

TESE

896

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

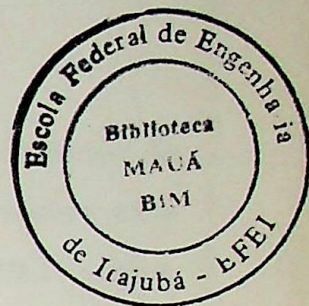
ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS NO PROJETO
DINÂMICO DE FUNDAÇÕES SOBRE BLOCOS DE
COMPRESSORES ALTERNATIVOS

ALEXANDRE AUGUSTO SIMÕES

ITAJUBÁ - 1996

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS NO
PROJETO DINÂMICO DE FUNDAÇÕES SOBRE BLOCOS DE
COMPRESSORES ALTERNATIVOS

ALEXANDRE AUGUSTO SIMÕES

ORIENTADOR:

PROF. DR. MÁRCIO TADEU DE ALMEIDA

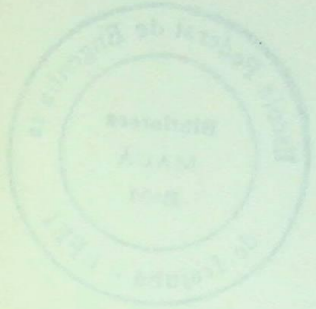
CO-ORIENTADOR:

PROF. DR. PAULO SHIGUEME IDE

ITAJUBÁ - MG

1996

CLASS. 62(043.2)
CUI 5593a
TOMADA 896



DISERTAÇÃO DE PÓS-GRADUADO

ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS NO
PROBLEMA DINÂMICO DE FUNDAÇÕES SOBRE BLOCOS DE
COMPRESSORES ALTERNATIVOS

ALUNO: ALBERTO BRAGA

ORIENTADOR

PROF. DR. MARCO TÁBEO DE ALMEIDA

CO-ORIENTADOR

PROF. DR. PAULO SUGEMER DE

INSTITUTO DE ENGENHARIA

1978

AGRADECIMENTOS

Quero expressar meus sinceros agradecimentos a todo corpo docente do curso de pós-graduação da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, aos funcionários, e em especial aos meus orientadores acadêmico e de dissertação, Luíz Augusto Horta Nogueira, e Márcio Tadeu de Almeida.

Agradeço também aos meus Pais, José Lázaro Simões e Tereza Aparecida Simões.

Agradeço o incentivo dado pelo Prof. Dr. Afonso Henrique Moreira Santos.

Ao CNPq.



CNPq



EFEI

RESUMO

As pesquisas para qualquer atividade e atividade devem ser fundamentadas de forma a garantir que os dados obtidos sejam válidos e confiáveis. Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa realizada em uma escola pública, com o objetivo de investigar o conhecimento dos professores sobre o uso de recursos tecnológicos em sala de aula. A pesquisa foi realizada por meio de questionários aplicados aos professores e entrevistas com alguns deles. Os resultados indicam que a maioria dos professores não utiliza recursos tecnológicos em sala de aula, apesar de reconhecer a importância disso para a melhoria da qualidade do ensino. A pesquisa também identificou algumas barreiras para o uso de recursos tecnológicos, como a falta de infraestrutura e a falta de formação dos professores. As conclusões da pesquisa apontam para a necessidade de investimentos em infraestrutura e formação dos professores para promover o uso de recursos tecnológicos em sala de aula.

A escola de São Paulo possui condições adequadas para o uso de recursos tecnológicos em sala de aula, desde que sejam adotadas algumas medidas. A primeira delas é a melhoria da infraestrutura, com a aquisição de computadores e a instalação de redes de internet. A segunda medida é a formação dos professores, com cursos e oficinas que abordem o uso de recursos tecnológicos em sala de aula. A terceira medida é a criação de um ambiente de trabalho que favoreça o uso de recursos tecnológicos, com a disponibilização de materiais e a criação de espaços para o trabalho em grupo. Essas medidas são essenciais para garantir que os recursos tecnológicos sejam utilizados de forma eficaz e para promover a melhoria da qualidade do ensino.

Dedico a meu filho.

Este trabalho foi desenvolvido em colaboração com o meu filho, que me ajudou na coleta de dados e na análise dos resultados. Agradeço a todos os professores que participaram da pesquisa e a todos os colegas que me ofereceram apoio e incentivo. Espero que este trabalho possa contribuir para a melhoria da qualidade do ensino e para a formação dos professores.

RESUMO

As fundações para máquinas rotativas e alternativas devem ser dimensionadas de forma a suportar além das cargas estáticas (peso da máquina e equipamentos auxiliares e peso do bloco de concreto), também as cargas dinâmicas, periódicas ou transientes, originadas pelo movimento de massas não balanceadas na operação dessas máquinas. Uma fundação rígida excitada por forças e momentos na operação de tais máquinas terá movimentos oscilatórios de translação na vertical e na horizontal (deslizamento), e movimentos oscilatórios de rotação (torção e balanço). A amplitude destes movimentos pode ser tal que seja necessário interromper a operação da máquina devido, por exemplo, a danos estruturais que possa causar. Várias teorias foram desenvolvidas com o intuito de determinar o comportamento das fundações excitadas por cargas dinâmicas. A Teoria do "Semi-Espaço Elástico" foi adotada na confecção deste trabalho, e a partir dela a resposta do sistema máquina-fundação-solo será determinada, em termos das amplitudes dos movimentos e das frequências críticas ou naturais do sistema.

A teoria do Semi-Espaço Elástico idealiza o sistema máquina-fundação-solo como um excitador mecânico com uma base circular de raio r_0 apoiada na superfície de um meio elástico, homogêneo, isotrópico, semi-infinito, denominado de semi-espaço elástico. A fundação é ainda circundada parcialmente por uma outra camada elástica, independente, acima do nível da base, de espessura finita, denominada profundidade de embutimento. Os parâmetros utilizados na descrição de um meio elástico na Teoria do Semi-Espaço Elástico são, o módulo de elasticidade transversal G , o coeficiente de Poisson ν , e a massa específica ρ .

A partir desta modelagem e do trabalho publicado por Lamb [Ref. (10)], as soluções para os vários graus de liberdade de uma fundação circular rígida foram determinadas. O grande passo, entretanto, foi o estabelecimento da ponte entre a Teoria do Semi-Espaço Elástico e a Teoria dos Sistemas Vibratórios Elementares. A ponte foi estabelecida pela determinação das constantes de rigidez k e amortecimento c para os vários

movimentos das fundações. De posse dessas constantes a resposta do sistema à excitação fica estabelecida, ou seja, as amplitudes e as frequências críticas de funcionamento (natural e ressonância) ficam determinadas.

O propósito deste trabalho, é então, o de apresentar para os vários graus de liberdade de uma fundação rígida em bloco, as constantes de rigidez e amortecimento, a resposta do sistema à excitação, e ainda, analisar o comportamento da fundação frente as variações nas suas dimensões permitindo ao projetista dimensionar adequadamente a fundação.

ABSTRACT

Rotary and reciprocating machines has to be dimension to suport static and dynamics loads. It is the consideration of the dynamic loads that distinguishes a machine foundation from an ordinary foundation and necessitates special design procedures. Methods are available not only for computing the response of machines foundations resting on the surface of an elastic medium but also for embedded foundations and involves principles of soil engineering, soil dynamics, and theory of vibrations. The Elastic Half Space Method was used in this paper. This method idealizes the machine foundation as a vibrating mechanical oscillator with a circular footing resting on the surface of an elastic homogeneous, isotropic, semi-infinite body, which is referred to as an elastic half-space. The footing is also partially surrounded by an independent elastic layer lying above the level of the footing-base. In the Elastic Half-Space Theory, analogs have been established as spring-dashpot systems. Both the spring and the damping constants can be defined in terms of the elastic constants of the medium and the geometry of the foundation. In this paper an effort has been made to establish the stifness and the damping constants for all degrees of freedom of the foundations and present the answer of the machine-foundation-soil system defined by its natural frequencies and amplitudes of vibrations under the normal operating conditions of the machine. Also the response sensibility was analysed when changing the values of foundation geometry in order to obtain a well-designed foundation spending only the necessary material beyond the costs are not justified.

CONTEÚDO

	página
RESUMO	i
ABSTRACT	iii
CONTEÚDO	iv
SIMBOLOGIA	vii
ÍNDICE DE FIGURAS	xii
ÍNDICE DE TABELAS	xx
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - MÁQUINAS ALTERNATIVAS	4
2.1-Máquinas Alternativas.	4
2.2-Forças de Desbalanceamento na operação de Máquinas Alternativas Monocilíndricas.	5
2.2.1-Forças Devido ao Movimento do Pistão.	5
2.2.2-Desbalanceamento Devido ao Movimento do Braço de Manivela.	8
2.2.3-Desbalanceamento Devido ao Movimento da Haste de Conexão (Biela).	8
2.2.4-Forças de Desbalanceamento.	9
2.3-Máquinas Multicilíndricas.	11
CAPÍTULO 3 - VIBRAÇÕES DE SISTEMAS ELEMENTARES	12
3.1-Sistemas com Um Grau de Liberdade.	13
3.2-Sistemas com Vários Graus de Liberdade.	18
3.3-Graus de Liberdade de uma Fundação Rígida em Bloco.	20

CAPÍTULO 4 - TEORIA DA VIBRAÇÃO DAS FUNDAÇÕES NO MEIO ELÁSTICO.	22
4.1 - Oscilações Verticais de Bases Apoiadas na Superfície do Semi-Espaço Elástico.	23
4.2 - Vibrações Torcionais de Base Circulares na Superfície do Semi-Espaço Elástico.	41
4.3 - Vibração Horizontal Pura, ou Vibração de Escorregamento, ou Deslizamento, de um Disco Circular Rígido Apoiado na Superfície do Semi-Espaço Elástico.	46
4.4 - Balanço de Bases Circulares Rígidas Apoiadas no Semi-Espaço Elástico.	50
CAPÍTULO 5 - EFEITO DA FORMA DA BASE NA RESPOSTA VIBRATÓRIA.	56
CAPÍTULO 6 - ESTUDO DO ACOPLAMENTO.	59
CAPÍTULO 7 - RESPOSTA DINÂMICA DE FUNDAÇÕES EMBUTIDAS.	64
7.1 - Oscilações Verticais de Fundações Embutidas.	65
7.2 - Oscilações Horizontais de Fundações Embutidas.	68
7.3 - Oscilações em Balanço de Fundações Embutidas.	70
7.4 - Oscilações Torcionais de Fundações Embutidas.	73
7.5 - O Efeito do Embutimento na Resposta Dinâmica das Fundações de Máquinas.	74
CAPÍTULO 8 - ESTUDO DOS MOVIMENTOS ACOPLADOS EM FUNDAÇÕES EMBUTIDAS.	77
CAPÍTULO 9 - APLICAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS.	83

CAPÍTULO 10 - ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DE PROJETO DA FUNDAÇÃO EM BLOCO.	103
10.1- O Comportamento Dinâmico do Sistema Máquina Fundação.	104
CAPÍTULO 11 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.	141
APÊNDICE 1 - SOLUÇÕES DE SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE E EXCITAÇÃO HARMÔNICA - MÉTODO DA MATRIZ INVERSA.	145
APÊNDICE 2 - DETERMINAÇÃO DA AMPLITUDE MÁXIMA DE UMA FUNÇÃO COM DOIS HARMÔNICOS.	151
APÊNDICE 3 - PROGRAMA: FBCA.M	153
APÊNDICE 4 - PROGRAMA: SUPAMP.M	161
APÊNDICE 5 - ANÁLISE DOS AUTOVALORES.	170
BIBLIOGRAFIA	172

SIMBOLOGIA

CARACTERES LATINOS

Símbolo	Designação
a	distâncias das massas rotativas ao centro de rotação, comprimento da fundação
a_0	razão das frequências simplificada
a_{0r}	razão das frequências simplificada e na ressonância
\bar{a}_0	razão das frequências (por Lysmer)
\bar{a}_{0m}	razão das frequências na ressonância e excitação constante
\bar{a}_{0mf}	razão das frequências na ressonância e excitação variável com a frequência
A	Amplitude em determinada frequência
A_{max}	Amplitude na ressonância
b	razão mássica, largura da fundação
B	razão mássica modificada
\bar{B}	razão mássica (por Lysmer)
c	constante de amortecimento
c_c	amortecimento crítico
C	função dos deslocamentos de Reissner, função devida ao embutimento
d	símbolo da derivada total
d_e	distância do eixo da máquina ao topo da fundação
d_m	distância do centro de gravidade da máquina ao topo da fundação
d_x	dimensão horizontal da fundação paralela ao eixo x
d_y	dimensão horizontal da fundação paralela ao eixo y
e	raio da massa de desbalanceamento
E	matriz do Sistema
f_1, f_2	funções deslocamento de Reissner
f_r	frequência de ressonância
F	força, função deslocamento de Bycroft

F_1, F_2	funções que compõem a função deslocamento F de Bycroft
F_A	força em A
F_{AX}	força em A na direção x
F_B	força em B
F_0	força de excitação constante
F_X	força na direção x
F'_x	componente primário da força
F''_x	componente secundário da força
F_Z	força na direção z
g	aceleração da gravidade
G	Módulo de Elasticidade Transversal Dinâmico
G_S	Módulo de Elasticidade Transversal Dinâmico da camada lateral
h, h_0	altura do CG da máquina-fundação em relação a base da fundação
H	altura da fundação
I	momento de inércia de massa centroidal
I_0	momento de inércia de massa por um eixo que passa pela base no ponto O
k	constante de rigidez
k_S	constante de mola estático
K	função devida ao embutimento
L	comprimento da haste de conexão
L_1, L_2	distâncias do centro de massa da haste de conexão aos pontos A e B
m	massa desbalanceada
M, M_t	massa total, ou massa da fundação, máquina e acessórios
M_b	fração da massa da haste de conexão concentrada em um ponto B
M_B	massa total concentrada em B
M_f	massa da fundação
M_{hc}	massa da haste de conexão
M_A	massa total concentrada em A
M_{A1}, M_{A2}	massas equivalentes concentradas em um ponto A
M_p	massa do pistão, ou massa total em movimento alternativo
M_m	massa da manivela
M_x	momento de força em torno do eixo x
M_y	momento de força em torno do eixo y

M_z	momento de força em torno do eixo z
n	rotações por minuto
N	momento de reação
p	profundidade de embutimento
P	Matriz característica, módulo da força oscilante
P_0	módulo da força oscilante
q	coordenadas
Q, Q_0	módulo da força oscilante
r	raio da manivela, razão entre frequência de excitação e frequência natural
r_{CG}	raio do centro de gravidade da manivela
r_0	raio da fundação, ou raio equivalente da fundação
R	reação ou resistência ao movimento
S	constante da camada elástica lateral
t	tempo
T_x	momento de excitação em torno do eixo x
T_y	momento de excitação em torno do eixo y
T_z	momento de excitação em torno do eixo z
v_s	velocidade das ondas transversais
V	velocidade
W	peso da máquina-fundação
x	coordenada segundo o eixo x
X	deslocamento do eixo na direção x
x_p	curso do pistão
y	coordenada segundo o eixo y
Y	deslocamento do eixo na direção y
z	coordenada segundo o eixo z
z_s	deslocamento vertical estático
Z	deslocamento da borda

CARACTERES GREGOS

Símbolo	Designação
X	amplitude do movimento na direção x
Δ	função de ω^2
Φ	amplitude do deslocamento angular no balanço da fundação
α	deslocamento angular
β	amplificação dinâmica [adimensional]
ϕ	deslocamento angular no balanço da fundação
γ	peso específico
ν	coeficiente de Poisson
π	3,141592...
θ	deslocamento angular
ρ	massa específica
ρ_s	massa específica da camada lateral
σ	distribuição de pressão
ω	freqüência de excitação
ω_n	freqüência natural
ξ	coeficiente de amortecimento [adimensional]
ψ	deslocamento angular torcional

CARACTERES INFERIORES

Símbolo	Designação
c	relativo ao concreto
ef	efetivo
f	relativo a frequência de excitação
m	máximo
max	máximo
0	que diz respeito a fundação, ao raio da fundação
s	estático, ou lateral
x	relativo ao eixo x
$x\phi$	diz respeito ao acoplamento, constantes cruzadas
y	relativo ao eixo y
z	relativo ao eixo z
ϕ	relativo ao deslocamento angular de balanço
ψ	relativo ao deslocamento angular torcional

ÍNDICE DE FIGURAS

	página
Figura 1.1: Modelo do sistema máquina-fundação-solo na Teoria do Semi-Espaço Elástico.	3
Figura 2.1: Máquina Alternativa Monocilíndrica	5
Figura 3.1: Sistemas com um grau de liberdade. (a) Sistema excitado com força constante (b) Sistema excitado com força dependente da frequência.	12
Figura 3.2: Amplificação dinâmica da resposta de um sistema excitado por força constante.	16
Figura 3.3: Amplificação dinâmica da resposta de um sistema excitado por força variável com a frequência.	16
Figura 3.4: Amplificação dinâmica da resposta de um sistema excitado por força constante utilizando-se os parâmetros de Lysmer.	17
Figura 3.5: Amplificação dinâmica da resposta de um sistema excitado por força dependente da frequência utilizando-se os parâmetros adimensionais de Lysmer.	17
Figura 3.6: a) Sistema acoplado pelo CG. b) Sistema acoplado pelas forças restauradoras.	18
Figura 3.7: Máquina Monocilíndrica disposta horizontalmente em uma fundação em bloco.	19
Figura 3.8: Graus de liberdade de uma fundação rígida em bloco.	20
Figura 4.1: Oscilador de massa rotativa e base circular apoiada no meio elástico semi-infinito (semi-espaço elástico)	23
Figura 4.2: Os problemas considerados por Lamb. a) carga vertical atuando na superfície do meio elástico; b) carga horizontal atuando na superfície do meio elástico; c) força vertical atuando no interior do corpo elástico; d) força horizontal atuando no interior do corpo.	24

Figura 4.3:	Efeito da distribuição de pressão e coeficiente de Poisson nas curvas de resposta teórica para o movimento vertical da base (segundo Richart e Whitman, [Ref. (18)]).	28
Figura 4.4:	Amplitude versus frequência para oscilações verticais de uma base circular rígida apoiada no semi-espaço elástico ($\nu=0,25$), segundo Richart, [Ref. (17)]. a) Para excitação constante; b) para excitação dependente da frequência.	29
Figura 4.5:	Funções deslocamento para base circular rígida vibrando verticalmente na superfície do semi-espaço elástico (segundo Bycroft, [Ref. (19)]).	30
Figura 4.6:	Considerações de Hsieh [Ref. (20)] no estudo de vibrações verticais.	32
Figura 4.7:	Varição da Função Deslocamento Modificada; (Segundo Lysmer e Richart, [Ref. (22)]).	33
Figura 4.8:	Função Deslocamento F para vibração vertical de um disco sem massa (Lysmer e Richart, [Ref. (22)]).	34
Figura 4.9:	Sistema equivalente de uma fundação em bloco excitada verticalmente por força periódica ou transiente	37
Figura 4.10:	Razão mássica versus frequência adimensional na ressonância.	39
Figura 4.11:	Amplificação dinâmica versus frequência adimensional para uma base circular excitada verticalmente por força com amplitude dependente da frequência.	39
Figura 4.12:	Amplificação dinâmica versus frequência adimensional para uma base circular rígida excitada por força constante.	40
Figura 4.13:	Comparação da equação de Lysmer [eq. (4.30)] para a ressonância no caso de força de excitação variável com a frequência [eq. (4.31)] com a equação de Almeida e Simões.	40

- Figura 4.14: Comparação entre o fator de amortecimento encontrado nas literaturas de referência desta obra e o fator de amortecimento dado pela equação (4.39), com base nas constantes de mola e amortecimento de acordo com Richart e Whitman [Ref. (18)]. 42
- Figura 4.15: Curvas de Amplificação dinâmica para a resposta de uma base circular rígida excitada por momento de força desenvolvido por desbalanceamento. 44
- Figura 4.16: Razão mássica versus frequência adimensional na ressonância para vibrações torcionais causadas por massas desbalanceadas. 45
- Figura 4.17: Sistema equivalente para o caso de fundação circular rígida excitada por momento de força em torno do eixo vertical. 45
- Figura 4.18: Razão mássica versus frequência adimensional na ressonância para oscilações torcionais [Ref. (1)]. 46
- Figura 4.19: Modelo matemático para o estudo da vibração horizontal pura. 47
- Figura 4.20: Fator de amplificação versus frequência adimensional para o movimento oscilatório de escorregamento na superfície do meio elástico. 49
- Figura 4.21: Razão mássica versus frequência adimensional na ressonância para o escorregamento. 49
- Figura 4.22: Modelo equivalente ao sistema máquina-fundação-solo para o estudo das oscilações horizontais. 50
- Figura 4.23: Movimento de balanço da fundação na superfície do semi-espaco elástico. 51
- Figura 4.24: Amplificação dinâmica versus frequência adimensional para o movimento de balanço de uma fundação circular rígida na superfície do semi-espaco elástico. 54



Figura 4.25:	Razão mássica versus frequência adimensional na ressonância para a vibração em balanço da fundação.	54
Figura 4.26:	Sistema com parâmetros concentrados equivalente ao sistema máquina-fundação-meio elástico na vibração em balanço.	55
Figura 4.27:	Gráfico razão mássica efetiva versus razão mássica.	55
Figura 5.1:	Funções deslocamento para vibrações rígidas retangulares e quadradas [Refs. (13), (14), (19), (29)].	58
Figura 6.1:	Fundação de máquina excitada por força horizontal e momento de força em torno do centro de gravidade.	59
Figura 7.1:	Fundação cilíndrica embutida no meio elástico.	64
Figura 7.2:	Efeito do embutimento no movimento oscilatório vertical de uma fundação.	76
Figura 8.1:	O acoplamento do balanço e deslizamento para fundações embutidas na Teoria do Semi-Espaço Elástico.	77
Figura 8.2:	Modelo do Acoplamento.	82
Figura 9.1:	Esquema de uma Fundação em Bloco.	83
Figura 10.1:	Resposta vertical em função da configuração da fundação.	116
Figura 10.2:	Resposta horizontal na direção x versus configuração da fundação.	116
Figura 10.3:	Resposta horizontal na direção y versus configuração da fundação.	117
Figura 10.4:	Velocidade na direção vertical e na borda da fundação.	117
Figura 10.5:	Velocidade na direção horizontal x e no eixo da máquina.	118
Figura 10.6:	Velocidade na direção horizontal y e no eixo da máquina.	118
Figura 10.7:	Influência do deslocamento angular em torno de x na resposta da borda da fundação Z.	119
Figura 10.8:	Deslocamento vertical do Centro de Gravidade versus Dimensões da Fundação.	119
Figura 10.9:	Frequência natural na direção vertical versus configuração da fundação.	120

Figura 10.10:	Freqüência natural inferior no acoplamento entre as coordenadas x e ϕ_y .	120
Figura 10.11:	Freqüência natural superior no acoplamento entre as coordenadas x e ϕ_y versus configuração da fundação.	121
Figura 10.12:	Freqüência natural inferior no acoplamento entre as coordenadas y e ϕ_x versus configuração da fundação.	121
Figura 10.13:	Freqüência natural superior no acoplamento entre as coordenadas y e ϕ_x versus configuração da fundação.	122
Figura 10.14:	Coefficiente de amortecimento vertical versus configuração da fundação.	122
Figura 10.15:	Coefficiente de amortecimento inferior entre as coordenadas x e ϕ_y versus configuração da fundação.	123
Figura 10.16:	Coefficiente de amortecimento superior entre as coordenadas x e ϕ_y versus configuração da fundação.	123
Figura 10.17:	Coefficiente de amortecimento inferior das coordenadas y e ϕ_x versus configuração da fundação.	124
Figura 10.18:	Coefficiente de amortecimento superior no acoplamento y e ϕ_x versus configuração da fundação.	124
Figura 10.19:	Freqüência natural amortecida vertical versus configuração da fundação.	125
Figura 10.20:	Freqüência natural amortecida inferior no acoplamento entre as coordenadas x e ϕ_y versus configuração da fundação.	125
Figura 10.21:	Freqüência natural amortecida superior no acoplamento entre as coordenadas x e ϕ_y versus configuração da fundação.	126
Figura 10.22:	Freqüência natural amortecida inferior no acoplamento entre as coordenadas y e ϕ_x versus configuração da fundação.	126
Figura 10.23:	Freqüência natural amortecida superior no acoplamento entre as coordenadas y e ϕ_x versus configuração da fundação.	127

Figura 10.24:	Amplitude vertical (na borda) versus velocidade angular ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	127
Figura 10.25:	Amplitude vertical do Centro de Gravidade do sistema máquina-fundação versus velocidade angular ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	128
Figura 10.26:	Influência do deslocamento angular ϕ_y no deslocamento da borda versus velocidade angular ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	128
Figura 10.27:	Influência do deslocamento angular ϕ_x no deslocamento da borda versus velocidade angular ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	129
Figura 10.28:	Amplitude no eixo da máquina versus velocidade angular ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	129
Figura 10.29:	Amplitude do Centro de Gravidade do sistema máquina- fundação versus velocidade angular ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	130
Figura 10.30:	Influência do deslocamento angular ϕ_y na resposta do eixo na direção x ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	130
Figura 10.31:	Amplitude do eixo da máquina na direção horizontal y versus velocidade angular ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	131
Figura 10.32:	Amplitude do Centro de Gravidade na direção y versus velocidade angular ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	131
Figura 10.33:	Influência do deslocamento angular ϕ_x na resposta do eixo na direção y ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	132
Figura 10.34:	Gráfico da amplitude na borda Z em função da altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	132
Figura 10.35:	Gráfico da amplitude X (eixo da máquina) em função da altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	133
Figura 10.36:	Gráfico da amplitude Y (eixo da máquina) em função da altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	133
Figura 10.37:	Frequência natural vertical versus altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]).	134

- Figura 10.38: Freqüência natural inferior do acoplamento entre as coordenadas x e ϕ_y versus altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]). 134
- Figura 10.39: Freqüência natural superior do acoplamento entre as coordenadas x e ϕ_y versus altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]). 135
- Figura 10.40: Freqüência natural inferior do acoplamento entre as coordenadas y e ϕ_x versus altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]). 135
- Figura 10.41: Freqüência natural superior do acoplamento entre as coordenadas y e ϕ_x versus altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]). 136
- Figura 10.42: Coeficiente de amortecimento vertical versus altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]). 136
- Figura 10.43: Coeficiente de amortecimento inferior de acoplamento entre as coordenadas x e ϕ_y versus altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]). 137
- Figura 10.44: Coeficiente de amortecimento superior de acoplamento entre as coordenadas x e ϕ_y versus altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]). 137
- Figura 10.45: Coeficiente de amortecimento inferior de acoplamento entre as coordenadas y e ϕ_x versus altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]). 138
- Figura 10.46: Coeficiente de amortecimento superior de acoplamento entre as coordenadas y e ϕ_x versus altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]). 138
- Figura 10.47: Velocidade na direção vertical e na borda da fundação versus altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]). 139
- Figura 10.48: Velocidade na direção x e no eixo da máquina versus altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]). 139
- Figura 10.49: Velocidade na direção y e no eixo da máquina versus altura H da fundação ($dx=8,4$ [m], $dy=4,8$ [m]). 140

Figura A.1	Exemplos de Tópicos das Áreas de Matemática Elementar	17
Figura A.2	Exemplos de Exponenciais	18
Figura A.3	Relação entre variáveis e suas derivadas	19
Figura A.4	Resolução de equações diferenciais de 2º grau	20
Figura A.5	Resultados numéricos da resolução (1)	21
Figura A.6	Gráficos produzidos para as equações e soluções das equações (1) e (2)	22
Figura A.7	Resolução de equações diferenciais de 2º grau para as equações (1) e (2)	23
Figura A.8	Gráficos produzidos para as equações (1) e (2)	24
Figura A.9	Resolução de equações diferenciais de 2º grau para as equações (1) e (2)	25
Figura A.10	Gráficos produzidos para as equações (1) e (2)	26
Figura A.11	Resolução de equações diferenciais de 2º grau para as equações (1) e (2)	27
Figura A.12	Gráficos produzidos para as equações (1) e (2)	28
Figura A.13	Resolução de equações diferenciais de 2º grau para as equações (1) e (2)	29
Figura A.14	Gráficos produzidos para as equações (1) e (2)	30

ÍNDICE DE TABELAS

	página	
Tabela 3.1	Expressões da Teoria dos Sistemas Vibratórios Elementares.	13
Tabela 3.2	Expressões de Lysmer.	15
Tabela 4.1:	Relação razão mássica e razão mássica efetiva.	53
Tabela 9.1:	Resultados obtidos considerando-se o acoplamento.	94
Tabela 9.2:	Resultados extraídos da referência (3).	95
Tabela 9.3:	Diferença percentual entre as amplitudes e velocidades das tabelas (9.1) e (9.2).	95
Tabela 9.4:	Resultado obtidos considerando-se os vários graus de liberdade puros (desacoplados).	97
Tabela 9.5:	Afastamentos percentuais entre tabelas (9.2) e (9.5).	97
Tabela 9.6:	Resultados obtidos reduzindo-se a altura H da fundação.	99
Tabela 9.7:	Comparação entre os valores da tabela (9.1) e (9.6).	100

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O custo da construção de uma fundação para máquina é geralmente uma pequena fração do custo total da máquina, acessórios, e instalação, mas uma “falha da fundação” resultado de um projeto “pobre” pode interromper a operação da máquina por longos períodos e causar um grande prejuízo para a produção. É importante o cuidado na investigação do solo, no projeto e construção da fundação, para que um comportamento satisfatório seja obtido.

As fundações para máquinas alternativas e rotativas, devem ser dimensionadas de forma a suportar além das cargas estáticas (peso da máquina, equipamentos auxiliares e peso do bloco de concreto), também as cargas dinâmicas originadas pelo movimento de massas não balanceadas na operação dessas máquinas. Isto é o que distingue as fundações prediais das fundações para máquinas.

Várias teorias foram desenvolvidas com o intuito de determinar o comportamento das fundações excitadas por cargas dinâmicas, sendo estas teorias resultado da aplicação sistemática dos princípios da Mecânica dos Solos, Dinâmica dos Solos, e da Teoria da Vibração. A Teoria do “Semi-Espaço Elástico” foi adotada na confecção deste trabalho, e a partir dela o comportamento da fundação será determinado. Uma fundação rígida excitada por cargas dinâmicas possui geralmente seis graus de liberdade: três translacionais, e três rotacionais [ver fig. (3.8)]. A translação se dá na direção vertical z , e nas direções horizontais x e y , sendo que a translação neste dois últimos eixos são denominadas de deslizamento da fundação. A rotação em torno do eixo vertical é denominada torção, e as rotações em torno dos eixos horizontais se denominam balanço da fundação.

A teoria do Semi-Espaço Elástico idealiza o sistema máquina-fundação-solo como um excitador mecânico com uma base circular de raio r_0 apoiada na superfície de um meio elástico, homogêneo, isotrópico, semi-infinito, denominado de semi-espaço elástico. A fundação é ainda circundada parcialmente por uma outra camada elástica, independente, acima do nível da base, de espessura finita p , denominada profundidade de embutimento. Os parâmetros dinâmicos utilizados na descrição de um meio elástico na Teoria do Semi-Espaço Elástico são, o módulo de elasticidade transversal G , o coeficiente de Poisson ν , e a massa específica ρ [fig. (1.1)].

A partir do trabalho publicado por Lamb (1904) e desta modelagem, as soluções para os vários graus de liberdade de uma fundação circular rígida foram determinadas. O grande passo, entretanto, foi o estabelecimento da ponte entre a Teoria do Semi-Espaço Elástico e a Teoria dos Sistemas Vibratórios. A ponte foi estabelecida pela determinação das constantes de rigidez k e amortecimento c para os graus de liberdade das fundações. De posse dessas constantes a resposta do sistema à excitação fica estabelecida, ou seja, as amplitudes dos deslocamentos e as frequências críticas de funcionamento (natural e ressonância) ficam determinadas, permitindo ao projetista dimensionar adequadamente a fundação.

Porém, como na prática, não é usual a utilização de fundações circulares, para obtermos as constantes de rigidez e amortecimento para fundações quadrilaterais, devemos obter um raio equivalente, e introduzi-lo nas equações daquelas constantes. Para os movimentos translacionais o raio equivalente de uma base quadrilátera, é o raio de uma área circular que possua a mesma área da fundação de base quadrilátera. Para os movimentos rotacionais o raio equivalente, é o raio de um círculo com mesmo momento de inércia de área que a área da base quadrilátera da fundação em relação ao eixo de rotação.

O propósito deste trabalho, é então, o de apresentar para os vários graus de liberdade de uma fundação rígida em bloco, as constantes de rigidez e amortecimento, e ainda, a resposta do sistema a excitação, favorecendo assim, a escolha das dimensões da fundação (largura, altura, comprimento e embutimento) que venha a ter um comportamento dinâmico satisfatório. Este processo de seleção das dimensões da fundação se dá pelo estudo da sensibilidade dos parâmetros do projeto frente as variações nas próprias

dimensões da fundação. A análise da sensibilidade dos parâmetros se reflete na economia de material na confecção da fundação, e também, na viabilização da construção de uma fundação dentro de um espaço já pré-definido, isto é, quando não se permite um crescimento maior da fundação pela limitação física do local.

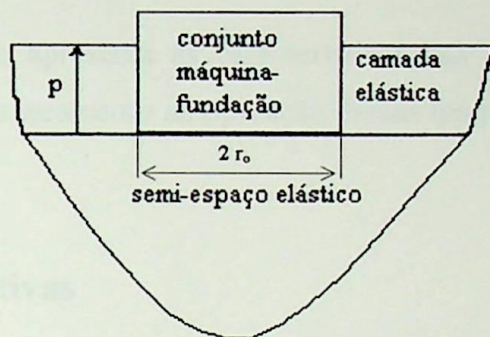
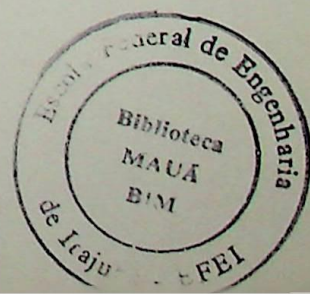


Figura 1.1: Modelo do sistema máquina-fundação-solo na Teoria do Semi-Espaço Elástico.



CAPÍTULO 2

MÁQUINAS ALTERNATIVAS

Este capítulo apresenta as características das máquinas alternativas e um estudo das forças de desbalanceamento na operação dessas máquinas.

2.1- Máquinas Alternativas

Essa categoria de máquina inclui os motores de combustão interna, máquinas à vapor, bombas e compressores, e ainda outras máquinas similares que possuam um mecanismo a manivela. Uma máquina alternativa simples constitui-se de um êmbolo (pistão) que se move dentro de uma cavidade cilíndrica (cilindro), de uma haste de conexão (biela), e uma haste de manivela acoplada a um eixo (árvore de manivelas). O pistão pode apresentar ainda uma haste, denominada haste de pistão. O mecanismo converte o movimento alternativo do pistão em movimento de rotação do eixo de manivelas e vice-versa [fig. (2.1)]. As máquinas alternativas podem apresentar um cilindro apenas, são as denominadas monocilíndricas, ou podem apresentar vários cilindros, sendo denominadas multicilíndricas. As máquinas multicilíndricas apresentam arranjos diferentes para a árvore de manivelas e disposição dos cilindros. No caso de uma máquina com dois cilindros, podemos ter o ângulo entre manivelas de 90° , 180° , ou ainda os cilindros montados na mesma manivela. Os cilindros podem estar montados em linha, em ângulo ou opostos. Os compressores e bombas alternativas, podem ser de simples, ou de duplo efeito, dependendo se a compressão ocorre apenas em uma ou em ambas as câmaras do cilindro; podem ser de simples estágio, se a compressão é efetuada por apenas um cilindro, ou de múltiplo estágio, se a compressão é efetuada em dois ou mais dispostos em série e de dimensões sempre menores.

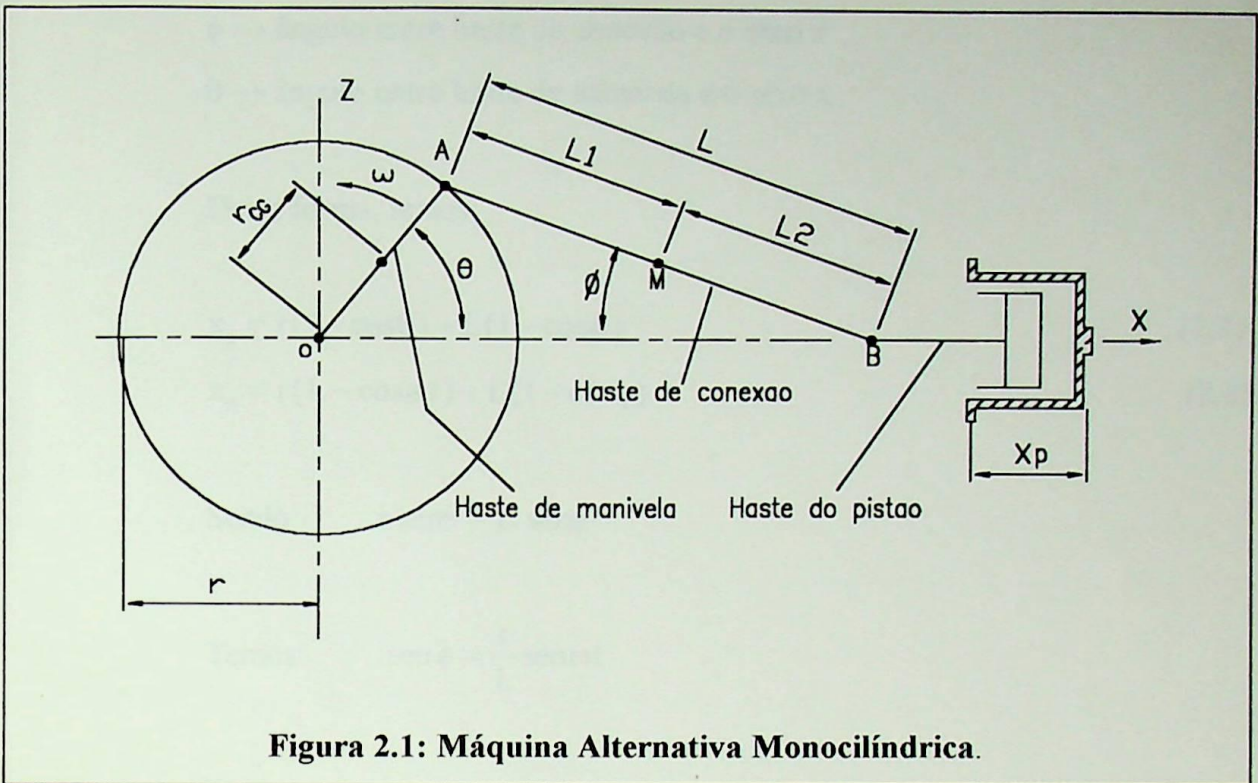


Figura 2.1: Máquina Alternativa Monocilíndrica.

2.2- Forças de Desbalanceamento na Operação de Máquinas Alternativas Monocilíndricas

2.2.1- Forças Devido ao Movimento do Pistão

Da figura (2.1), temos que o deslocamento do pistão é dado em relação as dimensões da haste de conexão e manivela por:

$$x_p = (r + L) - \overline{OB} \quad (2.1)$$

\overline{OB} pode ser calculado por:

$$\overline{OB} = r \cos \theta + L \cos \phi \quad (2.2)$$

Onde:

$\phi \rightarrow$ ângulo entre haste de conexão e o eixo x

$\theta \rightarrow$ ângulo entre haste de manivela e o eixo x

Desta forma, temos:

$$x_p = r(1 - \cos\theta) + L(1 - \cos\phi) \quad (2.3)$$

$$x_p = r(L - \cos\omega t) - L(1 - \cos\phi) \quad (2.4)$$

Sendo: $r \sin\theta = L \sin\phi$

Temos: $\sin\phi = \frac{r}{L} \sin\omega t$

E:

$$\cos\phi = (1 - \sin^2\phi)^{1/2} = \left(1 - \left(\frac{r}{L} \sin\omega t\right)^2\right)^{1/2} \quad (2.5)$$

O valor de $\frac{r}{L}$ geralmente é pequeno, por volta de 0,25, e a equação (2.5)

pode ser escrita na forma de uma série binomial:

$$\cos\phi = \left(1 - \frac{r^2}{2L^2} \sin^2\omega t - \frac{r^4}{8L^4} \sin^4\omega t + \dots\right) \quad (2.6)$$

$$\cos\phi \cong \left(1 - \frac{r^2}{2L^2} \sin^2\omega t\right) \quad (2.7)$$

Substituindo o valor de $\cos\phi$, da equação (2.7) na equação (2.4):

$$\begin{aligned}
 x_p &= r(1 - \cos\omega t) + \frac{r^2}{2L} \sin^2 \omega t \\
 x_p &= r(1 - \cos\omega t) + \frac{r^2}{4L} (1 - \cos 2\omega t) \\
 x_p &= r \left(1 + \frac{r}{4L} \right) - r \left(\cos\omega t + \frac{r}{4L} \cos 2\omega t \right) \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

A equação (2.8) expressa o movimento do pistão em termos de um primeiro componente que varia com a frequência de rotação, e um segundo componente que varia com o dobro da frequência de rotação. A influência do componente secundário (segundo harmônico) torna-se menor ou desprezível para valores do comprimento da haste de conexão bem maiores que o raio da manivela, ou seja, para valores de r/L pequenos o componente secundário pode ser desprezado, e o movimento considerado harmônico.

A velocidade e aceleração do pistão podem ser determinadas derivando-se a expressão (2.8):

$$\dot{x}_p = r\omega \left(\sin\omega t + \frac{r}{2L} \sin 2\omega t \right) \quad (2.9)$$

$$\ddot{x}_p = r\omega^2 \left(\cos\omega t + \frac{r}{L} \cos 2\omega t \right) \quad (2.10)$$

A força de inércia devido ao movimento do pistão é, então:

$$F_p = M_p \ddot{x}_p = M_p r \omega^2 \left(\cos\omega t + \frac{r}{L} \cos 2\omega t \right) \quad (2.11)$$

Sendo: $M_p \rightarrow$ massa do pistão, ou massa total em movimento alternativo.

2.2.2- Desbalanceamento Devido ao Movimento do Braço de Manivela

O desbalanceamento no eixo de manivelas pode ser substituído por uma massa equivalente concentrada no ponto A, de maneira tal que a força de inércia produzida seja a mesma devido ao movimento da manivela. A massa equivalente pode ser determinada por (2.12):

$$F_{\text{centrífuga}} = m \frac{V^2}{r} = M_m \frac{V_{CG}^2}{r_{CG}} = M_{A1} \frac{V_A^2}{r}$$

$$V_{CG}^2 = \omega^2 r_{CG}^2$$

$$V_A^2 = \omega^2 r^2$$

$$F_{\text{centrífuga}} = M_m \omega^2 r_{CG} = M_{A1} \omega^2 r$$

$$M_{A1} = M_m \frac{r_{CG}}{r} \quad (2.12)$$

Onde:

M_{A1} → massa equivalente do braço de manivela concentrada em A.

M_m → massa do braço de manivela.

r → raio da manivela.

r_{CG} → distância do centro de gravidade do braço de manivela ao ponto O.

2.2.3- Desbalanceamento Devido ao Movimento da Haste de Conexão (Biela)

As forças de desbalanceamento devido ao complexo movimento da haste de conexão são de difícil determinação. Entretanto, é satisfatório substituir a haste por um sistema equivalente consistindo de uma massa concentrada M_{A2} no ponto A, e uma massa M_b concentrada no ponto B. As massas M_{A2} e M_b devem ser determinadas tal que as forças de desbalanceamento sejam as mesmas devido ao movimento da haste de conexão, podendo ser determinadas pelas equações abaixo:

$$\frac{M_{A2}}{M_b} = \frac{L_2}{L_1} \quad (2.13)$$

$$M_{A2} + M_b = M_{hc} \quad (2.14)$$

Onde:

M_{hc} → massa da haste de conexão.

L_1, L_2 → distâncias de A e B, respectivamente, ao centro de massa M da haste de conexão.

2.2.4- Forças de Desbalanceamento

A força de desbalanceamento F_A devido a rotação das massas M_{A1} e M_{A2} é obtida por:

$$F_A = (M_{A1} + M_{A2})r\omega^2 = M_A r\omega^2 \quad (2.15)$$

M_A → massa total em A.

A força total F_B na direção do movimento do pistão é dada por:

$$F_B = (M_b + M_p)r\omega^2 \left(\cos\omega t + \frac{r}{L} \cos 2\omega t \right)$$

$$F_B = M_B r\omega^2 \left(\cos\omega t + \frac{r}{L} \cos 2\omega t \right) \quad (2.16)$$

M_B → massa total em B.

A força F_A pode ser decomposta nas direções x e z:

$$F_{Ax} = M_A r\omega^2 \cos\omega t \quad (2.17)$$

$$F_z = M_A r\omega^2 \sin\omega t \quad (2.18)$$

A resultante das forças na direção x é dada por:

$$F_X = F_{AX} + F_B = M_A r \omega^2 \cos \omega t + M_B r \omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{L} \cos 2\omega t \right)$$

$$F_X = M_A r \omega^2 \cos \omega t + M_B r \omega^2 \cos \omega t + M_B \frac{r^2 \omega^2}{L} \cos 2\omega t \quad (2.19)$$

Observa-se das equações (2.18) e (2.19) que a operação de uma máquina alternativa monocilíndrica resulta em forças de desbalanceamento na direção do movimento do pistão (F_X), e também na direção perpendicular a direção do movimento do pistão (F_Z). A força na direção do movimento do pistão apresenta ambos primário (dependente de ω) e secundário (dependente de 2ω) componentes, assim como pode ser observado da equação (2.19). A força na direção perpendicular ao movimento do pistão possui apenas o componente primário [eq.(2.18)]. Os componentes primário F'_X , e secundário F''_X , da força de desbalanceamento F_X , são:

$$F'_X = M_A r \omega^2 \cos \omega t + M_B r \omega^2 \cos \omega t \quad (2.20)$$

$$F''_X = M_B \frac{r^2 \omega^2}{L} \cos 2\omega t \quad (2.21)$$

A força de desbalanceamento devido a rotação da massa M_A pode ser balanceada instalando-se contra-pesos de massa M'_A a uma distância do centro de rotação O tal que a força centrífuga seja igual e oposta àquela produzida por M_A . Esse processo é denominado contrabalanceamento. Para máquinas contrabalanceadas, a força resultante na direção do movimento do pistão é dado por [substituir $M_A = 0$ na eq.(2.19)]:

$$F_X = M_B r \omega^2 \cos \omega t + M_B \frac{r^2 \omega^2}{L} \cos 2\omega t \quad (2.22)$$

O componente primário é dado por:

$$F'_X = M_B r \omega^2 \cos \omega t \quad (2.23)$$

A componente secundária F''_X não se altera, e é dada pela equação (2.21). A força F_Z torna-se nula após o contrabalanceamento. Portanto, a máquina monocilíndrica é inerentemente desbalanceada, pois a total eliminação das forças de desbalanceamento é impossível.

2.3 - Máquinas Multicilíndricas

Embora a máquina monocilíndrica seja inerentemente desbalanceada, no caso de máquinas multicilíndricas é possível eliminar ou minimizar as forças de desbalanceamento. As forças e momentos de desbalanceamento para diversos arranjos da árvore de manivelas, porém, para máquinas de cilindros iguais, ou seja, de mesmo diâmetro e curso, podem ser encontradas facilmente em tabelas em diversas obras [Refs. (1) a (3)].

CAPÍTULO 3

VIBRAÇÕES DE SISTEMAS ELEMENTARES

Este capítulo apresenta os conceitos básicos da Teoria de Vibração, ou Teoria Vibratória de Sistemas Elementares.

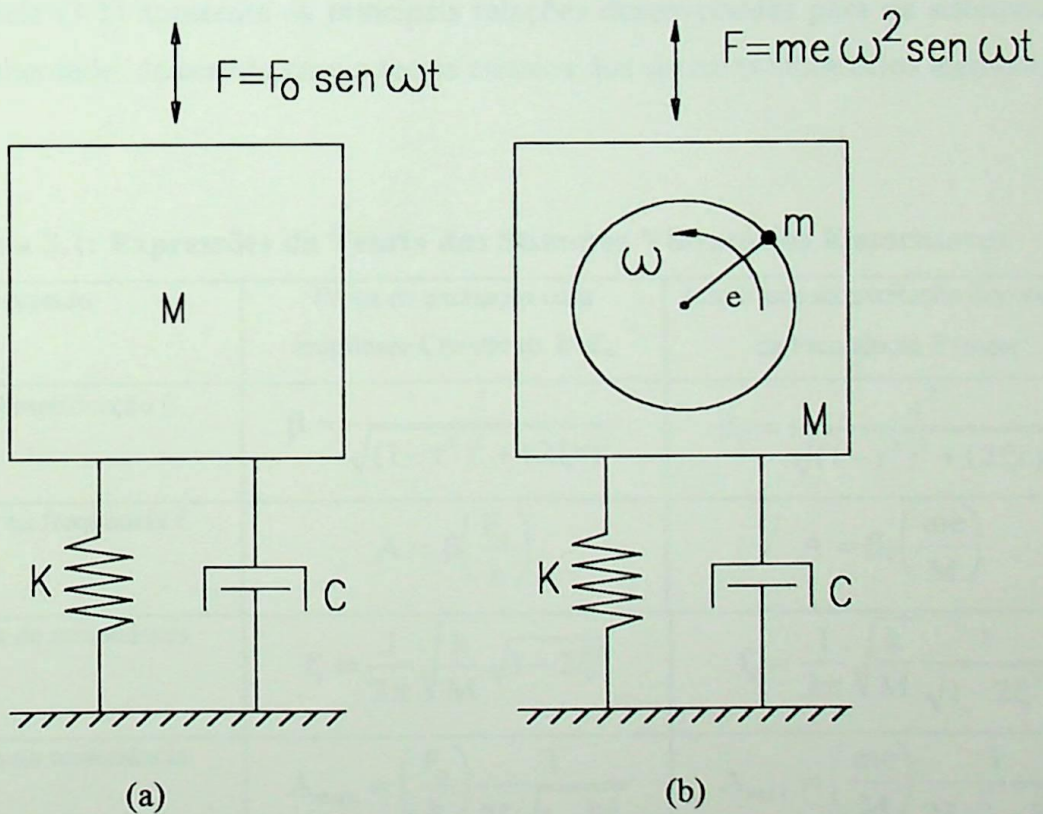


Fig. 3.1: Sistemas com um grau de liberdade. (a) Sistema excitado com força de amplitude constante (b) Sistema excitado com força de amplitude dependente da frequência.

3.1- Sistemas Com Um Grau de Liberdade

Na análise da resposta de um sistema vibratório real, em muitos casos é satisfatório reduzi-lo a um sistema idealizado de parâmetros concentrados. O sistema mais simples é o clássico sistema com um grau de liberdade com amortecimento viscoso, consistindo de uma massa, mola e amortecedor. Embora o uso do amortecimento tipo viscoso, isto é, tipo de amortecimento em que a dissipação da energia durante a oscilação é linearmente proporcional a velocidade da massa, seja um artifício matemático, existem poucas circunstâncias em que não se obtenha desta maneira um modelo satisfatório. Quanto as forças de excitação do sistema, estas podem ser constantes, ou dependentes da frequência, o que é normalmente o caso associado com a operação de máquinas rotativas e alternativas. Outros tipos de forças de excitação são possíveis, mas não para máquinas alternativas [fig.(3.1)].

A tabela (3.1) apresenta as principais relações desenvolvidas para os sistemas com um grau de liberdade, de acordo com a teoria clássica dos sistemas vibratórios elementares.

Tabela 3.1: Expressões da Teoria dos Sistemas Vibratórios Elementares

Expressão	Força de excitação com amplitude Constante: $F=F_0$	Amplitude da excitação dependente da Frequência $F=me\omega^2$
Fator de Amplificação β	$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$	$\beta_r = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$
Amplitude na frequência f .	$A = \beta \left(\frac{F_0}{k} \right)$	$A = \beta_r \left(\frac{me}{M} \right)$
Frequência de ressonância	$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} \sqrt{1-2\xi^2}$	$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}$
Amplitude na ressonância	$A_{\max} = \left(\frac{F_0}{k} \right) \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$	$A_{\max} = \left(\frac{me}{M} \right) \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

No tratamento dos sistemas com um grau de liberdade, é convencional expressar as relações em termos de parâmetros adimensionais, ξ [eq.(3.1)] e r [eq.(3.2)], cujas influências na resposta dos sistemas ao tipo de excitação é dada em função de um fator de amplificação β [figs. (3.2),(3.3)]. Lysmer (1965), entretanto, propõem a utilização de dois outros fatores adimensionais que considera serem de maior utilidade prática. Os fatores definidos pelas equações (3.3) e (3.4) dão origem a novas relações para um sistema com um grau de liberdade [tabela (3.2)], e também, a novas curvas de resposta do sistema a excitação [figs. (3.4) e (3.5)].

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{kM}} \quad (3.1)$$

Onde: $\xi \rightarrow$ fator amortecimento.
 $c_c \rightarrow$ amortecimento crítico

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{k}{M}}} \quad (3.2)$$

$\omega \rightarrow$ freqüência de excitação

$\omega_n \rightarrow$ freqüência natural

$$\bar{a}_o = \frac{\omega c}{k} \quad (3.3)$$

$$\bar{B} = \frac{Mk}{c^2} \quad (3.4)$$

Onde:

$\bar{a}_o \rightarrow$ razão das freqüências

$\bar{B} \rightarrow$ razão mássica

Tabela 3.2: Expressões de Lysmer

Expressão	Força de excitação com amplitude Constante: $F=F_0$	Amplitude de Excitação dependente da Frequência $F=me\omega^2$
Fator de Amplificação β	$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{B}\bar{a}_0)^2 + \bar{a}_0^2}}$	$\beta_f = \frac{\bar{B}\bar{a}_0}{\sqrt{(1 - \bar{B}\bar{a}_0)^2 + \bar{a}_0^2}}$
Amplitude na frequência f .	$A = \beta \left(\frac{F_0}{k} \right)$	$A = \beta_f \left(\frac{me}{M} \right)$
Frequência de ressonância	$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} \frac{\sqrt{\bar{B}-0,5}}{\sqrt{\bar{B}}}$	$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} \frac{\sqrt{\bar{B}}}{\sqrt{\bar{B}-0,5}}$
Amplitude na ressonância	$A_{\max} = \left(\frac{F_0}{k} \right) \frac{\bar{B}}{\sqrt{\bar{B}-0,25}}$	$A_{\max} = \left(\frac{me}{M} \right) \frac{\bar{B}}{\sqrt{\bar{B}-0,25}}$

As relações mais importante quando trabalha-se com os números adimensionais de Lysmer são:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{kM}} = \frac{0,5}{\sqrt{\bar{B}}} \quad (3.5)$$

$$\bar{B}\bar{a}_0^2 = \frac{\omega^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{M}} \right)^2} = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \quad (3.6)$$

Na ressonância:

$$\bar{a}_{om} = \frac{\sqrt{\bar{B}-0,5}}{\bar{B}} \rightarrow \text{para excitação com módulo constante.} \quad (3.7)$$

$$\bar{a}_{omf} = \frac{1}{\sqrt{\bar{B}-0,5}} \rightarrow \text{para excitação variável com a frequência} \quad (3.8)$$

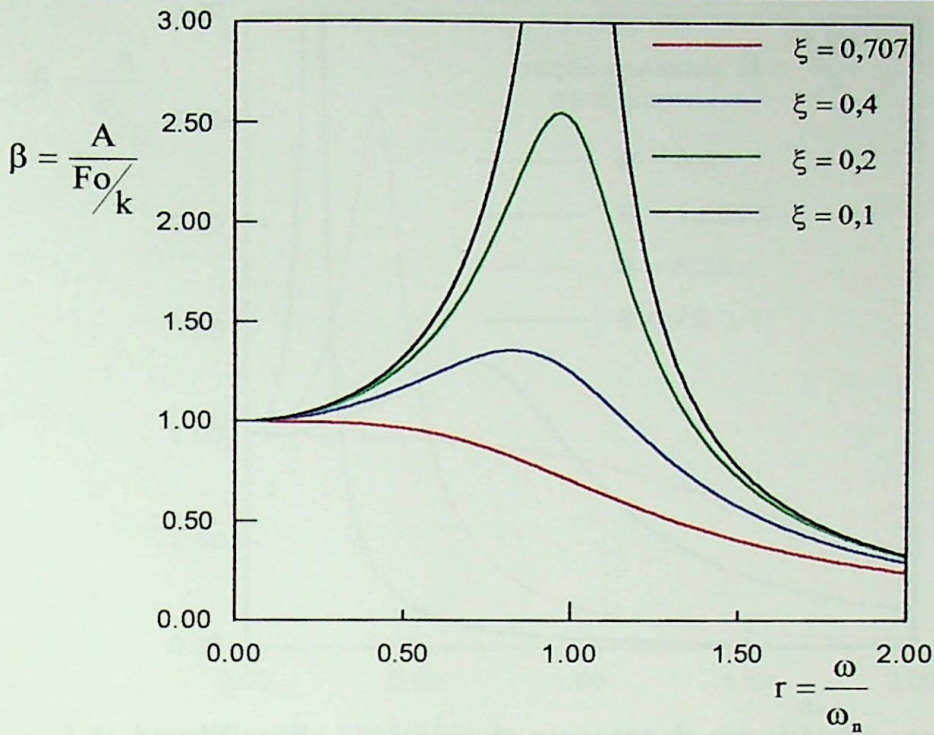


Figura 3.2: Amplificação dinâmica da resposta de um sistema excitado por força constante.

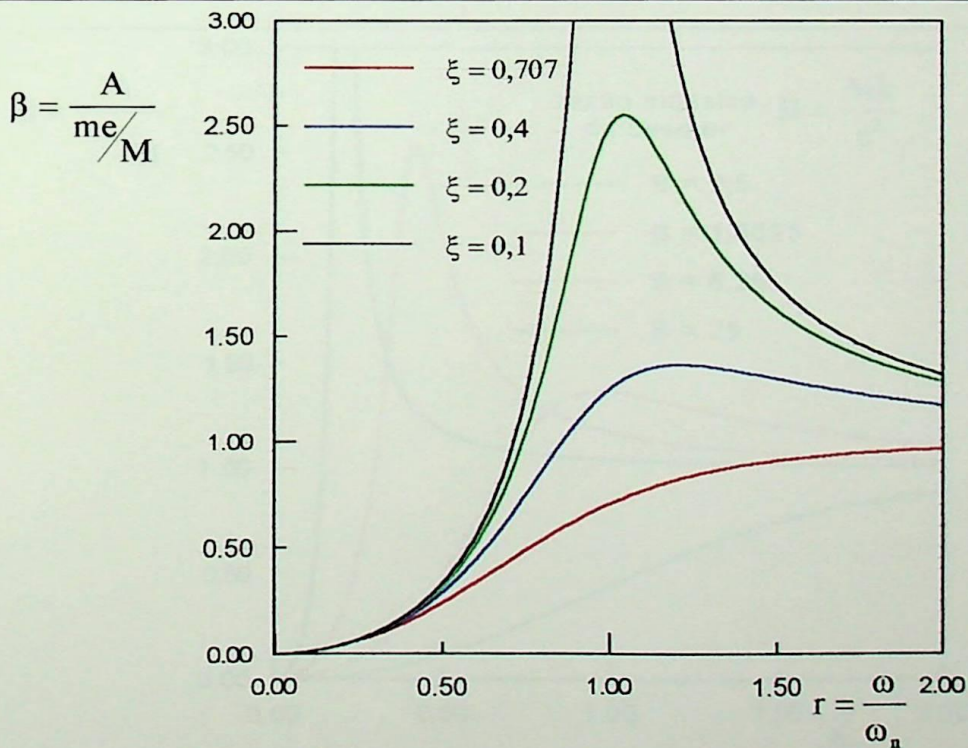


Figura 3.3: Amplificação dinâmica da resposta de um sistema excitado por força variável com a frequência.

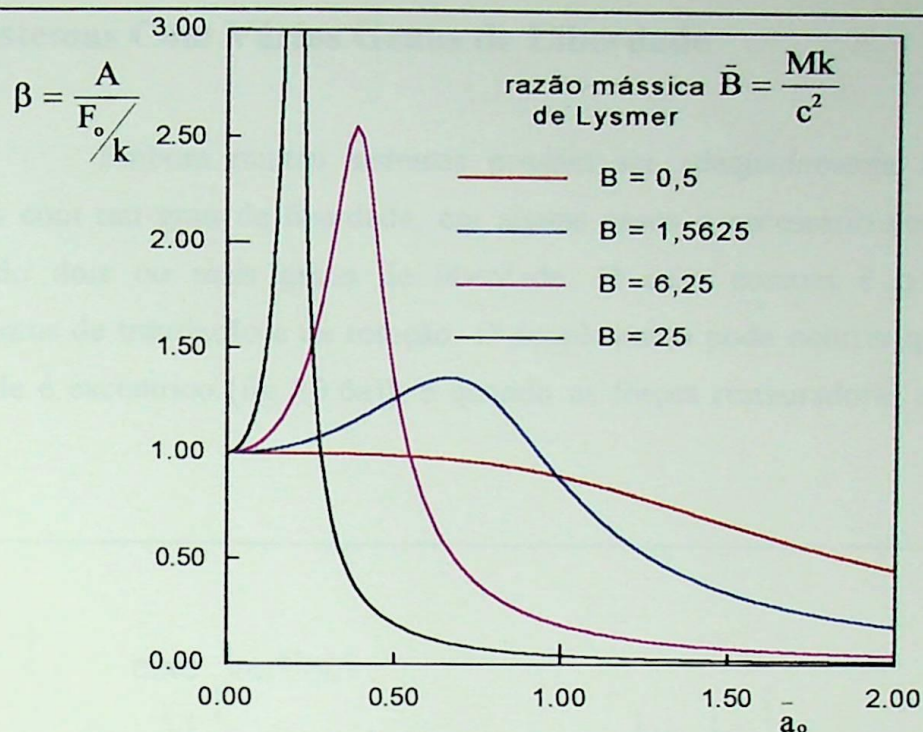


Figura 3.4: Amplificação dinâmica da resposta de um sistema excitado por força constante utilizando-se os parâmetros de Lysmer.

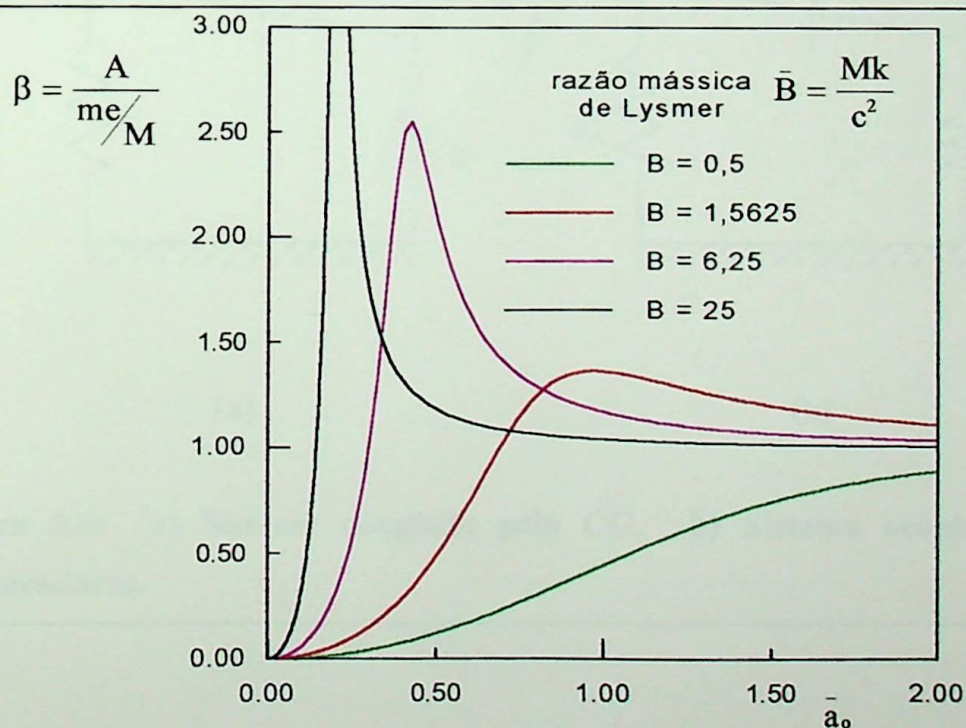


Figura 3.5: Amplificação dinâmica da resposta de um sistema excitado por força dependente da frequência utilizando-se os parâmetros adimensionais de Lysmer.

3.2- Sistemas Com Vários Graus de Liberdade

Embora muitos sistemas possam ser adequadamente modelados usando sistemas com um grau de liberdade, em alguns casos é necessário considerar o modelo possuindo dois ou mais graus de liberdade. O caso comum é o acoplamento dos movimentos de translação e de rotação. O acoplamento pode ocorrer quando o centro de gravidade é excêntrico [fig. (3.6a)], e quando as forças restauradoras são diferentes [fig. (3.6b)].

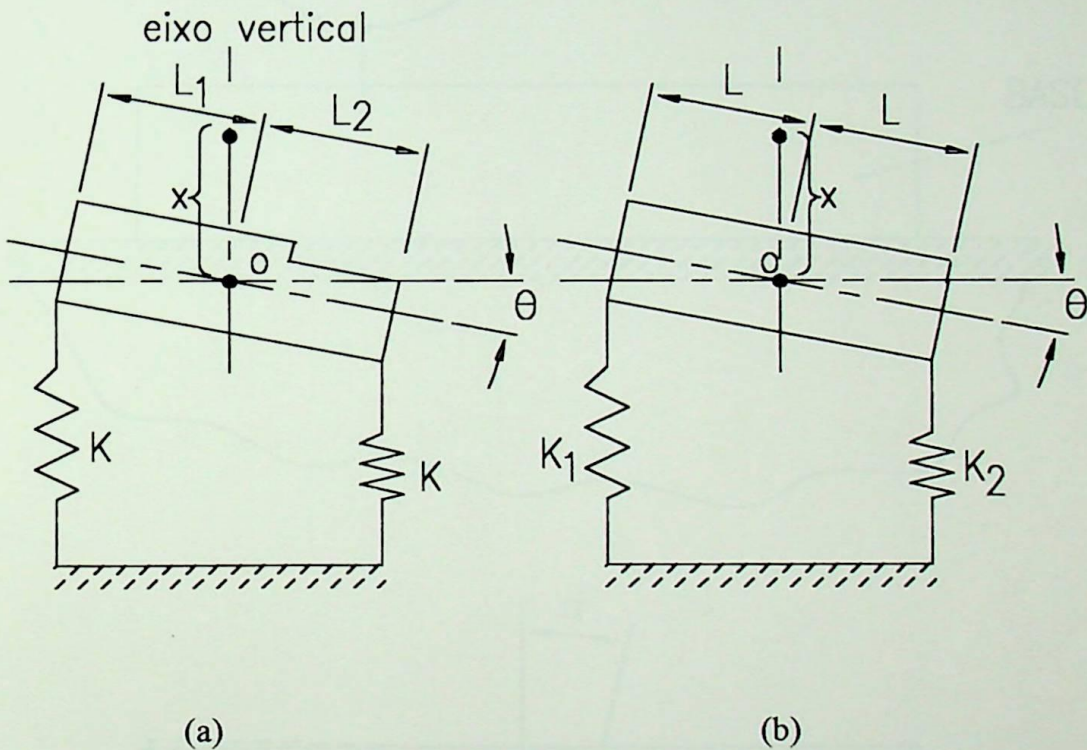


Figura 3.6: a) Sistema acoplado pelo CG. b) Sistema acoplado pelas forças restauradoras.

Note que os sistemas das figuras (3.6a) e (3.6b) se tornam desacoplados se $L_1=L_2$ e $k_1=k_2$, respectivamente.



Considerando-se o sistema da fig. (3.7), em que temos uma máquina alternativa disposta de maneira que o pistão se desloque horizontalmente, a fundação estará sujeita simultaneamente aos movimentos de translação e rotação.

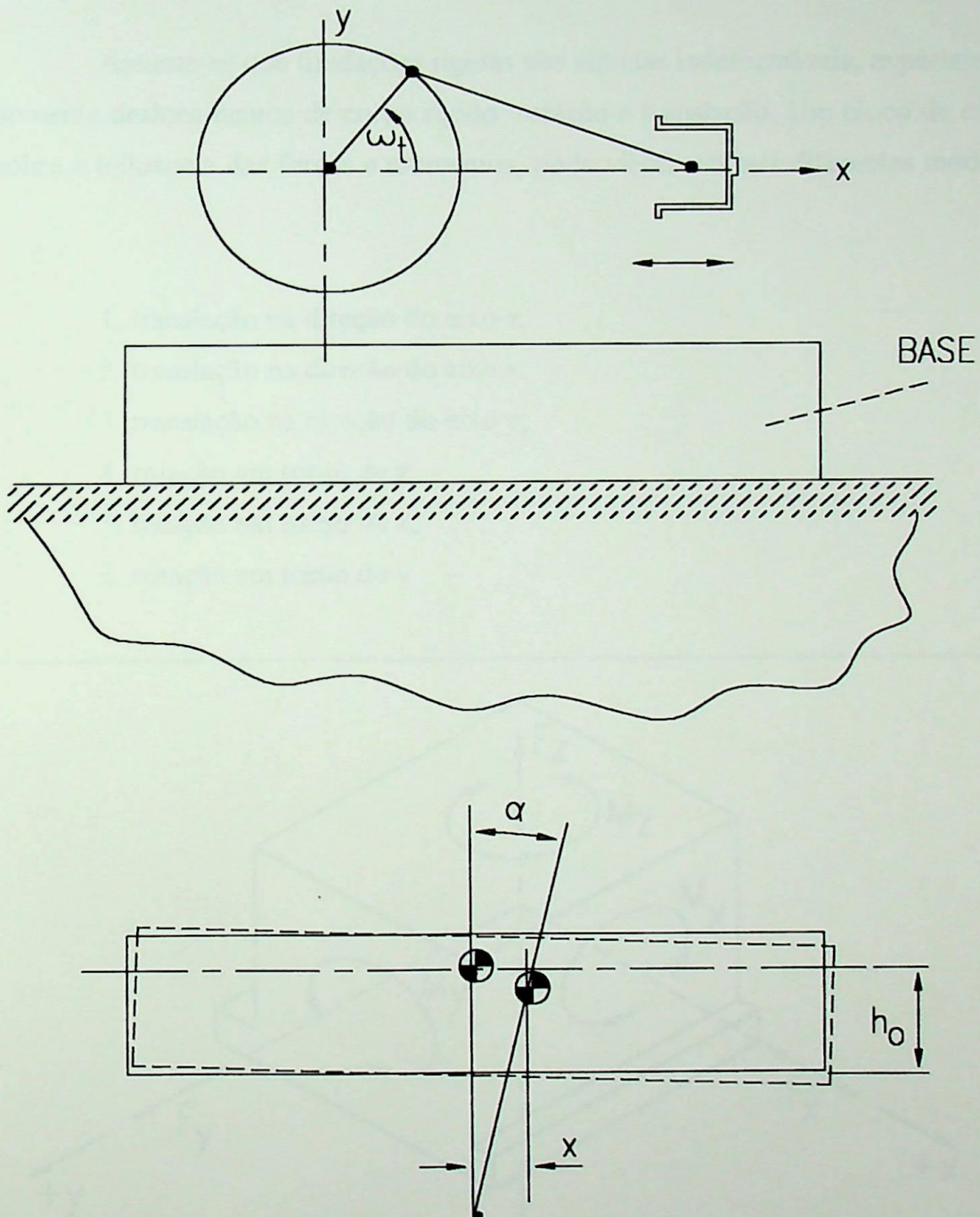


Figura 3.7: Máquina monocilíndrica disposta horizontalmente em uma fundação em bloco.

O sistema adequadamente modelado e resolvido utilizando-se as técnicas na solução de sistemas com vários graus de liberdade nos revela as frequências naturais e amplitudes de vibração [Ref. (4)].

3.3- Graus de Liberdade de uma Fundação Rígida em Bloco

Assume-se que fundações rígidas são aquelas indeformáveis, experimentando assim, somente deslocamentos de corpo rígido: rotação e translação. Um bloco de concreto rígido sobre a influência das forças e momentos, pode vibrar em seis diferentes modos [fig. (3.8)]:

1. translação na direção do eixo z;
2. translação na direção do eixo x;
3. translação na direção do eixo y;
4. rotação em torno de z;
5. rotação em torno de x;
6. rotação em torno de y.

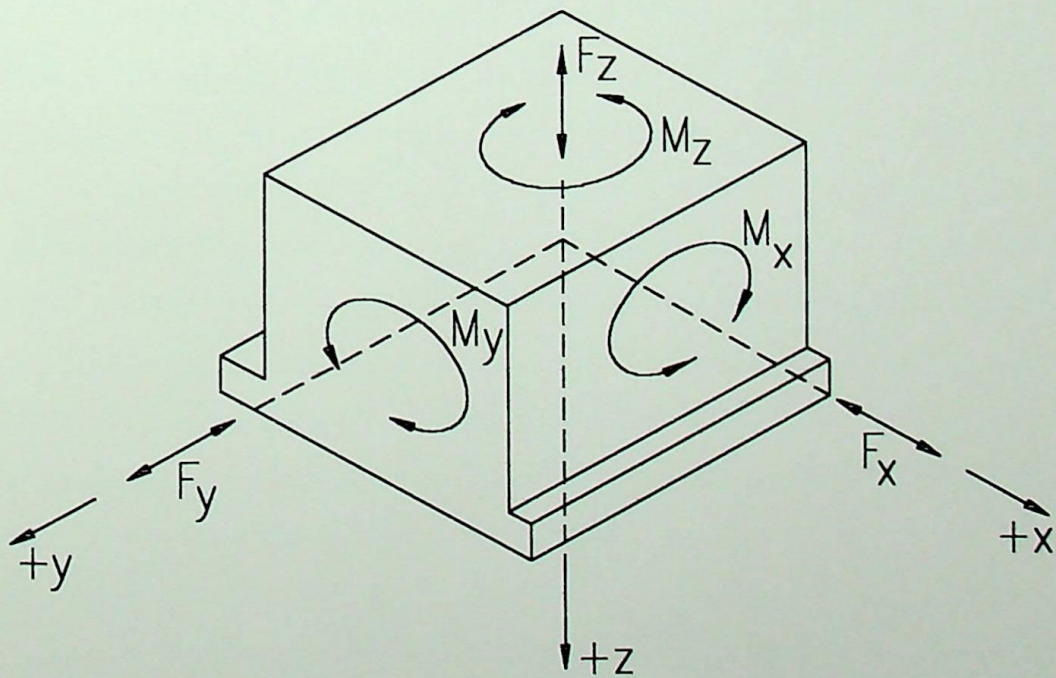


Figura 3.8: Graus de liberdade de uma fundação rígida em bloco.

O bloco possui seis graus de liberdade e seis correspondentes frequências naturais. Desses seis graus de liberdade, a translação na direção z e rotação (torção) em torno de z ocorrem independentes de qualquer outro movimento. Entretanto, translação ao longo dos eixos x ou y e correspondentes rotação em torno dos eixos y e x , respectivamente, sempre ocorrem juntos e são modos acoplados.

CAPÍTULO 4

TEORIA DA VIBRAÇÃO DAS FUNDAÇÕES NA SUPERFÍCIE DE UM MEIO ELÁSTICO

Este capítulo apresenta um breve histórico da matéria fundações de máquinas, onde as várias soluções para o comportamento dinâmico de fundações suportadas por um meio elástico são apresentadas na forma em que foram concebidas. O meio elástico considerado é homogêneo, isotrópico, semi-infinito, conhecido simplesmente por “semi-espaço elástico”. O método do semi-espaço elástico idealiza o sistema máquina-fundação como um oscilador mecânico com uma base circular na superfície do solo assumido como meio elástico, o próprio semi-espaço elástico [fig. (4.1)]. Estudos do comportamento dinâmico do solo demonstram que o solo pode ser considerado aproximadamente elástico para pequenas amplitudes de deformação.

Lamb [Ref. (10)] publicou o primeiro trabalho baseado na teoria do semi-espaço elástico. Neste trabalho Lamb apresenta seu estudo na vibração do semi-espaço elástico causado por uma carga atuando em uma linha ou ponto, problema este também conhecido por “Problema Dinâmico de Boussinesq”, estendendo para outras condições ocasionadas por uma força horizontal oscilatória agindo na superfície do meio, e para uma carga vertical e horizontal atuando dentro do meio elástico [fig. (4.2)]. As soluções de Lamb consideram ainda oscilações em estado permanente e casos transientes. Pela integração da solução, para uma força vertical sobre uma área finita da superfície, a pressão de contato produzida no semi-espaço elástico por uma base oscilante pode ser descrita, e a resposta dinâmica da base no meio pode ser avaliada.

4.1 - Oscilações Verticais de Bases Apoiadas na Superfície do Semi-espço Elástico

E. Reissner [Ref. (11)] estabeleceu uma teoria para avaliação da resposta dinâmica de bases oscilatórias influenciadas pelas propriedades do solo. Reissner escolheu o semi-espço elástico para representar o solo. Os parâmetros necessários na descrição das propriedades do meio elástico foram o módulo de elasticidade transversal \underline{G} , o coeficiente de Poisson $\underline{\nu}$, e a massa específica $\underline{\rho}$. A base oscilatória foi representada por uma massa oscilante que produzia uma pressão vertical periódica uniformemente distribuída por uma área circular de raio r_0 na superfície do semi-espço elástico [fig. (4.1)].

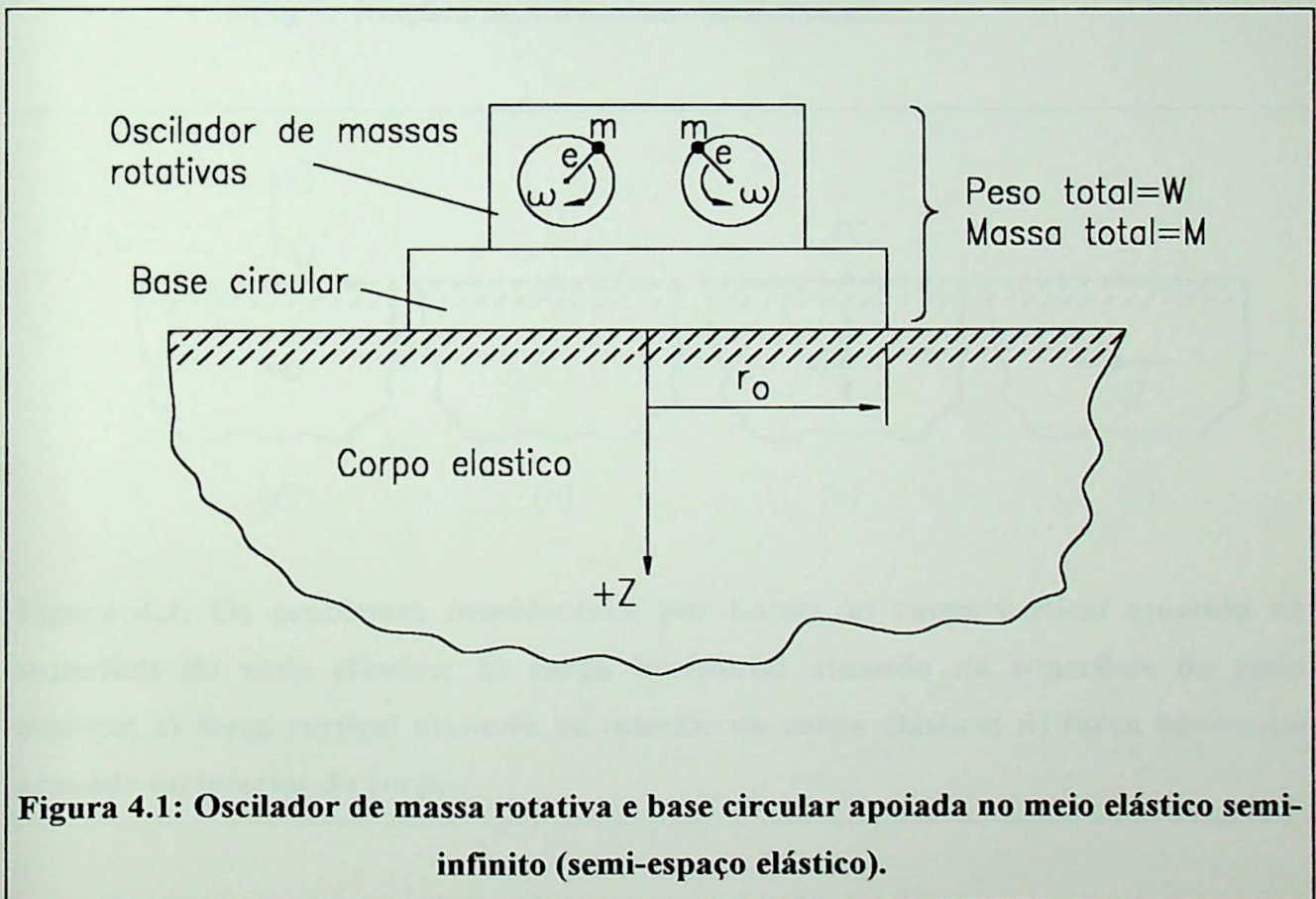


Figura 4.1: Oscilador de massa rotativa e base circular apoiada no meio elástico semi-infinito (semi-espço elástico).

A partir deste modelo matemático, Reissner desenvolveu uma solução analítica para o deslocamento vertical no centro da área circular carregada da superfície. Reissner obteve esta solução pela integração da solução de Lamb na superfície circular. O tratamento matemático não será descrito aqui, mas pode ser encontrado no paper original

ou nos paper de Quilan [Ref. (12)] ou Sung [Refs. (13), (14)]. O deslocamento vertical é expresso por:

$$z = \frac{P_0 e^{i\omega t}}{Gr_0} (f_1 + if_2) \quad (4.1)$$

Onde:

$P_0 \rightarrow$ amplitude da força oscilante aplicada.

$\omega \rightarrow$ frequência de excitação rad/s.

$G \rightarrow$ módulo de elasticidade transversal.

$r_0 \rightarrow$ raio da área de contato.

$f_1, f_2 \rightarrow$ funções deslocamento de Reissner.

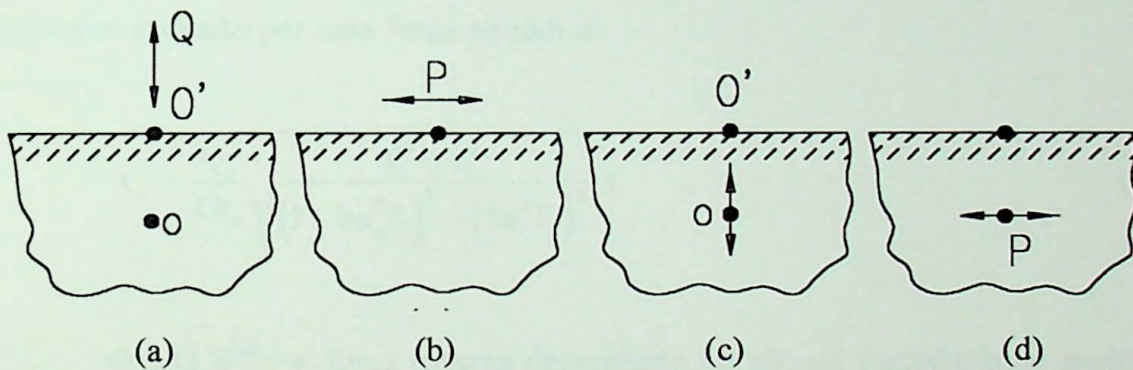


Figura 4.2: Os problemas considerados por Lamb. a) carga vertical atuando na superfície do meio elástico; b) carga horizontal atuando na superfície do meio elástico; c) força vertical atuando no interior do corpo elástico; d) força horizontal atuando no interior do corpo.

As funções deslocamento de Reissner são dependentes do coeficiente de Poisson e do termo adimensional a_0 definido por:

$$a_0 = \omega r_0 \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{\omega r_0}{v_s} \quad (4.2)$$

Na equação (4.2) v_s é a velocidade de propagação das ondas transversais (shear waves) no meio elástico.

Reissner também estabeleceu um segundo termo adimensional, designado por razão mássica \underline{b} , definido por:

$$b = \frac{M}{\rho r_o^3} = \frac{W}{\gamma r_o^3} \quad (4.3)$$

Onde:

$M \rightarrow$ massa total da base, incluindo o mecanismo de excitação (máquina).

Reissner determinou a seguinte expressão para a amplitude do movimento para um sistema excitado por uma força periódica:

$$A_z = \frac{Q_o}{Gr_o} \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{(1 - ba_o^2 f_1)^2 + (ba_o^2 f_2)^2}} \quad (4.4)$$

$Q = Q_o e^{i\omega t} \rightarrow$ força externa dependente ou não da frequência de excitação

ω .

A teoria de Reissner formou a base para aproximadamente todos os posteriores estudos analíticos de osciladores apoiados no semi-espaço elástico, ainda que esta teoria não tenha recebido imediata aceitação pelos engenheiros da área da Dinâmica dos Solos porque os resultados teóricos não concordavam completamente com os testes de campo. Existem várias razões para isso, incluindo deformações permanentes desenvolvidas durante muitos testes, violando as condições assumidas para um meio elástico; grandes amplitudes requeridas pelos instrumentos disponíveis permitiam que o excitador saltasse claramente do solo atuando como um martelo; a hipótese de uma distribuição uniforme de pressão na zona de contato solo-oscilador; e existia um erro no cálculo de f_2 que influenciava os resultados.

Quilan [Ref. (12)] e Sung [Refs. (13), (14)] estenderam a solução de Reissner considerando outras distribuições de pressão na superfície do semi-espço elástico. Quilan estabeleceu as equações para pressões oscilantes de contato que variam através do diâmetro da área de contato numa distribuição parabólica, com uma distribuição uniforme, e com a distribuição correspondente a uma base rígida (aproximação), desenvolvendo solução apenas para o caso de base rígida. Sung também estabeleceu as equações básicas para as três distribuições de pressão e apresentou soluções para cada caso. As distribuições de pressão consideradas foram:

a) Base rígida

$$\sigma_z = \frac{P_o e^{i\omega t}}{2\pi r_o \sqrt{r_o^2 - r^2}} \quad \text{para } r \leq r_o$$

$$\sigma_z = 0 \quad \text{para } r > r_o$$

b) Uniforme

$$\sigma_z = \frac{P_o e^{i\omega t}}{\pi r_o^2} \quad \text{para } r \leq r_o$$

$$\sigma_z = 0 \quad \text{para } r > r_o$$

c) Parabólico

$$\sigma_z = \frac{2P_o (r_o^2 - r^2) e^{i\omega t}}{\pi r_o^4} \quad \text{para } r \leq r_o$$

$$\sigma_z = 0 \quad \text{para } r > r_o$$

Essas três distribuições de pressão desenvolveram três diferentes formas de deslocamento na superfície carregada. Em seguida, Sung estabeleceu a resposta dinâmica da massa apoiada no semi-espço para cada um dos tipos de distribuição de pressão de contato, considerando que o centro de gravidade da massa se movimentava com a mesma distância que o centro da área carregada. Essa suposição produziu curvas de resposta

consideradas exageradas para as distribuições de pressão parabólica e uniforme porque o ponto central possui deslocamento bem maior que a média. Entretanto essas curvas são instrutivas na visualização da influência da distribuição de pressão de contato no sistema [fig. (4.3)]. Uma melhoria na apresentação das curvas de resposta foram apresentadas por Housner e Castellani [Ref. (15)], que determinaram curvas de resposta baseadas no deslocamento carregado médio o qual baseia-se no trabalho da força dinâmica total. Os picos das curvas são mostrados na fig. (4.3a) por círculos cheios designados por P, U, e R. Essas curvas indicam ao projetista que pode-se influenciar a resposta dinâmica de uma fundação controlando sua flexibilidade, por exemplo, por pós-tensionamento, como descrito por Fistedis [Ref. (16)].

A figura (4.3b) ilustra a influência da mudança do coeficiente de Poisson do semi-espaco elástico na resposta em estado permanente para o caso de distribuição de pressão de base rígida e $b=5$. Esse diagrama mostra que a amplitude é maior e a frequência é menor quando $\nu=0$. Geralmente, a solução para $\nu=0$ representa o pior caso à baixas frequências. Algumas soluções para outros modos de oscilação são disponíveis somente para $\nu=0$, sendo útil ter em mente a variação para uma condição mais real de $\nu=0,33$ ou $0,40$.

Sung estabeleceu valores para as funções deslocamento f_1 e f_2 para valores de ν de 0, 0,25, 0,33, e 0,5, para cada distribuição de pressão na faixa de \underline{a}_0 de 0 a 1,5. Essas funções deslocamentos foram introduzidas na equação (4.4) para avaliar a curva de amplitude por frequência (A_z versus a_0) para diferentes valores de razão mássica \underline{b} [fig. (4.4)]. Baseado nestas curvas pode-se determinar as máximas amplitudes de movimento e a frequência em que ocorrem. Richart [Ref. (17)] construiu uma curva relacionando máxima amplitude e o termo adimensional \underline{a}_0 para uso em projeto e análises. A mesma informação é apresentada na figura (4.10) de uma outra forma. Nota-se pela forma das curvas da figura (4.4) que para valores menores de \underline{b} correspondentemente temos menores amplitudes. Isto mostra que oscilações verticais de base rígida no semi-espaco elástico inclui uma perda de energia por propagação de ondas elásticas. Essa perda de energia por propagação de ondas elásticas é definida como “amortecimento geométrico”.

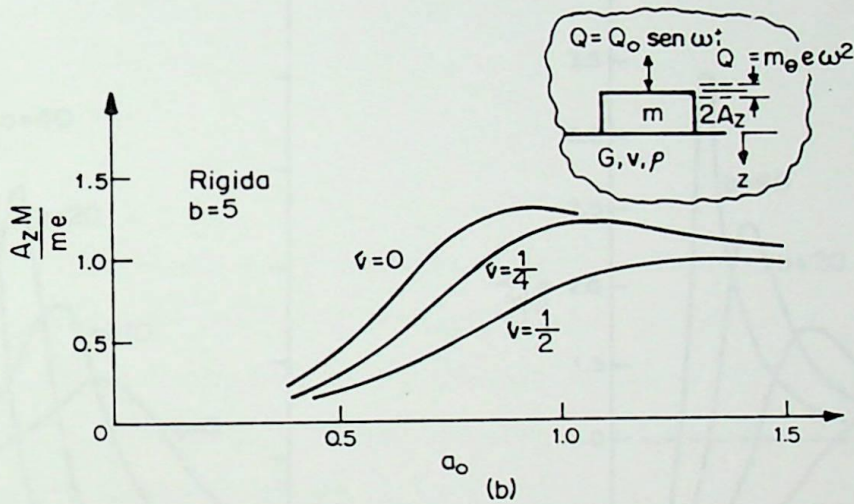
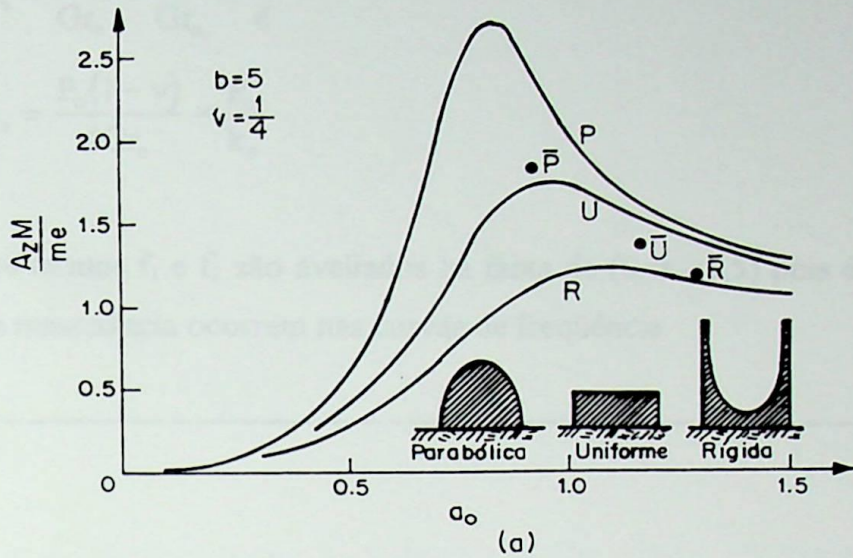


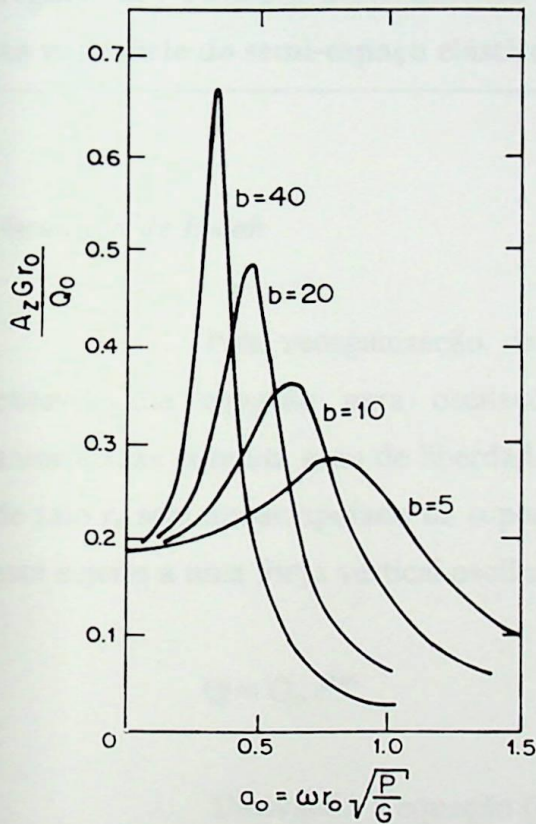
Figura 4.3: Efeito da distribuição de pressão e coeficiente de Poisson nas curvas de resposta teórica para o movimento vertical da base (segundo Richart e Whitman, [Ref. (18)]).

Bycroft [Ref. (19)] estabeleceu melhores valores para as funções deslocamentos de Reissner [fig. (4.5)]. Deste trabalho vários pontos devem ser observados. Para o caso estático ($a_0=0$) $f_2=0$ e o valor f_1 deve reproduzir a deformação estática quando introduzida na equação (4.1). Para a base circular rígida, o deslocamento estático é dado por:

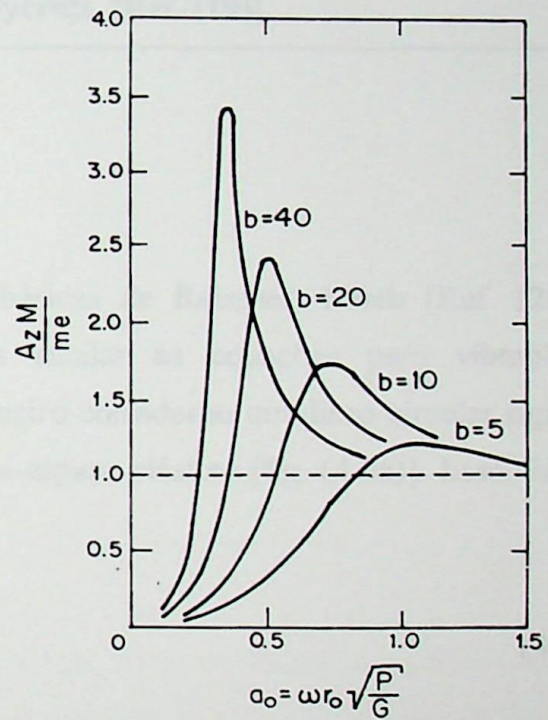
$$z_s = \frac{P_o}{Gr_o} = \frac{P_o (1-\nu)}{Gr_o \cdot 4}$$

$$z_s = \frac{P_o(1-\nu)}{4Gr_o} = \frac{P_o}{k_s} \quad (4.4)$$

Os termos f_1 e f_2 são avaliados na faixa de ($0 < a_o < 1,5$) pois é a faixa prática onde os picos de ressonância ocorrem nas curvas de frequência.



(a)



(b)

Figura 4.4: Amplitude versus frequência para oscilações verticais de uma base circular rígida apoiada no semi-espaco elástico ($\nu=0,25$), segundo Richart, [Ref. (17)].

a) Para excitação constante; b) para excitação dependente da frequência.

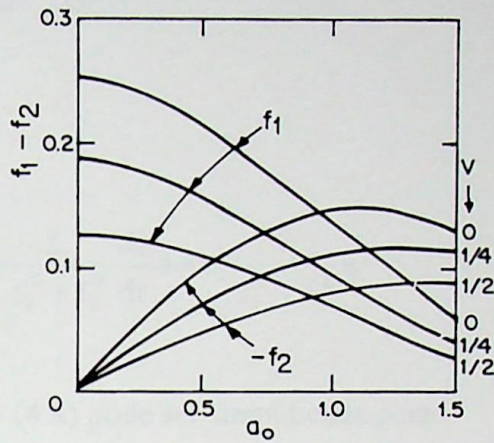


Figura 4.5: Funções deslocamento para base circular rígida vibrando verticalmente na superfície do semi-espaço elástico segundo Bycroft, [Ref. (19)].

Analogia de Hsieh

Pela reorganização das soluções básicas de Reissner, Hsieh [Ref. (20)] obteve uma equação para oscilações verticais similar às equações para vibrações amortecidas com um grau de liberdade. Hsieh primeiro considerou um disco circular rígido de raio r_0 sem massa apoiado na superfície do semi-espaço elástico [fig. (4.6a)]. Esse disco está sujeito a uma força vertical oscilante

$$Q = Q_0 e^{i\omega t} \quad (4.5)$$

Derivando a equação (4.1) com relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q_0 \omega e^{i\omega t}}{Gr_0} (if_1 - f_2) \quad (4.6)$$

Então:

$$f_1 \omega z - f_2 \frac{dz}{dt} = \frac{Q \omega}{Gr_0} (f_1^2 + f_2^2) \quad (4.7)$$

ou:

$$Q = -\frac{Gr_0}{\omega} \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \frac{dz}{dt} + Gr_0 \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} z \quad (4.8)$$

A equação (4.8) pode ser simplificada para:

$$Q = c_z \frac{dz}{dt} + k_z z \quad (4.9)$$

Com:

$$c_z = \frac{Gr_0}{\omega} \left(\frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2} \right) = \frac{r_0^2}{a_0} \sqrt{G\rho} \left(\frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2} \right) \quad (4.10)$$

$$k_z = Gr_0 \left(\frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \right) \quad (4.11)$$

Note que ambos c_z e k_z incluem f_1 e f_2 , logo dependem também de a_0 e v .

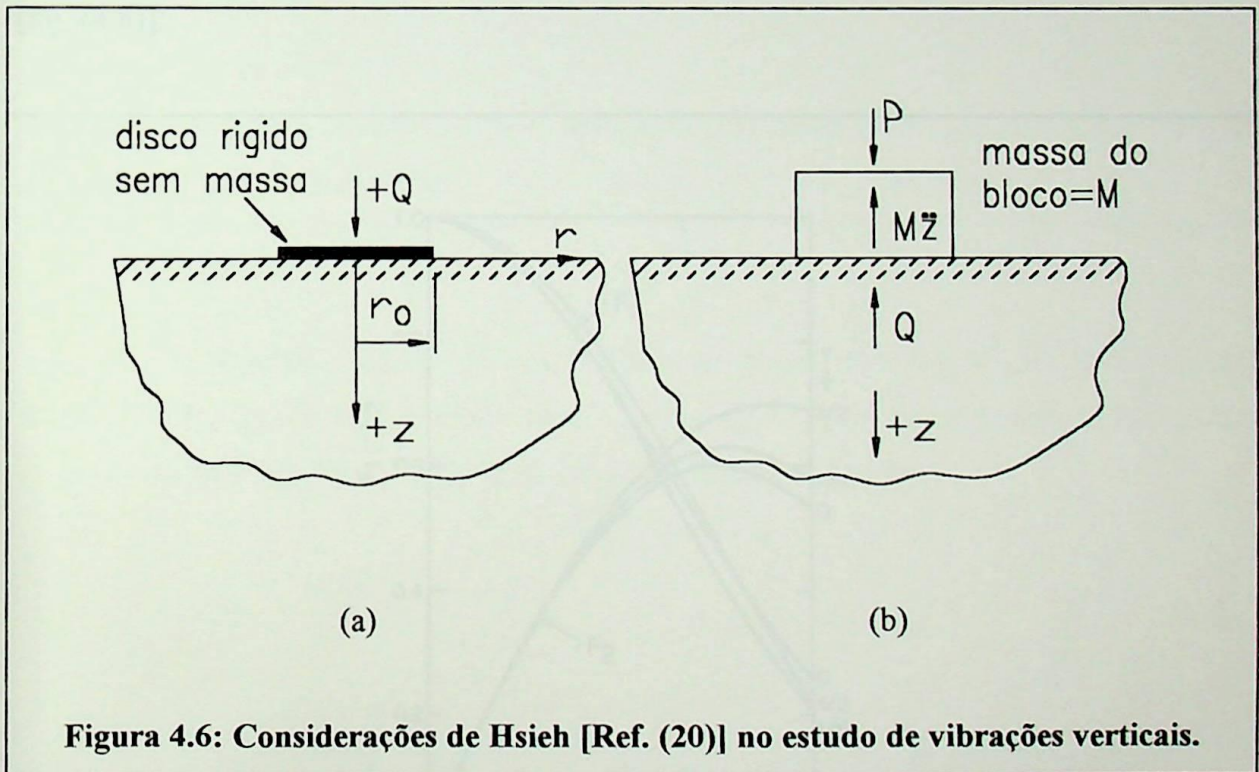
Considerando agora o caso de uma fundação cilíndrica rígida e peso total W na superfície do semi-espaço elástico e excitado por uma força periódica P [fig. (4.6b)], a equação do movimento é dada por:

$$\frac{W}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} = P - Q \quad (4.12)$$

Substituindo a equação (4.9) na equação (4.12), obtém-se:

$$\frac{W}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} + c_z \frac{dz}{dt} + k_z z = P \quad (4.13)$$

A equação (4.13) revela que uma base na superfície do semi-espaco elástico excitada por força oscilatória pode ser representada por um sistema massa-mola-amortecido. Esta estabelecida assim, a Analogia de Hsieh do sistema máquina-fundação-meio elástico com o sistema amortecido com um grau de liberdade, porém, com o inconveniente das constante de rigidez e amortecimento serem dependentes da frequência de excitação.



Analogia de Lysmer

Lysmer [Ref. (21)] considerou uma base constituída de uma série de anéis concêntricos, e aplicou pressões uniformes de diferentes magnitudes em cada anel, sendo assim possível desenvolver uma deflexão constante abaixo da base e avaliar a resposta dinâmica a uma excitação periódica. No processo desenvolvimento da solução, Lysmer criou várias notações convenientes para simplificação. A função deslocamento [eq. (4.14)]

inclui o coeficiente de Poisson, mas se multiplicada pelo fator $4/(1-\nu)$, uma nova função deslocamento é obtida [eq. (4.15)] aproximadamente independente de ν .

$$f = f_1 + if_2 \quad (4.14)$$

$$F = \frac{4}{1-\nu} f = F_1 + iF_2 \quad (4.15)$$

A figura (4.7) ilustra as funções deslocamento de Bycroft modificadas pela equação (4.15). Lysmer calculou valores de F_1 e F_2 na faixa de $(0 < a_0 < 8)$ e estendeu para $a_0 \rightarrow \infty$. É interessante notar que a solução prévia somente considerou as funções deslocamento até $a_0=1,5$ o que não possibilitou a clara identificação do pico na curva de f_2 [fig. (4.8)].

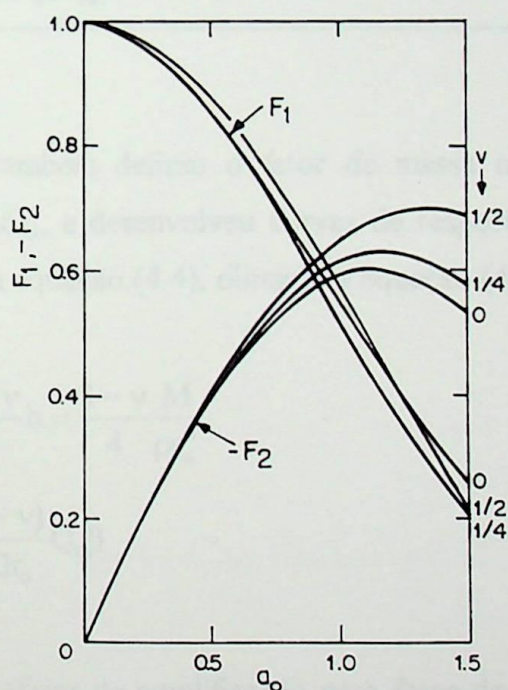


Figura 4.7: Variação da Função Deslocamento modificada; (Segundo Lysmer e Richart, [Ref. (22)]).

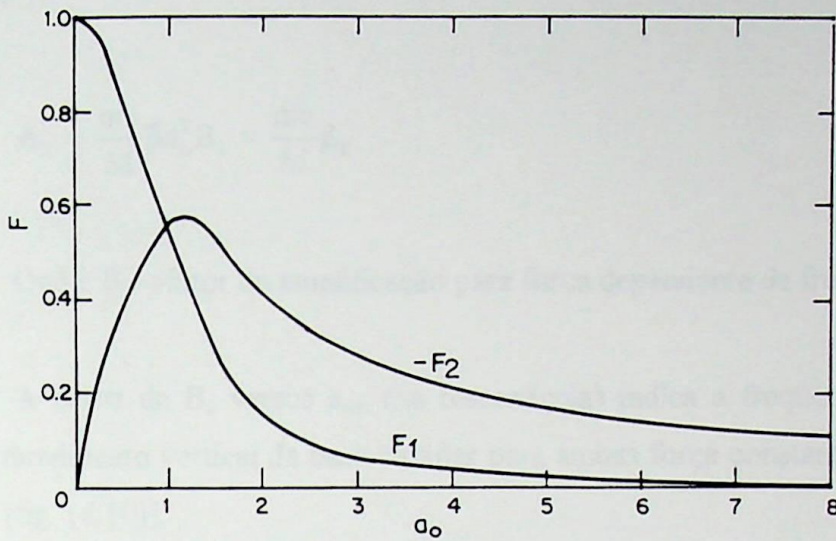


Figura 4.8: Função Deslocamento F para vibração vertical de um disco sem massa; (Lysmer e Richart, [Ref. (22)]).

Lysmer também definiu o fator de massa modificado ou razão mássica modificado B_z [eq. (4.16)], e desenvolveu curvas de resposta introduzindo as expressões modificadas de \underline{F} e \underline{B}_z na equação (4.4), obtendo a equação (4.17).

$$B_z = \frac{1-\nu}{4} b = \frac{1-\nu}{4} \frac{M}{\rho r_0^3} \quad (4.16)$$

$$A_z = \frac{(1-\nu)}{4Gr_0} Q_0 \beta \quad (4.17)$$

Onde: β → fator de amplificação para força de excitação constante [ver item (3.1), tabela (3.2)].

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-B_z a_0^2)^2 + 0,7225 a_0^2}} \quad (4.18)$$

Para uma excitação dependente da frequência a equação é expressa da seguinte forma:

$$A_z = \frac{me}{M} \beta a_0^2 B_z = \frac{me}{M} \beta_f \quad (4.19)$$

Onde: $\beta_f \rightarrow$ fator de amplificação para força dependente da frequência.

A curva de B_z versus a_{om} (na ressonância) indica a frequência de máxima amplitude do movimento vertical da base circular para ambas força constante e dependente da frequência [fig. (4.10)].

Lysmer descobriu estudando as variações do amortecimento e coeficiente de mola (rigidez) com a frequência adimensional a_0 , que valores constantes podem ser usados, escolhendo a constante de mola igual ao valor estático ($a_0 = 0$), [eq. (4.20)]:

$$k_z = \frac{4Gr_0}{1-\nu} \quad (4.20)$$

O amortecimento na faixa ($0 < a_0 < 1,0$) pode ser calculado:

$$c_z = \frac{3,4r_0^2}{1-\nu} \sqrt{\rho G} \quad (4.21)$$

A equação do movimento na Analogia de Lysmer é, então expressa por:

$$M\ddot{z} + \frac{3,4r_0^2}{(1-\nu)} \sqrt{G\rho} \dot{z} + \frac{4Gr_0}{(1-\nu)} z = Q \quad (4.22)$$

Estabelecida a analogia com o sistema com um grau de liberdade, pode-se então, determinar o fator amortecimento ξ , frequência natural e de ressonância e máxima amplitude de vibração [ver item (3.1)].



O fator amortecimento é dado por:

$$\xi = \frac{0,425}{\sqrt{B_z}} \quad (4.23)$$

A freqüência natural por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_z}{M}} = \frac{v_s}{r_o} \frac{\sqrt{B_z}}{B_z} \quad (4.24)$$

Para excitação por força constante, a freqüência de ressonância é dada por:

$$\omega_r = \frac{v_s}{r_o} \frac{\sqrt{B_z - 0,36}}{B_z} \quad (4.25)$$

A correspondente amplitude de oscilação na ressonância por:

$$A_z = \frac{Q_o(1-\nu)}{4Gr_o} \frac{B_z}{0,85\sqrt{B_z - 0,18}} \quad (4.26)$$

Quando a força de excitação é função da freqüência, a expressão de Lysmer para a freqüência de ressonância é:

$$\omega_r = \frac{v_s}{r_o} \sqrt{\frac{0,9}{B_z - 0,45}} \quad (4.27)$$

E a amplitude máxima é dada por:

$$A_{zm} = \frac{me}{M} \frac{B_z}{0,85\sqrt{B_z - 0,18}} \quad (4.28)$$

Concluindo, o resultado mais importante do estudo de Lysmer foi o estabelecimento da ponte entre a teoria do semi-espaço elástico e o sistema massa-mola-amortecedor provendo valores para as constantes de mola e amortecimento [fig. (4.9)]. Usando a equação (4.22) pode-se avaliar a resposta de um sistema para excitação periódica [figs (4.11) e (4.12)] ou transiente.

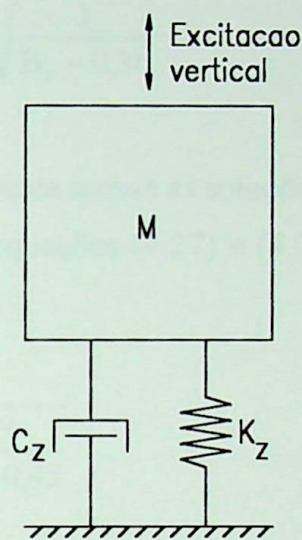


Figura 4.9: Sistema equivalente de uma fundação em bloco excitada verticalmente por força periódica ou transiente.

O interesse dos autores Almeida e Simões na Teoria das Fundações, que influenciou na origem desta obra, fez com que, surgisse durante esses estudos uma expressão para a frequência de ressonância de sistemas excitados por forças ocasionadas por massas desbalanceadas diferente da equação (4.27) de Lysmer. A equação tem como base a teoria clássica de sistemas elementares vibratórios [item (3.1)] e é expressa por:

$$\omega_r = \frac{v_s}{r_o} \frac{1}{\sqrt{B_z - 0,36}} \quad (4.29)$$

A obtenção da expressão acima é de fácil demonstração, veja:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_z}{M}} = \sqrt{\frac{4Gr_o}{(1-\nu)M}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \sqrt{\frac{4\rho r_o}{(1-\nu)M}}$$

$$\omega_n = \frac{v_s}{r_o} \sqrt{\frac{4\rho r_o^3}{(1-\nu)M}} = \frac{v_s}{r_o} \sqrt{\frac{1}{B_z}} = \frac{v_s}{r_o} \frac{\sqrt{B_z}}{B_z}$$

$$\text{Sendo: } \left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{0,425}{\sqrt{B_z}}$$

Logo:

$$\omega_r = \frac{v_s}{r_o} \sqrt{\frac{1}{B_z - 0,36}}$$

A figura (4.13) apresenta ambas as soluções de forma que se possa comparar as soluções obtidas, sendo que as equações (4.27) e (4.29) podem ser escritas na seguinte forma:

$$a_{or} = \frac{\omega_r r_o}{v_s} = \sqrt{\frac{0,9}{B_z - 0,45}} \quad (4.30)$$

$$a_{or} = \frac{\omega_r r_o}{v_s} = \frac{1}{\sqrt{B_z - 0,36}} \quad (4.31)$$

Existem duas relações muito importantes na determinação das equações de amplificação dinâmica, as quais são:

$$\bar{B} = \frac{Mk}{c^2} = \frac{Mk_z}{c_z^2} = 1,384B_z \quad (4.32)$$

$$\bar{a}_o = \frac{\omega c}{k} = \omega \frac{c_z}{k_z} = 0,85a_o \quad (4.33)$$

As relações acima introduzidas nas expressões de amplificação dadas na tabela (3.2), item (3.1), resultam nas expressões de amplificação para sistema excitado por

força constante, equação (4.17), com β dado pela expressão (4.18), e de amplificação de sistema excitado por força com módulo variável com a frequência, equação (4.19).

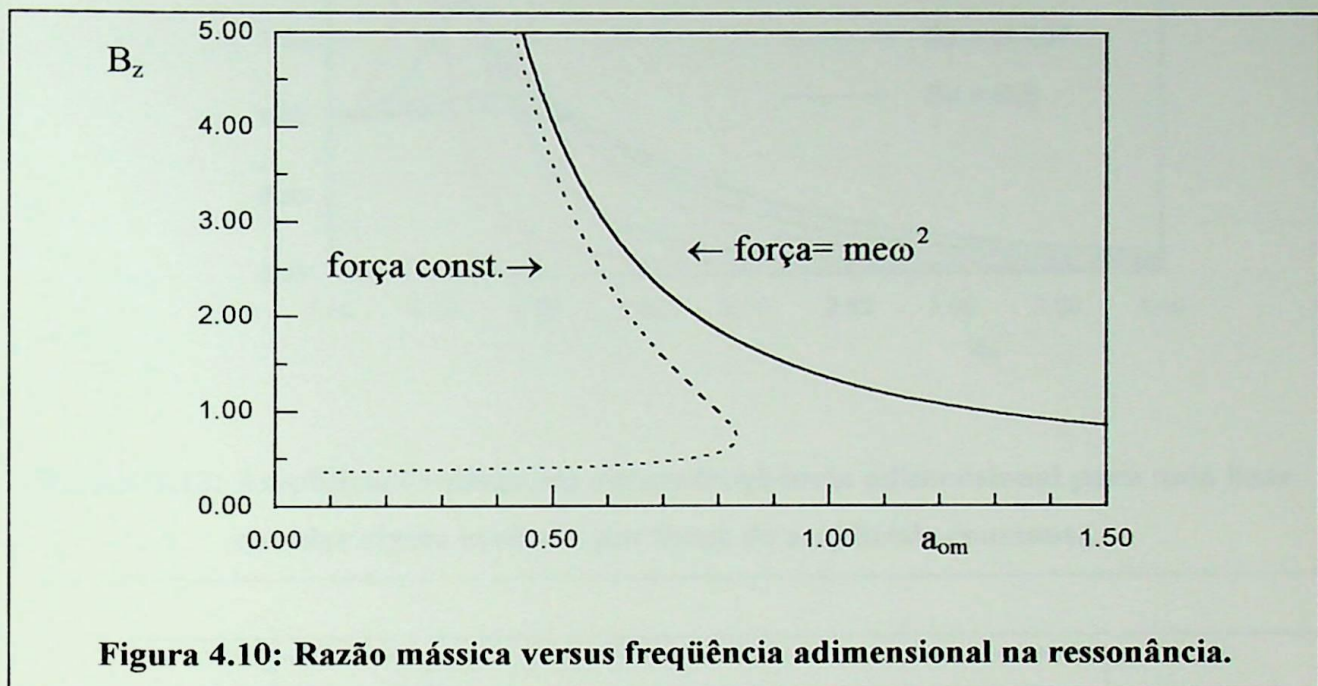


Figura 4.10: Razão mássica versus frequência adimensional na ressonância.

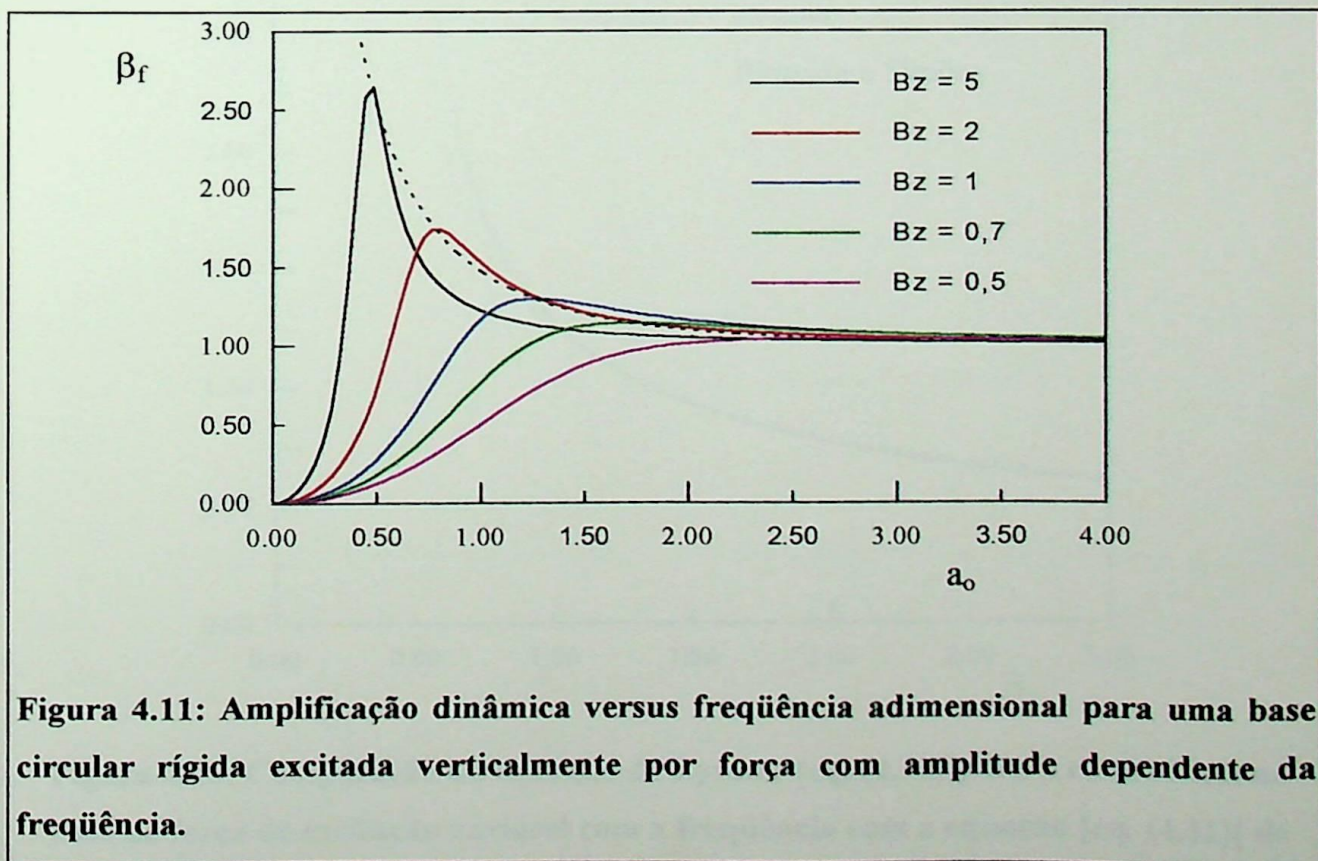


Figura 4.11: Amplificação dinâmica versus frequência adimensional para uma base circular rígida excitada verticalmente por força com amplitude dependente da frequência.

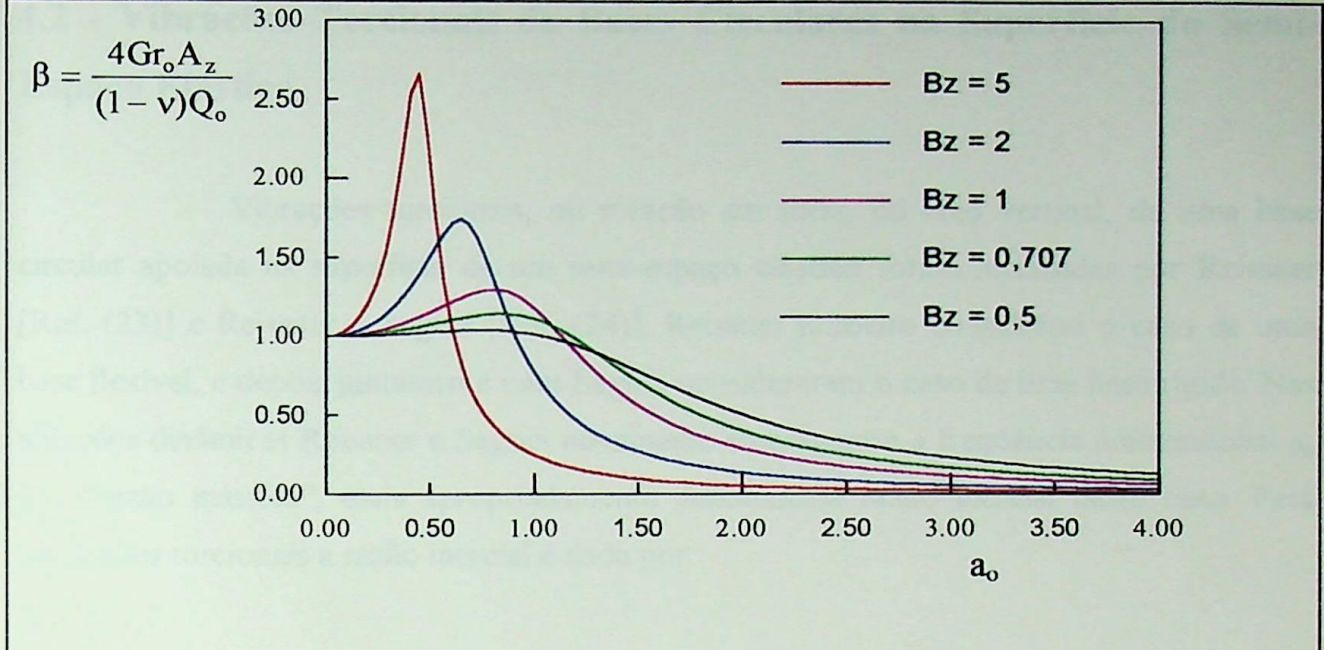


Figura 4.12: Amplificação dinâmica versus frequência adimensional para uma base circular rígida excitada por força de amplitude constante.

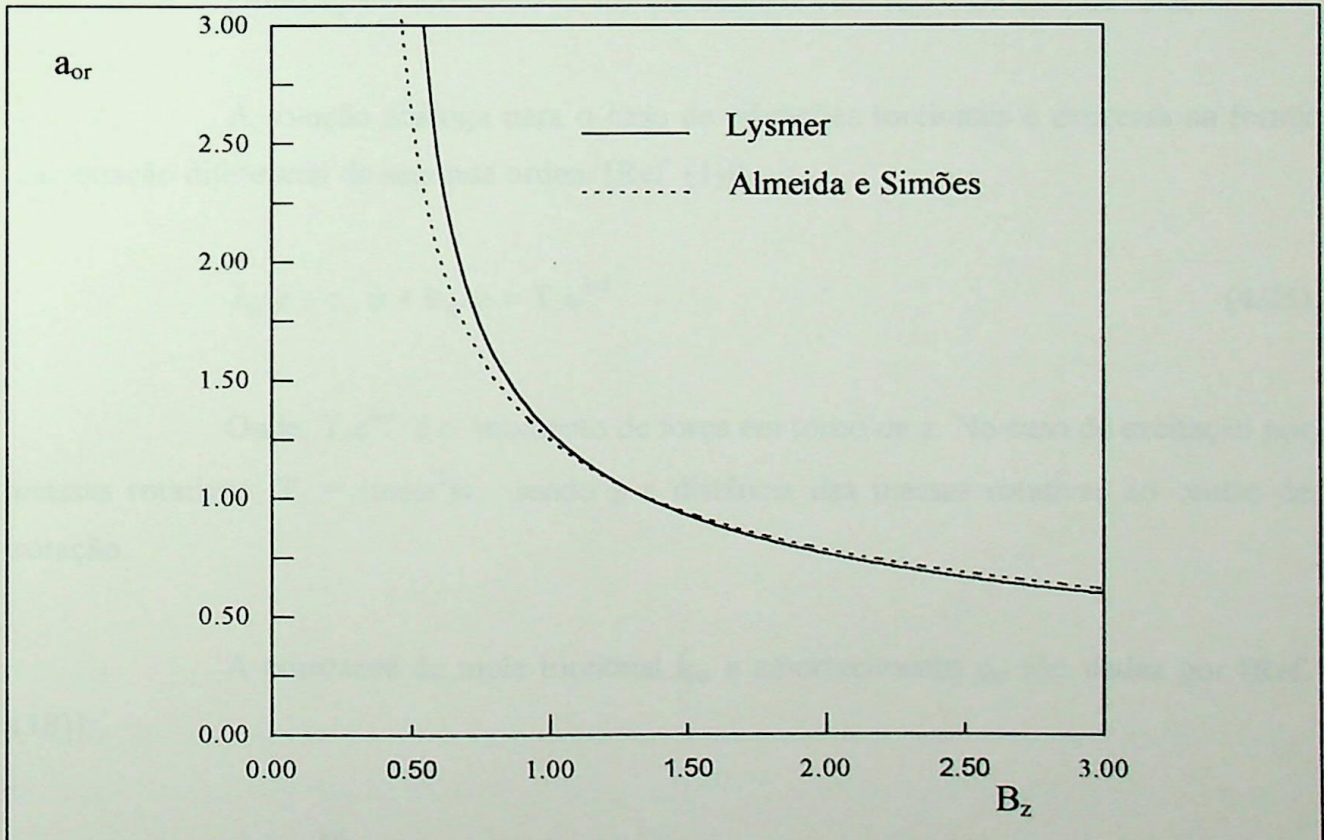


Figura 4.13: Comparação da equação de Lysmer [eq. (4.30)] para a ressonância no caso de força de excitação variável com a frequência com a equação [eq. (4.31)] de Almeida e Simões.

4.2 - Vibrações Torcionais de Bases Circulares na Superfície do Semi-Espaço Elástico

Vibrações torcionais, ou rotação em torno do eixo vertical, de uma base circular apoiada na superfície de um semi-espaco elástico foram analisadas por Reissner [Ref. (23)] e Reissner e Sagoci [Ref. (24)]. Reissner primeiro considerou o caso de uma base flexível, e depois juntamente com Sagoci consideraram o caso de uma base rígida. Nas soluções dinâmicas Reissner e Sagoci novamente empregaram a frequência adimensional \underline{a} e a “razão mássica”, mais apropriadamente denominada razão inercial neste caso. Para oscilações torcionais a razão inercial é dada por:

$$B_{\psi} = \frac{I_{\psi}}{\rho r_0^5} \quad (4.34)$$

Onde, I_{ψ} é o momento de inércia de massa em torno do eixo de rotação.

A solução análoga para o caso de vibrações torcionais é expressa na forma da equação diferencial de segunda ordem [Ref. (1)]:

$$I_{\psi} \ddot{\psi} + c_{\psi} \dot{\psi} + k_{\psi} \psi = T_z e^{i\omega t} \quad (4.35)$$

Onde, $T_z e^{i\omega t}$ é o momento de força em torno de z . No caso de excitação por massas rotativas: $T_z = (m\omega^2)a$, sendo \underline{a} a distância das massas rotativas ao centro de rotação.

A constante de mola torcional \underline{k}_{ψ} e amortecimento \underline{c}_{ψ} são dadas por [Ref. (18)]:

$$k_{\psi} = \frac{16}{3} G r_0^3 \quad (4.36)$$

$$c_{\psi} = \frac{1,6 r_0^4 \sqrt{G\rho}}{1 + B_{\psi}} \quad (4.37)$$

A expressão para o fator amortecimento comumente apresentada nas literaturas de diversos autores é a seguinte:

$$\xi_{\psi} = \frac{0,5}{(1 + 2B_{\psi})} \quad (4.38)$$

Entretanto, com base na definição do fator de amortecimento ξ , uma outra expressão pode ser obtida :

$$\xi_{\psi} = \frac{c_{\psi}}{2\sqrt{k_{\psi}I_{\psi}}} = \frac{0,3464}{(1 + B_{\psi})\sqrt{B_{\psi}}} \quad (4.39)$$

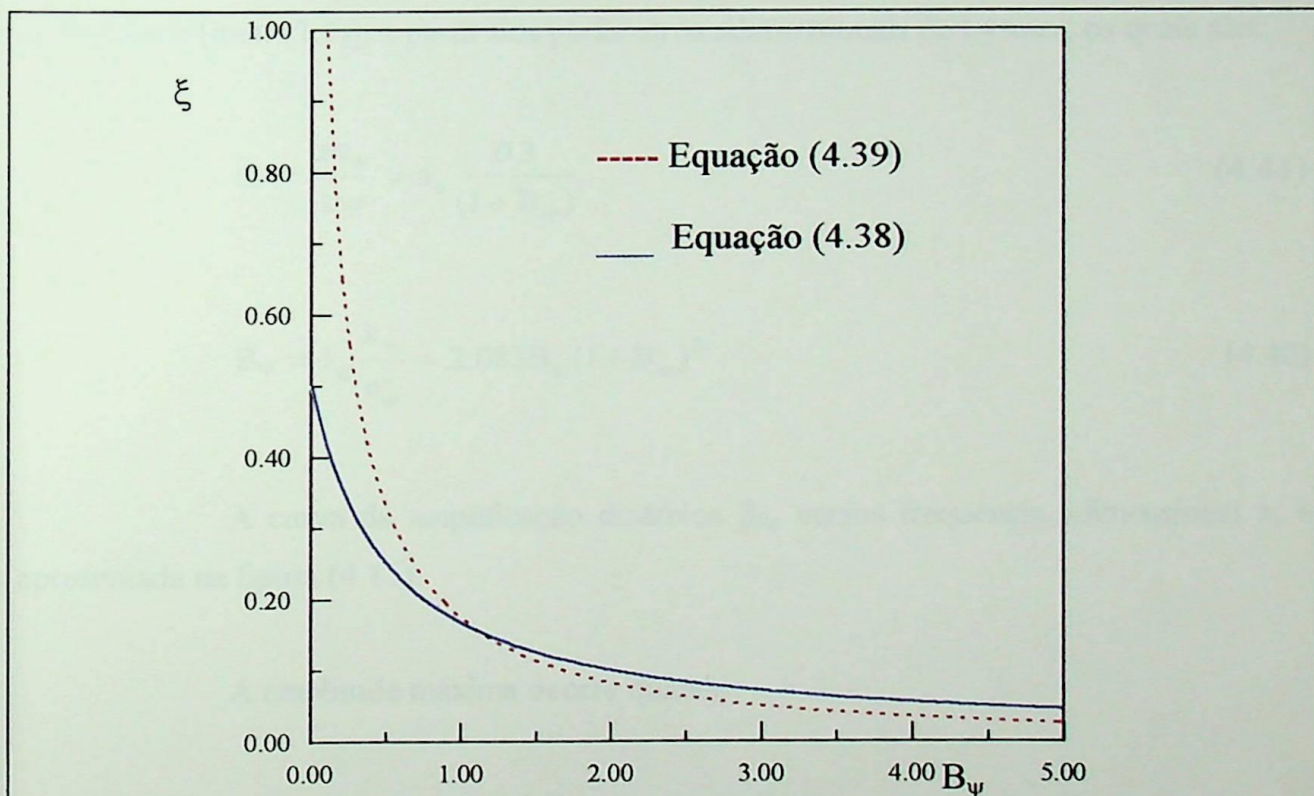


Figura 4.14: Comparação entre o fator de amortecimento encontrado nas literaturas de referência desta obra e o fator de amortecimento dado pela equação (4.39), com base nas constantes de mola e amortecimento de acordo com Richart e Whitman [Ref. (18)].

Os resultados obtidos pelo uso das equações (4.38) e (4.39) são apresentados na figura (4.14), onde percebe-se a discordância dos resultados para valores de $B_\psi < 1$.

A amplificação dinâmica da resposta para o caso de massas desbalanceadas é dada por:

$$\beta_{r\psi} = \frac{I_\psi}{mea} A_\psi = \frac{0,18747B_\psi a_o^2}{\sqrt{(1 - 0,18747B_\psi a_o^2)^2 + \frac{0,09}{(1 + B_\psi)^2} a_o^2}} \quad (4.40)$$

A expressão acima deriva da Teoria da Vibração para sistemas com um grau de liberdade [item (3.1)], a partir dos parâmetros adimensionais de Lysmer, os quais são:

$$\bar{a}_o = \frac{\omega c_\psi}{k_\psi} = a_o \frac{0,3}{(1 + B_\psi)} \quad (4.41)$$

$$\bar{B}_\psi = I_\psi \frac{k_\psi}{c_\psi^2} = 2,083B_\psi (1 + B_\psi)^2 \quad (4.42)$$

A curva da amplificação dinâmica $\beta_{r\psi}$ versus frequência adimensional a_o é apresentada na figura (4.15).

A amplitude máxima ocorre quando:

$$a_{om} = \frac{1 + B_\psi}{\sqrt{0,18747B_\psi (1 + B_\psi)^2 - 0,045}} \quad (4.43)$$

A expressão acima nos permite obter a curva de frequência adimensional versus razão inercial [fig. (4.16)]. A mesma curva pode ser encontrada na obra "Vibrations of Soils and Foundations", de Richart, Hall e Woods [Ref. (1)], porém com resultados ligeiramente diferentes [fig. (4.18)].

Deve-se notar que a solução teórica para oscilações torcionais não é influenciada pelo coeficiente de Poisson, e que, a energia é dissipada somente pela propagação de ondas elásticas transversais, conseqüentemente o efeito do amortecimento geométrico é inferior ao caso de vibrações verticais, onde a energia é dissipada pela propagação de três tipos de ondas: transversais, de compressão, e as ondas de Rayleigh ou ondas superficiais.

O sistema equivalente para o caso de base circular excitada torcionalmente por momento de força periódico é apresentada na figura (4.17).

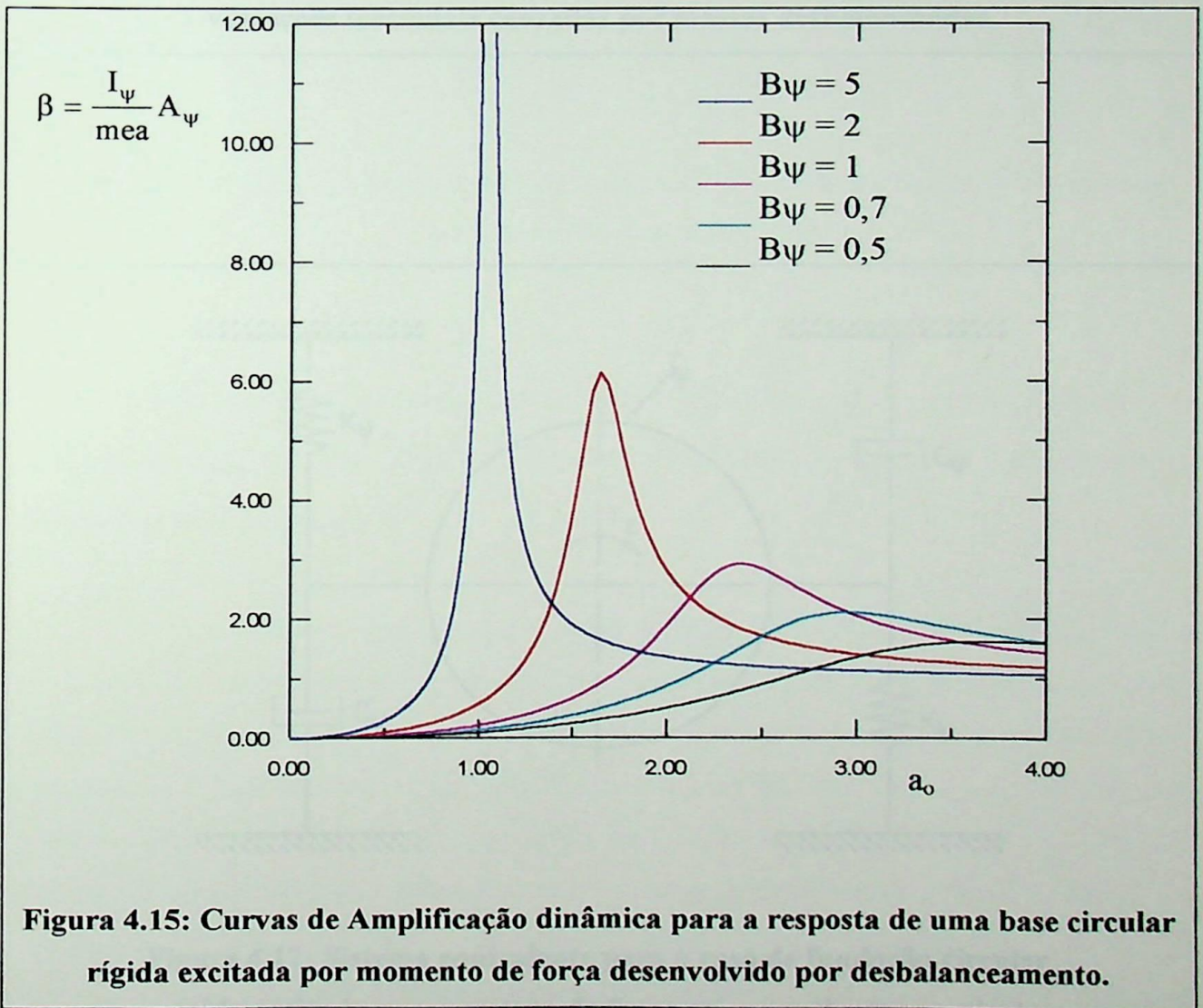


Figura 4.15: Curvas de Amplificação dinâmica para a resposta de uma base circular rígida excitada por momento de força desenvolvido por desbalanceamento.

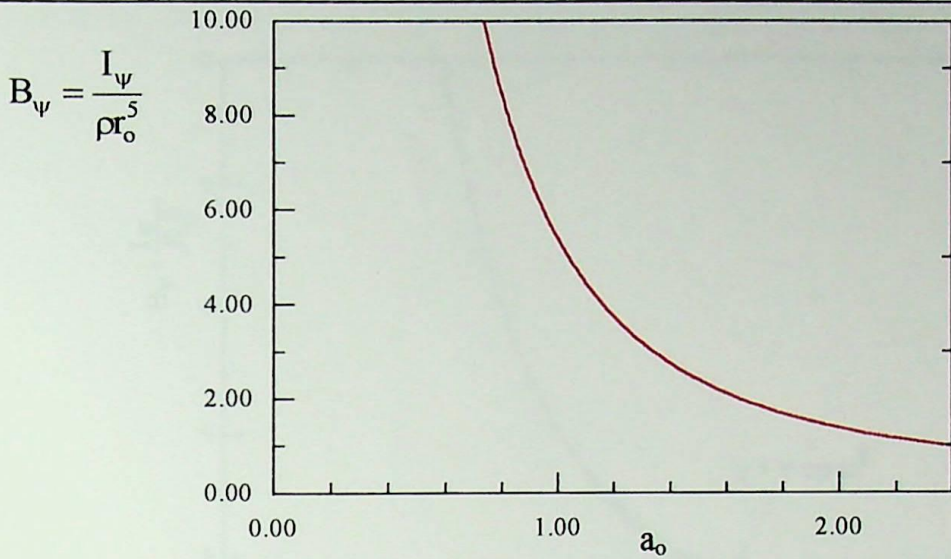


Figura 4.16: Razão mássica versus frequência adimensional na ressonância para vibrações torcionais causadas por massas desbalanceadas.

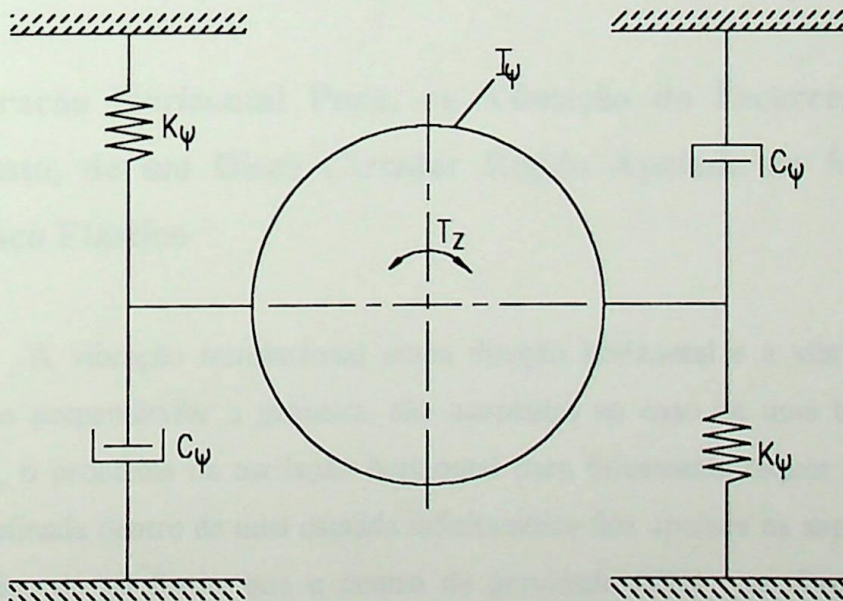


Figura 4.17: Sistema equivalente para o caso de fundação circular rígida excitada por momento de força em torno de eixo vertical.

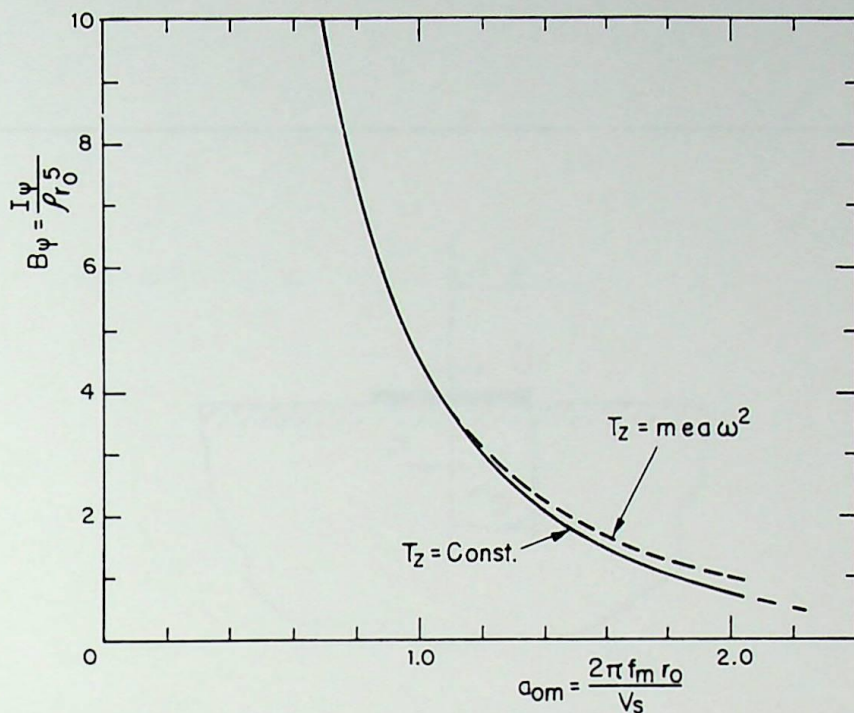


Figura 4.18: Razão mássica versus frequência adimensional na ressonância para oscilações torcionais [Ref. (1)].

4.3 - Vibração Horizontal Pura, ou Vibração de Escorregamento, ou Deslizamento, de um Disco Circular Rígido Apoiado na Superfície do Semi-Espaço Elástico

A vibração translacional numa direção horizontal e a vibração rotacional numa direção perpendicular a primeira, são acopladas no caso de uma base com altura finita. Então, o problema da oscilação horizontal pura fisicamente requer que a massa da base seja confinada dentro de uma camada infinitamente fina apoiada na superfície do semi-espaço elástico de tal forma que o centro de gravidade (CG) e as forças atuantes, de excitação e de restrição do movimento, se encontrem em uma mesma linha [fig. (4.19)].

A solução analítica para a translação de um disco circular rígido foi apresentada por Arnold, Bycroft e Warburton [Ref. (25)], e por Bycroft [Ref. (19)]. Os

resultados foram expressos em termos dos fator adimensional \underline{a}_0 , e da razão mássica \underline{b} [eq. (4.3)].

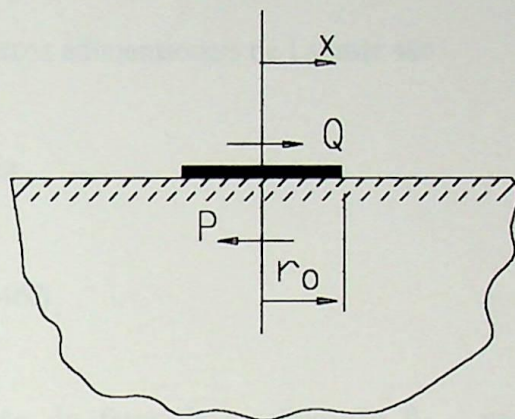


Figura 4.19: Modelo matemático para o estudo da vibração horizontal pura.

Analogia de Hall

Hall [Ref. (26)] definiu a razão mássica modificada \underline{B}_x para o caso translacional puro, eliminando assim o efeito do coeficiente de Poisson.

$$\underline{B}_x = \frac{7 - 8\nu}{32(1 - \nu)} \frac{M}{\rho r_0^3} \quad (4.44)$$

Hall ainda definiu uma constante de mola e uma constante de amortecimento, estabelecendo assim a analogia com o sistema massa-mola-amortecedor:

$$k_x = \frac{32(1 - \nu)}{7 - 8\nu} Gr_0 \quad (4.45)$$

$$c_x = \frac{18,4(1 - \nu)}{7 - 8\nu} r_0^2 \sqrt{\rho G} \quad (4.46)$$

O fator amortecimento ξ_x é dado então por:

$$\xi_x = \frac{c_x}{2\sqrt{k_x M}} = \frac{0,2875}{\sqrt{B_x}} \quad (4.47)$$

Os parâmetros adimensionais de Lysmer são:

$$\bar{a}_0 = 0,575a_0 \quad (4.48)$$

$$\bar{B}_x = 3,0246B_x \quad (4.49)$$

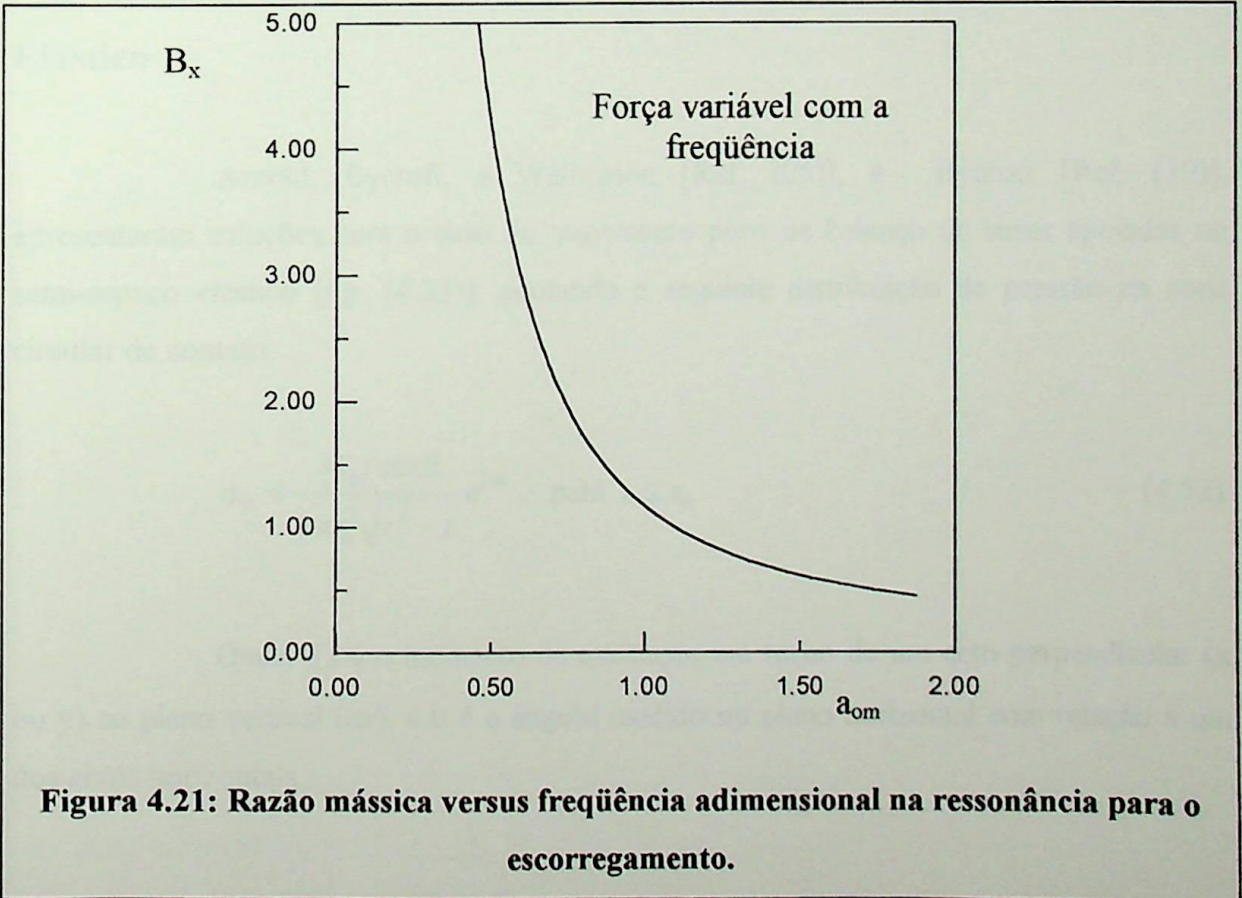
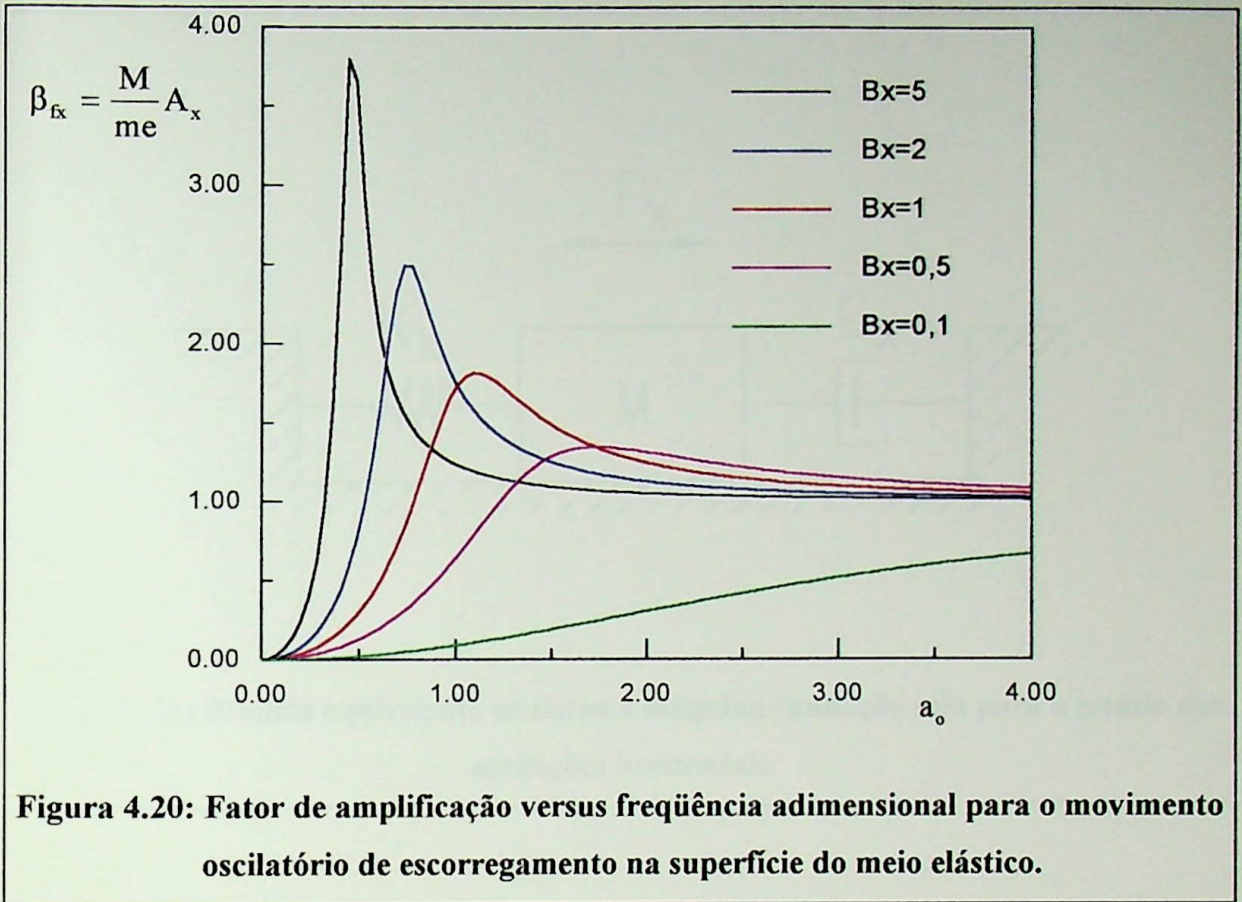
A expressão do fator de amplificação β_{fx} , para excitação com módulo variável com a frequência, é portanto expresso por:

$$\beta_{fx} = \frac{B_x a_0^2}{\sqrt{(1 - B_x a_0^2)^2 + 0,33a_0^2}} \quad (4.50)$$

A condição de ressonância é a seguinte:

$$a_{om} = \frac{1}{\sqrt{B_x - 0,1653}} \quad (4.51)$$

As curvas β_{fx} versus frequência adimensional a_0 , e B_x versus a_{om} são apresentadas nas figuras (4.20) e (4.21). O sistema equivalente está representado na figura (4.22).



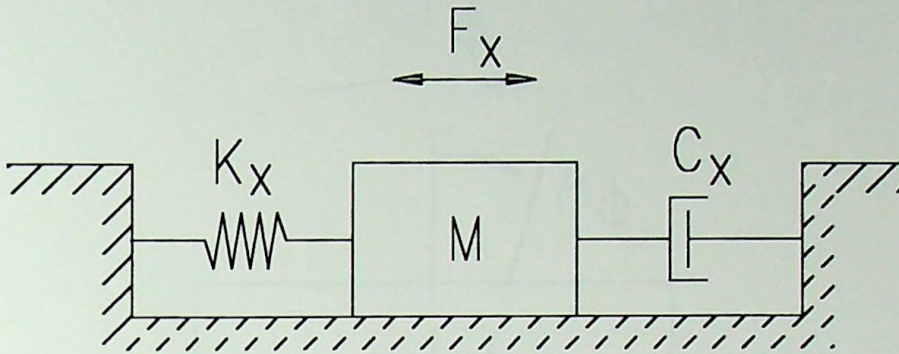


Figura 4.22: Modelo equivalente ao sistema máquina-fundação solo para o estudo das oscilações horizontais.

4.4. Balanço de Bases Circulares Rígidas Apoiadas no Semí-Espaço Elástico

Arnold, Bycroft, e Warburton [Ref. (25)], e Bycroft [Ref. (19)], apresentaram soluções para o caso do movimento puro de balanço de bases apoiadas no semi-espaco elástico [fig. (4.23)], adotando a seguinte distribuição de pressão na zona circular de contato:

$$\sigma_z = \frac{3T_\phi r \cos\theta}{2\pi r_o^3 \sqrt{r_o^2 - r}} e^{i\omega t} \quad \text{para } r \leq r_o \quad (4.52)$$

Onde, T_ϕ é o momento de excitação em torno de um eixo perpendicular (x ou y) ao plano vertical (zx), e θ é o ângulo medido no plano horizontal com relação a um dos eixos horizontais.

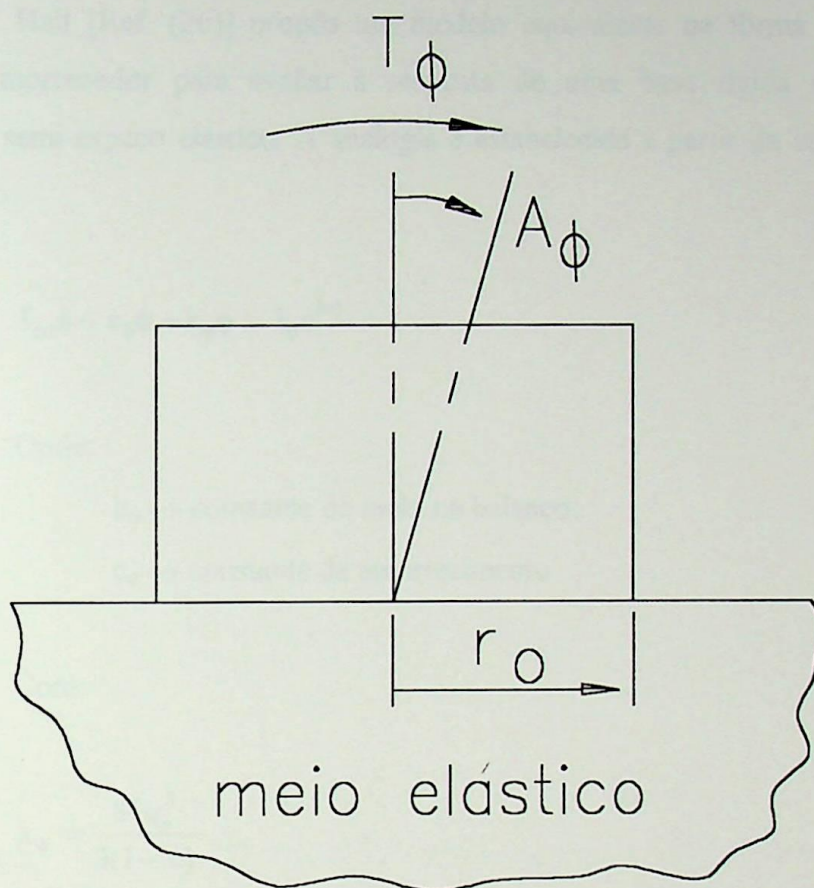


Figura 4.23: Movimento de balanço da fundação na superfície do semi-espaco elástico.

Em condições dinâmicas a amplitude A_ϕ é uma função da razão inercial [eq. (4.53)], e da frequência adimensional [eq. (4.2)].

$$B_\phi = \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{I_{\phi_0}}{\rho r_0^5} \quad (4.53)$$

Na equação (4.53), I_{ϕ_0} denota o momento de inércia da massa (base e máquina) em torno do ponto O .

Analogia de Hall

Hall [Ref. (26)] propôs um modelo equivalente na forma de um sistema massa-mola-amortecedor para avaliar a resposta de uma base rígida em balanço na superfície do semi-espaco elástico. A analogia é estabelecida a partir da seguinte equação do movimento:

$$I_{\phi_0} \ddot{\phi} + c_{\phi} \dot{\phi} + k_{\phi} \phi = T_{\phi} e^{i\omega t} \quad (4.54)$$

Onde:

$k_{\phi} \rightarrow$ constante de mola no balanço;

$c_{\phi} \rightarrow$ constante de amortecimento.

Com:

$$k_{\phi} = \frac{8Gr_0^3}{3(1-\nu)} \quad (4.55)$$

$$c_{\phi} = \frac{0,80r_0^4 \sqrt{G\rho}}{(1-\nu)(1+B_{\phi})} \quad (4.56)$$

O fator amortecimento ξ_{ϕ} é portanto dado por:

$$\xi_{\phi} = \frac{c_{\phi}}{2\sqrt{k_{\phi}I_{\phi}}} = \frac{0,15}{(1+B_{\phi})\sqrt{B_{\phi}}} \quad (4.57)$$

As constantes adimensionais de Lysmer são dadas por:

$$\bar{a}_{o\phi} = \frac{0,3}{1+B_{\phi}} a_o \quad (4.58)$$



$$\bar{B}_\phi = 11,11B_\phi(1 + B_\phi)^2 \quad (4.59)$$

O fator de amplificação $\beta_{r\phi}$ para o caso de um momento T_ϕ com módulo variável com a frequência de rotação, é expresso por:

$$\beta_{r\phi} = \frac{B_\phi a_o^2}{\sqrt{(1 - B_\phi a_o^2)^2 + \frac{0,09}{(1 + B_\phi)^2} a_o^2}} \quad (4.60)$$

A ressonância ocorre quando:

$$a_{omf} = \frac{1 + B_\phi}{\sqrt{B_\phi(1 + B_\phi)^2 - 0,045}} \quad (4.61)$$

As curvas características $\beta_{r\phi}$ versus a_o e B_ϕ versus a_{omf} , são apresentadas a seguir nas figuras (4.24) e (4.25) respectivamente. O sistema com parâmetros concentrados equivalente ao sistema máquina-base-meio elástico é apresentado na figura (4.26).

Hall também definiu um fator mássico efetivo $B_{\phi ef}$, com o qual conseguiu uma melhor concordância entre a solução análoga e a solução obtida pelo método do semi-espaço elástico. A relação entre o fator mássico efetivo $B_{\phi ef}$ e o fator B_ϕ [eq. (4.53)] é apresentado na figura (4.27). O gráfico $B_{\phi ef}$ versus B_ϕ foi construído com base na tabela abaixo, obtida a partir de um fator de correção η definido por Hall [Ref. (3)].

Tabela 4.1: Relação razão mássica e razão mássica efetiva

B_ϕ	5	3	2	1	0,8	0,5	0,2
$B_{\phi ef}$	5,395	3,3	2,286	1,219	1,0008	0,689	0,32

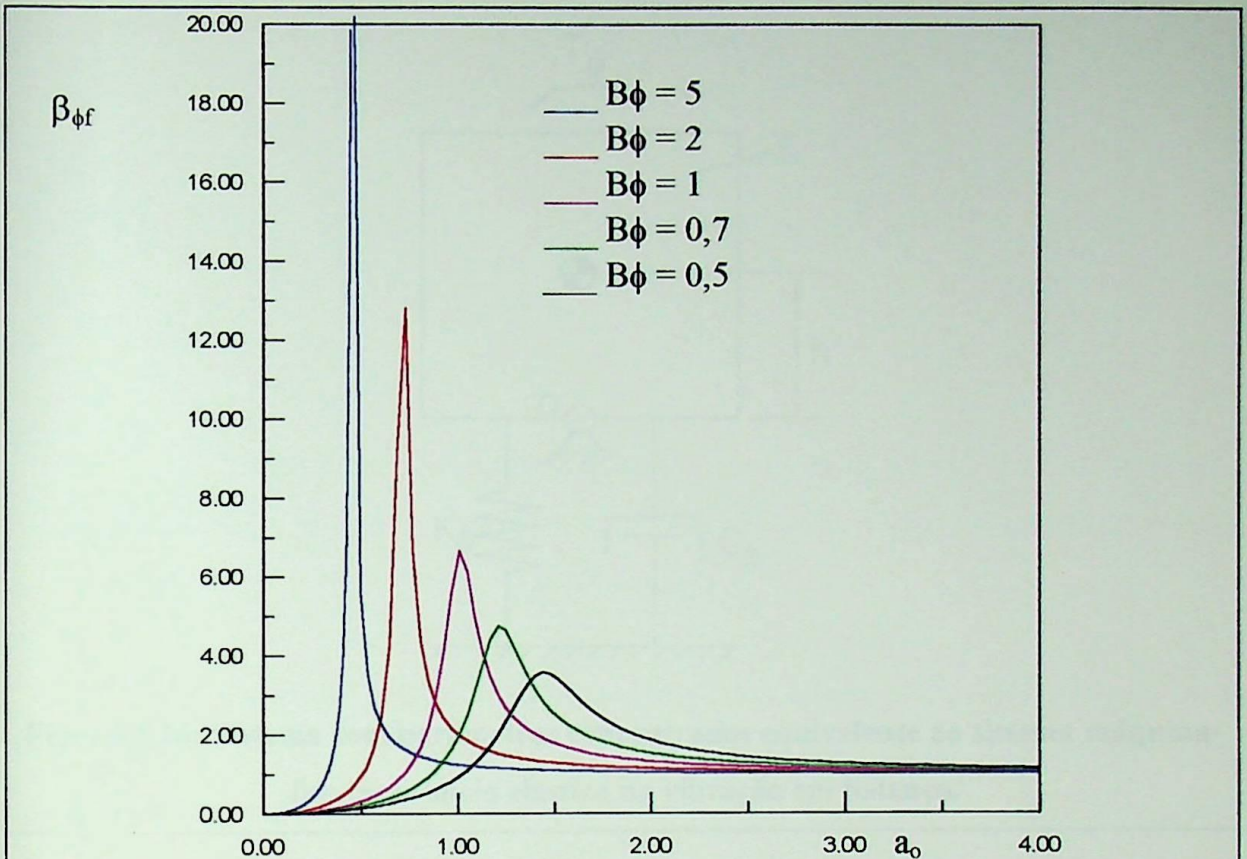


Figura 4.24: Amplificação dinâmica versus frequência adimensional para o movimento de balanço de uma fundação circular rígida na superfície do semi-espaço elástico.

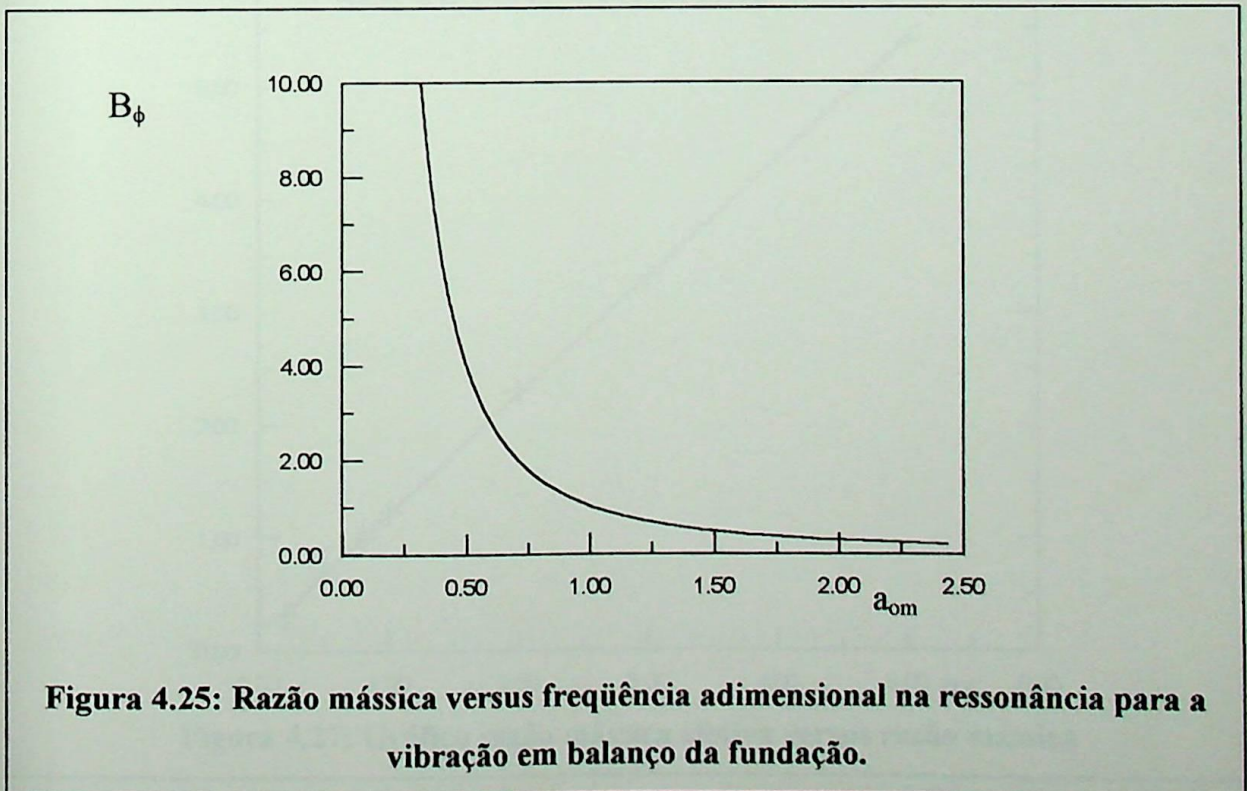


Figura 4.25: Razão mássica versus frequência adimensional na ressonância para a vibração em balanço da fundação.

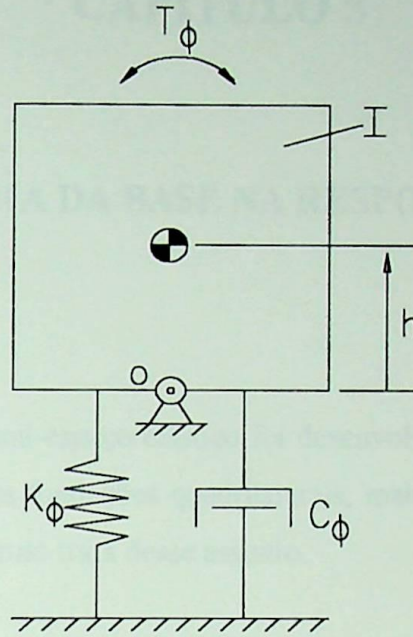


Figura 4.26: Sistema com parâmetros concentrados equivalente ao sistema máquina-fundação-meio elástico na vibração em balanço.

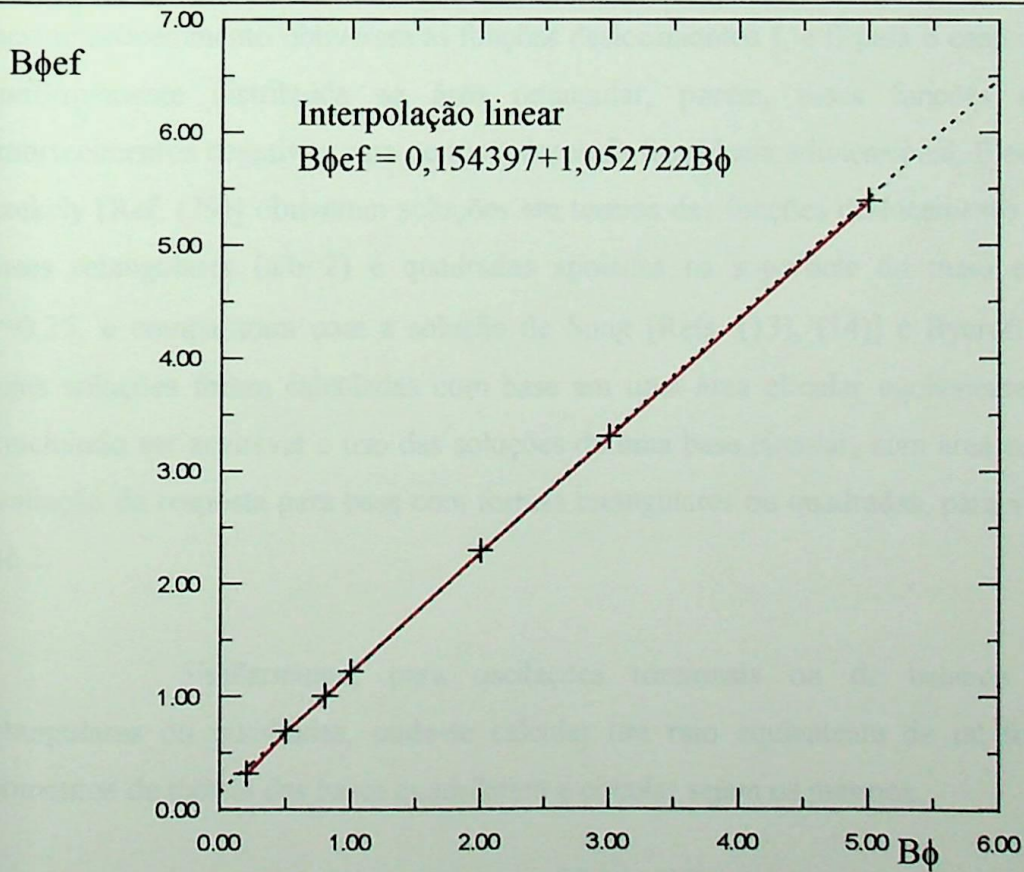


Figura 4.27: Gráfico razão mássica efetiva versus razão mássica

CAPÍTULO 5

EFEITO DA FORMA DA BASE NA RESPOSTA VIBRATÓRIA

A teoria do semi-espaço elástico foi desenvolvida para fundações circulares. O que dizer, então, quanto as fundações quadrilaterais, mais usualmente empregadas para suportar máquinas? Este capítulo trata desse assunto.

Soluções analíticas para o problema de oscilações verticais em uma zona retangular na superfície do semi-espaço elástico também foram desenvolvidas pela integração da solução de Lamb [Ref. (10)]. Sung [Refs. (13), (14)] desenvolveu expressões matemáticas para uma carga oscilatória uniformemente distribuída na área retangular, mas não obteve valores numéricos. Kobori [Ref. (27)] e Thomson e Kobori [Ref. (28)] com o mesmo procedimento obtiveram as funções deslocamentos f_1 e f_2 para o caso de uma carga uniformemente distribuída na área retangular, porém, essas funções reproduziram amortecimentos negativos para certos valores da frequência adimensional. Elorduy, Nieto e Szekely [Ref. (29)] obtiveram soluções em termos das funções deslocamento f_1 e f_2 , para bases retangulares ($a/b=2$) e quadradas apoiadas na superfície do meio elástico, com $\nu=0,25$, e compararam com a solução de Sung [Refs. (13), (14)] e Bycroft [Ref. (19)], cujas soluções foram calculadas com base em uma área circular equivalente [fig. (5.1)], concluindo ser aceitável o uso das soluções de uma base circular, com área equivalente na avaliação da resposta para base com formas retangulares ou quadradas, para valores de a/b até 2.

Similarmente, para oscilações torcionais ou de balanço para bases retangulares ou quadradas, pode-se calcular um raio equivalente de tal forma que os momentos de inércia das bases quadrilátera e circular sejam os mesmos.

Os raios equivalentes, para os modos de vibração, são:

Na translação:

$$\Gamma_o = \left(\frac{ab}{\pi} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (5.1)$$

No balanço:

$$\Gamma_{o\phi} = \left(\frac{ba^3}{3\pi} \right)^{1/4} \quad (5.2)$$

Na torção:

$$\Gamma_{o\varphi} = \left(\frac{ab(a^2 + b^2)}{6\pi} \right)^{1/4} \quad (5.3)$$

Onde:

b → largura da fundação (paralela ao eixo de rotação para o balanço)

a → comprimento da fundação (perpendicular ao eixo de rotação para balanço).

É prática comum a transformação de áreas de toda forma em uma área circular equivalente, entretanto, algumas opiniões devem ser citadas. Chae [Ref.(30)] sugere que a aplicação da equivalência pode ser usada no cálculo da frequência natural, mas o perímetro deve ser levado em conta na determinação da amplitude. Dobuy e Gazetas [Ref. (31)] e Dobuy e outros [Ref. (32)] afirmam que a forma da fundação dada pelos aspectos a/b tem uma influência significativa nos valores da rigidez e amortecimento, especialmente em fundações longas.

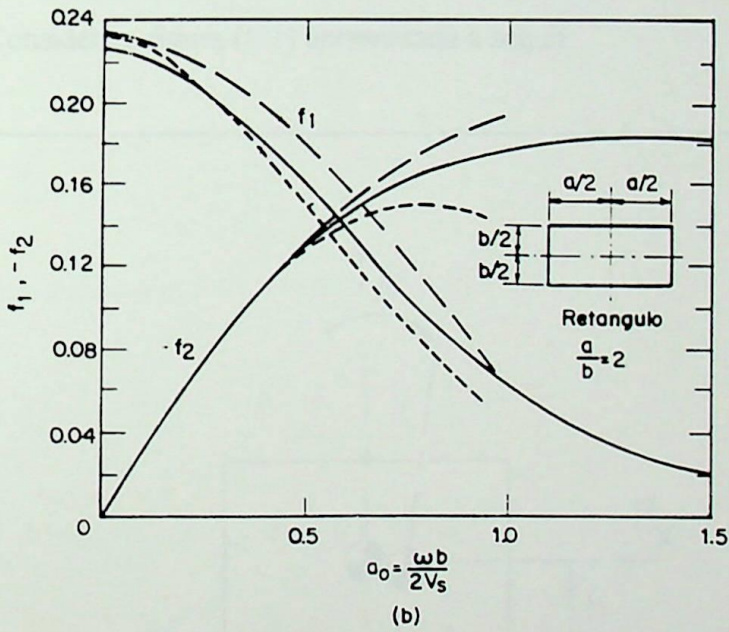
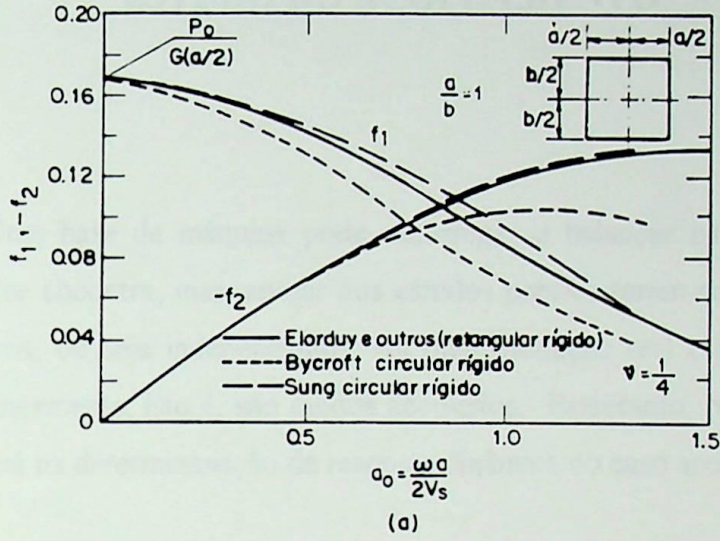


Figura 5.1: Funções deslocamento para vibrações rígidas retangulares e quadradas.
 [Refs. (13), (14), (19), (29)]

CAPÍTULO 6

ESTUDO DO ACOPLAMENTO

Uma base de máquina pode escorregar e balançar na superfície do meio elástico em que se encontra, mas, apesar dos estudos prévios terem considerado ambos os movimentos puros, ou seja independentes, em uma fundação real esses modos de vibrar ocorrem simultaneamente, isto é, são modos acoplados. Entretanto, o estudo separado de cada modo servirá na determinanação da resposta dinâmica do caso acoplado.

Considere a figura (6.1) apresentada a seguir:

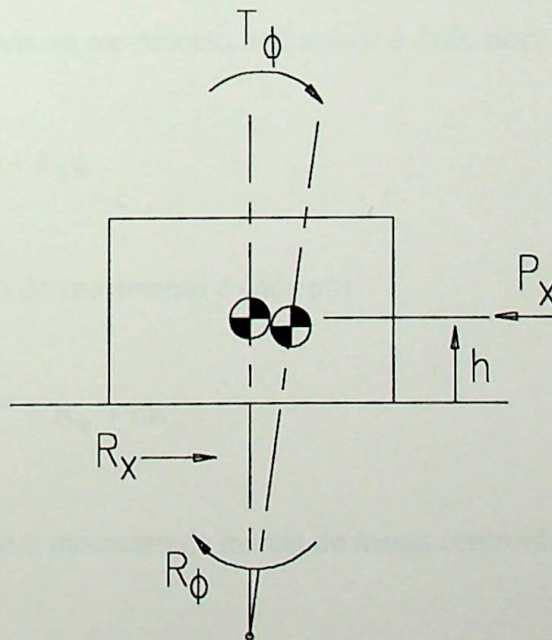


Figura 6.1: Fundação de máquina excitada por força horizontal e momento de força em torno do centro de gravidade.

A resistência \underline{R}_x na zona de contato da base com o meio elástico é dada por:

$$R_x = c_x \dot{x}_b + k_x x_b \quad (6.1)$$

Onde, x_b é o deslocamento na base:

$$x_b = x - h\phi \quad (6.2)$$

Introduzindo a expressão (6.2) em (6.1), temos:

$$R_x = c_x \dot{x} + k_x x - hc_x \dot{\phi} - hk_x \phi \quad (6.3)$$

A equação para o movimento de escorregamento é:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= P_x e^{i\omega t} - R_x \\ M\ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x - hc_x \dot{\phi} - hk_x \phi &= P_x e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (6.4)$$

A resistência ao movimento no balanço é dado por:

$$R_\phi = c_\phi \dot{\phi} + k_\phi \phi \quad (6.5)$$

A equação do movimento é dada por:

$$I\ddot{\phi} = T_\phi e^{i\omega t} - R_\phi + hR_x \quad (6.6)$$

I ou $I_\phi \rightarrow$ é o momento de inércia de massa centroidal.

Desenvolvendo (6.6), temos:

$$I\ddot{\phi} + (c_\phi + h^2 c_x) \dot{\phi} + (k_\phi + h^2 k_x) \phi - hc_x \dot{x} - hk_x x = T_\phi e^{i\omega t} \quad (6.7)$$

As equações (6.4) e (6.7) demonstram claramente que o acoplamento ocorre devido a distância h do CG ao ponto de aplicação da Força resistiva \underline{R}_x .

Vamos admitir as seguintes soluções para as equações (6.4) e (6.7):

$$x = X e^{i\omega t} \quad (6.8)$$

$$\phi = \Phi e^{i\omega t} \quad (6.9)$$

Assim, as derivadas primeira e segunda ficam determinadas:

$$\dot{x} = X i \omega e^{i\omega t} \quad (6.10)$$

$$\ddot{x} = -X \omega^2 e^{i\omega t} \quad (6.11)$$

$$\dot{\phi} = \Phi i \omega e^{i\omega t} \quad (6.12)$$

$$\ddot{\phi} = -\Phi \omega^2 e^{i\omega t} \quad (6.13)$$

Substituindo as expressões acima em (6.4) e (6.7), obtemos as seguintes expressões:

$$-M X \omega^2 + c_x X i \omega + k_x X - h c_x \Phi i \omega - h k_x \Phi = P_x \quad (6.14)$$

$$-I \Phi \omega^2 + (c_\phi + h c_x) \Phi i \omega + (k_\phi + h k_x) \Phi - h c_x X i \omega - h k_x X = T_\phi \quad (6.15)$$

As expressões acima podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -M \omega^2 + c_x i \omega + k_x & -h c_x i \omega - h k_x \\ -h c_x i \omega - h k_x & -I \omega^2 + c_{\phi x} i \omega + k_{\phi x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ T_\phi \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

Onde:

$$c_{\phi x} = c_\phi + h^2 c_x \quad (6.17)$$

$$k_{\phi x} = k_{\phi} + h^2 k_x \quad (6.18)$$

Podemos determinar as amplitudes X e Φ aplicando a regra de Cramer.

Logo:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} P_x & -hc_x i\omega - hk_x \\ T_{\phi} & -I\omega^2 + c_{\phi x} \omega i + k_{\phi x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -M\omega^2 + c_x i\omega + k_x & -hc_x i\omega - hk_x \\ -hc_x i\omega - hk_x & -I\omega^2 + c_{\phi x} \omega i + k_{\phi x} \end{vmatrix}} \quad (6.19)$$

$$\Phi = \frac{\begin{vmatrix} -M\omega^2 + c_x i\omega + k_x & P_x \\ -hc_x i\omega - hk_x & T_{\phi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -M\omega^2 + c_x i\omega + k_x & -hc_x i\omega - hk_x \\ -hc_x i\omega - hk_x & -I\omega^2 + c_{\phi x} \omega i + k_{\phi x} \end{vmatrix}} \quad (6.20)$$

O denominador das expressões (6.19) e (6.20) será denominado por $\Delta(\omega^2)$.

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} -M\omega^2 + c_x i\omega + k_x & -hc_x i\omega - hk_x \\ -hc_x i\omega - hk_x & -I\omega^2 + c_{\phi x} \omega i + k_{\phi x} \end{vmatrix} \quad (6.21)$$

Desenvolvendo a expressão acima, teremos:

$$\Delta(\omega^2) = \left\{ \omega^4 - \left[\frac{\omega_{\phi}^2 + \omega_x^2}{\gamma} + \frac{4\xi_{\phi}\xi_x \omega_{\phi}\omega_x}{\gamma} \right] \omega^2 + \frac{\omega_{\phi}^2 \omega_x^2}{\gamma} \right\} - 2 \left\{ \left[\xi_{\phi} \frac{\omega_{\phi}}{\gamma} + \xi_x \frac{\omega_x}{\gamma} \right] \omega^3 - \left[\xi_x \omega_x \frac{\omega_{\phi}^2}{\gamma} + \xi_{\phi} \omega_{\phi} \frac{\omega_x^2}{\gamma} \right] \omega \right\} i \quad (6.22)$$

As amplitudes dadas pelas expressões (6.20) e (6.21) desenvolvidas, são:

$$X = \frac{1}{\Delta\omega^2} \left\{ \frac{P_x}{Ml} \left[-I\omega^2 + 2(\xi_\phi \sqrt{k_\phi I_o} + h^2 \xi_x \sqrt{k_x M})\omega i + k_{\phi x} \right] + \frac{T_\phi h}{I} [\omega_x^2 + 2\xi_x \omega i] \right\} \quad (6.23)$$

$$\Phi = \frac{1}{\Delta\omega^2} \left\{ \frac{P_x h}{I} (2\xi_x \omega_x \omega i + \omega_x^2) + \frac{T_\phi}{I} [(\omega_x^2 - \omega) + 2\xi_x \omega_x \omega i] \right\} \quad (6.24)$$

As frequências naturais podem ser escritas em função dos termos adimensionais \underline{B}_ϕ e \underline{B}_x :

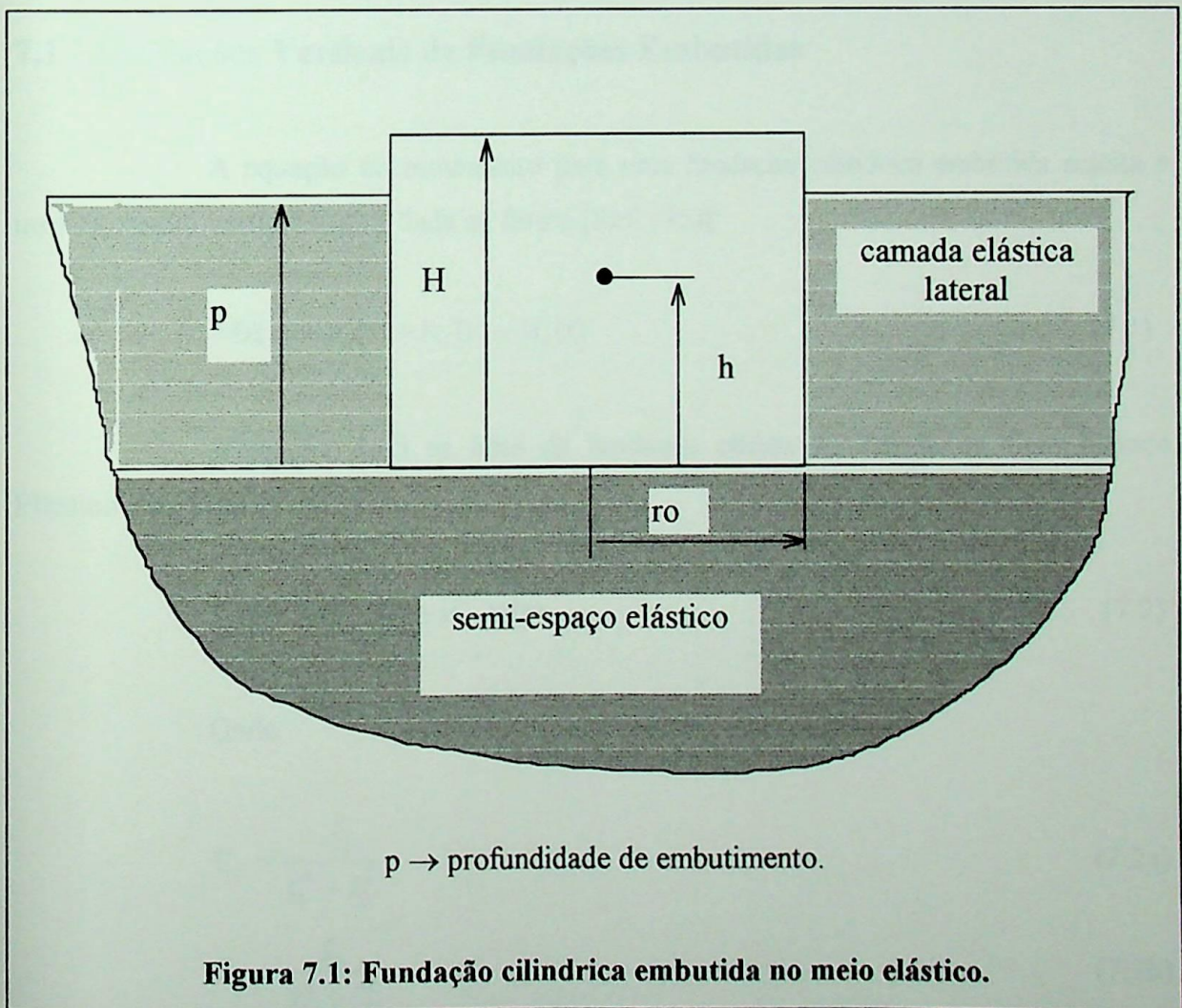
$$\omega_\phi = \frac{v_s}{r_o} \frac{\sqrt{B_\phi}}{B_\phi} \quad (6.25)$$

$$\omega_x = \frac{v_s}{r_o} \frac{\sqrt{B_x}}{B_x} \quad (6.26)$$

CAPÍTULO 7

RESPOSTA DINÂMICA DE FUNDAÇÕES EMBUTIDAS

Considerou-se até agora que as fundações das máquinas apoiam-se na superfície do meio elástico. Entretanto, na realidade, as fundações são embutidas no meio elástico [fig. (7.1)]. Para uma fundação embutida a reação lateral do meio elástico (solo) tem uma influência significativa na resposta dinâmica das fundações de máquinas.



As primeiras soluções para a resposta dinâmica de fundações embutidas de máquinas foram obtidas por Baranov [Ref. (33)] e estendidas por Novak e Beredugo [Refs. (34), (35)] Beredugo [Refs. (36), (37)], e Novak e Sachs [Ref. (38)].

As seguintes hipóteses foram feitas na obtenção das soluções:

- 1- A fundação é cilíndrica e rígida;
- 2- A base da fundação apoia-se na superfície de um semi-espaco elástico;
- 3- A reação na base da fundação é independente da profundidade de embutimento;
- 4- A reação lateral é produzida por uma camada elástica independente acima do nível da base da fundação;
- 5- Existe uma perfeita ligação, ou contato perfeito, entre o meio elástico e a lateral embutida da fundação.

7.1 - Oscilações Verticais de Fundações Embutidas

A equação do movimento para uma fundação cilíndrica embutida sujeita a uma excitação vertical $P_z(t)$ é dada na forma [Ref. (35)]:

$$M\ddot{z}(t) = P_z(t) - R_z(t) - N_z(t) \quad (7.1)$$

A reação $R_z(t)$ na base da fundação obtida da Teoria do Semi-Espaco Elástico é da forma:

$$R_z(t) = Gr_o(C_1 + iC_2)z(t) \quad (7.2)$$

Onde:

$$C_1 = \frac{-f_1}{f_1^2 + f_2^2} \quad (7.2a)$$

$$C_2 = \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \quad (7.2b)$$

f_1 e f_2 são as funções deslocamento de Reissner [ver item (4.1)]:

A reação dinâmica da camada elástica na lateral da fundação é dada por:

$$N_z(t) = G_s p (S_1 + iS_2) z(t) \quad (7.3)$$

Substituindo (7.2) e (7.3) em (7.1), obtêm-se:

$$M\ddot{z}(t) + Gr_o \left[C_1 + iC_2 + \frac{G_s p}{G r_o} (S_1 + iS_2) \right] z(t) = P_z(t) \quad (7.4)$$

$$M\ddot{z}(t) + \frac{Gr_o}{\omega} \left[C_2 + \frac{G_s p}{G r_o} S_2 \right] i\omega z(t) + Gr_o \left(C_1 + \frac{G_s p}{G r_o} S_1 \right) z(t) = P_z(t) \quad (7.4a)$$

A equação do movimento de um sistema vibratório elementar é da forma:

$$M\ddot{z}(t) + c_z \dot{z}(t) + k_z z(t) = P_z e^{i\omega t} \quad (7.5)$$

Se a resposta em regime permanente é da forma: $z(t) = Z e^{i\omega t}$, então (7.5) pode ser escrita na seguinte forma:

$$M\ddot{z}(t) + c_z i\omega z(t) + k_z z(t) = P_z e^{i\omega t} \quad (7.5a)$$

Assim, podemos definir as constantes de rigidez k_z e amortecimento c_z para o movimento oscilatório vertical comparando (7.5a) com (7.4a):

$$k_z = Gr_o \left(C_1 + \frac{G_s p}{G r_o} S_1 \right) \quad (7.7)$$

$$c_z = \frac{Gr_o}{\omega} \left(C_2 + \frac{G_s p}{G r_o} S_2 \right) \quad (7.8)$$

Os parâmetros C_1 e C_2 , são dependentes do coeficiente de Poisson ν e da frequência adimensional a_o , e os parâmetros S_1 e S_2 são dependentes da frequência adimensional [Referência (2)]. Porém, pode-se recorrer a certas simplificações, sem distorções significativas da resposta, tornando os parâmetros da rigidez constantes, e os parâmetros do amortecimento proporcionais a frequência adimensional [Ref. (35)]:

$$C_1 = \bar{C}_1 \quad (7.9)$$

$$S_1 = \bar{S}_1 \quad (7.10)$$

$$C_2 = \bar{C}_2 a_o = \bar{C}_2 \omega r_o \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (7.11)$$

$$S_2 = \bar{S}_2 a_{os} = \bar{S}_2 \omega r_o \sqrt{\frac{\rho_s}{G_s}} \quad (7.12)$$

Onde a_{os} é a frequência adimensional considerando as propriedades da camada lateral ρ_s, G_s .

Os valores para os parâmetros constantes $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{S}_1$ e \bar{S}_2 , são:

$$\bar{C}_1 = \frac{4}{1-\nu} \quad (7.14)$$

$$\bar{C}_2 = \frac{3,4}{1-\nu} \quad (7.15)$$

$$\bar{S}_1 = 2,70 \quad (7.16)$$

$$\bar{S}_2 = 6,70 \quad (7.17)$$

Substituindo as expressões (7.14) e (7.16) em (7.7), temos:

$$k_z = \frac{4Gr_o}{1-\nu} \left(1 + 0,675(1-\nu) \frac{G_s p}{G r_o} \right) \quad (7.18)$$

Substituindo as expressões (7.15) e (7.17) em (7.8), temos:

$$c_z = \frac{3,4}{1-\nu} r_o^2 \sqrt{\rho G} \left(1 + 1,97(1-\nu) \sqrt{\frac{\rho_s G}{\rho G} \frac{p}{r_o}} \right) \quad (7.19)$$

7.2 - Oscilações Horizontais de Fundações Embutidas

A equação do movimento horizontal para uma fundação cilíndrica embutida excitada por força periódica $P_x(t)$, é dada na seguinte forma [Refs. (34), (35)];

$$M\ddot{x}(t) = P_x(t) - R_x(t) - N_x(t) \quad (7.20)$$

A reação $R_x(t)$ é a mesma para uma fundação apoiada na superfície do semi-espaço elástico:

$$R_x(t) = Gr_o (C_{x1} + iC_{x2})x(t) \quad (7.21)$$

A reação da camada lateral é dada por:

$$N_x(t) = G_s p (S_{x1} + iS_{x2})x(t) \quad (7.22)$$

Substituindo (7.21) e (7.22) em (7.20), temos:

$$M\ddot{x}(t) + Gr_o (C_{x1} + iC_{x2})x(t) + G_s p (S_{x1} + iS_{x2})x(t) = P_x e^{i\omega t} \quad (7.23)$$

Para $x(t) = X e^{i\omega t}$, vêm:

$$M\ddot{x}(t) + \frac{Gr_o}{\omega} \left(C_{x2} + \frac{G_s p}{G r_o} S_{x2} \right) i\omega x(t) + Gr_o \left(C_{x1} + \frac{G_s p}{G r_o} S_{x1} \right) x(t) = P_x(t) \quad (7.24)$$

Da mesma forma que na vibração vertical, podemos definir a constante de rigidez k_x e de amortecimento c_x para a oscilação horizontal:

$$k_x = Gr_o \left(C_{x1} + \frac{G_s p}{G r_o} S_{x1} \right) \quad (7.25)$$

$$c_x = \frac{Gr_o}{\omega} \left(C_{x2} + \frac{G_s p}{G r_o} S_{x2} \right) \quad (7.26)$$

Os parâmetros C_{x1} , C_{x2} , S_{x1} , e S_{x2} , são variáveis com o coeficiente de Poisson e a frequência adimensional [Ref. (2)]. Mas, pode-se adotar as seguintes simplificações:

$$C_{x1} = \frac{8}{2 - \nu} \quad (7.27)$$

$$S_{x1} = 3,9 \quad (7.28)$$

$$C_{x2} = \frac{4,6}{2 - \nu} a_o \quad (7.29)$$

$$S_{x2} = 9,3a_{os} \quad (7.30)$$

Substituindo as expressões acima nas expressões (7.25) e (7.26), temos:

$$k_x = \frac{8Gr_o}{2 - \nu} \left(1 + 0,49(2 - \nu) \frac{G_s p}{G r_o} \right) \quad (7.31)$$

$$c_x = \frac{4,6r_o^2 \sqrt{\rho G}}{2 - \nu} \left(1 + 2(2 - \nu) \sqrt{\frac{\rho_s G_s p}{\rho G r_o}} \right) \quad (7.32)$$

7.3 - Oscilações em Balanço de Fundações em Bloco Embutidas

A equação do movimento de balanço de uma fundação cilíndrica em bloco é da forma:

$$I_o \ddot{\phi}(t) + R_\phi(t) + N_\phi(t) = T_\phi(t) \quad (7.33)$$

I_o é o momento de inércia de massa da fundação em torno do eixo de rotação na base. T_ϕ é o momento de excitação: $T_\phi(t) = T_\phi e^{i\omega t}$.

O momento resistente em torno do centro de gravidade ocasionado pela resistência do meio elástico na base é [Ref. (35)]:

$$R_\phi(t) = Gr_o^3 (C_{\phi 1} + iC_{\phi 2}) \phi(t) \quad (7.34)$$

O momento resistente em torno do centro de gravidade ocasionado pela reação lateral do meio em resposta ao balanço é:

$$N_\phi(t) = G_s \left(r_o^2 p (S_{\phi 1} + iS_{\phi 2}) + \frac{p^3}{3} (S_{x1} + iS_{x2}) \right) \phi(t) \quad (7.35)$$

Substituindo as expressões (7.34) e (7.35) em (7.33), podemos definir as constantes de rigidez e amortecimento:

$$k_\phi = Gr_o^3 \left(C_{\phi 1} + \frac{G_s p}{G r_o} S_{\phi 1} + \frac{G_s p^3}{G 3r_o^3} S_{x1} \right) \quad (7.36)$$

$$c_\phi = \frac{Gr_o^3}{\omega} \left(C_{\phi 2} + \frac{G_s p}{G r_o} S_{\phi 2} + \frac{G_s p^3}{G 3r_o^3} S_{x2} \right) \quad (7.37)$$

Nas expressões acima, os parâmetros $C_{\phi 1}$, e $C_{\phi 2}$, são dependentes do coeficiente de Poisson e da frequência adimensional, e os parâmetros $S_{\phi 1}$, e $S_{\phi 2}$, são dependentes exclusivamente da frequência adimensional. Os parâmetros S_{x1} , e S_{x2} , são dependentes do coeficiente de Poisson e da frequência adimensional [Ref. (2)]. Entretanto, simplificações podem ser adotadas [Ref. (35)], as quais são:

$$C_{\phi 1} = \bar{C}_{\phi 1} = \frac{8}{3(1-\nu)} \quad (7.38)$$

$$C_{\phi 2} = \bar{C}_{\phi 2} = 0,43a_o \quad (7.39)$$

$$S_{\phi 1} = \bar{S}_{\phi 1} = 2,50 \quad (7.40)$$

$$S_{\phi 2} = \bar{S}_{\phi 2} a_{os} = 1,80a_{os} \quad (7.41)$$

$$S_{x1} = \bar{S}_{x1} = 3,9 \quad (7.42)$$

$$S_{x2} = \bar{S}_{x2} = 9,3a_{os} \quad (7.43)$$

As expressões acima levadas em (7.36) e (7.37), resultam nas seguintes expressões para as constantes de rigidez e amortecimento:

$$k_{\phi} = \frac{8}{3(1-\nu)} Gr_o^3 \left(1 + 0,94(1-\nu) \frac{G_s}{G} \frac{p}{r_o} + 0,52(1-\nu) \frac{G_s}{G} \frac{p^3}{r_o^3} \right) \quad (7.38)$$

$$c_{\phi} = 0,43r_o^4 \sqrt{\rho G} \left(1 + 4,2 \sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}} \frac{p^3}{r_o^3} + 7,21 \sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}} \frac{p^3}{3r_o^3} \right) \quad (7.39)$$

Na obra "Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines", [Ref. (3)], temos as seguintes expressões para as constantes de rigidez e amortecimento:

$$k_{\phi} = \frac{8Gr_o^3}{3(1-\nu)} \left(1 + 1,2(1-\nu) \frac{p}{r_o} + 0,2(2-\nu) \frac{p}{r_o} \right) \quad (7.40)$$

$$c_{\phi} = \frac{0,8r_o^4 \sqrt{\rho G}}{(1-\nu)(1+B_{\phi ef})} \left(1 + 0,7(1-\nu) \frac{p}{r_o} + 0,6(2-\nu) \frac{p^3}{r_o^3} \right) \quad (7.41)$$

A constante de amortecimento c_{ϕ} , dada na forma da expressão (7.39), não corresponde a um valor efetivo, sendo necessário, então, proceder-se a uma correção daquela constante. Para tanto, pode-se recorrer a seguinte expressão:

$$c_{\phi ef} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3,26912}{I_o k_{\phi}} + \frac{\left(1,42698 - 3,77 \cdot 10^{-4} \bar{B}_{\phi} + 1,38 \cdot 10^{-7} \bar{B}_{\phi}^2 \right)}{c_{\phi}^2}}} \quad (7.42)$$

Onde, como já apresentada anteriormente, a razão mássica é determinada operando-se com a inércia, a constante de mola, e a constante de amortecimento obtida pela expressão (7.39):

$$\bar{B}_{\phi} = \frac{I_o k_{\phi}}{c_{\phi}^2} \quad (7.43)$$

A expressão (7.42) foi determinada dentro da seguinte faixa de valores para a razão mássica simplificada [item (4.4), eq. (4.51)]:

$$0,2 \leq B_{\phi} \leq 5,0 \quad (7.44)$$

A determinação da constante de amortecimento efetiva, tem sua origem, na definição por Hall, de uma razão mássica simplificada e efetiva [item (4.4)], buscando assim, uma melhor concordância entre a solução análoga e a Teoria do Semi-Espaço Elástico. Partindo-se desta observação, e utilizando-se da tabela corretiva [item (4.4)] obtida por Hall em seus estudos, obtem-se a razão mássica efetiva (7.45) operando-se com

a expressão (4.59). Por um processo de interpolação, obtem-se a expressão da razão mássica efetiva com a pseudo-razão mássica destacada em (7.43). Desta expressão, então, extraímos a constante de amortecimento efetiva.

$$\bar{B}_{\phi ef} = \frac{I_o k_\phi}{c_{\phi ef}^2} \quad (7.45)$$

7.4 - Oscilações Torcionais de Fundações Embutidas

A equação do movimento torcional de uma fundação é dada na forma:

$$I\ddot{\psi}(t) + R_\psi(t) + N_\psi(t) = T_z(t) \quad (7.46)$$

Onde, I , ou I_ψ , é o momento de inércia de massa da fundação em torno do eixo vertical z . $T_z(t)$ é o momento de excitação: $T_z(t) = T_z e^{i\omega t}$.

O valor do momento resistente $R_\psi(t)$ em torno do eixo vertical na base da fundação é dado por [Ref. (38)]:

$$R_\psi(t) = Gr_o^3 (C_{\psi 1} + iC_{\psi 2})\psi(t) \quad (7.47)$$

O momento resistente $N_\psi(t)$ na lateral é dado por:

$$N_\psi(t) = G_s r_o^2 p (S_{\psi 1} + iS_{\psi 2})\psi(t) \quad (7.48)$$

Substituindo (7.48) e (7.47) na expressão (7.46), podemos determinar as constantes de rigidez e amortecimento:

$$k_\psi = Gr_o^3 \left(C_{\psi 1} + \frac{G_s p}{G r_o} S_{\psi 1} \right) \quad (7.49)$$

$$c_{\psi} = \frac{Gr_o^3}{\omega} \left(C_{\psi 2} + \frac{G_s}{G} \frac{p}{r_o} S_{\psi 2} \right) \quad (7.50)$$

Novak e Sachs [Ref. (38)] sugeriram as seguintes aproximações na determinação dos parâmetros $C_{\psi 1}$, $C_{\psi 2}$, $S_{\psi 2}$, e $S_{\psi 2}$:

$$C_{\psi 1} = \bar{C}_{\psi 1} = 4,3 \quad (7.51)$$

$$S_{\psi 1} = \bar{S}_{\psi 1} = 10,4 \quad (7.52)$$

$$C_{\psi 2} = \bar{C}_{\psi 2} a_o = 0,643a_o \quad (7.53)$$

$$S_{\psi 2} = \bar{S}_{\psi 2} a_{os} = 5a_{os} \quad (7.54)$$

Tem-se, então:

$$k_{\psi} = 4,3Gr_o^3 \left(1 + 2,42 \frac{G_s}{G} \frac{p}{r_o} \right) \quad (7.55)$$

$$c_{\psi} = 0,643\sqrt{Gpr_o^4} \left(1 + 7,78 \sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}} \frac{p}{r_o} \right) \quad (7.56)$$

7.5 - O Efeito do Embutimento na Resposta Dinâmica das Fundações de Máquinas

Os resultados das investigações de campo das fundações embutidas desenvolvidas por Novak [Refs. (39), (40)], Beredugo [Ref. (36)], Beredugo e Novak [Ref. (35)], Fry [Ref. (41)], Stokoe [Ref. (42)], Stokoe e Richart [Ref. (43)], e dos experimentos em laboratório de Chae [Ref. (44)], Gupta [Ref. (45)] e Vijayvergiya [Ref. (46)] mostram que como resultado do embutimento a frequência natural do sistema fundação-solo cresce e a amplitude da vibração decresce.

Para o caso do movimento oscilatório vertical, pode-se determinar a resposta do sistema máquina-fundação-solo:

$$\bar{B}_z = \frac{Mk}{c^2} = 1,384B_z \frac{K}{C^2} \quad (7.57)$$

$$\bar{a}_o = \frac{\omega c}{k} = 0,85a_o \frac{C}{K} \quad (7.58)$$

Onde:

$$K = 1 + 0,675(1 - \nu) \frac{G_s}{G} \frac{p}{r_o} \quad (7.59)$$

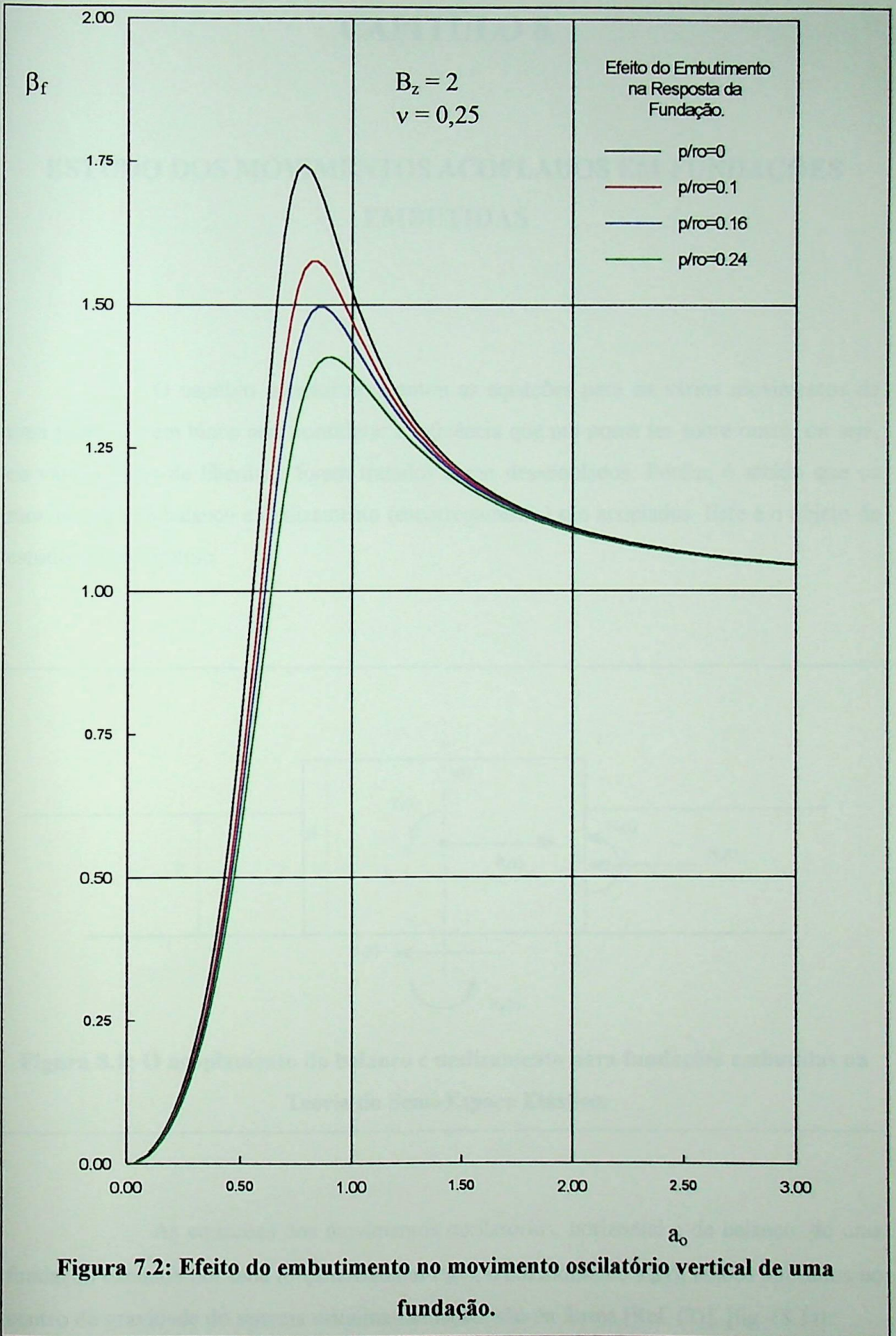
$$C = 1 + 1,97(1 - \nu) \sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}} \frac{p}{r_o} \quad (7.60)$$

A resposta do sistema a uma excitação por desbalanceamento é dada por:

$$\beta_f = \frac{\frac{B_z a_o^2}{K}}{\sqrt{\left(1 - \frac{B_z a_o^2}{K}\right)^2 + 0,7225 \left(\frac{C}{K}\right)^2 a_o^2}} \quad (7.61)$$

A figura (7.2) apresenta a resposta do sistema a uma excitação vertical, para diversas razões de embutimento p/r_o , porém com o parâmetro adimensional B_z fixo e $G_s \rho_s / G \rho = 1$. Desta figura observa-se que a frequência de ressonância foi pouca afetada pelo incremento no embutimento, entretanto, a amplitude foi afetada de forma considerável.

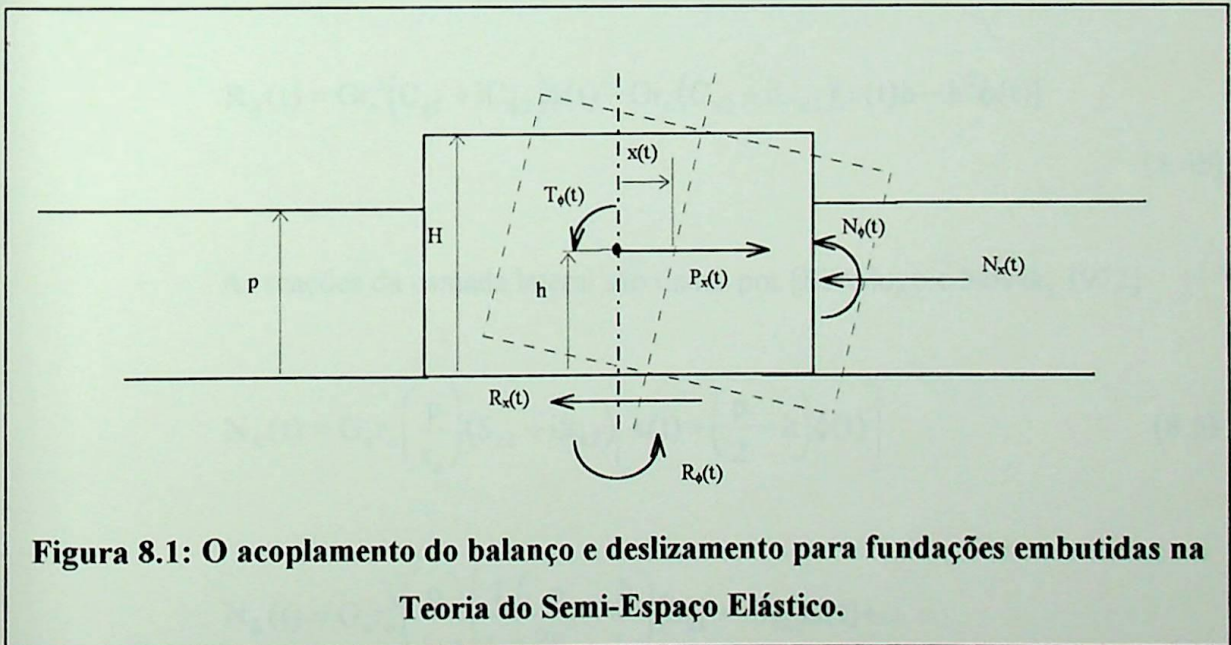
Deve-se atentar para o fato de ter-se o traçado das curvas com $B_z=2$, ou seja, para coeficientes de amortecimento baixo. Porém, para altos coeficientes de amortecimento, o incremento afetará muito mais a frequência de ressonância do que a amplitude.



CAPÍTULO 8

ESTUDO DOS MOVIMENTOS ACOPLADOS EM FUNDAÇÕES EMBUTIDAS

O capítulo anterior apresentou as equações para os vários movimentos de uma fundação em bloco sem considerar a influência que um possa ter sobre outro, ou seja, os vários graus de liberdade foram tratados como desacoplados. Porém, é sabido que os movimentos de balanço e deslizamento (escorregamento) são acoplados. Este é o objeto de estudo desse capítulo.



As equações dos movimentos oscilatórios, horizontal e de balanço, de uma fundação excitada por uma força horizontal $P_x(t)$, e um momento $T_\phi(t)$, ambos aplicados no centro de gravidade do sistema máquina-fundação, são da forma [Ref. (2)], [fig. (8.1)]:

$$M\ddot{x}(t) + R_x(t) + N_x(t) = P_x e^{i\omega t} \quad (8.1)$$

$$I\ddot{\phi}(t) + R_\phi(t) + N_\phi(t) = T_\phi e^{i\omega t} \quad (8.2)$$

A reação do solo $R_x(t)$, e o momento resistente ao balanço $R_\phi(t)$, são [Ref. (47)]:

$$R_x(t) = Gr_o(C_{x1} + iC_{x2})x_b(t) \quad (8.3a)$$

$$R_x(t) = Gr_o(C_{x1} + iC_{x2})[x(t) - h\phi(t)] \quad (8.3b)$$

E:

$$R_\phi(t) = Gr_o^3(C_{\phi1} + iC_{\phi2})\phi(t) - R_x(t)h \quad (8.4a)$$

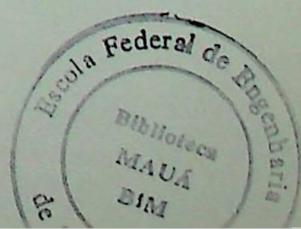
$$R_\phi(t) = Gr_o^3(C_{\phi1} + iC_{\phi2})\phi(t) - Gr_o(C_{x1} + iC_{x2})[x(t)h - h^2\phi(t)] \quad (8.4b)$$

As reações da camada lateral são dadas por [Beredugo e Novak, 1972]:

$$N_x(t) = G_s r_o \left(\frac{p}{r_o} \right) (S_{x1} + iS_{x2}) \left[x(t) + \left(\frac{p}{2} - h \right) \phi(t) \right] \quad (8.5)$$

$$N_\phi(t) = G_s r_o^3 \left(\frac{p}{r_o} \right) \left\{ \frac{1}{r_o} \left(\frac{p}{2r_o} - \frac{h}{r_o} \right) (S_{x1} + iS_{x2}) x(t) + \dots \right. \\ \left. + \left[(S_{\phi1} + iS_{\phi2}) + \left(\frac{p^2}{3r_o^2} - \frac{ph}{r_o^2} + \frac{h^2}{r_o^2} \right) (S_{x1} + iS_{x2}) \right] \phi(t) \right\} \quad (8.6)$$

Substituindo as expressões (8.3b), (8.4b), (8.5), e (8.6), nas equações (8.1) e (8.2), obtemos:



$$\begin{aligned}
& M\ddot{x}(t) + r_o \left[G(C_{x1} + iC_{x2}) + G_s \frac{p}{r_o} (S_{x1} + iS_{x2}) \right] x(t) + \dots \\
& + r_o \left[-Gp(C_{x1} + iC_{x2}) + G_s \frac{p}{r_o} \left(\frac{p}{2} - h \right) (S_{x1} + iS_{x2}) \right] \phi(t) = \\
& = P_x(t)
\end{aligned} \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned}
& I\ddot{\phi}(t) + r_o^2 \left[G_s \frac{p}{r_o} \left(\frac{p}{2r_o} - \frac{h}{r_o} \right) (S_{x1} + iS_{x2}) + \right. \\
& \left. -G \frac{h}{r_o} (C_{x1} + iC_{x2}) \right] x(t) + r_o^3 \left\{ G(C_{\phi1} + iC_{\phi2}) + \right. \\
& \left. + G_s \frac{p}{r_o} [(S_{\phi1} + iS_{\phi2}) + \left(\frac{p^2}{3r_o^2} - \frac{ph}{r_o^2} + \frac{h^2}{r_o^2} \right) (S_{x1} + iS_{x2})] + \right. \\
& \left. + G \frac{h^2}{r_o^2} (C_{x1} + iC_{x2}) \right\} \phi(t) = T_\phi e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Consideremos as seguintes soluções particulares:

$$x(t) = X e^{i\omega t} \tag{8.9}$$

$$\phi(t) = \Phi e^{i\omega t} \tag{8.10}$$

Substituindo as expressões acima em (8.7) e (8.8), obteremos as seguintes equações:

$$-MX\omega^2 + k_x X + c_x i\omega X + k_{x\phi} \Phi + c_{x\phi} i\omega \Phi = P_x \tag{8.11}$$

$$-I\Phi\omega^2 + k_\phi \Phi + c_\phi i\omega \Phi + k_{x\phi} X + c_{x\phi} i\omega X = T_\phi \tag{8.12}$$

Onde:

$$k_x = Gr_o \left(C_{x1} + \frac{G_s p}{G r_o} S_{x1} \right) \quad (8.13)$$

$$c_x = \frac{Gr_o}{\omega} \left(C_{x2} + \frac{G_s p}{G r_o} S_{x2} \right) \quad (8.14)$$

$$k_\phi = Gr_o^3 \left\{ C_{\phi1} + \frac{h^2}{r_o^2} C_{x1} + \frac{G_s p}{G r_o} S_{\phi1} + \dots \right. \\ \left. + \frac{G_s p}{G r_o} \left(\frac{p^2}{3r_o^2} - \frac{ph}{r_o^2} + \frac{h^2}{r_o^2} \right) S_{x2} \right\} \quad (8.15)$$

$$c_\phi = \frac{Gr_o^3}{\omega} \left\{ C_{\phi2} + \frac{h^2}{r_o^2} C_{x2} + \frac{G_s p}{G r_o} S_{\phi2} + \dots \right. \\ \left. + \frac{G_s p}{G r_o} \left(\frac{p^2}{3r_o^2} - \frac{ph}{r_o^2} + \frac{h^2}{r_o^2} \right) S_{x2} \right\} \quad (8.16)$$

$$k_{x\phi} = -Gr_o \left[hC_{x1} + \frac{G_s p}{G r_o} \left(h - \frac{p}{2} \right) S_{x1} \right] \quad (8.17)$$

$$c_{x\phi} = \frac{-Gr_o}{\omega} \left[hC_{x2} + \frac{G_s p}{G r_o} \left(h - \frac{p}{2} \right) S_{x2} \right] \quad (8.18)$$

Os parâmetros C_{x1} , C_{x2} , S_{x1} , S_{x2} , e os parâmetros $C_{\phi1}$, $C_{\phi2}$, $S_{\phi1}$, e $S_{\phi2}$, são aqueles definidos para os casos dos movimentos oscilatórios puros das fundações embutidas [ver ítem 8], portanto, podem ser representados simplificadaamente por valores constantes, ou por valores proporcionais a frequência adimensional a_o [Ref. (47)]. Desta forma as expressões para as constantes de rigidez e amortecimento para os dois modos acoplados (k_x , k_ϕ , c_x , c_ϕ), e as expressões para as constantes de rigidez e amortecimento devidas ao acoplamento ($k_{x\phi}$, $c_{x\phi}$), denominadas também de constantes cruzadas, podem ser expressas nas seguintes formas:

$$k_x = \frac{8Gr_o}{2-\nu} \left[1 + 0,49(2-\nu) \frac{G_s p}{G r_o} \right] \quad (8.19)$$

$$c_x = \frac{4,6r_o^2 \sqrt{\rho G}}{2-\nu} \left[1 + 2(2-\nu) \sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}} \right] \quad (8.20)$$

$$k_\phi = \frac{8Gr_o^3}{3(1-\nu)} \left[1 + \frac{3(1-\nu) h^2}{2-\nu r_o^2} + 0,94(1-\nu) \frac{G_s p}{G r_o} + \right. \\ \left. + 1,46(1-\nu) \frac{G_s p}{G r_o} \left(\frac{p^2}{3r_o^2} - \frac{ph}{r_o^2} + \frac{h^2}{r_o^2} \right) \right] \quad (8.21)$$

$$c_\phi = 0,43r_o^4 \sqrt{\rho G} \left[1 + \frac{10,7 h^2}{2-\nu r_o^2} + 4,2 \frac{p}{r_o} \sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}} + \right. \\ \left. + 21,63 \frac{p}{r_o} \sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}} \left(\frac{p^2}{3r_o^2} - \frac{ph}{r_o^2} + \frac{h^2}{r_o^2} \right) \right] \quad (8.22)$$

$$k_{x\phi} = \frac{-8Gr_o}{2-\nu} \left[h + 0,49(2-\nu) \frac{G_s p}{G r_o} \left(h - \frac{p}{2} \right) \right] \quad (8.23)$$

$$c_{x\phi} = \frac{-4,6r_o^2 \sqrt{\rho G}}{2-\nu} \left[h + 2(2-\nu) \frac{p}{r_o} \sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}} \left(h - \frac{p}{2} \right) \right] \quad (8.24)$$

A figura (8.2) apresenta o modelo do sistema máquina-fundação-meio elástico.

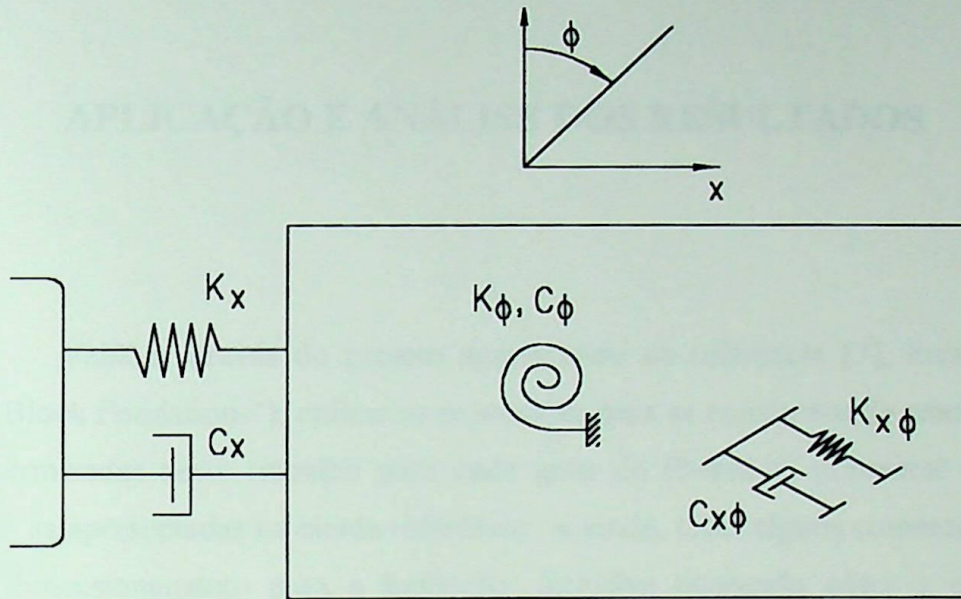


Figura 8.2: Modelo do Acoplamento.

CAPÍTULO 9

APLICAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Vamos, através do projeto apresentado na referência [3], item 6 (“Design Examples: Block Foundations”), aplicar as expressões para as constantes de amortecimento e rigidez determinadas neste trabalho para cada grau de liberdade, comparar as respostas obtidas com as apresentadas na citada referência, e ainda, tecer alguns comentários, propor um outro dimensionamento para a fundação, inclusive buscando obter a economia de material (concreto) na confecção de uma fundação para máquinas. O esquema daquela fundação está apresentada na figura (9.1).

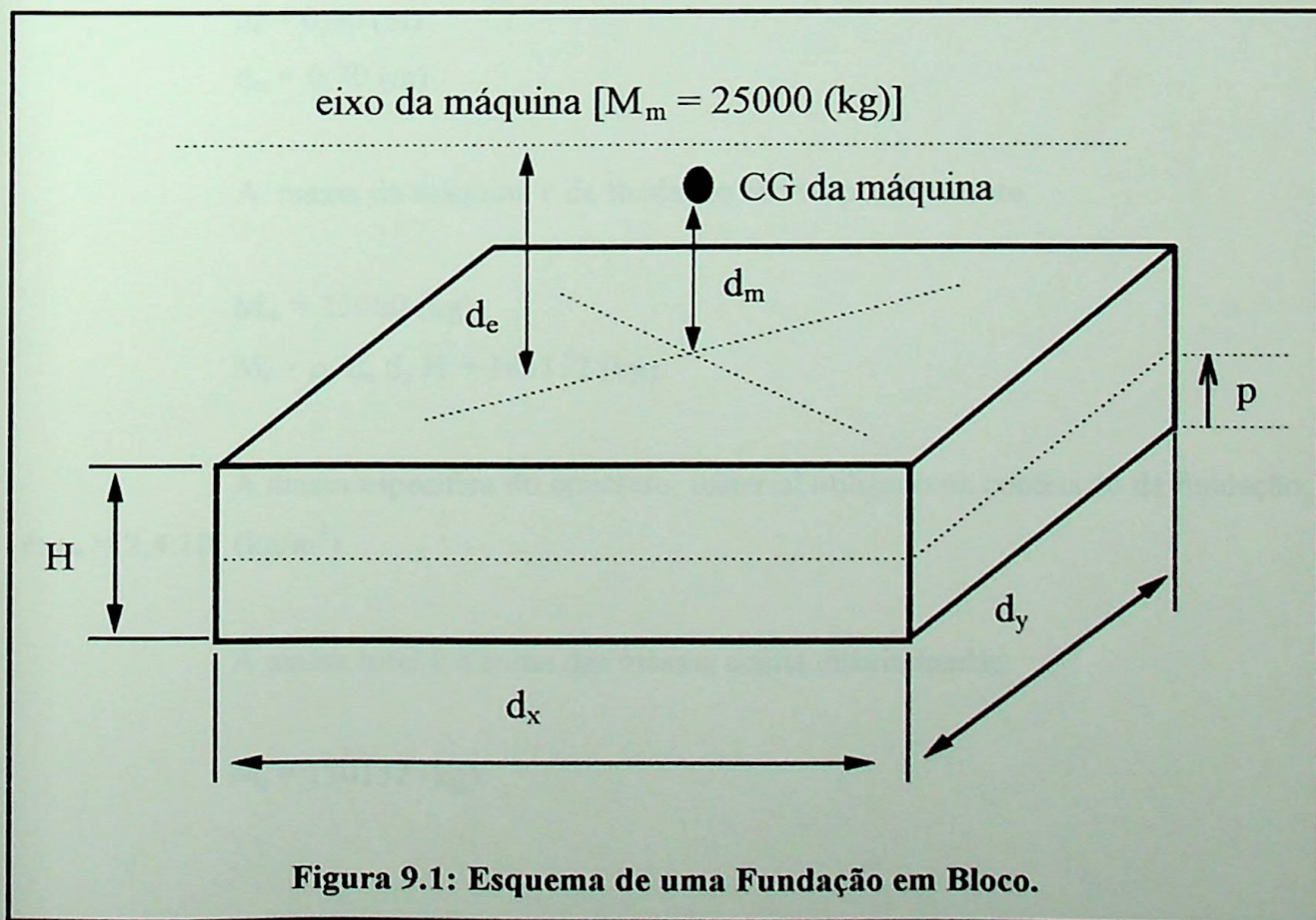


Figura 9.1: Esquema de uma Fundação em Bloco.

Destacam-se na figura (9.1), as seguintes dimensões:

d_x → dimensão horizontal da fundação paralela ao eixo x;

d_y → dimensão horizontal da fundação paralela ao eixo y;

H → altura da fundação;

p → profundidade de embutimento;

d_e → distância do eixo da máquina ao topo da fundação;

d_m → distância do centro de gravidade da máquina ao topo da fundação;

De acordo com a referência [3], as dimensões acima possuem os seguintes valores:

$$d_x = 8,40 \text{ (m)}$$

$$d_y = 4,80 \text{ (m)}$$

$$H = 1,50 \text{ (m)}$$

$$p = 0,90 \text{ (m)}$$

$$d_e = 0,90 \text{ (m)}$$

$$d_m = 0,70 \text{ (m)}$$

A massa da máquina e da fundação são respectivamente:

$$M_m = 25000 \text{ (kg)}.$$

$$M_f = \rho_c d_x d_y H = 145152 \text{ (kg)}.$$

A massa específica do concreto, material utilizado na confecção da fundação, é: $\rho_c = 2,4 \cdot 10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)}$.

A massa total é a soma das massas acima discriminadas:

$$M_t = 170152 \text{ (kg)}.$$

Determina-se o valor h , altura do centro de gravidade do conjunto máquina-fundação em relação a base da fundação, efetuando-se o seguinte cálculo:

$$h = \frac{M_r \frac{H}{2} + M_m(H + dm)}{M_t} = 0,963 \text{ (m)}$$

Os parâmetros para o semi-espço elástico, e a camada elástica lateral, são os mesmos, e possuem os valores abaixo:

Módulo de Elasticidade Transversal Dinâmico: $G = 9,8 \cdot 10^4 \text{ (N/m}^2\text{)}$

Massa Específica: $\rho = 1,87 \cdot 10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)}$

Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,35$

Coefficiente de amortecimento interno do meio elástico: $\xi_s = 0,05$

As forças dinâmicas são:

$$F_z = 5913,8 \cos\omega t + 2460,75 \cos 2\omega t \text{ (N)}$$

$$F_x = 3226,12 \cos\omega t \text{ (N)}$$

$$T_{\phi y} = 15331,66 \cos\omega t \text{ (Nm)}$$

$$T_{\phi x} = 46114,33 \cos\omega t + 16750,35 \cos 2\omega t \text{ (Nm)}$$

A rotação de operação da máquina é: $n = 585 \text{ rpm}$. A frequência de excitação ω , é portanto dada pela seguinte expressão:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 61,26 \text{ (rad / s)}$$

A expressão geral do movimento, na forma geral, é dada por:

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\phi}_y \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & c_{x\phi_y} & 0 & 0 \\ 0 & c_{x\phi_y} & c_{\phi_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_y & c_{y\phi_x} \\ 0 & 0 & 0 & c_{y\phi_x} & c_{\phi_x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \\ \dot{\phi}_y \\ \dot{y} \\ \dot{\phi}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_x & k_{x\phi_y} & 0 & 0 \\ 0 & k_{x\phi_y} & k_{\phi_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_y & k_{y\phi_x} \\ 0 & 0 & 0 & k_{y\phi_x} & k_{\phi_x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ x \\ \phi_y \\ y \\ \phi_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{z1} \\ P_{x1} \\ T_{\phi_x1} \\ P_{y1} \\ T_{\phi_y1} \end{Bmatrix} \cos\omega t + \begin{Bmatrix} P_{z2} \\ P_{x2} \\ T_{\phi_x2} \\ P_{y2} \\ T_{\phi_y2} \end{Bmatrix} \cos 2\omega t \quad (9.1)$$

Simplificadamente:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q1\}\cos\omega t + \{Q2\}\cos 2\omega t \quad (9.2)$$

A resposta do sistema é obtida pelo método da matriz inversa, método este aplicado, quando as excitações forem harmônicas [ver apêndice 1]. Temos:

$$[E]\{A\} = \{Q\} \quad (9.3)$$

Onde [E] é uma matriz 20x20:

$$[E] = \begin{bmatrix} [k] - [M]\omega^2 & \omega[c] & [0] & [0] \\ -\omega[c] & [k] - [M]\omega^2 & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [k] - [M]4\omega^2 & 2\omega[c] \\ [0] & [0] & -2\omega[c] & [k] - [M]4\omega^2 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \\ \{d\} \end{Bmatrix} \quad (9.5)$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} \{Q1\} \\ \{0\} \\ \{Q2\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (9.6)$$

Logo, a solução do sistema é dada pela seguinte expressão:

$$\{A\} = [E]^{-1}\{Q\} \quad (9.7)$$

A resposta é da forma:

$$\begin{Bmatrix} z \\ x \\ \phi_y \\ y \\ \phi_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} \cos \omega t + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{Bmatrix} \sin \omega t + \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} \cos 2\omega t + \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{Bmatrix} \sin 2\omega t \quad (9.8)$$

Temos, então, que:

$$z = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + c_1 \cos 2\omega t + d_1 \sin 2\omega t \quad (9.9)$$

$$x = a_2 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t + c_2 \cos 2\omega t + d_2 \sin 2\omega t \quad (9.9a)$$

$$\phi_y = a_3 \cos \omega t + b_3 \sin \omega t + c_3 \cos 2\omega t + d_3 \sin 2\omega t \quad (9.9b)$$

$$y = a_4 \cos \omega t + b_4 \sin \omega t + c_4 \cos 2\omega t + d_4 \sin 2\omega t \quad (9.9c)$$

$$\phi_x = a_5 \cos \omega t + b_5 \sin \omega t + c_5 \cos 2\omega t + d_5 \sin 2\omega t \quad (9.9d)$$

Porém, por questões práticas, as amplitudes devem ser calculadas na borda da fundação, e no eixo da máquina:

$$Z = z + \frac{d_x}{2}\phi_y + \frac{d_y}{2}\phi_x \quad (9.10)$$

$$X = x + (H + d_e - h)\phi_y \quad (9.10a)$$

$$Y = y + (H + d_e - h)\phi_x \quad (9.10b)$$

Deve-se notar que, nas expressões (9.10), (z,x,y) são funções no tempo, que indicam as coordenadas do CG do sistema máquina-fundação, medidas em um referencial fixo com origem na altura h em relação a base da fundação. Já as coordenadas (Z,X,Y) , são coordenadas dos pontos notáveis do sistema (eixo da máquina e borda), porém, também, referenciadas aquele sistema no CG.

As expressões (9.10), (9.10a), e (9.10b), são do tipo:

$$f(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + B_1 \sin 2\omega t + B_2 \cos 2\omega t \quad (9.11)$$

As amplitudes máximas, bem como as velocidades máximas, de uma expressão do tipo (9.11), podem ser determinadas [ver apêndice 2]. As frequências naturais, naturais com amortecimento, são determinadas manipulando-se as matrizes $[M]$, $[k]$, e $[C]$, [Ref. (4)].

Agora, após essa breve exposição do equacionamento e método de solução do problema, vamos prosseguir apresentando o problema numericamente, passo a passo.

No cálculo das constantes de rigidez e amortecimento, devemos iniciar calculando-se os raios equivalentes. Para os movimentos translacionais, temos:

$$\Gamma_{oz} = \Gamma_{ox} = \Gamma_{oy} = \Gamma_o = \sqrt{\frac{d_x d_y}{\pi}} = 3,5825 \text{ (m)} \quad (9.12)$$

Para os movimentos rotacionais (balanço) em torno dos eixos \underline{x} e \underline{y} , respectivamente, tem-se:

$$r_{o\phi_x} = \left(\frac{d_x d_y^3}{3\pi} \right)^{0,25} = 3,1509 \text{ (m)} \quad (9.13)$$

$$r_{o\phi_y} = \left(\frac{d_y d_x^3}{3\pi} \right)^{0,25} = 4,1682 \text{ (m)} \quad (9.14)$$

Para o problema em questão, não ocorre o movimento torcional, ou rotacional em torno do eixo vertical z.

As constantes de rigidez \underline{k} e de amortecimento \underline{c} para os vários graus de liberdade são:

vertical (z):

$$k_z = 2,3987 \cdot 10^9 \text{ (N/m)} \quad (9.15)$$

$$c_z = 4,0004 \cdot 10^7 \text{ (Ns}^2\text{/m)} \quad (9.15a)$$

x e ϕ_y :

$$k_x = 2,0480 \cdot 10^9 \text{ (N/m)} \quad (9.16)$$

$$c_x = 2,9882 \cdot 10^7 \text{ (Ns}^2\text{/m)} \quad (9.16a)$$

$$k_{\phi_y} = 3,4908 \cdot 10^{10} \text{ (N/rad)} \quad (9.17)$$

$$c_{\phi_y} = 1,4811 \cdot 10^8 \text{ (Ns}^2\text{/rad)} \quad (9.17a)$$

As constantes de acoplamento são:

$$k_{x\phi_y} = -2,0847 \cdot 10^9 \text{ (N/m), (N/rad)} \quad (9.18)$$

$$c_{x\phi_y} = -2,3156 \cdot 10^7 \text{ (Ns}^2\text{/m), (Ns}^2\text{/rad)} \quad (9.18a)$$

y e ϕ_x :

$$k_y = 2,048 \cdot 10^9 \text{ (N/m)} \quad (9.19)$$

$$c_y = 2,9882 \cdot 10^7 \text{ (Ns}^2\text{/m)} \quad (9.19a)$$

$$k_{\phi x} = 1,6274 \cdot 10^{10} \text{ (N/rad)} \quad (9.20)$$

$$c_{\phi x} = 6,2192 \cdot 10^7 \text{ (Ns}^2\text{/rad)} \quad (9.20a)$$

As constantes de acoplamento são:

$$k_{y\phi x} = -1,6192 \cdot 10^9 \text{ (N/m), (N/rad)} \quad (9.21)$$

$$c_{y\phi x} = -1,4758 \cdot 10^7 \text{ (Ns}^2\text{/m), (Ns}^2\text{/rad)} \quad (9.21a)$$

As constantes de amortecimento \underline{c} apresentadas acima, estão adicionadas da constante de amortecimento do solo, dada em função do fator de amortecimento interno, ξ_s , como segue:

$$c_z^s = 2\xi_s \sqrt{M_t k_z} \quad (9.22)$$

$$c_x^s = 2\xi_s \sqrt{M_t k_x} \quad (9.22a)$$

$$c_{\phi y}^s = 2\xi_s \sqrt{I_y k_{\phi y}} \quad (9.22b)$$

$$c_{x\phi y}^s = 2\xi_s \sqrt{I_y |k_{x\phi y}|} \quad (9.22c)$$

$$c_y^s = 2\xi_s \sqrt{M_t k_y} \quad (9.22d)$$

$$c_{\phi x}^s = 2\xi_s \sqrt{I_x k_{\phi x}} \quad (9.22e)$$

$$c_{y\phi x}^s = 2\xi_s \sqrt{I_x |k_{y\phi x}|} \quad (9.22f)$$

Vamos obter agora, as matrizes [M], [C], e [K]. Para a obtenção da matriz [M], devemos determinar os momentos de inércia em relação ao centro de gravidade do sistema máquina-fundação para os movimentos rotacionais. A inércia em torno dos eixos x e y são dadas por:

$$I_x = \frac{M_f(d_y^2 + H^2)}{12} + M_f \left(h - \frac{H}{2} \right)^2 + M_m(H + d_m - h)^2 \quad (9.23)$$

$$I_x = 3,5075 \cdot 10^5 \text{ (kgm}^2\text{)}$$

$$I_y = \frac{M_f(d_x^2 + H^2)}{12} + M_f\left(h - \frac{H}{2}\right)^2 + M_m(H + d_m - h)^2 \quad (9.24)$$

$$I_y = 9,2555 \cdot 10^5 \text{ (kgm}^2\text{)}$$

Logo, as matrizes são:

$$[M] = 1,0 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 1,70152 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,70152 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9,2555 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,70152 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,5075 \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

$$[C] = 1,0 \cdot 10^8 \begin{bmatrix} 0,4000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2988 & -0,2316 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2316 & 1,4811 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2988 & -0,1476 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1476 & 0,6219 \end{bmatrix} \quad (9.26)$$

$$[K] = 1,0 \cdot 10^{10} \begin{bmatrix} 0,2399 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2048 & -0,2085 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2085 & 3,4908 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2048 & -0,1619 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1619 & 1,6274 \end{bmatrix} \quad (9.27)$$

Podemos, agora, determinar o vetor $\{A\}$, dado pela expressão (9.7). Nesta expressão destaca-se a matriz $[E]$, obtida a partir das matrizes $[M]$, $[C]$, e $[K]$, e ainda, o vetor $\{Q\}$, obtido a partir das expressões para as forças de excitação do sistema:

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} \{Q1\} \\ \{0\} \\ \{Q2\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (9.28)$$

Com:

$$\{Q1\} = 1,0 \cdot 10^4 \begin{Bmatrix} 0,5914 \\ 0,3226 \\ 1,9967 \\ 0 \\ 4,6114 \end{Bmatrix} \quad (9.29)$$

$$\{Q2\} = 1,0 \cdot 10^4 \begin{Bmatrix} 0,2461 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,6750 \end{Bmatrix} \quad (9.30)$$

O vetor $\{0\}$, da expressão (9.28), é um vetor da mesma dimensão que (9.29), (9.30), porém, com todos os elementos nulos.

Procedendo-se ao cálculo da expressão (9.7), obtem-se:

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \\ \{d\} \end{Bmatrix} = 1,0 \cdot 10^{-5} \begin{Bmatrix} 0,1143 \\ 0,1531 \\ 0,0737 \\ 0,2077 \\ 0,3187 \\ 0,1592 \\ 0,1618 \\ 0,0251 \\ 0,1647 \\ 0,0865 \\ -0,0016 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0018 \\ 0,1070 \\ 0,0502 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0906 \\ 0,0871 \end{Bmatrix} \quad (9.31)$$

A resposta do sistema está determinada:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} z \\ x \\ \phi_y \\ y \\ \phi_x \end{Bmatrix} = \{a\} \text{sen}(\omega t) + \{b\} \text{cos}(\omega t) + \{c\} \text{sen}(2\omega t) + \{d\} \text{cos}(2\omega t) \quad (9.32)$$

Podemos, agora, determinar as amplitudes dos vários movimentos nas bordas da fundação e no eixo da máquina. Para tanto, devemos determinar as expressões para Z, X, e Y, dadas por (9.10), (9.10a), e (9.10b). O próximo passo é a determinação das

amplitudes de Z, X, e Y. Essas amplitudes são obtidas encontrando-se as raízes de um polinômio do quarto grau [apêndice 2]. As amplitudes para os deslocamentos angulares são determinadas da mesma forma indicada para os translacionais. Quanto as frequências naturais, coeficientes de amortecimento, frequências naturais amortecidas, devemos obter a matriz [P], e na seqüência os seus autovalores [Ref. (4), apêndice (5)].

$$[P] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \quad (9.33)$$

Apresenta-se, a seguir, a tabela com os valores das amplitudes e frequências críticas para os vários graus, destacando-se também, a amplitude da variação no tempo de cada um dos movimentos, ou seja, a amplitude das velocidades dos movimentos da fundação.

Tabela 9.1: Resultados obtidos considerando-se o acoplamento

Coordenadas	Amplitude (mm),(rad)	Velocidade (mm/s), (rad/s)	Frequência natural ω_n (rad/s)	Fator amortecimento ξ [1]	Frequência natural amortecida ω_d (rad/s)
Z(9.10)	0,0164	1,0728	118,73	0,9901	16,68
X(9.10a)	0,0033	0,1997	112,50	0,7795	70,47
ϕ_y	$0,7789 \cdot 10^{-6}$	$4,7713 \cdot 10^{-5}$	183,54	0,4365	165,13
Y(9.10b)	0,0099	0,6859	109,64	0,7762	69,12
ϕ_x	$4,6760 \cdot 10^{-6}$	$3,3308 \cdot 10^{-4}$	206,89	0,4416	185,62

Na seqüência, temos a tabela com os resultados extraídos da obra “Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines”, referência (3), a qual foi a fonte já citada para o projeto em questão:

Tabela 9.2: Resultados extraídos da referência (3)

Coordenadas	Amplitude (mm),(rad)	Velocidade (mm/s), (rad/s)	Frequência natural ω_n (rad/s)	Fator amortecimento ξ [1]	Frequência natural amortecida ω_d (rad/s)
Z(9.10)	0,0182	1,1157	113,39	0,981	22,00
X(9.10a)	0,0034	0,2070	105,67	0,782	65,86
ϕ_y	$0,8428 \cdot 10^{-6}$	$5,1631 \cdot 10^{-5}$	175,68	0,352	164,43
Y(9.10b)	0,0113	0,6896	105,67	0,782	65,86
ϕ_x	$5,0369 \cdot 10^{-6}$	$3,0857 \cdot 10^{-4}$	168,72	0,245	163,58

A tabela (9.3), apresenta a diferença percentual entre as amplitudes e velocidades obtidas operando com as expressões determinadas neste trabalho [tabela (9.1)] , e aquelas respostas extraídas da referência (3) [tabela (9.2)]. A expressão utilizada na determinação das diferenças é a seguinte:

$$\Delta\% = 100 \frac{(\text{valor tabela 9. 2}) - (\text{valor tabela 9. 1})}{(\text{valor tabela 9.2})} \quad (9.34)$$

Tabela 9.3: Diferença percentual entre as amplitudes e velocidades das tabelas (9.1) e (9.2)

Coordenadas	Diferença Amplitude (%)	Diferença Velocidade (%)
Z	9,89	3,85
X	2,94	3,53
ϕ_y	7,58	7,59
Y	12,39	0,54
ϕ_x	7,17	-7,94

As diferenças acima constatadas se devem a determinadas simplificações adotadas pelos autores da obra fonte do exemplo [Ref. (3)] aqui analisado:

1- Todos os graus de liberdade foram tratados com independência, ou seja, foi desconsiderado o acoplamento entre os movimentos translacionais horizontais com os movimentos rotacionais (balanço) em torno dos eixos horizontais.

2- As amplitudes dos vários graus de liberdade foram determinadas adicionando-se as amplitudes dos componentes primário (ω) e secundário (2ω). Na verdade a amplitude para uma função no tempo, como a expressão destacada a seguir, não possui como valor máximo a soma das amplitudes dos componentes em ω e 2ω . Para a determinação da amplitude de uma função como aquela deve-se proceder a determinação das raízes de um polinômio do quarto grau [apêndice 2].

$$f(t) = A \text{sen}(\omega t + \alpha) + B \text{sen}(2\omega t + \beta) \quad (9.35)$$

3- Na determinação da variação da amplitude do movimento no tempo, isto é, da velocidade, aqueles autores adotaram o mesmo critério citado no item acima para a determinação dos valores máximos, ou seja, adicionaram as amplitudes dos componentes primário e secundário. A verdade é que, da mesma forma que na determinação das amplitudes dos movimentos, o máximo da velocidade é uma das raízes de um polinômio do quarto grau.

A tabela (9.3) não apresenta a comparação relativa (percentual) para as frequências e coeficientes de amortecimento, pois quando considerado o acoplamento, as coordenadas dependentes são mutuamente afetadas pelas frequências e coeficientes de amortecimento apresentados, não sendo portanto, possível referir uma frequência a uma determinada coordenada, como no caso das coordenadas independentes ou desacopladas.

Considerando o exemplo em discussão, da mesma forma que os autores Arya e Pincus [Ref. (3)], ou seja, os vários graus de liberdade podem ser tratados como independentes, obtem-se os seguintes resultados apresentados na tabela (9.4).

Tabela 9.4: Resultados obtidos considerando-se os vários graus de liberdade puros (desacoplados)

Coordenadas	Amplitude (mm),(rad)	Velocidade (mm/s), (rad/s)	Frequência natural ω_n (rad/s)	Fator amortecimento ξ [1]	Frequência natural amortecida ω_d (rad/s)
Z(9.10)	0,0181	1,2530	118,73	0,990	16,68
X(9.10a)	0,0031	0,1877	109,71	0,800	65,77
ϕ_y	$0,7826 \cdot 10^{-6}$	$4,7942 \cdot 10^{-5}$	174,17	0,233	169,86
Y(9.10b)	0,0131	0,9954	109,71	0,800	65,77
ϕ_x	$5,4446 \cdot 10^{-6}$	$4,1473 \cdot 10^{-4}$	170,98	0,216	166,96

A seguir, temos a tabela (9.5), com os afastamentos percentuais dos valores da tabela acima relativamente aqueles apresentados na tabela (9.2), sendo que agora, pode-se comparar as frequências e coeficientes de amortecimento.

Tabela 9.5: Afastamentos percentuais entre (9.2) e (9.5)

Coordenadas	Diferença entre Amplitudes (%)	Diferença entre Velocidades (%)	Diferença entre Frequências naturais ω_n (%)	Diferença entre Fatores de amortecimento (%)	Diferença entre Frequências naturais amortecidas (%)
Z	0,55	-12,31	-4,71	-0,92	24,18
X	8,82	9,32	-3,82	-2,30	0,14
ϕ_y	7,14	7,14	0,57	33,81	-3,30
Y	-15,92	-44,34	-3,82	-2,30	0,13
ϕ_x	-8,09	-34,40	-1,34	11,83	-2,07

Comparativamente, as tabelas (9.2) e (9.4), apresentam uma grande concordância entre seus valores, apresentando apenas alguns valores com afastamentos consideráveis, como revela a tabela (9.5). Mas, deve-se ter em mente e bem claro os seguintes fatos:

1a - Quanto as amplitudes apresentarem alguma diferença, como já foi esclarecido anteriormente, os métodos utilizados não são os mesmos. Os autores Arya e Pincus as determinam de forma simplificada, sem utilizar um método analítico ou numérico. Neste trabalho, porém, a determinação se faz de maneira analítica, podendo, assim, serem considerados de maior expressão do que aquelas obtidas pelos referidos autores. Ainda existe a questão da correção do coeficiente de amortecimento para os graus de liberdade ϕ_x e ϕ_y . Pincus e Arya, se utilizam daquela tabela apresentada por Hall [item (4.4)] sem, no entanto, arriscar uma extrapolação da tabela para o caso em que a razão mássica simplificada [eq. (4.53)] apresenta um valor inferior a 0,2, como ocorre com o deslocamento angular ϕ_y [Ref.(3)]. Para a confecção da tabela (9.4) utilizou-se despreocupadamente, além das constantes de amortecimento e rigidez determinadas neste trabalho, aquela expressão sugerida para o cálculo do coeficiente de amortecimento efetivo fora da faixa a qual foi determinada [ítem (7.3), eq. (7.42)]. O resultado dessa extrapolação se refletiu no coeficiente de amortecimento do modo ϕ_y , que como se observa na tabela (9.5), possui um grande desvio (33,81%). Para este grau de liberdade a razão mássica simplificada determinada é de 0,1122, menor então, que 0,2 que é o menor valor da faixa para qual a expressão para o cálculo do coeficiente de amortecimento efetivo foi determinada. Para o outro modo rotacional, ϕ_x , o valor da razão mássica simplificada está dentro da faixa para o exemplo em questão ($B_{\phi_x} = 0,21$).

2a- Quanto às grandes discrepâncias nos valores das velocidades, a explicação é a mesma apontada para o caso das amplitudes, ou seja, a determinação dos valores máximos são determinados por métodos distintos.

3a- Quanto às frequências natural e amortecida, e aos coeficientes de amortecimentos, as diferenças na grande maioria não são relevantes. Entretanto, devemos fazer dois comentários importantes. A frequência natural amortecida para a coordenada z,

apresenta uma maior distorção (24,18%), devido ao alto coeficiente de amortecimento a que este modo está submetido. Contrariamente, o modo ϕ_x possui uma maior discrepância (11,84%) entre os coeficientes de amortecimento determinados, porém, uma pequena diferença (-2,07%) entre as frequências natural amortecida, consequência do baixo fator de amortecimento a que está sujeito. Ambos os modos z e ϕ_x , entretanto, não apresentam grandes distorções em suas frequências naturais, comparando-se as tabelas. Podemos dizer, então, que sistemas com baixos coeficientes de amortecimento absorvem melhor os erros ou desvios ocasionados na determinação deste fator, refletindo uma menor variação na frequência natural amortecida, tornando esse parâmetro mais “confiável”. Entretanto, sistemas com valores elevados de coeficientes de amortecimento, implicam em grande desvio de suas frequências naturais amortecidas, e conseqüentemente, uma menor credibilidade está associada a esta grandeza.

Agora, dentro daquela proposta do início do capítulo de apontar um dimensionamento mais “econômico” para a fundação, apresenta-se a seguir a tabela com a resposta da fundação redimensionada, sendo que a única dimensão alterada foi a altura H da fundação, que estava dimensionada em 1,5 metros, e agora passa a estar dimensionada em 1,2 metros. Manteve-se também, o espaçamento de 0,6 metros entre o nível da camada lateral e o topo da fundação, ou seja: $H-p = 0,6$ [m]. Entretanto, como efeito colateral, teve-se a diminuição da profundidade de embutimento p , de 0,9 metros para 0,6 metros.

Tabela 9.6: Resultados obtidos reduzindo-se a altura H da fundação

Coordenadas	Amplitude (mm),(rad)	Velocidade (mm/s), (rad/s)	Frequência natural ω_n (rad/s)	Fator amortecimento $\xi[1]$	Frequência natural amortecida ω_d (rad/s)
Z(9.10)	0,0171	1,1124	128,18	1,0146	0
X(9.10a)	0,0032	0,1963	119,64	0,7508	79,02
ϕ_y	$0,7744 \cdot 10^{-6}$	$4,7443 \cdot 10^{-5}$	202,99	0,4126	184,90
Y(9.10b)	0,0094	0,6552	117,15	0,7481	77,75
ϕ_x	$4,9147 \cdot 10^{-6}$	$3,4826 \cdot 10^{-4}$	228,22	0,4107	208,08

Comparando-se os resultados deste novo dimensionamento com os resultados obtidos para aquele projeto inicialmente proposto por Pincus e Arya, porém, utilizando as expressões deste trabalho, e ainda, considerando o acoplamento [tabela (9.1)], tem-se:

Tabela 9.7: Comparação entre os valores da tabela (9.1) e (9.6)

Coordenadas	Diferença entre Amplitudes (%)	Diferença entre Velocidades (%)	Diferença entre Frequências naturais ω_n (%)	Diferença entre Fatores de amortecimento (%)	Diferença entre Frequências naturais amortecidas (%)
Z	-4,27	-3,69	-7,98	-2,51	100,00
X	3,03	1,70	-6,35	3,66	-12,13
ϕ_y	0,58	0,56	-10,60	5,38	-11,97
Y	5,05	4,48	-6,85	3,63	-12,49
ϕ_x	-5,10	-4,56	-10,31	6,93	-12,10

A tabela (9.7) apresentada acima, mostra claramente que não ocorreu variações significativas das amplitudes e velocidades para os vários graus de liberdade da fundação em função da alteração proposta. O mesmo ocorre para as grandezas frequências naturais e coeficientes de amortecimento. Já para a grandeza frequência natural amortecida, verifica-se que na vertical apresentou uma enorme variação (100%) em consequência deste novo projeto, mas esta situação nada invalida o projeto. A grande variação é consequência do alto coeficiente de amortecimento vertical a que a fundação está submetida como já comentado anteriormente, e ainda, pela passagem da fundação da condição de sub-amortecida ($\xi < 1$) para a condição de "levemente" super-amortecida, ou seja, o coeficiente de amortecimento é um pouco maior que a unidade. Para valores do coeficiente de amortecimento maior (super-amortecida) ou igual a unidade (criticamente amortecida), a grandeza frequência natural amortecida se anula [ver eq. (9.36)].

$$\omega_{nd} = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (9.36)$$

O redimensionamento da fundação alterou, naturalmente, as constantes de rigidez e amortecimento para os vários graus de liberdade da fundação, entretanto, as alterações experimentadas pelas constantes foram, principalmente, devidas a alteração da profundidade de embutimento p , e da posição do centro de gravidade h pela diminuição da altura H da fundação. Como manteve-se as dimensões nas direções x e y , os raios equivalentes, que são funções destas dimensões [ver eqs. (9.12),(9.13),(9.14)], também mantiveram-se inalterados, portanto, estes não tomaram parte na alteração daquelas constantes, e nem mesmo, nos resultados apresentados na tabela (9.6), já que estes são dependentes das tais constantes k e c .

Convencidos que a resposta da “nova” fundação é aceitável, pois não se afasta exageradamente da resposta da fundação inicialmente analisada, devemos ressaltar um ponto de destaque neste novo projeto. Como não foram alteradas as dimensões horizontais d_x e d_y da fundação, manteve-se, portanto, a área da base da fundação, mas no entanto, quando optou-se pela redução da altura da fundação, reduziu-se a massa da fundação. O meio que suporta o conjunto máquina-fundação admite uma determinada carga por unidade de área que se constitui em um dos itens de projeto a ser satisfeito. Portanto, podemos declarar que o novo dimensionamento proposto satisfaz este item do projeto, já que o outro com mesma área, porém, com maior peso, já satisfazia esta condição. Pode-se, então dizer que a satisfação do referido item se dá ainda com maior segurança.

A grande vantagem, entretanto, obtida com o redimensionamento proposto é a diminuição na quantidade de material (concreto e ferragem) na confecção da fundação. Obteve-se uma economia de 20% [29000 kg] diminuindo-se a altura H da fundação.

Deve-se ressaltar, que o projeto proposto neste trabalho de dissertação tem base em determinadas recomendações para projeto de fundações de máquinas, apontadas inclusive por Pincus e Arya em suas obra [Ref. (3)]. Deve-se citar o seguinte item que

aparece como recomendação de projeto de fundações de máquinas, e que foi utilizado no redimensionamento da fundação.

•A altura H da fundação é dada em função das outras dimensões da fundação. Esta não deve ser menor que um quinto da menor dimensão (largura, comprimento), ou um décimo da maior dimensão. Vale a que for maior. Ainda, deve-se ter uma altura tal que seja possível ter-se no mínimo 50% desta dimensão embutida no solo.

Apesar de alguns valores percentuais no confronto entre os resultados obtidos neste trabalho de dissertação com aqueles apresentados na referência (3) apresentarem distorções com alguma relevância, pode-se dar por certo que este trabalho é perfeitamente válido, visto que, esses valores “isolados” possuem justificativas plausíveis.

A consideração final deste capítulo diz respeito a determinação das frequências naturais dos graus de liberdade rotacionais ϕ_x e ϕ_y . Verdadeiramente, as frequências determinadas para estes graus de liberdade possuem um valor inferior aqueles apresentados nas tabelas. O fundamento para esta observação está na determinação das inércias em torno dos eixos horizontais. Em nenhuma das respostas apresentadas [tabelas (9.1), (9.2), (9.3)], a inércia própria da máquina em torno do eixo que passa pelo seu centro de gravidade foi considerada [eqs. (9.23), (9.24)].



CAPÍTULO 10

ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS DE PROJETO DA FUNDAÇÃO EM BLOCO

Diagnosticados os resultados, pode-se agora, passar a etapa seguinte, que é função principal deste capítulo, a determinação do comportamento dinâmico do sistema máquina-fundação no meio elástico frente as variações na sua configuração (altura, largura, comprimento).

O comportamento dinâmico de uma fundação é expresso pelo deslocamento e suas derivadas, velocidade e aceleração, para os vários graus de liberdade. Estas grandezas conjuntamente estabelecem vários níveis para o comportamento dinâmico da fundação, e estão relacionadas pela velocidade angular ω de operação da máquina [Ref. (3)]. Estes níveis de comportamento podem aparecer representados na forma gráfica, ou na forma de tabela. Na primeira situação temos a amplitude da vibração em função da rotação da máquina (rpm), porém, com zonas distintas e limitadas por intermédio de valores determinados para a variação do movimento vibratório no tempo, ou seja, para determinadas velocidades. Este gráficos amarram as grandezas amplitude do deslocamento, rotação e velocidade de tal forma que se tenha determinadas regiões onde se considera que se tenha um bom comportamento do sistema, e outras onde não se admite o mesmo. A outra situação simplesmente apresenta faixas para as velocidades da vibração relacionadas a determinados adjetivos para o regime de operação da máquina, tais como, suave, bom, grosseiro ou rude. Essas duas formas de estabelecer o limite entre um comportamento dinâmico "bom" ou "ruim" vêm, então, refletir na análise de projeto no momento de "acertar" a configuração da fundação.

Como o comportamento dinâmico do sistema é dependente da frequência natural ω_n e do coeficiente de amortecimento ξ , estas grandezas também estão sujeitas à

análise de projeto, e o comportamento em razão da configuração pode ser também estabelecido. Além disso, essas grandezas estão firmemente amarradas com os parâmetros rigidez k , inércia M , e amortecimento c .

Outro ponto importante a ser determinado no projeto diz respeito ao comportamento dos movimentos nas várias direções frente as variações na rotação de operação da máquina. Uma curva representativa deste comportamento nos revela a ocorrência ou não de ressonância no sistema, e ainda a que "distância" a rotação da máquina analisada esta daquela rotação crítica do sistema. Não recomenda-se um projeto em que a rotação de operação da máquina seja coincidente ou muito próxima de uma rotação crítica do sistema. É certo que para cada grau de liberdade independente esta rotação crítica fica determinada analiticamente, e para aqueles dependentes, fica estabelecida rotações críticas em número correspondente ao número de coordenadas acopladas. No entanto, para os pontos "críticos", borda e eixo, do sistema máquina fundação [ver eqs (9.10), capítulo anterior] existe a influência dos deslocamentos angulares sobre os deslocamentos translacionais, e portanto, o comportamento destes pontos está sujeito as frequências críticas dos próprios movimentos translacionais e também das frequências críticas dos movimentos angulares dos quais sofre influência.

Este capítulo completa-se apresentando os vários gráficos, objetos da análise para as várias grandezas envolvidas no projeto, e dos quais a sensibilidade dos parâmetros seja perfeitamente estabelecida. Estes gráficos dizem respeito aquela situação estudada no capítulo anterior.

10.1- O Comportamento Dinâmico do Sistema Máquina Fundação

Como já esclarecido inicialmente, o comportamento dinâmico diz respeito ao deslocamento e suas derivadas, especialmente a derivada primeira (velocidade), para os vários graus de liberdade do sistema. Então, a observação do comportamento desses parâmetros em relação a mudanças na configuração da fundação é de vital importância no projeto.

O comportamento dinâmico (deslocamento e velocidade) do sistema em função das dimensões horizontais, d_x e d_y , pode ser determinado fazendo-se várias combinações com essas dimensões. Para se definir, entretanto, a configuração da fundação é necessário ainda estabelecer-se a altura H da mesma. Porém, isso não é feito de forma arbitrária. Sugere-se que o dimensionamento da altura obedeça as seguintes recomendações [Ref. (3)]:

- A altura de uma fundação para máquina não deve ser inferior a um quinto da menor dimensão horizontal (largura, comprimento), ou um décimo da maior dimensão. Vale a que for maior;

- A altura de uma fundação para máquina não deve ser inferior à sessenta centímetros (dois "pés");

- Deve-se ter uma altura tal que seja possível ter-se no mínimo cinquenta por cento desta dimensão embutida no solo: $H/p=0,5$.

Desta forma pode-se obter gráficos representativos das amplitudes do deslocamento e da velocidade em função da configuração da fundação. As figuras (10.1) até (10.6) apresentadas ao final deste capítulo, revelam o comportamento dinâmico daquela fundação estudada inicialmente pelos autores da referência (3). Porém, os "programas" desenvolvidos para obter tais gráficos incluem certas restrições que estão destacadas naquelas figuras, as quais são: $H > 1,2$ (m) e $H-p=0,6$ (m). Essas restrições foram adotadas para não "fugir" muito daquele primeiro projeto sugerido no início do capítulo anterior, ou melhor, estabeleceu-se a partir daquele projeto que a diferença entre a altura da fundação H e a profundidade de embutimento p deveria ser de sessenta centímetros [$H-p=0,6$ (m)]. Com isso, considerando-se aquelas recomendações apontadas na determinação da altura da fundação, deve-se ter alturas sempre superiores a um metro e vinte centímetros, garantindo-se desta forma que cinquenta por cento desta dimensão esteja embutida. Ainda, fazendo-se uso dessas restrições é possível incluir dentro da análise destes gráficos aquela configuração apontada no final do capítulo anterior como sendo mais propícia para aquela máquina. Primeiro por que a resposta se afasta muito pouco daquela obtida para a configuração inicial, e ainda, pelo fato de ser mais "econômica".

A análise das figuras obtidas por estes "programas" [figuras (10.1) até (10.6)], nos leva a algumas conclusões. A figura (10.1) diz respeito a amplitude do deslocamento vertical na borda da fundação (Z). Observando-se esta figura podemos afirmar que a amplitude do deslocamento na borda possui praticamente uma variação constante quando tem-se valores fixos para a dimensão \underline{d}_y . Assim, a família de curvas do deslocamento na borda em função da dimensão \underline{d}_x para valores fixos de \underline{d}_y são retas paralelas que se "aproximam" a medida que \underline{d}_y cresce. Essa aproximação das curvas para valores de \underline{d}_y cada vez maiores, indica existir um limite prático além do qual o aumento neste valor vêm apenas onerar a fundação sem trazer melhoria alguma no seu comportamento. Já, para a família de curvas obtidas tornando-se a dimensão \underline{d}_x constante, a variação da amplitude do deslocamento com a dimensão \underline{d}_y não é constante. A "inclinação" destas curvas diminuem a medida que se aumenta \underline{d}_y , indicando ao projetista que a partir de determinados valores desta dimensão \underline{d}_y , crescer ainda mais esta dimensão não acarretará diminuição significativa na amplitude do deslocamento da borda da fundação. Essas mesmas conclusões são obtidas analisando-se as figuras (10.2) e (10.3), que dizem respeito as amplitudes no eixo da máquina (X,Y).

A borda é, como se observa pelos gráficos, a que apresenta valores mais altos para a amplitude do deslocamento em função da configuração da fundação [fig. (10.1)], seguida pelo movimento Y no eixo da máquina. A borda apresenta amplitudes para o deslocamento da ordem de centésimos de milímetro, e o eixo apresenta tanto valores da ordem de centésimos quanto valores da ordem de milésimos de milímetros. A explicação para o fato da amplitude do deslocamento Z na borda se destacar em "magnitude", seguida da amplitude do deslocamento Y, é o fato de ambas receberem influencia do deslocamento angular ϕ_x . Esta influência fica clara para o deslocamento vertical da borda quando se observa as figuras (10.7), (10.8). Estas figuras separam a influência do movimento do centro de gravidade do movimento induzido pelo deslocamento angular ϕ_x na borda, que adicionados com o movimento devido ao deslocamento angular ϕ_y , compõe o deslocamento total da borda Z. A figura (10.7) deixa muito claro que o deslocamento angular ϕ_x é responsável pela maior parcela do movimento naquele ponto para as várias configurações adotadas. O mesmo pode ser dito para a amplitude do deslocamento Y do eixo. A figura (10.8), que diz respeito ao movimento vertical do centro de gravidade do sistema apresenta

um fato importante. Para uma certa região daquele universo de configurações, o aumento nas dimensões \underline{d}_x e \underline{d}_y não causa variação representativa no movimento vertical do centro de gravidade, ficando a superfície nesta região paralela ao plano formado pelos eixos horizontais.

As figuras (10.4) até (10.6) dizem respeito as velocidades. As superfícies obtidas para essas grandezas não possuem aspecto diferente daquelas obtidas para as amplitudes dos deslocamentos. Com isso, as conclusões relativas as velocidades são semelhantes as conclusões para as amplitudes dos deslocamentos. A variação da velocidade com a dimensão \underline{d}_x é praticamente constante para valores de \underline{d}_y constante. Invertendo-se a situação anterior, para valores fixos de \underline{d}_x a curva da velocidade apresenta uma diminuição na sua inclinação com o aumento de \underline{d}_y . A família de curvas com \underline{d}_y constante possui característica linear, e a distância entre elas é cada vez menor para valores maiores de \underline{d}_y . A família de curvas com \underline{d}_x constante não possui característica linear, e a aproximação entre elas é bem menos perceptível. Porém, é perceptível a tendência que essas curvas tem de "estabilizarem" a sua inclinação à medida que aumenta-se \underline{d}_y .

Essas figuras das velocidades mostram que os módulos das velocidades na borda são maiores do que os módulos das velocidades obtidas no eixo da máquina para as várias configurações consideradas, sendo que, o eixo apresentou menores módulos para as velocidades na direção horizontal paralela ao eixo x .

A borda, é então, o ponto que apresenta um comportamento dinâmico mais crítico, por apresentar tanto deslocamentos mais altos quanto velocidades mais altas para as várias configurações consideradas para a fundação.

As figuras (10.9) até (10.13) apresentam as freqüências naturais para os vários graus de liberdade para as várias configurações consideradas. Como existem coordenadas acopladas, as freqüências naturais obtidas em virtude deste acoplamento foram designadas de freqüência natural inferior e superior apenas por questão de distinção daquelas figuras.

A figura (10.9) apresenta as frequências naturais para o movimento vertical da fundação. A superfície obtida é aproximadamente uma superfície plana, visto que a curvatura desta superfície é muito pequena. Desta forma, a família de curvas fazendo-se \underline{d}_x e \underline{d}_y constantes vão ser aproximadamente lineares. Mas, o ponto que realmente deve ser destacado na análise desta figura é que a frequência natural na direção vertical torna-se menor quando faz-se crescer \underline{d}_x , \underline{d}_y , ou ambos. Este comportamento é levado em conta na hora de decidir qual configuração a ser adotada, pois juntamente com o coeficiente de amortecimento, a frequência natural vai estabelecer a rotação crítica do sistema, ou as rotações críticas do sistema, quando se tratar de vários graus de liberdade. A rotação de operação da máquina não deve coincidir com nenhuma dessas velocidades de ressonância, e por uma questão de segurança deve ser mantida a distâncias razoáveis destas velocidades angulares críticas. Para uma máquina alternativa, onde temos "dois harmônicos principais" de excitação esta questão é ainda mais acentuada.

As figuras (10.10) e (10.11) dizem respeito as frequências naturais para os graus \underline{x} e ϕ_y , que são acoplados. Da mesma forma que para a frequência natural vertical, as superfícies das frequências naturais obtidas são aproximadamente planas. Com isso, temos que as famílias das curvas para \underline{d}_x e \underline{d}_y são constituídas por "retas", ou linhas com inclinação aproximadamente constantes. Observando-se estas inclinações naquelas figuras, pode-se afirmar que a frequência natural inferior é mais sensível a uma variação na dimensão \underline{d}_y da fundação do que para uma variação de mesmo "tamanho" na dimensão \underline{d}_x . A frequência natural superior é afetada de forma contrária ao que foi dito para a frequência inferior, porém, esta sensibilidade das curvas para esta frequência superior é menor do que para a outra, pois as inclinações para as famílias das curvas para uma das dimensões constantes é quase a mesma, sendo que as curvas obtidas para \underline{d}_y constantes são um pouco mais inclinadas. Já para a frequência inferior, a família de curvas para \underline{d}_y constante são menos inclinadas do que a família das curvas para \underline{d}_x constantes.

As figuras (10.12) e (10.13) dizem respeito as coordenadas dependentes y e ϕ_x . As superfícies das frequências naturais inferior e superior também podem ser consideradas como planas. A família de curvas para \underline{d}_x constantes apresentam uma inclinação mais acentuada para a frequência natural inferior da mesma forma que para a frequência natural superior. Quanto a frequência natural superior é perceptível a pouca

influência da dimensão d_x nesse parâmetro em vista da inclinação mínima das curvas da família " d_y - constante".

Todas as figuras [(10.9) a (10.13)] analisadas mostraram que aumentar o tamanho da fundação acarreta diminuição nos valores das freqüências naturais. Essa diminuição é sentida de forma diferente por cada uma das freqüências do sistema dependendo da opção adotada nesse "aumento" da fundação, ou melhor, uma variação na largura vai afetar mais uma das freqüências naturais do que as outras, entretanto, uma variação no comprimento afetará outra com mais intensidade. Pode ocorrer, entretanto, que a mesma freqüência natural seja afetada mais do que as outras tanto alterando-se a largura quanto o comprimento da fundação.

O comportamento do coeficiente de amortecimento para os vários graus de liberdade da fundação é apresentado nas figuras (10.14) a (10.18). A figura (10.14) diz respeito ao coeficiente de amortecimento vertical. Note-se por aquela figura que a superfície tem uma maior inclinação com relação ao eixo da dimensão d_y do que com o eixo de d_x , mostrando assim, a maior sensibilidade deste parâmetro com a variação da dimensão d_y . A família das curvas obtidas fixando-se d_y são bem lineares e apresentam uma pequena inclinação com relação ao eixo de d_x . Já a família das curvas obtidas para d_x constante apresentam uma leve curvatura. O crescimento do coeficiente de amortecimento vertical com o aumento na configuração é evidenciado naquela figura. As figuras seguintes dizem respeito as coordenadas acopladas. As figuras (10.15) e (10.17) revelam a pouca sensibilidade do coeficiente de amortecimento inferior a uma variação na dimensão d_x . Na figura (10.17), que diz respeito ao coeficiente de amortecimento inferior relativo as coordenadas y e ϕ_x , este fato é bem mais marcante, mostrando que variar d_x praticamente não altera o coeficiente de amortecimento. As figuras (10.16) e (10.18) revelam que o coeficiente de amortecimento superior é um pouco mais afetado por uma variação na dimensão d_y do que por uma variação na dimensão d_x . A família de curvas com d_y constante são bem lineares, e a família de curvas para d_x constante apresentam uma leve curvatura. O que vale destacar para os coeficientes de amortecimento inferior e superior obtidos para ambas as situações acopladas, é que, o coeficiente de amortecimento inferior decresce com o aumento na configuração da fundação, e o coeficiente de amortecimento superior cresce com o crescimento da fundação.

As figuras (10.19) a (10.23) dizem respeito ao comportamento das várias frequências naturais amortecidas do sistema para as configurações consideradas. A figura (10.19) mostra que não existe frequência amortecida na vertical para certas configurações da fundação. Este fato é devido ao coeficiente de amortecimento vertical ter se igualado ou superado a unidade para estas configurações, ou seja, essas configurações resultam em amortecimento crítico ou super-amortecimento. As figuras (10.20) e (10.22) que dizem respeito às frequências amortecidas inferior para as coordenadas acopladas, mostra que a superfície da frequência amortecida apresenta uma curvatura muito pequena. Ainda, temos nestas figuras, que essas superfícies são bem mais inclinadas com relação ao eixo da dimensão \underline{d}_y , porém, a inclinação com relação ao eixo de \underline{d}_x não é desprezível. As figuras (10.21) e (10.23) apresentam a frequência natural superior para as coordenadas acopladas em cada configuração considerada. A superfície obtida para a frequência amortecida superior no acoplamento entre as coordenadas y e ϕ_x , é uma superfície bem plana, porém, com uma inclinação acentuada em relação ao eixo de \underline{d}_y , e uma inclinação bem menor em relação ao outro eixo horizontal. As famílias de curvas são de retas paralelas, porém, uma família com inclinação maior e a outra com uma inclinação bem menor. A figura da frequência amortecida superior para as coordenadas x e ϕ_y , é uma superfície com uma certa curvatura. Entretanto, esta curvatura aparece na família de curvas para \underline{d}_x constante, e não na família de curvas para \underline{d}_y constante, sendo esta família então composta de retas paralelas.

Mas, o que vale ressaltar quanto ao comportamento das várias frequências naturais amortecidas é o fato delas decrescerem com o aumento das dimensões da fundação. Esse comportamento é reflexo do comportamento das frequências naturais e coeficientes de amortecimento. Ambos decrescem com o aumento das dimensões da fundação, e como a frequência natural amortecida depende destes dois parâmetros, seu comportamento está associado ao comportamento dessas grandezas. Essa redução da frequência natural amortecida com o aumento na configuração da fundação pode, assim como ressaltado para o caso da frequência natural, aproximar os seus valores da frequência de excitação da máquina. Contudo, isso não condena um projeto de fundação. A frequência de ressonância ocorre sempre acima das frequências naturais, contrariamente ao que ocorre com as frequências naturais amortecidas. As frequências naturais para os vários graus de liberdade nas várias configurações consideradas nesse trabalho de dissertação, com relação aquele projeto analisado no capítulo anterior, estão acima de 100 rad/s. Esta frequência está

acima da freqüência de excitação da máquina que é de 61,26 rad/s. Porém, está abaixo da freqüência correspondente ao segundo harmônico, e que corresponde ao dobro da freqüência de operação da máquina, ou seja, 122,52 rad/s. Mas, isso só vai constituir algum problema, para valores baixos do coeficiente de amortecimento que não "afastam" muito a freqüência de ressonância da freqüência natural. É, bom lembrar, que só ocorre ressonância para valores do coeficiente de amortecimento inferiores a 0,7.

As figuras (10.24), (10.28), e (10.31), revelam o comportamento da fundação com relação a velocidade angular da máquina, nos seus pontos notáveis. A figura (10.24) apresenta a amplitude do deslocamento vertical Z na borda. A velocidade da máquina suportada pela fundação é de 61,26 rad/s (585 rpm), e como se observa naquela figura, corresponde a um par ordenado, freqüência-amplitude do deslocamento, situado numa parte da curva com com uma inclinação mais suave. Isto é bom para o sistema, visto que, como todo projeto que depende de estudos de campo e de laboratório está sujeito a algum erro nos seus resultados, a sua credibilidade está associada a variação dos seus resultados. Porém, quando o resultado está situado numa região que tem um bom comportamento, a confiabilidade depositada neste projeto é maior. Para ilustrar, observe o comportamento nesta mesma figura da amplitude para velocidades angulares maiores que 180 rad/s e até 300 rad/s. A variação da amplitude do deslocamento nesta faixa é muito brusca, e assim, a confiabilidade no valor da amplitude para essas velocidades angulares é bem menor.

As figura (10.25), (10.26), e (10.27), separam as várias parcelas que compõem o deslocamento na borda. A figura (10.25) apresenta o comportamento do movimento vertical do centro de gravidade do sistema máquina-fundação. A figura (10.26) e (10.27), mostram como os deslocamentos angulares, ϕ_y e ϕ_x , influenciam o movimento na borda da fundação. É, evidente, por estas figuras, que aquele pico que ocorre na figura (10.24), em torno de 300 rad/s, é devido ao deslocamento angular ϕ_x . O pico que ocorre na figura (10.26) não aparece na figura (10.24), pois, a influência de ϕ_y concorre com a do movimento próprio do centro de gravidade do sistema, ficando assim, mascarada quando adicionamos às várias contribuições. Mais uma vez fica evidente que o movimento vertical na borda é principalmente devido ao deslocamento angular ϕ_x .

A figura (10.28) apresenta o comportamento da amplitude do deslocamento X no eixo da máquina para várias velocidades angulares, e revela que o eixo está sujeito a uma amplitude máxima da ordem de 0,022 [mm] na direção paralela ao eixo \underline{x} , para uma velocidade angular de aproximadamente 220 rad/s. Esta situação corresponde aquela denominada de ressonância. As figuras seguintes, apresentam o comportamento do centro de gravidade na direção \underline{x} [fig. (10.29)], e a influência do deslocamento angular ϕ_y na resposta do eixo [fig. (10.30)]. Não ocorre que uma seja mais influente na resposta total do que a outra, havendo assim um equilíbrio participativo de ambos os deslocamentos no movimento do eixo na direção \underline{x} .

O comportamento do deslocamento de um ponto no eixo da máquina na direção y em função da velocidade angular está presente na figura (10.31), onde percebe-se claramente a ocorrência de um pico para uma velocidade angular de 300 rad/s. Quando separa-se a influência do centro de gravidade daquela devido ao deslocamento angular ϕ_x , verifica-se que ambas as curvas obtidas [figs. (10.32), (10.33)] apresentam picos próximos aquela frequência crítica de 300 rad/s. Mas, é nítido também, que a influência maior da resposta do eixo na direção y é devido ao deslocamento angular.

Até este ponto, foi analisado o comportamento dos deslocamentos, velocidades, frequências naturais, frequências naturais amortecidas, e coeficientes de amortecimento, quando varia-se as dimensões horizontais da fundação, \underline{d}_x e \underline{d}_y , ficando a altura \underline{H} dependente destas, e a profundidade de embutimento p amarrada a esta altura. A sensibilidade da resposta de uma fundação em razão de uma alteração na altura deve ser verificada também. Para tanto, neste trabalho, construiu-se as figuras (10.34) a (10.49).

Os deslocamentos na borda (Z), e no eixo (X, Y), em função da altura \underline{H} da fundação estão presentes nas figuras (10.34), (10.35) e (10.36). Veja, que essa fundação possui como dimensões horizontais $d_x = 8,4[m]$, e $d_y = 4,8[m]$. A figura (10.34) apresenta o comportamento na borda da fundação. O deslocamento Z na borda da fundação decresce quase que linearmente com o aumento na altura da fundação. As figuras (10.35), e (10.36) apresentam as amplitudes dos deslocamentos obtidas no eixo da máquina nas duas direções \underline{x} e \underline{y} . Observa-se lá, que crescer a altura numa determinada faixa acarreta crescimento nas amplitudes dos deslocamentos, em outra faixa crescer a altura acarreta decréscimo nas

amplitudes dos deslocamentos. Mas, é proibitivo valores muito altos para a altura de uma fundação, por alguns motivos. Pode-se citar primeiramente o custo, que se eleva com o crescimento da altura, e outro motivo mais técnico, é o relativo a tensão admissível do solo. Crescer a altura da fundação significa submeter o solo que suporta a fundação a uma maior pressão por unidade de área.

As figuras seguintes (10.37) a (10.41) mostram que a freqüência natural decresce em todos os casos com o aumento da altura da fundação. Isto pode justificar o aumento nas amplitudes dos deslocamentos no eixo da máquina. A freqüência natural se aproxima da velocidade de operação da máquina.

O comportamento dos coeficientes de amortecimento com relação a variações na altura da fundação está presente nas figuras (10.42) a (10.46). Apenas o coeficiente de amortecimento vertical decresce com o aumento na altura da fundação, apresentando uma tendência a estabilizar seu valor em torno de 0,946 para valores de $H > 3,5[m]$. Quanto aos outros coeficientes de amortecimento determinados o seu comportamento é aproximadamente diretamente proporcional ao aumento na fundação, cada caso no entanto, de uma forma diferente.

As velocidades nos pontos notáveis, borda e eixo, em função da alteração da altura da fundação, é mostrada nas figuras (10.47), (10.48) e (10.49). A velocidade na borda (V_Z), decresce com o aumento da altura [fig. (10.47)]. As velocidades nas direções x e y no eixo da máquina [figs. (10.48), (10.49)], possuem um comportamento numa faixa e outro em outra. Numa faixa aumentar a altura ocasiona diminuição na velocidade, porém, em outra aumentar a altura da fundação significa aumentar também a velocidade.

Todas as figuras desse capítulo foram analisadas. Cabe agora, ressaltar os pontos mais importantes extraídos destas análises.

É fato que, as amplitudes dos deslocamentos e velocidades determinadas nos pontos notáveis da fundação decrescem com o aumento das dimensões da fundação, d_x , d_y , e H [figs. (10.1) a (10.6)]. Porém, essa redução é cada vez menor a medida que se "cresce" a fundação, chegando a um ponto em que aumentar a configuração só proporciona aumento

de "peso", sem significativa diminuição dos parâmetros amplitude e velocidade. Aumentar a fundação, sem "ganho" algum em termos de "severidade", corresponde a pagar-se mais por um produto que cumpre o mesmo papel do que o outro, porém, mais barato, e bem mais "compacto".

Ainda, falando-se sobre deslocamento e velocidade, tem-se que, quando se mantêm a área da base da fundação, e altera-se a sua altura H , temos duas situações distintas. Uma, que é o que aconteceu com a amplitude na vertical e na borda, em que a amplitude sempre decresce com o aumento da altura, e o mesmo ocorre com a velocidade neste ponto [figs. (10.34) e (10.47)]. A outra situação, que ocorreu no eixo da máquina, e em ambas as direções horizontais, em que a amplitude, e também a velocidade, aumentam com o aumento da altura, porém, não indefinidamente [figs. (10.35), (10.36), (10.48), (10.49)]. A uma certa "altura", a situação começa a se modificar, isto é, aumenta-se a altura da fundação e a amplitude e velocidade começam a diminuir. Mas, infelizmente, essa faixa ocorre para altos valores para a altura, o que não é uma boa opção de projeto.

As freqüências naturais, ω_n , sempre decrescem quando aumenta-se a configuração da fundação (d_x , d_y , e H). Este fato, revela que, aumentar a configuração da fundação constitui-se de um aumento maior da inércia do sistema em relação ao aumento na rigidez do sistema [figs. (10.9) a (10.13)]. O mesmo fato relativo às freqüências naturais, acontece quando tentamos, para uma área da base fixa, alterar a altura da fundação [figs. (10.37) a (10.41)]. Neste caso também o aumento inercial é maior que o da rigidez do sistema. Entretanto, a rigidez se altera bem menos neste caso, pois seu crescimento é devido principalmente a profundidade de embutimento p , que tem uma influência menor dentro da expressão da rigidez para os vários graus de liberdade. A altura h do centro de gravidade tem influência também na rigidez do sistema, entretanto, sua influência é da mesma ordem daquela dada pelo aumento na profundidade de embutimento. Então, alterar a altura H da fundação, corresponde a aumentar a altura h do CG, e a profundidade de embutimento, e conseqüentemente a rigidez. Mas, a inércia é bem mais afetada pela alteração da altura do que a rigidez. Desta forma, a freqüência natural decresce.

O coeficiente de amortecimento vertical tende a crescer a medida que se cresce as dimensões da fundação [fig. (10.14)]. Isso mostra que a constante de

amortecimento \underline{c} cresce com o aumento na configuração, e de forma mais acentuada que a massa, como foi visto quando tratou-se do comportamento da frequência natural no parágrafo anterior. Do que foi visto até agora, conclui-se que quando aumenta-se \underline{d}_x , \underline{d}_y , e \underline{H} , conjuntamente, ocorre um aumento maior do coeficiente de amortecimento vertical \underline{c}_z do que um aumento na inércia \underline{M} , ou da rigidez na vertical \underline{k}_z , tornando assim, o coeficiente de amortecimento maior.

Com relação as coordenadas acopladas, os coeficientes de amortecimento inferior e superior, possuem comportamento contrários, isto é, o coeficiente de amortecimento inferior decresce com o aumento na configuração da fundação, e o coeficiente de amortecimento superior cresce com o aumento da configuração [figs. (10.15) a (10.18)]. Como tanto a inércia quanto a rigidez crescem com o aumento da fundação, bastando para entender isso recordar o comportamento das frequências naturais, este comportamento dos coeficientes de amortecimento acoplados está relacionado ao coeficientes de amortecimento das coordenadas acopladas.

Mantendo-se fixa a área da base da fundação, o coeficiente de amortecimento vertical decresce quando aumenta-se a altura da fundação [fig. (10.42)]. Isto é inverso do que ocorreu quando alterou-se a área da base e também a altura, como foi comentado anterior. Logo, podemos afirmar que neste caso houve um aumento da inércia, do amortecimento, e da rigidez, porém, o aumento da inércia se sobressaiu aos outros dois parâmetros da vertical, tornando o coeficiente de amortecimento menor para valores maiores da altura.

Os coeficientes de amortecimento inferior e superior para as coordenadas acopladas sempre aumentaram com o aumento da altura \underline{H} [figs (10.43) a (10.46)], para uma mesma área da base. Este fato revela que o amortecimento cresce com o aumento da altura bem mais do que a inércia, ou a rigidez.

Os programas utilizados neste trabalho de dissertação são muitos. Todos foram desenvolvidos no software MatLab. Os apêndices (3) e (4) apresentam dois destes programas.

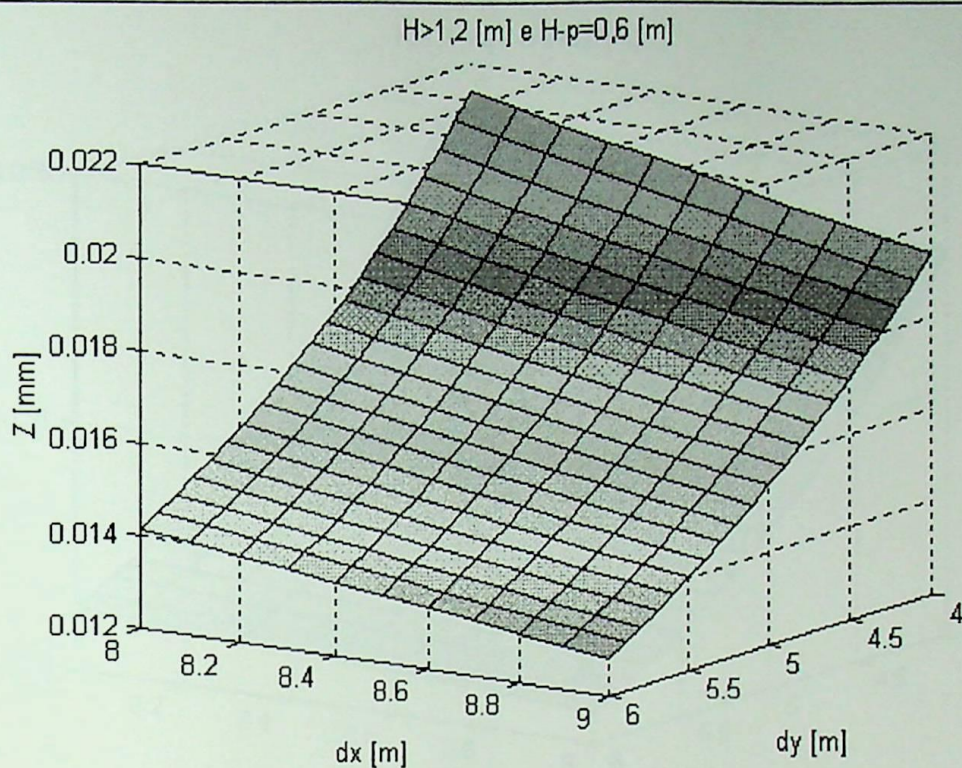


Figura 10.1: Resposta vertical em função da configuração da fundação.

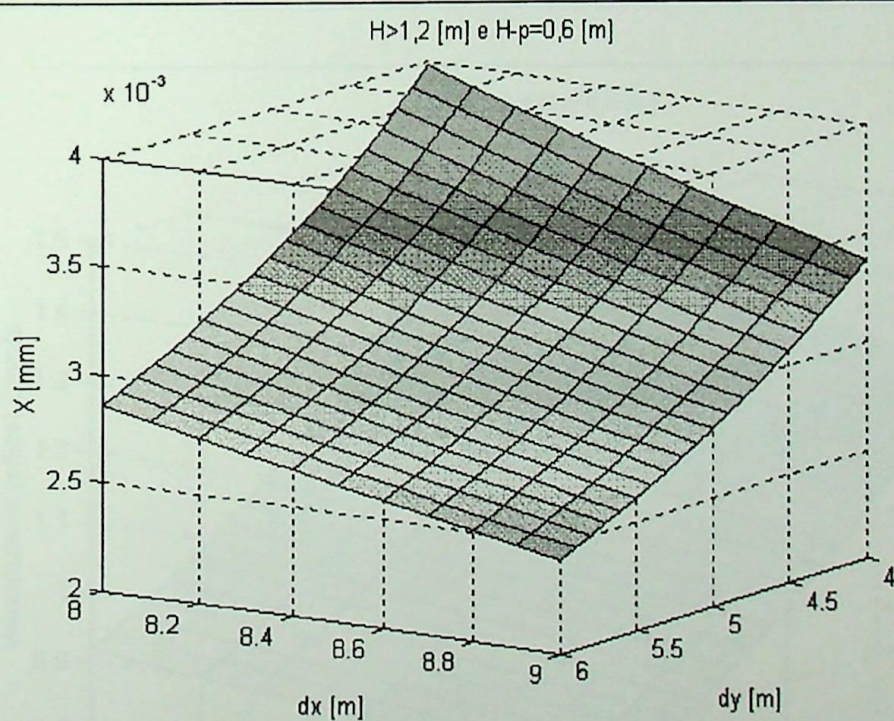
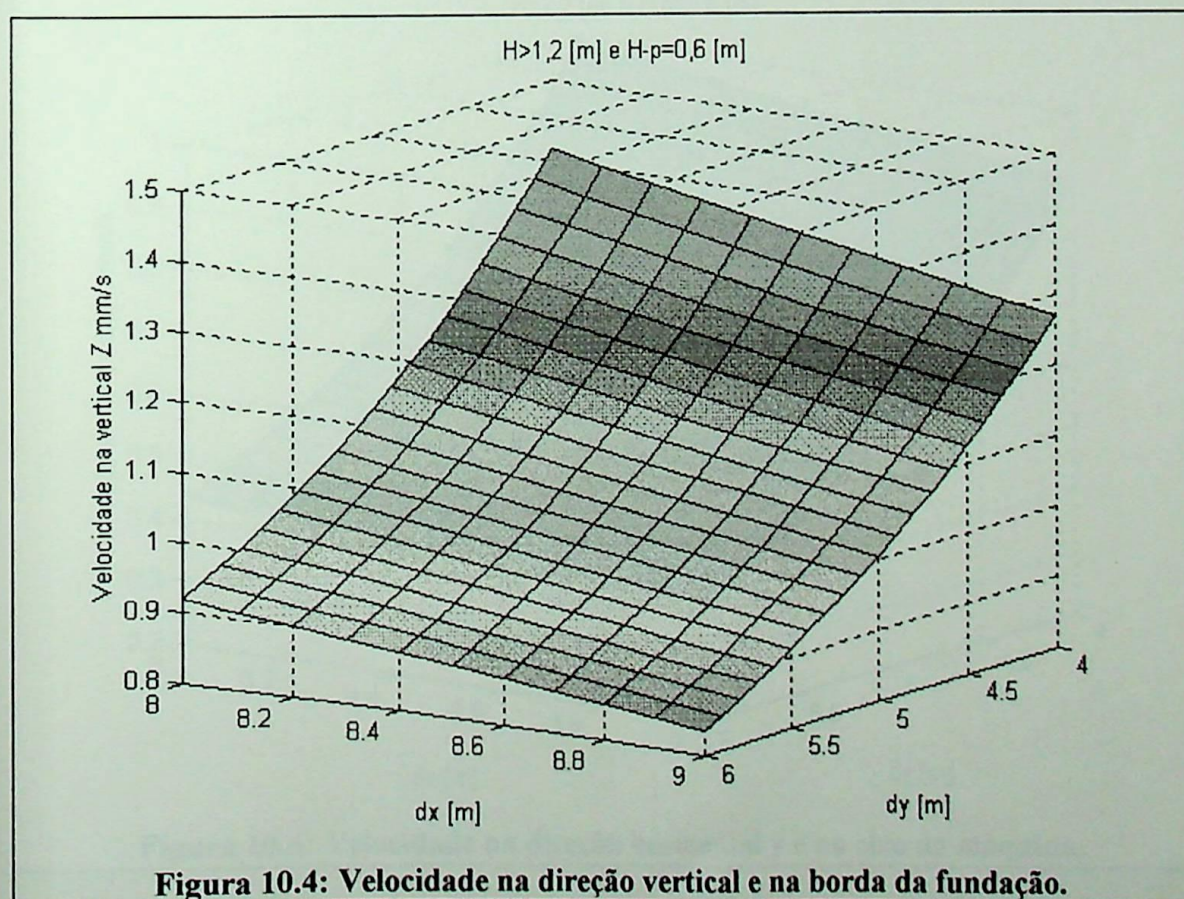
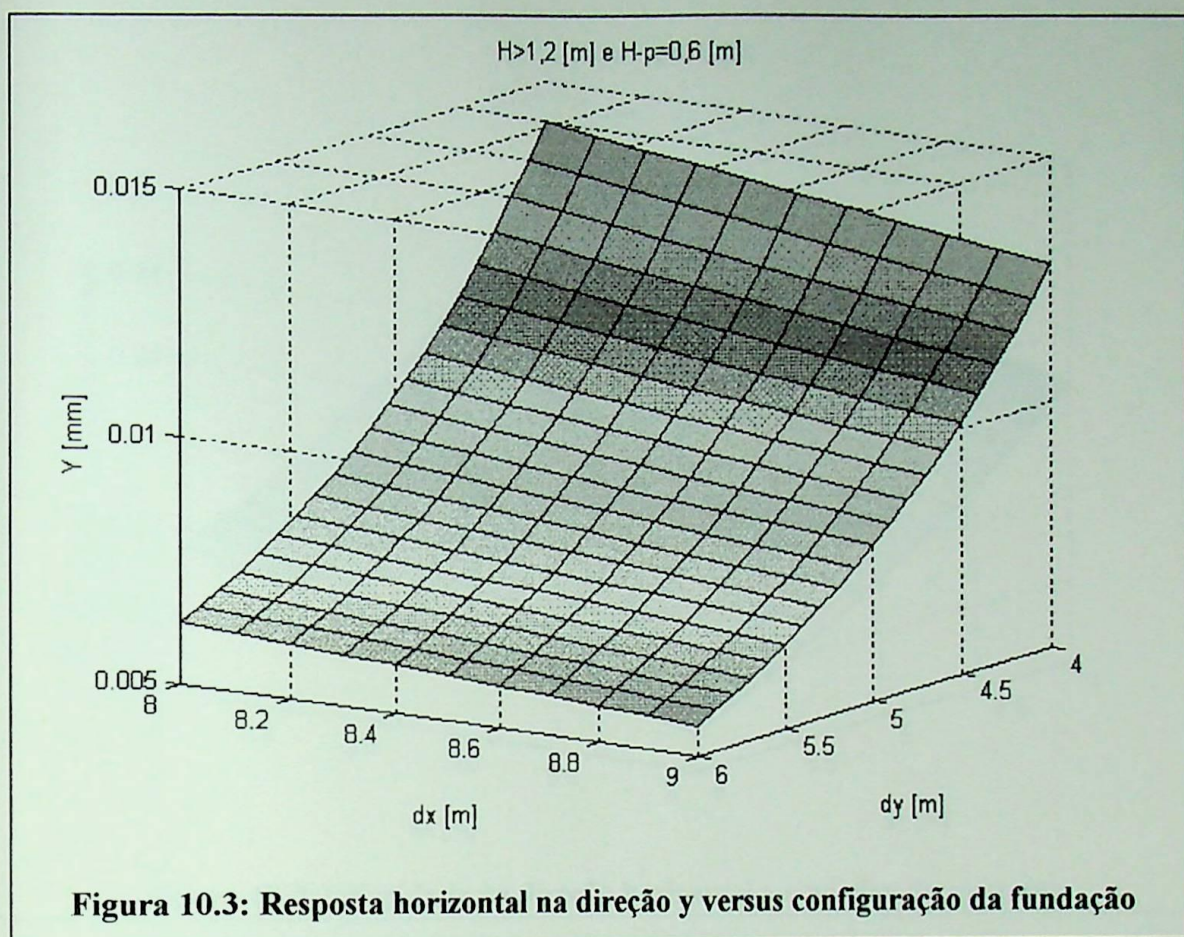
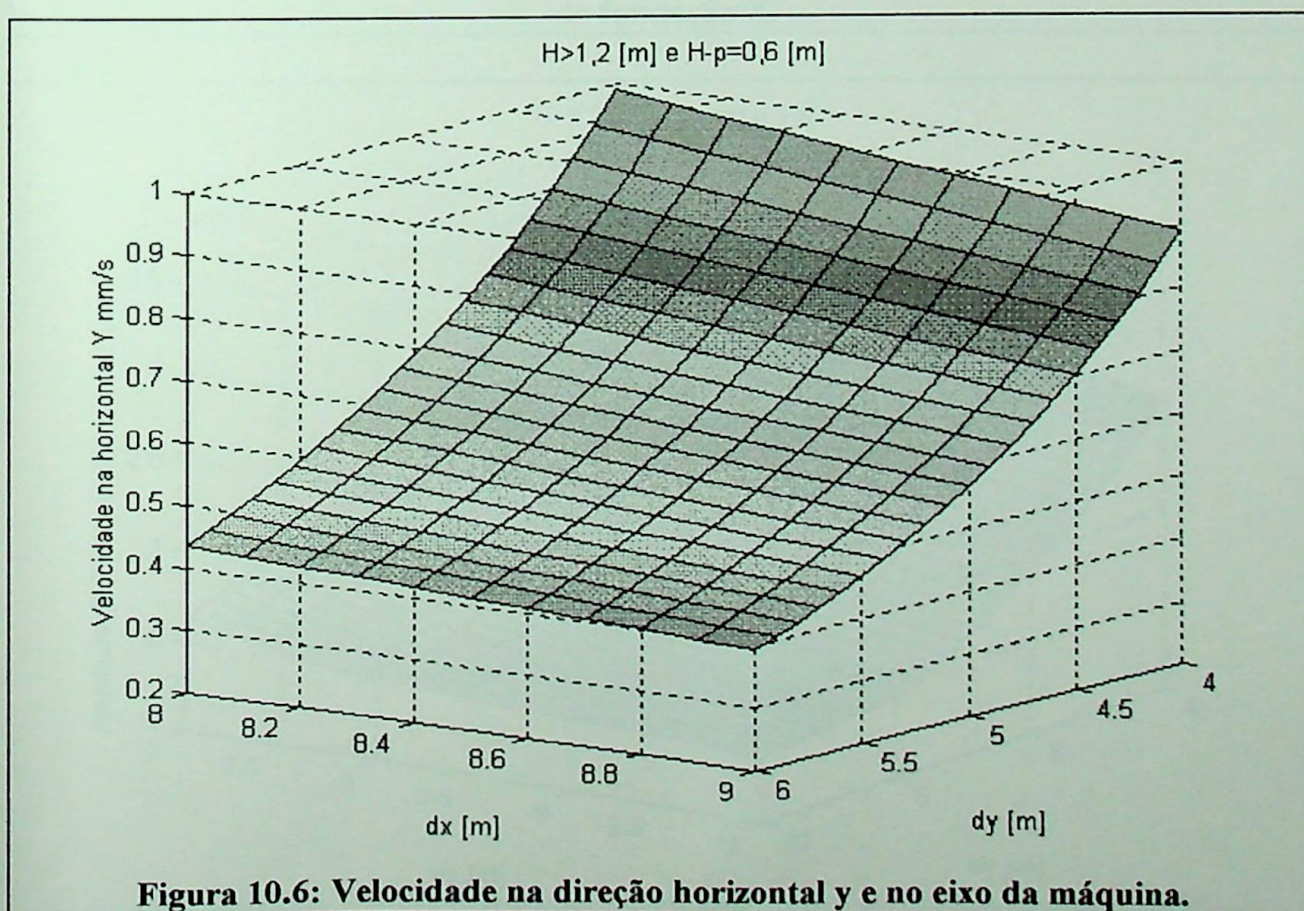
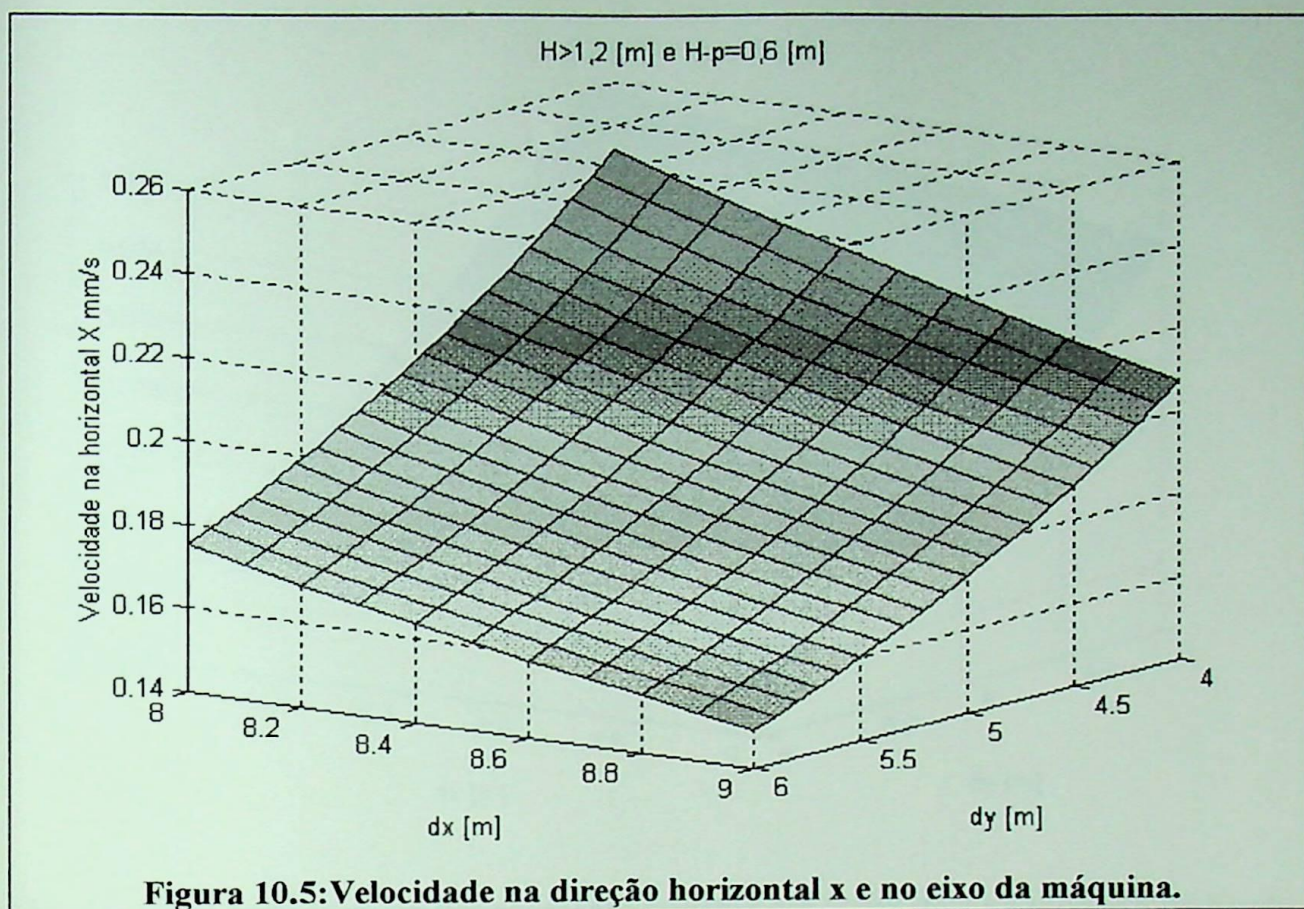
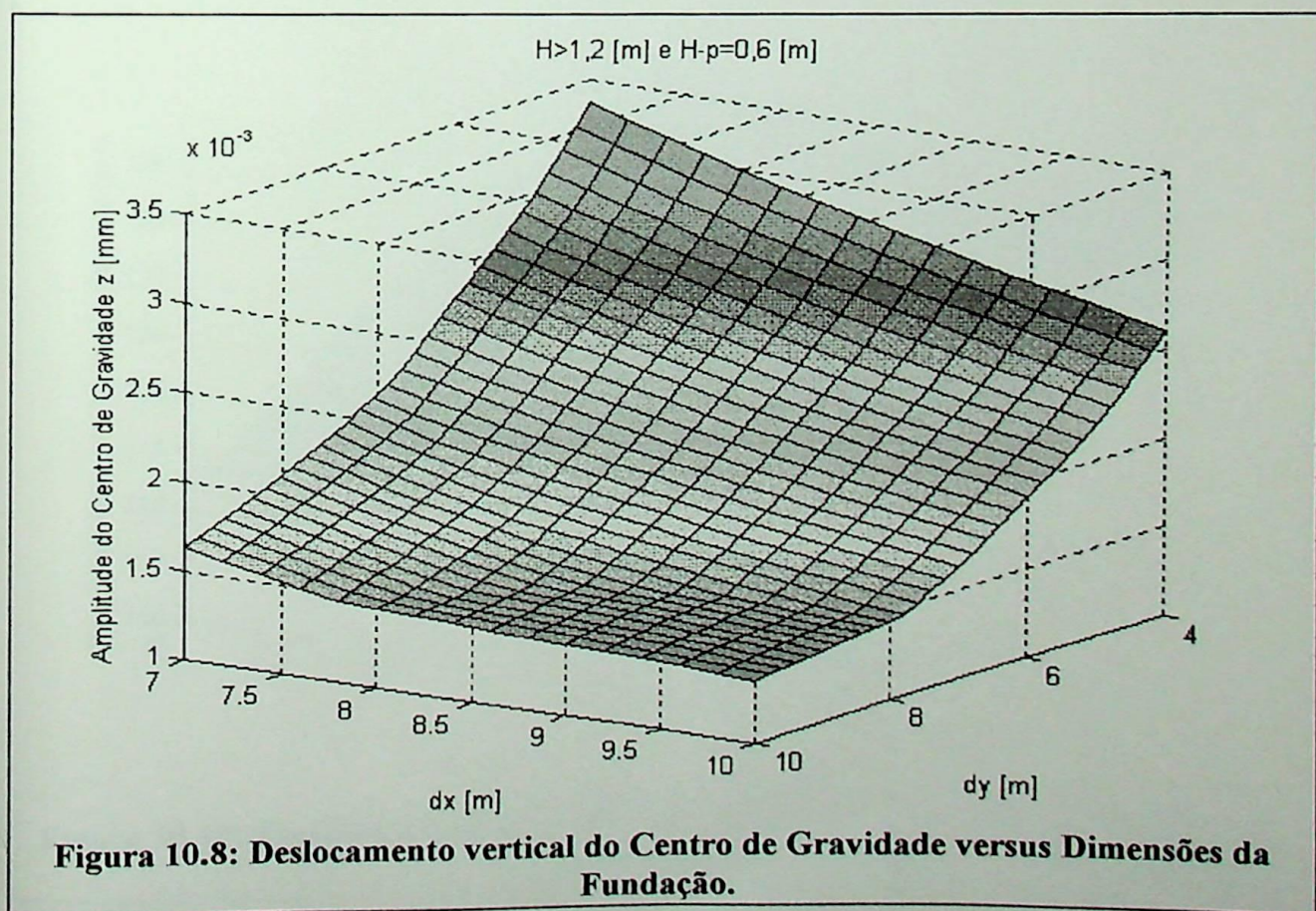
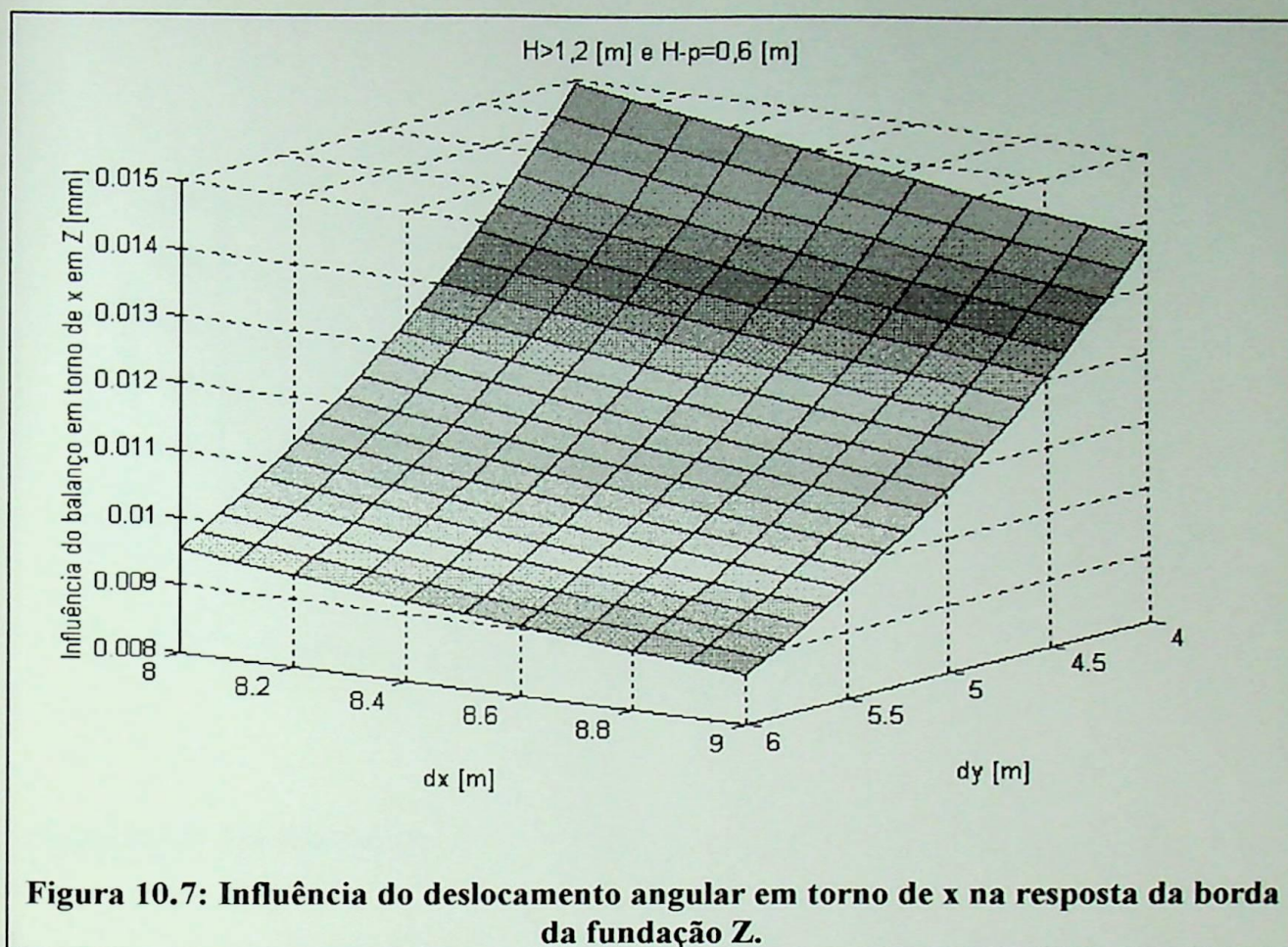


Figura 10.2: Resposta horizontal na direção x versus configuração da fundação.







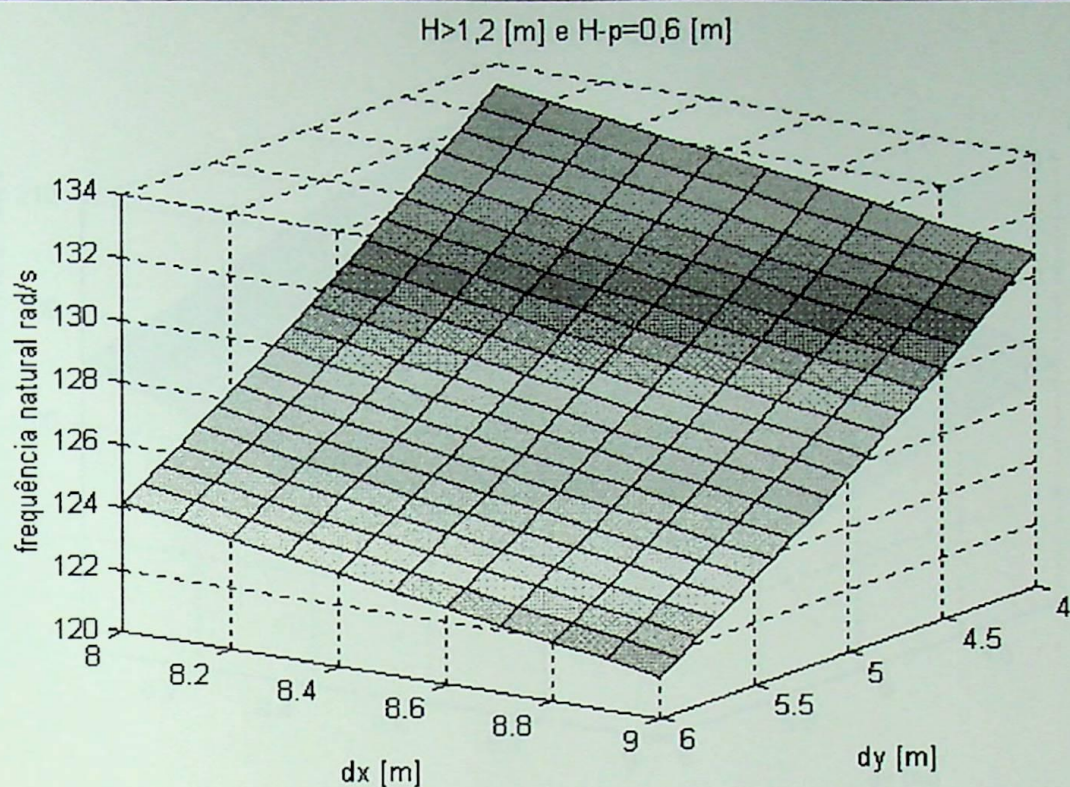


Figura 10.9: Frequência natural na direção vertical versus configuração da fundação

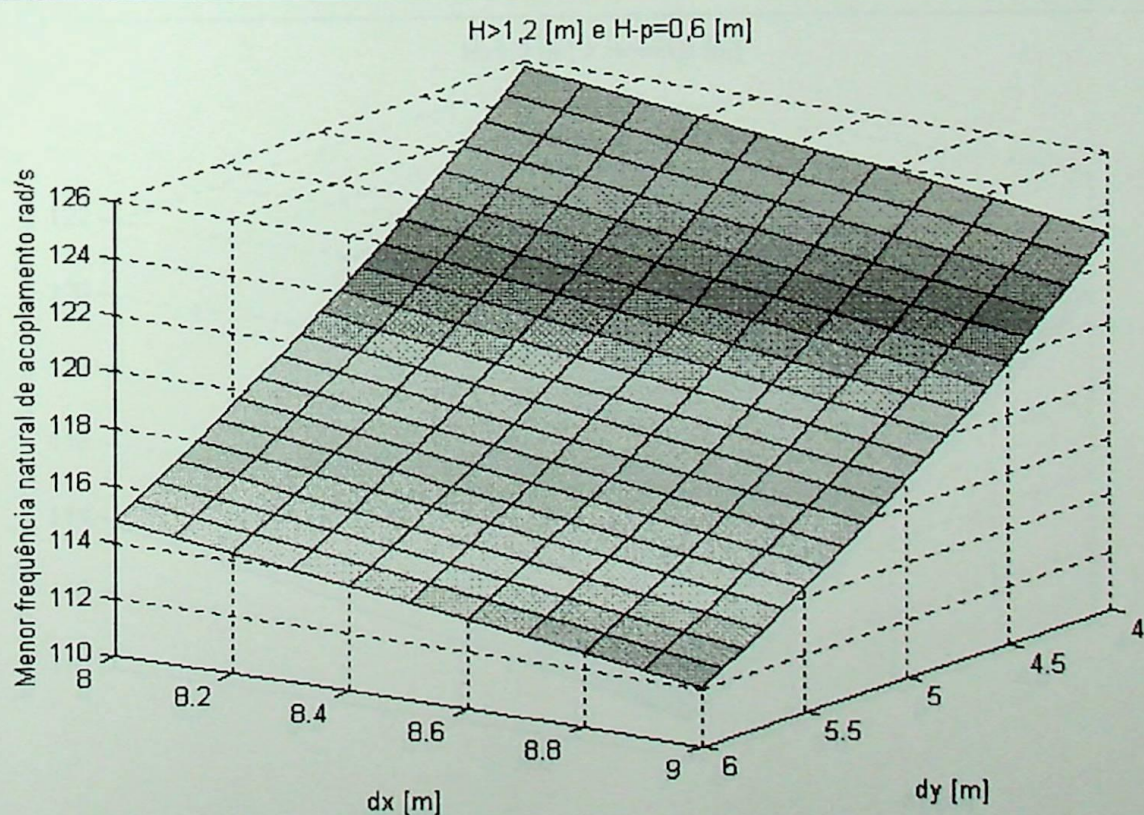
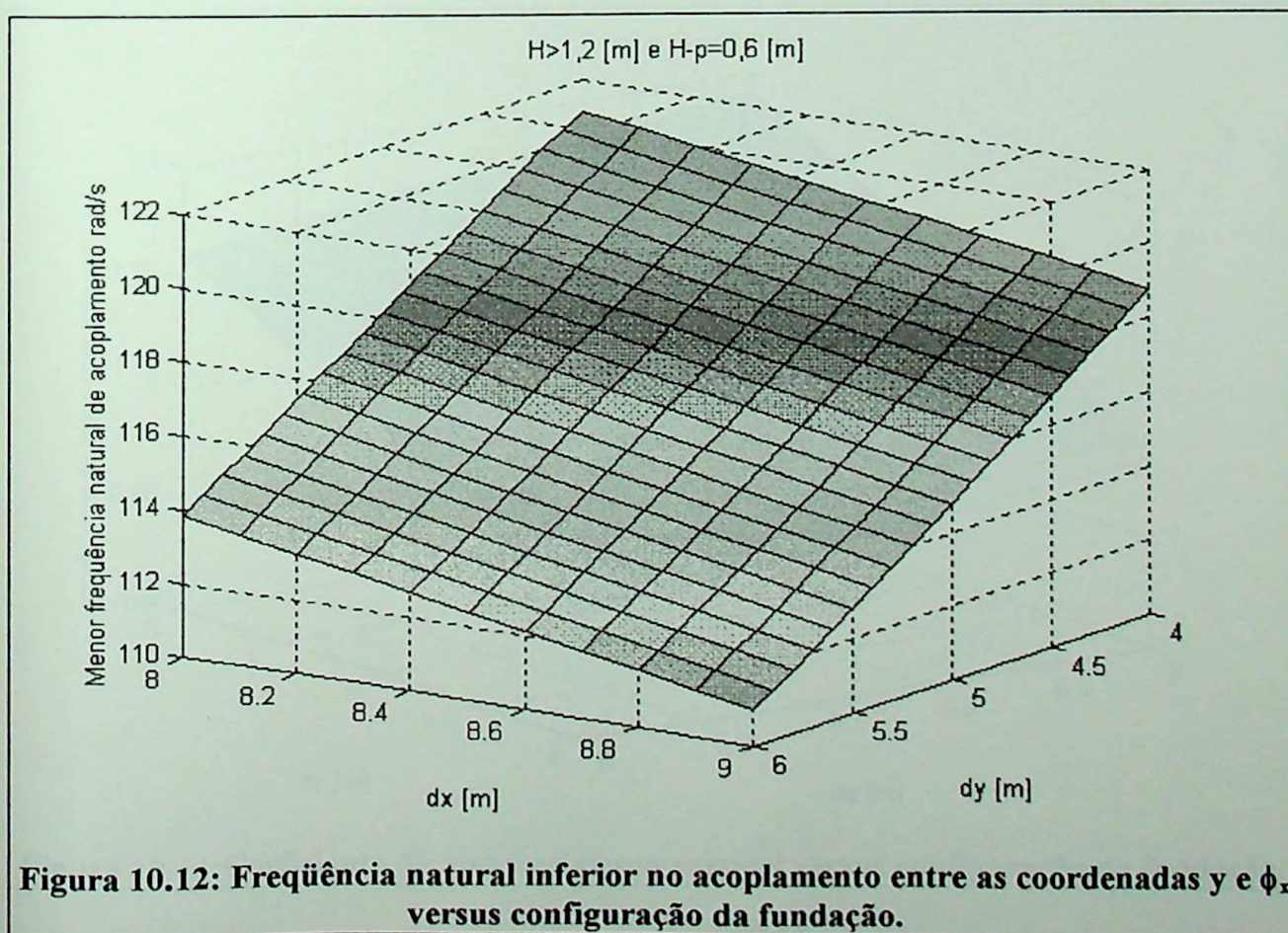
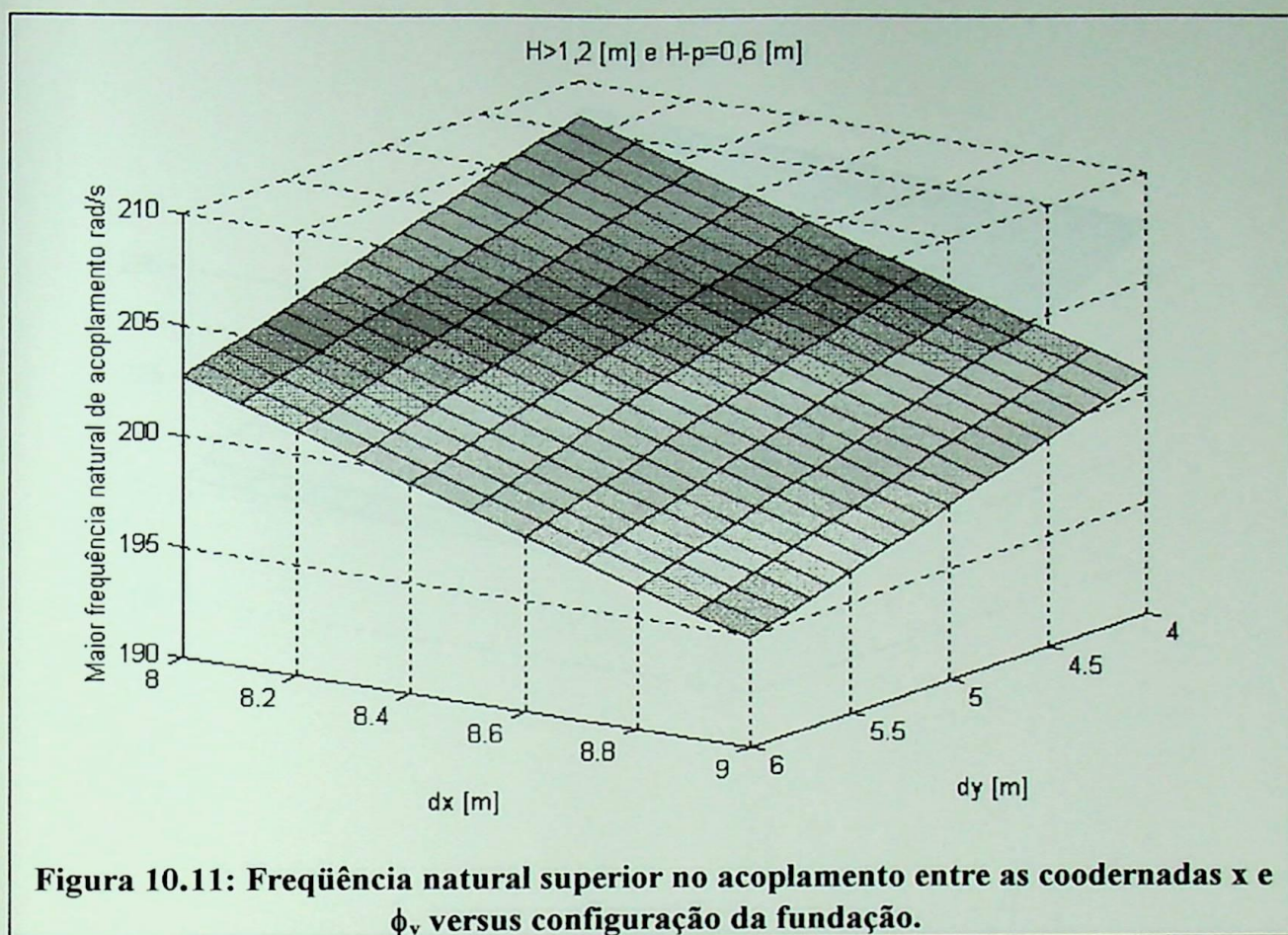
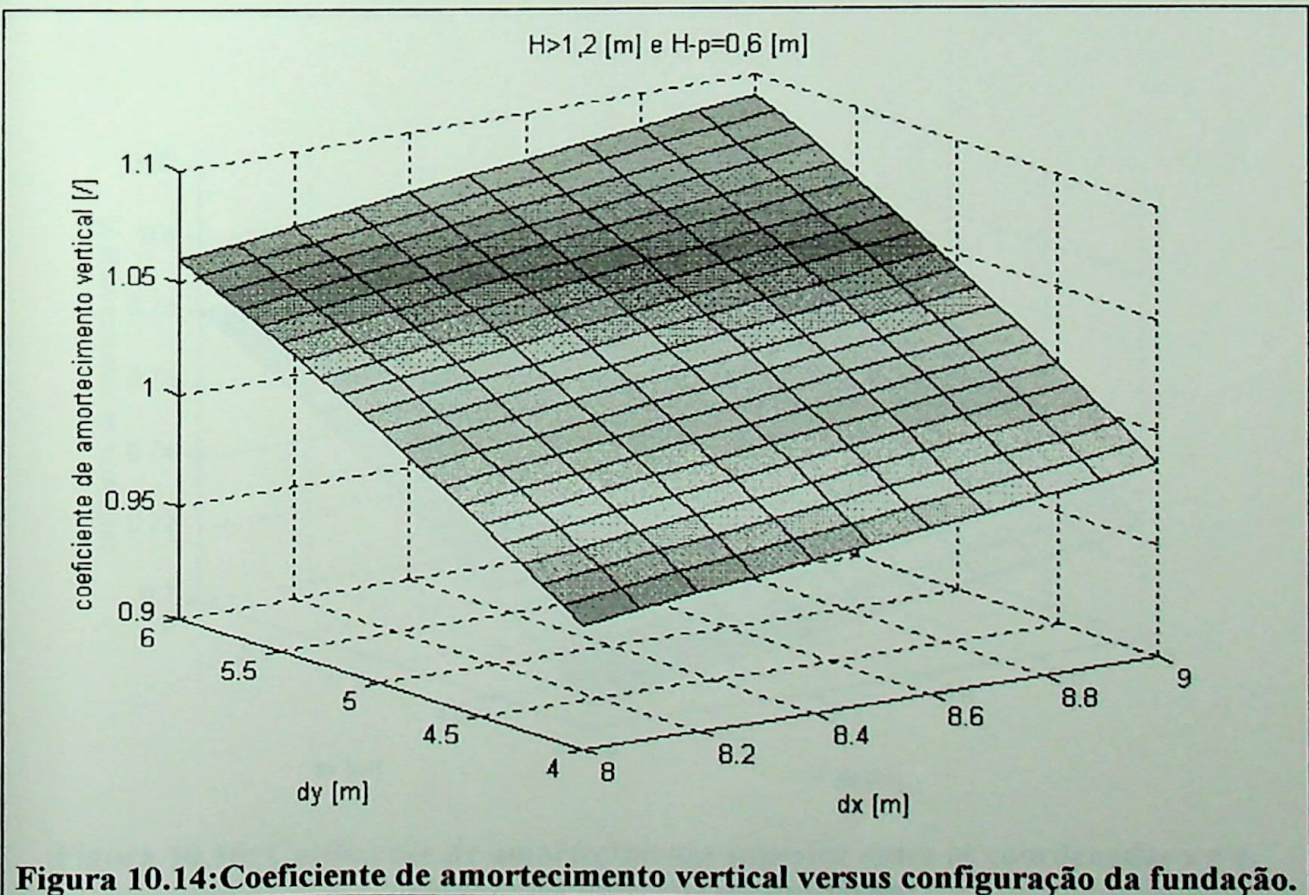
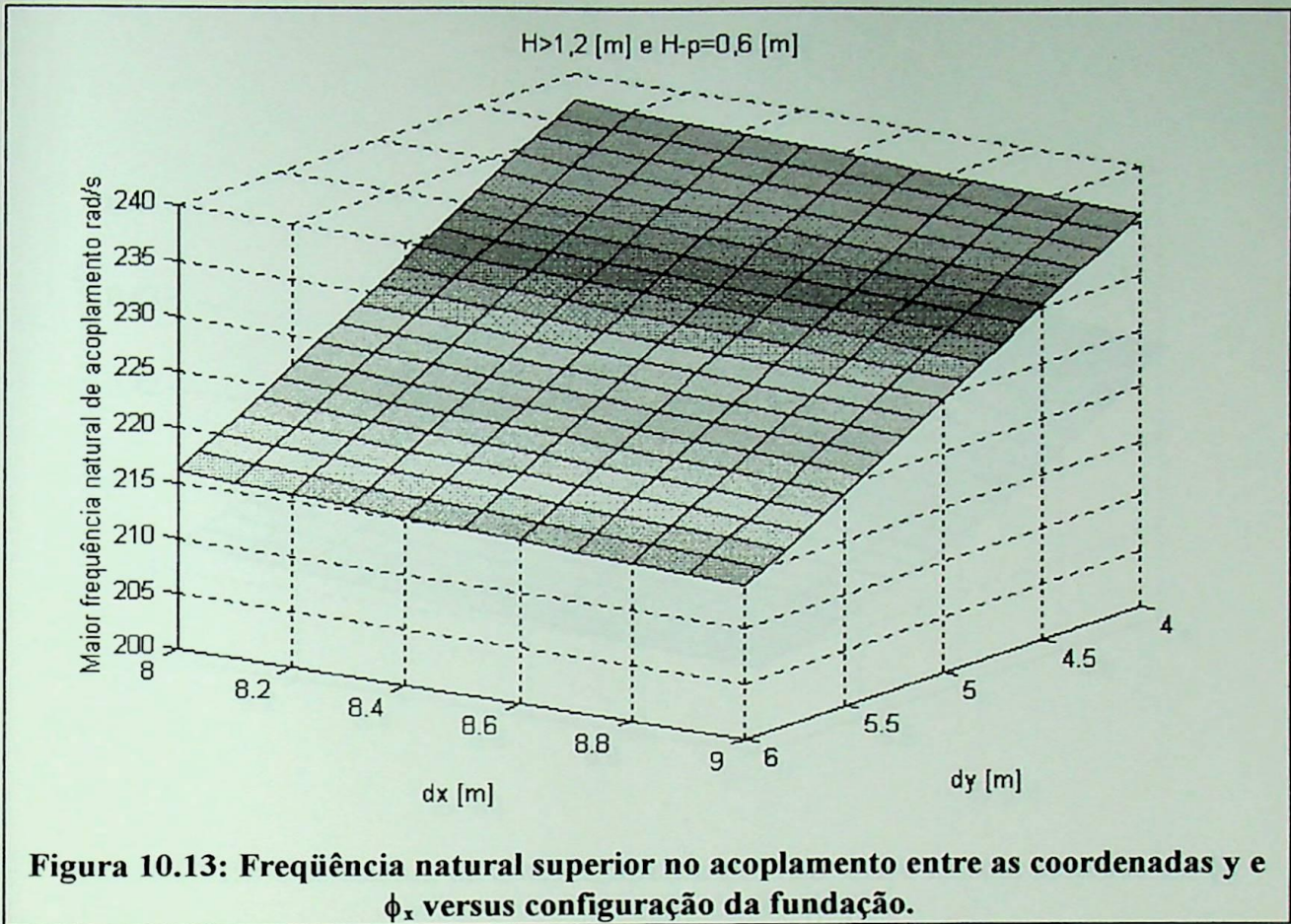
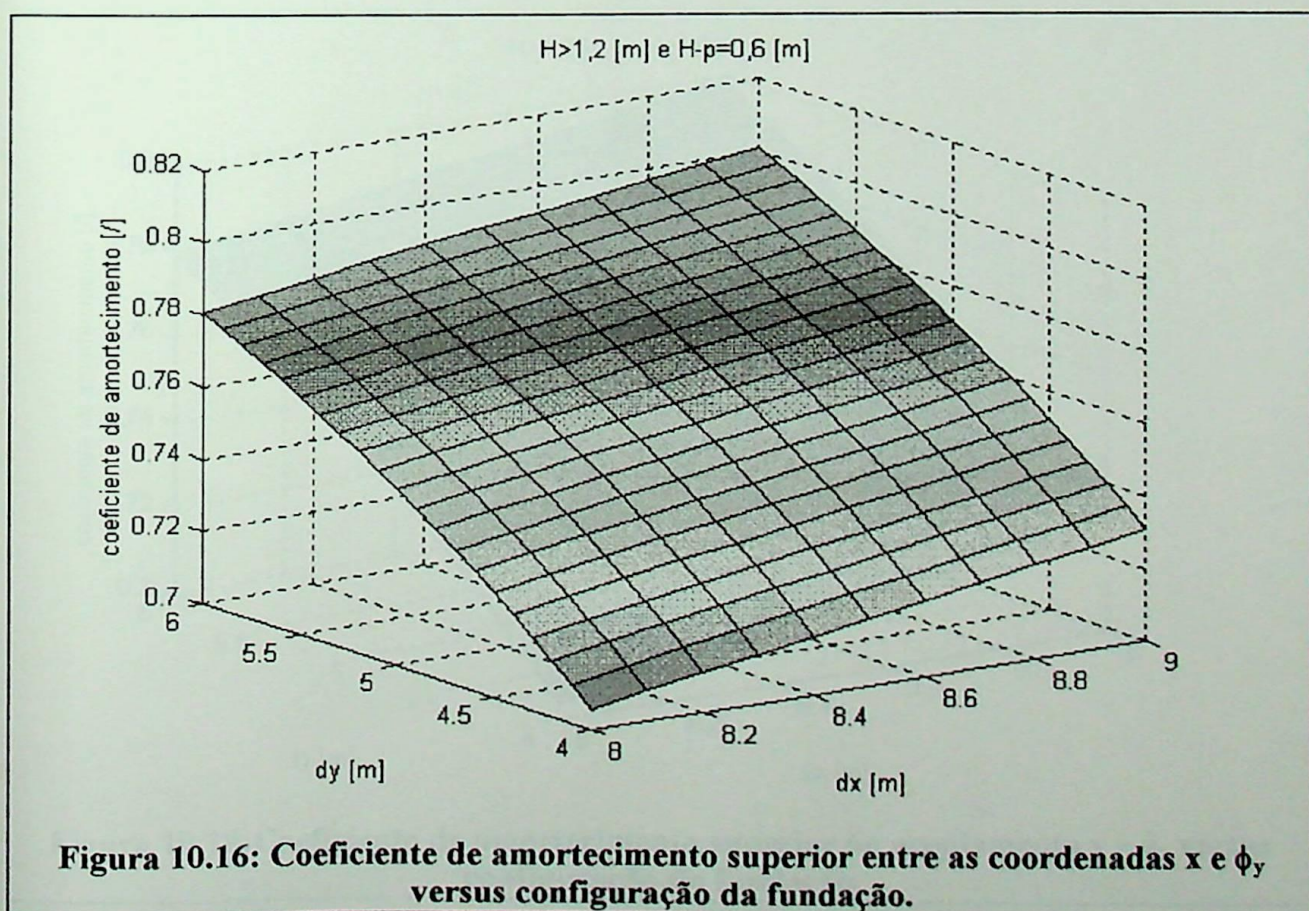
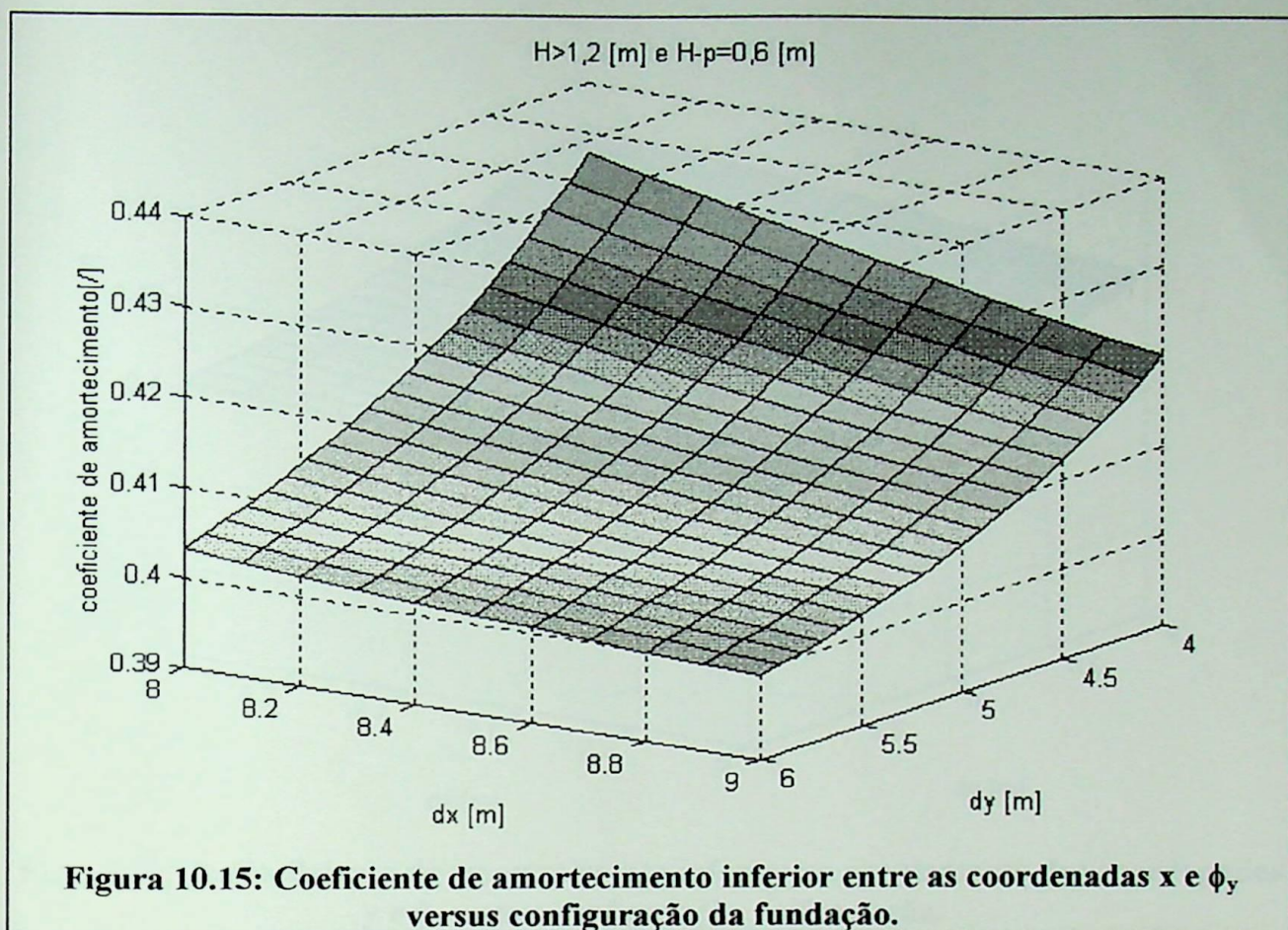
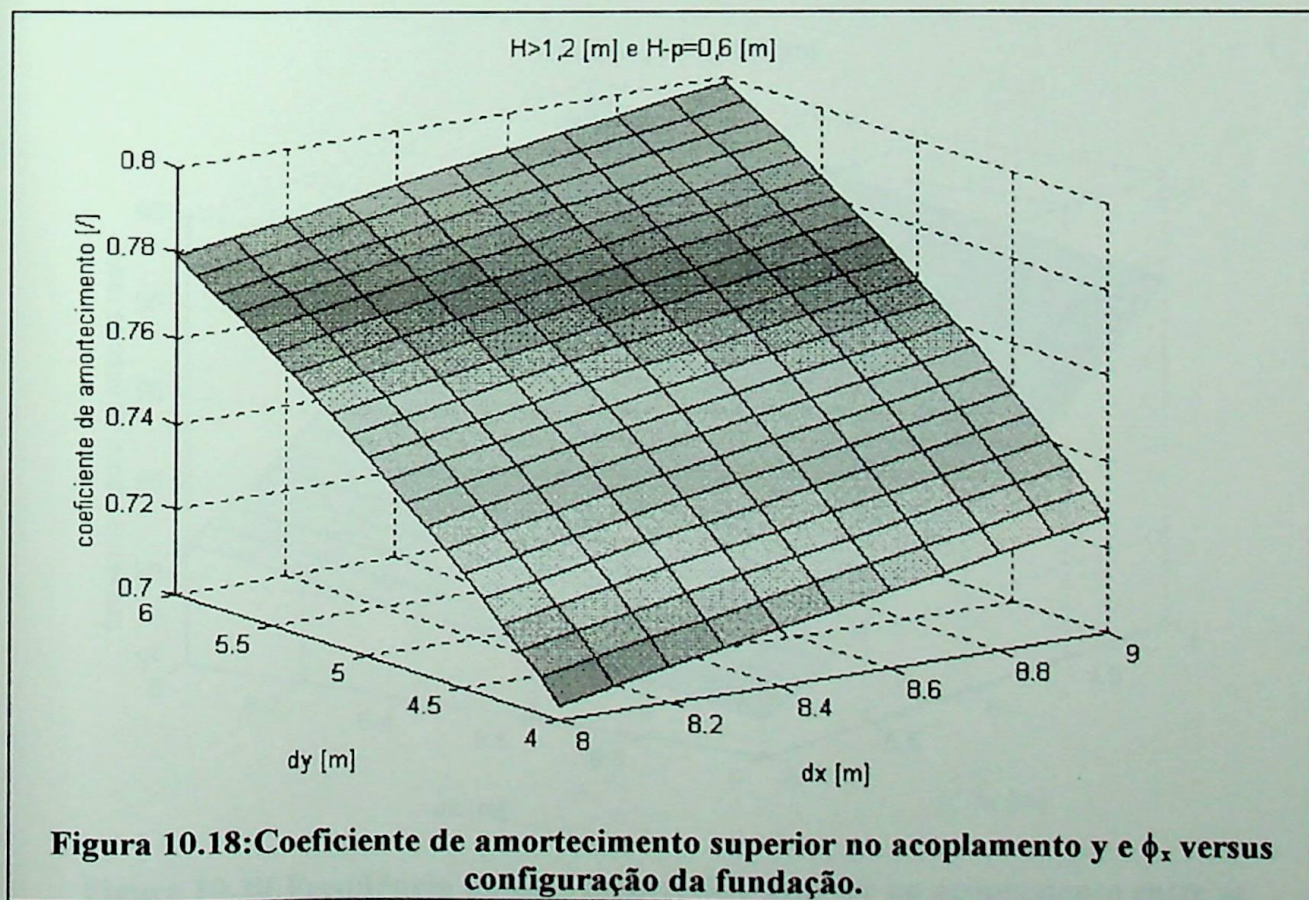
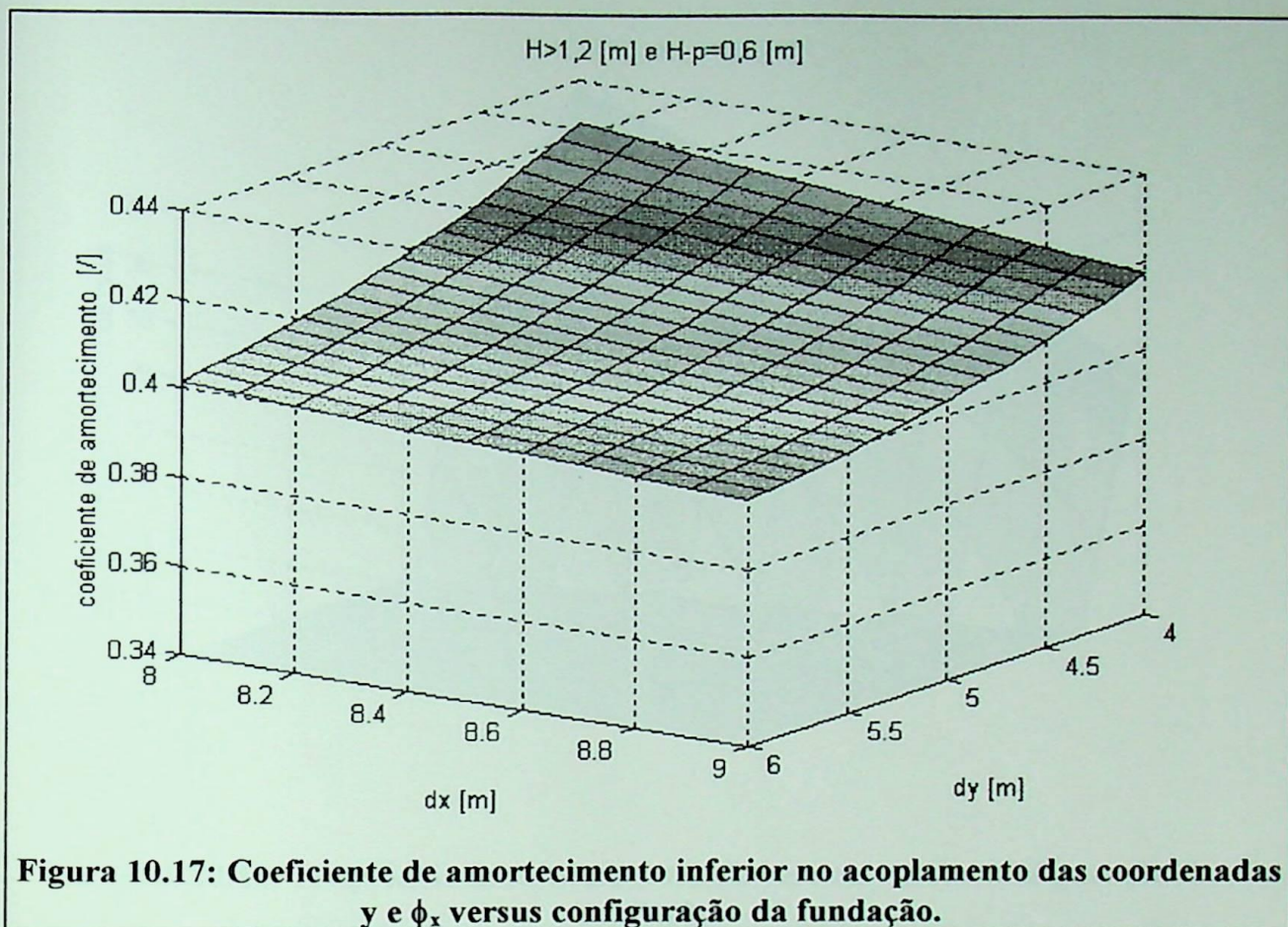


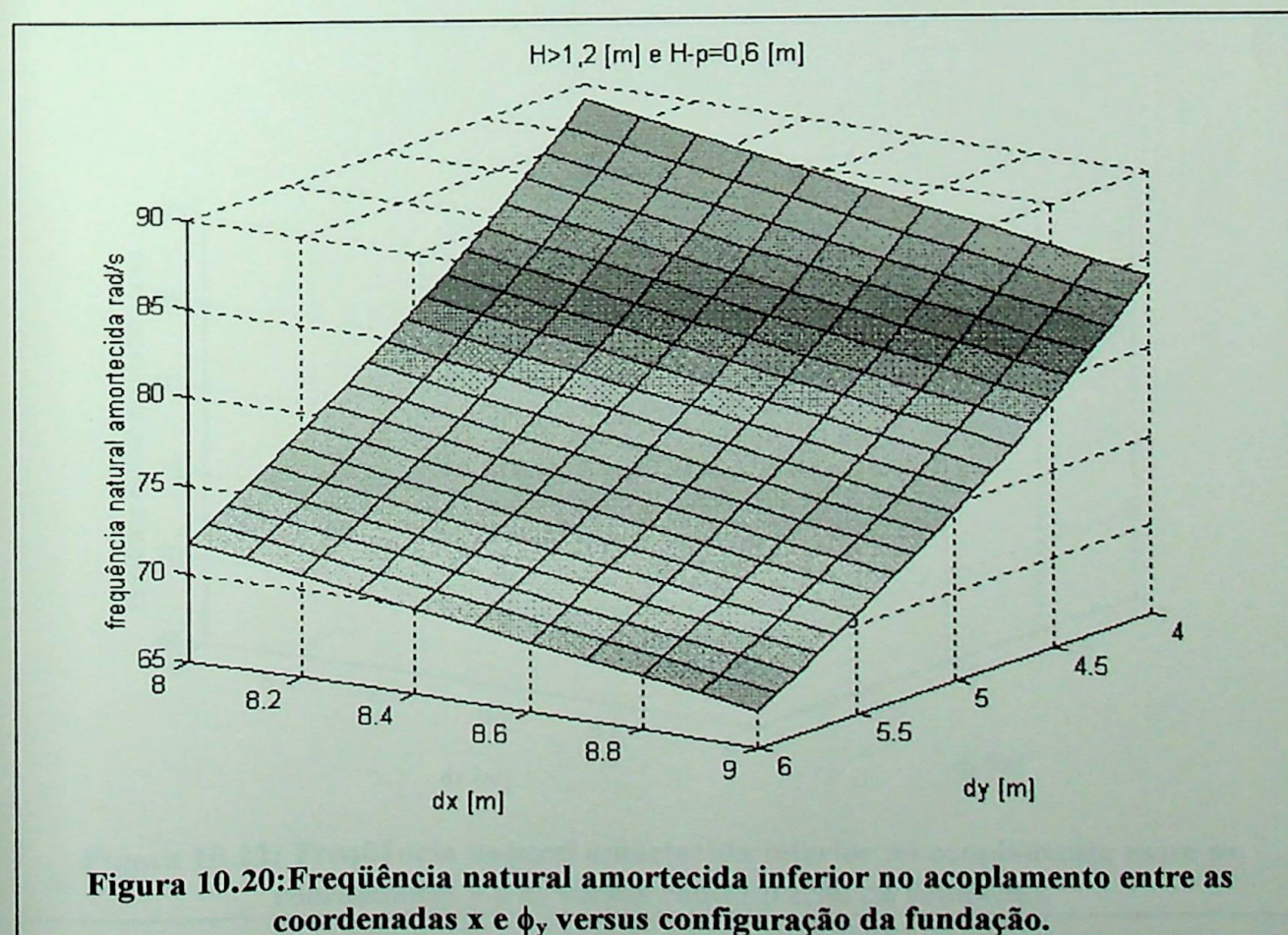
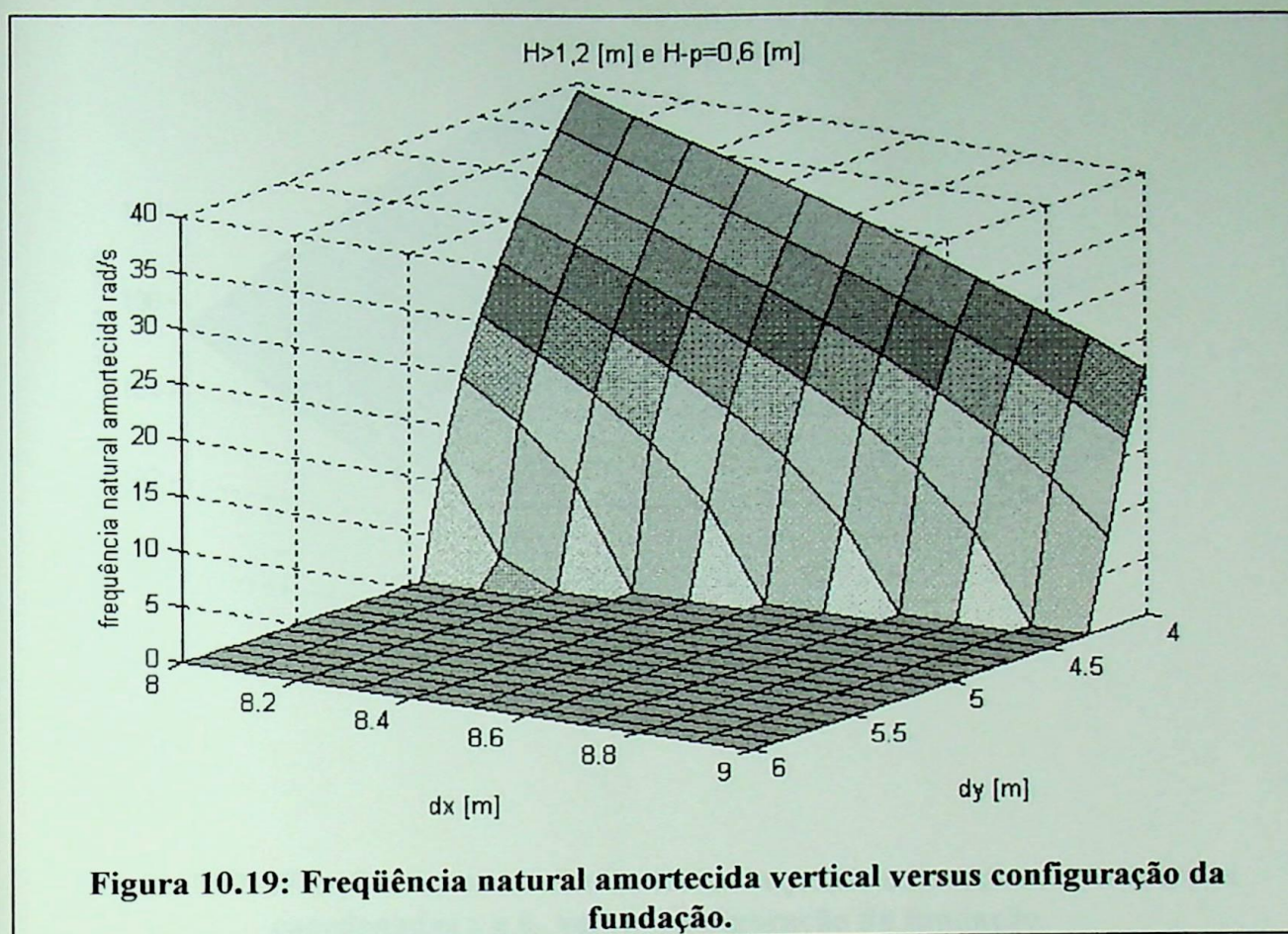
Figura 10.10: Frequência natural inferior no acoplamento entre as coordenadas x e ϕ_y

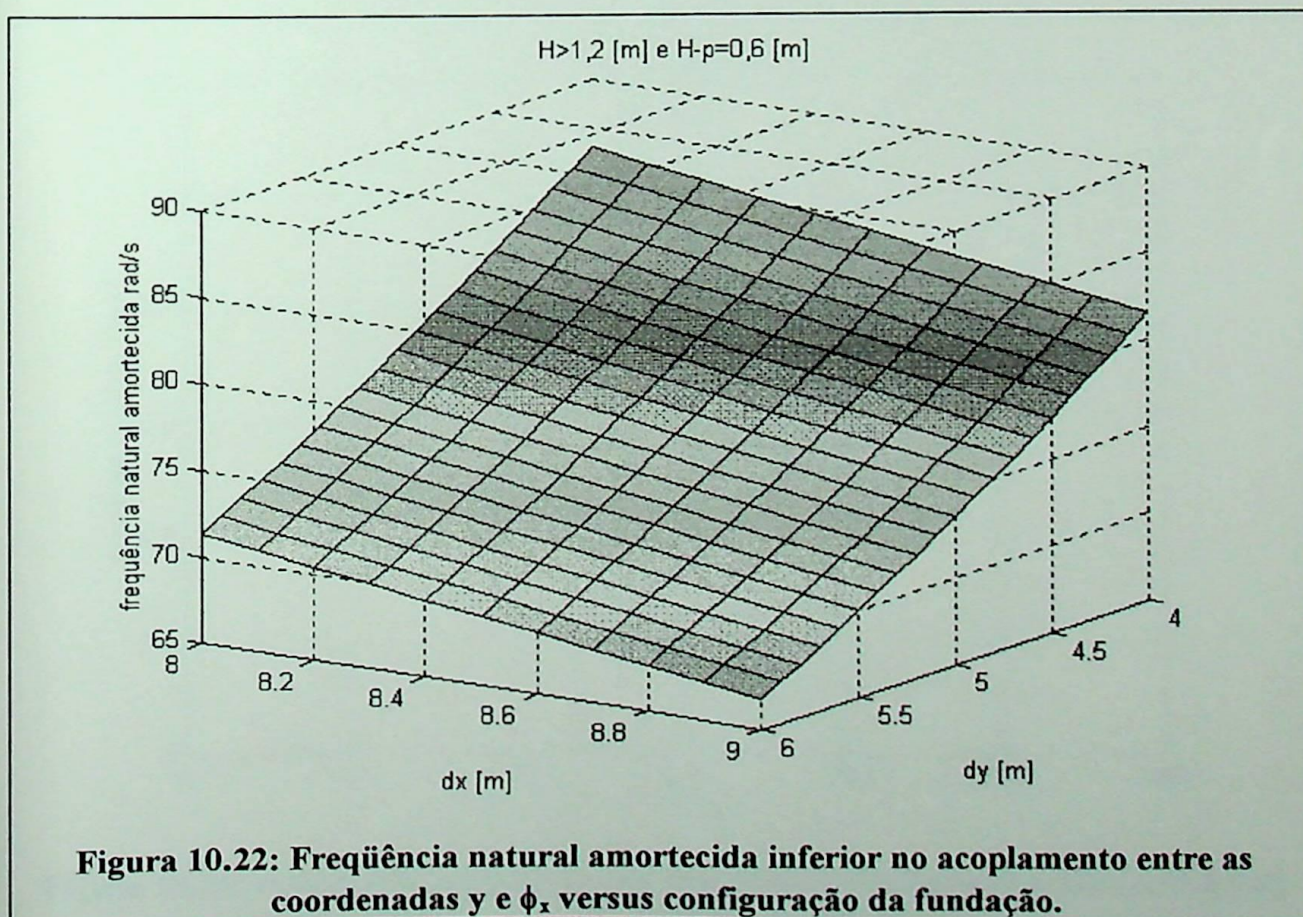
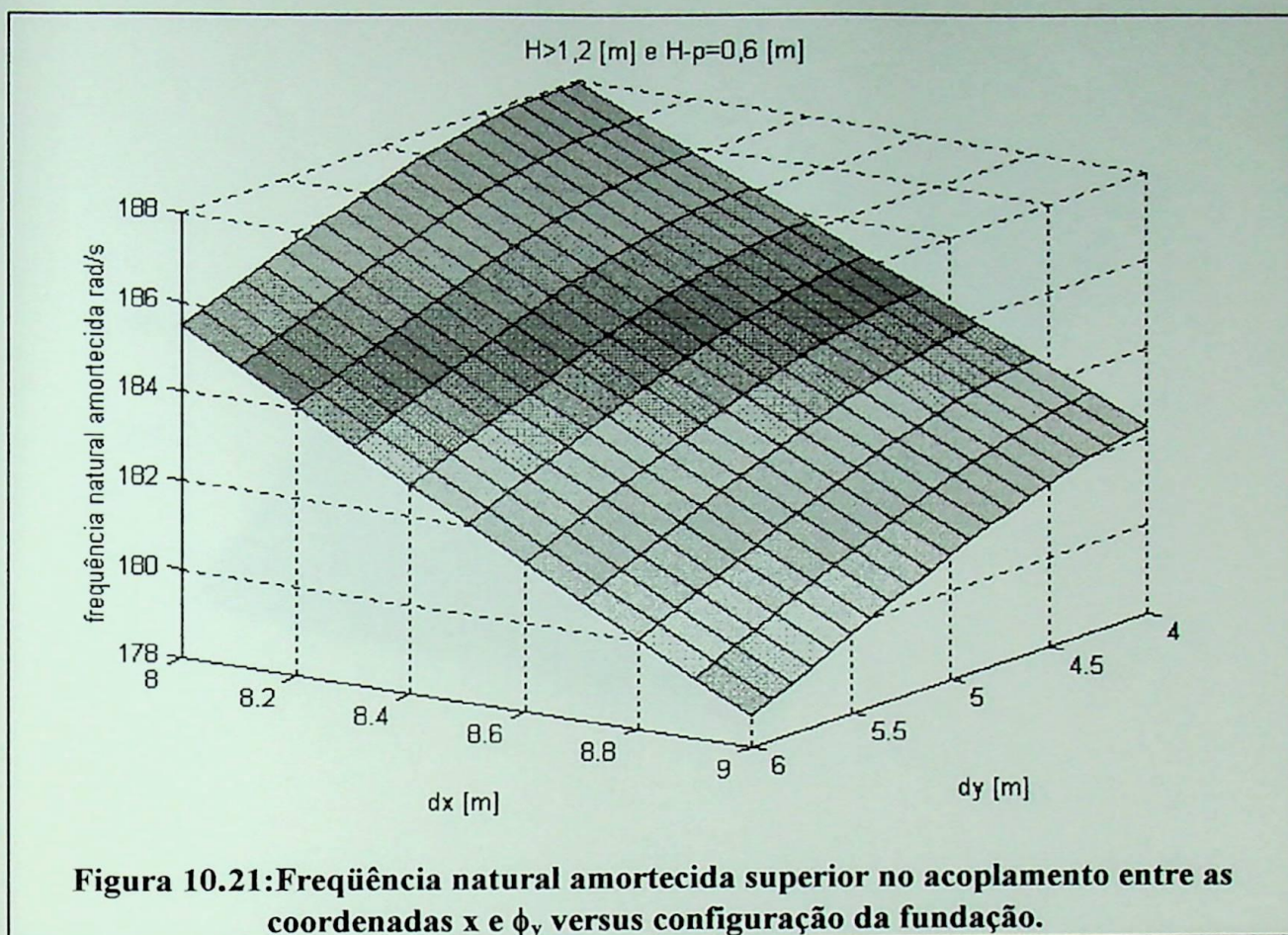


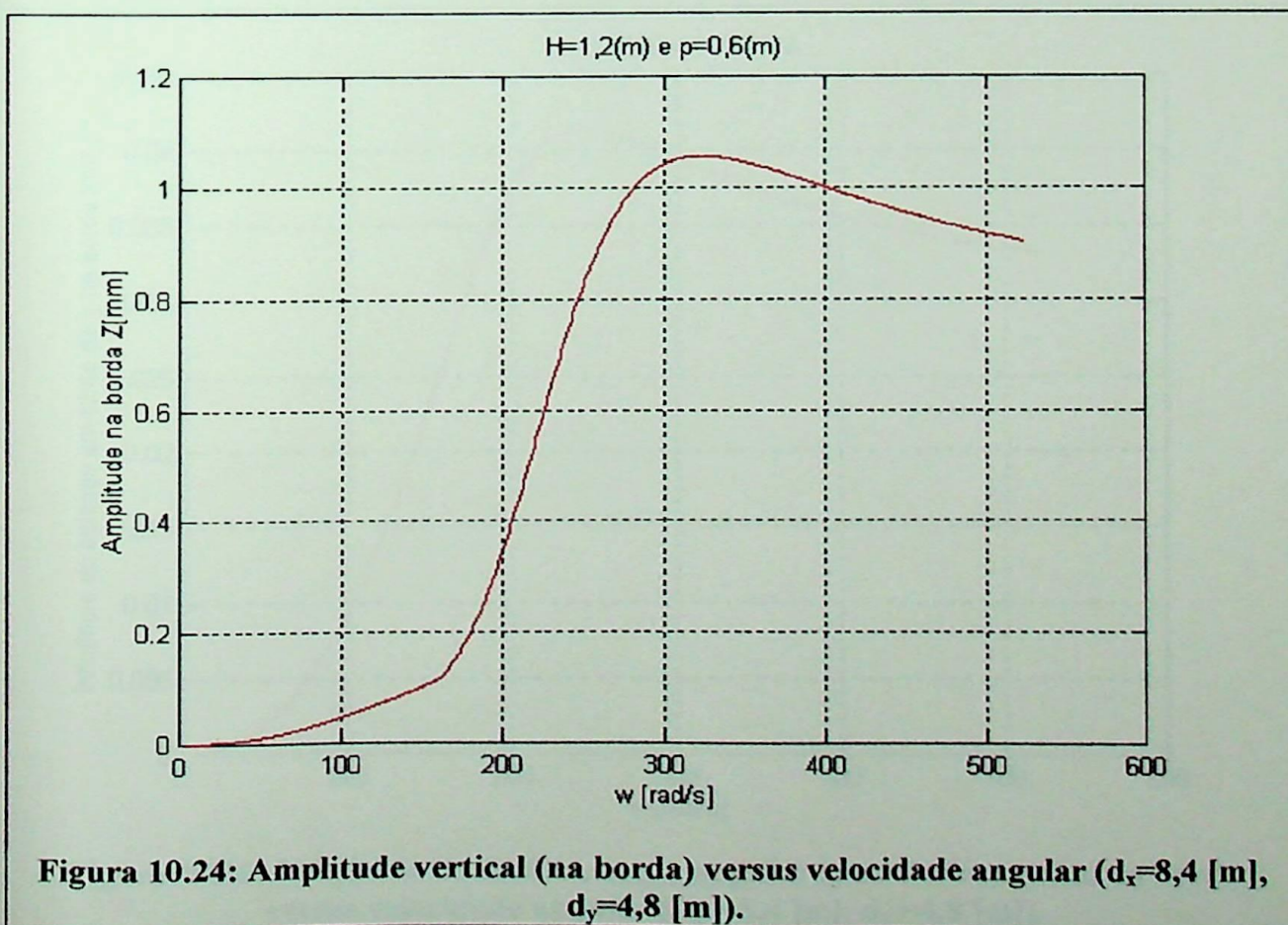
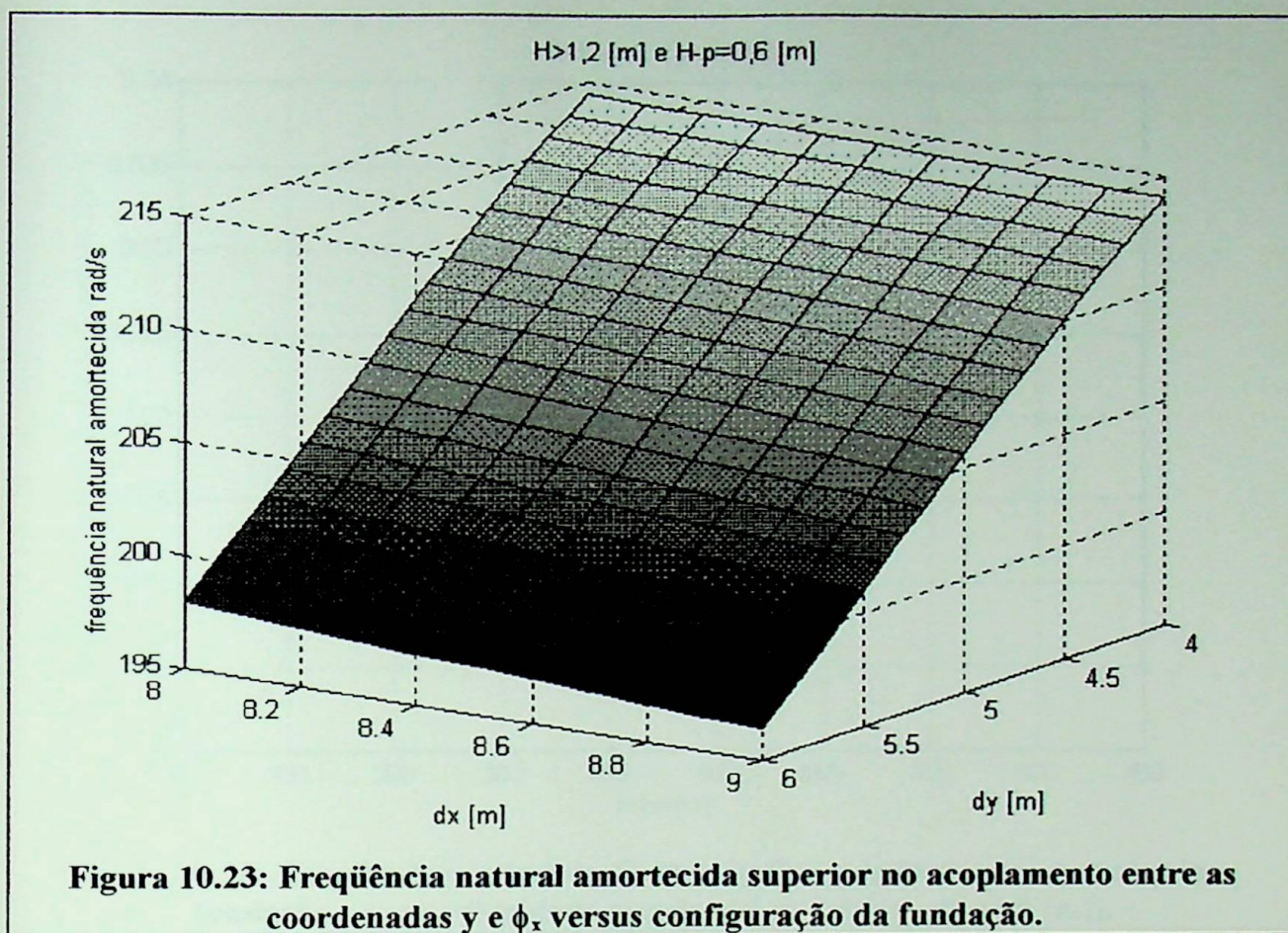


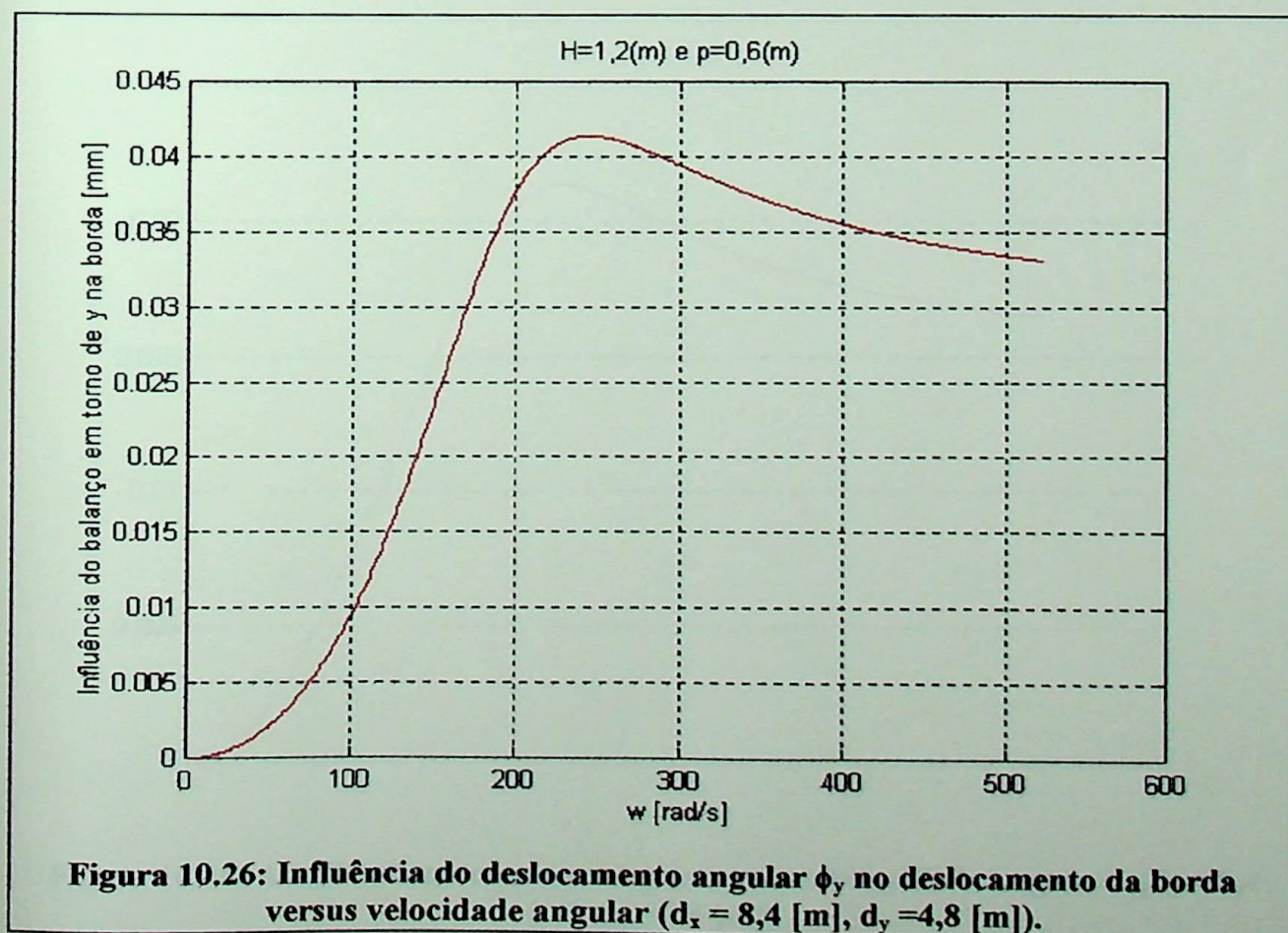
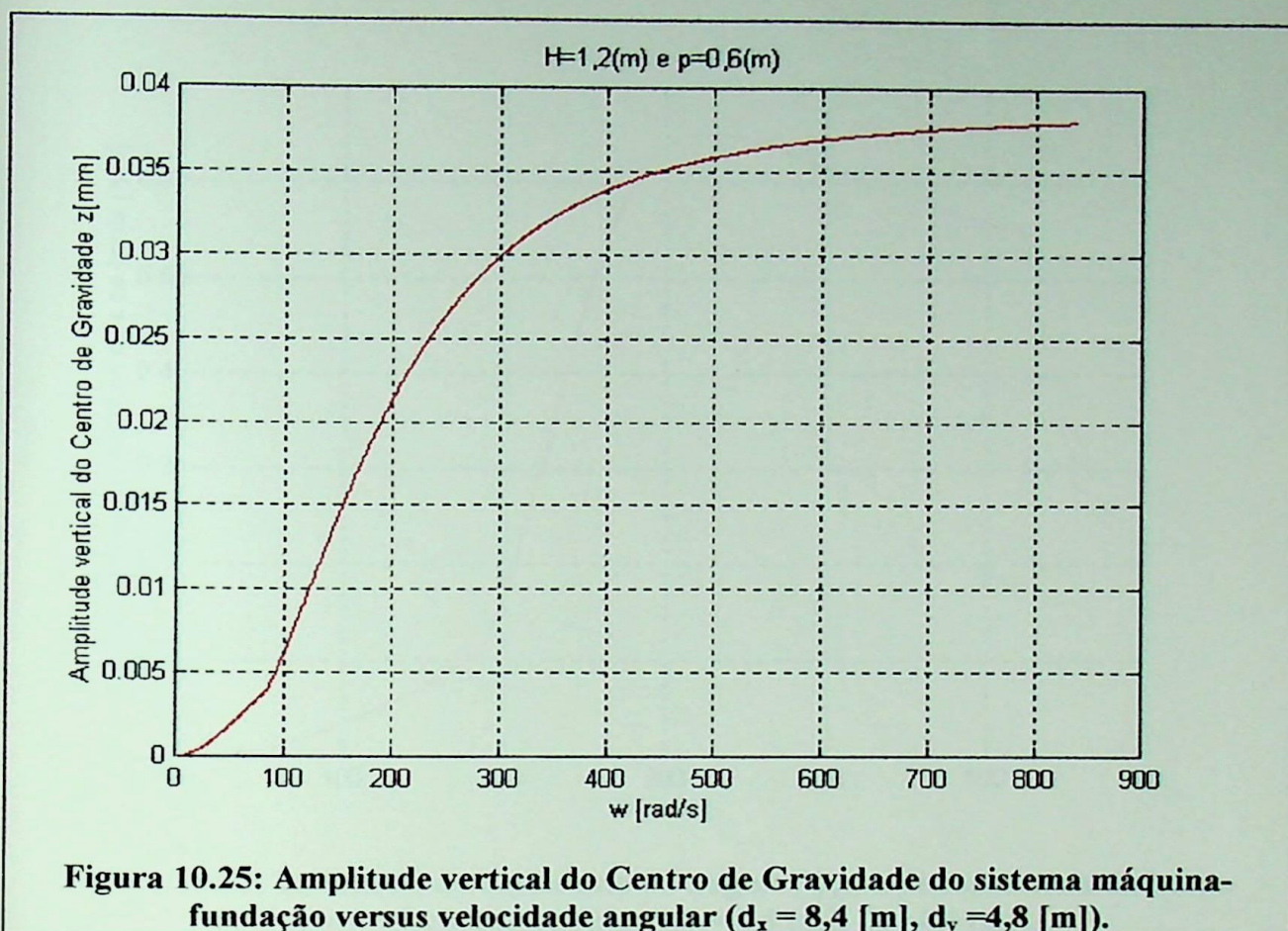


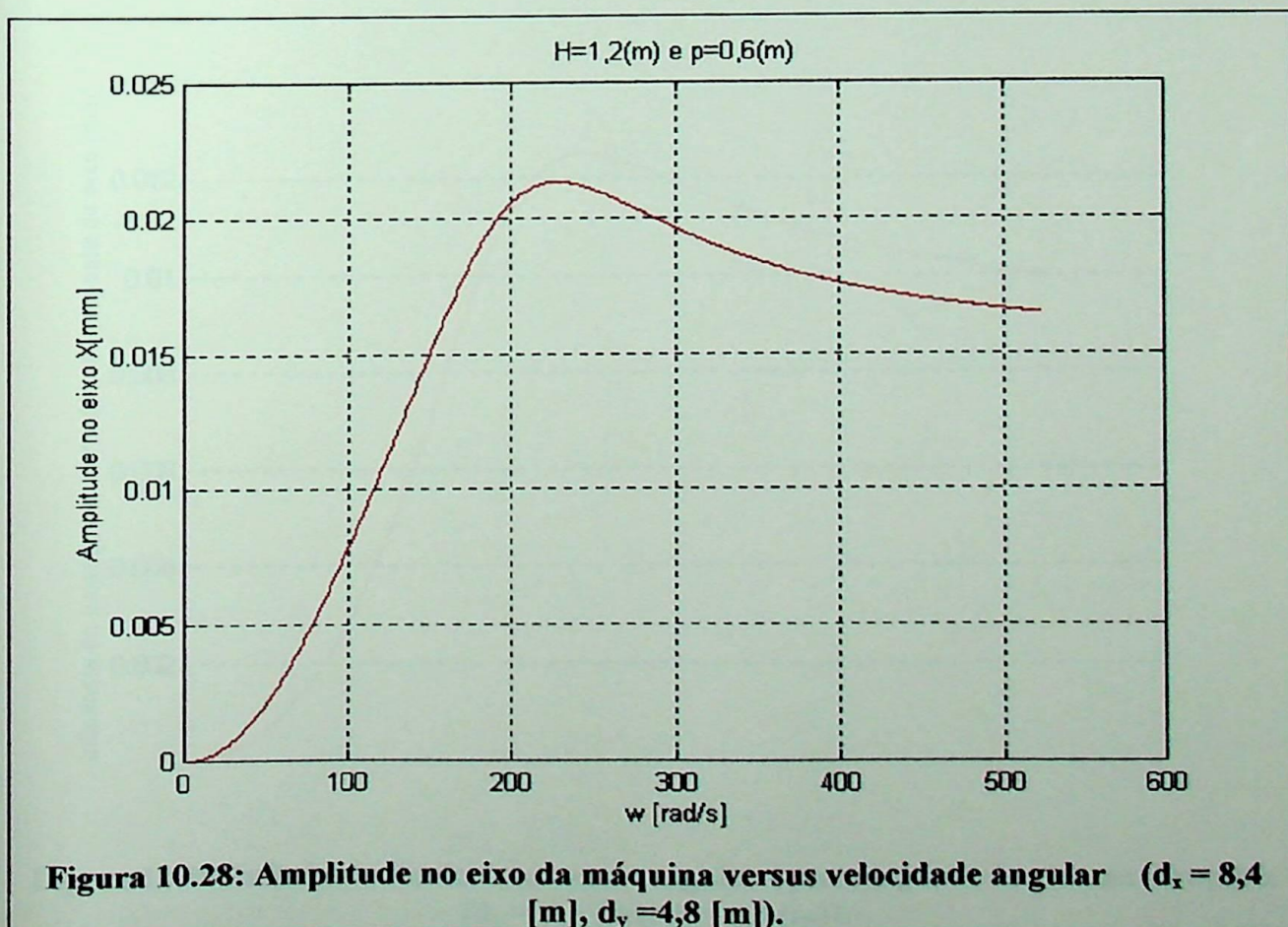
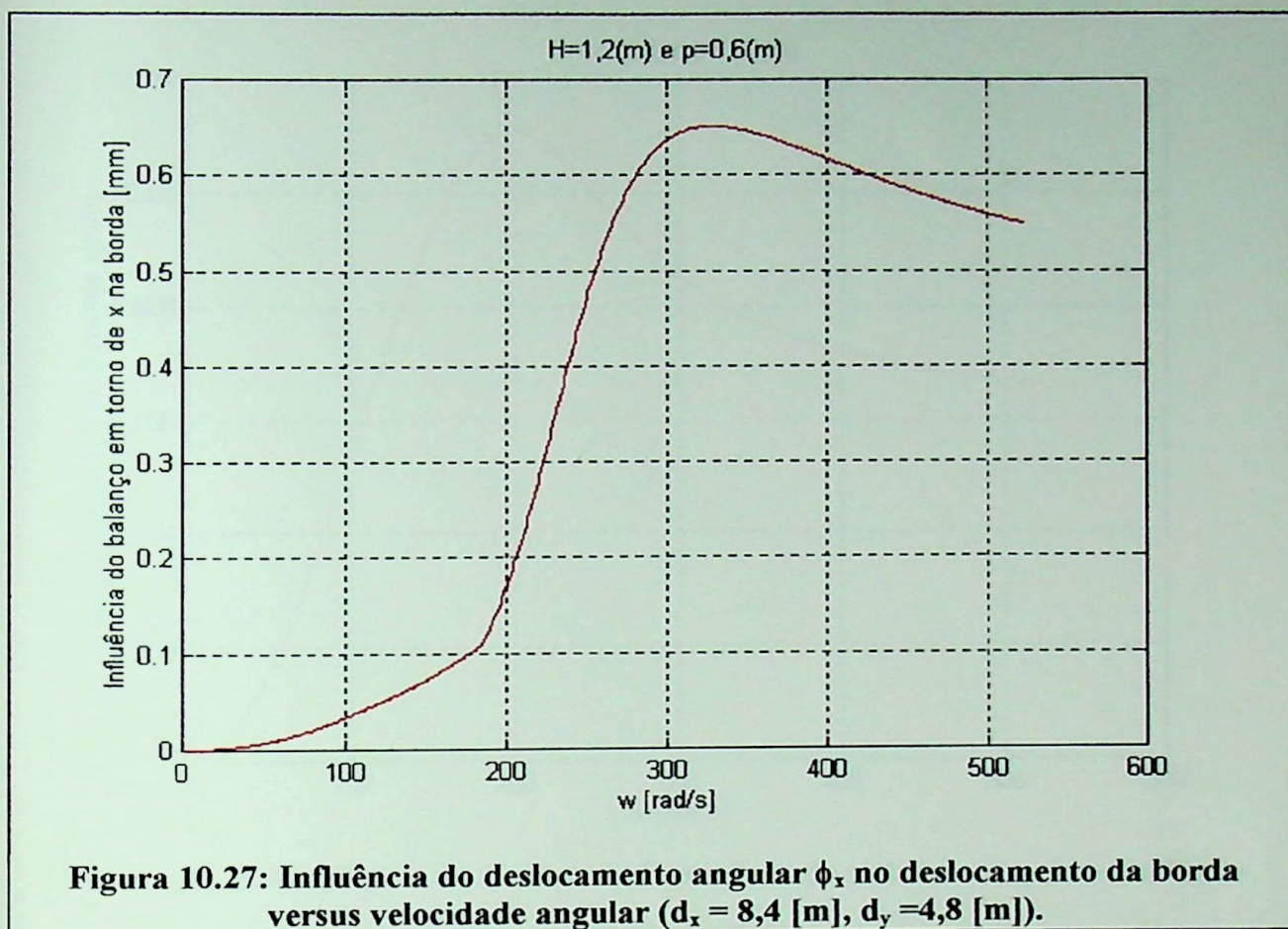


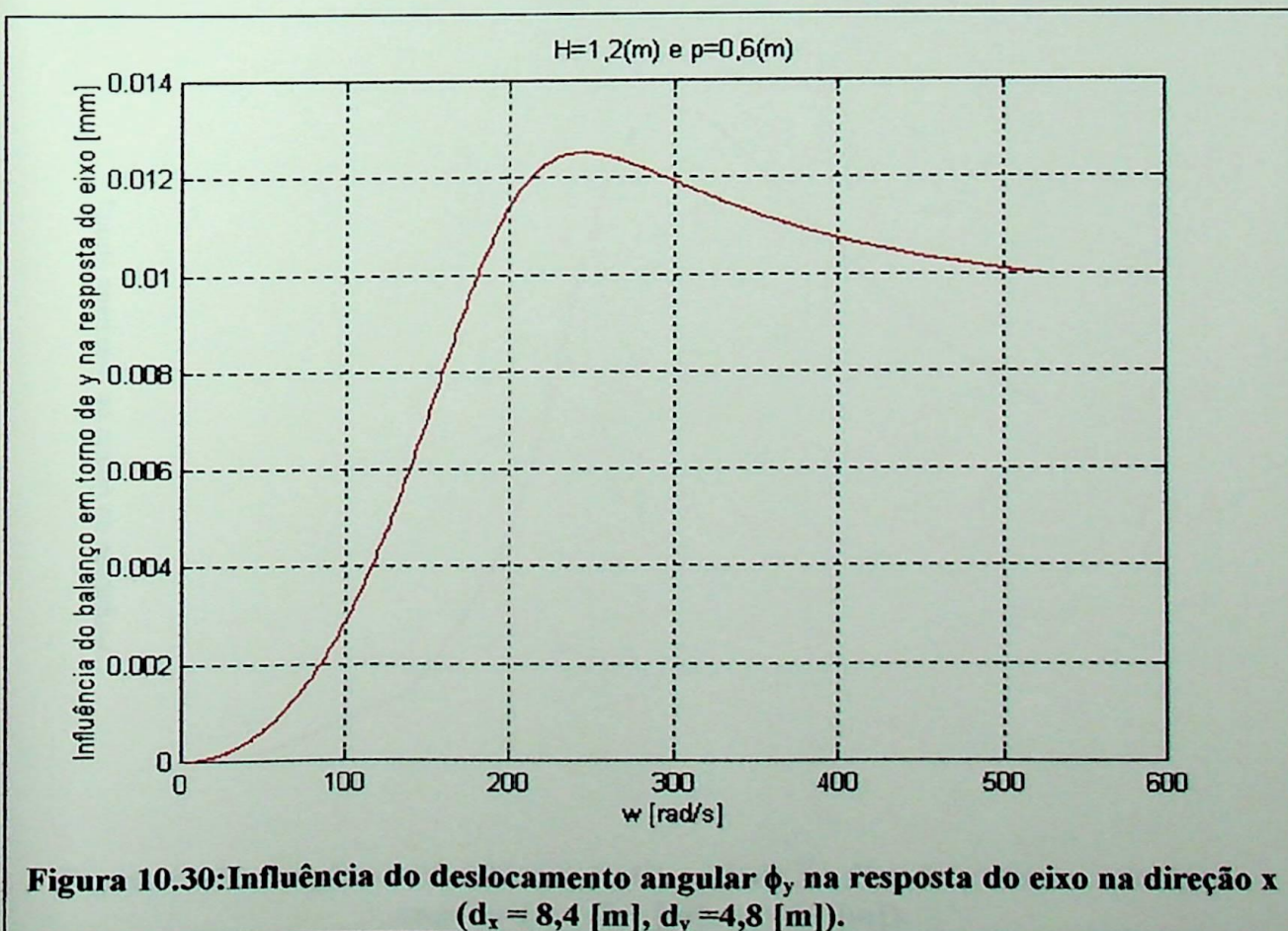
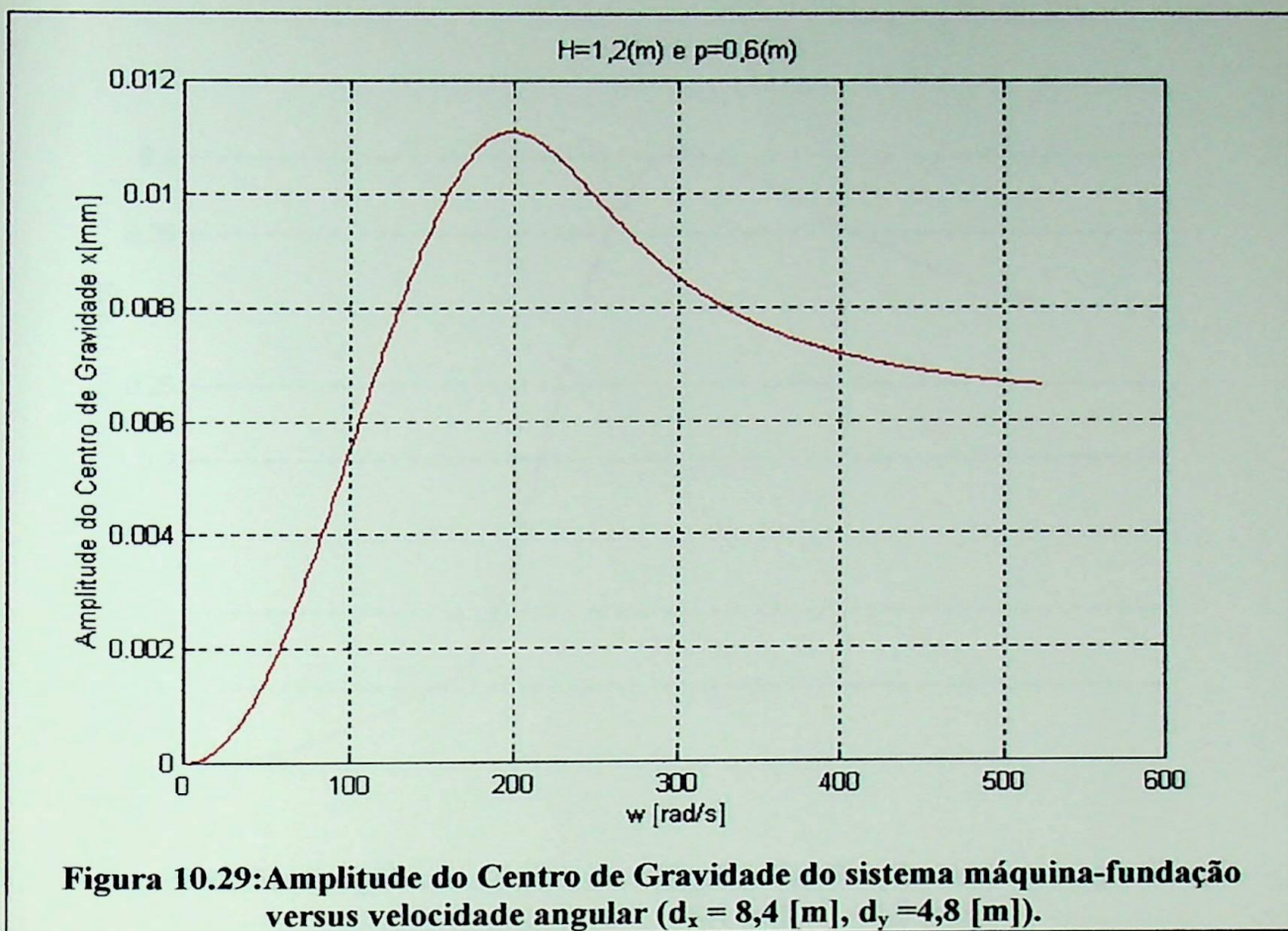












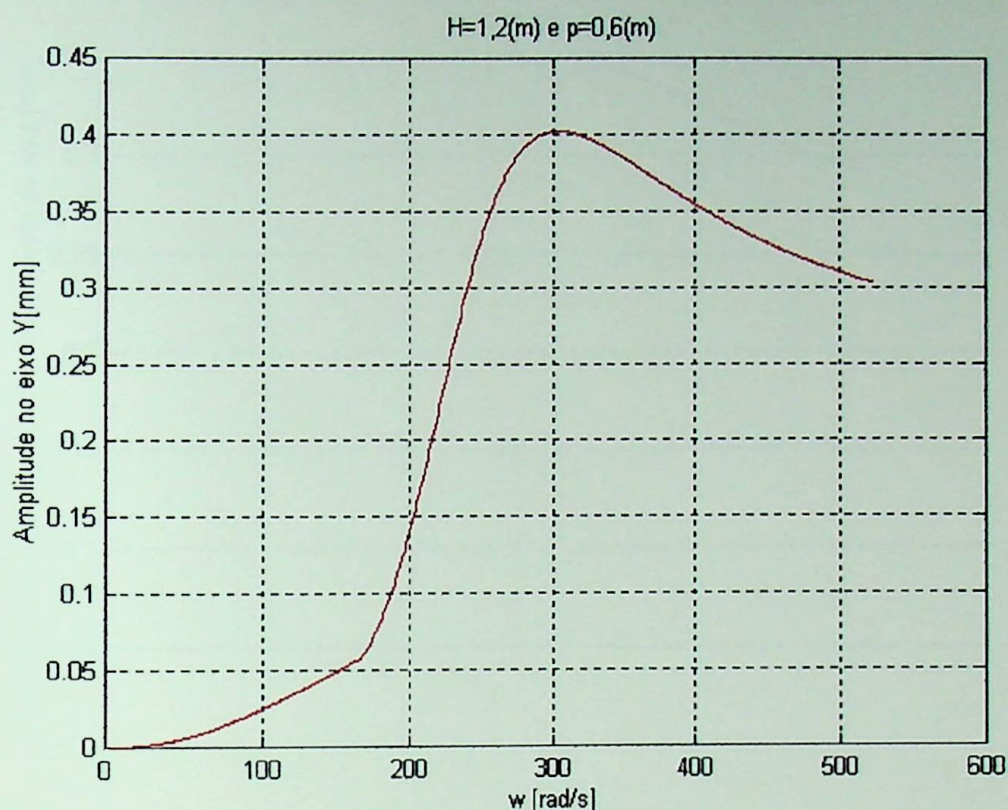


Figura 10.31: Amplitude do eixo da máquina na direção horizontal y versus velocidade angular ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

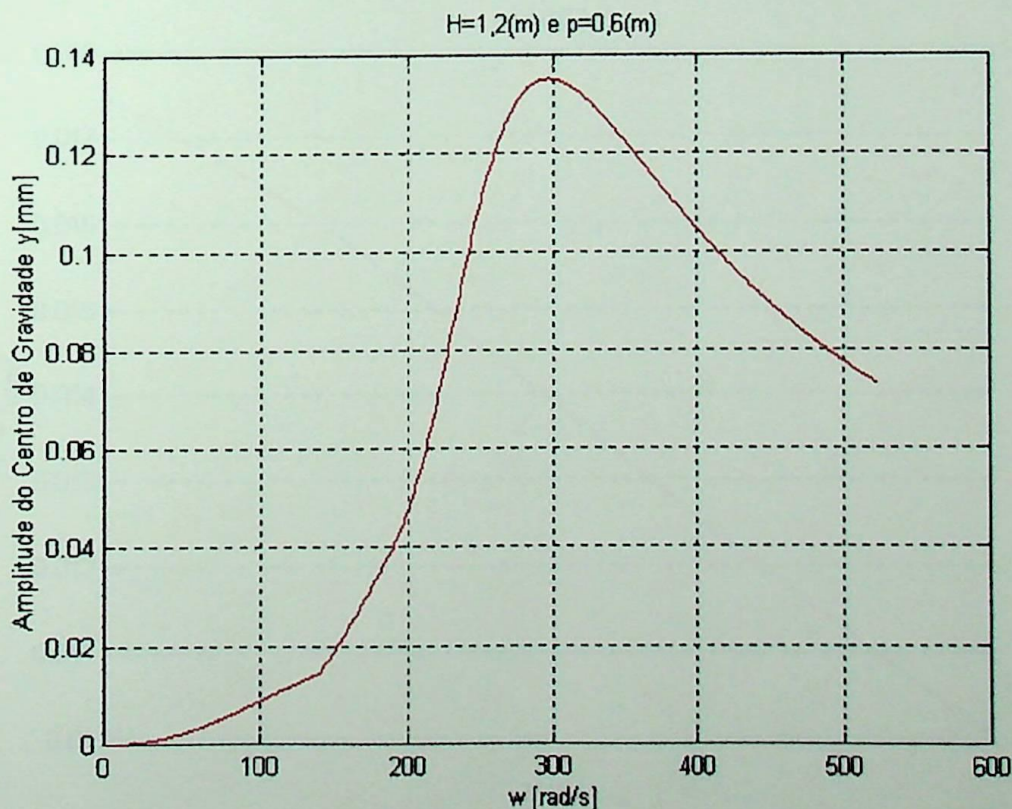


Figura 10.32: Amplitude do Centro de Gravidade na direção y versus velocidade angular ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

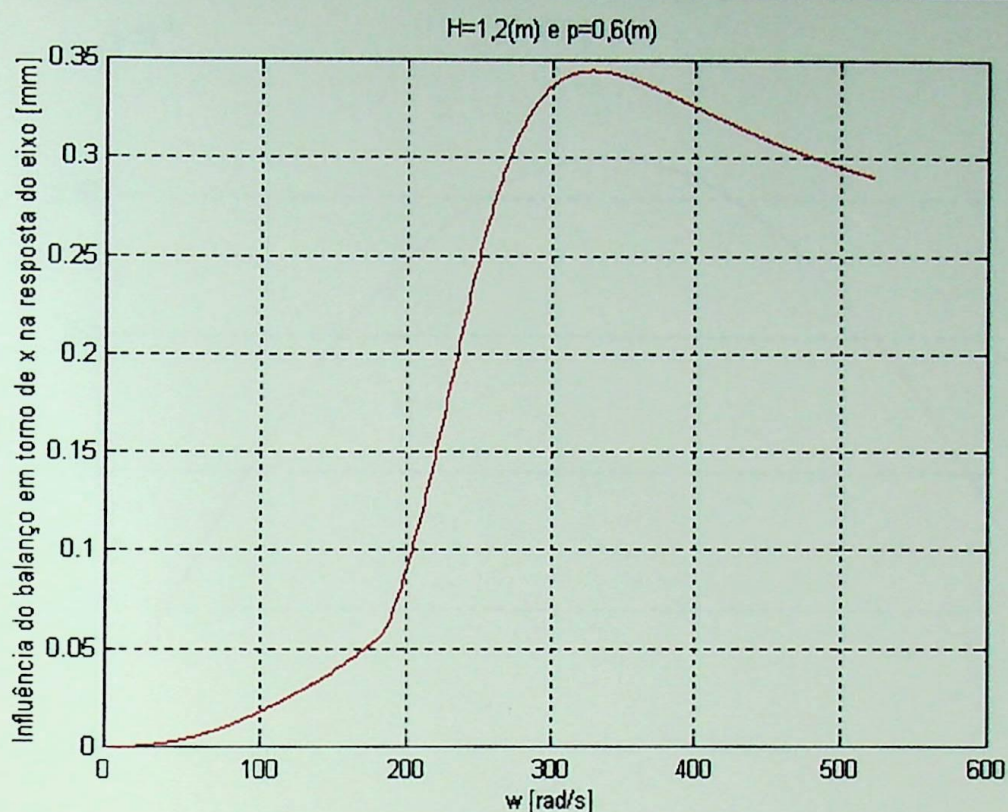


Figura 10.33: Influência do deslocamento angular ϕ_x na resposta do eixo na direção y ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

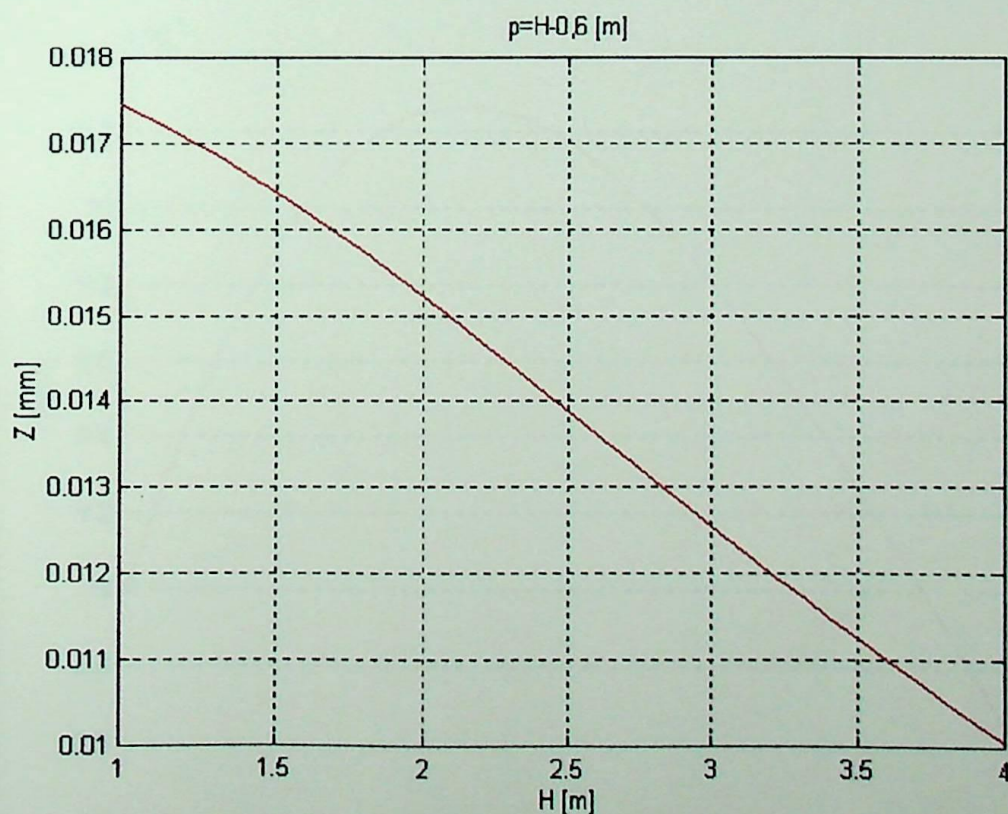


Figura 10.34: Gráfico da amplitude na borda Z em função da altura H da fundação ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

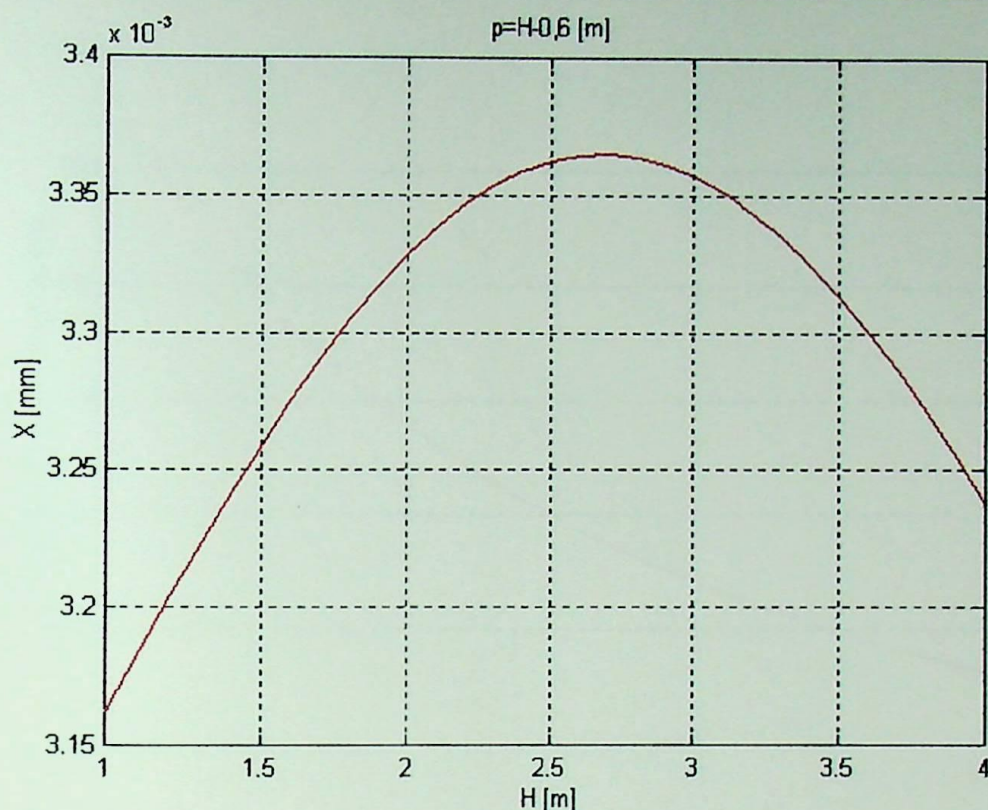


Figura 10.35: Gráfico da amplitude X (eixo da máquina) em função da altura H da fundação ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

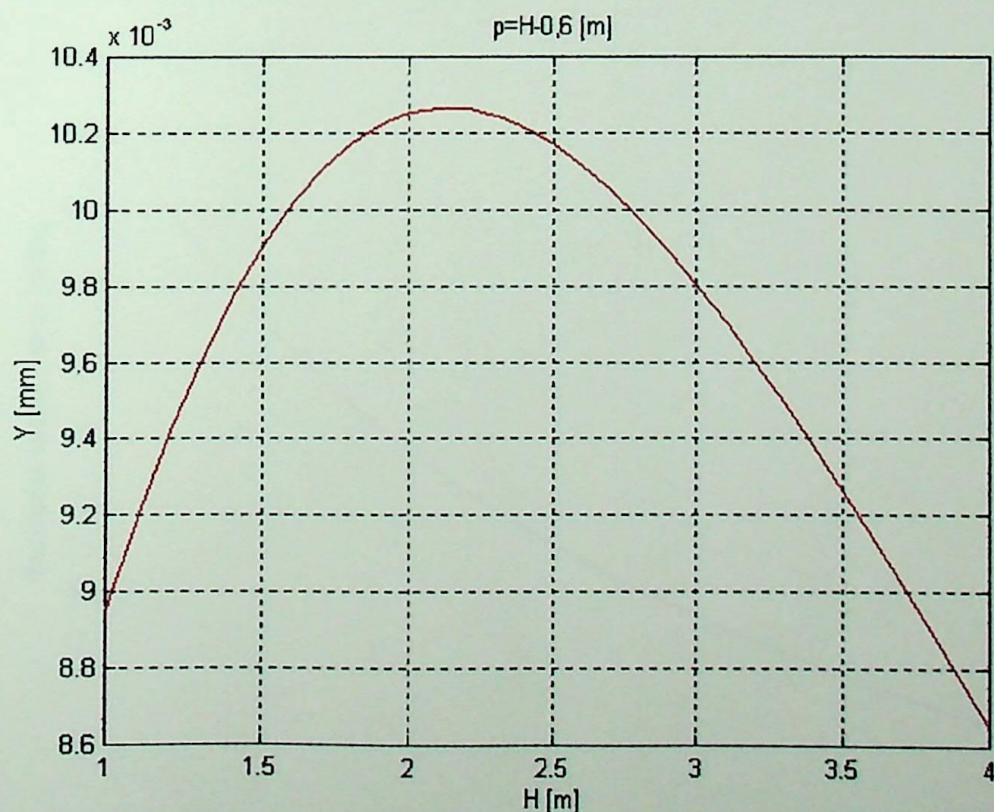


Figura 10.36: Gráfico da amplitude Y (eixo da máquina) em função da altura H da fundação ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

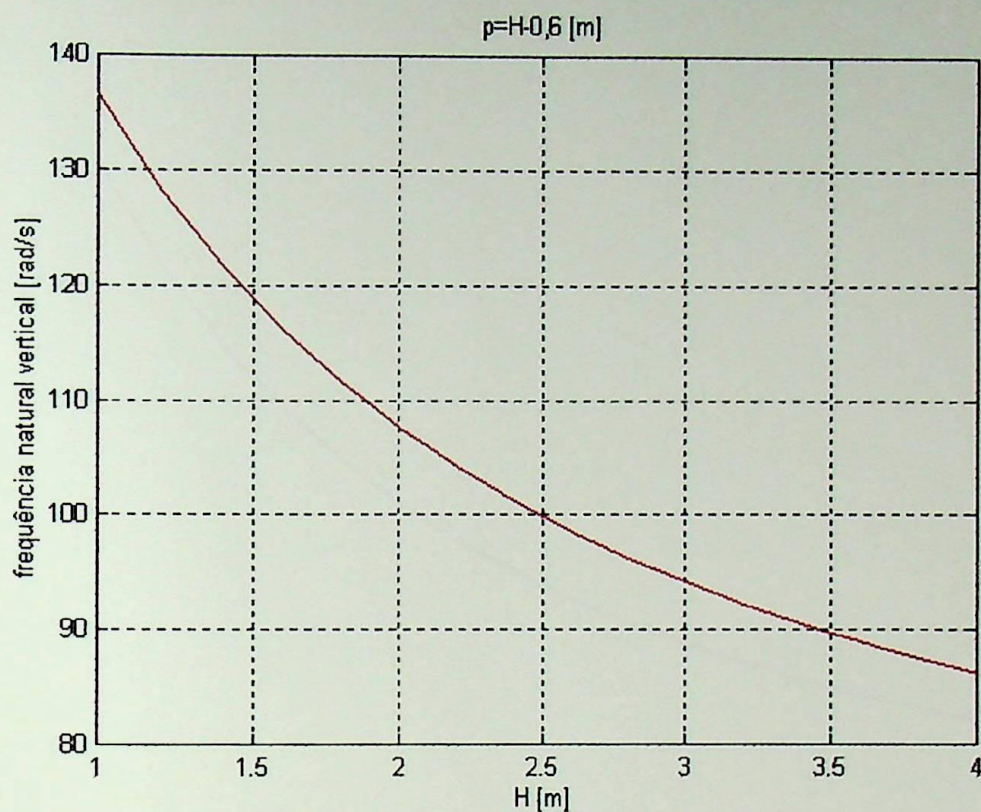


Figura 10.37: Frequência natural vertical versus altura H da fundação ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

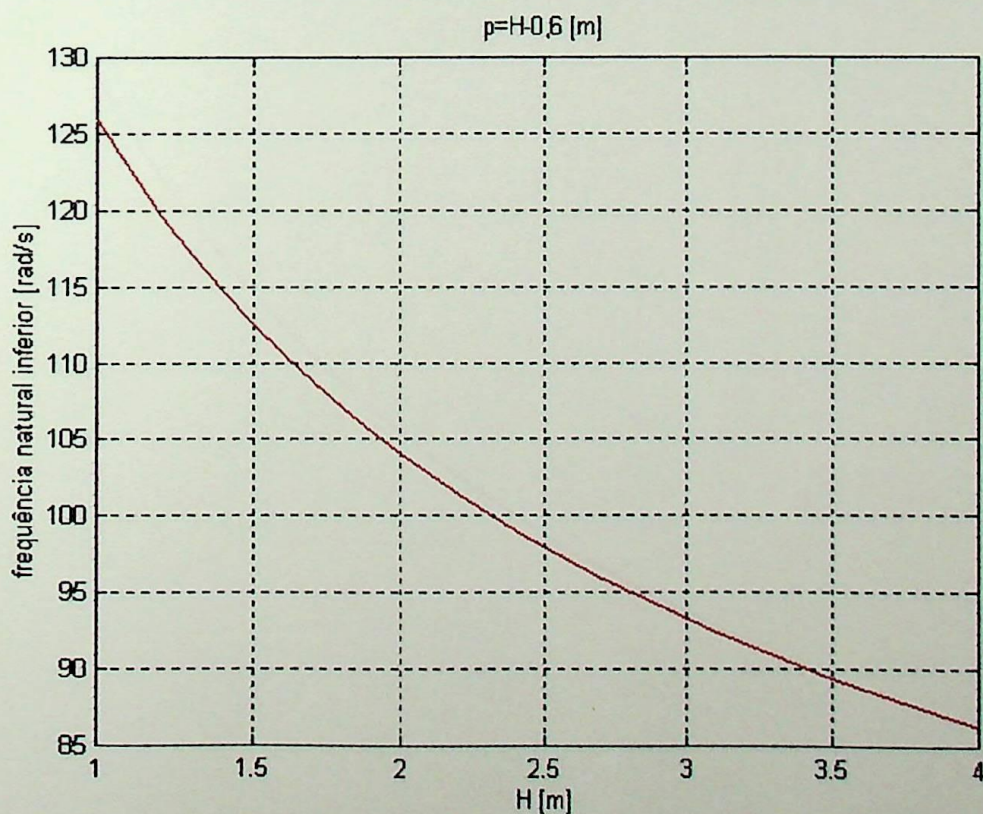


Figura 10.38: Frequência natural inferior do acoplamento entre as coordenadas x e ϕ_y versus altura H da fundação ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

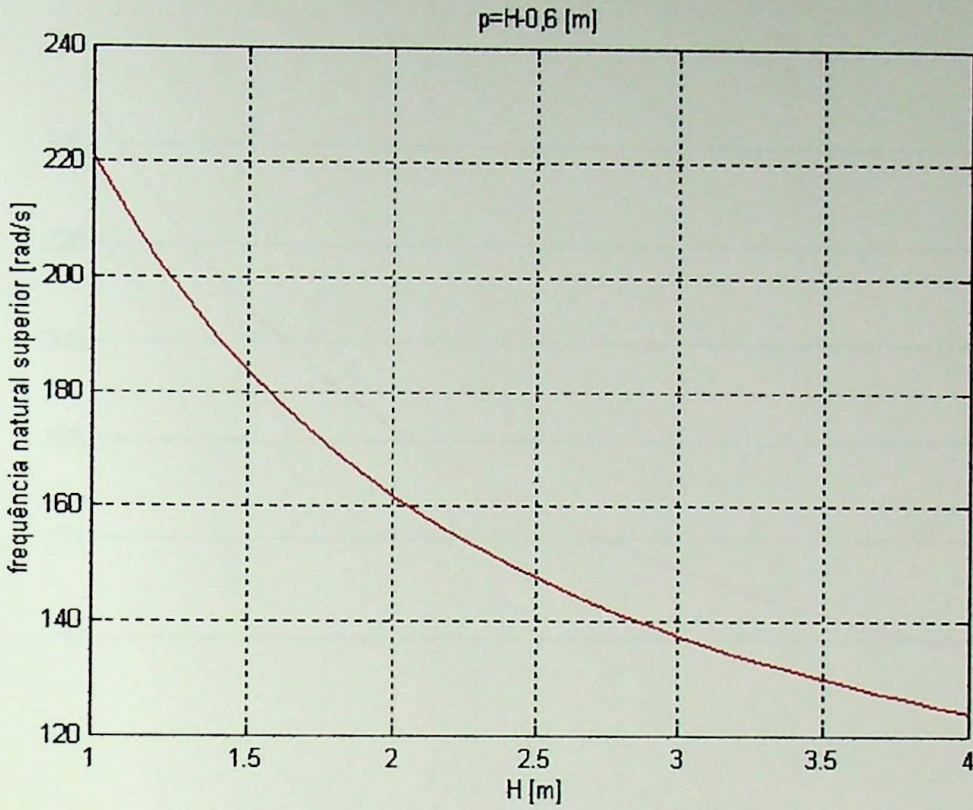


Figura 10.39: Frequência natural superior do acoplamento entre as coordenadas x e ϕ_y versus altura H da fundação ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

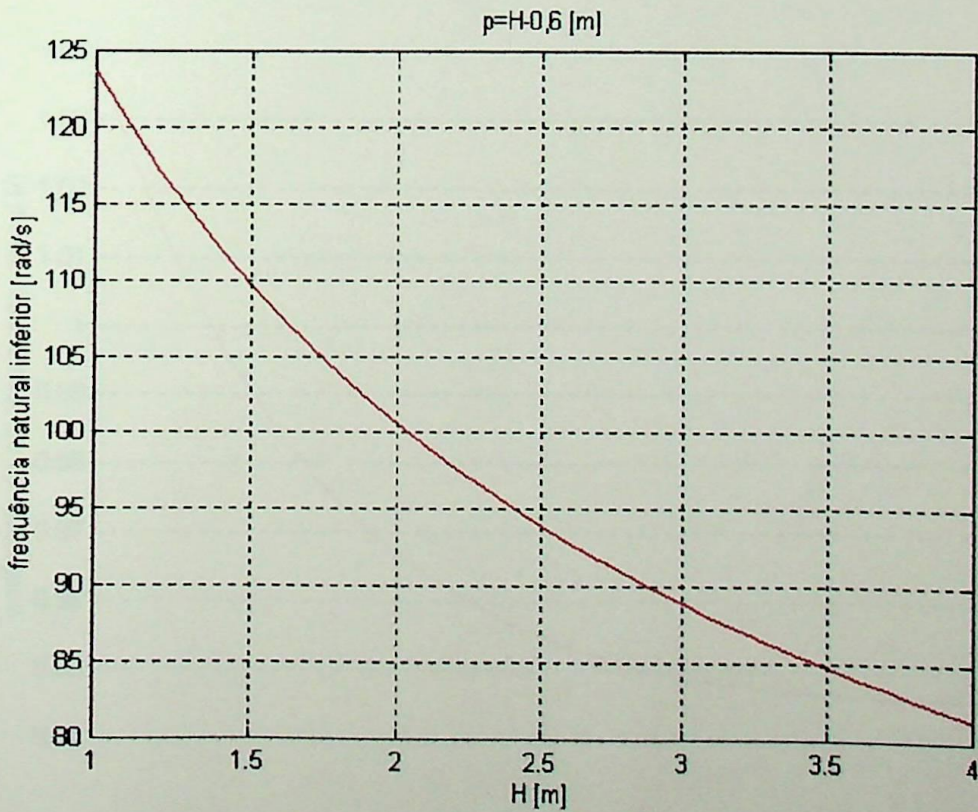


Figura 10.40: Frequência natural inferior do acoplamento entre as coordenadas y e ϕ_x versus altura H da fundação ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

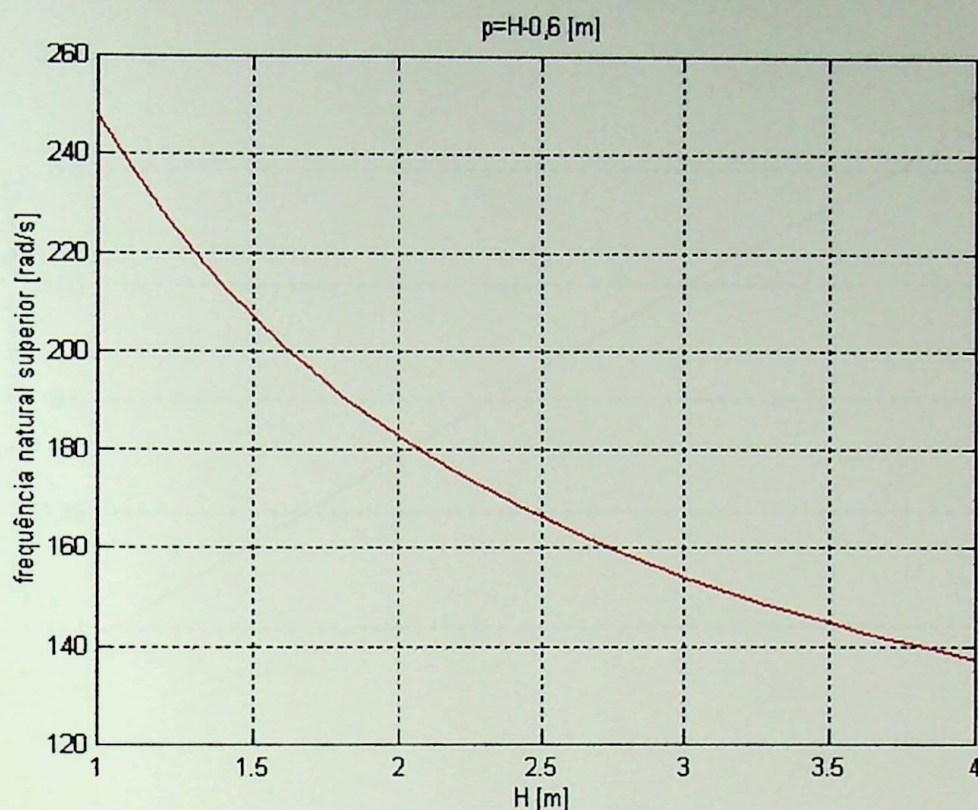


Figura 10.41: Frequência natural superior do acoplamento entre as coordenadas y e ϕ_x versus altura H da fundação ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

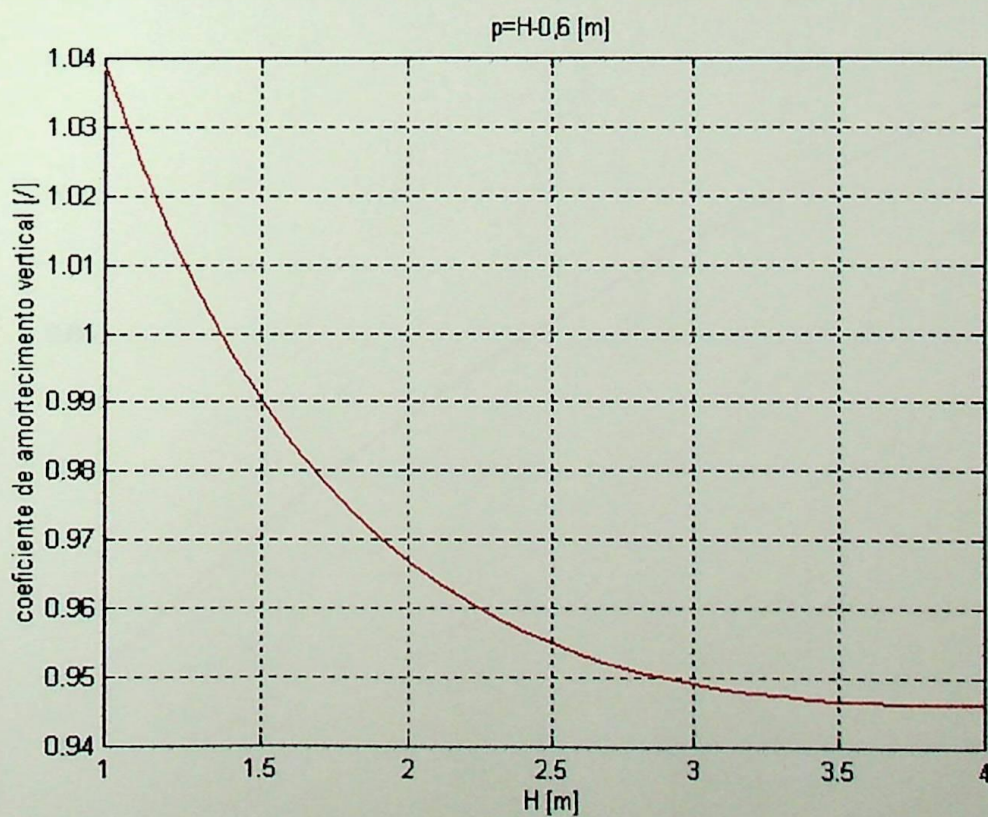


Figura 10.42: Coeficiente de amortecimento vertical versus altura H da fundação ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

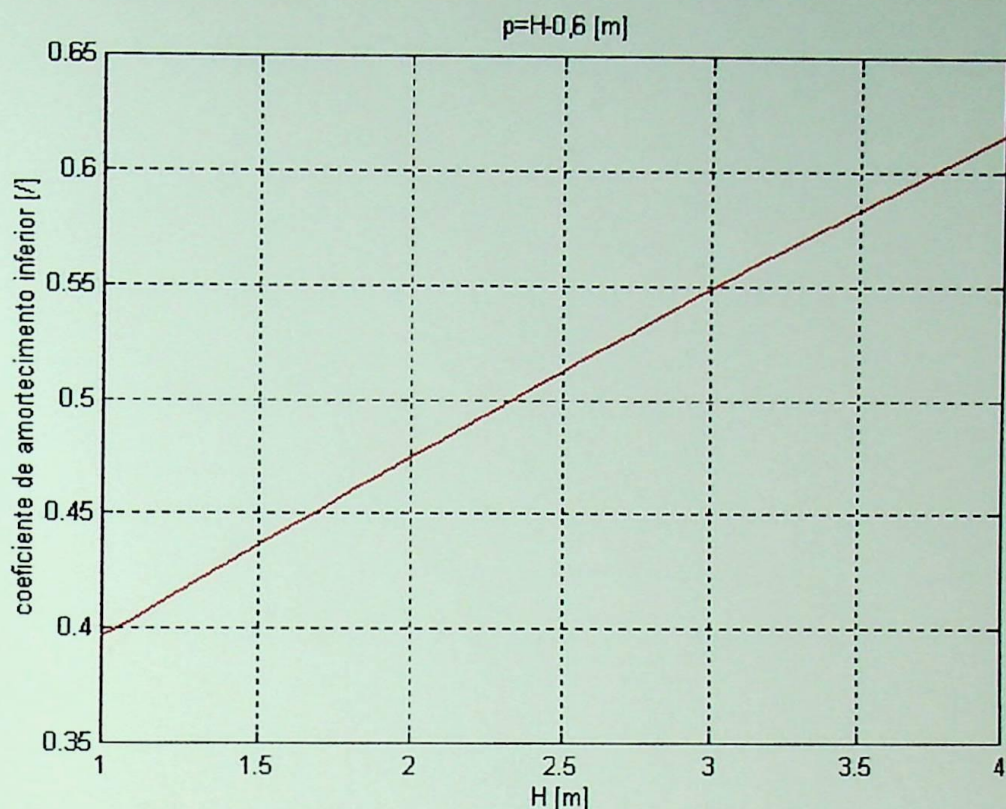


Figura 10.43: Coeficiente de amortecimento inferior de acoplamento entre as coordenadas x e ϕ_y versus altura H da fundação ($d_x = 8,4 \text{ [m]}$, $d_y = 4,8 \text{ [m]}$).

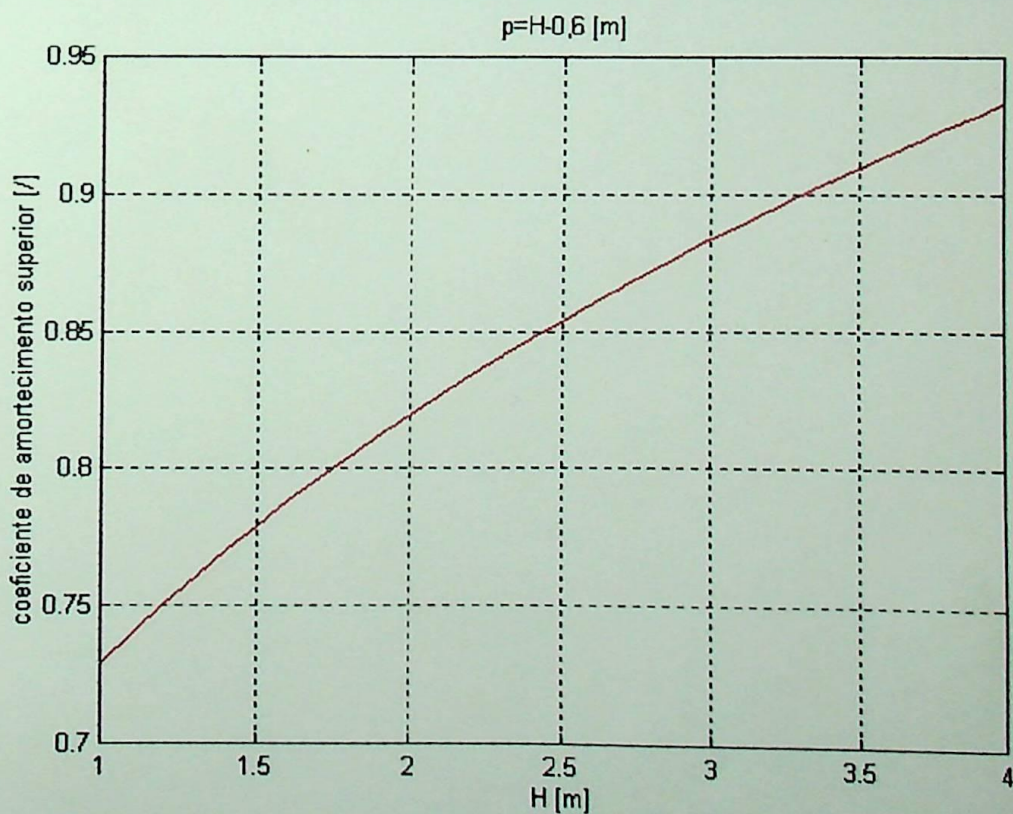


Figura 10.44: Coeficiente de amortecimento superior de acoplamento entre as coordenadas x e ϕ_y versus altura H da fundação ($d_x = 8,4 \text{ [m]}$, $d_y = 4,8 \text{ [m]}$).

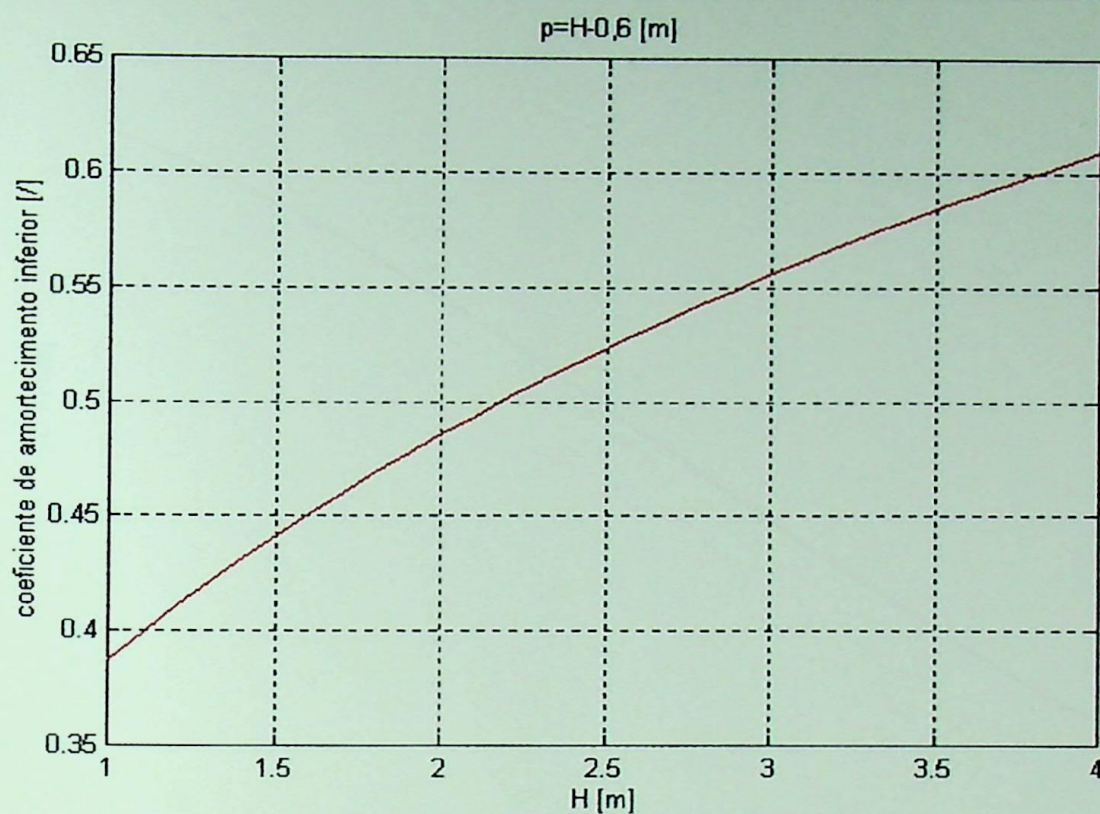


Figura 10.45: Coeficiente de amortecimento inferior de acoplamento entre as coordenadas y e ϕ_x versus altura H da fundação ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

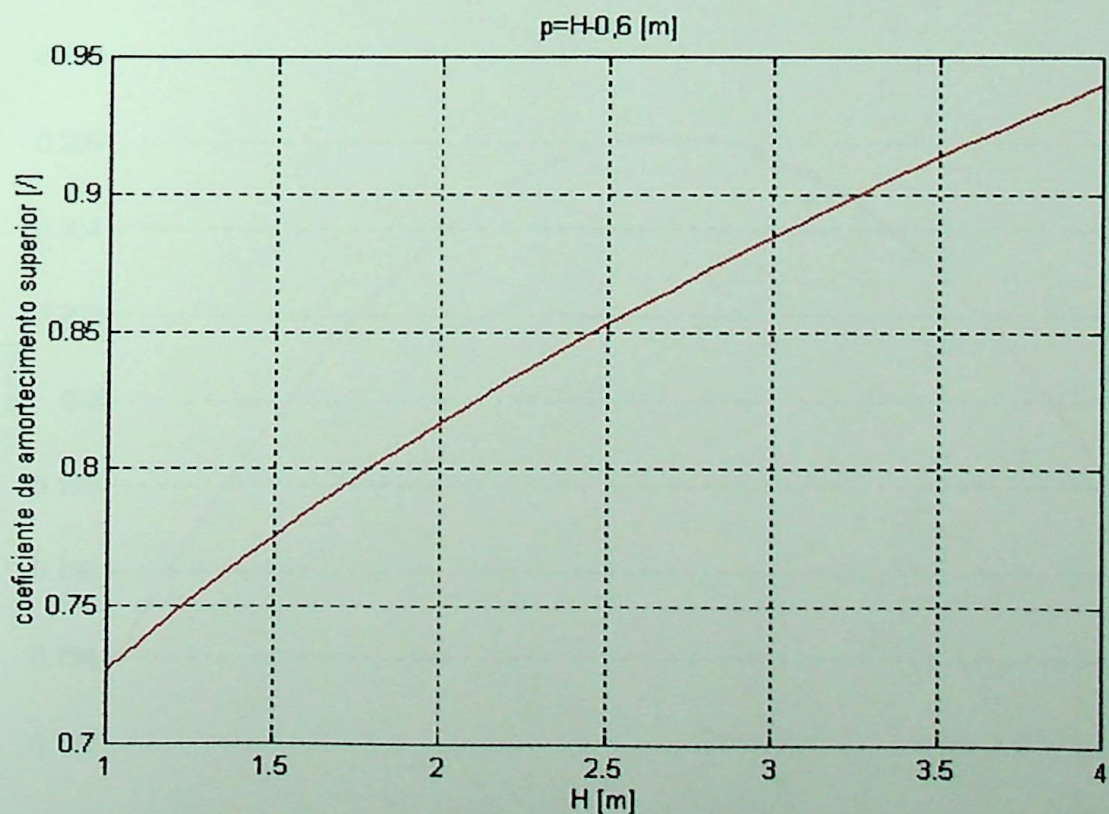


Figura 10.46: Coeficiente de amortecimento superior de acoplamento entre as coordenadas y e ϕ_x versus altura H da fundação ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

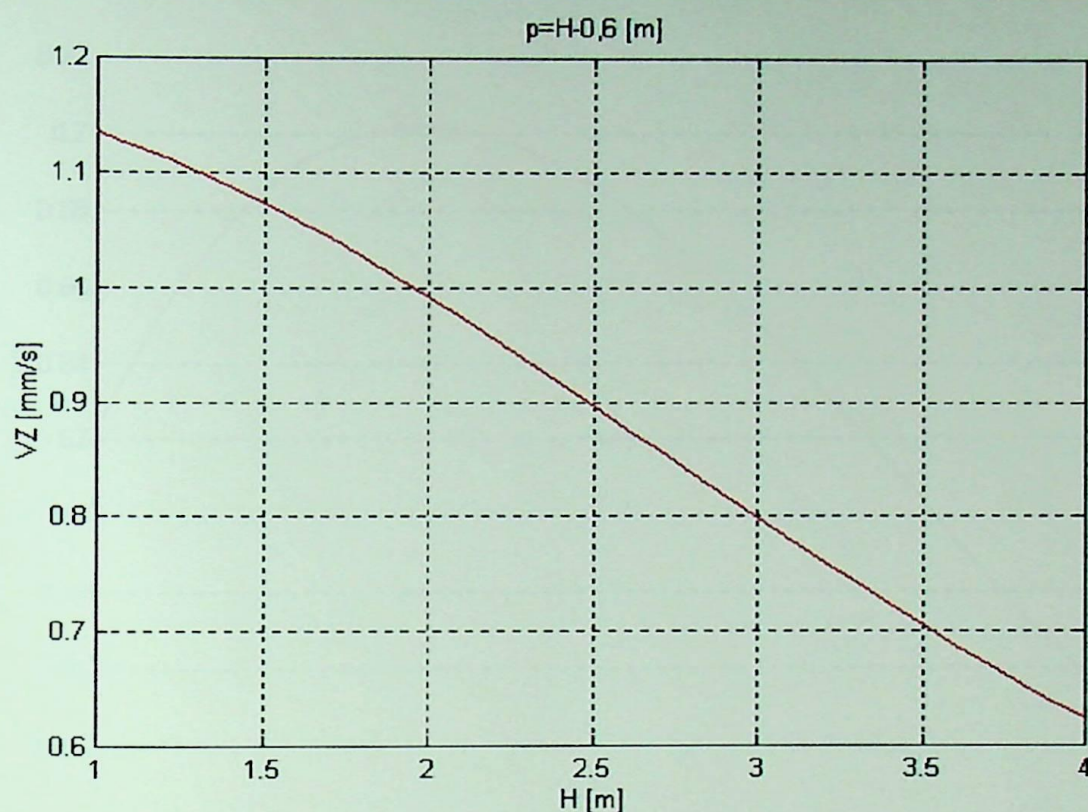


Figura 10.47: Velocidade na direção vertical e na borda da fundação versus altura H da fundação ($d_x = 8,4 \text{ [m]}$, $d_y = 4,8 \text{ [m]}$).

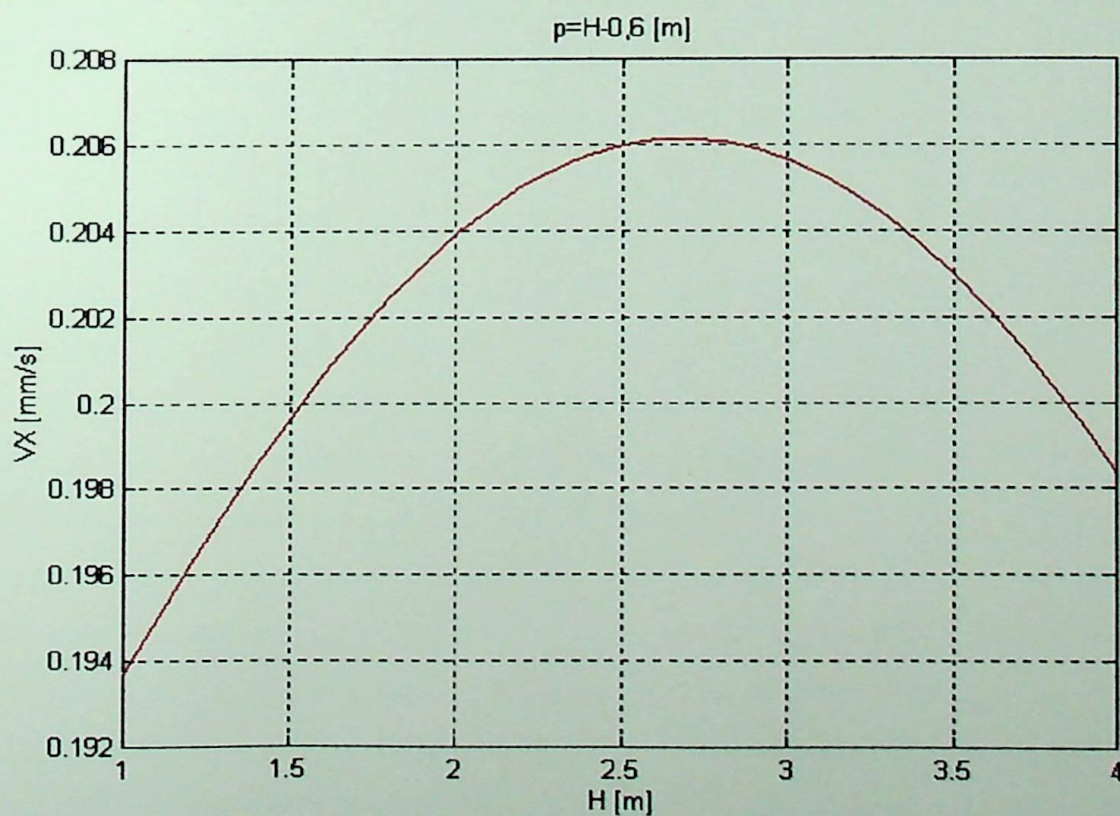


Figura 10.48: Velocidade na direção x e no eixo da máquina versus altura H da fundação ($d_x = 8,4 \text{ [m]}$, $d_y = 4,8 \text{ [m]}$).

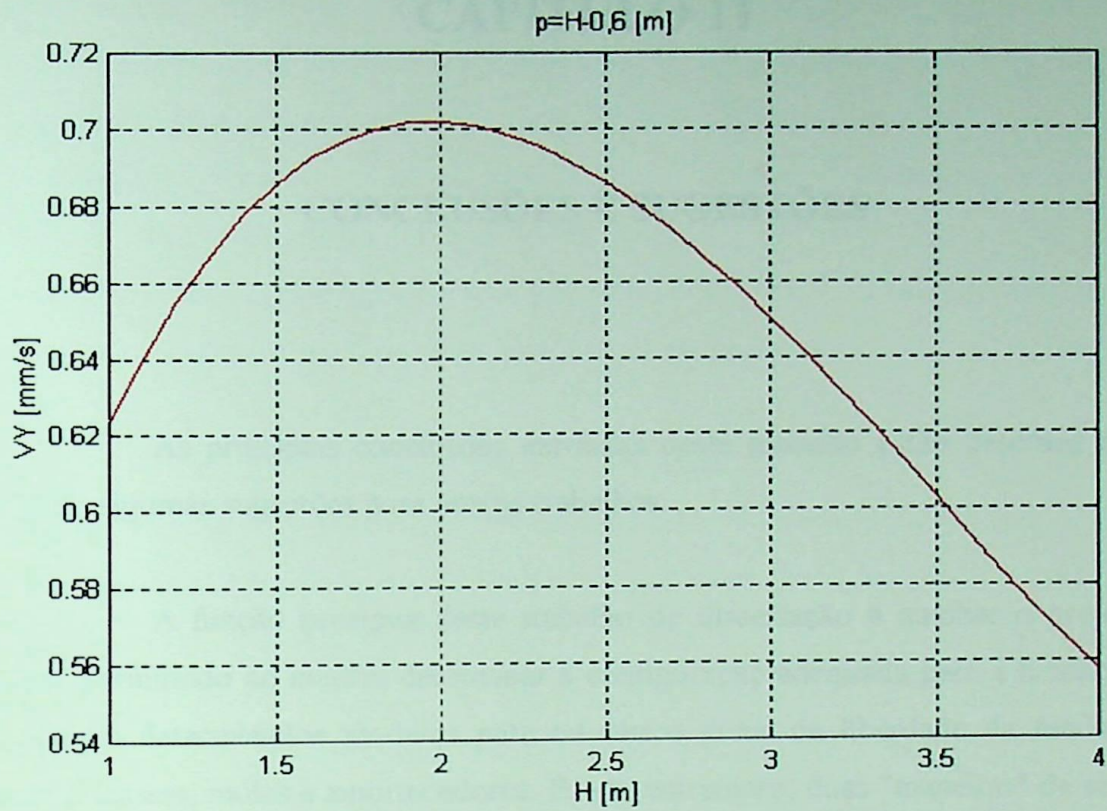


Figura 10.49: Velocidade na direção y e no eixo da máquina versus altura H da fundação ($d_x = 8,4$ [m], $d_y = 4,8$ [m]).

CAPÍTULO 11

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

As principais conclusões extraídas deste trabalho estão descritas a seguir, bem como algumas sugestões para outros trabalhos.

A função precípua deste trabalho de dissertação é auxiliar o projetista de máquina, permitindo ao mesmo determinar a configuração adequada para a fundação. Para tanto, foram determinados modelos para os vários graus de liberdade da fundação, em termos de massas, molas e amortecedores. Existe entretanto, duas "maneiras" de se tratar o problema. Uma é considerar todos os graus de liberdade independentes, ou desacoplados. Outra, é considerar o acoplamento entre o deslizamento e o balanço.

Alguns autores [Ref. (3)] apontam uma fórmula que diz se o resultado obtido pela desconsideração do acoplamento pode ser considerada justa. No entanto, esta fórmula leva em consideração apenas os valores das frequências naturais obtidas previamente para as coordenadas e a frequência de excitação da máquina. Esta é uma questão que pode ser tratada em algum outro trabalho de dissertação, inclusive para verificar a influência da altura h do centro de gravidade no comportamento dinâmico da fundação, visto que esta grandeza é que verdadeiramente diferencia as expressões em que se considera o acoplamento daquelas onde não se considera o acoplamento, e não as frequências quaisquer que sejam. Entretanto, a não ocorrência desta altura h nas expressões da rigidez e amortecimento quando trata-se as coordenadas independentes, pode ser resultado da escolha do posicionamento do eixo de pivotamento na base da fundação. Na teoria que considera o acoplamento o eixo de pivotamento passa no centro de gravidade do sistema máquina-fundação. Mas, esta questão da desconsideração do acoplamento era justificável em outra época onde os cálculos eram executados à mão, ou com poucos recursos, tornando-se morosos e desgastantes. Hoje em dia, com os recursos oferecidos pela informática, é

possível resolver problemas envolvendo as mais complicadas expressões matemáticas, bastando utilizar-se de algum software disponível no mercado, como o software matemático MatLab, ferramenta muito útil neste trabalho de dissertação, onde se pode programar genericamente o problema, e depois apenas incluir os dados necessários a execução do programa, e em questão de "segundos" obter a resposta desejável. Desta forma é possível experimentar várias configurações para a fundação, verificando assim o seu comportamento dinâmico na tentativa de se obter o melhor projeto, ou pelo menos se aproximar dele.

O comportamento dinâmico da fundação é menos "severo" quando torna-se suas dimensões cada vez maiores simultaneamente (d_x , d_y , e H). Isto é o que se constatou neste trabalho de dissertação pelo estudo de um caso específico [figs. (10.1) a (10.6)]. Mas, o que se percebeu também, é que a partir de um certo ponto aumentar a fundação pode significar pouquíssima mudança no estado anterior. Ocorre sim, um aumento do custo da fundação, e isto, obviamente, não é desejável. Pensando de uma forma generalizada, outros casos de fundação para outras máquinas, rotativas ou alternativas, terão aproximadamente o mesmo comportamento.

Outro fato constatado é que fixar a área da fundação e aumentar a altura fundação se reflete de forma adversa nas várias direções e nos diversos pontos estudados [figs. (10.34) a (10.36), (10.47) a (10.49)]. Pode ser que as amplitudes dos deslocamentos e velocidades cresçam ou diminuam com o aumento da fundação na vertical, informando assim, que além do inconveniente aumento de peso, crescer verticalmente a fundação pode ser até prejudicial ao comportamento dinâmico da fundação em determinada direção [figs. (10.35), (10.36), (10.48), (10.49)].

O comportamento dinâmico de uma fundação é dependente de outros parâmetros: as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento do sistema. A frequência natural é diretamente proporcional a raiz quadrada da rigidez, e inversamente a raiz quadrada da inércia. Isso mostra que o aumento ou diminuição desta grandeza se dá conforme a variação na rigidez e inércia. O aumento na configuração da fundação, tanto horizontalmente e verticalmente simultaneamente [figs. (10.9) a (10.13)], como apenas verticalmente [figs. (10.37) a (10.41)], ocasionaram a diminuição das frequências naturais. É certo então, que o aumento na configuração da fundação qualquer que seja, acarreta um

maior aumento na inércia do que na rigidez do sistema. É certo também que a rigidez sofre um aumento com o aumento na configuração da fundação, sendo que, esse aumento é mais evidente quando se cresce a área da base da fundação, do que a área lateral.

Quanto aos coeficientes de amortecimentos, estes apresentam comportamentos adversos com o aumento na configuração da fundação. Se o coeficiente de amortecimento cresce, isto é sinal que o amortecimento cresceu. Se, no entanto, o coeficiente de amortecimento decresce, tem-se que o amortecimento diminuiu [figs. (10.14) a (10.18), (10.42) a (10.46)]. Isto é verdade já que a rigidez e inércia também crescem com o aumento da configuração da fundação. Para o projeto tratado neste trabalho, o coeficiente de amortecimento vertical cresceu quando se aumentou a fundação horizontalmente [fig. (10.14)], e decresceu quando a fundação foi aumentada verticalmente [fig. (10.42)]. Já os coeficientes de amortecimento inferior e superior de acoplamento podem crescer ou diminuir com o aumento horizontal da fundação [figs (10.15) a (10.18)], porém, sempre cresceram com o aumento vertical da fundação [figs. (10.43) a (10.46)].

As conclusões da análise do comportamento do sistema máquina-fundação no meio elástico frente as variações na sua configuração, como foram feitas neste trabalho de dissertação, são de grande valor para o projetista de fundações, pois permitirá selecionar mais adequadamente as dimensões da fundação, do que se basear unicamente na recomendação convencional de projeto que estabelece que uma fundação para máquina deve se situar dentro de uma faixa limitada por uma razão menor e uma maior entre o peso da fundação e o da máquina, e decidir nesta faixa por uma configuração sem um estudo mais apurado.

Para o caso de uma máquina alternativa, recomenda-se que o peso mínimo da fundação deva ser três vezes o peso da máquina, porém, o peso máximo pode ser cinco vezes ou mais o peso da máquina. A questão dentro desta "filosofia" é, então, como distinguir qual a melhor configuração da fundação para suportar determinada máquina. A resposta é aproximadamente conquistada satisfazendo-se outras recomendações de projeto, tais como a manutenção da pressão total (estática+dinâmica) por unidade de área abaixo ou a setenta e cinco por cento da pressão admissível do meio elástico, e ainda, estabelecendo um nível para as amplitudes das vibrações, em função da frequência ω de operação da

máquina [ver Ref. (3)]. Este processo requer a repetição dos cálculos até que uma configuração adotada satisfaça os itens da “lista de verificação”. O esforço despendido na execução desta tarefa pode ser minimizado, logicamente, pela utilização de um software, e ainda, permitirá com um toque a mais de sofisticação visualizar a variação de determinado parâmetro importante no projeto, a exemplo da amplitude de vibração, através da apresentação gráfica (tridimensional ou bidimensional) deste parâmetro em função das várias variáveis de projeto (largura, comprimento, altura, profundidade de embutimento) de uma fundação. A partir da análise destes gráficos, pode-se então, estabelecer um universo de possíveis configurações e extrair daí a “melhor delas”.

Fica aqui, a proposta para um outro trabalho de dissertação, a análise do comportamento dinâmico de uma fundação em bloco com pilares, cujas conclusões desta análise serão de larga aplicação, vindo a completar este trabalho de dissertação.



APÊNDICE 1

SOLUÇÕES DE SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE E EXCITAÇÃO HARMÔNICA - MÉTODO DA MATRIZ INVERSA

Um sistema vibratório com vários graus de liberdade pode possuir modos acoplados e não acoplados [ver cap. (3)]. No caso específico de um sistema máquina-fundação, temos o total de seis graus de vibração: três translacionais, e três rotacionais. Desses seis graus, dois ocorrem totalmente independentes dos outros quatro, os quais são: o translacional vertical, e o rotacional em torno do eixo vertical, ou simplesmente deslocamento torcional. Os outros graus são acoplados, porém dois a dois, ou seja, o translacional horizontal (escorregamento) em uma direção acopla-se ao rotacional (balanço) na direção perpendicular a esta primeira.

A expressão geral e simplificada de um sistema com vários graus de liberdade é a seguinte:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (A1.1)$$

A expressão acima destaca vários termos, sendo que: $[M]$ é denominada matriz massa do sistema, $[C]$ é a denominada matriz amortecimento e, $[K]$ é a matriz rigidez do sistema. $\{q\}$ é um vetor modal, ou vetor contendo todos os possíveis movimentos ou graus de liberdade do sistema. $\{Q\}$ é o vetor excitação do sistema, e contém todas as forças motivadoras dos vários movimentos.

A seguir temos um exemplo simples, envolvendo apenas o movimento translacional na direção x , e o deslocamento rotacional em torno de y , ou ϕ_y . Tem-se, então [cap. (8)]:

$$M\ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x + c_{x\phi_y} \dot{\phi} + k_{x\phi_y} \phi = P_x(t) \quad (\text{A1.2})$$

$$I_y \ddot{\phi} + c_{\phi_y} \dot{\phi} + k_{\phi_y} \phi + c_{x\phi_y} \dot{x} + k_{x\phi_y} x = T_{\phi_y}(t) \quad (\text{A1.3})$$

Portanto, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x & c_{x\phi_y} \\ c_{x\phi_y} & c_{\phi_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & k_{x\phi_y} \\ k_{x\phi_y} & k_{\phi_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x(t) \\ T_{\phi_y}(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.4})$$

Na expressão acima, temos:

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix} \quad (\text{A1.4a})$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_x & c_{x\phi_y} \\ c_{x\phi_y} & c_{\phi_y} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.4b})$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_x & k_{x\phi_y} \\ k_{x\phi_y} & k_{\phi_y} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.4c})$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.4d})$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} P_x(t) \\ T_{\phi_y}(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.4e})$$

Considerando a excitação harmônica, podemos escrever:

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ T_{\phi_y} \end{Bmatrix} \cos(\omega t) \quad (\text{A1.5})$$

A resposta do sistema a excitação é do tipo:

$$\{q\} = \{a\} \cos \omega t + \{b\} \sin \omega t \quad (\text{A1.6})$$

As derivadas da expressão anterior são :

$$\{\dot{q}\} = -\{a\} \omega \sin \omega t + \{b\} \omega \cos \omega t \quad (\text{A1.7})$$

$$\{\ddot{q}\} = -\{a\} \omega^2 \cos \omega t - \{b\} \omega^2 \sin \omega t \quad (\text{A1.8})$$

Substituindo (A1.8), (A1.7), (A1.6), em (A1.3), e separando os termos em $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} [-[M]\{a\}\omega^2 + [c]\{b\}\omega + [k]\{a\}] \cos \omega t &= \{Q\} \cos \omega t \\ [-[M]\{b\}\omega^2 - [c]\{a\}\omega + [k]\{b\}] \sin \omega t &= \{0\} \sin \omega t \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

O sistema acima pode ser escrito na forma seguinte:

$$[E]\{A\} = \{Q\} \quad (\text{A1.10})$$

Onde:

$$[E] = \begin{bmatrix} [K] - [M]\omega^2 & \omega[C] \\ -\omega[C] & [K] - [M]\omega^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.11})$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.12})$$

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.13})$$

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.14})$$

A solução do sistema é dada pelo seguinte expressão:

$$\{A\} = [E]^{-1} \{Q\} \quad (\text{A1.15})$$

Assim:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \\ \phi_y &= a_2 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (\text{A1.16})$$

No caso um pouco mais complexo de uma excitação com dois componentes, um primário e um secundário, como é o caso de uma máquina alternativa em funcionamento, a matriz $[E]$ dobra de dimensão. Temos, então a seguinte expressão do movimento para a nova situação:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q1\} \cos \omega t + \{Q2\} \cos 2\omega t \quad (\text{A1.17})$$

Vamos considerar a seguinte solução para a expressão acima:

$$\{q\} = \{a\} \cos \omega t + \{b\} \sin \omega t + \{c\} \cos 2\omega t + \{d\} \sin 2\omega t \quad (\text{A1.18})$$

As derivadas primeira e segunda da expressão acima, são:

$$\{\dot{q}\} = -\{a\} \omega \sin \omega t + \{b\} \omega \cos \omega t - \{c\} 2\omega \sin 2\omega t + \{d\} 2\omega \cos 2\omega t \quad (\text{A1.19})$$

$$\{\ddot{q}\} = -\{a\} \omega^2 \cos \omega t - \{b\} \omega^2 \sin \omega t - \{c\} 4\omega^2 \cos 2\omega t - \{d\} 4\omega^2 \sin 2\omega t \quad (\text{A1.20})$$

Substituindo (A1.18), (A1.19) e (A1.20) em (A1.17), e separando os termos em $\cos\omega t$, $\sin\omega t$, $\cos 2\omega t$, e $\sin 2\omega t$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
 &[-[M]\{a\}\omega^2 + [c]\{b\}\omega + [k]\{a\}]\cos\omega t = \{Q1\}\cos\omega t \\
 &[-[M]\{b\}\omega^2 - [c]\{a\}\omega + [k]\{b\}]\sin\omega t = \{0\}\sin\omega t \\
 &[-[M]\{c\}\omega^2 + [c]\{d\}2\omega + [k]\{c\}]\cos 2\omega t = \{Q2\}\cos 2\omega t \\
 &[-[M]\{d\}\omega^2 - [c]\{c\}\omega + [k]\{d\}]\sin 2\omega t = \{0\}\sin 2\omega t
 \end{aligned}
 \tag{A1.21}$$

O sistema acima pode ser escrito na seguinte forma:

$$[E]\{A\} = \{Q\} \tag{A1.21a}$$

Onde:

$$[E] = \begin{bmatrix}
 [k] - [M]\omega^2 & \omega[c] & [0] & [0] \\
 -\omega[c] & [k] - [M]\omega^2 & [0] & [0] \\
 [0] & [0] & [k] - [M]4\omega^2 & 2\omega[c] \\
 [0] & [0] & -2\omega[c] & [k] - [M]4\omega^2
 \end{bmatrix}
 \tag{A1.22}$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \\ \{d\} \end{Bmatrix}
 \tag{A1.23}$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} \{Q1\} \\ \{0\} \\ \{Q2\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (A1.24)$$

Logo, a solução do sistema é dada pela seguinte expressão:

$$\{A\} = [E]^{-1} \{Q\} \quad (A1.25)$$

Com:

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (A1.26)$$

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (A1.27)$$

$$\{c\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (A1.28)$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (A1.29)$$

A resposta é da forma:

$$x = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + c_1 \cos 2\omega t + d_1 \sin 2\omega t \quad (A1.30a)$$

$$\phi_y = a_2 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t + c_2 \cos 2\omega t + d_2 \sin 2\omega t \quad (A1.30b)$$

APÊNDICE 2

DETERMINAÇÃO DA AMPLITUDE MÁXIMA DE UMA FUNÇÃO COM DOIS HARMÔNICOS

A determinação da amplitude máxima de uma função [eq. (A2.1)] composta por dois harmônicos, o primário em ω e o secundário em 2ω , será apresentada a seguir.

Seja a função.

$$F = f(t) = A_1 \operatorname{sen} \omega t + A_2 \operatorname{cos} \omega t + B_1 \operatorname{sen} 2\omega t + B_2 \operatorname{cos} 2\omega t \quad (\text{A2.1})$$

A derivada da expressão (A2.1) é:

$$\frac{dF}{dt} = \omega A_1 \operatorname{cos} \omega t - \omega A_2 \operatorname{sen} \omega t + 2\omega B_1 \operatorname{cos} 2\omega t - 2\omega B_2 \operatorname{sen} 2\omega t \quad (\text{A2.2})$$

Podemos escrever a equação acima simplificadamente, fazendo:

$$S = \operatorname{sen} \omega t \quad (\text{A2.2a})$$

$$C = \operatorname{cos} \omega t \quad (\text{A2.2b})$$

$$2SC = \operatorname{sen} 2\omega t \quad (\text{A2.2c})$$

$$(1 - 2S^2) = \operatorname{cos} 2\omega t \quad (\text{A2.2d})$$

Logo:

$$\frac{dF}{dt} = \omega A_1 C - \omega A_2 S + 2\omega B_1 (1 - 2S^2) - 2\omega B_2 SC \quad (\text{A2.3})$$

Igualando a expressão acima a zero, temos:

$$(A_1 - 4B_2S)C = A_2S - 2B_1(1 - 2S^2) \quad (\text{A2.4})$$

Elevando-se ambos os membros da expressão (A2.4) ao quadrado, e desenvolvendo, obtêm-se um polinômio do quarto grau em \underline{S} , ou $\text{sen}\omega t$:

$$\begin{aligned} &16(B_1^2 + B_2^2)S^4 + 8(A_2B_1 - A_1B_2)S^3 + \\ &\left[A_2^2 + A_1^2 - 16(B_1^2 + B_2^2) \right] S^2 + 4(2A_1B_2 - A_2B_1) + \\ &(4B_1^2 - A_1^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.5})$$

As raízes deste polinômio indicam os pontos extremos da função $f(t)$, possibilitando a determinação de sua máxima amplitude.

A velocidade máxima para a função $F=f(t)$, ocorrerá quando sua derivada segunda for igual a zero, e da mesma forma obteremos um polinômio de quarto grau:

$$\begin{aligned} &64(B_1^2 + B_2^2)S^4 + 16(A_2B_1 - A_1B_2)S^3 + \\ &\left[A_2^2 + A_1^2 - 64(B_1^2 + B_2^2) \right] S^2 + 8(A_1B_2 - 2A_2B_1) + \\ &(16B_2^2 - A_2^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.6})$$

As raízes deste polinômio permitem a obtenção do máximo da velocidade do movimento no tempo da função F .

APÊNDICE 3

PROGRAMA: FBCA.M

```
% *** Comportamento dinâmico de uma Fundação em bloco
% *** para compressores alternativos.

clear

%Dados da Máquina
n=585;
w=(2.*pi.*n)/60;
Mm=25000;

% *** Dados da Fundação
%H=1.5;
H=1.5;
p=0.9;
%dx=8.4;
dx=8.4;
%dy=4.8;
dy=4.8;
de=0.9;
dm=0.7;

% *** Cálculo do C.G do sistema máquina-fundação
% em relação a base da fundação
Mf=dx.*dy.*H.*2400;
Mt=Mf+Mm;
h=(Mf.*(H.*0.5)+Mm.*(H+dm))/Mt;

% *** Dados do solo
% massa específica
dens=1.87e3;
```


% Módulo de Elasticidade transversal e coeficiente de Poisson

G=9800e4;

v=0.35;

qsis=0.05;

%Cálculo das Inércias com relação ao CG.

$I_x = M_f \cdot (d_y.^2 + H.^2) / 12 + M_f \cdot (h - H \cdot 0.5).^2 + M_m \cdot (H + d_m - h).^2;$

$I_y = M_f \cdot (d_x.^2 + H.^2) / 12 + M_f \cdot (h - H \cdot 0.5).^2 + M_m \cdot (H + d_m - h).^2;$

% *** Forças e Momentos: primeiro e segundos componentes

% *** Convertendo unidades ***

% Multiplicar lbs por (0.4536*9.81) para obter Newton

% Multiplicar lbs-ft por (0.4536*9.81*0.3048) para obter Newton-metros

Q1=0.4536.*9.81.*[1329; 725; 11304.*0.3048; 0; 34000.*0.3048];

Q1(3)=Q1(3)+Q1(2).*(H+de-h);

Q1(5)=Q1(5)+Q1(4).*(H+de-h);

%

Q2=0.4536.*9.81.*[553; 0; 0; 0; 12350.*0.3048];

Q2(3)=Q2(3)+Q2(2).*(H+de-h);

Q2(5)=Q2(5)+Q2(4).*(H+de-h);

%

%Cálculo dos raios equivalentes

$r_o = \sqrt{d_x \cdot d_y / \pi};$

$r_{ofx} = (d_x \cdot d_y.^3 / (3 \cdot \pi)).^{0.25};$

$r_{ofy} = (d_y \cdot d_x.^3 / (3 \cdot \pi)).^{0.25};$

%

%Cálculo das constantes de mola

%modos translacionais

$p_r = p / r_o;$

$k_z = (4 \cdot G \cdot r_o / (1 - v)) \cdot (1 + 0.675 \cdot (1 - v) \cdot p_r);$

$k_x = (8 \cdot G \cdot r_o / (2 - v)) \cdot (1 + 0.49 \cdot (2 - v) \cdot p_r);$

$k_y = k_x;$

%modos rotacionais

$h_p = p.^2 / 3 - p \cdot h + h.^2;$

$h_{rx} = (h / r_{ofx}).^2;$


```

hry=(h./rofy).^2;
prfx=p./rofx;
prfy=p./rofy;
%
kfy=(8.*G.*rofy.^3./(3.*(1-v))).*(1+3.*(1-v)*hry./(2-v)+prfy.*0.94.*(1-v)+...
1.46.*(1-v)*prfy.*hp./(rofy.^2));
kxfy=(-8.*G*rofy./(2-v)).*(h+0.49.*(2-v).*prfy.*(h-p./2));
%
kfx=(8.*G.*rofx.^3./(3.*(1-v))).*(1+3.*(1-v).*hrx./(2-v)+prfx.*0.94.*(1-v)+...
1.46.*(1-v).*prfx.*hp./(rofx.^2));
kyfx=(-8.*G*rofx./(2-v)).*(h+0.49.*(2-v).*prfx.*(h-p./2));
%Cálculo das constantes de amortecimento
cz=(3.4.*ro.^2.*sqrt(dens.*G)./(1-v)).*(1+1.97.*(1-v).*pr);
cx=(4.6.*ro.^2.*sqrt(dens.*G)./(2-v)).*(1+2.*(2-v).*pr);
cy=cx;
%
cfy=0.43.*rofy.^4.*sqrt(dens.*G).*(1+10.7.*hry./(2-v)+4.2.*prfy+...
21.63.*prfy.*hp./(rofy.^2));
cxfy=(-4.6.*rofy.^2.*sqrt(dens.*G)./(2-v)).*(h+2.*(2-v).*prfy.*(h-p./2));
%
cfx=0.43.*rofx.^4.*sqrt(dens.*G).*(1+10.7.*hrx./(2-v)+4.2.*prfx+...
21.63.*prfx.*hp./(rofx.^2));
cyfx=(-4.6.*rofx.^2.*sqrt(dens.*G)./(2-v)).*(h+2.*(2-v).*prfx.*(h-p./2));
%
% Cálculo das constantes de amortecimento totais, incluindo a constante
% de amortecimento do sólo.
cz=cz+2.*qsis.*sqrt(Mt.*kz);
cx=cx+2.*qsis.*sqrt(Mt.*kx);
cfy=cfy+2.*qsis.*sqrt(Iy.*kfy);
cxfy=cxfy+2.*qsis.*sqrt(Iy.*abs(kxfy));

cy=cy+2.*qsis.*sqrt(Mt.*ky);
cfx=cfx+2.*qsis.*sqrt(Ix.*kfx);

```



```

cyfx=cyfx+2.*qsis.*sqrt(Ix.*abs(kyfx));
%Montando as Matrizes
M=diag([Mt Mt Iy Mt Ix]);
Cxy=[cx cxfy;cxfy cfy];
kxy=[kx kxfy;kxfy kfy];
Cyx=[cy cyfx;cyfx cfx];
kyx=[ky kyfx;kyfx kfx];
C=zeros(5);
C(1,1)=cz;
C(2:3,2:3)=Cxy;
C(4:5,4:5)=Cyx;
k=zeros(5);
k(1,1)=kz;
k(2:3,2:3)=kxy;
k(4:5,4:5)=kyx;
%
% *** Matriz Primária
kmw=k-w.^2.*M;
wc=w.*C;
E1=[kmw wc;-wc kmw];
% *** Matriz Secundária
kmw2=k-4.*w.^2.*M;
wc2=2.*wc;
E2=[kmw2 wc2;-wc2 kmw2];
%
%Matriz completa
E=[E1 zeros(10);zeros(10) E2];
%
%Cálculo da Resposta
Q=[Q1 ;zeros(size(Q1));Q2;zeros(size(Q2))];
A=inv(E)*Q;
%Determinação da Resposta
a=A(1:5);

```



```

b=A(6:10);
c=A(11:15);
d=A(16:20);
%
%
%*****
% ***Este trecho do programa determina o valor máximo
% de uma função  $y=A1\text{sen}(wt)+A2\text{cos}(wt)+B1\text{sen}(2wt)+B2\text{cos}(2wt)$ 
%*****
%
% aux é uma matriz auxiliar nos cálculos dos máximos
aux=[1 0 dx.*0.5 0 dy.*0.5;
      0 1 (H+de-h) 0 0;
      0 0 1 0 0;
      0 0 0 1 (H+de-h);
      0 0 0 0 1];
%
%
% *** Determinação da Resposta ***
for I=1:5,
%linha i da matriz aux (i-row aux)
    raux=aux(I,1:5);
%
% Cálculo dos coeficientes A e B
    A1=raux*b;
    A2=raux*a;
    B1=raux*d;
    B2=raux*c;
% Coeficientes do polinômio de 4 grau
    c1=16.*(B1.^2+B2.^2);
    c2=8.*(A2.*B1-A1.*B2);
    c3=A1.^2+A2.^2-16.*(B1.^2+B2.^2);
    c4=4.*(2.*A1.*B2-A2.*B1);

```



```

c5=4.*B1.^2-A1.^2;
CC=[c1 c2 c3 c4 c5];
r=roots(CC);
sw=rot90(r);
%Determinação do valor máximo do i-ésimo grau
%de liberdade
cwp=sqrt(1-sw.^2);
cwn=-1.*sqrt(1-sw.^2);
sn=[sw sw];
cn=[cwp cwn];
ig=-2.*B2.*sn.^2+A1.*sn+(A2+2.*B1.*sn).*cn+B2;
aig=abs(ig);
mig=max(aig);
%Determinação da velocidade máxima do i-ésimo grau
%de liberdade
% Coeficientes do polinômio de 4 grau
d1=64.*(B1.^2+B2.^2);
d2=16.*(A2.*B1-A1.*B2);
d3=A1.^2+A2.^2-64.*(B1.^2+B2.^2);
d4=8.*(A1.*B2-2.*A2.*B1);
d5=16.*B2.^2-A2.^2;
D=[d1 d2 d3 d4 d5];
r=roots(D);
sw=rot90(r);
%
%
cwp=sqrt(1-sw.^2);
cwn=-1.*sqrt(1-sw.^2);
sn=[sw sw];
cn=[cwp cwn];
vig=-w.*A2.*sn+(w.*A1-4.*w.*B2.*sn).*cn-4.*w.*B1.*sn.^2+2.*w.*B1;
avig=abs(vig);
mvig=max(avig);

```



```

%
% *** Vetores valores máximos de deslocamento
% e de velocidade dos vários graus de liberdade
    IG(I)=mig;
    VIG(I)=mvig;
%
end
%
% *****
% *** Cálculo dos Autovalores ***
P=[zeros(5) eye(5);-inv(M)*k -inv(M)*C];
av=eig(P);
%vetor frequências naturais
vwn=abs(av);
%vetor coeficientes de amortecimentos
rav=-real(av);
vqsi=rav./vwn;
%vetor frequência natural amortecida
vwnd=abs(imag(av));
%Vetores de saída
J=1;
for IP=1:2:9,
    wn(J)=vwn(IP);
    qsi(J)=vqsi(IP);
    wnd(J)=vwnd(IP);
    J=J+1;
end
% *****
%
IG(1)=1000.*IG(1);
IG(2)=1000.*IG(2);
IG(4)=1000.*IG(4);
%
```



```
VIG(1)=1000.*VIG(1);
VIG(2)=1000.*VIG(2);
VIG(4)=1000.*VIG(4);

% *** Frequências e coeficientes de amortecimento. ***
for J=2:2:10,

    if imag(av(J))==0
        wn(J./2)=sqrt(av(J-1)*av(J));
        qsi(J./2)=-1.*(av(J-1)+av(J))./(2.*wn(J./2));
    end
end

end
%*****
IG
VIG
wn
qsi
wnd
% *****
%
% END OF PROGRAM.
```


APÊNDICE 4

PROGRAMA: SUPAMP.M

```
% *** Comportamento dinâmico de uma Fundação em bloco
% *** para compressores alternativos versus configuração.
% *** Superfícies das Amplitudes na borda Z e no eixo X e Y.
clear
%Dados da Máquina
n=585;
w=(2.*pi.*n)/60;
Mm=25000;
% *** Dados fixos da Fundação
de=0.9;
dm=0.7;
% *** Dados do solo
% massa específica
dens=1.87e3;
% Módulo de Elasticidade transversal e coeficiente de Poisson
G=9800e4;
v=0.35;
qsis=0.05;
% Contador de linhas J-Row
JR=0;

for dx=8:0.1:9,
JR=JR+1;
%Contador de Colunas J-Column
JC=0;
```


for dy=4:0.1:6,

% Escolha da altura H da fundação.

% Height Choose.(HC)

% vetor dimensões básicas: db

db=[dx dy];

% maior dimensão e menor dimensão

dbmx=max(db);

dbmn=min(db);

%

HC=[0.1.*dbmx 0.2.*dbmn];

H=max(HC);

if H<1.2

 H=1.2;

end

%Profundidade de Embutimento.

p=H-0.6;

% *** Cálculo do C.G do sistema máquina-fundação

% em relação a base da fundação

Mf=dx.*dy.*H.*2400;

Mt=Mf+Mm;

h=(Mf.*(H.*0.5)+Mm.*(H+dm))./Mt;

% *** Forças e Momentos: primeiro e segundos componentes

% *** Convertendo unidades ***

% Multiplicar lbs por (0.4536*9.81) para obter Newton

% Multiplicar lbs-ft por (0.4536*9.81*0.3048) para obter Newton-metros

Q1=0.4536.*9.81.*[1329; 725; 11304.*0.3048; 0; 34000.*0.3048];

Q1(3)=Q1(3)+Q1(2).*(H+de-h);

Q1(5)=Q1(5)+Q1(4).*(H+de-h);

%


```

Q2=0.4536.*9.81.*[553; 0; 0; 0; 12350.*0.3048];
Q2(3)=Q2(3)+Q2(2).*(H+de-h);
Q2(5)=Q2(5)+Q2(4).*(H+de-h);
%Cálculo dos raios equivalentes
ro=sqrt(dx.*dy./pi);
rofx=(dx.*dy.^3./(3.*pi)).^0.25;
rofy=(dy.*dx.^3./(3.*pi)).^0.25;
%
%Cálculo das constantes de mola
%modos translacionais
pr=p./ro;
kz=(4.*G.*ro./(1-v)).*(1+0.675.*(1-v).*pr);
kx=(8.*G.*ro./(2-v)).*(1+0.49.*(2-v).*pr);
ky=kx;
%modos rotacionais
hp=p.^2./3-p.*h+h.^2;
hrx=(h./rofx).^2;
hry=(h./rofy).^2;
prfx=p./rofx;
prfy=p./rofy;
%
kfy=(8.*G.*rofy.^3./(3.*(1-v))).*(1+3.*(1-v)*hry./(2-v)+prfy.*0.94.*(1-v)+...
1.46.*(1-v)*prfy.*hp./(rofy.^2));
kxfy=(-8.*G*rofy./(2-v)).*(h+0.49.*(2-v).*prfy.*(h-p./2));
%
kfx=(8.*G.*rofx.^3./(3.*(1-v))).*(1+3.*(1-v).*hrx./(2-v)+prfx.*0.94.*(1-v)+...
1.46.*(1-v).*prfx.*hp./(rofx.^2));
kyfx=(-8.*G*rofx./(2-v)).*(h+0.49.*(2-v).*prfx.*(h-p./2));
%Cálculo das constantes de amortecimento
cz=(3.4.*ro.^2.*sqrt(dens.*G)./(1-v)).*(1+1.97.*(1-v).*pr);
cx=(4.6.*ro.^2.*sqrt(dens.*G)./(2-v)).*(1+2.*(2-v).*pr);
cy=cx;
%
```



```

cfy=0.43.*rofy.^4.*sqrt(dens.*G).*(1+10.7.*hry./(2-v)+4.2.*prfy+...
21.63.*prfy.*hp./(rofy.^2));
cxfy=(-4.6.*rofy.^2.*sqrt(dens.*G)./(2-v)).*(h+2.*(2-v).*prfy.*(h-p./2));
%
cfx=0.43.*rofx.^4.*sqrt(dens.*G).*(1+10.7.*hrx./(2-v)+4.2.*prfx+...
21.63.*prfx.*hp./(rofx.^2));
cyfx=(-4.6.*rofx.^2.*sqrt(dens.*G)./(2-v)).*(h+2.*(2-v).*prfx.*(h-p./2));
% Cálculo das Inércias
Ix=Mf.*(dy.^2+H.^2)/12+Mf.*(h-H.*0.5).^2+Mm.*(H+dm-h).^2;
Iy=Mf.*(dx.^2+H.^2)/12+Mf.*(h-H.*0.5).^2+Mm.*(H+dm-h).^2;
%
% Cálculo das constantes de amortecimento totais, incluindo a constante
% de amortecimento do sólo.
cz=cz+2.*qsis.*sqrt(Mt.*kz);
cx=cx+2.*qsis.*sqrt(Mt.*kx);
cfy=cfy+2.*qsis.*sqrt(Iy.*kfy);
cxfy=cxfy+2.*qsis.*sqrt(Iy.*abs(kxfy));

cy=cy+2.*qsis.*sqrt(Mt.*ky);
cfx=cfx+2.*qsis.*sqrt(Ix.*kfx);
cyfx=cyfx+2.*qsis.*sqrt(Ix.*abs(kyfx));

%Montando as Matrizes
M=diag([Mt Mt Iy Mt Ix]);
Cxy=[cx cxfy;cxfy cfy];
kxy=[kx kxfy;kxfy kfy];
Cyx=[cy cyfx;cyfx cfx];
kyx=[ky kyfx;kyfx kfx];
C=zeros(5);
C(1,1)=cz;
C(2:3,2:3)=Cxy;
C(4:5,4:5)=Cyx;

```



```

k=zeros(5);
k(1,1)=kz;
k(2:3,2:3)=kxy;
k(4:5,4:5)=kyx;

% *** Matriz Primária
kmw=k-w.^2.*M;
wc=w.*C;
E1=[kmw wc;-wc kmw];
% *** Matriz Secundária
kmw2=k-4.*w.^2.*M;
wc2=2.*wc;
E2=[kmw2 wc2;-wc2 kmw2];
%
%Matriz completa
E=[E1 zeros(10);zeros(10) E2];
%
%Cálculo da Resposta
Q=[Q1 ;zeros(size(Q1));Q2;zeros(size(Q2))];

%Cálculo da Resposta
A=inv(E)*Q;
%Determinação da Resposta
a=A(1:5);
b=A(6:10);
c=A(11:15);
d=A(16:20);
%
%
%*****
% ***Este trecho do programa determina o valor máximo
% de uma função  $y=A_1\sin(\omega t)+A_2\cos(\omega t)+B_1\sin(2\omega t)+B_2\cos(2\omega t)$ 
%*****

```



```
%
% aux é uma matriz auxiliar nos cálculos dos máximos
```

```
aux=[1 0 dx.*0.5 0 dy.*0.5;
      0 1 (H+de-h) 0 0;
      0 0 1 0 0;
      0 0 0 1 (H+de-h);
      0 0 0 0 1];
```

```
% *** Determinação da Resposta ***
```

```
for I=1:5,
```

```
%linha i da matriz aux (i-row aux)
```

```
raux=aux(I,1:5);
```

```
%
```

```
% Cálculo dos coeficientes A e B
```

```
A1=raux*b;
```

```
A2=raux*a;
```

```
B1=raux*d;
```

```
B2=raux*c;
```

```
% Coeficientes do polinômio de 4 grau
```

```
c1=16.*(B1.^2+B2.^2);
```

```
c2=8.*(A2.*B1-A1.*B2);
```

```
c3=A1.^2+A2.^2-16.*(B1.^2+B2.^2);
```

```
c4=4.*(2.*A1.*B2-A2.*B1);
```

```
c5=4.*B1.^2-A1.^2;
```

```
CC=[c1 c2 c3 c4 c5];
```

```
r=roots(CC);
```

```
sw=rot90(r);
```

```
%Determinação do valor máximo do i-ésimo grau
```

```
%de liberdade
```

```
cwp=sqrt(1-sw.^2);
```

```
cwn=-1.*sqrt(1-sw.^2);
```

```
sn=[sw sw];
```



```

cn=[cwp cwn];
ig=-2.*B2.*sn.^2+A1.*sn+(A2+2.*B1.*sn).*cn+B2;
aig=abs(ig);
mig=max(aig);

% *** Vetores valores máximos de deslocamento
IG(I)=mig;
%
end
%
% *** Vetores valores máximos de deslocamento
JR;
JC=JC+1;

IG(1)=1000.*IG(1);
IG(2)=1000.*IG(2);
IG(4)=1000.*IG(4);

X(JR,JC)=dx;
Y(JR,JC)=dy;
Z1(JR,JC)=IG(1);
Z2(JR,JC)=IG(2);
Z4(JR,JC)=IG(4);
end

end

surfc(X,Y,Z1)
xlabel('dx [m]')
ylabel('dy [m]')
zlabel('Z [mm]')
title('H>1,2 [m] e H-p=0,6 [m]')

```



```
colormap(gray)
view(-35,-15)
grid
```

```
figure(2)
surfc(X,Y,Z2)
xlabel('dx [m]')
ylabel('dy [m]')
zlabel('X [mm]')
title('H>1,2 [m] e H-p=0,6 [m]')
colormap(gray)
view(-35,-15)
grid
```

```
figure(3)
surfc(X,Y,Z4)
xlabel('dx [m]')
ylabel('dy [m]')
zlabel('Y [mm]')
title('H>1,2 [m] e H-p=0,6 [m]')
colormap(gray)
view(-35,-15)
grid
```



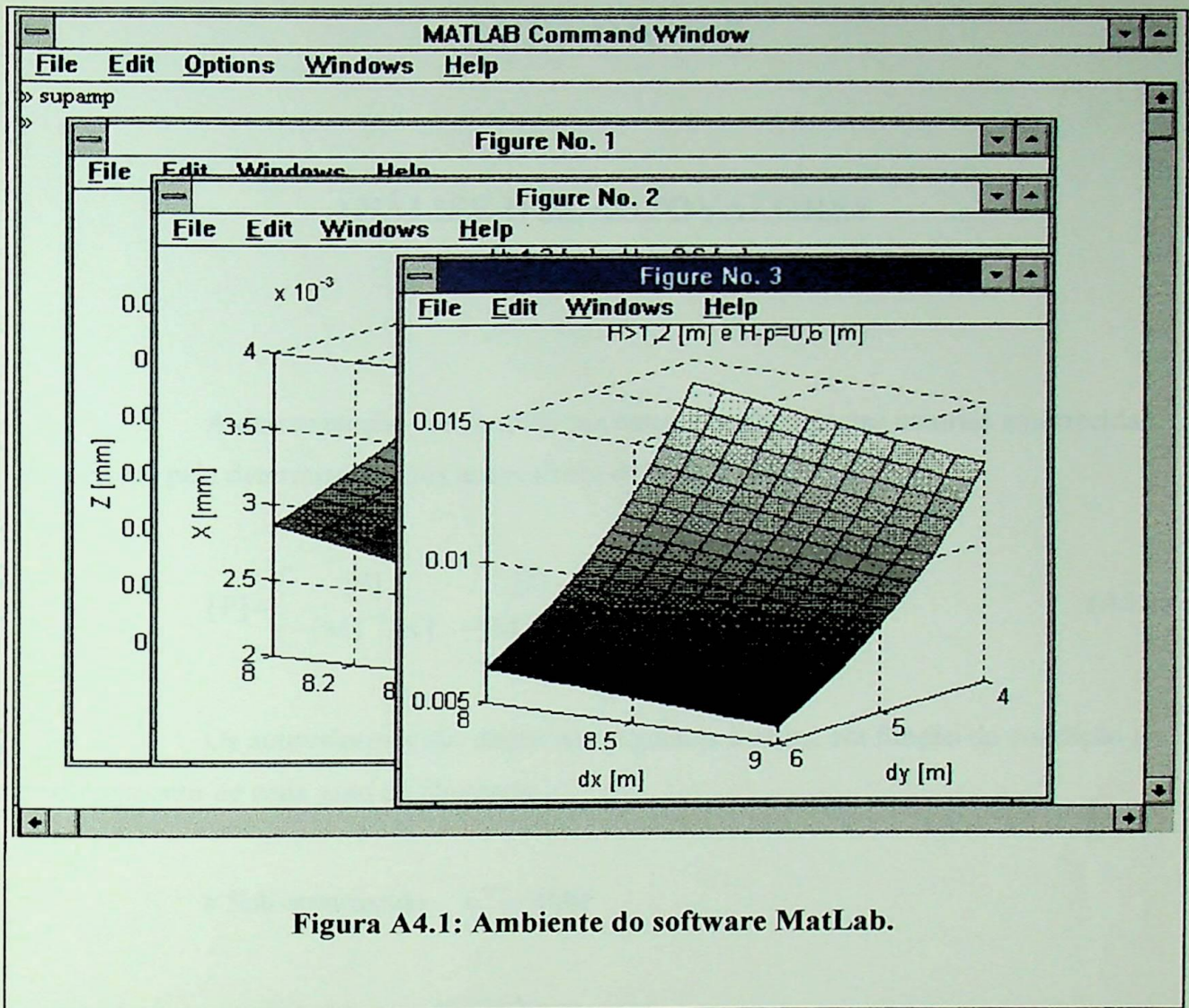


Figura A4.1: Ambiente do software MatLab.

APÊNDICE 5

ANÁLISE DOS AUTOVALORES

A determinação das frequências naturais e frequências naturais amortecidas são obtidas pela determinação dos autovalores da Matriz [P]:

$$[P] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \quad (A5.1)$$

Os autovalores s são dados nas seguintes formas, em função da condição de amortecimento de cada grau de liberdade:

- Sub-amortecido: $c^2 < 4kM$

$$s_{1,2} = \omega_n \left(-\xi \pm i \sqrt{1 - \xi^2} \right) \quad (A5.2)$$

O módulo dos autovalores nos fornecem a frequência natural; a parte real dividida pela frequência natural determina o coeficiente de amortecimento ξ . A parte imaginária nos fornece a frequência natural amortecida.

- Criticamente amortecido: $c^2 = 4kM$

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2M} \quad (A5.3)$$

- Super-amortecido: $c^2 > 4kM$

$$s_{1,2} = \omega_n \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \quad (\text{A5.4})$$

Para os dois últimos casos citados anteriormente, as frequências naturais, e os coeficientes de amortecimento são determinados da seguinte forma:

$$\omega_n = \sqrt{s_1 \cdot s_2} \quad (\text{A5.5})$$

$$\xi = -\frac{s_1 + s_2}{2\sqrt{s_1 \cdot s_2}} \quad (\text{A5.6})$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Richard, R. E. et alii,-"Vibrations of Soils and Foundations"-Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1970.
- [2] Prakash, Shamsher & Puri, Vilay K.,-"Foundations for Machines Analysis and Design"- John Wiley & Sons, Inc., 1988.
- [3] Arya, S. C. et alii,-"Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines"- Houston Texas. Ed. Gulf Publishing Company, 1979.
- [4] Inman, Daniel J., -"Engineering Vibration" - Prentice-Hall International, Inc., 1994.
- [5] Almeida, M. T., - "Vibrações Mecânicas para Engenheiros" - Edgar Blücher Ltda, 1987.
- [6] Matlab, *Matlab Works*, Third Printing (2.0) U.S.A., 1994.
- [7] Terzaghi, Karl & Peck, Ralph B. -"Mecânica dos Solos na Prática da Engenharia" - Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1962.
- [8] Major Alexander - "Vibration Analysis and Design of Foundations for Machines and Turbines" - Akadémiai Kiadó, Budapest Collet's Holdings Limited, London, 1962.
- [9] Gazetas, George - "Analysis of machine foundation vibrations: state of the art" - Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1983, Vol. 2, nº 1, CML Publications.
- [10] Lamb, H. - "On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid" - Philosophical Transactions of the Royal Society, London, 1904, Ser. A, Vol. 203, p. 1-42.

- [11] Reissner, E. - "Stationäre, axialsymmetrische durch eine Schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes" - Ingenieur Archiv, 1936, Vol. 7, p. 381-396.
- [12] Quinlan, P. M. - "The Elastic Theory of Soil Dynamics" - Symposium on Dynamic Testing of Soils, 1953, ASTM STP N° 156, p. 3-34.
- [13] Sung, T. Y. - "Vibrations in Semi-Infinite Solids due to Periodic Surface Loadings" - Symposium on Dynamic Testing of Soils, 1953, ASTM STP N° 156, p. 35-64.
- [14] Sung, T. Y. - "Vibrations in Semi-Infinite Solids due to Periodic Surface Loadings" - Harvard University, 1953. Tese.
- [15] Housner, G. W & Castellani, A. - "Discussion of Comparison of Footing Vibration Tests with Theory" por F. E. Richart, Jr. & R. V. Whitman, J., Soil Mech. and Found. Div. Proc. ASCE, 1969, Vol. 95, p. 360-364.
- [16] Fistedis, S. H. - "Vibration-Resistant Prestressed Concrete Foundations for Engines and Compressors", Proc. World Conference on Prestressed Concrete, San Francisco, 1957.
- [17] Richart, F. E., Jr., - "Foundation Vibrations" - Trans. ASCE, 1962, Vol. 127, pp. 863-898.
- [18] Richart, F. E, Jr. & Whitman, R. V., - "Comparison of Footing Vibration Tests with Theory" - J. Soil Mech. and Found. Div., Proc. ASCE, 1967, Vol. 93, p. 143-168.
- [19] Bycroft, G. N. - "Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-infinite Elastic Space and on an Elastic Stratum" - Philosophical Trans., Royal Society, London, 1956, Vol. 248, p. 327-368.
- [20] Hsieh, T. K. - "Foundation Vibrations" - Proc. Institution of Civil Engineers, 1962, Vol. 22, p. 211-226.

- [21] Lysmer, J. - "Vertical Motion of Rigid Footings" - Univ. Michigan, 1965. Tese de pós Doutorado.
- [22] Lysmer, J. & Richart, F. E., Jr. - "Dynamic Response of Footings to Vertical Loading", J. Soil Mech. and Found. Div., Proc. ASCE, 1966, Vol. 92, p. 65-91.
- [23] Reissner, E. - "Freie und erzwungene Torsionschwingungen des elastischen Halbraumes" - Ingenieur-Archiv, 1937, Vol. 8, p. 229-245.
- [24] Reissner, E & Sagoci, H. F. - "Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space"- J. of Appl. Phys., 1944, Vol. 15, p. 652-662.
- [25] Arnold, R. N. et alii. - "Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid"- J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1955, Vol. 77, p. 391-401.
- [26] Hall, J. R., Jr. - " Coupled Rocking and Sliding Oscillations of Rigid Circular Footings"- Proc. International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Albuquerque, 1967.
- [27] Kobori, T. - "Dynamical Response of Rectangular Foundations on an Elastic Half-Space" - Proc. Japanese National Symposium on Earthquake Eng., 1962,p. 81-86.
- [28] Thomsom, W. T. & Kobori, T. - "Dynamical Compliance of Retangular Foundations on an Elastic Half-Space" - J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1963, p. 579-584
- [29] Elorduy, J., et alii - "Dynamic Response of Bases of Arbitrary Shape Subjected to Periodic Vertical Loading" - Proc. International Symposium on wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Albuquerque, 1967.
- [30] Chae, Y. S. - "Vibrations of non-circular foundations" - J. Soil Mech. Found. Div., Am. Soc. Civ. Eng., 1969, p. 1411-1430.

- [31] Dobry, R. & Gazetas, G. - "Dynamic response of arbitrarily shaped foundations" - J. Geotech. Eng. Div., Am. Soc. Civ. Eng. 112 (GT-2), 1986, p. 109-135.
- [32] Dobry, R. et alii - " Dynamic response of arbitrarily shaped foundations" - J. Geotech. Eng. Div., Am. Soc. Civ. Eng. 112 (GT-2), 1986, p. 136-159.
- [33] Baranov, V. A. - "On the calculation of excited vibrations of an embedded foundation " - Vopr. Dyn. Prochn. 14, 1967, p. 195-209.
- [34] Novak, M. & Beredugo, Y. O. - "Effect of embedment on footing vibration" - Proc. Can. Conf. Earthquake Eng., Vancouver, 1971, p. 111-125.
- [35] Novak, M. & Beredugo, Y. O. - "Vertical vibration of embedded footings" - J. Soil Mech. Found. Div., Am. Soc. Civ. Eng. 98 (SM-12), 1972, p. 1291-1310.
- [36] Beredugo, Y. O. - "Vibrations of embedded symmetric footings" - Univ. Western Ontario, Canada, 1971. Tese de pós Doutorado.
- [37] Beredugo, Y. O. - "Modal Analysis of coupled motion of horizontally excited embedded footings" - Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dyn. 4, 1976,p. 3-410.
- [38] Novak, M. & Sachs, K. - "Torsional and coupled vibrations of embedded footings" - Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dyn. 2, 1973, p. 11-33.
- [39] Novak, M. - "Prediction of footing vibrations" - J. Soil Mech. Found. Div., Am. Soc. Civ. Eng. 96 (SM-3), 1970,p. 836-861.
- [40] Novak, M. - "Experiments with shallow and deep foundations" - Proc. Symp. Vib. Probl. Geotech. Eng. Am. Soc. Civ. Eng., 1985, p. 1-26.
- [41] Fry, Z. B. - "Development and Evaluation of Soil Bearing Capacity, Foundation of Structures" - Waterways Exp. Sta. Tech. Rep. No.,1973.

- [42] Stokoe, K. H., II - "Dynamic response of embedded foundations" - Univ. Michigan 1972. Tese de pós Doutorado.
- [43] Stokoe, K. H., II & Richart, F. E., Jr. - "Dynamic response of embedded machine foundation" - J. Geotech. Eng. Div., Am. Soc. Civ. Eng. 100 (GT-4), 1974, p. 427-447.
- [44] Chae, Y. S. - "Dynamic Behaviour of embedded foundation soil systems" - Highw. Res. Rec. 323, 1971, p. 49-59.
- [45] Gupta, B. N. - "Effect of foundation embedment on the dynamic behaviour of the foundation soil system" - Geotechnique 22(1), 1972, p. 129-137.
- [46] Vijayvergiya, R. C. - "Response of embedded foundations" - Univ. Roorkee, India, 1981. Tese de pós Doutorado.
- [47] Beredugo, Y. O. & Novak, M. - "Coupled horizontal and Rocking vibration of embedded footings" - Can. Geotech. J. 9 (4), 1972, p. 477-497.

DATA 04/06/1997
PROC.
PED. PPG
LIV.
RS Osasco

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200896

NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA