

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM ELEMENTO FINITO DE PLACA FINA PARA
ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES

Autor: Aparecido Garcia da Silva

Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior

Co- Orientador: Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira

Itajubá, Dezembro de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM ELEMENTO FINITO DE PLACA FINA PARA
ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES

Autor: Aparecido Garcia da Silva

Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior

Co- Orientador: Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira

Curso: Mestrado em Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Projeto e Fabricação

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica

Itajubá, Dezembro de 2014

MG- Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UM ELEMENTO FINITO DE PLACA FINA PARA
ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES

Autor: Aparecido Garcia da Silva

Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior

Co- Orientador: Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando de Azevedo Silva- DEM/ FEG/ UNESP

Prof. Dr. Paulo Shigueme Ide- IEM/ UNIFEI

Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior-Orientador- IEM/ UNIFEI

Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira-Co- Orientador- IEM/ UNIFEI

Dedicatória

Aos meus pais Antonio e Mariana.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus e a Nossa Senhora Aparecida por concederem a mim e aos meus orientadores: vida, saúde, inteligência e disposição para a realização deste trabalho.

Agradeço especialmente aos meus orientadores Dr. José Juliano de Lima Júnior e Dr. Wlamir Carlos de Oliveira pela competência, dedicação, paciência e amizade que me dispensaram durante a realização de todo o trabalho. Foram longos períodos que juntos, estudamos os assuntos relacionados, elaborando programas computacionais e buscando resultados.

Registro aqui meus agradecimentos ao Prof. MSc. Sebastião Fernandes- IMC/ UNIFEI pela ajuda no desenvolvimento matemático.

Meu agradecimento ao corpo docente, aos servidores e aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Itajubá pela atenção e amizade que recebi durante todo o mestrado.

Manifesto também meus agradecimentos a Rafaela que me incentivou a chegar até aqui.

*“Todos os nossos sonhos podem tornar-se realidade, se
tivermos a coragem de persegui-los.”*

Walt Disney

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal propor e testar um elemento de placa fina para domínios com contornos irregulares para análise de vibrações livres. É realizado um estudo comparativo das frequências naturais de placas finas, calculadas pelos modelos teóricos e com o elemento proposto implementado no método dos elementos finitos (MEF). No MEF, são utilizados dois tipos de elementos finitos formulados segundo as hipóteses de Kirchhoff. São determinadas as seis primeiras frequências naturais de placas finas em várias configurações de apoio e geometria. Os resultados obtidos através do MEF são comparados com valores teóricos encontrados nas referências utilizadas para desenvolvimento do trabalho. Na análise comparativa dos valores das frequências é utilizada a forma gráfica que mostra os desvios percentuais em tabelas facilitando, assim, a compreensão das principais diferenças do comportamento dos modelos estudados.

Palavras-chave: Placas finas, Elementos finitos, Vibrações Livres.

Abstract

This work aims to propose and test a thin plate element for domains with irregular contours for analysis of free vibrations. A comparative study of the natural frequencies of thin plates, calculated by the theoretical models and the proposed element implemented in the finite element method (FEM) is performed. In FEM, two types of finite element formulated according to Kirchhoff assumptions are used. Are determined the first six natural frequencies of thin plates in various configurations to support and geometry. The results obtained through the FEM are compared with theoretical values found in the references used for the development work. The comparative analysis of the values of the frequencies graphical form showing the percentage deviations in tables, thus facilitating the understanding of the main differences in the behavior of the studied model is used

Keywords: Thin plates, Finite Elements, Free Vibrations.

SUMÁRIO

LISTAS DE FIGURAS	iv
LISTAS DE TABELAS	vii
LISTAS DE GRÁFICOS	viii
SIMBOLOGIA	xiii
LETRAS LATINAS	xiii
LETRAS GREGAS	xiv
SUPERESCRITOS	xiv
SUBESCRITOS	xv
ABREVIATURAS	xv
SIGLAS	xv
OPERADORES	xv
Capítulo 1	1
INTRODUÇÃO	1
1.1-REVISÃO DA LITERATURA	1
1.2-MOTIVAÇÃO DO TRABALHO	5
1.3-OBJETIVOS DA PESQUISA	5
1.4-ESTRUTURA DO TRABALHO	6
Capítulo 2	8
ELEMENTOS DE PLACA FINA SEGUNDO AS HIPÓTESES DE KIRCHHOFF	8

2.1-INTRODUÇÃO	8
2.2-CLASSIFICAÇÃO DAS PLACAS	9
2.3- PLACAS FINAS COM PEQUENOS DESLOCAMNETOS VERTICAIS	9
2.4- HIPÓTESES DE KIRCHHOFF	10
2.5- RELAÇÕES ENTRE AS DEFORMAÇÕES E DESLOCAMNETOS	10
2.6- RELAÇÕES ENTRE AS TENSÕES E DEFORMAÇÕES	11
2.6.1- Equações de Equilíbrio	13
2.6.2- Princípio da Mínima Energia Potencial	14
2.6.3-Elemento de Placa Fina de Melosh	19
2.6.4-Funções de Deslocamentos	19
2.6.5- Matriz de Rigidez do Elemento de Melosh.....	24
2.6.6- Vetor de Forças Nodais	25
2.6.7-Matriz de Massa do Elemento de Melosh	25
Capítulo 3	27
FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA DO ELEMENTO QUADRILATERAL DE PLACA FINA.....	27
3.1- MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE WLAMIR	27
3.2- MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO PROPOSTO.....	43
Capítulo 4	44
VALIDAÇÃO DO ELEMENTO PROPOSTO E COMENTÁRIOS	44
Capítulo 5	104
RESULTADOS	104
Capítulo 6	120
CONCLUSÕES E SUGESTÕES	120
6.1- CONCLUSÕES FINAIS	120
6.2- SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	121
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	122

Apêndice A.....	125
INTEGRAÇÃO NUMÉRICA POR QUADRATURA DE GAUSS.....	125
A.1- Integração Numérica Unidimensional.....	125
A.2- Integração Numérica em Duas Dimensões	128
Apêndice B	131
B.1-TEORIA SOBRE VIBRAÇÕES LIVRES	131

LISTAS DE FIGURAS

Figura 1- Elemento de placa fina.....	8
Figura 2- Sentidos positivos dos momentos no elemento de placa	12
Figura 3- Representação nodal do elemento de placa	15
Figura 4- Representação dos sistemas de coordenadas local e natural.....	27
Figura 5- Placa anelar engastada na borda externa e livre no centro	45
Figura 6- Primeiro modo de vibração (placa anelar engastada/ livre).....	51
Figura 7- Segundo modo de vibração (placa anelar engastada/ livre).....	52
Figura 8- Terceiro modo de vibração (placa anelar engastada/ livre).....	52
Figura 9- Quarto modo de vibração (placa anelar engastada/ livre).....	53
Figura 10- Placa anelar simplesmente apoiada na borda externa e engastada no centro	53
Figura 11- Placa quadrada simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ engastada	59
Figura 12- Primeiro modo de vibração (placa quadrada apoiada/ engastada/ apoiada/ engastada).....	64
Figura 13- Segundo modo de vibração (placa quadrada apoiada/ engastada/ apoiada/ engastada).....	65
Figura 14- Terceiro modo de vibração (placa quadrada apoiada/ engastada/ apoiada/ engastada).....	65
Figura 15- Quarto modo de vibração (placa quadrada apoiada/ engastada/ apoiada/ engastada)	66
Figura 16- Placa quadrada simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/	67
Figura 17- Placa quadrada simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ livre...	73
Figura 18- Placa quadrada simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada / simplesmente apoiada/ livre	79
Figura 19- Placa quadrada simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre	84
Figura 20- Placa retangular engastada/ engastada/ engastada/ engastada	89
Figura 21- Placa retangular engastada/ livre/ engastada/ livre	97
Figura 22- Placa anelar engastada na borda externa e engastada no centro	105
Figura 23- Primeiro modo de vibração (placa anelar engastada/ engastada)	105
Figura 24- Segundo modo de vibração (placa anelar engastada/ engastada)	106
Figura 25- Terceiro modo de vibração (placa anelar engastada/ engastada).....	106

Figura 26- Quarto modo de vibração (placa anelar engastada/ engastada)	107
Figura 27- Placa circular com furo quadrado engastada na borda externa e engastada no centro	108
Figura 28- Primeiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ engastada)	109
Figura 29- Segundo modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ engastada)	109
Figura 30- Terceiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ engastada)	110
Figura 31- Quarto modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ engastada)	110
Figura 32- Placa circular com furo quadrado engastada na borda externa e livre no centro..	111
Figura 33- Primeiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ livre)	112
Figura 34- Segundo modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ livre)	112
Figura 35- Terceiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ livre)	113
Figura 36- Quarto modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ livre)...	113
Figura 37- Placa circular com furo quadrado engastada na borda externa e simplesmente apoiada no centro.....	114
Figura 38- Primeiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ simplesmente apoiada)	115
Figura 39- Segundo modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ simplesmente apoiada)	115
Figura 40- Terceiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ simplesmente apoiada)	116
Figura 41- Quarto modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ simplesmente apoiada)	116
Figura 42- Placa circular com furo quadrado simplesmente apoiada na borda externa e engastada no centro	117
Figura 43- Primeiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado simplesmente apoiada/ engastada).....	118
Figura 44- Segundo modo de vibração (placa circular com furo quadrado simplesmente apoiada/ engastada).....	118
Figura 45- Terceiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado simplesmente apoiada/ engastada).....	119

Figura 46- Quarto modo de vibração (placa circular com furo quadrado simplesmente apoiada/ engastada).....	119
Figura A. 1- Integração com dois pontos de Gauss em duas dimensões.....	129
Figura A. 2- Integração com três pontos de Gauss em duas dimensões.....	130

LISTAS DE TABELAS

Tabela 1- Frequências naturais analíticas para placa anelar (engastada na borda e livre no centro).....	46
Tabela 2- Frequências naturais analíticas para placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)	54
Tabela 3- Frequências naturais analíticas para quadrada (simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ engastada).....	60
Tabela 4- Frequências naturais analíticas para quadrada (simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada).....	68
Tabela 5- Frequências naturais analíticas para quadrada (simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ livre).....	74
Tabela 6- Frequências naturais analíticas para quadrada (simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ livre).....	79
Tabela 7- Frequências naturais analíticas para quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre).....	85
Tabela 8- Frequências naturais analíticas para retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada).....	90
Tabela 9- Frequências naturais analíticas para retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada).....	97
Tabela 10- Frequências naturais para placa anelar (engastada na borda e engastada no centro)	105
Tabela 11 - Frequências naturais para placa circular com furo quadrado (engastada na borda e engastada no centro)	108
Tabela 12 - Frequências naturais para placa circular com furo quadrado (engastada na borda e livre no centro).....	111
Tabela 13 - Frequências naturais para placa circular com furo quadrado (engastada na borda e simplesmente apoiada no centro)	114
Tabela 14 - Frequências naturais para placa circular com furo quadrado (simplesmente apoiada na borda e engastada no centro)	117

LISTAS DE GRÁFICOS

Gráfico 1- Primeira frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro).....	46
Gráfico 2- Segunda frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro).....	47
Gráfico 3- Terceira frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro).....	47
Gráfico 4- Quarta frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro).....	48
Gráfico 5- Quinta frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro).....	48
Gráfico 6- Sexta frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro)	49
Gráfico 7- Sétima frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro).....	49
Gráfico 8- Oitava frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro).....	50
Gráfico 9- Desvio percentual das oito primeiras frequências naturais de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro).....	50
Gráfico 10- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro).....	51
Gráfico 11- Primeira frequência natural de uma placa anelar(simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)	54
Gráfico 12- Segunda frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro).....	55
Gráfico 13- Terceira frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)	55
Gráfico 14- Quarta frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)	56
Gráfico 15- Quinta frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)	56

Gráfico 16- Sexta frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)	57
Gráfico 17- Sétima frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)	57
Gráfico 18- Oitava frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)	58
Gráfico 19- Desvio percentual das oito primeiras frequências naturais de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro).....	58
Gráfico 20- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro.....	59
Gráfico 21- Primeira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada).....	60
Gráfico 22- Segunda frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada).....	61
Gráfico 23- Terceira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada).....	61
Gráfico 24- Quarta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada).....	62
Gráfico 25- Quinta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada).....	62
Gráfico 26- Sexta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada).....	63
Gráfico 27- Desvio percentual das seis primeiras frequências naturais de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada).....	63
Gráfico 28- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada)	64
Gráfico 29- Primeira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada).....	68
Gráfico 30- Segunda frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada).....	69
Gráfico 31- Terceira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada).....	69
Gráfico 32- Quarta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada).....	70

Gráfico 33- Quinta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada).....	70
Gráfico 34- Sexta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada).....	71
Gráfico 35- Desvio percentual das seis primeiras frequências naturais de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada)	71
Gráfico 36- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada)	72
Gráfico 37- Primeira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre).....	74
Gráfico 38- Segunda frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre).....	75
Gráfico 39- Terceira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre).....	75
Gráfico 40- Quarta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre).....	76
Gráfico 41- Quinta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre).....	76
Gráfico 42- Sexta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre).....	77
Gráfico 43- Desvio percentual das seis primeiras frequências naturais de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre)	77
Gráfico 44- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre).....	78
Gráfico 45- Primeira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)	80
Gráfico 46- Segunda frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)	80
Gráfico 47- Terceira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)	81
Gráfico 48- Quarta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)	81
Gráfico 49- Quinta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)	82

Gráfico 50- Sexta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)	82
Gráfico 51- Desvio percentual das seis primeiras frequências naturais de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre).....	83
Gráfico 52- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre).....	83
Gráfico 53- Primeira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)	85
Gráfico 54- Segunda frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)	86
Gráfico 55- Terceira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)	86
Gráfico 56- Quarta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)	87
Gráfico 57- Primeira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)	87
Gráfico 58- Sexta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)	88
Gráfico 59- Desvio percentual das seis primeiras frequências naturais de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre).....	88
Gráfico 60- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)	89
Gráfico 61- Primeira frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)	90
Gráfico 62- Segunda frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)	91
Gráfico 63- Terceira frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)	91
Gráfico 64- Quarta frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)	92
Gráfico 65- Quinta frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)	92
Gráfico 66- Sexta frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)	93

Gráfico 67- Sétima frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)	93
Gráfico 68- Oitava frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)	94
Gráfico 69- Nona frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)	94
Gráfico 70- Décima frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)	95
Gráfico 71- Desvio percentual das dez primeiras frequências naturais de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)	95
Gráfico 72- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada)	96
Gráfico 73- Primeira frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)	98
Gráfico 74- Segunda frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)	98
Gráfico 75- Terceira frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)	99
Gráfico 76- Quarta frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)	99
Gráfico 77- Quinta frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)	100
Gráfico 78- Sexta frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)	100
Gráfico 79- Sétima frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)	101
Gráfico 80- Oitava frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)	101
Gráfico 81- Nona frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)	102
Gráfico 82- Desvio percentual das nove primeiras frequências naturais de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre).....	102
Gráfico 83- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)	103

SIMBOLOGIA

LETRAS LATINAS

M	Momento fletor	Nm
D	Rigidez à flexão da placa	Nm
w	Deslocamento na direção do eixo z	m
Q	Força cortante	N
E	Módulo de elasticidade longitudinal	GPa
u	Deslocamento na direção do eixo x	m
v	Deslocamento na direção do eixo y	m
t	Espessura da placa	m
q	Carregamento distribuído	N/m ²
A	Área da placa	m ²
V	Energia potencial das forças externas	J
U	Energia interna de deformação	J
$\{d\}$	Vetor de deslocamentos nodais	m
$[B]$	Matriz formada pelas derivadas das funções de interpolação	
$[N]$	Matriz formada pelas funções de forma	
$[M]$	Matriz de massa	kg
$[K]$	Matriz de rigidez	N/m
$[P]$	Polinômio para interpolação da variável física	
$[C]$	Matriz de coeficientes das funções de interpolação	
$[D]$	Matriz de elasticidade	Pa.m ³
$[Q]$	Matriz de variáveis das funções de interpolação	
$[\bar{N}]$	Matriz formada pelas funções de interpolação	
$\{f\}$	Vetor de forças nodais	N
dV	Diferencial de volume	m ³
$[J]$	Matriz jacobiana da transformação (interpolação das coordenadas)	
$[\bar{J}]$	Matriz jacobiana da transformação (interpolação das variáveis)	
$[IJ]$	Inversa da matriz jacobiana da transformação	
G	Módulo de elasticidade transversal	GPa

$\{x(t)\}$	Vetor dos deslocamentos lineares	m
$\{\dot{x}(t)\}$	Vetor de velocidade do movimento	m/s
$\{\ddot{x}(t)\}$	Vetor aceleração do movimento	m/s ²
dx	Diferencial na direção do eixo x	m
dy	Diferencial na direção do eixo y	m
dz	Diferencial na direção do eixo z	m

LETRAS GREGAS

τ	Tensão de cisalhamento	N/m ²
ν	Coefficiente de Poisson	
σ	Tensão de tração ou compressão	N/m ²
ω	Frequência angular	rad/s
γ	Deformação angular	
ε	Deformação específica linear	
Π	Energia potencial total	J
$\{\alpha\}$	Vetor de deslocamentos angulares	rad
λ	Autovalor	(rad/s) ²
ρ	Massa específica	kg/m ³
ξ	Eixo de direção do sistema local paralelo ao eixo x	
η	Eixo de direção do sistema local paralelo ao eixo y	
$d\xi$	Diferencial na direção do eixo ξ	
$d\eta$	Diferencial na direção do eixo η	
φ	Ângulo de fase	rad
$\{\phi\}$	Autovetor ou modo de vibração	m, rad

SUPERESCRITOS

T	Matriz ou vetor transposto	
$-I$	Matriz inversa	

SUBSCRITOS

x	Eixo de direção	
y	Eixo de direção	
z	Eixo de direção	
xy	Plano que contém os eixos x e y	
xz	Plano que contém os eixos x e z	
yz	Plano que contém os eixos y e z	
I	Índice do nó	
e	Refere-se ao elemento	

ABREVIATURAS

Eq.	Equação	
Eqs.	Equações	

SIGLAS

MEF	Método dos Elementos Finitos	
FEM	Finite Element Method	
IEM	Instituto de Engenharia Mecânica	
UNIFEI	Universidade Federal de Itajubá	

OPERADORES

$\frac{\partial P}{\partial \bullet}$	Primeira derivada parcial da função P	
$\frac{\partial^2 P}{\partial \bullet^2}$	Segunda derivada parcial da função P	
Σ	Somatório de termos	

$\frac{\partial^2 w}{\partial \bullet^2}$	Segunda derivada parcial da função w	
$\frac{\partial w}{\partial \bullet}$	Primeira derivada parcial da função w	
$\delta \bullet$	Variação de uma função	
$\int \bullet$	Integração de uma função em uma direção (eixo)	
$\iint \bullet$	Integração de uma função em duas direções (área)	
$\iiint \bullet$	Integração de uma função em três direções (volume)	

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1-REVISÃO DA LITERATURA

Filósofos gregos, há mais de dois mil anos, já anunciavam teorias supondo que tudo poderia ser formado por várias partículas. Matemáticos, já naquela época, transformavam curvas em vários pequenos segmentos de reta, para assim, facilitar os cálculos. Mais recentemente, na década de 30, já havia quem substituía um elemento estrutural contínuo, como, por exemplo, uma placa, por uma estrutura formada por barras seguindo a geometria original, mantendo as mesmas condições de vinculação e cargas, ASSAN (1999).

Sucessivas teorias deram origem à análise matricial. Dentre elas, se desenvolveu o método numérico conhecido por Método dos Elementos Finitos (MEF). Nesse método, o meio contínuo é dividido ou discretizado por vários elementos com propriedades bem definidas de rigidez e elasticidade. Embora o MEF tenha sido, originalmente, desenvolvido para obter soluções aproximadas de problemas de elasticidade, hoje, o método é empregado com muito êxito em vários campos da engenharia.

Em problemas de elasticidade, são admitidas funções contínuas que representam o campo de deslocamentos no domínio dos elementos. A partir destas funções, obtém-se o estado de tensões associado às relações constitutivas do material. Definido o estado de tensões, os esforços internos podem ser descritos e devem estar em equilíbrio com os agentes externos. O método de Rayleigh-Ritz usa esta transformação com a minimização da energia

potencial total do domínio obtida em função de um campo de deslocamento, (BATHE e WILSON, 1976). Este método ficou conhecido por método dos deslocamentos.

A partir de 1940, vários matemáticos e engenheiros aplicaram este procedimento numérico para obter soluções numéricas de problemas cujas soluções analíticas não eram conhecidas. Muitos trabalhos foram e ainda são publicados com o objetivo de se encontrar soluções, mesmo que aproximadas, de problemas complexos da engenharia.

Uma área de grande interesse na engenharia é o das vibrações mecânicas. Várias estruturas são constituídas por painéis planos. O elemento que mais se adapta à análise de tensões e de vibrações deste tipo de estrutura é o elemento de placa. Nesse sentido, estudos de análise estática e dinâmica de estruturas discretizadas por elementos de placas podem ser encontrados na literatura. Alguns trabalhos desenvolvidos com a utilização de elementos finitos de placas são mencionados a seguir. Praticamente em todos os trabalhos, podem ser notado que os resultados numéricos encontrados apresentaram pequenos desvios percentuais com relação aos resultados obtidos por soluções analíticas ou por soluções empíricas.

BARTON (1951) apresentou um estudo de vibração de placas retangulares engastadas e oblíquas. O método de Ritz foi usado para determinar soluções aproximadas para as frequências e modos de vibração destas placas. As funções usadas para representar a deflexão de placas correspondem àquelas que definem os modos normais de vibração de uma viga uniforme. Ele apresentou soluções para placas engastadas, para placas oblíquas com lados de iguais comprimentos e com vários ângulos de inclinação.

PEANO (1976) apresentou uma análise de flexão de placas usando elementos triangulares hierárquicos. As funções de forma do elemento são obtidas por coordenadas de áreas. Este desenvolvimento leva a novas famílias de elementos os quais são, computacionalmente, mais eficientes. A teoria apresentada pode ser estendida para cobrir elementos tridimensionais.

Usando integração reduzida, PUGH *et. al.* (1978) estudou a flexão de placas usando elementos quadrilaterais. Na formulação apresentada, ele concluiu que certos elementos de placas espessas quando usados no contexto de placas finas pode ser melhorada para a obtenção da matriz de rigidez. Testes com elementos quadrilaterais lineares, quadráticos e cúbicos foram reportados assim como elementos lagrangeanos com nove pontos nodais também foram usados, os quais apresentaram ótimos resultados com a utilização de integração numérica reduzida.

O método de Rayleigh-Ritz foi aplicado por ROUFAEIL e DAWE (1980) para determinar as frequências naturais de placas quadradas. A análise foi baseada na teoria de placa de Mindlin com a inclusão dos efeitos de cisalhamento e inércia de rotação. As

variações das deflexões da placa e as rotações da superfície média da placa são assumidas por uma série de produtos de apropriadas funções de viga de Timoshenko.

LEVINSON (1985) apresentou uma solução exata para vibrações livres de placas simplesmente apoiadas com várias espessuras considerando a teoria linear da elastodinâmica. Foi encontrado que há dois tipos de modos de oscilação consistentes com as hipóteses cinemáticas. Outros modos de oscilação aparecem considerando a teoria elastodinâmica tridimensional. Os dois tipos de modos encontrados são análogos aos modos flexionais da teoria clássica de placa de Mindlin.

CHOI e KIM (1988) aplicaram também a integração reduzida para encontrar os modos não-conformes e os seus acoplamentos em dois tipos diferentes de elementos de placas finas. O campo de deslocamentos dos elementos é formado por modos adicionais não-conformes para obter as componentes de deslocamentos transversais dos elementos degenerados de placa fina. Mostraram que os resultados de ambos os elementos convergem rapidamente para as soluções exatas quando a malha é refinada. Os elementos usados por eles podem também ser aplicados para uma ampla faixa dos valores da espessura em problemas de placas finas.

Um novo elemento para placas finas em flexão com contornos curvilíneos é proposto por WEI-ZANG e GANG (1990). O trabalho apresenta um elemento quadrilateral com contornos curvos para problemas de flexão de placas. A transformação das coordenadas é realizada pela adição de uma matriz de rigidez baseada no princípio variacional generalizado resultando assim em alta precisão e menor custo computacional.

Em seu trabalho, IBRAHIMBEGOVIC (1993) discutiu a aplicação de dois elementos quadriláteros de placa na análise estática de placas finas e espessas. Os elementos são baseados na teoria de placa de Reissner-Mindlin. Ele concluiu que com o uso de interpolações não convencionais dos deslocamentos para o campo de deformações no cisalhamento, ambos os elementos são versáteis na análise de placas finas e espessas.

OLIVEIRA (1993) apresentou resultados da análise de frequências naturais de placas espessas com a utilização de elementos finitos tridimensionais degenerados através da formulação hierárquica do método dos elementos finitos com a implementação de um processo adaptativo, versão p . Neste trabalho, também foi testado um indicador de erros para apontar as regiões carentes de refinamento na malha de elementos. No refinamento, versão p , o grau do polinômio das funções interpoladoras é sucessivamente aumentado de acordo com a informação obtida pelo indicador de erros.

Em seu trabalho sobre análise de vibrações livres, IDE (1995) estudou as vibrações em torno de configurações deformadas em placas geometricamente não-linear pelo método dos elementos finitos, via resíduos ponderados e segundo o critério de Galerkin. Foi mostrado que

as alterações na rigidez de uma placa devido a ação de forças de membrana acarretam a características dinâmicas diferentes àquelas previstas pela teoria linear.

MIYAZIMA (2001) realizou um estudo comparativo, teórico e experimental, das frequências naturais e modos de vibração de uma placa retangular em balaço com comportamento geométrico linear e não-linear. Ele utilizou o método dos resíduos ponderados via elementos finitos para obter os resultados que foram comparados com valores recolhidos em ensaios experimentais. Para obter a condição da não-linearidade geométrica, foi usada uma célula de carga conectada a uma ponte extensiométrica. Para obter as frequências naturais foi utilizado um acelerômetro ligado ao analisador de sinais.

PASCHOALINI (2001) apresentou resultados da sua análise estática e dinâmica de placas e cascas usando elemento finito quadrilateral quadrático. Neste trabalho foi utilizada a formulação hierárquica do método dos elementos finitos. A natureza hierárquica possibilita empregar expansões polinomiais diferentes ao longo de lados e elementos diferentes o que leva a convergência rápida dos resultados.

BAPTISTELLA (2001) fez um estudo comparativo entre elementos finitos das famílias Serendipity e Lagrangeana. Ele utilizou elementos isoparamétricos para analisar a estabilidade de placas e cascas considerando tanto o caso de malhas de discretização regular como distorcida.

RUO-YU *et. al.* (2002) propuseram um novo elemento quadrilateral de placa fina baseado na teoria da similaridade de membrana de placa. Esta formulação foi proposta para formular o elemento de placa fina usando entre a elasticidade plana e flexão de placa. A teoria da similaridade e suas aplicações foram discutidas profundamente. Resultados numéricos mostraram que este novo elemento foi aprovado no teste padrão e apresenta boa convergência e alta precisão.

SOARES (2004) analisou os esforços e deflexões em placas retangulares finas com comportamento linear. Diversas condições de carregamento e de contorno foram analisadas.

Uma análise de tensões em placas circulares utilizando elementos finitos axissimétricos foi realizada por VICENTE (2009). Ele aplicou elementos axissimétricos no estudo de tensões em corpos de revolução submetidos a carregamentos axissimétricos. É mostrado, neste trabalho, que a formulação por elementos axissimétricos é bastante similar àquela do estado plano de tensões. É analisada a distribuição de tensões em regiões distantes e próximas de carregamentos concentrados. Na formulação, as deformações do elemento são obtidas considerando as hipóteses simplificadoras da teoria da elasticidade linear na análise plana de tensões e deformações. As funções de forma do elemento são dadas no sistema local de coordenadas naturais. As matrizes de rigidez dos elementos são avaliadas considerando a

formulação isoparamétrica do método dos elementos finitos. Portanto, na obtenção das matrizes, foi necessário utilizar o processo numérico da quadratura de Gauss.

As teorias e técnicas apresentadas nas publicações citadas anteriormente juntamente com o conteúdo de outras obras citadas no rol das referências foram suficientes para fornecer o embasamento teórico necessário para o desenvolvimento da formulação do elemento de placa fina proposto nesta dissertação.

Após uma ampla pesquisa bibliográfica, é importante salientar que não foi encontrada nenhuma publicação tratando de análise estática e/ou dinâmica, via MEF, de placas finas com lados de comprimentos diferentes. Isso justifica a proposição do elemento de placa fina quadrilateral (lados de comprimentos diferentes) implementado no MEF para análise de vibrações, elemento esse formulado nesta dissertação.

1.2-MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

Os elementos finitos disponíveis atualmente para análise (estática ou dinâmica) de placas finas não se adaptam a domínios com contornos curvos. Isso motivou o desenvolvimento da formulação matemática de um elemento finito de placa fina que se adapte a tais contornos.

Esse elemento foi idealizado pelo professor Titular Dr Wlamir Carlos de Oliveira, atualmente aposentado pelo IEM da UNIFEI cuja formulação é desenvolvida apresentada neste trabalho. Devido a ideia sugerida pelo professor, o elemento será denominado de Elemento de Wlamir.

1.3-OBJETIVOS DA PESQUISA

Os objetivos desta pesquisa consistem na proposição de um novo elemento de placa fina seguindo as hipóteses de Kirchhoff para análise de vibrações livres, assim como descrever a metodologia usada na formulação desse elemento. O elemento proposto é quadrilateral (Elemento de Wlamir) e foi implementado MEF para a determinação de autovalores de uma placa fina com variadas condições de contorno e geometrias.

1.4-ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está estruturado em seis capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma introdução do trabalho, bem como uma breve revisão literária relacionada ao assunto de vibrações em placa finas e do método dos elementos finitos. No segundo capítulo, é apresentado um estudo da teoria de placas finas segundo as hipóteses de Kirchhoff. Partindo do princípio da energia potencial mínima, são obtidas as expressões das matrizes de rigidez e de massa do elemento de placa fina de Melosh. Este elemento não é o objetivo principal deste trabalho, mas é usado como base para formulação do elemento de placa fina quadrilateral proposto. O elemento de Melosh torna-se um caso particular do elemento quadrilateral. O terceiro capítulo traz o foco principal do trabalho que é a proposição da formulação do elemento de placa fina quadrilateral. Assim como no segundo capítulo, também obtém-se as expressões das matrizes de rigidez e de massa para o elemento de placa fina, mas agora quadrilateral. No caso do elemento quadrilateral, trabalha-se com o sistema local de coordenadas naturais (ξ, η) que tem sua origem no centro do elemento, mas os resultados são obtidos no sistema de coordenadas global através das relações de transformação de coordenadas (jacobiano da transformação). Uma vez que se trabalha no sistema de coordenadas naturais, torna-se necessária a aplicação de um procedimento numérico conhecido como Quadratura de Gauss para a solução das integrais.

O quarto capítulo é usado para validação do elemento finito proposto e do programa desenvolvido em linguagem Fortran para o elemento quadrilateral de placa fina e também alguns comentários a respeito dos resultados das frequências angulares e modos de vibração obtidos apresentados graficamente. Para tal, os resultados obtidos numericamente são confrontados nas formas de tabelas e gráficos, calculando-se os erros percentuais dos valores obtidos numericamente com relação aos encontrados por soluções analíticas para alguns casos particulares de condições de contorno e geometrias de placas finas.

O quinto capítulo traz vários resultados desse trabalho que poderão ser usados como base para futuras pesquisas na área. Para isso, foram calculadas as primeiras frequências naturais e os modos de vibração de uma placa fina com diferentes condições de contorno das comparadas com a literatura, bem como geometrias distintas das calculadas anteriormente. Nesse capítulo, os resultados das frequências angulares são apresentados na forma de tabelas e os modos de vibração na forma de gráficos obtidos com o auxílio do *software* Matlab®.

Finalmente, o sexto capítulo é dedicado às conclusões finais, discussões dos resultados encontrados neste trabalho e sugestões para futuras pesquisas e desenvolvimentos relacionados com o MEF e uso de elementos quadriláteros de placas finas aplicado à vibrações mecânicas.

O apêndice A apresenta o procedimento numérico da Quadratura de Gauss que é utilizado para avaliar as matrizes dos elementos e o apêndice B traz as equações básicas de vibrações livres.

Capítulo 2

ELEMENTOS DE PLACA FINA SEGUNDO AS HIPÓTESES DE KIRCHHOFF

2.1-INTRODUÇÃO

A Figura 1 mostra um elemento de placa, que é um elemento plano que tem a função estrutural de suportar a ação de carregamentos perpendiculares ao seu plano médio e que tem a espessura bem menor que as outras dimensões, UGURAL (1981). A espessura é medida na direção normal ao plano médio xy da placa. As componentes do deslocamento denotadas por u , v e w de um ponto qualquer ocorrem nas direções x , y e z , respectivamente.

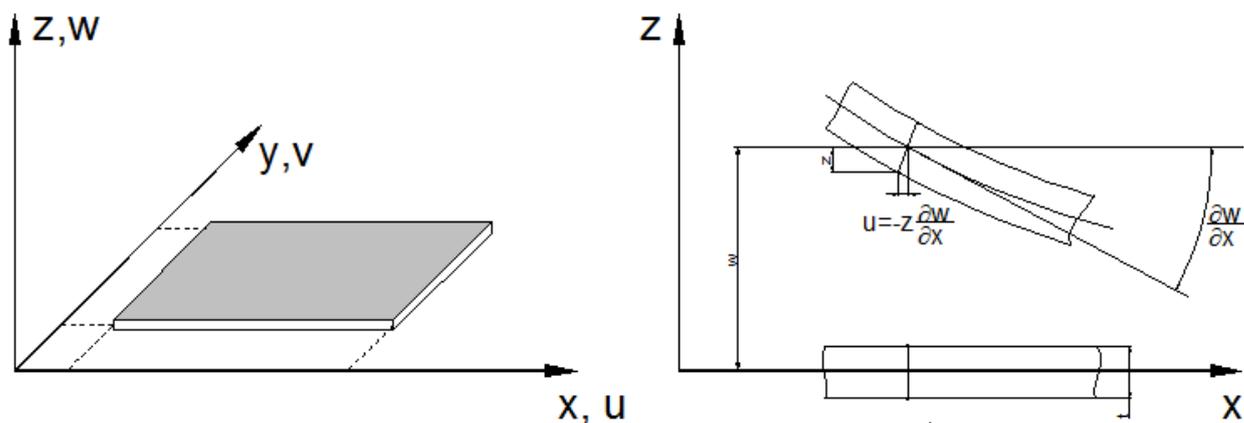


Figura 1- Elemento de placa fina

2.2-CLASSIFICAÇÃO DAS PLACAS

Segundo a literatura, as placas são classificadas em três grupos:

- 1) placas finas com pequenos deslocamentos verticais;
- 2) placas finas com grandes deslocamentos verticais, e
- 3) placas espessas.

Com relação às deformações, uma placa é considerada como sendo fina com pequenos deslocamentos verticais quando obedece as seguintes condições:

- (a) a relação entre a espessura e o comprimento do seu menor lado for inferior a $1/20$;
- (b) a relação entre os deslocamentos verticais e a espessura for inferior a $1/5$, e
- (c) as rotações forem da ordem de 10^{-3} radianos.

Por outro lado, uma placa é definida como sendo fina e com grandes deslocamentos verticais quando:

- (d) a relação entre sua espessura e o comprimento do menor lado for inferior a $1/20$;
- (e) a relação entre os deslocamentos verticais e a espessura for superior a $1/5$, e
- (f) as rotações forem da ordem da $\sqrt{10^{-3}}$ radianos.

Quando as dimensões da placa são da mesma ordem de grandeza, elas são consideradas como placas espessas.

Este trabalho trata-se exclusivamente de placas finas retangulares e quadrilaterais com pequenos deslocamentos verticais. O material da placa é considerado ser homogêneo, isotrópico e obedece a Lei de Hooke.

2.3- PLACAS FINAS COM PEQUENOS DESLOCAMNETOS VERTICAIS

Nesta seção, mostram-se as equações fundamentais que descrevem o comportamento das placas finas com pequenos deslocamentos verticais. São também obtidas as equações que fornecem as tensões e momentos em vários pontos destas placas usando a formulação por elementos finitos.

2.4- HIPÓTESES DE KIRCHHOFF

Na teoria clássica de flexão de placas finas com pequenos deslocamentos verticais, as suposições fundamentais são baseadas na geometria das deformações. Estas suposições são conhecidas como hipóteses de Kirchhoff que são, UGURAL (1981):

a) O deslocamento vertical da superfície média da placa é pequeno comparado com sua espessura e o quadrado da rotação é desprezível comparado com a unidade.

b) O plano médio da placa permanece inextensível durante a flexão. Isto significa que as tensões normais neste plano são desprezíveis.

c) Seções planas inicialmente normais à superfície média permanecem planas e normais à superfície após a flexão. Isto implica em desprezar as deformações γ_{xz} e γ_{yz} devido ao cisalhamento vertical. A deformação normal ε_z pode, também, ser omitida. Isto significa que não há variação da espessura da placa. Portanto, o deslocamento vertical da placa é equacionado em função apenas das deformações devidas à flexão.

d) A tensão normal σ_z ao plano médio é pequena e pode ser desprezível comparada com outras componentes de tensão.

2.5- RELAÇÕES ENTRE AS DEFORMAÇÕES E DESLOCAMNETOS

Utilizando a terceira hipótese de Kirchhoff, as relações entre as deformações e deslocamentos são reduzidas a:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Estas relações, por envolver a geometria da deformação, são conhecidas como relações cinemáticas das deformações de placa. A integração da primeira equação das Eqs.(2) leva a

$$w = w(x, y) = cte \quad (3)$$

o que mostra que o deslocamento vertical não varia ao longo da sua espessura. Considerando a segunda hipótese de Kirchhoff, a integração das duas últimas Eqs. (2) fornece:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{e} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4)$$

Usando as Eqs. (4), as Eqs. (1) são reescritas como:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{e} \quad \gamma_{xy} = 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

2.6- RELAÇÕES ENTRE AS TENSÕES E DEFORMAÇÕES

Com a utilização das Eqs. (2) e das equações simplificadas do estado tridimensional de tensões, as relações das tensões e deformações para placa fina considerando a Lei de Hooke para material homogêneo e isotrópico podem ser expressas como:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad \text{e} \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (6)$$

Inserindo as Eqs. (5) nas Eqs. (6), as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} podem ser colocadas na forma:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{e} \quad \tau_{xy} = \frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

As tensões das Eqs. (7) produzem momentos de flexão, momentos de torção e forças de cisalhamento verticais. Os momentos por unidade de comprimento são obtidos fazendo

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (8)$$

A Figura 2 mostra os sentidos positivos dos momentos que atuam no plano médio xy de uma placa em flexão.

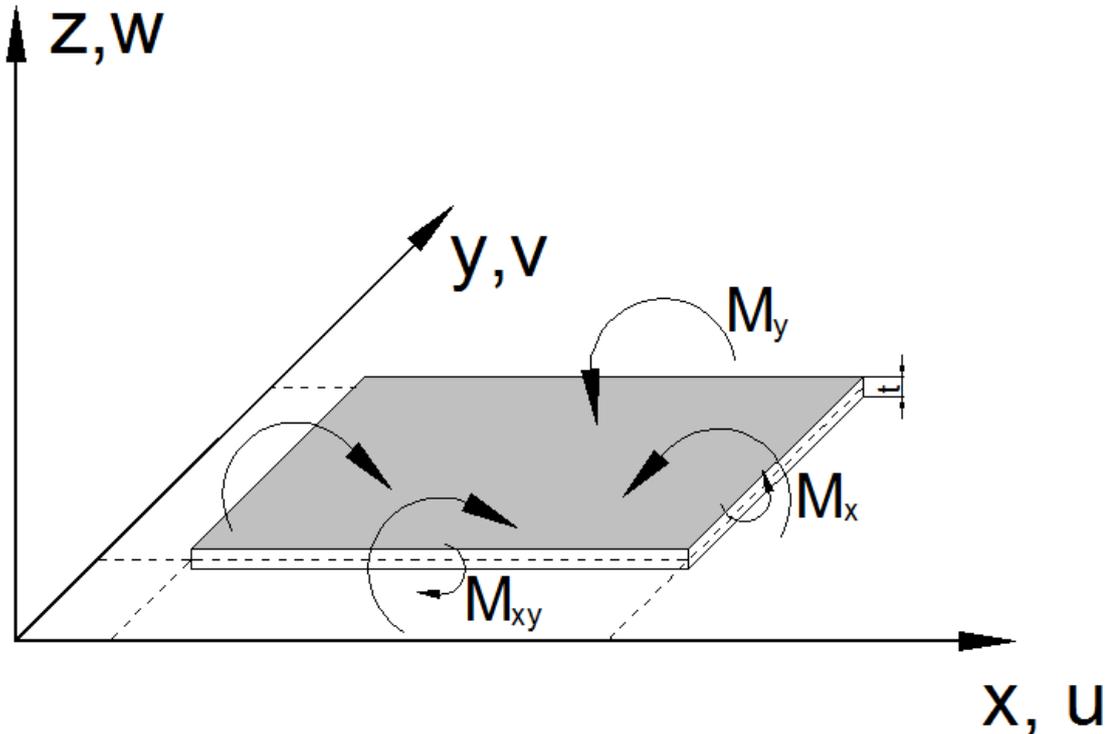


Figura 2- Sentidos positivos dos momentos no elemento de placa

As forças de cisalhamento por unidade de comprimento são avaliadas como sendo

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (9)$$

Na Eq.(9), são omitidas as componentes de deformações γ_{xz} e γ_{yz} conforme a teoria de placas finas, mas as forças verticais Q_x e Q_y não são desprezíveis.

Levando as tensões das Eqs. (7) na Eq. (8) e efetuando a integração, os momentos resultam em:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{e} \quad M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (10)$$

onde:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (11)$$

é conhecida como a rigidez à flexão da placa, sendo que t é a espessura do elemento, E o módulo de elasticidade longitudinal e ν o coeficiente de Poisson do material do elemento.

Inserindo as Eqs. (10) e (11) na Eq. (7), obtém-se as tensões a uma distância z do plano médio da placa como:

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{t^3} \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{t^3} \quad \text{e} \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{t^3} \quad (12)$$

2.6.1- Equações de Equilíbrio

Conforme UGURAL (1981) a equação diferencial de momentos de placas finas à flexão é:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (13)$$

onde $q = q(x, y)$ é o carregamento distribuído (força por unidade de área) que atua na perpendicular à superfície da placa.

A equação diferencial para o deslocamento vertical de placas finas é, UGURAL (1981):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (14)$$

Chamando de M a soma dos momentos definidos pela Eq. (10), obtém-se:

$$M = M_x + M_y = -D(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

Assim, as forças de cisalhamento podem, então, ser expressas como:

$$Q_x = \frac{\partial M}{\partial x} \quad \text{e} \quad Q_y = \frac{\partial M}{\partial y} \quad (16)$$

A Eq. (14), portanto, pode ser representada na forma:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -q \quad (17)$$

ou

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} \quad (18)$$

2.6.2- Princípio da Mínima Energia Potencial

A expressão para a energia de deformação para placas finas deformadas é dada por, TIMOSHENKO e GOODIER(1980):

$$U = \iiint_V \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y) + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 \right] dx dy dz \quad (19)$$

Para o caso de placas com espessura constante e usando as Eqs. (5) e (11), a Eq. (19) pode ser escrita em função do deslocamento vertical w como:

$$U = \frac{1}{2} \iint_A D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (20)$$

onde A é a área da superfície da placa.

O trabalho devido ao carregamento distribuído transversal $q = q(x, y)$ é denotado por

$$V = \iint_A q w dx dy \quad (21)$$

Chamando de V a energia potencial das forças externas, a expressão para energia potencial armazenada em um corpo, $\Pi = U - V$ é:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz - \iint_A q w dx dy \quad (22)$$

O princípio da energia potencial mínima estabelece que:

$$\delta \Pi = \delta(U - V) = 0 \quad (23)$$

A Eq. (23) pode ser utilizada para deduzir o vetor de carregamento nodal e a matriz de rigidez de um elemento de placa fina com quatro pontos nodais, como mostra a Figura 3. É considerado que o elemento tem espessura t constante e é submetido, no sentido do eixo z , a um carregamento distribuído $q = q(x, y)$.

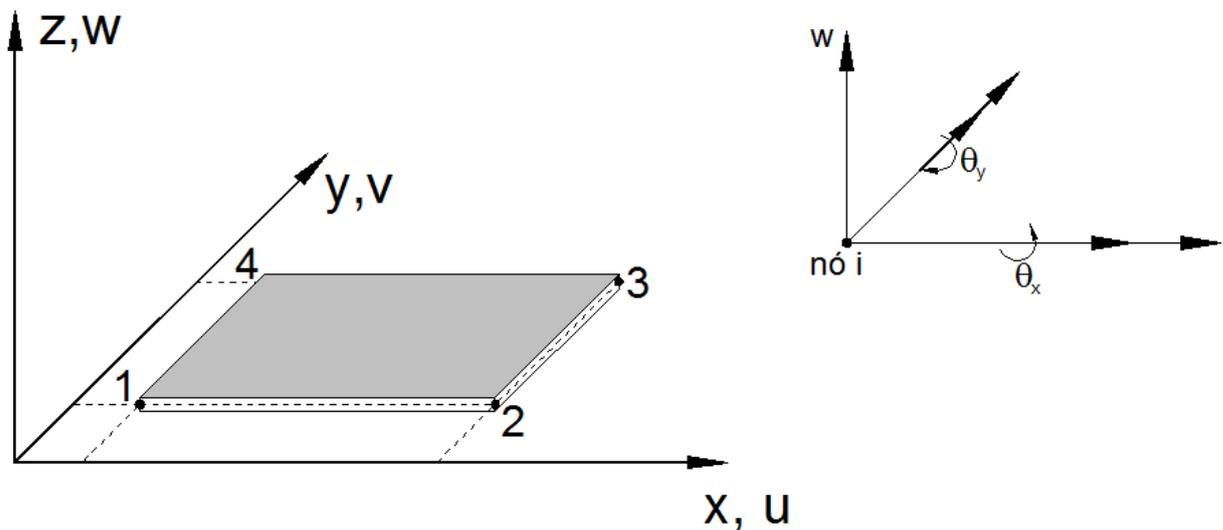


Figura 3- Representação nodal do elemento de placa

No caso, o vetor de “deslocamentos” nodais do elemento é:

$$\{d\}_e = \begin{Bmatrix} \{d\}_1 \\ \{d\}_2 \\ \{d\}_3 \\ \{d\}_4 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

onde, para cada ponto nodal, são utilizados três componentes de “deslocamentos”, isto é, w , θ_x e θ_y .

w =deslocamento da placa na direção do eixo z ;

θ_x =rotação da placa em torno do eixo x ;

θ_y := rotação da placa em torno do eixo y .

$$\{d\}_1 = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x,1} \\ \theta_{y,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1 \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1 \end{Bmatrix}; \quad \{d\}_2 = \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{x,2} \\ \theta_{y,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2 \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2 \end{Bmatrix} \quad (25a,b)$$

$$\{d\}_3 = \begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_{x,3} \\ \theta_{y,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_3 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3 \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3 \end{Bmatrix}; \quad \{d\}_4 = \begin{Bmatrix} w_4 \\ \theta_{x,4} \\ \theta_{y,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_4 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_4 \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_4 \end{Bmatrix} \quad (25c,d)$$

Na análise por elementos finitos, as deformações em um elemento, fornecidas pela Eq. (5), são colocadas na seguinte forma:

$$\{\varepsilon\}_e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (26a)$$

ou simplesmente:

$$\{\varepsilon\}_e = [B]\{d\}_e \quad (26b)$$

sendo que $[B]$ é uma matriz a ser, posteriormente, determinada. Usando as Eqs. (7) e (26a), o vetor de “tensões” no elemento pode ser expresso como:

$$\{\sigma\}_e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_e = \frac{Ez}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \{\varepsilon\}_e \quad (27)$$

Referindo à Eq. (8), o vetor de momentos pode ser colocado em função de $\{\sigma\}_e$:

$$\{M\}_e = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_e = \int_{-t/2}^{t/2} \{\sigma\}_e z dz \quad (28)$$

Com o uso da Eq. (27), a Eq. (28) produz:

$$\{M\}_e = \left(\int_{-t/2}^{t/2} \frac{E z^2}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} dz \right) \{\varepsilon\}_e \quad (29)$$

cuja integração fornece:

$$\{M\}_e = [D]\{\varepsilon\}_e \quad (30)$$

sendo que:

$$[D] = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

é a matriz de elasticidade para um elemento de placa fina isotrópica.

O deslocamento vertical w de um ponto qualquer do plano médio do elemento pode ser definido em função do vetor de deslocamentos nodais como:

$$w = [\bar{N}]\{d\}_e \quad (32)$$

onde $[\bar{N}]$ é a matriz formada pelas funções de interpolação do elemento que, posteriormente, será determinada.

Considerando a Eq. (22) que expressa a energia potencial de um elemento, a variação $\delta \Pi$ é:

$$\delta \Pi = \iint_A (M_x \delta \varepsilon_x + M_y \delta \varepsilon_y + M_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy - \iint_A q \delta w dx dy = 0 \quad (33)$$

que pode ser reescrita como:

$$\iint_A (\{\delta \varepsilon\}_e^T \{M\}_e - q \delta w) dx dy = 0 \quad (34)$$

Usando as Eqs. (26b), (30) e (32), a Eq. (34) produz:

$$\iint_A \{\delta d\}_e^T [B]^T [D][B] \{d\}_e dx dy - \iint_A \{\delta d\}_e^T [N]^T q dx dy = 0 \quad (35)$$

ou:

$$\{\delta d\}_e^T \left(\iint_A [B]^T [D][B] dx dy \right) \{d\}_e = \{\delta d\}_e^T \left(\iint_A q [N]^T dx dy \right) \quad (36)$$

ou seja:

$$[K]_e \{d\}_e = \{f\}_e \quad (37)$$

onde:

$$[K]_e = \iint_A [B]^T [D][B] dx dy \quad (38)$$

é a matriz de rigidez do elemento de placa.

Usando as Eqs. (36) e (37), o vetor de forças nodais é:

$$\{f\}_e = \iint_A q [\bar{N}]^T dx dy \quad (39)$$

que é o vetor equivalente ao carregamento transversal q que atua na superfície de área A da placa.

2.6.3-Elemento de Placa Fina de Melosh

No elemento de placa fina de Melosh, como mostra a Figura 3, os lados devem ser, necessariamente, paralelos e perpendiculares aos eixos x e y , ou seja, a geometria do elemento deve ser retangular, ZIENKIEWICKS (1977).

2.6.4-Funções de Deslocamentos

O vetor de deslocamentos nodais do elemento retangular de placa fina é representado pela Eq. (24) juntamente com as Eqs. (25a,b) e (25c,d). A expressão polinomial do deslocamento w do elemento de quatro pontos nodais é selecionada como, ZIENKIEWICKS (1993):

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (40)$$

A Eq. (40) pode ser reescrita na forma matricial como:

$$w = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2 y & xy^2 & y^3 & x^3 y & xy^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Fazendo:

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2 y & xy^2 & y^3 & x^3 y & xy^3 \end{bmatrix} \quad (42)$$

A expansão polinomial para a interpolação da variável física w é fornecida como

$$[P] = [P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_{12}] \quad (43)$$

A Eq. (41) é da forma:

$$w = [P]\{\alpha\} \quad (44)$$

Usando a Eq. (40), para o primeiro ponto nodal, tem-se que:

$$w_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_1 y_1 + \alpha_6 y_1^2 + \alpha_7 x_1^3 + \alpha_8 x_1^2 y_1 + \alpha_9 x_1 y_1^2 + \alpha_{10} y_1^3 + \alpha_{11} x_1^3 y_1 + \alpha_{12} x_1 y_1^3 \quad (45a)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 = \theta_{x,1} = \alpha_3 + \alpha_5 x_1 + 2\alpha_6 y_1 + \alpha_8 x_1^2 + 2\alpha_9 x_1 y_1 + 3\alpha_{10} y_1^2 + \alpha_{11} x_1^3 + 3\alpha_{12} x_1 y_1^2 \quad (45b)$$

$$-\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 = \theta_{y,1} = -\alpha_2 - 2\alpha_4 x_1 - \alpha_5 y_1 - 3\alpha_7 x_1^2 - 2\alpha_8 x_1 y_1 - \alpha_9 y_1^2 - 3\alpha_{11} x_1^2 y_1 - \alpha_{12} y_1^3 \quad (45c)$$

Usando a Eq. (25a), pode-se exprimir:

$$\{d\}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 y_1 & -y_1^2 & 0 & -3x_1^2 y_1 & -y_1^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (46a)$$

Procedendo, analogamente, para os outros pontos nodais, tem-se que:

$$\{d\}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & y_2^3 & x_2^3 y_2 & x_2 y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & 3y_2^2 & x_2^3 & 3x_2 y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2 & -y_2 & 0 & -3x_2^2 & -2x_2 y_2 & -y_2^2 & 0 & -3x_2^2 y_2 & -y_2^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (46b)$$

$$\{d\}_{13} = \begin{bmatrix} 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 & x_3^3 y_3 & x_3 y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3x_3 y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -2x_3 y_3 & -y_3^2 & 0 & -3x_3^2 y_3 & -y_3^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (46c)$$

e

$$\{d\}_4 = \begin{bmatrix} 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4 y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & -2x_4 y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2 y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (46d)$$

Fazendo uso da Eq. (24) e das Eqs. (46), o vetor de deslocamentos nodais pode ser expresso na forma matricial como:

$$\{d\}_e = \begin{Bmatrix} \{d\}_1 \\ \{d\}_2 \\ \{d\}_3 \\ \{d\}_4 \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

ou seja:

$$\{d\}_e = [C] \{\alpha\} \quad (48)$$

Portanto,

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{d\}_e \quad (49)$$

onde, a matriz $[C]$ de ordem 12×12 , depende somente das coordenadas nodais e é determinada considerando o acoplamento dos elementos das matrizes que aparecem nas Eqs. (46a-d).

Assim,

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 y_1 & -y_1^2 & 0 & -3x_1^2 y_1 & -y_1^3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & y_2^3 & x_2^3 y_2 & x_2 y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & 3y_2^2 & x_2^3 & 3x_2 y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2 & -y_2 & 0 & -3x_2^2 & -2x_2 y_2 & -y_2^2 & 0 & -3x_2^2 y_2 & -y_2^3 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 & x_3^3 y_3 & x_3 y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3x_3 y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -2x_3 y_3 & -y_3^2 & 0 & -3x_3^2 y_3 & -y_3^3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4 y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & -2x_4 y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2 y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Usando as Eqs. (42) e (43), a Eq. (50) pode ser expressa como:

$$[C] = \begin{bmatrix}
 (P_1)_{n\acute{o}1} & (P_2)_{n\acute{o}1} & \dots & (P_{12})_{n\acute{o}1} \\
 \left(\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)_{n\acute{o}1} & \left(\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)_{n\acute{o}1} & \dots & \left(\frac{\partial P_{12}}{\partial y}\right)_{n\acute{o}1} \\
 -\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)_{n\acute{o}1} & -\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)_{n\acute{o}1} & \dots & -\left(\frac{\partial P_{12}}{\partial x}\right)_{n\acute{o}1} \\
 (P_1)_{n\acute{o}2} & (P_2)_{n\acute{o}2} & \dots & (P_{12})_{n\acute{o}2} \\
 \left(\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)_{n\acute{o}2} & \left(\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)_{n\acute{o}2} & \dots & \left(\frac{\partial P_{12}}{\partial y}\right)_{n\acute{o}2} \\
 -\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)_{n\acute{o}2} & -\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)_{n\acute{o}2} & \dots & -\left(\frac{\partial P_{12}}{\partial x}\right)_{n\acute{o}2} \\
 (P_1)_{n\acute{o}3} & (P_2)_{n\acute{o}3} & \dots & (P_{12})_{n\acute{o}3} \\
 \left(\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)_{n\acute{o}3} & \left(\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)_{n\acute{o}3} & \dots & \left(\frac{\partial P_{12}}{\partial y}\right)_{n\acute{o}3} \\
 -\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)_{n\acute{o}3} & -\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)_{n\acute{o}3} & \dots & -\left(\frac{\partial P_{12}}{\partial x}\right)_{n\acute{o}3} \\
 (P_1)_{n\acute{o}4} & (P_2)_{n\acute{o}4} & \dots & (P_{12})_{n\acute{o}4} \\
 \left(\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)_{n\acute{o}4} & \left(\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)_{n\acute{o}4} & \dots & \left(\frac{\partial P_{12}}{\partial y}\right)_{n\acute{o}4} \\
 -\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)_{n\acute{o}4} & -\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)_{n\acute{o}4} & \dots & -\left(\frac{\partial P_{12}}{\partial x}\right)_{n\acute{o}4}
 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Usando a Eq. (49), a Eq. (44) torna-se:

$$w = [P][C]^{-1}\{d\}_e \quad (52)$$

Determinando as derivadas de segunda ordem do deslocamento w da Eq. (40), o vetor $\{\varepsilon\}_e$ da Eq. (26a) resulta em:

$$\{\varepsilon\}_e = \left\{ \begin{array}{l} -2\alpha_4 - 6\alpha_7x - 2\alpha_8y - 6\alpha_{11}xy \\ -2\alpha_6 - 2\alpha_9x - 6\alpha_{10}y - 6\alpha_{12}xy \\ 2\alpha_5 + 4\alpha_8x + 4\alpha_9y + 6\alpha_{11}x^2 + 6\alpha_{12}y^2 \end{array} \right\} \quad (53)$$

que pode ser colocado como:

$$\{\varepsilon\}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (54)$$

Chamando de $[Q]$ a matriz retangular da Eq. (54), tem-se:

$$\{\varepsilon\}_e = [Q]\{\alpha\} \quad (55)$$

onde, portanto:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Usando a Eq. (49), a Eq. (55) pode ser reescrita como:

$$\{\varepsilon\}_e = [Q][C]^{-1}\{d\}_e \quad (57)$$

Comparando a Eq. (26b) com a Eq. (57), conclui-se que:

$$[B] = [Q][C]^{-1} \quad (58)$$

2.6.5- Matriz de Rigidez do Elemento de Melosh

Comparando a Eq. (32) com a Eq. (52), a matriz $[\bar{N}]$ é determinada fazendo:

$$[\bar{N}] = [P][C]^{-1} \quad (59)$$

Inserindo a Eq. (58) na Eq. (38), a matriz de rigidez do elemento é avaliada como sendo

$$[K]_e = [C]^{-1} \left(\iint_A [Q]^T [D] [Q] dx dy \right) [C]^{-1} \quad (60)$$

2.6.6- Vetor de Forças Nodais

O vetor de forças nodais equivalente ao carregamento distribuído $q = q(x, y)$ é determinado levando a Eq. (59) na Eq. (39), essa substituição produz:

$$\{f\}_e = [C]^{-1} \iint_A q [P]^T dx dy \quad (61)$$

cuja solução é um vetor que tem a forma:

$$\{f\}_e = \begin{Bmatrix} \{f_1\} \\ \{f_2\} \\ \{f_3\} \\ \{f_4\} \end{Bmatrix}_e \quad (62)$$

sendo que:

$$\{f_1\} = \begin{Bmatrix} P_z \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix}_1 ; \quad \{f_2\} = \begin{Bmatrix} P_z \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix}_2 ; \quad \{f_3\} = \begin{Bmatrix} P_z \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix}_3 \quad \text{e} \quad \{f_4\} = \begin{Bmatrix} P_z \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix}_4 \quad (63)$$

2.6.7-Matriz de Massa do Elemento de Melosh

Na análise de vibrações, é preciso determinar a matriz de massa do elemento que é deduzida como sendo, ZIENKIEWICKS (1977):

$$[M]_e = \int_V \rho [\bar{N}]^T [\bar{N}] dV \quad (64)$$

onde ρ é massa específica do material da placa e $[\bar{N}]$ é a matriz formada pelas funções de interpolação das variáveis do elemento.

Substituindo a Eq. (59) na Eq. (64), a matriz de massa do elemento é avaliada como:

$$[M]_e = [[C]^{-1}]^T \left(\int_V \rho [P]^T [P] dV \right) [C]^{-1} \quad (65)$$

Capítulo 3

FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA DO ELEMENTO QUADRILATERAL DE PLACA FINA

3.1- MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE WLAMIR

Na teoria do elemento de placa fina quadrilateral proposto neste trabalho, as hipóteses de Kirchhoff também são utilizadas, mas, no entanto, os lados do elemento não precisam ser necessariamente paralelos, Figura 4(a), diferenciando, portanto, do elemento de Melosh. Esse elemento é bastante útil nos casos de placas que apresentam contornos curvos, incluindo aqui, portanto, alguns casos de placas circulares.

O elemento quadrilateral no sistema global é mostrado na Figura 4(a) enquanto que a Figura 4(b) ilustra o elemento no sistema local de coordenadas naturais ξ e η .

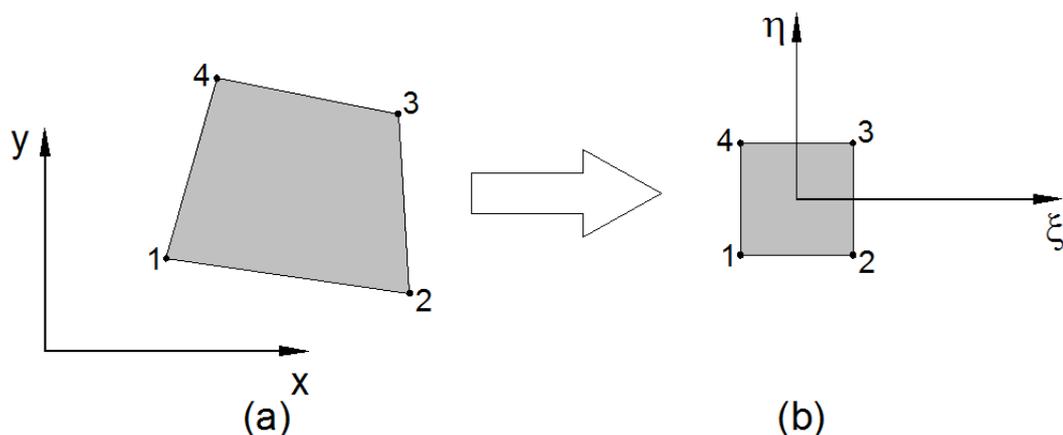


Figura 4- Representação dos sistemas de coordenadas local e natural

A matriz $[P]$ é agora uma função de ξ e η , ou seja,

$$[P] = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_{12}] = [1 \ \xi \ \eta \ \xi^2 \ \xi\eta \ \eta^2 \ \xi^3 \ \xi^2\eta \ \xi\eta^2 \ \eta^3 \ \xi^3\eta \ \xi\eta^3] \quad (66)$$

Nota-se que a matriz $[C]$ da Eq. (51) é uma função de P_i e de suas derivadas com relação às coordenadas globais x e y . Como agora P_i é função de ξ e η , então, para determinar as suas derivadas com relação a x e y , é preciso usar a matriz jacobiana $[J]$ das transformações de coordenadas.

A matriz $[J]$ depende das coordenadas nodais do elemento no sistema global e das funções de interpolação – funções de forma N_i ($i=1, \dots, 4$) – usadas para interpolar a geometria do elemento.

Como os elementos P_i são definidos em função das coordenadas naturais ξ e η do sistema local, devemos fazer

$$\frac{\partial P_i}{\partial \xi} = \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (67a)$$

e

$$\frac{\partial P_i}{\partial \eta} = \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (67b)$$

que colocadas na forma matricial, tornam-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial P_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial x} \\ \frac{\partial P_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (68)$$

A matriz quadrada da Eq. (68) é a matriz jacobiana que relaciona a derivada das funções P_i com relação às coordenadas globais com a derivada de P_i com relação às coordenadas naturais, ou seja,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (69)$$

As derivadas das funções P_i com relação a x e y podem ser determinadas usando a Eq. (68), fazendo

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial x} \\ \frac{\partial P_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial P_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (70)$$

Fazendo

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} = [IJ] = \begin{bmatrix} IJ(1,1) & IJ(1,2) \\ IJ(2,1) & IJ(2,2) \end{bmatrix} \quad (71)$$

em (70),

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial x} \\ \frac{\partial P_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} IJ(1,1) & IJ(1,2) \\ IJ(2,1) & IJ(2,2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial P_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (72)$$

A geometria do elemento é interpolada fazendo

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \quad (73a)$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \quad (73b)$$

Os elementos da matriz jacobiana $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ são obtidos pelas derivadas de x e y dadas pelas Eqs. (73) com relação às coordenadas naturais ξ e η do sistema local, ou seja

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_1^4 N_i x_i \right) = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_1^4 N_i y_i \right) = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\
\frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_1^4 N_i x_i \right) = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\
\frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_1^4 N_i y_i \right) = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i
\end{aligned} \tag{74}$$

Usando as funções de forma como,

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
\end{aligned} \tag{75}$$

As derivadas das funções de forma com relação a ξ e η são

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta); \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta); \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta); \quad \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta) \tag{76a}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi); \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi); \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi); \quad \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi) \tag{76b}$$

A matriz jacobiana, Eq. (69) é, portanto,

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \tag{77a}$$

ou,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (77b)$$

As derivadas de N_i com relação a ξ e η da Eq. (77b) são avaliadas nos pontos nodais do elemento definido no sistema local e passa a ser, então, uma constante numérica. Conforme Figura 4(b), as coordenadas naturais dos pontos nodais são $\xi_1 = -1$, $\eta_1 = -1$, $\xi_2 = 1$, $\eta_2 = -1$, $\xi_3 = 1$, $\eta_3 = 1$, $\xi_4 = -1$ e $\eta_4 = 1$.

Usando os elementos da inversa da matriz $[J]$ obtém-se, portanto, pela Eq. (72), as derivadas $\frac{\partial P_i}{\partial x}$ e $\frac{\partial P_i}{\partial y}$. Logo, para obter a matriz $[C]$ da Eq. (51), basta usar a Eq. (72) fazendo

$$\frac{\partial P_i}{\partial x} = IJ(1,1) \times \frac{\partial P_i}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial P_i}{\partial \eta} \quad (78a)$$

e

$$\frac{\partial P_i}{\partial y} = IJ(2,1) \times \frac{\partial P_i}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial P_i}{\partial \eta} \quad (78b)$$

Substituindo os termos de P_i da Eq. (66) com $i = 1, 2, \dots, 12$ nas Eqs. (78), tem-se que:

Para $i = 1$ tem-se que $P_1 = 1$:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = IJ(1,1) \times \frac{\partial P_1}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial P_1}{\partial \eta} = 0 \quad (79a)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = IJ(2,1) \times \frac{\partial P_1}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial P_1}{\partial \eta} = 0 \quad (79b)$$

Para $i = 2$ tem-se que $P_2 = \xi$:

$$\frac{\partial P_2}{\partial x} = IJ(1,1) \times \frac{\partial P_2}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial P_2}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \frac{\partial \xi}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = IJ(1,1) \quad (80a)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial y} = IJ(2,1) \times \frac{\partial P_2}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial P_2}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \frac{\partial \xi}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = IJ(2,1) \quad (80b)$$

Para $i = 3$ tem-se que $P_3 = \eta$:

$$\frac{\partial P_3}{\partial x} = IJ(1,1) \times \frac{\partial P_3}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial P_3}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial \eta}{\partial \eta} = IJ(1,2) \quad (81a)$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial y} = IJ(2,1) \times \frac{\partial P_3}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial P_3}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial \eta}{\partial \eta} = IJ(2,2) \quad (81b)$$

Para $i = 4$ tem-se que $P_4 = \xi^2$:

$$\frac{\partial P_4}{\partial x} = IJ(1,1) \times \frac{\partial P_4}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial P_4}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \frac{\partial \xi^2}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial \xi^2}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times (2\xi) \quad (82a)$$

$$\frac{\partial P_4}{\partial y} = IJ(2,1) \times \frac{\partial P_4}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial P_4}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \frac{\partial \xi^2}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial \xi^2}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times (2\xi) \quad (82b)$$

Para $i = 5$ tem-se que $P_5 = \xi\eta$:

$$\frac{\partial P_5}{\partial x} = IJ(1,1) \times \frac{\partial P_5}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial P_5}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \frac{\partial \xi\eta}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial \xi\eta}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \eta + IJ(1,2) \times \xi \quad (83a)$$

$$\frac{\partial P_5}{\partial y} = IJ(2,1) \times \frac{\partial P_5}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial P_5}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \frac{\partial \xi\eta}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial \xi\eta}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \eta + IJ(2,2) \times \xi \quad (83b)$$

Para $i = 6$ tem-se que $P_6 = \eta^2$:

$$\frac{\partial P_6}{\partial x} = IJ(1,1) \times \frac{\partial P_6}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial P_6}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \frac{\partial \eta^2}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial \eta^2}{\partial \eta} = IJ(1,2) \times 2\eta \quad (84a)$$

$$\frac{\partial P_6}{\partial y} = IJ(2,1) \times \frac{\partial P_6}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial P_6}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \frac{\partial \eta^2}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial \eta^2}{\partial \eta} = IJ(2,2) \times 2\eta \quad (84b)$$

Para $i = 7$ tem-se que $P_7 = \xi^3$:

$$\frac{\partial P_7}{\partial x} = IJ(1,1) \times \frac{\partial P_7}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial P_7}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \frac{\partial \xi^3}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial \xi^3}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times 3\xi^2 \quad (85a)$$

$$\frac{\partial P_7}{\partial y} = IJ(2,1) \times \frac{\partial P_7}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial P_7}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \frac{\partial \xi^3}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial \xi^3}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times 3\xi^2 \quad (85b)$$

Para $i = 8$ tem-se que $P_8 = \xi^2 \eta$:

$$\frac{\partial P_8}{\partial x} = IJ(1,1) \times \frac{\partial P_8}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial P_8}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \frac{\partial \xi^2 \eta}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial \xi^2 \eta}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times 2\xi \eta + IJ(1,2) \times \xi^2 \quad (86a)$$

$$\frac{\partial P_8}{\partial y} = IJ(2,1) \times \frac{\partial P_8}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial P_8}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \frac{\partial \xi^2 \eta}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial \xi^2 \eta}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times 2\xi \eta + IJ(2,2) \times \xi^2 \quad (86b)$$

Para $i = 9$ tem-se que $P_9 = \xi \eta^2$:

$$\frac{\partial P_9}{\partial x} = IJ(1,1) \times \frac{\partial P_9}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial P_9}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \frac{\partial \xi \eta^2}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial \xi \eta^2}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \eta^2 + IJ(1,2) \times 2\xi \eta \quad (87a)$$

$$\frac{\partial P_9}{\partial y} = IJ(2,1) \times \frac{\partial P_9}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial P_9}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \frac{\partial \xi \eta^2}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial \xi \eta^2}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \eta^2 + IJ(2,2) \times 2\xi \eta \quad (87b)$$

Para $i = 10$ tem-se que $P_{10} = \eta^3$:

$$\frac{\partial P_{10}}{\partial x} = IJ(1,1) \times \frac{\partial P_{10}}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial P_{10}}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \frac{\partial \eta^3}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial \eta^3}{\partial \eta} = IJ(1,2) \times 3\eta^2 \quad (88a)$$

$$\frac{\partial P_{10}}{\partial y} = IJ(2,1) \times \frac{\partial P_{10}}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial P_{10}}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \frac{\partial \eta^3}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial \eta^3}{\partial \eta} = IJ(2,2) \times 3\eta^2 \quad (88b)$$

Para $i = 11$ tem-se que $P_{11} = \xi^3 \eta$:

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial x} = IJ(1,1) \times \frac{\partial P_{11}}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial P_{11}}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \frac{\partial \xi^3 \eta}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial \xi^3 \eta}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times 3\xi^2 \eta + IJ(1,2) \times \xi^3 \quad (89a)$$

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial y} = IJ(2,1) \times \frac{\partial P_{11}}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial P_{11}}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \frac{\partial \xi^3 \eta}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial \xi^3 \eta}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times 3\xi^2 \eta + IJ(2,2) \times \xi^3 \quad (89b)$$

Para $i = 12$ tem-se que $P_{12} = \xi \eta^3$:

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial x} = IJ(1,1) \times \frac{\partial P_{12}}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial P_{12}}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \frac{\partial \xi \eta^3}{\partial \xi} + IJ(1,2) \times \frac{\partial \xi \eta^3}{\partial \eta} = IJ(1,1) \times \eta^3 + IJ(1,2) \times 3\xi \eta^2 \quad (90a)$$

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial y} = IJ(2,1) \times \frac{\partial P_{12}}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial P_{12}}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \frac{\partial \xi \eta^3}{\partial \xi} + IJ(2,2) \times \frac{\partial \xi \eta^3}{\partial \eta} = IJ(2,1) \times \eta^3 + IJ(2,2) \times 3\xi \eta^2 \quad (90b)$$

Para simplificar, a matriz $[C]$ da Eq. (51) pode ser escrita como

$$[C] = \begin{bmatrix} [C]_{n \times 1}^T & [C]_{n \times 2}^T & [C]_{n \times 3}^T & [C]_{n \times 4}^T \end{bmatrix} \quad (91)$$

As sub-matrizes $[C]_{n \times i}^T$ para $i = 1, 2, 3, 4$ podem ser avaliadas para formar a matriz $[C]$

da Eq. (91) fazendo

$$[C]_{nó i}^T = \begin{bmatrix} (P_1)_{nó i} & \left(\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)_{nó i} & -\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)_{nó i} \\ (P_2)_{nó i} & \left(\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)_{nó i} & -\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)_{nó i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (P_{12})_{nó i} & \left(\frac{\partial P_{12}}{\partial y}\right)_{nó i} & -\left(\frac{\partial P_{12}}{\partial x}\right)_{nó i} \end{bmatrix} \quad (92)$$

Usando a Eq. (66) e também as Eqs. (79) a (90), a Eq. (92) é escrita como

$$[C]_{nó i}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \xi & IJ(2,1) & -IJ(1,1) \\ \eta & IJ(2,2) & -IJ(1,2) \\ \xi^2 & 2IJ(2,1)\xi & -2IJ(1,1)\xi \\ \xi\eta & IJ(2,1)\eta + IJ(2,2)\xi & -IJ(1,1)\eta - IJ(1,2)\xi \\ \eta^2 & 2IJ(2,2)\eta & -2IJ(1,2)\eta \\ \xi^3 & 3IJ(2,1)\xi^2 & -3IJ(1,1)\xi^2 \\ \xi^2\eta & 2IJ(2,1)\xi\eta + IJ(2,2)\xi^2 & -2IJ(1,1)\xi\eta - IJ(1,2)\xi^2 \\ \xi\eta^2 & IJ(2,1)\eta^2 + 2IJ(2,2)\xi\eta & -IJ(1,1)\eta^2 - 2IJ(1,2)\xi\eta \\ \eta^3 & 3IJ(2,2)\eta^2 & -3IJ(1,2)\eta^2 \\ \xi^3\eta & 3IJ(2,1)\xi^2\eta + IJ(2,2)\xi^3 & -3IJ(1,1)\xi^2\eta - IJ(1,2)\xi^3 \\ \xi\eta^3 & IJ(2,1)\eta^3 + 3IJ(2,2)\xi\eta^2 & -IJ(1,1)\eta^3 - 3IJ(1,2)\xi\eta^2 \end{bmatrix}_{nó i} \quad (93)$$

Vale salientar que a Eq. (93) é avaliada nos pontos nodais do elemento no sistema local de coordenadas naturais conforme mostra a Figura 4(b).

Inserindo a Eq. (52) na Eq. (26a), tem-se que:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{el.} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}_{el.} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 [P][C]^{-1} \{d\}_{el.}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 [P][C]^{-1} \{d\}_{el.}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 [P][C]^{-1} \{d\}_{el.}}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (94a)$$

ou simplesmente

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{el.} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}_{el.} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 [P][C]^{-1}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 [P][C]^{-1}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 [P][C]^{-1}}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \{d\}_{el.} \quad (94b)$$

Comparando a Eq. (26b) com a Eq. (94b), a matriz $[B]$ é uma função de ξ e η , determinada por:

$$[B] = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 [P][C]^{-1}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 [P][C]^{-1}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 [P][C]^{-1}}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (95)$$

Como a matriz $[C]$ é uma constante para cada elemento, então

$$[B] = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2[P]}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2[P]}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2[P]}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} [C]^{-1} \quad (96)$$

ou seja,

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} & \dots & -\frac{\partial^2 P_{12}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} & \dots & -\frac{\partial^2 P_{12}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial y} & \dots & 2\frac{\partial^2 P_{12}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [C]^{-1} \quad (97)$$

Denotando por $[\bar{N}]$ como sendo a matriz formada pelas funções de interpolação das variáveis físicas do elemento, a matriz $[B]$ pode ser avaliada comparando a Eq. (59) com a Eq. (96), resultando em:

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \bar{N}_1}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 \bar{N}_2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 \bar{N}_3}{\partial x^2} & \dots & -\frac{\partial^2 \bar{N}_{12}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \bar{N}_1}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 \bar{N}_2}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 \bar{N}_3}{\partial y^2} & \dots & -\frac{\partial^2 \bar{N}_{12}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 \bar{N}_1}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 \bar{N}_2}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 \bar{N}_3}{\partial x \partial y} & \dots & 2\frac{\partial^2 \bar{N}_{12}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (98)$$

A Eq. (97) pode ser escrita como

$$[B] = [Q][C]^{-1} \quad (99)$$

sendo que

$$[Q] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} & \dots & -\frac{\partial^2 P_{12}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} & \dots & -\frac{\partial^2 P_{12}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial y} & \dots & 2\frac{\partial^2 P_{12}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (100)$$

A matriz de rigidez do elemento é calculada por

$$[K]_{el.} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [D][B(\xi, \eta)] \det [J] d\xi d\eta \quad (101)$$

Usando a Eq. (99), a Eq. (101) pode ser escrita como

$$[K]_{el.} = [[C]^{-1}]^T \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Q(\xi, \eta)]^T [D][Q(\xi, \eta)] \det [J] d\xi d\eta \right) [C]^{-1} \quad (102)$$

A matriz $[D]$ é

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (103)$$

A matriz $[J]$ na Eq. (101) é a mesma dada na Eq. (77b).

Para determinar a matriz $[Q]$ da Eq. (100) é preciso avaliar as derivadas de segunda ordem da matriz $[P]$ com relação às coordenadas globais x e y .

As Eqs. (67) são:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \xi} = \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (104a)$$

e

$$\frac{\partial P_i}{\partial \eta} = \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (104b)$$

As derivadas de segunda ordem da função P_i com relação às coordenadas globais x e y , ou seja, $\frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y}$ são determinadas utilizando as Eqs. (104), fazendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \\ & \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = \\ & \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

∴

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \quad (105)$$

Também,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = \\ & \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = \\ & \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

∴

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \quad (106)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = \\ &= \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned}$$

∴

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \quad (107)$$

As Eqs. (105) a (107) podem ser reescritas como

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi^2} - \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) = \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \quad (108)$$

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) = \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \quad (109)$$

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi \partial \eta} - \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (110)$$

As Eqs. (108), (109) e (110) podem ser colocadas na forma matricial como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi^2} - \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi \partial \eta} - \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \right) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \quad (111)$$

Chamando de $[J]_{\text{variáveis}} = [\bar{J}]$ como a matriz quadrada da Eq.(111), vem que:

$$[\bar{J}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \end{bmatrix} \quad (112)$$

Os elementos da matriz $[\bar{J}]$ da Eq. (112) são avaliados usando as Eqs. (73).

Da Eq. (111) tem-se que

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [\bar{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi^2} - \left(\frac{\partial P_i}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial P_i}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right) \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial P_i}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial P_i}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}\right) \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi \partial \eta} - \left(\frac{\partial P_i}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial P_i}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi}\right) \end{Bmatrix} \quad (113)$$

As derivadas de primeira ordem de P_i com relação a x e y que aparecem na Eq. (113) são determinadas usando as Eqs. (79) a (90). Faltam, agora, determinar as derivadas de segunda ordem das funções x e y que definem a geometria do elemento com relação às coordenadas ξ e η .

Tem-se das Eqs (73) que:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \quad (114a)$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \quad (114b)$$

As derivadas de segunda ordem de x e y com relação a ξ e η são

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 N_1}{\partial \xi^2} x_1 + \frac{\partial^2 N_2}{\partial \xi^2} x_2 + \frac{\partial^2 N_2}{\partial \xi^2} x_3 + \frac{\partial^2 N_2}{\partial \xi^2} x_4 \quad (115a)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 N_1}{\partial \xi^2} y_1 + \frac{\partial^2 N_2}{\partial \xi^2} y_2 + \frac{\partial^2 N_2}{\partial \xi^2} y_3 + \frac{\partial^2 N_2}{\partial \xi^2} y_4 \quad (115b)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 N_1}{\partial \eta^2} x_1 + \frac{\partial^2 N_2}{\partial \eta^2} x_2 + \frac{\partial^2 N_2}{\partial \eta^2} x_3 + \frac{\partial^2 N_2}{\partial \eta^2} x_4 \quad (115c)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 N_1}{\partial \eta^2} y_1 + \frac{\partial^2 N_2}{\partial \eta^2} y_2 + \frac{\partial^2 N_2}{\partial \eta^2} y_3 + \frac{\partial^2 N_2}{\partial \eta^2} y_4 \quad (115d)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_4 \right) \quad (115e)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_4 \right) \quad (115f)$$

Usando as Eqs. (76), as Eqs. (115) resultam em

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = (0) x_1 + (0) x_2 + (0) x_3 + (0) x_4 = 0 \quad (116a)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = (0) y_1 + (0) y_2 + (0) y_3 + (0) y_4 = 0 \quad (116b)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = (0) x_1 + (0) x_2 + (0) x_3 + (0) x_4 = 0 \quad (116c)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = (0) y_1 + (0) y_2 + (0) y_3 + (0) y_4 = 0 \quad (116d)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \eta} = \frac{1}{4} x_1 - \frac{1}{4} x_2 + \frac{1}{4} x_3 - \frac{1}{4} x_4 \quad (116e)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \eta} = \frac{1}{4} y_1 - \frac{1}{4} y_2 + \frac{1}{4} y_3 - \frac{1}{4} y_4 \quad (116f)$$

Então, a Eq. (118) se transforma em

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [I\bar{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi^2} - 0 \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial \eta^2} - 0 \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi \partial \eta} - \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}{4} \right) - \left(\frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{y_1 - y_2 + y_3 - y_4}{4} \right) \end{Bmatrix} \quad (117)$$

Na Eq. (117), as derivadas $\frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 P_i}{\partial \eta^2}$ e $\frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi \partial \eta}$ são obtidas usando a Eq. (66) e as derivadas $\frac{\partial P_i}{\partial x}$ e $\frac{\partial P_i}{\partial y}$ são determinadas pelas Eqs. (78).

3.2- MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO PROPOSTO

A matriz de massa do elemento de placa fina dada pela Eq. (70) passa, agora, a ser expressa por

$$[M]_e = t [C]^{-1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho [P]^T [P] \det[J] d\xi d\eta [C]^{-1} \quad (118)$$

sendo que $[C]$, $[P]$ e $[J]$ são as mesmas matrizes dadas pelas Eqs. (91), (66) e (69), respectivamente, onde t é a espessura constante da placa.

Capítulo 4

VALIDAÇÃO DO ELEMENTO PROPOSTO E COMENTÁRIOS

Esse capítulo trata-se da validação do elemento quadrilateral de placa fina desenvolvido, implementado no Método dos Elementos Finitos para a análise de vibrações livres de placas finas. Para tal, foram comparados os desvios percentuais dos resultados obtidos através do MEF com os encontrados em Leissa (1969) com diferentes geometrias e diferentes condições de contorno das placas. Os valores dos desvios percentuais foram obtidos através da seguinte equação:

$$Desvio = \left(\frac{\omega_{MEF} - \omega_{Leissa}}{\omega_{Leissa}} \right) \times 100 \quad (119)$$

onde:

ω_{MEF} = frequência angular calculada pelo método dos elementos finitos;

ω_{Leissa} = frequência angular obtida analiticamente disponível na literatura;

Os gráficos mostram o comportamento das oito primeiras frequências naturais de uma placa anelar de diâmetro externo 1,2 m, diâmetro interno 0,36 m e espessura 0,0032 m (aproximadamente 1/8") de aço SAE 1020 (massa específica 7850 kg/m³, módulo de elasticidade 210 GPa e coeficiente de Poisson 0,333333), com as condições de contorno de engastada na borda externa e livre na borda central, conforme Figura 5.

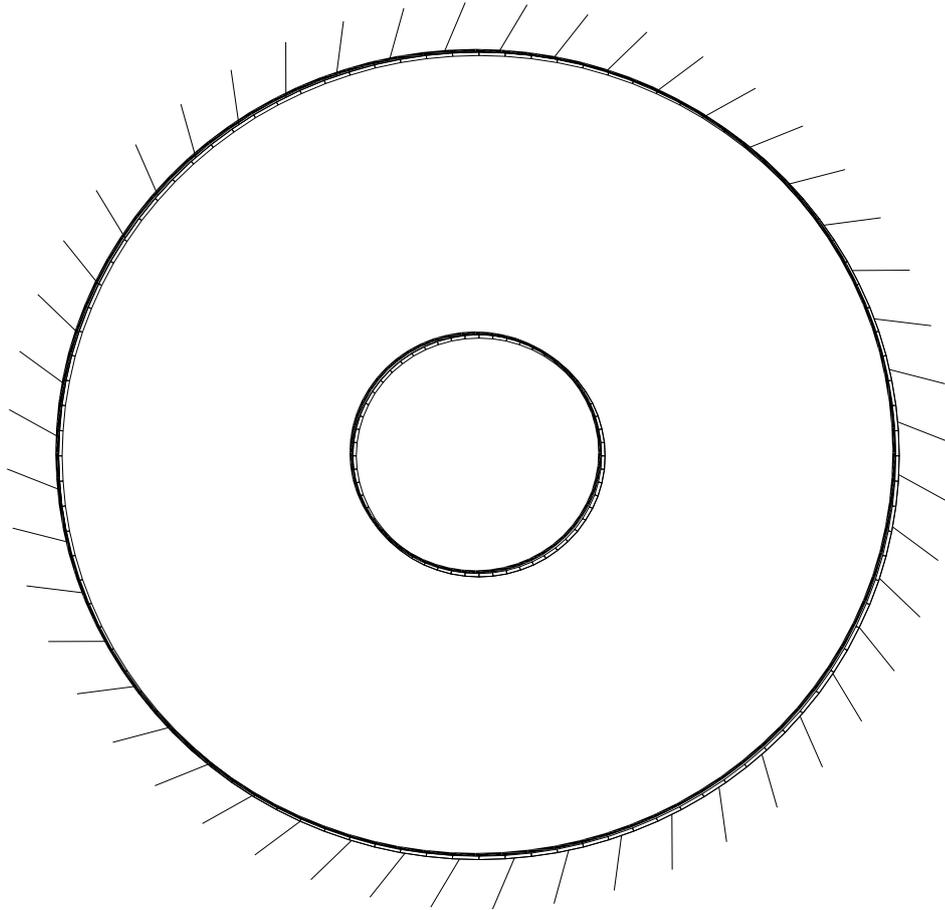


Figura 5- Placa anelar engastada na borda externa e livre no centro

Os gráficos das frequências naturais (gráfico 1 ao gráfico 8) mostram claramente que todas apresentam o mesmo comportamento. Com o aumento do número de elementos finitos as curvas tendem para um valor, mostrando convergência. No caso de placas circulares com furo central (anelar) foram usados, no máximo, 64 elementos que já foi o suficiente para mostrar a tendência da curva para um determinado valor. A tabela 1 apresenta os valores das frequências naturais analíticas disponíveis na literatura Leissa (1969).

O gráfico dos desvios percentuais das frequências (gráfico 9), quando comparadas com dados disponíveis na literatura, mostra que os desvios das seis primeiras frequências se aproximam de zero quando se aumenta o número de elementos finitos. Porém, para frequências maiores, no caso para a sétima e a oitava, os desvios percentuais foram maiores mostrando a necessidade de aumentar a quantidade de elementos.

O desvio percentual dos seis primeiros modos de vibração (gráfico 10) se aproxima de zero quando se aumenta a quantidade de elementos. Para um melhor resultado nos modos de frequências mais altos, por exemplo, sétimo e oitavo modos, seriam necessários mais elementos.

Tabela 1- Frequências naturais analíticas para placa anelar (engastada na borda e livre no centro)

Condição de contorno			Engastada na borda/ livre no centro				
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$	$\omega_7(\text{rad/s})$	$\omega_8(\text{rad/s})$
160,48	274,50	457,50	691,18	727,78	841,80	1112,08	1858,15

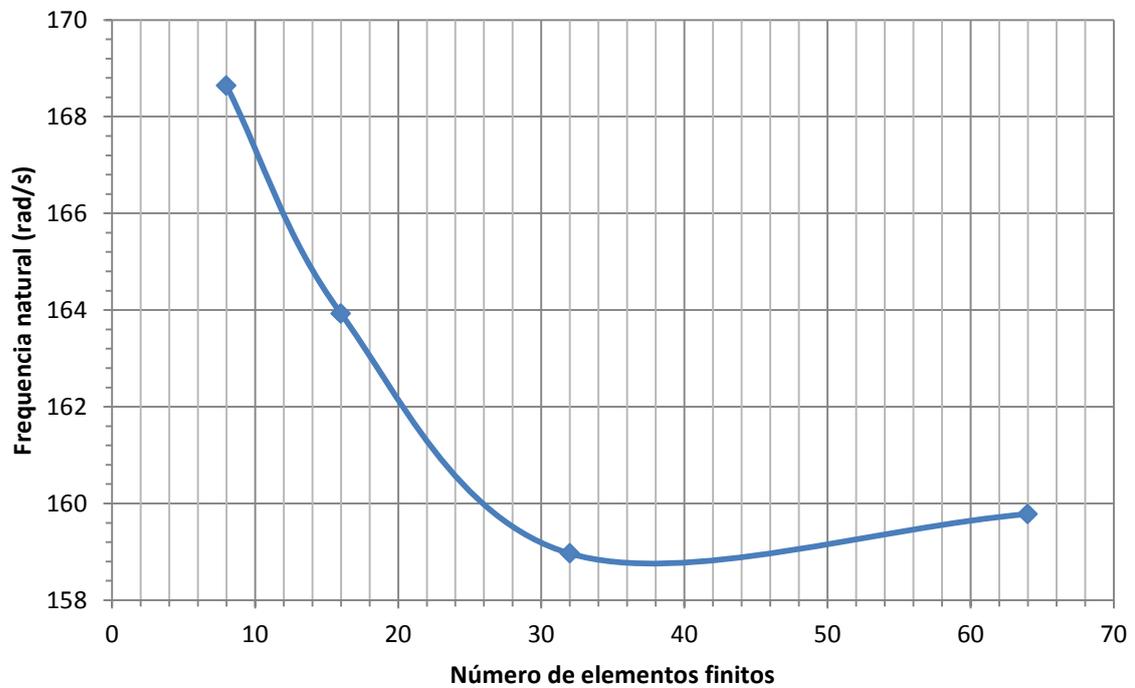


Gráfico 1- Primeira frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro)

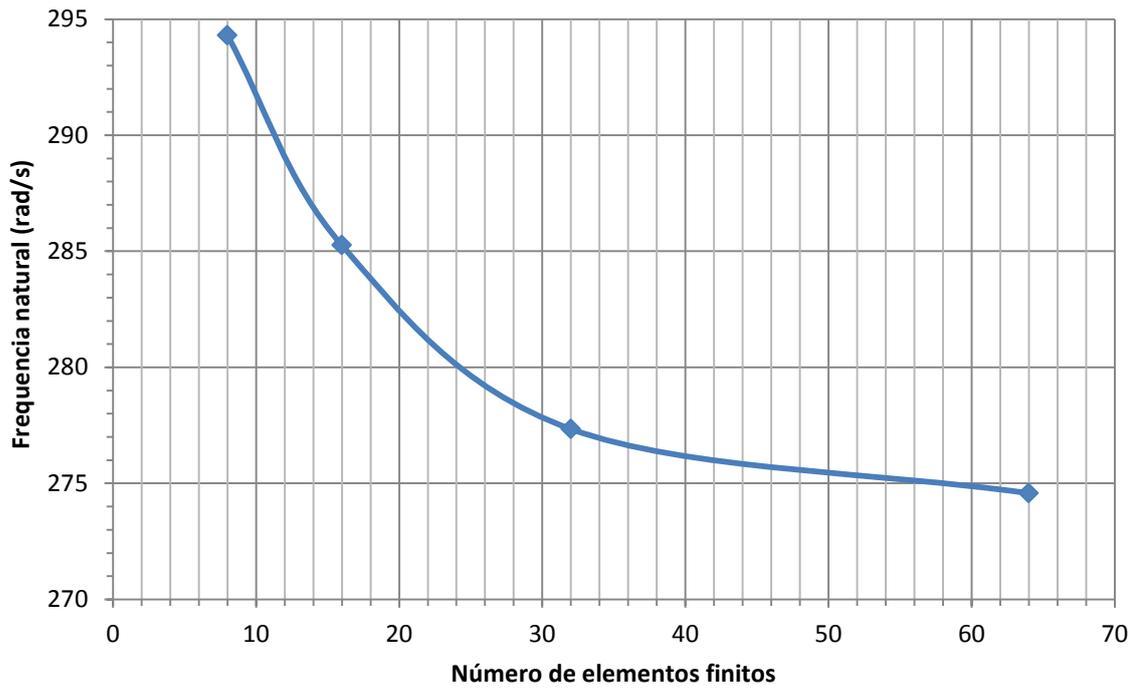


Gráfico 2- Segunda frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro)

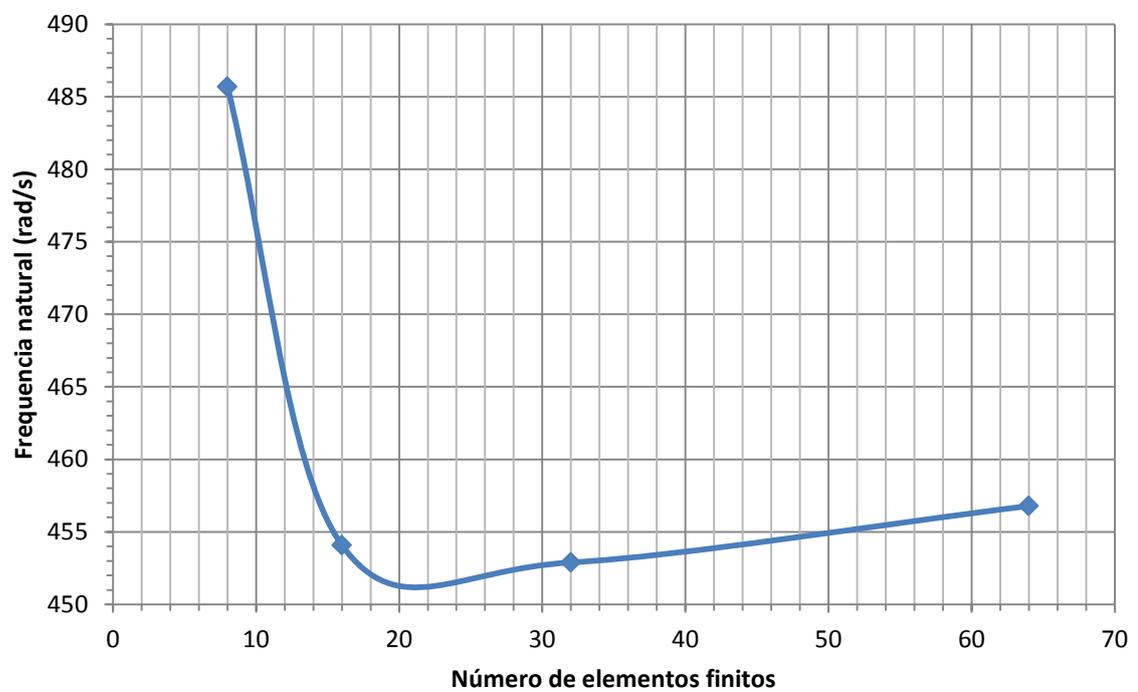


Gráfico 3- Terceira frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro)

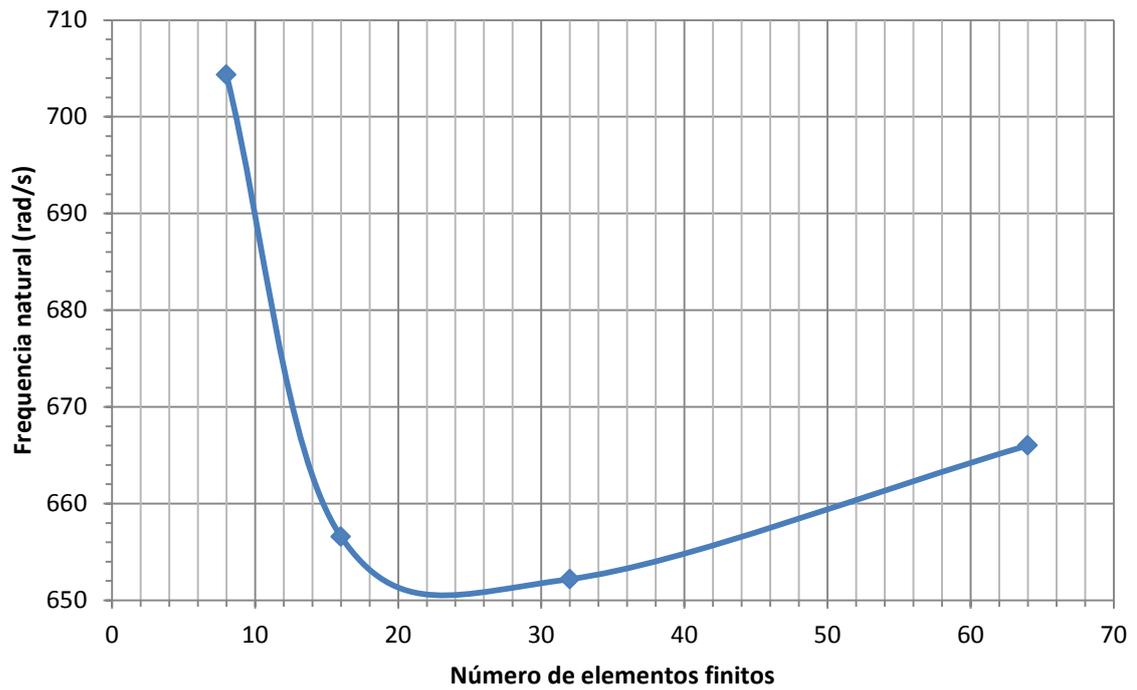


Gráfico 4- Quarta frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro)

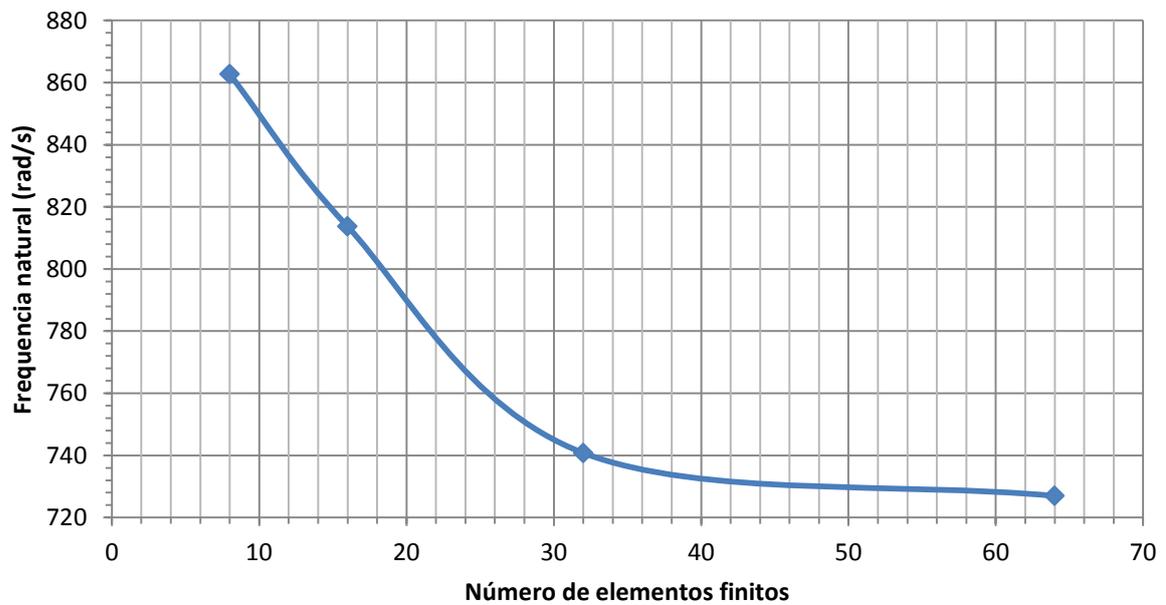


Gráfico 5- Quinta frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro)

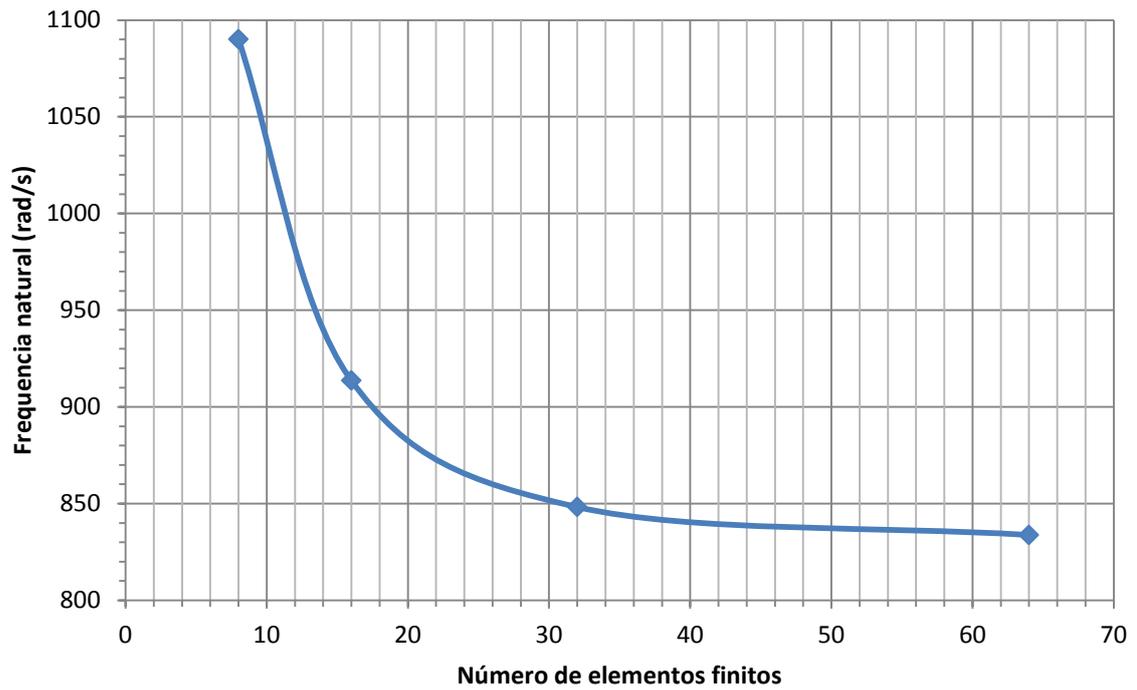


Gráfico 6- Sexta frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro)

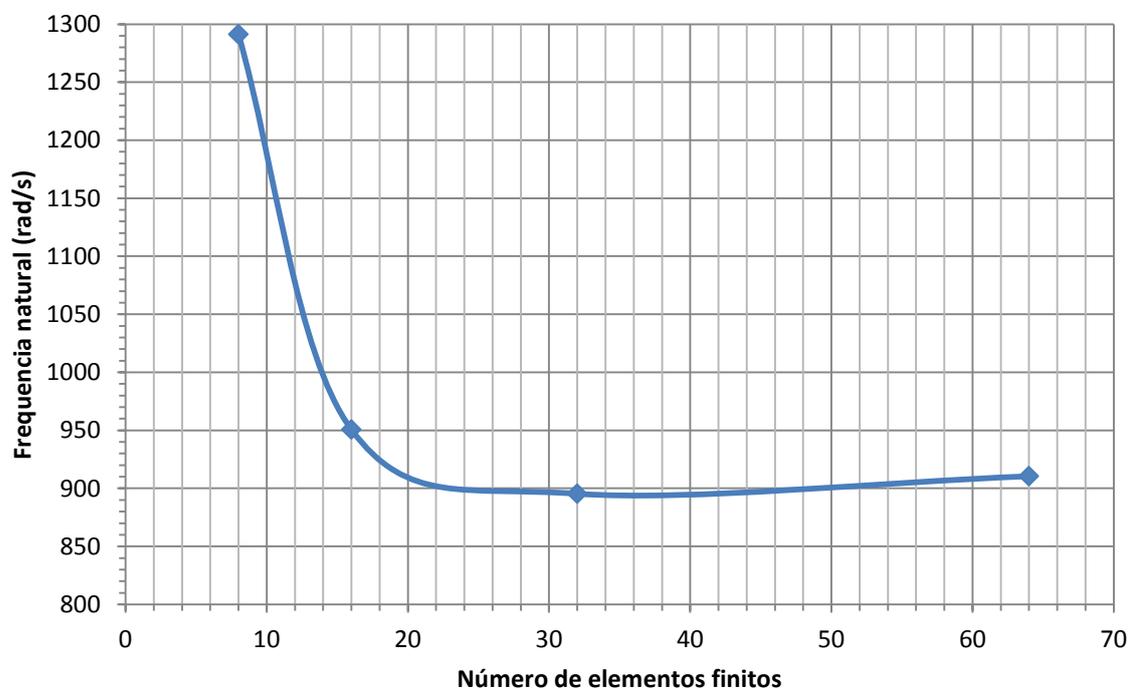


Gráfico 7- Sétima frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro)

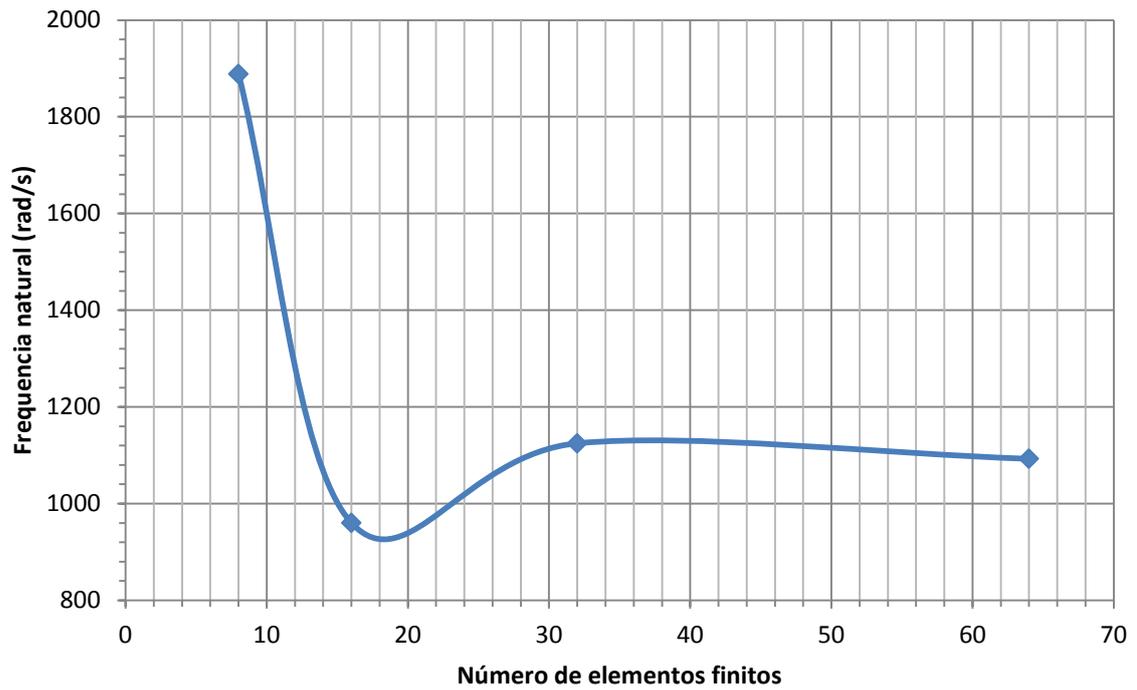


Gráfico 8- Oitava frequência natural de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro)

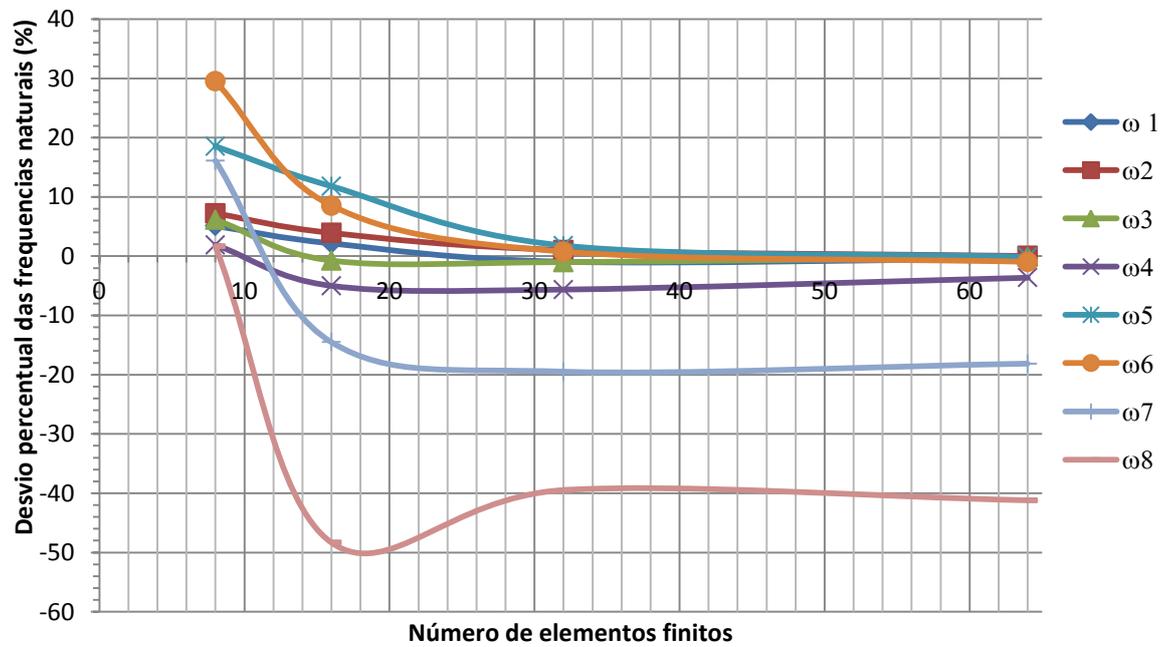


Gráfico 9- Desvio percentual das oito primeiras frequências naturais de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro)

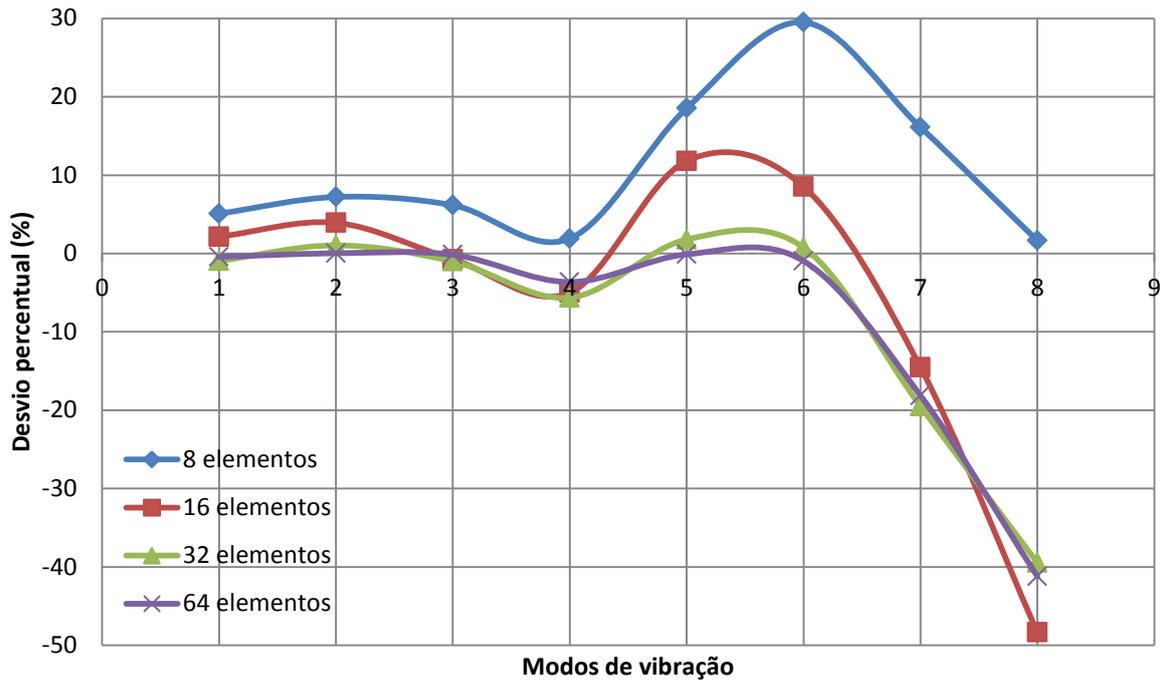


Gráfico 10- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa anelar (engastada na borda e livre no centro)

Para essa condição de contorno, com auxílio do *software* Matlab®, foram traçadas as superfícies da placa deformada para os quatro primeiros módulos de vibração livre, utilizando 64 elementos finitos quadrilaterais.

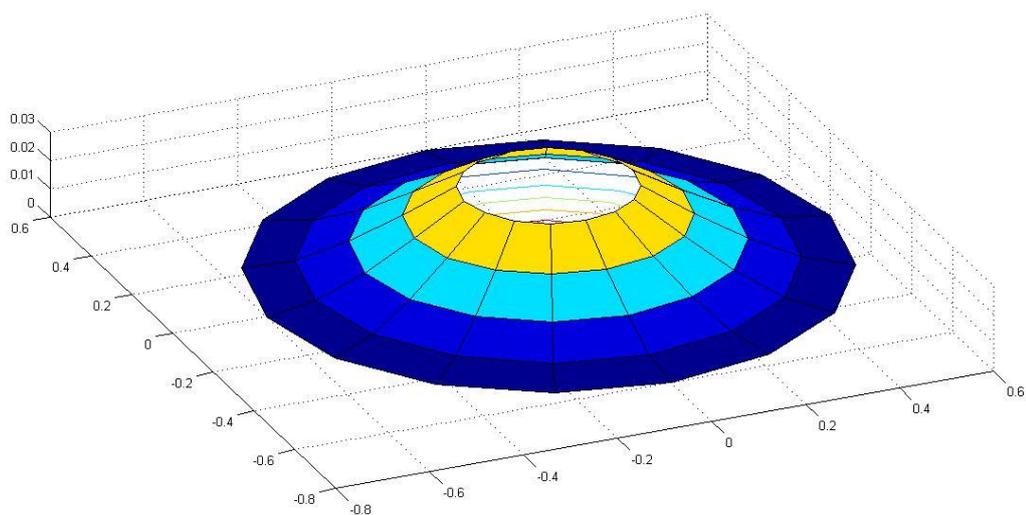


Figura 6- Primeiro modo de vibração (placa anelar engastada/ livre)

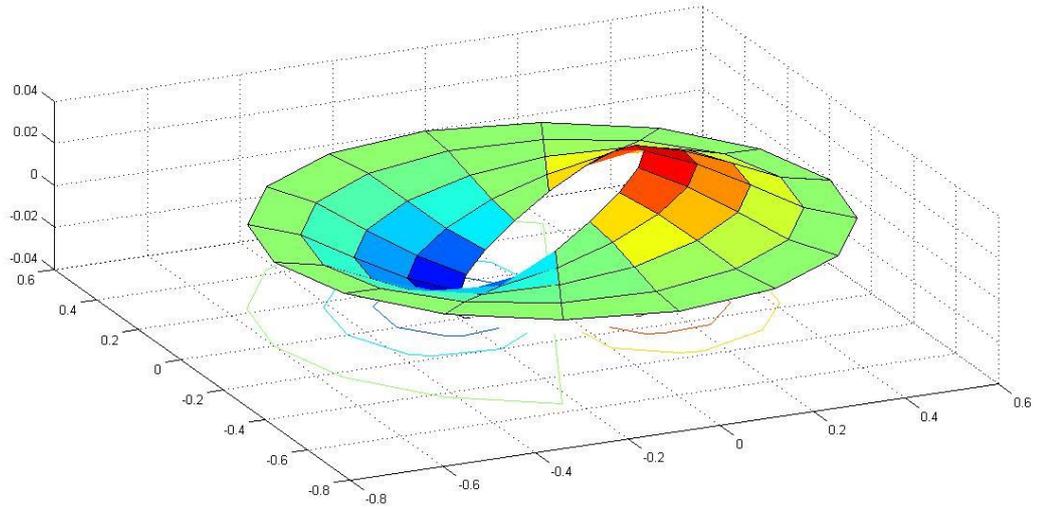


Figura 7- Segundo modo de vibração (placa anelar engastada/ livre)

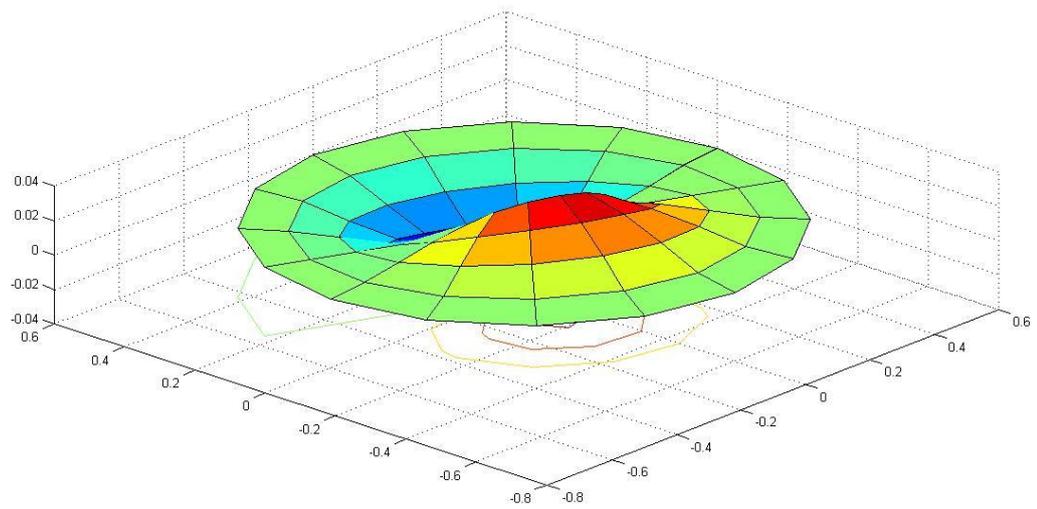


Figura 8- Terceiro modo de vibração (placa anelar engastada/ livre)

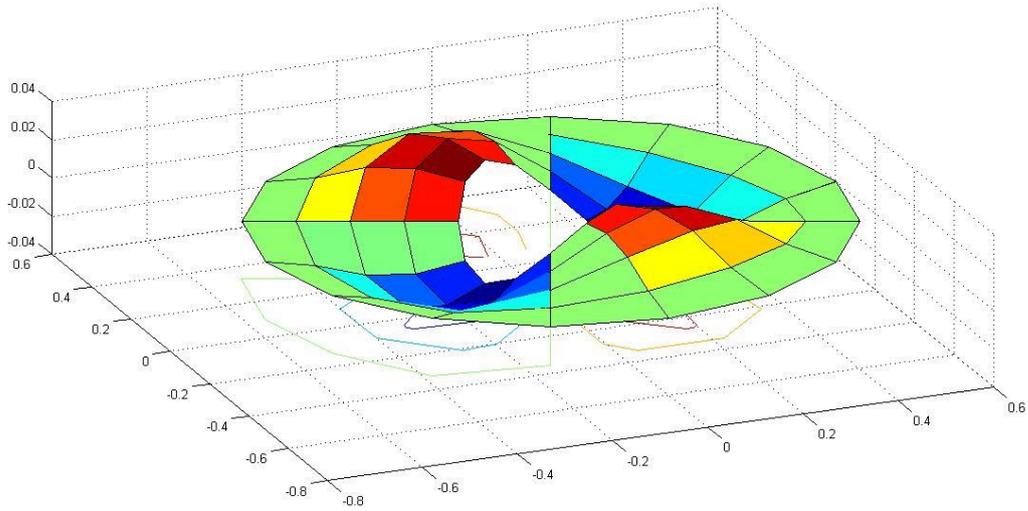


Figura 9- Quarto modo de vibração (placa anelar engastada/ livre)

Os gráficos seguintes apresentam o comportamento das oito primeiras frequências naturais da mesma placa apresentada anteriormente, porém com as condições de contorno de simplesmente apoiada na borda externa e engastada na borda central, conforme Figura 10.

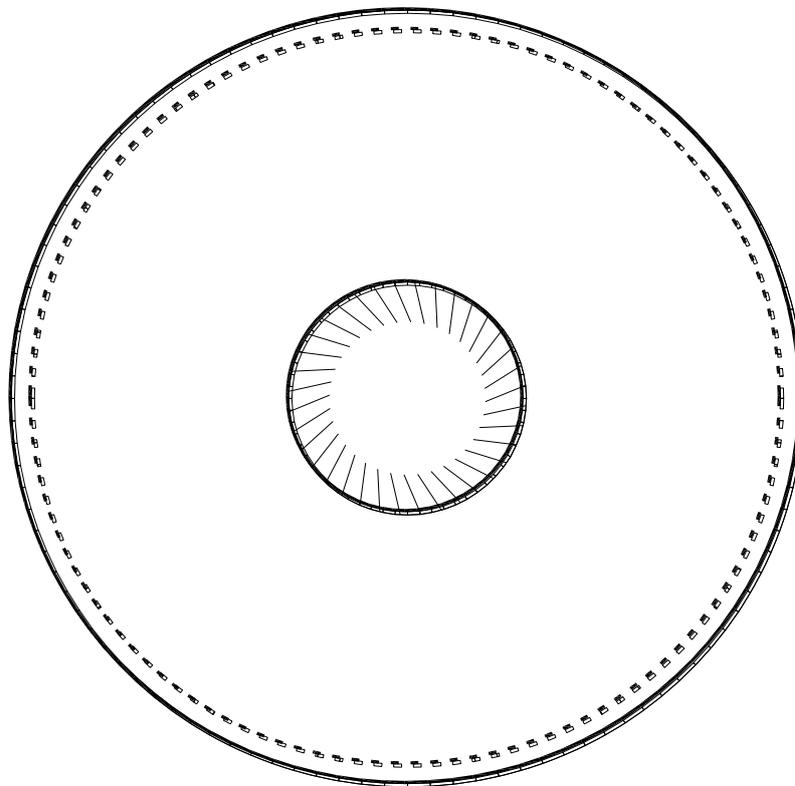


Figura 10- Placa anelar simplesmente apoiada na borda externa e engastada no centro

As frequências mostradas nos gráficos de 11 a 18 apresentam um comportamento semelhante com o aumento da quantidade de elementos finitos. As curvas se aproximam de um valor, assim como no caso anterior. Os valores das frequências naturais analíticas disponíveis na literatura Leissa (1969) são mostrados na tabela 2.

Os desvios percentuais das quatro primeiras frequências naturais em relação aos dados encontrados na literatura (gráfico 19) se aproximam de zero quando se aumenta o número de elementos finitos. Para as frequências naturais maiores, torna-se necessário aumentar a quantidade de elementos. Observa-se que para a quinta, sexta e sétima frequências, os comportamentos são parecidos, apesar de apresentarem desvios maiores. Já a oitava frequência evidenciou um comportamento diferente, mostrando necessidade de uma quantidade bem superior de elementos do que a utilizada.

O gráfico 20 mostra que o desvio percentual das quatro primeiras frequências se aproxima de zero quando se aumenta a quantidade de elementos finitos.

Tabela 2- Frequências naturais analíticas para placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)

Condição de contorno			Simplesmente apoiada na borda/ engastada no centro				
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$	$\omega_7(\text{rad/s})$	$\omega_8(\text{rad/s})$
420,90	442,02	509,58	639,09	1407,69	1435,85	1534,39	1689,23

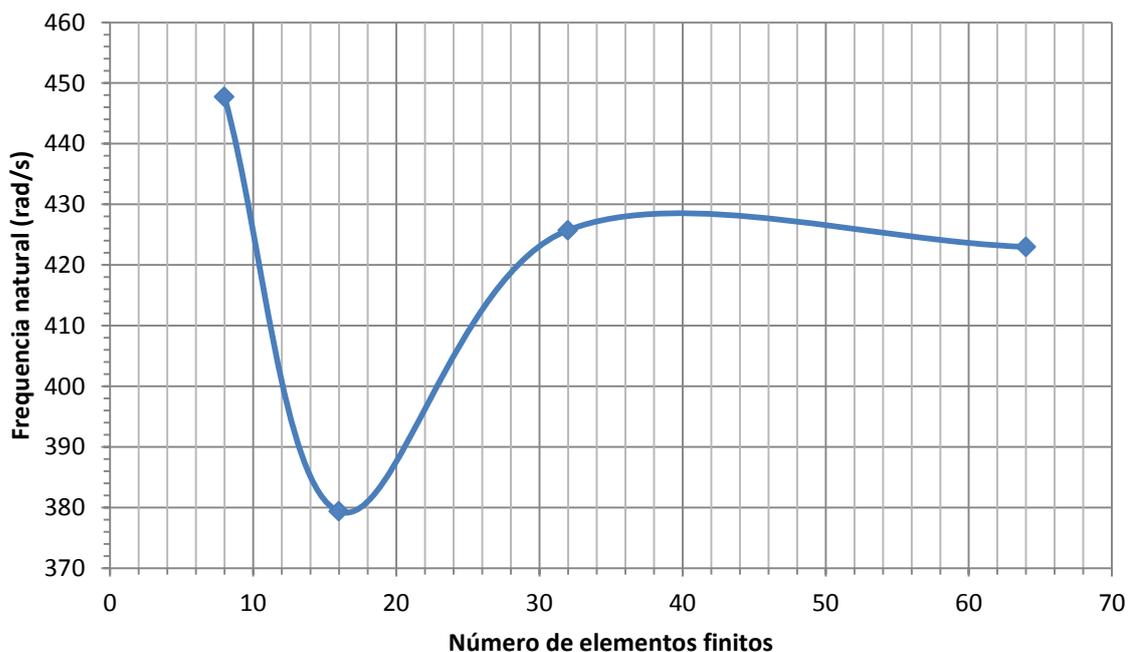


Gráfico 11- Primeira frequência natural de uma placa anelar(simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)



Gráfico 12- Segunda frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)

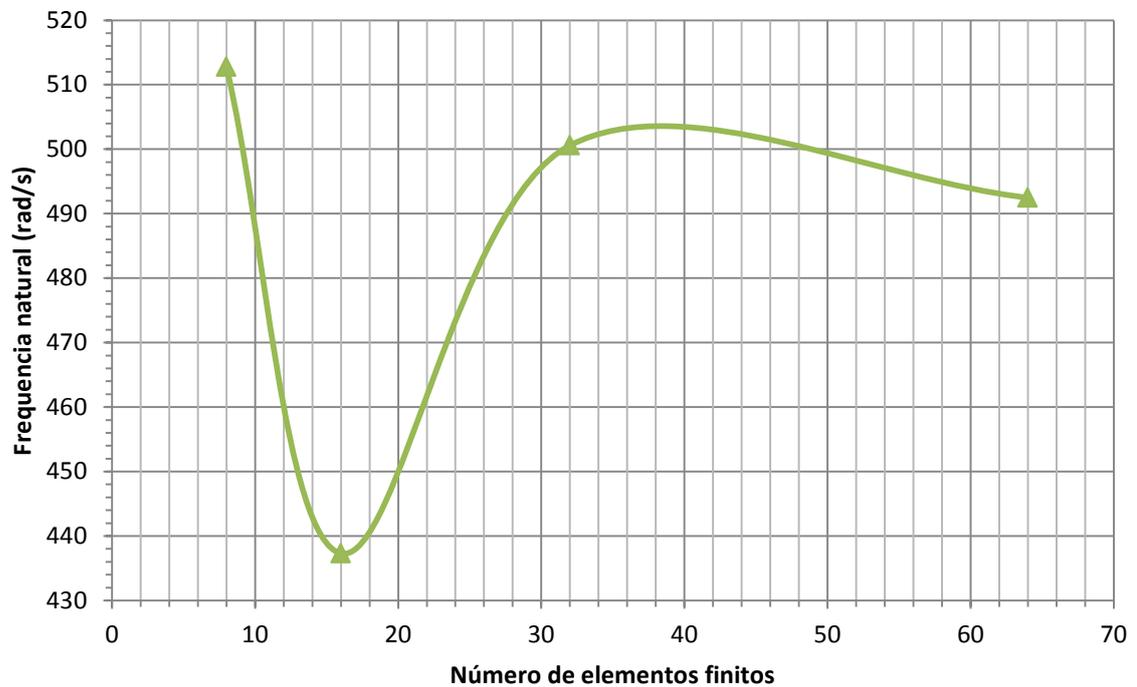


Gráfico 13- Terceira frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)

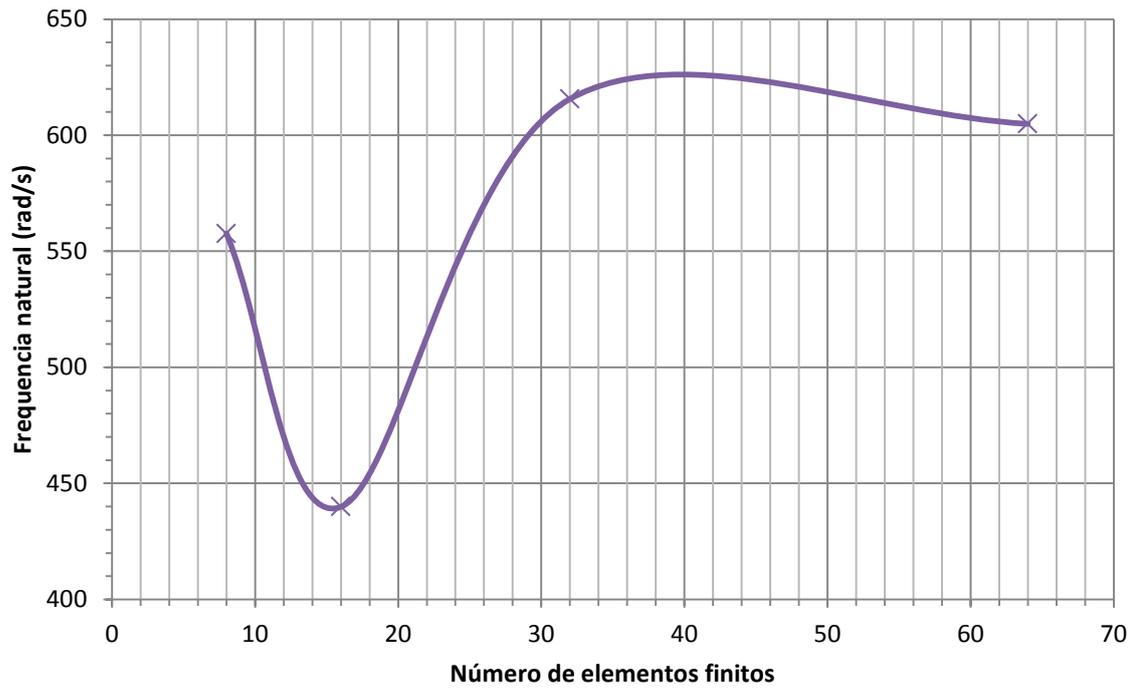


Gráfico 14- Quarta frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)

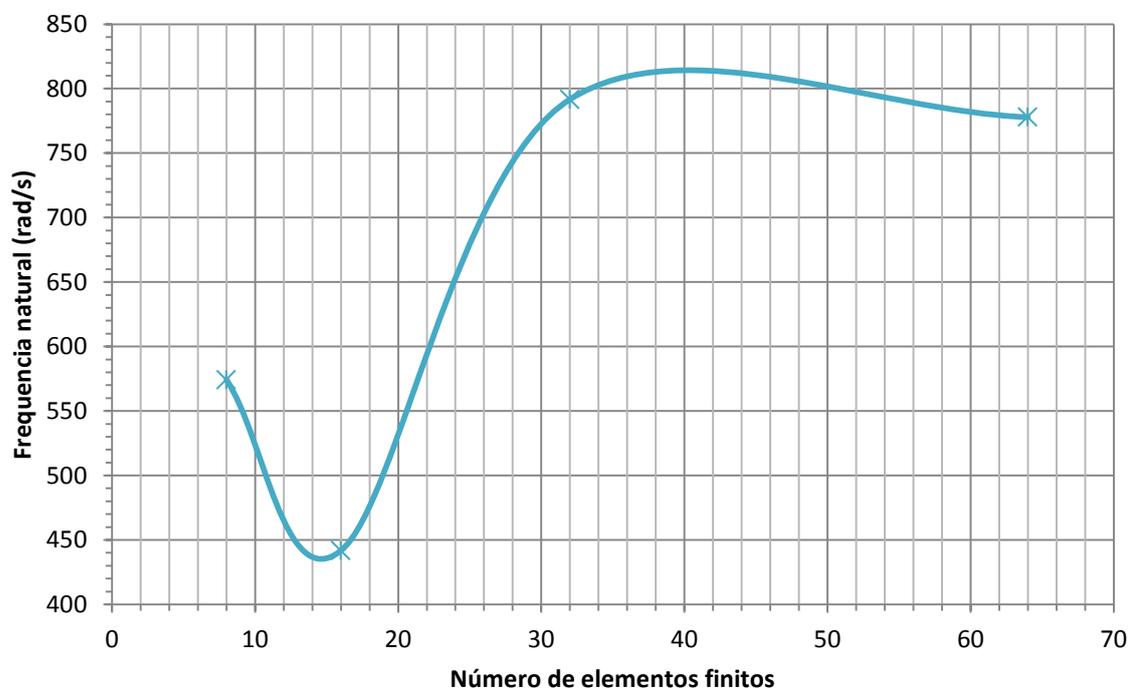


Gráfico 15- Quinta frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)

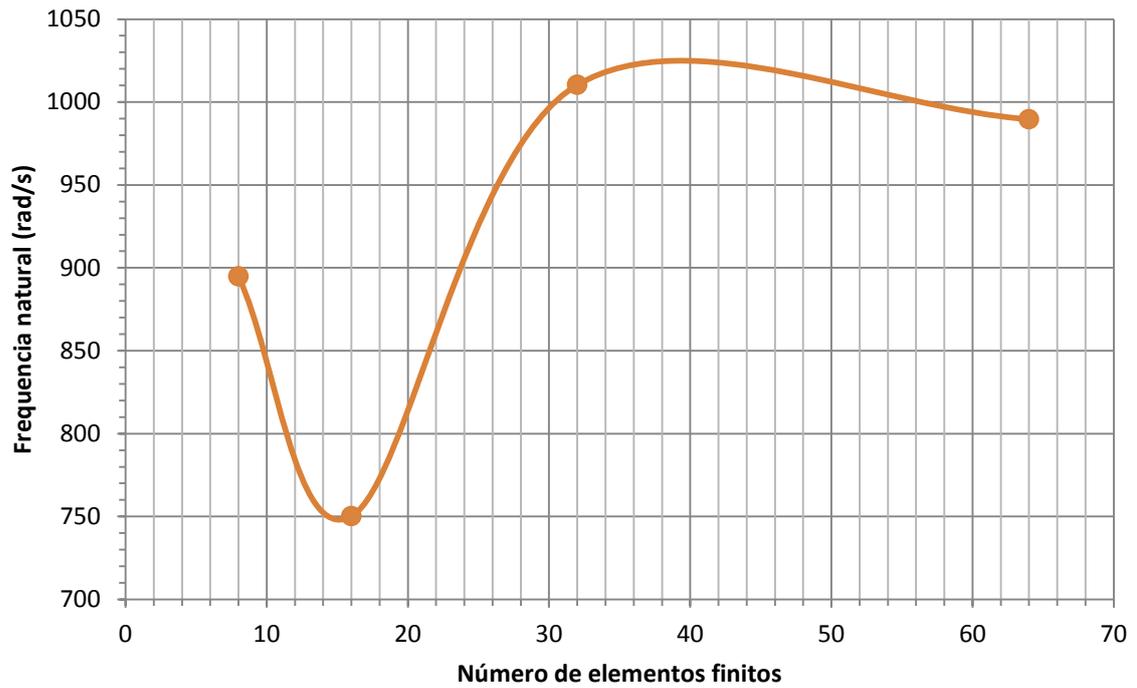


Gráfico 16- Sexta frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)

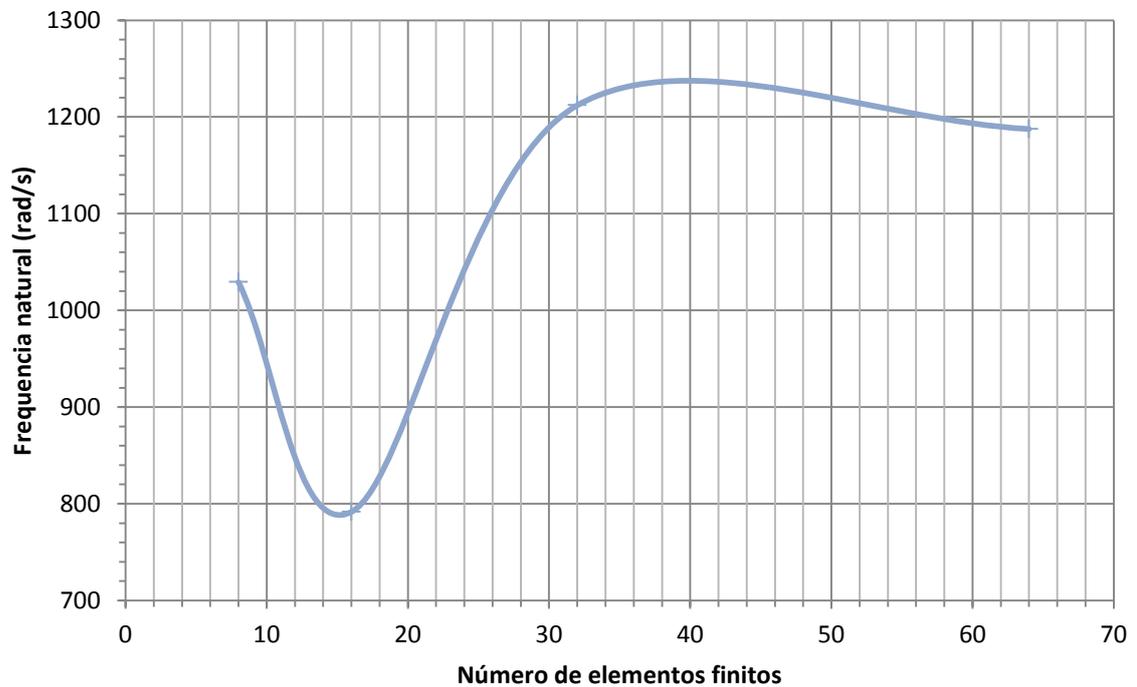


Gráfico 17- Sétima frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)

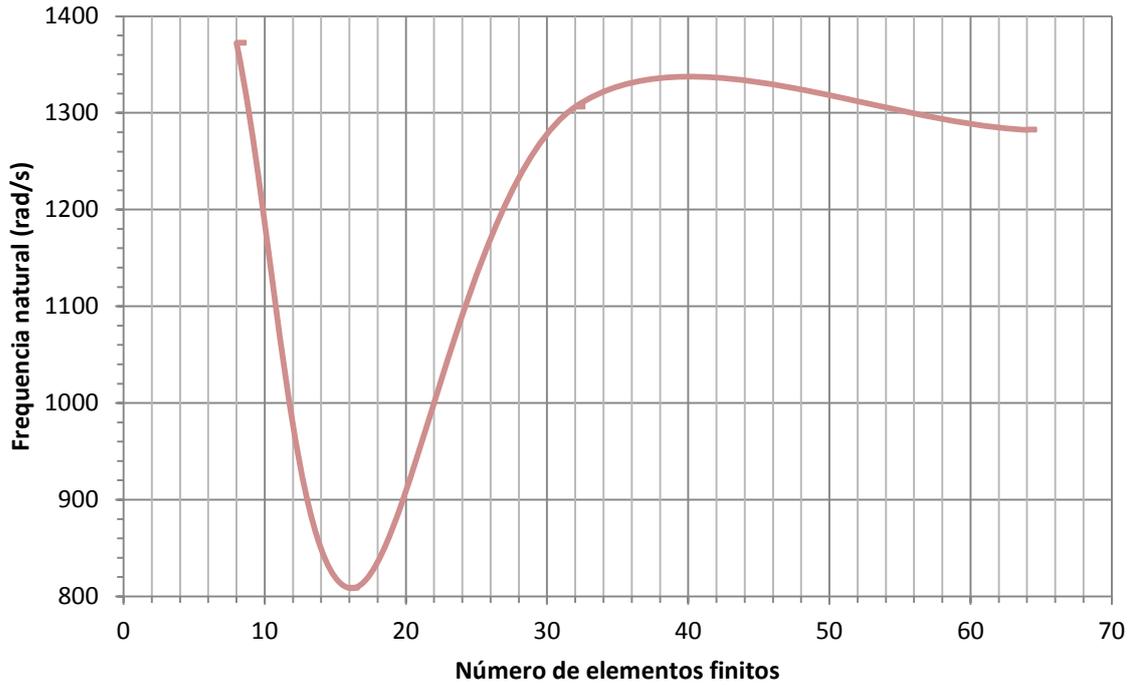


Gráfico 18- Oitava frequência natural de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)

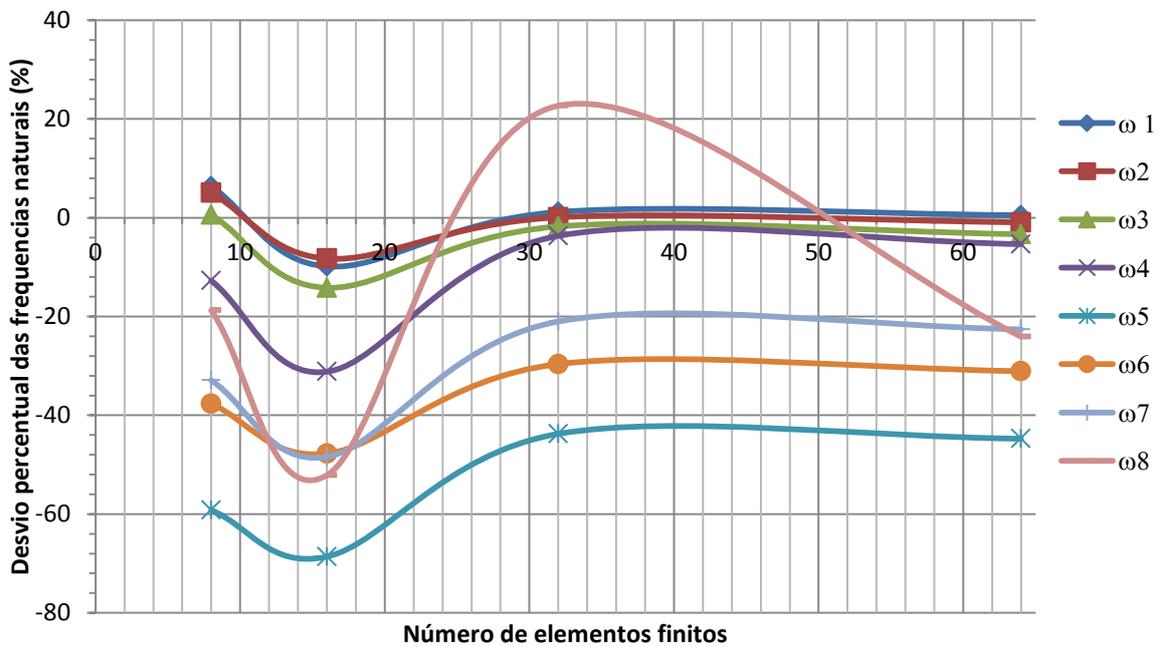


Gráfico 19- Desvio percentual das oito primeiras frequências naturais de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)

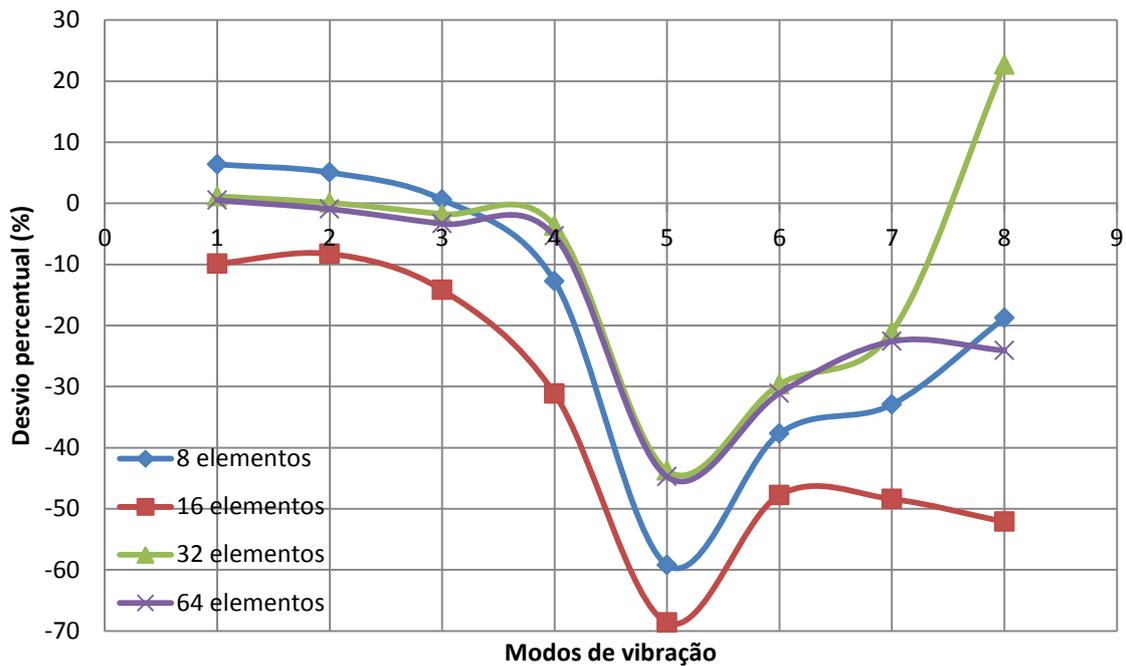


Gráfico 20- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa anelar (simplesmente apoiada na borda e engastada e no centro)

Os gráficos mostrados abaixo se referem às seis primeiras frequências naturais de uma placa quadrada de 0,8 m de lado e espessura 0,0032m (aproximadamente 1/8") de aço SAE 1020 (massa específica 7850 kg/m³, módulo de elasticidade 210 GPa e coeficiente de Poisson 0,333333), (Figura 11) com as condições de contorno de simplesmente apoiada/engastada/simplesmente apoiada/engastada.

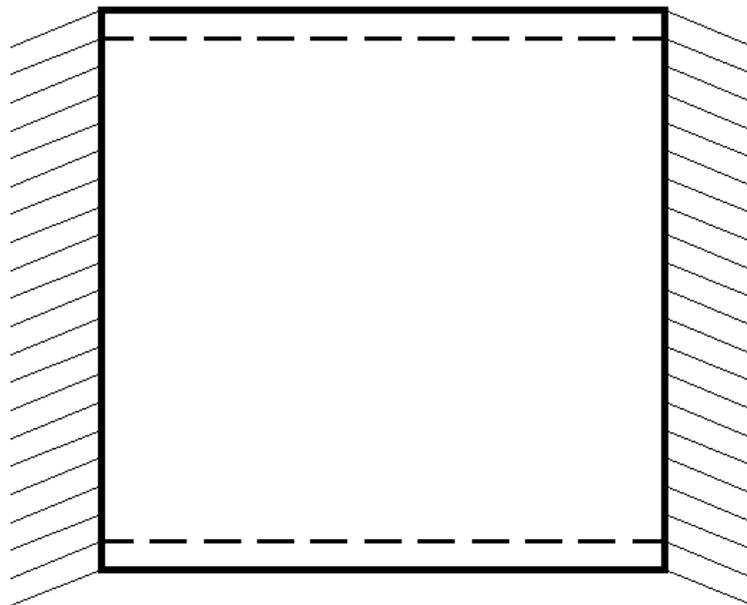


Figura 11- Placa quadrada simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ engastada

Os gráficos de 21 a 26 mostram que as seis primeiras frequências naturais de uma placa quadrada apresentam uma tendência a se convergir para um valor quando se aumenta a quantidade de elementos finitos. Nesse caso foram usados, no máximo, 484 elementos. Assim os erros percentuais quando comparados com valores da literatura ficaram menores que 1% (gráfico 27). Os valores das frequências naturais analíticas disponíveis na literatura Leissa (1969) são vistos na tabela 3.

O desvio percentual dos seis primeiros modos de vibração (gráfico 28) ficou menor que 0,5% com essa quantidade de elementos. Pode-se notar também que quando se comparam esses resultados com os obtidos para placa circular, tem-se uma precisão melhor no cálculo de frequências maiores. Isso se deve a geometria regular da placa e principalmente no aumento do número de elementos finitos utilizados.

Tabela 3- Frequências naturais analíticas para quadrada (simplesmente apoiada/engastada/ simplesmente apoiada/ engastada)

Condição de contorno		simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ engastada			
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$
226,53	428,41	542,49	740,20	799,91	1010,21

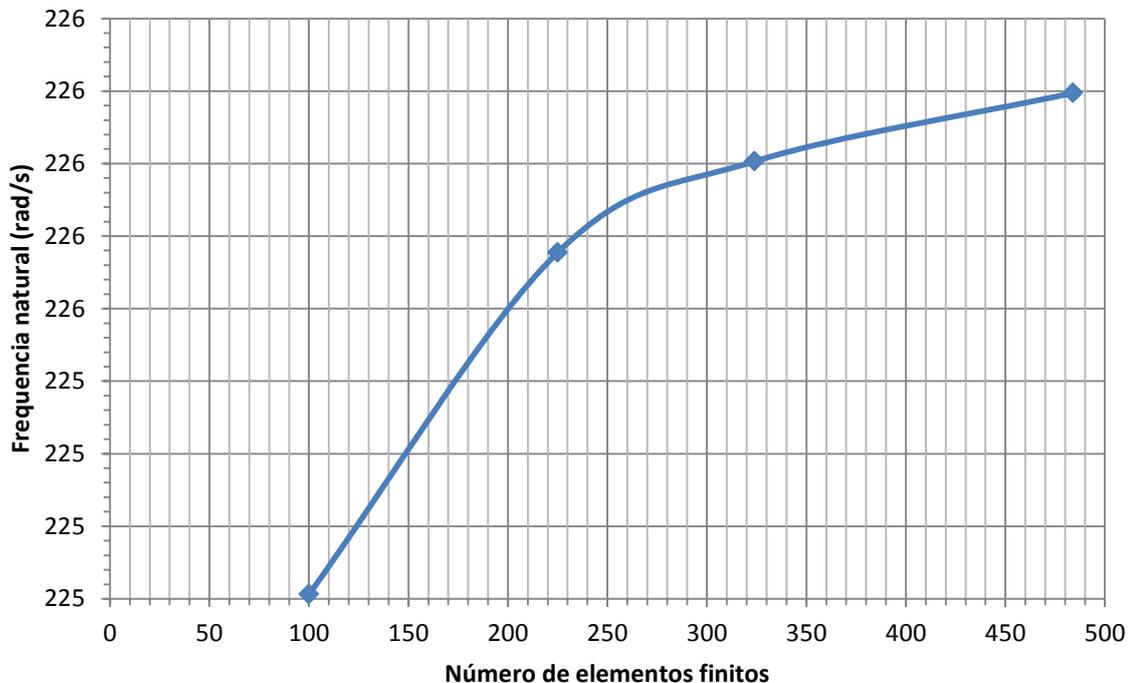


Gráfico 21- Primeira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/engastada/ simplesmente apoiada/ engastada)

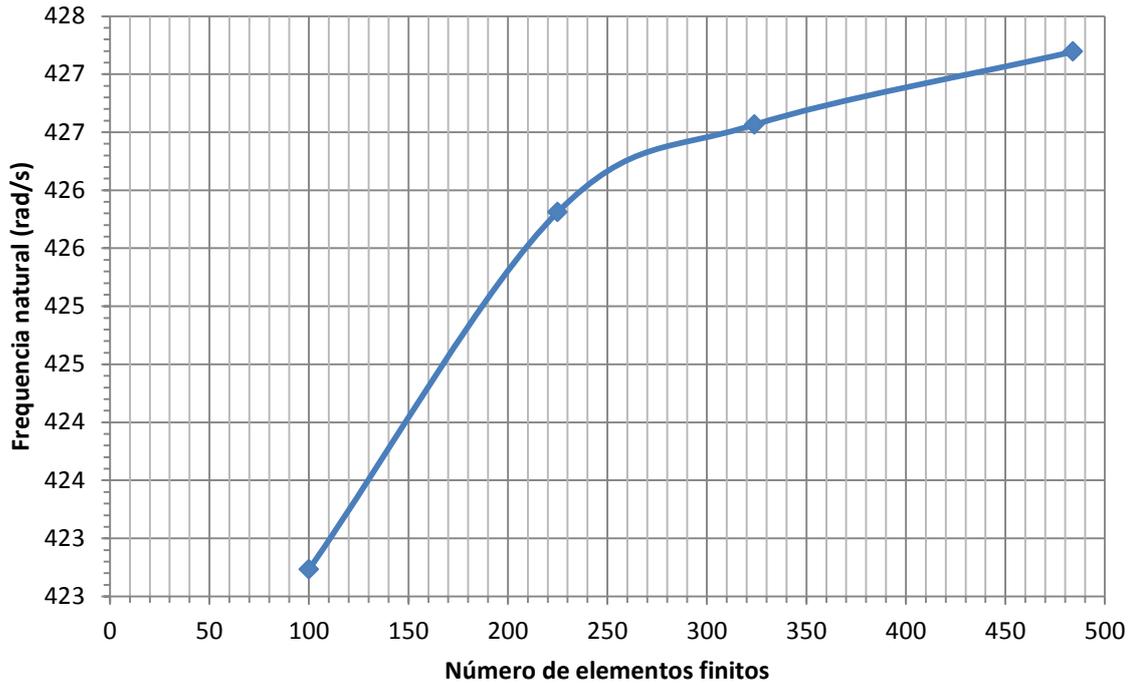


Gráfico 22- Segunda frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada)

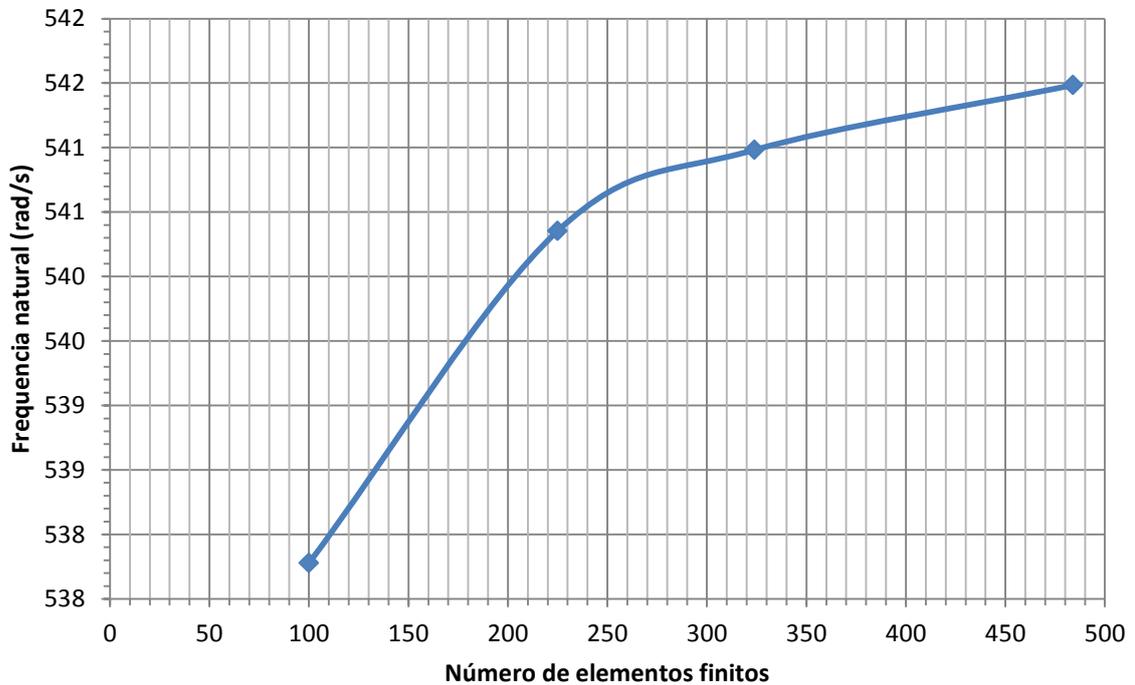


Gráfico 23- Terceira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada)

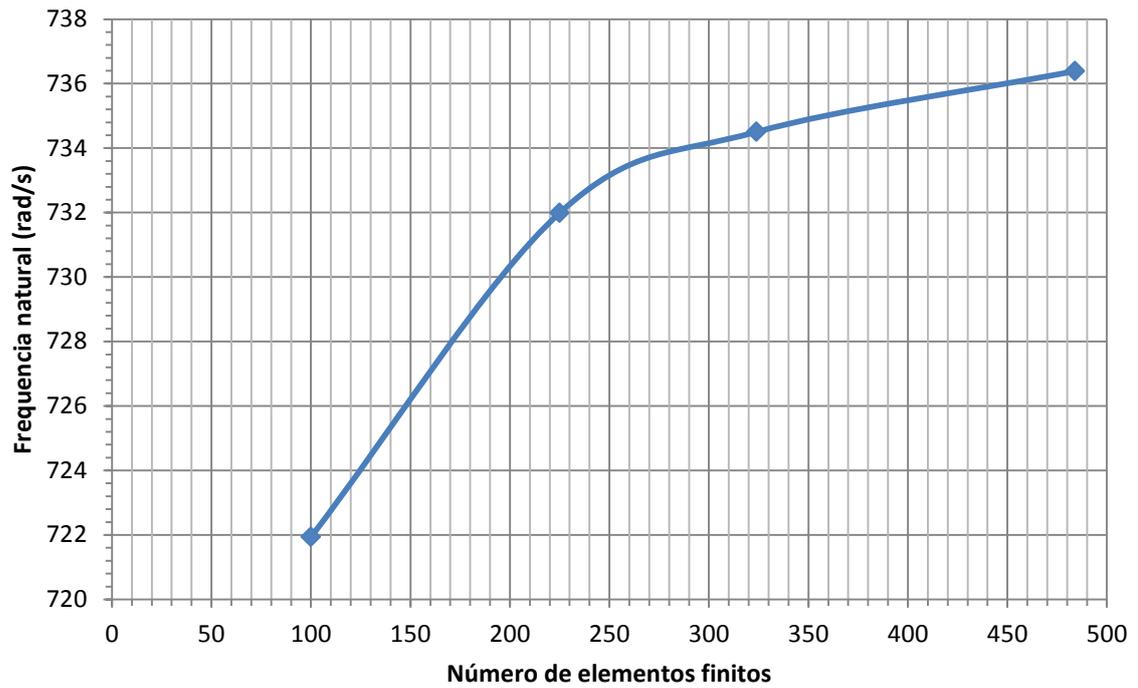


Gráfico 24- Quarta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada)

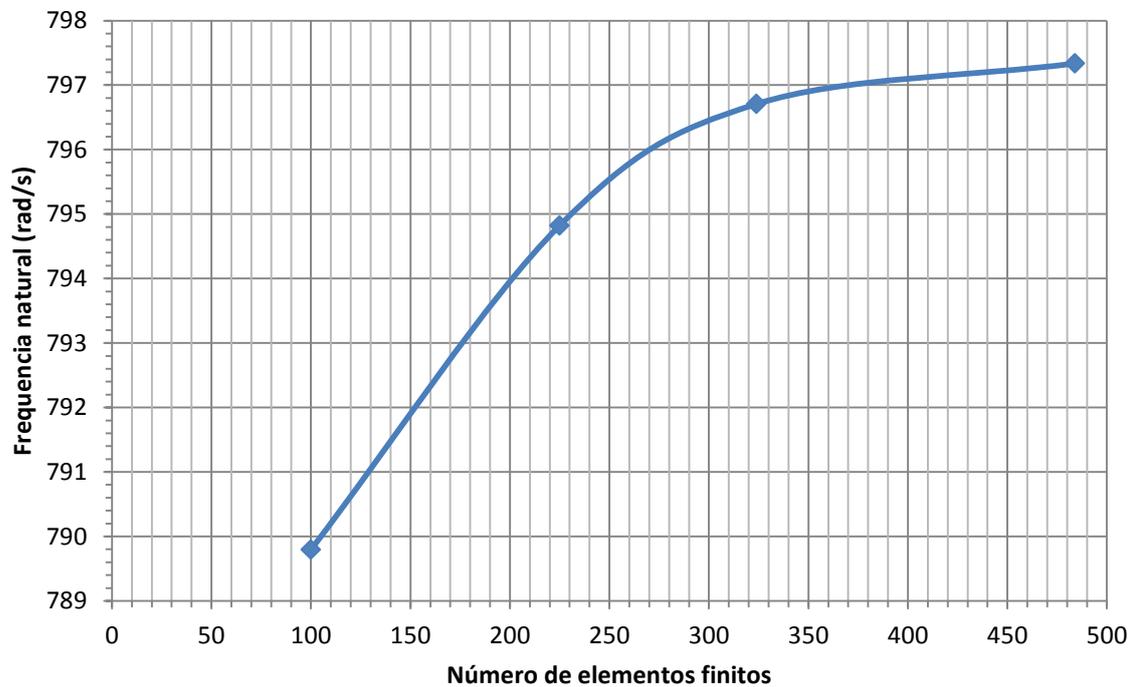


Gráfico 25- Quinta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada)

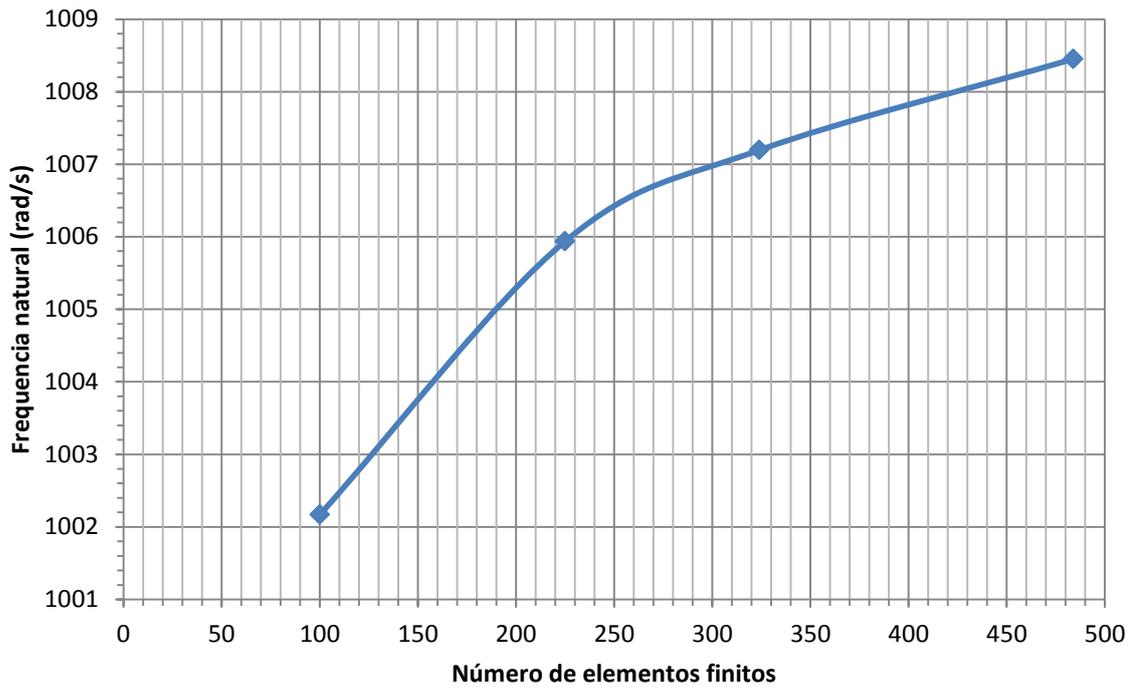


Gráfico 26- Sexta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada)

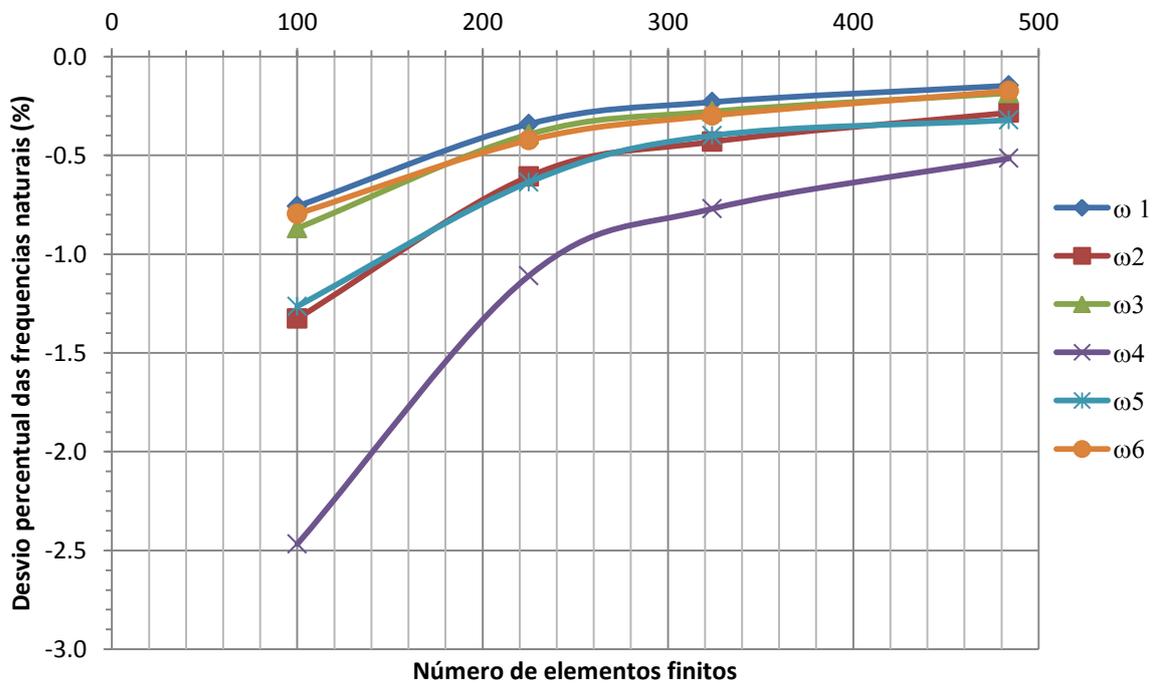


Gráfico 27- Desvio percentual das seis primeiras frequências naturais de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada)

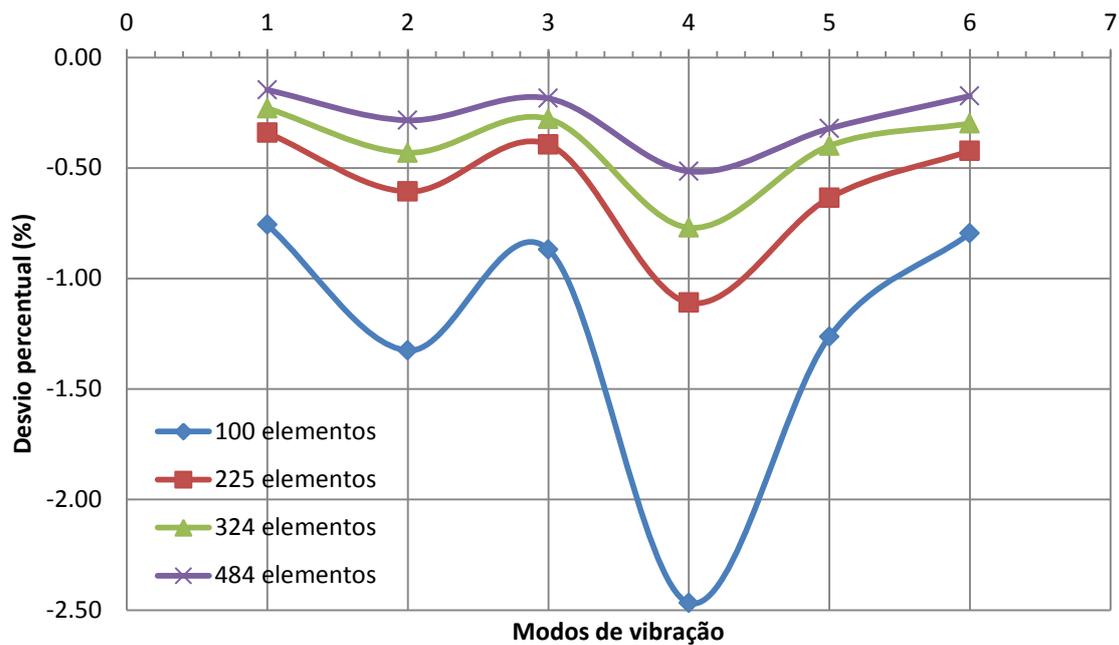


Gráfico 28- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ engastada)

Para a placa acima nessa condição de contorno, usando o software Matlab®, foram geradas superfícies da placa deformada para os quatro primeiros módulos de vibração livre, utilizando 484 elementos finitos quadrilaterais.

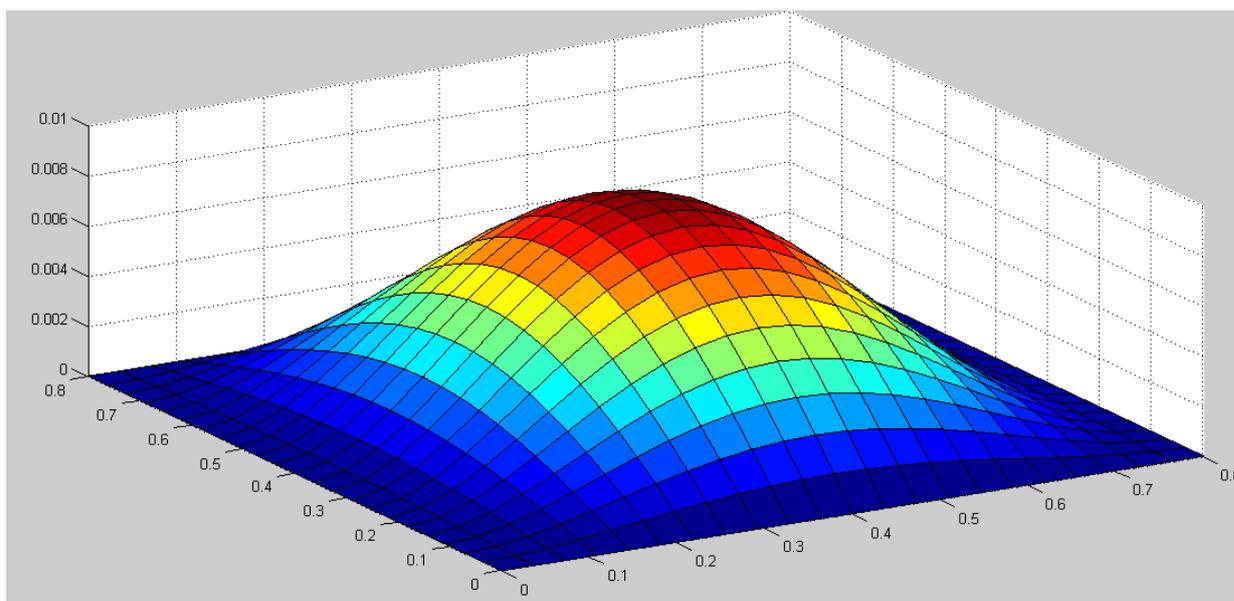


Figura 12- Primeiro modo de vibração (placa quadrada apoiada/ engastada/ apoiada/ engastada)

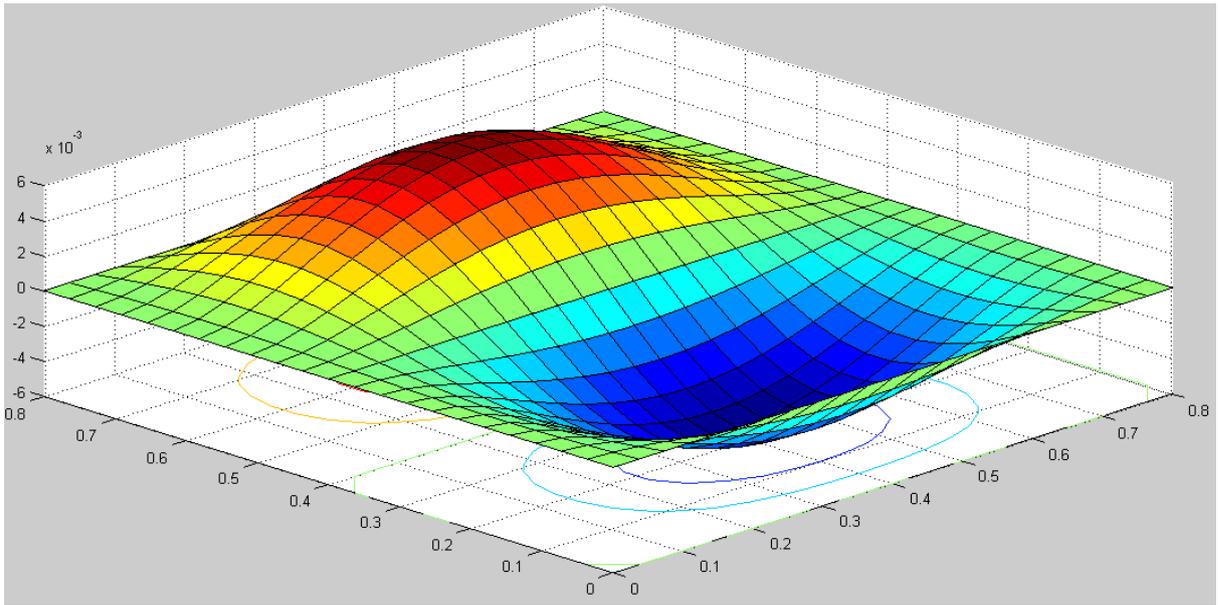


Figura 13- Segundo modo de vibração (placa quadrada apoiada/ engastada/ apoiada/ engastada)

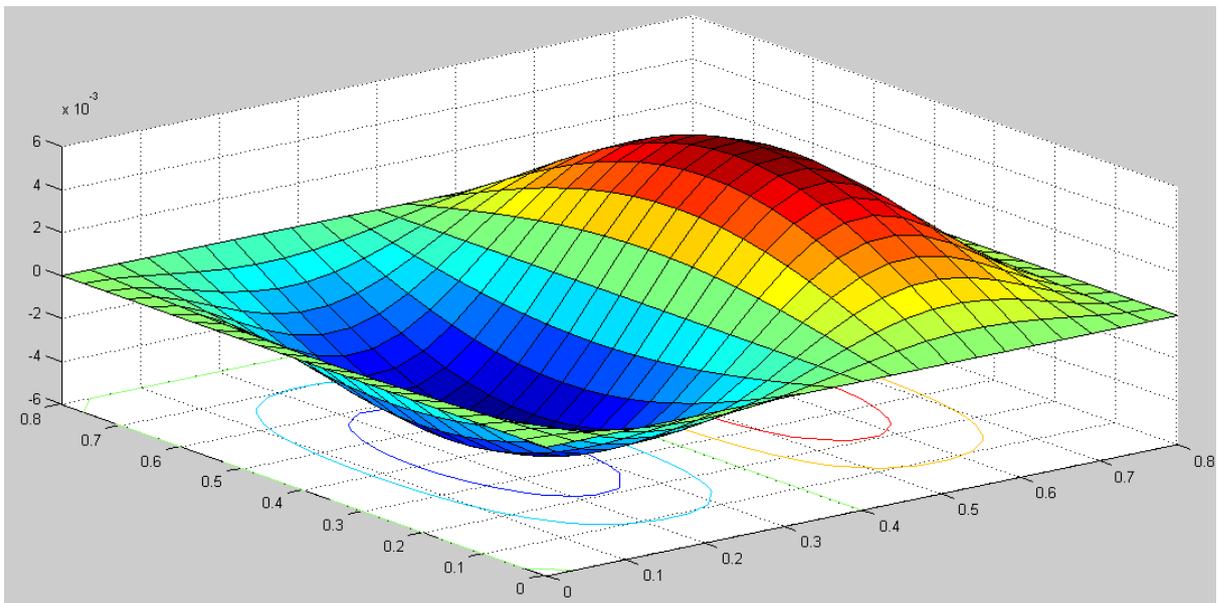


Figura 14- Terceiro modo de vibração (placa quadrada apoiada/ engastada/ apoiada/ engastada)

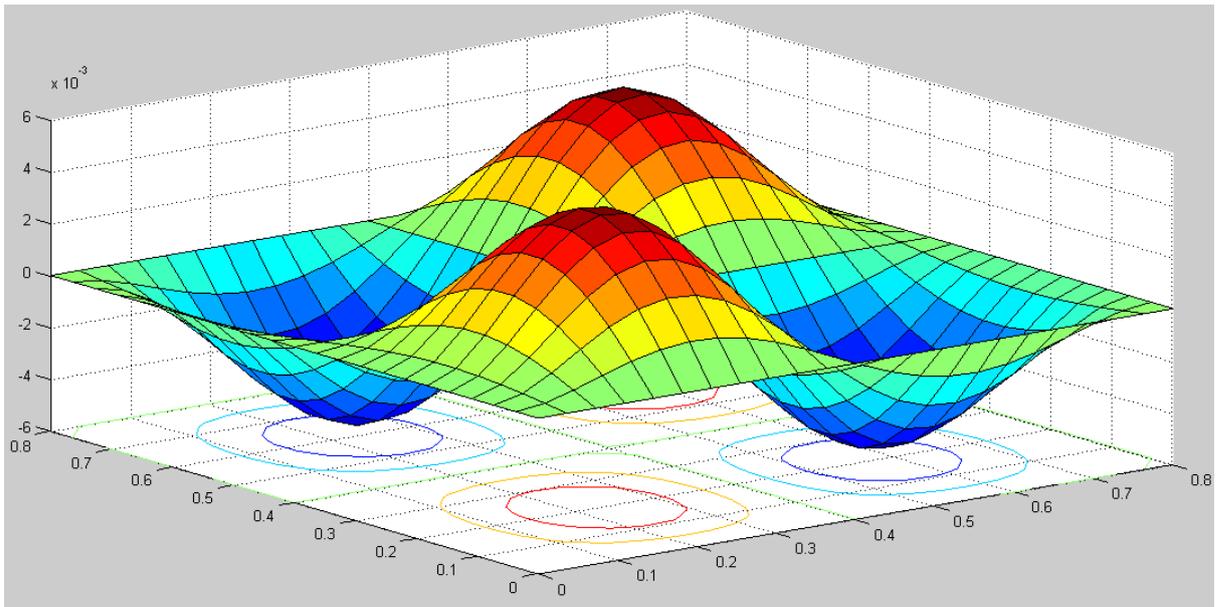


Figura 15- Quarto modo de vibração (placa quadrada apoiada/ engastada/ apoiada/ engastada)

Os gráficos, a seguir, mostram o comportamento das seis primeiras frequências naturais da mesma placa quadrada apresentada anteriormente, porém, com as condições de contorno de simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada (Figura 12).

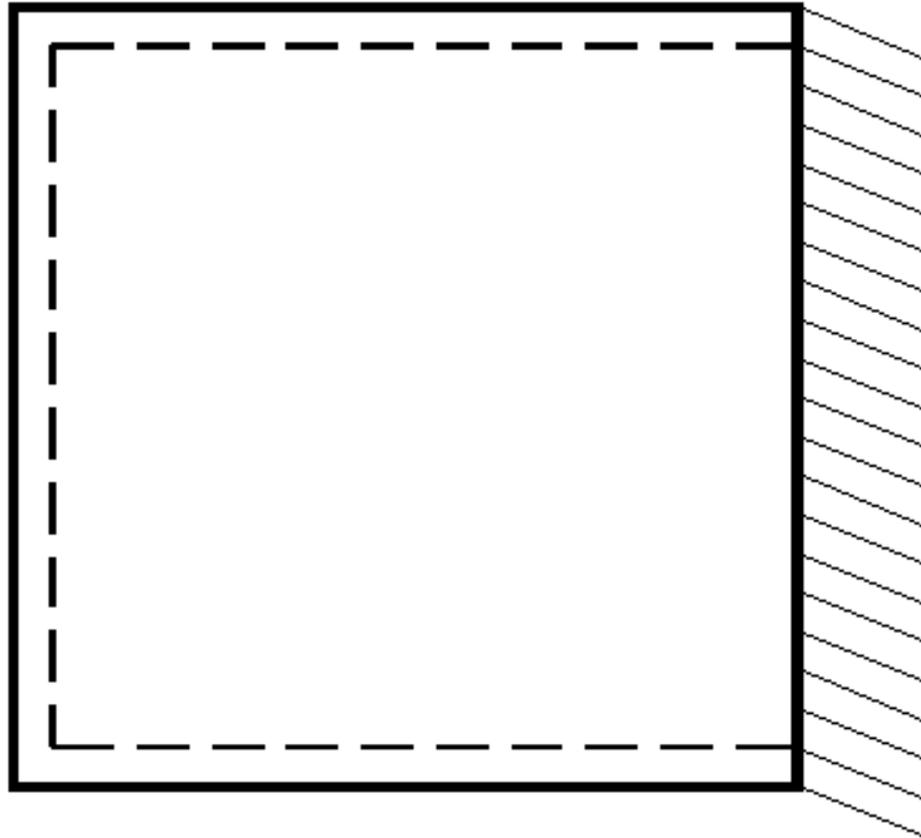


Figura 16- Placa quadrada simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada

As seis primeiras frequências naturais de uma placa fina quadrada são mostradas nos gráficos de 29 a 34 e tendem para um valor quando se aumenta a quantidade de elementos finitos. Nesse caso foram usados, no máximo, 484 elementos finitos. Com isso, o percentual quando comparados com valores da literatura ficou menor que 0,5% (gráfico 35). A tabela 4 mostra os valores das frequências naturais analíticas disponíveis na literatura Leissa (1969).

O desvio percentual das seis primeiras frequências naturais (gráfico 36) também ficou menor que 0,5% para o mesmo número de elementos finitos.

Tabela 4- Frequências naturais analíticas para quadrada (simplesmente apoiada/engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada)

Condição de contorno		simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada			
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$
185,05	404,39	458,92	674,01	784,62	886,02

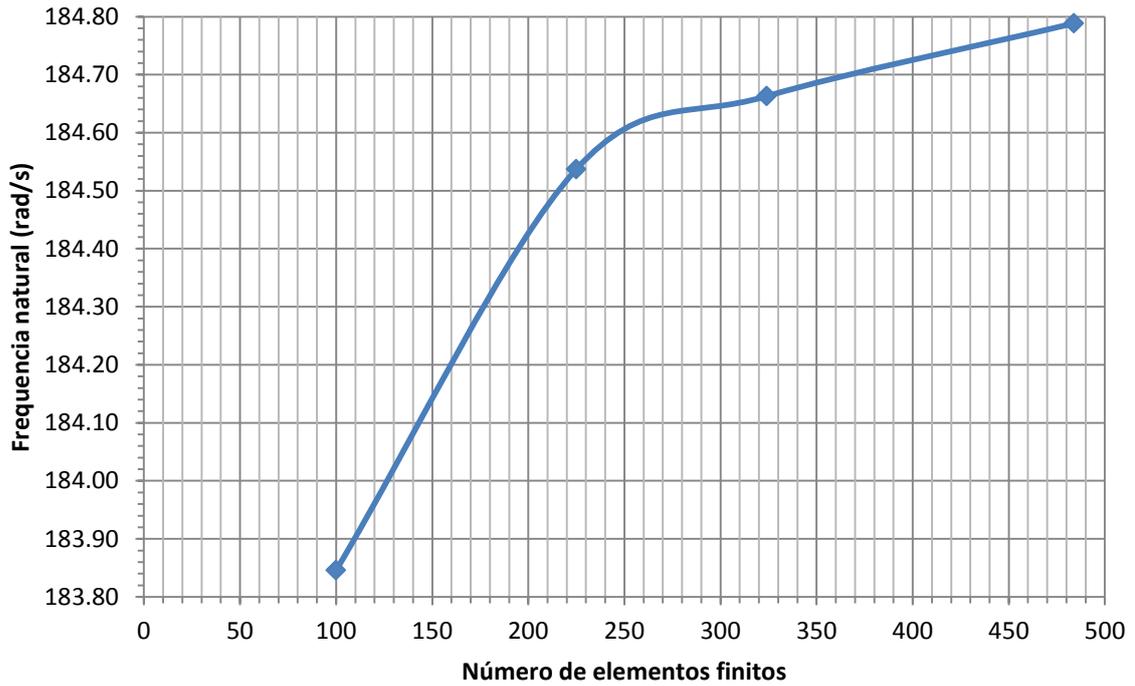


Gráfico 29- Primeira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada)

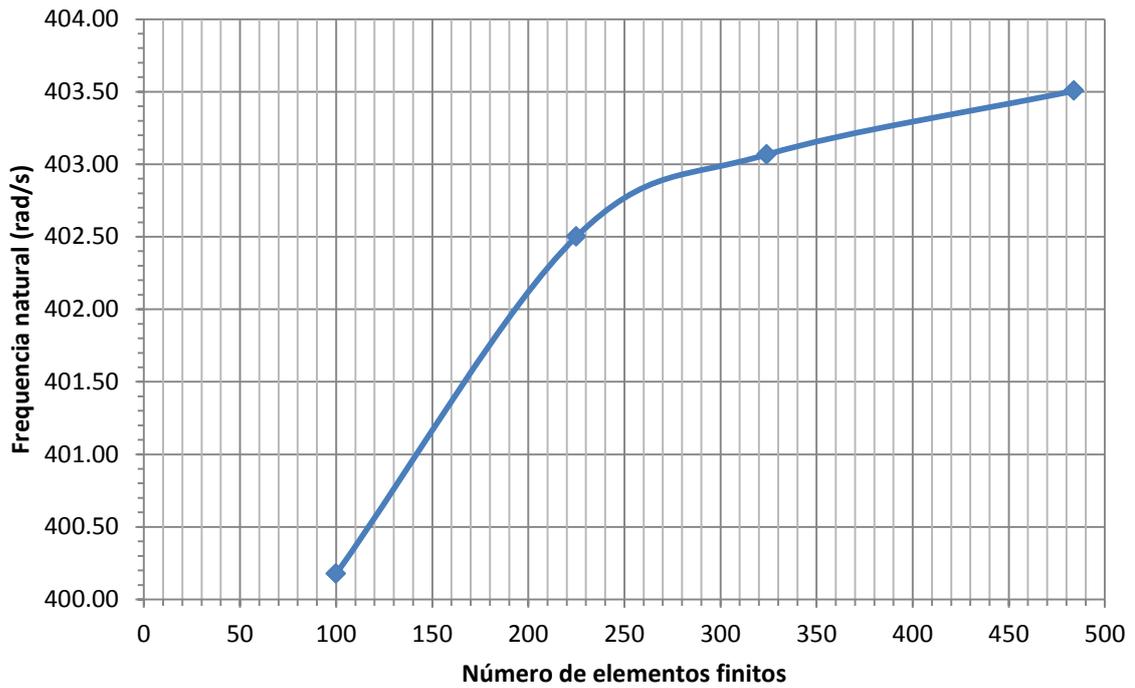


Gráfico 30- Segunda frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada)

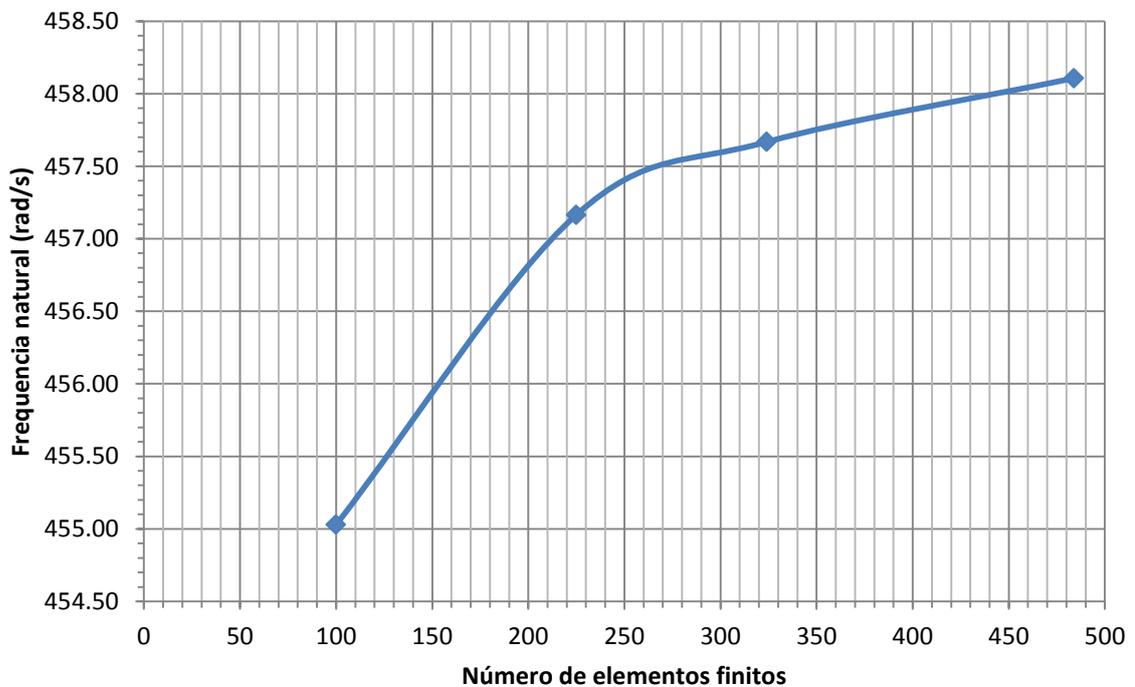


Gráfico 31- Terceira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada)

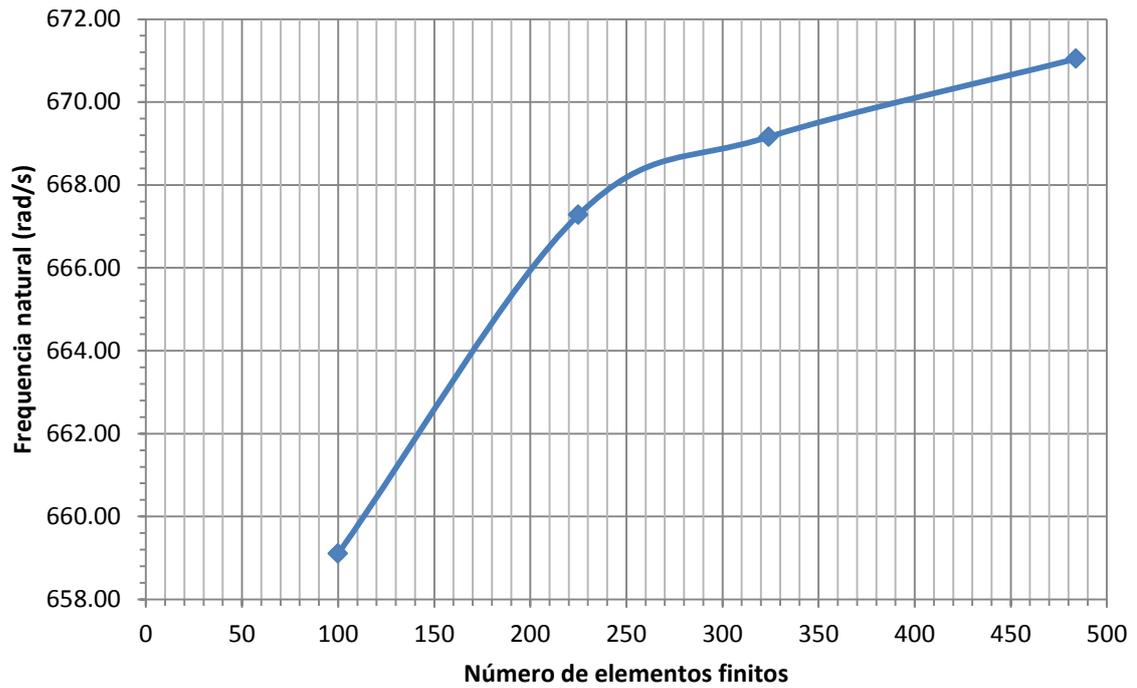


Gráfico 32- Quarta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada)

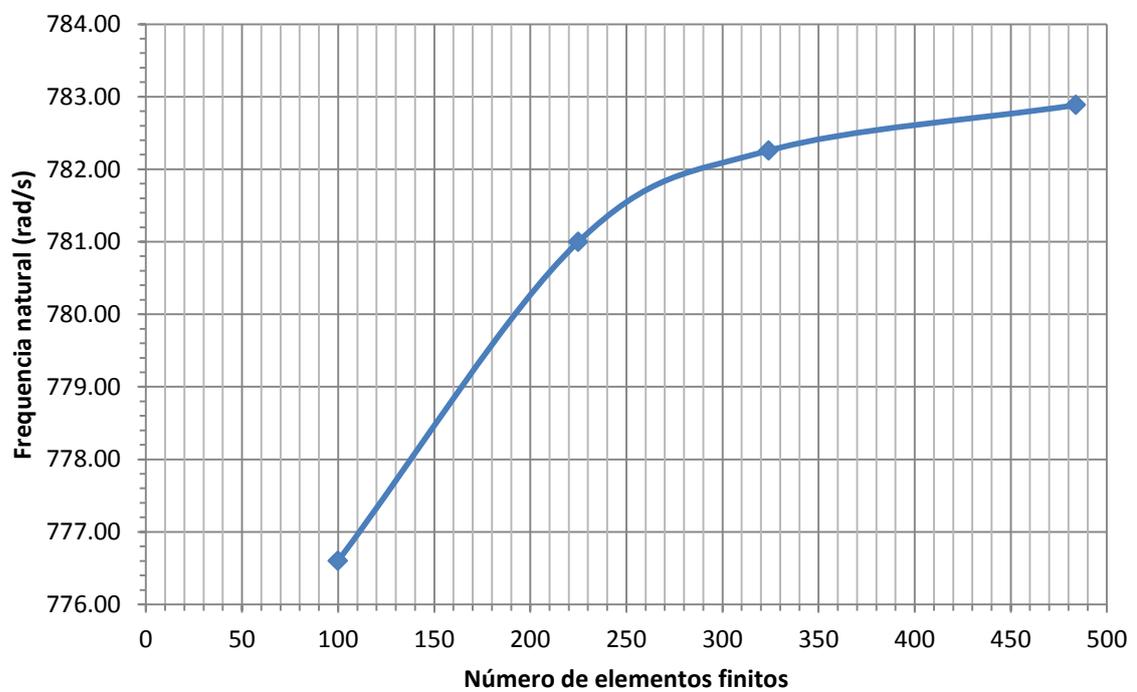


Gráfico 33- Quinta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada)

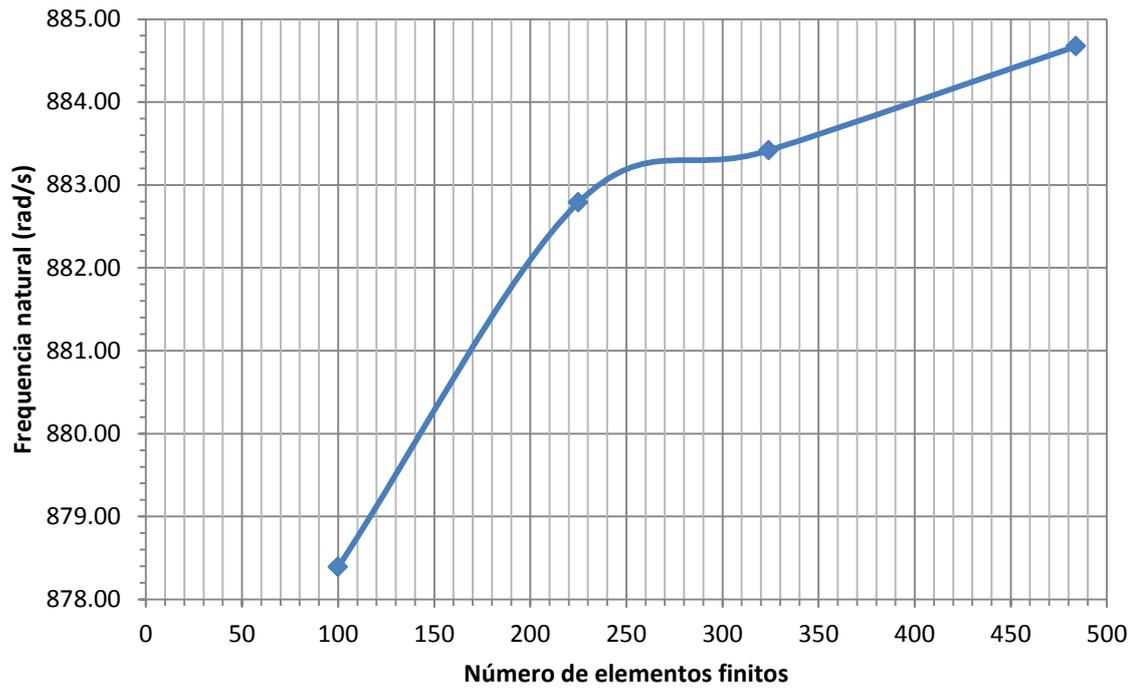


Gráfico 34- Sexta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada)

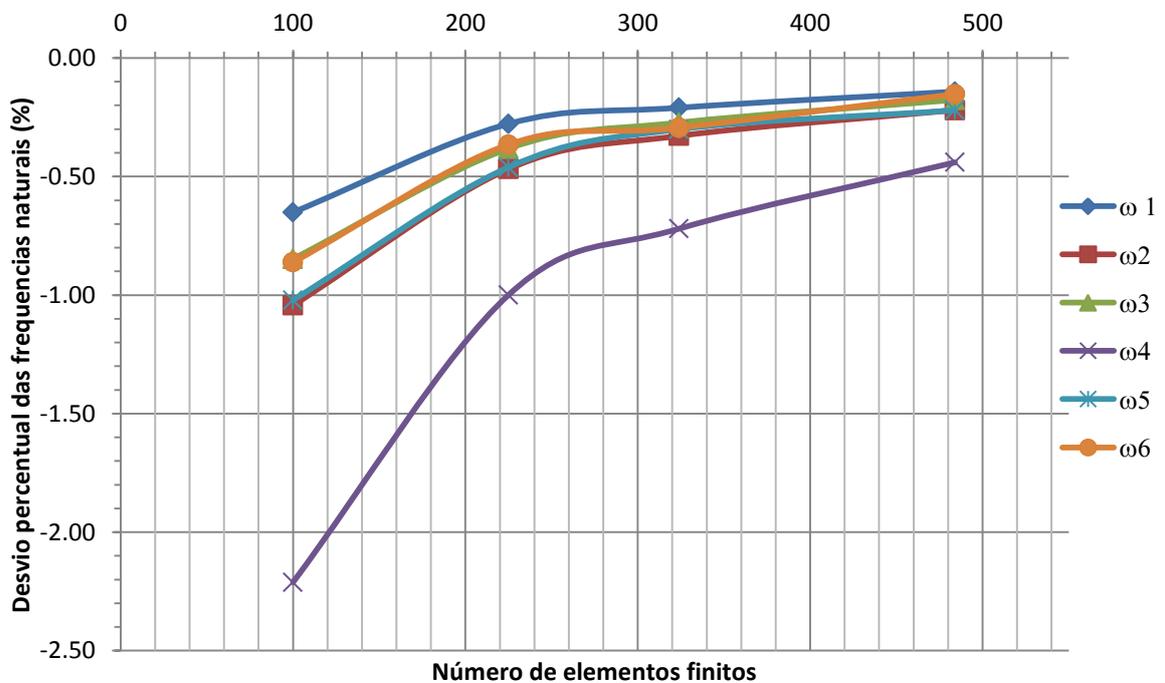


Gráfico 35- Desvio percentual das seis primeiras frequências naturais de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada)

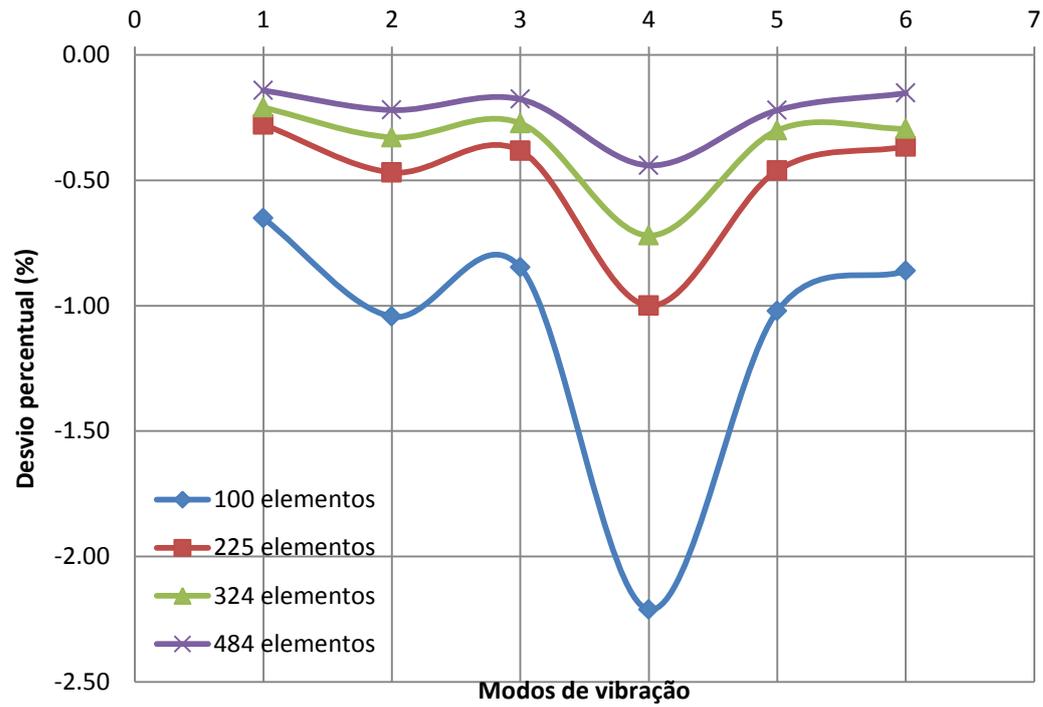


Gráfico 36- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada)

Os gráficos, a seguir, apresentam o comportamento das seis primeiras frequências naturais da mesma placa quadrada apresentada, porém com as condições de contorno de simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ livre (Figura 13).

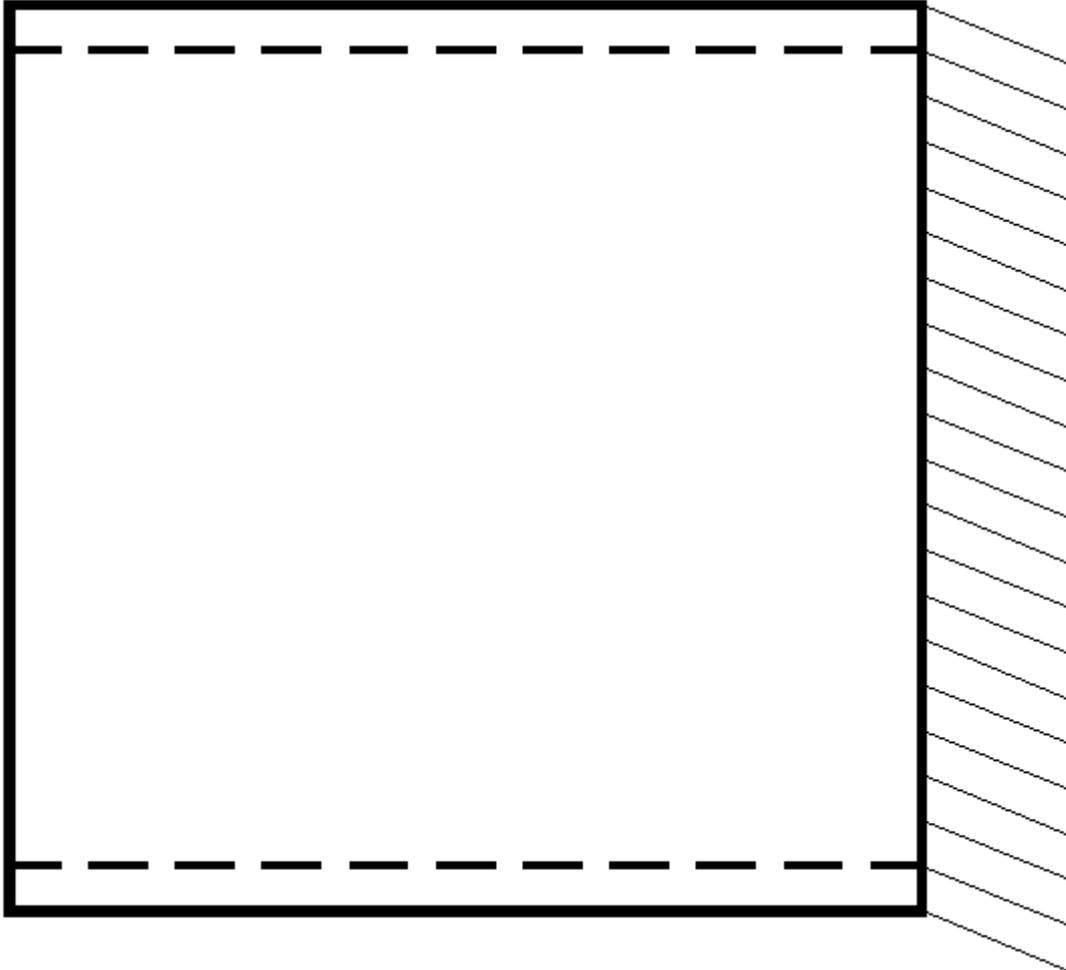


Figura 17- Placa quadrada simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ livre

Nos gráficos de 37 a 42 são apresentadas as seis primeiras frequências naturais da mesma placa anterior, porém com condições de contorno diferentes. É possível notar que todas as frequências naturais calculadas apresentam a mesma tendência quando se aumenta a quantidade de elementos finitos. Para 484 elementos finitos, o erro percentual quando comparados com valores da literatura ficou menor que 0,3% (gráfico 43). A tabela 5 apresenta os valores das frequências naturais analíticas disponíveis na literatura Leissa (1969).

Quando foi feito um estudo do erro percentual das seis primeiras frequências naturais de vibração (gráfico 44), esse ficou menor que 0,1% para o mesmo número de elementos finitos.

Tabela 5- Frequências naturais analíticas para quadrada (simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ livre)

Condição de contorno		simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ livre			
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$
99,31	258,72	326,34	493,11	566,59	709,10

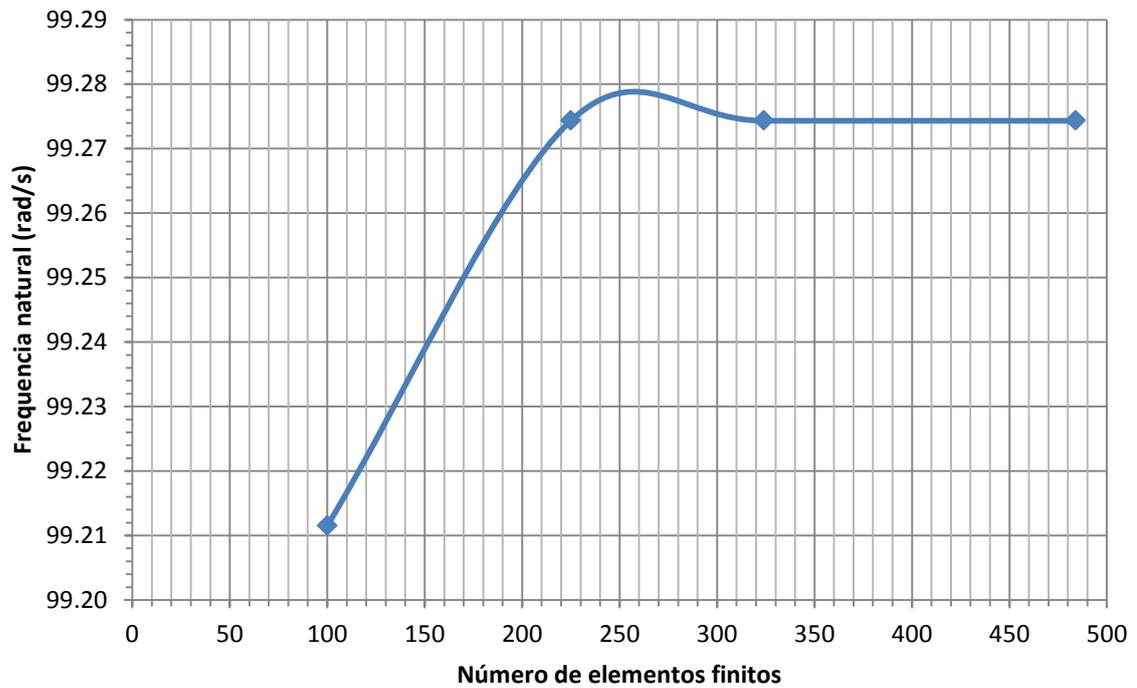


Gráfico 37- Primeira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre)

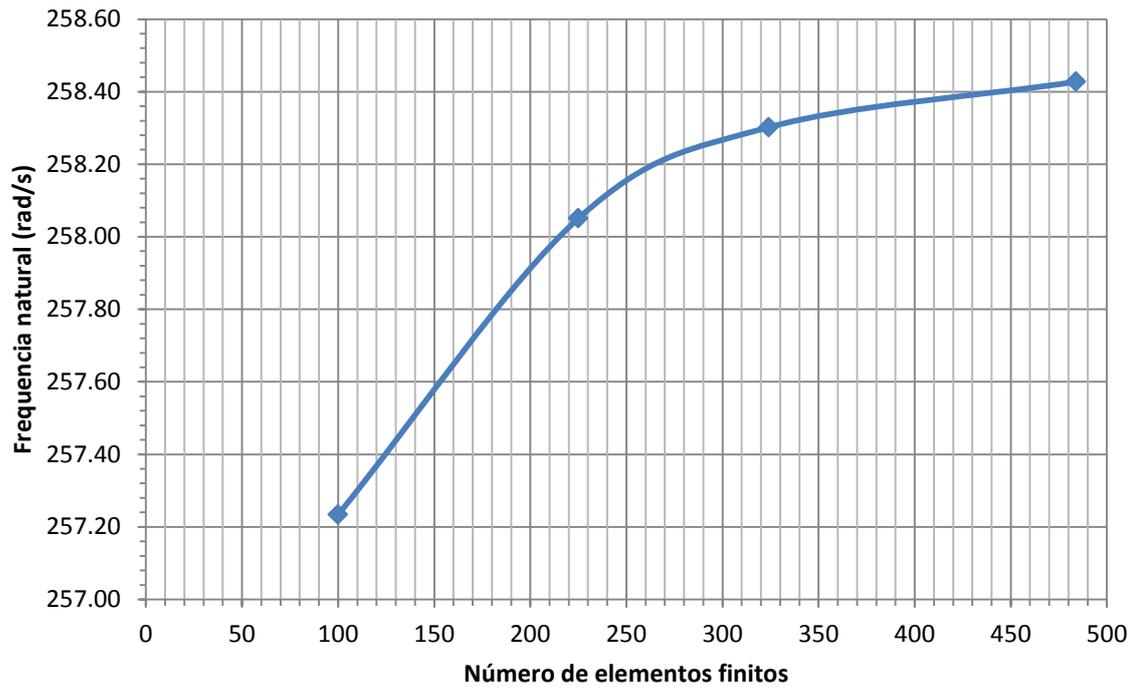


Gráfico 38- Segunda frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre)

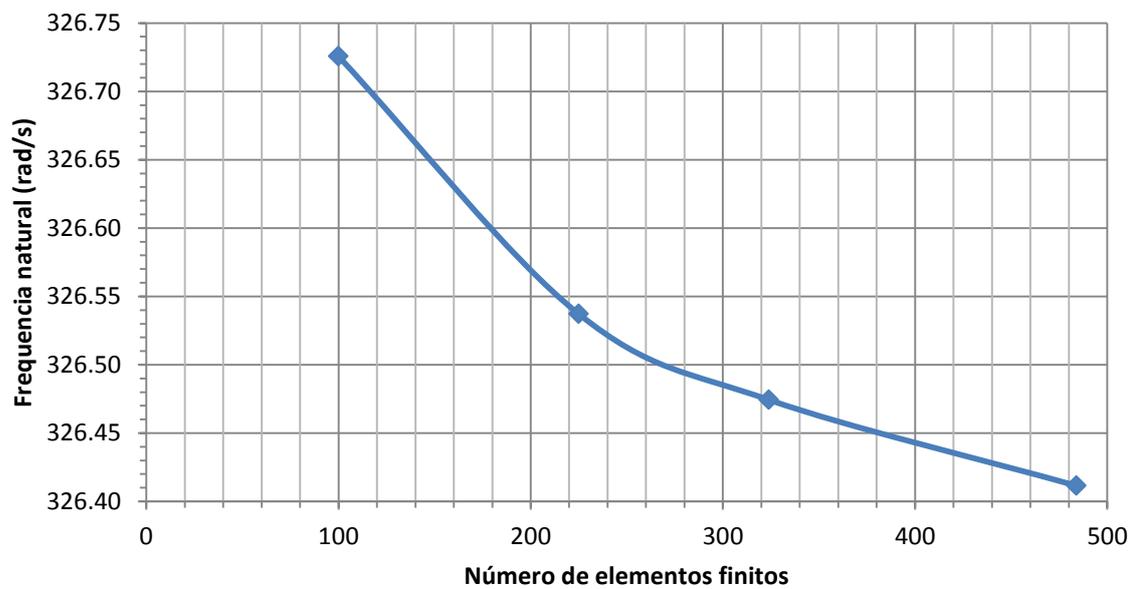


Gráfico 39- Terceira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre)

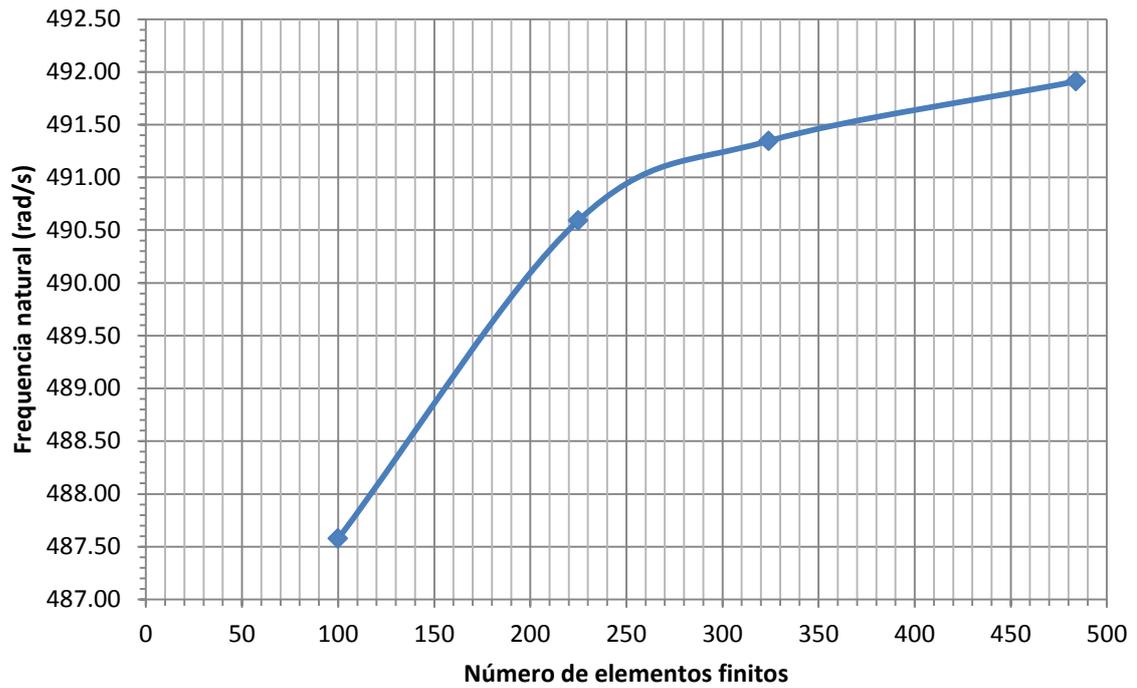


Gráfico 40- Quarta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre)

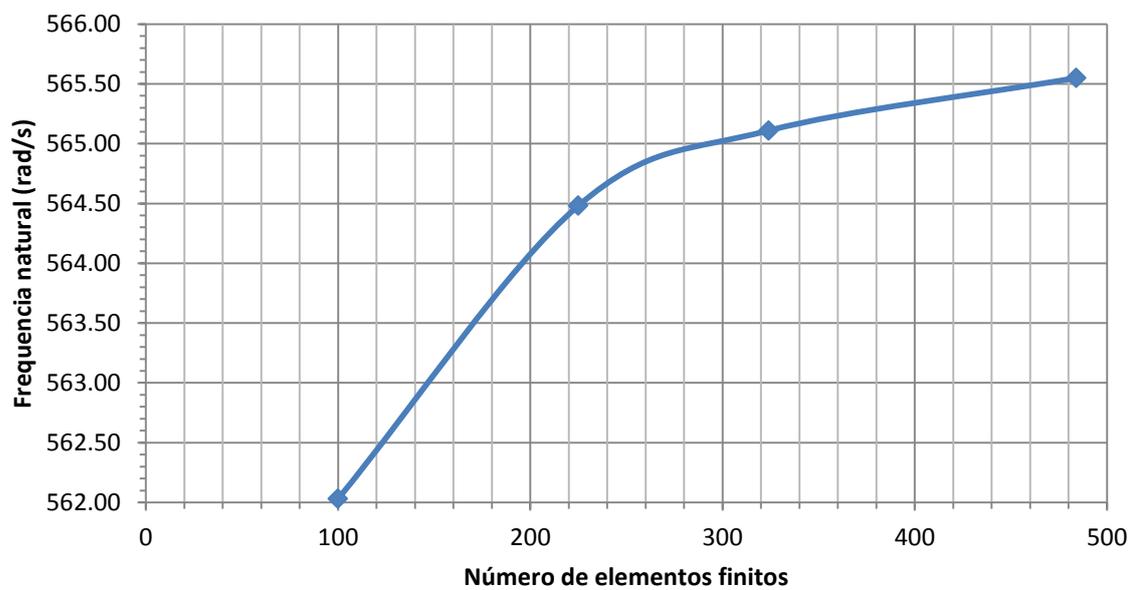


Gráfico 41- Quinta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre)

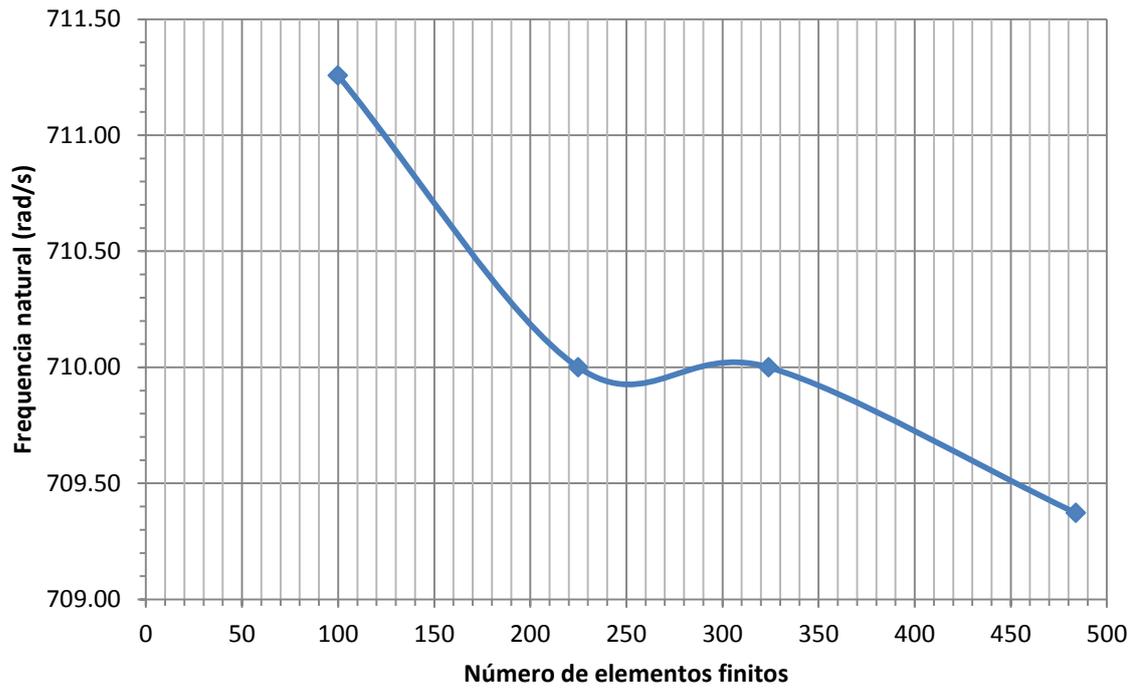


Gráfico 42- Sexta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre)

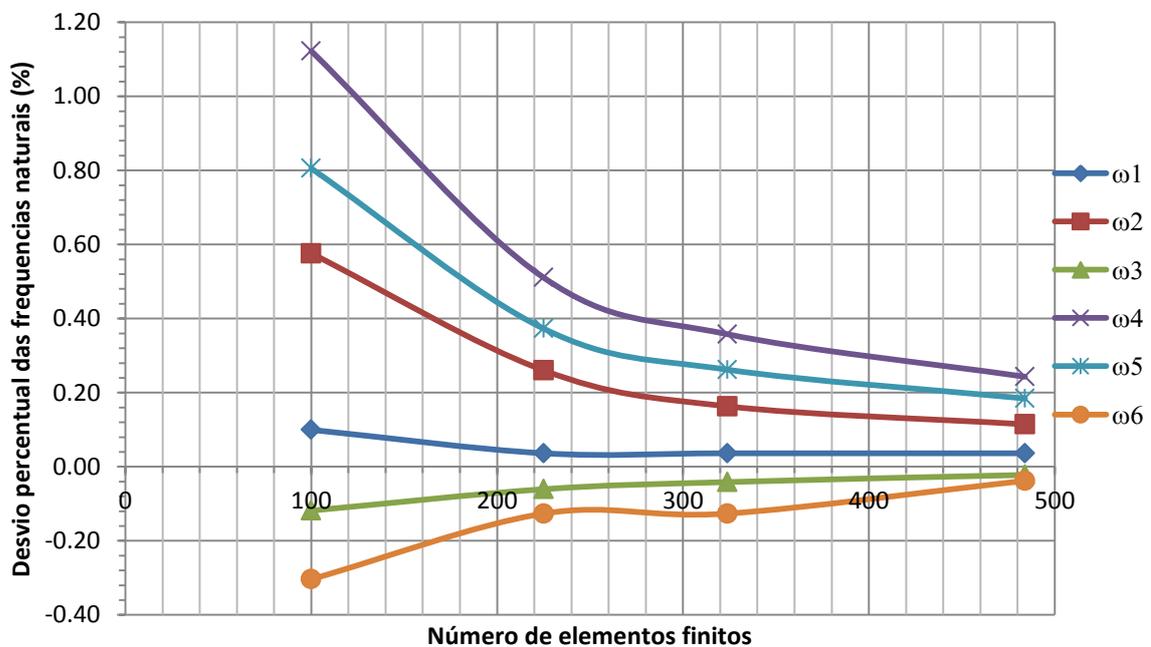


Gráfico 43- Desvio percentual das seis primeiras frequências naturais de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre)

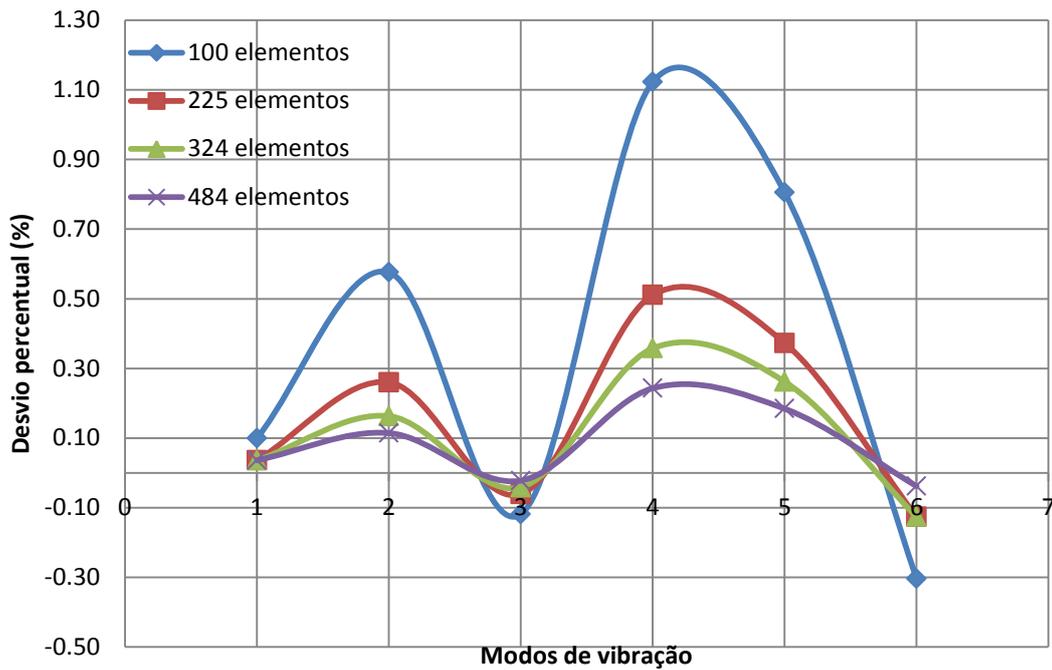


Gráfico 44- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa quadrada (simplesmente apoiada /engastada/ simplesmente apoiada/ livre)

Os gráficos seguintes mostram o comportamento das seis primeiras frequências naturais da mesma placa quadrada apresentada, porém com as condições de contorno de simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada / simplesmente apoiada/ livre (Figura 14). A tabela 6 apresenta os valores das frequências naturais analíticas disponíveis na literatura Leissa (1969).

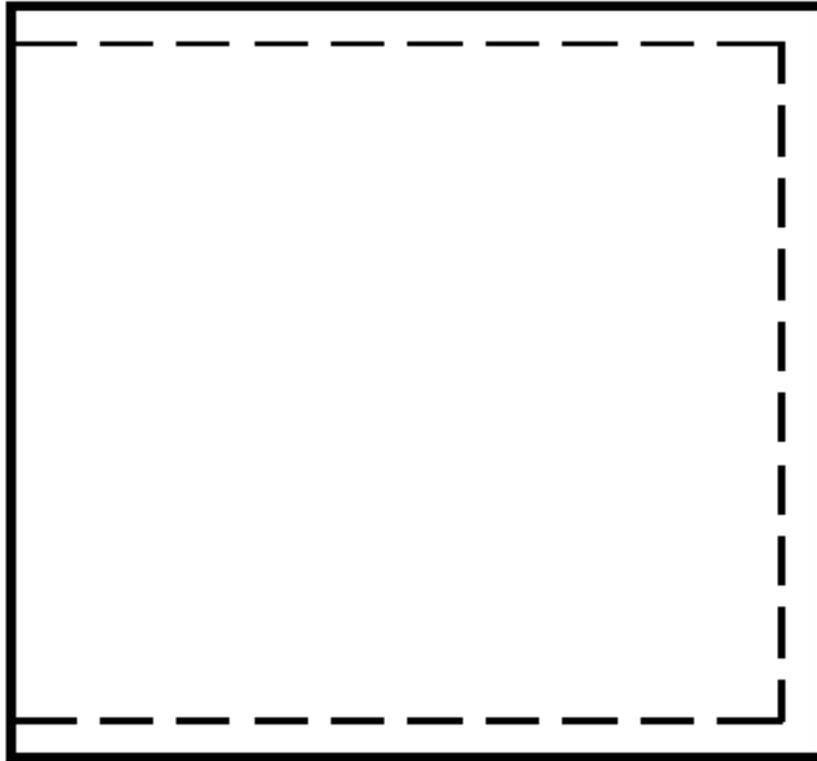


Figura 18- Placa quadrada simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada / simplesmente apoiada/ livre

As frequências naturais da placa quadrada mostradas nos gráficos de 45 a 50, assim como nos casos anteriores, têm uma tendência a um valor. Observa-se que as seis primeiras frequências naturais calculadas apresentam a mesma tendência quando se aumenta a quantidade de elementos finitos. Com 484 elementos finitos, o erro percentual ficou menor que 0,3% (gráfico 51).

O erro percentual das seis primeiras frequências naturais de vibração, (gráfico 52), apresentou um valor menor que 0,1% para o mesmo número de elementos finitos.

Tabela 6- Frequências naturais analíticas para quadrada (simplesmente apoiada/ engastada/ simplesmente apoiada/ livre)

Condição de contorno		simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada / simplesmente apoiada/ livre			
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$
91,41	217,25	322,43	462,28	484,11	706,60

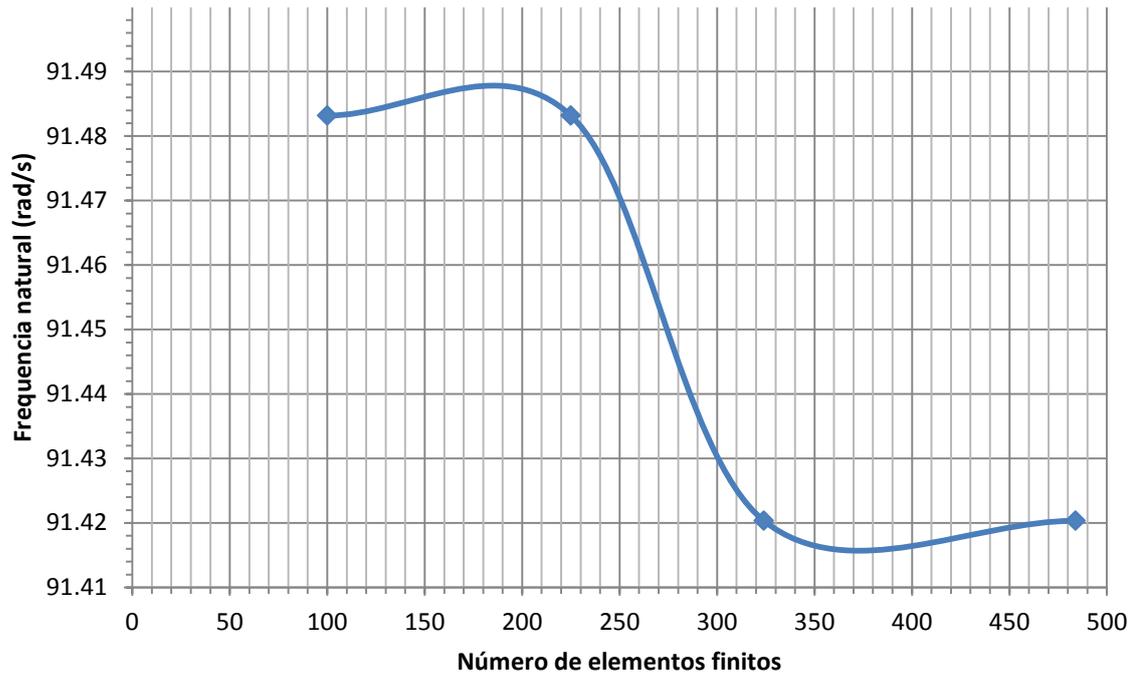


Gráfico 45- Primeira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)

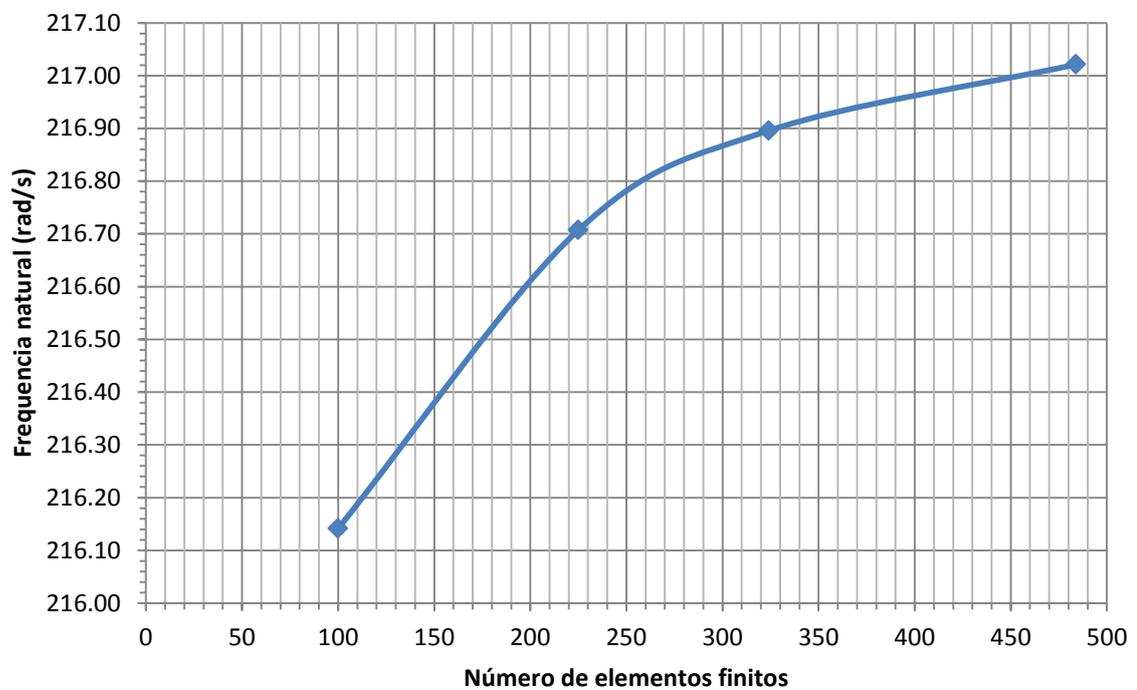


Gráfico 46- Segunda frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)

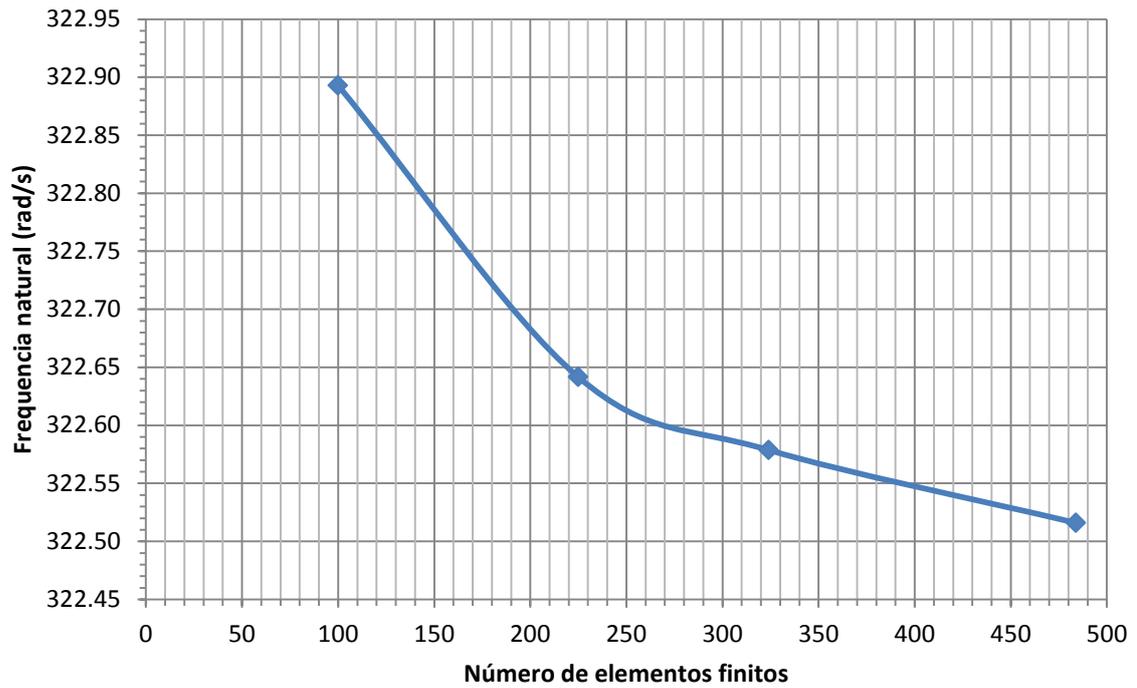


Gráfico 47- Terceira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)

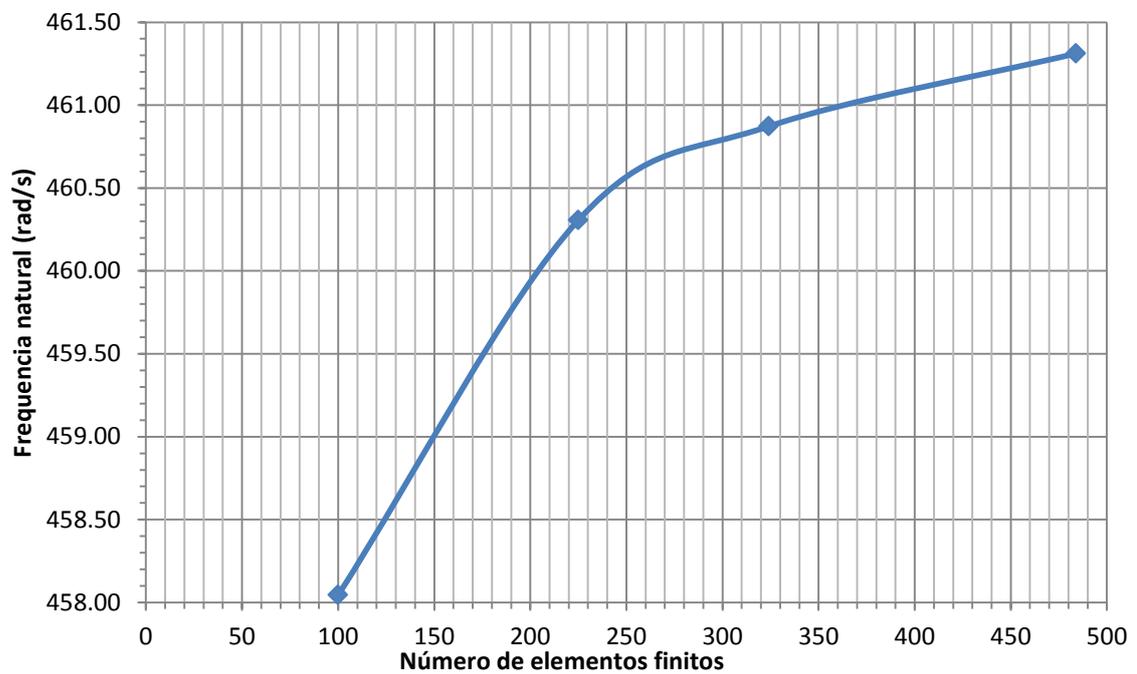


Gráfico 48- Quarta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)

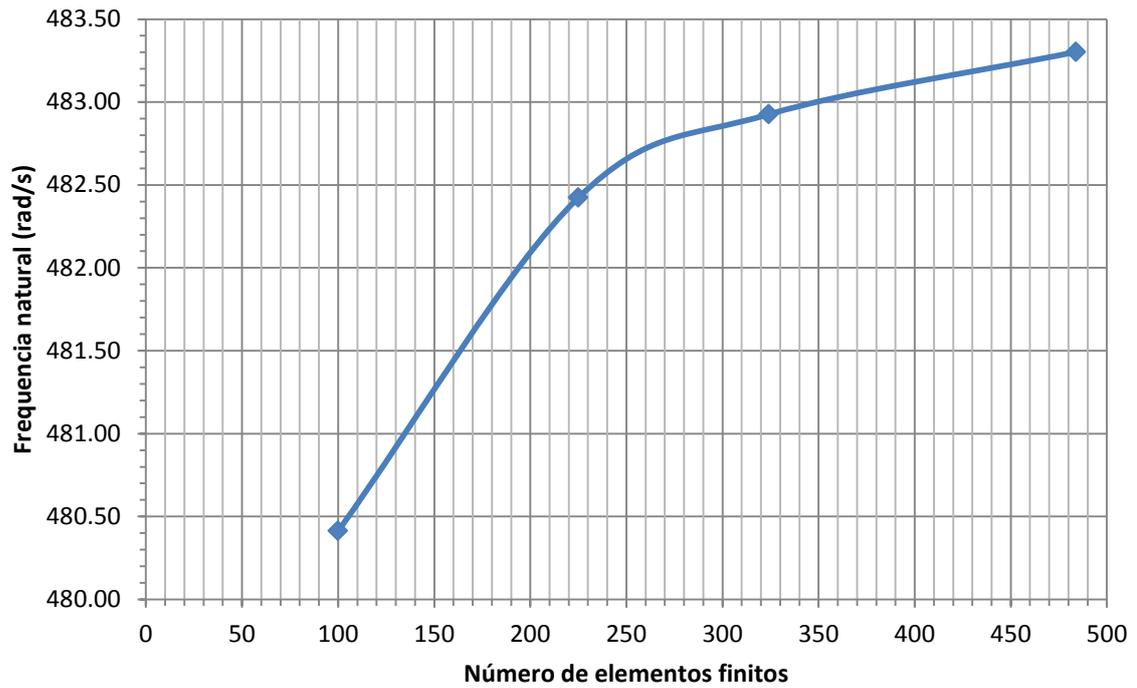


Gráfico 49- Quinta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)

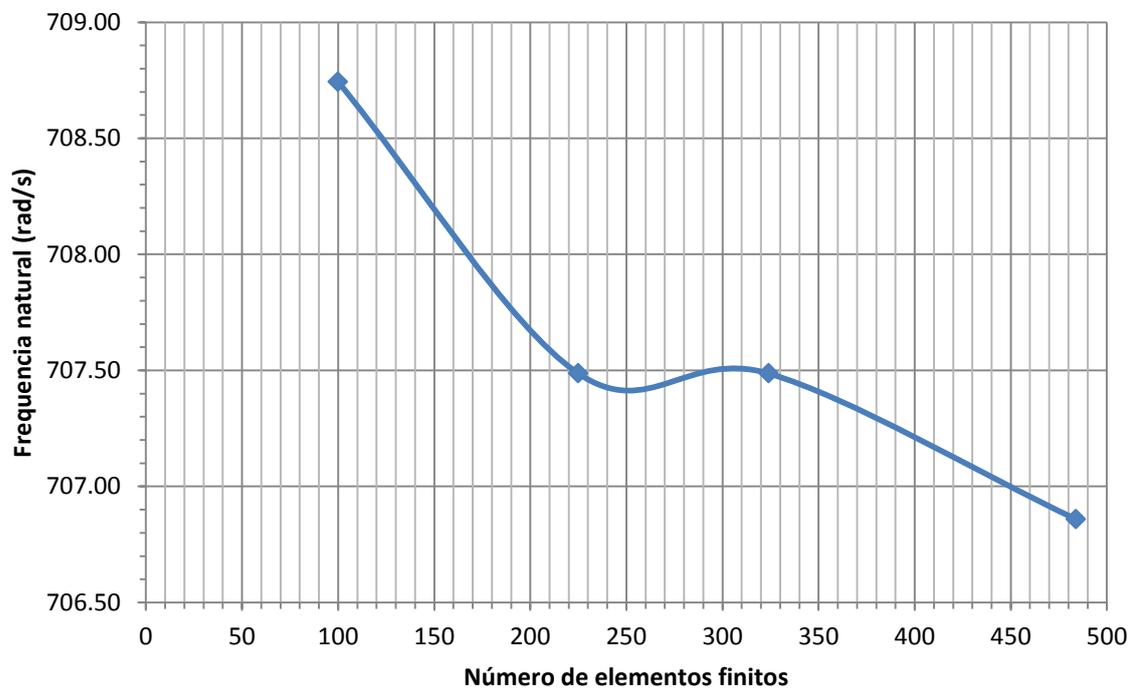


Gráfico 50- Sexta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)

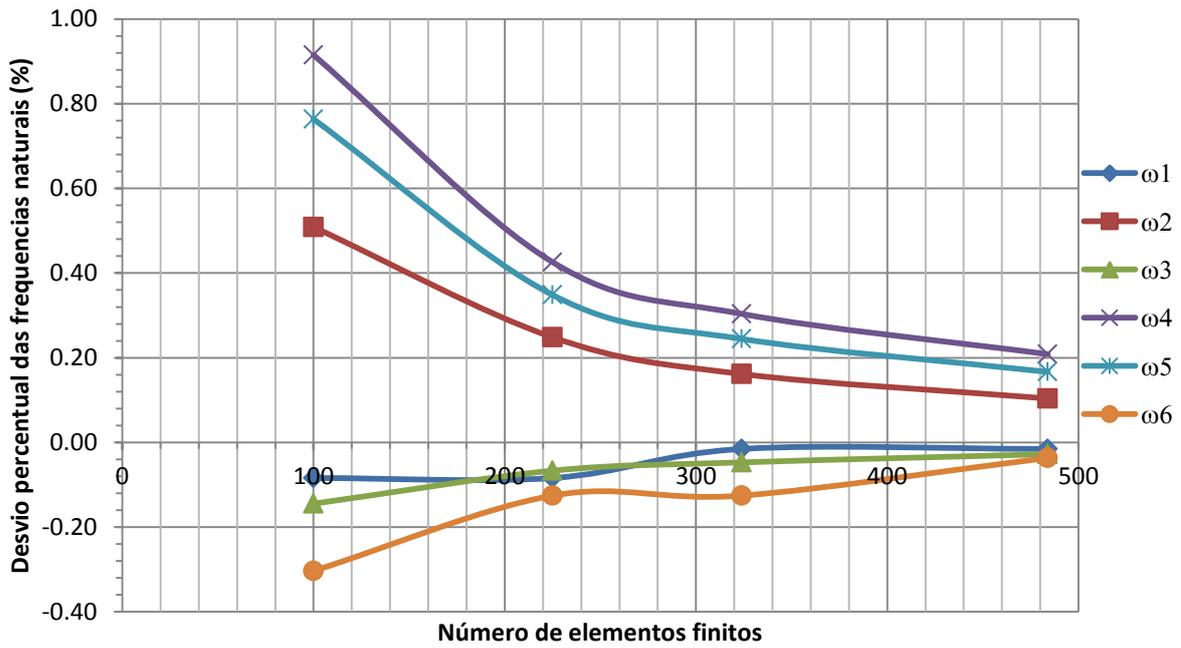


Gráfico 51- Desvio percentual das seis primeiras frequências naturais de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)

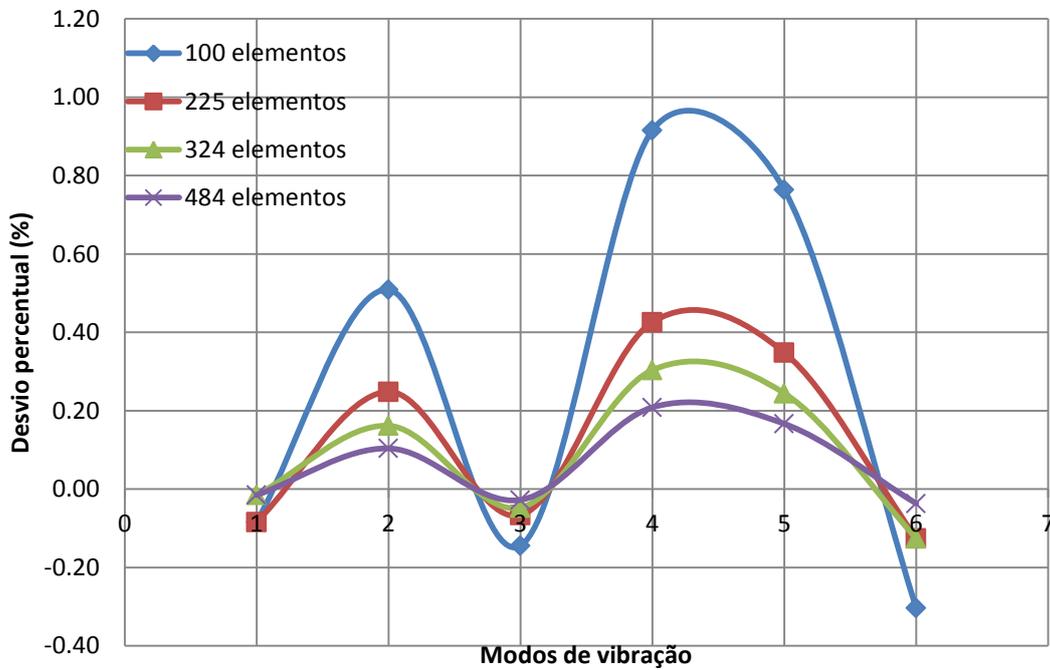


Gráfico 52- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ simplesmente apoiada/ livre)

Os gráficos abaixo mostram o comportamento das seis primeiras frequências naturais da mesma placa quadrada apresentada, porém com as condições de contorno de simplesmente apoiada/ livre / simplesmente apoiada/ livre (Figura 15). A tabela 7 possui os valores das frequências naturais analíticas disponíveis na literatura Leissa (1969).

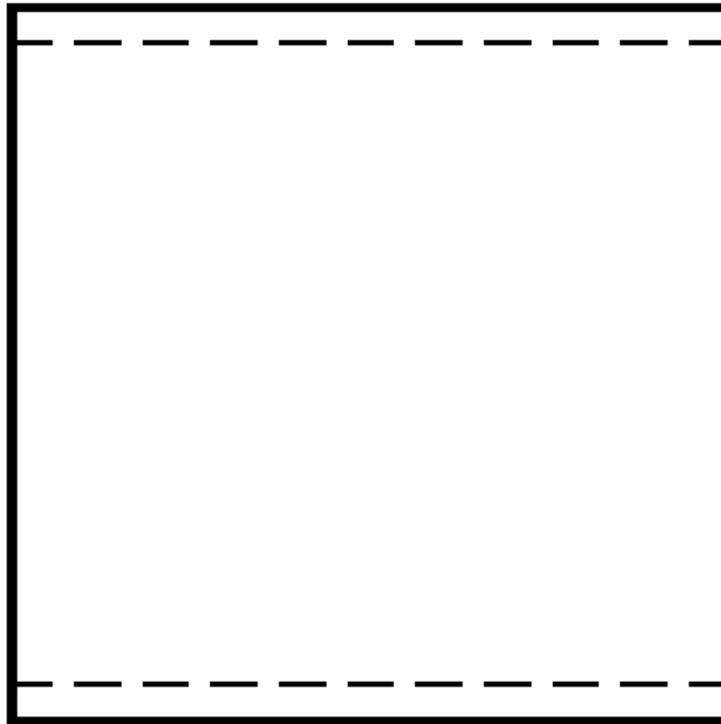


Figura 19- Placa quadrada simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre

Os valores das seis primeiras frequências naturais de uma placa quadrada são mostrados nos gráficos de 53 a 58. Também é notável que eles apresentem uma tendência a um determinado valor quando se aumenta a quantidade de elementos finitos. No caso da segunda frequência natural, sua variação foi pequena quando se aumentou a quantidade de elementos finitos. Com apenas 100 elementos, já foi obtido o valor com um erro menor que 0,1% (gráfico 59). Para 324 e 484 elementos finitos, o erro percentual foi de 0,02% (gráfico 59).

O estudo do erro percentual das seis primeiras frequências naturais de vibração (gráfico 60) mostra que o erro é menor que 0,3 % para 484 elementos finitos.

Tabela 7- Frequências naturais analíticas para quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)

Condição de contorno		simplesmente apoiada/ livre / simplesmente apoiada/ livre			
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$
75,37	126,23	287,37	304,74	365,78	553,68

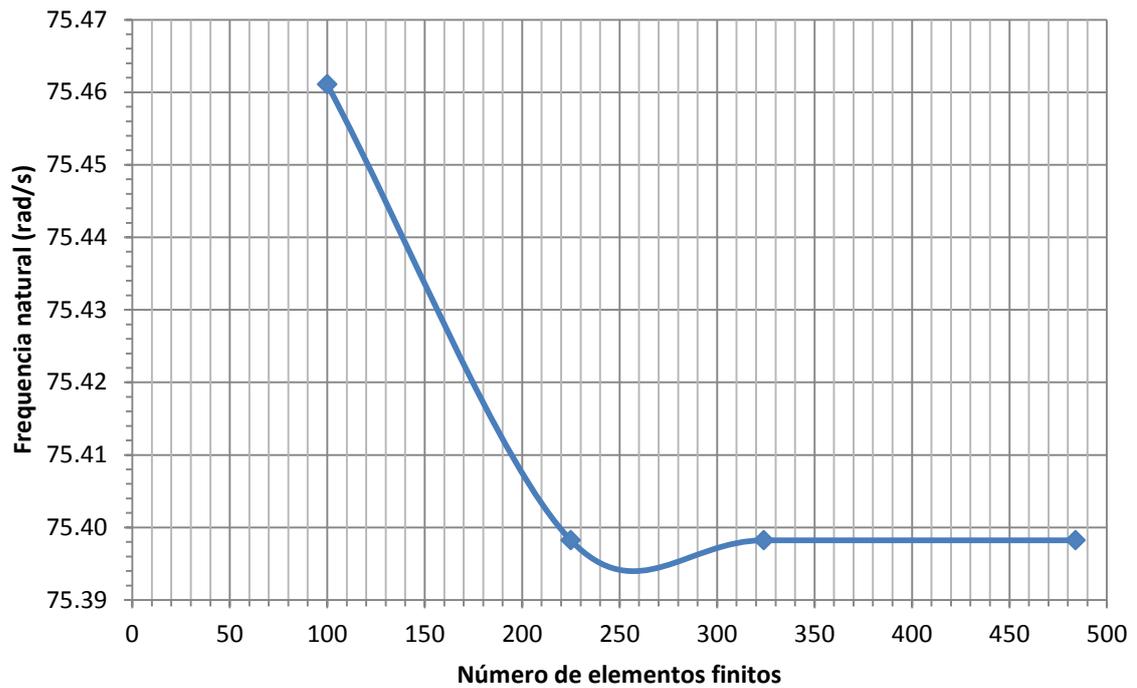


Gráfico 53- Primeira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)

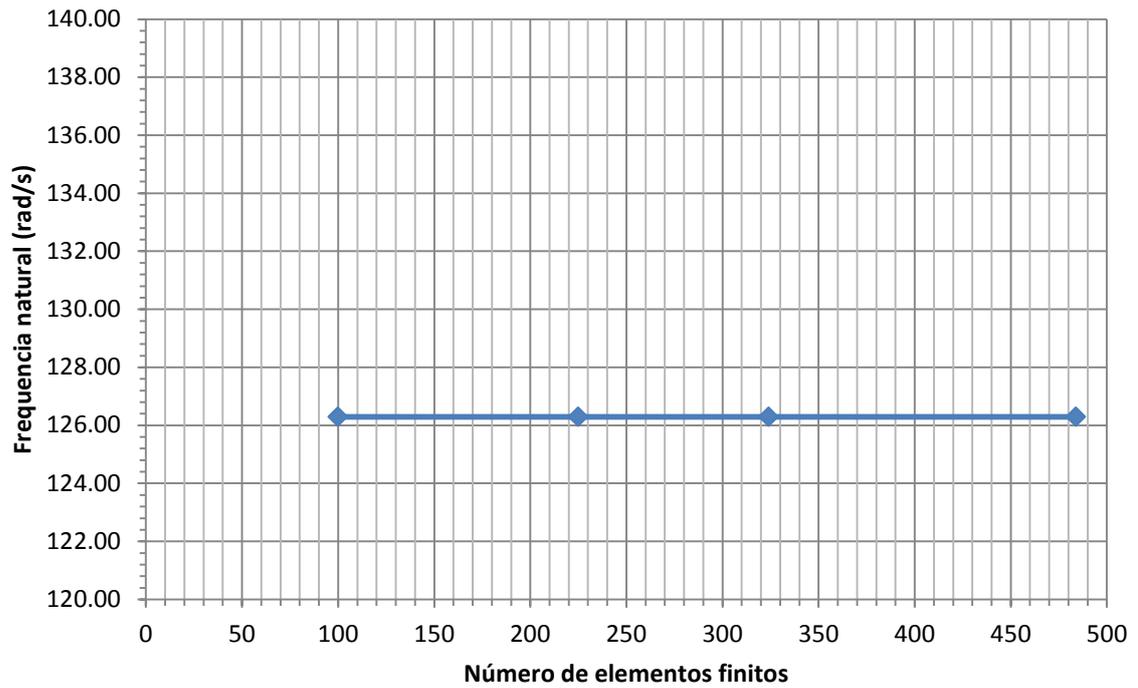


Gráfico 54- Segunda frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)

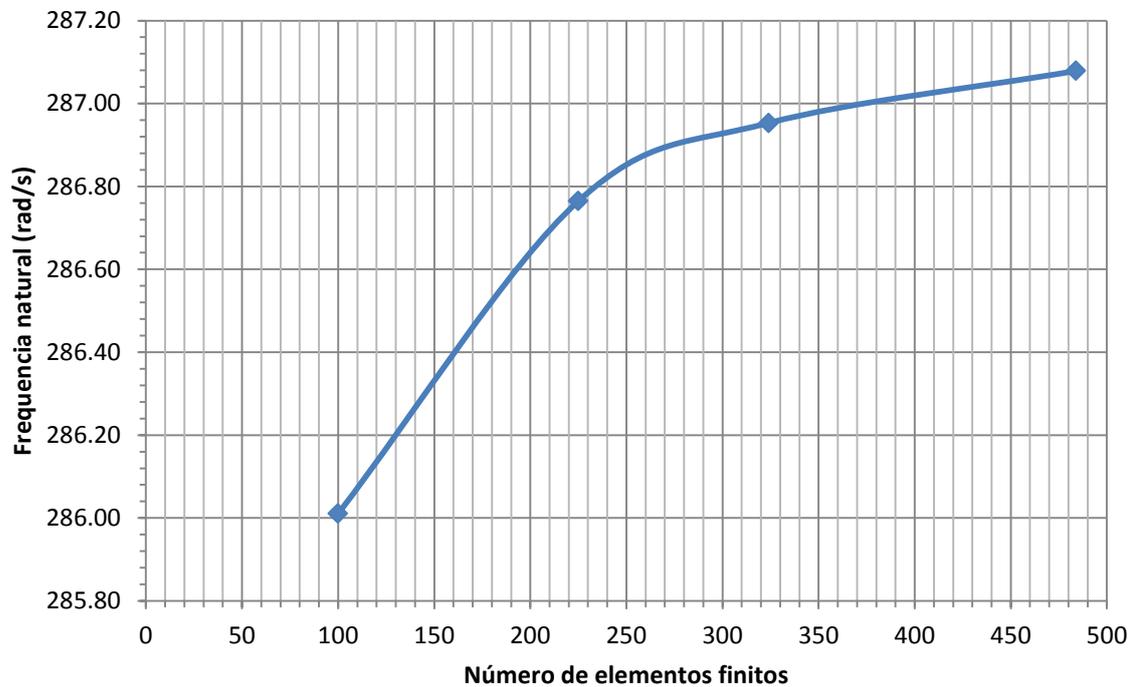


Gráfico 55- Terceira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)

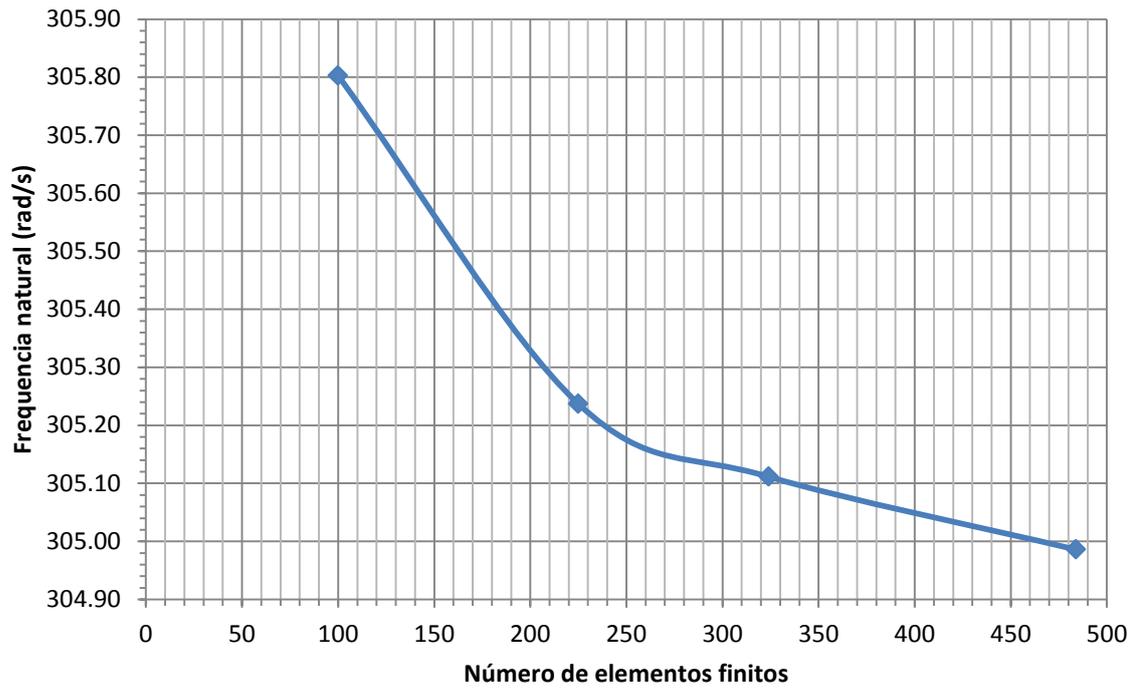


Gráfico 56- Quarta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/livre/ simplesmente apoiada/ livre)

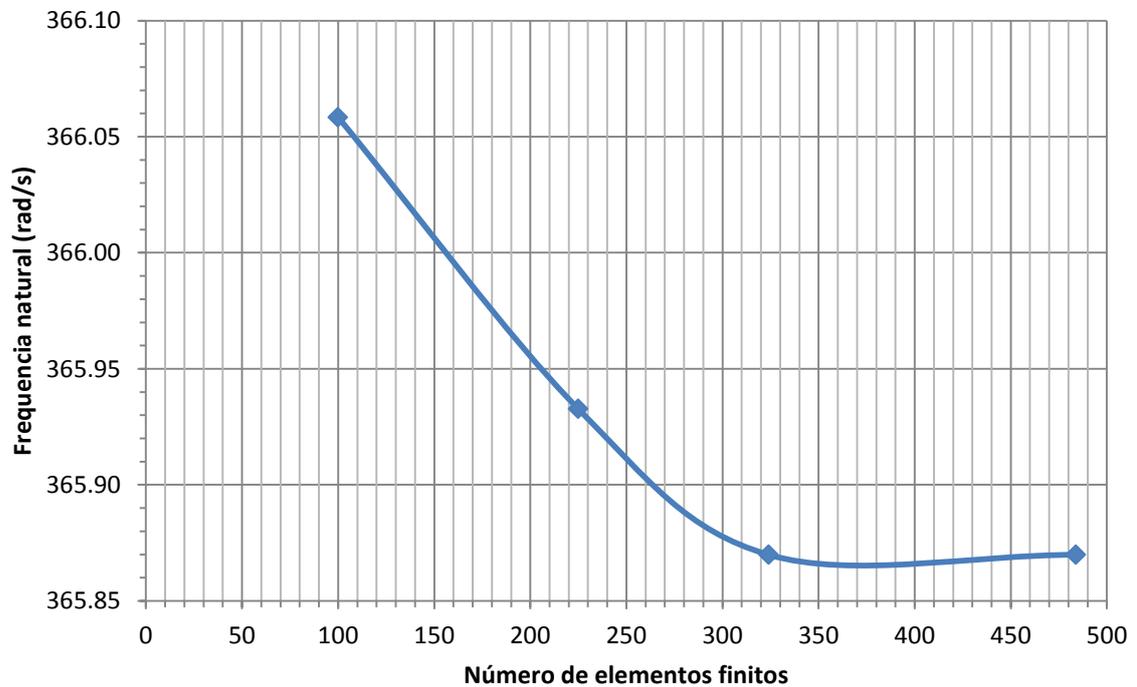


Gráfico 57- Primeira frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/livre/ simplesmente apoiada/ livre)

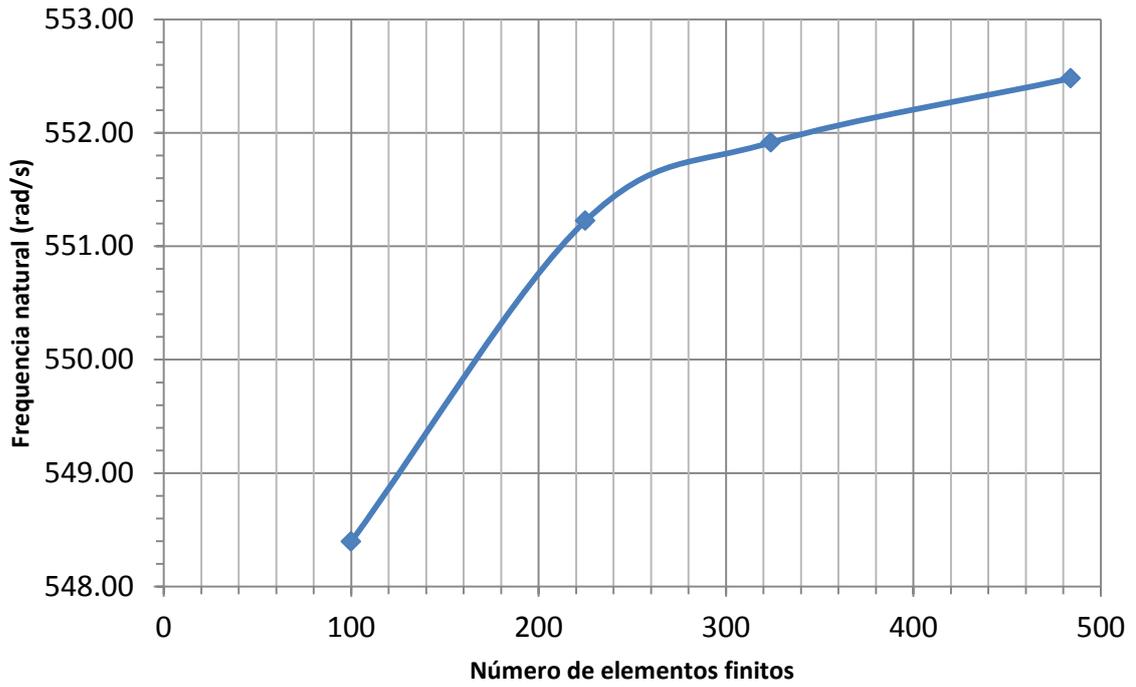


Gráfico 58- Sexta frequência natural de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)

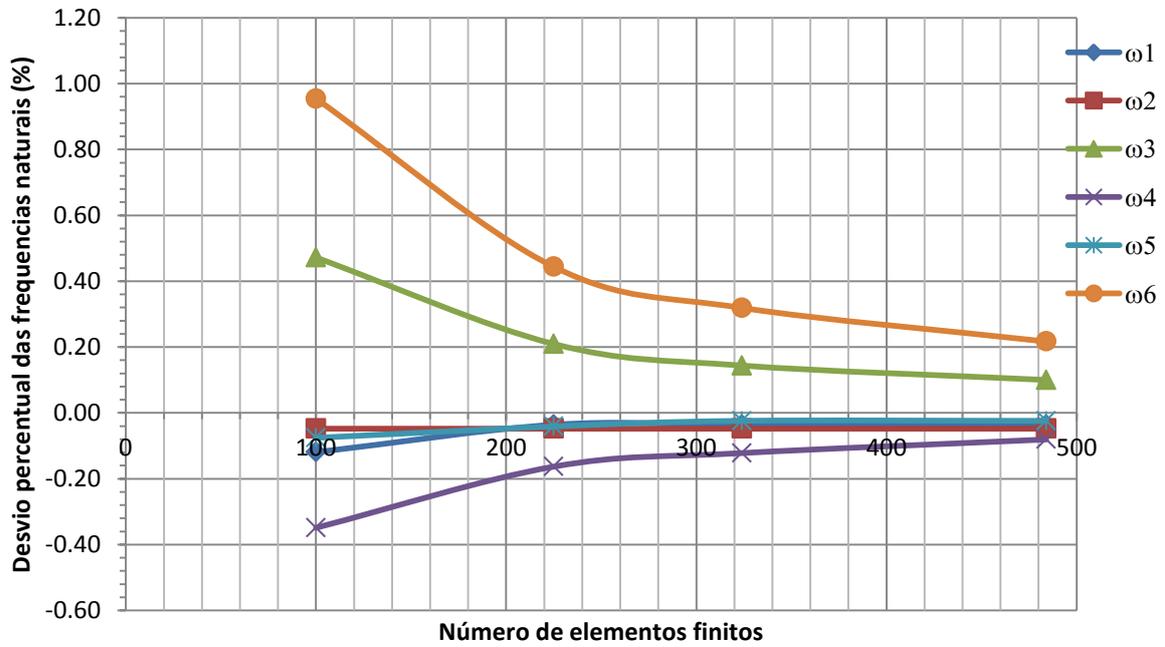


Gráfico 59- Desvio percentual das seis primeiras frequências naturais de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)

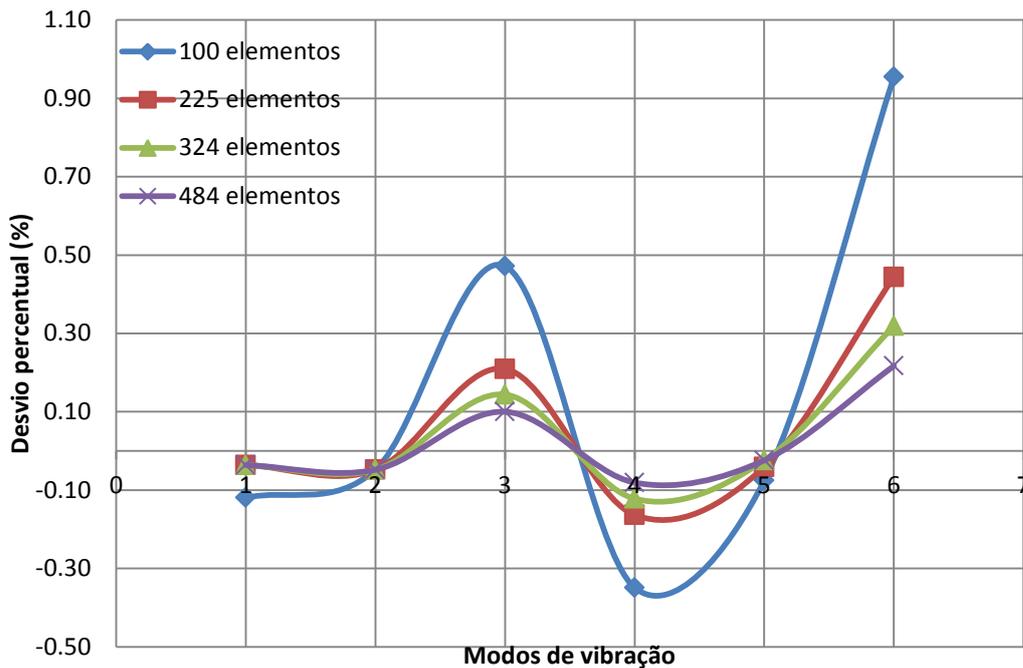


Gráfico 60- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa quadrada (simplesmente apoiada/ livre/ simplesmente apoiada/ livre)

A seguir são apresentados os gráficos referentes as dez primeiras frequências naturais de uma placa retangular de lados 0,8 m e 0,4 m com espessura 0,0032m (aproximadamente 1/8") de aço SAE 1020 (massa específica 7850 kg/m³, módulo de elasticidade 210 GPa e coeficiente de Poisson 0,333333), (Figura 16), com as condições de contorno de engastada/ engastada/ engastada/ engastada. A tabela 8 mostra os valores das frequências naturais analíticas disponíveis na literatura Leissa (1969).

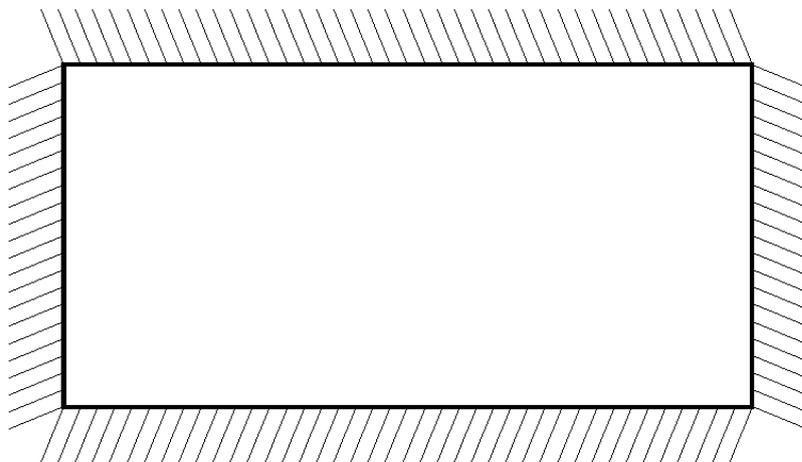


Figura 20- Placa retangular engastada/ engastada/ engastada/ engastada

Para uma placa retangular totalmente engastada, as dez primeiras frequências naturais foram calculadas e mostradas nos gráficos de 61 a 70. Todas as frequências apresentam o mesmo comportamento com relação ao aumento da quantidade de elementos finitos.

No gráfico dos erros percentuais, nota-se que os desvios ficaram menores que 1% quando comparados com os dados da literatura, com exceção da sétima e nona frequência natural que foi menor que 2% (gráfico 71).

O erro percentual das dez primeiras frequências naturais de vibração, (gráfico 72), ficou menor que 2% para 484 elementos finitos.

Tabela 8- Frequências naturais analíticas para retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

Condição de contorno			engastada/ engastada/ engastada/ engastada						
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$	$\omega_7(\text{rad/s})$	$\omega_8(\text{rad/s})$	$\omega_9(\text{rad/s})$	$\omega_{10}(\text{rad/s})$
769,37	996,27	1401,45	1982,48	2002,90	2224,94	2606,73	2731,32	3155,15	3642,39

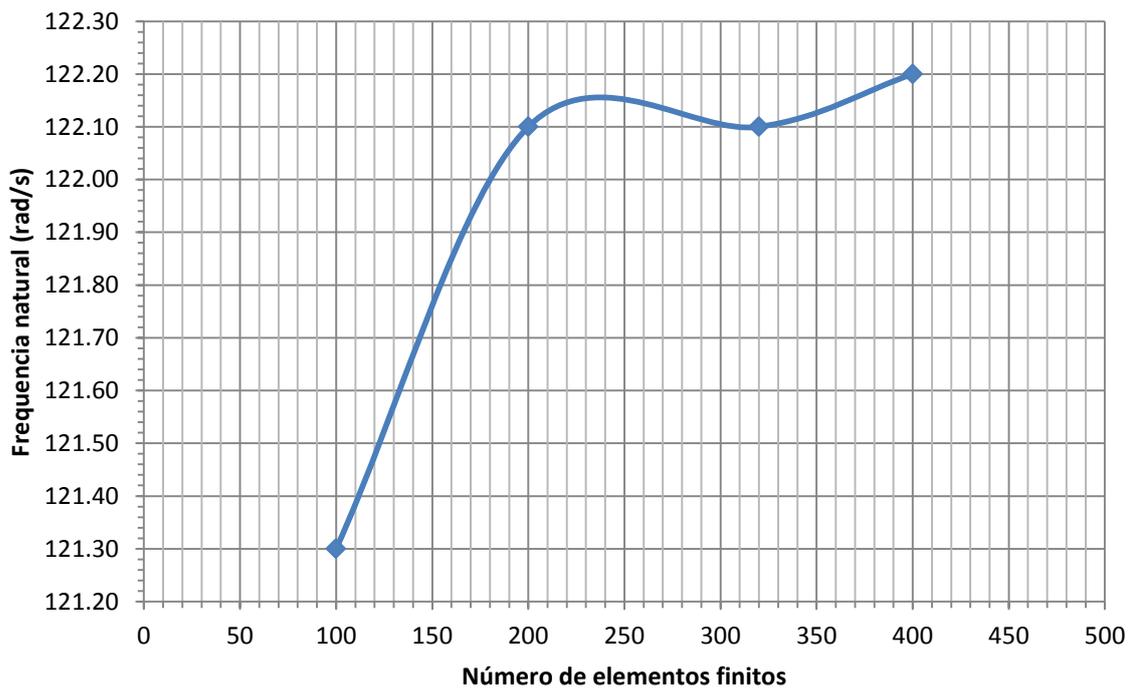


Gráfico 61- Primeira frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

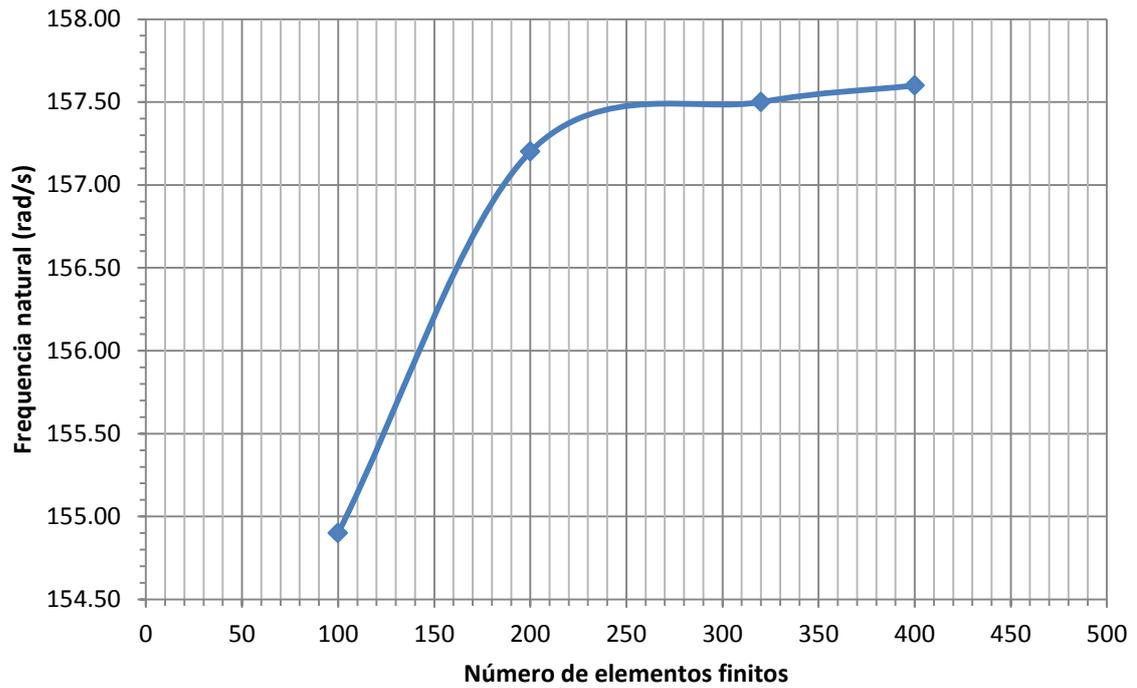


Gráfico 62- Segunda frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

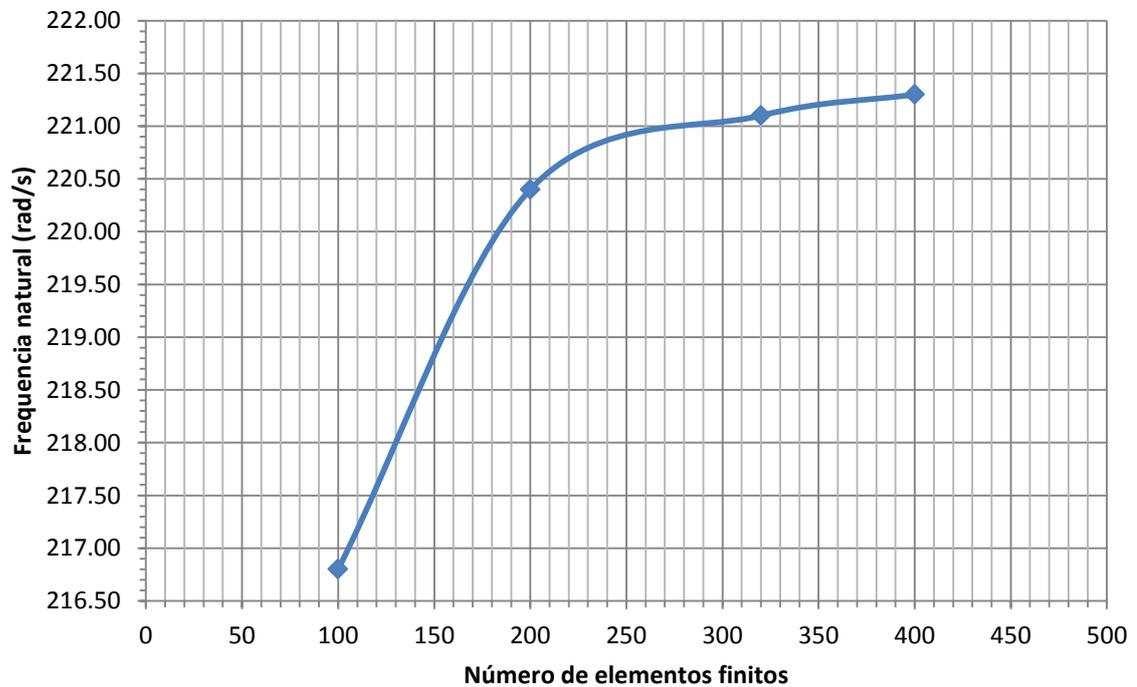


Gráfico 63- Terceira frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

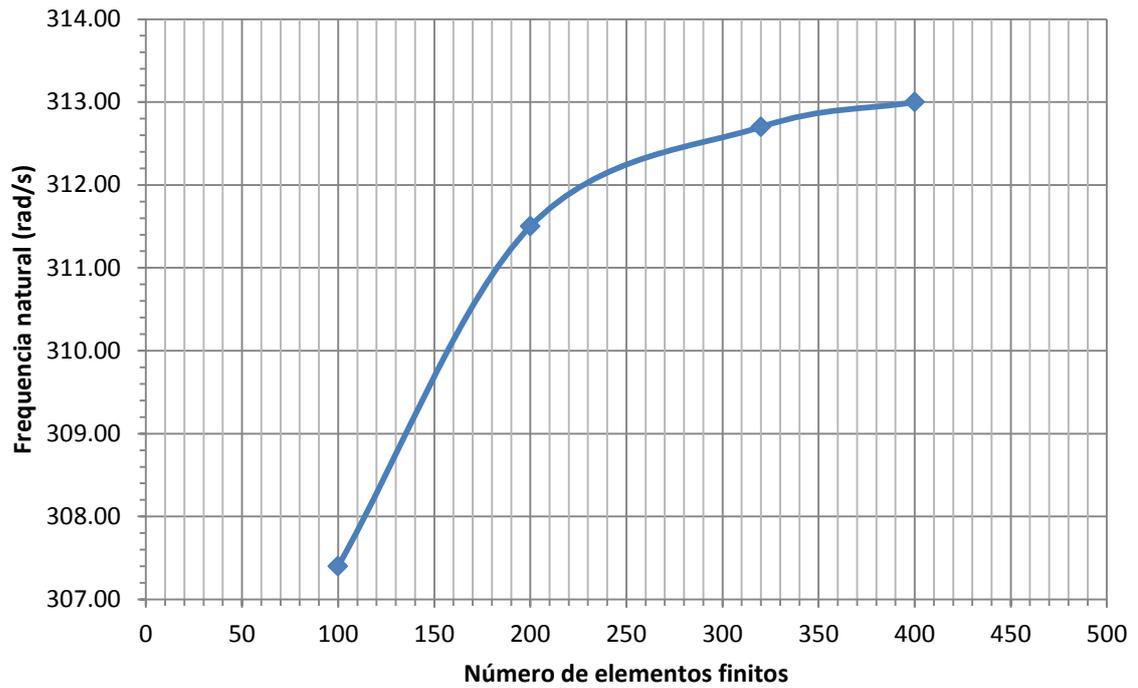


Gráfico 64- Quarta frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

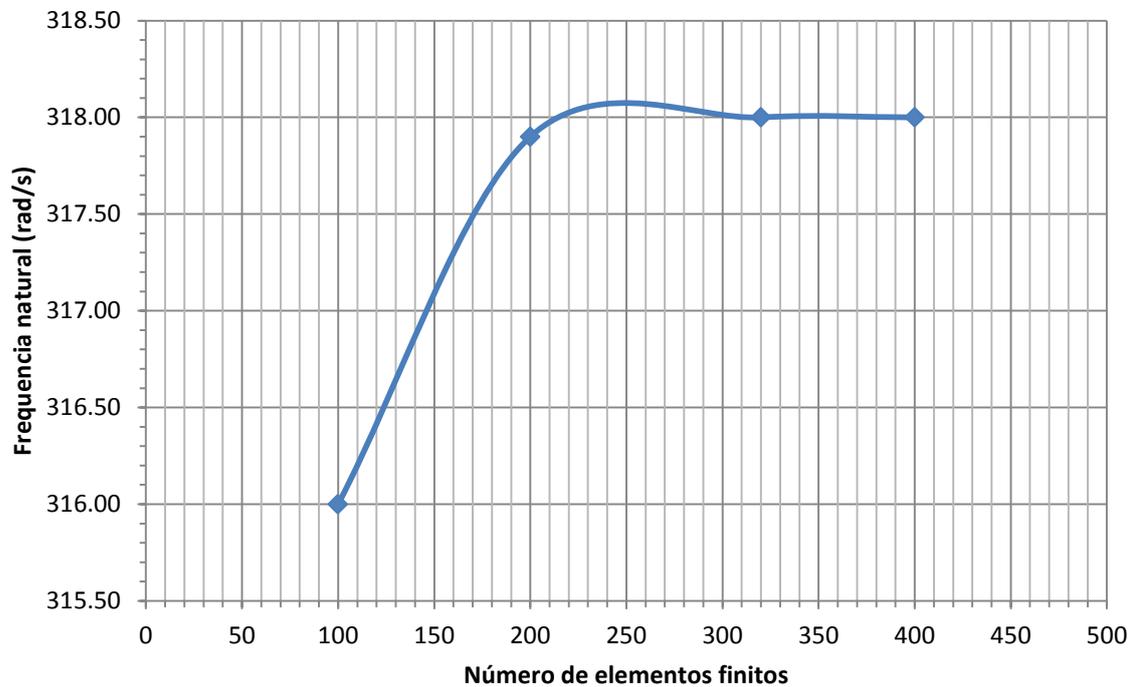


Gráfico 65- Quinta frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

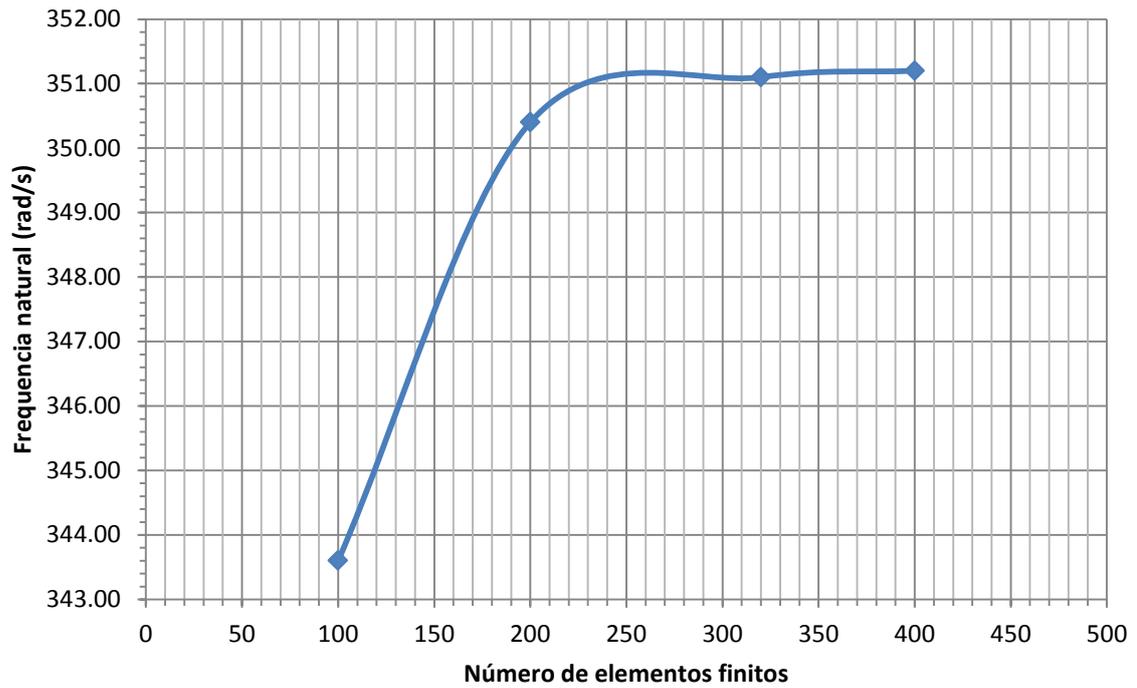


Gráfico 66- Sexta frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

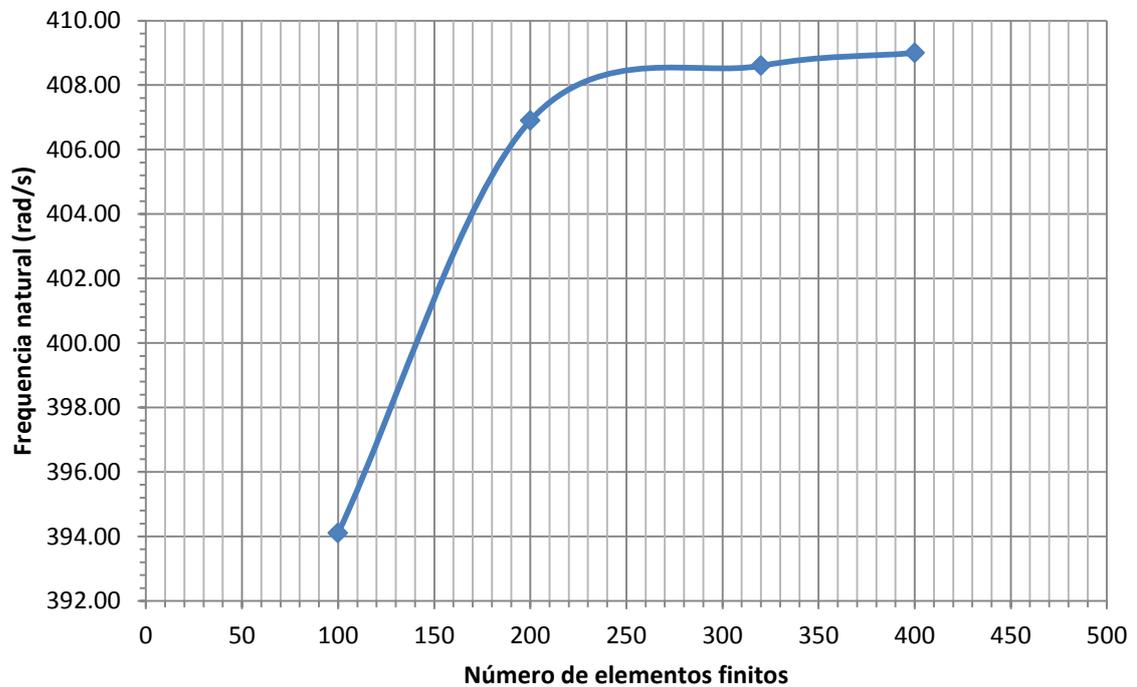


Gráfico 67- Sétima frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

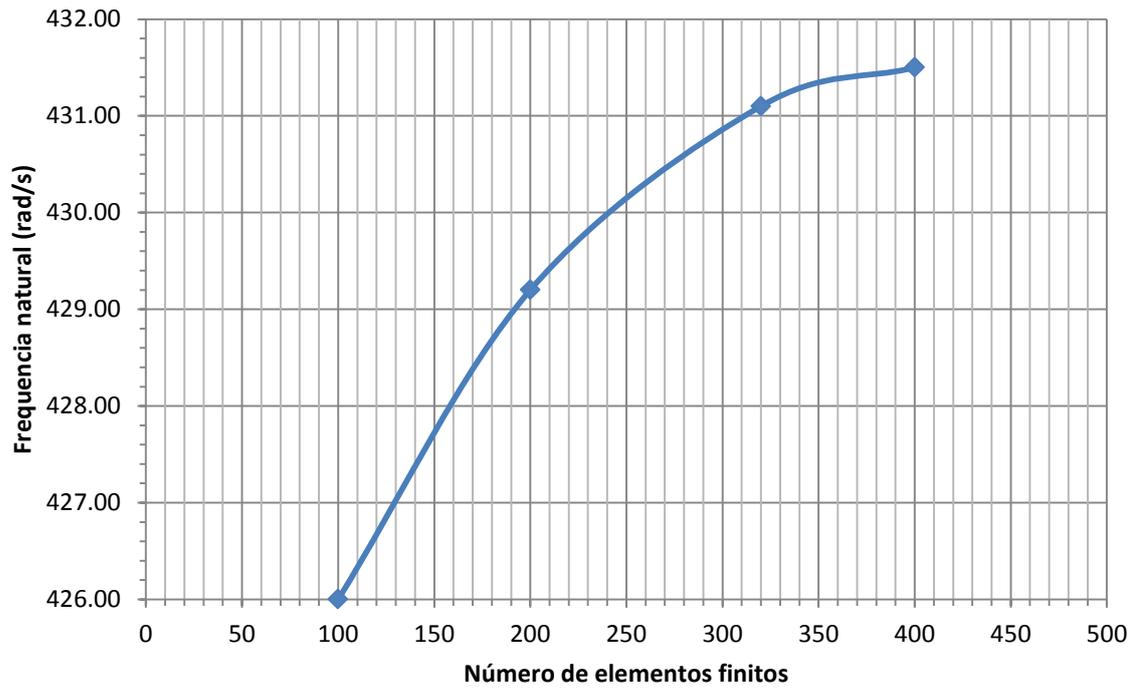


Gráfico 68- Oitava frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

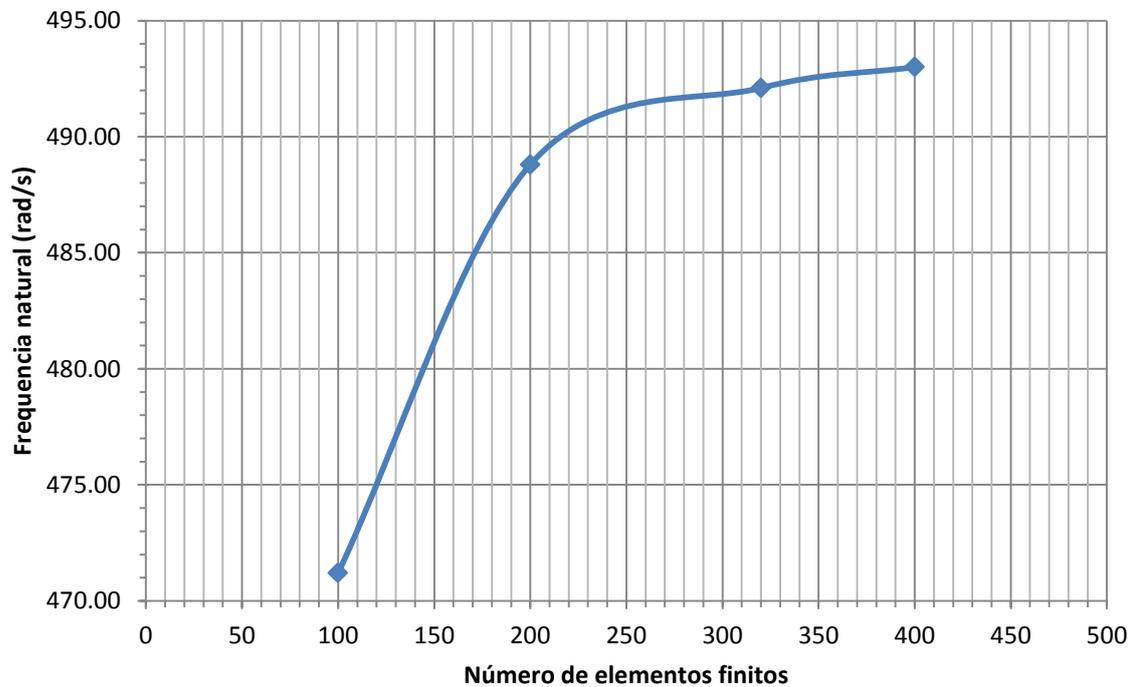


Gráfico 69- Nona frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

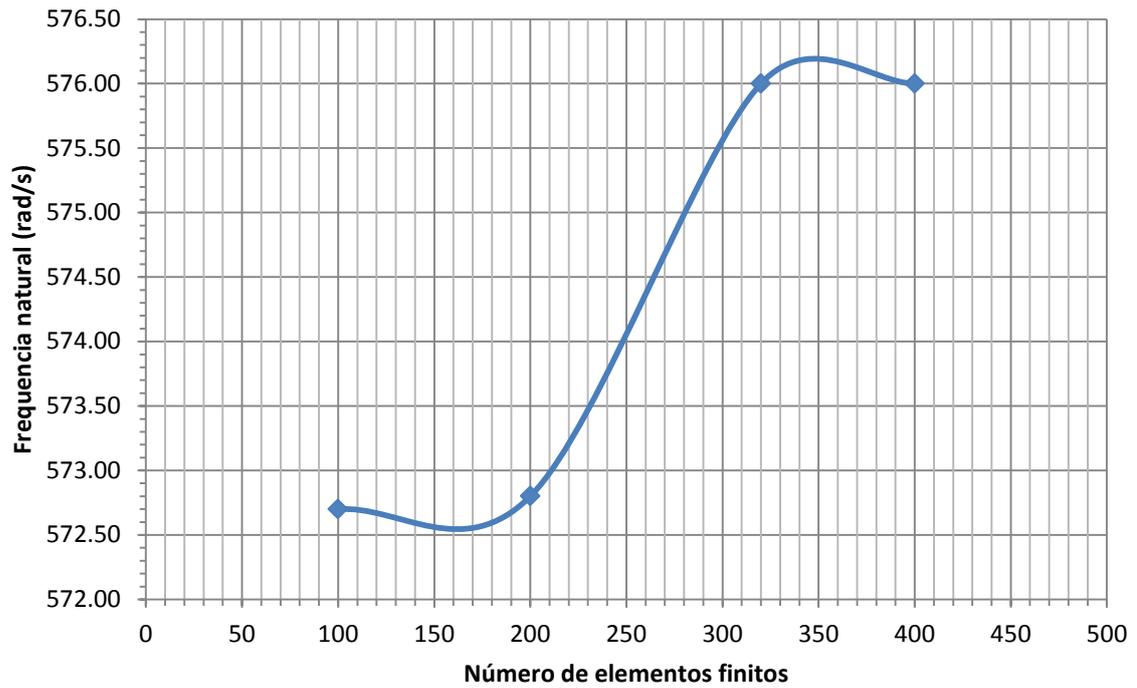


Gráfico 70- Décima frequência natural de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

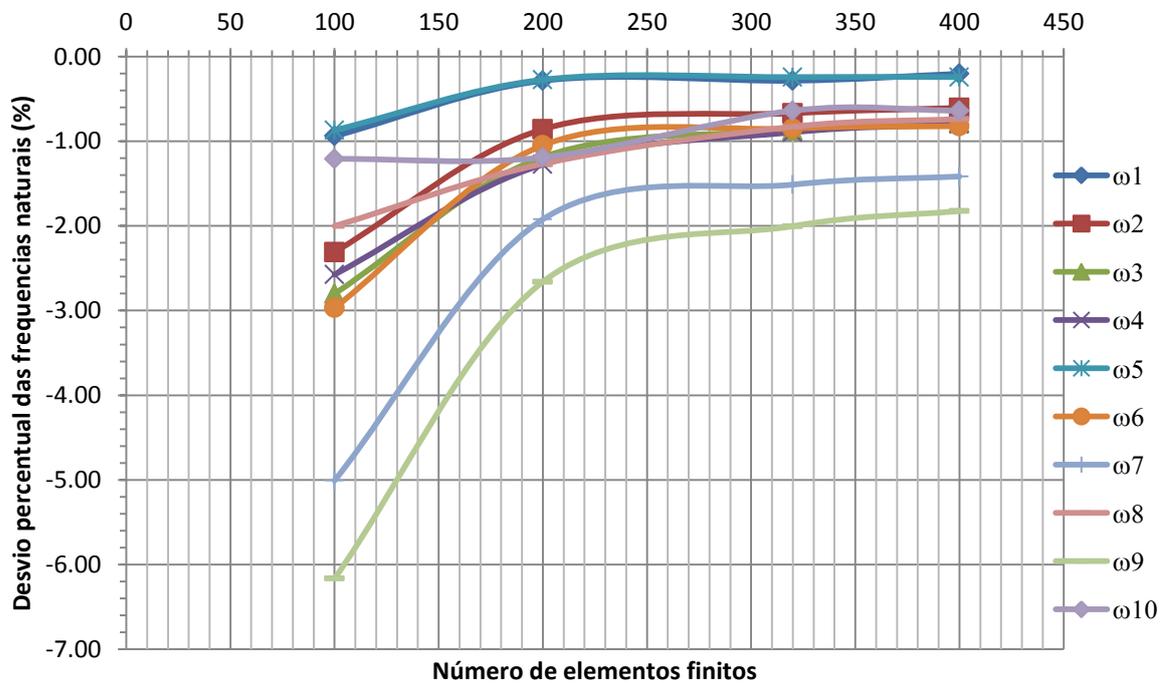


Gráfico 71- Desvio percentual das dez primeiras frequências naturais de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

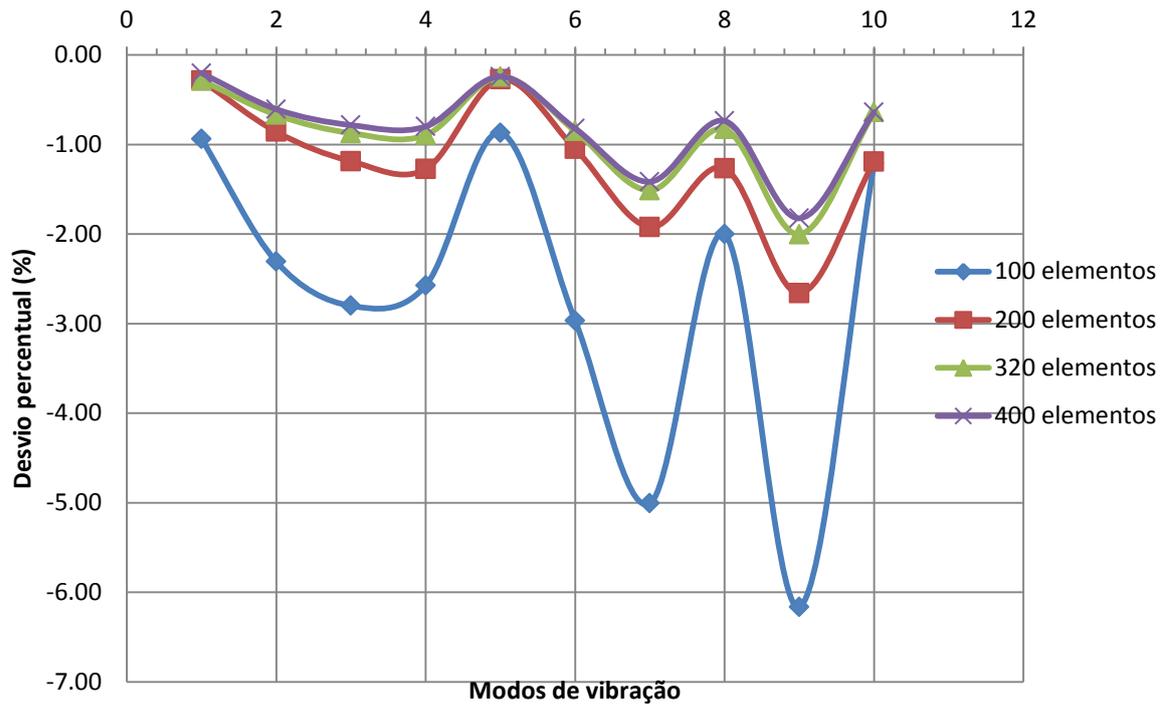


Gráfico 72- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

A seguir são apresentados os gráficos das nove primeiras frequências naturais de uma placa retangular de lados 0,8 m e 0,16 m com espessura 0,0032m (aproximadamente 1/8") de aço SAE 1020 (massa específica 7850 kg/m³, módulo de elasticidade 210 GPa e coeficiente de Poisson 0,333333), (Figura 17) com as condições de contorno de engastada/ livre/ engastada/ livre. A tabela 9 apresenta os valores das frequências naturais analíticas disponíveis na literatura Leissa (1969).

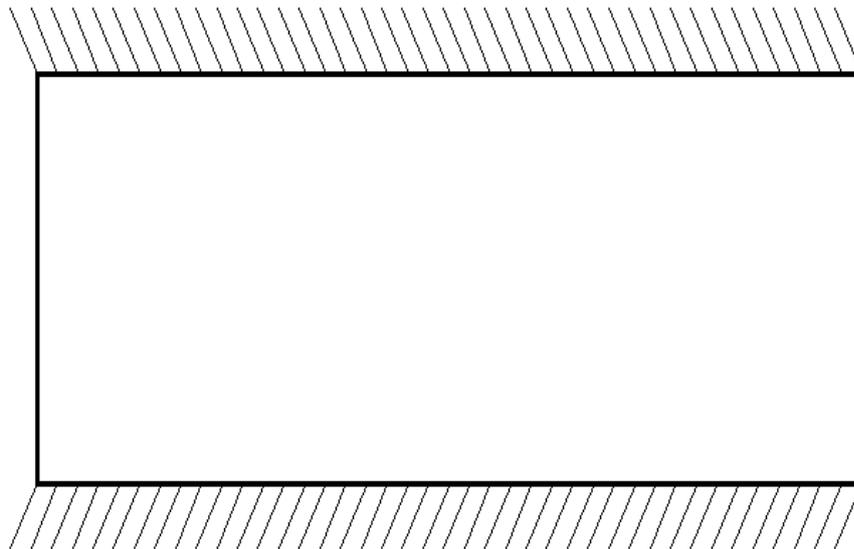


Figura 21- Placa retangular engastada/ livre/ engastada/ livre

Para uma placa retangular engastada em dois lados (de maior dimensão) e livre nos outros, o estudo das nove primeiras frequências naturais é apresentado nos gráficos de 73 a 81. Nota-se que todas as frequências apresentam o mesmo comportamento com relação ao aumento da quantidade de elementos finitos.

O gráfico 82 fornece os erros percentuais. Os desvios comparados, com os dados da literatura, ficaram menores que 2% para as cinco primeiras frequências naturais. As demais frequências apresentaram maiores desvios entre 10% e 50%.

Os desvios das nove primeiras frequências de vibração são vistos no gráfico 83. Nota-se uma coincidência entre as curvas traçadas para 200, 320 e 400 elementos finitos e um valor menor que 2% para as cinco primeiras frequências naturais.

Tabela 9- Frequências naturais analíticas para retangular (engastada/ engastada/ engastada/ engastada)

Condição de contorno			engastada/ livre/ engastada/ livre					
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$	$\omega_7(\text{rad/s})$	$\omega_8(\text{rad/s})$	$\omega_{10}(\text{rad/s})$
4362,93	4402,06	4519,45	4734,66	5086,83	6143,32	7825,89	11973,61	12247,51

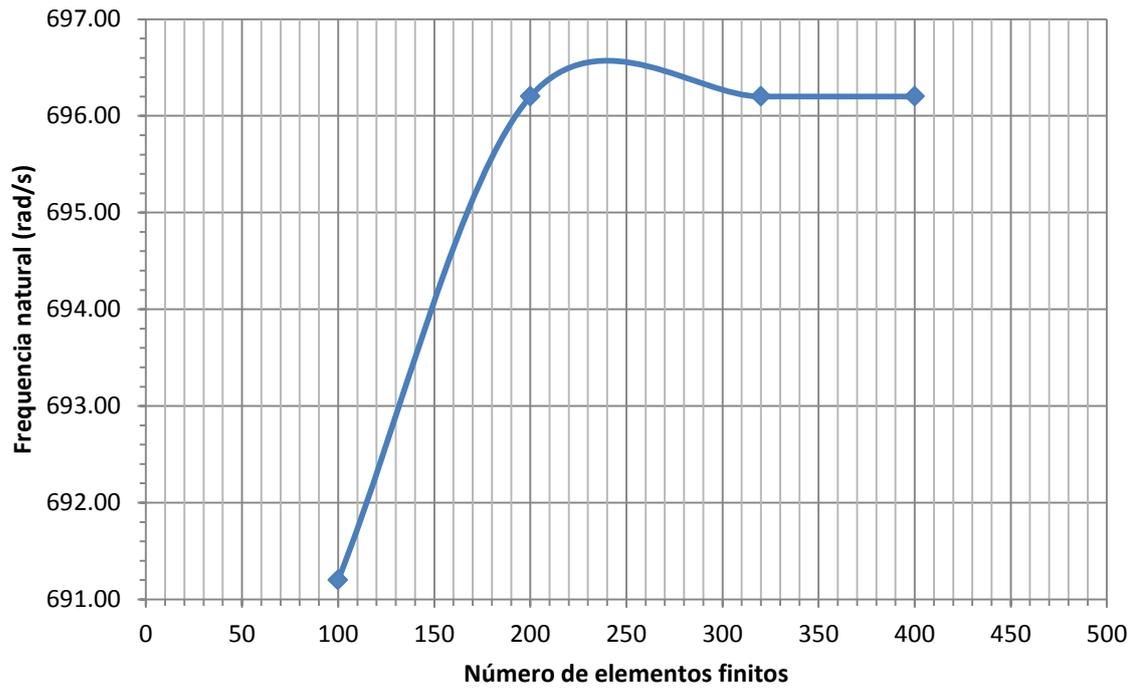


Gráfico 73- Primeira frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)

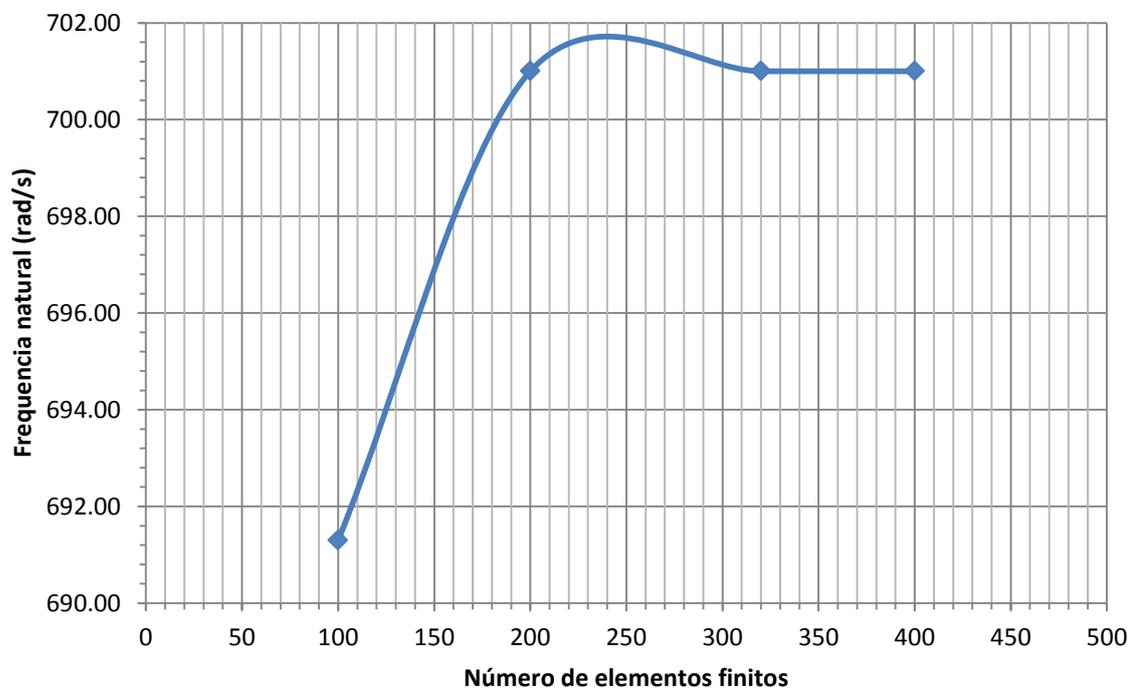


Gráfico 74- Segunda frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)

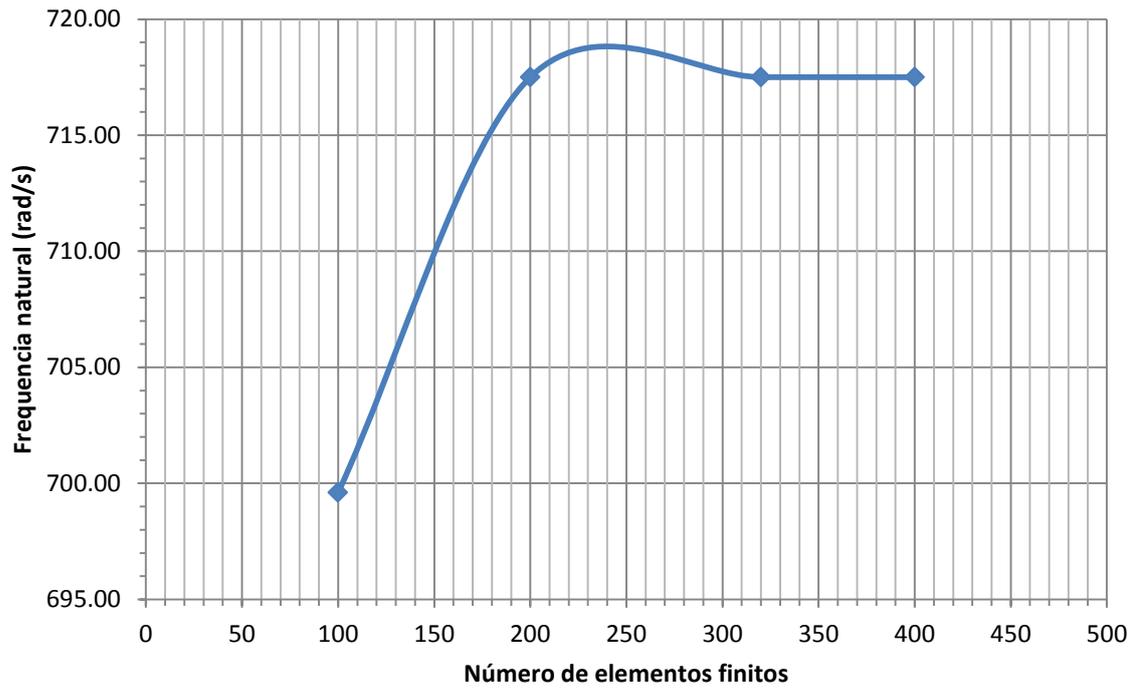


Gráfico 75- Terceira frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)

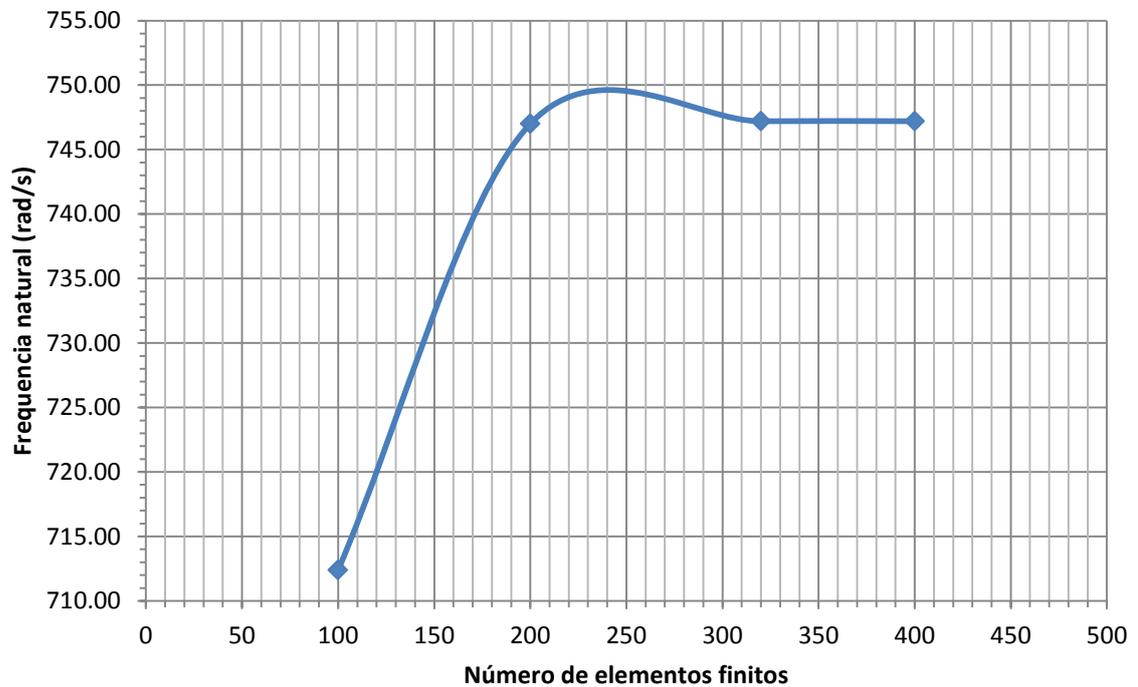


Gráfico 76- Quarta frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)

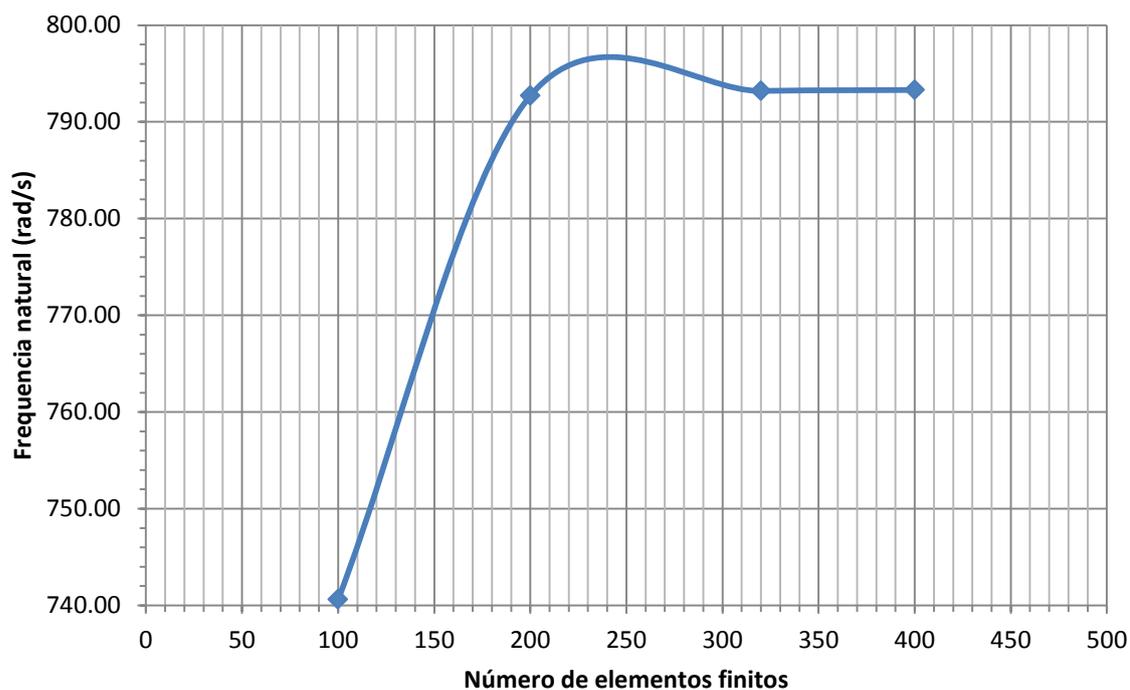


Gráfico 77- Quinta frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)

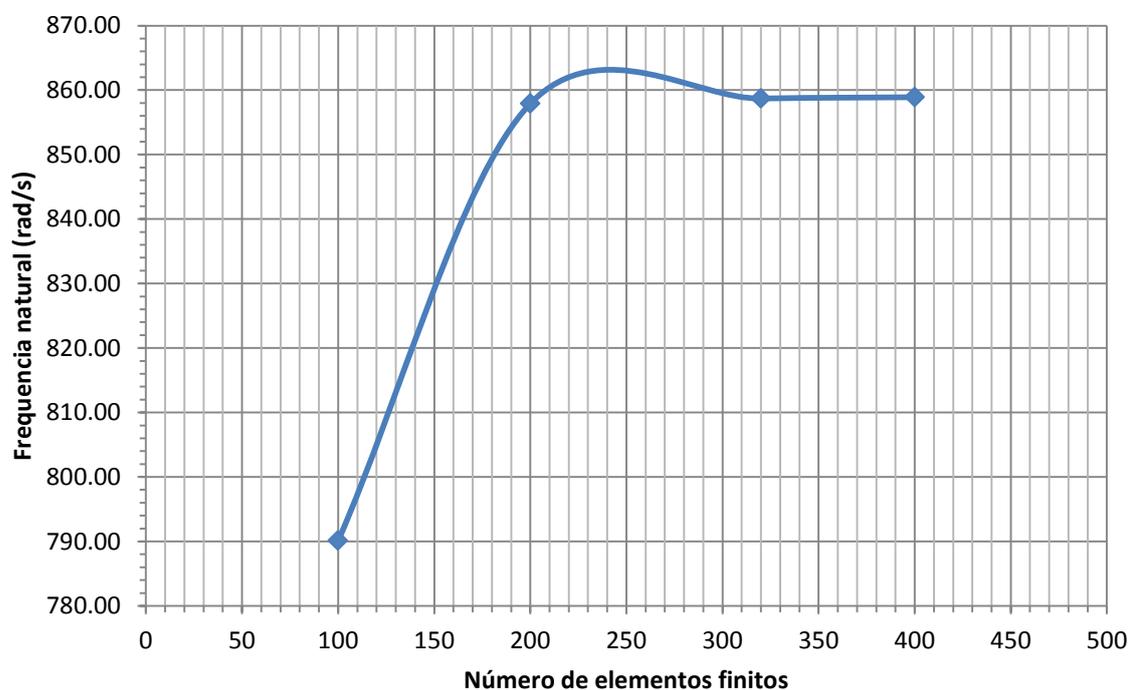


Gráfico 78- Sexta frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)

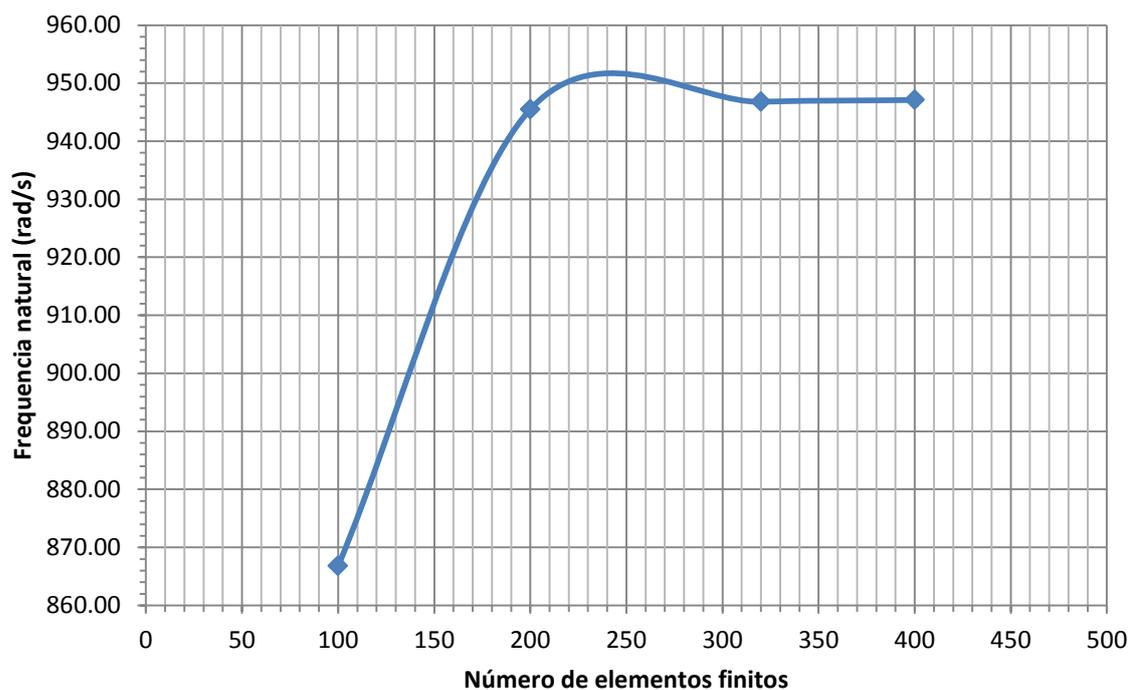


Gráfico 79- Sétima frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)

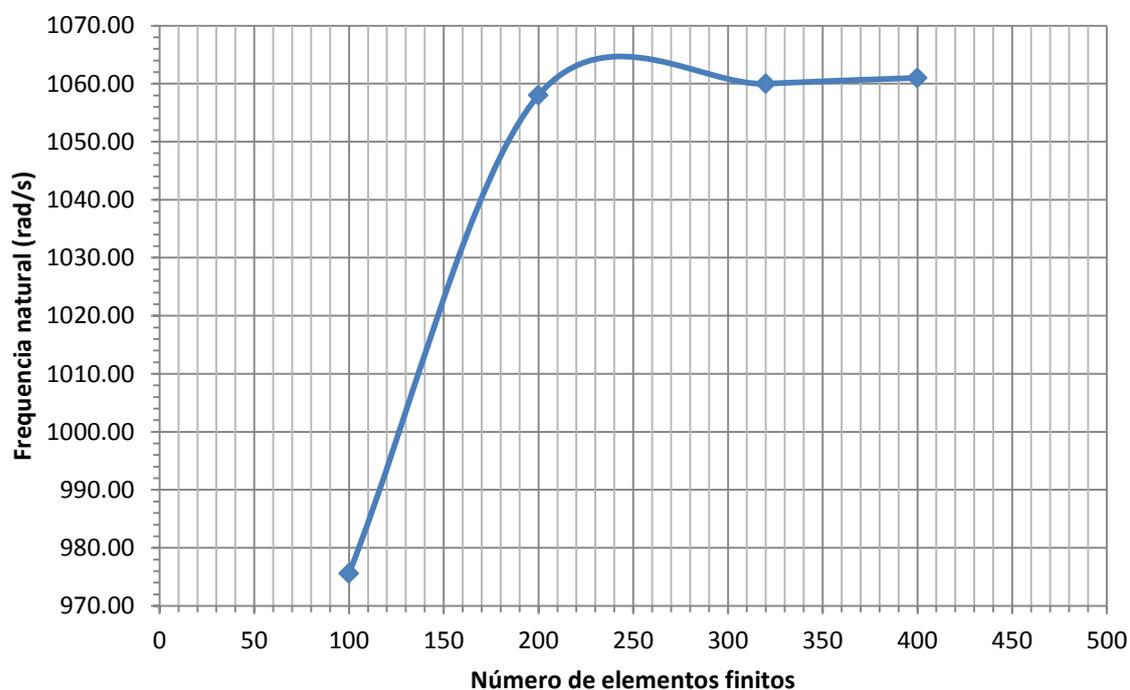


Gráfico 80- Oitava frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)

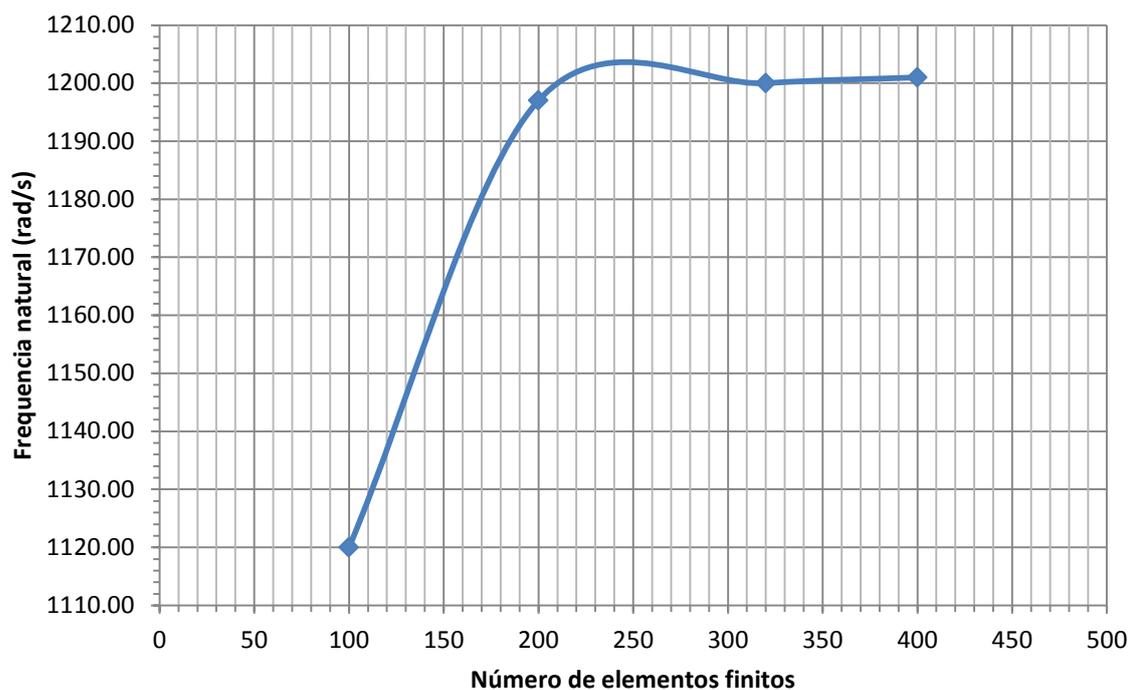


Gráfico 81- Nona frequência natural de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)

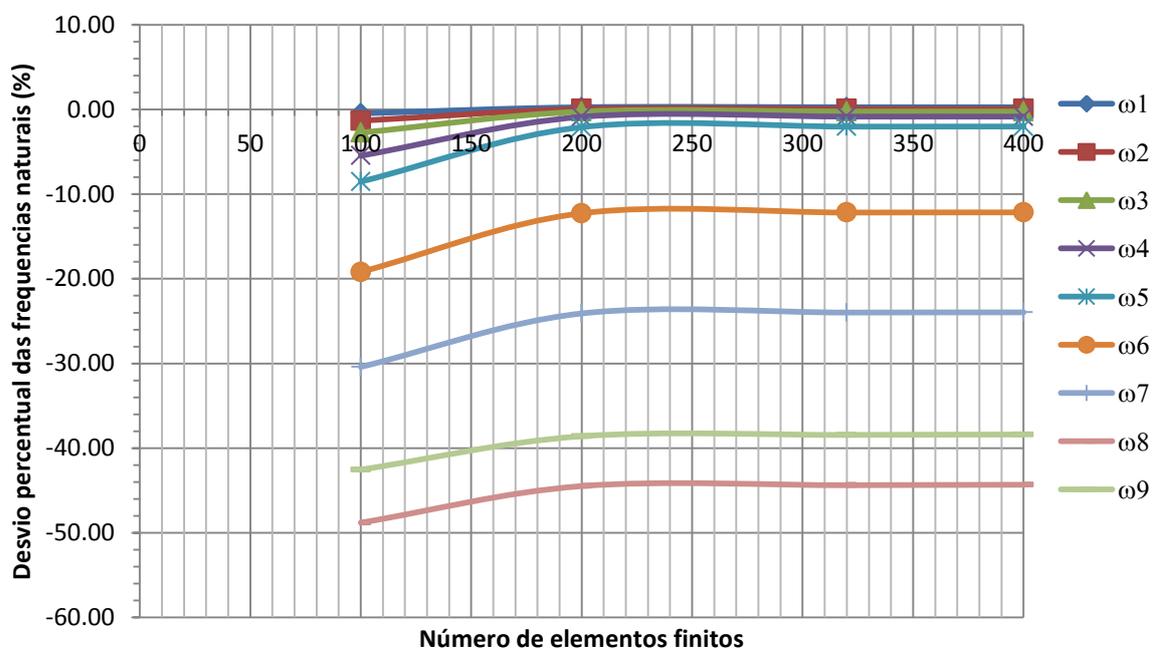


Gráfico 82- Desvio percentual das nove primeiras frequências naturais de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)

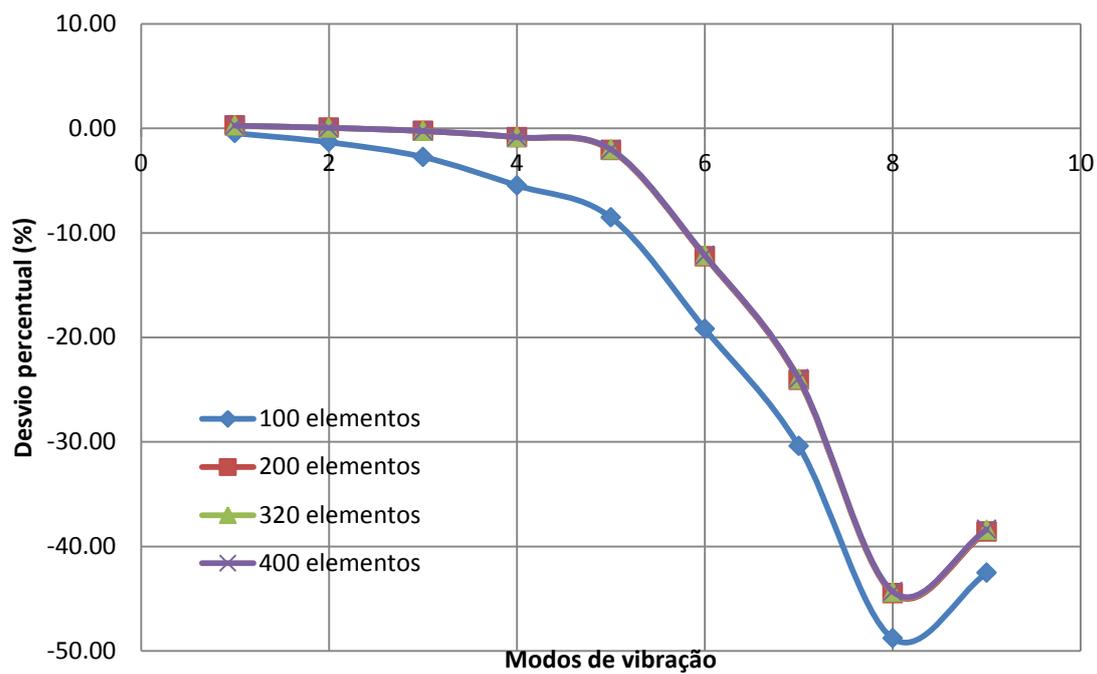


Gráfico 83- Desvio percentual nos modos de vibração de uma placa retangular (engastada/ livre/ engastada/ livre)

Capítulo 5

RESULTADOS

Esse capítulo traz os resultados das seis primeiras frequências naturais da placa circular apresentada no capítulo anterior, porém com condições de contorno diferentes das que foram comparadas com a literatura engastada na borda/ engastada no centro (Figura 18) e também apresenta os resultados para uma placa de diâmetro externo 1,2 m com furo quadrado interno de 0,30 m e espessura 0,0032 m (aproximadamente 1/8”) de aço SAE 1020 (massa específica 7850 kg/m³, módulo de elasticidade 210 GPa e coeficiente de Poisson 0,333333) considerando diferentes condições de contorno .

A tabela 10 apresenta as seis primeiras frequências naturais e as figuras (19 a 22) mostram os quatro primeiros modos de vibração da placa da Figura 18.

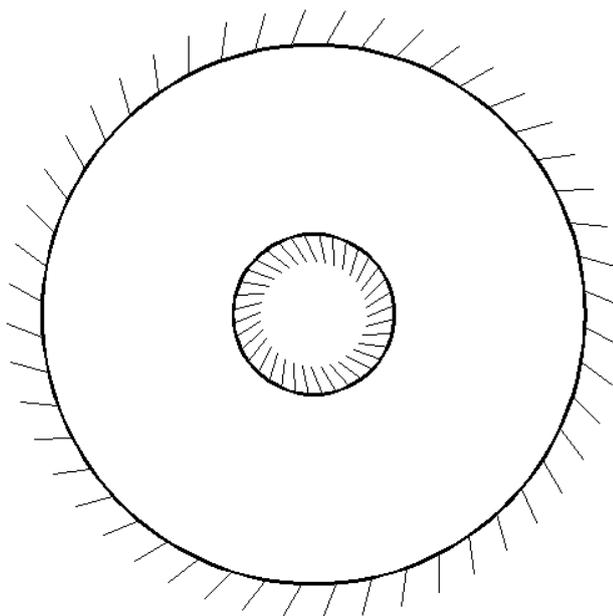


Figura 22- Placa anelar engastada na borda externa e engastada no centro

Tabela 10- Frequências naturais para placa anelar (engastada na borda e engastada no centro)

Condição de contorno		Engastada na borda/ Engastada no centro			
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$
644,0	654,5	696,6	793,9	960,4	1190,0

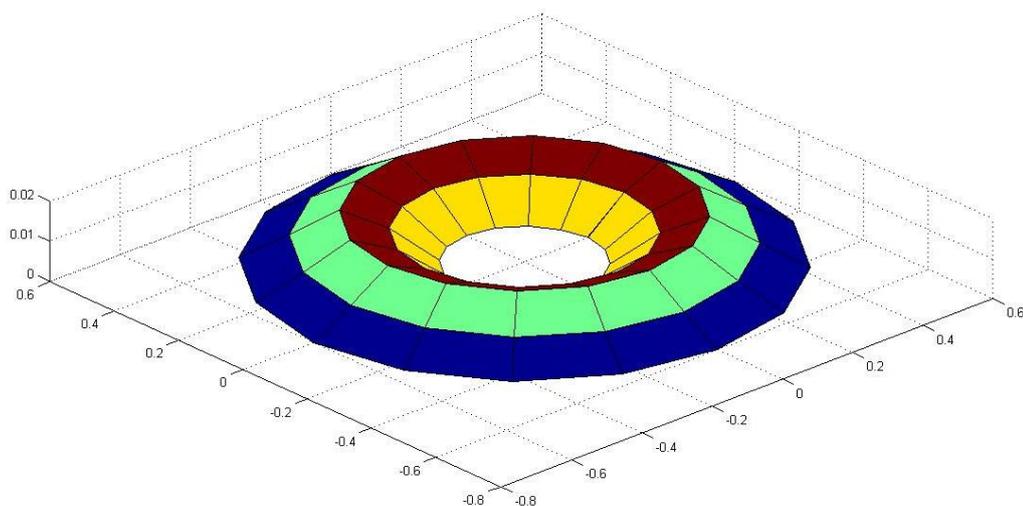


Figura 23- Primeiro modo de vibração (placa anelar engastada/ engastada)

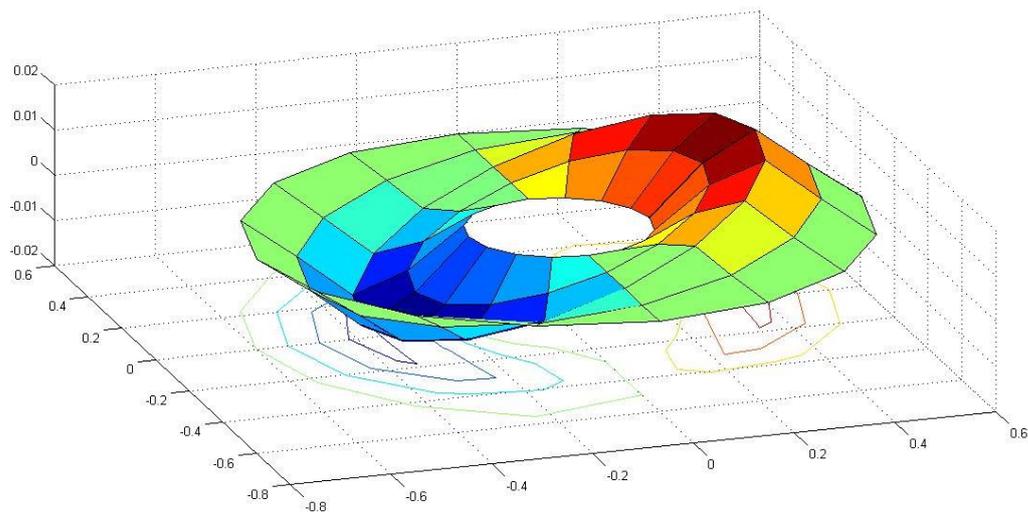


Figura 24- Segundo modo de vibração (placa anelar engastada/ engastada)

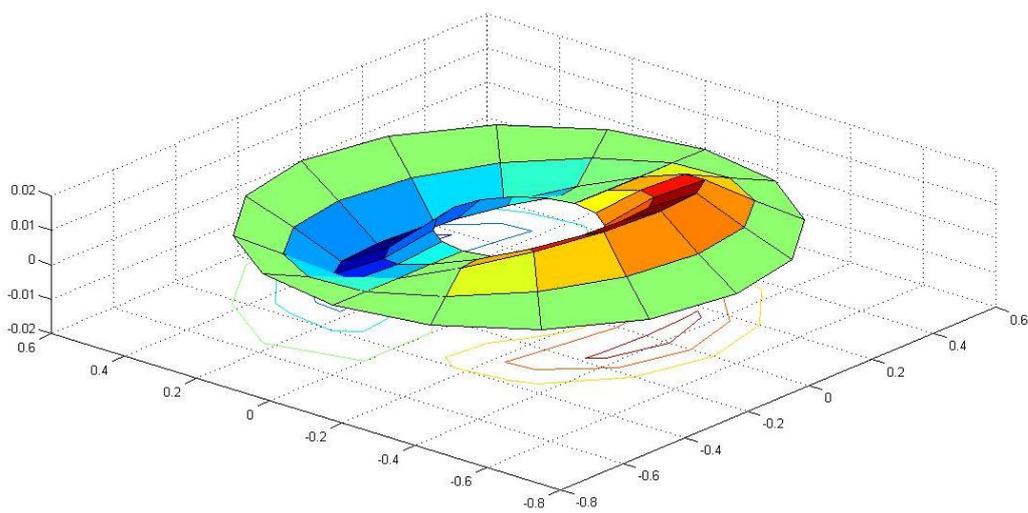


Figura 25- Terceiro modo de vibração (placa anelar engastada/ engastada)

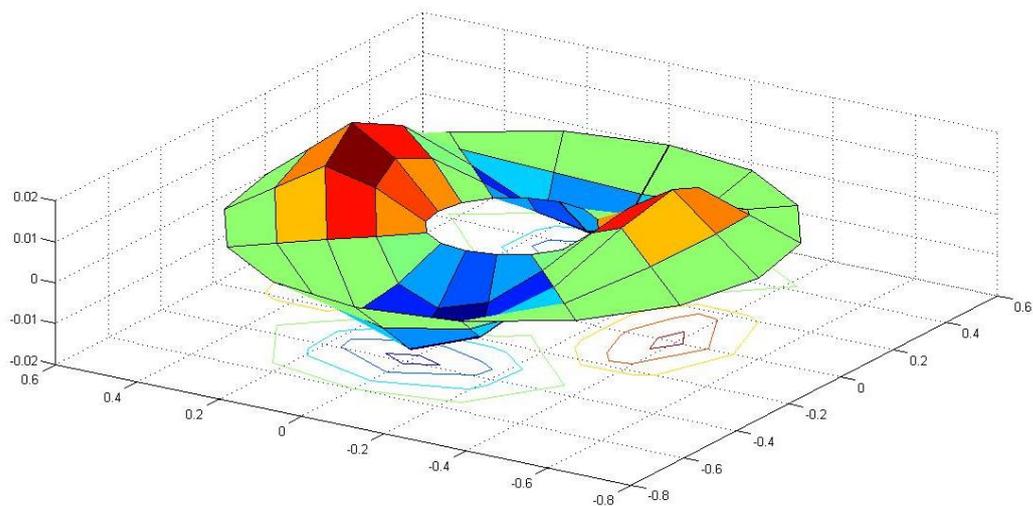


Figura 26- Quarto modo de vibração (placa anelar engastada/ engastada)

Para uma placa circular com furo quadrado considerando a condição de contorno de engastada na borda/ engastada no centro (Figura 23), a tabela 11 traz as seis primeiras frequências naturais e as figuras (24 a 27) apresentam os quatro primeiros modos de vibração da placa nessa condição.

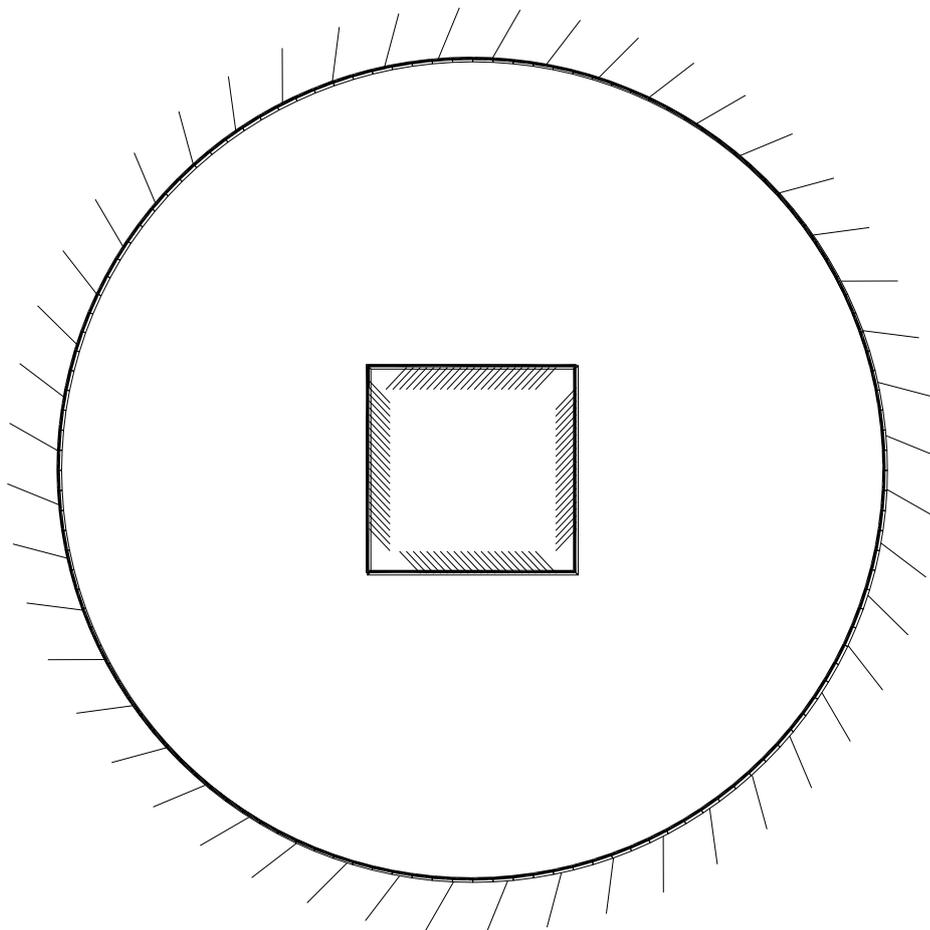


Figura 27- Placa circular com furo quadrado engastada na borda externa e engastada no centro

Tabela 11 - Frequências naturais para placa circular com furo quadrado (engastada na borda e engastada no centro)

Condição de contorno		Engastada na borda/ Engastada no centro			
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$
645,5	650,0	659,1	742,1	806,7	955,2

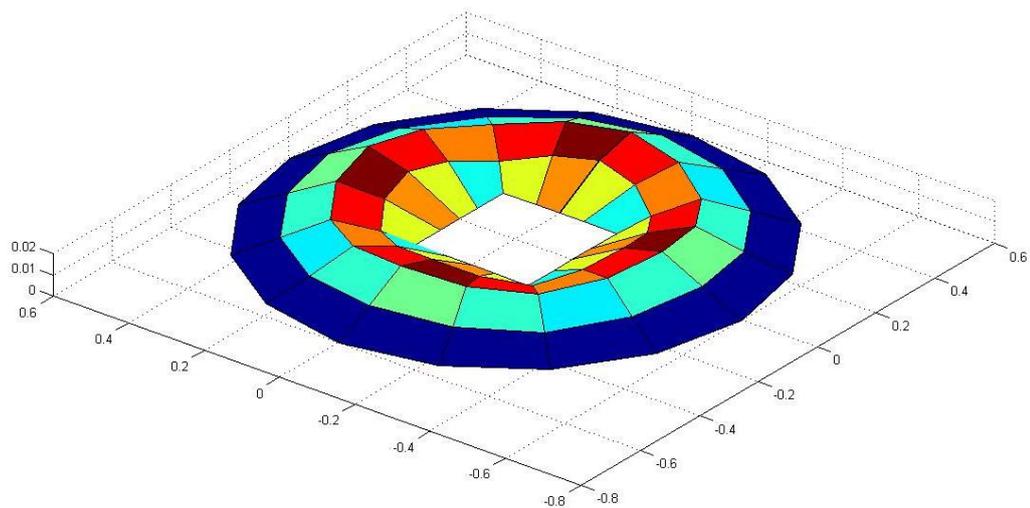


Figura 28- Primeiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/engastada)

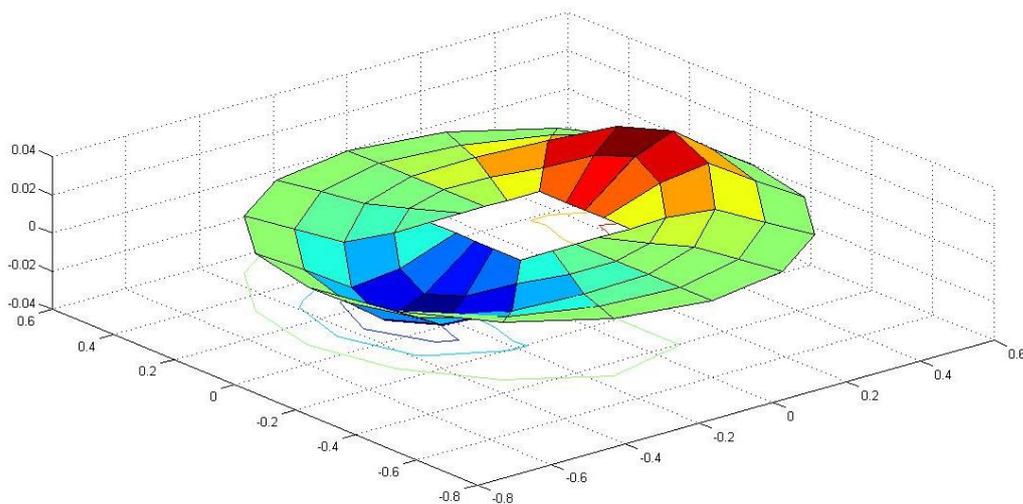


Figura 29- Segundo modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/engastada)

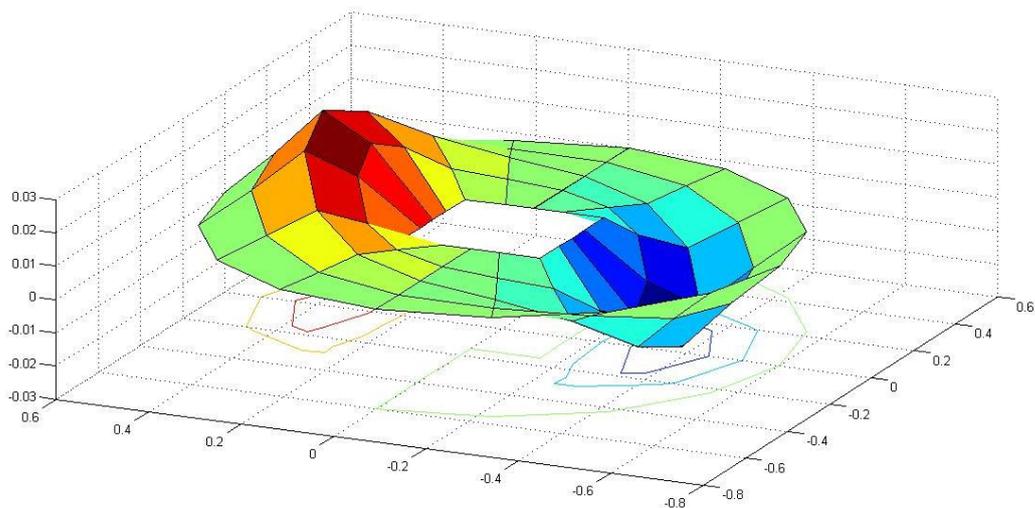


Figura 30- Terceiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/engastada)

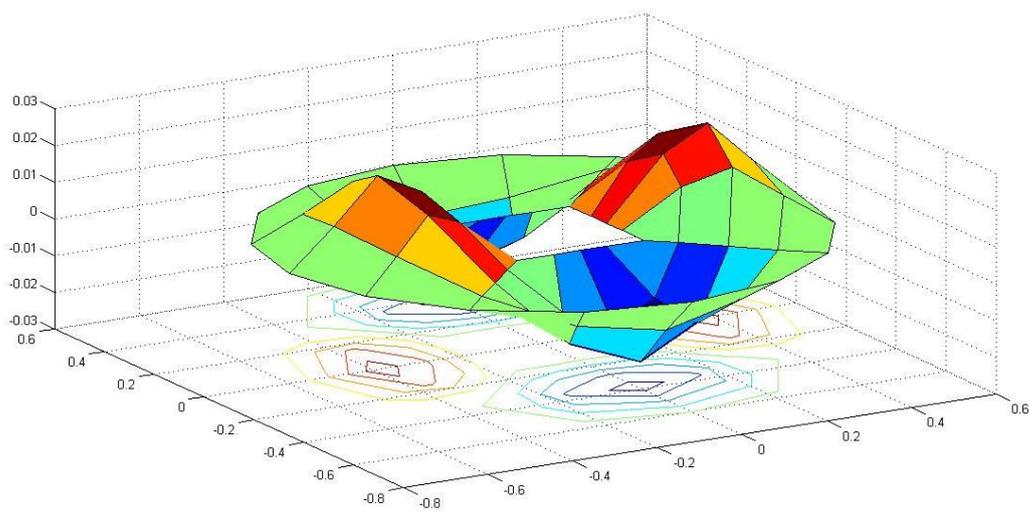


Figura 31- Quarto modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/engastada)

Para a mesma placa anterior considerando a condição de contorno de engastada na borda/ livre no centro (Figura 28), a tabela 12 apresenta as seis primeiras frequências naturais e as figuras (29 a 32) mostram os quatro primeiros modos de vibração da placa nessa condição.

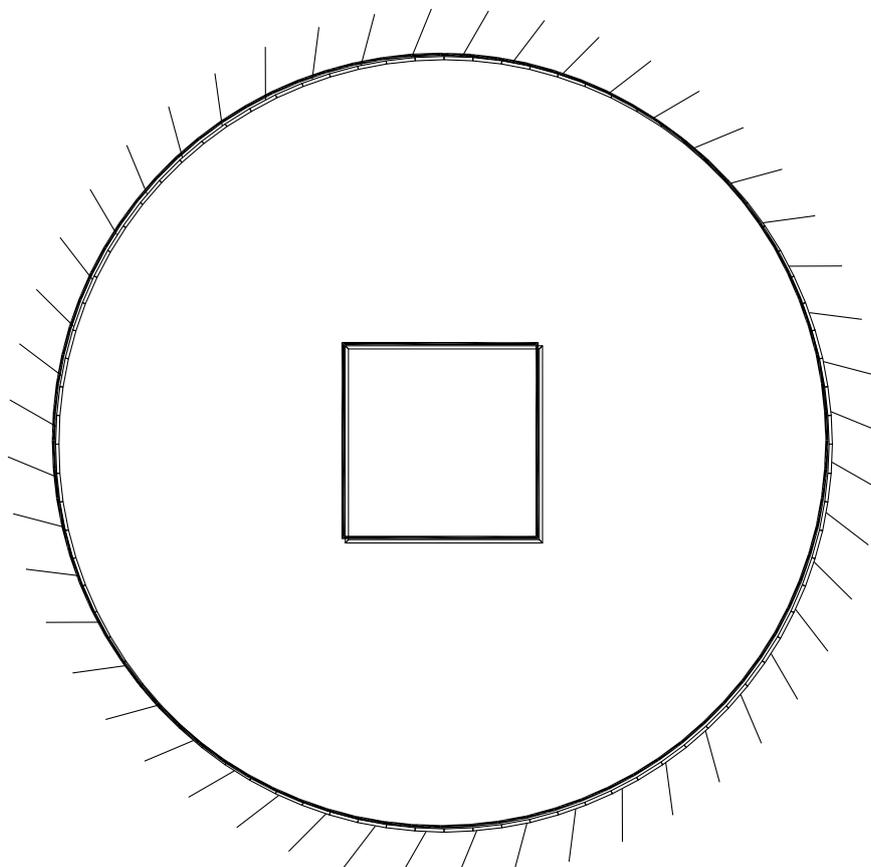


Figura 32- Placa circular com furo quadrado engastada na borda externa e livre no centro

Tabela 12 - Frequências naturais para placa circular com furo quadrado (engastada na borda e livre no centro)

Condição de contorno		Engastada na borda/ livre no centro			
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$
155,6	271,3	449,2	456,0	667,9	694,9

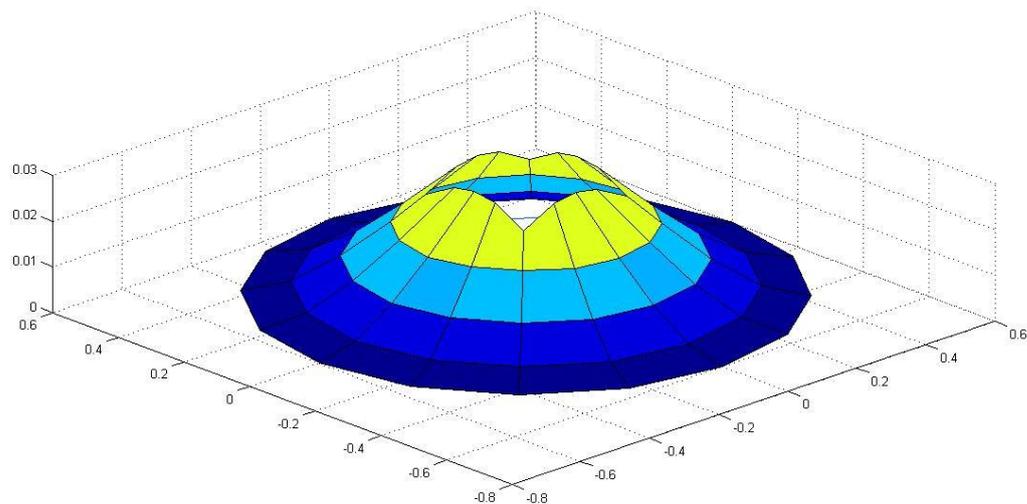


Figura 33- Primeiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/livre)

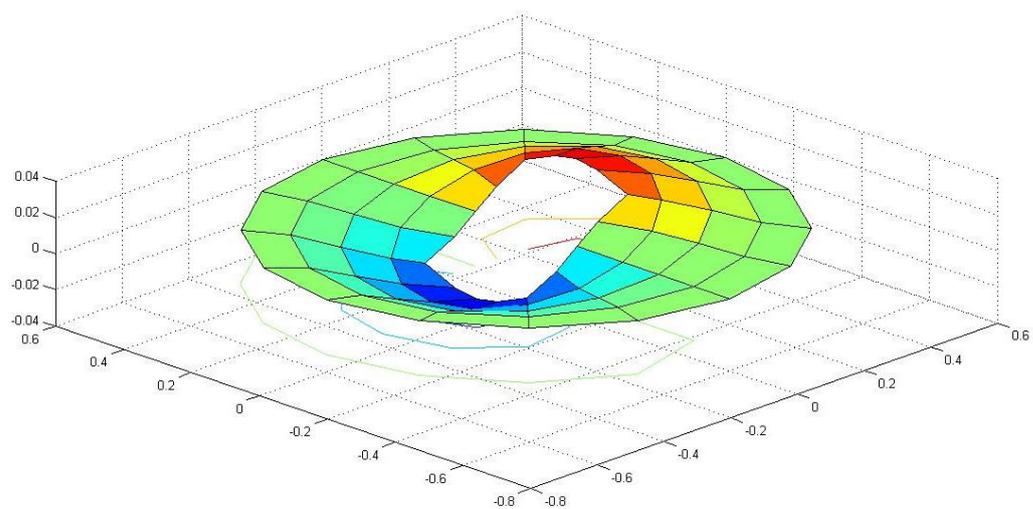


Figura 34- Segundo modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/livre)

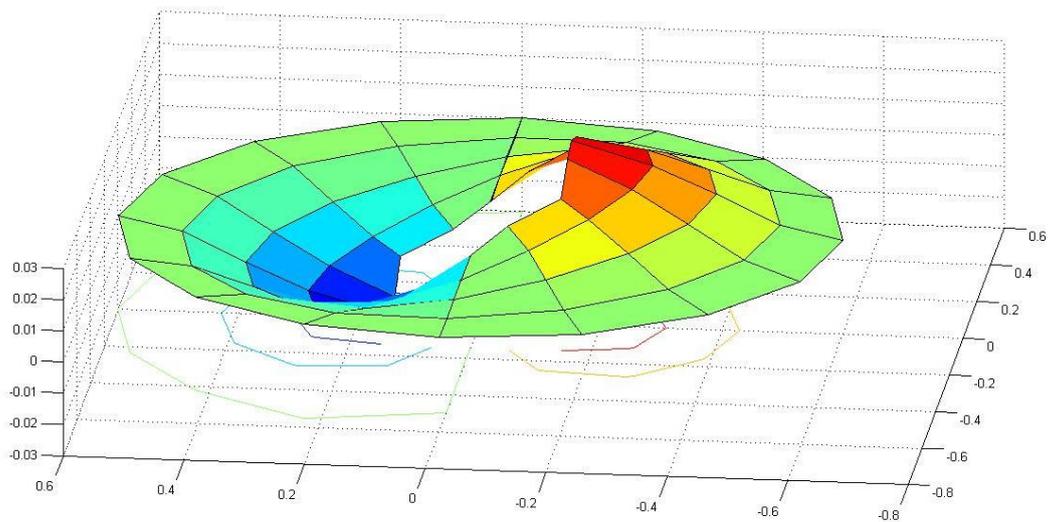


Figura 35- Terceiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/livre)

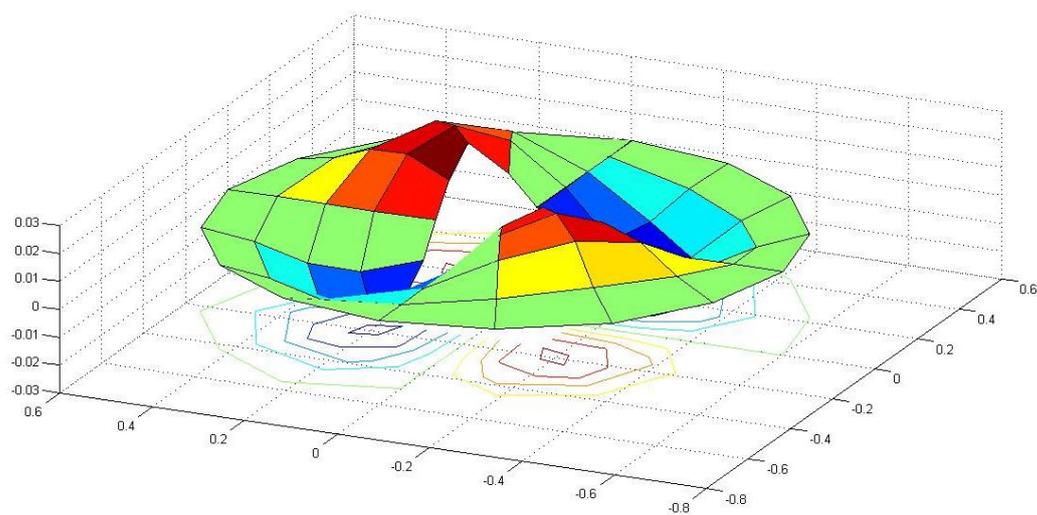


Figura 36- Quarto modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/livre)

Para a mesma placa anterior considerando a condição de contorno de engastada na borda/ simplesmente apoiada no centro (Figura 33), a tabela 13 traz as seis primeiras frequências naturais e as figuras (34 a 37) mostram os quatro primeiros modos de vibração da placa nessa condição.

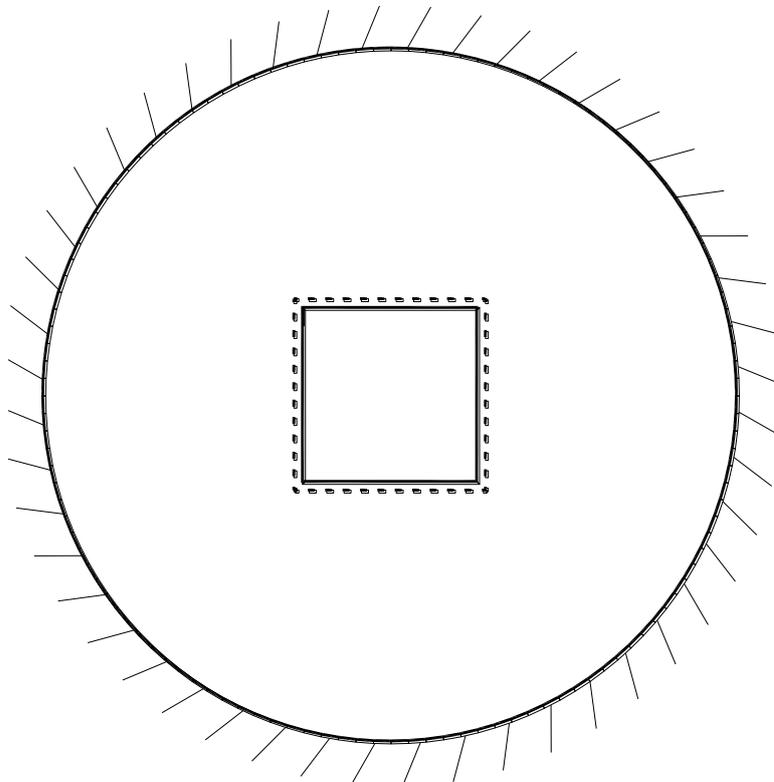


Figura 37- Placa circular com furo quadrado engastada na borda externa e simplesmente apoiada no centro

Tabela 13 - Frequências naturais para placa circular com furo quadrado (engastada na borda e simplesmente apoiada no centro)

Condição de contorno		Engastada na borda/ simplesmente apoiada no centro			
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$
517,2	524,5	537,6	674,8	753,3	921,7

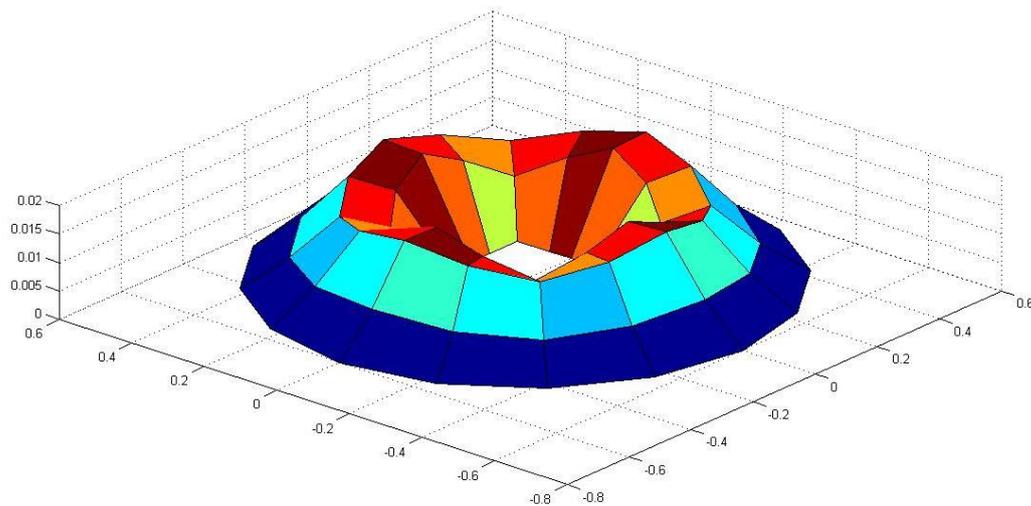


Figura 38- Primeiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ simplesmente apoiada)

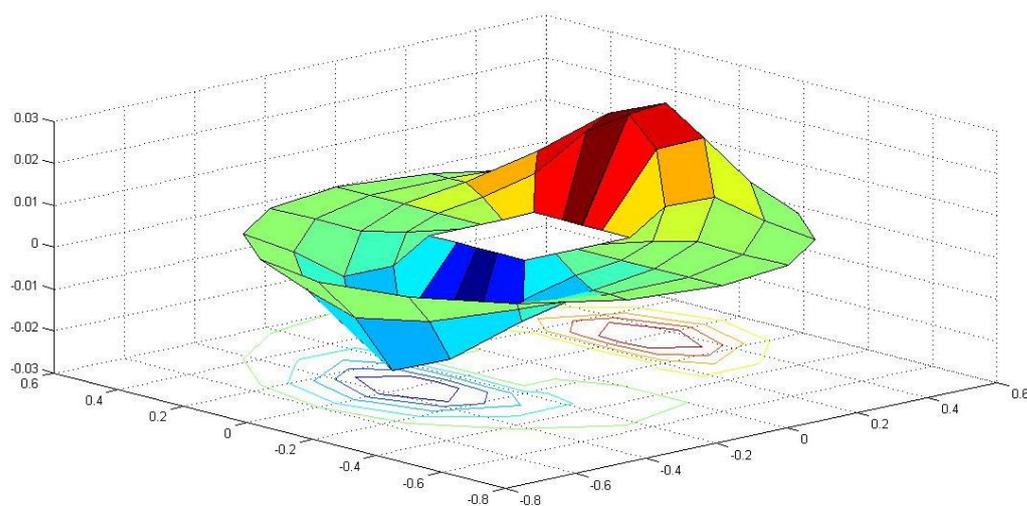


Figura 39- Segundo modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ simplesmente apoiada)

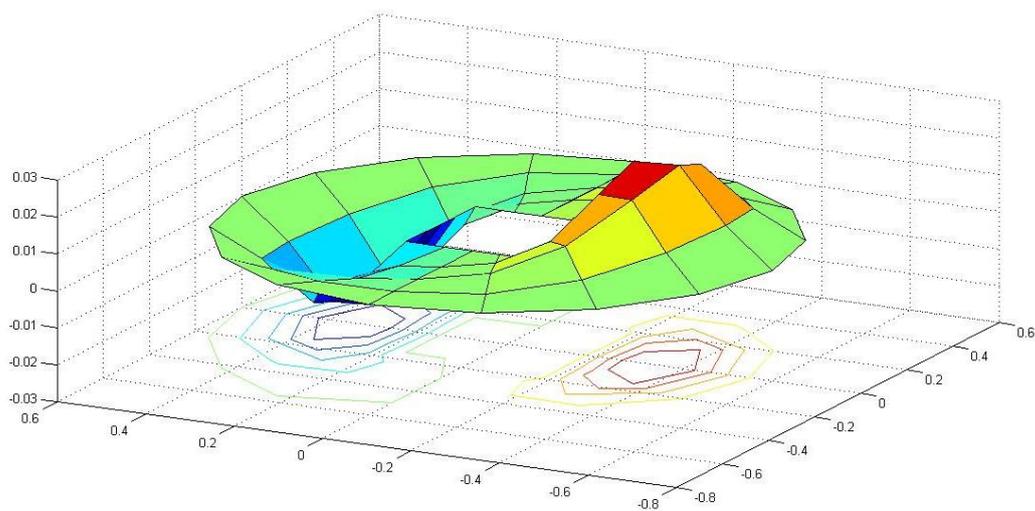


Figura 40- Terceiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ simplesmente apoiada)

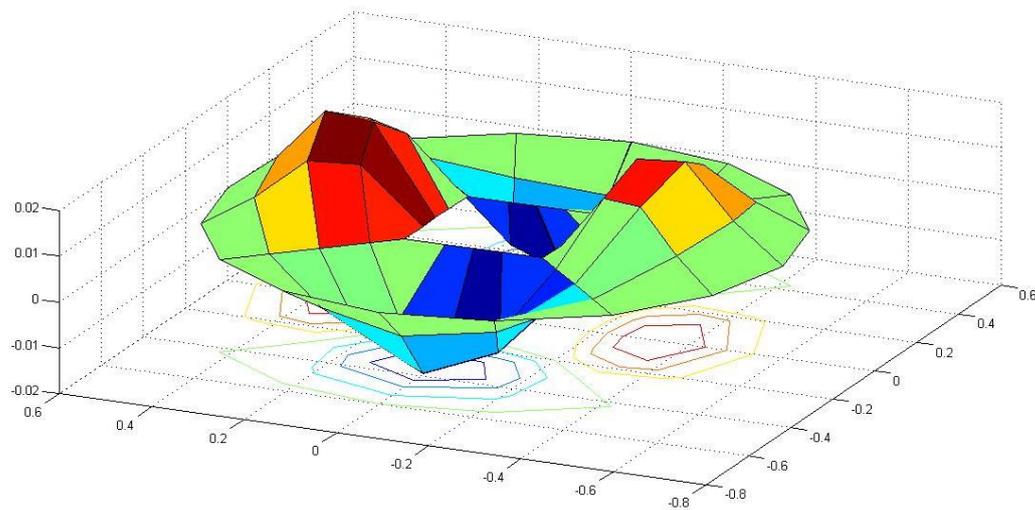


Figura 41- Quarto modo de vibração (placa circular com furo quadrado engastada/ simplesmente apoiada)

Para a mesma placa anterior considerando a condição de contorno de simplesmente apoiada na borda/ engastada no centro (Figura 38), a tabela 14 traz as seis primeiras frequências naturais e as figuras (39 a 42) mostram os quatro primeiros modos de vibração da placa nessa condição.

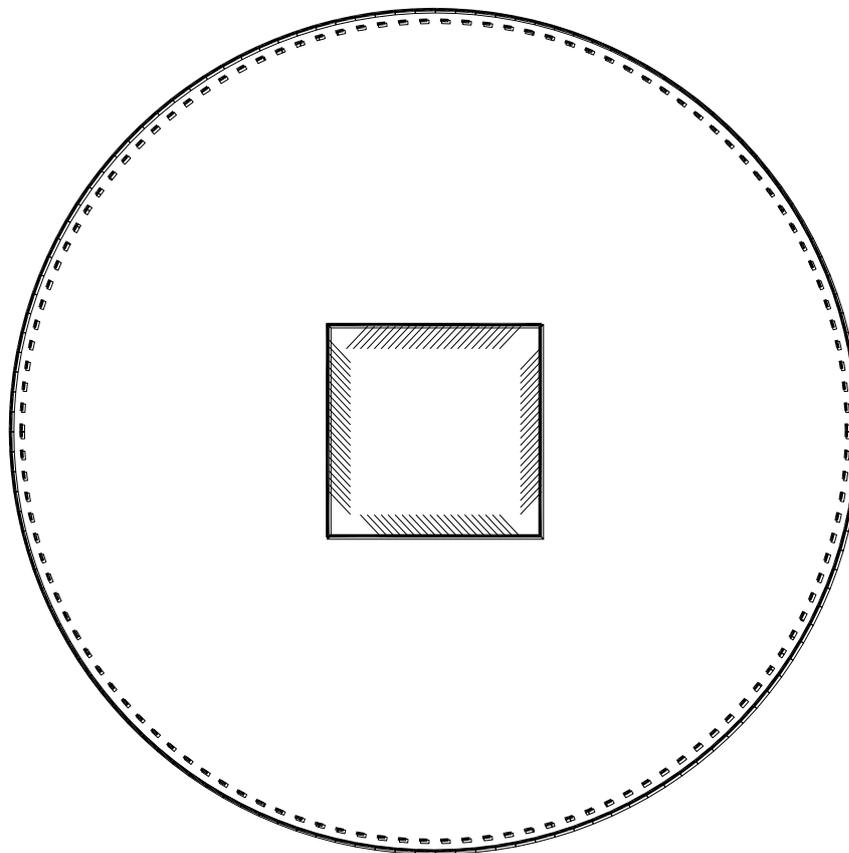


Figura 42- Placa circular com furo quadrado simplesmente apoiada na borda externa e engastada no centro

Tabela 14 - Frequências naturais para placa circular com furo quadrado (simplesmente apoiada na borda e engastada no centro)

Condição de contorno		Simplesmente apoiada na borda/ Engastada no centro			
$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$	$\omega_4(\text{rad/s})$	$\omega_5(\text{rad/s})$	$\omega_6(\text{rad/s})$
427,1	439,3	469,0	522,3	610,5	775,4

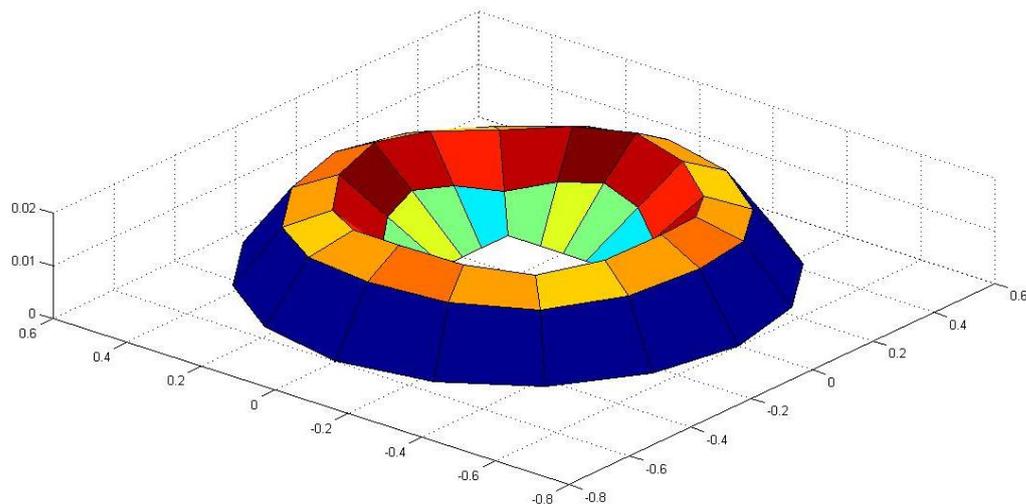


Figura 43- Primeiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado simplesmente apoiada/ engastada)

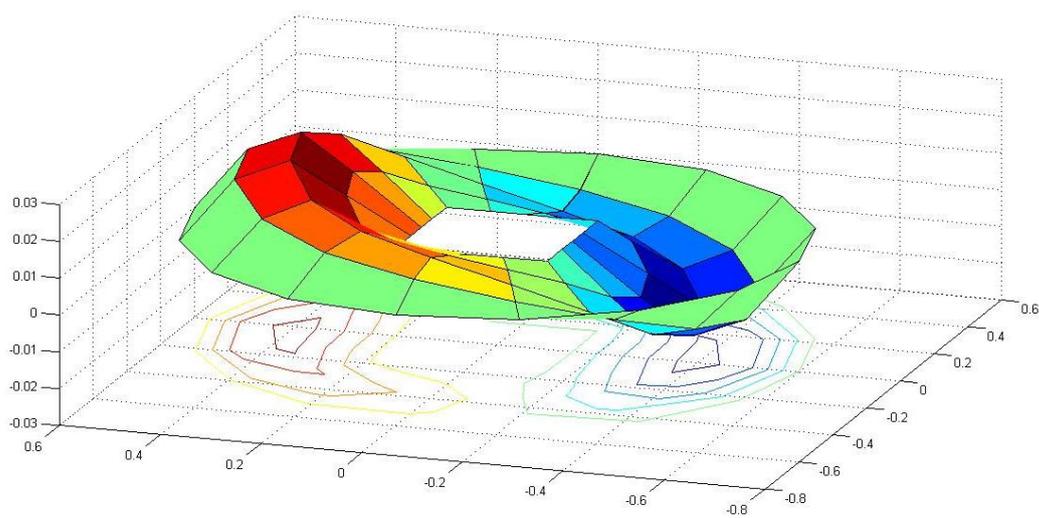


Figura 44- Segundo modo de vibração (placa circular com furo quadrado simplesmente apoiada/ engastada)

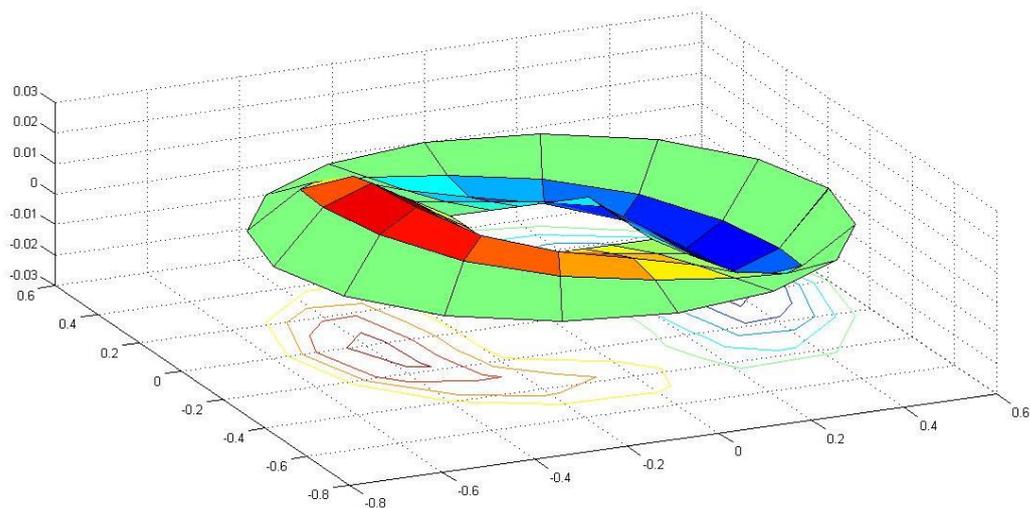


Figura 45- Terceiro modo de vibração (placa circular com furo quadrado simplesmente apoiada/ engastada)

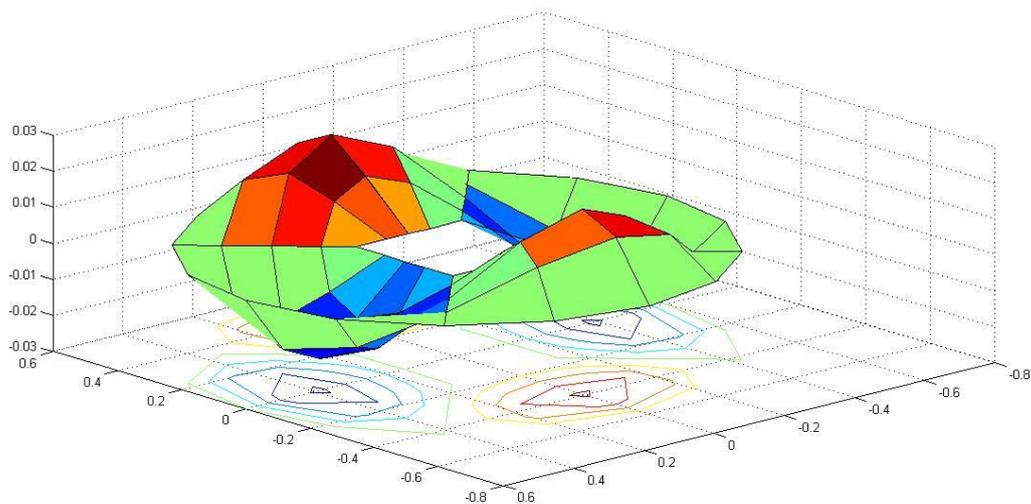


Figura 46- Quarto modo de vibração (placa circular com furo quadrado simplesmente apoiada/ engastada)

Capítulo 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1- CONCLUSÕES FINAIS

O elemento quadrilateral de placa fina proposto (Elemento de Wlamir) e formulado no Capítulo 3 foi validado no Capítulo 4. Os resultados encontrados foram comparados com os disponíveis na literatura e apresentaram baixos desvios percentuais para as primeiras frequências naturais de placas finas com diferentes geometrias e condições de contorno.

O gráfico 9 mostra que os desvios percentuais das seis primeiras frequências naturais de uma placa circular com furo central, engastada na borda externa e livre na borda central, foram menores que 4% com 64 elemento. Para frequências maiores, seria necessário aumentar o número de elementos. Entretanto, na maioria dos casos, é de interesse determinar apenas as frequências mais baixas. Para esses casos, o resultado foi bastante satisfatório com a utilização de poucos elementos.

Os desvios percentuais para as quatro primeiras frequências naturais de uma placa circular com furo central, simplesmente apoiada borda externa e engastada na borda central, foram menores que 6% com 64 elementos. Isso pode ser notado no gráfico 19.

Nos diversos casos de placa quadrada nos quais o elemento quadrilateral de placa fina foi aplicado, ótimos resultados foram obtidos para as seis primeiras frequências naturais com um número pequeno de elementos. Quando se aumenta o número de elementos, pode-se notar através dos gráficos 27, 35, 43, 51 e 59 a melhora nos resultados com desvios bem próximos de zero.

Quando o elemento quadrilateral foi aplicado no estudo das placas retangulares, as condições de contorno influenciaram nos resultados das frequências naturais. Com a placa totalmente engastada, os desvios foram menores que 2% para as 10 primeiras frequências naturais, conforme notado no gráfico 71. Porém, a mesma placa com os dois lados maiores engastados e os lados menores livres, apresentou desvios das frequências naturais inferiores a 2% apenas nas cinco primeiras frequências o que pode ser visto no gráfico 82.

Pode-se concluir que o elemento quadrilateral de placa fina proposto apresentou ótimo desempenho nos casos aplicados (placas circulares com furo central, placas quadradas e placas retangulares). Os maiores desvios nos resultados das frequências mais altas das placas circulares devem-se à adaptação do elemento aos contornos curvos da geometria. Para as placas quadradas tem-se uma melhor adaptação do elemento ao contorno da geometria devido à simetria em todas as direções. Nas placas retangulares, o elemento se adapta aos contornos da geometria, mas dependendo das condições de contorno, não têm a mesma simetria em ambas as direções. Nesses casos, a geração da malha de elementos finitos influencia nos resultados.

6.2- SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros, aplicar o Elemento de Wlamir proposto neste trabalho nos seguintes casos:

- 1- Placas finas com grandes deformações nas análises estática e dinâmica;
- 2- Placas finas com vibrações livres amortecidas;
- 3- Placas finas com vibrações forçadas e amortecidas;
- 4- Análise estática de materiais compósitos utilizando placas finas;
- 5- Análise dinâmica de materiais compósitos utilizando placas finas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos**. Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 1999.
- BAPTISTELLA, P. H. **Estudo Comparativo entre Elementos Finitos Isoparamétricos das Famílias Serendipity e Lagrangeana para a Análise de Estabilidade de Placas e Cascas**. 2001. Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas-SP.
- BARTON, M. V. Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates. **Vibration Journal**, 1951.
- BATHE, K. J., WILSON, E. L. **Numerical Methods in Finite Element Analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1976.
- CHOI, C. K., KIM, S. H. **Reduced Integration, Nonconforming Modes and their Coupling in Thin Plate Elements**. *Computers & Structures*, V. 29, n. 1, p. 57-62, 1988.
- IBRAIMBEGOVIC, A. Quadrilateral Finite Elements for Analysis of Thick and Thin Plates. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. V. 110, p. 195-209, 1993.
- IDE, P. S. **Análise de Vibrações Livres em torno de Configurações deformadas em Placas de Comportamento geometricamente Não-Linear pelo Método dos Elementos Finitos**. 1995. Tese de Doutorado, USP, São Paulo.

- INMAN, D. J. **Engineering Vibration**. New Jersey: Person Prentice Hall, 3rd ed., 2008.
- LEISSA, A. W. **Vibration of Plates**. Washington D.C: Office Of Technology Utilization National Aeronautics and Space Administration, 1969,353 p., NASA SP-160.
- LEVINSON, M. **Free Vibrations of a Simply Supported, Rectangular Plate: an Exact Elasticity Solution**. Sound and Vibration, 98(2), 289-298, 1985.
- MIYAZIMA, A. T. **Análise Teórica e Experimental de Frequências Naturais e Modos de Vibração de Placas com Comportamento Linear e Não-Linear**. 2001. Tese de Doutorado, UNESP, Guaratinguetá-SP.
- OLIVEIRA, W. C. **Um Elemento Finito Hierárquico para Análise Dinâmica p-adaptativa de Placas Espessas**. 1993. Tese de Doutorado, UNICAMP, Publicação FEM No. 50/93, Campinas-SP.
- PASCHOALINI, A. T. **Um Elemento Finito Quadrilateral Quadrático com Refinamento Hierárquico para Análise Estática e Dinâmica de Placas e Cascas**. 2001. Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas-SP.
- PEANO, A. **Hierarchies of Conforming Finite Elements for Plane Elasticity and Plate Bending**. Comp. & Maths. with Applc. V. 2, p. 211-224, 1976.
- PUGH, E. D., HINTON, E., ZIENKIEWICKS, O. C. A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with "Reduced" Integration. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. V. 12, p. 1059-1079, 1978.
- ROUFAIL, D. J., DAWE, D. J. Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of Mindlin Plates. **Journal of Sound and Vibration**. 69(3), p. 345-359, 1980.
- RUO-YU, H., CHANG-LIAB, Z., WAN-XIE, Z., WEI-AN, Y. A New Quadrilateral Thin Plate Element based on the Membrane-Plate similarity Theory. **Applied Mathematics and Mechanics**. Vol.23, No. 3, 2002.

SOARES, A. M. **Análise Comparativa de Esforços e Deflexões em Placas Retangulares Finas**. 2004. Dissertação de Mestrado, UNIFEI, Itajubá-MG.

TIMOSHENKO, S., GOODIER, J. N., **Teoria da Elasticidade**. 3a. ed. Guanabara Dois, 1980.

UGURAL, A. C. **Stress in Plates and Shells**. McGraw-Hill Book Company, 1981.

VICENTE, W. M. **Análise de Tensões em Placas Circulares utilizando Elementos Finitos Axissimétricos**. 2009. Dissertação de Mestrado, UNIFEI, Itajubá-MG.

WEI-ZANG, C., GANG, W. A New element for Thin Plate of Bending With Curvilinear Boundary - Curvilinear Boundary Quadrilateral Element. **Applied Mathematics and Mechanics**. V 11, n. 4, 1990.

ZIENKIEWICKS, O. C. **The Finite Element Method**. New York: McGraw-Hill, 3rd ed., 1977.

ZIENKIEWICKS, O. C., MORGAN, K. **Finite Elements and Approximations**. New York: A Wiley-Interscience Publication, 1993.

Apêndice A

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA POR QUADRATURA DE GAUSS

A quadratura de Gauss é um procedimento de integração numérica muito utilizado na implementação computacional da formulação isoparamétrica no método dos elementos finitos. Este procedimento integra exatamente um polinômio de grau $p = (2n - 1)$ com n (inteiro) pontos de integração.

A.1- INTEGRAÇÃO NUMÉRICA UNIDIMENSIONAL

Seja a integral I definida por:

$$I = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi \quad (\text{A.1})$$

onde $G(\xi)$ é um polinômio de ordem p que pode apresentar a seguinte forma

$$G(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots + \alpha_p \xi^p \quad (\text{A.2})$$

Levando a Eq. (A.2) na Eq. (A.1), tem-se que:

$$I = \int_{-1}^1 (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots + \alpha_p \xi^p) d\xi$$

cuja solução analítica é:

$$I = \alpha_0 \xi \Big|_{-1}^1 + \alpha_1 \frac{\xi^2}{2} \Big|_{-1}^1 + \alpha_2 \frac{\xi^3}{3} \Big|_{-1}^1 + \dots + \alpha_p \frac{\xi^{p+1}}{p+1} \Big|_{-1}^1$$

$$I = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \dots + \frac{\alpha_p}{p+1} [1 - (-1)^{p+1}] \quad (\text{A.3})$$

A quadratura de Gauss consiste em aproximar a solução da integral I em:

$$I = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi = W_1 G(\xi_1) + W_2 G(\xi_2) + \dots + W_n G(\xi_n) \quad (\text{A.4})$$

onde n é o número de pontos de integração ou pontos de Gauss, ξ_i é o valor da coordenada natural do ponto i ($i = 1, \dots, n$) e W_i é a ponderação do ponto i .

Levando $G(\xi)$ da Eq. (A.2) para $\xi = \xi_i$ ($i = 1, \dots, n$) na Eq. (A.4), tem-se que:

$$I \cong W_1(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_1^2 + \dots + \alpha_p \xi_1^p) +$$

$$W_2(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \dots + \alpha_p \xi_2^p) + \dots +$$

$$W_n(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \alpha_2 \xi_n^2 + \dots + \alpha_p \xi_n^p) \quad (\text{A.5})$$

Comparando as Eqs. (A.3) e (A.5), tem-se:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = 2$$

$$W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + W_n \xi_n = 0$$

$$W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 + \dots + W_n \xi_n^2 = \frac{2}{3}$$

$$\vdots$$

$$W_1 \xi_1^p + W_2 \xi_2^p + \dots + W_n \xi_n^p = \frac{1}{p+1} [1 - (-1)^{p+1}] \quad (\text{A.6})$$

No sistema da Eq. (A.6) há n valores de W e n valores de ξ a serem determinados, ou seja, há $2n$ incógnitas. Como, nesse sistema, há $(p+1)$ equações, então, uma solução sempre

será possível quando $2n = p + 1$. Portanto, a quadratura de Gauss integra exatamente um polinômio de grau p com n pontos de integração, sendo:

$$n = \frac{p+1}{2} \quad (\text{A.7})$$

Com o uso da Eq. (A.7) monta-se a Tabela A.1 mostrada abaixo.

Tabela A.1

Nº (n) de pontos de integração	Grau(p) do polinômio a ser integrado
1	1
2	3
3	5
4	7

Do sistema da Eq. (A.6), tem-se:

Para um ponto de integração ($n = 1 \Rightarrow p = 1$):

$$\begin{aligned} W_1 &= 2 \\ W_1 \xi_1 &= 0 \Rightarrow \xi_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Para dois pontos de integração ($n = 2 \Rightarrow p = 3$):

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= 2 \\ W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 &= 0 \\ W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 &= \frac{2}{3} \\ W_1 \xi_1^3 + W_2 \xi_2^3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

que formam um sistema não linear de equações, cuja solução é:

$$\begin{aligned} W_1 &= W_2 = 1 \\ \xi_1 &= -\xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0,57735027 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Para três pontos de integração ($n = 3 \Rightarrow p = 5$):

$$\begin{aligned}
 W_1 + W_2 + W_3 &= 2 \\
 W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + W_3 \xi_3 &= 0 \\
 W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 + W_3 \xi_3^2 &= \frac{2}{3} \\
 W_1 \xi_1^3 + W_2 \xi_2^3 + W_3 \xi_3^3 &= 0 \\
 W_1 \xi_1^4 + W_2 \xi_2^4 + W_3 \xi_3^4 &= \frac{2}{5} \\
 W_1 \xi_1^5 + W_2 \xi_2^5 + W_3 \xi_3^5 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

A solução do sistema não linear da Eq. (A.11) é:

$$\begin{aligned}
 W_1 &= W_3 = \frac{5}{9} \\
 W_2 &= \frac{8}{9} \\
 \xi_1 &= -\xi_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \\
 \xi_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

O mesmo procedimento deve ser utilizado para determinar as coordenadas naturais ξ_i e os pesos W_i ($i = 1, \dots, n$) para outros valores de n .

A.2- INTEGRAÇÃO NUMÉRICA EM DUAS DIMENSÕES

Para obter a solução da integral:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{A.13}$$

utilizando a quadratura de Gauss, basta avaliar a integral interna fazendo η constante, isto é,

$$\int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i G(\xi_i, \eta) = F(\eta) \tag{A.14}$$

Avaliando a integral externa de maneira similar:

$$I = \int_{-1}^1 F(\eta) d\eta = \sum_{j=1}^n W_j F(\eta_j) = \sum_{j=1}^n W_j \sum_{i=1}^n W_i G(\xi_i, \eta_j)$$

ou seja,

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n W_j W_i G(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{A.15})$$

Na expressão acima, o número de pontos de integração é o mesmo em cada direção. Isto, claramente, não é obrigatório. Em algumas situações pode ser vantagem usar números diferentes de pontos de integração em cada direção.

A Figura A.1 mostra a posição dos quatro pontos de integração para a solução exata de integrais de polinômios de terceira ordem em cada direção.

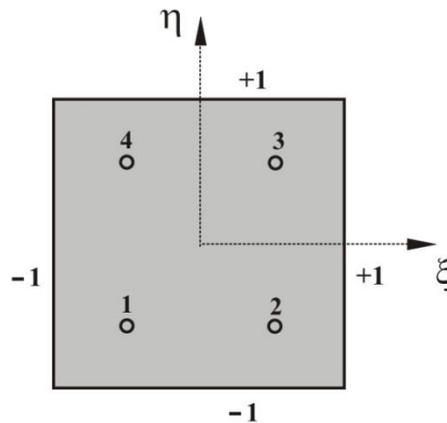


Figura A. 1- Integração com dois pontos de Gauss em duas dimensões

Usando a enumeração dos pontos de Gauss como mostrado na Figura A.1, as coordenadas destes pontos são, para $k = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} \xi_1 = \xi_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = \xi_3 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \eta_1 = \eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta_3 = \eta_4 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

e os correspondentes pesos são para $k = 1, \dots, 4$:

$$W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = 1 \times 1 = 1 \quad (\text{A.17})$$

A Figura A.2 mostra a posição dos nove pontos de integração para a solução exata de integrais de polinômios de quinta ordem em cada direção.

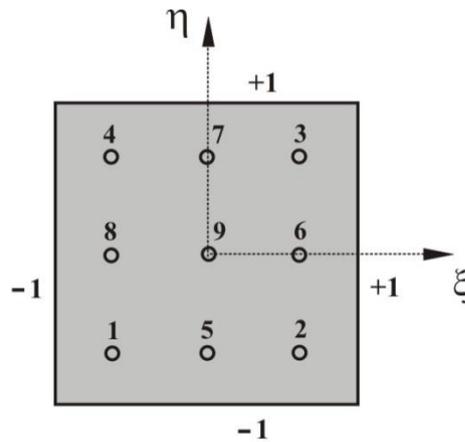


Figura A. 2- Integração com três pontos de Gauss em duas dimensões

As coordenadas dos pontos de Gauss, enumerados conforme Figura A.2, são para $k=1,\dots,9$:

$$\begin{aligned} \xi_1 = \xi_4 = \xi_8 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \xi_5 = \xi_7 = \xi_9 = 0, \quad \xi_2 = \xi_3 = \xi_6 = \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \eta_1 = \eta_2 = \eta_5 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \eta_6 = \eta_8 = \eta_9 = 0, \quad \eta_3 = \eta_4 = \eta_7 = \sqrt{\frac{3}{5}} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

E os correspondentes pesos para $k = 1, \dots, 9$ são:

$$\begin{aligned} W_1 = W_2 = W_3 = W_4 &= \left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{25}{81} \\ W_5 = W_6 = W_7 = W_8 &= \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{40}{81} \\ W_9 &= \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{64}{81} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Apêndice B

B.1-TEORIA SOBRE VIBRAÇÕES LIVRES

Na análise dinâmica de uma estrutura deve-se encontrar a solução do seguinte sistema de equações (INMAN, 2008):

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(x,t)\} \quad (\text{B.1})$$

onde:

$[K]$ = matriz de rigidez da estrutura;

$[M]$ = matriz de massa da estrutura;

$[C]$ = matriz de amortecimento da estrutura.

$\{x(t)\}$ = vetor dos deslocamentos dos pontos nodais da estrutura;

$\{\ddot{x}(t)\}$ = vetor aceleração dos pontos nodais da estrutura;

$\{\dot{x}(t)\}$ = vetor velocidade dos pontos nodais da estrutura;

$\{f(x,t)\}$ = vetor forças externas atuantes na estrutura;

Quando não há forças externas atuando na estrutura $\{f(x,t)\}=0$ e na ausência de amortecimento $[C]=[0]$, a Eq. (B.1) torna-se:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad (\text{B.2})$$

A Eq. (B.2) é a equação da análise de vibrações livres, onde o vetor dos deslocamentos é uma função harmônica na forma:

$$\{x(t)\} = \{\phi\}e^{j\omega t} \quad (\text{B.3})$$

onde:

ω = frequência angular de vibração;

$\{\phi\}$ =autovetor ou modo de vibração

A derivada de segunda ordem da Eq.(B.3), fornece a aceleração dos pontos nodais como segue:

$$\{\ddot{x}(t)\} = -\omega^2 e^{j\omega t} \quad (\text{B.4})$$

Substituindo as Eq. (B.4) e Eq. (B.3) na Eq. (B.2), tem-se o problema de autovalor generalizado na forma:

$$[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\} \quad (\text{B.5})$$

com $\lambda = \omega^2$.

Na análise de vibrações livres a Eq. (B.5) é conhecida por autoproblema, cuja solução produz n autosoluções dadas por $(\omega_1^2; \{\phi\}_1)$, $(\omega_2^2; \{\phi\}_2)$, ..., $(\omega_i^2; \{\phi\}_i)$, onde $(\omega_i^2; \{\phi\}_i)$ é o i -ésimo autopar da autosolução. O valor de $\omega_i^2 = \lambda_i$ é o i -ésimo autovalor correspondente ao autovetor $\{\phi\}_i$.

Assim λ_i são os autovalores e $\{\phi\}_i$ são os autovetores ou modos de vibração do autoproblema.