

TESE

898

CÍCERO LUIZ ALVES CUNHA

*ESPALHAMENTO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS
EM PLASMAS QUENTES*

Tese apresentada ao Instituto de Engenharia Elétrica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI para obtenção do Grau de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica, na área de Automação e Controle Industrial.

Orientadores: Aroldo Borges Diniz, D. C.
José Antônio Justino Ribeiro, MEE

ITAJUBÁ - MG
1996

*“Muitos fracassam , não por supervalorizarem
suas capacidades , mas por subestimá-las”.*

(Dorothea Brande)

*“Um quilo de determinação vale mais que uma
tonelada de sorte”.*

(James A. Garfield)

*Se você hesita no caminho a seguir , nem
prossiga .*

*A fé se avalia pela perseverança e fidelidade . A
ação baseada na certeza do que se pretende
transforma as coisas , os fatos e as relações .*

Se você deseja a felicidade—conquiste-a .

Se deseja a paz—enxergue-a dentro de você .

*Desvie seu pensamento quando sentir a
negatividade ao seu redor .*

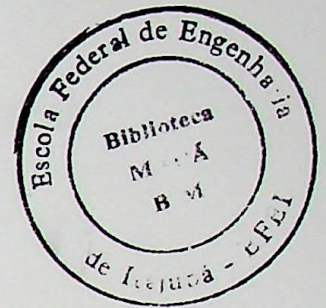
*Pense em coisas saudáveis e diga em voz alta
palavras como : paz , amor , calma , perdão ,
felicidade , harmonia etc.*

Isole o que for ruim .

Absorva somente o bem .

Dialogue com Jesus .

(Maria Bulek)



ESPALHAMENTO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS
EM
PLASMAS QUENTES

CLASS.	537.87(043.2)
CUT	C972e
TOMBO.	898

FICHA CATALOGRÁFICA

621.37 Cunha , Cícero Luiz Alves.
C972e Espalhamento de Ondas Eletromagnéticas em Plasmas Quentes / Cícero Luiz Alves Cunha ; Orientado por Aroldo Borges Diniz e José Antônio Justino Ribeiro. Itajubá-MG : EFEI , 1996.

183p.

1. Tese-Ondas Eletromagnéticas.
2. Plasmas Quentes.
3. Espalhamento-Ondas Eletromagnéticas. I. Brasil. II. Título.

CDU-621.37

CÍCERO LUIZ ALVES CUNHA

ESPALHAMENTO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS
EM
PLASMAS QUENTES

Tese apresentada ao Instituto de Engenharia Elétrica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI para obtenção do grau de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica , na área de Automação e Controle Industrial .

Orientadores : Aroldo Borges Diniz , D.C.

José Antônio Justino Ribeiro , M.E.E.

Itajubá - MG

1996



Ministério da Educação e do Desporto
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

ANEXO I

PRONUNCIAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

A Banca Examinadora, abaixo assinada, nomeada pela Portaria nº 465 de 09/12/96, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: **"Espalhamento de Ondas Eletromagnéticas em Plasmas Quentes"** apresenta pronunciamento no sentido de que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá solicite ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) a expedição do título de **Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica, na Automação e Controle Industrial**, satisfeitas as demais exigências regimentais, a Cícero Luiz Alves Cunha.

Itajubá, 11 de dezembro de 1996.

Prof. Irany de Andrade Azevedo
1º Examinador - ITA

Prof. José Antônio Justino Ribeiro
2º Examinador - EFEI

Prof. José Rezende Pereira Neto
3º Examinador - EFEI

Prof. Aroldo Borges Diniz
4º Examinador - EFEI - (Orientador)



Ministério da Educação e do Desporto
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

ANEXO II

FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

Título da Dissertação: "Espalhamento de Ondas Eletromagnéticas em Plasmas Quentes"

Autor: Cícero Luiz Alves Cunha

JULGAMENTO

Examinadores	Conceito	Rubrica
1°	A+	<i>[Handwritten signature]</i>
2°	A+	<i>[Handwritten signature]</i>
3°	A+	<i>[Handwritten signature]</i>
4°	A+	<i>[Handwritten signature]</i>

Resultado Médio: Conceito A+, ou seja, aprovação com distinção.

Observações: _____

Itajubá, 11 de dezembro de 1996.

[Handwritten signature]
Prof. Irany de Andrade Azevedo
1° Examinador - ITA

[Handwritten signature]
Prof. José Antonio Justino Ribeiro
2° Examinador - EFEI

[Handwritten signature]
Prof. José Rezende Pereira Neto
3° Examinador - EFEI

[Handwritten signature]
Prof. Aroldo Borges Diniz
4° Examinador - EFEI (Orientador)

DEDICATÓRIA

À Maria Salete , minha esposa , por seu continuado incentivo e compreensão . Aos meus pais Expedito e Lourdes , pois sem eles nada disso seria possível . Aos meus irmãos pelo apoio constante , em especial a meu irmão José Maurício , *in memoriam* .

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Aroldo Borges Diniz e prof. José Antônio Justino Ribeiro pela orientação , colaboração e sugestões .

A colaboração prestada por todos os amigos , que de uma forma direta ou não , ajudaram-me a tornar possível a elaboração desta tese .

SUMÁRIO

	Página
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	9
LISTA DE ABREVIATURAS , SÍMBOLOS E CONSTANTES	14
RESUMO	34
ABSTRACT	35

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO HISTÓRICA E OBJETIVOS DO TRABALHO

1.1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA	36
1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO	37

CAPÍTULO 2

CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA TEORIA ELETROMAGNÉTICA

2.1 INTRODUÇÃO	38
2.2 A EQUAÇÃO DE LORENTZ	38
2.3 AS EQUAÇÕES DE MAXWELL	39
2.4 TIPOS DE MEIO	40
2.5 A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE	42
2.6 ONDAS EM MEIOS ILIMITADOS	44
2.7 CONDIÇÕES DE CONTORNO	48
2.7.1 <u>Análise das Componentes Normais</u>	48
2.7.2 <u>Análise das Componentes Tangenciais</u>	50
2.8 TEOREMA DE POYNTING E ENERGIA ELETROMAGNÉTICA	52
2.9 POTENCIAIS AUXILIARES	56
2.10 CONDIÇÃO DE IRRADIAÇÃO DE SOMMERFELD	65
2.11 TEORIA DO ESPALHAMENTO	70

CAPÍTULO 3

TEORIA DO PLASMA

3.1 INTRODUÇÃO	75
3.2 FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO	75
3.3 VELOCIDADE MÉDIA E DENSIDADES DE CARGA E CORRENTE	78

3.4	RAIO DE DEBYE E PARÂMETRO DO PLASMA	80
3.5	FREQÜÊNCIA DO PLASMA E FREQÜÊNCIA DO CICLOTRON	86
3.6	A EQUAÇÃO DO MOVIMENTO E A EQUAÇÃO DE BOLTZMANN	88
3.7	DESCRIÇÃO ELETROMAGNÉTICA DO PLASMA	90
3.8	DENSIDADE ELETRÔNICA E FREQÜÊNCIA DE COLISÃO PARA O AR A TEMPERATURAS ELEVADAS	113

CAPÍTULO 4

ESPALHAMENTO DE ONDA ELETROMAGNÉTICA POR UM PLASMA CILÍNDRICO CIRCULAR

4.1	INTRODUÇÃO	116
4.2	INCIDÊNCIA OBLÍQUA	117
4.2.1	<u>Campos Incidentes</u>	117
4.2.2	<u>Campos no Interior do Plasma</u>	122
4.2.3	<u>Campos Espalhados</u>	132
4.2.4	<u>Condições de Contorno</u>	136
4.2.5	<u>Relações de Simetria</u>	138
4.3	INCIDÊNCIA NORMAL	141
4.3.1	<u>Campos Incidentes e Campos Espalhados</u>	141
4.3.2	<u>Campos no Interior do Plasma</u>	143
4.3.3	<u>Condições de Contorno</u>	145
4.3.4	<u>Relações de Simetria</u>	146
4.4	CAMPOS DISTANTES	147

CAPÍTULO 5

CARACTERÍSTICAS DE ESPALHAMENTO

5.1	SEÇÃO DE ESPALHAMENTO TRANSVERSAL	150
5.2	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	151

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E APLICAÇÕES

6.1	CONCLUSÕES	174
6.2	APLICAÇÕES	178
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	179
	APÊNDICE	181

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

	Página
FIGURA 2.7.1 : Geometria para análise das componentes normais dos campos	49
FIGURA 2.7.2 : Geometria para análise das componentes tangenciais dos campos	51
FIGURA 2.9.1 : Ilustração para resolução da equação de onda	59
FIGURA 2.10.1 : Ilustração para demonstração da condição de irradiação de Sommerfeld	66
FIGURA 2.11.1 : Geometria para determinação da seção de espalhamento transversal, $\sigma(\varphi)$	71
FIGURA 3.2.1 : Geometria para análise da função de distribuição	76
FIGURA 3.4.1 : Nuvem elétron-íon na vizinhança de um íon	81
FIGURA 3.5.1 : Efeito do campo elétrico sobre o movimento das partículas	88
FIGURA 3.7.1 : Orientação de \vec{v} , $\vec{\gamma}$ e \vec{B}_0 em relação ao eixo coordenado	92
FIGURA 3.7.2 : Área de integração referente à equação (3.7.23)	95
FIGURA 3.7.3 : Sistemas de coordenadas retangulares (x,y,z) e (l,r,p)	98
FIGURA 3.7.4 : Área de integração referente à equação (3.7.54)	103
FIGURA 3.8.1 : Variação da densidade eletrônica (n_e) e frequência de colisão (ν) com a temperatura para o ar com diferentes densidades (ρ). A densidade ao nível do mar é $\rho_0 = 1,28823(kg / m^3)$	115
FIGURA 4.1.1 : Geometria para análise do espalhamento de ondas eletromagnéticas por um cilindro circular	116
FIGURA 4.2.1 : Onda eletromagnética incidente	119
FIGURA 5.2.1 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/6$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$	154
FIGURA 5.2.2 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/6$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e	

$n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$ 155

FIGURA 5.2.3 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/5$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$ 156

FIGURA 5.2.4 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/5$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$ 157

FIGURA 5.2.5 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/4$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$ 158

FIGURA 5.2.6 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/4$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$ 159

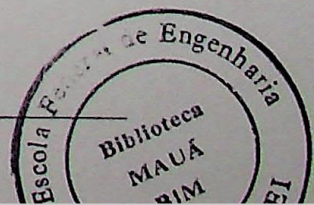
FIGURA 5.2.7 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/3$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$ 160

FIGURA 5.2.8 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/3$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$ 161

FIGURA 5.2.9 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência normal $\theta_i = \pi/2$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$ 162

FIGURA 5.2.10 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência normal $\theta_i = \pi/2$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$ 163

FIGURA 5.2.11 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/6$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3 (K)$, $6 \times 10^3 (K)$, $8 \times 10^3 (K)$, $10 \times 10^3 (K)$ 164



- FIGURA 5.2.12 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/6$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$ 165
- FIGURA 5.2.13 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/5$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$ 166
- FIGURA 5.2.14 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/5$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$ 167
- FIGURA 5.2.15 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/4$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$ 168
- FIGURA 5.2.16 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/4$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$ 169
- FIGURA 5.2.17 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/3$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$ 170

- FIGURA 5.2.18 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/3$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$ 171
- FIGURA 5.2.19 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência normal $\theta_i = \pi/2$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$ 172
- FIGURA 5.2.20 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/2$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$ 173

LISTA DE ABREVIATURAS , SÍMBOLOS E CONSTANTES

A

$\vec{A}(\vec{r})$	Vetor complexo arbitrário utilizado para representar os campos \vec{E} ou \vec{H} .
$\vec{A}_0 = \vec{A}(0)$	Vetor constante arbitrário utilizado para representar \vec{E}_0 ou \vec{H}_0 .
\vec{A}	Tensor arbitrário em coordenadas retangulares (x,y,z) .
\vec{A}'	Tensor arbitrário em coordenadas retangulares (l,r,p) .
$A, A_l (l = 1,2)$	Constantes arbitrárias .
A_1^s, A_2^s	Coefficientes de espalhamento ou constantes arbitrárias .
\vec{A}_{ext}	Vetor complexo arbitrário utilizado para representar os campos \vec{E}_{ext} ou \vec{H}_{ext} , na região externa ao plasma .
$\vec{\mathcal{A}}_{ext}(\rho, \varphi)$	Vetor utilizado para representar os campos $\vec{\mathcal{E}}_{ext}(\rho, \varphi)$ ou $\vec{\mathcal{H}}_{ext}(\rho, \varphi)$.
$\vec{\mathcal{A}}_{ext, \perp}$	Componente transversal do vetor $\vec{\mathcal{A}}_{ext}(\rho, \varphi)$.
$\mathcal{A}_{ext, z} \hat{z}$	Componente longitudinal do vetor $\vec{\mathcal{A}}_{ext}(\rho, \varphi)$.
$\vec{a}(\vec{r}, t)$	Valor instantâneo de $\vec{A}(\vec{r})$.
a	Constante arbitrária e também é utilizada como raio do plasma .
$a = \frac{\omega - i\nu - 2v_{ }\gamma_{ }}{\omega_c}$	Expressão matemática .
$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right\}}$	Constante de atenuação .

B

\vec{B}	Vetor densidade de fluxo magnético complexo .
$\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$	Componente contínua da densidade de fluxo magnético .
\vec{B}_p	Vetor densidade de fluxo magnético complexo no interior do plasma .
\vec{B}_1, \vec{B}_2	Vetores densidades de fluxo magnético complexo totais nos meios 1 e 2 .
$\vec{B}_1 e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r})}$	Componente alternada de \vec{B} .
$\vec{B}_i, \vec{B}_r, \vec{B}_t$	Vetores densidades de fluxo magnético incidente (<i>i</i>), refletido (<i>r</i>) e transmitido (<i>t</i>) .
$B, B_l (l = 1,2)$	Constantes arbitrárias .
\vec{b}	Valor instantâneo do vetor \vec{B} .
b_x, b_y, b_z	Componentes de \vec{b} em coordenadas retangulares (<i>x, y, z</i>) .
$b = \frac{2v_{\perp} \gamma_{\perp}}{\omega_c}$	Expressão matemática .
$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} + 1 \right\}}$	Constante de fase .

C

C	Superfície de contorno .
C^{te}	Abreviatura de <i>constante</i> .
$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \cong 3 \times 10^8 (m/s)$	Velocidade da luz no vácuo .
$C_l (l = 1,2)$	Constantes arbitrárias .
$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2$	Energia cinética total .
$\mathcal{E}_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2$	Energia cinética devido a v_{\perp} .

$\mathcal{E}_{//} = \frac{1}{2}mv_{//}^2$	Energia cinética devido a $v_{//}$.
χ	Função escalar arbitrária .

D

\vec{D}	Vetor densidade de fluxo elétrico complexo ou deslocamento elétrico complexo .
\vec{D}_1, \vec{D}_2	Vetores densidades de fluxo elétrico complexos nos meios 1 e 2 .
$\vec{D}_i, \vec{D}_r, \vec{D}_t$	Vetores densidade de fluxo elétrico complexo incidente (i), refletido (r) e transmitido (t) .
\vec{D}_p	Vetor densidade de fluxo elétrico complexo no plasma .
$D_{p,x}, D_{p,y}, D_{p,z}$	Componentes de \vec{D}_p em coordenadas retangulares (x, y, z) .
\vec{d}	Valor instantâneo de \vec{D} .
d_x, d_y, d_z	Componentes de \vec{d} em coordenadas retangulares (x, y, z) .
d	Distância entre a fonte e o eixo longitudinal z .
$\delta(\vec{r}, t)$	Função <i>impulso unitário</i> ou função <i>delta de Dirac</i> .

E

\vec{E}	Vetor campo elétrico complexo .
\vec{E}_0	Vetor campo elétrico constante arbitrário .
\vec{E}_1, \vec{E}_2	Vetores campo elétrico complexos nos meios 1 e 2 .
$\vec{E}_i, \vec{E}_r, \vec{E}_t$	Vetores campo elétrico complexos incidente (i), refletido (r) e transmitido (t) .

\vec{E}_s	Vetor campo elétrico complexo espalhado .
\vec{E}_p	Vetor campo elétrico complexo no plasma .
\vec{E}_{i0}	Vetor campo elétrico constante arbitrário incidente .
$\vec{E}_{s,t}$	Vetor campo elétrico complexo espalhado tangencial .
$\vec{E}_{s,t}^*$	Conjugado do vetor $\vec{E}_{s,t}$.
\vec{E}_{ext}	Vetor campo elétrico complexo no meio externo .
$\vec{E}_1 e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r})}$	Componente alternada de \vec{E} .
$E_{i,\rho} , E_{i,\varphi} , E_{i,z}$	Componentes de \vec{E}_i em coordenadas cilíndricas circulares (ρ, φ, z) .
$E_{p,\rho} , E_{p,\varphi} , E_{p,z}$	Componentes de \vec{E}_p em coordenadas cilíndricas circulares (ρ, φ, z) .
$E_{s,\rho} , E_{s,\varphi} , E_{s,z}$	Componentes de \vec{E}_s em coordenadas cilíndricas circulares (ρ, φ, z) .
$E_{p,x} , E_{p,y} , E_{p,z}$	Componentes de \vec{E}_p em coordenadas retangulares (x, y, z) .
$\vec{\mathcal{E}}_i(\rho, \varphi)$	Vetor campo elétrico representando a dependência de \vec{E}_i em relação a ρ e φ .
$\vec{\mathcal{E}}_p(x, y)$	Vetor campo elétrico representando a dependência de \vec{E}_p em relação a x e y .
$\vec{\mathcal{E}}_p(\rho, \varphi)$	Vetor campo elétrico representando a dependência de \vec{E}_p em relação a ρ e φ .
$\vec{\mathcal{E}}_s(\rho, \varphi)$	Vetor campo elétrico representando a dependência de \vec{E}_s em relação a ρ e φ .
$\vec{\mathcal{E}}_{ext}(\rho, \varphi)$	Vetor campo elétrico representando a dependência de \vec{E}_{ext} em relação a ρ e φ .

$\mathcal{E}_{i,\rho} , \mathcal{E}_{i,\varphi} , \mathcal{E}_{i,z}$	Componentes de $\vec{\mathcal{E}}_i(\rho,\varphi)$ em coordenadas cilíndricas circulares (ρ,φ,z) .
$\mathcal{E}_{p,\rho} , \mathcal{E}_{p,\varphi} , \mathcal{E}_{p,z}$	Componentes de $\vec{\mathcal{E}}_p(\rho,\varphi)$ em coordenadas cilíndricas circulares (ρ,φ,z) .
$\mathcal{E}_{s,\rho} , \mathcal{E}_{s,\varphi} , \mathcal{E}_{s,z}$	Componentes de $\vec{\mathcal{E}}_s(\rho,\varphi)$ em coordenadas cilíndricas circulares (ρ,φ,z) .
$\vec{\mathcal{E}}_{p,\perp}$	Componente transversal de $\vec{\mathcal{E}}_p(\rho,\varphi)$.
$\vec{\mathcal{E}}_{s,\perp}$	Componente transversal de $\vec{\mathcal{E}}_s(\rho,\varphi)$.
\vec{e}	Valor instantâneo do vetor \vec{E} .
e_x , e_y , e_z	Componentes de \vec{e} em coordenadas retangulares (x,y,z) .
$e = -1,6 \times 10^{-19} (C)$	Carga do elétron .
ε	Permissividade elétrica do meio .
$\varepsilon_1 , \varepsilon_2$	Permissividade elétrica nos meios 1 e 2 .
$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} (F / m)$	Permissividade elétrica no vácuo .
$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$	Tensor permissividade elétrica .
$\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \varepsilon_3$	Elementos do tensor permissividade $\vec{\varepsilon}$ do plasma .
\sum_n	Somatório em n .

F

\vec{F}	Força total.
\vec{F}_E	Força devida ao campo elétrico.

\vec{F}_H	Força devida ao campo magnético .
\vec{F}_C	Força devida às colisões .
$\vec{\mathcal{F}}$	Vetor arbitrário .
$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$	Transformada de <i>Fourier</i> da função $f(t)$.
$f(x, y, z)$	Função matemática arbitrária .
$f(\vec{r}, t)$	Função vetorial arbitrária representando a <i>fonte</i> .
$f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$ ou $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$	Função de distribuição em coordenadas do espaço e da velocidade .
f_0	Função de distribuição quando o plasma está em equilíbrio termodinâmico .
$f_\omega(\vec{r}, t) = \mathcal{F}[f(\vec{r}, t)]$	Transformada de <i>Fourier</i> de $f(\vec{r}, t)$.
$f(\rho)$	Função arbitrária .
$f_1 e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r})}$	Parcela da função de distribuição $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ correspondente às perturbações .
f	Frequência .
ϕ	Variável matemática arbitrária .
$\Phi_{1,2} = \pm \frac{[(\omega^3 \mu_0 \epsilon_2^2 - \omega \epsilon_1 \gamma_1^2) O_{2,1} - i \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 \gamma_{i,z}]}{(\omega^4 \mu_0^2 \epsilon_2^2 - \gamma_1^4)}$	Expressão matemática .
$\Phi = \frac{\omega \epsilon_1 \gamma_1^2 - \omega^3 \mu_0 \epsilon_2^2}{\omega^4 \mu_0^2 \epsilon_2^2 - \gamma_1^4}$	Expressão matemática .

G

$G(\vec{r}, t)$	Função de Green .
$g(u, v)$	Função paramétrica arbitrária .
$g = \frac{2Z e \phi}{\kappa T} \ll 1$	Parâmetro do plasma .
\mathcal{G}	Densidade do ar .
$\mathcal{G}_0 = 1,28823(\text{kg} / \text{m}^3)$	Densidade do ar ao nível do mar .

$\vec{\gamma} = \gamma \hat{\gamma}$	Vetor constante de propagação .
$\hat{\gamma}$	Vetor unitário que define a direção de propagação .
$\gamma = \sqrt{i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)}$	Constante de propagação .
$\gamma_x , \gamma_y , \gamma_z$	Componentes de $\vec{\gamma}$ em coordenadas retangulares (x, y, z) .
$ \gamma $	Módulo de γ .
$\vec{\gamma}_i$	Vetor constante de propagação da onda incidente .
$\gamma_{i,\perp} , \gamma_{i,z}$	Componentes transversal (\perp) e longitudinal (z) do vetor $\vec{\gamma}_i$.
$\gamma_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \gamma_{i,z}^2$	Expressão matemática .
$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \tau^{x-1} d\tau \quad (x > 0)$	Funções <i>gamma</i> .

H

\vec{H}	Vetor campo magnético complexo .
\vec{H}_0	Vetor campo magnético constante arbitrário .
\vec{H}_1 , \vec{H}_2	Vetores campo magnético complexos nos meios 1 e 2 .
$\vec{H}_i , \vec{H}_r , \vec{H}_t$	Vetores campo magnético complexos incidente (<i>i</i>) , refletido (<i>r</i>) e transmitido (<i>t</i>) .
\vec{H}_p	Vetor campo magnético complexo no interior do plasma .
\vec{H}_s	Vetor campo magnético complexo espalhado .
$\vec{H}_{s,t}$	Vetor campo magnético complexo espalhado tangencial .
\vec{H}_{ext}	Vetor campo magnético complexo total na região externa ao plasma .

\vec{H}^*	Conjugado do vetor \vec{H} .
\vec{H}_i^*	Conjugado do vetor \vec{H}_i .
\vec{H}_s^*	Conjugado do vetor \vec{H}_s .
$\vec{H}_{s,t}^*$	Conjugado do vetor $\vec{H}_{s,t}$.
$\vec{H}_{p,\perp}$	Componente transversal do vetor \vec{H}_p .
$H_{i,\rho} , H_{i,\varphi} , H_{i,z}$	Componentes de \vec{H}_i em coordenadas cilíndricas circulares (ρ, φ, z) .
$H_{p,\rho} , H_{p,\varphi} , H_{p,z}$	Componentes de \vec{H}_p em coordenadas cilíndricas circulares (ρ, φ, z) .
$H_{s,\rho} , H_{s,\varphi} , H_{s,z}$	Componentes de \vec{H}_s em coordenadas cilíndricas circulares (ρ, φ, z) .
$H_{s,\rho}^* , H_{s,\varphi}^* , H_{s,z}^*$	Componentes de \vec{H}_s^* em coordenadas cilíndricas circulares (ρ, φ, z) .
\vec{H}_{i0}	Vetor campo magnético constante arbitrário incidente .
$\vec{\mathcal{H}}_i(\rho, \varphi)$	Vetor campo magnético representando a dependência de \vec{H}_i em relação a ρ e φ .
$\vec{\mathcal{H}}_p(x, y)$	Vetor campo magnético representando a dependência de \vec{H}_p em relação a x e y .
$\vec{\mathcal{H}}_p(\rho, \varphi)$	Vetor campo magnético representando a dependência de \vec{H}_p em relação a ρ e φ .
$\vec{\mathcal{H}}_s(\rho, \varphi)$	Vetor campo magnético representando a dependência de \vec{H}_s em relação a ρ e φ .
$\vec{\mathcal{H}}_{ext}(\rho, \varphi)$	Vetor campo magnético representando a dependência de \vec{H}_{ext} em relação a ρ e φ .
$\mathcal{H}_{i,\rho} , \mathcal{H}_{i,\varphi} , \mathcal{H}_{i,z}$	Componentes de $\vec{\mathcal{H}}_i(\rho, \varphi)$ em coordenadas cilíndricas circulares (ρ, φ, z) .

$\mathcal{H}_{p,\rho} , \mathcal{H}_{p,\varphi} , \mathcal{H}_{p,z}$	Componentes de $\vec{\mathcal{H}}_p(\rho,\varphi)$ em coordenadas cilíndricas circulares (ρ,φ,z) .
$\mathcal{H}_{s,\rho} , \mathcal{H}_{s,\varphi} , \mathcal{H}_{s,z}$	Componentes de $\vec{\mathcal{H}}_s(\rho,\varphi)$ em coordenadas cilíndricas circulares (ρ,φ,z) .
$\vec{\mathcal{H}}_{p,\perp}$	Componente transversal de $\vec{\mathcal{H}}_p(\rho,\varphi)$.
$\vec{\mathcal{H}}_{s,\perp}$	Componente transversal de $\vec{\mathcal{H}}_s(\rho,\varphi)$.
$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iN_n(z)$	Função de <i>Bessel</i> de terceira espécie ou função de <i>Hankel</i> de segunda espécie , ordem n e argumento z .
$H_n^{(2)}(z) = \frac{\partial H_n^{(2)}(z)}{\partial z}$	Derivada da função $H_n^{(2)}(z)$.
\vec{h}	Valor instantâneo do vetor \vec{H} .
h_x , h_y , h_z	Componentes de \vec{h} em coordenadas retangulares (x,y,z) .
$h(u,v)$	Função paramétrica arbitrária .
$h(\varphi)$	Função arbitrária .
$h = \sqrt{\frac{\kappa T \epsilon_0}{(Z+1)n_{e0}e^2}}$	Raio de <i>Debye</i> .
$\eta = \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma + i\omega\epsilon}}$	Impedância intrínseca do meio .

I

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Matriz identidade .
$I_n(z)$	Função de <i>Bessel modificada</i> de primeira espécie , ordem n e argumento z .
$I_n'(z) = \frac{\partial I_n(z)}{\partial z}$	Derivada da função $I_n(z)$.



$i = \frac{\partial q}{\partial t}$	Corrente elétrica .
$i = \sqrt{-1}$	Constante imaginária .

J

\vec{J}_t	Vetor densidade de corrente total complexa .
\vec{J}_c	Vetor densidade de corrente de condução complexa .
\vec{J}_d	Vetor densidade de corrente de deslocamento complexa .
\vec{J}_l	Vetor densidade de corrente linear complexa .
$J_n(z)$	Função de <i>Bessel</i> de primeira espécie , ordem n e argumento z .
$J'_n(z) = \frac{\partial J_n(z)}{\partial z}$	Derivada da função $J_n(z)$.
\vec{j}	Vetor densidade de corrente instantânea .
$\vec{j} = \rho \vec{v}$	Vetor densidade de corrente de convecção instantânea .
$\vec{j}_d = \partial \vec{d} / \partial t$	Vetor densidade de corrente de deslocamento instantânea .
$\vec{j}_c = \sigma \vec{e}$	Vetor densidade de corrente de condução instantânea .
$\mathcal{G}(\vec{r}, t)$	Fase total .
$\varphi(\vec{r}, t)$	Potencial escalar .
φ	Coordenada angular .
φ_i	Coordenada angular da onda incidente .
$\varphi_m = \frac{m2\pi}{\mathcal{M}}$	Valores discretos de φ .

K

K, K_1	Constantes arbitrárias .
----------------	--------------------------

$\kappa = 1,38 \times 10^{-23} (J / K)$ Constante de *Boltzmann* .

L

- $L = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{\omega_c} = \frac{n_0 e^2}{m \omega_c}$ Expressão matemática .
- l Coordenada retangular .
- \hat{l} Vetor unitário que define a direção do eixo l .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ Limite de $f(x)$ quando x tende a a .
- $\mathcal{L}[f(t)]$ Transformada de *Laplace* da função $f(t)$.
- $\lambda = \frac{c}{f}$ Comprimento de onda .
- $\Lambda_{1,2} = \mp \frac{(\gamma_1^2 \gamma_{i,z} O_{2,1} + i \omega^3 \mu_0^2 \epsilon_2)}{(\omega^4 \mu_0^2 \epsilon_2^2 - \gamma_1^4)}$ Expressão matemática .

M

- $M = \frac{n_0 e^2}{2m \omega_c (2\pi)^{3/2} v_t^5} = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{2\omega_c (2\pi)^{3/2} v_t^5}$ Expressão matemática .
- $M_{1,2} = \mp \frac{(\omega^3 \mu_0^2 \epsilon_2 - i \gamma_{i,z} \gamma_1^2 O_{2,1}) T_{1,2}}{(\omega^4 \mu_0^2 \epsilon_2^2 - \gamma_1^4)}$ Expressão matemática .
- $M = -\frac{\omega^3 \mu_0^2 \epsilon_2}{\omega^4 \mu_0^2 \epsilon_2^2 - \gamma_1^4}$ Expressão matemática .
- \mathcal{M} Número inteiro positivo .
- $m = 9,11 \times 10^{-31} (kg)$ Massa do elétron .
- $m = 0,1,2,3, \dots, \mathcal{M}$ Constante de separação angular .
- μ Permeabilidade magnética do meio .
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^7 (H / m)$ Permeabilidade magnética no vácuo .

μ_1, μ_2 Permeabilidade magnética nos meios 1 e 2 .

$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}$ Tensor permeabilidade magnética .

N

N Número de partículas do sistema .

$N_n(z)$ Função de *Bessel* de segunda espécie , ordem n e argumento z .

$N_{1,2} = \mp \frac{(\omega\mu_0\gamma_1^2 - i\omega^2\mu_0\varepsilon_2\gamma_{i,z}O_{2,1})}{(\omega^4\mu_0^2\varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)}$ Expressão matemática .

$N = -\frac{\omega\mu_0\gamma_1^2}{\omega^4\mu_0^2\varepsilon_2^2 - \gamma_1^4}$ Expressão matemática .

\mathcal{N} Número de colisões no intervalo de tempo Δt .

$n(x,y,z,t) = \frac{dN}{d\mathcal{V}}$ Densidade de partículas total .

n_α Densidade de partículas de espécie α (e, i) .

$n_0, n_{\alpha 0}$ Densidade de partículas quando $\mathcal{U}(x,y,z) = 0$.

$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ Índice dos somatórios .

\hat{n} Vetor unitário normal à superfície S .

O

$O_{1,2} = \frac{(T_H^2 - T_E^2)}{2T_{HE}^2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4T_{HE}^2 T_{EH}^2}{(T_H^2 - T_E^2)^2}} \right\}$ Expressão matemática .

$\mathcal{O}(\rho,z) = e^{i\gamma_{i,z}z} H_0^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho)$ Expressão matemática .

$\square = \nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ Operador *d'alembertiano* .

$\nabla = \nabla_r = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$	Operador <i>Nabla</i> em coordenadas retangulares (x, y, z) .
$\nabla' = \hat{x}' \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{y}' \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{z}' \frac{\partial}{\partial z'}$	Operador <i>Nabla</i> em coordenadas da fonte (x', y', z') .
$\nabla_v = \hat{x} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial v_z}$	Operador <i>Nabla</i> no sistema de coordenadas da velocidade .
$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	Operador <i>Laplaceano</i> em coordenadas retangulares (x, y, z) .
$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$	Componente transversal de ∇^2 em coordenadas cilíndricas circulares (ρ, φ, z) .
$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$	<i>Jacobiano</i> ($\ \ $ é o determinante) .

P

$P(\varphi) = i(a - b \cos \varphi)$	Função matemática .
$\vec{p}(\vec{r}, t)$	Vetor potencial auxiliar .
$p_s(\varphi)$	Potência espalhada em watts .
p	Coordenada retangular .
\hat{p}	Vetor unitário que define a direção do eixo p .
$P_{1,2} = \pm \frac{[\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \gamma_{i,z} + i(\omega^3 \mu_0 \varepsilon_2^2 - \omega \varepsilon_1 \gamma_1^2) O_{2,1}]}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)}$	Expressão matemática .
$\pi = 3,1415$	Constante π .

Q

$Q = 16L \sqrt{2u_{\perp} u_{\parallel}}$	Expressão matemática .
q	Carga elétrica .

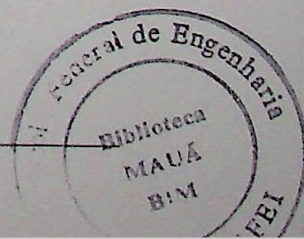
q_α	Carga elétrica de espécie α (e, i) .
Θ	Variável matemática arbitrária .
θ	Coordenada angular em relação ao eixo $+z$.
$\hat{\theta}$	Vetor unitário que define a direção em que θ cresce .
θ_i, θ'_i	Ângulos de incidência .
$\hat{\theta}^{ref}(\varphi) = \frac{\hat{\rho}\gamma_{i,z} + \hat{z}\gamma_{i,\perp}}{ \gamma } = -\hat{\theta}(\theta = \pi - \theta_i, \varphi)$	Vetor unitário de referência .
$Q_{1,2} = \pm \frac{(\gamma_1^2 - i\omega\epsilon_1\gamma_{i,z}O_{2,1})\gamma_{i,z}}{(\omega^4\mu_0^2\epsilon_2^2 - \gamma_1^4)}$	Expressão matemática .

R

$R_g = \frac{mv_\perp}{ e B_0}$	Raio de <i>Larmor</i> .
$R(\varphi) = \frac{ e }{m\omega_c} (\vec{E}_1 \cdot \nabla_v f_0)$	Função matemática .
$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$	Vetor posição em relação à <i>fonte</i> .
\hat{R}	Vetor unitário que define a direção do vetor \vec{R} .
$R = \vec{R} $	Módulo do vetor \vec{R} .
$\mathcal{R}, \mathcal{R}_k$	Regiões de integração .
$\Re_e\{z\}$	Parte real de z .
\vec{r}, \vec{r}'	Vetores posição .
$r_\gamma = \vec{r} \cdot \hat{\gamma}$	Projeção de \vec{r} na direção do vetor propagação $\vec{\gamma}$.
ρ	Coordenada cilíndrica .
$\hat{\rho}$	Vetor unitário que define a direção do eixo ρ .
ρ_v	Densidade volumétrica de cargas .
ρ_s	Densidade superficial de cargas .

S

S, S'	Superfícies .
$S_{11} = \frac{a\Omega_1 J'_n(T_1 a) + \Lambda_1 n J_n(T_1 a)}{a(O_1 - O_2)}$	Expressão matemática .
$S_{12} = \frac{a\Omega_2 J'_n(T_2 a) + \Lambda_2 n J_n(T_2 a)}{a(O_1 - O_2)}$	Expressão matemática .
$S_{13} = -\frac{i^{n+2} n \gamma_{i,z} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} a)}{\gamma_{i,\perp}^2 a}$	Expressão matemática .
$S_{14} = -\frac{i^{n+1} \gamma \eta H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} a)}{\gamma_{i,\perp}}$	Expressão matemática .
$S_{21} = -\frac{O_2 J_n(T_1 a)}{(O_1 - O_2)}$	Expressão matemática .
$S_{22} = \frac{O_1 J_n(T_2 a)}{(O_1 - O_2)}$	Expressão matemática .
$S_{23} = -i^n H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} a)$	Expressão matemática .
$S_{31} = \frac{aP_1 J'_n(T_1 a) + Q_1 n J_n(T_1 a)}{a(O_1 - O_2)}$	Expressão matemática .
$S_{32} = \frac{aP_2 J'_n(T_2 a) + Q_2 n J_n(T_2 a)}{a(O_1 - O_2)}$	Expressão matemática .
$S_{33} = \frac{i^{n+1} \gamma H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} a)}{\gamma_{i,\perp} \eta}$	Expressão matemática .
$S_{34} = -\frac{i^{n+2} n \gamma_{i,z} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} a)}{\gamma_{i,\perp}^2 a}$	Expressão matemática .
$S_{41} = \frac{J_n(T_1 a)}{(O_1 - O_2)}$	Expressão matemática .
$S_{42} = -\frac{J_n(T_2 a)}{(O_1 - O_2)}$	Expressão matemática .
$S_{44} = -i^n H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} a)$	Expressão matemática .
$s = i\omega$	Número imaginário .



$\sigma(\varphi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{P_s(\varphi)}{ \vec{W}_i }$	Seção de espalhamento transversal .
σ	Condutividade elétrica .
$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$	Tensor condutividade do plasma em coordenadas retangulares (x, y, z) .
$\vec{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_{ll} & \sigma_{lr} & \sigma_{lp} \\ \sigma_{rl} & \sigma_{rr} & \sigma_{rp} \\ \sigma_{pl} & \sigma_{pr} & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$	Tensor condutividade do plasma no sistema de coordenadas retangulares (l, r, p) .

T

T	Temperatura absoluta do plasma .
TE	Modo de propagação com o campo elétrico polarizado na direção transversal $(\vec{E}_\perp \neq 0)$.
TM	Modo de propagação com o campo magnético polarizado na direção transversal $(\vec{H}_\perp \neq 0)$.
t, t'	Tempo .
$T_H^2 = \gamma_1^2 - \frac{\omega^2 \mu_0 \epsilon_2^2}{\epsilon_1}$	Expressão matemática .
$T_E^2 = \gamma_1^2 \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1}$	Expressão matemática .
$T_{HE}^2 = -\frac{i\omega\gamma_{i,z}\epsilon_2\epsilon_3}{\epsilon_1}$	Expressão matemática .
$T_{EH}^2 = \frac{i\omega\mu_0\gamma_{i,z}\epsilon_2}{\epsilon_1}$	Expressão matemática .
$T_{1,2} = \sqrt{T_H^2 - O_{2,1}T_{HE}^2}$	Constante de propagação no plasma .
τ	Variável matemática arbitrária .

U

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Matriz de transformação .}$$

$$\bar{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Conjugada da matriz } U .$$

$$U^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Transposta da matriz } U .$$

$$\bar{U}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Transposta da matriz } \bar{U} .$$

$\mathcal{U}(x, y, z)$ Energia potencial .

u Variável matemática arbitrária .

$$u = \frac{4\kappa T\beta^2}{m\omega_c^2} \dots\dots\dots \text{Expressão matemática .}$$

$$u_{//} = \frac{4\gamma_{//}^2 v_t^2}{\omega_c^2} \dots\dots\dots \text{Expressão matemática .}$$

$$u_{\perp} = \frac{4\gamma_{\perp}^2 v_t^2}{\omega_c^2} \dots\dots\dots \text{Expressão matemática .}$$

$$\nu = \frac{\mathcal{N}}{\Delta t} \dots\dots\dots \text{Freqüência de colisões .}$$

V

\vec{V} Vetor arbitrário .

\bar{V} Velocidade média .

\bar{V}_{α} Velocidade média de espécie α (e, i) .

V^2 Velocidade média quadrática .

$\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ Volume arbitrário .

\vec{v} Velocidade instantânea .

v_x, v_y, v_z	Componentes de \vec{v} em coordenadas retangulares (x, y, z) .
$v_t = \sqrt{\frac{\kappa T}{m}}$	Velocidade térmica .
$v_p = \frac{\omega}{\beta}$	Velocidade de fase .
$\zeta(\varphi)$	Função matemática arbitrária .

W

$\vec{W} = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$	Vetor de <i>Poynting</i> complexo .
$\vec{W}_{av} = \frac{1}{2}\Re_e\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$	Valor médio do vetor \vec{W} .
$\vec{W}_i = \frac{1}{2}(\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*)$	Vetor de <i>Poynting</i> incidente .
$\vec{W}_s = \frac{1}{2}(\vec{E}_s \times \vec{H}_s^*)$	Vetor de <i>Poynting</i> espalhado .
$\vec{W}_{s,p} = \frac{1}{2}(\vec{E}_{s,t} \times \vec{H}_{s,t}^*)$	Componente radial de \vec{W}_s .
$\vec{w} = \vec{e} \times \vec{h}$	Densidade de potência ou vetor de <i>Poynting</i> instantâneo .
$\omega = 2\pi f$	Frequência angular .
Ω	Ângulo sólido .
$\Omega_{1,2} = \mp \frac{(\omega^2 \mu_0 \epsilon_2 \gamma_{i,z} O_{2,1} + i\omega \mu_0 \gamma_1^2) T_{1,2}}{(\omega^4 \mu_0^2 \epsilon_2^2 - \gamma_1^4)}$	Expressão matemática .

X

x	Coordenada retangular .
\hat{x}	Vetor unitário que define a direção do eixo x .
$\Xi_{1,2} = \mp \frac{(\omega \epsilon_2 \gamma_{i,z} O_{2,1} + i\gamma_1^2) \gamma_{i,z} T_{1,2}}{(\omega^4 \mu_0^2 \epsilon_2^2 - \gamma_1^4)}$	Expressão matemática .
$\xi(\varphi)$	Função matemática arbitrária .

- $\xi_1 = \xi_2 \mp 1$ Expressão matemática .
- $\xi_2 = \frac{\omega - i\nu}{\omega_c} - n$ Expressão matemática .
- $\xi_3 = \xi_2 \pm \frac{1}{2}$ Expressão matemática .
- $\xi_4 = \xi_2 \mp \frac{1}{2}$ Expressão matemática .

Y

- $Y_1 = i^{n+1} H_{i0} \eta \text{sen} \theta_i \left\{ \frac{i n \gamma_{i,z} \text{sen} \zeta}{\gamma_{i,\perp}^2 a} J_n(\gamma_{i,\perp} a) - \frac{|\gamma| \cos \zeta}{\gamma_{i,\perp}} J'_n(\gamma_{i,\perp} a) \right\}$ Expressão matemática .
- $Y_2 = i^n \eta \text{sen} \zeta H_{i0} \text{sen} \theta_i J_n(\gamma_{i,\perp} a)$ Expressão matemática .
- $Y_3 = -i^{n+1} H_{i0} \text{sen} \theta_i \left\{ \frac{|\gamma| \text{sen} \zeta}{\gamma_{i,\perp}} J'_n(\gamma_{i,\perp} a) + \frac{i n \gamma_{i,z} \cos \zeta}{\gamma_{i,\perp}^2 a} J_n(\gamma_{i,\perp} a) \right\}$ Expressão matemática .
- $Y_4 = -i^n \cos \zeta H_{i0} \text{sen} \theta_i J_n(\gamma_{i,\perp} a)$ Expressão matemática .
- y Coordenada retangular .
- \hat{y} Vetor unitário que define a direção do eixo y .
- Ψ_α Sessão transversal de colisão média de *Maxwell* de espécie α (e, i) .
- $\psi(\vec{r}, t)$ Função de campo arbitrária .
- ψ_d, ψ_i, ψ_s Funções de campo difratado(d), incidente(i) e espalhado(s) .
- $\psi_p(\vec{r}, t)$ Solução particular .
- $\psi_h(\vec{r}, t)$ Solução homogênea .
- $\psi_\omega(\vec{r}) = \mathcal{F}[\psi(\vec{r}, t)]$ Transformada de *Fourier* de $\psi(\vec{r}, t)$.
- $\psi_{1,2} = \mathcal{E}_{p,z} + O_{1,2} \mathcal{H}_{p,z}$ Combinação linear dos modos TE e TM .

Z

Z	Número atômico .
z	Coordenada retangular .
\hat{z}	Vetor unitário que define a direção do eixo z .
ζ	Ângulo de polarização da onda incidente .

RESUMO

Esta tese tem por objetivo descrever as características eletromagnéticas do plasma considerando o efeito da temperatura e analisar o espalhamento de ondas eletromagnéticas por plasmas atmosféricos . No CAPÍTULO 1 é feita uma breve introdução histórica e os objetivos são apresentados .

O CAPÍTULO 2 abarca os conceitos básicos do eletromagnetismo úteis na compreensão do plasma e na análise de suas características de espalhamento . São apresentados a equação de Lorentz , as equações de Maxwell , tipos de meios , equação da continuidade , ondas em meios ilimitados , condições de contorno , teorema de Poynting e energia eletromagnética , potenciais auxiliares , condição de irradiação de Sommerfeld e teoria do espalhamento .

No CAPÍTULO 3 é apresentada a teoria do plasma . O plasma é considerado como sendo constituído por um grande número de partículas idênticas (monatômicas) . A fim de entender o comportamento das partículas e características eletromagnéticas do plasma são estudados a função de distribuição , as oscilações envolvidas (frequência do plasma , frequência do ciclotron e frequência de colisão) , velocidade média , densidades de carga e corrente , raio de Debye , parâmetro g do plasma , a equação do movimento e a equação de Boltzmann . Uma atenção especial é dedicada à descrição eletromagnética do plasma , considerando o efeito da temperatura , onde o estudo da influência do plasma sobre a propagação da onda eletromagnética consiste da solução simultânea das equações de Maxwell e da equação de Boltzmann . Valores típicos da densidade eletrônica e frequência de colisão são mostrados para o ar à temperaturas elevadas.

No CAPÍTULO 4 é mostrada a solução para o problema do espalhamento da onda eletromagnética por um plasma cilíndrico de seção transversal circular , envolvido pelo ar . São analisados os casos de incidência oblíqua , incidência normal e os campos distantes . A onda incidente é uma onda transversal magnética (TM) ou transversal elétrica (TE) e o plasma apresenta uma anisotropia , do ponto de vista elétrico , causada pelo campo magnético de polarização . Foram determinados os campos incidentes , espalhados e no interior do plasma . Com a aplicação das condições de contorno , os coeficientes de espalhamento também puderam ser determinados .

No CAPÍTULO 5 , a seção de espalhamento transversal é determinada numericamente . Utilizando-se o software MATLAB 4.0/SIMULINK 1.2c , instalado nos computadores da Escola Federal de Engenharia de Itajubá , desenvolveu-se um programa de computador para obtenção dos gráficos e resultados numéricos .

No CAPÍTULO 6 são apresentadas as conclusões e as aplicações deste trabalho .

ABSTRACT

The objective of this thesis is to describe electromagnetic characteristics of the plasma considering the temperature effect and to analyse the scattering of electromagnetic waves by atmospheric plasmas . A brief historical introduction and the objectives are presented in CHAPTER 1 .

CHAPTER 2 covers basic electromagnetism concepts useful in the understanding of the plasma and analysis of its scattering characteristics . The Lorentz's equation , Maxwell's equations , media type , continuity equation , waves in unlimited media , boundary condition , Poynting's theorem and electromagnetic energy , auxiliary potentials , Sommerfeld radiation condition and theory of scattering are presented .

In CHAPTER 3 the theory of plasma is presented . The plasma is considered as being formed by large amount of identical particles (monatomic) . In order to know about the behavior of the particles and electromagnetic characteristics of the plasma , the distribution function , the oscillations involved (plasma frequency , cyclotron frequency and collision frequency) , average speed , charge and current densities , the Debye radius , the plasma parameter g , equation of motion and Boltzmann's equation are studied . A special attention is dedicated to electromagnetic description of the plasma considering thermal effect , where the study of the influence of the plasma upon the propagation of electromagnetic wave consists in the simultaneous solution of Maxwell's equations and Boltzmann's equation . Typical values in the electron density and collision frequency of air at high temperatures are shown .

The solution to the scattering problem of the electromagnetic wave by a cylindrical plasma as circular cross section , embedded in air is shown in CHAPTER 4 . The cases of skew incidence , normal incidence and the far fields are analysed . The incident wave is a transverse magnetic (TM) or transverse electric (TE) wave and the plasma presents an anisotropy , in the electric viewpoint , caused by magnetic field of polarization . The incident , scattered and inside plasma fields were determined . With the application in the boundary conditions , the coefficients of the scattering were also determined .

In CHAPTER 5 , the scattering cross section is computed numerically . By using the software MATLAB 4.0/SIMULINK 1.2c , installed in the Escola Federal de Engenharia de Itajubá computers , a computer program for obtainment of the graphs and numerical results was developed .

The conclusions and applications of this work are presented in CHAPTER 6 .

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO HISTÓRICA E OBJETIVOS DO TRABALHO

1.1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA^{[1][2]}

Durante milhares de anos o homem limitava-se a observar o sol , as estrelas e fenômenos como as descargas de relâmpagos , a aurora boreal , sem saber que estava presenciando fenômenos com plasma . Por volta de 1864 Maxwell combinou as leis básicas do eletromagnetismo num grupo de equações coerentes , chamadas equações de Maxwell . Essas equações têm sido utilizadas na descrição dos fenômenos eletromagnéticos , entre os quais fenômenos com plasma . A palavra *plasma* foi utilizada pela primeira vez por Langmuir e Tonks em 1929 para denotar um gás onde uma certa quantidade de moléculas são dissociadas em íons e elétrons , com o gás total permanecendo eletricamente neutro . Descobertas importantes sobre o fenômeno de descargas em gases datam de 1800 . Esses estudos continuaram no século XX e serviram de base para o desenvolvimento de muitos dispositivos eletrônicos práticos usados na geração , retificação e controle de energia elétrica . Com o progresso na Astronomia e na Física compreenderam-se muitas coisas a respeito do universo como , por exemplo , a existência de estrelas totalmente ionizadas . Essa forma de plasma envolve um estudo concernente às substâncias submetidas à pressão e temperaturas elevadas . Muitos dos trabalhos no campo da física do plasma se iniciaram com a Astrofísica .

Ultimamente têm-se estudado problemas que são mais referentes às aplicações que envolveram o plasma na Física e na Engenharia . O advento da fusão nuclear tem criado muitas atividades relacionadas ao plasma com alta densidade e elevada temperatura . Outro grupo de investigadores com interesse na física do plasma são os peritos em aerodinâmica . Com a evolução cada vez mais rápida dos veículos aéreos , seus efeitos sobre o ambiente aumentaram . Uma das principais

manifestações disso é o aumento da temperatura , provocando um estágio de ionização apreciável , tornando o ar mais condutivo . As equações para a dinâmica dos gases são modificadas por essa condutividade . Por conseguinte , a física do plasma é uma importante área de estudo no campo da aviação e do controle de mísseis .

O campo das telecomunicações tem dado importantes contribuições para a compreensão do plasma e de sua interação com a radiação eletromagnética . Porções da atmosfera terrestre que formam a ionosfera , são bastante ionizadas por irradiações vindas do espaço exterior , particularmente do sol . Da ocorrência desse fenômeno , compreendeu-se mais sobre a ionosfera e a influência do plasma nas ondas eletromagnéticas . Comunicações a longas distâncias ocorreram devidas às reflexões nas camadas ionosféricas .

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo desse trabalho é descrever as características eletromagnéticas do plasma considerando o efeito da temperatura e analisar o espalhamento de ondas eletromagnéticas por plasmas atmosféricos . Esse tipo de plasma pode provocar interrupção^[1] na comunicação em enlace satélite-satélite , satélite-terra . A descrição matemática da influência do plasma sobre as ondas eletromagnéticas , considerando o efeito da temperatura , consiste da solução simultânea das *equações de Maxwell* e da *equação de Boltzmann* . Na análise das características de espalhamento os campos espalhados devem ser obtidos a fim de aplicar o conceito de *seção de espalhamento transversal* .

CAPÍTULO 2

CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA TEORIA ELETROMAGNÉTICA

2.1 INTRODUÇÃO

Por volta de 1864 Maxwell combinou as leis básicas do eletromagnetismo num grupo de equações coerentes . As equações de Maxwell são utilizadas na descrição de fenômenos eletromagnéticos , entre os quais fenômenos com plasma . As equações básicas da teoria eletromagnética descrevem as propriedades físicas do campo e de partículas com cargas variáveis . Neste trabalho as ondas são *monocromáticas* , ou seja , os campos possuem uma dependência no tempo do tipo $e^{i\omega t}$.

2.2 A EQUAÇÃO DE LORENTZ

Quando uma partícula carregada é colocada na vizinhança de outras cargas e de correntes elétricas , uma força é exercida sobre ela . Descreve-se essa força em termos do campo elétrico (\vec{E}) e da densidade de fluxo magnético (\vec{B}) . A lei da força , chamada *equação de Lorentz* , é escrita como :^[4]

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.2.1)$$

onde q é a carga da partícula de teste, \vec{E} o campo elétrico na posição da carga, \vec{v} a velocidade da partícula e \vec{B} a densidade de fluxo magnético.

A partir da equação (2.2.1), os campos \vec{E} e \vec{B} podem ser definidos em termos da força exercida sobre a carga de teste q . O campo elétrico \vec{E} é definido como sendo a força exercida numa carga de teste estacionária dividida pelo valor da carga q :^[4]

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{F}}{q} \right). \quad (2.2.2)$$

Esta equação só é válida para cargas pequenas, onde os campos originados por elas não influenciam as fontes do campo \vec{E} . A força em uma carga em movimento, numa região onde $\vec{E} = 0$, serve como definição para o vetor *densidade de fluxo magnético* e é obtida a partir da equação (2.2.1):^[4]

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.2.3)$$

2.3 AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

As equações de Maxwell que descrevem os fenômenos eletromagnéticos, são escritas da forma:^{[3][4]}

$$\nabla \times \vec{h} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t}, \quad (2.3.1)$$

$$\nabla \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}, \quad (2.3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{b} = 0, \quad (2.3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{d} = \rho_v, \quad (2.3.4)$$

onde a equação (2.3.1) representa a lei de Ampère, (2.3.2) a lei de Faraday, (2.3.3) a lei de Gauss para o campo magnético e (2.3.4) a lei de Gauss para o campo elétrico. Estas equações aplicam-se a campos variáveis no tempo e a campos estacionários. O termo $\partial \vec{d} / \partial t$ é a densidade de corrente de deslocamento e \vec{j} é a densidade de corrente de condução (ou de convecção). Na lei de Gauss, ρ_v representa a densidade volumétrica de cargas. São encontrados três tipos de densidades de corrente em problemas de campo:^[4]

- a) densidade de corrente de convecção, $\vec{j} = \rho_v \vec{v}$;
- b) densidade de corrente de deslocamento, $\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{d}}{\partial t}$;
- c) densidade de corrente de condução, $\vec{j}_c = \sigma \vec{e}$.

As equações de Maxwell são complementadas pelas relações entre \vec{b} e \vec{h} ; \vec{d} e \vec{e} ; \vec{j}_c e \vec{e} que introduzem parâmetros do meio ocupado pelos campos. Estes parâmetros são a permeabilidade magnética μ , a permissividade elétrica ϵ e a condutividade σ , que estabelecem as *relações constitutivas*:^[3]

$$\vec{b} = \mu \vec{h}, \quad \vec{d} = \epsilon \vec{e}, \quad \vec{j}_c = \sigma \vec{e}. \quad (2.3.5)$$

2.4 TIPOS DE MEIO

Do ponto de vista eletromagnético, os meios podem ser classificados em ferromagnéticos, não-ferromagnéticos, homogêneo, heterogêneo, isotrópico, anisotrópico, linear e não-linear. Os meios *não-ferromagnéticos* apresentam uma

permeabilidade magnética μ aproximadamente igual a permeabilidade magnética no vácuo μ_0 . Os *ferromagnéticos* possuem uma permeabilidade magnética geralmente muito maior que a do vácuo e dependentes do campo magnético aplicado.

Um meio é dito *homogêneo* se suas características físicas (massa, estrutura molecular, etc.) não variam de ponto a ponto. O meio será *linear* se ϵ , μ e σ independem dos campos \vec{e} e \vec{h} . Neste caso, ϵ , μ e σ são constantes de proporcionalidade nas *relações constitutivas*. É possível o meio ser *linear* do ponto de vista elétrico e *não-linear* do ponto de vista magnético e vice-versa.

Define-se o meio como *isotrópico* quando suas características eletromagnéticas independem das direções dos campos \vec{d} e \vec{e} . Ou seja, \vec{d} e \vec{e} são vetores paralelos, o mesmo ocorrendo com \vec{b} e \vec{h} . Será *anisotrópico* quando cada componente de \vec{d} depende de todas as componentes de \vec{e} e cada componente de \vec{b} depende das várias componentes de \vec{h} . Do ponto de vista elétrico, o meio *anisotrópico* é descrito por

$$\begin{aligned}d_x &= \epsilon_{xx}e_x + \epsilon_{xy}e_y + \epsilon_{xz}e_z \\d_y &= \epsilon_{yx}e_x + \epsilon_{yy}e_y + \epsilon_{yz}e_z \\d_z &= \epsilon_{zx}e_x + \epsilon_{zy}e_y + \epsilon_{zz}e_z\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix}d_x \\ d_y \\ d_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}e_x \\ e_y \\ e_z\end{bmatrix}\tag{2.4.2}$$

onde

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix}\epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz}\end{bmatrix}\tag{2.4.3}$$

é o *tensor permissividade elétrica* do meio . O meio apresentará uma *anisotropia* do ponto de vista magnético se

$$\begin{aligned} b_x &= \mu_{xx}h_x + \mu_{xy}h_y + \mu_{xz}h_z \\ b_y &= \mu_{yx}h_x + \mu_{yy}h_y + \mu_{yz}h_z \\ b_z &= \mu_{zx}h_x + \mu_{zy}h_y + \mu_{zz}h_z \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

ou na forma matricial ,

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} \tag{2.4.5}$$

onde

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.4.6}$$

é o *tensor permeabilidade magnética* do meio .

O *plasma* polarizado magneticamente , que é o assunto abordado neste trabalho , é um meio que apresenta anisotropia do ponto de vista elétrico . Um meio anisotrópico do ponto de vista magnético é a *ferrita* , quando polarizada por um campo magnetostático .

2.5 A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

O *princípio da continuidade*^[4] estabelece que a quantidade de cargas em um sistema fechado é constante . Ou seja , a todo acréscimo ou decréscimo de

cargas em uma região \mathcal{V} , limitada por uma superfície S , está associada uma corrente que entra ou sai da região \mathcal{V} . Matematicamente, este princípio descreve a corrente através da superfície S como

$$i = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (2.5.1)$$

A quantidade de cargas existente em um volume e a corrente que atravessa a superfície que envolve este volume são dadas por

$$q = \int_{\mathcal{V}} \rho_v d\mathcal{V} \quad (2.5.2)$$

e

$$i = \oint_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS. \quad (2.5.3)$$

Portanto, a equação da continuidade é escrita na forma integral como

$$\oint_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS = - \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right) d\mathcal{V}. \quad (2.5.4)$$

Aplicando o teorema do divergente ao primeiro membro da equação (2.5.4), obtém-se a equação da continuidade na forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}. \quad (2.5.5)$$

onde \vec{j} e ρ_v foram definidos na secção 2.3.

2.6 ONDAS EM MEIOS ILIMITADOS

A equação de onda para um meio homogêneo , linear , isotrópico e sem cargas , onde ϵ , μ e σ são constantes escalares e ρ_v é nula , é obtida partindo-se das equações de Maxwell^{[3][4]} . Aplicando-se o rotacional à equação (2.3.2) e manipulando , algebricamente , resulta :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{e} = -\mu\sigma \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} . \quad (2.6.1)$$

Desenvolvendo-se o lado esquerdo da equação (2.6.1) , $\nabla \times \nabla \times \vec{e} = \nabla(\nabla \cdot \vec{e}) - \nabla^2 \vec{e}$ e considerando-se no meio homogêneo sem cargas $\nabla \cdot \vec{e} = 0$, tem-se

$$\left(\nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{e} = 0 . \quad (2.6.2)$$

Analogamente , obtém-se para o campo magnético :

$$\left(\nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{h} = 0 . \quad (2.6.3)$$

As equações (2.6.2) e (2.6.3) são chamadas *equações de onda* ou *equações de Helmholtz*^[4] . Como se impôs que as ondas são *monocromáticas* , os campos possuem uma dependência no tempo do tipo $e^{i\omega t}$. Assim , podem ser colocados na *forma complexa* e as equações de Maxwell serão reescritas na forma :

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H} , \quad (2.6.4)$$

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + i\omega\epsilon)\vec{E} , \quad (2.6.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 , \quad (2.6.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 . \quad (2.6.7)$$

As equações de onda serão dadas por

$$\left[\nabla^2 - i\omega\mu(\sigma + i\omega\varepsilon) \right] \vec{E} = 0 , \quad (2.6.8)$$

$$\left[\nabla^2 - i\omega\mu(\sigma + i\omega\varepsilon) \right] \vec{H} = 0 \quad (2.6.9)$$

e podem ser representadas numa forma mais genérica ,

$$(\nabla^2 - \gamma^2) \vec{A}(\vec{r}) = 0 . \quad (2.6.10)$$

A grandeza $\vec{A}(\vec{r})$ representa o *fasor vetorial* campo elétrico (\vec{E}) ou magnético (\vec{H}) e a quantidade

$$\gamma = \sqrt{i\omega\mu(\sigma + i\omega\varepsilon)} \quad (2.6.11)$$

é a *constante de propagação*^{[3][4]} .

Resolvendo-se a equação (2.6.10) em coordenadas retangulares pelo método de separação de variáveis e admitindo que não existem reflexões , obtém-se o *fasor* :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_0 e^{\pm \vec{\gamma} \cdot \vec{r}} \quad (2.6.12)$$

onde $\vec{A}_0 = \vec{A}(0)$, $\vec{\gamma} = \gamma_x \hat{x} + \gamma_y \hat{y} + \gamma_z \hat{z}$ e $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$.

A *constante de propagação* é uma quantidade complexa e pode ser representada na forma

$$\vec{\gamma} = \gamma \hat{\gamma} = (\alpha + i\beta) \hat{\gamma} \quad (2.6.13)$$

onde a *constante de atenuação* é

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right\}} \quad (2.6.14)$$

e a constante de fase

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right\}} . \quad (2.6.15)$$

Conseqüentemente , a equação (2.6.12) torna-se

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_0 e^{\pm\vec{\alpha}\cdot\vec{r}} e^{\pm i\vec{\beta}\cdot\vec{r}} . \quad (2.6.16)$$

O valor instantâneo $\vec{a}(\vec{r}, t)$, correspondente ao fasor $\vec{A}(\vec{r})$ no domínio do tempo , é obtido extraindo-se a parte real de $\vec{A}(\vec{r})e^{i\omega t}$. Portanto ,

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \Re_e \left\{ \vec{A}_0 e^{\pm\vec{\alpha}\cdot\vec{r}} e^{i(\omega t \pm \vec{\beta}\cdot\vec{r})} \right\} = \vec{A}_0 e^{\pm\vec{\alpha}\cdot\vec{r}} \cos(\omega t \pm \vec{\beta}\cdot\vec{r}) \quad (2.6.17)$$

representando uma onda monocromática com amplitude $\vec{A}_0 e^{\pm\vec{\alpha}\cdot\vec{r}}$ e uma fase total

$$\mathcal{G}(\vec{r}, t) = \omega t \pm \vec{\beta}\cdot\vec{r} . \quad (2.6.18)$$

Num instante qualquer , $t = t'$, considerando os pontos de mesma fase , $\mathcal{G}(\vec{r}, t)$ constante , tem-se :

$$f(x, y, z) = \hat{\gamma}\cdot\vec{r} = r_\gamma = C^{te} , \quad (2.6.19)$$

$$\nabla f(x, y, z) = \hat{\gamma} . \quad (2.6.20)$$

A equação (2.6.19) define um conjunto de pontos no espaço em que a projeção dos respectivos vetores posição (\vec{r}) na direção de propagação é constante . Essa equação representa uma *superfície de fase constante* , denominada *frente de onda*^[4] . A equação (2.6.20) nos diz que o vetor propagação ($\vec{\gamma}$) é normal à superfície $f(x,y,z)$. Se $\hat{\gamma} = \hat{r}$, a equação (2.6.19) define uma *superfície esférica* , daí a denominação de *onda esférica* . No caso de uma *onda plana* , $\hat{\gamma}$ é um vetor constante , a equação (2.6.19) define uma *superfície plana* .

Para uma mesma frente de onda ,

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega \pm \beta \frac{dr_{\gamma}}{dt} = 0 .$$

Conseqüentemente , a *velocidade de fase* , que representa a rapidez de deslocamento da frente de onda no meio , é definida como^{[3][4]}

$$v_p = \frac{dr_{\gamma}}{dt} = \frac{\omega}{\beta} . \tag{2.6.21}$$

Partindo das equações (2.6.4) e (2.6.5) , utilizando a solução da equação de onda e a identidade vetorial $\nabla \times (\chi \vec{V}) = (\nabla \chi) \times \vec{V} + \chi (\nabla \times \vec{V})$, obtém-se as equações :

$$\nabla \times (\vec{E}_0 e^{-i\vec{\gamma} \cdot \vec{r}}) = -i\omega\mu\vec{H} = -\vec{\gamma} \times \vec{E} , \tag{2.6.23}$$

$$\nabla \times (\vec{H}_0 e^{-i\vec{\gamma} \cdot \vec{r}}) = (\sigma + i\omega\epsilon)\vec{E} = -\vec{\gamma} \times \vec{H} . \tag{2.6.24}$$

Analisando as equações (2.6.23) e (2.6.24) , conclui-se que os vetores $\vec{\gamma}$, \vec{E} e \vec{H} são perpendiculares entre si . Uma onda desse tipo é chamada *onda eletromagnética transversal* (onda TEM) .

A *impedância de onda* , Z_w , é definida de modo que satisfaça à condição

$$\vec{H} = \frac{\hat{\gamma} \times \vec{E}}{Z_w} . \quad (2.6.25)$$

Comparando a equação (2.6.23) com a equação (2.6.25) obtém-se uma expressão para a *impedância de onda* no meio ilimitado^{[3][4]},

$$Z_w = \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma + i\omega\varepsilon}} , \quad (2.6.26)$$

que é igual à *impedância intrínseca do meio*, representada pela letra grega η .

O *comprimento de onda* λ ^{[3][4]} é definido como sendo o deslocamento correspondente a uma variação da fase total igual a 2π , $\beta\Delta r_\gamma = 2\pi$. Logo,

$$\Delta r_\gamma = \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\omega}{\beta f} = \frac{v_p}{f} . \quad (2.6.27)$$

2.7 CONDIÇÕES DE CONTORNO

2.7.1 Análise das Componentes Normais

Será utilizada a FIGURA 2.7.1 no cálculo do fluxo total dos campos sobre um elemento de volume cilíndrico de seção transversal Δs e altura Δh . Os campos nos meios 1 e 2 são :

$$\vec{D}_1 = \vec{D}_i + \vec{D}_r, \tag{2.7.1.1}$$

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_i + \vec{B}_r, \tag{2.7.1.2}$$

$$\vec{D}_2 = \vec{D}_t, \tag{2.7.1.3}$$

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_t. \tag{2.7.1.4}$$

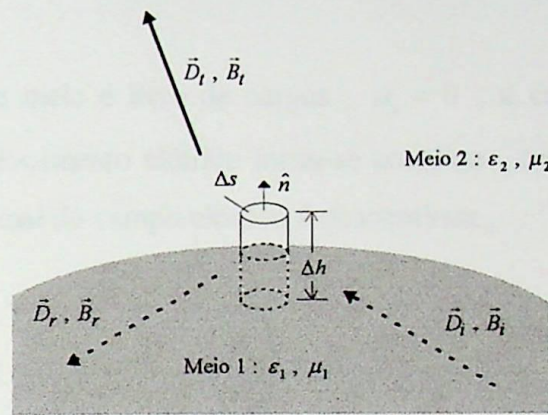


FIGURA 2.7.1 : Geometria para análise das componentes normais dos campos .

Os fluxos resultantes do deslocamento elétrico e da densidade de fluxo magnético , através da superfície que envolve o volume cilíndrico infinitesimal e considerando Δh muito pequeno , será :^{[3][4]}

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s, \tag{2.7.1.5}$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \tag{2.7.1.6}$$

onde ρ_s é a densidade superficial de cargas e \hat{n} é o vetor unitário normal à superfície de separação .

Das equações (2.7.1.5) e (2.7.1.6) , conclui-se que :



- a) a componente normal do deslocamento elétrico é descontínua na superfície de separação ;
- b) a componente normal da indução magnética é contínua na superfície de separação , porém , a componente normal do campo magnético é descontínua ,

$$\hat{n} \cdot \vec{H}_2 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \hat{n} \cdot \vec{H}_1 ; \quad (2.7.1.7)$$

- c) se o meio é livre de cargas , $\rho_s = 0$, a componente normal do deslocamento elétrico torna-se contínua , contudo , a componente normal do campo elétrico é descontínua ,

$$\hat{n} \cdot \vec{E}_2 = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \hat{n} \cdot \vec{E}_1 . \quad (2.7.1.8)$$

2.7.2 Análise das Componentes Tangenciais

Nesta análise será utilizada a FIGURA 2.7.2 no cálculo da circulação dos campos sobre um circuito retangular de comprimento Δl e altura Δh . Os campos nos meios 1 e 2 são :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r , \quad (2.7.2.1)$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_i + \vec{H}_r , \quad (2.7.2.2)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_t , \quad (2.7.2.3)$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_t . \quad (2.7.2.4)$$

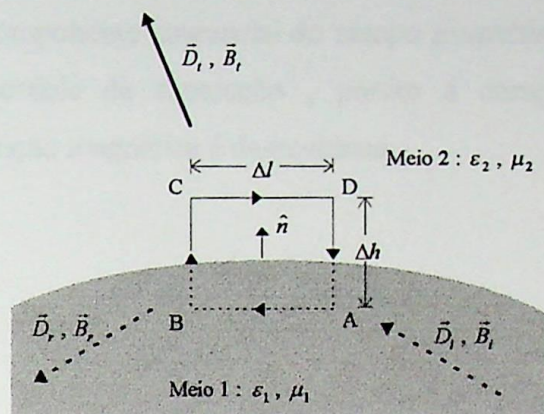


FIGURA 2.7.2 : Geometria para análise das componentes tangenciais dos campos .

Da FIGURA 2.7.2 , a circulação dos campos elétrico e magnético através do circuito ABCD e considerando Δh muito pequeno será :^{[3][4]}

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 , \tag{2.7.2.5}$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_l , \tag{2.7.2.6}$$

onde \vec{J}_l é a densidade linear de corrente . Analisando as equações (2.7.2.5) e (2.7.2.6) , obtém-se as seguintes conclusões :

- a) a componente tangencial do campo elétrico é contínua na superfície de separação e a componente tangencial do deslocamento elétrico é descontínua ,

$$\hat{n} \times \vec{D}_2 = \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) \hat{n} \times \vec{D}_1 ; \tag{2.7.2.7}$$

- b) a componente tangencial do campo magnético é descontínua na superfície de separação ;

- c) quando na superfície de separação não existirem correntes, $\vec{J}_l = 0$, a componente tangencial do campo magnético torna-se contínua na superfície de separação, porém a componente tangencial da indução magnética é descontínua,

$$\hat{n} \times \vec{B}_2 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \hat{n} \times \vec{B}_1 . \quad (2.7.2.8)$$

2.8 TEOREMA DE POYNTING E ENERGIA ELETROMAGNÉTICA

A força que o campo eletromagnético exerce sobre uma partícula carregada é justificada pela lei de Lorentz, equação (2.2.1). Com isso, conclui-se que o campo eletromagnético é dotado de energia. As equações de Faraday e Ampère são:

$$\nabla \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} , \quad (2.8.1)$$

$$\nabla \times \vec{h} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} . \quad (2.8.2)$$

Multiplicando escalarmente a equação (2.8.1) por \vec{h} e a equação (2.8.2) por \vec{e} , obtém-se:

$$\vec{h} \cdot (\nabla \times \vec{e}) = -\mu \vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} , \quad (2.8.3)$$

$$\vec{e} \cdot (\nabla \times \vec{h}) = \vec{j} \cdot \vec{e} + \epsilon \vec{e} \cdot \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} . \quad (2.8.4)$$

Substituindo as equações (2.8.3) e (2.8.4) na identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\vec{e} \times \vec{h}) = \vec{h} \cdot (\nabla \times \vec{e}) - \vec{e} \cdot (\nabla \times \vec{h}) , \quad (2.8.5)$$

resulta

$$\nabla \cdot (\vec{e} \times \vec{h}) = -\mu \vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} - \vec{j} \cdot \vec{e} - \epsilon \vec{e} \cdot \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} . \quad (2.8.6)$$

Mas

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{d} \cdot \vec{e}) = \vec{d} \cdot \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \vec{e} \cdot \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} = 2\epsilon \vec{e} \cdot \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \quad (2.8.7)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{b} \cdot \vec{h}) = \vec{b} \cdot \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} + \vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = 2\mu \vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} . \quad (2.8.8)$$

Conseqüentemente , a equação (2.8.6) torna-se

$$-\nabla \cdot (\vec{e} \times \vec{h}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{h}}{2} \right) + \vec{j} \cdot \vec{e} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{d} \cdot \vec{e}}{2} \right) . \quad (2.8.9)$$

Integrando a equação (2.8.9) sobre um volume \mathcal{V} ,

$$-\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\vec{e} \times \vec{h}) d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{h}}{2} \right) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} (\vec{j} \cdot \vec{e}) d\mathcal{V} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\vec{d} \cdot \vec{e}}{2} \right) d\mathcal{V} \quad (2.8.10)$$

e aplicando o *teorema do divergente* ao primeiro membro da equação (2.8.10) , obtém-se :

$$-\oint_S (\vec{e} \times \vec{h}) \cdot \hat{n} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{h}}{2} \right) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} (\vec{j} \cdot \vec{e}) d\mathcal{V} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\vec{d} \cdot \vec{e}}{2} \right) d\mathcal{V} . \quad (2.8.11)$$

A equação (2.8.11) é conhecida como *Teorema de Poynting*^{[3][4]} .

Nesta equação são identificados os termos :

a) o *vetor de Poynting* ou *densidade de potência*

$$\vec{w} = \vec{e} \times \vec{h} ; \quad (2.8.12)$$

b) a *potência total* que penetra no volume \mathcal{V}

$$-\oint_S (\vec{e} \times \vec{h}) \cdot \hat{n} dS ; \quad (2.8.13)$$

c) a *potência dissipada* sob a forma de calor ou o *efeito Joule*

$$\int_{\mathcal{V}} (\vec{j} \cdot \vec{e}) d\mathcal{V} ; \quad (2.8.14)$$

d) a *energia armazenada* pelo campo magnético

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{h}}{2} \right) d\mathcal{V} ; \quad (2.8.15)$$

e) a *energia armazenada* pelo campo elétrico

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\vec{d} \cdot \vec{e}}{2} \right) d\mathcal{V} . \quad (2.8.16)$$

Os campos elétrico e magnético instantâneos podem ser representados da seguinte forma

$$\vec{e} = \Re_e \{ \vec{E} e^{i\omega t} \} , \quad (2.8.17)$$

$$\vec{h} = \Re_e \{ \vec{H} e^{i\omega t} \} . \quad (2.8.18)$$

Da teoria de números complexos sabe-se que

$$\Re_e \{ z \} = \frac{z + z^*}{2} \quad (2.8.19)$$

onde z é um número complexo arbitrário. Logo , o *vetor de Poynting instantâneo* torna-se :

$$\vec{w} = \vec{e} \times \vec{h} = \Re_e \{ \vec{E} e^{i\omega t} \} \times \left(\frac{\vec{H} e^{i\omega t} + \vec{H}^* e^{-i\omega t}}{2} \right)$$

donde ,

$$\vec{w} = \frac{1}{2} \Re_e \{ (\vec{E} \times \vec{H}^*) + (\vec{E} \times \vec{H}) e^{i2\omega t} \} . \quad (2.8.20)$$

Define-se o *valor médio* de \vec{w} como

$$\vec{W}_{av} = \frac{1}{2} \Re_e \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} \quad (2.8.21)$$

e o *vetor de Poynting complexo* por

$$\vec{W} = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) . \quad (2.8.22)$$

2.9 POTENCIAIS AUXILIARES

As funções potenciais aqui consideradas são as funções \vec{p} e φ ^[4]. A indução magnética é sempre *solenoidal*, $\nabla \cdot \vec{b} = 0$, tornando possível sua obtenção a partir do rotacional de uma função potencial vetorial \vec{p} ,

$$\vec{b} = \nabla \times \vec{p} . \quad (2.9.1)$$

Sabe-se que

$$\nabla \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} . \quad (2.9.2)$$

Assim, das equações (2.9.1) e (2.9.2), obtém-se :

$$\nabla \times \left(\vec{e} + \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right) = 0 . \quad (2.9.3)$$

Como

$$\nabla \times (-\nabla \varphi) = 0 , \quad (2.9.4)$$

conclui-se da equação (2.9.3) que

$$\vec{e} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} , \quad (2.9.5)$$

onde φ é uma função escalar de posição chamada *potencial escalar*.

As equações (2.9.1) e (2.9.5) fornecem os campos em termos das novas funções potencial vetorial e escalar, respectivamente. Observa-se que duas equações de Maxwell já foram satisfeitas, donde os campos \vec{e} e \vec{b} puderam ser definidos em função de \vec{p} e φ . As duas equações de Maxwell restantes são:

$$\nabla \cdot \vec{e} = \frac{\rho_v}{\epsilon}, \quad (2.9.6)$$

$$\nabla \times \vec{b} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}. \quad (2.9.7)$$

Partindo das equações (2.9.1), (2.9.5), (2.9.7) e usando a identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{p} = \nabla(\nabla \cdot \vec{p}) - \nabla^2 \vec{p},$$

obtém-se a equação de onda para o potencial vetorial \vec{p} , dada por

$$\square \vec{p} = -\mu \vec{j} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{p} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (2.9.8)$$

Enquanto que partindo-se das equações (2.9.5) e (2.9.6), obtém-se a equação de onda para o potencial escalar φ ,

$$\square \varphi = -\frac{\rho_v}{\epsilon} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \vec{p} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (2.9.9)$$

O símbolo \square é o *operador d'alembertiano* definido como

$$\square = \nabla^2 - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Para variações no tempo do tipo $e^{i\omega t}$, o operador *d'alembertiano* é

$$\square = \nabla^2 + |\gamma|^2$$

onde $|\gamma|^2 = \omega^2 \mu \epsilon$.

Observa-se que as equações de onda para \vec{p} e φ estão acopladas, isto é, φ aparece na equação diferencial de \vec{p} e vice-versa. Como as funções \vec{p} e φ são arbitrárias tem-se a liberdade de escolher uma relação entre elas, a fim de que, as equações de onda (2.9.8) e (2.9.9) possam ser desacopladas. Assim, é imposta a condição

$$\nabla \cdot \vec{p} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (2.9.10)$$

a qual é conhecida como *condição de Lorentz*. As equações de onda (2.9.8) e (2.9.9) reduzem-se a

$$\square \vec{p} = -\mu \vec{j} \quad (2.9.11)$$

$$\square \varphi = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (2.9.12)$$

que são duas equações diferenciais ordinárias e não-homogêneas. Por inspeção, essas equações podem ser colocadas numa forma mais genérica,

$$\square \psi(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t), \quad (2.9.13)$$

cuja solução geral é

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_p(\vec{r}, t) + \psi_h(\vec{r}, t) \quad (2.9.14)$$

onde $\psi_p(\vec{r}, t)$ é a solução particular devido à fonte $f(\vec{r}, t)$ e $\psi_h(\vec{r}, t)$ é a solução homogênea que independe da fonte $f(\vec{r}, t)$. A ilustração para resolução da equação de onda é mostrada na FIGURA 2.9.1. A solução particular $\psi_p(\vec{r}, t)$ é,

$$\psi_p(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{V}'} G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') f(\vec{r}', t') d\mathcal{V}' dt' \quad (2.9.15)$$

onde $G(\vec{r}, t, \vec{r}', t')$ é a função de Green para o operador d'Alembertiano, definida como

$$\square G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') . \quad (2.9.16)$$

As variáveis de integração na equação (2.9.15) são as originadas pelas coordenadas no espaço e no tempo da fonte. A integração é realizada sobre o volume \mathcal{V}' , que envolve todas as correntes e cargas (fontes locais). Conseqüentemente, os campos são devidos unicamente às fontes locais,

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_p(\vec{r}, t) . \quad (2.9.17)$$

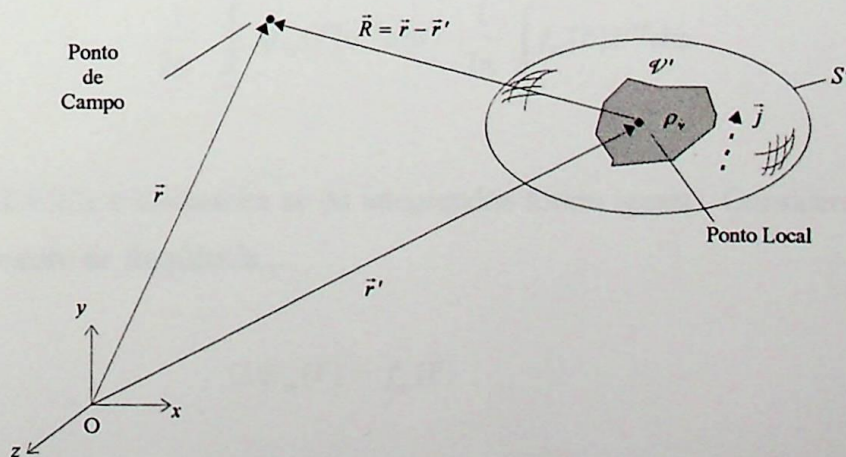


FIGURA 2.9.1 : Ilustração para resolução da equação de onda .

Deve-se encontrar a função de Green para uma dependência no tempo arbitrária . É conveniente expressar uma dependência no domínio do tempo arbitrária em termos de uma dependência no domínio da frequência . As transformadas de Fourier para as funções de campo e da fonte são :^[4]

$$f_{\omega}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.9.18)$$

$$\psi_{\omega}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.9.19)$$

onde

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega}(\vec{r}) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.9.20)$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\omega}(\vec{r}) e^{i\omega t} d\omega . \quad (2.9.21)$$

A equação (2.9.13) , torna-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \square \psi_{\omega}(\vec{r}) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega}(\vec{r}) e^{i\omega t} d\omega . \quad (2.9.22)$$

A equação (2.9.22) é verdadeira se os integrandos forem iguais . Considerando uma única componente de frequência ,

$$\square \psi_{\omega}(\vec{r}) = f_{\omega}(\vec{r}) . \quad (2.9.23)$$

Conseqüentemente ,

$$\psi_{\omega}(\vec{r}) = \int_{\psi'} G(\vec{r}, \vec{r}') f_{\omega}(\vec{r}') d\psi' \quad (2.9.24)$$

onde

$$\square G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') . \quad (2.9.25)$$

A equação (2.9.25) diz que a função de Green é , simplesmente , a função de onda gerada por uma fonte pontual unitária . A função de onda $\psi_{\omega}(\vec{r})$ é sintetizada na equação (2.9.24) , por superposição das soluções ponderadas da fonte pontual sobre o volume fonte . Se o sistema coordenado está localizado com sua origem em $R = |\vec{r} - \vec{r}'| = 0$, a função de Green para uma fonte pontual unitária será simétrica e varia somente com R (onda esférica) . Se o ponto $R = 0$ é excluído , a equação (2.9.25) torna-se

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') + |\gamma|^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad (2.9.26)$$

onde $|\gamma|^2 = \omega^2 \mu \epsilon$.

Colocando o *operador laplaceano* em coordenadas esféricas ,

$$\nabla^2 G = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial G}{\partial R} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (RG) . \quad (2.9.27)$$

Substituindo (2.9.27) em (2.9.26) e resolvendo a equação diferencial , obtém-se como solução ,

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{K}{R} e^{\pm i|\gamma|R} \quad (2.9.28)$$

onde K é a constante de integração .

Considerando a região na vizinhança de $R = 0$ e integrando a equação (2.9.25) sobre uma região esférica muito pequena, obtém-se como resultado as equações :

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\mathcal{V}} (\nabla^2 + |\gamma|^2) G d\mathcal{V} = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\mathcal{V}} \delta(\vec{R}) d\mathcal{V} = 1 . \quad (2.9.29)$$

Para um R muito pequeno, a função de Green torna-se aproximadamente igual a

$$\lim_{R \rightarrow 0} G \cong \frac{K}{R} .$$

Portanto, a equação (2.9.29) resultará em

$$K \lim_{R \rightarrow 0} \left[\int_{\mathcal{V}} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) d\mathcal{V} + |\gamma|^2 \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{R} \right) d\mathcal{V} \right] = 1 .$$

Donde

$$K \lim_{R \rightarrow 0} \left[\int_{\mathcal{V}} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) d\mathcal{V} + \frac{|\gamma|^2}{2} \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \hat{R}) d\mathcal{V} \right] = 1 . \quad (2.9.30)$$

Aplicando o teorema do divergente à equação (2.9.30) e resolvendo as integrais de superfície, resulta

$$K = -\frac{1}{4\pi} . \quad (2.9.31)$$

Portanto, a função de Green completa será

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{e^{\pm i|\gamma|R}}{4\pi R} . \quad (2.9.32)$$

E a função de campo $\psi_{\omega}(\vec{r})$ é obtida usando a equação (2.9.24) ,

$$\psi_{\omega}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \left(\frac{e^{\pm i|\gamma|R}}{R} \right) f_{\omega}(\vec{r}') d\mathcal{V}' . \quad (2.9.33)$$

Substituindo (2.9.33) em (2.9.21) , obtém-se a função de campo $\psi(\vec{r}, t)$,

$$\psi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{V}'} f_{\omega}(\vec{r}') \frac{e^{i(\omega t \pm |\gamma|R)}}{R} d\mathcal{V}' d\omega . \quad (2.9.34)$$

Mas ,

$$f_{\omega}(\vec{r}') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}', t') e^{-i\omega t'} dt' .$$

Logo ,

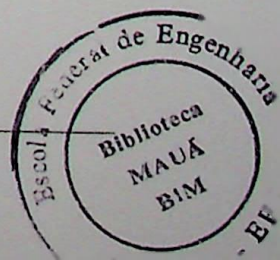
$$\psi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{V}'} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}', t') e^{i\omega(t-t' \pm |\gamma|R/\omega)} dt' d\mathcal{V}' d\omega . \quad (2.9.35)$$

Resolvendo em primeiro lugar a integral sobre ω , utilizando a expressão

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = 2\pi\delta(\tau) ,$$

a equação (2.9.35) resultará em

$$\psi(\vec{r}, t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\delta(t-t' \pm |\gamma|R/\omega)}{4\pi R} f(\vec{r}', t') d\mathcal{V}' dt' . \quad (2.9.36)$$



Comparando (2.9.36) com (2.9.15), conclui-se que a função de Green para o caso geral variando no tempo é

$$G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = -\frac{\delta(t - t' \pm |\gamma|R/\omega)}{4\pi R} . \quad (2.9.37)$$

A função geral de Green, dada pela equação (2.9.37), descreve um impulso num instante t do ponto de campo, o qual está adiantado ou atrasado, em relação ao impulso da fonte, pelo fator $|\gamma|R/\omega$. Se escolhermos um adiantamento do impulso no ponto de campo, $t = t' - |\gamma|R/\omega$, a função potencial obtida representa uma onda propagando-se na direção da fonte,

$$\psi(\vec{r}, t) = -\int_{\psi'} \frac{f(\vec{r}', t + |\gamma|R/\omega)}{4\pi R} d\psi' . \quad (2.9.38)$$

O potencial adiantado é uma solução matemática aceita. Contudo, ele entra em conflito com o *princípio da causalidade*. Agora, se as ondas propagam-se em direção contrária a fonte, então, o impulso num instante do ponto de campo está atrasado do impulso da fonte de $t = t' + |\gamma|R/\omega$. A função do potencial obtida é dita *potencial retardado*^[4],

$$\psi(\vec{r}, t) = -\int_{\psi'} \frac{f(\vec{r}', t - |\gamma|R/\omega)}{4\pi R} d\psi' . \quad (2.9.39)$$

Se a onda é *monocromática*, a função fonte $f(\vec{r}', t')$ possui uma variação no tempo do tipo

$$f(\vec{r}', t') = f(\vec{r}') e^{i\omega t'} . \quad (2.9.40)$$

Então,

$$f(\vec{r}', t - |\gamma|R/\omega) = f(\vec{r}') e^{i(\omega t - |\gamma|R)} \quad (2.9.41)$$

e

$$\psi(\vec{r}, t) = - \int_{\mathcal{V}'} \frac{f(\vec{r}')}{4\pi R} e^{i(\omega t - |\gamma|R)} d\mathcal{V}' \quad (2.9.42)$$

Os potenciais escalar e vetorial , $\varphi(\vec{r}, t)$ e $\vec{p}(\vec{r}, t)$, são obtidos aplicando-se a equação (2.9.42) para cada componente retangular e somando-as :^[4]

$$\vec{p}(\vec{r}, t) = \int_{\mathcal{V}'} \frac{\mu \vec{j}(\vec{r}')}{4\pi R} e^{i(\omega t - |\gamma|R)} d\mathcal{V}' \quad (2.9.43)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int_{\mathcal{V}'} \frac{\rho_v(\vec{r}')}{4\pi \epsilon R} e^{i(\omega t - |\gamma|R)} d\mathcal{V}' \quad (2.9.44)$$

As equações (2.9.43) e (2.9.44) são conhecidas como *integrais de Helmholtz* e representam a onda irradiada pela fonte local \mathcal{V}' .

2.10 CONDIÇÃO DE IRRADIAÇÃO DE SOMMERFELD

Sommerfeld^[4] obteve uma condição que deve ser satisfeita pela função de campo $\psi(\vec{r}, t)$, a fim de que a função $\psi(\vec{r}, t)$ represente somente a onda irradiada por uma fonte local . A FIGURA 2.10.1 será utilizada na demonstração da condição de irradiação de Sommerfeld . O volume \mathcal{V}' é interno ao volume \mathcal{V} e as superfícies S e S' são seus contornos , respectivamente . O vetor $\vec{\mathcal{F}}$ pertence ao espaço vetorial existente no volume \mathcal{V} e \hat{n} é o vetor unitário normal à superfície S .

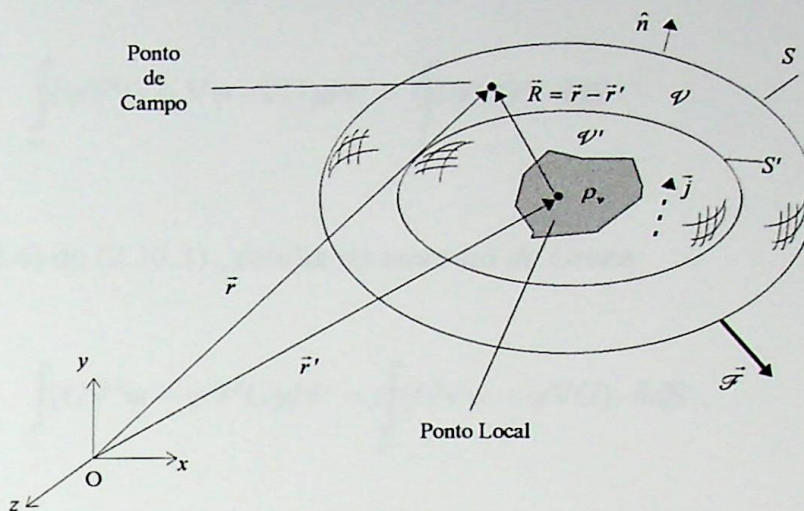


FIGURA 2.10.1 : Ilustração para demonstração da condição de irradiação de Sommerfeld .

Aplicando o teorema do divergente ,

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{\mathcal{F}} d\mathcal{V} = \oint_S \vec{\mathcal{F}} \cdot \hat{n} dS . \tag{2.10.1}$$

Se $\vec{\mathcal{F}}$ for substituído por G , onde G é a função de Green e ψ é a função de campo escalar , a equação (2.10.1) torna-se

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (G \nabla \psi) d\mathcal{V} = \oint_S (G \nabla \psi) \cdot \hat{n} dS . \tag{2.10.2}$$

O integrando na integral de volume da equação (2.10.2) pode ser expandido originando a *primeira identidade de Green* ,

$$\int_{\mathcal{V}} (G \nabla^2 \psi + \nabla G \cdot \nabla \psi) d\mathcal{V} = \oint_S (G \nabla \psi) \cdot \hat{n} dS . \tag{2.10.3}$$

Permutando G e ψ , obtém-se a *segunda identidade de Green*,

$$\int_{\mathcal{V}} (\psi \nabla^2 G + \nabla \psi \cdot \nabla G) d\mathcal{V} = \oint_S (\psi \nabla G) \cdot \hat{n} dS . \quad (2.10.4)$$

Subtraindo (2.10.4) de (2.10.3), resulta no *teorema de Green*

$$\int_{\mathcal{V}} (G \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 G) d\mathcal{V} = \oint_S (G \nabla \psi - \psi \nabla G) \cdot \hat{n} dS . \quad (2.10.5)$$

Especificando \vec{r} como sendo o ponto de campo e \vec{r}' a variável de integração, o *teorema de Green* é reescrito na forma

$$\int_{\mathcal{V}'} [G(\vec{r}') \nabla'^2 \psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r}') \nabla'^2 G(\vec{r}')] d\mathcal{V}' = \oint_S [G(\vec{r}') \nabla' \psi(\vec{r}') - \psi(\vec{r}') \nabla' G(\vec{r}')] \cdot \hat{n} dS , \quad (2.10.6)$$

onde é admitida uma dependência no tempo do tipo $e^{i\omega t}$.

A função de Green é

$$G = -\frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R}$$

e

$$\nabla^2 G = \nabla \cdot (-\nabla' G) = \nabla'^2 G = \delta(\vec{R}) - \gamma^2 G .$$

Conseqüentemente, da equação (2.10.6), obtém-se

$$\begin{aligned}
 - \int_{\mathcal{V}'} [\nabla'^2 \psi(\vec{r}') + \gamma^2 \psi(\vec{r}')] \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} d\mathcal{V}' - \int_{\mathcal{V}'} \psi(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\mathcal{V}' = \\
 \oint_S \left[\psi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} \right) - \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} \nabla' \psi(\vec{r}') \right] \cdot \hat{n} dS' .
 \end{aligned}$$

Portanto ,

$$\begin{aligned}
 \psi(\vec{r}) = - \int_{\mathcal{V}'} [\nabla'^2 \psi(\vec{r}') + \gamma^2 \psi(\vec{r}')] \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} d\mathcal{V}' - \\
 \oint_S \left[\psi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} \right) - \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} \nabla' \psi(\vec{r}') \right] \cdot \hat{n} dS' . \quad (2.10.7)
 \end{aligned}$$

Mas ,

$$f(\vec{r}') = \nabla'^2 \psi(\vec{r}') + \gamma^2 \psi(\vec{r}') .$$

Logo ,

$$\psi(\vec{r}) = - \int_{\mathcal{V}'} f(\vec{r}') \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} d\mathcal{V}' - \oint_S \left[\psi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} \right) - \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} \nabla' \psi(\vec{r}') \right] \cdot \hat{n} dS' . \quad (2.10.8)$$

Observa-se , na equação (2.10.8) , que a integral de volume pode ser decomposta em duas integrais de volume . Assim ,

$$\int_{\mathcal{V}'} f(\vec{r}') \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} d\mathcal{V}' = \int_{\mathcal{V}'} f(\vec{r}') \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} d\mathcal{V}' + \int_{\mathcal{V}-\mathcal{V}'} f(\vec{r}') \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} d\mathcal{V}'$$

e como a fonte $f(\vec{r}')$ fora do volume \mathcal{V}' é nula , tem-se

$$\int_{\mathcal{V}'} f(\vec{r}') \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} d\mathcal{V}' = \int_{\mathcal{V}'} f(\vec{r}') \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} d\mathcal{V}' .$$

Com isso , a equação (2.10.8) resulta em

$$\psi(\vec{r}) = - \int_{\mathcal{V}'} f(\vec{r}') \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} d\mathcal{V}' - \oint_S \left[\psi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} \right) - \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} \nabla' \psi(\vec{r}') \right] \cdot \hat{n} dS' . \quad (2.10.9)$$

Na equação (2.10.9) , a integral de volume representa a parcela de $\psi(\vec{r})$ devida às fontes internas ao volume \mathcal{V}' e a integral de superfície corresponde à parcela de $\psi(\vec{r})$ que só pode ser originária de fontes externas ao volume \mathcal{V}' . Comparando as equações (2.9.42) e (2.10.9) , conclui-se que a função de onda $\psi(\vec{r})$ representará somente ondas sendo irradiadas pelo volume \mathcal{V}' , se

$$\oint_S \left[\psi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} \right) - \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} \nabla' \psi(\vec{r}') \right] \cdot \hat{n} dS' = 0 . \quad (2.10.10)$$

Admitindo que a superfície S seja esférica de raio R infinito , $\vec{r} \gg \vec{r}'$, pode-se fazer

$$\hat{n} \cdot \nabla' \cong -\hat{R} \cdot \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial R} \right) = -\frac{\partial}{\partial R} ,$$

$$dS = R^2 d\Omega ,$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido . Portanto , a equação (2.10.10) torna-se

$$\oint_S \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\psi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} \right) + \frac{e^{-i|\gamma|R}}{4\pi R} \frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial R} \right] R^2 d\Omega = 0 .$$

Donde ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial R} + i|\gamma| \psi(\vec{r}) \right] + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R\psi(\vec{r})}{R} = 0 \quad (2.10.11)$$

originando duas novas condições :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R\psi(\vec{r}) = C^{te} , \quad (2.10.12)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial R} + i|\gamma| \psi(\vec{r}) \right] = 0 . \quad (2.10.13)$$

A condição (2.10.12) é a *condição de existência natural* de $\psi(\vec{r})$. Isto é , $\psi(\vec{r})$ deve possuir a propriedade de que $R\psi(\vec{r})$ não torna-se infinito quando $R \rightarrow \infty$. A condição (2.10.13) é conhecida como *condição de irradiação de Sommerfeld* . Quando essa condição é satisfeita , todas as fontes são envolvidas pela superfície esférica S e a função de onda representa somente ondas propagando-se para fora do volume \mathcal{V} .

2.11 TEORIA DO ESPALHAMENTO

As ondas eletromagnéticas são espalhadas por objetos localizados na direção de propagação da onda incidente . Nesse objeto são induzidas correntes que produzem os campos espalhados . A geometria para o problema do espalhamento é mostrada na FIGURA 2.11.1 . A permissividade do objeto é o tensor $\vec{\epsilon}$ e a permeabilidade magnética é μ_0 . O objeto é envolvido pelo ar , cujas características eletromagnéticas são μ_0 e ϵ_0 .

Os campos devem satisfazer às condições de contorno na superfície de separação e à *condição de irradiação de Sommerfeld* :

$$\psi_d = \psi_i + \psi_s \quad \text{em } C, \quad (2.11.1)$$

$$\psi_d = \psi_s \quad \text{para } \rho \rightarrow \infty, \quad (2.11.2)$$

onde C é a superfície de contorno e ψ_d , ψ_i e ψ_s são as funções de onda *difratada*, *incidente* e *espalhada*, respectivamente.

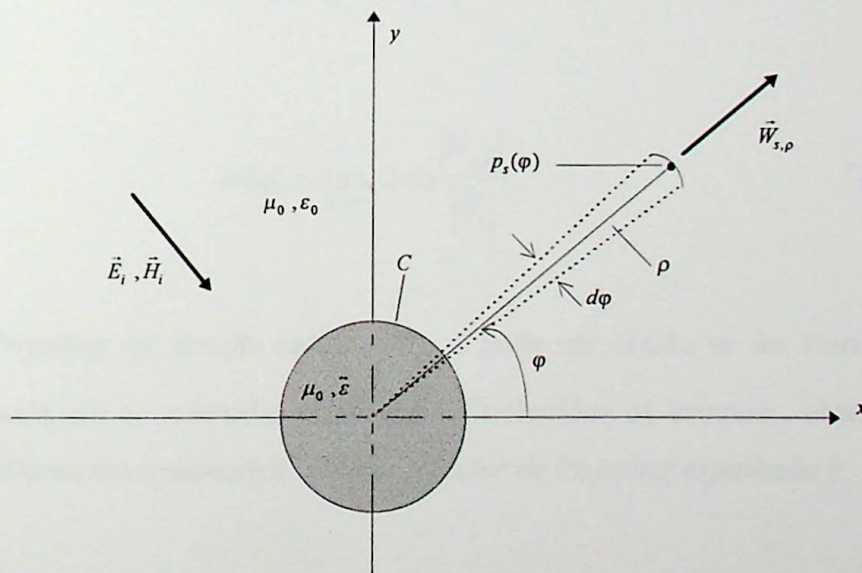


FIGURA 2.11.1 : Geometria para determinação da seção de espalhamento transversal, $\sigma(\varphi)$.

A seção de espalhamento transversal , denominada *seção transversal do radar biestático* (bistatic radar cross-section) , $\sigma(\varphi)$, é definida por :^[4]

$$\sigma(\varphi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{p_s(\varphi)}{|\vec{W}_i|} \quad (2.11.3)$$

onde $p_s(\varphi)$ é a potencia espalhada em watts e \vec{W}_i é o *vetor de Poynting incidente* . Tomando como referência a área de um cilindro de raio ρ e comprimento unitário , tem-se :

$$p_s(\varphi) = 2\pi\rho |\vec{W}_{s,\rho}| \quad (2.11.4)$$

onde $\vec{W}_{s,\rho}$ é o *vetor de Poynting* na direção radial . Portanto , a equação (2.10.3) torna-se

$$\sigma(\varphi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho \frac{|\vec{W}_{s,\rho}|}{|\vec{W}_i|} . \quad (2.11.5)$$

O *vetor de Poynting* na direção radial , $\vec{W}_{s,\rho}$, pode ser obtido se for resolvida a equação de onda em coordenadas cilíndricas . Conhecidos os campos , obtém-se a *seção de espalhamento transversal* . Assim , o *vetor de Poynting espalhado* é

$$\vec{W}_s = \frac{1}{2}(\vec{E}_s \times \vec{H}_s^*) \quad (2.11.6)$$

e em coordenadas cilíndricas circulares

$$\begin{aligned} \vec{E}_s &= E_{s,\rho} \hat{\rho} + E_{s,\varphi} \hat{\varphi} + E_{s,z} \hat{z} , \\ \vec{H}_s^* &= H_{s,\rho}^* \hat{\rho} + H_{s,\varphi}^* \hat{\varphi} + H_{s,z}^* \hat{z} . \end{aligned}$$

Conseqüentemente , a *densidade de potência espalhada* torna-se

$$\vec{W}_s = \frac{1}{2} \left[(E_{s,\varphi} H_{s,z}^* - E_{s,z} H_{s,\varphi}^*) \hat{\rho} + (E_{s,z} H_{s,\rho}^* - E_{s,\rho} H_{s,z}^*) \hat{\phi} + (E_{s,\rho} H_{s,\varphi}^* - E_{s,\varphi} H_{s,\rho}^*) \hat{z} \right] . \quad (2.11.7)$$

Logo , da equação (2.11.7) , conclui-se que a componente radial de \vec{W}_s é

$$\vec{W}_{s,\rho} = \frac{1}{2} (E_{s,\varphi} H_{s,z}^* - E_{s,z} H_{s,\varphi}^*) \hat{\rho} . \quad (2.11.8)$$

O vetor de Poynting complexo incidente , \vec{W}_i , é dado por

$$\vec{W}_i = \frac{1}{2} (\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*) . \quad (2.12.9)$$

Substituindo (2.11.8) e (2.11.9) em (2.11.5) , resulta

$$\sigma(\varphi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho \frac{|E_{s,\varphi} H_{s,z}^* - E_{s,z} H_{s,\varphi}^*|}{|\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*|} . \quad (2.11.10)$$

A *densidade de potência radial* é

$$\vec{W}_{s,\rho} = \frac{1}{2} (\vec{E}_{s,t} \times \vec{H}_{s,t}^*) \quad (2.11.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{E}_{s,t} &= E_{s,\varphi} \hat{\phi} + E_{s,z} \hat{z} , \\ \vec{H}_{s,t}^* &= H_{s,\varphi}^* \hat{\phi} + H_{s,z}^* \hat{z} \end{aligned}$$

e o índice t denota *componente tangencial*. Mas,

$$\vec{H}_{s,t}^* = \frac{\hat{\rho} \times \vec{E}_{s,t}^*}{\eta} \quad (2.11.12)$$

e

$$\vec{E}_{s,t} = -\eta(\hat{\rho} \times \vec{H}_{s,t}) . \quad (2.11.13)$$

Portanto, a *densidade de potência radial* pode ser reescrita como

$$\vec{W}_{s,\rho} = \frac{1}{2\eta} |\vec{E}_{s,t}|^2 \hat{\rho} \quad (2.11.14)$$

ou

$$\vec{W}_{s,\rho} = \frac{\eta}{2} |\vec{H}_{s,t}|^2 \hat{\rho} . \quad (2.11.15)$$

Finalmente, a *seção de espalhamento transversal* pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma(\varphi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho \frac{|E_{s,t}|^2}{|E_i|^2} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho \frac{|\vec{H}_{s,t}|^2}{|\vec{H}_i|^2} . \quad (2.11.16)$$

CAPÍTULO 3

TEORIA DO PLASMA

3.1 INTRODUÇÃO

O plasma é constituído por um grande número de partículas carregadas e neutras que interagem umas com as outras . É conveniente adotar uma aproximação estatística , a fim de definir o comportamento mais provável dessas partículas . Para uma maior compreensão do plasma e de suas características eletromagnéticas é necessário que sejam estudadas a função de distribuição , as oscilações envolvidas , velocidade média , densidades de carga e corrente , equação do movimento e a equação de Boltzmann . O plasma será considerado como sendo um sistema constituído por um grande número de partículas idênticas (monatómicas) .

3.2 FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

A cada ponto no interior do plasma é associado um elemento de volume $d\mathcal{V}$, no interior do qual existem dN partículas (FIGURA 3.2.1) . A quantidade de partículas no interior do volume infinitesimal é

$$dN = n(x,y,z,t) d\mathcal{V} , \quad (3.2.1)$$

onde $n(x,y,z,t)$ é a densidade de partículas e $d\mathcal{V} = dx dy dz$.

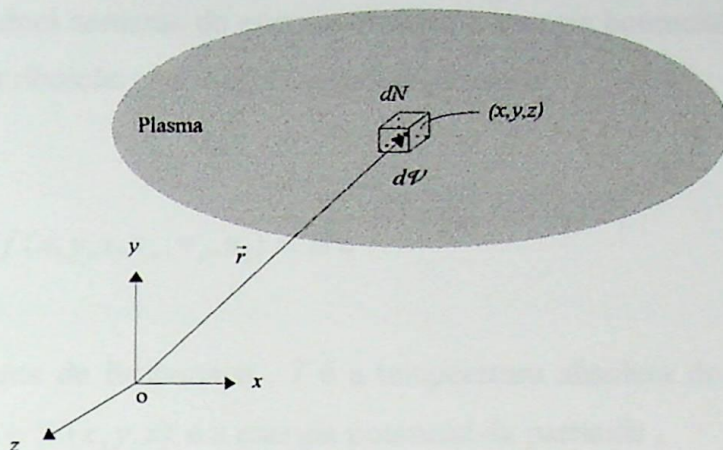


FIGURA 3.2.1 : Geometria para análise da função de distribuição .

A densidade de partículas local^[5] pode ser definida como sendo ,

$$n(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dv_x dv_y dv_z \quad (3.2.2)$$

onde $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$ é a *função de distribuição das partículas* e dv_x , dv_y , dv_z as velocidades elementares segundo as coordenadas x , y e z .

Baseado nas equações (3.2.1) e (3.2.2) , conclui-se que $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$ representa o provável número de partículas encontradas no volume dV , com velocidade compreendida entre os limites $v_x + dv_x$, $v_y + dv_y$, $v_z + dv_z$, num instante t . Ou seja ,

$$f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) = \frac{dN}{dx dy dz dv_x dv_y dv_z} . \quad (3.2.3)$$

Se a densidade de partículas independe do tempo , ou seja , não existem forças externas variáveis com o tempo provocando perturbações no plasma , a função de distribuição dependerá somente da energia cinética e energia potencial das partículas . Essa função de distribuição será a de *Maxwell-Boltzmann* :

$$f(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = A e^{-\left\{ \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2\kappa T} + \frac{\mathcal{U}(x, y, z)}{\kappa T} \right\}} \quad (3.2.4)$$

onde κ é a constante de Boltzmann , T é a temperatura absoluta do plasma , m é a massa da partícula e $\mathcal{U}(x, y, z)$ é a energia potencial da partícula .

Das equações (3.2.2) e (3.2.4) , tem-se :

$$n(x, y, z) = A e^{-\frac{\mathcal{U}(x, y, z)}{\kappa T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2\kappa T}} dv_x dv_y dv_z . \quad (3.2.5)$$

A integração envolvida em (3.2.5) pode ser facilmente efetuada e resultará :

$$n(x, y, z) = A \left(\frac{2\pi\kappa T}{m} \right)^{3/2} e^{-\left\{ \frac{\mathcal{U}(x, y, z)}{\kappa T} \right\}} . \quad (3.2.6)$$

Definindo n_0 como sendo a *densidade de partículas* quando a *energia potencial* é nula , então , a constante A será :

$$A = n_0 \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} . \quad (3.2.7)$$

Finalmente , a função de distribuição para um plasma estável (função de distribuição de Maxwell-Boltzmann) e a densidade de partículas tornam-se :^[5]

$$f(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\left\{ \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2\kappa T} + \frac{\mathcal{U}(x, y, z)}{\kappa T} \right\}}, \quad (3.2.8)$$

$$n(x, y, z) = n_0 e^{-\left\{ \frac{\mathcal{U}(x, y, z)}{\kappa T} \right\}}. \quad (3.2.9)$$

3.3 VELOCIDADE MÉDIA E DENSIDADES DE CARGA E CORRENTE

Se a função de distribuição das partículas é $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$, então, a velocidade média e a velocidade média quadrática podem ser determinadas por :^[5]

$$\vec{V} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v} f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dv_x dv_y dv_z}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dv_x dv_y dv_z} \quad (3.3.1)$$

e

$$V^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dv_x dv_y dv_z}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dv_x dv_y dv_z}. \quad (3.3.2)$$

No caso de um sistema estável, a agitação das partículas é devida somente ao efeito térmico e a função de distribuição será a de Maxwell-Boltzmann. Como a função de distribuição de Maxwell-Boltzmann é simétrica em relação ao eixo

$v = 0$, a velocidade média será nula ($\vec{V} = 0$) . Calculando a velocidade média quadrática pela equação (3.3.2) , tem-se :

$$V^2 = 3 \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2\kappa T}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2\kappa T}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} V_x^2 e^{-\frac{mv_z^2}{2\kappa T}} dv_x \right) dv_y \right) dv_z . \quad (3.3.3)$$

Integrando por partes , a equação (3.3.3) resultará em

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = \frac{3\kappa T}{m} , \quad (3.3.4)$$

que é a *velocidade média quadrática* cujo valor é diretamente proporcional à temperatura absoluta do sistema . Na equação (3.3.3) observa-se que

$$V_x^2 = V_y^2 = V_z^2 = v_t^2 = \frac{\kappa T}{m} \quad (3.3.5)$$

onde v_t^2 é o *valor médio quadrático da velocidade térmica* , cujo valor eficaz é obtido extraíndo sua raiz quadrada ,

$$v_t = \sqrt{\frac{\kappa T}{m}} . \quad (3.3.6)$$

A densidade de carga resultante é a somatória entre a densidade de carga iônica e a densidade de carga eletrônica . Cada íon carrega uma carga igual a $Z|e|$ (Z é o número atômico) e cada elétron transporta uma carga igual a $-|e|$. A densidade de corrente resultante é a somatória da densidade de corrente iônica e a densidade de corrente eletrônica . O sentido da densidade de corrente iônica é contrário ao da densidade de corrente eletrônica , devida à velocidade média eletrônica ser oposta à velocidade média iônica . Conseqüentemente , a densidade de carga e a densidade de corrente serão dadas por :^[5]

$$\rho_v(x, y, z, t) = \sum_{\alpha=e,i} q_\alpha n_\alpha = |e| (Zn_i - n_e) \quad (3.3.7)$$

$$\vec{j} = \sum_{\alpha=e,i} q_\alpha n_\alpha \vec{V}_\alpha = |e| (Zn_i \vec{V}_i - n_e \vec{V}_e) \quad (3.3.8)$$

onde

$$n_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dv_x dv_y dv_z, \quad (3.3.9)$$

$$\vec{V}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v}_\alpha f_\alpha(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dv_x dv_y dv_z. \quad (3.3.10)$$

3.4 RAIOS DE DEBYE E PARÂMETRO DO PLASMA

Uma das características mais importantes do plasma é sua habilidade em manter a neutralidade das cargas internas. Será considerada a nuvem elétron-íon na vizinhança de um íon arbitrário do plasma a fim de que se possa calcular o potencial eletrostático no interior da nuvem. Na FIGURA 3.4.1 está representada a nuvem eletron-íon na vizinhança de um íon de carga $Z|e|$, onde Z é o número atômico. Quando $r_2 \leq r \leq \bar{r}$, as densidades devem satisfazer a *condição de neutralidade*:^[13]

$$\sum_{\alpha=e,i} n_\alpha q_\alpha \Big|_{\varphi=0} = Zn_{i0} - n_{e0} = 0. \quad (3.4.1)$$

O campo elétrico gerado pelo íon será :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) . \quad (3.4.2)$$

onde $\varphi(\vec{r})$ é o potencial eletrostático .

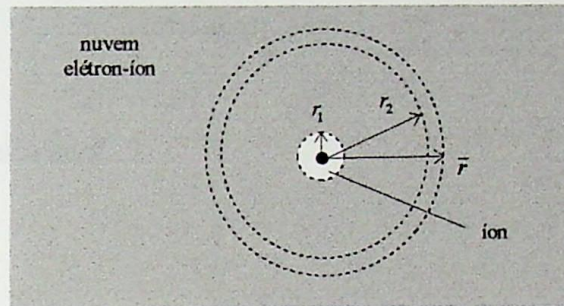


FIGURA 3.4.1 : Nuvem elétron-íon na vizinhança de um íon .

A lei de Gauss para o campo elétrico é escrita da forma :

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha=e,i} n_{\alpha} q_{\alpha} . \quad (3.4.3)$$

O potencial deve satisfazer às equações (3.4.2) e (3.4.3) , o que dá origem à *equação de Poisson* ,

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha=e,i} n_{\alpha} q_{\alpha} \quad (3.4.4)$$

onde n_{α} é a densidade das partículas de índice α , com carga q_{α} , na nuvem . Se o plasma estiver num estado de equilíbrio termodinâmico , as partículas descreverão um

movimento organizado e a densidade das partículas n_α será determinada pela fórmula de Boltzmann ,

$$n_\alpha = n_{\alpha 0} e^{-\left\{ \frac{\mathcal{U}(x,y,z)}{\kappa T} \right\}} . \quad (3.4.5)$$

Como a energia potencial da partícula é

$$\mathcal{U} = q_\alpha \varphi , \quad (3.4.6)$$

a densidade eletrônica será

$$n_e = n_{e0} e^{\frac{|e|\varphi}{\kappa T}} \quad (3.4.7)$$

e a densidade iônica

$$n_i = n_{i0} e^{-\left\{ \frac{Z|e|\varphi}{\kappa T} \right\}} . \quad (3.4.8)$$

A condição de ionização^[13] , também conhecida como *condição de plasma* ou *parâmetro g do plasma* , é definida pela relação entre a energia potencial e a energia cinética média ($mv_i^2/2$) . A importância do parâmetro g consiste em possibilitar uma definição mais completa para o plasma . Da definição anterior , o *parâmetro do plasma* g é escrito na forma

$$g = \frac{2Z|e|\varphi}{\kappa T} \ll 1 . \quad (3.4.9)$$

Colocando a equação de Poisson , equação (3.4.4) , em coordenadas esféricas , tem-se :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = -\frac{|e|}{\epsilon_0} (Zn_i - n_e) = -\frac{|e|}{\epsilon_0} \left\{ Zn_{i0} e^{-\left(\frac{Z|e|\varphi}{\kappa T}\right)} - n_{e0} e^{\frac{|e|\varphi}{\kappa T}} \right\}. \quad (3.4.10)$$

Da condição de neutralidade e como $Z|e|\varphi \ll \kappa T$,

$$Zn_{i0} e^{-\left(\frac{Z|e|\varphi}{\kappa T}\right)} - n_{e0} e^{\frac{|e|\varphi}{\kappa T}} \cong -\frac{(Z+1)n_{e0}|e|\varphi}{\kappa T}.$$

Conseqüentemente, a equação (3.4.10) torna-se igual a

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) - \frac{(Z+1)n_{e0}e^2}{\kappa T \epsilon_0} (r\varphi) = 0 \quad (3.4.11)$$

que é uma equação diferencial ordinária, homogênea, de segunda ordem. A solução da equação (3.4.11) é

$$\varphi = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{h}} \quad (3.4.12)$$

onde A é a constante de integração e h é o raio de Debye^{[5][13]} cujo valor é dado por

$$h = \sqrt{\frac{\kappa T \epsilon_0}{(Z+1)n_{e0}e^2}}. \quad (3.4.13)$$

No ponto médio, $r = \bar{r}$, o campo eletrostático é

$$E(\bar{r})\hat{r} \cong \frac{Z|e|}{4\pi\epsilon_0\bar{r}^2}\hat{r} = -\nabla\varphi|_{r=\bar{r}}. \quad (3.4.14)$$

Entretanto, como

$$-\nabla\varphi|_{r=\bar{r}} = \frac{A}{\bar{r}^2} \left(1 + \frac{\bar{r}}{h}\right) e^{-\left(\frac{\bar{r}}{h}\right)} \hat{r} \quad (3.4.15)$$

e admitindo que $\bar{r} \ll h$, a equação (3.3.15) pode ser aproximadamente igual a

$$-\nabla\varphi|_{r=\bar{r}} \cong \frac{A}{\bar{r}^2} \hat{r} . \quad (3.4.16)$$

A constante A é facilmente obtida igualando-se as equações (3.4.14) e (3.4.16). Assim,

$$A = \frac{Z|e|}{4\pi\epsilon_0} . \quad (3.4.17)$$

Conseqüentemente, o potencial a uma distância r será

$$\varphi(r) = \frac{Z|e|}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\left(\frac{r}{h}\right)} \quad (3.4.18)$$

e a uma distância \bar{r} ,

$$\varphi(\bar{r}) \cong \frac{Z|e|}{4\pi\epsilon_0 \bar{r}} \quad \text{onde} \quad \bar{r} \ll h . \quad (3.4.19)$$

A probabilidade de uma partícula carregada ser encontrada na região esférica de raio r_1 é $Z/2Z$ e na região esférica de raio r_2 é $2Z/2Z$. Portanto, a distância média \bar{r} será

$$\bar{r} = \frac{r_1 + 2r_2}{2} . \quad (3.4.20)$$

Como o número de partículas, com carga igual a $|e|$, encontradas na região esférica

de raio r_1 é Z e na região esférica de raio r_2 é $2Z$, tem-se :

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{3Z}{4\pi n_{e0}}} , \quad (3.4.21)$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{3Z}{2\pi n_{e0}}} , \quad (3.4.22)$$

e a equação (3.4.20) torna-se :

$$\bar{r} \cong Z^{1/3} n_{e0}^{-1/3} . \quad (3.4.23)$$

Assim , o *parâmetro do plasma* pode ser escrito da seguinte forma

$$g = \frac{\left(\frac{Z^2 e^2}{2\pi\epsilon_0 \bar{r}} \right)}{\kappa T} = \frac{Z^{5/3} e^2 n_{e0}^{1/3}}{2\pi\epsilon_0 \kappa T} \ll 1 , \quad (3.4.24)$$

o qual nos diz que o plasma deve ser suficientemente quente e suficientemente rarefeito para que a condição dada pela equação (3.4.9) seja satisfeita . Usando o *raio de Debye* , h , pode-se escrever a condição de ionização na forma equivalente ,

$$\frac{4\pi}{3} h^3 n_{e0} \gg \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2Z^5}{\pi(Z+1)^3}} , \quad (3.4.25)$$

significando que o número de partículas do plasma num *volume de Debye* , que é uma esfera de raio h , deve ser suficientemente grande .

Conclui-se que o plasma poderá manter a neutralidade das cargas somente se o *raio de Debye* h for pequeno comparado com as dimensões físicas do plasma . Assim , o plasma pode ser melhor definido como sendo uma coleção de partículas de cargas positivas e negativas aproximadamente iguais , em que o parâmetro h , definido por (3.4.13) , é muito menor que as dimensões do plasma .

3.5 FREQUÊNCIA DO PLASMA E FREQUÊNCIA DO CICLOTRON

Será analisado o movimento das partículas carregadas na presença dos campos elétrico e magnético. Os índices // e \perp serão utilizados para denotar as componentes de uma quantidade paralela e perpendicular à direção do campo magnético, respectivamente. Em uma partícula de massa m e carga $-|e|$, movimentando-se na presença de um campo magnético constante \vec{B}_0 , atuará uma força de origem magnética, dada por:

$$\vec{F}_H = -|e| \vec{v} \times \vec{B}_0 \quad (3.5.1)$$

onde \vec{v} é a velocidade da partícula. É importante observar que essa força não realiza trabalho sobre as partículas, pois não possui componente na direção do campo magnético. Se \mathcal{G} é a energia cinética da partícula, então:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{//} + \mathcal{G}_{\perp} = \frac{1}{2} m (v_{//}^2 + v_{\perp}^2) . \quad (3.5.2)$$

É óbvio que $v_{//}$ permanece constante durante o movimento da partícula. Num sistema coordenado movendo com velocidade $v_{//}$, a órbita da partícula é um círculo. O raio de giro, também chamado *raio de Larmor*^[13], é obtido igualando-se a força centrífuga à força magnética,

$$R_g = \frac{mv_{\perp}}{|e|B_0} . \quad (3.5.3)$$

Portanto, a velocidade angular, chamada *freqüência de Larmor* ou *freqüência do ciclotron*, será:^{[5][13]}

$$\omega_c = \frac{v_{\perp}}{R_g} = \frac{|e|B_0}{m} . \quad (3.5.4)$$

É evidente que , da equação (3.5.1) , as cargas de sinais opostos deslocam-se realizando órbitas em sentidos opostos . O centro do raio de curvatura da trajetória dos elétrons move-se ao longo das linhas de força do campo magnético com uma velocidade igual a $v_{//}$. Portanto , a órbita de uma partícula forma uma hélice .

O efeito do campo elétrico sobre o movimento das partículas é mais significativo sobre os elétrons . A FIGURA (3.5.1) mostra o deslocamento x da camada de elétrons em relação à camada de íons , d é a espessura da camada eletrônica .

A lei de Gauss para o campo elétrico é

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} . \quad (3.5.5)$$

Portanto , o campo elétrico será

$$\vec{E} = \int_0^x \frac{\rho_v}{\epsilon_0} dx' = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} x \hat{x} \quad (3.5.6)$$

e a força elétrica

$$\vec{F}_E = -\frac{|e|\rho}{\epsilon_0} x \hat{x} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{x} . \quad (3.5.7)$$

No caso de *ondas monocromáticas* , $x(x,t) = x(x) e^{i\omega_p t}$. Portanto , da equação (3.5.7) , obtém-se a *freqüência do plasma* :^{[5][13]}

$$\omega_p = \sqrt{\frac{|e|\rho_v}{m\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m\epsilon_0}} . \quad (3.5.8)$$

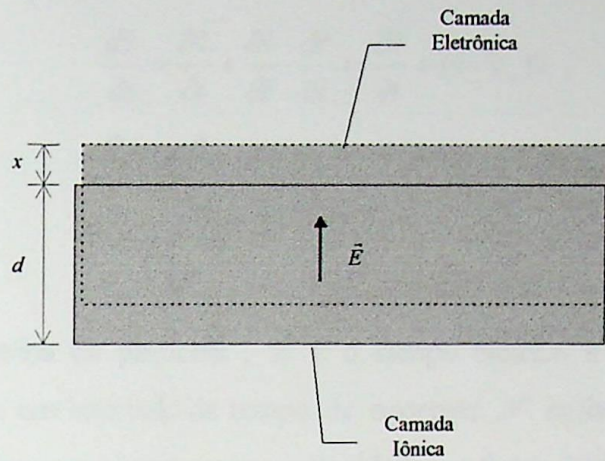


FIGURA 3.5.1 : Efeito do campo elétrico sobre o movimento das partículas .

3.6 A EQUAÇÃO DO MOVIMENTO E A EQUAÇÃO DE BOLTZMANN

Num sistema de partículas em movimento , na presença de uma onda eletromagnética , podem ocorrer colisões . Contudo , se o efeito da temperatura é desprezível o plasma estará em equilíbrio termodinâmico e o movimento das partículas pode ser completamente descrito pela *equação do movimento* :

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_H + \vec{F}_C = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3.6.1)$$

onde \vec{F}_E é a força devida ao campo elétrico , \vec{F}_H é a força devida ao campo magnético , \vec{F}_C é a força devida às colisões , m é a massa da partícula e \vec{v} é sua velocidade .

Sabe-se do cálculo diferencial^[15] e das equações (2.2.2) e (2.2.3) que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{v} ,$$

$$\vec{F}_E = q\vec{E} ,$$

$$\vec{F}_H = q(\vec{v} \times \vec{B}) ,$$

onde q é a carga elétrica da partícula , \vec{E} é o campo elétrico e \vec{B} é a indução magnética . Se durante um intervalo de tempo Δt ocorrem \mathcal{N} colisões , o choque é inelástico e as partículas possuem a mesma velocidade , a força devida às colisões é aproximadamente

$$\vec{F}_C \cong -\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m\vec{v}_i = -\left(\frac{\mathcal{N}}{\Delta t}\right)m\vec{v} = -\nu m\vec{v} , \quad (3.6.2)$$

onde ν é a *freqüência de colisão* . A equação do movimento torna-se :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = -\frac{\nu}{m} \vec{v} . \quad (3.6.3)$$

Quando for considerado o efeito da temperatura , a densidade de partículas é puramente estatístico . Portanto , as partículas possuem uma *função de distribuição* $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$, definida pela equação (3.2.3) . A taxa de variação da função de distribuição , em relação ao tempo , é dada por :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c \quad (3.6.4)$$

onde o índice c denota colisões . Portanto , a *equação de Boltzmann* pode ser escrita na forma :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f + \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \quad (3.6.5)$$

a qual será utilizada juntamente com as equações de Maxwell na descrição das características eletromagnéticas do plasma quente .

3.7 DESCRIÇÃO ELETROMAGNÉTICA DO PLASMA

Na descrição eletromagnética do plasma será considerado o efeito da temperatura . O tratamento matemático é mais complexo , comparado com o necessário ao estudo de um plasma frio (temperatura absoluta do plasma é desprezível) . Vários trabalhos foram desenvolvidos , dentre os quais os de J.E. Drummond (1958)^[7] , Ira B. Bernstein (1958)^[8] e Lyman Mower (1959)^[6] . O plasma é constituído por elétrons , íons positivos e partículas neutras . Na ausência de perturbações , o plasma possui densidade uniforme e é eletricamente neutro . Dentre as partículas existentes no plasma , o movimento dos elétrons é mais significativo , uma vez que , sua energia cinética é muito superior à dos íons .

O estudo da influência do plasma sobre a propagação da onda eletromagnética consiste da solução simultânea das *equações de Maxwell* e da *equação de Boltzmann* . A função de distribuição f , deve satisfazer a *equação de Boltzmann* :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f - \frac{|e|}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \quad (3.7.1)$$

As quantidades $-|e|$, \vec{v} e m são a carga , a velocidade e a massa de um elétron , respectivamente . Conforme o modelo de Kook^[10] , o termo representando as colisões pode ser aproximadamente igual a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = -\nu(f - f_0), \quad (3.7.2)$$

em que ν é a frequência de colisão e f_0 é a função de distribuição para o plasma em equilíbrio termodinâmico .

Baseado no trabalho de William P. Allis , Solomon J. Buchsbaum e Abraham Bers^[9] , as condições de linearização da *equação de Boltzmann* são :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &\approx \vec{E}_1 e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r})}, \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &\approx B_0 \hat{z} + \vec{B}_1 e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r})}, \\ f(\vec{r}, \vec{v}, t) &\approx f_0 + f_1 e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r})}, \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

onde $B_0 \gg |\vec{B}_1|$, $f_0 \gg f_1$ e $\vec{\gamma}$ é o vetor propagação .

A função de distribuição f_0 é a de Maxwell-Boltzmann ,

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} e^{-\left(\frac{mv^2}{2\kappa T}\right)}, \quad (3.7.4)$$

onde κ é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta . Portanto, a densidade local de partículas será :

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f dv_x dv_y dv_z = n_0 + n_1 e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r})}. \quad (3.7.5)$$

Substituindo as equações (3.7.2) e (3.7.3) na equação de Boltzmann , resulta :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f_0 + \vec{v} \cdot \nabla_r f_1 - \frac{|e|}{m} \vec{E}_1 \cdot \nabla_v f_0 - \frac{|e|}{m} \vec{E}_1 \cdot \nabla_v f_1 - \\ - \frac{|e|}{m} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f_0 - \frac{|e|}{m} (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot \nabla_v f_1 - \frac{|e|}{m} (\vec{v} \times \vec{B}_1) \cdot \nabla_v f_1 = -\nu f_1. \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

Entretanto, como f_0 é função apenas da velocidade, $B_0 \gg |\vec{B}_1|$, $f_0 \gg f_1$ e

$$\nabla_v f_0 = -\left(\frac{m}{\kappa T}\right) f_0 \vec{v},$$

a equação (3.7.6) torna-se :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f_1 - \frac{|e|}{m} \vec{E}_1 \cdot \nabla_v f_0 - \frac{|e|}{m} (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot \nabla_v f_1 = -\nu f_1. \quad (3.7.7)$$

Na FIGURA 2.7.1 é mostrada a orientação da velocidade da partícula \vec{v} , do vetor propagação $\vec{\gamma}$ e do campo magnetostático \vec{B}_0 em relação ao eixo coordenado. Assim, tem-se :

$$\vec{\gamma} = \hat{x} \gamma_{\perp} + \hat{z} \gamma_{\parallel}, \quad (3.7.8)$$

$$\vec{v} = \hat{x} v_{\perp} \cos \varphi + \hat{y} v_{\perp} \sin \varphi + \hat{z} v_{\parallel}, \quad (3.7.9)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\gamma} = \gamma_{\parallel} v_{\parallel} + \gamma_{\perp} v_{\perp} \cos \varphi. \quad (3.7.10)$$

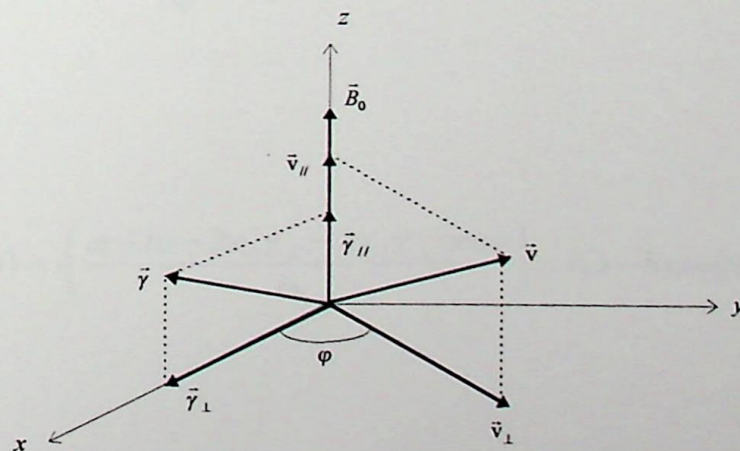


FIGURA 3.7.1 : Orientação de \vec{v} , $\vec{\gamma}$ e \vec{B}_0 em relação ao eixo coordenado .

Manipulando separadamente cada termo da equação (3.7.7), obtém-se os seguintes resultados :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial t} &= i(\omega - \vec{v} \cdot \vec{\gamma})f_1 = i(\omega - \gamma_{\parallel} v_{\parallel} - \gamma_{\perp} v_{\perp} \cos\varphi)f_1, \\ \vec{v} \cdot \nabla_r f_1 &= -i(\vec{v} \cdot \vec{\gamma})f_1 = -i(\gamma_{\parallel} v_{\parallel} + \gamma_{\perp} v_{\perp} \cos\varphi)f_1, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{d\vec{v}}{d\varphi} = (\nabla_v f_1) \cdot \frac{d\vec{v}}{d\varphi} = -v_{\perp} \sin\varphi \frac{\partial f_1}{\partial v_x} + v_{\perp} \cos\varphi \frac{\partial f_1}{\partial v_y}, \\ -\frac{|e|}{m} (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot \nabla_v f_1 &= \omega_c \left(v_{\perp} \cos\varphi \frac{\partial f_1}{\partial v_y} - v_{\perp} \sin\varphi \frac{\partial f_1}{\partial v_x} \right) = \omega_c \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

Então, a equação diferencial (3.7.7) torna-se :

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} + i \left(\frac{\omega - i\nu - 2\gamma_{\parallel} v_{\parallel} - 2\gamma_{\perp} v_{\perp} \cos\varphi}{\omega_c} \right) f_1 = \frac{|e|}{m\omega_c} (\vec{E}_1 \cdot \nabla_v f_0) \quad (3.7.11)$$

que é uma equação diferencial linear, não-homogênea e de primeira ordem.

A equação (3.7.11) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} + P(\varphi)f_1 = R(\varphi) \quad (3.7.12)$$

onde

$$P(\varphi) = i \left(\frac{\omega - i\nu - 2v_{\parallel}\gamma_{\perp} - 2v_{\perp}\gamma_{\perp} \cos\varphi}{\omega_c} \right) = i(a - b \cos\varphi) \quad (3.7.13)$$

e

$$R(\varphi) = \frac{|e|}{m\omega_c} (\vec{E}_1 \cdot \nabla_v f_0). \quad (3.7.14)$$

A solução da equação (3.7.12) é do tipo

$$f_1 = \zeta(\varphi)\xi(\varphi) . \quad (3.7.15)$$

Portanto , sua derivada em relação a φ é

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = \zeta \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \xi \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} . \quad (3.7.16)$$

Substituindo as equações (3.7.15) e (3.7.16) em (3.7.12) , resulta

$$\xi \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} + \zeta \left[\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + P(\varphi)\xi \right] = R(\varphi) . \quad (3.7.15)$$

Uma solução particular da equação (3.7.15) é dada pelas equações :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + P(\varphi)\xi = 0 , \quad (3.7.18)$$

$$\xi \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = R(\varphi) . \quad (3.7.19)$$

Resolvendo as equações (3.7.18) e (3.7.19) , obtém-se como solução as equações abaixo :

$$\xi(\varphi) = K_1 e^{-\int P(\varphi)d\varphi} , \quad (3.7.20)$$

$$\zeta(\varphi) = \frac{1}{K_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi} R(\varphi') e^{\int P(\varphi')d\varphi'} d\varphi' . \quad (3.6.21)$$

Substituindo as equações (3.7.20) e (3.7.21) na equação (3.7.15) , obtém-se a solução completa da equação (3.7.12) :

$$f_1 = \int_{\varphi_i}^{\varphi} R(\varphi') e^{\int P(\varphi') d\varphi' - \int P(\varphi) d\varphi} d\varphi' . \quad (3.7.22)$$

A função de distribuição f_1 é limitada em φ' , onde $\lim_{\varphi' \rightarrow \pm\infty} f_1 = 0$.

Conclui-se que $\varphi_i = -\infty$ e a área de integração é mostrada na FIGURA 3.7.2. Logo, a equação (3.7.22) torna-se:

$$f_1 = \frac{|e|}{m\omega_c} \vec{E}_1 \cdot \int_{-\infty}^{\varphi} \nabla_{v'} f_0(v') e^{-i[a(\varphi - \varphi') - b(\sin \varphi - \sin \varphi')]} d\varphi' \quad (3.7.23)$$

onde

$$a = \frac{\omega - i\nu - 2v_{||}\gamma_{||}}{\omega_c} , \quad (3.7.24)$$

$$b = \frac{2v_{\perp}\gamma_{\perp}}{\omega_c} . \quad (3.7.25)$$

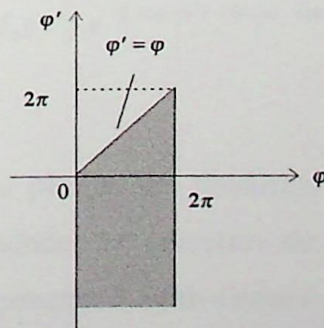


FIGURA 3.7.2 : Área de integração referente à equação (3.7.23).

A densidade de corrente total (\vec{J}_t) é a soma da densidade de corrente de condução (\vec{J}_c) mais a densidade de corrente de deslocamento (\vec{J}_d). Portanto, tem-se:

$$\vec{J}_t \approx \vec{J}_1 e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r})} = \vec{J}_c + \vec{J}_d \quad (3.7.26)$$

onde

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E}_1 e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r})} = -|e| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v} f_1 e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r})} dv_x dv_y dv_z, \quad (3.7.27)$$

$$\vec{J}_d = i\omega \epsilon_0 \vec{E}_1 e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r})}. \quad (3.7.28)$$

A condutividade do plasma σ é obtida substituindo a equação (3.7.24) na equação (3.7.27). Observa-se que essa condutividade possui uma característica tensorial justificada pelo tensor $\vec{v} \nabla_{v'} f_0(v')$. Representando a condutividade pelo tensor $\vec{\sigma}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{e^2}{m\omega_c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\varphi} \vec{v} \nabla_{v'} f_0(v') e^{-[a(\varphi - \varphi') - b(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi')]} d\varphi' dv_x dv_y dv_z. \quad (3.7.29) \end{aligned}$$

Considerando o plasma um dielétrico, a densidade de corrente total deve ser igual a uma densidade de corrente de deslocamento equivalente. A densidade de corrente de deslocamento equivalente é

$$\vec{J}_1 = i\omega \left[\epsilon_0 I + \frac{\vec{\sigma}}{i\omega} \right] \cdot \vec{E}_1 = i\omega \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}_1 \quad (3.7.30)$$

onde

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \epsilon_0 I + \frac{\vec{\sigma}}{i\omega} \quad (3.7.31)$$

é a *permissividade equivalente* do plasma e I é a *matriz identidade*.

Como

$$\vec{v} = \hat{x}v_{\perp} \cos\varphi + \hat{y}v_{\perp} \sin\varphi + \hat{z}v_{\parallel}$$

e

$$\nabla_{v'} f_0(v') = \hat{v}_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \hat{z} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} = \hat{x} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \cos\varphi' + \hat{y} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \sin\varphi' + \hat{z} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}}$$

o produto $\vec{v} \nabla_{v'} f_0(v')$ resulta num tensor em coordenadas retangulares, dado por :

$$\vec{v} \nabla_{v'} f_0(v') = \begin{bmatrix} v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \cos\varphi \cos\varphi' & v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \sin\varphi' \cos\varphi & v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \cos\varphi \\ v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \sin\varphi \cos\varphi' & v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \sin\varphi \sin\varphi' & v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \sin\varphi \\ v_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \cos\varphi' & v_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \sin\varphi' & v_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (3.7.32)$$

A fim de facilitar nos cálculos é necessário fazer a transformação do tensor dado pela equação (3.7.32), de coordenadas retangulares (x,y,z) para coordenadas retangulares (l,r,p) . Para o tipo de plasma considerado neste trabalho, os eixos l e r correspondem aos eixos x e y girados de quarenta e cinco graus no sentido horário e o eixo p é coincidente com o eixo z , conforme mostrado na FIGURA (3.7.3). Com isso, tem-se :

$$\begin{bmatrix} \hat{l} \\ \hat{r} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}. \quad (3.7.33)$$

Donde, a matriz de transformação é definida como

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (3.7.34)$$

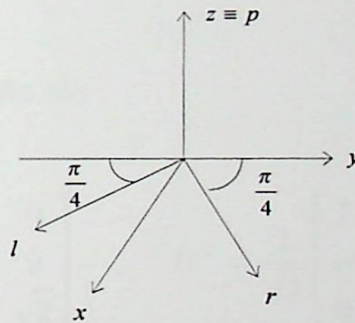


FIGURA 3.7.3 : Sistema de coordenadas retangulares (x,y,z) e (l,r,p) .

A transformação de um tensor \vec{A} , em coordenadas retangulares (x,y,z) , para um tensor \vec{A}' , em coordenadas retangulares (l,r,p) , é realizada da seguinte maneira :

$$[\hat{x} \quad \hat{y} \quad \hat{z}] \vec{A} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = [\hat{l} \quad \hat{r} \quad \hat{p}] \vec{A}' \begin{bmatrix} \hat{l} \\ \hat{r} \\ \hat{p} \end{bmatrix}.$$

Portanto ,

$$\begin{bmatrix} \hat{l} & \hat{r} & \hat{p} \end{bmatrix} \overline{U} \vec{A} \overline{U}^T \begin{bmatrix} \hat{l} \\ \hat{r} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{l} & \hat{r} & \hat{p} \end{bmatrix} \vec{A}' \begin{bmatrix} \hat{l} \\ \hat{r} \\ \hat{p} \end{bmatrix} .$$

Conseqüentemente ,

$$\vec{A}' = \overline{U} \vec{A} \overline{U}^T \quad (3.7.35)$$

e a transformação inversa ,

$$\vec{A} = U^T \vec{A}' U , \quad (3.7.36)$$

onde as matrizes de transformação são :

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} , \quad U^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} , \quad (3.7.37)$$

$$\overline{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} , \quad \overline{U}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} .$$

A equação (3.7.29) é escrita , em coordenadas cilíndricas esféricas , da seguinte forma :

$$\vec{\sigma} = -\frac{e^2}{m\omega_c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} v_{\perp} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\varphi} \vec{v} \nabla_{v'} f_0(v') e^{-i[a(\varphi-\varphi')-b(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi')] } d\varphi' d\varphi dv_{\perp} dv_{\parallel} . \quad (3.7.38)$$

Fazendo a transformação da equação (3.7.38), de coordenadas retangulares (x, y, z) para coordenadas retangulares (l, r, p) , tem-se :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}' &= \bar{U} \vec{\sigma} \bar{U}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{ll} & \sigma_{lr} & \sigma_{lp} \\ \sigma_{rl} & \sigma_{rr} & \sigma_{rp} \\ \sigma_{pl} & \sigma_{pr} & \sigma_{pp} \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{e^2}{m\omega_c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} v_{\perp} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}' e^{-i[a(\varphi-\varphi')-b(\sin\varphi-\sin\varphi')]} d\varphi' d\varphi dv_{\perp} dv_{\parallel} \end{aligned} \quad (3.7.39)$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \bar{U} \vec{\nabla}_{v'} f_0(v') \bar{U}^T = \\ &= \begin{bmatrix} \hat{l} & \hat{r} & \hat{p} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} e^{i(\varphi+\varphi')} & v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} e^{i(\varphi-\varphi')} & \sqrt{2} v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} e^{i\varphi} \\ v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} e^{-i(\varphi-\varphi')} & v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} e^{-i(\varphi+\varphi')} & \sqrt{2} v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} e^{-i\varphi} \\ \sqrt{2} v_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} e^{i\varphi'} & \sqrt{2} v_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} e^{-i\varphi'} & 2v_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{l} \\ \hat{r} \\ \hat{p} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7.40)$$

A função de distribuição f_0 é,

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\kappa T}} = n_0 \left(\frac{1}{2\pi v_t^2} \right)^{3/2} e^{-\left(\frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{2v_t^2} \right)}. \quad (3.7.41)$$

Assim, suas derivadas parciais em relação a v_{\perp} e v_{\parallel} serão :

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} = -\frac{n_0 v_{\perp}}{(2\pi)^{3/2} v_t^5} e^{-\left(\frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{2v_t^2} \right)}, \quad (3.7.42)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} = -\frac{n_0 v_{\parallel}}{(2\pi)^{3/2} v_t^5} e^{-\left(\frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{2v_t^2} \right)}. \quad (3.7.43)$$

Das equações (3.7.39)-(3.7.43) resultam :

$$\sigma_{lr,rl} = M \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v_{||}^2}{2v_t^2}} dv_{||} \int_0^{+\infty} v_{\perp}^3 e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_t^2}} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\varphi} e^{-i[(a\mp 1)(\varphi - \varphi') - b(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi')]} d\varphi' , \quad (3.7.44)$$

$$\sigma_{ll,rr} = M \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v_{||}^2}{2v_t^2}} dv_{||} \int_0^{+\infty} v_{\perp}^3 e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_t^2}} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\varphi} e^{-i[(a\mp 1)\varphi - (a\pm 1)\varphi' - b(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi')]} d\varphi' , \quad (3.7.45)$$

$$\sigma_{pl,pr} = \sqrt{2} M \int_{-\infty}^{+\infty} v_{||} e^{-\frac{v_{||}^2}{2v_t^2}} dv_{||} \int_0^{+\infty} v_{\perp}^2 e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_t^2}} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\varphi} e^{-i[a(\varphi - \varphi') \mp \varphi' - b(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi')]} d\varphi' , \quad (3.7.46)$$

$$\sigma_{lp,rp} = \sqrt{2} M \int_{-\infty}^{+\infty} v_{||} e^{-\frac{v_{||}^2}{2v_t^2}} dv_{||} \int_0^{+\infty} v_{\perp}^2 e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_t^2}} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\varphi} e^{-i[a(\varphi - \varphi') \mp \varphi - b(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi')]} d\varphi' , \quad (3.7.47)$$

$$\sigma_{pp} = 2 M \int_{-\infty}^{+\infty} v_{||}^2 e^{-\frac{v_{||}^2}{2v_t^2}} dv_{||} \int_0^{+\infty} v_{\perp} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_t^2}} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\varphi} e^{-i[a(\varphi - \varphi') - b(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi')]} d\varphi' , \quad (3.7.48)$$

onde

$$M = \frac{n_0 e^2}{2m\omega_c (2\pi)^{3/2} v_t^5} = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{2\omega_c (2\pi)^{3/2} v_t^5} . \quad (3.7.49)$$

No caso de uma integral dupla

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y) dx dy \quad (3.7.50)$$

pode-se introduzir novas variáveis de integração fazendo $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$, onde as funções $g(u,v)$ e $h(u,v)$ são contínuas e possuem derivadas parciais contínuas de primeira ordem em uma dada região \mathcal{R}_k do plano uv , de sorte que cada ponto em \mathcal{R}_k corresponde a um ponto em \mathcal{R} e vice-versa, além disso o *Jacobiano*

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right\| \quad (3.7.51)$$

é positivo ou negativo em \mathcal{R}_k . Então,

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{R}_k} f[g(u, v), h(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv ; \quad (3.7.52)$$

assim, o integrando é expresso em termos de u e v e $dx dy$ é substituído pelo produto do valor absoluto do *Jacobiano* por $du dv$ ^[11]. Fazendo a mudança de variáveis, nas equações (3.7.44)-(3.7.48), conforme a transformação

$$\begin{cases} \varphi - \varphi' = 2\Theta \\ \varphi + \varphi' = 2\phi \end{cases} \quad (3.7.53)$$

tem-se:

$$\begin{cases} \varphi = \Theta + \phi \\ \varphi' = \phi - \Theta \end{cases} \quad (3.7.54)$$

e

$$\sin \varphi - \sin \varphi' = 2 \sin \Theta \cos \phi = 2 \sin \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi + \varphi'}{2} \right) \quad (3.7.55)$$

onde a nova área de integração é mostrada na FIGURA (3.7.4) e o *Jacobiano* é

$$\frac{\partial(\varphi, \varphi')}{\partial(\Theta, \phi)} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial \Theta} & \frac{\partial \varphi'}{\partial \phi} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right\| = 2 . \quad (3.7.56)$$

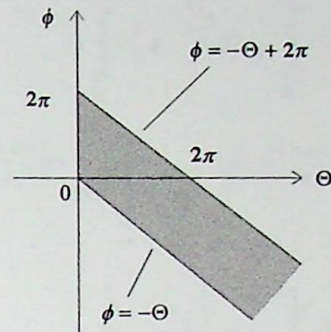


FIGURA 3.7.4 : Área de integração referente à equação (3.7.54) .

Portanto , as equações (3.7.44)-(3.7.48) tornam-se :

$$\sigma_{lr,rl} = 2M \int_0^{+\infty} e^{-i\left(\frac{\omega - i\nu}{\omega_c}\right)2\Theta} d\Theta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\frac{v_{||}^2}{2v_i^2} + i\frac{4v_{||}\gamma_{||}\Theta}{\omega_c}\right)} dv_{||} \cdot \int_0^{+\infty} v_{\perp}^3 e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_i^2}} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} e^{i2b \text{sen}\Theta \cos\phi} d\phi , \quad (3.7.57)$$

$$\sigma_{ll,rr} = 2M \int_0^{+\infty} e^{-i\left(\frac{\omega - i\nu}{\omega_c} \mp 1\right)2\Theta} d\Theta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\frac{v_{||}^2}{2v_i^2} + i\frac{4v_{||}\gamma_{||}\Theta}{\omega_c}\right)} dv_{||} \cdot \int_0^{+\infty} v_{\perp}^3 e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_i^2}} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} e^{\mp i2\phi} e^{i2b \text{sen}\Theta \cos\phi} d\phi , \quad (3.7.58)$$

$$\sigma_{pl,pr} = 2\sqrt{2}M \int_0^{+\infty} e^{-i\left[2\left(\frac{\omega - i\nu}{\omega_c}\right) \pm 1\right]\Theta} d\Theta \int_{-\infty}^{+\infty} v_{||} e^{\left(-\frac{v_{||}^2}{2v_i^2} + i\frac{4v_{||}\gamma_{||}\Theta}{\omega_c}\right)} dv_{||} \cdot \int_0^{+\infty} v_{\perp}^2 e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_i^2}} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} e^{\pm i\phi} e^{i2b \text{sen}\Theta \cos\phi} d\phi , \quad (3.7.59)$$

$$\sigma_{lp,rp} = 2\sqrt{2}M \int_0^{+\infty} e^{-i\left[2\left(\frac{\omega-i\nu}{\omega_c}\right)\mp 1\right]\Theta} d\Theta \int_{-\infty}^{+\infty} v_{||} e^{\left(\frac{v_{||}^2}{2v_t^2} + i\frac{4v_{||}\gamma_{||}\Theta}{\omega_c}\right)} dv_{||} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{+\infty} v_{\perp}^2 e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_t^2}} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} e^{\pm i\phi} e^{i2b \text{sen}\Theta \cos\phi} d\phi, \quad (3.7.60)$$

$$\sigma_{pp} = 4M \int_0^{+\infty} e^{-i2\left(\frac{\omega-i\nu}{\omega_c}\right)\Theta} d\Theta \int_{-\infty}^{+\infty} v_{||}^2 e^{\left(\frac{v_{||}^2}{2v_t^2} + i\frac{4v_{||}\gamma_{||}\Theta}{\omega_c}\right)} dv_{||} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{+\infty} v_{\perp} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_t^2}} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} e^{i2b \text{sen}\Theta \cos\phi} d\phi. \quad (3.7.61)$$

Da teoria de *funções de Bessel* ^{[11][12]}, a representação na forma integral da função de Bessel de primeira espécie de ordem n e argumento z é dada por

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos x} e^{inx} dx \quad (3.7.62)$$

e das fórmulas de recorrência ,

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \quad \text{para } n \text{ inteiro.} \quad (3.7.63)$$

Ainda , das *funções de Bessel* , tem-se

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1} J_n(px) e^{-kx^2} dx = \frac{p^n}{(2k)^{n+1}} e^{-\frac{p^2}{4k}} \quad n = 0,1,2,3,\dots \quad (3.7.64)$$

e da teoria de *transformada de Fourier* ^[14],

$$\mathcal{F}\left[e^{-kt^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kt^2} e^{-i\omega t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}}, \quad (3.7.65)$$

$$\mathcal{F}\left[(-it)^n f(t)\right] = \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} . \quad (3.7.66)$$

Na equação (3.7.57), a integral sobre v_{\perp} pode ser substituída por

$$\int_0^{+\infty} v_{\perp}^3 e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_t^2}} dv_{\perp} = v_t^3 \frac{\partial}{\partial v_t} \int_0^{+\infty} v_{\perp} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2v_t^2}} dv_{\perp} . \quad (3.7.67)$$

Utilizando (3.7.62)-(3.7.67) na resolução das equações (3.7.57)-(3.7.61), resultam :

$$\sigma_{lr,rl} = \frac{2\omega_p^2 \varepsilon_0}{\omega_c} \left(1 + u_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}}\right) \int_0^{+\infty} e^{\left\{-i\left(\frac{\omega - i\nu}{\omega_c}\right) 2\Theta - 2u_{\parallel} \Theta^2 - u_{\perp} + u_{\perp} \cos 2\Theta\right\}} d\Theta , \quad (3.7.68)$$

$$\sigma_{ll,rr} = \frac{2\omega_p^2 \varepsilon_0}{\omega_c} u_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \int_0^{+\infty} e^{\left\{-i\left(\frac{\omega - i\nu}{\omega_c}\right) 2\Theta - 2u_{\parallel} \Theta^2 - u_{\perp} + u_{\perp} \cos 2\Theta\right\}} d\Theta , \quad (3.7.69)$$

$$\sigma_{pl,pr} = -\frac{4\omega_p^2 \varepsilon_0 \sqrt{2u_{\perp} u_{\parallel}}}{\omega_c} \int_0^{+\infty} \Theta \operatorname{sen} \Theta e^{\left\{-i\left[2\left(\frac{\omega - i\nu}{\omega_c}\right) \pm 1\right] \Theta - 2u_{\parallel} \Theta^2 - u_{\perp} + u_{\perp} \cos 2\Theta\right\}} d\Theta , \quad (3.7.70)$$

$$\sigma_{lp,rp} = -\frac{4\omega_p^2 \varepsilon_0 \sqrt{2u_{\perp} u_{\parallel}}}{\omega_c} \int_0^{+\infty} \Theta \operatorname{sen} \Theta e^{\left\{-i\left[2\left(\frac{\omega - i\nu}{\omega_c}\right) \mp 1\right] \Theta - 2u_{\parallel} \Theta^2 - u_{\perp} + u_{\perp} \cos 2\Theta\right\}} d\Theta , \quad (3.7.71)$$

$$\sigma_{pp} = \frac{2\omega_p^2 \varepsilon_0}{\omega_c} \left(1 + 2u_{\parallel} \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}}\right) \int_0^{+\infty} e^{\left\{-i\left(\frac{\omega - i\nu}{\omega_c}\right) 2\Theta - 2u_{\parallel} \Theta^2 - u_{\perp} + u_{\perp} \cos 2\Theta\right\}} d\Theta , \quad (3.7.72)$$

onde

$$u_{\parallel} = \frac{4\gamma_{\parallel}^2 v_t^2}{\omega_c^2} , \quad (3.7.73)$$

$$u_{\perp} = \frac{4\gamma_{\perp}^2 v_t^2}{\omega_c^2} . \quad (3.7.74)$$

Neste trabalho serão consideradas as condições $u_{\perp} \ll 1$ e $u_{\parallel} \ll 1$. Portanto, como $u = u_{\perp} + u_{\parallel}$, basta fazer $u \leq 0,1$. Assim, tem-se

$$\frac{4\kappa T \gamma^2}{m\omega_c^2} \leq 0,1 \quad (3.7.75)$$

onde $\gamma^2 = \gamma_{\perp}^2 + \gamma_{\parallel}^2$, $\kappa = 1,38 \times 10^{-23} (J/K)$, $m = 9,11 \times 10^{-31} (kg)$, $|e| = 1,6 \times 10^{-19} (C)$. A *velocidade de fase* ($v_p = \omega/\beta$) será sempre maior ou igual à velocidade da luz no vácuo ($v_p \geq c$) se for imposta a condição:

$$\gamma \leq \omega/c \quad (3.7.76)$$

onde $c = 3 \times 10^8 (m/s)$. Das equações (3.7.75) e (3.7.76) é obtida a relação

$$\omega \leq 12187\omega_c T^{-1/2} \quad (3.7.77)$$

que define a *faixa de frequências baixas* necessária para que $u_{\perp} \ll 1$ e $u_{\parallel} \ll 1$.

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} \psi = 2\Theta \\ d\psi = 2d\Theta \end{cases} \quad (3.7.78)$$

as equações (3.7.68)-(3.7.72) tornam-se:

$$\sigma_{lr,rl} = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{\omega_c} \left(1 + u_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \right) \int_0^{+\infty} e^{\left\{ -i \left(\frac{\omega - i\nu}{\omega_c} \right) \psi - \frac{u_{\parallel} \psi^2}{2} - u_{\perp} + u_{\perp} \cos \psi \right\}} d\psi, \quad (3.7.79)$$

$$\sigma_{ll,rr} = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{\omega_c} u_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \int_0^{+\infty} e^{\left\{ -i \left(\frac{\omega - i\nu}{\omega_c} \right) \psi - \frac{u_{\parallel} \psi^2}{2} - u_{\perp} + u_{\perp} \cos \psi \right\}} d\psi, \quad (3.7.80)$$

$$\sigma_{pl,pr} = -\frac{\omega_p^2 \varepsilon_0 \sqrt{2u_\perp u_{//}}}{\omega_c} \int_0^{+\infty} \psi \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) e^{\left\{-i\left[\left(\frac{\omega-i\nu}{\omega_c}\right) \pm \frac{1}{2}\right] \psi - \frac{u_{//}\psi^2}{2} - u_\perp + u_\perp \cos\psi\right\}} d\psi, \quad (3.7.81)$$

$$\sigma_{lp,rp} = -\frac{\omega_p^2 \varepsilon_0 \sqrt{2u_\perp u_{//}}}{\omega_c} \int_0^{+\infty} \psi \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) e^{\left\{-i\left[\left(\frac{\omega-i\nu}{\omega_c}\right) \mp \frac{1}{2}\right] \psi - \frac{u_{//}\psi^2}{2} - u_\perp + u_\perp \cos\psi\right\}} d\psi, \quad (3.7.82)$$

$$\sigma_{pp} = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0}{\omega_c} \left(1 + 2u_{//} \frac{\partial}{\partial u_{//}}\right) \int_0^{+\infty} e^{\left\{-i\left(\frac{\omega-i\nu}{\omega_c}\right) \psi - \frac{u_{//}\psi^2}{2} - u_\perp + u_\perp \cos\psi\right\}} d\psi. \quad (3.7.83)$$

Colocando $e^{u_\perp \cos\psi}$ na forma complexa de Fourier ^[14] e expandindo $e^{\frac{u_{//}\psi^2}{2}}$ numa série de Taylor ^[15], tem-se :

$$e^{u_\perp \cos\psi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n I_n(u_\perp) e^{in\psi}, \quad (3.7.84)$$

$$e^{\frac{u_{//}\psi^2}{2}} = 1 - \frac{u_{//}\psi^2}{2} \quad \text{para } u_{//} \ll 1, \quad (3.7.85)$$

onde $I_n(u_\perp)$ é a função de Bessel modificada de primeira espécie ^{[11][12]}. Se fossem consideradas frequências elevadas, na equação (3.7.85) deveriam aparecer os outros termos de ordem superior, entretanto, neste trabalho são consideradas frequências baixas como definidas na equação (3.7.77). Portanto, as equações (3.7.79)-(3.7.83) tornam-se :

$$\sigma_{lr,rl} = L \left(1 + u_\perp \frac{\partial}{\partial u_\perp}\right) \left[e^{-u_\perp} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n I_n(u_\perp) \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{u_{//}\psi^2}{2}\right) e^{-i\xi_\perp \psi} d\psi \right], \quad (3.7.86)$$

$$\sigma_{ll,rr} = L \left(u_\perp \frac{\partial}{\partial u_\perp}\right) \left[e^{-u_\perp} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n I_n(u_\perp) \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{u_{//}\psi^2}{2}\right) e^{-i\xi_\perp \psi} d\psi \right], \quad (3.7.87)$$

$$\sigma_{pl,pr} = -L \sqrt{2u_\perp u_{//}} e^{-u_\perp} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n I_n(u_\perp) \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{u_{//}\psi^2}{2}\right) \psi \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) e^{-i\xi_\perp \psi} d\psi, \quad (3.7.88)$$

$$\sigma_{lp,rp} = -L\sqrt{2u_{\perp}u_{\parallel}}e^{-u_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n I_n(u_{\perp}) \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{u_{\parallel}\psi^2}{2}\right) \psi \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) e^{-i\xi_1\psi} d\psi, \quad (3.7.89)$$

$$\sigma_{pp} = L\left(1 + 2u_{\parallel} \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}}\right) \left[e^{-u_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n I_n(u_{\perp}) \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{u_{\parallel}\psi^2}{2}\right) e^{-i\xi_2\psi} d\psi \right], \quad (3.7.90)$$

onde

$$L = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{\omega_c} = \frac{n_0 e^2}{m\omega_c}, \quad (3.7.91)$$

$$\xi_1 = \xi_2 \mp 1, \quad (3.7.92)$$

$$\xi_2 = \frac{\omega - i\nu}{\omega_c} - n, \quad (3.7.93)$$

$$\xi_3 = \xi_2 \pm \frac{1}{2}, \quad (3.7.94)$$

$$\xi_4 = \xi_2 \mp \frac{1}{2}. \quad (3.7.95)$$

Resolvendo a integral das equações (3.7.86), (3.7.87) e (3.7.90) obtém-se

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{u_{\parallel}\psi^2}{2}\right) e^{-i\xi\psi} d\psi = \left(1 + \frac{u_{\parallel}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \int_0^{+\infty} e^{-i\xi\psi} d\psi = \frac{1}{i\xi} \left(1 + \frac{u_{\parallel}}{\xi^2}\right). \quad (3.7.96)$$

Como da teoria de transformadas de Laplace ^[12]

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{onde } s = i\omega, \quad (3.7.97)$$

$$\mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = \frac{d^n F(s)}{ds^n}, \quad (3.7.98)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{t}{2a}\text{sen}(at)\right] = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}, \quad (3.7.99)$$

a solução das integrais das equações (3.7.88) e (3.7.89) será :

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{u_{//}\psi^2}{2}\right) \psi \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) e^{-i\xi\psi} d\psi = \frac{i16\xi}{(-4\xi^2 + 1)^2} \left[1 + 24u_{//} \frac{(4\xi^2 + 1)}{(-4\xi^2 + 1)^4}\right]. \quad (3.7.100)$$

Portanto , as equações (3.7.86)-(3.7.90) são reescritas como :

$$\sigma_{lr,rl} = \frac{L}{i} e^{-u_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left[I_n(u_{\perp}) - u_{\perp}^2 I_n(u_{\perp}) + u_{\perp} I'_n(u_{\perp}) \right] \frac{1}{\xi_1} \left(1 + \frac{u_{//}}{\xi_1^2}\right), \quad (3.7.101)$$

$$\sigma_{ll,rr} = \frac{L}{i} e^{-u_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left[-u_{\perp}^2 I_n(u_{\perp}) + u_{\perp} I'_n(u_{\perp}) \right] \frac{1}{\xi_2} \left(1 + \frac{u_{//}}{\xi_2^2}\right), \quad (3.7.102)$$

$$\sigma_{pl,pr} = -iQe^{-u_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n I_n(u_{\perp}) \frac{\xi_3}{(-4\xi_3^2 + 1)^2} \left[1 + 24u_{//} \frac{(4\xi_3^2 + 1)}{(-4\xi_3^2 + 1)^4}\right], \quad (3.7.103)$$

$$\sigma_{lp,rp} = -iQe^{-u_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n I_n(u_{\perp}) \frac{\xi_4}{(-4\xi_4^2 + 1)^2} \left[1 + 24u_{//} \frac{(4\xi_4^2 + 1)}{(-4\xi_4^2 + 1)^4}\right], \quad (3.7.104)$$

$$\sigma_{pp} = \frac{L}{i} \left(1 + 2u_{//} \frac{\partial}{\partial u_{//}}\right) e^{-u_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n I_n(u_{\perp}) \frac{1}{\xi_2} \left(1 + \frac{u_{//}}{\xi_2^2}\right), \quad (3.7.105)$$

onde

$$Q = 16L\sqrt{2u_{\perp}u_{//}}. \quad (3.7.106)$$

Da teoria de *funções de Bessel* ^{[11][12]},

$$I'_n(z) = \frac{n}{z} I_n(z) + I_{n+1}(z) \quad (3.7.107)$$

e a função e^{-u_\perp} expandida numa *série de Taylor* ^[15] é

$$e^{-u_\perp} = 1 - u_\perp \quad \text{para } u_\perp \ll 1. \quad (3.7.108)$$

Norteadas pelas equações (3.7.107) e (3.7.108), as equações (3.7.101)-(3.7.105) tornam-se :

$$\sigma_{lr,rl} = \frac{L}{i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n (1 - u_\perp) \left[(1 + n - u_\perp^2) I_n(u_\perp) + u_\perp I_{n+1}(u_\perp) \right] \frac{1}{\xi_1} \left(1 + \frac{u_{//}}{\xi_1^2} \right), \quad (3.7.109)$$

$$\sigma_{ll,rr} = \frac{L}{i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n (1 - u_\perp) \left[(n - u_\perp^2) I_n(u_\perp) + u_\perp I_{n+1}(u_\perp) \right] \frac{1}{\xi_2} \left(1 + \frac{u_{//}}{\xi_2^2} \right), \quad (3.7.110)$$

$$\sigma_{pl,pr} = -iQ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n (1 - u_\perp) I_n(u_\perp) \frac{\xi_3}{(-4\xi_3^2 + 1)^2} \left[1 + 24u_{//} \frac{(4\xi_3^2 + 1)}{(-4\xi_3^2 + 1)^4} \right], \quad (3.7.111)$$

$$\sigma_{lp,rp} = -iQ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n (1 - u_\perp) I_n(u_\perp) \frac{\xi_4}{(-4\xi_4^2 + 1)^2} \left[1 + 24u_{//} \frac{(4\xi_4^2 + 1)}{(-4\xi_4^2 + 1)^4} \right], \quad (3.7.112)$$

$$\sigma_{pp} = \frac{L}{i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n (1 - u_\perp) I_n(u_\perp) \frac{1}{\xi_2} \left(1 + \frac{3u_{//}}{\xi_2^2} \right). \quad (3.7.113)$$

Das *funções de Bessel* ^{[11][12]},

$$I_{-n}(z) = (-1)^n I_n(z) \quad (3.7.114)$$

e a aproximação para pequenos argumentos ($z \ll 1$) é

$$I_n(z) = \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2} \right)^n \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.7.115)$$

Utilizando as equações (3.7.114) e (3.7.115) no desdobramento dos somatórios das equações (3.7.109)-(3.7.113) e considerando apenas os efeitos da temperatura de primeira ordem ($u_{\perp} \ll 1$ e $u_{\parallel} \ll 1$), obtém-se das equações (3.7.109)-(3.7.113) os seguintes resultados :

$$\sigma_{lr,rl} = i\omega_p^2 \varepsilon_0 \left[\frac{2u_{\perp}(\omega - i\nu \mp \omega_c)}{(\omega - i\nu \mp \omega_c)^2 - \omega_c^2} - \frac{(1 - u_{\perp})(\omega - i\nu \mp \omega_c)^2 + u_{\parallel}\omega_c^2}{(\omega - i\nu \mp \omega_c)^3} \right], \quad (3.7.116)$$

$$\sigma_{ll,rr} = i\omega_p^2 \varepsilon_0 u_{\perp} \left[\frac{2(\omega - i\nu) \pm \omega_c}{(\omega - i\nu)^2 - \omega_c^2} \right], \quad (3.7.117)$$

$$\sigma_{pl,pr} = -i8\omega_p^2 \varepsilon_0 \sqrt{2u_{\perp}u_{\parallel}} \frac{[2(\omega - i\nu) \pm \omega_c]}{\left\{ [2(\omega - i\nu) \pm \omega_c]^2 - \omega_c^2 \right\}^2}, \quad (3.7.118)$$

$$\sigma_{lp,rp} = -i8\omega_p^2 \varepsilon_0 \sqrt{2u_{\perp}u_{\parallel}} \frac{[2(\omega - i\nu) \mp \omega_c]}{\left\{ [2(\omega - i\nu) \mp \omega_c]^2 - \omega_c^2 \right\}^2}, \quad (3.7.119)$$

$$\sigma_{pp} = i\omega_p^2 \varepsilon_0 \left\{ \frac{u_{\perp}\omega_c}{(\omega - i\nu)^2 - \omega_c^2} - \frac{1}{(\omega - i\nu)} \left[1 - u_{\perp} + \frac{3u_{\parallel}\omega_c^2}{(\omega - i\nu)^2} \right] \right\}. \quad (3.7.120)$$

Das equações (3.7.36), (3.7.37) e (3.7.31) são obtidos os tensores $\vec{\sigma}$ e $\vec{\varepsilon}$ em coordenadas cartesianas :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\sigma_{rl} + \sigma_{lr} + 2\sigma_{ll}) & -i(\sigma_{rl} - \sigma_{lr}) & \sqrt{2}(\sigma_{pr} + \sigma_{pl}) \\ i(\sigma_{rl} - \sigma_{lr}) & (\sigma_{rl} + \sigma_{lr} - 2\sigma_{ll}) & -i\sqrt{2}(\sigma_{pr} - \sigma_{pl}) \\ \sqrt{2}(\sigma_{pr} + \sigma_{pl}) & i\sqrt{2}(\sigma_{pr} - \sigma_{pl}) & 2\sigma_{pp} \end{bmatrix}, \quad (3.7.121) \end{aligned}$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_0 + \frac{(\sigma_{rl} + \sigma_{lr} + 2\sigma_{ll})}{i2\omega} & \frac{(\sigma_{rl} - \sigma_{lr})}{2\omega} & \frac{\sqrt{2}(\sigma_{pr} + \sigma_{pl})}{i2\omega} \\ \frac{(\sigma_{rl} - \sigma_{lr})}{2\omega} & \varepsilon_0 + \frac{(\sigma_{rl} + \sigma_{lr} - 2\sigma_{ll})}{i2\omega} & -\frac{\sqrt{2}(\sigma_{pr} - \sigma_{pl})}{2\omega} \\ \frac{\sqrt{2}(\sigma_{pr} + \sigma_{pl})}{i2\omega} & \frac{\sqrt{2}(\sigma_{pr} - \sigma_{pl})}{2\omega} & \varepsilon_0 + \frac{\sigma_{pp}}{i\omega} \end{bmatrix}. \quad (3.7.122)$$

Se a onda eletromagnética propaga-se no interior do plasma paralelamente à indução magnética $B_0 \hat{z}$, tem-se : $u_{\perp} = 0$ e $u = u_{\parallel}$. Assim, as equações (3.7.116)-(3.7.120) e o tensor permissividade $\vec{\varepsilon}$ resultarão em :

$$\sigma_{lr,rl} = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0}{[\nu + i(\omega \mp \omega_c)]} \left\{ 1 - \frac{u\omega_c^2}{[\nu + i(\omega \mp \omega_c)]^2} \right\}, \quad (3.7.123)$$

$$\sigma_{ll,rr} = \sigma_{pl,pr} = \sigma_{lp,rp} = 0, \quad (3.7.124)$$

$$\sigma_{pp} = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0}{(\nu + i\omega)} \left\{ 1 - \frac{3u\omega_c^2}{(\nu + i\omega)^2} \right\}, \quad (3.7.125)$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 + \frac{(\sigma_{rl} + \sigma_{lr})}{i2\omega} & -\frac{(\sigma_{rl} - \sigma_{lr})}{2\omega} & 0 \\ \frac{(\sigma_{rl} - \sigma_{lr})}{2\omega} & \varepsilon_0 + \frac{(\sigma_{rl} + \sigma_{lr})}{i2\omega} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 + \frac{\sigma_{pp}}{i\omega} \end{bmatrix}. \quad (3.7.126)$$

Após algumas operações algébricas, finalmente obtém-se :

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2 (\nu + i\omega)}{i\omega [(\nu + i\omega)^2 + \omega_c^2]} \left\{ 1 - \frac{u\omega_c^2 [(\nu + i\omega)^2 - 3\omega_c^2]}{[(\nu + i\omega)^2 + \omega_c^2]^2} \right\}, \quad (3.7.127)$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega [(\nu + i\omega)^2 + \omega_c^2]} \left\{ 1 - \frac{u\omega_c^2 [3(\nu + i\omega)^2 - \omega_c^2]}{[(\nu + i\omega)^2 + \omega_c^2]^2} \right\}, \quad (3.7.128)$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{i\omega (\nu + i\omega)} \left\{ 1 - \frac{3u\omega_c^2}{(\nu + i\omega)^2} \right\}, \quad (3.7.129)$$

onde

$$u = u_{//} = \frac{4\kappa T \gamma^2}{m \omega_c^2}, \quad (3.7.130)$$

$$\vec{\gamma} = \gamma \hat{z}. \quad (3.7.131)$$

Quando for considerado um plasma frio , $T \cong 300(K)$, a constante u será aproximadamente nula e $v \ll \omega$. Neste caso as equações (3.7.127)-(3.7.129) tornam-se :

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2}, \quad (3.7.132)$$

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega_c^2 - \omega^2)}, \quad (3.7.133)$$

$$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (3.7.134)$$

3.8 DENSIDADE ELETRÔNICA E FREQUÊNCIA DE COLISÃO PARA O AR A TEMPERATURAS ELEVADAS

No equilíbrio químico , a temperatura de um gás quente estabiliza-se de modo que todos os constituintes do plasma tenham sido levados a essa temperatura de equilíbrio . Além disso , a influência dos íons positivos em altas temperaturas é mais significativa que a das espécies neutras cuja influência é de pouquíssima importância .

A densidade eletrônica do ar a temperaturas elevadas em equilíbrio térmico e a densidade específica , de acordo com M.P. Bachynski , T.W. Johnston e

I.P. Shkarofsky^[16], são mostrados na FIGURA 3.8.1 . Em temperaturas abaixo de 3000(K) ocorre um rápido crescimento do número de elétrons com o aumento da temperatura . Essa taxa de crescimento gradual estabiliza-se para temperaturas elevadas quando todos os constituintes tornam-se ionizados e o número de elétrons não cresce substancialmente com a temperatura .

Adotando o método da trajetória livre média e admitindo que a função de distribuição das partículas seja a de Maxwell-Booltzmann , a frequência de colisão para frequências de RF altas é dada por^[16]

$$\nu = \frac{4}{3} v_t \sum_{\alpha=e,j} n_{\alpha} \Psi_{\alpha} , \quad (3.8.1)$$

onde n_{α} é a *densidade de partículas* de α -ésima espécie , Ψ_{α} é a *sessão transversal de colisão eletrônica total média de Maxwell* para uma dada espécie , v_t é a *velocidade eletrônica ou térmica* dada pela equação (3.3.4) . A variação da frequência de colisão e da densidade com a temperatura foi estimada usando a equação (3.8.1) e utilizando-se o software MATLAB 4.0/SIMULINK 1.2c , instalado nos computadores da Escola Federal de Engenharia de Itajubá . Essas variações estão mostradas na FIGURA 3.8.1 para temperaturas variando de 3000(K) a 12000(K) e densidades de 10^{-4} a 10 vezes a densidade ao nível do mar . Posteriormente , os dados da FIGURA 3.8.1 serão utilizados nos cálculos do *tensor permissividade elétrica* do plasma , equações (3.7.127)-(3.7.129) .

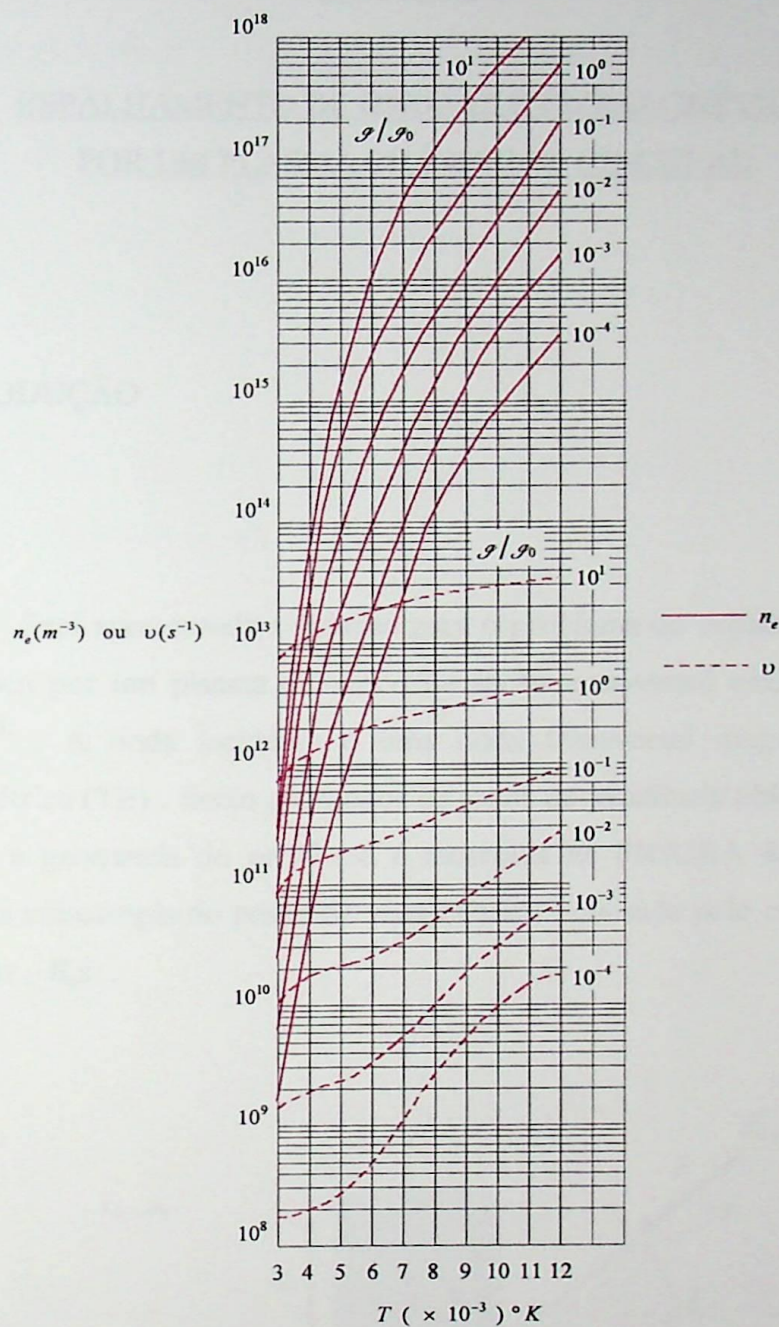


FIGURA 3.8.1 : Variação da densidade eletrônica (n_e) e frequência de colisão (ν) com a temperatura (T) para o ar com diferentes densidades (ρ). A densidade ao nível do mar é $\rho_0 = 1,28823(\text{kg} / \text{m}^3)$.

CAPÍTULO 4

ESPALHAMENTO DE ONDA ELETROMAGNÉTICA POR UM PLASMA CILÍNDRICO CIRCULAR

4.1 INTRODUÇÃO

Será apresentada a solução para o problema do espalhamento da onda eletromagnética por um plasma cilíndrico de seção transversal circular, envolvido pelo ar ^{[17][18]}. A onda incidente é uma onda transversal magnética (TM) ou transversal elétrica (TE). Serão analisados os casos de incidência oblíqua e incidência normal onde a geometria do problema é mostrada na FIGURA 4.1.1. O plasma apresenta uma anisotropia do ponto de vista elétrico, causada pelo campo magnético de polarização, $B_0 \hat{z}$.

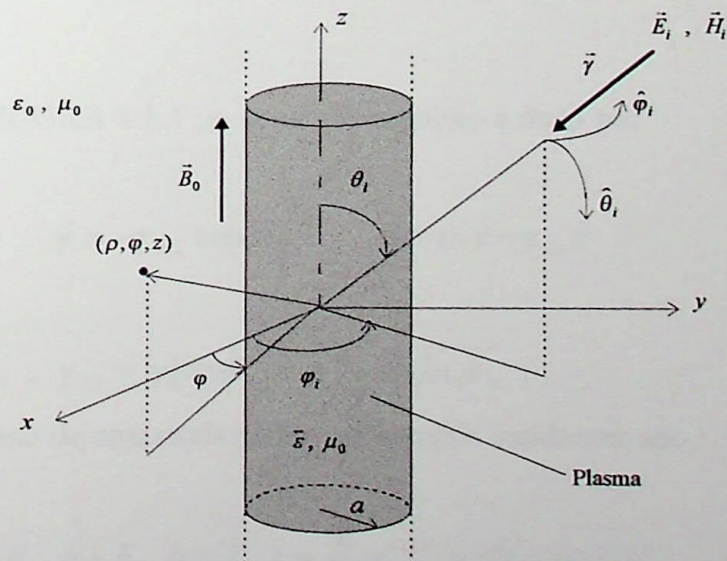


FIGURA 4.1.1 : Geometria para análise do espalhamento de ondas eletromagnéticas por um cilindro circular .

O plasma apresenta uma característica eletromagnética representada pelo tensor permissividade $\vec{\epsilon}$ e uma permeabilidade magnética μ , dados por :

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (4.1.1)$$

$$\mu = \mu_0. \quad (4.1.2)$$

Onde ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 são dados pelas equações (3.7.127)-(3.7.129) e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo.

4.2 INCIDÊNCIA OBLÍQUA

4.2.1 Campos Incidentes

Da FIGURA 4.1.1, o vetor propagação é dado por

$$\vec{\gamma} = -\gamma_{i,\perp} \cos\varphi_i \hat{x} - \gamma_{i,\perp} \sin\varphi_i \hat{y} - \gamma_{i,z} \hat{z} \quad (4.2.1.1)$$

onde $\gamma_{i,\perp} = |\gamma| \sin\theta_i$, $\gamma_{i,z} = |\gamma| \cos\theta_i$ e $|\gamma| = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.

No caso de uma onda plana, os campos incidentes são :

$$\vec{E}_i = E_{i,\rho} \hat{\rho} + E_{i,\varphi} \hat{\varphi} + E_{i,z} \hat{z} = \vec{E}_{i0} e^{-i\vec{\gamma} \cdot \vec{r}} = \vec{E}_i(\rho, \varphi) e^{i\gamma_{i,z} z}, \quad (4.2.1.2)$$

$$\vec{H}_i = H_{i,\rho} \hat{\rho} + H_{i,\varphi} \hat{\varphi} + H_{i,z} \hat{z} = \vec{H}_{i0} e^{-i\vec{\gamma} \cdot \vec{r}} = \vec{H}_i(\rho, \varphi) e^{i\gamma_{i,z} z}. \quad (4.2.1.3)$$

onde $\vec{r} = \rho \cos\varphi \hat{x} + \rho \sin\varphi \hat{y} + z \hat{z}$ com $\rho \geq a$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Esses campos devem satisfazer as equações de Maxwell :

$$\nabla \times \vec{E}_i = -i\omega\mu_0 \vec{H}_i, \quad (4.2.1.4)$$

$$\nabla \times \vec{H}_i = i\omega\varepsilon_0 \vec{E}_i. \quad (4.2.1.5)$$

Da equação (4.2.1.4) obtém-se

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{E}_{i,z}}{\partial \varphi} - i\gamma_{i,z} \mathcal{E}_{i,\varphi} = -i\omega\mu_0 \mathcal{H}_{i,\rho}, \quad (4.2.1.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{i,z}}{\partial \rho} - i\gamma_{i,z} \mathcal{E}_{i,\rho} = i\omega\mu_0 \mathcal{H}_{i,\varphi}, \quad (4.2.1.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{i,\varphi}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{E}_{i,\rho}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_{i,\varphi} = -i\omega\mu_0 \mathcal{H}_{i,z} \quad (4.2.1.8)$$

e da equação (4.2.1.5)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}_{i,z}}{\partial \varphi} - i\gamma_{i,z} \mathcal{H}_{i,\varphi} = i\omega\varepsilon_0 \mathcal{E}_{i,\rho}, \quad (4.2.1.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{i,z}}{\partial \rho} - i\gamma_{i,z} \mathcal{H}_{i,\rho} = -i\omega\varepsilon_0 \mathcal{E}_{i,\varphi}, \quad (4.2.1.10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{i,\varphi}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}_{i,\rho}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \mathcal{H}_{i,\varphi} = i\omega\varepsilon_0 \mathcal{E}_{i,z}. \quad (4.2.1.11)$$

Manipulando as equações (4.2.1.6), (4.2.1.7), (4.2.1.9) e (4.2.1.10) obtém-se os campos transversais em função dos campos longitudinais :

$$\mathcal{E}_{i,\rho} = \frac{i}{\gamma_{i,\perp}^2} \left\{ \gamma_{i,z} \frac{\partial \mathcal{E}_{i,z}}{\partial \rho} - \frac{\omega\mu_0}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}_{i,z}}{\partial \varphi} \right\}, \quad (4.2.1.12)$$

$$\mathcal{E}_{i,\varphi} = \frac{i}{\gamma_{i,\perp}^2} \left\{ \frac{\gamma_{i,z}}{\rho} \frac{\partial \mathcal{E}_{i,z}}{\partial \varphi} + \omega\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}_{i,z}}{\partial \rho} \right\}, \quad (4.2.1.13)$$

$$\mathcal{H}_{i,\rho} = \frac{i}{\gamma_{i,\perp}^2} \left\{ \omega \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}_{i,z}}{\partial \varphi} + \gamma_{i,z} \frac{\partial \mathcal{H}_{i,z}}{\partial \rho} \right\}, \quad (4.2.1.14)$$

$$\mathcal{H}_{i,\varphi} = -\frac{i}{\gamma_{i,\perp}^2} \left\{ \omega \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}_{i,z}}{\partial \rho} - \frac{\gamma_{i,z}}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}_{i,z}}{\partial \varphi} \right\}, \quad (4.2.1.15)$$

onde $\gamma_{i,\perp}^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \gamma_{i,z}^2$. Os campos longitudinais num ponto (ρ, φ, z) são os mesmos que no ponto (ρ_i, φ_i, z_i) . Na FIGURA (4.2.1) é mostrada a frente de onda correspondente à onda eletromagnética incidente da FIGURA (4.1.1). Portanto,

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i0} e^{-i\vec{\gamma} \cdot \vec{r}} = \eta (\vec{H}_{i0} \times \hat{\gamma}) e^{-i\vec{\gamma} \cdot \vec{r}}, \quad (4.2.1.16)$$

$$\vec{H}_i = \vec{H}_{i0} e^{-i\vec{\gamma} \cdot \vec{r}} = H_{i0} (\text{sen} \zeta \hat{\varphi}_i + \text{cos} \zeta \hat{\theta}_i) e^{-i\vec{\gamma} \cdot \vec{r}}, \quad (4.2.1.17)$$

onde η é a *impedância intrínseca do meio*. Entretanto, como $\hat{\varphi}_i \times \hat{\gamma} = -\hat{\theta}_i$ e $\hat{\theta}_i \times \hat{\gamma} = \hat{\varphi}_i$, a equação (4.2.1.16) torna-se:

$$\vec{E}_i = \eta H_{i0} (\text{cos} \zeta \hat{\varphi}_i - \text{sen} \zeta \hat{\theta}_i) e^{-i\vec{\gamma} \cdot \vec{r}}. \quad (4.2.1.18)$$

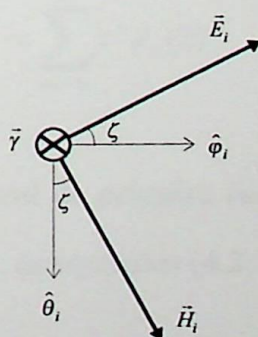


FIGURA 4.2.1 : Onda eletromagnética incidente .

Como $\vec{\gamma} \cdot \vec{r} = -\gamma_{i,\perp} \rho \cos(\varphi - \varphi_i) - \gamma_{i,z} z$, $\hat{\varphi}_i \cdot \hat{z} = 0$ e $\hat{\theta}_i \cdot \hat{z} = -\text{sen } \theta_i$, os campos longitudinais serão dados por :

$$E_{i,z} = \mathcal{E}_{i,z} e^{i\gamma_{i,z} z} = \vec{E}_i \cdot \hat{z} = \eta H_{i0} \text{sen } \zeta \text{sen } \theta_i e^{i\gamma_{i,z} z} e^{i\gamma_{i,\perp} \rho \cos(\varphi - \varphi_i)}, \quad (4.2.1.19)$$

$$H_{i,z} = \mathcal{H}_{i,z} e^{i\gamma_{i,z} z} = \vec{H}_i \cdot \hat{z} = -H_{i0} \text{cos } \zeta \text{sen } \theta_i e^{i\gamma_{i,z} z} e^{i\gamma_{i,\perp} \rho \cos(\varphi - \varphi_i)}. \quad (4.2.1.20)$$

Nas equações (4.2.1.19) e (4.2.1.20), a segunda exponencial é uma função periódica de período 2π , portanto, sua *série trigonométrica de Fourier* ^[14] é definida como uma continuação analítica da série

$$e^{i\gamma_{i,\perp} \rho \cos(\varphi - \varphi_i)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{in(\varphi - \varphi_i)}, \quad (4.2.1.21)$$

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\gamma_{i,\perp} \rho \cos(\varphi - \varphi_i)} e^{in(\varphi - \varphi_i)} d(\varphi - \varphi_i). \quad (4.2.1.22)$$

Os coeficientes de Fourier, F_n , são funções de Bessel de primeira espécie ^{[11][12]}. Das funções geratrizes, relativas às funções de Bessel ^[12], tem-se :

$$e^{\frac{z}{2}(\tau - 1/\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau^n J_n(z) \quad (4.2.1.23)$$

onde $J_n(z)$ é uma função de Bessel de primeira espécie, ordem n e argumento z . Fazendo $z = \gamma_{i,\perp} \rho$ e $\tau = ie^{i(\varphi - \varphi_i)}$, as equações (4.2.1.21) e (4.2.1.22) tornam-se :

$$e^{i\gamma_{i,\perp} \rho \cos(\varphi - \varphi_i)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(\gamma_{i,\perp} \rho) e^{in(\varphi - \varphi_i)}, \quad (4.2.1.24)$$

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\gamma_{i,\perp} \rho \cos(\varphi - \varphi_i)} e^{in(\varphi - \varphi_i)} d(\varphi - \varphi_i) = i^n J_n(\gamma_{i,\perp} \rho). \quad (4.2.1.25)$$

Logo, as equações (4.2.1.19) e (4.2.1.20) podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} E_{i,z} \\ H_{i,z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{i,z} \\ \mathcal{H}_{i,z} \end{Bmatrix} e^{i\gamma_{i,z}z} = \begin{Bmatrix} \eta \operatorname{sen} \zeta \\ -\cos \zeta \end{Bmatrix} H_{i0} \operatorname{sen} \theta_i e^{i\gamma_{i,z}z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(\gamma_{i,\perp} \rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)}. \quad (4.2.1.26)$$

Utilizando as equações (4.2.1.12)-(4.2.1.15) e (4.2.1.26), as componentes transversais resultarão em:

$$E_{i,\rho} = \mathcal{E}_{i,\rho} e^{i\gamma_{i,z}z} = \frac{i}{\gamma_{i,\perp}} H_{i0} \operatorname{sen} \theta_i e^{i\gamma_{i,z}z} \left\{ \gamma_{i,z} \eta \operatorname{sen} \zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J'_n(\gamma_{i,\perp} \rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)} + \frac{i|\gamma|\eta}{\rho\gamma_{i,\perp}} \cos \zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ni^n J_n(\gamma_{i,\perp} \rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)} \right\}, \quad (4.2.1.27)$$

$$E_{i,\varphi} = \mathcal{E}_{i,\varphi} e^{i\gamma_{i,z}z} = \frac{i}{\gamma_{i,\perp}} H_{i0} \operatorname{sen} \theta_i e^{i\gamma_{i,z}z} \left\{ \frac{i\gamma_{i,z}}{\rho\gamma_{i,\perp}} \eta \operatorname{sen} \zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ni^n J_n(\gamma_{i,\perp} \rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)} - |\gamma|\eta \cos \zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J'_n(\gamma_{i,\perp} \rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)} \right\}, \quad (4.2.1.28)$$

$$H_{i,\rho} = \mathcal{H}_{i,\rho} e^{i\gamma_{i,z}z} = \frac{i}{\gamma_{i,\perp}} H_{i0} \operatorname{sen} \theta_i e^{i\gamma_{i,z}z} \left\{ \frac{i|\gamma|}{\rho\gamma_{i,\perp}} \operatorname{sen} \zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ni^n J_n(\gamma_{i,\perp} \rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)} - \gamma_{i,z} \cos \zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J'_n(\gamma_{i,\perp} \rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)} \right\}, \quad (4.2.1.29)$$

$$H_{i,\varphi} = \mathcal{H}_{i,\varphi} e^{i\gamma_{i,z}z} = -\frac{i}{\gamma_{i,\perp}} H_{i0} \operatorname{sen} \theta_i e^{i\gamma_{i,z}z} \left\{ |\gamma| \operatorname{sen} \zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J'_n(\gamma_{i,\perp} \rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)} + \frac{i\gamma_{i,z}}{\rho\gamma_{i,\perp}} \cos \zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ni^n J_n(\gamma_{i,\perp} \rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)} \right\}, \quad (4.2.1.30)$$

onde

$$J'_n(\gamma_{i,\perp} \rho) = \frac{\partial J_n(\gamma_{i,\perp} \rho)}{\partial(\gamma_{i,\perp} \rho)} = \frac{1}{2} \{ J_{n-1}(\gamma_{i,\perp} \rho) - J_{n+1}(\gamma_{i,\perp} \rho) \} \quad (4.2.1.31)$$

representa a derivada da função de Bessel de primeira espécie .

4.2.2 Campos no Interior do Plasma

Parte da onda incidente penetra no plasma e é guiada por ele através de múltiplas reflexões . A onda incidente possui uma dependência sobre z caracterizada pela exponencial $e^{i\gamma_{i,z}z}$. Como na fronteira entre o meio externo e o plasma as componentes tangenciais de \vec{E} e \vec{H} são contínuas , implicando numa *continuidade de fase* , pode-se expandir os campos no interior do plasma da seguinte forma :

$$\vec{E}_p = \vec{\mathcal{E}}_p(x, y)e^{i\gamma_{i,z}z} , \quad (4.2.2.1)$$

$$\vec{H}_p = \vec{\mathcal{H}}_p(x, y)e^{i\gamma_{i,z}z} , \quad (4.2.2.2)$$

onde $-a \leq x \leq a$ e $-\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$. Os campos $\vec{\mathcal{E}}_p$ e $\vec{\mathcal{H}}_p$ são vetores tridimensionais representados por uma componente transversal (\perp) e uma longitudinal (\hat{z}) :

$$\vec{\mathcal{E}}_p = \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} + \mathcal{E}_{p,z}\hat{z} , \quad (4.2.2.3)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_p = \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp} + \mathcal{H}_{p,z}\hat{z} . \quad (4.2.2.4)$$

Considerando o plasma como um dielétrico , os campos devem satisfazer as equações de Maxwell :

$$\nabla \times \vec{E}_p = -i\omega\mu_0\vec{H}_p , \quad (4.2.2.3)$$

$$\nabla \times \vec{H}_p = i\omega\vec{D}_p , \quad (4.2.2.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}_p = 0, \quad (4.2.2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_p = 0, \quad (4.2.2.6)$$

onde $\vec{D}_p = \vec{\epsilon} \vec{E}_p$, $\vec{B}_p = \mu_0 \vec{H}_p$ e $\nabla \equiv \nabla_{\perp} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$. Portanto,

$$\begin{bmatrix} D_{p,x} \\ D_{p,y} \\ D_{p,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{p,x} \\ E_{p,y} \\ E_{p,z} \end{bmatrix} \quad (4.2.2.7)$$

ou

$$\vec{D}_p = \epsilon_1 (E_{p,x} \hat{x} + E_{p,y} \hat{y}) - i\epsilon_2 (E_{p,x} \hat{y} - E_{p,y} \hat{x}) + \epsilon_3 E_{p,z} \hat{z}. \quad (4.2.2.8)$$

Como

$$\begin{aligned} \hat{z} \times (E_{p,x} \hat{x} + E_{p,y} \hat{y}) &= E_{p,x} \hat{y} - E_{p,y} \hat{x}, \\ E_{p,x} \hat{x} + E_{p,y} \hat{y} &= \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} e^{i\gamma_{i,z} z} \end{aligned}$$

a equação (4.2.2.8) resultará em

$$\vec{D}_p = (\epsilon_1 \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} - i\epsilon_2 \hat{z} \times \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} + \epsilon_3 \mathcal{E}_{p,z} \hat{z}) e^{i\gamma_{i,z} z}. \quad (4.2.2.9)$$

Substituindo a equação (4.2.2.9) nas equações (4.2.2.4) e (4.2.2.5), resulta :

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp} + i\gamma_{i,z} \hat{z} \times \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp} + \nabla_{\perp} \times \mathcal{H}_{p,z} \hat{z} &= \\ &= i\omega (\epsilon_1 \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} - i\epsilon_2 \hat{z} \times \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} + \epsilon_3 \mathcal{E}_{p,z} \hat{z}), \end{aligned} \quad (4.2.2.10)$$

$$\epsilon_1 (\nabla_{\perp} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp}) - i\epsilon_2 \nabla_{\perp} \cdot (\hat{z} \times \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp}) + i\gamma_{i,z} \epsilon_3 \mathcal{E}_{p,z} = 0. \quad (4.2.2.11)$$

Das equações (4.2.2.3) e (4.2.2.6) obtém-se :

$$\nabla_{\perp} \times \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} + i\gamma_{i,z} \hat{z} \times \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} + \nabla_{\perp} \times \mathcal{E}_{p,z} \hat{z} = -i\omega\mu_0 (\vec{\mathcal{H}}_{p,\perp} + \mathcal{H}_{p,z} \hat{z}) , \quad (4.2.2.12)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp} = -i\gamma_{i,z} \mathcal{H}_{p,z} . \quad (4.2.2.13)$$

Calculando o divergente das equações (4.2.2.10) e (4.2.2.12) obtém-se como resultado as seguintes equações :

$$\gamma_{i,z} \nabla_{\perp} \cdot (\hat{z} \times \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp}) - \omega\varepsilon_1 \nabla_{\perp} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} + i\omega\varepsilon_2 \nabla_{\perp} \cdot (\hat{z} \times \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp}) = 0 , \quad (4.2.2.14)$$

$$\gamma_{i,z} \nabla_{\perp} \cdot (\hat{z} \times \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp}) + \omega\mu_0 \nabla_{\perp} \cdot \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp} = 0 . \quad (4.2.2.15)$$

Multiplicando vetorialmente as equações (4.2.2.10) e (4.2.2.12) por \hat{z} , obtém-se :

$$\nabla_{\perp} \mathcal{H}_{p,z} - i\gamma_{i,z} \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp} - i\omega\varepsilon_1 \hat{z} \times \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} + \omega\varepsilon_2 \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} = 0 , \quad (4.2.2.16)$$

$$\nabla_{\perp} \mathcal{E}_{p,z} - i\gamma_{i,z} \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} + i\omega\mu_0 \hat{z} \times \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp} = 0 . \quad (4.2.2.17)$$

Substituindo a equação (4.2.2.13) na equação (4.2.2.15) , resulta :

$$\nabla_{\perp} \cdot (\hat{z} \times \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp}) = i\omega\mu_0 \mathcal{H}_{p,z} . \quad (4.2.2.18)$$

Logo , substituindo a equação (4.2.2.18) na equação (4.2.2.11) , obtém-se :

$$\nabla_{\perp} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} = -\frac{1}{\varepsilon_1} (\omega\mu_0 \varepsilon_2 \mathcal{H}_{p,z} + i\gamma_{i,z} \varepsilon_3 \mathcal{E}_{p,z}) . \quad (4.2.2.19)$$

Conseqüentemente , das equações (4.2.2.18) e (4.2.2.19) , a equação (4.2.2.14) torna-se :

$$\nabla_{\perp} \cdot (\hat{z} \times \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp}) = -i\omega\varepsilon_3 \mathcal{E}_{p,z} . \quad (4.2.2.20)$$

O divergente das equações (4.2.2.16) e (4.2.2.17) resultará nas seguintes equações :

$$\nabla_{\perp}^2 \mathcal{H}_{p,z} - i\gamma_{i,z} \nabla_{\perp} \cdot \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp} - i\omega\epsilon_1 \nabla_{\perp} \cdot (\hat{z} \times \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp}) + \omega\epsilon_2 \nabla_{\perp} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} = 0 , \quad (4.2.2.21)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \mathcal{E}_{p,z} - i\gamma_{i,z} \nabla_{\perp} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} + i\omega\mu_0 \nabla_{\perp} \cdot (\hat{z} \times \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp}) = 0 . \quad (4.2.2.22)$$

Das equações (4.2.2.13) , (4.2.2.18) , (4.2.2.19) e (4.2.2.20) , as equações (4.2.2.21) e (4.2.2.22) tornam-se :

$$(\nabla_{\perp}^2 + T_H^2) \mathcal{H}_{p,z} + T_{HE}^2 \mathcal{E}_{p,z} = 0 , \quad (4.2.2.23)$$

$$(\nabla_{\perp}^2 + T_E^2) \mathcal{E}_{p,z} + T_{EH}^2 \mathcal{H}_{p,z} = 0 , \quad (4.2.2.24)$$

onde

$$T_H^2 = \gamma_1^2 - \frac{\omega^2 \mu_0 \epsilon_2^2}{\epsilon_1} , \quad (4.2.2.25)$$

$$T_E^2 = \gamma_1^2 \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} , \quad (4.2.2.26)$$

$$T_{HE}^2 = -\frac{i\omega\gamma_{i,z}\epsilon_2\epsilon_3}{\epsilon_1} , \quad (4.2.2.27)$$

$$T_{EH}^2 = \frac{i\omega\mu_0\gamma_{i,z}\epsilon_2}{\epsilon_1} , \quad (4.2.2.28)$$

$$\gamma_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \gamma_{i,z}^2 . \quad (4.2.2.29)$$

Como pode ser visto , nas equações (4.2.2.23) e (4.2.2.24) , não existem modos puros TE nem TM propagando-se no plasma . Pois , ambos os modos TE e TM estão *acoplados* . O acoplamento desaparece se T_{EH}^2 e T_{HE}^2 forem nulos , isso acontece quando :

- a) $\varepsilon_2 = 0$, significando que o plasma é *isotrópico* , ou seja , o campo magnético estático responsável pelo confinamento do plasma é nulo ou infinito ;
- b) $\gamma_{i,z} = 0$ ou $\theta_i = \pi/2$, significando que a onda não se propaga na direção z e essa é a *condição de corte* .

Os modos naturais no plasma contém ambos $\mathcal{E}_{p,z}$ e $\mathcal{H}_{p,z}$. Portanto , são chamados *modos híbridos* . As equações de onda , para os *modos híbridos* , podem ser obtidas pela conversão das equações (4.2.2.23) e (4.2.2.24) na forma *desacoplada* . Assim , tem-se :

$$\psi_1 = \mathcal{E}_{p,z} + O_1 \mathcal{H}_{p,z} , \quad (4.2.2.30)$$

$$\psi_2 = \mathcal{E}_{p,z} + O_2 \mathcal{H}_{p,z} , \quad (4.2.2.31)$$

onde $\psi_{1,2}$ são combinações lineares dos modos TE e TM representando os modos híbridos e $O_{1,2}$ são constantes a serem determinadas .

Das equações (4.2.2.30) e (4.2.2.31) obtém-se :

$$\mathcal{E}_{p,z} = \frac{O_1 \psi_2 - O_2 \psi_1}{O_1 - O_2} , \quad (4.2.2.32)$$

$$\mathcal{H}_{p,z} = \frac{\psi_1 - \psi_2}{O_1 - O_2} . \quad (4.2.2.33)$$

Com isso , as equações (4.2.2.23) e (4.2.2.24) tornam-se :

$$\nabla_{\perp}^2 \psi_1 + (T_H^2 - O_2 T_{HE}^2) \psi_1 - \nabla_{\perp}^2 \psi_2 - (T_H^2 - O_1 T_{HE}^2) \psi_2 = 0 , \quad (4.2.2.34)$$

$$-O_2 \nabla_{\perp}^2 \psi_1 - (O_2 T_E^2 - T_{EH}^2) \psi_1 + O_1 \nabla_{\perp}^2 \psi_2 + (O_1 T_E^2 - T_{EH}^2) \psi_2 = 0 . \quad (4.2.2.35)$$

As equações (4.2.2.34) e (4.2.2.35) podem ser reescritas como :

$$(\nabla_{\perp}^2 \psi_1 + T_1^2 \psi_1) - (\nabla_{\perp}^2 \psi_2 + T_2^2 \psi_2) = 0, \quad (4.2.2.36)$$

$$-O_2 (\nabla_{\perp}^2 \psi_1 + T_1^2 \psi_1) + O_1 (\nabla_{\perp}^2 \psi_2 + T_2^2 \psi_2) = 0, \quad (4.2.2.37)$$

onde

$$T_1^2 = T_H^2 - O_2 T_{HE}^2, \quad (4.2.2.38)$$

$$O_2 T_1^2 = O_2 T_E^2 - T_{EH}^2, \quad (4.2.2.39)$$

$$T_2^2 = T_H^2 - O_1 T_{HE}^2, \quad (4.2.2.40)$$

$$O_1 T_2^2 = O_1 T_E^2 - T_{EH}^2. \quad (4.2.2.41)$$

Se $O_1 \neq O_2$, o sistema formado pelas equações (4.2.2.36) e (4.2.2.37) admitirá a seguinte solução :

$$\nabla_{\perp}^2 \psi_1 + T_1^2 \psi_1 = 0, \quad (4.2.2.42)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \psi_2 + T_2^2 \psi_2 = 0. \quad (4.2.2.43)$$

Onde T_1 e T_2 são as constantes de propagação no plasma . Utilizando-se as equações (4.2.2.38)-(4.2.2.41), obtém-se :

$$T_{1,2}^2 = T_H^2 - O_{2,1} T_{HE}^2, \quad (4.2.2.44)$$

$$O_{1,2} = \frac{(T_H^2 - T_E^2)}{2T_{HE}^2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4T_{HE}^2 T_{EH}^2}{(T_H^2 - T_E^2)^2}} \right\}. \quad (4.2.2.45)$$

O operador laplaceano ∇_{\perp}^2 em coordenadas cilíndricas é dado por :

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (4.2.2.46)$$

Conseqüentemente, as equações de onda (4.2.2.42) e (4.2.2.43) tornam-se :

$$\frac{\partial^2 \psi_l}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_l}{\partial \rho} + T_l^2 \psi_l = 0 \quad \text{onde} \quad l = 1, 2 \quad (4.2.2.47)$$

A equação (4.2.2.47) será resolvida pelo *método de separação de variáveis*. Portanto, fazendo $\psi_l = f(\rho)h(\varphi)$ e substituindo na equação (4.2.2.47), resulta:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{h \rho^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{f \rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + T_l^2 = 0 \quad (4.2.2.48)$$

Donde obtém-se duas novas equações diferenciais:

$$\frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} = -n^2 \quad (4.2.2.49)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \left(T_l^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) f = 0 \quad (4.2.2.50)$$

onde n é a constante responsável pela separação das variáveis. A equação (4.2.2.49) é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem, cuja solução é do tipo:

$$h(\varphi) = A_l e^{in(\varphi - \varphi_0)} \quad (4.2.2.51)$$

Já a equação (4.2.2.50) é a *equação diferencial de Bessel de ordem n* ^{[11][12]}, cuja solução leva às *funções de Bessel* de primeira espécie e ordem n , $J_n(T_l \rho)$, e segunda espécie e ordem n , $N_n(T_l \rho)$. Mas, quando $\rho \rightarrow 0$ a função $N_n(T_l \rho) \rightarrow -\infty$. Portanto, como $\rho = 0$ representa o eixo longitudinal da coluna de plasma e o campo é finito neste ponto, a solução não pode conter $N_n(T_l \rho)$. Com isso, a solução possível para a equação (4.2.2.50) é

$$f(\rho) = B_l J_n(T_l \rho) \quad (4.2.2.52)$$

Como a solução geral é a soma de todas as soluções possíveis , a solução das equações de onda (4.2.2.42) e (4.2.2.43) será :

$$\psi_l = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_l J_n(T_l \rho) e^{in(\varphi - \varphi_l)} , \quad (4.2.2.53)$$

onde l é igual a 1 ou 2 , $0 \leq \rho \leq a$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Os campos longitudinais são obtidos das equações (4.2.2.32) , (4.2.2.33) e (4.2.2.53) . Logo ,

$$E_{p,z} = \mathcal{E}_{p,z} e^{i\gamma_{i,z} z} = \frac{e^{i\gamma_{i,z} z}}{(O_1 - O_2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{O_1 C_2 J_n(T_2 \rho) - O_2 C_1 J_n(T_1 \rho)\} e^{in(\varphi - \varphi_l)} , \quad (4.2.2.54)$$

$$H_{p,z} = \mathcal{H}_{p,z} e^{i\gamma_{i,z} z} = \frac{e^{i\gamma_{i,z} z}}{(O_1 - O_2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{C_1 J_n(T_1 \rho) - C_2 J_n(T_2 \rho)\} e^{in(\varphi - \varphi_l)} . \quad (4.2.2.55)$$

As componentes transversais são obtidas das equações (4.2.2.16) e (4.2.2.17) . Assim , após algumas operações algébricas , obtém-se :

$$\vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} = -\frac{1}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)} \left\{ \nabla_{\perp} (\omega^3 \mu_0^2 \varepsilon_2 \mathcal{H}_{p,z} + i\gamma_{i,z} \gamma_1^2 \mathcal{E}_{p,z}) - \right. \\ \left. - \hat{z} \times \nabla_{\perp} (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \gamma_{i,z} \mathcal{E}_{p,z} - i\omega \mu_0 \gamma_1^2 \mathcal{H}_{p,z}) \right\} , \quad (4.2.2.56)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{p,\perp} = \frac{1}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)} \left\{ \gamma_{i,z} \nabla_{\perp} (\omega \varepsilon_2 \gamma_{i,z} \mathcal{E}_{p,z} - i\gamma_1^2 \mathcal{H}_{p,z}) + \right. \\ \left. + \hat{z} \times \nabla_{\perp} \left[\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \gamma_{i,z} \mathcal{H}_{p,z} - i(\omega^3 \mu_0 \varepsilon_2^2 - \omega \varepsilon_1 \gamma_1^2) \mathcal{E}_{p,z} \right] \right\} . \quad (4.2.2.57)$$

A atuação do operador ∇_{\perp} em coordenadas cilíndricas ,

$$\nabla_{\perp} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} ,$$

nas equações (4.2.2.56) e (4.2.2.57) resultará em :

$$\vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} = -\frac{1}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)} \left\{ \left(\omega^3 \mu_0^2 \varepsilon_2 \frac{\partial \mathcal{H}_{p,z}}{\partial \rho} + i \gamma_{i,z} \gamma_1^2 \frac{\partial \mathcal{E}_{p,z}}{\partial \rho} + \frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \gamma_{i,z}}{\rho} \frac{\partial \mathcal{E}_{p,z}}{\partial \varphi} - \frac{i \omega \mu_0 \gamma_1^2}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}_{p,z}}{\partial \varphi} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\omega^3 \mu_0^2 \varepsilon_2}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}_{p,z}}{\partial \varphi} + \frac{i \gamma_{i,z} \gamma_1^2}{\rho} \frac{\partial \mathcal{E}_{p,z}}{\partial \varphi} - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \gamma_{i,z} \frac{\partial \mathcal{E}_{p,z}}{\partial \rho} + i \omega \mu_0 \gamma_1^2 \frac{\partial \mathcal{H}_{p,z}}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} \right\}, \quad (4.2.2.58)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{p,\perp} = \frac{1}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)} \left\{ \left[\omega \varepsilon_2 \gamma_{i,z}^2 \frac{\partial \mathcal{E}_{p,z}}{\partial \rho} - i \gamma_{i,z} \gamma_1^2 \frac{\partial \mathcal{H}_{p,z}}{\partial \rho} - \frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \gamma_{i,z}}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}_{p,z}}{\partial \varphi} + \frac{i(\omega^3 \mu_0 \varepsilon_2^2 - \omega \varepsilon_1 \gamma_1^2)}{\rho} \frac{\partial \mathcal{E}_{p,z}}{\partial \varphi} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\omega \varepsilon_2 \gamma_{i,z}^2}{\rho} \frac{\partial \mathcal{E}_{p,z}}{\partial \varphi} - \frac{i \gamma_{i,z} \gamma_1^2}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}_{p,z}}{\partial \varphi} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \gamma_{i,z} \frac{\partial \mathcal{H}_{p,z}}{\partial \rho} - i(\omega^3 \mu_0 \varepsilon_2^2 - \omega \varepsilon_1 \gamma_1^2) \frac{\partial \mathcal{E}_{p,z}}{\partial \rho} \right] \hat{\varphi} \right\}. \quad (4.2.2.59)$$

Como

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{p,z}}{\partial \rho} = \frac{1}{(O_1 - O_2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{O_1 C_2 T_2 J'_n(T_2 \rho) - O_2 C_1 T_1 J'_n(T_1 \rho)\} e^{in(\varphi - \varphi_1)}, \quad (4.2.2.60)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{p,z}}{\partial \varphi} = \frac{i}{(O_1 - O_2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \{O_1 C_2 J_n(T_2 \rho) - O_2 C_1 J_n(T_1 \rho)\} e^{in(\varphi - \varphi_1)}, \quad (4.2.2.61)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{p,z}}{\partial \rho} = \frac{1}{(O_1 - O_2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{C_1 T_1 J'_n(T_1 \rho) - C_2 T_2 J'_n(T_2 \rho)\} e^{in(\varphi - \varphi_1)}, \quad (4.2.2.62)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{p,z}}{\partial \varphi} = \frac{i}{(O_1 - O_2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \{C_1 J_n(T_1 \rho) - C_2 J_n(T_2 \rho)\} e^{in(\varphi - \varphi_1)}, \quad (4.2.2.63)$$

as componentes transversais $E_{p,\rho}$, $E_{p,\varphi}$, $H_{p,\rho}$ e $H_{p,\varphi}$ serão dadas pelas equações :

$$E_{p,\rho} = \mathcal{E}_{p,\rho} e^{i\gamma_{i,z} z} = \frac{e^{i\gamma_{i,z} z}}{(O_1 - O_2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ M_1 J'_n(T_1 \rho) C_1 + N_1 \frac{n}{\rho} J_n(T_1 \rho) C_1 + \right. \\ \left. + M_2 J'_n(T_2 \rho) C_2 + N_2 \frac{n}{\rho} J_n(T_2 \rho) C_2 \right\} e^{in(\varphi - \varphi_i)}, \quad (4.2.2.64)$$

$$E_{p,\varphi} = \mathcal{E}_{p,\varphi} e^{i\gamma_{i,z} z} = \frac{e^{i\gamma_{i,z} z}}{(O_1 - O_2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \Omega_1 J'_n(T_1 \rho) C_1 + \Lambda_1 \frac{n}{\rho} J_n(T_1 \rho) C_1 + \right. \\ \left. + \Omega_2 J'_n(T_2 \rho) C_2 + \Lambda_2 \frac{n}{\rho} J_n(T_2 \rho) C_2 \right\} e^{in(\varphi - \varphi_i)}, \quad (4.2.2.65)$$

$$H_{p,\rho} = \mathcal{H}_{p,\rho} e^{i\gamma_{i,z} z} = \frac{e^{i\gamma_{i,z} z}}{(O_1 - O_2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \Xi_1 J'_n(T_1 \rho) C_1 + \Phi_1 \frac{n}{\rho} J_n(T_1 \rho) C_1 + \right. \\ \left. + \Xi_2 J'_n(T_2 \rho) C_2 + \Phi_2 \frac{n}{\rho} J_n(T_2 \rho) C_2 \right\} e^{in(\varphi - \varphi_i)}, \quad (4.2.2.66)$$

$$H_{p,\varphi} = \mathcal{H}_{p,\varphi} e^{i\gamma_{i,z} z} = \frac{e^{i\gamma_{i,z} z}}{(O_1 - O_2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ P_1 J'_n(T_1 \rho) C_1 + Q_1 \frac{n}{\rho} J_n(T_1 \rho) C_1 + \right. \\ \left. + P_2 J'_n(T_2 \rho) C_2 + Q_2 \frac{n}{\rho} J_n(T_2 \rho) C_2 \right\} e^{in(\varphi - \varphi_i)}, \quad (4.2.2.67)$$

onde

$$J'_n(T_{1,2} \rho) = \frac{\partial J_n(T_{1,2} \rho)}{\partial (T_{1,2} \rho)}, \quad (4.2.2.68)$$

$$M_{1,2} = \mp \frac{(\omega^3 \mu_0^2 \varepsilon_2 - i\gamma_{i,z} \gamma_1^2 O_{2,1}) T_{1,2}}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)}, \quad (4.2.2.69)$$

$$N_{1,2} = \mp \frac{(\omega \mu_0 \gamma_1^2 - i\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \gamma_{i,z} O_{2,1})}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)}, \quad (4.2.2.70)$$

$$\Omega_{1,2} = \mp \frac{(\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \gamma_{i,z} O_{2,1} + i\omega \mu_0 \gamma_1^2) T_{1,2}}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)}, \quad (4.2.2.71)$$

$$\Lambda_{1,2} = \mp \frac{(\gamma_1^2 \gamma_{i,z} O_{2,1} + i\omega^3 \mu_0^2 \varepsilon_2)}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)}, \quad (4.2.2.72)$$

$$\Xi_{1,2} = \mp \frac{(\omega \varepsilon_2 \gamma_{i,z} O_{2,1} + i \gamma_1^2) \gamma_{i,z} T_{1,2}}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)}, \quad (4.2.2.73)$$

$$\Phi_{1,2} = \pm \frac{[(\omega^3 \mu_0 \varepsilon_2^2 - \omega \varepsilon_1 \gamma_1^2) O_{2,1} - i \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \gamma_{i,z}]}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)}, \quad (4.2.2.74)$$

$$P_{1,2} = \pm \frac{[\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \gamma_{i,z} + i(\omega^3 \mu_0 \varepsilon_2^2 - \omega \varepsilon_1 \gamma_1^2) O_{2,1}] T_{1,2}}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)}, \quad (4.2.2.75)$$

$$Q_{1,2} = \pm \frac{(\gamma_1^2 - i \omega \varepsilon_1 \gamma_{i,z} O_{2,1}) \gamma_{i,z}}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)}. \quad (4.2.2.76)$$

4.2.3 Campos Espalhados

Na região externa ($\rho \geq a$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) os campos podem ser representados por

$$\vec{E}_{ext} = \vec{\mathcal{E}}_{ext}(\rho, \varphi) e^{i\gamma_{i,z} z}, \quad (4.2.3.1)$$

$$\vec{H}_{ext} = \vec{\mathcal{H}}_{ext}(\rho, \varphi) e^{i\gamma_{i,z} z}. \quad (4.2.3.2)$$

Esses campos devem satisfazer as equações de Maxwell :

$$\nabla \times \vec{E}_{ext} = -i\omega \mu_0 \vec{H}_{ext}, \quad (4.2.3.3)$$

$$\nabla \times \vec{H}_{ext} = i\omega \varepsilon_0 \vec{E}_{ext}, \quad (4.2.3.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_{ext} = 0, \quad (4.2.3.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{H}_{ext} = 0. \quad (4.2.3.6)$$

A equação de onda na forma genérica é

$$\nabla^2 \vec{A}_{ext} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{A}_{ext} = 0 , \quad (4.2.3.7)$$

onde $\vec{A}_{ext} = \vec{\mathcal{A}}_{ext}(\rho, \varphi) e^{i\gamma_{i,z} z}$ representa os campos \vec{E}_{ext} ou \vec{H}_{ext} .

Colocando o operador laplaceano ∇^2 na forma

$$\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

a equação de onda torna-se

$$\nabla_{\perp}^2 \vec{\mathcal{A}}_{ext,\perp} + \hat{z} \nabla_{\perp}^2 \mathcal{A}_{ext,z} - \hat{z} \gamma_{i,z}^2 \mathcal{A}_{ext,z} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 (\vec{\mathcal{A}}_{ext,\perp} + \hat{z} \mathcal{A}_{ext,z}) = 0 . \quad (4.2.3.8)$$

Da equação (4.2.3.8) obtém-se duas novas equações :

$$\nabla_{\perp}^2 \mathcal{A}_{ext,\perp} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathcal{A}_{ext,\perp} = 0 , \quad (4.2.3.9)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \mathcal{A}_{ext,z} + \gamma_{i,\perp}^2 \mathcal{A}_{ext,z} = 0 . \quad (4.2.3.10)$$

Colocando a equação (4.2.3.10) em coordenadas cilíndricas e resolvendo-a pelo *método de separação de variáveis*, obtém-se a seguinte solução :

$$\mathcal{A}_{ext,z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n Z_n(\gamma_{i,\perp} \rho) e^{in(\varphi - \varphi_i)} , \quad (4.2.3.11)$$

$$Z_n(\gamma_{i,\perp} \rho) = AJ_n(\gamma_{i,\perp} \rho) + BN_n(\gamma_{i,\perp} \rho) , \quad (4.2.3.12)$$

onde A e B são constantes, $J_n(\gamma_{i,\perp} \rho)$ e $N_n(\gamma_{i,\perp} \rho)$ são as *funções de Bessel* de primeira e segunda espécie de ordem n ^{[11][12]}. A equação (4.2.3.11) é a soma da *onda incidente* com uma *onda espalhada*. Para que exista somente onda propagando-se para fora, *onda espalhada*, é necessário que $Z_n(\gamma_{i,\perp} \rho)$ satisfaça a *condição de irradiação de Sommerfeld*:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \left\{ \frac{\partial Z_n(\gamma_{i,\perp} \rho)}{\partial \rho} + i\gamma_{i,\perp} Z_n(\gamma_{i,\perp} \rho) \right\} = 0 . \quad (4.2.3.13)$$

Como

$$\frac{\partial Z_n(\gamma_{i,\perp} \rho)}{\partial \rho} = \gamma_{i,\perp} \left\{ -\frac{nZ_n(\gamma_{i,\perp} \rho)}{\gamma_{i,\perp} \rho} + Z_{n-1}(\gamma_{i,\perp} \rho) \right\} \quad (4.2.3.14)$$

a equação (4.2.3.13) torna-se

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ Z_{n-1}(\gamma_{i,\perp} \rho) + iZ_n(\gamma_{i,\perp} \rho) \right\} = 0 . \quad (4.2.3.15)$$

Utilizando as aproximações das *funções de Bessel* para grandes argumentos ^{[11][12]},

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} J_n(\gamma_{i,\perp} \rho) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_{i,\perp} \rho}} \cos\left(\gamma_{i,\perp} \rho - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) , \quad (4.2.3.16)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} N_n(\gamma_{i,\perp} \rho) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_{i,\perp} \rho}} \text{sen}\left(\gamma_{i,\perp} \rho - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (4.2.3.17)$$

a equação (4.2.3.15) resultará em

$$(A - iB)e^{i\left(\gamma_{i,\perp} \rho - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)} = 0 . \quad (4.2.3.18)$$

Da equação (4.2.3.18), conclui-se que a *condição de irradiação de Sommerfeld* será satisfeita se $B = -iA$. Implicando em

$$Z_n(\gamma_{i,\perp} \rho) = A \left\{ J_n(\gamma_{i,\perp} \rho) - iN_n(\gamma_{i,\perp} \rho) \right\} = AH_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} \rho) , \quad (4.2.3.19)$$

onde $H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} \rho)$ é a *função de Bessel de terceira espécie* ou *função de Hankel de segunda espécie* ^{[11][12]}, de ordem n e argumento $\gamma_{i,\perp} \rho$.

Das equações (4.2.3.11) e (4.2.3.19) obtém-se as componentes longitudinais da onda espalhada :

$$E_{s,z} = \mathcal{E}_{s,z} e^{i\gamma_{i,z} z} = e^{i\gamma_{i,z} z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} \rho) e^{in(\varphi - \varphi_i)} A_1^s, \quad (4.2.3.20)$$

$$H_{s,z} = \mathcal{H}_{s,z} e^{i\gamma_{i,z} z} = e^{i\gamma_{i,z} z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} \rho) e^{in(\varphi - \varphi_i)} A_2^s, \quad (4.2.3.21)$$

onde A_1^s e A_2^s são constantes ou *coeficientes de espalhamento* . Enquanto que as componentes transversais podem ser obtidas das equações (4.2.1.12)-(4.2.1.15) , bastando trocar o índice i por s . Logo ,

$$E_{s,\rho} = \mathcal{E}_{s,\rho} e^{i\gamma_{i,z} z} = ie^{i\gamma_{i,z} z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{in(\varphi - \varphi_i)} \left\{ \frac{\gamma_{i,z}}{\gamma_{i,\perp}} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} \rho) A_1^s - \frac{in|\gamma|\eta}{\gamma_{i,\perp}^2} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} \rho) A_2^s \right\}, \quad (4.2.3.22)$$

$$E_{s,\varphi} = \mathcal{E}_{s,\varphi} e^{i\gamma_{i,z} z} = ie^{i\gamma_{i,z} z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{in(\varphi - \varphi_i)} \left\{ \frac{in\gamma_{i,z}}{\gamma_{i,\perp}^2} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} \rho) A_1^s + \frac{|\gamma|\eta}{\gamma_{i,\perp}} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} \rho) A_2^s \right\}, \quad (4.2.3.23)$$

$$H_{s,\rho} = \mathcal{H}_{s,\rho} e^{i\gamma_{i,z} z} = ie^{i\gamma_{i,z} z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{in(\varphi - \varphi_i)} \left\{ \frac{in|\gamma|}{\gamma_{i,\perp}^2 \eta \rho} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} \rho) A_1^s + \frac{\gamma_{i,z}}{\gamma_{i,\perp}} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} \rho) A_2^s \right\}, \quad (4.2.3.24)$$

$$H_{s,\varphi} = \mathcal{E}_{s,\varphi} e^{i\gamma_{i,z} z} = -ie^{i\gamma_{i,z} z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{in(\varphi - \varphi_i)} \left\{ \frac{|\gamma|}{\gamma_{i,\perp} \eta} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} \rho) A_1^s - \frac{in\gamma_{i,z}}{\gamma_{i,\perp}^2} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} \rho) A_2^s \right\}, \quad (4.2.3.25)$$

onde

$$H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) = \frac{\partial H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho)}{\partial(\gamma_{i,\perp}\rho)} = \frac{n}{\gamma_{i,\perp}\rho} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) - H_{n+1}^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) \quad (4.2.3.26)$$

é a derivada da *função de Hankel de segunda espécie*.

4.2.4 Condições de Contorno

Aplicando as condições de contorno é possível encontrarmos as constantes C_1 e C_2 e os coeficientes de espalhamento A_1^s e A_2^s . Na fronteira entre o plasma e o espaço livre ($\rho = a$) as componentes tangenciais dos campos devem satisfazer as seguintes condições :

$$E_{i,\varphi}(a, \varphi, z) + E_{s,\varphi}(a, \varphi, z) = E_{p,\varphi}(a, \varphi, z) , \quad (4.2.4.1)$$

$$E_{i,z}(a, \varphi, z) + E_{s,z}(a, \varphi, z) = E_{p,z}(a, \varphi, z) , \quad (4.2.4.2)$$

$$H_{i,\varphi}(a, \varphi, z) + H_{s,\varphi}(a, \varphi, z) = H_{p,\varphi}(a, \varphi, z) , \quad (4.2.4.3)$$

$$H_{i,z}(a, \varphi, z) + H_{s,z}(a, \varphi, z) = H_{p,z}(a, \varphi, z) . \quad (4.2.4.4)$$

Das equações (4.2.4.1)-(4.2.4.4) obtém-se um sistema de equações lineares que na forma matricial é representado por :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ A_1^s \\ A_2^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} \quad (4.2.4.5)$$

onde

$$S_{11} = \frac{a\Omega_1 J'_n(T_1 a) + \Lambda_1 n J_n(T_1 a)}{a(O_1 - O_2)}, \quad (4.2.4.6)$$

$$S_{12} = \frac{a\Omega_2 J'_n(T_2 a) + \Lambda_2 n J_n(T_2 a)}{a(O_1 - O_2)}, \quad (4.2.4.7)$$

$$S_{13} = -\frac{i^{n+2} n \gamma_{i,z} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} a)}{\gamma_{i,\perp}^2 a}, \quad (4.2.4.8)$$

$$S_{14} = -\frac{i^{n+1} |\gamma| \eta H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} a)}{\gamma_{i,\perp}}, \quad (4.2.4.9)$$

$$S_{21} = -\frac{O_2 J_n(T_1 a)}{(O_1 - O_2)}, \quad (4.2.4.10)$$

$$S_{22} = \frac{O_1 J_n(T_2 a)}{(O_1 - O_2)}, \quad (4.2.4.11)$$

$$S_{23} = -i^n H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} a), \quad (4.2.4.12)$$

$$S_{31} = \frac{aP_1 J'_n(T_1 a) + Q_1 n J_n(T_1 a)}{a(O_1 - O_2)}, \quad (4.2.4.13)$$

$$S_{32} = \frac{aP_2 J'_n(T_2 a) + Q_2 n J_n(T_2 a)}{a(O_1 - O_2)}, \quad (4.2.4.14)$$

$$S_{33} = \frac{i^{n+1} |\gamma| H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} a)}{\gamma_{i,\perp} \eta}, \quad (4.2.4.15)$$

$$S_{34} = -\frac{i^{n+2} n \gamma_{i,z} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} a)}{\gamma_{i,\perp}^2 a}, \quad (4.2.4.16)$$

$$S_{41} = \frac{J_n(T_1 a)}{(O_1 - O_2)}, \quad (4.2.4.17)$$

$$S_{42} = -\frac{J_n(T_2 a)}{(O_1 - O_2)}, \quad (4.2.4.18)$$

$$S_{44} = -i^n H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} a), \quad (4.2.4.19)$$

$$Y_1 = i^{n+1} H_{i0} \eta \sin \theta_i \left\{ \frac{i n \gamma_{i,z} \sin \zeta}{\gamma_{i,\perp}^2 a} J_n(\gamma_{i,\perp} a) - \frac{|\gamma| \cos \zeta}{\gamma_{i,\perp}} J'_n(\gamma_{i,\perp} a) \right\}, \quad (4.2.4.20)$$

$$Y_2 = i^n \eta \sin \zeta H_{i0} \sin \theta_i J_n(\gamma_{i,\perp} a), \quad (4.2.4.21)$$

$$Y_3 = -i^{n+1} H_{i0} \operatorname{sen} \theta_i \left\{ \frac{|\gamma| \operatorname{sen} \zeta}{\gamma_{i,\perp}} J'_n(\gamma_{i,\perp} a) + \frac{i n \gamma_{i,z} \cos \zeta}{\gamma_{i,\perp}^2 a} J_n(\gamma_{i,\perp} a) \right\}, \quad (4.2.4.22)$$

$$Y_4 = -i^n \cos \zeta H_{i0} \operatorname{sen} \theta_i J_n(\gamma_{i,\perp} a) \quad (4.2.4.23)$$

são os *coeficientes do sistema* e C_1 , C_2 , A_1^s e A_2^s são as *incógnitas*. De acordo com a *regra de Cramer*, se o determinante do sistema não for nulo ($\Delta \neq 0$), o sistema possui unicamente uma solução C_1 , C_2 , A_1^s , A_2^s dada pelas fórmulas:

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad (4.2.4.24)$$

$$C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (4.2.4.25)$$

$$A_1^s = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (4.2.4.26)$$

$$A_2^s = \frac{\Delta_4}{\Delta}. \quad (4.2.4.27)$$

Onde Δ é o determinante da matriz S em (4.2.4.5) e Δ_l ($l = 1, 2, 3, 4$) é o determinante obtido de S substituindo em S a coluna l pela coluna com os elementos Y_1, \dots, Y_4 .

4.2.5 Relações de Simetria

Se o ângulo de incidência for $\theta'_i = \pi - \theta_i$, as componentes da constante de propagação serão $\gamma_{i,\perp}(\pi - \theta_i) = \gamma_{i,\perp}(\theta_i)$ e $\gamma_{i,z}(\pi - \theta_i) = -\gamma_{i,z}(\theta_i)$. Portanto, das equações (4.2.2.25)-(4.2.2.29), (4.2.2.44) e (4.2.2.45), obtém-se as relações:



$$T_H^2(\pi - \theta_i) = T_H^2(\theta_i) ,$$

$$T_E^2(\pi - \theta_i) = T_E^2(\theta_i) ,$$

$$T_{HE}^2(\pi - \theta_i) = -T_{HE}^2(\theta_i) ,$$

$$T_{EH}^2(\pi - \theta_i) = -T_{EH}^2(\theta_i) ,$$

$$T_{1,2}^2(\pi - \theta_i) = T_{1,2}^2(\theta_i) ,$$

$$O_{1,2}(\pi - \theta_i) = -O_{1,2}(\theta_i) ,$$

$$\gamma_1^2(\pi - \theta_i) = \gamma_1^2(\theta_i) .$$

Utilizando as relações anteriores nas equações (4.2.2.69)-(4.2.2.76) e fazendo a mudança da polarização para $\zeta' = \pi - \zeta$, as equações (4.2.4.6)-(4.2.4.23) fornecerão as seguintes relações :

$$S_{11}(\pi - \theta_i) = -S_{11}(\theta_i) ,$$

$$S_{12}(\pi - \theta_i) = -S_{12}(\theta_i) ,$$

$$S_{13}(\pi - \theta_i) = -S_{13}(\theta_i) ,$$

$$S_{14}(\pi - \theta_i) = S_{14}(\theta_i) ,$$

$$S_{21}(\pi - \theta_i) = S_{21}(\theta_i) ,$$

$$S_{22}(\pi - \theta_i) = S_{22}(\theta_i) ,$$

$$S_{23}(\pi - \theta_i) = S_{23}(\theta_i) ,$$

$$S_{24}(\pi - \theta_i) = S_{24}(\theta_i) ,$$

$$S_{31}(\pi - \theta_i) = S_{31}(\theta_i) ,$$

$$S_{32}(\pi - \theta_i) = S_{32}(\theta_i) ,$$

$$S_{33}(\pi - \theta_i) = S_{33}(\theta_i) ,$$

$$S_{34}(\pi - \theta_i) = -S_{34}(\theta_i) ,$$

$$S_{41}(\pi - \theta_i) = -S_{41}(\theta_i) ,$$

$$S_{42}(\pi - \theta_i) = -S_{42}(\theta_i) ,$$

$$S_{43}(\pi - \theta_i) = S_{43}(\theta_i) = 0 ,$$

$$\begin{aligned}
S_{44}(\pi - \theta_i) &= S_{44}(\theta_i) , \\
Y_1(\pi - \theta_i, \pi - \zeta) &= -Y_1(\theta_i, \zeta) , \\
Y_2(\pi - \theta_i, \pi - \zeta) &= Y_2(\theta_i, \zeta) , \\
Y_3(\pi - \theta_i, \pi - \zeta) &= Y_3(\theta_i, \zeta) , \\
Y_4(\pi - \theta_i, \pi - \zeta) &= -Y_4(\theta_i, \zeta) .
\end{aligned}$$

Finalmente , das equações (4.2.4.24)-(4.2.4.32) , as relações de simetria para C_1 , C_2 , A_1^s e A_2^s serão dadas por :

$$C_1(\pi - \theta_i, \pi - \zeta) = C_1(\theta_i, \zeta) , \quad (4.2.5.1)$$

$$C_2(\pi - \theta_i, \pi - \zeta) = C_2(\theta_i, \zeta) , \quad (4.2.5.2)$$

$$A_1^s(\pi - \theta_i, \pi - \zeta) = A_1^s(\theta_i, \zeta) , \quad (4.2.5.3)$$

$$A_2^s(\pi - \theta_i, \pi - \zeta) = -A_2^s(\theta_i, \zeta) . \quad (4.2.5.4)$$

Das equações (4.2.2.54) , (4.2.2.55) e (4.2.2.64)-(4.2.2.67) , as relações de simetria para os campos no interior do plasma serão :

$$\vec{\mathcal{E}}_{p,z}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) = \vec{\mathcal{E}}_{p,z}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) , \quad (4.2.5.5)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{p,z}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) = -\vec{\mathcal{H}}_{p,z}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) , \quad (4.2.5.6)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{p,\perp}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) = -\vec{\mathcal{E}}_{p,\perp}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) , \quad (4.2.5.7)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{p,\perp}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) = \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) . \quad (4.2.5.8)$$

Das equações (4.2.3.20)-(4.2.3.25) , obtém-se as relações de simetria para os campos espalhados :

$$\vec{\mathcal{E}}_{s,z}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) = \vec{\mathcal{E}}_{s,z}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) , \quad (4.2.5.9)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{s,z}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) = -\vec{\mathcal{H}}_{s,z}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) , \quad (4.2.5.10)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{s,\perp}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) = -\vec{\mathcal{E}}_{s,\perp}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta), \quad (4.2.5.11)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{s,\perp}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) = \vec{\mathcal{H}}_{s,\perp}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta). \quad (4.2.5.12)$$

4.3 INCIDÊNCIA NORMAL

4.3.1 Campos Incidentes e Campos Espalhados

Na análise anterior os campos incidentes, espalhados e no interior do plasma foram obtidos considerando um ângulo de incidência arbitrário. Nesta seção será considerada uma incidência normal, $\theta_i = \pi/2$, o que implica em utilizar as mesmas equações da análise anterior. É importante observar que quando $\theta_i = \pi/2$, o módulo da constante de propagação $|\gamma|$ torna-se igual a $\gamma_{i,\perp}$ e $\gamma_{i,z}$ torna-se nulo.

Os campos incidentes reduzem-se às equações:

$$E_{i,\rho} = \mathcal{E}_{i,\rho} = -\frac{H_{i0}\eta \cos\zeta}{|\gamma|\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ni^n J_n(|\gamma|\rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)}, \quad (4.3.1.1)$$

$$E_{i,\varphi} = \mathcal{E}_{i,\varphi} = -iH_{i0}\eta \cos\zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J'_n(|\gamma|\rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)}, \quad (4.3.1.2)$$

$$E_{i,z} = \mathcal{E}_{i,z} = H_{i0}\eta \sin\zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(|\gamma|\rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)}, \quad (4.3.1.3)$$

$$H_{i,\rho} = \mathcal{H}_{i,\rho} = -\frac{H_{i0} \sin\zeta}{|\gamma|\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ni^n J_n(|\gamma|\rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)}, \quad (4.3.1.4)$$

$$H_{i,\varphi} = \mathcal{H}_{i,\varphi} = -iH_{i0} \operatorname{sen} \zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J'_n(|\gamma|\rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)} , \quad (4.3.1.5)$$

$$H_{i,z} = \mathcal{H}_{i,z} = -H_{i0} \operatorname{cos} \zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(|\gamma|\rho) e^{in(\varphi-\varphi_i)} , \quad (4.3.1.6)$$

onde

$$J'_n(|\gamma|\rho) = \frac{\partial J_n(|\gamma|\rho)}{\partial(|\gamma|\rho)} = \frac{1}{2} \{ J_{n-1}(|\gamma|\rho) - J_{n+1}(|\gamma|\rho) \} \quad (4.3.1.7)$$

representa a derivada da *função de Bessel de primeira espécie* . Os campos espalhados tornam-se :

$$E_{s,\rho} = \mathcal{E}_{s,\rho} = \frac{\eta}{|\gamma|\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ni^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} H_n^{(2)}(|\gamma|\rho) A_2^s , \quad (4.3.1.8)$$

$$E_{s,\varphi} = \mathcal{E}_{s,\varphi} = i\eta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} H_n^{\prime(2)}(|\gamma|\rho) A_2^s , \quad (4.3.1.9)$$

$$E_{s,z} = \mathcal{E}_{s,z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} H_n^{(2)}(|\gamma|\rho) A_1^s , \quad (4.3.1.10)$$

$$H_{s,\rho} = \mathcal{H}_{s,\rho} = \frac{i}{\eta\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} H_n^{\prime(2)}(|\gamma|\rho) A_1^s , \quad (4.3.1.11)$$

$$H_{s,\varphi} = \mathcal{E}_{s,\varphi} = -\frac{i}{\eta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} H_n^{\prime(2)}(|\gamma|\rho) A_1^s , \quad (4.3.1.12)$$

$$H_{s,z} = \mathcal{H}_{s,z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} H_n^{(2)}(|\gamma|\rho) A_2^s , \quad (4.3.1.13)$$

onde

$$H_n^{\prime(2)}(|\gamma|\rho) = \frac{\partial H_n^{(2)}(|\gamma|\rho)}{\partial(|\gamma|\rho)} = \frac{n}{|\gamma|\rho} H_n^{(2)}(|\gamma|\rho) - H_{n+1}^{(2)}(|\gamma|\rho) \quad (4.3.1.14)$$

é a derivada da *função de Hankel de segunda espécie*.

4.3.2 Campos no Interior do Plasma

No caso de incidência normal $\gamma_{i,z} = 0$ e as equações de onda (4.2.2.23) e (4.2.2.24) tornam-se desacopladas

$$(\nabla_{\perp}^2 + T_H^2) \mathcal{H}_{p,z} = 0, \quad (4.3.2.1)$$

$$(\nabla_{\perp}^2 + T_E^2) \mathcal{E}_{p,z} = 0, \quad (4.3.2.2)$$

onde

$$T_H^2 = \gamma_1^2 - \frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}, \quad (4.3.2.3)$$

$$T_E^2 = \gamma_1^2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}, \quad (4.3.2.4)$$

$$\gamma_1^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1. \quad (4.3.2.5)$$

As soluções das equações (4.3.2.1) e (4.3.2.2), em coordenadas cilíndricas esféricas, são dadas por :

$$E_{p,z} = \mathcal{E}_{p,z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_1 e^{in(\varphi - \varphi_i)} J_n(T_E \rho), \quad (4.3.2.6)$$

$$H_{p,z} = \mathcal{H}_{p,z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_2 e^{in(\varphi - \varphi_i)} J_n(T_H \rho). \quad (4.3.2.7)$$

Fazendo $\gamma_{i,z} = 0$ nas equações (4.2.2.53) e (4.2.2.54) obtém-se :

$$\vec{E}_{p,\perp} = \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp} = -\frac{1}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)} \left\{ \left(\omega^3 \mu_0^2 \varepsilon_2 \frac{\partial \mathcal{K}_{p,z}}{\partial \rho} - \frac{i\omega \mu_0 \gamma_1^2}{\rho} \frac{\partial \mathcal{K}_{p,z}}{\partial \varphi} \right) \hat{\rho} + \left(i\omega \mu_0 \gamma_1^2 \frac{\partial \mathcal{K}_{p,z}}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} \right\}, \quad (4.3.2.8)$$

$$\vec{H}_{p,\perp} = \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp} = \frac{i(\omega^3 \mu_0 \varepsilon_2^2 - \omega \varepsilon_1 \gamma_1^2)}{(\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4)} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{E}_{p,z}}{\partial \varphi} \hat{\rho} - \frac{\partial \mathcal{E}_{p,z}}{\partial \rho} \hat{\varphi} \right\}. \quad (4.3.2.9)$$

Assim , as componentes transversais $E_{p,\rho}$, $E_{p,\varphi}$, $H_{p,\rho}$ e $H_{p,\varphi}$ serão dadas por :

$$E_{p,\rho} = \mathcal{E}_{p,\rho} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} \left\{ M T_H J'_n(T_H \rho) + \frac{Nn}{\rho} J_n(T_H \rho) \right\} C_2, \quad (4.3.2.10)$$

$$E_{p,\varphi} = \mathcal{E}_{p,\varphi} = i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} N T_H J'_n(T_H \rho) C_2, \quad (4.3.2.11)$$

$$H_{p,\rho} = \mathcal{H}_{p,\rho} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} \frac{\Phi n}{\rho} J_n(T_E \rho) C_1, \quad (4.3.2.12)$$

$$H_{p,\varphi} = \mathcal{H}_{p,\varphi} = i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} \Phi T_E J'_n(T_E \rho) C_1, \quad (4.3.2.13)$$

onde

$$J'_n(T_H \rho) = \frac{\partial J_n(T_H \rho)}{\partial (T_H \rho)}, \quad (4.3.2.14)$$

$$J'_n(T_E \rho) = \frac{\partial J_n(T_E \rho)}{\partial (T_E \rho)}, \quad (4.3.2.15)$$

$$M = -\frac{\omega^3 \mu_0^2 \varepsilon_2}{\omega^4 \mu_0^2 \varepsilon_2^2 - \gamma_1^4}, \quad (4.3.2.16)$$

$$N = -\frac{\omega\mu_0\gamma_1^2}{\omega^4\mu_0^2\varepsilon_2^2 - \gamma_1^4}, \quad (4.3.2.17)$$

$$\Phi = \frac{\omega\varepsilon_1\gamma_1^2 - \omega^3\mu_0\varepsilon_2^2}{\omega^4\mu_0^2\varepsilon_2^2 - \gamma_1^4}. \quad (4.3.2.18)$$

4.3.3 Condições de Contorno

Na fronteira entre o plasma e o espaço livre ($\rho = a$) as componentes tangenciais dos campos devem satisfazer às condições dadas pelas equações (4.2.4.1) a (4.2.4.4), resultando num sistema de equações lineares:

$$NT_H J'_n(T_H a)C_2 - i^n \eta H_n^{(2)}(|\gamma|a)A_2^s = -i^n H_{i0} \eta \cos\zeta J'_n(|\gamma|a), \quad (4.3.3.1)$$

$$J_n(T_E a)C_1 - i^n H_n^{(2)}(|\gamma|a)A_1^s = i^n H_{i0} \eta \sin\zeta J_n(|\gamma|a), \quad (4.3.3.2)$$

$$\Phi T_E J'_n(T_E a)C_1 + \frac{i^n}{\eta} H_n^{(2)}(|\gamma|a)A_1^s = -i^n H_{i0} \sin\zeta J'_n(|\gamma|a), \quad (4.3.3.3)$$

$$J_n(T_H a)C_2 - i^n H_n^{(2)}(|\gamma|a)A_2^s = -i^n H_{i0} \cos\zeta J_n(|\gamma|a). \quad (4.3.3.4)$$

Das equações (4.3.3.2) e (4.3.3.3) obtém-se

$$C_1 = i^n H_{i0} \eta \sin\zeta \left\{ \frac{H_n^{(2)}(|\gamma|a)J_n(|\gamma|a) - H_n^{(2)}(|\gamma|a)J'_n(|\gamma|a)}{\eta\Phi T_E J'_n(T_E a)H_n^{(2)}(|\gamma|a) + J_n(T_E a)H_n^{(2)}(|\gamma|a)} \right\}, \quad (4.3.3.5)$$

$$A_1^s = -H_{i0} \eta \sin\zeta \left\{ \frac{\eta\Phi T_E J'_n(T_E a)J_n(|\gamma|a) + J_n(T_E a)J'_n(|\gamma|a)}{\eta\Phi T_E J'_n(T_E a)H_n^{(2)}(|\gamma|a) + J_n(T_E a)H_n^{(2)}(|\gamma|a)} \right\} \quad (4.3.3.6)$$

e das equações (4.3.3.1) e (4.3.3.4)

$$C_2 = i^n H_{i0} \eta \cos \zeta \left\{ \frac{H_n^{(2)}(|\gamma|a) J_n(|\gamma|a) - H_n^{(2)}(|\gamma|a) J_n'(|\gamma|a)}{NT_H J_n'(T_H a) H_n^{(2)}(|\gamma|a) - \eta J_n(T_H a) H_n^{(2)}(|\gamma|a)} \right\}, \quad (4.3.3.7)$$

$$A_2^s = H_{i0} \cos \zeta \left\{ \frac{NT_H J_n'(T_H a) J_n(|\gamma|a) - \eta J_n(T_H a) J_n'(|\gamma|a)}{NT_H J_n'(T_H a) H_n^{(2)}(|\gamma|a) - \eta J_n(T_H a) H_n^{(2)}(|\gamma|a)} \right\}. \quad (4.3.3.8)$$

4.3.4 Relações de Simetria

No caso de incidência normal, as relações de simetria para as constantes C_1 , C_2 e para os coeficientes de espalhamento A_1^s e A_2^s são obtidas mudando-se o ângulo de polarização para $\zeta' = \pi - \zeta$ nas equações (4.3.3.5) a (4.3.3.8). Portanto,

$$C_1(\pi - \zeta) = C_1(\zeta), \quad (4.3.4.1)$$

$$C_2(\pi - \zeta) = -C_2(\zeta), \quad (4.3.4.2)$$

$$A_1^s(\pi - \zeta) = A_1^s(\zeta), \quad (4.3.4.3)$$

$$A_2^s(\pi - \zeta) = -A_2^s(\zeta). \quad (4.3.4.4)$$

Das equações (4.3.2.6), (4.3.2.7) e (4.3.2.10)-(4.3.2.13), as relações de simetria para os campos no interior do plasma serão

$$\vec{\mathcal{E}}_{p,z}(\rho, \varphi, \zeta) = \vec{\mathcal{E}}_{p,z}(\rho, \varphi, \pi - \zeta), \quad (4.3.4.5)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{p,z}(\rho, \varphi, \zeta) = -\vec{\mathcal{H}}_{p,z}(\rho, \varphi, \pi - \zeta), \quad (4.3.4.6)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{p,\perp}(\rho, \varphi, \zeta) = -\vec{\mathcal{E}}_{p,\perp}(\rho, \varphi, \pi - \zeta), \quad (4.3.4.7)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{p,\perp}(\rho, \varphi, \zeta) = \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp}(\rho, \varphi, \pi - \zeta). \quad (4.3.4.8)$$

Das equações (4.3.1.8)-(4.3.1.13) , obtém-se as relações de simetria para os campos espalhados

$$\vec{\mathcal{E}}_{s,z}(\rho, \varphi, \zeta) = \vec{\mathcal{E}}_{s,z}(\rho, \varphi, \pi - \zeta) , \quad (4.3.4.9)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{s,z}(\rho, \varphi, \zeta) = -\vec{\mathcal{H}}_{s,z}(\rho, \varphi, \pi - \zeta) , \quad (4.3.4.10)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{s,\perp}(\rho, \varphi, \zeta) = -\vec{\mathcal{E}}_{s,\perp}(\rho, \varphi, \pi - \zeta) , \quad (4.3.4.11)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{s,\perp}(\rho, \varphi, \zeta) = \vec{\mathcal{H}}_{s,\perp}(\rho, \varphi, \pi - \zeta) . \quad (4.3.4.12)$$

As relações de simetria dadas pelas equações (4.3.4.5)-(4.3.4.12) são idênticas às equações (4.2.5.5)-(4.2.5.12) , encontradas para o caso de incidência oblíqua .

4.4 CAMPOS DISTANTES

Nas equações (4.2.3.20)-(4.2.3.25) , quando $\gamma_{i,\perp}\rho \rightarrow \infty$, pode-se usar as aproximações das *funções de Bessel de terceira espécie* :^{[11][12]}

$$H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma_{i,\perp}\rho}} i^n e^{-i(\gamma_{i,\perp}\rho - \pi/4)} = i^n H_0^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) , \quad (4.4.1)$$

$$H_n'^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) = \frac{nH_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho)}{\gamma_{i,\perp}\rho} - H_{n+1}^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) \cong i^{n-1} H_0^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) . \quad (4.4.2)$$

As componentes dos campos espalhados , equações (4.2.3.20)-(4.2.3.25) , resultam nas seguintes equações :

$$E_{s,\rho} = e^{iy_{i,z}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} \left(\frac{\gamma_{i,z}}{\gamma_{i,\perp}} \right) H_0^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) A_1^s, \quad (4.4.3)$$

$$E_{s,\varphi} = e^{iy_{i,z}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} \left(\frac{|\gamma|\eta}{\gamma_{i,\perp}} \right) H_0^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) A_2^s, \quad (4.4.4)$$

$$E_{s,z} = e^{iy_{i,z}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} H_0^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) A_1^s, \quad (4.4.5)$$

$$H_{s,\rho} = e^{iy_{i,z}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} \left(\frac{\gamma_{i,z}}{\gamma_{i,\perp}} \right) H_0^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) A_2^s, \quad (4.4.6)$$

$$H_{s,\varphi} = -e^{iy_{i,z}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} \left(\frac{|\gamma|}{\gamma_{i,\perp}\eta} \right) H_0^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) A_1^s, \quad (4.4.7)$$

$$H_{s,z} = e^{iy_{i,z}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} H_0^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho) A_2^s. \quad (4.4.8)$$

Finalmente, os campos totais ou *campos distantes*, \vec{E}_s e \vec{H}_s , serão:

$$\vec{E}_s = \frac{|\gamma|}{\gamma_{i,z}} \mathcal{Q}(\rho, z) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} \left\{ \hat{\theta}^{ref}(\varphi) A_1^s + \hat{\varphi} \eta A_2^s \right\}, \quad (4.4.9)$$

$$\vec{H}_s = \frac{|\gamma|}{\gamma_{i,z}} \mathcal{Q}(\rho, z) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in(\varphi-\varphi_i)} \left\{ \hat{\theta}^{ref}(\varphi) A_2^s - \hat{\varphi} \frac{1}{\eta} A_1^s \right\}, \quad (4.4.10)$$

onde

$$\hat{\theta}^{ref}(\varphi) = \frac{\hat{\rho}\gamma_{i,z} + \hat{z}\gamma_{i,\perp}}{|\gamma|} = -\hat{\theta}(\theta = \pi - \theta_i, \varphi), \quad (4.4.11)$$

$$\mathcal{Q}(\rho, z) = e^{iy_{i,z}} H_0^{(2)}(\gamma_{i,\perp}\rho). \quad (4.4.12)$$

Os campos distantes podem ser simplificados na forma:

$$\vec{E}_s = \sqrt{\pi/2} \eta \mathcal{O}(\rho, z) \left\{ \hat{\theta}^{ref}(\varphi) g(\varphi) + \hat{\varphi} f(\varphi) \right\}, \quad (4.4.13)$$

$$\vec{H}_s = \sqrt{\pi/2} \mathcal{O}(\rho, z) \left\{ \hat{\theta}^{ref}(\varphi) f(\varphi) - \hat{\varphi} g(\varphi) \right\}, \quad (4.4.14)$$

onde

$$f(\varphi) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\text{sen } \theta_i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in(\varphi - \varphi_i)} A_2^s, \quad (4.4.15)$$

$$g(\varphi) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\eta \text{sen } \theta_i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in(\varphi - \varphi_i)} A_1^s. \quad (4.4.16)$$

Deduz-se que os campos \vec{E}_s e \vec{H}_s são perpendiculares à direção de propagação ou direção de espalhamento dada por $\hat{r}(\theta = \pi - \theta_i, \varphi)$ e que esses campos propagam-se formando um *cone*, cujo ângulo em relação ao vetor unitário \hat{z} é $\theta = \pi - \theta_i$. Portanto, o *retroespalhamento* somente ocorre no caso de incidência normal.

Da FIGURA 4.2.1 observa-se que no caso em que $\zeta = 0$, onda incidente TE, a função $f(\varphi)$ é a componente polarizada e $g(\varphi)$ a despolarizada. Quando $\zeta = \pi/2$, onda incidente TM, a função $f(\varphi)$ é a componente despolarizada e $g(\varphi)$ a polarizada.

Norteadas pelas *relações de simetria*, pode-se provar que para um ângulo de incidência $\theta'_i = \pi - \theta_i$ a função $f(\varphi)$ muda de sinal e $g(\varphi)$ permanece a mesma.

Mudando o ângulo de polarização para $\zeta' = \zeta \pm \pi$ é equivalente a multiplicar os campos por (-1) , pois, das equações (4.2.4.6)-(4.2.4.23), (4.2.4.26) e (4.2.4.27), A_1^s e A_2^s mudam de sinal. Desta forma tem-se

$$f(\varphi, \zeta) = -f(\varphi, \zeta \pm \pi) \quad \text{e} \quad g(\varphi, \zeta) = -g(\varphi, \zeta \pm \pi). \quad (4.4.17)$$

Todos os resultados e conclusões obtidos nesta seção também são válidos para incidência normal.



CAPÍTULO 5

CARACTERÍSTICAS DE ESPALHAMENTO

5.1 SEÇÃO DE ESPALHAMENTO TRANSVERSAL

Com base nos resultados obtidos no capítulo anterior será determinada a *seção de espalhamento transversal*, dada pela equação (2.11.16), considerando os casos de incidência oblíqua ($\theta_i \neq \pi/2$) e incidência normal ($\theta_i = \pi/2$). A *seção de espalhamento transversal* é calculada pela fórmula

$$\sigma(\varphi) = \lim_{\rho \rightarrow d} 2\pi\rho \frac{|H_{s,t}|^2}{|H_i|^2} \quad (5.1.1)$$

onde $|H_{s,t}|^2 = |H_{s,\varphi}|^2 + |H_{s,z}|^2$, $|H_i|^2 = H_{i0}^2$ e d é a distância onde está localizada a fonte.

No caso de incidência oblíqua a *seção de espalhamento transversal* é obtida pela equação

$$\sigma(\varphi) = \frac{2\pi d}{H_{i0}^2} \left\{ \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\varphi - \varphi_i + \pi/2)} \left[\frac{|\gamma|}{\gamma_{i,\perp} \eta} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} d) A_1^s - \frac{i n \gamma_{i,z}}{\gamma_{i,\perp}^2 d} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} d) A_2^s \right] \right]^2 + \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\varphi - \varphi_i + \pi/2)} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} d) A_2^s \right]^2 \right\} \quad (5.1.2)$$

onde os *coeficientes de espalhamento* A_1^s e A_2^s são dados pelas equações (4.2.4.26) e (4.2.4.27), respectivamente. Já no caso de incidência normal tem-se

$$\sigma(\varphi) = \frac{2\pi d}{H_{i0}^2} \left\{ \frac{1}{\eta^2} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i+\pi/2)} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} d) A_1^s \right|^2 + \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i+\pi/2)} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} d) A_2^s \right|^2 \right\} \quad (5.1.3)$$

e os *coeficientes de espalhamento* A_1^s e A_2^s devem ser calculados pelas equações (4.3.3.6) e (4.3.3.8). A equação (5.1.3) foi obtida fazendo-se $\gamma_{i,\perp} = |\gamma|$ e $\gamma_{i,z} = 0$ na equação (5.1.2).

5.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

A *seção de espalhamento transversal* pode ser obtida numericamente fazendo-se uma truncagem na equação (5.1.2) de $-N$ a $+N$ e variando φ de 0 a 2π com um incremento de $2\pi/\mathcal{M}$. Assim, tem-se:

$$\sigma(\varphi_m) = \frac{2\pi d}{H_{i0}^2} \left\{ \left[\sum_{n=-N}^{+N} e^{in(\varphi_m-\varphi_i+\pi/2)} \left[\frac{|\gamma|}{\gamma_{i,\perp} \eta} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} d) A_1^s - \frac{i\eta \gamma_{i,z}}{\gamma_{i,\perp}^2 d} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} d) A_2^s \right] \right]^2 + \left| \sum_{n=-N}^{+N} e^{in(\varphi_m-\varphi_i+\pi/2)} H_n^{(2)}(\gamma_{i,\perp} d) A_2^s \right|^2 \right\}, \quad (5.2.1)$$

$$\varphi = \frac{m2\pi}{\mathcal{M}}. \quad (5.2.2)$$

Onde $n \in (-N, N)$ e $m = 0, 1, 2, 3, \dots, \mathcal{M}$. Se a incidência for oblíqua os *coeficientes de espalhamento* A_1^s e A_2^s serão calculados pelas equações (4.2.4.26) e (4.2.4.27), caso contrário devem ser calculados pelas equações (4.3.3.6) e (4.3.3.8).

Partindo das equações (5.2.1) e (5.2.2) foi implementado um programa de computador e alguns resultados serão apresentados em coordenadas polares. Nos exemplos, será considerado um plasma cilíndrico de seção transversal circular com raio $a = 10(m)$, permeabilidade magnética igual a do espaço livre $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}(H/m)$, tensor permissividade elétrica ($\vec{\epsilon}$) dada pelas equações (3.7.127)-(3.7.129) e um campo magnetostático $B_0 = 1,0 \times 10^{-4}(Wb/m^2)$. O campo magnético incidente é $H_{i0} = 1,0(A/m)$ e a coordenada angular da onda incidente é $\varphi_i = 0$. Como a fonte está localizada no interior do plasma e o maior interesse é verificar como a onda eletromagnética é espalhada pelo plasma, a *seção de espalhamento transversal* é estimada a uma distância $d = 1,5a$. A onda incidente pode ser decomposta em ondas TM e TE, portanto, os gráficos serão mostrados para dois valores do ângulo de polarização $\zeta = \pi/2$ (TM) e $\zeta = \pi$ (TE). Esses gráficos são exibidos para um ângulo de incidência θ_i , assumindo os valores $\pi/6$, $\pi/5$, $\pi/4$, $\pi/3$ e $\pi/2$. O valor ideal para N deveria ser um número grande, todavia, como o tempo de processamento tornar-se-ia muito elevado, escolheu-se o valor $N = 18$. Após varias tentativas encontrou-se o valor $\mathcal{M} = 2880$, o que possibilitou um melhor traçado das curvas.

Os primeiros gráficos, FIGURA 5.2.1 a FIGURA 5.2.10, são para um plasma frio $T = 300(K)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6(s^{-1})$, $n_e = 4 \times 10^{12}(m^{-3})$. Em cada gráfico são traçadas cinco curvas correspondentes aos valores de ω iguais a $4 \times 10^9(rd/s)$, $150 \times 10^6(rd/s)$, $100 \times 10^6(rd/s)$, $30 \times 10^6(rd/s)$ e $1 \times 10^6(rd/s)$.

Nos próximos gráficos, FIGURA 5.2.11 a FIGURA 5.2.20, a frequência de RF é mantida constante $\omega = 180 \times 10^6(rd/s)$. Em cada gráfico são traçadas cinco curvas correspondentes aos valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$. Para o plasma frio $T = 300(K)$ adotou-se $\nu = 1,1284 \times 10^6(s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12}(m^{-3})$, enquanto que para temperaturas elevadas a densidade eletrônica (n_e) e a frequência de colisão (ν) estão disponíveis na TABELA 5.2.1. A densidade eletrônica (n_e) e a frequência de

colisão (ν) para temperaturas elevadas foram obtidas da curva $\mathcal{J} / \mathcal{J}_0 = 10^{-1}$, na FIGURA 3.8.1.

$T(K)$ $\times 10^{-3}$	$\mathcal{J} / \mathcal{J}_0 = 10^{-1}$	
	$n_e(m^{-3})$	$\nu(s^{-1})$
4	$8,00 \times 10^{12}$	$1,47 \times 10^{11}$
6	$5,12 \times 10^{14}$	$2,26 \times 10^{11}$
8	$4,97 \times 10^{15}$	$3,54 \times 10^{11}$
10	$3,23 \times 10^{16}$	$5,95 \times 10^{11}$

TABELA 5.2.1 : Densidade eletrônica (n_e) e frequência de colisão (ν) para os valores de temperatura utilizados nos exemplos.

Observa-se nos gráficos que, em geral, as curvas apresentam assimetria, isto é, para $0^\circ < \varphi < 180^\circ$ as amplitudes de espalhamento obedecem à relação $\sigma(\varphi) \neq \sigma(-\varphi)$. Isto se verifica devido à anisotropia do plasma na condição $\omega_c \neq 0$. Também apresentam pontos de máximos e mínimos, sendo necessário um estudo de $\sigma(\varphi)$ durante todo o intervalo de variação de φ .

Das FIGURAS 5.2.1 a 5.2.10 e para um mesmo gráfico observa-se que quando ω decresce os diagramas de espalhamento tendem a obedecer a condição de simetria $\sigma(\varphi) = \sigma(-\varphi)$, ou seja, o plasma torna-se menos anisotrópico. A diminuição na assimetria torna-se mais evidente para valores de ângulo de incidência maiores.

Das FIGURAS 5.2.11 a 5.2.20 observa-se que a curva contínua $T = 300(K)$ apresenta assimetria menor que as demais e o formato das curvas é modificado quando a temperatura é variada. Conseqüentemente, as direções de maior fluxo de energia também mudam. Essas conclusões são válidas para polarização $\zeta = \pi$ e $\zeta = \pi/2$, pois, as alterações são apenas no formato das curvas.

$$\theta_i = \pi/6$$

$$\zeta = \pi/2$$

$$T = 300(K)$$

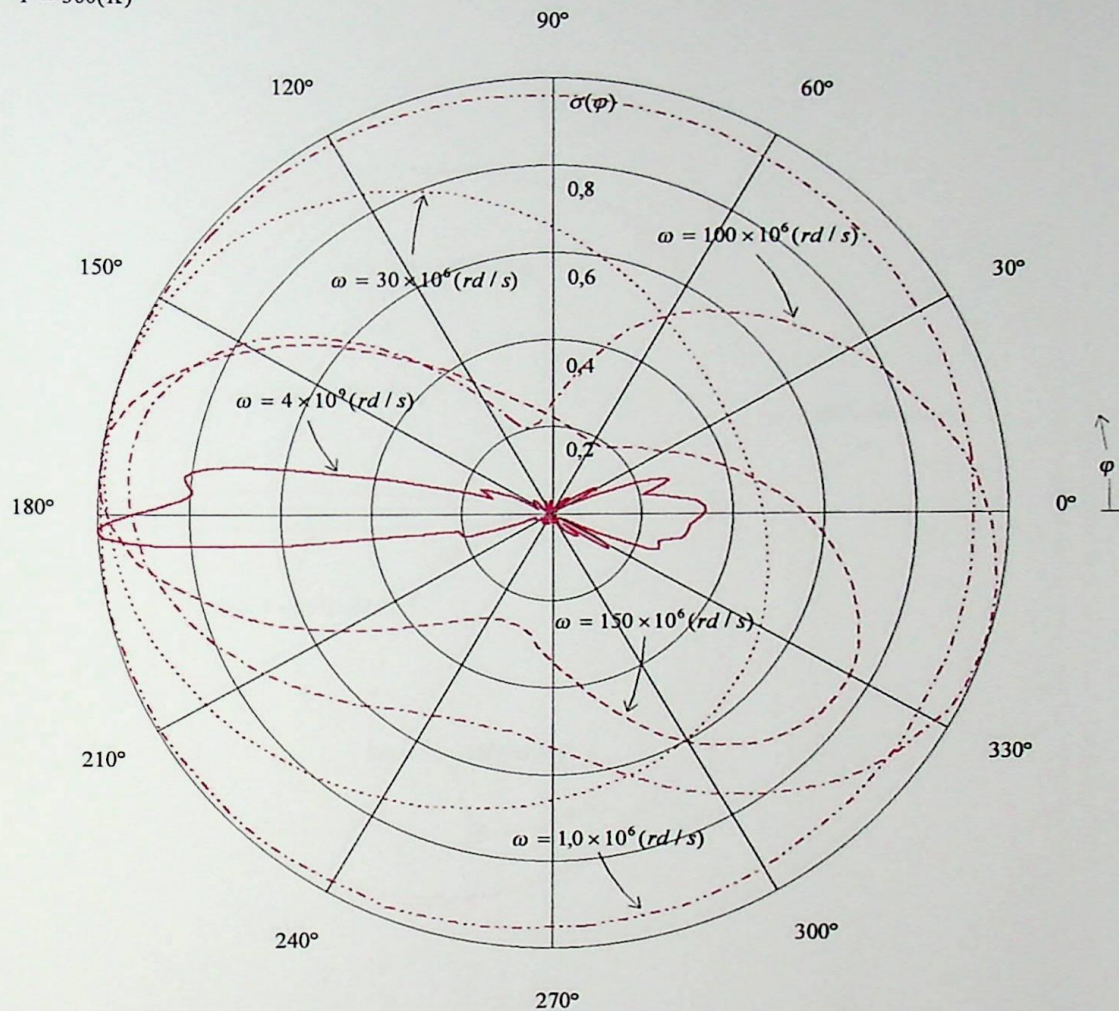


FIGURA 5.2.1 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/6$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd/s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd/s)$, $150 \times 10^6 (rd/s)$, $100 \times 10^6 (rd/s)$, $30 \times 10^6 (rd/s)$ e $1 \times 10^6 (rd/s)$.

$$\theta_i = \pi/6$$

$$\zeta = \pi$$

$$T = 300(K)$$

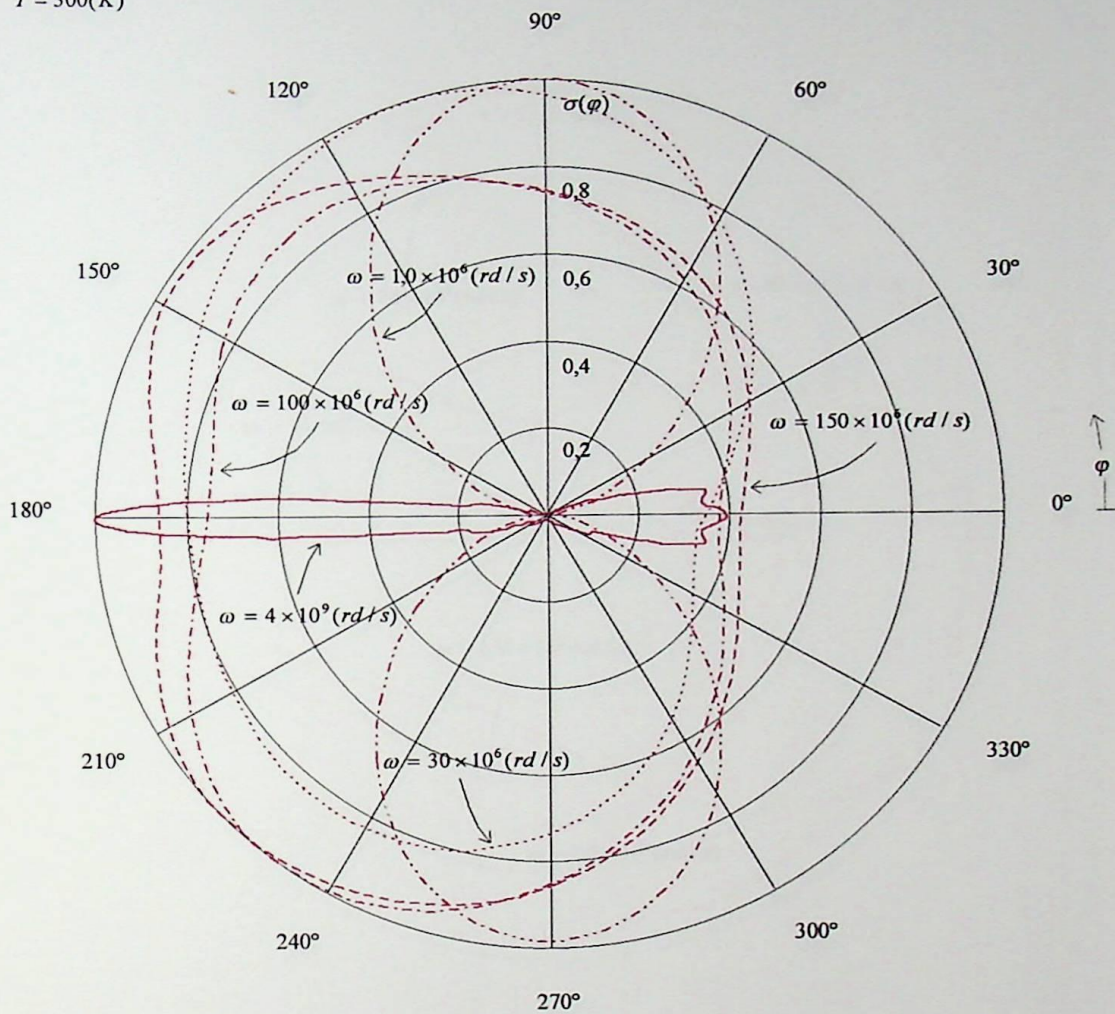


FIGURA 5.2.2 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/6$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd/s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd/s)$, $150 \times 10^6 (rd/s)$, $100 \times 10^6 (rd/s)$, $30 \times 10^6 (rd/s)$ e $1 \times 10^6 (rd/s)$.

$$\theta_i = \pi/5$$

$$\zeta = \pi/2$$

$$T = 300(K)$$

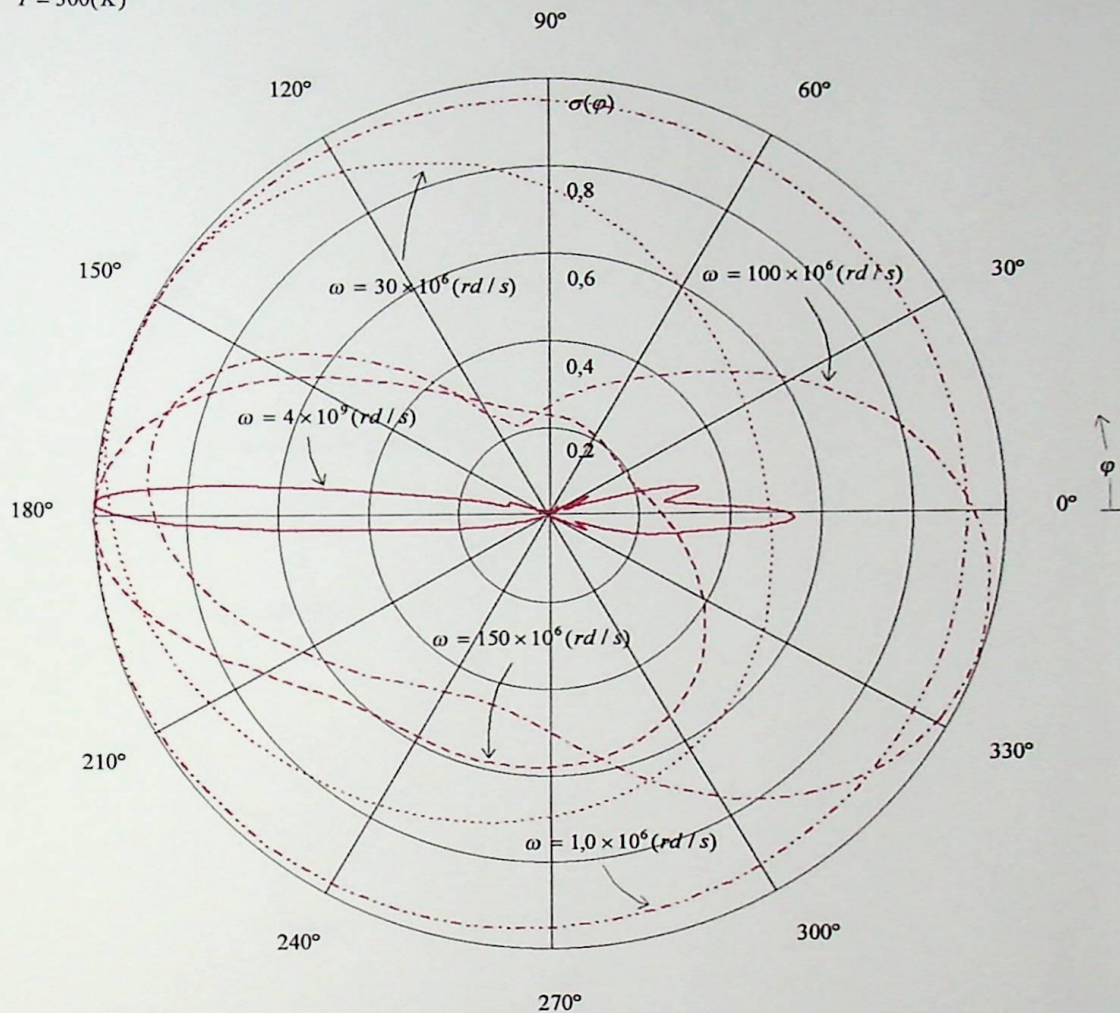


FIGURA 5.2.3 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/5$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd/s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd/s)$, $150 \times 10^6 (rd/s)$, $100 \times 10^6 (rd/s)$, $30 \times 10^6 (rd/s)$ e $1 \times 10^6 (rd/s)$.

$$\theta_i = \pi/5$$

$$\zeta = \pi$$

$$T = 300(K)$$

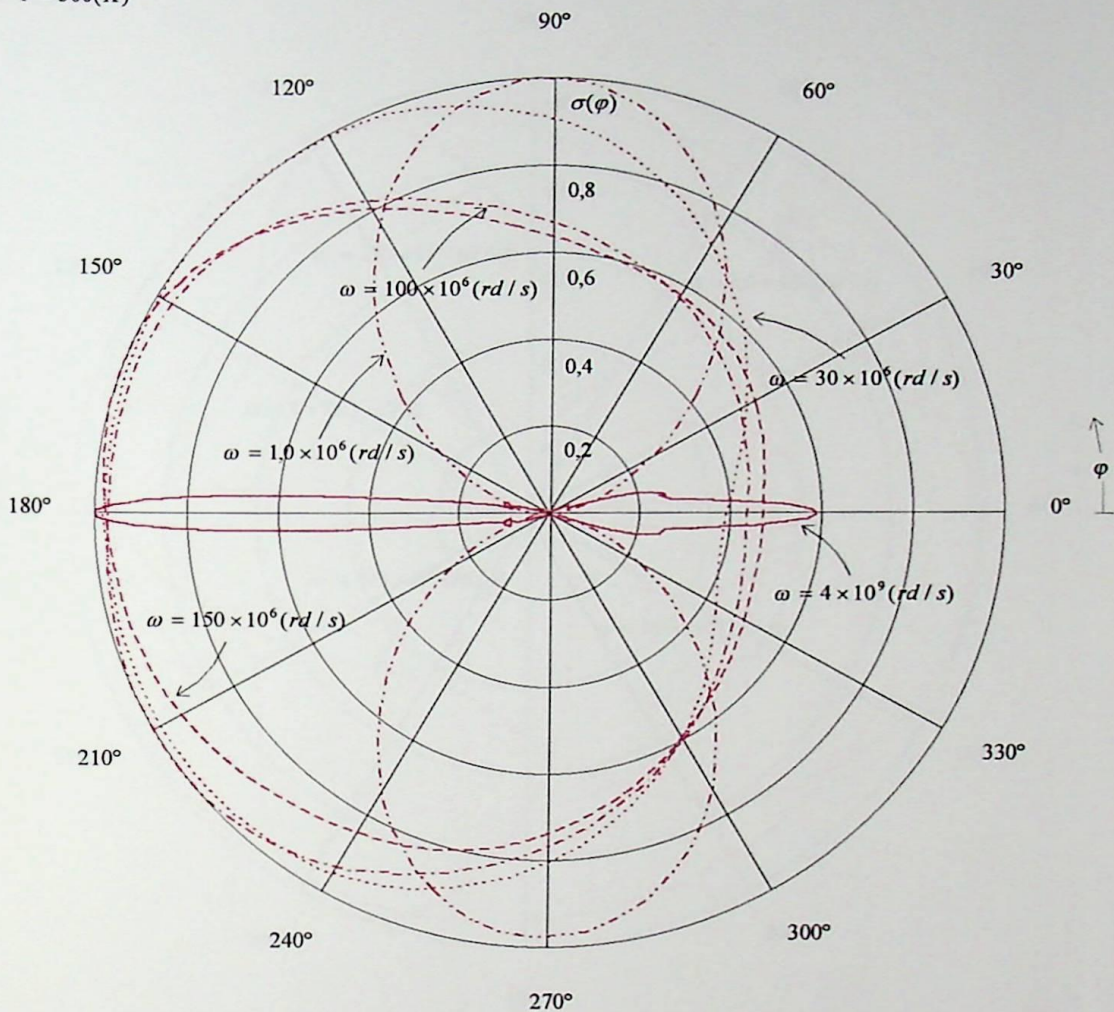


FIGURA 5.2.4 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/5$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$.

$$\theta_i = \pi/4$$

$$\zeta = \pi/2$$

$$T = 300(K)$$

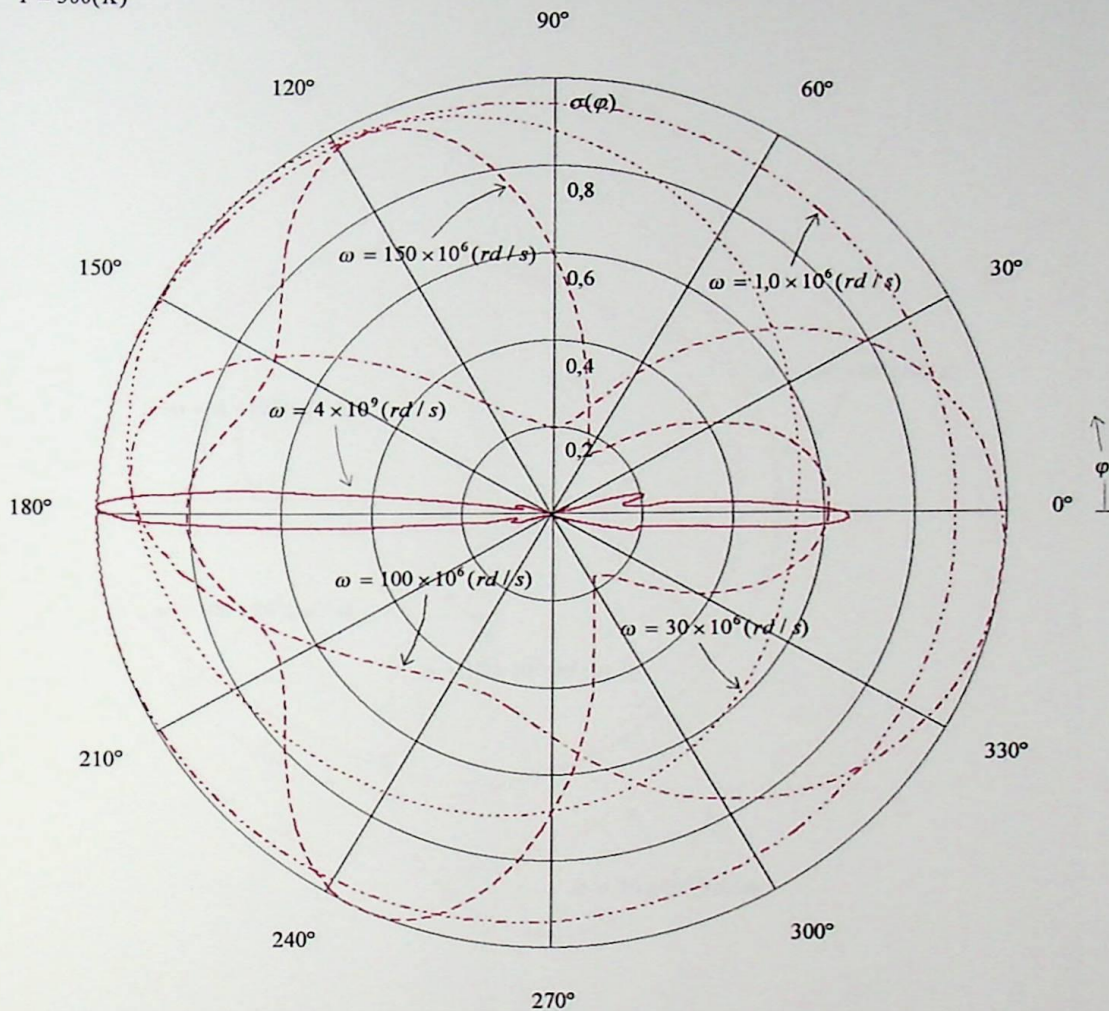


FIGURA 5.2.5 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/4$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd/s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd/s)$, $150 \times 10^6 (rd/s)$, $100 \times 10^6 (rd/s)$, $30 \times 10^6 (rd/s)$ e $1 \times 10^6 (rd/s)$.

$$\theta_i = \pi/4$$

$$\zeta = \pi$$

$$T = 300(K)$$

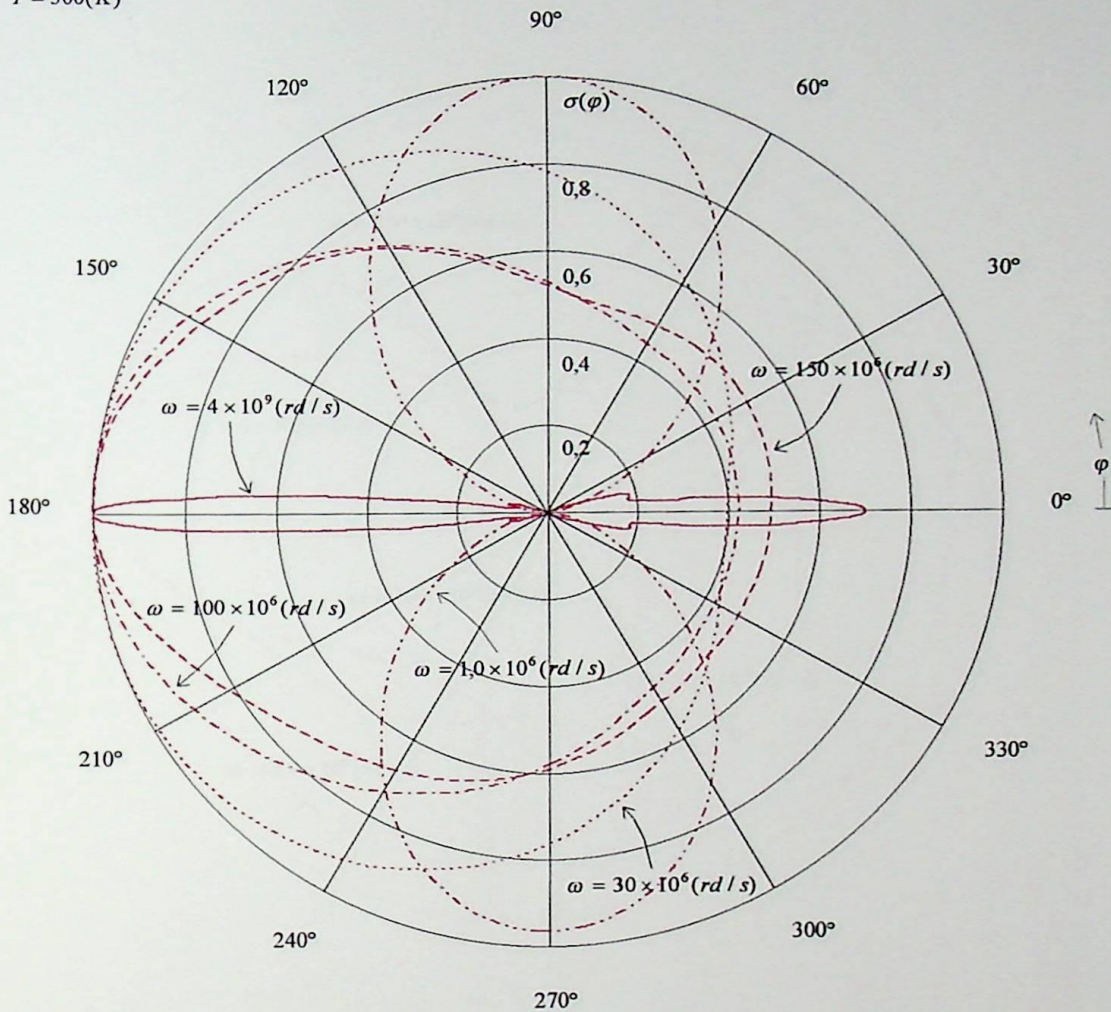


FIGURA 5.2.6 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/4$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$.

$$\theta_i = \pi/3$$

$$\zeta = \pi/2$$

$$T = 300(K)$$

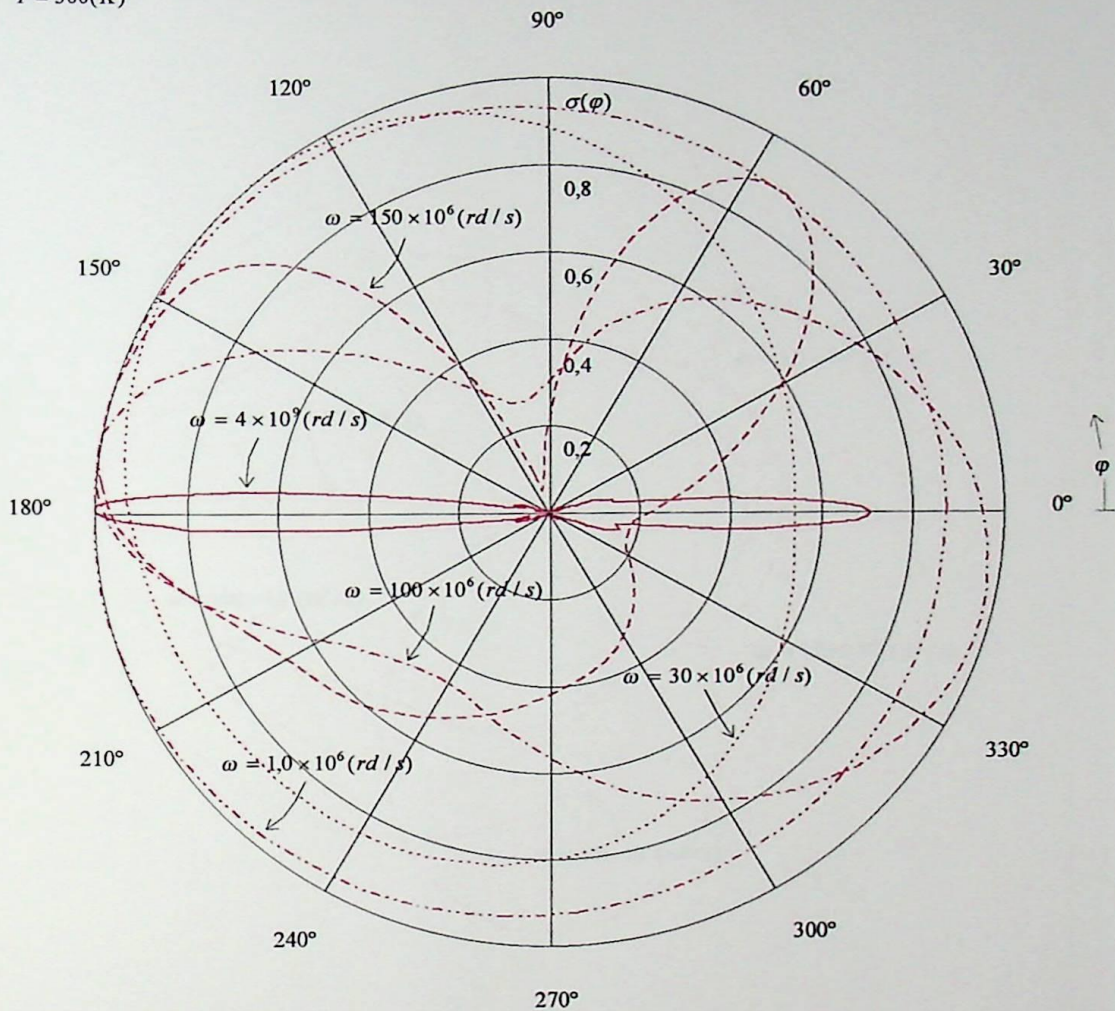


FIGURA 5.2.7: Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/3$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd/s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd/s)$, $150 \times 10^6 (rd/s)$, $100 \times 10^6 (rd/s)$, $30 \times 10^6 (rd/s)$ e $1 \times 10^6 (rd/s)$.

$$\theta_i = \pi/3$$

$$\zeta = \pi$$

$$T = 300(K)$$

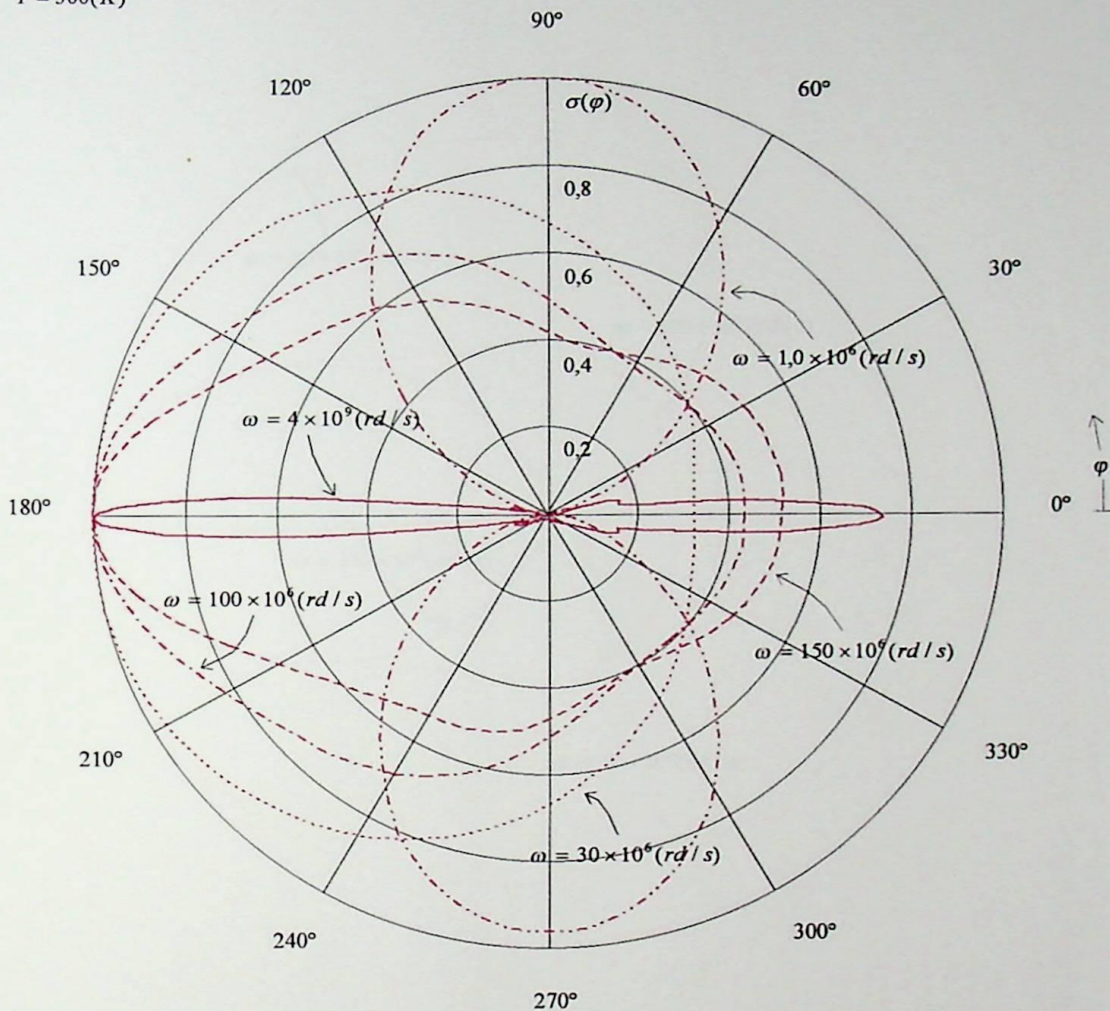


FIGURA 5.2.8 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/3$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd/s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd/s)$, $150 \times 10^6 (rd/s)$, $100 \times 10^6 (rd/s)$, $30 \times 10^6 (rd/s)$ e $1 \times 10^6 (rd/s)$.

$$\theta_i = \pi/2$$

$$\zeta = \pi/2$$

$$T = 300(K)$$

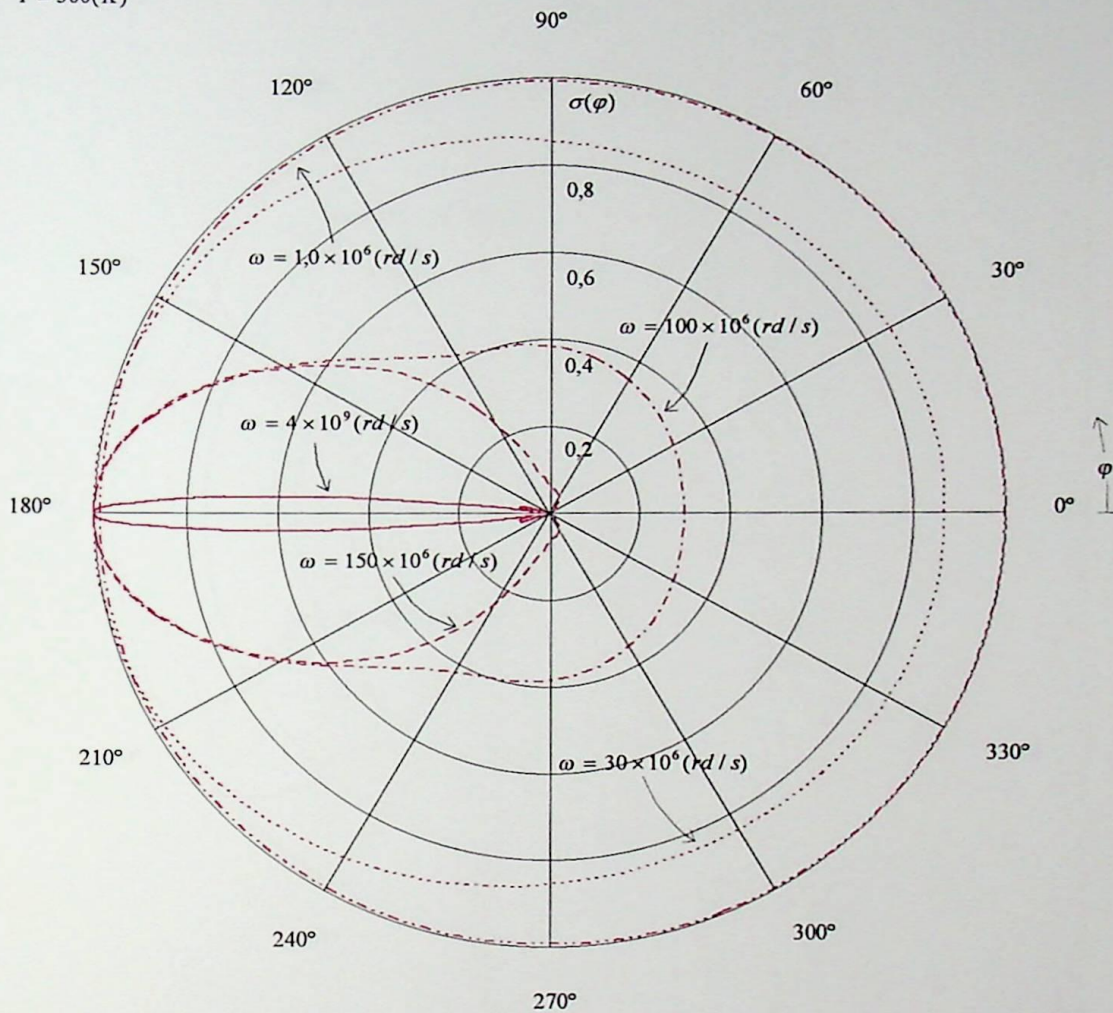


FIGURA 5.2.9 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência normal $\theta_i = \pi/2$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$.

$$\theta_i = \pi/2$$

$$\zeta = \pi$$

$$T = 300(K)$$

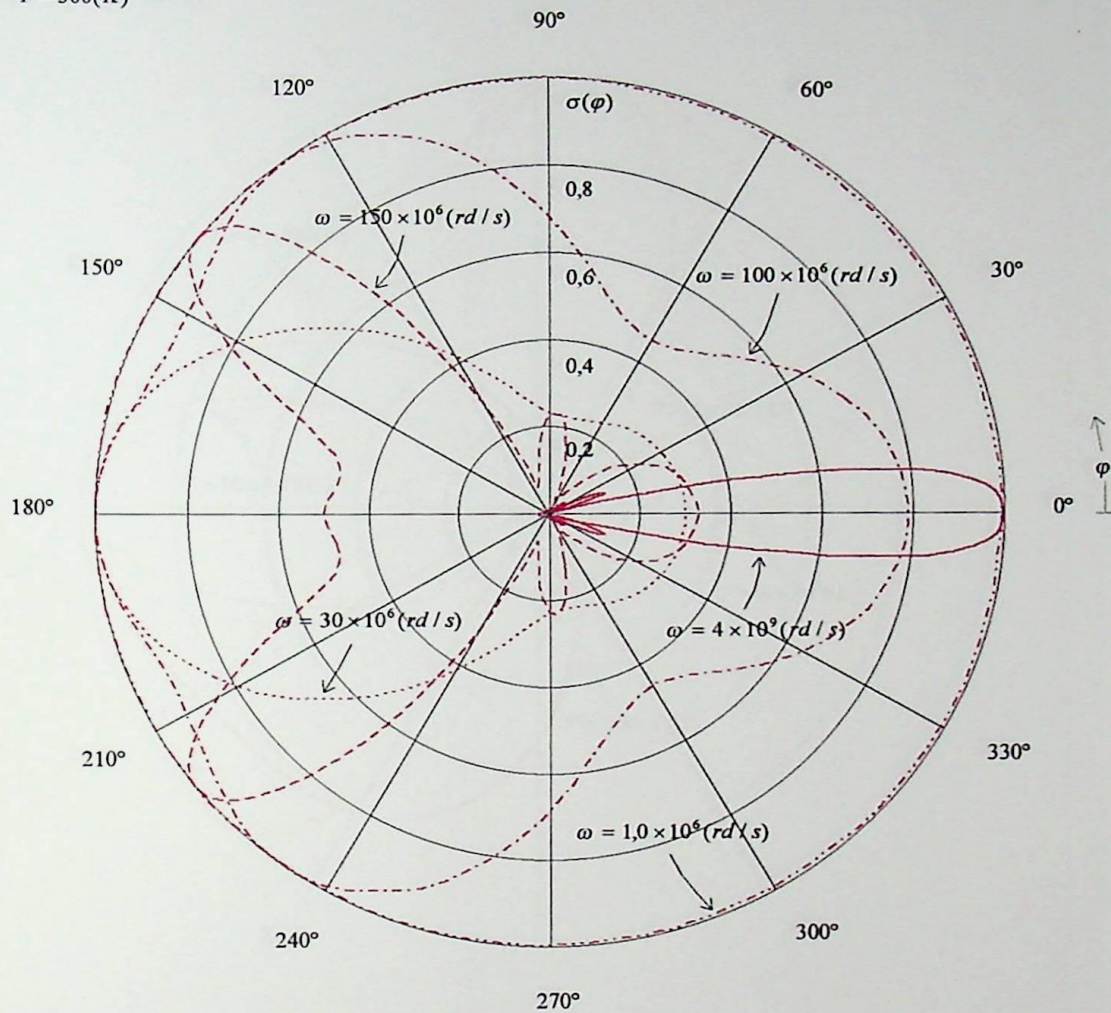


FIGURA 5.2.10 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência normal $\theta_i = \pi/2$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) e $T = 300(K)$. Onde $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$, $\nu = 1,1284 \times 10^6 (s^{-1})$ e $n_e = 4 \times 10^{12} (m^{-3})$. As curvas correspondem a valores de frequência de RF de $4 \times 10^9 (rd / s)$, $150 \times 10^6 (rd / s)$, $100 \times 10^6 (rd / s)$, $30 \times 10^6 (rd / s)$ e $1 \times 10^6 (rd / s)$.

$$\theta_i = \pi/6$$

$$\zeta = \pi/2$$

$$\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$$

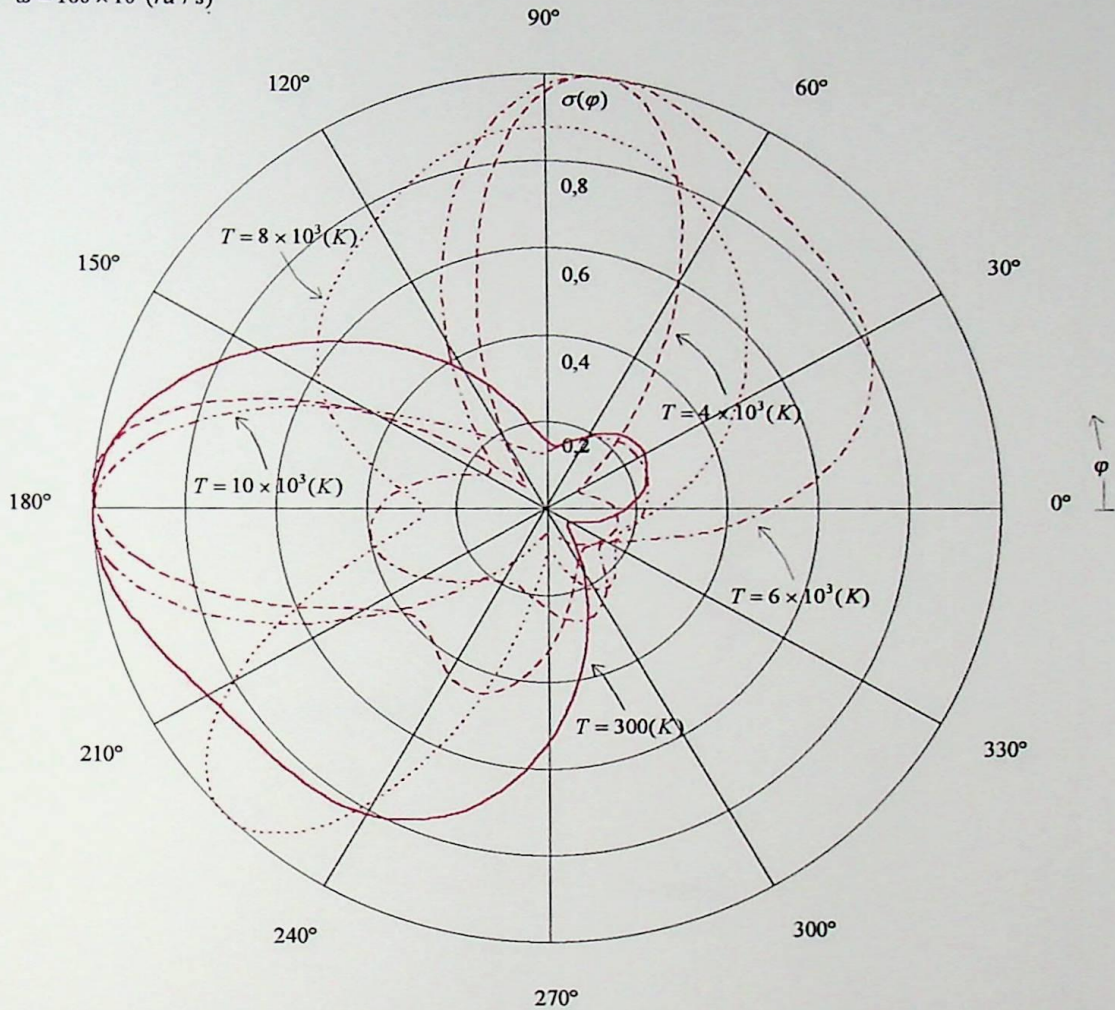


FIGURA 5.2.11 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/6$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM). Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$.

$$\theta_i = \pi/6$$

$$\zeta = \pi$$

$$\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$$

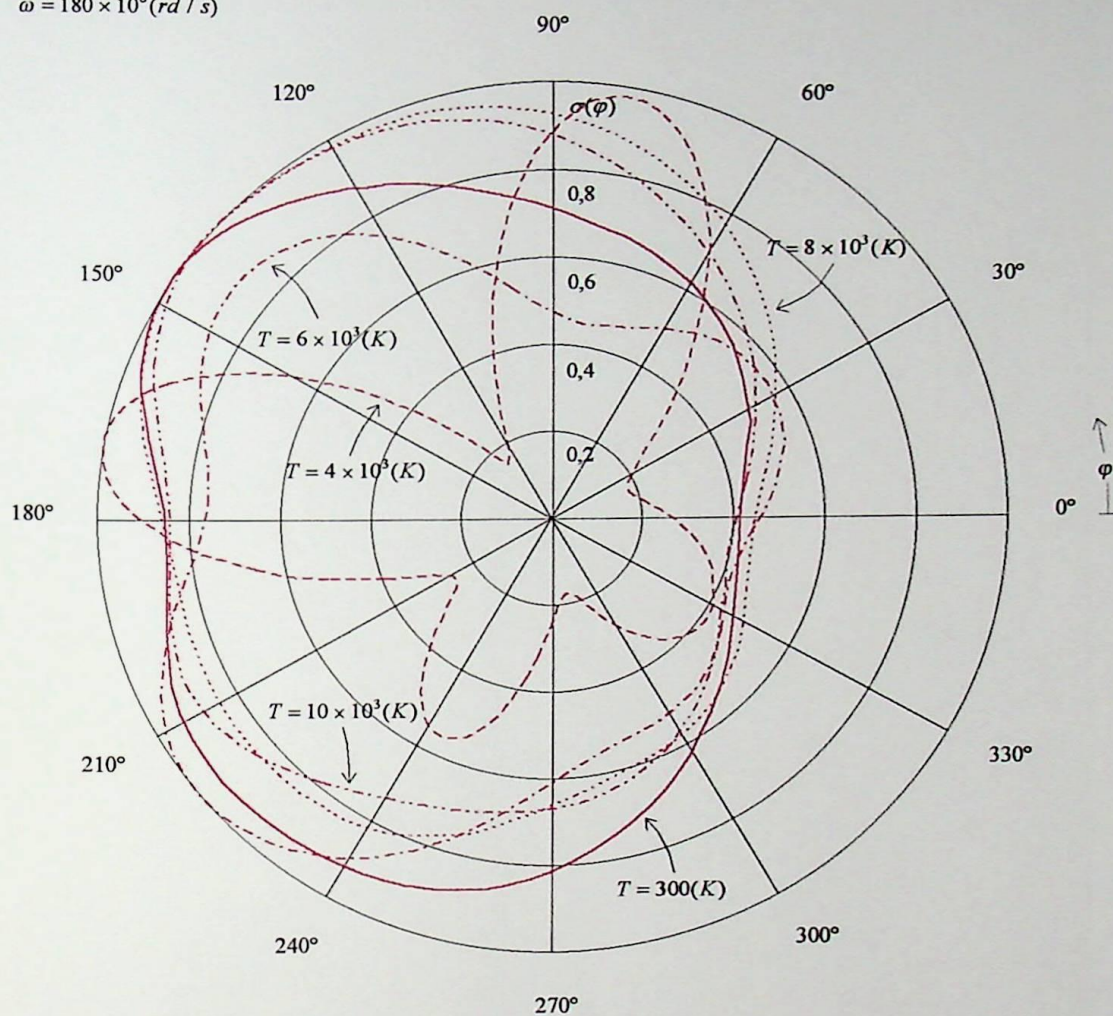


FIGURA 5.2.12 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/6$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$.

$$\theta_i = \pi/5$$

$$\zeta = \pi/2$$

$$\omega = 180 \times 10^6 \text{ (rd / s)}$$

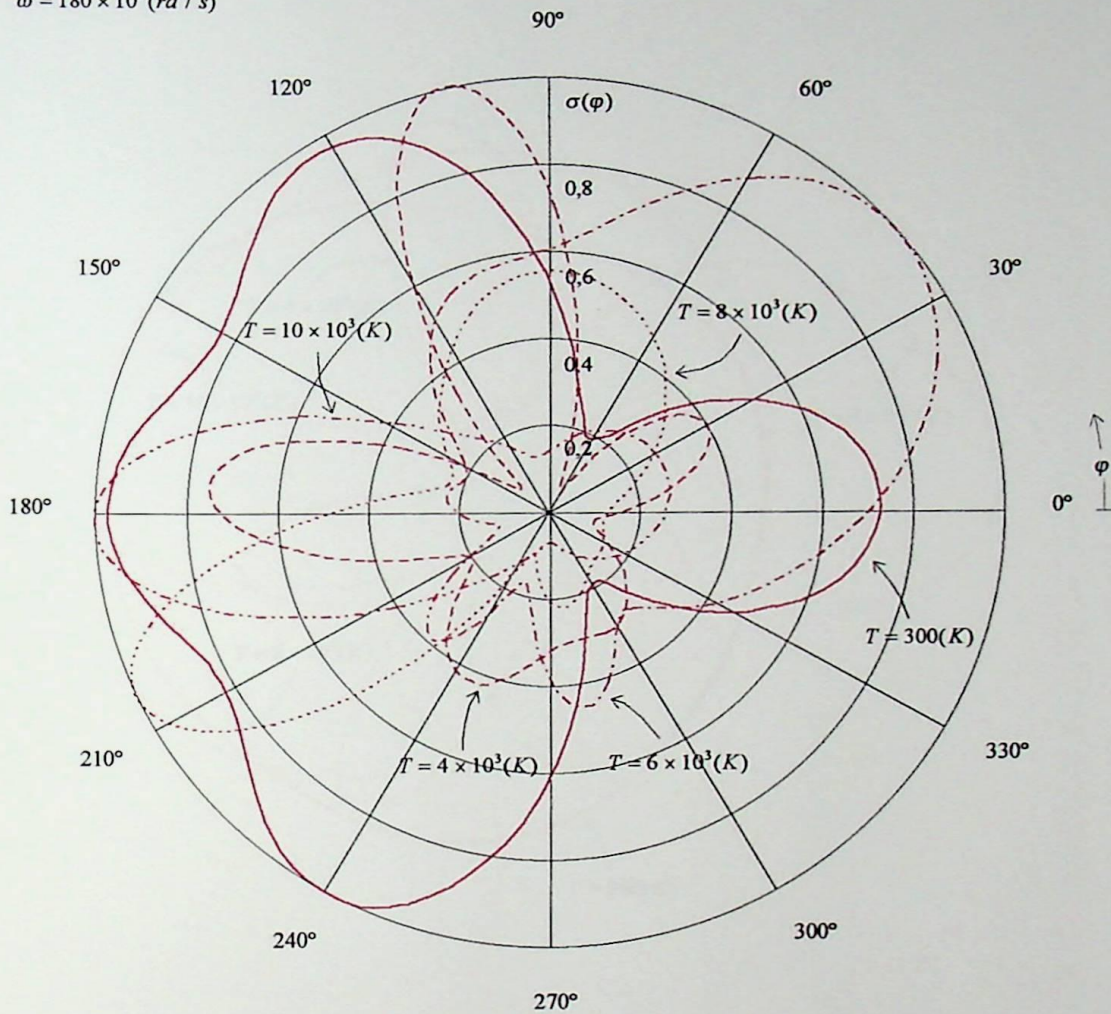


FIGURA 5.2.13 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/5$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 \text{ (rd / s)}$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 \text{ (rd / s)}$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$.

$$\theta_i = \pi/5$$

$$\zeta = \pi$$

$$\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$$

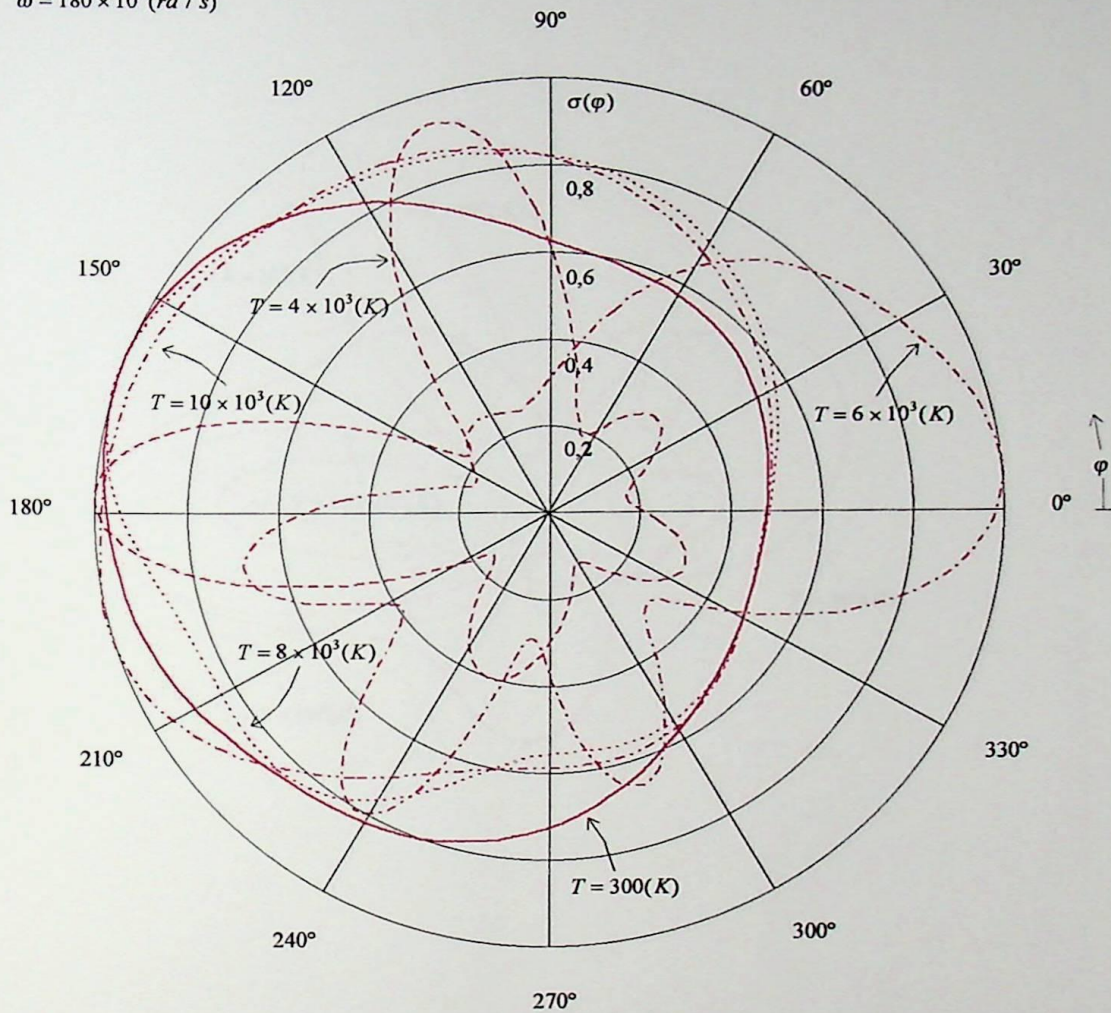


FIGURA 5.2.14 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/5$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$.

$$\theta_i = \pi/4$$

$$\zeta = \pi/2$$

$$\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$$

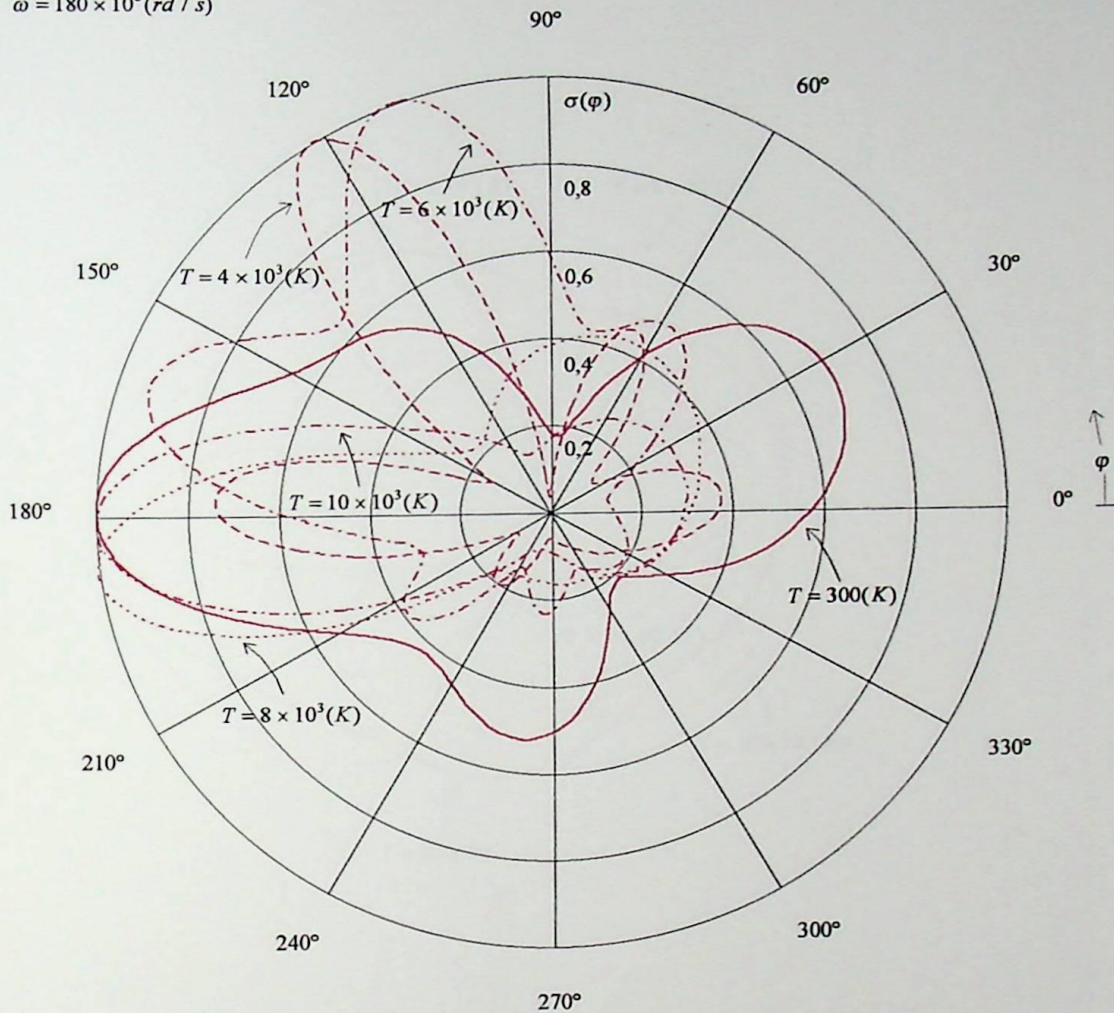


FIGURA 5.2.15 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/4$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$.

$$\theta_i = \pi/4$$

$$\zeta = \pi$$

$$\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$$

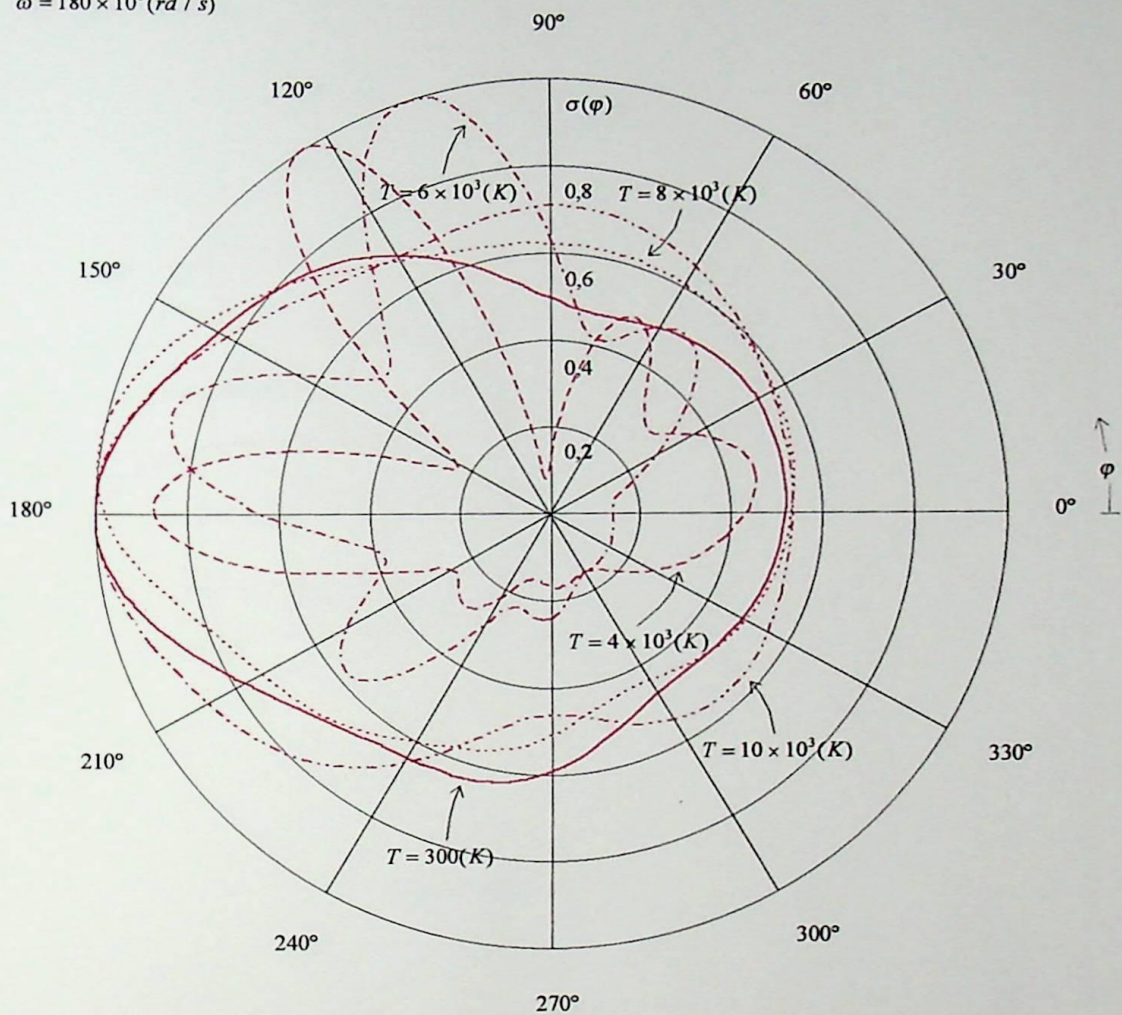


FIGURA 5.2.16 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/4$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE). Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$.

$$\theta_i = \pi/3$$

$$\zeta = \pi/2$$

$$\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$$

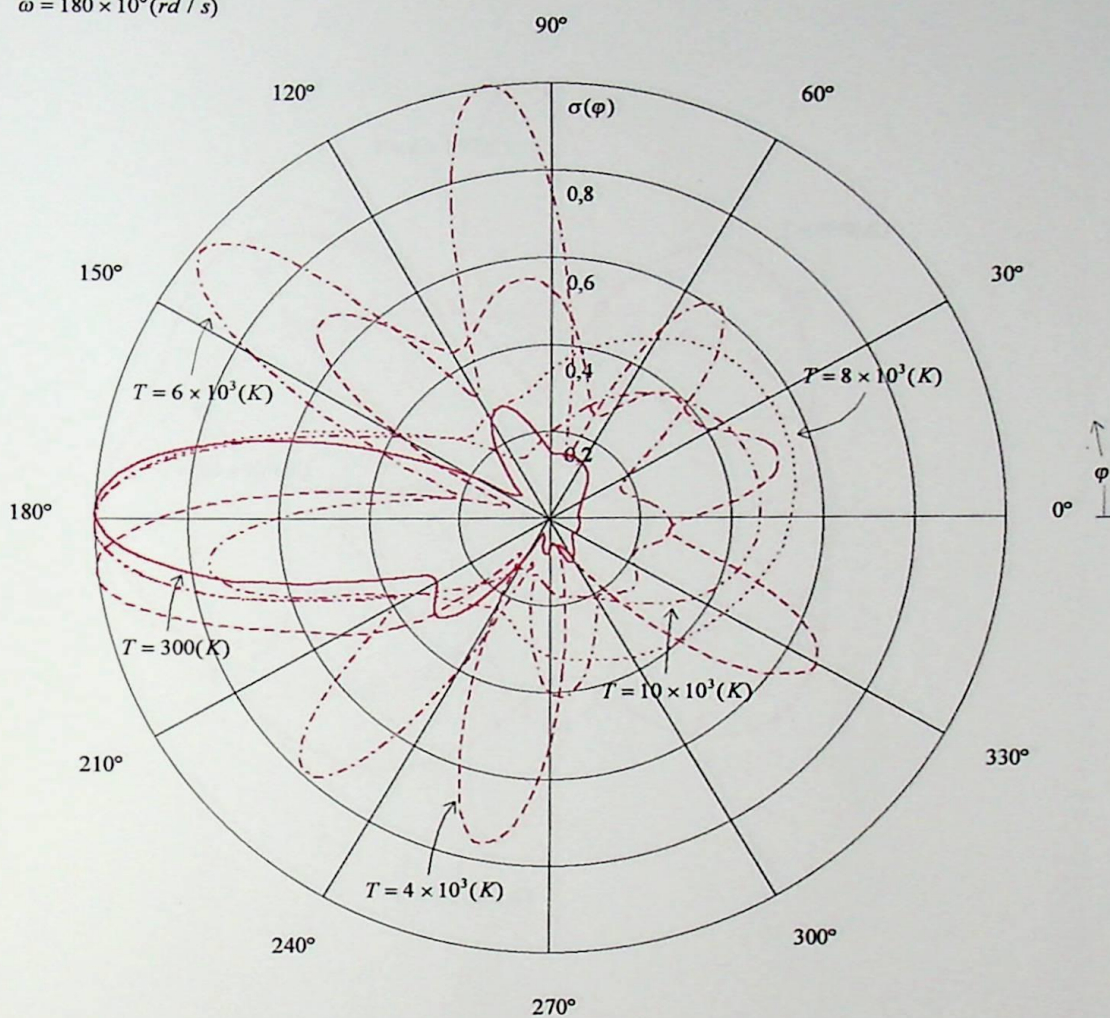


FIGURA 5.2.17: Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/3$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM). Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$.

$$\theta_i = \pi/3$$

$$\zeta = \pi$$

$$\omega = 180 \times 10^6 \text{ (rd / s)}$$

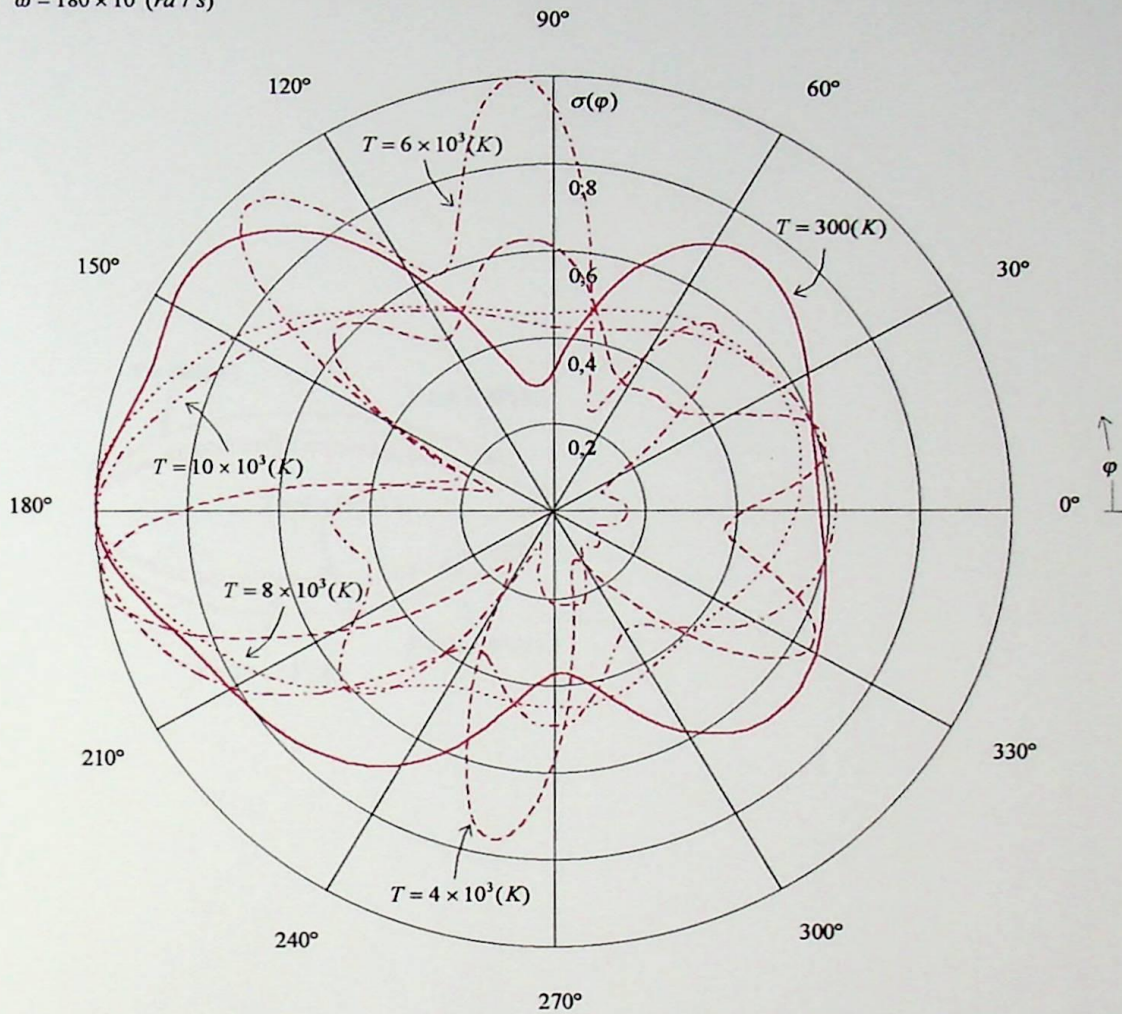


FIGURA 5.2.18 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência oblíqua $\theta_i = \pi/3$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 \text{ (rd / s)}$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 \text{ (rd / s)}$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$.

$$\theta_i = \pi/2$$

$$\zeta = \pi/2$$

$$\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$$

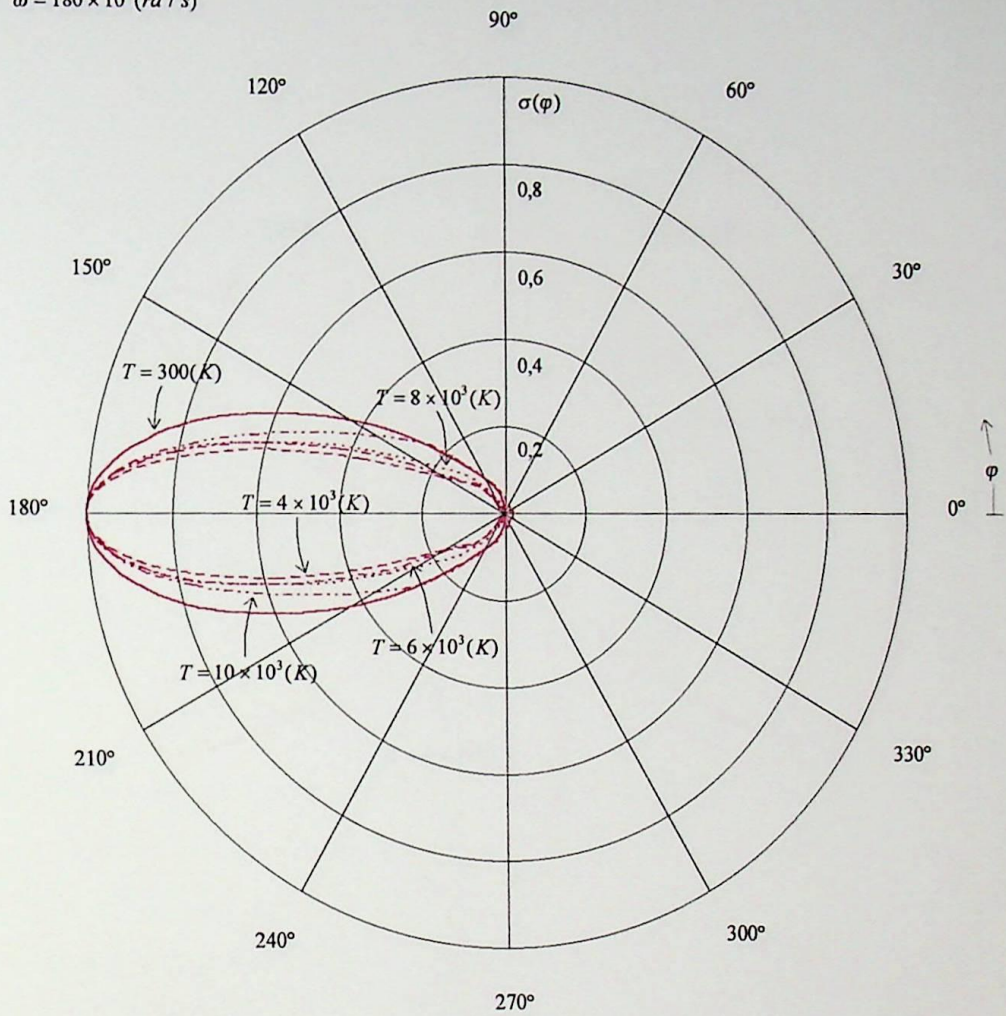


FIGURA 5.2.19: Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência normal $\theta_i = \pi/2$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi/2$ (polarização TM). Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$.

$$\theta_i = \pi/2$$

$$\zeta = \pi$$

$$\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$$

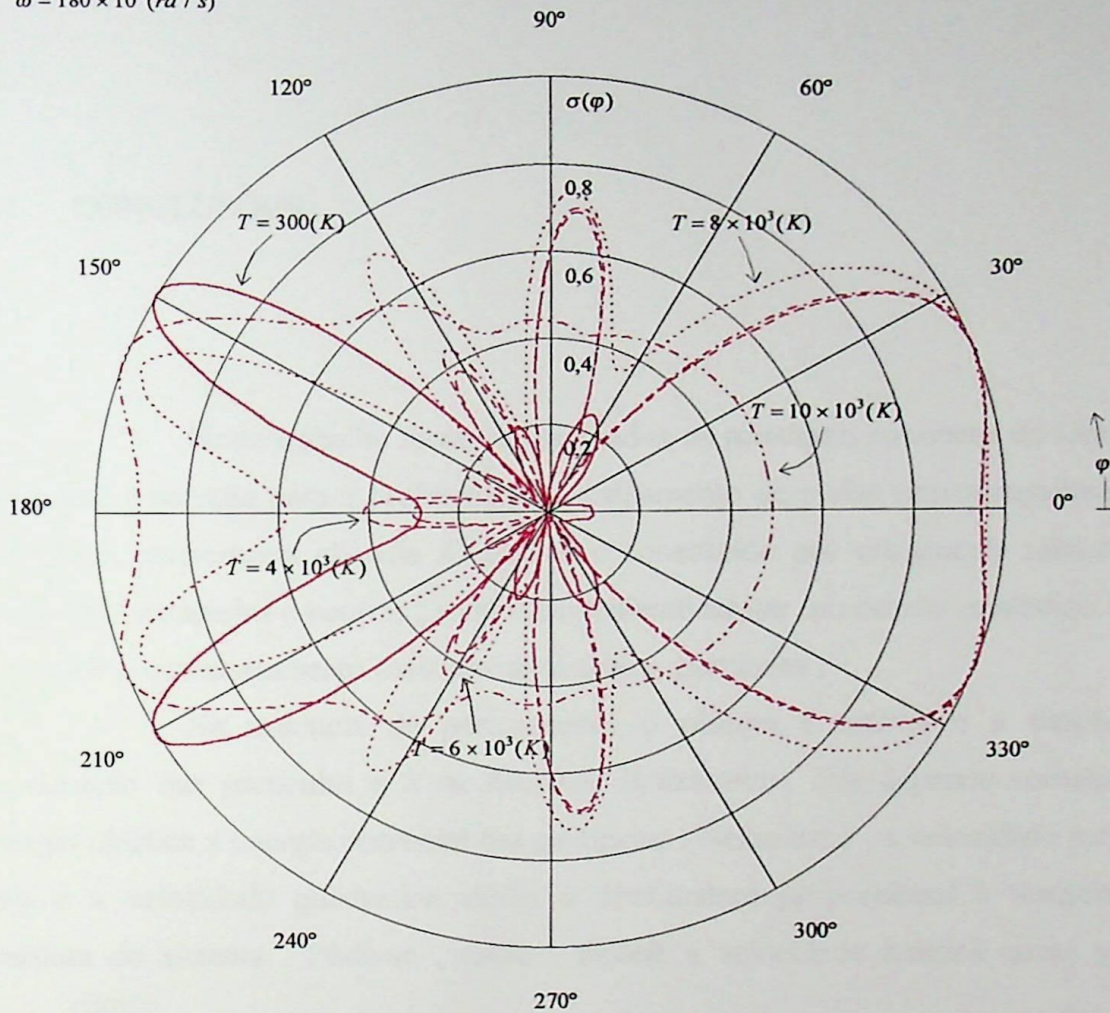


FIGURA 5.2.20 : Seção de espalhamento transversal $\sigma(\varphi)$ para incidência normal $\theta_i = \pi/2$, $\varphi_i = 0$, $N = 18$, $\zeta = \pi$ (polarização TE) . Onde $\omega = 180 \times 10^6 (rd / s)$, $\omega_c = 17,59 \times 10^6 (rd / s)$ e as curvas correspondem a valores de temperatura de $300(K)$, $4 \times 10^3(K)$, $6 \times 10^3(K)$, $8 \times 10^3(K)$, $10 \times 10^3(K)$.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E APLICAÇÕES

6.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados os principais conceitos da teoria de plasmas e a solução para o problema do espalhamento de ondas eletromagnéticas em plasmas a temperatura elevada. O plasma é constituído por um grande número de partículas carregadas e neutras, sendo conveniente adotar um estudo estatístico a fim de definir o comportamento mais provável dessas partículas.

Na ausência de perturbações o plasma é estável e a função de distribuição das partículas é a de *Maxwell-Boltzmann*, que depende somente da energia cinética e energia potencial das partículas. Nesse caso, a velocidade média é nula e a velocidade quadrática média é diretamente proporcional à temperatura absoluta do sistema. Pôde-se, então, definir a velocidade térmica como sendo $v_t = \sqrt{\kappa T/m}$.

Das definições de *parâmetro do plasma* (g) e *raio de Debye* (h), concluiu-se que o plasma deve ser suficiente quente e rarefeito para que a *condição de ionização* ($g \ll 1$) seja satisfeita. Ou seja, o número de partículas dentro do *volume de Debye*, que é uma esfera de raio h , deve ser suficientemente grande. Com isso, pôde-se definir melhor o plasma como sendo uma coleção de partículas positivas e negativas aproximadamente igual em que h , definido por (3.4.13), é muito menor que as dimensões físicas do plasma.

O efeito do campo magnetostático \vec{B}_0 sobre o movimento das partículas é caracterizado pela *freqüência de Larmor* ou *freqüência do ciclotron*, $\omega_c = |e|B_0/m$. Enquanto que o efeito de um campo elétrico, cuja variação no tempo

é do tipo $e^{i\omega t}$, faz com que o plasma vibre com a frequência $\omega_p = \sqrt{n_e e^2 / m \epsilon_0}$, chamada *frequência do plasma*.

Quando o efeito da temperatura é desprezível, o movimento das partículas pode ser completamente descrito pela *equação do movimento*. Contudo, se o efeito da temperatura é considerado as partículas possuem uma função de distribuição f que deve satisfazer, simultaneamente, às equações de *Maxwell* e de *Boltzmann*. Na obtenção da permissividade elétrica do plasma constatou-se que sua natureza tensorial é devido ao produto $\vec{v} \nabla_v f_0(v')$. Se $u \ll 1$ e considerando os efeitos da temperatura de primeira ordem, as equações (3.7.127)-(3.7.129) fornecem uma boa estimativa do tensor permissividade elétrica $\vec{\epsilon}$ do plasma. O efeito das colisões também foram considerados.

No estudo do espalhamento de ondas eletromagnéticas por um plasma cilíndrico de seção transversal circular, envolvido pelo ar, foram determinados os campos incidentes, espalhados e no interior do plasma para uma onda incidente transversal magnética (TM) ou transversal elétrica (TE). Analisou-se os casos de incidência oblíqua e incidência normal. Parte da onda incidente penetra no plasma e é guiada por ele através de múltiplas reflexões. Verificou-se que, em geral, não existem modos puros TE nem TM propagando-se num plasma *anisotrópico*, pois ambos estão acoplados dando origem aos *modos híbridos*. A onda eletromagnética ao penetrar no plasma divide-se em duas novas ondas propagando-se com velocidades diferentes. O acoplamento desaparece no caso de incidência normal ou se o plasma for *isotrópico*.

Se o ângulo de incidência for $\theta'_i = \pi - \theta_i$, as componentes da constante de propagação serão $\gamma_{i,\perp}(\pi - \theta_i) = \gamma_{i,\perp}(\theta_i)$ e $\gamma_{i,z}(\pi - \theta_i) = -\gamma_{i,z}(\theta_i)$. Baseado nessas relações e fazendo a mudança da polarização para $\zeta' = \pi - \zeta$, concluiu-se que: $C_1(\pi - \theta_i, \pi - \zeta) = C_1(\theta_i, \zeta)$, $C_2(\pi - \theta_i, \pi - \zeta) = C_2(\theta_i, \zeta)$, $A_1^s(\pi - \theta_i, \pi - \zeta) = A_1^s(\theta_i, \zeta)$, $A_2^s(\pi - \theta_i, \pi - \zeta) = -A_2^s(\theta_i, \zeta)$. Nesse caso, os campos espalhados e os campos no interior do plasma satisfazem as relações de simetria:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{p,z}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) &= \vec{\mathcal{E}}_{p,z}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) , \\ \vec{\mathcal{H}}_{p,z}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) &= -\vec{\mathcal{H}}_{p,z}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) , \\ \vec{\mathcal{E}}_{p,\perp}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) &= -\vec{\mathcal{E}}_{p,\perp}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) , \\ \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) &= \vec{\mathcal{H}}_{p,\perp}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) , \\ \vec{\mathcal{E}}_{s,z}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) &= \vec{\mathcal{E}}_{s,z}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) , \\ \vec{\mathcal{H}}_{s,z}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) &= -\vec{\mathcal{H}}_{s,z}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) , \\ \vec{\mathcal{E}}_{s,\perp}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) &= -\vec{\mathcal{E}}_{s,\perp}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) , \\ \vec{\mathcal{H}}_{s,\perp}(\rho, \varphi, \theta_i, \zeta) &= \vec{\mathcal{H}}_{s,\perp}(\rho, \varphi, \pi - \theta_i, \pi - \zeta) . \end{aligned}$$

Na análise para os campos distantes , quando $\gamma_{i,\perp} \rho \rightarrow \infty$, verificou-se que os campos espalhados podem ser simplificados na forma :

$$\begin{aligned} \vec{E}_s &= \sqrt{\pi/2} \eta \mathcal{Q}(\rho, z) \{ \hat{\theta}^{ref}(\varphi) g(\varphi) + \hat{\varphi} f(\varphi) \} , \\ \vec{H}_s &= \sqrt{\pi/2} \mathcal{Q}(\rho, z) \{ \hat{\theta}^{ref}(\varphi) f(\varphi) - \hat{\varphi} g(\varphi) \} . \end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^{ref}(\varphi) &= \frac{\hat{\rho} \gamma_{i,z} + \hat{z} \gamma_{i,\perp}}{|\gamma|} = -\hat{\theta}(\theta = \pi - \theta_i, \varphi) , \\ \mathcal{Q}(\rho, z) &= e^{i\gamma_{i,\perp} z} H_0^{(2)}(\gamma_{i,\perp} \rho) , \\ f(\varphi) &= \frac{\sqrt{2/\pi}}{\text{sen} \theta_i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in(\varphi - \varphi_i)} A_2^s , \\ g(\varphi) &= \frac{\sqrt{2/\pi}}{\eta \text{sen} \theta_i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in(\varphi - \varphi_i)} A_1^s . \end{aligned}$$

Deduziu-se que os campos \vec{E}_s e \vec{H}_s são perpendiculares à direção de propagação ou direção de espalhamento dada por $\hat{r}(\theta = \pi - \theta_i, \varphi)$ e que esses

campos propagam-se formando um *cone* , cujo ângulo em relação ao vetor unitário \hat{z} é $\theta = \pi - \theta_i$.

O *retroespalhamento* somente ocorre no caso de incidência normal . Na FIGURA 4.2.1 observa-se que no caso em que $\zeta = 0$, onda incidente TE , a função $f(\varphi)$ é a componente polarizada e $g(\varphi)$ a despolarizada . Quando $\zeta = \pi/2$, onda incidente TM , a função $f(\varphi)$ é a componente despolarizada e $g(\varphi)$ a polarizada . Das *relações de simetria* , quando o ângulo de incidência for $\theta'_i = \pi - \theta_i$, a função $f(\varphi)$ muda de sinal e $g(\varphi)$ permanece a mesma . Se o ângulo de polarização for $\zeta' = \zeta \pm \pi$ é equivalente a multiplicar os campos por (-1) , pois os *coeficientes de espalhamento* A_1^s e A_2^s mudam de sinal . Desta forma , concluiu-se que

$$f(\varphi, \zeta) = -f(\varphi, \zeta \pm \pi) \quad \text{e} \quad g(\varphi, \zeta) = -g(\varphi, \zeta \pm \pi) .$$

Os resultados numéricos obtidos (FIGURAS 5.2.1-5.2.20) mostraram que as curvas apresentam assimetria , isto é , para $0^\circ < \varphi < 180^\circ$ as amplitudes de espalhamento obedecem à relação $\sigma(\varphi) \neq \sigma(-\varphi)$. Isto se verifica devido à anisotropia do plasma na condição $\omega_c \neq 0$. No caso de incidência normal as curvas são simétricas $\sigma(\varphi) = \sigma(-\varphi)$. Também apresentam pontos de máximos e mínimos , sendo necessário um estudo de $\sigma(\varphi)$ durante todo o intervalo de variação de φ .

Das FIGURAS 5.2.1 a 5.2.10 e para um mesmo gráfico observa-se que quando ω decresce os diagramas de espalhamento tendem a obedecer a condição de simetria $\sigma(\varphi) = \sigma(-\varphi)$, ou seja , o plasma torna-se menos anisotrópico . A diminuição na assimetria torna-se mais evidente para valores de ângulo de incidência maiores . Na FIGURA 5.2.9 percebe-se a existência do *retroespalhamento* que , com o aumento da frequência de RF , diminui gradativamente e o plasma torna-se cada vez mais *diretivo* com a energia tendendo a concentrar-se na direção de incidência . Observando as FIGURAS 5.2.11 a 5.2.20 nota-se que a curva contínua $T = 300(K)$ apresenta assimetria menor que as demais e o formato das curvas é modificado quando a temperatura é variada . Conseqüentemente , as direções de maior fluxo de

energia também mudam . Essas conclusões são válidas para polarização $\zeta = \pi$ e $\zeta = \pi/2$, pois as alterações são apenas no formato das curvas .

6.2 APLICAÇÕES

Os gráficos apresentados indicam que o espalhamento depende do ângulo de incidência , da polarização e das freqüências envolvidas . Portanto , este estudo pode ser utilizado a fim de otimizar sistemas de comunicação , de telemetria entre naves espaciais e a estação de radar localizada na Terra e na realização de outras medidas de dados científicos .

Um veículo espacial movendo-se em uma atmosfera planetária é envolvido por um gás altamente ionizado (plasma) à temperatura elevada . Essa ionização persiste durante uma grande parte de seu percurso de vôo , podendo influenciar significativamente nas comunicações e nos sinais de telemetria transmitidos para o veículo , ou provenientes deste , tornando extremamente difícil guiar e controlar tais veículos a partir da Terra por meio de sinais telemetrados , pois o efeito do plasma sobre as comunicações é atenuar o sinal e degradar a performance da antena . Dos gráficos (FIGURA 5.9.1 a FIGURA 5.9.20) , observa-se que , sob determinadas condições , essa atenuação pode ser suficiente para provocar um *blackout* , exceto em freqüências elevadas ($\omega \gg \omega_p$) . As mesmas dificuldades aplicam-se à informação transmitida por sondas espaciais .

Outra aplicação importante pode ser percebida pela análise do caso de incidência normal , FIGURA 5.2.9 , onde nota-se que na condição $\omega \cong \omega_p$ o plasma é praticamente *transparente* e o *retroespalhamento* é pequeno . Assim , como $\omega_p = \sqrt{n_e e^2 / m \epsilon_0}$, é possível estimar a densidade de partículas n_e para as diferentes camadas que constituem a *ionosfera* .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] PROCEEDINGS OF THE IRE. New York, IRE, v.49, n.12, dez. 1961. Mensal. p.1751-1766, 1825-1830, 1846-1889.
- [2] SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PLASMA ESPACIAL, 1, set. 1987, São José dos Campos. *Resumo dos Trabalhos...* São José dos Campos, Ministério da Ciência e Tecnologia/Instituto de Pesquisas Espaciais, 1987. p.33-41, 73, 91-93, 101.
- [3] HARRINGTON, Roger F. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. New York, McGraw-Hill, 1961. 470p.
- [4] JOHNSON, Curtis C. *Field and Wave Electrodynamics*. New York, McGraw-Hill, 1965. 447p.
- [5] UMAN, Martin A. *Introduction to Plasma Physics*. New York, McGraw - Hill, 1964. 226p.
- [6] MOWER, Lyman. Conductivity of a Warm Plasma. *Physical Review*. v.116, n.1, p.16-18, oct. 1959. Mensal.
- [7] DRUMMOND, J. E. Basic Microwave Properties of Hot Magnetoplasmas. *Physical Review*. v.110, n.2, p.293-306, apr. 1958. Mensal.
- [8] BERNSTEIN, Ira B. Waves in a Plasma in a Magnetic Field. *Physical Review*. v.109, n.1, p.10-21, jan. 1958. Mensal.
- [9] ALLIS, W. P.; BUCHSBAUM, S. J.; BERS, A. *Waves in Anisotropic Plasmas*. Massachusetts, Massachusetts Institute of Technology, 1963. 280p.
- [10] SWANSON, D. G. *Plasmas Waves*. San Diego, CA, Academic Press, 1989. 422p.
- [11] IRVING, J.; MULLINEUX, N. *Mathematics in Physics and Engineering*. New York, Academic Press, 1959. 883p.
- [12] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, Irene A. *Handbook of Mathematical Functions*. New York, Dover Publications, 1965. 1046p.
- [13] AKHIEZER, A. I.; AKHIEZER, I. A.; POLOVIN, R. V.; SITENKO, A. G.; STEPANOV, K. N. *Plasma Electrodynamics*. Tradução por D. ter Haar. New York, Pergamon Press, 1975. 2v. v.1. Linear Theory. (International series of monographs in natural philosophy, v.68).

- [14] HSU, Hwei P. *Análise de Fourier*. Tradução por Paulo Ivo de Queiroz. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1972. 274p. Tradução de: Fourier Analysis.
- [15] KREYSZIG, Erwin. *Matemática Superior*. Tradução por Carlos Campos de Oliveira. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1980. 4v. Tradução de: Advanced Engineering Mathematics.
- [16] BRACHYNSKI, M. P.; JOHNSTON, T. W.; SHKAROFSKY, I. P. Electromagnetic Properties of High-Temperature Air. *Proceedings of the IRE*. New York, v.48, p.347-356, mar. 1960. Mensal.
- [17] MONZON, J. Cesar. Three-Dimensional Scattering by an Infinite Homogeneous Anisotropic Circular Cylinder: A Spectral Approach. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. v. AP-35, n.6, p.670-682, june 1987. Mensal.
- [18] KERKER, Milton. *The Scattering of Light and Other Electromagnetic Radiation*. New York, Academic Press, 1969. 667p. (Series of monographs in physical chemistry, v.16).

APÊNDICE

SISTEMA DE UNIDADES M.K.S. RACIONALIZADO

Neste trabalho é usado o *sistema de unidades mks racionalizado* por apresentar a vantagem de que o fator 4π não aparece nas equações de Maxwell, embora apareça em certas outras equações. O sistema racionalizado apresenta menos problemas para o engenheiro eletrônico e para o engenheiro eletricista do que para os que se ocupam de outras disciplinas de engenharia, pois todas as unidades elétricas práticas foram há muito tempo incorporadas a esse sistema.

No quadro seguinte estão alistadas as unidades usadas neste trabalho. Na primeira coluna é dado o nome da dimensão ou grandeza. Na segunda coluna (Descrição) a dimensão é descrita em termos das dimensões fundamentais (massa, comprimento, tempo e carga elétrica) ou outras dimensões secundárias. A terceira coluna lista a unidade mks racionalizada correspondente à dimensão. A última coluna indica as dimensões fundamentais por meio dos símbolos M (massa), L (comprimento), T (tempo) e Q (carga elétrica).

Nome da dimensão ou grandeza	Descrição	Unidades mks	Dimensões fundamentais
Comprimento		metro(m)	L
Massa		quilograma(kg)	M
Tempo		segundo(s)	T
Frequência	$\frac{\text{ciclos}}{\text{tempo}}$	hertz(Hz)	$\frac{1}{T}$
Frequência angular	$2\pi \times \text{frequência}$	$\frac{\text{radiano}}{\text{segundo}} (rd/s)$	$\frac{1}{T}$
Área		metro ² (m ²)	L^2
Volume		metro ³ (m ³)	L^3
Velocidade	$\frac{\text{comprimento}}{\text{tempo}}$	$\frac{\text{metro}}{\text{segundo}} (m/s)$	$\frac{L}{T}$
Aceleração	$\frac{\text{velocidade}}{\text{tempo}} = \frac{\text{comprimento}}{\text{tempo}^2}$	$\frac{\text{metro}}{\text{segundo}^2} (m/s^2)$	$\frac{L}{T^2}$
Força	massa×aceleração	newton(N)	$\frac{ML}{T^2}$
Energia ou trabalho	força×comprimento = potência×tempo	joule(J)	$\frac{ML^2}{T^2}$
Densidade de energia	$\frac{\text{energia}}{\text{volume}}$	$\frac{\text{joule}}{\text{metro}^3} (J/m^3)$	$\frac{M}{LT^2}$
Potência	$\frac{\text{energia}}{\text{tempo}}$	watt(W)	$\frac{ML^2}{T^3}$
Carga elétrica	corrente×tempo ou $\int (\text{corrente})dt$	coulomb(C)	Q
Fluxo elétrico	$\iint \vec{D} \cdot \hat{n} ds$	coulombs(C)	Q
Corrente elétrica	$\frac{\text{carga}}{\text{tempo}}$	Ampère(A)	$\frac{Q}{T}$
Densidade de corrente elétrica	$\frac{\text{corrente}}{\text{área}}$	$\frac{\text{ampère}}{\text{metro}^2} (A/m^2)$	$\frac{Q}{TL^2}$
Densidade linear de corrente elétrica	$\frac{\text{corrente}}{\text{comprimento}}$	$\frac{\text{ampère}}{\text{metro}} (A/m)$	$\frac{Q}{TL}$
Densidade superficial de carga	$\frac{\text{carga}}{\text{área}}$	$\frac{\text{coulomb}}{\text{metro}^2} (C/m^2)$	$\frac{Q}{L^2}$
Densidade volumétrica de carga elétrica	$\frac{\text{carga}}{\text{volume}}$	$\frac{\text{coulomb}}{\text{metro}^3} (C/m^3)$	$\frac{Q}{L^3}$
Deslocamento elétrico ou densidade de fluxo elétrico	$\frac{\text{carga}}{\text{área}}$	$\frac{\text{coulomb}}{\text{metro}^2} (C/m^2)$	$\frac{Q}{L^2}$
Potencial elétrico (escalar)	$\frac{\text{trabalho}}{\text{carga}}$	volt(V)	$\frac{ML^2}{T^2Q}$
Fem	$\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$	volt(V)	$\frac{ML^2}{T^2Q}$
Campo elétrico	$\frac{\text{potencial}}{\text{comprimento}} = \text{força} / \text{carga}$	$\frac{\text{volt}}{\text{metro}} (V/m)$	$\frac{ML}{T^2Q}$
Constante dielétrica ou permissividade	$\frac{\text{capacitância}}{\text{comprimento}}$	$\frac{\text{farad}}{\text{metro}} (F/m)$	$\frac{T^2Q^2}{ML}$

<i>Nome da dimensão ou grandeza</i>	<i>Descrição</i>	<i>Unidades mks</i>	<i>Dimensões fundamentais</i>
Capacitância	$\frac{\text{carga}}{\text{potencial}}$	farad(<i>F</i>)	$\frac{T^2 Q^2}{ML^2}$
Impedância	$\frac{\text{potencial}}{\text{corrente}}$	ohm(Ω)	$\frac{ML^2}{TQ^2}$
Resistência específica ou resistividade	resistência \times comprimento	ohm.metro($\Omega.m$)	$\frac{ML^3}{TQ^2}$
Condutividade	$\frac{1}{\text{resistividade}}$	$\frac{\text{siemens}}{\text{metro}}$ (<i>S/m</i>)	$\frac{TQ^2}{ML^3}$
Fluxo magnético	$\iint \vec{B} \cdot \hat{n} ds$	weber(<i>Wb</i>)	$\frac{ML^2}{TQ}$
Densidade de fluxo magnético	$\frac{\text{fluxo magnético}}{\text{área}}$	$\frac{\text{weber}}{\text{metro}^2}$ (<i>Wb/m²</i>)	$\frac{M}{TQ}$
Fmm	$\int \vec{H} \cdot d\vec{l}$	ampère(<i>A</i>)	$\frac{Q}{T}$
Intensidade de campo magnético	$\frac{\text{fmm}}{\text{comprimento}}$	$\frac{\text{ampère}}{\text{metro}}$ (<i>A/m</i>)	$\frac{Q}{TL}$
Permeabilidade magnética ou capacidade indutiva magnética	$\frac{\text{indutância}}{\text{comprimento}}$	$\frac{\text{henry}}{\text{metro}}$ (<i>H/m</i>)	$\frac{ML}{Q^2}$
Indutância	$\frac{\text{fluxo magnético}}{\text{corrente}}$	henry(<i>H</i>)	$\frac{ML^2}{Q^2}$
Potencial vetorial auxiliar	corrente elétrica \times permeabilidade	$\frac{\text{weber}}{\text{metro}}$ (<i>Wb/m</i>)	$\frac{ML}{TQ}$
Vetor de Poynting ou densidade superficial de potência	$\frac{\text{potência}}{\text{área}}$	$\frac{\text{watts}}{\text{metro}^2}$ (<i>W/m²</i>)	$\frac{M}{T^3}$

<i>Nome da dimensão ou grandeza</i>	<i>Descrição</i>	<i>Unidades mks</i>	<i>Dimensões fundamentais</i>
Capacitância	$\frac{\text{carga}}{\text{potencial}}$	farad(<i>F</i>)	$\frac{T^2 Q^2}{ML^2}$
Impedância	$\frac{\text{potencial}}{\text{corrente}}$	ohm(Ω)	$\frac{ML^2}{TQ^2}$
Resistência específica ou resistividade	resistência \times comprimento	ohm.metro($\Omega.m$)	$\frac{ML^3}{TQ^2}$
Condutividade	$\frac{1}{\text{resistividade}}$	$\frac{\text{siemens}}{\text{metro}}$ (<i>S/m</i>)	$\frac{TQ^2}{ML^3}$
Fluxo magnético	$\iint \vec{B} \cdot \hat{n} ds$	weber(<i>Wb</i>)	$\frac{ML^2}{TQ}$
Densidade de fluxo magnético	$\frac{\text{fluxo magnético}}{\text{área}}$	$\frac{\text{weber}}{\text{metro}^2}$ (<i>Wb/m²</i>)	$\frac{M}{TQ}$
Fmm	$\int \vec{H} \cdot d\vec{l}$	ampère(<i>A</i>)	$\frac{Q}{T}$
Intensidade de campo magnético	$\frac{\text{fmm}}{\text{comprimento}}$	$\frac{\text{ampère}}{\text{metro}}$ (<i>A/m</i>)	$\frac{Q}{TL}$
Permeabilidade magnética ou capacidade indutiva magnética	$\frac{\text{indutância}}{\text{comprimento}}$	$\frac{\text{henry}}{\text{metro}}$ (<i>H/m</i>)	$\frac{ML}{Q^2}$
Indutância	$\frac{\text{fluxo magnético}}{\text{corrente}}$	henry(<i>H</i>)	$\frac{ML^2}{Q^2}$
Potencial vetorial auxiliar	corrente elétrica \times permeabilidade	$\frac{\text{weber}}{\text{metro}}$ (<i>Wb/m</i>)	$\frac{ML}{TQ}$
Vetor de Poynting ou densidade superficial de potência	$\frac{\text{potência}}{\text{área}}$	$\frac{\text{watts}}{\text{metro}^2}$ (<i>W/m²</i>)	$\frac{M}{T^3}$

DATA	05/06/1997
PROC.	
ED.	PPG
LIV.	
RS	Associação

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200898



NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA