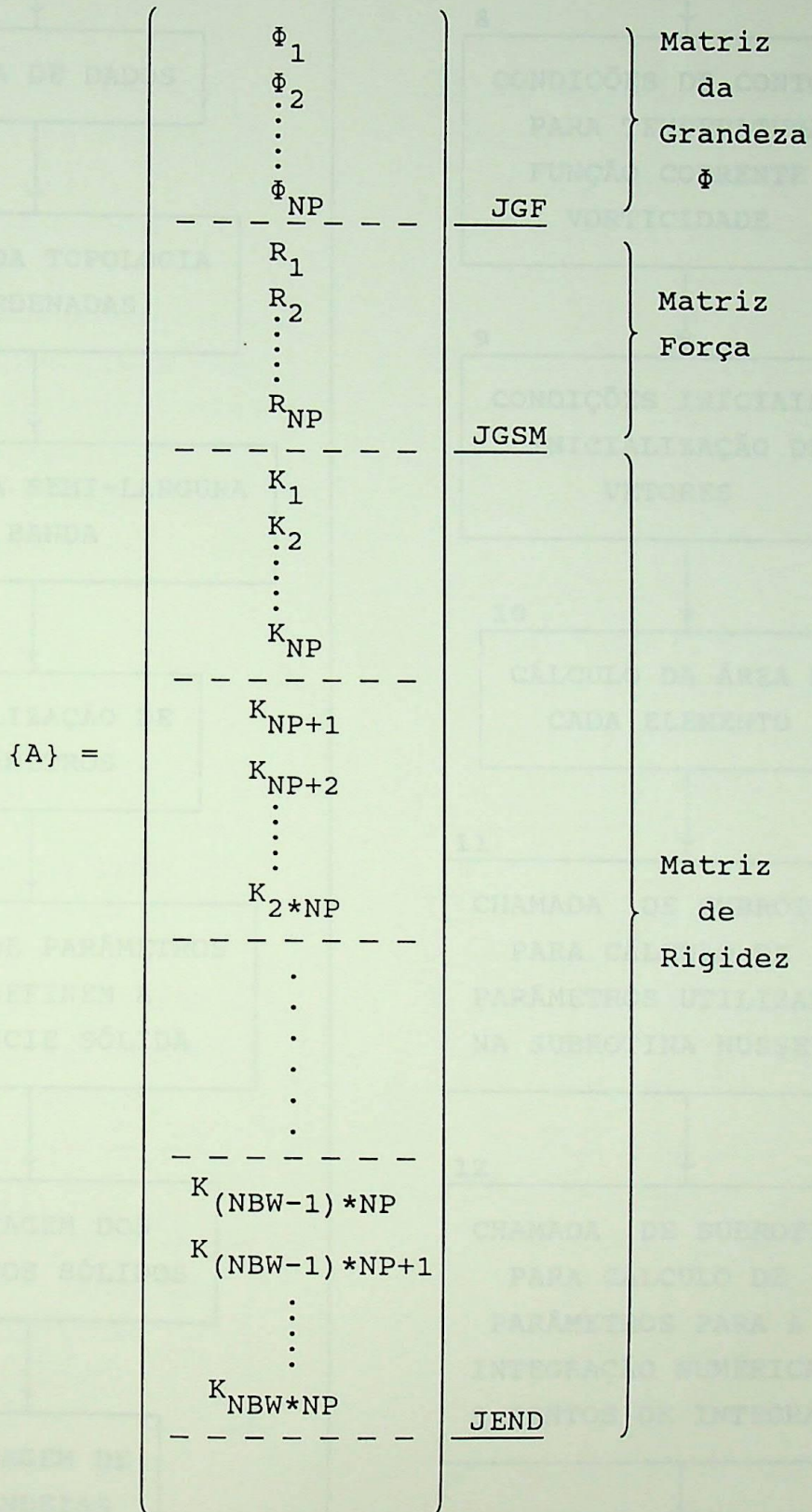


Figura 3.5 - Matriz global {A}.

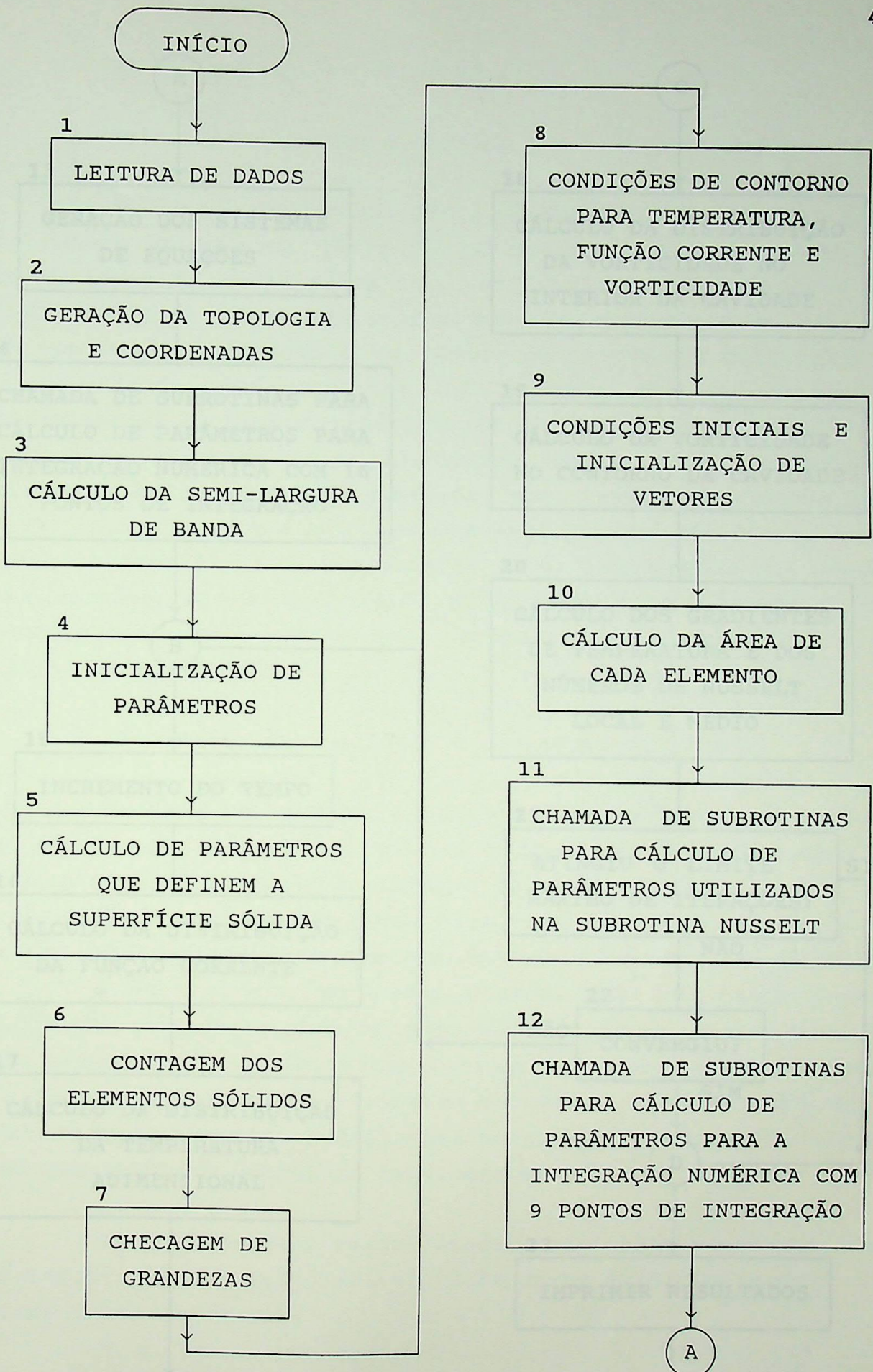
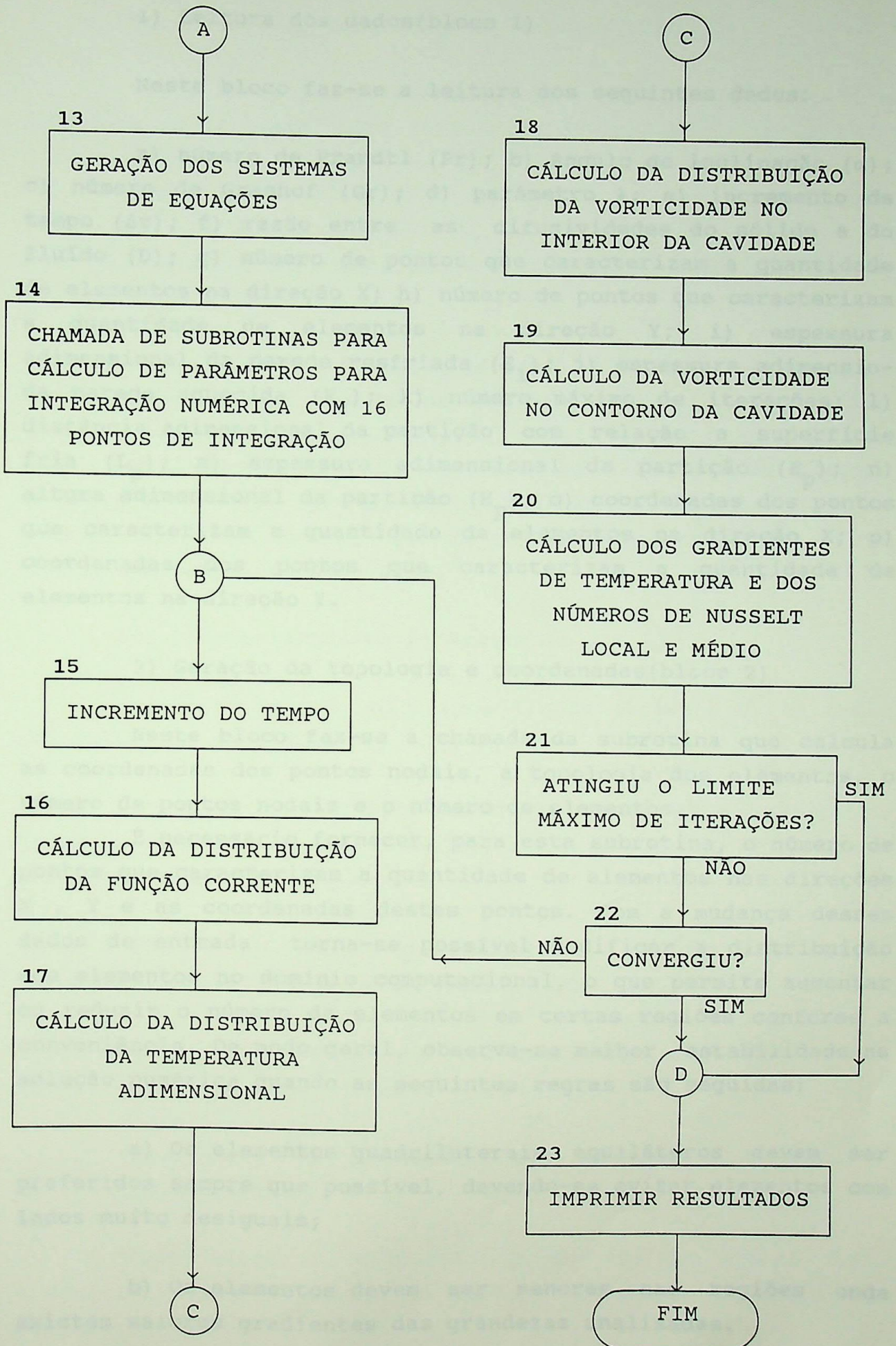


Figura 3.6 - Fluxograma do programa computacional.



1) Leitura dos dados(bloco 1)

Neste bloco faz-se a leitura dos seguintes dados:

a) número de Prandtl (Pr); b) ângulo de inclinação (α); c) número de Grashof (Gr); d) parâmetro λ ; e) incremento de tempo ($\Delta\tau$); f) razão entre as difusividades do sólido e do fluido (D); g) número de pontos que caracterizam a quantidade de elementos na direção X; h) número de pontos que caracterizam a quantidade de elementos na direção Y; i) espessura adimensional da parede resfriada (E_1); j) espessura adimensional da parede aquecida (E_2); k) número máximo de iterações; l) distância adimensional da partição com relação a superfície fria (L_p); m) espessura adimensional da partição (E_p); n) altura adimensional da partição (H_p); o) coordenadas dos pontos que caracterizam a quantidade de elementos na direção X; p) coordenadas dos pontos que caracterizam a quantidade de elementos na direção Y.

2) Geração da topologia e coordenadas(bloco 2)

Neste bloco faz-se a chamada da subrotina que calcula as coordenadas dos pontos nodais, a topologia dos elementos, o número de pontos nodais e o número de elementos.

É necessário fornecer, para esta subrotina, o número de pontos que caracterizam a quantidade de elementos nas direções X , Y e as coordenadas destes pontos. Com a mudança desses dados de entrada torna-se possível modificar a distribuição dos elementos no domínio computacional, o que permite aumentar ou reduzir o número de elementos em certas regiões conforme a conveniência. De modo geral, observa-se melhor estabilidade na solução numérica quando as seguintes regras são seguidas:

a) Os elementos quadrilaterais equiláteros devem ser preferidos sempre que possível, devendo-se evitar elementos com lados muito desiguais;

b) Os elementos devem ser menores nas regiões onde existem maiores gradientes das grandezas analisadas.

3) Cálculo da semi-largura de banda(bloco 3)

Neste bloco faz-se a chamada da subrotina que calcula a semi-largura de banda (NBW) através da expressão:

$$NBW = (NB + 1); \quad (3.92)$$

onde NB é a maior diferença entre a numeração global dos pontos nodais de cada elemento.

A semi-largura de banda depende da numeração global dos pontos nodais. Uma redução na semi-largura de banda, o que implica em uma numeração global mais adequada dos pontos nodais, diminui o número de coeficientes da matriz de rigidez em $\{A\}$ (figura 3.5). Isto produzirá uma redução na quantidade de memória utilizada na execução do programa computacional e uma redução no tempo de computação.

4) Inicialização de parâmetros(bloco 4)

Neste bloco são calculados alguns parâmetros, os quais são mostrados na figura 3.5. São eles:

JGF é um índice que caracteriza o final da matriz da grandeza Φ armazenada em $\{A\}$. Onde $JGF = NP$, sendo NP o número de pontos nodais.

JGSM é um índice que caracteriza o final da matriz força armazenada em $\{A\}$. Onde $JGSM = 2.NP$.

JEND é um índice que caracteriza o final da matriz global $\{A\}$. Onde $JEND = (NBW + 2).NP$.

5) Cálculo de parâmetros que definem a superfície sólida(bloco 5)

Neste bloco são calculados parâmetros que definem todo o domínio sólido (Ω_s), o qual inclui as paredes laterais e a partição.

- 6) Contagem dos elementos pertencentes ao domínio sólido(bloco 6)

Neste bloco relaciona-se os elementos pertencentes ao sólido e faz-se a contagem do número destes elementos.

Estes dados são utilizados para calcular as matrizes para o sólido ou para o fluido de modo apropriado.

- 7) Checagem de grandezas(bloco 7)

Neste bloco faz-se a chamada de uma subrotina que verifica se os dados de entrada estão corretos.

- 8) Condições de contorno para temperatura adimensional, função corrente e vorticidade(bloco 8)

Neste bloco são introduzidas as seguintes condições de contorno:

- i) Para a temperatura

De acordo com as equações (2.32) e (2.33), respectivamente, o valor de $\theta = -1$ é atribuído a todos os pontos situados na superfície S_1 e o valor de $\theta = 1$ é atribuído para todos os pontos situados na superfície S_2 .

- ii) Para a função corrente

De acordo com as equações (2.32) a (2.36), a função corrente assume o valor zero nas superfícies S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 e S_6 .

- iii) Para a vorticidade

A vorticidade assume o valor zero na primeira iteração para as superfícies S_3 , S_4 , S_5 e S_6 . Nas iterações seguintes, a vorticidade é calculada conforme mostra o bloco 19.

9) Condições iniciais e inicialização de vetores
(bloco 9)

Neste bloco são introduzidas as condições iniciais e a inicialização das matrizes globais, na forma da matriz global $\{A\}$, para a função corrente, temperatura adimensional e vorticidade. De acordo com a equação (2.31), a função corrente (ψ), a temperatura adimensional (θ) e a vorticidade (ω) assumem o valor zero em todo o domínio Ω quando $\tau = 0$.

10) Cálculo da área de cada elemento (bloco 10)

Neste bloco faz-se a chamada de uma subrotina que calcula a área de cada elemento utilizando os dados calculados no bloco 2.

11) Chamada de subrotinas para o cálculo de parâmetros utilizados na subrotina onde se calcula o número de Nusselt local e médio (bloco 11)

Neste bloco faz-se a chamada de subrotinas que calculam parâmetros para o cálculo das derivadas das funções de forma com relação ao eixo X. Estes parâmetros são calculados a partir da equação (3.54).

12) Chamada de subrotinas para o cálculo de parâmetros para integração numérica com 9 pontos de integração (bloco 12)

Neste bloco são chamadas as subrotinas que geram os nove pontos de integração para o elemento quadrilateral quadrático com os seus respectivos pesos, conforme a figura A5.4. Em seguida, os valores de função de forma dados pela equação (3.2) e os valores de suas derivadas com relação a ξ e η dados pela equação (3.23) são calculados. Posteriormente, o valor do $\det[J]$ dado pela equação (3.25) e a sua inversa dada pela equação (3.24) são calculados com o objetivo de se obter as derivadas das funções de forma com relação a X e Y, que são dadas pelas equações (3.26) e (3.27).

13) Geração dos sistemas de equações (bloco 13)

Neste bloco são calculadas as matrizes dos elementos e as matrizes globais. Primeiramente, faz-se a chamada de uma subrotina que forma as matrizes (3.39), (3.68), (3.69), (3.70) e (3.72).

Em seguida são formadas as matrizes globais dadas pelas equações (3.80), (3.81), (3.82), (3.84) e (3.86).

14) Chamada de subrotinas para cálculo de parâmetros para integração numérica com 16 pontos de integração (bloco 14)

Neste bloco são calculadas as matrizes $\{\tilde{R}_\theta(\psi^\tau, \theta^{\tau-\Delta\tau})\}$ e $\{\tilde{R}_\omega(\psi^\tau, \theta^\tau, \omega^{\tau-\Delta\tau})\}$.

Este bloco é semelhante ao bloco 12, só que para 16 pontos de integração, conforme mostra a figura A5.5.

15) Incremento de tempo (bloco 15)

Neste bloco, o tempo adimensional τ é incrementado.

O valor do incremento de tempo adotado depende, principalmente, da malha escolhida e do número de Grashof. O valor do incremento deve ser menor a medida que aumenta o número de Grashof ou se refina a malha de elementos finitos.

16) Cálculo da distribuição da função corrente (bloco 16)

Neste bloco é obtida a distribuição da função corrente ψ para o tempo τ resolvendo-se o sistema de equações dado pela equação (3.87). A matriz $\{\tilde{R}_\psi(\omega^{\tau-\Delta\tau})\}$ tem seus coeficientes dependentes da vorticidade ω , a qual deve ser avaliada na iteração anterior, isto é, para o tempo $\tau - \Delta\tau$.

Na solução da equação (3.87) é necessário impor a condição de contorno do bloco 8 para a função corrente.

17) Cálculo da distribuição da temperatura adimensional (bloco 17)

Neste bloco é obtida a distribuição da temperatura adimensional θ para o tempo τ resolvendo-se o sistema de equações dado pela equação (3.88). Os coeficientes da matriz $\{\tilde{R}_\theta(\psi^\tau, \theta^{\tau-\Delta\tau})\}$ dependem das funções ψ e θ , onde ψ e θ devem ser avaliados, respectivamente para o tempo τ e $\tau - \Delta\tau$.

Na solução da equação (3.88) é necessário impor a condição de contorno do bloco 8 para a temperatura adimensional.

- 18) Cálculo da distribuição da vorticidade no interior da cavidade (bloco 18)

Neste bloco é obtida a distribuição da vorticidade no interior da cavidade solucionando-se o sistema de equações dado pela equação (3.89). Os coeficientes da matriz força global $\{\tilde{R}_\omega(\psi^\tau, \theta^\tau, \omega^{\tau-\Delta\tau})\}$ dependem de ψ , θ e ω , onde ψ e θ devem ser avaliados para o tempo τ e ω para o tempo $\tau - \Delta\tau$.

Na solução da equação (3.89) consideram-se conhecidas as vorticidades nos pontos nodais do contorno.

- 19) Cálculo da vorticidade no contorno da cavidade (bloco 19)

A vorticidade ω_0 em toda a superfície em contato com o fluido é calculada através das condições de contorno dada pela equação (2.35) para as superfícies perpendiculares ao eixo X e pela equação (2.36) para as superfícies perpendiculares ao eixo Y.

- 20) Cálculo dos gradientes de temperatura e dos números de Nusselt local e médio (bloco 20)

Neste bloco são calculados os números de Nusselt local e médio dados pelas equações (3.90a) a (3.91b).

- 21) Verificação do limite máximo de iterações (bloco 21)

Neste ponto é feita a verificação do número de iterações realizadas. Quando o número de iterações atinge o

limite máximo estabelecido, o programa é interrompido.

22) Verificação da convergência(bloco 22)

Considera-se que houve convergência ou que se atingiu o regime permanente quando se verificar o seguinte critério:

$$\sum_{I=1}^n \left| \text{Nu}_{\text{nov}} - \text{Nu}_{\text{velho}} \right| \leq 10^{-4}; \quad (3.93)$$

onde a somatória representa a soma dos n últimos valores da iteração. Na maioria dos casos estudados adotou-se $50 \leq n \leq 100$.

23) Imprimir resultados(bloco 23)

Neste bloco são obtidos os resultados das distribuições de ψ , θ e ω , bem como os números de Nusselt local e médio.

O programa computacional desenvolvido foi processado no computador "CYBER 930 - 31" da Escola Federal de Engenharia de Itajubá.

No capítulo seguinte são apresentados os testes do programa para a geometria quadrada e retangular. Finalmente, são apresentados os resultados do presente trabalho para regime permanente.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

4.1 - Introdução

Este capítulo apresenta resultados obtidos pelo programa computacional, que utiliza o método de elementos finitos para a solução das equações de conservação acopladas em termos da função corrente, temperatura adimensional e vorticidade.

Inicialmente, procura-se testar o programa computacional para cavidades de geometria quadrada e retangular sem paredes laterais e sem partição, comparando-se os resultados com aqueles publicados na literatura. Após a avaliação do teste, o programa computacional é utilizado para se obter resultados para as seguintes cavidades:

- . Cavidades de geometria quadrada e retangular com paredes laterais e sem partição;
- . Cavidades de geometria quadrada sem paredes laterais e com partição;
- . Cavidades de geometria quadrada com paredes laterais e com partição.

4.2 - Comparação de Resultados para Cavidades de Geometria Quadrada e Retangular sem Paredes Laterais e sem Partição

A figura 4.1 mostra a geometria quadrada com as condições de contorno e a figura 4.2 mostra a malha (9 x 9) utilizada para se obter os resultados de comparação.

Inicialmente, procurou-se verificar o comportamento dos resultados a medida que a malha fosse refinada. A sequência das malhas utilizadas foi (6 x 6), (7 x 7), (8 x 8) e (9 x 9).

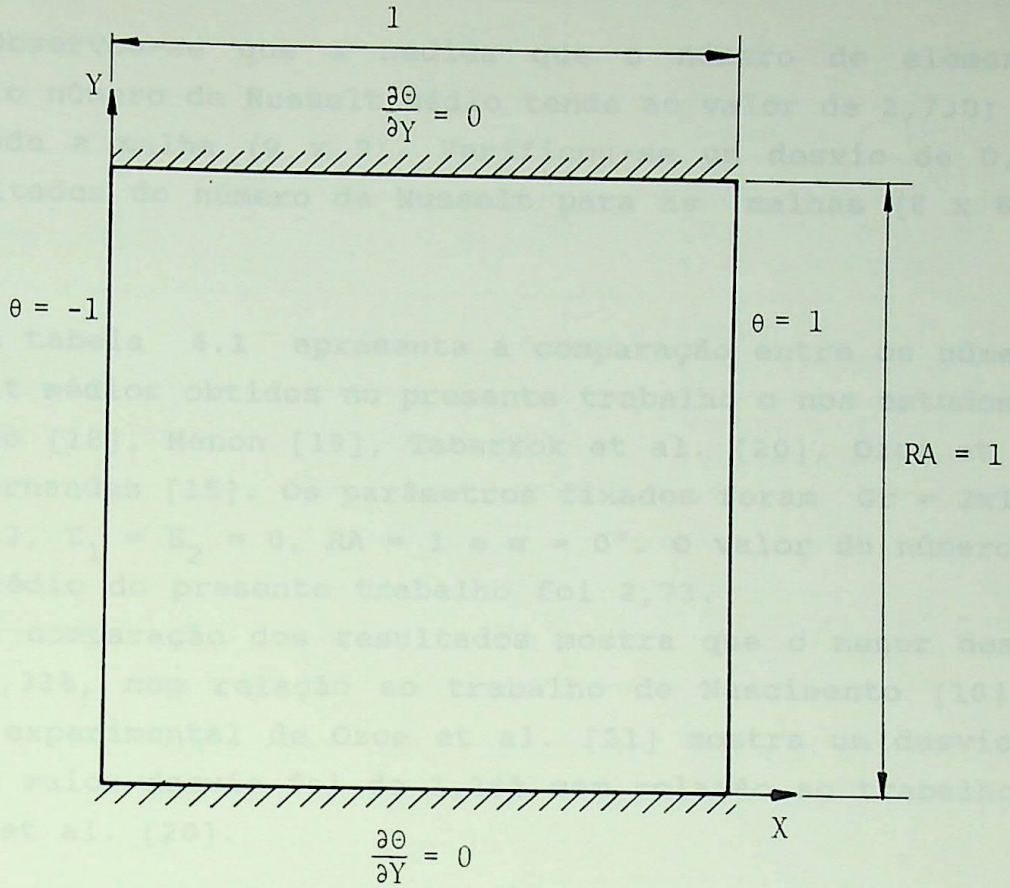


Figura 4.1 - Geometria quadrada com as condições de contorno.

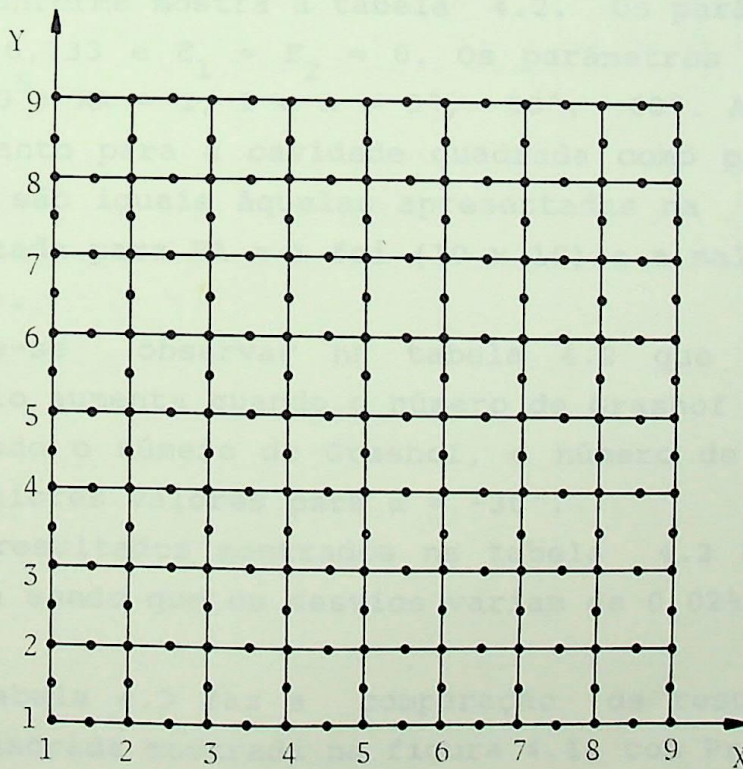


Figura 4.2 - Malha (9x9) para a geometria quadrada.

Observou-se que a medida que o número de elementos aumenta, o número de Nusselt médio tende ao valor de 2,730; que corresponde a malha (9 x 9). Verificou-se um desvio de 0,04% nos resultados do número de Nusselt para as malhas (8 x 8) e (9 x 9).

A tabela 4.1 apresenta a comparação entre os números de Nusselt médios obtidos no presente trabalho e nos estudos de Nascimento [18], Menon [19], Tabarrok et al. [20], Ozoe et al. [21] e Fernandes [15]. Os parâmetros fixados foram $Gr = 2 \times 10^4$, $Pr = 0,733$, $E_1 = E_2 = 0$, $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$. O valor do número de Nusselt médio do presente trabalho foi 2,73.

A comparação dos resultados mostra que o menor desvio foi de 0,33%, com relação ao trabalho de Nascimento [18]. O trabalho experimental de Ozoe et al. [21] mostra um desvio de -0,37%. O maior desvio foi de 1,28% com relação ao trabalho de Tabarrok et al. [20].

Procurou-se, também, comparar os resultados obtidos com aqueles apresentados por Menon [8] para a geometria quadrada ($RA = 1$) e retangular ($RA = 2$) sem paredes laterais e sem partição, conforme mostra a tabela 4.2. Os parâmetros fixados foram $Pr = 0,733$ e $E_1 = E_2 = 0$. Os parâmetros variados foram $Gr = 10^4$, 10^5 ; $RA = 1, 2$ e $\alpha = 0^\circ, -30^\circ, -60^\circ$. As condições de contorno, tanto para a cavidade quadrada como para a cavidade retangular, são iguais àquelas apresentadas na figura 4.1. A malha utilizada para $RA = 1$ foi (10 x 10) e a malha para $RA = 2$ foi (8 x 16).

Pode-se observar na tabela 4.2 que o número de Nusselt médio aumenta quando o número de Grashof aumenta.

Fixado o número de Grashof, o número de Nusselt médio apresenta maiores valores para $\alpha = -30^\circ$.

Os resultados mostrados na tabela 4.2 apresentam boa concordância sendo que os desvios variam de 0,02% a 5,03%.

A tabela 4.3 faz a comparação de resultados para a geometria quadrada mostrada na figura 4.1, com $Pr = 0,733$, $RA = 1$, $E_1 = E_2 = 0$ e $\alpha = 0^\circ$. Os resultados são comparados com aqueles apresentados por Figueredo [22], Fernandes [15] e

Referência	Nu	Desvio %	Método utilizado
Presente Trabalho	2,730	—	Elementos Finitos (64 elementos)
Nascimento[18]	2,721	0,33	Elementos Finitos (338 elementos)
Menon[19]	2,700	1,10	Elementos Finitos (100 elementos)
Tabarrok e outros[20]	2,695	1,28	Elementos Finitos (200 elementos)
Ozoe e outros[21]	2,740	-0,37	Valor Experimental
Fernandes[15]	2,697	1,21	Diferenças Finitas (15 x 15)

Tabela 4.1 - Comparação de resultados para a geometria quadrada sem paredes laterais e sem partição com $Gr = 20000$, $Pr = 0,733$, $E_1 = E_2 = 0$, $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$.

		$Gr = 10^4$			$Gr = 10^5$		
		Presente trabalho	[8]	Desvio %	Presente trabalho	[8]	Desvio %
RA=1	$\alpha = 0^\circ$	2,039	2,136	-4,76	4,745	4,639	2,23
	$\alpha = -30^\circ$	2,276	2,365	-3,91	4,852	4,800	1,07
	$\alpha = -60^\circ$	2,232	2,324	-4,12	4,267	4,463	-4,59
RA=2	$\alpha = 0^\circ$	2,321	2,241	3,45	4,366	4,365	0,02
	$\alpha = -30^\circ$	2,457	2,349	4,40	4,563	4,442	2,65
	$\alpha = -60^\circ$	2,365	2,246	5,03	4,263	4,104	3,73

Tabela 4.2 - Comparação de resultados para as geometrias quadrada e retangular sem paredes laterais e sem partição com $Pr = 0,733$ e $E_1 = E_2 = 0$.

Nascimento [18], com valores de Grashof iguais a 34100, 60000, 100000 e 136430. Figueredo [22] e Fernandes [15] utilizaram o método de diferenças finitas com as malhas (21 x 21) e (22 x 22), respectivamente. Já, Nascimento [18] utilizou o método de elementos finitos com 338 elementos.

Referência	[22]	[15]	[18]	Presente trabalho
Gr	Nu_1	Nu_2	Nu_3	Nu
34.100	2,884 (10,44%)	3,106 (3,54%)	3,227 (-0,22%)	3,220
60.000	3,648 (7,62%)	3,736 (5,39%)	3,864 (2,15%)	3,949
100.000	4,160 (12,33%)	4,422 (6,81%)	4,554 (4,03%)	4,745
136.430	4,686 (9,16%)	4,899 (5,04%)	5,027 (2,56%)	5,159

Tabela 4.3 - Comparação de resultados para a geometria quadrada sem paredes laterais e sem partição com $Pr = 0,733$; $RA = 1$; $E_1 = E_2 = 0$ e $\alpha = 0^\circ$.

Os resultados da tabela 4.3 até $Gr = 10^5$, para o presente trabalho, foram obtidos utilizando-se a malha (10 x 10) e para $Gr = 136430$, a malha utilizada foi (11 x 11).

No geral se verifica boa concordância entre os resultados do presente trabalho e daqueles obtidos em outros trabalhos. Os maiores desvios verificados nos trabalhos de Nascimento [18], Fernandes [15] e Figueredo [22] foram respectivamente 4,03%, 6,81% e 12,33%.

4.3 - Resultados do Presente Trabalho para Cavidades de Geometria Quadrada e Retangular com Paredes Laterais e sem Partição

Neste item é estudada a convecção natural no interior

das cavidades quadrada e retangular, conforme as figuras 4.3 e 4.4, respectivamente, onde as paredes das cavidades têm espessuras finitas E_1 e E_2 e são condutoras de calor. A superfície S_1 é mantida numa temperatura uniforme fria e a superfície S_2 é mantida numa temperatura uniforme quente. As superfícies S_3 são mantidas isoladas termicamente.

A figura 4.5 mostra o número de Nusselt versus o número de elementos. Foram fixados os seguintes parâmetros: número de Prandtl $Pr = 0,733$, razão de difusividades $D = 10^3$, espessuras das paredes laterais $E_1 = E_2 = 0,1$, ângulo de inclinação $\alpha = 0^\circ$. A razão de aspecto variou de $RA = 1$ e 2 , o número de Grashof variou de $Gr = 2 \times 10^4$, 10^5 , 2×10^5 e 10^6 . Esta figura mostra a influência do número de elementos no número de Nusselt médio. Foram obtidos resultados para o número de Nusselt médio utilizando-se as malhas (8×8) , (9×9) , (10×10) e (11×11) para $RA = 1$; e para $RA = 2$, as malhas (8×8) , (9×9) , (10×10) e (9×15) .

Na figura 4.5, verifica-se que existe uma convergência dos valores do número de Nusselt a medida que o número de elementos aumenta.

Para números de Grashof pequenos ($Gr \leq 2 \times 10^5$), com poucos elementos ou uma malha não muito refinada já se consegue convergência dos resultados de número de Nusselt. Entretanto, para números de Nusselt elevados, da ordem de 10^6 , há necessidade de se usar malhas mais refinadas para obter convergência dos resultados.

A figura 4.6 mostra o desvio percentual do número de Nusselt em função do número de elementos, tomando por referência o número de Nusselt calculado com 100 elementos (malha 11×11). Foram considerados fixados os seguintes parâmetros: $RA = 1$, $D = 10^3$, $E_1 = E_2 = 0,1$ e $\alpha = 0^\circ$. O número de Grashof variou de 2×10^4 , 10^5 , 2×10^5 e 10^6 .

Desta figura pode ser observado que para 81 elementos e 100 elementos, os desvios percentuais são 0,20%, 1,2%, 1,2% e -2,3%, respectivamente, para números de Grashof 2×10^4 , 10^5 , 2×10^5 e 10^6 .

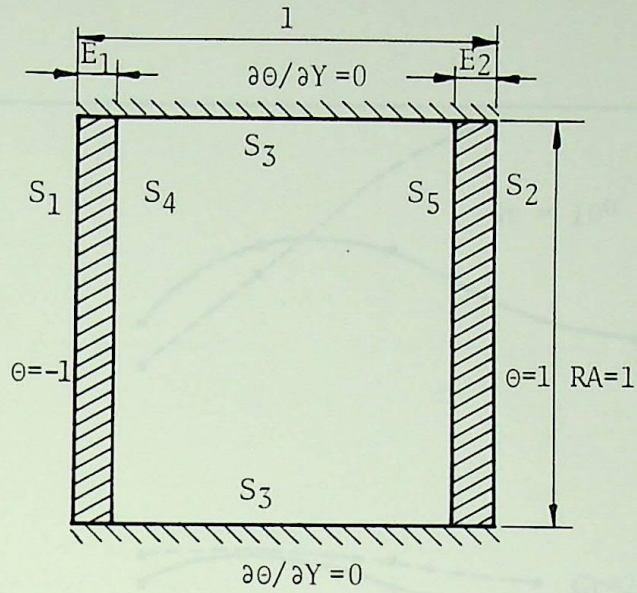


Figura 4.3 - Cavidade quadrada com paredes laterais e sem partição com condições de contorno para $\alpha = 0^\circ$.

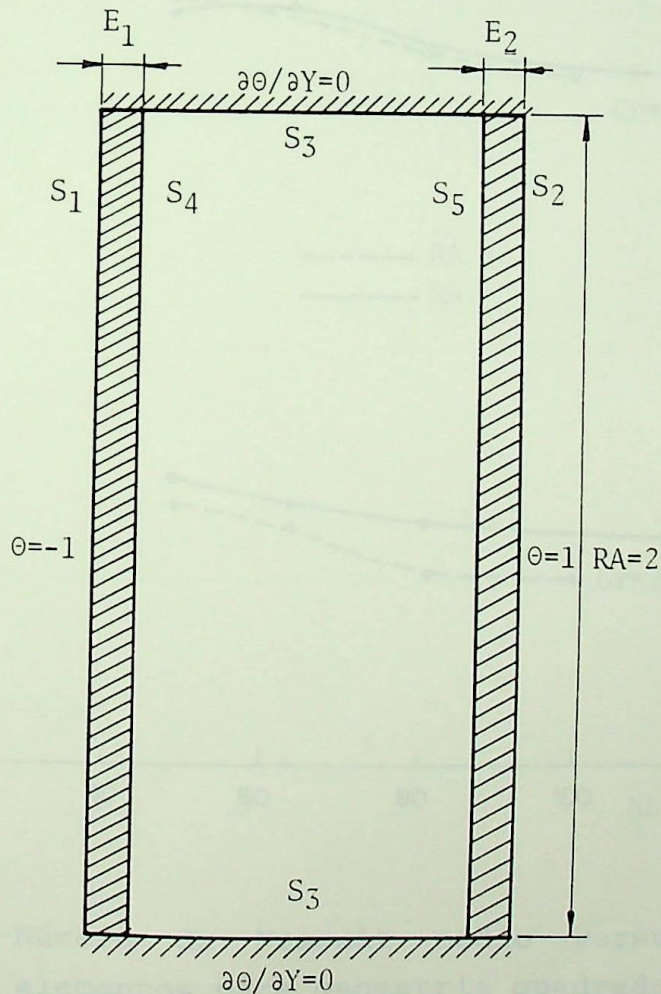


Figura 4.4 - Cavidade retangular com paredes laterais e sem partição com condições de contorno para $\alpha = 0^\circ$.

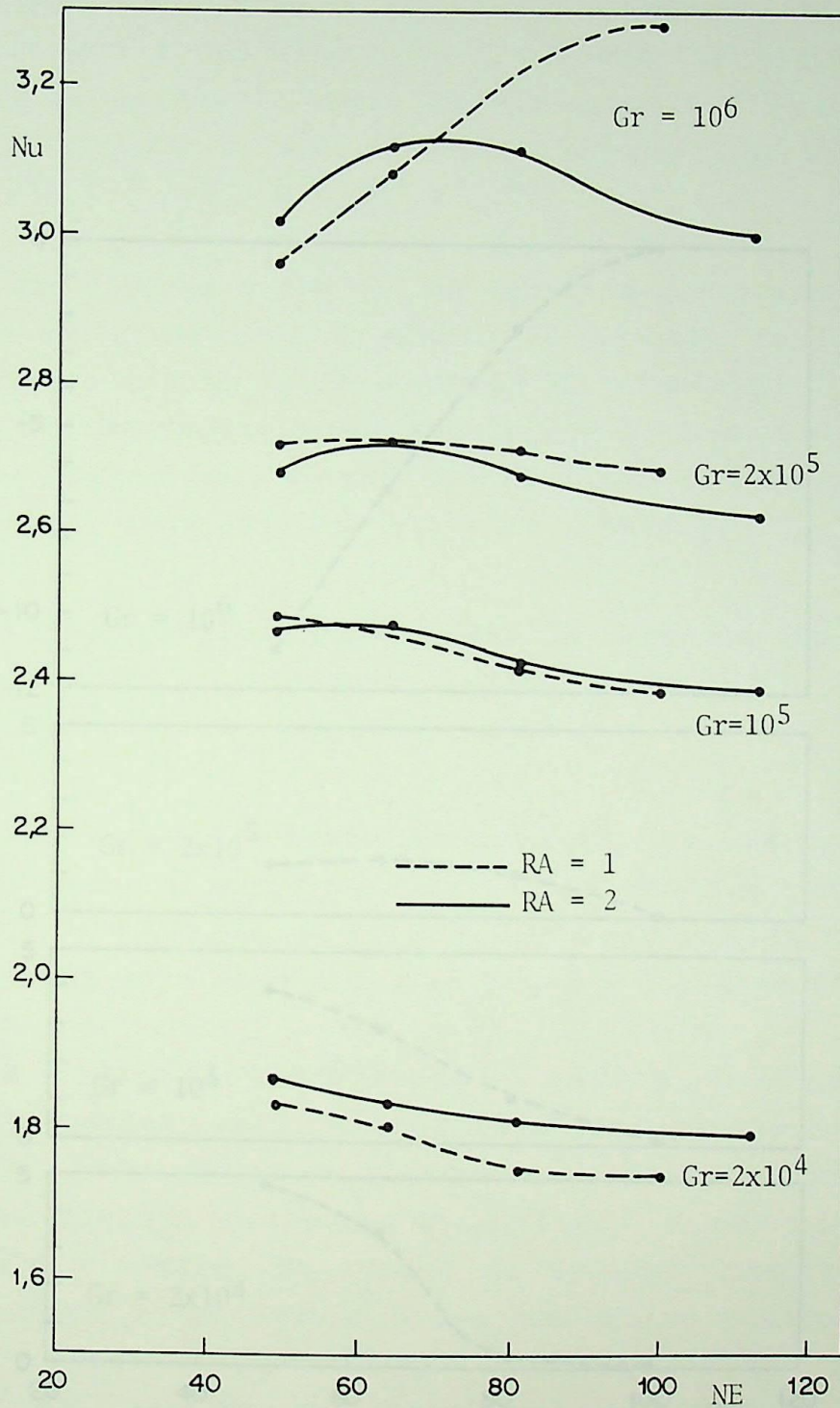


Figura 4.5 - Número de Nusselt médio versus número de elementos para geometria quadrada e retangular com paredes laterais e sem partição com $Pr = 0,733$; $D = 10^3$; $E_1 = E_2 = 0,1$ e $\alpha = 0^\circ$.

A figura 4.7 mostra o desvio percentual do número de Nusselt em função do número de elementos, considerando os mesmos parâmetros da figura 4.6, com exceção da razão de aspecto que neste caso é $RA = 2$ e o número de Nusselt de referência que é calculado com 112 elementos (linha 9×15). Nesta figura os desvios para 81 elementos a 112 elementos são 1,21, 1,04, 1,81 e 3,88, respectivamente, para números de Grashof 2×10^4 , 10^5 , 2×10^5 e 10^6 .

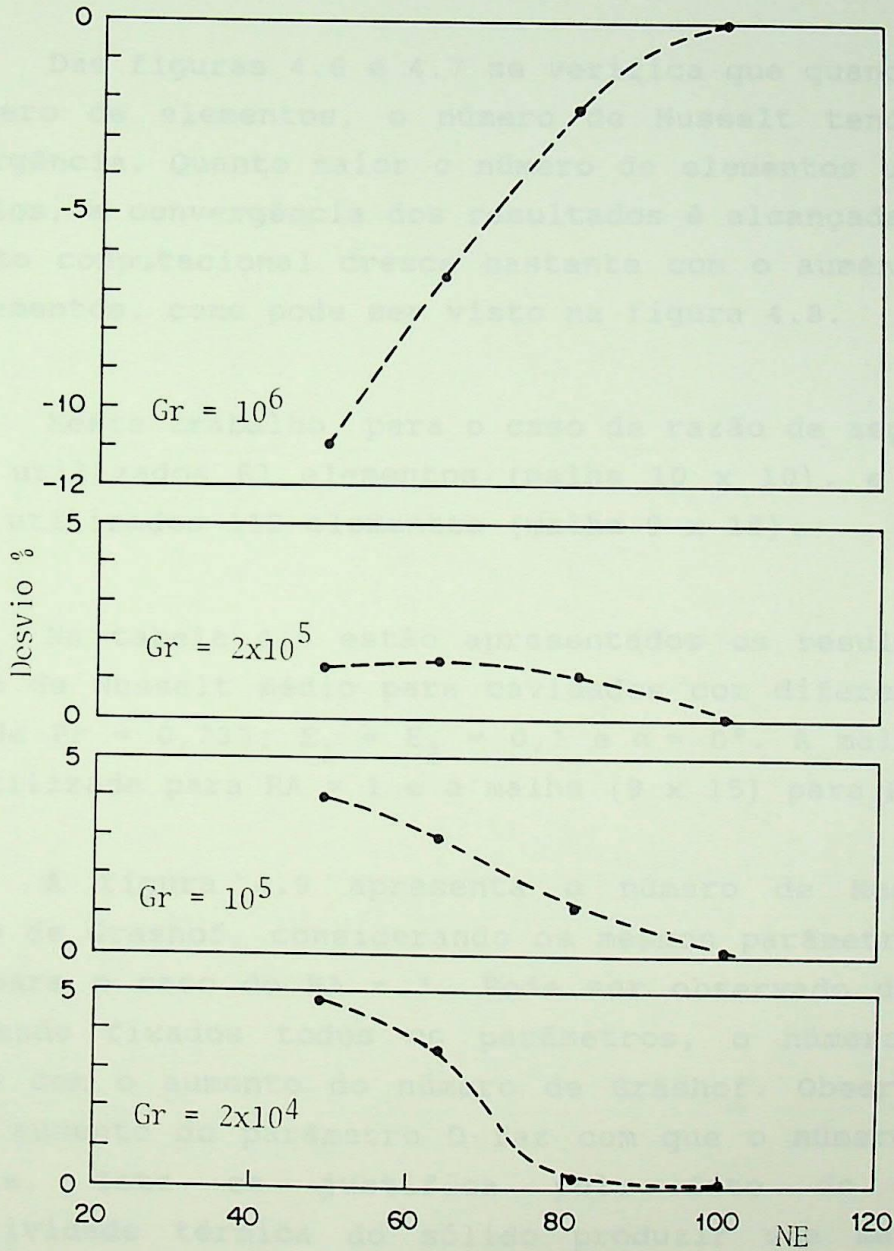


Figura 4.6 - Desvio em porcentagem versus número de elementos para geometria com $RA = 1$, $D = 10^3$, $E_1 = E_2 = 0,1$ e $\alpha = 0^\circ$.

A figura 4.7 mostra o desvio percentual do número de Nusselt em função do número de elementos, considerando os mesmos parâmetros da figura 4.6, com exceção da razão de aspecto que neste caso é $RA = 2$ e o número de Nusselt de referência que é calculado com 112 elementos (malha 9×15). Nesta figura os desvios para 81 elementos e 112 elementos são 1,2%, 1,3%, 1,8% e 3,8%, respectivamente, para números de Grashof 2×10^4 , 10^5 , 2×10^5 e 10^6 .

Das figuras 4.6 e 4.7 se verifica que quando se aumenta o número de elementos, o número de Nusselt tende a atingir convergência. Quanto maior o número de elementos utilizado nos cálculos, a convergência dos resultados é alcançada, entretanto o custo computacional cresce bastante com o aumento do número de elementos, como pode ser visto na figura 4.8.

Neste trabalho, para o caso de razão de aspecto $RA = 1$, foram utilizados 81 elementos (malha 10×10), e para $RA = 2$ foram utilizados 112 elementos (malha 9×15).

Na tabela 4.4 estão apresentados os resultados para o número de Nusselt médio para cavidades com diferentes RA , D e Gr onde $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$ e $\alpha = 0^\circ$. A malha (10×10) foi utilizada para $RA = 1$ e a malha (9×15) para $RA = 2$.

A figura 4.9 apresenta o número de Nusselt versus número de Grashof, considerando os mesmos parâmetros da tabela 4.4, para o caso de $RA = 1$. Pode ser observado da figura 4.9 que sendo fixados todos os parâmetros, o número de Nusselt cresce com o aumento do número de Grashof. Observa-se também que o aumento do parâmetro D faz com que o número de Nusselt aumente. Isto se justifica pelo fato do aumento da condutividade térmica do sólido produzir uma maior taxa de transferência de calor e em consequência tem-se maior número de Nusselt. A influência do parâmetro D tem entretanto um limite superior, já que para os casos calculados, o número de Nusselt praticamente não varia para valores de D maiores que 10^3 .

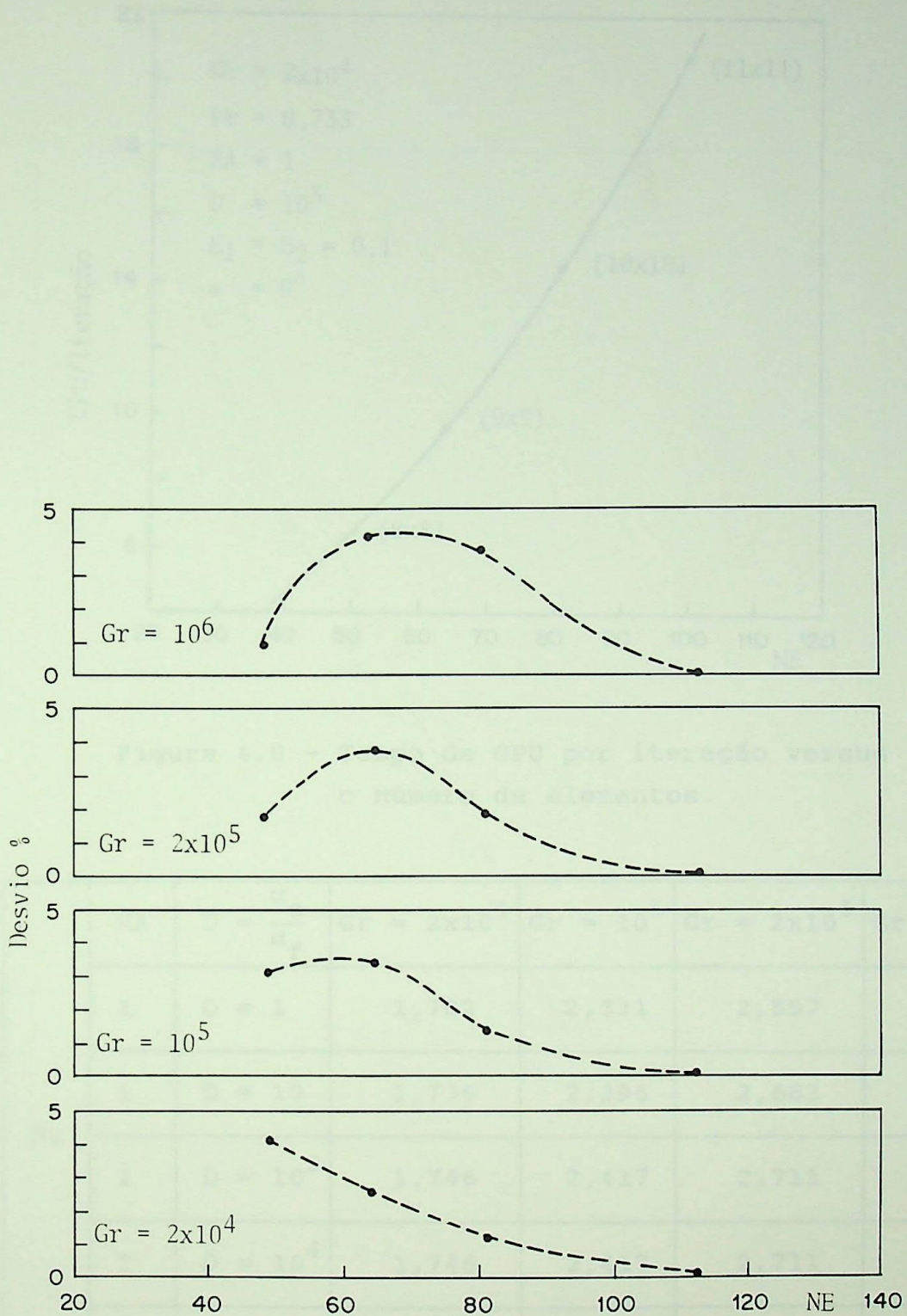


Figura 4.7 - Desvio em porcentagem versus número de elementos para geometria com $RA = 2$, $D = 10^3$, $E_1 = E_2 = 0,1$ e $\alpha = 0^\circ$.

