UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Inclusões Diferenciais Governadas pela Diferença de Operadores do tipo Subdiferencial em Espaços de Banach Reflexivos

Sueni Daiana Faustino

Itajubá, Novembro de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sueni Daiana Faustino

Inclusões Diferenciais Governadas pela Diferença de Operadores do tipo Subdiferencial em Espaços de Banach Reflexivos

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

Orientadora: Profª. Drª. Mariza Stefanello Simsen
Co-orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Dezembro de 2014
Itajubá

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sueni Daiana Faustino

Inclusões Diferenciais Governadas pela Diferença de Operadores do tipo Subdiferencial em Espaços de Banach Reflexivos

Dissertação aprovada por banca examinadora em 04 de Dezembro de 2014, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciências em Matemática.**

Banca examinadora:
Prof[a]. Dr[a]. Mariza Stefanello Simsen (Orientadora)
Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo
Prof. Dr. Maicon Sônego

Itajubá

2014

Aos meus pais, Rosângela Maroti Faustino e Vitor Faustino, ao meu marido, Vinícius Dias da Silva, e a minha filha Ágata Faustino Dias da Silva por serem os responsáveis por essa conquista.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou o meu caminho durante esta jornada.

Agradeço também ao meu marido, Vinícius Dias, que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades. Quero agradecer também a minha filha, Ágata, que embora não tivesse conhecimento disto, mas iluminou de maneira especial os meus pensamentos me levando a buscar mais conhecimentos. E não deixando de agradecer de forma grata e grandiosa aos meus pais, Vitor e Rosângela, e ao meu irmão, Wenderson, pois sem o apoio dos quais não teria conseguido chegar até aqui.

Quero agradecer a minha orientadora, Profª. Drª. Mariza Stefanello Simsen, e ao meu co-orientador, Prof. Dr. Jacson Simsen, pelos vários ensinamentos no mestrado, por todo suporte didático e direcionamento durante a elaboração deste trabalho. Obrigada também pela pronta disponibilidade e, principalmente, pela paciência em me atender as inúmeras vezes que os procurei.

Aos meus amigos, Carol, Jerusa e Alexandre pelos ensinamentos e pela amizade ao longo desses dois anos de mestrado.

E a todos os professores, sem exceção, que lecionaram durante meu período de estudos, tanto na graduação quanto na pós-graduação, na Universidade Federal de Itajubá, pois sempre aprendi um pouco com cada um deles, não apenas teorias matemáticas mas também lições de vida!

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Sueni Daiana Faustino

"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes."
Marthin Luther King.

Resumo

Este trabalho apresenta resultados de existência de soluções fortes para o problema de Cauchy com inclusão de evolução $\dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t)$, $t \in]0,T[$, onde $\partial\varphi^1$ e $\partial\varphi^2$ são operadores do tipo subdiferencial de um espaço de Banach reflexivo V no seu dual V^*. No último capítulo, apresentamos resultados de existência de solução para o problema de Cauchy envolvendo o operador p-Laplaciano perturbado.

Palavras-chave: existência de solução, subdiferencial, p-Laplaciano.

Abstract

This work shows results on existence of strong solutions for Cauchy problem with evolution inclusion $\dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t)$, $t \in]0,T[$, where $\partial\varphi^1$ and $\partial\varphi^2$ are subdifferential operators from a real reflexive Banach space V into its dual V^*. In the last chapter, we show results on existence of solutions for the Cauchy problem involving a pertubation of the p-Laplacian operator.

Keywords: existence of solutions, subdifferential, p-Laplacian.

Índice

Capítulo 1

Introdução

A teoria de operadores maximais monótonos é uma ferramenta essencial no tratamento de problemas lineares e não-lineares em equações diferenciais parciais.

Neste trabalho estudamos resultados de existência de soluções fortes de uma inclusão de evolução governada pela diferença de operadores do tipo subdiferencial em V^*, com V um espaço de Banach reflexivo, sendo o artigo [1] a parte central e [2, 3, 4, 5] as complementações. São resultados que garantem a existência de soluções para o seguinte problema de evolução

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t) \text{ em } V^*, 0 < t < T \ ; \\ u(0) = u_o \ , \qquad u_0 \in D(\varphi^1) \end{cases}$$

onde as funções $\varphi^1, \varphi^2 : V \to (-\infty, +\infty]$ são semicontínuas inferiormente, convexas e próprias, $\partial\varphi^1$ e $\partial\varphi^2$ são operadores subdiferenciais de φ^1 e φ^2, respectivamente, e $f \in W^{1,p'}(0,T;V^*)$. Observe que sob essas condições tem-se que $\partial\varphi^1$ e $\partial\varphi^2$ são operadores maximais monótonos. A técnica estudada consiste em argumentos de aproximação em um espaço de Hilbert H tal que $V \subset H \subset V^*$ com inclusões contínuas e densas.

Inicialmente, no Capítulo 2 apresentamos algumas definições e resultados importantes da teoria de Análise Funcional, Medida e Integração e, principalmente, sobre espaços de Sobolev e operadores do tipo subdiferencial.

No Capítulo 3, consideramos a tripla de evolução $V \subset H \subset V^*$ e exigimos as seguintes condições:

(A1) Existe $p \in (1, \infty)$ tal que $||u||_V^p - C_1||u||_H^2 - C_2 \leq C_3\varphi^1(u), \forall u \in D(\varphi^1)$, onde C_1, C_2 e C_3 são constantes não-negativas;

(A2) $D(\varphi^1) \subset D(\partial\varphi^2)$. Além disso, se u_n é uma sequência tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\{\varphi^1(u_n(t)) + ||u_n(t)||_H\right\} + \int_0^T \left|\left|\frac{du_n(t)}{dt}\right|\right|_H^2 dt$$

é limitado, então para toda sequência $g_n(\cdot) \in \partial\varphi^2(u_n(\cdot))$, $\{g_n\}$ forma um subconjunto precompacto em $C([0,T];V^*)$;

(A3) Existe uma extensão $\widetilde{\varphi}^2 : H \to (-\infty, +\infty]$ de φ^2 que é semicontínua inferiormente, convexa e própria em H, tal que

$$\varphi^1(J_\lambda u) \leq l_1(\varphi^1(u) + l_2(||u||_H)),$$

$\forall \lambda \in (0,1]$, $\forall u \in D(\varphi^1)$, onde $l_1, l_2 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ são funções não-decrescentes e J_λ denota o resolvente de $\partial_H \widetilde{\varphi}^2$, isto é, $J_\lambda = (I + \lambda \partial_H \widetilde{\varphi}^2)^{-1}$;

(A4) $\varphi^2(u) \leq k\varphi^1(u) + C_4||u||_H^2 + C_5$, $\forall u \in D(\varphi^1)$ para algum $0 \leq k < 1$, onde C_4 e C_5 são constantes não-negativas,

para garantir a existência de solução forte para a inclusão de evolução acima. Para a existência de solução local, no tempo, não é preciso exigir a condição **(A4)**, que pode ser bastante restritiva em aplicações. Mais precisamente, se as condições **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** são válidas, então para quaisquer $u_0 \in D(\varphi^1)$ e $f \in W^{1,p'}(0,T;V^*)$, existe um número $T_0 \in (0,T]$ tal que o problema acima tem uma solução forte u em $[0,T_0]$. Finalizando este capítulo, introduzimos a condição

(A5) $\alpha\varphi^1(u) \leq \langle \xi - \eta, u \rangle_{V^*,V} + l_3(\varphi^2(u)) \cdot \varphi^1(u)$, $\forall (u,\xi) \in \partial\varphi^1$, $\forall (u,\eta) \in \partial\varphi^2$, onde $\alpha > 0$ e $l_3 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não-decrescente satisfazendo $l_3(0) = 0$

e supondo válidas as condições **(A1)**, **(A2)**, **(A3)** e **(A5)** veremos que para u_0 e f adequados o problema de evolução citado anteriormente tem solução forte global.

Por fim, no Capítulo 4 a aplicabilidade dos resultados estudados no Capítulo 3 será exemplificada discutindo a existência de solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta_p u(x,t) - |u|^{q-2}u(x,t) = f(x,t) \ \ ,(x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 \ \ ,(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \ \ x \in \Omega \end{cases},$$

onde $p, q \in (1,+\infty)$, Ω denota um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e $\Delta_p := \text{div}\left(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\right)$ denota o operador p-Laplaciano. Em particular, a existência de solução será mostrada sob a condição

$$1 < q < p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & se\, N > p \\ +\infty, & se\, N \leq p \end{cases} \qquad e \qquad \frac{2N}{N+2} \leq p < +\infty$$

para dados iniciais $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados utilizados ao longo deste trabalho.

2.1 Uma coletânea de resultados

As definições e resultados dessa seção podem ser encontrados em [6, 7, 8].

Definição 2.1.1 *Uma norma num espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{F}$ (real ou complexo) é uma aplicação $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz*

(i) $||\xi|| \geq 0$ *para todo* $\xi \in V$, *e* $||\xi|| = 0$ *se, e somente se,* $\xi = 0$.

(ii) $||\alpha\xi|| = |\alpha|||\xi||$, *para todo* $\xi \in V$ *e qualquer* $\alpha \in \mathbb{F}$, *(*$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$*).*

(iii) $||\xi + \eta|| \leq ||\xi|| + ||\eta||$ *para todos* $\xi, \eta \in V$.

Neste caso dizemos que $(V, ||\cdot||)$ *é um espaço normado.*

Definição 2.1.2 *Um espaço métrico* (V, d) *é completo se toda sequência de Cauchy converge a um elemento do espaço.*

Definição 2.1.3 *Um espaço normado* $(V, ||\cdot||)$ *que é completo com a métrica induzida pela norma é chamado de espaço de Banach.*

Definição 2.1.4 *Um operador linear entre os espaços vetoriais V e W é uma aplicação $T : dom\, T \subset V \to W$ em que seu domínio $dom\, T$ é um subespaço vetorial e*

$$T(\xi + \alpha\eta) = T(\xi) + \alpha T(\eta)$$

para todos $\xi, \eta \in dom\, T$ *e todo escalar* $\alpha \in \mathbb{F}$ *(*$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$*).*

Observação 2.1.1 *Se $W = \mathbb{F}$ então temos que $T : dom\, T \subset V \to W$ é chamado de funcional linear.*

Teorema 2.1.1 *Seja $T : V \to W$ um operador linear entre espaços normados. Então as seguintes proposições são equivalentes:*

(i) $\sup\limits_{||\xi|| \leq 1} ||T\xi|| < \infty$, *ou seja, a imagem da bola unitária é limitada;*

(ii) *Existe* $C > 0$ *de modo que* $||T\xi|| \leq C||\xi||$, *para todo* $\xi \in V$*;*

(iii) T *é uniformemente contínuo;*

(iv) T *é contínuo;*

(v) T *é contínuo em* $0 \in V$.

Definição 2.1.5 *Um operador linear contínuo é também chamado de limitado, e o conjunto dos operadores lineares limitados de* V *em* W *será denotado por* $B(V,W)$.

Definição 2.1.6 *Se* V *é um espaço normado, então o espaço de Banach* $B(V,\mathbb{F})$ *será denotado por* V^* *e chamado de espaço dual de* V. *Cada elemento de* V^* *é chamado de funcional linear contínuo em* V. *A norma em* V^* *será dada por*

$$||f||_{V^*} = \sup\{|f(x)|; x \in V, ||x|| \leq 1\}.$$

Definição 2.1.7 *O espaço bidual,* V^{**} *de* V *é o espaço dual de* V^**, isto é,* $V^{**} = (V^*)^*$. *A norma em* V^{**} *será dada por*

$$||f||_{V^{**}} = \sup\{|f(g)|; g \in V^*, ||g||_{V^*} \leq 1\}.$$

Observação 2.1.2 *Como* V^* *é um espaço de Banach, está definido* $V^{**} = (V^*)^*$. *Há uma forma natural de identificar elementos de* V *com elementos do seu bidual: a cada* $\xi \in V$ *associa-se* $\hat{\xi} \in V^{**}$ *por*

$$\hat{\xi}(f) := f(\xi), \text{ para } f \in V^*.$$

Definição 2.1.8 *Sejam* V *e* W *espaços normados. Uma aplicação* $f : V \to W$ *é uma imersão isométrica quando* $||f(x) - f(y)||_W = ||x - y||_V$ *para todo* $x, y \in V$.

Definição 2.1.9 *Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetora.*

Observação 2.1.3 *A aplicação* $\hat{}: V \to V^{**}$*, mencionada na Observação 2.1.2, é uma imersão isométrica linear e, consequentemente, injetora.*

Definição 2.1.10 *Se a aplicação* $\hat{}$ *é sobrejetora, então o espaço normado* V *é chamado de espaço reflexivo. Em outras palavras,* V *é reflexivo se ele é isomorfo a* V^{**} *e o isomorfismo sendo dado por essa aplicação.*

Definição 2.1.11 *Um produto interno no espaço vetorial* V *é um funcão de* $V \times V \to \mathbb{F}$ *que para cada* $(\xi,\eta) \in V \times V$ *associa-se o elemento* $\langle \xi,\eta \rangle \in \mathbb{F}$ *e que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\langle \xi + \eta, \zeta \rangle = \langle \xi, \zeta \rangle + \langle \eta, \zeta \rangle$ *para todo* $\xi, \eta, \zeta \in V$*;*

(ii) $\langle \alpha\xi, \eta \rangle = \alpha \langle \xi, \eta \rangle$ *para todo* $\xi, \eta \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{F}$*;*

(iii) $\langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}$ *para todo* $\xi, \eta \in V$*;*

(iv) $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$ *para todo* $\xi \in V$ *e* $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ *se, e somente se* $\xi = 0$.

Proposição 2.1.1 *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja V um espaço com produto interno. Então para $\xi, \eta \in V$ vale:*

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \leq ||\xi||_V \; ||\eta||_V,$$

onde $||\xi||_V = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$; para $\xi \in V$.

Definição 2.1.12 *Um espaço de Hilbert H é um espaço com produto interno que é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.*

Teorema 2.1.2 *(Teorema da Representação de Riesz) Seja H um espaço de Hilbert. Dado $f \in H^*$ existe um único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

para todo $x \in H$. Além disso

$$||f||_{H^*} = ||y||_H.$$

Em particular, $H^* = H$ no sentido que esses espaços são isomorfos.

Definição 2.1.13 *Sejam V_1 e V_2 espaços normados. Dizemos que $V_1 \subset V_2$ com imersão contínua se existe $c > 0$ tal que*

$$||x||_{V_2} \leq c||x||_{V_1}, \;\; \forall x \in V_1,$$

e a inclusão $V_1 \subset V_2$ é densa se $\overline{V_1}^{V_2} = V_2$.

Lema 2.1.1 *(Desigualdade de Young) Sejam $\theta, \theta' > 1$ expoentes conjugados, ou seja $\dfrac{1}{\theta} + \dfrac{1}{\theta'} = 1$. Então para quaisquer números reais não-negativos a, b temos que*

$$ab \leq \frac{1}{\theta} a^{\theta} + \frac{1}{\theta'} b^{\theta'}.$$

Definição 2.1.14 *Uma função $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é absolutamente contínua se para cada $\varepsilon > 0$ existir algum $\delta > 0$, tal que se $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,2,\ldots,n}$ é uma família de intervalos disjuntos contidos em $[a,b]$ com $\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) < \delta$, então $\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$.*

Definição 2.1.15 *Seja V um espaço normado. Uma sequência $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ converge fracamente a $\xi \in V$ se $|f(\xi_n) - f(\xi)| \to 0$, quando $n \to \infty$, para todo $f \in V^*$. Iremos denotar essa convergência por $\xi_n \rightharpoonup \xi$.*

Definição 2.1.16 *Uma sequência $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (V, || \cdot ||_V)$ converge a $\xi \in V$ se $||\xi_n - \xi||_V \to 0$ quando $n \to \infty$. Iremos denotar essa convergência por $\xi_n \to \xi$.*

Lema 2.1.2 *Sejam V um espaço métrico e $\{\xi_n\}$ uma sequência em V. Então, $\xi_n \to \xi$ se, e somente se, para toda subsequência $\{\xi_{n'}\}$ de $\{\xi_n\}$ possui uma subsequência $\{\xi_{n''}\}$ tal que $\xi_{n''} \to \xi$.*

Proposição 2.1.2 *Sejam V um espaço de Banach e (ξ_n) uma sequência em V. Temos:*

(i) *Se $\xi_n \to \xi$, então $\xi_n \rightharpoonup \xi$,*

(ii) *Se $\xi_n \rightharpoonup \xi$, então $||\xi_n||$ é limitada e $||\xi|| \leq \liminf ||\xi_n||$,*

(iii) *Se $\xi_n \rightharpoonup \xi$ e se $f_n \to f$ em V^*, então $f_n(\xi_n) \to f(\xi)$.*

Teorema 2.1.3 *Seja V um espaço de Banach reflexivo e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em V. Então podemos extrair de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsequência que converge fracamente.*

Lema 2.1.3 ***(Desigualdade de Gronwall)*** *Sejam $m \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ q.t.p em $(0,T)$ e $a \geq 0$. Se ϕ é uma função contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$ tal que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds$$

para todo $t \in [0,T]$, então

$$|\phi(t)| \leq a + \int_0^t m(s)ds$$

para todo $t \in [0,T]$.

Lema 2.1.4 ***(Desigualdade de Gronwall-Bellman)*** *Sejam $m \in L^1(0,T;R)$ tal que $m \geq 0$ q.t.p em $(0,T)$ e $a \geq 0$. Se ϕ é uma função contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$ verificando*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\phi(s)ds, \quad t \in [0,T],$$

então

$$\phi(t) \leq a e^{\int_0^t m(s)ds}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Definição 2.1.17 *A topologia fraca em V é a topologia $\tau(V,V^*)$ gerada pelos funcionais lineares em V^*, ou seja, é a topologia menos fina em V na qual todos os elementos de V^* permanecem contínuos. Uma sub-base (aberta) de $\tau(V,V^*)$ é a coleção*

$$V(\xi;f;r) = f^{-1}B_{\mathbb{F}}(f(\xi);r) = \{\eta \in V : |f(\xi) - f(\eta)| < r\},$$

onde $\xi \in V$, $r > 0$ e $f \in V^*$.

Definição 2.1.18 *Dizemos que $\varphi : [0,T] \to V$ é uma função fracamente contínua se para cada aberto A de V na topologia fraca, então $\varphi^{-1}(A)$ é aberto em $[0,T]$.*

Teorema 2.1.4 *(Convergência Dominada) Seja (X,Σ,μ) um espaço de medida e considere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções complexas mensuráveis em X tal que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

exista para cada $x \in X$. Suponha também que exista $g \in L^1_\mu(X)$ satisfazendo

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Então $f \in L^1_\mu(X)$ e vale:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X |f_n - f| d\mu = 0$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Definição 2.1.19 *Seja V um espaço vetorial normado. Dizemos que V é uniformemente convexo se para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x, y \in V$ *satisfazendo* $||x||_V, ||y||_V \leq 1$ *e* $||x-y||_V > \varepsilon$ *então*

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|_V < 1 - \delta.$$

Teorema 2.1.5 *Se V é um espaço de Banach uniformemente convexo e* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ *é uma sequência tal que* $x_n \rightharpoonup x$ *e* $||x||_V \geq \limsup\limits_{n\to\infty} ||x_n||_V$ *então* $x_n \to x$ *em V.*

Observação 2.1.4 *Em particular, uma sequência que converge fracamente e converge na norma, converge forte.*

Definição 2.1.20 *Um subconjunto K em um espaço topológico é:*

(i) *compacto, se toda cobertura por abertos possui uma subcobertura finita;*

(ii) *relativamente sequencialmente compacto, se toda sequência generalizada em K tem pelo menos uma subsequência generalizada que converge para algum elemento de K;*

(iii) *relativamente compacto, se seu fecho é compacto.*

Denotamos por $Fin(V)$ a classe de todos os subconjuntos finitos em V.

Definição 2.1.21 *Um subconjunto K em um espaço de Banach real V é precompacto se dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $K_\varepsilon \in Fin(V)$*, ou equivalentemente* $K_\varepsilon \in Fin(K)$*, tal que K está incluído na união de todas as bolas fechadas com raio* ε *e cujos centros pertencem a* K_ε.

Teorema 2.1.6 *Um subconjunto em um espaço de Banach real é relativamente compacto se, e somente se, ele é precompacto.*

Definição 2.1.22 *Um subconjunto K em* $C([a,b];V)$ *é equicontínuo em* $t_0 \in [a,b]$ *se dada uma vizinhança U da origem em V existe* $\delta(U) > 0$ *tal que* $f(t) - f(t_0) \in U$*, para cada* $t \in [a,b]$*,* $|t - t_0| \leq \delta(U)$*, e uniformemente para* $f \in K$*. Um subconjunto K é equicontínuo em* $[a,b]$ *se ele é equicontínuo em cada* $t \in [a,b]$.

Teorema 2.1.7 *(Ascoli-Arzelá) Um subconjunto K em* $C([a,b];V)$ *é relativamente sequencialmente compacto se, e somente se, K é equicontínuo em* $[a,b]$ *e para cada* $t \in [a,b]$ $K(t) = \{f(t) : f \in K\}$ *é relativamente compacto em V.*

2.2 Espaços de Sobolev

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [3, 5, 8, 10].

2.2.1 O espaço $L^p(\Omega)$

Dada $f \in V^*$ e $u \in V$ usaremos a seguinte notação: $\langle f, u \rangle_{V^*,V} = f(u)$. Dado Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis à Lebesgue $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $x \mapsto |u(x)|^p$ é integrável em Ω, no sentido de Lebesgue. A norma de $u \in L^p(\Omega)$ é dada por

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis à Lebesgue e essencialmente limitadas em Ω, isto é, existe $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C$ para q.t. $x \in \Omega$. Cada constante C é denominada majorante essencial de $|u|$ e a norma de $u \in L^\infty(\Omega)$ é definida por

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C,\ q.t.\ x \in \Omega\} = \sup \operatorname{ess} |u|.$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, munido de sua respectiva norma torna-se um espaço de Banach.

Definição 2.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) | \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, \ldots, n \right\},$$

onde a derivada $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ é definida pela expressão

$$-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi = \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, e $C_0^\infty(\Omega)$ designa o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto. O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é Banach com a norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposição 2.2.1 *Os espaços $W^{1,p}(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$ são reflexivos para $1 < p < \infty$ e separáveis para $1 \leq p < \infty$.*

Proposição 2.2.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, limitado, conexo com fronteira suave e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$. Temos*

(i) *Se $1 \leq p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p')$ onde $\dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$;*

(ii) *Se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, \infty)$;*

(iii) *Se $p > n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$*

com imersões contínuas. Além disso, se $p > n$ temos para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq c||u||_{W^{1,p}(\Omega)}||x-y||^{\alpha}$$

para quase todo $x, y \in \Omega$, com $\alpha = 1 - \dfrac{n}{p}$ e c dependendo somente de Ω, p, n. Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.2.1 *(Rellich-Kondrachov) Suponha Ω limitado de classe C^1. Temos*

(i) *se $1 \leq p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p')$ onde $\dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$;*

(ii) *se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$;*

(iii) *se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$*

com imersões compactas. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com imersões compactas para todo $p \geq 1$.

Definição 2.2.2 *Seja $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ designa o fecho de $C_0^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Corolário 2.2.1 *(Desigualdade de Poincaré) Suponha que Ω é um aberto limitado. Então, existe uma constante C, dependendo de p e da medida de Ω, tal que*

$$||u||_{L^p} \leq C||\nabla u||_{L^p}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Em particular, a expressão $||\nabla u||_{L^p}$ é uma norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ que é equivalente a norma $||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$.

O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ munido da norma induzida por $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável para $1 \leq p < \infty$ e é reflexivo se $1 < p < \infty$.

Denotamos por $W^{-1,p'}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.

Se Ω é limitado, temos $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$, se $\frac{2n}{n+2} \leq p < +\infty$ com imersões densas e contínuas.

Se Ω não é limitado, temos $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$, se $\frac{2n}{n+2} \leq p \leq 2$.

Observação 2.2.1 *Segue do Teorema de Rellich-Kondrachov que $W_0^{1,p}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^2(\Omega)$.*

Lema 2.2.1 *Se $u \in L^p(\Omega)$, para todo $p \geq 1$, então $\lim\limits_{p \to \infty} ||u||_{L^p(\Omega)} = ||u||_{L^\infty(\Omega)}$.*

Lema 2.2.2 *(Desigualdade de Interpolação) Seja $1 \leq p \leq r \leq q$, $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ e $\alpha \in [0,1]$. Então,*

$$||u||_{L^r(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)}^{\alpha}||u||_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}.$$

2.2.2 O espaço $L^p(0,T;V)$

Definição 2.2.3 *Seja V um espaço de Banach e* $0 < T < \infty$.

(a) *O espaço* $C^m([0,T];V)$ *com* $m = 1,2,\ldots$ *consiste de todas as funções* $u : [0,T] \to V$ *que são m vezes diferenciáveis e cujas derivadas são contínuas em [0,T]. A norma neste espaço é dada por*

$$||u|| := \sum_{i=0}^{m} \max_{0 \le t \le T} ||u^{(i)}(t)||_V. \tag{2.1}$$

Aqui, apenas as derivadas a esquerda e as derivadas a direita precisam existir nos pontos $t = 0$ *e* $t = T$ *respectivamente. Na expressão acima,* $u^{(0)} = u$.

(b) *O espaço* $L^p(0,T;V)$ *com* $1 \le p < \infty$ *consiste de todas as funções mensuráveis* $u :]0,T[\to V$ *cuja norma*

$$||u||_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T ||u(t)||_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2.2}$$

Quando $p = \infty$, *denotamos por* $L^\infty(0,T;V)$ *o espaço vetorial das classes de funções* $u :]0,T[\to V$ *mensuráveis à Lebesgue e essencialmente limitadas em]0,T[, isto é, existe* $C > 0$ *tal que*

$$||u(t)||_V \le C, \quad q.t.\ t \in]0,T[$$

e a norma de $u \in L^\infty(0,T;V)$ *é definida por*

$$||u||_{L^\infty(0,T;V)} = \inf\{C; ||u(t)||_V \le C,\ q.t.\ t \in]0,T[\} = sup\,ess\ ||u(t)||_V.$$

Proposição 2.2.3 *Seja* $m = 0,1\ldots$ *e* $1 \le p < \infty$, V_1 *e* V_2 *espaços de Banach sobre* $\mathbb{F}$. *Então:*

(a) $C^m([0,T];V_1)$ *com a norma (2.1) é um espaço de Banach sobre* $\mathbb{F}$.

(b) $L^p(0,T;V_1)$ *com a norma (2.2) é um espaço de Banach sobre* $\mathbb{F}$.

(c) $C([0,T],V_1)$ *é denso em* $L^p(0,T;V_1)$ *e a imersão* $C([0,T],V_1) \subseteq L^p(0,T;V_1)$ *é contínua.*

(d) *O conjunto de todos os polinômios* $w : [0,T] \to V_1$, *isto é*

$$w(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

com $a_i \in V_1$ *para todo* $i = 0,1,\ldots,n$ *e* $n = 0,1,\ldots$ *é denso em* $C([0,T];V_1)$ *e* $L^p(0,T;V_1)$.

(e) *Se* V_1 *é um espaço de Hilbert com produto interno* $\langle \cdot,\cdot \rangle_{V_1}$, *então* $L^2(0,T;V_1)$ *é também um espaço de Hilbert com produto interno*

$$\langle u,v \rangle_{L^2(0,T;V_1)} = \int_0^T \langle u(t),v(t) \rangle_{V_1} dt.$$

(f) $L^p(0,T;V_1)$ *é separável caso* V_1 *seja separável e* $1 \le p < \infty$.

(g) *Se* $1 < p < \infty$ *e* V_1 *é uniformemente convexo então* $L^p(0,T;V_1)$ *é uniformemente convexo .*

(h) *Se* $V_1 \subseteq V_2$ *com imersão contínua, e* $1 \le q \le r \le \infty$ *então*

$$L^r(0,T;V_1) \subseteq L^q(0,T;V_2)$$

com imersão contínua.

Lema 2.2.3 *(Lema 4.4 de [2]) Seja $f(\cdot) \in L^1(0,T)$ e seja $j(\cdot)$ uma função não negativa absolutamente contínua em $[0,T]$ tal que*

$$\frac{d}{dt}j(t) + \alpha j^{\rho-1}(t) \leq k|f(t)| \textit{para q.t. } t \in (0,T), \tag{2.3}$$

onde $\alpha > 0$, $k > 0$ e $\rho > 1$. Suponha que $j(0) \leq s$ e $||f||_{1,T} \leq s^{\rho-1}$ $(s > 0)$, onde

$$||f||_{1,T} := \begin{cases} \sup\limits_{t\in[1,T]} \displaystyle\int_{t-1}^{t} |f(\tau)|\,d\tau & se 1 \leq T, \\ \displaystyle\int_0^T |f(\tau)|\,d\tau & se\ 0 < T < 1. \end{cases}$$

Então, existe uma função não-decrescente $M_{\alpha,k,\rho}(\cdot)$ dependendo de α, k, ρ tal que $j(t) \leq M_{\alpha,k,\rho}(s)s$, para todo $t \in [0,T]$.

Teorema 2.2.2 *Seja V um espaço de Banach e seja $u \in L^p(a,b;V)$, $1 \leq p \leq \infty$ e denote por $A^{1,p}([a,b];V)$ o espaço de todas as funções $v : [a,b] \to V$ absolutamente contínuas, diferenciáveis q.t.p em (a,b) e que $\dfrac{dv}{dt} \in L^p(a,b;V)$. São equivalentes:*

(i) *$u \in W^{1,p}([a,b];V)$;*

(ii) *Existe $u^o \in A^{1,p}([a,b];V)$ tal que $u(t) = u^o(t)$ para q.t.p $t \in (a,b)$. Além disso, $u' = \dfrac{du^o}{dt}$ q.t.p em (a,b).*

2.2.3 O espaço dual de $L^p(0,T;V)$ e a tripla de evolução

Vamos introduzir primeiramente a desigualdade de Hölder que é basica para muitas aplicações:

$$\int_0^T |\langle v(t),u(t)\rangle_{V^*,V}|dt \leq \left(\int_0^T ||v(t)||_{V^*}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T ||u(t)||_V^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.4}$$

Proposição 2.2.4 *Seja V um espaço de Banach. Então a desigualdade de Hölder (2.4) vale para todo $u \in L^p(0,T;V)$ e $v \in L^q(0,T;V^*)$ com $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.*

Proposição 2.2.5 *Seja V um espaço de Banach reflexivo e separável e seja $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Então:*

(a) *Para cada função $v \in L^q(0,T;V^*)$ existe um único funcional $\overline{v} \in X^*$, onde $X = L^p(0,T;V)$, com*

$$\langle \overline{v}, u\rangle_{X^*,X} = \int_0^T \langle v(t),u(t)\rangle_{V^*,V}dt$$

para todo $u \in X$.

(b) *Reciprocamente, para cada* $\overline{v} \in X^*$*, onde* $X = L^p(0,T;V)$*, corresponde um único* $v \in L^q(0,T;V^*)$ *satisfazendo* $\langle \overline{v}, u\rangle_{X^*,X} = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_{V^*,V} dt$*. Ambos os casos* $||\overline{v}||_{X^*} = ||v||_{L^q(0,T;V^*)}$.

(c) *O espaço de Banach* $L^p(0,T;V)$ *é reflexivo e separável.*

Proposição 2.2.6 *Seja* V *um espaço de Banach reflexivo e separável e* $1 < p,q < \infty$ *tais que* $p^{-1}+q^{-1} = 1$*, e* $0 \le t \le T < \infty$*. São verdadeiros:*

(a) *Se* $u \in L^p(0,T;V)$*, então para* $v^* \in V^*$

$$\left\langle v^*, \int_0^t u(s)ds \right\rangle_{V^*,V} = \int_0^t \langle v^*, u(s)\rangle_{V^*,V} ds.$$

(b) *Se* $u \in L^p(0,T;V^*)$*, então para* $v \in V$

$$\left\langle \int_0^t u(s)ds, v \right\rangle_{V^*,V} = \int_0^t \langle u(s), v\rangle_{V^*,V} ds.$$

(c) *Se* $u_n \to u$ *em* $L^p(0,T;V)$ *quando* $n \to \infty$*, então*

$$\int_0^t u_n(s)ds \to \int_0^t u(s)ds \ \text{ em } \ V$$

quando $n \to \infty$.

(d) *Se* $u_n \to u$ *em* $L^p(0,T;V)$ *e* $v_n \to v$ *em* $L^q(0,T;V^*)$ *quando* $n \to \infty$*, então*

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s)\rangle_{V^*,V} ds \to \int_0^t \langle v(s), u(s)\rangle_{V^*,V} ds$$

quando $n \to \infty$.

As afirmações (a), (b) e (c) são válidas para qualquer espaço de Banach V.

Definição 2.2.4 *Diremos que* $V \subseteq H \subseteq V^*$ *é uma tripla de evolução (ou tripla de Gelfand) se*

(a) V *é um espaço de Banach real, reflexivo e separável;*

(b) H *é um espaço de Hilbert real separável;*

(c) *A imersão* $V \subseteq H$ *é contínua e* V *é denso em* H.

Proposição 2.2.7 *Seja* $V \subseteq H \subseteq V^*$ *uma tripla de evolução. Então são verdadeiras:*

(a) *Para cada* $h \in H$ *existe um correspondente funcional linear contínuo* $\overline{h} : V \to \mathbb{R}$ *satisfazendo* $\langle \overline{h}, v\rangle_{V^*,V} = \langle h, v\rangle_H$ *para todo* $v \in V$.

(b) *A aplicação* $h \mapsto \overline{h}$ *de* H *em* V^* *é linear, injetiva e contínua.*

Proposição 2.2.8 *Seja* $V \subseteq H \subseteq V^*$ *uma tripla de evolução e seja* $1 < p < \infty$ *tal que* $p^{-1} + q^{-1} = 1$ *e* $0 < T < \infty$*. Então:*

(a) *O espaço* $W^{1,p}(0,T;V,H)$ *que é o conjunto de todas as funções* $u \in L^p(0,T;V)$ *com* $u' \in L^q(0,T;V^*)$ *é um espaço de Banach com a norma* $||u||_{W^{1,p}(0,T;V,H)} = ||u||_{L^p(0,T;V)} + ||u'||_{L^q(0,T;V^*)}$.

(b) *A imersão* $W^{1,p}(0,T;V,H) \subseteq C([0,T];H)$ *é contínua e vale*

$$\frac{1}{2}||u(t)||_H^2 - \frac{1}{2}||u(s)||_H^2 = \int_s^t \left\langle \frac{du}{d\tau}(\tau), u(\tau) \right\rangle_{V^*,V} d\tau$$

para todo $s,t \in [0,T]$ *com* $s < t$.

(c) *O conjunto de todos os polinômios* $w : [0,T] \to V$, *isto é,* $w(t) = a_o t + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ *com* $a_i \in V$ *para* $i = 1, 2\ldots, n$ *é denso em* $W^{1,p}(0,T;V,H)$.

(d) $C^\infty([0,T];H)$ *é denso em* $W^{1,p'}(0,T;V^*)$.

2.3 Funções convexas e subdiferenciais

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [3, 4, 9].

Definição 2.3.1 *Seja* V *um espaço de Banach com dual* V^*. *Uma função própria e convexa em* V *é uma função* $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ *para o qual existe* $u_o \in V$ *com* $\varphi(u_0) < +\infty$ *e satisfaz a desigualdade*

$$\varphi((1-t)u + tv) \leq (1-t)\varphi(u) + t\varphi(v)$$

para todo $u, v \in V$ *e* $t \in [0,1]$.

Definição 2.3.2 *A função* $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ *é dita ser semicontínua inferiormente (s.c.i) se*

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n)$$

para toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $u_n \to u$ *em* V.

Definição 2.3.3 *A função* $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ *é dita ser fracamente semicontínua inferiormente (f.s.c.i) se*

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n)$$

para toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $u_n \rightharpoonup u$ *em* V.

Lema 2.3.1 *Seja* φ *uma função convexa. Então* φ *é fracamente semicontínua inferiormente se, e somente se,* φ *é semicontínua inferiormente.*

Denotaremos por $\Phi(V)$ o conjunto de todas as funções $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ que são própria, s.c.i e convexa. Dada uma função $\varphi \in \Phi(V)$ denotamos por $D(\varphi)$, o domínio de φ, o conjunto

$$D(\varphi) = \{u \in V : \varphi(u) < \infty\}.$$

Vamos agora descrever algumas propriedades elementares das funções s.c.i e convexas.

Proposição 2.3.1 *Seja* $\varphi \in \Phi(V)$. *Então existem* $f \in V^*$ *e* $\beta \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\varphi(u) \geq \langle f, u \rangle_{V^*,V} + \beta$$

para todo $u \in V$.

Definição 2.3.4 *Dada uma função $\varphi \in \Phi(V)$, a aplicação $\partial\varphi : V \to V^*$ dada por*

$$\partial\varphi(u) = \{f \in V^* : \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u \rangle_{V^*,V}, \forall\, v \in D(\varphi)\}$$

é chamada a subdiferencial de φ. Denotamos $D(\partial\varphi) = \{u \in V : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$.

Vamos utilizar a seguinte notação $(u,v) \in \partial\varphi$ para expressar que $u \in D(\partial\varphi)$ e $v \in \partial\varphi(u)$.

Em particular, quando $V = H$, H um espaço de Hilbert e $\varphi \in \Phi(H)$, denotaremos a subdiferencial de φ por

$$\partial_H\varphi(u) = \{f \in H : \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v-u)_H, \forall\, v \in D(\varphi)\}$$

onde $(\cdot,\cdot)_H$ denota o produto interno em H.

Em geral, $\partial\varphi$ é um operador multívoco de V em V^* que pode ser visto como um subconjunto de $V \times V^*$.

Proposição 2.3.2 *Seja $\varphi \in \Phi(V)$. Então $D(\partial\varphi)$ é um subconjunto denso de $D(\varphi)$.*

Proposição 2.3.3 *(Proposição 1.1 em [11]) Considere a função $J \in L^p(t_0,t_1;V)$ dada por*

$$J(v) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} j(t,v(t))dt, & \text{se } \; j(\cdot,v(\cdot)) \in L^1(t_0,t_1) \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assuma que para cada $t \in (t_0,t_1)$ e cada $z \in V$ com $j(t,z) < \infty$, exista uma função $v \in L^p(t_0,t_1;V)$ tal que $v(t) = z$, $j(\cdot,v(\cdot)) \in L^1(t_0,t_1)$ e $\limsup_{s \to t^+} j(s,v(s)) \leq j(t,z)$. Seja $u \in L^p(t_0,t_1;V)$ tal que $j(\cdot,u(\cdot)) \in L^1(t_0,t_1)$ e $f \in L^{p'}(t_0,t_1;V^*)$. Então, $f \in \partial J(u)$ se, e somente se, $f(t) \in \partial j(t,u(t))$ para q.t. $t \in (t_0,t_1)$.

Se X e Y são dois espaços lineares, denotaremos por $X \times Y$ o produto cartesiano entre eles. Os elementos de $X \times Y$ serão representados por $[x,y]$ onde $x \in X$ e $y \in Y$.

Se A é um operador multívoco de X em Y, podemos identificar ele com o seu gráfico em $X \times Y$ que é dado por:

$$G(A) = \{[x,y] \in X \times Y : y \in Ax\}.$$

Reciprocamente, se $A \subset X \times Y$, definimos

(a) $Ax = \{y \in Y : [x,y] \in A\}$;

(b) $D(A) = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}$;

(c) $R(A) = \displaystyle\bigcup_{x \in D(A)} Ax$;

(d) $A^{-1} = \{[y,x] : [x,y] \in A\}$.

Desta maneira, podemos identificar os operadores de X em Y com seus gráficos em $X \times Y$ e assim estaremos tratando dos subconjuntos de $X \times Y$ em vez de operadores de X em Y.

Como exemplo de uma aplicação subdiferencial, considere H um espaço de Hilbert real (identificado com seu dual) com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $|\cdot|$ e seja A um operador linear auto-adjunto positivo em H. Então $A = \partial\varphi$ onde

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left|A^{\frac{1}{2}}x\right|^2 & , se \;\; x \in D(A^{\frac{1}{2}}) \\ +\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $A^{\frac{1}{2}}$ é a raiz quadrada do operador A.

Definição 2.3.5 *Seja V um espaço de Banach real, um operador $A : V \to V^*$ é dito ser monótono se para todo $u, v \in D(A)$*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{V^*, V} \geq 0.$$

Um operador monótono $A : V \to V^*$ é dito ser maximal monótono se ele não está propriamente contido em qualquer outro operador monótono de V em V^*.

Proposição 2.3.4 *Seja $A \subset V \times V^*$ um operador maximal monótono e seja $(u_n, v_n) \in A$ tal que $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ e $\limsup \langle v_n, u_n \rangle \leq \langle v, u \rangle$. Então, $(u, v) \in A$ e $\langle v_n, u_n \rangle \to \langle v, u \rangle$.*

Teorema 2.3.1 *Seja V um espaço de Banach real e $\varphi \in \Phi(V)$. Então $\partial\varphi : V \to V^*$ é um operador maximal monótono.*

Além disso, $\partial\varphi$ tem várias propriedades interessantes. Antes porém, vejamos a seguinte definição.

Definição 2.3.6 *Seja H um espaço de Hilbert e seja $\varphi \in \Phi(H)$. Denotamos por*

$$J_\lambda = (I + \lambda\partial_H\varphi)^{-1}$$

o resolvente de $\partial_H\varphi$ e por

$$(\partial_H\varphi)_\lambda = \tfrac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$$

a aproximação de Yosida de $\partial_H\varphi$, onde I é o operador identidade e $\lambda > 0$.

Proposição 2.3.5 *Seja H um espaço de Hilbert identificado com seu dual via Teorema da Representação de Riesz, então:*

(i) $||J_\lambda u - J_\lambda v|| \leq ||u - v||$, $\forall u, v \in D(\partial_H\varphi)$, $\lambda > 0$,

(ii) $||(\partial_H\varphi)_\lambda(u) - (\partial_H\varphi)_\lambda(v)|| \leq \lambda^{-1}||u - v||$, $\forall u, v \in D(\partial_H\varphi)$, $\lambda > 0$,

(iii) $(\partial_H\varphi)_\lambda(u) \in \partial_H\varphi(J_\lambda u)$ $\forall u \in D(\partial_H\varphi)$.

Definição 2.3.7 *Seja $\varphi \in \Phi(H)$. Defina, para todo $u \in H$,*

$$\varphi_\lambda(u) = \inf_{v \in H}\{\tfrac{1}{2\lambda}||u - v||_H^2 + \varphi(v)\}.$$

A função φ_λ é chamada de regularização de Moreau-Yosida de φ.

Proposição 2.3.6 *Seja* $\varphi \in \Phi(H)$. *Então,* φ_λ *é convexa, contínua, Fréchet-diferenciável e é caracterizada por*

$$\varphi_\lambda(u) = \tfrac{1}{2\lambda}||u - J_\lambda u||_H^2 + \varphi(J_\lambda u) = \tfrac{\lambda}{2}||(\partial_H \varphi)_\lambda(u)||_H^2 + \varphi(J_\lambda u).$$

Além disso, $\partial_H(\varphi_\lambda) = (\partial_H \varphi)_\lambda$, *onde* $\partial_H(\varphi_\lambda)$ *denota a subdiferencial (Fréchet-diferenciável) de* φ_λ *e vale a seguinte desigualdade*

$$\varphi(J_\lambda u) \leq \varphi_\lambda(u) \leq \varphi(u),$$

para todo $\lambda > 0$, $\varphi_\lambda(u) \to \varphi(u)$, *quando* $\lambda \to 0$, $\forall u \in H$.

Proposição 2.3.7 *Seja H um espaço de Hilbert. Então, para quaisquer* $u \in D(\partial_H \varphi)$ *e* $\lambda > 0$, $||(\partial_H \varphi)_\lambda(u)||_H \leq |\partial_H \varphi(u)| = \inf\{||v|| : v \in \partial_H \varphi(u)\}$.

Lema 2.3.2 *Seja H um espaço de Hilbert e* $\varphi \in \Phi(H)$ *e seja* $u \in W^{1,2}(0,T;H)$ *tal que* $u(t) \in D(\partial_H \varphi)$ *para q.t.* $t \in]0,T[$. *Suponha que exista* $g \in L^2(0,T;H)$ *tal que* $g(t) \in \partial_H \varphi(u(t))$ *para q.t.* $t \in]0,T[$. *Então a função* $t \mapsto \varphi(u(t))$ *é absolutamente contínua em [0,T] e vale a igualdade*

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \left(h(t), \frac{du}{dt}(t)\right)_H$$

para q.t. $t \in]0,T[$ *e para toda* $h(\cdot) \in \partial_H \varphi(u(\cdot))$.

Definição 2.3.8 *Seja H um espaço de Hilbert e* $\varphi \in \Phi(H)$. *Considere o seguinte problema de Cauchy com dado inicial* $u_o \in \overline{D(\varphi)}^H$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) \ ,0 < t < T \\ u(0) = u_o \end{cases} . \tag{2.5}$$

Uma função $u \in C([0,T];H)$ *é uma solução forte do problema (2.5) em* $[0,T]$ *se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $u : [0,T] \to H$ *é uma função absolutamente contínua em* $[0,T]$*;*

(ii) $u(0) = u_o$*;*

(iii) $u(t) \in D(\partial\varphi)$ *para q.t.* $t \in]0,T[$ *e existe uma função* $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ *satisfazendo:*

$$\frac{du}{dt}(t) + g(t) = f(t) \text{ em } H \text{ para q.t. } t \in]0,T[.$$

Proposição 2.3.8 *Seja H um espaço de Hilbert e* $\varphi \in \Phi(H)$. *Então, para cada* $u_o \in D(\varphi)$ *e* $f \in L^2(0,T;H)$ *existe uma única solução forte u do problema de Cauchy (2.5) satisfazendo:*

(i) $u(t) \in D(\partial\varphi)$ *para q.t.* $t \in]0,T[$*;*

(ii) $u \in W^{1,2}(0,T;H)$, $u(0) = u_o$*;*

(iii) $t \mapsto \varphi(u(t))$ *é absolutamente contínua em [0,T].*

Proposição 2.3.9 *Seja* $\varphi \in \Phi(H)$ *e seja* $B : [0,T] \times \overline{D(\varphi)}^H \to H$ *satisfazendo:*

(a) *existe* $w \geq 0$ *tal que* $||B(t,x_1) - B(t,x_2)||_H \leq w||x_1 - x_2||_H$ *para todo* $t \in [0,T]$ *e* $x_1, x_2 \in \overline{D(\varphi)}^H$*;*

(b) *para todo* $x \in \overline{D(\varphi)}^H$*, a aplicação* $t \mapsto B(t,x) \in L^2(0,T;H)$*.*

Então, para todo $u_o \in \overline{D(\varphi)}^H$ *existe uma única solução da equação*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi(u(t)) + B(t,u(t)) \ni 0 \text{ em } H, 0 < t < T \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

tal que $t^{\frac{1}{2}} \dfrac{du}{dt}(t) \in L^2(0,T;H)$*.*

Capítulo 3

Existência das soluções das inclusões diferenciais

Neste capítulo, tendo como base o artigo [1], apresentamos primeiramente, sob determinadas hipóteses, a existência de soluções fortes para uma inclusão diferencial governada pela diferença de operadores do tipo subdiferencial em V^* com V um espaço de Banach reflexivo. Posteriormente, veremos que com menos hipóteses podemos garantir a existência local de soluções fortes para o problema em questão.

3.1 Existência de soluções para o problema de Cauchy

Seja V um espaço de Banach real reflexivo e V^* seu espaço dual. Iremos assumir que existe um espaço de Hilbert real H identificado com seu dual via o Teorema de Riesz tal que

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*$$

em que $V \subset H$ e $H^* \subset V^*$ são imersões densas e contínuas.

Lembremos que dada $f \in V^*$ e $u \in V$ usaremos a seguinte notação: $\langle f, u\rangle_{V^*,V} = f(u)$.

Observação 3.1.1 *Note que $\langle u, v\rangle_{V^*,V} = (u, v)_H$ para todo $u \in H$ e $v \in V$, onde $(\cdot,\cdot)_H$ é o produto interno em H.*

Nesta seção estudamos a existência de soluções fortes do seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t) \text{ em } V^*, \;\; 0 < t < T \\ u(0) = u_o, \end{cases} . \tag{3.1}$$

onde $\partial\varphi^1, \partial\varphi^2 : V \to 2^{V^*}$ são operadores subdiferenciais de φ^1 e φ^2, respectivamente, em que $\varphi^1, \varphi^2 \in \Phi(V)$. Lembrando que 2^{V^*} denota o conjunto das partes de V^* exceto $\{\emptyset\}$.

Definição 3.1.1 *Uma função $u \in C([0,T];V^*)$ é uma solução forte do problema (3.1) em $[0,T]$ se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *$u : [0,T] \to V^*$ é uma função absolutamente contínua em $[0,T]$;*

(ii) *$u(t) \to u_0$ em H quando $t \to 0^+$;*

(iii) *$u(t) \in D(\partial\varphi^1) \cap D(\partial\varphi^2)$ para q.t. $t \in (0,T)$ e existem $g^i(t) \in \partial\varphi^i(u(t))$ $(i = 1,2)$ satisfazendo:*

$$\frac{du}{dt}(t) + g^1(t) - g^2(t) = f(t) \ \ em \ \ V^* \ \ para \ \ q.t. \ \ t \in \ \ (0,T). \tag{3.2}$$

Ao longo deste trabalho, para cada $i \in \mathbb{N}$, vamos denotar por C ou C_i constantes não negativas ($C_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots$) que não dependem dos elementos do conjunto ou espaço correspondente. Além disso, denotaremos por $\mathcal{L}$ o conjunto das funções monótonas não-decrescentes definidas em $[0,+\infty)$ com contradomínio $[0,+\infty)$. Ainda, para $p \in (1,\infty)$, p' denotará o expoente conjugado de p, isto é, $1/p + 1/p' = 1$.

Lema 3.1.1 *Seja p' o expoente conjugado de $p \in]1,\infty[$. Então para todo $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $\beta > 0$ temos*

$$ab \leq \beta a^p + \mathcal{M}_p(\beta) b^{p'},$$

onde $\mathcal{M}_p(\beta) = \{p'(p\beta)^{\frac{p'}{p}}\}^{-1}$.

Demonstração: Sejam $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $\beta > 0$. Pelo Desigualdade de Young (Lema 2.1.1) temos

$$\begin{aligned} ab = (p\beta)^{\frac{1}{p}} ab \frac{1}{(p\beta)^{\frac{1}{p}}} &\leq \frac{1}{p}\left[(p\beta)^{\frac{1}{p}} a\right]^p + \frac{1}{p'}\left[\frac{b}{(p\beta)^{\frac{1}{p}}}\right]^{p'} \\ &= \frac{1}{p} p\beta a^p + \frac{1}{p'} \frac{b^{p'}}{(p\beta)^{\frac{p'}{p}}} \\ &= \beta a^p + \mathcal{M}_p(\beta) b^{p'}. \end{aligned}$$

■

Para assegurar a existência de soluções fortes para (3.1) vamos introduzir as seguintes condições:

(A1) Existe $p \in (1,+\infty)$ tal que $||u||_V^p - C_1||u||_H^2 - C_2 \leq C_3\varphi^1(u), \forall u \in D(\varphi^1)$;

(A2) $D(\varphi^1) \subset D(\partial\varphi^2)$. Além disso, se $\{u_n\}$ é uma sequência tal que

$$\sup_{t \in [0,T]} \{\varphi^1(u_n(t)) + ||u_n(t)||_H\} + \int_0^T \left|\left|\frac{du_n(t)}{dt}\right|\right|_H^2 dt$$

é limitado, então para toda sequência $g_n(\cdot) \in \partial\varphi^2(u_n(\cdot))$, $\{g_n\}$ forma um subconjunto precompacto em $C([0,T];V^*)$;

(A3) Existe uma extensão $\widetilde{\varphi}^2 \in \Phi(H)$ de φ^2, isto é, $\widetilde{\varphi}^2(u) = \varphi^2(u)$, para todo $u \in V$, tal que

$$\varphi^1(J_\lambda u) \leq l_1(\varphi^1(u) + l_2(||u||_H)),$$

$\forall \lambda \in (0,1]$, $\forall u \in D(\varphi^1)$, onde $l_i \in \mathcal{L}$ $(i = 1,2)$ e J_λ denota o resolvente de $\partial_H\widetilde{\varphi}^2$, isto é, $J_\lambda = (I + \lambda\partial_H\widetilde{\varphi}^2)^{-1}$;

(A4) $\varphi^2(u) \leq k\varphi^1(u) + C_4||u||_H^2 + C_5$, $\forall u \in D(\varphi^1)$ para algum $0 \leq k < 1$.

Lema 3.1.2 *Seja $\varphi^1 \in \Phi(V)$. Então a função $\varphi^1_H : H \to (-\infty, +\infty]$ dada por*

$$\varphi^1_H(u) = \begin{cases} \varphi^1(u), & se\ u \in V \\ +\infty, & se\ u \in H - V \end{cases},$$

é própria, convexa e semicontínua inferiormente em H.

Demonstração: Claramente φ^1_H é própria e convexa em H. Mostremos que φ^1_H é semicontínua inferiormente em H. Com efeito, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ tal que $u_n \to u$ em H quando $n \to +\infty$ e considere $\alpha = \liminf \varphi^1_H(u_n)$. Se α é finito, então existe subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ tal que $\varphi^1_H(u_{n_k}) \to \alpha$ quando $n_k \to +\infty$. Por **(A1)**, segue que

$$||u_{n_k}||^p_V \leq C_1||u_{n_k}||^2_H + C_2 + C_3\varphi^1_H(u_{n_k})$$

e como (u_{n_k}) e $\varphi^1_H(u_{n_k})$ são convergentes temos que $||u_{n_k}||_V$ é limitada. Sendo V reflexivo, segue do Teorema 2.1.3 que existe uma subsequência $(u_{n_{k_j}}) \subset V$ de $\{u_{n_k}\}$ tal que $\left\{u_{n_{k_j}}\right\}$ converge fracamente para $v \in V$ quando $j \to +\infty$. Como $u_{n_{k_j}} \to u$ em H quando $j \to \infty$ temos que $u_{n_{k_j}} \rightharpoonup u$. Pela unicidade do limite fraco, $u = v$. Como φ^1 é semicontínua inferiormente concluímos que

$$\varphi^1_H(u) = \varphi^1(u) \leq \liminf \varphi^1(u_{n_{k_j}}) = \liminf \varphi^1_H(u_{n_{k_j}}) = \alpha.$$

Para o caso em que $\alpha = +\infty$ segue trivialmente que $\varphi^1_H(u) \leq \alpha$. Isto nos dá que φ^1_H é s.c.i e, portanto, $\varphi^1_H \in \Phi(H)$. ■

Observação 3.1.2 *Note que se para quaisquer $u \in D(\varphi^1_H)$ e $\lambda \in (0,1]$ tem-se*

$$\varphi^1_H(J_\lambda u) \leq \varphi^1_H(u) + C\lambda,$$

*então a condição **(A3)** é satisfeita para φ^1_H.*

*De fato, tomando $l_1 := I + C$ e l_2 a mesma que aparece em **(A3)** para φ_1 obtemos*

$$\varphi^1_H(J_\lambda u) \leq l_1(\varphi^1_H(u)) \leq l_1(\varphi^1_H(u) + l_2(||u||_H))$$

*e, portanto, **(A3)** é satisfeita para φ^1_H.*

O próximo resultado nos informa que a condição **(A2)** assegura a continuidade de φ^2 no seguinte sentido:

Proposição 3.1.1 *Assuma que **(A2)** seja verdadeira. Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $D(\varphi^1)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em V e suponha que $\varphi^1(u_n)$ seja limitado. Então, $\varphi^2(u_n) \to \varphi^2(u)$.*

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $D(\varphi^1)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em V quando $n \to +\infty$ e seja $\varphi^1(u_n)$ limitado. Tome uma subsequência qualquer de $\{u_n\}$ e a chame da mesma forma.

Como $u_n \rightharpoonup u$ em V e $\varphi^2 \in \Phi(V)$, pelo Lema 2.3.1 temos que φ^2 uma função fracamente semicontínua inferiormente em V. Assim,

$$\varphi^2(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} \varphi^2(u_n). \tag{3.3}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $g_n \in \partial\varphi^2(u_n)$ e considere $v_n(t) = u_n$ e $h_n(t) = g_n$, para todo $t \in [0,T]$. Então, vemos que

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\{\varphi^1(v_n(t))+||v_n(t)||_H\right\}=\sup_{t\in[0,T]}\left\{\varphi^1(u_n)+||u_n||_H\right\}=\varphi^1(u_n)+||u_n||_H$$

é limitado, pois $\left\{\varphi^1(u_n)\right\}$ é limitado e $||u_n||_H\leq C||u_n||_V<+\infty$, uma vez que $\{u_n\}$ é limitada em V, já que $u_n\rightharpoonup u$. Além disso, $dv_n/dt\equiv 0$ e $h_n(\cdot)\in\partial\varphi^2(v_n(\cdot))$.

Logo, por **(A2)**, $\{h_n\}$ forma um subconjunto precompacto em $C([0,T];V^*)$. Assim, podemos extrair uma subsequência $\{n'\}$ de $\{n\}$ tal que $h_{n'}\to h$ em $C([0,T];V^*)$, o que implica que $\left\{g_{n'}\right\}$ torna-se convergente em V^*.

Como, para cada $n'\in\mathbb{N}$, $g_{n'}\in\partial\varphi^2(u_{n'})$, temos

$$\varphi^2(u)-\varphi^2(u_{n'})\geq\langle g_{n'},u-u_{n'}\rangle_{V^*,V}$$

$$\Rightarrow\varphi^2(u_{n'})\leq\varphi^2(u)-\langle g_{n'},u-u_{n'}\rangle_{V^*,V}$$

$$\Rightarrow\varphi^2(u_{n'})\leq\varphi^2(u)+\langle g_{n'},u_{n'}-u\rangle_{V^*,V}\,,\qquad\forall u\in D(\varphi^2).$$

Passando o lim sup em ambos os lados da última desigualdade resulta que

$$\limsup_{n'\to+\infty}\varphi^2(u_{n'})\leq\varphi^2(u)+\lim_{n'\to+\infty}\langle g_{n'},u_{n'}-u\rangle_{V^*,V}=\varphi^2(u). \tag{3.4}$$

De (3.3) e (3.4), vem que

$$\limsup_{n'\to+\infty}\varphi^2(u_{n'})\leq\varphi^2(u)\leq\liminf_{n'\to+\infty}\varphi^2(u_{n'}).$$

Donde, $\varphi^2(u_{n'})\to\varphi^2(u)$ e, portanto, pelo Lema 2.1.2, temos que $\varphi^2(u_n)\to\varphi^2(u)$. ∎

O próximo teorema é o principal resultado desta dissertação. Ele garante a existência de solução forte para o problema (3.1) em $[0,T]$.

Teorema 3.1.1 *Assuma que **(A1)** – **(A4)** sejam satisfeitas. Então, para quaisquer $u_0\in D(\varphi^1)$ e $f\in W^{1,p'}(0,T;V^*)$ o problema (3.1) tem uma solução forte u em $[0,T]$ satisfazendo:*

$$\begin{cases} u\in C_w([0,T];V)\cap W^{1,2}(0,T;H),\\ u(t)\in D(\partial\varphi^1)\cap D(\partial\varphi^2)\ \ para\ \ q.t.\ \ t\in(0,T),\\ g^1\in L^2(0,T;V^*),\qquad g^2\in C([0,T];V^*),\\ \sup\limits_{t\in[0,T]}\varphi^1(u(t))<+\infty,\qquad \varphi^2(u(\cdot))\in C([0,T]),\end{cases} \tag{3.5}$$

onde g^i são subconjuntos de $\partial\varphi^i$ $(i=1,2)$ satisfazendo (3.2) e $C_w([0,T];V)$ denota o conjunto de todas as funções $u:[0,T]\to V$ que são fracamente contínuas em $[0,T]$.

Além disso, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\int_0^t\left|\left|\frac{du}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau+\varphi^1(u(t))+\varphi^2(u_0) &\leq \varphi^1(u_0)+\varphi^2(u(t))+\langle f(t),u(t)\rangle_{V^*,V}\\ &- \langle f(0),u_0\rangle_{V^*,V}-\int_0^t\left\langle\frac{df}{d\tau}(\tau),u(\tau)\right\rangle_{V^*,V}d\tau\end{aligned} \tag{3.6}$$

para todo $t\in[0,T]$.

Demonstração: O primeiro passo da prova é introduzir o problema de aproximação em H para o problema (3.1) da seguinte forma: considere a função $\varphi_H^1 : H \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$\varphi_H^1(u) = \begin{cases} \varphi^1(u), & se\ u \in V \\ +\infty, & se\ u \in H - V \end{cases},$$

em que $\varphi^1 \in \Phi(V)$. Pelo Lema 3.1.2, temos que $\varphi_H^1 \in \Phi(H)$.

Agora nosso problema de aproximação para o problema (3.1) é dado por

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt}(t) + \partial_H \varphi_H^1(u_\lambda(t)) - \partial_H \widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_\lambda(t)) \ni f_\lambda(t)\ em\ H,\ 0 < t < T \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}, \tag{3.7}$$

onde $f_\lambda \in C^1([0,T];H)$ tal que $f_\lambda \to f$ em $W^{1,p'}(0,T;V^*)$ quando $\lambda \to 0^+$, $\widetilde{\varphi}^2$ é a extensão de φ^2 em H dada em **(A3)** e $\partial_H \widetilde{\varphi}_\lambda^2$ denota a aproximação de Yosida de $\partial_H \widetilde{\varphi}^2$. Note que, pela Proposição 2.3.6, temos que $\partial_H \widetilde{\varphi}_\lambda^2 = \partial_H(\widetilde{\varphi}_\lambda^2)$. Além disso, pela Proposição 2.3.5, $\partial_H \widetilde{\varphi}_\lambda^2$ é lipschitziana contínua em H. Logo, pelas Proposições 2.3.8 e 2.3.9, existe uma única solução forte u_λ de (3.7) em $[0,T]$ satisfazendo:

$$u_\lambda \in W^{1,2}(0,T;H), \qquad u_\lambda(t) \in D(\partial_H \varphi_H^1)\ \ para\ \ q.t.\ \ t \in (0,T);$$
$$t \mapsto \varphi_H^1(u_\lambda(t))\ \text{ é absolutamente contínua em [0,T].}$$

Além disso, por **(A2)**, temos $D(\varphi^1) \subset D(\partial\varphi^2) \subset D(\varphi^2)$. Assim, $D(\varphi_H^1) \subset D(\widetilde{\varphi}_\lambda^2)$. Logo, pela Proposição 2.3.8, segue que

$$t \mapsto \widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_\lambda(t))\ \text{ é absolutamente contínua em [0,T].}$$

Aqui podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\varphi^1 \geq 0$. Realmente, como $\varphi_H^1 \in \Phi(H)$, pela Proposição 2.3.1, existem $v_0 \in H$ e $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi_H^1(u) \geq (v_0,u)_H + \mu_0$, para todo $u \in H$. Sendo assim, escolhemos a função não-negativa $\widehat{\varphi}^1(u) := \varphi^1(u) - (v_0,u)_H - \mu_0$. Como $\varphi_H^1(u) - (v_0,u)_H - \mu_0 \geq 0$ e para todo $u \in V$, $\varphi^1(u) = \varphi_H^1(u)$ segue que $\widehat{\varphi}^1(u) \geq 0$, para todo $u \in V$.

Além disso, a função não-negativa $\widehat{\varphi}^1$ satisfaz:

(a) $D(\widehat{\varphi}^1) = D(\varphi^1)$;

(b) $\partial\widehat{\varphi}^1(u) = \partial\varphi^1(u) - v_o$, $\forall u \in D(\partial\varphi^1)$;

(c) $D(\partial\widehat{\varphi}^1) = D(\partial\varphi^1)$.

Com efeito, seja $x \in D(\varphi^1)$, então temos que $\varphi^1(x) < \infty$. Logo $\widehat{\varphi}^1(x) < \infty$, e portanto $x \in D(\widehat{\varphi}^1)$. Por outro lado seja $x \in D(\widehat{\varphi}^1)$. Então $\widehat{\varphi}^1(x) < \infty$, logo cada componente de $\widehat{\varphi}^1$ deve ser finita, e assim $\varphi^1(x) < \infty$; o que implica $x \in D(\varphi^1)$, e isto finaliza a prova da letra (a).

Para provar a letra (b), seja $f \in \partial\widehat{\varphi}^1(u)$. Neste caso, $f \in H$ e $\widehat{\varphi}^1(v) - \widehat{\varphi}^1(u) \geq (f, v-u)_H$, para todo $v \in D(\widehat{\varphi}^1)$. Da letra (a) temos que $v \in D(\varphi^1)$. Assim, para todo $v \in D(\varphi^1)$ vem que

$$\begin{aligned} (f, v-u)_H \leq \widehat{\varphi}^1(v) - \widehat{\varphi}^1(u) &= \varphi^1(v) - (v_0,v)_H - \mu_0 - \varphi^1(u) + (v_0,u)_H + \mu_0 \\ &= \varphi^1(v) - \varphi^1(u) - (v_0, v-u). \\ \Rightarrow \varphi^1(v) - \varphi^1(u) &\geq (f + v_0, v-u)_H. \end{aligned}$$

Considerando $g = f + v_0$ temos que $g \in H$ e $\varphi^1(v) - \varphi^1(u) \geq (g, v-u)_H$. Logo $\partial\widehat{\varphi}^1(u) \subset \partial\varphi^1(u) - v_0$. Seja agora $f \in \partial\varphi^1(u) - v_0$, logo $f = g - v_0$ sendo que $g \in H$ e $\varphi^1(v) - \varphi^1(u) \geq (g, v-u)_H$ para todo $v \in D(\varphi^1)$. Note que

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}^1(v) - \widehat{\varphi}^1(u) &= \varphi^1(v) - (v_0, v)_H - \mu_0 - (\varphi^1(u) - (v_0, u)_H - \mu_0) \\
&= \varphi^1(v) - \varphi^1(u) - (v_0, v)_H + (v_0, u)_H \\
&\geq (g, v-u)_H - (v_0, v-u)_H \\
&= (g - v_0, v-u)_H \\
&= (f, v-u)_H
\end{aligned}$$

e, portanto, $\partial\varphi^1(u) - v_0 \subset \partial\widehat{\varphi}^1(u)$.

E a letra (c) segue diretamente das letras (a) e (b). Assim, o problema (3.1) é equivalente a seguinte equação de evolução com condição inicial $u(0) = u_0$

$$\tfrac{du}{dt}(t) + \partial\widehat{\varphi}^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t) - v_0 \text{ em } V^*,\ 0 < t < T.$$

Além disso, note que as condições de **(A1)** até **(A4)** ainda continuam válidas substituindo φ^1 por $\widehat{\varphi}^1$. De fato, suponha que **(A1)** – **(A4)** sejam verdadeiros para φ^1. Segue que

(A1) Seja $u \in D(\widehat{\varphi}^1)$. Temos

$$\begin{aligned}
C_3\widehat{\varphi}^1(u) &= C_3\left[\varphi^1(u) - (v_0, u)_H - \mu_0\right] \\
&= C_3\varphi^1(u) - C_3\left[(v_0, u)_H + \mu_0\right] \\
&\geq ||u||_V^p - C_1||u||_H^2 - C_2 - C_3\left[(v_0, u)_H + \mu_0\right] \\
&\geq ||u||_V^p - C_1||u||_H^2 - C_2 - C_3||v_0||_H||u||_H - C_3\mu_0.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young, obtemos

$$C_3\widehat{\varphi}^1(u) \geq ||u||_V^p - C_1||u||_H^2 - C_2 - C_3||v_0||_H\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}||u||_H^2\right) - C_3\mu_0.$$

Assim,

$$C_3\widehat{\varphi}^1(u) \geq ||u||_V^p - \left(C_1 + \tfrac{C_3}{2}||v_0||_H\right)||u||_H^2 - \left(C_2 + \tfrac{C_3}{2}||v_0||_H\right) - C_3\mu_0$$

Se $\mu_0 < 0$, então $-C_3\mu_0 \geq 0$. Logo, da última desigualdade vem que $C_3\widehat{\varphi}^1(u) \geq ||u||_V^p - \left(C_1 + \tfrac{C_3}{2}||v_0||_H\right)||u||_H^2 - \left(C_2 + \tfrac{C_3}{2}||v_0||_H\right)$. Agora, se $\mu_0 \geq 0$, então $C_3\widehat{\varphi}^1(u) \geq ||u||_V^p - \widetilde{C}_1||u||_H^2 - \widetilde{C}_2$, onde $\widetilde{C}_1 = \left(C_1 + \tfrac{C_3}{2}||v_0||_H\right) \geq 0$ e $\widetilde{C}_2 = \left(C_2 + \tfrac{C_3}{2}||v_0||_H + C_3\mu_0\right) \geq 0$ e, portanto, **(A1)** segue com $\widehat{\varphi}^1$.

(A2) Como $D(\widehat{\varphi}^1) = D(\varphi^1)$, temos $D(\widehat{\varphi}^1) \subset D(\partial\varphi^2)$. Além disso, se $\{u_n\}$ é uma sequência tal que $\sup\limits_{t\in[0,T]}\left\{\widehat{\varphi}^1(u_n(t)) + ||u_n(t)||_H\right\} + \displaystyle\int_0^T \left\|\frac{du_n}{dt}(t)\right\|_H^2 dt$ é limitado, então $\sup\limits_{t\in[0,T]}\left\{\varphi^1(u_n(t)) - (v_0, u_n(t))_H - \mu_0 + ||u_n(t)||_H\right\} + \displaystyle\int_0^T \left\|\frac{du_n}{dt}(t)\right\|_H^2 dt$ é limitado, donde $\sup\limits_{t\in[0,T]}\left\{\varphi^1(u_n(t)) + ||u_n(t)||_H\right\} + \displaystyle\int_0^T \left\|\frac{du_n}{dt}(t)\right\|_H^2 dt$ é limitado. Usando **(A2)** para a φ^1 segue que para toda sequência $g_n(\cdot) \in \partial\varphi^2(u_n(\cdot))$ $\{g_n\}$ forma um subconjunto precompacto em $C([0,T]; V^*)$. Logo, **(A2)** é válido com $\widehat{\varphi}^1$ no lugar de φ^1.

(A3) Sejam $u \in D(\widehat{\varphi}^1_H)$ e $\lambda \in (0,1]$. Temos $\widehat{\varphi}^1_H(J_\lambda u) = \widehat{\varphi}^1(J_\lambda u) = \varphi^1(J_\lambda u) - (v_0, J_\lambda u)_H - \mu_0$. Pela Proposição 2.3.6, $\varphi^1(J_\lambda u) \leq \varphi^1(u)$. Assim,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}^1_H(J_\lambda u) &\leq \varphi^1(u) - (v_0, J_\lambda u)_H - \mu_0 = \varphi^1(u) - (v_0, u)_H - \mu_0 + (v_0, u)_H - (v_0, J_\lambda u)_H \\ &= \widehat{\varphi}^1(u) + (v_0, u - J_\lambda u)_H \leq \widehat{\varphi}^1(u) + ||v_0||_H ||u - J_\lambda u||_H \\ &= \widehat{\varphi}^1(u) + \lambda ||v_0||_H ||(\partial_H \widetilde{\varphi}^2)_\lambda(u)||_H. \end{aligned}$$

Agora pela Proposição 2.3.7, $||(\partial_H \widetilde{\varphi}^2)_\lambda(u)||_H \leq |(\partial_H \widetilde{\varphi}^2)(u)|$. Donde, segue que

$$\widehat{\varphi}^1_H(J_\lambda u) \leq \widehat{\varphi}^1(u) + \lambda ||v_0||_H |(\partial_H \widetilde{\varphi}^2)(u)|$$

Em particular, tomando $w_0 \in \partial_H \widetilde{\varphi}^2(u)$ e usando o fato de que $|(\partial_H \widetilde{\varphi}^2)(u)|$ $= \inf\left\{||v||_H : v \in \partial_H \widetilde{\varphi}^2(u)\right\}$, temos que $|(\partial_H \widetilde{\varphi}^2)(u)| \leq ||w_0||_H$. Daí,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}^1_H(J_\lambda u) &\leq \widehat{\varphi}^1(u) + \lambda ||v_0||_H ||w_0||_H \\ &= \widehat{\varphi}^1_H(u) + \lambda ||v_0||_H ||w_0||_H \\ &= \widehat{\varphi}^1_H(u) + C\lambda, \end{aligned}$$

onde $C = ||v_0||_H ||w_0||_H > 0$. Logo, pela Observação 3.1.2, **(A3)** é válida com φ^1 substituído por $\widehat{\varphi}^1$.

(A4) Sejam $u \in D(\widehat{\varphi}^1)$. Temos

$$k\widehat{\varphi}^1(u) = k[\varphi^1(u) - (v_0, u)_H - \mu_0] = k\varphi^1(u) - k[(v_0, u)_H + \mu_0]$$

Pela condição **(A4)** com φ^1 e usando as desigualdades de Cauchy-Scwharz e de Young segue que

$$\begin{aligned} k\widehat{\varphi}^1(u) &\geq \varphi^2(u) - C_4 ||u||^2_H - C_5 - k(v_0, u)_H - k\mu_0 \\ &\geq \varphi^2(u) - C_4 ||u||^2_H - C_5 - k||v_0||_H ||u||_H - k\mu_0 \\ &\geq \varphi^2(u) - C_4 ||u||^2_H - C_5 - k||v_0||_H \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}||u||^2_H\right) - k\mu_0 \\ &= \varphi^2(u) - \left(C_4 + \frac{k}{2}||v_0||_H\right) ||u||^2_H - \left(C_5 + \frac{k}{2}||v_0||_H + k\mu_0\right) \\ &= \varphi^2(u) - \widetilde{C}_4 ||u||^2_H - \widetilde{C}_5, \end{aligned}$$

onde $\widetilde{C}_4 = C_4 + \frac{k}{2}||v_0||_H \geq 0$ e $\widetilde{C}_5 = C_5 + \frac{k}{2}||v_0||_H + k\mu_0 \geq 0$, donde segue **(A4)** com $\widehat{\varphi}^1$.

Agora vamos estabelecer três lemas técnicos que serão utilizados no decorrer da demonstração deste teorema. Eles fornecem estimativas na solução de (3.7).

Lema 3.1.3 *Existe uma constante M_1, independente de λ, que satisfaz as seguintes estimativas:*

$$\sup_{t \in [0,T]} ||u_\lambda(t)||_H \leq M_1, \tag{3.8}$$

$$\sup_{t \in [0,T]} \varphi^1(u_\lambda(t)) \leq M_1, \tag{3.9}$$

$$\int_0^T \left|\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|\right|^2_H dt \leq M_1, \tag{3.10}$$

$$\sup_{t \in [0,T]} ||u_\lambda(t)||_V \leq M_1. \tag{3.11}$$

Demonstração: Sendo u_λ solução forte do problema (3.7), existem $g^1_\lambda(t) \in \partial_H \varphi^1_H(u_\lambda(t))$ e $\widetilde{g}^2_\lambda(t) \in \partial_H \widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t))$ tais que

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + g^1_\lambda(t) - \widetilde{g}^2_\lambda(t) = f_\lambda(t) \ \ em\, H, \qquad 0 < t < T. \tag{3.12}$$

Multiplicando (3.12) por $\frac{du_\lambda(t)}{dt}$, obtemos

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|^2_H + \left(g^1_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)\right)_H - \left(\widetilde{g}^2_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)\right)_H = \left(f_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)\right)_H. \tag{3.13}$$

Pelo Lema 2.3.2, temos $\left(g^1_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)\right)_H = \frac{d}{dt}\varphi^1_H(u_\lambda(t))$ e $\left(\widetilde{g}^2_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)\right)_H = \frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t))$. Substituindo em (3.13), vem que

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|^2_H + \frac{d}{dt}\varphi^1_H(u_\lambda(t)) - \frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t)) = \left(f_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)\right)_H. \tag{3.14}$$

Integrando (3.14) de 0 até t, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \left\|\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right\|^2_H d\tau + \int_0^t \frac{d}{d\tau}\varphi^1_H(u_\lambda(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{d}{d\tau}\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t))d\tau \ &= \ \int_0^t \left(f_\lambda(\tau), \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right)_H d\tau \\ &= \ \int_0^t \left\langle f_\lambda(\tau), \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau.\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, resulta que

$$\int_0^t \left\|\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right\|^2_H d\tau + \varphi^1(u_\lambda(t)) - \varphi^1(u_0) - \widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t)) + \widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_0) = \int_0^t \left\langle f_\lambda(\tau), \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau. \tag{3.15}$$

Como,

$$\begin{aligned}\int_0^t \left\langle f_\lambda(\tau), \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau \ \ &+ \ \ \int_0^t \left\langle \frac{df_\lambda(\tau)}{d\tau}, u_\lambda(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau = \int_0^t \frac{d}{d\tau}\left\langle f_\lambda(\tau), u_\lambda(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau \\ &= \ \ \left\langle f_\lambda(t), u_\lambda(t)\right\rangle_{V^*,V} - \left\langle f_\lambda(0), u_0\right\rangle_{V^*,V},\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\int_0^t \left\langle f_\lambda(\tau), \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau \ &= \ \left\langle f_\lambda(t), u_\lambda(t)\right\rangle_{V^*,V} - \left\langle f_\lambda(0), u_0\right\rangle_{V^*,V} \\ &- \ \int_0^t \left\langle \frac{df_\lambda(\tau)}{d\tau}, u_\lambda(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau.\end{aligned}$$

Substituindo a última igualdade em (3.15), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \left\|\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right\|^2_H d\tau + \varphi^1(u_\lambda(t)) \ \ &+ \ \ \widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_0) = \varphi^1(u_0) + \widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t)) + \left\langle f_\lambda(t), u_\lambda(t)\right\rangle_{V^*,V} \\ &- \ \ \left\langle f_\lambda(0), u_0\right\rangle_{V^*,V} - \int_0^t \left\langle \frac{df_\lambda(\tau)}{d\tau}, u_\lambda(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Da Proposição 2.3.6 tiramos que $\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t)) \leq \widetilde{\varphi}^2(u_\lambda(t))$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left|\left|\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \varphi^1(u_\lambda(t)) + \widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_0) &\leq \varphi^1(u_0) + \widetilde{\varphi}^2(u_\lambda(t)) + \langle f_\lambda(t), u_\lambda(t)\rangle_{V^*,V} \\
&- \langle f_\lambda(0), u_0\rangle_{V^*,V} - \int_0^t \left\langle \frac{df_\lambda(\tau)}{d\tau}, u_\lambda(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau \\
&\leq \varphi^1(u_0) + \widetilde{\varphi}^2(u_\lambda(t)) + ||f_\lambda(t)||_{V^*}||u_\lambda(t)||_V \\
&+ ||f_\lambda(0)||_{V^*}||u_0||_V + \int_0^t \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*} ||u_\lambda(\tau)||_V d\tau.
\end{aligned}$$

Por **(A1)** e **(A4)** vem que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left|\left|\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \varphi^1(u_\lambda(t)) + \widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_0) \leq \\
&\varphi^1(u_0) + k\varphi^1(u_\lambda(t)) + C_4||u_\lambda(t)||_H^2 + C_5 + ||f_\lambda(t)||_{V^*}\left\{C_3\varphi^1(u_\lambda(t)) + C_1||u_\lambda(t)||_H^2 + C_2\right\}^{1/p} \\
+ \; &||f_\lambda(0)||_{V^*}||u_0||_V + \int_0^t \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}\left\{C_3\varphi^1(u_\lambda(\tau)) + C_1||u_\lambda(\tau)||_H^2 + C_2\right\}^{1/p} d\tau.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left|\left|\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + (1-k)\varphi^1(u_\lambda(t)) \leq \varphi^1(u_0) - \widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_0) + C_4||u_\lambda(t)||_H^2 + C_5 \\
+ \; &||f_\lambda(t)||_{V^*}\left\{C_3\varphi^1(u_\lambda(t)) + C_1||u_\lambda(t)||_H^2 + C_2\right\}^{1/p} + ||f_\lambda(0)||_{V^*}||u_0||_V \\
+ \; &\int_0^t \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}\left\{C_3\varphi^1(u_\lambda(\tau)) + C_1||u_\lambda(\tau)||_H^2 + C_2\right\}^{1/p} d\tau \\
\leq \; &\varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_0)| + C_4||u_\lambda(t)||_H^2 + C_5 + ||f_\lambda(t)||_{V^*}\left\{C_3\varphi^1(u_\lambda(t)) + C_1||u_\lambda(t)||_H^2 + C_2\right\}^{1/p} \\
+ \; &||f_\lambda(0)||_{V^*}||u_0||_V + \int_0^t \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}\left\{C_3\varphi^1(u_\lambda(\tau)) + C_1||u_\lambda(\tau)||_H^2 + C_2\right\}^{1/p} d\tau.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1.1, tomando $a = \left\{C_3\varphi^1(u_\lambda(t)) + C_1||u_\lambda(t)||_H^2 + C_2\right\}^{1/p} \geq 0$, $b = ||f_\lambda(t)||_{V^*} \geq 0$ e $\beta = \frac{1-k}{2C_3} > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left|\left|\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + (1-k)\varphi^1(u_\lambda(t)) \leq \\
&\varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_0)| + C_4||u_\lambda(t)||_H^2 + C_5 + \mathcal{M}_p(\beta)||f_\lambda(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{(1-k)}{2C_3}C_3\varphi^1(u_\lambda(t)) \\
+ \; &\frac{(1-k)}{2C_3}C_1||u_\lambda(t)||_H^2 + \frac{(1-k)}{2C_3}C_2 + ||f_\lambda(0)||_{V^*}||u_0||_V \\
+ \; &\int_0^t \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}\left\{C_3\varphi^1(u_\lambda(\tau)) + C_1||u_\lambda(\tau)||_H^2 + C_2\right\}^{1/p} d\tau.
\end{aligned}$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \left|\left|\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \frac{(1-k)}{2}\varphi^1(u_\lambda(t)) \leq \\
&\varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_0)| + C_4||u_\lambda(t)||_H^2 + C_5 + \mathcal{M}_p(\beta)||f_\lambda(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{(1-k)}{2C_3}C_1||u_\lambda(t)||_H^2 \\
+ \quad & \frac{(1-k)}{2C_3}C_2 + ||f_\lambda(0)||_{V^*}||u_0||_V + \int_0^t \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*} \left\{C_3\varphi^1(u_\lambda(\tau)) + C_1||u_\lambda(\tau)||_H^2 + C_2\right\}^{1/p} d\tau.
\end{aligned}
$$

Novamente pelo Lema 3.1.1 com $a = \left\{C_3\varphi^1(u_\lambda(t)) + C_1||u_\lambda(t)||_H^2 + C_2\right\}^{1/p} \geq 0$, $b = \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*} \geq 0$ e $\beta_1 = \frac{1}{C_3}$, resulta que

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \left|\left|\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \frac{(1-k)}{2}\varphi^1(u_\lambda(t)) \quad \leq \quad & \varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_0)| + C_4||u_\lambda(t)||_H^2 + C_5 \\
+ \quad & \mathcal{M}_p(\beta)||f_\lambda(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{(1-k)C_1}{2C_3}||u_\lambda(t)||_H^2 + \frac{(1-k)}{2C_3}C_2 \\
+ \quad & ||f_\lambda(0)||_{V^*}||u_0||_V + \mathcal{M}_p(\beta_1)\int_0^t \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau \\
+ \quad & \int_0^t \varphi^1(u_\lambda(\tau))d\tau + \int_0^t \frac{C_1}{C_3}||u_\lambda(\tau)||_H^2 d\tau + \int_0^t \frac{C_2}{C_3}d\tau.
\end{aligned}
$$

Agora, pela Desigualdade de Young, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \left|\left|\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \frac{(1-k)}{2}\varphi^1(u_\lambda(t)) \quad \leq \quad & \varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_0)| + C_4||u_\lambda(t)||_H^2 + C_5 \\
+ \quad & \mathcal{M}_p(\beta)||f_\lambda(t)||_{V^*}^{p'} + \frac{(1-k)C_1}{2C_3}||u_\lambda(t)||_H^2 + \frac{(1-k)}{2C_3}C_2 \\
+ \quad & \frac{1}{p'}||f_\lambda(0)||_{V^*}^{p'} + \frac{1}{p}||u_0||_V^p + \mathcal{M}_p(\beta_1)\int_0^t \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau \\
+ \quad & \int_0^t \varphi^1(u_\lambda(\tau))d\tau + \frac{C_1}{C_3}\int_0^t ||u_\lambda(\tau)||_H^2 d\tau + \int_0^t \frac{C_2}{C_3}d\tau.
\end{aligned}
$$

Como $\int_0^t \frac{C_2}{C_3}d\tau = \frac{C_2}{C_3}t \leq \frac{C_2}{C_3}T$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \left|\left|\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \frac{(1-k)}{2}\varphi^1(u_\lambda(t)) \\
\leq \quad & C\left\{||u_0||_V^p + \varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_0)| + C_2 + C_5 + ||f_\lambda(t)||_{V^*}^{p'} + ||f_\lambda(0)||_{V^*}^{p'} + \int_0^t \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right\} \\
+ \quad & \left[C_4 + \frac{(1-k)C_1}{2C_3}\right]||u_\lambda(t)||_H^2 + C\int_0^t \left\{\varphi^1(u_\lambda(t)) + ||u_\lambda(t)||_H^2\right\} d\tau.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left|\left|\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \frac{(1-k)}{2}\varphi^1(u_\lambda(t)) \\
\leq\ & C\left\{||u_0||_V^p + \varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_0)| + C_2 + C_5 + \sup_{\tau\in[0,t]} ||f_\lambda(\tau)||_{V^*}^{p'} + \int_0^t \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right\} \\
+\ & \left[C_4 + \frac{(1-k)C_1}{2C_3}\right]||u_\lambda(t)||_H^2 + C\int_0^t \left\{\varphi^1(u_\lambda(\tau)) + ||u_\lambda(\tau)||_H^2\right\} d\tau. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Note agora que $\frac{d}{dt}||u_\lambda(t)||_H \leq \left|\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|\right|_H$. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}||u_\lambda(t)||_H &= \frac{d}{dt}\{(u_\lambda(t),u_\lambda(t))_H\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\{(u_\lambda(t),u_\lambda(t))_H\}^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dt}(u_\lambda(t),u_\lambda(t))_H \\
&= \frac{1}{2}\{(u_\lambda(t),u_\lambda(t))_H\}^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{d}{dt}u_\lambda(t),u_\lambda(t)\right)_H + \left(u_\lambda(t),\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right)_H\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{||u_\lambda(t)||_H}2\left(\frac{d}{dt}u_\lambda(t),u_\lambda(t)\right)_H \\
&\leq \frac{1}{||u_\lambda(t)||_H}\left|\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|\right|_H ||u_\lambda(t)||_H = \left|\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|\right|_H.
\end{aligned}$$

Usando o fato anterior, para qualquer $\mu > 0$, vem que

$$\mu\frac{d}{dt}||u_\lambda(t)||_H^2 = 2\mu||u_\lambda(t)||_H\frac{d}{dt}||u_\lambda(t)||_H \leq 2\mu||u_\lambda(t)||_H\left|\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|\right|_H.$$

Pela Desigualdade de Young, resulta

$$\begin{aligned}
\mu\frac{d}{dt}||u_\lambda(t)||_H^2 &\leq 2\left[\frac{1}{2}\mu^2||u_\lambda(t)||_H^2 + \frac{1}{2}\left|\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|\right|_H^2\right] \\
&= \mu^2||u_\lambda(t)||_H^2 + \left|\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|\right|_H^2, \qquad \forall\mu > 0. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mu\left(||u_\lambda(t)||_H^2 - ||u_0||_H^2\right) = \mu\int_0^t \frac{d}{d\tau}||u_\lambda(\tau)||_H^2 d\tau \leq \mu^2\int_0^t ||u_\lambda(\tau)||_H^2 d\tau + \int_0^t \left|\left|\frac{du_\lambda}{dt}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau$$

$$\Rightarrow \mu||u_\lambda(t)||_H^2 - \mu||u_0||_H^2 - \mu^2\int_0^t ||u_\lambda(t)||_H^2 d\tau \leq \int_0^t \left|\left|\frac{du_\lambda}{dt}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau.$$

De (3.17) temos

$$\begin{aligned}
&\mu||u_\lambda(t)||_H^2 - \mu||u_0||_H^2 - \mu^2\int_0^t ||u_\lambda(\tau)||_H^2 d\tau + \frac{(1-k)}{2}\varphi^1(u_\lambda(t)) \\
\leq\ & \int_0^t \left|\left|\frac{du_\lambda}{dt}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \frac{(1-k)}{2}\varphi^1(u_\lambda(t)) \\
\leq\ & C\left\{||u_0||_V^p + \varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_0)| + C_2 + C_5 + \sup_{\tau\in[0,t]} ||f_\lambda(\tau)||_{V^*}^{p'} + \int_0^t \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right\} \\
+\ & \left[C_4 + \frac{(1-k)}{2C_3}C_1\right]||u_\lambda(t)||_H^2 + C\int_0^t \left\{\varphi^1(u_\lambda(\tau)) + ||u_\lambda(\tau)||_H^2\right\} d\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & \left[\mu - C_4 - \frac{(1-k)}{2C_3}C_1\right]||u_\lambda(t)||_H^2 + \frac{(1-k)}{2}\varphi^1(u_\lambda(t)) \\
\leq \;& \mu||u_0||_H^2 + \mu^2\int_0^t ||u_\lambda(t)||_H^2 d\tau \\
+ \;& C\left\{||u_0||_V^p + \varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_0)| + C_2 + C_5 + \sup_{\tau\in[0,t]}||f_\lambda(\tau)||_{V^*}^{p'} + \int_0^t \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\right\} \\
+ \;& C\int_0^t \left\{\varphi^1(u_\lambda(\tau)) + ||u_\lambda(\tau)||_H^2\right\} d\tau.
\end{aligned}
$$

Escolhendo $\mu = C_4 + \frac{(1-k)}{2C_3}C_1 + 1$, da expressão anterior segue que

$$
\begin{aligned}
||u_\lambda(t)||_H^2 + \frac{(1-k)}{2}\varphi^1(u_\lambda(t)) \;\leq\;& \widetilde{C}\int_0^t \left\{\varphi^1(u_\lambda(t)) + ||u_\lambda(t)||_H^2\right\} d\tau \\
+\;& \widetilde{C}\Big\{||u_0||_H^2 + ||u_0||_V^p + \varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_0)| + C_2 + C_5 \\
+\;& \sup_{\tau\in[0,t]}||f_\lambda(\tau)||_{V^*}^{p'} + \int_0^T \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\Big\}.
\end{aligned}
$$

Como $\frac{1-k}{2}||u_\lambda(t)||_H^2 \leq ||u_\lambda(t)||_H^2$ segue da desigualdade acima que

$$
\begin{aligned}
||u_\lambda(t)||_H^2 \;+\;& \varphi^1(u_\lambda(t)) \leq \frac{2}{1-k}\widetilde{C}\int_0^t \left\{\varphi^1(u_\lambda(t)) + ||u_\lambda(t)||_H^2\right\} d\tau + \frac{2}{1-k}\widetilde{C}\Big\{||u_0||_H^2 + ||u_0||_V^p \\
+\;& \varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_0)| + C_2 + C_5 + \sup_{\tau\in[0,t]}||f_\lambda(\tau)||_{V^*}^{p'} + \int_0^T \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\Big\},
\end{aligned}
$$

para todo $t \in [0,T]$. Pela Desigualdade de Gronwall-Bellman, obtemos que

$$
\begin{aligned}
||u_\lambda(t)||_H^2 + \varphi^1(u_\lambda(t)) \;\leq\;& \frac{2}{1-k}\widetilde{C}\Big\{||u_0||_H^2 + ||u_0||_V^p + \varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_0)| + C_2 + C_5 \\
+\;& \sup_{\tau\in[0,t]}||f_\lambda(\tau)||_{V^*}^{p'} + \int_0^T \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\Big\}\exp\left(\int_0^t \frac{2\widetilde{C}}{1-k}d\tau\right) \\
\leq\;& \frac{2}{1-k}\widetilde{C}\Big\{||u_0||_H^2 + ||u_0||_V^p + \varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_0)| + C_2 + C_5 \\
+\;& \sup_{\tau\in[0,t]}||f_\lambda(\tau)||_{V^*}^{p'} + \int_0^T \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\Big\}\exp\left(\frac{2\widetilde{C}}{1-k}T\right) \\
\leq\;& C\Big\{||u_0||_H^2 + ||u_0||_V^p + \varphi^1(u_0) + |\widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_0)| + C_2 + C_5 \\
+\;& \sup_{\tau\in[0,t]}||f_\lambda(\tau)||_{V^*}^{p'} + \int_0^T \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau\Big\},
\end{aligned}
$$

em que C depende de k, p, C_1, C_2, C_3, C_4 e T.

Uma vez que f_λ é limitada em $W^{1,p'}(0,T;V^*)$ e que $||f_\lambda||_{W^{1,p'}(0,T;V^*)} = ||f_\lambda||_{L^{p'}(0,T;V^*)} + \left|\left|\frac{df_\lambda}{dt}\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)}$, segue que $\int_0^T \left|\left|\frac{df_\lambda}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau$ também é limitada. Ainda temos, pela Proposição 2.3.6, que $\widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_0)$ é limitada. Logo, da última desigualdade, concluímos que

$$\sup_{t\in[0,T]} ||u_\lambda(t)||_H \leq K_1 \qquad e \qquad \sup_{t\in[0,T]} \varphi^1(u_\lambda(t)) \leq K_2. \tag{3.19}$$

Além disso, (3.19) e (3.17) implicam que $\int_0^T \left|\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt \leq K_3$. Por **(A1)**, vem que $||u_\lambda(t)||_V^p \leq C_1||u_\lambda(t)||_H^2 + C_2 + C_3\varphi^1(u_\lambda(t))$. Novamente, por (3.19), segue $\sup_{t\in[0,T]} ||u_\lambda(t)||_V \leq K_4$. Tomando $M_1 = \max\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$, concluímos (3.8), (3.9), (3.10) e (3.11) e, portanto, o lema está demonstrado. ■

Lema 3.1.4 *Existe uma constante M_2, independente de λ. que satisfaz as seguintes estimativas:*

$$\sup_{t\in[0,T]} ||J_\lambda u_\lambda(t)||_H \leq M_2, \tag{3.20}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \varphi^1(J_\lambda u_\lambda(t)) \leq M_2, \tag{3.21}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} ||J_\lambda u_\lambda(t)||_V \leq M_2, \tag{3.22}$$

$$\int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt} J_\lambda u_\lambda(t)\right|\right|_H^2 dt \leq M_2, \tag{3.23}$$

sendo $J_\lambda = \left(I + \lambda\partial_H\widetilde{\varphi}^2\right)^{-1}$.

Demonstração: Tome $w_0 \in H$ tal que $(I + \lambda\partial_H\widetilde{\varphi}^2)0 \ni w_0$. Daí, $J_\lambda w_0 = 0$. Pela Proposição 2.3.5, temos que J_λ é uma contração de H em H. Logo,

$$||J_\lambda u_\lambda(t) - 0||_H = ||J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda w_0||_H \leq ||u_\lambda(t) - w_0||_H = ||u_\lambda(t) + (-w_0)||_H \leq ||u_\lambda(t)||_H + ||w_0||_H$$

$$\Rightarrow ||J_\lambda u_\lambda(t)||_H \leq ||u_\lambda(t)||_H + ||w_0||_H.$$

Por (3.8), vem que $||u_\lambda(t)||_H \leq \sup_{t\in[0,T]} ||u_\lambda(t)||_H \leq M_1$. Assim, $\sup_{t\in[0,T]} ||J_\lambda u_\lambda(t)||_H \leq K_5$.

Novamente, usando o fato de que $||u_\lambda(t)||_H \leq M_1$, tem-se $l_2(||u_\lambda(t)||_H) \leq l_2(M_1)$. Além disso, por (3.9), $\varphi^1(u_\lambda(t)) \leq \sup_{t\in[0,T]} \varphi^1(u_\lambda(t)) \leq M_1$. Logo, $\varphi^1(u_\lambda(t)) + l_2(||u_\lambda(t)||_H) \leq M_1 + l_2(M_1)$. De **(A3)**, temos

$$\varphi^1(J_\lambda u_\lambda(t)) \leq l_1\left(\varphi^1(u_\lambda(t)) + l_2(||u_\lambda(t)||_H)\right) \leq l_1(M_1 + l_2(M_1))$$

$$\Rightarrow \sup_{t\in[0,T]} \varphi^1(J_\lambda u_\lambda(t)) \leq l_1(M_1 + l_2(M_1)) = K_6.$$

De **(A1)**, vem que

$$||J_\lambda u_\lambda(t)||_V \leq \left\{C_1||J_\lambda u_\lambda(t)||_H^2 + C_2 + C_3\varphi^1(J_\lambda u_\lambda(t))\right\}^{1/p}. \tag{3.24}$$

Observando que $||J_\lambda u_\lambda(t)||_H \leq \sup\limits_{t\in[0,T]} ||J_\lambda u_\lambda(t)||_H \leq K_5$, implica que $||J_\lambda u_\lambda(t)||_H^2 \leq K_5^2$ e usando o fato de que $\varphi^1(J_\lambda u_\lambda(t)) \leq K_6$; de (3.24) segue que $\sup\limits_{t\in[0,T]} ||J_\lambda u_\lambda(t)||_V \leq K_7$.

Como $||J_\lambda u_\lambda(t+h) - J_\lambda u_\lambda(t)|| \leq ||u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)||$, $\forall h \in \mathbb{R}$ com $t+h \in [0,T]$ (isso devido ao fato de que J_λ é uma contração de H em H). Dividindo a última desigualdade por h e tomando o limite, em ambos os membros, quando $h \to 0$ resulta

$$\left|\left|\frac{d}{dt}J_\lambda u_\lambda(t)\right|\right|_H \leq \left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|_H \quad \Rightarrow \quad \left|\left|\frac{d}{dt}J_\lambda u_\lambda(t)\right|\right|_H^2 \leq \left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|_H^2$$
$$\Rightarrow \quad \int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}J_\lambda u_\lambda(t)\right|\right|_H^2 dt \leq \int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|_H^2 dt \leq M_1.$$

Para concluir a prova deste lema basta tomar $M_2 = \max\{M_1, K_5, K_6, K_7\}$. ■

Lema 3.1.5 *Existe uma constante M_3, independente de λ, que satisfaz as seguintes estimativas:*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|\left|\partial_H \widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_\lambda(t))\right|\right|_{V^*} \leq M_3, \tag{3.25}$$

$$\int_0^T \left|\left|g_\lambda^1(t)\right|\right|_{V^*}^2 dt \leq M_3, \tag{3.26}$$

onde $g_\lambda^1(t) = f_\lambda(t) - du_\lambda(t)/dt + \partial_H \widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_\lambda(t)) \in \partial_H \varphi_H^1(u_\lambda(t))$.

Demonstração: Como $J_\lambda u_\lambda(t)$ denota o resolvente de $\partial_H \widetilde{\varphi}^2$, temos que $J_\lambda u_\lambda(t) \in D(\partial_H \widetilde{\varphi}^2) \cap V$, para todo $t \in [0,T]$. Neste caso, $\partial_H \widetilde{\varphi}^2(J_\lambda u_\lambda(t)) \neq \emptyset$. Note que se $f \in \partial_H \widetilde{\varphi}^2(J_\lambda u_\lambda(t))$, então

$$\begin{aligned}\varphi^2(v) - \varphi^2(J_\lambda u_\lambda(t)) = \widetilde{\varphi}^2(v) - \widetilde{\varphi}^2(J_\lambda u_\lambda(t)) \quad &\geq \quad (f, v - J_\lambda u_\lambda(t))_H \\ &= \quad \langle f, v - J_\lambda u_\lambda(t)\rangle_{V^*,V},\end{aligned}$$

para todo $v \in D(\varphi^2)$. O que implica

$$\varphi^2(v) - \varphi^2(J_\lambda u_\lambda(t)) \geq \langle f, v - J_\lambda u_\lambda(t)\rangle_{V^*,V},$$

para todo $v \in D(\varphi^2)$ e $f \in \partial_H \widetilde{\varphi}^2(J_\lambda u_\lambda(t))$. Portanto,

$$\partial_H \widetilde{\varphi}^2(J_\lambda u_\lambda(t)) \subset \partial \varphi^2(J_\lambda u_\lambda(t)), \tag{3.27}$$

para todo $t \in [0,T]$. Além disso, pelo item (iii) da Proposição 2.3.5, temos

$$\partial_H \widetilde{\varphi}_\lambda^2(u_\lambda(\cdot)) \in \partial_H \widetilde{\varphi}^2(J_\lambda u_\lambda(\cdot)). \tag{3.28}$$

De (3.20), (3.21) e (3.23) segue que

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]} \left\{\varphi^1(J_\lambda u_\lambda(t)) + ||J_\lambda u_\lambda(t)||_H\right\} + \int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}(J_\lambda u_\lambda(t))\right|\right|_H^2 dt \\ \leq \quad & \sup_{t\in[0,T]} \varphi^1(J_\lambda u_\lambda(t)) + \sup_{t\in[0,T]} ||J_\lambda u_\lambda(t)||_H + \int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}(J_\lambda u_\lambda(t))\right|\right|_H^2 dt \\ \leq \quad & M_2 + M_2 + M_2 = 3M_2.\end{aligned}$$

Logo, por **(A2)**, (3.27) e (3.28), $\{\partial_H\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(\cdot))\}$ forma um subconjunto precompacto em $C([0,T];V^*)$. Portanto, existe uma subsequência de $\{\partial_H\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(\cdot))\}$ convergente. Sem perda de generalidade, podemos tomar a própria sequência original como sendo a subsequência convergente. Assim, $\{\partial_H\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(\cdot))\}$ é limitada; donde $\sup\limits_{t\in[0,T]}\left|\left|\partial_H\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t))\right|\right|_{V^*}\leq K_8$.

Como $g^1_\lambda(t)=f_\lambda(t)-du_\lambda(t)/dt+\partial_H\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t))$, temos $||g^1_\lambda(t)||^2_{V^*}=||f_\lambda(t)-du_\lambda(t)/dt+\partial_H\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t))||^2_{V^*}$. Integrando de 0 até T, ambos os membros da igualdade, e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T ||g^1_\lambda(t)||^2_{V^*}dt &= \int_0^T \left|\left|f_\lambda(t)-\frac{d}{dt}u_\lambda(t)+\partial_H\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t))\right|\right|^2_{V^*}dt\\
&\leq \int_0^T \left\{||f_\lambda(t)||_{V^*}+\left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|_{V^*}+\left|\left|\partial_H\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t))\right|\right|_{V^*}\right\}^2dt.
\end{aligned}
$$

Como $\left|\left|\partial_H\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t))\right|\right|_{V^*}\leq\sup\limits_{t\in[0,T]}\left|\left|\partial_H\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t))\right|\right|_{V^*}\leq K_8$ e $\left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|_{V^*}\leq C\left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|_H$, uma vez que a imersão $H\subset V^*$ é contínua, resulta da última desigualdade que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T ||g^1_\lambda(t)||^2_{V^*}dt &\leq \int_0^T \left\{||f_\lambda(t)||_{V^*}+C\left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|_H+K_8\right\}^2dt\\
&= \int_0^T ||f_\lambda(t)||^2_{V^*}dt+\int_0^T C^2\left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|^2_H dt+\int_0^T K_8^2dt\\
&+ \int_0^T 2C\,||f_\lambda(t)||_{V^*}\left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|_H dt+\int_0^T 2K_8\,||f_\lambda(t)||_{V^*}dt\\
&+ \int_0^T 2K_8C\left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|_H dt.
\end{aligned}
$$

Pela Desigualdade de Young, temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T ||g^1_\lambda(t)||^2_{V^*}dt &\leq \int_0^T ||f_\lambda(t)||^2_{V^*}dt+C^2\int_0^T\left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|^2_H dt+K_8^2T\\
&+ \int_0^T ||f_\lambda(t)||^2_{V^*}dt+C^2\int_0^T\left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|^2_H dt\\
&+ \int_0^T ||f_\lambda(t)||^2_{V^*}dt+K_8^2T\\
&+ C^2\int_0^T\left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|^2_H dt+K_8^2T.
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \int_0^T ||g^1_\lambda(t)||^2_{V^*}dt\leq 3\int_0^T ||f_\lambda(t)||^2_{V^*}dt+3C^2\int_0^T\left|\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|\right|^2_H dt+3K_8^2T. \qquad (3.29)
$$

Agora, pelo fato de que a imersão $W^{1,p'}(0,T;V^*)\subset C([0,T];V^*)$ é contínua, existe uma constante $\widetilde{C}$ tal que $\sup\limits_{t\in[0,T]}||f_\lambda(t)||_{V^*}=||f_\lambda||_{C([0,T];V^*)}\leq\widetilde{C}||f_\lambda||_{W^{1,p'}(0,T;V^*)}$. Como a sequência f_λ é limitada em $W^{1,p'}(0,T;V^*)$ e $||f_\lambda(t)||_{V^*}\leq\sup\limits_{t\in[0,T]}||f_\lambda(t)||_{V^*}$, segue que $||f_\lambda(t)||_{V^*}$ é limitado, para todo $t \in [0,T]$. Daí, $\int_0^T ||f_\lambda(t)||_{V^*}^2\, dt$ também é limitada. Por (3.10) resulta de (3.29) que $\int_0^T ||g_\lambda^1(t)||_{V^*}^2 dt \leq K_9$.

Portanto, tomando $M_3 = \max\{K_8, K_9\}$, concluí-se a prova do lema em questão. ■

Dos Lemas 3.1.3, 3.1.4 e 3.1.5 veremos que podemos extrair uma subsequência $\{\lambda_n\}$ de $\{\lambda\}$ tal que $\lambda_n \to 0$ e de forma que valem as afirmações dos três lemas que seguem.

Lema 3.1.6 *Existe uma função $u \in C_w([0,T];V) \cap W^{1,2}(0,T;H)$ tal que*

$$u_{\lambda_n} \rightharpoonup u \;\; em \;\; L^2(0,T;V) \cap W^{1,2}(0,T;H), \tag{3.30}$$

$$u_{\lambda_n}(t) \rightharpoonup u(t) \;\; em \;\; H \;\; \forall t \in [0,T], \tag{3.31}$$

$$J_{\lambda_n} u_{\lambda_n} \rightharpoonup u \;\; em \;\; L^2(0,T;V) \cap W^{1,2}(0,T;H), \tag{3.32}$$

para todo $\lambda > 0$. Além disso, $u(t) \to u_0$ em H quando $t \to 0^+$.

Demonstração: Primeiramente, note que, são válidas as seguintes asserções:

(i) u_λ é limitada em $L^p(0,T;V)$,

(ii) u_λ é limitada em $W^{1,2}(0,T;H)$,

(iii) $f_\lambda \to f$ em $L^{p'}(0,T;V^*)$.

De fato, como a imersão $C([0,T];V) \subset L^p(0,T;V)$ é contínua, existe $C > 0$ tal que $||u_\lambda(t)||_{L^p(0,T;V)} \leq C||u_\lambda(t)||_{C([0,T];V)} = C \sup_{t\in[0,T]} ||u_\lambda(t)||_V \leq M_1$ (a última desigualdade segue de (3.11) do Lema 3.1.3). Assim, fica provado **(i)**.

Por (3.10) e (3.11) do Lema 3.1.3, segue que

$$\begin{aligned}
||u_\lambda||_{W^{1,2}(0,T;H)} &= ||u_\lambda||_{L^2(0,T;H)} + \left|\left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|\right|_{L^2(0,T;H)} \\
&= \left(\int_0^T ||u_\lambda(t)||_H^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^T \left|\left|\frac{du_\lambda(t)}{dt}\right|\right|_H^2 dt\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^T M_1^2 dt\right)^{1/2} + M_1^{1/2} < \infty;
\end{aligned}$$

donde concluí-se o item **(ii)**.

Para mostrar **(iii)** observe que $||f_\lambda - f_\mu||_{W^{1,p'}(0,T;V^*)} = ||f_\lambda - f_\mu||_{L^{p'}(0,T;V^*)} + \left|\left|\frac{df_\lambda}{dt} - \frac{df_\mu}{dt}\right|\right|_{L^{p'}(0,T;V^*)} \geq ||f_\lambda - f_\mu||_{L^{p'}(0,T;V^*)}$. Daí, $||f_\lambda - f_\mu||_{L^{p'}(0,T;V^*)} \leq ||f_\lambda - f_\mu||_{W^{1,p'}(0,T;V^*)}$. Logo, pelo fato de f_λ ser convergente em $W^{1,p'}(0,T;V^*)$, resulta que f_λ é uma sequência de Cauchy em $L^{p'}(0,T;V^*)$. Como este espaço é completo, temos que $f_\lambda \to f$ em $L^{p'}(0,T;V^*)$.

Agora, como u_λ é limitada em $L^2(0,T;V)$ e $W^{1,2}(0,T;V)$ e esses espaços são reflexivos, pelo Teorema 2.1.3, podemos extrair uma subsequência $\{\lambda_n\}$ de $\{\lambda\}$ tal que

$$u_{\lambda_n} \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;V)$$

$$u_{\lambda_n} \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,2}(0,T;H).$$

Portanto, $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;V) \cap W^{1,2}(0,T;H)$, o que mostra (3.30).

Além disso, seja $q \in [1,+\infty)$ fixado. Como a imersão $C([0,T];H) \subset L^q(0,T;H)$ é contínua segue de (3.8) que u_{λ_n} é limitada em $L^q(0,T;H)$. Logo, pelo Teorema 2.1.3, podemos extrair uma subsequência $\{\lambda_n^q\}$ de $\{\lambda_n\}$ dependendo de q tal que $u_{\lambda_n^q} - u_0 \rightharpoonup u - u_0$ em $L^q(0,t;H)$, para cada $t \in [0,T]$. Pela Proposição 2.1.2 e como $u_{\lambda_n^q}(0) = u_0$, temos

$$\begin{aligned}
||u-u_0||_{L^q(0,t;H)} &\leq \liminf_{\lambda_n^q \to 0} ||u_{\lambda_n^q} - u_0||_{L^q(0,t;H)} \\
&= \liminf_{\lambda_n^q \to 0} \left(\int_0^t ||u_{\lambda_n^q}(\tau) - u_0||_H^q d\tau \right)^{1/q} \\
&= \liminf_{\lambda_n^q \to 0} \left(\int_0^t \left|\left| \int_0^\tau \frac{d}{ds} u_{\lambda_n^q}(s) ds \right|\right|_H^q d\tau \right)^{1/q} \\
&\leq \liminf_{\lambda_n^q \to 0} \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \left|\left| \frac{d}{ds} u_{\lambda_n^q}(s) \right|\right|_H ds \right)^q d\tau \right\}^{1/q}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de H$\ddot{o}$lder, vem que

$$\begin{aligned}
||u-u_0||_{L^q(0,t;H)} &\leq \liminf_{\lambda_n^q \to 0} \left\{ \int_0^t \left[\left(\int_0^\tau \left|\left| \frac{d}{ds} u_{\lambda_n^q}(s) \right|\right|_H^2 ds \right)^{q/2} \left(\int_0^\tau 1^2 ds \right)^{q/2} \right] d\tau \right\}^{1/q} \\
&= \liminf_{\lambda_n^q \to 0} \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \left|\left| \frac{d}{ds} u_{\lambda_n^q}(s) \right|\right|_H^2 ds \right)^{q/2} \tau^{q/2} d\tau \right\}^{1/q}.
\end{aligned}$$

De (3.10) do Lema 3.1.3 temos

$$\begin{aligned}
||u-u_0||_{L^q(0,t;H)} &\leq \liminf_{\lambda_n^q \to 0} \left(\int_0^t M_1^{q/2} \tau^{q/2} d\tau \right)^{1/q} = \left\{ M_1^{q/2} \left(\frac{2}{q+2} \right) t^{\left(\frac{q}{2}+1\right)} \right\}^{1/q} \\
&= M_1^{1/2} \left(\frac{2}{q+2} \right)^{1/q} t^{(1/2+1/q)}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2.1, segue que

$$\begin{aligned}
||u(t)-u_0||_H &\leq \sup_{\tau \in [0,t]} ||u(\tau) - u_0||_H = ||u-u_0||_{L^\infty(0,t;H)} = \lim_{q \to \infty} ||u-u_0||_{L^q(0,t;H)} \\
&\leq \lim_{q \to \infty} M_1^{1/2} \left(\frac{2}{q+2} \right)^{1/q} t^{(1/2+1/q)} \leq M_1^{1/2} t^{1/2},
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$, o que implica que $u(t) \to u_0$ em H quando $t \to 0^+$.

Agora, seja $t \in [0,T]$. Como $u_{\lambda_n}(0) = u(0) = u_0$, temos para $\phi \in H$ que

$$\left(u_{\lambda_n}(t) - u(t), \phi\right)_H = \left(\int_0^t \frac{d}{d\tau}(u_{\lambda_n}(\tau) - u(\tau)) d\tau, \phi \right)_H = \left(\int_0^t \left(\frac{du_{\lambda_n}}{d\tau}(\tau) - \frac{du}{d\tau}(\tau) \right) d\tau, \phi \right)_H. \tag{3.33}$$

Como $||u_{\lambda_n}||_{W^{1,2}(0,T;H)} = ||u_{\lambda_n}||_{L^2(0,T;H)} + \left|\left|\frac{du_{\lambda_n}}{dt}\right|\right|_{L^2(0,T;H)}$ e $u_{\lambda_n} \in W^{1,2}(0,T;H)$, então $\left|\left|\frac{du_{\lambda_n}}{dt}\right|\right|_{L^2(0,T;H)} < \infty$, donde $\frac{du_{\lambda_n}}{dt} \in L^2(0,T;H)$. Assim, por **(b)** da Proposição 2.2.6, temos

$$\left(\int_0^t \left(\frac{du_{\lambda_n}}{d\tau}(\tau) - \frac{du}{d\tau}(\tau)\right) d\tau, \phi\right)_H = \int_0^t \left(\frac{du_{\lambda_n}}{d\tau}(\tau) - \frac{du}{d\tau}(\tau), \phi\right)_H d\tau, \tag{3.34}$$

$\forall \phi \in H$, $\forall t \in [0,T]$.

Agora, para $t \in [0,T]$ fixado, defina

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}: \quad & [0,t] \to H \\ & \tau \mapsto \widetilde{\phi}(\tau) = \phi. \end{aligned}$$

Então, temos que a aplicação

$$\begin{aligned} f_\phi: \quad & W^{1,2}(0,t;H) \to \mathbb{R} \\ & v \mapsto f_\phi(v) = \left(\frac{dv}{dt}, \widetilde{\phi}\right)_{L^2(0,t;H)} \end{aligned}$$

é linear e limitada. Logo, $f_\phi \in \left(W^{1,2}(0,t;H)\right)^*$ e como, por (3.30), $u_{\lambda_n} - u \rightharpoonup 0$ em $W^{1,2}(0,t;H)$ temos que $f_\phi(u_{\lambda_n} - u) \to 0$, ou seja,

$$\int_0^t \left(\frac{du_{\lambda_n}}{d\tau}(\tau) - \frac{du}{d\tau}(\tau), \phi\right)_H d\tau \to 0, \qquad \forall \phi \in H,\ \forall t \in [0,T]. \tag{3.35}$$

Logo, de (3.33), (3.34) e (3.35), obtemos

$$\left(u_{\lambda_n}(t) - u(t), \phi\right)_H = \int_0^t \left(\frac{du_{\lambda_n}}{d\tau}(\tau) - \frac{du}{d\tau}(\tau), \phi\right)_H d\tau \to 0, \qquad \forall \phi \in H,\ \forall t \in [0,T],$$

o que fornece (3.31) pelo Teorema da Representação de Riesz.

Por (3.11) do Lema 3.1.3 vem que $||u_{\lambda_n}(t)||_V \leq \sup\limits_{t\in[0,T]} ||u_{\lambda_n}(t)||_V \leq M_1$, logo a sequência $\left\{u_{\lambda_n}(t)\right\}$ é limitada em V. Seja $t \in [0,T]$, sendo V reflexivo, podemos extrair uma subsequência $\{\lambda_n^t\}$ de $\{\lambda_n\}$ dependendo de t tal que

$$u_{\lambda_n^t}(t) \rightharpoonup u(t) \text{ em V} \tag{3.36}$$

(o fato de $u_{\lambda_n^t}(t) \rightharpoonup u(t)$ vem de (3.31)).

Pela Proposição 2.1.2, temos $||u(t)||_V \leq \liminf\limits_{\lambda_n^t \to 0} ||u_{\lambda_n^t}(t)||_V \leq M_1$, sendo a última desigualdade obtida de (3.11) do Lema 3.1.3. Como M_1 não depende de t, concluímos que $u(t) \in V$, $\forall t \in [0,T]$, e $\sup\limits_{t\in[0,T]} ||u(t)||_V \leq M_1 < \infty$. Portanto, para todo $t \in [0,T]$ e $\{t_n\}$ com $t_n \to t$, quando $n \to \infty$, existe uma subsequência $\{t_{n_k}\}$ de $\{t_n\}$ e $w \in V$ tal que $u(t_{n_k}) \rightharpoonup w$ em V, quando $n_k \to \infty$. Como $H^* \subset V^*$, segue que $u(t_{n_k}) \rightharpoonup w$ em H.

Por outro lado, $u(t_{n_k}) \to u(t)$ em H, quando $n_k \to \infty$, visto que $u \in C([0,T];H)$. Assim, $u(t_{n_k}) \rightharpoonup u(t)$ em H, quando $n_k \to \infty$. Pela unicidade do limite fraco, $u(t) = w$. Logo,

$$u(t_{n_k}) \rightharpoonup u(t) \ \ em\ V, \qquad quando\ \ n_k \to \infty \tag{3.37}$$

e, portanto, $u \in C_w([0,T];V)$.

Pelo mesmo argumento dos itens **(i)** e **(ii)** mostrado no começo da demonstração desse lema, mas agora usando (3.20), (3.22) e (3.23) do Lema 3.1.4, podemos verificar que $J_\lambda u_\lambda$ é limitada em $L^2(0,T;V)$ e em $W^{1,2}(0,T;H)$. Como esses espaços são reflexivos, podemos extrair uma subsequência $\{\lambda_n\}$ de $\{\lambda\}$ tal que $J_{\lambda_n}u_{\lambda_n} \rightharpoonup v$ em $L^2(0,T;V)\cap W^{1,2}(0,T;H)$. Por (3.25) do Lema 3.1.5, temos

$$||u_{\lambda_n}(t) - J_{\lambda_n}u_{\lambda_n}(t)||_{V^*} = \lambda_n||\partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(t))||_{V^*} \le \lambda_n M_3,$$

para todo $t\in[0,T]$; o que implica que $\left(u_{\lambda_n} - J_{\lambda_n}u_{\lambda_n}\right) \to 0$ em $C([0,T];V^*)$ quando $\lambda_n \to 0$. Portanto, segue de (3.30) e da unicidade do limite fraco que $u = v$ e, assim, temos (3.32). Desta forma, o lema está demonstrado. ■

Lema 3.1.7 *Existe $g^2 \in C([0,T];V^*)$ tal que*

$$\begin{aligned}&\partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(\cdot)) \to g^2 \ \ em\ \ C([0,T];V^*),\\ &g^2(t)\in\partial\varphi^2(u(t)) \ \ para\ \ q.t.\ \ t\in(0,T).\end{aligned} \tag{3.38}$$

Além disso, $\varphi^2(u(\cdot))\in C([0,T])$.

Demonstração: Na demonstração do Lema 3.1.5 mostramos que $\left\{\partial_H\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(\cdot))\right\}$ forma um subconjunto precompacto em $C([0,T];V^*)$. Logo, existe uma subsequência $\{\lambda_n\}$ de $\{\lambda\}$ e $g^2\in C([0,T];V^*)$ tal que $\partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(\cdot)) \to g^2$ em $C([0,T];V^*)$.

Na demonstração do mesmo lema citado anteriormente, também mostramos que $\partial_H\widetilde{\varphi}^2(J_{\lambda_n}u_{\lambda_n}(t)) \subset \partial\widetilde{\varphi}^2(J_{\lambda_n}u_{\lambda_n}(t))$ (veja 3.27). Pelo item (iii) da Proposição 2.3.5, temos que $\partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(t)) \in \partial_H\widetilde{\varphi}^2(J_{\lambda_n}u_{\lambda_n}(t))$, para todo $t\in[0,T]$. Assim, $\partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(t)) \in \partial\widetilde{\varphi}^2(J_{\lambda_n}u_{\lambda_n}(t))$, $\forall t\in[0,T]$.

Além disso, como $\partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(\cdot)) \to g^2$ em $C([0,T];V^*)$ e a imersão $C([0,T];V^*)$ $\subset L^2(0,T;V^*)$ é contínua, segue que $\partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(\cdot)) \to g^2$ em $L^2(0,T;V^*) = (L^2(0,T;V))^*$. Pela Proposição 2.1.2, temos $\left\langle\partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(\cdot)), J_{\lambda_n}u_{\lambda_n}\right\rangle \to \left\langle g^2, u\right\rangle$, uma vez que $J_{\lambda_n}u_{\lambda_n} \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;V)$. Logo
$\limsup_{\lambda_n\to 0}\left\langle\partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(\cdot)), J_{\lambda_n}u_{\lambda_n}\right\rangle = \left\langle g^2, u\right\rangle$. Pela Proposição 2.3.4, $(u,g^2)\in\partial\widetilde{\varphi}^2$. Isto é, $u\in D(\partial\widetilde{\varphi}^2)$ e $g^2\in\partial\widetilde{\varphi}^2(u)$.

Usaremso a Proposição 2.3.3 para concluir que $g^2(t)\in\partial\varphi^2(u(t))$ para q.t. $t\in(0,T)$. Defina $j(s,u(s)) = \varphi^2(u(s))$. Por **(A4)** e usando (3.8) e (3.9) do Lema 3.1.3 segue que $\varphi^2(u(t)) < \infty$. Assim, $\int_0^T \varphi^2(u(t))dt < \infty$. Logo, $\varphi^2(u(\cdot))\in L^1(0,T)$.

Agora, seja $t\in[0,T]$ arbitrário, porém fixado. De (3.36) temos $u_{\lambda_n^t}(t) \rightharpoonup u(t)$ em V. Como $\varphi^1\in\Phi(V)$ segue que

$$\varphi^1(u(t)) \le \liminf_{\lambda_n^t\to 0}\varphi^1(u_{\lambda_n^t}(t)). \tag{3.39}$$

Por (3.9) do Lema 3.1.3 , vem que $\varphi^1(u_{\lambda_n^t}(t)) \le \sup_{t\in[0,T]}\varphi^1(u_{\lambda_n^t}(t)) \le M_1$. Logo, de (3.39), $\varphi^1(u(t)) \le M_1$, onde M_1 não depende de t. Assim, para todo $t\in[0,T]$, $u(t)\in D(\varphi^1)$ e $\sup_{t\in[0,T]}\varphi^1(u(t)) \le M_1$.

Seja $\{t_n\}$ uma sequência em $[0,T]$ tal que $t_n\to t$. Como $u\in C_w([0,T];V)$, temos $\lim_{t_n\to t}\phi(u(t_n)) = \phi(u(t))$, $\forall\phi\in V^*$, para cada $t\in(0,T)$. Logo, $u(t_n)\rightharpoonup u(t)$ em V. Agora, como

$\varphi^1(u(t_n)) \leq \sup\limits_{t\in[0,T]} \varphi^1(u(t)) \leq M_1$, segue que $\varphi^1(u(t_n))$ é limitada. Assim, pela Proposição 3.1.1, $\varphi^2(u(t_n)) \to \varphi^2(u(t))$ e, portanto,

$$\varphi^2(u(\cdot)) \in C([0,T]).$$

Além disso, também, temos que $\limsup\limits_{t_n\to+t} \varphi^2(u(t_n)) = \varphi^2(u(t))$ e, portanto, pela Proposição 2.3.3, concluí-se a prova do lema. ■

Lema 3.1.8 *Existe* $g_1 \in L^2(0,T;V^*)$ *tal que*

$$\begin{aligned} &g^1_{\lambda_n} \rightharpoonup g^1 \text{ em } L^2(0,T;V^*),\\ &g^1(t) = f(t) + g^2(t) - \frac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi^1(u(t)) \text{ para q.t. } t \in (0,T). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Demonstração: De (3.26) do Lema 3.1.5, temos que $\left(\int_0^T ||g^1_\lambda(t)||^2_{V^*}dt\right)^{1/2} \leq M_3^{1/2} \leq \infty$. Logo, g^1_λ é limitada em $L^2(0,T;V^*)$. Como este espaço é reflexivo, podemos extrair uma subsequência $\{\lambda_n\}$ de $\{\lambda\}$ tal que $g^1_{\lambda_n} \rightharpoonup g^1$ em $L^2(0,T;V^*)$.

Além disso, pelo Lema 3.1.5, temos

$$g^1_{\lambda_n}(t) = f_{\lambda_n}(t) - \frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t) + \partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(t)). \tag{3.41}$$

Por (3.30) do Lema 3.1.6, vem que $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;V)$. Isto é, para todo $g \in (L^2(0,T;V))^* = L^2(0,T;V^*)$, tem-se $\lim\limits_{\lambda_n\to\infty} g(u_{\lambda_n}) = g(u)$, o que equivale a

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle h(t), u_{\lambda_n}(t)\rangle\, dt = \int_0^T \langle h(t), u(t)\rangle\, dt,$$

para todo $h \in L^2(0,T;V^*)$.

Assim, para $h \in L^2(0,T;V) \subset L^2(0,T;V^*)$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\int_0^T \left\langle h(t), \frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t)\right\rangle dt &= \lim_{n\to\infty}\int_0^T \left\langle h(t), \lim_{h\to 0}\frac{u_{\lambda_n}(t+h)-u_{\lambda_n}(t)}{h}\right\rangle dt\\ &= \int_0^T \left\langle h(t), \lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{\lambda_n}(t+h)-u_{\lambda_n}(t)}{h}\right\rangle dt\\ &= \int_0^T \left\langle h(t), \lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right\rangle dt\\ &= \int_0^T \left\langle h(t), \frac{du}{dt}(t)\right\rangle dt. \end{aligned}$$

Logo, $\frac{du_{\lambda_n}}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt}$ em $L^2(0,T;V^*)$.

Note, também, que como $W^{1,p'}(0,T;V^*) \hookrightarrow C([0,T];V^*) \hookrightarrow L^2(0,T;V^*)$ e $f_{\lambda_n} \rightharpoonup f$ em $W^{1,p'}(0,T;V^*)$, então $f_{\lambda_n} \rightharpoonup f$ em $L^2(0,T;V^*)$. Além disso, $\partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(t)) \rightharpoonup g^2$ em $L^2(0,T;V^*)$, uma vez que $\partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}(t)) \rightharpoonup g^2$ em $C([0,T];V^*)$ e $C([0,T];V^*) \hookrightarrow L^2(0,T;V^*)$.

Portanto, das observações anteriores, de (3.41) temos $g^1 = f + g^2 - \frac{du}{dt}$.

Agora, mostraremos que $f(t)+g^2(t)-\frac{du}{dt}(t)\in\partial\varphi^1(u(t))$ para q.t. $t\in(0,T)$. Para tanto, multiplicaremos (3.41) por u_{λ_n}. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle g^1_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\right\rangle_{V^*,V} &= \langle f_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\rangle_{V^*,V}+\left\langle \partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\right\rangle_{V^*,V}\\ &- \left\langle \frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t),u_{\lambda_n}(t)\right\rangle_{V^*,V}.\end{aligned}$$

Integrando, a expressão anterior, de 0 até T, e usando a letra **(b)** da Proposição 2.2.8, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T\left\langle g^1_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\right\rangle_{V^*,V}dt &= \int_0^T\langle f_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\rangle_{V^*,V}dt+\int_0^T\left\langle \partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\right\rangle_{V^*,V}dt\\ &- \frac{1}{2}||u_{\lambda_n}(T)||^2_H+\frac{1}{2}||u_0||^2_H.\end{aligned}$$

Tomando o lim sup em ambos os membros da igualdade anterior, vem que

$$\begin{aligned}&\limsup_{\lambda_n\to 0}\int_0^T\left\langle g^1_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\right\rangle_{V^*,V}dt=\limsup_{\lambda_n\to 0}\int_0^T\langle f_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\rangle_{V^*,V}dt\\ +&\limsup_{\lambda_n\to 0}\int_0^T\left\langle \partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\right\rangle_{V^*,V}dt-\liminf_{\lambda_n\to 0}\frac{1}{2}||u_{\lambda_n}(T)||^2_H+\limsup_{\lambda_n\to 0}\frac{1}{2}||u_0||^2_H\\ =&\lim_{\lambda_n\to 0}\int_0^T\langle f_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\rangle_{V^*,V}dt+\lim_{\lambda_n\to 0}\int_0^T\left\langle \partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\right\rangle_{V^*,V}dt\\ -&\liminf_{\lambda_n\to 0}\frac{1}{2}||u_{\lambda_n}(T)||^2_H+\frac{1}{2}||u_0||^2_H.\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.1.2 temos que $-\liminf_{\lambda_n\to 0}\frac{1}{2}||u_{\lambda_n}(T)||^2_H\leq-\frac{1}{2}||u(T)||^2_H$, uma vez que $u_{\lambda_n}(T)\rightharpoonup u(T)$. Assim,

$$\begin{aligned}\limsup_{\lambda_n\to 0}\int_0^T\left\langle g^1_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\right\rangle_{V^*,V}dt &\leq \lim_{\lambda_n\to 0}\int_0^T\langle f_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\rangle_{V^*,V}dt\\ &+ \lim_{\lambda_n\to 0}\int_0^T\left\langle \partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\right\rangle_{V^*,V}dt\\ &- \frac{1}{2}||u(T)||^2_H+\frac{1}{2}||u_0||^2_H. \qquad (3.42)\end{aligned}$$

Como, $f_{\lambda_n}\to f$ em $W^{1,p'}(0,T;V^*)$ e $W^{1,p'}(0,T;V^*)\hookrightarrow C([0,T];V^*)$, temos $f_{\lambda_n}\to f$ em $C([0,T];V^*)$. Logo, f_{λ_n} é limitado em $C([0,T];V^*)$. Daí, $||f_{\lambda_n}(t)||_{V^*}\leq\sup_{t\in[0,T]}||f_{\lambda_n}(t)||_{V^*}=||f_{\lambda_n}||_{C([0,T];V^*)}<\infty$.

Por (3.11) do Lema 3.1.3, temos que $||u_{\lambda_n}(t)||_V<\infty$, para todo $t\in[0,T]$. Donde, segue que $|\langle f_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\rangle_{V^*,V}|\leq||f_{\lambda_n}(t)||_{V^*}||u_{\lambda_n}(t)||_V\leq\alpha\in\mathbb{R}$. Claramente, $\alpha\in L^1(0,T)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, resulta que

$$\lim_{\lambda_n\to 0}\int_0^T\langle f_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\rangle_{V^*,V}dt=\int_0^T\langle f(t),u(t)\rangle\,dt.$$

De forma análoga, lembrando que $\partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(t)\to g^2$ em $C([0,T];V^*)$, mostra-se que

$$\lim_{\lambda_n\to 0}\int_0^T\left\langle \partial_H\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n}(t),u_{\lambda_n}(t)\right\rangle_{V^*,V}dt=\int_0^T\left\langle g^2(t),u(t)\right\rangle dt.$$

Substituindo as informações anteriores em (3.42), obtemos

$$
\begin{aligned}
\limsup_{\lambda_n \to 0} \int_0^T \left\langle g^1_{\lambda_n}(t), u_{\lambda_n}(t) \right\rangle_{V^*,V} dt &\leq \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle\, dt + \int_0^T \left\langle g^2(t), u(t)\right\rangle dt \\
&- \frac{1}{2}||u(T)||_H^2 + \frac{1}{2}||u_0||_H^2 \\
&= \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle\, dt + \int_0^T \left\langle g^2(t), u(t)\right\rangle dt \\
&- \int_0^T \left\langle \frac{du}{dt}(t), u(t) \right\rangle dt \\
&= \int_0^T \left\langle f(t) + g^2(t) - \frac{du}{dt}(t), u(t) \right\rangle_{V^*,V} dt,
\end{aligned}
$$

o que implica que $\limsup \left\langle g^1_{\lambda_n}, u_{\lambda_n} \right\rangle_{V^*,V} \leq \langle g^1, u\rangle_{V^*,V}$.

Observe que $(u_{\lambda_n}, g^1_{\lambda_n}) \in \partial\varphi^1$, uma vez que $u_{\lambda_n}(\cdot) \in D(\partial\varphi^1)$ e $g^1_{\lambda_n} \in \partial\varphi^1(u_{\lambda_n}(\cdot))$. Além disso, por (3.30) do Lema 3.1.6, temos que $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;V)$, $g^1_{\lambda_n} \rightharpoonup g^1$ em $L^2(0,T;V^*) = (L^2(0,T;V))^*$. Logo, pela Proposição 2.3.4, $(u, g^1) \in \partial\varphi^1$. Isto é, $u \in D(\partial\varphi^1)$ e $g^1 \in \partial\varphi^1(u)$. Assim, podemos proceder de forma análoga a demonstração de lema anterior para usar a Proposição 2.3.3 e concluir que $g^1(t) \in \partial\varphi^1(u(t))$ para q.t. $t \in (0,T)$. ■

Para concluir a prova do teorema, resta mostrar a estimativa. Para tanto, mostraremos que $\varphi^2(u_{\lambda_n^t}(t)) \to \varphi^2(u(t))$, para todo $t \in [0,T]$. De fato, seja $t \in [0,T]$ fixado. Por (3.9) do Lema 3.1.3 temos que $\varphi^1(u_{\lambda_n^t}(t)) \leq \sup_{t\in[0,T]} \varphi^1(u_{\lambda_n^t}(t)) \leq M_1$. Assim, $u_{\lambda_n^t}(t) \in D(\varphi^1)$. Além disso, por (3.36) tem-se $u_{\lambda_n^t}(t) \rightharpoonup u(t)$ em V. Logo, pela Proposição 3.1.1, resulta que $\varphi^2(u_{\lambda_n^t}(t)) \to \varphi^2(u(t))$, para todo $t \in [0,T]$.

Portanto, colocando $\lambda = \lambda_n^t$ em (3.16) e observando que $\widetilde{\varphi}^2_\lambda(u_\lambda(t)) \leq \widetilde{\varphi}^2(u_\lambda(t))$ e $\widetilde{\varphi}^2_{\lambda_n^t}(u_0) \to \varphi^2(u_0)$ quando $\lambda_n^t \to 0$ (veja Proposição 2.3.6), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \left|\left|\frac{du}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \varphi^1(u(t)) + \varphi^2(u_0) &\leq \varphi^1(u_0) + \varphi^2(u(t)) + \langle f(t), u(t)\rangle_{V^*,V} \\
&- \langle f(0), u(0)\rangle_{V^*,V} - \int_0^t \left\langle \frac{df}{d\tau}(\tau), u(\tau) \right\rangle d\tau
\end{aligned}
$$

e, assim, terminamos a prova do teorema. ■

3.2 Algumas observações e extensões do teorema de existência para o problema de Cauchy

Nesta seção veremos que algumas hipóteses do teorema de existência visto anteriormente podem ser enfraquecidas.

O teorema que segue garante a existência de solução local para o problema (3.1) sem precisar assumir a condição **(A4)**.

Teorema 3.2.1 *Suponha que as condições de **(A1)** até **(A3)** sejam verdadeiras. Então, para quaisquer $u_0 \in D(\varphi^1)$ e $f \in W^{1,p'}(0,T;V^*)$, existe um número $T_0 \in (0,T]$ tal que o problema (3.1) tem uma solução forte u em $[0,T_0]$ satisfazendo (3.5) com T substituído por T_0.*

Demonstração: Para provar o teorema, vamos considerar o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + \partial\varphi^{1,r}(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t) \text{ em } V^*, \ 0 < t < T \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \tag{3.43}$$

onde $r \in \mathbb{R}$ é tal que $r > \varphi^2(u_0)$ e $\varphi^{1,r}$ denota a função truncada de φ^1 dada por

$$\varphi^{1,r}(u) = \begin{cases} \varphi^1(u), \ se \ \varphi^2(u) \leq r \\ +\infty, \quad se \ \varphi^2(u) > r \end{cases}.$$

O seguinte lema nos informa que, sob dadas condições, o problema (3.43) tem uma solução forte em $[0,T]$.

Lema 3.2.1 *Assuma que **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** sejam satisfeitas. Então, para quaisquer $u_0 \in D(\varphi^1)$, $f \in W^{1,p'}(0,T;V^*)$, $r \in \mathbb{R}$ com $r > \varphi^2(u_0)$, o problema (3.43) tem uma solução forte u em $[0,T]$ satisfazendo (3.5), com φ^1 substituído por $\varphi^{1,r}$. Além disso, é válida a seguinte desigualdade*

$$\begin{aligned} \int_0^t \left|\left|\frac{du}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau + \varphi^{1,r}(u(t)) \quad &+ \quad \varphi^2(u_0) \leq \varphi^1(u_0) + \varphi^2(u(t)) + \langle f(t), u(t)\rangle_{V^*,V} \\ &- \quad \langle f(0), u_0\rangle_{V^*,V} - \int_0^t \left\langle \frac{df}{d\tau}(\tau), u(\tau)\right\rangle_{V^*,V} d\tau, \end{aligned} \tag{3.44}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Demonstração: Primeiramente, observe que $\varphi^{1,r} \in \Phi(V)$. De fato, como $u_0 \in D(\varphi^1)$ e $\varphi^2(u_0) < r$, tem-se $\varphi^{1,r}(u_0) = \varphi^1(u_0) < \infty$. Logo, $\varphi^{1,r}$ é própria em V.

Para mostrar que $\varphi^{1,r}$ é convexa em V, sejam $u, v \in V$ e $t \in [0,1]$. Se $\varphi^2(u) > r$ então $\varphi^{1,r}(u) = +\infty$ e, assim,

$$\varphi^{1,r}((1-t)u + tv) \leq (1-t)\varphi^{1,r}(u) + t\varphi^{1,r}(v) = +\infty. \tag{3.45}$$

Se $\varphi^2(v) > r$ então $\varphi^{1,r}(v) = +\infty$ e (3.45) também vale. Agora, se $\varphi^2(u) \leq r$ e $\varphi^2(v) \leq r$, usando a convexidade de φ^2, temos $\varphi^2((1-t)u+tv) \leq (1-t)\varphi^2(u) + t\varphi^2(v) \leq (1-t)r + tr = r$. Assim $\varphi^{1,r}((1-t)u+tv) = \varphi^1((1-t)u+tv)$. Agora, usando convexidade de φ^1, temos

$$\begin{aligned} (1-t)\varphi^{1,r}(u) + t\varphi^{1,r}(v) &= (1-t)\varphi^1(u) + t\varphi^1(v) \geq \varphi^1((1-t)u+tv) \\ &= \varphi^{1,r}((1-t)u+tv). \end{aligned}$$

De forma similar a como foi mostrado que φ^1_H é s.c.i em H no Lema 3.1.2 se mostra que $\varphi^{1,r}$ é s.c.i em V. Logo, $\varphi^{1,r} \in \Phi(V)$.

Note que, por definição de $\varphi^{1,r}$, temos $D(\varphi^{1,r}) = D(\varphi^1) \cap \{u \in V : \varphi^2(u) \leq r\}$. Além disso, as condições **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** continuam válidas substituindo φ^1 por $\varphi^{1,r}$. Realmente, como **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** são verdadeiros com φ^1, segue que:

(A1) Seja $u \in D(\varphi^{1,r})$. Neste caso, $\varphi^{1,r}(u) < \infty$, donde $\varphi^{1,r}(u) = \varphi^1(u)$. Assim, temos $C_3\varphi^{1,r}(u) = C_3\varphi^1(u) \geq ||u||_V^p - C_1||u||_H^2 - C_2$. Logo, **(A1)** é verdadeira com $\varphi^{1,r}$.

(A2) Como $D(\varphi^1) \subset D(\partial\varphi^2)$, segue que

$$D(\varphi^{1,r}) = D(\varphi^1) \cap \{u \in V : \varphi^2(u) \leq r\} \subset D(\partial\varphi^2) \cap \{u \in V : \varphi^2(u) \leq r\} \subset D(\partial\varphi^2).$$

Além disso, tomando $\{u_n\} \subset V$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\sup_{t\in[0,T]} \{\varphi^{1,r}(u_n(t)) + ||u_n(t)||_H\} + \int_0^T \left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt$ seja limitado, temos que $\varphi^{1,r}(u_n(t)) < +\infty$, donde $\varphi^1(u_n(t)) = \varphi^{1,r}(u_n(t)) < +\infty$. Assim, $\sup_{t\in[0,T]} \{\varphi^1(u_n(t)) + ||u_n(t)||_H\} + \int_0^T \left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt = \sup_{t\in[0,T]} \{\varphi^{1,r}(u_n(t)) + ||u_n(t)||_H\} + \int_0^T \left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt$ também é limitado. Logo, de **(A2)** com φ^1, segue **(A2)** com $\varphi^{1,r}$.

(A3) Seja $u \in D(\varphi^1)$, por **(A3)** com φ^1, temos que $J_\lambda u \in D(\varphi^1)$. Logo, $J_\lambda D(\varphi^1) \subset D(\varphi^1)$. Assim, pela Proposição 2.3.6, temos $\varphi^2(J_\lambda u) = \widetilde{\varphi}^2(J_\lambda u) \leq \widetilde{\varphi}^2(u) = \varphi^2(u) \leq r$, para todo $u \in D(\varphi^{1,r})$. O que implica que $J_\lambda u \in D(\varphi^{1,r})$ e $\varphi^{1,r}(J_\lambda u) = \varphi^1(J_\lambda u)$. Assim a condição **(A3)** é satisfeita com $\varphi^{1,r}$ no lugar de φ^1, pois $\varphi^{1,r}(J_\lambda u) = \varphi^1(J_\lambda u) \leq l_1\left(\varphi^1(u) + l_2(||u||_H)\right) = l_1\left(\varphi^{1,r}(u) + l_2(||u||_H)\right)$, para todo $u \in D(\varphi^{1,r})$.

Por fim, como $\varphi^2(u) \leq r$, para todo $u \in D(\varphi^{1,r})$, a condição **(A4)** é satisfeita com $k = 0$, $C_4 = 0$, $C_5 = r$ e $\varphi^1 = \varphi^{1,r}$. Note, também, que $\varphi^{1,r}(u_0) = \varphi^1(u_0) < \infty$, uma vez que $\varphi^2(u_0) < r$ e $u_0 \in D(\varphi^1)$ e, portanto, $u_0 \in D(\varphi^{1,r})$. Logo, pelo Teorema 3.1.1, o problema (3.43) tem uma solução forte u em $[0,T]$ satisfazendo (3.5), com φ^1 substituído por $\varphi^{1,r}$, e (3.44). ■

Para completar a prova do Teorema 3.2.1, vamos mostrar que $u(t)$ torna-se uma solução forte para o problema (3.1) em $[0,T_0]$, para algum $T_0 > 0$. Para isto, é suficiente provar que existe um número $T_0 \in (0,T]$ tal que $\partial\varphi^{1,r}(u(t)) = \partial\varphi^1(u(t))$ para q.t. $t \in (0,T_0)$. Para esta finalidade, usaremos os próximos lemas:

Lema 3.2.2 *Se $u \in D(\partial\varphi^{1,r})$ e $\varphi^2(u) < r$, então $u \in D(\partial\varphi^1)$ e $\partial\varphi^{1,r}(u) = \partial\varphi^1(u)$.*

Demonstração: Seja $(u,\xi) \in \partial\varphi^{1,r}$ tal que $\varphi^2(u) < r$ e tome $v \in D(\varphi^1)$ fixo e arbitrário. Para $s \in [0,1]$ defina $u_s := (1-s)u + sv$. Claramente, $u_s \to u$ em V quando $s \to 0$. Note que, $u_s \in D(\varphi^1)$. De fato, usando a convexidade de φ^1, temos $\varphi^1(u_s) = \varphi^1((1-s)u + sv) \leq (1-s)\varphi^1(u) + s\varphi^1(v) < +\infty$, $s \in [0,1]$, uma vez que $u, v \in D(\varphi^1)$. Além disso, como $s \in [0,1]$, temos $(1-s) \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned}\varphi^1(u_s) &\leq (1-s)\varphi^1(u) + s\varphi^1(v) \leq |(1-s)\varphi^1(u) + s\varphi^1(v)| \\ &\leq (1-s)|\varphi^1(u)| + s|\varphi^1(v)| \leq |\varphi^1(u)| + |\varphi^1(v)|,\end{aligned}$$

para todo $s \in [0,1]$. Logo, pela Proposição 3.1.1, $\varphi^2(u_s) \to \varphi^2(u)$, quando $s \to 0$. Isto é, $\lim_{s\to 0} \varphi^2(u_s) = \varphi^2(u) < r$. Assim, existe $s_0 \in (0,1)$ tal que $\varphi^2(u_{s_0}) \leq r$, o que resulta que $u_{s_0} \in D(\varphi^{1,r})$. Agora, como $\xi \in \partial\varphi^{1,r}(u)$, segue que

$$\varphi^1(u_{s_0}) - \varphi^1(u) = \varphi^{1,r}(u_{s_0}) - \varphi^{1,r}(u) \geq \langle \xi, u_{s_0} - u \rangle_{V^*,V}.$$

Pela convexidade de φ^1, temos $\varphi^1(u_{s_0}) = \varphi^1((1-s_0)u+s_0v) \leq (1-s_0)\varphi^1(u)+s_0\varphi^1(v)$. Donde, $\varphi^1(u_{s_0}) - \varphi^1(u) \leq (1-s_0)\varphi^1(u)+s_0\varphi^1(v)-\varphi^1(u) = s_0(\varphi^1(v)-\varphi^1(u))$. Então,

$$\begin{aligned} s_0(\varphi^1(v)-\varphi^1(u)) &\geq \varphi^1(u_{s_0})-\varphi^1(u) \geq \langle \xi, u_{s_0}-u\rangle_{V^*,V} \\ &= \langle \xi, (1-s_0)u+s_0v-u\rangle_{V^*,V} = \langle \xi, u-s_0u+s_0v-u\rangle_{V^*,V} \\ &= \langle \xi, s_0(v-u)\rangle_{V^*,V} \\ \Rightarrow s_0(\varphi^1(v)-\varphi^1(u)) &\geq \langle \xi, s_0(v-u)\rangle_{V^*,V}. \end{aligned}$$

Dividindo, ambos os membros da desigualdade acima, por $s_0 > 0$, obtemos $\varphi^1(v)-\varphi^1(u) \geq \langle \xi, v-u\rangle_{V^*,V}$, para todo $v \in D(\varphi^1)$, o que mostra que $u \in D(\partial\varphi^1)$ e $\xi \in \partial\varphi^1(u)$. Logo, $\partial\varphi^{1,r}(u) \subset \partial\varphi^1(u)$.

Agora, seja $(u,\xi) \in \partial\varphi^1$ tal que $\varphi^2(u) < r$. Neste caso, $\varphi^{1,r}(u) = \varphi^1(u)$. Logo, para todo $v \in D(\varphi^{1,r})$, temos $\varphi^{1,r}(v)-\varphi^{1,r}(u) = \varphi^1(v)-\varphi^1(u) \geq \langle \xi, v-u\rangle_{V^*,V}$, donde $\partial\varphi^1(u) \subset \partial\varphi^{1,r}(u)$ e, portanto, $\partial\varphi^{1,r}(u) = \partial\varphi^1(u)$. ■

Lema 3.2.3 *Existe um número $T_0 \in (0,T]$ tal que $\varphi^2(u(t)) < r$, para todo $t \in [0,T_0)$.*

Demonstração: Para o caso onde $\max_{t\in[0,T]} \varphi^2(u(t)) < r$, basta tomar $T_0 = T$. Agora, para o caso onde $\max_{t\in[0,T]} \varphi^2(u(t)) \geq r$. Observemos que como $\varphi^2(u(\cdot)) \in C([0,T])$ e $\varphi^2(u_0) < r$, existe um número $T_0 \in (0,T]$ tal que $\varphi^2(u(t))$ atinge r em $t = T_0$ pela primeira vez. ■

Assim, pelo Lema 3.2.3, existe um número $T_0 \in (0,T]$ tal que $u(t) \in D(\varphi^{1,r})$ para todo $t \in [0,T_0)$. Logo, pelo Lema 3.2.2, temos que $u(t) \in D(\partial\varphi^1)$ e $\partial\varphi^{1,r}(u(t)) = \partial\varphi^1(u(t))$ para q.t. $t \in (0,T_0)$. Portanto, u torna-se uma solução forte para o problema (3.1) em $[0,T_0]$ e, assim, o Teorema 3.2.1 está demonstrado. ■

O Teorema 3.2.1 nos afirma que não precisamos assumir a condição **(A4)** do Teorema 3.1.1, porém perdemos a existência de soluções fortes globais. Veremos no próximo teorema que supondo a condição **(A5)** a seguir ao invés de **(A4)** é possível garantir a existência de solução forte global para o problema (3.1) com algumas restrições em u_0 e f.

(A5) $\alpha\varphi^1(u) \leq \langle \xi-\eta, u\rangle_{V^*,V} + l_3(\varphi^2(u))\cdot\varphi^1(u)$, $\forall(u,\xi) \in \partial\varphi^1$, $\forall(u,\eta) \in \partial\varphi^2$, onde $\alpha > 0$ e $l_3 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não-decrescente satisfazendo $l_3(0) = 0$.

Teorema 3.2.2 *Supondo que **(A1)** até **(A3)** com $C_1 = C_2 = 0$ em **(A1)**, $\varphi^2 \geq 0$ e **(A5)** sejam satisfeitos. Seja $\delta_0 > 0$ tal que $l_3(\delta_0) < \alpha$. Então, para todo $R > 0$, existe um número positivo δ_R tal que para todo $T > 0$ e (u_0, f) pertencente ao conjunto*

$$\begin{aligned} X^T_{\delta_R,R} := \quad & \Bigg\{ (u_0,f) \in D(\varphi^1)\times W^{1,p'}(0,T;V^*) : \\ & \varphi^1(u_0) + \int_0^T ||f(\tau)||^{p'}_{V^*} d\tau + \int_0^T \left|\left|\frac{df}{d\tau}(\tau)\right|\right|^{p'}_{V^*} d\tau \leq R, \\ & \varphi^2(u_0) < \delta_0, \\ & ||u_0||_H + \left\{ \max\left(1, \frac{1}{T}\right) \left|\left| |f(\cdot)|^{p'}_{V^*} \right|\right|_{1,T} \right\}^{1/p} < \delta_R \Bigg\}, \end{aligned}$$

onde

$$\left|\left||f(\cdot)|_{V^*}^{p'}\right|\right|_{1,T} := \begin{cases} \int_0^T ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau, & se\ T < 1 \\ \sup_{t\in[1,T]} \int_{t-1}^{t} ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau, & se\ T \geq 1 \end{cases},$$

o problema (3.1) tem uma solução forte u em $[0,T]$ *satisfazendo (3.5).*

Demonstração: Por hipótese temos que $C_3\varphi^1(u) \geq ||u||_V^p \geq 0$, donde $C_3\varphi^1(u) \geq 0$ e, assim, $\varphi^1(u) \geq 0$, para todo $u \in D(\varphi^1)$, uma vez que $C_3 \geq 0$. Como, também por hipótese, $\varphi^2 \geq 0$, segue que $\varphi^i \geq 0$ $(i = 1,2)$.

Além disso, como $l_3 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não-decrescente tal que $l_3(0) = 0$, podemos tomar um número $\delta_1 > \delta_0$ tal que $\max_{x\in[0,\delta_1]} l_3(x) \leq (\alpha+\alpha_0)/2 \in (\alpha_0,\alpha)$, onde $\alpha_0 := \max_{x\in[0,\delta_0]} l_3(x) < \alpha$.

Defina, $D^2_{\delta_1} := \{u \in D(\varphi^2) : \varphi^2(u) \leq \delta_1\}$. Assim, para todo $u \in D^2_{\delta_1}$, temos $l_3(\varphi^2(u)) \leq l_3(\delta_1) \leq \max_{x\in[0,\delta_1]} l_3(x) \leq (\alpha_0+\alpha)/2$. Por **(A5)**, vem que

$$\begin{aligned} &\alpha\varphi^1(u) \leq \langle \xi-\eta, u\rangle_{V^*,V} + l_3(\varphi^2(u))\cdot\varphi^1(u) \leq \langle \xi-\eta, u\rangle_{V^*,V} + \frac{(\alpha_0+\alpha)}{2}\cdot\varphi^1(u) \\ &\Rightarrow \alpha\varphi^1(u) - \frac{(\alpha_0+\alpha)}{2}\cdot\varphi^1(u) \leq \langle \xi-\eta, u\rangle_{V^*,V} \\ &\Rightarrow \frac{\alpha-\alpha_0}{2}\varphi^1(u) \leq \langle \xi-\eta, u\rangle_{V^*,V}, \end{aligned} \tag{3.46}$$

para quaisquer $(u,\xi) \in \partial\varphi^1$, $(u,\eta) \in \partial\varphi^2$ e $u \in D^2_{\delta_1}$.

Neste momento, usaremos o problema (3.43) com r substituído por δ_1, Além disso, defina

$$\begin{aligned} X^T_{\delta,R} := \Bigg\{ &(u_0,f) \in D(\varphi^1)\times W^{1,p'}(0,T;V^*) : \\ &\varphi^1(u_0) + \int_0^T ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + \int_0^T \left|\left|\frac{df}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau \leq R, \\ &\varphi^2(u_0) < \delta_0,\ ||u_0||_H + \left\{\max\left(1,\frac{1}{T}\right)\left|\left||f(\cdot)|_{V^*}^{p'}\right|\right|_{1,T}\right\}^{1/p} < \delta \Bigg\} \end{aligned}$$

para todo δ, R, $T > 0$, onde

$$\left|\left||f(\cdot)|_{V^*}^{p'}\right|\right|_{1,T} := \begin{cases} \int_0^T ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau, & se\ T < 1 \\ \sup_{t\in[1,T]} \int_{t-1}^{t} ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau, & se\ T \geq 1 \end{cases}$$

e denote por $S^T_{\delta,R}$ o conjunto de todos $u \in C_w([0,T];V)\cap W^{1,2}(0,T;H)$ tal que u é uma solução forte do problema (3.43) em $[0,T]$ satisfazendo (3.44) e $\varphi^2(u(\cdot)) \in C([0,T])$ com $(u_0,f) \in X^T_{\delta,R}$.

Pelo Lema 3.2.1, temos que $S^T_{\delta,R} \neq \emptyset$ quando $X^T_{\delta,R} \neq \emptyset$. Para todo $u \in S^T_{\delta,R}$, vamos definir $T_r(u) := \sup\{T_0 \in (0,T] : \varphi^2(u(t)) < r,\ \forall t \in [0,T_0]\}$. Para completar a prova, pelo Lema 3.2.2, é suficiente mostrar que para todo $R > 0$ existe $\delta_R > 0$ tal que para todo $T > 0$ e $u \in S^T_{\delta_R,R}$ tem-se $T_r(u) = T$, onde notamos que δ_R independe de T.

Suponha que a asserção anterior seja falsa. Isto é, existe $R_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe um $T_\delta > 0$ e um $u_\delta \in S^{T_\delta}_{\delta,R_0}$ tal que $T_r(u_\delta) < T_\delta$. Logo, por definição de $T_r(u)$, para todo $t < T_r(u_\delta)$ vem que $\varphi^2(u_\delta(t)) < r$ e $\varphi^2(u_\delta(T_r(u_\delta))) = r$.

Em particular, fazendo $\delta = 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e definindo $v_n := u_{1/n} \in S^{T_{1/n}}_{1/n,R_0}$ e $T_{r,n} := T_r(u_{1/n})$, temos que v_n torna-se uma solução forte em $[0, T_{r,n}]$ para o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dv_n}{dt}(t) + \partial\varphi^1(v_n(t)) - \partial\varphi^2(v_n(t)) \ni f_n(t) \; em \; V^*, \;\; 0 < t < T_{r,n} \\ v_n(0) = u_{0,n} \end{cases}, \tag{3.47}$$

onde $(u_{0,n}, f_n) \in X^{T_{1/n}}_{1/n,R_0}$.

Neste caso, para $(v_n, \xi) \in \partial\varphi^1$ e $(v_n, \eta) \in \partial\varphi^2$, temos

$$\frac{dv_n}{dt}(t) + \xi - \eta = f_n(t) \tag{3.48}$$

Multiplicando (3.48) por $v_n(t)$ obtemos

$$\left\langle \frac{dv_n}{dt}(t), v_n(t) \right\rangle_{V^*,V} + \langle \xi, v_n(t) \rangle_{V^*,V} - \langle \eta, v_n(t) \rangle_{V^*,V} = \langle f_n(t), v_n(t) \rangle_{V^*,V}.$$

Note que $\frac{d}{dt}||v_n(t)||^2_H = \frac{d}{dt}(v_n(t), v_n(t))_H = 2\left(\frac{dv_n}{dt}(t), v_n(t)\right)_H$. Então, $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_n(t)||^2_H + \langle \xi - \eta, v_n(t) \rangle_{V^*,V} = \langle f_n(t), v_n(t) \rangle_{V^*,V}$. Por (3.46), temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_n(t)||^2_H + \frac{\alpha - \alpha_0}{2}\varphi^1(v_n(t)) \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_n(t)||^2_H + \langle \xi - \eta, v_n(t) \rangle_{V^*,V} = \langle f_n(t), v_n(t) \rangle_{V^*,V},$$

donde

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_n(t)||^2_H + \frac{\alpha - \alpha_0}{2}\varphi^1(v_n(t)) \leq \langle f_n(t), v_n(t) \rangle_{V^*,V} \text{ para q.t.p } t \in (0, T_{r,n}), \tag{3.49}$$

visto que $v_n(t) \in D^2_{\delta_1}$ para todo $t \in [0, T_{r,n})$.

Por **(A1)** temos $||v_n(t)||^p_V \leq C_3\varphi^1(v_n(t))$. Como a imersão $V \subset H$ é contínua, existe $K > 0$ tal que $||v_n(t)||^p_H \leq K||v_n(t)||^p_V \leq KC_3\varphi^1(v_n(t))$, donde $\frac{1}{KC_3}||v_n(t)||^p_H \leq \varphi^1(v_n(t))$, uma vez que $KC_3 > 0$. Como $\alpha - \alpha_0/2 > 0$ temos $\frac{(\alpha-\alpha_0)}{2}\frac{1}{KC_3}||v_n(t)||^p_H \leq \frac{\alpha-\alpha_0}{2}\varphi^1(v_n(t))$. Logo, de (3.49) e usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Lema 3.1.1, vem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_n(t)||^2_H + \frac{\alpha - \alpha_0}{2}\frac{1}{KC_3}||v_n(t)||^p_H &\leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_n(t)||^2_H + \frac{\alpha - \alpha_0}{2}\varphi^1(v_n(t)) \\ &\leq \langle f_n(t), v_n(t) \rangle_{V^*,V} \\ &\leq ||f_n(t)||_{V^*}||v_n(t)||_V \\ &\leq \mathcal{M}_p\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{4C_3}\right)||f_n(t)||^{p'}_{V^*} + \frac{\alpha - \alpha_0}{4C_3}||v_n(t)||^p_V. \end{aligned}$$

Donde,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_n(t)||^2_H + \frac{\alpha - \alpha_0}{2KC_3}||v_n(t)||^p_H - \frac{\alpha - \alpha_0}{4C_3}||v_n(t)||^p_V \leq \mathcal{M}_p\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{4C_3}\right)||f_n(t)||^{p'}_{V^*}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_n(t)||_H^2+\frac{\alpha-\alpha_0}{4KC_3}||v_n(t)||_H^p &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_n(t)||_H^2+\frac{\alpha-\alpha_0}{2KC_3}||v_n(t)||_H^p-\frac{\alpha-\alpha_0}{4KC_3}||v_n(t)||_H^p\\
&\leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_n(t)||_H^2+\frac{\alpha-\alpha_0}{2KC_3}||v_n(t)||_H^p-\frac{\alpha-\alpha_0}{4C_3}||v_n(t)||_V^p\\
&\leq \mathcal{M}_p\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{4C_3}\right)||f_n(t)||_{V^*}^{p'}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}||v_n(t)||_H^2+2\widetilde{\alpha}\left(||v_n(t)||_H^2\right)^{\frac{p}{2}}\leq 2C||f_n(t)||_{V^*}^{p'} \text{ para q.t. } t\in(0,T_{r,n}),$$

onde $\widetilde{\alpha}=(\alpha-\alpha_0)/4KC_3>0$ e $C=\mathcal{M}_p\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{4C_3}\right)>0$ não dependem de n.

Queremos aplicar o Lema 2.2.3. Para isto, considere $j(t)=||v_n(t)||_H^2\geq 0$. Temos que $j(\cdot)$ é uma função não negativa absolutamente contínua, uma vez que v_n é solução de (3.47). Tome $s=||u_{0,n}||_H+\left|\left||f_n(\cdot)|_{V^*}^{p'}\right|\right|_{1,T_{r,n}}^{2/p}$. Como $||u_{0,n}||_H<1/n<1$, temos $j(0)=||u_{0,n}||_H^2\leq||u_{0,n}||_H\leq ||u_{0,n}||_H+\left|\left||f_n(\cdot)|_{V^*}^{p'}\right|\right|_{1,T_{r,n}}^{2/p}=s$. Além disso, $\left|\left||f_n(\cdot)|_{V^*}^{p'}\right|\right|_{1,T_{r,n}}=\left(\left|\left||f_n(\cdot)|_{V^*}^{p'}\right|\right|_{1,T_{r,n}}^{2/p}\right)^{p/2}\leq \left(\left|\left||f_n(\cdot)|_{V^*}^{p'}\right|\right|_{1,T_{r,n}}^{2/p}+||u_{0,n}||_H\right)^{p/2}=s^{p/2}=s^{\rho-1}$. Observe que estamos considerando $\rho=(p/2)+1>1$, uma vez que $\rho-1=p/2$. Logo, pelo Lema 2.2.3, existe uma função não-decrescente $M(\cdot)$ que não depende de n e tal que
$||v_n(t)||_H^2\leq M\left(||u_{0,n}||_H+\left|\left||f_n(\cdot)|_{V^*}^{p'}\right|\right|_{1,T_{r,n}}^{2/p}\right)\cdot s\leq M\left(||u_{0,n}||_H+\left|\left||f_n(\cdot)|_{V^*}^{p'}\right|\right|_{1,T_{r,n}}^{1/p}\right)\cdot s.$

Seja $\widetilde{l}(\cdot)=\sqrt{M(\cdot)}$. Daí, $||v_n(t)||_H\leq\widetilde{l}\left(||u_{0,n}||_H+\left|\left||f_n(\cdot)|_{V^*}^{p'}\right|\right|_{1,T_{r,n}}^{1/p}\right)\cdot s^{1/2}$. Agora, tomando $l(x)=\widetilde{l}(x)x^{1/2}$, vem que $\lim_{x\to 0}l(x)=0$. Como $l(\cdot)$ é composta de funções não-decrescentes, temos $l(\cdot)$ também é uma função não-decrescente. Assim,

$$||v_n(T_{r,n})||_H\leq\sup_{t\in[0,T_{r,n}]}||v_n(t)||_H\leq l\left(||u_{0,n}||_H+\left|\left||f_n(\cdot)|_{V^*}^{p'}\right|\right|_{1,T_{r,n}}^{1/p}\right)\leq l\left(\frac{1}{n}\right).$$

Portanto, pelo Teorema do Confronto,

$$v_n(T_{r,n})\to 0 \text{ em H quando } n\to+\infty. \tag{3.50}$$

Por outro lado, integrando (3.49) de 0 até $T_{r,n}$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_0^{T_{r,n}}\frac{d}{dt}||v_n(t)||_H^2dt+\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\int_0^{T_{r,n}}\varphi^1(v_n(t))dt\leq\int_0^{T_{r,n}}\langle f_n(t),v_n(t)\rangle_{V^*,V}\,dt.$$

Como $||v_n(0)||=||u_{0,n}||$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vem que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||v_n(T_{r,n})||_H^2-\frac{1}{2}||u_{0,n}||_H^2+\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\int_0^{T_{r,n}}\varphi^1(v_n(t))dt &\leq \int_0^{T_{r,n}}\langle f_n(t),v_n(t)\rangle_{V^*,V}\,dt\\
&\leq \int_0^{T_{r,n}}||f_n(t)||_{V^*}||v_n(t)||_V dt.
\end{aligned}$$

Tomando $a = ||v_n(t)||_V \geq 0$ e $b = ||f_n(t)||_{V^*} \geq 0$, pelo Lema 3.1.1 e por **(A1)**, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||v_n(T_{r,n})||_H^2 \quad + \quad & \frac{\alpha-\alpha_0}{2}\int_0^{T_{r,n}} \varphi^1(v_n(t))dt \leq \\
& \frac{1}{2}||u_{0,n}||_H^2 + \mathcal{M}_p\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{4C_3}\right)\int_0^{T_{r,n}} ||f_n(t)||_{V^*}^{p'}dt + \frac{\alpha-\alpha_0}{4C_3}\int_0^{T_{r,n}} ||v_n(t)||_V^p dt \\
\leq \quad & \frac{1}{2}||u_{0,n}||_H^2 + \mathcal{M}_p\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{4C_3}\right)\int_0^{T_{r,n}} ||f_n(t)||_{V^*}^{p'}dt + \frac{\alpha-\alpha_0}{4}\int_0^{T_{r,n}} \varphi^1(v_n(t))dt.
\end{aligned}$$

Pela definição de $X_{1/n,R_0}^{T_{1/n}}$, vem que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||v_n(T_{r,n})||_H^2 + \frac{\alpha-\alpha_0}{4}\int_0^{T_{r,n}} \varphi^1(v_n(t))dt \quad & \leq \quad \frac{1}{2}||u_{0,n}||_H^2 + C\int_0^{T_{r,n}} ||f_n(t)||_{V^*}^{p'}dt \\
& \leq \quad \frac{1}{2n^2} + CR_0 \leq 1 + CR_0,
\end{aligned}$$

onde $C = \mathcal{M}_p\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{4C_3}\right)$. Como $\frac{1}{2}||v_n(T_{r,n})||_H^2 \geq 0$ segue que

$$\int_0^{T_{r,n}} \varphi^1(v_n(t))dt \leq M_4, \tag{3.51}$$

onde $M_4 = \frac{4(1+CR_0)}{\alpha-\alpha_0}$ não depende de n.

Vamos mostrar agora que

$$\sup_{t\in[0,T_{1/n}]} ||f_n(t)||_{V^*}^{p'} \leq M_5, \tag{3.52}$$

onde M_5 é uma constante independe de n.

De fato, primeiramente notemos que, como $f_n \in W^{1,p'}(0,T_{1/n};V^*)$ e $W^{1,p'}(0,T_{1/n};V^*) \subset C([0,T_{1/n}];V^*)$ temos que a sequência f_n pertence ao espaço das funções contínuas e está definida no compacto $[0,T_{1,n}]$, logo existe $t_n \in [0,T_{1,n}]$ tal que $||f_n(t_n)||_{V^*} = \min\limits_{t\in[0,T_{1/n}]} ||f_n(t)||_{V^*}$. Assim,

$$T_{1/n}||f_n(t_n)||_{V^*}^{p'} = \int_0^{T_{1/n}} ||f_n(t_n)||_{V^*}^{p'}d\tau \leq \int_0^{T_{1/n}} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'}d\tau.$$

Donde,

$$||f_n(t_n)||_{V^*}^{p'} \leq \frac{1}{T_{1/n}}\int_0^{T_{1/n}} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'}d\tau. \tag{3.53}$$

Para o caso em que $T_{1/n} \geq 1$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned}
||f_n(t)||_{V^*}^{p'} \quad & = \quad ||f_n(t_n)||_{V^*}^{p'} + \int_{t_n}^t \frac{d}{d\tau}|f_n(\tau)|_{V^*}^{p'}d\tau \leq \frac{1}{T_{1/n}}\int_0^{T_{1/n}} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'}d\tau + \int_{t_n}^t \frac{d}{d\tau}||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'}d\tau \\
& = \quad \frac{1}{T_{1/n}}\int_0^{T_{1/n}} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'}d\tau + p'\int_{t_n}^t ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'-1}\left|\left|\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*} d\tau \\
& \leq \quad \int_0^{T_{1/n}} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'}d\tau + p'\int_0^{T_{1/n}} ||f_n(\tau)||_{V^*}^{p'-1}\left|\left|\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*} d\tau
\end{aligned}$$

$\big($a última desigualdade segue do fato de que$(1/T_{1/n}) \leq 1$ e $[t_n,t] \subset [0,T_{1/n}]\big)$. Agora, pela Desigualdade de H$\ddot{o}$lder e notando que $p(p'-1) = p'$, temos

$$\begin{aligned}
||f_n(t)||^{p'}_{V^*} &\leq \int_0^{T_{1/n}} ||f_n(\tau)||^{p'}_{V^*} d\tau + p' \left(\int_0^{T_{1/n}} ||f_n(\tau)||^{p(p'-1)}_{V^*} d\tau \right)^{1/p} \left(\int_0^{T_{1/n}} \left|\left| \frac{df_n}{d\tau}(\tau) \right|\right|^{p'}_{V^*} d\tau \right)^{1/p'} \\
&= \int_0^{T_{1/n}} ||f_n(\tau)||^{p'}_{V^*} d\tau + p' \left(\int_0^{T_{1/n}} ||f_n(\tau)||^{p'}_{V^*} d\tau \right)^{1/p} \left(\int_0^{T_{1/n}} \left|\left| \frac{df_n}{d\tau}(\tau) \right|\right|^{p'}_{V^*} d\tau \right)^{1/p'} \\
&\leq R_0 + p'(R_0)^{1/p}(R_0)^{1/p'},
\end{aligned}$$

uma vez que $(u_{0,n}, f_n) \in X^{T_{1/n}}_{1/n,R_0}$. Assim, $||f_n(t)||^{p'}_{V^*} \leq R_0 + p'(R_0)^{1/p}(R_0)^{1/p'} = R_0 + p' R_0^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} = R_0 + p' R_0 = R_0(1+p')$. Logo, $||f_n(t)||^{p'}_{V^*} \leq M_5$, onde $M_5 = CR_0$, com $C = 1+p'$, não depende de n. Portanto, $\sup\limits_{t\in[0,T_{1/n}]} ||f_n(t)||^{p'}_{V^*} \leq M_5$.

Para o caso em que $T_{1/n} < 1$, temos por definição que $\left|\left| |f(\cdot)|^{p'}_{V^*} \right|\right|_{1,T_{1/n}} = \int_0^{T_{1/n}} ||f(\tau)||^{p'}_{V^*} d\tau$. Além disso, $\max\left(1, \frac{1}{T_{1/n}}\right) = \frac{1}{T_{1/n}}$, uma vez que $(1/T_{1/n}) > 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{1}{T_{1/n}} \int_0^{T_{1/n}} ||f(\tau)||^{p'}_{V^*} d\tau \right\}^{1/p} &= \left\{ \max\left(1, \frac{1}{T_{1/n}}\right) \left|\left| |f(\cdot)|^{p'}_{V^*} \right|\right|_{1,T_{1/n}} \right\}^{1/p} \\
&\leq ||u_{0,n}||_H + \left\{ \max\left(1, \frac{1}{T_{1/n}}\right) \left|\left| |f(\cdot)|^{p'}_{V^*} \right|\right|_{1,T_{1/n}} \right\}^{1/p} \\
&\leq \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

De (3.53) resulta que $||f_n(t_n)||^{p'}_{V^*} \leq \frac{1}{T_{1/n}} \int_0^{T_{1/n}} ||f_n(\tau)||^{p'}_{V^*} d\tau \leq \left(\frac{1}{n}\right)^p$ e, portanto, $\sup\limits_{t\in[0,T_{1/n}]} ||f_n(t)||^{p'}_{V^*} \leq M_5$.

Por (3.44), vem que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T_{r,n}} \left|\left| \frac{dv_n}{d\tau}(\tau) \right|\right|^2_H d\tau + \varphi^1(v_n(T_{r,n})) + \varphi^2(u_{0,n}) \leq \varphi^1(u_{0,n}) + \varphi^2(v_n(T_{r,n})) \\
+ \quad &\langle f_n(T_{r,n}), v_n(T_{r,n}) \rangle_{V^*,V} - \langle f_n(0), u_{0,n} \rangle_{V^*,V} - \int_0^{T_{r,n}} \left\langle \frac{df_n}{d\tau}(\tau), v_n(\tau) \right\rangle_{V^*,V} d\tau. \quad (3.54)
\end{aligned}$$

Como $\int_0^{T_{r,n}} \left|\left| \frac{dv_n}{d\tau}(\tau) \right|\right|^2_H d\tau \geq 0$, $\varphi^2(u_{0,n}) \geq 0$ e $\varphi^2(v_n(T_{r,n})) \leq r$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi^1(v_n(T_{r,n})) &\leq \varphi^1(u_{0,n}) + r + \langle f_n(T_{r,n}), v_n(T_{r,n}) \rangle_{V^*,V} - \langle f_n(0), u_{0,n} \rangle_{V^*,V} \\
&- \int_0^{T_{r,n}} \left\langle \frac{df_n}{d\tau}(\tau), v_n(\tau) \right\rangle_{V^*,V} d\tau \\
&\leq \varphi^1(u_{0,n}) + r + ||f_n(T_{r,n})||_{V^*} ||v_n(T_{r,n})||_V + ||f_n(0)||_{V^*} ||u_{0,n}||_V \\
&+ \int_0^{T_{r,n}} \left|\left| \frac{df_n}{d\tau}(\tau) \right|\right|_{V^*} ||v_n(\tau)||_V d\tau.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1.1 e por **(A1)**, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi^1(v_n(T_{r,n})) &\leq \varphi^1(u_{0,n})+r+\mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)||f_n(T_{r,n})||_{V^*}^{p'}+\frac{1}{2C_3}||v_n(T_{r,n})||_V^p \\
&+ \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{C_3}\right)||f_n(0)||_{V^*}^{p'}+\frac{1}{C_3}||u_{0,n}||_V^p \\
&+ \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{C_3}\right)\int_0^{T_{r,n}}\left|\left|\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'}d\tau+\frac{1}{C_3}\int_0^{T_{r,n}}||v_n(\tau)||_V^p d\tau \\
&\leq \varphi^1(u_{0,n})+r+\mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)||f_n(T_{r,n})||_{V^*}^{p'}+\frac{1}{2}\varphi^1(v_n(T_{r,n})) \\
&+ \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{C_3}\right)||f_n(0)||_{V^*}^{p'}+\varphi^1(u_{0,n}) \\
&+ \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{C_3}\right)\int_0^{T_{r,n}}\left|\left|\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'}d\tau+\int_0^{T_{r,n}}\varphi^1(v_n(\tau))d\tau.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\varphi^1(v_n(T_{r,n})) &\leq 2\varphi^1(u_{0,n})+r+\mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)||f_n(T_{r,n})||_{V^*}^{p'}+\mathcal{M}_p\left(\frac{1}{C_3}\right)||f_n(0)||_{V^*}^{p'} \\
&+ \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{C_3}\right)\int_0^{T_{r,n}}\left|\left|\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'}d\tau+\int_0^{T_{r,n}}\varphi^1(v_n(\tau))d\tau.
\end{aligned}$$

Tomando $C=\max\left\{2,\mathcal{M}_p\left(\frac{1}{C_3}\right),\mathcal{M}_p\left(\frac{1}{2C_3}\right)\right\}$, resulta

$$\begin{aligned}
&\varphi^1(v_n(T_{r,n})) \\
\leq\ & C\left\{\varphi^1(u_{0,n})+r+\int_0^{T_{r,n}}\varphi^1(v_n(\tau))d\tau+||f_n(0)||_{V^*}^{p'}+||f_n(T_{r,n})||_{V^*}^{p'}+\int_0^{T_{r,n}}\left|\left|\frac{df_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'}d\tau\right\} \\
\leq\ & C\left\{R_0+r+M_4+M_5\right\} \qquad (3.55)
\end{aligned}$$

em que a última desigualdade segue de (3.51), (3.52) e da definição de $X_{1/n,R_0}^{T_{1/n}}$.

Novamente por **(A1)**, temos $||v_n(T_{r,n})||_V^p\leq C_3\varphi^1(v_n(T_{r,n}))\leq C_3C\{R_0+r+M_4+M_5\}<+\infty$. Logo, $\{v_n(T_{r,n})\}$ é limitado em V. Sendo V reflexivo, podemos extrair uma subsequência $\{n'\}$ de $\{n\}$ tal que $v_{n'}(T_{r,n'})\rightharpoonup v$ em V. Como $H^*\subset V^*$, segue que $v_{n'}(T_{r,n'})\rightharpoonup v$ em H. Por outro lado, por (3.50), $v_{n'}(T_{r,n'})\rightharpoonup 0$ em H. Pela unicidade do limite fraco, $v=0$. Assim, $v_{n'}(T_{r,n'})\rightharpoonup 0$ em V.

Como a imersão $V\subset H$ é contínua e pelo fato de $\{v_n(T_{r,n})\}$ ser limitado em V, segue que $\{v_n(T_{r,n})\}$ é limitado em H. Além disso, segue de (3.54) e (3.55) que $\int_0^{T_{r,n}}\left|\left|\frac{dv_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau$ é limitado. Assim, $\sup_{t\in[0,T_{r,n}]}\left\{\varphi^1(v_n(T_{r,n}))+||v_n(T_{r,n})||_H\right\}+\int_0^{T_{r,n}}\left|\left|\frac{dv_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau$ é limitado. Logo, por **(A2)**, podemos extrair uma subsequência $\{n''\}$ de $\{n'\}$ tal que $g_{n''}^2\to g^2$ em V^*, quando $n''\to+\infty$, onde $g_{n''}^2\in\partial\varphi^2(v_{n''}(T_{r,n''}))$.

Temos, também, que $u_{0,n''}\rightharpoonup 0$ em V. Como $g_{n''}^2\to g^2$ em V^* quando $n''\to+\infty$, pela Proposição 2.1.2, tem-se $\langle g_{n''}^2,u_{0,n''}\rangle_{V^*,V}\to\langle g^2,0\rangle_{V^*,V}=0$. De forma análoga, mostramos que $\langle g_{n''}^2,v_{n''}(T_{r,n''})\rangle_{V^*,V}\to 0$. Daí, $\langle g_{n''}^2,v_{n''}(T_{r,n''})-u_{0,n''}\rangle_{V^*,V}\to 0$, quando $n''\to+\infty$. Então, existe

$N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \left\langle g^2_{N_0}, v_{N_0}(T_{r,N_0}) - u_{0,N_0} \right\rangle_{V^*,V} \right| < \delta_1 - \delta_0$. Agora, como $g^2_{N_0} \in \partial\varphi^2(v_{N_0}(T_{r,N_0}))$, temos

$$\varphi^2(u_{0,N_0}) - \varphi^2(v_{N_0}(T_{r,N_0})) \geq \left\langle g^2_{N_0}, u_{0,N_0} - v_{N_0}(T_{r,N_0}) \right\rangle_{V^*,V}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi^2(v_{N_0}(T_{r,N_0})) &\leq \varphi^2(u_{0,N_0}) + \left\langle g^2_{N_0}, -u_{0,N_0} + v_{N_0}(T_{r,N_0}) \right\rangle_{V^*,V} \\ &< \delta_0 + \delta_1 - \delta_0 = \delta_1 = r. \end{aligned}$$

Assim, $\varphi^2(v_{N_0}(T_r(v_{N_0}))) < r$, o que é uma contradição com o fato de $\varphi^2(v_{N_0}(T_r(v_{N_0}))) = r$. E isto conclui a prova do Teorema 3.2.2. ■

Observação 3.2.1 *De forma análoga as demonstrações dos Teoremas 3.1.1, 3.2.1 e 3.2.2 mostramos que continuam válidos os mesmos teoremas se* $\sup_{t\in[0,T]} \left\{ \varphi^1(u_n(t)) + ||u_n(t)||_H \right\}$ *em **(A2)** e* $\varphi^1(J_\lambda u)$ *em **(A3)** forem substituídos por* $\sup_{t\in[0,T]} ||u_n(t)||_V$ *e* $||J_\lambda u||_V$*, respectivamente.*

Capítulo 4

Aplicações envolvendo o operador p-Laplaciano perturbado

Neste capítulo daremos um exemplo onde esta teoria pode ser aplicada para o operador p-Laplaciano perturbado.

4.1 O Operador p-Laplaciano Perturbado

Definição 4.1.1 *Seja $p,q \in (1,+\infty)$. Denotamos por Δ_p o operador p-Laplaciano dado por*

$$\Delta_p(u) := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

e denominamos $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{q-2}u$ *o operador p-Laplaciano perturbado.*

Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, isto é, um conjunto aberto e conexo com fronteira suave $\partial\Omega$. Vamos considerar o espaço de Banach reflexivo e separável $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ com norma $||u||_V := ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$ e

$$1 < q < p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & se\ N > p \\ +\infty, & se\ N \leq p \end{cases} \qquad e \qquad \frac{2N}{N+2} \leq p < +\infty. \tag{4.1}$$

para $p,q \in (1,+\infty)$.

Considere, também, as funções $\varphi_p : V \to (-\infty,+\infty]$ e $\psi_p : V \to (-\infty,+\infty]$ dadas por

$$\varphi_p(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx, \ \ u \in V$$

e

$$\psi_q(u) = \frac{1}{q}\int_\Omega |u(x)|^q dx, \ \ u \in V.$$

Seja $H = L^2(\Omega)$, então H é um espaço de Hilbert e como Ω é limitado, segue que $V \subset H \subset V^*$ com imersões densas e contínuas.

Além disso, devido a condição (4.1), V está compactamente contido em $L^q(\Omega)$.

Lema 4.1.1 *$\psi_q \in \Phi(V)$ e $D(\psi_q) = V$.*

Demonstração: Como V está compactamente contido em $L^q(\Omega)$ segue que $D(\psi_q) = V$ e ψ_q é própria em V.

Sendo a função $f(\lambda) = \lambda^q$, $\lambda > 0$, convexa, então então para $u, v \in V$ e $0 \leq t \leq 1$ obtemos

$$\begin{aligned}
\psi_q(tu+(1-t)v) &= \frac{1}{q}\int_\Omega |tu(x)+(1-t)v(x)|^q dx \\
&\leq \frac{1}{q}\int_\Omega [t|u(x)|+(1-t)|v(x)|]^q\,dx \\
&\leq \frac{1}{q}\int_\Omega [t|u(x)|^q+(1-t)|v(x)|^q]\,dx \\
&= t\frac{1}{q}\int_\Omega |u(x)|^q dx+(1-t)\frac{1}{q}\int_\Omega |v(x)|^q dx \\
&= t\psi_q(u)+(1-t)\psi_q(v).
\end{aligned}$$

Donde, segue que, ψ_q é convexa. Agora resta mostrar que ψ_q é semicontínua inferiormente em V. Para isto, seja $u_n \to u$ em V. Queremos mostrar que $\psi_q(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \psi_q(u_n)$. Realmente, se $\liminf_{n\to\infty} \psi_q(u_n) = +\infty$, então $\psi_q(u) \leq +\infty = \liminf_{n\to\infty} \psi_q(u_n)$. Agora, se $\liminf_{n\to\infty} \psi_q(u_n) = a < +\infty$, então existe uma subsequência $\{u_{n_j}\} \subset V$ de $\{u_n\}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \psi_q(u_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{q}\int_\Omega |u_{n_j}(x)|^q dx = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{q}||u_{n_j}||^q_{L^q(\Omega)} = a.$$

Assim,

$$\psi_q(u) = \frac{1}{q}||u||^q_{L^q(\Omega)} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{q}||u_{n_j}||^q_{L^q(\Omega)} = \liminf_{n\to\infty} \psi_q(u_n)$$

e, portanto, ψ_q é semicontínua inferiormente. Daí, $\psi_q \in \Phi(V)$. ■

De forma análoga mostra-se o lema a seguir

Lema 4.1.2 $\varphi_p \in \Phi(V)$ *e* $D(\varphi_p) = V$.

Logo, pelo Teorema 2.3.1, temos que $\partial\varphi_p$ e $\partial\psi_q$ são operadores maximais monótonos em V.

Lema 4.1.3 $\partial\psi_q(u)$ *coincide com* $|u|^{q-2}u$ *e* $D(\partial\psi_q) = V$.

Demonstração: Como $\partial\psi_q(u)$ é maximal monótono, é suficiente mostrar que $|u|^{q-2}u \subset \partial\psi_q(u)$, para todo $u \in V$. Seja $u \in V$ e $v = |u|^{q-2}u$. Então, para cada $\xi \in V = D(\psi_q)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle v, \xi - u\rangle_{V^*,V} &= \langle |u|^{q-2}u, \xi - u\rangle_{V^*,V} \\
&= \int_\Omega |u(x)|^{q-2}u(x)\,(\xi(x)-u(x))\,dx \\
&= \int_\Omega |u(x)|^{q-2}u(x)\xi(x)dx - \int_\Omega |u(x)|^{q-2}u(x)^2 dx \\
&\leq \int_\Omega |u(x)|^{q-1}|\xi(x)|dx - \int_\Omega |u(x)|^q dx.
\end{aligned}$$

Considerando agora q' de forma que $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ e usando a Desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}\langle v,\xi-u\rangle_{V^*,V}+\int_\Omega |u(x)|^q dx &\leq \frac{1}{q'}\int_\Omega |u(x)|^{(q-1)q'}dx+\frac{1}{q}\int_\Omega |\xi(x)|^q dx\\ &= \frac{1}{q'}\int_\Omega |u(x)|^{q}dx+\frac{1}{q}\int_\Omega |\xi(x)|^q dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle v,\xi-u\rangle_{V^*,V}+\left(1-\frac{1}{q'}\right)\int_\Omega |u(x)|^q dx \leq \frac{1}{q}\int_\Omega |\xi(x)|^q dx$$

ou equivalentemente

$$\langle v,\xi-u\rangle_{V^*,V}+\frac{1}{q}\int_\Omega |u(x)|^q dx \leq \frac{1}{q}\int_\Omega |\xi(x)|^q dx.$$

Assim,

$$\langle v,\xi-u\rangle_{V^*,V}+\psi_q(u)\leq \psi_q(\xi) \Leftrightarrow \psi_q(\xi)-\psi_q(u)\geq \langle v,\xi-u\rangle_{V^*,V},$$

para todo $\xi\in V$, o que implica que $v\in\partial\psi_q$ e, portanto, $\partial\psi_q(u)=|u|^{q-2}u$. Além disso, temos que $D(\partial\psi_q)=V$. ■

De forma análoga mostra se o lema a seguir

Lema 4.1.4 $\partial\varphi_p(u)$ *coincide com* $-\Delta_p u$ *e* $D(\partial\varphi_p)=V$.

4.2 Existência das soluções para o problema de Cauchy envolvendo o operador p-Laplaciano perturbado

Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, isto é, um conjunto aberto e conexo com fronteira suave $\partial\Omega$ e seja $p,q\in(1,+\infty)$. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\Delta_p u(x,t)-|u|^{q-2}u(x,t)=f(x,t) \ \ ,(x,t)\in\Omega\times(0,T)\\ u(x,t)=0 \ \ ,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)\\ u(x,0)=u_0(x), \ \ x\in\Omega\end{cases}, \tag{4.2}$$

em que Δ_p denota o operador p-Laplaciano definido na seção anterior.

Na definição que segue $W^{-1,p'}(\Omega)$ denota o espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em que p' é o expoente conjugado de p.

Definição 4.2.1 *Uma função* $u\in C([0,T];W^{-1,p'}(\Omega))$ *é uma solução fraca de (4.2) em* $[0,T]$ *se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $u:[0,T]\to W^{-1,p'}(\Omega)$ *é uma função absolutamente contínua em* $[0,T]$*;*

(ii) $u(t)\to u_0$ *em* $L^2(\Omega)$ *quando* $t\to 0^+$*;*

(iii) $-\Delta_p u(t)$, $|u|^{q-2}u(t)\in W^{-1,p'}(\Omega)$ *para q.t.* $t\in(0,T)$.

Além disso, vale a seguinte igualdade

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t),\phi(x)dx + \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u(x,t)\cdot\nabla\phi(x)dx \quad - \quad \int_\Omega |u(x,t)|^{q-2}u(x,t)\phi(x)dx$$
$$= \int_\Omega f(x,t),\phi(x)dx,$$

para q.t. $t \in (0,T)$ *e para todo* $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

A existência de solução local ou global para o problema (4.2) já foi estudado por Tsutsumi [12] para o caso em que $f(x,t) \equiv 0$ e por Ôtani ([13], [14]) para o caso em que $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. O argumento em [12] é baseado no método Faedo-Galerkin e requer a condição de que $q < 2p/(N+p)$ para a existência local de solução e a condição de que $q < p^*$ para a existência global de solução; onde $p^* = Np/(N-p)$, se $p < N$ e $p^* = +\infty$, se $p \geq N$. Por outro lado, o método em [13] e [14] é baseado na teoria de pertubações não-monótonos para operadores do tipo subdiferenciais em um espaço de Hilbert. Além disso, [13] requer a condição de que $q < (p^*/2)+1$ para e existência local global de solução. Para o caso $p = 2$, entretanto, é mostrado em [14] que o problema (4.2) admite solução local e solução global sobre a condição de que $q < 2^*$.

Contudo, nem [13] nem [14] asseguram uma existência local de solução de (4.2) em um espaço maior que $L^2(\Omega)$ sob a condição de que $q < p^*$. Esta seção nos fornece uma resposta afirmativa para o problema em questão. Para tal, a fim de transformar o problema (4.2) em (3.1), consideramos $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, φ_p e ψ_q como na seção anterior.

Então, o problema (4.2) é reduzido ao problema (3.1) com $\varphi^1 = \varphi_p$ e $\varphi^2 = \psi_q$. No próximo lema mostraremos que as condições **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** são satisfeitas para esse problema.

Lema 4.2.1 *Assuma que (4.1) seja satisfeita. Então,* ***(A1)***, ***(A2)*** *e* ***(A3)*** *são verdadeiras com* $\varphi^1 = \varphi_p$, $\varphi^2 = \psi_q$ *e* $C_1 = C_2 = 0$.

Demonstração: Como $\varphi_p(u) = 1/p||u||_V^p$, então $||u||_V^p = p\varphi_p(u)$, para todo $u \in V = D(\varphi_p)$ e **(A1)** é verdadeira com $C_1 = C_2 = 0$ e $C_3 = p$. Para verificar **(A2)**, seja $\{u_n\}$ uma sequência tal que $\sup_{t\in[0,T]} \{\varphi_p(u_n(t)) + ||u_n(t)||_H\} + \int_0^T \left|\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right|\right|_H^2 dt \leq C$. Em particular, $\varphi_p(u_n(t)) \leq C$, para todo $t \in [0,T]$. Donde $\{u_n(t)\}$ é limitado em V, para todo $t \in [0,T]$, já que $1/p||u_n(t)||_V^p = \varphi_p(u_n(t)) \leq C$. Sendo V compactamente imerso em $L^q(\Omega)$ segue que $\{u_n(t)\}$ forma um conjunto precompacto em $L^q(\Omega)$, para todo $t \in [0,T]$.

Seja $K = \{u_n(t) : t \in [0,T]\}$. Temos que K é um conjunto equicontínuo em $C([0,T];H)$. De fato, sejam U uma vizinhança da origem em H e $\varepsilon > 0$. Tome $\delta(U) = \varepsilon^2/C > 0$. Observe que

$$||u_n(t) - u_n(s)||_H = \left|\left|\int_s^t \frac{du_n}{d\tau}(\tau)d\tau\right|\right|_H \leq \int_s^t \left|\left|\frac{du_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H d\tau.$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
||u_n(t)-u_n(s)||_H &\le \left(\int_s^t \left|\left|\frac{du_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau\right)^{1/2} \left(\int_s^t |1|^2 d\tau\right)^{1/2}\\
&= \left(\int_s^t \left|\left|\frac{du_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau\right)^{1/2} |t-s|^{1/2}\\
&\le \left(\int_0^T \left|\left|\frac{du_n}{d\tau}(\tau)\right|\right|_H^2 d\tau\right)^{1/2} |t-s|^{1/2}\\
&= \left|\left|\frac{du_n}{dt}\right|\right|_{L^2(0,T;H)} |t-s|^{1/2}.
\end{aligned}$$

Assim, para todo $t \in [0,T]$ com $|t-s| \le \delta(U)$, tem-se

$$||u_n(t)-u_n(s)||_H \le C^{1/2}\,[\delta(U)]^{1/2} = C^{1/2}\frac{\varepsilon}{C^{1/2}} = \varepsilon.$$

Portanto, K é um conjunto equicontínuo em $C([0,T];H)$. Além disso, pela Desigualdade de Interpolação (Lema 2.2.2) e (4.1), temos $||u||_{L^q(\Omega)} \le ||u||^{\theta}_{L^1(\Omega)}||u||^{1-\theta}_{L^{p^*}(\Omega)} \le C||u||^{\theta}_{H}||u||^{1-\theta}_{L^{p^*}(\Omega)}$, para todo $\theta \in (0,1)$. Agora, pela Proposição 2.2.2, segue que

$$||u||_{L^q(\Omega)} \le C||u||^{\theta}_{H}||u||^{1-\theta}_{V},\ \forall\theta \in (0,1)\ e\ \forall u \in V. \tag{4.3}$$

Por **(A1)**, tem-se $||u_n(t)||^{1-\theta}_V < C^{1-\theta}$. Daí, $||u_n(t)-u_n(s)||_{L^q(\Omega)} \le C||u_n(t)-u_n(s)||^{\theta}_H < C\varepsilon^{\theta} < C\varepsilon$. Logo, K é um conjunto equicontínuo em $C([0,T];L^q(\Omega))$. Assim, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá (Teorema 2.1.7), existe uma subsequência $\{n'\}$ de $\{n\}$ tal que $u_{n'} \to u$ em $C([0,T];L^q(\Omega))$. Disto resulta que $|u_{n'}|^{q-2}u_{n'}(\cdot) \to |u|^{q-2}u(\cdot)$ em $C([0,T];L^{q'}(\Omega))$ e, portanto, $\partial\psi_q(u_{n'}(\cdot)) \to \partial\psi_q(u(\cdot))$ em $C([0,T];L^{q'}(\Omega))$.

Agora, por (4.3) e usando o fato de que a imersão $V \subset H$ é contínua, segue que $V \subset L^q(\Omega)$ continuamente, o que implica que $L^{q'}(\Omega) = (L^q(\Omega))^* \subset V^*$ continuamente. Assim, quando $n' \to +\infty$, tem-se

$$\sup_{t\in[0,T]} ||\partial\psi_q(u_{n'}(t)) - \partial\psi_q(u(t))||_{V^*} \le C \sup_{t\in[0,T]} ||\partial\psi_q(u_{n'}(t)) - \partial\psi_q(u(t))||_{L^{q'}(\Omega)} \to 0.$$

Portanto, $\partial\psi_q(u_{n'}(\cdot)) \to \partial\psi_q(u(\cdot))$ em $C([0,T];V^*)$. Isto verifica a condição **(A2)**.

Para verificar **(A3)**, defina

$$\widetilde{\varphi}^2(u) = \begin{cases} \varphi^2(u), & u \in V \\ +\infty, & u \in H - V. \end{cases}$$

Claramente $\widetilde{\varphi}^2\Big|_V = \varphi^2$. Da mesma forma que mostramos que $\varphi^1_H \in \Phi(H)$, mostra-se que $\widetilde{\varphi}^2 \in \Phi(H)$. Além disso, pela Proposição 2.3.5, a aplicação $r \in \mathbb{R} \mapsto J_\lambda r = \left(I + \lambda\partial_H\widetilde{\varphi}^2\right) r$, $\lambda > 0$, é não-expansiva em $\mathbb{R}$. Logo, $|\nabla J_\lambda u(x)| \le |\nabla u(x)|$ para q.t. $x \in \Omega$. De fato, note que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial J_\lambda u(x)}{x_j}\right| &= \left|\lim_{h\to 0}\frac{J_\lambda u(x+he_j) - J_\lambda u(x)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}|J_\lambda u(x+he_j) - J_\lambda u(x)|\\
&\le \lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}|u(x+he_j) - u(x)| = \left|\lim_{h\to 0}\frac{u(x+he_j)-u(x)}{h}\right|\\
&= \left|\frac{\partial u(x)}{x_j}\right|, \qquad \text{para cada } j \in \{1,2,\cdots,n\}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|\nabla J_\lambda u(x)| = \max_{1\le j\le n}\left|\frac{\partial J_\lambda u(x)}{x_j}\right| \le \max_{1\le j\le n}\left|\frac{\partial u(x)}{x_j}\right| = |\nabla u(x)|.$$

Logo,

$$\varphi^1(J_\lambda u) = \varphi_p(J_\lambda u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla J_\lambda u(x)|^p dx \le \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx = \varphi_p(u) = \varphi^1(u).$$

Tomando $l_1(x) = x$ e $l_2(y) = y$, segue que $\varphi^1(J_\lambda u) \le \varphi^1(u) \le \varphi^1(u) + ||u||_H = \varphi^1(u) + l_2(||u||_H)$ $= l_1(\varphi^1(u) + l_2(||u||_H))$ e **(A3)** segue. ■

Os próximos resultados nos fornece a existência de solução local para o caso onde $p \le q$ e a existência de solução global para o caso onde $p < q$ e $p > q$.

Teorema 4.2.1 *(Existência local) Assuma a condição* (4.1) *e seja* $p \le q$. *Então, para quaisquer* $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *e* $f \in W^{1,p'}([0,T]; W^{-1,p'}(\Omega))$ *existe um número* $T_0 \in (0,T]$ *tal que o problema (4.2) tem uma solução fraca u em* $[0,T_0]$ *satisfazendo:*

$$u \in C_w([0,T_0]; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C([0,T_0]; L^q(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T_0; L^2(\Omega)). \tag{4.4}$$

Demonstração: Pelo Lema 4.2.1, temos que **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** são verdadeiras com $\varphi^1 = \varphi_p$, $\varphi^2 = \psi_q$ e $C_1 = C_2 = 0$. Logo, pelo Teorema 3.2.1, existe $T_0 \in (0,T]$ tal que o problema (4.2) tem uma solução u em $[0,T_0]$ e $u \in C_w([0,T_0]; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T_0; L^2(\Omega))$, para todo $u \in D(\varphi_p) = W_0^{1,p}(\Omega)$ e para todo $f \in W^{1,p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))$.

Ainda, pelo Teorema 3.2.1, temos que $\psi_q(u(\cdot)) \in C([0,T_0])$. Por (4.1), temos que $q > 1$. Logo, $L^q(\Omega)$ é uniformemente convexo. Assim, $u \in C([0,T_0]; L^q(\Omega))$. De fato, sejam $\varepsilon > 0$ e $t_0 \in [0,T_0]$. Considere a sequência $\{t_n\}$ tal que $t_n \to t_0$. Como $\psi_q(u(\cdot)) \in C([0,T_0])$, temos $\psi_q(u(t_n)) \to \psi_q(u(t_0))$. Logo, quando $n \to +\infty$, temos

$$\frac{1}{q}\int_\Omega |u(t_n,x)|^q dx \to \frac{1}{q}\int_\Omega |u(t_0,x)|^q dx \Rightarrow \left|\int_\Omega |u(t_n,x)|^q dx - \int_\Omega |u(t_0,x)|^q dx\right| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \left| ||u(t_n)||^q_{L^q(\Omega)} - ||u(t_0)||^q_{L^q(\Omega)} \right| < \varepsilon \Rightarrow ||u(t_n)||_{L^q(\Omega)} \to ||u(t_0)||_{L^q(\Omega)}.$$

Em particular, $\limsup_{n\to+\infty} ||u(t_n)||_{L^q(\Omega)} = ||u(t_0)||_{L^q(\Omega)}$. Usando o fato de que $u \in C_w([0,T_0]; W_0^{1,p}(\Omega))$, segue que $u(t_n) \rightharpoonup u(t_0)$ em $W_0^{1,p}(\Omega) = V$. Donde $u(t_n) \rightharpoonup u(t_0)$ em $L^q(\Omega)$, já que a imersão $V \subset L^q(\Omega)$ é contínua. Como $L^q(\Omega)$ é uniformemente convexo, segue do Teorema 2.1.5 que $u \in C([0,T_0]; L^q(\Omega))$. ■

Teorema 4.2.2 *(Existência global) Assuma a condição (4.1) e* $p < q$. *Seja R um número positivo arbitrário, e seja* $\delta > 0$ *tal que* $\delta < \widetilde{C}^{-p/(q-p)}$, *onde* $\widetilde{C}$ *denota a melhor constante possível para a Desigualdade de Poincaré, isto é,* $||u||_{L^q(\Omega)} \le \widetilde{C}||u||_V$. *Então, existe* $\delta_R > 0$, *independente de T, tal que se* u_o *e f satisfazem*

$$\frac{1}{p}||u_0||_V^p + \int_0^T ||f(\tau)||_{V^*}^{p'} d\tau + \int_0^T \left|\left|\frac{df}{d\tau}(\tau)\right|\right|_{V^*}^{p'} d\tau \le R,$$

$$||u_0||_{L^q(\Omega)} < \delta, \qquad ||u_0||_{L^2(\Omega)} + \left\{\max\left(1, \frac{1}{T}\right) \left|\left| |f(\cdot)|_{V^*}^{p'} \right|\right|_{1,T}\right\}^{1/p} < \delta_R$$

então o problema (4.2) tem uma solução fraca u em $[0,T]$ *satisfazendo (4.4) com* T_0 *substituído por T.*

Demonstração: Pela Desigualdade de Poincaré, temos $||u||_{L^q(\Omega)} \leq \widetilde{C}||u||_V$, para todo $u \in V$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial\varphi_p(u) - \partial\psi_q(u), u \right\rangle_{V^*,V} &= \left\langle -\Delta_p(u) - |u|^{q-2}u, u \right\rangle_{V^*,V} \\
&= \left\langle -\Delta_p(u), u \right\rangle_{V^*,V} - \left\langle |u|^{q-2}u, u \right\rangle_{V^*,V} \\
&= \int_\Omega -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) dx - \int_\Omega |u|^{q-2}u^2 dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|\nabla u|^2 dx - \int_\Omega |u|^{q-2}|u|^2 dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega |u|^q dx \\
&= ||u||_V^p - ||u||_{L^q(\Omega)}^q \\
&= ||u||_V^p - ||u||_{L^q(\Omega)}^p ||u||_{L^q(\Omega)}^{q-p} \\
&\geq ||u||_V^p - \widetilde{C}^p ||u||_V^p ||u||_{L^q(\Omega)}^{q-p} \\
&= p\varphi_p(u)\left[1 - \widetilde{C}^p ||u||_{L^q(\Omega)}^{q-p}\right] \\
&= p\varphi_p(u)\left[1 - \widetilde{C}^p \left\{q\psi_q(u)\right\}^{(q-p)/q}\right].
\end{aligned}$$

Logo, $p\varphi_p(u) \leq \left\langle \partial\varphi_p(u) - \partial\psi_q(u), u \right\rangle_{V^*,V} + p\widetilde{C}^p \left\{q\psi_q(u)\right\}^{(q-p)/q} \varphi_p(u)$, para todo $u \in V$.

Considere a função $l_3 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $l_3(r) = p\widetilde{C}^p(qr)^{(q-p)/q}$. Note que l_3 é uma função contínua não-decrescente tal que $l_3(0) = 0$. Portanto, **(A5)** é verdadeira com $\alpha = p$ e l_3 como definida anteriormente.

Tome $\delta_0 = \delta^q/q < \widetilde{C}^{-pq/(q-p)}/q$. Claramente, $\delta_0 > 0$. Além disso, $l_3(\delta_0) < \alpha$. De fato, como l_3 é não-decrescente, temos que

$$l_3(\delta_0) < l_3\left(\widetilde{C}^{-pq/(q-p)}/q\right) = p\widetilde{C}^p \left(\frac{q\widetilde{C}^{-pq/(q-p)}}{q}\right)^{(q-p)/q} = p\widetilde{C}^p\widetilde{C}^{-p} = p = \alpha.$$

Neste caso, o Teorema 3.2.2 assegura a existência de uma solução global fraca em $[0,T]$ para o problema (4.2). ■

Teorema 4.2.3 *(Existência global) Assuma a condição (4.1) e seja $p > q$. Então, para quaisquer $u_0 \in V$ e $f \in W^{1,p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$, o problema (4.2) tem uma solução fraca u em $[0,T]$ satisfazendo (4.4) com T_0 substituído por T.*

Demonstração: Primeiramente, note que as condições **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** são verdadeiras pelo Lema 4.2.1. Além disso, pela Desigualdade de Poincaré, temos $\psi_q(u) = (1/q)||u||_{L^q(\Omega)}^q \leq (1/q)\widetilde{C}^q||u||_V^q$. Agora, tomando $\beta = 1/(2p)$, $a = ||u||_V^q$ e $b = (1/q)\widetilde{C}^q$ e usando o Lema 3.1.1, resulta que

$$\psi_q(u) \leq ||u||_V^q \frac{1}{q}\widetilde{C}^q \leq \frac{1}{2}\frac{1}{p}\left(||u||_V^q\right)^{p/q} + \mathcal{M}_p(\beta)\left(\frac{1}{q}\widetilde{C}^q\right)^{(p/q)'} = \frac{1}{2}\varphi_p(u) + C, \qquad \forall u \in V.$$

Logo, a condição **(A4)** é verdadeira com $\varphi^1 = \varphi_p$, $\varphi^2 = \psi_q$, $k = 1/2$, $C_4 = 0$ e $C_5 = C$. Portanto, pelo Teorema 3.1.1, o problema (4.2) tem uma solução fraca global em $[0,T]$. ■

Observação 4.2.1 *Quando $p = q$ em (4.2) temos que $\Delta_p u + |u|^{p-2}$ é um operador do tipo subdiferencial (Veja [15]).*

Bibliografia

[1] G.Akagi,M. Ôtani, “Evolution inclusions governed by the difference of two subdifferentials in reflexive Banach spaces”, J. dif. equ. n.209, p.392-415, 2005.

[2] G.Akagi,M. Ôtani, “Evolution inclusions governed by subdifferentials in reflexive Banach spaces”, J. evol. equ. n.4, p.519-541, 2004.

[3] V. Barbu, Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces, New York: Springer, 2010.

[4] H. Brézis, Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert, Amsterdam/New York: Math Studies, vol. 5, North-Holland, 1973.

[5] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/A, New York: Linear Monotone Operators, Springer-Verlag, 1990.

[6] C.R. Oliveira, Introdução a análise funcional, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, Impa, 2010.

[7] W. Rudin, Real and Complex Analysis, New York: McGraw-Hill, 1970.

[8] A.R. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, 1978.

[9] V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space, Noordhoff International, 1976.

[10] R. E. Showalter, Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1997.

[11] N. Kenmochi, “Some Nonlinear Parabolic Variational Inequalities”, Israel J. Math, n.22, p.304-331, 1975

[12] M. Tsutsumi, “Existence and Nonexistence of Global Solutions for Nonlinear Parabolic Equations”, RIMS Kyoto Univ., n.8, p.268-299, 1972-1973

[13] M. Ôtani, “On Existence of Strong Solutions for $du(t)/dt + \partial\psi^1(u(t)) + \partial\psi^2(u(t)) \ni f(t)$”, J. Fac. Sci. Univ., n.24, 575-605, 1977

[14] M. Ôtani, “Nonmonotone Pertubations for Nonlinear Parabolic Equations Associated with Subdifferential Operators, Cauchy Problems”, Journal of Differential Equations, n.46, p.268-299, 1982.

[15] Rocha, Franco Bassi. Inclusões diferenciais governadas por operadores do tipo subdiferencial em espaços de Banach reflexivos. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Itajubá, 2013.