

TESE

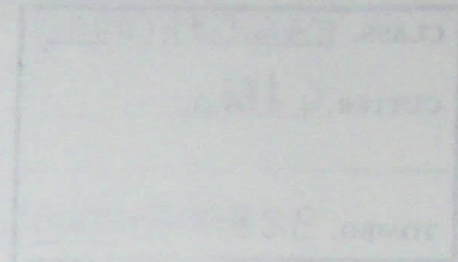
928

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

ANÁLISE DO ESCOAMENTO EM GRADES
REGENERATIVAS

Ramiro Gustavo Ramirez Camacho

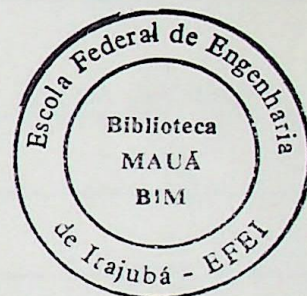
ITAJUBÁ - 1996



ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ - EFEI

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE DO ESCOAMENTO EM GRADES
REGENERATIVAS**



Autor: Ramiro Gustavo Ramirez Camacho
Orientador: Prof. Nelson Manzanares Filho
Co-orientador: Prof. Sebastião Varella.

Tese apresentada a Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Dezembro / 1996

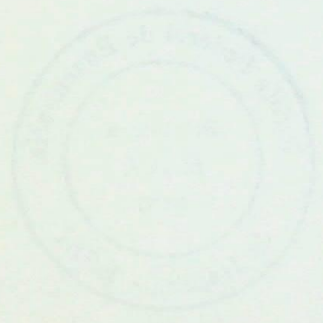
CLASS. 5.32.537(0432)
CUTTER. C172a
TOMBO. 928



ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ - FEI

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ANÁLISE DO ESCOAMENTO EM GRADES
REGENERATIVAS



Assessor
Orientador
Conseleiro

Este trabalho é propriedade da Escola Federal de Engenharia de Itajubá - FEI, sendo
proibida a reprodução sem a autorização da Direção de Administração e
Finanças da instituição.



Ministério da Educação e do Desporto
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

ANEXO II

FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

Título da Dissertação: "Análise do Escoamento em Grades Regenerativas"

Autor: Ramiro Gustavo Ramirez Camacho,

JULGAMENTO

Examinadores	Conceito	Rubrica
1°	A+	
2°	A+	
3°	A+	

Resultado Médio: Conceito A⁺, ou seja, Aprovado
com distinção

Observações: _____

Itajubá, 10 de dezembro de 1996.

Prof. André Luiz Amarante Mesquita
1° Examinador - UFPa

Prof. Sebastião Varella
2° Examinador - EFEI

Prof. Nelson Manzanaraes Filho
3° Examinador - EFEI - (Orientador)

ÍNDICE DE ASSUNTOS

Índice de Figuras	iv
Índice de Tabelas	vii
Relação de Símbolos	viii
Sumário	xi
Abstract	xii
Agradecimentos	xiii
Dedicatória	xiv
1. INTRODUÇÃO	01
1.1 Classificação das Máquinas de Fluxo Regenerativas.....	02
1.1.1 MFR Toroidal.....	03
1.1.2 MFR Periférica.....	03
1.2 Aspectos Gerais Sobre as Teorias de escoamento nas MFR.....	05
1.2.1 Teoria da turbulência.....	06
1.2.2 Teoria circulatória.....	07
1.2.3 Elementos da teoria circulatória unidimensional.....	10
1.2.4 Determinação da linha média efetiva.....	13
1.2.5 Contribuição de Andrew (1989) no estudo teórico das MFR.....	14
1.3 Objetivos do Presente Trabalho.....	15
2. ESCOAMENTO EM GRADES REGENERATIVAS LINEARES (SEM EFEITOS NÃO INERCIAIS)	17
2.1 Caraterização das Grades Regenerativas.....	18
2.2 escoamento Ideal em Grades Regenerativas.....	22
2.3 Determinação da Circulação da pá.....	26
2.4 Grades Compostas de Pás Retas e Finas.....	28

2.4.1	Condições do escoamento.....	30
2.4.2	Composição de soluções básicas.....	32
2.4.3	Caso das grades regenerativas.....	34
2.4.5	Análise assintótica para o caso de número infinito de pás.....	35
2.4.5	Análise assintótica para o caso da pá isolada.....	36
2.5	Solução Numérica.....	38
2.6	Alguns Resultados para Grades Regenerativas.....	42
3.	ESCOAMENTO EM GRADES REGENERATIVAS TOROIDAIS (COM EFEITOS NÃO INERCIAIS).....	46
3.1	Componentes da Vorticidade Sobre a Superfície Toroidal.....	47
3.2	Relações Entre a Vorticidade e as Variações de Energia Específica.....	48
3.3	Transformação da Grade Toroidal em Grade Linear.....	53
3.3.1	Relações geométricas de transformação no caso de toro circular..	56
3.4	Equações da Continuidade e da Vorticidade.....	59
3.4.1	Velocidades induzidas pela vorticidade transformada.....	60
3.5	Campo Global de Velocidades e Condição de Contorno nas Pás.....	62
3.6	Soluções Básicas.....	66
3.7	Circulação, Vorticidade e Gradiente de Pressões.....	67
3.8	Determinação das Circulações Adimensionais. Básicas.....	69
3.8.1	Alguns resultados para a vorticidade.....	72
3.8.2	Limite para número infinito de pás.....	75
3.8.3	Fator de escorregamento (“slip factor”).....	76
4.	CONSIDERAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA METODOLOGIA EM SITUAÇÕES REAIS.....	80
4.1	Análises Comparativas Para o Fator de Escorregamento.....	81
4.2	Coeficiente de Vazão Meridional Efetivo.....	84

5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	87
APÊNDICES.	
A. DETERMINAÇÃO DAS VELOCIDADES INDUZIDAS POR UM CAMPO DE VORTICIDADE.....	89
A.1 Lei de Biot -Savart.....	89
A.2 Lei de Biot - Savart no plano.....	89
A.3 Caso de Uma Camada de Vorticidade (“Vortex Layer”).....	90
B. VELOCIDADES INDUZIDAS POR DISTRIBUIÇÕES DE VÓRTICES EM GRADES LINEARES.....	93
C. COMPOSIÇÃO DOS CAMPOS DE VELOCIDADES A PARTIR DA EQUAÇÃO DE POISSON PARA A FUNÇÃO CORRENTE.....	96
C.1 Determinação dos Campos de Escoamento na Grade Linear.....	96
C.2 Determinação das Velocidades Induzidas por um Campo de Vorticidade.....	104
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	108

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1:	MFR tipo toroidal.....	02
Figura 1.2:	MFR tipo periférica.....	04
Figura 1.3:	Modelos de Máquinas de Fluxo Regenerativas.....	05
Figura 1.4:	Esquema de uma MFR, ilustrando a Teoria Circulatória.....	08
Figura 1.5:	Esquema ilustrativo das variações de pressão de uma partícula na MFR.....	09
Figura 1.6:	Triângulos de velocidades na entrada e saída do rotor da MFR.....	10
Figura 1.7:	Dimensões características da pá e do canal lateral.....	13
Figura 1.8:	Esquema mostrando a componente de vorticidade ω nas MFR.....	14
Figura 2.1:	Operações hipotéticas para a geração da grade linear de uma MFR do tipo toroidal.....	19
Figura 2.2:	Grade regenerativa composta de placas planas.....	19
Figura 2.3:	Comparação entre os diagramas de velocidade da grade convencional e da grade regenerativa.....	21
Figura 2.4:	Exemplos do uso dos fatores de espaçamento lateral.....	32
Figura 2.5:	Localização dos vórtices e pontos de controle.....	38
Figura 2.6:	Circulação adimensional básica, Γ_0	40
Figura 2.7:	Circulação adimensional básica, Γ_1	40
Figura 2.8:	Relação entre circulações regenerativa e potencial, $(\lambda_1=\lambda_2=1)$...	43
Figura 2.9:	Vorticidade adimensional, $(\lambda_1=\lambda_2=1)$	44
Figura 2.10:	Variação da vorticidade em função da incidência.....	44
Figura 3.1:	Direções das três componentes de vorticidade e	

	velocidades no plano meridional.....	48
Figura 3.2:	Superfície S_2 de uma MFR.....	56
Figura 3.3:	Influência da relação R_0/r_c sobre a função $C_{\omega y}$	62
Figura 3.4:	Grade toroidal.....	63
Figura 3.5:	Componentes de velocidades normais a pá.....	64
Figura 3.6:	Área do toro, entre duas pás consecutivas.....	68
Figura 3.7:	Circulação adimensional básica Γ_{ω_n} para $R_0/r_c=1/2$	70
Figura 3.8:	Circulação adimensional básica Γ_{Ω} para $R_0/r_c=1/2$	71
Figura 3.9:	Influência da razão de aspecto do toro R_0/r_c sobre $\Gamma_{\omega_n}; \beta = 0^0$	71
Figura 3.10:	Influência da razão de aspecto do toro R_0/r_c sobre $\Gamma_{\Omega}; \beta = 0^0$	72
Figura 3.11:	Vorticidade adimensional para vazão nula, $\Phi_u = 0$ ($\beta=0^0$).....	73
Figura 3.12:	Vorticidade adimensional para vazão máxima, $\Phi_u = 1$ ($\beta=0^0$)....	74
Figura 3.13:	Variação da vorticidade com a vazão, $Z_R=24$, ($\beta=0^0$).....	75
Figura 3.14:	Cálculo do fator de escorregamento.....	77
Figura 3.15:	Fator de escorregamento para vazão nula, $\Phi_u = 0$ ($\beta=0^0$).....	78
Figura 3.16:	Fator de escorregamento para vazão máxima, $\Phi_u = 1$ ($\beta=0^0$)....	79
Figura 4.1:	Vistas da MFR ensaiadas por Varella(1981).....	81
Figura 4.2:	Variação teórica e experimental do fator de escorregamento....	83
Figura 4.3:	Variação teórica e experimental da vorticidade.....	84
Figura 4.4:	Variação do coeficiente de vazão meridional efetivo.....	85
Figura B.1:	Esquema de uma grade linear.....	93

Figura C.1:	Representação dos domínios D e D_R	97
Figura C.2:	Circuito em torno da pá no domínio T_0	98
Figura C.3:	Grade linear com infinidade de domínio T_μ	98
Figura C.4:	Domínio T_μ	99

Tabela 2.1:	Comparação entre a solução numérica e a solução analítica de Weing (1964) para $\beta = 80^\circ$ e $\nu = 1.315 \times 10^{-7}$ para $N=30$	41
-------------	--	----

Tabela 2.2:	Comparação entre a solução numérica e a solução analítica de Weing (1964) para diversos números de pás (grade com $\beta = 80^\circ$ e $\nu = 1.315 \times 10^{-7}$).....	43
-------------	--	----

Tabela 4.1:	Resultados experimentais para o fator de correção de Varian (1961) e para a viscosidade efetiva correspondente ($\beta = 0^\circ$).....	82
-------------	---	----

RELAÇÃO DE SIMBOLOS

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1:	Comparação entre a solução numérica e a solução analítica de Weinig (1964) para diversas grades (numero de painéis, $N=80$).....	41
Tabela 2.2:	Comparação entre a solução numérica e a solução analítica de Weinig (1964) para diversos números de painéis (grade com: $\beta = 80^\circ$ e $t/\ell=1.3154707$).....	42
Tabela 4.1:	Resultados experimentais para o fator de escorregamento Varella (1981) e para a vorticidade efetiva correspondente ($\beta=0^\circ$).....	82

RELAÇÃO DE SIMBOLOS

SÍMBOLOS LATINOS

A_c	área do canal lateral
A_m	área lateral de recirculação
A_c	área da seção transversal do canal lateral
A	área
a_L	parâmetro geométrico da transformação conforme
C	velocidade absoluta
C_u	componente na direção tangencial ao rotor.
C_μ	fronteira do domínio T_μ .
C_ω	componente na direção do escoamento não perturbado
C_m	componente na direção meridional
C_{mc}	velocidade meridional calculada no r_c
C_u	velocidade circunferencial (responsável por Q)
d	diâmetro do toro. Fig (1.7)
D	domínio
D	diâmetro entre os centros do toro. Fig (1.7)
g	aceleração da gravidade.
l	corda do perfil.
N	número de painéis.
P	ponto de referencia
p	pressão
Q	vazão m^3/s .
R_0	raio da linha representativa do escoamento meridional. Fig. (1.7)
r_0	raio externo do canal, Fig. (1.7)
r_1	raio da linha de corrente significativa na entrada do rotor
r_2	raio da linha de corrente significativa na saída do rotor
r_c	raio de centro da geratriz do toro, Fig. (1.7)
r_i	raio interno do canal, Fig. (1.7)
r_m	raio geométrico do toro ($r_m=D/2$), Fig. (1.7)
r_μ	distancia entre o ponto P, e o ponto de integração, (Apêndice C)
t	espaçamento entre pás na grade linear ou transformada.
t	espaçamento entre pás do rotor
U	velocidade tangencial do rotor
U_m	velocidade tangencial calculada no raio medio do toro (r_m)
W	velocidade relativa.
$x, y,$	sistema de coordenadas no plano da grade.
x_p, y_p	ponto pertencente à região ocupada pelos perfis
Y_{rel}	Energia especifica relativa
Z_R	número de pás do rotor
R	parte real do argumento complexo considerado
I	parte imaginaria do argumento complexo considerado

R	núcleo da Eq (2.23 a)
I	núcleo da Eq (2.23 b)
K	núcleo da Eq integral de Fredholm de 1ª espécie (Eq 2.28)
k	gradiente de pressão

SÍMBOLOS GREGOS.

ϕ	ângulo do toro
φ_s	ângulo geométrico entre os centros dos vocais
ξ	eixo sobre a pá
Γ_{ω_n}	Circulação adimensional básica puramente rotacional
α	ângulo de ataque em relação a pá
β	ângulo de montagem das pás
ψ	coeficiente de pressão
Ψ	função corrente
η	direção normal a pá
ε	fator de escorregamento (“slip factor”)
ρ	massa específica
Ω	velocidade angular do rotor
$\Delta\Psi$	$=\nabla^2\Psi = -\omega(x,y)$ Equação de Poisson para a função corrente
Γ_{ω}	Circulação rotacional
Γ_{ω}	Circulação da rotacional
Γ_{Ω}	Circulação adimensional básica, unicamente considerando a rotação da grade
Γ_{ω_n}	Circulação adimensional básica puramente rotacional
σ, φ, r	Coordenadas no plano físico (Fig 3.1)
σ_0	coordenada meridional do bordo de ataque da pá
σ_L	coordenada meridional do bordo de fuga da pá
Γ_0	circulação adimensional básica potencial
γ_0	intensidade de vórtices, solução puramente potencial
λ_1, λ_2	fatores de espaçamento lateral (Figs 2.2 e 2.4)
Γ_1	circulação adimensional básica rotacional
γ_1	intensidade de vórtices, solução puramente rotacional
Φ_m	coeficiente de vazão meridional
ω_n	vorticidade na direção normal a superfície
Γ_p	Circulação da pá
Γ_{pot}	Circulação da potencial
Ψ_R	Coeficiente de pressão global
ω_T	vorticidade transformada
Φ_u	coeficiente de vazão tangencial
γ	intensidade de vórtices

Sub indice:

a	borde de ataque
f	bordo de fuga
ef	efetivo
1	referente na entrada
2	referente na saída

SUMÁRIO

Apresenta-se uma metodologia para a análise do escoamento ideal, bidimensional e permanente em grades representativas das Máquinas de Fluxo Regenerativas (MFR).

Primeiramente, os efeitos não verticais inerentes às MFR são desprezados, fazendo-se uma análise do escoamento absoluto e permanente no plano. Nessa situação, é feita a introdução do conceito de grades regenerativas. Em seguida, o conceito é aplicado para o caso de escoamento ideal. Com base no método das singularidades, uma modelagem é desenvolvida para o escoamento ideal em grades lineares com um campo de vorticidade no plano, sendo a situação regenerativa obtida como caso particular. Limites significativos para o escoamento de pás e pá isolada são determinados analiticamente. As singularidades intermédias são tratadas numericamente, através de uma técnica de vórtices concentrados.

Posteriormente, a metodologia é estendida para o caso das grades regenerativas torcidas, representativas das superfícies de escoamento nas MFR. Os efeitos não verticais são então introduzidos de maneira natural. Uma transformação de coordenadas é aplicada para mapear a superfície da grade torcida no plano de uma grade linear, o que permite estender a metodologia de maneira mais simples.

Finalmente, alguns resultados para a vorticidade e para o escoamento efetivo são apresentados, em comparação com resultados experimentais de pouso em pás.

SUMÁRIO

Apresenta-se uma metodologia para a análise do escoamento ideal, bidimensional e permanente em grades representativas das Máquinas de Fluxo Regenerativas (MFR).

Primeiramente, os efeitos não inerciais inerentes às MFR são desprezados, fazendo-se uma análise do escoamento absoluto e permanente no plano. Nessa situação, é feita a caracterização do conceito de grades regenerativas. Em seguida, o conceito é aplicado para o caso de escoamento ideal. Com base no método das singularidades, uma modelagem é desenvolvida para o escoamento ideal em grades lineares com um campo de vorticidade uniforme, sendo a situação regenerativa obtida como caso particular. Limites assintóticos para número infinito de pás e pá isolada são determinados analiticamente. As situações intermediárias são tratadas numericamente, através de uma técnica de vórtices concentrados.

Posteriormente, a metodologia é estendida para o caso das grades regenerativas toroidais, representativas das superfícies de escoamento nas MFR. Os efeitos não inerciais são então introduzidos de maneira natural. Uma transformação de coordenadas é aplicada para mapear a superfície da grade toroidal no plano de uma grade linear, o que permite estender a metodologia de maneira mais simples.

Finalmente, alguns resultados para a vorticidade e para a vazão meridional efetiva são apresentados, em comparação com resultados experimentais disponíveis na literatura.

ABSTRACT

A methodology for steady, two-dimensional ideal flows in cascades, concerning Regenerative Turbomachines (RT), is presented.

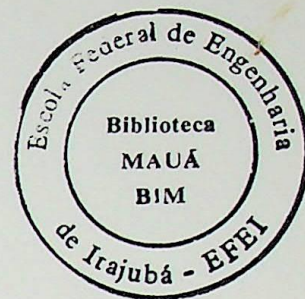
Firstly, the non inertial effects that are present in the RT are disregarded, and an analysis is made for the absolute steady flow on the plane. In this situation, the characterization of the regenerative cascades concept is made. The concept is then applied in the case of ideal flow.

By means of the singularity method, a model is developed for the ideal flow trough straight cascades, with an uniform vorticity field. The regenerative situation is obtained as a particular case. Asymptotic limits are obtained for an infinite number of blades and for the isolated blade. The intermediate situations are treated numerically, by employing a method of discrete vortices.

Further, the methodology is extended for the case of toroidal regenerative cascades, representing the stream surfaces of the RT. The non-inertial effect are introduced in a natural manner. A coordinate transformation is applied in mapping the toroidal cascades surface on a straight cascades plane. In this way, the methodology extension becomes more simple.

Finally, some results for the vorticity and the effective circulation flow rate are presented in comparison with available experiment result.

AGRADECIMENTOS



Ao meu professor e amigo Nelson Manzanares Filho, não só pela sua orientação sempre segura, clara e precisa, mais também ao incentivo constante em todas as etapas deste trabalho.

A meus colegas e amigos (as), os quais sempre estiveram presentes em todos os momentos, fazendo destes sempre agradáveis e inesquecíveis.

Aos professores Sebastião Varella, e Waldir de Oliveira, pelas discussões e sugestões dadas durante o desenvolvimento do trabalho.

Ao Prof. Manual Valente pelo seu espírito encorajador sempre oportuno.

Agradeço à Escola Federal de Engenharia de Itajubá e ao CNPq pela oportunidade que me concederão para realizar este trabalho.

Meus sinceros agradecimentos

Ramiro Gustavo Ramirez Camacho

DEDICATÓRIA.

À minha esposa, Susy.

À meu pai, Luis e a minha avó Laura

À memória de minha mãe, Lydia

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

As máquinas de fluxo regenerativas (MFR) são destinadas à aplicações envolvendo altas pressões e baixas vazões. Elas operam com baixas velocidades específicas e apresentam rendimentos relativamente baixos (cerca de 50%). Entretanto, esses rendimentos podem não ser tão baixos, como parecem à primeira vista. As bombas centrífugas, por exemplo, necessitam de vários estágios para alcançar as mesmas pressões que as bombas regenerativas, o que acarreta maiores perdas no escoamento. Tratando-se de máquinas de pequeno porte, os rendimentos resultantes podem se tornar igualmente baixos.

Dentre as vantagens comparativas das MFR em relação às máquinas de fluxo convencionais, operando nas mesmas condições, destacam-se: menores dimensões (devido às altas *concentrações de torque e potência*, típicas das MFR), maior simplicidade e menores custos de fabricação, ausência de problemas de lubrificação e operação livre de contaminação de óleo (no caso de bombas).

Por outro lado, as MFR sofrem a desvantagem de uma baixa eficiência, provocada, principalmente, pelas perdas na região do separador de fluxo (“stripper”) e nos bocais de entrada e saída. Para tentar eliminar esta desvantagem, trabalhos como os de Brown (1970) oferecem algumas sugestões para melhorar o desempenho.

As máquinas regenerativas começaram a ser utilizadas industrialmente na década de 50, inicialmente em sistemas de bombeamento e, posteriormente, como sopradores e compressores. Devido às suas características de *altas pressões e baixas de vazões*, as MFR vêm sendo utilizadas em sistemas criogênicos para compressão de gás hélio, em dispositivos de separação de substâncias e na indústria nuclear. Além disso, por sua

característica de concentrar torque e potência, ocupando espaços reduzidos, as MFR tem sido utilizadas, também, em ciclos de sistemas secundários de aeronaves. Recentemente, Grabow e Suong (1994) realizou diversas análises e ensaios com uma MFR operando na modalidade turbina, obtendo resultados promissores. Neste momento, trabalhos vem sendo realizados na EFEI, com o objetivo de avaliar a potencialidade de uma MFR, inicialmente projetada como bomba, para operar como turbina hidráulica.

No presente trabalho, pretende-se dar uma contribuição ao estudo das MFR, através de uma caracterização e análise do escoamento ideal em *grades regenerativas*. Uma vez que as MFR são relativamente pouco conhecidas, mesmo por aqueles que trabalham no campo das máquinas de fluxo, será conveniente apresentar alguns tópicos preliminares, antes de enfocar os objetivos específicos deste trabalho.

1.1 Classificação das Máquinas de Fluxo Regenerativas.

A característica mais importante do escoamento nas máquinas regenerativas, que as distingue das máquinas de fluxo convencionais, são as trajetórias helicoidais percorridas pelas partículas de fluido, com várias passagens pelo rotor. É possível, entretanto, classificar as MFR em dois tipos principais, segundo a localização e a geometria da sua seção transversal (meridional): MFR *toroidais* e MFR *periféricas*.

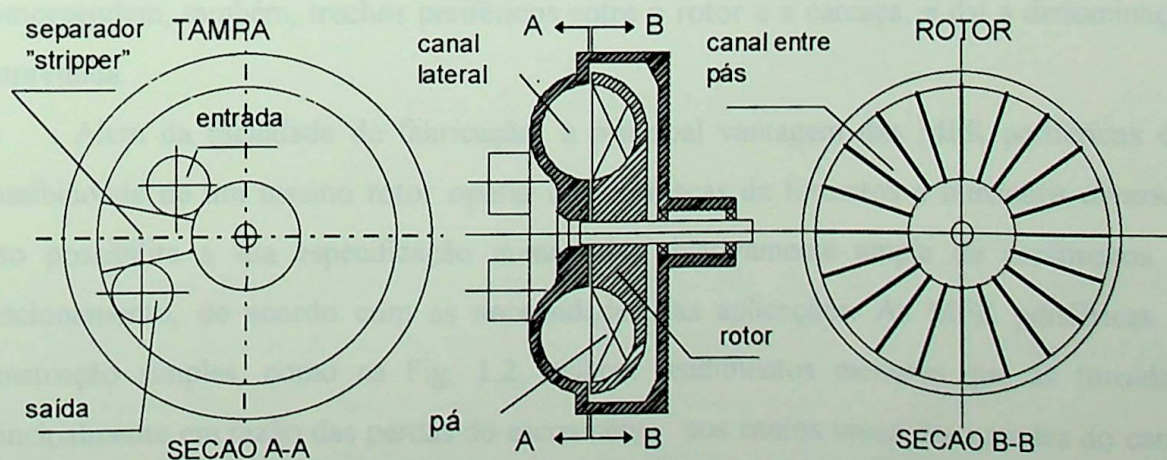


Figura 1.1. - MFR tipo toroidal

1.1.1 MFR Toroidal .

A máquina regenerativa toroidal assemelha-se bastante ao acoplamento hidrodinâmico. Nesse caso, o rotor é construído com um canal de seção semi-circular, como mostra a Fig. 1.1. Em geral, as pás são fixadas radialmente neste canal, com intervalos angulares iguais, de maneira que cada pequeno canal formado por duas pás consecutivas não tenha comunicação com os adjacentes. Da mesma maneira, um canal lateral, ou anular, também de seção semi-circular, é construído na carcaça fixa. Eventualmente, aletas direcionadoras podem ser montadas no canal lateral, embora isso não seja o mais usual. Na montagem, o rotor e o canal lateral ficam dispostos de tal forma que os dois semi-círculos se completam, formando um toro de revolução, e daí o nome deste tipo de máquina.

As características teóricas e experimentais das MFR toroidais foram amplamente estudadas por Varella (1981).

1.1.2 MFR Periférica.

A MFR tipo periférica possui pás radiais, que se estendem de um diâmetro mais externo do rotor (disco) até um diâmetro mais interno. Entre uma pá e outra, existe um canal de escoamento, com perfil semi-circular, como se pode ver na Fig. 1.2.

Em geral, esse tipo de MFR apresenta dois canais laterais simétricos, o que resulta num melhor equilíbrio de forças axiais. Diferentemente das MFR toroidais, esses canais compreendem, também, trechos periféricos entre o rotor e a carcaça, e daí a denominação empregada.

Além da facilidade de fabricação, a principal vantagem das MFR periféricas é a possibilidade de um mesmo rotor operar com carcaças de formatos e tamanhos diversos. Isso possibilita a sua especificação numa faixa relativamente ampla de parâmetros de funcionamento, de acordo com as necessidades das aplicações. As MFR periféricas de construção simples, como na Fig. 1.2, exibem rendimentos menores que as toroidais, principalmente em razão das perdas do escoamento nos cantos vivos das paredes do canal. Naturalmente, esse efeito pode ser atenuado através de uma construção mais apurada.

Em qualquer tipo de MFR, o fluido entra e sai da máquina através de bocais montados na carcaça. É desejável que as seções transversais desses bocais adaptem-se o

melhor possível à seção transversal do canal lateral, a fim de se reduzir as perturbações e as perdas no escoamento. Entre as regiões do bocal de entrada (baixa pressão, em MFR geradoras) e do bocal de saída (alta pressão), é fixada uma peça denominada *separador de fluxo*, ou “stripper” (Figs.1.1 e 1.2). O separador deve ocupar toda a seção do canal lateral, ter um comprimento circunferencial suficiente e a menor folga possível em relação ao rotor. Sua função é vedar ao máximo a fuga de fluido do lado de alta pressão para o de baixa pressão. Grande parte das perdas hidráulicas e das características típicas das MFR devem-se à atuação do separador de fluxo. Um projeto adequado deste dispositivo pode contribuir para a redução das perdas na máquina (Varella, 1981).

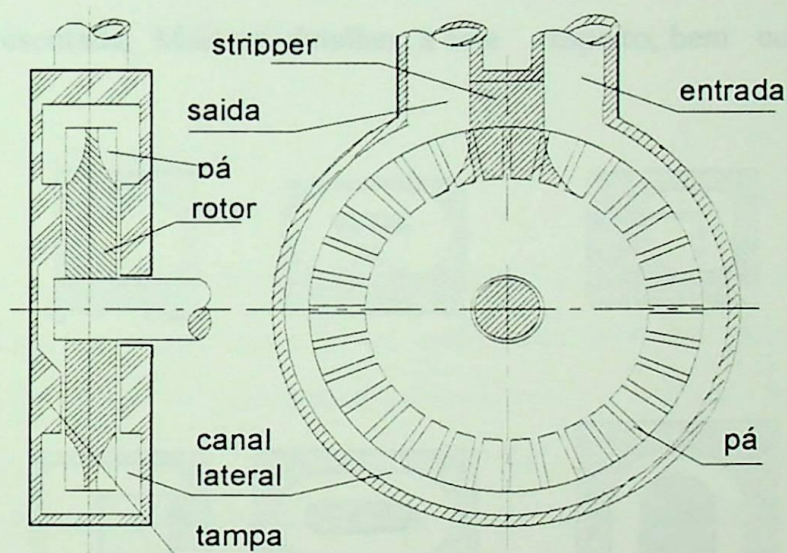


Figura 1.2. - MRF tipo periférica

Diversos tipos de projeto tem sido concebidos para as MFR, a maioria deles constituindo-se em variantes dos tipos toroidal e periférico. Na Fig.1.3, estão mostrados alguns modelos de MFR usados atualmente em diferentes aplicações. Destacam-se, aqui, as MFR com pás em formato aerodinâmico, que atingem rendimentos em torno de 60% e cujo limite de aperfeiçoamento ainda está longe de ter sido alcançado.

1.2. Aspectos Gerais Sobre as Teorias de Escoamento nas MFR.

Existe um universo relativamente amplo de pesquisas publicadas envolvendo as MFR, a maioria delas baseadas em modelos de escoamento unidimensional. Com freqüência, esses estudos tem sido orientados para o desenvolvimento de ferramentas de projeto visando, principalmente, aumentar o baixo rendimento dessas máquinas. Ao longo do desenvolvimento das MFR, houve uma controvérsia histórica a respeito de qual seria o seu mecanismo básico do funcionamento. Nesse sentido, várias teorias foram propostas e, a partir de um dado momento, duas delas acabaram se constituindo em concorrentes principais: a *teoria da turbulência* e a *teoria circulatória*.

Uma breve revisão dos trabalhos mais representativos dessas teorias será inicialmente apresentada. Maiores detalhes a este respeito, bem como uma revisão

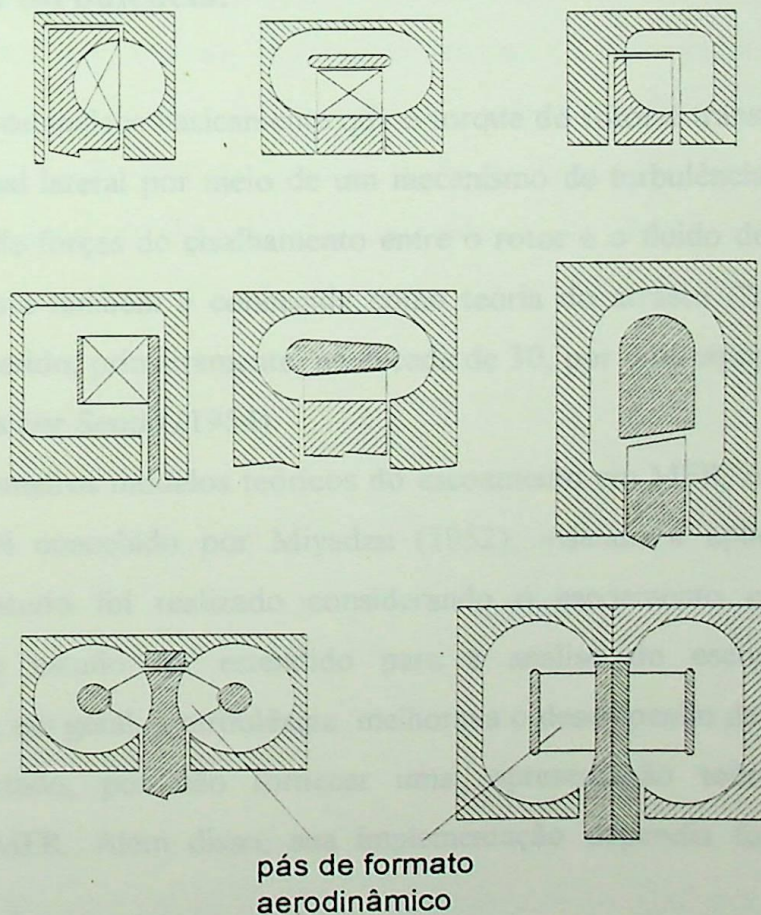


Figura 1.3. - Modelos de Máquinas de Fluxo Regenerativas.

bibliográfica mais completa (até 1980), podem ser encontrados no trabalho de Varella (1981). Diferentes hipóteses foram assumidas no desenvolvimento dos modelos baseados nas teorias da *turbulência e circulatória*, como, por exemplo, escoamento permanente, incompressível e adiabático, ou ainda, a desconsideração dos efeitos de entrada e saída do escoamento, etc. Em geral, essas e muitas outras hipóteses não são essenciais para a compreensão dos mecanismos básicos de funcionamento.

Em seguida, algumas expressões básicas da teoria circulatória unidimensional serão apresentadas, incluindo algumas convenções geométricas e de nomenclatura. Aspectos sobre a determinação da linha média efetiva do escoamento também serão considerados.

Finalmente, será feita uma discussão sobre o trabalho de Andrew (1989), em virtude da sua relevância no estudo teórico das MFR e, também, tendo em vista a sua motivação no desenvolvimento da presente dissertação.

1.2.1. Teoria da turbulência.

Esta teoria estabelece basicamente que o torque do rotor é transferido para o fluido de trabalho no canal lateral por meio de um mecanismo de turbulência. Esse mecanismo derivaria da ação de forças de cisalhamento entre o rotor e o fluido de trabalho no canal. Por isso, essa teoria também é conhecida como teoria do arrasto (“drag theory”). Esse mecanismo foi sugerido, primeiramente, na década de 30, por uma equipe de pesquisadores japoneses liderados por Senoo (1954).

Um dos primeiros modelos teóricos do escoamento em MFR, empregando a teoria da turbulência, foi concebido por Miyadzu (1952), visando a aplicação em bombas. Inicialmente, o estudo foi realizado considerando o escoamento em regime laminar. Posteriormente, o estudo foi estendido para a análise do escoamento turbulento, concluindo-se que, em geral, a turbulência melhorava o desempenho da MFR. Esse modelo foi logo descartado, por não fornecer uma representação teórica consistente do escoamento nas MFR. Além disso, sua implementação dependia fortemente de dados empíricos.

Iversen *et al.* (1955) desenvolveram um modelo baseado na *teoria da turbulência* para aplicação em MFR periféricas. Esses autores sugeriram a hipótese de que o fluido é arrastado para dentro do canal anular pela ação global das tensões de cisalhamento das pás

do rotor. Estas tensões foram consideradas proporcionais ao quadrado da velocidade do fluido no canal, relativa ao rotor. Por outro lado, as paredes do canal exercem tensões de cisalhamento em sentido contrário ao movimento absoluto do fluido. Através de um balanço entre as forças de pressão e de cisalhamento, Iversen *et al.* obtiveram uma expressão para o coeficiente de pressão da máquina. A aplicação prática dessa formulação, todavia, exige o conhecimento de certos coeficientes empíricos a serem determinados por ensaios.

Weinig (Csanady, 1964) obteve uma expressão para o coeficiente de pressão, similar à de Iversen *et al.* (1955). Sugeriu, no entanto, que a causa da turbulência seria originária de um tipo de vórtice criado pela diferença de pressões entre os lados da pá, possibilitando o intercâmbio de fluido entre as pás e o canal lateral. Essa mesma hipótese foi levantada por Crewdson (1956), que concluiu que as forças de pressão das pás seriam substancialmente maiores que as forças centrífugas. Modelos matemáticos tratando as forças de pressão nas pás não foram propostos no contexto da teoria da turbulência.

Apesar dos esforços realizados, a teoria da turbulência não foi capaz de estabelecer conceitos fisicamente consistentes, capazes de conduzir a formulações matemáticas mais gerais. Os pioneiros da teoria da turbulência tiveram pouco êxito na tentativa de demonstrar que a transferência de quantidade de movimento do rotor para o fluido de trabalho se originava de um mecanismo de turbulência, ou arrasto, entre as pás e o canal lateral.

1.2.2. Teoria circulatória

As tentativas infrutíferas de se desenvolver modelos de escoamento nas MFR a partir da teoria da *turbulência* conduziram à proposta da teoria circulatória. Pesquisadores alemães, tais como Engels (1940) e Pfaff (1961), foram pioneiros no estabelecimento dessa teoria. Ela serve de base para a maioria dos modelos de escoamento empregados atualmente na análise e projeto das MFR.

A teoria circulatória parte do princípio de que as partículas de fluido seguem trajetórias helicoidais, com um escoamento circulatório entre o rotor e o canal lateral (Fig. 1.4). O fluido passa sucessivas vezes no rotor e no canal lateral, num movimento em espiral, desde o bocal de entrada até o bocal de saída. Esse movimento é gerado pela ação

das forças aerodinâmicas das pás e das forças não-inerciais. Tal enfoque está firmemente fundamentado em diversos trabalhos experimentais (p. ex., em Varella, 1981).

O mecanismo de transferência de torque e energia do rotor para o fluido de trabalho (MFR geradora) pode ser assim explicado: numa certa passagem pelo rotor, as partículas

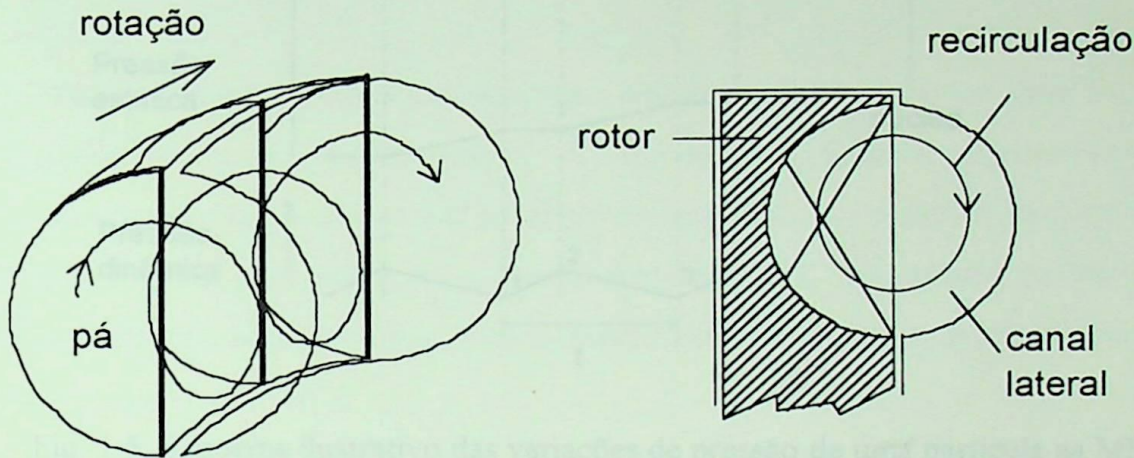


Figura 1.4 - Esquema de uma MFR, ilustrando a Teoria Circulatória.

do fluido ganham energia cinética e quantidade de movimento angular, em virtude da ação das pás. Em seguida, na passagem pelo canal lateral, as partículas perdem toda a quantidade de movimento angular recebida no rotor, enquanto a energia cinética é transformada em energia de pressão. A velocidade das partículas é, então, regenerada e uma nova passagem pelo rotor poderá ter início. Dessa forma, a pressão sobre uma partícula aumenta gradativamente ao longo de sua trajetória helicoidal. Como resultado líquido desse processo, surge um gradiente de pressão na direção angular da máquina. Excetuando-se os trechos próximos aos bocais de entrada e saída, as experiências mostram que esse gradiente é aproximadamente constante (Varella, 1981). A Fig. 1.5 mostra um esquema simplificado das variações das pressões dinâmica, estática e total sofridas por uma partícula de fluido nas suas passagens entre rotor e canal lateral da MFR.

Note-se que cada passagem pelo rotor e pelo canal lateral pode ser considerada equivalente a um estágio de compressão. Daí, a capacidade típica das MFR em obter aumentos de pressão equivalentes ao de muitos estágios de uma máquina de fluxo convencional.

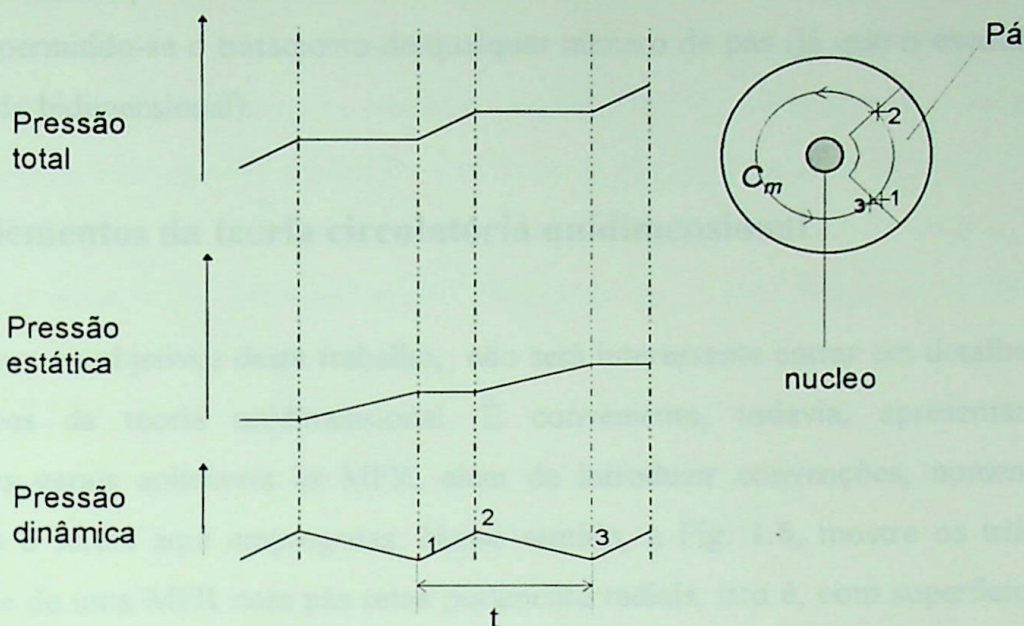


Fig. 1.5 Esquema ilustrativo das variações de pressão de uma partícula na MFR.

O primeiro modelo matemático da teoria circulatória foi proposto por Engels (1940). Trata-se de um modelo unidimensional, baseado em resultados preliminares de outros pesquisadores alemães e em resultados de ensaios realizados pelo próprio autor (Engels, 1940). As seguintes hipóteses foram admitidas no modelo:

- a) existe um gradiente de pressão constante na região do canal lateral, entre os bocais de entrada e saída (com base em resultados experimentais);
- b) o gradiente de pressão ao longo do canal é independente do raio;
- c) os efeitos das forças de cisalhamento nas paredes do canal são considerados desprezíveis;
- d) na região de gradiente de pressão constante, todas as irreversibilidades são atribuídas às perdas no escoamento circulatório;
- e) não existe mistura do escoamento no canal lateral;
- f) infinito número de pás;
- g) na região de gradiente de pressão constante, o vetor velocidade é idêntico em cada seção meridional (com base em resultados experimentais);

Como se verá posteriormente, apenas as hipóteses, (a) e (g) serão essenciais para o desenvolvimento da modelagem teórica do presente trabalho. As hipóteses (b), (c), (d) e (e)

não terão sentido, pois o escoamento será considerado ideal. A hipótese (f), todavia, será relaxada, permitindo-se o tratamento de qualquer número de pás (já que o escoamento será considerado bidimensional).

1.2.3. Elementos da teoria circulatória unidimensional

Para os objetivos deste trabalho, não será interessante entrar em detalhes sobre as formulações da teoria unidimensional. É conveniente, todavia, apresentar algumas expressões gerais aplicáveis às MFR, além de introduzir convenções, nomenclaturas e definições a serem aqui empregadas. Nesse sentido, a Fig. 1.6, mostra os triângulos de velocidade de uma MFR com pás retas puramente radiais, isto é, com superfícies contidas em planos radiais ($\beta^* = 90^\circ$).

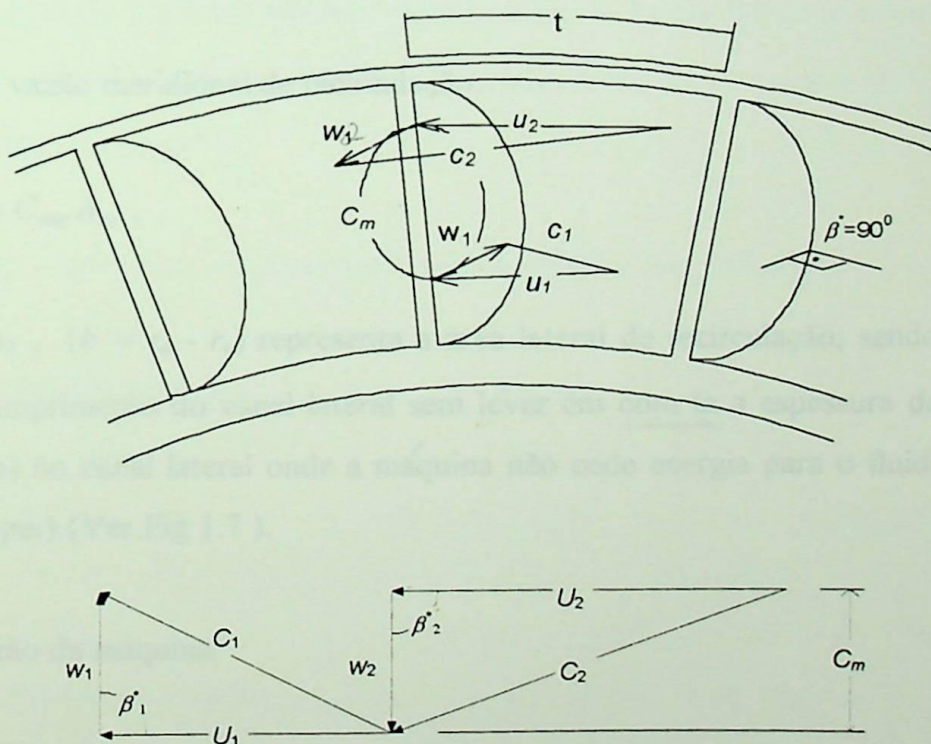


Figura 1.6. - Triângulos de velocidade na entrada e saída do rotor da MFR

A representação dos triângulos na figura acima servirá como esquema básico para a obtenção dos resultados posteriores deste trabalho. Salienta-se, entretanto, que existem

MFR cujas pás formam ângulos com a direção axial, inclusive diferentes na entrada e na saída (pás torcidas). Nessa linha, estudos analíticos e experimentais foram realizados por Grabow (1965, 1972, 1975) e Crewdsom e Jackson (1956), mostrando a influência desses ângulos sobre o desempenho das MFR. Verificou-se que, para ângulos de saída β_2^* menores que 90° , a eficiência cai notavelmente, mas uma condição ótima ocorre para β_2^* em torno de 130° (na saída) e β_1^* em torno de 50° (na entrada). A modelagem a ser desenvolvida neste trabalho não tratará dessas situações.

Algumas expressões básicas aplicáveis às MFR são apresentadas a seguir:

- Momento angular teórico do rotor (Equação de Euler):

$$M_{th} = \rho Q_m (r_2 C_{u2} - r_1 C_{u1}), \quad (1.1)$$

onde Q_m é a vazão meridional de recirculação:

$$Q_m = C_{mc} A_m, \quad (1.2)$$

e $A_m = L \cdot 2b_2$, ($b = r_o - r_c$) representa a área lateral de recirculação, sendo $L = 2\pi r_2(1 - \theta_N/360)$ o comprimento do canal lateral sem levar em conta a espessura das pás e θ_N o setor (ângulo) no canal lateral onde a máquina não cede energia para o fluido de trabalho (setor do stripper) (Ver Fig 1.7).

- Vazão da máquina:

$$Q = C_{uc} A_c, \quad (1.3)$$

$$C_{uc} = \frac{C_{u2} + C_{u1}}{2},$$

A_c : área da seção transversal do canal lateral;

Ω : velocidade angular do rotor.

- Incremento de pressão estática ao longo do canal lateral:

$$\Delta p = \rho Q_m \frac{r_2 C_{u2} - r_1 C_{u1}}{r_m A_c} \quad (1.4)$$

A Eq. (1.4) é obtida com a hipótese de que o momento das forças das pás, dado na Eq. (1.1), se iguala ao momento das forças de pressão no canal lateral, calculado com base no raio médio. Note-se que a determinação do incremento de pressão da máquina depende do conhecimento da velocidade meridional de recirculação, C_m . A determinação dessa grandeza é uma das maiores dificuldades no estudo das MFR. Os modelos unidimensionais empregados no seu cálculo partem do relacionamento entre as perdas hidráulicas da máquina e a pressão dinâmica baseada em C_m , através de coeficientes empíricos (Varella, 1981). No presente trabalho, por se tratar de escoamento ideal, o valor de C_m não poderá ser determinado teoricamente.

Alguns coeficientes adimensionais de desempenho são definidos:

- Coeficiente de vazão:

$$\Phi_u = \frac{Q}{A_c U_m} = \frac{C_{uc}}{\Omega r_m} \quad (1.5)$$

- Coeficiente de Pressão:

$$\Psi_R = \frac{2\Delta p}{\rho U_m^2} \quad (1.6)$$

onde $U_m = \Omega \cdot r_m$ é a velocidade tangencial calculada no raio médio do toro, r_m .

1.2.4. Determinação da linha média efetiva.

Para a aplicação das equações da teoria unidimensional, é necessário estabelecer os raios representativos da linha média efetiva do escoamento, a saber, os raios de entrada, r_i , na saída, r_2 , e no centro de recirculação, r_c (Fig. 1.7).

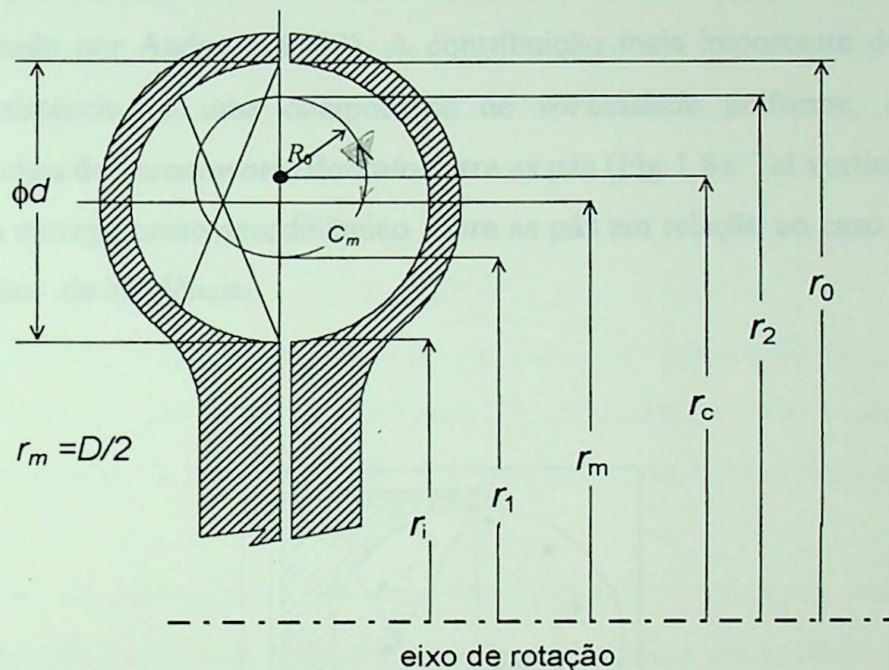


Figura.- 1.7 Dimensões características da pá e do canal lateral

Alguns autores desenvolveram relações simples para a determinação desses raios. Como exemplo, serão apresentadas a seguir as relações propostas por Sivalingam (1977) e Wallace (1978), admitindo a existência de um vórtice forçado centrado em r_c , com velocidades circulatorias linearmente crescentes desde um valor nulo no centro, até um valor máximo na parede do canal lateral:

$$r_c = \frac{2}{3} \frac{(r_o^3 - r_i^3)}{(r_o^2 - r_i^2)} \quad r_1 = \frac{2}{3} \frac{(r_c^3 - r_i^3)}{(r_c^2 - r_i^2)} \quad r_2 = \frac{2}{3} \frac{(r_o^3 - r_c^3)}{(r_o^2 - r_i^2)} \quad (1.5abc)$$

Conforme será visto posteriormente, o conhecimento desses raios também será necessário em aplicações específicas da teoria de grade, a ser desenvolvida no presente trabalho (Capítulo III). Nesse caso, as equações (1.5) poderão ser úteis.

1.2.5. Contribuição de Andrew (1989) no estudo teórico das MFR.

Um dos poucos trabalhos sobre modelos de escoamento bidimensional, aplicáveis às MFR, foi realizado por Andrew (1989). A contribuição mais importante desse autor foi identificar a existência de uma componente de *vorticidade* uniforme, ω , normal às superfícies toroidais do *escoamento absoluto* entre as pás (Fig. 1.8). Tal vorticidade provoca um aumento no carregamento aerodinâmico sobre as pás em relação ao caso potencial, nas mesmas condições de incidência.

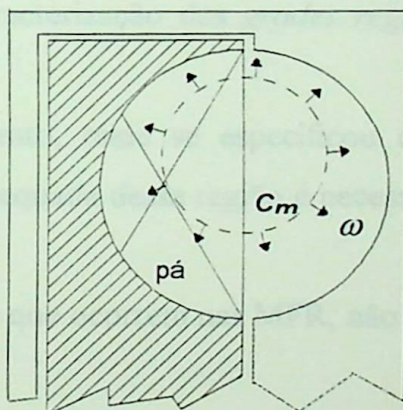


Figura 1.8 - Esquema mostrando a componente de vorticidade ω nas MFR.

Andrew (1989) modificou a definição de diversos fatores de carregamento aerodinâmico, empregados em grades lineares, para levar em conta os efeitos da vorticidade. Além disso, analisou esse efeito na distribuição de pressões sobre as pás da grade. Para tanto, aplicou o método dos painéis de Hess e Smith (1966), adaptada para o caso de um campo de vorticidade uniforme no escoamento. Verificou que, para certos valores arbitrários de vorticidade ($\omega > 0$), o carregamento aerodinâmico local aumentava em relação ao caso potencial ($\omega = 0$).

Um aspecto importante da formulação básica de Andrew é que a vorticidade faz surgir um gradiente de pressão paralelo à grade, que é diretamente proporcional à velocidade meridional e à própria vorticidade. Essa relação é fundamental no sentido de simular o efeito correspondente que ocorre nas MFR.

Com relação aos objetivos da presente dissertação, uma conclusão importante pode ser tirada do trabalho de Andrew (1989): qualquer modelagem bidimensional do escoamento em MFR deve considerar o *escoamento absoluto* como intrinsecamente *rotacional*. Os modelos clássicos de escoamento potencial em grades lineares não podem ser aplicados diretamente no estudo das MFR. Por outro lado, apesar da importante contribuição de Andrew, certos aspectos de suas análises devem ser discutidos:

- a vorticidade foi tratada como um parâmetro arbitrário, independente da incidência do escoamento em relação às pás;

- em particular, no caso das grades de pás retas com incidência nula, as análises de Andrew (1989) admitem um valor não nulo para a vorticidade; isso não poderá ocorrer se a grade for *regenerativa* (a caracterização das *grades regenerativas* será estabelecida no Capítulo II);

- a região do escoamento, onde se especificou a vorticidade, não foi definida claramente; uma delimitação adequada dessa região é necessária em análises do escoamento em MFR.

- os efeitos não-inerciais que ocorrem nas MFR, não foram considerados.

1.3. Objetivos do Presente Trabalho

Pelas considerações anteriores, verifica-se a necessidade de se estabelecer uma teoria de grade que possa ser aplicada às MFR de maneira consistente. Nesse sentido, os seguintes objetivos principais foram estabelecidos nesta dissertação:

- 1) Apresentar uma caracterização precisa do que viria a ser uma *grade regenerativa*, coerente com as características típicas das MFR.
- 2) Apresentar uma formulação básica para o escoamento ideal e permanente em grades regenerativas, que permita relacionar a vorticidade com a incidência.

- 3) Desenvolver uma modelagem para análise do escoamento ideal em grades regenerativas lineares com pás retas e infinitamente finas (inicialmente sem considerar os efeitos não-inerciais das MFR).
- 4) Estender essa modelagem para tratar o caso de grades regenerativas toroidais, incluindo os efeitos não-inerciais.

Os três primeiros objetivos serão cumpridos no Capítulo II, enquanto o último no Capítulo III. No Capítulo IV, apesar de não se tratar de um objetivo principal do trabalho, será discutida a aplicação da modelagem teórica em situações concretas de MFR. Alguns resultados obtidos serão comparados com dados experimentais disponíveis na literatura. A seqüência metodológica dos capítulos está descrita no início de cada um deles. Finalmente, conclusões e sugestões para trabalhos futuros serão apresentadas.

CAPÍTULO II

ESCOAMENTO EM GRADES REGENERATIVAS LINEARES (SEM EFEITOS NÃO INERCIAIS)

Neste capítulo, será apresentada uma caracterização do conceito de *grades regenerativas lineares*, de maneira coerente com as situações típicas das Máquinas de Fluxo Regenerativas (MFR). Por questões de simplicidade, os efeitos não inerciais do escoamento nas MFR serão desconsiderados. Posteriormente, no Capítulo III, essa limitação será superada. Com base nessa caracterização e nas equações de conservação da massa e da quantidade de movimento (Euler), será desenvolvida uma formulação básica para o escoamento ideal e permanente em grades regenerativas. Os Teoremas de Helmholtz e de Stokes também servirão de base. Ficará demonstrado que o escoamento ideal em uma grade regenerativa é, necessariamente, rotacional. Além disso, o campo de vorticidade do escoamento deverá ser uniforme.

Em seguida, será apresentada uma modelagem do escoamento ideal em grades lineares com pás retas e infinitamente finas, com vorticidade constante. A lei de Biot-Savart será empregada na representação dos efeitos da vorticidade e da perturbação das pás. Os resultados gerais da modelagem serão particularizados para o caso regenerativo. Os limites assintóticos para número infinito de pás e pá isolada serão determinados analiticamente. Os casos intermediários serão tratados por meio de uma técnica numérica de vórtices concentrados. A técnica será criteriosamente validada, através da comparação com resultados analíticos disponíveis na literatura para o caso potencial.

Finalmente, diversos resultados serão apresentados mostrando a variação da vorticidade e da circulação das pás em função dos parâmetros geométricos da grade e do ângulo de incidência do escoamento.

2.1 Caracterização das Grades Regenerativas.

Foi mencionado na introdução, que as hipóteses mais importante utilizadas em modelos unidimensionais da teoria circulatória dizem respeito aos gradientes circunferenciais de velocidades e pressões no canal lateral, a saber: (i) gradiente nulo de velocidades; (ii) gradiente constante de pressões. Medições efetuadas no canal lateral das MFR, mostram que essas hipóteses se aplicam num amplo setor, relativamente distante dos bocais (Varella, 1981). Tais hipóteses serão mantidas no decorrer do presente trabalho, e permitirão o desenvolvimento de uma teoria de grade coerente com o escoamento nas MFR. Em princípio, seria possível considerar hipóteses mais complicadas, que pudessem dar conta, inclusive, das regiões próximas aos bocais. Todavia, isso traria complexidades muito grandes para as formulações e modelagens a serem desenvolvidas.

Antes de caracterizar o escoamento numa grade linear infinita do tipo regenerativa, é conveniente apresentar motivação geométrica. Considere-se na Fig 2.1, um esquema ilustrando algumas operações hipotéticas, conducentes à geometria de grade linear para uma MFR do tipo toroidal: (a) primeiramente, retira-se o separador de fluxo (“stripper”) separando-se as extremidades a e b de uma superfície toroidal do escoamento; (b) em seguida, “esticam-se” essas extremidades, até que o toro deformado atinja a forma de um cilindro; (c) finalmente, o cilindro é desenvolvido longitudinalmente ao longo das retas x_1 e x_2 , que são inicialmente coincidentes, mas vão sendo afastadas até que a superfície “cilíndrica” acabe por situar-se inteiramente num plano. Chega-se, por fim, à configuração mostrada na Fig. 2.2, com a grade linear resultante situada no plano (x,y) ; por convenção, os eixos x e y estão nas direções normal e paralela à grade, respectivamente. Note-se que os perfis das pás estão representados como segmentos de reta nessa figura, embora isso não seja geral desde que se considere pás de perfil aerodinâmico. É importante destacar que, apesar das operações ilustradas serem fictícias, podem-se considerar factíveis se o raio r_c do eixo do toro for suficientemente grande quando comparado com o raio R_o da seção transversal do toro.

Os bordos de ataque e de fuga dos perfis são colocados nas retas (x_a, y) e (x_f, y) respectivamente. Também são definidas as outras grandezas geométricas na grade (Fig.2.2):

- Espaçamento entre os perfis (passo), t

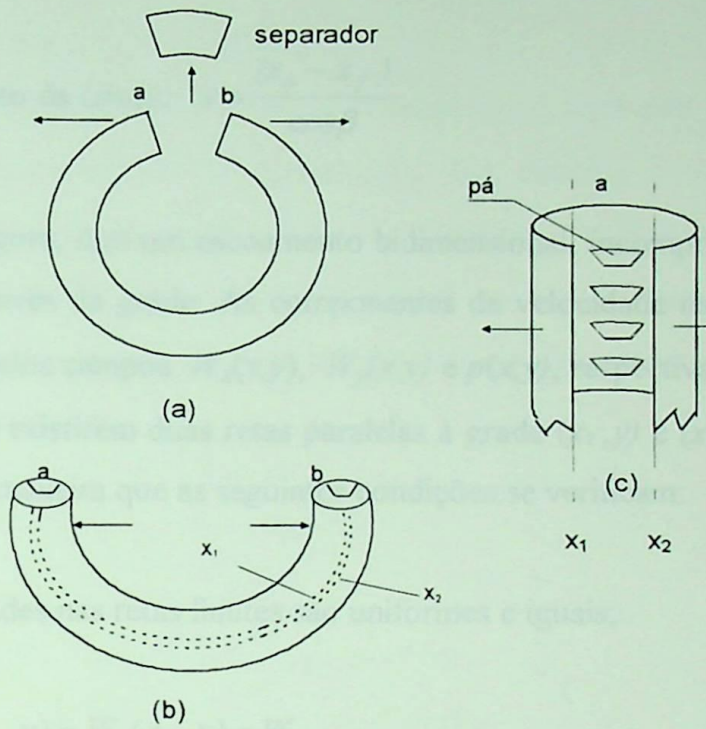


Figura 2.1. - Operações hipotéticas para a geração da grade linear de uma MFR do tipo toroidal.

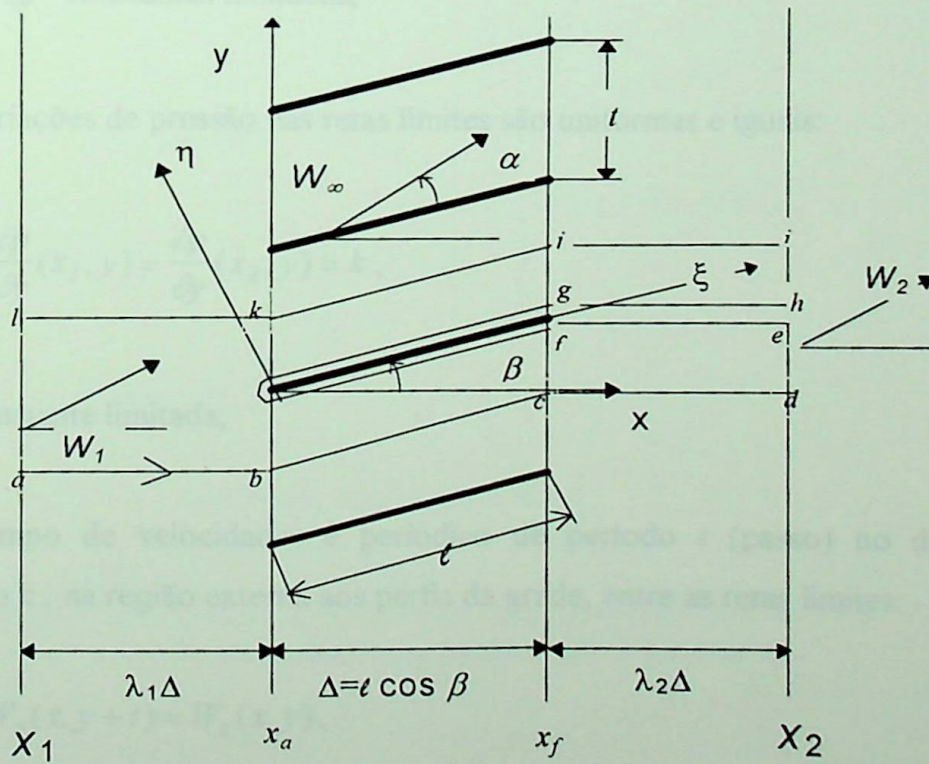


Figura 2.2.- Grade regenerativa composta de placas planas

- Ângulo de montagem, β

- Comprimento da corda, $l = \frac{(x_a - x_f)}{\cos\beta}$.

Admite-se, agora, que um escoamento bidimensional, incompressível e permanente, esteja ocorrendo através da grade. As componentes de velocidade nas direções x e y , e a pressão, são dadas pelos campos $W_x(x,y)$, $W_y(x,y)$ e $p(x,y)$, respectivamente. A grade será dita *regenerativa*, se existirem duas retas paralelas à grade (x_1, y) e (x_2, y) (chamadas aqui *retas limites*), de tal maneira que as seguintes condições se verificam:

a) as velocidades nas retas limites são uniformes e iguais;

$$W_x(x_1, y) = W_x(x_2, y) = W_{\infty x},$$

$$W_y(x_1, y) = W_y(x_2, y) = W_{\infty y}.$$

sendo $W_{\infty x}$ e $W_{\infty y}$ constantes limitadas;

b) as variações de pressão nas retas limites são uniformes e iguais:

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x_1, y) = \frac{\partial p}{\partial y}(x_2, y) = k,$$

sendo k uma constante limitada;

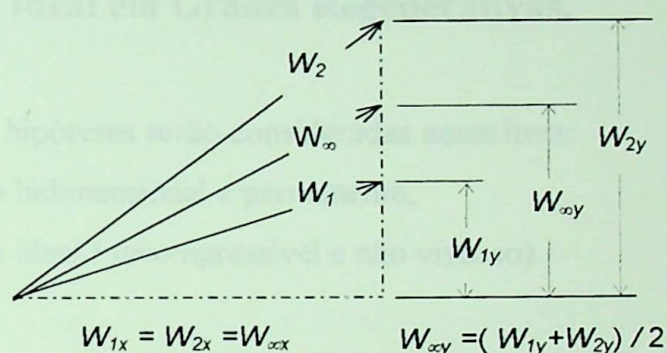
c) o campo de velocidades é periódico de período t (passo) no domínio do escoamento, isto é, na região externa aos perfis da grade, entre as retas limites:

$$W_x(x, y + t) = W_x(x, y),$$

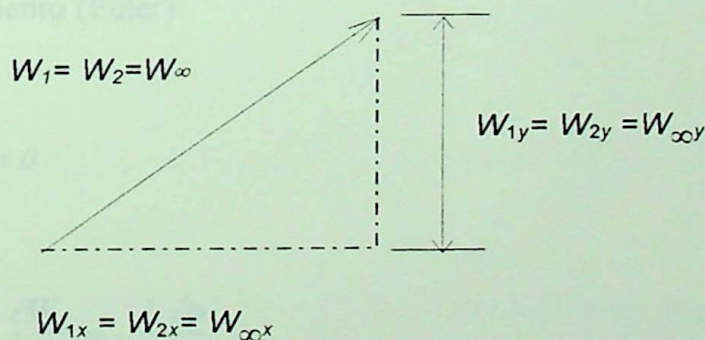
$$W_y(x, y + t) = W_y(x, y).$$

com $x_1 \leq x \leq x_2$, $-\infty < y < +\infty$ e $(x, y) \neq (x_p, y_p)$, onde (x_p, y_p) representa um ponto pertencente à região ocupada pelos perfis.

Observa-se que a primeira parte da condição (a), referente à *componente* W_x , é compatível com a *continuidade* do escoamento. Ela também é válida para as grades *convencionais*. A segunda parte da condição (a), referente à *componente* W_y , é obrigatória apenas nas grades *regenerativas*. Na Fig. (2.3 a,b) mostra-se uma comparação entre os diagramas de velocidades na entrada e na saída de uma grade convencional e de uma grade regenerativa, respectivamente.



a) Grade Convencional



b) Grade tipo regenerativa

Figura 2.3.- Comparação entre os diagramas de velocidade da grade convencional e da grade regenerativa.

A condição (b), por sua vez, aplica-se às grades convencionais somente no caso de $k = 0$. A situação $k \neq 0$ é típica das grades regenerativas, e obriga que o campo de pressões,

seja ilimitado: $|p(x_1, \pm\infty)| = |p(x_2, \pm\infty)| = \infty$. Como se trata de escoamento incompressível, tal situação não é restritiva, em princípio. Naturalmente, soluções do escoamento em grades regenerativas somente serão aplicáveis naquele setor das MFR onde reinam as condições adequadas (longe do separador ou “striper”). Por fim, a condição (c) também se verifica nas grades convencionais. Para estas, todavia, é possível considerar as situações em que $x_1 \rightarrow -\infty$ e $x_2 \rightarrow +\infty$. Para as grades regenerativas, com $k \neq 0$, os valores de x_1 e x_2 são sempre *limitados*. A necessidade dessa restrição será evidenciada no próximo item.

2.2 Escoamento Ideal em Grades Regenerativas.

As seguintes hipóteses serão consideradas neste item:

- escoamento bidimensional e permanente;
- escoamento ideal (incompressível e não viscoso).

A caracterização de grade regenerativa apresentada no item anterior será aplicada nessas condições.

Nesse caso, o movimento do fluido deve satisfazer as equações da continuidade e da quantidade de movimento (Euler):

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} = 0 \quad , \quad (2.1)$$

$$W_x \frac{\partial W_x}{\partial x} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad , \quad (2.2 a)$$

$$W_x \frac{\partial W_y}{\partial x} + W_y \frac{\partial W_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad , \quad (2.2.b)$$

onde ρ é a massa específica do fluido; a pressão p representa a soma da pressão estática com a pressão hidrostática ρgh , sendo h a altura em relação a um nível horizontal de referência (arbitrário), e g a aceleração da gravidade.

Aplicando a condição (a) do item anterior, na equação da continuidade referida às retas limites da grade x_1 e x_2 , tem-se:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x}(x_1, y) + \frac{\partial W_y}{\partial y}(x_1, y) = 0, \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial x}(x_2, y) + \frac{\partial W_y}{\partial y}(x_2, y) = 0, \quad (2.3b)$$

donde se obtêm as seguintes relações:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x}(x_1, y) = \frac{\partial W_x}{\partial x}(x_2, y) = 0. \quad (2.4)$$

Aplicando a equação x da quantidade de movimento, Eq (2,2 a), nas retas limites x_1 e x_2 simultaneamente, obtêm-se:

$$W_x(x_1, y) \frac{\partial W_x}{\partial x}(x_1, y) + W_y(x_1, y) \frac{\partial W_x}{\partial y}(x_1, y) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}(x_1, y), \quad (2.5a)$$

$$W_x(x_2, y) \frac{\partial W_x}{\partial x}(x_2, y) + W_y(x_2, y) \frac{\partial W_x}{\partial y}(x_2, y) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}(x_2, y). \quad (2.5b)$$

Substituindo a Eq. (2.4) nas Eqs. (2.5a) e (2.5b), e considerando nulas todas as derivadas da velocidade na direção "y", em virtude da condição (a), resulta:

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x_1, y) = \frac{\partial p}{\partial x}(x_2, y) = 0 \quad (2.6)$$

Analogamente, aplicando a equação y da quantidade de movimento, Eq. (2.2b), nas retas limites x_1 e x_2 , simultaneamente, obtêm-se:

$$W_x(x_1, y) \frac{\partial W_y}{\partial x}(x_1, y) + W_y(x_1, y) \frac{\partial W_x}{\partial y}(x_1, y) = -\frac{l}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y) \quad (2.7a)$$

$$W_x(x_2, y) \frac{\partial W_y}{\partial x}(x_2, y) + W_y(x_2, y) \frac{\partial W_x}{\partial y}(x_2, y) = -\frac{l}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_2, y) \quad (2.7b)$$

Será importante, ainda, considerar a expressão da vorticidade, $\omega = \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}$, aplicada às

retas limites:

$$\omega(x_1, y) = \frac{\partial W_y}{\partial x}(x_1, y) - \frac{\partial W_x}{\partial y}(x_1, y), \quad (2.8a)$$

$$\omega(x_2, y) = \frac{\partial W_y}{\partial x}(x_2, y) - \frac{\partial W_x}{\partial y}(x_2, y). \quad (2.8b)$$

Levando as condições (a) e (b) nas Eqs. (2.7ab), mais as equações (2.8ab), resulta:

$$W_x(x_1, y) \omega(x_1, y) = -\frac{l}{\rho} k, \quad (2.9a)$$

$$W_x(x_2, y) \omega(x_2, y) = -\frac{l}{\rho} k, \quad (2.9b)$$

ou ainda, introduzindo a notação expressa na condição (a):

$$W_{\omega x} \omega(x_1, y) = W_{\omega x} \omega(x_2, y) = -\frac{k}{\rho}, \quad (2.10)$$

No caso de $W_{\omega x} \neq 0$, a Eq. (2.10) mostra que as vorticidades nas retas limites são *uniformes e iguais*. A equação de Helmholtz, aplicada aos escoamentos permanentes bidimensionais prevê a constância da vorticidade numa certa linha de corrente (Karamcheti

1966). Considerando que as linhas de corrente preenchem todo o domínio do escoamento, entre as retas limites, conclui-se que a vorticidade deverá ser uniforme em todo o campo de escoamento ideal e permanente através das grades regenerativas. Resumindo, o campo de vorticidades fica sendo $\omega(x, y) = \omega$, com ω constante. Para $W_{\alpha x} \neq 0$, resulta de (2.10):

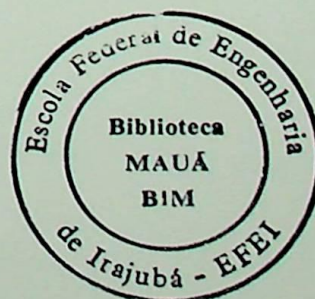
$$\omega = -\frac{k}{\rho W_{\alpha x}} \quad (2.11)$$

A Eq. (2.11) exprime um resultado importante: para um dado gradiente circunferencial de pressões, k , e uma dada velocidade de recirculação, $W_{\alpha x}$, a vorticidade do escoamento fica univocamente determinada. O raciocínio inverso é mais útil no contexto do presente trabalho: conhecida a vorticidade para uma dada recirculação (solução do problema cinemático), o cálculo do gradiente de pressões da grade (problema dinâmico) é imediato. A solução do problema cinemático deverá ser, portanto, a preocupação central desta dissertação.

É conveniente salientar que o resultado da Eq. (2.11) vale para qualquer escoamento ideal em grade com um campo de vorticidade uniforme, mesmo que a grade não seja regenerativa. Muitas das considerações feitas a seguir serão válidas para qualquer grade, sendo particularizadas em seguida para o caso regenerativo (que é, aparentemente, o único caso de interesse aplicado, tendo em vista as MFR). Se a grade for regenerativa, tanto a vorticidade como a correspondente circulação em torno da pá ficarão determinadas de maneira unívoca em função do ângulo de incidência do escoamento não perturbado. Isso será tratado nos itens seguintes.

Nota: O Teorema de Helmholtz no plano pode ser facilmente derivado da equação da vorticidade, no caso de forças conservativas. Essa equação é obtida tomando o rotacional da Equação de Euler:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \text{grad} \vec{W} \quad (2.12)$$



No caso de escoamento bidimensional, a vorticidade é sempre perpendicular ao plano de escoamento, e o termo $\vec{\omega} \cdot \text{grad} \vec{W}$ é nulo. Nesse caso, a Eq. (2.12) fica:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = 0 \quad (2.13)$$

o que mostra que a vorticidade de uma partícula de fluido se conserva ao longo de sua trajetória. No caso de escoamento permanente, as trajetórias coincidem com as linhas de corrente, e as considerações feitas para derivar a Eq. (2.11) são realmente válidas.

2.3 Determinação da Circulação da pá.

Para a análise do escoamento ideal com vorticidade uniforme numa dada grade, em particular para a determinação da circulação em torno de uma pá, os seguintes parâmetros devem ser fornecidos: (1) a velocidade uniforme do escoamento não perturbado de módulo W_∞ e ângulo $\beta_0 = \beta + \alpha$ em relação ao eixo x , sendo α o ângulo de incidência em relação às pás (Fig. 2.2); (ii) o valor do campo de vorticidade uniforme, ω , prescrito numa região limitada pelas duas *retas limites* paralelas à grade, x_1 a montante e x_2 a jusante, com $x_1 = \lambda_1 \ell \cos \beta$ e $x_2 = \lambda_2 \ell \cos \beta$, onde λ_1 e λ_2 são fatores de espaçamento lateral. A unicidade da solução do problema deverá ser garantida pela aplicação da condição de Kutta no bordo de fuga das pás. Para o caso particular das *grades regenerativas*, deve se impor a condição adicional de que as velocidades resultantes nas retas limites sejam iguais. Nesse caso, a vorticidade não poderá ser fixada de forma independente da incidência.

As componentes x e y da velocidade não perturbada relacionam-se às correspondentes componentes em x_1 e x_2 , da maneira convencional, como já foi mostrado na Fig 2.3:

$$W_{1x} = W_{2x} = W_{\infty x} \quad (2.14)$$

$$W_{xy} = \frac{W_{1y} + W_{2y}}{2} \quad (2.15)$$

Aplicando-se o Teorema de Stokes (Karamcheti, 1966) ao campo de escoamento limitado pelo circuito fechado $a-b-c-d-e-f-g-h-i-j-k-l-a$ da Fig 2.2, obtém-se a seguinte expressão para a circulação Γ_p em torno de uma pá de formato arbitrário.

$$\Gamma_p = t(W_{1y} - W_{2y}) + \omega [(x_2 - x_1)t - A_p], \quad (2.16)$$

onde A_p representa a área da seção transversal da pá; no caso de pás infinitamente finas (placas), essa área é nula, e a Eq. (2.16) fica:

$$\Gamma_p = t(W_{1y} - W_{2y}) + \omega (x_2 - x_1)t. \quad (2.17)$$

Nota: Daqui por diante, as análises serão feitas para o caso de pás infinitamente finas, mais particularmente placas planas. Salienta-se que o estudo de grades com pás de formato aerodinâmico também poderia ser realizado, com as devidas adaptações na metodologia. Todavia, tendo em vista o fato de que a maioria das MFR são construídas com pás retas, os presentes estudos serão úteis de imediato.

Das Eqs. (2.15) e (2.17), resultam as seguintes:

$$W_{1y} = W_{xy} + \frac{\Gamma_p}{2t} - \omega \frac{(x_2 - x_1)}{2} \quad (2.18)$$

$$W_{2y} = W_{xy} - \frac{\Gamma_p}{2t} + \omega \frac{(x_2 - x_1)}{2}. \quad (2.19)$$

Aplicando condição de grade regenerativa, onde $W_{1y} = W_{2y}$, obtém-se a seguinte expressão a partir da Eq.(2.17):

$$\Gamma_p = \omega(x_2 - x_1)t, \text{ grade regenerativa com placas.} \quad (2.20)$$

Note-se que para $W_{x\infty} \neq 0$ e $k \neq 0$, as Equações. (2.11) e (2.20) mostram que os valores de x_1 e x_2 devem ser limitados para que a circulação também o seja; para grades convencionais ($k=0$), é possível obter uma circulação limitada com $x_1 \rightarrow -\infty$ e $x_2 \rightarrow +\infty$ pois, nesse caso, $\omega = 0$. Com relação às MFR, a delimitação do domínio do escoamento nas grades regenerativas associa-se ao fato óbvio de que da projeção meridional das linhas de corrente é fechada.

As soluções de escoamento ideal são obtidas de maneira a satisfazer a condição de impermeabilidade no contorno dos perfis. Para isso, em princípio, o valor de ω pode ser adotado arbitrariamente, resultando Γ_p , ou vice-versa (Eq.2.20). Mesmo para grades convencionais ($\omega = 0$), é sabido que o valor de Γ_p é, em princípio, arbitrário. Nos caso de perfis com bordo de fuga afiado, é comum o emprego da condição de Kutta para especificar a circulação (Karamcheti, 1966). É conveniente agregar essa condição à formulação do escoamento ideal em grades com vorticidade uniforme. No caso regenerativo, o valor de circulação resultante estará associado a valores únicos de ω e k (Eqs. 2.11 e 2.20), para um dado ângulo de incidência. Note-se que, no trabalho de Andrew (1989), a vorticidade foi tratada como um parâmetro arbitrário em todas as situações analisadas. O conceito de grades regenerativas e a consideração do Teorema de Stokes não constam daquele trabalho.

2.4 Grades Compostas de Pás Retas e Finas.

Neste item, será apresentada uma modelagem para o escoamento ideal com vorticidade uniforme através de grades lineares compostas de pás retas e infinitamente finas (placas planas).

Inicialmente, o campo global de velocidades do escoamento é representado pela superposição (soma) adequada de três campos de velocidades parciais:

- (I) campo uniforme de velocidades, W_∞ ;
- (II) campo de velocidades induzidas por uma distribuição uniforme de vorticidade, ω (“vortex layer”), entre as retas limites da grade x_1 e x_2 (Apêndice A);

(III) campo de velocidades induzidas por distribuições contínuas de vórtices sobre as pás (“vortex sheets”), com densidade $\gamma(\xi)$, no intervalo $0 < \xi \leq l$, Fig. 2.2 (Apêndice B).

Os campos (II) e (III) podem ser expressos aplicando-se a Lei de Biot-Savart. Em particular, o campo (III) pode ser obtido também por meio de funções complexas analíticas (Karamcheti, 1966 e Lewis, 1991). A determinação analítica das velocidades induzidas pelo campo (II), de vorticidade, encontra-se no Apêndice A.

Estes campos de velocidade podem ser determinados a partir de formulações matemáticas mais rigorosas. Na solução da equação de Poisson para a função corrente é possível encontrar os três campos de velocidades nas grades lineares. A solução desta equação encontra-se no Apêndice C.

As equações para as velocidades de cada um desses campos são dadas a seguir:

$$(I) \quad W_{Ix} = W_{\infty x} = W_{\infty} \cos(\alpha + \beta) , \quad (2.21a)$$

$$W_{Iy} = W_{\infty y} = W_{\infty} \sin(\alpha + \beta) . \quad (2.21b)$$

$$(II) \quad W_{IIx} = 0 , \quad (2.22a)$$

$$W_{IIy} = \omega \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) . \quad (2.22b)$$

$$(III) \quad W_{IIIx} = \int_0^l \gamma(\xi') R(\xi, \xi') d\xi' , \quad (2.23a)$$

$$W_{IIIy} = \int_0^l \gamma(\xi') I(\xi, \xi') d\xi' . \quad (2.23b)$$

onde:

$$R(\xi, \xi') = \frac{1}{2t} \cdot \frac{\operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \operatorname{sen} \beta \right]}{\cosh \left[\frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \cos \beta \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \operatorname{sen} \beta \right]}, \quad (2.24a)$$

$$I(\xi, \xi') = -\frac{1}{2t} \cdot \frac{\operatorname{senh} \left[\frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \operatorname{sen} \beta \right]}{\cosh \left[\frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \cos \beta \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \operatorname{sen} \beta \right]}. \quad (2.24b)$$

Os núcleos R e I equívalem às componentes da velocidade induzida no ponto $(x, y) \neq (x_n, y_n)$ por uma fileira de *vórtices de circulação unitária localizados* sobre a pá em $(x, y) = (x_n, y_n) = (\xi \cos \beta, \xi \operatorname{sen} \beta \pm nt)$, $n = 1, 2, \dots$ (Lewis 1991). Considerou-se $x_a = 0$ (bordo de ataque) e $x_f = \ell \cos \beta$ (bordo de fuga). O obtenção das Eqs (2.24a) e (2.24b) encontra-se no Apêndice B.

Pode-se verificar que, para $x \rightarrow \pm \infty$, as velocidades do campo (III) são uniformes em y : $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (W_{IIIx}, W_{IIIy}) = (0, \pm \Gamma_p / 2t)$. Nas retas limites, apesar de não uniformes, as velocidades médias do campo (III) serão iguais às produzidas para $x \rightarrow \pm \infty$. Logo, superpondo os três campos de velocidades paralelas à grade, $W_y = W_{Iy} + W_{IIy} + W_{IIIy}$, e fazendo $x = x_1$ e $x = x_2$, as velocidades médias globais resultarão compatíveis com as Eqs. (2.18) e (2.19). Verifica-se, desta forma, que o modelo proposto é capaz de reproduzir os efeitos necessários.

2.4.1 Condições do escoamento.

Fazendo a superposição dos três campos de escoamento (I), (II) e (III), e aplicando a condição de impermeabilidade, isto é, considerando que a componente da velocidade global normal às pás deve ser nula ($W_n = W_y \cos \beta - W_x \operatorname{sen} \beta = 0$), resulta:

$$\underbrace{W_\infty \operatorname{sen} \alpha}_{\text{(I)}} + \underbrace{\omega \left[x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right] \cos \beta}_{\text{(II)}} + \underbrace{\int (I \cos \beta - R \operatorname{sen} \beta) \gamma(\xi') d\xi'}_{\text{(III)}} = 0. \quad (2.27)$$

Levando na Eq (2.27) as seguintes relações: $x_1 = -\lambda_1 \Delta$, $x_2 = \Delta + \lambda_2 \Delta$, com $\Delta = \ell \cos \beta$, e $x = \xi \cos \beta$ (Fig.2.2), chega-se à seguinte equação integral de Fredholm de 1ª espécie, singular, para a densidade de vórtices, $\gamma(\xi)$:

$$\int_0^\ell \gamma(\xi') K(\xi, \xi') d\xi' = -W_\infty \operatorname{sen} \alpha - \omega \left[\xi - \frac{(1 + \lambda_2 - \lambda_1)}{2} \ell \right] \cos^2 \beta \quad (2.28)$$

onde o núcleo $K(\xi, \xi')$ é dado por:

$$K(\xi, \xi') = \cos \beta I(\xi, \xi') - \operatorname{sen} \beta R(\xi, \xi'). \quad (2.29)$$

Determinada uma solução $\gamma(\xi)$ da Eq. (2.28), para a densidade de vórtices ao longo da pá, a circulação Γ_p correspondente é calculada por integração: $\Gamma_p = \int_0^\ell \gamma(\xi) d\xi$.

A integral da Eq. (2.28) deve ser considerada no sentido do valor principal de Cauchy, excluindo convenientemente o ponto $\xi' = \xi$ (Karamcheti, 1966). As soluções $\gamma(\xi)$ satisfazendo a condição de Kutta devem ter carregamento nulo no bordo de fuga: $\gamma(\ell) = 0$.

Nota: Para se resolver a Eq. (2.28), os fatores de espaçamento lateral λ_1 e λ_2 devem ser definidos. Como motivação geométrica, convém considerar a projeção meridional de uma MFR toroidal, Fig. 2.4. As magnitudes de λ_1 e λ_2 dependem da relação entre os espaços ocupados pelo canal lateral e pela pá e do posicionamento das retas limites (originadas na linha tracejada). Para um posicionamento simétrico, deve-se ter $\lambda_1 = \lambda_2$.

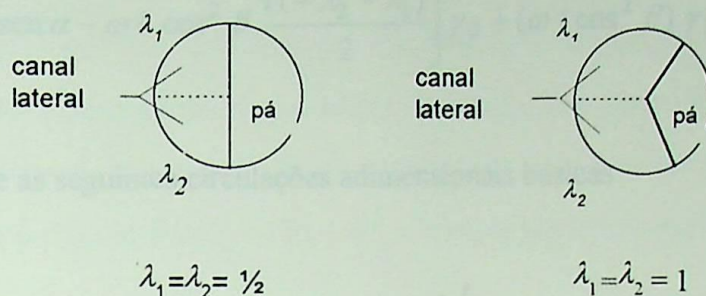


Figura 2.4 - Exemplos do uso dos fatores de espaçamento lateral .

2.4.2 Composição de soluções básicas.

Uma maneira conveniente de resolver a equação (2.28) consiste em se obter, previamente, um conjunto de soluções particulares (básicas) e escrever a solução geral como uma combinação linear das mesmas. Será admitido que essas soluções satisfazem a condição de Kutta, $\gamma(\ell) = 0$. As soluções básicas consideradas são as seguintes:

- (i) solução γ_0 , *puramente potencial*, referente a $W_\infty = 1$, $\text{sen } \alpha = 1$, $\omega = 0$;
- (ii) solução γ_1 , *puramente rotacional*, referente a $W_\infty = 0$, $1 + \lambda_2 - \lambda_1 = 0$, $\omega \ell \cos^2 \beta = 1$.

Desta forma, as equações integrais para γ_0 e γ_1 ficam:

$$\int_0^\ell \gamma_0(\xi') K(\xi, \xi') d\xi = -1 \quad , \quad (2.30a)$$

$$\int_0^\ell \gamma_1(\xi') K(\xi, \xi') d\xi = -\frac{\xi}{\ell} \quad . \quad (2.30b)$$

A solução geral, γ_p , é dada pela a combinação linear das duas soluções básicas:

$$\gamma_p = \left[W_\infty \operatorname{sen} \alpha - \omega \ell \cos^2 \beta \frac{(1 + \lambda_2 - \lambda_1)}{2} \right] \gamma_0 + (\omega \ell \cos^2 \beta) \gamma_1 \quad (2.31)$$

Definem-se as seguintes circulações adimensionais básicas:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \gamma_0(\xi) d\xi, \quad \Gamma_1 = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \gamma_1(\xi) d\xi. \quad (2.32ab)$$

A circulação Γ_p correspondente à solução geral γ_p escreve-se na forma:

$$\Gamma_p = \left[W_\infty \ell \operatorname{sen} \alpha - \omega \ell^2 \cos^2 \beta \frac{(1 + \lambda_2 - \lambda_1)}{2} \right] \Gamma_0 + (\omega \ell^2 \cos^2 \beta) \Gamma_1, \quad (2.33)$$

ou então, reagrupando os termos proporcionais a W_∞ e a ω ,

$$\Gamma_p = W_\infty \ell \operatorname{sen} \alpha \Gamma_0 + \omega \ell^2 \cos^2 \beta \left[\Gamma_1 - \frac{(1 + \lambda_2 - \lambda_1)}{2} \Gamma_0 \right]. \quad (2.34)$$

A seguinte expressão para Γ_p é fisicamente sugestiva:

$$\Gamma_p = \Gamma_{pot} + \omega \ell^2 \cos^2 \beta \Gamma_\omega, \quad (2.35)$$

onde, em virtude de (2.34), Γ_{pot} e Γ_ω são dadas por:

$$\Gamma_{pot} = W_\infty \ell \operatorname{sen} \alpha \Gamma_0, \quad (2.36)$$

$$\Gamma_\omega = \Gamma_1 - \frac{(1 + \lambda_2 - \lambda_1)}{2} \Gamma_0. \quad (2.37)$$

Note-se que Γ_{pot} é a circulação do escoamento potencial clássico ($\omega = 0$) e Γ_ω representa um fator adimensional para o efeito da vorticidade do escoamento. Os valores das circulações adimensionais básicas, Γ_0 e Γ_1 , dependem apenas da geometria da grade (β e l/ℓ). A técnica para o cálculo desses valores será discutida posteriormente.

2.4.3 Caso das grades regenerativas.

Considerando-se o caso regenerativo, $W_{1y} = W_{2y}$, nas Eqs. (2.20), (2.35), (2.36) e (2.37), resultam as seguintes expressões para a vorticidade ω e para a relação entre as circulações regenerativa e potencial, Γ_p / Γ_{pot} :

$$\omega = \frac{W_\infty \operatorname{sen} \alpha \Gamma_0}{\cos \beta \left[(1 + \lambda_1 + \lambda_2)t - \ell \cos \beta \Gamma_\omega \right]}; \quad (2.38)$$

$$\frac{\Gamma_p}{\Gamma_{pot}} = \left[1 + \frac{\ell \cos \beta \cdot \Gamma_\omega}{(1 + \lambda_1 + \lambda_2)t - \ell \cos \beta \Gamma_\omega} \right]. \quad (2.39)$$

As Eqs. (2.38), (2.39) e (2.36) mostram que a vorticidade e a circulação, na situação regenerativa, ficam determinadas de maneira unívoca pelo ângulo de incidência, α . Além disso, nos casos usuais em que λ_1 e λ_2 são positivos, pode-se mostrar que o 2º termo entre colchetes na Eq. (2.39) é positivo. Logo, a circulação da grade regenerativa e, portanto, o carregamento aerodinâmico correspondente, serão maiores que na situação potencial, para a mesma incidência do escoamento não perturbado. Uma explanação física simplificada desses resultados pode ser dada: na situação potencial, a circulação das pás sempre deflete o escoamento entre as retas limites x_1 e x_2 . Daí, para que a deflexão se anule e o escoamento seja regenerado, torna-se necessária uma vorticidade adequada entre x_1 e x_2 e um conseqüente aumento na circulação das pás, compatível com o Teorema de Stokes.

2.4.4 Análise assintótica para o caso de número infinito de pás.

Para espaçamentos suficientemente pequenos, $t \rightarrow 0$, é possível obter uma solução assintótica do modelo proposto. Neste sentido, as seguintes aproximações são válidas em (2.24ab) e (2.29):

$$R(\xi, \xi') \cong 0, \quad I(\xi, \xi') \cong -\frac{1}{2t}, \quad K(\xi, \xi') \cong -\frac{\cos \beta}{2t} \quad (2.40abc)$$

Nota: Observe-se nas Eqs. (2.24ab) que $\lim_{t \rightarrow 0} t R(\xi, \xi') = 0$ e $\lim_{t \rightarrow 0} t I(\xi, \xi') = -1$; daí, as aproximações assintóticas das Eqs. (2.40ab).

Levando em conta a singularidade das equações integrais e a presença da condição de Kutta, é conveniente aplicar (2.40c) em (2.30a) e (2.30b), fazendo $\xi = \ell$. Considerando, ainda, as Eqs. (2.32a) e (2.32b), resultam as seguintes aproximações de 1ª ordem para as circulações básicas (válidas para t pequeno):

$$\Gamma_0 \cong \Gamma_1 \cong \frac{2t / \ell}{\cos \beta}. \quad (2.41)$$

Nas Eqs. (2.37), (2.38) e (2.39), obtêm-se os limites para a vorticidade e a circulação da *grade regenerativa com número infinito de pás*:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega = \frac{W_\infty \sin \alpha}{\ell \lambda_2 \cos^2 \beta}, \quad (2.42)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Gamma_p}{\Gamma_{pot}} = \frac{1 + \lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_2}. \quad (2.43)$$

Verifica-se na Eq. (2.42) que se o espaçamento lateral posterior crescer indefinidamente ($\lambda_2 \rightarrow \infty$), a vorticidade tenderá para um valor nulo. A explicação física é que a

vorticidade deve diminuir à medida que λ_2 aumenta para que o desvio do escoamento após o bordo de fuga seja aquele limitado pelo efeito regenerativo desejado.

Salienta-se que o tratamento do limite $t \rightarrow 0$ pode ser feito de maneira alternativa e independente das equações integrais. Por exemplo, é possível estender para o escoamento rotacional a abordagem física dada por Wislicenus (1964) ao escoamento potencial em grades com número infinito de pás. Com isso, as aproximações e os limites para $t \rightarrow 0$, expressos nas Eqs. (2.41), (2.42) e (2.43), seriam recuperados, corroborando a consistência física da presente modelagem.

2.4.5 Análise assintótica para o caso da pá isolada.

No caso de grandes espaçamentos, $t \rightarrow \infty$, os seguintes limites são obtidos nas Eqs. (2.24 ab) e (2.29):

$$R(\xi, \xi') \cong \frac{\sin \beta}{2\pi(\xi - \xi')}, \quad I(\xi, \xi') \cong -\frac{\cos \beta}{2\pi(\xi - \xi')}, \quad (2.44ab)$$

$$K(\xi, \xi') \cong -\frac{1}{2\pi(\xi - \xi')}. \quad (2.44c)$$

Recupera-se, então, a formulação clássica do escoamento ideal em torno de uma placa plana isolada. É possível obter soluções analíticas nas Eqs. (2.30.ab) e (2.32.ab), com o núcleo $K(\xi, \xi')$ dado em (2.44c), que ficam:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^\ell \frac{\gamma_0(\xi')}{(\xi - \xi')} d\xi' = -1, \quad -\frac{1}{2\pi} \int_0^\ell \frac{\gamma_1(\xi')}{(\xi - \xi')} d\xi' = -\xi. \quad (2.45ab)$$

As equações integrais (2.45ab) podem ser resolvidas empregando-se a teoria dos perfis delgados descrita por Karamcheti (1966). As integrais singulares são transformadas em integrais de Poisson por uma troca de variáveis, $\xi/\ell = (1 - \cos\theta)/2$. Em seguida, aplicam-se certas relações clássicas entre essas integrais e séries trigonométricas, considerando ainda

a condição de Kutta, $\gamma(\theta=\pi) = 0$. As equações transformadas, suas respectivas soluções e as circulações resultantes são as seguintes:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma_0(\theta') \operatorname{sen} \theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} = -1 \quad , \quad \gamma_0(\theta) = 2 \cdot \frac{1 + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \quad (2.46ab)$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma_1(\theta') \operatorname{sen} \theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} = -\xi \quad , \quad \gamma_1(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} + \operatorname{sen} \theta \quad (2.47ab)$$

$$\Gamma_0 = \int_0^1 \gamma_0(\xi) d\left(\frac{\xi}{\ell}\right) = \int_0^{\pi} \gamma_0(\theta) \frac{\operatorname{sen} \theta}{2} d\theta = \pi \quad , \quad (2.48a)$$

$$\Gamma_1 = \int_0^1 \gamma_1(\xi) d\left(\frac{\xi}{\ell}\right) = \int_0^{\pi} \gamma_1(\theta) \frac{\operatorname{sen} \theta}{2} d\theta = \frac{3\pi}{4} \quad . \quad (2.48b)$$

As expressões para γ_0 e γ_1 em termos da abcissa ξ são as seguintes:

$$\gamma_0 = 2 \sqrt{\frac{\ell - \xi}{\xi}} \quad , \quad \gamma_1 = \left(1 + 2 \frac{\xi}{\ell}\right) \sqrt{\frac{\ell - \xi}{\xi}} \quad (2.49ab)$$

Para a situação de grade regenerativa, os limites de pá isolada são obtidos fazendo $t \rightarrow \infty$ nas Eqs (2.38) e (2.39):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_p}{\Gamma_{pot}} = 1 \quad . \quad (2.50ab)$$

O resultado acima era fisicamente previsível, uma vez que a circulação potencial *na pá isolada* não pode defletir o escoamento, sendo naturalmente regenerativa. Nesse caso, a presença de uma vorticidade tornaria o escoamento *não regenerativo*.

Os resultados analíticos encontrados nos casos de número infinito de pás e de pá isolada serão usados como apoio na validação da solução numérica do problema.

2.5 Solução Numérica.

Para espaçamentos e ângulos de montagem arbitrários da grade, a solução das Eqs. (2.30ab) deve se obtida de modo diferente do empregado para a determinação dos limites assintóticos.

Em princípio, diversas abordagens podem ser indicadas para a solução das equações integrais (2.30ab). A própria teoria dos perfis delgados utilizada no caso da pá isolada poderia ser estendida para se tratar o caso de grade, empregando-se séries trigonométricas infinitas. Nesse caso, os coeficientes das séries deveriam ser calculados em função dos parâmetros geométricos da grade, através de técnicas de quadratura apropriadas.

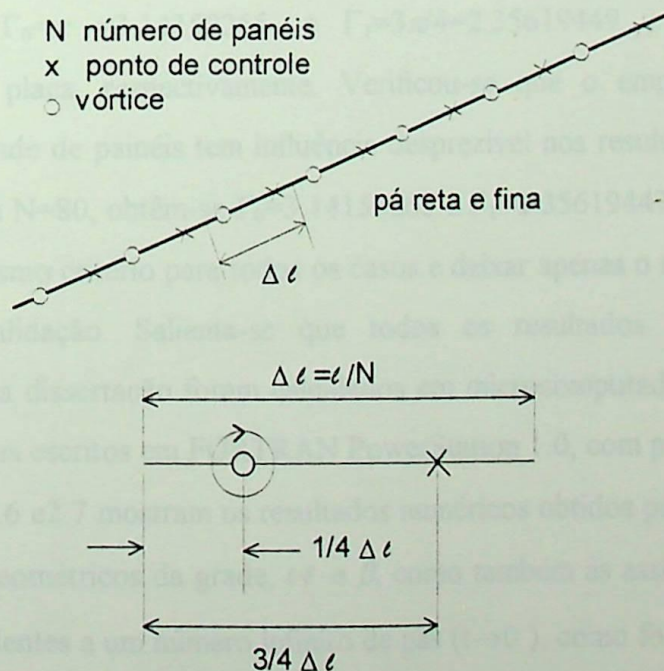


Figura 2.5. Localização dos vórtices e pontos de controle.

Neste trabalho, optou-se pelo emprego de uma técnica numérica baseada na colocação de vórtices discretos sobre as pás. As pás são divididas em N segmentos (painéis) de mesmo comprimento. Em cada painel, são colocados um vórtice e um ponto de controle, nas posições $1/4$ e $3/4$ do comprimento, respectivamente (Fig 2.5). As Eqs. (2.30ab) são discretizadas adequadamente e aplicadas nos pontos de controle. Para cada equação integral discretizada, resulta um sistema de equações algébricas lineares $N \times N$, tendo como incógnitas as intensidades dos vórtices. Neste trabalho, os sistemas lineares foram resolvidos pelo método de eliminação de Gauss, com pivotamento parcial. A partir daí, os valores das circulações básicas para cada sistema, Γ_0 e Γ_1 , são calculados, somando-se as respectivas intensidades dos vórtices.

Alguns aspectos da técnica devem ser destacados. É necessário, primeiramente, que a localização de um ponto de controle seja posterior à respectiva posição do vórtice. Dessa forma, a condição de Kutta é automaticamente satisfeita na medida em que o número de painéis aumenta. Nesse sentido, há também razões relacionadas à convergência da técnica, segundo estudos apresentados por Belotserkovsky e Lifanov (1993). Por outro lado, a escolha das efetivas posições do vórtice e do ponto de controle seguiu um critério heurístico. Para justificar este critério, utilizou-se o caso de uma *placa plana isolada*: nesse caso, as posições de um único vórtice e um único ponto de controle conducentes aos valores exatos, $\Gamma_0 = \pi = 3.14159265\dots$ e $\Gamma_1 = 3\pi/4 = 2.35619449\dots$, são $1/4$ e $3/4$ do comprimento da placa, respectivamente. Verificou-se que o emprego de um número relativamente grande de painéis tem influência desprezível nos resultados da placa isolada. Por exemplo, para $N=80$, obtêm-se $\Gamma_0=3.14159263$ e $\Gamma_1=2.35619447$. A partir daí, decidiu-se empregar o mesmo critério para todos os casos e deixar apenas o número de painéis com parâmetro de validação. Salienta-se que todos os resultados numéricos obtidos e apresentados nesta dissertação foram calculados em microcomputadores do tipo IBM-PC, rodando programas escritos em FORTRAN PowerStation 1.0, com precisão dupla.

As Figs. 2.6 e 2.7 mostram os resultados numéricos obtidos para Γ_0 e Γ_1 , em função dos parâmetros geométricos da grade, t/ℓ e β , como também as assíntotas para $\beta = 80^\circ$ e $\beta = 0^\circ$, correspondentes a um número infinito de pás ($t \rightarrow 0$), como foi determinado na seção 2.4.3. Os resultados foram obtidos com 80 painéis. Note-se que as variações de Γ_0 e Γ_1 são semelhantes e que $\Gamma_0 > \Gamma_1$ (exceto para $t = 0$, quando $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0$). Interessa observar que,

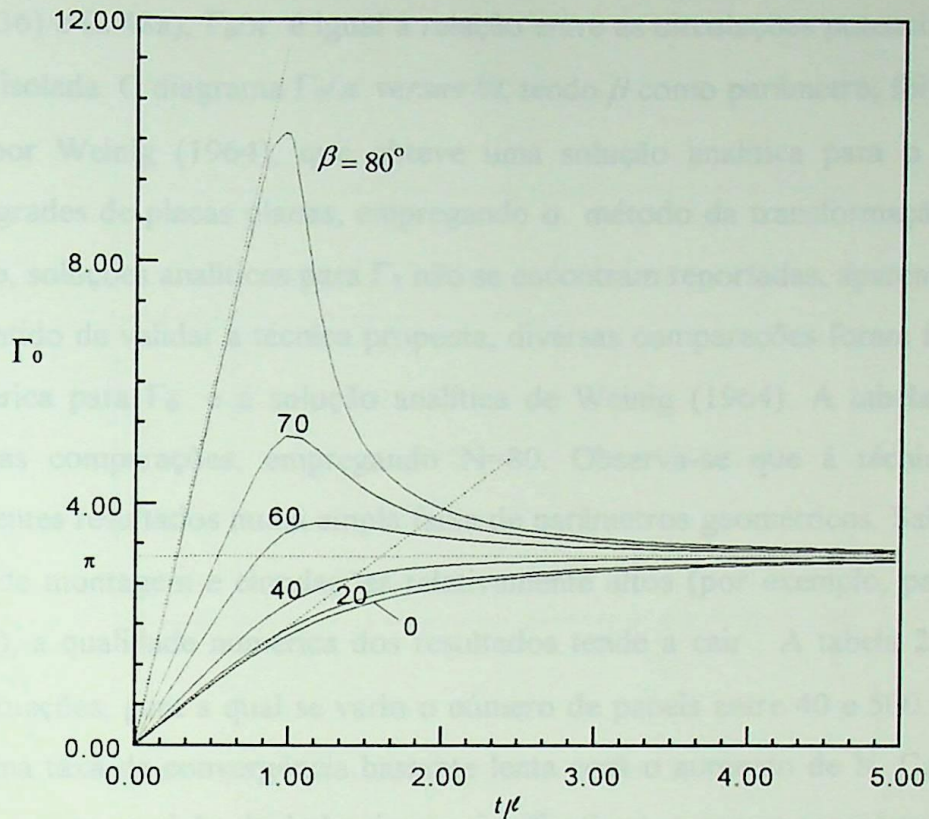


Figura 2.6.- Circulação adimensional básica, Γ_0 .

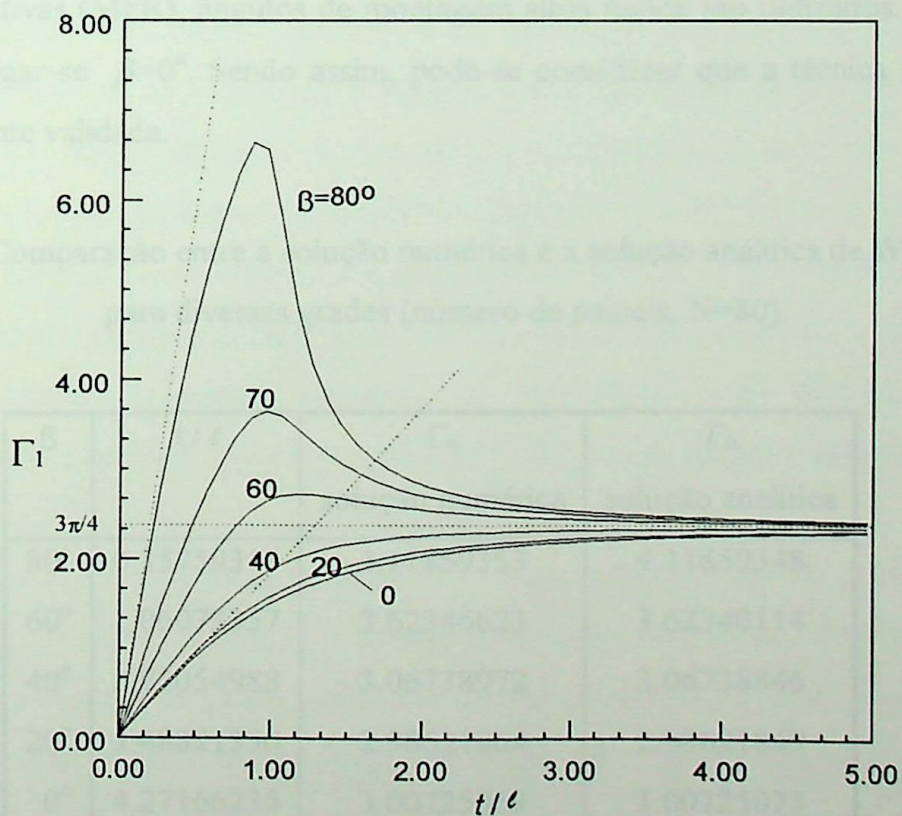


Figura 2.7.- Circulação adimensional básica Γ_1 .



pelas Eqs. (2.36) e (2.48a), Γ_0/π é igual à relação entre as circulações potenciais da pá em grade e da pá isolada. O diagrama Γ_0/π versus t/ℓ , tendo β como parâmetro, foi apresentado inicialmente por Weinig (1964), que obteve uma solução analítica para o escoamento potencial em grades de placas planas, empregando o método da transformação conforme. Por outro lado, soluções analíticas para Γ_1 não se encontram reportadas, aparentemente.

No sentido de validar a técnica proposta, diversas comparações foram feitas entre a solução numérica para Γ_0 e a solução analítica de Weinig (1964). A tabela 2.1 mostra algumas dessas comparações, empregando $N=80$. Observa-se que a técnica numérica produz excelentes resultados numa ampla faixa de parâmetros geométricos. Salienta-se que para ângulos de montagem e circulações relativamente altos (por exemplo, para $\beta > 70^\circ$ e $0.5 < t/\ell < 1.5$), a qualidade numérica dos resultados tende a cair. A tabela 2.2 apresenta uma dessas situações, para a qual se variou o número de painéis entre 40 e 500. Verifica-se, nesse caso, uma taxa de convergência bastante lenta com o aumento de N . Contudo, para $N=80$, obtêm-se uma precisão de 4 algarismos significativos, o que se considera satisfatório. Lembre-se que, nas aplicações finais dos presentes estudos em projetos de máquinas de fluxo regenerativas (MFR), ângulos de montagem altos nunca são utilizados. Alias, é mais comum empregar-se $\beta=0^\circ$. Sendo assim, pode-se considerar que a técnica numérica está satisfatoriamente validada.

Tabela 2.1 - Comparação entre a solução numérica e a solução analítica de Weinig (1964), para diversas grades (número de painéis, $N=80$).

β	t/ℓ	Γ_0 solução numérica	Γ_0 solução analítica
80°	0.35759313	4.11859353	4.11859348
60°	1.06073357	3.62346623	3.62340114
40°	2.73054988	3.06738972	3.06738846
20°	3.48821350	2.98621864	2.98621849
0°	4.27166235	3.00725069	3.00725073

Tabela 2.2 - Comparação entre a solução numérica e a solução analítica de Weinig (1964), para diversos números de painéis (Grade com: $\beta=80^\circ$ e $t/\ell=1.3154707$).

N	Γ_0 solução numérica	Γ_0 solução analítica
40	5.828769	5.828363
80	5.828465	
150	5.828392	
250	5.828373	
500	5.828366	

2.6 Alguns Resultados para Grades Regenerativas.

Uma vez determinadas as circulações básicas, Γ_0 e Γ_1 , as Eqs. (2.35), (2.36) e (2.37) podem ser aplicadas diretamente no cálculo da circulação de uma certa grade, dados os valores da vorticidade, do ângulo de incidência e dos fatores de espaçamento lateral. No caso das grades regenerativas, a vorticidade e a circulação podem ser determinadas diretamente em função do ângulo de incidência, pelas Eqs. (2.38) e (2.39). Com relação às aplicações em MFR, é sempre possível e conveniente escolher as retas limites com $\lambda_1 = \lambda_2$, não havendo perda de generalidade nessa escolha. Observe-se, contudo, que a diminuição dos espaços laterais provocam aumentos na vorticidade e na circulação da grade regenerativa. Isso pode ser facilmente verificado no caso de número infinito de pás, Eqs. (2.42) e (2.43).

Nas Figs. 2.8 e 2.9, estão apresentados resultados para grades regenerativas com pás planas e $\lambda_1 = \lambda_2=1$. A Fig. 2.8 mostra a variação da relação entre as circulações regenerativa e potencial da grade, para uma mesma incidência. O efeito mais notável é o aumento do carregamento aerodinâmico da grade regenerativa em relação à situação potencial ($\Gamma_p/\Gamma_{pot}>1$). Note-se a tendência para o limite $t \rightarrow 0$ expresso na Eq (2.43), $\Gamma_p/\Gamma_{pot}=1.5$. efeito regenerativo diminui à medida que t/ℓ aumenta, observando-se

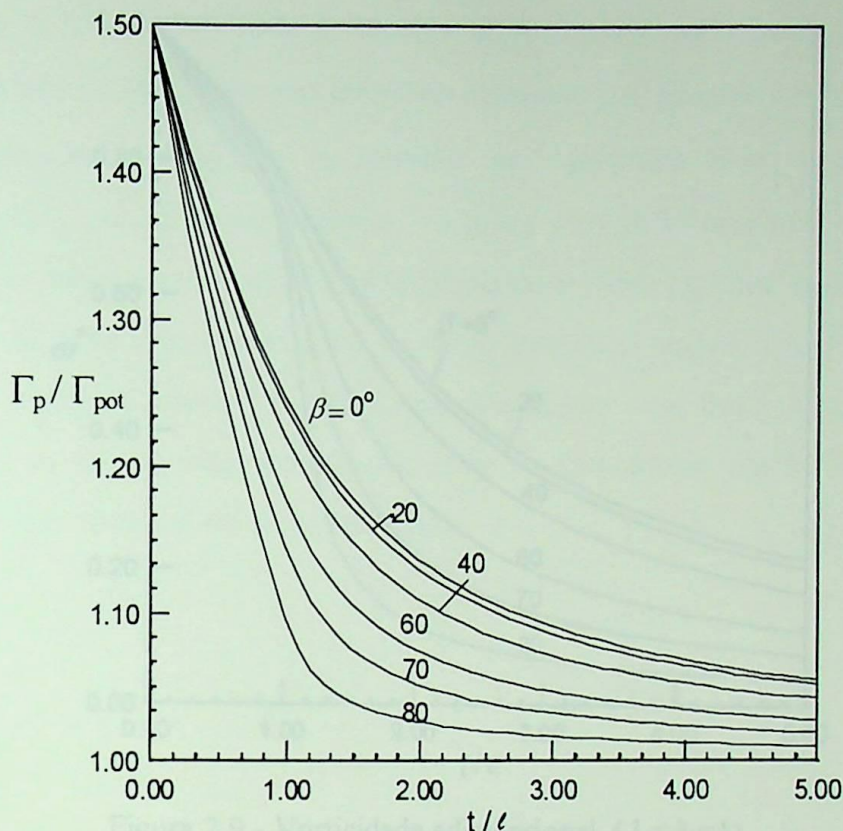


Figura 2.8.- Relação entre circulações regenerativa e potencial, ($\lambda_1=\lambda_2=1$).

o limite com $t \rightarrow \infty$, $\Gamma_p/\Gamma_{pot}=1$. O efeito também diminui com o aumento de β , para uma mesmo t . A Fig. 2.9 mostra a variação da vorticidade adimensional, ω^* , definida por:

$$\omega^* = \frac{\omega l \cos^2 \beta}{W_\infty \sin \alpha} \quad (2.51)$$

A variação de ω^* com a geometria da grade exibe um comportamento semelhante ao de Γ_p/Γ_{pot} . Notem-se os limites com $t \rightarrow \infty$, $\omega^*=0$, e $t \rightarrow 0$, $\omega^*=1$, conforme as Eqs. (250a) e (2.42). Note-se que, para um dado espaçamento a vorticidade dimensional torna-se ilimitada à medida que $\beta \rightarrow 90^\circ$. Isso pode ser facilmente verificado no caso de número infinito de pás, Eq. (2.42). Observe-se que a área entre as pás tende a zero com $\beta \rightarrow 90^\circ$, independentemente do espaçamento. Logo, a vorticidade deverá crescer indefinidamente para produzir uma certa circulação, de acordo com o Teorema de Stokes.

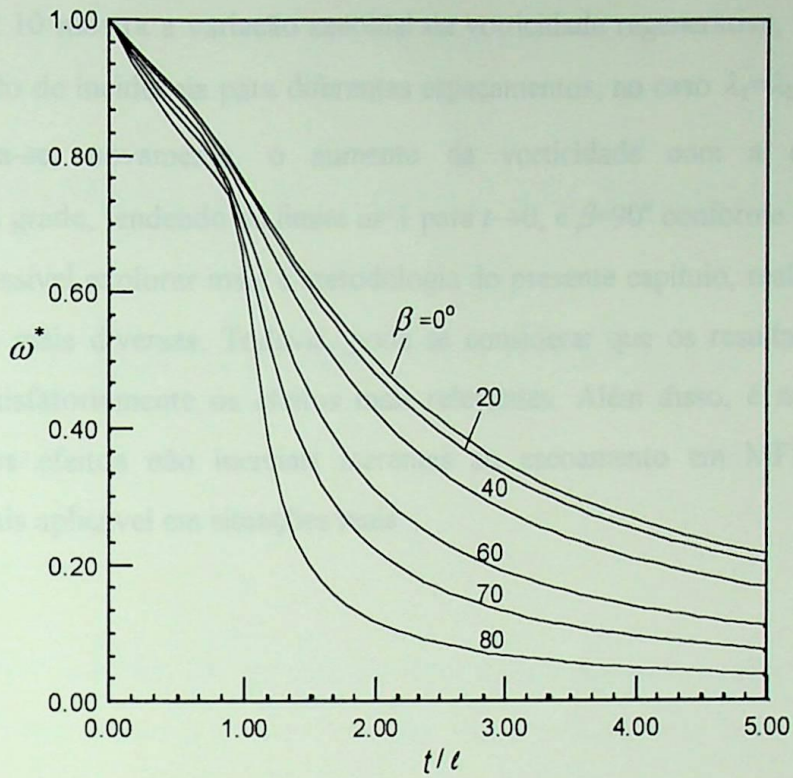


Figura 2.9.- Vorticidade adimensional, ($\lambda_1=\lambda_2=1$).

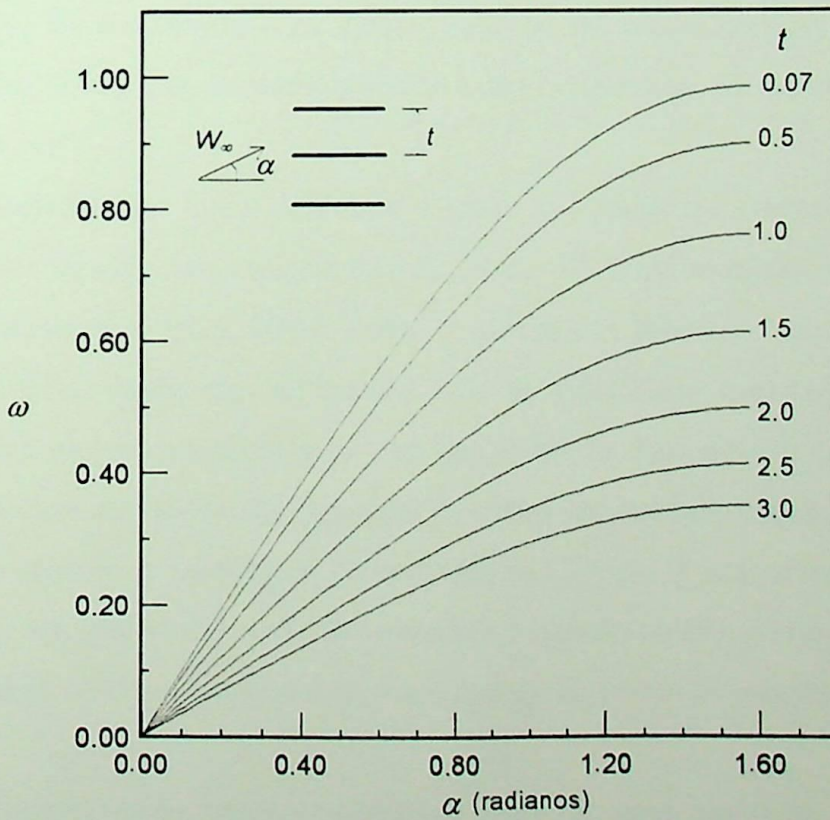


Figura 2.10.- Variação da vorticidade em função da incidência.

A Fig. 2.10 mostra a variação senoidal da vorticidade regenerativa, Eq. (2.38), em função do ângulo de incidência para diferentes espaçamentos, no caso $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\beta=0^\circ$, $t=1$, $W_\infty=1$. Observa-se, novamente, o aumento da vorticidade com a diminuição do espaçamento da grade, tendendo ao limite $\omega=1$ para $t \rightarrow 0$, e $\beta=90^\circ$ conforme a Eq. (2.42).

Seria possível explorar mais a metodologia do presente capítulo, realizando análises paramétricas as mais diversas. Todavia, pode se considerar que os resultados mostrados representam satisfatoriamente os efeitos mais relevantes. Além disso, é mais importante agora incluir os efeitos não inerciais inerentes ao escoamento em MFR, tornando a metodologia mais aplicável em situações reais .

CAPÍTULO III

ESCOAMENTO EM GRADES REGENERATIVAS

TOROIDAIS

(COM EFEITOS NÃO INERCIAIS)

No capítulo anterior, foi apresentada uma modelagem para estudar o escoamento ideal em grades regenerativas lineares com pás retas e infinitamente finas. Os efeitos não inerciais, decorrentes da rotação da máquina, foram desconsiderados, e o escoamento absoluto foi representado como permanente no plano.

Nas situações concretas de MFR, a posição radial das partículas de fluido variam periodicamente no movimento entre rotor e canal lateral, sendo inerentes os efeitos não inerciais. Além disso, o escoamento absoluto é não permanente, em virtude da passagem periódica das pás.

Nas situações em que o raio entre o centro de rotação e o centro do toro, r_c for grande em comparação com o raio do toro R_0 , ($R_0/r_c \rightarrow 0$) os efeitos não inerciais podem ser tratados de maneira simples. Nesse limite, a modelagem feita no Capítulo II torna-se fisicamente válida, desde que se trabalhe com as velocidades relativas no lugar das absolutas. Todavia, nas situações gerais em que a relação R_0/r_c é maior (entre 0 e 1), a modelagem deverá ser modificada para tratar os efeitos não inerciais adequadamente.

Neste capítulo, a modelagem desenvolvida no Capítulo II será estendida para tratar o escoamento em *grades regenerativas toroidais*, incluindo os efeitos não inerciais. Com isso, pretende-se obter uma metodologia mais realista do ponto de vista das aplicações às MFR.

Inicialmente, serão feitas considerações sobre as componentes de vorticidade do escoamento sobre uma superfície de revolução toroidal e suas relações com as variações da energia específica relativa. Em seguida, uma transformação de coordenadas, já clássica em

máquinas de fluxo convencionais, será empregada para transformar a geometria física do toro numa geometria plana de grade linear (plano transformado). As equações da continuidade e da vorticidade também serão transformadas. A modelagem do Capítulo II será então estendida de maneira natural, obtendo-se equações integrais para as densidades de vórtices sobre as pás, no plano transformado. Na solução das equações, será empregada a mesma técnica numérica de vórtices concentrados validada no Capítulo II. Finalmente, alguns resultados para grades toroidais regenerativas serão apresentados e discutidos.

3.1 Componentes da Vorticidade Sobre a Superfície Toroidal.

Na formulação do escoamento em grades de máquinas de fluxo, é conveniente trabalhar com sistemas de coordenadas associados às superfícies de corrente. É comum, também, considerar que essas superfícies sejam de revolução. Essa hipótese será feita no presente trabalho, considerando que o escoamento ocorra em superfícies toroidais de revolução. Um ponto qualquer do escoamento é localizado pelas coordenadas $(\sigma, n, r\varphi)$, Fig. (3.1), sendo σ a coordenada ao longo da projeção da linha de corrente no plano meridional (coordenada meridional), n a coordenada normal à linha de corrente e φ a coordenada angular em relação ao eixo de rotação da máquina; r é o raio do ponto com referência ao eixo de rotação. Note-se que, fixada uma superfície de corrente, o raio será função da coordenada meridional, $r = r(\sigma)$, o mesmo ocorrendo com o ângulo entre a velocidade e a direção axial, $\chi = \chi(\sigma)$. Com base nesse sistema, o vetor velocidade absoluta é escrito como $(C_\sigma, 0, C_\varphi)$, sendo C_σ a componente meridional e C_φ a componente tangencial. As componentes radial e axial da velocidade são dadas por $C_r = C_\sigma \sin\chi$ e $C_z = C_\sigma \cos\chi$. As componentes da vorticidade absoluta, $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{C} = (\omega_\varphi, \omega_\sigma, \omega_n)$, são (Eremeev, 1974):

$$\omega_\varphi = \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r} \quad (3.1)$$

$$\omega_n = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r C_\varphi)}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_\sigma}{\partial \varphi} \quad (3.2)$$

$$\omega_\sigma = \frac{1}{r} \frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial n} - \frac{C_\sigma}{r} \frac{\partial\chi}{\partial\varphi} \quad (3.3)$$

Note-se que, na Eq. (3.3), o último termo permite levar em conta as variações angulares das projeções meridionais. Sendo as superfícies do escoamento de revolução, esse termo deverá ser nulo.

É importante destacar que, para os objetivos do presente trabalho, a componente de vorticidade ω_n , normal à superfície toroidal, será a única relevante. Esse aspecto será tratado oportunamente.

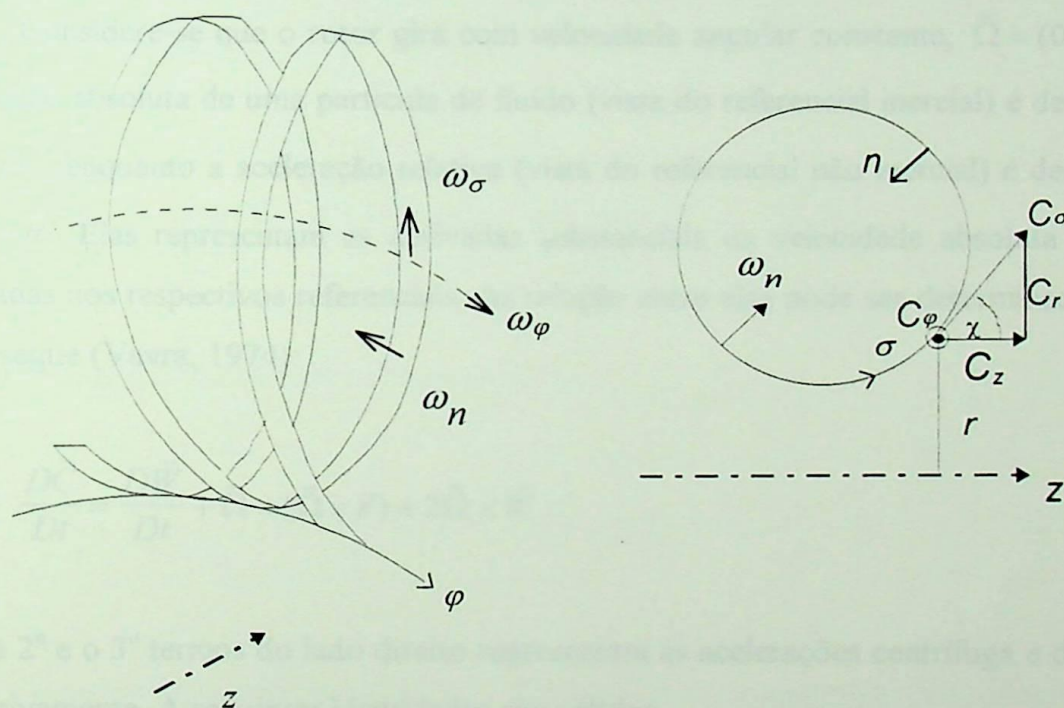


Figura.- 3.1 Direções das três componentes de vorticidade e velocidades no plano meridional.

3.2 Relações Entre a Vorticidade e as Variações de Energia Específica.

Nas máquinas de fluxo, ocorrem variações de velocidade, aceleração e vorticidade que dependem do referencial escolhido. Na região do rotor, o escoamento absoluto (i.e, visto de um referencial inercial) nunca é permanente, em virtude das flutuações causadas

pela passagem das pás. É conveniente, nesse caso, trabalhar num referencial não inercial, rigidamente ligado ao eixo de rotação. Sendo assim, torna-se possível considerar o campo de velocidades relativas como permanente, pelo menos como hipótese. Em se tratando de máquinas de fluxo regenerativas, essa hipótese é aceitável desde que se considere um intervalo de tempo suficientemente pequeno e uma região relativamente distante dos bocais de entrada e saída. Um observador ligado ao rotor verificará, então, um campo permanente de velocidades, em virtude das condições regenerativas. Por outro lado, como o campo de pressões no canal lateral possui um gradiente tangencial, ele será visto como não permanente. Mas, por hipótese, esse gradiente é constante, não introduzindo termos temporais na equações de quantidade de movimento relativa. Nessas condições, entende-se que a hipótese de escoamento relativo permanente é aplicável às MFR.

Considere-se que o rotor gira com velocidade angular constante, $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$. A aceleração absoluta de uma partícula de fluido (vista do referencial inercial) é denotada por $D\vec{C} / Dt$, enquanto a aceleração relativa (vista do referencial não inercial) é denotada por $D\vec{W} / Dt$. Elas representam as derivadas substanciais da velocidade absoluta e relativa, calculadas nos respectivos referenciais. A relação entre elas pode ser determinada e escrita como segue (Vavra, 1974):

$$\frac{D\vec{C}}{Dt} = \frac{D\vec{W}}{Dt} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{W} \quad (3.4)$$

onde o 2º e o 3º termos do lado direito representam as acelerações centrífuga e de Coriolis, respectivamente. A seguintes identidades são válidas:

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\frac{1}{2} \nabla(\Omega^2 r^2), \quad (3.5)$$

$$\frac{D\vec{W}}{Dt} = (\vec{W} \cdot \nabla)\vec{W} + \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \nabla\left(\frac{W^2}{2}\right) - \vec{W} \times (\nabla \times \vec{W}) + \frac{\partial \vec{W}}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Substituindo as Eqs. (3.5) e (3.6) em (3.4), resulta:

$$\frac{D\vec{C}}{Dt} = \nabla \left(\frac{W^2}{2} \right) - \vec{W} \times (\nabla \times \vec{W}) + \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla (\Omega^2 r^2) + 2\vec{\Omega} \times \vec{W} \quad (3.7)$$

Considerando o fluido ideal (incompressível e não viscoso), vale a equação de Euler na seguinte forma:

$$\frac{D\vec{C}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (3.8)$$

Substituindo (3.7) em (3.8), e considerando o escoamento relativo permanente, $\partial \vec{W} / \partial t = 0$, obtém-se:

$$\nabla \left(\frac{\vec{W}^2}{2} \right) - \vec{W} \times (\nabla \times \vec{W}) - \frac{1}{2} \nabla (\Omega^2 r^2) + 2(\vec{\Omega} \times \vec{W}) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (3.9)$$

ou ainda, reagrupando os termos conservativos:

$$\nabla \left[\frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{1}{2} (\Omega^2 r^2) \right] - \vec{W} \times (\nabla \times \vec{W}) + 2(\vec{\Omega} \times \vec{W}) = 0 \quad (3.10a)$$

Os termos entre colchetes na Eq. (3.10a) fornecem a energia específica relativa Y_{rel} das máquinas de fluxo:

$$Y_{rel} = \frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{1}{2} (\Omega^2 r^2) \quad (3.10b)$$

Aplicando o rotacional na relação $\vec{W} = \vec{C} - \vec{\Omega} \times \vec{r}$ (triângulo de velocidades), obtém-se a relação:

$$\nabla \times \vec{W} = \nabla \times \vec{C} - 2\vec{\Omega} \quad (3.11)$$

que mostra que a vorticidade relativa tem uma componente absoluta, $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{C}$, e uma componente inerente aos efeitos não inerciais, $-2\vec{\Omega}$. Para as máquinas de fluxo convencionais, é possível conceber modelos de escoamento potencial, em que $\vec{\omega} = 0$. Isso não é possível no caso das MFR, pois o termo de vorticidade absoluta desempenha um papel essencial na produção do gradiente de pressão.

Substituindo a Eq (3.11) em (3.10a), resulta a expressão para a variação de energia específica relativa:

$$\nabla Y_{rel} = \vec{W} \times (\nabla \times \vec{C}), \quad (3.12)$$

ou então, considerando a notação $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{C}$:

$$\nabla Y_{rel} = \vec{W} \times \vec{\omega} . \quad (3.13)$$

A Eq. (3.13) mostra que: (i) a energia relativa não varia ao longo das linhas de corrente relativas; (ii) no caso de escoamento potencial, a energia relativa é a mesma em todo o campo de escoamento. No caso das MFR, em que o escoamento é necessariamente rotacional, apenas a primeira afirmativa é válida. Nesse caso, haverá variação da energia relativa de uma linhas de corrente para outra. Por exemplo, no canal lateral, as velocidades não variam tangencialmente, e o gradiente tangencial de pressão iguala-se ao gradiente da energia relativa.

O produto vetorial $\vec{W} \times \vec{\omega}$ pode ser escrito em termos das componentes nas direções dos versores $\hat{e}_\sigma, \hat{e}_n, \hat{e}_\varphi$, da seguinte forma:

$$\vec{W} \times \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \hat{e}_\sigma & \hat{e}_n & \hat{e}_\varphi \\ W_\sigma & 0 & W_\varphi \\ \omega_\sigma & \omega_n & \omega_\varphi \end{bmatrix} . \quad (3.14)$$

Considerando (3.14) na Eq. (3.13), juntamente com o operador nabla:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \sigma}, \frac{\partial}{\partial n}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

resultam as componentes da variação da energia relativa:

$$\frac{\partial Y_{rel}}{\partial \sigma} = -W_{\varphi} \omega_n, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial Y_{rel}}{\partial n} = W_{\varphi} \omega_{\sigma} - W_{\sigma} \omega_{\varphi}, \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial Y_{rel}}{\partial \varphi} = W_{\sigma} \omega_n. \quad (3.17)$$

Pelas Eqs (3.15) e (3.17), é evidente que existirão variações de energia relativa nas direções σ e φ , desde que $\omega_n \neq 0$. No caso de uma grade regenerativa toroidal, essas variações irão ocorrer, devido ao gradiente de pressão tangencial. Logo, o escoamento será necessariamente rotacional: existirá uma componente de vorticidade ω_n , normal à superfície toroidal da grade. Note-se que se trata de uma superfície S1, segundo a nomenclatura clássica introduzida por Wu (1952). Para o desenvolvimento de uma teoria pura de grade, as demais componentes de vorticidade não irão desempenhar nenhum papel, sendo supérflua a Eq. (3.16). Por outro lado, essa equação é importante na determinação da projeção das linhas de corrente no plano meridional (superfície S2), que depende da distribuição normal de energia. Deve-se mencionar que o cálculo em S2 pode alterar o cálculo em S1 (superfície entre pá e pá), e vice-versa. Por exemplo, pelo cálculo em S2, é possível quantificar as larguras dos canais elementares, $b(\sigma)$, e modificar a equação da continuidade para um novo cálculo em S1. Como neste trabalho as superfícies S2 não serão estudadas, será feita a hipótese de que $b(\sigma)$ é constante, ficando inalterada a equação da continuidade.

Pela Eq.(3.17), obtém-se a expressão da vorticidade ω_n , necessária para produzir um certo gradiente tangencial de energia (pressão), típico das MFR:

$$\omega_n = \frac{1}{rW_\sigma} \frac{\partial Y_{rel}}{\partial \varphi}. \quad (3.18)$$

Note-se que o aumento da energia específica na direção tangencial é proporcional tanto à vorticidade como à componente meridional da velocidade, W_σ . A determinação de W_σ é um dos problemas mais difíceis nas teorias de MFR. Numa teoria ideal de grade, como a do presente trabalho, o valor médio dessa grandeza é um parâmetro a ser adotado arbitrariamente. No Capítulo IV, essa questão será discutida.

Finalmente, deve-se ressaltar que a vorticidade ω_n será considerada constante em toda a superfície toroidal do escoamento. Deve-se reconhecer que, ao contrário da situação do Capítulo II, em que a constância da vorticidade ficava demonstrada a partir do Teorema de Helmholtz, isso não é tão simples para uma superfície de escoamento não plana, como é o caso da superfície toroidal. Uma argumentação física, que torna aceitável a hipótese de ω_n constante, é a seguinte: considere um circuito fechado na superfície toroidal, formado por um conjunto de partículas. Sendo conservativas todas as forças atuantes sobre o fluido, o Teorema de Kelvin garante que a circulação do circuito não varia à medida que as partículas se deslocam. Considerando um circuito elementar, o Teorema de Stokes dirá que a circulação é igual ao produto do elemento de área, envolvido pelo circuito, pela componente normal da vorticidade, ω_n . Como a área deverá permanecer constante ao longo do movimento, devido à incompressibilidade do fluido, ω_n deverá se conservar ao longo da trajetória das partículas. Mas, pelas hipóteses regenerativas, as velocidades e o gradiente de pressões não irão variar tangencialmente na parte da superfície toroidal correspondente ao canal lateral. Assim, pela Eq. (3.18), a vorticidade também não variará na direção tangencial no canal lateral. Como todas as trajetórias deverão passar pelo canal lateral, a vorticidade deverá ser constante em toda superfície toroidal do escoamento.

3.3 Transformação da Grade Toroidal em Grade Linear.

A determinação do campo de escoamento pode ser feita resolvendo-se as equações da continuidade e da vorticidade diretamente sobre a superfície toroidal (S1). Neste

trabalho, todavia, julgou-se conveniente aplicar a transformação de coordenadas descrita por Nyiri (1970) e Eremeff (1974). Através dessa transformação, é possível mapear qualquer superfície de revolução $S1$ suave (*superfície física*), numa superfície plana (*plano transformado*). Dessa forma, a grade real da superfície física se transforma numa grade linear no plano transformado. As Eqs. da continuidade e da vorticidade são também transformadas, e o problema cinemático pode ser formulado e resolvido no plano transformado. A solução física é então obtida pela aplicação da transformação inversa (que deve existir, nesse caso).

Considere-se que a superfície física de revolução (toroidal, neste trabalho) seja dada pela função $r(\sigma)$ (raio *versus* coordenada meridional). Um ponto da superfície ficará definido pelas suas coordenadas meridional e angular (σ, φ) . Esse mesmo ponto, no plano transformado, terá coordenadas cartesianas (x, y) . A transformação da superfície física $S1$ para o plano transformado da grade linear, é definida pelas seguintes funções $x(\sigma)$ e $y(\varphi)$, Eremeff (1974):

$$x = \ell \cos \beta \frac{1}{a_L} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma'}{r(\sigma')}, \quad (3.19a)$$

$$y = \ell \cos \beta \frac{\varphi}{a_L}, \quad (3.19b)$$

onde as seguintes relações geométricas devem ainda ser consideradas:

$$a_L = \int_{\sigma_0}^{\sigma_L} \frac{d\sigma}{r}, \quad \varphi_L = \frac{2\pi}{Z_R}, \quad (3.20ab)$$

$$\cos \beta = \frac{a_L}{\sqrt{a_L^2 + \varphi_L^2}}, \quad (3.21)$$

$$\frac{Z_R t}{2\pi} = \frac{\ell \cos \beta}{a_L} \quad (3.22)$$

Nas equações (3.19) até (3.22), valem as seguintes convenções:

t - valor do passo da grade linear (plano transformado)

ℓ - comprimento da corda do perfil na grade linear

β - ângulo entre a corda e a direção x

$\ell \cos \beta$ - profundidade da grade na direção x

Z_R - número de pás do rotor

σ_0 - coordenada meridional do bordo de ataque da pá

σ_L - coordenada meridional do bordo de fuga da pá

Por sua vez, as componentes meridional e tangencial da velocidade absoluta na superfície física, C_σ e C_φ , transformam-se nas componentes normal e paralela à grade linear do plano transformado, C_x e C_y , segundo as seguintes relações:

$$C_x = \frac{2\pi}{Z_R t} r C_\sigma, \quad (3.23)$$

$$C_y = \frac{2\pi}{Z_R t} r C_\varphi. \quad (3.24)$$

A transformação aqui empregada é um tipo de *transformação conforme*, no sentido de que o ângulo entre duas linhas quaisquer na superfície física é mantido nas linhas transformadas. As circulações do campo de velocidade também são preservadas pela transformação, o que permitirá aplicar as técnicas do Capítulo II de maneira quase direta.

É interessante observar que essa transformação é de uso freqüente no campo das máquinas de fluxo convencionais do tipo misto (rotores tipo Francis). Aparentemente, todavia, ela nunca foi aplicada no caso de superfícies toroidais representativas das MFR.

Sob esse aspecto, a única diferença a destacar é que a geratriz da superfície toroidal é uma linha fechada, ao contrário das linhas abertas convencionais.

3.3.1 Relações geométricas de transformação no caso de toro circular.

Com base nas relações geométricas apresentadas na seção anterior, é possível realizar a transformação de uma grade toroidal genérica em uma grade linear plana.

A função geratriz, $r(\sigma)$, define a geometria da superfície toroidal. Do ponto de vista de uma representação quasi-tridimensional do escoamento, o conhecimento de $r(\sigma)$ depende do tratamento adequado das superfícies S2. Como isso não é objetivo do presente trabalho, será necessário adotar a função $r(\sigma)$. Em se tratando de uma primeira abordagem, é conveniente adotar uma geratriz circular, que é representativa do caso das MFR do tipo toroidal. Trabalhos experimentais indicam que as linhas de corrente efetivas se desviam pouco em relação ao formato circular (Varella, 1981).

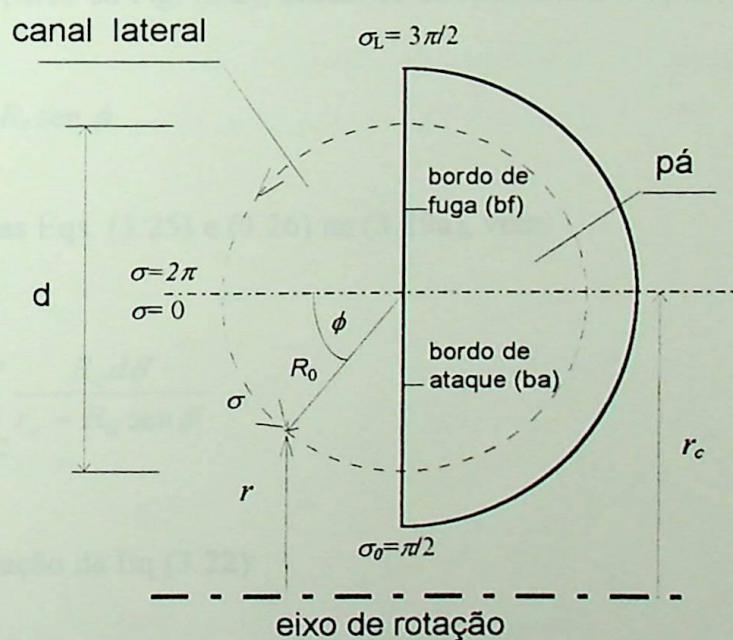


Figura.- 3.2 Superfície S_2 de uma MFR.

Considere-se a projeção meridional de uma linha de corrente, como mostrado na Fig.(3.2). Para definir uma superfície toroidal de escoamento, basta fornecer o raio do

centro do toro, r_c , e o raio do próprio toro, R_0 , considerando que $r_c > R_0$.

É fácil ver na Fig. (3.2), que a relação entre a coordenada meridional σ e o ângulo polar ϕ , referente ao centro do toro, pode ser escrita como:

$$\sigma = R_0 \phi . \quad (3.25)$$

O início e final de um percurso completo podem ser fixados por:

$$\begin{aligned} \phi = 0 & \Rightarrow \sigma = 0 ; \\ \phi = 2\pi & \Rightarrow \sigma = 2\pi R_0 , \end{aligned}$$

correspondendo a um ponto equidistante entre os bordos de ataque ($\phi = \pi/2$) e de fuga ($\phi = 3\pi/2$).

Pela Eq. (3.25), a função $r(\sigma)$ pode determinada em termos do ângulo ϕ , i.e., $r(\sigma) = r(\sigma(\phi)) = r(\phi)$. A partir da Fig. (3.2), obtém-se diretamente a função $r(\phi)$:

$$r = r(\phi) = r_c - R_0 \text{sen } \phi . \quad (3.26)$$

Considerando as Eqs. (3.25) e (3.26) na (3.19a), vem:

$$x = \frac{\ell \cos \beta}{a_L} \int_{\pi/2}^{\phi} \frac{R_0 d\phi'}{r_c - R_0 \text{sen } \phi'} , \quad (3.27)$$

ou então, usando a relação da Eq (3.22):

$$x = \frac{Z_{Rt}}{2\pi} \int_{\pi/2}^{\phi} \frac{R_0 d\phi'}{r_c - R_0 \text{sen } \phi'} , \quad (3.28)$$

A integral na Eq. (3.28) pode ser resolvida analiticamente (Spiegel, 1968). O resultado é escrito da seguinte maneira:

$$x = f(\phi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad (3.29)$$

onde:

$$f(\phi) = \frac{Z_{Rt}}{2\pi} R_0 \left\{ \frac{2}{\sqrt{r_c^2 - R_0^2}} \arctan \left[\frac{r_c \tan\left(\frac{\phi - \pi}{2}\right) + R_0}{\sqrt{r_c^2 - R_0^2}} \right] \right\}. \quad (3.30)$$

A função da Eq. (3.30) possui inversa, f^{-1} , tal que $\phi = f^{-1}[x + f(\pi/2)]$:

$$\phi = 2 \arctan \left\{ \frac{\sqrt{r_c^2 - R_0^2}}{r_c} \tan \left[\frac{\sqrt{r_c^2 - R_0^2}}{2} \cdot \frac{2\pi}{Z_{Rt} R_0} \left(x + f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{R_0}{r_c} \right) \right] - \frac{R_0}{r_c} \right\} + \pi. \quad (3.31)$$

Pela Eq. (3.20a), o valor de a_L é determinado calculando a integral entre os bordos de ataque e de fuga da pá, i. e., entre os limites $\phi = \pi/2$ e $\phi = 3\pi/2$:

$$a_L = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{R_0 d\phi}{r_c - R_0 \sin \phi}, \quad (3.32)$$

resultando, após integração:

$$a_L = R_0 \frac{2}{\sqrt{r_c^2 - R_0^2}} \left\{ \arctan \left[\frac{r_c + R_0}{\sqrt{r_c^2 - R_0^2}} \right] - \arctan \left[\frac{-r_c + R_0}{\sqrt{r_c^2 - R_0^2}} \right] \right\}. \quad (3.33)$$

Note-se que o valor de a_L depende apenas do parâmetro R_0/r_c . Nos limites $R_0/r_c=0$ e $R_0/r_c=1$, tem-se $a_L=0$ e $a_L=\infty$, respectivamente.

3.4 Equações da Continuidade e da Vorticidade.

A equação da continuidade para o escoamento sobre uma superfície $S1$ de revolução pode ser determinada fazendo-se o balanço de massa num volume de controle elementar de lados $d\sigma$, $rd\varphi$, b , onde b é a largura na direção normal, representativa da distância entre superfícies de corrente adjacentes (Eremeff, 1974). No presente trabalho, sendo o escoamento incompressível e b constante, a equação da continuidade fica:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial C_\sigma}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rC_\varphi)}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.34a)$$

Por outro lado, é possível aplicar o Teorema de Stokes numa área elementar de lados $d\sigma$, $rd\varphi$, para obter a equação da vorticidade normal à superfície, ω_n . O resultado será idêntico ao encontrado na Eq. (3.2):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial C_\sigma}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (rC_\varphi)}{\partial \sigma} = \omega_n \quad (3.34b)$$

As componentes físicas da velocidade absoluta, C_σ , C_φ , transformam-se nas componentes C_x , C_y por meio das Eqs. (3.23) e (3.24). Levando essas relações nas Eqs. (3.34ab), mais as Eqs. (3.19ab) resultam as equações da continuidade e da vorticidade no plano transformado:

$$\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} = 0, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial x} = \left(\frac{2\pi}{Z_R t} \right)^2 r^2 \omega_n. \quad (3.36)$$

Observa-se nas Eqs. (3.35) e (3.36) que o escoamento no plano transformado será também incompressível e rotacional. A vorticidade no plano transformado, ou *vorticidade transformada*, ω_T , é dada por:

$$\omega_T = \left(\frac{2\pi}{Z_{Rt}} \right)^2 r^2 \omega_n. \quad (3.37)$$

Uma vez que a vorticidade física, ω_n , é constante, verifica-se que a vorticidade transformada será variável, segundo a Eq. (3.37). Esse fato, todavia, não trará maiores dificuldades na modelagem.

A partir de agora, será possível aplicar quase diretamente a metodologia do Capítulo II, exprimindo o campo global de velocidades absolutas no plano transformado através da superposição adequada de campos parciais. As diferenças estarão na representação das velocidades induzidas pelo campo de vorticidade e na aplicação da condição de contorno.

3.4.1 Velocidades induzidas pela vorticidade transformada.

De maneira semelhante ao que foi feito no Capítulo II, o campo de velocidades induzidas pela vorticidade ω_T pode ser calculado aplicando-se a lei de Biot-Savart diretamente no plano transformado.

No Apêndice (A), foram obtidas as componentes x e y da velocidade induzida por uma camada de vórtices situada entre x_1 e x_2 , variando apenas na direção x . Pelas condições das Eqs. (3.37), (3.25) e (3.28), a vorticidade transformada se enquadra nesse caso, pois $\omega_T = \omega_T(r)$, $r = r(\sigma)$, $\sigma = \sigma(\phi)$ e $\phi = \phi(x)$. Aplicando a Eq. (A14) essas componentes ficam

$$C_{\omega x} = 0, \quad (3.38)$$

$$C_{\omega y} = \frac{1}{2} \left[\int_{x_1}^x \omega_T dx' - \int_x^{x_2} \omega_T dx' \right] \quad (3.39)$$

Note-se que a camada de vórtices física ocupa toda a superfície toroidal. Naturalmente, basta considerar uma volta completa do círculo meridional do toro, fazendo $\phi(x_1)=0$ e $\phi(x_2)=2\pi$.

É conveniente aplicar as relações $x'(\sigma')$ e $\sigma'(\phi')$ para substituir as variáveis na Eq. (3.39):

$$C_{\omega y} = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\phi} \omega_T \frac{dx'}{d\sigma'} \frac{d\sigma'}{d\phi'} d\phi' - \int_{\phi}^{2\pi} \omega_T \frac{dx'}{d\sigma'} \frac{d\sigma'}{d\phi'} d\phi' \right]. \quad (3.40)$$

Considerando as Eq (3.37), (3.25), (3.26) e (3.28) na Eq (3.40), obtém-se:

$$C_{\omega y} = \frac{1}{2} \omega_n R_0 \left(\frac{2\pi}{Z_{Rt}} \right) \left\{ \int_0^{\phi} (r_c - R_0 \sin \phi') d\phi' - \int_{\phi}^{2\pi} (r_c - R_0 \sin \phi') d\phi' \right\}. \quad (3.41)$$

Finalmente, resolvendo-se as integrais da Eq (3.41), determina-se a velocidade induzida pela camada de vorticidade no plano transformado:

$$C_{\omega y} = \omega_n R_0 \left(\frac{2\pi}{Z_{Rt}} \right) \{ R_0 \cos \phi + r_c \phi - R_0 - r_c \pi \}. \quad (3.42)$$

Pode-se verificar que a Eq. (3.42) produzirá velocidades de mesmo módulo, porém opostas nas retas limites x_1 e x_2 ($\phi = 0^0$ e $\phi = 2\pi$, respectivamente). Esse efeito é semelhante ao considerado na Capítulo II, Eq (2.22b). A diferença é que, naquela ocasião, a velocidade induzida variava linearmente com a abcissa x . Como a vorticidade transformada é agora variável, resulta uma relação não linear entre a velocidade induzida e a abcissa x , conforme se vê diretamente nas Eqs. (3.42) e (3.31). Isso, todavia, não acarretará maiores dificuldades na aplicação da metodologia do Capítulo II nesse caso mais geral.

Note-se que a função $C_{\omega_y}(\phi)$ depende dos parâmetros geométricos da grade toroidal: raios do toro, R_0 e r_c ; número e ângulo das pás Z_R e β . O espaçamento t da grade linear transformada fica determinado pelas Eqs. (3.22) e (3.33).

A Fig. (3.3) mostra o comportamento da função $C_{\omega_y}(\phi)$ para diferentes relações R_0/r_c (considerando $2\pi\omega_n r_c^2 / Z_R t = 1$). À medida que o raio do toro diminui em relação ao raio do centro, as velocidades induzidas pela vorticidade tornam-se cada vez menores, já que a área da superfície toroidal diminui. Para $R_0/r_c \rightarrow 0$, $C_{\omega_y} \rightarrow 0$, com uma vorticidade fixada no toro. Observa-se, também, que a o gráfico da função $C_{\omega_y}(\phi)$ vai tendendo a uma reta, recuperando-se o caso de vorticidade uniforme do Capítulo II.

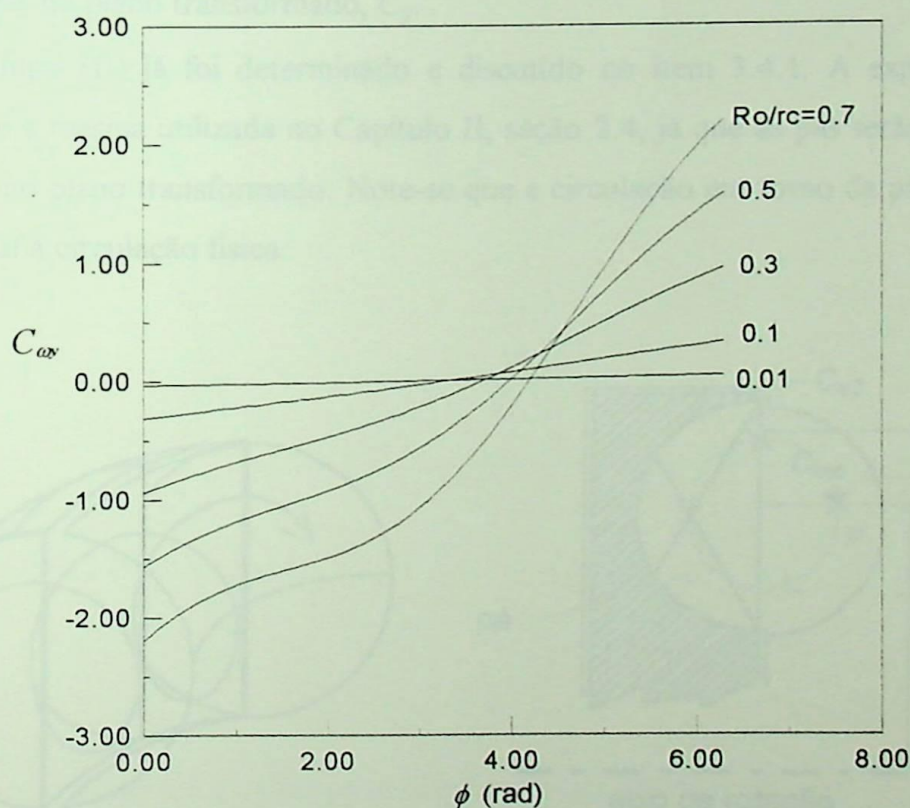


Figura 3.3 - Influência da relação R_0/r_c sobre a função C_{ω_y} .

3.5 Campo Global de Velocidades e Condição de Contorno nas Pás.

É possível, agora, desenvolver uma modelagem para análise do escoamento ideal em grades toroidais, de maneira similar àquela do Capítulo II. As pás serão consideradas

infinitamente finas e retas no plano transformado. O caso $\beta=0^0$ é o mais comum nos projetos de MFR. Para $\beta \neq 0^0$, as pás na superfície toroidal deveriam ser curvadas com ângulo constante em relação à direção meridional. Apesar de não serem usuais, casos com $\beta \neq 0^0$ também serão permitidos nas análises seguintes.

Da mesma forma que no Capítulo II, o campo global de velocidades absolutas no plano transformado será representado pela superposição de três campos parciais:

- (I) campo uniforme de velocidade, C_∞ ;
- (II) campo de velocidades induzidas pela distribuição da vorticidade transformada, C_ω ;
- (III) campo de velocidades induzidas por distribuições contínuas de vórtices sobre as pás da grade linear no plano transformado, C_γ .

O campo (II) já foi determinado e discutido no item 3.4.1. A expressão para o campo (III) é a mesma utilizada no Capítulo II, seção 2.4, já que as pás serão consideradas retas e finas no plano transformado. Note-se que a circulação em torno da pá transformada resultará igual à circulação física.

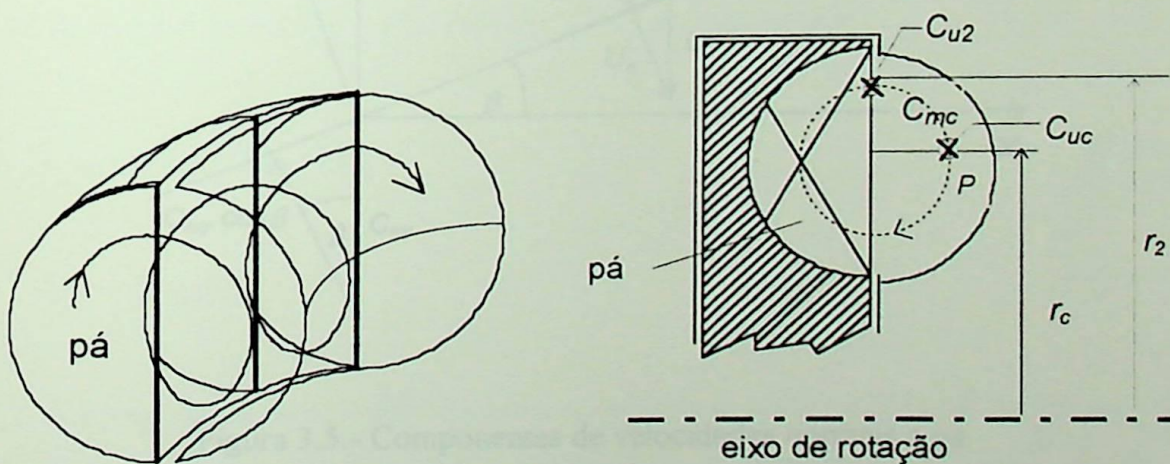


Figura 3.4.- Grade Toroidal.

As componentes de velocidade do campo (I), $C_{\alpha x}$ e $C_{\alpha y}$, estão associadas às componentes meridional e tangencial da velocidade absoluta no plano físico, C_{mc} e C_{uc} determinadas numa posição do canal lateral de raio r_c , sobre a geratriz do toro (ponto P na

Fig. 3.4). A utilização dessa posição é conveniente, devido à equidistância em relação aos bordos de ataque (1) e de fuga (2) das pás. Pelas relações de transformação dadas nas Eqs (3.23) e (3.24), tem-se que (ver também Fig. 3.5):

$$C_{\infty x} = \frac{2\pi r_c}{Z_R t} C_{mc} \quad (3.43)$$

$$C_{\infty y} = \frac{2\pi r_c}{Z_R t} (-C_{uc}) \quad (3.44)$$

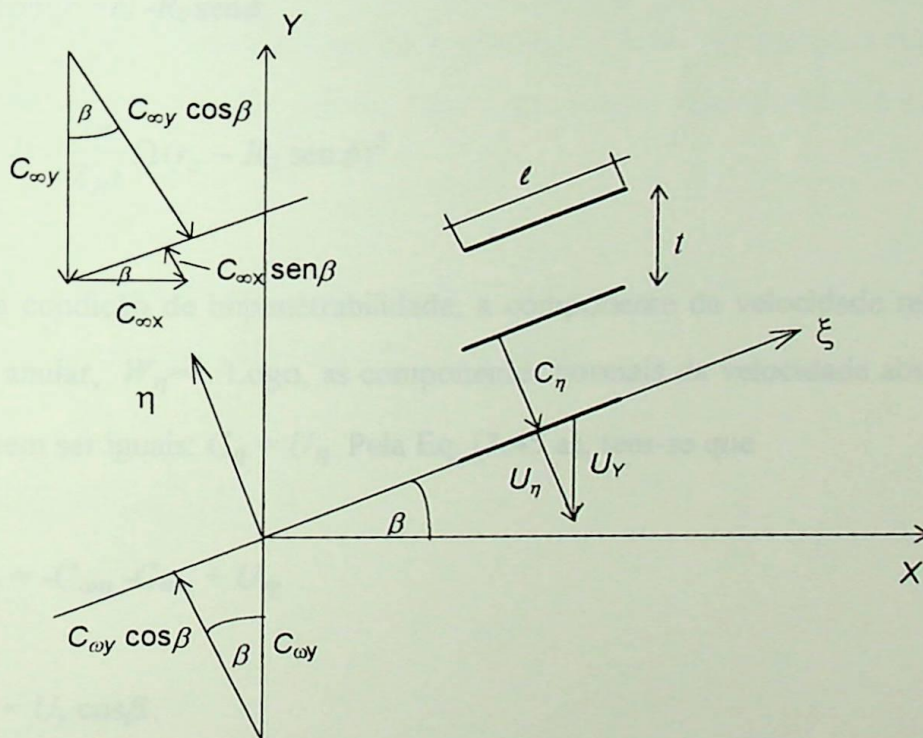


Figura 3.5.- Componentes de velocidades normais a pá

O campo global de velocidades absolutas na direção *normal* à superfície da pá (direção η na Fig 3.5) é obtido fazendo-se a superposição dos campos parciais:

$$C_{\eta} = C_{\gamma\eta} + C_{\omega\eta} + C_{\infty\eta} \quad (3.45a)$$

com

$$C_\eta = C_y \cos\beta - C_x \sin\beta \quad (3.45b)$$

Sendo Ω a velocidade angular do rotor, a velocidade tangencial física da pá tem magnitude Ωr . Aplicando-se a transformação de velocidades da Eq. (3.24) e considerando a convenção da Fig. (3.5), resulta a velocidade tangencial da pá no plano transformado, U_y :

$$U_y = -\frac{2\pi\Omega r^2}{Z_R t} \quad (3.46a)$$

ou, ainda, com $r = r_c - R_0 \sin\phi$:

$$U_y = -\frac{2\pi}{Z_R t} \Omega (r_c - R_0 \sin\phi)^2 \quad (3.46b)$$

Pela condição de impenetrabilidade, a componente da velocidade relativa normal à pá deve se anular, $W_\eta = 0$. Logo, as componentes normais da velocidade absoluta do fluido e da pá devem ser iguais: $C_\eta = U_\eta$. Pela Eq. (3.45 a), tem-se que

$$C_{\gamma\eta} = -C_{\omega\eta} - C_{\alpha\eta} + U_\eta \quad (3.47a)$$

onde

$$U_\eta = U_y \cos\beta. \quad (3.47b)$$

A componente normal das velocidades induzidas pela distribuição de vórtices sobre as pás, $C_{\gamma\eta}$, é dada pela expressão integral do primeiro membro da Eq. (2.28), Capítulo II. Levando essa expressão na Eq. (3.47a), juntamente com as Eqs.(3.42), (3.43), (3.44), (3.45b), (3.46b) e (3.47b), resulta a seguinte equação integral de Fredholm de 1ª espécie, singular, para a densidade de vórtices $\gamma(\xi)$ sobre a corda das pás no plano transformado:

$$\int_0^{\ell} \gamma(\xi') K(\xi, \xi') d\xi' = -\omega_n R_0^2 \left(\frac{r_c}{R_0}\right) \left(\frac{2\pi}{Z_{Rt}}\right) \left[\frac{R_0}{r_c} (\cos \phi - 1) + \phi - \pi\right] \cos \beta +$$

$$-\frac{2\pi}{Z_{Rt}} r_c (C_{mc} \sin \beta - C_{uc} \cos \beta) - \frac{2\pi}{Z_{Rt}} \Omega R_0^2 \left(\frac{r_c}{R_0}\right)^2 \left[1 - \frac{R_0}{r_c} \sin \phi\right]^2 \cos \beta$$

(3.48)

3.6 Soluções Básicas.

Adotando o mesmo procedimento do Capítulo II, é conveniente determinar a solução geral da Eq. (3.48) através da combinação linear de soluções mais simples. As soluções básicas empregadas agora, bem como suas respectivas circulações, são as seguintes:

- i) Solução γ_0 , *puramente potencial*, sem levar em consideração os efeitos da vorticidade e da rotação da máquina (idêntica à do Capítulo II):

$$\int_0^{\ell} \gamma_0(\xi') K(\xi, \xi') d\xi = -1, \quad (3.49a)$$

$$\Gamma_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \gamma_0(\xi) d\xi \quad (3.49b)$$

- ii) Solução γ_{ω_n} , *puramente rotacional*, sem levar em conta a rotação das pás:

$$\int_0^{\ell} \gamma_{\omega_n}(\xi') K(\xi, \xi') d\xi = -\left[\frac{R_0}{r_c} (\cos \phi - 1) + \phi - \pi\right] \frac{1}{\pi}, \quad (3.50a)$$

$$\Gamma_{\omega_n} = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \gamma_{\omega_n}(\xi) d\xi. \quad (3.50b)$$

iii) Solução γ_Ω , considerando unicamente os *efeitos não inerciais* de rotação da grade:

$$\int_0^\ell \gamma_\Omega(\xi') K(\xi, \xi') d\xi = - \left[1 - \frac{R_0}{r_c} \text{sen } \phi \right]^2, \quad (3.51a)$$

$$\Gamma_\Omega = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \gamma_\Omega(\xi) d\xi. \quad (3.51b)$$

A solução geral γ_p e a circulação correspondente são obtidas pela combinação linear das três soluções básicas:

$$\gamma_p = \left(\frac{2\pi}{Z_R t} \right) \Omega r_c^2 \left\{ - \left(\frac{C_{uc}}{\Omega r_c} \cos \beta - \frac{C_{mc}}{\Omega r_c} \text{sen } \beta \right) \gamma_0 + \frac{\omega_n}{\Omega} \left(\frac{R_0}{r_c} \right) \pi \cos \beta \gamma_{\omega_n} + \cos \beta \gamma_\Omega \right\} \quad (3.52)$$

$$\Gamma_p = \left(\frac{2\pi \ell}{Z_R t} \right) \Omega r_c^2 \left\{ - \left(\frac{C_{uc}}{\Omega r_c} \cos \beta - \frac{C_{mc}}{\Omega r_c} \text{sen } \beta \right) \Gamma_0 + \frac{\omega_n}{\Omega} \left(\frac{R_0}{r_c} \right) \pi \cos \beta \Gamma_{\omega_n} + \cos \beta \Gamma_\Omega \right\} \quad (3.53)$$

3.7 Circulação, Vorticidade e Gradiente de Pressões.

A circulação em torno de uma pá pode ser determinada aplicando-se o teorema de Stokes diretamente na superfície toroidal. Como a vorticidade física é constante, e a área do toro circular entre duas pás consecutivas é dada por $A_T = 2\pi R_0 (2\pi / Z_R) r_c$, Fig 3.6, vem:

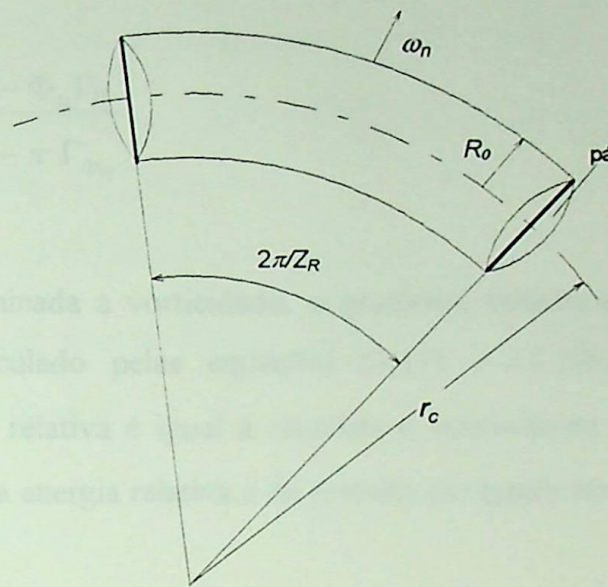


Figura. 3.6.- Área do toro, entre duas pás consecutivas

$$\Gamma_p = \iint_A \omega_n dA = \frac{\omega_n 4\pi^2 R_0 r_c}{Z_R} \quad (3.54)$$

Igualando-se os valores da circulação das Eqs (3.53) e (3.54), obtém-se a seguinte fórmula para o cálculo da vorticidade física:

$$\frac{\omega_n}{\Omega} = \frac{r_c \cos \beta \Gamma_\Omega - (\Phi_u \cos \beta - \Phi_m \operatorname{sen} \beta) \Gamma_0}{2\pi \frac{t}{\ell} - \pi \cos \beta \Gamma_{\omega_n}}; \quad (3.55)$$

onde Φ_u e Φ_m são os coeficientes de vazão tangencial e meridional, respectivamente, definidos como:

$$\Phi_u = \frac{C_{uc}}{\Omega r_c} = \frac{C_{uc}}{U_c}, \quad \Phi_m = \frac{C_{mc}}{\Omega r_c} = \frac{C_{mc}}{U_c} \quad (3.56ab)$$

Na situação mais comum em que $\beta = 0^\circ$, a Eq. (3.55) fica:

$$\frac{\omega_n}{\Omega} = \frac{r_c}{R_0} \frac{\Gamma_\Omega - \Phi_u \Gamma_0}{2\pi \frac{t}{\ell} - \pi \Gamma_{\omega_n}} \quad (3.57)$$

Uma vez determinada a vorticidade, o gradiente tangencial de pressões da grade toroidal pode ser calculado pelas equações (3.17) e (3.10b), considerando que a componente meridional relativa é igual à absoluta e referindo-se a $r=r_c$. Note-se que os gradientes tangenciais da energia relativa e da pressão são iguais no canal lateral. Resulta:

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \rho r_c C_{mc} \omega_n \quad (3.58)$$

Introduzindo a seguinte pressão adimensional ψ na Eq. (3.58):

$$\psi = \frac{2p}{\rho U_c^2} \quad (3.59)$$

vem:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 2 \Phi_m \frac{\omega_n}{\Omega} \quad (3.60)$$

3.8 Determinação das Circulações Adimensionais Básicas.

Para o cálculo da vorticidade pela Eq (3.55) é preciso conhecer os valores das circulações adimensionais básicas Γ_0 , Γ_{ω_n} e Γ_Ω . Nesse sentido, aplica-se a técnica numérica de *vórtices discretos*, validada satisfatoriamente na seção 2.5 do Capítulo II. A aplicação é feita diretamente na grade linear do plano transformado. Note-se que os valores de Γ_0 já foram determinados, e estão mostrados na Fig. (2.6).