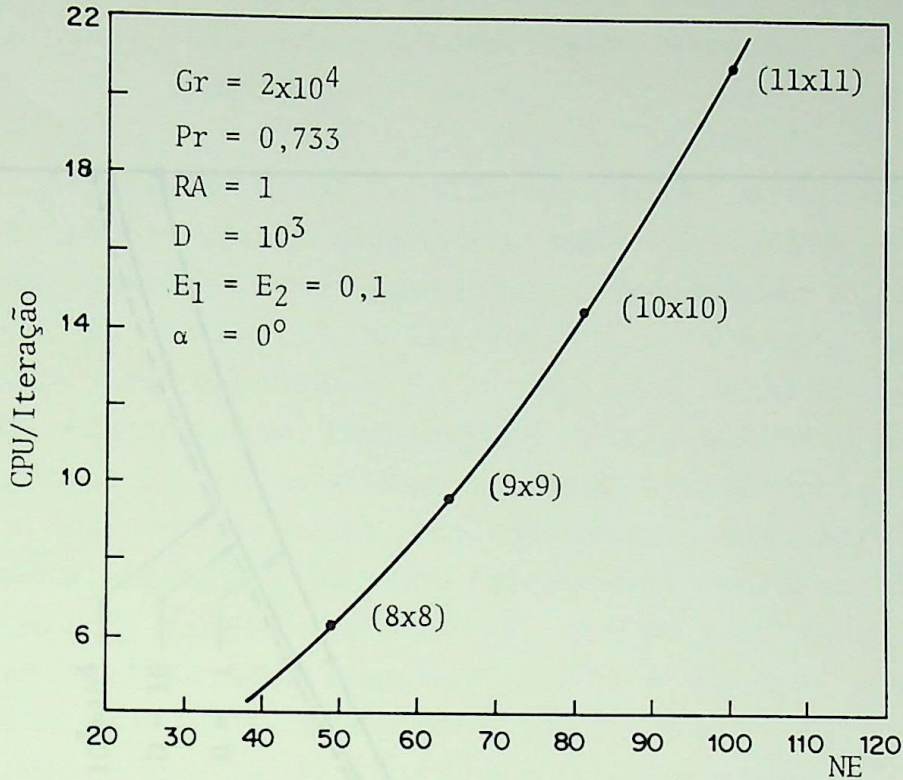


Figura 4.8 - Tempo de CPU por iteração versus o número de elementos.

Nu	RA	$D = \frac{\alpha_s}{\alpha_f}$	$Gr = 2 \times 10^4$	$Gr = 10^5$	$Gr = 2 \times 10^5$	$Gr = 10^6$
	1	$D = 1$	1,702	2,331	2,597	3,036
	1	$D = 10$	1,736	2,396	2,682	3,161
	1	$D = 10^3$	1,746	2,417	2,711	3,211
	1	$D = 10^4$	1,746	2,417	2,711	3,212
	2	$D = 10^3$	1,791	2,389	2,620	2,990

Tabela 4.4 - Resultados do número de Nusselt médio para cavidades com paredes laterais e sem partição com diferentes RA, D e Gr com $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$ e $\alpha = 0^\circ$.

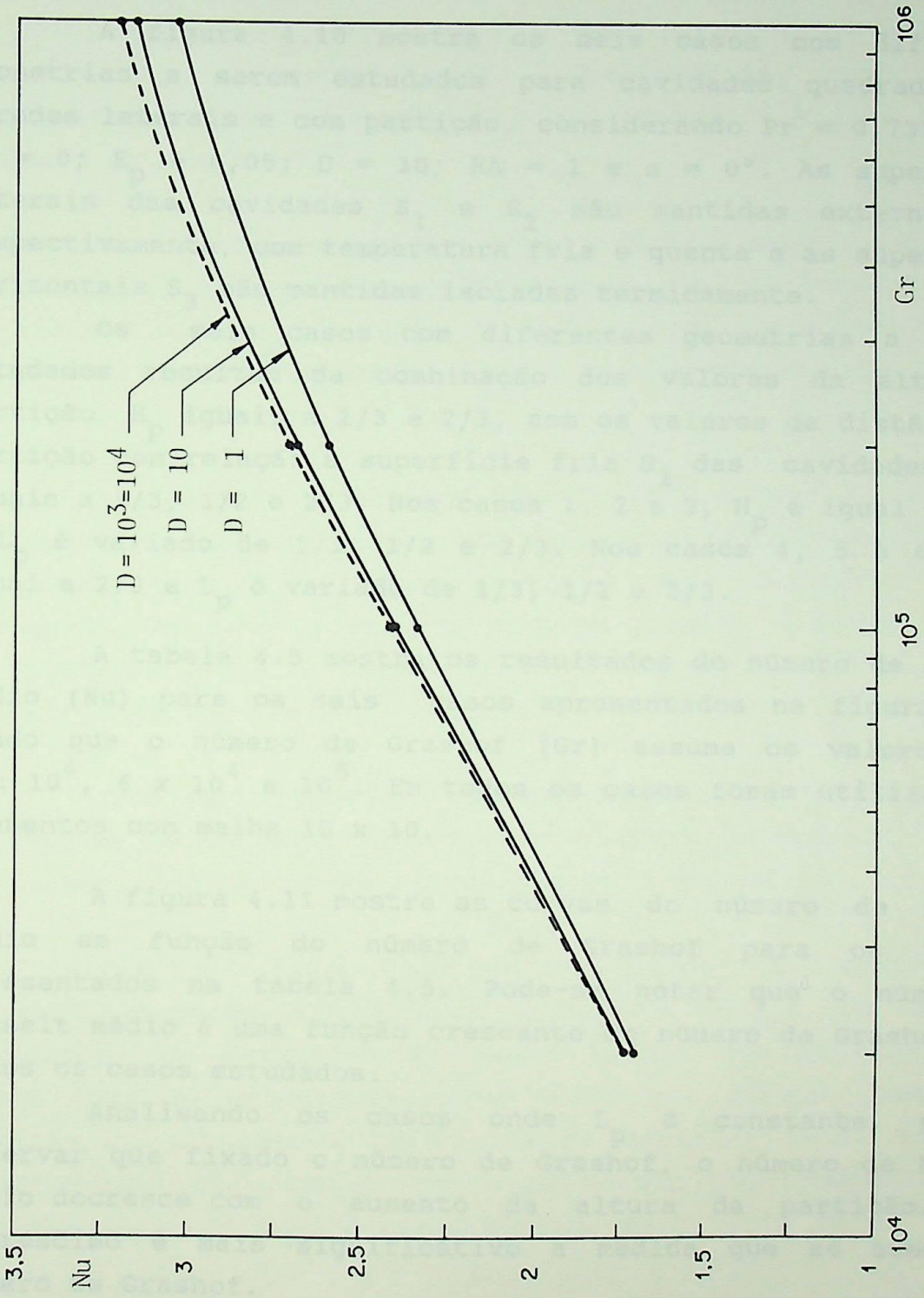


Figura 4.9 - Número de Nusselt médio versus número de Grashof para cavidades quadradas com paredes laterais e sem partição com $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$; $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$. 67

4.4 - Resultados do Presente Trabalho para Cavidades de Geometria Quadrada sem Paredes Laterais e com Partição

A figura 4.10 mostra os seis casos com diferentes geometrias a serem estudados para cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição, considerando $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$. As superfícies laterais das cavidades S_1 e S_2 são mantidas externamente, respectivamente, com temperatura fria e quente e as superfícies horizontais S_3 são mantidas isoladas termicamente.

Os seis casos com diferentes geometrias a serem estudados resultam da combinação dos valores da altura da partição H_p iguais a $1/3$ e $2/3$, com os valores da distância da partição com relação a superfície fria S_1 das cavidades (L_p) iguais a $1/3$, $1/2$ e $2/3$. Nos casos 1, 2 e 3, H_p é igual a $1/3$ e L_p é variado de $1/3$, $1/2$ e $2/3$. Nos casos 4, 5 e 6, H_p é igual a $2/3$ e L_p é variado de $1/3$, $1/2$ e $2/3$.

A tabela 4.5 mostra os resultados do número de Nusselt médio (Nu) para os seis casos apresentados na figura 4.10, sendo que o número de Grashof (Gr) assume os valores 10^4 , 3×10^4 , 6×10^4 e 10^5 . Em todos os casos foram utilizados 81 elementos com malha 10×10 .

A figura 4.11 mostra as curvas do número de Nusselt médio em função do número de Grashof para os valores apresentados na tabela 4.5. Pode-se notar que o número de Nusselt médio é uma função crescente do número de Grashof para todos os casos estudados.

Analisando os casos onde L_p é constante, pode-se observar que fixado o número de Grashof, o número de Nusselt médio decresce com o aumento da altura da partição. Este decréscimo é mais significativo a medida que se aumenta o número de Grashof.

Da figura 4.11, verifica-se que fixado o número de Grashof, a variação da posição da partição (L_p), tem menor influência no número de Nusselt do que a variação da altura da partição (H_p).

Pode ser notado da figura 4.11, que a colocação da partição diminui o número de Nusselt, fixado o número de Grashof. Este efeito pode ser medido através da diferença entre os números de Nusselt apresentados pelas curvas que representam as cavidades com $H_p = 0$ e $H_p \neq 0$. A diminuição do número de Nusselt se apresenta mais significativa, em termos proporcionais, para os casos 4, 5 e 6, a medida que se aumenta o número de Grashof.

Para número de Grashof igual a 10^4 , o caso 2 e o caso 5 apresentam os menores números de Nusselt, respectivamente, para as curvas onde H_p é igual a $1/3$ e $2/3$. Os casos 1 e 2 apresentam Nu praticamente iguais e o caso 4 apresenta o maior Nu onde H_p é igual a $2/3$.

Para número de Grashof igual a 10^5 , o caso 2 e o caso 5 apresentam os maiores números de Nusselt, respectivamente, para as curvas onde H_p é igual a $1/3$ e $2/3$. Os casos 1 e 3 apresentam os menores valores para Nu onde H_p é igual a $1/3$ e são muito próximos. O caso 4 apresenta o menor valor para o número de Nusselt onde H_p é igual a $2/3$.

Pode ser notado das últimas observações que os casos 2 e 6 passam de um valor mínimo para o número de Nusselt, para um valor máximo mantendo-se fixado o número de Grashof.

Existem situações em que dois casos com a mesma altura da partição apresentam números de Nusselt iguais, ou seja, são cavidades com partições de mesma altura que apresentam uma mesma taxa de transferência de calor que depende somente da posição da partição e do número de Grashof. Estas situações podem ser vistas na figura 4.11 e são representadas pelas intersecções entre as curvas de mesmo H_p .

As figuras 4.12 (a) e (b) mostram duas malhas típicas (10 x 10) usadas no presente trabalho para se calcular as distribuições da função corrente, temperatura adimensional e vorticidade. Para os casos que não possuem paredes laterais e partição são utilizadas as malhas uniformes (a) e para os casos

que possuem paredes laterais e partição são utilizadas as malhas não uniformes (b).

As figuras 4.13 a 4.16 mostram as distribuições da função corrente (ψ) e da temperatura adimensional (θ) para os casos mostrados na figura 4.10. As figuras 4.17 e 4.18 mostram o efeito do ângulo de inclinação (α) para o caso 5 da figura 4.10.

Nas figuras seguintes será utilizada a convenção: Logo após ψ apresenta-se entre parênteses o valor mínimo de ψ , seguido do seu valor máximo e por último o incremento de ψ . Sequência semelhante é apresentada para θ .

A figura 4.13 apresenta a distribuição da função corrente (ψ) para número de Grashof (Gr) igual a 10^4 . Observa-se nesta figura que existe um escoamento do fluido no sentido anti-horário. Isto acontece devido a cavidade estar submetida a diferentes temperaturas proporcionando assim uma diferença na densidade do fluido que tende a se movimentar dentro da cavidade.

Observa-se para os casos com $H_p = 1/3$, que existem regiões entre as superfícies laterais e a partição onde o escoamento do fluido é muito fraco. Para o caso 1, o fluido atinge o topo da partição com uma temperatura baixa, tendendo a se deslocar para baixo formando assim uma região de baixas velocidades entre a partição e a superfície fria. Já para o caso 3, existe uma região entre a partição e a superfície quente onde o fluido com temperatura muito alta está confinado. O fluido que está no sentido ascendente junto a superfície quente tem baixa velocidade e não consegue penetrar nesta região de fluido altamente aquecido.

Para os casos com $H_p = 2/3$, a transferência de calor por convecção natural se deve principalmente a troca de calor do fluido com a partição. No caso 4, a maioria do fluido com velocidades mais altas não chega a ter contato com a superfície fria, mas atinge a superfície da partição que tem uma temperatura maior do que a superfície fria S_1 . No caso 6, a maioria do fluido com velocidades mais altas não atinge a superfície quente, mas tem contato com a superfície da partição que tem uma temperatura menor do que a superfície quente S_2 .

Conclui-se da figura 4.13 que o aumento da altura da partição tem um maior efeito no escoamento do fluido do que a posição da partição e conseqüentemente no número de Nusselt.

A figura 4.14 apresenta a distribuição da temperatura adimensional (θ) para o número de Grashof (Gr) igual a 10^4 . Observa-se nesta figura que existe uma estratificação da temperatura adimensional, nas regiões de baixa velocidade de escoamento do fluido comentadas anteriormente, caracterizando um regime predominantemente condutivo nestas regiões.

Nota-se, em geral, que o gradiente de temperatura é maior na base da superfície quente S_2 onde o fluido com temperatura baixa atinge primeiramente e é maior também no topo da superfície fria S_1 onde o fluido com temperatura mais alta atinge primeiramente. Observa-se que no caso 1 o fluido quente asperge na superfície fria na altura do topo da partição onde se pode notar um maior gradiente de temperatura.

O caso 3 apresenta o maior número de Nusselt devido ao fato de apresentar o maior gradiente de temperatura junto as superfícies laterais.

Nos casos onde $H_p = 2/3$, as isotermas são, em geral, paralelas, o que significa um regime altamente condutivo.

Pode-se observar na figura 4.13 que as linhas de mesma temperatura são perpendiculares às superfícies isoladas. Isto se deve ao fato de que estas superfícies apresentam como condição de contorno uma variação de temperatura com relação ao eixo Y igual a zero ($\partial T/\partial Y = 0$).

A figura 4.15 mostra a distribuição da função corrente (ψ) para o número de Grashof igual a 10^5 . Nota-se nesta figura que a posição da partição não afeta tanto a velocidade do fluido quanto a altura da partição. Os casos com $H_p = 2/3$ apresentam um maior espaçamento entre as linhas de função corrente o que significa velocidades mais baixas do fluido na cavidade, uma vez que $\Delta\psi$ é o mesmo para todos os casos.

As linhas de função corrente, para cada caso, se apresentam mais próximas umas das outras nas superfícies que possuem temperaturas especificadas. Isto significa que a velocidade relativa das camadas de fluido adjacentes é maior

nestas regiões, o que representa uma camada limite de velocidade mais espessa. Este comportamento se apresenta mais intenso para os casos com número de Grashof igual a 10^5 do que para os casos com número de Grashof igual a 10^4 . Isto faz com que o fluido penetre em regiões nas quais anteriormente existiam confinamento de fluido.

Nota-se no caso 4 que a maioria do fluido tende a escoar na região compreendida entre a partição e a parede quente. O mesmo acontece para o caso 6, onde a maioria do fluido tende a escoar na região compreendida entre a partição e a parede fria. Já para o caso 5 existe uma porção mais equilibrada de fluido escoando nas duas regiões separadas pela partição. Este comportamento mostra uma tendência de se formar células separadas de escoamento do fluido devido a diminuição da abertura entre o topo da partição e a base da cavidade. Observa-se nesta região que o escoamento do fluido tem velocidade mais alta devido à existência de uma menor área para o fluido escoar.

A figura 4.16 apresenta a distribuição da temperatura adimensional (θ) para o número de Grashof igual a 10^5 . Pode-se observar nesta figura para os casos onde $H_p = 1/3$, que o gradiente de temperatura junto às superfícies laterais é maior do que nos casos onde $H_p = 2/3$. Para os casos onde H_p tem o mesmo valor, o gradiente de temperatura junto às superfícies laterais não tem uma diferença significativa entre um caso e outro. Verifica-se, portanto, que a altura da partição tem maior efeito no número de Nusselt do que a posição da partição.

Nota-se que há uma predominância na transferência de calor no núcleo da cavidade na direção Y. Isto ocorre devido ao fato de que nesta região a troca de calor se dá principalmente pela diferença de temperatura das camadas de fluido quente e frio que respectivamente deixam a superfície quente S_2 e a superfície fria S_1 .

Analisando-se as figuras 4.16 e 4.14 verifica-se para os casos de mesma geometria que o gradiente de temperatura aumenta intensamente com o aumento do número de Grashof junto às superfícies de temperaturas especificadas resultando um grande aumento no número de Nusselt. Em geral, observa-se

desta comparação uma maior troca de calor na direção Y no núcleo da cavidade para os casos onde o número de Grashof é elevado ($Gr = 10^5$).

A figura 4.17 mostra as distribuições da função corrente (ψ) e da temperatura adimensional (θ) para o caso 5 da figura 4.10 para números de Grashof (Gr) iguais a 10^4 e 10^5 , sendo o ângulo de inclinação (α) igual a 30° . Nota-se na figura 4.17, que o caso onde o número de Grashof é igual a 10^4 apresenta uma pequena diminuição na velocidade de escoamento do fluido e praticamente nenhuma mudança na distribuição de temperatura em relação aos casos de mesma geometria, mesmo número de Grashof e ângulo de inclinação igual a 0° mostrados nas figuras 4.13 e 4.14. Por outro lado, observa-se na figura 4.17 uma diminuição mais acentuada na velocidade de escoamento do fluido e no gradiente de temperatura para o caso onde o número de Grashof é igual a 10^5 em relação aos casos de mesma geometria, mesmo número de Grashof e ângulo de inclinação igual a 0° mostrados nas figuras 4.15 e 4.16.

Nota-se uma diminuição no número de Nusselt para os casos apresentados na figura 4.17 em relação aos casos de mesma geometria inclinados de 0° , sendo que esta diminuição é mais intensa para o caso onde o número de Grashof é igual a 10^5 .

A figura 4.18 mostra as distribuições da função corrente (ψ) e da temperatura adimensional (θ) para o caso 5 da figura 4.10 com o ângulo de inclinação (α) igual a -30° , -60° , -90° e o número de Grashof (Gr) igual a 10^5 .

Pode-se notar da figura 4.18 que os casos (a) e (b) apresentam, em geral, uma maior velocidade do fluido e um maior número de Nusselt em relação ao caso que possui a mesma geometria, o mesmo número de Grashof e ângulo de inclinação igual a zero na figura 4.15, sendo que a maior diferença é apresentada pelo caso onde o ângulo de inclinação (α) é igual a -30° .

Observa-se no caso (c) da figura 4.18 que existem três células de escoamento do fluido. A maior célula representa uma circulação do fluido na cavidade onde o valor mínimo da função corrente é igual a $-10,623$. O número de Nusselt neste caso se apresenta menor em relação ao caso de mesma geometria,

mesmo número de Grashof e ângulo de inclinação igual a 0° mostrado na figura 4.15.



Figura 4.10 - Condições quadradas das paredes laterais e com partição para $P_1 = 0,733$; $P_2 = 0,267$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$ e $\alpha = 90^\circ$.

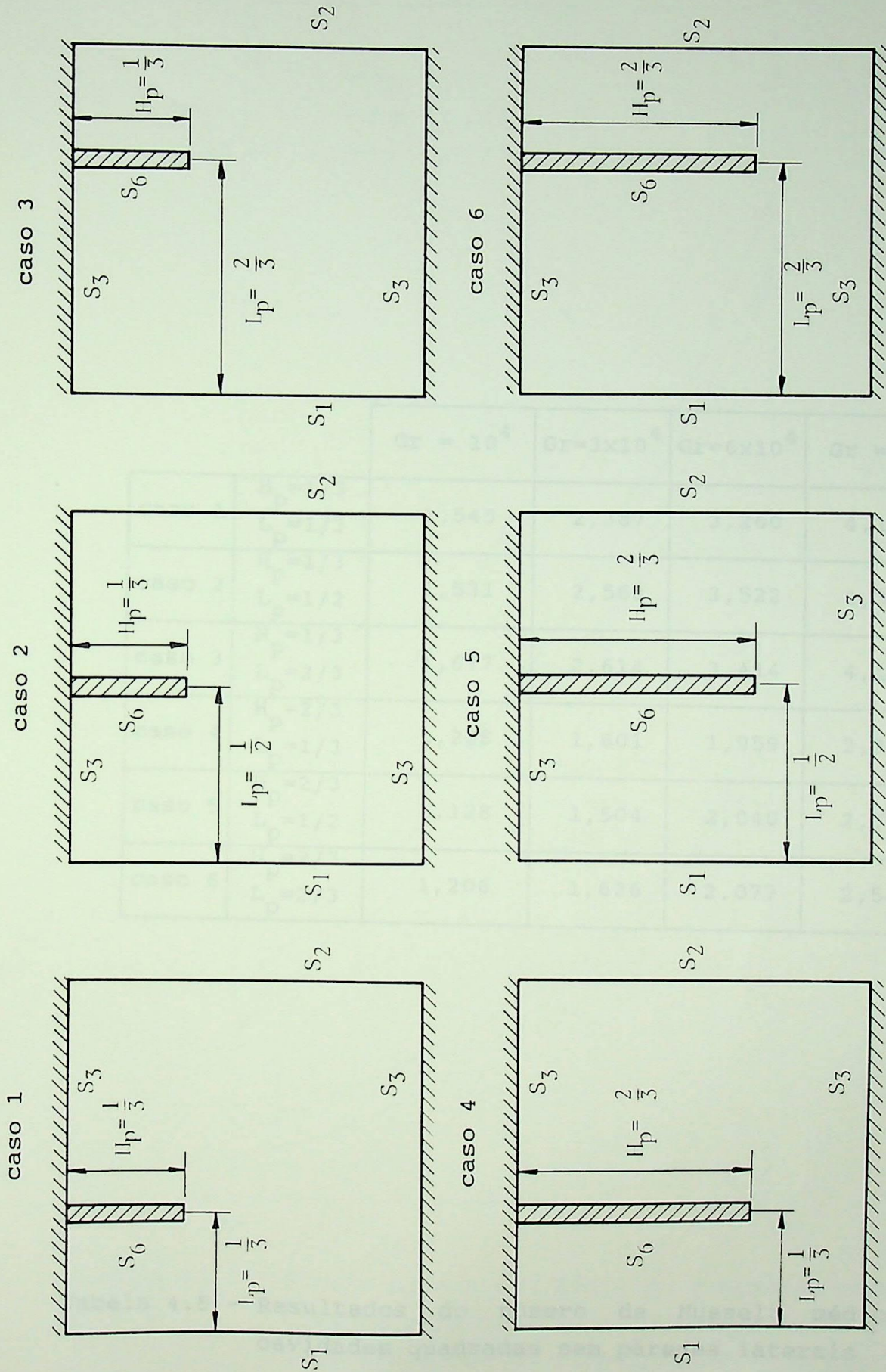
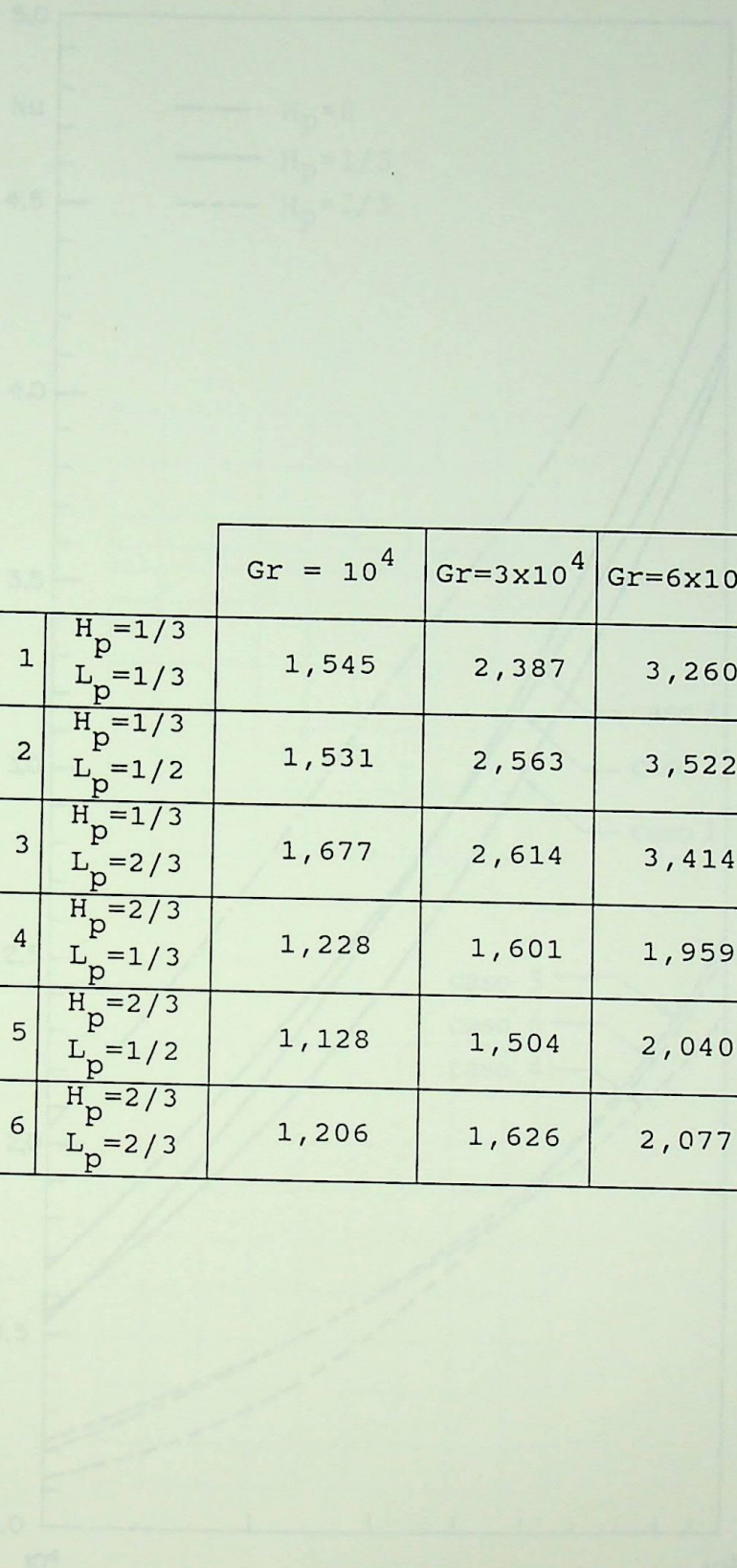


Figura 4.10 - Cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$.



		$Gr = 10^4$	$Gr=3 \times 10^4$	$Gr=6 \times 10^4$	$Gr = 10^5$
caso 1	$H_p=1/3$ $L_p=1/3$	1,545	2,387	3,260	4,130
caso 2	$H_p=1/3$ $L_p=1/2$	1,531	2,563	3,522	4,370
caso 3	$H_p=1/3$ $L_p=2/3$	1,677	2,614	3,414	4,149
caso 4	$H_p=2/3$ $L_p=1/3$	1,228	1,601	1,959	2,366
caso 5	$H_p=2/3$ $L_p=1/2$	1,128	1,504	2,040	2,572
caso 6	$H_p=2/3$ $L_p=2/3$	1,206	1,626	2,077	2,541

Tabela 4.5 - Resultados do número de Nusselt médio para cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição onde $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$.

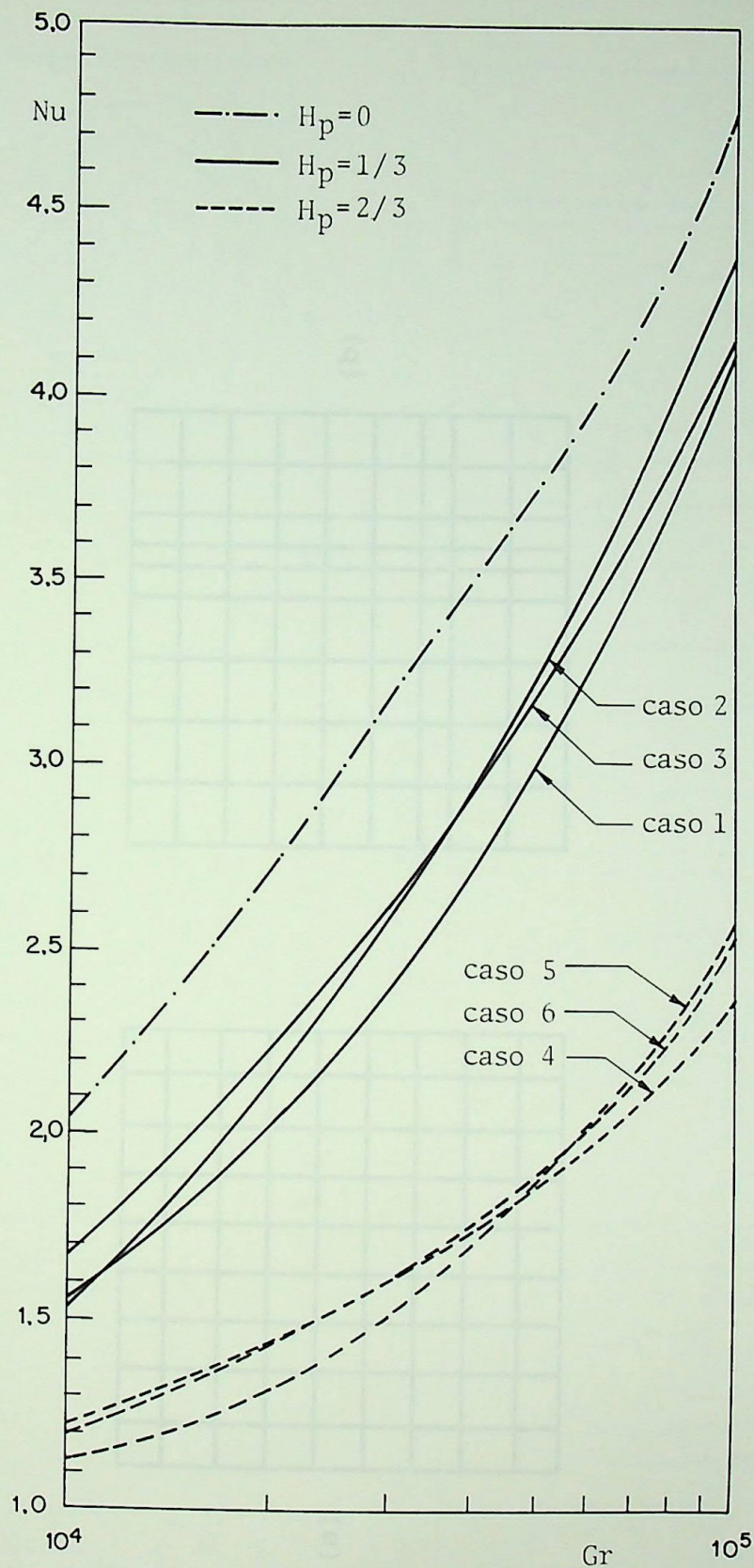


Figura 4.11 - Número de Nusselt médio em função do número de Grashof para cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $RA = 1$; $D = 10$ e $\alpha = 0^\circ$.

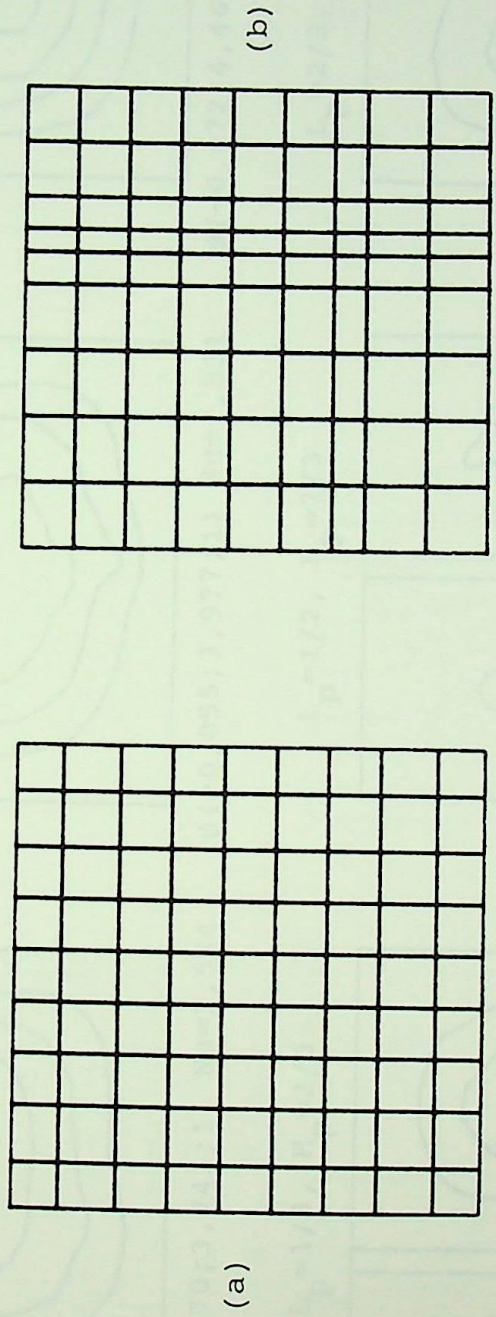
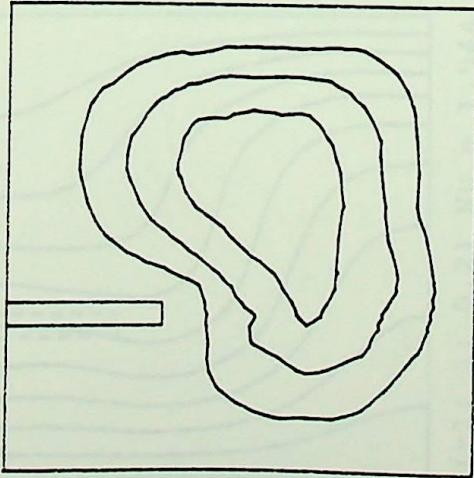


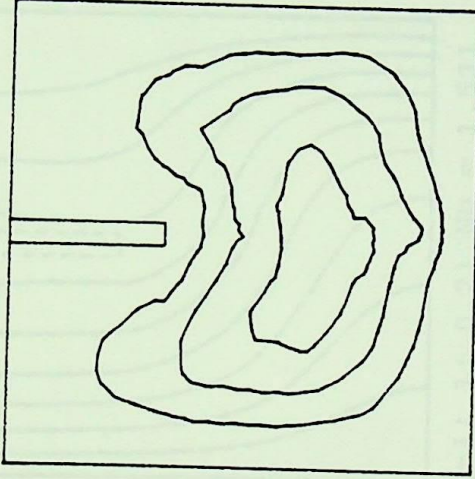
Figura 4.12 - Malhas típicas usadas no presente trabalho.
(a) Malha uniforme; (b) Malha não uniforme

$$L_p=1/3, H_p=1/3$$



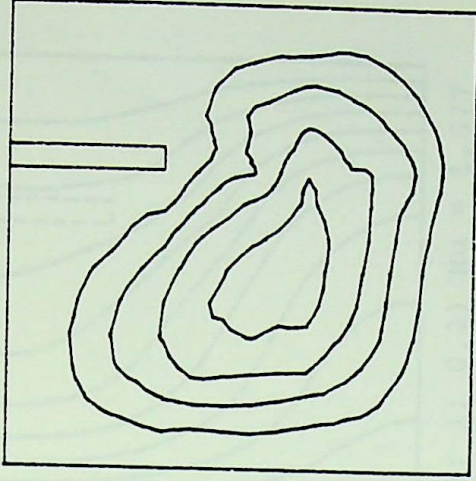
$$\psi(-0,070;3,743;1) \quad Nu=1,544$$

$$L_p=1/2, H_p=1/3$$



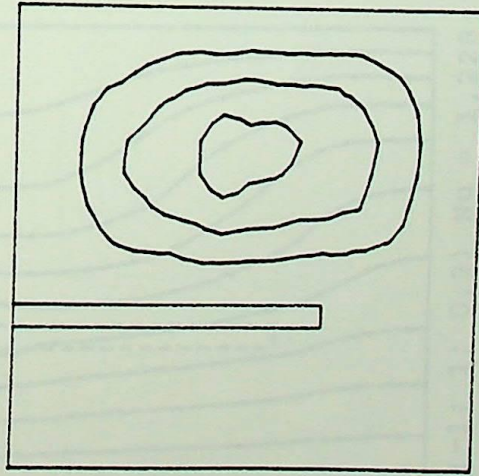
$$\psi(-0,055;3,977;1) \quad Nu=1,531$$

$$L_p=2/3, H_p=1/3$$



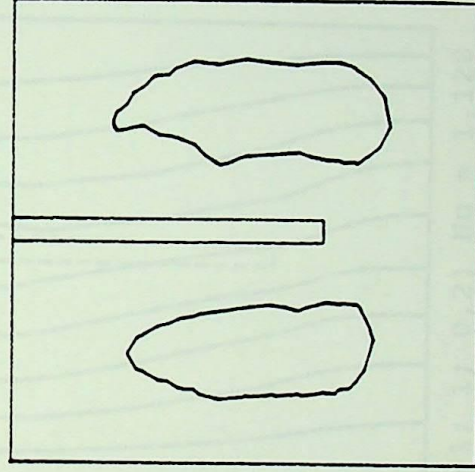
$$\psi(-0,072;4,469;1) \quad Nu=1,677$$

$$L_p=1/3, H_p=2/3$$



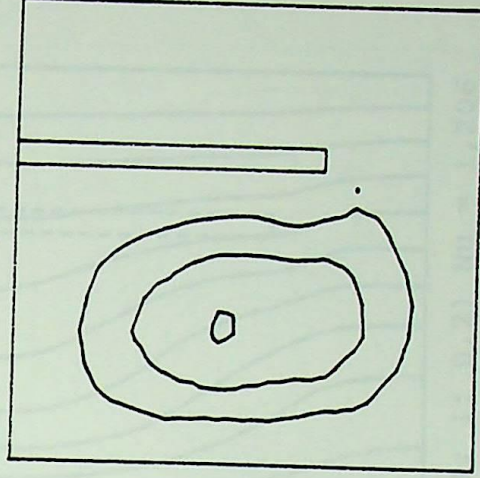
$$\psi(-0,097;3,557;1) \quad Nu=1,228$$

$$L_p=1/2, H_p=2/3$$



$$\psi(-0,118;1,678;1) \quad Nu=1,128$$

$$L_p=2/3, H_p=2/3$$



$$\psi(-0,041;3,093;1) \quad Nu=1,206$$

Figura 4.13 - Distribuição da função corrente para cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$; $\alpha = 0^\circ$ e $Gr = 10^4$.

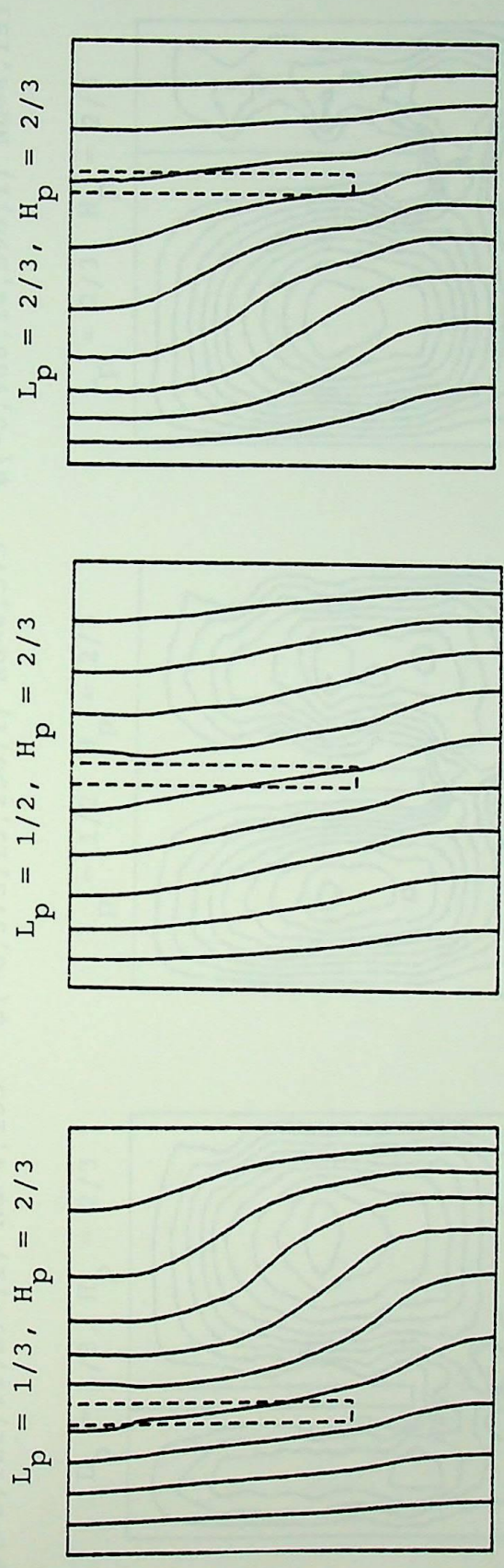
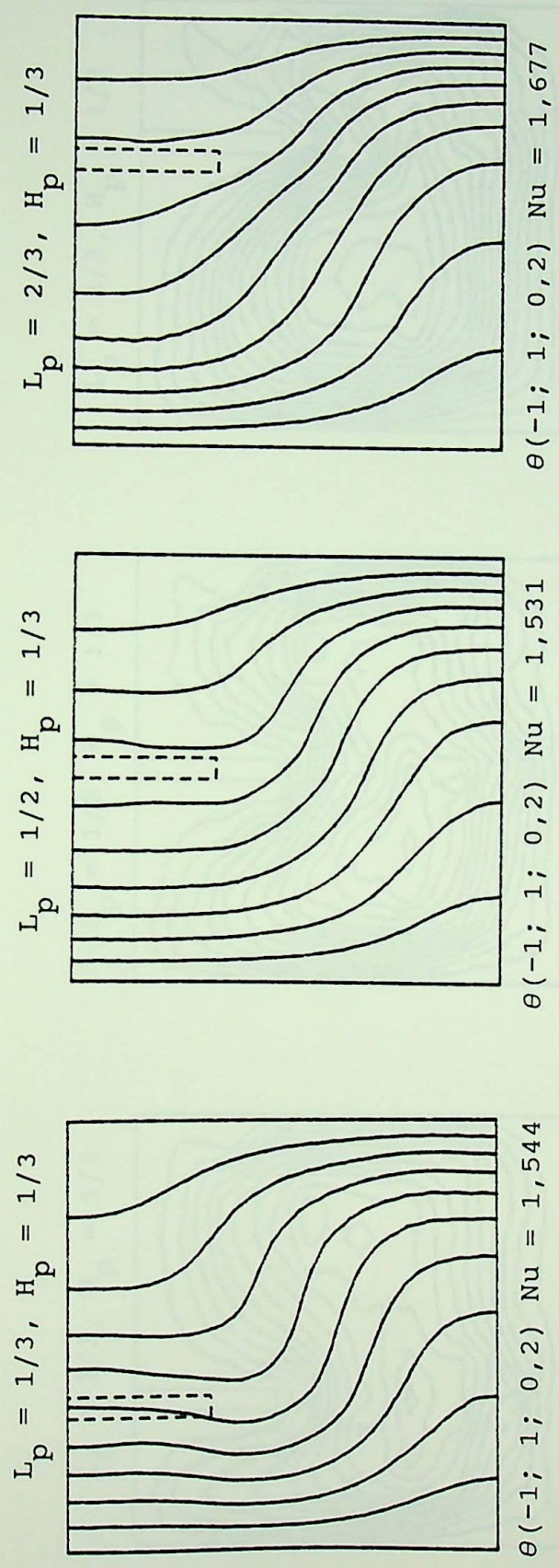
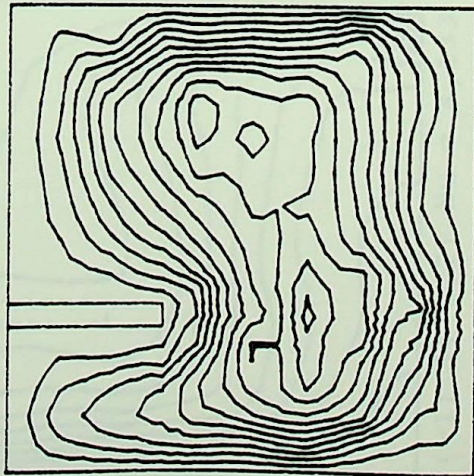


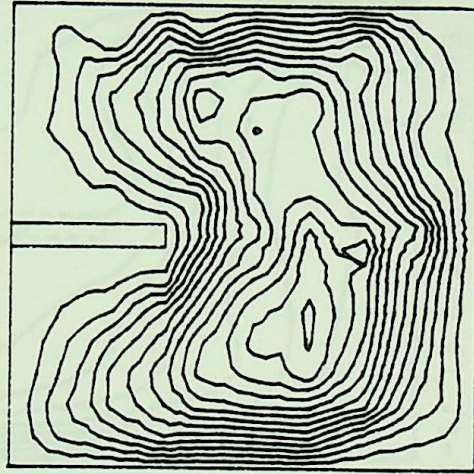
Figura 4.14 - Distribuição da temperatura adimensional para cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733; E_1 = E_2 = 0; E_p = 0,05; D = 10; RA = 1; \alpha = 0^\circ$ e $Gr = 10^4$.

$$L_p = 1/3, H_p = 1/3$$



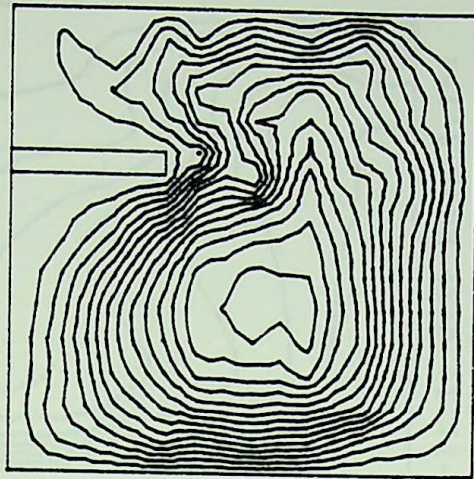
$$\psi(-0,121;11,397;1) \text{ Nu}=4,133$$

$$L_p = 1/2, H_p = 1/3$$



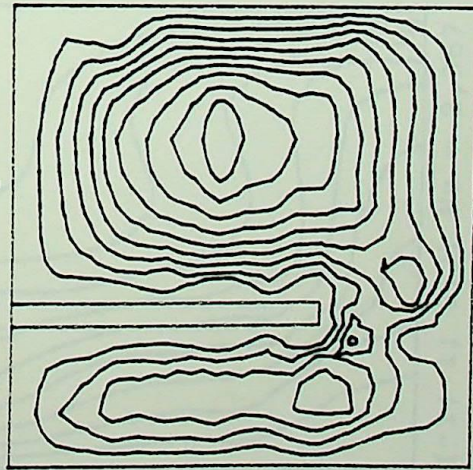
$$\psi(-0,375;13,256;1) \text{ Nu}=4,373$$

$$L_p = 2/3, H_p = 1/3$$



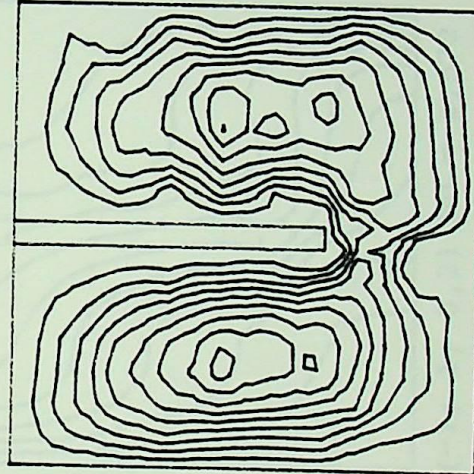
$$\psi(-0,988;14,590;1) \text{ Nu}=4,151$$

$$L_p = 1/3, H_p = 2/3$$



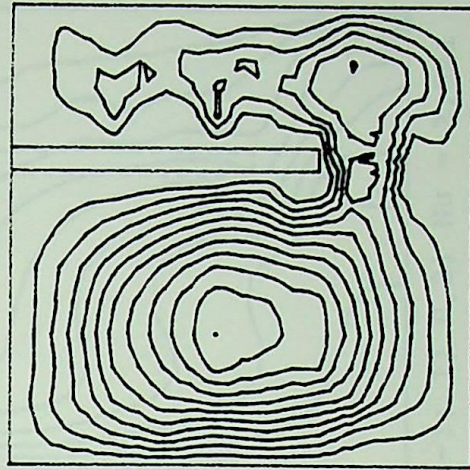
$$\psi(-0,568;9,974;1) \text{ Nu}=2,367$$

$$L_p = 1/2, H_p = 2/3$$



$$\psi(-1,050;9,320;1) \text{ Nu}=2,572$$

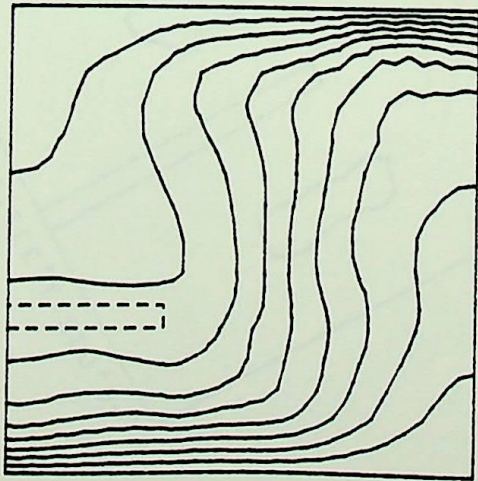
$$L_p = 2/3, H_p = 2/3$$



$$\psi(-1,386;11,009;1) \text{ Nu}=2,541$$

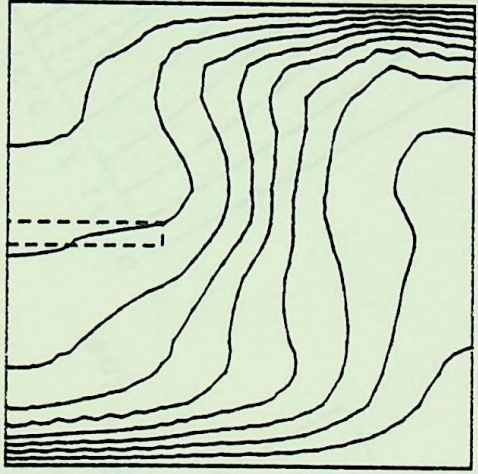
Figura 4.15 - Distribuição da função corrente para cavidades sem paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$; $\alpha = 0^\circ$ e $Gr = 10^5$.

$$L_p = 1/3, H_p = 1/3$$



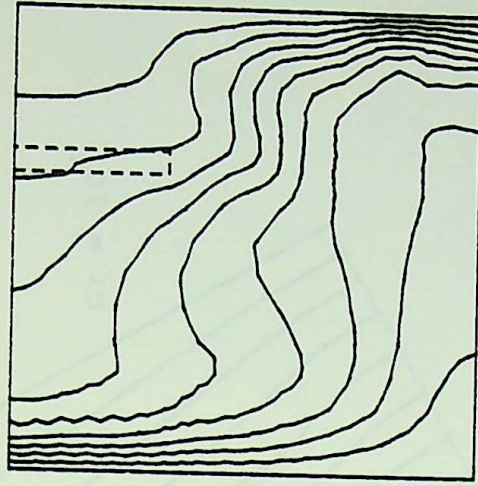
$$\theta(-1; 1; 0,2) \text{ Nu} = 4,133$$

$$L_p = 1/2, H_p = 1/3$$



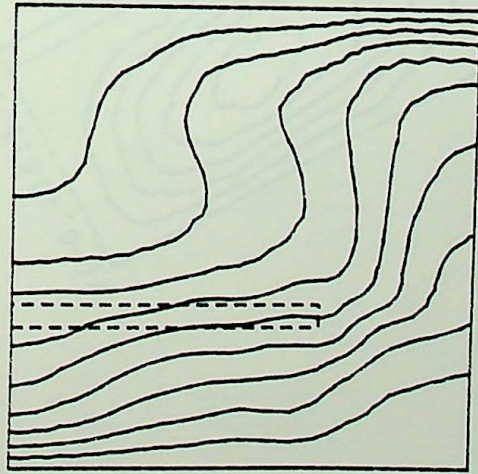
$$\theta(-1; 1; 0,2) \text{ Nu} = 4,373$$

$$L_p = 2/3, H_p = 1/3$$



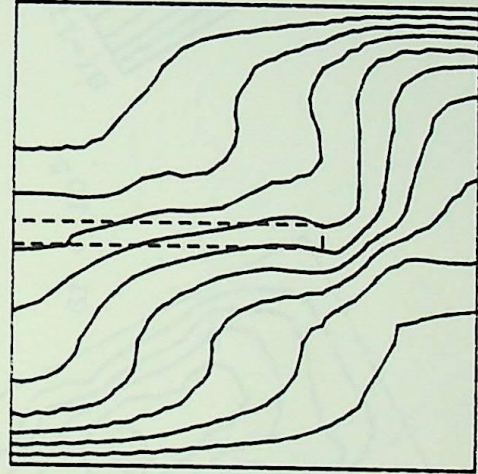
$$\theta(-1; 1; 0,2) \text{ Nu} = 4,151$$

$$L_p = 1/3, H_p = 2/3$$



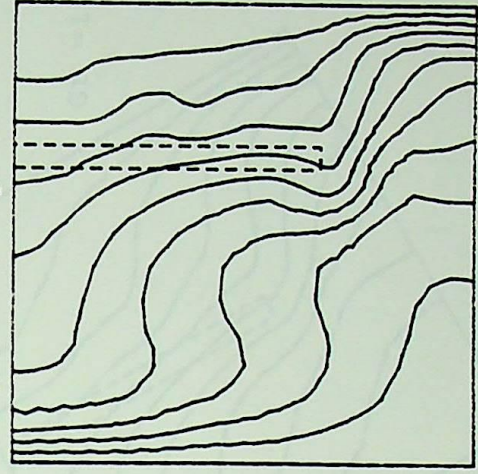
$$\theta(-1; 1; 0,2) \text{ Nu} = 2,367$$

$$L_p = 1/2, H_p = 2/3$$



$$\theta(-1; 1; 0,2) \text{ Nu} = 2,572$$

$$L_p = 2/3, H_p = 2/3$$



$$\theta(-1; 1; 0,2) \text{ Nu} = 2,541$$

Figura 4.16 - Distribuição da temperatura adimensional para cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$; $\alpha = 0^\circ$ e $Gr = 10^5$.

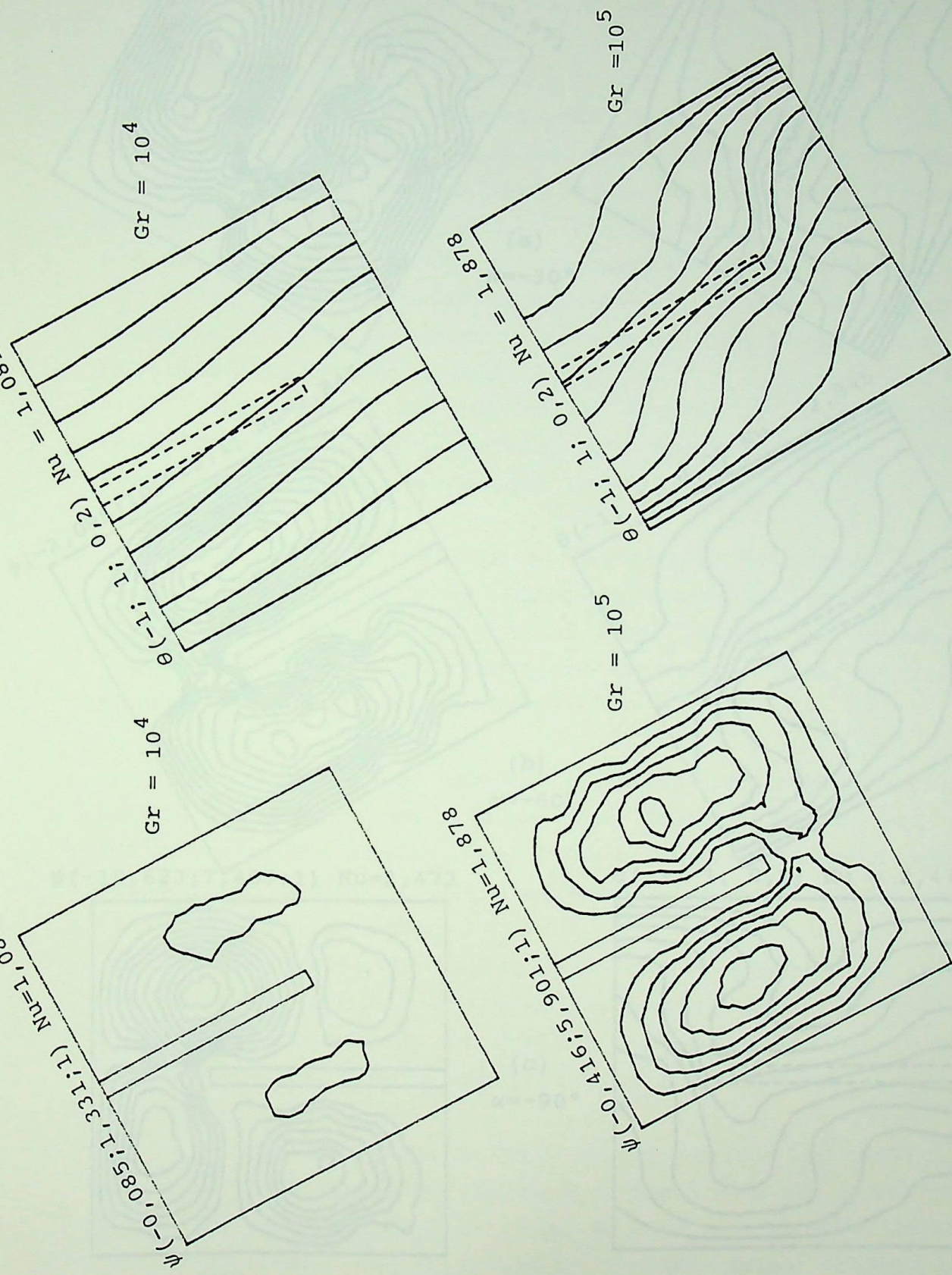
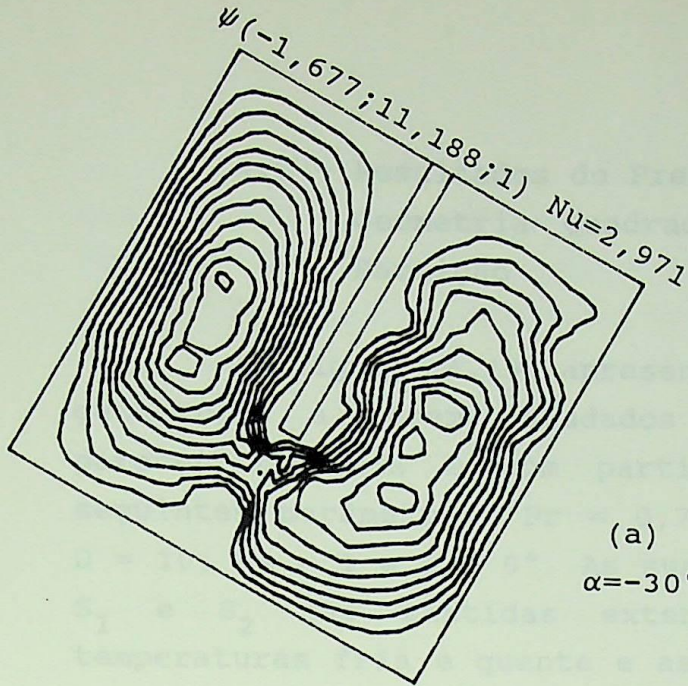
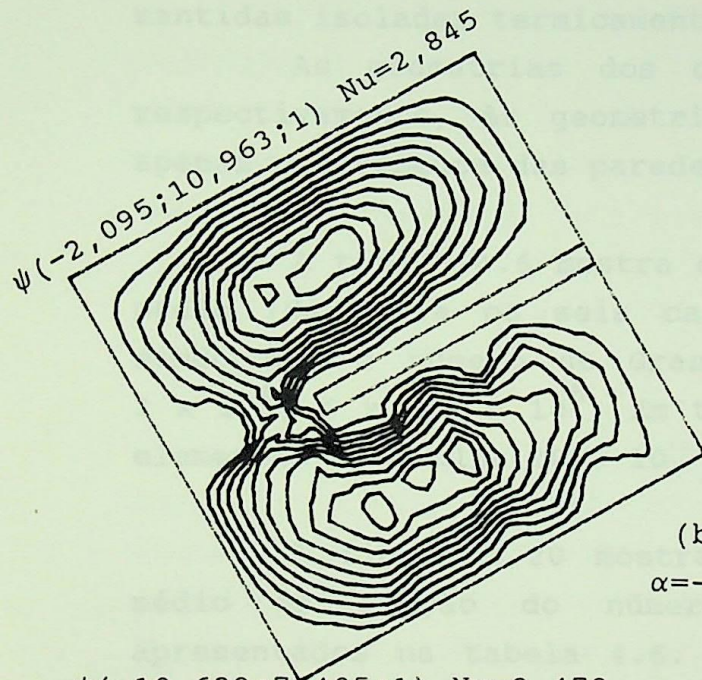
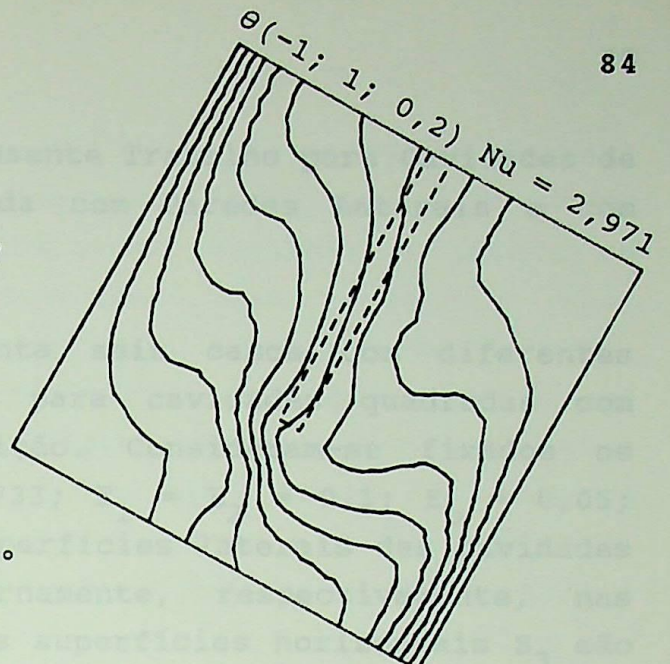


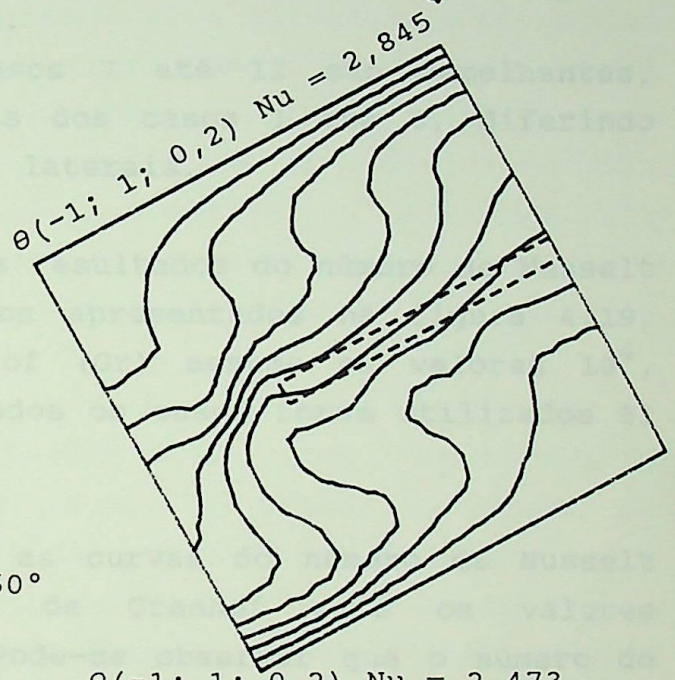
Figura 4.17 - Distribuição da função corrente e da temperatura adimensional para cavidade inclinada com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0$; $E_p = 0,05$; $L_p = 1/2$; $H_p = 2/3$; $D = 10$; $RA = 1$; $\alpha = 30^\circ$; $Gr = 10^4$ e 10^5 .



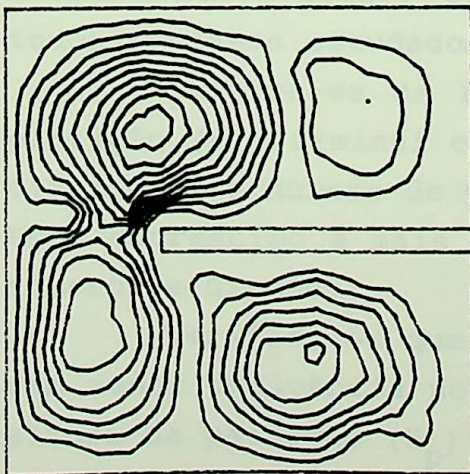
(a)
 $\alpha=-30^\circ$



(b)
 $\alpha=-60^\circ$



$\psi(-10,623;7,405;1)$ $Nu=2,473$



(c)
 $\alpha=-90^\circ$

$\theta(-1; 1; 0,2)$ $Nu = 2,473$

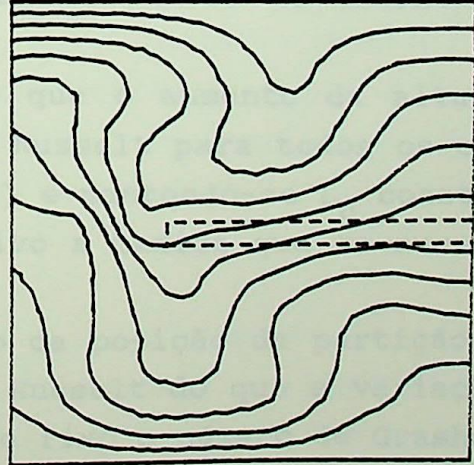


Figura 4.18 - Distribuição da função corrente e da temperatura adimensional para cavidade inclinada com partição para $\alpha = -30^\circ, -60^\circ, -90^\circ$ e $Gr = 10^5$.

4.5 - Resultados do Presente Trabalho para Cavidades de Geometria Quadrada com Paredes Laterais e com Partição

A figura 4.19 apresenta seis casos com diferentes geometrias a serem estudados para cavidades quadradas com paredes laterais e com partição. Consideram-se fixados os seguintes parâmetros: $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$. As superfícies laterais das cavidades S_1 e S_2 são mantidas externamente, respectivamente, nas temperaturas fria e quente e as superfícies horizontais S_3 são mantidas isoladas termicamente.

As geometrias dos casos 7 até 12 são semelhantes, respectivamente, às geometrias dos casos 1 até 6, diferindo apenas na presença das paredes laterais.

A tabela 4.6 mostra os resultados do número de Nusselt médio (Nu) para os seis casos apresentados na figura 4.19, sendo que o número de Grashof (Gr) assume os valores 10^4 , 3×10^4 , 6×10^4 e 10^5 . Em todos os casos foram utilizados 81 elementos com malha 10×10 .

A figura 4.20 mostra as curvas do número de Nusselt médio em função do número de Grashof para os valores apresentados na tabela 4.6. Pode-se observar que o número de Nusselt médio cresce com o aumento do número de Grashof para todos os casos estudados.

Observa-se da figura 4.20 que o aumento da altura da partição (H_p) diminui o número de Nusselt para todos os casos, fixando-se o número de Grashof (Gr) e mantendo-se L_p constante. Este decréscimo é mais significativo a medida que se aumenta o número de Grashof.

Verifica-se que a variação da posição da partição (L_p) tem menor influência no número de Nusselt do que a variação da altura da partição (H_p) mantendo-se fixo o número de Grashof.

Nota-se que as verificações acima descrevem um comportamento do número de Nusselt semelhante ao comportamento descrito anteriormente para as cavidades quadradas sem paredes laterais e com partição.

Analisando-se as figuras 4.11 e 4.20, pode-se observar, nos casos que apresentam semelhança geométrica, que a colocação das paredes laterais tem o efeito de diminuir o número de Nusselt, fixado o número de Grashof. Este efeito é mais significativo a medida que se aumenta o número de Grashof. Portanto, a colocação de paredes laterais tem pouco efeito no número de Nusselt quando o regime for predominantemente condutivo, isto é, quando o número de Grashof for pequeno ($Gr \approx 10^4$). Este efeito cresce a medida que o regime se torna predominantemente convectivo, isto é, a medida que se aumenta o número de Grashof.

Foi observado das figuras 4.11 e 4.20 que a altura da partição H_p tem maior influência no número de Nusselt que a posição da partição L_p . Esta influência da altura da partição é mais significativa para os casos onde as cavidades têm geometria quadrada sem paredes laterais e com partição mostrados na figura 4.11 do que para os casos onde as cavidades têm geometria quadrada com paredes laterais e com partição mostrados na figura 4.20.

Pode ser notado, da figura 4.20, que a colocação da partição diminui o número de Nusselt, fixado o número de Grashof. Este efeito pode ser medido através da diferença entre os números de Nusselt apresentados pelas curvas com $H_p = 0$ e $H_p \neq 0$. O decréscimo do número de Nusselt devido à colocação da partição é mais significativo a medida que se aumenta o número de Grashof. Em termos proporcionais, a partição com $H_p = 2/3$ causa maior diminuição no número de Nusselt do que a partição com $H_p = 1/3$ em relação ao caso de geometria com paredes laterais e sem partição ($H_p = 0$) a medida que aumenta o número de Grashof.

Para número de Grashof igual a 10^4 , a caso 8 e o caso 11 apresentam os menores números de Nusselt, respectivamente, para as curvas onde H_p é igual a $1/3$ e $2/3$. Os casos 10 e 12 apresentam números de Nusselt praticamente iguais.

Para número de Grashof igual a 10^5 , o caso 8 apresenta o maior número de Nusselt para os casos onde $H_p = 1/3$, cujo valor está bem próximo ao valor de Nu para o caso 9. A

diferença do número de Nusselt entre esses dois últimos casos é maior para número de Grashof 10^4 . Os casos 10 e 12 apresentam uma grande diferença no número de Nusselt, ao passo que o caso 11 continua apresentando o menor valor para Nu.

Pode-se verificar das últimas observações que o caso 8 passa de um valor mínimo quando $Gr = 10^4$, para um valor máximo quando $Gr = 10^5$.

Existem situações, para as cavidades com paredes laterais e com partição, onde dois casos com a mesma altura da partição que apresentam uma mesma taxa de transferência de calor. Estas situações estão representadas pelos pontos de intersecção das curvas mostradas na figura 4.20.

As figuras 4.21 até 4.24 apresentam as distribuições da função corrente (ψ) e da temperatura adimensional (θ) para os casos mostrados na figura 4.19.

A figura 4.21 mostra a distribuição da função corrente (ψ) para números de Grashof iguais a 10^4 e 10^5 . Pode-se observar para número de Grashof igual a 10^4 que a medida que se diminui a altura da partição (H_p), aumenta-se a velocidade de escoamento do fluido. Isto caracteriza a passagem de um regime predominantemente condutivo para um regime convectivo. No caso em que H_p é igual a $2/3$ e Gr igual a 10^4 não apareceram as linhas de função corrente devido a um fraco escoamento do fluido dentro da cavidade.

Para número de Grashof igual a 10^5 , o escoamento do fluido tem velocidades maiores a medida que se diminui a altura da partição.

Analisando-se os casos onde a partição tem a mesma altura, nota-se que a velocidade do fluido aumenta intensamente a medida que se aumenta o número de Grashof.

Observa-se que no caso em que H_p é igual a $1/3$ e Gr igual a 10^4 que o escoamento do fluido é fraco nas regiões compreendidas entre a partição e as superfícies laterais da cavidade, ao passo que no caso em que H_p é igual a $1/3$ e Gr igual a 10^5 , o fluido tem maiores velocidades e consegue

penetrar nas regiões onde existia confinamento de fluido.

A figura 4.22 mostra a distribuição para a temperatura adimensional (θ) para números de Grashof iguais a 10^4 e 10^5 .

Nota-se no caso em que H_p é igual a $2/3$ e Gr igual a 10^4 , que ocorre uma estratificação térmica em quase toda a cavidade, caracterizando uma transferência de calor predominantemente condutiva. A medida que se diminui a altura da partição (H_p) nos casos onde o número de Grashof é igual a 10^4 , as isothermas se tornam mais curvilíneas e se aproximam umas das outras junto às superfícies laterais aumentando o número de Nusselt e conseqüentemente a transferência de calor por convecção natural. Isto ocorre também para os casos com número de Grashof igual a 10^5 , só que de uma maneira mais intensa.

Analisando-se os casos que têm mesma geometria pode-se notar que a medida que se aumenta o número de Grashof, o gradiente de temperatura aumenta junto às superfícies laterais, caracterizando o aumento do número de Nusselt.

Verifica-se que a colocação de paredes laterais na cavidade diminui o número de Nusselt. Isto se deve ao fato de que as paredes laterais oferecem uma resistência térmica diminuindo o fluxo de calor através da cavidade.

Pode-se observar nos casos com H_p igual a $1/3$ e $2/3$, que existe uma maior troca de calor no núcleo da cavidade na direção Y . Este comportamento é semelhante aos casos estudados no item anterior com uma menor intensidade devido a colocação das paredes laterais.

A figura 4.23 mostra as distribuições da função corrente (ψ) e da temperatura adimensional (θ) para o caso 11 da figura 4.19 sendo o ângulo de inclinação (α) igual a 30° e o número de Grashof igual a 10^4 e 10^5 .

Observa-se que o comportamento dos casos com ângulo de inclinação igual a 30° na figura 4.23 é semelhante para os casos inclinados de 30° apresentados na figura 4.17, porém com uma menor intensidade devido a resistência térmica oferecida pelas paredes laterais. Portanto, observa-se na figura 4.23, uma diminuição no valor máximo da função corrente e no valor do

número de Nusselt para os casos onde o número de Grashof é igual a 10^4 e 10^5 em relação aos casos de mesma geometria e mesmo número de Grashof, com ângulo de inclinação igual a 0° apresentados na figura 4.21. Esta diminuição se apresenta mais acentuada a medida que se aumenta o número de Grashof ($Gr=10^5$).

A figura 4.24 mostra as distribuições da função corrente (ψ) e da temperatura adimensional (θ) para o caso 11 da figura 4.19 com o ângulo de inclinação (α) igual a -30° , -60° e -90° e o número de Grashof (Gr) igual a 10^5 .

Pode-se notar da figura 4.24 que os casos (a) e (b) têm, respectivamente, o mesmo comportamento dos casos (a) e (b) da figura 4.18, ou seja, eles apresentam em geral uma maior velocidade do fluido e um maior número de Nusselt do que no caso que possui a mesma geometria, mesmo número de Grashof e ângulo de inclinação igual a zero na figura 4.21.

Observa-se no caso (c) que o fluido tem velocidades baixas na cavidade e que entre a partição e as superfícies de temperatura especificada existe uma estratificação térmica do fluido. O caso (c) apresenta um menor valor para o número de Nusselt em relação ao caso de mesma geometria, mesmo número de Grashof e ângulo de inclinação igual a zero na figura 4.21.

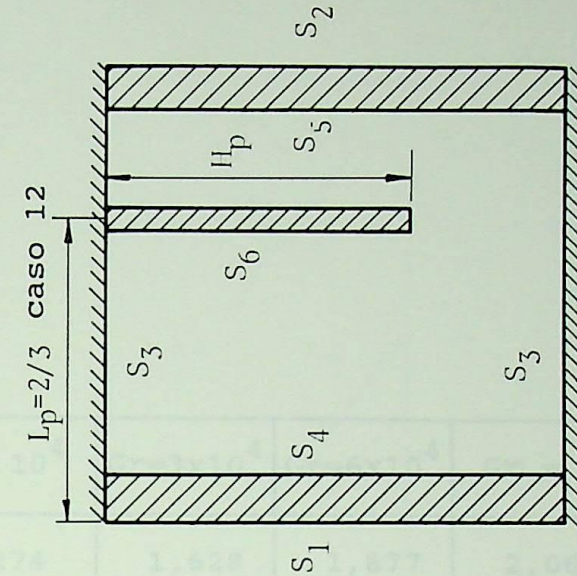
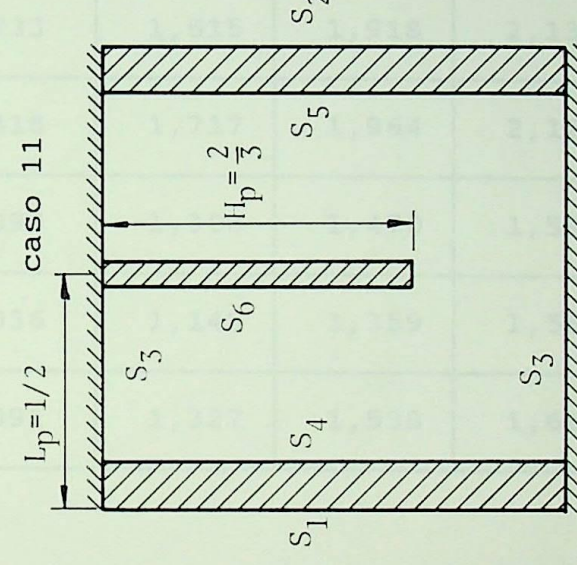
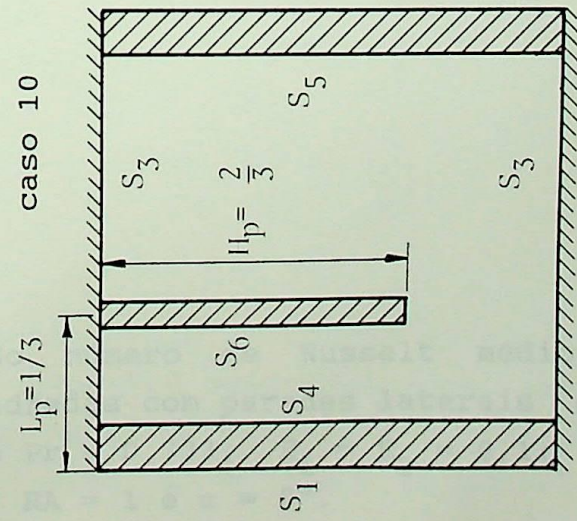
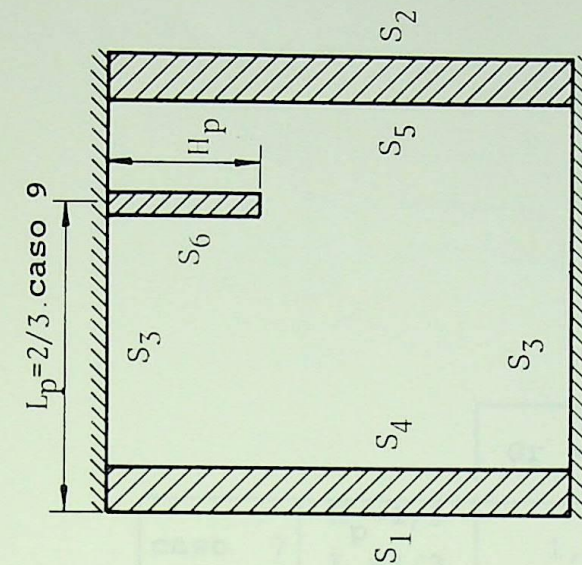
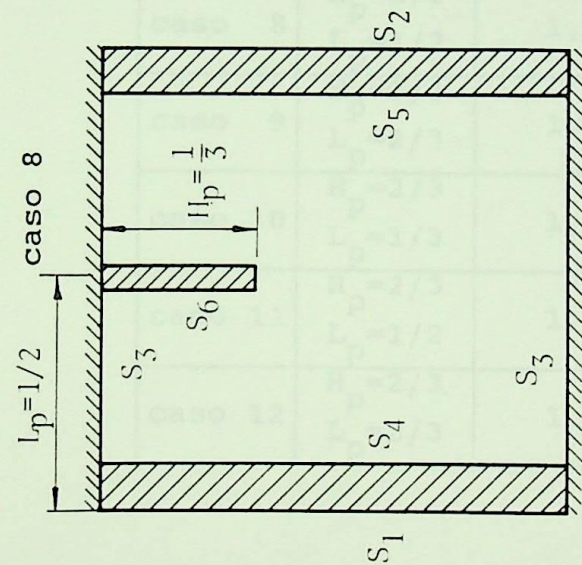
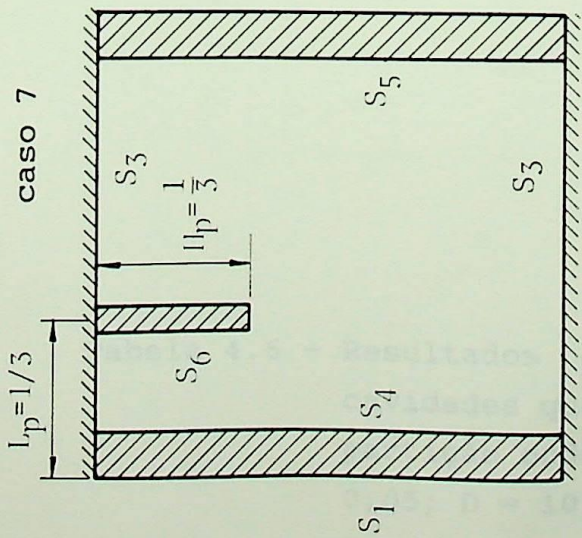


Figura 4.19 - Cavidades quadradas com paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$. 90

		$Gr = 10^4$	$Gr=3 \times 10^4$	$Gr=6 \times 10^4$	$Gr = 10^5$
caso 7	$H_p=1/3$ $L_p=1/3$	1,274	1,628	1,877	2,068
caso 8	$H_p=1/3$ $L_p=1/2$	1,233	1,615	1,918	2,137
caso 9	$H_p=1/3$ $L_p=2/3$	1,318	1,717	1,964	2,128
caso 10	$H_p=2/3$ $L_p=1/3$	1,098	1,308	1,470	1,598
caso 11	$H_p=2/3$ $L_p=1/2$	1,036	1,148	1,359	1,566
caso 12	$H_p=2/3$ $L_p=2/3$	1,091	1,327	1,538	1,697

Tabela 4.6 - Resultados do número de Nusselt médio para cavidades quadradas com paredes laterais e com partição onde $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$; $E_p = 0,05$; $D = 10$; $RA = 1$ e $\alpha = 0^\circ$.

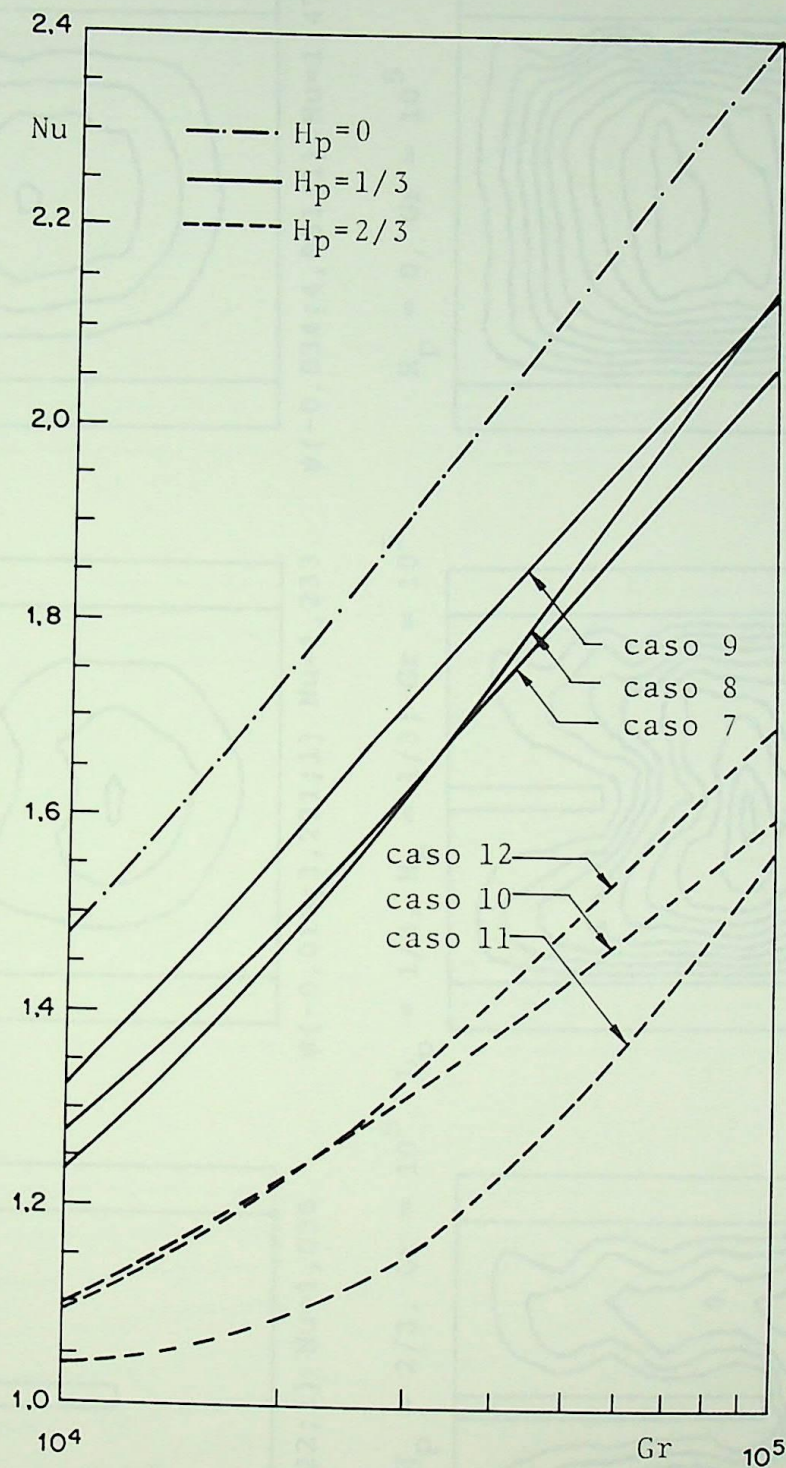


Figura 4.20 - Número de Nusselt médio em função do número de Grashof para cavidades quadradas com paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$; $E_p = 0,05$; $RA = 1$; $D = 10$ e $\alpha = 0^\circ$.

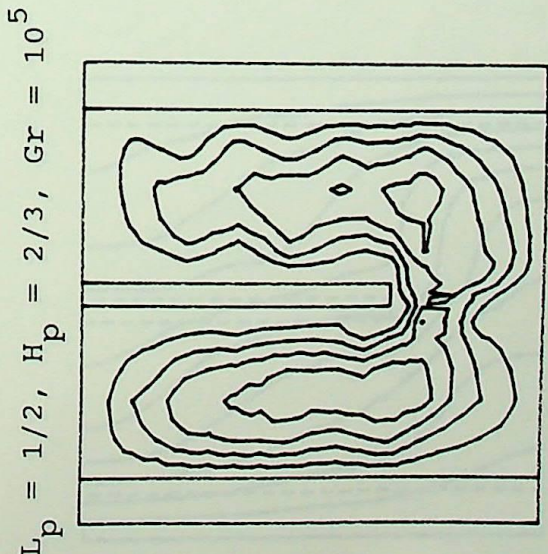
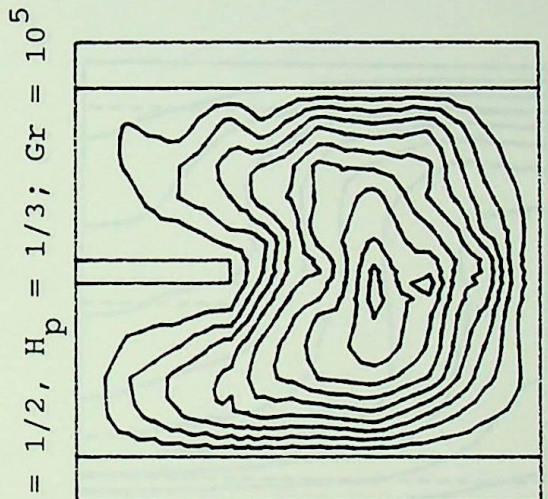
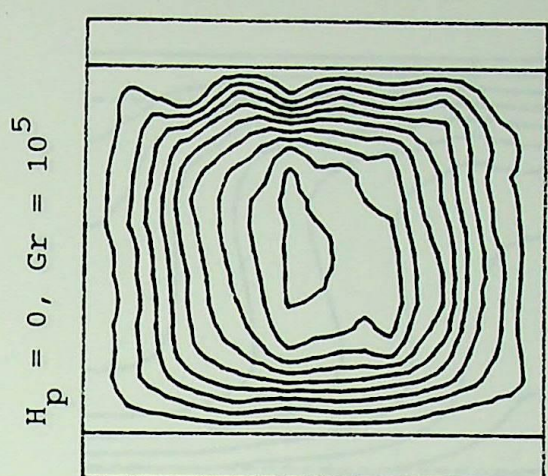
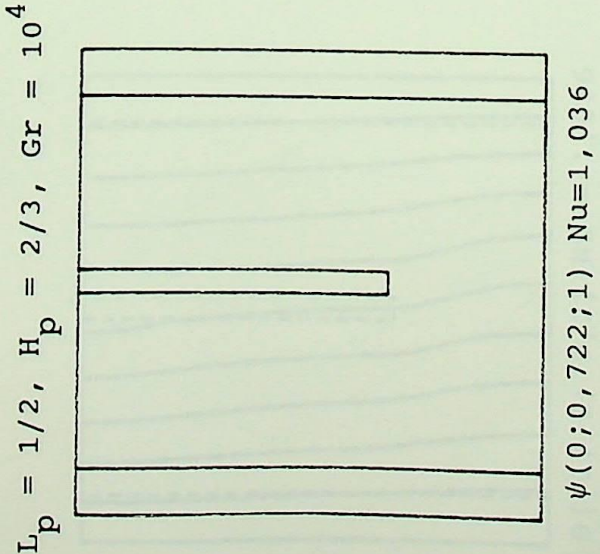
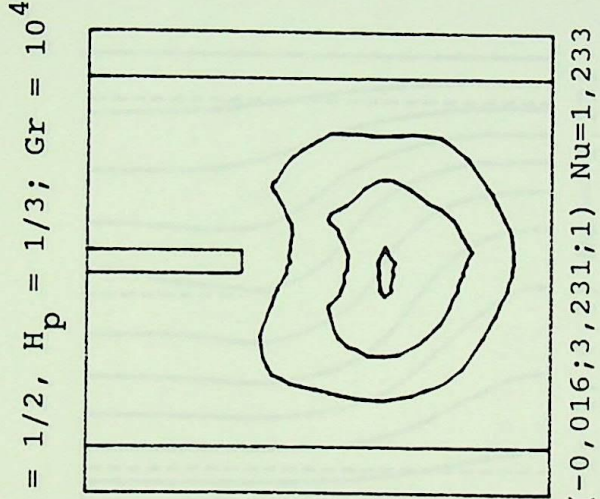
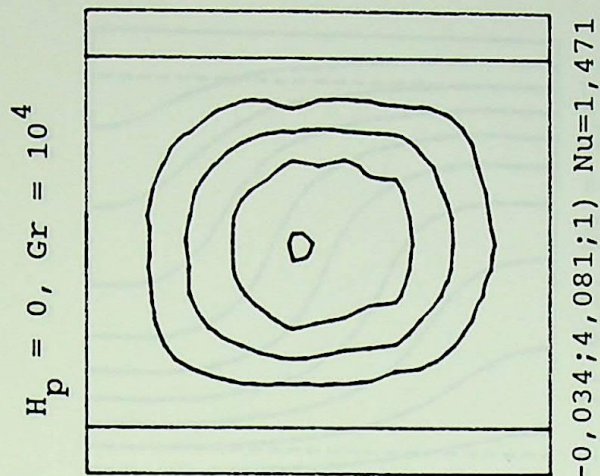


Figura 4.21 - Distribuição da função corrente para cavidades quadradas com paredes laterais e com

partição para $Pr = 0,733; E_1 = E_2 = 0,1; E_p = 0,05; D = 10; RA = 1; \alpha = 0^\circ; L_p = 1/2; H_p = 2/3, 1/3, 0; Gr = 10^4$ e 10^5 .

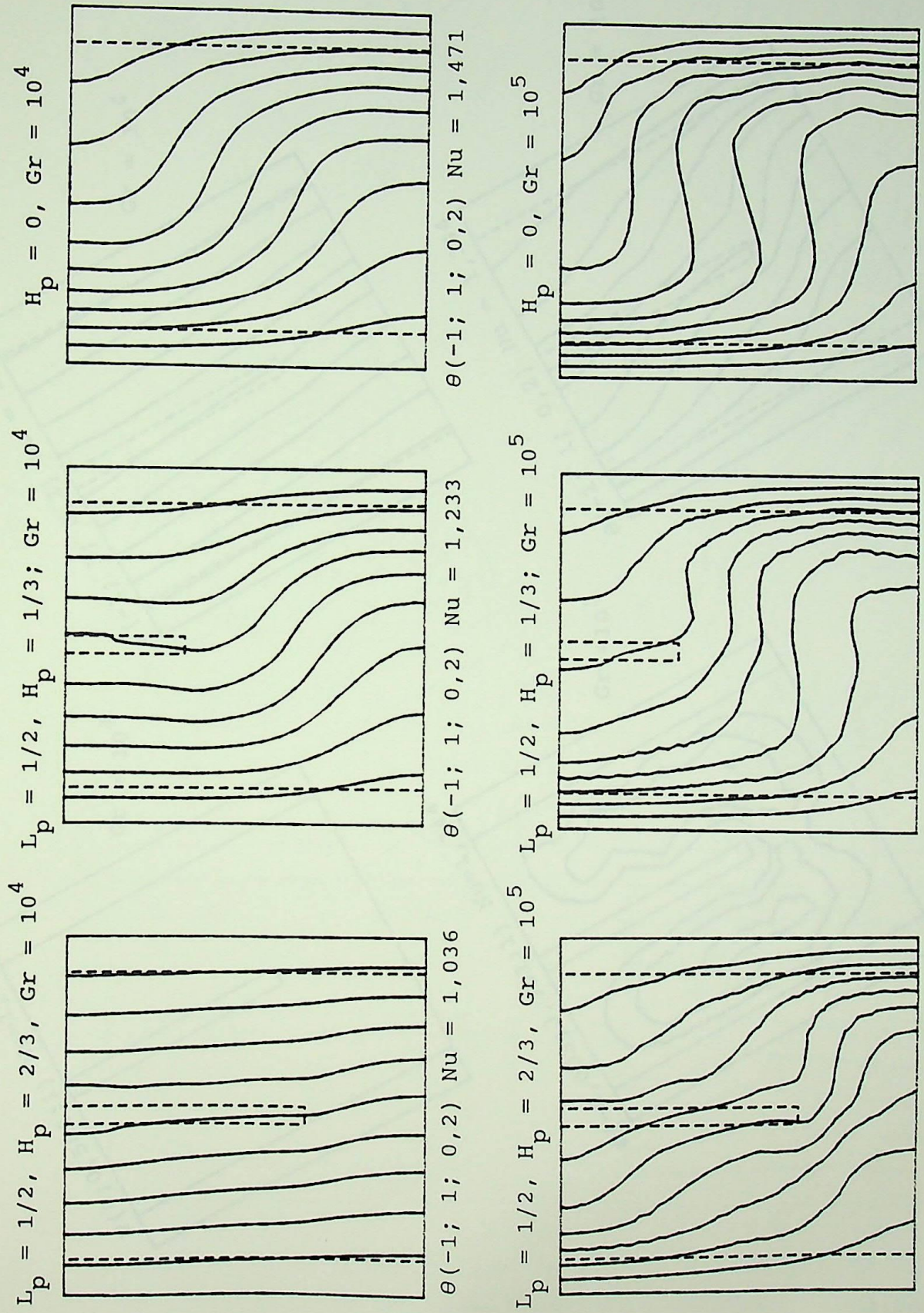


Figura 4.22 - Distribuição da temperatura adimensional para cavidades quadradas com paredes laterais e com partição para $Pr = 0,733; E_1 = E_2 = 0,1; E_p = 0,05; D = 10; RA = 1; \alpha = 0^\circ;$
 $L_p = 1/2; H_p = 2/3, 1/3, 0; Gr = 10^4$ e 10^5 .

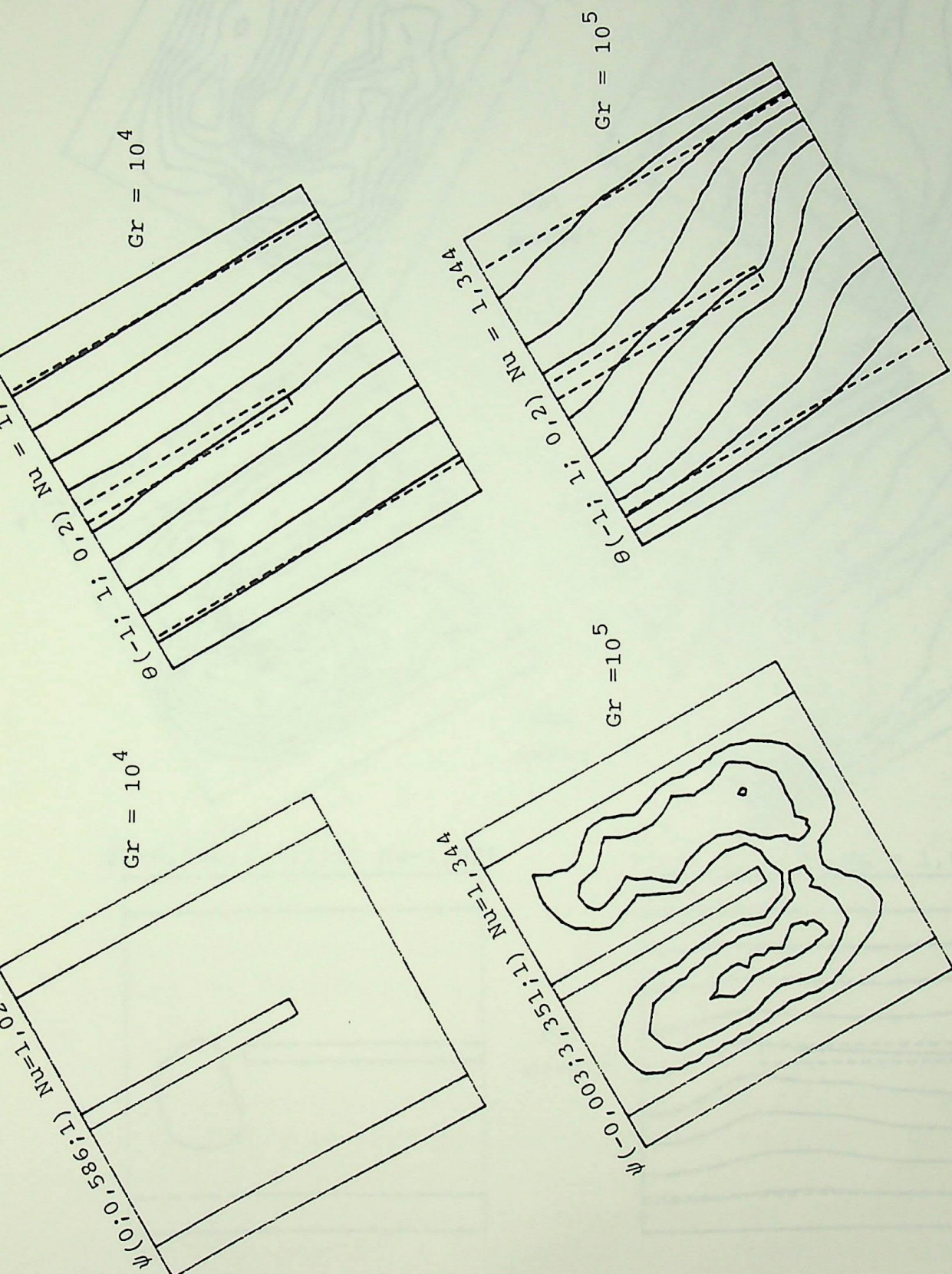
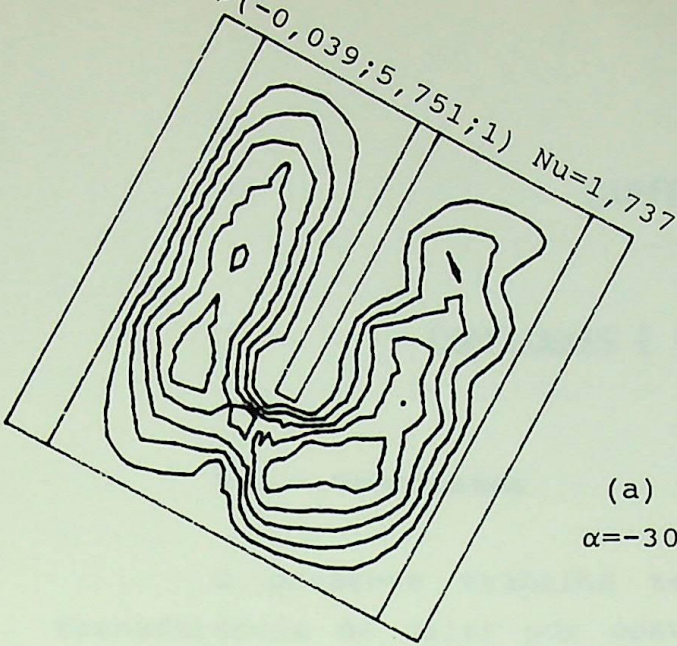
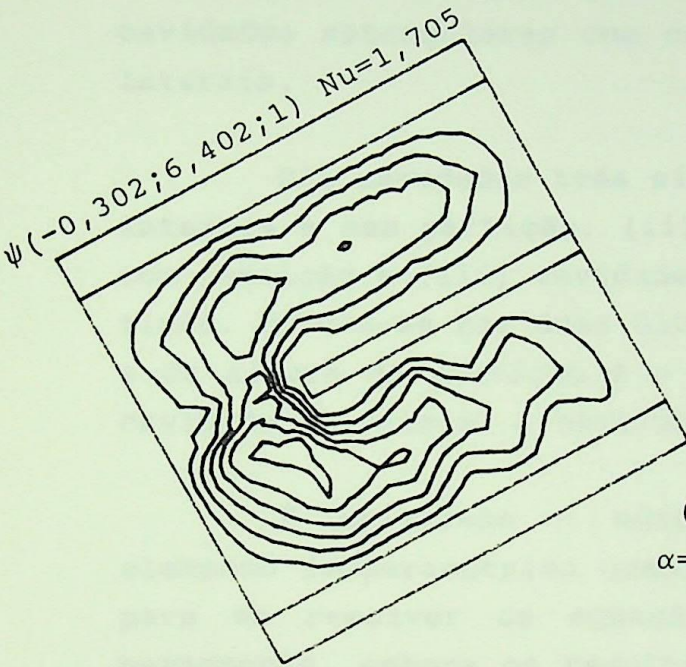
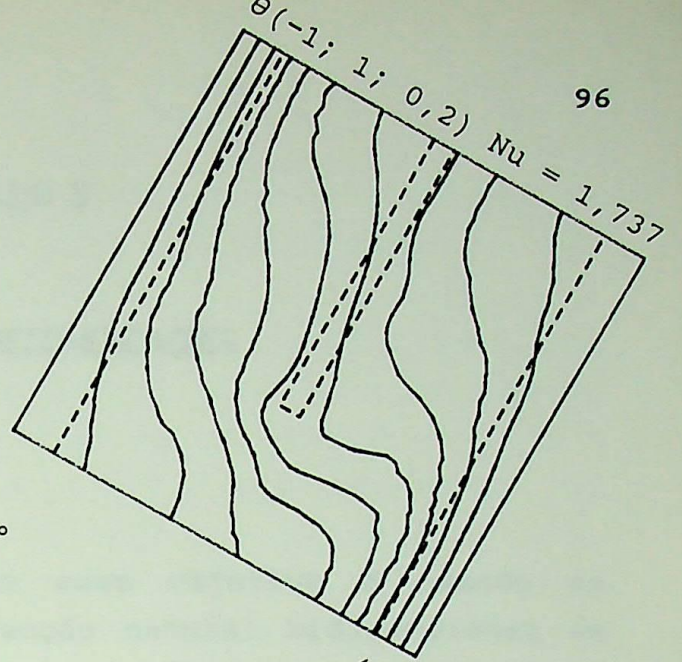


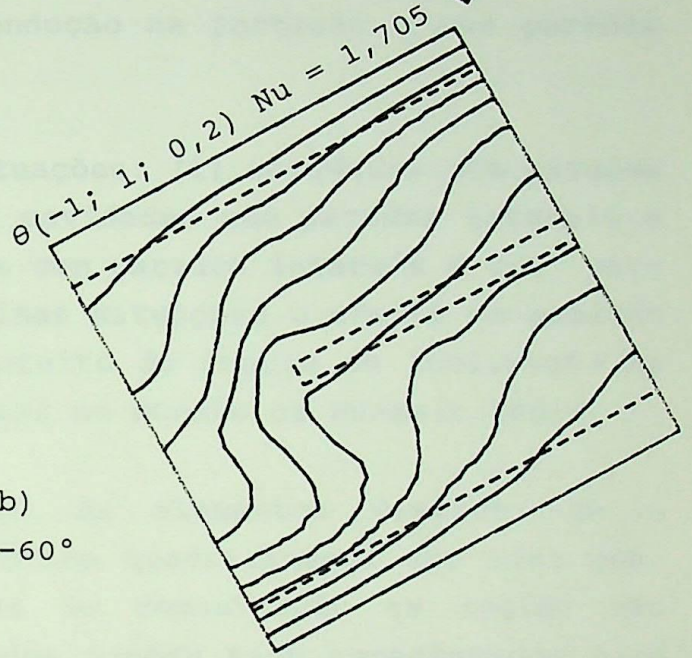
Figura 4.23 - Distribuição da função corrente e da temperatura adimensional para cavidade inclinada com paredes laterais e partição para $Pr = 0,733$; $E_1 = E_2 = 0,1$; $E_p = 0,05$; $L_p = 1/2$; $H_p = 2/3$; $RA = 1$; $\alpha = 30^\circ$; $Gr = 10^4$ e 10^5 .



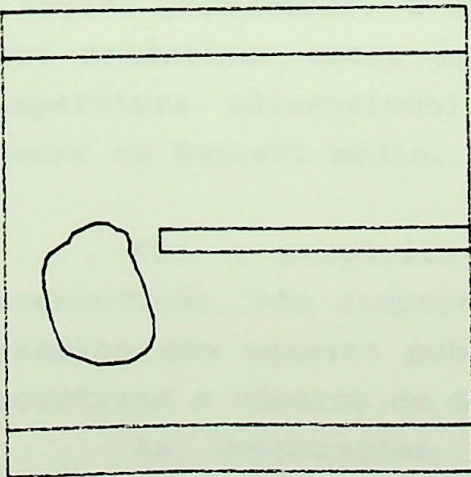
(a)
 $\alpha = -30^\circ$



(b)
 $\alpha = -60^\circ$



$\psi(-0,636;1,773;1)$ $Nu=1,028$



(c)
 $\alpha = -90^\circ$

$\theta(-1; 1; 0,2)$ $Nu = 1,028$

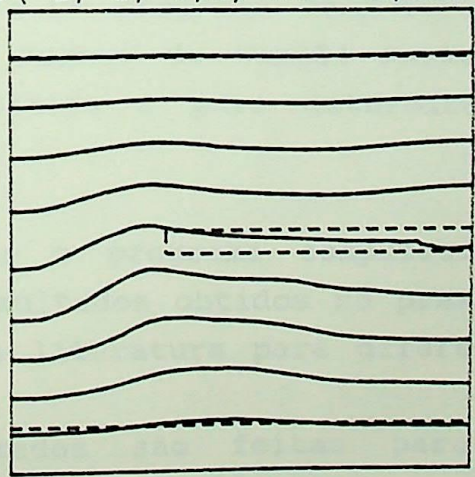


Figura 4.24 - Distribuição da função corrente e da temperatura adimensional para cavidade inclinada com partição e paredes laterais para $\alpha = -30^\circ$; -60° ; -90° e $Gr = 10^5$.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 - Conclusões

O presente trabalho tem como objetivo o estudo da transferência de calor por convecção natural bidimensional em cavidades retangulares com condução na partição e nas paredes laterais.

São estudadas três situações: (i) cavidades com paredes laterais e sem partição, (ii) cavidades sem paredes laterais e com partição e (iii) cavidades com paredes laterais e com partição. Estuda-se nas duas últimas situações o efeito da posição e da altura da partição e o efeito do ângulo de inclinação da cavidade em relação a horizontal no número de Nusselt médio.

É utilizado o método de elementos finitos com o elemento isoparamétrico quadrático quadrilateral com oito nós, para se resolver as equações de conservação em regime não permanente, embora os resultados tenham sido apresentados para o regime permanente. É desenvolvido um programa computacional para solucionar estas equações em termos de função corrente, temperatura adimensional e vorticidade e para determinar o número de Nusselt médio.

Com o propósito de testar o programa computacional desenvolvido, são comparados os resultados obtidos no presente trabalho com aqueles publicados na literatura para diferentes geometrias e números de Grashof.

As comparações de resultados são feitas para as geometrias quadrada e retangular sem paredes laterais e sem partição, conforme as tabelas 4.1, 4.2 e 4.3. Estas comparações mostram desvios entre 0,33% a 12,33%, indicando no geral uma boa concordância entre os resultados.

Os resultados do presente trabalho para cavidades de geometria quadrada e retangular com paredes laterais e sem partição estão apresentados no item 4.3.

Primeiramente, estuda-se a variação do número de Nusselt em relação ao número de elementos para diversos números de Grashof (figura 4.5) e os desvios em porcentagem versus o número de elementos (figuras 4.6 e 4.7) para geometrias com paredes laterais e com razões de aspecto iguais a 1 e 2. Verifica-se uma tendência a convergência dos resultados a medida que se aumenta o número de elementos. Quanto maior for o número de elementos utilizado nos cálculos, maior é a tendência a convergência dos resultados; entretanto o custo computacional cresce bastante com o aumento do número de elementos (figura 4.8). Neste trabalho são utilizados 81 elementos (malha 10 x 10) para os casos com razão de aspecto ($RA = H/L$) igual a 1 e 112 elementos (malha 9 x 15) para os casos com razão de aspecto igual a 2, procurando-se evitar altos desvios e altos custos computacionais.

Observa-se o aumento do número de Nusselt com o aumento do número de Grashof para diversas razões de difusividades ($D = \alpha_s/\alpha_f$) (figura 4.9). Nota-se que este aumento possui um limite superior onde o número de Nusselt não varia mais para valores de D maiores que 10^3 .

Os resultados do presente trabalho para cavidades de geometria quadrada sem paredes laterais e com partição estão apresentados no item 4.4.

Mantendo-se todos os parâmetros fixados, verifica-se que o número de Nusselt diminui quando se coloca uma dada partição na cavidade.

Estuda-se o efeito da posição e da altura da partição no número de Nusselt médio para números de Grashof entre 10^4 e 10^5 (figura 4.11), para os casos da figura 4.10. Verifica-se que a altura da partição tem maior influência na transferência de calor dentro da cavidade do que a posição da partição mantendo-se fixado o número de Grashof.

Mostra-se também as distribuições da função corrente e da temperatura adimensional nos casos da figura 4.10 para números de Grashof iguais a 10^4 e 10^5 , conforme

figuras 4.13 a 4.18. Observa-se que para número de Grashof igual a 10^4 existem regiões adjacentes à partição com estratificação térmica onde o escoamento do fluido tem baixas velocidades (figuras 4.13 e 4.14). O mesmo não acontece para número de Grashof igual a 10^5 onde o fluido tem maiores velocidades, penetrando nas regiões onde existia confinamento do fluido para Gr igual a 10^4 (figura 4.15 e 4.16).

Apresenta-se as distribuições da função corrente e da temperatura adimensional para a cavidade com partição de altura igual a $2/3$ e posição igual a $1/2$, inclinada com relação a horizontal para números de Grashof iguais a 10^4 e 10^5 (figura 4.17 e 4.18). Observa-se que o número de Nusselt diminui pouco com o aumento do ângulo de inclinação de 30° em relação ao caso de mesma geometria, mesmo número de Grashof e ângulo de inclinação igual a 0° , aparecendo regiões com temperatura estratificada e com baixa velocidade do fluido para o caso com número de Grashof igual a 10^4 (figura 4.17). Verifica-se na figura 4.18 um aumento do número de Nusselt nos casos em que o ângulo de inclinação é igual a -30° e -60° em relação ao caso de mesma geometria da figura 4.15. O caso que possui ângulo de inclinação igual a -90° apresenta um valor para a função corrente máxima igual a $-10,623$ e uma diminuição no número de Nusselt em relação ao caso de mesma geometria da figura 4.15.

Os resultados do presente trabalho para cavidades de geometria quadrada com paredes laterais e com partição estão apresentados no item 4.5.

É estudado o efeito da posição e da altura da partição no número de Nusselt médio para números de Grashof entre 10^4 e 10^5 (figura 4.20), para os casos da figura 4.19. O comportamento é o mesmo do item anterior, ou seja, a variação da altura da partição influencia mais no número de Nusselt do que a variação da posição da partição mantendo-se fixado o número de Grashof.

Nota-se que a colocação de paredes laterais tem o efeito de diminuir o número de Nusselt com relação aos casos onde se consideram os mesmos parâmetros geométricos e o mesmo número de Grashof.

As figuras 4.21 e 4.22 mostram, respectivamente, as distribuições da função corrente e da temperatura adimensional

para os casos que têm partição com diferentes alturas situada no centro da cavidade. Estas distribuições são apresentadas para números de Grashof iguais a 10^4 e 10^5 .

Verifica-se um comportamento semelhante aos casos sem paredes laterais, apresentando regiões com baixas velocidades do fluido e com temperatura estratificada junto à partição para os casos em que o número de Grashof é igual a 10^4 .

As figuras 4.23 e 4.24 apresentam as distribuições da função corrente e da temperatura adimensional para números de Grashof iguais a 10^4 e 10^5 , referentes ao caso em que a partição está situada no centro da cavidade e com altura igual a $2/3$ e cujo ângulo de inclinação com relação a horizontal varia de 30° a -90° .

No geral, observa-se que existe um comportamento semelhante entre os casos estudados nos itens 4.4 e 4.5. A diferença básica está no valor do número de Nusselt, uma vez que a colocação das paredes laterais oferece uma resistência térmica ao fluxo de calor.

5.2 - Contribuições do Presente Trabalho

A principal contribuição do presente trabalho foi estudar a transferência de calor por convecção natural em cavidades analisando-se o efeito da colocação de paredes laterais e de uma partição com diferentes alturas e posições e o efeito do ângulo de inclinação da cavidade em relação a horizontal.

Uma contribuição significativa foi o estudo do escoamento no interior da cavidade de geometria complexa, visualizando as distribuições de temperatura adimensional e função corrente.

Uma outra contribuição não menos importante foi o uso do método de elementos finitos utilizando-se o elemento isoparamétrico quadrático quadrilateral com oito nós cuja aplicabilidade em superfícies complexas oferece resultados mais precisos devido ao uso de um elemento de alta ordem.

5.3 - Sugestões para Trabalhos Futuros

Com a realização deste trabalho, pode-se levantar algumas questões que sugerem temas para futuros trabalhos:

- a) Estudar a influência da razão de difusividades ($D = \alpha_s/\alpha_f$) para os casos estudados nos itens 4.4 e 4.5.
- b) Estudar experimentalmente a transferência de calor por convecção natural em cavidades dos itens 4.4 e 4.5.
- c) Estudar a transferência de calor em cavidades com paredes laterais com uma partição situada na superfície inferior.
- d) Estudar a transferência de calor em cavidades com paredes laterais com duas partições, uma superior e outra inferior.
- e) Estudar a influência do número de partições na transferência de calor em cavidades com paredes laterais.

APÊNDICE A1

AValiação DAS FUNÇÕES DE FORMA PARA O ELEMENTO QUADRÁTICO QUADRILATERAL

A1.1 - Introdução

Na referência [16], nas páginas 359 a 368, são avaliadas as funções de forma para elementos lineares, triangulares e retangulares. Em cada caso, um sistema de equações é solucionado para alguns coeficientes desconhecidos. Estes coeficientes são, então, substituídos em equações de interpolação, que por sua vez são rearranjadas para se obter as funções de forma. Este procedimento se torna mais difícil quando o número de coeficientes desconhecidos aumenta.

A1.2 - Procedimento alternativo para avaliação das funções de forma

Um procedimento alternativo para se obter as funções de forma é assumir que cada função de forma é um produto de duas funções:

$$N_i = F_i G_i; \quad (A1.1)$$

onde F_i é uma função que vale zero em nós especificados, e G_i é obtida de tal forma que N_i tenha a mesma potência das variáveis de coordenada na equação de interpolação.

O método é baseado nas seguintes propriedades:

1. Cada função de forma tem um valor igual a 1 em seu próprio nó e é igual a 0 nos outros nós.

2. As funções de forma para os elementos bidimensionais são nulas ao longo de cada lado, no qual o nó não pertence.

3. Cada função de forma é um polinômio com o mesmo grau da equação de interpolação.

As funções de forma são desenvolvidas neste trabalho usando-se um sistema de coordenadas locais (ξ, η) .

A equação de interpolação para o elemento quadrático quadrilateral com oito nós mostrado na figura A1.1 é:

$$\phi^e = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2; \quad (\text{A1.2})$$

onde ϕ^e é uma grandeza dentro do elemento (e), a_i são coeficientes e (ξ, η) são as coordenadas locais.

O procedimento é ilustrado avaliando-se a função de forma N_1 . Desde que o nó 1 não toca os lados 3-4-5 ou 5-6-7, então:

$$F_1(\xi, \eta) = (1-\xi)(1-\eta) = 1 - \xi - \eta + \xi\eta. \quad (\text{A1.3})$$

A função $G_1(\xi, \eta)$ deve conter 3 termos porque as condições para N_1 nos nós 1, 2 e 8 não têm sido satisfeitas. A equação para $G_1(\xi, \eta)$ é:

$$G_1(\xi, \eta) = C_1 + C_2\xi + C_3\eta; \quad (\text{A1.4})$$

a qual é linear em ξ e η , de tal maneira que o produto de $F_1(\xi, \eta)$ e $G_1(\xi, \eta)$ contém a potência correta de ξ e η . As três condições nodais são:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 \text{ quando } \xi = -1, \eta = -1; \\ N_1 &= 0 \text{ quando } \xi = 0, \eta = -1; \\ N_1 &= 0 \text{ quando } \xi = -1, \eta = 0. \end{aligned} \quad (\text{A1.5})$$

Substituindo (A1.5) em (A1.4) e resolvendo o sistema de equações resultante, os coeficientes são:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 1/4; \quad (\text{A1.6})$$

$$G_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi + \eta). \quad (\text{A1.7})$$

Substituindo (A1.3) e (A1.7) em (A1.1), resulta:

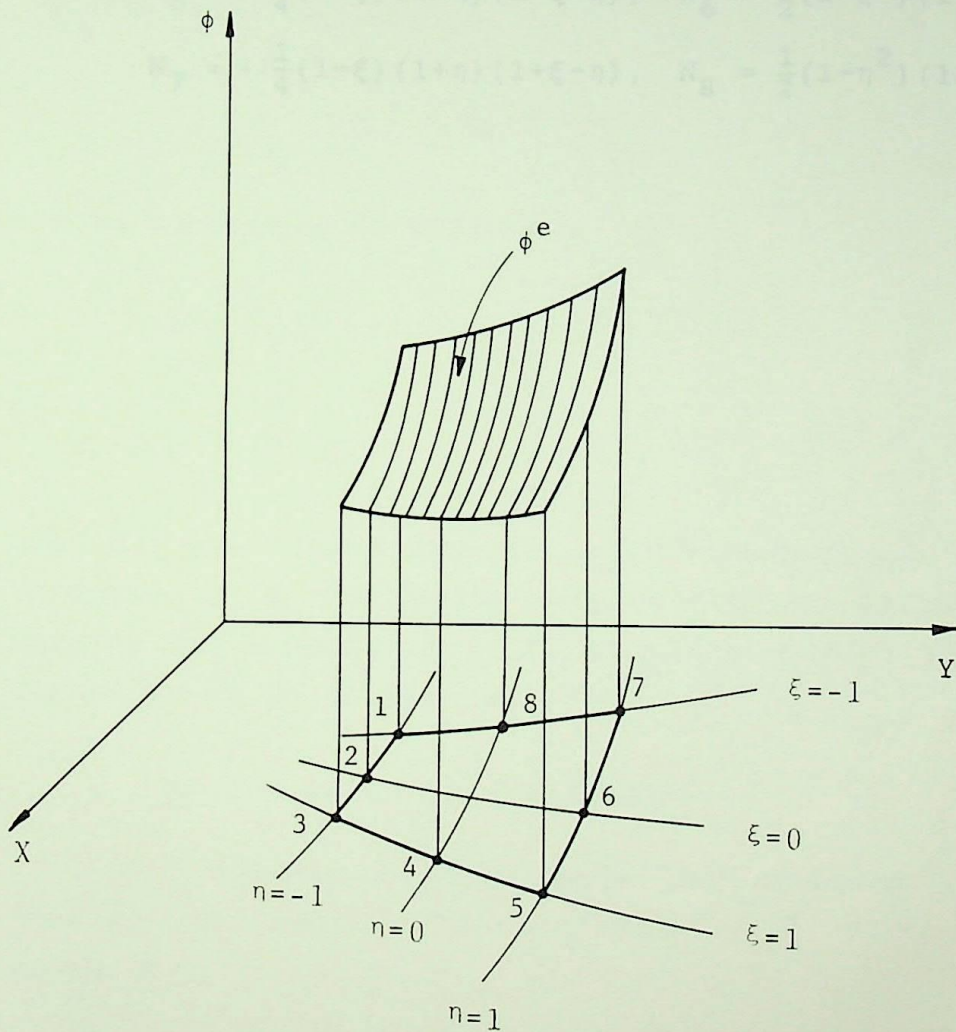


Figura A1.1 - Elemento quadrático quadrilateral com oito nós e a função de interpolação ϕ^e .

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta). \quad (\text{A1.8})$$

Fazendo o mesmo procedimento para os nós restantes, pode-se obter que as funções de forma para o elemento quadrático quadrilateral com oito nós, como sendo:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta), & N_2 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta); \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta), & N_4 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi); \\ N_5 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta), & N_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta); \\ N_7 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta), & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi). \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

APÊNDICE A2

MÉTODO VARIACIONAL PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL INDEPENDENTE DO TEMPO

A2.1 - Introdução

A equação diferencial bidimensional independente do tempo a ser analisada é:

$$\delta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = 0; \quad (\text{A2.1a})$$

com as condições de contorno:

$$\phi = \phi_0(X, Y); \quad (\text{A2.1b})$$

$$q = \frac{\partial \phi}{\partial n}; \quad (\text{A2.1c})$$

onde ϕ é uma função escalar, $\phi_0(X, Y)$ uma função especificada no contorno, Q_ϕ é uma função especificada no domínio, q é o fluxo através da superfície S do contorno e δ é um parâmetro que assume um valor constante.

A2.2 - Método Variacional

O funcional equivalente das equações (A2.1) é obtido através do cálculo variacional e é dado pela seguinte expressão:

$$I = \int_V \frac{1}{2} \left[\delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 + \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)^2 - 2Q_\phi \cdot \phi \right] dV + \int_S q \phi dS. \quad (\text{A2.2})$$

Cabe, agora, achar uma função ϕ que minimiza o funcional dado pela equação (A2.2). Esta função ϕ é a solução das equações (A2.1).

Escrevendo a equação (A2.2) para o elemento fica:

$$I^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} \left[\delta \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right)^2 + \delta \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right)^2 - 2Q_\phi^e \cdot \phi^e \right] dV + \int_{S^e} q^e \phi^e dS. \quad (A2.3)$$

A equação (A2.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$I^e = \delta \int_{V^e} \frac{1}{2} \{\Phi^e\}^T [B^e]^T [B^e] \{\Phi^e\} dV - \int_{V^e} Q_\phi^e [N] \{\Phi^e\} dV + \int_{S^e} q^e [N] \{\Phi^e\} dS; \quad (A2.4)$$

onde

$$\phi^e = [N] \{\Phi^e\}; \quad (A2.5)$$

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X} & \frac{\partial N_2}{\partial X} & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial X} \\ \frac{\partial N_1}{\partial Y} & \frac{\partial N_2}{\partial Y} & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial Y} \end{bmatrix}; \quad (A2.6)$$

sendo que m é o número de pontos nodais do elemento e $[B^e]$ é a matriz que contém as derivadas das funções de forma do elemento.

O produto da matriz $[B^e]$ por $\{\Phi^e\}$ é igual a matriz $\{g^e\}$, que contém as derivadas de ϕ com relação a X e Y .

Então:

$$\{g^e\} = [B^e] \{\Phi^e\}; \quad (A2.7)$$

onde

$$\{g^e\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \\ \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X} & \frac{\partial N_2}{\partial X} & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial X} \\ \frac{\partial N_1}{\partial Y} & \frac{\partial N_2}{\partial Y} & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1^e \\ \vdots \\ \phi_m^e \end{Bmatrix}. \quad (\text{A2.8})$$

A minimização do funcional I^e é dada por:

$$\frac{\partial I^e}{\partial \{\Phi^e\}} = 0. \quad (\text{A2.9})$$

Substituindo a equação (A2.4) na equação (A2.9), obtém-se para cada termo:

$$\frac{\partial}{\partial \{\Phi^e\}} \delta \int_{V^e} \frac{1}{2} \{\Phi^e\}^T [B^e]^T [B^e] \{\Phi^e\} dV = \quad (\text{A2.10a})$$

$$= \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] \{\Phi^e\} dV;$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\Phi^e\}} \int_{V^e} Q_\phi^e [N] \{\Phi^e\} dV = \int_{V^e} [N]^T Q_\phi^e dV; \quad (\text{A2.10b})$$

$$\frac{\partial}{\partial \{\Phi^e\}} \int_{S^e} q^e [N] \{\Phi^e\} dS = \int_{S^e} [N]^T q^e dS. \quad (\text{A2.10c})$$

Somando-se os membros da direita das equações (A2.10), vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \{\Phi^e\}} &= \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] \{\Phi^e\} dV - \int_{V^e} [N]^T Q_\phi^e dV + \int_{S^e} [N]^T q^e dS = 0. \end{aligned} \quad (\text{A2.11})$$

A equação (A2.11) pode ser escrita na seguinte forma condensada:

$$[K^e]\{\Phi^e\} + \{R^e\} = 0; \quad (A2.12)$$

onde

$$[K^e] = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV; \quad (A2.13)$$

$$\{R^e\} = - \int_{V^e} [N]^T Q_\phi^e dV + \int_{S^e} [N]^T q^e dS. \quad (A2.14)$$

A equação (A2.9) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\Phi\}} = \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \sum_{e=1}^E I^e = \sum_{e=1}^E \frac{\partial I^e}{\partial \{\Phi^e\}} = 0; \quad (A2.15)$$

onde E é o número de elementos.

Substituindo a equação (A2.12) em (A2.15) resulta:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\Phi\}} = \sum_{e=1}^E ([K^e]\{\Phi^e\} + \{R^e\}) = 0. \quad (A2.16)$$

A equação (A2.16) pode ser escrita na seguinte forma matricial global:

$$[K]\{\Phi\} + \{R\} = 0; \quad (A2.17)$$

onde

$$[K] = \sum_{e=1}^E \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV; \quad (A2.18)$$

$$\{R\} = - \sum_{e=1}^E \int_{V^e} [N]^T Q_\phi^e dV + \sum_{e=1}^E \int_{S^e} [N]^T q^e dS. \quad (A2.19)$$

APÊNDICE 3

MÉTODO VARIACIONAL PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DEPENDENTE DO TEMPO

A3.1 - Introdução

A equação bidimensional dependente do tempo a ser analisada é:

$$\delta \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial X^2} + \frac{\partial \phi^2}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau}; \quad (\text{A3.1a})$$

com as condições de contorno:

$$\phi = \phi_0(X, Y); \quad (\text{A3.1b})$$

$$q = \frac{\partial \phi}{\partial n}; \quad (\text{A3.1c})$$

onde ϕ é uma função escalar, $\phi_0(X, Y)$ uma função especificada no contorno, Q_ϕ é uma função especificada no domínio, q é o fluxo através da superfície S do contorno, λ e δ são parâmetros que assumem valores constantes e τ é o tempo adimensional.

A3.2 - Método Variacional

A equação (A3.1a) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\delta \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial X^2} + \frac{\partial \phi^2}{\partial Y^2} \right) + \left(Q_\phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (\text{A3.2})$$

O funcional equivalente das equações (A3.1) é obtido através do cálculo variacional e é dado pela seguinte expressão:

$$I = \int_V \frac{1}{2} \left[\delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 + \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)^2 - 2 \left(Q_\phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) \phi \right] dV + \int_S q \phi dS. \quad (A3.3)$$

A função ϕ que minimiza o funcional é a solução da equação (A3.1). $(Q_\phi - \lambda \partial \phi / \partial \tau)$ é uma função especificada.

O funcional para o elemento (e) é dado por:

$$I^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} \left[\delta \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right)^2 + \delta \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right)^2 - 2 \left(Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) \phi^e \right] dV + \int_{S^e} q^e \phi^e dS. \quad (A3.4)$$

A equação (A3.3) pode ser escrita na forma:

$$I = \sum_{e=1}^E \frac{\delta}{2} \int_{V^e} \{\Phi^e\}^T [B^e]^T [B^e] \{\Phi^e\} dV + \sum_{e=1}^E \int_{S^e} q^e [N] \{\Phi^e\} dS + I_Q; \quad (A3.5a)$$

onde $\phi^e = [N] \{\Phi^e\}$, E é o número de elementos, $[B^e]$ é definido pela equação (A2.6) e I_Q é dado por:

$$I_Q = \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^e} -[N] \{\Phi^e\} Q_\phi^e dV + \int_{V^e} \lambda [N] \{\Phi^e\} [N] \frac{\partial \{\Phi^e\}}{\partial \tau} dV \right\}. \quad (A3.5b)$$

A minimização do termo I é dada por:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\Phi\}} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial I^e}{\partial \{\Phi^e\}} = 0. \quad (A3.6)$$

A minimização do termo I_Q é dada por:

$$\frac{\partial I_Q}{\partial \{\Phi\}} = \sum_{e=1}^E \int_V e^{-Q\phi} [N]^T dV + \sum_{e=1}^E \left(\int_V e^{\lambda [N]^T [N]} dV \right) \frac{\partial \{\Phi^e\}}{\partial \tau}. \quad (A3.7)$$

No apêndice A2, pode-se observar os termos da equação (A3.5a) já minimizados. Estes termos somados à equação (A3.7), produzem o resultado:

$$[C] \frac{\partial \{\Phi\}}{\partial \tau} + [K] \{\Phi\} + \{R\} = 0; \quad (A3.8a)$$

onde

$$[C] = \sum_{e=1}^E \int_V e^{\lambda [N]^T [N]} dV; \quad (A3.8b)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^E \int_V e^{\delta [B^e]^T [B^e]} dV; \quad (A3.8c)$$

$$\{R\} = \sum_{e=1}^E \int_V e^{-Q\phi} [N]^T dV + \sum_{e=1}^E \int_S e^{q^e} [N]^T ds. \quad (A3.8d)$$

Conforme referência [16], nas páginas 180 a 183, a matriz $[C^e]$ para o elemento quadrilateral com oito nós pode ser escrita como:

$$[C^e] = \frac{\lambda A^e}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (A3.9)$$

onde A^e é a área de cada elemento.

A3.4 - Aproximação do Termo $d\{\Phi\}/d\tau$

Os valores de Φ_0 e Φ_1 assumidos pela função ϕ , respectivamente, no tempo τ e $\tau + \Delta\tau$, são mostrados na figura A3.1.

Aplicando-se o esquema de diferença finita central, o termo $d\phi/d\tau$ pode ser escrito na seguinte forma:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{\Delta\tau}. \quad (\text{A3.10})$$

A derivada da grandeza ϕ para os pontos nodais no domínio do tempo pode ser calculada pela equação:

$$\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial\tau} = \frac{d\{\Phi\}}{d\tau} = \frac{1}{\Delta\tau} (\{\Phi\}_1 - \{\Phi\}_0) = \{\dot{\Phi}\}. \quad (\text{A3.11})$$

As matrizes $\{\Phi\}$ e $\{R\}$ devem ser analisadas como:

$$\{\Phi\}^* = \frac{1}{2} (\{\Phi\}_1 + \{\Phi\}_0); \quad (\text{A3.12})$$

$$\{R\}^* = \frac{1}{2} (\{R\}_1 + \{R\}_0). \quad (\text{A3.13})$$

Substituindo (A3.12) e (A3.13) em (A3.8a), vem:

$$\frac{1}{\Delta\tau} [C]\{\Phi\}_1 - \frac{1}{\Delta\tau} [C]\{\Phi\}_0 + \frac{1}{2} [K]\{\Phi\}_1 + \frac{1}{2} [K]\{\Phi\}_0 + \{R\}^*. \quad (\text{A3.14})$$

A equação (A3.14) pode ser escrita da seguinte forma:

$$([K] + \frac{2}{\Delta\tau} [C])\{\Phi\}_1 = (\frac{2}{\Delta\tau} [C] - [K])\{\Phi\}_0 - 2\{R\}^*. \quad (\text{A3.15})$$

Das equações (A3.12) e (A3.15), resulta que:

$$([K] + \frac{2}{\Delta\tau} [C])\{\Phi\}^* = \frac{2}{\Delta\tau} [C]\{\Phi\}_0 - \{R\}^*. \quad (\text{A3.16})$$

Finalmente, a equação (A3.16) pode ser escrita como:

$$([K] + \frac{2}{\Delta\tau} [C]) \{\Phi\}_{\text{novo}} = \frac{2}{\Delta\tau} [C] \{\Phi\}_{\text{velho}} - \{R\}. \quad (\text{A3.17})$$

DEMONSTRAÇÃO DE

$\frac{d\phi}{d\tau} \approx \frac{\phi_1 - \phi_0}{\Delta\tau}$

Segundo a figura A3.1 abaixo:

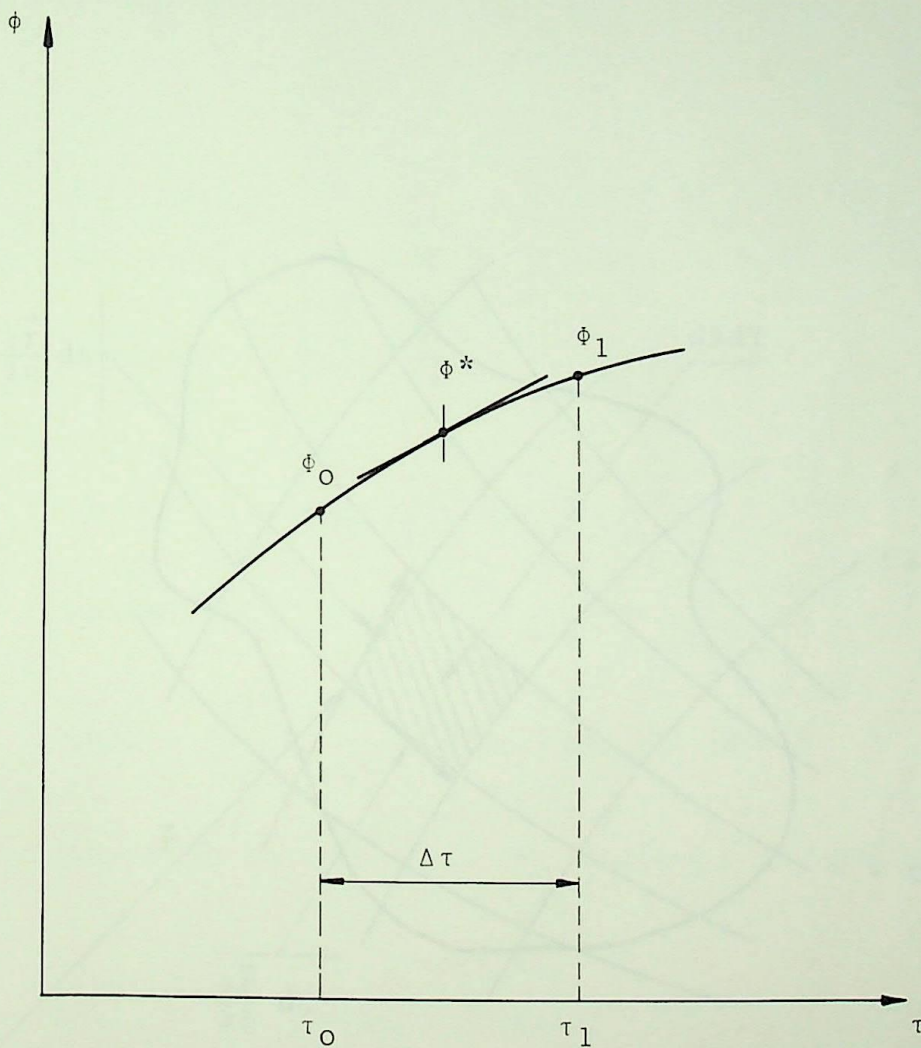


Figura A3.1 - Esquema da diferença finita central para a derivada $d\phi/d\tau$.

APÊNDICE A4

DEMONSTRAÇÃO DE

$$dXdY = |\det[J]| d\xi d\eta$$

Seja a figura A4.1 abaixo:

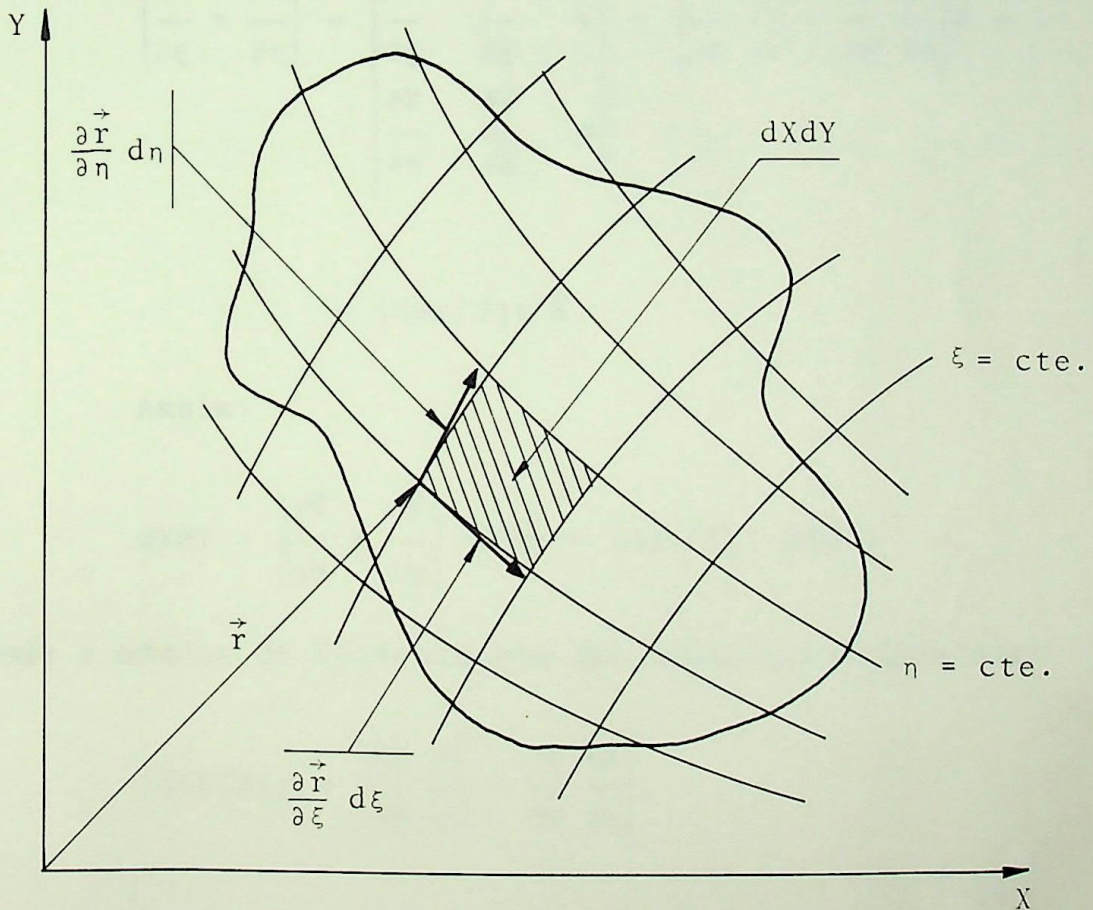


Figura A4.1 - Coordenadas XY e $\xi\eta$.

onde

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}. \quad (\text{A4.1})$$

Pode-se escrever que:

$$dXdY = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} d\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta. \quad (\text{A4.2})$$

O produto vetorial da equação (A4.2) pode ser calculado como sendo:

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) \vec{k} = \quad (\text{A4.3})$$

$$= |\det[J]| \vec{k}.$$

Assim:

$$dXdY = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta = |\det[J]| d\xi d\eta; \quad (\text{A4.4})$$

onde o módulo do determinante do Jacobiano é dado por:

$$|\det[J]| = \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} \right). \quad (\text{A4.5})$$

APÊNDICE A5

TÉCNICA DA QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE

A5.1 - Introdução

A referência [17] apresenta a quadratura de Gauss-Legendre que é uma técnica de integração numérica associada com as coordenadas locais ξ ou (ξ, η) para se avaliar as matrizes do elemento. Ela se baseia na localização de pontos de integração dentro do elemento, bem como em coeficientes de peso. Isto feito é para se atingir uma maior precisão no cálculo de integrais.

A5.2 - A técnica da quadratura de Gauss-Legendre

Considere a função $f(\xi)$ da figura A5.1 e a sua integral:

$$\text{INT} = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi. \quad (\text{A5.1})$$

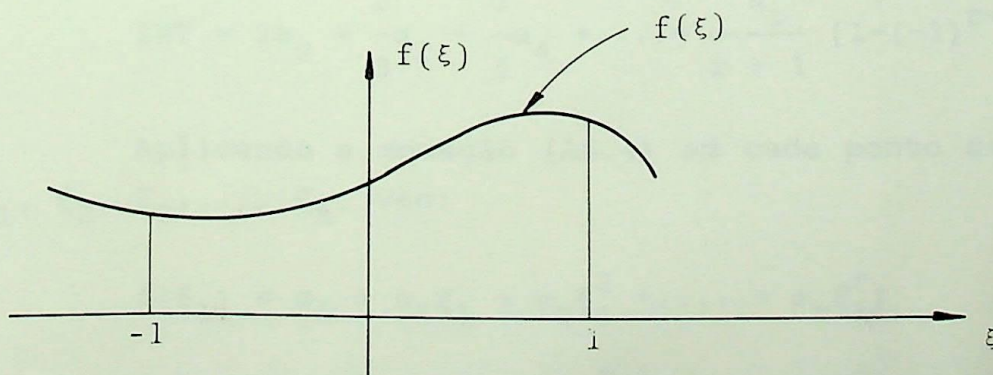


Figura A5.1 - Função $f(\xi)$.

Escrevendo a integral da equação (A5.1) como sendo um somatório de um produto, vem: *Passo Aqui*

$$\text{INT} = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^m W_j f(\xi_j); \quad (\text{A5.2})$$

onde m é o número de pontos de integração, $2m$ é o número de incógnitas (W_j e ξ_j), W_j é o fator de peso para o ponto j relativo ao centro.

A equação (A5.2) pode ser escrita como:

$$\text{INT} = W_1 f(\xi_1) + W_2 f(\xi_2) + W_3 f(\xi_3) + \dots + W_m f(\xi_m). \quad (\text{A5.3})$$

O integrando da equação (A5.1) pode ser expandido em uma série de potência no intervalo $-1 \leq \xi \leq 1$. Assim:

$$f(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots + \alpha_r \xi^r. \quad (\text{A5.4})$$

Substituindo (A5.4) em (A5.1), vem:

$$\text{INT} = \int_{-1}^1 \alpha_0 d\xi + \int_{-1}^1 \alpha_1 \xi d\xi + \dots + \int_{-1}^1 \alpha_r \xi^r d\xi. \quad (\text{A5.5})$$

Integrando, obtém-se:

$$\text{INT} = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{2}{5}\alpha_4 + \dots + \frac{\alpha_r}{r+1} [1 - (-1)^{r+1}]. \quad (\text{A5.6})$$

Aplicando a equação (A5.4) em cada ponto de integração $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m$, vem:

$$\begin{aligned} f(\xi_1) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_1^2 + \dots + \alpha_r \xi_1^r; \\ f(\xi_2) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \dots + \alpha_r \xi_2^r; \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f(\xi_m) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_m + \alpha_2 \xi_m^2 + \dots + \alpha_r \xi_m^r. \end{aligned} \quad (\text{A5.7})$$

Substituindo (A5.7) em (A5.3), vem:

$$\begin{aligned} \text{INT} = & \alpha_0 (W_1 + W_2 + \dots + W_m) + \alpha_1 (W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + \\ & W_m \xi_m) + \alpha_2 (W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 + \dots + W_m \xi_m^2 + \dots + \\ & \alpha_r (W_1 \xi_1^r + W_2 \xi_2^r + \dots + W_m \xi_m^r). \end{aligned} \quad (\text{A5.8})$$

Para que a função $f(\xi)$ seja integrada exatamente, os termos das equações (A5.6) e (A5.8) devem ser iguais. Logo:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_m = 2;$$

$$W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + W_m \xi_m = 0;$$

$$W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 + \dots + W_m \xi_m^2 = 2/3;$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$W_1 \xi_1^r + W_2 \xi_2^r + \dots + W_m \xi_m^r = \frac{1}{r+1} [1 - (-1)^{r+1}]. \quad (\text{A5.9})$$

Nota-se que, no sistema de equações (A5.9) aparecem $(r + 1)$ equações com $2m$ incógnitas (W_j e ξ_j). Então, a solução só será possível quando o número de equações for igual ao número de incógnitas, isto é:

$$r + 1 = 2m \text{ ou}$$

$$r = 2m - 1;$$

onde

r é igual ao grau do polinômio;

m é igual ao número de pontos de integração.

Até agora, foi analisada a integração numérica unidimensional. Para o caso bidimensional, a integral INT fica:

$$\text{INT} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\eta d\xi. \quad (\text{A5.10})$$

Analisa-se as integrais interna e externa, consecutivamente, de uma maneira similar àquela para o caso unidimensional.

Então, pode-se escrever que:

$$\text{INT} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\xi_j, \eta_k) W_j W_k; \quad (\text{A5.11})$$

onde

m é igual ao número de pontos de integração na direção ξ ;

n é igual ao número de pontos de integração na direção η .

Abaixo são mostrados alguns valores para m , n , ξ , η , e W com as respectivas figuras mostrando a disposição dos pontos de integração dentro de alguns elementos:

Para $m = n = 1$

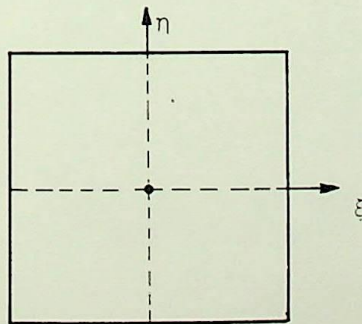


Figura A5.2 - Elemento com um ponto de integração.

Para $m = n = 2$

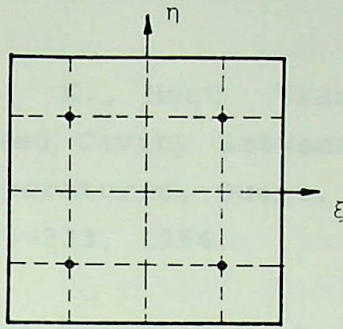


Figura A5.3 - Elemento com quatro pontos de integração.

Para $m = n = 3$

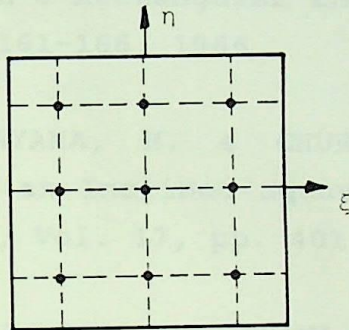


Figura A5.4 - Elemento com nove pontos de integração.

Para $m = n = 4$

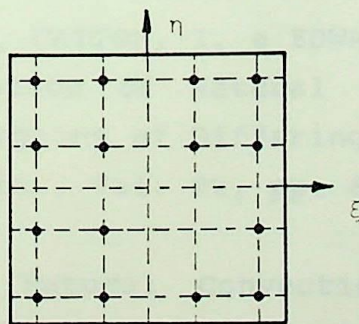


Figura A5.5 - Elemento com dezesseis pontos de integração.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BATCHELOR, G. K., Heat Transfer by Free Convection Across a Closed Cavity Between Vertical Boundaries at Different Temperatures, *Quart. of Appl. Math.*, Vol. 12, No. 3, pp. 209-233, 1954.
- [2] POOTS, G., Heat Transfer by Laminar Free Convection in Enclosed Plane Gas Layers, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, Vol. 11, Part 3, pp. 2567-2573, 1958.
- [3] WILKES, J. O. e CHURCHILL, S. W., The Finite-Difference Computation in a Rectangular Enclosures, *AIChE Journal*, Vol. 12, pp. 161-166, 1966.
- [4] OZOE, H., SAYAMA, H. e CHURCHILL, S. W., Natural Convection in an Inclined Square Channel, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 17, pp. 401-406, 1974.
- [5] OZOE, H., YAMAMOTO, K., SAYAMA, H. e CHURCHILL, S. W., Natural Circulation in an Inclined Rectangular Channel Heated on One Side and Cooled on the Opposing Side, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 17, pp. 1209-1217, 1974.
- [6] ARNOLD, J. N., CATTON, I. e EDWARDS, D. K., Experimental Investigation of Natural Convection in Inclined Rectangular Regions of Differing Aspect Ratios, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 98, pp. 67-71, 1976.
- [7] LEE, E. I., Natural Convection in Rectangular Air Enclosures of Aspect Ratio Less Than One, Ph. D. Thesis, Rutgers University The State University of New Jersey (New Brunswick), 1979.

- [8] MENON, G. J., Convecção Natural Transiente no Interior de Cavidade Retangular Inclinada, X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro - RJ, Vol. 1, pp. 257-260, 1989.
- [9] DE VAHL DAVIS, G., Natural Convection of Air in a Square Cavity: a Bench Mark Numerical Solution, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 3, pp. 249-264, 1983.
- [10] BEHNIA, M., STELLA, F., DE VAHL DAVIS, G. e GUJ, G., Natural Convection in a Cavity: a Comparison of Different Numerical Methods, Anais do ENCIT 88, Águas de Lindóia - SP, pp. 321-324, 1988.
- [11] JETLI, R., ACHARYA, S., ZIMMERMAN, E., Influence of Baffle Location on Natural Convection in Partially Divided Enclosure, Numerical Heat Transfer, Vol. 10, pp. 521-536, 1986.
- [12] ACHARYA, S. e JETLI, R., Heat Transfer Due to Buoyancy in a Partially Divided Square Box, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 33, pp. 931-942, 1990.
- [13] KANGNI, A., YEDDER, R. B. e BILGEN E., Natural Convection and Conduction in Enclosures with Multiple Vertical Partitions, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 34, pp. 2819-2825, 1991.
- [14] CHEN, K. S. e KO, P. W., Natural Convection in a Partially Divided Rectangular Enclosure with an Opening in the Partition Plate and Isoflux Side Walls, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 34, pp. 237-246, 1991.
- [15] FERNANDES, S., Análise Teórica da Convecção Natural em Cavidades Retangulares Inclinadas com Partições Diatérmicas Ligadas à Superfície Fria, Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá, 1991.

- [16] SEGERLIND, L. J., Applied Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc., Michigan, 1984.
- [17] ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L., The Finite Element Method, McGRAW-HILL International Editions, 1989.
- [18] NASCIMENTO, M. A. R., Estudo Teórico de Convecção Natural em Coletores Concentradores com Absorvedor Cilíndrico, Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá, 1988.
- [19] MENON, G. J., Convecção Natural no Interior de Coletores Solares Concentradores de Parábolas Compostas, Tese de Doutorado, ITA, São José dos Campos, 1984.
- [20] TABARROK, B. e LIN, R. C., Finite Element Analysis of Free Convection Flow, Int. J. Heat Transfer, Vol. 20, pp. 945-952, 1977.
- [21] OZOE, H., YAMAMOTO, K. e CHURCHILL S. W., Natural Convection in an Inclined Rectangular Channel at Various Aspect Ratios and Angles - Experimental Measurements, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 18, pp. 1425-1431, 1975.
- [22] FIGUEREDO, J. R., GANZAROLLI, M. M. e ALMEIDA, P. I. F., Convecção Natural em Cavidade Retangular - Solução Numérica, In: II Congresso Latinoamericano de Transferência de Calor e Matéria, São Paulo, pp. 62-73, 1986.



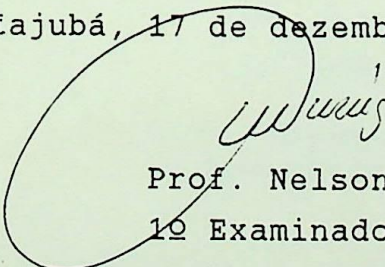
Ministério da Educação
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 05/01/1917

A N E X O I

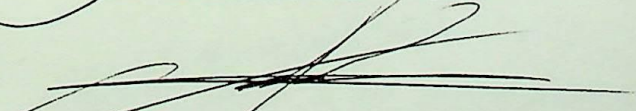
PRONUNCIAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

A Banca Examinadora, abaixo assinada, nomeada por Portaria nº 410 de 14/12/92, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: "*Estudo de Problemas Conjugados de Transferência de Calor por Convecção Natural em Cavidades Retangulares com Condução na Partição e nas Paredes Laterais*" apresenta pronunciamento no sentido de que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá solicite ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) a expedição do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica, na Área de Concentração de Conversão de Energia, satisfeitas as demais exigências regimentais, a *Paulo Mohallem Guimarães*.

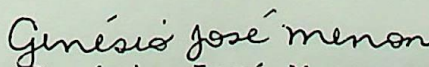
Itajubá, 17 de dezembro de 1992.


Prof. Nelson Murcia

1º Examinador - FEG


Prof. Marco Antonio Rosa do Nascimento

2º Examinador - EFEI


Prof. Genésio José Menon

3º Examinador - EFEI - Orientador



Ministério da Educação
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 05/01/1917




A N E X O I I

FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

Título da Dissertação "Estudo de Problemas Conjugados de Transferência de Calor por Convecção Natural em Cavidades Retangulares com Condução na Partição e nas Paredes Laterais"

Autor : Paulo Mohallem Guimarães

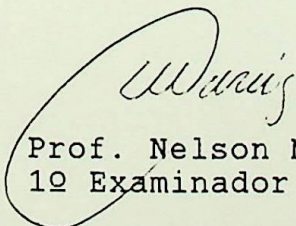
JULGAMENTO


EXAMINADORES	CONCEITO	RUBRICA
1º	A ⁺	
2º	A ⁺	
3º	A ⁺	

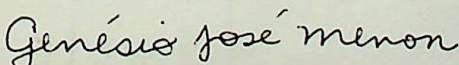
Resultado Médio: Conceito A⁺, ou seja, APROVADO COM DISTINÇÃO

Observações: _____

Itajubá, 17 de dezembro de 1992.


Prof. Nelson Murcia
1º Examinador - FEG


Prof. Marco Antonio Rosa do Nascimento
2º Examinador - EFEI


Prof. Genésio José Menon
3º Examinador - EFEI - Orientador

DATA 18 10 / 19 94
 PROC.
 PED. PPG
 LIV.
 Cz\$ DOAÇAD

FICHA 01 T.765
EFEI / Biblioteca Mauá
 G963e
 536.24 (043.2)

GUIMARÃES, P. M.
 Estudo de problemas conjugados
 de transferência de calor por con-
 vecção natural em cavidades retan-
 gulares com condução na partição..

Data Retirada	N.º Registro	Data Devolução
4	5070 Batista	11.11.11
25		07

EFEI

BIBLIOTECA MAUÁ

Esta publicação deverá ser devolvida dentro do prazo estipulado.

O leitor é responsável pela publicação em seu poder.

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
 8200765



NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA