

COMPENSAÇÃO ANALÍTICA DE SISTEMAS DE CONTROLE EM MALHA  
FECHADA LINEARES PELO MÉTODO DA  
RESPOSTA EM FREQUÊNCIA



Dissertação submetida à  
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ  
como requisito parcial para obtenção do grau de  
Mestre em Ciências Em Engenharia Mecânica



por

OSVALDO HEREK

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto D. Coelho

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

ITAJUBÁ - MG

Agosto de 1994



COMPENSAÇÃO ANALÍTICA DE SISTEMAS DE CONTROLE EM MALHA  
FECHADA LINEARES PELO MÉTODO DA  
RESPOSTA EM FREQUÊNCIA



Ministério da Educação e do Desporto  
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ  
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

## A N E X O I

### PRONUNCIAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

A Banca Examinadora, abaixo assinada, nomeada por Portaria nº 293 de 15/09/94, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: "*Compensação Analítica de Sistemas de Controle em Malha Fechada Lineares pelo Método da Resposta em Frequência*" apresenta pronunciamento no sentido de que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá solicite ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) a expedição do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica, na Área de Concentração de Máquinas de Fluxo, satisfeitas as demais exigências regimentais, a *Oswaldo Herek*.

Itajubá, 16 de setembro de 1994.

Prof. Alberto Adade Filho  
1º Examinador - ITA/CTA

Prof. Newton Alves Ferreira  
2º Examinador - EFEI

Prof. Carlos Alberto Dias Coelho  
3º Examinador - EFEI - Orientador



Ministério da Educação e do Desporto  
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ  
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

## A N E X O I I

### FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

Título da Dissertação: "Compensação Analítica de Sistemas de Controle em Malha Fechada Lineares pelo Método da Resposta em Frequência"

Autor: Osvaldo Herek

### JULGAMENTO

EXAMINADORES	CONCEITO	RUBRICA
1º	A <sup>+</sup>	<i>Albade</i>
2º	A <sup>+</sup>	<i>Newton</i>
3º	A <sup>+</sup>	<i>Coelho</i>

Resultado Médio: Conceito A<sup>+</sup>, ou seja, apro-  
vado com distinção.

Observações: \_\_\_\_\_

Itajubá, 16 de setembro de 1994.

*Albade Filho*  
Prof. Alberto Adade Filho  
1º Examinador - ITA/CTA

*Newton Alves Ferreira*  
Prof. Newton Alves Ferreira  
2º Examinador - EFEI

*Coelho*  
Prof. Carlos Alberto Dias Coelho  
3º Examinador - EFEI - Orientador

## RESUMO

A presente dissertação traça considerações sobre o projeto de um posicionador mecânico e sobre a compensação de sistemas de controle em malha fechada pelo método da resposta em frequência, caracterizando as dificuldades e imprecisões inerentes a esse método tipicamente gráfico de compensação, bem como a necessidade, imposta pelo mesmo, de uma avaliação criteriosa dos resultados, sob pena de se cometer erros graves.

Na seqüência é proposto um novo método de compensação que transforma o método da resposta em frequência, que é gráfico, em analítico e numérico e eliminando ainda as suas imprecisões e inseguranças.

É também apresentado um programa computacional simplificado, o qual, aplicado a uma série de exemplos, demonstra a eficiência do método.

Finalmente são apresentadas também as limitações do "software" e do método em si, sendo propostas nessa ocasião algumas possibilidades de contorná-las.

## **ABSTRACT**

This text makes considerations about the design of a position control system and its frequency response compensation method, pointing out the difficulties and lack of precision of this typically graphic method and the demanded necessity of careful interpretation of the results, in order to avoid significant mistakes.

Later, a new compensation method is proposed, which converts the mentioned graphic method into an analytical and numeric one and additionally eliminates its inherent inaccuracy and unreliability.

It is also presented a simplified software, which, applied to several cases, demonstrates the new method efficiency effectiveness.

Finally the limitations of the software and of the method are presented and some ways to solve them are proposed.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa Dórian a compreensão e o carinho com que me distinguiu e que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Deixo também aqui registrados os agradecimentos ao meu orientador Professor Dr. Carlos Alberto D. Coelho, pelas suas valiosas colaborações ao conteúdo do trabalho, que permitiram enriquecê-lo de forma acentuada.

Agradeço em especial meu filho Sandro pelas suas informações sobre informática, as quais facilitaram de forma decisiva a elaboração do texto.

Agradeço também a todos que, de forma direta ou indireta, colaboraram para a conclusão deste trabalho.

# SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	01
2 - PROJETO DE UM POSICIONADOR	09
2.1. POSICIONADOR TIPO I COM DOIS PÓLOS	09
2.2. ERRO ESTACIONÁRIO NULO PARA REFERÊNCIA "RAMPA" OU EFEITO ESTACIONÁRIO NULO PARA UMA PERTURBAÇÃO "DEGRAU"	18
2.3. ERRO ESTACIONÁRIO LIMITADO	23
2.4. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS	24
3 - COMPENSAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE EM MALHA FECHADA PELO MÉTODO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	26
3.1. CRITÉRIO DE NYQUIST	26
3.2. DIAGRAMAS DE BODE	33
3.3. CURVA DE NICHOLS E CARTA DE NICHOLS	36
3.4. COMPENSAÇÃO DE UM SISTEMA DE CONTROLE EM MALHA FECHADA LINEAR PELO MÉTODO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	39
3.5. EXEMPLOS DE COMPENSAÇÃO DE SISTEMAS	48
Exemplo 1	48
Exemplo 2	56
Comentários	62

4 - VERIFICAÇÃO DA CORRELAÇÃO ENTRE $M_p$ e $M_r$	66
5 - MÉTODO ANALÍTICO PROPOSTO PELO PRESENTE TRABALHO	70
6 - PROGRAMA COMPUTACIONAL	78
6.1. ENTRADA DE DADOS	78
6.2. CÁLCULO DOS PARÂMETROS DO POSICIONADOR TIPO I COM DOIS PÓLOS (SEGUNDA ORDEM) QUE PODERIA ATENDER ÀS ESPECIFICAÇÕES	79
6.3. CÁLCULO DO COMPENSADOR	80
6.4 OBSERVAÇÕES	82
7 - COMPROVAÇÃO DOS RESULTADOS	83
- Exemplo 1 do texto (Apêndice B)	83
- Exemplo 2 do texto (Apêndice C)	84
- Exemplo 3 (Apêndice D)	85
- Exemplo 4 (Apêndice E)	87
8 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	89
9 - BIBLIOGRAFIA	94
Apêndice A - Programa de Cálculo Literal do Polinômio em p e da Amplificação	97
Apêndice B - Exemplo 1 do texto	116

# SINONÍMIA

Apêndice C - Exemplo 2 do texto	127
Apêndice D - Exemplo 3	138
Apêndice E - Exemplo 4	149

## SIMBOLOGIA

A	Amplificação
$A_C$	Amplificação do Compensador
B	Polinômio entre cujas raízes encontram-se os pólos dos possíveis compensadores de um sistema dado.
C	Capacitâncias
c	Variável Controlada
$c_0$	Valor final da variável controlada para sistema estável
$C_C$	Amortecimento da carga
$C_T$	Constante de transdução [V/rd] ou [V/m]
D	Operador diferencial (d/dt)
$D(j\omega)$	Polinômio do denominador de G ou de HG
$E_{amp}$	Tensão de entrada no amplificador
e	Base dos logaritmos Neperianos
F	Amortecimento global do sistema
G ou $G(\omega)$	Função de transferência do canal direto (malha aberta)
$G_0$ ou $G_0(\omega)$	Função de transferência do canal direto (malha aberta) do sistema não compensado
$G_f(\omega)$	Função de transferência do canal direto (malha aberta) do sistema compensado
H	Realimentação do sistema
i ou j	Unidade imaginária
J	Inércia total do sistema (momento de inércia ou massa)

$J_m$	Inércia do motor
$J_C$	Inércia da carga
$K$	Constante de torque do sistema ou fator constante da função de transferência de malha aberta do sistema
$K_f$	Constante da função de transferência de malha aberta final do sistema
$K_1$	Constante de erro estacionário ou ganho da função de transferência de malha aberta
$K_h$	Constante do tacômetro
$M$	Módulo da função de transferência de malha fechada
$M_r$	Valor máximo do módulo da função de transferência de malha fechada (pico de ressonância)
$M_p$	Ultrapassagem (relação entre o valor máximo da controlada, para uma referência "degrau" e o correspondente valor final da mesma)
$m$	Número de pólos na origem (iguais a zero) da função de transferência de malha aberta do sistema (tipo do sistema)
$N(j\omega)$	Polinômio do numerador de $G$ ou $HG$
$N$	Número de voltas no sentido horário, em torno do ponto $(-1)$ , no diagrama de Nyquist
$n_1$	Lista de zeros de $HG_0$
$n_2$	Lista de pólos de $HG_0$
$n_3$	Lista de raízes reais e negativas do polinômio
$B$	
$p_i$	Pólo de $HG_0$

$P_C$	Pólo do compensador
$P$	Número de pólos com $\sigma > 0$
$P_0$	Coeficiente da perturbação
$P(t)$	Perturbação em função do tempo
$P(s)$	Transformada de Laplace da perturbação
$q$	Expoente de $t$ na referência
$r$ ou $r(t)$	Referência
$r_0$	Fator constante da referência
$r_{max}$	Referência máxima
$R_{nr}$	Resíduo de ordem $r$ , referente à raiz $n$ , na separação de uma relação de polinômios em frações parciais
$R_1, R_2, \dots$	Resistências elétricas simbólicas em compensadores passivos
$s$	Variável da transformada de Laplace
$s_i$	Raízes de $1+HG(s)$ , coeficientes de $t$ nas exponenciais da resposta do sistema
$T(j\omega)$	Função de transferência de malha fechada do sistema
$T_m$	Função de transferência entre a saída do motor e a carga
$T_C$	Função de transferência do compensador
$T_{op}$	Função de transferência do amplificador operacional
$t$	Tempo
$t_a$	Tempo de acomodação
$t_p$	Tempo de pico
$t_r$	Tempo de resposta

$t_s$	Tempo de subida
$t_{10}$	Tempo para 10% da resposta
$t_{90}$	Tempo para 90% da resposta
$X(\omega)$	Parte real da função de transferência de malha aberta do sistema compensado
$X_1(\omega)$	Parte real da função de transferência de malha aberta do sistema compensado dividida pela amplificação
$X_0(\omega)$	Parte real da função de transferência de malha aberta do sistema não compensado
$Y(\omega)$	Parte imaginária da função de transferência de malha aberta do sistema compensado
$Y_1(\omega)$	Parte imaginária da função de transferência de malha aberta do sistema compensado dividida pela amplificação
$Y_0(\omega)$	Parte imaginária da função de transferência de malha aberta do sistema não compensado
$X_{00}(\omega)$	Derivada de $X_0(\omega)$ em relação a $\omega$
$Y_{00}(\omega)$	Derivada de $Y_0(\omega)$ em relação a $\omega$
$X_{11}(\omega)$	Derivada de $X_1(\omega)$ em relação a $\omega$
$Y_{11}(\omega)$	Derivada de $Y_1(\omega)$ em relação a $\omega$
$Z$	Número de zeros de HG na parte direita do plano $s$
$Z_C$	Impedância da carga
$Z_E$	Impedância de entrada
$Z_R$	Impedância de realimentação
$z_i$	Zeros de $HG(\omega)$
$z_c$	Zero do compensador
$\omega_n$	Frequência natural não amortecida

$\omega_r$	Frequência de Ressonância
$\omega$	Frequência ou velocidade angular
$\omega_i$	Parte imaginária das raízes de $1+HG(s)$
$\Delta_C$	Erro na variável controlada
$\Delta_C \infty$	Erro estacionário na variável controlada
$\alpha$	Ângulo de fase necessário para compensar o sistema
$\gamma$	Proporção do conjugado perturbador em relação ao conjugado máximo do sistema
$\eta$	Arco cujo cosseno é $\xi$
$\xi$	Coefficiente de amortecimento
$\rho$	Raio infinitesimal do círculo em torno da origem do diagrama de Nyquist
$\sigma_i$	Parte real das raízes de $1+HG(s)$
$\theta$	Fase de $HG(j\omega)$

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Quando projetamos um Sistema de Controle, dimensionamos primeiramente os componentes que serão utilizados, de forma que cada um deles possa, por si só, cumprir adequadamente o seu papel.

Para isso é necessário que se conheça muito bem o objetivo que se pretende atingir e também que se possa quantificar as cargas envolvidas que o sistema deverá vencer. A partir dessas considerações poderemos conhecer as exigências que deverão ser atendidas e, conseqüentemente, as características e desempenho necessários.

Devemos, portanto, descrever o sistema automático, bem como os dispositivos a ele ligados.

Nessa descrição deve constar a finalidade do sistema, a impedância da carga que o mesmo deverá atuar ( $J_C$  e  $C_C$ ), os valores possíveis para a referência ( $r$ ), bem como as respectivas variáveis controladas ( $c$ ) necessárias, as grandezas envolvidas, o desempenho no tempo do sistema para uma referência "Degrau" caracterizado pelo valor de  $t_s$  ou  $t_a$  ou  $t_p$  ou  $t_r$  e o seu comportamento transitório caracterizado pela ultrapassagem  $M_p$ . Essas características podem ser definidas conforme figura 1.1.

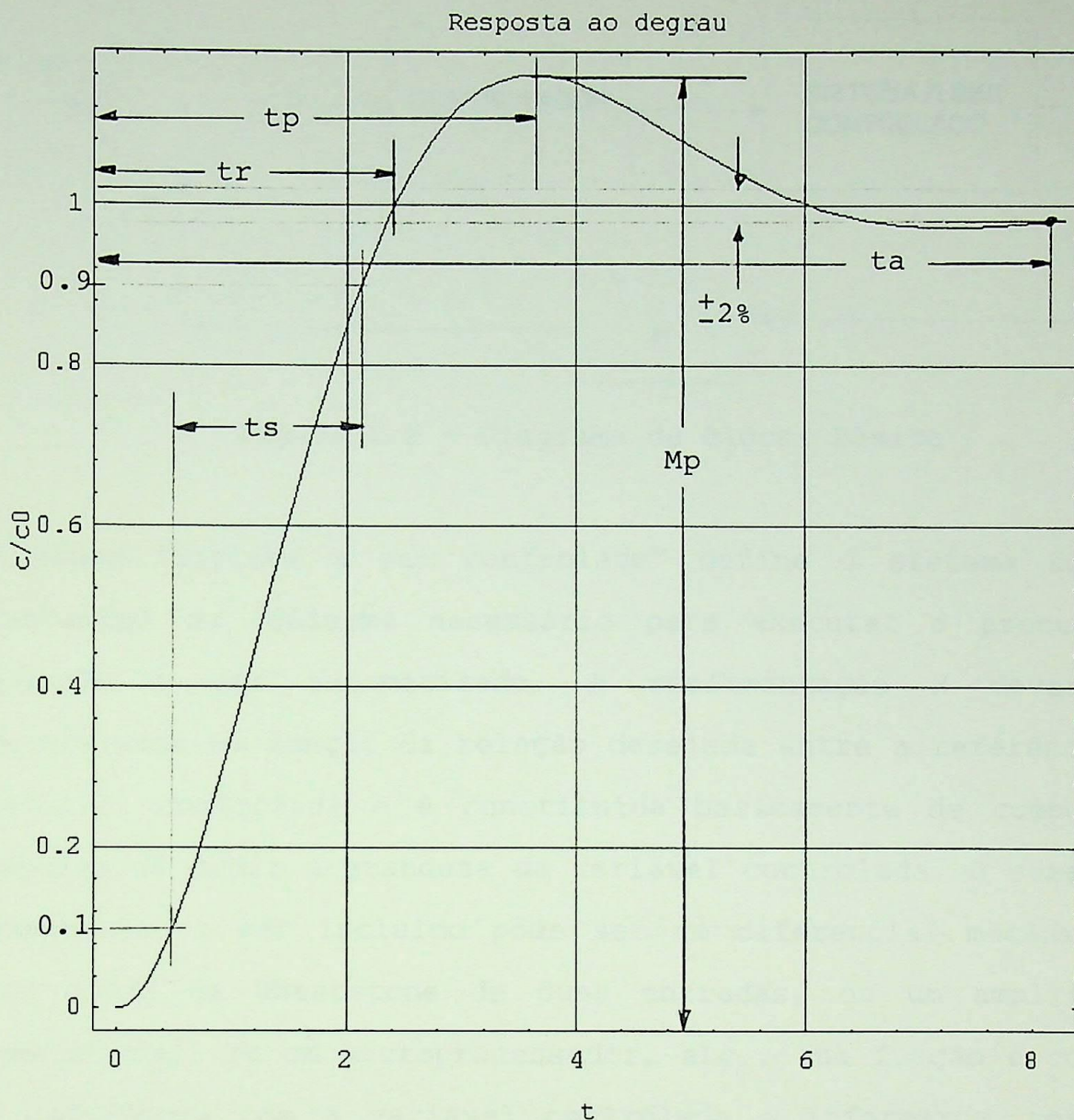


Figura 1.1 - Definições

Naturalmente não podem ser esquecidas, para um bom projeto, outras informações referentes ao ambiente (temperatura, umidade, etc), às limitações de pesos e dimensões, às fontes de energia, etc.

A primeira providência que devemos tomar é a de desenhar um diagrama de blocos literal de acordo com a estrutura indicada na figura 1.2, que nos definirá quais os componentes que usaremos e que mais tarde deverão ser devidamente quantificados.

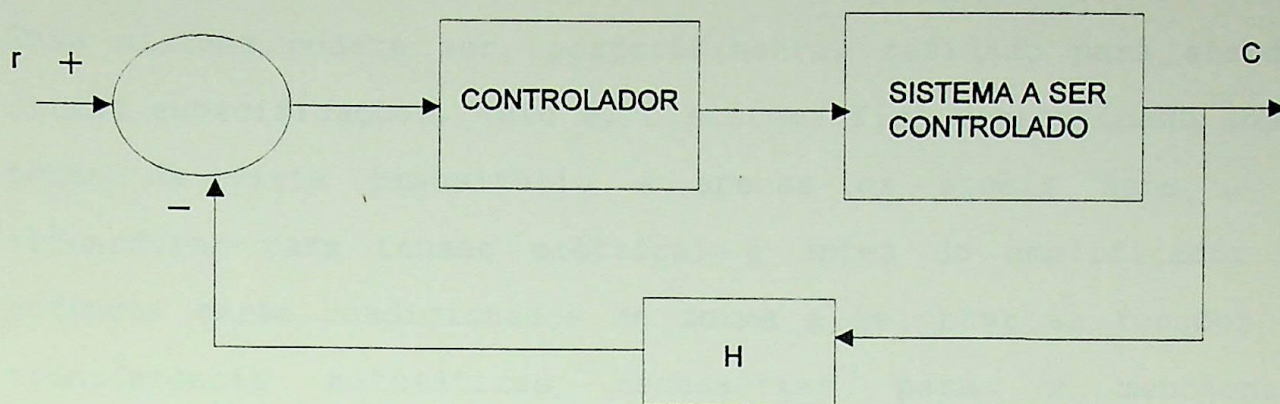


Figura 1.2 - Diagrama de Blocos Básico

O bloco "sistema a ser controlado" define o sistema conforme instalado ou conforme necessário para executar o processo em questão a ser automatizado. A realimentação H deverá ser determinada em função da relação desejada entre a referência e a variável controlada e é constituída basicamente de componentes capazes de medir a grandeza da variável controlada. O somador ou comparador a ser incluído pode ser um diferencial mecânico, ou uma ponte de Wheatstone de duas entradas, ou um amplificador operacional, ou um microprocessador, etc., sua função é comparar a referência com a variável controlada e informar o resultado para o controlador. O controlador, por sua vez, é o ponto central do projeto e deverá ser construído de forma que possa cumprir a função de trabalhar o sinal fornecido pelo comparador e de entregá-lo com a potência adequada e no tempo correto para o sistema a ser controlado, de forma a se obter um sistema global estável e que apresente o desempenho especificado.

A seguir deveremos determinar o posicionador do tipo I com dois pólos (2ª ordem) capaz de atender às especificações transitórias impostas (vide capítulo 2), que servirá como modelo.

Esse sistema poderá ser, posteriormente, refinado para atender outras especificações, isto é, o sistema fica dimensionado sob o ponto de vista transitório e apenas os sinais após o  $C_T$  (transdutor para tensão elétrica) e antes do amplificador de potência serão condicionados de forma a se obter as funções de transferência matemáticas necessárias para o mencionado refinamento.

Esses refinamentos poderão ser, por exemplo, a introdução de um controle integral para atender a imposição de que o efeito estacionário causado por uma perturbação de conjugado "degrau" na variável controlada seja nulo após um tempo especificado, ou que o erro estacionário para uma referência de rampa seja nulo, ou a introdução de um compensador para que a constante de erro  $K_1$  tenha um valor mínimo especificado, etc.

A seguir determinamos a função de transferência de malha aberta (HG) do sistema completo. Nessa ocasião podemos constatar que o sistema pode não estar atendendo às especificações estabelecidas de desempenho, seja transitório, estacionário ou de estabilidade.

Nesse caso será necessário compensá-lo, isto é, modificá-lo para que ele possa satisfazer as especificações.

Muitas vezes é necessário que se incluam componentes eletrônicos extras que possibilitem a obtenção de resultados bem específicos.

Tanto os refinamentos mencionados introduzidos através de componentes eletrônicos extras quanto os compensadores necessários, os quais em conjunto constituem o controlador, modificam a expressão matemática da função de transferência de malha aberta e são inseridos na região do sistema onde as grandezas são sinais de comando sem potência envolvida, isto é, após o transdutor para tensão ou corrente elétrica e antes do amplificador de potência.

No caso de sistemas de controle discretos esses compensadores ou controladores serão algoritmos matemáticos implementados no correspondente microprocessador.

Compensar o sistema é, portanto: determinar os parâmetros do compensador necessário, construí-lo e inseri-lo no local mencionado, de forma que o sistema resultante apresente o desempenho especificado.

A compensação do sistema é, portanto, de fundamental importância, pois do contrário o mesmo não atenderá aos requisitos para os quais foi idealizado.

Existem vários métodos de compensação. Abordaremos neste trabalho o método de compensação de sistemas de controle em malha fechada lineares pela resposta em frequência.

O método da resposta em frequência [4][6][8][14] permite que se obtenha graficamente, com auxílio carta de Nichols e dos

diagramas de Bode, o compensador que garante os valores do pico e da frequência de ressonância para um sistema qualquer.

Nesse método, que é essencialmente gráfico, são utilizados os conceitos de NYQUIST (critério de estabilidade de NYQUIST), as curvas de BODE, a curva de NICHOLS e a carta de NICHOLS.

Os trabalhos que tem sido propostos apresentam "softwares" muito bem elaborados, que nos permitem conhecer em detalhe um determinado sistema através do traçado de gráficos e simulações, mas que não determinam as características do compensador que deverá ser usado para que o sistema atenda às especificações requeridas.

A razão desse procedimento prende-se ao fato de que os cálculos necessários, para a determinação exata do compensador, são muito complicados.

O trabalho proposto pretende, a partir do método da resposta em frequência - e na suposição de que um sistema qualquer, que tenha no domínio da frequência a mesma frequência de ressonância e o mesmo valor da amplitude de ressonância do posicionador tipo I com dois pólos, que por sua vez, atenda as especificações transitórias no domínio do tempo impostas pelo cliente, teria um comportamento aproximadamente semelhante, para uma entrada degrau (domínio do tempo) - determinar diretamente as características do compensador necessário para atender as especificações no domínio do tempo.

O trabalho proposto pretende ainda transformar o método da resposta em frequência, que é essencialmente gráfico, em um processo analítico, apresentando ao seu final um programa computacional simplificado, que permitirá, a partir dos dados do sistema a ser compensado e das especificações requeridas, obter o compensador adequado.

Tendo em vista as dificuldades normalmente encontradas de se obter um sistema estável e adequado, justifica-se qualquer tentativa de tornar o processo de compensação facilmente exeqüível, sem que seja necessária a realização de tentativas e erros, como freqüentemente tem sido feito.

Inicialmente é apresentada uma descrição de uma das maneiras de se projetar um sistema de controle, para a seguir abordar o método da resposta em frequência como atualmente utilizado, tratando-se inclusive, do critério de estabilidade de NYQUIST, das curvas de BODE, da curva de NICHOLS e da carta de NICHOLS, e apresentando exemplos numéricos com comentários e conclusões.

Na seqüência demonstra-se que, para os valores mais freqüentemente utilizados de  $M_p$  (Ultrapassagem), é razoável a correlação entre  $M_p$  e  $M_r$ , mostrando, portanto, que o método da resposta em frequência tem seu ponto forte justamente nessa correlação razoável.

O passo seguinte é a apresentação do método de cálculo para obter o ponto de tangência entre a curva, no diagrama polar, de

$HG_f(j\omega) = HG_o(j\omega) \cdot T_C(j\omega)$  e a curva de módulo constante  $M_r$ , que permitirá que o método se torne analítico.

O ponto fraco do método da resposta em frequência (o tempo de resposta) é então apresentado, conjuntamente com o programa iterativo que poderá neutralizá-lo.

Finalmente são apresentados exemplos numéricos demonstrando a eficiência do método desenvolvido, com comentários e conclusões.

## CAPÍTULO 2

### PROJETO DE UM POSICIONADOR

#### 2.1. POSICIONADOR TIPO I COM DOIS PÓLOS

O posicionador tipo I com dois pólos ou de segunda ordem já está amplamente descrito na literatura pertinente [1] [3] [4] [7] [8], etc.

Podemos representar esse sistema com o diagrama de blocos da figura 2.1.

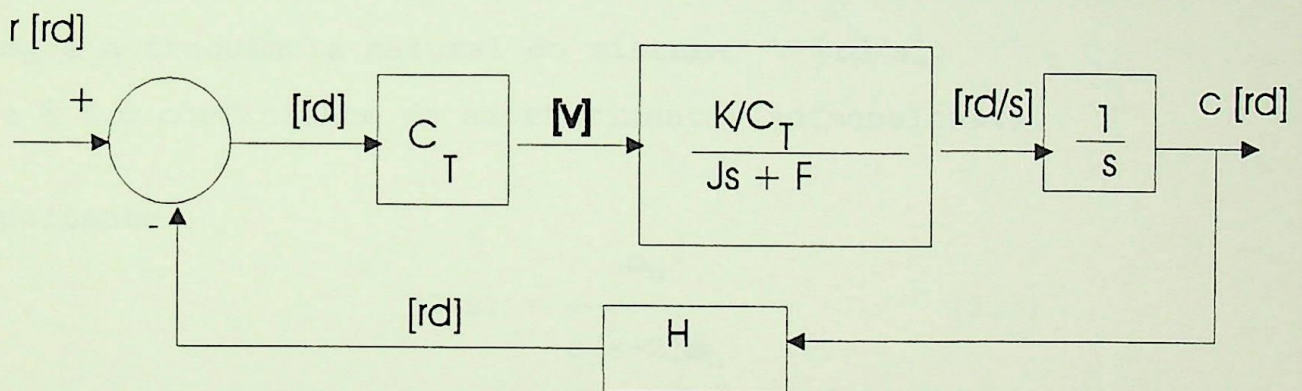


Figura 2.1

A função de transferência de malha aberta do posicionador tipo I com dois pólos é dada pela expressão:

$$HG(s) = \frac{HK}{s(Js+F)} \quad (2.1) \text{ onde}$$

$$H = \frac{r_0}{c_0} \quad (2.2)$$

$$K = \frac{\omega_n^2 J}{H} \quad (2.3)$$

$$F = 2\xi\omega_n J \quad (2.4)$$

Cujos significados são os seguintes:

$r$  é a referência ou entrada do sistema [m] ou [rd];

$r_0$  é o valor do degrau para uma referência do tipo degrau;

$c$  é a variável controlada ou resposta do sistema [m] ou [rd];

$c_0$  é o valor final da variável controlada;

$C_T$  é a constante de transdução de movimento para tensão ou corrente elétrica [V/rd] ou [V/m] ou [A/rd] ou [A/m];

$K$  é a constante de força ou de conjugado do sistema [Nm/rd ou Nm/m] ou [N/rd ou N/m];

$F$  é o amortecimento do conjunto carga mais motor [Ns/m] ou [Nms/rd];

$J$  é a inércia do conjunto carga mais motor [kg] ou [kg.m<sup>2</sup>];

$\omega_n$  é a frequência natural do sistema [rd/s];

e  $\xi$  é o coeficiente de amortecimento (adimensional).

portanto

$$HG(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)} \quad (2.5)$$

que representa o posicionador adimensionalmente.

O desempenho do sistema posicionador de segunda ordem para uma referência "degrau" está representado na figura 2.2.

Através desse gráfico adimensional ou das expressões (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.6), (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11) podemos determinar os parâmetros  $\xi$  e  $\omega_n$  correspondentes, em função do desempenho desejado.

O coeficiente de amortecimento pode ser obtido pela fórmula:

$$\xi = ((\ln^2(M_p - 1) / (\ln^2(M_p - 1) + \pi^2))^{0,5} \quad (2.6)$$

Onde:

$M_p$  é a ultrapassagem, isto é, o valor máximo atingido pela variável controlada, dividido pelo seu valor final.

$\omega_n$  pode ser calculado em função da resposta no tempo desejada, que pode ser especificada de várias maneiras:

$t_s$  é o tempo de subida, isto é, o tempo necessário para que a variável controlada vá de 10% até 90% da variável controlada teórica.

$$\omega_n \cdot t_s = \omega_n \cdot t_{90} - \omega_n \cdot t_{10} \quad (2.7)$$

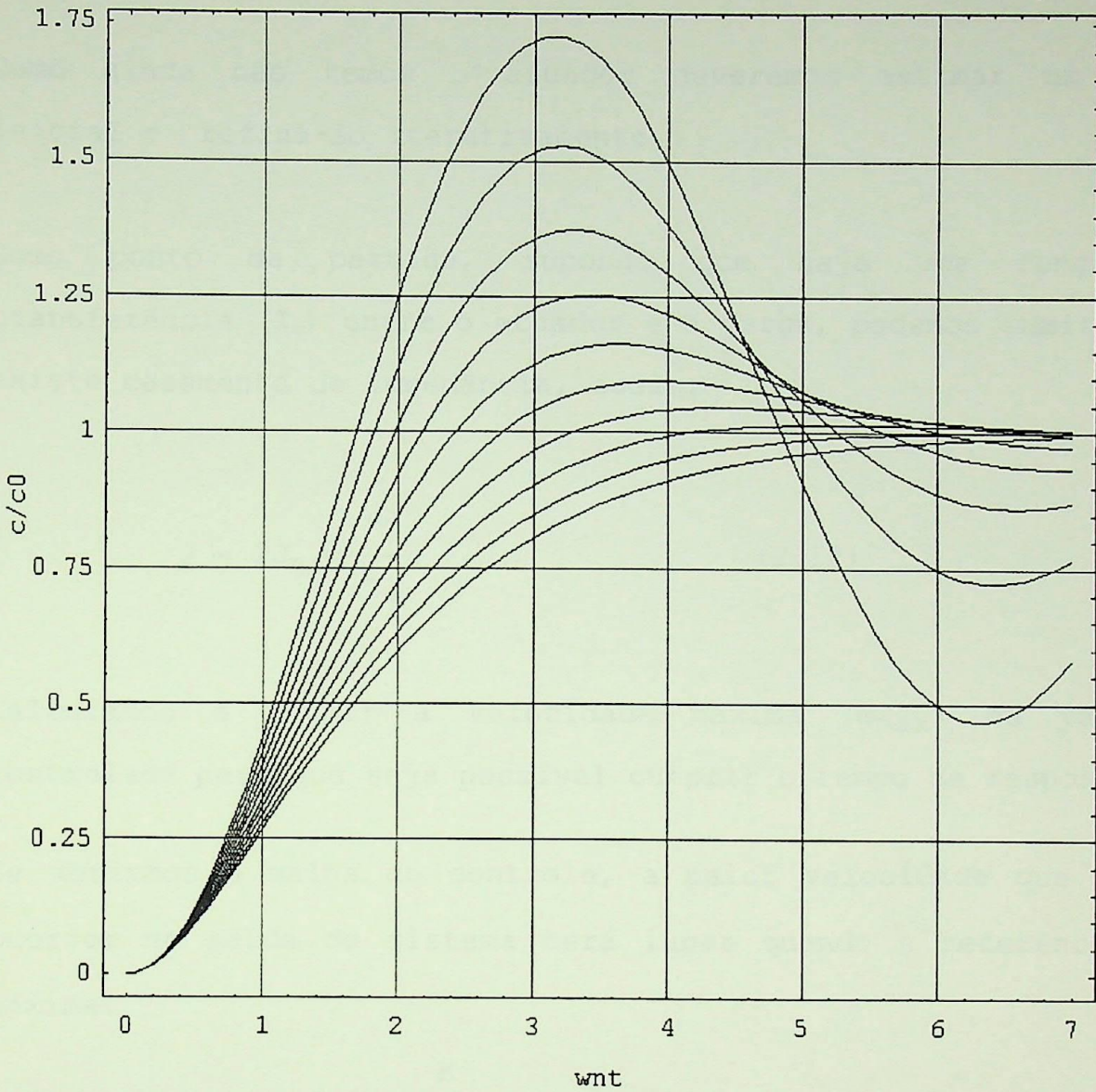
$t_a$  é o tempo de acomodação, isto é, o tempo necessário para que a variável controlada vá de 0 até entrar para não mais sair, numa faixa de mais ou menos 2% da variável controlada teórica.

$$t_a \cong 4/\xi\omega_n. \quad (2.8)$$

$t_p$  é o tempo de pico, isto é, o tempo necessário para que a variável controlada vá de 0 até o seu valor máximo.

$$t_p = \pi/\omega_n(1-\xi^2)^{0.5} \quad (2.9)$$

Figura 2.2 - Resposta ao degrau (Posicionador tipo 1 c/dois polos)



$t_r$  é o tempo necessário para que a variável controlada vá de 0 até 100% do seu valor final.

$$t_r = (\pi - \eta) / \omega_n (1 - \xi^2)^{0.5} \quad (2.10)$$

$$\eta = \arccos(\xi) \quad (2.11)$$

Para definir dimensionalmente o sistema, precisamos conhecer o valor de  $J$ , que representa a inércia total do sistema (carga+atuador).

Como ainda não temos o atuador deveremos estimar um valor inicial e refiná-lo iterativamente.

Como ponto de partida, supondo que haja uma função de transferência ( $T_m$ ) entre o atuador e a carga, podemos admitir que existe casamento de impedância, assim:

$$J = 2J_c = \frac{J_m}{T_m^2} + J_c \quad (2.12)$$

Calculamos a seguir a velocidade máxima ( $\omega_{\max}$ ) da variável controlada para que seja possível cumprir o tempo de resposta.

Se abrirmos a malha de controle, a maior velocidade que poderá ocorrer na saída do sistema terá lugar quando a referência for máxima:

$$\omega_{\max} = r_{\max} \frac{K}{Js + F} \quad (2.13)$$

Em regime permanente  $s = 0$  logo  $\omega_{\max} = r_{\max}(K/F)$  (2.14)

ou  $\omega_{\max} = r_{\max}(\omega_n/2\xi H)$  (2.15) ou  $\omega_{\max} = c_{\max}(\omega_n/2\xi)$  (2.16)

A potência do sistema será:  $W = T\omega$  (2.17)

sendo  $T = F\omega$  (2.18)

onde:  $T$  é o conjugado,  $F$  é o amortecimento e  $\omega$  é a velocidade.

Portanto:

$$W_{\max} = (\omega_{\max})^2 F = (C_{\max})^2 \frac{\omega_n^3}{2\xi} J \quad (2.19)$$

Uma vez determinada a inércia  $J$  do sistema e a potência do sistema de acionamento, podemos escolher entre os motores existentes, ou possíveis de ser construídos, o mais conveniente, observando-se apenas que, a menos das perdas nas transmissões de velocidade, deve haver a conservação da potência; portanto:

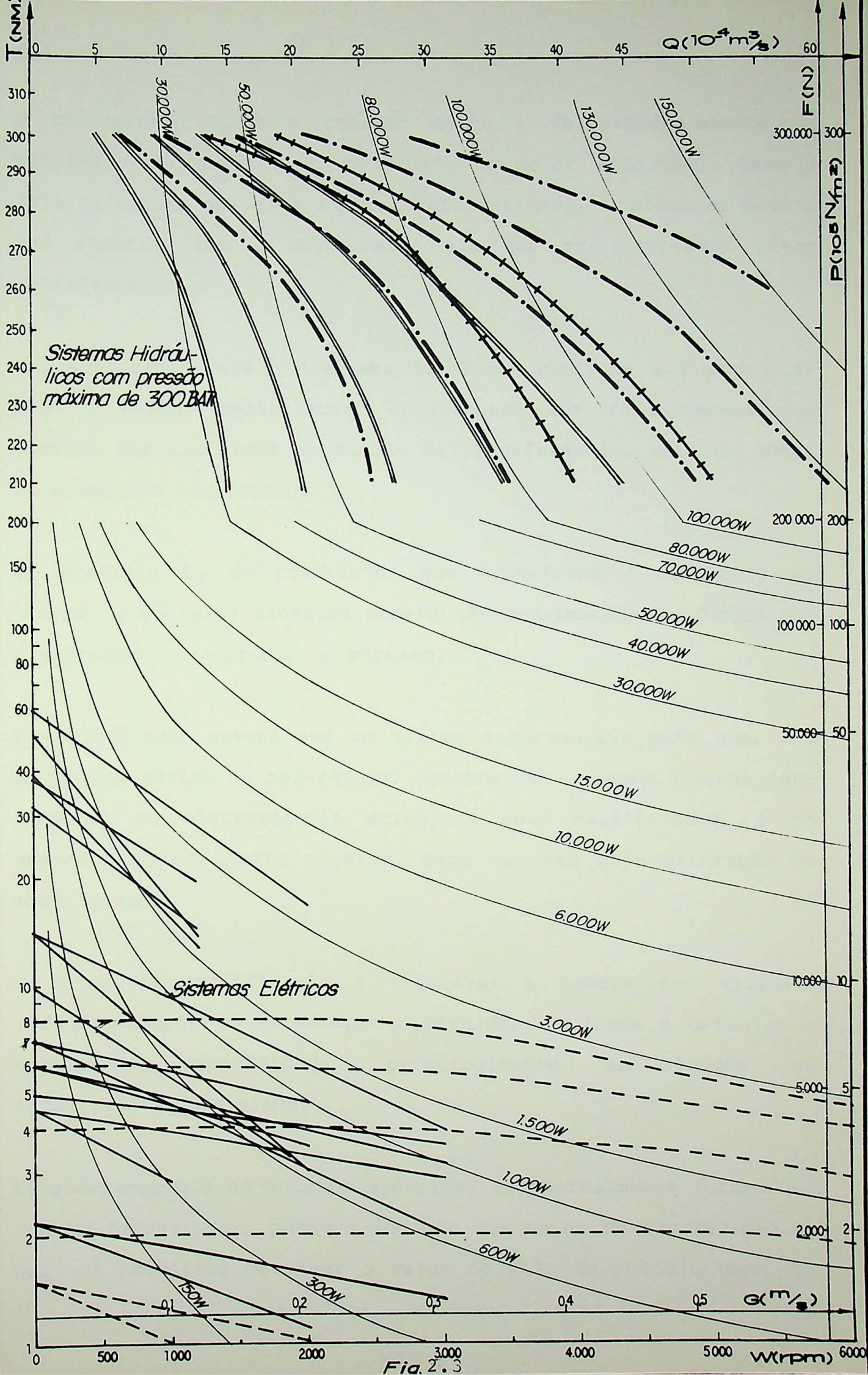
$$(\omega_{\max}) \cdot (\text{conjugado na variável controlada}) = (\omega_{\text{motor}}) \cdot (\text{conjugado do motor}) \quad (2.20)$$

Como proposta para facilitar a escolha de motores, a partir dos dados disponíveis nos catálogos [20-28], tanto elétricos como hidráulicos, poderemos construir o gráfico da figura 2.3.

Nesse gráfico traçamos também as curvas equipotenciais que nos permitirão escolher a velocidade mais adequada, bem como o motor que nessa velocidade forneça o conjugado necessário.

Uma vez escolhido o motor verificamos qual a sua inércia e recalculamos  $J$ :

$$J = \frac{J_m}{T_m^2} + J_C$$



A transmissão  $T_m$  é a relação entre a velocidade máxima da variável controlada e a velocidade do motor escolhido. Caso  $J$  seja diferente do valor inicialmente estimado, o processo deverá ser repetido com o novo valor até que os resultados sejam satisfatórios.

O posicionador terá o diagrama de blocos conforme a figura 2.4, onde o bloco "controlador" corresponde aos refinamentos que deverão ser incluídos na função de transferência, afim de obter o desempenho necessário.

A constante  $C_T$  do transdutor que transforma o movimento em tensão ou corrente elétrica poderá ser determinada em função dos componentes encontrados no mercado.

A amplificação deverá ser no mínimo a necessária para que, com um degrau máximo de referência, obtenha-se a tensão nominal para o motor ou eletroválvula acionados pelo amplificador, e no máximo o valor limite possível para que não haja saturação do amplificador.

O valor da amplificação é regulável e poderá ser ajustado definitivamente no protótipo construído, de forma a garantir o desempenho especificado, principalmente em função da estabilidade do sistema.

Considerando que os motores elétricos são normalmente fornecidos com um tacogerador, podemos incluir uma malha de amortecimento, que nos permitirá escolher o valor do pólo do posicionador, de

forma a compensar o sistema definitivo. Para os atuadores hidráulicos é usual fazer-se a correção no controlador.

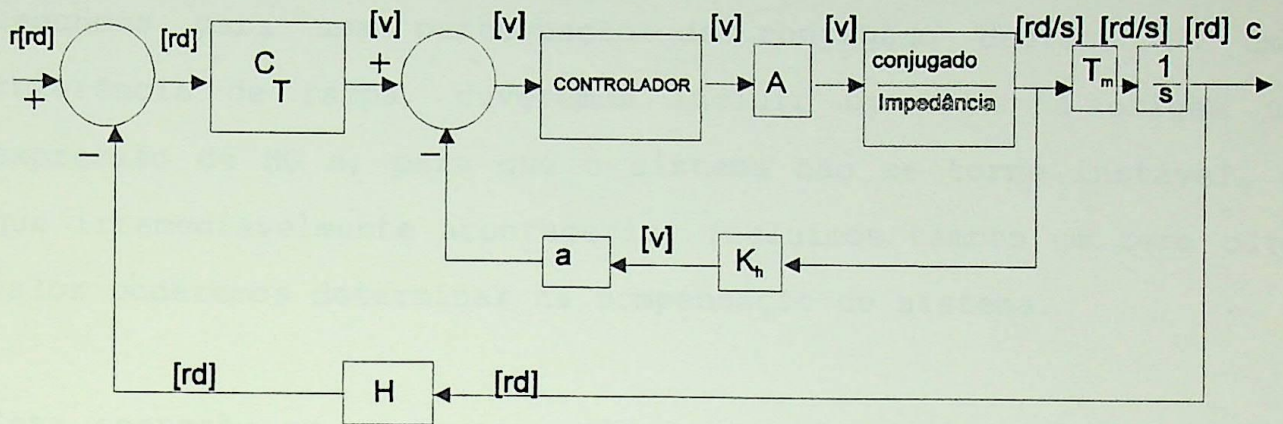


Figura 2.4 - Diagrama de Blocos do Posicionador

H é a realimentação e poderá representar uma função que transformará adequadamente o valor da variável controlada, o qual será comparado com a referência. No modelo de um posicionador tipo I com dois pólos o valor de H será considerado constante. O componente físico que executa a função de realimentação pode apresentar outras grandezas além de ângulo conforme indicado na figura 2.4, tanto para entrada como para saída, e naturalmente deverá ser inserido no diagrama de blocos de forma a respeitar a coerência entre as grandezas envolvidas. Matematicamente, no entanto, pode-se transformar o diagrama de blocos obtendo-se como resultado um diagrama equivalente, onde podemos comparar diretamente a referência e a variável controlada do sistema global na mesma grandeza como indicado.

## 2.2. ERRO ESTACIONÁRIO NULO PARA REFERÊNCIA RAMPA OU EFEITO ESTACIONÁRIO NULO PARA UMA PERTURBAÇÃO DEGRAU

Para cumprir a especificação de erro estacionário nulo em  $t$  segundos para uma perturbação de conjugado degrau, ou uma referência de rampa, deveremos incluir um pólo na origem na expressão de HG e, para que o sistema não se torne instável, o que irremediavelmente aconteceria, incluímos também um zero cujo valor poderemos determinar na compensação do sistema.

Essa operação em sistemas analógicos pode ser realizada com um amplificador operacional conforme indicado na figura 2.5, a seguir.

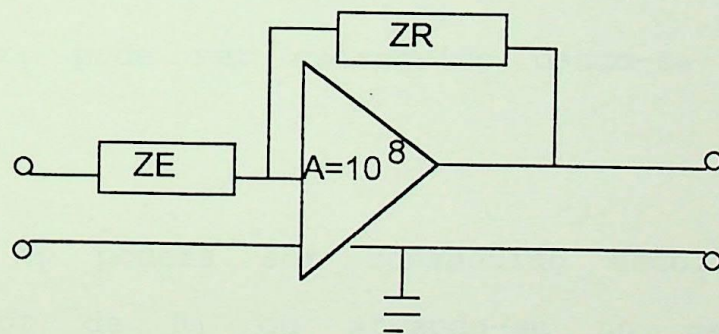


Figura 2.5 - Amplificador operacional (Controle integral)

$$Z_E = R_1 \quad (2.21)$$

e

$$Z_R = R_2 + 1/Cs \quad (2.22)$$

$$T_{Op} = R_2(s + 1/R_2C)/R_1s \quad (2.23)$$

A função de transferência de malha aberta final será:

$$HG_F = \frac{\frac{HK}{J}}{s(s + \frac{F}{J})} \cdot \frac{\frac{R_2}{R_1} (s + \frac{1}{R_2 C})}{s} \quad (2.24)$$

ou

$$HG_F = \frac{K_1 (s - z_1)}{s^2 (s - p_1)} \quad (2.25)$$

$$K_1 = \frac{HK}{J} \cdot \frac{R_2}{R_1} \quad (2.26)$$

$$p_1 = - \frac{F}{J} \quad (2.27)$$

$$z_1 = - \frac{1}{R_2 C} \quad (2.28)$$

Deveremos obter os valores de  $K_1$ ,  $z_1$  e  $p_1$  que façam o sistema cumprir as especificações impostas.

O valor obtido de  $z_1$  pode ser conseguido dando-se valores adequados para  $R_2$  e  $C$ .

O valor obtido de  $K_1$  poderá ser conseguido escolhendo-se adequadamente o valor de  $R_1$  ou atuando-se no ganho do amplificador.

O valor obtido de  $p_1$  pode ser conseguido atuando-se no amplificador da malha de amortecimento ou, se não for possível, incluindo-se um compensador cujo zero seja coincidente com o pólo do posicionador e cujo pólo seja o valor  $p_1$ .

Para compensar o sistema, isto é, obter os valores de  $K_1$ ,  $z_1$  e  $p_1$ , deveremos utilizar o método da resposta em frequência, pois

devido à presença de uma das raízes de  $(1+HG)$  próxima do par de pólos dominantes o método do lugar das raízes não será eficaz.

É necessário lembrar-se também que o amplificador operacional inverte o sinal da tensão de saída. Portanto, se o compensador adicional necessário para obter o valor de  $p_1$  for utilizado, a inversão do sinal ficará neutralizada, caso contrário deverá ser instalado um amplificador operacional adicional apenas para se inverter o sinal. Lembramos ainda que caso se trate de um sistema digital a expressão matemática necessária será simplesmente programada no microcomputador de controle, ou controlador programável.

Por outro lado, o efeito estacionário da perturbação pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$\Delta c_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot P(s) \cdot G_2(s)}{1 + HG(s)} \quad (2.29)$$

$P(s)$  é a transformada da perturbação; para uma perturbação degrau  $P_0$

$$P(s) = \frac{P_0}{s} \quad (2.30)$$

$G_2(s)$  é a função de transferência adiante da perturbação. Assim para o posicionador tipo I com dois pólos:

$$G_2(s) = \frac{1}{s(Js + F)} \quad (2.31)$$

e o efeito estacionário da perturbação será:  $\Delta c = \frac{P_0}{HK_1}$  (2.32)

Por sua vez, o efeito transitório para o sistema final, o qual deverá ser nulo após decorrido  $t$  segundos, poderá ser obtido pela expressão:

$$\Delta c = \frac{P(s) \cdot G_2(s)}{1 + HG(s)} \quad (2.33)$$

Portanto, substituindo  $HG(s)$  por  $HG_F$ , conforme (2.24), temos:

$$\Delta c = \frac{s-p_1}{s+F/J} \cdot \frac{P_0/J}{s^3-p_1s^2+K_1-K_1z_1} \quad (2.34)$$

poderemos simular no computador esse efeito.

A eliminação do erro no tempo especificado dependerá do valor de  $K_1$ , ou, mais especificamente, de  $R_2/R_1$ .

Como ponto de partida para uma primeira simulação podemos adotar o seguinte procedimento:

- Calcula-se a perturbação como uma percentagem  $\gamma$  do conjugado máximo. Como o conjugado máximo é dado por  $r_{\max} \cdot K$ , o efeito estacionário para o posicionador tipo I será:

$$\Delta c = \frac{r_{\max} \cdot K \cdot \gamma}{HK} = \gamma c_{\max} \quad (2.35)$$

- Aplica-se esse efeito como um degrau na entrada do controle integral.

- Calcula-se a antitransformada da saída do controle integral.

- Substitui-se  $t$  pelo valor especificado e impõe-se que essa saída seja igual à máxima tensão de entrada no amplificador.

- Obtém-se dessa forma o valor de  $\frac{R_2}{R_1}$  e portanto o valor de  $R_2$ .

- A seguir simula-se o efeito da perturbação, e, caso ainda não seja satisfatório, poderemos proceder a um ajuste final iterativamente.

$$E_{\text{amp}} = r_{\text{max}} C_T \frac{R_2}{R_1} \left( \frac{t}{R_1 C} + 1 \right) \quad (2.36)$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{E_{\text{amp}}}{r_{\text{max}} \cdot C_T \left( \frac{t}{R_1 C} + 1 \right)} \quad (2.37)$$

### 2.3. ERRO ESTACIONÁRIO LIMITADO

Quando a especificação não impõe que o erro estacionário para uma referência de rampa seja nulo, poderemos manter o tipo do sistema e atender à limitação eventualmente especificada através de um compensador de atraso de fase, que aumentará a constante  $K_1$  de erro estacionário, bem como atender às especificações transitórias através de um compensador de avanço de fase.

Os valores do pólo e do zero do compensador de atraso de fase devem ser tão baixos quanto praticamente exequível afim de afetar o menos possível a parte transitória da resposta.

Nesse caso a compensação poderá ser obtida tanto pelo método da resposta em frequência como por outros métodos.

## 2.4. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

O projetista deverá estar atento para o fato de que o sistema real, que foi dimensionado inicialmente como um posicionador tipo 1 com dois pólos, tem uma resposta física de acordo com os componentes escolhidos ou já existentes no sistema a ser controlado, em especial o motor, e que portanto não poderá apresentar um desempenho superior a essa resposta, ainda que a expressão matemática assim o indique.

A razão é que os sistemas considerados como lineares, na realidade não o são.

Teoricamente poderemos obter um sistema tão rápido quanto se queira, bastando para isso aumentarmos a amplificação e para que a ultrapassagem não aumente, aumentarmos correspondentemente o amortecimento.

Na prática isto significa apenas que haverá saturações dos componentes e que a resposta será, na melhor das hipóteses, a resposta que o motor pode oferecer.

No caso do controle integral, o método de compensação pela resposta em frequência conduz a um sistema cuja ultrapassagem é atendida, porém com tempo de resposta menor.

Para evitar as saturações conseqüentes poderemos ajustar o ganho do sistema, iterativamente, de modo a conseguir a resposta no tempo exatamente como especificado.

Isto poderá ser feito com um programa de computador que simula a resposta e, enquanto o tempo de resposta não for o especificado, altera por incrementos o valor do ganho, recalculando o pólo e o zero do compensador para uma nova simulação, e assim por diante, até que coincida o tempo de resposta com o valor especificado.

## CAPÍTULO 3

# COMPENSAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE EM MALHA FECHADA PELO MÉTODO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Nas seções 3.1 - 3.3 é feito um apanhado sobre o critério de Nyquist, os diagramas de Bode, a curva de Nichols e a carta de Nichols.

### 3.1. CRITÉRIO DE NYQUIST [29]

A função de transferência de um sistema de controle em malha fechada qualquer pode ser expressa pela equação de BLACK:

$$T = c/r = G/(1+HG) \quad (3.1)$$

Podemos calcular a variável controlada resultante da aplicação de uma referência qualquer utilizando as transformadas de Laplace.

A transformada de Laplace da variável controlada é igual ao produto da transformada de Laplace da referência pela função de transferência em função de  $s$ .

$G$  e  $H$  são funções de  $s$  e, para uma referência  $r=r_0 t^q$ , a transformada de Laplace da variável controlada será uma relação de dois polinômios.

Fatorando-se o denominador  $[1+HG(s)]$ , decompondo-se em frações parciais e antitransformando teremos:

$$C(t) = C_0 + R_{21}e^{s_1 t} + R_{31}e^{s_2 t} + \dots \quad (3.2)$$

Onde

$$C_0 = R_{11}t^q + R_{12}t^{(q-1)} + \dots + R_{1q}$$

$s_1; s_2; \dots$  são os pólos da função de transferência do sistema de controle em malha fechada.

Considerando-se que  $s_1; s_2; \dots$  são números complexos do tipo:

$$s_1 = \sigma_1 + j\omega_1; \quad s_2 = \sigma_2 + j\omega_2; \quad \text{etc.}$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned} C(t) = C_0 + R_{21}e^{\sigma_1 t} (\cos\omega_1 t + j\text{sen}\omega_1 t) + \\ + R_{31}e^{\sigma_2 t} (\cos\omega_2 t + j\text{sen}\omega_2 t) + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

para valores de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ , menores que zero, as parcelas da variável controlada, com exceção da primeira, tendem a zero com o tempo e a variável controlada tenderá ao valor da primeira parcela, que neste caso podemos denominar de valor final da variável controlada.

Porém, para pelo menos um dos valores de  $\sigma$  positivo, o transitório correspondente crescerá e a variável controlada tenderá para infinito com o tempo.

Dizemos nesse caso que o sistema é instável. Podemos, portanto, verificar a estabilidade de um sistema, observando o sinal da parte real dos pólos da função de transferência: se pelo menos uma delas for positiva, o sistema será instável.

A dificuldade reside no fato de que o denominador da função de transferência  $1+HG(s)$  não se apresenta fatorado, sendo necessário, portanto, resolvê-lo.  $1+HG(s)$  é, por sua vez, uma relação de dois polinômios.

Sua expressão fatorada seria:

$$1+HG(s) = \frac{K(s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)} \quad (3.4)$$

Onde:  $s_1, s_2, s_3, \dots$  são os valores dos zeros de  $1+HG(s)$

e  $p_1, p_2, p_3, \dots$  são os valores dos pólos de  $1+HG(s)$

Se fizermos  $s=j\omega$  e variarmos  $\omega$  desde  $-\infty$  até  $+\infty$  (percorrendo todo o eixo imaginário no sentido crescente) e fecharmos o contorno com raio infinito no sentido horário (Figura 3.1) envolveremos todos os pólos e zeros de  $1+HG(s)$  que possuem parte real positiva.

Chamaremos de  $Z$  o número de zeros de  $1+HG(s)$  que tem parte real positiva e de  $P$  o número de pólos de  $1+HG(s)$  que tem parte real positiva.

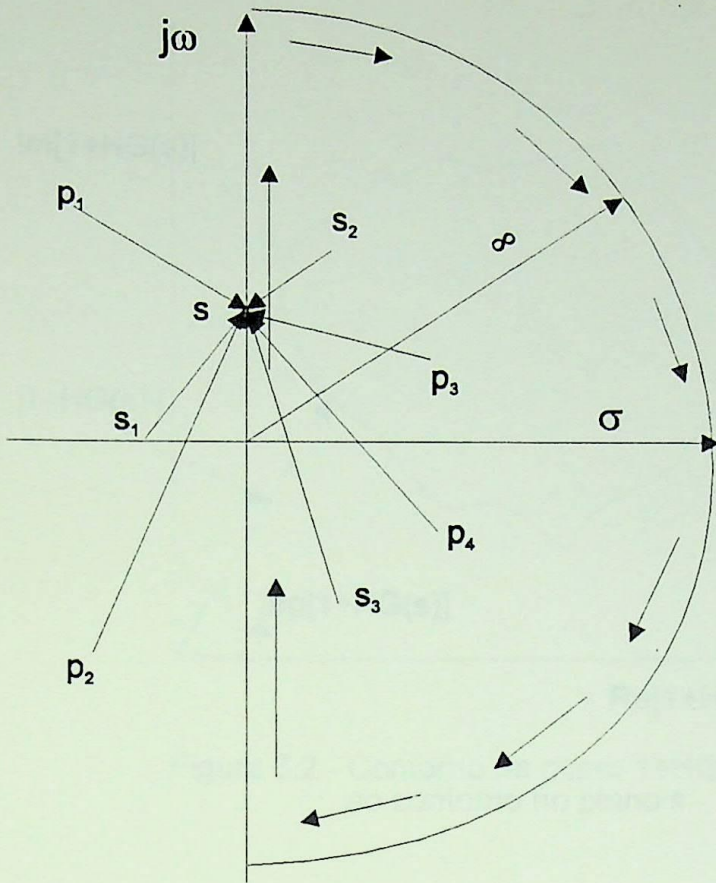


Figura 3.1 - Contorno da parte direita do plano s

Se traçarmos a função  $1+HG(s)$  correspondente, em coordenadas polares, para esses valores de  $s$ , figura 3.2, teremos igualmente um contorno, visto que retornaremos ao ponto de partida.

Sendo  $1+HG(s)$  um número complexo com um módulo e um argumento, podemos representá-lo por um vetor desde a origem, até o ponto do contorno correspondente ao valor de  $\omega$  considerado.

Portanto:

$$|1+HG(s)| = \frac{K \cdot \prod |s-s_i|}{\prod |s-p_i|} \quad (3.5)$$

$$\arg[1+HG(s)] = \sum \arg[s-s_i] - \sum \arg[s-p_i] \quad (3.6)$$

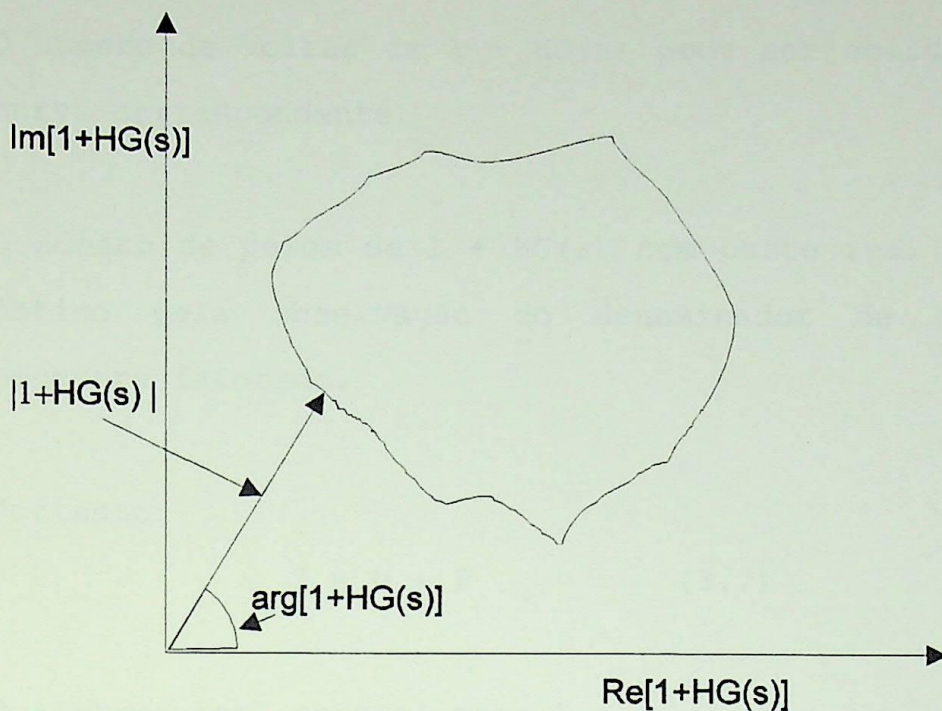


Figura 3.2 - Contorno no plano  $1+HG(s)$  correspondente ao contorno no plano  $s$

Se percorrermos então o contorno mencionado no plano  $s$  (figura 3.1) no sentido horário, que envolve toda a parte direita do plano  $s$ , observamos que ao longo de nosso movimento os argumentos elementares de  $1+HG(s)$  variam, dando em cada ponto um argumento resultante. Porém ao retornarmos ao ponto de partida, completando o contorno, observamos que a cada pólo ou zero contidos no contorno do plano  $s$  terá correspondido uma volta ( $360^\circ$ ) no sentido antihorário ou horário respectivamente; porém, para os pólos e zeros existentes fora do contorno do plano  $s$  a contribuição terá sido nula.

O número de voltas do vetor  $1+HG(s)$  em torno da origem no sentido horário terá sido portanto, igual ao seu número de zeros na parte direita do plano  $s$  menos o seu número de pólos na parte direita do plano  $s$ , isto é,  $N = Z - P$ .

O número de voltas de  $1 + HG(s)$  pode ser obtido pelo traçado da curva correspondente.

O número de pólos de  $1 + HG(s)$  com parte real positiva pode ser obtido pela observação do denominador de  $HG(s)$  que já se encontra fatorado.

Portanto:

$$Z = N + P \quad (3.7)$$

O sistema será estável para  $Z = 0$ .

Por conveniência podemos traçar a curva correspondente a  $HG(s)$ , o que significa deslocar a curva de  $1 + HG(s)$  para a esquerda de uma unidade. Naturalmente a origem do vetor  $HG(s)$  será o ponto  $(-1)$  para o qual deverá ser voltada a atenção.

Observe-se que bastará haver uma volta, no traçado do diagrama de NYQUIST, no sentido horário, em torno do ponto  $(-1)$  para que o sistema seja instável.

Podemos ainda estabelecer a seguinte regra prática: Ao percorrermos o contorno de  $HG(j\omega)$  no sentido de  $\omega$  crescente, o sistema será estável se, ao passarmos pelo ponto  $(-1)$ , sem que nenhum outro contorno se interponha entre ele e nós, o vemos à nossa esquerda. O sistema será instável no caso contrário.

No caso de  $HG(s)$  apresentar pólos na origem, o traçado ficará indeterminado para  $\omega=0$ , sendo necessário então levantar essa

indeterminação, pois para aplicação do critério de Nyquist será necessário obter o contorno completo. Para isso tomamos o cuidado de não passar diretamente por  $\omega=0$ , mas sim contornando a origem, no sentido anti-horário, com um pequeno círculo de raio  $\rho$ .

A equação do círculo será:

$$s = \rho e^{j\theta} \quad (3.8)$$

Onde  $\rho$  é infinitesimal e  $\theta$  varia de  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$  no sentido anti-horário.

Teremos, próximo de  $\omega=0$ :

$$HG = (K/\rho^m) \cdot e^{-jm\theta} \quad (3.9)$$

onde  $m$  é o número de pólos, na origem, de  $HG(j\omega)$ .

Portanto, ao fazermos tender  $\rho$  para 0, o contorno de  $HG$  será completado por um semicírculo ou círculo de raio infinito no sentido horário.

### 3.2. DIAGRAMAS DE BODE [29]

Dada uma função de transferência em  $s$ , podemos aplicar-lhe a transformada de uma referência e obter, após a transformação inversa, a correspondente variável controlada em função do tempo.

Quando a referência escolhida é uma função coseno, podemos somar-lhe uma parcela imaginária igual a uma função seno multiplicada por  $j$ .

Considerando-se a fórmula de Moivre, teremos uma referência do tipo  $e^{st}$ , onde  $s = j\omega$ .

$$r = r_0 \cos \omega t$$

$$r_c = r_0 (\cos \omega t + j \sin \omega t) = r_0 e^{j\omega t} \quad (3.10)$$

Com essa consideração, não será necessário usar as transformadas de Laplace e a variável controlada será dada pela expressão:

$$c(t) = \text{Re}[r_0 e^{j\omega t} T(j\omega)] \quad (3.11)$$

Nota-se, por outro lado, que a função de transferência  $T(j\omega)$ , que é do tipo relação de dois polinômios fatorados, é um número complexo, e que, portanto, tem um módulo e um argumento.

$$T(j\omega) = |T(j\omega)| e^{j\theta} \quad (3.12)$$

logo:

$$C(t) = r_0 |T(j\omega)| \cos(\omega t + \theta) \quad (3.13)$$

donde

$$C(t)/r_0 = |T(j\omega)| \cos(\omega t + \theta) \quad (3.14)$$

Logo, em regime permanente, para uma entrada cosenoidal, a variável controlada também o será, porém defasada do ângulo  $\theta$ .

O módulo da variável controlada será o módulo da função de transferência multiplicado pela amplitude da referência.

Podemos portanto, traçar, em coordenadas cartesianas, o módulo e a fase de  $T(j\omega)$  em função da frequência, obtendo assim o valor da relação entre a amplitude da variável controlada e a amplitude da referência, bem como a defasagem entre a variável controlada e a referência.

A essas duas curvas dá-se o nome de diagramas de Bode.

O módulo será representado em dB ( $20 \log |T(j\omega)|$ ).

Quando a função, que estivermos considerando, for a função de transferência de malha aberta HG de um sistema de controle, e visto que  $HG(j\omega)$  é o próprio contorno de NYQUIST, podemos relacionar as curvas de Bode ao diagrama de Nyquist; para isso fazemos o argumento (-180 graus) coincidir com 0 dB, valores esses que correspondem ao ponto (-1) do diagrama de Nyquist. Desta forma poderemos observar a estabilidade do sistema pelas

curvas de Bode (Figura 3.3). Na frequência em que a curva de módulo cruzar o ganho de 0 dB, a fase deverá ser superior a  $(-180^\circ)$ , para que o sistema seja estável.

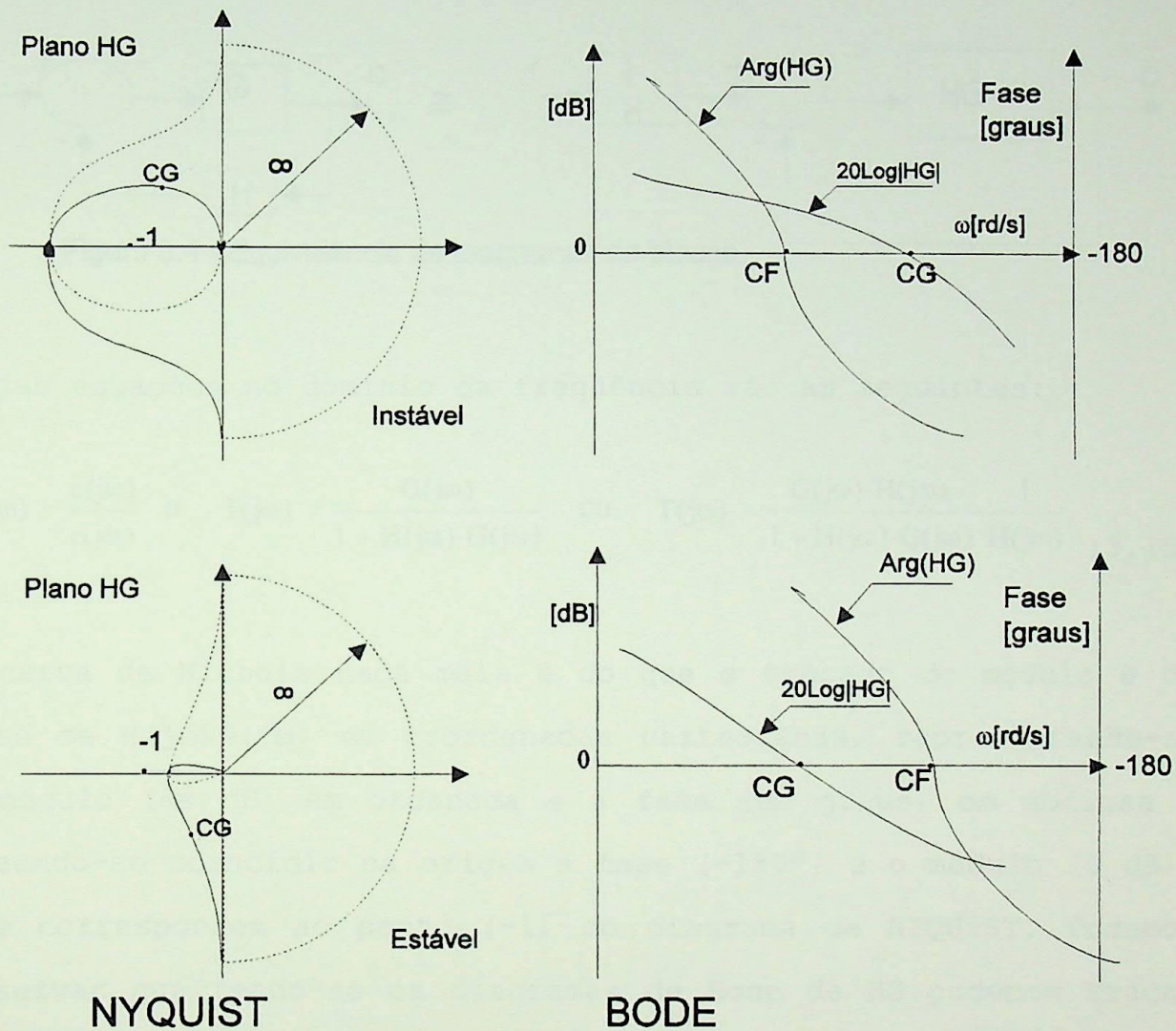


Figura 3.3 - Critério de Estabilidade

### 3.3. CURVA DE NICHOLS E CARTA DE NICHOLS [1]

O diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada pode ser representado como na figura 3.4.

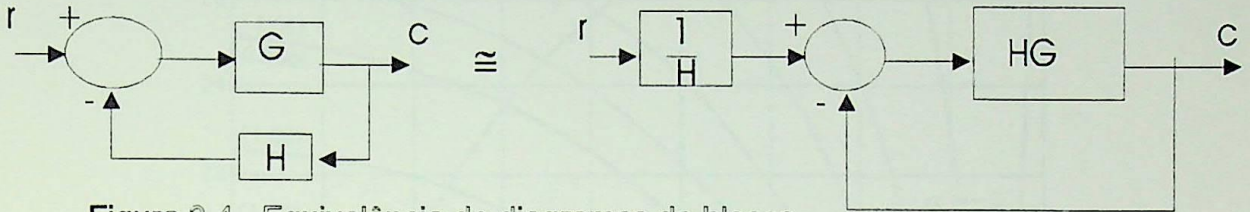


Figura 3.4 - Equivalência de diagramas de blocos

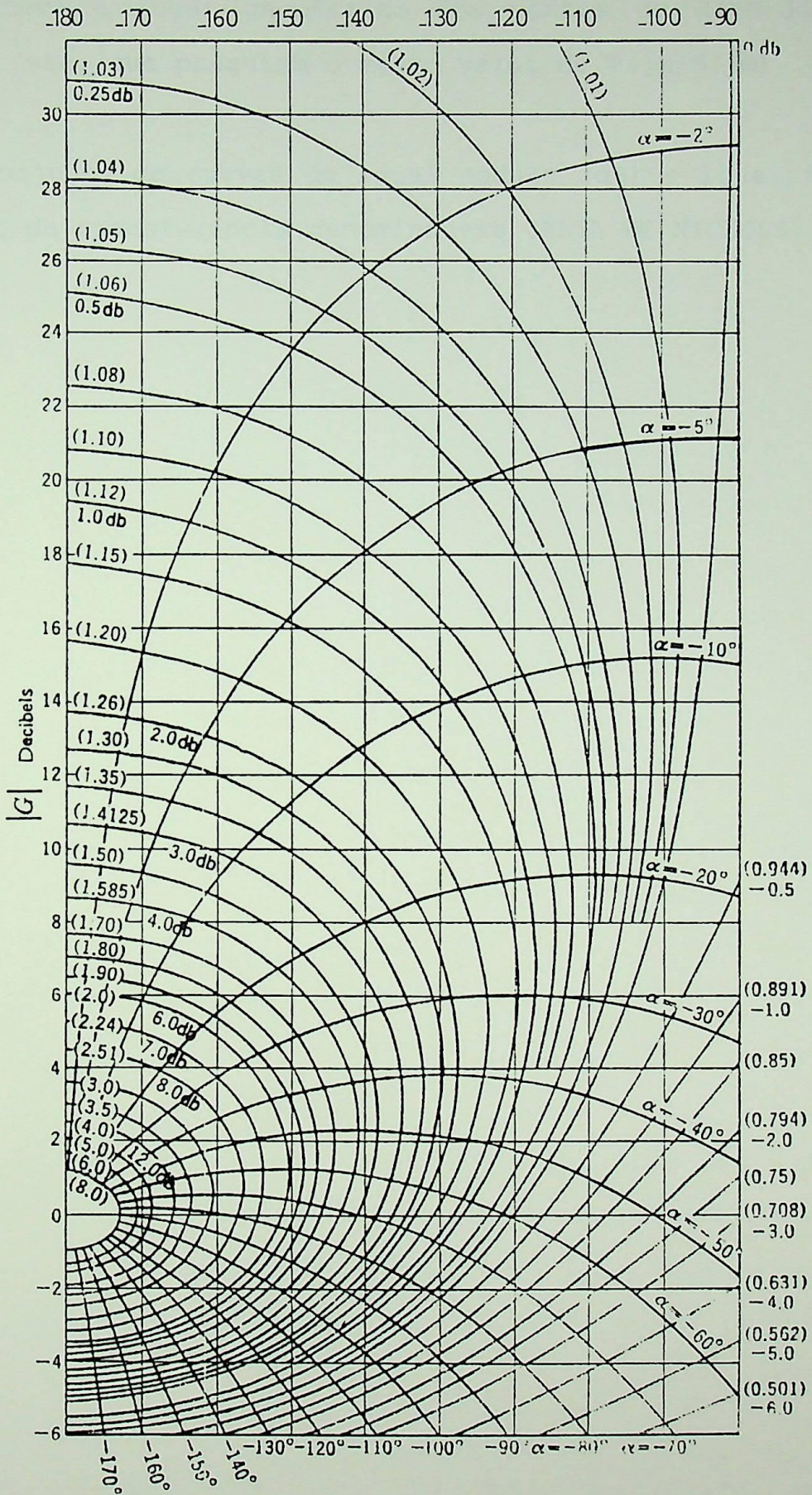
Cujas equações no domínio da frequência são as seguintes:

$$T(j\omega) := \frac{c(j\omega)}{r(j\omega)} \quad \text{e} \quad T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + H(j\omega) \cdot G(j\omega)} \quad \text{ou} \quad T(j\omega) = \frac{G(j\omega) \cdot H(j\omega)}{1 + H(j\omega) \cdot G(j\omega)} \cdot \frac{1}{H(j\omega)} \quad (3.15)$$

A curva de Nichols nada mais é do que o traçado do módulo e da fase de  $H(j\omega)G(j\omega)$  em coordenadas cartesianas, representando-se o módulo (em dB) em ordenada e a fase (em graus) em abcissa e fazendo-se coincidir na origem a fase ( $-180^\circ$ ) e o módulo (0 dB), que correspondem ao ponto (-1) do diagrama de NYQUIST. Podemos observar que tendo-se os diagramas de Bode de HG podemos traçar de imediato a curva de NICHOLS.

No mesmo sistema de coordenadas, NICHOLS estabeleceu a correspondência entre a função de transferência de malha aberta  $H(j\omega)G(j\omega)$  de um sistema de controle em malha fechada e o produto de sua função de transferência total ( $T(j\omega)$ ) pela realimentação  $H(j\omega)$  (figura 3.5).

FASE DE G



CARTA DE NICHOLS

Figura 3.5

Assim obtive o lugar geométrico dos pontos de  $H(j\omega)G(j\omega)$ , em módulo e fase, que possuíam o mesmo valor de  $T(j\omega)H(j\omega)$ .

A esse conjunto de curvas de igual módulo (dB) e igual fase ( $^{\circ}$ ) da função de transferência denominou-se CARTA DE NICHOLS.

### 3.4. COMPENSAÇÃO DE UM SISTEMA DE CONTROLE EM MALHA FECHADA LINEAR PELO MÉTODO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Conforme já mencionado, após o dimensionamento dos componentes do sistema e estabelecida a sua função de transferência, será necessário compensá-lo para que ele apresente a resposta desejada. Para isso são deixados pontos de ajustagem estratégicos que permitem obter os valores adequados dos parâmetros envolvidos. Muitas vezes, no entanto, tal procedimento não é suficiente, sendo necessário a instalação de compensadores adicionais.

Os compensadores apresentam a seguinte configuração:

$$T_C = A_C (s - z_C) / (s - p_C) \quad (3.16)$$

$A_C$  é a amplificação,  $z_C$  é o zero e  $p_C$  é o pólo do compensador.

Normalmente os compensadores são passivos, e por essa razão seus pólos e zeros são negativos.

Os compensadores podem adiantar a fase quando o zero, em valor absoluto, for menor do que o pólo ou podem atrasar a fase no caso contrário e, por isso, são chamados de compensadores de avanço de fase ou compensadores de atraso de fase.

Na compensação de um sistema, poderão ser usados mais de um compensador devidamente combinados para atingir o desempenho especificado.

O método da resposta em frequência [14] permite que se obtenha graficamente, com auxílio carta de Nichols e dos diagramas de Bode, o compensador que garante os valores do pico e da frequência de ressonância para um sistema qualquer.

Não é possível, no entanto, a partir desses valores e para um sistema qualquer, atender com precisão uma especificação no domínio do tempo, por exemplo, para um referência "degrau".

Tendo em vista que, freqüentemente, as especificações são estabelecidas em função das figuras de mérito para um resposta a uma referência "degrau" adotaremos, como ponto de partida, a suposição de que um sistema qualquer que possua o mesmo valor do pico de ressonância  $M_r$ , na mesma frequência de ressonância  $\omega_r$  que um posicionador tipo I com dois pólos, que por sua vez, atenda as especificações transitórias no domínio do tempo impostas pelo cliente, terá um comportamento aproximadamente semelhante. No capítulo 4 a correlação entre  $M_p$  e  $M_r$  para sistemas quaisquer será melhor avaliada.

Para o posicionador tipo I com dois pólos, e para uma entrada senoidal, a frequência e o pico de ressonância são dados por:

$$\omega_r = \omega_n (1 - 2\xi^2)^{0.5} \quad (\text{frequência de ressonância}) \quad (3.17)$$

$$M_r = (2\xi(1 - \xi^2)^{0.5})^{-1} \quad (\text{valor do pico de ressonância}) \quad (3.18)$$

A relação com a ultrapassagem, tempo de subida, tempo de acomodação, tempo de pico e tempo de resposta podem ser estabelecidas de forma indireta através dos parâmetros  $\xi$  e  $\omega_n$  de acordo com as relações: 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 e 2.11 respectivamente.

Para a compensação, traçamos inicialmente a curva de Bode de HG do sistema a ser compensado, e sobre a carta de NICHOLS a curva de NICHOLS correspondente. Observamos na carta de NICHOLS a forma que poderá ter o sistema já compensado, em função do compensador que desejamos utilizar e estimamos o ponto sobre a curva de  $20\log|T|$  de decibéis constantes igual a  $M_r$ , que será o ponto de tangência da curva de NICHOLS do sistema compensado. Não poderá ocorrer o cruzamento com a linha de  $M_r$ , pois isto significaria que  $20\log|T|$  teria ultrapassado o valor de  $M_r$ .

A seguir, basta ler os valores de ganho e de fase do ponto estimado e levá-los à curva de BODE do sistema na frequência de ressonância  $\omega_r$ .

O sistema compensado deverá passar por esses pontos, isto é, a curva de fase deverá passar pelo valor da fase determinado e a curva de ganho deverá passar pelo valor do ganho determinado, para  $s = j\omega_r$ .

Comparando-se com a curva de BODE do sistema a ser compensado, determinamos quais serão a fase ( $\alpha$ ) e o ganho de  $HG(j\omega_r)$  que o compensador deverá ter.

A partir da expressão do compensador, substituindo-se  $s$  por  $j\omega_r$ , temos:

$$\alpha = \arctg(\omega_r/(-z_C)) - \arctg(\omega_r/(-p_C)) \quad (3.19)$$

$$\text{ou } \operatorname{tg}\alpha = (z_C - p_C)/2\omega_r \quad (3.20)$$

Para que o ponto de máxima fase do compensador seja em  $\omega_r$ , e impondo-se o valor de  $\alpha$  conforme necessário temos:

$$\omega_r^2 = p_C \cdot z_C \quad (3.21)$$

Resolvendo o sistema de equações teremos:

$$z_C = -\omega_r/f(\alpha) \quad (3.22) \quad \text{e} \quad p_C = -\omega_r \cdot f(\alpha) \quad (3.23)$$

$$\text{sendo } f(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha + (\operatorname{tg}^2\alpha + 1)^{0.5} \quad (3.24)$$

Para se calcular o amplificador do compensador,  $A_C$ , aplicamos o compensador ao HG do sistema, e para que ele passe pelo ponto de ganho determinado, basta fazer com que o módulo de  $HG_F$  com  $s=j\omega_r$  seja igual ao módulo do ponto determinado.

Se o argumento  $\alpha$  necessário do compensador for muito grande, poder-se-á usar dois ou mais compensadores.

Como o ponto de tangência foi estimado, após a obtenção do compensador se deverá traçar a nova curva de NICHOLS e ajustá-la iterativamente até que a mesma seja de fato tangente à curva de  $M_r$ .

Esse ajuste poderá ser feito traçando-se a curva de NICHOLS sobre papel transparente, que sobreposto à carta de NICHOLS, poderá ser deslocado verticalmente, o que equivale a mudar o ganho, até que a tangência seja verificada.

A resposta no tempo poderá ser obtida por simulação do sistema com a referência especificada.

Eventuais diferenças poderão ser corrigidas atuando-se no amplificador e no amortecimento do sistema, os quais são propositadamente ajustáveis.

A simulação poderá ser feita por computador, existem vários "softwares" com essa finalidade.

Essa simulação corresponde à aplicação da transformada de LAPLACE de um degrau, à função de transferência do sistema em função de  $s$ , decompondo a expressão em frações parciais e a seguir, antitransformando-a para obter a variável controlada, que é plotada em um gráfico, para ser melhor analisada.

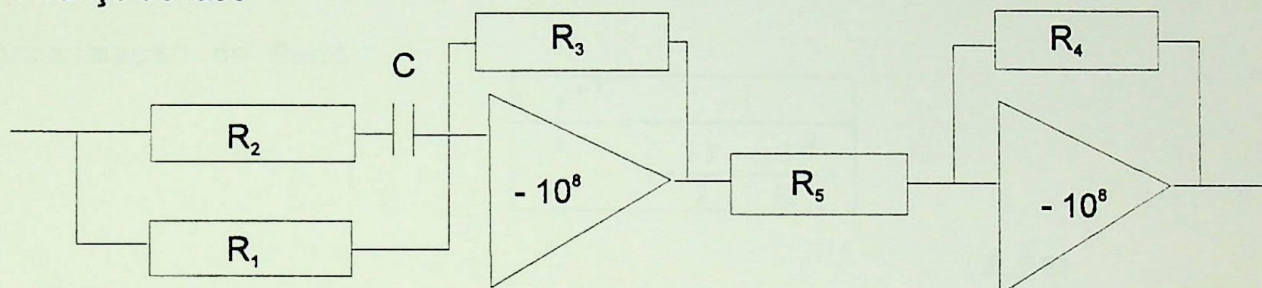
Uma vez determinado o pólo, o zero e a amplificação do compensador poderemos dimensioná-lo e instalá-lo na entrada do amplificador principal.

Fisicamente esse compensador poderá ser obtido para um sistema analógico com amplificadores operacionais que poderão ter as configurações indicadas na figura 3.6.

O segundo amplificador visa apenas recuperar o sinal.

Para um sistema discreto, a implementação consistirá apenas em programar em "assembler" o controlador com o algoritmo correspondente à expressão da função de transferência do compensador determinado.

Avanço de fase



Atraso de fase

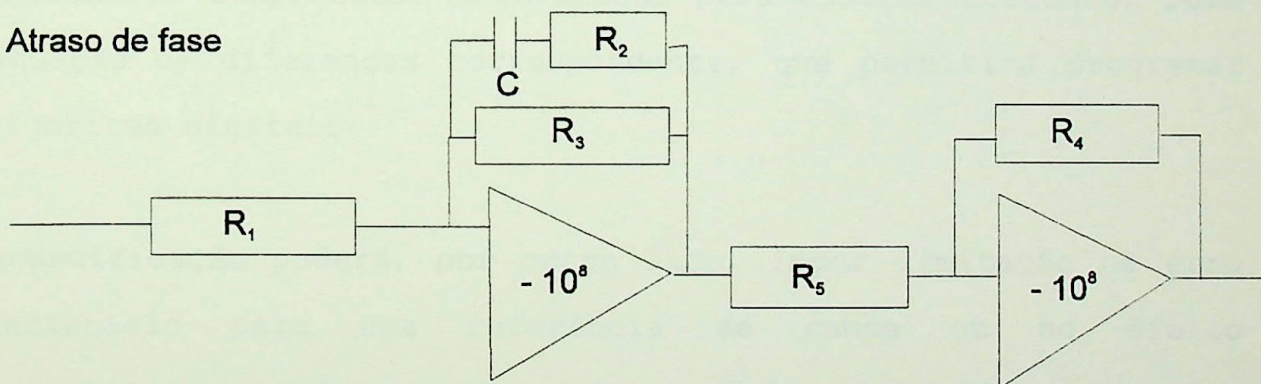


Figura 3.6 - Compensadores Analógicos

Neste caso, a frequência de amostragem do controlador deverá ser da ordem de dez vezes a frequência limite da faixa de operação do sistema, para evitar erros de "Aliasing".

Por outro lado, considerando a função de transferência do sustentador de ordem zero (ZOH) e a aproximação de Padé, para valores altos de frequência de amostragem, e, portanto, períodos pequenos, o sistema poderá ser tratado como contínuo, sendo válidas, aproximadamente, as expressões com transformadas de Laplace.

$$\text{ZOH} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (3.25)$$

aproximação de Padé

$$\frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx \frac{1}{1 + \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{12}}$$

(3.26)

O "software" SAPIC[19] desenvolvido pela UFSC converte a expressão do compensador determinado para sistema contínuo, para a equação de diferenças correspondente, que permitirá programar o algoritmo digital.

A especificação poderá, por outro lado, impor limitação no erro estacionário para uma referência de rampa ou no efeito estacionário causado por uma perturbação degrau aplicada à saída do sistema.

O erro estacionário para a referência de rampa é dado por:

$$\Delta_C = -r_0 / H^2 K_1 \quad (3.27)$$

onde:

$r_0$  é o coeficiente angular da referência e  
 $K_1$  é o ganho do sistema aberto.

O efeito estacionário da perturbação é dado por:

$$\Delta c_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} (sP(s)G_2(s)/(1+HG(s))) \quad \text{conforme (2.29)}$$

$$G_2 = \frac{1}{s(J \cdot s + F)} \quad \text{conforme equação (2.31)}$$

Para uma perturbação degrau temos:

$$P(s) = P_0/s$$

onde  $P_0$  é a amplitude do degrau. Substituindo temos:

ou

$$\Delta c_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s \cdot \frac{P_0}{s} \cdot \frac{1}{s(J \cdot s + F)}}{1 + HG_1(s) \cdot \frac{1}{s(J \cdot s + F)}} \right]$$

$$\Delta c_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{P_0}{s(J \cdot s + F) + HG_1(s)} \right]$$

Sendo:

$$G_1 = \frac{K \cdot (s - z_1) \cdot (s - z_2) \dots}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \dots}$$

ou

$$G_1 = \frac{K \cdot (-z_1) \cdot (-z_2) \cdot (-z_3) \cdot \left(\frac{s}{-z_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{s}{-z_2} + 1\right) \dots}{(-p_1) \cdot (-p_2) \cdot (-p_3) \cdot \left(\frac{s}{-p_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{s}{-p_2} + 1\right) \dots}$$

Então:  $\Delta c_{\infty} = P_0 / HK_1$  conforme indicado em (2.32).

$G_2$  é o ganho a partir do ponto de aplicação da perturbação e  $K_1$  contém apenas os pólos e zeros de  $G_1$  (ganho anterior ao ponto de

aplicação da perturbação). Podemos, portanto, calcular qual o valor de  $K_1$  que determina, para o erro ou efeito estacionário, o valor especificado. Determinamos dessa forma a amplificação necessária, que, no entanto, só poderá existir para frequências baixas, para não prejudicar a resposta transitória do sistema. Introduce-se para isso um compensador de atraso de fase com a amplificação adicional determinada e com o pólo e o zero suficientemente pequenos para que a resposta transitória não seja alterada.

### 3.5. EXEMPLOS DE COMPENSAÇÃO DE SISTEMAS

#### Exemplo nº 1

Após o dimensionamento de um sistema chegou-se finalmente à seguinte expressão da função de transferência de malha aberta:

$$HG = 0,3 / [s(s+0,4)(s+2,5)] \quad \text{sendo } H=0,2$$

O sistema deverá atender as seguintes especificações:

- a) para uma referência degrau de 2 rd a ultrapassagem deve ser  $M_p = 120\%$  e o tempo de acomodação  $t_a = 7,2s$ ,
- b) Apresentar um erro estacionário máximo, para uma referência de rampa  $r = 3t$  de  $-3rd$ .

#### Compensação:

##### a) Cálculo de $\xi$ e $\omega_n$

de acordo com a equação (2.6)

$$\xi = 0,4559$$

e de acordo com (2.8)

$$\omega_n = 1,21528$$

**b) Cálculo de  $\omega_r$  e  $M_r$  do posicionador de 2ª ordem**

de acordo com (3.17)

$$\omega_r = 0,929$$

e com (3.18)

$$M_r = 1,8132 \text{ dB } (1,23224)$$

O valor do pico de ressonância indica de quanto aumenta o valor da variável controlada na frequência de ressonância em relação ao seu valor em baixa frequência. Como a realimentação é igual a 0,2, o valor da relação entre o pico de ressonância e a amplitude da referência será:  $20\log(1/0,2) + 1,8132$  [dB].

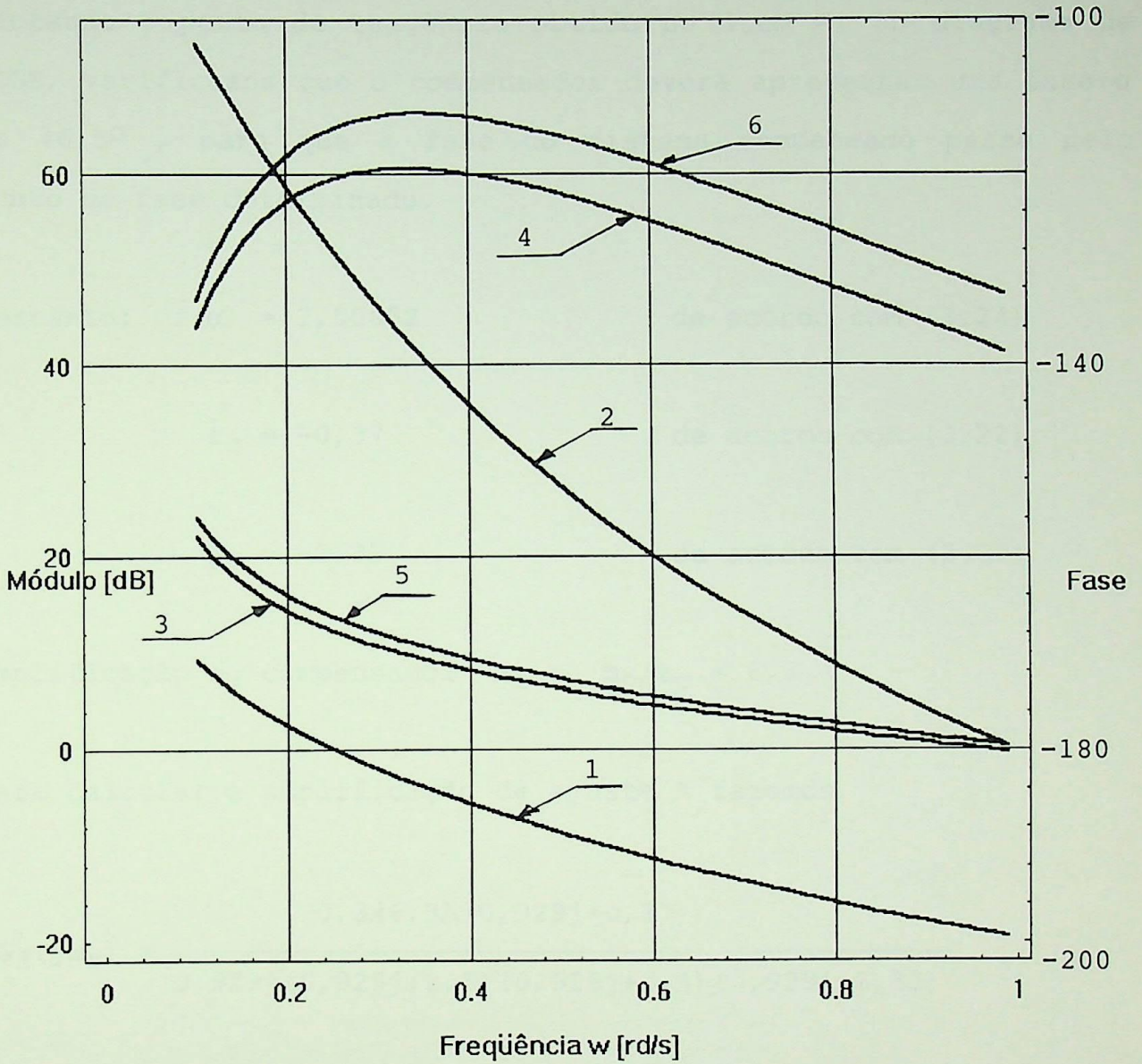
**c) Diagramas de BODE**

Os diagramas de BODE (ganho e fase) foram traçados na figura 3.7 indicadas pelos números 1 e 2 respectivamente.

**d) Curva e Carta de NICHOLS**

A curva de NICHOLS foi traçada em linha pontilhada sobre a carta de NICHOLS (figura 3.8).

Figura 3.7 - Diagramas de Bode (Exemplo 1)



e) Estimativa do ponto de tangência

Pelo tipo da curva de NICHOLS podemos estimar o ponto (x) de tangência do HG final com a curva de Mr.

Temos:  $HG_F = -130^\circ$  e  $20 \log |HG_F| = 1 \text{ dB}$  ou  $|HG_F| = 1,122$

f) Determinação do compensador (1ª tentativa)

Plotando o ponto de tangência obtido no item e, no diagrama de BODE, verificamos que o compensador deverá apresentar uma fase  $\alpha$  de  $46,5^\circ$ , para que a fase do sistema compensado passe pelo ponto de fase determinado.

portanto:  $f(\alpha) = 2,50652$  de acordo com (3.24)

$$z_C = -0,37 \quad \text{de acordo com (3.22)}$$

$$p_C = -2,33 \quad \text{de acordo com (3.23)}$$

amplificação do compensador  $A_C = p_C/z_C = 6,3$

para calcular a amplificação de ajuste A fazemos

$$HG_F(j\omega_r) = \frac{0,3 \times 6,3A(0,929j+0,37)}{0,929j(0,929j+2,5)(0,929j+0,4)(0,929j+2,33)}$$

$$|HG_F(j\omega_r)| = 1,122 \quad \text{donde resulta } A=3,737$$

O compensador será portanto

$$T_{\text{comp}} = 23,542(s+0,37)/(s+2,33)$$

FASE DE G

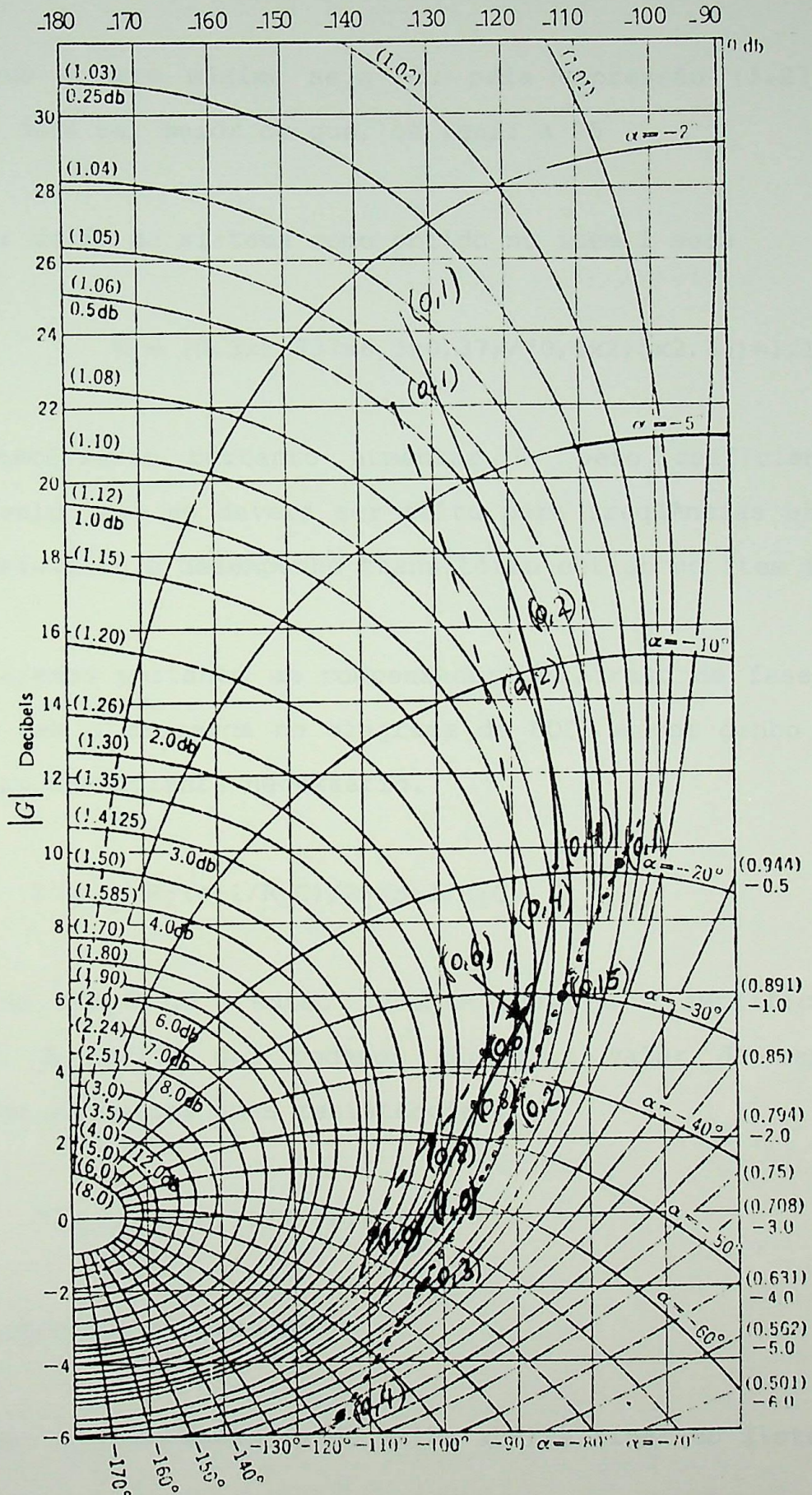


Figura 3.8 - Exemplo 1

### g) Compensação do erro estacionário

para que o erro máximo seja -3, pela expressão (3.27) obtemos que  $K_1$  deve ser maior do que, ou igual a 25

o valor de  $K_1$  do sistema como obtido no item f será

$$K_1 = (0,3 \times 3,737 \times 6,3 \times 0,37) / (0,4 \times 2,5 \times 2,33) = 1,1215$$

será necessário portanto aumentar  $K_1$  pelo coeficiente 22,3, no entanto isto só deverá ser feito para frequências baixas para não prejudicar o desempenho transitório obtido no item f.

Utilizaremos portanto um compensador de atraso de fase com pólo e zero bem a esquerda no diagrama de BODE e com ganho adicional igual ao coeficiente necessário.

$$T'_{\text{comp}} = R_2 (s + 1/R_2 C) / R_1 (s + 1/R_1 C)$$

Adotando  $1/R_2 C = 0,1$  então  $1/R_1 C = 0,0045$  e a amplificação será  $A = 22,3$ . A partir daí podemos adotar o valor do capacitor e calcular as outras duas resistências.

$$T'_{\text{comp}} = (s + 0,1) / (s + 0,0045)$$

### h) Verificação e Correção

A função de transferência de malha aberta final do sistema será:

$$HG_F = \frac{7,0845 (s+0,1) (s+0,37)}{s (s+2,5) (s+0,4) (s+2,33) (s+0,0045)}$$

cujo ganho e fase foram traçados no diagrama de BODE indicados pelos números 3 e 4 respectivamente (figura 3.7).

Foi traçada também a curva de NICHOLS sobre a carta de NICHOLS, figura 3.8 (linha tracejada).

Podemos observar que o ponto de tangência previamente estabelecido, não foi respeitado, em consequência da influência do compensador de atraso de fase adicionado ao sistema.

Para corrigir podemos rever o compensador de avanço de fase, adicionando ao ângulo  $\alpha$  o valor faltante:

$$\alpha_1 = \alpha + 6^\circ = 52,5^\circ$$

$$\text{Portanto: } f(\alpha_1) = 2,9459 \quad z_1 = -0,31535 \quad p_1 = -2,7367$$

A função de transferência de malha aberta final será:

$$HG_F = \frac{K (s+0,03154) (s+0,1)}{s (s+0,0045) (s+0,4) (s+2,5) (s+2,7367)}$$

$$\text{sendo } K=7,7 \quad p/ HG(0,929j) = 0,96 \text{ dB}$$

O diagrama de Bode correspondente está indicado pelas curvas 5 e 6 da figura 3.7 e a curva de Nichols foi traçada com linha cheia na figura 3.8.

Simulando o sistema obtemos:

$$t_p=2,85 \text{ s}, M_p=1,235, t_r=1,89 \text{ s}, \quad \omega_r=1,011 \quad \text{e} \quad M_r=1,7863.$$

Portanto o tempo de resposta e o tempo de pico correspondem ao posicionador tipo I com dois pólos, adotado como referência.

O tempo de acomodação, no entanto, não atende ao especificado, tendo em vista que o sistema tem um comportamento diferente do posicionador tipo I.

A ultrapassagem por sua vez, foi maior do que a especificada,  $1,23 > 1,20$ ; isto poderá ser corrigido diminuindo-se o ganho, conforme se pode observar pelo diagrama de Nichols.

## Exemplo n° 2

Um posicionador deverá apresentar uma ultrapassagem ( $M_p$ ) de 110%, um tempo de subida ( $t_s$ ) de 0,5 s e o erro estacionário para uma perturbação degrau aplicada à variável controlada deverá ser nulo.

A realimentação do sistema ( $H$ ) é de 0,5.

O posicionador tipo I com dois pólos poderia atender as especificações transitórias, porém não poderá atender a imposição de erro estacionário nulo. Para que essa condição seja satisfeita é necessário que a função de transferência de malha aberta do sistema possua dois pólos na origem.

Poderemos introduzir no sistema, antes do amplificador de potência um regulador proporcional-integrador (PI), com o objetivo de acrescentar um pólo na origem. O regulador proporcional-integrador (PI) poderia ser um amplificador operacional com a configuração indicada na figura 2.5.

A função de transferência, conforme (2.23), será:

$$T_{op} = A_1 (s - z_1) / s \quad \text{onde} \quad z_1 = -1/R_2C \quad A_1 = R_2/R_1$$

O posicionador tipo I com dois pólos que atenderia as especificações transitórias, teria o seguinte ganho de malha:

$$HG = \omega_n^2 / s(s + 2\xi\omega_n) \quad \text{conforme (2.5)}$$

$\xi = 0,59455$  de acordo com (2.6) e  $\omega_n = 3,3$  de acordo com (2.7).

O sistema com regulador proporcional-integrador (PI) será portanto:

$$HG = 10,89A_1A_0 (s-z_1) / s^2 (s+3,96)$$

e deverá ser compensado de forma a continuar atendendo as especificações iniciais.

Com o compensador  $T_C = A_C(s-z_C) / (s-p_C)$ , a função de transferência de malha aberta final será:

$$HG_F = 10,89A_1A_C (s-z_1) (s-z_C) / [s^2 (s+3,96) (s-p_C)]$$

Se fizermos  $z_C = -3,96$  a expressão se reduzirá a:

$$HG_F = 10,89A_1A_C (s-z_1) / s^2 (s-p_C)$$

Poderemos considerar como se  $10,89A_1/s^2$  fosse a expressão a ser compensada e como se  $A_C(s-z_1)/(s-p_C)$ , fosse o compensador.

No diagrama de BODE do sistema considerado, a curva de ganho será uma reta com -40 decibéis por década de inclinação, e a curva de fase será uma reta horizontal, sendo constante e igual a  $-180^\circ$  para qualquer valor de  $j\omega$ .

A curva de NICHOLS será o próprio eixo das ordenadas e o ponto de tangência, que deveremos impor para o sistema compensado, será o ponto de tangência de uma vertical com a curva de  $M_r=0,413$  dB ou  $M_r= 1,049$  conforme (3.18).

As coordenadas do ponto de tangência serão portanto: 11 dB e  $-108^\circ$  (figura 3.9).

Plotando a fase e o ganho do ponto de tangência referido no diagrama de BODE na frequência de ressonância  $\omega_r=1,811$  conforme (3.17), podemos observar qual o valor do ângulo  $\alpha$  (fase do compensador) necessário.

$$\alpha = 72^\circ$$

$$f(\alpha) = 6,31375 \quad \text{conforme (3.24)}$$

$$p_c = -11,434 \quad \text{conforme (3.23)}$$

$$z_1 = -0,2868 \quad \text{conforme (3.22)}$$

O regulador proporcional-integrador (PI) será portanto:

$$T_{Ci} = A_1 (s + 0,2868) / s$$

O valor de  $A_1$  é dado por  $R_2/R_1$ , sendo  $z_1 = -1/R_2C$ , arbitramos  $C = 3,5$  microFarad e teremos  $R_2 = 100$  Kohms.

$R_1$  será dado em função do tempo especificado para que o erro se anule: quanto menor  $R_1$  mais rápido será a correção até o limite da saturação.

Adotaremos para esse caso  $R_2=R_1$ , portanto  $A_1=1$ .

O compensador será:  $T_C = 2,89(s+3,96)/(s+11,434)$

A função de transferência de malha aberta final será dada por:

$$HG_F = 10,89 \times 2,89 A (s+0,2868) / s^2 (s+11,434)$$

A é o ajuste de amplificação para que o ganho final na frequência de ressonância seja o valor do ponto de tangência da curva de NICHOLS, isto é, 11 dB, portanto:

$$HG_F = 3,548, \text{ para } s = j\omega_r \text{ e conseqüentemente } A = 2,334$$

A função de transferência de malha aberta final será:

$$HG_F = 73,47 (s+0,2868) / s^2 (s+11,434)$$

traçamos então o diagrama de BODE de  $HG_F$  (figura 3.10) e a correspondente curva de NICHOLS (figura 3.9), para verificarmos se realmente ocorre o ponto de tangência estabelecido.

Conforme podemos verificar a curva de NICHOLS tangencia de fato a curva de  $M_r = 0,415$  dB (1,05).

FASE DE G

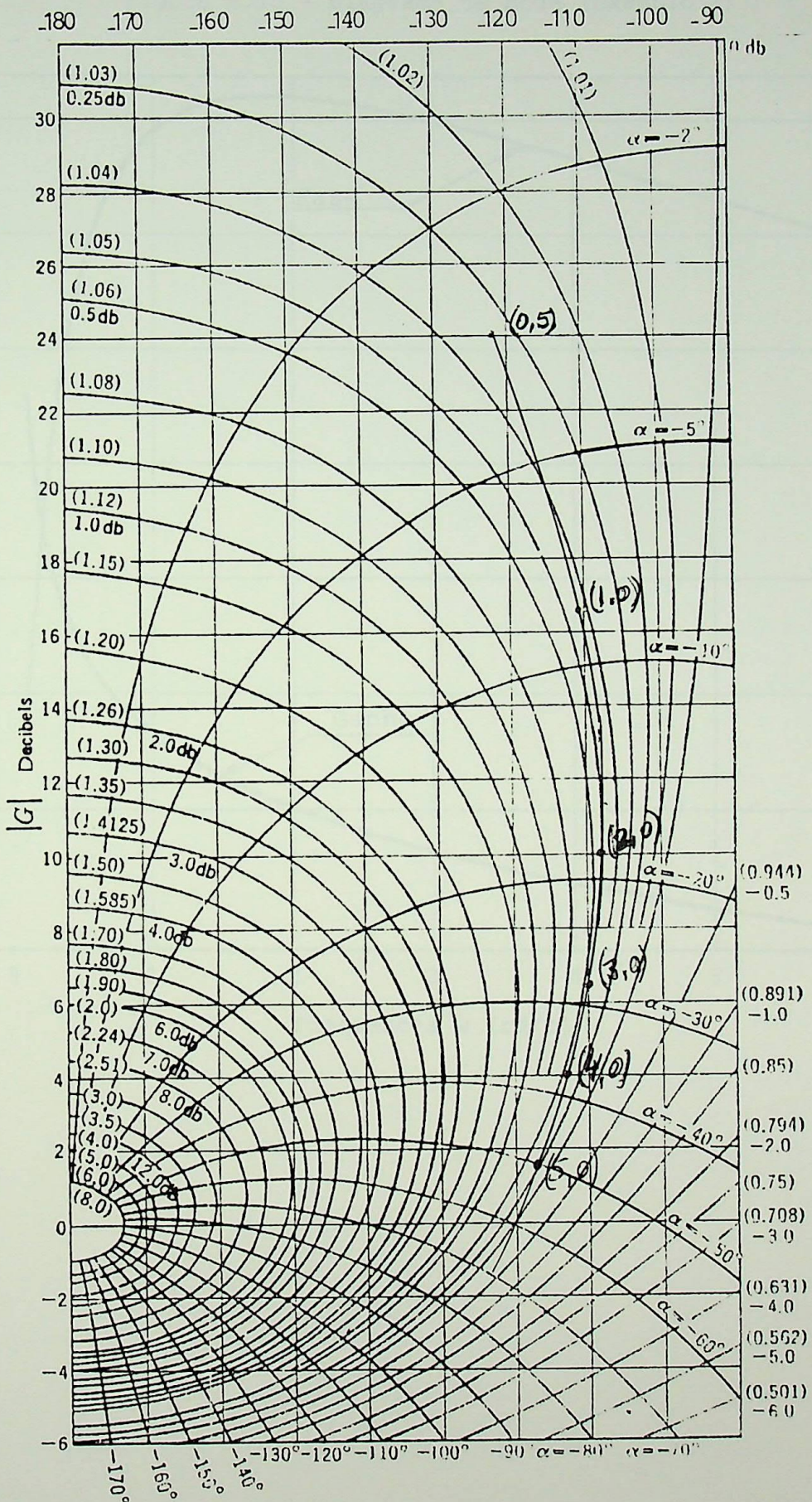
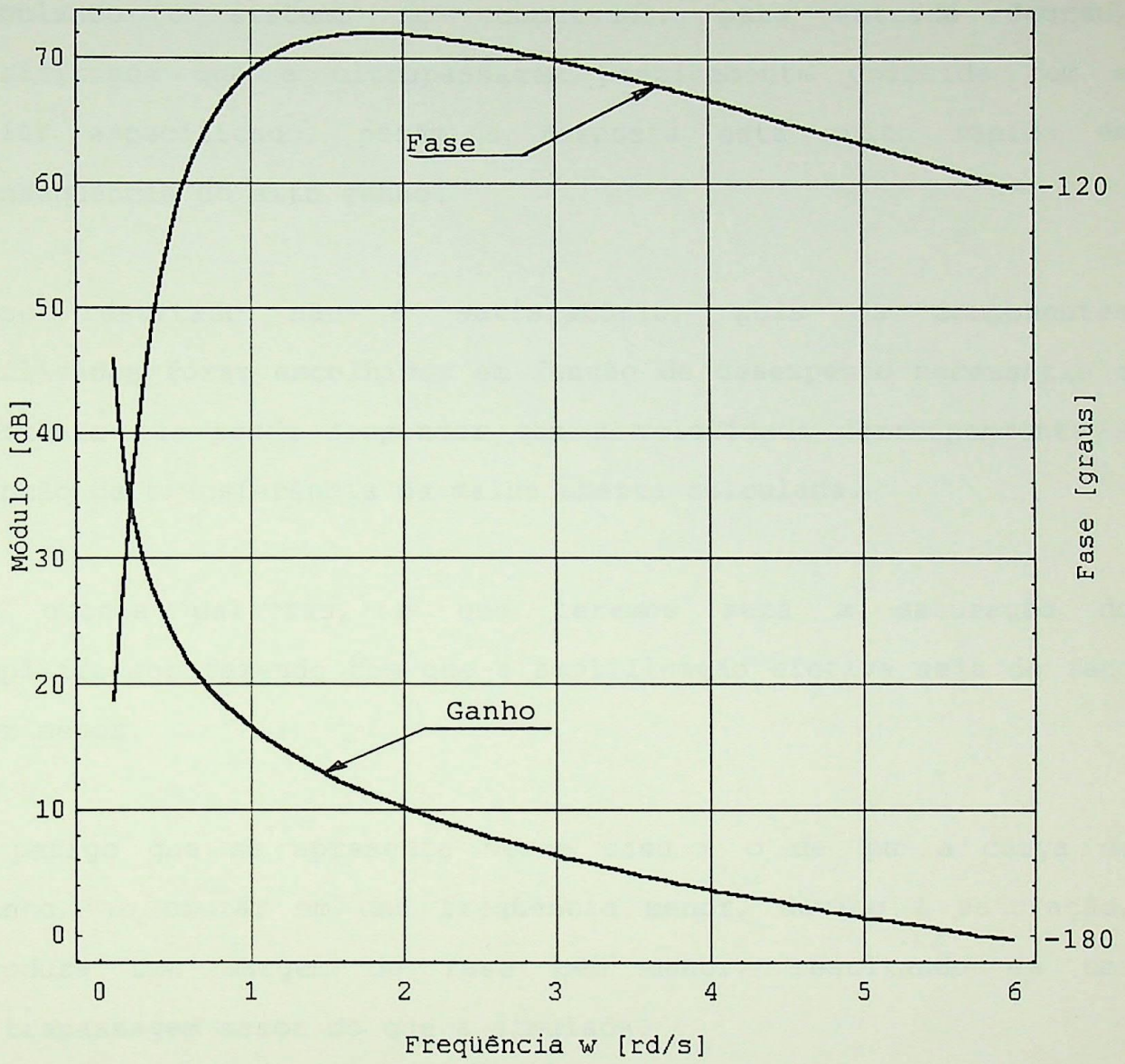


Figura 3.9 - Exemplo 2

Figura 3.10 - Diagrama de Bode (Exemplo 2)



## Comentários

Simulando o sistema no computador, para entrada degrau, verificamos que a ultrapassagem praticamente coincide com o valor especificado, porém a resposta está muito rápida em consequência do alto ganho.

Esse resultado não é satisfatório, pois os componentes utilizados foram escolhidos em função do desempenho necessário e portanto não podem responder com a velocidade correspondente à função de transferência de malha aberta calculada.

Em outras palavras, o que teremos será a saturação do amplificador fazendo com que a amplificação efetiva seja de fato bem menor.

O perigo que se apresenta nesse caso é o de que a curva de ganho, ao cruzar em uma frequência menor, devido à saturação, produza uma margem de fase bem menor, resultando em uma ultrapassagem maior do que a simulada.

Portanto, a simples diminuição do ganho não resolverá o problema.

A partir desse raciocínio podemos constatar a importância de se obter um sistema que, na simulação, atenda principalmente o tempo de resposta especificado, já que a ultrapassagem, para variações relativamente pequenas, pode ser corrigida atuando-se na amplificação.

Lembramos que o projeto leva em conta valores de catálogo para as características dos componentes, e por essa razão se deverá sempre, prever dispositivos de ajuste, principalmente para o ganho e para o amortecimento.

Para se obter na simulação um tempo de resposta adequado, podemos proceder da seguinte forma:

Diminuímos por decrementos o valor de  $\omega_r$ , calculamos o novo argumento  $\alpha$  do compensador, calculamos o novo pólo e o novo zero do compensador, calculamos o novo ganho, simulamos o novo sistema, e observamos o tempo de resposta.

Se ainda for muito rápido podemos introduzir um novo decremento e repetir as operações indicadas, até que o valor do tempo de resposta coincida com o especificado.

Este procedimento poderá ser feito computacionalmente.

O programa apresentado no capítulo 6 prevê esse ajuste.

Poderemos também simular o sistema para uma perturbação degrau na variável controlada de, por exemplo, 30% do conjugado máximo disponível.

Pela simulação da resposta no tempo para essa perturbação constatamos que o efeito causado tende rapidamente a zero, em 0,33s o efeito já é zero ultrapassando para valores negativos e com 2s o efeito é de 0,00825 da variável controlada.

Aqui também os resultados devem ser devidamente interpretados, pois o efeito da perturbação é corrigido pelo regulador proporcional-integrador (PI), cuja amplificação  $A_1=R_2/R_1$  é a responsável pelo tempo de correção, o qual só acontecerá como simulado se  $A_1$  não limitar o desempenho do regulador proporcional-integrador (PI) por saturação.

Concluimos portanto, que a compensação de um sistema de controle em malha fechada pelo método da resposta em frequência, embora faça com que o mesmo apresente um desempenho aceitável quanto à ultrapassagem, não o faz com relação ao tempo de resposta, requerendo um ajuste adicional.

A vantagem do método, embora gráfico, e em consequência sujeito a imprecisões, é a de nos dar uma noção muito clara do comportamento do sistema.

A partir do acima exposto torna-se clara a utilidade do método proposto no presente trabalho, que é justamente a de, em primeiro lugar, transformar o método de compensação de um sistema de controle de malha fechada linear pela resposta em frequência em um método analítico de forma a se poder utilizar os recursos disponíveis da informática, e em segundo lugar, aproveitando esses recursos da informática, através de iterações, ajustar o tempo de resposta e a ultrapassagem, para obter o compensador correto para o caso considerado.

No capítulo 5 estão apresentadas as bases teóricas desse método e no capítulo 6 está apresentada a estrutura computacional do mesmo.

## CAPÍTULO 4

### VERIFICAÇÃO DA CORRELAÇÃO ENTRE $M_r$ e $M_p$

Quando calculamos a variável controlada em função de uma referência degrau, por exemplo, podemos obter o valor do tempo no qual ocorre o máximo dessa variável controlada, derivando a sua expressão em relação ao tempo e igualando o resultado a zero. A esse tempo denominamos de tempo de pico ( $t_p$ ).

Substituindo o seu valor na expressão da variável controlada, obtemos o seu valor máximo cuja relação com seu valor final denominamos de  $M_p$  (Ultrapassagem).

Para o posicionador de segunda ordem (tipo I, com dois pólos), a ultrapassagem assim obtida é dada pela expressão:

$$M_p = 1 + \exp(-\xi \cdot \pi / (1 - \xi^2)^{0.5}) \quad (4.1)$$

Quando a referência for uma senóide, podemos analisar a variável controlada em regime permanente, isto é, após o desaparecimento da resposta transitória.

Nesse caso a resposta será também senoidal, de mesma frequência, porém com módulo e fase diferentes e variáveis com a frequência.

Nessas condições podemos determinar a frequência de ressonância  $\omega_r$ , fazendo a derivada em relação a  $\omega$  da amplitude da variável controlada igual a zero e o valor da ressonância  $M_r$ ,

substituindo  $\omega_r$  na expressão da correspondente variável controlada.

Obtemos portanto: 
$$M_r = (4 \cdot \xi^2 (1 - \xi^2))^{-0,5} \tag{4.2}$$

Observamos que tanto  $M_r$  quanto  $M_p$  são funções unicamente de  $\xi$ , podemos portanto relacionar ambas as expressões.

O gráfico a seguir (figura 4.1), mostra essa relação, onde podemos constatar uma correspondência biunívoca para valores de  $\xi$  entre 0,1 e 0,707.

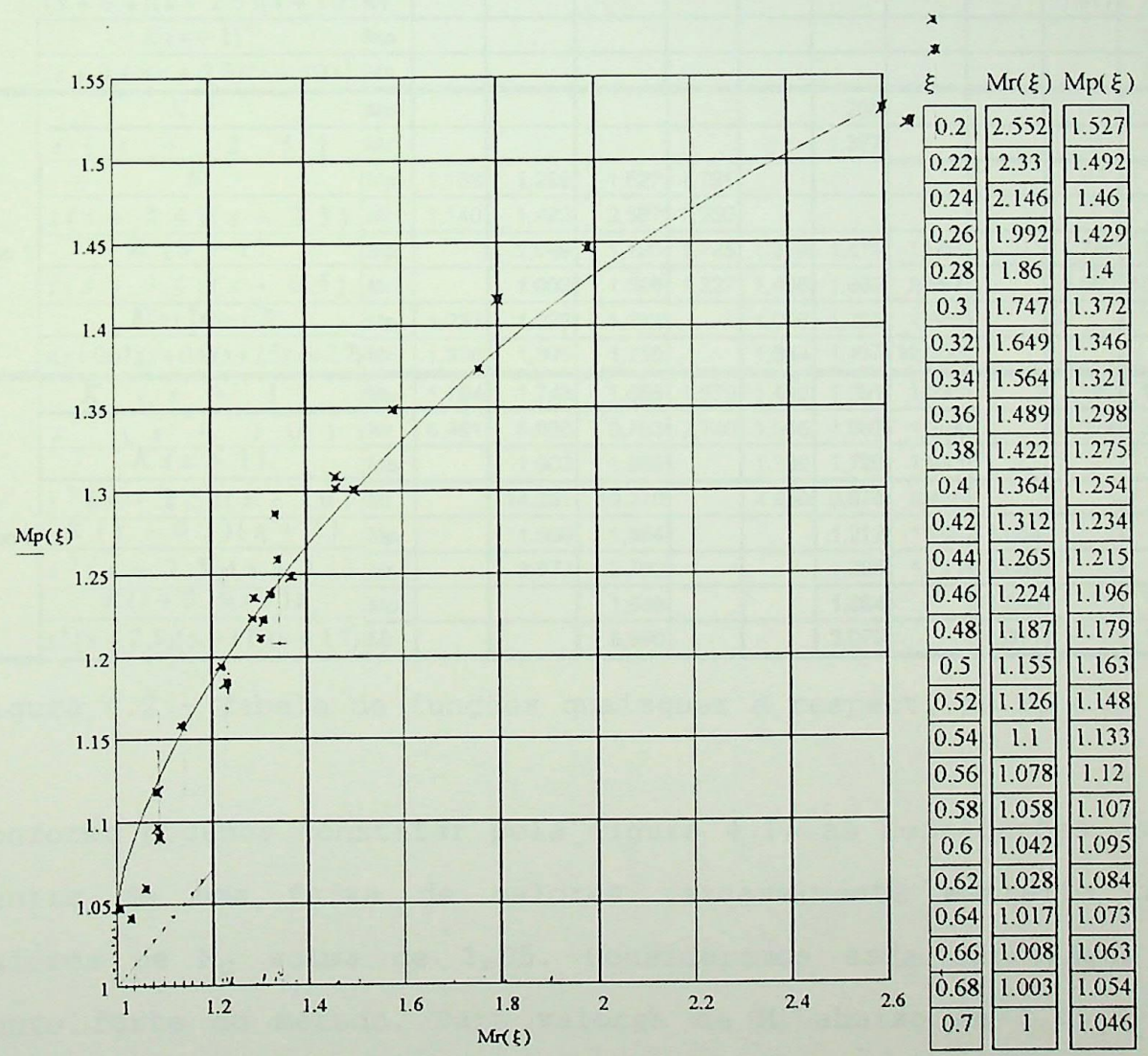


Figura 4.1 - Relação entre a Ultrapassagem e a Ressonância

As expressões apresentadas se aplicam ao sistema de segunda ordem. Porém, podemos obter por meio de simulações, para outros sistemas, o mesmo tipo de correlação. A tabela da figura 4.2 apresenta as funções e os valores de  $M_p$  e  $M_r$  para vários valores de  $K$ . A correlação entre esses valores está representada na figura 4.1 pelos demais pontos do gráfico, indicados com um x.

Função		K	0.3	0.5	1	2	5	10	30	50	100	1000
tipo 0	$K$	$M_p$						1,217				
	$(s + 0.4)(s + 2.5)$	$M_r$						1,272				
	$K$	$M_p$									1,373	
	$(s + 0.4)(s + 2.5)(s + 10)$	$M_r$									1,775	
	$K$	$M_p$									1,063	1,547
	$(s + 0.4)(s + 2.5)(s + 10)$	$M_r$									1,011	2,706
	$K(s + 1)^2$	$M_p$										1,364
	$(s + 0.4)(s + 2.5)(s + 10)^2$	$M_r$										1,666
Tipo 1	$K$	$M_p$						1,258				
	$s(s + 2.5)$	$M_r$						1,377				
	$K$	$M_p$	1,158	1,299	1,527	1,791						
	$s(s + 0.4)(s + 2.5)$	$M_r$	1,140	1,492	2,597	7,950						
	$K(s + 1)$	$M_p$		1,049	1,120	1,195	1,312	1,419	1,588		1,740	1,907
	$s(s + 0.4)(s + 0.5)$	$M_r$		1,003	1,096	1,227	1,456	1,802	2,857		5,062	15,680
	$K(s+1)(s+0.3)$	$M_p$	1,237	1,223	1,182		1,096	1,302	1,805			
	$s(s+0.02)(s+0.4)(s+2.5)(s+2.7)$	$M_r$	1,338	1,309	1,235		1,084	1,457	12,300			
Tipo 2	$K(s + 1)$	$M_p$	1,794	1,746	1,668	1,579	1,448	1,351	1,235		1,292	1,650
	$s^2(s + 10)$	$M_r$	6,461	5,080	3,703	2,740	1,946	1,587	1,284		1,338	3,570
	$K(s + 1)$	$M_p$		1,903	1,869		1,769	1,729	1,943			
	$s^2(s + 2.5)(s + 10)$	$M_r$		14,291	10,210		4,950	3,876	8,498			
	$K(s + 0.3)(s + 1)$	$M_p$		1,660	1,564			1,212	1,904	1,059		
	$s^2(s + 2.5)(s + 11)$	$M_r$		3,672	2,702			1,295	1,111	1,069		
	$K(s+0.3)(s+1)$	$M_p$			1,846			1,604		1,248		1,043
	$s^2(s + 2.5)(s + 11)(s + 15)$	$M_r$			8,990			3,079		1,371		1,045

Figura 4.2 - Tabela de funções quaisquer e respectivos  $M_p$  e  $M_r$

Conforme podemos constatar pela figura 4.1, as correlações estão dentro de uma faixa de valores razoavelmente estreita para valores de  $M_p$  acima de 1,05. Consideramos essa correlação um ponto forte do método. Para valores de  $M_p$  abaixo de 1,05 os valores de  $M_r$  são complexos.

## CAPÍTULO 5

Frisamos, conforme já anteriormente dito, que para pequenos ajustes da ultrapassagem, é suficiente atuar sobre a amplificação do sistema, que normalmente já é ajustável para atender as variações dos componentes e do sistema controlado.

## CAPÍTULO 5

### MÉTODO ANALÍTICO PROPOSTO PELO PRESENTE TRABALHO

Para transformar o método da resposta em frequência, que é essencialmente gráfico, em um método analítico, torna-se necessário determinar analiticamente, na carta de Nichols, o ponto de tangência entre a função de transferência de malha aberta HG do sistema e a correspondente curva de  $M_r$  decorrente das especificações.

A partir da equação de Black, para  $H=1$ , obtemos:

$$T(\omega) = G(\omega) / (1 + G(\omega)) \quad (5.1)$$

onde

$$G(\omega) = K \cdot N(j\omega) / D(j\omega) \quad (5.2)$$

$\omega$  é a frequência

Um ponto de  $G(\omega)$  em coordenadas cartesianas seria dado por:

$$G(\omega) = X(\omega) + jY(\omega) \quad (5.3)$$

Substituindo-se em (5.1) temos:

$$T(\omega) = (X(\omega) + jY(\omega)) / (1 + X(\omega) + jY(\omega)) \quad (5.4)$$

Cujo módulo será:

$$|T(\omega)| = ((X(\omega))^2 + (Y(\omega))^2)^{0,5} / ((1+X(\omega))^2 + (Y(\omega))^2)^{0,5} \quad (5.5)$$

Seja  $M = |T(\omega)|$

trabalhando a expressão algebricamente [7] teremos:

$$(X(\omega) + M^2 / (M^2 - 1))^2 + (Y(\omega))^2 = M^2 / (M^2 - 1)^2 \quad (5.6)$$

que é um círculo de raio  $M / (M^2 - 1)$  e centro em  $(M^2 / (M^2 - 1), 0)$ , ou seja, a cada ponto de  $G(\omega)$  corresponde um círculo à medida que  $\omega$  cresce de acordo com a equação (5.3), e portanto um valor de  $M$ .

À medida que  $M$  cresce, decresce o raio do círculo e o seu centro aproxima-se do ponto de coordenada  $(-1, 0)$ . Veja a figura 5.1.

Como  $G(\omega)$  é uma relação estritamente própria entre dois polinômios, o seu limite, para  $\omega \rightarrow \infty$ , é igual a zero. Portanto haverá um ponto no qual  $M$  atingirá um valor máximo para em seguida declinar.

Podemos dizer que esse ponto ocorrerá para o valor de  $\omega$  correspondente ao valor máximo da função de transferência  $M_r$  e portanto será o próprio  $\omega_r$  (frequência de ressonância).

Considerando agora que desejamos obter, a partir de um sistema qualquer, um sistema que atenda às especificações dadas no tempo (ultrapassagem e tempo de resposta) e que correspondem portanto, a um valor de  $\xi$  e  $\omega_n$  de um suposto posicionador de 2ª ordem que

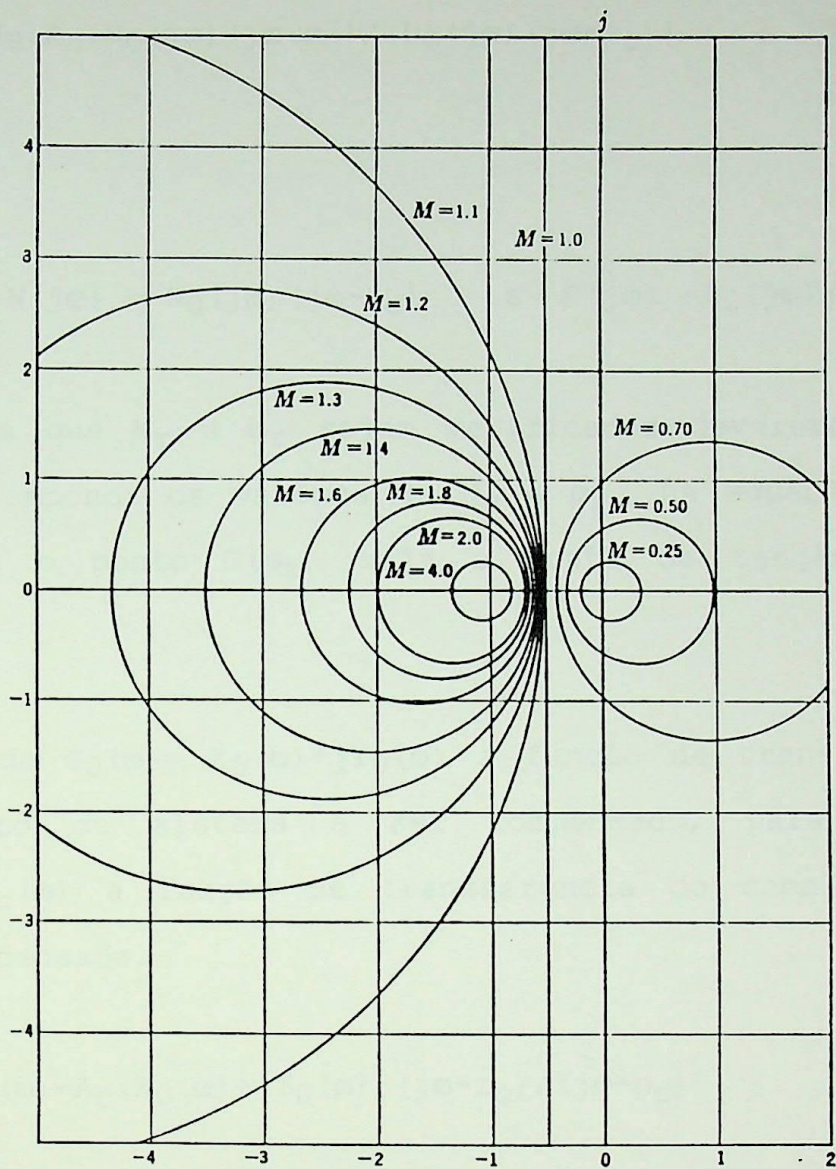


Figura 5.1 - Círculos de M

atenda essas especificações e que conseqüentemente correspondem no domínio da frequência a  $\omega_r$  e  $M_r$ , (veja seção 3.4), podemos adotar um compensador que faça com que o sistema qualquer passe a ter esses valores de  $\omega_r$  e  $M_r$ :

$$T_C(\omega) = A_C(j\omega - z_C) / (j\omega - p_C) \quad (5.7)$$

Aplicando esse compensador ao sistema temos:

$$G(\omega) = K_0 \cdot A_C \cdot N_0(j\omega) (j\omega - z_C) / (D_0(j\omega) (j\omega - p_C)) \quad (5.8)$$

Onde:

$$K = K_0 \cdot A_C, \quad N(j\omega) = N_0(j\omega) (j\omega - z_C) \quad \text{e} \quad D(j\omega) = D_0(j\omega) (j\omega - p_C)$$

Se desejamos que  $M_r$  e  $\omega_r$  sejam verificados deveremos calcular  $z_C, p_C$  e  $A_C$  impondo os valores de  $M_r$  e  $\omega_r$  na equação (5.5) e impondo que o ponto  $G(\omega_r)$  seja o ponto de tangência com o círculo  $M_r$ .

Chamaremos de  $G_0(\omega) = X_0(\omega) + jY_0(\omega)$  a função de transferência do canal direto do sistema a ser compensado, para  $s = j\omega$ , e  $G(\omega) = G_0(\omega) T_C(\omega)$  a função de transferência do canal direto do sistema compensado.

$$\text{Portanto: } G(\omega) = A_C (X_0(\omega) + jY_0(\omega)) (j\omega - z_C) / (j\omega - p_C) \quad (5.9)$$

Onde:

$$X_0(\omega) := \text{Re}(G_0(\omega)) \quad (5.10) \quad \text{e} \quad Y_0(\omega) := \text{Im}(G_0(\omega)) \quad (5.11)$$

Racionalizando e efetuando as operações indicadas na equação (5.9), e considerando ainda que utilizaremos um compensador de atenuação mínima, temos as seguintes relações:

$$p_C \cdot z_C = \omega_r^2 \quad (5.12)$$

Para simplicidade, depois de todas as derivadas efetuadas,

fazemos:  $p_C=p$ ,  $\omega_r=\omega$  e  $A_C=A$

$$X(\omega) := \operatorname{Re}(G(\omega)) \quad (5.13) \quad Y(\omega) = \operatorname{Im}(G(\omega)) \quad (5.14)$$

$$X_1(\omega) := \frac{X(\omega)}{A} \quad (5.15)$$

$$Y_1(\omega) := \frac{Y(\omega)}{A} \quad (5.16)$$

$$X_1(\omega) := \omega \cdot Y_0(\omega) \cdot \frac{p^2 + 2 \cdot \omega \cdot \frac{X_0(\omega)}{Y_0(\omega)} \cdot p - \omega^2}{p \cdot (\omega^2 + p^2)} \quad (5.17)$$

$$Y_1(\omega) := \omega \cdot X_0(\omega) \cdot \frac{-p^2 + 2 \cdot \omega \cdot \frac{Y_0(\omega)}{X_0(\omega)} \cdot p + \omega^2}{p \cdot (\omega^2 + p^2)} \quad (5.18)$$

A condição de tangência poderá ser obtida fazendo a função (5.5) passar por um máximo conforme já mencionado, isto é, derivando o módulo de T em relação a  $\omega$  e igualando a zero.

Resolvendo a expressão resultante em relação a A teremos:

$$A(\omega) := \frac{X_1(\omega) \cdot X_{11}(\omega) + Y_1(\omega) \cdot Y_{11}(\omega)}{X_{11}(\omega) \cdot (Y_1(\omega)^2 - X_1(\omega)^2) - 2 \cdot Y_1(\omega) \cdot X_1(\omega) \cdot Y_{11}(\omega)} \quad (5.19)$$

Onde  $X_{11}$  é a derivada em relação a  $\omega$  de  $X_1$  e  $Y_{11}$  é a derivada em relação a  $\omega$  de  $Y_1$ , cujas expressões são as seguintes:

$$X_{11}(\omega) = \frac{[\omega \cdot Y_{00}(\omega) + Y_0(\omega)]p^4 + 2 \cdot \omega \cdot [\omega \cdot X_{00}(\omega) + X_0(\omega)]p^3 - 2\omega^2 Y_0(\omega)p^2 + 2\omega^3 [\omega \cdot X_{00}(\omega) - X_0(\omega)]p - \omega^4 [\omega \cdot Y_{00}(\omega) - Y_0(\omega)]}{p(\omega^2 + p^2)^2} \quad (5.20)$$

$$Y_{11}(\omega) = \frac{-[\omega \cdot X_{00}(\omega) + X_0(\omega)]p^4 + 2\omega \cdot [\omega \cdot Y_{00}(\omega) + Y_0(\omega)]p^3 + 2\omega^2 X_0(\omega)p^2 + 2\omega^3 [\omega \cdot Y_{00}(\omega) - Y_0(\omega)]p + \omega^4 [\omega \cdot X_{00}(\omega) - X_0(\omega)]}{p(\omega^2 + p^2)^2} \quad (5.21)$$

Onde:

$$X_{00}(\omega) := \frac{d}{d\omega} X_0(\omega) \quad (5.22) \quad \text{e} \quad Y_{00}(\omega) := \frac{d}{d\omega} Y_0(\omega) \quad (5.23)$$

Foi utilizada a notação acima, diferente da usual, para facilitar a elaboração do programa computacional apresentado no capítulo 6.

A equação do círculo (5.6) ficará:

$$B(\omega) := \left[ A(\omega) \cdot X_1(\omega) + \frac{(M_r)^2}{[(M_r)^2 - 1]} \right]^2 + (A(\omega) \cdot Y_1(\omega))^2 - \frac{(M_r)^2}{[(M_r)^2 - 1]^2} \quad (5.24)$$

Substituindo-se na equação (5.24), ou na equação (5.5), os valores de A, X<sub>1</sub> e Y<sub>1</sub> e na expressão de A os valores de X<sub>1</sub>, Y<sub>1</sub>, X<sub>11</sub> e Y<sub>11</sub>, obtém-se no numerador um polinômio em função unicamente de p (pólo do compensador), que fazemos igual a zero (B(ω)=0).

Das raízes do polinômio assim obtido podem ser utilizadas, como pólo do compensador, as raízes reais e negativas (compensador passivo) e que conduzam a valores de amplificação positivas, bem como a sistemas estáveis.

O zero do compensador será dado por (5.12)

A amplificação poderá ser calculada de acordo com (5.19)

O Apêndice A apresenta o cálculo literal de A e do polinômio de oitavo grau em p já referido.

O polinômio, que a princípio seria de 22° grau, na realidade simplificou-se para 14° grau, e posteriormente, em função da análise das raízes encontradas para os exemplos calculados, foi ainda mais reduzido.

Das raízes que podem ser obtidas para um caso real, isto é, quando os coeficientes do polinômio ficam determinados em função dos dados conhecidos (fator constante, pólos e zeros da função de transferência, ultrapassagem  $M_p$  e tempo de resposta  $t_r$ ), duas são reais e positivas, duas reais e negativas e quatro complexas.

As duas raízes reais e negativas correspondem a compensadores passivos; uma delas, além de atender os valores de  $\omega_r$  e  $M_r$  especificados, conduzirá a um sistema estável.

A outra raiz real e negativa também atenderá os valores de  $\omega_r$  e  $M_r$  especificados, porém conduzirá a um sistema instável.

Se as raízes reais e negativas encontradas conduzirem a valores de amplificação também negativos, o sistema não será compensável com um único compensador.

## CAPÍTULO 8

Partimos do pressuposto que, ao se determinar os componentes de forma que estes atendam de per si as necessidades do sistema final, obteremos um sistema compensável com um único compensador.

Caso isso não seja possível, adota-se um compensador aproximado centrado no ponto  $\omega_r$ , de forma a contribuir com sua fase e ganho no sentido de diminuir as diferenças necessárias, deixando o refinamento para um segundo compensador calculado pelo método em pauta.

## CAPÍTULO 6

### PROGRAMA COMPUTACIONAL

O programa computacional foi desenvolvido em duas partes dentro do programa "MATHEMATICA"[18], utilizando-se os recursos de programação oferecidos pelo mesmo:

A primeira (Apêndice A) trata do cálculo literal da amplificação e do polinômio em  $p$  (pólo do compensador) a partir das equações: (5.5), (5.17), (5.18), (5.19), (5.20) e (5.21).

A segunda parte utiliza as equações literais da amplificação e do polinômio em  $p$ , calculados na primeira parte, para calcular, em função da ultrapassagem e do tempo de resposta especificados e da função de transferência de malha aberta do sistema a ser compensado, os valores do pólo, do zero e da amplificação do compensador adequado a ser utilizado.

Basicamente o programa realiza as seguintes operações:

#### 6.1. ENTRADA DE DADOS:

Os dados são digitados em substituição aos valores existentes em função da utilização anterior do programa. Os dados que deverão ser digitados são os seguintes:

- a) Ultrapassagem ( $M_p$ ) desejada;

b) Tempo de resposta ( $t_r$ ) desejado;

c) Os zeros da função de transferência de malha aberta do sistema não compensado, digitados dentro da lista  $n_1$ , separados por vírgula;

d) Os pólos da função de malha aberta do sistema não compensado, digitados dentro da lista  $n_2$ , separados por vírgula;

e) Fator constante ( $k$ ) de  $HG_0$ ;

f) Tipo ( $m$ ) do sistema não compensado.

## 6.2. CÁLCULO DOS PARÂMETROS DO POSICIONADOR TIPO I, COM DOIS PÓLOS (SEGUNDA ORDEM), QUE PODERIA ATENDER ÀS ESPECIFICAÇÕES:

$\xi$  dado pela equação (2.6)

$\eta$  dado pela equação (2.11)

$\omega_n$  dado pela equação (2.10)

$\omega_r$  dado pela equação (3.17)

$M_r$  dado pela equação (3.18)

### 6.3. CÁLCULO DO COMPENSADOR

- a) A partir dos dados digitados é montada a expressão de  $HG_0$  em função de  $\omega$  e com  $\omega=\omega_r$  são calculados os correspondentes valores numéricos.
- b) Com o polinômio calculado literalmente no Apêndice A, são calculadas as suas raízes, para os dados fornecidos, das quais são separadas as raízes negativas que correspondem a compensadores passivos.
- c) Com as raízes selecionadas são calculadas as ampliações correspondentes, utilizando-se as expressões determinadas no Apêndice A.
- d) Com os valores obtidos, o programa realiza um teste para avaliar a estabilidade dos sistemas resultantes à aplicação dos correspondentes compensadores.

O teste consiste em avaliar quais as frequências positivas que tornam o módulo de  $HG_f$  (função de transferência de malha aberta final) igual a 1 e substituir os valores encontrados na expressão da fase de  $HG_f$ . Para que o sistema seja estável (critério de Nyquist) a fase deverá ser superior a  $-180$  graus.

- e) O compensador é então determinado, para as raízes " $p_c$ " que satisfazem as condições impostas, calculando-se  $A_c$  e  $z_c$  em função de  $p_c$ .

f) Esse compensador aplicado ao sistema, conduzirá a um desempenho do mesmo, para resposta em frequência, de acordo com os valores de  $M_r$  e  $\omega_r$  determinados e será estável; no entanto, a resposta no tempo, para uma entrada degrau, não apresentará necessariamente a ultrapassagem do posicionador tipo I com dois pólos, tomado como modelo, nem o seu tempo de resposta.

A ultrapassagem preocupa menos, e as suas variações possíveis são normalmente aceitáveis, pois podemos compensá-las com relativa facilidade, atuando no amplificador.

Por outro lado o tempo de resposta deve ser, tanto quanto possível, coerente com os componentes utilizados no sistema, sob pena de que eventuais saturações venham a modificar o desempenho esperado.

O programa ajusta, através de um "Loop", o tempo de resposta, até que o mesmo seja enquadrado dentro de uma tolerância pré-determinada.

g) Após o ajuste o programa indica os valores dos parâmetros do compensador, isto é:  $p_c$ ,  $z_c$  e  $A_c$ .

h) Finalmente, para uma visualização da adequação do compensador são plotados: A variável controlada para uma referência "degrau" unitário; Os diagramas de Bode (módulo e fase) da função de transferência de malha aberta do sistema compensado e o diagrama de Bode de módulo da função de transferência de malha fechada do sistema compensado.

#### 6.4. OBSERVAÇÕES

a) Se não houver nenhuma solução que conduza a um sistema estável, isto é, no teste do item 6.3.d, as fases obtidas forem menores do que  $-180+MF$ , onde  $MF$  é a margem de fase esperada, significa que o sistema não é compensável com um único compensador.

b) O programa elaborado é simplificado, devendo naturalmente ser aperfeiçoado à medida que aumente o interesse pelo mesmo. Como exemplo desses aperfeiçoamentos podemos citar: a inclusão automática de um compensador padrão do tipo " $T_{C1}=10(s+0,316\omega_r)/(s+3,16\omega_r)$ " que contribuiria com  $55^\circ$  aproximadamente quando a fase do  $HG_f$  não passar no teste do item 6.3.d (observação 6.4.a desse item) e outras facilidades que tornem o "software" mais amigável.

c) Deverá ser também investigado com mais detalhe o limite de aplicação do "software" para especificações de  $M_p < 1,05$ .

# CAPÍTULO 7

## COMPROVAÇÃO DOS RESULTADOS

Foram calculados, utilizando-se o programa apresentado no capítulo 6, vários exemplos (Apêndices B a E), com o objetivo de demonstrar que os resultados obtidos são satisfatórios.

Para apresentação dos resultados definimos adicionalmente:

$c(t_r)$  = valor da variável controlada para  $t=t_r$  e

$c(t_p)$  = valor da variável controlada para  $t=t_p$ , que corresponde ao valor de  $M_p$ .

**Exemplo 1:** (cálculos no Apêndice B)

1. Dados

$$M_p=1,2$$

$$t_r=1,89$$

$$G_0=0,3/(s(s+0,4)(s+2,5))$$

considerado  $H=1$

2. Posicionador tipo I com dois pólos (modelo)

$$\xi=0,45595 \quad \eta=1,09736 \quad \omega_n=1,21528 \quad M_r=1,23214 \quad \omega_r=0,928894$$

3. Resultados Obtidos:

$$\begin{array}{llll} \omega_r=1,05717 & M_r=1,22722 & A_c=26,0634 & z_c=-0,405181 \\ p_c=-2,75828 & c(t_r)=0,996383 & c(t_p)=1,20067 & \end{array}$$

#### 4. Comprovação dos Resultados

A resposta no tempo está representada na figura 7.1.

Demais dados sobre o exemplo podem ser observados no Apêndice B.

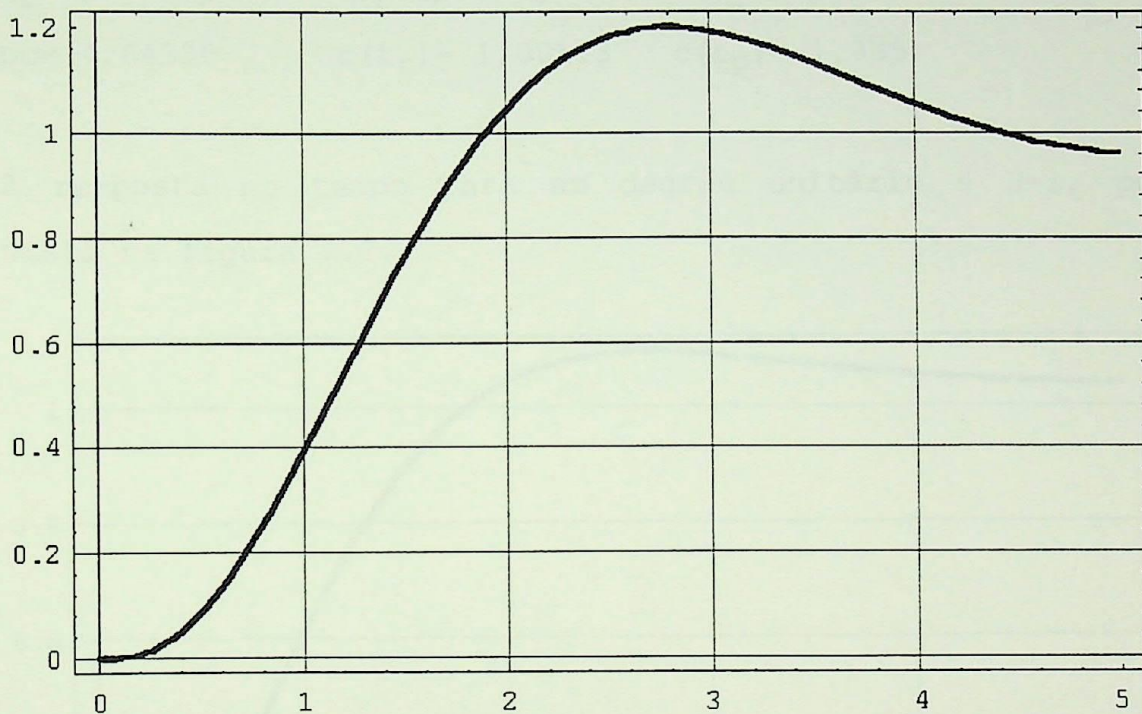


Figura 7.1 - Resposta no tempo para degrau unitário - exemplo

1

**Exemplo 2:** (cálculos no Apêndice C)

1. Dados

$$M_p = 1,1$$

$$t_r = 0,9 \text{ s}$$

$$HG_0 = 10,89/s^2$$

2. Posicionador tipo I com dois pólos (modelo)

$$\xi=0,591155 \quad \eta=0,938306 \quad \omega_n=3,03525 \quad M_r=1,04866 \quad \omega_r=1,66544$$

3. Resultados Obtidos:

$$\begin{aligned} \omega_r &= 0,730491 & M_r &= 1,05075 & A_c &= 1,01445 & z_c &= -0,11492 \\ p_c &= -4,64339 & c(t_r) &= 1,00113 & c(t_p) &= 1,095 \end{aligned}$$

A resposta no tempo para um degrau unitário e  $H=1$ , pode ser vista na figura 7.2.

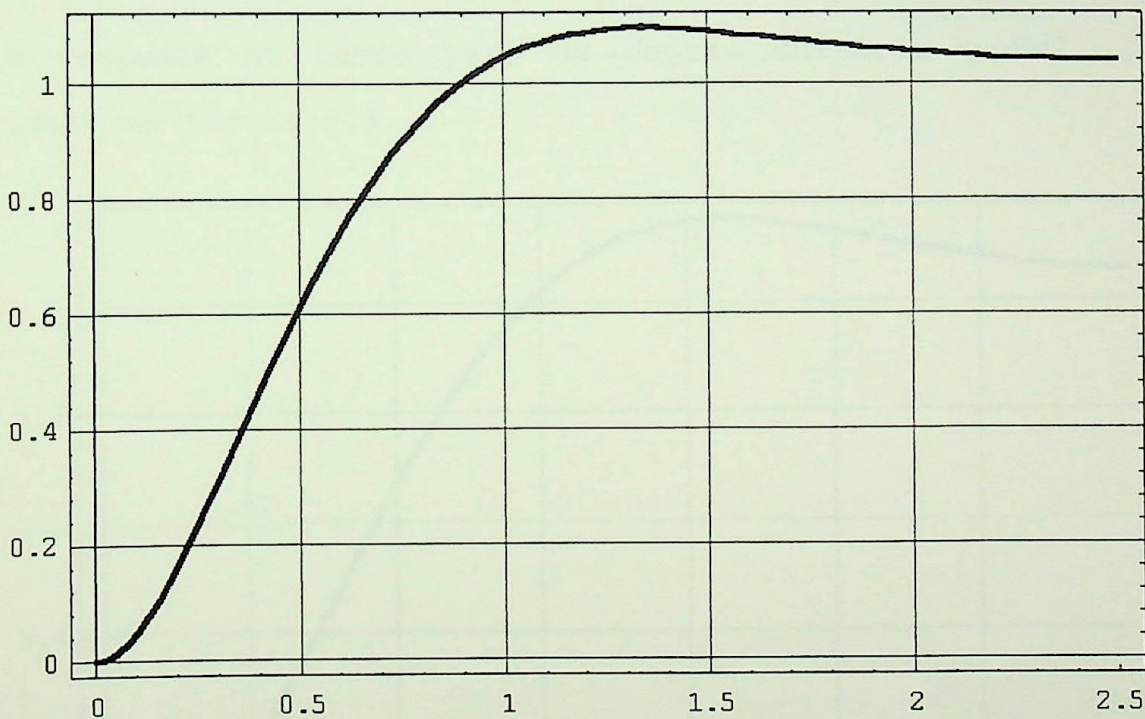


Figura 7.2 - Resposta no tempo para degrau unitário - exemplo 2

**Exemplo 3:** (cálculos no Apêndice D)

1. Dados

$$M_p=1,15$$

$$t_r=2,9 \text{ s}$$

$$HG_0 = 0,3(s+0,1)/s^2(s+0,4)(s+2,5)$$

2. Posicionador tipo I com dois pólos (modelo)

$$\xi = 0,516931 \quad \eta = 1,02753 \quad \omega_n = 0,851595 \quad M_r = 1,12993 \quad \omega_r = 0,581063$$

3. Resultados Obtidos:

$$\begin{aligned} \omega_r &= 0,604656 & M_r &= 1,0535 & A_C &= 9,88958 & z_c &= -0,235954 \\ p_c &= -1,54949 & c(t_r) &= 0,999708 & c(t_p) &= 1,15055 \end{aligned}$$

A resposta no tempo para um degrau unitário e  $H=1$ , pode ser vista na figura 7.3.

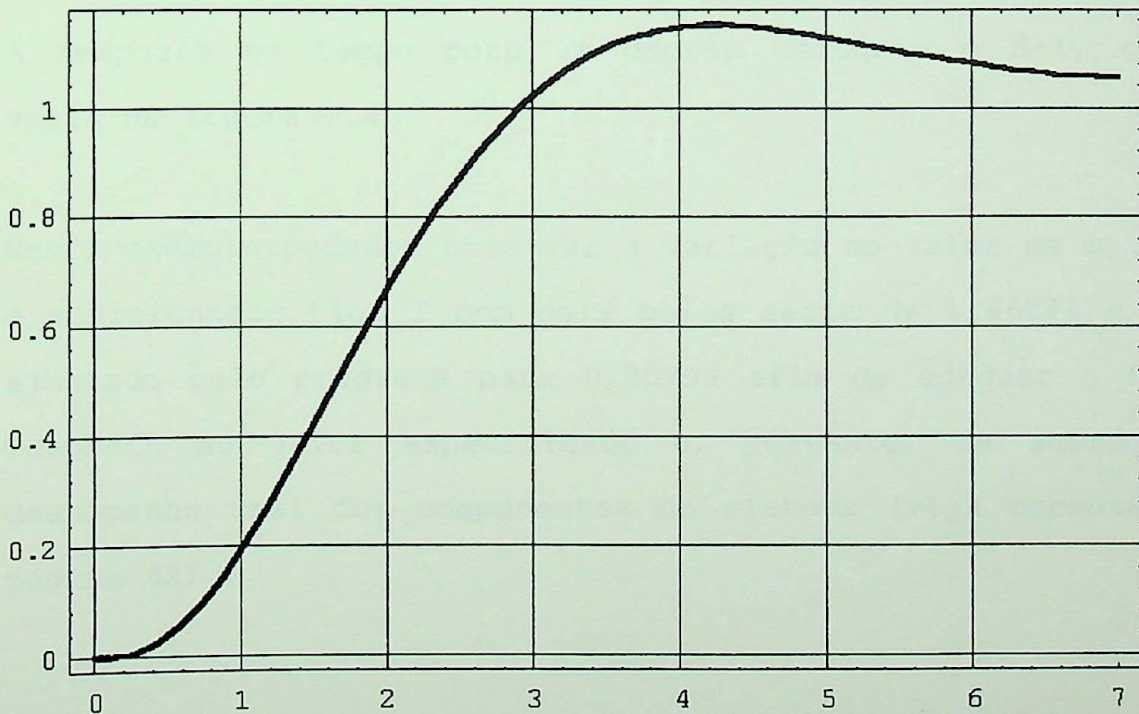


Figura 7.3 - Resposta no tempo para degrau unitário exemplo 3

**Exemplo 4:** (cálculos no Apêndice E)

1. Dados:  $M_p=1,1$   $t_r=0,9$  s

$$HG_0=3/s^2(s+10)$$

2. Posicionador tipo I com dois pólos (modelo)

$\xi=0,591155$   $\eta=0,938306$   $\omega_n=3,03525$   $M_r=1,04866$   $\omega_r=1,66544$

3. Resultados Obtidos:

$\omega_r=0,85793$   $M_r=1,04761$   $A_C=55,7073$   $z_c=-0,0980963$   
 $pc=-7,49919$   $c(t_r)=1,00599$   $c(t_p)=1,09928$

A resposta no tempo para um degrau unitário e  $H=1$ , pode ser vista na figura 7.4.

Neste exemplo podemos observar a variação no valor de  $\omega_r$  que para o posicionador tipo I com dois pólos seria de 1,66544 e que foi ajustado pelo programa para 0,85793 afim de adequar o tempo de resposta ao valor especificado e, portanto, de acordo com o desempenho real dos componentes do sistema (veja **comentários** na página 62).

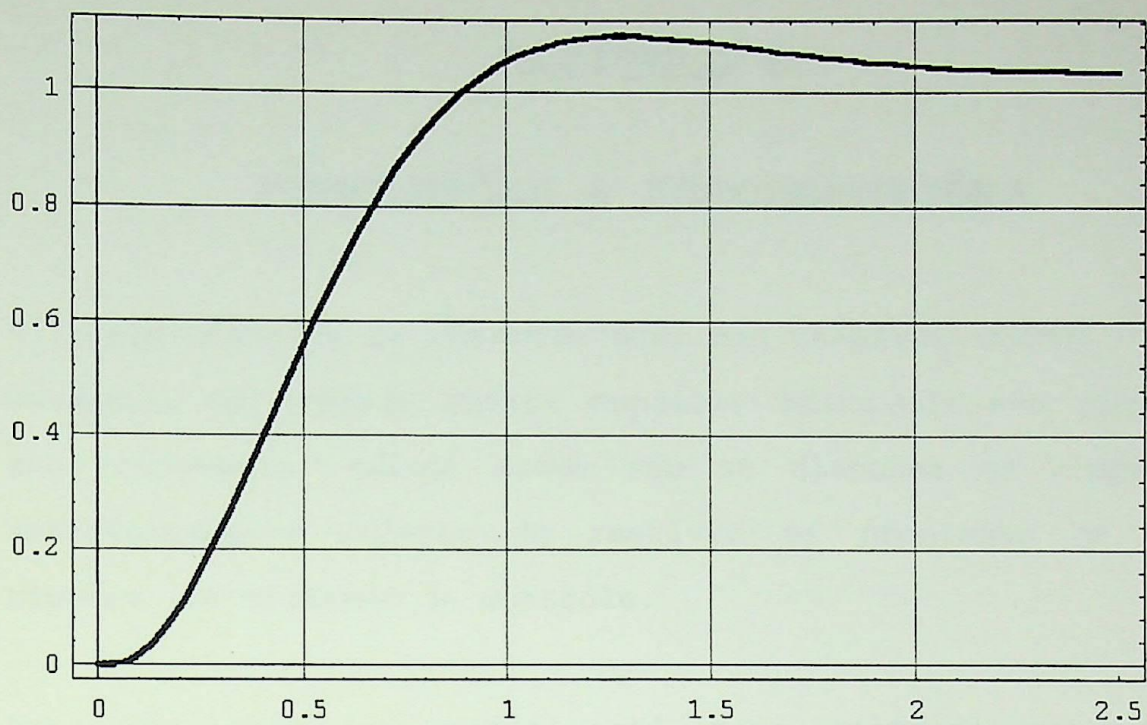


Figura 7.4 - Resposta no tempo para degrau unitário - exemplo 4

## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A teoria clássica de controle teve seu desenvolvimento acelerado na época da segunda guerra mundial, atingindo seu apogeu nos anos cinquenta, quando ainda não se dispunha de computadores suficientemente capazes de resolver os problemas de cálculo típicos de sistemas de controle.

Por essa razão a teoria está toda centrada em processos gráficos, o que nos dá uma visão muito clara dos sistemas de controle. Porém torna trabalhoso o projeto desses sistemas, em especial o dos mais complexos. Além disso a teoria clássica trata de sistemas lineares, invariantes no tempo e monovariáveis.

A década de 50 marcou a redescoberta da abordagem por variáveis de estado para a solução de problemas de controle. O método por variáveis de estado havia sido desenvolvido por Poincaré, Lyapunov, Gibbs e outros, 50 a 80 anos antes [17].

Constatou-se ser esse método de grande utilidade na análise e projeto de sistemas de controle, permitindo, inclusive, o tratamento adequado de sistemas não lineares, variantes no tempo e multivariáveis.

Um aspecto particularmente importante dessa nova abordagem é o desenvolvimento da teoria de otimização.

Esse novo enfoque, baseado em antigas técnicas foi denominado de Teoria de Controle Moderno.

Além de ser um nome que certamente se tornaria inapropriado com o tempo, o uso desse nome teve o infeliz efeito de relegar o que já havia sido feito antes a um "Status" de fora de moda ou de segunda classe, diminuindo sensivelmente a produção de trabalhos científicos na área da Teoria de Controle Clássico.

Por ocasião do levantamento da bibliografia para o presente trabalho, consultamos o índice "INSPEC" e constatamos que, nos títulos disponíveis na Biblioteca da UFSC (ano de 1986 em diante), nada consta sobre o tema proposto.

Esse fato comprova de certa forma o ineditismo do tema proposto, visto que na época em que ainda eram freqüentes as contribuições na área de projeto clássico, não estavam disponíveis computadores capazes de desenvolver o cálculo literal necessário.

Face à disponibilidade atual de recursos de informática, a teoria clássica de controle apresenta potencialidade elevada de desenvolvimento.

O presente trabalho, além de sua contribuição no sentido de dar ao projetista mais um recurso para o projeto de sistemas lineares, poderá despertar novo interesse pelo assunto.

Apesar de já terem sido desenvolvidos vários "softwares" para a simulação dos sistemas de controle de acordo com a teoria de controle clássico, nenhum deles apresenta a característica proposta de, a partir das especificações, fornecer um compensador que faça com que o sistema as atenda, isto é, fornecer analiticamente um compensador do tipo  $T_C = A_C(s - z_C)/(s - p_C)$ , a ser aplicado a um sistema qualquer composto de um sistema a ser controlado e eventuais circuitos eletrônicos adicionais acrescentados em função das especificações — como por exemplo, a inclusão de um controle proporcional-integral para que o sistema não apresente erro estacionário para uma referência "rampa" ou perturbação de conjugado "degrau" — de forma a atender a ultrapassagem e o tempo de resposta especificados.

Conforme pudemos constatar pelos exemplos, o compensador obtido pelo método apresentado atende de fato os valores de  $M_r$  e  $t_r$  e produz um sistema estável.

O valor da ultrapassagem  $M_p$  não é atendido com exatidão no método da resposta em frequência, podendo em certos casos apresentar uma discrepância com o valor especificado conforme demonstrado no capítulo 4.

O "software" elaborado, no entanto, atende também a ultrapassagem, embora não consideremos esse aperfeiçoamento importante, face ao fato de que o sistema, na prática, terá forçosamente que ser ajustável para compensar as inevitáveis diferenças entre os valores das características dos componentes,

constantes de catálogos, e os seus respectivos valores reais, que são da mesma ordem.

O método aplica-se também a sistemas com controlador discreto (computador) desde que a frequência de amostragem seja suficientemente alta para evitar erros de "Aliasing" e permitir a aplicação das transformadas de Laplace com razoável precisão.

O fato do método ajustar o tempo de resposta para o valor especificado é de grande importância, pois desde que o sistema tenha sido projetado para esse tempo de resposta de acordo com o capítulo 2, isto é, os componentes já terem sido escolhidos de acordo com o desempenho que deles se espera, o risco de ocorrência de surpresas causadas por saturações de componentes, tais como amplificadores, é bastante diminuído.

O programa computacional desenvolvido prevê a aplicação de um único compensador e, portanto, se o sistema necessitar de mais de um compensador do tipo previsto para atender às especificações, o programa não apresentará resultados satisfatórios.

Por outro lado, tendo em vista que a correlação entre a ultrapassagem e o pico de ressonância deixa de ser válida para valores de ultrapassagem inferiores a 1,05, o método proposto não é aplicável para esses valores de ultrapassagem inferiores a 1,05.

Recomenda-se que sejam investigadas as limitações do método, em especial para valores de ultrapassagem inferiores a 1,05, e que sejam introduzidos os aperfeiçoamentos necessários para eliminação dessas limitações.

Poder-se-á ainda aperfeiçoar o programa para que seja possível compensar automaticamente sistemas que exijam mais de um compensador, conforme exposto no capítulo 6 - item 4b, criando-se mais um "loop" dentro do programa, de forma que a cada vez que o teste (capítulo 6 - item 3.d) não for satisfeito, seja incluído um compensador centrado na frequência de ressonância, de forma a contribuir com sua fase e ganho no sentido de diminuir as diferenças necessárias, deixando o refinamento para um compensador final calculado pelo método em pauta.

## CAPÍTULO 9

### BIBLIOGRAFIA

- [1] Chestnut, H., Mayer, R. W., **Servomechanisms and Regulating System Design**, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1959;
- [2] Cheng, D, K., **Analysis of Linear Systems**, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959;
- [3] D`Azzo, J.J., Houpis, C.H., **Feedback Control Systems Analysis and Synthesis**, New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1966;
- [4] D`Azzo, J.J., Houpis, C.H., **Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares**, 2ª Ed., Guanabara Dois, 1984;
- [5] Dorf, R., **Time Domain Analysis and Design of Control Systems**, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1965;
- [6] James, H. M., Nichols, N. B., Phillips, R. S., **Theory of Servomechanisms**, New York, McGraw-Hill, 1947;
- [7] Rowland, J. R., **Linear Control Systems: Modeling, Analysis, and Design**, New York, John Wiley & Sons, 1986;
- [8] Ogata, K. - **Engenharia de Controle Moderno**, Rio de Janeiro, Editora Prentice/Hall Ltda., 1982;

- [9] Mainguenaud, J., **Cours D'Automatique**, 4 vol., Paris, Masson et Cie, 1972;
- [10] Castrucci, P., **Controle Automático - Teoria e Projeto**, São Paulo, ED. Edgard Blücher Ltda, 1969;
- [11] Leonhard, W., **Einführung In Die Regelungstechnik**, Braunschweig, Vieweg, 1991;
- [12] Kreyszig, E., **Matemática Superior**, 2 ed., 4 vol., Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, 1985;
- [13] Churchill, R. V., **Complex Variables And Applications**, Tokio, Tosho Printing Co. Ltd., 1960;
- [14] Fregosi, A. E., Feinstein, J., Caldeira, L., **Enfoque Clássico da Teoria de Controles**, 2 vol., EFEI, Itajubá, 1980;
- [15] Vianna, F., **Transformação de Carlson Laplace**, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S/A, 1971;
- [16] Distefano, J.J., Stubberud, A.R., Williams, I.J., **Sistemas de Retroação e Controle**, McGraw-Hill, São Paulo, 1972;
- [17] Takahashi, Y., Rabins, M.J., Auslander, D.M., **Control and Dynamic Systems**, Berkeley, 1973;
- [18] **MATHEMATICA for Windows, version 2.2**, Wolfram Research, Inc., USA, 1993;

- [19] Sistema de Análise e Projeto Integrado por Computador - **SAPIC**, versão 1.4, UFSC, Florianópolis, SC, 1988;
- [20] Catálogo: **Brushless and DC servomotors**, Robbins & Myers/Eletro-Craft, 1990;
- [21] Catálogo: **Servomotores de CC**, Asea Brown Boveri, 1992;
- [22] Catálogo: **Servomotores de CC e CA**, Weg, 1990;
- [23] **Performance Data and Parameters Industrial DC Motors**, General Eletric, 1987; .
- [24] Catálogo: **33 VM Series DC Control Motors**, Honeywell, 1990;
- [25] Catálogo Geral da **Rexroth (motores hidráulicos)**, 1980;
- [26] Catálogo Geral da **Racine (seções G e H)**, 1980;
- [27] Catálogo Geral da **Vickers (motores hidráulicos)**, 1980;
- [28] Catálogo: **Motori Oleodinamici**, Riva-Calzoni, Bologna, 1980;
- [29] Slonczewski, Tadeus, **Controles a Realimentação**, McGraw-Hill, Curitiba, 1970.

# Dissertação de Mestrado

## Compensação Analítica De Sistemas De Controle Em Malha Fechada Lineares Pelo Método Da Resposta Em Freqüência

Oswaldo Herek

### Apêndice A

#### ■ Programa de Cálculo Literal do Polinômio em p e da Amplificação

Conforme exposto no capítulo 5, para definir um compensador necessitamos determinar o valor de seu polo, zero e amplificação.

Uma vez impostas as especificações e determinadas as equações necessárias, precisamos resolvê-las literalmente por substituição para encontrarmos finalmente um polinômio em função de p (pólo do compensador).

Este programa realiza esse trabalho calculando literalmente a amplificação "a" e o polinômio em "p" (pólo do compensador), que serão utilizados diretamente no programa de cálculo do compensador (Apêndice B a E).

$x_1$  (vide eq. 5.17) é a parte real do sistema compensado dividido pela amplificação do compensador,  $x_0$  é a parte real do sistema a ser compensado,  $y_0$  é a parte imaginária do sistema a ser compensado,  $w$  é a freqüência e  $p$  é o pólo do compensador a ser determinado.

$$x_1 = \frac{(w^2 y_0 p^2 + 2 w^2 x_0 p - w^3 y_0)}{p (p^2 + w^2)}$$

$y_1$  (vide eq. 5.18) é a parte imaginária do sistema compensado dividido pela amplificação do compensador.

$$y_1 = \frac{-w x_0 p^2 + 2 w^2 y_0 p + w^3 x_0}{p (w^2 + p^2)}$$

$$= \frac{-(p^2 w x_0) + w^3 x_0 + 2 p w^2 y_0}{p (p^2 + w^2)}$$

$x_{11}$  (eq. 5.20) é a derivada em relação a  $w$  de  $y_1$ ,  
 $x_{00}$  é a derivada em relação a  $w$  de  $x_0$ ,  
 $y_{00}$  é a derivada em relação a  $w$  de  $y_0$ .

$$x_{11} = \frac{(w y_{00} + y_0) p^4 + 2w (w x_{00} + x_0) p^3 - 2 w^2 y_0 p^2 + 2 w^3 (w x_{00} - x_0) p - w^4 (w y_{00} - y_0)}{p (p^2 + w^2)^2}$$

$$= \frac{(2 p w^3 (-x_0 + w x_{00}) + 2 p^3 w (x_0 + w x_{00}) - 2 p^2 w^2 y_0 - w^4 (-y_0 + w y_{00}) + p^4 (y_0 + w y_{00}))}{p (p^2 + w^2)^2}$$

$y_{11}$  (eq. 5.21) é a derivada em relação a  $w$  de  $y_1$

$$y_{11} = \frac{-(w x_{00} + x_0) p^4 + 2 w (w y_{00} + y_0) p^3 + 2 w^2 x_0 p^2 + 2 w^3 (w y_{00} - y_0) p + w^4 (w x_{00} - x_0)}{p (p^2 + w^2)^2}$$

$$= \frac{(2 p^2 w^2 x_0 + w^4 (-x_0 + w x_{00}) - p^4 (x_0 + w x_{00}) + 2 p w^3 (-y_0 + w y_{00}) + 2 p^3 w (y_0 + w y_{00}))}{p (p^2 + w^2)^2}$$

"a" (eq. 5.19) é a amplificação do compensador a ser usado.

$$a = (x1 \ x11 + y1 \ y11) / (x11 \ (y1^2 - x1^2) - 2 \ x1 \ y1 \ y11)$$

$$(((2 \ p \ w \ x0 + p \ w \ y0 - w \ y0)$$

$$(2 \ p \ w \ (-x0 + w \ x00) + 2 \ p \ w \ (x0 + w \ x00) - 2 \ p \ w$$

$$w \ (-y0 + w \ y00) + p \ (y0 + w \ y00))) / (p \ (p + w$$

$$((-p \ w \ x0) + w \ x0 + 2 \ p \ w \ y0)$$

$$(2 \ p \ w \ x0 + w \ (-x0 + w \ x00) - p \ (x0 + w \ x00) +$$

$$2 \ p \ w \ (-y0 + w \ y00) + 2 \ p \ w \ (y0 + w \ y00))) / (p \ ($$

$$--(((\frac{(-p \ w \ x0) + w \ x0 + 2 \ p \ w \ y0}{p \ (p + w)} - \frac{(2 \ p \ w \ x0 + p \ w \ y0)}{p \ (p + w)}$$

$$(2 \ p \ w \ (-x0 + w \ x00) + 2 \ p \ w \ (x0 + w \ x00) - 2 \ p \ w$$

$$w \ (-y0 + w \ y00) + p \ (y0 + w \ y00))) / (p \ (p + w$$

$$(2 \ (-p \ w \ x0) + w \ x0 + 2 \ p \ w \ y0) (2 \ p \ w \ x0 + p \ w \ y0$$

$$(2 \ p \ w \ x0 + w \ (-x0 + w \ x00) - p \ (x0 + w \ x00) +$$

$$2 \ p \ w \ (-y0 + w \ y00) + 2 \ p \ w \ (y0 + w \ y00))) / (p \ ($$

Cancel[%]

$$(p \ (p + w) \ (p \ x0^2 - w \ x0^2 + p \ w \ x0 \ x00 + w \ x0 \ x00 + p$$

$$w \ y0^2 + p \ w \ y0 \ y00 + w \ y0 \ y00)) /$$

$$(w \ (-2 \ p \ w \ x0^3 + 2 \ p \ w \ x0^3 - 2 \ p \ w \ x0^2 \ x00 - 2 \ p \ w \ x0^4 \ x00$$

$$\begin{aligned}
& p^4 x_0^2 y_0 + 2 p^2 w^2 x_0^2 y_0 - w^4 x_0^2 y_0 - 2 p^4 w x_0 x_0^0 \\
& 2 w^5 x_0 x_0^0 y_0 - 2 p^3 w x_0^3 y_0 + 2 p^3 w x_0^2 y_0 + 2 p^3 w \\
& 2 p^4 w x_0^0 y_0 - p^4 y_0^3 + 2 p^2 w^2 y_0^3 - w^4 y_0^3 + p^4 w x \\
& w^5 x_0^2 y_0^0 - 4 p^3 w^2 x_0^2 y_0 y_0^0 - 4 p^4 w x_0^4 y_0 y_0^0 - p^4 \\
& w^5 y_0^2 y_0^0)
\end{aligned}$$

Para que o programa possa resolver a equação do modulo de T, as frações "a", y1 e x1 foram separadas em numerador e denominador.

Numerator[%]

$$\begin{aligned}
& p^2 (p^2 + w^2) (p^2 x_0^2 - w^2 x_0^2 + p^2 w x_0 x_0^0 + w^3 x_0 x_0^0 + p^2 \\
& p^2 w y_0 y_0^0 + w^3 y_0 y_0^0)
\end{aligned}$$

f=Collect[%,p]

$$\begin{aligned}
& p^5 (x_0^2 + w x_0 x_0^0 + y_0^2 + w y_0 y_0^0) + p^3 (2 w^3 x_0 x_0^0 + 2 w \\
& p^4 (-w x_0^2) + w^5 x_0 x_0^0 - w^4 y_0^2 + w^5 y_0 y_0^0)
\end{aligned}$$

Denominator[%%]

$$\begin{aligned}
& w^3 (-2 p^3 w x_0^3 + 2 p^3 w x_0^3 - 2 p^3 w x_0^2 x_0^0 - 2 p^4 w x_0^2 x \\
& p^4 x_0^2 y_0 + 2 p^2 w^2 x_0^2 y_0 - w^4 x_0^2 y_0 - 2 p^4 w x_0 x_0^0 y_0 \\
& 2 w^5 x_0 x_0^0 y_0 - 2 p^3 w x_0^3 y_0 + 2 p^3 w x_0^2 y_0 + 2 p^3 w \\
& 2 p^4 w x_0^0 y_0 - p^4 y_0^3 + 2 p^2 w^2 y_0^3 - w^4 y_0^3 + p^4 w x_0^2 \\
& w^5 x_0^2 y_0^0 - 4 p^3 w^2 x_0^2 y_0 y_0^0 - 4 p^4 w x_0^4 y_0 y_0^0 - p^4 w
\end{aligned}$$

$$w^5 y_0^2 y_{00})$$

**h=Collect[%,p]**

$$\begin{aligned} & -(w^5 x_0^2 y_0) + 2 w^6 x_0 x_{00} y_0 - w^5 y_0^3 + p^2 (2 w^3 x_0^2 y_0 + 2 \\ & w^6 x_0^2 y_{00} + w^6 y_0^2 y_{00} + p^3 \\ & (-2 w^2 x_0^3 - 2 w^3 x_0^2 x_{00} - 2 w^2 x_0^2 y_0 + 2 w^3 x_{00} y_0^2 - 4 \\ & + p (2 w^4 x_0^3 - 2 w^5 x_0^2 x_{00} + 2 w^4 x_0^2 y_0 + 2 w^5 x_{00} y_0^2 \\ & 4 w^5 x_0 y_0 y_{00}) + p^4 (-w^2 x_0^2 y_0) - 2 w^2 x_0 x_{00} y_0 - w y \\ & w^2 x_0^2 y_{00} - w^2 y_0^2 y_{00}) \end{aligned}$$

**c=Numerator[x1]**

$$2 p w^2 x_0 + p^2 w y_0 - w^3 y_0$$

**e=Numerator[y1]**

$$-(p^2 w x_0) + w^3 x_0 + 2 p w^2 y_0$$

O denominador de x1 é igual ao denominador de y1

**d=Denominator[x1]**

$$p (p^2 + w^2)$$

Fazemos igual a b o numerador final da expressão 5.24 obtido após a substituição de "a", x1 e y1 dados em função de f, h, c, e, e d:

$$b=mr^2 ((h d+f c)^2+(f e)^2)-f^2 (c^2+e^2)$$

$$-(((-(p^2 w x_0) + w^3 x_0 + 2 p^2 w y_0) + (2 p^2 w x_0 + p^2 w y_0$$

$$\text{Power}[p^5 (x_0^2 + w x_0 x_{00} + y_0^2 + w y_0 y_{00}) +$$

$$p^3 (2 w x_0 x_{00} + 2 w y_0 y_{00}) +$$

$$p^4 (-w x_0^2) + w^5 x_0 x_{00} - w^4 y_0^2 + w^5 y_0 y_{00}), 2]) +$$

$$mr^2 ((-(p^2 w x_0) + w^3 x_0 + 2 p^2 w y_0)$$

$$\text{Power}[p^5 (x_0^2 + w x_0 x_{00} + y_0^2 + w y_0 y_{00}) +$$

$$p^3 (2 w x_0 x_{00} + 2 w y_0 y_{00}) +$$

$$p^4 (-w x_0^2) + w^5 x_0 x_{00} - w^4 y_0^2 + w^5 y_0 y_{00}), 2] +$$

$$\text{Power}[(2 p^2 w x_0 + p^2 w y_0 - w^3 y_0)$$

$$(p^5 (x_0^2 + w x_0 x_{00} + y_0^2 + w y_0 y_{00}) +$$

$$p^3 (2 w x_0 x_{00} + 2 w y_0 y_{00}) +$$

$$p^4 (-w x_0^2) + w^5 x_0 x_{00} - w^4 y_0^2 + w^5 y_0 y_{00})) +$$

$$p^2 (p^2 + w^5) (-w x_0^2 y_0) + 2 w^6 x_0 x_{00} y_0 - w^5 y_0^3 +$$

$$p^2 (2 w^3 x_0^2 y_0 + 2 w^3 y_0^3) - w^6 x_0^2 y_{00} + w^6 y_0^2 y_{00}$$

$$p^3 (-2 w^2 x_0^3 - 2 w^3 x_0^2 x_{00} - 2 w^2 x_0^2 y_0 + 2 w^3 x_0^3$$

$$4 w^3 x_0 y_0 y_{00}) +$$

$$p^4 (2 w^4 x_0^3 - 2 w^5 x_0^2 x_{00} + 2 w^4 x_0^2 y_0 + 2 w^5 x_0^3$$

$$4 w^5 x_0 y_0 y_{00}) +$$

$$p^4 - (w x_0^2 + y_0^2) - 2 w x_0 x_{00} y_0 - w y_0^3 + w x_0^2 y^2 + w y_0^2 y_{00}), 2])$$

Pelos cálculos numéricos foi observado que o polinômio final possui 14 raízes das quais duas iguais a zero, 2 raízes iguais a  $+j\omega r$  e duas raízes iguais a  $-j\omega r$ . Para simplificar os cálculos, decidimos dividir o polinômio por  $b_1$  (raízes referidas).

$$b_1 = p^2 (p - j\omega r)^2 (p + j\omega r)^2$$

$$p^2 (p - j\omega r)^2 (p + j\omega r)^2$$

$$b2=b/b1$$

$$(-(((-(p^2 w x_0) + w^3 x_0^2 + 2 p^2 w y_0) + (2 p w^2 x_0 + p^2 w y_0$$

$$\text{Power}[p^5 (x_0^2 + w x_0 x_{00} + y_0^2 + w y_0 y_{00}) +$$

$$p^3 (2 w^3 x_0 x_{00} + 2 w^3 y_0 y_{00}) +$$

$$p^4 (-(w^2 x_0^2) + w^5 x_0 x_{00} - w^4 y_0^2 + w^5 y_0 y_{00}), 2])$$

$$\text{mr}^2 (-(p^2 w x_0) + w^3 x_0^2 + 2 p^2 w y_0)$$

$$\text{Power}[p^5 (x_0^2 + w x_0 x_{00} + y_0^2 + w y_0 y_{00}) +$$

$$p^3 (2 w^3 x_0 x_{00} + 2 w^3 y_0 y_{00}) +$$

$$p^4 (-(w^2 x_0^2) + w^5 x_0 x_{00} - w^4 y_0^2 + w^5 y_0 y_{00}), 2]$$

$$\text{Power}[(2 p^2 w x_0 + p^2 w y_0 - w^3 y_0)$$

$$(p^5 (x_0^2 + w x_0 x_{00} + y_0^2 + w y_0 y_{00}) +$$

$$p^3 (2 w^3 x_0 x_{00} + 2 w^3 y_0 y_{00}) +$$

$$p^4 (-(w^2 x_0^2) + w^5 x_0 x_{00} - w^4 y_0^2 + w^5 y_0 y_{00})) +$$

$$p^2 (p^2 + w^2) (-(w^5 x_0^2 y_0) + 2 w^6 x_0 x_{00} y_0 - w^5 y_0^3$$

$$p^2 (2 w^3 x_0^2 y_0 + 2 w^3 y_0^3) - w^6 x_0^2 y_{00} + w^6 y_0^2$$

$$p^3 (-2 w^2 x_0^3 - 2 w^3 x_0^2 x_{00} - 2 w^2 x_0^2 y_0 + 2 w^3$$

$$4 w^3 x_0 y_0 y_{00}) +$$

$$p^4 (2 w^4 x_0^3 - 2 w^5 x_0^2 x_{00} + 2 w^4 x_0^2 y_0 + 2 w^5 x$$

$$4 w^5 x_0 y_0 y_{00}) +$$

---

$$p^4 \left( -(w x_0^2 y_0) - 2 w^2 x_0 x_{00} y_0 - w y_0^3 + w^2 x_0^2 \right. \\ \left. w y_0^2 y_{00} \right), 2)) / (p^2 (p - I w)^2 (p + I w)^2)$$

Cancel [b2]

$$\begin{aligned}
& - (p^8 w^2 x_0^6) + mr^2 p^8 w^2 x_0^6 - 4 mr^2 p^6 w^4 x_0^6 + 2 p^4 w^6 x_0^6 \\
& 6 mr^2 p^4 w^6 x_0^6 - 4 mr^2 p^2 w^8 x_0^6 - w^{10} x_0^6 + mr^2 w^{10} x_0^6 - \\
& 2 p^8 w^3 x_0^5 x_{00} + 2 mr^2 p^8 w^3 x_0^5 x_{00} - 4 p^6 w^5 x_0^5 x_{00} - \\
& 4 mr^2 p^6 w^5 x_0^5 x_{00} + 4 p^2 w^9 x_0^5 x_{00} + 4 mr^2 p^2 w^9 x_0^5 x_{00} \\
& 2 w^{11} x_0^5 x_{00} - 2 mr^2 w^{11} x_0^5 x_{00} - p^8 w^4 x_0^4 x_{00} + mr^2 p^2 w^8 \\
& 4 p^6 w^6 x_0^4 x_{00} - 6 p^4 w^8 x_0^4 x_{00} - 2 mr^2 p^4 w^8 x_0^4 x_{00} \\
& 4 p^2 w^{10} x_0^4 x_{00} - w^{12} x_0^4 x_{00} + mr^2 w^{12} x_0^4 x_{00} - \\
& 4 mr^2 p^7 w^3 x_0^5 y_0 + 12 mr^2 p^5 w^5 x_0^5 y_0 - 12 mr^2 p^3 w^7 x_0^5 \\
& 4 mr^2 p^9 w^5 x_0^5 y_0 - 8 mr^2 p^7 w^4 x_0^4 x_{00} y_0 + 8 mr^2 p^5 w^6 x_0^6 \\
& 8 mr^2 p^3 w^8 x_0^4 x_{00} y_0 - 8 mr^2 p^{10} w^4 x_0^4 x_{00} y_0 - \\
& 4 mr^2 p^7 w^5 x_0^3 x_{00} y_0 - 4 mr^2 p^5 w^7 x_0^3 x_{00} y_0 + \\
& 4 mr^2 p^3 w^9 x_0^3 x_{00} y_0 + 4 mr^2 p^{11} w^3 x_0^2 x_{00} y_0 - 3 p^8 w^2 \\
& 2 mr^2 p^8 w^2 x_0^4 y_0 - 4 mr^2 p^6 w^4 x_0^4 y_0 + 6 p^4 w^6 x_0^4 y_0 \\
& 4 mr^2 p^4 w^6 x_0^4 y_0 - 4 mr^2 p^2 w^8 x_0^4 y_0 - 3 w^{10} x_0^4 y_0 + \\
& 2 mr^2 w^{10} x_0^4 y_0 - 4 p^8 w^3 x_0^3 x_{00} y_0 + 2 mr^2 p^8 w^3 x_0^3 \\
& 8 p^6 w^5 x_0^3 x_{00} y_0 + 4 mr^2 p^6 w^5 x_0^3 x_{00} y_0 + 8 p^2 w^9 x_0^3 \\
& 4 mr^2 p^2 w^9 x_0^3 x_{00} y_0 + 4 w^{11} x_0^3 x_{00} y_0 - 2 mr^2 w^{11} x_0^3 \\
& p^8 w^4 x_0^2 x_{00} y_0 + mr^2 p^8 w^4 x_0^2 x_{00} y_0 - 4 p^6 w^6 x_0^2 x
\end{aligned}$$

$$4 \text{ mr } p^2 w^6 x_0^6 x_{00}^2 y_0^2 - 6 p^4 w^8 x_0^2 x_{00}^2 y_0^2 +$$

$$6 \text{ mr } p^2 w^4 x_0^8 x_{00}^2 y_0^2 - 4 p^2 w^{10} x_0^2 x_{00}^2 y_0^2 +$$

$$4 \text{ mr } p^2 w^2 x_0^{10} x_{00}^2 y_0^2 - w^{12} x_0^2 x_{00}^2 y_0^2 + \text{mr } w^2 x_0^{12} :$$

$$8 \text{ mr } p^2 w^7 x_0^3 x_{00}^3 y_0^3 + 24 \text{ mr } p^2 w^5 x_0^5 x_{00}^3 y_0^3 - 24 \text{ mr } p^2 w^3 x_0^7$$

$$8 \text{ mr } p^2 w^9 x_0^3 x_{00}^3 y_0^3 - 8 \text{ mr } p^2 w^7 x_0^4 x_{00}^2 y_0^3 + 8 \text{ mr } p^2 w^5 x_0^6$$

$$8 \text{ mr } p^2 w^3 x_0^8 x_{00}^2 y_0^3 - 8 \text{ mr } p^2 w^{10} x_0^2 x_{00}^3 y_0^3 -$$

$$4 \text{ mr } p^2 w^7 x_0^5 x_{00}^3 y_0^3 - 4 \text{ mr } p^2 w^5 x_0^7 x_{00}^2 y_0^3 +$$

$$4 \text{ mr } p^2 w^3 x_0^9 x_{00}^3 y_0^3 + 4 \text{ mr } p^2 w^{11} x_0^3 x_{00}^2 y_0^3 - 3 p^8 w^2$$

$$\text{mr } p^2 w^8 x_0^2 x_{00}^4 y_0^4 + 4 \text{ mr } p^2 w^6 x_0^4 x_{00}^2 y_0^4 + 6 p^4 w^6 x_0^2 x_{00}^4 y_0^4 -$$

$$10 \text{ mr } p^2 w^4 x_0^6 x_{00}^2 y_0^4 + 4 \text{ mr } p^2 w^2 x_0^8 x_{00}^2 y_0^4 - 3 w^{10} x_0^2 y_0^4$$

$$\text{mr } w^{10} x_0^2 y_0^4 - 2 p^8 w^3 x_0^4 x_{00}^3 y_0^4 - 4 p^6 w^5 x_0^4 x_{00}^3 y_0^4 +$$

$$8 \text{ mr } p^2 w^6 x_0^5 x_{00}^4 y_0^4 + 4 p^4 w^9 x_0^4 x_{00}^2 y_0^4 - 8 \text{ mr } p^2 w^2 x_0^9$$

$$2 w^{11} x_0^4 x_{00}^4 y_0^4 + 4 \text{ mr } p^2 w^6 x_0^6 x_{00}^2 y_0^4 + 8 \text{ mr } p^2 w^4 x_0^8 x_{00}^2$$

$$4 \text{ mr } p^2 w^2 x_0^{10} x_{00}^2 y_0^4 - 4 \text{ mr } p^2 w^7 x_0^3 x_{00}^5 y_0^4 + 12 \text{ mr } p^2 w^5 x_0^5$$

$$12 \text{ mr } p^2 w^3 x_0^7 x_{00}^5 y_0^4 + 4 \text{ mr } p^2 w^9 x_0^5 x_{00}^8 y_0^2 - p^8 w^2 y_0^6 + 4 \text{ mr}$$

$$2 p^4 w^6 y_0^6 - 8 \text{ mr } p^2 w^4 x_0^6 y_0^6 + 4 \text{ mr } p^2 w^2 x_0^8 y_0^6 - w^{10} y_0^6 -$$

$$2 p^8 w^3 x_0^4 y_0^4 y_{00} + 2 \text{ mr } p^2 w^8 x_0^3 x_{00}^4 y_0^4 y_{00} - 4 p^6 w^5 x_0^4 y_0^4$$

$$4 \text{ mr } p^2 w^6 x_0^5 x_{00}^4 y_0^4 y_{00} + 4 p^2 w^9 x_0^4 y_0^4 y_{00} + 4 \text{ mr } p^2 w^2 x_0^9$$

$$\begin{aligned}
& 2 w^{11} x_0^4 y_0 y_{00} - 2 m r^2 w^{11} x_0^4 y_0 y_{00} - 2 p^8 w^4 x_0^3 x_{00} y \\
& 8 p^6 w^6 x_0^3 x_{00} y_0 y_{00} - 12 p^4 w^8 x_0^3 x_{00} y_0 y_{00} - \\
& 8 p^2 w^{10} x_0^3 x_{00} y_0 y_{00} - 2 w^{12} x_0^3 x_{00} y_0 y_{00} - \\
& 8 m r^2 p^7 w^4 x_0^3 y_0 y_{00} + 8 m r^2 p^5 w^6 x_0^3 y_0 y_{00} + \\
& 8 m r^2 p^3 w^8 x_0^3 y_0 y_{00} - 8 m r^2 p^{10} w^3 x_0^2 y_0 y_{00} - 4 p^8 w^3 \\
& 2 m r^2 p^8 w^3 x_0^2 y_0 y_{00} - 8 p^6 w^5 x_0^2 y_0 y_{00} + 4 m r^2 p^6 w^5 \\
& 8 p^2 w^9 x_0^2 y_0 y_{00} - 4 m r^2 p^2 w^9 x_0^2 y_0 y_{00} + 4 w^{11} x_0^2 y \\
& 2 m r^2 w^{11} x_0^2 y_0 y_{00} - 2 p^8 w^4 x_0^3 x_{00} y_0 y_{00} - 8 p^6 w^6 x_0 \\
& 12 p^4 w^8 x_0^3 x_{00} y_0 y_{00} - 8 p^2 w^{10} x_0^3 x_{00} y_0 y_{00} - \\
& 2 w^{12} x_0^3 x_{00} y_0 y_{00} - 8 m r^2 p^7 w^4 x_0^4 y_0 y_{00} + 8 m r^2 p^5 w^6 \\
& 8 m r^2 p^3 w^8 x_0^4 y_0 y_{00} - 8 m r^2 p^{10} w^4 x_0^4 y_0 y_{00} - 2 p^8 w^3 y \\
& 4 p^6 w^5 y_0 y_{00} + 8 m r^2 p^6 w^5 y_0 y_{00} + 4 p^2 w^9 y_0 y_{00} - \\
& 8 m r^2 p^2 w^9 y_0 y_{00} + 2 w^{11} y_0 y_{00} + m r^2 p^8 w^4 x_0^2 y_{00} - \\
& 2 m r^2 p^4 w^8 x_0^2 y_{00} + m r^2 w^{12} x_0^2 y_{00} - 4 m r^2 p^7 w^5 x_0^3 y \\
& 4 m r^2 p^5 w^7 x_0^3 y_0 y_{00} + 4 m r^2 p^3 w^9 x_0^3 y_0 y_{00} + \\
& 4 m r^2 p w^{11} x_0^3 y_0 y_{00} - p^2 w^8 x_0^2 y_0 y_{00} + m r^2 p^8 w^4 x_0 \\
& 4 p^6 w^2 x_0^2 y_0 y_{00} + 4 m r^2 p^6 w^6 x_0^2 y_0 y_{00} - 6 p^4 w^8 x \\
& 6 m r^2 p^4 w^8 x_0^2 y_0 y_{00} - 4 p^2 w^{10} x_0^2 y_0 y_{00} +
\end{aligned}$$

$$4 \text{ mr } p^2 w^{10} x_0^2 y_0^2 y_{00}^2 - w^{12} x_0^2 y_0^2 y_{00}^2 + \text{mr}^2 w^{12} x_0^2$$

$$4 \text{ mr}^2 p^7 w^5 x_0^3 y_0^2 y_{00}^2 - 4 \text{ mr}^2 p^5 w^7 x_0^3 y_0^2 y_{00}^2 +$$

$$4 \text{ mr}^2 p^3 w^9 x_0^3 y_0^2 y_{00}^2 + 4 \text{ mr}^2 p^{11} w^3 x_0^2 y_0^2 y_{00}^2 - p^8 w^4 y^4$$

$$4 p^6 w^6 y_0^4 y_{00}^2 + 4 \text{ mr}^2 p^6 w^6 y_0^4 y_{00}^2 - 6 p^4 w^8 y_0^4 y_{00}^2$$

$$8 \text{ mr}^2 p^4 w^8 y_0^4 y_{00}^2 - 4 p^2 w^{10} y_0^4 y_{00}^2 + 4 \text{ mr}^2 p^2 w^{10} y_0^4$$

$$w^{12} y_0^4 y_{00}^2$$

b3=Collect[%,p]

$$\begin{aligned}
& -(w^{10} x^6) + mr^2 w^{10} x^6 + 2 w^{11} x^5 x_{00} - 2 mr^2 w^{11} x^5 x_{00} \\
& w^{12} x^4 x_{00} + mr^2 w^{12} x^4 x_{00} - 3 w^{10} x^4 y_0 + 2 mr^2 w^{10} x^4 y_0 \\
& 4 w^{11} x^3 x_{00} y_0 - 2 mr^2 w^{11} x^3 x_{00} y_0 - w^{12} x^2 x_{00} y_0 \\
& mr^2 w^{12} x^2 x_{00} y_0 - 3 w^{10} x^2 y_0 + mr^2 w^{10} x^2 y_0 + \\
& 2 w^{11} x^4 x_{00} y_0 - w^{10} y_0 + 2 w^{11} x^4 y_0 y_{00} - 2 mr^2 w^{11} x^4 y_0 y_{00} \\
& 2 w^{12} x^3 x_{00} y_0 y_{00} + 4 w^{11} x^2 y_0 y_{00} - 2 mr^2 w^{11} x^2 y_0 y_{00} \\
& 2 w^{12} x^3 y_0 y_{00} + 2 w^{11} y_0 y_{00} + mr^2 w^{12} x^4 y_{00} - \\
& w^{12} x^2 y_0 y_{00} + mr^2 w^{12} x^2 y_0 y_{00} - w^{12} y_0 y_{00} + \\
& p^7 (-4 mr^2 w^3 x^5 y_0 - 8 mr^2 w^4 x^4 x_{00} y_0 - 4 mr^2 w^5 x^3 x \\
& 8 mr^2 w^3 x^3 y_0 - 8 mr^2 w^4 x^2 x_{00} y_0 - 4 mr^2 w^5 x^2 x_{00} x \\
& 4 mr^2 w^3 x^5 y_0 - 8 mr^2 w^4 x^3 y_0 y_{00} - 8 mr^2 w^4 x^4 y_0 \\
& 4 mr^2 w^5 x^3 y_0 y_{00} - 4 mr^2 w^5 x^3 y_0 y_{00}) + \\
& p^5 (12 mr^2 w^5 x^5 y_0 + 8 mr^2 w^6 x^4 x_{00} y_0 - 4 mr^2 w^7 x^3 x \\
& 24 mr^2 w^5 x^3 y_0 + 8 mr^2 w^6 x^2 x_{00} y_0 - 4 mr^2 w^7 x^2 x \\
& 12 mr^2 w^5 x^5 y_0 + 8 mr^2 w^6 x^3 y_0 y_{00} + 8 mr^2 w^6 x^6 y_0 \\
& 4 mr^2 w^7 x^3 y_0 y_{00} - 4 mr^2 w^7 x^3 y_0 y_{00}) + \\
& p^3 (-12 mr^2 w^7 x^5 y_0 + 8 mr^2 w^8 x^4 x_{00} y_0 + 4 mr^2 w^9 x^3 x \\
& 24 mr^2 w^7 x^3 y_0 + 8 mr^2 w^8 x^2 x_{00} y_0 + 4 mr^2 w^9 x^2 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 12 \text{ mr } w^2 x_0^7 y_0^5 + 8 \text{ mr } w^2 x_0^8 y_0^3 y_{00}^2 + 8 \text{ mr } w^2 x_0^8 y_0^2 y_{00}^3 \\
& 4 \text{ mr } w^2 x_0^9 y_0^3 y_{00}^2 + 4 \text{ mr } w^2 x_0^9 y_0^3 y_{00}^2 ) + \\
p & ( 4 \text{ mr } w^2 x_0^9 y_0^5 - 8 \text{ mr } w^2 x_0^{10} x_{00}^4 y_0^4 + 4 \text{ mr } w^2 x_0^{11} x_{00}^3 \\
& 8 \text{ mr } w^2 x_0^9 y_0^3 y_{00}^3 - 8 \text{ mr } w^2 x_0^{10} x_{00}^2 y_0^3 + 4 \text{ mr } w^2 x_0^{11} x_{00}^2 \\
& 4 \text{ mr } w^2 x_0^9 y_0^5 - 8 \text{ mr } w^2 x_0^{10} x_{00}^3 y_0^2 y_{00}^2 - 8 \text{ mr } w^2 x_0^{10} \\
& 4 \text{ mr } w^2 x_0^{11} x_{00}^3 y_0^2 y_{00}^2 + 4 \text{ mr } w^2 x_0^{11} x_{00}^3 y_{00}^2 ) + \\
p & ( -(w^2 x_0^6) + \text{mr } w^2 x_0^2 x_{00}^6 - 2 w^3 x_0^5 x_{00}^5 + 2 \text{ mr } w^2 x_0^3 x_{00}^5 \\
& w^4 x_0^4 x_{00}^2 + \text{mr } w^2 x_0^4 x_{00}^4 - 3 w^2 x_0^4 y_0^2 + 2 \text{ mr } w^2 \\
& 4 w^3 x_0^3 x_{00}^2 y_0^2 + 2 \text{ mr } w^2 x_0^3 x_{00}^3 y_0^2 - w^4 x_0^2 x_{00}^2 y_0^2 \\
& \text{mr } w^2 x_0^4 x_{00}^2 y_0^2 - 3 w^2 x_0^2 y_0^4 + \text{mr } w^2 x_0^2 y_0^4 - \\
& 2 w^3 x_0^4 x_{00}^2 y_0^2 - w^4 y_0^6 - 2 w^3 x_0^4 y_0^4 y_{00}^2 + 2 \text{ mr } w^2 x_0^3 \\
& 2 w^4 x_0^3 x_{00}^2 y_0^2 y_{00}^2 - 4 w^3 x_0^2 y_0^3 y_{00}^2 + 2 \text{ mr } w^2 x_0^3 y_0^2 \\
& 2 w^4 x_0^3 x_{00}^2 y_0^2 y_{00}^2 - 2 w^3 y_0^5 y_{00}^2 + \text{mr } w^2 x_0^4 y_{00}^2 - \\
& w^4 x_0^2 y_0^2 y_{00}^2 + \text{mr } w^2 x_0^4 y_0^2 y_{00}^2 - w^4 y_0^4 y_{00}^2 ) + \\
p & ( -4 \text{ mr } w^2 x_0^4 - 4 w^5 x_0^5 x_{00}^5 - 4 \text{ mr } w^2 x_0^5 x_{00}^5 - 4 w^6 \\
& 4 \text{ mr } w^2 x_0^4 y_0^2 - 8 w^5 x_0^3 x_{00}^2 y_0^2 + 4 \text{ mr } w^2 x_0^5 x_{00}^3 \\
& 4 w^6 x_0^2 x_{00}^2 y_0^2 + 4 \text{ mr } w^2 x_0^6 x_{00}^2 y_0^2 + 4 \text{ mr } w^2 x_0^4 \\
& 4 w^5 x_0^4 x_{00}^2 y_0^2 + 8 \text{ mr } w^2 x_0^5 x_{00}^4 y_0^2 + 4 \text{ mr } w^2 x_0^6 x_{00}^2 y_0^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4 \text{ mr } w^2 y_0^4 - 4 w^5 x_0^4 y_0 y_{00} - 4 \text{ mr } w^2 x_0^5 y_0 y_{00} - \\
& 8 w^6 x_0^3 x_{00} y_0 y_{00} - 8 w^5 x_0^2 y_0^3 y_{00} + 4 \text{ mr } w^2 x_0^5 y_0^2 \\
& 8 w^6 x_0^3 x_{00} y_0^3 y_{00} - 4 w^5 y_0^5 y_{00} + 8 \text{ mr } w^2 y_0^5 y_{00} - \\
& 4 w^6 x_0^2 y_0^2 y_{00} + 4 \text{ mr } w^2 x_0^6 y_0^2 y_{00} - 4 w^6 y_0^4 y_{00} \\
& 4 \text{ mr } w^2 y_0^4 y_{00} ) + p ( 2 w^6 x_0^6 + 6 \text{ mr } w^2 x_0^6 - 6 w^8 \\
& 2 \text{ mr } w^2 x_0^4 x_{00} + 6 w^6 x_0^4 y_0^2 + 4 \text{ mr } w^2 x_0^6 y_0^2 - \\
& 6 w^8 x_0^2 x_{00} y_0^2 + 6 \text{ mr } w^2 x_0^8 x_{00} y_0^2 + 6 w^6 x_0^2 y_0^4 \\
& 10 \text{ mr } w^2 x_0^4 y_0^4 + 8 \text{ mr } w^2 x_0^8 y_0^4 + 2 w^6 y_0^6 - 8 \text{ mr } \\
& 12 w^8 x_0^3 x_{00} y_0 y_{00} - 12 w^8 x_0^3 x_{00} y_0^3 y_{00} - 2 \text{ mr } w^2 x_0^8 \\
& 6 w^8 x_0^2 y_0^2 y_{00} + 6 \text{ mr } w^2 x_0^8 y_0^2 y_{00} - 6 w^8 y_0^4 y_{00} \\
& 8 \text{ mr } w^2 y_0^4 y_{00} ) + p ( -4 \text{ mr } w^2 x_0^8 + 4 w^9 x_0^5 x_{00} + \\
& 4 \text{ mr } w^2 x_0^9 x_{00} - 4 w^{10} x_0^4 x_{00} - 4 \text{ mr } w^2 x_0^8 y_0^2 + \\
& 8 w^9 x_0^3 x_{00} y_0 - 4 \text{ mr } w^2 x_0^9 x_{00} y_0 - 4 w^{10} x_0^2 x_{00}^2 \\
& 4 \text{ mr } w^2 x_0^{10} x_{00} y_0 + 4 \text{ mr } w^2 x_0^8 y_0^4 + 4 w^9 x_0^9 x_{00} \\
& 8 \text{ mr } w^2 x_0^9 x_{00} y_0 + 4 \text{ mr } w^2 x_0^{10} y_0^4 + 4 \text{ mr } w^2 y_0^8 \\
& 4 w^9 x_0^4 y_0 y_{00} + 4 \text{ mr } w^2 x_0^9 y_0^4 y_{00} - 8 w^{10} x_0^3 x_{00} y_0 \\
& 8 w^9 x_0^2 y_0^3 y_{00} - 4 \text{ mr } w^2 x_0^9 y_0^2 y_{00} - 8 w^{10} x_0^3 x_{00} y_0 \\
& 4 w^9 y_0^5 y_{00} - 8 \text{ mr } w^2 y_0^9 y_{00} - 4 w^{10} x_0^2 y_0^2 y_{00} +
\end{aligned}$$

$$4 \text{ mr}^2 \text{ w}^{10} \text{ x}_0^2 \text{ y}_0^2 \text{ y}_{00}^2 - 4 \text{ w}^{10} \text{ y}_0^4 \text{ y}_{00}^2 + 4 \text{ mr}^2 \text{ w}^{10} \text{ y}_0^4$$

InputForm[%]

$$\begin{aligned}
&-(w^{10}x^6) + mr^2w^{10}x^6 + 2w^{11}x^5x_0 - 2mr^2w^{11}x^4x_0^2 + mr^2w^{12}x^4x_0^2 - 3w^{10}x^4y_0^2 - 2mr^2w^{10}x^4y_0^2 + 4w^{11}x^3x_0y_0^2 - 2mr^2w^{11}x^3x_0y_0^2 - w^{12}x^2x_0^2y_0^2 + mr^2w^{12}x^2x_0^2y_0^2 - 3w^{10}x^2y_0^4 + mr^2w^{10}x^2w^{11}x^0x_0y_0^4 - w^{10}y_0^6 + 2w^{11}x^4y_0y_0 - 2mr^2w^{11}x^4y_0y_0 - 2w^{12}x^3x_0y_0y_0 + 4w^{11}x^2y_0^3y_0 - 2mr^2w^{11}x^2y_0^3y_0 - 2w^{12}x^0x_0y_0^3y_0 + 2w^{11}y_0^5y_0 + mr^2w^{12}x^4w^{12}x^0^2y_0^2y_0^2 + mr^2w^{12}x^0^2y_0^2y_0^2 - w^{12}y_0^7 \\
&p^7(-4mr^2w^3x^5y_0 - 8mr^2w^4x^4x_0y_0 - 4mr^2w^5x^3x_0^2y_0 - 8mr^2w^3x^3y_0^3 - 8mr^2w^4x^2x_0y_0^3 - 4mr^2w^5x^0x_0^2y_0^3 - 4mr^2w^3x^0y_0^5 - 8mr^2w^4x^0^3y_0^2y_0 - 8mr^2w^4x^0y_0^4y_0 - 4mr^2w^5x^0^3y_0y_0^2 - 4mr^2w^5x^0y_0^3y_0^2) + \\
&p^5(12mr^2w^5x^5y_0 + 8mr^2w^6x^4x_0y_0 - 4mr^2w^7x^3x_0^2y_0 + 24mr^2w^5x^3y_0^3 + 8mr^2w^6x^2x_0y_0^3 - 4mr^2w^7x^0x_0^2y_0^3 + 12mr^2w^5x^0y_0^5 + 8mr^2w^6x^0^3y_0^2y_0 + 8mr^2w^6x^0y_0^4y_0 - 4mr^2w^7x^0^3y_0y_0^2 - 4mr^2w^7x^0y_0^3y_0^2) + \\
&p^3(-12mr^2w^7x^5y_0 + 8mr^2w^8x^4x_0y_0 + 4mr^2w^9x^3x_0^2y_0 - 24mr^2w^7x^3y_0^3 + 8mr^2w^8x^2x_0y_0^3 + 4mr^2w^9x^0x_0^2y_0^3 - 12mr^2w^7x^0y_0^5 + 8mr^2w^8x^0^3y_0^2y_0 + 8mr^2w^8x^0y_0^4y_0 + 4mr^2w^9x^0^3y_0y_0^2 + 4mr^2w^9x^0y_0^3y_0^2) + \\
&p(4mr^2w^9x^5y_0 - 8mr^2w^{10}x^4x_0y_0 + 4mr^2w^{11}x^3x_0^2y_0 + 8mr^2w^9x^3y_0^3 - 8mr^2w^{10}x^2x_0y_0^3 + 4mr^2w^{11}x^0x_0^2y_0^3 + 4mr^2w^9x^0y_0^5 - 8mr^2w^{10}x^0^3y_0^2y_0 - 8mr^2w^{10}x^0y_0^4y_0 + 4mr^2w^{11}x^0^3y_0y_0^2 + 4mr^2w^{11}x^0y_0^3y_0^2) + \\
&p^8(-w^2x^6) + mr^2w^2x^6 - 2w^3x^5x_0 + 2mr^2w^3x^5x_0 - w^4x^4x_0^2 + mr^2w^4x^4x_0^2 + 3w^2x^4y_0^2 + 2mr^2w^2x^4y_0^2 - 4w^3x^3x_0^2mr^2w^3x^3x_0^2y_0^2 - w^4x^2x_0^2y_0^2 + mr^2w^4x^2x_0^2y_0^2 - 3w^2x^2y_0^4 + mr^2w^2x^2w^3x^0x_0y_0^4 - w^2y_0^6 - 2w^3x^4y_0y_0 + 2mr^2w^3x^4y_0y_0 - 2w^4x^3x_0y_0y_0 - 4w^3x^2y_0^3y_0 + 2mr^2w^3x^2y_0^3y_0 - 2w^4x^0x_0y_0^3y_0 - 2w^3y_0^5y_0 + mr^2w^4x^0^4w^4x^0^2y_0^2y_0^2 + mr^2w^4x^0^2y_0^2y_0^2 - w^4y_0^6 \\
&p^6(-4mr^2w^4x^6 - 4w^5x^5x_0 - 4mr^2w^5x^5x_0^4w^6x^4x_0^2 - 4mr^2w^4x^4y_0^2 - 8w^5x^3x_0^4mr^2w^5x^3x_0^3y_0^2 - 4w^6x^2x_0^2y_0^2 + 4mr^2w^6x^2x_0^2y_0^2 + 4mr^2w^4x^2y_0^4 - 4w^5x^0x_0y_0^4 + 8mr^2w^5x^0x_0y_0^4 + 4mr^2w^64mr^2w^4y_0^6 - 4w^5x^4y_0y_0 - 4mr^2w^5x^0^4y_08w^6x^3x_0y_0y_0 - 8w^5x^2y_0^3y_0 + 4mr^2w^5x^0^2y_0^3y_0 - 8w^6x^0x_0y_0^3y_0 - 4w^8mr^2w^5y_0^5y_0 - 4w^6x^0^2y_0^2y_0^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4*mr^2*w^6*x0^2*y0^2*y00^2 - 4*w^6*y0^4*y00^2 + 4*mr^2* \\
& ) + p^4*(2*w^6*x0^6 + 6*mr^2*w^6*x0^6 - 6*w^8*x0^4*x00^ \\
& 2*mr^2*w^8*x0^4*x00^2 + 6*w^6*x0^4*y0^2 + 4*mr^2*w^6*x0 \\
& 6*w^8*x0^2*x00^2*y0^2 + 6*mr^2*w^8*x0^2*x00^2*y0^2 + \\
& 6*w^6*x0^2*y0^4 - 10*mr^2*w^6*x0^2*y0^4 + 8*mr^2*w^8*x0 \\
& 2*w^6*y0^6 - 8*mr^2*w^6*y0^6 - 12*w^8*x0^3*x00*y0*y00 - \\
& 12*w^8*x0*x00*y0^3*y00 - 2*mr^2*w^8*x0^4*y00^2 - \\
& 6*w^8*x0^2*y0^2*y00^2 + 6*mr^2*w^8*x0^2*y0^2*y00^2 - \\
& 6*w^8*y0^4*y00^2 + 8*mr^2*w^8*y0^4*y00^2) + \\
p^2*(-4*mr^2*w^8*x0^6 + 4*w^9*x0^5*x00 + 4*mr^2*w^9*x0^5*x \\
& 4*w^10*x0^4*x00^2 - 4*mr^2*w^8*x0^4*y0^2 + 8*w^9*x0^3*x \\
& 4*mr^2*w^9*x0^3*x00*y0^2 - 4*w^10*x0^2*x00^2*y0^2 + \\
& 4*mr^2*w^10*x0^2*x00^2*y0^2 + 4*mr^2*w^8*x0^2*y0^4 + \\
& 4*w^9*x0*x00*y0^4 - 8*mr^2*w^9*x0*x00*y0^4 + 4*mr^2*w^1 \\
& 4*mr^2*w^8*y0^6 + 4*w^9*x0^4*y0*y00 + 4*mr^2*w^9*x0^4*y \\
& 8*w^10*x0^3*x00*y0*y00 + 8*w^9*x0^2*y0^3*y00 - \\
& 4*mr^2*w^9*x0^2*y0^3*y00 - 8*w^10*x0*x00*y0^3*y00 + 4*w \\
& 8*mr^2*w^9*y0^5*y00 - 4*w^10*x0^2*y0^2*y00^2 + \\
& 4*mr^2*w^10*x0^2*y0^2*y00^2 - 4*w^10*y0^4*y00^2 + \\
& 4*mr^2*w^10*y0^4*y00^2)
\end{aligned}$$

Esse polinômio deverá ser resolvido para cada caso em função das especificações e do sistema qualquer que se pretende compensar.

Das soluções encontradas, apenas as que são reais e negativas deverão ser consideradas, para que o compensador seja passivo e se enquadre no padrão adotado.

Devemos estar atentos para o fato de que os compensadores obtidos farão com que haja pontos de tangência da função de transferência de malha aberta com o círculo correspondente ao valor máximo da função de transferência de malha fechada e portanto não garantem que o sistema seja estável.

# Dissertação de Mestrado

## Compensação Analítica De Sistemas De Controle Em Malha Fechada Lineares Pelo Método Da Resposta Em Freqüência

Oswaldo Herek

### Apêndice B - Exemplo número 1 do texto

#### Programa de Cálculo do Compensador

O programa de cálculo a seguir determina o compensador do tipo:

$$tc=ac(s-zc)/(s-pc)$$

a ser instalado no controlador do sistema de forma a fazê-lo atender às especificações impostas de tempo de resposta ( $t_r$ ) e ultrapassagem ( $m_p$ ) para uma referência do tipo degrau ou de freqüência de ressonância ( $w_r$ ) e ressonância ( $m_r$ ) para referências senoidais.

No Apêndice A foram determinados literalmente o polinômio final em  $p$  (polo do compensador a ser calculado) e a amplificação  $A_c$ , utilizados neste programa.

#### 1. Dados

1.1 Entre com o valor de  $m_p$  e  $t_r$  desejados, em substituição aos valores existentes.

$m_p=1.2$

1.2

$m_{p1}=m_p$

1.2

If [ $m_p < 1.06$ ,  $m_p=1.06$ ]

$t_r=1.89$

1.89

1.2 Entre com os valores dos zeros do sistema a ser compensado, separados por vírgula, em substituição aos valores existentes na lista de zeros n1.

n1={ }

{ }

nn=Length[n1]

0

1.3 Entre com os valores dos polos do sistema a ser compensado, à exceção dos polos na origem, separados por vírgula, em substituição aos valores existentes na lista de polos n2.

n2={ -0.4, -2.5 }

{ -0.4, -2.5 }

nd=Length[n2]

2

1.4 Entre com o valor de k (fator constante da função de transferência de malha aberta do sistema a ser compensado), em substituição ao valor existente.

k=0.3

0.3

1.5 Entre com o número de polos na origem do sistema a ser compensado (m), em substituição ao número existente.

m=1

1

2. Cálculo do Posicionador tipo I com dois polos que poderia atender às especificações.

### 2.1 Coeficiente de amortecimento

$ksi = ((\text{Log}[mp-1])^2 / ((\text{Log}[mp-1])^2 + \text{Pi}^2))^{.5}$

0.45595

### 2.2 Complemento da fase do polo dominante

$eta = \text{ArcCos}[ksi]$

1.09736

### 2.3 Freqüência natural

$wn = (3.1416 - eta) / (\text{tr} (1 - (ksi)^2)^{.5})$

1.21528

### 2.4 Valor da ressonância para referência senoidal

$mr = 1 / (2 ksi (1 - (ksi)^2)^{.5})$

1.23214

### 2.5 Valor da freqüência de ressonância

$$wr=wn (1-2 ksi^2)^{.5}$$

$$0.928894$$

3. Cálculo dos valores de  $hg_0$  e  $hg_{00}$ , respectivamente função de transferência de malha aberta do sistema a ser compensado e sua derivada em relação a  $w$ .

$$hg_0 = k \frac{\text{Product}[w^{I-n1}[[i]], \{i, 1, nn\}]}{((w^I)^m \text{Product}[w^{I-n2}[[j]], \{j, 1, nd\}])^{-0.3 I}}$$

$$hg_1 = hg_0$$

$$hg_{00} = D[hg_0, w]$$

$$\frac{0.3 I}{(0.4 + I w)^2 (2.5 + I w)^2 w} \quad \frac{0.3}{(0.4 + I w)^2 (2.5 + I w)^2 w}$$

#### ■ 4. Cálculo do Compensador

Devemos carregar o "Laplace Transform Package", para calcular a controlada no domínio do tempo.

```
<<Calculus`LaplaceTransform`
```

Fazemos agora a frequência ser igual à  $w_r$  (ressonância), calculamos as raízes do polinômio desenvolvido no Apêndice A, com os dados acima, tabelamos as raízes e selecionamos apenas as raízes reais e negativas, para a seguir calcular as amplificações correspondentes, utilizando as expressões de  $f$  e  $h$  calculadas no Apêndice A.

O polo ou os polos dos compensadores que atendem às especificações devem, naturalmente, conduzir a sistemas estáveis.

Devemos portanto, fazer mais um teste com as raízes selecionadas, quanto à estabilidade do sistema.

Para isso impomos que o ganho final de malha aberta do sistema seja igual a 1 ( $\text{mod}(hgf)=1$ ), calculamos as frequências correspondentes, as quais devem ser positivas, e verificamos o valor da fase de  $hgf$ , que deverá ser maior do que  $-180$  graus para que o sistema seja estável.

O valor do polo será definido escolhendo-se entre as fases resultantes a que for maior e desde que seja também maior do que  $-180$  graus.

Com os valores de  $p_c$  calculamos  $a_c$  (amplificação) e  $z_c$  (zero do compensador), aplicamos o compensador ao sistema  $h_g0$ , determinamos a função de transferência de malha fechada correspondente, aplicamos um degrau unitário à mesma e através da transformada inversa de Laplace e calculamos a variável controlada em função do tempo.

Resolvemos a expressão da variável controlada para o valor de  $t_r$  especificado e caso não coincida com o valor 1 ( resposta ao degrau unitário), o valor da frequência de ressonância  $w_r$  é reajustado para mais ou para menos, dependendo do valor calculado ser menor ou maior do que 1, sendo então o cálculo reiniciado no Label(freq).

Da mesma forma, resolvemos a expressão da variável controlada para o tempo de pico e caso não coincida com o valor de  $m_p$ , o valor de  $m_r$  é reajustado para mais ou para menos, dependendo do valor calculado ser menor ou maior do que  $m_p$ , sendo então o cálculo reiniciado no Label (Ult).

Quando o valor estiver compreendido nos limites da tolerância estabelecida, tanto num caso como no outro, os dados correspondentes ao compensador adequado, bem como os demais dados de interesse, são informados e para confirmação de sua adequação, são plotadas as seguintes curvas: resposta no tempo para um degrau unitário, diagramas de Bode de ganho e de fase da função de transferência de malha aberta e diagrama de Bode de ganho da função de transferência de malha fechada.

Todos os cálculos mencionados são executados dentro de uma mesma célula em função dos "Loops" que serão formados para ajustar o valor do tempo de resposta e o valor da ultrapassagem.

```
(wr=wn (1-2 ksi^2)^.5;
Label [freq];
If[ctr<0.99,wr=1.01 wr];
If[ctr>1.01,wr=0.99 wr];
mr=1/(2 ksi (1-(ksi)^2)^.5);
Label [ult];
If[ctp<0.999 mp1,mr=1.001 mr];
```

```
If[ctp>1.001 mp1,mr=0.999 mr];
```

```
w=wr;
```

```
x0=Re[hg0];
```

```
y0=Im[hg0];
```

```
x00=Re[hg00];
```

```
y00=Im[hg00];
```

```
q1=Solve[-(w^10 x0^6)+mr^2 w^10 x0^6+2 w^11 x0^5 x00-
2 mr^2 w^11 x0^5 x00-w^12 x0^4 x00^2+
mr^2 w^12 x0^4 x00^2-3 w^10 x0^4 y0^2+
2 mr^2 w^10 x0^4 y0^2+
4 w^11 x0^3 x00 y0^2-2 mr^2 w^11 x0^3 x00 y0^2-
w^12 x0^2 x00^2 y0^2+mr^2 w^12 x0^2 x00^2 y0^2-
3 w^10 x0^2 y0^4+mr^2 w^10 x0^2 y0^4+
2 w^11 x0 x00 y0^4-w^10 y0^6+2 w^11 x0^4 y0 y00-
2 mr^2 w^11 x0^4 y0 y00-2 w^12 x0^3 x00 y0 y00+
4 w^11 x0^2 y0^3 y00-2 mr^2 w^11 x0^2 y0^3 y00-
2 w^12 x0 x00 y0^3 y00+2 w^11 y0^5 y00+
mr^2 w^12 x0^4 y00^2-w^12 x0^2 y0^2 y00^2+
mr^2 w^12 x0^2 y0^2 y00^2-w^12 y0^4 y00^2+
p^7 (-4 mr^2 w^3 x0^5 y0-8 mr^2 w^4 x0^4 x00 y0-
4 mr^2 w^5 x0^3 x00^2 y0-8 mr^2 w^3 x0^3 y0^3-
8 mr^2 w^4 x0^2 x00 y0^3-4 mr^2 w^5 x0 x00^2 y0^3-
4 mr^2 w^3 x0 y0^5-8 mr^2 w^4 x0^3 y0^2 y00-
8 mr^2 w^4 x0 y0^4 y00-4 mr^2 w^5 x0^3 y0 y00^2-
4 mr^2 w^5 x0 y0^3 y00^2)+p^5 (12 mr^2 w^5 x0^5 y0+
8 mr^2 w^6 x0^4 x00 y0-4 mr^2 w^7 x0^3 x00^2 y0+
24 mr^2 w^5 x0^3 y0^3+8 mr^2 w^6 x0^2 x00 y0^3-
4 mr^2 w^7 x0 x00^2 y0^3+12 mr^2 w^5 x0 y0^5+
8 mr^2 w^6 x0^3 y0^2 y00+8 mr^2 w^6 x0 y0^4 y00-
4 mr^2 w^7 x0^3 y0 y00^2-4 mr^2 w^7 x0 y0^3 y00^2)+
p^3 (-12 mr^2 w^7 x0^5 y0+8 mr^2 w^8 x0^4 x00 y0+
4 mr^2 w^9 x0^3 x00^2 y0-24 mr^2 w^7 x0^3 y0^3+
8 mr^2 w^8 x0^2 x00 y0^3+4 mr^2 w^9 x0 x00^2 y0^3-
12 mr^2 w^7 x0 y0^5+8 mr^2 w^8 x0^3 y0^2 y00+
8 mr^2 w^8 x0 y0^4 y00+4 mr^2 w^9 x0^3 y0 y00^2+
4 mr^2 w^9 x0 y0^3 y00^2)+p (4 mr^2 w^9 x0^5 y0-
8 mr^2 w^10 x0^4 x00 y0+4 mr^2 w^11 x0^3 x00^2 y0+
8 mr^2 w^9 x0^3 y0^3-8 mr^2 w^10 x0^2 x00 y0^3+
4 mr^2 w^11 x0 x00^2 y0^3+4 mr^2 w^9 x0 y0^5-
8 mr^2 w^10 x0^3 y0^2 y00-8 mr^2 w^10 x0 y0^4 y00+
4 mr^2 w^11 x0^3 y0 y00^2+4 mr^2 w^11 x0 y0^3 y00^2)+
p^8 (-(w^2 x0^6)+mr^2 w^2 x0^6-2 w^3 x0^5 x00+
2 mr^2 w^3 x0^5 x00-w^4 x0^4 x00^2+
mr^2 w^4 x0^4 x00^2-3 w^2 x0^4 y0^2+
```

```

2 mr^2 w^2 x0^4 y0^2-4 w^3 x0^3 x00 y0^2+
2 mr^2 w^3 x0^3 x00 y0^2-w^4 x0^2 x00^2 y0^2+
mr^2 w^4 x0^2 x00^2 y0^2-3 w^2 x0^2 y0^4+
mr^2 w^2 x0^2 y0^4-2 w^3 x0 x00 y0^4-w^2 y0^6-
2 w^3 x0^4 y0 y00+2 mr^2 w^3 x0^4 y0 y00-
2 w^4 x0^3 x00 y0 y00-4 w^3 x0^2 y0^3 y00+
2 mr^2 w^3 x0^2 y0^3 y00-2 w^4 x0 x00 y0^3 y00-
2 w^3 y0^5 y00+mr^2 w^4 x0^4 y00^2-
w^4 x0^2 y0^2 y00^2+mr^2 w^4 x0^2 y0^2 y00^2-
w^4 y0^4 y00^2)+p^6 (-4 mr^2 w^4 x0^6-
4 w^5 x0^5 x00-4 mr^2 w^5 x0^5 x00-
4 w^6 x0^4 x00^2-4 mr^2 w^4 x0^4 y0^2-
8 w^5 x0^3 x00 y0^2+4 mr^2 w^5 x0^3 x00 y0^2-
4 w^6 x0^2 x00^2 y0^2+4 mr^2 w^6 x0^2 x00^2 y0^2+
4 mr^2 w^4 x0^2 y0^4-4 w^5 x0 x00 y0^4+
8 mr^2 w^5 x0 x00 y0^4+4 mr^2 w^6 x00^2 y0^4+
4 mr^2 w^4 y0^6-4 w^5 x0^4 y0 y00-
4 mr^2 w^5 x0^4 y0 y00-8 w^6 x0^3 x00 y0 y00-
8 w^5 x0^2 y0^3 y00+4 mr^2 w^5 x0^2 y0^3 y00-
8 w^6 x0 x00 y0^3 y00-4 w^5 y0^5 y00+
8 mr^2 w^5 y0^5 y00-4 w^6 x0^2 y0^2 y00^2+
4 mr^2 w^6 x0^2 y0^2 y00^2-4 w^6 y0^4 y00^2+
4 mr^2 w^6 y0^4 y00^2)+p^4 (2 w^6 x0^6+
6 mr^2 w^6 x0^6-6 w^8 x0^4 x00^2-
2 mr^2 w^8 x0^4 x00^2+6 w^6 x0^4 y0^2+
4 mr^2 w^6 x0^4 y0^2-6 w^8 x0^2 x00^2 y0^2+
6 mr^2 w^8 x0^2 x00^2 y0^2+6 w^6 x0^2 y0^4-
10 mr^2 w^6 x0^2 y0^4+8 mr^2 w^8 x00^2 y0^4+
2 w^6 y0^6-8 mr^2 w^6 y0^6-12 w^8 x0^3 x00 y0 y00-
12 w^8 x0 x00 y0^3 y00-2 mr^2 w^8 x0^4 y00^2-
6 w^8 x0^2 y0^2 y00^2+6 mr^2 w^8 x0^2 y0^2 y00^2-
6 w^8 y0^4 y00^2+8 mr^2 w^8 y0^4 y00^2) +
p^2 (-4 mr^2 w^8 x0^6+4 w^9 x0^5 x00+
4 mr^2 w^9 x0^5 x00-4 w^10 x0^4 x00^2-
4 mr^2 w^8 x0^4 y0^2+8 w^9 x0^3 x00 y0^2-
4 mr^2 w^9 x0^3 x00 y0^2-4 w^10 x0^2 x00^2 y0^2+
4 mr^2 w^10 x0^2 x00^2 y0^2+4 mr^2 w^8 x0^2 y0^4+
4 w^9 x0 x00 y0^4-8 mr^2 w^9 x0 x00 y0^4+
4 mr^2 w^10 x00^2 y0^4+4 mr^2 w^8 y0^6+
4 w^9 x0^4 y0 y00+4 mr^2 w^9 x0^4 y0 y00-
8 w^10 x0^3 x00 y0 y00+8 w^9 x0^2 y0^3 y00-
4 mr^2 w^9 x0^2 y0^3 y00-8 w^10 x0 x00 y0^3 y00+
4 w^9 y0^5 y00-8 mr^2 w^9 y0^5 y00-
4 w^10 x0^2 y0^2 y00^2+4 mr^2 w^10 x0^2 y0^2 y00^2-
4 w^10 y0^4 y00^2+4 mr^2 w^10 y0^4 y00^2)==0,p];

```

```
mt=Table[q1];
```

```

f=p^5 (x0^2+w x0 x00+y0^2+w y0 y00)+
p^3 (2 w^3 x0 x00+2 w^3 y0 y00)+p (-(w^4 x0^2)+
w^5 x0 x00-w^4 y0^2+w^5 y0 y00);

```

```

h=- (w^5 x0^2 y0)+2 w^6 x0 x00 y0-w^5 y0^3+
p^2 (2 w^3 x0^2 y0+2 w^3 y0^3)-w^6 x0^2 y00+
w^6 y0^2 y00+p^3 (-2 w^2 x0^3-2 w^3 x0^2 x00-
2 w^2 x0 y0^2+2 w^3 x00 y0^2-4 w^3 x0 y0 y00)+
p (2 w^4 x0^3-2 w^5 x0^2 x00+2 w^4 x0 y0^2+
2 w^5 x00 y0^2-4 w^5 x0 y0 y00)+p^4 (-(w x0^2 y0)-
2 w^2 x0 x00 y0-w y0^3+w^2 x0^2 y00-w^2 y0^2 y00);

```

```
a=f/h;
```

```
p1=p/.mt;
```

```
p2>DeleteCases[p1,Complex[x_,y_]];
```

```
n3=Cases[p2,p_/;p<0];
```

```
n5=a/.p->n3;
```

```
Clear[w];
```

```

hgm=k^2 ac^2 (w^2+(wr^2/p)^2) Product[(w^2+
(n1[[i]])^2),{i,1,nn}]-w^(2 m) (w^2+
p^2) Product[(w^2+(n2[[j]])^2),{j,1,nd}]/.{ac->n5,
p->n3};

```

```
w1=NSolve[hgm[[1]]==0,w];
```

```
w2=w/.w1;
```

```
w3>DeleteCases[w2,Complex[x_,y_]];
```

```
w4=Cases[w3,w_/;w>0];
```

```

teta1=(Sum[ArcTan[w4/(-n1[[i]])],{i,1,nn}]
+ArcTan[w4/(-wr^2/(n3[[1]])]-ArcTan[w4/(-n3[[1]])]-
m 3.14159/2-Sum[ArcTan[w4/(-n2[[j]])],{j,1,nd}]) 180/
3.14159;

```

```
w5=NSolve[hgm[[2]]==0,w];
```

```
w6=w/.w5;
```

```
w7>DeleteCases[w6,Complex[x_,y_]];
```

```
w8=Cases[w7,w_/;w>0];
```

```

teta2=(Sum[ArcTan[w8/(-n1[[i]])],{i,1,nn}]
+ArcTan[w8/(-wr^2/(n3[[2]])]-ArcTan[w8/(-n3[[2]])]-
m 3.14159/2-Sum[ArcTan[w8/(-n2[[j]])],
{j,1,nd}]) 180/3.14159;

```

```

teta0={teta1[[1]],teta2[[1]]};
teta3=Cases[teta0,teta_/;teta>-180];
nt=Length[teta3];
pc=If[teta1[[1]]>teta2[[1]],n3[[1]],n3[[2]]];
ac=a/.p->pc;
hgf=k ac (s-wr^2/pc) Product[s-n1[[i]],
{i,1,nn}]/(s^m (s-pc) Product[s-n2[[j]],{j,1,nd}]);
cs=hgf/(s (1+hgf));
ct=InverseLaplaceTransform[cs,s,t];
ctr=ct/.t->tr;
If[ctr<0.99,Goto[freq]];
If[ctr>1.01,Goto[freq]];
tp=3.14159/(wn (1-ksi^2)^0.5);
ctp=ct/.t->tp;
If[ctp<0.999 mp1,Goto[ult]];
If[ctp>1.001 mp1,Goto[ult]]

```

## ■ 5. Resultados Obtidos

```

ctr
0.996383
ctp
1.20067
wr
1.05717
mr
1.22722

```

A função de transferência do compensador será:

$$tc = \frac{ac (s - wr^2/pc) hg0 / (hg1 (s - pc))}{26.0635 (0.405181 + s)}$$


---


$$2.75828 + s$$

```

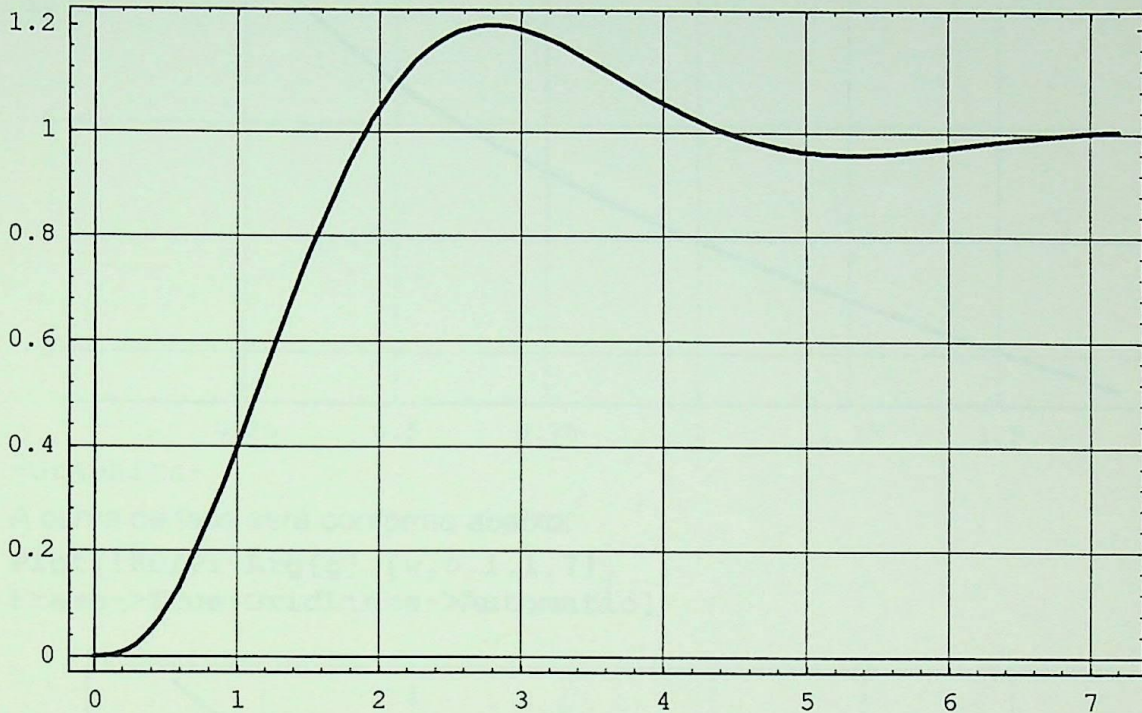
pc
-2.75828

```

```
ac
26.0635
z=wr^2/pc
-0.405181
```

## ■ 6. Comprovação dos Resultados Obtidos

```
Plot[ct, {t, 0, 7.2}, Frame->True, GridLines->Automatic,
Axes->True]
```



-Graphics-

Os diagramas de Bode de malha aberta podem ser traçados da seguinte forma;

A função de transferência do compensador será:

$$tc = ac \frac{(w I - wr^2/pc)}{(w I - pc)}$$

$$26.0635 \frac{(0.405181 + I w)}{2.75828 + I w}$$

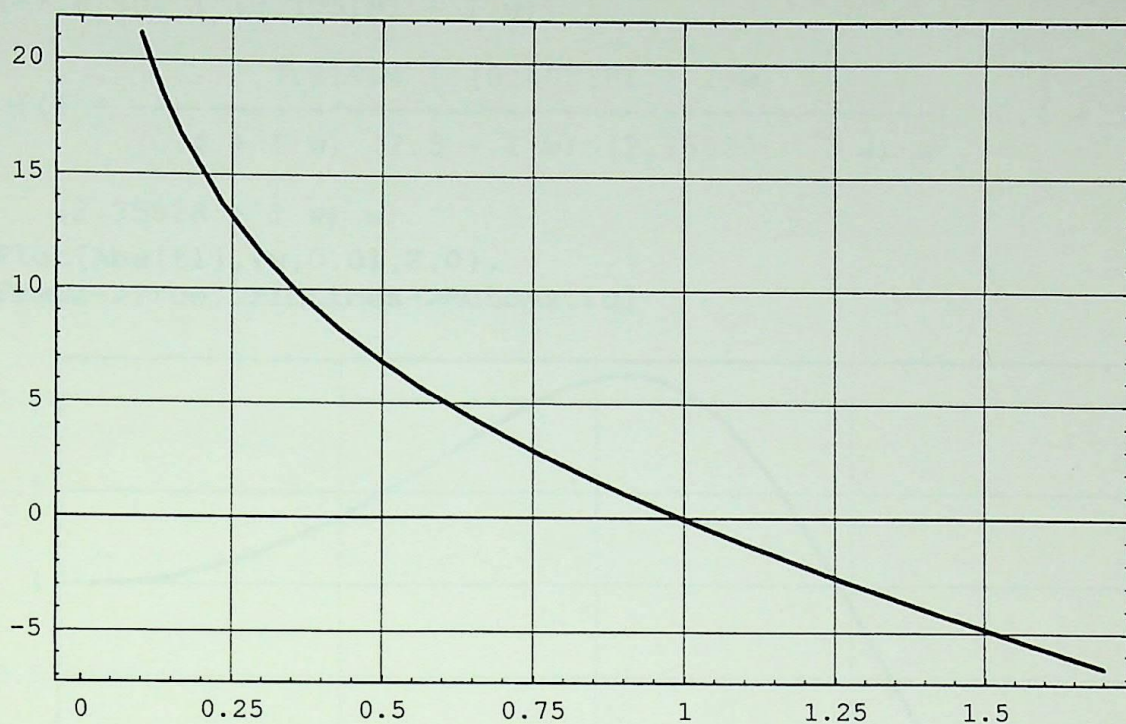
A função de transferência de malha aberta do sistema compensado será, portanto:

$$g = hg0 \cdot tc$$

$$\frac{-7.81904 I (0.405181 + I w)}{(0.4 + I w) (2.5 + I w) (2.75828 + I w) w}$$

Que podemos plotar, para observarmos a estabilidade do sistema. A curva de ganho será conforme abaixo (note que a escala das abcissas não é logarítmica como usualmente)

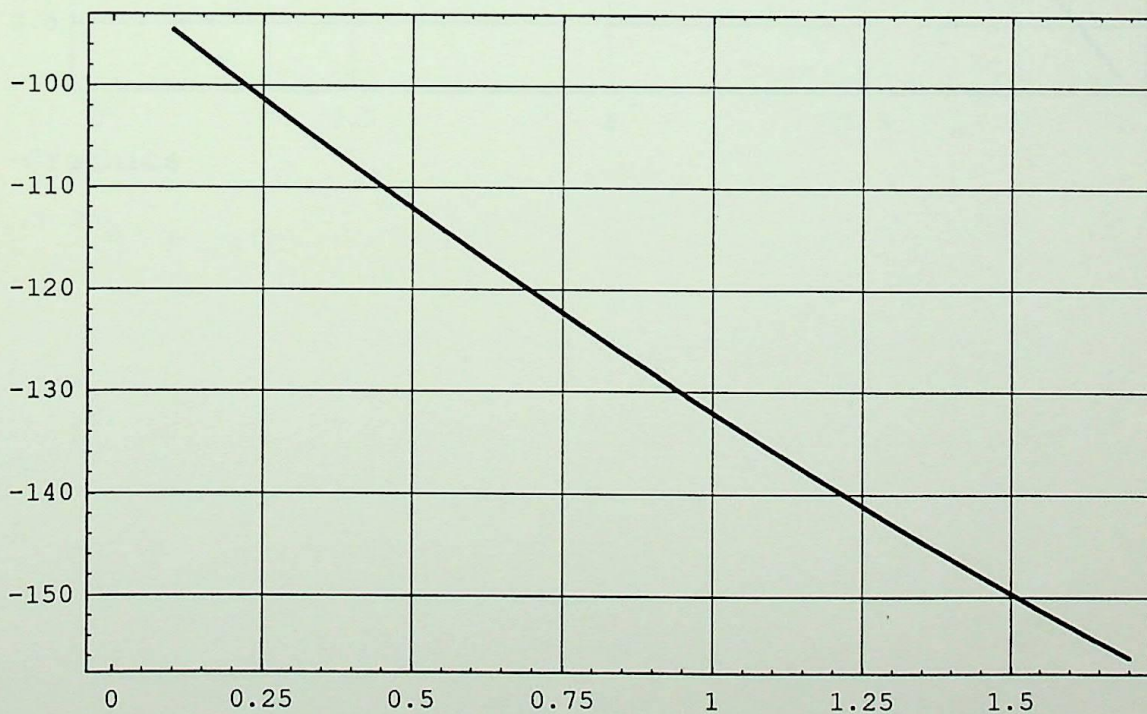
```
Plot[20 Log[10,Abs[g]],{w,0.1,1.7},  
Frame->True,GridLines->Automatic]
```



-Graphics-

A curva de fase será conforme abaixo:

```
Plot[180/Pi Arg[g],{w,0.1,1.7},  
Frame->True,GridLines->Automatic]
```



-Graphics-

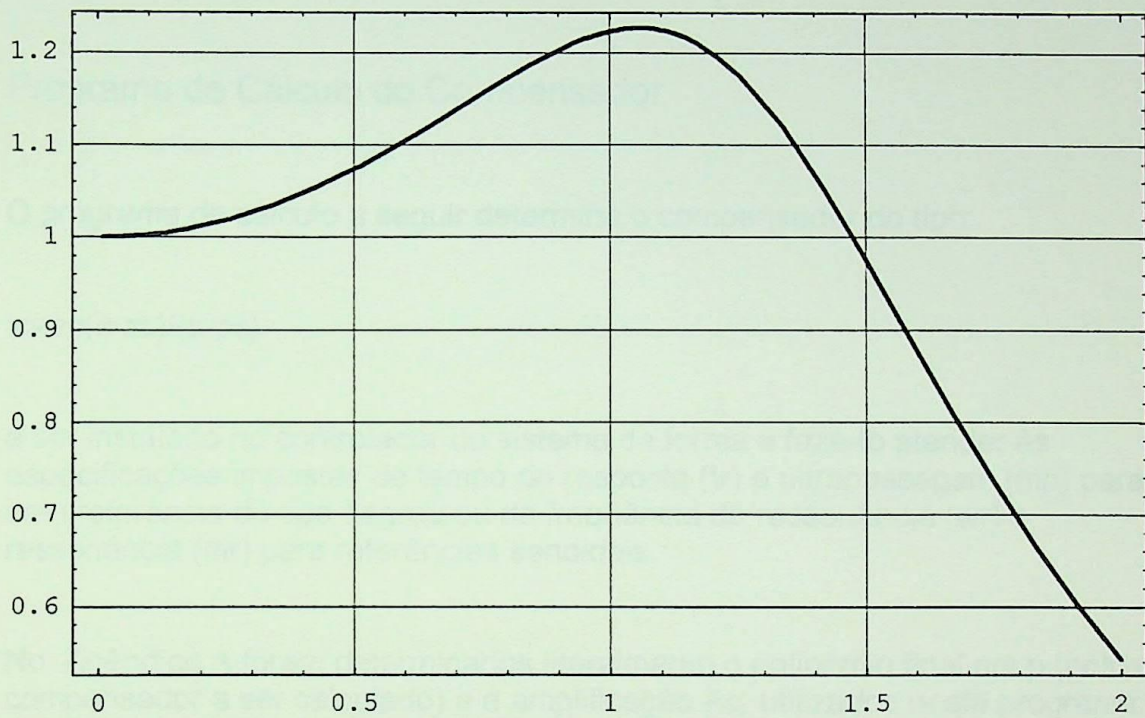
$$t1 = g / (1 + g)$$

$$(-7.81904 I (0.405181 + I w)) /$$

$$--(1 - \frac{7.81904 I (0.405181 + I w)}{(0.4 + I w) (2.5 + I w) (2.75828 + I w) w}) (0.4 + I w)$$

$$(2.75828 + I w) w)$$

```
Plot[Abs[t1], {w, 0.01, 2.0},
Frame->True, GridLines->Automatic]
```



-Graphics-

# Dissertação de Mestrado

## Compensação Analítica De Sistemas De Controle Em Malha Fechada Lineares Pelo Método Da Resposta Em Freqüência

Oswaldo Herek

### Apêndice C - Exemplo número 2 do texto

#### Programa de Cálculo do Compensador

O programa de cálculo a seguir determina o compensador do tipo:

$$tc=ac(s-zc)/(s-pc)$$

a ser instalado no controlador do sistema de forma a fazê-lo atender às especificações impostas de tempo de resposta ( $t_r$ ) e ultrapassagem ( $m_p$ ) para uma referência do tipo degrau ou de freqüência de ressonância ( $w_r$ ) e ressonância ( $m_r$ ) para referências senoidais.

No Apêndice A foram determinados literalmente o polinômio final em  $p$  (polo do compensador a ser calculado) e a amplificação  $A_c$ , utilizados neste programa.

#### 1. Dados

1.1 Entre com o valor de  $m_p$  e  $t_r$  desejados, em substituição aos valores existentes.

```
mp=1.1
```

```
1.1
```

```
mp1=mp
```

```
1.1
```

```
If [mp<1.06,mp=1.06]
```

```
tr=0.9
```

```
0.9
```

1.2 Entre com os valores dos zeros do sistema a ser compensado, separados por vírgula, em substituição aos valores existentes na lista de zeros n1.

n1={ }

{ }

nn=Length [n1]

0

1.3 Entre com os valores dos polos do sistema a ser compensado, à exceção dos polos na origem, separados por vírgula, em substituição aos valores existentes na lista de polos n2.

n2={ }

{ }

nd=Length [n2]

0

1.4 Entre com o valor de k (fator constante da função de transferência de malha aberta do sistema a ser compensado), em substituição ao valor existente.

k=10.89

10.89

1.5 Entre com o número de polos na origem do sistema a ser compensado (m), em substituição ao número existente.

m=2

2

2. Cálculo do Posicionador tipo I com dois polos que poderia atender às especificações.

2.1 Coeficiente de amortecimento

$ksi = ((\text{Log}[mp-1])^2 / ((\text{Log}[mp-1])^2 + \text{Pi}^2))^{.5}$

0.591155

2.2 Complemento da fase do polo dominante

$eta = \text{ArcCos}[ksi]$

0.938306

2.3 Freqüência natural

$wn = (3.1416 - eta) / (tr (1 - (ksi)^2)^{.5})$

3.03525

2.4 Valor da ressonância para referência senoidal

$mr = 1 / (2 ksi (1 - (ksi)^2)^{.5})$

1.04866

2.5 Valor da freqüência de ressonância

$$wr=wn (1-2 ksi^2)^{.5}$$

1.66544

3. Cálculo dos valores de  $hg_0$  e  $hg_{00}$ , respectivamente função de transferência de malha aberta do sistema a ser compensado e sua derivada em relação a  $w$ .

$$hg_0 = k \text{ Product}[w \text{ I-n1}[[i]], \{i, 1, nn\}] / ((w \text{ I})^m \text{ Product}[w \text{ I-n2}[[j]], \{j, 1, nd\}])$$

-10.89

-----  
2

w

$$hg_1 = hg_0$$

-10.89

-----  
2

w

$$hg_{00} = D[hg_0, w]$$

21.78

-----  
3

w

#### ■ 4. Cálculo do Compensador

Devemos carregar o "Laplace Transform Package", para calcular a controlada no domínio do tempo.

```
<<Calculus`LaplaceTransform`
```

Fazemos agora a frequência ser igual à  $w_r$  (ressonância), calculamos as raízes do polinômio desenvolvido no Apêndice A, com os dados acima, tabelamos as raízes e selecionamos apenas as raízes reais e negativas, para a seguir calcular as ampliações correspondentes, utilizando as expressões de  $f$  e  $h$  calculadas no Apêndice A.

O polo ou os polos dos compensadores que atendem às especificações devem, naturalmente, conduzir a sistemas estáveis.

Devemos portanto, fazer mais um teste com as raízes selecionadas, quanto à estabilidade do sistema.

Para isso impomos que o ganho final de malha aberta do sistema seja igual a 1 ( $\text{mod}(hgf)=1$ ), calculamos as frequências correspondentes, as quais devem ser positivas, e verificamos o valor da fase de  $hgf$ , que deverá ser maior do que  $-180$  graus para que o sistema seja estável.

O valor do polo será definido escolhendo-se entre as fases resultantes a que for maior e desde que seja também maior do que  $-180$  graus.

Com os valores de  $p_c$  calculamos  $a_c$  (amplificação) e  $z_c$  (zero do compensador), aplicamos o compensador ao sistema  $hg_0$ , determinamos a função de transferência de malha fechada correspondente, aplicamos um degrau unitário à mesma e através da transformada inversa de Laplace e calculamos a variável controlada em função do tempo.

Resolvemos a expressão da variável controlada para o valor de  $t_r$  especificado e caso não coincida com o valor 1 ( resposta ao degrau unitário), o valor da frequência de ressonância  $w_r$  é reajustado para mais ou para menos, dependendo do valor calculado ser menor ou maior do que 1, sendo então o cálculo reiniciado no Label(freq).

Da mesma forma, resolvemos a expressão da variável controlada para o tempo de pico e caso não coincida com o valor de  $m_p$ , o valor de  $m_r$  é reajustado para mais ou para menos, dependendo do valor calculado ser menor ou maior do que  $m_p$ , sendo então o cálculo reiniciado no Label (Ult).

Quando o valor estiver compreendido nos limites da tolerância estabelecida, tanto num caso como no outro, os dados correspondentes ao compensador adequado, bem como os demais dados de interesse, são informados e para confirmação de sua adequação, são plotadas as seguintes curvas: resposta no tempo para um degrau unitário, diagramas de Bode de ganho e de fase da função de transferência de malha aberta e diagrama de Bode de ganho da função de transferência de malha fechada.

Todos os cálculos mencionados são executados dentro de uma mesma célula em função dos "Loops" que serão formados para ajustar o valor do tempo de resposta e o valor da ultrapassagem.

```
(wr=wn (1-2 ksi^2)^.5;
```

```
Label [freq];
```

```
If[ctr<0.99,wr=1.01 wr];
```

```
If[ctr>1.01,wr=0.99 wr];
```

```
mr=1/(2 ksi (1-(ksi)^2)^.5);
```

```
Label [ult];
```

```
If[ctp<0.999 mp1,mr=1.001 mr];
```

```
If[ctp>1.001 mp1,mr=0.999 mr];
```

```
w=wr;
```

$x0 = \text{Re}[hg0];$

$y0 = \text{Im}[hg0];$

$x00 = \text{Re}[hg00];$

$y00 = \text{Im}[hg00];$

```

q1=Solve[-(w^10 x0^6)+mr^2 w^10 x0^6+2 w^11 x0^5 x00-
2 mr^2 w^11 x0^5 x00-w^12 x0^4 x00^2+
mr^2 w^12 x0^4 x00^2-3 w^10 x0^4 y0^2+
2 mr^2 w^10 x0^4 y0^2+
4 w^11 x0^3 x00 y0^2-2 mr^2 w^11 x0^3 x00 y0^2-
w^12 x0^2 x00^2 y0^2+mr^2 w^12 x0^2 x00^2 y0^2-
3 w^10 x0^2 y0^4+mr^2 w^10 x0^2 y0^4+
2 w^11 x0 x00 y0^4-w^10 y0^6+2 w^11 x0^4 y0 y00-
2 mr^2 w^11 x0^4 y0 y00-2 w^12 x0^3 x00 y0 y00+
4 w^11 x0^2 y0^3 y00-2 mr^2 w^11 x0^2 y0^3 y00-
2 w^12 x0 x00 y0^3 y00+2 w^11 y0^5 y00+
mr^2 w^12 x0^4 y00^2-w^12 x0^2 y0^2 y00^2+
mr^2 w^12 x0^2 y0^2 y00^2-w^12 y0^4 y00^2+
p^7 (-4 mr^2 w^3 x0^5 y0-8 mr^2 w^4 x0^4 x00 y0-
4 mr^2 w^5 x0^3 x00^2 y0-8 mr^2 w^3 x0^3 y0^3-
8 mr^2 w^4 x0^2 x00 y0^3-4 mr^2 w^5 x0 x00^2 y0^3-
4 mr^2 w^3 x0 y0^5-8 mr^2 w^4 x0^3 y0^2 y00-
8 mr^2 w^4 x0 y0^4 y00-4 mr^2 w^5 x0^3 y0 y00^2-
4 mr^2 w^5 x0 y0^3 y00^2)+p^5 (12 mr^2 w^5 x0^5 y0+
8 mr^2 w^6 x0^4 x00 y0-4 mr^2 w^7 x0^3 x00^2 y0+
24 mr^2 w^5 x0^3 y0^3+8 mr^2 w^6 x0^2 x00 y0^3-
4 mr^2 w^7 x0 x00^2 y0^3+12 mr^2 w^5 x0 y0^5+
8 mr^2 w^6 x0^3 y0^2 y00+8 mr^2 w^6 x0 y0^4 y00-
4 mr^2 w^7 x0^3 y0 y00^2-4 mr^2 w^7 x0 y0^3 y00^2)+
p^3 (-12 mr^2 w^7 x0^5 y0+8 mr^2 w^8 x0^4 x00 y0+
4 mr^2 w^9 x0^3 x00^2 y0-24 mr^2 w^7 x0^3 y0^3+
8 mr^2 w^8 x0^2 x00 y0^3+4 mr^2 w^9 x0 x00^2 y0^3-
12 mr^2 w^7 x0 y0^5+8 mr^2 w^8 x0^3 y0^2 y00+
8 mr^2 w^8 x0 y0^4 y00+4 mr^2 w^9 x0^3 y0 y00^2+
4 mr^2 w^9 x0 y0^3 y00^2)+p (4 mr^2 w^9 x0^5 y0-
8 mr^2 w^10 x0^4 x00 y0+4 mr^2 w^11 x0^3 x00^2 y0+
8 mr^2 w^9 x0^3 y0^3-8 mr^2 w^10 x0^2 x00 y0^3+
4 mr^2 w^11 x0 x00^2 y0^3+4 mr^2 w^9 x0 y0^5-
8 mr^2 w^10 x0^3 y0^2 y00-8 mr^2 w^10 x0 y0^4 y00+
4 mr^2 w^11 x0^3 y0 y00^2+4 mr^2 w^11 x0 y0^3 y00^2)+
p^8 (-(w^2 x0^6)+mr^2 w^2 x0^6-2 w^3 x0^5 x00+
2 mr^2 w^3 x0^5 x00-w^4 x0^4 x00^2+
mr^2 w^4 x0^4 x00^2-3 w^2 x0^4 y0^2+
2 mr^2 w^2 x0^4 y0^2-4 w^3 x0^3 x00 y0^2+
2 mr^2 w^3 x0^3 x00 y0^2-w^4 x0^2 x00^2 y0^2+
mr^2 w^4 x0^2 x00^2 y0^2-3 w^2 x0^2 y0^4+
mr^2 w^2 x0^2 y0^4-2 w^3 x0 x00 y0^4-w^2 y0^6-

```

```

2 w^3 x0^4 y0 y00+2 mr^2 w^3 x0^4 y0 y00-
2 w^4 x0^3 x00 y0 y00-4 w^3 x0^2 y0^3 y00+
2 mr^2 w^3 x0^2 y0^3 y00-2 w^4 x0 x00 y0^3 y00-
2 w^3 y0^5 y00+mr^2 w^4 x0^4 y00^2-
w^4 x0^2 y0^2 y00^2+mr^2 w^4 x0^2 y0^2 y00^2-
w^4 y0^4 y00^2)+p^6 (-4 mr^2 w^4 x0^6-
4 w^5 x0^5 x00-4 mr^2 w^5 x0^5 x00-
4 w^6 x0^4 x00^2-4 mr^2 w^4 x0^4 y0^2-
8 w^5 x0^3 x00 y0^2+4 mr^2 w^5 x0^3 x00 y0^2-
4 w^6 x0^2 x00^2 y0^2+4 mr^2 w^6 x0^2 x00^2 y0^2+
4 mr^2 w^4 x0^2 y0^4-4 w^5 x0 x00 y0^4+
8 mr^2 w^5 x0 x00 y0^4+4 mr^2 w^6 x00^2 y0^4+
4 mr^2 w^4 y0^6-4 w^5 x0^4 y0 y00-
4 mr^2 w^5 x0^4 y0 y00-8 w^6 x0^3 x00 y0 y00-
8 w^5 x0^2 y0^3 y00+4 mr^2 w^5 x0^2 y0^3 y00-
8 w^6 x0 x00 y0^3 y00-4 w^5 y0^5 y00+
8 mr^2 w^5 y0^5 y00-4 w^6 x0^2 y0^2 y00^2+
4 mr^2 w^6 x0^2 y0^2 y00^2-4 w^6 y0^4 y00^2+
4 mr^2 w^6 y0^4 y00^2)+p^4 (2 w^6 x0^6+
6 mr^2 w^6 x0^6-6 w^8 x0^4 x00^2-
2 mr^2 w^8 x0^4 x00^2+6 w^6 x0^4 y0^2+
4 mr^2 w^6 x0^4 y0^2-6 w^8 x0^2 x00^2 y0^2+
6 mr^2 w^8 x0^2 x00^2 y0^2+6 w^6 x0^2 y0^4-
10 mr^2 w^6 x0^2 y0^4+8 mr^2 w^8 x00^2 y0^4+
2 w^6 y0^6-8 mr^2 w^6 y0^6-12 w^8 x0^3 x00 y0 y00-
12 w^8 x0 x00 y0^3 y00-2 mr^2 w^8 x0^4 y00^2-
6 w^8 x0^2 y0^2 y00^2+6 mr^2 w^8 x0^2 y0^2 y00^2-
6 w^8 y0^4 y00^2+8 mr^2 w^8 y0^4 y00^2) +
p^2 (-4 mr^2 w^8 x0^6+4 w^9 x0^5 x00+
4 mr^2 w^9 x0^5 x00-4 w^10 x0^4 x00^2-
4 mr^2 w^8 x0^4 y0^2+8 w^9 x0^3 x00 y0^2-
4 mr^2 w^9 x0^3 x00 y0^2-4 w^10 x0^2 x00^2 y0^2+
4 mr^2 w^10 x0^2 x00^2 y0^2+4 mr^2 w^8 x0^2 y0^4+
4 w^9 x0 x00 y0^4-8 mr^2 w^9 x0 x00 y0^4+
4 mr^2 w^10 x00^2 y0^4+4 mr^2 w^8 y0^6+
4 w^9 x0^4 y0 y00+4 mr^2 w^9 x0^4 y0 y00-
8 w^10 x0^3 x00 y0 y00+8 w^9 x0^2 y0^3 y00-
4 mr^2 w^9 x0^2 y0^3 y00-8 w^10 x0 x00 y0^3 y00+
4 w^9 y0^5 y00-8 mr^2 w^9 y0^5 y00-
4 w^10 x0^2 y0^2 y00^2+4 mr^2 w^10 x0^2 y0^2 y00^2-
4 w^10 y0^4 y00^2+4 mr^2 w^10 y0^4 y00^2)==0,p];

```

```
mt=Table[q1];
```

```

f=p^5 (x0^2+w x0 x00+y0^2+w y0 y00)+
p^3 (2 w^3 x0 x00+2 w^3 y0 y00)+p (-(w^4 x0^2)+
w^5 x0 x00-w^4 y0^2+w^5 y0 y00);

```

```

h=-(w^5 x0^2 y0)+2 w^6 x0 x00 y0-w^5 y0^3+
p^2 (2 w^3 x0^2 y0+2 w^3 y0^3)-w^6 x0^2 y00+
w^6 y0^2 y00+p^3 (-2 w^2 x0^3-2 w^3 x0^2 x00-

```

```

2 w^2 x0 y0^2+2 w^3 x00 y0^2-4 w^3 x0 y0 y00)+
p (2 w^4 x0^3-2 w^5 x0^2 x00+2 w^4 x0 y0^2+
2 w^5 x00 y0^2-4 w^5 x0 y0 y00)+p^4 (-(w x0^2 y0)-
2 w^2 x0 x00 y0-w y0^3+w^2 x0^2 y00-w^2 y0^2 y00);

a=f/h;

p1=p/.mt;

p2>DeleteCases[p1,Complex[x_,y_]];

n3=Cases[p2,p_/;p<0];

n5=a/.p->n3;

Clear[w];

hgm=k^2 ac^2 (w^2+(wr^2/p)^2) Product[(w^2+
(n1[[i]])^2),{i,1,nn}]-w^(2 m) (w^2+
p^2) Product[(w^2+(n2[[j]])^2),{j,1,nd}]/.{ac->n5,
p->n3};

w1=NSolve[hgm[[1]]==0,w];

w2=w/.w1;

w3>DeleteCases[w2,Complex[x_,y_]];

w4=Cases[w3,w_/;w>0];

teta1=(Sum[ArcTan[w4/(-n1[[i]])],{i,1,nn}]
+ArcTan[w4/(-wr^2/(n3[[1]])]-ArcTan[w4/(-n3[[1]])]-
m 3.14159/2-Sum[ArcTan[w4/(-n2[[j]])],{j,1,nd}]) 180/
3.14159;

w5=NSolve[hgm[[2]]==0,w];

w6=w/.w5;

w7>DeleteCases[w6,Complex[x_,y_]];

w8=Cases[w7,w_/;w>0];

teta2=(Sum[ArcTan[w8/(-n1[[i]])],{i,1,nn}]
+ArcTan[w8/(-wr^2/(n3[[2]])]-ArcTan[w8/(-n3[[2]])]-
m 3.14159/2-Sum[ArcTan[w8/(-n2[[j]])],
{j,1,nd}]) 180/3.14159;

teta0={teta1[[1]],teta2[[1]]};

teta3=Cases[teta0,teta_/;teta>-180];

```

```

nt=Length[teta3];
pc=If[teta1[[1]]>teta2[[1]],n3[[1]],n3[[2]]];
ac=a/.p->pc;
hgf=k ac (s-wr^2/pc) Product[s-n1[[i]],
{i,1,nn}]/(s^m (s-pc) Product[s-n2[[j]],{j,1,nd}]);
cs=hgf/(s (1+hgf));
ct=InverseLaplaceTransform[cs,s,t];
ctr=ct/.t->tr;
If[ctr<0.99,Goto[freq]];
If[ctr>1.01,Goto[freq]];
tp=3.14159/(wn (1-ksi^2)^0.5);
ctp=ct/.t->tp;
If[ctp<0.995 mp1,Goto[ult]];
If[ctp>1.005 mp1,Goto[ult]]

```

## ■ 5. Resultados Obtidos

ctr

1.00113

ctp

1.095

wr

0.730491

mr

1.05075

A função de transferência do compensador será:

$$tc = ac (s - wr^2/pc) hg0 / (hg1 (s - pc))$$

$$1.01445 (0.11492 + s)$$


---


$$4.64339 + s$$

pc

-4.64339

ac

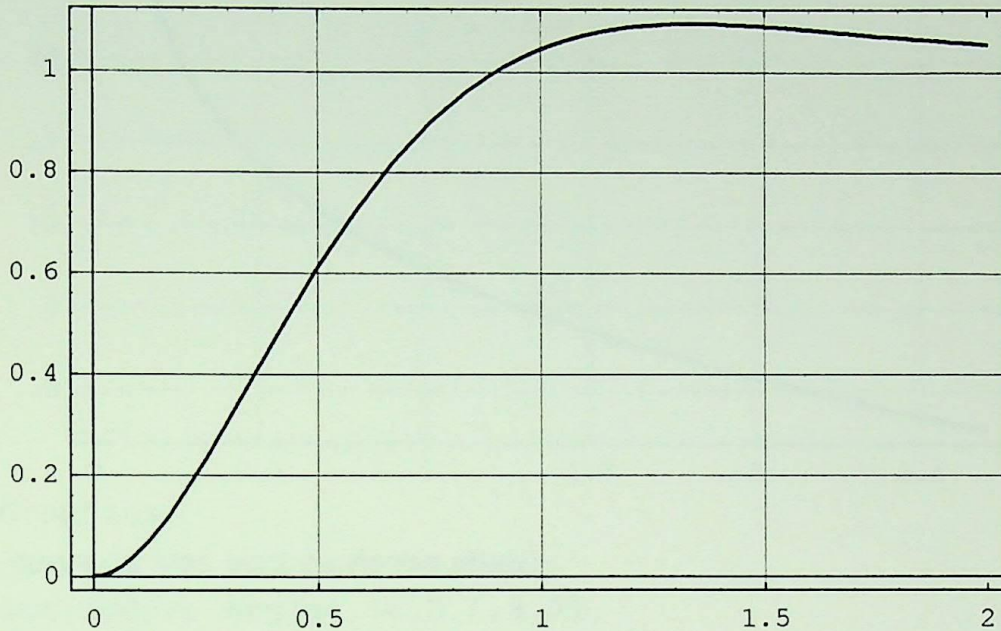
1.01445

$$z=wr^2/pc$$

$$-0.11492$$

## ■ 6. Comprovação dos Resultados Obtidos

```
Plot[ct, {t, 0, 2}, Frame->True, GridLines->Automatic, Axes->True]
```



-Graphics-

Os diagramas de Bode de malha aberta podem ser traçados da seguinte forma;

A função de transferência do compensador será:

$$tc=ac (w I-wr^2/pc) / (w I-pc)$$

$$1.01445 (0.11492 + I w)$$

---


$$4.64339 + I w$$

A função de transferência de malha aberta do sistema compensado será, portanto:

$$g=hg0 tc$$

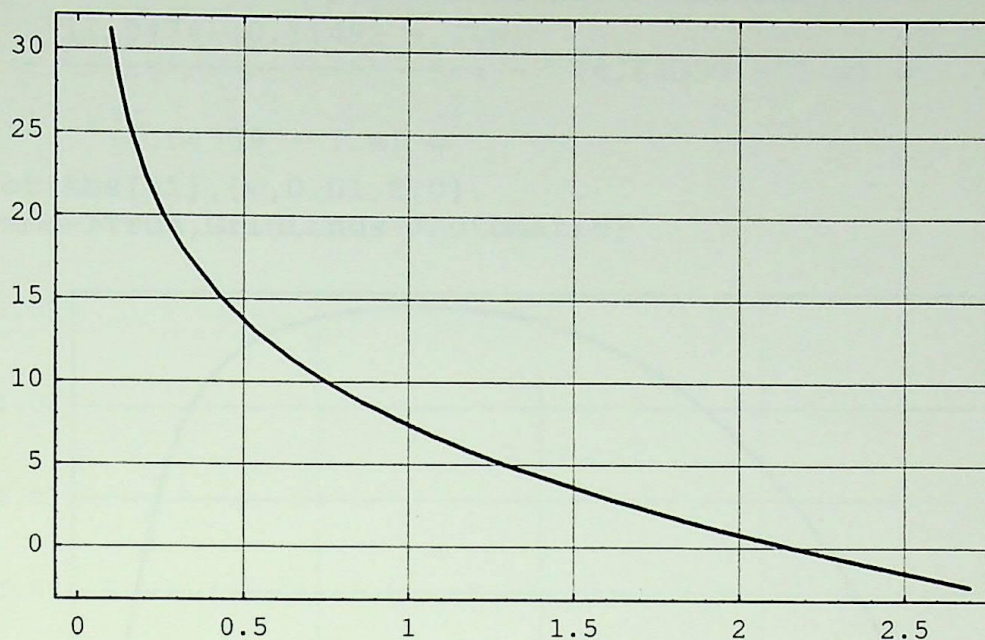
$$-11.0474 (0.11492 + I w)$$

---


$$(4.64339 + I w)^2 w$$

Que podemos plotar, para observarmos a estabilidade do sistema. A curva de ganho será conforme abaixo (note que a escala das abcissas não é logarítmica como usualmente)

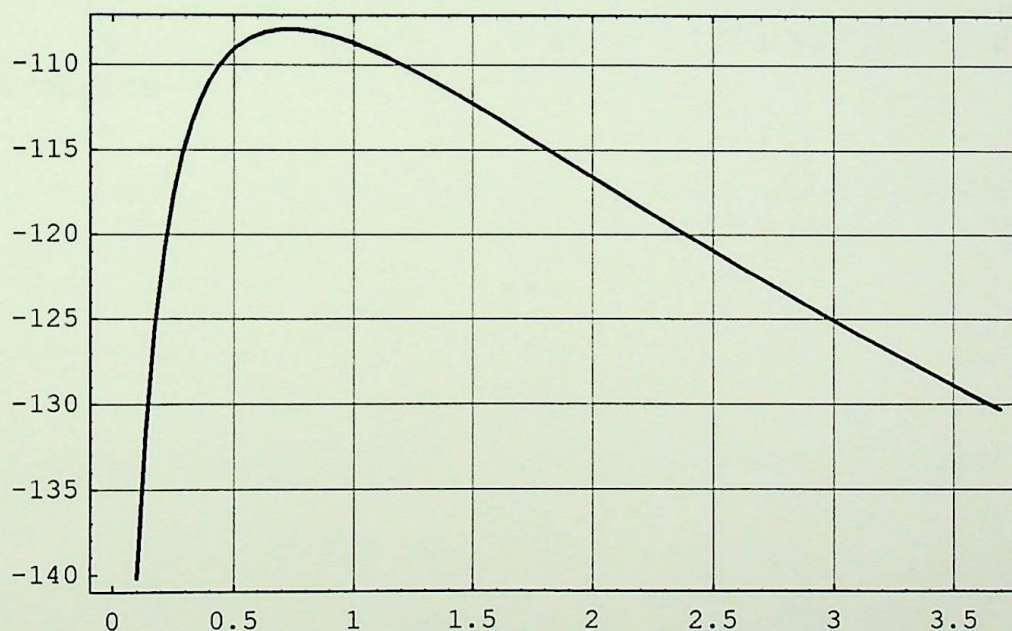
```
Plot[20 Log[10,Abs[g]],{w,0.1,2.7},
Frame->True,GridLines->Automatic]
```



-Graphics-

A curva de fase será conforme abaixo:

```
Plot[180/Pi Arg[g],{w,0.1,3.7},
Frame->True,GridLines->Automatic]
```



-Graphics-

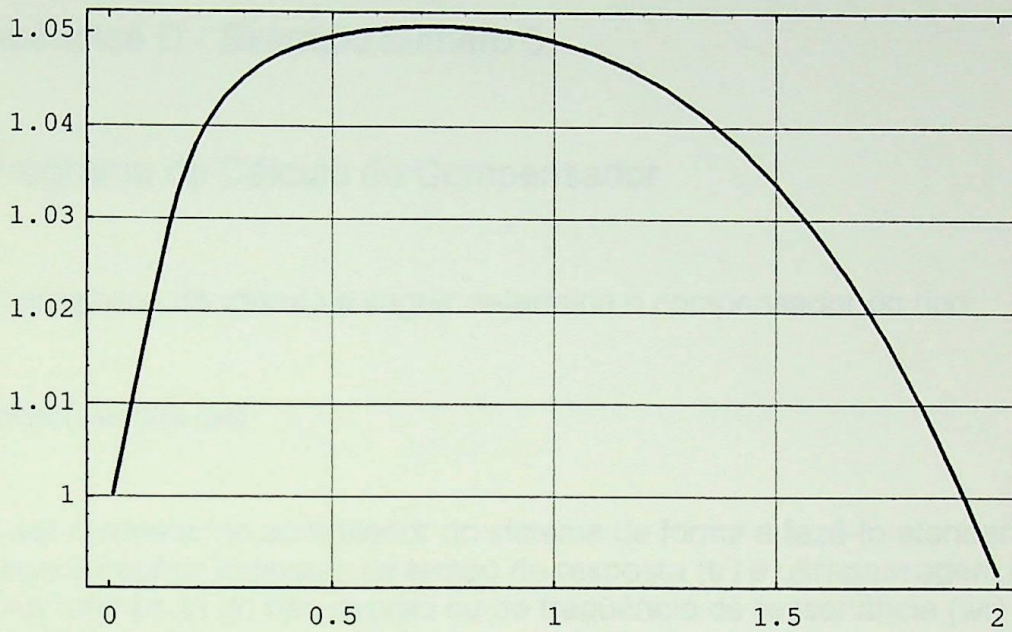
A função de transferência de malha fechada do sistema já compensado, também poderá ser plotada, em especial a curva de ganho (módulo), que será conforme abaixo:

$$t1 = g / (1 + g)$$

$$-11.0474 (0.11492 + I w)$$

$$- \left( 1 - \frac{11.0474 (0.11492 + I w)^2}{(4.64339 + I w) w} \right) (4.64339 + I w) w$$

```
Plot[Abs[t1], {w, 0.01, 2.0},
Frame->True, GridLines->Automatic]
```



-Graphics-

# Dissertação de Mestrado

## Compensação Analítica De Sistemas De Controle Em Malha Fechada Lineares Pelo Método Da Resposta Em Freqüência

Oswaldo Herek

### Apêndice D - Exemplo número 3

#### Programa de Cálculo do Compensador

O programa de cálculo a seguir determina o compensador do tipo:

$$tc=ac(s-zc)/(s-pc)$$

a ser instalado no controlador do sistema de forma a fazê-lo atender às especificações impostas de tempo de resposta ( $t_r$ ) e ultrapassagem ( $m_p$ ) para uma referência do tipo degrau ou de freqüência de ressonância ( $w_r$ ) e ressonância ( $m_r$ ) para referências senoidais.

No Apêndice A foram determinados literalmente o polinômio final em  $p$  (polo do compensador a ser calculado) e a amplificação  $A_c$ , utilizados neste programa.

#### 1. Dados

1.1 Entre com o valor de  $m_p$  e  $t_r$  desejados, em substituição aos valores existentes.

$m_p=1.15$

1.15

$m_p1=m_p$

1.15

If [ $m_p < 1.06$ ,  $m_p=1.06$ ]

$t_r=2.9$

2.9

1.2 Entre com os valores dos zeros do sistema a ser compensado, separados por vírgula, em substituição aos valores existentes na lista de zeros n1.

n1={ -0.1 }

{ -0.1 }

nn=Length [n1]

1

1.3 Entre com os valores dos polos do sistema a ser compensado, à exceção dos polos na origem, separados por vírgula, em substituição aos valores existentes na lista de polos n2.

n2={ -0.4 , -2.5 }

{ -0.4 , -2.5 }

nd=Length [n2]

2

1.4 Entre com o valor de k (fator constante da função de transferência de malha aberta do sistema a ser compensado), em substituição ao valor existente.

k=0.3

0.3

1.5 Entre com o número de polos na origem do sistema a ser compensado (m), em substituição ao número existente.

m=2

2

2. Cálculo do Posicionador tipo I com dois polos que poderia atender às especificações.

2.1 Coeficiente de amortecimento

$ksi = ((\text{Log}[mp-1])^2 / ((\text{Log}[mp-1])^2 + \text{Pi}^2))^{.5}$

0.516931

2.2 Complemento da fase do polo dominante

$\text{eta} = \text{ArcCos}[ksi]$

1.02753

2.3 Frequência natural

$\text{wn} = (3.1416 - \text{eta}) / (\text{tr} (1 - (ksi)^2)^{.5})$

0.851595

2.4 Valor da ressonância para referência senoidal

$\text{mr} = 1 / (2 ksi (1 - (ksi)^2)^{.5})$

1.12993

2.5 Valor da frequência de ressonância

$$w_r = w_n (1 - 2 \text{ ksi}^2)^{.5}$$

$$0.581063$$

3. Cálculo dos valores de  $hg_0$  e  $hg_{00}$ , respectivamente função de transferência de malha aberta do sistema a ser compensado e sua derivada em relação a  $w$ .

$$hg_0 = k \frac{\text{Product}[w - n_1[[i]], \{i, 1, n_n\}]}{((w - I)^m \text{Product}[w - n_2[[j]], \{j, 1, n_d\}]) - 0.3 (0.1 + I w)}$$

$$\frac{(0.4 + I w) (2.5 + I w) w^2}{-0.3 (0.1 + I w)}$$

$$hg_1 = hg_0$$

$$\frac{(0.4 + I w) (2.5 + I w) w^2}{-0.3 (0.1 + I w)}$$

$$hg_{00} = D[hg_0, w]$$

$$\frac{0.6 (0.1 + I w)}{(0.4 + I w) (2.5 + I w) w^3} + \frac{0.3 I (0.1 + I w)}{(0.4 + I w) (2.5 + I w) w^2} + \frac{0.3 I (0.1 + I w)}{(0.4 + I w)^2 (2.5 + I w) w^2} - \frac{0.3 I}{(0.4 + I w) (2.5 + I w) w^2}$$

#### ■ 4. Cálculo do Compensador

Devemos carregar o "Laplace Transform Package", para calcular a controlada no domínio do tempo.

```
<<Calculus`LaplaceTransform`
```

Fazemos agora a frequência ser igual à  $w_r$  (ressonância), calculamos as raízes do polinômio desenvolvido no Apêndice A, com os dados acima, tabelamos as raízes e selecionamos apenas as raízes reais e negativas, para a seguir calcular as amplificações correspondentes, utilizando as expressões de  $f$  e  $h$  calculadas no Apêndice A.

O polo ou os polos dos compensadores que atendem às especificações devem, naturalmente, conduzir a sistemas estáveis.

Devemos portanto, fazer mais um teste com as raízes selecionadas, quanto à estabilidade do sistema.

Para isso impomos que o ganho final de malha aberta do sistema seja igual a 1 ( $\text{mod}(hgf)=1$ ), calculamos as frequências correspondentes, as quais devem ser positivas, e verificamos o valor da fase de  $hgf$ , que deverá ser maior do que  $-180$  graus para que o sistema seja estável.

O valor do polo será definido escolhendo-se entre as fases resultantes a que for maior e desde que seja também maior do que  $-180$  graus.

Com os valores de  $p_c$  calculamos  $a_c$  (amplificação) e  $z_c$  (zero do compensador), aplicamos o compensador ao sistema  $h_g0$ , determinamos a função de transferência de malha fechada correspondente, aplicamos um degrau unitário à mesma e através da transformada inversa de Laplace e calculamos a variável controlada em função do tempo.

Resolvemos a expressão da variável controlada para o valor de  $t_r$  especificado e caso não coincida com o valor 1 ( resposta ao degrau unitário), o valor da frequência de ressonância  $w_r$  é reajustado para mais ou para menos, dependendo do valor calculado ser menor ou maior do que 1, sendo então o cálculo reiniciado no Label(freq).

Da mesma forma, resolvemos a expressão da variável controlada para o tempo de pico e caso não coincida com o valor de  $m_p$ , o valor de  $m_r$  é reajustado para mais ou para menos, dependendo do valor calculado ser menor ou maior do que  $m_p$ , sendo então o cálculo reiniciado no Label (Ult).

Quando o valor estiver compreendido nos limites da tolerância estabelecida, tanto num caso como no outro, os dados correspondentes ao compensador adequado, bem como os demais dados de interesse, são informados e para confirmação de sua adequação, são plotadas as seguintes curvas: resposta no tempo para um degrau unitário, diagramas de Bode de ganho e de fase da função de transferência de malha aberta e diagrama de Bode de ganho da função de transferência de malha fechada.

Todos os cálculos mencionados são executados dentro de uma mesma célula em função dos "Loops" que serão formados para ajustar o valor do tempo de resposta e o valor da ultrapassagem.

```
(wr=wn (1-2 ksi^2)^.5;
Label [freq];
If[ctr<0.99,wr=1.01 wr];
If[ctr>1.01,wr=0.99 wr];
mr=1/(2 ksi (1-(ksi)^2)^.5);
Label [ult];
If[ctp<0.999 mp1,mr=1.001 mr];
```

```

If[ctp>1.001 mp1, mr=0.999 mr];

w=wr;

x0=Re[hg0];

y0=Im[hg0];

x00=Re[hg00];

y00=Im[hg00];

q1=Solve[-(w^10 x0^6)+mr^2 w^10 x0^6+2 w^11 x0^5 x00-
2 mr^2 w^11 x0^5 x00-w^12 x0^4 x00^2+
mr^2 w^12 x0^4 x00^2-3 w^10 x0^4 y0^2+
2 mr^2 w^10 x0^4 y0^2+
4 w^11 x0^3 x00 y0^2-2 mr^2 w^11 x0^3 x00 y0^2-
w^12 x0^2 x00^2 y0^2+mr^2 w^12 x0^2 x00^2 y0^2-
3 w^10 x0^2 y0^4+mr^2 w^10 x0^2 y0^4+
2 w^11 x0 x00 y0^4-w^10 y0^6+2 w^11 x0^4 y0 y00-
2 mr^2 w^11 x0^4 y0 y00-2 w^12 x0^3 x00 y0 y00+
4 w^11 x0^2 y0^3 y00-2 mr^2 w^11 x0^2 y0^3 y00-
2 w^12 x0 x00 y0^3 y00+2 w^11 y0^5 y00+
mr^2 w^12 x0^4 y00^2-w^12 x0^2 y0^2 y00^2+
mr^2 w^12 x0^2 y0^2 y00^2-w^12 y0^4 y00^2+
p^7 (-4 mr^2 w^3 x0^5 y0-8 mr^2 w^4 x0^4 x00 y0-
4 mr^2 w^5 x0^3 x00^2 y0-8 mr^2 w^3 x0^3 y0^3-
8 mr^2 w^4 x0^2 x00 y0^3-4 mr^2 w^5 x0 x00^2 y0^3-
4 mr^2 w^3 x0 y0^5-8 mr^2 w^4 x0^3 y0^2 y00-
8 mr^2 w^4 x0 y0^4 y00-4 mr^2 w^5 x0^3 y0 y00^2-
4 mr^2 w^5 x0 y0^3 y00^2)+p^5 (12 mr^2 w^5 x0^5 y0+
8 mr^2 w^6 x0^4 x00 y0-4 mr^2 w^7 x0^3 x00^2 y0+
24 mr^2 w^5 x0^3 y0^3+8 mr^2 w^6 x0^2 x00 y0^3-
4 mr^2 w^7 x0 x00^2 y0^3+12 mr^2 w^5 x0 y0^5+
8 mr^2 w^6 x0^3 y0^2 y00+8 mr^2 w^6 x0 y0^4 y00-
4 mr^2 w^7 x0^3 y0 y00^2-4 mr^2 w^7 x0 y0^3 y00^2)+
p^3 (-12 mr^2 w^7 x0^5 y0+8 mr^2 w^8 x0^4 x00 y0+
4 mr^2 w^9 x0^3 x00^2 y0-24 mr^2 w^7 x0^3 y0^3+
8 mr^2 w^8 x0^2 x00 y0^3+4 mr^2 w^9 x0 x00^2 y0^3-
12 mr^2 w^7 x0 y0^5+8 mr^2 w^8 x0^3 y0^2 y00+
8 mr^2 w^8 x0 y0^4 y00+4 mr^2 w^9 x0^3 y0 y00^2+
4 mr^2 w^9 x0 y0^3 y00^2)+p (4 mr^2 w^9 x0^5 y0-
8 mr^2 w^10 x0^4 x00 y0+4 mr^2 w^11 x0^3 x00^2 y0+
8 mr^2 w^9 x0^3 y0^3-8 mr^2 w^10 x0^2 x00 y0^3+
4 mr^2 w^11 x0 x00^2 y0^3+4 mr^2 w^9 x0 y0^5-
8 mr^2 w^10 x0^3 y0^2 y00-8 mr^2 w^10 x0 y0^4 y00+
4 mr^2 w^11 x0^3 y0 y00^2+4 mr^2 w^11 x0 y0^3 y00^2)+
p^8 (-(w^2 x0^6)+mr^2 w^2 x0^6-2 w^3 x0^5 x00+
2 mr^2 w^3 x0^5 x00-w^4 x0^4 x00^2+
mr^2 w^4 x0^4 x00^2-3 w^2 x0^4 y0^2+

```

```

2 mr^2 w^2 x0^4 y0^2-4 w^3 x0^3 x00 y0^2+
2 mr^2 w^3 x0^3 x00 y0^2-w^4 x0^2 x00^2 y0^2+
mr^2 w^4 x0^2 x00^2 y0^2-3 w^2 x0^2 y0^4+
mr^2 w^2 x0^2 y0^4-2 w^3 x0 x00 y0^4-w^2 y0^6-
2 w^3 x0^4 y0 y00+2 mr^2 w^3 x0^4 y0 y00-
2 w^4 x0^3 x00 y0 y00-4 w^3 x0^2 y0^3 y00+
2 mr^2 w^3 x0^2 y0^3 y00-2 w^4 x0 x00 y0^3 y00-
2 w^3 y0^5 y00+mr^2 w^4 x0^4 y00^2-
w^4 x0^2 y0^2 y00^2+mr^2 w^4 x0^2 y0^2 y00^2-
w^4 y0^4 y00^2)+p^6 (-4 mr^2 w^4 x0^6-
4 w^5 x0^5 x00-4 mr^2 w^5 x0^5 x00-
4 w^6 x0^4 x00^2-4 mr^2 w^4 x0^4 y0^2-
8 w^5 x0^3 x00 y0^2+4 mr^2 w^5 x0^3 x00 y0^2-
4 w^6 x0^2 x00^2 y0^2+4 mr^2 w^6 x0^2 x00^2 y0^2+
4 mr^2 w^4 x0^2 y0^4-4 w^5 x0 x00 y0^4+
8 mr^2 w^5 x0 x00 y0^4+4 mr^2 w^6 x00^2 y0^4+
4 mr^2 w^4 y0^6-4 w^5 x0^4 y0 y00-
4 mr^2 w^5 x0^4 y0 y00-8 w^6 x0^3 x00 y0 y00-
8 w^5 x0^2 y0^3 y00+4 mr^2 w^5 x0^2 y0^3 y00-
8 w^6 x0 x00 y0^3 y00-4 w^5 y0^5 y00+
8 mr^2 w^5 y0^5 y00-4 w^6 x0^2 y0^2 y00^2+
4 mr^2 w^6 x0^2 y0^2 y00^2-4 w^6 y0^4 y00^2+
4 mr^2 w^6 y0^4 y00^2)+p^4 (2 w^6 x0^6+
6 mr^2 w^6 x0^6-6 w^8 x0^4 x00^2-
2 mr^2 w^8 x0^4 x00^2+6 w^6 x0^4 y0^2+
4 mr^2 w^6 x0^4 y0^2-6 w^8 x0^2 x00^2 y0^2+
6 mr^2 w^8 x0^2 x00^2 y0^2+6 w^6 x0^2 y0^4-
10 mr^2 w^6 x0^2 y0^4+8 mr^2 w^8 x00^2 y0^4+
2 w^6 y0^6-8 mr^2 w^6 y0^6-12 w^8 x0^3 x00 y0 y00-
12 w^8 x0 x00 y0^3 y00-2 mr^2 w^8 x0^4 y00^2-
6 w^8 x0^2 y0^2 y00^2+6 mr^2 w^8 x0^2 y0^2 y00^2-
6 w^8 y0^4 y00^2+8 mr^2 w^8 y0^4 y00^2) +
p^2 (-4 mr^2 w^8 x0^6+4 w^9 x0^5 x00+
4 mr^2 w^9 x0^5 x00-4 w^10 x0^4 x00^2-
4 mr^2 w^8 x0^4 y0^2+8 w^9 x0^3 x00 y0^2-
4 mr^2 w^9 x0^3 x00 y0^2-4 w^10 x0^2 x00^2 y0^2+
4 mr^2 w^10 x0^2 x00^2 y0^2+4 mr^2 w^8 x0^2 y0^4+
4 w^9 x0 x00 y0^4-8 mr^2 w^9 x0 x00 y0^4+
4 mr^2 w^10 x00^2 y0^4+4 mr^2 w^8 y0^6+
4 w^9 x0^4 y0 y00+4 mr^2 w^9 x0^4 y0 y00-
8 w^10 x0^3 x00 y0 y00+8 w^9 x0^2 y0^3 y00-
4 mr^2 w^9 x0^2 y0^3 y00-8 w^10 x0 x00 y0^3 y00+
4 w^9 y0^5 y00-8 mr^2 w^9 y0^5 y00-
4 w^10 x0^2 y0^2 y00^2+4 mr^2 w^10 x0^2 y0^2 y00^2-
4 w^10 y0^4 y00^2+4 mr^2 w^10 y0^4 y00^2)==0,p];

```

```
mt=Table[q1];
```

```

f=p^5 (x0^2+w x0 x00+y0^2+w y0 y00)+
p^3 (2 w^3 x0 x00+2 w^3 y0 y00)+p (-(w^4 x0^2)+
w^5 x0 x00-w^4 y0^2+w^5 y0 y00);

```

```

h=- (w^5 x0^2 y0)+2 w^6 x0 x00 y0-w^5 y0^3+
p^2 (2 w^3 x0^2 y0+2 w^3 y0^3)-w^6 x0^2 y00+
w^6 y0^2 y00+p^3 (-2 w^2 x0^3-2 w^3 x0^2 x00-
2 w^2 x0 y0^2+2 w^3 x00 y0^2-4 w^3 x0 y0 y00)+
p (2 w^4 x0^3-2 w^5 x0^2 x00+2 w^4 x0 y0^2+
2 w^5 x00 y0^2-4 w^5 x0 y0 y00)+p^4 (-(w x0^2 y0)-
2 w^2 x0 x00 y0-w y0^3+w^2 x0^2 y00-w^2 y0^2 y00);

a=f/h;

p1=p/.mt;

p2>DeleteCases[p1,Complex[x_,y_]];

n3=Cases[p2,p_/;p<0];

n5=a/.p->n3;

Clear[w];

hgm=k^2 ac^2 (w^2+(wr^2/p)^2) Product[(w^2+
(n1[[i]])^2),{i,1,nn}]-w^(2 m) (w^2+
p^2) Product[(w^2+(n2[[j]])^2),{j,1,nd}]/.{ac->n5,
p->n3};

w1=NSolve[hgm[[1]]==0,w];

w2=w/.w1;

w3>DeleteCases[w2,Complex[x_,y_]];

w4=Cases[w3,w_/;w>0];

teta1=(Sum[ArcTan[w4/(-n1[[i]])],{i,1,nn}]
+ArcTan[w4/(-wr^2/(n3[[1]]))]-ArcTan[w4/(-n3[[1]])]-
m 3.14159/2-Sum[ArcTan[w4/(-n2[[j]])],{j,1,nd}]) 180/
3.14159;

w5=NSolve[hgm[[2]]==0,w];

w6=w/.w5;

w7>DeleteCases[w6,Complex[x_,y_]];

w8=Cases[w7,w_/;w>0];

teta2=(Sum[ArcTan[w8/(-n1[[i]])],{i,1,nn}]
+ArcTan[w8/(-wr^2/(n3[[2]]))]-ArcTan[w8/(-n3[[2]])]-
m 3.14159/2-Sum[ArcTan[w8/(-n2[[j]])],
{j,1,nd}]) 180/3.14159;

```

```

teta0={teta1[[1]],teta2[[1]]};
teta3=Cases[teta0,teta_/;teta>-180];
nt=Length[teta3];
pc=If[teta1[[1]]>teta2[[1]],n3[[1]],n3[[2]]];
ac=a/.p->pc;
hgf=k ac (s-wr^2/pc) Product[s-n1[[i]],
{i,1,nn}]/(s^m (s-pc) Product[s-n2[[j]],{j,1,nd}]);
cs=hgf/(s (1+hgf));
ct=InverseLaplaceTransform[cs,s,t];
ctr=ct/.t->tr;
If[ctr<0.99,Goto[freq]];
If[ctr>1.01,Goto[freq]];
tp=3.14159/(wn (1-ksi^2)^0.5);
ctp=ct/.t->tp;
If[ctp<0.999 mp1,Goto[ult]];
If[ctp>1.001 mp1,Goto[ult]]

```

## ■ 5. Resultados Obtidos

```

ctr
0.999708
ctp
1.15055
wr
0.604656
mr
1.0535

```

A função de transferência do compensador será:

```

tc=ac (s-wr^2/pc) hg0/(hg1 (s-pc))
9.88958 (0.235954 + s)

```

---

1.54949 + s

```

pc
-1.54949

```

ac

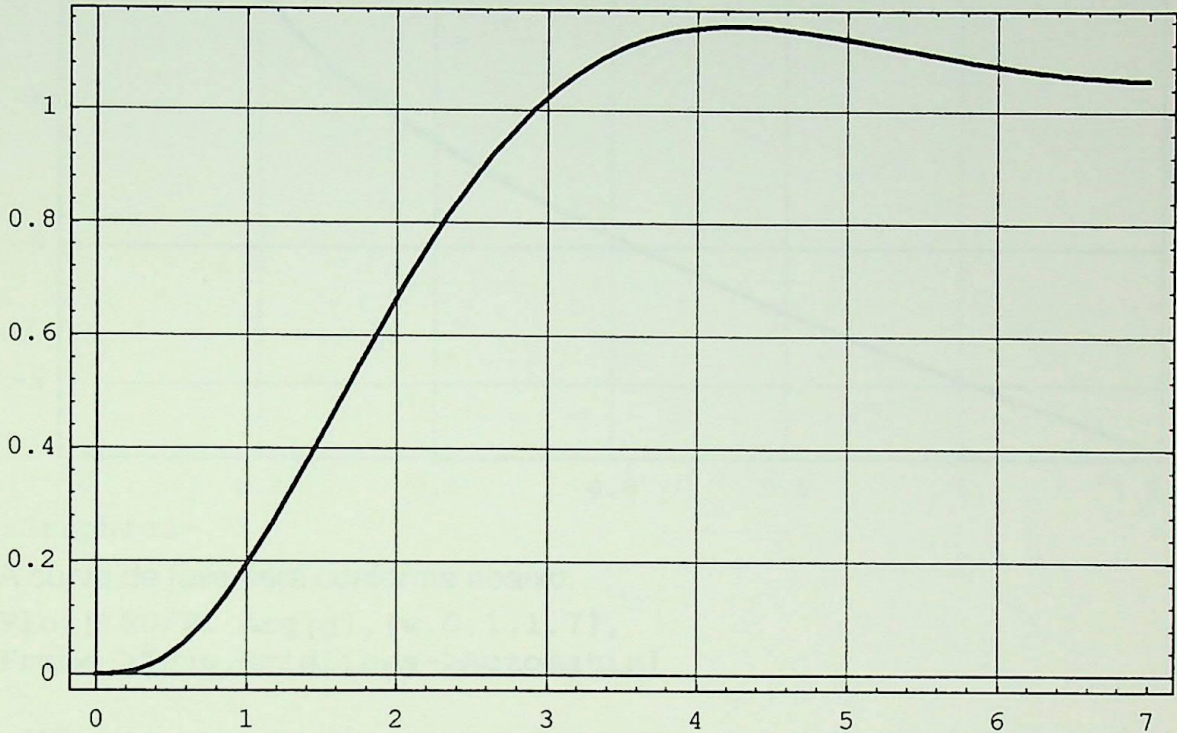
9.88958

 $z=wr^2/pc$ 

-0.235954

## ■ 6. Comprovação dos Resultados Obtidos

```
Plot[ct, {t, 0, 7}, Frame->True, GridLines->Automatic, Axes->True]
```



-Graphics-

Os diagramas de Bode de malha aberta podem ser traçados da seguinte forma;

A função de transferência do compensador será:

$$tc = ac \frac{(w I - wr^2/pc)}{(w I - pc)}$$

$$9.88958 \frac{(0.235954 + I w)}{1.54949 + I w}$$

---


$$1.54949 + I w$$

A função de transferência de malha aberta do sistema compensado será, portanto:

$$g = hg0 tc$$

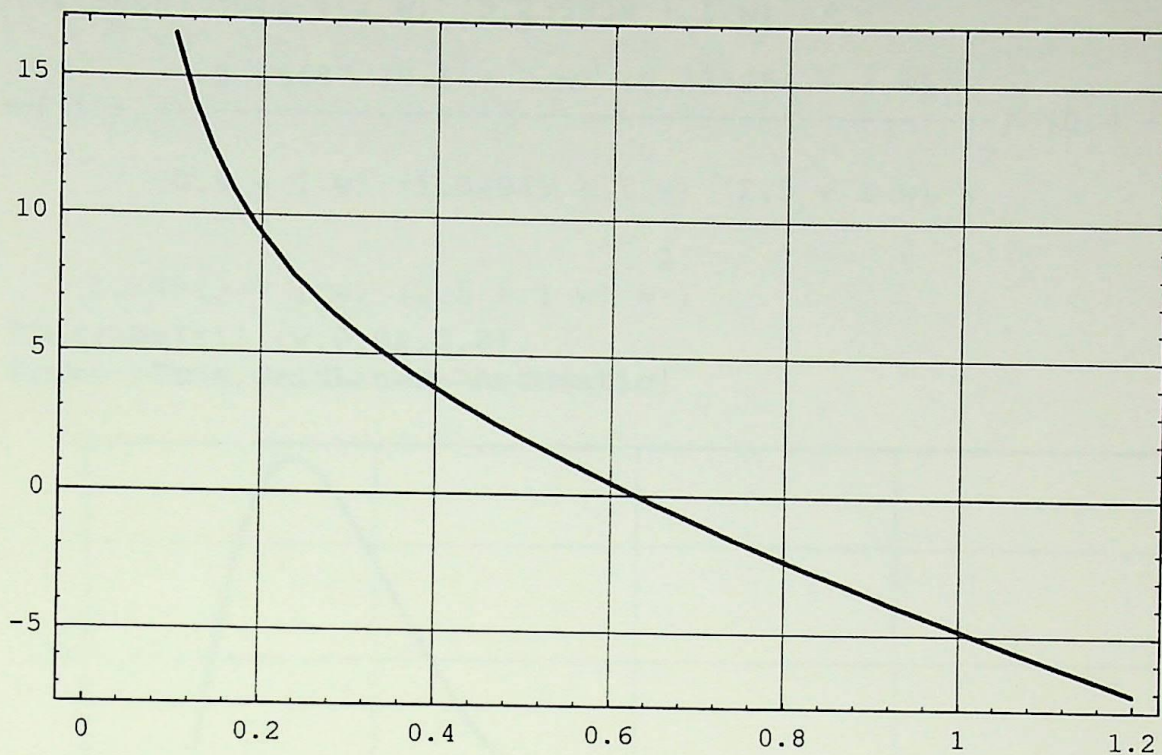
$$-2.96687 \frac{(0.1 + I w) (0.235954 + I w)}{(0.4 + I w) (1.54949 + I w) (2.5 + I w) w^2}$$

---


$$(0.4 + I w) (1.54949 + I w) (2.5 + I w) w^2$$

Que podemos plotar, para observarmos a estabilidade do sistema. A curva de ganho será conforme abaixo (note que a escala das abcissas não é logarítmica como usualmente)

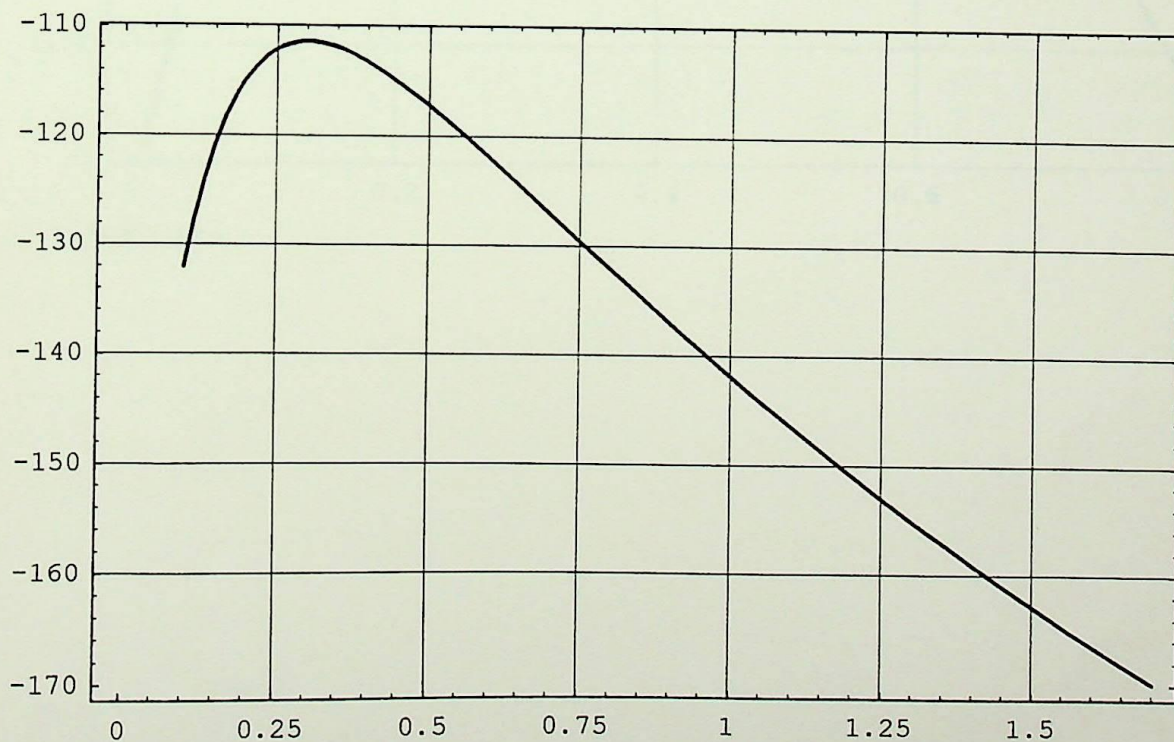
```
Plot[20 Log[10,Abs[g]],{w,0.1,1.2},
Frame->True,GridLines->Automatic]
```



-Graphics-

A curva de fase será conforme abaixo:

```
Plot[180/Pi Arg[g],{w,0.1,1.7},
Frame->True,GridLines->Automatic]
```

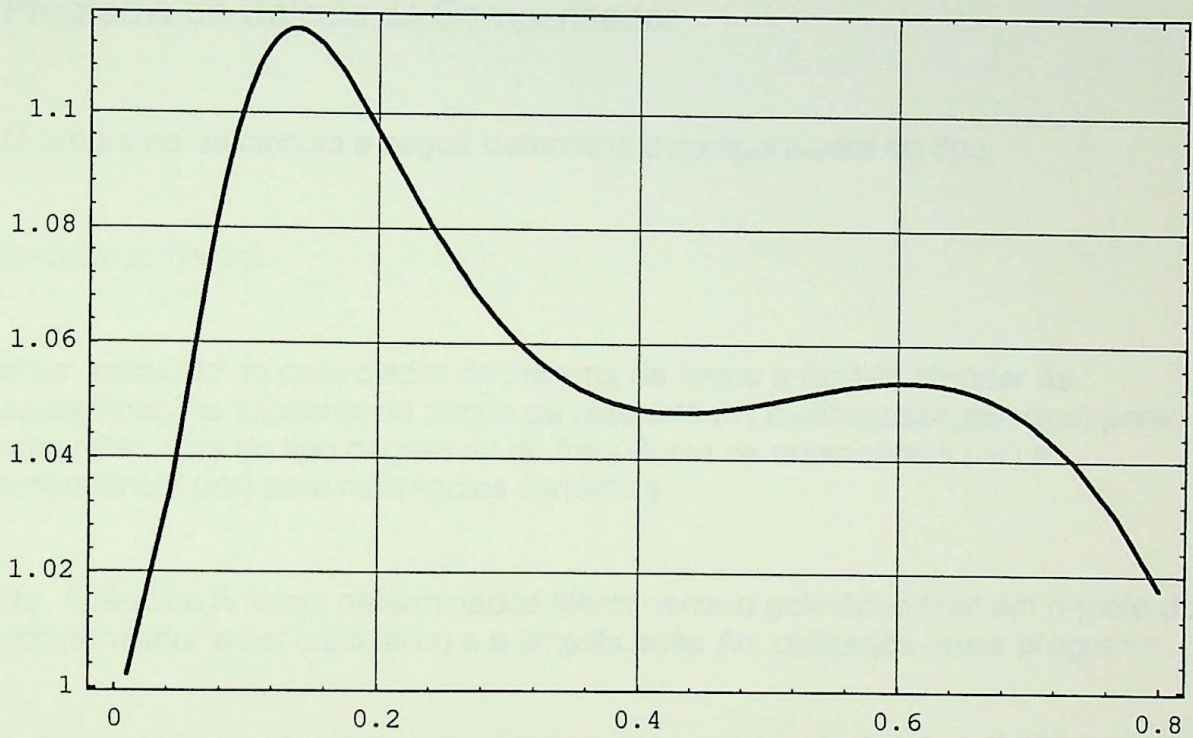


-Graphics-

```

t1=g/(1+g)
(-2.96687 (0.1 + I w) (0.235954 + I w)) /
--((1 - -----) (0.4 + I w)
      2.96687 (0.1 + I w) (0.235954 + I w)
      (0.4 + I w) (1.54949 + I w) (2.5 + I w) w
      2
      (1.54949 + I w) (2.5 + I w) w )
Plot[Abs[t1],{w,0.01,0.8},
Frame->True,GridLines->Automatic]

```



-Graphics-

# Dissertação de Mestrado

## Compensação Analítica De Sistemas De Controle Em Malha Fechada Lineares Pelo Método Da Resposta Em Freqüência

Oswaldo Herek

### Apêndice E - Exemplo número 4

#### Programa de Cálculo do Compensador

O programa de cálculo a seguir determina o compensador do tipo:

$$tc=ac(s-zc)/(s-pc)$$

a ser instalado no controlador do sistema de forma a fazê-lo atender às especificações impostas de tempo de resposta ( $t_r$ ) e ultrapassagem ( $m_p$ ) para uma referência do tipo degrau ou de freqüência de ressonância ( $w_r$ ) e ressonância ( $m_r$ ) para referências senoidais.

No Apêndice A foram determinados literalmente o polinômio final em  $p$  (polo do compensador a ser calculado) e a amplificação  $A_c$ , utilizados neste programa.

#### 1. Dados

1.1 Entre com o valor de  $m_p$  e  $t_r$  desejados, em substituição aos valores existentes.

$m_p=1.1$

1.1

$m_p1=m_p$

1.1

If [ $m_p < 1.06$ ,  $m_p=1.06$ ]

$t_r=0.9$

0.9

1.2 Entre com os valores dos zeros do sistema a ser compensado, separados por vírgula, em substituição aos valores existentes na lista de zeros n1.

```
n1={ }
```

```
{ }
```

```
nn=Length [n1]
```

```
0
```

1.3 Entre com os valores dos polos do sistema a ser compensado, à exceção dos polos na origem, separados por vírgula, em substituição aos valores existentes na lista de polos n2.

```
n2={ -10}
```

```
{ -10}
```

```
nd=Length [n2]
```

```
1
```

1.4 Entre com o valor de k (fator constante da função de transferência de malha aberta do sistema a ser compensado), em substituição ao valor existente.

```
k=3
```

```
3
```

1.5 Entre com o número de polos na origem do sistema a ser compensado (m), em substituição ao número existente.

```
m=2
```

```
2
```

2. Cálculo do Posicionador tipo I com dois polos que poderia atender às especificações.

2.1 Coeficiente de amortecimento

```
ksi=( (Log [mp-1] ) ^2 / ( (Log [mp-1] ) ^2+Pi^2 ) ) ^ .5
```

```
0.591155
```

2.2 Complemento da fase do polo dominante

```
eta=ArcCos [ksi]
```

```
0.938306
```

2.3 Frequência natural

```
wn=(3.1416-eta) / (tr (1-(ksi)^2) ^ .5)
```

```
3.03525
```

2.4 Valor da ressonância para referência senoidal

```
mr=1 / (2 ksi (1-(ksi)^2) ^ .5)
```

```
1.04866
```

2.5 Valor da frequência de ressonância

$$w_r = w_n (1 - 2 \zeta^2)^{.5}$$

$$1.66544$$

3. Cálculo dos valores de  $hg_0$  e  $hg_{00}$ , respectivamente função de transferência de malha aberta do sistema a ser compensado e sua derivada em relação a  $w$ .

$$hg_0 = k \frac{\text{Product}[w - n_1[[i]], \{i, 1, nn\}]}{((w - I)^m \text{Product}[w - n_2[[j]], \{j, 1, nd\}])^{-3}}$$

$$hg_1 = hg_0 \frac{(10 + I w)^2 w^{-2}}{(10 + I w)^3 w^{-3}}$$

$$hg_{00} = D[hg_0, w] = \frac{6}{(10 + I w)^3 w^3} + \frac{3 I}{(10 + I w)^2 w^2}$$

#### ■ 4. Cálculo do Compensador

Devemos carregar o "Laplace Transform Package", para calcular a controlada no domínio do tempo.

```
<<Calculus`LaplaceTransform`
```

Fazemos agora a frequência ser igual à  $w_r$  (ressonância), calculamos as raízes do polinômio desenvolvido no Apêndice A, com os dados acima, tabelamos as raízes e selecionamos apenas as raízes reais e negativas, para a seguir calcular as ampliações correspondentes, utilizando as expressões de  $f$  e  $h$  calculadas no Apêndice A.

O polo ou os polos dos compensadores que atendem às especificações devem, naturalmente, conduzir a sistemas estáveis.

Devemos portanto, fazer mais um teste com as raízes selecionadas, quanto à estabilidade do sistema.

Para isso impomos que o ganho final de malha aberta do sistema seja igual a 1 ( $\text{mod}(hg_f) = 1$ ), calculamos as frequências correspondentes, as quais devem ser positivas, e verificamos o valor da fase de  $hg_f$ , que deverá ser maior do que  $-180$  graus para que o sistema seja estável.

O valor do polo será definido escolhendo-se entre as fases resultantes a que for maior e desde que seja também maior do que  $-180$  graus.

Com os valores de  $p_c$  calculamos  $a_c$  (amplificação) e  $z_c$  (zero do compensador), aplicamos o compensador ao sistema  $hg_0$ , determinamos a função de transferência de malha fechada correspondente, aplicamos um degrau unitário à mesma e através da transformada inversa de Laplace e calculamos a variável controlada em função do tempo.

Resolvemos a expressão da variável controlada para o valor de  $t_r$  especificado e caso não coincida com o valor 1 ( resposta ao degrau unitário), o valor da frequência de ressonância  $w_r$  é reajustado para mais ou para menos, dependendo do valor calculado ser menor ou maior do que 1, sendo então o cálculo reiniciado no Label(freq).

Da mesma forma, resolvemos a expressão da variável controlada para o tempo de pico e caso não coincida com o valor de  $m_p$ , o valor de  $m_r$  é reajustado para mais ou para menos, dependendo do valor calculado ser menor ou maior do que  $m_p$ , sendo então o cálculo reiniciado no Label (Ult).

Quando o valor estiver compreendido nos limites da tolerância estabelecida, tanto num caso como no outro, os dados correspondentes ao compensador adequado, bem como os demais dados de interesse, são informados e para confirmação de sua adequação, são plotadas as seguintes curvas: resposta no tempo para um degrau unitário, diagramas de Bode de ganho e de fase da função de transferência de malha aberta e diagrama de Bode de ganho da função de transferência de malha fechada.

Todos os cálculos mencionados são executados dentro de uma mesma célula em função dos "Loops" que serão formados para ajustar o valor do tempo de resposta e o valor da ultrapassagem.

```
(wr=wn (1-2 ksi^2)^.5;
Label [freq];
If[ctr<0.99,wr=1.01 wr];
If[ctr>1.01,wr=0.99 wr];
mr=1/(2 ksi (1-(ksi)^2)^.5);
Label [ult];
If[ctp<0.995 mp1,mr=1.001 mr];
If[ctp>1.005 mp1,mr=0.999 mr];
w=wr;
```

$x0 = \text{Re}[hg0];$

$y0 = \text{Im}[hg0];$

$x00 = \text{Re}[hg00];$

$y00 = \text{Im}[hg00];$

$q1 = \text{Solve}[-(w^{10} x0^6) + mr^2 w^{10} x0^6 + 2 w^{11} x0^5 x00 -$   
 $2 mr^2 w^{11} x0^5 x00 - w^{12} x0^4 x00^2 +$   
 $mr^2 w^{12} x0^4 x00^2 - 3 w^{10} x0^4 y0^2 +$   
 $2 mr^2 w^{10} x0^4 y0^2 +$   
 $4 w^{11} x0^3 x00 y0^2 - 2 mr^2 w^{11} x0^3 x00 y0^2 -$   
 $w^{12} x0^2 x00^2 y0^2 + mr^2 w^{12} x0^2 x00^2 y0^2 -$   
 $3 w^{10} x0^2 y0^4 + mr^2 w^{10} x0^2 y0^4 +$   
 $2 w^{11} x0 x00 y0^4 - w^{10} y0^6 + 2 w^{11} x0^4 y0 y00 -$   
 $2 mr^2 w^{11} x0^4 y0 y00 - 2 w^{12} x0^3 x00 y0 y00 +$   
 $4 w^{11} x0^2 y0^3 y00 - 2 mr^2 w^{11} x0^2 y0^3 y00 -$   
 $2 w^{12} x0 x00 y0^3 y00 + 2 w^{11} y0^5 y00 +$   
 $mr^2 w^{12} x0^4 y00^2 - w^{12} x0^2 y0^2 y00^2 +$   
 $mr^2 w^{12} x0^2 y0^2 y00^2 - w^{12} y0^4 y00^2 +$   
 $p^7 (-4 mr^2 w^3 x0^5 y0 - 8 mr^2 w^4 x0^4 x00 y0 -$   
 $4 mr^2 w^5 x0^3 x00^2 y0 - 8 mr^2 w^3 x0^3 y0^3 -$   
 $8 mr^2 w^4 x0^2 x00 y0^3 - 4 mr^2 w^5 x0 x00^2 y0^3 -$   
 $4 mr^2 w^3 x0 y0^5 - 8 mr^2 w^4 x0^3 y0^2 y00 -$   
 $8 mr^2 w^4 x0 y0^4 y00 - 4 mr^2 w^5 x0^3 y0 y00^2 -$   
 $4 mr^2 w^5 x0 y0^3 y00^2) + p^5 (12 mr^2 w^5 x0^5 y0 +$   
 $8 mr^2 w^6 x0^4 x00 y0 - 4 mr^2 w^7 x0^3 x00^2 y0 +$   
 $24 mr^2 w^5 x0^3 y0^3 + 8 mr^2 w^6 x0^2 x00 y0^3 -$   
 $4 mr^2 w^7 x0 x00^2 y0^3 + 12 mr^2 w^5 x0 y0^5 +$   
 $8 mr^2 w^6 x0^3 y0^2 y00 + 8 mr^2 w^6 x0 y0^4 y00 -$   
 $4 mr^2 w^7 x0^3 y0 y00^2 - 4 mr^2 w^7 x0 y0^3 y00^2) +$   
 $p^3 (-12 mr^2 w^7 x0^5 y0 + 8 mr^2 w^8 x0^4 x00 y0 +$   
 $4 mr^2 w^9 x0^3 x00^2 y0 - 24 mr^2 w^7 x0^3 y0^3 +$   
 $8 mr^2 w^8 x0^2 x00 y0^3 + 4 mr^2 w^9 x0 x00^2 y0^3 -$   
 $12 mr^2 w^7 x0 y0^5 + 8 mr^2 w^8 x0^3 y0^2 y00 +$   
 $8 mr^2 w^8 x0 y0^4 y00 + 4 mr^2 w^9 x0^3 y0 y00^2 +$   
 $4 mr^2 w^9 x0 y0^3 y00^2) + p (4 mr^2 w^9 x0^5 y0 -$   
 $8 mr^2 w^{10} x0^4 x00 y0 + 4 mr^2 w^{11} x0^3 x00^2 y0 +$   
 $8 mr^2 w^9 x0^3 y0^3 - 8 mr^2 w^{10} x0^2 x00 y0^3 +$   
 $4 mr^2 w^{11} x0 x00^2 y0^3 + 4 mr^2 w^9 x0 y0^5 -$   
 $8 mr^2 w^{10} x0^3 y0^2 y00 - 8 mr^2 w^{10} x0 y0^4 y00 +$   
 $4 mr^2 w^{11} x0^3 y0 y00^2 + 4 mr^2 w^{11} x0 y0^3 y00^2) +$   
 $p^8 (- (w^2 x0^6) + mr^2 w^2 x0^6 - 2 w^3 x0^5 x00 +$   
 $2 mr^2 w^3 x0^5 x00 - w^4 x0^4 x00^2 +$   
 $mr^2 w^4 x0^4 x00^2 - 3 w^2 x0^4 y0^2 +$   
 $2 mr^2 w^2 x0^4 y0^2 - 4 w^3 x0^3 x00 y0^2 +$   
 $2 mr^2 w^3 x0^3 x00 y0^2 - w^4 x0^2 x00^2 y0^2 +$   
 $mr^2 w^4 x0^2 x00^2 y0^2 - 3 w^2 x0^2 y0^4 +$   
 $mr^2 w^2 x0^2 y0^4 - 2 w^3 x0 x00 y0^4 - w^2 y0^6 -$

```

2 w^3 x0^4 y0 y00+2 mr^2 w^3 x0^4 y0 y00-
2 w^4 x0^3 x00 y0 y00-4 w^3 x0^2 y0^3 y00+
2 mr^2 w^3 x0^2 y0^3 y00-2 w^4 x0 x00 y0^3 y00-
2 w^3 y0^5 y00+mr^2 w^4 x0^4 y00^2-
w^4 x0^2 y0^2 y00^2+mr^2 w^4 x0^2 y0^2 y00^2-
w^4 y0^4 y00^2)+p^6 (-4 mr^2 w^4 x0^6-
4 w^5 x0^5 x00-4 mr^2 w^5 x0^5 x00-
4 w^6 x0^4 x00^2-4 mr^2 w^4 x0^4 y0^2-
8 w^5 x0^3 x00 y0^2+4 mr^2 w^5 x0^3 x00 y0^2-
4 w^6 x0^2 x00^2 y0^2+4 mr^2 w^6 x0^2 x00^2 y0^2+
4 mr^2 w^4 x0^2 y0^4-4 w^5 x0 x00 y0^4+
8 mr^2 w^5 x0 x00 y0^4+4 mr^2 w^6 x00^2 y0^4+
4 mr^2 w^4 y0^6-4 w^5 x0^4 y0 y00-
4 mr^2 w^5 x0^4 y0 y00-8 w^6 x0^3 x00 y0 y00-
8 w^5 x0^2 y0^3 y00+4 mr^2 w^5 x0^2 y0^3 y00-
8 w^6 x0 x00 y0^3 y00-4 w^5 y0^5 y00+
8 mr^2 w^5 y0^5 y00-4 w^6 x0^2 y0^2 y00^2+
4 mr^2 w^6 x0^2 y0^2 y00^2-4 w^6 y0^4 y00^2+
4 mr^2 w^6 y0^4 y00^2)+p^4 (2 w^6 x0^6+
6 mr^2 w^6 x0^6-6 w^8 x0^4 x00^2-
2 mr^2 w^8 x0^4 x00^2+6 w^6 x0^4 y0^2+
4 mr^2 w^6 x0^4 y0^2-6 w^8 x0^2 x00^2 y0^2+
6 mr^2 w^8 x0^2 x00^2 y0^2+6 w^6 x0^2 y0^4-
10 mr^2 w^6 x0^2 y0^4+8 mr^2 w^8 x00^2 y0^4+
2 w^6 y0^6-8 mr^2 w^6 y0^6-12 w^8 x0^3 x00 y0 y00-
12 w^8 x0 x00 y0^3 y00-2 mr^2 w^8 x0^4 y00^2-
6 w^8 x0^2 y0^2 y00^2+6 mr^2 w^8 x0^2 y0^2 y00^2-
6 w^8 y0^4 y00^2+8 mr^2 w^8 y0^4 y00^2) +
p^2 (-4 mr^2 w^8 x0^6+4 w^9 x0^5 x00+
4 mr^2 w^9 x0^5 x00-4 w^10 x0^4 x00^2-
4 mr^2 w^8 x0^4 y0^2+8 w^9 x0^3 x00 y0^2-
4 mr^2 w^9 x0^3 x00 y0^2-4 w^10 x0^2 x00^2 y0^2+
4 mr^2 w^10 x0^2 x00^2 y0^2+4 mr^2 w^8 x0^2 y0^4+
4 w^9 x0 x00 y0^4-8 mr^2 w^9 x0 x00 y0^4+
4 mr^2 w^10 x00^2 y0^4+4 mr^2 w^8 y0^6+
4 w^9 x0^4 y0 y00+4 mr^2 w^9 x0^4 y0 y00-
8 w^10 x0^3 x00 y0 y00+8 w^9 x0^2 y0^3 y00-
4 mr^2 w^9 x0^2 y0^3 y00-8 w^10 x0 x00 y0^3 y00+
4 w^9 y0^5 y00-8 mr^2 w^9 y0^5 y00-
4 w^10 x0^2 y0^2 y00^2+4 mr^2 w^10 x0^2 y0^2 y00^2-
4 w^10 y0^4 y00^2+4 mr^2 w^10 y0^4 y00^2)==0,p];

```

```
mt=Table[q1];
```

```

f=p^5 (x0^2+w x0 x00+y0^2+w y0 y00)+
p^3 (2 w^3 x0 x00+2 w^3 y0 y00)+p (-w^4 x0^2)+
w^5 x0 x00-w^4 y0^2+w^5 y0 y00);

```

```

h=-(w^5 x0^2 y0)+2 w^6 x0 x00 y0-w^5 y0^3+
p^2 (2 w^3 x0^2 y0+2 w^3 y0^3)-w^6 x0^2 y00+
w^6 y0^2 y00+p^3 (-2 w^2 x0^3-2 w^3 x0^2 x00-

```

```

2 w^2 x0 y0^2+2 w^3 x00 y0^2-4 w^3 x0 y0 y00)+
p (2 w^4 x0^3-2 w^5 x0^2 x00+2 w^4 x0 y0^2+
2 w^5 x00 y0^2-4 w^5 x0 y0 y00)+p^4 (-(w x0^2 y0)-
2 w^2 x0 x00 y0-w y0^3+w^2 x0^2 y00-w^2 y0^2 y00);

a=f/h;

p1=p/.mt;

p2=DeleteCases[p1,Complex[x_,y_]];

n3=Cases[p2,p_/;p<0];

n5=a/.p->n3;

Clear[w];

hgm=k^2 ac^2 (w^2+(wr^2/p)^2) Product[(w^2+
(n1[[i]])^2),{i,1,nn}]-w^(2 m) (w^2+
p^2) Product[(w^2+(n2[[j]])^2),{j,1,nd}]/.{ac->n5,
p->n3};

w1=NSolve[hgm[[1]]==0,w];

w2=w/.w1;

w3=DeleteCases[w2,Complex[x_,y_]];

w4=Cases[w3,w_/;w>0];

teta1=(Sum[ArcTan[w4/(-n1[[i]])],{i,1,nn}]
+ArcTan[w4/(-wr^2/(n3[[1]])]-ArcTan[w4/(-n3[[1]])]-
m 3.14159/2-Sum[ArcTan[w4/(-n2[[j]])],{j,1,nd}]) 180/
3.14159;

w5=NSolve[hgm[[2]]==0,w];

w6=w/.w5;

w7=DeleteCases[w6,Complex[x_,y_]];

w8=Cases[w7,w_/;w>0];

teta2=(Sum[ArcTan[w8/(-n1[[i]])],{i,1,nn}]
+ArcTan[w8/(-wr^2/(n3[[2]])]-ArcTan[w8/(-n3[[2]])]-
m 3.14159/2-Sum[ArcTan[w8/(-n2[[j]])],
{j,1,nd}]) 180/3.14159;

teta0={teta1[[1]],teta2[[1]]};

teta3=Cases[teta0,teta_/;teta>-180];

```

```

nt=Length[teta3];
pc=If[teta1[[1]]>teta2[[1]],n3[[1]],n3[[2]]];
ac=a/.p->pc;
hgf=k ac (s-wr^2/pc) Product[s-n1[[i]],
{i,1,nn}]/(s^m (s-pc) Product[s-n2[[j]],{j,1,nd}]);
cs=hgf/(s (1+hgf));
ct=InverseLaplaceTransform[cs,s,t];
ctr=ct/.t->tr;
If[ctr<0.99,Goto[freq]];
If[ctr>1.01,Goto[freq]];
tp=3.14159/(wn (1-ksi^2)^0.5);
ctp=ct/.t->tp;
If[ctp<0.995 mp1,Goto[ult]];
If[ctp>1.005 mp1,Goto[ult]]

```

## ■ 5. Resultados Obtidos

```

ctr
1.00599
ctp
1.09928
wr
0.85793
mr
1.04761

```

A função de transferência do compensador será:

$$tc = ac \frac{(s - wr^2/pc) hg0}{(hg1 (s - pc))}$$

$$\frac{55.7073 (0.0980963 + s)}{7.50328 + s}$$

```

pc
-7.50328
ac
55.7073

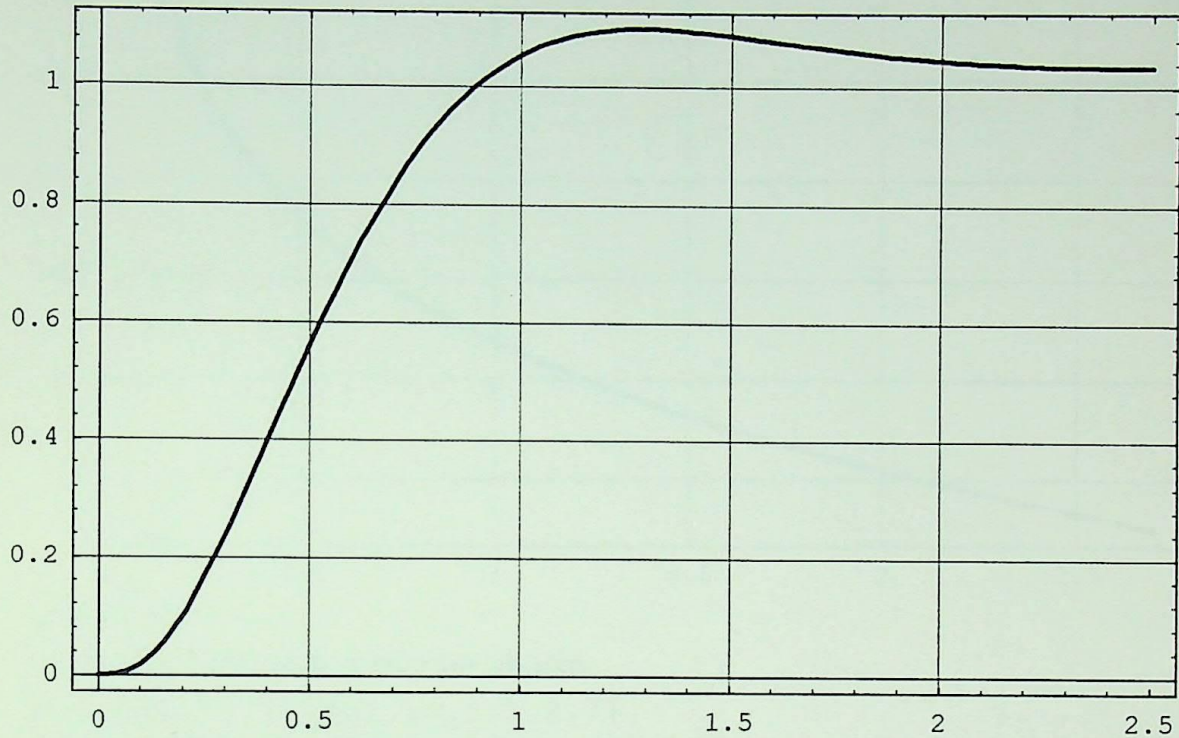
```

$$z=wr^2/pc$$

$$-0.0980963$$

## ■ 6. Comprovação dos Resultados Obtidos

Plot[ct, {t, 0, 2.5}, Frame->True, GridLines->Automatic, Axes->True,



-Graphics-

Os diagramas de Bode de malha aberta podem ser traçados da seguinte forma;

A função de transferência do compensador será:

$$tc = ac \frac{(w I - wr^2/pc)}{(w I - pc)}$$

$$55.7073 \frac{(0.0980963 + I w)}{7.50328 + I w}$$

---


$$7.50328 + I w$$

A função de transferência de malha aberta do sistema compensado será, portanto:

$$g = hg0 tc$$

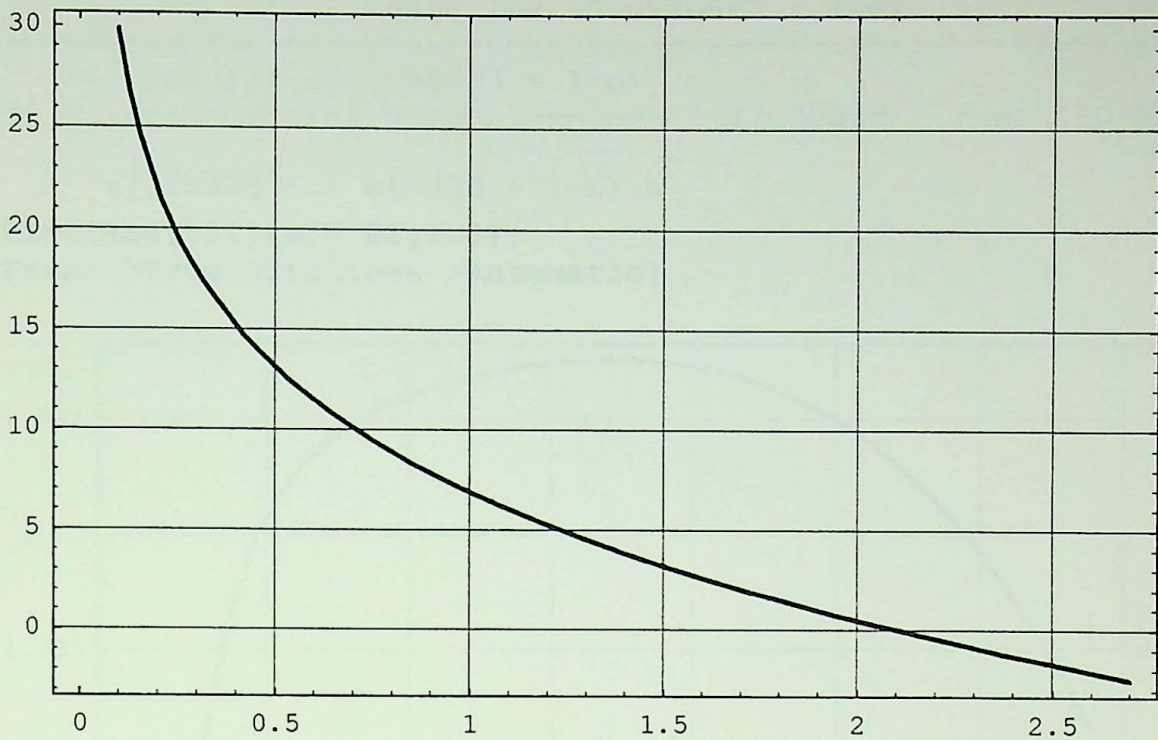
$$-167.122 \frac{(0.0980963 + I w)}{(7.50328 + I w) (10 + I w) w^2}$$

---


$$(7.50328 + I w) (10 + I w) w^2$$

Que podemos plotar, para observarmos a estabilidade do sistema. A curva de ganho será conforme abaixo (note que a escala das abcissas não é logarítmica como usualmente)

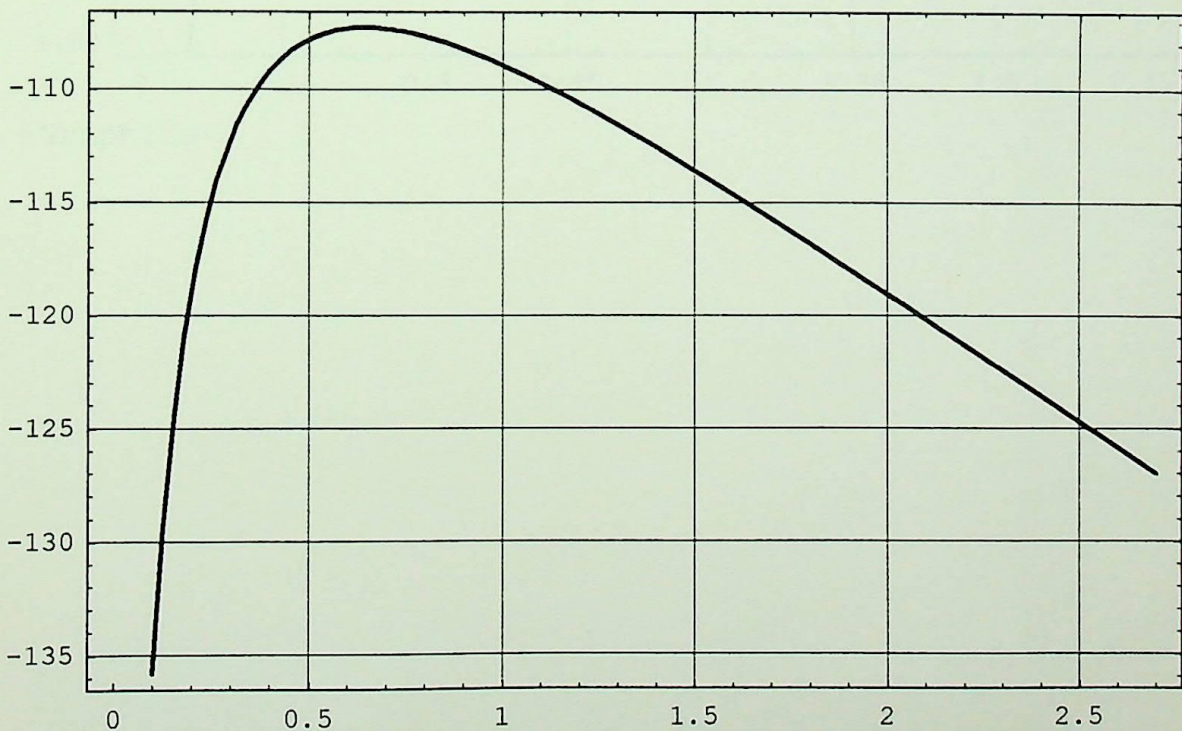
```
Plot[20 Log[10,Abs[g]],{w,0.1,2.7},
Frame->True,GridLines->Automatic]
```



-Graphics-

A curva de fase será conforme abaixo:

```
Plot[180/Pi Arg[g],{w,0.1,2.7},
Frame->True,GridLines->Automatic]
```



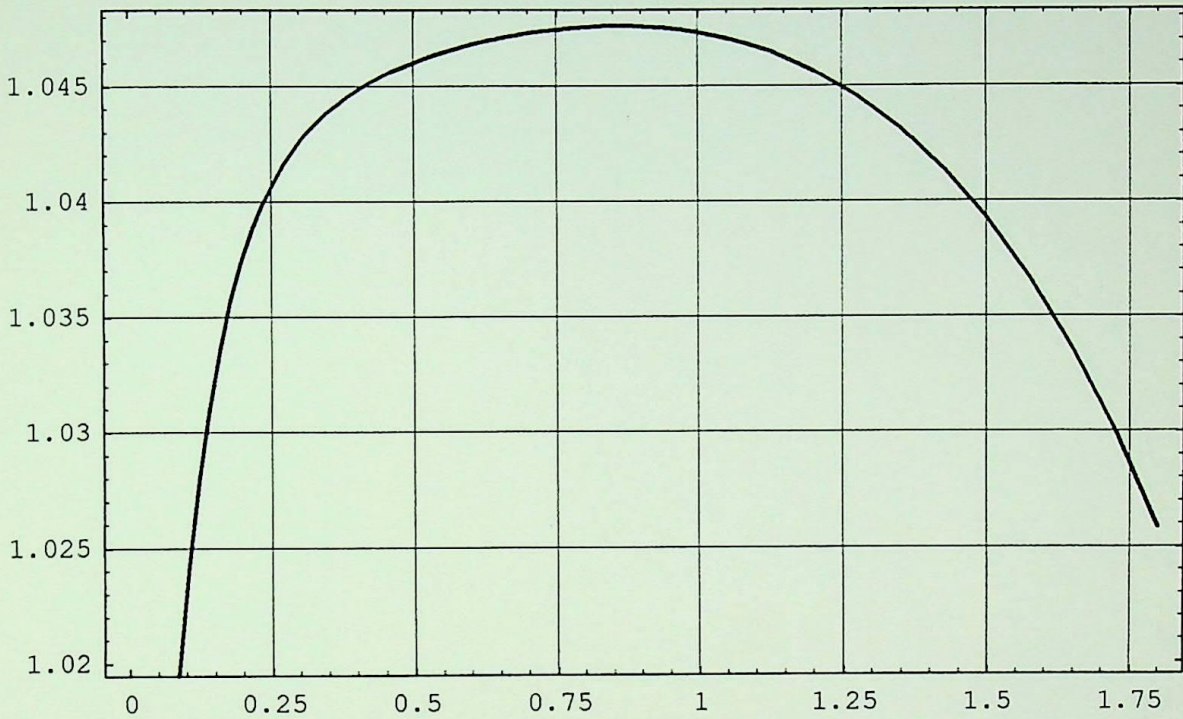
-Graphics-

$$t1 = g / (1 + g)$$

$$-167.122 (0.0980963 + I w)$$

$$- \left( 1 - \frac{167.122 (0.0980963 + I w)}{(7.50328 + I w)^2} \right) (7.50328 + I w) (10 + I w) w$$

```
Plot[Abs[t1], {w, 0.01, 1.8},
Frame->True, GridLines->Automatic]
```



-Graphics-

DATA	19 / 10 / 19 94
PROC.	
PED.	PPG
LIV.	
Cz\$	DOAÇÃO

FICHA 01 T.768  
**EFEI / Biblioteca Mauá**  
H542c  
519.71:519.67(043.2)  
HEREK, O.  
Compensação analítica de sistemas de controle em malha fechada lineares pelo método da resposta em frequência.

Data Adquirida	N.º Registro	D Dev

**EFEI**

**BIBLIOTECA MAUÁ**

Esta publicação deverá ser devolvida dentro do prazo estipulado.

O leitor é responsável pela publicação em seu poder.

**EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ**  
**8200768**



**NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA**