

TESE

988

DISSERTAÇÃO

Engenharia Elétrica

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS  
DINÂMICOS CONTÍNUOS NO TEMPO

Francisco Antonio Lotufo

EFEI  
Itajubá  
1998



**Escola Federal de Engenharia de Itajubá**

**“IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS  
CONTÍNUOS NO TEMPO”**

**Francisco Antonio Lotufo**

Dissertação apresentada à Escola Federal de  
Engenharia de Itajubá, para obtenção do  
título de Mestre em Engenharia Elétrica.

**Orientador:** Prof. Dr. Germano Lambert Torres

**Co-Orientador:** Prof. Dr. Luiz Eduardo Borges da Silva

**Dezembro/1998**

“Este trabalho é dedicado a Deus, pela sua bondade, zelo e incontestável amor, ao meu pai e minha mãe(in memoriam) pela formação e muito amor, aos meus dois irmãos, a minha querida esposa Ana Lucia pelo apoio e dedicação e a minha filha recém chegada Ana Beatriz.”

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pela sua inestimável ajuda em todos os momentos.

Aos amigos e colegas do bloco IV, da Faculdade de Engenharia de Guaratinguá, por serem amigos de um livro.

Aos professores Márcio Abud e Samuel pela sua orientação e algumas palavras.

Aos professores Edivon Batista, Luis Octavio, e Rossi que sem dúvida nenhuma, pelo apoio dada, contribuíram bastante com esse trabalho.

Aos colegas Sônia, Rose e Vaniat pelo grande encorajamento.

Aos colegas professores David, Mayra, Celsodoro, Belizem, Fernanda, Gerson, Jader, Vargas, Everson e Leonardo pelo companheirismo e paciência durante.

Ao amigo professor José Celso pelo apoio e ajuda.

Aos professores Germano e Luis Eduardo, pelo apoio, orientação e ajuda com o fim para realização deste trabalho.

Aos amigos Ileana Lino Akamirt e Ileana, pelo apoio, orientação e ajuda que sem dúvida nenhuma me fizeram crescer.

*“Quem nunca um erro cometeu, também nunca algo descobriu.”*

*Regina Schultz*

*“Sempre existe uma saída para qualquer problema, por mais complexo e difícil que nos pareça.”*

*Pastorino*

Meus parabéns e felicitações aqui presentes.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo seu inestimável amparo em todos os momentos.

Aos amigos e colegas do bloco IV, da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá por esses 8 anos de convívio.

Aos professores Márcio Abud e Samuel pela suas experiências e algumas discussões.

Aos professores Edson Bortoni, Luis Octávio, e Rossi que sem dúvida nenhuma, pelo apoio dado, contribuíram bastante com esse trabalho.

As colegas Sônia, Rose e Vanilda pelo pronto atendimento.

Aos colegas professores Durval, Maysa, Galdenoro, Baldam, Fernando, Oscar, Jader, Vargas, Everson e Leonardo pelo companheirismo e pacífico convívio.

Ao amigo professor José Celso pelo apoio e crédito.

Aos professores Germano e Luiz Eduardo, pelo crédito, confiança e ajuda concedida para realização deste trabalho.

Aos amigos Jânio Itiro Akamatsu e Inácio Bianchi pela confiança, apoio, amizade que sem dúvida nenhuma me fizeram crescer.

Meus humildes e sinceros agradecimentos.

## ÍNDICE

Resumo.....	vii
Abstract.....	viii
Lista de Figuras.....	ix
Lista de Tabelas.....	xi
Simbologia.....	xii
<b>CAPÍTULO 1- Introdução.....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 2- Métodos de Identificação de Sistemas Dinâmicos Contínuos</b>	
<b>2.1- Métodos Não-Paramétricos de Identificação.....</b>	<b>6</b>
<b>2.2- Métodos Paramétricos de Identificação.....</b>	<b>7</b>
2.2.1- Métodos Paramétricos Indiretos.....	8
2.2.2- Métodos Paramétricos Diretos.....	9
2.2.3- Operação Dinâmica Linear.....	10
2.2.3.1- Funções de Modulação.....	11
2.2.3.2- Filtros Lineares.....	12
2.2.3.3- Caracterização Espectral de Sinais.....	13

<b>CAPÍTULO 3- Descrição de Quatro Técnicas de Identificação Paramétrica Direta</b>	
3.1- Filtro Integral Linear.....	15
3.2- Filtro Variável de Estado Modificado -Operador de Transformação.....	19
3.3- Equação a diferença por pulso em bloco.....	21
3.4- Interpolação numérica usando função trapezoidal.....	23
<b>CAPÍTULO 4- Análise do Caso Ruidoso</b>	
4.1- Descrição do problema.....	28
4.2- Considerações sobre o ruído.....	29
4.3- Método Variável Instrumental para identificação.....	30
4.4- Identificação de um experimento real.....	36
<b>CAPÍTULO 5- Resultados Experimentais</b>	
5.1- Identificação de um sistema com duas entradas e uma saída.....	39
5.2- Identificação de um circuito elétrico experimental.....	42
5.3- Identificação de um processo térmico em escala de laboratório.....	47
<b>CAPÍTULO 6- Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros.....</b>	<b>53</b>
<b>ANEXO A- Sinal PRBS.....</b>	<b>56</b>
<b>ANEXO B- Script File para identificação.....</b>	<b>60</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>65</b>

## RESUMO

Grande parte da literatura sobre identificação de sistemas considera modelos discretizados. Embora estes modelos sejam suficientes para várias aplicações, o significado físico dos parâmetros do sistema contínuo sendo identificado é em geral perdido.

Daí o interesse por técnicas de identificação que se baseiam diretamente no modelo contínuo.

Por outro lado, estas técnicas apresentam algumas características que ainda necessitam de maiores estudos. Neste trabalho algumas destas características serão analisadas. Em particular, será feito um estudo sobre as técnicas para pré-filtragem dos dados. O problema da polarização das estimativas será também abordado.

# ABSTRACT

Most of the works found in the literature deals with discrete-time models. Although these models are suitable for many applications, when they are applied to continuous-time systems, the physical meaning of the parameters are lost.

Thus, the identification methods are based on continuous time models. On the other hand, these models present some characteristics that need some more study.

In this works we analyze some of this characteristics. Particularly, a pre-filtering analysis is done and also the bias estimate problem is considered.

## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO 1

Figura 1.1: Abordagens utilizadas na obtenção de modelos.....2

### CAPÍTULO 2

Figura 2.1: Abordagem indireta para identificação de modelo contínuo no tempo via formas não paramétricas.....7

Figura 2.2: Identificação de modelo contínuo via modelo discreto no tempo.....9

Figura 2.3: Esquema de estimação paramétrica direta para modelos lineares invariantes com o tempo SISO.....9

Figura 2.4: Várias manifestações da operação  $\mathbb{L}$  em identificação de modelos contínuos.....11

### CAPÍTULO 4

Figura 4.1: Sistema com ruído (aditivo) concentrado de medida.....28

Figura 4.2: Circuito RC usado na simulação.....33

Figura 4.3: Sinais de entrada e saída simulados.....34

Figura 4.4: Parâmetros estimados RLS- apresentando a polarização das estimativas...34

Figura 4.5: Parâmetros estimados RIV- valores menos polarizados.....35

Figura 4.6: Experimento de identificação.....36

Figura 4.7: Sinais de entrada e saída usados para identificação.....37

Figura 4.8: Parâmetros estimados do experimento.....38

## CAPÍTULO 5

Figura 5.1: Diagrama de Simulação para obtenção das entradas $u_1(t)$ e $u_2(t)$ e saída $y(t)$ .....	39
Figura 5.2: Sinais de entrada $u_1(t)$ e $u_2(t)$ e saída $y(t)$ , com 200 amostras e tempo de amostragem $T = 0,05s$ .....	40
Figura 5.3: Estimativas dos parâmetros depois de 200 amostras e tempo de amostragem $T = 0,05s$ .....	41
Figura 5.4: Resposta ao degrau do modelo simulado e do modelo identificado.....	41
Figura 5.5: Circuito elétrico experimental.....	42
Figura 5.6: Sinais de entrada e saída do circuito em teste.....	44
Figura 5.7: Comportamento dos parâmetros no final da simulação.....	45
Figura 5.8: Resposta ao degrau da planta real e da planta identificada.....	46
Figura 5.9: Sinais de entrada e saída do processo térmico.....	48
Figura 5.10: Valores estimados dos parâmetros.....	49
Figura 5.11: Resposta ao degrau da planta identificada de primeira ordem e da planta obtida no exemplo do “iddemo.m”.....	49
Figura 5.12: Sinais de entrada e saída para identificação.....	50
Figura 5.13: Estimativa dos parâmetros.....	51
Figura 5.14: Resposta ao degrau da planta identificada de segunda ordem e da planta obtida no exemplo do “iddemo.m”.....	52

## ANEXO A

Figura 1A- Função de autocorrelação do sinal PRBS.....	56
Figura 2A- Circuito do registrador de deslocamento com 4 estágios.....	58

# LISTA DE TABELAS

## CAPÍTULO 4

Tabela 4.1: Valores dos parâmetros no final da simulação.....	35
---	----

## CAPÍTULO 5

Tabela 5.1: Valores dos componentes do circuito experimental.....	43
Tabela 5.2: Erro relativo das estimativas.....	46

## ANEXO A

Tabela 1A: Conexão para geração das "m-sequences" com período até 2047 dígitos..	57
--	----

## SIMBOLOGIA

$T$	Tempo de amostragem
$s$	Variável complexa contínua
$z$	Variável complexa discreta
$e^*(t)$	Medida do erro do modelo
$y^*(t)$	Medida do sinal de saída do sistema
$y_M^*(t)$	Medida do sinal de saída do modelo
$T(s)$	Função de transferência do filtro linear
$x(t)$	Sinal contínuo
$I_1 x(t)$	Integral do sinal contínuo
$l$	Fator de comprimento do filtro integral
$f_i$	Coefficiente do filtro
$q^{-1}$	Operador de atraso unitário
$x^{(j)}(t)$	$j$ -ésima derivada do sinal contínuo $x(t)$
$p = \frac{d}{dt}$	Operador diferencial
$y(kT)$	Sinal amostrado de saída do sistema com ruído de medida
$x(kT)$	Sinal amostrado de saída do sistema livre de ruído
$v(kT)$	Ruído amostrado com média zero
$\varphi(k)$	Vetor de regressão
$\theta$	Vetor de parâmetros

$F_I$	Filtro variável de estado
$\lambda$	Operador filtro passa baixo
$\tau$	Constante de tempo do filtro $\tau = \frac{1}{a}$
$G_0(p)$	Função de transferência com operador diferencial
$Y(s)$	Transformada de laplace da saída da planta
$U(s)$	Transformada de laplace da entrada da planta
$G(s)$	Função de transferência da planta
$z_{l+k}$	Combinação linear dos coeficientes do pulso em bloco do sinal de saída
$g_I$	Vetor de regressão linear da equação a diferença por pulso em bloco
$I_{n,k+1}(y)$	n-ésima integral do sinal de saída $y(t)$
$E[e(k)]$	Média do ruído $e(k)$
$E[e^2(k)]$	Variância do ruído $e(k)$
$E\left[\hat{\theta}(n)\right]$	Estimativa do vetor $\hat{\theta}(n)$
$\zeta(k)$	Vetor de variáveis instrumentais
$\hat{a}_0, \hat{b}_0$	Estimativa dos parâmetros $a_0$ e $b_0$
N/S	Relação ruído/sinal
$E_{a_0}(\%)$	Erro relativo do parâmetro $a_0$
$\hat{a}_1, \hat{a}_0, \hat{b}_{10}, \hat{b}_{20}$	Estimativas dos parâmetros $a_1, a_0, b_{10}, b_{20}$ , respectivamente
$y_{ps}(t)$	Resposta ao degrau da planta simulada

$y_{pi}(t)$	Resposta ao degrau da planta identificada
$y_{pr}(t)$	Resposta ao degrau da planta real
N	Comprimento do sinal PRBS
$\zeta$	Razão de amortecimento

Uma das formas de entender o comportamento que se tem de um sistema, é através do Modelo Dinâmico do Sistema, que é de grande utilidade para Ciência e Engenharia. Muitos sistemas como, económicos, biológicos, ecológicos ou de engenharia são descritos por modelos que representam um papel vital para análise, síntese, controle e simulação, visando uma operação eficiente desses Sistemas.

Como exemplo de situações onde são requeridos Modelos Dinâmicos, temos:

- Investigação do comportamento do sistema em várias condições operativas;
- Aplicação de técnicas modernas de controle para sistemas industriais;
- Deposito de dados, diagnóstico de falhas e monitoramento de condições dinâmicas etc. [12].

Porém, a tomada de decisões e solução de problemas depende do acesso adequado às informações sobre o problema a ser resolvido. Como Modelos representam a ligação necessária entre experimento e modelo de decisão, são importantes para toda análise aplicada, e representam aspectos essenciais de um sistema com respeito a certos propósitos, que de maneira singular, se distinguem entre:

*Modelos Matemáticos:* o comportamento do sistema é tratado em uma forma não gráfica.

*Modelos Gráficos:* as propriedades do sistema são resumidas em um gráfico ou tabela.

*Modelos Matemáticos (Matriciais):* as relações entre as variáveis do sistema são vistas em termos de equações matriciais [16].

Em Engenharia, frequentemente a problemas mais difíceis de um ou mais aspectos dos problemas inversos, descritos por Hokey [7], é a construção de modelos matemáticos ou analíticos.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO.

Uma das formas de sintetizar o conhecimento que se tem de um sistema, é através do Modelo Dinâmico do Sistema, que é de grande utilidade para Ciência e Engenharia. Muitos sistemas como, econômicos, biológicos, ecológicos ou de engenharia são descritos por modelos que representam um papel vital para análise, síntese, controle e simulação, visando uma operação eficiente destes Sistemas.

Como exemplo de situações onde são requeridos Modelos Dinâmicos, temos:

- . Investigação do comportamento do sistema em várias condições especiais;
- . Aplicação de métodos modernos de controle para sistemas industriais;
- . Detecção de falhas, diagnósticos de faltas e monitoramento de condições dinâmicas etc [22].

Portanto, a tomada de decisões e solução de problemas depende do acesso adequado as informações sobre o problema a ser resolvido. Como Modelos constituem a ligação necessária entre experimento e tomada de decisões, são importantes para toda ciência aplicada; e representam aspectos essenciais de um sistema com respeito a certos propósitos, que de maneira simples, se distinguem entre:

*Modelos Intuitivos:* o conhecimento do sistema é resumido em uma forma não analítica.

*Modelos Gráficos:* as propriedades do sistema são resumidas em um gráfico ou tabela.

*Modelos Matemáticos (Analíticos):* as relações entre as variáveis do sistema são vistas em termos de expressões matemáticas [16].

Em Engenharia, provavelmente o problema mais difícil dentro da categoria dos problemas Inversos, descrito por Bekey [2], é a construção de modelos matemáticos ou analíticos.

Há dentre estes, aqueles que descrevem as relações entre as variáveis do sistema em termos de equações, com um número limitado de parâmetros, e são chamados modelos paramétricos. Exemplos de Modelos Paramétricos no domínio do tempo são equações diferenciais (sistemas contínuos) e equações a diferenças (sistemas discretos) [22].

Para construir os Modelos Matemáticos, existem basicamente duas técnicas:

- A primeira, realizada teoricamente através da análise dos mecanismos do sistema, é baseada em leis físicas e relações que governam o comportamento do sistema, e é normalmente chamada Modelagem.

- Contudo, as vezes, o conhecimento dos mecanismos do sistema é insuficiente, ou então o tempo necessário para realizá-lo é muito grande para pouca complexidade, sendo assim, em muitos casos é preferível usar a segunda técnica, que é realizada experimentalmente, baseada nos dados observados dos sinais de entrada e saída, e que normalmente é chamada Identificação.

A figura 1.1 mostra de forma esquemática as duas abordagens citadas acima.

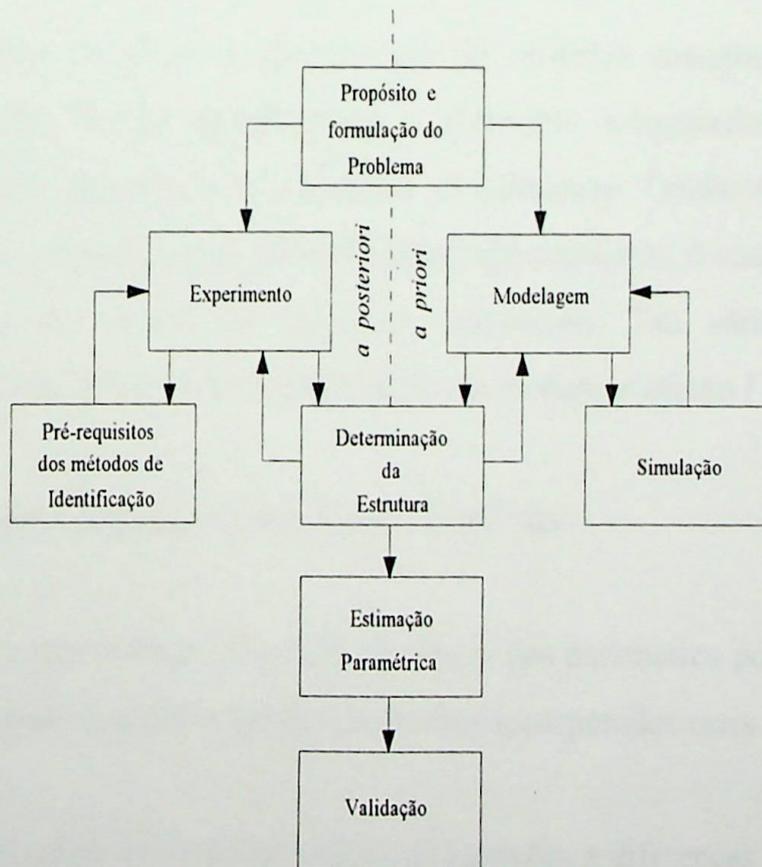


Fig. 1.1: Abordagens utilizadas na obtenção de modelos.

Hoje em dia parece ser um consenso que as duas abordagens para construir modelos matemáticos, não devem ser vistas como algo separado, ou distintas, mas sim técnicas que se completam [17], para com isso garantir um modelo mais fiel para desejada aplicação, principalmente no que diz respeito ao controle.

Se certos detalhes sobre o modelo podem ser usados, por exemplo, a estrutura e a ordem da equação diferencial ou da equação a diferença são conhecidas, o problema de identificação pode ser reduzido a determinação de parâmetros ou estimação paramétrica.

Convém ressaltar que grande parte da literatura sobre identificação considera modelos discretizados, também chamada de DMI ("Discrete-time Model Identification"). Isto se deve ao emprego de computadores digitais, que processam somente dados discretos. Assim muitos problemas em DMI têm sido investigados e conseqüentemente muitos métodos foram propostos.

Ao contrário do DMI, a identificação de modelos contínuos, ou seja, CMI ("Continuous-time Model Identification"), utilizando computadores digitais, teve recentemente sua importância e relevância reconhecidas. Tendo-se em vista que a maior parte dos sistemas físicos são essencialmente contínuos, é natural descrever seu comportamento em termos de equações diferenciais. Em várias aplicações, é conveniente estimar diretamente os parâmetros do modelo contínuo [10], [11] e [23].

As principais vantagens da abordagem "CMI" são:

- 1) Em tais modelos o significado físico dos parâmetros pode ser mantido, e conhecimentos a priori sobre o sistema podem ser incorporados mais facilmente.

- 2) De modo diferente ao modelo de equações a diferenças, os parâmetros da equação diferencial são independentes da taxa de amostragem. Assim, na aquisição de dados para identificação, há mais flexibilidade na escolha do período de amostragem.

3) Os modelos contínuos são convenientes em situações onde os sinais de entrada são sinais normais de operação, por exemplo, o sinal de entrada de um subsistema investigado é a saída de outra parte do sistema. Assim, as partes do sistema podem ser identificadas separadamente, se seus correspondentes sinais de entrada e saída forem mensuráveis.

4) Um outro problema fundamental na utilização de equações discretas consiste na perda de informação da ordem relativa, ou seja, diferença entre o grau do polinômio do denominador e o polinômio do numerador da função de transferência do sistema, na discretização, que reaparece na forma de zeros em locais indesejáveis.

Baseado nas informações acima tentaremos aqui fazer um estudo das técnicas mais utilizadas para identificação de sistemas contínuos, tendo em mente que o objetivo principal seria a escolha de uma técnica que possa ser empregada em tempo real, ou seja, “on-line”. Além disso observaremos também duas características importantes na identificação de sistemas contínuos que são: O problema da polarização das estimativas e o problema da condição inicial.

Este trabalho é organizado como a seguir. No capítulo 2 será feito um levantamento das técnicas mais utilizadas para identificação de sistemas dinâmicos contínuos encontrados na literatura.

No capítulo 3 é descrito quatro técnicas de identificação de sistemas dinâmicos contínuos no tempo, sendo tais técnicas desenvolvidas para identificar sistemas na forma paramétrica e diretamente.

No capítulo 4 será feitas algumas considerações sobre o ruído que inevitavelmente contamina os sinais usados na identificação, por serem sinais medidos e também pelo motivo de tais técnicas, para superarem o problema de derivadas dos sinais, realizarem algumas aproximações nesses dados, ocasionando muitas vezes erros de truncamento, o que pode afetar a qualidade das estimativas. Ainda neste capítulo é feita uma

descrição sucinta sobre métodos que podem ser usados na segunda fase do processo de identificação, para superar os problemas de falta de consistência e também polarização das estimativas.

No capítulo 5, são apresentados os resultados da identificação de 3 sistemas diferentes, o primeiro relativo a um sistema com duas entradas e uma saída, no segundo um circuito elétrico experimental e o terceiro um processo térmico em escala de laboratório.

No capítulo 6 será apresentada algumas conclusões e observações sobre a identificação de sistemas dinâmicos contínuos no tempo de forma direta e também algumas sugestões para trabalhos e investigações futuras, com base nos resultados obtidos e também em informações encontradas na literatura técnica sobre o assunto.

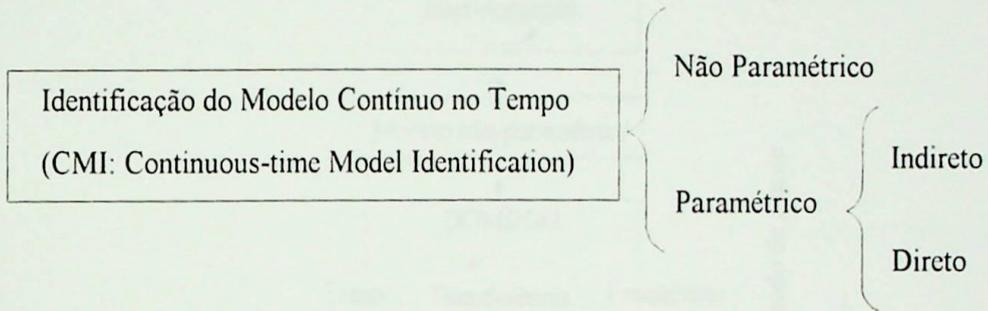
O anexo A apresenta informações sobre o sinal de teste PRBS (“*Pseudo-Random Binary Sequence*”) e também um programa em turbo C para implementar e gerar tal sinal.

O anexo B apresenta um exemplo de arquivo “*Script File*” do Matlab usado para identificação do circuito elétrico experimental baseado em um experimento encontrado na literatura.

## CAPÍTULO 2

### MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS CONTÍNUOS.

Na verdade, os princípios básicos por trás dos vários métodos de Identificação de modelos contínuos no tempo não são muito diferentes daqueles empregados na identificação de modelos discretos. Os métodos existentes podem ser classificados em métodos não paramétricos e paramétricos, como mostrado no esquema abaixo:



#### 2.1- Métodos Não Paramétricos de Identificação.

Estes são métodos indiretos nos quais sistemas dinâmicos lineares são modelados em termos de descrições não paramétricas (na forma de curvas, funções e tabelas) tais como resposta ao impulso, resposta ao degrau, resposta em frequência (cujos modelos são importantes para estudos de estabilidade e projetos em engenharia de controle), funções de covariância, descrição em densidade espectral, séries de Volterra etc. , que são de dimensão infinita. Vários métodos são disponíveis para identificação de modelos não paramétricos [5], [24]. Então, modelos contínuos paramétricos são ajustados a forma não paramétrica [13], [16], [17], [22].

Na figura 2.1 é mostrado o procedimento de identificação via forma não paramétrica em situações determinísticas ou estocásticas. Dos modelos não paramétricos é possível obter o modelo paramétrico correspondente na forma de

função de transferência. É também possível, quando necessário, trabalhar ou no domínio do tempo ou no da frequência usando técnicas de transformação interdomínios.

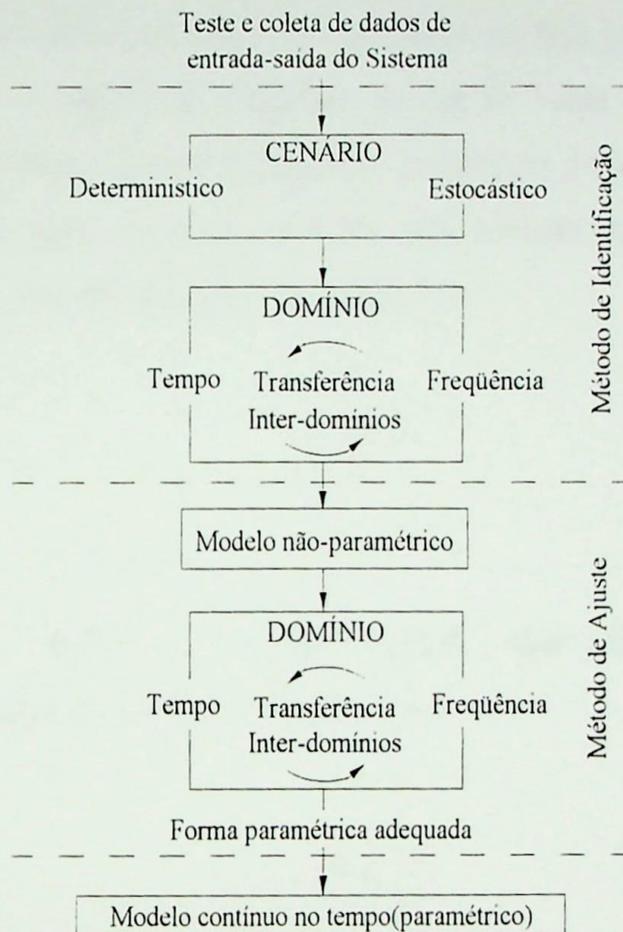


Fig. 2.1: Abordagem indireta para identificação de modelo contínuo no tempo via formas não paramétricas.

## 2.2- Métodos Paramétricos de Identificação.

O termo modelo contínuo no tempo “continuous-time model” é atualmente relevante somente para modelos paramétricos de dimensão finita [23], que podem se apresentar na forma de equações diferenciais, funções de transferência e equações no espaço de estado.

### 2.2.1- Métodos Paramétricos Indiretos.

Nestes métodos, um modelo discreto é estimado primeiramente e uma versão contínua é então deduzida dele (o vasto número de técnicas bem desenvolvidas para estimação do modelo discreto podem ser utilizados na fase principal da estimação). Para isso utiliza-se o método de transição de estado "state transition method" ou métodos de transformação entre o domínio "s" (contínuo) e o domínio "z" (discreto), como por exemplo, aproximação da derivada pelo método de diferença em avanço "forward difference" (método de Euler) equação (2.1)

$$s = \frac{z - 1}{T} \quad (2.1)$$

Ou transformação "Tustin" ou "Forma Bilinear", que corresponde ao método trapezoidal para integração numérica equação (2.2).

$$s = \frac{2(z - 1)}{T(z + 1)} \quad (2.2)$$

onde T é o tempo de amostragem. A transformação usando a forma bilinear tem vantagens sobre o método de Euler [1], [16], [23].

O método de transição de estado contém cálculos mais complicados, ao passo que a transformação bilinear é mais simples, porém, a escolha de T (Tempo de amostragem) na expressão acima não é trivial. A figura 2.2 mostra a identificação do modelo contínuo via modelo discreto.

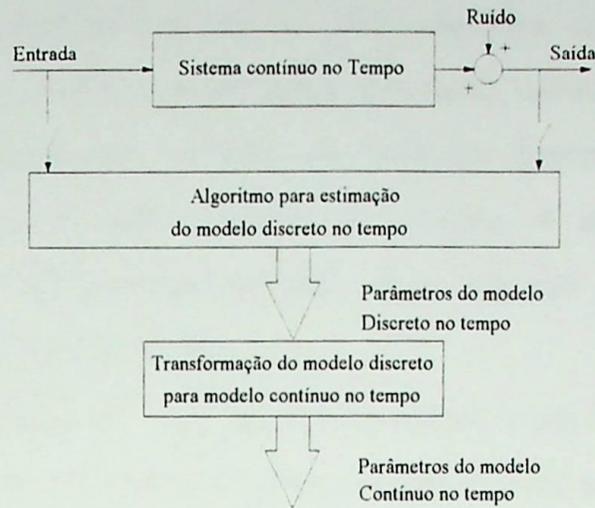


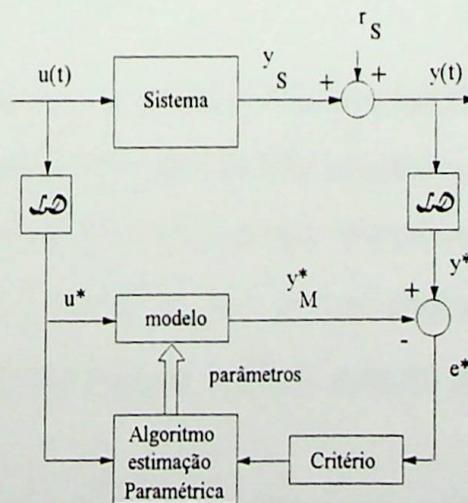
Fig. 2.2: Identificação de modelo contínuo via modelo discreto no tempo.

### 2.2.2- Métodos Paramétricos Diretos.

Um esquema geral que proporciona a estimação direta dos parâmetros de um modelo contínuo linear e invariante no tempo SISO é mostrado na figura 2.3 [23]. Nesta proposição, baseado em um critério, uma definida função custo da medida do erro do modelo  $e^*$ , que em tal esquema é dado pela equação (2.3)

$$e^*(t) = y^*(t) - y_M^*(t) \quad (2.3)$$

é minimizado com respeito ao conjunto de parâmetros do modelo contínuo de uma estrutura conhecida.



\* - representa o sinal medido.

Fig. 2.3: Esquema de estimação paramétrica direta para modelos lineares invariantes com o tempo SISO.

A dificuldade fundamental em se obter modelos na forma de equações diferenciais com base em dados amostrados dos sinais de entrada e saída reside no fato das derivadas temporais não poderem ser medidas diretamente, tendo que ser calculadas com base em dados passados e presentes. A utilização de derivação numérica usual é evidentemente inviável, visto que ela acentua o ruído que inevitavelmente contamina as medidas.

O uso das "Medidas"  $u^*$  e  $y^*$ , em vez dos sinais, é um aspecto importante dos métodos de identificação de modelos contínuos e será descrito a seguir.

Podemos dizer que a identificação de modelos contínuos diretamente, pode ser encarada como um procedimento composto de duas fases, onde a primeira fase seria responsável por produzir as "Medidas" (citadas anteriormente), evitando com isso gerar (ou trabalhar com) as derivadas dos sinais  $u(t)$  (entrada) e  $y(t)$  (saída) do sistema a ser identificado.

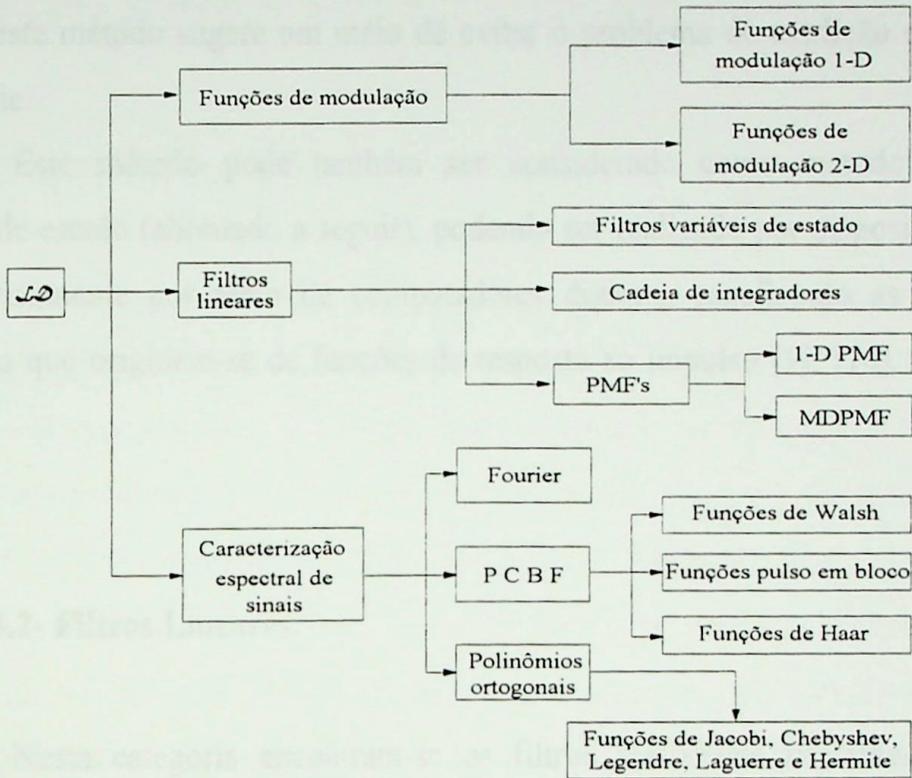
A segunda fase é geralmente independente da forma do modelo original e pode ser aplicada com pouca diferença ou modificação para ambos, modelos contínuos ou discretos. Assim métodos como os Mínimos Quadrados (LS) ou Variáveis Instrumentais (IV), que são técnicas consagradas em identificação de modelos discretos, podem ser empregados em CMI [22].

### 2.2.3- Operação Dinâmica Linear.

Devido a impossibilidade de observar diretamente alguns elementos da equação diferencial, particularmente aqueles envolvendo operações como derivadas, é efetuada uma operação dinâmica linear ("Linear Dynamic Operation -  $\mathcal{LD}$  Operation") evitando as indesejáveis derivadas. A operação  $\mathcal{LD}$  é tal que, enquanto retém os parâmetros do modelo contínuo em sua forma original facilita a geração das apropriadas "medidas"  $u^*$  e  $y^*$  [23].

As várias manifestações da operação  $\mathcal{LD}$  são mostradas na figura 2.4, que é uma característica vital da primeira fase da Identificação de modelos contínuos diretamente, e se divide em três grandes categorias: a primeira envolve o uso de funções de

modulação, a segunda requer um pré-processamento por uma classe de filtros lineares e a terceira é baseada em uma representação espectral dos sinais do processo com funções de base ortogonal.



PMF - Momento Funcional de Poisson.

MDPMF - Momento Funcional de Poisson multi-dimensinais.

PCBF - Funções de base constantes por parte.

Fig. 2.4: Várias manifestações da operação  $\mathcal{LD}$  em identificação de modelos contínuos.

### 2.2.3.1- Funções de Modulação.

Nesta técnica, a operação  $\mathcal{LD}$  corresponde a multiplicar as equações diferenciais por funções conhecidas(apropriadas) e então integrar sobre o período dos dados disponíveis. As funções de modulação são escolhidas de tal forma que elas, em companhia de suas derivadas, desaparecem no final do intervalo em consideração. As funções de modulação em 2 (duas) dimensões são usadas no caso de sistemas caracterizados por equações diferenciais parciais.

O número de funções de modulação deve ser no mínimo igual ao número de incógnitas na Identificação, sendo então a operação  $\mathcal{L}\mathcal{D}$  realizada por cálculos em bloco ("en-bloc", "off-line" ou "batch") ou iterativo. Assim este método não é conveniente para aplicações em tempo real ("real-time" ou "on-line") ou recursivo. Contudo este método sugere um meio de evitar o problema de medição de derivadas diretamente.

Este método pode também ser considerado como método dos filtros variáveis de estado (abordado a seguir), podendo ser realizado por dispositivos físicos ou numericamente por meio de computadores digitais, escolhendo as funções de modulação que originem-se de funções de resposta ao impulso [9], [10], [22], [23] e [27].

### 2.2.3.2- Filtros Lineares.

Nesta categoria encontram-se os filtros realizáveis fisicamente que são freqüentemente usados na identificação de equações diferenciais.

Quando uma cadeia de filtros com estágios idênticos, cada um com uma função de transferência na forma

$$T(s) = \frac{1}{s + \lambda}, \quad (2.4)$$

$\lambda > 0$  sendo escolhido, a técnica resultante é chamada Momento Funcional de Poisson (PMF), onde o tratamento dos sinais pode então ser visto em termos de funções generalizadas. Quando  $\lambda=1$  é usado, estes são denominados como filtros variáveis de estado. Integração Múltipla de Equações Diferenciais é um método direto que consiste em efetuar sucessivas integrações resultando em uma equação integral equivalente sendo que os valores das integrais múltiplas podem ser calculados em instantes de tempo discreto. A equação integral pode ser obtida, sendo equivalente a uma cadeia de integradores puros correspondentes a  $\lambda=0$  na equação (2.4) acima. Tratamento com

$\lambda=0$  provoca o aparecimento de incógnitas adicionais, envolvendo as condições iniciais desconhecidas. O conceito de PMF's multi-dimensionais é uma generalização da idéia de PMF's em uma dimensão e é aplicável ao caso de sistemas a parâmetros distribuídos [8], [9], [10], [16], [19] e [23].

### 2.2.3.3- Caracterização Espectral de Sinais.

Quando os coeficientes espectrais dos sinais do processo, com referência a uma base ortogonal, são usados na equação diferencial descrevendo o sistema contínuo no tempo em consideração, o cálculo deste sistema é aproximado a uma álgebra elegante e computacionalmente atrativa. Os coeficientes espectrais são avaliados como produto interno dos elementos do conjunto de funções bases com o respectivo sinal, ou seja, os sinais de entrada e saída são expressos por suas expansões em séries aproximadas e depois são introduzidas as matrizes operacionais integrais, estabelecendo um conjunto de equações algébricas podendo ser estimados então os parâmetros da equação diferencial. Muitos tipos de sistemas ortogonais de funções são aplicáveis nesta situação, em adição ao conhecido conjunto de funções trigonométricas (Fourier). Compondo a classe de funções ortogonais temos as funções de base constante por partes (PCBF), tais como, funções de Walsh (WF), funções pulso em bloco (BPF) e as funções de Haar (HF). Temos também os polinômios ortogonais que são os polinômios de Chebyshev, Legendre, Laguerre entre outros [22], [23].

Polinômios ortogonais, embora proporcionem bons resultados na estimação paramétrica podem ser usados somente em bloco ou "off-line" na prática, pois um grande conjunto de equações algébricas deve ser resolvido quando uma grande quantidade de dados amostrados estão envolvidas na identificação.

## CAPÍTULO 3



### DESCRIÇÃO DE QUATRO TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA DIRETA.

O objetivo deste capítulo é o estudo e comparação de técnicas de identificação paramétrica direta em tempo real ("on-line") de sistemas dinâmicos contínuos no tempo.

Como observado no capítulo 2, para se realizar esta tarefa composta de duas fases, o maior problema se encontra na primeira fase que consiste da escolha de uma adequada operação  $\mathcal{L}$ . Nessa escolha três cuidados devem ser seguidos:

- Devemos escolher métodos que processem os dados em tempo real, buscando entre as várias operações  $\mathcal{L}$ , quais podem ser utilizadas para aplicação em tempo real. Como descrito na seção 2.2.3, duas categorias de operações  $\mathcal{L}$  são mais empregadas em identificação "off-line" devido a quantidade de cálculos envolvidos, são essas as funções de modulação e a caracterização espectral de sinais na sua forma de funções trigonométricas e polinômios ortogonais. Já as categorias de filtros lineares e as funções de base constantes por partes (PCBF) são bastantes empregados em identificação "on-line".

- Um outro cuidado ainda na escolha, é a possibilidade da operação  $\mathcal{L}$  aumentar o número de incógnitas no processo de identificação, isso ocorre devido ao fato de no processo de aproximação da equação diferencial em equações algébricas surgirem termos como condições iniciais, que devem ser evitados, pois as condições iniciais deveriam também ser estimadas, complicando assim o procedimento de identificação e aumentando o número de cálculos envolvidos.

- Um terceiro é referente a polarização das estimativas, onde os parâmetros estimados tenderiam para valores diferentes dos valores reais, que pode ocorrer devido as aproximações para se obter as equações algébricas que geram erros em certos métodos [9], [22]. A polarização pode ocorrer também devido ao ruído que inevitavelmente contamina as medidas.

Nestes casos devemos escolher algoritmos que de alguma forma tentem evitar a polarização das estimativas. Este problema será melhor analisado no próximo capítulo.

Levando em consideração os cuidados acima descritos, quatro técnicas para identificação paramétrica direta em tempo real, foram escolhidas e serão mostradas a seguir [9], [10], [18] e [21].

### 3.1- Filtro Integral Linear (Linear Integral Filter)

Esta é uma técnica baseada no uso de operação de integração numérica usando fórmulas newtonianas fechadas, como a regra do trapézio ou Simpson compostas, permitindo calcular integrais múltiplas numérica e recursivamente. Ela foi desenvolvida por Zhao, Z.Y. e Sagara, S. [18], [19] e [28], com a finalidade de resolver o problema de condições iniciais em CMI. Este método pode ser descrito como:

A integral de um sinal contínuo  $x(t)$  no intervalo  $[t-lT, t)$  pode ser calculado aproximadamente por

$$I_1 x(t) = \int_{t-lT}^t x(\tau) d\tau \approx f_0 x(t) + f_1 x(t-T) + \dots + f_l x(t-lT) = \sum_{i=0}^l f_i x(t-iT) \quad (3.1)$$

onde  $T$  é o intervalo de amostragem, e  $l$  é chamado "fator de comprimento" do filtro integral linear (um número natural). Os coeficientes  $f_i$  de (3.1) são determinados por fórmula de integração numérica. Por exemplo, usando a regra trapezoidal e de Simpson, respectivamente temos:

$$\begin{cases} f_0 = f_l = \frac{T}{2} \\ f_i = T, \quad i = 1, 2, \dots, l-1 \end{cases} \quad (3.2)$$

e

$$\begin{cases} f_0 = f_l = \frac{T}{3} \\ f_i = \begin{cases} \frac{2T}{3}, & i = 2, 4, \dots, l-2 \\ \frac{4T}{3}, & i = 1, 3, \dots, l-1 \end{cases} \end{cases} \quad (3.3)$$

Introduzindo um operador de atraso unitário  $q^{-1}$ , isto é  $q^{-1}x(t) = x(t - T)$  nós podemos escrever (3.1) na forma

$$I_1 x(t) = \int_{t-lt}^t x(\tau) d\tau \approx \sum_{i=0}^l f_i q^{-i} x(t) \quad (3.4)$$

Definindo uma integral múltipla de  $x(t)$  como

$$I_j x(t) = \int_{t-lt}^t \int_{t_1-lT}^{t_1} \dots \int_{t_{j-1}-lT}^{t_{j-1}} x(t_j) dt_j dt_{j-1} \dots dt_1, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (3.5)$$

onde  $I_0 x(t) = x(t)$  e  $I_1 x(t)$  como na equação (3.1).

Então o filtro integral linear para tratar derivadas temporais das medidas é dado pelo lema:

*LEMA 1*

Faça  $x^{(j)}(t) = \frac{d^j x(t)}{dt^j}$  ser a  $j$ -ésima derivada de  $x(t)$  com  $x^{(0)}(t) = x(t)$ . Então a integral múltipla de  $x^{(j)}(t)$  definido como (3.5) pode ser aproximadamente calculado como:

$$I_n x^{(j)}(t) \approx \varrho_j x(t) = \sum_{i=0}^{nl} p_i^j q^{-i} x(t) \quad (3.6)$$

onde o polinômio  $\varrho_j$  é dado por

$$\varrho_j = (1 - q^{-l})^j (f_0 + f_1 q^{-1} + \dots + f_l q^{-l})^{n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Já que o sinal  $x(t)$  deve estar na forma amostrada, o filtro integral linear na forma amostrada é

$$I_n x^{(j)}(k) \approx \varrho_j x(k) = \sum_{i=0}^{nl} p_i^j x(k - i) \quad (3.8)$$

onde os coeficientes  $p_i^j$  ( $i = 0, 1, \dots, nl$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ ) em (3.6) e (3.8) podem ser calculados de (3.7) com os coeficientes  $f_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) dados pela regra trapezoidal, sendo a operação integral em derivadas simplesmente calcular o produto interno de um vetor de coeficientes  $\mathbf{p}_j$  e um vetor de dados  $\mathbf{x}(k)$ , isto é

$$\int_j x(k) = p_j^T x(k) \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (3.9)$$

onde

$$\mathbf{p}_j = (p_0^j \ p_1^j \ \dots \ p_{nl}^j)^T \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{x}(k) = (x(k) \ x(k-1) \ \dots \ x(k-nl))^T \quad (3.10b)$$

O modelo discreto obtido pelo filtro integral linear usando regra trapezoidal com  $l = 1$  (fator de comprimento do filtro) é equivalente ao modelo usando transformação bilinear.

Considerando um sistema contínuo linear monovariável descrito pela equação diferencial

$$A(p)x(t) = B(p)u(t) \quad (3.11)$$

onde  $u(t)$  é o sinal de entrada e  $x(t)$  a saída,  $p$  é o operador diferencial, isto é

$$px(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

$A$  e  $B$  são polinômios em  $p$  que são dados por:

$$\begin{aligned} A(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n \\ B(p) &= b_1 p^{n-1} + \dots + b_n \end{aligned} \quad (3.12)$$

e (3.11) representa um sistema sujeito a condições iniciais arbitrárias.

$$\mathbf{u}_0 = (u(0), \dots, u^{(n-2)}(0))^T, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{x}_0 = (x(0), \dots, x^{(n-1)}(0))^T$$

os sinais de entrada e saída são amostrados com intervalo de amostragem  $T$ , e a medida de saída contém um ruído de média zero  $v(kT)$ , isto é,

$$y(kT) = x(kT) + v(kT) \quad (3.14)$$

Realizando integrações múltiplas em (3.11)  $n$  vezes como (3.5) e (3.6), temos:

$$\mathcal{I}_n x(t) + \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{I}_{n-j} x(t) = \sum_{j=1}^n b_j \mathcal{I}_{n-j} u(t) + \varepsilon(t, T) \quad (3.15)$$

onde o termo  $\varepsilon(t, T)$  é o erro de truncamento devido a integração numérica da entrada e saída. Com os dados amostrados  $\{u(k), y(k)\}$ , substituindo (3.14) em (3.15)

$$\mathcal{I}_n y(k) + \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{I}_{n-j} y(k) = \sum_{j=1}^n b_j \mathcal{I}_{n-j} u(k) + e(k) \quad (3.16)$$

onde  $e(k)$  é composto do erro de truncamento e do ruído, podendo a equação (3.16) ser escrita na forma de regressão linear

$$\mathcal{I}_n y(k) = \varphi(k)^T \theta + e(k) \quad (3.17)$$

onde

$$\varphi(k) = (-\mathcal{I}_{n-1} y(k), \dots, -\mathcal{I}_0 y(k) \quad \mathcal{I}_{n-1} u(k), \dots, \mathcal{I}_0 u(k))^T \quad (3.18)$$

e

$$\theta = (a_1, \dots, a_n \quad b_1, \dots, b_n)^T \quad (3.19)$$

### 3.2- Filtro Variável de Estado Modificado -Operador de Transformação.

A idéia de ter "filtros variáveis de estado" ( $F_1, \dots, F_n$ ) agindo nas entradas e saídas do processo contínuo no tempo, é um método tradicional para identificação de sistemas contínuos, desenvolvido na década de 50 para uso em computadores analógicos. Sendo  $y_i, u_i; 0 \leq i \leq n$  as saídas dos filtros.

$$\begin{aligned} y_i(t) &= F_i \{y(t)\} \\ u_i(t) &= F_i \{u(t)\} \end{aligned} \quad 0 \leq i \leq n \quad (3.20)$$

uma possível escolha dos filtros são

$$F_1 = \frac{s}{1+s\tau}, \dots, F_n = \left(\frac{s}{1+s\tau}\right)^n \quad (3.21)$$

A saída dos filtros  $y_1, \dots, y_n$  e  $u_1, \dots, u_n$  determinam então derivadas aproximadas das entradas e saídas que podem ser usadas em identificação.

Uma modificação a este método, foi introduzida por Johansson [11] e [12], que é baseada em uma reformulação algébrica da função de transferência do modelo, introduzindo um modelo discreto. A idéia é encontrar um operador linear realizável, causal e estável que possa substituir o operador diferencial enquanto conserva a função de transferência exata, obtendo um modelo linear para a estimação dos parâmetros ( $a_i, b_i$ ) da função de transferência original.

Considerando um operador de transferência linear de n-ésima ordem formulado com um operador diferencial  $p = d/dt$  e coeficientes  $a_i, b_i$  desconhecidos.

$$G_0(p) = \frac{b_1 p^{n-1} + \dots + b_n}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(p)}{A(p)} \quad (3.22)$$

Introduzindo o operador filtro passa baixo

$$\lambda = f(p) = \frac{a}{p+a} = \frac{1}{1+p\tau}, \quad \tau = \frac{1}{a} \quad (3.23)$$

que permite fazer a seguinte transformação

$$G_0(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{B^*(\lambda)}{A^*(\lambda)} = G_0^*(\lambda) \quad (3.24)$$

com

$$\begin{aligned} A^*(\lambda) &= 1 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \dots + \alpha_n\lambda^n \\ B^*(\lambda) &= \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 + \dots + \beta_n\lambda^n \end{aligned} \quad (3.25)$$

Um modelo de entrada e saída monovariável pode ser formulado como

$$A^*(\lambda)y(t) = B^*(\lambda)u(t) \quad (3.26)$$

$$y(t) = -\alpha_1[\lambda y] - \alpha_2[\lambda^2 y] - \dots - \alpha_n[\lambda^n y] + \beta_1[\lambda u] + \beta_2[\lambda^2 u] + \dots + \beta_n[\lambda^n u] \quad (3.27)$$

Este é um modelo linear de um sistema dinâmico. Sendo  $\lambda u$ ,  $[\lambda y]$  etc. entradas e saídas filtradas. Os parâmetros  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  devem ser estimados.

Escrevendo a equação (3.27) na forma de regressão linear

$$y(t) = \varphi_r^T(t)\theta_r \quad (3.28)$$

onde

$$\theta_r = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \quad \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)^T \quad (3.29)$$

e

$$\varphi_r(t) = (-[\lambda y] - [\lambda^2 y] \dots [\lambda u] \dots [\lambda^n u])^T \quad (3.30)$$

A constante do filtro  $a$  (ou  $\tau$ ) do operador  $\lambda$  deve portanto ser considerado como um parâmetro de projeto que deve ser escolhido apropriadamente.

### 3.3- Equação a diferença por pulso em bloco.

Entre os métodos baseados em funções ortogonais e polinômios ortogonais, o método "Função Pulso em Bloco" (BPF) tem se tornado cada vez mais atrativo, pois ele tem um formato muito engenhoso. O conjunto de equações algébricas estabelecidas são apropriadas para programação em computador, sendo a aproximação em série por pulso em bloco de sinais contínuos possível de ser realizada a partir de seus dados amostrados. Contudo este método apresenta algumas desvantagens, como por exemplo, as condições iniciais não conhecidas estão envolvidas, ou seja, elas devem ser estimadas juntas com os parâmetros do sistema aumentando o número de cálculos na identificação.

Baseado nestas observações, um novo método de identificação de sistemas contínuos, proposto por Jiang, Z. [10], chamado Equações a Diferença por Pulso em Bloco ("Block Pulse Difference Equations"), o qual é baseado nas propriedades das matrizes operacionais integrais generalizadas [10]. Devido a forma da equação a diferença, este método, conserva as vantagens do método BPF mas evita suas desvantagens.

Os coeficientes do pulso em bloco dos sinais de entrada e saída devem ser aproximados, baseados nos valores discretos dos sinais.

Para solucionar o problema de Identificação baseado nesta técnica, a equação que descreve a dinâmica de um sistema linear invariante no tempo monovariável, pode ser escrita como

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^n b_i u^{(i)}(t) \quad (3.31)$$

onde esta equação implica  $a_n = 1$ .

A dinâmica deste sistema pode ser caracterizada também pela função de transferência  $G(s)$  que relaciona a transformada de Laplace do sinal de saída à transformada de Laplace do sinal de entrada, que pode ser obtida aplicando-se a transformada a equação (3.31) com condições iniciais nulas.

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3.32)$$

onde

$$\begin{aligned} U(s) &= \mathcal{L}\{u(t)\} \\ Y(s) &= \mathcal{L}\{y(t)\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

e

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.34)$$

com

$$D(s) = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k s^k \quad (3.35)$$

e

$$N(s) = \sum_{k=0}^n b_k s^k \quad (3.36)$$

A identificação da equação diferencial (3.31) é também chamada identificação da função de transferência (3.34). Neste problema os parâmetros  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) e  $b_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) devem ser estimados das medidas de  $u(t)$  e  $y(t)$ .

Pode-se obter uma forma de equação a diferença por pulso em bloco que contém os parâmetros originais da equação diferencial:

$$\sum_{k=0}^n a_k z_{l+k} = \sum_{k=0}^n b_k v_{l+k} \quad (3.37)$$

onde  $z_{l+k}$  e  $v_{l+k}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) são combinações lineares dos coeficientes do pulso em bloco  $y_{l+k}$  e  $u_{l+k}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) respectivamente. Sendo que estas relações podem ser expressas como:

$$z_{l+k} = \frac{T^{n-k}}{(n-k+1)!} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^j \binom{n}{j} p_{n-k, n-i-j+1} y_{l+j} \quad (3.38)$$

e

$$p_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{para } j = 1 \\ j^{k+1} - 2(j-1)^{k+1} + (j-2)^{k+1} & \text{para } j = 2, 3, \dots, m \end{cases} \quad (3.39)$$

As relações entre  $v_{l+k}$  e  $u_{l+k}$  tem expressões similares, substituindo  $v_{l+k}$  em  $z_{l+k}$  e  $u_{l+k}$  em  $y_{l+k}$  na equação (3.38).

Assim escrevendo (3.37), para  $a_n = 1$ .

$$z_{l+n} = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k z_{l+k} + \sum_{k=0}^n b_k v_{l+k} \quad (3.40)$$

expressando a equação (3.40) na forma de regressão linear temos:

$$z_{l+n} = g_l^T \theta \quad (3.41)$$

onde

$$\theta = (a_0 \dots a_{n-1} \ b_0 \dots b_n)^T \quad (3.42)$$

e

$$g_l = (-z_l \dots -z_{l+n-1} \ v_l \dots v_{l+n})^T \quad (3.43)$$

### 3.4- Interpolação numérica usando função trapezoidal.

Uma maneira simples e eficiente para se tratar o problema das derivadas dos sinais é obtido fazendo-se a interpolação numérica entre as amostras dos sinais medidos, usando função pulso trapezoidal (TPF - "Trapezoidal Pulse Function"). Este método é baseado em integrações sucessivas da equação diferencial que representa o

modelo dinâmico do sistema, descrevendo o sistema contínuo como uma seqüência de pulsos trapezoidais conforme Puthenpura, S. C. e Sinha, N. K. [16], onde uma função contínua  $y(t)$  da qual só os valores amostrados  $y(kT)$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ , e  $T$  é o instante de amostragem) são disponíveis através de medidas, é aproximado por uma variação linear entre os instantes de amostragens, onde para  $kT \leq t \leq (k+1)T$

$$y(t) = \frac{1}{T} \{ [(k+1)T - t]y(kT) + [t - kT]y(kT + T) \} \quad (3.44)$$

Necessitamos então, das integrais sucessivas de  $y(t)$  para estimar os parâmetros de um modelo dinâmico para o sistema contínuo, assim, expressões aproximadas para estas integrais são derivadas usando a regra trapezoidal de integração. Com isso a expressão para a primeira integral de  $y(t)$  é

$$I_{1,t}(y) = \int_0^t y(\tau) d\tau = \int_0^{kT} y(\tau) d\tau + \int_{kT}^t y(\tau) d\tau$$

$$I_{1,t}(y) = I_{1,k}(y) + \int_{kT}^t y(\tau) d\tau \quad (3.45)$$

o segundo termo da equação (3.45) pode ser avaliado usando a regra trapezoidal (poderia também ser usado a regra de pulsos retangulares), onde obtém-se:

$$I_{1,t}(y) = I_{1,k}(y) + \frac{1}{2T} \{ T^2 - [(k+1)T - t]^2 \} y(kT) + \frac{1}{2T} (t - kT)^2 y(kT + T) \quad (3.46)$$

e para  $t=(k+1)T$

$$I_{1,k+1}(y) = I_{1,k}(y) + \frac{T}{2} [y(kT) + y(kT + T)] \quad (3.47)$$

Procedendo dessa forma, podemos avaliar a segunda integral como

$$I_{2,t}(y) = \int_0^t I_{1,\tau}(y) d\tau = \int_0^{kT} I_{1,\tau}(y) d\tau + \int_{kT}^t I_{1,\tau}(y) d\tau$$

$$I_{2,t}(y) = I_{2,k}(y) + \int_{kT}^t \left\{ I_{1,k}(y) + \frac{1}{2T} \left\{ T^2 - [(k+1)T - t]^2 \right\} y(kT) + \frac{1}{2T} (t - kT)^2 y(kT + T) \right\} d\tau$$

$$I_{2,t}(y) = I_{2,k}(y) + (t - kT)I_{1,k}(y) + \left( \frac{T}{2}(t - kT) - \frac{1}{3!T} \left\{ T^3 - [(k+1)T - t]^3 \right\} \right) y(kT)$$

$$+ \frac{1}{3!T} (t - kT)^3 y(kT + T)$$

e para  $t=(k+1)T$

$$I_{2,k+1}(y) = I_{2,k}(y) + TI_{1,k}(y) + \frac{T^2}{3!} [2y(kT) + y(kT + T)] \quad (3.48)$$

como mostrado em Prasad, T. e Sinha, N. K. [15], mas com erro tipográfico.

Integrando sucessivamente,  $n$  vezes e tomando  $t=(k+1)T$  obtemos uma relação recursiva para a expressão  $I_{n,k}(y)$ :

$$I_{n,k+1}(y) = I_{n,k}(y) + TI_{n-1,k}(y) + \frac{T^2}{2!} I_{n-2,k}(y) + \dots + \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} I_{1,k}(y) + \frac{nT^n}{(n+1)!} y(kT) + \frac{T^n}{(n+1)!} y(kT + T) \quad (3.49)$$

com  $I_{n,0}(y) = 0$ , que também é mostrado em Puthenpura, S. C. e Sinha, N. K. [16], mas com erro tipográfico.

Considerando o sistema contínuo linear SISO, com entrada  $u(t)$  e saída  $y(t)$ , relacionados pela equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = \\ = b_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (3.50)$$

O problema de identificação é então estimar o vetor de parâmetros  $\theta$  definido por

$$\theta = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\} \quad (3.51)$$

com base nas amostras dos sinais de entrada e saída  $u(kT)$  e  $y(kT)$ . Integrando a equação (3.50)  $n$  vezes em  $t$  no intervalo  $kT \leq t \leq (k+1)T$ , obtemos

$$\begin{aligned} y(kT+T) - y(kT) + a_{n-1} [I_{1,k+1}(y) - I_{1,k}(y)] + \dots + a_0 [I_{n,k+1}(y) - I_{n,k}(y)] = \\ = b_{n-1} [I_{1,k+1}(u) - I_{1,k}(u)] + \dots + b_0 [I_{n,k+1}(u) - I_{n,k}(u)] \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde  $I_{n,k}(y)$  é a  $n$ -ésima integral de  $y(t)$  no instante  $kT$  e  $I_{n,k}(u)$  é a  $n$ -ésima integral de  $u(t)$  no instante  $kT$ .

Rescrevendo a equação (3.52), obtemos

$$y[(k+1)T] - y[kT] = \Phi^T(k) \cdot \theta \quad (3.53)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi(k) = \left\{ -[I_{n,k+1}(y) - I_{n,k}(y)] \quad -[I_{n-1,k+1}(y) - I_{n-1,k}(y)] \dots -[I_{n,k+1}(y) - I_{n,k}(y)] \right. \\ \left. [I_{n,k+1}(u) - I_{n,k}(u)] \quad [I_{n-1,k+1}(u) - I_{n-1,k}(u)] \dots [I_{1,k+1}(u) - I_{1,k}(u)] \right\}^T \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde  $\theta$  é dado em (3.51). Assim a técnica dos mínimos quadrados pode ser utilizada para estimar o vetor de parâmetros  $\theta$ .

As quatro técnicas estudadas foram as que apresentaram as condições mínimas necessárias, referentes aos objetivos do trabalho, ou seja, estudar técnicas dentro da grande família de métodos usados para identificação de sistemas dinâmicos em tempo contínuo, mas que apresentassem dois comportamentos importantes, que são:

*Condições Iniciais:* Como elas se comportam com relação as condições iniciais, já que algumas técnicas transformam uma equação diferencial em uma equação integral, este era um ponto importante, e todas as quatro não apresentam nenhum problema e além disso não exigem nem o cálculo nem informações sobre as condições iniciais.

*Polarização das Estimativas:* Entende-se por polarização das estimativas o fato do valor estimado tender para um valor diferente do valor real do parâmetro. As técnicas descritas nos itens anteriores, comportam-se bem com relação a esse aspecto importante, já que se ocorrer tal problema, que de certa forma é agravado com as aproximações feitas na primeira fase da identificação, deve-se empregar na segunda fase da identificação métodos que minimizem esta dificuldade.

Mas dentre as quatro técnicas estudadas, uma em especial foi escolhida, pois além de cumprir as condições acima citadas, ainda apresenta favoráveis facilidades de implementação que as demais não apresentam, devido o aumento de carga computacional, ou ainda a determinação de determinados parâmetros que poderiam ser considerados parâmetros de projeto, como o “fator de comprimento” para o filtro integral linear ou a constante de tempo do filtro para o filtro variável de estado modificado. Esta técnica é a *interpolação numérica usando função trapezoidal* que como veremos a seguir apresenta desempenho bastante favorável.

# CAPÍTULO 4

## ANÁLISE DO CASO RUIDOSO.

### 4.1- Descrição do problema.

Até este momento, os métodos para identificação direta de sistemas dinâmicos contínuos no tempo foram apresentados no caso ideal, ou seja, sem qualquer consideração sobre a existência de distúrbios aleatórios no sistema. Na verdade, os sistemas reais são sempre influenciados por certos distúrbios aleatórios, e ainda é possível existir mais que um tipo diferente de distúrbio podendo também estes serem de fontes diferentes. Apesar disto podemos assumir que o efeito dos distúrbios que afetam o sistema a ser identificado sejam concentrados na forma de um termo aditivo na saída do sistema, podendo ser empregado o princípio da superposição. Os distúrbios aleatórios podem também serem tratados como ruídos de medidas dos sinais de saída como ilustrado na Figura 4.1.

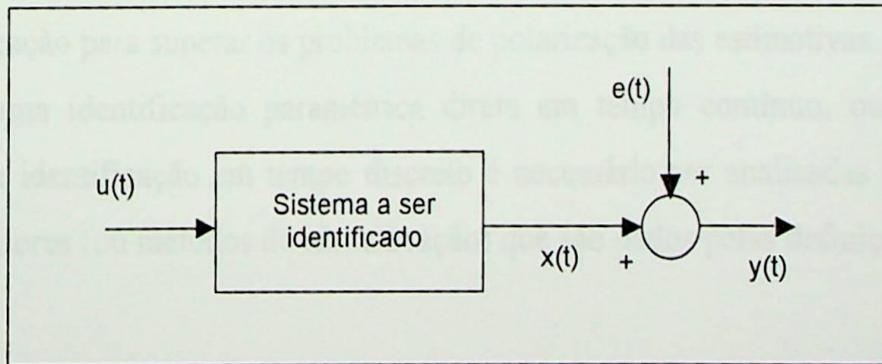


Figura 4.1: Sistema com ruído(aditivo) concentrado de medida.

Da Figura 4.1, os valores discretos dos sinais em instantes amostrados tem a relação dada pela equação (4.1) onde só a saída  $y(k)$  é medida.

$$y(k) = x(k) + e(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

onde  $x(k)$  é a saída do sistema livre de ruído e  $e(k)$  é a seqüência do ruído.

#### 4.2- Considerações sobre o ruído.

A seqüência  $e(k)$  é assumida como uma realização de um processo estocástico ergódico com média  $E\{e(k)\} = 0$  e variância  $E\{e^2(k)\} = \sigma^2$ . Assume-se também que esta seqüência seja não correlacionada com o sinal de entrada.

Na verdade, devido a influência do ruído de medida, existe o problema em torno dos resíduos das aproximações que são feitas na primeira fase do processo de identificação direta de sistemas contínuos [9], se manifestando em vários métodos de identificação direta de sistemas dinâmicos contínuos no tempo.

Apesar do algoritmo de estimação dos mínimos quadrados poder proporcionar resultados satisfatórios quando os resíduos não são correlacionados, eles são sujeitos a polarização assintótica das estimativas no caso de resíduos correlacionados.

Esta influência é grande, especialmente quando o nível do ruído é alto. Neste caso é necessário considerar outros esquemas para realizar a segunda fase do processo de identificação para superar os problemas de polarização das estimativas.

Em uma identificação paramétrica direta em tempo contínuo, ou mesmo em técnicas de identificação em tempo discreto é necessário ser analisadas propriedades dos estimadores (ou métodos de identificação) que são dados pelas definições:

**Definição 1:** A estimativa  $\hat{\theta}(n)$  é não polarizada se:

$$E\left[\hat{\theta}(n)\right] = \theta \quad (4.2)$$

isto é, seu valor esperado é o valor paramétrico verdadeiro.

**Definição 2:** A estimativa  $\theta$  é consistente se:

$$\theta(n) \rightarrow \theta \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

Essas propriedades são quase critérios de desempenho, que devem ser alcançadas pelos métodos de identificação usados no caso de identificação paramétrica contínua ou mesmo discreta.

#### 4.3- Método Variável Instrumental para identificação.

Um método simples para se evitar a estimação assintoticamente polarizada é o algoritmo de Variáveis Instrumentais que é uma modificação do método dos Mínimos Quadrados, especialmente desenvolvido para superar os problemas de convergência das estimativas existente no método dos Mínimos Quadrados [12].

#### Algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivo (RLS)

Considerando o modelo de equação a diferenças

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) + e(k) \quad (4.4)$$

que pode ser rescrita na forma

$$y(k) = \theta^T \varphi(k) + e(k) \quad (4.5)$$

onde a variável observada  $y(k)$  é descrita como uma combinação linear dos componentes do vetor de dados observados  $\varphi(k)$  mais o ruído  $e(k)$ , sendo  $\theta^T$  o vetor de parâmetros. Este modelo é chamado modelo de *Regressão Linear*.

O algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivos é dado pelas equações:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + L(k) \left[ y(k) - \hat{\theta}^T(k-1)\varphi(k) \right], \quad (4.6a)$$

$$L(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k)}{1/\alpha_k + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)}, \quad (4.6b)$$

$$P(k) = P(k-1) - L(k)\varphi^T(k)P(k-1). \quad (4.6c)$$



### Algoritmo de Variáveis Instrumentais Recursivo (RIV)

Considerando novamente a equação (4.5), uma desvantagem com o algoritmo dos mínimos quadrados é que em geral  $\varphi(k)$  e  $e(k)$  são correlacionados, e então  $\hat{\theta}(n)$  não convergirá para  $\theta$ . Em tal caso, substitui-se  $\varphi(k)$  em (4.6) pelo vetor  $\zeta(k)$ , tal que  $\zeta(k)$  e  $e(k)$  são descorrelacionados. Sendo, assim o algoritmo de Variáveis Instrumentais é dado pelas equações:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + L(k) \left[ y(k) - \hat{\theta}^T(k-1)\varphi(k) \right], \quad (4.7a)$$

$$L(k) = \frac{P(k-1)\zeta(k)}{1/\alpha_k + \varphi^T(k)P(k-1)\zeta(k)}, \quad (4.7b)$$

$$P(k) = P(k-1) - L(k)\varphi^T(k)P(k-1). \quad (4.7c)$$

A idéia deste método é escolher a variável instrumental  $\zeta(k)$  que seja fortemente correlacionada com a entrada e a saída livre de ruído, mas não correlacionada com o ruído, como dito acima.

Além disso o algoritmo de variável instrumental não requer suposições sobre a natureza do ruído, não sendo também necessária estimação do mesmo, como ocorre em outros métodos. Vários métodos de obtenção da variável instrumental são conhecidos na literatura [12] e suas referências. Escolhas típicas para sistemas SISO (monovariáveis) são:

- Variável instrumental calculada através da passagem do sinal de entrada por um filtro constante.
- Variável instrumental calculada através da passagem do sinal de entrada por um filtro adaptativo.
- Variável instrumental construída de entradas atrasadas.
- Variável instrumental construída de saídas atrasadas.

Um novo método para se construir a variável instrumental é proposto em [14], que é bastante simples e é dado por

$$\{\zeta(k)\} = \{y(k)\} + \{\hat{y}(k)\} \quad (4.8)$$

onde  $y(k)$  é a saída observada e  $\hat{y}(k)$  é a estimativa da saída, em [14] é provado que (4.8) satisfaz os critérios de ser correlacionado com a entrada e a saída livre de ruído e não correlacionada com o ruído. Sendo assim, este método pode ser usado com qualquer das técnicas apresentadas no capítulo 3.

## Exemplo

Uma planta de primeira ordem simples é simulada para se verificar os efeitos do ruído na estimação. Essa planta é representada por um circuito RC simples com constante de tempo  $\tau = RC = 0,1s$ , como descrito pelo diagrama de blocos na Figura 4.2.

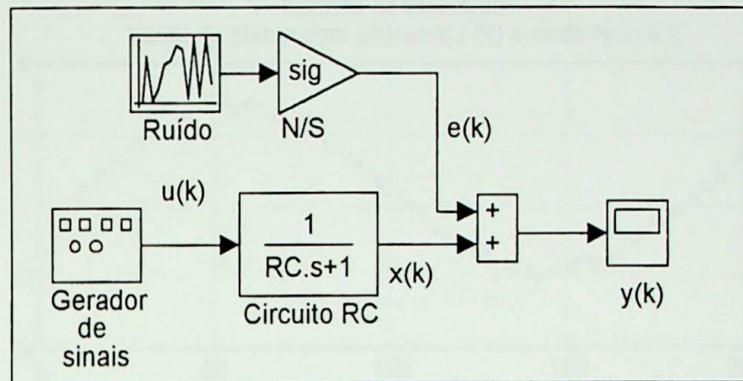


Fig. 4.2: Circuito RC usado na simulação.

O período de amostragem usado na simulação é  $T=10ms$ , um ruído branco aditivo  $e(k)$  que é normalmente distribuído com média 0,0 e variância 1,0, é gerado no Simulink e somado a saída livre de ruído  $x(k)$  para produzir o sinal de saída  $y(k)$ , corrompido pelo ruído. O nível de ruído é caracterizado pela relação ruído/sinal:

$$N/S = \left( \frac{\sum e^2(k)}{\sum y^2(k)} \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

Os algoritmos dos Mínimos Quadrados e o de Variáveis Instrumentais são aplicados nesta identificação. Na Figura 4.3 é apresentado o sinal de entrada usado na simulação e a saída para o pior caso, ou seja,  $N/S=0,2$ , onde a entrada é constituída de uma onda senoidal com amplitude 2,5V (e nível DC de 2,5V) e frequência 55,7mHz, a saída é constituída da resposta do sistema mais o ruído aditivo e o algoritmo usado é o dos Mínimos Quadrados Recursivos e o de Variáveis Instrumentais.

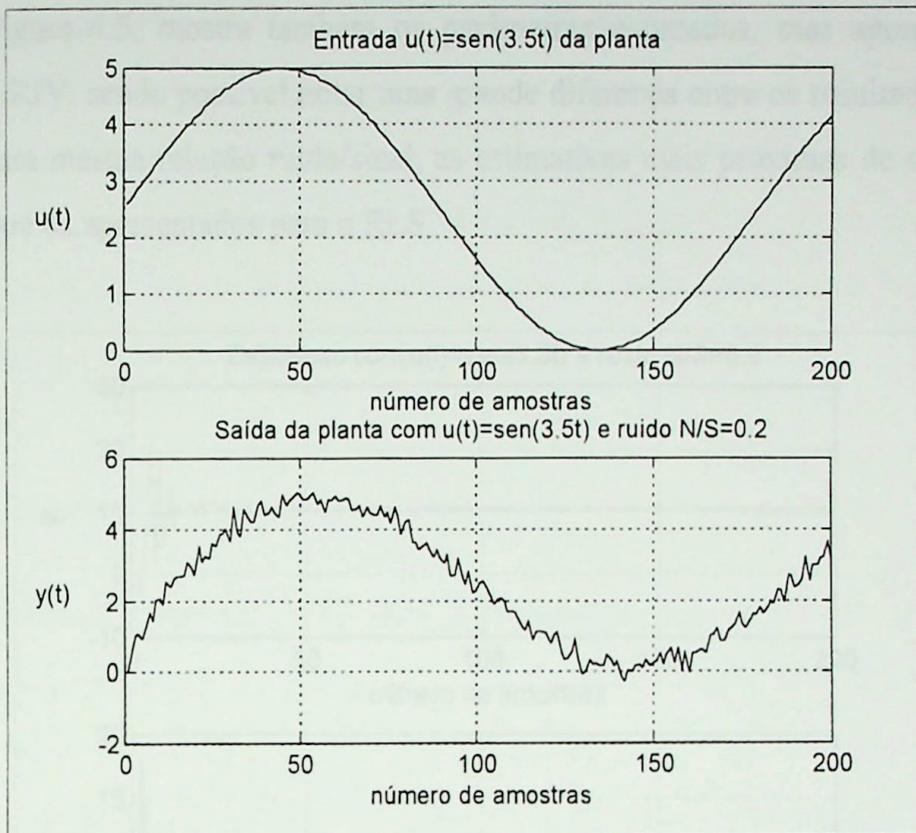


Fig. 4.3: Sinais de entrada e saída simulados.

A Figura 4.4, apresenta os parâmetros estimados com o RLS, mostrando claramente a polarização das estimativas

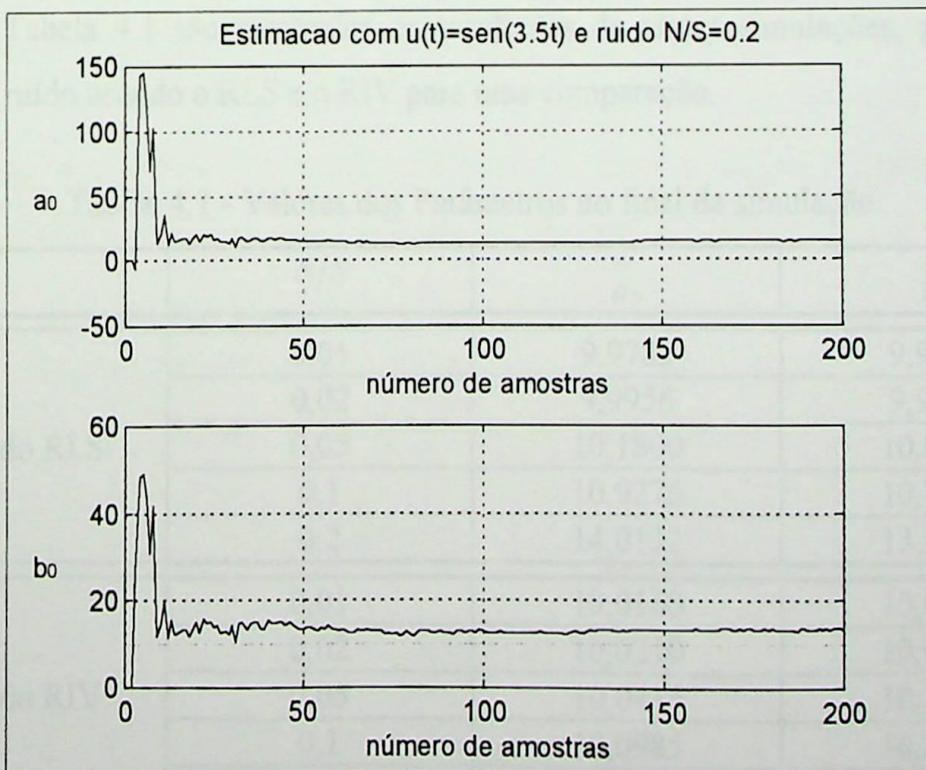


Fig. 4.4: Parâmetros estimados RLS- apresentando a polarização das estimativas.

A Figura 4.5, mostra também os parâmetros estimados, mas agora usando o algoritmo RIV, sendo possível notar uma grande diferença entre os resultados, onde se obteve, para mesma relação ruído/sinal, as estimativas mais próximas de seus valores reais do que os apresentados para o RLS.

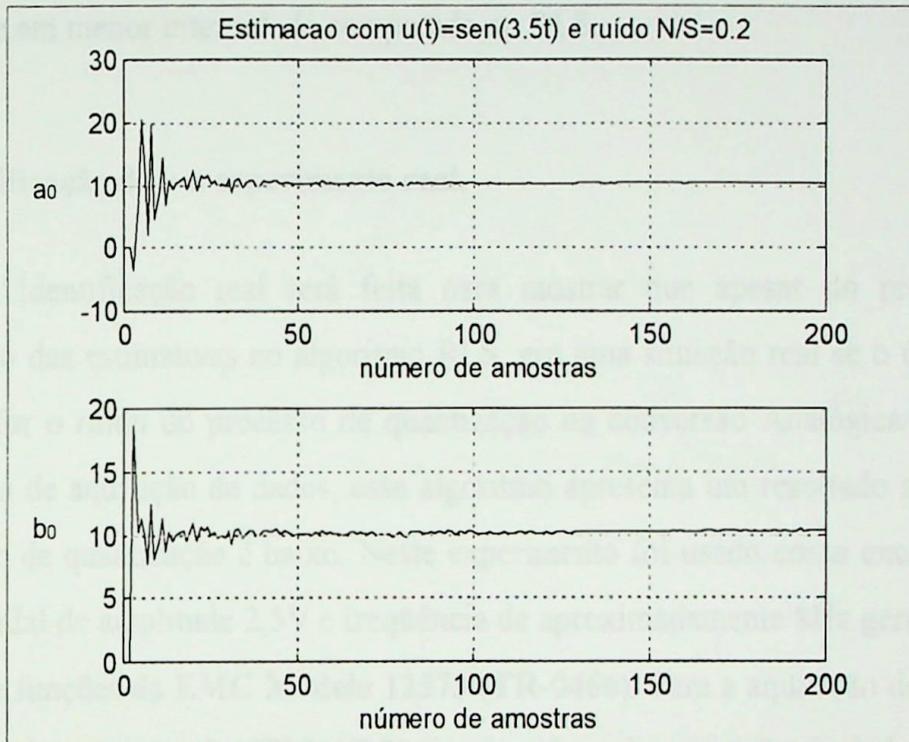


Fig. 4.5: Parâmetros estimados RIV - valores menos polarizados.

Na Tabela 4.1 são mostrados os resultados de várias simulações, para vários níveis de ruído usando o RLS e o RIV para uma comparação.

Tabela 4.1 - Valores dos Parâmetros no final da simulação.

	$N/S$	$\hat{a}_0$	$\hat{b}_0$
Método RLS	0,01	9,9782	9,9264
	0,02	9,9956	9,9392
	0,05	10,1800	10,0988
	0,1	10,9276	10,7689
	0,2	14,0132	13,5735
Método RIV	0,01	10,0160	10,0300
	0,02	10,0210	10,0440
	0,05	10,0415	10,1000
	0,1	10,0985	10,2550
	0,2	10,3415	10,9000
Valores Reais		10,0	10,0

Como pode ser observado, para o mesmo número de amostras e a mesma relação ruído/sinal, o algoritmo RIV apresenta melhores resultados que aqueles obtidos pelo algoritmo RLS. Os valores dos parâmetros, são aqueles obtidos no final da simulação, mostrando claramente a polarização das estimativas usando RLS, devido o aumento da relação ruído/sinal. Apesar de ocorrer um aumento no erro relativo com o uso do RIV este ocorre em menor intensidade comparado ao RLS.

#### 4.4- Identificação de um experimento real.

Uma identificação real será feita para mostrar que apesar do problema da polarização das estimativas no algoritmo RLS, em uma situação real se o único ruído existente for o ruído do processo de quantização na conversão Analógica/Digital em um sistema de aquisição de dados, esse algoritmo apresenta um resultado satisfatório, pois o erro de quantização é baixo. Neste experimento foi usado como excitação uma onda senoidal de amplitude 2,5V e frequência de aproximadamente 8Hz gerado por um gerador de funções da **EMG Modelo 12573 (TR-0466)**. Para a aquisição de dados foi usado um microcomputador IBM AT 286 e uma placa de aquisição de dados PCL-711 da Advantech Co., Ltd com 12 bits de resolução e 8 canais de entrada e um de saída. Foi usado ainda o software “Scope800” de domínio publico fornecido pela Advantech para ser usado com essa placa para visualização e registro do sinal. Um esquema do experimento se encontra na Figura 4.6, tendo o circuito RC uma constante de tempo  $\tau = RC = 0,1s$ , a mesma da simulação anterior.

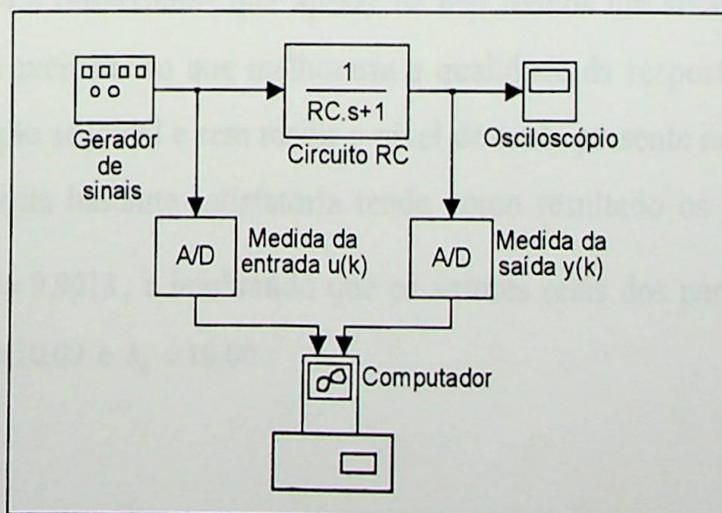


Fig. 4.6: Experimento de Identificação.

Na Figura 4.7 é mostrado os sinais de entrada e saída medidos, e como podemos observar o ruído de quantização inerente na aquisição de dados não parece ser tão significativo.

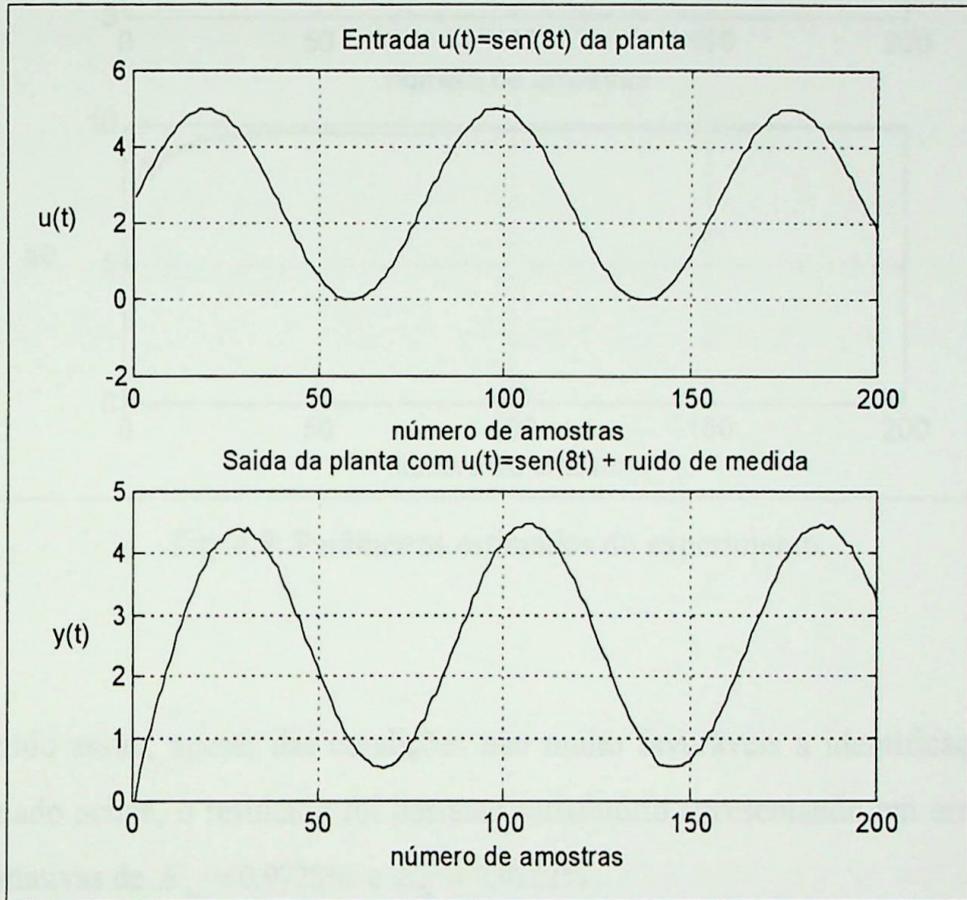


Fig.: 4.7: Sinais de entrada e saída usados para identificação.

Na Figura 4.8 observamos que apesar de não termos um sinal de excitação tão persistentemente excitante (o que melhoraria a qualidade da resposta), pois foi usado para tal uma função senoidal e sem medir o nível de ruído presente no experimento, foi obtido uma resposta bastante satisfatória tendo como resultado os valores estimados  $\hat{a}_0 = 10,0973$ ,  $\hat{b}_0 = 9,9018$ , e lembrando que os valores reais dos parâmetros são neste experimento  $a_0 = 10,00$  e  $b_0 = 10,00$ .

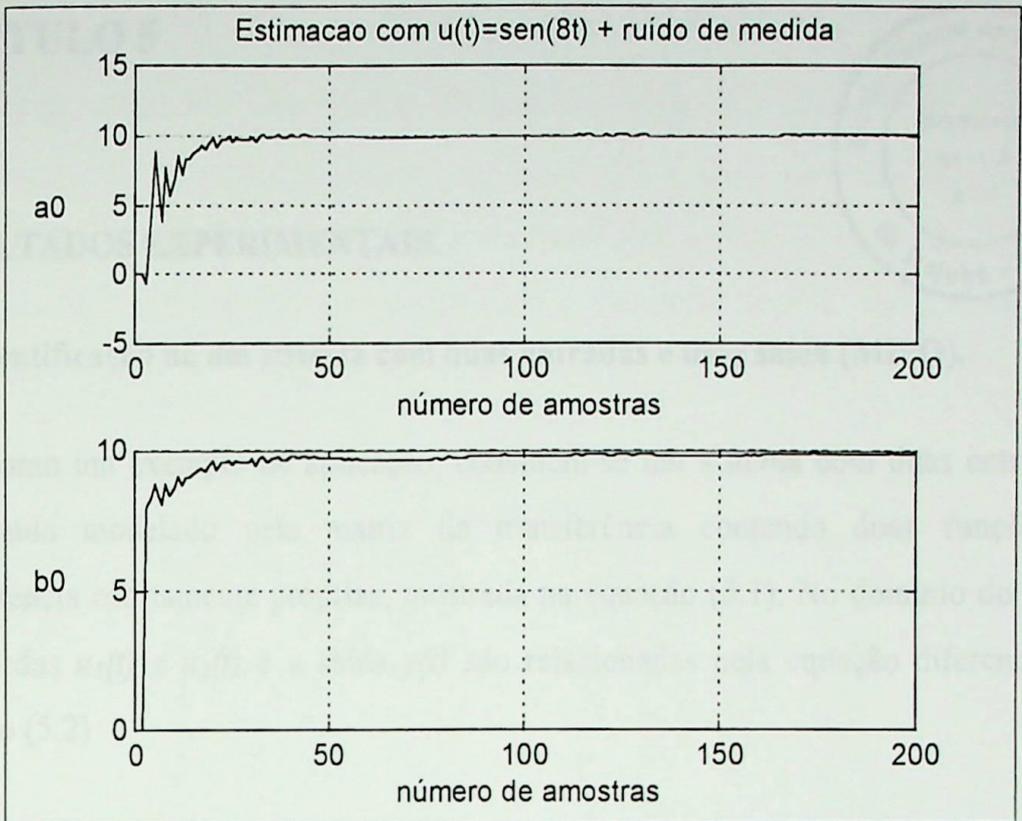
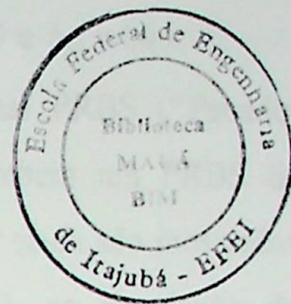


Fig. 4.8: Parâmetros estimados do experimento.

Sendo assim, apesar das condições não muito favoráveis a identificação, como mencionado acima, o resultado foi bastante satisfatório apresentando em erro relativo nas estimativas de  $E_{a_0} = 0,9728\%$  e  $E_{b_0} = 0,9822\%$ .

## CAPÍTULO 5



### RESULTADOS EXPERIMENTAIS.

#### 5.1- Identificação de um sistema com duas entradas e uma saída (MISO).

Como um exemplo de aplicação, considera-se um sistema com duas entradas e uma saída modelado pela matriz de transferência contendo duas funções de transferência estritamente próprias, mostrada na equação (5.1). No domínio do tempo as entradas  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  e a saída  $y(t)$  são relacionadas pela equação diferencial da equação (5.2)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U_1(s)} + \frac{Y(s)}{U_2(s)} = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}s + b_{10}}{s^2 + a_1s + a_0} & \frac{b_{21}s + b_{20}}{s^2 + a_1s + a_0} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_{11} \frac{d}{dt} u_1(t) + b_{10} u_1(t) + b_{21} \frac{d}{dt} u_2(t) + b_{20} u_2(t) \quad (5.2)$$

Este sistema foi simulado em computador digital usando os softwares MATLAB e SIMULINK e seus toolboxes como mostrado no diagrama de simulação na Figura 5.1 e os programas nos Anexos A (geração de PRBS) e B ("script file" para o Matlab).

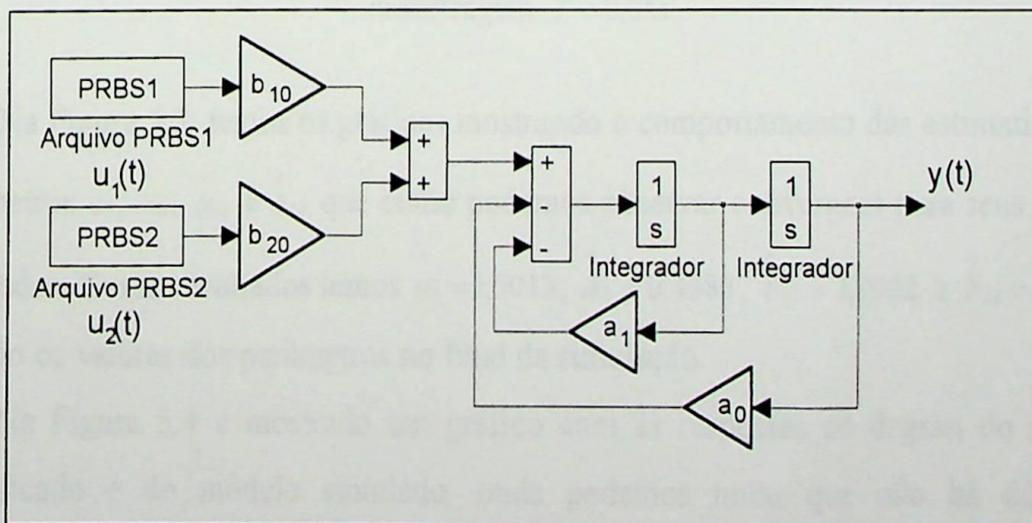


Fig. 5.1: Diagrama de Simulação para obtenção das entradas  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  e saída  $y(t)$ .

Com os parâmetros  $a_1 = 1,5$ ;  $a_0 = 0,5$ ;  $b_{11} = 0,0$ ;  $b_{10} = 4,0$ ;  $b_{21} = 0,0$  e  $b_{20} = 1,0$ .

Foram utilizados como sinais de entradas  $u_1(t)$ , um sinal PRBS (“Pseudo-Random Binary Sequence”) [8] de amplitude 4,0 e  $u_2(t)$  também um PRBS de amplitude 1,0. Esses sinais de entrada juntamente com o sinal de saída são mostrados na Figura 5.2 com tempo de amostragem (“sampling time”), na simulação de  $T = 0,05s$ .

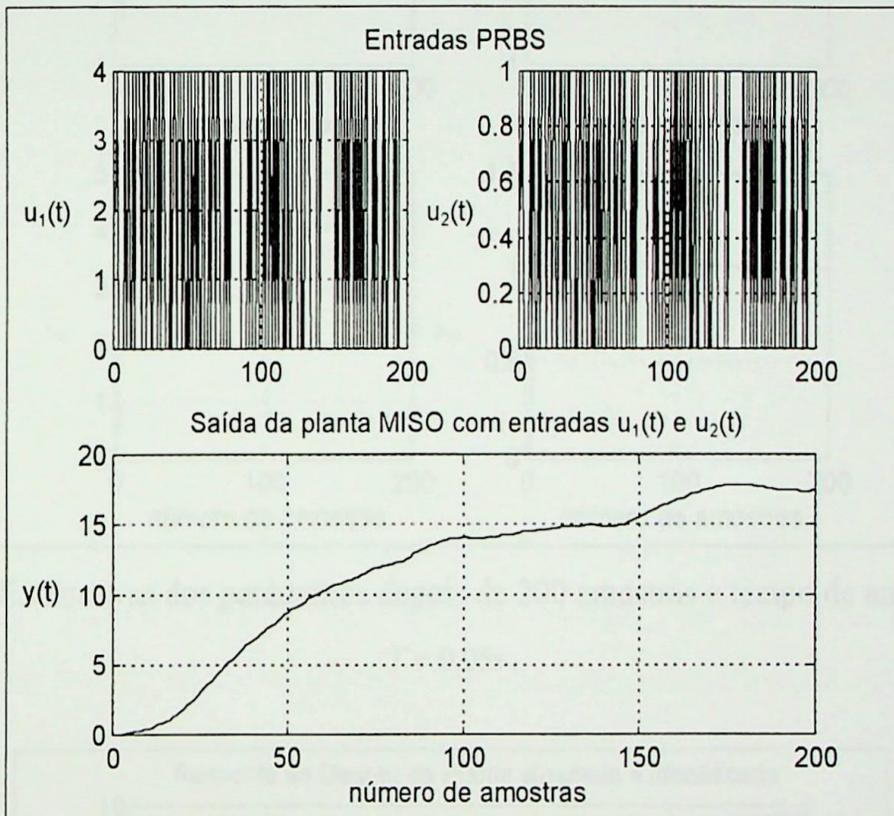


Fig. 5.2: Sinais de entrada  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  e saída  $y(t)$ , com 200 amostras e tempo de amostragem  $T = 0,05s$ .

Na Figura 5.3, temos os gráficos mostrando o comportamento das estimativas dos parâmetros  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{b}_{10}$  e  $\hat{b}_{20}$  que como podemos observar convergem para seus valores simulados. Como resultados temos  $\hat{a}_1 = 1,5013$ ,  $\hat{a}_0 = 0,4983$ ,  $\hat{b}_{10} = 3,9922$  e  $\hat{b}_{20} = 0,9981$ , que são os valores dos parâmetros no final da simulação.

Na Figura 5.4 é mostrado um gráfico com as respostas ao degrau do modelo identificado e do modelo simulado, onde podemos notar que não há diferença significativa entre eles, nem em regime transitório nem em regime permanente, sendo

este procedimento uma das formas de validação do modelo obtido através da estimação de parâmetros, comprovando assim os resultados da Figura 5.3.

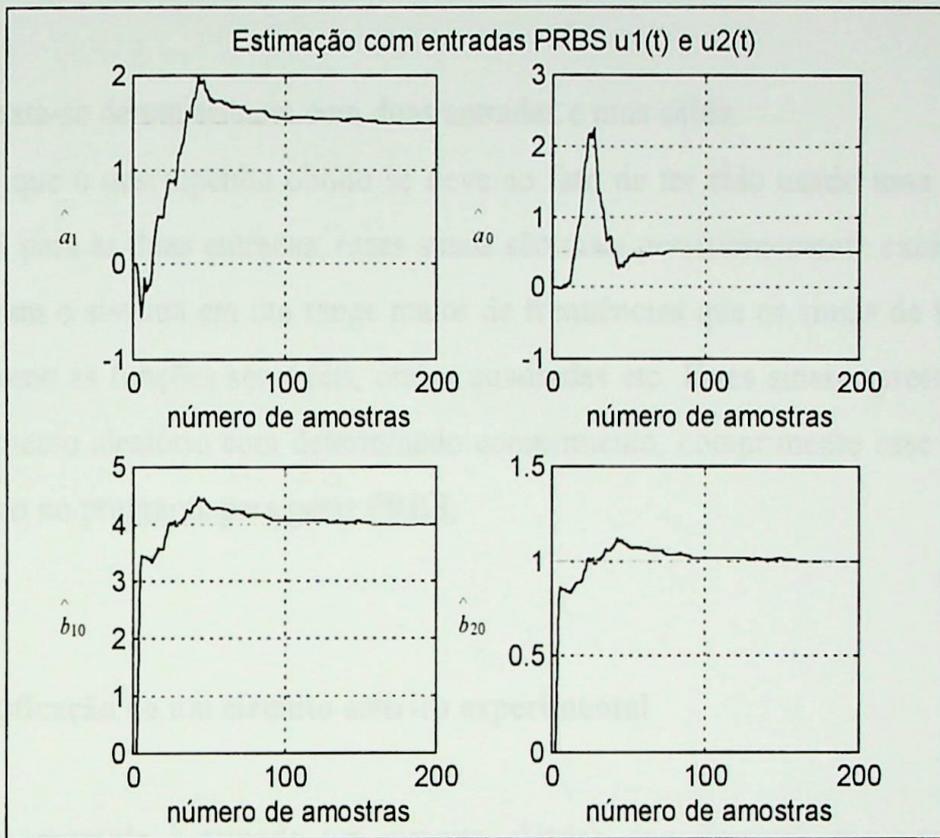


Fig. 5.3: Estimativas dos parâmetros depois de 200 amostras e tempo de amostragem  $T = 0,05s$ .

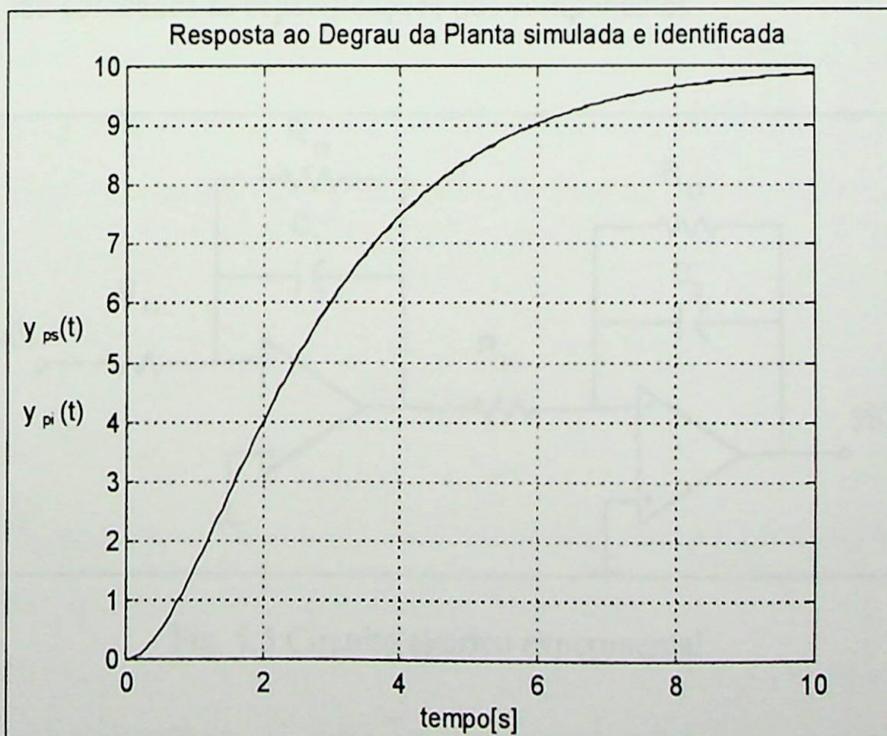


Fig. 5.4: Resposta ao Degrau do modelo simulado e do modelo identificado.

Este exemplo demonstra que este método de identificação possui bom desempenho em situações favoráveis, porém devem ser observados dois fatos importantes que são:

1- Trata-se de um sistema com duas entradas e uma saída.

2- E que o desempenho obtido se deve ao fato de ter sido usado uma excitação tipo PRBS para as duas entradas, esses sinais são mais persistentemente excitantes, ou seja, excitam o sistema em um range maior de frequências que os sinais de teste mais comuns como as funções senoidais, ondas quadradas etc. Estes sinais apresentam um comportamento aleatório com determinado comprimento, comprimento esse que pode ser ajustado no programa para gerar PRBS.

## 5.2- Identificação de um circuito elétrico experimental

Neste exemplo é tomado um circuito elétrico experimental que contém dois elementos de primeira ordem conectados em cascata que são constituídos por amplificadores operacionais, resistências e capacitâncias, como ilustrado na Figura 5.5. Na tabela 1 são colocados as especificações dos componentes.

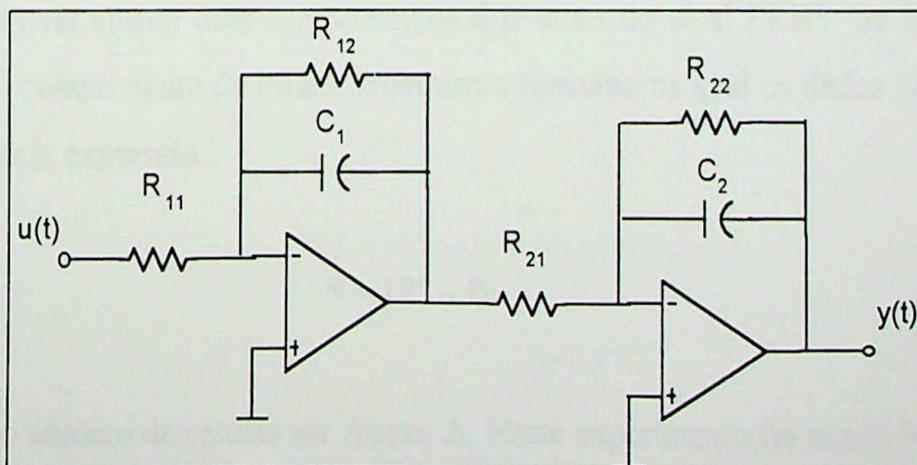


Fig. 5.5: Circuito elétrico experimental.

Tabela 5.1: valores dos componentes do circuito experimental.

Componte	Especificação
$R_{11}=R_{12}$	1 M $\Omega$
$R_{21}=R_{22}$	100 k $\Omega$
$C_1$	1 $\mu$ F
$C_2$	100 $\mu$ F
CI (Amp. Operacional)	LM 324

Da construção do circuito um sistema de segunda ordem pode ser obtido, o qual é descrito pela função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (5.3)$$

com  $a_0 = 0,1$ ,  $a_1 = 1,1$  e  $b_0 = 0,1$ . A tarefa do experimento é estimar os parâmetros desconhecidos  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{b}_0$  dos dados medidos dos sinais de entrada e saída.

A entrada do sistema é um sinal PRBS, de um gerador de sinais aleatórios do Módulo PU-253 (Digicom-1) da Degem System, do Laboratório de Comunicações do Departamento de Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, sendo possível ajustar dois comprimentos diferentes do sinal PRBS, ou seja,  $N=15$  e  $N=255$ . O comprimento do PRBS determina o tamanho na qual os dados são aleatórios e é dado pela expressão:

$$N = (2^n - 1) \quad (5.4)$$

onde  $n$  é o número de células ver Anexo A. Neste experimento foi usado  $N=255$  ( $n=8$ ) seguindo uma recomendação encontrada na referência [8].

Um Microcomputador IBM AT-286, no qual foi instalado uma Placa PCL-711 MultiLab Card da Advantech Co.,Ltd, é usado para a tarefa de aquisição e registro dos dados onde usou-se também o software de domínio público, disponível no site da

Advantech, “Scope800” que transforma o Microcomputador em um osciloscópio, permitindo a visualização dos dados e também seu registro na forma de arquivo de dados no formato ASCII, podendo então ser transportado para outro microcomputador e tratados por um outro software como por exemplo o MATLAB e o SIMULINK da MathWorks. A placa PCL-711 possui 8 canais de entrada A/D (que trabalha com uma velocidade de conversão máxima de  $25\mu\text{s}$ ) simples e um canal de saída D/A, sendo que tanto o conversor A/D quanto o D/A possuem uma resolução de 12 bits que determina a exatidão do dados aqisitados. Nesta placa o range da entrada analógica é de  $-5\text{V}$  a  $+5\text{V}$ , e o range da saída analógica é ajustado por hardware de 0 a  $+5\text{V}$  ou de 0 a  $+10\text{V}$ .

Neste experimento foi usado dois canais de entrada analógica, um para leitura do sinal de entrada do circuito  $u(t)$  e outro para leitura do sinal de saída  $y(t)$ .

Exceto o erro de quantização da aquisição de dados, nenhum ruído extra é introduzido neste sistema. O tempo de amostragem usado é de 50ms.

Na Figura 5.6, observa-se os sinais de entrada e saída medidos do circuito, onde a entrada é um sinal PRBS de amplitude 5V. Depois de coletados 300 amostras é usado o software Matlab para visualização dos resultados e estimação dos parâmetros

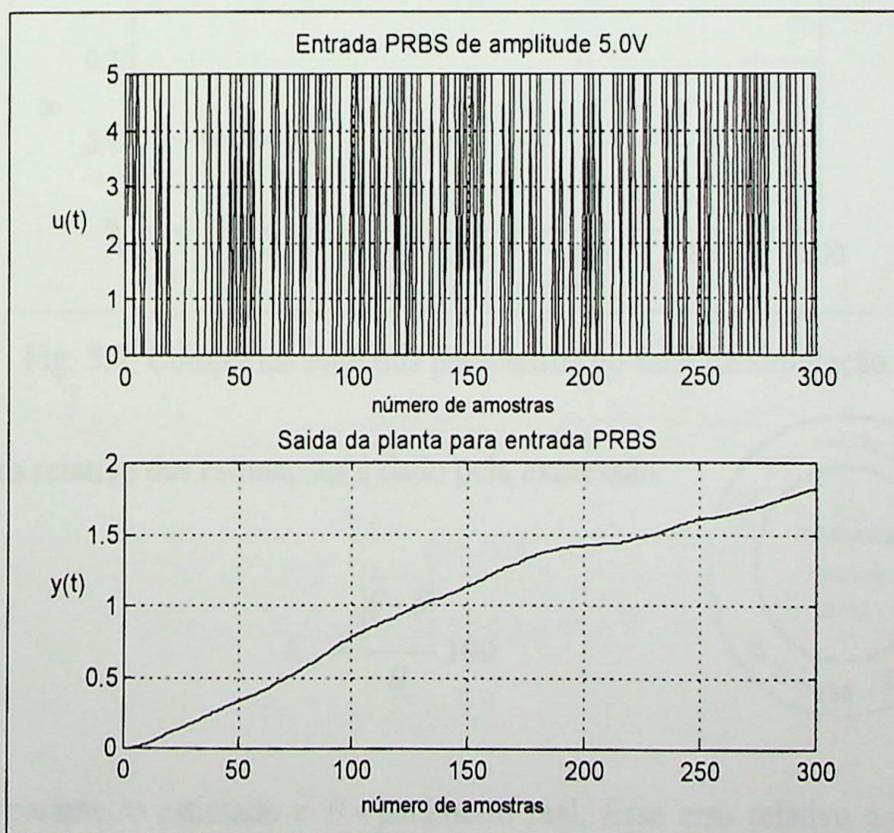


Fig. 5.6: Sinais de entrada e saída do circuito em teste.

A Figura 5.7 mostra que as estimativas dos parâmetros convergem depois de 250 recursões e os parâmetros estimados convergem para os valores  $\hat{a}_1 = 1,1054$ ,  $\hat{a}_0 = 0,1003$  e  $\hat{b}_0 = 0,1004$  respectivamente.

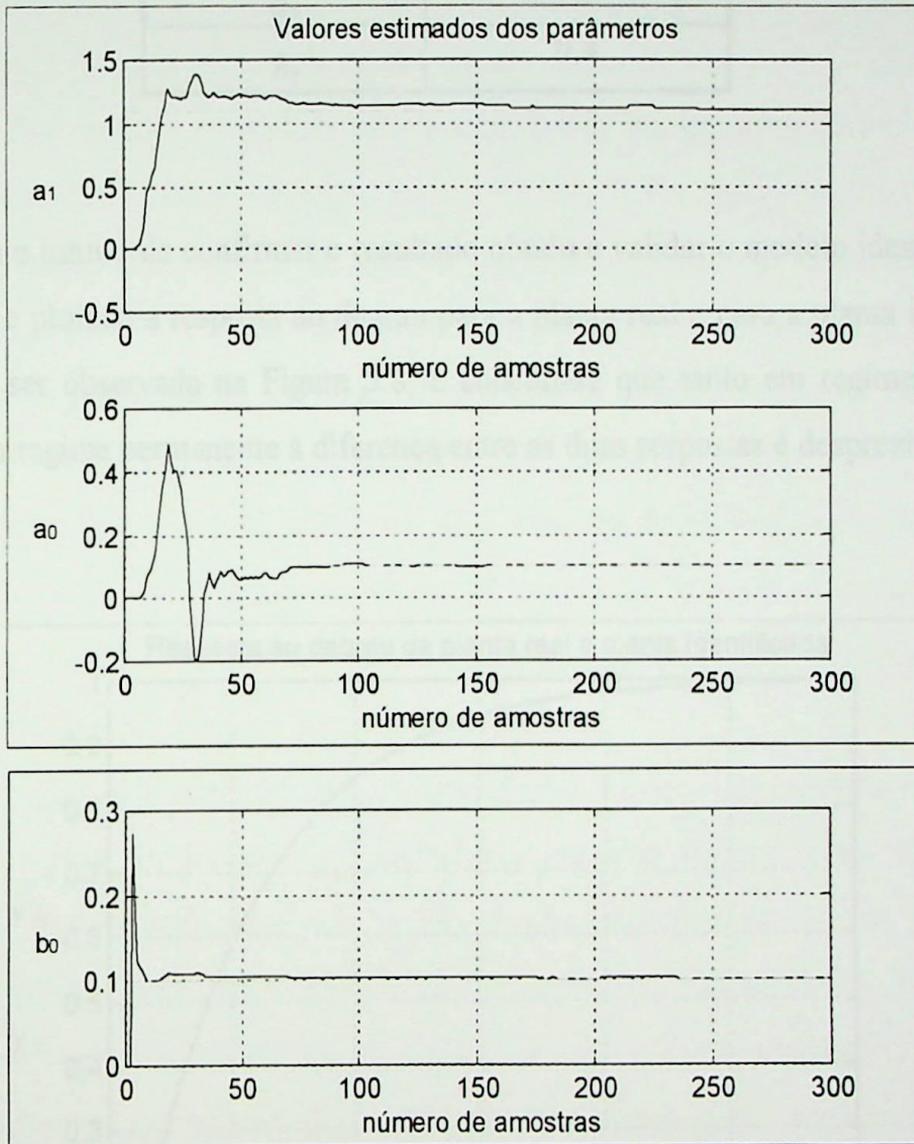


Fig. 5.7: Comportamento dos parâmetros no final da simulação.

O erro relativo das estimações é dado pela expressão

$$E_{\%} = \frac{|\hat{\theta} - \theta|}{\theta} \cdot 100 \quad (5.5)$$

sendo  $\hat{\theta}$  = parâmetro estimado e  $\theta$  = parâmetro real. Esse erro relativo é calculado e mostrado na Tabela 2 em porcentagem.



Tabela 5.2- Erro realitvo das estimativas.

Parâmetro	Erro(%)
$\hat{a}_1$	0,5
$\hat{a}_0$	0,3
$\hat{b}_0$	0,4

Com o intuito de confirmar o resultado obtido e validar o modelo identificado foi calculado e plotado a resposta ao degrau para a planta real e para a planta identificada que pode ser observada na Figura 5.8, e conclui-se que tanto em regime transitório quanto em regime permanente a diferença entre as duas respostas é desprezível.

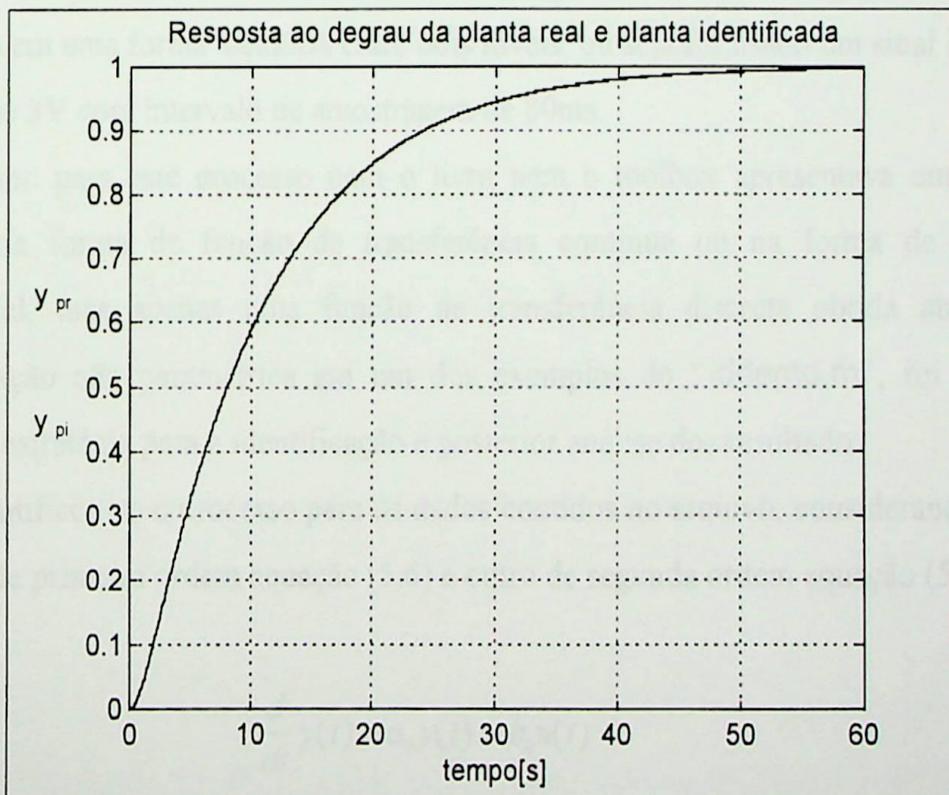


Fig. 5.8: Resposta ao degrau da planta real e da planta identificada

### 5.3- Identificação de um processo térmico em escala de laboratório.

Neste exemplo são usados os dados contidos no toolbox de identificação (Identification Toolbox) da Mathworks (um arquivo do Matlab - M-file chamado "iddemo.m" que mostra vários exemplos de tarefas possíveis de serem feitas neste toolbox), que é descrito em [29] como um estudo de casos.

Os dados contidos no toolbox foram coletados de um processo térmico em escala de laboratório da Feedback - Process Trainer PT326. O Processo trabalha da seguinte forma: Ar é soprado através de um tubo depois de ser aquecido na entrada do tubo. A entrada do processo é a tensão aplicada a uma malha de resistências que constitui o dispositivo de aquecimento. A saída do processo é a temperatura do ar na saída, medida em volts por um sensor tipo termopar.

O arquivo "dryer2.mat" armazena 1000 amostras de dados de entrada e saída na forma ASCII. Os dados foram coletados do processo quando as entradas foram mudadas em uma forma aleatória entre dois níveis, ou seja foi usado um sinal PRBS de amplitude 3V com intervalo de amostragem de 80ms.

Como para este processo nem o livro nem o toolbox apresentava um modelo teórico na forma de função de transferência contínua ou na forma de equação diferencial, mas apenas uma função de transferência discreta obtida através de identificação não paramétrica em um dos exemplos do "iddemo.m", foi usado a seguinte estratégia para a identificação e posterior análise dos resultado:

Identificou-se o processo para os dados contidos no arquivo, considerando-se um modelo de primeira ordem equação (5.6) e outro de segunda ordem equação (5.7).

$$\frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) = b_0u(t) \quad (5.6)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) = b_0u(t) \quad (5.6)$$

### Planta de 1ª ordem:

Na Figura 5.9 é observado os sinais de entrada (PRBS de amplitude 3V e nível DC de 0,8V) e saída que serão usadas na identificação, foram usadas 400 amostras dos dados.

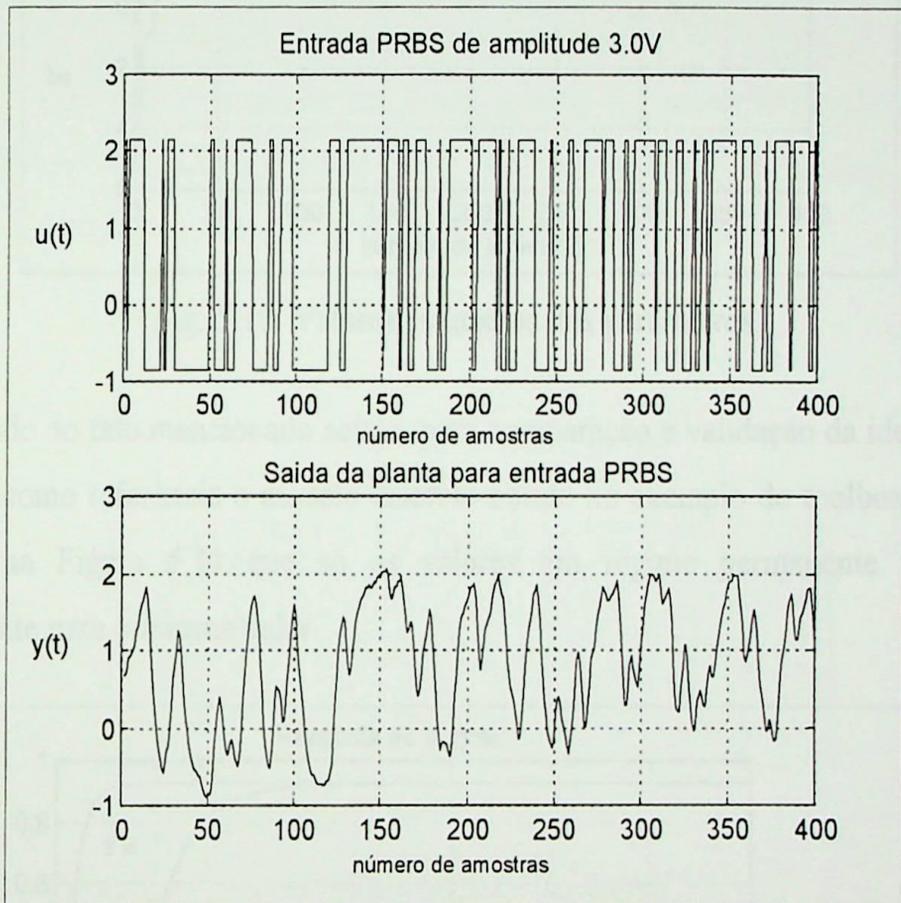


Fig. 5.9: Sinais de Entrada e Saída do Processo Térmico

O número de amostras utilizado é devido ao fato dos parâmetros estimados convergirem depois de 400 amostras como pode ser visto na Figura 5.10, onde pode ser observado que os valores dos parâmetros não sofrem mais alterações, tendendo para os valores  $\hat{a}_0 = 0,8784$  e  $\hat{b}_0 = 0,8466$ .

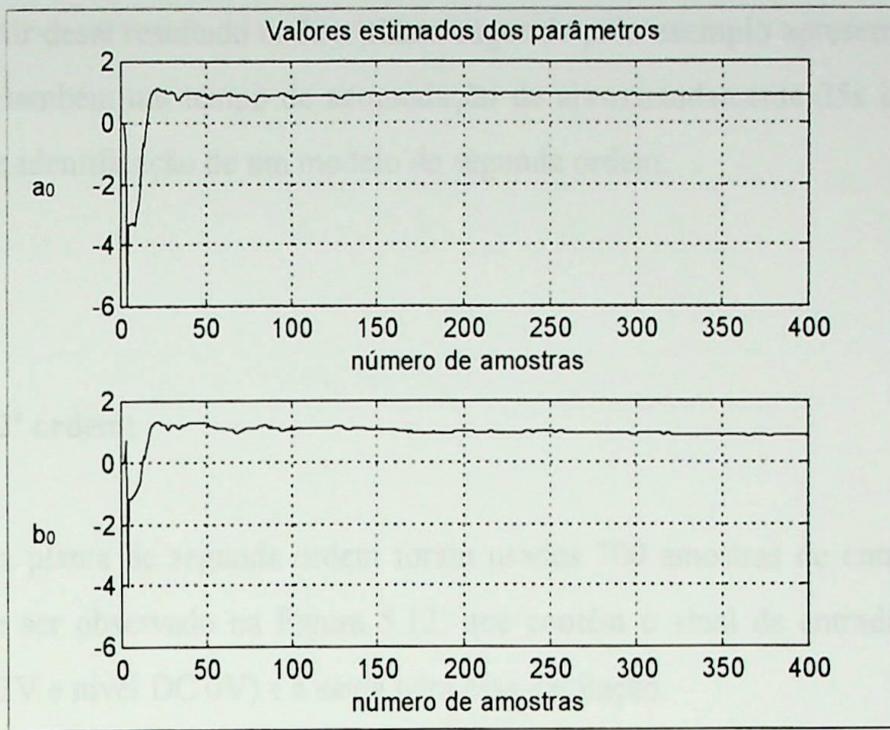


Fig. 5.10: Valores estimados dos parâmetros.

Devido ao fato mencionado acima, para comparação e validação da identificação, foi usado como referência o modelo discreto obtido no exemplo do toolbox. Podemos observar na Figura 5.11 que só os valores em regime permanente convergem praticamente para o mesmo valor.

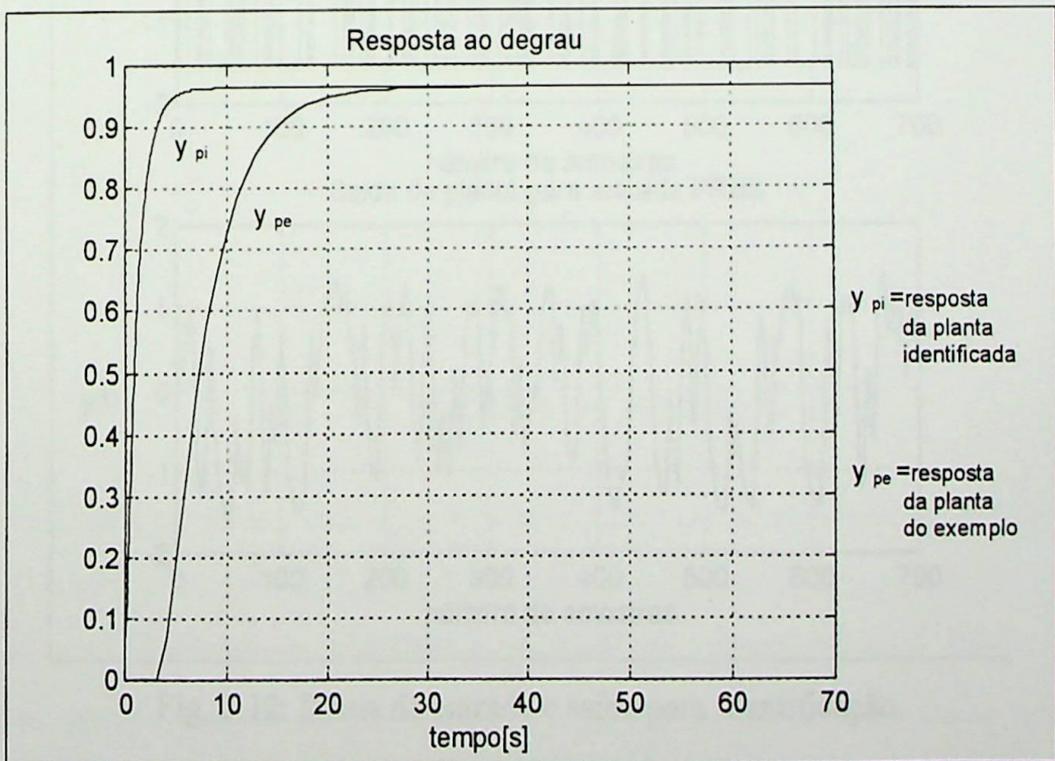


Fig. 5.11: Resposta ao degrau da planta identificada de primeira ordem e da planta obtida no exemplo do "iddemo.m".

A partir deste resultado onde a planta sugerida pelo exemplo apresenta um atraso razoável e também um tempo de acomodação de aproximadamente 25s isto sugere a tentativa de identificação de um modelo de segunda ordem.

### Planta de 2ª ordem:

Para a planta de segunda ordem foram usados 700 amostras de entrada e saída como pode ser observado na Figura 5.12, que contém o sinal de entrada (PRBS de amplitude 3V e nível DC 0V) e a saída para essa excitação.

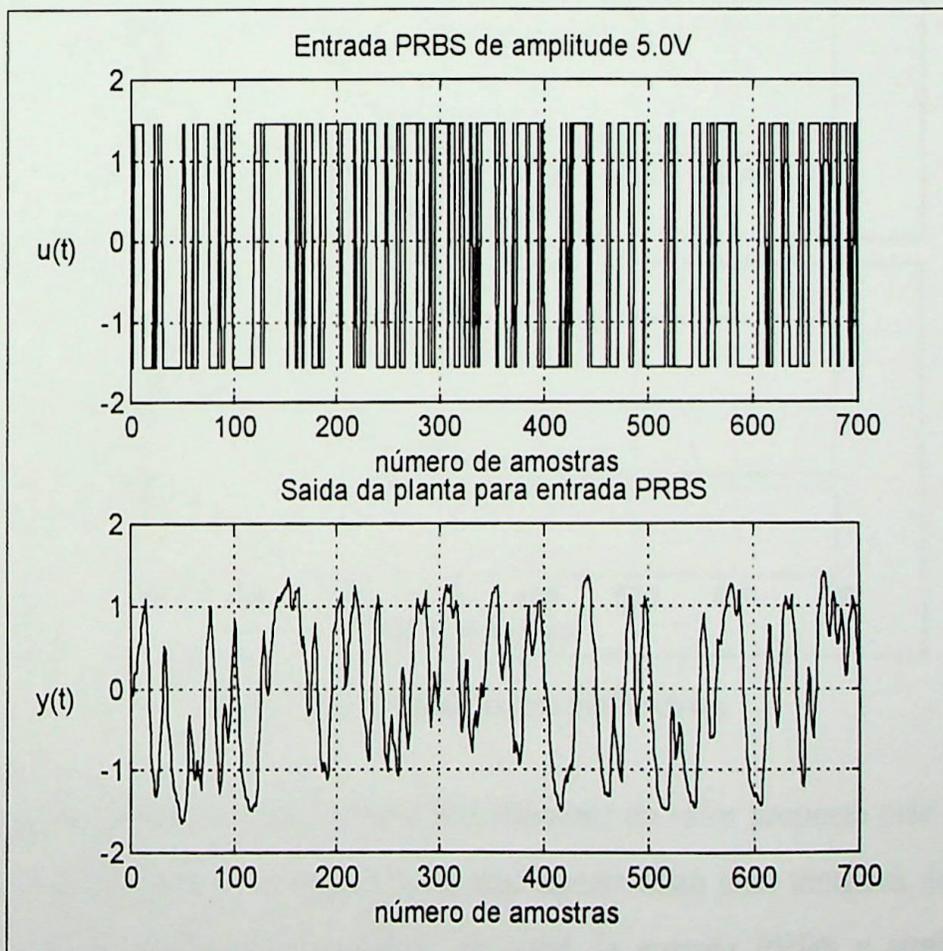


Fig. 5.12: Sinais de entrada e saída para identificação.

Pelo comportamento dos parâmetros estimados observados na Figura 5.13, nota-se que eles convergem em torno de 700 amostras, pela mesma razão mencionada anteriormente, para os valores  $\hat{a}_1 = 1,1078$ ,  $\hat{a}_0 = 0,9411$  e  $\hat{b}_0 = 0,9086$  respectivamente.

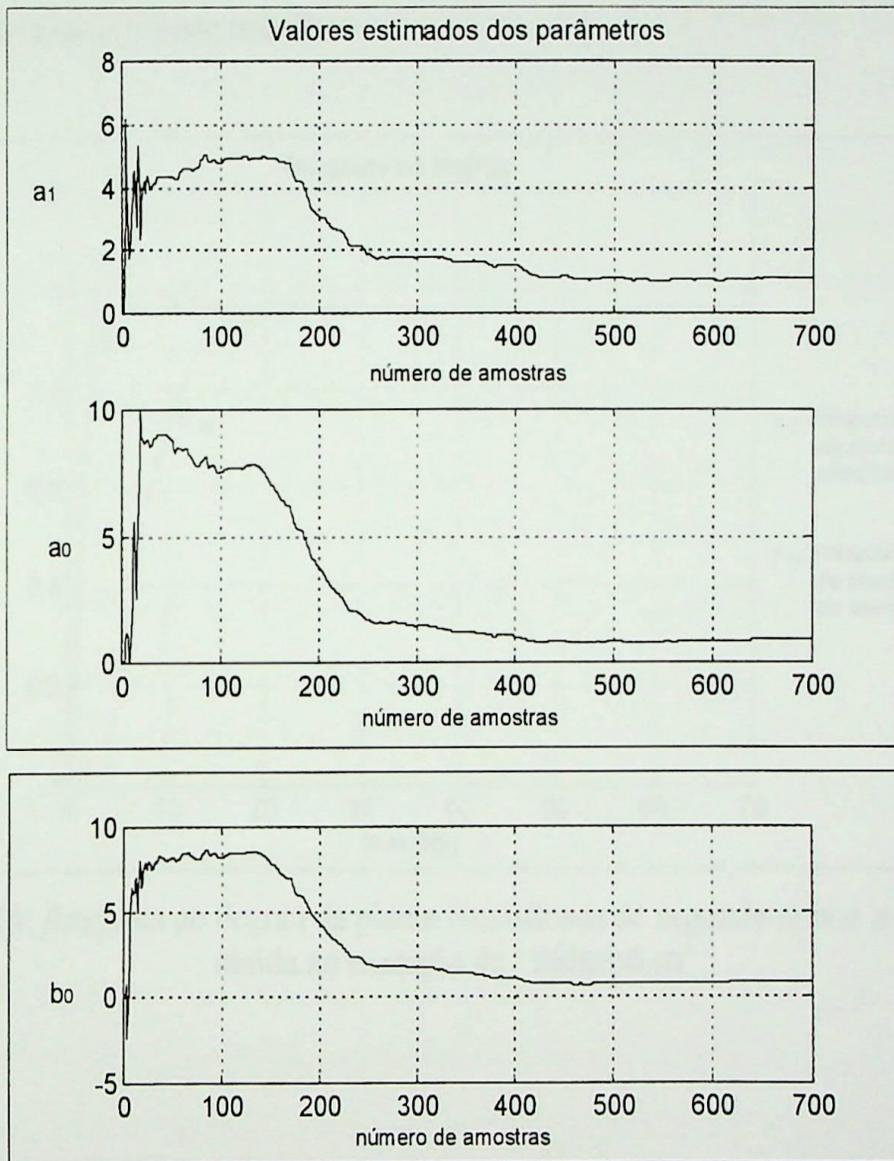


Fig. 5.13: Estimativa dos parâmetros.

Neste caso também o transitório é bem diferente do valor proposto pelo exemplo, como pode ser observado na Figura 5.14, mas apesar disto uma tentativa deveria ser feita no sentido de alterar a amplitude do sinal de entrada PRBS e também uma alteração no intervalo de amostragem com o intuito de tentar aumentar a razão de amortecimento da planta identificada, fazendo os parâmetros convergirem para outros valores já que estes valores apresentam uma razão de amortecimento de

aproximadamente  $\zeta \cong 0,57$  e apresentando dois polos complexos conjugados próximo do eixo imaginário  $s_{1,2} = -0,5539 \pm 0,7964i$ .

Estas são sugestões para tentar melhorar a qualidade das estimativas, já que neste trabalho não é proposto um estudo de técnicas de determinação de ordem do modelo, para estimar a melhor ordem do modelo para o processo térmico, sendo que isso foge bastante do objetivo deste trabalho.

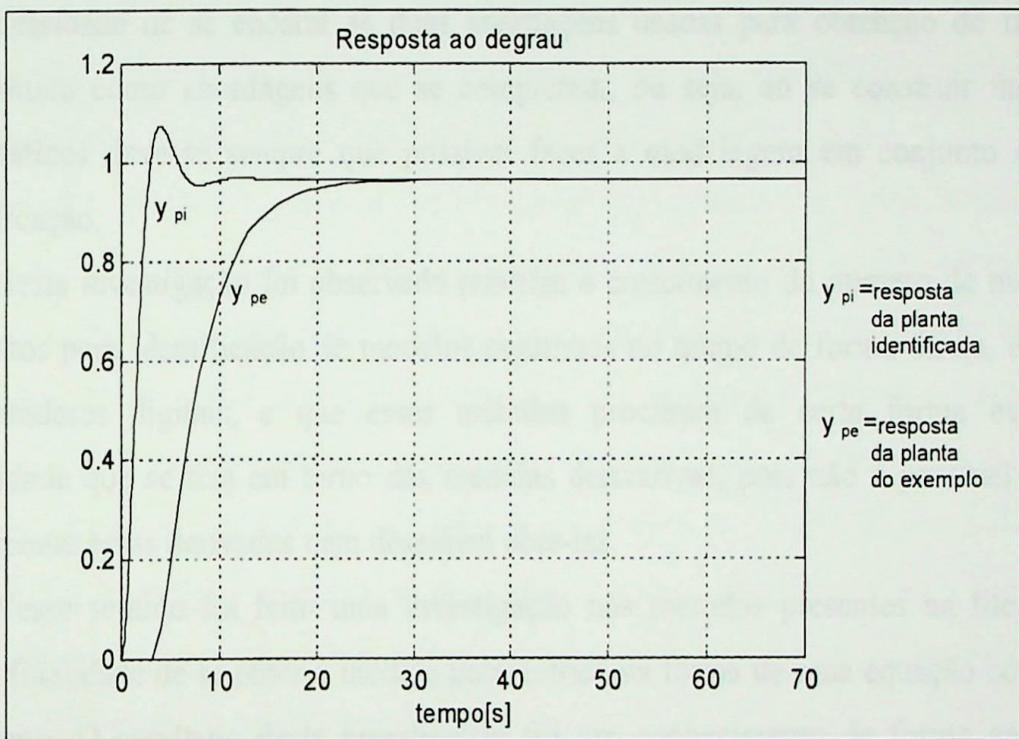


Fig. 5.14: Resposta ao degrau da planta identificada de segunda ordem e da planta obtida no exemplo do “iddemo.m”.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.

A primeira conclusão relevante desta investigação sem dúvida, foi sobre um consenso que nos últimos anos parece ter encontrado defensores, e esse consenso trata da necessidade de se encarar as duas abordagens usadas para obtenção do modelo matemático como abordagens que se completam, ou seja, ao se construir modelos matemáticos deve-se sempre que possível fazer a modelagem em conjunto com a identificação.

Nesta investigação foi observado também o crescimento do número de métodos propostos para identificação de modelos contínuos no tempo de forma direta, usando computadores digitais, e que esses métodos procuram de certa forma evitar a dificuldade que se tem em torno das medidas derivativas, pois não é possível medir diretamente essas derivadas nem desejável obtê-las.

Nesse sentido foi feita uma investigação nos métodos presentes na literatura, com a finalidade de se obter o modelo paramétrico na forma de uma equação contínua no tempo. O resultado desta investigação foi um conhecimento de forma geral de várias técnicas.

O objetivo que norteou este trabalho foi a procura de uma técnica de identificação de sistemas dinâmicos contínuos no tempo diretamente que pudesse ser usada na sua forma recursiva, ou seja, que pudesse ser usada em tempo real.

Nesta procura, quatro técnicas pareciam inicialmente satisfazer tais quesitos, e foram as abordadas no capítulo 3. Sendo que todas elas trabalhavam bem o problema da condição inicial, ou seja, não era necessário estimar nem mesmo considerar tais condições diminuindo assim a carga computacional existentes em outros métodos, que tornaria difícil a implementação em tempo real.

Dessas quatro técnicas, fortes candidatas, duas apresentavam um problema que apesar de seus autores não citarem como problema em uma identificação em tempo real podem apresentar dificuldades, pois requer a determinação de parâmetros que são

considerados parâmetros de projetos, requerendo sua determinação ou escolha para somente depois fazer a identificação, podendo com isso aumentar a carga computacional.

Das duas técnicas restantes, uma em especial, mostrou através de simulação e mesmo implementação, responder muito bem, que é a interpolação numérica usando função trapezoidal. A outra técnica que é a equação a diferença por pulso em bloco não apresentou uma melhora de desempenho significativa em relação a interpolação numérica sendo porém um pouco mais difícil a sua implementação. Por isso a interpolação numérica usando função trapezoidal foi a metodologia escolhida para implementação, não descartando as demais para futuras investigações.

Um fato intrigante, que veio a se confirmar após o estudo de vários artigos, foi a dificuldade que tais técnicas tem em identificar sistemas de ordem elevada, ou sistemas acima de segunda ordem. Essa suspeita surgiu já que na literatura encontrada todos os exemplos simulados ou implementados não passavam de segunda ordem.

De todo o exposto acima, os resultados obtidos foram satisfatórios e o estudo também, sendo que a investigação não deve se esgotar. Existe a necessidade de continuar a investigar os sistemas de ordem superior, os sistemas não lineares e também a implementação de outros sistemas reais, onde possam ser usados excitações do tipo PRBS e aqueles que não podem.

Há também um estudo que pode ser realizado caso o problema de identificação de sistemas contínuos de ordem superior seja melhor esclarecido que é a determinação de ordem do sistema em conjunto com a identificação paramétrica que é encontrado na literatura de identificação de sistemas discretos mas não de sistemas contínuos.

Um dos mais interessantes e úteis tipos de controle para trabalhar em identificação de sistemas é o sinal pseudo-aleatório "pseudorandom binary signal" (PRBS) que tem as seguintes propriedades:

(i) O sinal tem dois níveis,  $+1$  e  $-1$  e pode mudar de um nível para outro somente em intervalos de tempo  $T = 1/N$ .

(ii) É predominantemente de baixa frequência e sua banda de sinal em qualquer intervalo particular. O PRBS é assim determinístico e muitos podem ser repetidos.

## ANEXO A

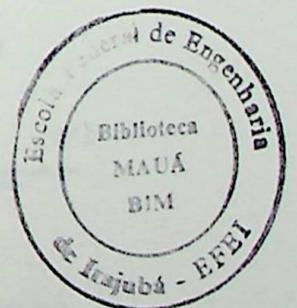
(iii) O PRBS é periódico com período  $T$  onde  $N$  é um inteiro impar.

(iv) Em qualquer período, existem  $(N+1)/2$  intervalos em um nível  $+1$  e  $(N-1)/2$  intervalos em outro nível.

(v) A função de autocorrelação é mostrada na Fig. 1A.



Fig. 1A - Função de autocorrelação do sinal PRBS.



## Sinal Binário Pseudo-Aleatório.

Um dos mais interessantes e úteis sinais periódicos para trabalhos em identificação de sistemas é o sinal binário pseudo aleatório "*pseudo-random binary signal (PRBS)*" que tem as seguintes propriedades:

(i) O sinal tem dois níveis,  $\pm V$  e pode mudar de um nível para outro somente em certos intervalos de tempo  $t = 0, \lambda, 2\lambda, \dots$

(ii) É predeterminado se ou não o sinal muda de nível em qualquer intervalo particular. O PRBS é assim determinístico e ensaios podem ser repetidos.

(iii) O PRBS é periódico com período  $T_0 = N\lambda$ , onde  $N$  é um inteiro ímpar.

(iv) Em qualquer período, existem  $\frac{1}{2}(N+1)$  intervalos em um nível e  $\frac{1}{2}(N-1)$  intervalos em outro nível.

(v) A função de autocorrelação é mostrada na Fig. 1A.

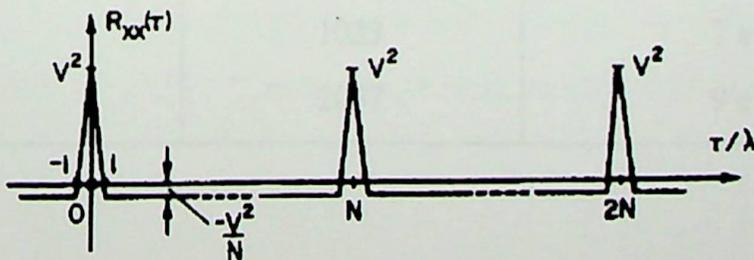


Fig. 1A- Função de autocorrelação do sinal PRBS.

(vi) Os PRBS mais usados são os baseados nas seqüências de máximo comprimento ("*m-sequences*"), para o qual  $N = 2^n - 1$ , onde  $n$  é inteiro. Estes podem ser gerados usando um registrador de deslocamento realimentado de  $n$ -estágios, com realimentação para o primeiro estágio consistindo do módulo-2 soma do nível lógico do último estágio e um ou mais dos outros estágios. Poucas conexões de realimentação na verdade produzem uma "*m-sequences*" para qualquer  $n$  particular; a tabela 1A lista alguns algumas conexões apropriadas para  $2 \leq n \leq 11$ .

**Tabela 1A. Conexões para geração das "m-sequences" com período até 2047 dígitos.**

Número de estágios do registrador de deslocamento, $n$	Período da seqüência $N(=2^n-1)$	Realimentação para o primeiro estágio o módulo 2 soma dos estágios de saída
2	3	1 e 2
3	7	2 e 3
4	15	3 e 4
5	31	3 e 5
6	63	5 e 6
7	127	4 e 7
8	255	2, 3, 4 e 8
9	511	5 e 9
10	1023	7 e 10
11	2047	9 e 11

Um circuito registrador de deslocamento para gerar um PRBS é mostrado na Fig. 2A.

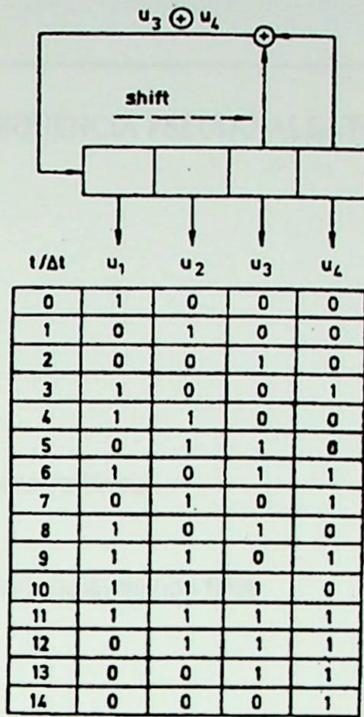


Fig. 2A- Circuito do registrador de deslocamento com 4 estágios.

O nível lógico binário são tomados como de costume  $1$  e  $0$  e o módulo-2 soma é a operação de ou-exclusivo

$$\oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$$

$$\oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$$

Transformação do nível lógico para níveis de tensão é feito por  $1 \rightarrow +V$ ,  $0 \rightarrow -V$  ou  $1 \rightarrow -V$ ,  $0 \rightarrow +V$ .

É digno de nota que existem muitos outros tipos de PRBS somados aos baseados nas "*m-sequences*", mas nem todos podem ser gerados usando hardware, de modo que todos os geradores de PRBS disponíveis comercialmente são baseados em "*m-sequences*".

A seguir, é descrito o programa em Turbo C para geração do sinal PRBS que foi utilizado na simulação do sistema com duas entradas e uma saída descrito no item 5.1.

```

/* PRBS - GERADOR DE SEQUÊNCIA PSEUDO-ALEATÓRIA */

#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"
#include "conio.h"
#include "math.h"

void main()
{
int i,ndp,j,jm;
float sh[7],s,u; //declaração das variáveis
FILE *fp1;

u = 0; //inicialização das variáveis tipo float
s = 0;

clrscr(); //limpa a tela

/* Inicializacao */

printf("Entre com o numero de pontos: ndp= ");
scanf("%d",&ndp);

/*printf("Entre com o nome do arquivo de saida para os numeros aleatorios: ");
scanf("%s",arq);*/
if((fp1 = fopen("prbs.c","w+")) == NULL)
{
printf("nao pode abrir arquivo\n"); exit(0);
}

for(i = 0; i <= 6; i++)
{
sh[i] = 1.0;
}
for(i = 1; i <= ndp; i++)
{
s = sh[6] + sh[5];
if(s > 1.5) s = 0.0;

for(j = 1; j <= 6; j++)
{
jm = 6 - j;
sh[jm+1]=sh[jm];
}
sh[0] = s;
u = s-1.0;
fprintf(fp1, "%f\n" , u);
}

fclose(fp1);
}

```

**Script-File:** arquivo M-File para identificação do Sistema Elétrico experimental.

```
%*****  
%Simulacao de uma planta de 2a. ordem com entrada PRBS (circuito elétrico  
%experimental)  
%*****  
  
%Definir o tempo de simulacao desejado (em termos do periodo de  
amost.)  
n = input('Numero de periodos de amostragem = ');  
  
%Definindo o intervalo de amostragem  
st = 0.01;  
  
%Parametros da planta continua  
  
ac1 = 1.1;  
ac2 = 0.1;  
bc1 = 0.0;  
bc2 = 0.1;  
  
%*****  
%*** Valores iniciais das variaveis ***  
%*****  
  
load uin;  
  
load yout;  
  
%***** Matriz identidade *****  
  
I=eye(3);  
  
%***** Vetor de regressao *****  
  
ph = [0;0;0];
```

```

%**** Parametros estimados da planta ****

        teta = [0;0;0];

% Vetores utilizados para plotagem dos resultados das
simulacoes
teta1 = (1:n);
teta2 = (1:n);
teta3 = (1:n);
a11 = (1:n);
a22 = (1:n);
b22 = (1:n);
i = (1:n);

%**** Inicializacao dos vetores ****

teta1(1) = teta(1,1);
teta2(1) = teta(2,1);
teta3(1) = teta(3,1);
a11(1)=ac1;
a22(1)=ac2;
b22(1)=bc2;

%*** Inicializacao da Matriz de Covariancia

        p=(1e4)*eye(3);

%**** Medida usada na identificacao ****

        ys = y;
        u11 = u;

%*** Inicializacao das integrais recursivas

        inty1=0;
        intu1=0;
%*****

```

```

%***** Inicio da identificação *****
%*****
for t=1:n-1

%***** Identificacao *****

% Erro de predicao

    ye = ph'* teta;

% Ganho

    k = (p * ph) / (1 + (ph'* p * ph) );

% Parametros estimados

    z = (ys(t+1) - ys(t));

    teta = teta + (z - ye)*k;

% Matriz de covarianca

    p = (I - k*ph') * p;

% Up-date

%*** Saida ***
    inty2 = inty1 + (ys(t+1) + ys(t))*(st/2);
    phy1 = (ys(t+1) + ys(t))*(st/2);
    phy2 = ((inty1)*st + (ys(t+1) + 2*ys(t))*(st*st)/6);
    inty1 = inty2;

%*** Entrada u1 ***
    intu2 = intu1 + (u(t+1) + u(t))*(st/2);
%    phu1 = (u(t+1) + u(t))*(st/2);
    phu2 = ((intu1)*st + (u(t+1) + 2*u(t))*(st*st)/6);
    intu1 = intu2;

```

```
ph = [-phy1;-phy2;phu2];
```

```
%***** Vetores para os graficos *****
```

```
teta1(t+1)=teta(1,1);
```

```
teta2(t+1)=teta(2,1);
```

```
teta3(t+1)=teta(3,1);
```

```
a11(t+1)=a1;
```

```
a22(t+1)=a2;
```

```
b22(t+1)=bc2;
```

```
end
```

```
%***** Plotagem dos resultados *****
```

```
% Parametros a1 e a0
```

```
subplot(211);
```

```
%plot(i,teta1,i,a11,'-.');
```

```
plot(i,teta1);
```

```
grid;
```

```
titulo1=['Valores estimados dos parâmetros '];
```

```
title(titulo1);
```

```
ylabel('Par. a1');
```

```
xlabel('número de amostras');
```

```
subplot(212);
```

```
%plot(i,teta2,i,a22,'-.');
```

```
plot(i,teta2);
```

```
grid;
```

```
xlabel('número de amostras');
```

```
ylabel('Par. a0');
```

```
pause;
```

```
clg;
```

```
% Parametros b0
```

```
subplot(211);  
%plot(i,teta3,i,b22,'-.');  
plot(i,teta3);  
grid;  
ylabel('Par. b0');  
xlabel('número de amostras');  
pause;  
clg;
```

```
% Entrada
```

```
subplot(211);  
plot(i,u);  
grid;  
titulol = ['Entrada PRBS de amplitude 5.0V '];  
title(titulol);  
ylabel('u(t)');  
xlabel('número de amostras');
```

```
% Saida
```

```
subplot(212);  
plot(ys);  
grid;  
titulol = ['Saida da planta para entrada PRBS '];  
title(titulol);  
xlabel('número de amostras');  
ylabel('y(t)');  
pause;
```

```
% Retorna a tela normal
```

```
subplot(111);
```

```
end
```

```
%**** FIM DO PROGRAMA ****
```

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [1] ÅSTRÖM, K.J. and WITTENMARK, B. *Computer controlled systems: theory and design*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1984.
- [2] BEKEY, G.A. System identification-an introduction and a survey. *Simulation*, p.151-166, Oct. 1970.
- [3] CHAO, Y. et al. Recursive parameter estimation of transfer function matrix model via simpson's integrating rules. *Int. J. Systems Sci*, v. 18, n. 5, p. 901-911, 1987.
- [4] DOEBELIN, E. O. *System modeling and response: theoretical and experimental approaches*. New York: John & Wiley, 1980.
- [5] GODFREY, K.R. Correlation methods. *Automatica*, v. 16, p. 527-534, 1980.
- [6] HEMERLY, E.M. PC-based packages for identification, optimization and adaptive control. *IEEE Control System Magazine*, v.11, n. 2, p. 33-43, Feb. 1991.
- [7] HEMERLY, E.M. Identificação de sistemas dinâmicos contínuos no tempo. In: SEMINÁRIO DE CIÊNCIAS EXATAS E ENGENHARIAS, 12, 1992, Guaratinguetá. *Anais...* Guaratinguetá: FEG-UNESP, 1992.
- [8] HSIA, T.C. *System identification: least-squares methods*. Lexington: Lexington Books, 1977.

- [9] JIANG, Z. and SCHAUFELBERGER, W. A new algorithm for single-input single-output system identification via block pulse functions. *Int. J. Systems Sci*, v. 16, n. 12, p. 1559-1571, 1985.
- [10] JIANG, Z. *System identification via block pulse difference equations*. Zurich: Federal Institute of Technology, 1990. Tese de Doutorado.
- [11] JOHANSSON, R. Identification of continuous-time models. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, , 31. *Proceedings...* Tucson, Arizona: [s.n.], 1992. p.50-55.
- [12] JOHANSSON, R. *System modeling and identification*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1993.
- [13] LJUNG, L. and SÖDERSTRÖM, T. *Theory and practice of recursive identification*. Cambridge: MIT Press, 1983.
- [14] RAO, G. P. et al. A microprocessor-based system for on-line parameter identification in continuous dynamical systems. *IEEE Trans. Ind. Elet.*, v. 29, n. 3, Aug. 1982.
- [15] PRASAD, T.and SINHA, N. K. Modelling of continuous-time systems from sampled data using trapezoidal pulse functions. *Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics.*, (Bombay, India), p. 427-430, 1983.
- [16] PUTHENPURA, S.C.and SINHA, N.K. Identification of continuous-time systems using instrumental variables with application on industrial robot. *IEEE Transactions on Industrial Eletronics*, v. 33, n. 3, p. 224-229, 1986.

- [17] ROHRS, Charles E. et al. *Linear Control Systems*. Highstown, NJ: McGraw-Hill, 1993.
- [18] SAGARA, S. and ZHAO, Z.Y. Recursive identification of transfer function matrix in continuous systems via linear integral filter. *Int. J. Control*, v. 50, n. 2, p. 457-477, 1989.
- [19] SAGARA, S. and ZHAO, Z.Y. Numerical integration approach to on-line identification of continuous-time systems. *Automatica*, v. 26, n. 1, p. 63-74, 1990.
- [20] SINHA, N.K. Estimation of transfer function of continuous system from sampled data. *Proc. IEEE*, v. 119, p. 612-614, 1972.
- [21] SINHA, N.K. and QIJIE, Z. Identification of continuous-time system from sampled data: a comparison of 3 direct methods. In: IFAC SYMPOSIUM ON IDENTIFICATION AND SYSTEM PARAMETER ESTIMATION, 7. *Proceedings* [s.l: s.n], 1985. p.1575-1578.
- [22] UNBEHAUEN, H. and RAO, Ganti P. *Identification of Continuous Systems*. Amsterdam: North-Holland, 1987.
- [23] UNBEHAUEN, H. and RAO, Ganti P. Continuous-time approaches to system identification: a survey. *Automatica*, v. 26, n. 1, p. 23-35, 1990.
- [24] WELLSTEAD, P.E. Nonparametric methods of system identification. *Automatica*, v. 17, n. 1, p. 55-69, 1981.
- [25] WHITFIELD, A. H. Transfer function synthesis using frequency response data. *Int. J. Control*, v.43, n. 5, p. 1413-1426, 1986.

- [26] WHITFIELD, A. H. and Messali, N. Integral-equation approach to system identification. *Int. J. Control*, v.45, n. 4, p. 1431-1445, 1987.
- [27] YOUNG, P. Parameter estimation for continuous - time models: a survey. *Automatica*, v. 17, n. 1, p. 23-41, Jan. 1981.
- [28] ZHAO, Z. Y. and SAGARA, S. Analysis and parameter estimation of linear continuous systems using linear integral filter. *Control and Computers*, v. 17, n. 3, 1989.
- [29] LJUNG, L. *System Identification Toolbox User's Guide*. Natick, MA: The MathWorks Inc., 1991.