TESE
1004

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

Simulação Numérica do Escoamento em Torno de um Corpo de Forma Arbitrária utilizando o Método de Vórtices Discretos

Luiz Antonio Alcântara Pereira

ITAJUBÁ - MG
1999

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca
MAUÁ
BIM

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM CORPO DE FORMA ARBITRÁRIA UTILIZANDO O MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS

LUIZ ANTONIO ALCÂNTARA PEREIRA

ITAJUBÁ - MG
1999

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM CORPO DE FORMA ARBITRÁRIA UTILIZANDO O MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS

LUIZ ANTONIO ALCÂNTARA PEREIRA

ORIENTADOR: PROF. DR. MIGUEL HIROO HIRATA

CO-ORIENTADOR: PROF. M.Sc. WALDIR DE OLIVEIRA

Dissertação Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos Requisitos para a Obtenção do Título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica na Área de Concentração em Máquinas de Fluxo.

ITAJUBÁ - MG
1999

CLASS. 532.5:533.6:519.6(043.2)
CUTTER. P436s
TOMBO. 1004

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA MAUÁ - EFEI

532.5: 533.6: 519.6 (043.2)
P436s

Pereira, Luiz Antonio Alcântara
Simulação Numérica do Escoamento em torno de um Corpo de Forma Arbitrária Utilizando o Método de Vórtices Discretos: aplicações em engenharia mecânica/por Luiz Antonio Alcântara Pereira; Orientado por Miguel Hiroo Hirata.-- Itajubá, MG: [EFEI], 1999.
102 p.: il.

Dissertação (mestrado em Engenharia Mecânica) - Escola Federal de Engenharia de Itajubá.

1. Método de Vórtices. 2. Cargas Aerodinâmicas. 3. Método dos Painéis. 4. Métodos Numéricos I. Hirata, Miguel Hiroo, orient. II. Escola Federal de Engenharia de Itajubá. III. Título.

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM CORPO DE FORMA ARBITRÁRIA UTILIZANDO O MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS

Luiz Antonio Alcântara Pereira

Membros da Banca Examinadora

1 - Prof. Dr. Gustavo César Rachid Bodstein

2 - Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho

3 - Prof. M.Sc. Waldir de Oliveira (co-orientador)

4 - Prof. Dr. Miguel Hiroo Hirata (orientador)

ITAJUBÁ - MG
1999

"Na sabedoria, nada mais odioso que julgar-se sábio."
(Sêneca)

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Miguel Hiroo Hirata, pela sua notável capacidade de trabalho, pela atenção e colaboração concedidas na elaboração deste trabalho, e, principalmente, por me apresentar o Método de Vórtices.

Ao Professor Waldir de Oliveira, pela amizade e apoio dispensados durante a preparação deste trabalho.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais e aos meus avós.

RESUMO

Neste trabalho, é apresentado o Método de Vórtices Discretos, para simular numericamente o escoamento bidimensional, incompressível e não permanente em torno de um corpo de forma arbitrária.

O método utiliza elementos da Teoria Potencial (Método dos Painéis) para simular o escoamento de um fluido ao redor do corpo e, assim, fornecer os subsídios necessários para se efetuar a geração e a convecção de vorticidade. Um esquema lagrangiano de segunda ordem (esquema de Adams-Bashforth) é utilizado na convecção de vorticidade. A difusão de vorticidade é simulada através do Método de Avanço Randômico.

Exemplos aplicados para os casos de um cilindro circular e de um aerofólio (NACA 0012) são apresentados e comparados com resultados numéricos e resultados experimentais disponíveis na literatura, obtendo-se bons resultados.

Palavras-Chave: 1 - Método de Vórtices, 2 - Cargas Aerodinâmicas, 3 - Método dos Painéis, 4 - Métodos Numéricos

ABSTRACT

This work presents the Discret Vortex Method to simulate numerically the two-dimensional, incompressible, unsteady flow around a body of arbitrary shape.

The method uses elements of the Potential Flow Theory (Panel Method) in order to simulate the flow of a fluid around a body and thereby to make possible the solution of the convection and diffusion vorticity problem. This approach uses a lagrangian second-order Adams-Bashforth scheme for the convection process of the vorticity and a simple model (Randon Walk Method) for the diffusion process.

Examples applied to the cases of a circular cylinder and a NACA 0012 aerofoil are compared to numerical and experimental results available in the literature, yelding good results.

Key Words: 1 - Vortex Method, 2 - Aerodynamic Loads, 3 - Panel Method, 4 - Numerical Methods

CONTEÚDO

pág.

ESUMO i
BSTRACT ii
ONTEÚDO iii
IMBOLOGIA v
ISTA DE FIGURAS ix
ISTA DE TABELAS xii

1 - INTRODUÇÃO 1

2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 6

3 - FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA E O MÉTODO DE VÓRTICES 13
3.1 - Introdução 13
3.2 - Geometria e Região Fluida 13
3.3 - Hipóteses da Formulação Matemática 14
3.4 - Equações e Condições de Contorno que Definem o Problema 15
3.5 - Solução do Problema Proposto 16
3.5.1 - Uma Introdução Sobre o Método de Vórtices 16
3.5.2 - Equação de Transporte de Vorticidade 17
3.5.3 - Características Marcantes do Método de Vórtices 18
3.5.4 - Adimensionalização do Problema Proposto 20
3.5.5 - Análise da Convecção de Vorticidade 21
3.5.5.1 - Problema de Valor de Contorno 22
3.5.5.2 - Solução do Problema Potencial (Método dos Painéis) 23
3.5.5.3 - Esquemas de Avanço 27
3.5.5.4 - Outras Soluções para a Convecção de Vorticidade 29
3.5.6 - Análise da Difusão de Vorticidade 31
3.5.6.1 - Outras Soluções para a Difusão de Vorticidade 33
3.5.7 - Geração de Vorticidade 34
3.5.8 - Cargas Aerodinâmicas 37

4 - ALGORITMO DO MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS 39
4.1 - Introdução 39
4.2 - Modelos de Vórtices 39
4.2.1 - O Vórtice Potencial 40
4.2.2 - O Vórtice de Lamb 43
4.3 - Parâmetros Numéricos Variáveis na Simulação 46
4.4 - Condição de Kutta 47
4.5 - Implementação do Método Numérico 49
4.5.1 - Geração, Convecção e Difusão de Vorticidade 50

4.6 - Estrutura do Programa *"PAICOMVO.FOR"* 57

5 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO NUMÉRICA 60
5.1 - Introdução 60
5.2 - Cilindro Circular 60
5.3 - Perfil NACA 0012 69

6 - CONCLUSÕES 72

APÊNDICE A1 - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE VORTICIDADE PARA ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS 75

APÊNDICE A2 - PAINÉIS COM VORTICIDADE CONCENTRADA NO PONTO DE CONTROLE 78

APÊNDICE A3 - PAINÉIS COM DENSIDADE DE VÓRTICE DISTRIBUÍDA DE FORMA CONSTANTE 83

APÊNDICE A4 - VELOCIDADE INDUZIDA POR UMA NUVEM DE VÓRTICES 87

APÊNDICE A5 - VELOCIDADE INDUZIDA PELO CORPO NOS VÓRTICES 90

APÊNDICE A6 - VELOCIDADE INDUZIDA PELOS VÓRTICES NO CORPO 93

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 96

SIMBOLOGIA

Caracteres Latinos

$ADAMS$ - relativo ao esquema de avanço de segunda ordem 54
$ALFAT$ - número de avanços no tempo 59
$\overline{C_D}$ - coeficiente de arrasto médio 61
C_D - coeficiente de arrasto 38
$\overline{C_L}$ - coeficiente de sustentação médio 61
C_L - coeficiente de sustentação 38
C_{m0} - coeficiente de inércia 37
D - força de arrasto 37
d - diâmetro do cilindro 37
$DRAG$ - relativo ao coeficiente de arrasto 65
dq_{mn} - velocidade induzida no ponto de controle do painel m pelo painel genérico n 25
$EULER$ - relativo ao esquema de avanço de primeira ordem 54
i - unidade imaginária $\left(i = \sqrt{-1} \right)$ 37
K_{ij} - elemento da matriz 81
L - força de sustentação 37
$LIFT$ - relativo ao coeficiente de sustentação 65
M - número de painéis planos 24
N - número total de vórtices livres presentes na esteira 19
$\%N$ - porcentagem do número total de vórtices livres na esteira ...61
n - referente à direção normal 15
P - relativo aos painéis planos 13
P_k - ponto que define as coordenadas cartesianas (x_k, y_k) 13
p - campo de pressões 20
p_k - número randômico entre 0 e 1 32
q_k - número randômico entre 0 e 1 32
$RANDON\ \ WALK$ - relativo ao esquema de avanço randômico 54
Re - número de Reynolds 20
RHS_m - vetor coluna conhecido como "Right Hand Sides" 26
r - coordenada radial no plano Z 21
S - define as fronteiras da região fluida 13
St - número de Strouhal 66
sub - referente à subpainéis 94
t - tempo final da execução do programa 20
U - velocidade do escoamento incidente na direção do eixo dos x 20
$\dot{U}$ - aceleração linear do corpo 37

$U_{V_{k,j}}$ - velocidade induzida no vórtice arbitrário k pelo vórtice arbitrário j na direção do eixo dos x, se este último possuir intensidade unitária 28

u - campo de velocidades 21

u - componente de velocidade induzida na direção do eixo dos x 20

u_{C_k} - velocidade total induzida pelo corpo sobre um vórtice arbitrário k na direção do eixo dos x 92

u_{c_k} - velocidade induzida por um painel genérico sobre um vórtice arbitrário k na direção do eixo dos x 90

u_{k_N} - velocidade total induzida no vórtice arbitrário k pela nuvem de vórtices na direção do eixo dos x 88

u_{m_N} - velocidade total induzida num painel genérico n por uma nuvem de vórtices na direção do eixo dos x 95

u_{m_n} - velocidade induzida num painel genérico n por um vórtice arbitrário k na direção do eixo dos x 93

u_{t_k} - velocidade total induzida no vórtice arbitrário k pelo escoamento incidente, pela nuvem de vórtices e pelo corpo na direção do eixo dos x 28

u_{v_N} - velocidade total induzida num vórtice arbitrário pela nuvem de vórtices na direção do eixo dos x 87

V - velocidade do escoamento incidente na direção do eixo dos y 78

$V_{V_{k,j}}$ - velocidade induzida no vórtice arbitrário k pelo vórtice arbitrário j na direção do eixo dos y, se este último possuir intensidade unitária 28

v - componente de velocidade induzida na direção do eixo dos y 20

v_{C_k} - velocidade total induzida pelo corpo sobre um vórtice arbitrário k na direção do eixo dos y 92

v_{c_k} - velocidade induzida por um painel genérico sobre um vórtice arbitrário k na direção do eixo dos y 90

v_{k_N} - velocidade total induzida no vórtice arbitrário k pela nuvem de vórtices na direção do eixo dos y 88

v_{m_N} - velocidade total induzida num painel genérico n por uma nuvem de vórtices direção do eixo dos y 95

v_{m_n} - velocidade induzida num painel genérico n por um vórtice arbitrário k na direção do eixo dos y 93

v_{t_k} - velocidade total induzida no vórtice arbitrário k pelo escoamento incidente, pela nuvem de vórtices e pelo corpo na direção do eixo dos y 28

v_{v_N} - velocidade total induzida num vórtice arbitrário pela nuvem de vórtices na direção do eixo dos y 87

W - vetor velocidade do escoamento incidente 15

w - campo de vorticidades 77

w - única componente não nula do vetor vorticidade, para escoamentos bidimensionais, que atua na direção normal ao plano do escoamento 20

XM_n - coordenada do ponto de controle do painel n na direção do eixo dos 47

XP_n - coordenada do ponto extremo do painel n na direção do eixo dos x 47

$X0_n$ - coordenada do ponto de nascimento de um vórtice, próximo ao painel n, na direção do eixo dos x 59

x - coordenada cartesiana no plano Z 20

YM_n - coordenada do ponto de controle do painel n na direção do eixo dos y 47

YP_n - coordenada do ponto extremo do painel n na direção do eixo dos y 47

$Y0_n$ - coordenada do ponto de nascimento de um vórtice, próximo ao painel n, na direção do eixo dos y 59

y - coordenada cartesiana no plano Z 20

Z - variável complexa designativa da posição genérica no plano do escoamento 40

Caracteres Gregos

α - ângulo do escoamento incidente 13

β_n - ângulo de orientação de um painel genérico n 25

Γ - intensidade de vórtices 20

γ - densidade de vórtices 24

δ - espessura de camada limite 16

Δr_k - avanço de um vórtice arbitrário k na direção radial 33

Δs_n - comprimento de um painel genérico n 36

Δt - intervalo de tempo discreto 18

$\Delta\theta_k$ - avanço circunferencial de um vórtice arbitrário k 33

ε_{ijk} - símbolo de permutação (na notação indicial) 76

η_k - avanço randômico de um vórtice arbitrário k na direção do eixo dos y 33

θ - coordenada polar no plano Z 13
ℓ - posição de nascimento dos vórtices 36
λ - representa qualquer número natural ímpar 82
υ - viscosidade cinemática 15
ξ_k - avanço randômico de um vórtice arbitrário k na direção do eixo dos x 33
π - 3,14159265359 24
σ_0 - raio do núcleo do vórtice de Lamb 20
ρ - massa específica 15
Σ - representa um somatório 24
ϕ - potencial de velocidades 20
τ - referente à direção tangencial 15
v - indica a componente tangencial de velocidade induzida em um painel genérico n por um painel m 79
φ - define a posição angular da distância entre dois painéis 25

Superescritos

$*$ - designa variáveis dimensionais 13
$\circ$ - relativo à superfície do corpo 13
∞ - grandezas consideradas longe do corpo 14

Operadores

D - diferença total 18
d - diferença total 27
∂ - diferença parcial 15
∇ - operador "Nabla" 21
∇^2 - operador Laplaciano 22
Δ - diferença finita 19

LISTA DE FIGURAS

pág.

Figura 3.1 - Definição da geometria e da região fluida com fixação do sistemas de coordenadas ao corpo 13
Figura 3.2 - A idéia da formação dos vórtices 16
Figura 3.3 - Resolução do movimento convectivo com auxílio de elementos da Teoria Potencial 22
Figura 3.4 - Aproximação de um corpo por meio de elementos de superfície 24
Figura 3.5 - Velocidade induzida na superfície s_m por uma distribuição de vorticidade $\gamma\left(s_n\right)ds_n$, localizada sobre s_n 25
Figura 3.6 - Corpo de forma arbitrária inserido em um escoamento potencial no instante inicial $t = 0(\Delta t)$ 34
Figura 3.7 - Corpo de forma arbitrária discretizado em painéis e inserido em um escoamento potencial no instante inicial $t = 0(\Delta t)$ 35
Figura 3.8 - Transformação de um superfície de vorticidade em um vórtice discreto que sofre o processo de difusão primária 36

Figura 4.1 - Velocidade induzida pelo escoamento incidente uniforme e por um vórtice, de intensidade positiva Γ_j, sobre um vórtice localizado no ponto $P_k = \left(x_k, y_k\right)$ 40
Figura 4.2 - Velocidade induzida pelo vórtice potencial 42
Figura 4.3 - Velocidade induzida pelo vórtice de Lamb 45
Figura 4.4 - Critério para a escolha do valor do raio do núcleo do vórtice de Lamb e da posição dos vórtices nascentes 47
Figura 4.5 - Algoritmo de implementação do Método de Vórtices Discretos 49
Figura 4.6 - Geração de vorticidade no instante inicial $t = 0(\Delta t)$ 51
Figura 4.7 - No instante $t = 1(\Delta t)$ os primeiros vórtices discretos gerados deslocam-se por Euler e por avanço randômico e são eliminados ou continuam na nuvem 54
Figura 4.8 - Geração, convecção e difusão de vorticidade no instante $t = 2(\Delta t)$ 55

Figura 4.9 - Geração, convecção e difusão de vorticidade no instante $t = 2(\Delta t)$ 56
Figura 4.10 - Estrutura do programa *"PAICOMVO.FOR"* 59

Figura 5.1 - Cilindro circular: posição da esteira do **caso 13** para $t = 100(0{,}1025)$ 64
Figura 5.2 - Cilindro circular: posição da esteira do **caso 14** para $t = 200(0{,}1025)$ 64
Figura 5.3 - Cilindro circular: posição da esteira do **caso 15** para $t = 300(0{,}1025)$ 64
Figura 5.4 - Cilindro circular: evolução de C_D e C_L para o **caso 15** até $t = 300(0{,}1025)$ 65
Figura 5.5 - **Caso 15**: a circulação global do escoamento ao redor do cilindro circular está sendo sempre conservada, até $t = 300(0{,}1025)$ 66
Figura 5.6 - Cilindro circular: posição da esteira do **caso 18** para $t = 300(0{,}1025)$ 67
Figura 5.7 - Cilindro circular: evolução de C_D e C_L para o **caso 18** até $t = 300(0{,}1025)$ 67
Figura 5.8 - **Caso 18**: a circulação global do escoamento ao redor do cilindro circular está sendo sempre conservada até $t = 300(0{,}1025)$ 68
Figura 5.9 - Perfil NACA 0012: posição da esteira do **caso 01** para $t = 100(0{,}0500)$ 70
Figura 5.10 - Perfil NACA 0012: evolução de C_D e C_L para o **caso 01** até $t = 100(0{,}0500)$ 70
Figura 5.11 - Perfil NACA 0012: posição da esteira do **caso 02** para $t = 100(0{,}0500)$ 71
Figura 5.12 - Perfil NACA 0012: evolução de C_D e C_L para o **caso 02** até $t = 100(0{,}0050)$ 71

Figura A2.1 - Velocidade induzida na superfície s_m por uma distribuição de vorticidade $\gamma(s_n)ds_n$, que está concentrada no ponto de controle da superfície s_n 78
Figura A2.2 - Representação da superfície plana s_n de um dos M painéis de comprimento Δs_n 79

Figura A3.1 - Velocidade induzida no ponto $P_k(x_k, y_k)$ por uma distribuição de densidade de vórtice constante e positiva, $\gamma(x)$, ao ao longo de uma superfície de comprimento $(x_2 - x_1)$ 83

Figura A3.2 - Velocidade induzida no ponto de controle da superfície s_m por uma distribuição de vorticidade $\gamma(s_n)ds_n$, de forma constante, ao longo da superfície s_n 84

Figura A5.1 - Influência de uma distribuição de vorticidade constante $\gamma(s_n)\,ds_n$, ao longo do painel genérico n, sobre um vórtice discreto k localizado no ponto $P_k = (x_k, y_k)$ 91

Figura A6.1 - Divisão de um painel em subpainéis, caso a distância entre um vórtice livre e o painel seja menor que o dobro do comprimento do painel 94

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

LISTA DE TABELAS

pág.

Tabela 5.1 - Simulações realizadas com um cilindro circular variando-se apenas o número de Reynolds 61

Tabela 5.2 - Valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação para um cilindro circular considerando-se os casos apresentados na **Tabela 5.1** 61

Tabela 5.3 - Outras simulações realizadas com um cilindro circular variando-se outros parâmetros numéricos: Δt, Re e $\ell = \sigma_0$ 62

Tabela 5.4 - Valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação para um cilindro circular considerando-se os casos apresentados na **Tabela 5.3** 62

Tabela 5.5 - Comparação de valores numéricos e experimentais de $\overline{C_D} \times \mathrm{Re}$ para um cilindro circular com os resultados da simulação numérica atual 63

Tabela 5.6 - Simulações realizadas com um perfil NACA 0012 com um ângulo de incidência $\alpha = 5°$ variando-se o esquema de avanço e o raio do núcleo do vórtice de Lamb 69

Tabela 5.7 - Comparação de valores numéricos e experimentais de $\overline{C_D} \times \mathrm{Re}$ e de $\overline{C_L} \times \mathrm{Re}$, para um perfil NACA 0012 com um ângulo de incidência $\alpha = 5°$, com os resultados da simulação numérica atual 69

1 - INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de técnicas alternativas para o estudo do escoamento em torno de corpos rombudos tem apresentado um grande crescimento nas últimas décadas. Estas técnicas visam superar dificuldades encontradas em situações específicas quando se utilizam métodos eulerianos (Volumes Finitos, Elementos Finitos, etc.). Alternativas que têm apresentado bons resultados utilizam a descrição lagrangiana na simulação numérica dos processos de convecção e de difusão de certas grandezas de interesse, sendo as principais, vorticidade e calor.

O Método de Vórtices é, talvez, o principal produto desta classe de procedimentos. Ele utiliza uma nuvem de vórtices discretos para simular a evolução da vorticidade, que se encontra concentrada em sub-regiões da região fluida. Cada vórtice que compõe a nuvem é acompanhado desde a sua origem; a sua evolução, no tempo, é obtida submetendo-o aos processos de convecção e de difusão de vorticidade.

Entre as características marcantes do Método de Vórtices é interessante mencionar que, durante a simulação numérica, a atenção é voltada apenas para as regiões onde a vorticidade se encontra concentrada. Um exemplo típico, onde se identifica sub-regiões de vorticidade concentrada, ocorre quando um corpo se movimenta num meio fluido; a esteira viscosa que se forma a jusante do corpo concentra praticamente toda a vorticidade presente na região fluida de interesse.

Partículas com outras características, que não a dos vórtices, podem ser, também, utilizadas; partículas de calor para simular os processos de transferência de calor, representam um exemplo bastante ilustrativo.

Muitas dificuldades são encontradas na implementação destas técnicas. Algumas delas exigem, ainda, desenvolvimentos adicionais. Primeiro, há dificuldades relacionadas com a geração dos vórtices junto à superfícies. Segundo, há dificuldades com a aniquilação (ou reflexão) dos vórtices junto as fronteiras da região de interesse. Em terceiro, aparecem dificuldades na simulação da convecção e na simulação da difusão de vorticidade. Uma quarta dificuldade, que pode ser citada, relaciona-se com o processo de conservação de vorticidade.

Além destas dificuldades básicas, outras relacionadas com as técnicas numéricas necessitam de maior atenção; em particular, a simulação da convecção de vorticidade, que consome a maior parte do tempo computacional.

Atualmente, a atenção maior tem sido voltada para três aspectos. O primeiro aspecto é o desenvolvimento e implementação de algoritmos para a redução do tempo computacional no processo de convecção. O segundo aspecto visa desenvolver técnicas adequadas para o tratamento dos problemas associados a geração e aniquilamento (reflexão) de vórtices junto as fronteiras (quando a geometria é complicada, este aspecto é fundamental). O terceiro aspecto está relacionado com a simulação de situações onde as fronteiras possuem movimento relativo, caso típico das turbomáquinas.

O primeiro aspecto (redução do tempo computacional da etapa convectiva) está sendo melhorado com a utilização de Expansões em Multipolos, que resulta (em termos extremamente simplificados) em simular o efeito dos vórtices presentes numa sub-região através de um único vórtice equivalente. O segundo aspecto (geração de vórtices) está relacionado com a lei de conservação de vorticidade e tem dependência direta com a geometria da superfície, não permitindo uma abordagem geral.

Os desenvolvimentos obtidos com a análise destes dois aspectos deverão incorporar-se com as atividades desenvolvidas na EFEI, no grupo de turbomáquinas. Os desafios que serão encontrados na EFEI tornam-se mais complexos, uma vez que, na análise do escoamento, dois outros aspectos são relevantes: a interferência entre as pás e a interferência do rotor (que possui movimento relativo) com a voluta. O problema de interferência entre as pás está sendo atacado com a utilização de funções de interferência; num segundo estágio, a influência da voluta deverá ser incorporada.

Este trabalho é importante na preparação das atividades futuras, a serem desenvolvidas na EFEI, e que deverão envolver os três aspectos comentados acima.

Neste estudo, simula-se numericamente o escoamento bidimensional, incompressível, não permanente, com alto número de Reynolds, incidindo sobre um corpo de forma arbitrária. O algoritmo utilizado gera vorticidade em toda a superfície do corpo, após cada incremento de tempo, distribuindo-a em forma de vórtices discretos de Lamb posicionados próximos à superfície do corpo, de modo que, a condição de aderência (escorregamento nulo e impenetrabilidade) e a condição de conservação da circulação global do escoamento sejam satisfeitas.

O método apresentado utiliza elementos da Teoria Potencial (Método dos Painéis) para simular o escoamento do fluido ao redor de um corpo e, assim, fornecer os subsídios necessários para se efetuar a geração e a convecção de vorticidade. O deslocamento dos vórtices gerados ocorre em duas etapas: convecção e difusão. Estas etapas acontecem dentro de um mesmo intervalo de tempo e satisfazem a equação de transporte de vorticidade. A etapa convectiva é calculada de acordo com a lei de Biot-Savart e a etapa difusiva é calculada pelo Método de Avanço Randômico. O avanço destes vórtices no tempo é baseado em um esquema de avanço de segunda ordem (esquema de Adams-Bashforth). As cargas aerodinâmicas são calculadas através da fórmula de Blasius estendida para escoamentos não permanentes. Este expediente dispensa o conhecimento do campo de pressões, bastando-se conhecer apenas as componentes da velocidade induzida na posição de cada vórtice discreto que forma a esteira.

O objetivo principal deste trabalho consiste na realização de uma primeira avaliação do método numérico apresentado, em que satisfaz-se a condição de aderência (condição de escorregamento nulo e condição de impenetrabilidade). Deste modo, são previstos:

- desenvolver um algoritmo lagrangiano do Método de Vórtices para simular o escoamento bidimensional, incompressível, não permanente, com alto número de Reynolds, para um fluido viscoso, fazendo-se uso do Método dos Painéis;

- aproveitar a possibilidade de que a forma do corpo a ser estudado pode ser arbitrária com a utilização do Método dos Painéis e, além de analisar o escoamento em torno de um cilindro circular fixo, estudar o escoamento em torno de um perfil NACA 0012;

- definir os parâmetros numéricos que são variáveis na simulação numérica;

- calcular a evolução no tempo do coeficiente de arrasto e do coeficiente de sustentação para o cilindro circular fixo e para o aerofólio (NACA 0012);

- comparar os resultados numéricos obtidos nesta simulação com valores experimentais e com outros resultados numéricos disponíveis na literatura;

- preparar o algoritmo desenvolvido neste trabalho, a fim de que ele seja uma referência para o desenvolvimento de trabalhos futuros mais refinados;

- concluir pela viabilidade ou pela inviabilidade do algoritmo, destacando os pontos falhos que deverão ser melhorados nos próximos estudos.

O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica bastante detalhada referente a evolução do Método de Vórtices.

O capítulo 3 traz as equações básicas que regem o escoamento bidimensional, incompressível e em regime não permanente em torno de corpos rombudos. A solução para o problema proposto é resolvida com a utilização do Método de Vórtices Discretos. Faz-se uma análise das características marcantes e apresenta-se uma descrição, em etapas, deste método.

No capítulo 4, encontra-se o algoritmo do Método de Vórtices Discretos, com comentários sobre os parâmetros numéricos que são variáveis na simulação numérica. Através de um exemplo, bastante didático, mostra-se como os processos de geração, de convecção e de difusão de vorticidade ocorrem após cada novo incremento de tempo. O capítulo se encerra com a apresentação da estrutura do programa computacional desenvolvido em linguagem FORTRAN, podendo-se encontrar descrições sobre as funções das rotinas de cálculo utilizadas, que auxiliam o programa principal.

Resultados de simulações numéricas feitas com o cilindro circular e com o perfil NACA 0012 são discutidos no capítulo 5. Os resultados numéricos encontrados são comparados com outros resultados numéricos e com resultados experimentais disponíveis na literatura.

As conclusões sobre os resultados obtidos nas simulações numéricas e as sugestões para trabalhos futuros estão no capítulo 6.

O apêndice A1 é importante, pois mostra matematicamente como se obtém a equação de transporte de vorticidade, para escoamentos bidimensionais, a partir da equação da continuidade e das equações de Navier-Stokes.

O apêndice A2 apresenta o cálculo da velocidade induzida no ponto de controle de um painel genérico pelos outros painéis, considerando a vorticidade concentrada no ponto de controle de cada painel indutor.

No apêndice A3 encontra-se, também, cálculo de velocidade induzida no ponto de controle de um painel genérico pelos outros painéis, considerando-se que, a vorticidade possui uma densidade distribuída de forma constante ao longo do comprimento de cada painel indutor.

O cálculo das componentes da velocidade induzida sobre um vórtice arbitrário por uma nuvem de vórtices livres está mostrado no apêndice A4. Qualquer vórtice livre tem uma velocidade total induzida devido a presença do escoamento incidente, devido a presença do corpo (que tem sua superfície discretizada e aproximada por meio de painéis planos) e devido a presença dos outros vórtices livres. A parcela da indução de velocidade devido a presença da nuvem de vórtices livres possui um tempo de cálculo demorado, a medida que o número de vórtices livres aumenta. Um artifício, muito eficaz, para a redução do tempo de cálculo destas componentes de velocidades é apresentado no final deste apêndice.

No apêndice A5 pode-se ver como é feito o cálculo da velocidade que um corpo induz sobre uma nuvem de vórtices livres.

O apêndice A6 deste trabalho traz o cálculo das componentes da velocidade induzida por uma nuvem de vórtices livres sobre um corpo. Nesta situação, o uso de subpainéis é muito útil para a simulação numérica atual.

No final deste trabalho encontram-se relacionadas referências bibliográficas de vários trabalhos envolvendo o Método de Vórtices, principalmente artigos técnicos. Estes trabalhos fornecerão uma boa base teórica para quem pretender estudar os conceitos do Método de Vórtices.

2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O crescente avanço na área computacional tem permitido o desenvolvimento de métodos numéricos para a simulação dos fenômenos associados ao movimento de um fluido. Vários métodos numéricos aplicam-se na análise do escoamento de um fluido viscoso. Há métodos utilizando descrição euleriana, métodos utilizando descrição lagrangiana e métodos utilizando descrição euleriana e lagrangiana, juntas. Estes métodos com vantagens e com desvantagens são sempre adequados para uma determinada faixa de aplicação.

Os métodos numéricos clássicos, entre os quais, o Método das Diferenças Finitas e o Método de Elementos Finitos, utilizam em geral uma descrição euleriana . A descrição euleriana considera uma malha fixa no espaço e possui a desvantagem de introduzir instabilidades numéricas nos escoamentos com altos números de Reynolds e que dependem do tempo. Além disto, fazem-se presentes as dificuldades inerentes ao desenvolvimento e refinamento da malha.

Nas últimas décadas, o Método de Vórtices tem se apresentado como uma alternativa para os métodos eulerianos na simulação de escoamentos bidimensionais, incompressíveis e não permanentes em torno de corpos rombudos; as versões utilizadas podem ser classificadas como puramente lagrangianas, como é o caso deste trabalho, e versões híbridas (euleriana / lagrangiana) (MENEGHINI e BEARMAN, 1995). Uma referência básica sobre o método é representada pelo livro de LEWIS (1991) e pelo trabalho de SARPKAYA (1989). Em português, HIRATA (1991) apresenta uma boa introdução ao assunto.

Os fundamentos do Método de Vórtices podem ser creditados a ROSENHEAD (1931). Muitos avanços e refinamentos do método, desde então, foram realizados. A seguir, faz-se um comentário rápido da evolução do Método de Vórtices nas últimas décadas.

Entre as primeiras investigações feitas com a utilização de nuvens de vórtices pode-se mencionar as simulações do comportamento e desenvolvimento de camadas cisalhantes (ASHURST, 1977).

A simulação do escoamento ao redor de corpos com arestas vivas, pode ser considerada como o segundo degrau na escala de dificuldades encontrada na utilização do Método de Vórtices. Como, nestas situações, os pontos de separação encontram-se perfeitamente determinados, a simulação numérica é bastante simplificada. Primeiro, porque os pontos de desprendimento dos vórtices nascentes são fixados nas adjacências dos pontos de separação; este fato contrasta com o que se depara quando não se conhece, a priori, o ponto de separação (veja abaixo). Em segundo lugar, como as arestas vivas e, conseqüentemente, os pontos de separação e desprendimento dos vórtices nascentes, são em pequeno número, os vórtices discretos da nuvem são pouco numerosos reduzindo, assim, consideravelmente as dificuldades computacionais. As exigências impostas sobre o desempenho dos computadores são reduzidas proporcionalmente. Uma terceira razão, que pode ser mencionada, é a utilização de pequenos artifícios no processo de desprendimento dos vórtices nascentes, que evita muitos dos problemas associados à migração destes vórtices para o interior do corpo.

Com este tipo de enfoque, LEWIS (1981) analisa o escoamento ao redor de corpos rombudos. Neste trabalho, simula-se o processo de separação, como acima descrito, mas os efeitos da difusão de vorticidade na esteira são ignorados.

KAMEMOTO et al. (1990), ao analisarem as cargas hidrodinâmicas que atuam sobre uma comporta, utilizam o mesmo enfoque considerando os efeitos difusivos na esteira. A difusão de vorticidade foi simulada com um processo de aumento do raio do núcleo dos vórtices discretos, no tempo. No Brasil, este enfoque foi exaustivamente expiorado pelo grupo do Laboratório de Mecânica dos Fluidos PEM-COPPE/UFRJ; os trabalhos mais significativos são representados pelas teses elaboradas por ARAUJO (1994), MOREIRA DA SILVA (1995), FONSECA (1996), ARAUJO (1997) e as publicações decorrentes.

Com o intuito de formalizar, em bases mais sólidas, os procedimentos utilizados, alguns trabalhos foram elaborados. JIAN e HIRATA (1991) mostram, no contexto puramente potencial, as bases para o desenvolvimento da vorticidade na presença de um corpo. KAMEMOTO et al. (1995) partem da lei de Biot-Savart para justificar os procedimentos adotados. GREENGARD e ROKHLIN (1987) mostram, no entanto, que o procedimento que simula a difusão de vorticidade com o espalhamento do núcleo dos vórtices não converge para as equações de Navier-Stokes, o que é contestado por COTTET et al. (1988) e por KIDA e NAKAJIMA (1994).

Corpos com superfícies suaves (círculos, aerofólios, etc.) apresentam uma dificuldade adicional quando se procura simular o escoamento numericamente. A dificuldade está associada ao fato de não se conhecer a posição do ponto de separação, que muda durante a simulação. Para superar esta dificuldade é necessário simular os processos de geração e de transporte de vorticidade ao longo de toda a superfície do corpo; com este procedimento pode-se esperar que:

a) o ponto de separação seja determinado automaticamente em cada instante da simulação. Conseqüentemente, a posição onde os vórtices livres são lançados para o interior do fluido pode ser, também, conhecida.

b) algum mecanismo seja necessário para tratar os vórtices que atravessam a superfície do corpo (os processos de convecção e de difusão são simulados discretamente).

c) o número de vórtices que compõem a nuvem aumente consideravelmente, o mesmo acontecendo com os requisitos de capacidade e desempenho dos computadores.

Vários autores dedicaram seus esforços no desenvolvimento de técnicas para simular a geração e o transporte de vorticidade junto a superfícies sólidas, sem considerar a presença de um corpo. Entre os trabalhos mais relevantes podem ser mencionados os trabalhos de CHORIN (1978, 1980), CLEMENTS e MAULL (1975), PORTHOUSE e LEWIS (1981), KAMEMOTO e KAWAMATA (1986). Nestes trabalhos, de uma maneira geral, tem-se optado pela utilização do Método de Avanço Randômico, para simular a difusão de vorticidade. GHONIEM e SHERMAN (1985) apresentam as bases deste método e o aplicam para fenômenos unidimensionais; veja também HIRATA e HIRATA (1998). PORTHOUSE e LEWIS (1981) apresentam um algoritmo para a simulação da difusão de vorticidade em duas dimensões.

BEALE e MAJDA (1982) apresentam as bases teóricas que fundamentam o Método de Vórtices, utilizando o Método de Avanço Randômico para simular a difusão de vorticidade.

A simulação do escoamento ao redor de um corpo quando se inclui a geração e o transporte de vorticidade, sobre toda a sua superfície, apresenta algumas alternativas. Uma alternativa natural consiste na utilização do Método dos Painéis (KATZ e PLOTKIN, 1991) para o cálculo da influência do corpo no campo de velocidades no interior da esteira. Nesta linha de procedimento LEWIS (1991) utiliza painéis, sobre os quais, distribui-se vorticidade (Método de Martensen). Para a simulação numérica, o efeito desta distribuição é representado colocando-se um único vórtice equivalente no ponto médio dos painéis. Evidentemente, este procedimento simplificado não pode apresentar uma boa precisão em muitas situações; para contornar parcialmente estas dificuldades LEWIS (1991) desenvolveu um esquema que utiliza subpainéis. KAMEMOTO et al. (1995) preferem distribuir fontes sobre os painéis (Método de Hess and Smith).

A utilização do Método dos Painéis, no entanto, apresenta duas dificuldades. A primeira refere-se ao número de painéis utilizados; aumentando-se este número, aumenta-se a precisão dos resultados, e, também, os requisitos impostos sobre a capacidade e desempenho das máquinas (o esforço computacional é proporcional ao quadrado do número de vórtices presentes na nuvem). A segunda, normalmente ignorada, está associada a geração de vorticidade; uma vez que os vórtices nascentes são localizados nas vizinhanças do ponto médio dos painéis, a condição de contorno do corpo é momentaneamente violada.

Uma alternativa, que permite contornar esta última dificuldade, consiste na utilização do Teorema do Círculo (MILNE-THOMPSON, 1955). A desvantagem deste procedimento reside no fato de que o mencionado teorema é válido somente se o corpo possuir uma superfície circular ou se a técnica da transformação conforme for utilizada. MUSTTO et al. (1997, 1998) e MALTA (1998), exploraram com muita propriedade a alternativa mencionada, ao analisarem o escoamento ao redor de um cilindro circular com e sem rotação. A dificuldade maior do procedimento, no entanto, reside no grande número de vórtices necessários (vórtices da esteira e suas imagens no interior do círculo). Este assunto é retomado abaixo.

O momento é oportuno para se mencionar as grandes potencialidades que representa a generalização do Teorema do Círculo, apresentado por RAND (1989) e desenvolvido por MANZANARES (1998). Com esta generalização o tratamento de problemas com superfícies porosas passa a ser viável, o mesmo acontecendo com corpos imersos em um escoamento com vorticidade.

Outro aspecto mencionado refere-se aos vórtices que atravessam a superfície do corpo; este fato é agravado quando vórtices nascentes são posicionados ao longo da superfície do corpo. Há fortes indícios de que a simulação da difusão seja a maior responsável por este fato indesejável. Vários esquemas foram propostos para contornar esta dificuldade. Alguns autores preferem refletir para o interior do fluido os vórtices que migram para o interior do corpo. Outros (e parece ser esta a tendência dominante) preferem simplesmente aniquilá-los e utilizar a Lei de Conservação de Vorticidade para compensar assim a vorticidade perdida; a vantagem deste procedimento reside na manipulação de um menor número de vórtices na esteira. Teoricamente, numa boa simulação, o número de vórtices que atravessa a fronteira deveria ser nulo. Nos procedimentos que utilizam o Teorema do Círculo, um mecanismo intrínseco, representado pelos vórtices imagens, parece repelir aqueles vórtices que têm a tendência de atravessar a fronteira.

KAMEMOTO et al. (1995) apresentam um algoritmo interessante: os vórtices nascentes são representados por seguimentos de vorticidade que se movimentam dentro da camada limite e sofrem uma metamorfose, assim que dela se afastam, transformando-se em vórtices discretos.

MOREIRA DA SILVA (1995) utiliza uma camada protetora; nesta camada, que se estende sobre toda a superfície do corpo, o cálculo da velocidade induzida nos vórtices livres é feito utilizando um processo de interpolação, o que inibe a presença de grandes deslocamentos.

Discute-se, a seguir, o último aspecto mencionado: o número de vórtices na esteira e os requisitos impostos sobre os computadores. Este aspecto é analisado sobre dois prismas: a Expansão em Multipolos e Métodos Híbridos.

Todos os trabalhos até aqui mencionados utilizam a lei de Biot-Savart para o cálculo da interferência mútua entre vórtices da nuvem. Este cálculo representa a parcela dominante dos esforços computacionais requeridos.

Um algoritmo bastante simples e óbvio é utilizado para reduzir este esforço; os detalhes deste algoritmo mencionado (desenvolvido neste trabalho em colaboração com Mustto e Malta) podem ser encontrados no apêndice A4. Outro expediente utilizado para reduzir o esforço computacional consiste em utilizar um esquema de segunda ordem para calcular o deslocamento dos vórtices no processo de convecção de vorticidade. MALTA (1998) utiliza o esquema de segunda ordem de Runge-Kutta e obtém uma precisão melhor dos resultados e uma redução considerável no tempo computacional.

Para se obter uma redução considerável do esforço computacional, torna-se necessário a utilização de esquemas alternativos. Esforços computacionais, proporcionais ao número de vórtices presentes na esteira, tem sido possíveis com a utilização de Expansão em Multipolos (PUCKETT, 1993).

Estes esquemas são baseados na representação do campo de velocidades, induzido por um conjunto de vórtices, como uma série de potências em d^{-1} ($d = distância$), a qual é válida longe do conjunto de vórtices (SPARLAT e LEONARD, 1981). Este esquema foi refinado, ainda mais, por GREENGARD e ROKHLIN (1987). A Expansão em Multipolos foi utilizada parcialmente, com sucesso por GUEDES et al. (1998).

Os Métodos Híbridos utilizam conjuntamente as descrições lagrangiana e euleriana, portanto precisam de uma malha e estão sujeitos a todos os problemas inerentes. O Método de Vórtices em Células (CHRISTIANSEN, 1973) consiste basicamente em calcular, a partir da posição e da intensidade dos vórtices, o valor da vorticidade nos pontos de cruzamento da malha. Com estes valores, utilizando algum método euleriano, a velocidade de convecção em cada vórtice é calculada. Aproveita-se a estrutura das malhas para se calcular a difusão de vorticidade.

SMITH e STANSBY (1988) apresentam um algoritmo do Método de Vórtices em Células para a etapa convectiva e o Método de Avanço Randômico para a etapa difusiva (para $2{,}5x10^4 < \mathrm{Re} < 1x10^5$). Um esquema híbrido (lagrangiano - euleriano) soluciona a equação de vorticidade. O tempo das simulações é pequeno, mas os resultados tem uma boa concordância para números de vórtices gerados em grandes quantidades próximos a superfície do cilindro.

ARKELL e GRAHAM (1992) usam um Método de Vórtices em Células para acompanhar o movimento de vórtices discretos. A etapa convectiva foi abordada com uma descrição lagrangiana e a etapa de difusão viscosa era simulada com uma descrição euleriana (fazendo-se uso de uma malha).

Nos trabalhos de GRAHAM (1980) e de MENEGHINI e BEARMAN (1995) podem ser encontradas maneiras gerais de se escrever a expressão para o cálculo das cargas aerodinâmicas.

Como comentário adicional, observa-se que para simular o processo de difusão de vorticidade três esquemas podem ser mencionados. O Método de Crescimento do Núcleo, o Método de Avanço Randômico e o Método de Vórtices em Células (euleriano). Para complementar este comentário é oportuno mencionar o Método da Velocidade de Difusão desenvolvido por OGAMI e AKAMATSU (1991). Eles simularam o escoamento viscoso e o termo difusivo da equação de transporte de vorticidade foi apresentado na forma de uma velocidade de difusão, de modo que, se tivesse uma analogia com a velocidade convectiva. Os resultados foram positivos e aplicáveis em uma grande faixa de número de Reynolds.

SILVA (1992) analisou o escoamento ao redor de um cilindro circular, com o emprego do Método de Vórtices, fazendo-se uso do Teorema do Círculo, que viabiliza satisfazer, de uma maneira simples e direta, a condição de impenetrabilidade. Simultaneamente, em alguns pontos da superfície do corpo era imposta a condição de escorregamento nulo.

MOREIRA DA SILVA et al. (1996) utilizaram o Método dos Painéis compostos por fontes para a solução do problema potencial. Após cada incremento de tempo, eram gerados dois novos vórtices discretos em posições pré-estabelecidas. Os resultados foram animadores, embora a condição de velocidade tangencial nula não pudesse ser garantida.

KAMEMOTO e KAWAMATA (1986) utilizaram painéis com distribuição de vórtices, onde era satisfeita apenas a condição de impenetrabilidade na superfície do corpo. Fazia-se uso da teoria integral de camada limite para calcular o ponto de separação e a intensidade dos vórtices gerados nestes pontos, além de um esquema complexo para efetuar a metamorfose de elementos lineares de vorticidade em vórtices discretos.

MUSTTO et al. (1997) propuseram um novo algoritmo para simular os efeitos convectivos e difusivos, usando o algoritmo do Método de Avanço Randômico proposto por LEWIS (1991) . Resultados para o escoamento ao redor de um cilindro circular são apresentados com $\mathrm{Re} = 1x10^5$.

MUSTTO et al. (1998) realizaram um estudo mais detalhado da influência dos parâmetros numéricos variáveis em simulações numéricas do algoritmo proposto anteriormente.

GUEDES et al. (1998) fizeram um estudo do escoamento incidente sobre um cilindro circular, com a finalidade de reduzir o tempo computacional do processo convectivo, utilizando-se Expansões em Multipolos, que, em termos extremamente simplificados, visa simular o efeito dos vórtices presentes numa sub-região através de um único vórtice equivalente

O trabalho de MUSTTO (1998) utilizou o Método de Vórtices Discretos para simular o escoamento incompressível e não permanente resultante da separação do escoamento na superfície de um cilindro circular, com e sem rotação, fazendo-se uso do Teorema do Círculo (MILNE-THOMPSON, 1955) e do algoritmo do Método de Avanço Randômico proposto por LEWIS (1991). A dinâmica da esteira do corpo foi simulada com base no algoritmo de decomposição do operador convecção-difusão da equação de transporte de vorticidade. A etapa convectiva usava um esquema lagrangiano de primeira ordem e a etapa difusiva era simulada através do algoritmo do Método de Avanço Randômico (LEWIS, 1991).

MALTA (1998) explorou o algoritmo desenvolvido por MUSTTO (1998) para simulação de escoamentos bidimensionais, incompressíveis e não permanentes em torno de um cilindro circular com $1x10^3 < \mathrm{Re} < 1x10^6$. Os resultados numéricos foram comparados com outros resultados numéricos e com resultados experimentais disponíveis na literatura. Neste trabalho pode-se encontrar uma descrição física bastante detalhada das características do escoamento em torno de um cilindro circular.

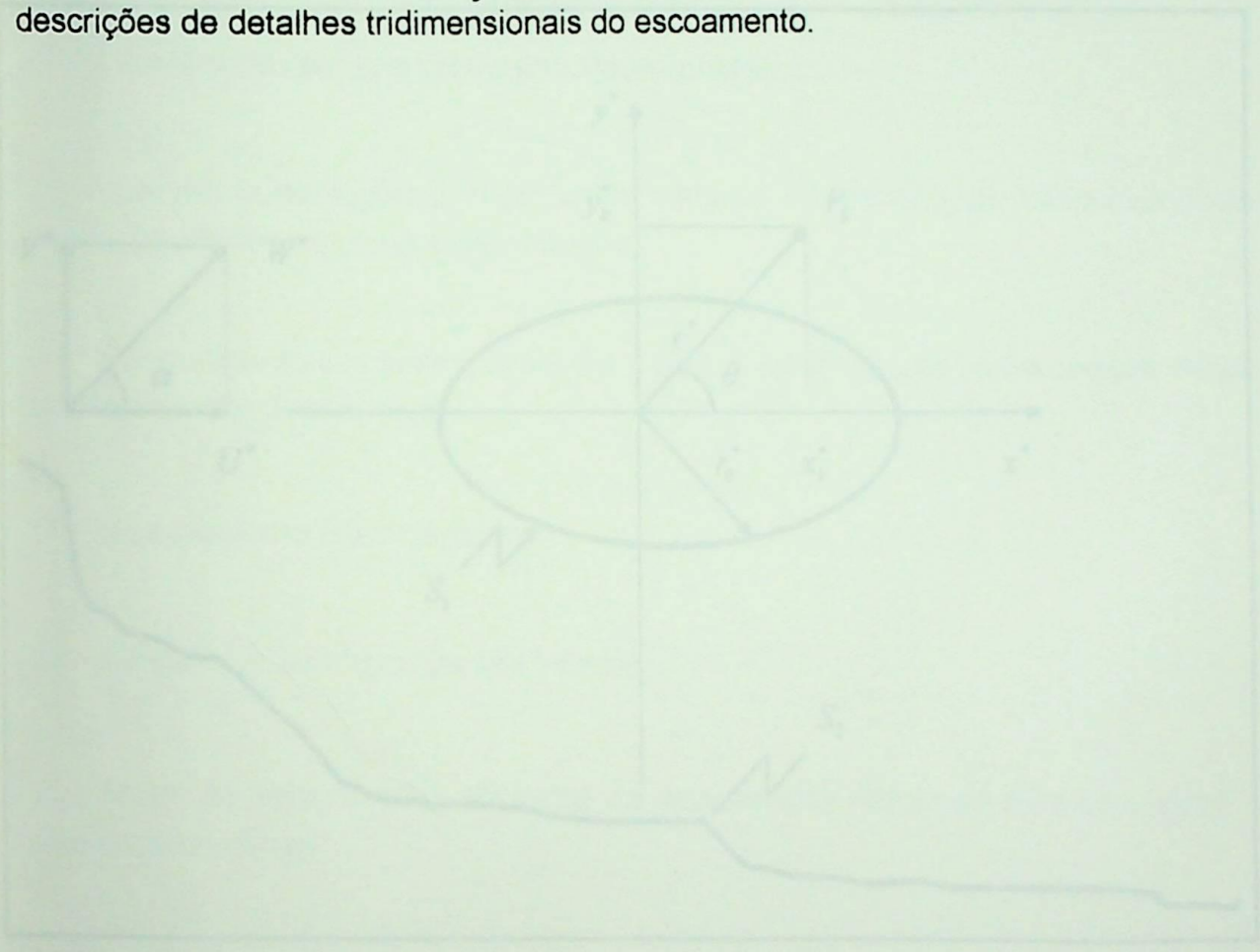
Complementando esta revisão bibliográfica, cabe analisar alguns trabalhos experimentais relacionados com o Método de Vórtices.

O trabalho de ROSHKO (1961) é um dos estudos experimentais mais importantes na análise do escoamento em torno de um cilindro circular fixo. Os experimentos foram feitos considerando-se números de Reynolds bastante elevados ($1x10^6 < Re < 1x10^7$). Aparece uma faixa de transição do número de Reynolds, em que o coeficiente de arrasto aumenta desde um baixo valor supercrítico até um valor que passa a ser constante e igual a $0,7$, para $Re = 3,5x10^6$. Quando $Re > 3,5x10^6$, surge um mecanismo muito bem definido de desprendimento de vórtices.

Outro estudo experimental de grande contribuição foi apresentado por ACHENBACH (1968), também considerando um cilindro circular fixo. Neste estudo a distribuição dos coeficientes de pressão e atrito ao longo da superfície do cilindro foram medidas; o coeficiente de pressão e a variação do ângulo de separação com o número de Reynolds foram obtidos. As informações fornecidas foram imprescindíveis para a classificação do escoamento em subcrítico, crítico e supercrítico. No escoamento subcrítico há separação laminar da camada limite, no escoamento crítico ocorre formação de uma bolha de separação laminar com recolamento turbulento e no escoamento supercrítico surge a transição imediata da camada limite laminar para uma camada limite turbulenta (a separação torna-se turbulenta).

Nas análises experimentais feitas por BEARMAN (1969), para números de Reynolds dentro do regime crítico, identificou-se um desprendimento de vórtices regular para $Re = 5{,}5x10^5$.

Um recente trabalho, que faz uma revisão dos artigos experimentais publicados sobre cilindro circular, foi apresentado por WILLIAMSON (1996). Neste trabalho podem ser encontradas descrições detalhadas dos fenômenos físicos envolvidos e descrições de detalhes tridimensionais do escoamento.



3 - FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA E O MÉTODO DE VÓRTICES

3.1 - Introdução

Este capítulo apresenta a formulação matemática necessária para a simulação numérica de um escoamento bidimensional, incompressível e em regime não permanente em torno de corpos com forma conhecida.

Assim que a formulação matemática geral do problema é proposta, apresenta-se a sua solução utilizando-se o Método de Vórtices Discretos, com comentários sobre as características marcantes deste método, quando comparado com os métodos numéricos clássicos.

3.2 - Geometria e Região Fluida

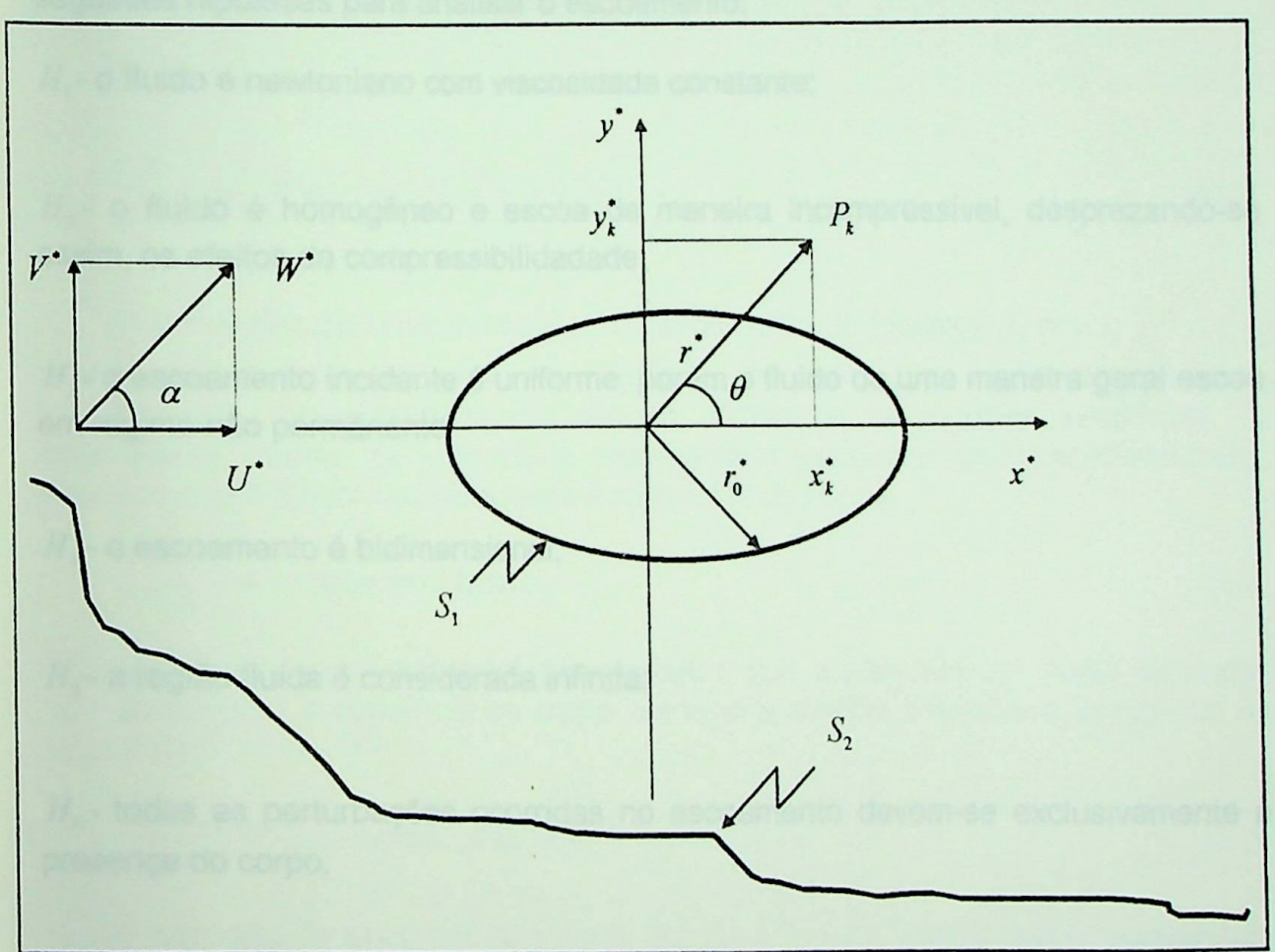


Figura 3.1 - Definição da geometria e da região fluida com fixação do sistema de coordenadas ao corpo.

As fronteiras da região fluida, S_1 e S_2, são definidas pelas seguintes funções escalares:

$$S_1 : f_1(r^*,\theta,t^*) = r^* - r_0^*(\theta,t^*) = 0 \tag{3.1}$$

$$S_2 : f_2(r^*,\theta,t^*) = r^* \to \infty \tag{3.2}$$

$$S = S_1 + S_2 \tag{3.3}$$

3.3 - Hipóteses da Formulação Matemática

As hipóteses, que sustentam a formulação matemática, relacionam as propriedades do fluido, as propriedades do escoamento e a geometria do corpo. Considerando o corpo de forma arbitrária, apresentado na **Figura 3.1**, faz-se as seguintes hipóteses para analisar o escoamento:

H_1 - o fluido é newtoniano com viscosidade constante;

H_2 - o fluido é homogêneo e escoa de maneira incompressível, desprezando-se assim, os efeitos da compressibilidadade;

H_3 - o escoamento incidente é uniforme, porém o fluido de uma maneira geral escoa em regime não permanente;

H_4 - o escoamento é bidimensional;

H_5 - a região fluida é considerada infinita;

H_6 - todas as perturbações ocorridas no escoamento devem-se exclusivamente à presença do corpo.

As hipóteses, que foram apresentadas, e as equações a seguir, que governam o comportamento do fenômeno estudado, permitem a formulação matemática de um escoamento bidimensional, incompressível e em regime não permanente em torno de um corpo com forma conhecida. A vorticidade presente no escoamento fica representada por uma nuvem de vórtices discretos e o escoamento é rotacional na camada limite sobre a superfície do corpo, nas camadas cisalhantes surgidas dos pontos de separação e na esteira formada a jusante do corpo.

3.4 - Equações e Condições de Contorno que Definem o Problema

As equações que governam o fenômeno a ser estudado são representadas pelas expressões matemáticas dos princípios de conservação. Utilizando-se as hipóteses apresentadas, estas equações podem ser simplificadas, resultando no Princípio da Conservação de Massa (Equação da Continuidade) e no Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento (Equação de Navier-Stokes), respectivamente:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla^* p^* + \upsilon \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \tag{3.5}$$

As condições de contorno na superfície do corpo da **Figura 3.1**, em S_1 $\left(r^* = r_0^*\right)$, podem ser fixadas através da condição de aderência, que relaciona as componentes da velocidade na direção normal e na direção tangencial. A componente normal da velocidade representa a condição de impenetrabilidade, impondo que o fluido não ultrapasse a superfície do corpo:

$$u_n^* + v_n^* = 0 \rightarrow \text{Impenetrabilidade} \tag{3.6}$$

A condição de escorregamento nulo assegura que a partícula de fluido ao entrar em contato com a superfície do corpo fica com a mesma velocidade tangencial da superfície:

$$u_\tau^* + v_\tau^* = 0 \rightarrow \text{Escorregamento Nulo} \tag{3.7}$$

A condição de contorno no infinito, em S_2 $\left(r^* \rightarrow \infty\right)$, impõe que o escoamento em estudo tenda para o valor do escoamento incidente:

$$| \mathbf{u}^* | \rightarrow | \mathbf{W}^* | \tag{3.8}$$

3.5 - Solução do Problema Proposto

A complexidade do problema proposto não permite uma solução analítica, exceto em situações muito simples. Devido a esta complexidade, os métodos numéricos são importantes para a simulação de situações de interesse prático. Os métodos numéricos tradicionais, entre os quais o Método das Diferenças Finitas e o Método de Elementos Finitos, em geral utilizam uma descrição euleriana . Na formulação proposta, trabalha-se com o Método de Vórtices, que utiliza uma descrição lagrangiana na simulação do escoamento.

3.5.1 - Uma Introdução Sobre o Método de Vórtices

Considere na **Figura 3.2** duas partículas **A** e **B**. Num primeiro raciocínio, admita que a partícula **B** está junto à parede e portanto, com velocidade igual a zero. A partícula **A**, adjacente à partícula **B**, está dentro da camada limite, de espessura δ^*, possui uma velocidade não nula, u^*, e sofre influência da viscosidade. Admita agora que, a mesma partícula **A** está fora da camada limite e possui uma velocidade constante, U^*. A partícula **B** localiza-se dentro da camada limite, perto da superfície do corpo, e, é influenciada pela presença da viscosidade. Considere ainda que, a velocidade da partícula **A** é maior que a velocidade da partícula **B**. A **Figura 3.2** ilustra claramente a idéia da formação dos vórtices, onde a partícula **A** tende a fazer com que a partícula **B** gire, nas condições dos dois raciocínios feitos acima.

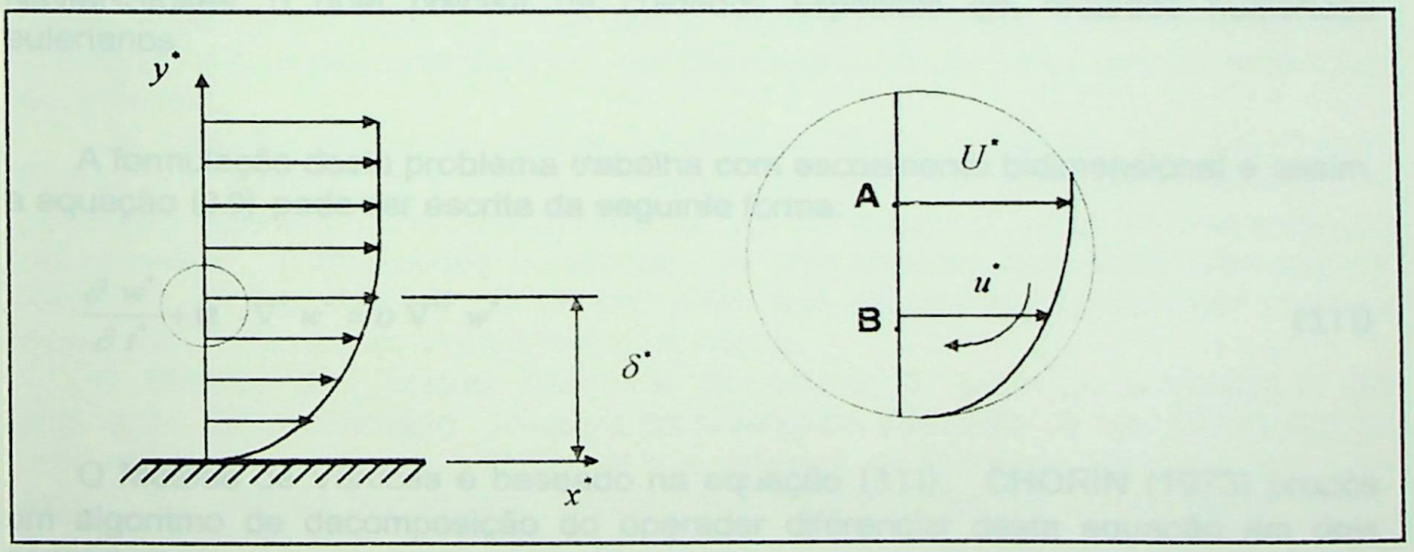


Figura 3.2 - A idéia da formação dos vórtices.

O Método de Vórtices concentra a atenção apenas onde existe vorticidade, utiliza uma convecção lagrangiana, para acompanhar a trajetória dos vórtices livres criados, e simula os efeitos viscosos através da difusão, que considera um esquema de avanço randômico, por exemplo.

3.5.2 - Equação de Transporte de Vorticidade

As equações (3.4) e (3.5) mais as condições de contorno apresentadas anteriormente governam a dinâmica do movimento do fluido. Esta dinâmica pode ser melhor calculada substituindo-se as equações de Navier-Stokes pela equação de transporte de vorticidade (veja no apêndice A1):

$$\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{w}^* = \upsilon \nabla^{*2} \mathbf{w}^* \tag{3.9}$$

O vetor vorticidade é definido por:

$$\mathbf{w}^* = \nabla^* \times \mathbf{u}^* = 0\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \mathbf{k} = w^* \mathbf{k} \tag{3.10}$$

observe que w^* é a única componente, não nula, atuando na direção normal ao plano do escoamento.

A equação (3.9) é obtida tomando-se o rotacional da equação (3.5), conforme apresentado no apêndice A1. Esta é uma equação cinemática e a sua grande vantagem deve-se ao fato de que ela elimina o termo de pressão das equações de Navier-Stokes, o qual precisa de cuidados especiais em métodos numéricos eulerianos.

A formulação deste problema trabalha com escoamento bidimensional e assim, a equação (3.9) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* w^* = \upsilon \nabla^{*2} w^* \tag{3.11}$$

O Método de Vórtices é baseado na equação (3.11). CHORIN (1973) propôs um algoritmo de decomposição do operador diferencial desta equação em dois operadores: um puramente convectivo e um puramente difusivo (**"Viscous Splitting Algorithm"**). Os processos de convecção e de difusão, que ocorrem simultaneamente no escoamento, poderiam assim ser calculados numericamente e de forma sucessiva, dentro de um mesmo incremento de tempo.

O processo de convecção não considera os efeitos da viscosidade, resultando na equação de convecção de vorticidade:

$$\frac{D w^*}{D t^*} \equiv \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* w^* = 0 \qquad (3.12)$$

O processo de difusão leva em consideração somente os efeitos da viscosidade, resultando na equação de difusão de vorticidade:

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} = \upsilon \nabla^{*2} w^* \qquad (3.13)$$

Conforme comentado anteriormente, os processos de convecção e de difusão realizam-se de forma sucessiva, dentro de um intervalo de tempo discreto Δt , e, convergem para a equação original quando $\Delta t \to 0$.

3.5.3 - Características Marcantes do Método de Vórtices

Vários métodos aplicam-se na análise do escoamento de um fluido viscoso. Há métodos utilizando descrição euleriana, métodos utilizando descrição lagrangiana e métodos utilizando descrição euleriana e lagrangiana juntas. Estes métodos com vantagens e com desvantagens são sempre adequados para uma determinada faixa de aplicação.

Os métodos numéricos clássicos, entre os quais, o Método das Diferenças Finitas e o Método de Elementos Finitos, utilizam uma descrição euleriana . A descrição euleriana considera uma malha fixa no espaço e possui a desvantagem de introduzir instabilidades numéricas nos escoamentos com altos números de Reynolds e dependentes do tempo, além dos problemas relacionados com o desenvolvimento e com o refinamento da malha.

O Método de Vórtices Discretos, ao utilizar a descrição lagrangiana na simulação do escoamento, possui a característica marcante da não utilização de uma malha, e, com isso, o problema que aparece na descrição euleriana deixa de existir. O método lagrangiano permite que as condições de contorno no infinito sejam satisfeitas com maior exatidão, porque possui a característica de marchar no tempo e atualizar a posição dos vórtices, podendo-se desprezar a necessidade de estabelecimento de um domínio de solução. A simulação do escoamento através do Método de Vórtices pode ser concentrada em áreas de interesse, enquanto que as formulações baseadas em variáveis primitivas necessitam resolver regiões irrotacionais.

O gradiente de pressão das equações de Navier-Stokes é eliminado ao formular-se o problema considerando vorticidade e, deste modo, o número de variáveis a serem aproximadas diminui. O termo convectivo, que é não linear, é removido das equações com o uso da derivada material lagrangiana. Há uma adaptação natural das partículas ao escoamento, o que não acontece com os pontos de uma malha. Os vórtices adaptam-se muito bem na evolução do escoamento, já as técnicas eulerianas, caso refinem mal as malhas, podem concentrar muitos pontos em certas regiões e poucos pontos em outras.

O Método de Vórtices é idealizado para problemas bidimensionais, o que reduz o vetor vorticidade a um escalar e torna identicamente nulo o termo de esticamento e deformação das linhas de vorticidade da equação de transporte de vorticidade. Este termo é de difícil tratamento no método lagrangiano e sua extensão para problemas tridimensionais requer muita investigação científica (LEONARD, 1985), embora possa ser realizada (SARPKAYA, 1989).

O Método de Vórtices tem um contador de operações, a cada incremento de tempo, Δt , que é proporcional ao quadrado do número de vórtices livres presentes no escoamento, N^2, e isto, torna o cálculo da velocidade de convecção dos vórtices, utilizando a lei de Biot-Savart, assustadoramente demorado, em termos computacionais. O número de passos de tempo não pode ser muito grande, mesmo utilizando os computadores de última geração. O tempo de execução do programa computacional desenvolvido pode ser reduzido recorrendo-se a algumas técnicas. A utilização de Expansões em Multipolos (SPARLAT e LEONARD, 1981), que visa simular o efeito dos vórtices livres contidos numa sub-região através de um único vórtice equivalente, é uma técnica que está sendo estudada em outro trabalho nesta área, para aumentar a velocidade de processamento da etapa convectiva. O presente trabalho opera grandes arquivos, que tem seu tamanho aumentado a cada novo incremento de tempo, Δt, devido aos novos vórtices gerados. A primeira providência tomada é salvar, em um arquivo de saída, todos os dados necessários, após um certo número de incrementos de tempo, por exemplo, a cada cinqüenta incrementos. A outra providência é tomada no cálculo das componentes da velocidade induzida por todos os vórtices em cada vórtice livre da nuvem. Os detalhes desta segunda providência encontram-se no apêndice A4 .

Existem problemas relacionados com a geração e reflexão de vórtices livres próximos à superfície do corpo e não se pode fazer uma abordagem geral, porque este aspecto está associado à lei de conservação de vorticidade e depende bastante da geometria do corpo em estudo.

Não se tem muitos conhecimentos em simulações de situações em que as fronteiras da região de interesse possuem movimento relativo, exemplo típico das turbomáquinas.

3.5.4 - Adimensionalização do Problema Proposto

A adimensionalização do problema em estudo é importante, pois contribui na formulação do modelo ratificando a validade de uma hipótese, auxilia na solução do modelo indicando a dependência entre grandezas, sugerindo grandezas adimensionais relevantes e ajuda na apresentação dos resultados mostrando uma relação funcional entre as grandezas e sugerindo como as grandezas devem ser apresentadas.

Deve-se adotar escalas de comprimento, de velocidade e de tempo para adimensionalizar as grandezas representativas das equações dos princípios de conservação. As respectivas escalas escolhidas são:

escala de comprimento: C

escala de velocidade: U

escala de tempo: $T = \dfrac{C}{U}$

As grandezas, adimensionalizadas, tornam-se:

$$x = \frac{x^*}{C} \qquad y = \frac{y^*}{C} \qquad t = \frac{Ut^*}{C}$$

$$u = \frac{u^*}{U} \qquad v = \frac{v^*}{U} \qquad p = \frac{p^*}{\rho U^2}$$

$$\phi = \frac{\phi^*}{CU} \qquad \mathrm{Re} = \frac{CU}{\upsilon} \qquad \Gamma = \frac{\Gamma^*}{CU}$$

$$w = \frac{C\,w^*}{U} \qquad \Delta t = \frac{U\Delta t^*}{C} \qquad \sigma_0 = \frac{\sigma_0^*}{C}$$

OBS.: O significado de algumas das grandezas acima, como por exemplo, ϕ, Re e σ_0 , ficará claro com o desenvolver do trabalho.

3.5.5 - Análise da Convecção de Vorticidade

O problema da convecção é uma das partes fundamentais do Método de Vórtices Discretos. Na convecção estão presentes pontos problemáticos do método, como por exemplo, a questão da estabilidade e do elevado custo computacional, o que é devido ao grande número de vórtices gerados e acumulados com o decorrer do tempo.

A convecção é governada pelo Princípio da Conservação de Massa e pelo Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento que, na forma adimensionalizada, são expressos respectivamente, por:

- **Princípio da Conservação de Massa**

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ na região delimitada por } S. \tag{3.14}$$

- **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**

$$\frac{D w}{D t} \equiv \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w = 0, \text{ na região delimitada por } S. \tag{3.15}$$

Na superfície S_1 $(r = r_0)$ do corpo, **Figura3.3**, impõe-se a condição de impenetrabilidade:

$$u_n + v_n = 0 \rightarrow \text{Impenetrabilidade} \tag{3.16}$$

No infinito, S_2 $(r \rightarrow \infty)$, considera-se o escoamento em estudo tendendo para o valor do escoamento incidente $(\alpha = 0^\circ)$:

$$| \mathbf{u} | \rightarrow 1 \tag{3.17}$$

O problema acima é potencial, portanto:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \tag{3.18}$$

Deste modo, o problema pode ser reescrito em função do potencial de velocidades, ϕ , definido pelo problema de valor de contorno a seguir.

3.5.5.1 - Problema de Valor de Contorno

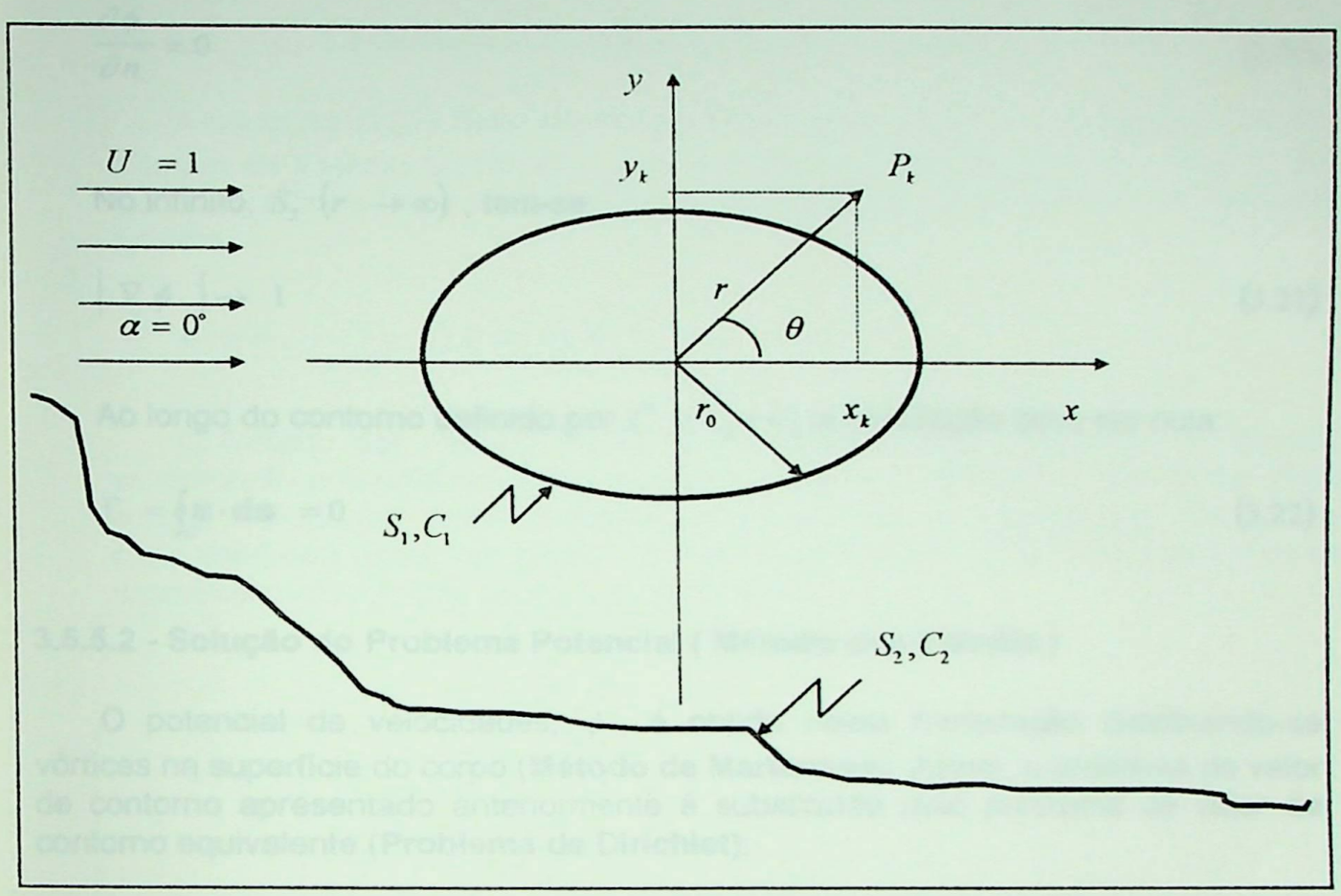


Figura 3.3 - Resolução do movimento convectivo com auxílio de elementos da Teoria Potencial.

Escrevendo o problema da convecção, em função do potencial de velocidades, ϕ , e considerando a **Figura 3.3**, tem-se:

- **Princípio da Conservação de Massa**

$\nabla^2 \phi = 0$, na região delimitada por S. (3.19)

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

Na superfície do corpo, S_1 $(r = r_0)$, tem-se a condição de impenetrabilidade:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \tag{3.20}$$

No infinito, S_2 $(r \to \infty)$, tem-se:

$$| \nabla \phi | \to 1 \tag{3.21}$$

Ao longo do contorno definido por $C = C_1 + C_2$ a circulação deve ser nula:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{ds} = 0 \tag{3.22}$$

3.5.5.2 - Solução do Problema Potencial (Método dos Painéis)

O potencial de velocidades, ϕ , é obtido nesta formulação distribuindo-se vórtices na superfície do corpo (**Método de Martensen**). Assim, o problema de valor de contorno apresentado anteriormente é substituído pelo problema de valor de contorno equivalente (**Problema de Dirichlet**):

$\nabla^2 \phi = 0$, Na região delimitada por S. (3.23)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0, \text{ Para } r = r_0 . \tag{3.24}$$

$| \nabla \phi | \to 1$, Para $r \to \infty$. (3.25)

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{ds} = 0 \tag{3.26}$$

A solução deste problema de valor de contorno é resultante da contribuição do escoamento incidente e da contribuição do corpo, ou seja:

$$\phi = x + \frac{1}{2\pi}\int_{S_1} \gamma(\xi)\,\theta\, d\xi \qquad (3.27)$$

em que, $\gamma(\xi)$ é a densidade da distribuição de vorticidade.

A equação (3.27) deve ser resolvida ao longo de toda a superfície do corpo. A solução da integral acima não pode ser obtida diretamente com muita facilidade. Com isto, substitui-se o integrando por um somatório, que possui uma solução mais simples.

$$\phi = x + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{M} \gamma\,(i)\,\theta\,(i)\,\Delta s\,(i) \qquad (3.28)$$

O Método dos Painéis (KATZ e PLOTKIN, 1991) aplica-se na solução do escoamento potencial em torno de corpos de forma arbitrária e conhecida. Para os corpos estudados neste trabalho, considera-se a **Figura 3.4**. Nesta figura subentende-se existir um corpo de forma conhecida, onde deseja-se conhecer o escoamento decorrente de uma corrente uniforme $U = 1$.

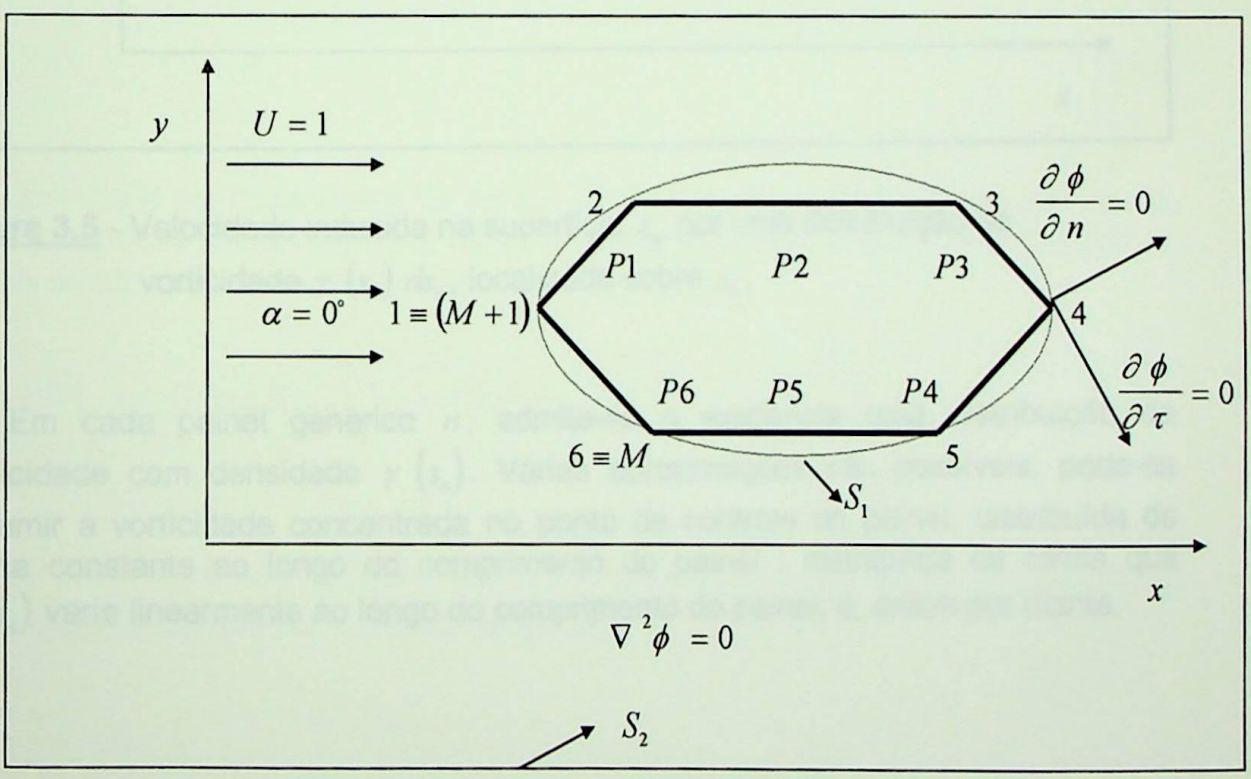


Figura 3.4 - Aproximação de um corpo por meio de elementos de superfície.

A superfície do corpo de forma arbitrária da **Figura 3.4** está dividida em M elementos de superfície, ou painéis, planos. Dois destes painéis são isolados e apresentados na **Figura 3.5** para a análise da velocidade induzida.

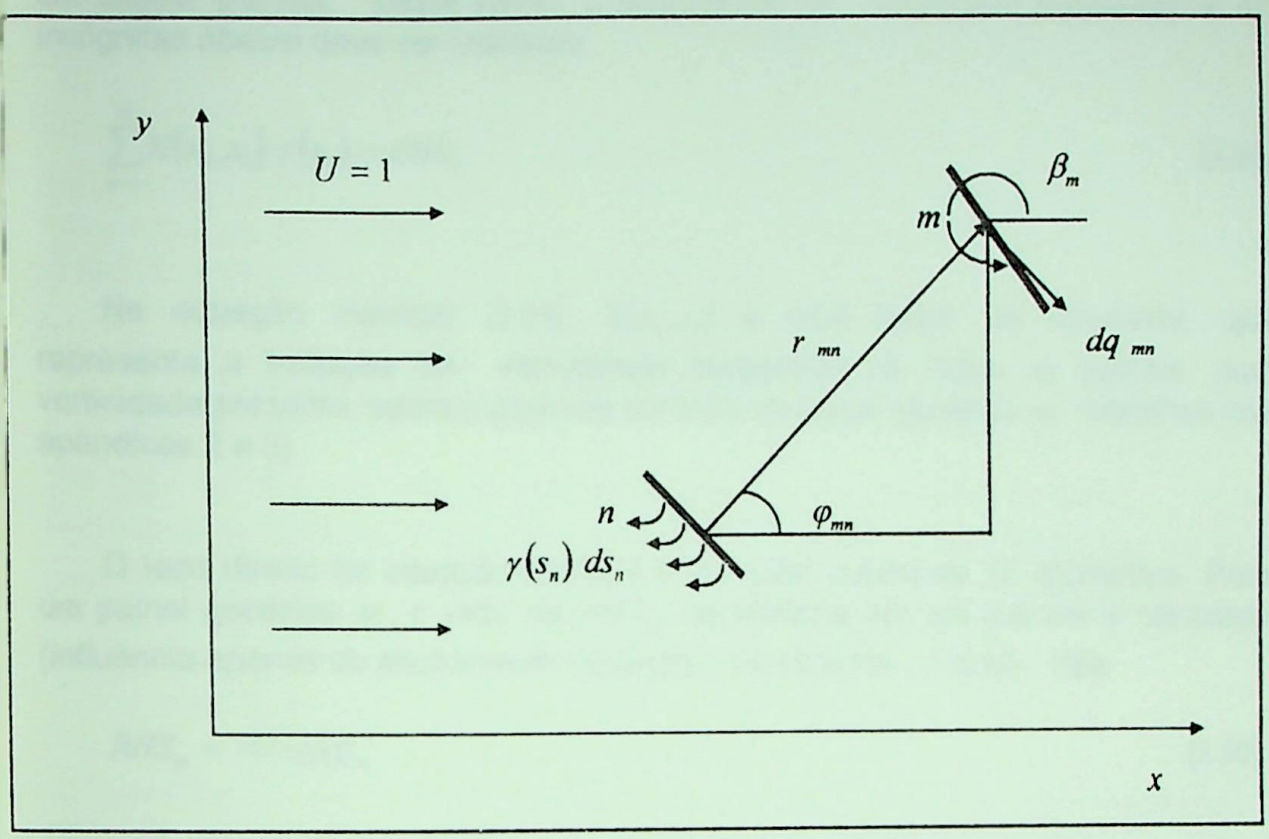


Figura 3.5 - Velocidade induzida na superfície s_m por uma distribuição de vorticidade $\gamma\ (s_n)\ ds_n$, localizada sobre s_n.

Em cada painel genérico n, admite-se a existência uma distribuição de vorticidade com densidade $\gamma\ (s_n)$. Várias aproximações são possíveis; pode-se assumir a vorticidade concentrada no ponto de controle do painel, distribuída de forma constante ao longo do comprimento do painel , distribuída de forma que $\gamma\ (s_n)$ varie linearmente ao longo do comprimento do painel, e, assim por diante.

No instante inicial, $t = 0(\Delta t)$, e a cada novo incremento de tempo, Δt, há criação de vorticidade na superfície do corpo, discretizado em M painéis. O valor dos segmentos de vorticidade distribuídos ao longo dos M painéis é obtido de modo a satisfazer a condição de escorregamento nulo em um único ponto de cada um destes painéis. Deste modo, o sistema de M equações algébricas e M incógnitas abaixo deve ser resolvido:

$$\sum_{n=1}^{M} K(s_m, s_n)\, \gamma(s_n) = RHS_m \qquad (3.29)$$

Na equação matricial (3.29), $K(s_m, s_n)$ é uma matriz de influência, que representa a **indução de velocidade tangencial** de todos os painéis, com vorticidade presente, sobre o ponto de controle do painel genérico m (detalhes nos apêndices 2 e 3).

O lado direito da equação matricial é um vetor coluna de M elementos. Para um painel genérico m, o valor de RHS_m, na primeira vez em que ele é calculado (influência apenas do escoamento incidente), no instante $t = 0(\Delta t)$, vale:

$$RHS_m = -U \cos\beta_m \qquad (3.30)$$

Em todos os incrementos de tempo seguintes, este vetor é atualizado devido aos N vórtices livres presentes na esteira, que induzem velocidade tangencial no ponto de controle de cada painel genérico m:

$$RHS_m = \left\{ -U \cos\beta_m - \sum_{j=1}^{N} \left[u_{m_j} \cos\beta_m + v_{m_j} sin\beta_m \right] \right\} \qquad (3.31)$$

O vetor incógnita $\{\gamma(s_n)\}$ é obtido na resolução da equação matricial (3.29), utilizando-se um método numérico apropriado.

3.5.5.3 - Esquemas de Avanço

A equação (3.15) governa o processo de convecção, ou seja:

$$\frac{D w}{D t} \equiv \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w = 0$$

Esta equação representa o transporte convectivo de partículas de vorticidade, ou vórtices discretos, como sendo partículas materiais de fluido. Desta forma, o movimento de um vórtice arbitrário k pode ser calculado integrando-se a equação para a sua trajetória, que pode ser escrita como:

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{u}_k\left[\mathbf{x}_k(t), t\right] \qquad (3.32)$$

em que, $\mathbf{x}_k$ é a posição do vórtice arbitrário k, no instante de tempo t, e, $\mathbf{u}_k$ representa a velocidade induzida por todo o escoamento na posição $\mathbf{x}_k$ ocupada pelo vórtice.

A velocidade $\mathbf{u}_k\left[\mathbf{x}_k(t), t\right]$ é composta pelas contribuições devidas à:

a) presença do escoamento incidente (no problema potencial adimensionalizado esta velocidade é igual a unidade e está apenas na direção do eixo dos x);

b) presença da nuvem de vórtices livres (veja detalhes do cálculo das componentes desta velocidade no apêndice A4);

c) presença do corpo de forma arbitrária, que é representado por uma superfície dividida em M painéis (veja no apêndice A5 como as componentes desta velocidade induzida são calculadas).

A velocidade total induzida em um vórtice livre arbitrário k, na direção de x e na direção de y, é dada pelas seguintes equações, respectivamente :

$$u_{t_k}(t) = 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} \Gamma_j \, U_{V_{k,j}}(t) + \sum_{j=1}^{M} u_{c_j}(t) \tag{3.33}$$

$$v_{t_k}(t) = 0 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} \Gamma_j \, V_{V_{k,j}}(t) + \sum_{j=1}^{M} v_{c_j}(t) \tag{3.34}$$

A equação (3.32), discretizada segundo um esquema de avanço de primeira ordem, ou esquema de Euler , resulta:

$$\Delta \mathbf{x}_c = \mathbf{u}[\mathbf{x}(t), t] \, \Delta t \tag{3.35}$$

em que, $\Delta \mathbf{x}_c$ é o deslocamento convectivo de um vórtice discreto, $\mathbf{x}$ é o seu vetor posição e $\mathbf{u}$ é o seu vetor velocidade no ponto de localização do vórtice.

A nova posição de um vórtice discreto arbitrário k, após um incremento de tempo Δt, é então, definida pelas seguintes equações:

$$x_k(t + \Delta t) = x_k(t) + u_{t_k}(t) \, \Delta t \tag{3.36}$$

$$y_k(t + \Delta t) = y_k(t) + v_{t_k}(t) \, \Delta t \tag{3.37}$$

A precisão do processo de convecção é melhorada fazendo-se os vórtices livres deslocarem por um esquema de avanço de segunda ordem, ou esquema de Adams-Bashforth (FERZIGER, 1981). O esquema de segunda ordem é mais complexo e a nova posição de um vórtice arbitrário k, após um incremento de tempo Δt, é obtida discretizando-se a equação (3.32), o que resulta:

$$x_k(t + \Delta t) = x_k(t) + \left[1{,}5 \; u_{t_k}(t) - 0{,}5 \; u_{t_k}(t - \Delta t)\right] \Delta t \tag{3.38}$$

$$y_k(t + \Delta t) = y_k(t) + \left[1{,}5 \; v_{t_k}(t) - 0{,}5 \; v_{t_k}(t - \Delta t)\right] \Delta t \tag{3.39}$$

A complexidade do esquema de Adams-Bashforth deve-se ao fato de que, ele exige o conhecimento da velocidade induzida em cada vórtice livre no instante anterior $(t - \Delta t)$. A programação computacional fica um pouco mais trabalhosa.

Os erros dos fatores, que multiplicam o incremento de tempo Δt, são da ordem de $(\Delta t)^2$.

Os esquemas de segunda ordem são mais complexos, porém são mais precisos e permitem usar valores de incremento de tempo Δt maiores, reduzindo o tempo computacional.

Outros esquemas de segunda ordem podem ser utilizados: LEWIS (1991) apresenta um outro esquema que necessita de um cálculo a mais na obtenção das componentes das velocidades induzidas e MALTA (1998) obteve bons resultados com o esquema de Runge-Kutta.

3.5.5.4 - Outras Soluções para a Convecção de Vorticidade

A utilização do Método dos Painéis (KATZ e PLOTKIN, 1991) apresenta duas dificuldades:

a) A primeira refere-se ao número de painéis utilizados; aumentando-se este número, aumenta-se a precisão dos resultados, e, também, os requisitos impostos sobre a capacidade e desempenho das máquinas (o esforço computacional é proporcional ao quadrado do número de vórtices da nuvem).

b) A segunda, normalmente ignorada, está associada à geração de vorticidade; uma vez que os vórtices nascentes são localizados nas vizinhanças do ponto médio dos painéis, a condição de contorno do corpo é momentaneamente violada.

O Método dos Painéis tem a grande vantagem de permitir o estudo sobre um corpo de forma arbitrária. A sua grande desvantagem refere-se à condição de contorno, que é satisfeita apenas em um único ponto de cada painel e não em todos os pontos da superfície real do corpo, tornando o método aproximado.

Uma alternativa, que permite contornar esta última dificuldade, consiste na utilização do Teorema do Círculo (MILNE-THOMPSON, 1955). A condição de contorno é verificada em todos os pontos da superfície real do cilindro. A desvantagem deste procedimento reside no fato de que o mencionado teorema é válido somente se o corpo possuir uma superfície circular ou se a técnica da transformação conforme for utilizada. MUSTTO et al. (1997, 1998) e MALTA (1998) exploraram com muita propriedade a alternativa mencionada, ao analisarem o escoamento ao redor de um cilindro circular com e sem rotação. A dificuldade maior, no entanto, do procedimento reside no grande número de vórtices necessários (vórtices da esteira e suas imagens no interior do círculo).

Na transformação conforme pode-se obter um aerofólio, a partir de uma geometria mais simples. O cálculo das expressões das velocidades é um pouco mais demorado que no cálculo analítico direto; a precisão é boa (no contexto da Teoria Potencial). Há uma ampliação do número de casos que podem ser analisados. A grande desvantagem está na necessidade de se conhecer a função de transformação.

A utilização de métodos aproximados (Perturbação), por exemplo, um aerofólio fino com um ângulo de ataque pequeno, envolve cálculos um pouco mais abrangentes que na transformação conforme, já que dispensam o conhecimento da função de transformação. O número de casos a serem analisados é maior. Há a transferência da condição de contorno de uma posição atual para uma nova posição média.

3.5.6 - Análise da Difusão de Vorticidade

A difusão de vorticidade é governada pela equação (3.13), que na sua forma adimensionalizada (veja no apêndice A1), torna-se:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 w \tag{3.40}$$

O Método de Avanço Randômico é o modelo mais popularmente utilizado para simular a difusão viscosa de vorticidade .

A solução da equação (3.40), utilizando o Método de Avanço Randômico, foi inicialmente obtida por EINSTEIN (1956). Uma discussão da técnica relacionada com a análise da difusão de vorticidade encontra-se nos trabalhos de GHONIEM e SHERMAN (1985) e de PORTHOUSE e LEWIS (1981). O que se faz, de uma maneira geral, é utilizar a similaridade existente entre o espaço da função de Green (de difusão) e a distribuição de Gauss, a fim de mostrar que, a difusão de uma grandeza concentrada pode ser aproximada pelo movimento de partículas, que avançam de forma randômica em cada pequeno intervalo de tempo; o avanço em cada coordenada é dado pelo valor da variável gaussiana quando a variância é $(2\ \upsilon\ \Delta t)$.

Integrando-se a equação (3.40), para um vórtice arbitrário k, pontual inicialmente, de intensidade Γ_k, no espaço e no tempo (BATCHELOR, 1970), tem-se:

$$w(r,t) = \frac{\Gamma_k}{4\pi\upsilon t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\upsilon t}\right) \tag{3.41}$$

Esta equação representa uma distribuição radial de vorticidade no instante t.

Considere que, Γ seja igual a unidade e que passado um tempo t, um número n, de um total de N vórtices, esteja concentrado em um elemento de área definido por $r\ d\theta\ dr$. Deste modo, a probabilidade, P, dos n vórtices estarem presentes neste elemento de área é dada por:

$$P = \frac{n}{N} = \left[\frac{1}{4\pi\upsilon t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\upsilon t}\right)\right] r\ d\theta\ dr \tag{3.42}$$

Analogamente, para um anel definido por r e $(r+\Delta r)$, tem-se:

$$P^{\bullet} = \int_0^{2\pi} = \left[\frac{1}{2\upsilon t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\upsilon t}\right)\right] r dr \qquad (3.43)$$

Integrando-se a equação (3.43) obtém-se a probabilidade, considerando um círculo de raio r:

$$P^{\bullet\bullet} = \int_0^{r} = \left[1-\exp\left(-\frac{r^2}{4\upsilon t}\right)\right] \qquad (3.44)$$

A equação acima representa uma distribuição normal. $P^{\bullet\bullet}$ tem igual probabilidade de assumir qualquer valor no intervalo $(0-1)$, portanto, pode ser um número randômico nesta faixa.

Considerando um vórtice arbitrário k, tem-se:

$$p_k = \left[1-\exp\left(-\frac{r^2}{4\upsilon t}\right)\right] \qquad (3.45)$$

ou:

$$r_k = \sqrt{4\upsilon t \ln\left(\frac{1}{p_k}\right)} \qquad (3.46)$$

Adimensionalisando a equação (3.46), obtém-se:

$$\Delta r_{\,k} = \sqrt{\frac{4\Delta t}{\mathrm{Re}}\ln\left(\frac{1}{p_k}\right)} \qquad (3.47)$$

Esta equação representa o avanço de cada vórtice, na direção radial, durante um incremento de tempo Δt.

Devido à simetria, a posição do vórtice arbitrário k tem igual probabilidade de assumir qualquer valor no intervalo $(0-2\pi)$:

$$\Delta\theta_{\,k} = 2\pi\, q_k, \text{ com } 0 < q_k < 1 \qquad (3.48)$$

A etapa difusiva de um vórtice discreto arbitrário k, após um incremento de tempo Δt, é então, simulada utilizando o Método de Avanço Randômico, que possui os avanços $\xi_k(t)$, na direção de x, e $\eta_k(t)$, na direção de y, respectivamente:

$$\xi_k(t) = \Delta r_k \cos\left(\Delta\theta_k\right) \tag{3.49}$$

$$\eta_k(t) = \Delta r_k \sin\left(\Delta\theta_k\right) \tag{3.50}$$

p_k e q_k são números randômicos com valores entre 0 e 1.

3.5.6.1 - Outras Soluções para a Difusão de Vorticidade

Uma alternativa, que não é usada neste trabalho, para a simulação dos efeitos da viscosidade, consiste em atuar diretamente sobre o núcleo dos vórtices. Este procedimento foi utilizado por KAMEMOTO et al. (1990). O modelo do vórtice de Rankine foi adotado; o núcleo deste vórtice dependia da viscosidade e seu raio variava no tempo de acordo com a equação da difusão, ou seja:

$$\Delta\sigma = \frac{c^2}{2\sigma}\upsilon\Delta t \tag{3.51}$$

em que, $c = 2{,}24$ e $\sigma \equiv$ raio do núcleo do vórtice de Rankine.

No trabalho de OGAMI e AKAMATSU (1991) há uma segunda alternativa, para a simulação do escoamento viscoso, considerando-se o Método da Velocidade de Difusão. O termo difusivo da equação de transporte de vorticidade foi apresentado na forma de uma velocidade de difusão, de modo que, se tivesse uma analogia com a velocidade convectiva.

O Método de Vórtices em Células (CHRISTIANSEN, 1973), uma terceira alternativa, consiste basicamente em calcular, a partir da posição e da intensidade dos vórtices, o valor da vorticidade nos pontos de cruzamento da malha. Com estes valores, utilizando algum método euleriano, a velocidade de convecção em cada vórtice é calculada. Aproveita-se a estrutura das malhas para se calcular a difusão de vorticidade.

3.5.7 - Geração de Vorticidade

A vorticidade é gerada em toda a superfície de um corpo, que é imerso num meio fluido e este se move relativamente ao corpo. No item 3.5.1 foi apresentado uma descrição fenomenológica da geração de vorticidade e se verifica imediatamente o papel fundamental da viscosidade neste processo.

Em termos mais precisos, pode-se dizer que a vorticidade é gerada na superfície do corpo para que a condição de escorregamento nulo, equação (3.7), seja satisfeita. Esta vorticidade gerada é transportada para o interior do meio fluido através de dois mecanismos básicos: convecção e difusão de vorticidade.

Com o objetivo de fornecer maiores detalhes, considere um corpo de forma arbitrária, na **Figura 3.6**, inserido em um escoamento uniforme.

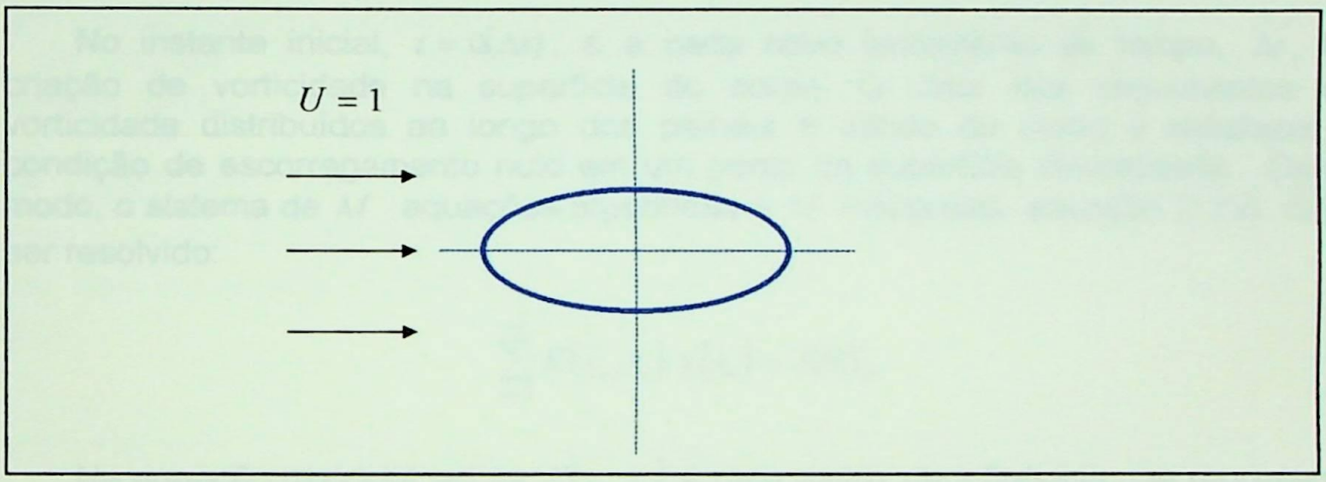


Figura 3.6 - Corpo de forma arbitrária inserido em um escoamento potencial no instante inicial $t = 0(\Delta t)$.

A superfície deste corpo é discretizada, por exemplo, em seis seguimentos de reta $(M = 6)$ como mostrado na **Figura 3.7**, para que, na programação computacional seja substituída por painéis planos. A superfície real do corpo é melhor representa pelos painéis, a medida que o número destes painéis seja o maior possível. Nos recursos de programação disponíveis fica inviável usar um número muito grande de painéis.

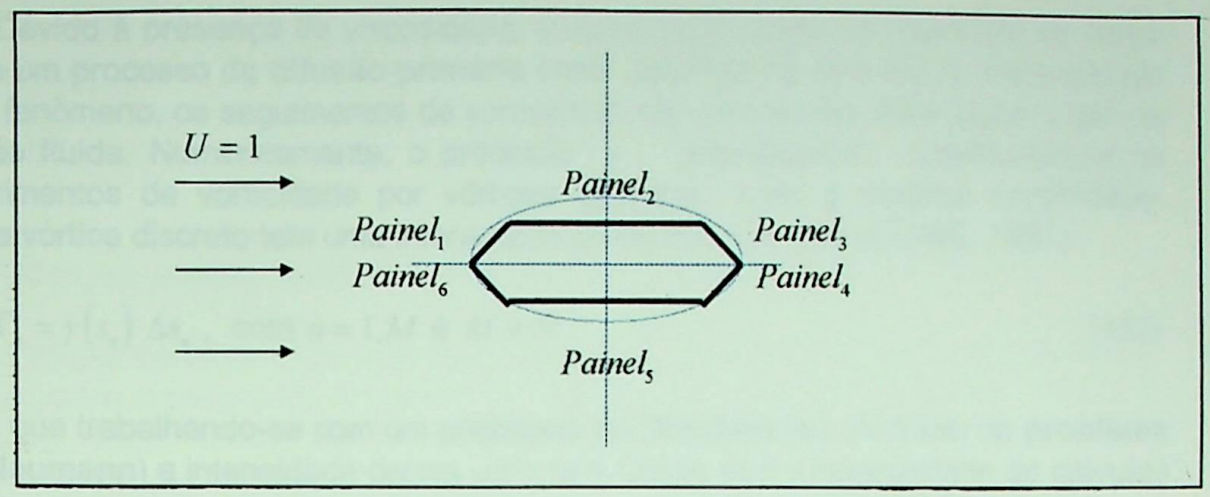


Figura 3.7 - Corpo de forma arbitrária discretizado em painéis e inserido em um escoamento potencial no instante inicial $t = 0(\Delta t)$.

No instante inicial, $t = 0(\Delta t)$, e a cada novo incremento de tempo, Δt, há criação de vorticidade na superfície do corpo. O valor dos seguimentos de vorticidade distribuídos ao longo dos painéis é obtido de modo a satisfazer a condição de escorregamento nulo em um ponto da superfície discretizada. Deste modo, o sistema de M equações algébricas e M incógnitas, equação (3.29), deve ser resolvido:

$$\sum_{n=1}^{M} K(s_m, s_n)\, \gamma(s_n) = RHS_m$$

Na equação matricial acima $K(s_m, s_n)$ é uma matriz de influência que representa a **indução de velocidade tangencial** sobre o ponto de controle de um painel genérico m de todos os painéis.

O lado direito da equação matricial é um vetor coluna de M elementos, que leva em consideração a influência do escoamento incidente e da nuvem de vórtices livres sobre o ponto de controle de cada painel. Para um painel genérico m, o valor de RHS_m na primeira vez em que ele é calculado, no instante $t = 0(\Delta t)$, considera apenas a indução de velocidade tangencial do escoamento incidente, uma vez que não existe vórtice livre no meio fluido.

O vetor incógnita $\{\gamma(s_n)\}$ é obtido na resolução da equação matricial (3.29). O método numérico usado para a resolução desta equação matricial é o Método de Eliminação de Gauss com Condensação Pivotal Parcial.

Devido à presença da viscosidade, a vorticidade criada na superfície do corpo sofre um processo de **difusão primária** (mais detalhes no item 4.5.1). Para simular este fenômeno, os seguimentos de vorticidade são deslocados para algum lugar na região fluida. Numericamente, o processo é "discretizado" substituindo-se os seguimentos de vorticidade por vórtices discretos, **com a mesma vorticidade**. Cada vórtice discreto tem uma intensidade de vórtice que vale (LEWIS, 1991):

$$\Gamma_n = \gamma(s_n)\,\Delta s_n \;,\; \text{com } n = 1, M \text{ e } M = N \qquad (3.52)$$

note que trabalhando-se com um **problema de Dirichlet** (ao contrário do **problema de Neumann**) a intensidade destes vórtices é obtida sem a necessidade de cálculos adicionais.

Como devem ser gerados M vórtices discretos a cada incremento de tempo, Δt, **sofrendo o processo de difusão primária**, então, **calcula-se** a intensidade dos vórtices discretos e em seguida **posiciona-os** a uma pequena distância, ℓ, do ponto de controle de cada painel. Com estes dois procedimentos inicia-se o processo de geração de vorticidade.

Na **Figura 3.8** é visto um painel genérico n de comprimento Δs_n. Este painel está com uma distribuição de densidade $\gamma(s_n)$, que é transformada em um vórtice discreto, com intensidade Γ_n, deslocado a uma distância ℓ do ponto de controle do painel.

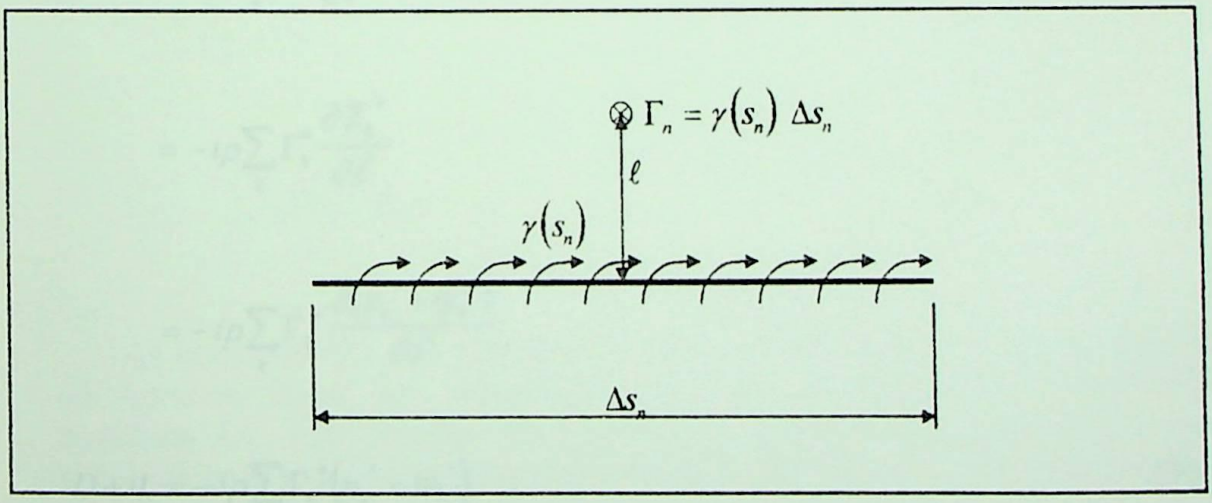


Figura 3.8 - Transformação de uma superfície de vorticidade em um vórtice discreto, que sofre o processo de difusão primária.

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

A vorticidade que se criou na superfície do corpo, e que transforma-se em vórtices discretos, é carregada pelo escoamento. Deste modo, os vórtices discretos sofrem os processos de convecção (avanço de segunda ordem de Adams-Bashforth) e de difusão (avanço randômico).

3.5.8 - Cargas Aerodinâmicas

As forças aerodinâmicas que atuam no corpo são obtidas a partir da fórmula de Blasius generalizada para escoamentos não permanentes (SARPKAYA, 1989). A utilização desta formulação dispensa o cálculo da pressão, como um passo intermediário para o cálculo das forças. Segundo GRAHAM (1980), a expressão geral que se obtém é:

$$D + iL = \frac{\pi}{4}\rho\, C_{m0} d^2 \dot{U} - i\rho \sum_k \frac{\partial\left(\Gamma_k^* Z_k^*\right)}{\partial t^*} \tag{3.53}$$

O primeiro termo do lado direito da expressão (3.53) corresponde ao que se costuma denominar de massa adicional. Os corpos estudados encontram-se fixos, portanto, a variação da sua velocidade em relação ao tempo é igual a zero ($\dot{U} = 0$). A equação (3.53) torna-se:

$$D + iL = -i\rho \sum_k \frac{\partial\left(\Gamma^*{}_k Z_k^*\right)}{\partial t^*}$$

$$= -i\rho \sum_k \Gamma_k^* \frac{\partial Z_k^*}{\partial t^*}$$

$$= -i\rho \sum_k \Gamma_k^* \frac{\partial\left(x_k^* + i y_k^*\right)}{\partial t^*}$$

$$D + iL = -i\rho \sum_k \Gamma_k^* \left(u_k^* + i v_k^*\right) \tag{3.54}$$

Considerando velocidades induzidas por N vórtices livres e pelas suas imagens inversas, em cada instante de tempo, e adimensionalisando a equação (3.54), tem-se:

$$C_D + iC_L = -i\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\left[\left(u_{t_k} + iv_{t_k}\right) - \left(u_{t_{k_{im}}} + iv_{t_{k_{im}}}\right)\right]$$

$$= -i\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\left[\left(u_{t_k} - iu_{t_{k_{im}}}\right) - \left(v_{t_k} - iv_{t_{k_{im}}}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\left[\left(v_{t_k} - iv_{t_{k_{im}}}\right) - i\left(u_{t_k} - iu_{t_{k_{im}}}\right)\right]$$

$$C_D + iC_L = \sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\left(v_{t_k} - iv_{t_{k_{im}}}\right) + i\sum_{k=1}^{N}\left(u_{t_{k_{im}}} - u_{t_k}\right) \qquad (3.55)$$

Comparando os dois termos da equação (3.55) obtém-se as equações para o cálculo do coeficiente de arrasto e para o coeficiente de sustentação, respectivamente:

$$C_D = \sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\left(v_{t_k} - v_{t_{k_{im}}}\right) \qquad (3.56)$$

$$C_L = -\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\left(u_{t_k} - u_{t_{k_{im}}}\right) \qquad (3.57)$$

As componentes das velocidades induzidas em cada vórtice livre pela nuvem de vórtices livres são calculadas conforme as equações apresentadas no apêndice A4. Os cálculos das velocidades considerando velocidades induzidas sobre as imagens dos vórtices livres nas posições inversas não fazem parte desta formulação, portanto são iguais a zero $\left(u_{t_{k_{im}}} = v_{t_{k_{im}}} = 0\right)$.

4 - ALGORITMO DO MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS

4.1 - Introdução

Neste capítulo encontra-se a implementação do método numérico, baseado no Método de Vórtices Discretos, para a solução do problema proposto no capítulo 3. Há a apresentação de um exemplo, bastante didático, mostrando-se, passo a passo, como se realizam os processos de geração, de convecção e de difusão de vorticidade, após cada incremento de tempo Δt .

A estrutura do programa computacional desenvolvido e as rotinas de cálculo utilizadas na estrutura do programa são comentadas com detalhes.

4.2 - Modelos de Vórtices

Como foi discutido no capítulo anterior, a vorticidade presente no escoamento é modelada utilizando-se uma nuvem de vórtices discretos, que evoluem no tempo, para que a equação de transporte de vorticidade seja satisfeita.

Um vórtice, para escoamentos bidimensionais, pode ser definido como uma região finita no plano, com vorticidade diferente de zero, circundada por um escoamento irrotacional (SAFFMAN, 1992).

Há vários modelos de vórtices na literatura, entre os quais, o vórtice **pontual** ou **potencial**, o vórtice de **Rankine**, o vórtice de **Chorin** e o vórtice de **Lamb**.

O vórtice **potencial**, como será visto a seguir, apresenta um comportamento singular da velocidade na origem, e, assim, surgem outros modelos de vórtices, dotados de um núcleo, para remover este comportamento singular da velocidade.

O vórtice de **Rankine** possui um núcleo com área finita , o núcleo gira como um corpo rígido e fora do núcleo a velocidade tem a mesmo comportamento do vórtice potencial. A vorticidade é constante no núcleo produzindo uma distribuição linear de velocidade nesta região. Este modelo de vórtice, portanto, possui uma distribuição contínua e finita de velocidade, mas descontínua de vorticidade

O vórtice de **Chorin** tem uma vorticidade singular na origem, que decai segundo $1/r$ dentro do núcleo. Assim, a velocidade é constante dentro do núcleo e, fora do núcleo, a velocidade tem o mesmo comportamento do vórtice potencial.

O vórtice de **Lamb** possui um núcleo com área finita e uma distribuição de vorticidade gaussiana mais derivada da velocidade contínua em todo o domínio.

4.2.1 - O Vórtice Potencial

O vórtice potencial tem o seguinte potencial complexo (BATCHELOR, 1970):

$$f(Z) = \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln Z = \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln re^{i\theta} = \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln r - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \qquad (4.1)$$

A partir da equação (4.1) define-se a função potencial de velocidades, para um vórtice girando no **sentido horário**, como sendo do tipo:

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta \qquad (4.2)$$

Na **Figura 4.1** tem-se um vórtice j, de intensidade positiva Γ_j, localizado no ponto $P_j = (x_j, y_j)$ e um vórtice k, de intensidade negativa Γ_k, localizado no ponto $P_k = (x_k, y_k)$.

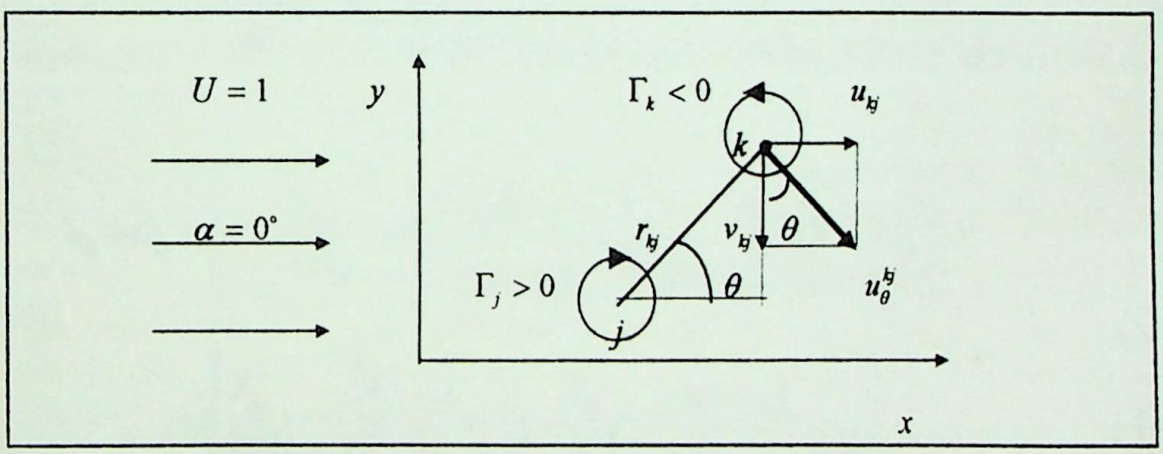


Figura 4.1 - Velocidade induzida pelo escoamento incidente uniforme e por um vórtice, de intensidade positiva Γ_j, sobre um vórtice localizado no ponto $P_k = (x_k, y_k)$.

A velocidade que este vórtice j induz no ponto $P_k = (x_k, y_k)$ possui apenas uma componente tangencial, definida por:

$$u_\theta^{kj} = \frac{1}{r_{kj}} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{r_{kj}} \tag{4.3}$$

O potencial complexo para o conjunto escoamento uniforme $(\alpha = 0°)$, vórtice j e vórtice k, vale:

$$f(Z) = UZ\, e^{-i\,\alpha} + i\frac{\Gamma_j}{2\pi} \ln\left[Z - Z(j)\right] + i\frac{\Gamma_k}{2\pi} \ln\left[Z - Z(k)\right] \tag{4.4}$$

Em termos das componentes na direção de x e na direção de y, tem-se:

$$u_{kj} - iv_{kj} = \frac{df(Z)}{dZ} = U + i\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{Z - Z(j)} + i\frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{1}{Z - Z(k)}$$

$$= \frac{df(Z)}{dZ} = U + i\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{(x - x_j) + i(y - y_j)} + i\frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{1}{(x - x_k) + i(y - y_k)}$$

$$u_{kj} - iv_{kj} = \left[U + \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} + \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{(y - y_k)}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \right] +$$

$$+ i\left[\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} + \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{(x - x_k)}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \right] \tag{4.5}$$

Para calcular a velocidade induzida no vórtice localizado no ponto k, faz-se:

$$\begin{cases} x = x_k \\ y = y_k \end{cases}$$

Deste modo:

$$u_{kj} = U + \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{\left(y_k - y_j\right)}{\left(x_k - x_j\right)^2 + \left(y_k - y_j\right)^2} \tag{4.6}$$

$$v_{kj} = 0 - \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{\left(x_k - x_j\right)}{\left(x_k - x_j\right)^2 + \left(y_k - y_j\right)^2} \tag{4.7}$$

Pelos desenvolvimentos apresentados no capítulo 3, é natural que o vórtice potencial seja escolhido como o elemento primário para compor a nuvem de vórtices discretos, utilizados para simular numericamente as regiões de vorticidade. Como se pode notar, o vórtice potencial possui uma singularidade na origem, ou seja, onde ele está localizado. Com isto, na utilização de dois vórtices potenciais muito próximos podem surgir problemas de instabilidade numérica, já que o campo de velocidade é singular para $r \to 0$. Estes problemas, na sua grande maioria, devem-se à incapacidade dos vórtices potenciais em simular os efeitos dissipativos, que são uma manifestação da viscosidade. Na **Figura 4.2** pode-se notar graficamente que para vórtices potenciais muito próximos o valor de r_{kj} torna-se pequeno fazendo com que a velocidade tenda para um valor infinito. Estas dificuldades impedem a efetiva utilização do modelo de vórtice potencial.

Neste trabalho, para eliminar tal singularidade, o modelo do vórtice de Lamb (SHERMAN, 1990), que possui uma distribuição de vorticidade gaussiana e velocidade finita para todos os valores de r, mostra-se apropriado.

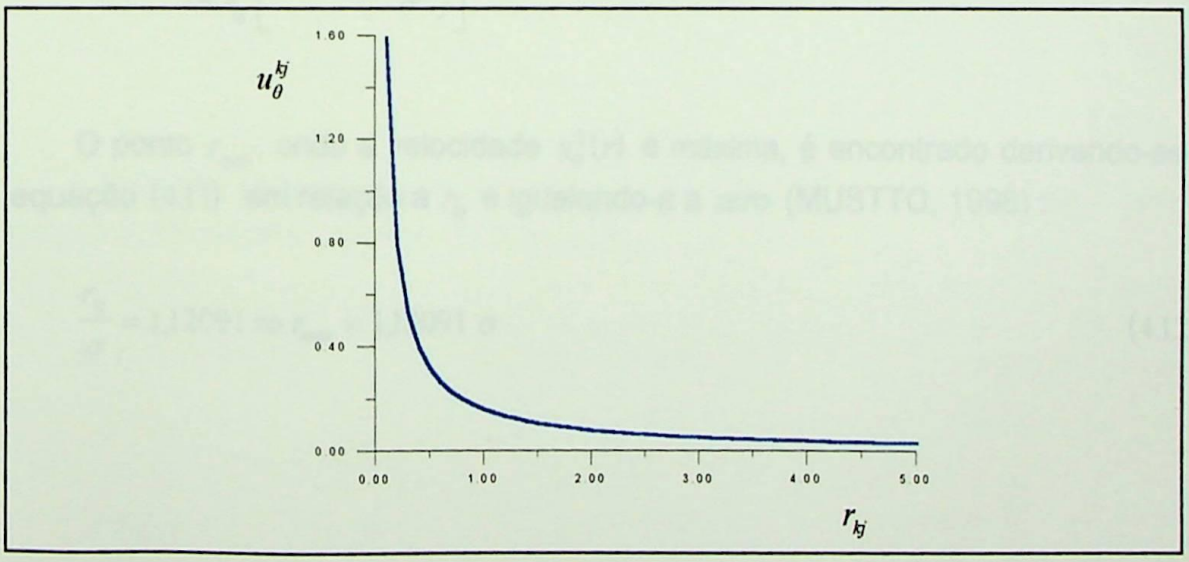


Figura 4.2 - Velocidade induzida pelo vórtice **potencial**.

4.2.2 - O Vórtice de Lamb

O vórtice de Lamb possui distribuições de ω e u_θ, mais suas derivadas, contínuas em todo o domínio, porque é solução da equação de difusão de vorticidade:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\upsilon}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) \tag{4.8}$$

A solução da equação acima, numa região infinita (KUNDU, 1990) é:

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma_j}{\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r_{kj}^{\,2}}{\sigma^2}\right) \tag{4.9}$$

Na equação (4.9) σ é expresso como:

$$\sigma = \sqrt{4\,\upsilon\,t} \tag{4.10}$$

A componente tangencial da velocidade induzida pelo vórtice de Lamb, com a distribuição de vorticidade acima, é definida pela seguinte equação:

$$u_\theta^{kj} = -\frac{\Gamma_j}{2\pi}\frac{1}{r_{kj}}\left[1-\exp\left(-\frac{r_{kj}^2}{\sigma^2}\right)\right] \tag{4.11}$$

O ponto r_{max}, onde a velocidade $u_\theta^{kj}(r)$ é máxima, é encontrado derivando-se a equação (4.11) em relação a r_{kj} e igualando-a a *zero* (MUSTTO, 1998) :

$$\frac{r_{kj}}{\sigma} = 1{,}12091 \Rightarrow r_{max} = 1{,}12091\,\sigma \tag{4.12}$$

Deste modo:

$$u_{\theta}^{kj} = -\frac{\Gamma_j}{2\pi}\frac{1}{r_{kj}}\left[1-\exp\left(-1{,}25643\frac{r_{kj}^2}{r_{max}^{\ 2}}\right)\right] \tag{4.13}$$

Para $r = r_{max}$, tem-se:

$$u_{\theta_{max}}^{kj} = -0{,}71533\frac{\Gamma_j}{2\pi\, r_{max}} \tag{4.14}$$

O raio do núcleo do vórtice de Lamb, definido de modo que a diferença entre as velocidades induzidas calculadas pelo vórtice de Lamb e pelo vórtice pontual seja pequena, vale:

$$\sigma_0 \equiv 2r_{max} \tag{4.15}$$

Nesta situação a diferença é de $0{,}6\%$.

Resolvendo-se a equação (4.12) com auxílio da equação (4.10), adimensionalizada, e levando-se em consideração um incremento de tempo Δt, encontra-se:

$$r_{max} \cong 2{,}24182\sqrt{\frac{\Delta t}{\mathrm{Re}}} \tag{4.16}$$

A equação final para o cálculo do raio do núcleo do vórtice de Lamb é obtida relacionando-se as equações (4.15) e (4.16):

$$\sigma_0 = 4{,}48364\sqrt{\frac{\Delta t}{\mathrm{Re}}} \tag{4.17}$$

Para calcular a velocidade induzida pelo vórtice de Lamb, com $u_\theta = u_\theta(\sigma_0)$, substitui-se a equação (4.15) na equação (4.13):

$$u_\theta^{kj} = -\frac{\Gamma_j}{2\pi}\frac{1}{r_{kj}}\left[1-\exp\left(-5{,}02572\frac{r_{kj}^2}{\sigma_0^2}\right)\right] \tag{4.18}$$

O modelo do vórtice de Lamb não apresenta os problemas de singularidade, mas na sua equação nota-se a presença do exponencial, que tem um cálculo computacional demorado. Deste modo, todos os vórtices existentes na nuvem são vórtices de Lamb inicialmente: a equação (4.18) pode ser usada quando dois vórtices estiverem muito próximos um do outro, de modo que, $r_{kj} < \sigma_0$. Quando $r_{kj} \geq \sigma_0$, a equação (4.3) pode ser aplicada sem os problemas de singularidade.

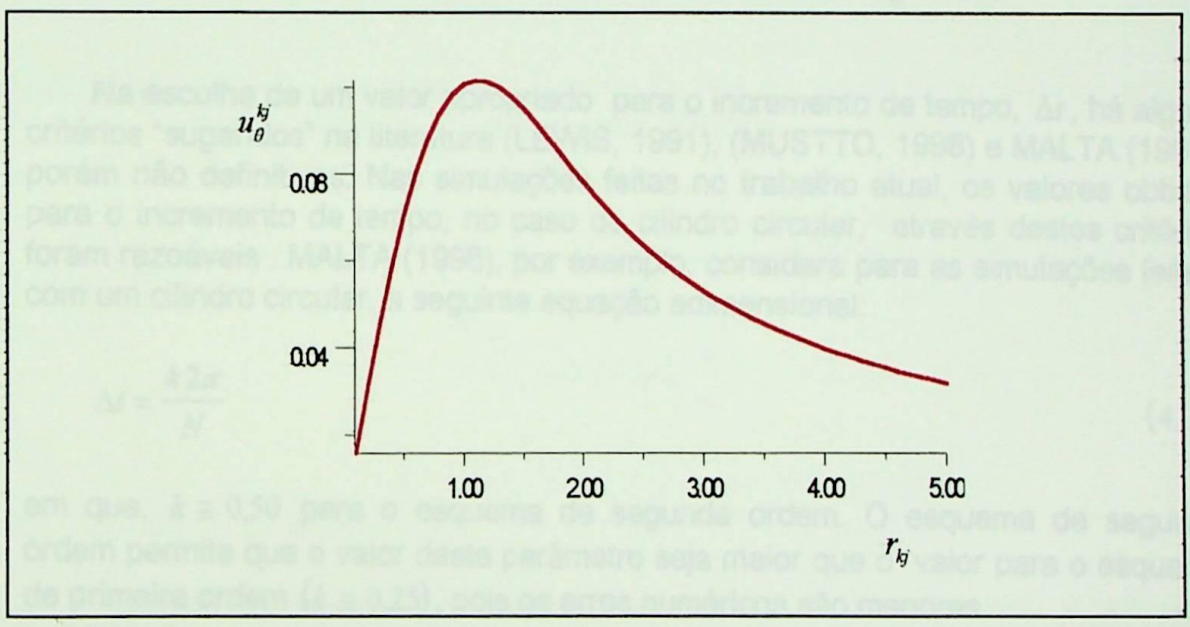


Figura 4.3 - Velocidade induzida pelo vórtice de **Lamb**.

4.3 - Parâmetros Numéricos Variáveis na Simulação

Na simulação numérica são variáveis os seguintes parâmetros: M (número de painéis planos), Δt (incremento de tempo), Re (número de Reynolds), ℓ (posição de nascimento dos vórtices) e σ_0 (raio do núcleo do vórtice de Lamb). A determinação da faixa de valores que estes parâmetros numéricos podem assumir, para que representem o escoamento real com exatidão, ainda necessitam de mais investigações e de mais testes.

O número de vórtices livres gerados a cada incremento de tempo, Δt, é adotado em função do tempo total de simulação e dos avanços na área computacional. Computadores mais potentes permitem a geração de muitos vórtices a cada avanço de tempo. Quanto mais vórtices são gerados, a cada incremento de tempo, melhor é a precisão do resultado numérico da simulação. Nas simulações realizadas neste trabalho utiliza-se sempre $M = 32$ vórtices gerados.

Na escolha de um valor apropriado para o incremento de tempo, Δt, há alguns critérios "sugeridos" na literatura (LEWIS, 1991), (MUSTTO, 1998) e MALTA (1998), porém não definitivos. Nas simulações feitas no trabalho atual, os valores obtidos para o incremento de tempo, no caso do cilindro circular, através destes critérios foram razoáveis . MALTA (1998), por exemplo, considera para as simulações feitas, com um cilindro circular, a seguinte equação adimensional:

$$\Delta t = \frac{k 2\pi}{N} \tag{4.19}$$

em que, $k \cong 0{,}50$ para o esquema de segunda ordem. O esquema de segunda ordem permite que o valor deste parâmetro seja maior que o valor para o esquema de primeira ordem $(k \cong 0{,}25)$, pois os erros numéricos são menores.

Para o perfil NACA 0012, o valor adotado para Δt, na simulação numérica deste trabalho, não possui uma fórmula geral. A solução encontrada foi adotar valores aleatórios, dentro de uma determinada faixa já estudada (LEWIS, 1991), e, realizar experimentos numéricos até que se obtivesse a formação da esteira.

Os valores adotados para o número de Reynolds devem ser altos e suficientes para os efeitos de simulação numérica pelo Método de Vórtices. Valores da ordem de $10^5 < \mathrm{Re} < 10^6$ mostram-se apropriados para esta formulação proposta, nos casos do cilindro circular e do aerofólio (NACA 0012).

Em todas as simulações numéricas feitas "optou-se" pela escolha de valores iguais para o raio do núcleo do vórtice de Lamb, σ_0, e para a posição de nascimento dos vórtices livres, ℓ,(**Figura 4.4**). Esta escolha permite que os vórtices nascentes estejam sempre posicionados tangenciando os painéis planos.

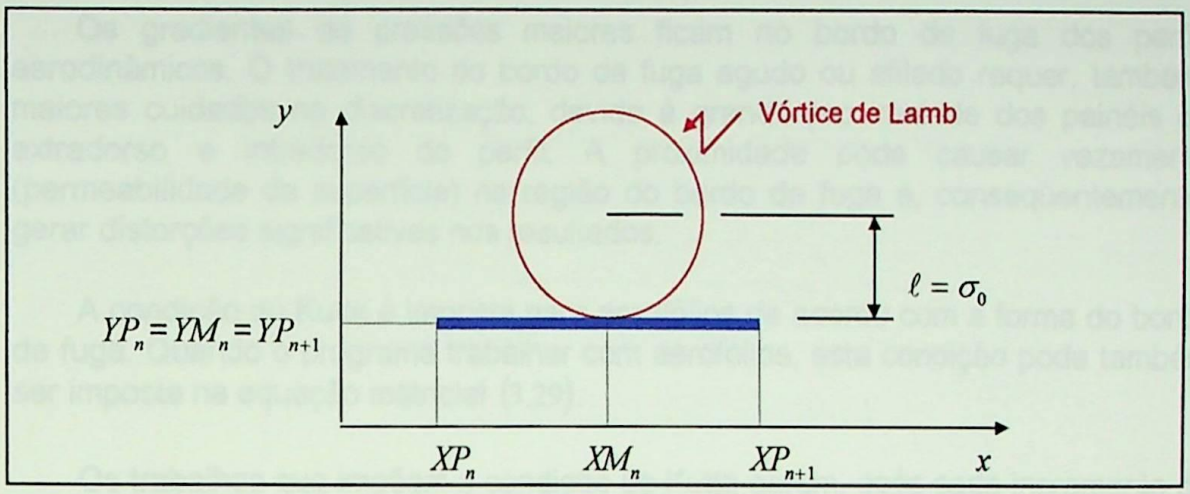


Figura 4.4 - Critério para a escolha do valor do raio do núcleo do vórtice de Lamb e da posição de nascimento dos vórtices.

O raio do núcleo do vórtice de Lamb pode ser estimado através da equação (4.17):

$$\sigma_0 = 4{,}48364\sqrt{\frac{\Delta t}{\mathrm{Re}}}$$

4.4 - Condição de Kutta

A esteira de um perfil aerodinâmico não resiste à forças, portanto, as pressões nos dois lados da esteira devem ser iguais. Esta é uma maneira de implementar-se a condição de Kutta. Se a superfície do corpo é impermeável, então a componente normal da velocidade é nula. Assim, a velocidade neste ponto é a própria velocidade tangencial.

Regiões que se caracterizam por apresentar os maiores gradientes de pressão precisam de uma discretização maior, caso contrário, rápidas flutuações podem se apresentar distorcidas ou passar desapercebidas por um método numérico.

Os painéis planos, que representam a superfície discretizada do aerofólio (NACA 0012) na simulação numérica atual, possuem comprimentos menores nas regiões do bordo de ataque e do bordo de fuga. Os painéis com comprimentos maiores estão na região central do perfil.

Os gradientes de pressões maiores ficam no bordo de fuga dos perfis aerodinâmicos. O tratamento do bordo de fuga agudo ou afilado requer, também, maiores cuidados na discretização, devido à grande proximidade dos painéis do extradorso e intradorso do perfil. A proximidade pode causar vazamento (permeabilidade da superfície) na região do bordo de fuga e, conseqüentemente, gerar distorções significativas nos resultados.

A condição de Kutta é imposta para aerofólios de acordo com a forma do bordo de fuga. Quando o programa trabalhar com aerofólios, esta condição pode também ser imposta na equação matricial (3.29).

Os trabalhos que impõem a condição de Kutta geram, após cada incremento de tempo, poucos vórtices, ou melhor, geram vórtices nos dois pontos onde se fixa os pontos de separação na superfície do corpo (VEZZA e GALBRAITH, 1985b) e (BASU e HANCOCK, 1978).

Nas simulações feitas neste trabalho, para o perfil NACA 0012, são gerados vórtices ao longo de toda a sua superfície do aerofólio. Como a condição de conservação da vorticidade já está sendo verificada, então a condição de Kutta fica implícita.

4.5 - Implementação do Método Numérico

O método numérico é implementado através do Método de Vórtices Discretos, obedecendo-se o seguinte algoritmo:

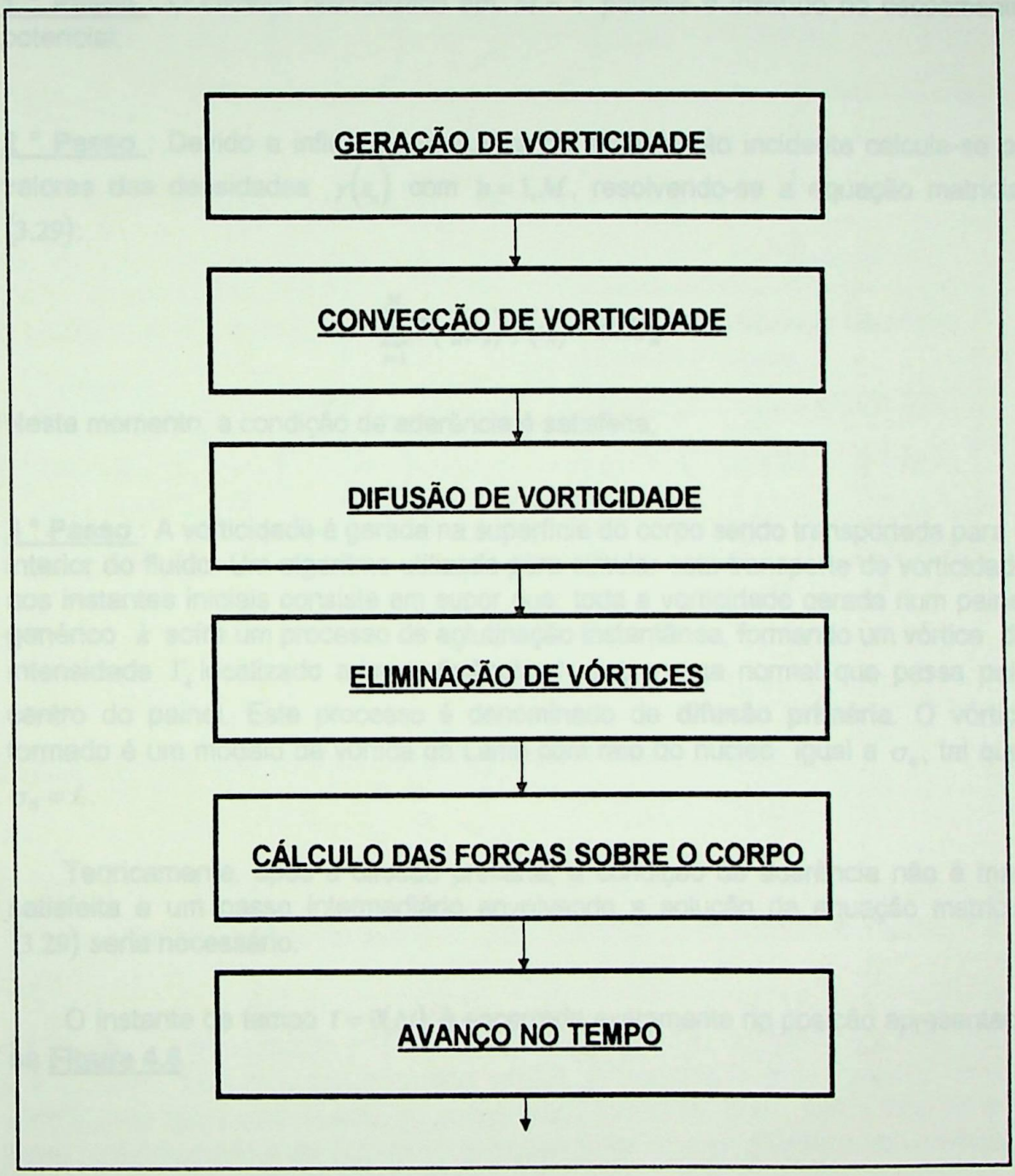


Figura 4.5 - Algoritmo de implementação do Método de Vórtices Discretos.

4.5.1 - Geração, Convecção e Difusão de Vorticidade

Um exemplo completo, considerando um cilindro circular, mostrando todas as passagens feitas pelo algoritmo é apresentada a seguir.

1 ° Passo : O cilindro discretizado em $M = 4$ painéis é inserido no escoamento potencial;

2 ° Passo : Devido a influência exclusiva do escoamento incidente calcula-se os valores das densidades $,\gamma(s_n)$ com $n = 1, M$, resolvendo-se a equação matricial (3.29):

$$\sum_{n=1}^{M} K(s_m, s_n)\, \gamma(s_n) = RHS_m$$

Neste momento, a condição de aderência é satisfeita;

3 ° Passo : A vorticidade é gerada na superfície do corpo sendo transportada para o interior do fluido. Um algoritmo utilizado para simular este transporte de vorticidade nos instantes iniciais consiste em supor que: toda a vorticidade gerada num painel genérico k sofre um processo de aglutinação instantânea, formando um vórtice de intensidade Γ_k localizado a uma distância ℓ, sobre uma normal que passa pelo centro do painel. Este processo é denominado de **difusão primária**. O vórtice formado é um modelo de vórtice de Lamb com raio do núcleo igual a σ_0, tal que, $\sigma_0 = \ell$.

Teoricamente, após a difusão primária, a condição de aderência não é mais satisfeita e um passo intermediário envolvendo a solução da equação matricial (3.29) seria necessário.

O instante de tempo $t = 0(\Delta t)$ é encerrado exatamente na posição apresentada na **Figura 4.6**.

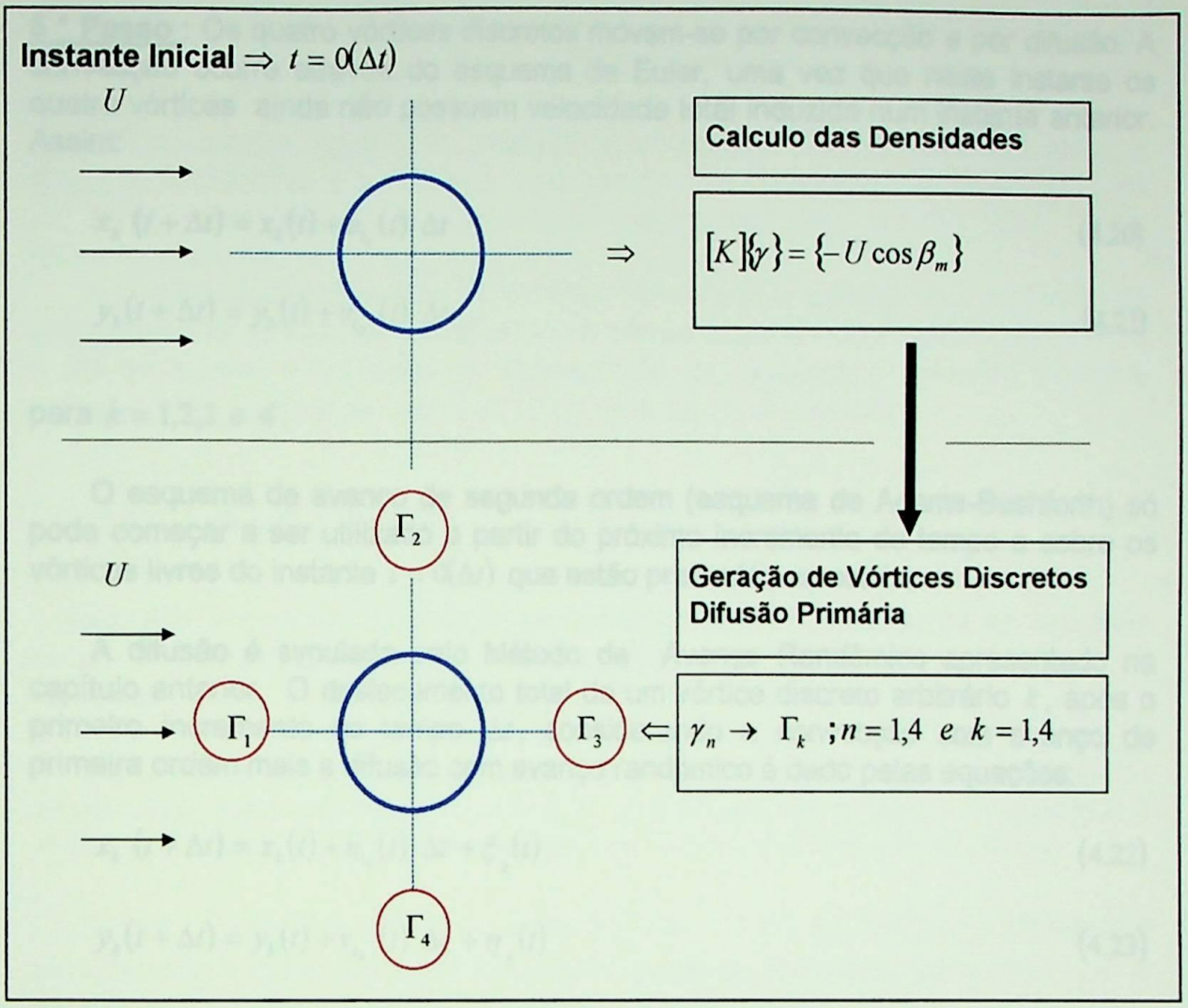


Figura 4.6 - Geração de vorticidade no instante inicial $t = 0(\Delta t)$.

Entrando no instante de tempo $t = 1(\Delta t)$ realizam-se os seguintes passos:

4 ° Passo : Com os quatro primeiros vórtices na posição de nascimento calcula-se a velocidade total induzida em cada vórtice. A velocidade total induzida em um vórtice livre tem contribuição do escoamento incidente, dos outros três vórtices livres (apêndice A4) e do corpo representado pelos quatro painéis com vorticidade distribuída de forma constante (apêndice A5) ;

5 ° Passo : Os quatro vórtices discretos movem-se por convecção e por difusão. A convecção ocorre através do esquema de Euler, uma vez que neste instante os quatro vórtices ainda não possuem velocidade total induzida num instante anterior. Assim:

$$x_k\ (t+\Delta t) = x_k(t) + u_{t_k}(t)\ \Delta t \tag{4.20}$$

$$y_k(t+\Delta t) = y_k(t) + v_{t_k}\ (t)\ \Delta t \tag{4.21}$$

para $k = 1,2,3\ e\ 4$.

O esquema de avanço de segunda ordem (esquema de Adams-Bashforth) só pode começar a ser utilizado a partir do próximo incremento de tempo e sobre os vórtices livres do instante $t = 0(\Delta t)$ que estão presentes na esteira.

A difusão é simulada pelo Método de Avanço Randômico apresentado na capítulo anterior. O deslocamento total de um vórtice discreto arbitrário k, após o primeiro incremento de tempo Δt, considerando a convecção com avanço de primeira ordem mais a difusão com avanço randômico é dado pelas equações:

$$x_k\ (t+\Delta t) = x_k(t) + u_{t_k}(t)\ \Delta t + \xi_k(t) \tag{4.22}$$

$$y_k(t+\Delta t) = y_k(t) + v_{t_k}\ (t)\ \Delta t + \eta_k(t) \tag{4.23}$$

No momento em que os vórtices gerados movem-se para uma nova posição, há uma **quebra do equilíbrio**, isto é, eles violam as condições de contorno;

6 ° Passo : Alguns vórtices discretos podem migrar para o interior do corpo em um dado incremento de tempo, Δt, após os movimentos de convecção e de difusão. Uma alternativa, que não é usada nesta simulação, consiste na reflexão dos vórtices de volta ao escoamento. A alternativa adotada neste trabalho é a eliminação destes vórtices. A eliminação é mais utilizada na literatura, porque pode ser interpretada como um modelo ao processo de destruição de vorticidade, que ocorre nas regiões de gradiente de pressão adverso da superfície de um corpo presente em um escoamento real (CHORIN, 1973).

Os vórtices livres ao ultrapassarem uma distância muito grande a jusante do corpo na direção do eixo x **podem** ser eliminados também. Esta distância deve ser estipulada na programação, por exemplo, quarenta e um raios a partir do centro de um cilindro circular (MUSTTO, 1998). A eliminação a jusante do corpo reduz o tempo computacional e justifica-se, uma vez que os vórtices livres estão distantes do corpo possuindo uma "influência desprezível" no cálculo das forças aerodinâmicas.

A vorticidade perdida com os vórtices eliminados é gerada no incremento de tempo seguinte através, do mecanismo de conservação de circulação do algoritmo. A fim de manter a condição de conservação de circulação pode-se substituir qualquer linha da equação matricial (3.29) pela equação explícita:

$$\sum_{n=1}^{M}\left[\gamma(s_n)\,\Delta s_n\right]_{\Delta t} = \sum\left[\Gamma_{\text{eliminados}}\right]_{t-\Delta t} \tag{4.24}$$

Com esta imposição, a condição de escorregamento nulo deixa de ser satisfeita em um dos pontos da superfície discretizada do corpo, e, um novo sistema de M equações com M incógnitas é formado e deve ser resolvido.

Os vórtices que migram para o interior do corpo devem ser excluídos do escoamento. Para este exemplo, o quarto vórtice deve ser eliminado. Assim que o vórtice é eliminado há uma renumeração dos vórtices que ficaram na esteira;

7 ° Passo : O lado direito da equação matricial (3.29) é **corrigido** e **atualizado** considerando a velocidade total induzida no ponto de controle de cada painel pelos vórtices que não foram eliminados (apêndice 6). Neste exemplo, três vórtices livres induzem velocidade no corpo. Com o lado direito corrigido considera-se que as condições de contorno se restabelecem. No exemplo em questão, tem-se:

$$[K]\{\gamma\} = \left\{-U\cos\beta_m - \sum_{j=1}^{3}\left[u_{m_j}\cos\beta_m + v_{m_j}\sin\beta_m\right]\right\} \tag{4.25}$$

8 ° Passo : Com o lado direito atualizado, resolve-se novamente a equação matricial (3.29) e gera-se quatro novos vórtices discretos. Através do processo de difusão primária, os quatro novos vórtices são colocados na posição de nascimento de vórtices;

9 ° Passo : Calcula-se o valor do coeficiente de arrasto, equação (3.56), e do coeficiente de sustentação, equação (3.57). Na situação deste exemplo, os três vórtices não eliminados do instante $t = 0(\Delta t)$ são utilizados nas duas equações;

Os **passos 5**, **6**, **7**, **8** e **9** são claramente representados na **Figura 4.7**.

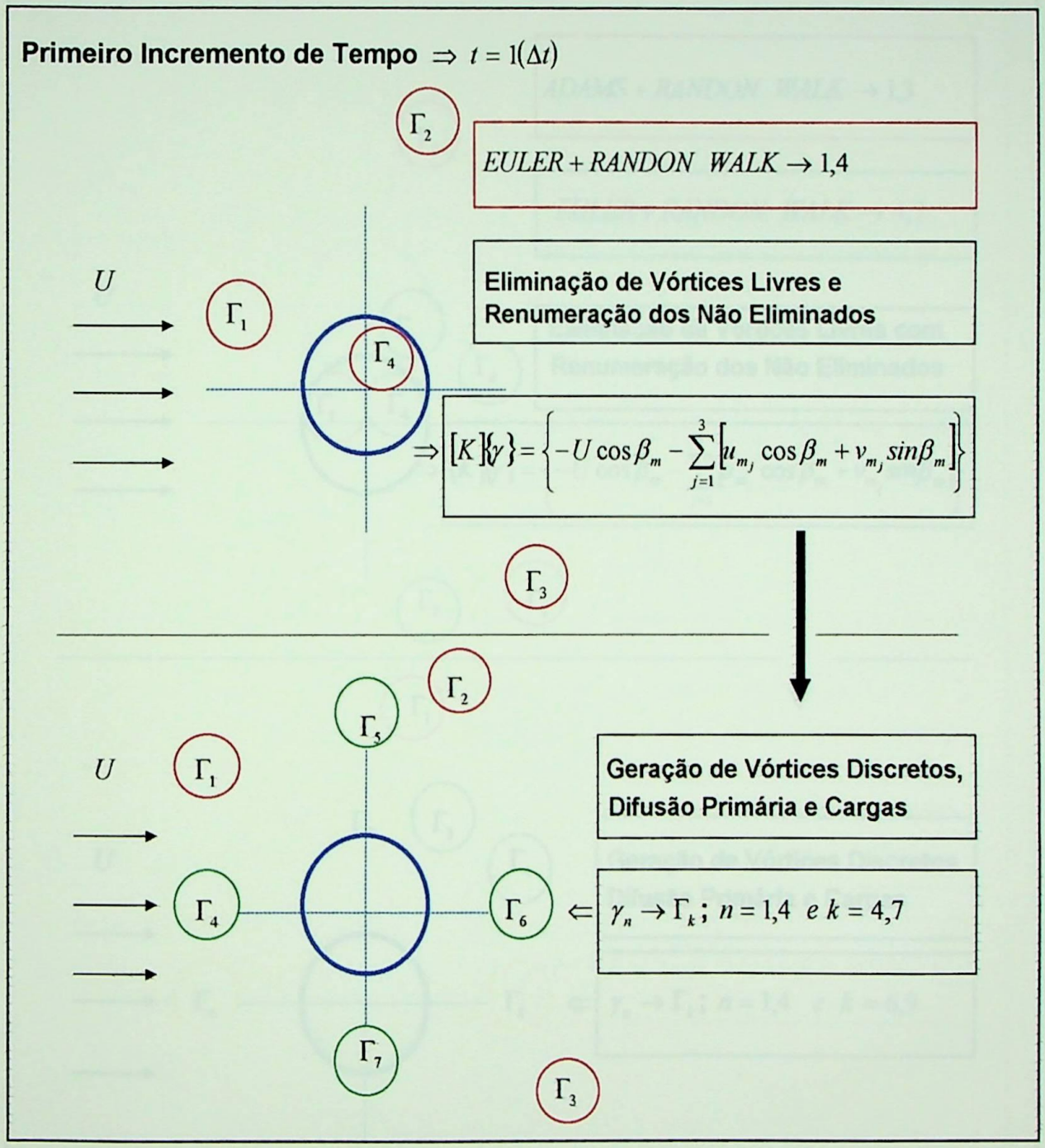


Figura 4.7 - No instante $t = 1(\Delta t)$ os primeiros vórtices discretos gerados deslocam-se por Euler e por avanço randômico e são eliminados ou continuam na nuvem.

Analise na **Figura 4.8** todos os passos que são dados, no instante de tempo $t = 2(\Delta t)$, e na **Figura 4.9** os passos que são dados, no instante de tempo $t = 3(\Delta t)$.

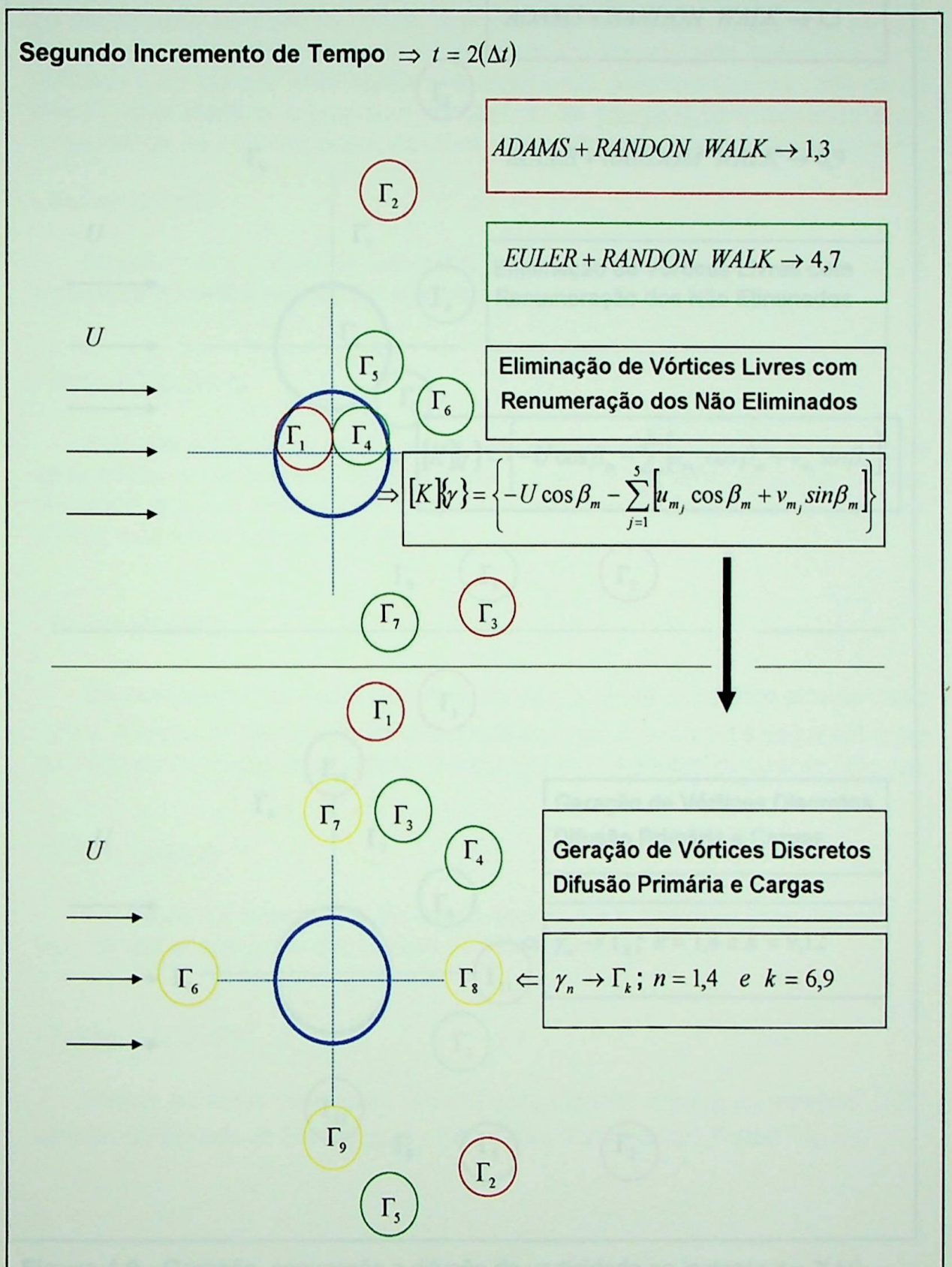


Figura 4.8 - Geração, convecção e difusão de vorticidade no instante $t = 2(\Delta t)$.

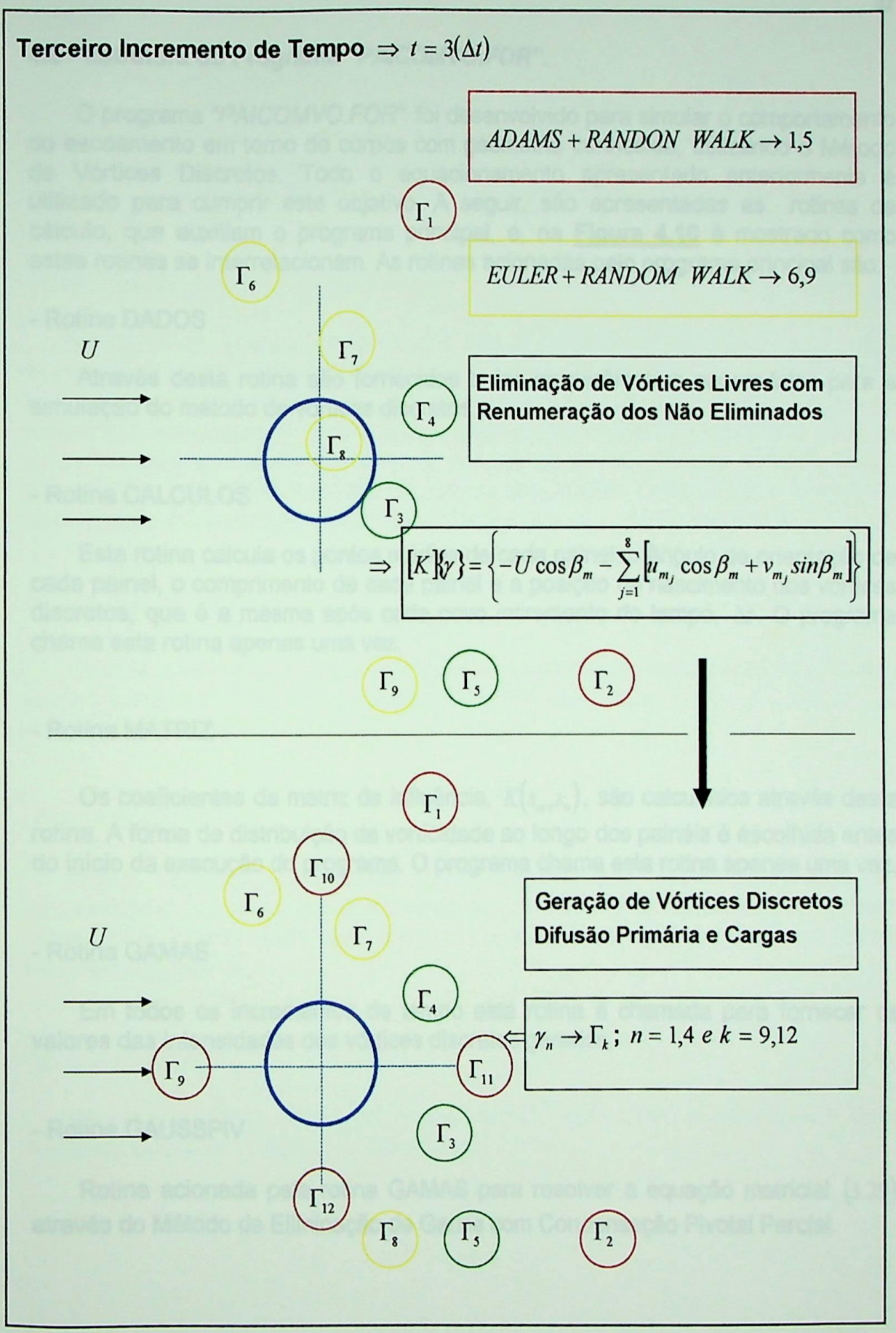


Figura 4.9 - Geração, convecção e difusão de vorticidade no instante $t = 3(\Delta t)$.

4.6 - Estrutura do Programa *"PAICOMVO.FOR"*.

O programa *"PAICOMVO.FOR"* foi desenvolvido para simular o comportamento do escoamento em torno de corpos com geometria conhecida, utilizando o Método de Vórtices Discretos. Todo o equacionamento apresentado anteriormente é utilizado para cumprir este objetivo. A seguir, são apresentadas as rotinas de cálculo, que auxiliam o programa principal, e, na **Figura 4.10** é mostrado como estas rotinas se interrelacionam. As rotinas acionadas pelo programa principal são:

- Rotina DADOS

Através desta rotina são fornecidos todos os parâmetros necessários para a simulação do método de vórtices discretos.

- Rotina CALCULOS

Esta rotina calcula os pontos médios de cada painel, o ângulo de orientação de cada painel, o comprimento de cada painel e a posição de nascimento dos vórtices discretos, que é a mesma após cada novo incremento de tempo, Δt. O programa chama esta rotina apenas uma vez.

- Rotina MATRIZ

Os coeficientes da matriz de influência, $K(s_m, s_n)$, são calculados através desta rotina. A forma de distribuição da vorticidade ao longo dos painéis é escolhida antes do início da execução do programa. O programa chama esta rotina apenas uma vez.

- Rotina GAMAS

Em todos os incrementos de tempo esta rotina é chamada para fornecer os valores das intensidades dos vórtices discretos gerados.

- Rotina GAUSSPIV

Rotina acionada pela rotina GAMAS para resolver a equação matricial (3.29) através do Método de Eliminação de Gauss com Condensação Pivotal Parcial.

- Rotina COMP_UT_VT

Calcula a velocidade total induzida em cada vórtice livre presente na nuvem de vórtices. A velocidade total induzida em cada vórtice livre é a soma das contribuições do escoamento não perturbado, da nuvem de vórtices livres e do corpo discretizado em painéis. Os modelos de vórtices utilizados são do vórtice potencial e do vórtice de Lamb.

- Rotina CONV_DIFU

Simula os movimentos de convecção e de difusão de cada vórtice livre presente na esteira. A seguir, todos os vórtices deslocados são checados e os que entraram dentro do corpo são eliminados. Após esta eliminação, os vórtices que ficaram na esteira são renumerados. Esta rotina finaliza-se, especificando a posição para os novos vórtices que serão gerados, e, imprimindo a posição dos vórtices atuais presentes na esteira (a impressão da posição dos vórtices livres não acontece após cada avanço de tempo por problemas de tempo de execução do programa).

- Rotina COMP_UM_VM

Calcula a velocidade induzida no ponto de controle de cada painel pela nuvem de vórtices livres. Caso seja necessário, a rotina usa subpainéis para o cálculo da velocidade induzida.

- Rotina SUBPAINEIS

Rotina acionada pela rotina COMP_UM_VM para dividir um painel em subpainéis (apêndice A6) e melhorar o cálculo da velocidade induzida pelos vórtices neste painel. O critério adotado, e usado por esta rotina, é o de dividir um painel em cinco subpainéis.

- Rotina FORCAS

Esta rotina finaliza cada avanço de tempo, Δt, calculando e imprimindo o valor dos coeficientes de arrasto e de sustentação.

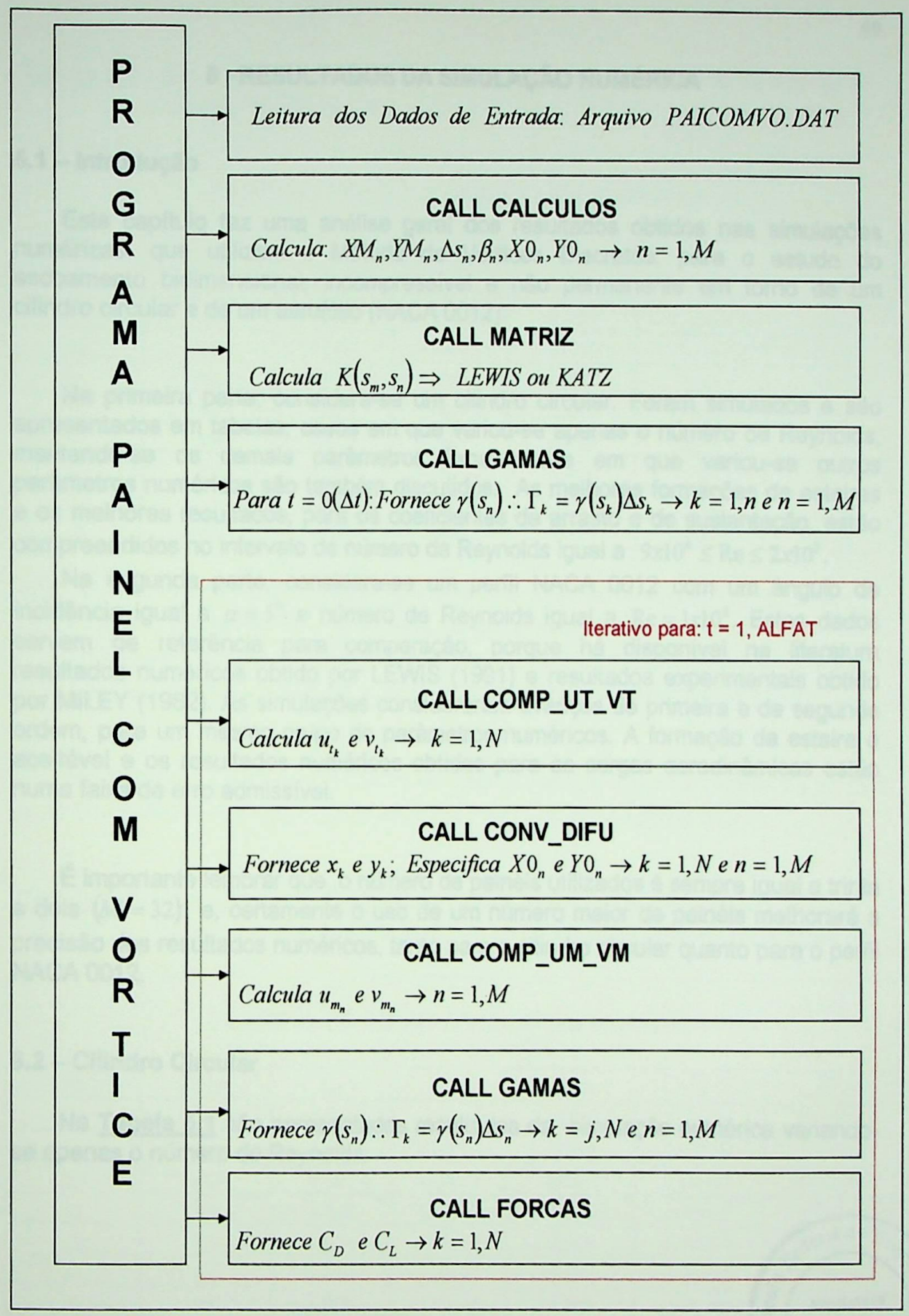


Figura 4.10 - Estrutura do programa *"PAICOMVO.FOR"*.

5 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO NUMÉRICA

5.1 – Introdução

Este capítulo faz uma análise geral dos resultados obtidos nas simulações numéricas, que utilizam o Método de Vórtices Discretos, para o estudo do escoamento bidimensional, incompressível e não permanente em torno de um cilindro circular e de um aerofólio (NACA 0012).

Na primeira parte, considera-se um cilindro circular. Foram simulados e são apresentados em tabelas, casos em que variou-se apenas o número de Reynolds, mantendo-se os demais parâmetros fixos; casos em que variou-se outros parâmetros numéricos são também discutidos. As melhores formações de esteiras e os melhores resultados, para os coeficientes de arrasto e de sustentação, estão compreendidos no intervalo de número de Reynolds igual a $9x10^4 \leq \mathrm{Re} \leq 2x10^5$.

Na segunda parte, considera-se um perfil NACA 0012 com um ângulo de incidência igual a $\alpha = 5^0$ e número de Reynolds igual a $\mathrm{Re} = 1x10^6$. Estes dados servem de referência para comparação, porque há disponível na literatura resultados numéricos obtido por LEWIS (1991) e resultados experimentais obtido por MILEY (1982). As simulações consideraram avanços de primeira e de segunda ordem, para um mesmo grupo de parâmetros numéricos. A formação da esteira é aceitável e os resultados numéricos obtidos para as cargas aerodinâmicas estão numa faixa de erro admissível.

É importante lembrar que, o número de painéis utilizados é sempre igual a trinta e dois $(M = 32)$, e, certamente o uso de um número maior de painéis melhorará a precisão dos resultados numéricos, tanto para o cilindro circular quanto para o perfil NACA 0012.

5.2 – Cilindro Circular

Na **Tabela 5.1** são apresentados resultados da simulação numérica variando-se apenas o número de Reynolds.

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

Tabela 5.1 - Simulações realizadas com um cilindro circular variando-se apenas o número de Reynolds.

CILINDRO CIRCULAR DIVIDIDO EM 32 PAINÉIS						
CASO	*ALFAT*	Δt	Re	$\ell = \sigma_0$	N	$\%N$
02	200	0,1025	1,00E + 4	0,0070	1330	20,78
04	100	0,1025	7,00E + 4	0,0070	1819	56,84
07	100	0,1025	8,00E + 4	0,0070	1618	50,56
11	200	0,1025	9,00E + 4	0,0070	2761	43,14
12	300	0,1025	9,00E + 4	0,0070	3515	36,61
14	200	0,1025	1,00E + 5	0,0070	2393	37,39
15	300	0,1025	1,00E + 5	0,0070	3519	36,66
17	200	0,1025	2,00E + 5	0,0070	1578	24,66
18	300	0,1025	2,00E + 5	0,0070	2364	24,63

NB: $ALFAT$ = número de incrementos de tempo; Δt = incremento de tempo; Re = número de Reynolds; ℓ = posição de nascimento dos vórtices; σ_0 = raio do núcleo do vórtice de Lamb; N = número de vórtices livres presentes na esteira e $\%N$ = porcentagem do número de vórtices livres presentes na esteira.

Na **Tabela 5.2** são apresentados os valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação dos casos simulados e apresentados na **Tabela 5.1**.

Tabela 5.2- Valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação para um cilindro circular considerando-se os casos apresentados na **Tabela 5.1**.

CILINDRO CIRCULAR DIVIDIDO EM 32 PAINÉIS						
CASO	*ALFAT*	Δt	Re	$\ell = \sigma_0$	$\overline{C_D}$	$\overline{C_L}$
02	200	0,1025	1,00E + 4	0,0070	1,096995	0,118553
04	100	0,1025	7,00E + 4	0,0070	0,980484	0,044266
07	100	0,1025	8,00E + 4	0,0070	1,012967	0,047474
11	200	0,1025	9,00E + 4	0,0070	1,079227	0,058556
12	300	0,1025	9,00E + 4	0,0070	1,012456	0,053544
14	200	0,1025	1,00E + 5	0,0070	1,105377	0,048707
15	300	0,1025	1,00E + 5	0,0070	1,117442	0,050242
17	200	0,1025	2,00E + 5	0,0070	1,075185	0,060646
18	300	0,1025	2,00E + 5	0,0070	1,107598	0,037680

Na **Tabela 5.3** são vistos outros casos simulados, em que variou-se o número de Reynolds, o incremento de tempo e o valor do raio do núcleo do vórtice de lamb. O aumento do incremento de tempo, muito além do valor de referência $(\Delta t = 0{,}1025)$, implica na eliminação de muitos vórtices; os resultados numéricos ficam ruins. Uma solução, para melhorar estes resultados, pode ser a substituição do processo de eliminação de vórtices pelo processo de reflexão. A influência sobre os resultados numéricos, da variação do raio do núcleo do vórtice e da posição de nascimento dos vórtices, necessitam, ainda, de maiores investigações.

Tabela 5.3 - Outras simulações realizadas com um cilindro circular variando-se outros parâmetros numéricos: Δt, Re e $\ell = \sigma_0$.

CILINDRO CIRCULAR DIVIDIDO EM 32 PAINÉIS						
CASO	*ALFAT*	Δt	Re	$\ell = \sigma_0$	N	$\%N$
19	360	0,1025	$1{,}00E+5$	0,0064	3581	31,09
20	120	0,1025	$8{,}00E+4$	0,0050	1803	46,85
21	300	0,1025	$3{,}00E+5$	0,0050	1942	20,23
22	350	0,1025	$1{,}00E+6$	0,0050	2172	19,39
23	336	0,1100	$2{,}00E+5$	0,0050	1936	18,01
24	302	0,1225	$1{,}00E+4$	0,0054	1879	19,44
25	261	0,1415	$1{,}00E+4$	0,0064	1495	17,90
26	246	0,1500	$1{,}00E+5$	0,0064	1182	15,02
27	800	0,1525	$1{,}50E+5$	0,0062	1717	6,71

Tabela 5.4 - Valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação para um cilindro circular considerando-se os casos apresentados na **Tabela 5.3**.

CILINDRO CIRCULAR DIVIDIDO EM 32 PAINÉIS						
CASO	*ALFAT*	Δt	Re	$\ell = \sigma_0$	$\overline{C_D}$	$\overline{C_L}$
19	360	0,1025	$1{,}00E+5$	0,0064	1,132457	0,040049
20	120	0,1025	$8{,}00E+4$	0,0050	1,042183	0,043039
21	300	0,1025	$3{,}00E+5$	0,0050	1,132183	0,099420
22	350	0,1025	$1{,}00E+6$	0,0050	1,010629	0,022387
23	336	0,1100	$2{,}00E+5$	0,0050	1,030854	0,104269
24	302	0,1225	$1{,}00E+4$	0,0054	1,114669	0,125501
25	261	0,1415	$1{,}00E+4$	0,0064	1,104362	0,191947
26	246	0,1500	$1{,}00E+5$	0,0064	1,143187	0,070936
27	800	0,1525	$1{,}50E+5$	0,0062	1,067272	0,070936

Na **Tabela 5.5** é feita uma comparação dos resultados numéricos do coeficiente médio de arrasto, obtidos na simulação atual, com outros resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura. Dentro de uma determinada faixa de número de Reynolds há uma boa concordância dos resultados selecionados com aqueles disponíveis na literatura.

Tabela 5.5 - Comparação de valores numéricos e experimentais de $\overline{C_D} \times \mathrm{Re}$ para um cilindro circular com os resultados da simulação numérica atual.

CILINDRO CIRCULAR						
$\overline{C_D}$						
CASO	Re	*EXP.*	*OGAMI*[•]	*CHORIN*[••]	*MALTA*[•••]	*ATUAL*
02	$1{,}00E+4$	1,10[Δ]	0,84	0,87	1,30	1,10
07	$8{,}00E+4$	1,20	-	-	1,24	1,01
11	$9{,}00E+4$	1,20	-	-	1,27	1,08
15	$1{,}00E+5$	1,20[Δ]	1,07	0,29	1,215	1,12
18	$2{,}00E+5$	1,14	-	-	1,09	1,11

Os resultados experimentais da **Tabela 5.5** , exceto as citações abaixo, foram obtidos por Wieselberger em 1921 e apresentados por ROSKO (1961).

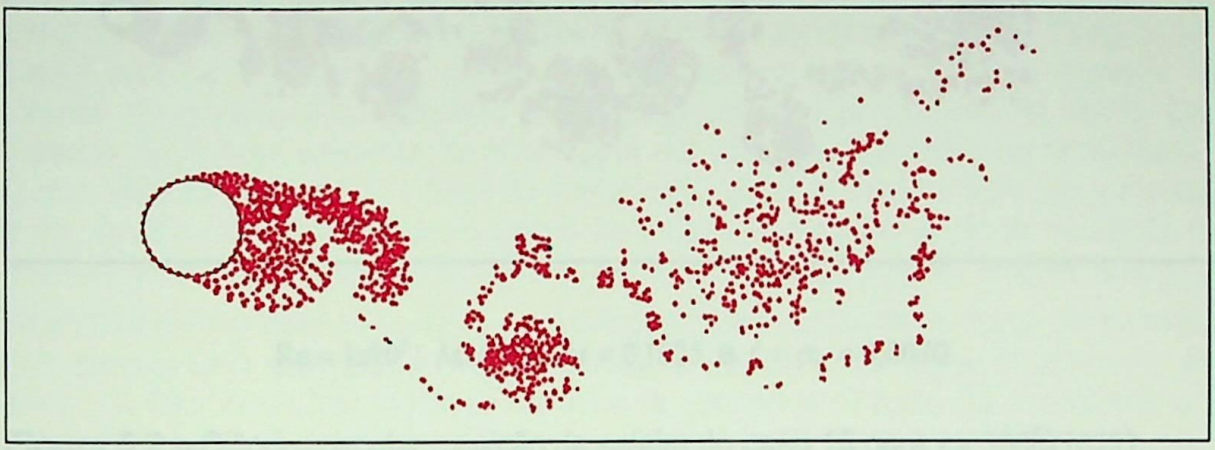
[Δ] : BLEVINS (1984)

[•] : resultados numéricos obtidos por OGAMI e AYANO (1995)

[••] : CHORIN (1973)

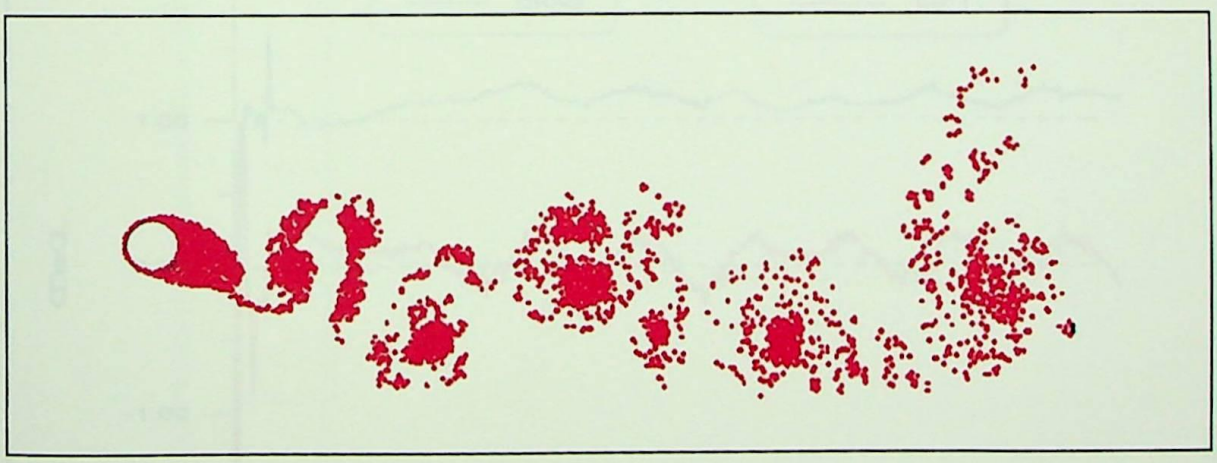
[•••] : resultados numéricos obtidos por MALTA (1998).

Os **casos 13** (**Figura 5.1**), **14** (**Figura 5.2**) e **15** (**Figura 5.3**) mostram a posição de uma mesma esteira, formada na superfície de um cilindro circular, com cem, duzentos e trezentos avanços de segunda ordem no tempo, respectivamente. Nesta situação o valor do número de Reynolds corresponde a $\mathrm{Re} = 1x10^5$.



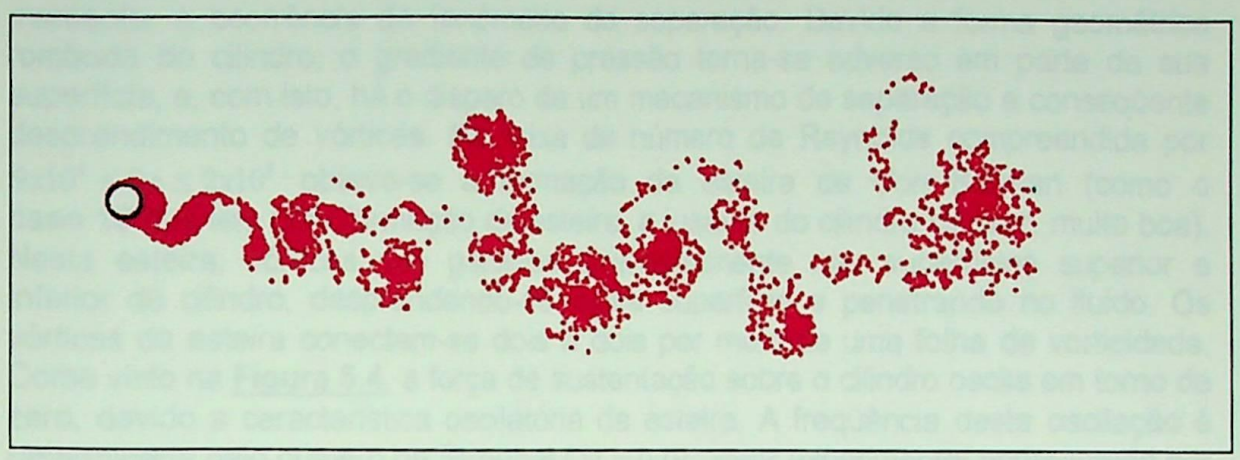
$\mathrm{Re} = 1x10^5$; $M = 32$; $\Delta t = 0{,}1025$ e $\ell = \sigma_0 = 0{,}0070$

Figura 5.1 – Cilindro circular: posição da esteira do **caso 13** para $t = 100(0{,}1025)$.



$\mathrm{Re} = 1x10^5$; $M = 32$; $\Delta t = 0{,}1025$ e $\ell = \sigma_0 = 0{,}0070$

Figura 5.2 – Cilindro circular: posição da esteira do **caso 14** para $t = 200(0{,}1025)$.



$\mathrm{Re} = 1x10^5$; $M = 32$; $\Delta t = 0{,}1025$ e $\ell = \sigma_0 = 0{,}0070$

Figura 5.3 – Cilindro circular: posição da esteira do **caso 15** para $t = 300(0{,}1025)$.

A evolução dos coeficientes de arrasto e de sustentação até a posição de trezentos avanços no tempo da esteira do **caso 15** é apresentada na **Figura 5.4**. A curva de C_D oscila em torno do seu valor médio $\overline{C_D} = 1{,}12$ e a curva de C_L oscila em torno de zero.

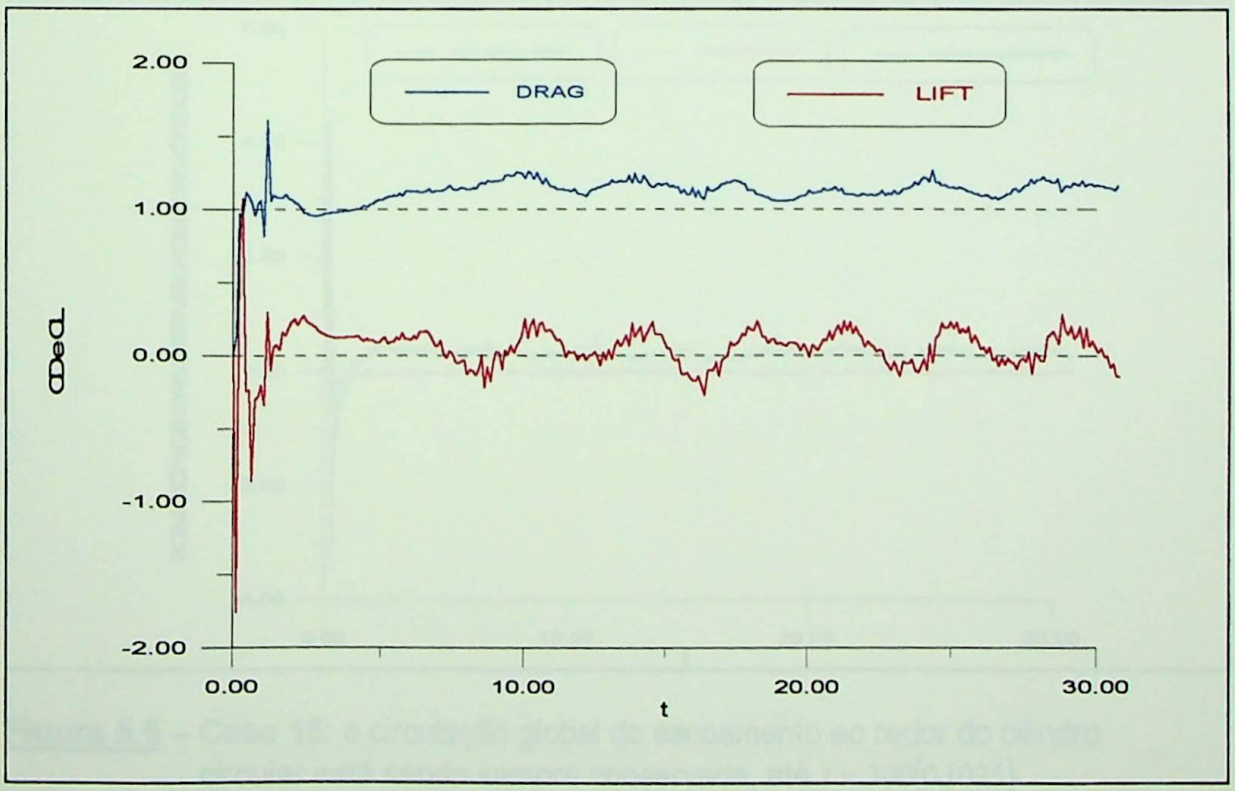


Figura 5.4 – Cilindro circular: evolução de C_D e C_L para o **caso 15** até $t = 300(0{,}1025)$.

O escoamento em torno de um cilindro circular possui, como característica marcante, a ocorrência do fenômeno da separação. Devido a forma geométrica rombuda do cilindro, o gradiente de pressão torna-se adverso em parte da sua superfície, e, com isto, há o disparo de um mecanismo de separação e conseqüente desprendimento de vórtices. Na faixa de número de Reynolds compreendida por $9x10^4 \leq \mathrm{Re} \leq 2x10^5$ obteve-se a formação da esteira de Von Karman (como o **caso 15** que tem uma formação de esteira, a jusante do cilindro circular, muito boa). Nesta esteira, vórtices são gerados alternadamente nas superfícies superior e inferior do cilindro, desprendendo-se desta superfície e penetrando no fluido. Os vórtices da esteira conectam-se dois a dois por meio de uma folha de vorticidade. Como visto na **Figura 5.4**, a força de sustentação sobre o cilindro oscila em torno de zero, devido a característica oscilatória da esteira. A freqüência desta oscilação é determinada pelo número de Strouhal ($St = 0{,}19$: valor experimental apresentado por BLEVINS (1984) com $\mathrm{Re} = 1x10^5$). A oscilação reflete, também, na força de arrasto, que possui uma evolução no tempo oscilatória em torno de um valor diferente de zero. A freqüência de oscilação da força de arrasto é o dobro da freqüência de oscilação da força de sustentação, porque o valor da força de arrasto atinge o seu valor máximo duas vezes a cada ciclo da força de sustentação. Os resultados disponíveis na literatura representam médias temporais, tanto para as forças aerodinâmicas quanto para o coeficiente de pressão.

Na **Figura 5.5** pode-se notar que a circulação global no escoamento do **caso 15** está sendo sempre conservada.

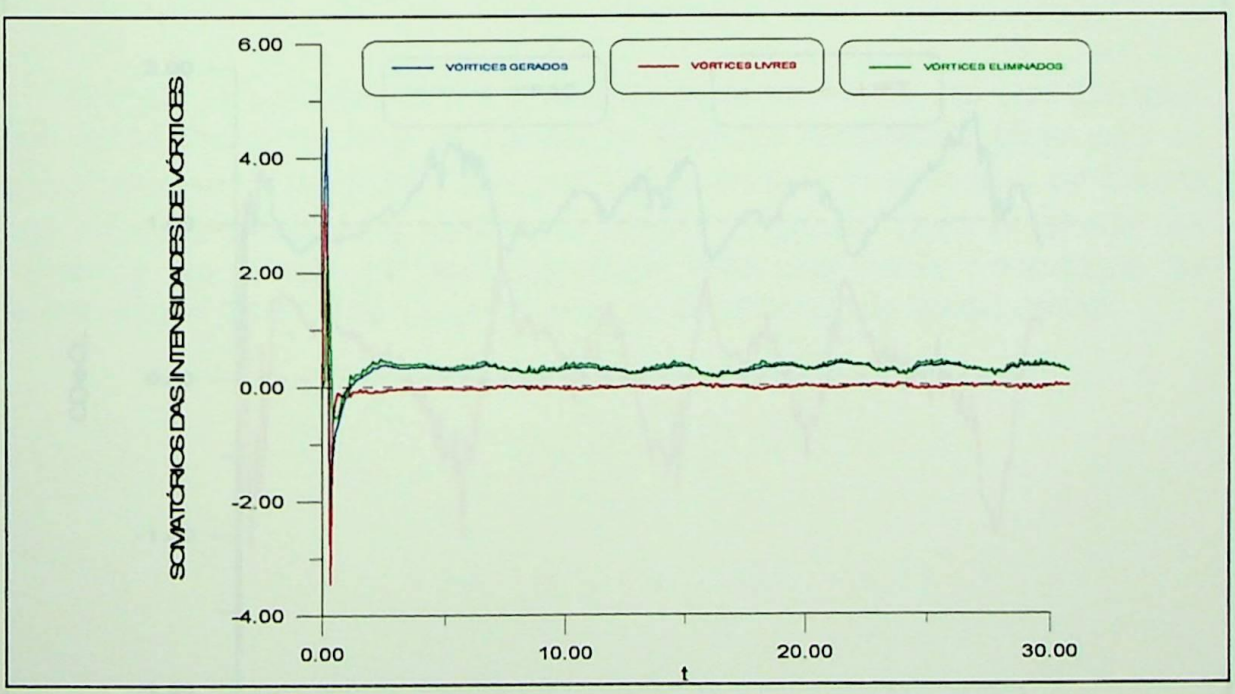


Figura 5.5 – **Caso 15**: a circulação global do escoamento ao redor do cilindro circular está sendo sempre conservada, até $t = 300(0{,}1025)$.

As três próximas figuras mostram, respectivamente, a posição da esteira do **caso 18** (após trezentos avanços de segunda ordem no tempo), a evolução dos coeficientes de arrasto e de sustentação e que a circulação global está sendo sempre conservada.

$\mathrm{Re} = 2x10^5$; $M = 32$; $\Delta t = 0{,}1025$ e $\ell = \sigma_0 = 0{,}0070$

Figura 5.6 – Cilindro circular: posição da esteira do **caso 18** para $t = 300(0{,}1025)$.

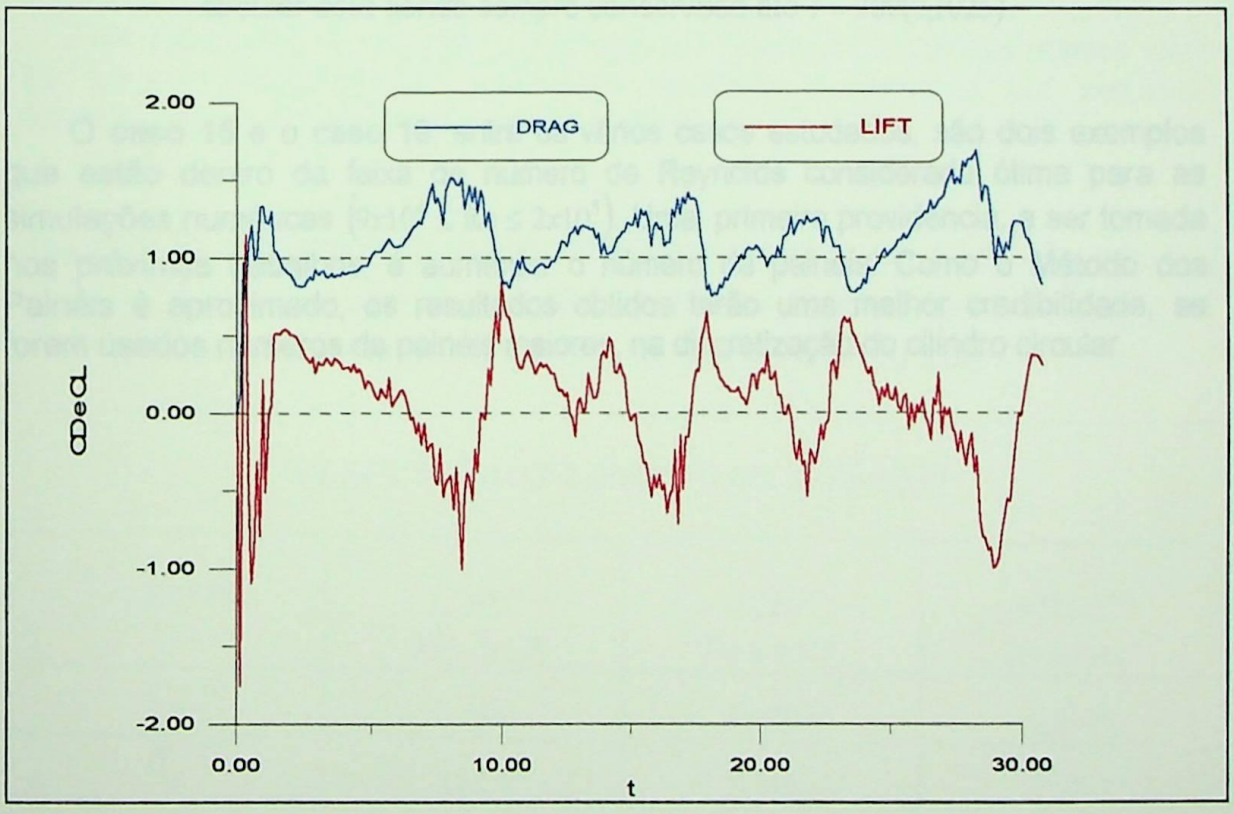


Figura 5.7 – Cilindro circular: evolução de C_D e C_L para o **caso 18** até $t = 300(0{,}1025)$.

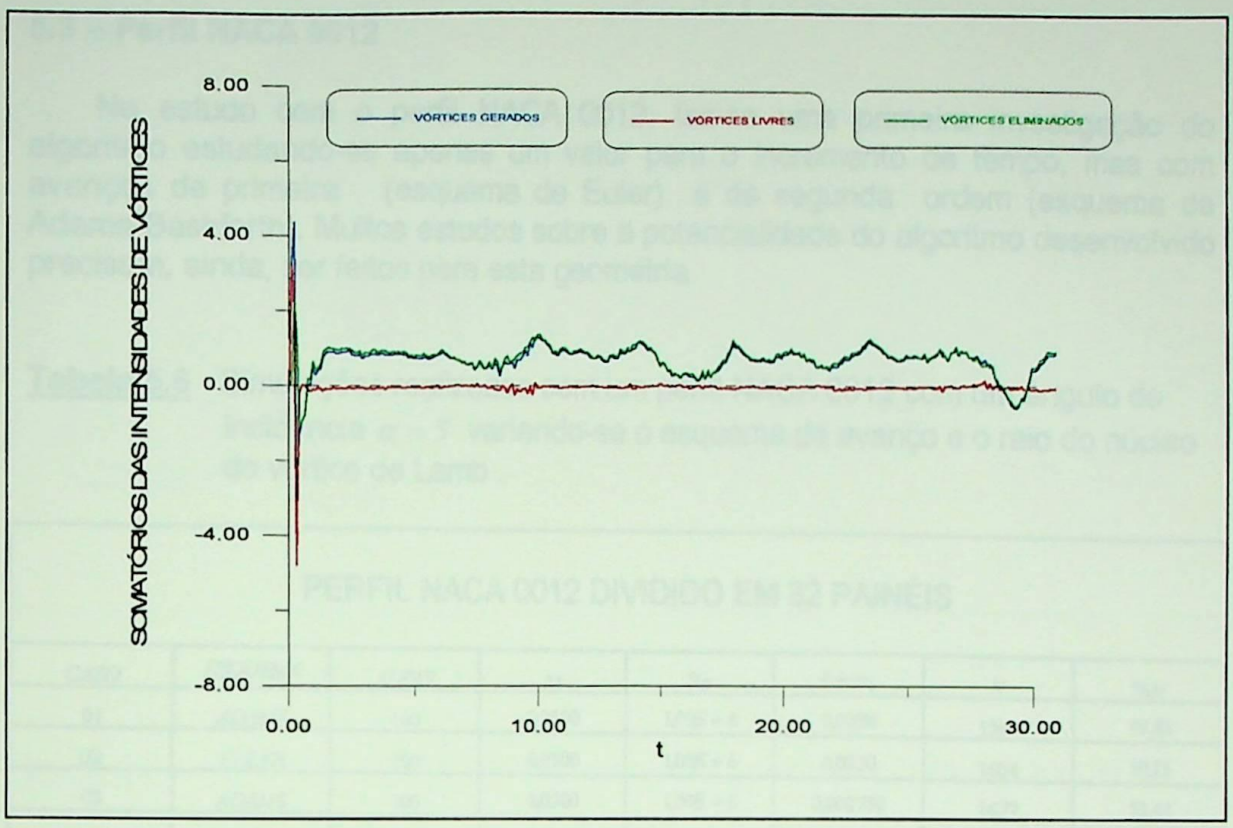


Figura 5.8 – **Caso 18**: a circulação global do escoamento ao redor do cilindro circular está sendo sempre conservada até $t = 300(0{,}1025)$.

O **caso 15** e o **caso 18**, entre os vários casos estudados, são dois exemplos que estão dentro da faixa de número de Reynolds considerada ótima para as simulações numéricas $\left(9x10^4 \leq \mathrm{Re} \leq 2x10^5\right)$. Uma primeira providência, a ser tomada nos próximos trabalhos, é aumentar o número de painéis. Como o Método dos Painéis é aproximado, os resultados obtidos terão uma melhor credibilidade, se forem usados números de painéis maiores, na discretização do cilindro circular.

5.3 – Perfil NACA 0012

No estudo com o perfil NACA 0012, faz-se uma primeira investigação do algoritmo estudando-se apenas um valor para o incremento de tempo, mas com avanços de primeira (esquema de Euler) e de segunda ordem (esquema de Adams-Bashforth). Muitos estudos sobre a potencialidade do algoritmo desenvolvido precisam, ainda, ser feitos para esta geometria.

Tabela 5.6 - Simulações realizadas com um perfil NACA 0012 com um ângulo de incidência $\alpha = 5^{\circ}$ variando-se o esquema de avanço e o raio do núcleo do vórtice de Lamb .

PERFIL NACA 0012 DIVIDIDO EM 32 PAINÉIS							
CASO	*ESQUEMA*	*ALFAT*	Δt	Re	$\ell = \sigma_0$	*N*	%*N*
01	*ADAMS*	100	0,0500	1,00E + 6	0,0030	1594	49,81
02	*EULER*	100	0,0500	1,00E + 6	0,0030	1604	50,13
03	*ADAMS*	100	0,0500	1,00E + 6	0,002750	1677	52,41
04	*EULER*	100	0,0500	1,00E + 6	0,02750	1689	52,78

Na **Tabela 5.7** faz-se uma comparação dos resultados numéricos obtidos, para as cargas aerodinâmicas, com outro resultado numérico e um resultado experimental, que estavam disponíveis na literatura.

Tabela 5.7 - Comparação de valores numéricos e experimentais de $\overline{C_D} \times \mathrm{Re}$ e de $\overline{C_L} \times \mathrm{Re}$, para um perfil NACA 0012 com um ângulo de incidência $\alpha = 5^{\circ}$, com os resultados da simulação numérica atual.

PERFIL NACA 0012 DIVIDIDO EM 32 PAINÉIS			
Coeficiente	*LEWIS** Re = $1x10^6$	*MILEY*** Re = $1x10^6$	*ATUAL**** Re = $1x10^6$
$\overline{C_D}$	0,0030	0,0090	0,0923
$\overline{C_L}$	0,5109	0,5400	0,6787

* : resultado numérico obtido por LEWIS (1991), que utiliza cinqüenta painéis

** : resultado experimental obtido por MILEY (1982)

*** : resultado numérico da simulação atual (**caso 01** da **Tabela5.6**).

A posição da esteira do **caso 01**, após cem avanços de segunda ordem, pode ser vista na **Figura 5.9**.

$\mathrm{Re} = 1x10^6$; $M = 32$; $\Delta t = 0{,}0500$; $\ell = \sigma_0 = 0{,}0030$ e $\alpha = 5^0$

Figura 5.9 – Perfil NACA 0012: posição da esteira do **caso 01** para $t = 100(0{,}0500)$.

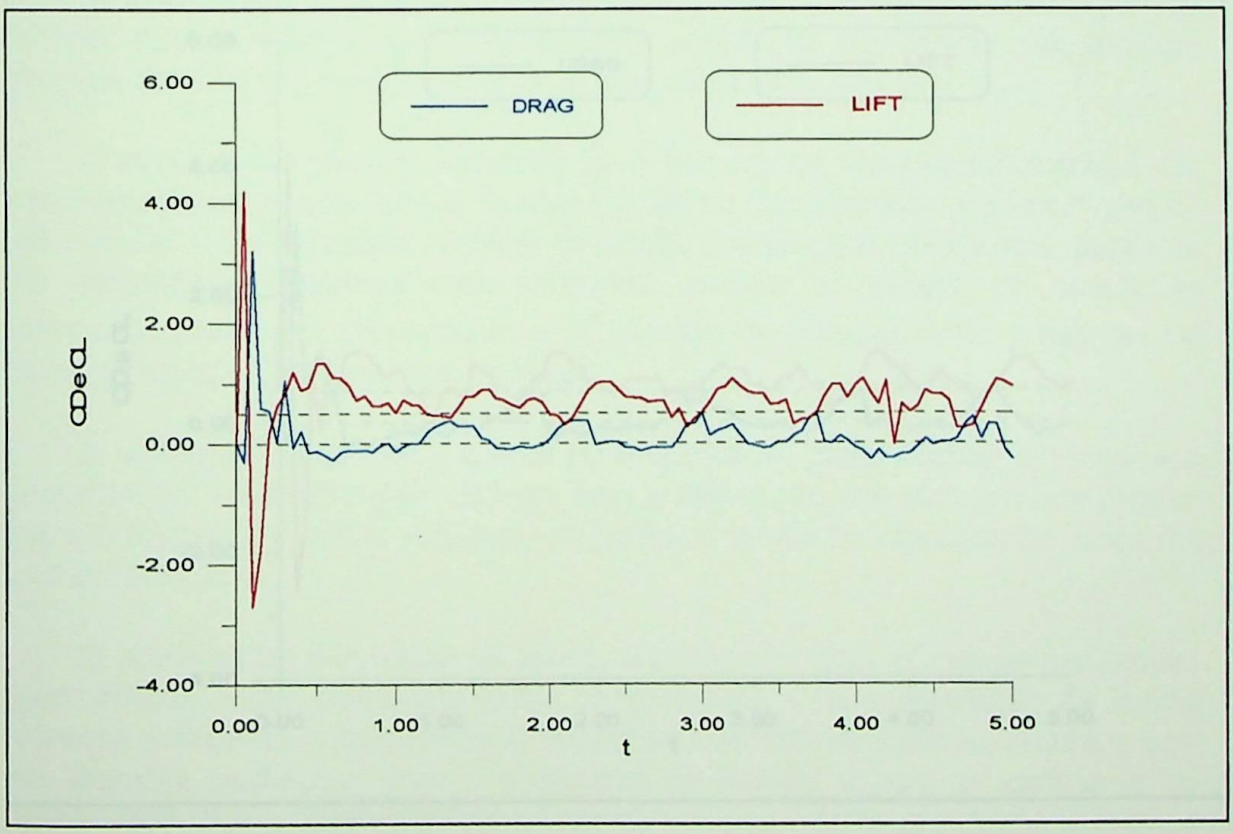
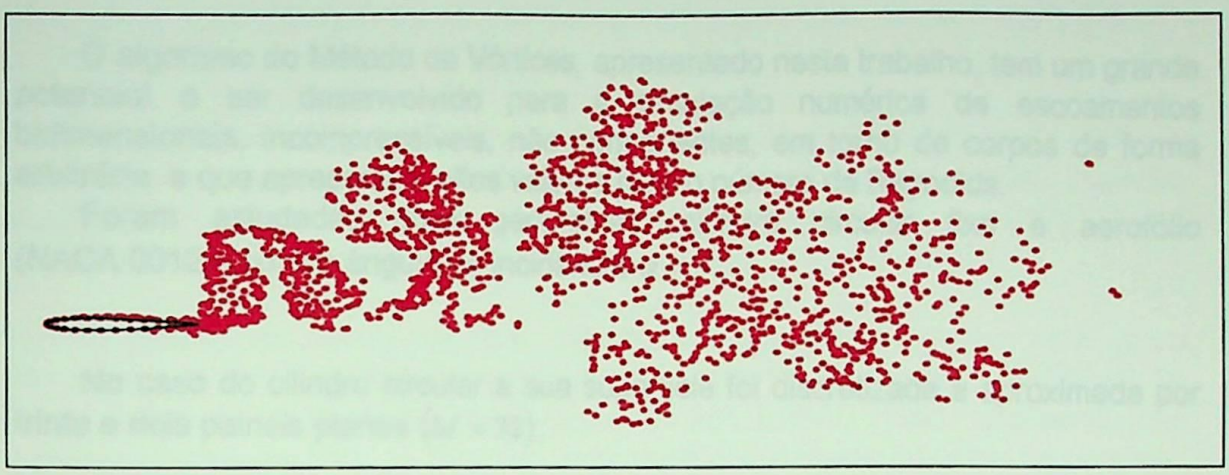


Figura 5.10 – Perfil NACA 0012: evolução de C_D e C_L para o **caso 01** até $t = 100(0{,}0500)$.

Na **Figura 5.11** tem-se a posição da esteira do **caso 02**, após cem avanços de primeira ordem, e, na **Figura 5.12** a evolução dos coeficientes de arrasto e de sustentação.



$\mathrm{Re} = 1x10^6$; $M = 32$; $\Delta t = 0{,}0500$; $\ell = \sigma_0 = 0{,}0030$ e $\alpha = 5^0$

Figura 5.11 – Perfil NACA 0012: posição da esteira do **caso 02** para $t = 100(0{,}0500)$.

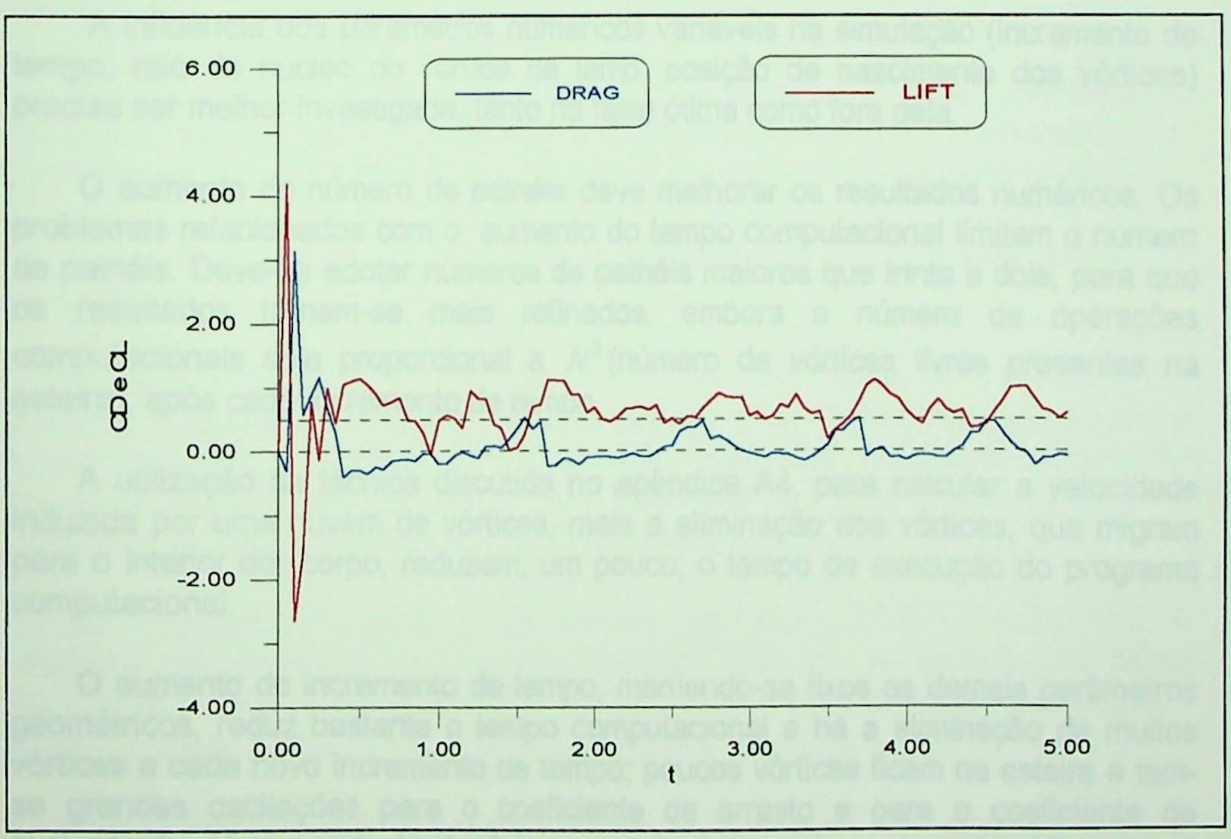


Figura 5.12 – Perfil NACA 0012: evolução de C_D e C_L para o **caso 02** até $t = 100(0{,}0050)$.

6 - CONCLUSÕES

O algoritmo do Método de Vórtices, apresentado neste trabalho, tem um grande potencial a ser desenvolvido para a simulação numérica de escoamentos bidimensionais, incompressíveis, não permanentes, em torno de corpos de forma arbitrária e que apresentam altos valores para o número de Reynolds.

Foram estudadas duas geometrias: cilindro circular fixo e aerofólio (NACA 0012) com um ângulo de incidência $\alpha = 5°$.

No caso do cilindro circular a sua superfície foi discretizada e aproximada por trinta e dois painéis planos $(M = 32)$.

A variação do número de Reynolds permitiu indicar uma faixa ótima $\left(9x10^4 \leq Re \leq 2x10^5\right)$ para as simulações numéricas. Nesta faixa ótima foram encontradas as melhores formações de esteiras e resultados médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação bastante compatíveis com outros resultados numéricos e resultados experimentais disponíveis na literatura.

A influência dos parâmetros numéricos variáveis na simulação (incremento de tempo, raio do núcleo do vórtice de lamb, posição de nascimento dos vórtices) precisa ser melhor investigada, tanto na faixa ótima como fora dela.

O aumento do número de painéis deve melhorar os resultados numéricos. Os problemas relacionados com o aumento do tempo computacional limitam o número de painéis. Deve-se adotar números de painéis maiores que trinta e dois, para que os resultados tornem-se mais refinados, embora o número de operações computacionais seja proporcional a N^2 (número de vórtices livres presentes na esteira), após cada incremento de tempo.

A utilização da técnica discutida no apêndice A4, para calcular a velocidade induzida por uma nuvem de vórtices, mais a eliminação dos vórtices, que migram para o interior do corpo, reduzem, um pouco, o tempo de execução do programa computacional.

O aumento do incremento de tempo, mantendo-se fixos os demais parâmetros geométricos, reduz bastante o tempo computacional e há a eliminação de muitos vórtices a cada novo incremento de tempo; poucos vórtices ficam na esteira e tem-se grandes oscilações para o coeficiente de arrasto e para o coeficiente de sustentação. Uma possível solução, para melhorar os valores destes coeficientes, é substituir o processo de eliminação de vórtices pelo processo de reflexão.

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

Para o cilindro circular, que teve a sua superfície aproximada por trinta de dois painéis planos de comprimentos iguais, obteve-se boas formações de esteiras, na faixa ótima, considerando-se painéis com a vorticidade toda concentrada no ponto de controle (apêndice A2).

O esquema de avanço de primeira ordem (esquema de Euler) foi testado para o deslocamento dos vórtices gerados próximos a superfície do cilindro, mas os resultados foram muito ruins. O esquema de avanço de segunda ordem (esquema de Adams-Bashforth) melhorou sensivelmente os resultados.

No cálculo da velocidade total induzida em um vórtice discreto pelo corpo (representado pelos painéis planos) deve-se considerar a vorticidade distribuída de forma constante ao longo do painel (apêndice A5). LEWIS (1991) apresenta uma formulação considerando painéis com vorticidade concentrada no ponto de controle; esta formulação foi implementada obtendo-se maus resultados.

O perfil NACA 0012, com um ângulo de incidência $\alpha = 5^{\circ}$, teve a sua superfície discretizada e aproximada por trinta e dois painéis planos $(M = 32)$.

O esquema de Euler e o esquema de Adams-Bashforth apresentaram resultados numéricos muito parecidos; a vantagem do esquema de segunda ordem está na possibilidade de se utilizar um valor maior para o incremento de tempo.

É preciso definir uma maneira para se estimar o valor do incremento de tempo a ser adotado.

O perfil NACA 0012 foi dividido em trinta de dois painéis com comprimentos menores, no bordo de ataque e no bordo de fuga, e com comprimentos maiores na região central do aerofólio. Nesta situação, obteve-se formações de esteiras aceitáveis, considerando-se painéis com densidade de vórtice distribuída de forma constante ao longo do seu comprimento (apêndice A3).

Na simulação numérica do escoamento ao redor do perfil NACA 0012, a determinação da faixa de valores adequada que os parâmetros numéricos (M, Δt, Re, ℓ e σ_0) podem assumir, para que representem o escoamento real com exatidão, ainda necessita de mais investigações e de muitos testes.

Os resultados das simulações numéricas ao serem comparados com o resultado numérico apresentado por LEWIS (1991) e com o resultado experimental apresentado por MILEY (1982) podem ser considerados aceitáveis para $\overline{C_L}$. O valor de $\overline{C_D}$, no entanto, foi superestimado e necessita de algum esforço adicional; este resultado, todavia, era esperado uma vez que o aerofólio é um corpo esbelto.

O algoritmo desenvolvido, neste trabalho, precisa ser melhorado. São várias as sugestões para os futuros trabalhos.

Uma primeira sugestão, e que precisa ser feita rapidamente, é repetir os resultados obtidos neste trabalho usando-se números de painéis maiores que trinta e dois $(M = 32)$.

Outra mudança a ser feita no algoritmo atual, que já está sendo implementada no programa desenvolvido, é o cálculo do coeficiente de pressão. Este cálculo baseia-se na decomposição das equações de Navier-Stokes em três operadores: convectivo, difusivo e de pressão. Os dois primeiros foram abordados neste trabalho através da equação do transporte de vorticidade. O terceiro operador permitirá a determinação do campo de pressões (MALTA, 1998).

Os resultados obtidos com o esquema de Adams-Bashforth podem ser comparados com outro esquema de avanço de segunda ordem: Runge-Kutta (MALTA, 1998).

O tempo computacional é demorado na etapa convectiva. Com o intuito de reduzir, um pouco, este consumo de tempo computacional, pode-se utilizar o Método de Expansão em Multipolos no cálculo da velocidade induzida por uma nuvem de vórtices (GUEDES et al., 1998).

O Método de Avanço Randômico, que simula os efeitos da viscosidade, pode ser comparado, por exemplo, com o Método da Velocidade de Difusão (OGAMI e AKAMATSU, 1991), de modo a identificar-se o método mais adequado na simulação de escoamentos com baixos números de Reynolds.

A redução do tempo computacional da etapa convectiva e o uso de um algoritmo mais abrangente para a etapa difusiva, permitirão que o algoritmo atual, melhorado, seja aplicado numa faixa de número de Reynolds maior.

No algoritmo apresentado deve-se implementar de um Modelo de Turbulência Sub-Malha do Tipo Função de Estrutura de Velocidade de Ordem 2 (LESIEUR, 1993).

Outras geometrias podem ser estudadas e os resultados obtidos devem ser comparados com outros resultados numéricos e outros resultados experimentais disponíveis na literatura.

APÊNDICE A1 - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE VORTICIDADE PARA ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS

Para a obtenção da equação de transporte de vorticidade parte-se da equação (3.5):

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla^* p^* + \upsilon \, \nabla^{*2} \mathbf{u}^*$$

A seguir considera-se a seguinte identidade:

$$\mathbf{u}^* \times \left(\nabla^* \times \mathbf{u}^*\right) = \frac{1}{2} \nabla^* \left(\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^*\right) - \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* \qquad (A1.1)$$

Isolando a segunda parcela do segundo membro da identidade $(A1.1)$ e substituindo-a na segunda parcela do primeiro membro da equação (3.5), vem:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \nabla^* \left(\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^*\right) - \mathbf{u}^* \times \left(\nabla^* \times \mathbf{u}^*\right) = -\frac{1}{\rho} \nabla^* p^* + \upsilon \, \nabla^{*2} \mathbf{u}^*$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \mathbf{u}^* \times \left(\nabla^* \times \mathbf{u}^*\right) = -\frac{1}{\rho} \nabla^* p^* - \frac{1}{2} \nabla^* \left(\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^*\right) + \upsilon \, \nabla^{*2} \mathbf{u}^*$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \mathbf{u}^* \times \mathbf{w}^* = -\nabla^* \left(\frac{p^*}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^*}{2} \right) + \upsilon \, \nabla^{*2} \mathbf{u}^*$$

Aplicando o operador rotacional membro a membro na equação acima, tem-se:

$$\nabla^* \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} \right) - \nabla^* \times \left(\mathbf{u}^* \times \mathbf{w}^*\right) = -\nabla^* \times \left[\nabla^* \left(\frac{p^*}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^*}{2} \right) \right] + \nabla^* \times \left(\upsilon \, \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial t^*} - \nabla^* \times \left(\mathbf{u}^* \times \mathbf{w}^*\right) = 0 + \upsilon \, \nabla^{*2} \mathbf{w}^*$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial t^*} - \nabla^* \times \left(\mathbf{u}^* \times \mathbf{w}^*\right) = \upsilon \, \nabla^{*2} \mathbf{w}^* \qquad (A1.2)$$

Recorrendo à notação indicial, mostra-se que:

$$\nabla^* \times \left(\mathbf{u}^* \times \mathbf{w}^*\right) = \mathbf{e_l} \frac{\partial}{\partial x_l^*} \times \varepsilon_{ijk} \mathbf{e_k} \left(u^*_i w^*_j\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_l^*} u^*_i w^*_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lkm} \mathbf{e}_m$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_l^*} u^*_i w^*_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mlk} \mathbf{e}_m$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_l^*} u^*_i w^*_j \mathbf{e}_m \left(\delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_l^*} u^*_i w^*_j \mathbf{e}_m \delta_{im}\delta_{jl} - \frac{\partial}{\partial x_l^*} u^*_i w^*_j \mathbf{e}_m \delta_{il}\delta_{jm}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_l^*} u^*_i w^*_j \mathbf{e}_i \delta_{jl} - \frac{\partial}{\partial x^*_l} u^*_i w^*_j \mathbf{e}_j \delta_{il}$$

$$= w^*_l \frac{\partial}{\partial x^*_l} u^*_i \mathbf{e}_i - u^*_l \frac{\partial}{\partial x^*_l} w^*_j \mathbf{e}_j$$

$$= w^*_l \mathbf{e}_l . \mathbf{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l^*} u^*_i \mathbf{e}_i - u^*_l \mathbf{e}_l . \mathbf{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l^*} w^*_j \mathbf{e}_j$$

$$\nabla^* \times \left(\mathbf{u}^* \times \mathbf{w}^*\right) = \mathbf{w}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{w}^* \qquad (A1.3)$$

Substituindo a equação $(A1.3)$ na equação $(A1.2)$, vem:

$$\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial t^*} - \mathbf{w}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* \nabla^* \mathbf{w}^* = \upsilon \nabla^{*2} \mathbf{w}^*$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \nabla^* \mathbf{w}^* = \mathbf{w}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* + \upsilon \nabla^{*2} \mathbf{w}^* \qquad (A1.4)$$

Adimensionalisando a equação $(A1.4)$,encontra-se:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \mathbf{w} \qquad (A1.5)$$

Para escoamentos bidimensionais $\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$. Esta parcela representa o esticamento e a deformação das linhas de vórtice.

A forma final da equação de transporte de vorticidade, adimensionalisada, reduz-se a:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \mathbf{w} \qquad (A1.6)$$

O termo $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ representa a taxa de variação local da vorticidade.

A taxa de variação da vorticidade devido à convecção é interpretada através do termo $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}$.

A taxa de transporte de vorticidade devido a difusão molecular é representada pelo termo $\frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \mathbf{w}$.

A equação $(A1.6)$, para escoamentos bidimensionais, pode ser escrita na seguinte forma adimensional:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 w \qquad (A1.7)$$

observe que w é a única componente não nula do vetor vorticidade $\mathbf{w}$ e sua direção é normal ao plano do escoamento.

APÊNDICE A2 - PAINÉIS COM VORTICIDADE CONCENTRADA NO PONTO DE CONTROLE

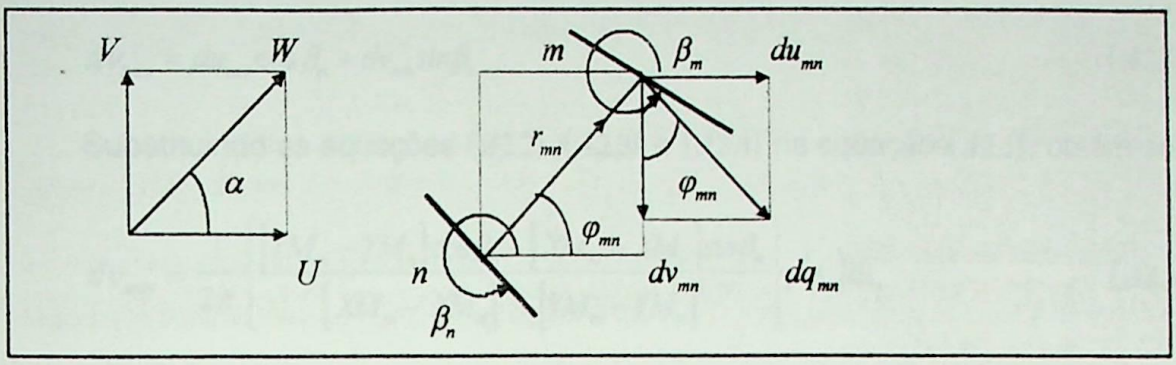


Figura A2.1 - Velocidade induzida na superfície s_m por uma distribuição de vorticidade $\gamma(s_n)ds_n$, que está concentrada no ponto de controle da superfície s_n.

O painel n da **Figura A2.1** induz no ponto de controle do painel m a seguinte velocidade (LEWIS, 1991):

$$dq_{mn} = \frac{\gamma(s_n)ds_n}{2\pi r_{mn}} \qquad (A2.1)$$

em que:

$$r_{mn} = \left\{\left[XM_m - XM_n\right]^2 + \left[YM_m - YM_n\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (A2.2)$$

As componentes na direção de x e de y da velocidade induzida pelo painel n no ponto de controle do painel m valem, respectivamente:

$$du_{mn} = dq_{mn} sin\varphi_{mn} = \frac{YM_m - YM_n}{2\pi r_{mn}^2}\gamma(s_n)ds_n \qquad (A2.3)$$

$$dv_{mn} = -dq_{mn}\cos\varphi_{mn} = -\frac{XM_m - XM_n}{2\pi r_{mn}^2}\gamma(s_n)ds_n \qquad (A2.4)$$

A componente tangencial da velocidade induzida pelo painel n no ponto de controle do painel m é obtida decompondo-se as componentes du_{mn} e dv_{mn} na superfície do painel m :

$$dv_{smn} = du_{mn}\cos\beta_m + dv_{mn}sin\beta_n \qquad (A2.5)$$

Substituindo as equações $(A2.2)$, $(A2.3)$ e $(A2.4)$ na equação $(A2.5)$, obtém-se:

$$dv_{smn} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\left[YM_m - YM_n\right]\cos\beta_m - \left[XM_m - XM_n\right]sin\beta_m}{\left[XM_m - XM_n\right]^2 + \left[YM_m - YM_n\right]^2}\right\}\gamma(s_n)ds_n \qquad (A2.6)$$

O escoamento incidente e todos os painéis **induzem velocidade tangencial** sobre o painel m, dada pela equação:

$$-\frac{1}{2}\gamma(s_m) + \oint dv_{smn} + W\left[\cos\alpha\ \cos\beta_m + sin\alpha\ sin\beta_n\right] = 0 \qquad (A2.7)$$

ou

$$-\frac{1}{2}\gamma(s_m) + \oint k(s_m, s_n)\ \gamma(s_n)ds_n + W\left[\cos\alpha\ \cos\beta_m + sin\alpha\ sin\beta_m\right] = 0 \qquad (A2.8)$$

A resolução da equação integral $(A2.8)$ na forma apresentada é de difícil solução. Sabendo que em todos os pontos da superfície de um corpo esta equação integral satisfaz-se plenamente, então, fica fácil resolver o problema: o que se recomenda é a utilização de um número finito de M pontos, chamados de "pontos pivotais", como forma de aproximar-se da solução exata da equação integral $(A2.8)$. A superfície de um corpo de forma arbitrária é então discretizada em M painéis. Na **Figura A2.2** observa-se a representação de um desses M elementos de uma superfície plana de comprimento Δs_n.

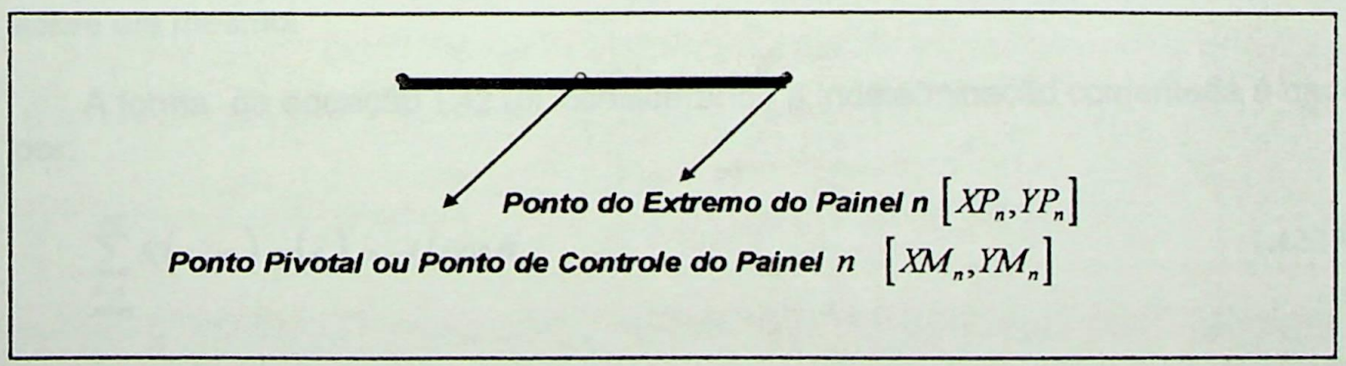


Figura A2.2 - Representação da superfície plana s_n de um dos M painéis de comprimento Δs_n.

A integral da equação $(A2.8)$ é substituída por um somatório:

$$-\frac{1}{2}\gamma(s_m)+\sum_{n=1}^{M}k(s_m,s_n)\,\gamma(s_n)ds_n+W\left[\cos\alpha\,\cos\beta_m+sin\alpha\,sin\beta_m\right]=0 \qquad (A2.9)$$

Este somatório pode ser aplicado na superfície do corpo de forma arbitrária que foi discretizado em M painéis.

Na resolução da equação $(A2.9)$ considera-se a influência do escoamento incidente apenas na direção do eixo x $(\alpha=0^{\circ})$:

$$-\frac{1}{2}\gamma(s_m)+\sum_{n=1}^{M}K(s_m,s_n)\,\gamma(s_n)=-U\cos\beta_m \qquad (A2.10)$$

na qual:

$$K(s_m,s_n)=k(s_m,s_n)\Delta s_n \qquad (A2.11)$$

$$K(s_m,s_n)=\frac{\Delta s_n}{2\pi}\left\{\frac{\left[YM_m-YM_n\right]\cos\beta_m-\left[XM_m-XM_n\right]sin\beta_m}{\left[XM_m-XM_n\right]^2+\left[YM_m-YM_n\right]^2}\right\} \qquad (A2.12)$$

Um erro grave está sendo cometido. Os coeficientes de acoplamento $K(s_m,s_n)$ apresentam uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ quando $n=m$. Para resolver esta indeterminação, o termo $-\frac{1}{2}\gamma(s_m)$ é englobado em $K(s_m,s_n)$ localizando-se nas posições $K(S_m,S_m)$. Este termo caracteriza a influência de um painel genérico m sobre ele mesmo.

A forma da equação $(A2.10)$ considerando a indeterminação comentada é dada por:

$$\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{M}K(s_m,s_n)\,\gamma(s_n)=-U\cos\beta_m \qquad (A2.13)$$

Quando aplicada nos M pontos de controle dos painéis, a equação $(A2.13)$ pode ser expressa na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} -0.5 & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1M} \\ K_{21} & -0.5 & K_{23} & \cdots & K_{2M} \\ K_{31} & K_{32} & -0.5 & \cdots & K_{3M} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ K_{M1} & K_{M2} & K_{M3} & \cdots & -0.5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma(s_1) \\ \gamma(s_2) \\ \gamma(s_3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma(s_M) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ RHS_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ RHS_M \end{Bmatrix} \qquad (A2.14)$$

Na diagonal principal da matriz de influência $K(s_m, s_n)$ aparece $K(s_m, s_m) \approx -\frac{1}{2}$. Isto significa que ainda não se está levando em consideração a influência do efeito local de curvatura em uma dada superfície. Este efeito é calculado pela seguinte equação:

$$K(s_m, s_m) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi}(\beta_{m+1} - \beta_{m-1}) \qquad (A2.15)$$

O lado direito da equação matricial é um vetor coluna de M elementos, e, para um painel genérico m na primeira vez em que é calculado, vale:

$$RHS_m = -U \cos \beta_m \qquad (A2.16)$$

Conhecidos os pontos extremos dos M painéis são calculados os seguintes parâmetros:

a) coordenadas dos pontos de controle

$$XM_n = \frac{1}{2}[XP_n + XP_{n+1}] \qquad (A2.17)$$

$$YM_n = \frac{1}{2}[YP_n + YP_{n+1}] \qquad (A2.18)$$

b) comprimento de cada painel

$$\Delta s_n = \sqrt{[XP_n - XP_{n+1}]^2 + [YP_n - YP_{n+1}]^2} \qquad (A2.19)$$

c) ângulo de orientação de cada painel

$$\beta_n = tg^{-1}\left[\frac{YP_{n+1} - YP_n}{XP_{n+1} - XP_n}\right] \qquad (A2.20)$$

com n variando do primeiro ao último painel e $\beta_n \neq \lambda\frac{\pi}{2}, \lambda = 1,3,5,7,\ldots$

APÊNDICE A3 - PAINÉIS COM DENSIDADE DE VÓRTICE DISTRIBUÍDA DE FORMA CONSTANTE

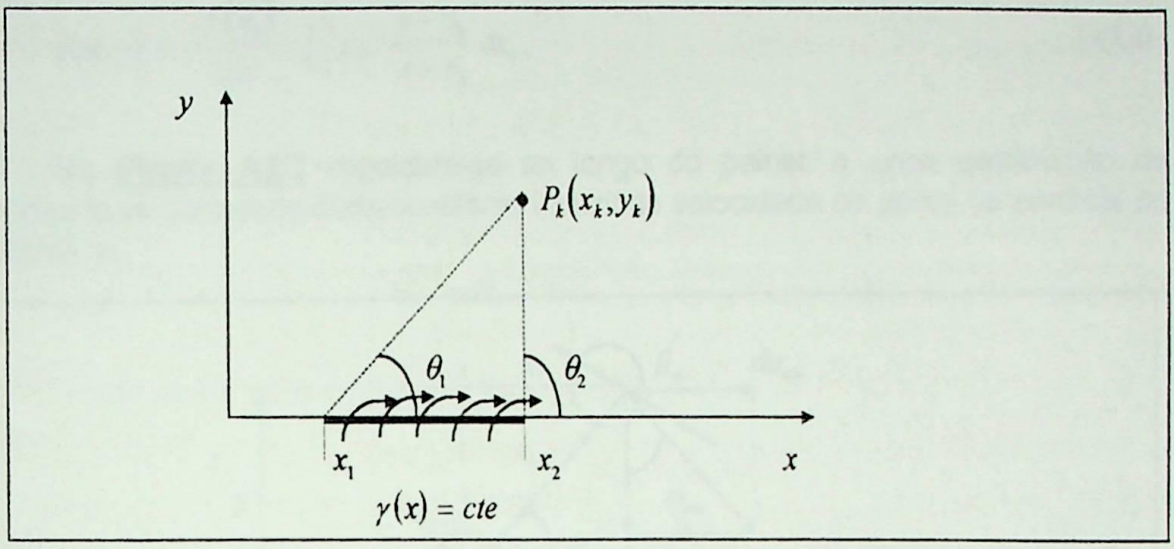


Figura A3.1 - Velocidade induzida no ponto $P_k(x_k, y_k)$ por uma distribuição de densidade de vórtice constante e positiva, $\gamma(x)$, ao longo de uma superfície de comprimento $(x_2 - x_1)$.

Na **Figura A3.1** define-se o potencial complexo para um elemento infinitesimal da distribuição de densidade $\gamma(x)$ como sendo (KATZ e PLOTKIN, 1991):

$$df(Z) = -\frac{\theta}{2\pi}\,\gamma(x_0)\,dx_0 + i\frac{\ln r}{2\pi}\,\gamma(x_0)\,dx_0 \qquad (A3.1)$$

A função potencial de velocidades, a partir da equação $(A3.1)$, vale:

$$d\phi(r,\theta) = -\frac{\theta}{2\pi}\,\gamma(x_0)\,dx_0 \qquad (A3.2)$$

Em coordenadas retangulares tem-se:

$$d\phi(x,y) = -\frac{\gamma(x_0)}{2\pi}\,tg^{-1}\frac{y-y_0}{x-x_0}dx_0 \qquad (A3.3)$$

Considerando que $\gamma(x_0)$ é um valor constante e integrando a equação $(A3.3)$ vem:

$$\phi(x,y) = -\frac{\gamma(x_0)}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} tg^{-1}\frac{y-y_0}{x-x_0}\, dx_0 \qquad (A3.4)$$

Na **Figura A3.2** considera-se ao longo do painel n uma distribuição de vorticidade com densidade constante induzindo velocidade no ponto de controle do painel m.

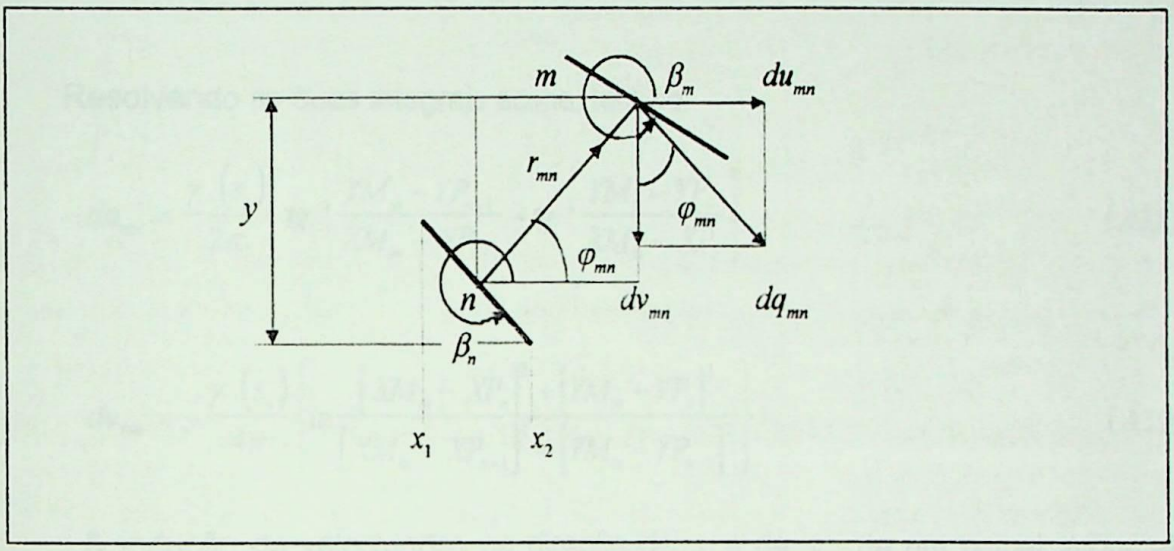


Figura A3.2 - Velocidade induzida no ponto de controle da superfície s_m por uma distribuição de vorticidade $\gamma(s_n)ds_n$, de forma constante, ao longo da superfície s_n.

A influência desta distribuição de densidade de vórtice $\gamma(s_n) = cte$ ao longo do painel n sobre o ponto de controle $P_m(x_m, y_m)$ do painel m é dada pelo seguinte potencial de velocidades:

$$\phi(x,y) = -\frac{\gamma(s_n)}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2} tg^{-1}\left[\frac{y}{x-x_0}\right] dx_0 \qquad (A3.5)$$

As componentes na direção de x e de y da velocidade induzida no ponto de controle do painel m valem, respectivamente:

$$du_{mn} = \frac{d\phi(x,y)}{dx} = \frac{\gamma\,(s_n)}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2}\right] dx_0 \qquad (A3.6)$$

$$dv_{mn} = \frac{d\phi(x,y)}{dy} = -\frac{\gamma\,(s_n)}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + y^2}\right] dx_0 \qquad (A3.7)$$

Resolvendo as duas integrais acima, tem-se:

$$du_{mn} = \frac{\gamma\,(s_n)}{2\pi}\left[tg^{-1}\frac{YM_m - YP_{n+1}}{XM_m - XP_{n+1}} - tg^{-1}\frac{YM_m - YP_n}{XM_m - XP_n}\right] \qquad (A3.8)$$

$$dv_{mn} = -\frac{\gamma\,(s_n)}{4\pi}\left\{\ln\frac{\left[XM_m - XP_n\right]^2 + \left[YM_m - YP_n\right]^2}{\left[XM_m - XP_{n+1}\right]^2 + \left[YM_m - YP_{n+1}\right]^2}\right\} \qquad (A3.9)$$

A indução de velocidades na direção de x e de y de um painel sobre ele mesmo considerando a **Figura A3.1** é dada pelas equações, respectivamente:

$$du\left(\frac{x_2 - x_1}{2}, 0\pm\right) = \pm\frac{\gamma(x)}{2} \qquad (A3.10)$$

$$dv\left(\frac{x_2 - x_1}{2}, 0\pm\right) = 0 \qquad (A3.11)$$

A componente tangencial da velocidade induzida pelo painel n no ponto de controle do painel m é obtida decompondo-se as componentes du_{mn} e dv_{mn} na superfície do painel m:

$$dv_{smn} = du_{mn}\cos\beta_m + dv_{mn}sin\beta_m \qquad (A3.12)$$

Os coeficientes de influência quando $m \neq n$ são obtidos pela seguinte equação:

$$K(s_m, s_n) = \frac{1}{2\pi}\left[tg^{-1}\frac{YM_m - YP_{n+1}}{XM_m - XP_{n+1}} - tg^{-1}\frac{YM_m - YP_n}{XM_m - XP_n}\right]\cos\beta_m + \\ -\frac{1}{4\pi}\left\{\ln\frac{\left[XM_m - XP_n\right]^2 + \left[YM_m - YP_n\right]^2}{\left[XM_m - XP_{n+1}\right]^2 + \left[YM_m - YP_{n+1}\right]^2}\right\}sin\beta_m \qquad (A3.13)$$

Assim, deve-se resolver a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1M} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2M} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3M} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ K_{M1} & K_{M2} & K_{M3} & \cdots & K_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma(s_1) \\ \gamma(s_2) \\ \gamma(s_3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma(s_M) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ RHS_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ RHS_M \end{Bmatrix} \qquad (A3.14)$$

O lado direito da equação matricial é um vetor coluna de M elementos e para um painel genérico m na primeira vez em que é calculado vale:

$$RHS_m = -U\cos\beta_m \qquad (A3.15)$$

APÊNDICE A4 - VELOCIDADE INDUZIDA POR UMA NUVEM DE VÓRTICES

Na convecção da nuvem de vórtices livres é preciso calcular a velocidade induzida em cada vórtice livre pelos demais vórtices livres da nuvem.

A componente na direção de x da velocidade induzida em cada vórtice arbitrário k pelos outros vórtices livres da nuvem vale :

$$\begin{aligned}
u_{v_1} &= U_{V_{1,1}}\Gamma_1 + U_{V_{1,2}}\Gamma_2 + U_{V_{1,3}}\Gamma_3 + U_{V_{1,4}}\Gamma_4 + \cdots + U_{V_{1,N}}\Gamma_N \\
u_{v_2} &= -U_{V_{1,2}}\Gamma_1 + U_{V_{2,2}}\Gamma_2 + U_{V_{2,3}}\Gamma_3 + U_{V_{2,4}}\Gamma_4 + \cdots + U_{V_{2,N}}\Gamma_N \\
u_{v_3} &= -U_{V_{1,3}}\Gamma_1 - U_{V_{2,3}}\Gamma_2 + U_{V_{3,3}}\Gamma_3 + U_{V_{3,4}}\Gamma_4 + \cdots + U_{V_{3,N}}\Gamma_N \\
u_{v_4} &= -U_{V_{1,4}}\Gamma_1 - U_{V_{2,4}}\Gamma_2 - U_{V_{3,4}}\Gamma_3 + U_{V_{4,4}}\Gamma_4 + \cdots + U_{V_{4,N}}\Gamma_N \qquad (A4.1) \\
&\vdots \\
u_{v_N} &= -U_{V_{1,N}}\Gamma_1 - U_{V_{2,N}}\Gamma_2 - U_{V_{3,N}}\Gamma_3 - U_{V_{4,N}}\Gamma_4 + \cdots + U_{V_{N,N}}\Gamma_N
\end{aligned}$$

A componente na direção de y da velocidade induzida em cada vórtice arbitrário k pelos outros vórtices livres da nuvem vale :

$$\begin{aligned}
v_{v_1} &= V_{V_{1,1}}\Gamma_1 + V_{V_{1,2}}\Gamma_2 + V_{V_{1,3}}\Gamma_3 + V_{V_{1,4}}\Gamma_4 + \cdots + V_{V_{1,N}}\Gamma_N \\
v_{v_2} &= -V_{V_{1,2}}\Gamma_1 + V_{V_{2,2}}\Gamma_2 + V_{V_{2,3}}\Gamma_3 + V_{V_{2,4}}\Gamma_4 + \cdots + V_{V_{2,N}}\Gamma_N \\
u_{v_3} &= -V_{V_{1,3}}\Gamma_1 - V_{V_{2,3}}\Gamma_2 + V_{V_{3,3}}\Gamma_3 + V_{V_{3,4}}\Gamma_4 + \cdots + V_{V_{3,N}}\Gamma_N \\
v_{v_4} &= -V_{V_{1,4}}\Gamma_1 - V_{V_{2,4}}\Gamma_2 - V_{V_{3,4}}\Gamma_3 + V_{V_{4,4}}\Gamma_4 + \cdots + V_{V_{4,N}}\Gamma_N \qquad (A4.2) \\
&\vdots \\
v_{v_N} &= -V_{V_{1,N}}\Gamma_1 - V_{V_{2,N}}\Gamma_2 - V_{V_{3,N}}\Gamma_3 - V_{V_{4,N}}\Gamma_4 + \cdots + V_{V_{N,N}}\Gamma_N
\end{aligned}$$

Destes dois conjuntos de N equações sabe-se que :

a) $U_{V_{k,j}}$ é a componente x da velocidade induzida no vórtice k pelo vórtice j, se este último possuir intensidade unitária. Para o modelo do vórtice potencial, considerando que $r_{kj} \geq \sigma_0$, tem-se:

$$U_{V_{k,j}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left[y_k - y_j\right]}{\left[x_k - x_j\right]^2 + \left[y_k - y_j\right]^2} \qquad (A4.3)$$

Quando a distância entre um vórtice arbitrário k e o ponto de controle de um painel for menor que o raio do núcleo do vórtice de Lamb ($r_{kj} < \sigma_0$), usa-se:

$$U_{V_{k,j}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left[y_k - y_j\right]}{\left[x_k - x_j\right]^2 + \left[y_k - y_j\right]^2} \left[1 - \exp\left(-5{,}02572 \frac{r_{kj}^2}{\sigma_0^2}\right)\right] \qquad (A4.4)$$

b) $V_{V_{k,j}}$ é a componente y da velocidade induzida no vórtice k pelo vórtice j, se este último possuir intensidade unitária. Para o modelo do vórtice potencial, considerando que $r_{kj} \geq \sigma_0$, tem-se:

$$V_{V_{k,j}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\left[x_k - x_j\right]}{\left[x_k - x_j\right]^2 + \left[y_k - y_j\right]^2} \qquad (A4.5)$$

Quando a distância entre um vórtice arbitrário k e o ponto de controle de um painel for menor que o raio do núcleo do vórtice de Lamb ($r_{kj} < \sigma_0$), usa-se:

$$V_{V_{k,j}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\left[x_k - x_j\right]}{\left[x_k - x_j\right]^2 + \left[y_k - y_j\right]^2} \left[1 - \exp\left(-5{,}02572 \frac{r_{kj}^2}{\sigma_0^2}\right)\right] \qquad (A4.6)$$

c) o vórtice arbitrário k não induz velocidade sobre ele mesmo, portanto: $U_{V_{k,k}} = 0$ e $V_{V_{k,k}} = 0$;

d) a componente x da velocidade total induzida no vórtice k pelos demais vórtices é calculada pelo seguinte somatório:

$$u_{k_N} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} \Gamma_j \, U_{V_{k,j}} \qquad (A4.7)$$

e) a componente y da velocidade total induzida no vórtice k pelos demais vórtices é calculada pelo seguinte somatório:

$$v_{k_N} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} \Gamma_j \, V_{V_{k,j}} \qquad (A4.8)$$

f) a componente x da velocidade induzida no vórtice k pelo vórtice j, se este último possuir intensidade unitária, é igual e com sinal contrário à componente x da velocidade induzida no vórtice j pelo vórtice k;

g) a componente y da velocidade induzida no vórtice k pelo vórtice j, se este último possuir intensidade unitária, é igual e com sinal contrário à componente y da velocidade induzida no vórtice j pelo vórtice k;

O programa computacional desenvolvido calcula somente as componentes x e y das velocidades induzidas no vórtice k pelo vórtice j. As componentes induzidas pelo vórtice j no vórtice k não precisam ser calculadas. O programa calcula $U_{V_{k,j}}$ e $V_{V_{k,j}}$ fazendo $U_{V_{j,k}} = -U_{V_{k,j}}$ e $V_{V_{j,k}} = -V_{V_{k,j}}$. Como se pode notar estes cálculos, a cada incremento de tempo Δt, ficam cada vez mais demorados. O artifício apresentado é de grande validade. Neste artifício não se leva em consideração a intensidade de cada vórtice indutor. No cálculo final da velocidade total induzida em um vórtice arbitrário k pelos outros vórtices livres da nuvem entra o valor da intensidade de cada vórtice livre indutor. Na direção do eixo dos x, por exemplo, obtém-se:

$$\begin{aligned}
u_{v_1} &= \quad 0\,\Gamma_1 + U_{V_{1,2}}\Gamma_2 + U_{V_{1,3}}\Gamma_3 + U_{V_{1,4}}\Gamma_4 + \cdots \\
u_{v_2} &= -U_{V_{1,2}}\Gamma_1 + \quad 0\,\Gamma_2 + U_{V_{2,3}}\Gamma_3 + U_{V_{2,4}}\Gamma_4 + \cdots \\
u_{v_3} &= -U_{V_{1,3}}\Gamma_1 - U_{V_{2,3}}\Gamma_2 + \quad 0\,\Gamma_3 + \cdots \\
u_{v_4} &= -U_{V_{1,4}}\Gamma_1 - U_{V_{2,4}}\Gamma_2 - \cdots \\
&\cdots
\end{aligned} \qquad (A4.9)$$

APÊNDICE A5 - VELOCIDADE INDUZIDA PELO CORPO NOS VÓRTICES

Considere um painel genérico n com toda distribuição de vorticidade concentrada no seu ponto de controle (XM_n, YM_n). As componentes na direção de x e na direção de y da velocidade induzida em um vórtice potencial arbitrário k, de intensidade positiva Γ_k localizado no ponto $P_k = (x_k, y_k)$, por um painel genérico n é dada pelas seguintes equações (LEWIS, 1991), respectivamente:

$$u_{c_k} = \frac{\gamma(s_n)\Delta s_n}{2\pi} \frac{[y_k - YM_n]}{[x_k - XM_n]^2 + [y_k - YM_n]^2} \qquad (A5.1)$$

$$v_{c_k} = -\frac{\gamma(s_n)\Delta s_n}{2\pi} \frac{[x_k - XM_n]}{[x_k - XM_n]^2 + [y_k - YM_n]^2} \qquad (A5.2)$$

Se o modelo do vórtice de Lamb for necessário, as duas equações acima, tornam-se:

$$u_{c_k} = \frac{\gamma(s_n)\Delta s_n}{2\pi} \frac{[y_k - YM_n]}{[x_k - XM_n]^2 + [y_k - YM_n]^2} \left[1 - \exp\left(-5{,}02572 \frac{r_{kn}^2}{\sigma_0^2}\right)\right] \qquad (A5.3)$$

$$v_{c_k} = -\frac{\gamma(s_n)\Delta s_n}{2\pi} \frac{[x_k - XM_n]}{[x_k - XM_n]^2 + [y_k - YM_n]^2} \left[1 - \exp\left(-5{,}02572 \frac{r_{kn}^2}{\sigma_0^2}\right)\right] \qquad (A5.4)$$

em que:

$$r_{kn} = \sqrt{[x_k - XM_n]^2 + [y_k - YM_n]^2} \qquad (A5.5)$$

Os resultados obtidos com as simulações feitas neste trabalho foram ruins considerando a vorticidade concentrada no ponto de controle dos painéis.

Um resultado mais refinado (KATZ e PLOTKIN, 1991) pode ser obtido no cálculo das componentes na direção de x e na direção de y da velocidade induzida por um painel genérico n em um vórtice arbitrário k, de intensidade positiva Γ_k localizado no ponto $P_k = (x_k, y_k)$. Para isto, considera-se na **Figura A5.1** a distribuição de vorticidade $\gamma(s_n)\, ds_n$ constante ao longo do painel genérico n.

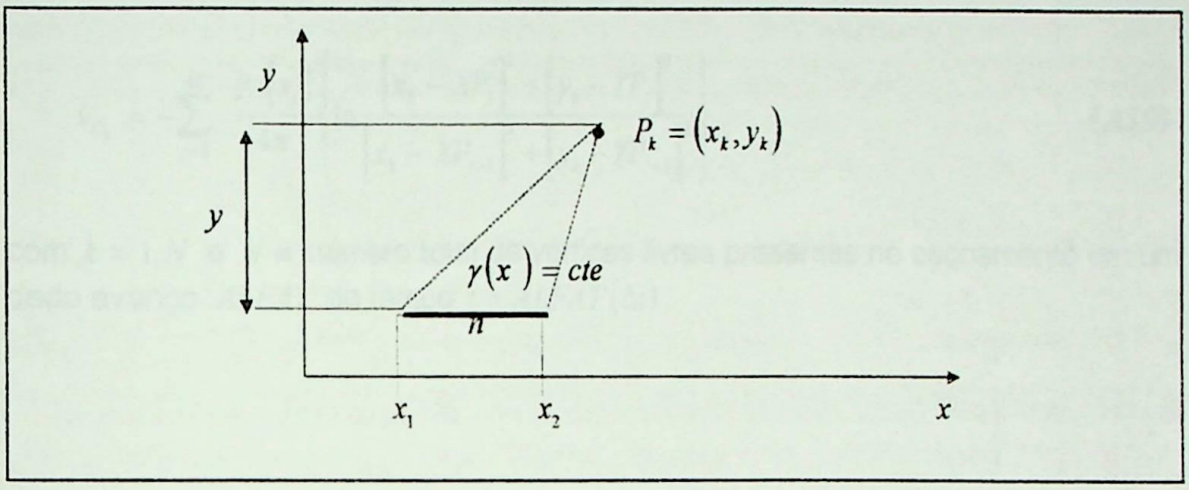


Figura A5.1 - Influência de uma distribuição de vorticidade constante $\gamma(s_n)\, ds_n$, ao longo do painel genérico n, sobre um vórtice discreto k localizado no ponto $P_k = (x_k, y_k)$.

As componentes da velocidade induzida, na direção de x e na direção de y, por um painel genérico n, de comprimento Δs_n, em um vórtice arbitrário k valem, respectivamente:

$$u_{c_k} = \frac{\gamma(s_n)}{2\pi}\left\{ tg^{-1}\frac{[y_k - YP_{n+1}]}{[x_k - XP_{n+1}]} - tg^{-1}\frac{[y_k - YP_n]}{[x_k - XP_n]} \right\} \qquad (A5.6)$$

$$v_{c_k} = -\frac{\gamma(s_n)}{4\pi}\left\{ \ln\frac{[x_k - XP_n]^2 + [y_k - YP_n]^2}{[x_k - XP_{n+1}]^2 + [y_k - YP_{n+1}]^2} \right\} \qquad (A5.7)$$

Para os M painéis, que representam a superfície do corpo, as componentes da velocidade total induzida na direção de x e na direção de y sobre um vórtice arbitrário k, de intensidade positiva Γ_k localizado em um ponto $P_k = (x_k, y_k)$, são calculadas, respectivamente, por:

$$u_{C_k} = \sum_{j=1}^{M} \frac{\gamma\left(s_j\right)}{2\pi}\left\{ tg^{-1}\frac{\left[y_k - YP_{j+1}\right]}{\left[x_k - XP_{j+1}\right]} - tg^{-1}\frac{\left[y_k - YP_j\right]}{\left[x_k - XP_j\right]}\right\} \qquad (A5.8)$$

$$v_{C_k} = -\sum_{j=1}^{M} \frac{\gamma\left(s_j\right)}{4\pi}\left\{ \ln\frac{\left[x_k - XP_j\right]^2 + \left[y_k - YP_j\right]^2}{\left[x_k - XP_{j+1}\right]^2 + \left[y_k - YP_{j+1}\right]^2}\right\} \qquad (A5.9)$$

com $k = 1, N$ e $N \equiv$ número total de vórtices livres presentes no escoamento em um dado avanço $ALFAT$ do tempo $t = ALFAT(\Delta t)$.

APÊNDICE A6 - VELOCIDADE INDUZIDA PELOS VÓRTICES NO CORPO

Considere um painel genérico n. As componentes na direção de x e na direção de y da velocidade induzida neste painel genérico n por um vórtice arbitrário k, de intensidade positiva Γ_k localizado no ponto $P_k = (x_k, y_k)$, é dada pelas seguintes equações, respectivamente (LEWIS, 1991):

$$u_{m_n} = \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\left[YM_n - y_k\right]}{\left[XM_n - x_k\right]^2 + \left[YM_n - y_k\right]^2} \qquad (A6.1)$$

$$v_{m_n} = -\frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\left[XM_n - x_k\right]}{\left[XM_n - x_k\right]^2 + \left[YM_n - y_k\right]^2} \qquad (A6.2)$$

As equações $(A6.1)$ e $(A6.2)$ são válidas para o modelo do vórtice potencial, ou seja, quando a distância entre um vórtice arbitrário k e o ponto de controle de um painel for maior ou igual ao raio do núcleo do vórtice de Lamb ($r_{kn} \geq \sigma_0$).

Quando a distância entre um vórtice arbitrário k e o ponto de controle de um painel for menor que o raio do núcleo do vórtice de Lamb ($r_{kn} < \sigma_0$), as equações $(A6.1)$ e $(A6.2)$ devem ser substituídas pelas equações abaixo:

$$u_{m_n} = \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\left[YM_n - y_k\right]}{\left[XM_n - x_k\right]^2 + \left[YM_n - y_k\right]^2} \left[1 - \exp\left(-5.02572 \frac{r_{kn}^2}{\sigma_0^2}\right)\right] \qquad (A6.3)$$

$$v_{m_n} = -\frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\left[XM_n - x_k\right]}{\left[XM_n - x_k\right]^2 + \left[YM_n - y_k\right]^2} \left[1 - \exp\left(-5.02572 \frac{r_{kn}^2}{\sigma_0^2}\right)\right] \qquad (A6.4)$$

em que:

$$r_{kn} = \sqrt{\left[x_k - XM_n\right]^2 + \left[y_k - YM_n\right]^2} \qquad (A6.5)$$

No cálculo da indução de velocidades por um vórtice arbitrário k sobre um painel genérico n, caso a distância entre este vórtice arbitrário de intensidade positiva Γ_k e o ponto de controle de um painel genérico n for menor que o dobro do comprimento do painel n ($r_{kn} < 2\Delta s_n$), então o painel deve ser dividido em p subpainéis (LEWIS, 1991).

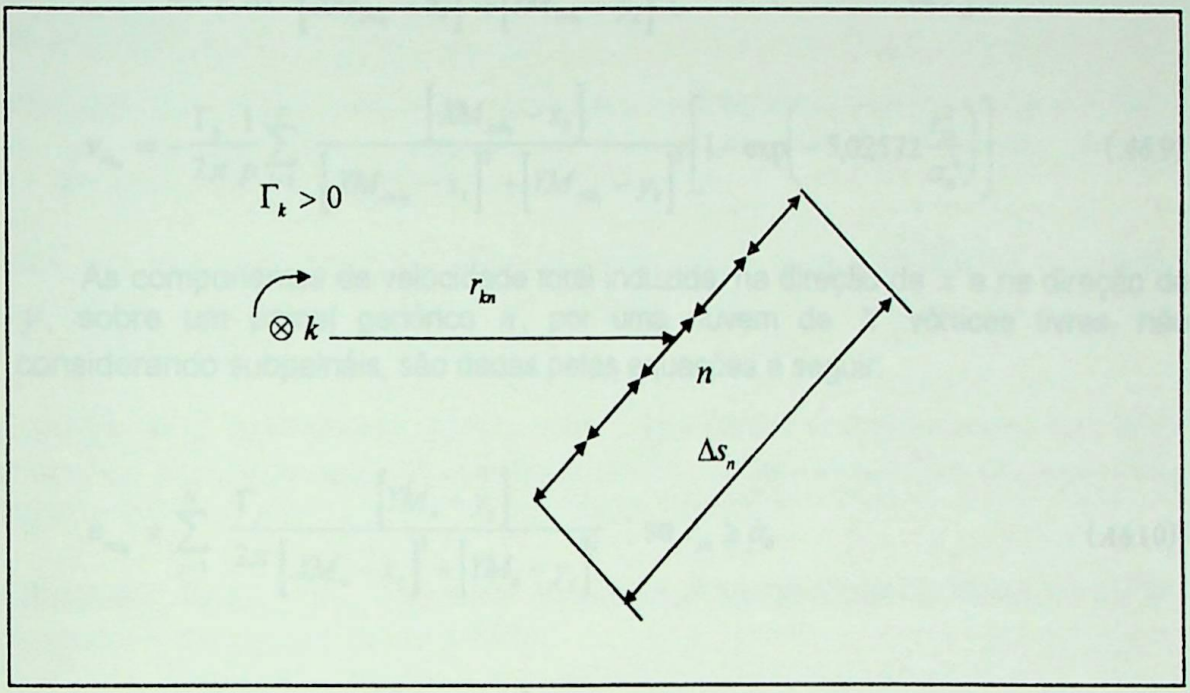


Figura A6.1 - Divisão de um painel em subpainéis, caso a distância entre um vórtice livre e o painel seja menor que o dobro do comprimento do painel.

As componentes na direção de x e na direção de y da velocidade induzida neste painel genérico n dividido em p subpainéis por um vórtice potencial arbitrário k, de intensidade positiva Γ_k localizado no ponto $P_k = (x_k, y_k)$, é dada pelas seguintes equações:

$$u_{m_n} = \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p} \frac{\left[YM_{sub_l} - y_k\right]}{\left[XM_{sub_l} - x_k\right]^2 + \left[YM_{sub_l} - y_k\right]^2} \qquad (A6.6)$$

$$v_{m_n} = -\frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p} \frac{\left[XM_{sub_l} - x_k\right]}{\left[XM_{sub_l} - x_k\right]^2 + \left[YM_{sub_l} - y_k\right]^2} \qquad (A6.7)$$

Quando a distância entre o vórtice e o ponto de controle de um painel for menor que raio do núcleo do vórtice de Lamb ($r_{kn} < \sigma_0$), as equações ($A6.6$) e ($A6.7$), tornam-se:

$$u_{m_n} = \frac{\Gamma_k}{2\pi}\frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p}\frac{\left[YM_{sub_l} - y_k\right]}{\left[XM_{sub_l} - x_k\right]^2 + \left[YM_{sub_l} - y_k\right]^2}\left[1 - \exp\left(-5{,}02572\frac{r_{kn}^2}{\sigma_0^2}\right)\right] \qquad (A6.8)$$

$$v_{m_n} = -\frac{\Gamma_k}{2\pi}\frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p}\frac{\left[XM_{sub_l} - x_k\right]}{\left[XM_{sub_l} - x_k\right]^2 + \left[YM_{sub_l} - y_k\right]^2}\left[1 - \exp\left(-5{,}02572\frac{r_{kn}^2}{\sigma_0^2}\right)\right] \qquad (A6.9)$$

As componentes da velocidade total induzida, na direção de x e na direção de y, sobre um painel genérico n, por uma nuvem de N vórtices livres, não considerando subpainéis, são dadas pelas equações a seguir:

$$u_{m_N} = \sum_{j=1}^{N}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\frac{\left[YM_n - y_j\right]}{\left[XM_n - x_j\right]^2 + \left[YM_n - y_j\right]^2}\ , \text{se } r_{jn} \geq \sigma_0 \qquad (A6.10)$$

$$v_{m_N} = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\frac{\left[XM_n - x_j\right]}{\left[XM_n - x_j\right]^2 + \left[YM_n - y_j\right]^2}\ , \text{se } r_{jn} \geq \sigma_0 \qquad (A6.11)$$

$$u_{m_N} = \sum_{j=1}^{N}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\frac{\left[YM_n - y_j\right]}{\left[XM_n - x_j\right]^2 + \left[YM_n - y_j\right]^2}\left[1 - \exp\left(-5.02572\frac{r_{jn}^2}{\sigma_0^2}\right)\right], \text{se } r_{jn} < \sigma_0 \qquad (A6.12)$$

$$v_{m_N} = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\frac{\left[XM_n - x_j\right]}{\left[XM_n - x_j\right]^2 + \left[YM_n - y_j\right]^2}\left[1 - \exp\left(-5.02572\frac{r_{jn}^2}{\sigma_0^2}\right)\right], \text{se } r_{jn} < \sigma_0 \qquad (A6.13)$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBOTT, I.H. & VON DOENHOFF, A.E., 1959, Theory of wing sections. Dover Publications, Inc., New York.

ACHENBACH, E., 1968, "Distribution of local pressure and skin friction around a circular cylinder in cross-flow up to $Re = 5 \times 10^6$". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 34, pp. 625-639.

ARAUJO, Z.A., 1994, Simulação numérica do escoamento tridimensional em torno de um cilindro flexível, através do método de vórtices. Rio de Janeiro, RJ, BRASIL, PEM-COPPE/UFRJ, Tese de Mestrado.

ARAUJO, M.R.O.P., 1997, Escoamento em um arranjo denso de cilindros: simulação numérica através do método de vórtices. Rio de Janeiro, RJ, BRASIL, PEM-COPPE/UFRJ, Tese de Mestrado.

ARKELL, R.H. & GRAHAM, J.M.R., 1992, "The effects of gravity waves on vortex shedding from cylinders". Proceedings of the IUTAM Simposium on Bluff-Body Wakes, Dynamics and Instabilities, pp. 19-22, Gottingen.

ASHURST, W.T., 1977, "Numerical simulation of turbulent mixing layers via vortex dynamics". Sandia Lab-SAND 7-8613.

BADR, H.M. & DENNIS, S.C.R., 1985, "Time-dependent viscous flow past na impulsively started rotation and translating circular cylinder". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 158, pp. 447-448.

BASU, B.C. & HANCOCK, G.J., 1978, "The unsteady motion of a two-dimensional aerofoil in incompressible inviscid flow". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 87, part 1, pp. 159-178.

BATCHELOR, G.K., 1970, An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press.

BEALE, J.T. & MAJDA, A., 1982, "Vortex methods: I convergence in three-dimensions". Math. Comp., Vol. 39, pp. 1-27.

BEARMAN, P.W., 1969, "On vortex shedding from a circular cylinder in the critical Reynolds numbers regime". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 37, part 3, pp. 577-585.

BENSON, M.G., BELLAMY-KNIGHTS, P.G. & GERRARD, J.H., 1989, "A viscous splitting algorithm applied to low Reynolds number flows around a circular cylinder". J. of Fluids and Structures, Vol. 3, N° 5.

BLEVINS, R.D., 1984, Applied fluid dynamics handbook. Van Nostrand Reinhold Co.

CHANG, C.C. & CHERN, R.L., 1991, "A numerical study of flow around an impulsively started circular cylinder by a deterministic vortex method". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 233, pp. 243-263.

CHANG, C.C. & CHERN, R.L., 1991, "Vortex shedding from an impulsively started rotating and translating circular cylinder". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 233, pp. 265-298.

CHORIN, A.J. , 1973, "Numerical study of slightly viscous flow". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 57, pp. 785-796.

CHORIN, A.J. , 1978, "Vortex sheet approximation of boundary layers". J. Comp. Phys., Vol. 27, pp. 428-442.

CHORIN, A.J. , 1980, "Vortex models and boundary layers instability", SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 1.

CHRISTIANSEN, J.P., 1973, "Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortices". J. Comp. Phys., Vol. 13, pp. 363-79.

CLEMENTS, R.R. & MAULL, D.J, 1975, "The representation of sheets of vorticity by discrete vortices" . Prog. Aero. Sci., Vol. 16 (2), pp. 129-46.

COTTET, G.H., MAS-GALLIC, S. & RAVIART, P.A., 1988, "Computational fluid dynamics and reacting gas flows". (ed. by B. ENGQUIST, M. LUSKIN & A. MAJDA, Springer-Verlag, New York), pp. 47.

CRITZOS, C.C., HEYSON, H.H. & BOSWINKLE, R.W., 1954, Aerodynamic characteristics of NACA 0012 airfoil section. NACA Tech. 3361.

EINSTEIN, A., 1956, Investigations on the theory of brownian motion. Dover, New York.

FERZIGER, J.H., 1981, Numerical methods for engineering application. John Wiley & Sons, Inc..

FONSECA, G.F., 1996, Interação bidimensional entre um vórtice e um aerofólio próximo a uma superfície: influência da esteira. Rio de Janeiro, RJ, BRASIL, PEM-COPPE/UFRJ, Tese de Mestrado.

GHONIEM, A.F. & SHERMAN, F.S., 1985, "Grid free simulation of diffusion using randon walk methods". J. Comp. Phys., Vol. 61.

GRAHAM, J.M. R. , 1980, "The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 97, part 1, pp. 331-346.

GREENGARD, L. & ROKHLIN, V., 1987, "A fast algorithm for particle simulations". J. Comput. Phys., Vol. 72, pp. 325-348.

GUEDES, V.G., HIRATA, M.H. & BODSTEIN, 1998, "Vortex method simulation of the flow around a circular cylinder using the multipole expansion algorithm". Aceito para publicação nos Anais da International Conference on Computational Heat and Mass Transfer, a ser realizada em Gazimagusa, CHIPRE DO NORTE, de 26 a 29 de Abril, 1999.

HESS, J.L. & SMITH, A.M.O. , 1966, "Calculation of potential flow about arbitrary bodies". Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8, pp. 1-138.

HIRATA, M.H. , 1991, Análise do escoamento de um fluido viscoso utilizando elementos da teoria potencial: O Método de Vórtices . Anais do I Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Natal, RN, BRASIL.

HIRATA, S.C. & HIRATA, M.H., 1998, Simulação do processo de difusão de calor utilizando o método de partículas. Textos em Engenharia Mecânica N° 02/98, Setembro, Itajubá, MG, BRASIL, EFEI/IEM/DME.

JIAN, S. & HIRATA, M.H., 1991, "Vorticity method for two-dimensional flow around bluff bodies". Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Natal, RN, BRASIL.

KAMEMOTO, K. & KAWAMATA, Y., 1986, "Representation of two-dimensional boundary layers by discrete vortices". Proceedings of the International Conference on Computational Mechanics, Tokyo.

KAMEMOTO, K., NAKAHARA, N. & KAWAMATA, Y., 1990, "Numerical simulation of vortex flows interacting with vibration of under-flow gates", Proc. IAHR Symp. on Hydraulic Machinery and Cavitation, Vol. 2, N4: 1-8, Belgrade.

KAMEMOTO, K., 1994, "Development of vortex methods for grid-free lagrangian direct numerical simulation". Proceedings of the 3th, JSME-KSME: Fluids Engineering Conference, July, pp. 25-27, Sendai, Japan.

KAMEMOTO, K, MATSUMOTO, H. & YOKOI, Y., 1995, "On the extensive applicability of the vortex methods to the prediction of flow-induced vibration problems". Yokohama National University, Yokohama, Japan.

KATZ, J. & PLOTKIN, A., 1991, Low-speed aerodynamics: from wing theory to panel methods. McGraw-Hill, Inc., International Edition.

KIDA, T. & NAKAJIMA, T., 1994, "A vortex method induced from two-dimensional Navier-Stokes equations". Dep. Energy Systems Engr., University of Osaka, Prefecture 862, pp. 93-104.

KUNDU, P. K., 1990, Fluid mechanics. Academic Press.

KOUMOUTSAKOS, P. & LEONARD, A., 1995, "High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 296, pp. 1-38.

KUWAHARA, K.,1978, "Study of flow past a circular cilynder by a inviscid model". Journal of Physical Society of Japan, January, Vol. 45, pp. 292-297.

LAM, K., 1987, "Potential flow calculation by a surface vorticity methd and computer graphics". Comput & Graphics, Vol. 11, N° 1, pp. 35-47.

LEONARD, A., 1985, "Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements". Anual Review of Fluid Mechanics, Vol. 17, pp. 523-559.

LESIEUR, M., 1993, Turbulence in fluids. Kluwer Academic Publishers.

LEWIS, R. I., 1981, "Surface vorticity modelling of separated flows from two-dimensional bluff bodies of arbitrary shape". J. Mech. Eng. Sci., Vol. 23, N° 1.

LEWIS, R. I., 1991, Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems. Cambridge University Press, Cambridge.

LIN, H., VEZZA, M. & GALBRAITH, R.A. McD., 1997, "Discrete vortex method for simulating unsteady flow around pitching aerofoils", AIAA Journal, March, Vol. 35, N° 3, pp. 494-499.

MALTA E.S.F., D., 1998, Aplicação do método de vórtices ao escoamento de alto número de Reynolds em torno de um cilindro circular. Rio de Janeiro, RJ, BRASIL, PEM-COPPE/UFRJ, Tese de Mestrado.

MANZANARES, N., 1998, Procedimento simplificado para a aplicação do teorema do círculo nos escoamentos rotacionais. Textos em Engenharia Mecânica N° 03/98, Outubro, Itajubá, MG, BRASIL, EFEI/IEM/DME.

MARTENSEN, E., 1971, The calculation of the pressure distribution on a cascade of thick airfoils by means of Fredholm Integral Equation of the Second Kind. NASA TT F-702. Translation of "Die Berechnung der Druckverteilung an Dicken Gitterprofilen mit Hilf von Fredholmschen Integralgleichungen Zweiter Art." Nr. 23, Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung und der Aerodynamischen Versuchsanstalt, Göttingen, 1959.

MENEGHINI, J.R. & BEARMAN, P.W., 1995, "Numerical simulation of high amplitude oscillatory flow about a circular cylinder". J. Fluid Struct., Vol. 9, pp. 435-455.

MILEY, S.J., 1982, A catalogue of low Reynolds number airfoil data for wind turbine applications. Department of Aerospace Engineering, Texas A&M. University, College Station, Texas, RFP-3387, UC-60.

MILNE-THOMPSON, L.M., 1955, Theoretical hydrodynamics. Macmillan & Co. London.

MORAN, J., 1984, An introduction to theoretical and computational aerodynamics. All rights reserved. Published simultancously in Canada.

MOREIRA DA SILVA, M.N., 1995, Investigação do escoamento transiente, 2-D, ao redor de formas não aerodinâmicas, usando o método de vórtices. Rio de Janeiro, RJ, BRASIL, PEM-COPPE/UFRJ, Tese de Mestrado.

MOREIRA DA SILVA, M.N., HIRATA, M.H. & BODSTEIN, G.C.R., 1996, "A utilização do método de vórtices na análise do escoamento ao redor de corpos rombudos". Anais do IV Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Recife, PE, BRASIL, pp. 855-859.

MUSTTO, A.A., HIRATA, H.M. & BODSTEIN, G.C.R., 1997, "Análise do escoamento ao redor de um cilindro circular", Anais em CD-ROM do XIV COBEM, Baurú, SP, 8-12 de Dezembro.

MUSTTO, A.A., 1998, Simulação numérica do escoamento em torno de um cilindro circular com e sem rotação utilizando o método de vórtices discretos. Rio de Janeiro, RJ, BRASIL, PEM-COPPE/UFRJ, Tese de Mestrado.

MUSTTO, A.A., HIRATA, H.M. & BODSTEIN, G.C.R., 1998, "Numerical simulation of the flow around a rotating circular cylinder using the vortex method". VII ENCIT-Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas, Rio de Janeiro, RJ, BRASIL, 03-06 de Novembro, Vol. 1, pp. 31-36.

OGAMI, Y. & AKAMATSU, T., 1991, "Viscous flow simulation using the discrete vortex model-the diffusion velocity method". Computers & Fluids, Vol. 19, pp. 433-441.

OGAMI, Y. & AYANO, Y., 1995, "Flows around a circular cylinder simulated by the viscous vortex model the diffusion velocity method". Computational Fluid Dynamics Journal, October, Vol. 4, N° 3, pp.383-399.

PORTHOUSE, D.T.C. & LEWIS, R.I., 1981, "Simulation of viscous diffusion for extension of the surface vorticity method to boundary layer and separated flows" . Journal Mechanical Engineerig Science, Vol. 23, N° 3, pp. 157-67.

PRASAD,A. & WILLIAMSON, C.H.K, 1997, "Three-dimensional effects in turbulent bluff-wakes". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 343, pp. 235-265.

PUCKETT, E.G., 1993, Vortex Methods: An introduction and survey of setected research topics. Cap. 11 de Incompressible computational fluid dynamics, ed. by GUNZBURGER, M.D. & NICOLAIDS, R.A.. Cambridge University Press.

RAND, O., 1989, "Extension of the circle theorems by surface source distributions". ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 111, pp. 243-247.

ROSENHEAD, L., 1931, "Formation of vortices from a surface of discontinuity". Proc. R. Soc. London, Ser. A.

ROSKO, A., 1961, "Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 10, pp. 345-356.

SAFFMAN, P.G., 1992, Vortex dynamics. Cambridge University Press.

SARPKAYA, T., 1963, "Lift, drag, and added-mass coeficients for a circular cylinder immersed in a time-dependent flow". Journal of Applied Mechanics, March, Vol. 85, pp. 13-15.

SARPKAYA, T., 1968, "An analytical study of separated flow about circular cylinders". Journal of Basic Engineering, December, Vol. 90, pp. 511-520.

SARPKAYA, T. & SCHOAFF, R.L., 1979, "Inviscid model of two-dimensional vortex shedding by a circular cylinder". AIAA Journal, November, Vol. 17, N° 11, pp. 1193-1200.

SARPKAYA, T., 1989, "Computational methods with vortices - the 1988 Freeman Scholar Lecture". Journal of Fluids Engineering, Vol. 111. , pp. 5-52.

SHERMAN, F.S., 1990, Viscou flow. McGraw-Hill, International Editions Mechanical Engineering Series.

SILVA, R.M., 1992, Modelagem numérica do escoamento bidimensional para altos números de Reynolds em torno de um cilindro circular. Rio de Janeiro, RJ, BRASIL, PEM-COPPE/UFRJ, Tese de Mestrado.

SMITH, P.A. & STANSBY, P.K., 1988, "Impulsively started flow around a circular cylinder by the vortex method". J. Fluid Mech., Vol. 198, pp. 45-77.

SMITH, P.A. & STANSBY, P.K., 1989, "Post critical flow around a circular cylinder by the vortex method". J. Fluid Struct., May, Vol. 3, N° 3, pp. 275-291.

SPARLAT, P.R. & LEONARD, A., 1981, "Computation of separated flows by a vortex tracing algorithm". AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, California, AIAA, 81-1246.

STANSBY, P. K. & DIXON, A. G., 1983, "Simulation of flow around cylinders by a Lagrangian vortex scheme". Appl. Ocean Res., Vol. 5, N° 3, pp. 167-78.

SWANSON, W.M., 1961, "The Magnus Effect: a summary of investigations to date". Journal of Basic Enginnering, September, Vol. 83, pp. 461-470.

TIENROTH, E.C., 1986, "Simulation of the viscous flow over a cylinder in a wave field". 16th. Symposium on Naval Hydrodynamics.

VEZZA, M. & GALBRAITH, R. A. McD., 1985, "A method for predicting unsteady potential flow about an aerofoil". Int. J. Num. Meth. Fluid, Vol. 5, pp. 347-356.

VEZZA, M. & GALBRAITH, R. A. McD., 1985, "An inviscid model of unsteady aerofoil flow with fixed upper surface separation". Int. J. Num. Meth. Fluid, Vol. 5, pp. 577-592.

WILLIAMSON, C.H.K., 1996, "Vortex dynamics in the cylinder wake". Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 28, pp. 477-539.

XU, C. & YEUNG, 1998, "Numerical study of unsteady flow around airfoil with spoiler". ASME Journal of Applied Mechanics, March, Vol. 65 , pp. 164-170.

ZEDAN, M.F. & DALTON, C., 1978, "Potential flow around axisymmetric bodies: direct and inverse problems". AIAA J., Vol. 16, Nº 3.

ZEDAN, M.F. & DALTON, C., 1981, "Design of low drag axisymmetric shapes by the inverse method". J. Hydro., Vol. 15, pp. 48-54.

Ministério da Educação e do Desporto
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

ANEXO I

PRONUNCIAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

A Banca Examinadora, abaixo assinada, nomeada pela Portaria nº 121 de 18 de março de 1999, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: **"Simulação Numérica do Escoamento em Torno de um Corpo de Forma Arbitrária Utilizando o Método de Vórtices Discretos"** apresenta pronunciamento no sentido de que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, solicite ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) a expedição do título de **Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica, na Área de Concentração: Máquinas de Fluxo**, satisfeitas as demais exigências regimentais, à **Luiz Antonio Alcântara Pereira.**

Itajubá, 22 de março de 1999.

Prof. Gustavo Cesar Rachid Bodstein
1º Examinador - COPPE/UFRJ

Prof. Nelson Manzanares Filho
2º Examinador - EFEI

Prof. Waldir de Oliveira
3º Examinador - EFEI

Prof. Miguel Hiroo Hirata
4º Examinador - EFEI - Orientador

Pró-Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação - EFEI - Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Av BPS, 1303 - Cx Post 50 - 37500-000 - ITAJUBÁ/MG - BRASIL - Tel.: (035)629-1118 - 629-1121;
Fax (035)629-1120 - International Dialing: Please replace (035) by (+5535)

Ministério da Educação e do Desporto
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

ANEXO II

FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

Título da Dissertação: **"Simulação Numérica do Escoamento em Torno de um Corpo de Forma Arbitrária Utilizando o Método de Vórtices Discretos".**

Autor: **Luiz Antonio Alcântara Pereira**

JULGAMENTO

Examinadores	Conceito	Rubrica
1º	A+	
2º	A+	
3º	A+	
4º	A+	

Resultado Médio: Conceito A+, ou seja, aprovado com distinção

Observações: _____

Itajubá, 22 de março de 1999.

Prof. Gustavo Cesar Rachid Bodstein
1º Examinador -COPPE/UFRJ

Prof. Nelson Manzanares Filho
2º Examinador - EFEI

Prof. Waldir de Oliveira
3º Examinador - EFEI

Prof. Miguel Hiroo Hirata
4º Examinador - EFEI - Orientador