

TESE

920

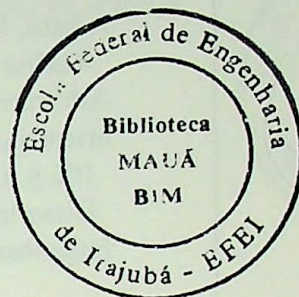
CLASS. 519.6:536.24

CUTTER. A 844 c

TOMBO. 920

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



ANÁLISE TEÓRICA DE CONVECÇÃO NATURAL EM  
GEOMETRIAS AXISSIMÉTRICAS ARBITRÁRIAS

MARCELO ASSATO

ORIENTADOR : PROF. DR. GENÉSIO JOSÉ MENON

Dissertação Apresentada ao Curso de Pós-graduação em Engenharia Mecânica como Parte dos  
Requisitos para a Obtenção do Título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica na Área  
de Concentração em Conversão de Energia

ITAJUBÁ - M.G.

1997

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA MAUÁ - EFEI

519.6:536.24

A844a

Assato, Marcelo

Análise Teórica de Convecção Natural em Geometrias Axissimétricas Arbitrárias: aplicações em engenharia mecânica / por Marcelo Assato; orientado por Genésio José Menon.-- Itajubá, MG: [s.n.], 1997.

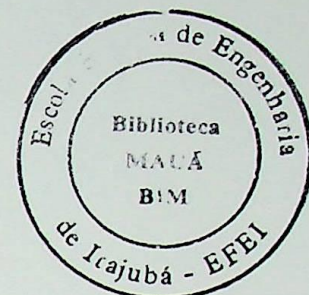
106 p.:il.

Dissertação ( mestrado em Engenharia Mecânica ) - Escola Federal de Engenharia de Itajubá.

1- Transferência de calor. 2 - Convecção Natural. 3- Geometria Axissimétrica. 4- Método de Elementos Finitos.I. Menon, Genésio José, orient. II. Escola Federal de Engenharia de Itajubá. III. Título.

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



ANÁLISE TEÓRICA DE CONVECÇÃO NATURAL EM  
GEOMETRIAS AXISSIMÉTRICAS ARBITRÁRIAS

MARCELO ASSATO

Membros da Banca Examinadora

- 1 - Prof. Dr. Maurício Araujo Zanardi ( FEG )
- 2 - Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho ( EFEI )
- 3 - Prof. Dr. Rogério José da Silva ( EFEI )
- 4 - Prof. Dr. Genésio José Menon ( Orientador - EFEI )

ITAJUBÁ - M.G.

1997

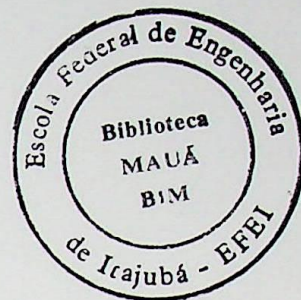


## AGRADECIMENTOS

Expresso os meus sinceros agradecimentos ao Professor Doutor Genésio José Menon pela orientação, compreensão e dedicação prestadas no decorrer deste trabalho.

Estendo os meus agradecimentos a todos os professores e funcionários da EFEI que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Ao CNPq que me concedeu a bolsa de mestrado durante todo o decorrer do curso, os meus agradecimentos.



Aos meus pais  
Júlio e Nair

Aos meus irmãos

Aos meus amigos



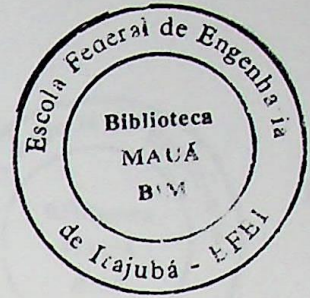
## RESUMO

O propósito deste trabalho é realizar estudos de problemas de transferência de calor por convecção natural no interior de geometrias axissimétricas. O equacionamento é desenvolvido para o regime permanente e não permanente, considerando escoamento bidimensional.

Utiliza-se o método de elementos finitos para resolver as equações de conservação. São determinadas as distribuições da função corrente, temperatura adimensional, vorticidade e o número de Nusselt local e médio em função dos parâmetros térmicos e geométricos.

Com o objetivo de validação do programa computacional desenvolvido, são realizados testes para a cavidade anular de dois cilindros verticais concêntricos. Em seguida são apresentados os resultados para duas situações: cavidade semi-esférica denominada de caso 1; cavidade anular de duas esferas concêntricas denominada de caso 2.

Palavras - chaves :    1- Transferência de Calor                      2- Convecção Natural  
   3- Geometria Axissimétrica                      4- Método de Elementos Finitos



## ABSTRACT

The aim of this work deals with the study of heat transfer by natural convection within cavities of axisymmetrical shapes. The analysis is performed for both the steady and the unsteady state, by considering two-dimensional flow.

The finite element method is used for the solution of the conservation equations, in order to find the local and average Nusselt number together with the distributions of the stream function, dimensionless temperature and vorticity, as function of the thermal and geometrical parameters.

For the validation of the computer program, various tests are carried out for an annular cavity between two concentric vertical cylinders. Finally, the numerical model is applied for both a hemispherical cavity (case one) and a cavity between two concentric spheres (case two).

Key Words:

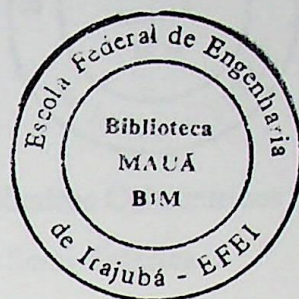
1- Heat Transfer

2- Natural Convection

3- Numerical Methods

4- Finite Element Method

# CONTEÚDO



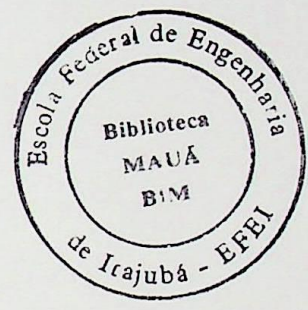
	Página
RESUMO	i
ABSTRACT	ii
CONTEÚDO	iii
SIMBOLOGIA	vi
ÍNDICE DE TABELAS	x
ÍNDICE DE FIGURAS	xiv
CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO	
1.1 - Generalidades	1
1.2 - Revisão da Literatura	4
1.3 - Objetivos do Presente Trabalho	8
1.4 - Delineamento do Presente Trabalho	9
CAPÍTULO 2: FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	
2.1 - Análise Teórica da Convecção Natural	10
2.2 - Adimensionalização das Equações	11
2.3 - Número de Nusselt Local e Médio	16
CAPÍTULO 3: APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	
3.1 - Forma Geral para as Equações de Conservação	17
3.2 - Método de Elementos Finitos para Geometria Axissimétrica	18
3.3 - Equação da Função Corrente na Forma Matricial	21
3.3.1 - Desenvolvimento da matriz $[K_\psi]^e$	22
3.3.2 - Desenvolvimento da matriz $\{F_\psi\}^e$	23
3.4 - Equação da Temperatura Adimensional na Forma Matricial	25
3.4.1 - Desenvolvimento da matriz $[K_\theta]^e$	26
3.4.2 - Desenvolvimento da matriz $\{F_\theta\}^e$	26
3.5 - Equação da Vorticidade na Forma Matricial	28
3.5.1 - Desenvolvimento da matriz $[K_\omega]^e$	28

3.5.2 - Desenvolvimento da matriz $\{ F_{\omega} \}^e$	29
3.6 - Algoritmo do Programa Computacional	32
<b>CAPÍTULO 4: RESULTADOS</b>	
4.1 - Introdução	39
4.2 - Comparação de Resultados para a Cavidade de Cilindros Concêntricos	39
4.3 - Resultados do Presente Trabalho para a Cavidade Semi-Esférica	46
4.4 - Resultados do Presente Trabalho para a Cavidade Anular Esférica	62
<b>CAPÍTULO 5: CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	
5.1 - Conclusões	82
5.2 - Contribuições do Presente Trabalho	84
5.3 - Recomendações para Trabalhos Futuros	85
<b>APÊNDICE A: DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES PARA O CÁLCULO DA VORTICIDADE NO CONTORNO</b>	
A.1 - Vorticidade no Contorno Considerando Aproximação de Segunda Ordem	86
A.2 - Vorticidade no Contorno Considerando Aproximação de Terceira Ordem	88
<b>APÊNDICE B: NÚMERO DE NUSSOLT LOCAL E MÉDIO</b>	
B.1 - Introdução	90
B.2 - Número de Nusselt Local e Médio	92
<b>APÊNDICE C: MÉTODO DE GALERKIN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL EM REGIME NÃO PERMANENTE</b>	
C.1 - Introdução	94
C.2 - Método de Galerkin	94
C.3 - Aproximação do Termo $\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial\tau}$	98
C.4 - Desenvolvimento da Matriz Capacitância $[ C ]^e$	100
<b>APÊNDICE D: ESTUDO DA VORTICIDADE NO CONTORNO SOBRE O NÚMERO DE NUSSOLT</b>	



D.1 - Introdução	102
D.2 - Comparações entre as duas equações da vorticidade no contorno	102

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	104
----------------------------	-----

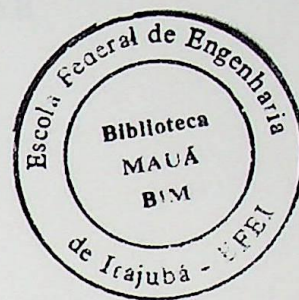


# SIMBOLOGIA

## CARACTERES LATINOS

Símbolo	Designação	Página
a	= coeficiente	20
A	= razão de aspecto = $H/D$	4
b	= coeficiente	20
$[B]^e$	= matriz das derivadas parciais das funções de forma para o elemento	97
c	= coeficiente	20
$[C]$	= matriz capacitância global	98
$[C]^e$	= matriz capacitância do elemento	97
$C_p$	= calor específico a pressão constante	10
D	= dimensão característica	11
$[D]$	= matriz condutibilidade térmica	97
dA	= área elementar	22
$dS_1$	= área elementar sobre a superfície $S_1$	90
dV	= volume elementar	22
e	= elemento	18
E	= número total de elementos do domínio	98
$\{F\}$	= vetor força global	98
$\{F\}^e$	= vetor força do elemento	98
g	= aceleração gravitacional	10
Gr	= número de Grashof = $g\beta(T_h - T_o)D^3/\nu^2$	13
h	= coeficiente médio de transferência de calor por convecção	90
H	= altura da geometria	40
$h_x$	= coeficiente local de transferência de calor por convecção	90
K	= condutibilidade térmica do fluido	10
$[K]$	= matriz rigidez global	98
$[K]^e$	= matriz rigidez para o elemento	98
MR	= número de intervalos da malha na direção R	39
MX	= número de intervalos da malha na direção X	39

$n$	= direção normal à superfície	11
$N$	= função de forma	20
$[N^e]$	= matriz função de forma para o elemento	20
$Nu$	= número de Nusselt médio = $hD/K$	5
$Nu_C$	= número de Nusselt médio na superfície fria $S_2$	39
$Nu_H$	= número de Nusselt médio na superfície quente $S_1$	39
$Nu_L$	= número de Nusselt local	8
$Nu_1$	= número de Nusselt na superfície quente $S_1$	92
$p^*$	= pressão	10
$P$	= pressão adimensional	13
$Pr$	= número de Prandtl = $\nu/\alpha$	13
$q$	= fluxo de calor por convecção	11
$q^e$	= fluxo de calor no elemento	96
$q_n$	= fluxo de calor normal à superfície de contorno	90
$q_r$	= fluxo de calor na direção radial $r$	91
$q_x$	= fluxo de calor na direção vertical $x$	91
$Q_1$	= fluxo de calor por convecção natural na superfície quente $S_1$	93
$Q_\phi$	= função especificada	17
$Q_\psi$	= função especificada da função corrente	14
$Q_\theta$	= função especificada da temperatura adimensional	14
$Q_\omega$	= função especificada da vorticidade	14
$r$	= coordenada radial	1
$R$	= coordenada adimensional radial	11
$\bar{R}$	= raio médio das coordenadas radiais = $(R_i + R_j + R_k) / 3$	23
$[R^e]$	= matriz residual no elemento	94
$[R]$	= matriz residual global	98
$Ra$	= número de Rayleigh = $Gr.Pr$	4
$RE$	= raio externo	39
$RI$	= raio interno	39
$S_1$	= superfície isotérmica quente	1
$S_2$	= superfície isotérmica fria	1
$S_3$	= superfície isolada termicamente	1
$t$	= tempo	10



T	= temperatura	10
$T_c$	= temperatura da superfície $S_2$	1
$T_h$	= temperatura da superfície $S_1$	1
$T_o$	= temperatura de referência = $(T_h + T_c) / 2$	10
u	= velocidade do fluido na direção vertical x	10
U	= velocidade adimensional do fluido na direção X	11
v	= velocidade do fluido na direção radial r	10
V	= velocidade adimensional do fluido na direção R	11
x	= coordenada axial vertical	1
X	= coordenada adimensional axial vertical	11

## CARACTERES GREGOS

Símbolo	Designação	Página
$\alpha$	= difusibilidade térmica do fluido	10
$\beta$	= coeficiente de expansão volumétrica do fluido	10
$\delta$	= pequena distância do contorno	15
$\Delta$	= área do elemento triangular	20
$\Delta\tau$	= incremento de tempo adimensional	98
$\lambda$	= parâmetro da equação ( 3.1 ) = 1 ou $1/Pr$	94
$\kappa$	= razão de raios = $RE/RI$	4
$\pi$	= pi ( 3,14159265... )	90
$\rho$	= massa específica do fluido	10
$\tau$	= tempo adimensional	11
$\theta$	= temperatura adimensional	8
$\{\theta\}$	= matriz global da temperatura adimensional	32
$\{\theta\}^e$	= matriz temperatura adimensional do elemento	25
$\phi$	= função escalar	17
$\phi_o (R,X)$	= função especificada no contorno	94
$\{\Phi\}^e$	= matriz função escalar $\phi$ do elemento	20
$\nu$	= viscosidade cinemática do fluido	10
$\omega$	= vorticidade	8
$\{\omega\}$	= matriz global da vorticidade	32

$\{\omega\}^e$	= matriz vorticidade do elemento	28
$\Omega$	= domínio	1
$\psi$	= função corrente	8
$\{\psi\}$	= matriz global da função corrente	32
$\{\psi\}^e$	= matriz função corrente do elemento	21
$\psi_0$	= função corrente a uma distância $\delta$ do contorno	15

## ÍNDICES

Símbolo	Designação	Página
e	= elemento	18
i	= ponto nodal i	18
j	= ponto nodal j	18
k	= ponto nodal k	18
novo	= indica o valor que está sendo calculado	100
T	= transposta	22
velho	= indica o valor já calculado	100
w	= parede	11

# ÍNDICE DE FIGURAS

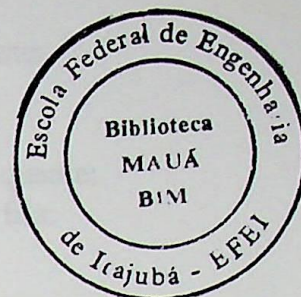
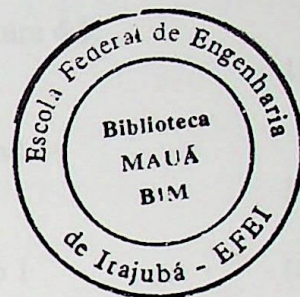


Figura	Designação	Página
1.1	Geometria axissimétrica analisada ( Caso 1 )	2
1.2	Geometria axissimétrica analisada ( Caso 2 )	2
1.3	Seção da geometria axissimétrica analisada ( Caso 1 )	3
1.4	Seção da geometria axissimétrica analisada ( Caso 2 )	3
2.1a	Geometria axissimétrica arbitrária	12
2.1b	Domínio computacional e condições de contorno	12
3.1	Domínio dividido em elementos triangulares axissimétricos	19
3.2	Elemento triangular axissimétrico no plano R - X; função de interpolação linear	19
3.3	Fluxograma do programa computacional	34
4.1	Forma tridimensional dos cilindros concêntricos verticais	40
4.2	Cavidade anular e as condições de contorno	40
4.3	Malha (MR x MX) utilizada para a cavidade anular; (a) malha (23 x 23 ); (b) malha (23 x 46 )	41
4.4	Influência do número de elementos e da razão de raios no número de Nusselt médio na superfície quente $Nu_H$ ; (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	42
4.5	Tempo de processamento em segundos/iteração versus o número de elementos	44
4.6	Cavidade semi-esférica e as condições de contorno	47
4.7	Malhas utilizadas, (a) $\kappa = 2,0$ ; NE = 450 elementos; (b) $\kappa = 3,0$ ; NE = 378; (c) $\kappa = 4,0$ ; NE = 378 elementos	48
4.8a	Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 1; $\kappa = 2,0$	49
4.8b	Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 1; $\kappa = 3,0$	49

4.8c	Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 1; $\kappa = 4,0$	49
4.9	(a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para $Ra = 10^4$ e $10^5$ ; $\kappa = 2,0$	51
4.10	(a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para $Ra = 10^4$ e $10^5$ ; $\kappa = 3,0$	52
4.11	(a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para $Ra = 10^4$ e $10^5$ ; $\kappa = 4,0$	53
4.12	Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para $Pr = 0,70$ ; $\kappa = 2,0$ ; (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	54
4.13	Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para $Pr = 0,70$ ; $\kappa = 3,0$ ; (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	55
4.14	Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para $Pr = 0,70$ ; $\kappa = 4,0$ ; (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	56
4.15	Número de Nusselt médio na superfície quente versus o número de Rayleigh para o Caso 1	57
4.16	Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para $\kappa = 2,0$ . (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	59
4.17	Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para $\kappa = 3,0$ . (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	60
4.18	Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para $\kappa = 4,0$ . (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	61
4.19	Cavidade anular esférica e as condições de contorno	63
4.20	Malhas utilizadas com 2208 elementos; (a) $\kappa = 1,5$ ; (b) $\kappa = 2,0$ ; (c) $\kappa = 2,5$ ; (d) $\kappa = 3,0$	64
4.21a	Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 2; $\kappa = 1,5$	65
4.21b	Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 2; $\kappa = 2,0$	65

4.21c	Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 2; $\kappa = 2,5$	66
4.21d	Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 2; $\kappa = 3,0$	66
4.22	(a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para $Ra = 10^4$ e $10^5$ ; $\kappa = 1,5$	67
4.23	(a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para $Ra = 10^4$ e $10^5$ ; $\kappa = 2,0$	68
4.24	(a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para $Ra = 10^4$ e $10^5$ ; $\kappa = 2,5$	69
4.25	(a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para $Ra = 10^4$ e $10^5$ ; $\kappa = 3,0$	70
4.26	Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para $\kappa = 1,5$ ; (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	72
4.27	Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para $\kappa = 2,0$ ; (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	73
4.28	Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para $\kappa = 2,5$ ; (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	74
4.29	Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para $\kappa = 3,0$ ; (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	75
4.30	Número de Nusselt médio na superfície quente versus o número de Rayleigh para o Caso 2	76
4.31	Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para $\kappa = 1,5$ ; (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	77
4.32	Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para $\kappa = 2,0$ ; (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	78
4.33	Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para $\kappa = 2,5$ ; (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	79
4.34	Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para $\kappa = 3,0$ ; (a) $Ra = 10^4$ ; (b) $Ra = 10^5$	80

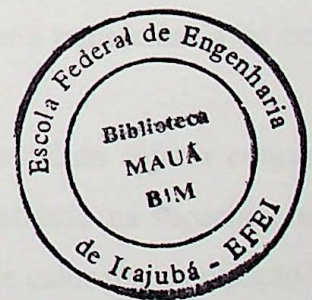
A.1	Análise axissimétrica da vorticidade no contorno	87
B.1	Geometria axissimétrica arbitrária	91
C.1	Esquema de diferença finita central para a derivada $\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$	99



# ÍNDICE DE TABELAS

## INTRODUÇÃO

Tabela	Designação	Página
3.1	Valores dos parâmetros nas equações de conservação	17
4.1	Comparação de resultados para a cavidade anular da figura 4.1; $Pr = 1,0$ ; $A = 5,0$ e $\kappa = 2,0$	45
4.2	Comparação de resultados para a cavidade anular da figura 4.1; $Pr = 0,70$	45
D.1	Comparação do $Nu_H$ para a cavidade anular de dois cilindros concêntricos verticais	102
D.2	Comparação do $Nu_H$ para a cavidade semi-esférica, caso 1	103
D.3	Comparação do $Nu_H$ para a cavidade esférica, caso 2	103



# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 - Generalidades

A convecção natural em espaços confinados de geometrias axissimétricas tem sido estudada tanto experimentalmente como numericamente por diversos pesquisadores. O estudo deste fenômeno é de grande interesse no campo da engenharia. A convecção natural desempenha um importante papel em diversas aplicações, tais como: resfriamento, aquecimento e armazenamento de alimentos, bebidas e combustíveis; aquecimento residencial e industrial; resfriamento de emergência de reatores nucleares; sistemas de energia solar; sistemas de alarme de incêndios; resfriamento de equipamentos eletrônicos, etc. Em muitas dessas aplicações o espaço confinado se apresenta de uma maneira simétrica em relação a um eixo vertical.

O presente trabalho estuda a convecção natural no interior de cavidades arbitrárias de geometrias axissimétricas com eixo vertical. Para mostrar a potencialidade do método utilizado neste trabalho, foram escolhidas duas geometrias mostradas a seguir.

As figuras 1.1 e 1.2 mostram as geometrias que serão analisadas no presente trabalho, as quais serão chamadas de caso 1 e caso 2, respectivamente.

A figura 1.1 representa a geometria de um radiômetro utilizado para a medida da radiação solar. Neste tipo de instrumento há interesse em conhecer a transferência de calor por convecção natural no interior da cavidade na forma semi-esférica.

A figura 1.2 pode representar um reservatório formado por duas esferas concêntricas, onde se armazena um fluido aquecido na superfície interna e resfriado na superfície externa. Neste caso também existe interesse em conhecer a transferência de calor por convecção natural no interior da cavidade.

As figuras 1.3 e 1.4 representam, respectivamente, as seções transversais das figuras 1.1 e 1.2. A figura 1.3 mostra o domínio computacional  $\Omega$  no plano  $(r, x)$  na qual será analisada a convecção natural. A superfície  $S_1$  é isotérmica mantida na temperatura quente  $T_h$ . A superfície  $S_2$  é isotérmica mantida na temperatura fria  $T_c$ . E as superfícies  $S_3$  são isoladas termicamente. A figura 1.4 mostra o domínio computacional  $\Omega$  e apresenta a superfície  $S_1$  isotérmica mantida na temperatura quente  $T_h$ , a superfície  $S_2$  mantida na temperatura fria  $T_c$  e as superfícies  $S_3$  isoladas termicamente.

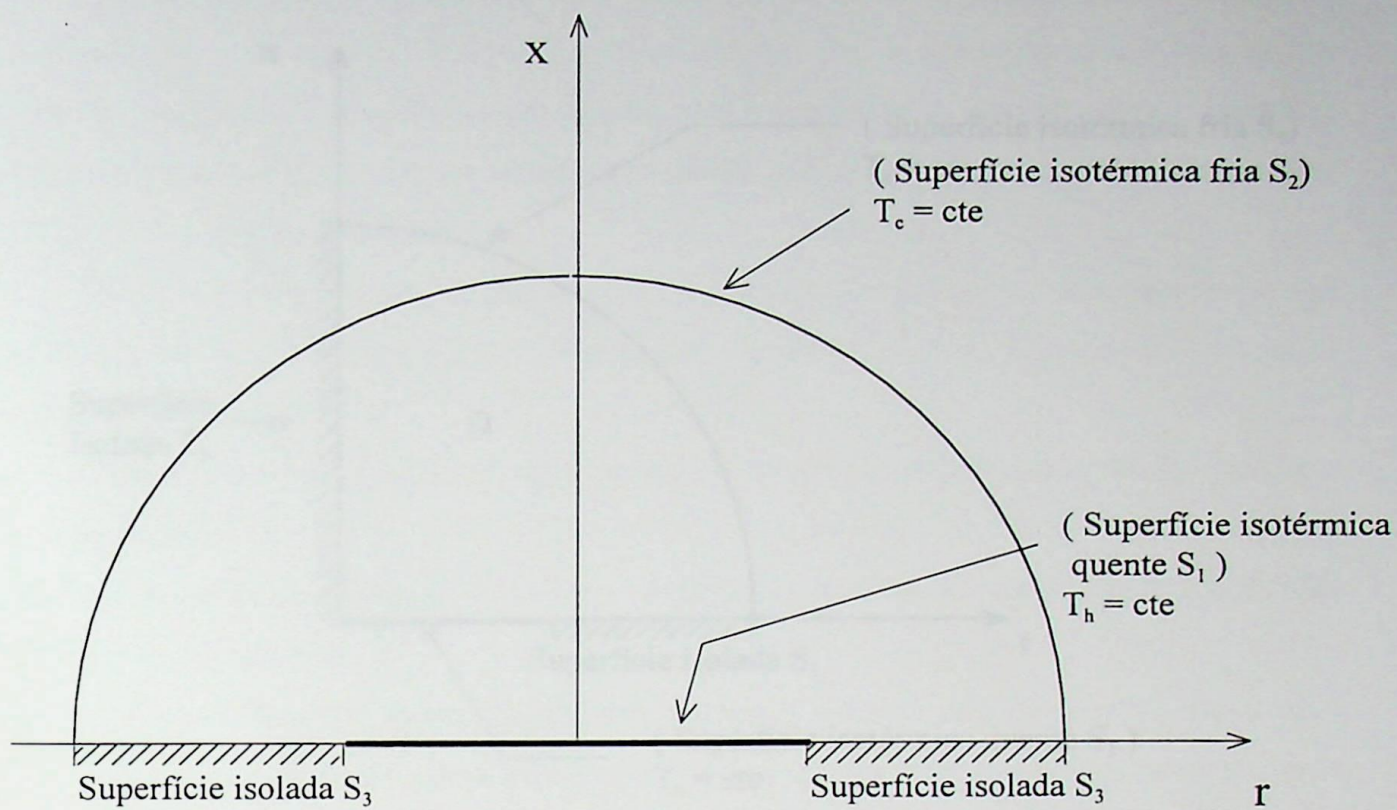


Figura 1.1 - Geometria axissimétrica analisada ( Caso 1 )

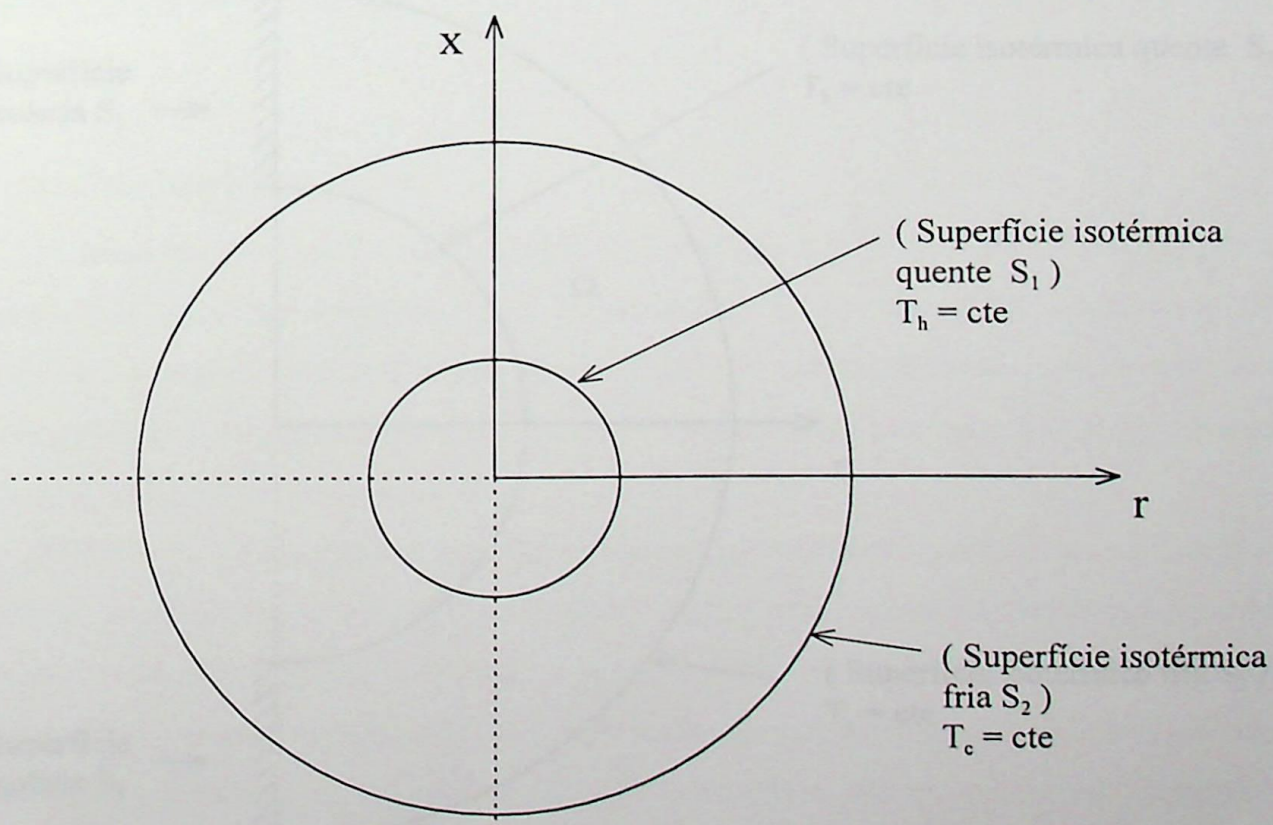


Figura 1.2 - Geometria axissimétrica analisada ( Caso 2 )

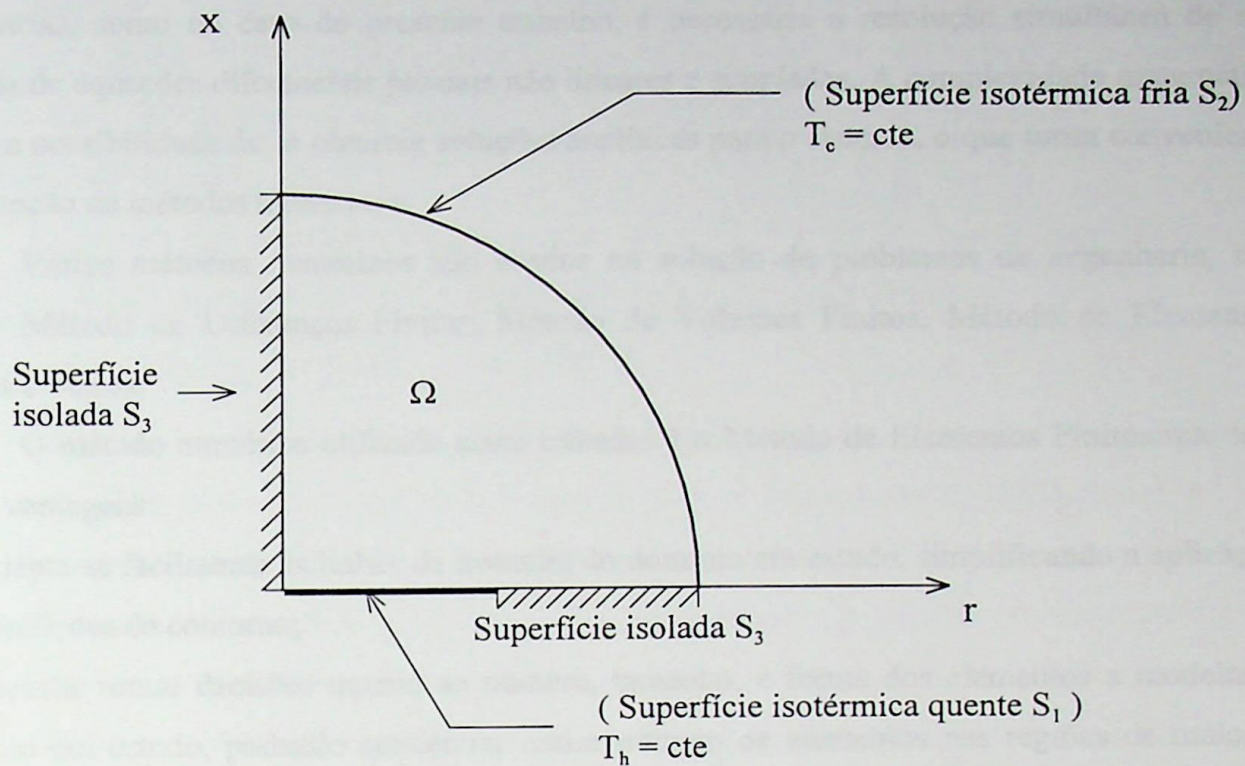


Figura 1.3 - Seção da geometria axissimétrica analisada ( Caso 1 )

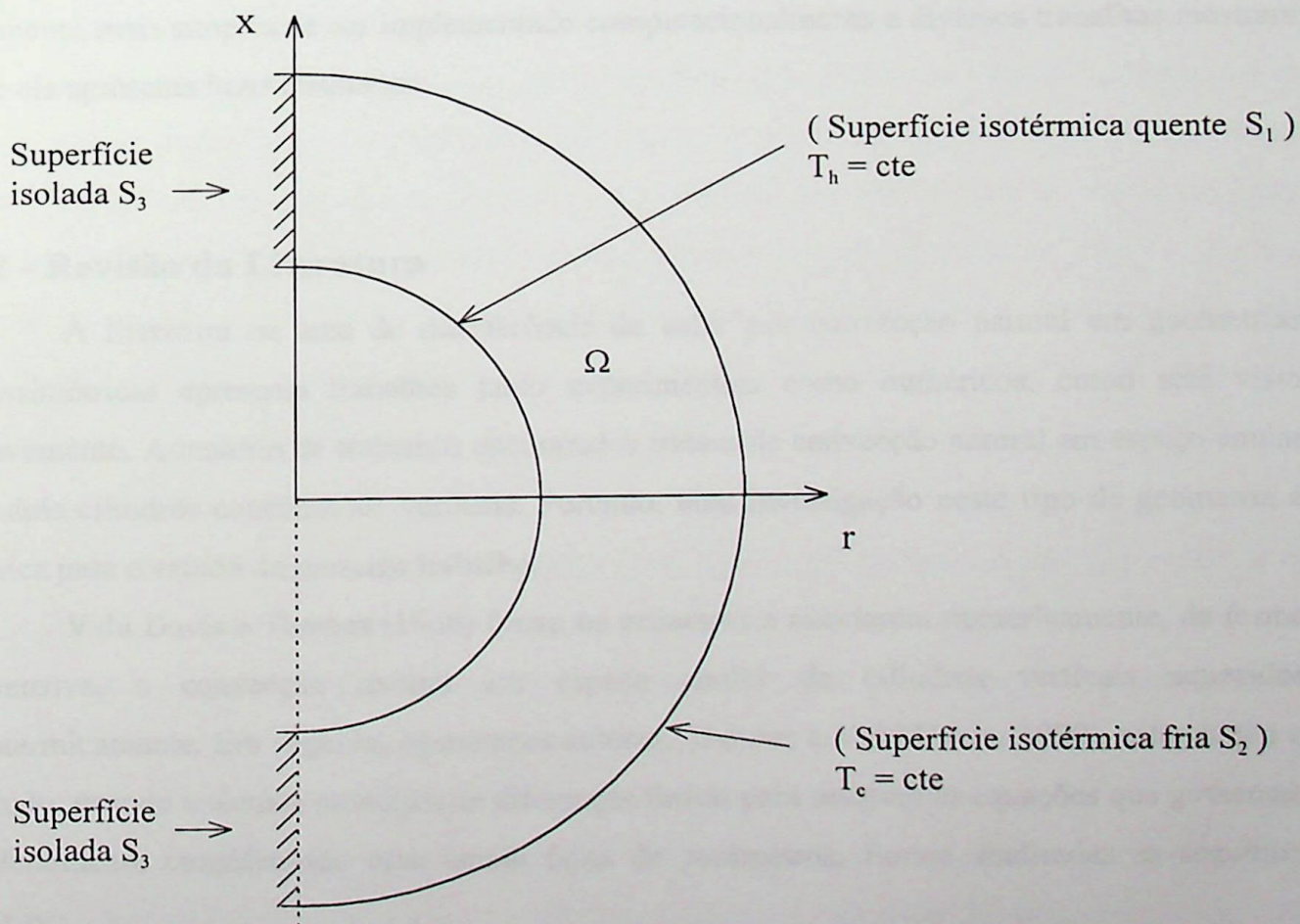


Figura 1.4 - Seção da geometria axissimétrica analisada ( caso 2 )

Para a solução de problemas de convecção natural, bidimensional, laminar em geometrias, como no caso do presente trabalho, é necessária a resolução simultânea de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. A complexidade matemática limita a possibilidade de se obterem soluções analíticas para o sistema, o que torna conveniente a utilização de métodos numéricos.

Vários métodos numéricos são usados na solução de problemas de engenharia, tais como: Método de Diferenças Finitas, Método de Volumes Finitos, Método de Elementos Finitos e outros.

O método numérico utilizado neste trabalho é o Método de Elementos Finitos que tem como vantagens:

- i-) Adapta-se facilmente às linhas de fronteira do domínio em estudo, simplificando a aplicação das condições de contorno;
- ii-) Permite tomar decisões quanto ao número, tamanho, e forma dos elementos a modelar o domínio em estudo, podendo concentrar maior número de elementos nas regiões de maiores gradientes das grandezas envolvidas, melhorando a precisão dos resultados, sem o aumento das dificuldades de aplicação do método.

O elemento adotado no presente trabalho é o elemento triangular linear, pois é o elemento mais simples de ser implementado computacionalmente e diversos trabalhos mostram que ele apresenta bons resultados.

## 1.2 - Revisão da Literatura

A literatura na área de transferência de calor por convecção natural em geometrias axissimétricas apresenta trabalhos tanto experimentais como numéricos, como será visto brevemente. A maioria de trabalhos encontrados tratam de convecção natural em espaço anular de dois cilindros concêntricos verticais. Portanto, uma investigação neste tipo de geometria é básica para o estudo do presente trabalho.

Vahl Davis e Thomas (1969) foram os primeiros a estudarem numericamente, de forma extensiva, a convecção natural em espaço anular de cilindros verticais aquecidos isotermicamente. Em seguida, os mesmos autores, Thomas e Vahl Davis (1970), estenderam o estudo usando a técnica numérica de diferenças finitas para resolver as equações que governam o fenômeno, considerando uma ampla faixa de parâmetros. Foram analisadas as seguintes faixas:

$$Ra \leq 2 \times 10^5, \quad 0,5 < Pr < 10^4, \quad 1 \leq A \leq 33 \quad \text{e} \quad 1 \leq \kappa \leq 10,$$

onde:  $Ra = g\beta(T_h - T_o)D^3/\nu\alpha$  representa o número de Rayleigh;  $Pr = \nu/\alpha$  é o número de Prandtl;  $A = H/D$  é a razão de aspecto;  $\kappa = RE/RI$  é a razão de raios e  $D = RE - RI$  é a dimensão característica.

A maioria dos resultados foram obtidos para  $Pr = 1$  e  $1 \leq \kappa \leq 4$ . Eles obtiveram a seguinte equação de correlação para a convecção natural em regime laminar:

$$Nu = 0,286 Ra^{0,258} Pr^{0,006} A^{-0,238} \kappa^{0,442}.$$

Thomas e Vahl Davis (1970) testaram a equação acima com os resultados experimentais de Emery e Chu (1965) e os resultados numéricos de Rubel e Landis (1968) para  $\kappa = 1$ . Os resultados apresentaram uma boa concordância. Os resultados obtidos por Thomas e Vahl Davis (1970) para  $A \geq 5$  e  $\kappa = 2$  a um número de Rayleigh de valor médio, apresentou um escoamento com uma simples célula, enquanto que para números de Rayleigh de valores altos foi observado escoamento multicelular. Seus resultados também indicaram que os campos de temperatura e velocidade, e conseqüentemente as taxas de transferência de calor, não são somente funções do número de Rayleigh e razão de aspecto, mas dependem fortemente da razão de raios. A dependência do número de Prandtl, apresentou-se muito fraca.

Torrance e Rockett (1969) realizaram estudo numérico de convecção natural, utilizando o método de diferenças finitas, em um espaço confinado de geometria cilíndrica, apresentando um pequeno trecho quente centralmente localizado na superfície inferior com a temperatura adimensional constante igual a 1, e o restante do contorno com temperatura adimensional igual a zero. O trabalho teve como objetivo simular a geometria de uma sala na qual ocorreria a convecção natural transiente devido a um início de incêndio. O efeito convectivo, no caso, seria essencial ao projeto de uma eficiente detecção do fogo. No trabalho o número de Prandtl foi mantido em  $Pr = 0,7$  e o número de Grashof entre  $4 \times 10^4 \leq Gr \leq 4 \times 10^{10}$ . A turbulência foi observada experimentalmente para  $Gr \geq 1,2 \times 10^9$ .

Nagendra et al. (1970) desenvolveram uma análise aproximada para estudar a convecção natural no espaço anular aquecido isotermicamente estendendo o modelo de camada limite usado por Emery e Chu (1965). Eles apresentaram três correlações de transferência de calor em regime laminar de convecção para pequenas e grandes razões de aspecto.

Schwab e Dewitt (1970) forneceram resultados de transferência de calor, através de um estudo numérico empregando o método de diferenças finitas, que foram limitados a 24 combinações de  $Ra$ ,  $Pr$  e  $A$  com  $\kappa = 2$ . Em geral, os coeficientes de transferência de calor

relatados por eles tiveram valores de 30 a 50 por cento acima daqueles apresentados pela equação de correlação de Thomas e Vahl Davis (1970).

Pepper e Harris (1977) realizaram simulações numéricas de convecção natural em espaço anular de cilindros verticais aplicando o esquema SIP (Strongly Implicit Procedure). A parede vertical do cilindro interno é mantida na temperatura adimensional igual a 1 e a temperatura da parede vertical do cilindro externo é mantida igual a zero. As paredes horizontais são mantidas isoladas. O número de Prandtl foi mantido constante igual a 1. A razão de aspecto variou de 1 a 15, o número de Rayleigh de  $10^4$  a  $10^5$  e a razão de raios de 1 a 3. Foi utilizado uma malha de  $17 \times 49$  para a solução do método numérico. Os resultados obtidos apresentaram boa concordância com os resultados de Thomas e Vahl Davis (1970).

Lee et al. (1982) estudaram numericamente a estrutura da convecção multicelular para espaços anulares verticais, com altos valores de razão de aspecto, com o número de Prandtl e razão de raios variando nas seguintes faixas:  $0 \leq Pr \leq 0,7$ , e  $1 \leq \kappa \leq 5$ . Um número de Prandtl igual a zero representa um fluido hipotético com difusividade térmica infinita.

Prasad e Kulacki (1985) desenvolveram trabalhos experimentais, usando água, heptano e etileno glicol, investigando o efeito da razão de aspecto. Suas experiências foram conduzidas para  $8 \times 10^6 < Ra < 3 \times 10^{10}$ ,  $\kappa = 5,338$ ,  $A = 0,5; 1$  e  $1,5$ , e  $4 < Pr < 196$ . Foi notado que o número de Nusselt aumenta com a razão de raios. O número de Prandtl apresenta pouca influência. No regime laminar, o número de Nusselt apresenta fraca dependência da razão de aspecto quando o número de Nusselt e o número de Rayleigh são considerados em termos da altura anular  $H$ . A turbulência é iniciada quando o número de Grashof local é  $Gr_x \cong 4 \times 10^9$ . A equação de correlação de Thomas e Vahl Davis (1970) serviu para verificação dos resultados obtidos nas experiências realizadas por Prasad e Kulacki (1985).

Kalam e Kumar (1987) obtiveram resultados numéricos de várias combinações de razão de raios e razão de aspecto para o estudo de convecção natural no espaço anular de cilindros verticais. Verificaram que os números de Nusselt obtidos apresentaram boa concordância com aqueles apresentados na equação de correlação de Thomas e Vahl Davis (1970) para alguns casos específicos.

Kumar e Kalam (1991) realizaram investigações numéricas de convecção natural de um fluido no espaço anular de cilindros verticais com a parede do cilindro interno mantida a uma temperatura superior a da parede do cilindro externo. As paredes inferior e superior são mantidas isoladas. O método numérico utilizado foi baseado nos métodos de falso transiente e ADI (Alternating Direction Implicit). Os resultados foram obtidos para as

seguintes faixas:  $10 \leq Ra \leq 10^6$ ,  $1 \leq \kappa \leq 15$  e  $0,3 \leq A \leq 10$ . O trabalho apresenta boa concordância em seus resultados comparados com a equação de correlação de Thomas e Vahl Davis (1970) e resultados experimentais de Prasad e Kulacki (1985).

Na literatura, aparecem alguns trabalhos de convecção natural em geometrias axissimétricas com fluxo de calor constante especificado na parede vertical do cilindro interno e temperatura constante especificada na parede vertical do cilindro externo. As paredes horizontais são mantidas isoladas termicamente. Sheriff (1966) foi um dos primeiros a realizar trabalhos em geometrias axissimétricas com essas condições de contorno. Ele considerou, razão de raios  $\kappa = 1,23$ ;  $1,10$  e  $1,03$ , razão de aspecto  $A = 38, 76$  e  $228$  e número de Rayleigh na faixa  $10^5 \leq Ra \leq 10^8$ . Foi apresentada a seguinte equação de correlação para o número de Nusselt:

$$Nu = 0,25 Ra^{0,3} A^{-0,25}$$

Keyhani et al. (1983) realizaram experiências com as mesmas condições de contorno que Sheriff (1966). Eles desenvolveram a experiência para razão de raios  $\kappa = 4,33$ , razão de aspecto  $A = 27,6$  e número de Rayleigh na faixa  $10^3 < Ra < 2,3 \times 10^6$ . Eles apresentaram as seguintes equações de correlação para duas faixas:

$$Nu = 1,406 Ra^{0,077} \quad \text{para } 10^3 \leq Ra \leq 6,6 \times 10^3, \text{ e}$$

$$Nu = 0,163 Ra^{0,322} \quad \text{para } 6,6 \times 10^3 \leq Ra \leq 2,3 \times 10^6.$$

Bhushan et al. (1983) estenderam o trabalho de Keyhani et al. (1983) para duas outras combinações de razão de aspecto e raios,  $A = 52,82$ ,  $\kappa = 2,77$  e  $A = 38,38$ ,  $\kappa = 8,28$ .

Khan e Kumar (1989) também realizaram um estudo numérico de convecção natural no espaço anular vertical com aquecimento a fluxo de calor constante na parede do cilindro interno e resfriamento isotérmico na parede do cilindro externo. As paredes horizontais são isoladas termicamente. Os resultados da taxa de transferência de calor, os campos de temperatura e velocidade foram obtidos para as seguintes faixas:  $1 \leq \kappa \leq 15$ ,  $1 \leq A \leq 10$ ,  $100 < Ra < 10^7$  e  $Pr = 0,7$ . As equações em termos da vorticidade e temperatura adimensional foram resolvidas pelo método ADI (Alternating Direction Implicit), e a equação em termo da função corrente foi resolvida aplicando o método SOR (Successive Overrelaxation). Os resultados obtidos numericamente foram comparados com os resultados experimentais de Keyhani et al. (1983) apresentando boa concordância.

### 1.3 - Objetivos do Presente Trabalho

O objetivo principal deste trabalho é realizar o estudo teórico de convecção natural, bidimensional, laminar em regime permanente e não permanente, para geometrias axissimétricas arbitrárias. E como aplicações são estudadas os casos 1 e 2, das figuras 1.3 e 1.4, e desta forma poder estabelecer as relações entre os coeficientes de transferência de calor médio e local em função dos parâmetros térmicos e geométricos.

As equações de conservação, em coordenadas cilíndricas, juntas formam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. Através da resolução simultânea desse sistema de equações utilizando o método de elementos finitos será possível determinar as distribuições da função corrente  $\psi$ , temperatura adimensional  $\theta$ , vorticidade  $\omega$ , e o número de Nusselt local  $Nu_L$  e médio  $Nu$  em função dos parâmetros geométricos e térmicos envolvidos.

### 1.4 - Delineamento do Presente Trabalho

Para atingir os objetivos descritos acima, este trabalho será desenvolvido da seguinte forma:

#### Capítulo 2 - Formulação Matemática

Neste capítulo, inicialmente serão apresentadas as equações gerais de conservação que regem o fenômeno de convecção natural, em sua forma dimensional, respectivamente acompanhadas de simplificações necessárias, bem como as condições de contorno.

Em seguida, com a finalidade de generalizar a solução numérica do problema, as equações de conservação são adimensionalizadas juntamente com as definições da função corrente  $\psi$ , vorticidade  $\omega$ , número de Grashof  $Gr$  e número de Prandtl  $Pr$ .

Finalmente, são desenvolvidas as expressões para calcular os números de Nusselt local  $Nu_L$  e médio  $Nu$  nas superfícies da cavidade a ser estudada.

#### Capítulo 3 - Aplicação do Método de Elementos Finitos

Neste capítulo desenvolve-se o método de elementos finitos para geometria axissimétrica, optando-se pela aplicação do elemento triangular de três nós.

Em seguida, são desenvolvidas as equações da função corrente  $\psi$ , temperatura adimensional  $\theta$  e vorticidade  $\omega$  na forma matricial para o elemento, seguindo-se de uma análise global considerando todo o domínio  $\Omega$ .

Finalmente, será descrito o programa computacional desenvolvido e utilizado para solucionar o sistema de equações globais acopladas em termos da função corrente  $\psi$ , temperatura adimensional  $\theta$  e vorticidade  $\omega$ , seguindo-se o cálculo dos números de Nusselt local  $Nu_L$  e médio  $Nu$ .

#### Capítulo 4 - Resultados

Neste capítulo, inicialmente o programa computacional desenvolvido é testado para a cavidade anular de dois cilindros concêntricos verticais, comparando-se os resultados com aqueles encontrados na literatura.

Após a validação do modelo, são obtidos os resultados para as duas geometrias do presente trabalho variando-se os parâmetros geométricos, tais como, a razão de aspecto  $A=H/D$ , a razão de raios  $\kappa=RE/RI$ ; e parâmetros térmicos como o número de Grashof  $Gr=g\beta(T_h-T_o)D^3/\nu^2$ , mantendo-se o número de Prandtl  $Pr=\nu/\alpha$  igual a 0,70. A dimensão característica  $D$  varia de acordo com o caso estudado. Para o caso dos cilindros concêntricos verticais,  $D$  é definida como sendo  $D=RE - RI$ , e para os casos 1 e 2 como sendo  $D=RE$ .

#### Capítulo 5 - Conclusões e Recomendações

Neste capítulo, são apresentadas as principais conclusões obtidas no presente trabalho. Em seguida são comentadas as contribuições mais importantes deste trabalho.

No final, faz-se algumas recomendações para possíveis trabalhos futuros sobre análise de convecção natural em geometrias axissimétricas.

#### Apêndices

No apêndice A, encontram-se desenvolvidas as equações para o cálculo da vorticidade no contorno.

No Apêndice B, são desenvolvidas as equações para determinar o número de Nusselt médio  $Nu$  e o número de Nusselt local  $Nu_L$  nas superfícies quente e fria da cavidade em estudo.

No Apêndice C, faz-se o desenvolvimento da equação diferencial bidimensional em regime não permanente, aplicando o método de Galerkin, bem como o desenvolvimento da matriz capacitância  $[C]^e$ .

No Apêndice D, mostram-se as comparações entre as duas equações para o cálculo da vorticidade no contorno.

Finalmente, são apresentadas as referências bibliográficas consultadas para a elaboração do presente trabalho.

## CAPÍTULO 2

### FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

#### 2.1- Análise Teórica da Convecção Natural

Para o estudo de convecção natural em geometrias axissimétricas, utilizam-se as equações de conservação, levando em consideração as seguintes hipóteses:

- escoamento bidimensional, laminar e incompressível;
- regime não permanente;
- as propriedades do fluido são constantes, exceto a densidade nos termos de empuxo que segue a relação de Boussinesq;
- o termo de dissipação viscosa na equação da energia e os efeitos de compressibilidade são desprezados;
- sem geração interna de calor.

Portanto, as equações de conservação podem ser escritas como:

i-) continuidade:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

ii-) quantidade de movimento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} = g\beta(T - T_0) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r} + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right), \quad (2.3)$$

iii-) energia:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right), \quad (2.4)$$

onde:

$$\alpha = \frac{K}{\rho C_p}.$$

Uma geometria axissimétrica arbitrária encontra-se ilustrada na figura 2.1, juntamente com as condições de contorno que serão consideradas na análise teórica. A superfície  $S_1$  será

estabelecida como sendo uma superfície isotérmica quente com temperatura  $T_h$ , enquanto que a superfície  $S_2$  representará uma superfície isotérmica fria com temperatura  $T_c$ . As superfícies  $S_3$  estarão isoladas termicamente, não havendo fluxo de calor através delas, e as componentes de velocidades do fluido na parede ( em  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  ) são todas nulas.

Portanto pode-se escrever as seguintes condições iniciais e de contorno:

i-) condições iniciais:

para  $t = 0$  :

$$u = v = 0 \quad (\text{em } \Omega), \quad (2.5a)$$

$$T = T_o = \frac{T_c + T_h}{2} \quad (\text{em } \Omega), \quad (2.5b)$$

onde  $\Omega$  representa o domínio, conforme mostra a figura 2.1b.

ii-) condições de contorno :

para  $t > 0$  :

$$T = T_h \quad (\text{em } S_1), \quad (2.5c)$$

$$T = T_c \quad (\text{em } S_2), \quad (2.5d)$$

$$q = \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } S_3), \quad (2.5e)$$

$$u_w = v_w = 0 \quad (\text{em } S_1 + S_2 + S_3), \quad (2.5f)$$

onde  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  são as superfícies mostradas na figura 2.1b.

## 2.2 - Adimensionalização das Equações

Para adimensionalizar as equações de conservação, são introduzidas as seguintes variáveis adimensionais:

- tempo:

$$\tau = \frac{v t}{D^2}, \quad (2.6a)$$

- coordenadas vertical e radial :

$$X = \frac{x}{D} \quad \text{e} \quad R = \frac{r}{D}, \quad (2.6b)$$

- componentes da velocidade vertical e radial :

$$U = \frac{D}{v} u \quad \text{e} \quad V = \frac{D}{v} v, \quad (2.6c)$$

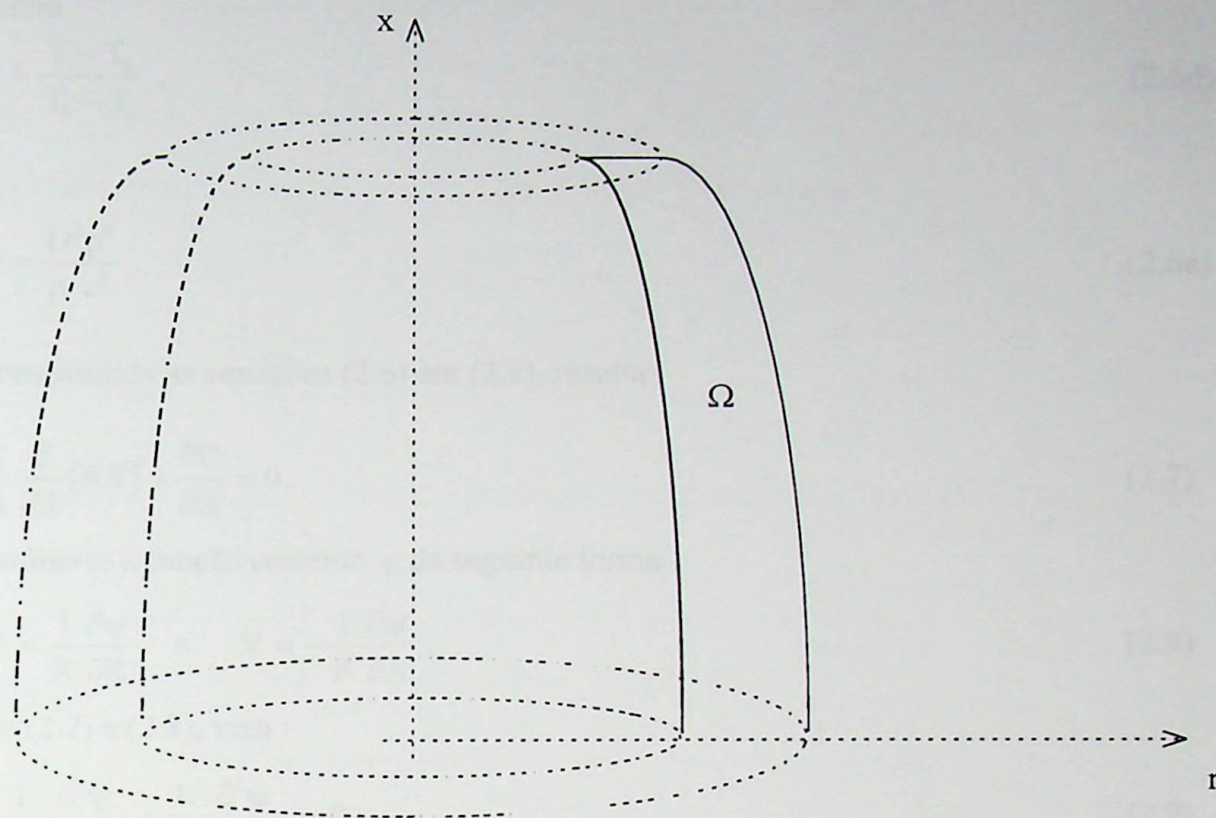


Figura 2.1a - Geometria axissimétrica arbitrária

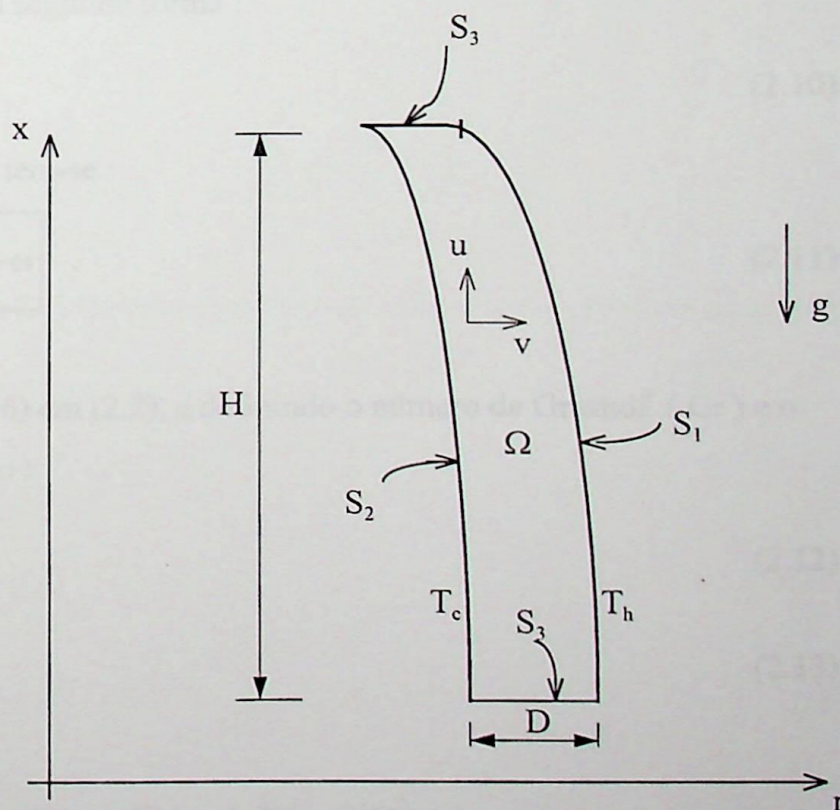


Figura 2.1b - Domínio computacional e condições de contorno

- temperatura :

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_h - T_0}, \quad (2.6d)$$

- pressão :

$$P = \frac{D^2 p^*}{\rho v^2}. \quad (2.6e)$$

Substituindo as equações (2.6) em (2.1), resulta :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RV) + \frac{\partial U}{\partial X} = 0. \quad (2.7)$$

Define-se a função corrente  $\psi$  da seguinte forma :

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad \text{e} \quad V = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial X}. \quad (2.8)$$

De (2.7) e (2.8), vem :

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R \partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R \partial X} = 0. \quad (2.9)$$

Pode ser notado pela equação (2.9), que com a definição da função corrente dada pela equação (2.8), a equação da continuidade fica satisfeita automaticamente.

Define-se a vorticidade  $\omega$  da seguinte forma :

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial R}. \quad (2.10)$$

Das equações (2.8) e (2.10), tem-se :

$$\boxed{\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) = -\omega}. \quad (2.11)$$

Substituindo as equações (2.6) em (2.2), e definindo o número de Grashof ( Gr ) e o número de Prandtl ( Pr ) como sendo :

$$Gr = \frac{g\beta(T_h - T_0)D^3}{v^2}, \quad (2.12)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (2.13)$$

resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + V \frac{\partial U}{\partial R} + U \frac{\partial U}{\partial X} = Gr \theta - \frac{\partial P}{\partial X} + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \right). \quad (2.14)$$

Substituindo as variáveis adimensionais (2.6) em (2.3), resulta :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + V \frac{\partial V}{\partial R} + U \frac{\partial V}{\partial X} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} \right). \quad (2.15)$$

E finalmente, substituindo as equações (2.6) em (2.4), resulta :

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + V \frac{\partial \theta}{\partial R} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right)} \quad (2.16)$$

Derivando a equação (2.14) em relação a R, e a equação (2.15) em relação a X, em seguida subtraindo uma em relação a outra, resulta :

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial(V\omega)}{\partial R} + \frac{\partial(U\omega)}{\partial X} = -Gr \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial R} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} - \frac{\omega}{R^2}} \quad (2.17)$$

Resumindo, serão reescritas as equações (2.11), (2.16) e (2.17) conforme segue :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) = -\omega, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + V \frac{\partial \theta}{\partial R} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial(V\omega)}{\partial R} + \frac{\partial(U\omega)}{\partial X} = -Gr \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial R} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} - \frac{\omega}{R^2}. \quad (2.20)$$

As equações (2.18), (2.19) e (2.20) podem ser rearranjadas, respectivamente, na seguinte forma compacta :

$$i-) \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + Q_\psi = 0, \quad (2.21)$$

$$ii-) \frac{1}{Pr} \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \right] + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + Q_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.22)$$

$$iii-) \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \omega}{\partial R} \right) \right] + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + Q_\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (2.23)$$

onde :

$$Q_\psi = \omega R - \frac{2}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad (2.21a)$$

$$Q_\theta = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial R} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right), \quad (2.22a)$$

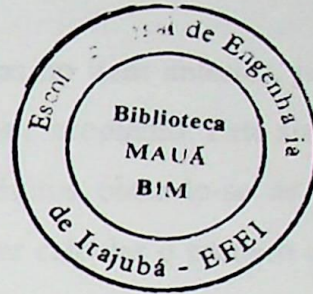
$$Q_\omega = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial R} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) - \frac{\omega}{R^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} + 1 \right) - Gr \frac{\partial \theta}{\partial R}. \quad (2.23a)$$

Colocando as condições iniciais e de contorno na forma adimensional, resulta :

i-) condições iniciais :

para  $\tau = 0$  :

$$\psi = \theta = \omega = 0 \quad (\text{em } \Omega). \quad (2.24a)$$



ii-) condições de contorno :

para  $\tau > 0$  :

$$\theta = 1 \quad (\text{em } S_1), \quad (2.24b)$$

$$\theta = -1 \quad (\text{em } S_2), \quad (2.24c)$$

$$q = \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } S_3), \quad (2.24d)$$

$$\psi_w = 0 \quad (\text{em } S_1 + S_2 + S_3), \quad (2.24e)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } S_1 + S_2 + S_3), \quad (2.24f)$$

$$\omega_w = -\frac{2\psi_o}{\delta^2 R_w} \quad (\text{em } S_1 + S_2 + S_3), \quad (\text{para caso 1}) \quad (2.24g)$$

$$\text{ou, } \omega_w = -\frac{3\psi_o}{\delta^2 R_w} - \frac{\omega_o}{2} \quad (\text{em } S_1 + S_2 + S_3), \quad (\text{para caso 2}) \quad (2.24h)$$

onde:

$S_1$  é a superfície isotérmica quente com temperatura  $T_h$  ;

$S_2$  é a superfície isotérmica fria com temperatura  $T_c$  ;

$S_3$  é a superfície isolada com fluxo de calor nulo;

$\Omega$  representa o domínio da geometria analisada.

A equação (2.24a) estabelece que para  $\tau = 0$ , as condições iniciais das grandezas  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$  são nulas em todo o domínio  $\Omega$ . As equações (2.24b) e (2.24c) indica que os valores da temperatura adimensional para as superfícies quente e fria são respectivamente 1 e -1. Enquanto que a equação (2.24d) estabelece que o fluxo de calor é nulo através da superfície  $S_3$ . A equação (2.24e) indica as condições de impermeabilidade e a equação (2.24f) representa a

aderência no contorno. As equações (2.24g) e (2.24h), encontram-se desenvolvidas no Apêndice A, onde  $\omega_w$  representa a vorticidade do fluido junto ao contorno,  $R_w$  é a coordenada radial de um ponto sobre o contorno,  $\psi_0$  e  $\omega_0$  representam, respectivamente, valores da função corrente e vorticidade num ponto situado a uma pequena distância  $\delta$  do contorno.

### 2.3 - Número de Nusselt Local e Médio

As equações (2.21), (2.22) e (2.23) desenvolvidas no item anterior, juntas representam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. Este sistema de equações será resolvido empregando o método de elementos finitos obtendo-se as distribuições das funções  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ . De posse da distribuição de  $\theta$ , pode-se calcular o número de Nusselt local e médio em função dos parâmetros geométricos e térmicos do problema.

As equações para determinação dos números de Nusselt local e médio encontram-se desenvolvidas no Apêndice B, e são as seguintes:

i-) Número de Nusselt local na superfície  $S_i$  ( com  $i = 1$  ou  $2$  ):

$$Nu_L \Big|_{S_i} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial\theta}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)^2} \Big|_{S_i} . \quad (2.25)$$

ii-) Número de Nusselt médio na superfície  $S_i$  ( com  $i = 1$  ou  $2$  ) :

$$Nu_i = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} Nu_L \Big|_{S_i} dS_i . \quad (2.26)$$

Os números de Nusselt local e médio podem ser escritos em função de parâmetros geométricos e térmicos do problema, respectivamente como :

$$Nu_L = Nu_L ( \text{Parâmetros geométricos, Pr, Gr} ), \quad (2.27)$$

$$Nu = Nu ( \text{Parâmetros geométricos, Pr, Gr} ) . \quad (2.28)$$

Os parâmetros térmicos, a saber, número de Grashof (  $Gr$  ) e número de Prandtl (  $Pr$  ), são dados respectivamente pelas equações (2.12) e (2.13).

## CAPÍTULO 3

### APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

#### 3.1- Forma Geral para as Equações de Conservação

As equações (2.21), (2.22) e (2.23) dadas no capítulo anterior podem ser escritas na seguinte forma geral :

$$\frac{1}{R} \left[ D_r \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) \right] + D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} , \quad (3.1)$$

onde  $\phi$  representa uma grandeza que pode ser  $\psi$ ,  $\theta$  ou  $\omega$ ;  $Q_\phi$  é uma função especificada que pode ser  $Q_\psi$ ,  $Q_\theta$  ou  $Q_\omega$ , respectivamente dadas pelas equações (2.21a), (2.22a) e (2.23a);  $\lambda$  representa um parâmetro que assume o valor zero na equação (2.21) e o valor um nas equações (2.22) e (2.23);  $D_x$  e  $D_r$  são os parâmetros que assumem o valor um nas equações (2.21) e (2.23) e o valor  $1/Pr$  na equação (2.22).

Para maior clareza, foi montada a seguinte tabela que relaciona os parâmetros  $\phi$ ,  $D_r$ ,  $D_x$ ,  $\lambda$  e  $Q_\phi$  que aparecem nas equações (2.21) a (2.23) :

Equação	Parâmetros				
	$\phi$	$D_r$	$D_x$	$\lambda$	$Q_\phi$
(2.21)	$\psi$	1	1	0	$Q_\psi$
(2.22)	$\theta$	$1/Pr$	$1/Pr$	1	$Q_\theta$
(2.23)	$\omega$	1	1	1	$Q_\omega$

Tabela 3.1 - Valores dos parâmetros nas equações de conservação

As condições de contorno para as equações (2.21) e (2.22) podem ser escritas na seguinte forma :

$$\phi = \phi (R, X) \text{ em } S_1 \text{ e } S_2 , \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ em } S_3 . \quad (3.1b)$$

A condição de contorno dada pela equação (2.24g) ou (2.24h) deve ser tratada separadamente.

### 3.2 - Método de Elementos Finitos para Geometria Axissimétrica

Será usado o método de elementos finitos para resolver a equação (3.1), juntamente com as condições de contorno (3.1a) e (3.1b).

O método de elementos finitos é um procedimento numérico para resolver as equações diferenciais da física e da engenharia. O método surgiu na indústria aeroespacial na década de 50. Hoje é muito usado em diversas áreas da engenharia. Possui vantagens como a facilidade de adaptação à fronteira do domínio de solução, simplificando a aplicação das condições de contorno e também de possibilitar que se efetue discretizações seletivas, concentrando maior número de elementos nas regiões onde se esperam maiores variações das incógnitas.

A discretização do domínio em sub-regiões é o primeiro de uma série de passos que deve ser feito quando se resolve um problema. A discretização do domínio computacional envolve a decisão quanto ao número, o tamanho e a forma das sub-regiões usadas para modelar a região de estudo.

No presente trabalho, a figura 3.1 ilustra o domínio no plano  $(R, X)$  para a solução da equação (3.1). O domínio é dividido em elementos triangulares. Cada triângulo representa um elemento do domínio, e em cada vértice do triângulo tem-se um ponto nodal ou nó. Para cada nó associa-se um valor da grandeza  $\phi$ . E conforme mostra a figura 3.2, os valores nodais da quantidade escalar  $\phi$  são denotados por  $\Phi_i, \Phi_j$  e  $\Phi_k$ , respectivamente possuindo as coordenadas  $(R_i, X_i)$ ,  $(R_j, X_j)$  e  $(R_k, X_k)$ .

Admite-se que a grandeza  $\phi^e$  varia linearmente em cada elemento de modo aproximado através da interpolação polinomial, como segue:

$$\phi^e = \alpha_1 + \alpha_2 R + \alpha_3 X . \quad (3.2)$$

Para os pontos nodais  $i, j, k$  tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 R_i + \alpha_3 X_i , \quad (3.2a)$$

$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 R_j + \alpha_3 X_j , \quad (3.2b)$$

$$\Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 R_k + \alpha_3 X_k . \quad (3.2c)$$

Resolvendo o sistema de equações, resulta:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta} \left[ (R_j X_k - R_k X_j) \Phi_i + (R_k X_i - R_i X_k) \Phi_j + (R_i X_j - R_j X_i) \Phi_k \right] , \quad (3.3a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\Delta} \left[ (X_j - X_k) \Phi_i + (X_k - X_i) \Phi_j + (X_i - X_j) \Phi_k \right] , \quad (3.3b)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta} \left[ (R_k - R_j) \Phi_i + (R_i - R_k) \Phi_j + (R_j - R_i) \Phi_k \right] , \quad (3.3c)$$

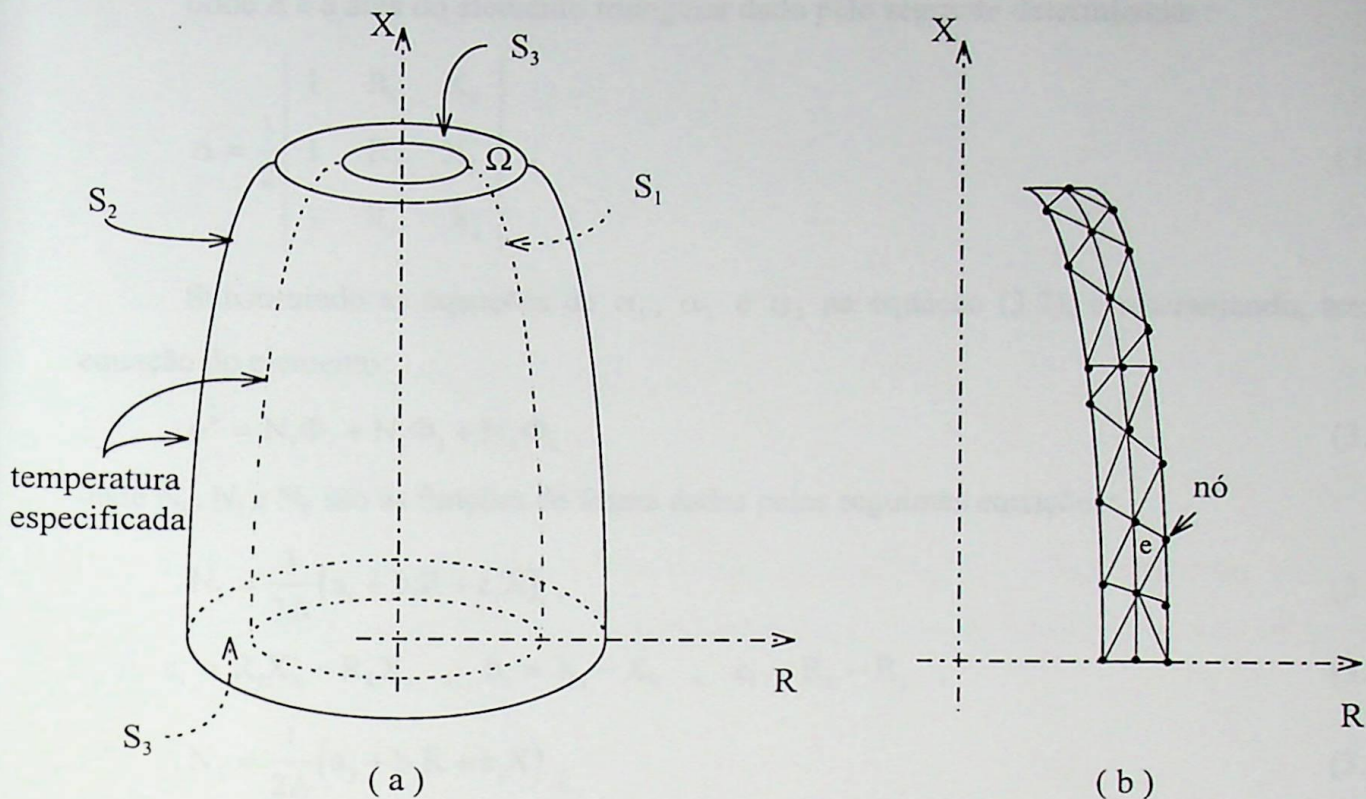


Figura 3.1 - ( a ) Geometria axissimétrica,

( b ) Domínio dividido em elementos triangulares axissimétricos

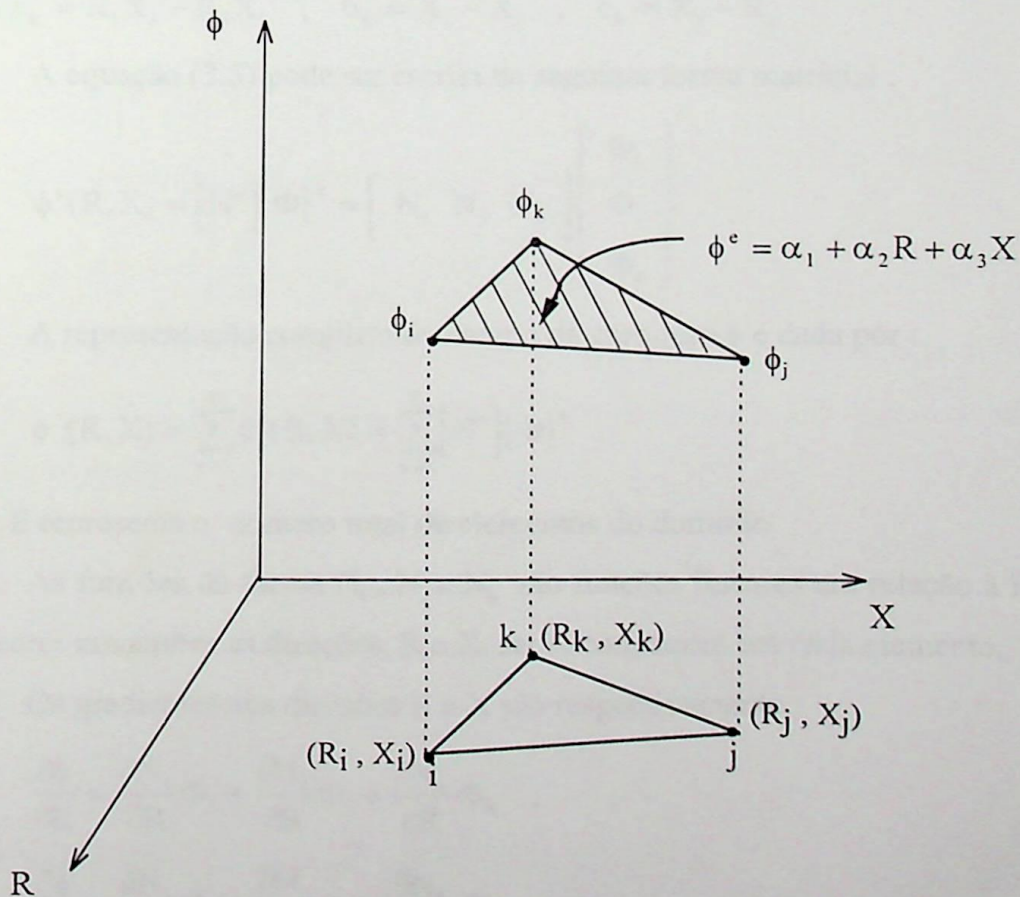


Figura 3.2 - Elemento triangular axissimétrico no plano  $R - X$  ; função de interpolação linear

onde  $\Delta$  é a área do elemento triangular dado pelo seguinte determinante :

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & R_i & X_i \\ 1 & R_j & X_j \\ 1 & R_k & X_k \end{vmatrix} . \quad (3.4)$$

Substituindo as equações de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  na equação (3.2), e rearranjando, tem-se a equação do elemento:

$$\phi^e = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k , \quad (3.5)$$

onde  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  são as funções de forma dadas pelas seguintes equações:

$$N_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i R + c_i X) , \quad (3.6a)$$

$$\text{com } a_i = R_j X_k - R_k X_j , \quad b_i = X_j - X_k , \quad c_i = R_k - R_j , \quad (3.6b)$$

$$N_j = \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j R + c_j X) , \quad (3.6c)$$

$$\text{com } a_j = R_k X_i - R_i X_k , \quad b_j = X_k - X_i , \quad c_j = R_i - R_k , \quad (3.6d)$$

$$N_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k R + c_k X) , \quad (3.6e)$$

$$\text{com } a_k = R_i X_j - R_j X_i , \quad b_k = X_i - X_j , \quad c_k = R_j - R_i . \quad (3.6f)$$

A equação (3.5) pode ser escrita na seguinte forma matricial :

$$\phi^e(R, X) = [N^e] \{\Phi\}^e = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} . \quad (3.7)$$

A representação completa do campo da grandeza  $\phi$  é dada por :

$$\phi(R, X) = \sum_{e=1}^E \phi^e(R, X) = \sum_{e=1}^E [N^e] \{\Phi\}^e , \quad (3.8)$$

onde  $E$  representa o número total de elementos do domínio.

As funções de forma  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  são funções lineares em relação à  $R$  e  $X$ . Portanto, os gradientes em ambas as direções,  $R$  e  $X$ , serão constantes em cada elemento.

Os gradientes nas direções  $R$  e  $X$  são respectivamente :

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{\partial N_i}{\partial R} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial R} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial R} \Phi_k , \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial N_i}{\partial X} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial X} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial X} \Phi_k . \quad (3.9b)$$

Das equações (3.6), pode-se escrever que :

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial R} = \frac{b_\beta}{2\Delta} \quad \text{com } \beta = i, j, k, \quad (3.10a)$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial X} = \frac{c_\beta}{2\Delta} \quad \text{com } \beta = i, j, k. \quad (3.10b)$$

Portanto das equações (3.9) e (3.10), tem-se :

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{1}{2\Delta} (b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k), \quad (3.11a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta} (c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_k \Phi_k). \quad (3.11b)$$

Nos itens seguintes serão desenvolvidas as equações de conservação nas suas formas matriciais, usando o método de elementos finitos para posterior desenvolvimento do programa computacional.

### 3.3 - Equação da Função Corrente na Forma Matricial

Da equação geral (3.1) e dos valores apresentados na tabela (3.1), tem-se a seguinte equação da função corrente :

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + Q_\psi = 0, \quad (3.12)$$

onde  $Q_\psi$  é apresentado na equação (2.21a) como sendo :

$$Q_\psi = \omega R - \frac{2}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}. \quad (3.12a)$$

No Apêndice C usando o método de Galerkin ( Sergeling, 1984 ) foi desenvolvida a equação geral (C.42) na forma matricial, resultando para a função corrente no elemento, a seguinte equação:

$$\left[ [K_\psi]^e + \frac{2}{\Delta\tau} [C]^e \right] \{\psi\}_{\text{nov}}^e = \frac{2}{\Delta\tau} [C]^e \{\psi\}_{\text{velho}}^e - \{F_\psi\}^e. \quad (3.13)$$

Mas como  $\lambda = 0$ , tem-se o caso particular, conforme equação (C.43). Logo, a equação (3.13) pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$[K_\psi]^e \{\psi\}^e = -\{F_\psi\}^e, \quad (3.14)$$

e de acordo com as equações (C.32) e (C.33), tem-se :

$$[K_{\psi}]^e = \int_{V^e} [B^e]^T [B^e] dV, \quad (3.14a)$$

$$\{F_{\psi}\}^e = - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA - \int_{V^e} [N^e]^T Q_{\psi}^e dV. \quad (3.14b)$$

### 3.3.1 - Desenvolvimento da matriz $[K_{\psi}]^e$

Das equações (C.21) e (C.22) pode-se escrever que :

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial R} & \frac{\partial N_j}{\partial R} & \frac{\partial N_k}{\partial R} \\ \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial X} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.10) em (3.15), resulta :

$$[B^e] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

A matriz transposta  $[B^e]^T$ , será :

$$[B^e]^T = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Logo, o produto das equações (3.17) e (3.16), será :

$$\begin{aligned} [B^e]^T [B^e] &= \frac{1}{4\Delta^2} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{4\Delta^2} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A equação (3.14a) pode ser escrita como :

$$[K_{\psi}]^e = [B^e]^T [B^e] \int_{V^e} dV, \quad (3.19)$$

$$\text{mas, } dV = 2\pi \bar{R} dA , \quad (3.20)$$

$$\text{onde, } \bar{R} = (R_i + R_j + R_k) / 3 . \quad (3.21)$$

Substituindo (3.20) em (3.19), tem-se :

$$[K_\psi]^e = [B^e]^T [B^e] 2\pi \bar{R} \int_{A^e} dA , \quad (3.22)$$

$$\text{mas, } \int_{A^e} dA = \Delta . \quad (3.23)$$

Substituindo (3.18) e (3.23) em (3.22), resulta :

$$[K_\psi]^e = \frac{2\pi \bar{R}}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} , \quad (3.24)$$

onde  $\bar{R}$  é dado pela equação (3.21).

### 3.3.2 - Desenvolvimento da matriz $\{F_\psi\}^e$

Para o presente trabalho, a superfície  $S_3$  é isolada termicamente, portanto  $q^e = 0$ , logo a equação (3.14b) reduz-se à seguinte equação :

$$\{F_\psi\}^e = - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\psi^e dV , \quad (3.25)$$

sendo  $Q_\psi^e$  dado pela equação (3.12a) e  $dV = 2\pi R dA$ , a equação (3.25) torna-se :

$$\begin{aligned} \{F_\psi\}^e &= - \int_{A^e} \left( \omega R - \frac{2}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) [N^e]^T 2\pi R dA = \\ &= -2\pi \left[ \int_{A^e} \omega R^2 [N^e]^T dA + \int_{A^e} -2 \frac{\partial \psi}{\partial R} [N^e]^T dA \right] . \end{aligned} \quad (3.26)$$

As duas integrais na equação (3.26), serão desenvolvidas separadamente, sendo :

$$I_1 = \int_{A^e} \omega R^2 [N^e]^T dA , \quad (3.27)$$

$$I_2 = -2 \int_{A^e} \frac{\partial \psi}{\partial R} [N^e]^T dA . \quad (3.28)$$

A equação (3.26) pode ser escrita da seguinte forma :

$$\{F_\psi\}^e = -2\pi[I_1 + I_2] . \quad (3.29)$$

### i-) Cálculo de $I_1$

Fazendo  $R^2 = \bar{R}^2$  e  $\omega = [N^e]\{\omega^e\}$ , a equação (3.27) pode ser escrita como sendo:

$$I_1 = \int_{A^e} \bar{R}^2 [N^e]^T [N^e] \{\omega^e\} dA . \quad (3.30)$$

Resolvendo os produtos das matrizes da equação (3.30), e utilizando a equação (7.34) da referência de Zienkiewicz (1971), que é dada por :

$$\int_{A^e} N_i^a N_j^b N_k^c dA = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta , \quad (3.31)$$

chega-se ao seguinte resultado:

$$I_1 = \frac{\bar{R}^2 \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} , \quad (3.32)$$

onde  $\bar{R}$  é dado pela equação (3.21).

### ii-) Cálculo de $I_2$

De acordo com a equação (3.11a), pode-se escrever que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{1}{2\Delta} (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) . \quad (3.33)$$

Portanto a equação (3.28), pode ser escrita como sendo :

$$I_2 = \frac{-2}{2\Delta} (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) \int_{A^e} [N^e]^T dA , \quad (3.34)$$

$$\text{mas, } \int_{A^e} [N^e]^T dA = \int_{A^e} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dA . \quad (3.35)$$

Integrando a equação (3.35) de acordo com a equação (3.31), e substituindo na equação (3.34), resulta:

$$I_2 = \frac{-(b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k)}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.36)$$

Portanto, os resultados obtidos para as equações (3.12) e (3.12a) da função corrente na forma matricial do elemento, são resumidamente os seguintes :

$$[K_\psi]^e \{\psi\}^e = -\{F_\psi\}^e, \quad (3.37)$$

onde:

$$[K_\psi]^e = \frac{2\pi \bar{R}}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$\{\psi\}^e = \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{Bmatrix}, e \quad (3.39)$$

$$\{F_\psi\}^e = -2\pi [I_1 + I_2], \quad (3.40)$$

sendo os valores de  $I_1$  e  $I_2$  calculados, respectivamente, pelas equações (3.32) e (3.36).

### 3.4 - Equação da Temperatura Adimensional na Forma Matricial

Da equação na forma geral (3.1) e dos valores apresentados na tabela 3.1, tem-se a seguinte equação da temperatura adimensional :

$$\frac{1}{Pr} \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \right] + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + Q_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (3.41)$$

onde  $Q_\theta$  é apresentado na equação (2.22a), como sendo :

$$Q_\theta = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial R} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right). \quad (3.41a)$$

No Apêndice C usando o método de Galerkin foi desenvolvida a equação geral (C.42) na forma matricial, resultando para a temperatura adimensional no elemento a seguinte expressão:

$$\left[ [K_\theta]^e + \frac{2}{\Delta \tau} [C]^e \right] \{\theta\}_{\text{novo}}^e = \frac{2}{\Delta \tau} [C]^e \{\theta\}_{\text{velho}}^e - \{F_\theta\}^e. \quad (3.42)$$

A equação (3.42) com  $\lambda = 1$  e  $D_r = D_x = \frac{1}{Pr}$ , tem as matrizes dos elementos dadas pelas equações (C.46), (C.32) e (C.33) :

$$[C]^e = \frac{2\pi\Delta}{60} \begin{bmatrix} (6R_i + 2R_j + 2R_k) & (2R_i + 2R_j + R_k) & (2R_i + R_j + 2R_k) \\ (2R_i + 2R_j + R_k) & (2R_i + 6R_j + 2R_k) & (R_i + 2R_j + 2R_k) \\ (2R_i + R_j + 2R_k) & (R_i + 2R_j + 2R_k) & (2R_i + 2R_j + 6R_k) \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

$$[K_\theta]^e = \frac{1}{Pr} \int_{V^e} [B^e]^T [B^e] dV, \quad (3.44)$$

$$\{F_\theta\}^e = - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\theta^e dV. \quad (3.45)$$

### 3.4.1 - Desenvolvimento da matriz $[K_\theta]^e$

A equação (3.44) é semelhante à equação (3.14a), com a diferença nos valores de  $D_r$  e  $D_x$ , portanto o resultado sofrerá uma pequena alteração em relação a equação (3.24). Logo tem-se a seguinte expressão para a matriz  $[K_\theta]^e$  :

$$[K_\theta]^e = \frac{1}{Pr} \frac{2\pi\bar{R}}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

onde  $\bar{R}$  é dado pela equação (3.21).

### 3.4.2 - Desenvolvimento da matriz $\{F_\theta\}^e$

Como para o presente trabalho tem-se  $q^e = 0$  na superfície  $S_3$ , a equação (3.45) reduz-se na seguinte equação :

$$\{F_\theta\}^e = - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\theta^e dV, \quad (3.47)$$

sendo  $Q_\theta^e$  dado pela equação (3.41a) e  $dV = 2\pi R dA$ , a equação (3.47) pode ser escrita como:

$$\{F_\theta\}^e = -2\pi \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial R} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \int_{A^e} [N^e]^T dA. \quad (3.48)$$

Fazendo :

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial R} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = Q_1, \quad (3.49a)$$

e de acordo com as equações (3.11a) e (3.11b), pode-se escrever que :

$$Q_1 = \frac{1}{4\Delta^2} \left[ (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k) - (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \theta_i + c_j \theta_j + c_k \theta_k) \right]. \quad (3.49b)$$

Substituindo (3.49a) em (3.48), vem :

$$\{F_\theta\}^e = -2\pi Q_1 \iint_{A^e} [N^e]^T dA = -2\pi Q_1 \int_{A^e} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dA. \quad (3.50)$$

Integrando a equação (3.50), usando a equação (3.31), resulta :

$$\{F_\theta\}^e = \frac{-2\pi\Delta Q_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.51)$$

onde  $Q_1$  é uma constante em cada elemento, dada pela equação (3.49b).

Portanto, os resultados obtidos para as equações (3.41) e (3.41a) da temperatura adimensional na forma matricial do elemento, são apresentados resumidamente na seguinte forma:

$$\left[ [K_\theta]^e + \frac{2}{\Delta\tau} [C]^e \right] \{\theta\}_{\text{nov}}^e = \frac{2}{\Delta\tau} [C]^e \{\theta\}_{\text{velho}}^e - \{F_\theta\}^e, \quad (3.52)$$

onde :

$$[K_\theta]^e = \frac{1}{Pr} \frac{2\pi\bar{R}}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

$$[C]^e = \frac{2\pi\Delta}{60} \begin{bmatrix} (6R_i + 2R_j + 2R_k) & (2R_i + 2R_j + R_k) & (2R_i + R_j + 2R_k) \\ (2R_i + 2R_j + R_k) & (2R_i + 6R_j + 2R_k) & (R_i + 2R_j + 2R_k) \\ (2R_i + R_j + 2R_k) & (R_i + 2R_j + 2R_k) & (2R_i + 2R_j + 6R_k) \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

$$\{F_\theta\}^e = \frac{-2\pi\Delta Q_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.55)$$

sendo o valor de  $Q_1$  calculado pela equação (3.49b).

### 3.5 - Equação da Vorticidade na Forma Matricial

Da equação na forma geral (3.1) e dos valores apresentados na tabela (3.1), tem-se a seguinte equação da vorticidade :

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \omega}{\partial R} \right) \right] + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + Q_\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} , \quad (3.56)$$

onde  $Q_\omega$  é dado pela equação (2.23a), como sendo :

$$Q_\omega = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial R} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) - \frac{\omega}{R^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} + 1 \right) - Gr \frac{\partial \theta}{\partial R} . \quad (3.56a)$$

No Apêndice C usando o método de Galerkin foi desenvolvido a equação geral (C.42) na forma matricial, resultando para a vorticidade no elemento a seguinte equação:

$$\left[ [K_\omega]^e + \frac{2}{\Delta \tau} [C]^e \right] \{\omega\}_{\text{nov}}^e = \frac{2}{\Delta \tau} [C]^e \{\omega\}_{\text{velho}}^e - \{F_\omega\}^e . \quad (3.57)$$

A equação (3.57) com  $\lambda = D_r = D_x = 1$  , tem as matrizes dos elementos dadas pelas equações (C.46), (C.32) e (C.33) :

$$[C]^e = \frac{2\pi\Delta}{60} \begin{bmatrix} (6R_i + 2R_j + 2R_k) & (2R_i + 2R_j + R_k) & (2R_i + R_j + 2R_k) \\ (2R_i + 2R_j + R_k) & (2R_i + 6R_j + 2R_k) & (R_i + 2R_j + 2R_k) \\ (2R_i + R_j + 2R_k) & (R_i + 2R_j + 2R_k) & (2R_i + 2R_j + 6R_k) \end{bmatrix} , \quad (3.58)$$

$$[K_\omega]^e = \iint_{V^e} [B^e]^T [B^e] dV , \quad (3.59)$$

$$\{F_\omega\}^e = - \iint_{A^e} [N^e]^T q^e dA - \iint_{V^e} [N^e]^T Q_\omega^e dV . \quad (3.60)$$

#### 3.5.1 - Desenvolvimento da matriz $[K_\omega]^e$

A resolução da equação (3.59) é obtida de modo semelhante àquele da equação (3.24), resultando :

$$[K_{\omega}]^e = \frac{2\pi\bar{R}}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

onde  $\bar{R}$  é dado pela equação (3.21).

### 3.5.2 - Desenvolvimento da matriz $\{F_{\omega}\}^e$

Para o presente trabalho, tem-se que  $q^e = 0$  na superfície  $S_3$ , portanto a equação (3.60) reduz-se a :

$$\{F_{\omega}\}^e = - \int_{V^e} [N^e]^T Q_{\omega}^e dV, \quad (3.62)$$

sendo  $Q_{\omega}^e$  dado pela equação (3.56a) e  $dV = 2\pi R dA$ , a equação (3.62) pode ser escrita como:

$$\{F_{\omega}\}^e = -2\pi \left[ \int_{A^e} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial R} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) [N^e]^T dA - \int_{A^e} \frac{\omega}{R} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} + 1 \right) [N^e]^T dA - \int_{A^e} GrR \frac{\partial \theta}{\partial R} [N^e]^T dA \right] \quad (3.63)$$

As três integrais da equação (3.63) serão calculadas separadamente, fazendo :

$$I_3 = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial R} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) \int_{A^e} [N^e]^T dA, \quad (3.64a)$$

$$I_4 = \frac{1}{\bar{R}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} + 1 \right) \int_{A^e} \omega [N^e]^T dA, \quad (3.64b)$$

$$I_5 = Gr \frac{\partial \theta}{\partial R} \int_{A^e} [N^e]^T R dA. \quad (3.64c)$$

Logo a equação (3.63) pode ser escrita como sendo :

$$\{F_{\omega}\}^e = -2\pi [I_3 - I_4 - I_5]. \quad (3.65)$$

#### i-) Cálculo de $I_3$

Fazendo :

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial R} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) = Q_2, \quad (3.66a)$$

e de acordo com as equações (3.11a) e (3.11b), pode-se escrever que :

$$Q_2 = \frac{1}{4\Delta^2} \left[ (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) (b_i \omega_i + b_j \omega_j + b_k \omega_k) - (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k) (c_i \omega_i + c_j \omega_j + c_k \omega_k) \right] \quad (3.66b)$$

Das equações (3.64a) e (3.66a), vem :

$$I_3 = Q_2 \int_{A^e} [N^e]^T dA = Q_2 \int_{A^e} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dA . \quad (3.67)$$

Integrando a equação (3.67) usando a equação (3.31), resulta :

$$I_3 = \frac{Q_2 \Delta}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} , \quad (3.68)$$

onde  $Q_2$  é uma constante em cada elemento, dado pela equação (3.66).

## ii-) Cálculo de $I_4$

Fazendo :

$$Q_3 = \frac{1}{\bar{R}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} + 1 \right) = \frac{1}{\bar{R}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} + 1 \right) , \quad (3.69)$$

$$\text{onde } \bar{R} = (R_i + R_j + R_k) / 3 . \quad (3.69a)$$

De (3.69) e (3.11b), pode-se escrever que :

$$Q_3 = \frac{1}{\bar{R}} \left[ \frac{1}{2\Delta} (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k) + 1 \right] \quad (3.70)$$

Como  $\omega = [N^e] \{ \omega^e \}$ , a integral da equação (3.64b), torna-se :

$$\begin{aligned} I_4 &= Q_3 \int_{A^e} [N^e]^T [N^e] \{ \omega^e \} dA = Q_3 \int_{A^e} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} dA = \\ &= Q_3 \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j N_j & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} dA . \end{aligned} \quad (3.71)$$

Integrando a equação (3.71) usando a equação (3.31), resulta :

$$I_4 = \frac{Q_3 \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} , \quad (3.72)$$

onde  $Q_3$  é uma constante em cada elemento, dado pela equação (3.70).

### iii-) Cálculo de $I_5$

Fazendo :

$$Q_4 = Gr \frac{\partial \theta}{\partial R} . \quad (3.73)$$

Das equações (3.73) e (3.11a), vem que :

$$Q_4 = \frac{Gr}{2\Delta} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k) . \quad (3.73a)$$

E de forma análoga a equação (3.71), pode-se escrever que :

$$I_5 = Q_4 \iint_{A^e} [N^e]^T R \, dA = Q_4 \iint_{A^e} [N^e]^T [N^e] \{R^e\} \, dA . \quad (3.74)$$

Integrando (3.74) usando a equação (3.31), resulta :

$$I_5 = \frac{Q_4 \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix} , \quad (3.75)$$

onde  $Q_4$  é uma constante em cada elemento, dado pela equação (3.73).

Os resultados obtidos para as equações (3.56) e (3.56a) da vorticidade na forma matricial do elemento, são apresentados resumidamente na seguinte forma :

$$\left[ [K_\omega]^e + \frac{2}{\Delta\tau} [C]^e \right] \{\omega\}_{\text{nov}}^e = \frac{2}{\Delta\tau} [C]^e \{\omega\}_{\text{velho}}^e - \{F_\omega\}^e , \quad (3.76)$$

onde :

$$[K_\omega]^e = \frac{2\pi\bar{R}}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} , \quad (3.77)$$

$$[C]^e = \frac{2\pi\Delta}{60} \begin{bmatrix} (6R_i + 2R_j + 2R_k) & (2R_i + 2R_j + R_k) & (2R_i + R_j + 2R_k) \\ (2R_i + 2R_j + R_k) & (2R_i + 6R_j + 2R_k) & (R_i + 2R_j + 2R_k) \\ (2R_i + R_j + 2R_k) & (R_i + 2R_j + 2R_k) & (2R_i + 2R_j + 6R_k) \end{bmatrix} , \quad (3.78)$$

$$\{F_\omega\}^e = -2\pi [I_3 - I_4 - I_5] . \quad (3.79)$$

Sendo os valores de  $I_3$ ,  $I_4$  e  $I_5$  calculados, respectivamente pelas equações (3.68), (3.72) e (3.75).

### 3.6 - Algoritmo do Programa Computacional

O Apêndice C mostra como as matrizes globais podem ser formadas a partir das equações dos elementos (3.14), (3.42) e (3.57), das quais podem ser escritas, respectivamente, as seguintes matrizes globais:

$$[K_\psi] \{\psi\} = -\{F_\psi\}, \quad (3.80)$$

$$\left[ [K_\theta] + \frac{2}{\Delta\tau} [C] \right] \{\theta\}_{\text{nov}} = \frac{2}{\Delta\tau} [C] \{\theta\}_{\text{vel}} - \{F_\theta\}, \quad (3.81)$$

$$\left[ [K_\omega] + \frac{2}{\Delta\tau} [C] \right] \{\omega\}_{\text{nov}} = \frac{2}{\Delta\tau} [C] \{\omega\}_{\text{vel}} - \{F_\omega\}. \quad (3.82)$$

As equações (3.80), (3.81) e (3.82) podem ser escritas de forma compacta, respectivamente, ficam:

$$\left[ \tilde{K}_\psi \right] \{\psi\}^\tau = \left\{ \tilde{F}_\psi \left( \omega^{\tau-\Delta\tau}, \psi^{\tau-\Delta\tau} \right) \right\}, \quad (3.80a)$$

$$\left[ \tilde{K}_\theta \right] \{\theta\}^\tau = \left\{ \tilde{F}_\theta \left( \psi^\tau, \theta^{\tau-\Delta\tau} \right) \right\}, \quad (3.81a)$$

$$\left[ \tilde{K}_\omega \right] \{\omega\}^\tau = \left\{ \tilde{F}_\omega \left( \psi^\tau, \theta^\tau, \omega^{\tau-\Delta\tau} \right) \right\}. \quad (3.82a)$$

As equações (3.80a), (3.81a) e (3.82a) formam um sistema de equações lineares acopladas. Para resolver estas equações foi desenvolvido um programa computacional com o objetivo de obter as distribuições das funções  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\omega$  e calcular o número de Nusselt local e médio em função dos parâmetros geométricos e térmicos discutidos no item 2.3.

As equações (3.80a), (3.81a) e (3.82a) serão resolvidas individualmente numa seqüência que será comentada brevemente.

As matrizes  $\left[ \tilde{K}_\psi \right]$ ,  $\left[ \tilde{K}_\theta \right]$  e  $\left[ \tilde{K}_\omega \right]$  tem seus coeficientes mantidos constantes, porque o intervalo de tempo  $\Delta\tau$  será um parâmetro de entrada de dados, e assume um valor fixo para cada corrida. Essas matrizes são simétricas e de banda.

Os coeficientes de cada matriz que compõem a diagonal principal e as diagonais superiores não nulas, são armazenadas na forma de uma matriz coluna. Com este artifício é possível reduzir a área de armazenamento e o tempo de cálculo computacional.

As matrizes  $\{\psi\}^\tau$ ,  $\{\theta\}^\tau$  e  $\{\omega\}^\tau$  são as incógnitas e devem ser calculadas para cada tempo  $\tau$ .

A matriz  $\left\{ \tilde{F}_\psi \left( \omega^{\tau-\Delta\tau}, \psi^{\tau-\Delta\tau} \right) \right\}$  possui coeficientes que são dependentes da vorticidade

$\omega$  e função corrente  $\psi$ , sendo essas avaliadas para o tempo  $\tau - \Delta\tau$ .

Já a matriz  $\left\{ \tilde{F}_\theta \left( \psi^\tau, \theta^{\tau-\Delta\tau} \right) \right\}$  possui seus coeficientes dependentes da função corrente

$\psi$  e temperatura adimensional  $\theta$ , sendo essas avaliadas, respectivamente, para os tempos  $\tau$  e  $\tau - \Delta\tau$ . A matriz  $\left\{ \tilde{F}_\omega \left( \psi^\tau, \theta^\tau, \omega^{\tau-\Delta\tau} \right) \right\}$  tem as mesmas interpretações que às anteriores e indicam a dependência das variáveis  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$  com tempo para a qual elas devem ser avaliadas.

Na figura 3.3 tem-se o fluxograma do programa computacional. A seguir será descrito todos os passos e alguns detalhes de cada bloco do fluxograma.

#### 1-) Leitura de dados ( bloco 1 )

Os dados lidos inicialmente no programa computacional são:

- a-) razão de aspecto;
- b-) razão de raios;
- c-) número de pontos na direção R;
- d-) número de pontos na direção X;
- e-) número de Prandtl;
- f-) número de Grashof;
- g-) intervalo de tempo;
- h-) número máximo de iterações.



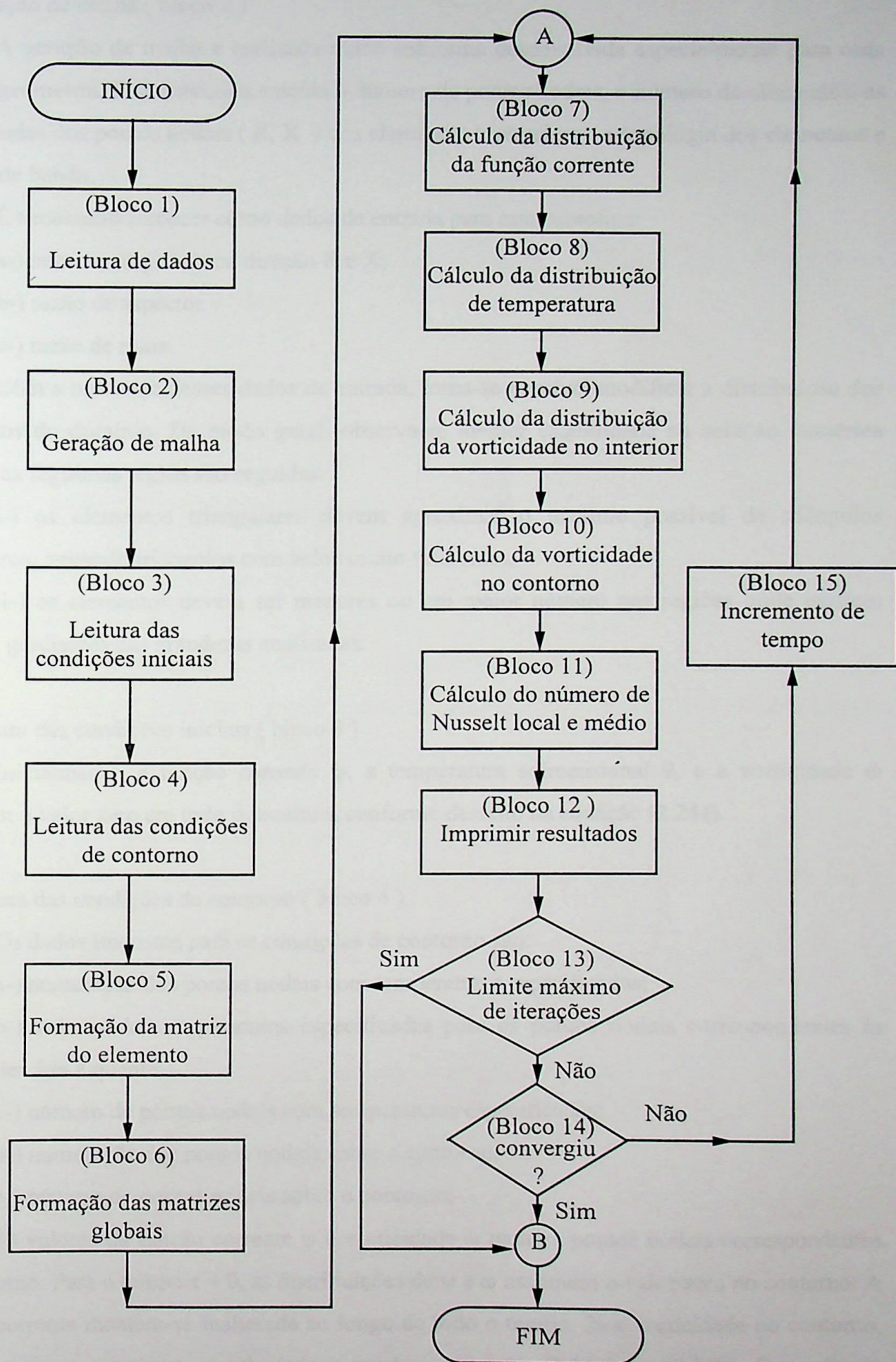


Figura 3.3 - Fluxograma do programa computacional

## 2-) Geração de malha ( bloco 2 )

A geração de malha é realizada numa subrotina desenvolvida especialmente para cada tipo de geometria. Esta subrotina calcula o número de pontos nodais, o número de elementos, as coordenadas dos pontos nodais (  $R, X$  ) dos elementos triangulares, a topologia dos elementos e largura de banda.

É necessário fornecer como dados de entrada para esta subrotina:

- a-) número de pontos na direção  $R$  e  $X$ ;
- b-) razão de aspecto;
- c-) razão de raios.

Com a mudança desses dados de entrada, torna-se possível modificar a distribuição dos elementos do domínio. De modo geral, observa-se melhor estabilidade na solução numérica quando as seguintes regras são seguidas:

- i-) os elementos triangulares devem aproximar o máximo possível de triângulos equiláteros, evitando triângulos com lados muito diferentes;
- ii-) os elementos devem ser menores ou em maior número nas regiões onde existem maiores gradientes das grandezas analisadas.

## 3-) Leitura das condições iniciais ( bloco 3 )

Inicialmente, a função corrente  $\psi$ , a temperatura adimensional  $\theta$ , e a vorticidade  $\omega$  assumem o valor zero em todo o domínio, conforme descrito na equação (2.24a).

## 4-) Leitura das condições de contorno ( bloco 4 )

Os dados impostos para as condições de contorno são:

- a-) numeração dos pontos nodais com temperaturas especificadas;
- b-) valores das temperaturas especificadas para os pontos nodais correspondentes às superfícies fria e quente;
- c-) número de pontos nodais com temperaturas especificadas;
- d-) numeração dos pontos nodais sobre o contorno;
- e-) número de pontos nodais sobre o contorno;
- f-) valores da função corrente  $\psi$  e vorticidade  $\omega$  para os pontos nodais correspondentes do contorno. Para o tempo  $\tau = 0$ , as distribuições de  $\psi$  e  $\omega$  assumem o valor zero no contorno. A função corrente mantém-se inalterada ao longo de todo o tempo. Já a vorticidade no contorno, para os tempos seguintes, é calculada segundo a equação (2.24g) ou (2.24h). Este cálculo encontra-se descrito no bloco 10.

### 5-) Formação das matrizes dos elementos ( bloco 5 )

As matrizes dos elementos são formadas pelas equações: (3.38), (3.39), (3.40), (3.53), (3.54), (3.55), (3.77), (3.78) e (3.79).

### 6-) Formação das matrizes globais ( bloco 6 )

As matrizes globais são formadas pelas equações: (3.80), (3.81) e (3.82) ou na sua forma compacta (3.80a), (3.81a) e (3.82a).

### 7-) Cálculo da distribuição da função corrente ( bloco 7 )

Resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela equação (3.80a), obtém-se a distribuição da função corrente  $\psi$ , para o tempo  $\tau$ . A matriz  $\left\{ \tilde{F}_\psi(\omega^{\tau-\Delta\tau}, \psi^{\tau-\Delta\tau}) \right\}$  tem seus coeficientes que são dependentes da vorticidade  $\omega$  e função corrente  $\psi$ , as quais devem ser avaliadas, para o tempo  $\tau - \Delta\tau$ .

Na solução da equação (3.80a) é imposta a condição de contorno dada pela equação (3.1a), isto é, a função corrente assume o valor nulo junto ao contorno. A condição de contorno expressa pela equação (3.1b), sendo natural, não precisa ser aplicada.

### 8-) Cálculo da distribuição da temperatura adimensional ( bloco 8 )

Resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela equação (3.81a), obtém-se a distribuição da temperatura adimensional  $\theta$ , para o tempo  $\tau$ . A matriz  $\left\{ \tilde{F}_\theta(\psi^\tau, \theta^{\tau-\Delta\tau}) \right\}$  tem seus coeficientes que são dependentes da função corrente  $\psi$  e temperatura adimensional  $\theta$ , onde  $\psi$  e  $\theta$  devem ser avaliadas, respectivamente, para os tempos  $\tau$  e  $\tau - \Delta\tau$ .

### 9-) Cálculo da distribuição da vorticidade no interior ( bloco 9 )

Resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela equação (3.82a), obtém-se a distribuição da vorticidade no interior, para o tempo  $\tau$ . A matriz  $\left\{ \tilde{F}_\omega(\psi^\tau, \theta^\tau, \omega^{\tau-\Delta\tau}) \right\}$  tem seus coeficientes que são dependentes de  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , onde  $\psi$  e  $\theta$  devem ser avaliadas para o tempo  $\tau$  e  $\omega$  para o tempo  $\tau - \Delta\tau$ .

Na solução da equação (3.82a) consideram-se conhecidas as vorticidades nos pontos nodais do contorno.

#### 10-) Cálculo da vorticidade no contorno ( bloco 10 )

Da equação (2.24g) ou (2.24h) obtém-se a vorticidade do fluido nos pontos nodais do contorno. Onde  $\psi_0$  e  $\omega_0$  representam, respectivamente, valores da função corrente e vorticidade num ponto situado a pequena distância  $\delta$  do contorno, sendo avaliadas para o tempo  $\tau$ .

#### 11-) Cálculo do número de Nusselt local e médio ( bloco 11 )

Aplicando a equação (2.25) é possível determinar os números de Nusselt locais para as superfícies  $S_1$  e  $S_2$ . Os números de Nusselt médios para as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  são calculados através da equação (2.26).

Substituindo (3.11a) e (3.11b) em (2.25) resulta-se no seguinte número de Nusselt local para as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  :

$$Nu_L = \frac{1}{4\Delta} \sqrt{(b_i\theta_i + b_j\theta_j + b_k\theta_k)^2 + (c_i\theta_i + c_j\theta_j + c_k\theta_k)^2} . \quad (3.83)$$

O número de Nusselt médio para as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  é calculado integrando a equação (2.26) através da regra de Simpson.

#### 12-) Imprimir resultados ( bloco 12 )

Os resultados para as distribuições de  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\omega$ , bem como os números de Nusselt local e médio podem ser impressos para cada iteração, ou seja, para cada tempo  $\tau$ .

#### 13-) Verificação do limite máximo de iterações ( bloco 13 )

O programa computacional verifica se o número de iterações atingiu o número máximo de iterações, valor este fornecido na leitura de dados ( bloco 1 ). Quando a igualdade é atingida o processo de cálculo é interrompido.

#### 14-) Verificação de convergência ( bloco 14 )

Conclui-se que houve convergência ou que se atingiu o regime permanente, quando o seguinte critério é estabelecido:

$$\sum_{i=1}^n \left[ Nu^{\tau} - Nu^{\tau - \Delta\tau} \right] \leq 10^{-4}, \quad (3.84)$$

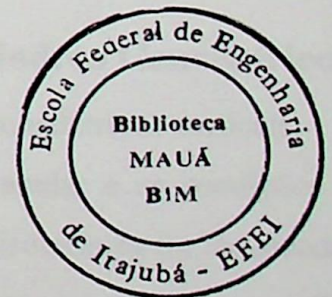
onde a somatória representa a soma dos n últimos valores de iteração. Na maioria dos casos estudados adotou-se  $100 \leq n \leq 200$ .

#### 15-) Incremento de tempo ( bloco 15 )

Se o critério dado na equação (3.84) for obedecido, o processo de cálculo é interrompido. Caso contrário, o tempo é incrementado e o processo de cálculo é iniciado a partir de A ( Vide fluxograma figura 3.3 ).

Os cálculos apresentados neste trabalho foram realizados num microcomputador PENTIUM 166 MHz com 32 Mb de memória RAM, usando o compilador FORTRAN Power Station 1.0.

No capítulo seguinte serão apresentados os testes de comparações do programa computacional para a geometria anular entre dois cilindros concêntricos verticais. Os resultados serão comparados com os encontrados na literatura. Após a avaliação do programa computacional serão obtidos os resultados para os casos 1 e 2 do presente trabalho.



## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS

#### 4.1 - Introdução

Neste capítulo serão apresentados os resultados referentes à convecção natural em geometrias axissimétricas arbitrárias, utilizando o método de elementos finitos.

Serão apresentadas as distribuições da função corrente  $\psi$  e temperatura adimensional  $\theta$ , bem como os valores do número de Nusselt local  $Nu_L$  e dos números de Nusselt médio da superfície fria  $Nu_C$  e da superfície quente  $Nu_H$ , em função dos parâmetros térmicos e geométricos, para os dois casos estudados.

Inicialmente, o programa computacional desenvolvido será testado para a cavidade anular de dois cilindros concêntricos verticais, comparando-se os resultados com aqueles encontrados na literatura. A comparação será feita com o número de Nusselt médio da superfície quente  $Nu_H$ , em função dos diversos parâmetros. Após a validação do modelo serão obtidos os resultados para os casos 1 e 2 do presente trabalho.

#### 4.2 - Comparação de Resultados para a Cavidade de Cilindros Concêntricos

A figura 4.1 mostra a forma tridimensional dos dois cilindros concêntricos verticais.

A figura 4.2 mostra o domínio computacional da cavidade anular e as condições de contorno utilizadas no teste do programa computacional. A superfície isotérmica  $S_1$ , localizada a uma distância  $RI$  do centro da geometria, é mantida a uma temperatura quente  $T_h$ ; a superfície isotérmica  $S_2$ , situada a uma distância  $RE$  do centro da geometria, é mantida a uma temperatura fria  $T_c$ ; e as superfícies horizontais  $S_3$  encontram-se isoladas termicamente, não havendo fluxo de calor através delas.

A figura 4.3 mostra a malha ( $MR \times MX$ ) gerada na subrotina do programa computacional para obter os resultados da cavidade anular. Onde  $MR$  é o número de intervalos na direção  $R$  e  $MX$  representa o número de intervalos na direção  $X$ .

As figuras 4.4a e 4.4b mostram a influência do número de elementos (de 72 a 1058 elementos) para o cálculo do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_H$ . Estudo este,

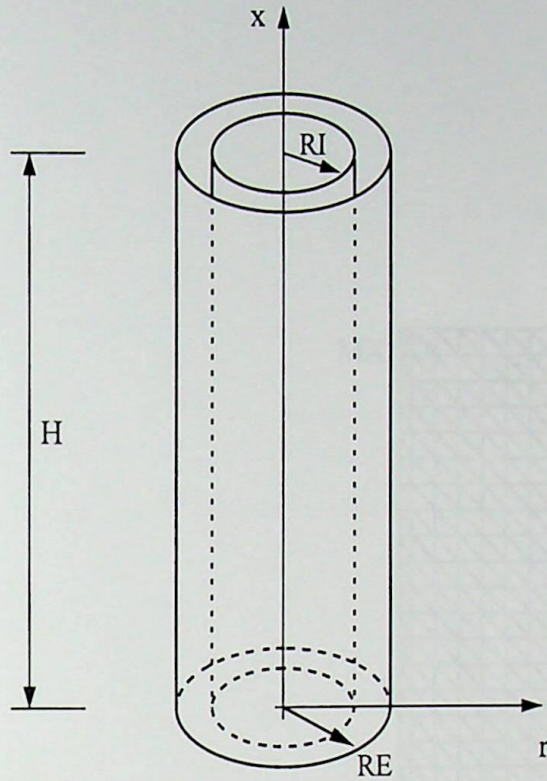


Figura 4.1 - Forma tridimensional dos cilindros concêntricos verticais

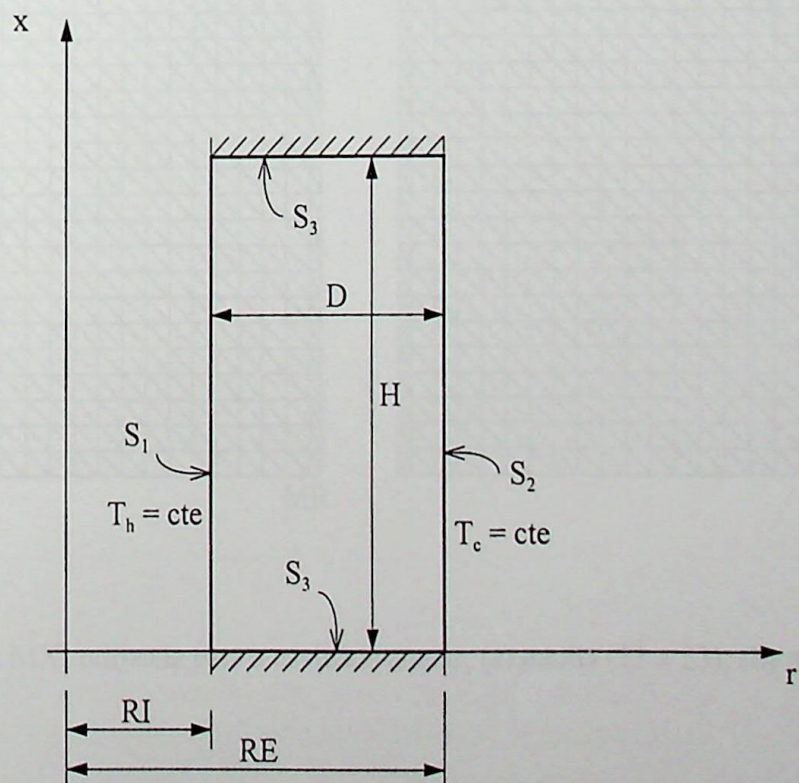


Figura 4.2 - Cavidade anular e as condições de contorno

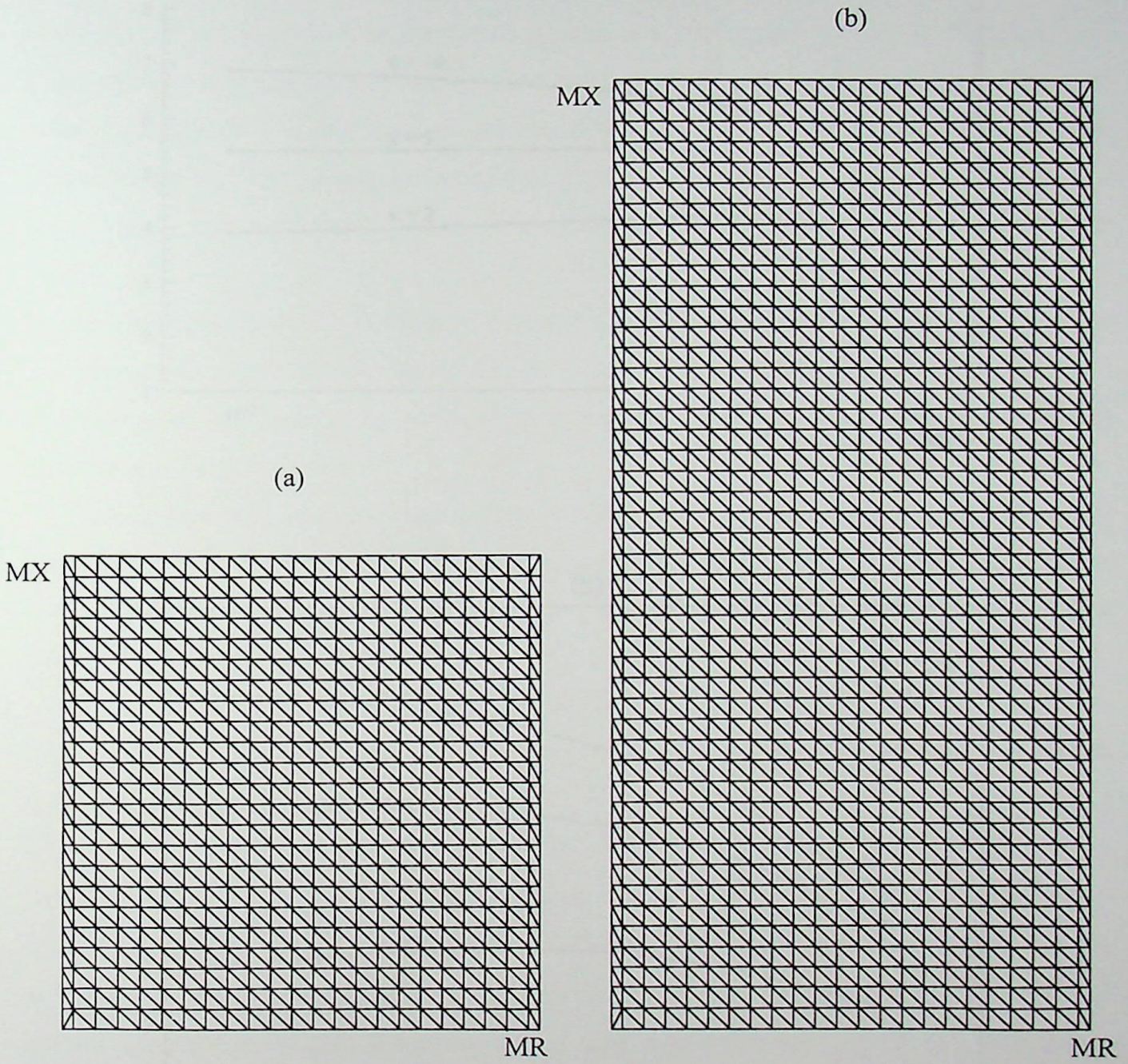


Figura 4.3 - Malha (MR x MX) utilizada para a cavidade anular; (a) malha (23 x 23); (b) malha (23x46)

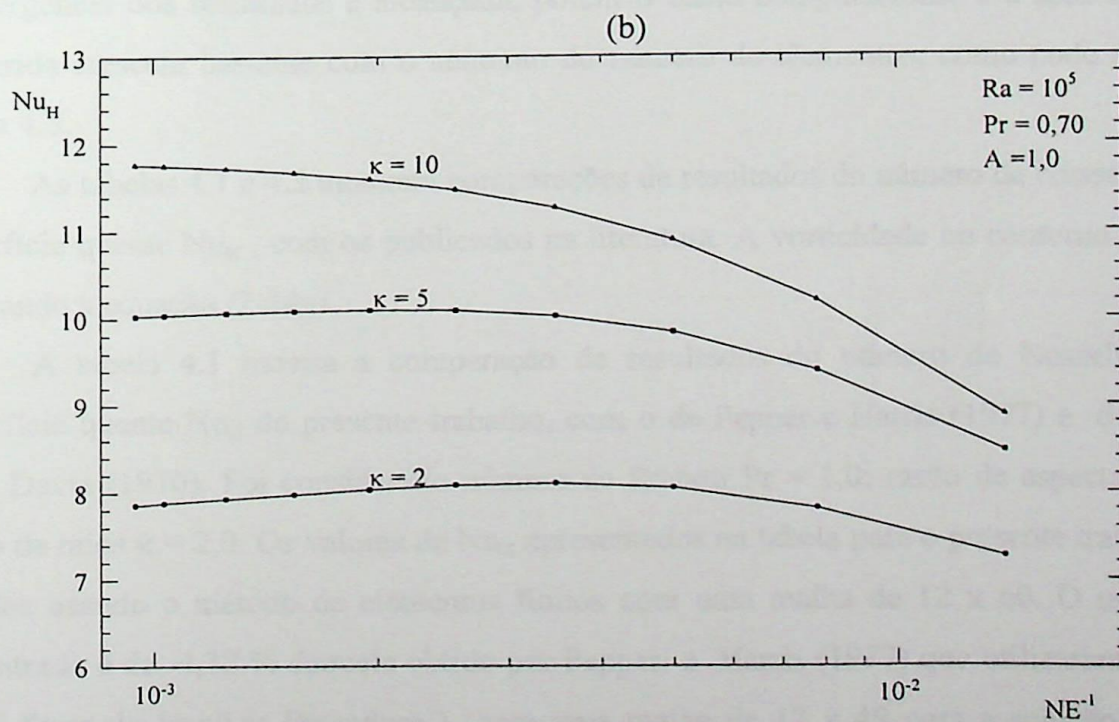
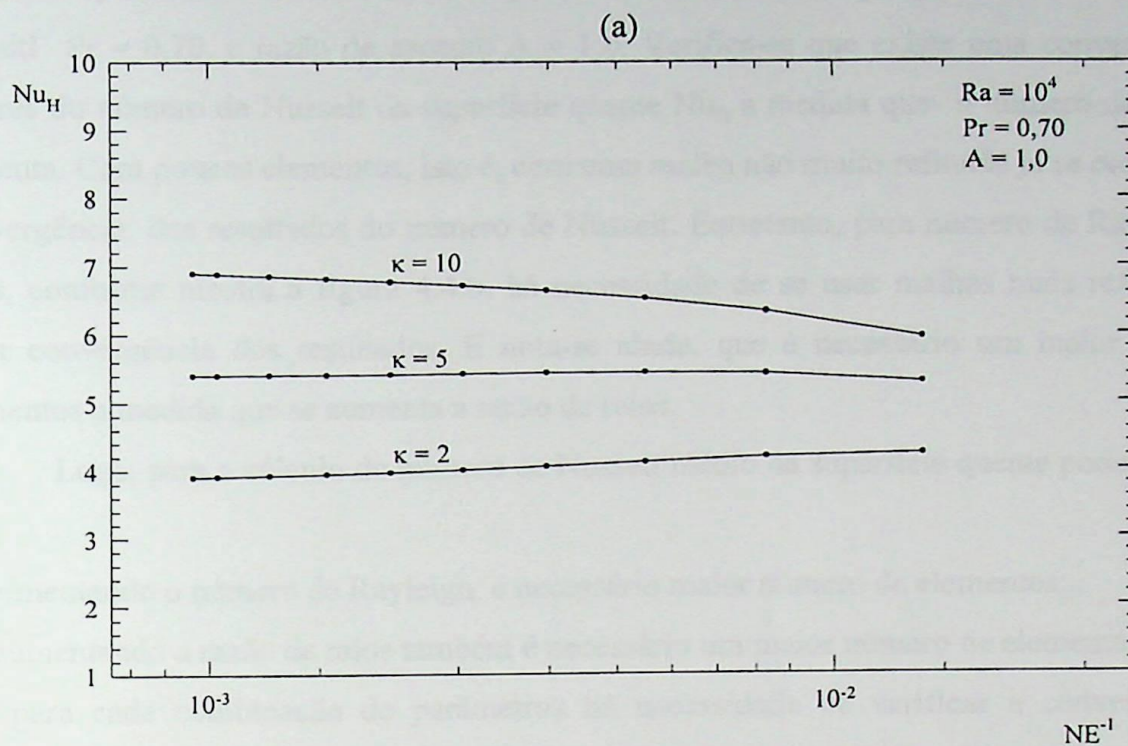


Figura 4.4 - Influência do número de elementos e da razão de raios no número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_H$ ; (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

feito para a cavidade e condições de contorno dadas pela figura 4.2. A figura 4.4a apresenta as curvas para razão de raios de  $\kappa = 2; 5$  e  $10$ , número de Rayleigh  $Ra = 10^4$ , número de Prandtl  $Pr = 0,70$ , e razão de aspecto  $A = 1,0$ . Verifica-se que existe uma convergência dos valores do número de Nusselt da superfície quente  $Nu_H$  a medida que o número de elementos aumenta. Com poucos elementos, isto é, com uma malha não muito refinada já se consegue uma convergência dos resultados do número de Nusselt. Entretanto, para número de Rayleigh mais altos, conforme mostra a figura 4.4.b, há necessidade de se usar malhas mais refinadas para obter convergência dos resultados. E nota-se ainda, que é necessário um maior número de elementos a medida que se aumenta a razão de raios.

Logo, para o cálculo do número de Nusselt médio da superfície quente pode-se concluir que:

- i-) aumentando o número de Rayleigh é necessário maior número de elementos;
- ii-) aumentando a razão de raios também é necessário um maior número de elementos;
- iii-) para cada combinação de parâmetros há necessidade de verificar a convergência dos resultados do  $Nu_H$ .

É importante notar que, quanto maior o número de elementos utilizados nos cálculos, a convergência dos resultados é alcançada, porém o custo computacional e a área de memória requerida crescem bastante com o aumento do número de elementos, como pode ser visto na figura 4.5.

As tabelas 4.1 e 4.2 mostram comparações de resultados do número de Nusselt médio da superfície quente  $Nu_H$ , com os publicados na literatura. A vorticidade no contorno é calculada utilizando a equação (2.24g).

A tabela 4.1 mostra a comparação de resultados do número de Nusselt médio da superfície quente  $Nu_H$  do presente trabalho, com o de Pepper e Harris (1977) e de Thomas e Vahl Davis (1970). Foi considerado número de Prandtl  $Pr = 1,0$ ; razão de aspecto  $A = 5,0$  e razão de raios  $\kappa = 2,0$ . Os valores de  $Nu_H$  apresentados na tabela para o presente trabalho foram obtidos usando o método de elementos finitos com uma malha de  $12 \times 60$ . O maior desvio encontrado é de  $-4,32\%$  daquele obtido por Pepper e Harris (1977) que utilizaram o esquema SIP ( Strongly Implicit Procedure ) com uma malha de  $17 \times 49$  para a solução do método numérico. Os valores  $Nu_H$  de Pepper e Harris (1977) apresentados na tabela, foram tirados de gráficos. Em outra comparação apresentada na tabela 4.1 tem-se um maior desvio no  $Nu_H$  de  $-4,53\%$  daquele valor dado pela equação de correlação de Thomas e Vahl Davis (1970). A tabela 4.2 mostra a comparação de resultados do número de Nusselt médio da superfície quente  $Nu_H$  do presente trabalho com os valores obtidos por Kumar e Kalam (1991). As

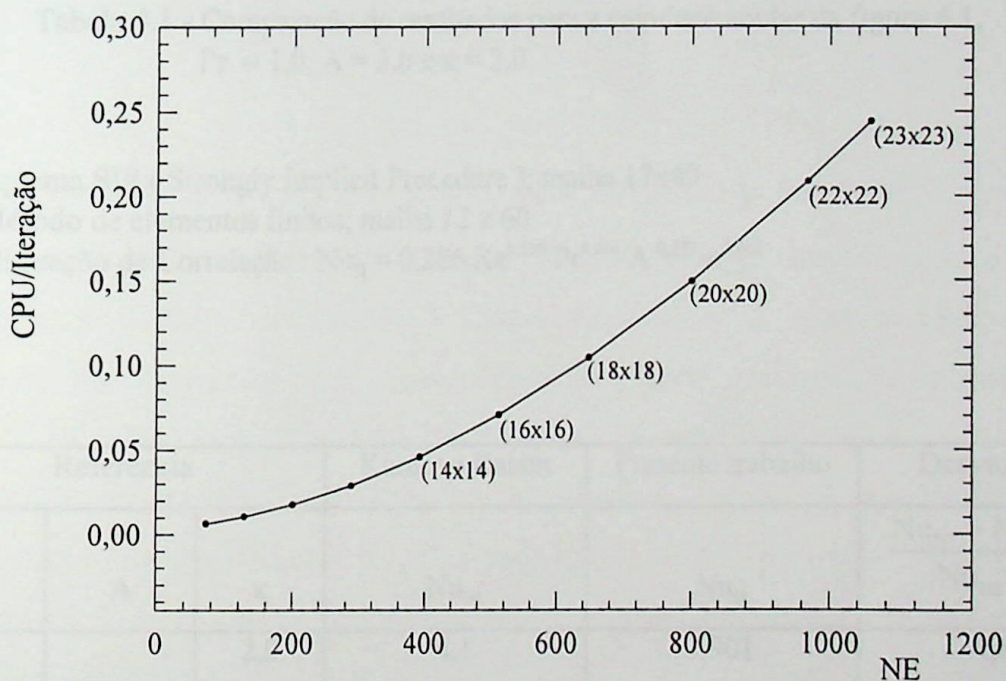


Figura 4.5 - Tempo de processamento em segundos/iteração versus o número de elementos

Referência	Pepper e Harris	Presente trabalho		Thomas e Vahl Davis	Presente trabalho	
	$Nu_H$ *	$Nu_H$ **	Desvio [ % ]	$Nu_H$ ***	$Nu_H$ **	Desvio [ % ]
$10^4$	2,8	2,862	-2,21	2,7994	2,862	-2,24
$2 \times 10^4$	3,4	3,479	-2,32	3,3429	3,479	-4,07
$3 \times 10^4$	3,8	3,876	-2,00	3,7086	3,876	-4,51
$4 \times 10^4$	4,0	4,173	-4,32	3,992	4,173	-4,53
$5 \times 10^4$	4,3	4,413	-2,63	4,2267	4,413	-4,41
$8 \times 10^4$	5,0	4,957	0,86	4,7671	4,957	-3,98
$10^5$	5,3	5,237	1,19	5,04738	5,237	-3,76

Tabela 4.1 - Comparação de resultados para a cavidade anular da figura 4.1,  $Pr = 1,0$ ;  $A = 5,0$  e  $\kappa = 2,0$

\* Esquema SIP ( Strongly Implicit Procedure ); malha 17x49

\*\* Método de elementos finitos; malha 12 x 60

\*\*\* Equação de Correlação :  $Nu_H = 0,286 Ra^{0,256} Pr^{0,006} A^{-0,238} \kappa^{0,442}$

Referência			Kumar e Kalam	Presente trabalho	Desvio [ % ]
Ra	A	$\kappa$	$Nu_{Hi}$	$Nu_H$	$\frac{Nu_{Hi} - Nu_H}{Nu_{Hi}} \times 100$
$10^4$	1,0	2,0	4,1	3,901	4,85
		5,0	5,4	5,399	0,018
		10,0	7,1	6,898	2,84
	5,0	2,0	3,4	3,428	-0,82
	10,0		2,8	2,870	-2,50
$10^5$	1,0	2,0	7,9	7,853	0,59
		5,0	10,0	10,029	-0,29
		10,0	12,2	11,773	3,50
	5,0	2,0	6,1	6,152	-0,85
	10,0		5,3	5,238	1,17

Tabela 4.2 - Comparação de resultados para a cavidade anular da figura 4.1;  $Pr = 0,70$

comparações foram feitas usando número de Prandtl  $Pr = 0,70$ , número de Rayleigh de  $10^4$  e  $10^5$ , e uma série de combinações envolvendo a razão de aspecto e a razão de raios. As malhas usadas para o presente trabalho variam de acordo com a razão de aspecto. Para  $A = 1,0$  foi usada uma malha  $23 \times 23$ ; para  $A = 5,0$  uma malha de  $12 \times 60$  e para  $A = 10,0$  foi usada uma malha de  $9 \times 90$ . O método numérico empregado por Kumar e Kalam (1991) foi baseado no falso transiente e no ADI ( Alternating Direction Implicit ), e foram utilizadas diversas malhas:  $21 \times 21$ ,  $26 \times 26$ ,  $27 \times 41$ ,  $41 \times 41$  e  $27 \times 97$ . O maior desvio encontrado é de 4,85%.

Apesar de alguns desvios apresentados na tabela 4.1 serem maiores que os desvios da tabela 4.2, no geral os resultados podem ser considerados bons. Desta forma, os testes realizados no programa computacional são satisfatórios.

A seguir, serão apresentados os resultados obtidos com o programa computacional para as geometrias dos casos 1 e 2.

### 4.3 - Resultados do Presente Trabalho para a Cavidade Semi - Esférica

Neste item é estudada a transferência de calor por convecção natural no interior de uma cavidade semi - esférica, denominada, de Caso 1. Considera-se o regime não permanente e permanente e o escoamento como sendo bidimensional. Serão analisadas as seguintes faixas:  $2 \leq \kappa \leq 4$ ;  $10^4 \leq Ra \leq 10^5$  e o número de Prandtl  $Pr$  será fixado em 0,70.

A figura 4.6 mostra a cavidade semi-esférica, onde  $S_1$  representa a superfície isotérmica quente mantida na temperatura  $\theta = 1$ ,  $S_2$  representa a superfície isotérmica fria mantida na temperatura  $\theta = -1$ , e  $S_3$  são as superfícies mantidas isoladas termicamente, não havendo fluxo de calor através delas.

A figura 4.7 mostra as malhas de elementos finitos com 450 elementos para a razão de raios  $\kappa = 2,0$  e malhas com 378 elementos para a razão de raios  $\kappa = 3,0$  e 4,0.

As figuras 4.8a a 4.8c mostram o número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_H$  versus o número de elementos para diferentes razão de raios. As curvas apresentadas são para número de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ . Foram utilizados as malhas com 342, 378, 414 e 450 elementos para  $\kappa = 2,0$ ; e as malhas com 294, 322, 350 e 378 elementos para  $\kappa = 3,0$  e 4,0. Nas figuras 4.8a a 4.8c nota-se a convergência dos valores do número de Nusselt médio na superfície quente a medida que o número de elementos aumenta.

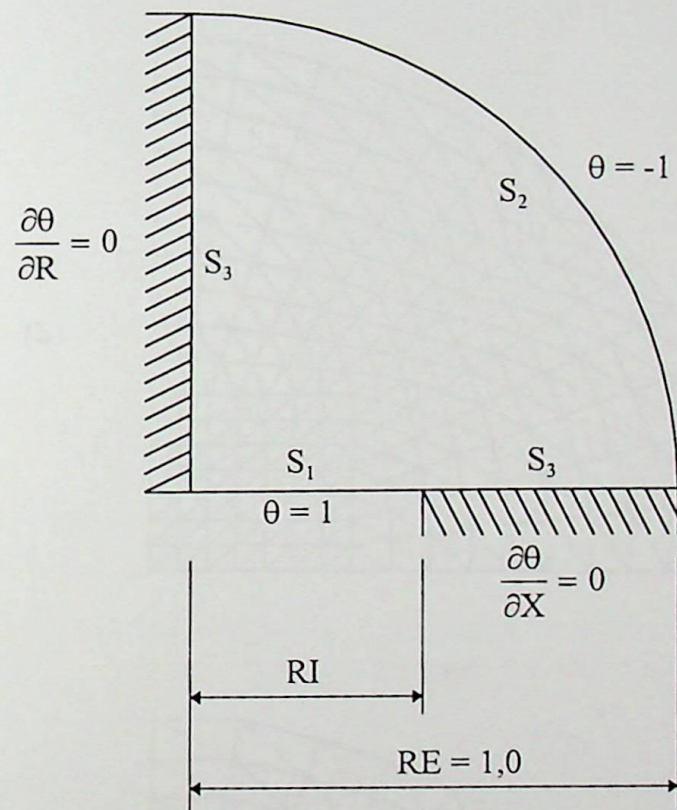


Figura 4.6 - Cavidade semi - esférica e as condições de contorno

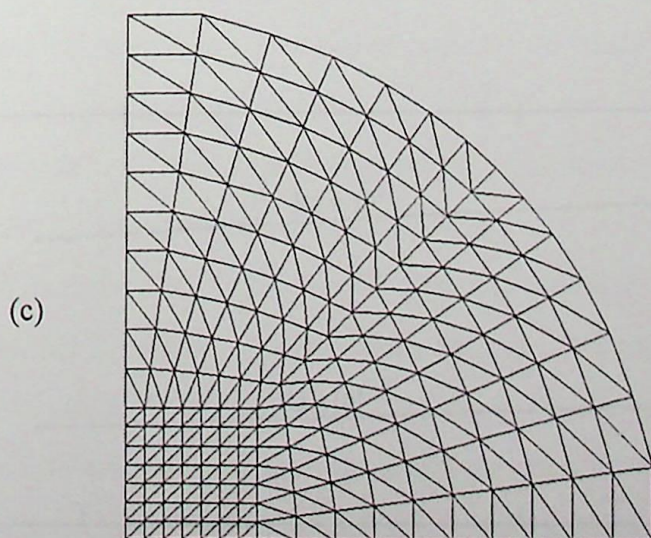
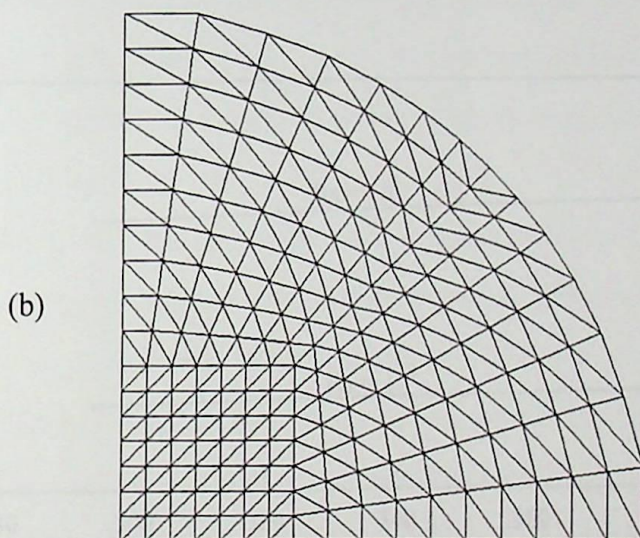
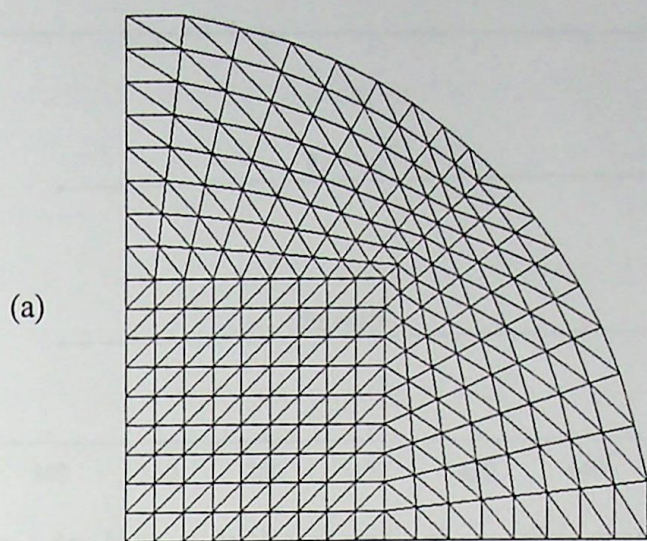


Figura 4.7 - Malhas utilizadas, (a)  $\kappa = 2,0$ ; NE = 450 elementos; (b)  $\kappa = 3,0$ ; NE = 378; (c)  $\kappa = 4,0$ ; NE = 378 elementos.

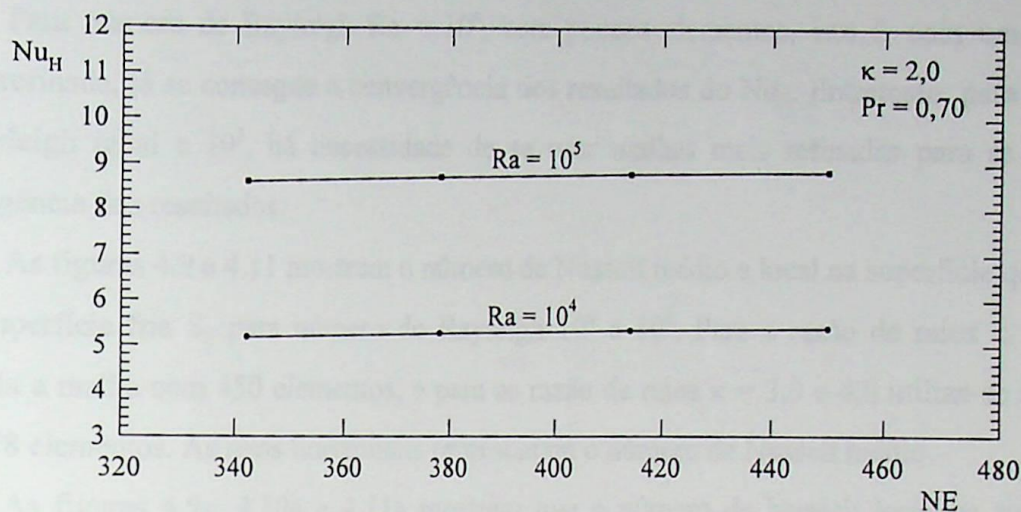


Figura 4.8a - Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 1;  $\kappa = 2,0$

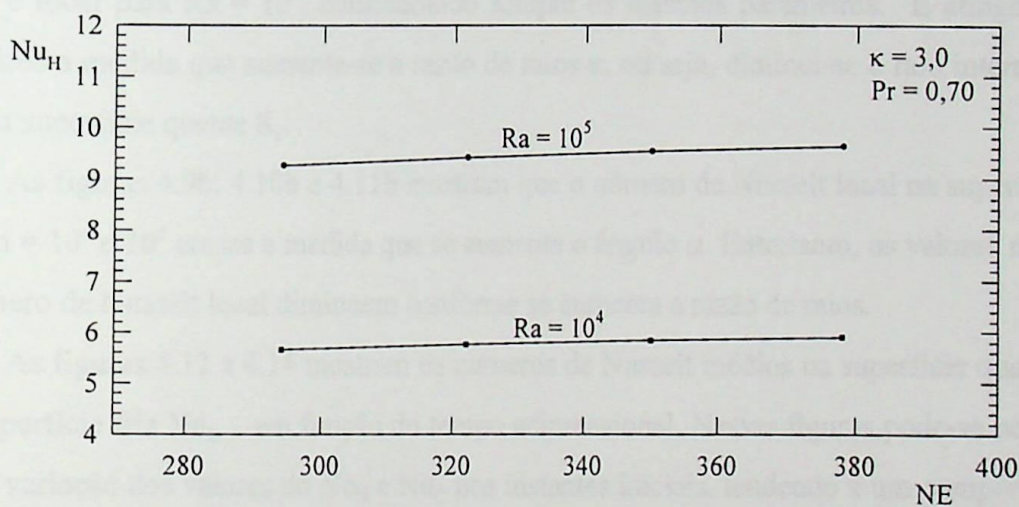


Figura 4.8b - Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 1;  $\kappa = 3,0$

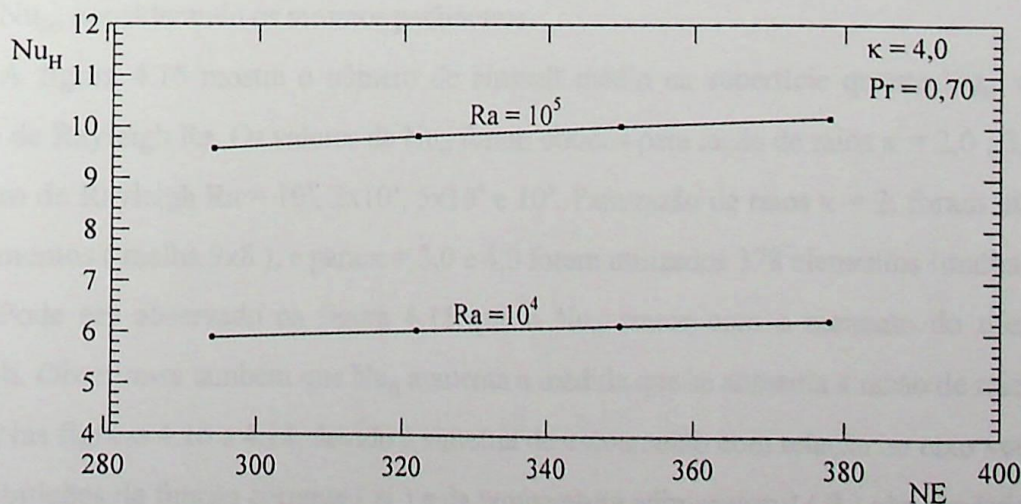


Figura 4.8c - Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 1;  $\kappa = 4,0$

Para número de Rayleigh  $Ra = 10^4$ , com poucos elementos, isto é, com uma malha pouco refinada, já se consegue a convergência dos resultados do  $Nu_H$ . Entretanto, para número de Rayleigh igual a  $10^5$ , há necessidade de se usar malhas mais refinadas para se obter a convergência dos resultados.

As figuras 4.9 a 4.11 mostram o número de Nusselt médio e local na superfície quente  $S_1$  e na superfície fria  $S_2$  para número de Rayleigh  $10^4$  e  $10^5$ . Para a razão de raios  $\kappa = 2,0$  é utilizada a malha com 450 elementos, e para as razões de raios  $\kappa = 3,0$  e  $4,0$  utiliza-se a malha com 378 elementos. As retas horizontais representam o número de Nusselt médio.

As figuras 4.9a, 4.10a e 4.11a mostram que o número de Nusselt local na superfície quente, para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$  cresce a medida que se aumenta a coordenada  $R$ . Nota-se que os números de Nusselt médio e local para  $Ra = 10^4$  são sempre menores que os números de Nusselt médio e local para  $Ra = 10^5$ , considerando sempre os mesmos parâmetros. E atinge valores mais altos a medida que aumenta-se a razão de raios  $\kappa$ , ou seja, diminui-se o raio interno  $RI$  ou ainda, a superfície quente  $S_1$ .

As figuras 4.9b, 4.10b e 4.11b mostram que o número de Nusselt local na superfície fria para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$  cresce à medida que se aumenta o ângulo  $\alpha$ . Entretanto, os valores máximos do número de Nusselt local diminuem conforme se aumenta a razão de raios.

As figuras 4.12 a 4.14 mostram os números de Nusselt médios na superfície quente  $Nu_H$  e na superfície fria  $Nu_C$ , em função do tempo adimensional. Nessas figuras pode-se notar uma grande variação dos valores do  $Nu_H$  e  $Nu_C$  nos instantes iniciais, tendendo a um comportamento de regime permanente nos instantes finais. São feitas análises para números de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$  e razão de raios  $\kappa = 2,0$ ;  $3,0$  e  $4,0$ . Observa-se que os números de Nusselt médio na superfície fria  $Nu_C$  são sempre menores que os números de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_H$ , considerando os mesmos parâmetros.

A figura 4.15 mostra o número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_H$  versus o número de Rayleigh  $Ra$ . Os valores de  $Nu_H$  foram obtidos para razão de raios  $\kappa = 2,0$ ;  $3,0$  e  $4,0$ , e número de Rayleigh  $Ra = 10^4$ ,  $2 \times 10^4$ ,  $5 \times 10^4$  e  $10^5$ . Para razão de raios  $\kappa = 2$ , foram utilizados 450 elementos (malha  $9 \times 8$ ), e para  $\kappa = 3,0$  e  $4,0$  foram utilizados 378 elementos (malha  $7 \times 10$ ).

Pode ser observado na figura 4.15 que o  $Nu_H$  cresce com o aumento do número de Rayleigh. Observa-se também que  $Nu_H$  aumenta a medida que se aumenta a razão de raios.

Nas figuras 4.16 a 4.18, devido à simetria do escoamento com relação ao eixo vertical  $X$ , as distribuições da função corrente ( $\psi$ ) e da temperatura adimensional ( $\theta$ ) são simétricas com relação a este eixo. Para melhor visualização do escoamento as distribuições da temperatura adimensional serão apresentadas a esquerda das figuras e a função corrente à direita. São

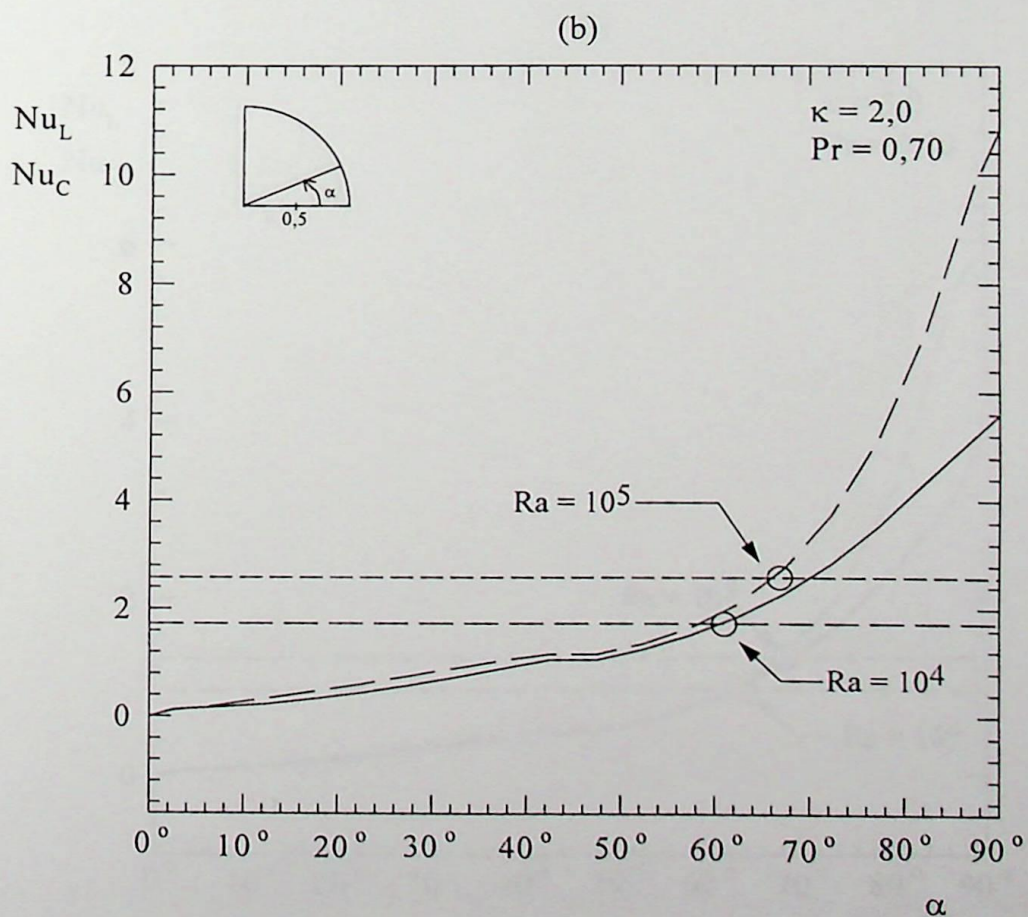
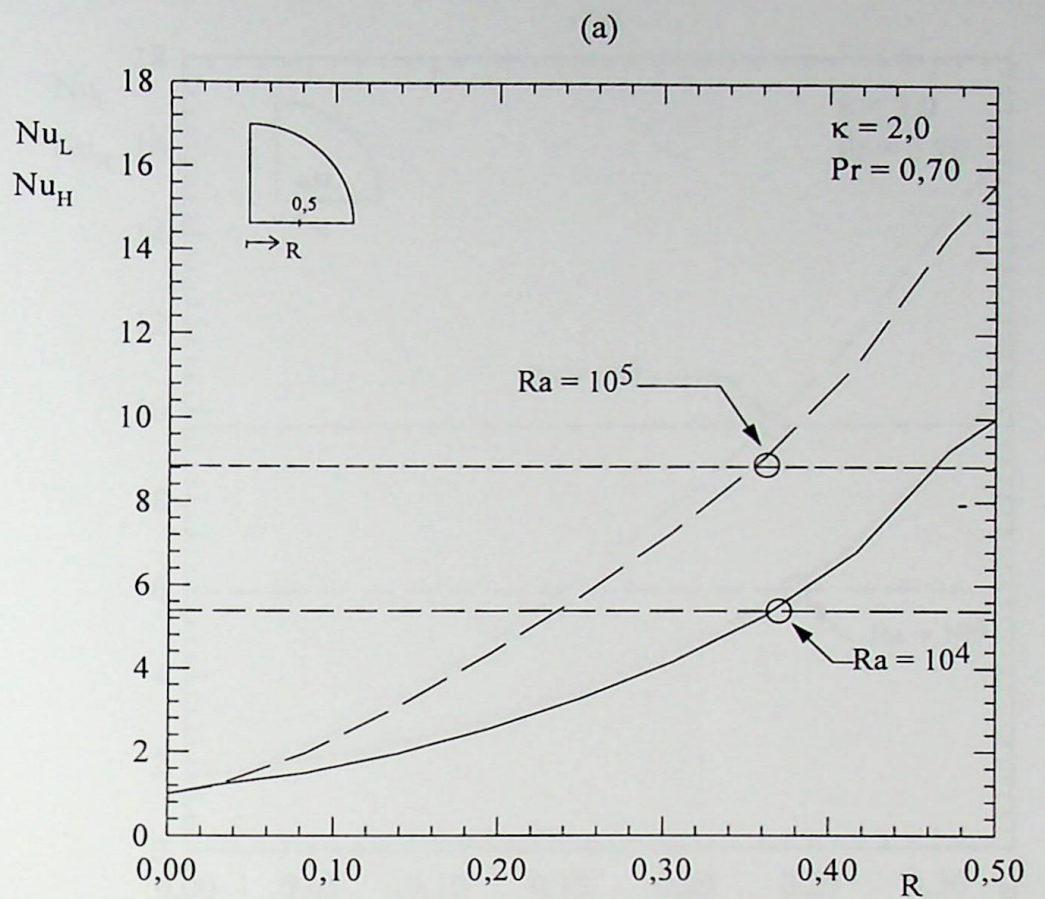


Figura 4.9 - (a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ ;  $\kappa = 2,0$

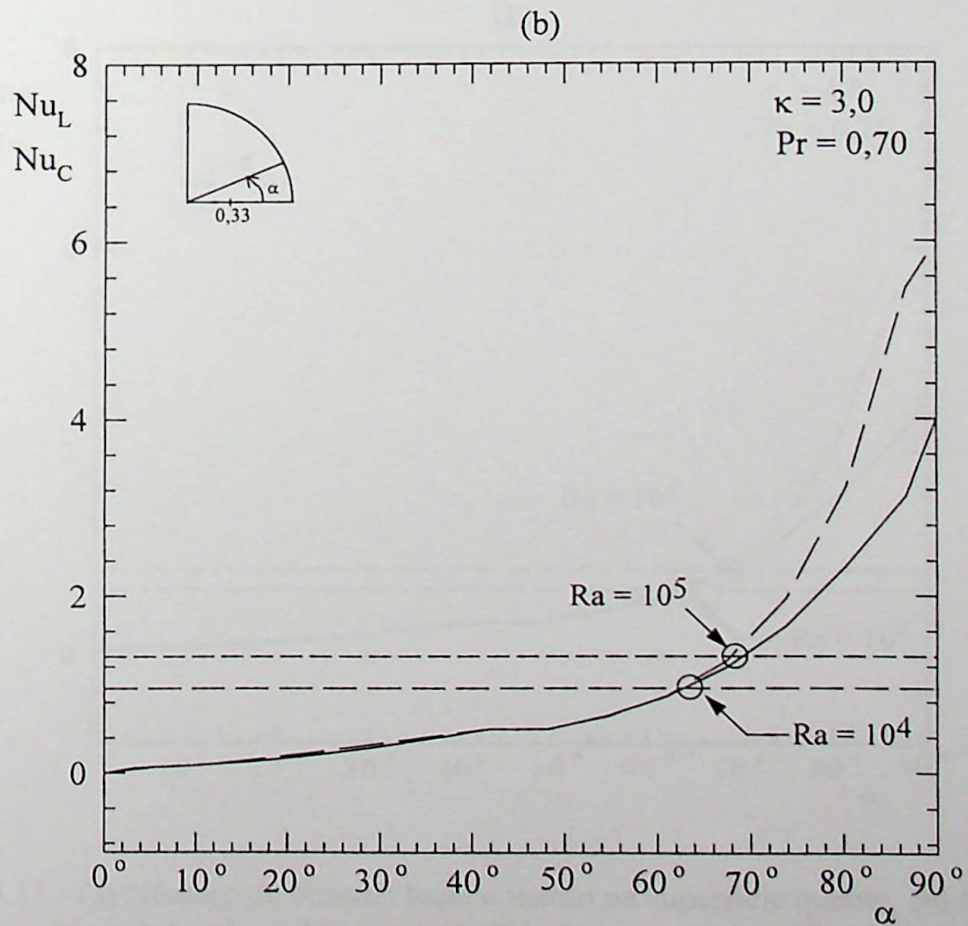
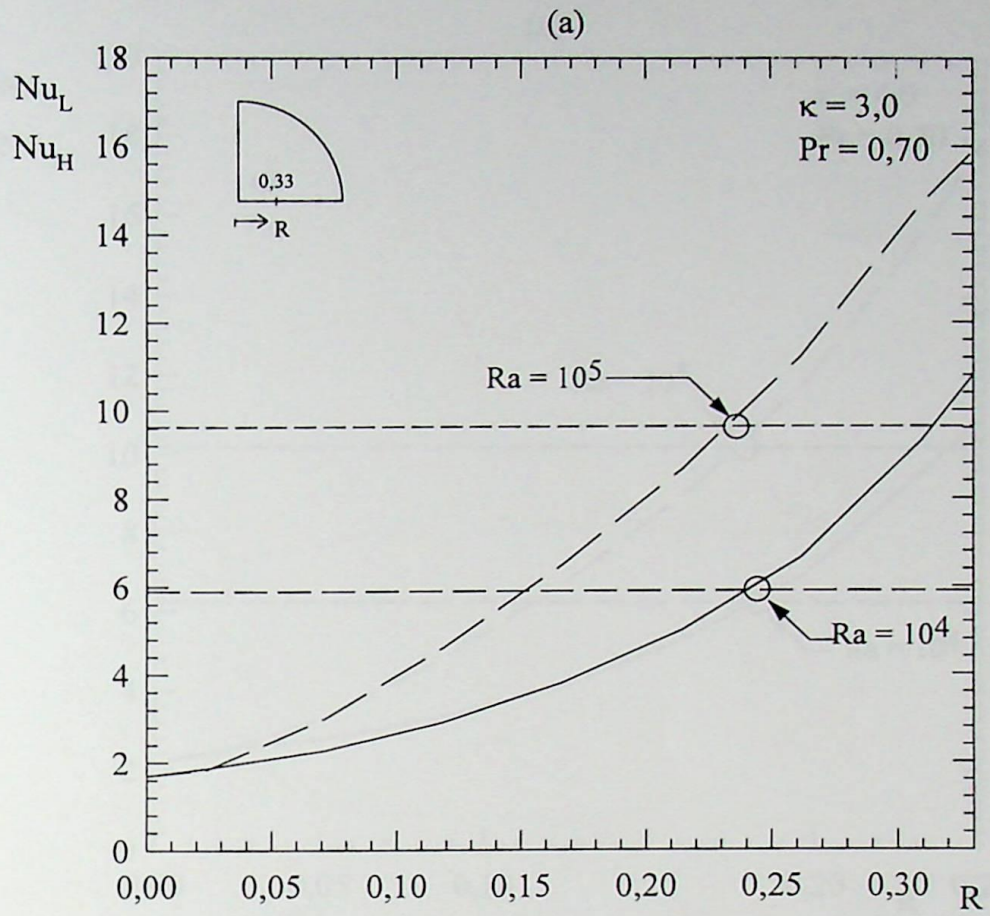


Figura 4.10 - (a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ ;  $\kappa = 3,0$

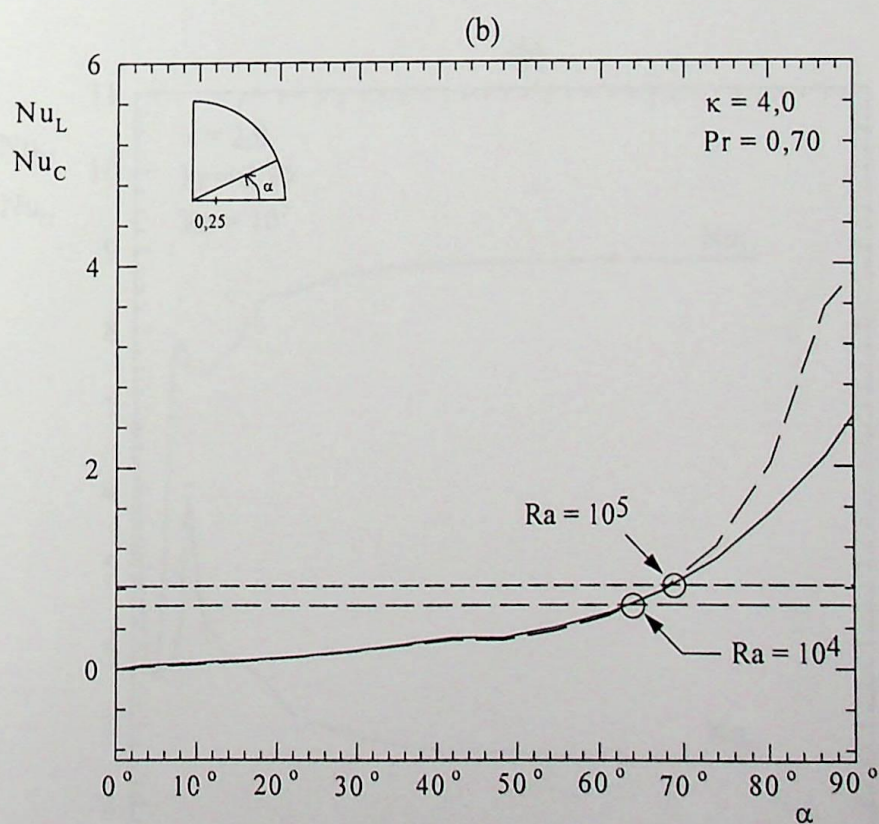
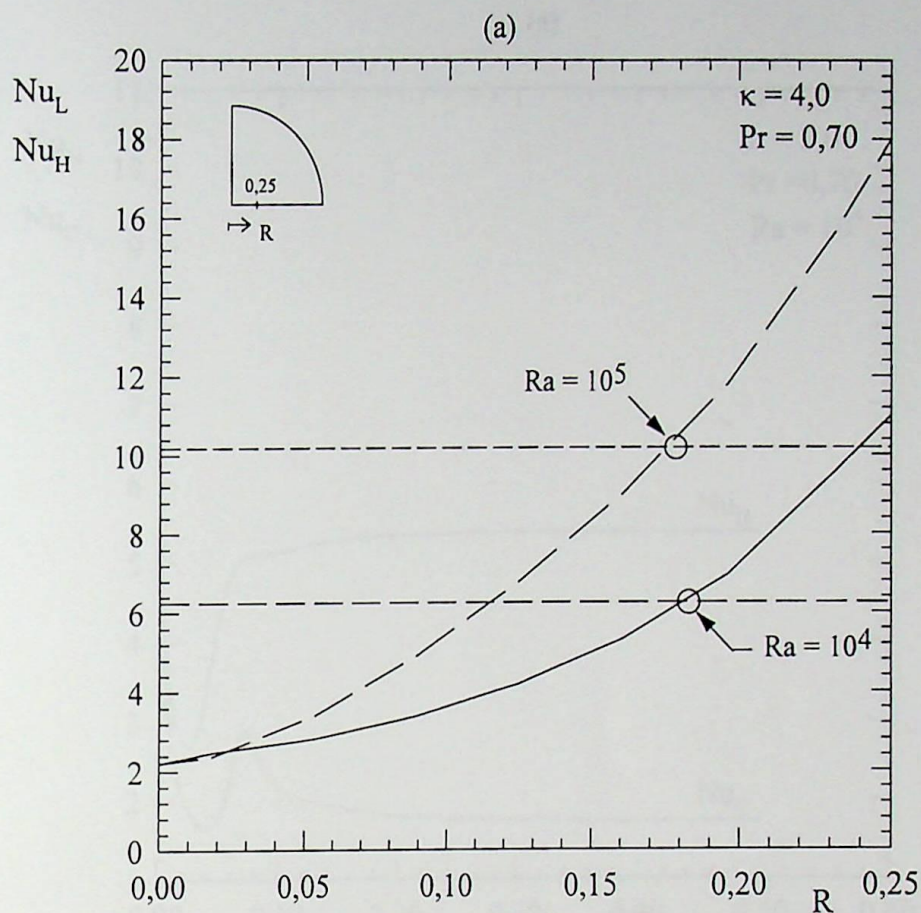


Figura 4.11 - (a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ ;  $\kappa = 4,0$

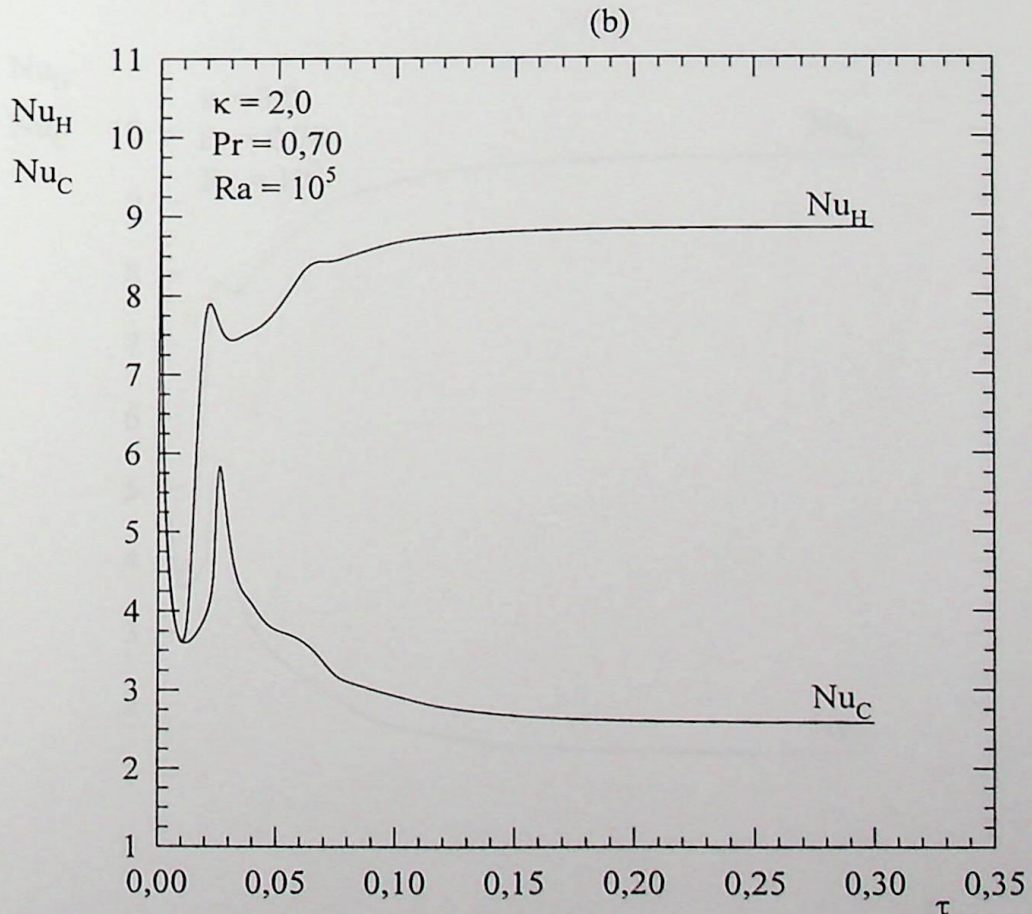
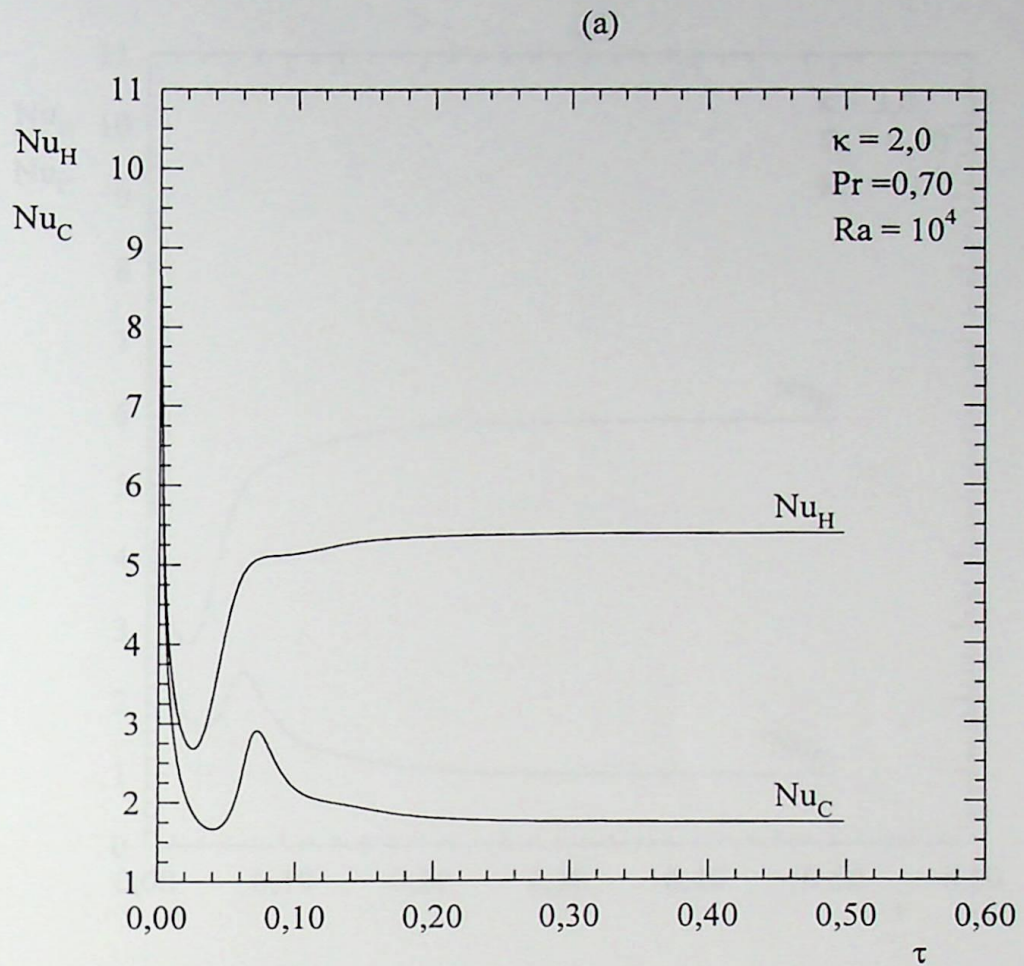


Figura 4.12 - Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para  $Pr = 0,70$ ;  $\kappa = 2,0$   
 (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

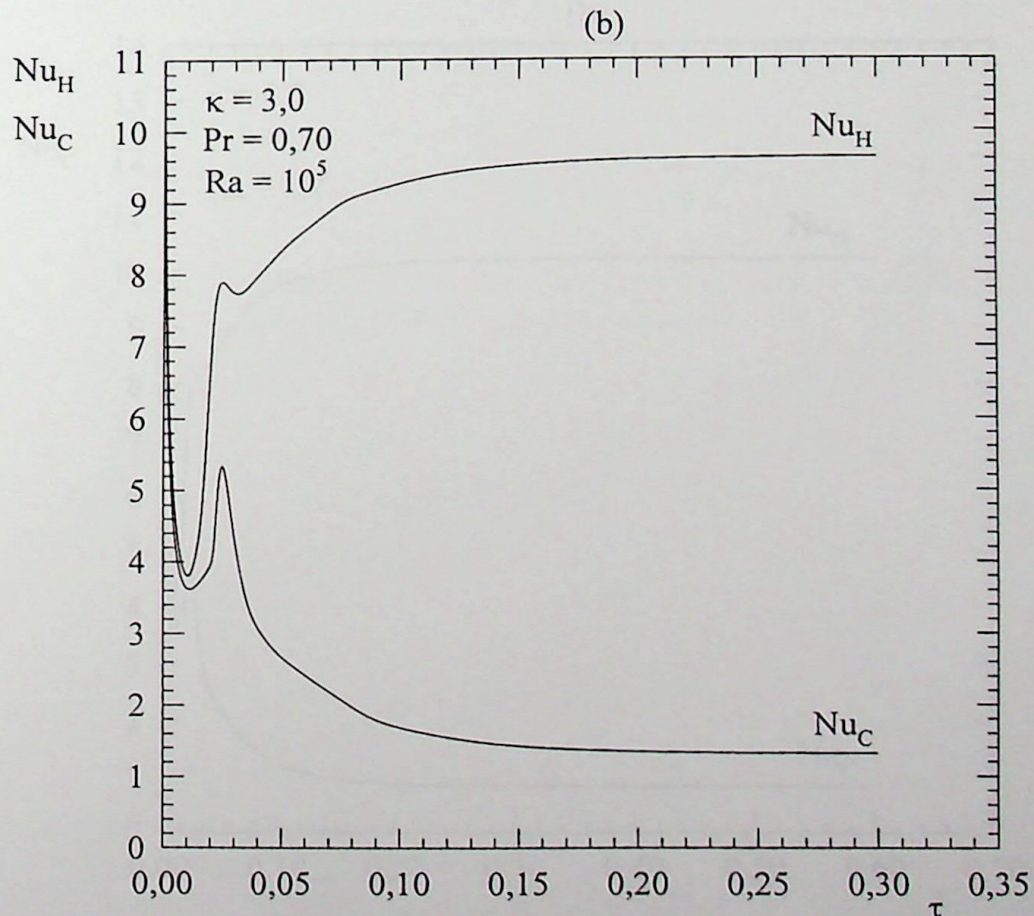
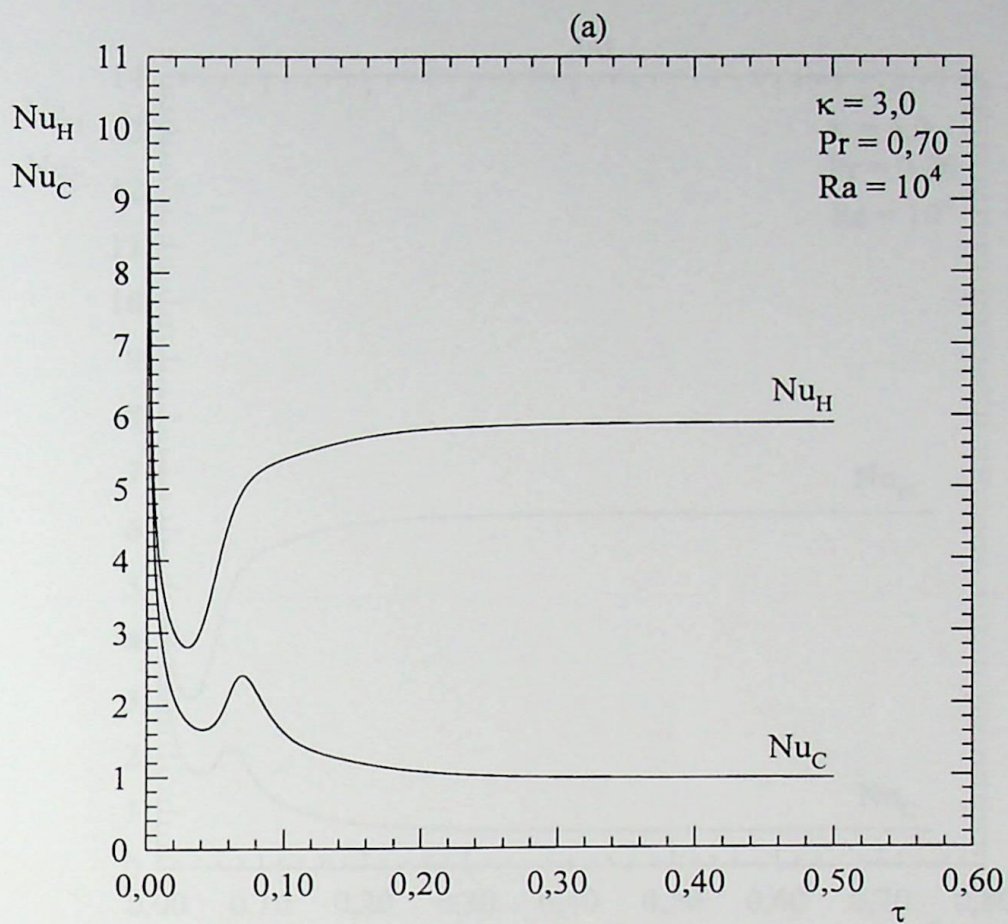


Figura 4.13 - Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para  $Pr = 0,70$ ;  $\kappa = 3,0$   
 (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

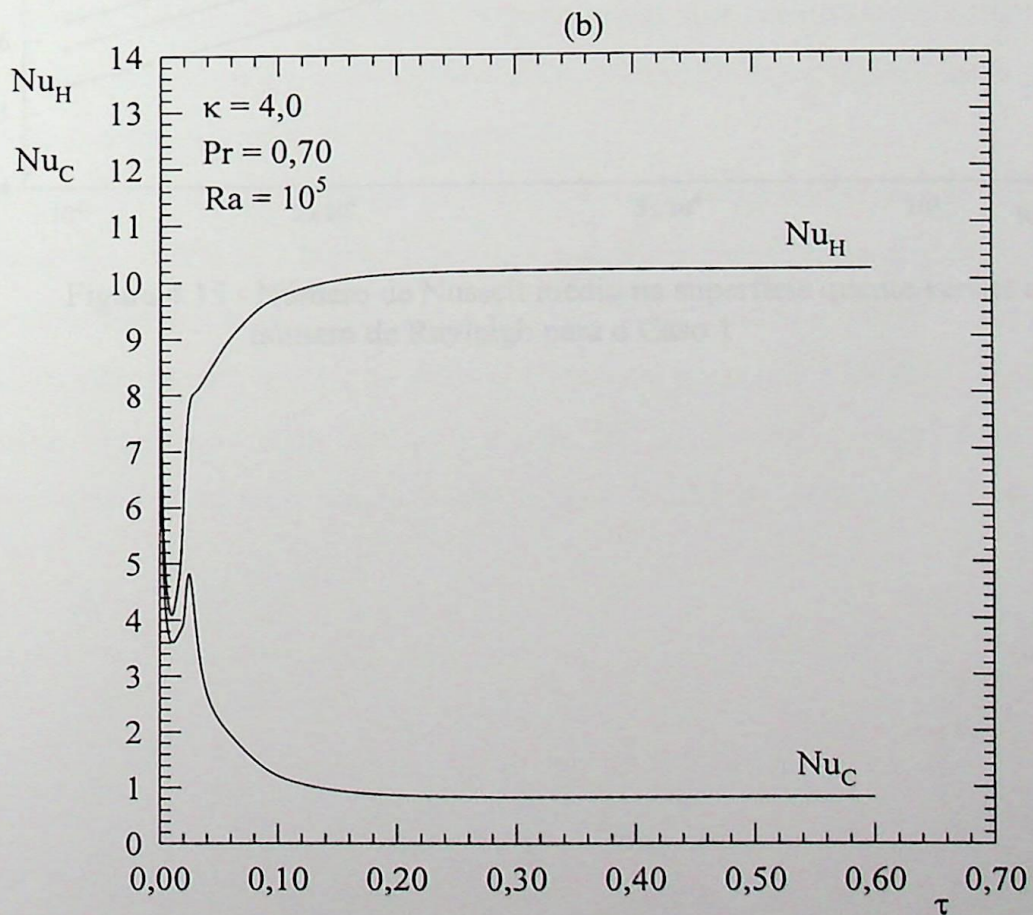
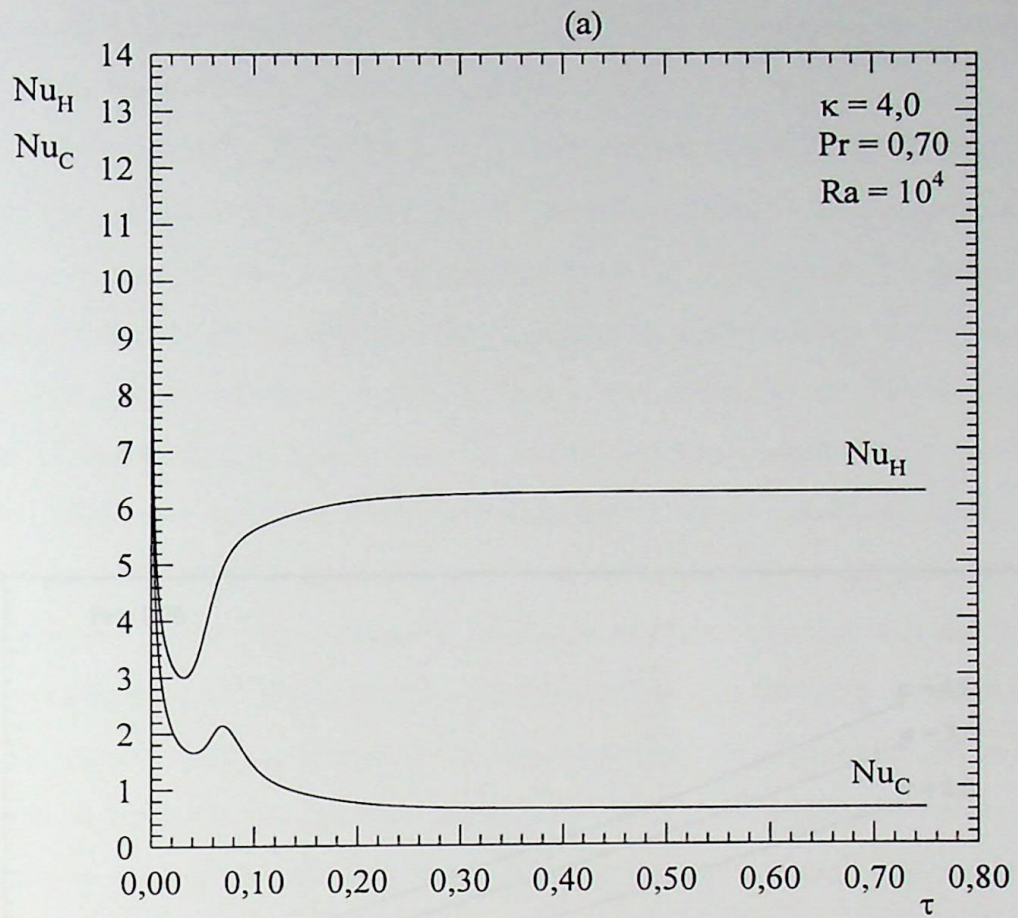


Figura 4.14 - Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para  $Pr = 0,70$ ;  $\kappa = 4,0$   
 (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

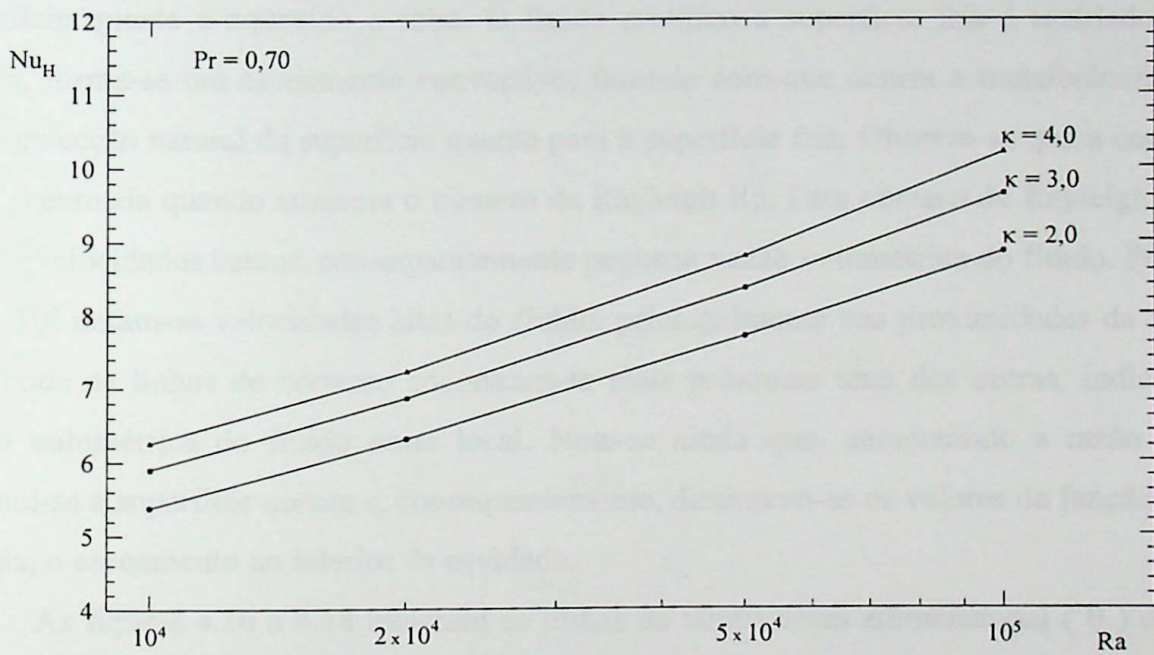


Figura 4.15 - Número de Nusselt médio na superfície quente versus o número de Rayleigh para o Caso 1

analisadas as distribuições para razão de raios  $\kappa = 2,0 ; 3,0$  e  $4,0$ , número de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ , e com o número de Prandtl  $Pr$  fixado em  $0,70$ .

As distribuições da função corrente ( $\psi$ ) nas figuras 4.16 a 4.18, apresentam as linhas de corrente variando com um incremento de  $\Delta\psi = 1$  e lembrando que a função corrente é nula nas superfícies de contorno. Pode-se notar a existência de um escoamento do fluido no sentido horário no lado direito da figura. Embora não se mostre na figura, devido a simetria, existe um escoamento anti-horário no lado esquerdo da figura. Isto acontece devido a cavidade estar submetida a diferentes temperaturas ( $\theta = 1,0$  a  $-1,0$ ) proporcionando assim uma diferença na densidade do fluido que tende a se movimentar dentro da cavidade. O fluido próximo a superfície quente é aquecido e sobe. O fluido próximo a superfície fria é resfriado e desce. Assim, forma-se um escoamento convectivo, fazendo com que ocorra a transferência de calor por convecção natural da superfície quente para a superfície fria. Observa-se que a convecção é mais acentuada quando aumenta o número de Rayleigh  $Ra$ . Para número de Rayleigh  $Ra = 10^4$  tem-se velocidades baixas, conseqüentemente pequena vazão volumétrica do fluido. Porém para  $Ra = 10^5$  notam-se velocidades altas do fluido, principalmente nas proximidades da superfície fria, onde as linhas de corrente encontram-se mais próximas uma das outras, indicando alta vazão volumétrica do fluido neste local. Nota-se ainda que, aumentando a razão de raios, diminui-se a superfície quente e, conseqüentemente, diminuem-se os valores da função corrente, ou seja, o escoamento no interior da cavidade.

As figuras 4.16 a 4.18 mostram as linhas de temperatura adimensional ( $\theta$ ) constantes para número de  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ . Lembrando que a superfície quente é mantida numa temperatura  $\theta = 1,0$  e a superfície fria numa temperatura  $\theta = -1,0$ . Nas figuras, as linhas estão apresentadas com um incremento de temperatura de  $\Delta\theta = 0,2$ . Pode-se notar que a medida que se aumenta a razão de raios, aumenta-se cada vez mais a área fria localizada a esquerda da cavidade, e conseqüentemente, tem-se uma reduzida área quente localizada junto ao eixo de simetria da cavidade.



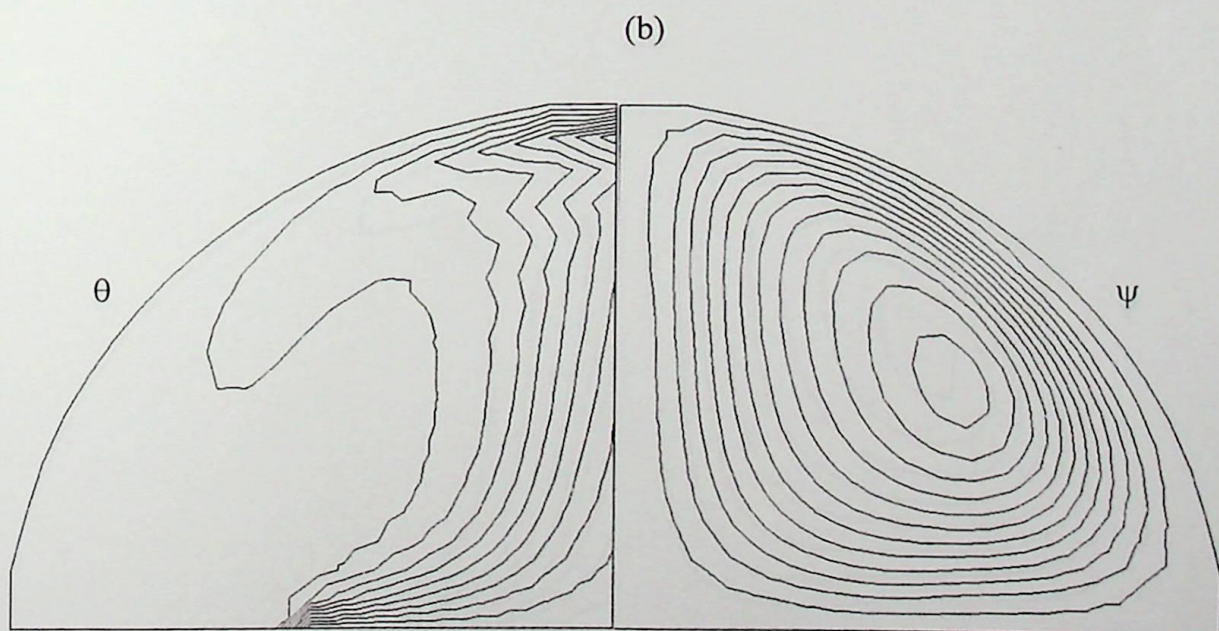
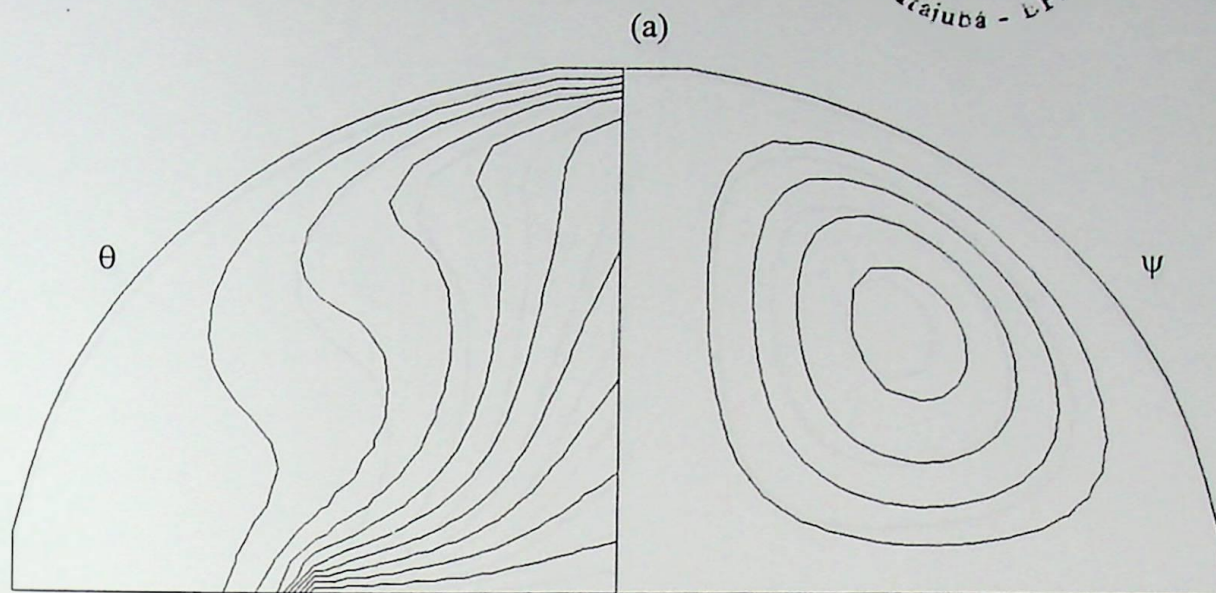


Figura 4.16 - Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para  $\kappa = 2,0$ . (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

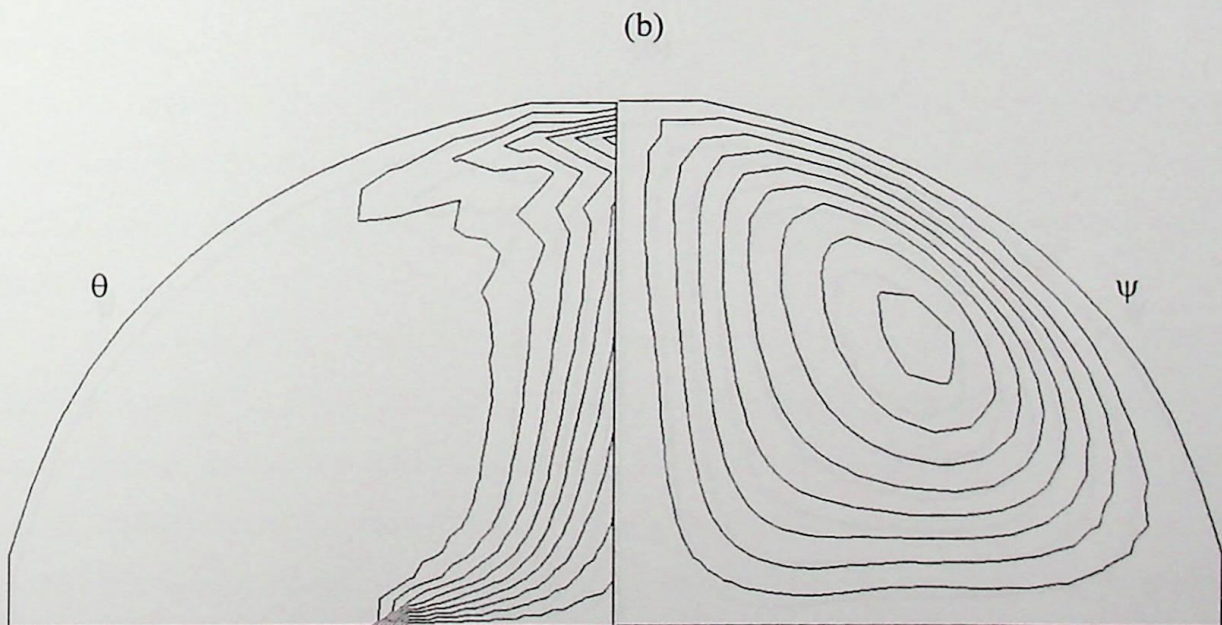
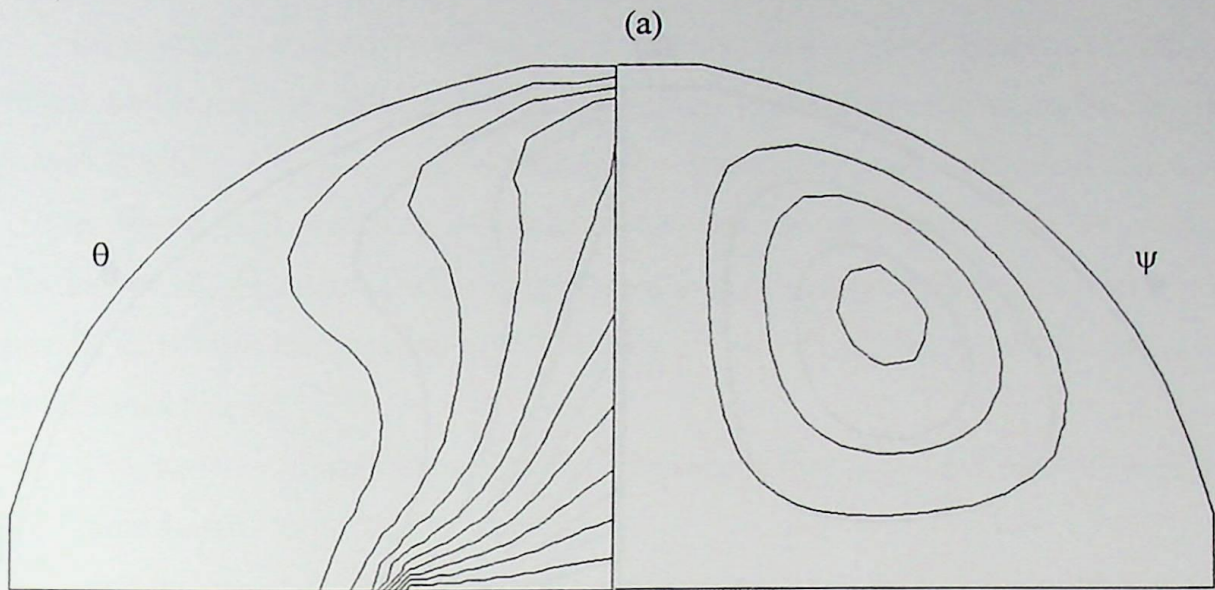


Figura 4.17 - Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para  $\kappa = 3,0$ . (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

#### 4.4 - Resultados do Presente Trabalho para a Cavidade Anular Esférica

Os resultados obtidos da presente investigação foram apresentados em termos de mapas de contorno da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  para as seguintes condições:  $\kappa = 4,0$ ;  $\nu = 0,01$ ;  $\sigma = 0,70$ .

A figura 4.18 mostra as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  para a cavidade anular esférica com  $\kappa = 1,5$  e  $\nu = 0,01$  e  $\sigma = 0,70$  para os números de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ .

A figura 4.19 mostra as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  para a cavidade anular esférica com  $\kappa = 2,0$  e  $\nu = 0,01$  e  $\sigma = 0,70$  para os números de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ .

As figuras 4.20 e 4.21 mostram as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  para a cavidade anular esférica com  $\kappa = 2,5$  e  $\nu = 0,01$  e  $\sigma = 0,70$  para os números de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ .

As figuras 4.22 a 4.25 mostram as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  para a cavidade anular esférica com  $\kappa = 3,0$  e  $\nu = 0,01$  e  $\sigma = 0,70$  para os números de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ .

A análise que o presente trabalho apresenta é possível para a determinação dos valores do  $Nu_{\theta}$ .

As figuras 4.26 a 4.29 mostram as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  para a cavidade anular esférica com  $\kappa = 3,5$  e  $\nu = 0,01$  e  $\sigma = 0,70$  para os números de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ .

As figuras 4.30 a 4.33 mostram as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  para a cavidade anular esférica com  $\kappa = 4,0$  e  $\nu = 0,01$  e  $\sigma = 0,70$  para os números de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ .

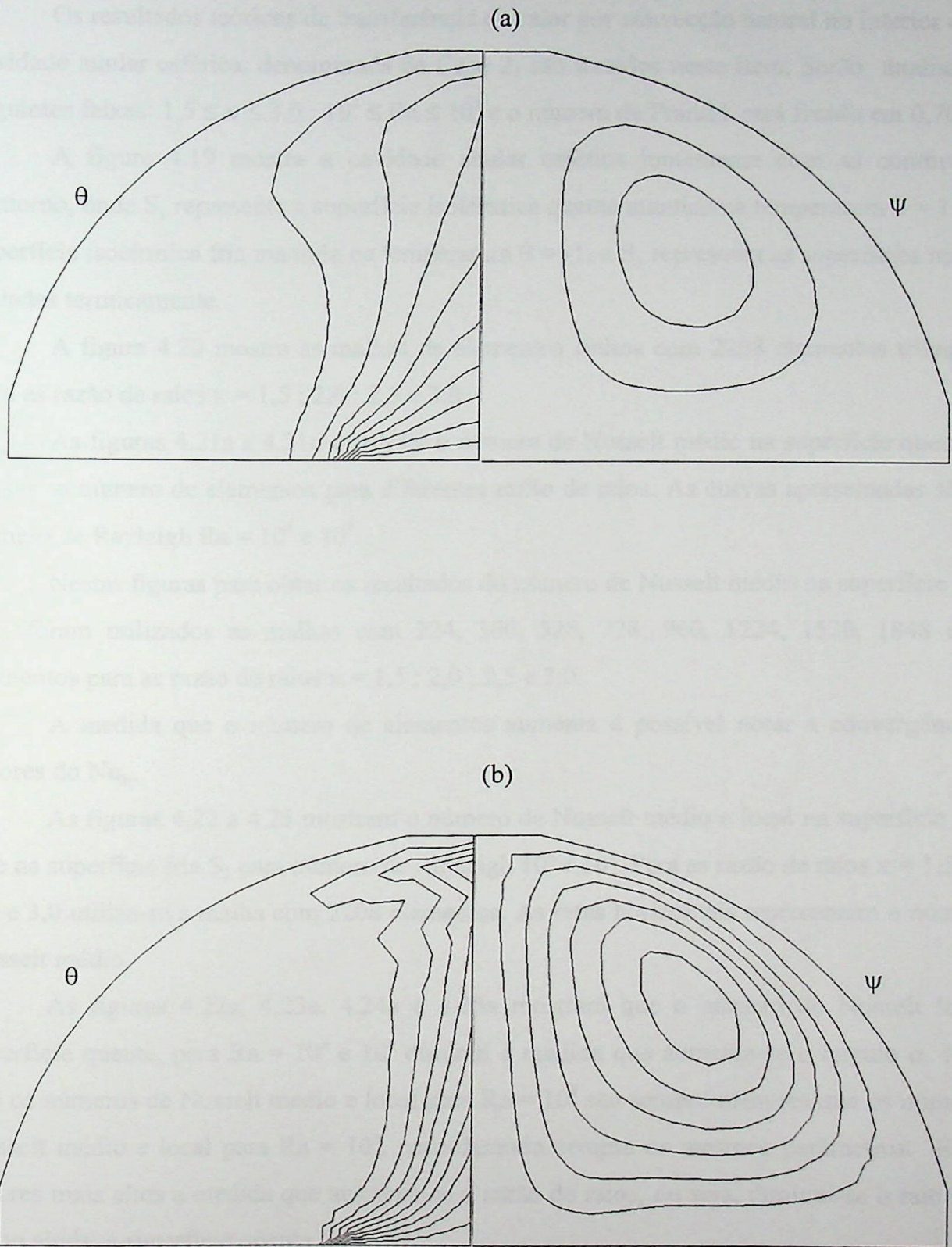
As figuras 4.34 a 4.37 mostram as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  para a cavidade anular esférica com  $\kappa = 4,5$  e  $\nu = 0,01$  e  $\sigma = 0,70$  para os números de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ .

As figuras 4.38 a 4.41 mostram as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  para a cavidade anular esférica com  $\kappa = 5,0$  e  $\nu = 0,01$  e  $\sigma = 0,70$  para os números de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ .

As figuras 4.42 a 4.45 mostram as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  para a cavidade anular esférica com  $\kappa = 5,5$  e  $\nu = 0,01$  e  $\sigma = 0,70$  para os números de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ .

As figuras 4.46 a 4.49 mostram as distribuições da temperatura adimensional  $\theta$  e da função corrente  $\psi$  para a cavidade anular esférica com  $\kappa = 6,0$  e  $\nu = 0,01$  e  $\sigma = 0,70$  para os números de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ .

Figura 4.18 - Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para  $\kappa = 4,0$ . (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$



#### 4.4 - Resultados do Presente Trabalho para a Cavidade Anular Esférica

Os resultados teóricos de transferência de calor por convecção natural no interior de uma cavidade anular esférica, denominada de Caso 2, são tratados neste item. Serão analisadas as seguintes faixas:  $1,5 \leq \kappa \leq 3,0$  ;  $10^4 \leq Ra \leq 10^5$  e o número de Prandtl será fixado em 0,70.

A figura 4.19 mostra a cavidade anular esférica juntamente com as condições de contorno, onde  $S_1$  representa a superfície isotérmica quente mantida na temperatura  $\theta = 1$ ,  $S_2$  é a superfície isotérmica fria mantida na temperatura  $\theta = -1$ , e  $S_3$  representa as superfícies mantidas isoladas termicamente.

A figura 4.20 mostra as malhas de elementos finitos com 2208 elementos triangulares para as razão de raios  $\kappa = 1,5$  ;  $2,0$  ;  $2,5$  e  $3,0$ .

As figuras 4.21a a 4.21d mostram o número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_H$  versus o número de elementos para diferentes razão de raios. As curvas apresentadas são para número de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ .

Nestas figuras para obter os resultados do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_H$  foram utilizados as malhas com 224, 360, 528, 728, 960, 1224, 1520, 1848 e 2208 elementos para as razão de raios  $\kappa = 1,5$  ;  $2,0$  ;  $2,5$  e  $3,0$ .

A medida que o número de elementos aumenta é possível notar a convergência dos valores do  $Nu_H$ .

As figuras 4.22 a 4.25 mostram o número de Nusselt médio e local na superfície quente  $S_1$  e na superfície fria  $S_2$  para número de Rayleigh  $10^4$  e  $10^5$ . Para as razão de raios  $\kappa = 1,5$  ;  $2,0$  ;  $2,5$  e  $3,0$  utiliza-se a malha com 2208 elementos. As retas horizontais representam o número de Nusselt médio.

As figuras 4.22a, 4.23a, 4.24a e 4.25a mostram que o número de Nusselt local na superfície quente, para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$  diminui a medida que aumenta-se o ângulo  $\alpha$ . Nota-se que os números de Nusselt médio e local para  $Ra = 10^4$  são sempre menores que os números de Nusselt médio e local para  $Ra = 10^5$ , considerando sempre os mesmos parâmetros. E atinge valores mais altos a medida que aumenta-se a razão de raios, ou seja, diminui-se o raio interno  $RI$  ou ainda, a superfície quente  $S_1$ .

As figuras 4.22b, 4.23b, 4.24b e 4.25b mostram que o número de Nusselt local na superfície fria para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$  crescem a medida que aumenta-se o ângulo  $\alpha$ . Nota-se, também que para a superfície fria os números de Nusselt médio e local para  $Ra = 10^4$  são sempre menores que os números de Nusselt médio e local para  $Ra = 10^5$ , considerando sempre os mesmos parâmetros. E atinge valores mais altos a medida que aumenta-se a razão de raios.

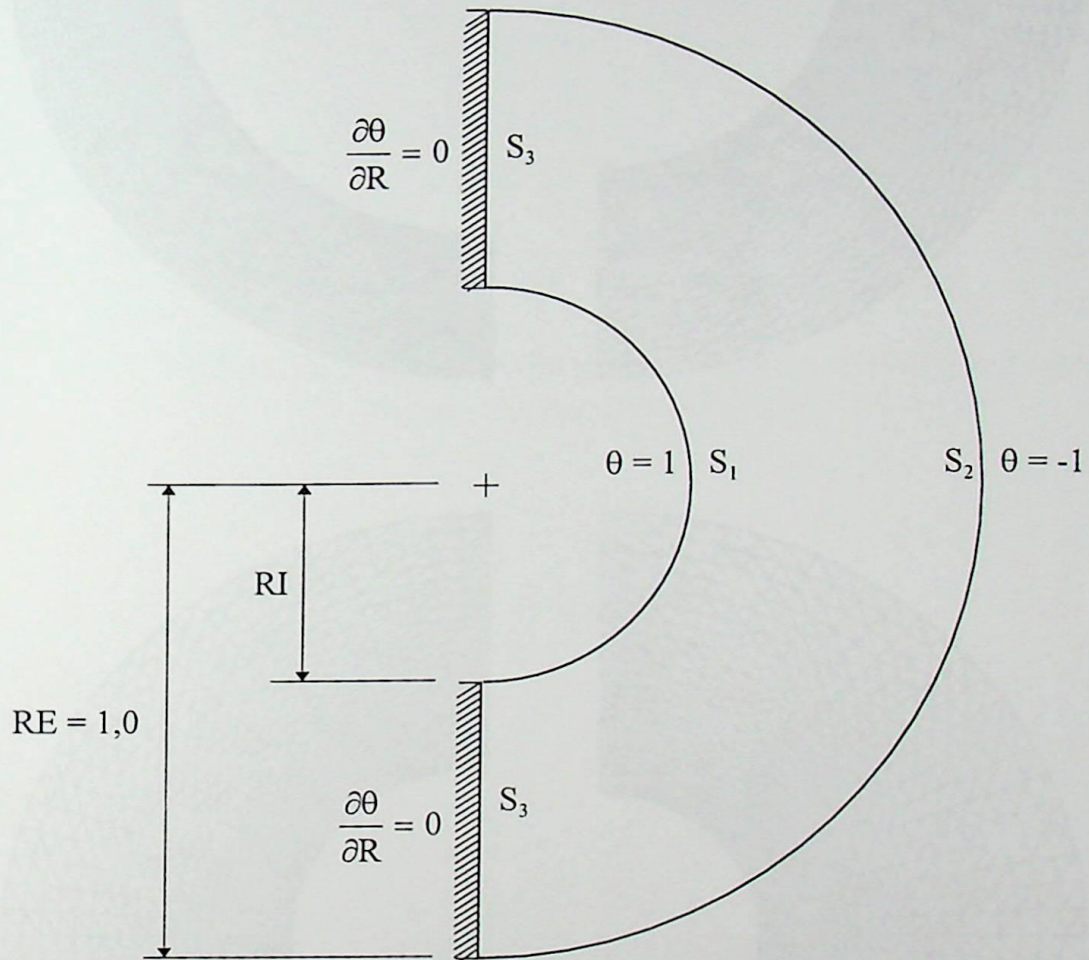


Figura 4.19 - Cavidade anular esférica e as condições de contorno

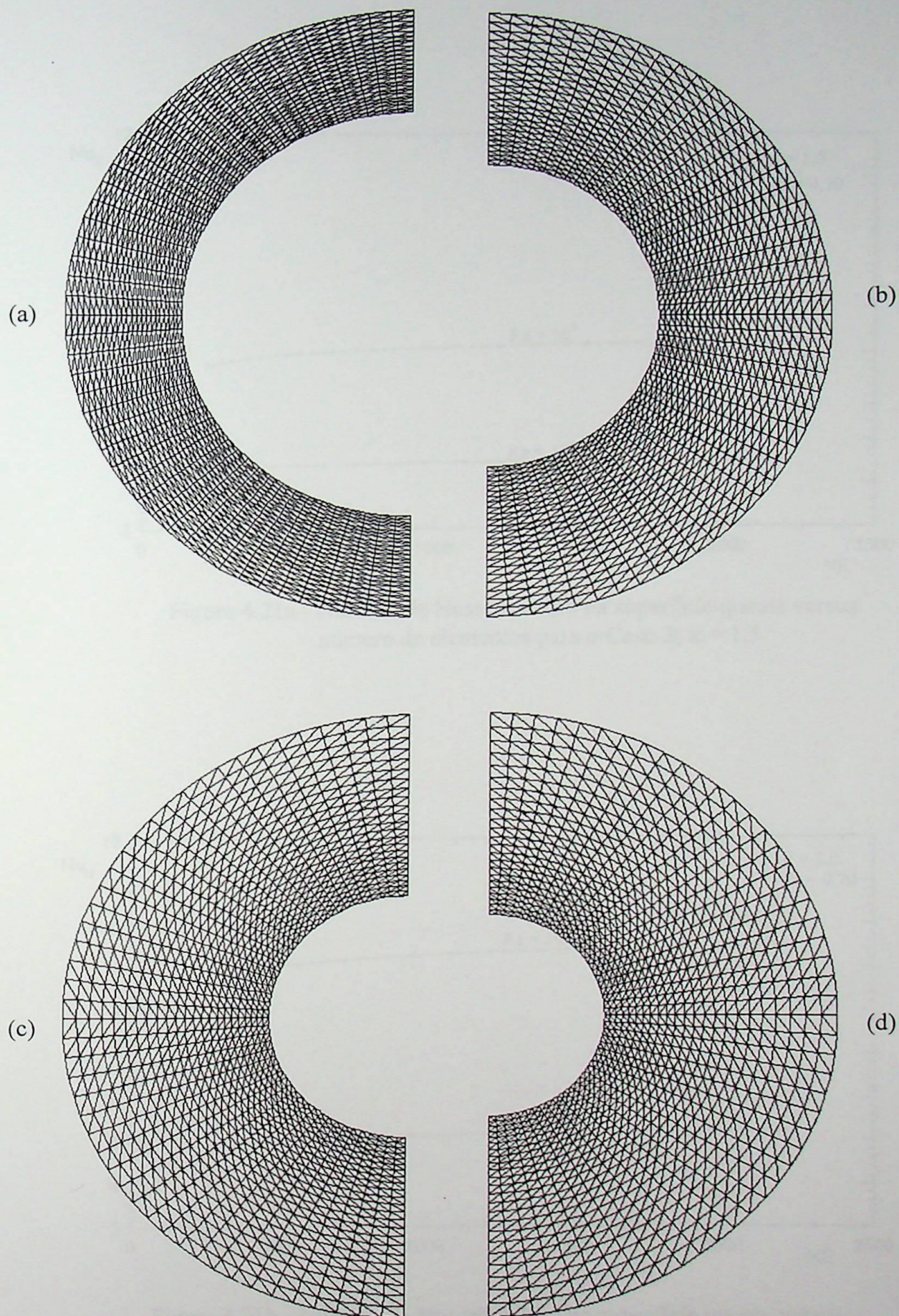


Figura 4.20 - Malhas utilizadas com 2208 elementos; (a)  $\kappa = 1,5$  ; (b)  $\kappa = 2,0$  ;  
(c)  $\kappa = 2,5$  ; (d)  $\kappa = 3,0$

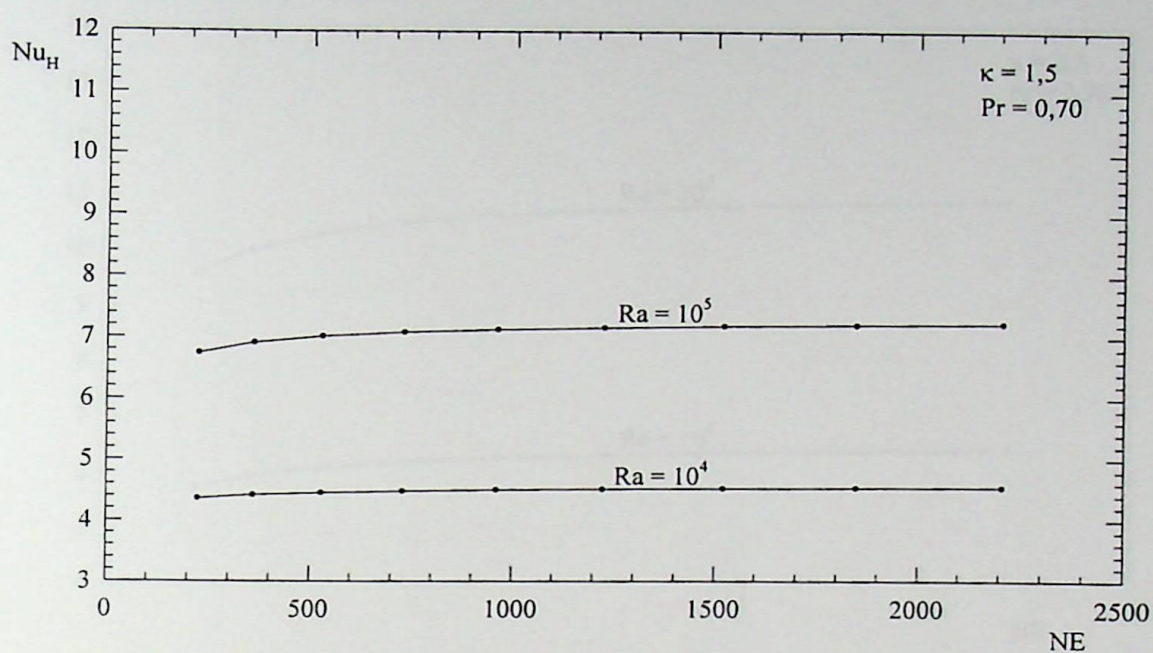


Figura 4.21a - Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 2;  $\kappa = 1,5$

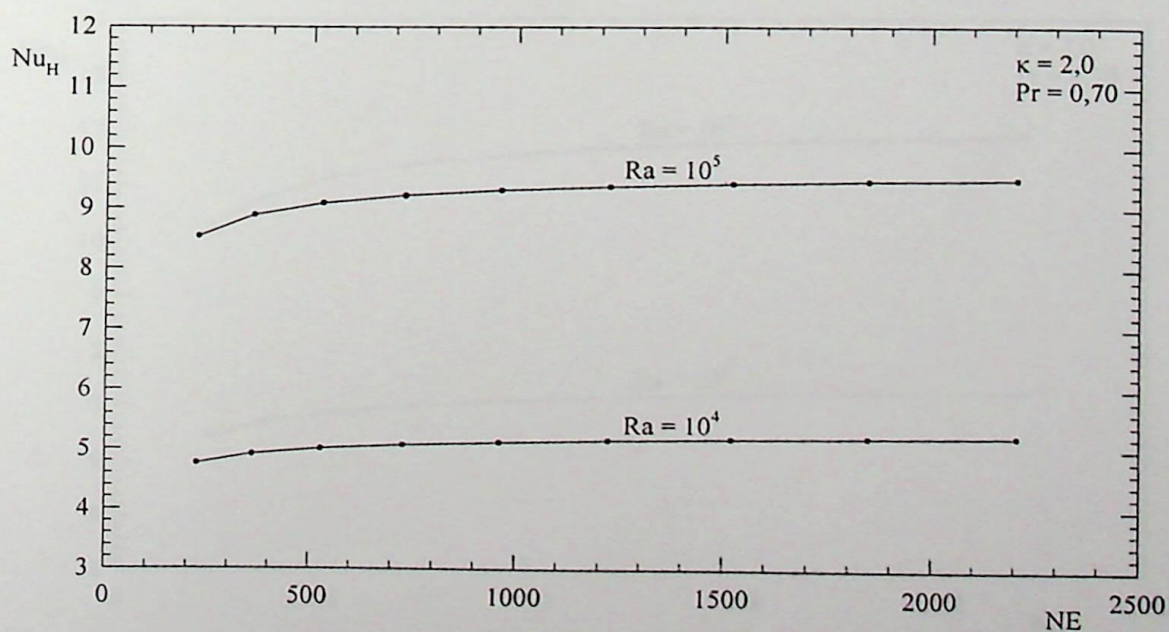


Figura 4.21b - Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 2;  $\kappa = 2,0$

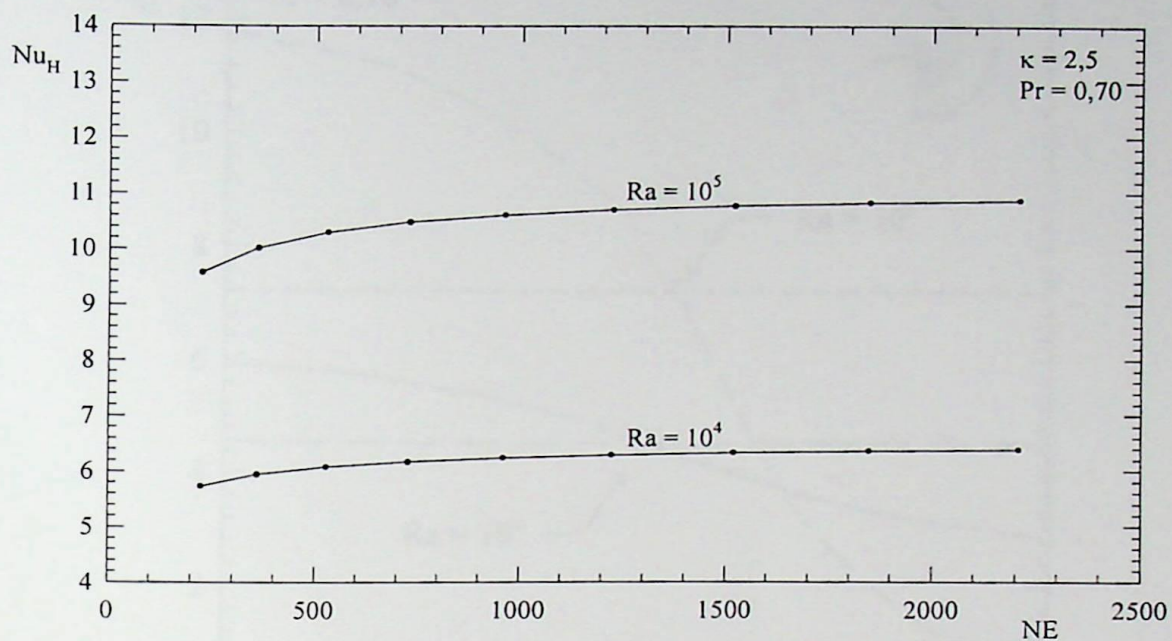


Figura 4.21c - Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 2;  $\kappa = 2,5$

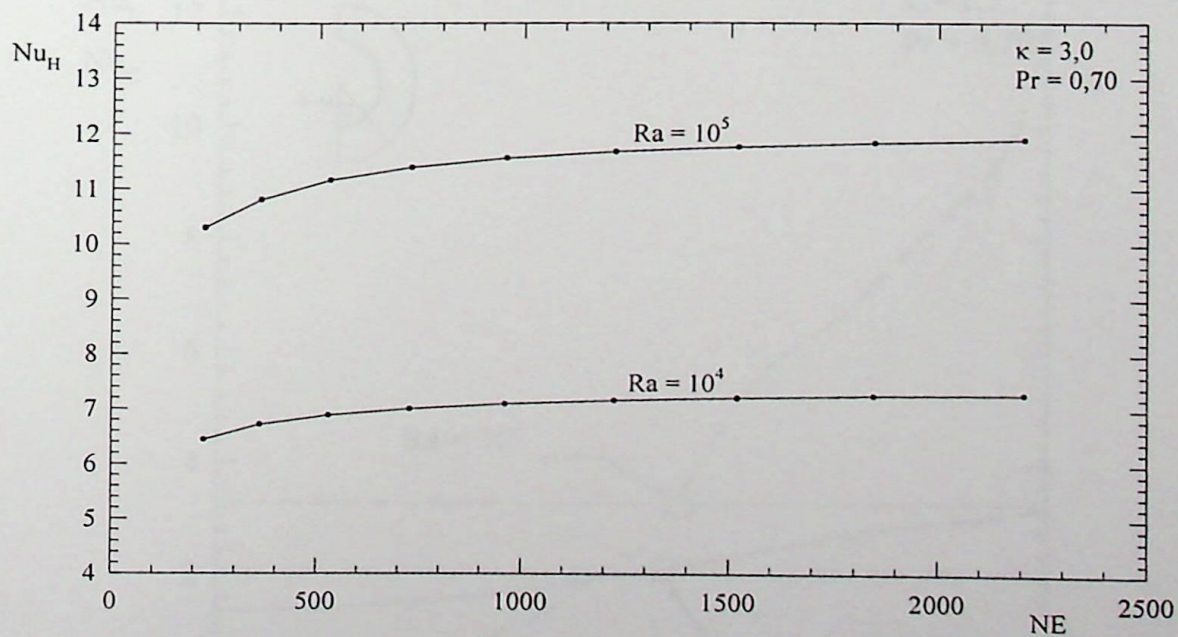


Figura 4.21d - Número de Nusselt médio na superfície quente versus número de elementos para o Caso 2;  $\kappa = 3,0$

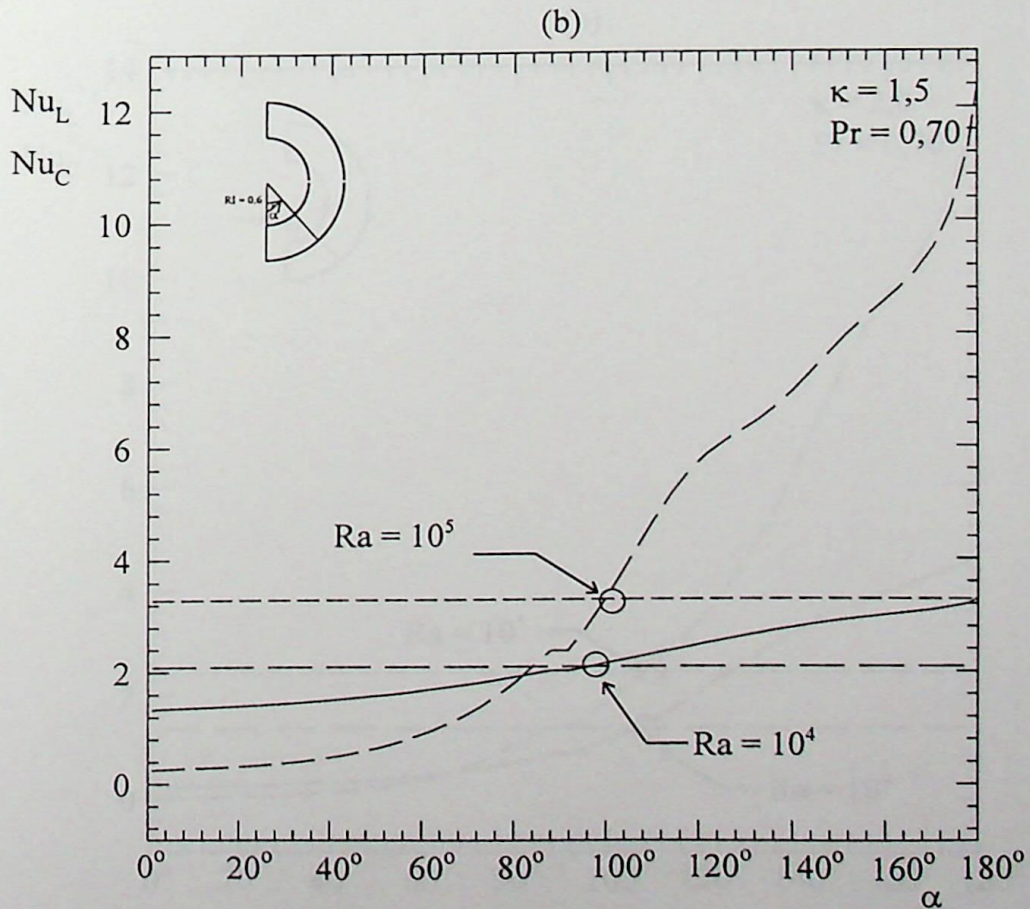
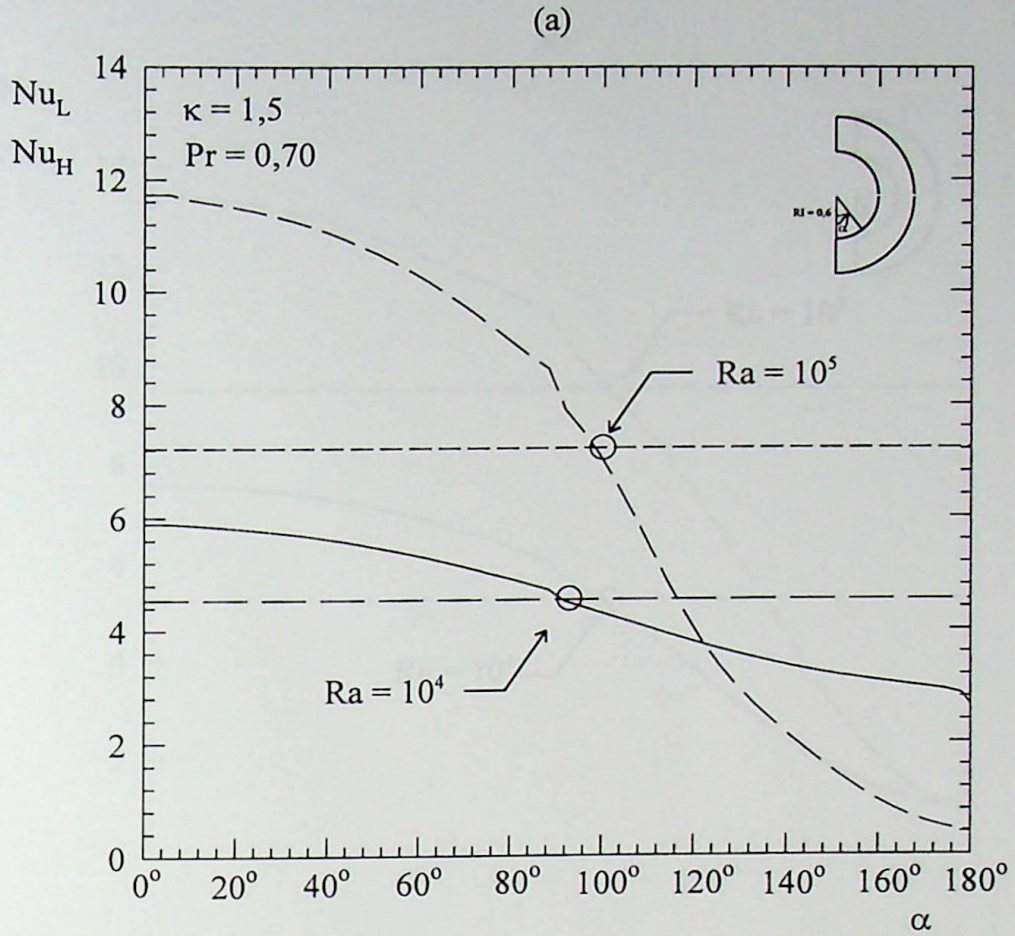


Figura 4.22 - (a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ ;  $\kappa = 1,5$

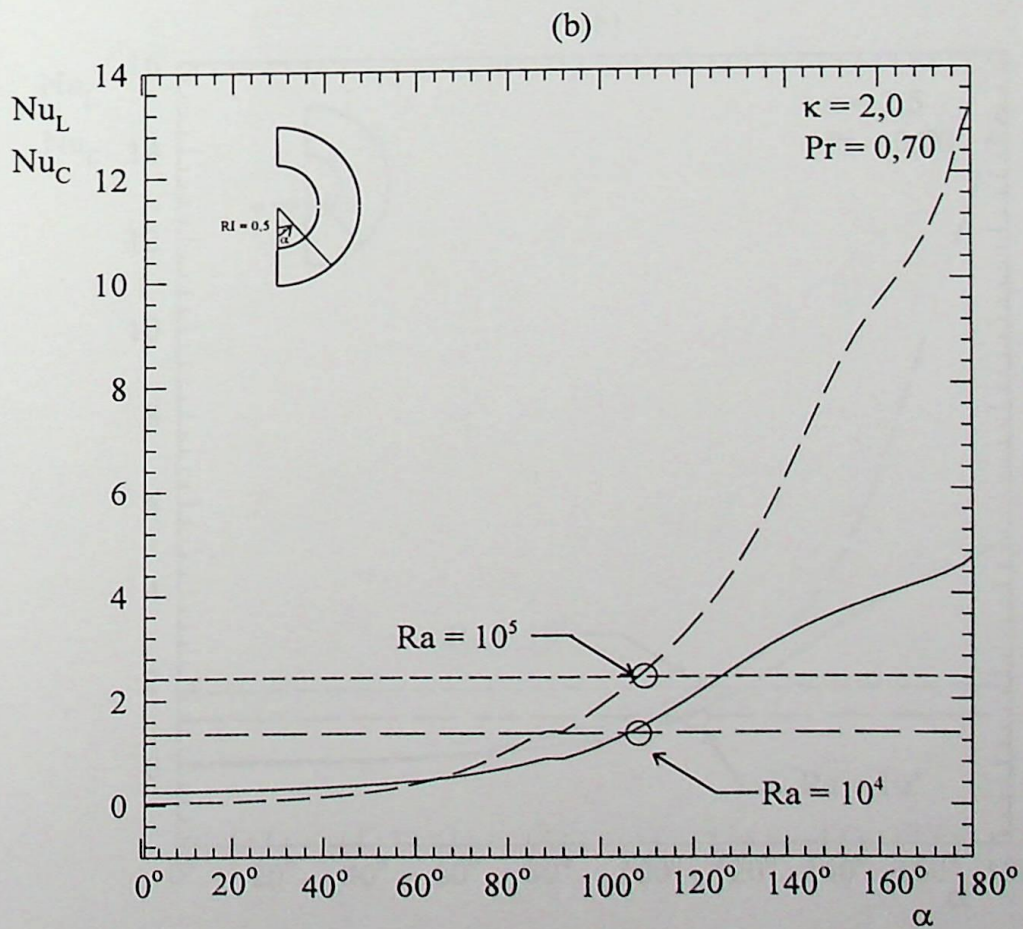
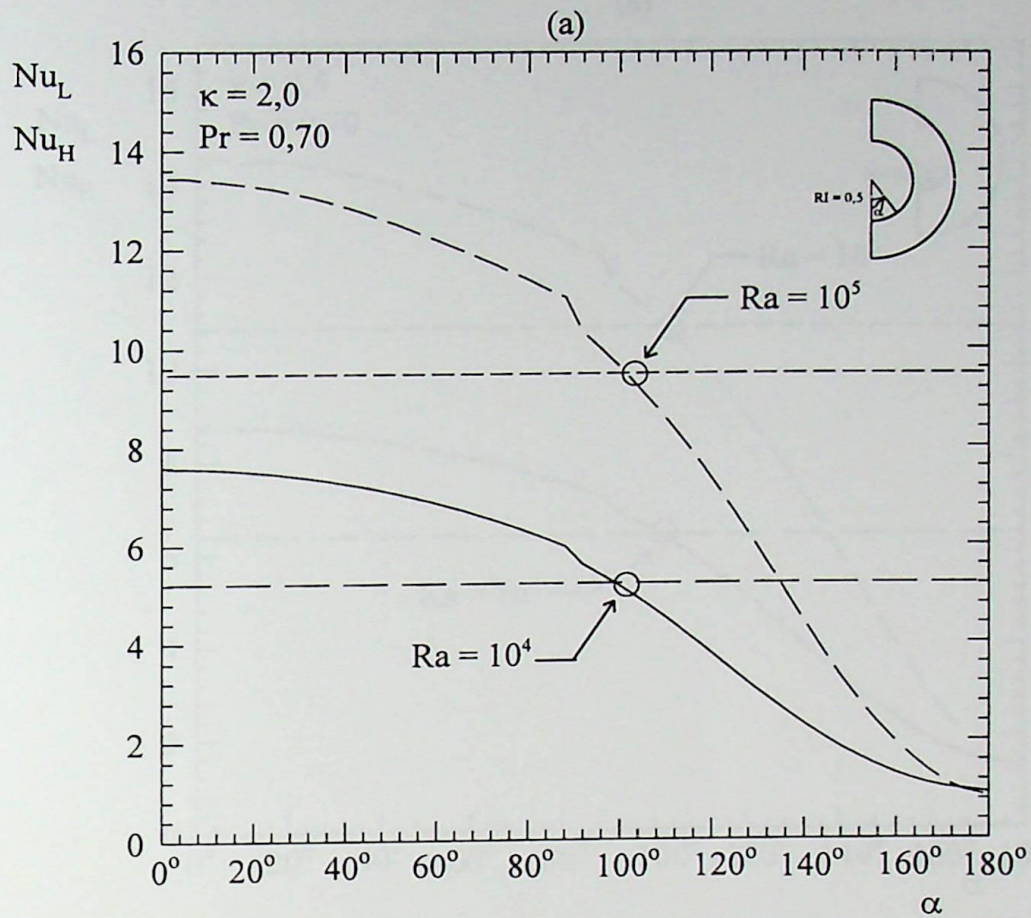


Figura 4.23 - (a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ ;  $\kappa = 2,0$

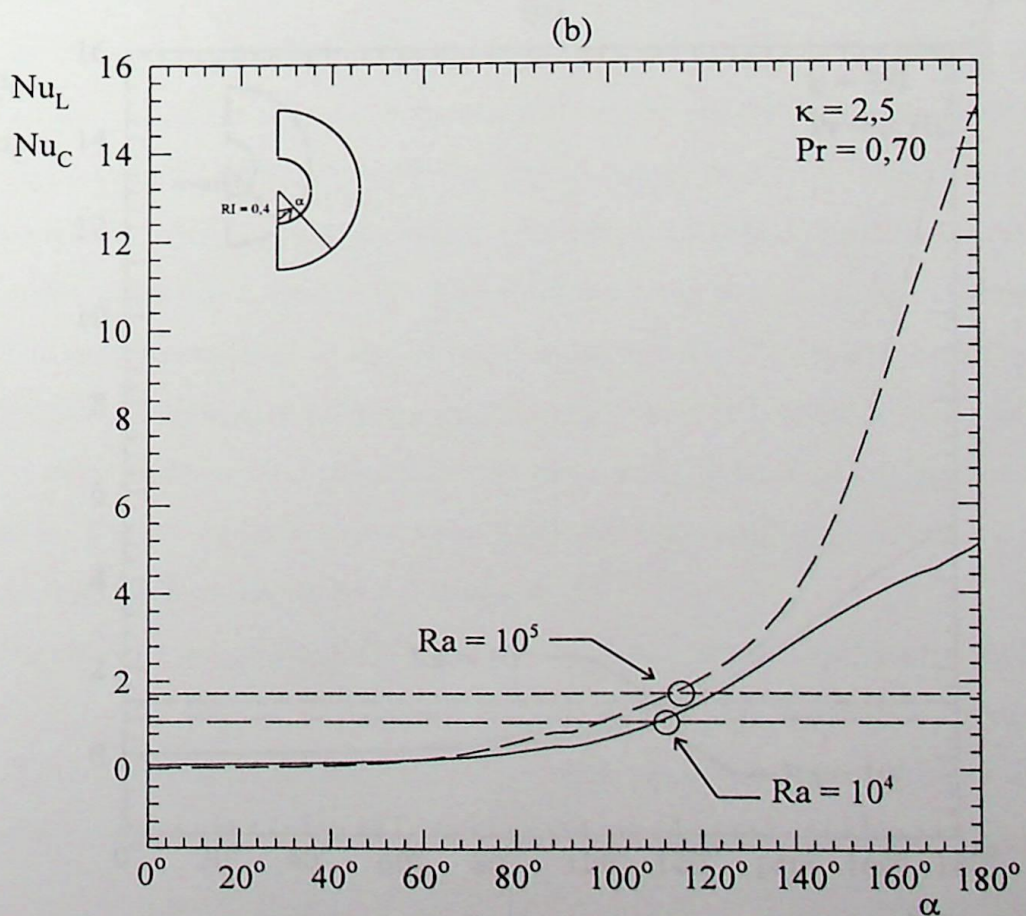
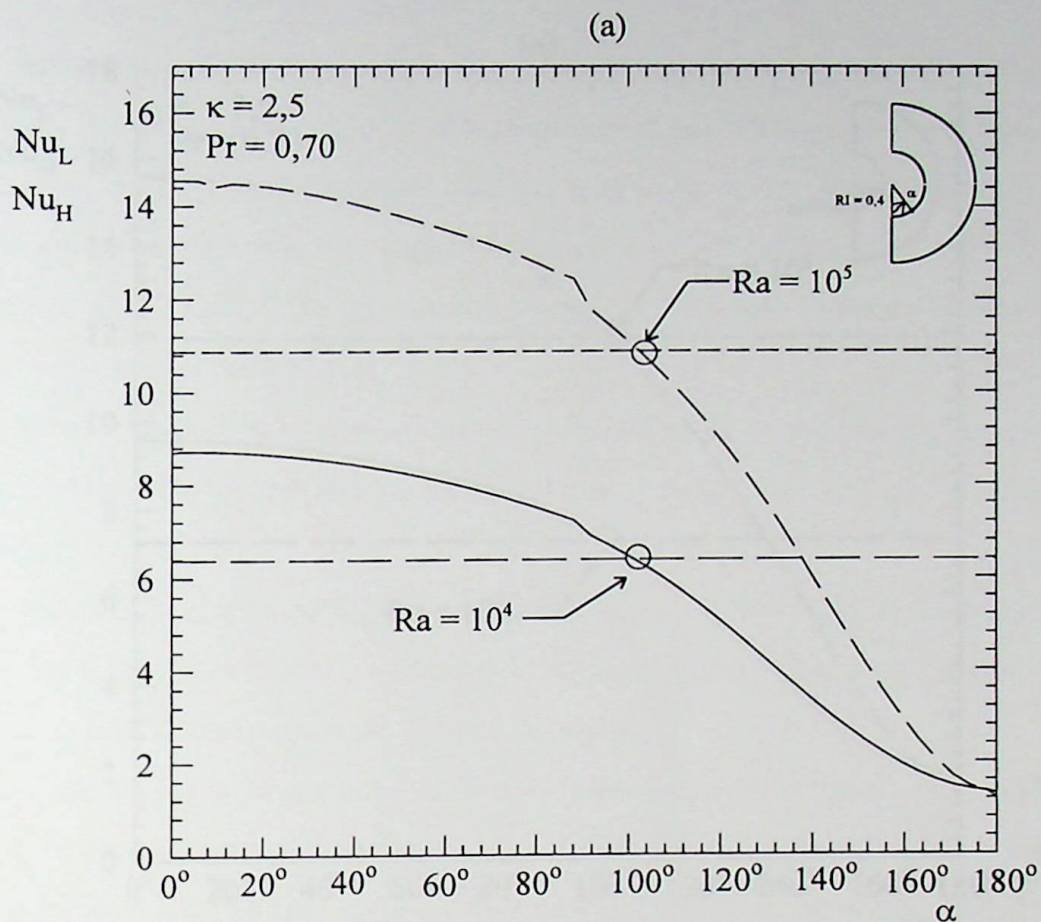


Figura 4.24 - (a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ ;  $\kappa = 2,5$

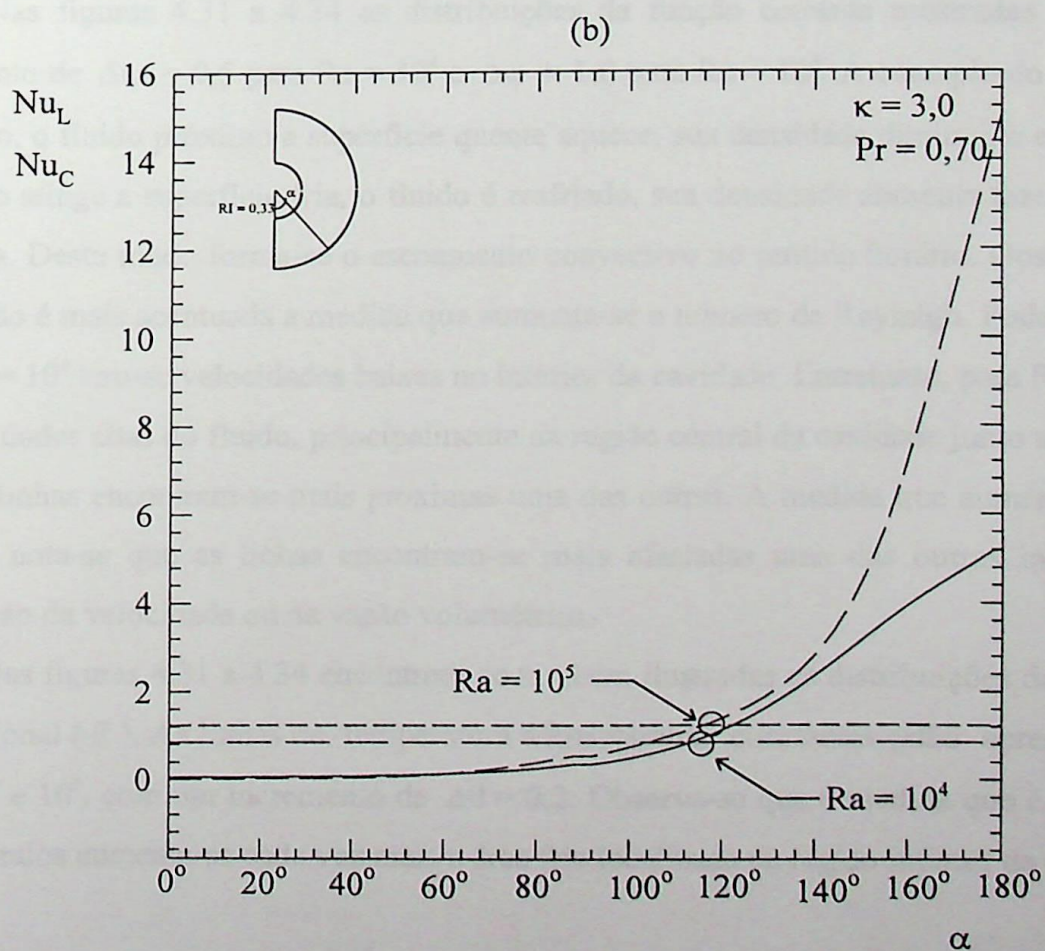
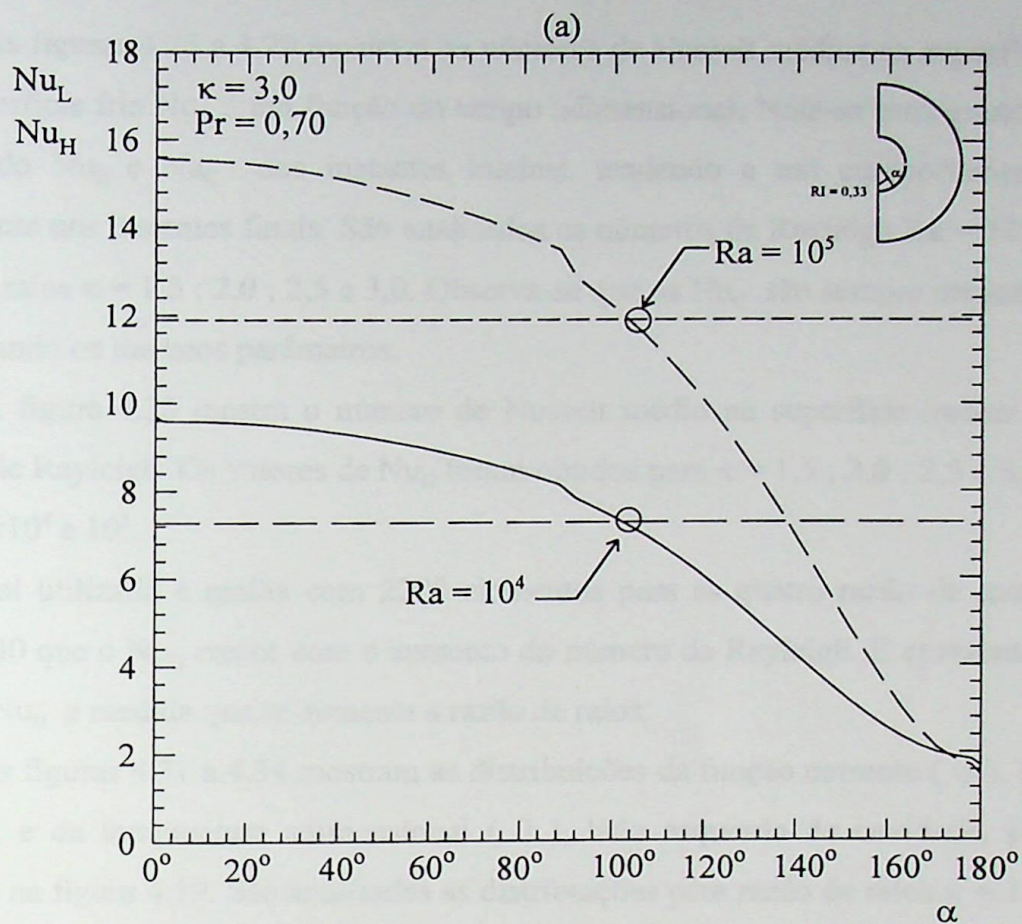


Figura 4.25 - (a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria; para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ ;  $\kappa = 3,0$

As figuras 4.26 a 4.29 mostram os números de Nusselt médios na superfície quente  $Nu_H$  e na superfície fria  $Nu_C$ , em função do tempo adimensional. Nota-se uma grande variação dos valores do  $Nu_H$  e  $Nu_C$  nos instantes iniciais, tendendo a um comportamento de regime permanente nos instantes finais. São analisados os números de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ , para as razão de raios  $\kappa = 1,5 ; 2,0 ; 2,5$  e  $3,0$ . Observa-se que os  $Nu_C$  são sempre menores que os  $Nu_H$ , considerando os mesmos parâmetros.

A figura 4.30 mostra o número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_H$  versus o número de Rayleigh. Os valores de  $Nu_H$  foram obtidos para  $\kappa = 1,5 ; 2,0 ; 2,5$  e  $3,0$ , e  $Ra = 10^4, 2 \times 10^4, 5 \times 10^4$  e  $10^5$ .

Foi utilizado a malha com 2208 elementos para as quatro razão de raios. Nota-se da figura 4.30 que o  $Nu_H$  cresce com o aumento do número de Rayleigh. E apresenta valores mais altos do  $Nu_H$  a medida que se aumenta a razão de raios.

As figuras 4.31 a 4.34 mostram as distribuições da função corrente ( $\psi$ ), lado direito da cavidade, e da temperatura adimensional ( $\theta$ ), lado esquerdo da cavidade, para o Caso 2 mostrado na figura 4.19. São analisadas as distribuições para razão de raios  $\kappa = 1,5 ; 2,0 ; 2,5$  e  $3,0$ , número de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ , e número de Prandtl fixo em  $0,70$ .

Nas figuras 4.31 a 4.34 as distribuições da função corrente mostradas possuem um incremento de  $\Delta\psi = 0,5$  para  $Ra = 10^4$  e  $\Delta\psi = 1,0$  para  $Ra = 10^5$ . A exemplo do caso anterior analisado, o fluido próximo a superfície quente aquece, sua densidade diminui, e então ele sobe e quando atinge a superfície fria, o fluido é resfriado, sua densidade aumenta fazendo com que ele desça. Deste modo forma-se o escoamento convectivo no sentido horário. Observa-se que a convecção é mais acentuada a medida que aumenta-se o número de Rayleigh. Pode-se notar que para  $Ra = 10^4$  tem-se velocidades baixas no interior da cavidade. Entretanto, para  $Ra = 10^5$  nota-se velocidades altas do fluido, principalmente na região central da cavidade junto as superfícies, onde as linhas encontram-se mais próximas uma das outras. A medida que aumenta-se a razão de raios nota-se que as linhas encontram-se mais afastadas uma das outras indicando uma diminuição da velocidade ou da vazão volumétrica.

Nas figuras 4.31 a 4.34 encontram-se também ilustradas as distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ). As linhas de temperatura adimensional constantes estão apresentadas para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ , com um incremento de  $\Delta\theta = 0,2$ . Observa-se que a medida que é aumentada a razão de raios aumenta-se cada vez mais a área fria localizada na região inferior da cavidade, e

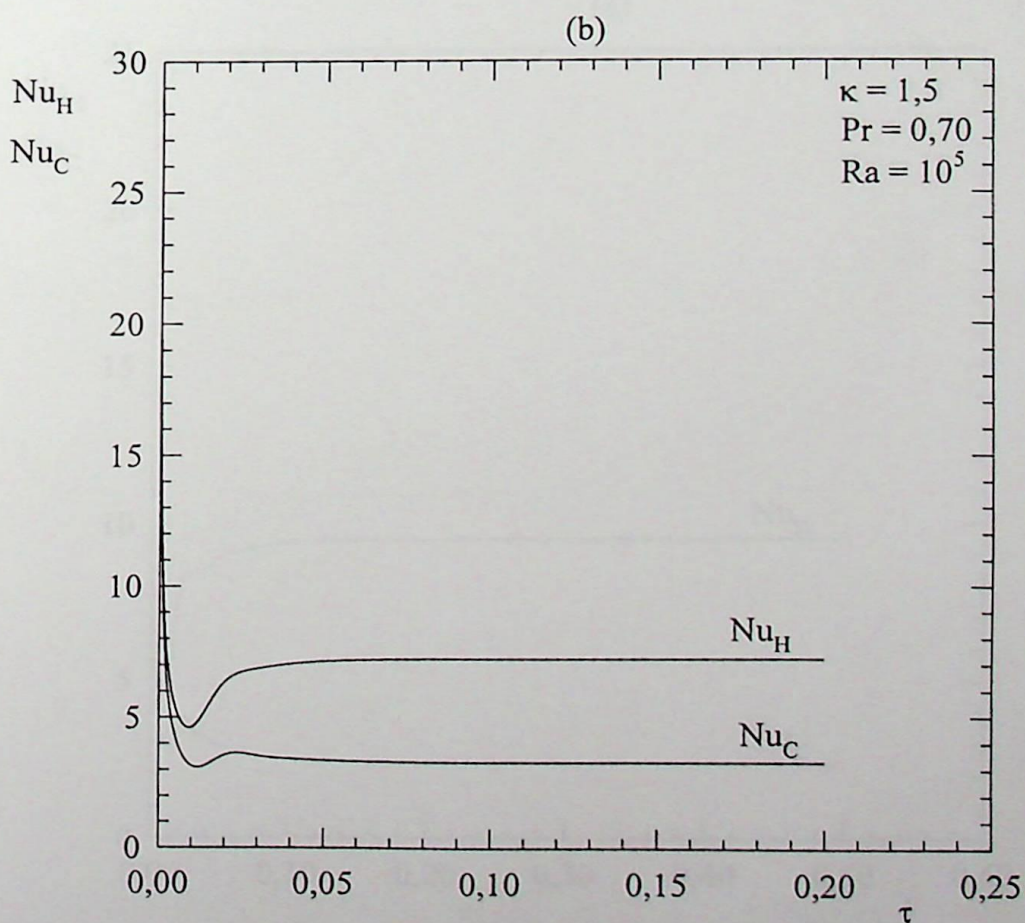
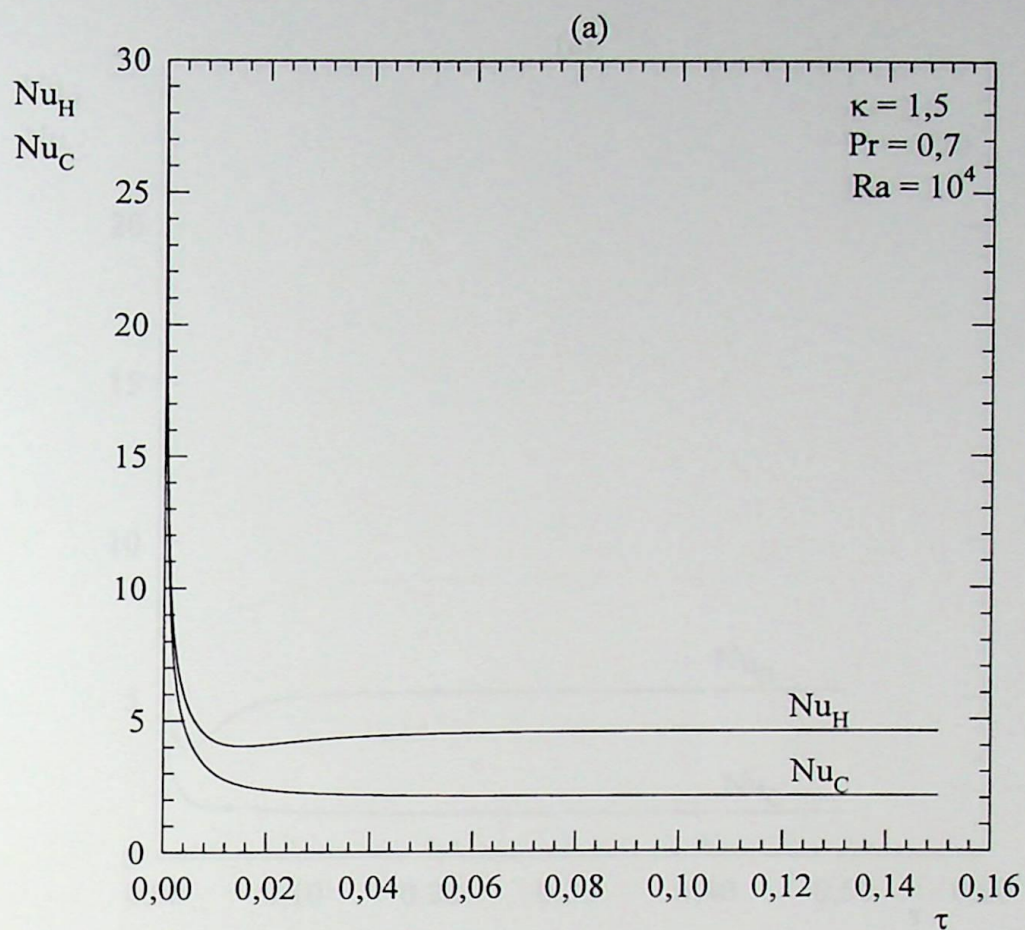


Figura 4.26 - Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para  $\kappa = 1,5$ ; (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

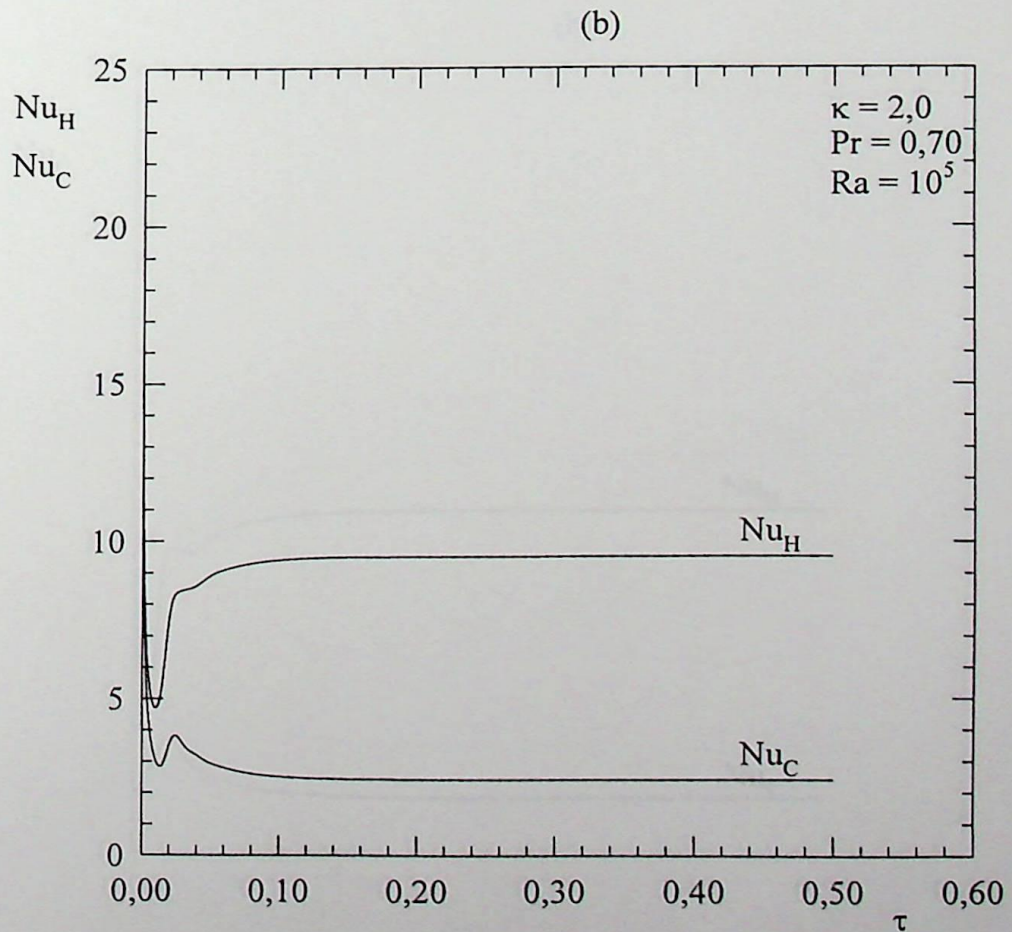
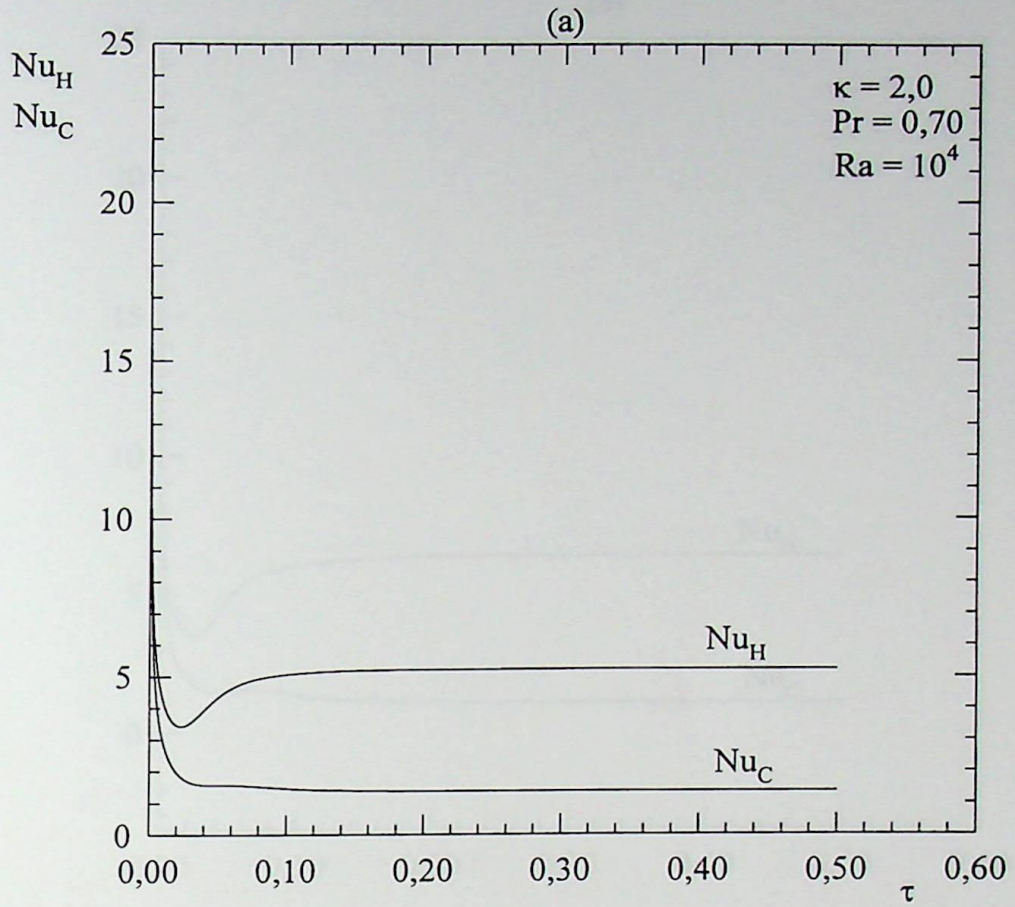


Figura 4.27 - Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para  $\kappa = 2,0$ ; (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

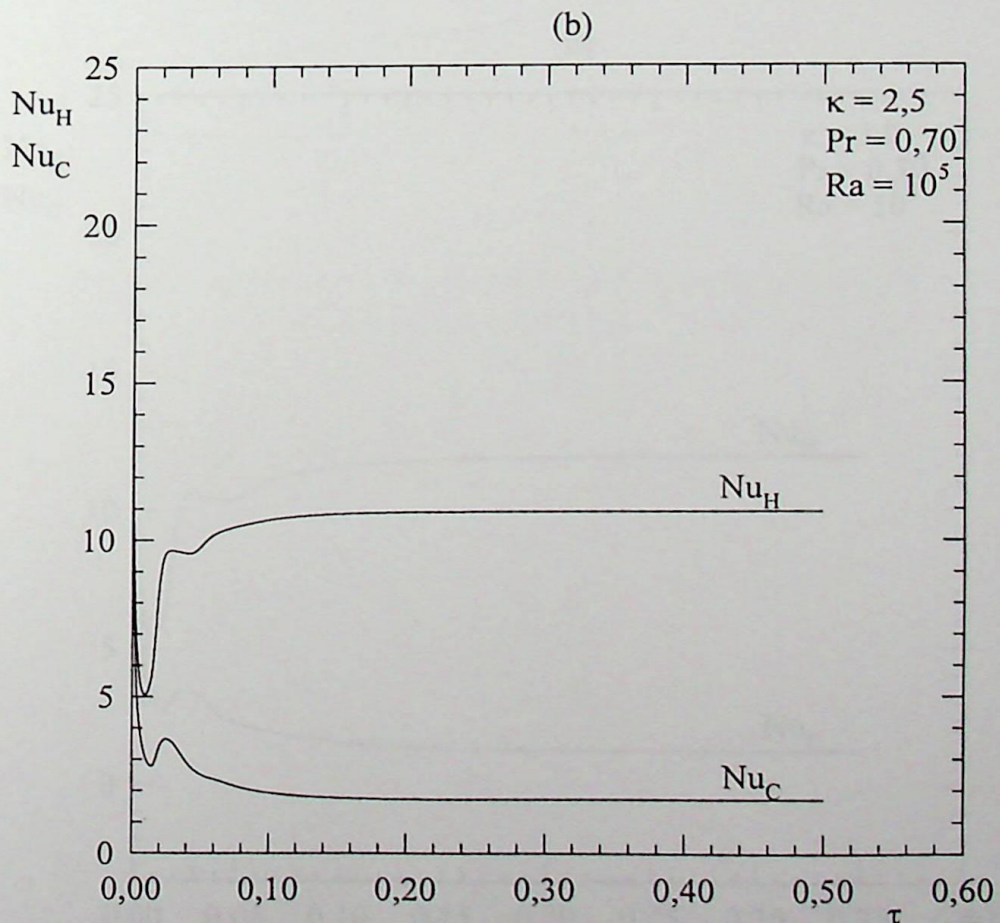
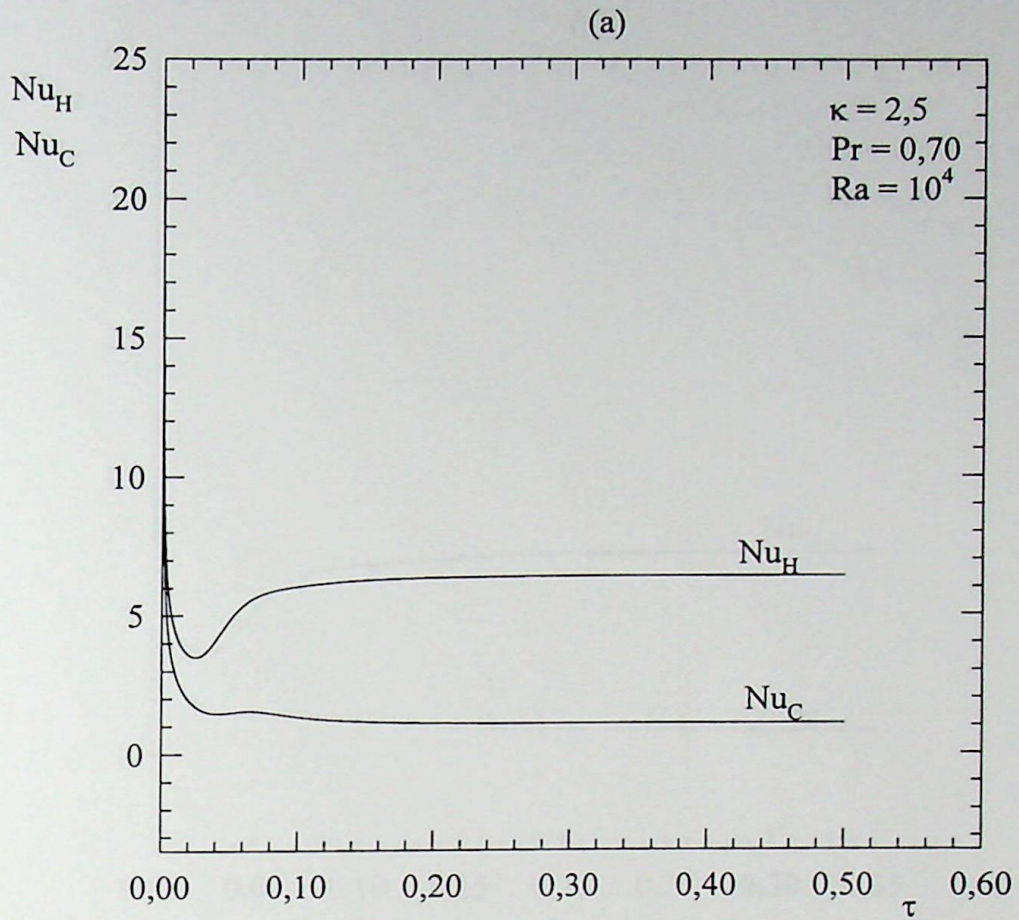


Figura 4.28 - Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para  $\kappa = 2,5$ ; (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

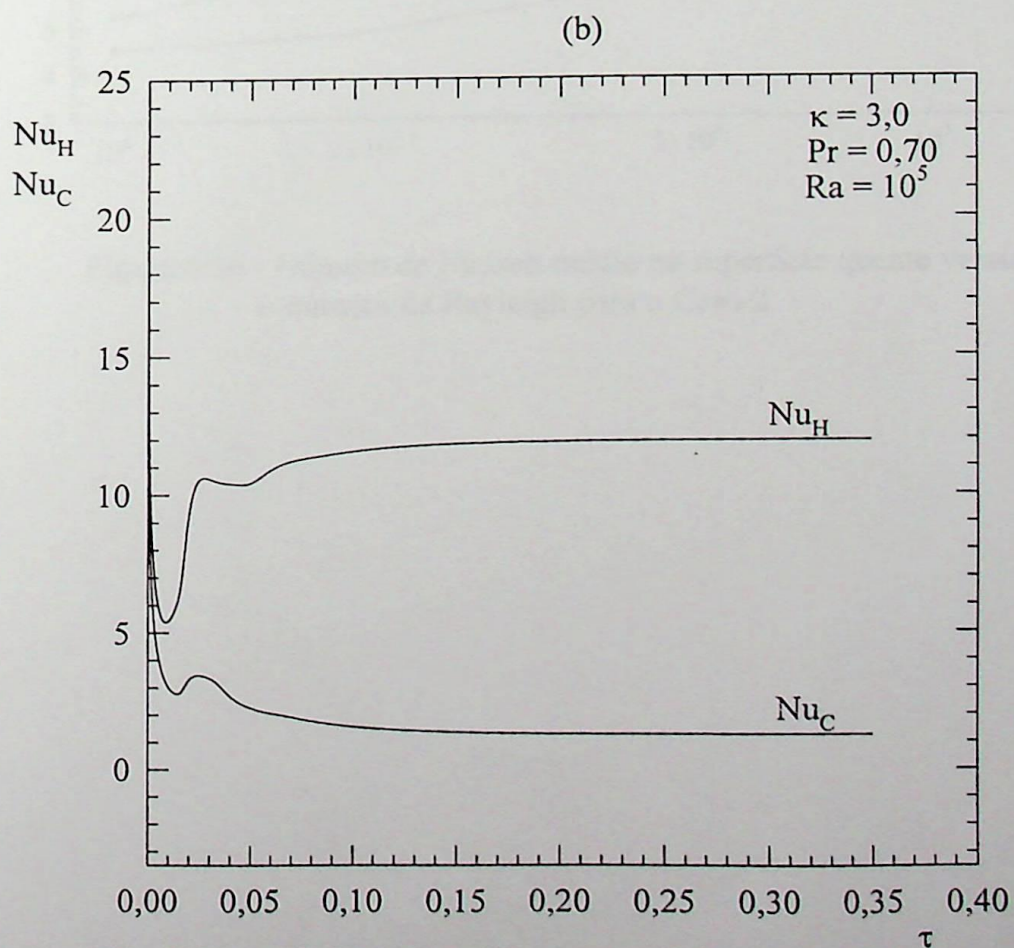
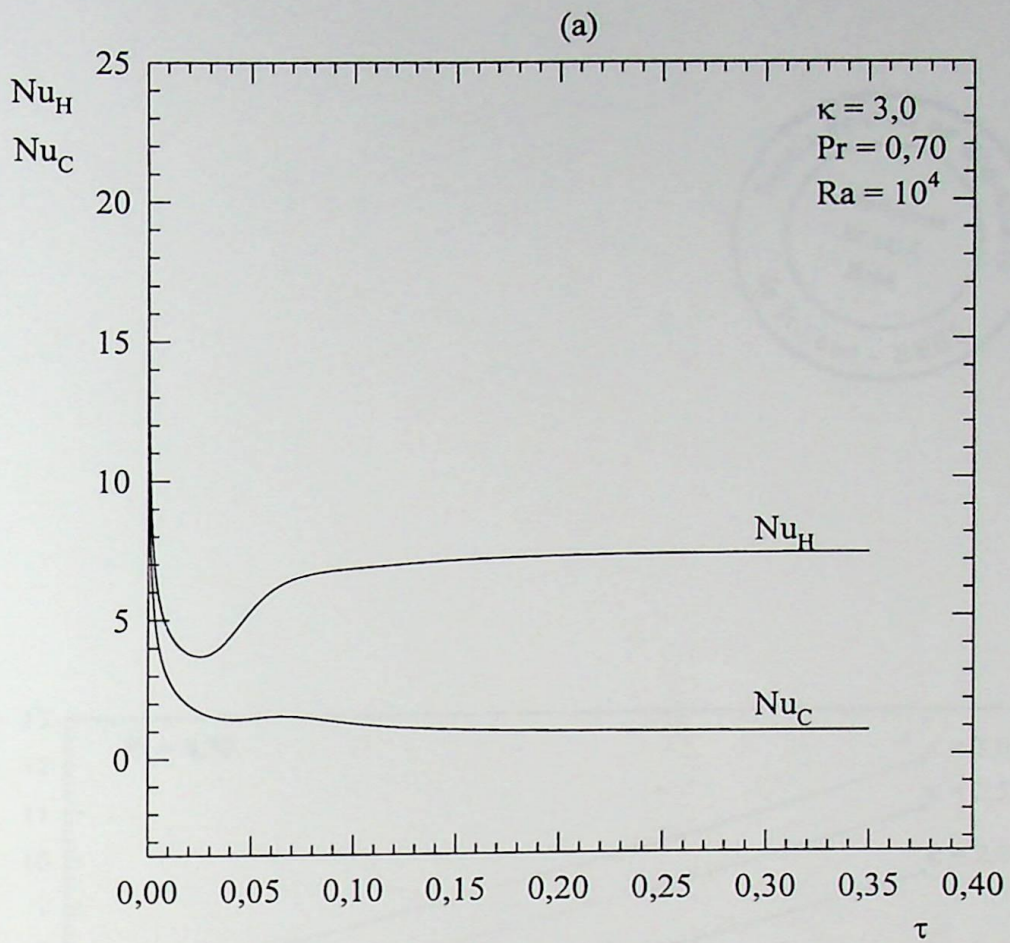


Figura 4.29 - Número de Nusselt médio na superfície quente e fria versus tempo adimensional, para  $\kappa = 3,0$ ; (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

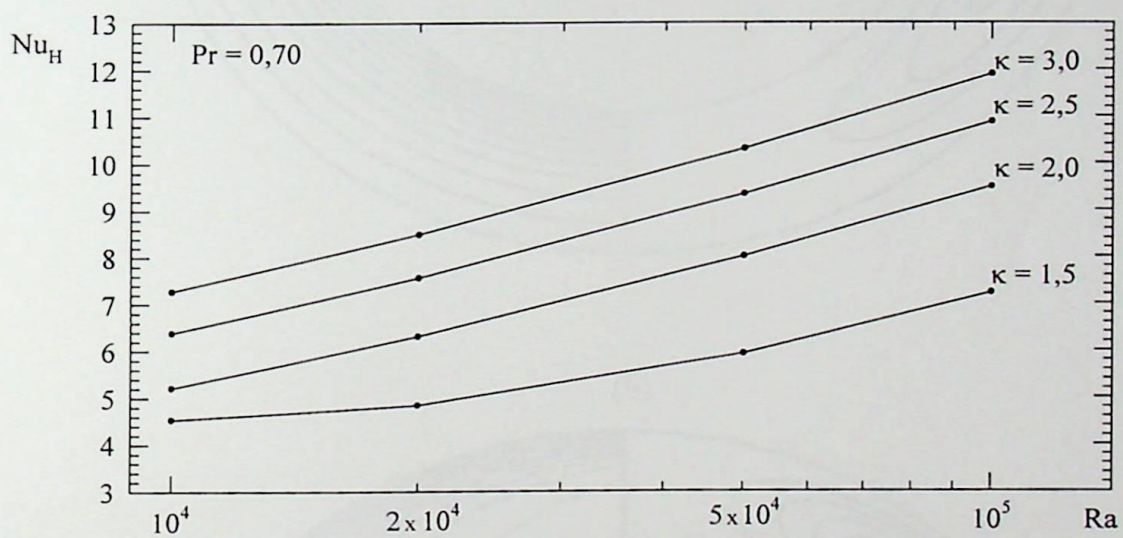


Figura 4.30 - Número de Nusselt médio na superfície quente versus o número de Rayleigh para o Caso 2

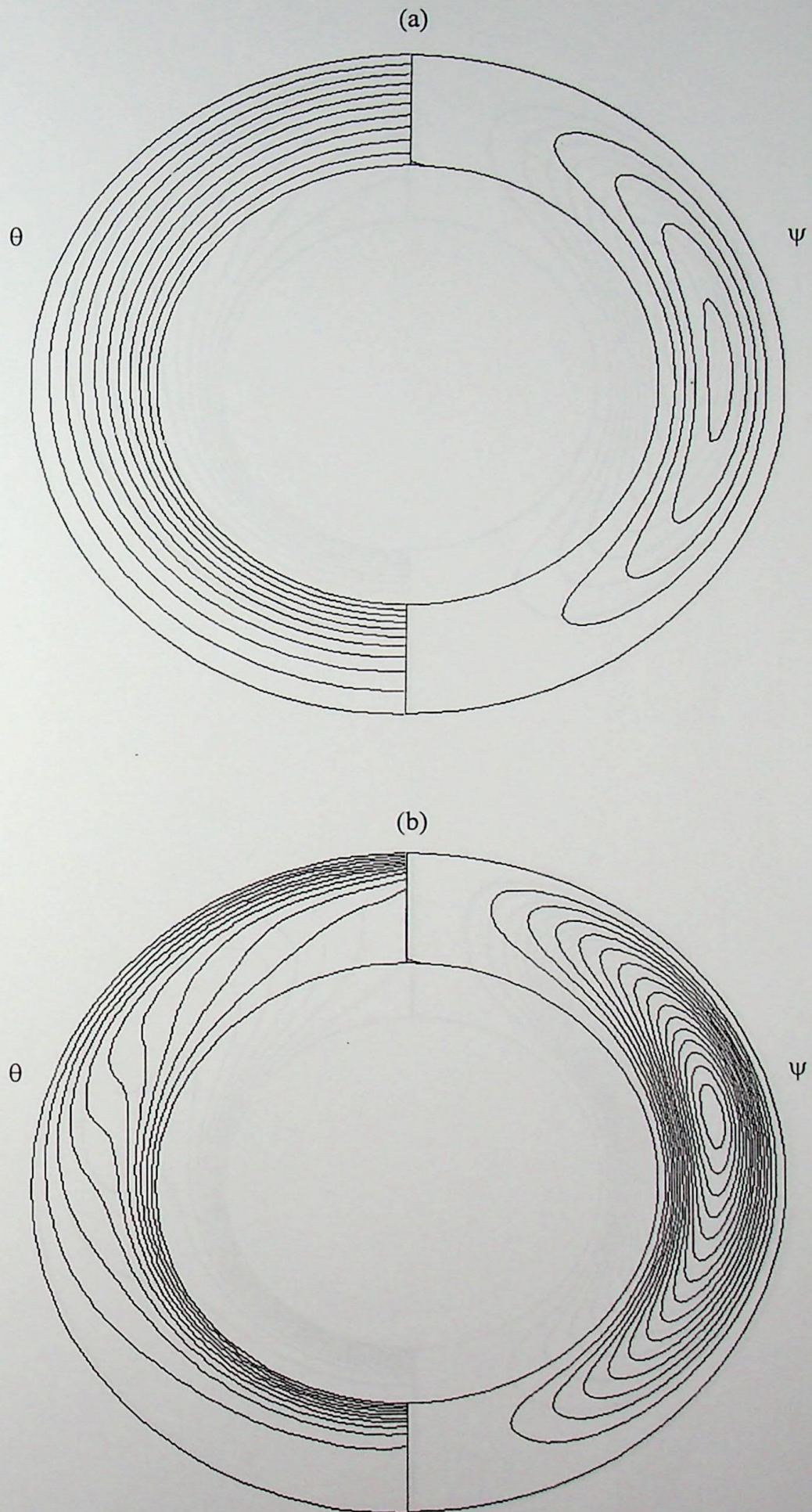


Figura 4.31 - Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para  $\kappa = 1,5$ ; (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

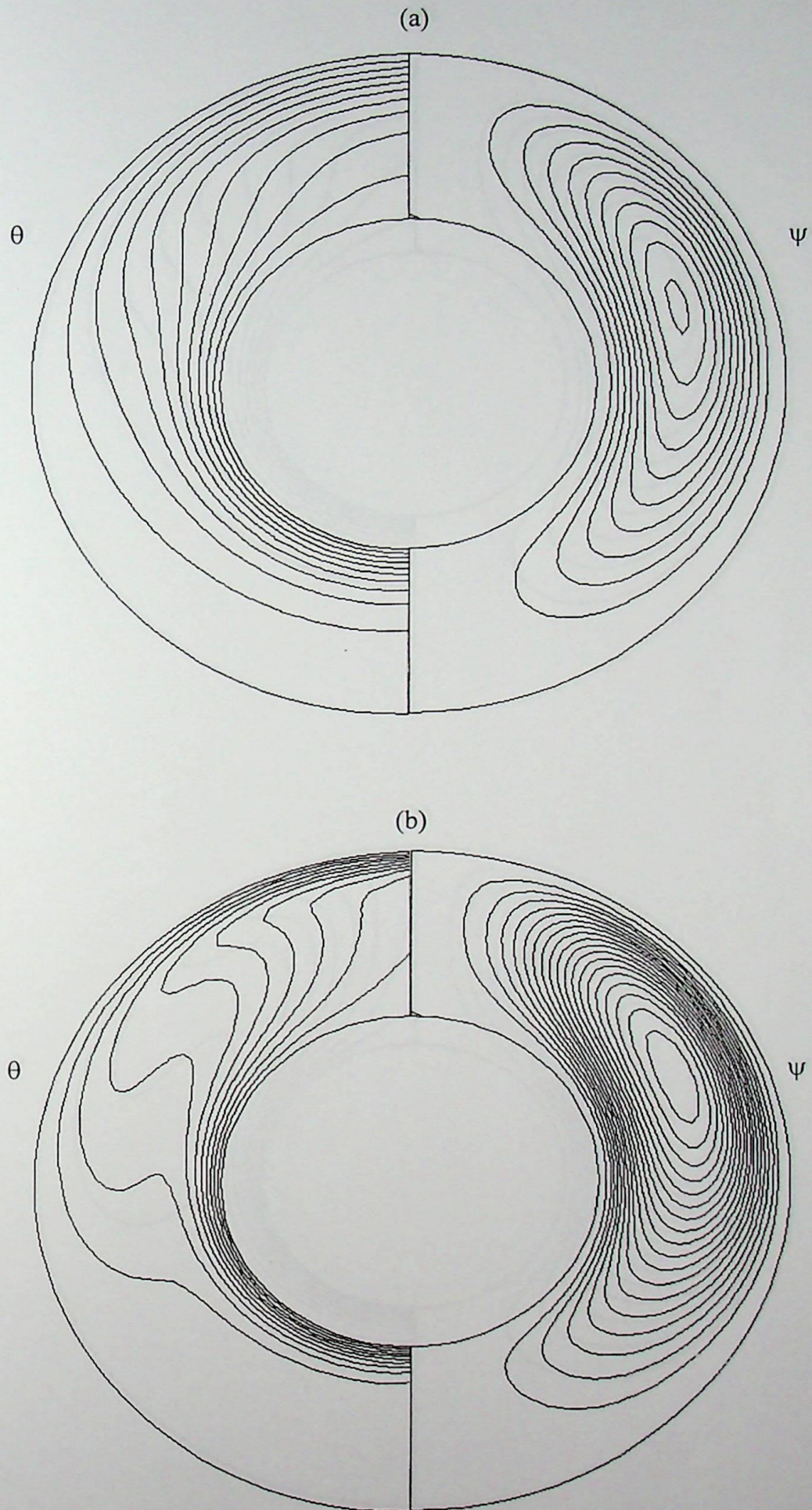


Figura 4.32 - Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para  $\kappa = 2,0$ ; (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

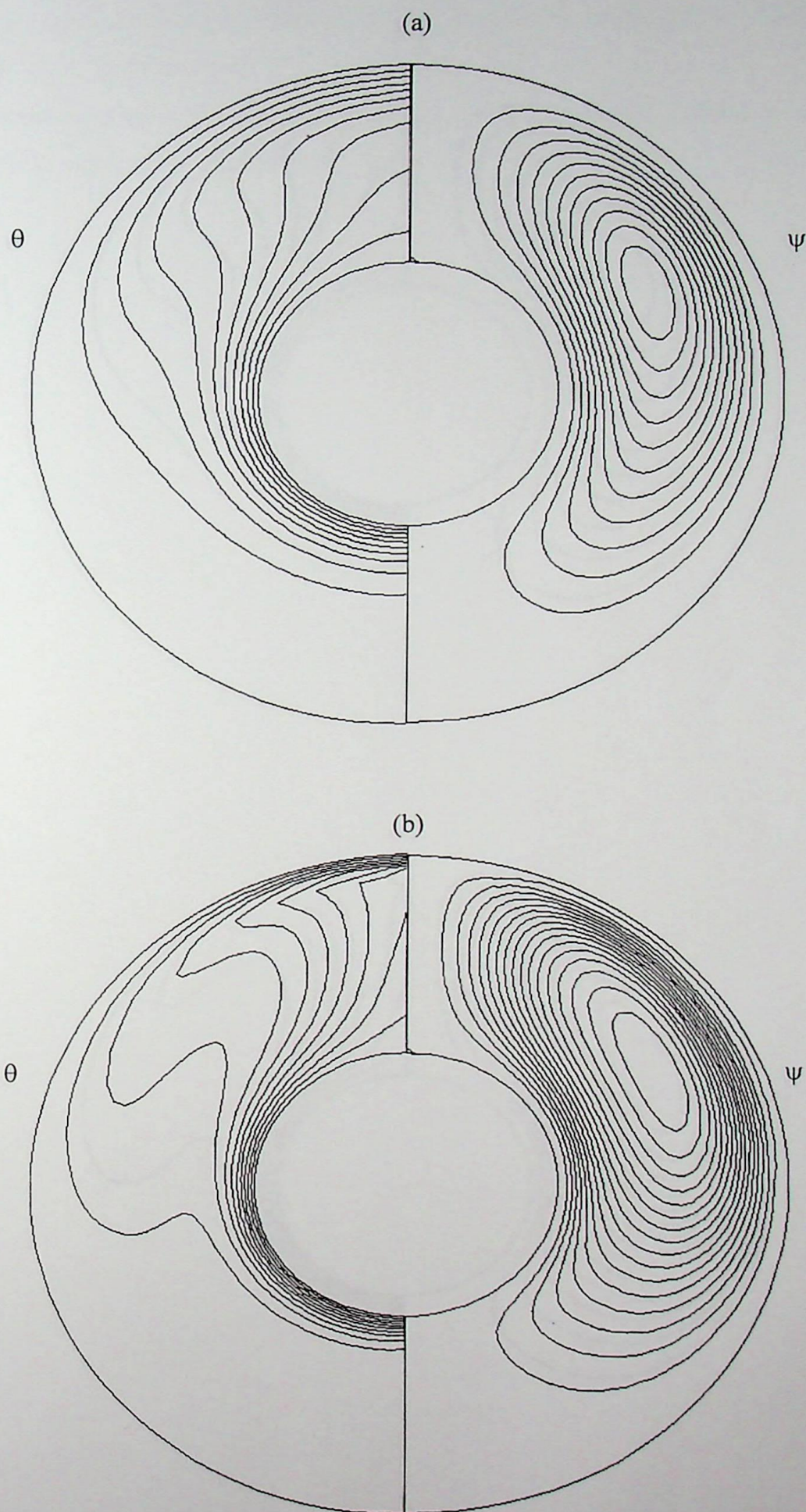


Figura 4.33 - Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para  $\kappa = 2,5$ ; (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

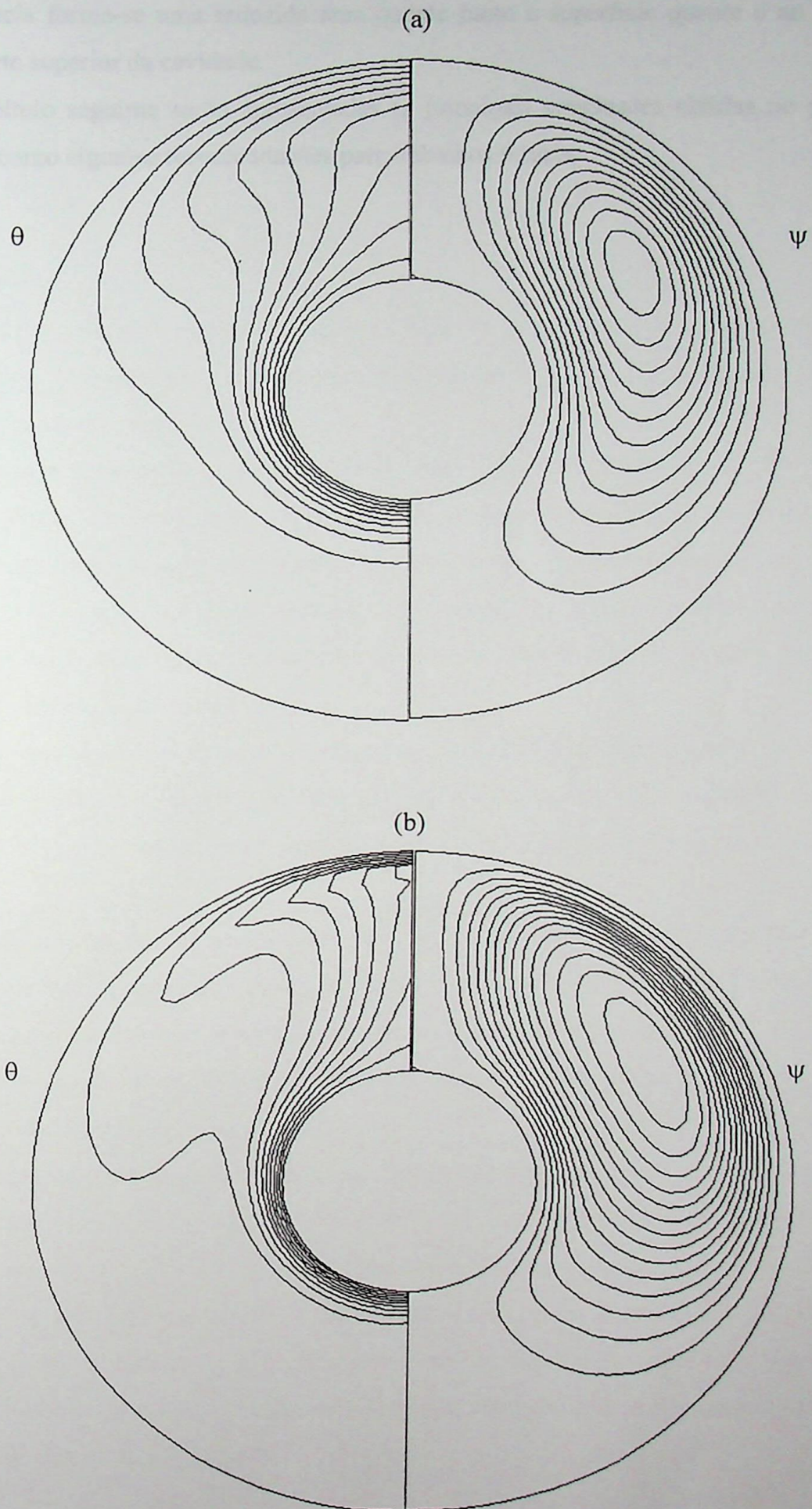


Figura 4.34 - Distribuições da temperatura adimensional ( $\theta$ ) e da função corrente ( $\psi$ ), para  $\kappa = 3,0$ ; (a)  $Ra = 10^4$ ; (b)  $Ra = 10^5$

por conseqüência forma-se uma reduzida área quente junto a superfície quente e ao eixo de simetria na parte superior da cavidade.

No capítulo seguinte serão apresentadas as principais conclusões obtidas no presente trabalho, bem como algumas recomendações para trabalhos futuros.

## 5.1- Conclusões

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar o comportamento térmico e de escoamento de um fluido em uma cavidade com uma parede quente e uma parede fria, considerando a influência da geometria da cavidade e da temperatura do fluido.

Foram estudadas as condições de contorno e as equações de conservação de massa, momento e energia. Os resultados foram obtidos através de simulações numéricas realizadas com o auxílio de um computador digital. A análise dos resultados mostrou que a temperatura do fluido aumenta significativamente na região próxima à parede quente e diminui na região próxima à parede fria. Além disso, o escoamento do fluido é caracterizado por um perfil de velocidade que varia com a geometria da cavidade e com a temperatura do fluido.

Como a geometria da cavidade é um fator importante para o comportamento térmico e de escoamento do fluido, foram estudadas as condições de contorno e as equações de conservação de massa, momento e energia para diferentes geometrias de cavidade. Os resultados mostraram que a temperatura do fluido aumenta significativamente na região próxima à parede quente e diminui na região próxima à parede fria.

As conclusões do presente trabalho são que a temperatura do fluido aumenta significativamente na região próxima à parede quente e diminui na região próxima à parede fria. Além disso, o escoamento do fluido é caracterizado por um perfil de velocidade que varia com a geometria da cavidade e com a temperatura do fluido.

Os resultados do presente trabalho mostram que a temperatura do fluido aumenta significativamente na região próxima à parede quente e diminui na região próxima à parede fria. Além disso, o escoamento do fluido é caracterizado por um perfil de velocidade que varia com a geometria da cavidade e com a temperatura do fluido.

Para concluir, o presente trabalho mostrou que a temperatura do fluido aumenta significativamente na região próxima à parede quente e diminui na região próxima à parede fria. Além disso, o escoamento do fluido é caracterizado por um perfil de velocidade que varia com a geometria da cavidade e com a temperatura do fluido. Os resultados do presente trabalho mostram que a temperatura do fluido aumenta significativamente na região próxima à parede quente e diminui na região próxima à parede fria. Além disso, o escoamento do fluido é caracterizado por um perfil de velocidade que varia com a geometria da cavidade e com a temperatura do fluido.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

#### 5.1- Conclusões

O presente trabalho tem como objetivo o estudo de transferência de calor por convecção natural, laminar, bidimensional, em regime permanente e não permanente em cavidades axissimétricas mostradas nas figuras 1.3 e 1.4.

Utiliza-se o método de elementos finitos com o elemento triangular de três nós, para resolver as equações de conservação em regime não permanente, embora os resultados tenham sido apresentados para o regime permanente. Um programa computacional em FORTRAN foi desenvolvido para solucionar essas equações em termos de função corrente, temperatura adimensional e vorticidade e para determinar o número de Nusselt médio e local nas superfícies quente e fria da cavidade axissimétrica.

Com o propósito de validar o programa computacional desenvolvido no presente trabalho, utilizaram-se para comparação os resultados publicados na literatura para cavidade de dois cilindros verticais concêntricos com diversas combinações de parâmetros térmicos e geométricos.

As comparações de resultados realizadas para a cavidade de dois cilindros verticais concêntricos revelam desvios entre 0,80% a -4,53% na tabela 4.1 e 0,018% a 4,85% na tabela 4.2, indicando no geral uma boa concordância entre os resultados comparados.

Os resultados de transferência de calor por convecção natural no interior da cavidade semi-esférica estão apresentados no item 4.3.

Primeiramente, estuda-se a variação do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_H$  versus o número de elementos para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ , conforme mostram as figuras 4.8a a 4.8c, para as razão de raios  $\kappa = 2,0 ; 3,0$  e  $4,0$ . Nota-se a convergência dos valores do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_H$  a medida que o número de elementos aumenta. Quanto maior for o número de elementos utilizados nos cálculos, maior é a tendência a convergência dos resultados; entretanto o custo computacional cresce bastante com o aumento do número de elementos, conforme mostra a figura 4.5.

A figura 4.8a mostra que para a razão de raios  $\kappa = 2,0$ , a malha com 450 elementos apresenta o valor de  $Nu_H$  praticamente convergido. O mesmo ocorre nas figuras 4.8b e 4.8c, respectivamente para a razão de raios  $\kappa = 3,0$  e  $4,0$  usando uma malha com 378 elementos.

Os números de Nusselt local e médio nas superfícies quente e fria para a cavidade semi-esférica estão mostrados nas figuras 4.9; 4.10 e 4.11, respectivamente para as razão de raios  $\kappa = 2,0$ ;  $3,0$  e  $4,0$ . São apresentados os resultados para números de Rayleigh  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ .

Para a superfície quente, o número de Nusselt local  $Nu_L$  cresce com o aumento da coordenada  $R$ , e possui o máximo valor para  $R$  igual ao raio interno  $R_I$ . E, a medida que a razão de raios  $\kappa$  aumenta, os valores de  $Nu_L$  atinge valores mais altos.

Para a superfície fria os números de Nusselt local crescem a medida que aumenta-se o ângulo  $\alpha$ , sendo mais alto para o ângulo igual a  $90^\circ$ . Porém, neste caso, aumentando-se a razão de raios  $\kappa$ , os números de Nusselt local na superfície fria diminuem.

Os números de Nusselt médios na superfície quente  $Nu_H$  e na superfície fria  $Nu_C$ , em função do tempo adimensional estão mostrados nas figuras 4.12 a 4.14. Nota-se uma grande variação dos valores do  $Nu_H$  e  $Nu_C$  nos instantes iniciais, tendendo a um comportamento de regime permanente nos instantes finais. Observa-se que a medida que aumenta-se a razão de raios  $\kappa$ , o  $Nu_H$  tende a valores mais altos e o  $Nu_C$  tende a diminuir.

A figura 4.15 mostra que o número de Nusselt na superfície quente  $Nu_H$  cresce com o aumento do número de Rayleigh  $Ra$ , e apresenta valores mais altos com o aumento da razão de raios  $\kappa$ .

As figuras 4.16 a 4.18 mostram as distribuições da função corrente e as linhas de temperatura adimensional constante no interior da cavidade semi-esférica. Estas figuras revelam que o escoamento é formado por uma célula convectiva e pelo fato da existência de simetria em relação ao eixo  $X$ , existe uma outra célula convectiva, apresentando escoamento no sentido contrário. Observa-se que a medida que aumenta-se a razão de raios  $\kappa$  o escoamento torna-se menos intenso e forma-se uma pequena região quente junto ao eixo de simetria  $X$ .

Os resultados de transferência de calor por convecção natural no interior da cavidade anular esférica estão apresentados no item 4.4.

A exemplo do item anterior 4.3, realiza-se o estudo da variação do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_H$  versus o número de elementos para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$ , conforme mostra as figuras 4.21a a 4.21d, respectivamente, para as razão de raios  $\kappa = 1,5$ ;  $2,0$ ;  $2,5$  e  $3,0$ . É observado que usando a malha com 2208 elementos o valor de  $Nu_H$  encontra-se praticamente convergido.

Nas figuras 4.22 a 4.25 nota-se que o número de Nusselt local na superfície quente  $Nu_L$ , para  $Ra = 10^4$  e  $10^5$  diminuem a medida que aumenta-se o ângulo  $\alpha$ , enquanto que na superfície fria os valores de  $Nu_L$  crescem. E ambos apresentam valores mais altos a medida que aumenta-se a razão de raios. Porém é importante notar que conforme aumenta-se a razão de raios o número de Nusselt médio na superfície quente aumenta, enquanto que o número de Nusselt médio na superfície fria diminui.

Nas figuras 4.26 a 4.29 pode-se notar a variação dos números de Nusselt médios na superfície quente  $Nu_H$  e na superfície fria  $Nu_C$ , em função do tempo adimensional, observando uma grande variação dos valores do  $Nu_H$  e  $Nu_C$  nos instantes iniciais, tendendo a um comportamento de regime permanente nos instantes finais. Aqui também é possível notar que conforme aumenta-se a razão de raios, o  $Nu_H$  tende a valores mais altos e o  $Nu_C$  tende a diminuir.

Da figura 4.30 observa-se que o  $Nu_H$  cresce com o aumento do número de Rayleigh, e apresenta valores mais altos a medida que aumenta-se a razão de raios.

As figuras 4.31 a 4.34 mostram as distribuições da função corrente e as linhas de temperatura adimensional constante no interior da cavidade anular esférica. Nas figuras nota-se que o escoamento é formado por uma célula convectiva, e por simetria ao eixo X, existe uma outra célula convectiva, porém com o escoamento em sentido contrário. Nota-se que a medida que aumenta-se a razão de raios, o escoamento torna-se mais fraco e forma-se uma área fria localizada na região inferior da cavidade, e uma pequena região quente junto a superfície quente e ao eixo de simetria na parte superior da cavidade.

No geral, nota-se que existe um comportamento semelhante entre os dois casos estudados nos itens 4.3 e 4.4. E embora os resultados teóricos de convecção natural aqui apresentados não tenham sido comparados com outros resultados teóricos ou experimentais, devido à indisponibilidade de dados, acredita-se ter conseguido algum avanço no estudo de convecção natural em geometrias axissimétricas.

## 5.2- Contribuições do Presente Trabalho

Uma importante contribuição do presente trabalho foi estudar a transferência de calor por convecção natural em cavidades axissimétricas arbitrárias, analisando o efeito de tal fenômeno quando se alteram os parâmetros geométricos e térmicos.

Também, através deste trabalho, é possível visualizar as distribuições da temperatura adimensional e o escoamento do fluido no interior da cavidade axissimétrica.

Uma outra contribuição que pode ser considerada foi o desenvolvimento das equações de conservação em coordenadas cilíndricas com a aplicação do método de elementos finitos, e a obtenção, como produto final, de um programa computacional que possibilita o estudo de convecção natural laminar em cavidades axissimétricas arbitrárias.

### 5.3- Recomendações para Trabalhos Futuros

Com a realização deste trabalho, pode-se levantar algumas sugestões para trabalhos a serem desenvolvidos futuramente:

- a-) Estudar a convecção natural em outras geometrias de cavidades axissimétricas.
- b-) Estudar uma nova malha mais refinada para o Caso 1 e comparar os resultados com o presente trabalho.
- c-) Realizar o estudo empregando outros tipos de elementos.
- d-) Estudar os casos 1 e 2 empregando novos valores para o número de Prandtl, razão de raios e número de Grashof.
- e-) Desenvolver equações de correlações do número de Nusselt em função dos diversos parâmetros geométricos e térmicos para os casos 1 e 2.
- f-) Estudar com mais detalhes a geometria de dois cilindros concêntricos verticais, obtendo-se as distribuições de  $\psi$  e  $\theta$ , tanto para o regime não permanente quanto para o permanente.

## APÊNDICE A

### DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES PARA O CÁLCULO DA VORTICIDADE NO CONTORNO

#### A.1- Vorticidade no Contorno Considerando Aproximação de Segunda Ordem

Seja o desenvolvimento da função corrente em Série de Taylor na direção X, dada por:

$$\psi_o = \psi_w + \frac{1}{1!} \frac{\partial \psi}{\partial X} \Big|_{X=0} \Delta X + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \Big|_{X=0} (\Delta X)^2 + \dots \quad (\text{A.1})$$

Onde  $\psi_o$  é a função corrente no ponto distante de  $\delta$  do contorno e  $\psi_w$  representa a função corrente no contorno, conforme mostra a figura A.1.

Desprezando os termos de ordem maiores que  $(\Delta X)^2$  e considerando que  $\psi_w = 0$  e  $\Delta X = \delta$ , a equação (A.1), torna-se:

$$\psi_o = \frac{\partial \psi}{\partial X} \delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \delta^2. \quad (\text{A.2})$$

Como  $\frac{\partial \psi}{\partial X} \Big|_{X=0} = 0$ , a equação (A.2) fica:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \Big|_{X=0} \delta^2 = \frac{2\psi_o}{\delta^2}. \quad (\text{A.3})$$

Da equação (2.11) tem-se:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) = -\omega. \quad (\text{A.4})$$

Da equação (A.4) considerando a variação de  $\psi$  na direção X, resulta que:

$$\frac{1}{R_w} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \Big|_{X=0} = -\omega_w. \quad (\text{A.5})$$

Onde  $\omega_w$  é a vorticidade num ponto do contorno com coordenada  $R = R_w$ .

Substituindo a equação (A.3) em (A.5), resulta:

$$\omega_w = -\frac{2\psi_o}{\delta^2 R_w}. \quad (\text{A.6})$$

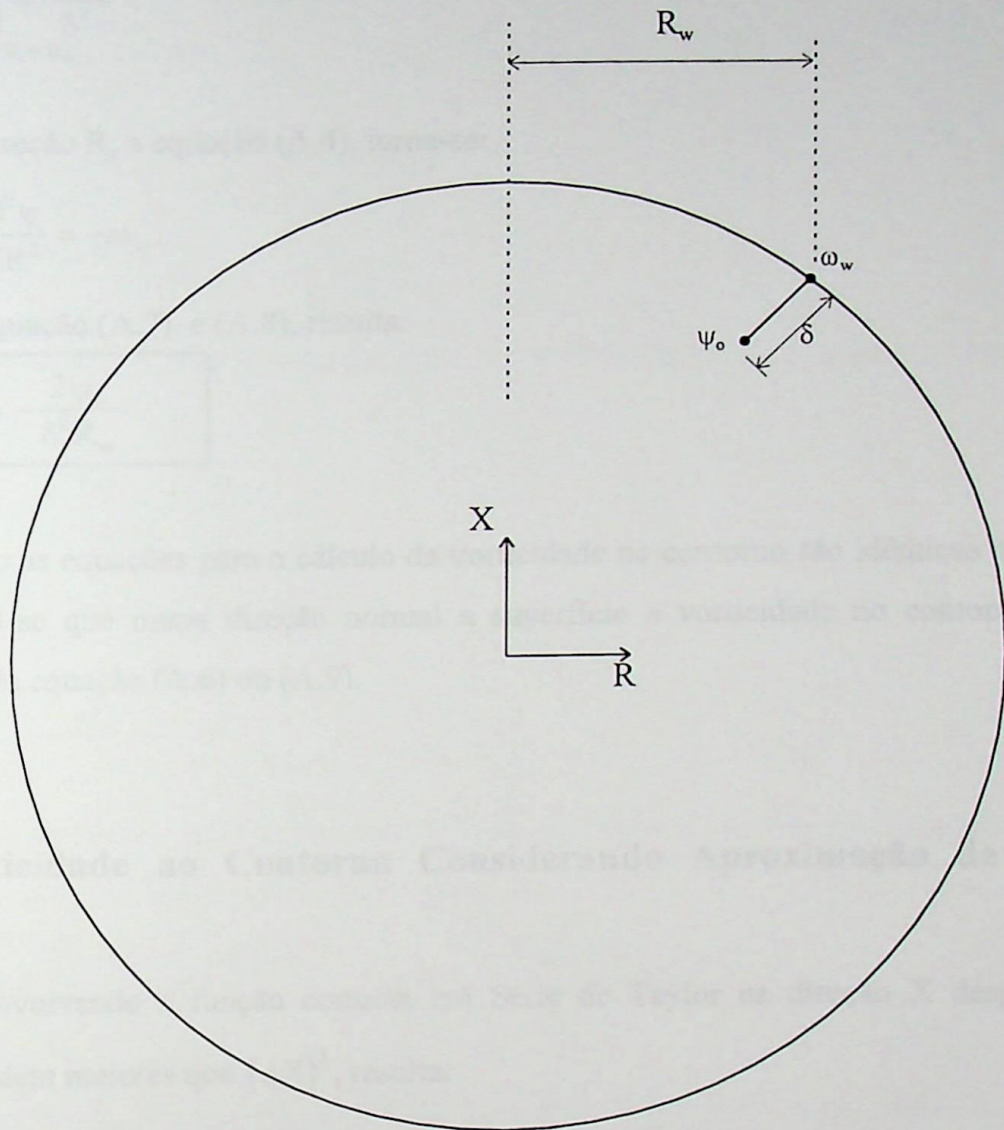


Figura A.1 - Análise axissimétrica da vorticidade no contorno

Desenvolvendo a função corrente na Série de Taylor na direção R, de modo análogo a direção X, tem-se:

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \right|_{R=R_w} = \frac{2\psi_o}{\delta^2} \quad (A.7)$$

Na direção R, a equação (A.4), torna-se:

$$\frac{1}{R_w} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} = -\omega_w \quad (A.8)$$

Da equação (A.7) e (A.8), resulta:

$$\boxed{\omega_w = -\frac{2\psi_o}{\delta^2 R_w}} \quad (A.9)$$

Como as equações para o cálculo da vorticidade no contorno são idênticas na direção X e R, conclui-se que numa direção normal a superfície a vorticidade no contorno pode ser calculada pela equação (A.6) ou (A.9).

## A.2- Vorticidade no Contorno Considerando Aproximação de Terceira Ordem

Desenvolvendo a função corrente em Série de Taylor na direção X desprezando os termos de ordem maiores que  $(\Delta X)^3$ , resulta:

$$\psi_o = \psi_w + \frac{1}{1!} \frac{\partial \psi}{\partial X} \Delta X + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} (\Delta X)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^3} (\Delta X)^3 \quad (A.10)$$

Resolvendo a equação diferencial (A.4) na direção X, vem:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} = -(\omega R)_w \quad (A.11)$$

Derivando a equação (A.11) em relação a X, tem-se:

$$\left. \frac{\partial(\omega R)_w}{\partial X} = -\frac{\partial^3 \psi}{\partial X^3} \right|_{X=0} \quad (A.12)$$

Substituindo (A.11) e (A.12) em (A.10), resulta:

$$\psi_o = \psi_w + \frac{\partial \psi}{\partial X} \Delta X - \frac{(\omega R)_w}{2} (\Delta X)^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial(\omega R)_w}{\partial X} (\Delta X)^3 \quad (A.13)$$

$$\text{Sendo: } \frac{\partial(\omega R)_w}{\partial X} = R_w \frac{\partial \omega}{\partial X} = \frac{R_w(\omega_o - \omega_w)}{\Delta X} \quad (\text{A.14})$$

De (A.13) e (A.14), vem :

$$\psi_o = \psi_w + \frac{\partial \psi_w}{\partial X} \Delta X - \frac{\omega_w R_w}{2} (\Delta X)^2 - \frac{R_w}{6} (\omega_o - \omega_w) (\Delta X)^2 \quad (\text{A.15})$$

Como  $\psi_w = 0$  e  $\left. \frac{\partial \psi_w}{\partial X} \right|_{X=0} = 0$ , resulta:

$$\psi_o = -\frac{\omega_w R_w}{3} (\Delta X)^2 - \frac{\omega_o R_w}{6} (\Delta X)^2 \quad (\text{A.16})$$

Da equação (A.16), resulta na seguinte equação para o cálculo da vorticidade no contorno:

$$\omega_w = -\frac{3\psi_o}{R_w(\Delta X)^2} - \frac{\omega_o}{2} \quad (\text{A.17})$$

sendo  $\Delta X = \delta$ , a equação (A.17) resulta:

$$\boxed{\omega_w = -\frac{3\psi_o}{R_w \delta^2} - \frac{\omega_o}{2}} \quad (\text{A.18})$$

Desenvolvendo a função corrente em Série de Taylor e resolvendo a equação diferencial na direção R, de modo análogo a direção X, tem-se:

$$\psi_o = \psi_w + \frac{\partial \psi_w}{\partial R} \Delta R - \frac{(\omega R)_w}{2} (\Delta R)^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial(\omega R)_w}{\partial R} (\Delta R)^3 \quad (\text{A.19})$$

Sendo:  $\frac{\partial(\omega R)_w}{\partial R} = R_w \frac{\partial \omega}{\partial R} = \frac{R_w(\omega_o - \omega_w)}{\Delta R}$ ,  $\psi_w = 0$ ,  $\left. \frac{\partial \psi_w}{\partial R} \right|_{R=R_w} = 0$  e  $\Delta R = \delta$ , resulta na

seguinte equação para o cálculo da vorticidade no contorno:

$$\boxed{\omega_w = -\frac{3\psi_o}{R_w \delta^2} - \frac{\omega_o}{2}} \quad (\text{A.20})$$

As equações (A.18) e (A.20) desenvolvidas respectivamente para as direções X e R são idênticas, podendo desta forma, ser utilizadas para o cálculo da vorticidade no contorno numa direção normal a superfície.

## APÊNDICE B

### NÚMERO DE NUSSELT LOCAL E MÉDIO

#### B.1- Introdução

Os parâmetros adimensionais de maior interesse no presente estudo são os números de Nusselt local ( $Nu_L$ ) e médio ( $Nu$ ). Em homenagem a Wilhelm Nusselt que contribuiu de modo significativo para a teoria da transferência de calor por convecção, esses parâmetros são definidos respectivamente da seguinte forma:

$$Nu_L = \frac{h_x D}{K}, \quad (B.1)$$

$$Nu = \frac{h D}{K}, \quad (B.2)$$

onde:

$h_x$  é o coeficiente local de transferência de calor por convecção,

$h$  é o coeficiente médio de transferência de calor por convecção,

$K$  é a condutibilidade térmica do fluido,

$D$  é a dimensão característica ( vide Figura B.1 ).

Os coeficientes local e médio de transferência de calor por convecção são respectivamente definidos como segue:

$$h_x = \frac{q_n}{T_h - T_c}, \quad (B.3)$$

$$h = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} h_x dS_1, \quad (B.4)$$

onde:

$q_n$  é o fluxo de calor normal à superfície;

$T_h$  é a temperatura da superfície quente  $S_1$  ;

$T_c$  é a temperatura da superfície fria  $S_2$  ;

$S_1$  é a superfície isotérmica quente mantida na temperatura  $T_h$  ;

$dS_1$  é a área elementar sobre a superfície  $S_1$  ,

sendo:

$$dS_1 = 2\pi r dl.$$

B.2- Número de Nusselt Local e Médio

O valor médio do calor  $q_m$  transferido a superfície plana  $S_1$  pode ser determinado nas condições de escoamento  $q_1 = q_2 = q_3$ , mediante aplicação da Equação (B.1) Aplicando a lei de Fourier nas superfícies  $S_2$  e  $S_3$  a energia dissipada por  $S_1$  a superfície plana.

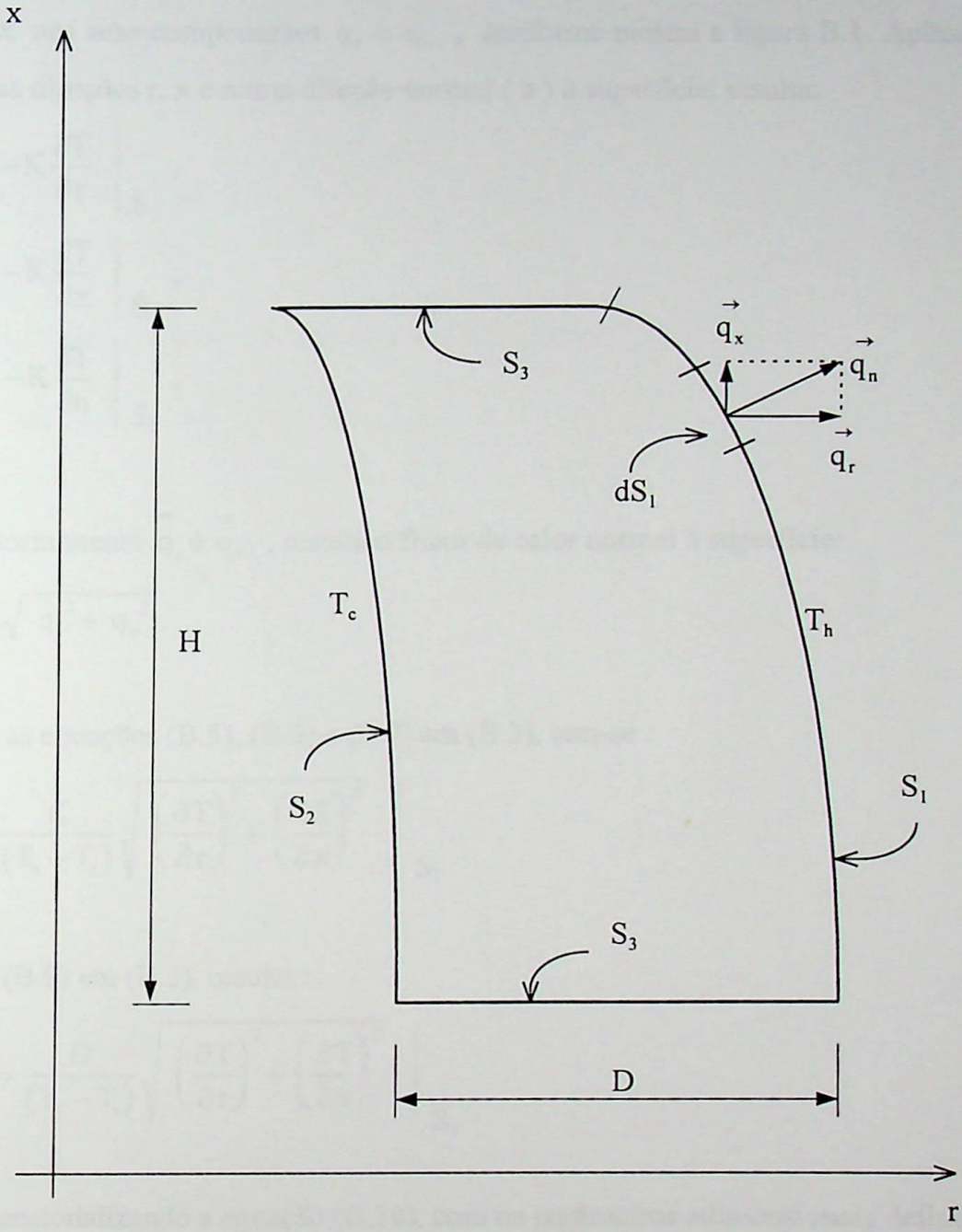


Figura B.1 - Geometria axissimétrica arbitrária

## B.2- Número de Nusselt Local e Médio

O vetor fluxo de calor  $\vec{q}_n$  normal à superfície quente  $S_1$ , pode ser decomposto nas direções  $r$  e  $x$  nas suas componentes  $q_r$  e  $q_x$ , conforme mostra a figura B.1. Aplicando a lei de Fourier nas direções  $r$ ,  $x$  e numa direção normal ( $n$ ) à superfície, resulta:

$$q_r = -K \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{S_1}, \quad (B.5)$$

$$q_x = -K \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{S_1}, \quad (B.6)$$

$$q_n = -K \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{S_1}. \quad (B.7)$$

Somando vetorialmente  $\vec{q}_r$  e  $\vec{q}_x$ , resulta o fluxo de calor normal à superfície:

$$q_n = \sqrt{q_r^2 + q_x^2}. \quad (B.8)$$

Substituindo as equações (B.5), (B.6) e (B.7) em (B.3), tem-se:

$$h_x = \frac{K}{(T_h - T_c)} \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2} \Big|_{S_1}. \quad (B.9)$$

Substituindo (B.9) em (B.1), resulta:

$$Nu_L = \frac{D}{(T_h - T_c)} \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2} \Big|_{S_1}. \quad (B.10)$$

Adimensionalizando a equação (B.10), com os parâmetros adimensionais definidos pelas equações (2.6b) e (2.6d), tem-se a seguinte equação para o número de Nusselt local na superfície  $S_1$ :

$$Nu_L \Big|_{S_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)^2} \Big|_{S_1}. \quad (B.11)$$

Para o número de Nusselt médio na superfície  $S_1$ , tem-se a seguinte relação:

$$Nu_1 = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} Nu_L \Big|_{S_1} dS_1. \quad (B.12)$$

As equações do número de Nusselt local e médio para a superfície  $S_2$  são idênticas às da superfície  $S_1$ . Portanto, pode-se generalizá-las, respectivamente, da seguinte forma:

$$\text{Nu}_L \Big|_{S_i} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)^2} \Big|_{S_i} \quad (\text{com } i = 1 \text{ ou } 2), \quad (\text{B.13})$$

$$\text{Nu}_i = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \text{Nu}_L \Big|_{S_i} dS_i \quad (\text{com } i = 1 \text{ ou } 2). \quad (\text{B.14})$$

O calor trocado por convecção natural na superfície quente  $S_1$ , é dado por :

$$Q_1 = hS_1(T_h - T_c) = \frac{\text{Nu}_1 K}{D} S_1(T_h - T_c). \quad (\text{B.15})$$

## APÊNDICE C

### MÉTODO DE GALERKIN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL EM REGIME NÃO PERMANENTE

#### C.1- Introdução

Seja a equação diferencial bidimensional em regime não permanente ( Sergeling, 1984 ):

$$\frac{1}{R} \left[ D_r \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) \right] + D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} , \quad (C.1)$$

com as seguintes condições de contorno :

$$\phi = \phi_0(R, X) , \quad (C.2)$$

$$q = D_r \frac{\partial \phi}{\partial R} \cos \theta + D_x \frac{\partial \phi}{\partial X} \sin \theta = \frac{\partial \phi}{\partial n} , \quad (C.3)$$

onde  $\phi$  representa uma função escalar;  $\phi_0(R, X)$  representa uma função especificada no contorno;  $q$  é fluxo de calor normal  $n$  à superfície  $S$  do contorno;  $\lambda$  é um parâmetro de valor constante, e  $\tau$  é o tempo adimensional.

#### C.2 - Método de Galerkin

A equação (C.1) pode ser escrita da seguinte forma :

$$\frac{1}{R} \left[ D_r \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) \right] + D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \left( Q_\phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) = 0 . \quad (C.4)$$

A integral residual para um problema axissimétrico é a integral de volume apresentada na seguinte forma:

$$\{R^e\} = - \int_{V^e} [N^e]^T \left\{ \frac{1}{R} \left[ D_r \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \right) \right] + D_x \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} + \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) \right\} dV . \quad (C.5)$$

A equação (C.5) pode ser escrita como sendo :

$$\{R^e\} = - \int_{V^e} [N^e]^T \left[ \frac{1}{R} D_r \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \right) \right] dV - \int_{V^e} [N^e]^T D_x \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} dV$$

$$-\int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV. \quad (C.6)$$

As derivadas devem ser transformadas para as formas de menor ordem, usando o produto por diferenciação e teorema de Gauss.

Usa-se o seguinte produto por diferenciação :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) = [N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} + \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X}. \quad (C.7)$$

Rearranjando a equação (C.7), resulta :

$$[N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) - \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X}. \quad (C.8)$$

Para substituir o primeiro termo da equação (C.6), pode-se usar o seguinte produto por diferenciação :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( [N^e]^T R \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \right) = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial [N^e]^T}{\partial R} R \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} [N^e]^T \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \right). \quad (C.9)$$

Rearranjando a equação (C.9), resulta :

$$[N^e]^T \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \right) \right] = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial [N^e]^T}{\partial R} R \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \right) - \frac{\partial [N^e]^T}{\partial R} \frac{\partial \phi^e}{\partial R}. \quad (C.10)$$

Substituindo as equações (C.8) e (C.10) em (C.6), resulta :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & - \int_{V^e} \left[ \frac{D_r}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( [N^e]^T R \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \right) - D_r \frac{\partial [N^e]^T}{\partial R} \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \right] dV \\ & - \int_{V^e} \left[ D_x \frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) - D_x \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right] dV \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV. \end{aligned} \quad (C.11)$$

Rearranjando a equação (C.11), resulta :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & \int_{V^e} \left[ D_r \frac{\partial [N^e]^T}{\partial R} \frac{\partial \phi^e}{\partial R} + D_x \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right] dV \\ & - \int_{V^e} \left[ \frac{D_r}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( [N^e]^T R \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \right) + D_x \frac{\partial}{\partial X} \left( [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) \right] dV \end{aligned}$$

$$- \int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV . \quad (C.12)$$

A segunda integral de volume da equação (C.12) pode ser transformada em uma integral de superfície usando o teorema de Gauss (Olmstead, 1961), resultando :

$$\int_{A^e} \left[ \frac{D_r}{R} \left( [N^e]^T R \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \right) \cos \theta + D_x [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \sin \theta \right] dA . \quad (C.13)$$

A equação (C.13) pode ser reduzida para a seguinte forma :

$$\int_{A^e} [N^e]^T \left( D_r \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \cos \theta + D_x \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \sin \theta \right) dA . \quad (C.14)$$

Substituindo a equação (C.3) em (C.14), vem :

$$\int_{A^e} [N^e]^T \left( D_r \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \cos \theta + D_x \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \sin \theta \right) dA = \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA . \quad (C.15)$$

Portanto, a integral residual completa fica na seguinte forma :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & \int_{V^e} \left[ D_r \frac{\partial [N^e]^T}{\partial R} \frac{\partial \phi^e}{\partial R} + D_x \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right] dV - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T \left( Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV . \end{aligned} \quad (C.16)$$

A função escalar  $\phi^e$  é definida na seguinte forma matricial :

$$\phi^e = [N^e] \{ \Phi^e \} . \quad (C.17)$$

As derivadas  $\frac{\partial \phi^e}{\partial R}$  e  $\frac{\partial \phi^e}{\partial X}$  na primeira integral da equação (C.16) podem ser substituídas

por :

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial R} = \frac{\partial [N^e]}{\partial R} \{ \Phi^e \} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi^e}{\partial X} = \frac{\partial [N^e]}{\partial X} \{ \Phi^e \} . \quad (C.18)$$

Portanto, rearranjando as equações (C.17) e (C.18) em (C.16), resulta :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & \left[ \int_{V^e} \left( D_r \frac{\partial [N^e]^T}{\partial R} \frac{\partial [N^e]}{\partial R} + D_x \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial [N^e]}{\partial X} \right) dV \right] \{ \Phi^e \} - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA \\ & - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV + \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] \frac{\partial \{ \Phi^e \}}{\partial \tau} dV . \end{aligned} \quad (C.19)$$

Da equação (C.17),  $\phi^e$  é definida por :

$$\phi^e = [N^e] \{ \Phi^e \}, \quad (C.20)$$

com isto, define-se a matriz  $\{g^e\}$  como sendo :

$$\{g^e\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi^e}{\partial R} \\ \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial R} & \frac{\partial N_2^e}{\partial R} & \dots & \frac{\partial N_m^e}{\partial R} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial X} & \frac{\partial N_2^e}{\partial X} & \dots & \frac{\partial N_m^e}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_m \end{Bmatrix}, \quad (C.21)$$

ou na seguinte forma condensada :

$$\{g^e\} = [B^e] \{ \Phi^e \}, \quad (C.22)$$

onde  $m$  é o número de pontos nodais do elemento, e  $[B^e]$  representa as derivadas das funções de forma do elemento.

Logo, rearranjando a equação (C.22) na primeira integral da equação (C.19), tem-se :

$$\left[ \int_{v^e} \left( D_r \frac{\partial [N^e]^T}{\partial R} \frac{\partial [N^e]}{\partial R} + D_x \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial [N^e]}{\partial X} \right) dV \right] \{ \Phi^e \} = \int_{v^e} [B^e]^T [D] [B^e] dV \{ \Phi^e \}, \quad (C.23)$$

onde:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & D_x \end{bmatrix}. \quad (C.24)$$

A última integral da equação (C.19) pode ser escrita como :

$$\int_{v^e} \lambda [N^e]^T [N^e] \frac{\partial \{ \Phi^e \}}{\partial \tau} dV = [C]^e \frac{\partial \{ \Phi^e \}}{\partial \tau}, \quad (C.25)$$

onde :

$$[C]^e = \int_{v^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV. \quad (C.26)$$

Substituindo as equações (C.23) e (C.25) em (C.19), resulta :

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & \left[ \int_{v^e} [B^e]^T [D] [B^e] dV \right] \{ \Phi^e \} - \int_{A^E} [N^e]^T q^e dA \\ & - \int_{v^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV + [C]^e \frac{\partial \{ \Phi^e \}}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (C.27)$$

Fazendo a minimização de  $\{R^e\}$ , tem-se :

$$\{R\} = \sum_{e=1}^E \{R^e\} = 0 . \quad (C.28)$$

Logo, substituindo (C.27) em (C.28), resulta :

$$\begin{aligned} \{R\} = & \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} [B^e]^T [D] [B^e] dV \right] \{\Phi^e\} + \sum_{e=1}^E \left[ \int_{A^e} -[N^e]^T q^e dA \right] \\ & + \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} -[N^e]^T Q_\phi^e dV \right] + \sum_{e=1}^E \left[ [C]^e \frac{\partial \{\Phi^e\}}{\partial \tau} \right] = 0 . \end{aligned} \quad (C.29)$$

A equação (C.29) pode ser escrita na seguinte forma condensada :

$$\{R\} = [C] \frac{\partial \{\Phi\}}{\partial \tau} + [K] \{\Phi\} + \{F\} = 0 , \quad (C.30)$$

onde :

$$[C] = \sum_{e=1}^E [C]^e = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV \right] , \quad (C.31)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^E [K]^e = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} [B^e]^T [D] [B^e] dV \right] , \quad (C.32)$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^E \{F\}^e = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{A^e} -[N^e]^T q^e dA \right] + \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V^e} -[N^e]^T Q_\phi^e dV \right] . \quad (C.33)$$

### C.3 - Aproximação do Termo $\frac{\partial \{\Phi\}}{\partial \tau}$

Na figura C.1 tem-se os valores de  $\Phi_0$  e  $\Phi_1$  assumidos pela função  $\phi$ , respectivamente para os tempos,  $\tau_0$  e  $\tau_1$ .

Para a aproximação do termos  $\frac{\partial \{\Phi\}}{\partial \tau}$ , usa-se um esquema de diferença finita central ,

e o termo  $\frac{d\phi}{d\tau}$  pode ser escrito na seguinte forma :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{\Delta \tau} . \quad (C.34)$$

A derivada da grandeza  $\phi$  para os pontos nodais no domínio do tempo pode ser calculada pela equação :

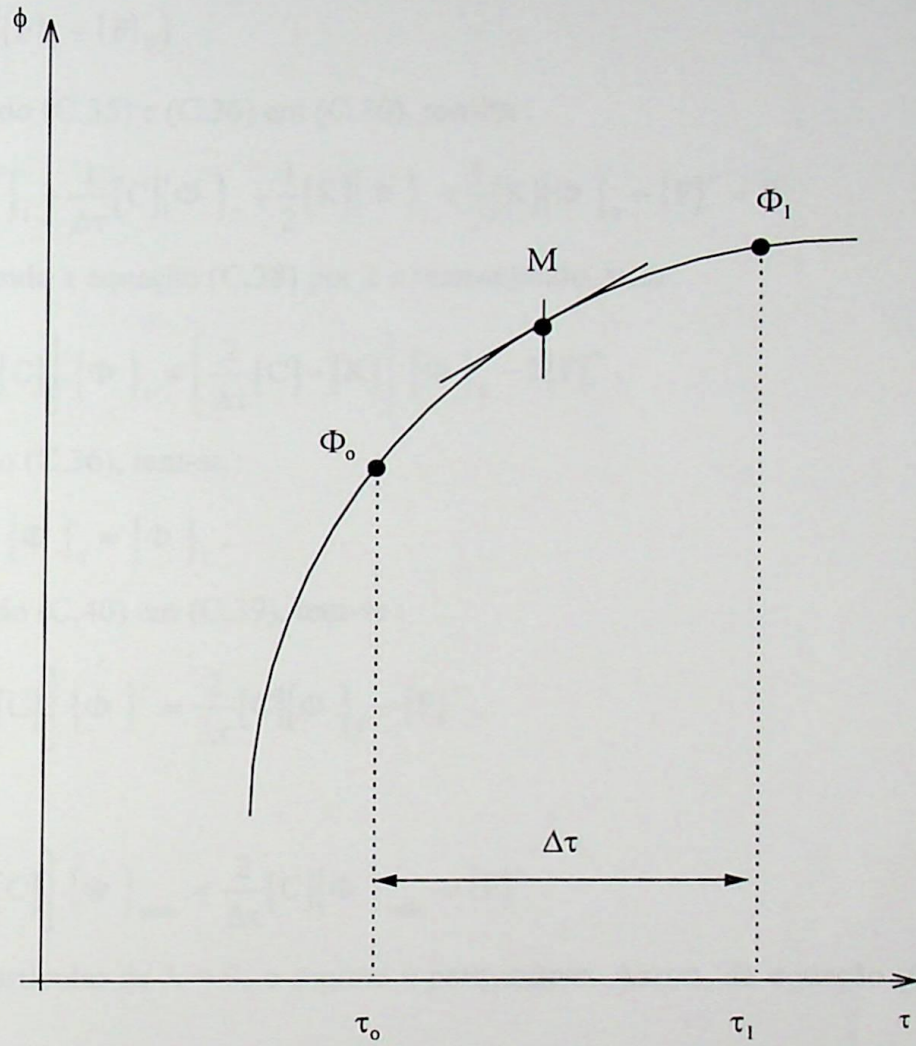


Figura C.1 - Esquema de diferença finita central para a derivada  $\frac{d\phi}{d\tau}$

$$\frac{\partial \{\Phi\}}{\partial \tau} = \frac{d\{\Phi\}}{d\tau} = \frac{1}{\Delta\tau} (\{\Phi\}_1 - \{\Phi\}_0) . \quad (C.35)$$

As matrizes  $\{\Phi\}$  e  $\{F\}$  devem ser avaliadas como :

$$\{\Phi\}^* = \frac{1}{2} (\{\Phi\}_1 + \{\Phi\}_0) , \text{ e} \quad (C.36)$$

$$\{F\}^* = \frac{1}{2} (\{F\}_1 + \{F\}_0) . \quad (C.37)$$

Substituindo (C.35) e (C.36) em (C.30), resulta :

$$\frac{1}{\Delta\tau} [C] \{\Phi\}_1 - \frac{1}{\Delta\tau} [C] \{\Phi\}_0 + \frac{1}{2} [K] \{\Phi\}_1 + \frac{1}{2} [K] \{\Phi\}_0 + \{F\}^* = 0 . \quad (C.38)$$

Multiplicando a equação (C.38) por 2 e rearranjando, vem :

$$\left[ [K] + \frac{2}{\Delta\tau} [C] \right] \{\Phi\}_1 = \left[ \frac{2}{\Delta\tau} [C] - [K] \right] \{\Phi\}_0 - 2\{F\}^* . \quad (C.39)$$

Da equação (C.36), tem-se :

$$2 \{\Phi\}^* - \{\Phi\}_0 = \{\Phi\}_1 . \quad (C.40)$$

Substituindo (C.40) em (C.39), tem-se :

$$\left[ [K] + \frac{2}{\Delta\tau} [C] \right] \{\Phi\}^* = \frac{2}{\Delta\tau} [C] \{\Phi\}_0 - \{F\}^* , \quad (C.41)$$

ou ainda :

$$\left[ [K] + \frac{2}{\Delta\tau} [C] \right] \{\Phi\}_{\text{nov}} = \frac{2}{\Delta\tau} [C] \{\Phi\}_{\text{vel}} - \{F\}^* . \quad (C.42)$$

No caso particular de  $\lambda = 0$ , o regime é permanente. Assim, da equação (C.42), resulta neste caso que:

$$[K] \{\Phi\}_{\text{nov}} = -\{F\}^* \quad (C.43)$$

#### C.4 - Desenvolvimento da Matriz Capacitância $[C]^e$

Da equação (C.26) a matriz capacitância é dada como sendo :

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV , \quad (C.44)$$

onde :

$$[N^e] = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} , \quad (C.44a)$$

$$dV = 2 \pi R dA , \quad (C.44b)$$

$$R = \{R^e\} \{N^e\} . \quad (C.44c)$$

Logo, a equação (C.43) pode ser escrita como :

$$[C]^e = \int_{A^e} 2 \pi \lambda \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} dA . \quad (C.45)$$

Resolvendo os produtos das matrizes e em seguida integrando de acordo com a equação (3.31), resulta :

$$[C]^e = \frac{2 \pi \lambda \Delta}{60} \begin{bmatrix} (6R_i + 2R_j + 2R_k) & (2R_i + 2R_j + R_k) & (2R_i + R_j + 2R_k) \\ (2R_i + 2R_j + R_k) & (2R_i + 6R_j + 2R_k) & (R_i + 2R_j + 2R_k) \\ (2R_i + R_j + 2R_k) & (R_i + 2R_j + 2R_k) & (2R_i + 2R_j + 6R_k) \end{bmatrix} . \quad (C.46)$$

## APÊNDICE D

### ESTUDO DO EFEITO DA VORTICIDADE NO CONTORNO SOBRE O NÚMERO DE NUSSELT

#### D.1- Introdução

Nesse apêndice são feitas as comparações dos resultados do número de Nusselt médio na superfície quente  $Nu_H$ , quando se usam as equações para o cálculo da vorticidade no contorno (2.24g) e (2.24h), dadas respectivamente por:

$$\omega_w = -\frac{2\psi_o}{\delta^2 R_w} \quad (D.1)$$

$$\omega_w = -\frac{3\psi_o}{R_w \delta^2} - \frac{\omega_o}{2} \quad (D.2)$$

Nos resultados deste trabalho foi usada a equação (D.1) para cilindros verticais e para a geometria semi-esférica (caso 1), e a equação (D.2) para a geometria esférica (caso 2).

#### D.2- Comparação Entre as Duas Equações da Vorticidade no Contorno

As tabelas D.1, D.2 e D.3 mostram as comparações entre os  $Nu_H$ , respectivamente, para

A	$\kappa$	Ra	Pr	Equação (D.1) $Nu_H$	Equação (D.2) $Nu_H$	Desvio [ % ]
1	2	$10^4$	0,7	3,851	3,901	-1,30
1	2	$10^5$	0,7	7,620	7,853	-3,06
1	5	$10^4$	0,7	5,337	5,399	-1,16
1	5	$10^5$	0,7	9,764	10,029	-2,71
1	10	$10^4$	0,7	6,829	6,898	-1,01
1	10	$10^5$	0,7	11,500	11,773	-2,37
5	2	$10^4$	0,7	3,451	3,361	2,61
5	2	$10^4$	1,0	3,477	3,414	1,81
5	2	$2 \times 10^4$	1,0	4,172	4,077	2,28
5	2	$3 \times 10^4$	1,0	4,618	4,498	2,60

Tabela D.1 - Comparação do  $Nu_H$  para a cavidade anular de dois cilindros concêntricos verticais

$\kappa$	Ra	Pr	Equação (D.1) $Nu_H$	Equação (D.2) $Nu_H$	Desvio [ % ]
2	$10^4$	0,70	5,378	5,261	2,17
2	$10^5$	0,70	8,839	8,489	3,96
3	$10^4$	0,70	5,897	5,785	1,90
3	$10^5$	0,70	9,628	9,278	3,63
4	$10^4$	0,70	6,249	6,165	1,34
4	$10^5$	0,70	10,187	9,898	2,84

Tabela D.2 - Comparação do  $Nu_H$  para a cavidade semi-esférica, caso 1

$\kappa$	Ra	Pr	Equação (D.1) $Nu_H$	Equação (D.2) $Nu_H$	Desvio [ % ]
1,5	$10^4$	0,70	4,543	4,539	0,09
1,5	$10^5$	0,70	7,282	7,222	0,82
2,0	$10^4$	0,70	5,245	5,215	0,57
2,0	$10^5$	0,70	9,622	9,487	1,40
2,5	$10^4$	0,70	6,430	6,384	0,71
2,5	$10^5$	0,70	11,056	10,870	1,68
3,0	$10^4$	0,70	7,329	7,277	0,71
3,0	$10^5$	0,70	12,109	11,893	1,78

Tabela D.3 - Comparação do  $Nu_H$  para a cavidade esférica, caso 2

as geometrias de dois cilindros concêntricos verticais, semi-esfera e esfera, utilizando as equações (D.1) e (D.2). Nas tabelas D.1, D.2 e D.3 os maiores desvios do  $Nu_H$  encontrados, foram respectivamente de -3,06 % ; 3,96 % e 1,78 %.

As equações (D.1) e (D.2), no geral, apresentam boa concordância, sendo que os maiores desvios ocorrem para número de Rayleigh mais altos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brushan R., Keyhani, M., Christensen, R. N., and Kulacki, R. A., " Correlation Equations for Free Convection in a Vertical Annulus with Constant Heat Flux on the Inner Wall ", ASME J. Heat Transfer, Vol 105, pp. 910 - 912, 1983.

Emery, A. F., and Chu, N. C., " Heat Transfer Across Vertical Layers ", J. Heat Transfer, Series C87, pp. 110 - 114, 1965.

Keyhani, M., Kulacki, F. A., and Christensen, R. N., " Free Convection in a Vertical Annulus with Constant Heat Flux on the Inner Wall ", ASME J. Heat Transfer, Vol. 105, pp. 454 - 459, 1983.

Khan, J. A., and Kumar, R., " Natural Convection in Vertical Annuli: a Numerical Study for Constant Heat Flux on the Inner Wall ", ASME J. Heat Transfer, Vol. 111, pp. 909 - 915, 1989.

Kumar, R., and Kalam, M. A., " Laminar Thermal Convection Between Vertical Coaxial Isothermal Cylinders ", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 34, pp. 513 - 524, 1991.

Lee, Y., Korpela, S. A., and Horne, R. N., " Structure of Multicellular Natural Convection in a Tall Vertical Annulus ", Proc. 7 th Int. Heat Transfer Conf., Munich, Vol. 2, pp. 221 - 226, 1982.

Nagendra, H. R., Tirunarayanan, M. A., and Ramachandran, A., " Free Convection Heat Transfer in Vertical Annuli ", Chem. Engng Sci. 5, pp. 605 - 610, 1970.

Olmstead, J. M. H., " Advanced Calculus ", Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Ostrach, S., " Natural Convection in Enclosures ", ASME J. Heat Transfer, Vol. 110, pp. 1175 - 1190, 1988.

Pepper, D. W., and Harris, S. D., " Numerical Simulation of Natural Convection in Closed Containers by a Fully Implicit Method ", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 99, Series I, n° 4, pp. 649 - 656, 1977.

Prasad, V., and Kulacki, F. A., " Free Convection Heat Transfer in Liquid-Filled Annulus ", *J. Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 596 - 602, 1985.

Rubel, A., and Landis, F., " A Numerical Study of Natural Convection in a Vertical Rectangular Enclosure ", *Proc. Int. Symp. On High Speed Computing in Fluid Mechanics*, Monterey, California, 1968.

Schwab, T. H., and Dewitt, K. J., " Numerical Investigation of Free Convection Between Two Vertical Coaxial Cylinders ", *A.I.Ch.E. JI* 16, pp. 1005 - 1010, 1970.

Sergeling, L.J., " Applied Finite Element Analysis ", John Wiley and Sons, Inc., New York, 2nd ed., 1984.

Sheriff, N., " Experimental Investigation of Natural Convection in Simple and Multiple Vertical Annuli with High Pressure Carbon Dioxide ", *Proc. 3rd Int. Heat Transfer Conf.*, Chicago, Vol. 2, pp. 132 - 138, 1966.

Torrance, K. E., and Rockett, J. A., " Numerical Study of Natural Convection in an Enclosure with Localized Heating from Below-Creeping Flow to the Onset of Laminar Instability ", *J. Fluid Mech*, Vol 36, part 1, pp. 33 - 54, 1969.

Thomas, R. W., and Vahl Davis, G., " Natural Convection in Annular and Rectangular Cavities - A Numerical Study ", *Proceedings 4th International Heat Transfer Conference*, Paris, Vol. 4, Paper NC 2.4, Elsevier, Amsterdam, 1970.

Vahl Davis, G., and Thomas, R. W., " Natural Convection Between Concentric Vertical Cylinders", In *High Speed Computing in Fluid Dynamics, Physics of Fluids, Supplement II*, pp. 198 - 207, 1969.

Zienkiewicz, O. C., " The Finite Element Method in Engineering Science ", McGraw - Hill, London, 1971.



Ministério da Educação e do Desporto  
**ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ**

**A N E X O I**

**PRONUNCIAMENTO DA BANCA EXAMINADORA**

A Banca Examinadora, abaixo assinada, nomeada pela Portaria nº 124 de 23 de maio de 1997, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: **"Análise Teórica de Convecção Natural em Geometrias Axissimétricas Arbitrárias"** apresenta pronunciamento no sentido de que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá solicite ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) a expedição do título de **Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica**, na **Área de Conversão de Energia**, satisfeitas as demais exigências regimentais, à Marcelo Assato.

Itajubá, 23 de maio de 1997.

Prof. Maurício Araujo Zanardi  
1º Examinador - FEG

Prof. Nelson Manzanares Filho  
2º Examinador - EFEI

Prof. Rogério José da Silva  
3º Examinador - EFEI

Prof. Genésio José Menon  
4º Examinador - (Orientador) - EFEI



Ministério da Educação e do Desporto  
**ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ**  
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

**ANEXO II**

**FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA**

Título da Dissertação: **Análise Teórica de Convecção Natural em Geometrias Axissimétricas Arbitrárias**".

Autor: Marcelo Assato

**JULGAMENTO**

Examinadores	Conceito	Rubrica
1º	A <sup>+</sup>	
2º	A <sup>+</sup>	
3º	A <sup>+</sup>	
4º	A <sup>+</sup>	

Resultado Médio: Conceito A<sup>+</sup>, ou seja, aprovado  
com distinção

Observações: \_\_\_\_\_

Itajubá, 23 de maio de 1997

Prof. Maurício Araujo Zanardi  
1º Examinador -FEG

Prof. Nelson Manzanares Filho  
2º Examinador - EFEI

Prof. Rogério José da Silva  
3º Examinador - EFEI

Prof. Genésio José Menon  
4º Examinador (Orientador) - EFEI