Ao contrário de Γ_0 , as circulações Γ_Ω e Γ_{ω_n} dependem da razão de aspecto do toro, R_0/r_c . A seguir, estão apresentados alguns resultados para essas circulações. Em todos os cálculos, foram empregados 80 painéis.

Nas Figs. (3.7) e (3.8), mostram-se os diagramas das circulações Γ_Ω e Γ_{ω_n} versus t/l , para vários ângulos β , fixando-se $R_0/r_c=1/2$; nas Figs. (3.9) e (3.10), é mostrada a influência de R_0/r_c , fixando-se $\beta = 0^\circ$

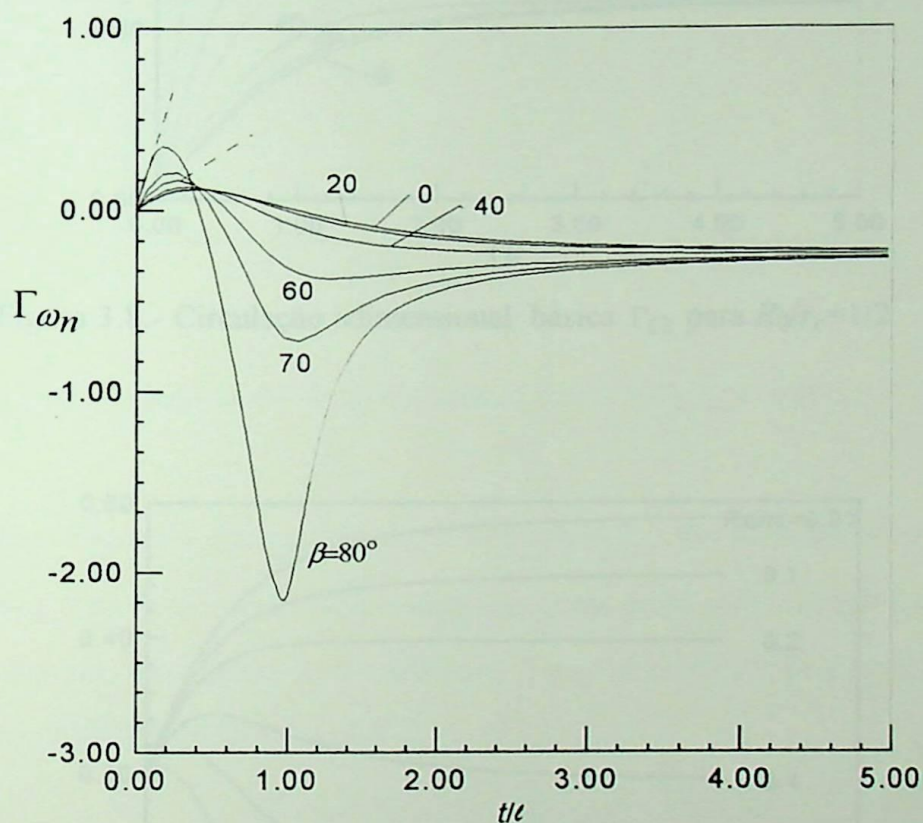


Figura 3.7 - Circulação adimensional básica Γ_{ω_n} para $R_0/r_c=1/2$.

Na Fig. (3.7), observa-se que a circulação puramente rotacional Γ_{ω_n} , tem um comportamento peculiar em relação a Γ_Ω e Γ_0 : para um mesmo ângulo de montagem, existe um certo espaçamento $t/l > 0$ para o qual o valor de Γ_{ω_n} será nulo. Esse comportamento, todavia, deixa de existir para valores suficientemente pequenos da razão de aspecto do toro: R_0/r_c , conforme se verifica na Fig. (3.9).

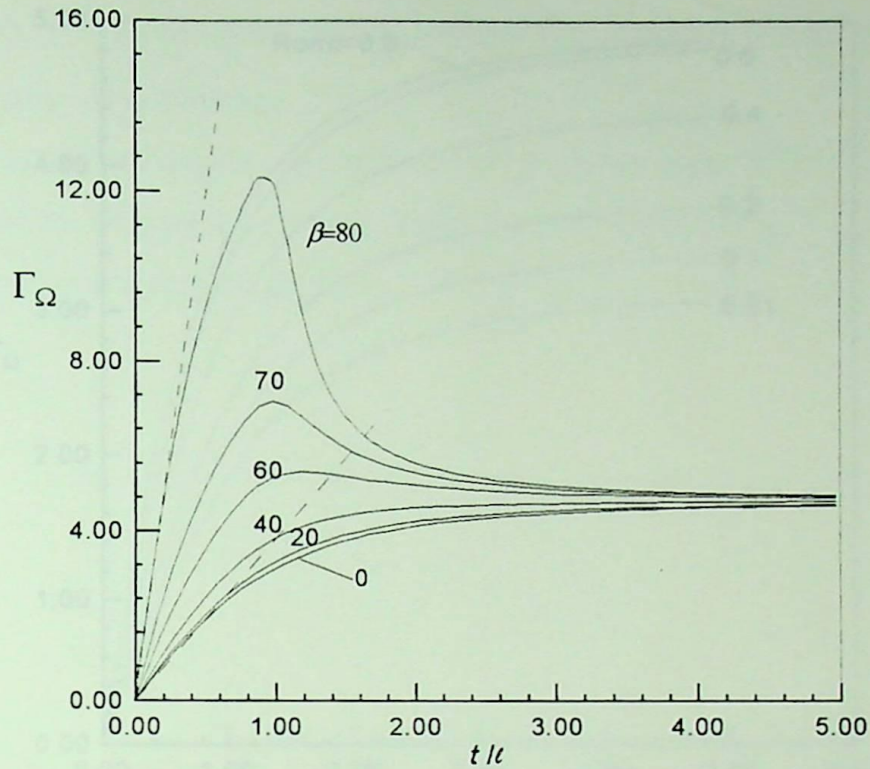


Figura 3.8.- Circulação adimensional básica Γ_{Ω} para $R_0/r_c = 1/2$.

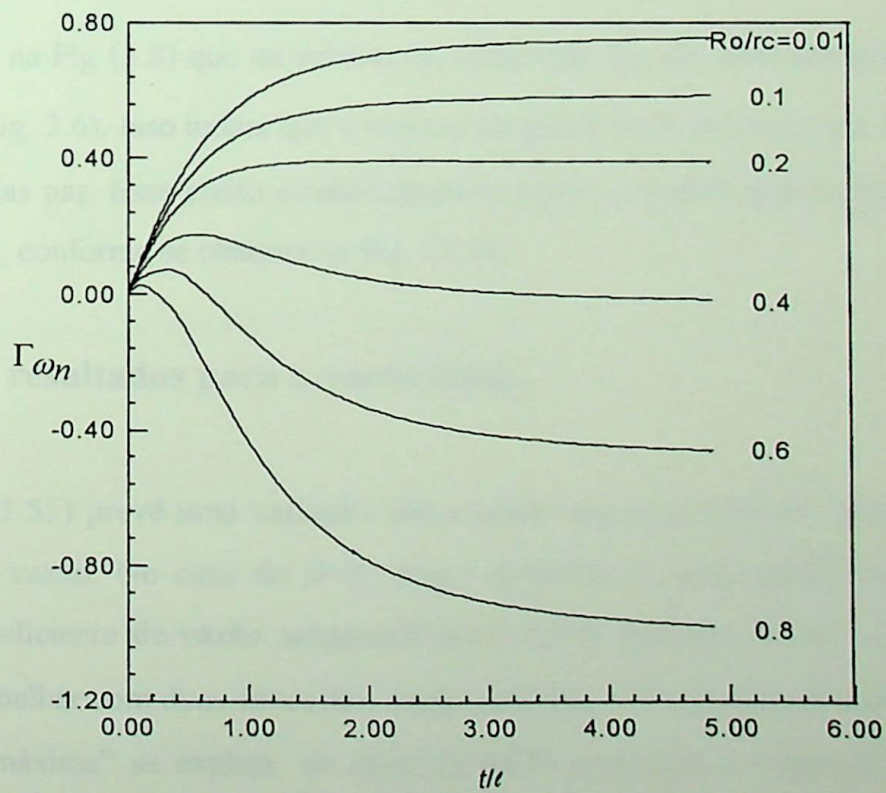


Figura 3.9- Influência da razão de aspecto do toro R_0/r_c sobre Γ_{ω_n} ; $\beta = 0^{\circ}$.

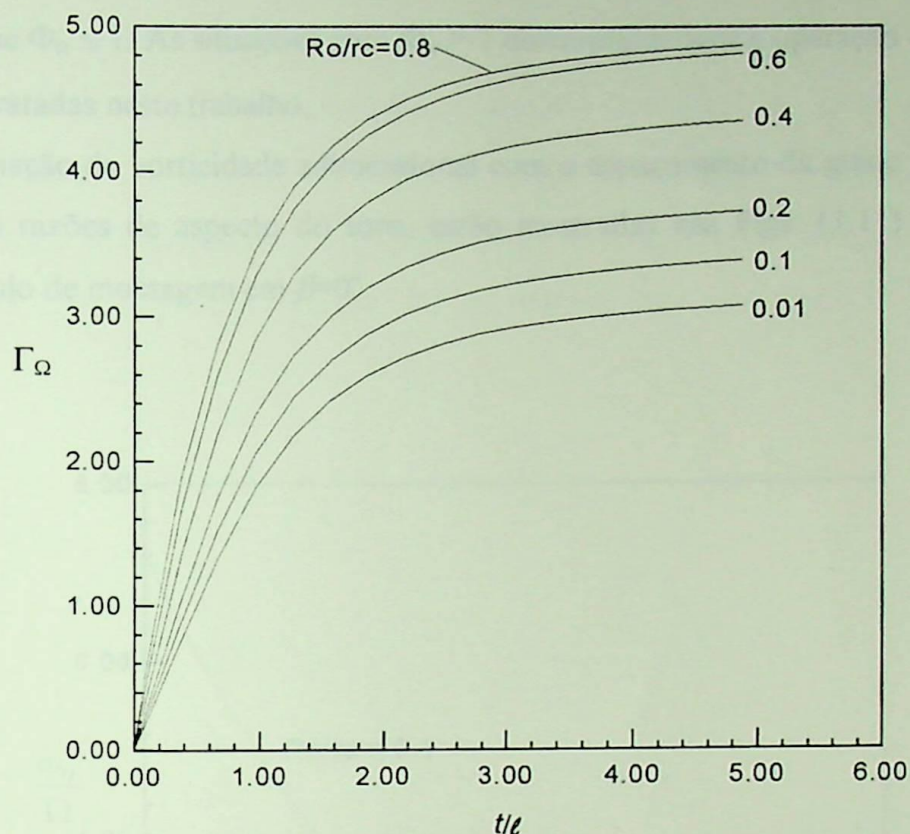


Figura 3.10 - Influência da razão de aspecto do toro R_0/r_c sobre Γ_Ω ; $\beta = 0^\circ$.

Nota-se na Fig (3.8) que os valores da circulação Γ_Ω são substancialmente maiores que os de Γ_0 (Fig. 2.6). Isso indica que a rotação da grade pode provocar um forte efeito no carregamento das pás. Esse efeito é relativamente menor à medida que a razão de aspecto do toro diminui, conforme se observa na Fig. (3.10).

3.8.1 Alguns resultados para a vorticidade.

A Eq. (3.55) prevê uma variação linear entre que a vorticidade adimensional e os coeficientes de vazão. No caso de $\beta=0^\circ$, basta conhecer a vorticidade para dois valores distintos do coeficiente de vazão tangencial para definir completamente a variação. Será conveniente trabalhar com duas situações: vazão nula ($\Phi_u = 0$) e vazão máxima ($\Phi_u = 1$). O termo “vazão máxima” se explica: no caso de MFR geradoras é impossível operar com velocidades tangenciais médias superiores à velocidade média da própria pá: sendo assim, é

necessário que $\Phi_u \leq 1$. As situações com $\Phi_u > 1$ corresponderiam à operação como turbina, e não serão tratadas neste trabalho.

A variação da vorticidade adimensional com o espaçamento da grade transformada, para diversas razões de aspecto do toro, estão mostradas nas Figs. (3.11) e (3.12). Foi fixado o ângulo de montagem em $\beta=0^\circ$.

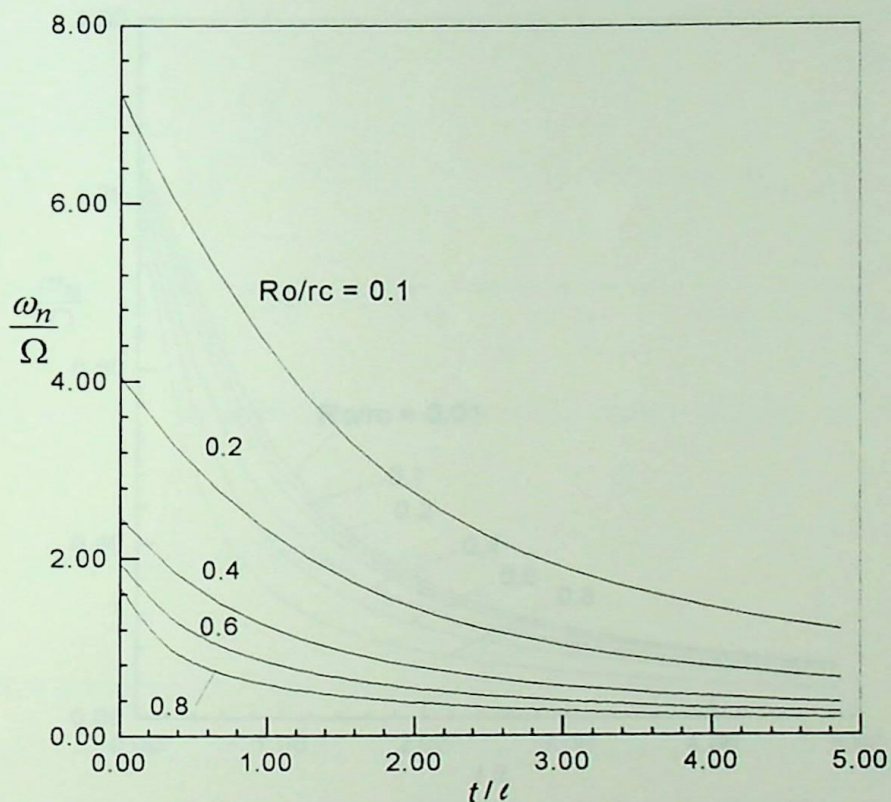


Figura 3.11 - Vorticidade adimensional para vazão nula, $\Phi_u = 0$ ($\beta=0^\circ$).

Observa-se o esperado decréscimo da vorticidade com o aumento do espaçamento. Salienta-se que para um dado toro, a diminuição do espaçamento da grade linear corresponde a uma diminuição do número de pás. Na situação de pá isolada, a vorticidade deve se anular. Observa-se também que, para um dado espaçamento, a vorticidade aumenta à medida que o tamanho do toro diminui pois o número de pás, agora, deve aumentar. É interessante observar que esse efeito é muito mais forte na vazão nula que na vazão máxima.

Um outro aspecto deve ser destacado: para vazão máxima ($\Phi_u = 1 \Rightarrow C_{uc} = U_c$) e $\beta = 0^\circ$, o ângulo de incidência da velocidade relativa W_c será nulo, i. e., $\alpha = 0^\circ$ (pois $W_{uc} = C_{uc} - U_c = 0$). Nesse caso, a formulação do Capítulo II, que desconsidera os efeitos não inerciais, conduziria a uma vorticidade nula, Eq.(2.38). Com os efeitos não inerciais considerados, a vorticidade na vazão máxima é diferente de zero, exceto para $t \rightarrow \infty$, Fig.3.12.

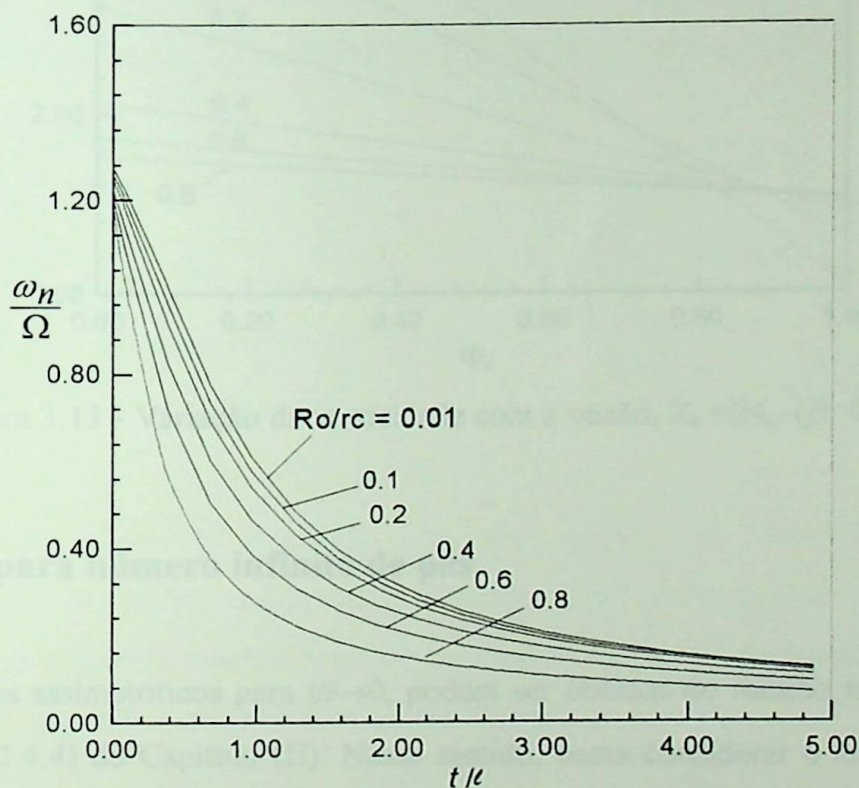


Figura 3.12 - Vorticidade adimensional para vazão máxima, $\Phi_u = 1$ ($\beta = 0^\circ$).

A variação da vorticidade em função do coeficiente de vazão tangencial, com um número de pás fixo ($Z_R = 24$), está mostrada na Fig. (3.13), para diversas razões de aspecto do toro. Para vazões relativamente baixas, a vorticidade aumenta à medida que a razão de aspecto diminui. Com isso, as grades com toros relativamente distantes do eixo de rotação possibilitam maiores gradientes tangenciais de pressões, no caso de baixas vazões. Note-se, contudo, que esse comportamento se inverte para vazões mais próximas da máxima (ver Fig. 3.13).

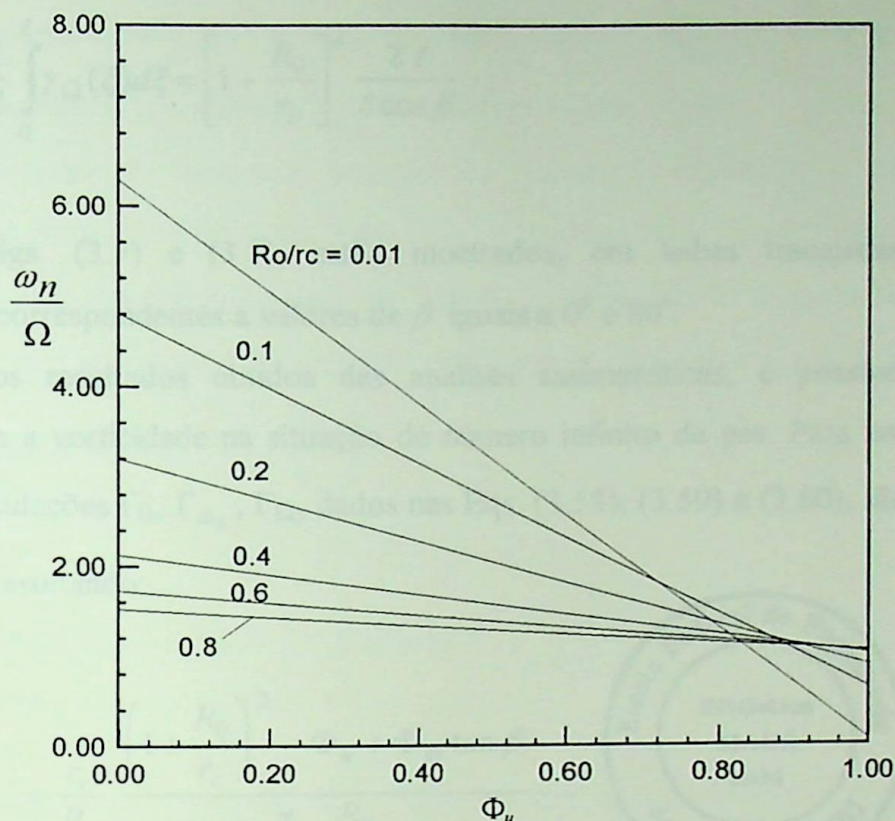


Figura 3.13 - Variação da vorticidade com a vazão, $Z_R = 24$, ($\beta = 0^0$).

3.8.2 Limite para número infinito de pás.

Os limites assintóticos para $t/\ell \rightarrow 0$, podem ser obtidos do mesmo modo como foi feito na seção (2.4.4) do Capítulo (II). Nesse sentido, basta considerar o limite do núcleo $K(\xi, \xi')$, dado na Eq. (2.40c), nas Eqs. (3.49ab), (3.50ab), e (3.51ab), fazendo $\phi = 3\pi/2$ (condição de Kutta). Resultam as seguintes expressões:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \gamma_0(\xi) d\xi = \frac{2t}{\ell \cos \beta}. \quad (3.58)$$

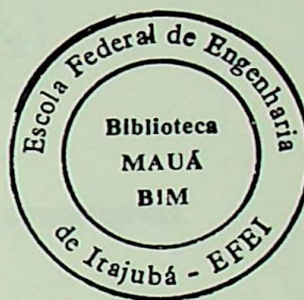
$$\Gamma_{\omega_n} = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \gamma_{\omega_n}(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{R_0}{r_c} \right] \frac{2t}{\ell \cos \beta}. \quad (3.59)$$

$$\Gamma_{\Omega} = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \gamma_{\Omega}(\xi) d\xi = \left[1 + \frac{R_0}{r_c} \right]^2 \frac{2t}{\ell \cos \beta} \quad (3.60)$$

Nas Figs. (3.7) e (3.8), estão mostrados, em linhas tracejadas, os limites assintóticos correspondentes a valores de β iguais a 0° e 80° .

Com os resultados obtidos das análises assintóticas, é possível obter uma expressão para a vorticidade na situação de número infinito de pás. Para isso, os valores limites das circulações Γ_0 , Γ_{ω_n} , Γ_{Ω} , dados nas Eqs. (3.58), (3.59) e (3.60), são substituídos na Eq.(3.55), resultando:

$$\left(\frac{\omega_n}{\Omega} \right)_{\infty} = \frac{r_c}{R_o} \frac{\left(1 + \frac{R_0}{r_c} \right)^2 - \Phi_u + \Phi_m \tan \beta}{\frac{\pi}{2} + \frac{R_0}{r_c}} \quad (3.61)$$



É possível obter o resultado da Eq. (3.61) de maneira alternativa, independentemente da análise assintótica efetuada sobre as equações integrais: basta considerar que, para número infinito de pás, o escoamento no bordo de fuga é perfeitamente guiado pelas pás, seguindo a direção definida pelo ângulo construtivo.

3.8.3 Fator de escorregamento (“slip factor”).

Em geral, a quantificação do efeito do número de pás das máquinas de fluxo em relação à situação de número infinito de pás é feita através de coeficientes de escorregamento (“slip factors”).

Existem diversas definições de fatores de escorregamento na literatura. Neste trabalho, será empregada a seguinte definição (Lewis, 1996):

$$\varepsilon = \frac{C_{u2}}{(C_{u2})_{\infty}}, \quad (3.62)$$

onde C_{u2} representa a componente tangencial da velocidade absoluta no bordo de fuga das pás e $(C_{u2})_\infty$ é a mesma grandeza no caso de número infinito de pás.

No contexto do presente trabalho, é possível relacionar o coeficiente de escorregamento com a vorticidade. Para isso, considera-se o circuito a-b-c-d-a da Fig. (3.14). A circulação do circuito é dada em termos das velocidades tangenciais em r_2 e r_c e também em termos da vorticidade (através do Teorema de Stokes), com a área envolvida pelo circuito igual a $R_0 \Delta\varphi r_c \left(\frac{\pi}{2} + \frac{R_0}{r_c} \right)$:

pelos circuitos inversos, a circulação é dada por:

$$\Gamma_{abcd} = \Delta\varphi [C_{u2}r_2 - C_{uc}r_c] = \omega_n R_0 \Delta\varphi r_c \left(\frac{\pi}{2} + \frac{R_0}{r_c} \right), \quad (3.63)$$

sendo $\Delta\varphi = 2\pi/Z_R$ o ângulo compreendido entre duas pás consecutivas.

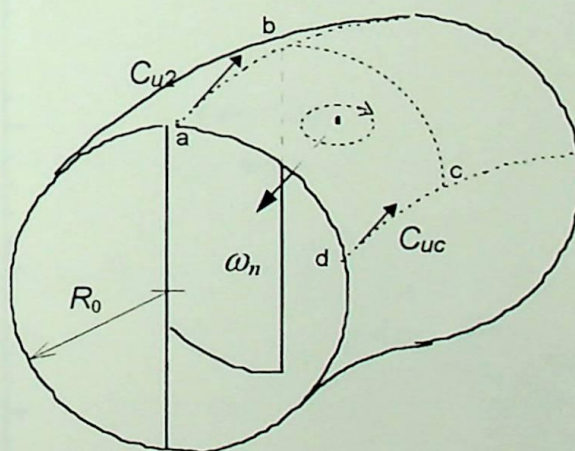


Figura 3.14 - Cálculo do fator de escorregamento.

Considerando as Eqs. (3.61) e (3.63) em (3.62), resulta a seguinte expressão para o fator de escorregamento em termos da vorticidade:

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{\omega_n}{\Omega}\right) \frac{R_0}{r_c} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{R_0}{r_c}\right) + \Phi_u}{\left(1 + \frac{R_0}{r_c}\right)^2 + \Phi_m \tan \beta} \quad (3.64)$$

Na aplicação da Eq. (3.64), a vorticidade para número finito de pás é obtida na Eq. (3.55). Obviamente, no caso de número infinito de pás, Eq. (3.61), resultará $\varepsilon = 1$.

De maneira inversa, conhecendo-se o fator de escorregamento da grade para uma dada condição de vazão (Φ_u e Φ_m prescritos), a vorticidade é calculada diretamente na Eq. (3.64). Isso é útil, quando se dispõe de dados experimentais do fator de escorregamento e se deseja calcular a vorticidade efetiva correspondente.

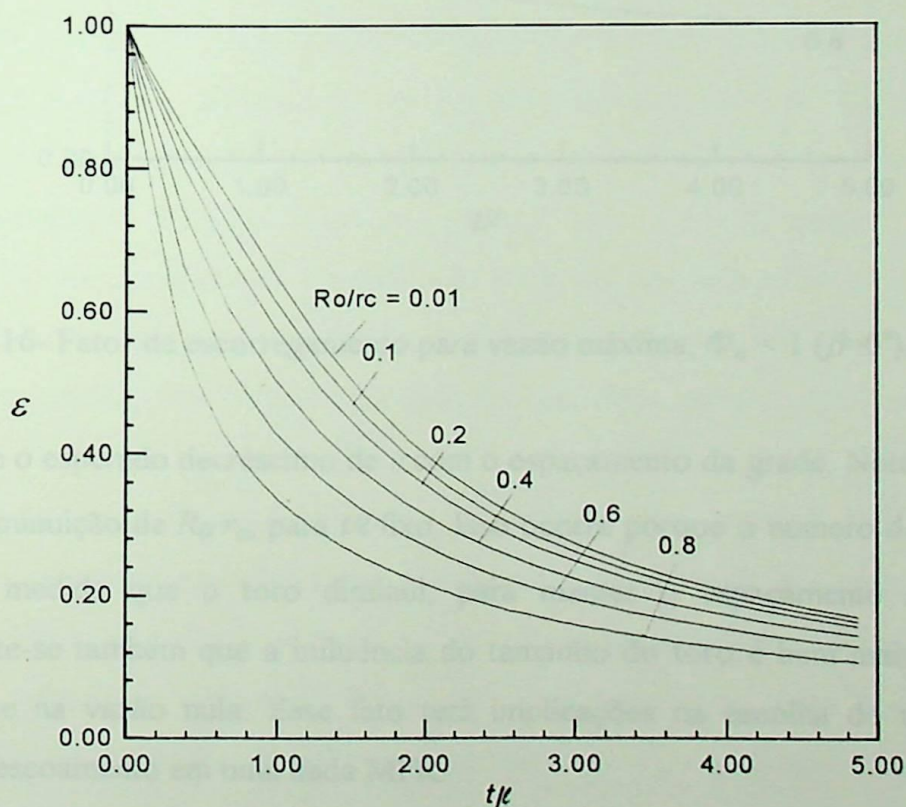


Figura 3.15 - Fator de escorregamento para vazão nula, $\Phi_u = 0$ ($\beta = 0^\circ$).

Nas Figs. (3.15) e (3.16), mostram-se as variações do fator de escorregamento em função do espaçamento t/l , para diversas razões de aspecto do toro, nas situações de vazão

nula ($\Phi_u = 0$) e vazão máxima ($\Phi_u = 1$) respectivamente. O ângulo de montagem foi fixado em $\beta=0^\circ$.

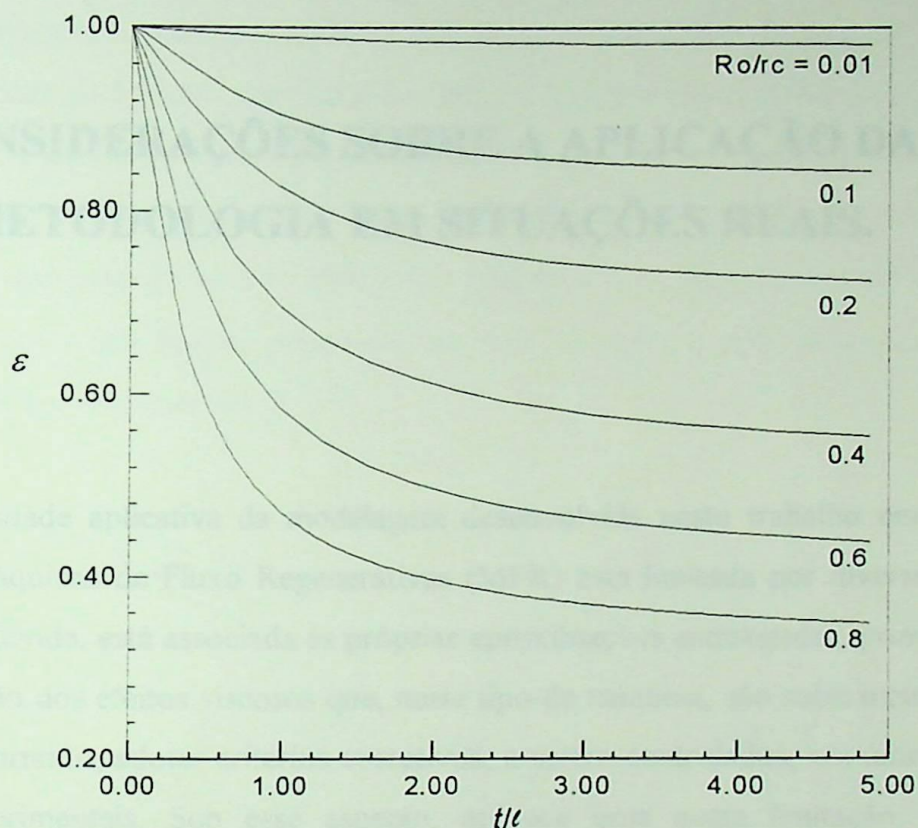


Figura 3.16- Fator de escorregamento para vazão máxima, $\Phi_u = 1$ ($\beta=0^\circ$).

Observa-se o esperado decréscimo de ε com o espaçamento da grade. Note-se que ε aumenta com a diminuição de R_0/r_c , para t/l fixo. Isso ocorre porque o número de pás tem que aumentar à medida que o toro diminui, para manter o espaçamento no plano transformado. Note-se também que a influência do tamanho do toro é bem mais forte na vazão máxima que na vazão nula. Esse fato terá implicações na escolha do toro mais representativo do escoamento em uma dada MFR.

CAPÍTULO IV

CONSIDERAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA METODOLOGIA EM SITUAÇÕES REAIS.

A capacidade aplicativa da modelagem desenvolvida neste trabalho em situações concretas de Máquinas de Fluxo Regenerativas (MFR) está limitada por diversos fatores. Um deles, sem dúvida, está associada às próprias aproximações empregadas, principalmente à desconsideração dos efeitos viscosos que, neste tipo de máquina, são substanciais. Torna-se necessário, portanto, adotar critérios corretivos, a serem controlados, em última análise, por dados experimentais. Sob esse aspecto, aparece uma outra limitação: os dados experimentais disponíveis na literatura a respeito de MFR são bastante escassos. Mesmo os poucos dados disponíveis não se encontram numa forma que possa servir de base empírica para os ajustes necessários, objetivando uma metodologia eficaz para análise e projeto de MFR.

Uma outra limitação da modelagem de escoamento ideal para as MFR, está na impossibilidade de se prever as velocidades meridionais. No caso de pás com $\beta = 0^\circ$, o conhecimento da velocidade de recirculação é desnecessário no cálculo da vorticidade: basta conhecer a velocidade tangencial, Eq. (3.57). Por outro lado, para o cálculo do gradiente tangencial de pressões, é indispensável conhecer C_m em qualquer situação, Eq. (3.58).

Apesar dessas dificuldades, procurou-se extrair da literatura alguns dados de ensaio com MFR que possibilitassem efetuar certas análises comparativas e aferir qualitativa-mente a potencialidade da modelagem teórica. Os dados experimentais utilizados foram extraídos do trabalho de Varella (1981).

4.1 Análises Comparativas Para o Fator de Escorregamento.

Varella (1981) realizou diversos ensaios com máquinas de fluxo regenerativas do tipo toroidal operando com ar (sopradores). O interesse maior estava no estudo da influência de alguns parâmetros construtivos, como o formato dos bocais e do separador de fluxo ("stripper") e o formato da região do bordo de ataque das pás (através de chanfro). A maior parte dos parâmetros construtivos, porém, foi mantida inalterada em todos os experimentos: raio externo $r_0=130$ mm, raio interno $r_i=45$ mm, número de pás $Z_R=24$, espessura das pás 1.6 mm, ângulo entre os bocais 90° . Na Fig. 4.1 estão mostradas vistas da MFR pesquisada por Varella (1981).

1000 pcs
75
Varella

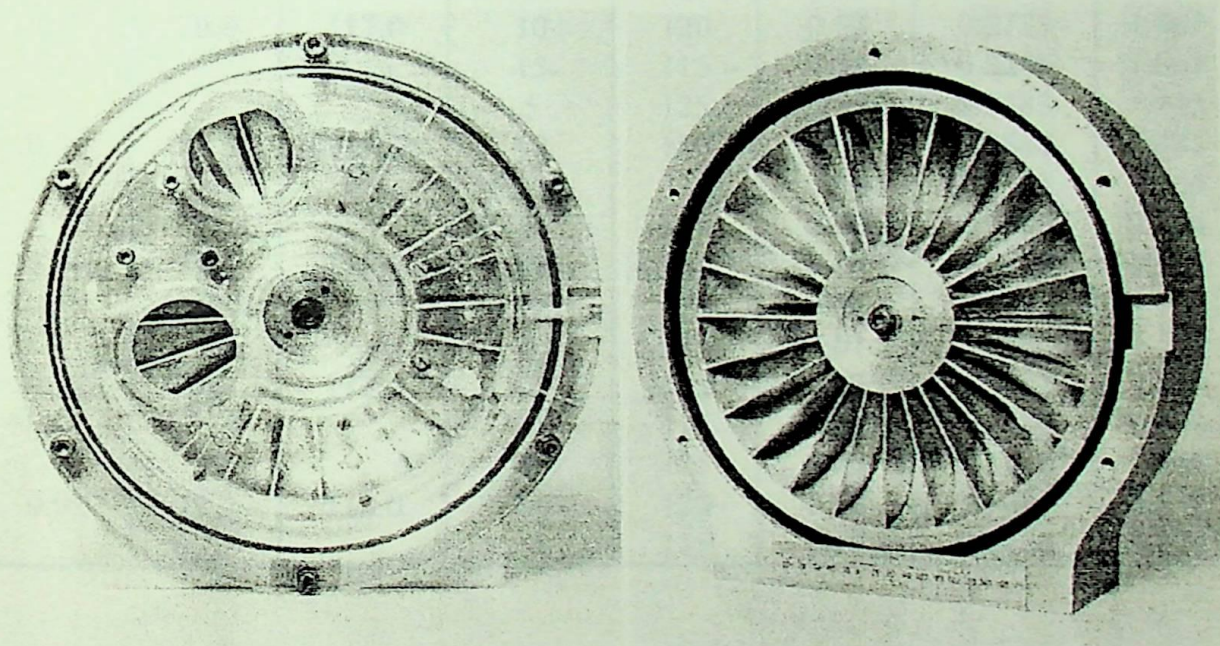


Figura 4.1 - Vistas da MFR ensaiada por Varella (1981)

Num dos ensaios realizados, Varella mediu o coeficiente de escorregamento para diferentes vazões, utilizando uma sonda de pressão móvel paralela ao bordo de fuga das pás. Variando a profundidade da sonda, foi possível medir a componente de velocidade tangencial na saída das pás para diferentes posições radiais, ou seja, para diferentes razões de aspecto R_0/r_c . Esses dados são os que podem ser comparados de maneira mais direta com os resultados teóricos desenvolvidos no Capítulo III.

Na Tabela 4.1 estão mostrados os resultados experimentais obtidos para o fator de escorregamento ε em função do coeficiente de vazão tangencial Φ_{II} , para diversas profundidades da sonda.

Tabela 4.1 - Resultados experimentais para o fator de escorregamento (Varella, 1981) e para a vorticidade efetiva correspondente ($\beta=0^\circ$).

obtidos p/ Varela

pag 117 Varela

Φ_{II}	$(r_1)_{ef}$ mm	$(r_2)_{ef}$ mm	e mm	r_2 mm	ε	R_0/r_c	$\omega\Omega$
0.0	70.9	117.0	5	125	0.51	0.3305	1.437
			10	120	0.53	0.2773	1.687
			15	115	0.50	0.2241	1.863
0.21	71.5	115.3	5	125	0.53	0.3383	1.145
			10	120	0.57	0.2848	1.383
			15	115	0.58	0.2313	1.606
0.60	72.2	112.8	5	125	0.60	0.3513	0.734
			10	120	0.66	0.2973	0.919
			15	115	0.68	0.2432	1.022
0.77	72.3	112.0	5	125	0.61	0.3564	0.513
			10	120	0.62	0.3022	0.497
			15	115	0.63	0.2480	0.468
0.92	72.3	112.0	5	125	0.60	0.3564	0.268
			10	120	0.72	0.3022	0.532
			15	115	0.77	0.2480	0.274

Estão mostrados também os valores da vorticidade efetiva calculados pela equação (3.64), utilizando-se os dados experimentais para ε , com $\beta=0^\circ$. Note-se que foi necessário estimar o valor de R_0/r_c . A estimativa desse valor foi feita com base em valores apresentados por Varella para os raios efetivos, interno e externo, da superfície toroidal de escoamento, $(r_1)_{ef}$ e $(r_2)_{ef}$, respectivamente. Esses valores dependem apenas da vazão. O raio do centro de recirculação é calculado pela média aritmética dos valores. Por outro lado, o raio R_0 correspondente a cada profundidade da sonda, e , é calculado pela diferença entre r_2 e r_c .

Resultados teóricos foram obtidos para a vorticidade e para o fator de escorregamento de grades toroidais com $Z_R=24$, $\beta=0^\circ$, variando-se R_0/r_c entre 0,22 e 0,36, de maneira a cobrir a faixa experimental.

A comparação entre resultados teóricos e experimentais para o fator de escorregamento está apresentada na Fig. 4.2. Observa-se que os valores previstos teoricamente são bem maiores que os experimentais. A diferença pode ser atribuída, provavelmente, aos efeitos viscosos. Contudo, a tendência de variação média do fator de escorregamento com a vazão é prevista satisfatoriamente pelo modelo teórico. Verifica-se também que os resultados teóricos são pouco influenciados pela razão de aspecto do toro, na faixa considerada. O mesmo ocorre com os resultados experimentais, embora as variações sejam maiores, principalmente nas vazões mais altas.

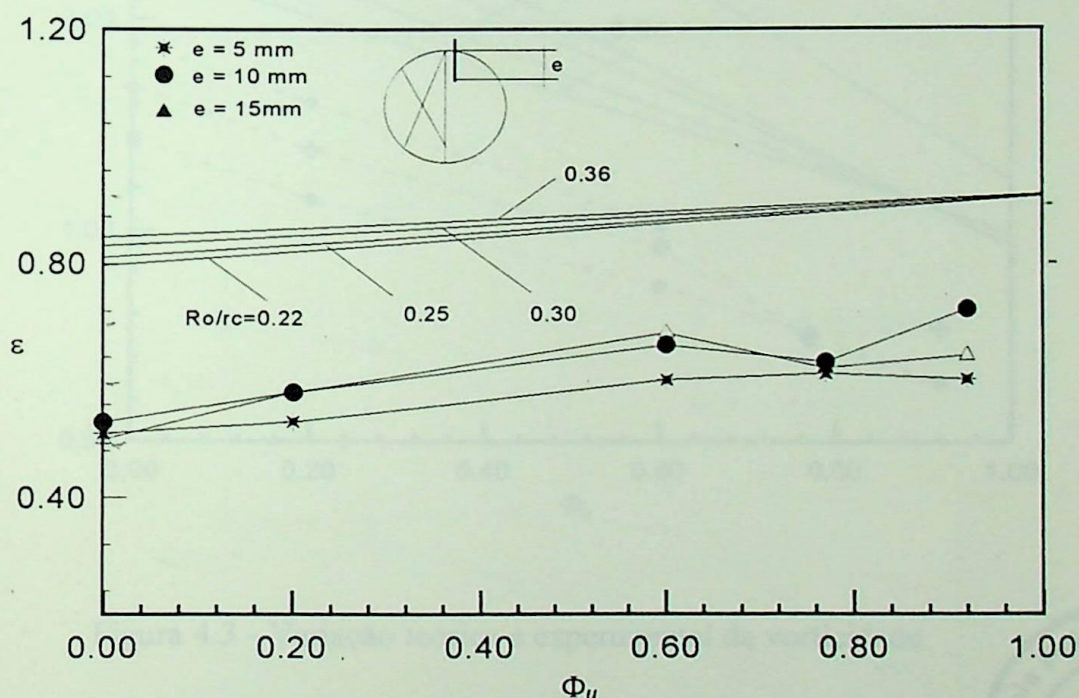


Fig. 4.2 - Variação teórica e experimental do fator de escorregamento.

Na Fig. 4.3, é feita a comparação no caso da vorticidade. Naturalmente, os valores teóricos são bem maiores que os calculados com os dados experimentais, em virtude dos efeitos viscosos. A tendência de variação, todavia, está bem representada pela teoria. Note-se que o efeito da razão de aspecto do toro é bem maior na vorticidade que no fator de escorregamento. Esse efeito também é previsto pela teoria. Para coeficientes de vazão

próximos de 0,8 o feixe de curvas experimentais tendem a se cruzar. Isso também se reflete nos resultados teóricos, embora para coeficientes de vazão mais altos (em torno de 0,9). Observa-se também a curva para número infinito de pás para razão de aspecto 0,22. O efeito ideal do número finito de pás é substancial.

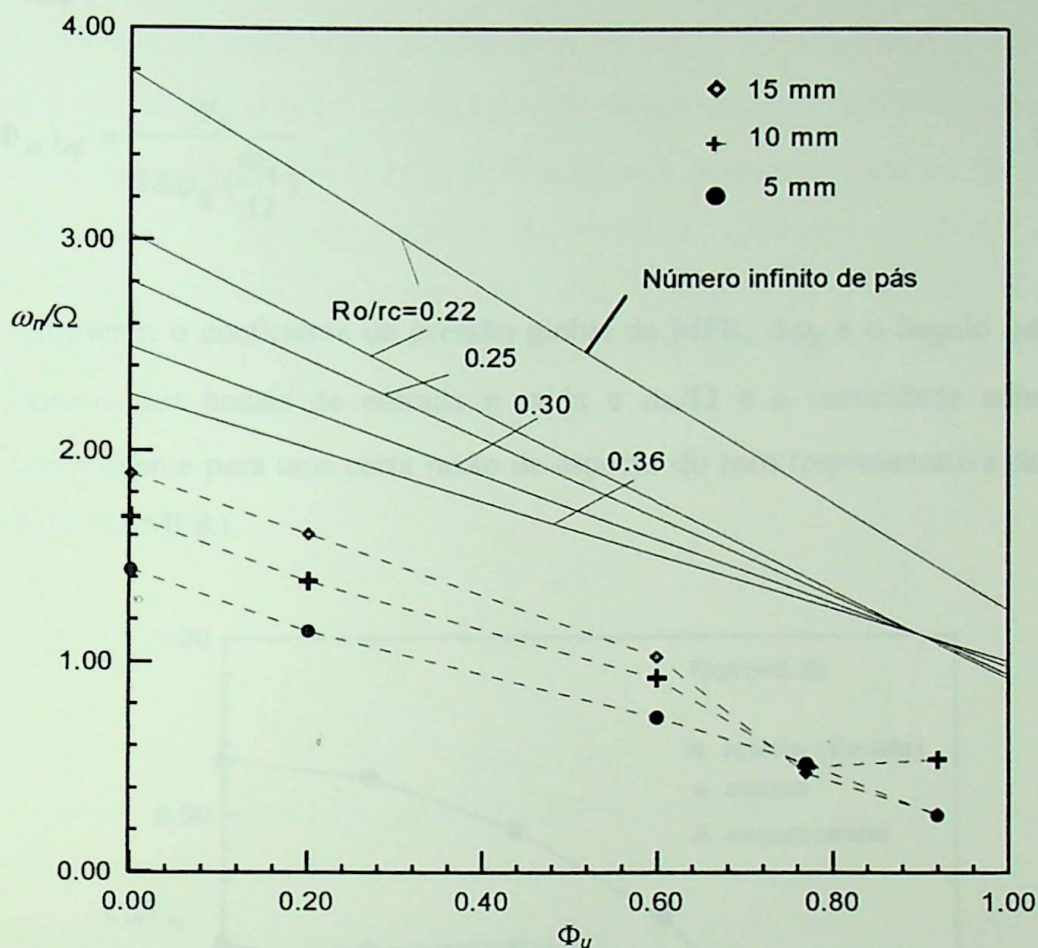


Figura 4.3 - Variação teórica e experimental da vorticidade.



4.2 Coeficiente de Vazão Meridional Efetivo.

Conhecida a vorticidade efetiva, o cálculo do gradiente tangencial de pressões pode ser feito, desde que se conheça o valor da velocidade de recirculação, C_m .

Uma maneira sugestiva de tornar aplicável a teoria deste trabalho, sem se preocupar com modelos para a previsão de C_m , é fazer o raciocínio inverso: determinar o valor de C_m que, na teoria, produz o gradiente de pressão real de uma dada MFR.

Com base na equação (3.60), define-se o seguinte coeficiente de vazão meridional efetivo, $(\Phi_m)_{ef}$:

$$(\Phi_m)_{ef} = \frac{\Psi_R}{2 \Delta \varphi_g \left(\frac{\omega_n}{\Omega} \right)}, \quad (4.1)$$

onde Ψ_R representa o coeficiente de pressão global da MFR, $\Delta \varphi_g$ é o ângulo geométrico entre os centros dos bocais de entrada e saída e ω_n/Ω é a vorticidade adimensional calculada teoricamente para uma certa razão de aspecto do toro (representativa da linha de corrente efetiva da MFR).

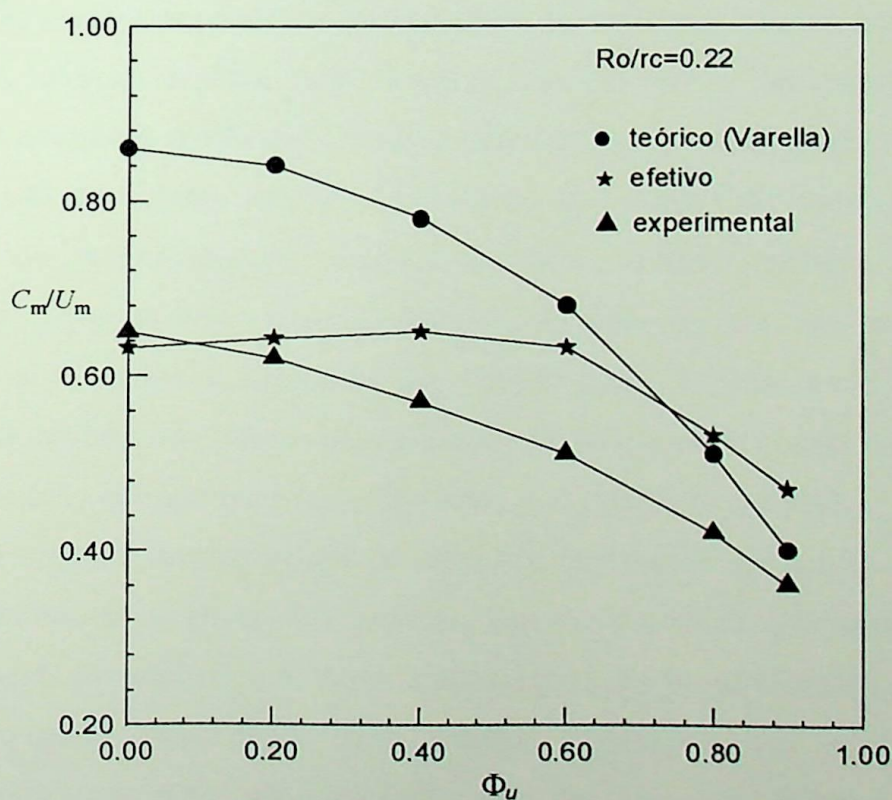


Figura 4.4 - Variação do coeficiente de vazão meridional efetivo.

O coeficiente $(\Phi_m)_{ef}$ foi calculado para o mesmo ensaio em que Varella (1981) mediu o fator de escorregamento. Os dados do coeficiente de pressão em função do coeficiente de vazão tangencial foram extraídos das curvas reportadas pelo autor. O ângulo geométrico entre os bocais é de 270° . Utilizou-se a razão de aspecto 0,22 para o cálculo da vorticidade utilizada na Eq. (4.1).

Os resultados obtidos estão apresentados na Fig. 4.3, juntamente com os dados experimentais de C_m/U_m , medidos em $R_0/r_c \approx 0,22$. Apresentam-se, também, os resultados obtidos teoricamente por Varella (1981), através de uma modelagem unidimensional semi-empírica. Observa-se que o comportamento do coeficiente de vazão meridional efetivo é semelhante ao experimental, inclusive com uma aproximação razoável. Apesar de preliminar, esse resultado é motivador no sentido de se buscar uma aferição empírica mais precisa da modelagem desenvolvida nesta dissertação.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Nesta dissertação, foi apresentada uma metodologia teórica e numérica para a análise do escoamento ideal em grades representativas das superfícies de corrente de Máquinas de Fluxo Regenerativas (MFR).

Numa primeira abordagem, os efeitos não inerciais foram desconsiderados e tratou-se do escoamento absoluto permanente no plano. Nesse contexto, o conceito de grade regenerativa foi introduzido, evidenciando-se a necessidade de um campo de vorticidade para provocar os efeitos regenerativos. Desenvolveu-se uma modelagem para análise do escoamento ideal em grades lineares, com pás retas e finas, admitindo-se um campo de vorticidade uniforme. Análises assintóticas foram realizadas para as situações limites de número infinito de pás e de pá isolada. Os casos intermediários foram tratados numericamente, através de uma técnica numérica de vórtices concentrados sobre as pás. Essa técnica foi validada de maneira satisfatória na comparação com resultados analíticos disponíveis. Além do caso potencial clássico, determinou-se também um diagrama análogo ao de Weinig para o caso de escoamento rotacional, situação que aparentemente não havia sido reportada até então.

Posteriormente, a metodologia foi estendida para o caso das grades regenerativas toroidais, incluindo-se os efeitos não inerciais. Usando-se uma transformação conforme, em geral aplicada nas máquinas de fluxo convencionais, foi possível transformar a grade toroidal numa grade linear plana. Foram obtidas expressões mais realísticas para o cálculo da vorticidade e da circulação em torno das pás, que poderão servir como elemento de orientação no projeto das MFR.

Algumas comparações foram feitas entre resultados teóricos da modelagem e dados experimentais. Apesar de suas limitações naturais, a modelagem foi capaz de reproduzir qualitativamente os resultados experimentais.

Para estabelecer uma teoria de grade capaz de prever quantitativamente as características de funcionamento das MFR, serão necessários estudos adicionais, mais elaborados, tratando os efeitos viscosos e o escoamento na superfície meridional (superfície S2). Além disso, será interessante analisar o caso de pás com formato aerodinâmico, tendo em vista o aprimoramento do projeto das MFR.

Neste trabalho, optou-se por não apresentar resultados para as distribuições de velocidades e pressões sobre as pás, apesar de não haver nenhuma dificuldade nesse sentido. No caso de pás infinitamente finas e retas, a velocidade do escoamento ideal torna-se ilimitada no bordo de ataque, em todas as situações de interesse, salvo na situação particular, sem choque. Com isso, aparece uma depressão infinita no bordo de ataque, que não representa as situações reais, em virtude da desconsideração dos efeitos viscosos. Decidiu-se, portanto, concentrar os esforços na determinação das grandezas globais: vorticidade, circulação e gradiente tangencial de pressões.

Não se poderia deixar de sugerir a realização de estudos experimentais sistemáticos sobre as distribuições de velocidades e de vorticidade nas MFR. É necessário conhecer melhor as peculiaridades do escoamento nas MFR, para que se possam corrigir os modelos teóricos e desenvolver uma sólida base metodológica de análise e projeto dessa modalidade de máquina de fluxo.

A.2.A Lei de Biot-Savart no Plano

Dada a problemática deste trabalho, interessa determinar as velocidades induzidas por um campo de vorticidade ω no plano (x, y) escoamento bidimensional. Nesse caso a integral em A.1 é integrada em z no intervalo $(-\infty, \infty)$.

$$v = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\omega(x', y', z')}{r^3} (x - x') dy' dz' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\omega(x', y', z')}{r^3} (y - y') dx' dz' \quad (A.2)$$

APÊNDICE A

DETERMINAÇÃO DAS VELOCIDADES INDUZIDAS POR UM CAMPO DE VORTICIDADE

A.1 A Lei de Biot-Savart.

Considere-se um elemento de volume $dV' = dx' dy' dz'$, de um fluido incompressível. Seja $\vec{\omega} = \vec{\omega}(r_{p'})$, o valor de um campo vorticidade definido no ponto (P') associado ao volume dV' . O vetor distância entre o ponto $P'(x', y', z')$ e um ponto $P(x, y, z)$ de cálculo é representado por $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_{p'}$. Pela Lei de Biot-Savart (Karamcheti, 1966), o campo de velocidades $\vec{W} = \vec{W}(\vec{r}_p)$ induzidas pela vorticidade no ponto P , é dada por:

$$\vec{W} = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\vec{V}} \frac{\vec{r} \times \vec{\omega}}{|\vec{r}|^3} dx' dy' dz' \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_{p'} = (x - x')\hat{i} + (y - y')\hat{j} + (z - z')\hat{k} \quad (\text{A.2})$$

A.2 A Lei de Biot-Savart no Plano.

Dada a problemática deste trabalho, interessa determinar as velocidades induzidas por um campo de vorticidade $\vec{\omega}' = \omega'\hat{k}$, normal ao plano (x, y) (escoamento bidimensional). Nesse caso a integral em A.1 é integrada em z' no intervalo $(-\infty, +\infty)$:

$$\vec{W} = -\frac{1}{4\pi} \int_{x'} \int_{y'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(y - y')\hat{i} - (x - x')\hat{j}]\omega}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz' \quad (\text{A.3})$$

Calculando separadamente a integral em z' :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{3/2}}. \quad (\text{A.4})$$

resulta:

$$I = \frac{2}{(x-x')^2 + (y-y')^2}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo (A.5) em (A.3):

$$\vec{W} = -\frac{1}{2\pi} \int_{x'} \int_{y'} \frac{[(y-y')\hat{i} - (x-x')\hat{j}]\omega}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dx' dy' \quad (\text{A.6})$$

ou na forma vetorial:

$$\vec{W} = -\frac{1}{2\pi} \int_A \frac{\vec{r} \times \vec{\omega}}{|\vec{r}|^2} dA'; \quad (\text{A.7})$$

A.3 Caso de Uma Camada de Vorticidade ("Vortex Layer").

Considere-se uma camada de vorticidade confinada no intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$ e $-\infty < y < +\infty$, com ω independente de y , i.e., $\omega = \omega(x)$. A Eq. (A.6) pode ser escrita como:

$$\vec{W} = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \omega (I_1 \hat{i} - I_2 \hat{j}) dx' \quad (\text{A.8})$$

onde:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y - y'}{(x - x')^2 + (y - y')^2} dy' \quad , \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - x'}{(x - x')^2 + (y - y')^2} dy' \quad (\text{A.9ab})$$

Resolvendo a integral I_1 , tem-se:

$$I_1 = -\frac{1}{2} \ln \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \quad (\text{A.10})$$

ou seja:

$$I_1 = \lim_{h \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \ln \frac{(x - x')^2 + (y - h)^2}{(x - x')^2 + (y + h)^2} \quad (\text{A.11})$$

resultando:

$$I_1 = 0 \quad (\text{A.12})$$

Resolvendo agora a integral I_2 :

$$I_2 = -\frac{(x - x')}{(x - x')} \tan^{-1} \frac{y - y'}{x - x'} \Big|_{-\infty}^{\infty} \quad ; \quad (\text{A.13})$$

Deve-se considerar duas situações na Eq (A.13):

$$\text{a) } x > x' \quad , \quad x - x' > 0. \quad \Rightarrow \quad I_2 = \pi \quad (\text{A.13a})$$

$$\text{b) } x < x' \quad , \quad x - x' < 0. \quad \Rightarrow \quad I_2 = -\pi \quad (\text{A.13b})$$

Considerando as Eqs. (A.12) e (A.13ab) na Eq. (A.8), resulta:

$$\vec{W} = \frac{1}{2} \left[\int_{x_1}^x \omega dx' - \int_x^{x_2} \omega dx' \right] \hat{j}. \quad (\text{A.14})$$

No caso em que a vorticidade é constante, a Eq. (A.14) fica:

$$\vec{W} = \omega \left[x - \frac{(x_1 + x_2)}{2} \right] \hat{j} \quad (\text{A.15})$$

Note-se que a camada de vorticidade aqui tratada induz velocidades apenas na direção y , paralela à camada, Eqs (A.14) ou (A.15).

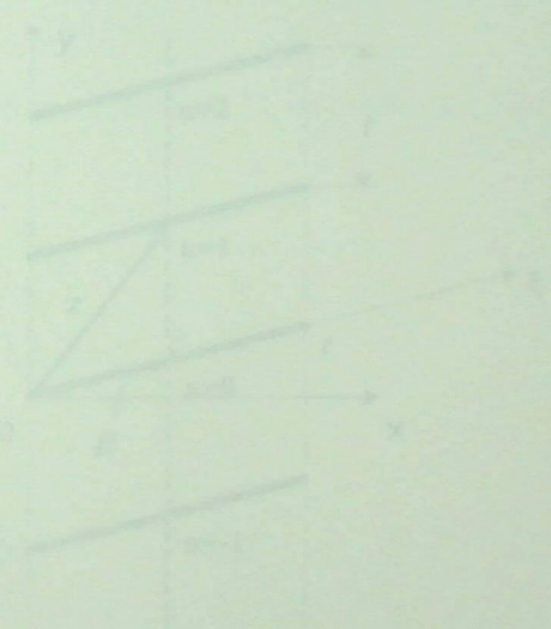


Figura B.1 - Regime de um escoamento

A velocidade completa correspondente induzida pela distribuição da vorticidade em $y = h/2$ e $y = 3h/2$

$$\vec{W} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega(x') \vec{r} \times \vec{r}'}{r^3} dx' \quad (\text{B.1})$$

APÊNDICE B

VELOCIDADES INDUZIDAS POR DISTRIBUIÇÕES DE VÓRTICES EM GRADES LINEARES

Considere-se na Fig. (B.1), uma grade linear constituída por pás retas e infinitamente finas. O problema consiste na determinação do campo de velocidades induzidas por distribuições de vórtices de intensidade $\gamma(\xi_n)$ sobre as pás ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

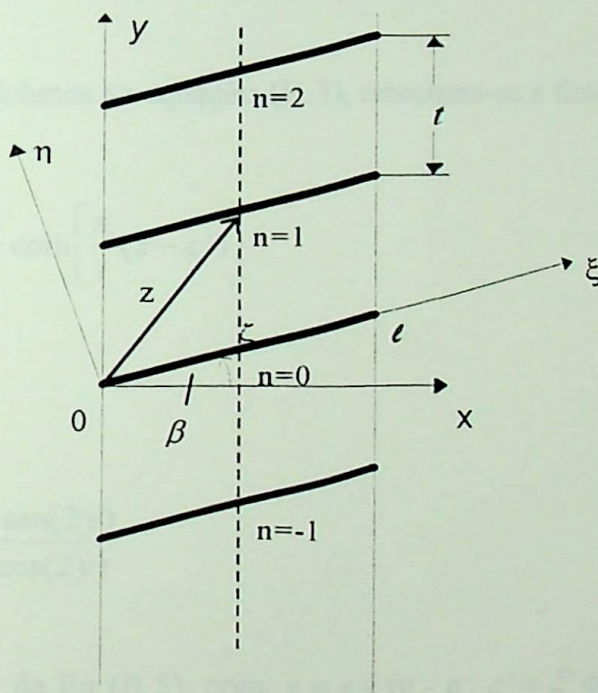


Figura B.1.- Esquema de uma grade linear.

A velocidade complexa conjugada induzida pela distribuição da n -ésima pá é dada por:

$$\bar{W}_n = \frac{i}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi'_n) d\xi'_n}{z - \zeta'_n} \quad (\text{B.1})$$

onde : $\zeta' = \zeta' + int$, e $\zeta' = \zeta'_0 = \xi' + i\eta'$, ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\bar{W}_n = \frac{i}{2\pi} \int_0^\ell \frac{\gamma(\xi_n) d\xi_n}{z - \zeta' - int} \quad (\text{B.2})$$

Adicionando-se a contribuição de todos os elementos de singularidade, pode-se escrever a velocidade complexa conjugada induzida por toda a grade:

$$\bar{W} = \frac{i}{2\pi} \int_0^\ell \gamma(\xi) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - \zeta'_0 - int} \right) d\xi'. \quad (\text{B.3})$$

O somatório entre colchetes na equação (B.3), relaciona-se à função coth:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - \zeta'_0 - int} = \frac{\pi}{t} \coth \left[\frac{\pi}{t} (z - \zeta') \right] \quad (\text{B.4})$$

onde por definição:

$$\coth z = \frac{\sinh(2x) - i \operatorname{sen}(2y)}{\cosh(2x) - \cos(2y)} \quad (\text{B.5})$$

Aplicando a fórmula da Eq (B.5), com $z = x + iy$ e $\zeta' = \xi' \cos \beta + i \xi' \operatorname{sen} \beta$ (pá retas):

$$\coth \left[\frac{\pi}{t} (z - \zeta') \right] = \frac{\sinh \left[\frac{2\pi}{t} (x - \xi' \cos \beta) \right] - i \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{t} (y - \xi' \operatorname{sen} \beta) \right]}{\cosh \left[\frac{2\pi}{t} (x - \xi' \cos \beta) \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{t} (y - \xi' \operatorname{sen} \beta) \right]} \quad (\text{B.6})$$

Considerando (B.4) e (B.6) em (B.3):

$$\bar{W} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\ell} \gamma(\xi) \frac{\pi}{t} \frac{\operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{t} (y - \xi') \operatorname{sen} \beta \right] + i \operatorname{senh} \left[\frac{2\pi}{t} (x - \xi') \cos \beta \right]}{\cosh \left[\frac{2\pi}{t} (x - \xi' \cos \beta) \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{t} (y - \xi') \operatorname{sen} \beta \right]} d\xi' \quad (\text{B.7})$$

Fazendo o ponto de calculo (x, y) tender a um ponto (ξ, η) da pá em (B.7), $x = \xi \cos \beta$ e $y = \xi \operatorname{sen} \beta$, e separando as partes real e imaginária, resulta:

$$W_x = \int_0^{\ell} \gamma(\xi) R(\xi, \xi') d\xi', \quad (\text{B.8a})$$

$$W_y = \int_0^{\ell} \gamma(\xi) I(\xi, \xi') d\xi'. \quad (\text{B.8b})$$

onde:

$$R(\xi, \xi') = \frac{1}{2t} \frac{\operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \operatorname{sen} \beta \right]}{\cosh \left[\frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \cos \beta \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \operatorname{sen} \beta \right]}; \quad (\text{B.9a})$$

e

$$I(\xi, \xi') = -\frac{1}{2t} \frac{\operatorname{senh} \left[\frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \cos \beta \right]}{\cosh \left[\frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \cos \beta \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{t} (\xi - \xi') \operatorname{sen} \beta \right]}. \quad (\text{B.9b})$$

Nota: As integrais em (B.7ab), devem, ser consideradas no sentido do valor principal de Cauchy, excluindo convenientemente o ponto $\xi' = \xi$ (Karamcheti, 1966).

APÊNDICE C

COMPOSIÇÃO DOS CAMPOS DE VELOCIDADES A PARTIR DA EQUAÇÃO DE POISSON PARA A FUNÇÃO CORRENTE

C.1 Determinação dos Campos de Escoamento na Grade Linear.

A partir de uma análise conceptual, haviam sido definidos na seção 2.4, três campos básicos de escoamento para compor o escoamento global numa grade regenerativa. Neste apêndice, a validade daquela composição de velocidades será determinada através de uma formulação mais rigorosa. Esta formulação baseia-se nas análises de Eremeef (1974), na determinação do campo de velocidades num ponto z , modificada desta vez para tratar o escoamento rotacional, partindo-se da equação de Poisson para a função corrente em lugar do potencial de velocidades.

Considere-se primeiramente uma grade linear infinita representada no plano $z=x+iy$ com espaçamento l entre os perfis aerodinâmicos de corda ℓ , dispostos com um ângulo β em relação ao eixo x , bem como as velocidades do escoamento. Figura C.2.a

O campo de velocidades rotacional para grades lineares pode ser determinado a partir da solução da equação de Poisson, para a função corrente Ψ , com ω representando o campo de vorticidade do escoamento e c_x e c_y as componentes de velocidades nas direções x e y respectivamente:

$$\Delta\Psi = \nabla^2\Psi = -\omega(x, y) \quad (\text{C.1})$$

$$c_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad c_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (\text{C.2ab})$$

Aplicando-se a segunda identidade de Green no plano as funções Ψ e $\log d$ (d , distancia entre os pontos PM), no domínio $(D-D_R)$, onde D_R é o domínio definido pelo círculo C_R de centro em P e raio R, e P é um ponto pertencente ao domínio D do escoamento, limitado pelo contorno C, como mostra a Fig C.1, resulta:

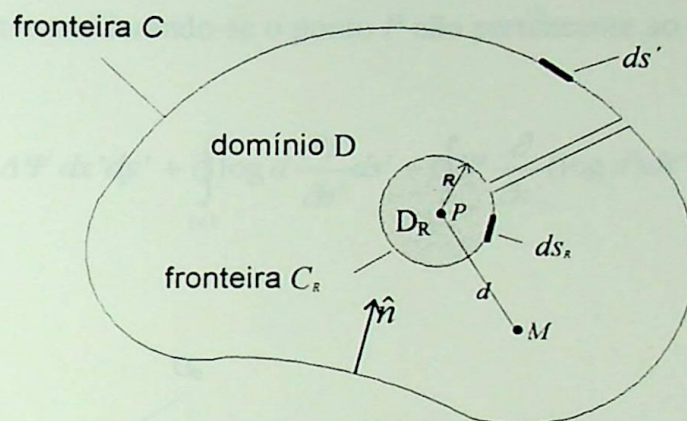


Fig. C.1.- Representação dos domínios D e D_R

$$\iint_{(D-D_R)} \log d \Delta \Psi dx' dy' = \oint_C \left[\Delta \Psi \frac{\partial}{\partial n'} (\log d) - \log d \frac{\partial}{\partial n'} (\Delta \Psi) \right] ds' + \oint_{C_R} \left[\Delta \Psi \frac{\partial}{\partial R} (\log R) - \log R \frac{\partial}{\partial R} (\Delta \Psi) \right] ds_R \quad (C.3)$$

Onde $\frac{\partial}{\partial n'}$, representa a derivada normal interior ao longo da curva C, d a distancia entre um ponto qualquer $M(x', y')$ pertencente ao domínio D e o ponto $P(x, y)$ de centro do domínio D_R , isto é: $MP = d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$. Por outro lado a função $(\log d)$ é harmônica e regular em M diferente de P, sendo assim que $\nabla^2(\log d) = 0$.

Fazendo o limite de $R \rightarrow 0$ no círculo C_R , na segunda integral do segundo membro da Eq (C.3), de tal forma a que $\Psi = \Psi(P)$:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{\Psi(P)}{R} - \log R \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right] 2\pi R = 2\pi \Psi(P). \quad (C.4)$$

sendo assim à Eq (C.3) pode ser agora rescrita da seguinte forma:

$$2\pi\Psi(P) = \iint_{(D)} \log d \Delta\Psi dx'dy' + \oint_{(c)} \log d \frac{\partial\Psi}{\partial n'} ds' - \oint_{(c)} \Psi \frac{\partial}{\partial n'} (\log d) ds'. \quad (C.5)$$

de forma similar, porem considerando-se o ponto P não pertencente ao domínio D :

$$0 = \iint_{(D)} \log d \Delta\Psi dx'dy' + \oint_{(c)} \log d \frac{\partial\Psi}{\partial n'} ds' - \oint_{(c)} \Psi \frac{\partial}{\partial n'} (\log d) ds'. \quad (C.6)$$

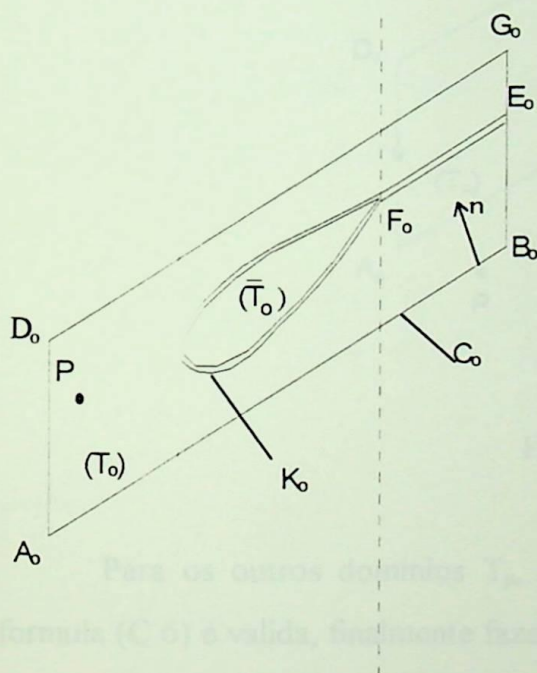


Fig.- C 2. Circuito em torno da pá no domínio T_0

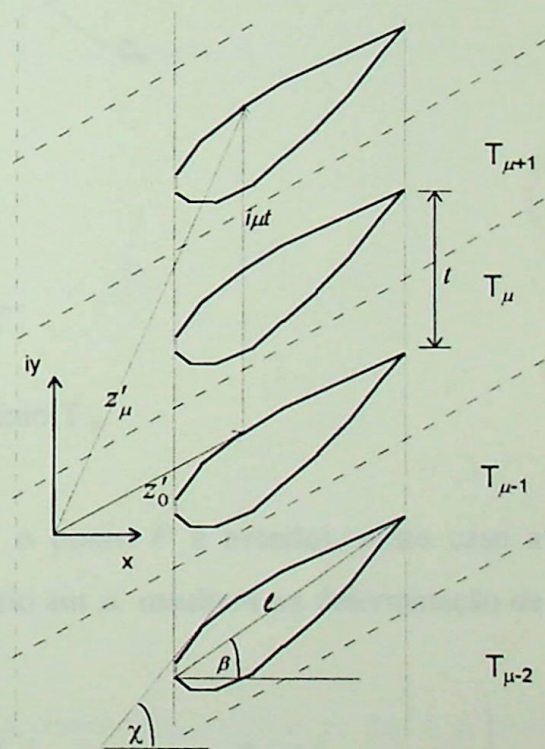


Fig.- C 3. Grade linear com infinitude de domínios T_μ .

Esta configuração matemática da Eq (C.6), pode ser aplicada para o caso de grades, onde o domínio D , limitado pela curva C_0 , será representado pelos domínios T_0

(exterior ao perfil) e \bar{T}_0 (interior ao perfil) ambos limitados por C_0 . Por outro lado a periodicidade do escoamento permite dividir o plano (x,y) em uma infinidade de domínios (T_μ) , $\mu=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (Figura C.3).

O domínio (T_0) é aquele que contem o ponto P , onde serão determinadas as velocidades. As equações (C.5) e (C.6) representam duas situações nas quais o ponto P é interior ou exterior ao perfil.

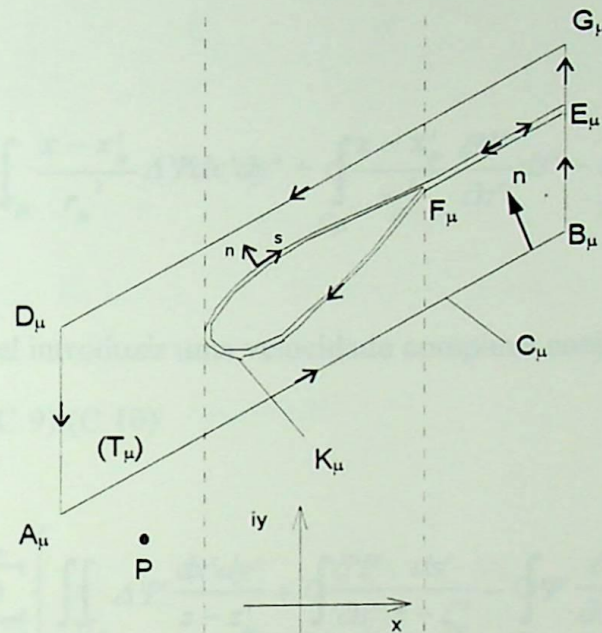


Fig.- C.4. Domínio T_μ .

Para os outros domínios T_μ , (Figura C.4) o ponto P é exterior, neste caso a formula (C.6) é valida, finalmente fazendo o somatório em μ , resultara na determinação de Ψ no ponto P , tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} P \in T_0; \quad 2\pi\Psi(P) \\ P \notin T_0; \quad 0 \end{array} \right\} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left\{ \iint_{T_\mu} \log r_\mu \Delta\Psi dx' dy' + \oint_{C_\mu} \log r_\mu \frac{\partial\Psi}{\partial n'} ds' - \oint_{C_\mu} \Psi \frac{\partial}{\partial n'} (\log r_\mu) ds' \right\} \quad (C.7)$$

$$r_\mu = \sqrt{(x - x'_\mu)^2 + (y - y'_\mu)^2} \quad (C.8)$$

r_μ é a distancia entre um ponto $P(x,y)$, pertencente ou não ao domínio T_μ , e o ponto de integração $P(x'_\mu, y'_\mu)$.

Considerando-se as derivadas de $\Psi(P)$ em (C.7) e as relações (C.2ab) (C.8), resultam as componentes de velocidades c_x e c_y :

$$2\pi c_x(P) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left\{ \iint_{\Gamma_{\mu}} \frac{y-y'_{\mu}}{r_{\mu}^2} \Delta \Psi dx' dy' + \oint_{C_{\mu}} \frac{y-y'_{\mu}}{r_{\mu}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial n'} ds' - \oint_{C_{\mu}} \Psi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{y-y'_{\mu}}{r_{\mu}^2} \right) ds' \right\} \quad (C.9).$$

$$2\pi c_y(P) = - \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left\{ \iint_{\Gamma_{\mu}} \frac{x-x'_{\mu}}{r_{\mu}^2} \Delta \Psi dx' dy' + \oint_{C_{\mu}} \frac{x-x'_{\mu}}{r_{\mu}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial n'} ds' - \oint_{C_{\mu}} \Psi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{x-x'_{\mu}}{r_{\mu}^2} \right) ds' \right\} \quad (C.10)$$

Por outro lado é possível introduzir uma velocidade complexa conjugada $i\bar{c}(z) = -c_y - ic_x$, compactando as Eqs. (C.9) (C.10):

$$-i2\pi\bar{c}(Z) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left\{ \iint_{\Gamma_{\mu}} \Delta \Psi \frac{dx' dy'}{z-z'_{\mu}} + \oint_{C_{\mu}} \frac{\partial \Psi}{\partial n'} \frac{ds'}{z-\zeta'_{\mu}} - \oint_{C_{\mu}} \Psi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{z-\zeta'_{\mu}} \right) ds' \right\} \quad (C.11)$$

onde:

$$z = x + iy$$

$$z'_{\mu} = x'_{\mu} + iy'_{\mu}$$

$$\zeta'_{\mu} = \xi'_{\mu} + i\eta'_{\mu}, \text{ representa o ponto sobre a fronteira } (C_{\mu}), \text{ lembrando que a normal}$$

à (C_{μ}) é sempre dirigida para o interior do domínio.

Considerando-se a Fig C.2.c, no contorno C_{μ} , a normal é voltada para o interior da região e para uma função complexa analítica diferenciável vale:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial n} = -i \frac{\partial}{\partial n} \quad (C.13)$$

e com isto,

$$\frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{z - \zeta'_\mu} = i \frac{\partial}{\partial s'} \frac{1}{z - \zeta'_\mu} = i \frac{1}{(z - \zeta'_\mu)^2} \frac{d\zeta'_\mu}{ds'} \quad (\text{C.14})$$

Desta forma na Eq (C.11) à segunda integral fechada resulta em:

$$\oint_{C_\mu} \Psi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{z - \zeta'_\mu} \right) ds' = \oint \frac{\Psi}{(z - \zeta'_\mu)^2} \frac{d\zeta'_\mu}{ds'} ds' = i \left[\frac{\Psi}{z - \zeta'_\mu} \right]_{s'=0}^L - i \oint_{C_\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial s'} \left(\frac{ds'}{z - \zeta'_\mu} \right) \quad (\text{C.15})$$

onde L é o comprimento da curva C_μ . Define-se a curva fechada C_μ como sendo o contorno de uma região simplesmente conexa (T), sendo assim o primeiro termo do membro direito da Eq (C.15) é nulo, resultando:

$$-i 2\pi \bar{c}(z) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left\{ \iint_{\Gamma_\mu} \Delta \Psi \frac{dx' dy'}{z - z'_\mu} + \oint_{C_\mu} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n'} + i \frac{\partial \Psi}{\partial s'} \right) \frac{ds'}{z - \zeta'_\mu} \right\} \quad (\text{C.16a})$$

ou:

$$2\pi \bar{c}(z) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left\{ \iint_{\Gamma_\mu} i \Delta \Psi \frac{dx' dy'}{z - z'_\mu} + \oint_{C_\mu} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n'} - i \frac{\partial \Psi}{\partial s'} \right) \frac{ds'}{z - \zeta'_\mu} \right\} \quad (\text{C.16b})$$

Analisando somente a integral de superfície da Eq (C.16 b) e a Fig. C.2 a, tem-se:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \iint_{\Gamma_\mu} \Delta \Psi \frac{dx' dy'}{z - z'_\mu} = i \iint_{\Gamma_0} \Delta \Psi \left\{ \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - z'_0 + i\mu t} \right\} dx' dy'. \quad (\text{C.17})$$

Por outro lado verifica-se que o somatório da direita da equação acima corresponde ao desenvolvimento em série da função $\coth \frac{\pi}{t}(z - z'_0)$, ou seja,

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \iint_{T_{\mu}} i \Delta \Psi \frac{dx' dy'}{z - z'_{\mu}} = i \frac{\pi}{t} \iint_{T_0} \Delta \Psi \coth \frac{\pi}{t}(z - z') dx' dy'. \quad (C.18)$$

onde (T_0) e relativo à $\mu=0$.

Em seguida analisando-se a integral curvilínea da Eq (C.16b), verifica-se que resultam duas integrais curvilíneas, uma dada pelo contorno sobre o perfil (k_{μ}) e outras pelos trechos $D_{\mu}A_{\mu}$ e $B_{\mu}G_{\mu}$, como é mostrado na Figura C.2.c, sendo assim:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \oint_{(K_{\mu})} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta'} - i \frac{\partial \Psi}{\partial \delta'} \right) \frac{ds'}{z - \zeta'_{\mu}} = \frac{\pi}{t} \oint_{(K)} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta'} - i \frac{\partial \Psi}{\partial \delta'} \right) \coth \frac{\pi}{t}(z - \zeta') ds' \quad (C.19)$$

Os trechos $A_{\mu}B_{\mu}$ e $C_{\mu}D_{\mu}$ se anulam, respectivamente, com as integrais sobre os trechos $G_{\mu}H_{\mu}$ e $E_{\mu}F_{\mu}$. Restará calcular as integrais sobre os trechos $D_{\mu}A_{\mu}$ e $B_{\mu}G_{\mu}$, que serão determinados considerando-se as condições de contorno e o circuito fechado da Figura (C.2.c):

- antes da grade:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta'} = \frac{\partial \Psi}{\partial x'} = c_{1y} \quad ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \delta'} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y'} = c_{1x} \quad (C.20ab)$$

- após a grade:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta'} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x'} = c_{2y} \quad ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \delta'} = \frac{\partial \Psi}{\partial y'} = c_{2x} \quad (C.21ab)$$

usando desta vez a relação (C.16b), tem-se:

$$\int_{\Sigma(D_\mu A_\mu)} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta'} - i \frac{\partial \Psi}{\partial \varsigma'} \right) \frac{ds'}{z - \zeta'} = \pi \bar{c}_1 \quad (\text{C.22 a})$$

$$\int_{\Sigma(B_\mu G_\mu)} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta'} - i \frac{\partial \Psi}{\partial \varsigma'} \right) \frac{ds'}{z - \zeta'} = \pi \bar{c}_2. \quad (\text{C.22 b})$$

Desta forma somando-se a integral de área Eq (C.18) mais as duas integrais curvilíneas dadas pelas Eqs (C.19) e (C.22 ab), na Eq(C.16b) resulta:

$$\begin{aligned} \pi(\bar{c}_1 + \bar{c}_2) + i \frac{\pi}{t} \iint \Delta \Psi \operatorname{cogth} \frac{\pi}{t} (z - z') dx' dy' + \frac{\pi}{t} \oint_{(K)} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta'} - i \frac{\partial \Psi}{\partial \varsigma'} \right) \operatorname{cogth} \frac{\pi}{t} (z - \zeta') ds' = \\ = \begin{cases} 2\pi \bar{c}(z), & z \in T_o \\ 0 & , z \notin T_o \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

considerando-se as seguintes expressões da teoria de grades:

$$\bar{c}_\infty = \frac{\bar{c}_1 + \bar{c}_2}{2}, \quad (\text{C.24})$$

$$K(z, z') = \frac{\pi}{t} \operatorname{coth} \frac{\pi}{t} (z - z'), \quad (\text{C.25})$$

$$K(\zeta', z) = \frac{\pi}{t} \operatorname{coth} \frac{\pi}{t} (\zeta' - z), \quad (\text{C.26})$$

$$\bar{c}(\zeta) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + i \frac{\partial \Psi}{\partial \varsigma} \right) e^{-i\chi}, \quad (\text{C.27})$$

$$d\zeta = ds e^{i\chi}. \quad (\text{C.28})$$

(χ e o ângulo formado entre um ponto do contorno no perfil e a direção horizontal, como é mostrado na Fig C.2 a), e a Eq (C.23), obtém-se a expressão para a velocidade complexa conjugada $\bar{c}(z)$, na condição de $z \in T_0$:

$$\bar{c}(z) = \bar{c}_\infty + \frac{1}{2\pi} \oint_K \bar{c}(\zeta') K(\zeta', z) d\zeta' + \frac{i}{2\pi} \iint_T \nabla^2 \Psi K(z, z') dx' dy' \quad (C.29)$$

por outro lado lembrando-se que: $\Delta \Psi = \nabla^2 \Psi = -\omega(x, y)$, na Eq (C.29), resulta:

$$\bar{c}(z) = \bar{c}_\infty + \frac{1}{2\pi} \oint_K \bar{c}(\zeta') K(\zeta', z) d\zeta' - \frac{i}{2\pi} \iint_T \omega K(z, z') dx' dy' \quad (C.30)$$

A Eq. (C.30) representa a solução da Eq. (C.1) em sua forma integral. Nessa equação, a integral de superfície mostra o campo de velocidades complexas conjugadas provocadas pelo campo de vorticidade, a integral curvilínea ao redor da pá leva em conta as velocidades $\bar{c}(\zeta')$ sobre o contorno do perfil e \bar{c}_∞ , o campo de velocidades não perturbadas.

Na Eq (C.30) pode-se verificar os três campos básicos de escoamento como foram definidos na seção 2.4. No primeiro membro da equação representa o campo de velocidades uniformes não perturbadas, denominado de campo (I), seguido do Campo (II), de velocidades provocadas pela perturbação das pás, e finalmente o terceiro membro destaca o campo (III) de velocidades induzidas pela vorticidade uniformemente distribuída no plano da grade linear ou transformada.

C.2. Determinação das Velocidades Induzidas por um Campo de Vorticidade.

Verifica-se, que a integral do ultimo termo da Eq (C.30) representa as componentes de velocidades induzidas pela vorticidade. Pode-se mostrar que a solução desta integral de superfície é idêntica aquela mostrada no capítulo II e deduzida no Apêndice (A) empregando-se a Lei de Biot Savart

Para este propósito, somente será considerada a integral de superfície da Eq (C.30)

$$\bar{c}_\omega(z) = -\frac{i}{2\pi} \iint_T \omega K(z, z') dx' dy' \quad (C.31)$$

considerando-se as seguintes relações, e separando-se parte real e parte imaginária resulta:

$$K(z, z') = \frac{1}{2} \coth \frac{\pi}{t} (z - z') = R(z, z') + iI(z, z') \quad (C.32)$$

onde:

$$R(z, z') = \frac{1}{2} \frac{\sinh \frac{2\pi}{t} (x - x')}{\cosh \frac{2\pi}{t} (x - x') - \cos \frac{2\pi}{t} (x - x')} ; \quad (C.33)$$

$$I(z, z') = -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{t} (y - y')}{\cosh \frac{2\pi}{t} (y - y') - \cos \frac{2\pi}{t} (y - y')} . \quad (C.34)$$

fazendo, $\bar{c}_\omega(z) = c_{\omega x} - ic_{\omega y}$, tem-se:

$$\bar{c}_{\omega x} = \frac{\omega}{t} \iint_T R(z, z') dx' dy' \quad (C.35)$$

$$\bar{c}_{\omega y} = \frac{\omega}{t} \iint_T I(z, z') dx' dy' \quad (C.36)$$

Resolvendo-se primeiramente a integral da Eq(C.35), definida como:

$$c_{\omega x} = -\frac{\omega}{2t} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{y=f(x')}^{f(x')+t(x')} \frac{\sin \frac{2\pi}{t} (y - y')}{\cosh \frac{2\pi}{t} (x - x') - \cos \frac{2\pi}{t} (y - y')} dy' \right\} dx' \quad (C.37)$$

Na determinação dos limites de integração da Eq(C.37) na direção “y”, deve-se considerar o caso de grades compostas de pás retas e infinitamente finas, sendo válida a aproximação de $t(x') = t$ (passo), desde que a função $f(x')$ seja idêntica tanto no lado inferior como superior do perfil da pá. Resolvendo e chamando de “J” a integral entre colchetes da Eq (C.37), resulta:

$$c_{ax} = -\frac{\omega}{2t} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{J} dx' = 0 \quad (\text{C.38})$$

De maneira similar, porém considerando-se a integral da Eq (C.36):

$$c_{ay} = \frac{\omega}{2t} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{y=f(x')}^{f(x')+t(x')} \frac{\sinh \frac{2\pi}{t} (x - x')}{\cosh \frac{2\pi}{t} (x - x') - \cos \frac{2\pi}{t} (y - y')} dy' \right\} dx' \quad (\text{C.39})$$

chamando de “I” o termo entre colchetes:

$$c_{ay} = \frac{\omega}{2t} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{I} dx'. \quad (\text{C.40})$$

Onde neste caso a integral “I”, atende a duas situações:

$$\mathbf{I} = t: \text{ para } \xi > x'$$

$$\mathbf{I} = -t: \text{ para } \xi < x'$$

sendo assim a integral da Eq (C.39), fica:

$$c_{ay} = \frac{\omega}{2t} \left(\int_{x_1}^{\xi} \mathbf{I} dx' + \int_{\xi}^{x_2} \mathbf{I} dx' \right) = \frac{\omega}{2t} \left(\int_{x_1}^{\xi} t dx' + \int_{\xi}^{x_2} -t dx' \right). \quad (\text{C.37})$$

integrando a Eq(C.37), resulta:

$$c_{\omega y} = \omega \left[\xi - \frac{(x_1 + x_2)}{2} \right]. \quad (\text{C.38})$$

rescrevendo as duas componentes de velocidades induzidas pela vorticidade:

$$c_{\omega x} = 0; \quad (\text{C.39})$$

$$c_{\omega y} = \omega \left[\xi - \frac{(x_1 + x_2)}{2} \right]. \quad (\text{C.40})$$

Note-se que o resultado das Eqs.(C.39),(C.40), são idênticas aquelas encontradas a partir da Lei de Biot Savart, nas Eqs (2.22a) e (2.22b) as quais foram apresentadas oportunamente.

Importante notar que neste caso as velocidades aparecem absolutas, o que é correto, porem podem-se considerar as velocidades relativas como absolutas nas formulações do Capítulo II, já que nessa situação ainda não tinham sido tratados os efeitos não inerciais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDREW, D.N., "*The Effect of Uniform Spanwise Vorticity on Two Dimensional Flow Through Cascades*", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 203, N° C6, pp. 371-378, 1989.
- BELOTSEKOVSKY, S.M., LIFANOV, I.K., "*Method of Discrete Vortices*", CRC Press, Inc., Florida., 1993.
- BROWN, A., "*A comparison of Regenerative and Centrifugal Compressors*", Proceed. of a Purdue Conference on Compressor Technology, 1970.
- CREWDSON, E., JACKSON, E.A., "*Water-Ring Self Priming Pump*", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol. 170, N° 13, pp 407-425, 1956.
- CSANADY, G.T., "*Theory of Turbomachines*", McGrall-Hill, pp 146-149, 1964.
- ENGELS, H., "*Untersuchungen an Ringpumpen*", (Seitenkanalpumpen), Doktor, Thesis, TH-Hannover, 1940.
- EREMEF, L.R., "*Calcul des Ecoulements dans les Turbomachines en Fluide Parfait et Incompressible*", Compte rendu: Contrat N° 3.7.1765.00.221.75.01, Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique, Grenoble, 1974.
- FERNADES, E. C., "*Análise do Escoamento em Máquinas de Fluxo Segundo o Método das Singularidades*", Notas de aula, ITA/IEM/IEME, São José dos Campos - Brasil, 1978.
- GRABOW, G., "*Effect of the Shape of Blades on the Characteristics in the Partial Load Area of Peripheral Regenerative Pumps*". Proceedings of the Fourth Conference on Fluid Machinery, Akademiai Kiado, Budapest, pp. 497-524, 1972.
- GRABOW, G., "*Influence of the Number of Vanes and Vane Angle on the Suction Behaviour of Regenerative Pumps*", Budapest Fluid Machinery Conference, pp. 351 -365, 1975.
- GRABOW, G., "*Verbesserung der Teillastwirkungsgrade bei Peripheral-Seitenkanalpumpen*", VEB WTZ Pumpen und Verdichter, Halle, 1965.,
- GRABOW, G., E., SUONG, N, D., "*Charakteristiken der Seitenkanalmaschine als Turbine und Pumpe*", Forsch Ingenieurwes, , Vol 60, Part 4, pp 65-75, 1994
- HESS, J.L., SMITH, A. M.O ., "*Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies*", Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8, pp. 1-138, 1966.

- IVERSEN, H.W., "*Performance of the Periphery Pump*", Transactions of the ASME, vol 77, 1955.
- KARAMCHETI, K., "*Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.
- LEWIS, R.I., "*Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*", Cambridge University Press, 1966.
- LEWIS, R.I., "*Turbomachinery Performance Analysis*", Arnold, London, 1996.
- NIYADZU, A., "*Researches on Turbulent Flow Characteristics of Friction Pumps*". (Japanese). Trans. Soc. Mech. Engrs. Japan, vol 18, N^o 66, 1965.
- NYIRI, A., "*Determination of the Theoretical Characteristics of Hidraulic Machines Based on Potential Theory*", Acta Technica, Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 69 (3-4), pp. 243-273, 1970.
- PFAFF, H., "*Vergleichende Untersuchungen an Seitenkanalpump mit und ohne Leitrad*", Doktor Ingenier Thesis - TH Hannover, Translation by L. Rosenfeld available, Southampton University (Mech. En.), 1961.
- SENNO, Y., "*Researches on Peripheral Pump*", Report of Research/Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, Fukuoka, Japan, vol. III, N^o 10, July 1954.
- SIVALINGAM, R., "*Flow Modelling and Computer Aided Design of Fluid Couplings and Torque Converters*". Ph.D. Thesis, University of Bath, 1977.
- SPIEGEL, M.R., "*Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas* ", Ed. McGraw-Hill do Brasil Ltda., 1968.
- VARELLA, S., "*A Theoretical and Experimental Analysis of Regenerative Blowers*", Ph.D. Thesis, Southampton University. 1981
- VAVRA, A.R., "*Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomachines*", Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1974.
- WALLACE, F.J., et al., "*A Theoretical Model for the Performance Prediction of Fully Filled Fluid Couplings*", Int. J. Mech. Science, vol. 20, N^o 6, pp. 335 - 347, 1978.
- WEINIG, F.S., "*Theory of Two-Dimensional Flow Through Cascades*", Aerodynamics of Turbine and Compressors - Section B, Princeton University Press, 1964.

WISLICENUS, G.F., "*Fluid Mechanics of Turbomachinery*", Dover. Inc., New York, 1964.

WU, C.H., "*A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial -, Radial-, and Mixed -Flow Types*", NACA TN 2604, 1952.

23/05/03

07.6.2007

23/06/2003

08/07/03

22.7.2003

23.08.03

16/9/03

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200928



NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA