

TESE
1057

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

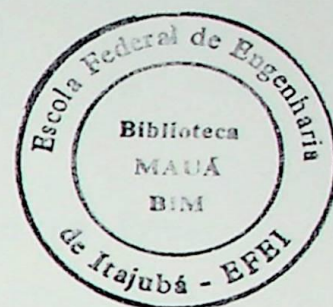
**Estudo Numérico da Convecção Natural em Sistemas
Compostos por Fluidos Imiscíveis Sobrepostos**

DÊNIO LEMOS PANISSI

ITAJUBÁ - MG

2000

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA



TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO NUMÉRICO DA CONVECÇÃO NATURAL EM
SISTEMAS COMPOSTOS POR FLUIDOS IMISCÍVEIS
SOBREPOSTOS

DÊNIO LEMOS PANISSI

ORIENTADOR
PROF. DR. GENÉSIO JOSÉ MENON

ITAJUBÁ - MG

2000

CLASS.	531.362:519.6(043.2)
CUTTER.	P192e
TOMBO.	1057

FICHA CATALOGRÁFICA

536.2:519.6(043.2)

P192e

Panissi, Dênio Lemos

Estudo Numérico da Convecção Natural em Sistemas Compostos por Fluidos Imiscíveis Sobrepostos: aplicações em engenharia mecânica / por Dênio Lemos Panissi; orientado por Genésio José Menon. – Itajubá, MG: [s.n.], 2000. 185p.:il.

Tese (doutorado em engenharia mecânica) – Escola Federal de Engenharia de Itajubá.

1 - Convecção natural. 2 - Fluidos imiscíveis sobrepostos.

3 - Empuxo. 4 - Tensão termocapilar. 5 - Método de elementos finitos.

I. Menon, Genésio José, orient. II. Escola Federal de Engenharia de Itajubá.

III. Título.

TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO NUMÉRICO DA CONVECÇÃO NATURAL EM SISTEMAS COMPOSTOS POR FLUIDOS IMISCÍVEIS SOBREPOSTOS

Tese apresentada, por Dênio Lemos Panissi, ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, como parte dos requisitos, para obtenção do título de Doutor em Ciências em Engenharia Mecânica na Área de Conversão de Energia.

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcio Bueno do Santos

Prof. Dr. Luiz Roberto Carrocci

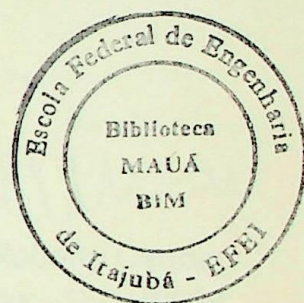
Prof. Dr. Jerzy Tadeusz Sielawa

Prof. Dr. José Célio Dias

Prof. Dr. Vilmar Arthur Schwarz

Prof. Dr. Genésio José Menon – (Orientador)

Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho – (Presidente)



Itajubá – MG

2000

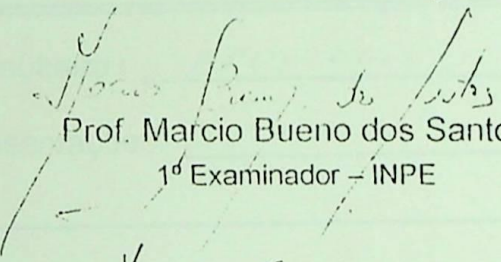


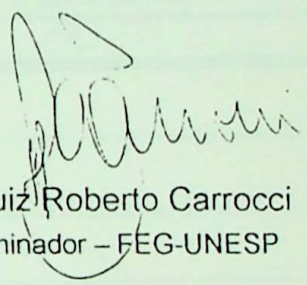
Ministério da Educação
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

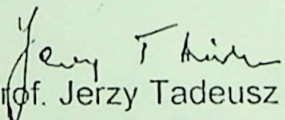
PRONUNCIAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA DE TESE DE DOUTORADO


A Comissão Examinadora nomeada pela Portaria nº 170 de 06 de julho de 2000, cumpridas todas as etapas da Sessão de Defesa de Tese previstas no Regulamento do Curso de Doutorado em Engenharia Mecânica, se posiciona favoravelmente à "Aprovação" da Tese de Doutorado intitulada: "**Estudo Numérico da Convecção Natural em Sistemas Compostos por Fluidos Imiscíveis Sobrepostos**" e emite instrução para que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, tome as providências necessárias junto ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) para a expedição do título de Doutor em Ciências em Engenharia Mecânica, na Área de Concentração de Conversão de Energia, desde que atendidas as demais exigências regimentais, a Dênio Lemos Panissi.

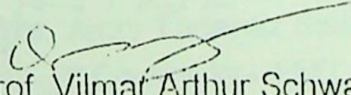
Itajubá, 07 de julho de 2000.

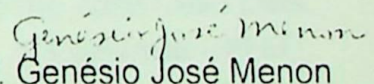

Prof. Marcio Bueno dos Santos
1º Examinador - INPE

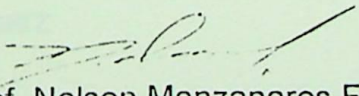

Prof. Luiz Roberto Carrocci
2º Examinador - FEG-UNESP


Prof. Jerzy Tadeusz Sielawa
3º Examinador - EFEI


Prof. José Célio Dias
4º Examinador - EFEI


Prof. Vilmar Arthur Schwarz
5º Examinador - EFEI


Prof. Genésio José Menon
Orientador - EFEI


Prof. Nelson Manzanares Filho
Presidente - EFEI



Ministério da Educação
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

FOLHA DE JULGAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA
DE TESE DE DOUTORADO

Título da Tese: "Estudo Numérico Através de Método de Elementos Finitos da Convecção Natural em Sistemas Compostos por Fluidos Imiscíveis Sobrepostos"

Autor: Dênio Lemos Panissi

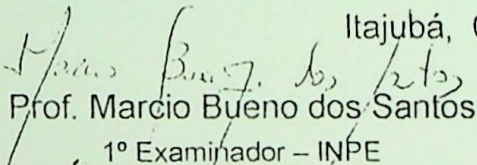
JULGAMENTO

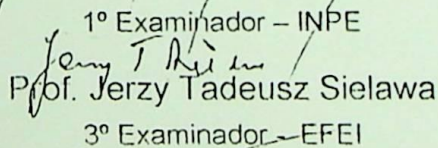
Examinadores	Conceito	Rubrica
1º	A	MBS
2º	A	
3º	A	
4º	A	
5º	A	
6º	A	

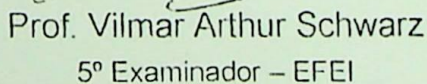
Resultado: APROVADO

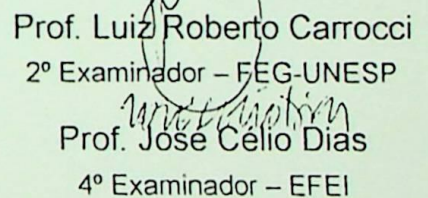
Observações: _____

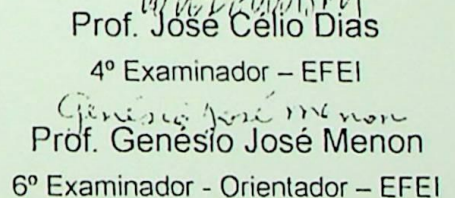
Itajubá, 07 de julho de 2000.

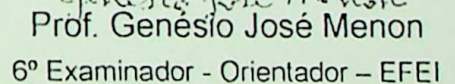

Prof. Marcio Bueno dos Santos
1º Examinador - INPE

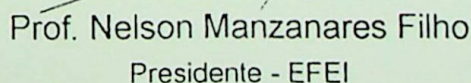

Prof. Jerzy Tadeusz Sielawa
3º Examinador - EFEI


Prof. Vilmar Arthur Schwarz
5º Examinador - EFEI


Prof. Luiz Roberto Carrocci
2º Examinador - FEG-UNESP


Prof. Jose Celio Dias
4º Examinador - EFEI


Prof. Genesio Jose Menon
6º Examinador - Orientador - EFEI


Prof. Nelson Manzanares Filho
Presidente - EFEI

Agradecimentos

Dedicatória

A Deus pela vida concedida, aos familiares e amigos
Aos meus queridos pais - Geraldo e Cidoca, e ao meu irmão Délio.

ao Prof. Dr. Nelson Manzoni Filho pelas preciosas colaborações, e à CAPES pelo apoio financeiro.

Agradecimentos

A Deus pela vitória alcançada, aos familiares e amigos pelo apoio e incentivo, ao Prof. Dr. Genésio José Menon pelas orientações no desenvolvimento desta tese, ao Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho pelas preciosas colaborações, e à CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

O trabalho consiste no estudo numérico da convecção natural causada pelas forças de empuxo e termocapilares em uma cavidade retangular contendo fluidos imiscíveis sobrepostos. O estudo é baseado nas equações bidimensionais de conservação da quantidade de movimento, energia e massa. É considerado o escoamento em regime laminar e as propriedades dos fluidos constantes, exceto a tensão termocapilar na superfície dos fluidos e a densidade nos termos de empuxo. As equações são escritas utilizando a formulação função corrente-vorticidade. O problema é resolvido através do método de elementos finitos e os resultados são apresentados para um conjunto de números adimensionais (Prandtl, Rayleigh e Marangoni) e relações entre as propriedades dos fluidos, onde são mostrados o perfil de velocidade horizontal no centro da cavidade, as distribuições de linhas de corrente, o campo de vorticidade, e as isotermas. Alguns resultados foram comparados com trabalhos experimentais e numéricos disponíveis na literatura e se acharam em boa concordância.

Palavras-chave: *Convecção natural, Fluidos imiscíveis sobrepostos,
Empuxo, Tensão termocapilar, Método de elementos finitos.*

ABSTRACT

Natural convection induced by thermocapillary and buoyancy forces, in a rectangular cavity containing immiscible superposed fluids, was numerically studied. In this cavity, laminar regime flow and constant physical properties were considered. Thermocapillary stress at surface of layers and density in buoyancy terms were assumed as dependents on temperature. The governing equations were written using stream function-vorticity formulation. The problem was resolved using the Finite Element Method. The results present stream function, vorticity field, temperature distribution, velocity profile, and average Nusselt number, for a set of non-dimensional numbers (Prandtl, Rayleigh, and Marangoni) and ratios of fluids properties. Some numerical results were compared with experimental and numerical data, reported in the literature, and found in good agreement.

Key-words: *Natural convection, Immiscible superposed fluids,
Buoyancy, Thermocapillary stress, Finite element method.*

ÍNDICE DO CONTEÚDO

Página

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
ÍNDICE DO CONTEÚDO	iii
ÍNDICE DAS FIGURAS	vii
ÍNDICE DAS TABELAS	x
Capítulo 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1- Generalidades	1
1.1.1- Transferência de calor por convecção	1
1.1.2- Convecção natural em espaços confinados	1
1.1.3- Convecção natural em cavidades com fluidos imiscíveis	2
1.1.4- Solução de problemas de convecção natural	3
1.2- Revisão da literatura	3
1.2.1- Cavidade com um fluido	3
1.2.2- Cavidade parcialmente cheia	7
1.2.3- Cavidade cheia com líquido e com gás	8
1.2.4- Cavidade cheia com dois líquidos imiscíveis	9
1.2.5- Cavidade cheia com três líquidos imiscíveis	10
1.3- Objetivos deste trabalho	10
1.4- Delineamento do trabalho	11
Capítulo 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	13
2.1- Introdução	13
2.2- Equações governantes	14
2.2.1- Equações de conservação	15
2.2.2- Condições de interface	18
2.2.3- Condições de contorno	19
2.2.4- Condições iniciais	21
2.3- Adimensionalização das equações governantes	21
2.3.1- Adimensionalização para cavidade com condição de contorno com temperatura constante	22
2.3.2- Adimensionalização para cavidade com condição de contorno com fluxo de calor constante	29
2.4- Parâmetros adimensionais do problema	35
2.4.1- Parâmetros de entrada	35
2.4.2- Parâmetros de saída	36
2.5- Nomenclatura	37
Capítulo 3 - MÉTODO DE SOLUÇÃO	39
3.1- Introdução	39
3.2- Solução genérica	39
3.2.1- Cálculo das matrizes e vetores para os elementos da malha	41
3.3- Aplicação da solução genérica às equações de conservação	43

3.3.1- Solução da equação em termos de função corrente	44
3.3.2- Solução da equação em termos de vorticidade	45
3.3.3- Solução da equação em termos de temperatura	47
3.4- Esquema de diferenças finitas para discretização do domínio do tempo	48
3.4.1- Aplicação do esquema de diferença finita central na solução genérica	48
3.4.2- Aplicação do esquema de diferença finita central no cálculo das distribuições da função corrente, vorticidade e temperatura	50
3.5- Acoplamento das equações de conservação	51
3.6- Imposição das condições de interface e contorno	52
3.7- Método de solução do sistema de equações lineares	52
3.8- Programa computacional	54
3.9- Nomenclatura	57
Capítulo 4 - VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO E DO CÓDIGO COMPUTACIONAL	59
4.1- Introdução	59
4.2- Cavidade com um fluido	59
4.3- Cavidade com dois fluidos imiscíveis superpostos	61
4.3.1- Paredes verticais com temperatura constante	61
4.3.2- Paredes verticais com fluxo de calor constante	66
4.4- Nomenclatura	69
Capítulo 5 - RESULTADOS	71
5.1- Introdução	71
5.2- Resultados para condição de contorno com temperatura constante	72
5.2.1- Cavidade fechada	72
5.2.2- Cavidade aberta	84
5.2.3- Relação entre os números de Rayleigh e Nusselt nas cavidades aberta e fechada	88
5.3- Resultados para condição de contorno com fluxo de calor constante	89
5.3.1- Cavidade fechada	89
5.3.2- Cavidade aberta	101
5.2.3- Comparação entre os números de Rayleigh e Nusselt nas cavidades fechada e aberta	105
5.4- Nomenclatura	106
Capítulo 6 - CONCLUSÕES	108
6.1- Conclusões sobre o desenvolvimento do trabalho	
6.2- Conclusões sobre o processo de convecção em cavidades contendo fluidos imiscíveis sobrepostos	109
6.3- Contribuições do presente trabalho	110
6.4- Recomendações para trabalhos futuros	110
Apêndice A - ELEMENTO TRIANGULAR LINEAR	111
A.1- Introdução	111
A.2- Equações	112
A.3- Cálculo dos gradientes	114
A.4- Nomenclatura	115

Apêndice B - MÉTODO DE GALERKIN PARA EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL INDEPENDENTE DO TEMPO	116
B.1- Introdução	116
B.2- Equações integrais para as matrizes do elemento	117
B.3- Cálculo das matrizes para o elemento triangular	120
B.4- Nomenclatura	121
Apêndice C - CONDIÇÕES DE CONTORNO COM DERIVADAS NO MÉTODO DE GALERKIN	123
C.1- Introdução	123
C.2- Cálculo das integrais para o elemento triangular	125
C.3- Nomenclatura	128
Apêndice D - MÉTODO DE GALERKIN PARA EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL DEPENDENTE DO TEMPO	128
D.1- Introdução	128
D.2- Formulação consistente	129
D.3- Formulação fragmentada	130
D.4- Solução no domínio do tempo	133
D.5- Nomenclatura	134
Apêndice E - SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO ATRAVÉS DO METODO DE DIFERENÇAS FINITAS	136
E.1- Introdução	136
E.2- Solução	136
E.3- Nomenclatura	138
Apêndice F - FALHAS NUMÉRICAS NO PROCESSO DE SOLUÇÃO	140
F.1- Introdução	140
F.2- Resultados incoerentes com a realidade física	140
F.3- Oscilação numérica	142
F.4- Nomenclatura	144
Apêndice G - DETERMINAÇÃO DO PASSO DE TEMPO	146
G.1- Introdução	146
G.2- Solução	146
G.3- Nomenclatura	148
Apêndice H - NÚMEROS ADIMENSIONAIS	150
H.1- Número de Nusselt	151
H.2- Número de Grashof	154
H.3- Número de Prandtl	155
H.4- Número de Rayleigh	155
H.5- Número de Marangoni	155
H.6- Nomenclatura	157
Apêndice I - CONDIÇÕES DE INTERFACE	159
I.1- Introdução	159
I.2- Aplicação das condições de interface	163
I.3- Nomenclatura	167

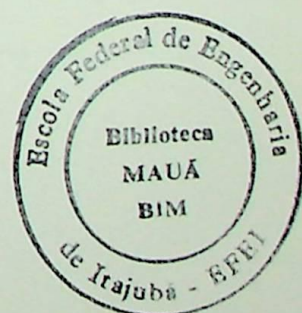
Apêndice J - CONDIÇÕES DE CONTORNO	169
J.1- Introdução	169
J.2- Condições de contorno	170
J.3- Aplicação das condições de contorno	172
J.4- Nomenclatura	179
Apêndice K – MÉTODO DA FATORIZAÇÃO LU	180
K.1- Método	180
K.2- Nomenclatura	181
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	182
1 Cavidade aberta com condição de contorno com fluxo de calor constante	24
1 Programa do programa computacional	24
1 Cavidade fechada esférica	60
2 Cavidade esférica	62
3 Média empregada na discretização da cavidade	63
4 Comparação entre o método numérico do presente trabalho e o resultado experimental obtido por Prakash e Kuster	64
5 Função corrente obtida numericamente pelo presente trabalho	65
6 Função corrente obtida experimentalmente por Prakash e Kuster	66
7 Função corrente obtida numericamente por Prakash e Kuster	67
8 Cavidade fechada com fluxo de calor constante nos paredes verticais	68
9 Média empregada na discretização da cavidade com $H=2$ e $Pr=10$	71
10 Resultados do presente trabalho e os de Prakash e Vasanth	77
11 Função corrente obtida no presente trabalho	78
12 Função corrente obtida numericamente por Prakash e Vasanth	79
13 Isotermas obtidas no presente trabalho	80
14 Isotermas obtidas numericamente por Prakash e Vasanth	81
15 Diagrama da cavidade fechada esférica	72
16 Média utilizada na discretização da cavidade	73
17 Linha de contorno e isotermas para $(a) H=0,1; (b) H=1,0; (c) H=10,0$	74
18 Perfil de velocidade horizontal no centro da cavidade para $H=0,1; 1,0$ e $10,0$	75
19 Número de Nusselt médio para $H=0,1; 1,0; 10,0$	76
20 Linha de contorno e isotermas para $(a) H=0,1; (b) H=1,0; (c) H=10,0$	77
21 Perfil de velocidade horizontal no centro da cavidade para $H=0,1; 1,0; 10,0$	78
22 Número de Nusselt médio para $H=0,1; 1,0; 10,0$	79

ÍNDICE DAS FIGURAS

<i>Figura</i>	<i>Legenda</i>	<i>Página</i>
2.1.a	Cavidade aberta com fluidos imiscíveis superpostos.	13
2.1.b	Cavidade fechada com fluidos imiscíveis superpostos.	13
2.2	Adimensionalização da geometria da cavidade.	22
2.3	Cavidade fechada com condição de contorno com temperatura constante.	22
2.4	Cavidade aberta com condição de contorno com fluxo de calor constante.	29
3.1	Fluxograma do programa computacional.	54
4.1	Cavidade quadrada estudada.	60
4.2	Cavidade estudada.	62
4.3	Malha empregada na discretização da cavidade.	63
4.4	Comparação entre o resultado numérico do presente trabalho e o resultado experimental obtido por Prakash e Koster.	64
4.5	Função corrente obtida numericamente pelo presente trabalho.	65
4.6	Função corrente obtida experimentalmente por Prakash e Koster.	65
4.7	Função corrente obtida numericamente por Prakash e Koster.	65
4.8	Cavidade fechada com fluxo de calor constante nas paredes verticais.	66
4.9	Malha empregada na discretização da cavidade com $\delta=2$ e $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0,5$.	67
4.10	Resultados do presente trabalho e os de Bargach e Vasseur.	67
4.11	Função corrente obtida no presente trabalho.	68
4.12	Função corrente obtida numericamente por Bargach e Vasseur.	68
4.13	Isotermas obtidas no presente trabalho.	68
4.14	Isotermas obtidas numericamente por Bargach e Vasseur.	68
5.1	Esquema da cavidade fechada estudada.	72
5.2	Malha utilizada na discretização da cavidade.	73
5.3	Linhas de correntes e isotermas para (a) $\bar{\kappa} = 0,1$; (b) $\bar{\kappa} = 1,0$; (c) $\bar{\kappa} = 10,0$.	74
5.4	Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $\bar{\kappa} = 0,1; 1,0$ e $10,0$.	75
5.5	Número de Nusselt médio para $\bar{\kappa} = 0,1; 1,0; 10,0$.	75
5.6	Linhas de correntes e isotermas para (a) $\bar{\mu} = 0,1$; (b) $\bar{\mu} = 1,0$; (c) $\bar{\mu} = 10,0$.	77
5.7	Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $\bar{\mu} = 0,1; 1,0; 10,0$.	78
5.8	Número de Nusselt médio para $\bar{\mu} = 0,1; 1,0; 10,0$.	78

5.9	Linhas de correntes e isothermas para (a) $\bar{\beta} = 0,1$; (b) $\bar{\beta} = 1,0$; (c) $\bar{\beta} = 10,0$.	79
5.10	Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $\bar{\beta} = 0,1; 1,0; 10,0$.	80
5.11	Número de Nusselt médio para $\bar{\beta} = 0,1; 1,0; 10,0$.	80
5.12	Linhas de correntes e isothermas para diversos Ma'_1/Ra'_1 .	81
5.13	Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $Ma'_1/Ra'_1 = 0,0; 0,1; 1,0$.	82
5.14	Número de Nusselt médio para $Ma'_1/Ra'_1 = 0,01; 0,1; 0,5; 1,0$.	82
5.15	Cavidade estudada.	84
5.16	Comparação entre as velocidades em cada tipo de convecção natural.	85
5.17	Função corrente obtida na convecção causada somente por forças de empuxo. Parâmetros do escoamento: $Ma'_1=0$; $Ma'_2=0$; $Ra'_1=183875$; $Ra'_2=98040$.	86
5.18	Isothermas obtidas na convecção causada somente por forças de empuxo. Parâmetros do escoamento: $Ma'_1=0$; $Ma'_2=0$; $Ra'_1=183875$; $Ra'_2=98040$.	86
5.19	Função corrente obtida na convecção causada somente por forças Termocapilares. Parâmetros do escoamento: $Ma'_1=1945$; $Ma'_2=4520$; $Ra'_1=0$; $Ra'_2=0$.	87
5.20	Isothermas obtidas na convecção causada somente por forças termocapilares. Parâmetros do escoamento: $Ma'_1=1945$; $Ma'_2=4520$; $Ra'_1=0$; $Ra'_2=0$.	87
5.21	Função corrente obtida na convecção causada por forças de empuxo e termocapilares. Parâmetros do escoamento: $Ma'_1=1945$; $Ma'_2=4520$; $Ra'_1=183875$; $Ra'_2=9804$.	87
5.22	Isothermas obtida na convecção causada por forças de empuxo e termocapilares. Parâmetros do escoamento: $Ma'_1=1945$; $Ma'_2=4520$; $Ra'_1=183875$; $Ra'_2=98040$.	87
5.26	Relação entre os números de Rayleigh e Nusselt médio.	88
5.24	Esquema da cavidade fechada estudada.	89
5.25	Malha utilizada na discretização da cavidade.	90
5.23	Linhas de correntes e isothermas para (a) $\bar{\kappa} = 0,1$; (b) $\bar{\kappa} = 1,0$; (c) $\bar{\kappa} = 10,0$.	91
5.27	Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $\bar{\kappa} = 0,1; 1,0; 10,0$.	92
5.28	Número de Nusselt médio para $\bar{\kappa} = 0,1; 1,0; 10,0$.	92
5.29	Linhas de correntes e isothermas para (a) $\bar{\mu} = 0,1$; (b) $\bar{\mu} = 1,0$; (c) $\bar{\mu} = 10,0$.	94
5.30	Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $\bar{\mu} = 0,1; 1,0$ e $10,0$.	95
5.31	Número de Nusselt médio para $\bar{\mu} = 0,1; 1,0; 10,0$.	95
5.32	Linhas de correntes e isothermas para (a) $\bar{\beta} = 0,1$; (b) $\bar{\beta} = 1,0$; (c) $\bar{\beta} = 10,0$.	96
5.33	Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $\bar{\beta} = 0,1; 1,0$ e $10,0$.	97
5.34	Número de Nusselt médio para $\bar{\beta} = 0,1; 1,0; 10,0$.	97
5.35	Linhas de correntes e isothermas para diversos Ma''_1/Ra''_1 .	98

5.36	Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $Ma_1''/Ra_1''=0,0;0,1;1,0$.	99
5.37	Número de Nusselt médio para diversos Ma_1''/Ra_1'' .	99
5.38	Esquema da cavidade aberta estudada.	101
5.39	Malha utilizada na discretização da cavidade.	102
5.40	Desenvolvimento da convecção termocapilar no regime transiente.	103
5.41	Relação entre os números de Rayleigh e Nusselt médio.	105
A.1	Elemento triangular linear	111
D.1	Variação de $\partial\phi/\partial t$ dentro de um elemento triangular	131
D.2	Representação das funções N_i^* , N_j^* , N_k^*	132
E.1	Definição do valor de Θ	136
F.1	Pré-requisito para evitar a incoerência com a realidade física	141
H.1.a	Variáveis dimensionais	150
H.1.b	Variáveis adimensionais	150
H.2	Forças atuantes no escoamento termocapilar	156
I.1	Esquema da interface	159
I.2	Exemplo de discretização de uma cavidade com duas camadas de fluidos	162
I.3	Esquema dos pontos nodais	165
J.1.a	Cavidade aberta com fluidos imiscíveis superpostos	169
J.1.b	Cavidade fechada com fluidos imiscíveis superpostos	170
J.2	Esquema dos pontos nodais na parede inferior	173
J.3	Esquema dos pontos nodais na parede superior	174
J.4	Esquema dos pontos nodais na parede esquerda	174
J.5	Esquema dos pontos nodais na parede direita	175
J.6	Esquema dos pontos nodais na superfície do fluido superior	176
J.7	Esquema dos pontos nodais na parede inferior	177
J.8	Esquema dos pontos nodais na parede inferior	177
J.9	Esquema dos pontos nodais na parede esquerda	178
J.10	Esquema dos pontos nodais na parede direita	178



ÍNDICE DAS TABELAS

<i>Tabela</i>	<i>Legenda</i>	<i>Página</i>
2.1	Equações de conservação dimensionais na forma geral.	18
2.2	Equações de conservação adimensionais na forma geral para cavidade com condição de contorno de temperatura constante.	25
2.3	Equações de conservação adimensionais na forma geral para cavidade com condição de contorno com fluxo de calor constante.	32
3.1	Valor de Θ em cada esquema de diferenças finitas.	40
3.2	Termos da equação de conservação adimensional na forma geral.	43
3.3	Comparação entre os métodos de solução de sistema de equações lineares.	52
4.1	Comparação entre os resultados para $Pr=0,733$ e $Ra'=14660$.	60
4.2	Comparação entre os resultados para $Prandtl=0,733$ e diversos números de Rayleigh.	61
4.3	Propriedades físicas dos fluidos.	62
4.4	Dimensões da cavidade.	62
4.5	Número de Rayleigh.	62
4.6	Número de Marangoni.	62
D.1	Valor de Θ em cada esquema.	134
E.1	Valor de Θ em cada esquema.	138
F.1	Autovalores e falhas numéricas.	142

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1- Generalidades

1.1.1- Transferência de calor por convecção

O modo de transferência de calor por convecção é geralmente dividido em dois processos básicos - Convecção Forçada e Convecção Natural.

Quando o movimento do fluido, que está trocando calor com uma superfície, é causado por um agente externo, tal como um ventilador, uma bomba ou até mesmo o vento, temos um caso de convecção forçada. Por outro lado, se o escoamento surge naturalmente, como resultado do empuxo causado pela presença de forças de campo, agindo em um meio fluido, no qual há diferenças de densidade ou concentração, então o processo é definido como convecção natural.

O estudo da transferência de calor por convecção natural, em geral, é mais complicado que o da convecção forçada, em virtude da forma segundo a qual o fenômeno é gerado, pois, neste caso, existe um acoplamento entre os processos de transferência de calor e massa com o mecanismo de escoamento do fluido.

1.1.2- Convecção natural em espaços fechados

Cavidades são definidas como espaços finitos contornados por paredes e preenchida com um meio fluido. Também se incluem nesta definição as cavidades que possuem partições internas e obstáculos.

A convecção natural em cavidades é importante em muitas aplicações da engenharia, tais como:

- projetos de chaminés,
- operação e projeto de coletor solar,

- cálculo do calor perdido através de janelas duplas,
- proteção contra fogo em edificações e outros espaços confinados,
- **armazenamento de frio em sistemas de refrigeração,**
- produção de cristais de alta pureza,
- resfriamento de equipamentos eletrônicos,
- projeto de fornos domésticos e industriais,
- isolamento de reatores nucleares por cavidades contendo gases,
- isolamento de cabinas de aeronaves.

A convecção natural em tais cavidades ocorre como resultado do empuxo causado por forças de campo, agindo sobre as variações de densidade no fluido. Tais variações de densidade podem ser oriundas de aquecimento ou resfriamento externo, através das paredes de contorno, fontes ou sumidouros internos de calor, mudança na concentração do fluido como resultado da transferência de massa, ou alguma combinação destes processos.

1.1.3- Convecção natural em uma cavidade contendo fluidos imiscíveis

O estudo da convecção natural em cavidades, contendo fluidos imiscíveis superpostos, tem diversas aplicações, conforme apresentadas a seguir.

Em tanques de armazenamento de combustíveis, quando estes estão parcialmente cheios, encontramos uma região com líquido e outra com gás. O conhecimento da forma e da magnitude da transferência de calor permite prever o comportamento destes tanques, em situações de acidentes envolvendo incêndio, possibilitando o desenvolvimento de meios de proteção.

Na manta terrestre, a descontinuidade sismológica pode ser modelada como uma interface de dois fluidos.

No processo de fabricação de materiais eletrônicos, durante a solidificação, o escoamento que ocorre, devido ao processo de convecção natural, pode causar estruturas cristalográficas não-homogêneas nos materiais solidificados, gerando propriedades eletrônicas indesejáveis. A fim de amenizar este problema, foi desenvolvida a técnica de crescimento de cristal encapsulado em líquido, reduzindo a taxa de evaporação dos componentes voláteis. A elaboração de técnicas aperfeiçoadas de crescimento de cristais tem motivado diversos pesquisadores ao estudo do escoamento convectivo, em cavidades compostas por fluidos imiscíveis superpostos.

1.1.4- Solução de problemas de convecção natural

Para a solução de problemas de convecção natural, laminar, bidimensional é necessária a solução simultânea de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. A complexidade matemática limita a possibilidade de se obterem soluções analíticas para o sistema, o que torna conveniente a utilização de Métodos Numéricos.

Para a solução numérica em questão, o método de elementos finitos tem a vantagem de se adaptar às linhas de fronteira do domínio em estudo, simplificando a aplicação das condições de contorno. Nesse método, o domínio em estudo pode ser subdividido em elementos de tamanhos diferentes, o que permite concentrar maior número de elementos nas regiões de maiores gradientes das grandezas envolvidas, melhorando a precisão dos resultados, sem aumento das dificuldades de aplicação do método. A potencialidade do método fica evidenciada nos casos de geometrias irregulares.

1.2- Revisão da literatura

1.2.1- Cavidade com um fluido

Wilkes, J. O. & Churchill, S. W., (1966) realizaram um estudo da convecção natural de um fluido confinado em uma cavidade de seção retangular com uma parede vertical aquecida e outra resfriada. Em seu trabalho foram realizadas as seguintes considerações:

- escoamento bidimensional;
- as propriedades do fluido constantes em relação à temperatura, exceto a densidade em termos de empuxo;
- a dissipação viscosa e os efeitos de compressibilidade desprezados.

As equações governantes de transporte foram resolvidas por um método de diferenças finitas implícita. As isotermas e as linhas de corrente para os regimes transitórios e permanentes foram obtidas para números de Grashof até 10^5 e para razões de aspecto da cavidade (altura/largura) 1, 2 e 3.

Tabarrok, B. & Lin R. C. (1977) estudaram problemas bidimensionais de convecção natural governados pelas equações da continuidade, quantidade de movimento e balanço de energia, simplificados através da aproximação de Boussinesq para as forças de empuxo. Os autores utilizaram a formulação vorticidade –função corrente. Um modelo, usando elemento triangular, foi desenvolvido e empregado para análise de dois exemplos, sob várias condições. Para os casos, onde os resultados

(experimental e numérico) obtidos por outros autores estavam disponíveis, foi realizada uma comparação. Essa comparação mostrou boa concordância.

Kwun, S. S. et al. (1982) fizeram um estudo teórico e experimental da transferência de calor por convecção natural, no espaço anular entre cilindros horizontais isotérmicos, com três espaçadores axiais igualmente espaçados. Uma aleta fina foi usada, como aproximação, para modelar a condição de contorno térmica dos espaçadores, no método de diferenças finitas bidimensional. Os números de Rayleigh e Prandtl, a razão entre os diâmetros, a localização e a condutividade térmica dos espaçadores foram variadas parametricamente para determinar a variação no escoamento, a distribuição de temperatura e a transferência de calor. Os autores verificaram que espaçadores de baixa condutividade podem diminuir a transferência de calor por convecção, para valores até 20% abaixo, em relação ao caso do espaço anular sem espaçadores. Contudo, a condução radial, através dos espaçadores de alta condutividade, restringe a transferência de calor por convecção natural entre os cilindros.

Duas razões de diâmetros foram testadas experimentalmente em um interferômetro Mach-Zehnder, usando ar à pressão atmosférica, com espaçadores de aço entre cilindros de cobre. As distribuições de temperatura numérica e experimental e os coeficientes de transferência de calor por convecção local mostraram-se em boa concordância.

Chang, K. S. et al. (1983) utilizaram o método de Galerkin em elementos finitos, para analisar a transferência de calor por convecção natural em uma cavidade irregular formada por dois cilindros horizontais concêntricos e isotérmicos; o cilindro interno era quadrado e o externo era circular. Foram consideradas duas razões de aspectos diferentes, para duas possíveis configurações simétricas do cilindro quadrado interno. Uma verificação experimental também foi feita, obtendo as medidas do campo de temperatura e a visualização da função corrente.

Kaviany, M. (1984) investigou o efeito de uma protuberância na convecção natural, em uma cavidade quadrada que possui uma diferença de temperaturas entre as duas superfícies, examinando numericamente a taxa de transferência de calor total e a local. A protuberância foi formada por um semi-cilindro, localizado no lado inferior da cavidade. Os resultados numéricos foram para número de Prandtl 0,71 e para número de Rayleigh até 10^4 . Os resultados mostraram que a presença de uma protuberância determina um decréscimo na taxa de transferência de calor na parte inferior da cavida-

de. Este relativo decréscimo, inicialmente torna-se mais pronunciado com o aumento do número de Rayleigh, mas isto é menos significativo após o número de Rayleigh ter passado por um valor crítico. O valor crítico do número de Rayleigh depende do raio da protuberância e seu valor aumenta com o aumento do raio. Os resultados estão em geral em boa concordância com aqueles encontrados em outras investigações tratando do efeito de partições.

Nascimento, M. A. R. (1988) realizou um estudo numérico sobre a convecção natural no interior de coletores concentradores com absorvedor cilíndrico. A análise foi feita para o regime não permanente e permanente, considerando-se o escoamento bidimensional. Admitiu-se que o absorvedor é uma superfície isotérmica quente, a cobertura uma superfície isotérmica fria e as superfícies refletoras isoladas termicamente. As equações de conservação foram resolvidas, utilizando-se o método de elementos finitos para se determinarem as distribuições da função corrente, temperatura adimensional, vorticidade e o número de Nusselt local e médio em função dos parâmetros térmicos e geométricos e das propriedades físicas do meio. Os resultados foram apresentados, considerando-se os parâmetros: fator de concentração 3,64, fator de truncamento 0,5, ângulo de inclinação de 0° a 90° , medidos a partir da horizontal, número de Prandtl 0,733 e número de Grashof na faixa de 10^5 a 10^6 . As comparações de seus resultados, do número de Nusselt, com aqueles obtidos por outros autores para geometria quadrada, apresentaram boa concordância, sendo o máximo desvio relativo da ordem de 10%.

Menon, G. J. (1989) estudou o problema da convecção natural, transiente no interior de uma cavidade retangular, inclinada de um ângulo α com relação à horizontal. Foi utilizado o método de diferenças finitas para a determinação do número de Nusselt em função do número de Grashof (Gr), do número de Prandtl (Pr), da razão de aspecto (R) e do ângulo de inclinação (α) da cavidade. Os parâmetros adotados foram $Gr=10^4, 10^5$ e 10^6 , $\alpha=30^\circ, 60^\circ$ e 90° , $R=1, 2$ e 3 e $Pr=0,733$. O autor realizou comparações de seus resultados com aqueles obtidos por outros autores, encontrando excelente concordância.

Ribeiro, M. N. (1992) analisou a convecção mista laminar, entre tubos horizontais concêntricos e excêntricos. Em seu trabalho foram considerados dois tipos de condições de contorno: tubo externo é isolado e o tubo interno tem fluxo de calor uniforme axialmente e temperatura da parede uniforme circunferencialmente;

- as condições de contorno são inversas ao caso anterior.

Foi utilizado o método de elementos finitos para resolver as equações de conservação na forma adimensional. O número de Nusselt médio e o fator de atrito foram calculados em função de diversos parâmetros geométricos e térmicos. Os parâmetros geométricos envolvidos são: razão de raios 3,0 e 5,0, ângulo de inclinação 0° e 30° , excentricidade adimensional 0, 0,25, 0,50, -0,25 e -0,50. Os parâmetros térmicos usados são: número de Prandtl 0,70, número de Rayleigh variando de 0 a 3×10^5 . Verificou-se que o escoamento secundário originado pela convecção mista pode alterar bastante os perfis de velocidade e temperatura e resultar num aumento significativo da transferência de calor.

Guimarães, P. M. (1992) estudou problemas conjugados de transferência de calor por convecção natural, em cavidades retangulares, com condução na partição e nas paredes laterais, sendo analisadas três situações:

- cavidades com paredes laterais e sem partição,
- cavidades sem paredes laterais e com partição e
- cavidades com paredes laterais e com partição.

Nas duas últimas situações, foram estudados o efeito da posição da partição, situada no topo das cavidades, e o efeito da altura da partição no número de Nusselt. Foi considerado o escoamento laminar, bidimensional e não permanente, embora todos os resultados sejam apresentados para o regime permanente. Admitiu-se que duas superfícies da cavidade são mantidas isotérmicas, nas temperaturas quente e fria e que as outras duas superfícies são mantidas isoladas termicamente. As equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia são resolvidas numericamente, utilizando-se o método de elementos finitos e considerando-se os elementos isoparamétricos quadráticos quadriláteros com oito nós. Foram determinadas as distribuições da função corrente, temperatura adimensional, vorticidade e o número de Nusselt médio em função dos parâmetros térmicos e geométricos e das propriedades físicas do meio. Os resultados são apresentados considerando-se os seguintes parâmetros: número de Prandtl igual a 0,733; número de Grashof entre 10^4 e 10^6 ; razão entre as difusividades térmicas do sólido e do fluido entre 1 e 10^4 ; ângulo de inclinação entre -90° e 30° e diversos parâmetros geométricos.

Fernandes, S. (1992) analisou a convecção natural no interior de uma cavidade retangular inclinada de um ângulo α com relação à horizontal, contendo partições parciais diatérmicas e de espessura desprezível ligadas à superfície fria. Considerou temperaturas impostas em duas paredes e dois

tipos de condições de contorno nas outras: isolamento térmico e variação linear de temperatura. Empregou um método explícito de diferenças finitas para resolver as equações de conservação na forma adimensional. Os números de Nusselt médios nas superfícies quente e fria, respectivamente Nu_h e Nu_c , foram calculados em função de diversos parâmetros geométricos e térmicos. Os parâmetros geométricos envolvidos foram : razão de aspecto (altura da cavidade/largura da cavidade) variando de 1 a 5, ângulos de inclinação entre 0° e 60° , número de partições variando de 0 a 5 com comprimentos adimensionais (comprimento da partição/largura da cavidade) iguais a 0, 0,25, 0,5 e 0,75. Os parâmetros térmicos usados foram: número de Prandtl 0,71 e 0,733 , número de Rayleigh variando de 10^3 a 10^6 e número de Grashof entre 10^4 e 10^6 . Foi mostrado que a colocação de partições na superfície fria da cavidade tem o efeito de diminuir as perdas de calor por convecção natural no interior da cavidade.

1.2.2- Cavidade parcialmente cheia

Aydemir, N.U. et al. (1986) fizeram um estudo numérico da convecção natural no interior de um cilindro horizontal (parcialmente ou completamente cheio) uniformemente aquecido. Eles utilizaram uma transformação de coordenadas, simplificando a discretização das equações de movimento e energia. O sistema de equações diferenciais resultante, com suas condições de contorno, foi resolvido, utilizando diferenças finitas centrais, para vários números de Prandtl e Grashof e dois tamanhos de malhas.

O modelo matemático utilizado possui as seguintes características:

- as equações governantes são as de Navier-Stokes (incompressível e bidimensional) acopladas a equação da energia, através da aproximação de Boussinesq;
- termo de pressão é eliminado, através de derivadas;
- as equações são apresentadas na forma adimensional;
- domínio da solução resultante é um retângulo e é discretizado em um sistema de coordenadas cartesianas, usando uma malha de espaçamento uniforme;
- na superfície livre de cisalhamento, a vorticidade é igual a zero;
- as equações governantes transformadas são discretizadas no tempo, utilizando diferenças centrais com formulação implícita no tempo.

Eles compararam os resultados encontrados com os dados experimentais disponíveis em dois casos:

cilindro completamente cheio, com números de Prandtl 19.950 (óleo de silicone) e 0,7 (ar). A comparação apresenta boa concordância entre os dados experimentais e os computados; cilindro mantido em duas temperaturas constantes. Os números de Grashof e Prandtl utilizados foram $Gr=4,5 \times 10^4$ e $Pr=0,7$. Os resultados, quanto ao campo de temperaturas, apresentaram boa concordância, porém, quanto à velocidade há desvios de até 40%. Tais diferenças, os autores atribuíram a erros na tomada de dados experimentais.

1.2.3- Cavidade cheia com líquido e gás

Oosthuizen, P. H. & Kuhn, Q. (1984) estudaram numericamente a transferência de calor por convecção livre, dentro de um longo compartimento circular, no qual uma metade estava cheia de líquido e outra metade estava cheia de gás.

As soluções foram obtidas para duas condições de contorno térmicas na parede:

no tempo inicial a parte da parede que está em contato com o gás é aquecida a uma temperatura constante e uniforme;

no tempo inicial toda a parede é exposta a um fluxo de calor uniforme.

O estudo foi baseado no uso das equações bidimensionais de Navier-Stokes, energia e continuidade, sendo considerado o escoamento laminar.

As propriedades dos fluidos foram consideradas constantes, exceto a densidade nos termos de empuxo.

Na interface gás-líquido foram feitas as seguintes considerações:

a interface entre o líquido e o gás permanece plana;

a temperatura, velocidade, tensão de cisalhamento e fluxo de calor são contínuos através da interface;

a transferência de massa é desprezível na interface.

As equações governantes foram escritas em termos de variáveis adimensionais e resolvidas usando diferenças finitas e considerando, na interface líquido-gás, iguais a temperatura, fluxo de calor, velocidade e tensão de cisalhamento.

A solução tem, como parâmetros, as razões de uma série de propriedades líquido/gás e com número de Rayleigh variando de 0 a 3×10^5 .

1.2.4- Cavidade cheia com dois líquidos imiscíveis

Villers, D. & Platten, J. K. (1988,1990) estão entre os pioneiros a estudar a convecção natural em uma cavidade retangular com dois líquidos imiscíveis, realizando uma abordagem experimental e analítica. O sistema experimental era composto de água e heptanol e as medições do perfil de velocidade, em cada camada, foram realizadas com um anemômetro do tipo Laser Doppler.

Prakash, A. & Koster, J. N. (1996) estudaram experimentalmente e numericamente a convecção térmica bidimensional em um sistema de dois líquidos imiscíveis aquecidos no lado inferior.

Três configurações, quanto à altura das camadas de óleo de silicone sobre etileno-glicol, foram analisadas:

- camada inferior igual a duas vezes a camada superior,
- camada inferior igual à camada superior e
- camada superior igual a duas vezes a camada inferior.

O escoamento foi simulado numericamente, usando um programa de elementos finitos comercial - FIDAP, com uma malha de 51x71. O modelo matemático considerou o escoamento bidimensional com as seguintes condições de contorno:

- não escorregamento nas paredes;
- temperaturas adimensionais: lado superior = -0,5 e lado inferior = 0,5;
- temperatura com perfil linear nas paredes verticais;
- balanço das tensões cisalhantes na interface;
- continuidade da velocidade e temperatura na interface;
- efeitos termocapilares desprezados.

Os dois modos distintos de acoplamentos entre as camadas - acoplamento mecânico e acoplamento térmico foram visualizados, experimentalmente, através de um interferômetro holográfico e encontrados em razoável concordância com as simulações numéricas.

Bargash, M & Vasseur, P., (1993), Wang, P. et al. (1994), Prakash, A. e Koster, J. N. (1997) realizaram estudos a respeito de problemas de convecção, que envolvem não somente a força de empuxo, originária da diferença de densidade na presença de campo gravitacional, mas também a tensão de cisalhamento superficial, que existe ao longo de uma fronteira livre não-isotérmica de um fluido. Este tipo de convecção é relevante nos casos em que as forças de empuxo e termo-capilares são de magnitudes próximas.

1.2.5- Cavidade cheia com três líquidos imiscíveis

Prakash, A. & Koster, J. N. (1994) estudaram o problema do escoamento convectivo em camadas múltiplas de líquidos imiscíveis em uma cavidade retangular rasa, aquecida, com fronteiras rígidas e isoladas em cima e em baixo.

Como modelo para múltiplas camadas, um sistema de três camadas, caracterizados por duas interfaces não-deformáveis foi investigado. O método de expansão assintótica foi usado para determinar o escoamento nas duas regiões distintas: a região central caracterizada por um escoamento paralelo e nas regiões das extremidades da parede onde o escoamento gira. O mecanismo governante da convecção foi o empuxo, não sendo considerada a convecção de origem termocapilar. O estudo do acoplamento mecânico, através das interfaces entre os líquidos imiscíveis e a influência da variação da viscosidade encapsulante, foram investigados.

1.3- Objetivos deste trabalho

O objetivo deste trabalho é estudar numericamente, através do método de elementos finitos, a convecção natural que ocorre no interior de uma cavidade retangular composta por fluidos imiscíveis superpostos; sendo considerado o escoamento laminar, bidimensional em regime permanente e não permanente.

Nesta cavidade são analisadas diversas possibilidades de condições de contorno:

- temperatura constante nas paredes,
- fluxo de calor constante nas paredes,
- paredes adiabáticas,
- cavidade fechada, e
- cavidade aberta.

Quanto às forças responsáveis pelo escoamento, são consideradas:

- as forças de empuxo, e
- as forças de origem termocapilar.

A convecção natural, induzida pelas forças de empuxo e termocapilares, em uma cavidade composta por fluidos imiscíveis superpostos, é governada pelas equações de conservação, juntamente com as equações de acoplamento das camadas de fluido e as condições iniciais e de contorno.

No presente trabalho, é desenvolvida e apresentada uma formulação das equações gover-

nantes (em termos de função corrente, vorticidade, temperatura e parâmetros adimensionais) e a sua implementação no método de elementos finitos, através de um modelo matemático.

A partir do modelo matemático, são desenvolvidos códigos computacionais em linguagem de programação FORTRAN, para o cálculo das distribuições adimensionais da função corrente, vorticidade e temperatura.

Para estudar cada caso, no programa computacional, são fornecidos os parâmetros de entrada, que são expressos em termos das relações das propriedades termo-físicas dos fluidos, das relações geométricas, e dos números adimensionais de Prandtl, Rayleigh e Marangoni.

Por meio dos resultados obtidos, são estabelecidas as relações entre os coeficientes de transferência de calor em função de parâmetros térmicos e geométricos, possibilitando, assim, calcular o número de Nusselt e visualizar as distribuições que ocorrem na cavidade.

1.4- Delineamento do trabalho

Este trabalho está dividido em capítulos e apêndices. Nos capítulos, encontra-se o corpo principal do trabalho, cujo objetivo é estudar de forma direta o problema proposto. Os apêndices servem de suporte aos capítulos, apresentando com maiores detalhes aqueles itens que foram utilizados nos capítulos mas que não constituem o objetivo principal do trabalho.

Visando dar uma idéia geral do desenvolvimento deste trabalho, é mostrada a seguir uma síntese dos capítulos e apêndices.

Capítulos

Capítulo 1 – INTRODUÇÃO

É o presente capítulo.

Capítulo 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

São apresentadas as equações governantes, na forma dimensional e adimensional, e os parâmetros de entrada e saída do problema.

Capítulo 3 - MÉTODO DE SOLUÇÃO

Neste capítulo, é realizada a aplicação do método de elementos finitos nas equações governantes e, também, é apresentado o algoritmo do código computacional, desenvolvido para a solução

numérica do problema.

Capítulo 4 - VALIDAÇÃO DOS CÓDIGOS COMPUTACIONAIS

Com o objetivo de testar o código computacional, diversos casos reportados nas referências são estudados e os resultados obtidos são comparados àqueles encontrados no presente trabalho.

Capítulo 5 - RESULTADOS

O código computacional é utilizado para estudar diversos casos e os resultados são apresentados.

Capítulo 6 - CONCLUSÕES

São apresentadas as conclusões obtidas neste trabalho e são sugeridos trabalhos futuros.

Apêndices

Apêndice A - O ELEMENTO TRIANGULAR LINEAR

Apêndice B - MÉTODO DE GALERKIN PARA EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL INDEPENDENTE DO TEMPO

Apêndice C - CONDIÇÕES DE CONTORNO COM DERIVADAS NO MÉTODO DE GALERKIN

Apêndice D - MÉTODO DE GALERKIN PARA EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL DEPENDENTE DO TEMPO

Apêndice E - SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO ATRAVÉS DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

Apêndice F - FALHAS NUMÉRICAS NO PROCESSO DE SOLUÇÃO

Apêndice G - DETERMINAÇÃO DO PASSO DE TEMPO

Apêndice H - NÚMEROS ADIMENSIONAIS

Apêndice I - CONDIÇÕES DE INTERFACE

Apêndice J - CONDIÇÕES DE CONTORNO

Apêndice K - MÉTODO DA FATORIZAÇÃO LU

Capítulo 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1- Introdução

O processo de convecção natural que ocorre em uma cavidade, contendo fluidos imiscíveis superpostos, tal como a representada pela figura 2.1, pode ser analisado como resultante de duas formas básicas de convecção, sendo elas: a convecção causada por forças de empuxo e a convecção de origem termocapilar.

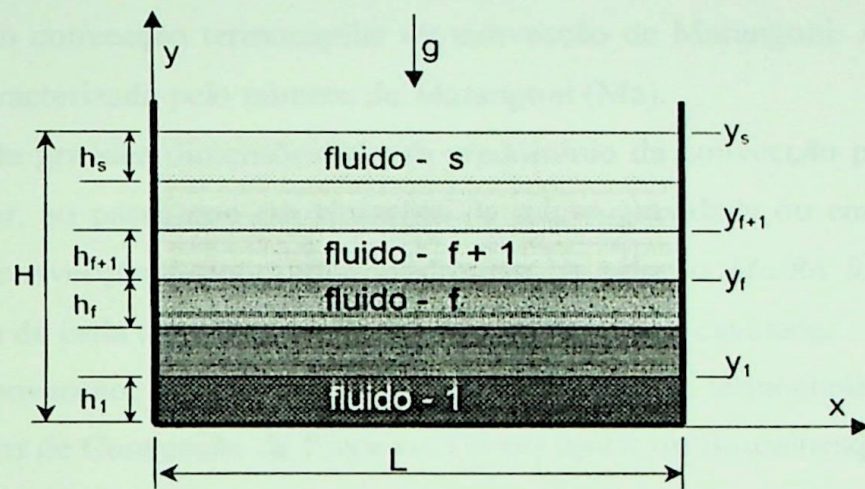


Figura 2.1.a – Cavidade aberta com fluidos imiscíveis superpostos

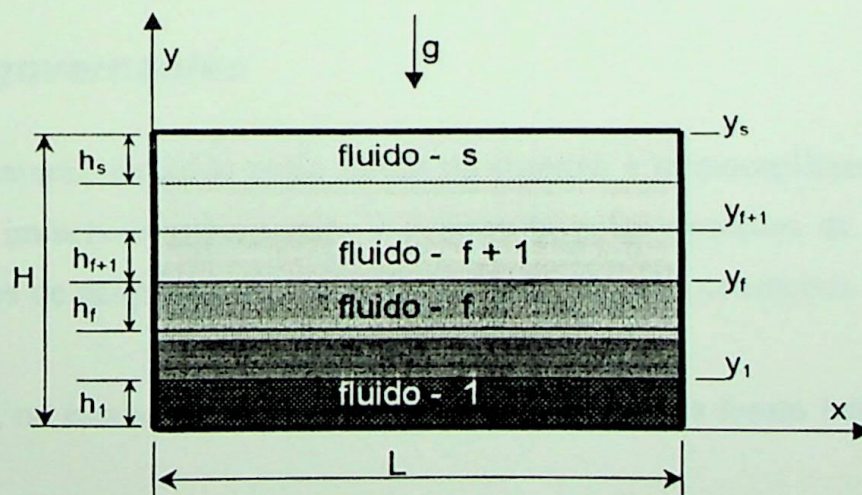


Figura 2.1.b – Cavidade fechada com fluidos imiscíveis superpostos

A convecção por empuxo, ou também conhecida como convecção de Boussinesq, ocorre quando um fluido fica sujeito a um gradiente horizontal de temperatura, na presença de um campo gravitacional. Este gradiente provoca uma variação na densidade, induzindo o aparecimento de forças de empuxo, e dando-se o início do processo de transferência convectiva do calor, a partir do instante em que estas forças superam as forças de resistência viscosa do fluido. A intensidade da convecção por empuxo é caracterizada pelo número de Rayleigh (Ra).

O gradiente horizontal de temperatura, também, tem outros efeitos. Quando este gradiente é aplicado na interface entre dois líquidos, ou na interface entre um líquido e um gás, ou em uma superfície livre de um líquido, ocorre naquele local uma variação da tensão superficial. Se a força resultante, deste desbalanceamento local de tensão, for maior que a resistência viscosa do fluido, então, ocorrerá um arraste de fluido, dando origem a um escoamento. Tal forma de transferência de calor é conhecida como convecção termocapilar ou convecção de Marangoni. A intensidade deste tipo de convecção é caracterizada pelo número de Marangoni (Ma).

Em geometrias de grandes dimensões há um predomínio da convecção por empuxo sobre a convecção termocapilar, ao passo que em situações de micro-gravidade ou em geometrias de pequenas dimensões, a convecção termocapilar predomina. A relação Ma/Ra fornece um meio de avaliação da influência de cada tipo de convecção no escoamento na cavidade.

Problemas de convecção, que envolvem forças de empuxo e termocapilares de magnitudes próximas, são chamados de Convecção de Empuxo-Termocapilar ou Boussinesq-Marangoni.

A seguir, são apresentadas as equações governantes, na forma dimensional e adimensional, os parâmetros de entrada e saída problema.

A nomenclatura utilizada neste capítulo encontra-se no final do mesmo.

2.2- Equações governantes

A convecção natural, induzida pelas forças de empuxo e termocapilares, em uma cavidade composta por fluidos imiscíveis superpostos, é governada pelas equações de conservação, juntamente com as equações de acoplamento das camadas de fluido e as condições iniciais e de contorno.

Neste trabalho, no estabelecimento das equações governantes foram feitas as seguintes considerações:

- a) regime não permanente;
- b) escoamento bidimensional e laminar;

- c) escoamento incompressível;
- d) função dissipação viscosa desprezada;
- e) propriedades termo-físicas dos fluidos constantes, exceto a densidade nos termos de empuxo e a tensão termocapilar;
- f) efeitos de compressibilidade desprezados;
- g) desprezada a deformação na interface e superfície livre, devido aos efeitos da tensão*.

*Neste trabalho, com o propósito de simplificação do problema, desprezou-se a deformação, que ocorre na interface e superfície livre, devido aos efeitos da tensão. Esta simplificação, também foi adotada por diversos autores, tais como: Villers, D. & Platten, J. K. (1988, 1990), Bargash, M & Vasseur, P., (1993), Wang, P. et al. (1994).

2.2.1- Equações de conservação

Mediante as considerações acima, para cada camada de fluido, as equações de conservação, em termos das variáveis primitivas dimensionais, são as seguintes:

- i) continuidade

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} = 0 ; \quad (2.1)$$

- ii) quantidade de movimento

$$\frac{\partial u_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_f}{\partial x} + \nu_f \left(\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2} \right), \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial v_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_f}{\partial y} + g \beta_f (T_r - T_f) + \nu_f \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial y^2} \right); \quad (2.2b)$$

- iii) energia

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial T_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial T_f}{\partial y} = \alpha_f \left(\frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} \right); \quad (2.3)$$

onde o índice f representa a camada de fluido (veja a figura 2.1).

▪ Eliminação dos termos de pressão

Os termos de pressão que aparecem nas equações (2.2.a) e (2.2.b) podem ser eliminados. Isto é conseguido derivando-se a equação (2.2.a) em relação a y e a equação (2.2.b) em relação a x . Em seguida, as equações são subtraídas, resultando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial u_r}{\partial y} \right) + u_r \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial u_r}{\partial y} \right) + v_r \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial u_r}{\partial y} \right) = \\ g \beta_r \frac{\partial T_i}{\partial x} + v_r \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial u_r}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial u_r}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

▪ Introdução da vorticidade

A vorticidade é introduzida pela relação:

$$\omega_r = \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial u_r}{\partial y}. \quad (2.5)$$

Substituindo a equação (2.5) na equação (2.4), resulta:

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega_r}{\partial x} + v_r \frac{\partial \omega_r}{\partial y} = g \beta_r \frac{\partial T_i}{\partial x} + v_r \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial y^2} \right). \quad (2.6)$$

▪ Introdução da função corrente

A função corrente é introduzida pela seguinte relação:

$$u_r = \frac{\partial \psi_r}{\partial y}, \quad v_r = -\frac{\partial \psi_r}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Com a definição dada por (2.7), a equação da continuidade (2.1) fica satisfeita.

Das equações (2.7) e (2.5), resulta:

$$\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial y^2} = -\omega_r. \quad (2.8)$$

Aplicando a equação (2.7) na equação (2.6), resulta:

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial t} + \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \frac{\partial \omega_r}{\partial x} - \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \frac{\partial \omega_r}{\partial y} = g \beta_r \frac{\partial T_i}{\partial x} + v_r \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial y^2} \right) \quad (2.9)$$

Substituindo a equação (2.7) na equação (2.3), obtém-se:



$$\frac{\partial \Gamma_r}{\partial t} + \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \frac{\partial \Gamma_r}{\partial x} - \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \frac{\partial \Gamma_r}{\partial y} = \alpha_r \left(\frac{\partial^2 \Gamma_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_r}{\partial y^2} \right). \quad (2.10)$$

As equações (2.8), (2.9) e (2.10) são as equações dimensionais de conservação escritas na forma: vorticidade - função corrente.

▪ Forma condensada das equações

As equações (2.8), (2.9) e (2.10) podem ser escritas na forma:

$$\left(\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial y^2} \right) + Q_{\psi_r} = 0. \quad (2.11)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial y^2} \right) + Q_{\omega_r} = \frac{1}{v_r} \frac{\partial \omega_r}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Gamma_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_r}{\partial y^2} \right) + Q_{\Gamma_r} = \frac{1}{\alpha_r} \frac{\partial \Gamma_r}{\partial t}. \quad (2.13)$$

onde:

$$Q_{\psi_r} = \omega_r \quad (2.14)$$

$$Q_{\omega_r} = \frac{1}{v_r} \left(g \beta_r \frac{\partial \Gamma_r}{\partial x} + \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \frac{\partial \omega_r}{\partial y} - \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \frac{\partial \omega_r}{\partial x} \right) \quad (2.15)$$

$$Q_{\Gamma_r} = \frac{1}{\alpha_r} \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial x} \frac{\partial \Gamma_r}{\partial y} - \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \frac{\partial \Gamma_r}{\partial x} \right) \quad (2.16)$$

▪ Forma geral das equações

As equações (2.11), (2.12) e (2.13) podem se representadas da seguinte forma geral:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial y^2} \right) + Q_{\varphi_r} = \lambda_{\varphi_r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial t}, \quad (2.17)$$

onde φ_r representa as variáveis ψ_r , ω_r , Γ_r ; Q_{φ_r} é uma função de φ_r ; e λ_{φ_r} é um parâmetro das equações.

A tabela 2.1 apresenta as equações dimensionais de conservação, escritas segundo formulação vorticidade – função corrente, e na forma geral.

Tabela 2.1 – Equações de conservação dimensionais na forma geral

Equação Original	Equação geral (2.17)		
	φ_f	Q_{φ_f}	λ_{φ_f}
(2.11)	ψ_f	ω_f	0
(2.12)	ω_f	$\frac{1}{v_f} \left(g \beta_f \frac{\partial T_f}{\partial x} + \frac{\partial \psi_f}{\partial x} \frac{\partial \omega_f}{\partial y} - \frac{\partial \psi_f}{\partial y} \frac{\partial \omega_f}{\partial x} \right)$	$\frac{1}{v_f}$
(2.13)	T_f	$\frac{1}{\alpha_f} \left(\frac{\partial \psi_f}{\partial x} \frac{\partial T_f}{\partial y} - \frac{\partial \psi_f}{\partial y} \frac{\partial T_f}{\partial x} \right)$	$\frac{1}{\alpha_f}$

2.2.2- Condições de interface

Na interface entre os fluidos, ocorrem dois tipos de acoplamentos: o mecânico e o térmico. O acoplamento mecânico se dá através da continuidade da velocidade e da transferência da quantidade de momento. Já o acoplamento térmico ocorre por meio da continuidade da temperatura e transferência de calor.

Neste trabalho, foi considerado que a interface se mantém plana e indeformável e não há fluxo de massa através dela. Assim sendo, na linha da interface ($0 \leq x \leq L, y = y_f$), entre os fluidos f e $f+1$, aplicam-se às relações abaixo:

a) interface sem fluxo de massa através dela:

$$\psi_f = \psi_{f+1} = 0, \quad \frac{\partial \psi_f}{\partial x} = \frac{\partial \psi_{f+1}}{\partial x} = 0; \quad (2.18)$$

b) continuidade da velocidade:

$$\frac{\partial \psi_f}{\partial y} = \frac{\partial \psi_{f+1}}{\partial y}; \quad (2.19)$$

c) balanço da transferência da quantidade de movimento:

$$\mu_f \omega_f - \mu_{f+1} \omega_{f+1} = \frac{\partial \sigma_f}{\partial T_f} \frac{\partial T_f}{\partial x}, \quad (2.20)$$

onde σ_f representa a tensão interfacial entre os fluidos f e $f+1$;

d) continuidade da temperatura:

$$T_r = T_{r+1}; \quad (2.21)$$

e) balanço do fluxo de calor:

$$\kappa_r \frac{\partial T_r}{\partial y} = \kappa_{r+1} \frac{\partial T_{r+1}}{\partial y}; \quad (2.22)$$

2.2.3- Condições de contorno

a) Condição de ausência de fluxo de massa:

- através da parede horizontal inferior ($0 \leq x \leq L, y = 0$):

$$\psi_l = 0, \quad \frac{\partial \psi_l}{\partial x} = 0; \quad (2.23)$$

- através da parede horizontal superior ou superfície do fluido s ($0 \leq x \leq L, y = H$):

$$\psi_s = 0, \quad \frac{\partial \psi_s}{\partial x} = 0; \quad (2.24)$$

- através das paredes verticais, esquerda ($x = 0, 0 \leq y \leq H$) e direita ($x = L, 0 \leq y \leq H$):

$$\psi_r = 0, \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial y} = 0, \quad (2.25)$$

b) Condição de parede sem escorregamento de fluidos:

- na parede horizontal inferior:

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial y} = 0, \quad \omega_l = -\frac{\partial^2 \psi_l}{\partial y^2}; \quad (2.26)$$

- na parede horizontal superior:

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial y} = 0, \quad \omega_s = -\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial y^2}; \quad (2.27)$$

- nas paredes verticais, esquerda e direita:

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial x} = 0, \quad \omega_r = -\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial x^2}. \quad (2.28)$$

c) Condição de superfície livre do fluido (sem parede horizontal superior):

$$\omega_s = \frac{1}{\mu_s} \frac{\partial \sigma_s}{\partial T_s} \frac{\partial T_s}{\partial x}. \quad (2.29)$$

d) Condição de isolamento térmico:

- na parede horizontal inferior:

$$\frac{\partial T_l}{\partial y} = 0; \quad (2.30)$$

- na parede horizontal superior ou na superfície livre do fluido s:

$$\frac{\partial T_s}{\partial y} = 0; \quad (2.31)$$

- nas paredes verticais, esquerda e direita:

$$\frac{\partial T_r}{\partial x} = 0. \quad (2.32)$$

e) Condição de temperatura constante:

- nas parede horizontal inferior:

$$T_l = T_{\text{const}_l}; \quad (2.33)$$

- na parede horizontal superior ou na superfície do fluido s:

$$T_s = T_{\text{const}_s}; \quad (2.34)$$

- nas paredes verticais, esquerda e direita:

$$T_r = T_{\text{const}_r}. \quad (2.35)$$

f) Condição de fluxo de calor constante:

- na parede horizontal inferior:

$$\frac{\partial T_l}{\partial y} = -\frac{q_{\text{const}_l}}{\kappa_l}; \quad (2.36)$$

- nas paredes horizontal superior ou na superfície livre do fluido s:

$$\frac{\partial T_s}{\partial y} = -\frac{q_{\text{const}_s}}{\kappa_s}; \quad (2.37)$$

- nas paredes verticais, esquerda e direita:

$$\frac{\partial T_r}{\partial x} = -\frac{q_{\text{const}_r}}{\kappa_r}. \quad (2.38)$$

2.2.4- Condições iniciais

Existem inúmeras possibilidades de condições iniciais. Contudo, nem todas conduzirão ao mesmo resultado, quando o sistema atingir o regime permanente. Portanto, ao se apresentar o resultado final, faz-se necessário mencionar qual a condição inicial utilizada.

Neste trabalho, é usada a condição inicial de fluido em repouso com temperatura uniforme em toda a cavidade, isto é, para $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq H$, $t = 0$, temos:

$$\psi_f = \omega_f = 0 \quad (2.39)$$

$$T_f = T_{\text{inicial}} \quad (2.40)$$

2.3- Adimensionalização das equações governantes

A obtenção de resultados numéricos, para as equações governantes, gera muitas vezes um grande custo computacional. Então, um objetivo óbvio é extrair o máximo de informações de um mínimo de casos estudados.

A análise adimensional é uma ferramenta importante na consecução desse propósito. Através dela, os números adimensionais que se obtêm servem tanto para correlacionar dados, diminuindo a quantidade de parâmetros de entrada no problema, como para estender os resultados obtidos para uma classe de situações.

Neste trabalho, as equações governantes são adimensionalizadas de duas formas diferentes, conforme o tipo de condição de contorno imposta, sendo elas:

- adimensionalização para cavidade com condição de contorno de temperatura constante; e
- adimensionalização para cavidade com condição de contorno de fluxo de calor constante.

Na implementação das duas adimensionalizações, foram utilizadas relações entre as dimensões geométricas da cavidade. Estas relações são dadas por:

$$\varepsilon_f = \frac{h_f}{H}, \quad \delta = \frac{L}{H}, \quad (2.41)$$

onde ε_f e δ representam, respectivamente, os comprimentos adimensionais da altura de cada camada de fluido e da largura da cavidade, conforme mostra a figura 2.2.

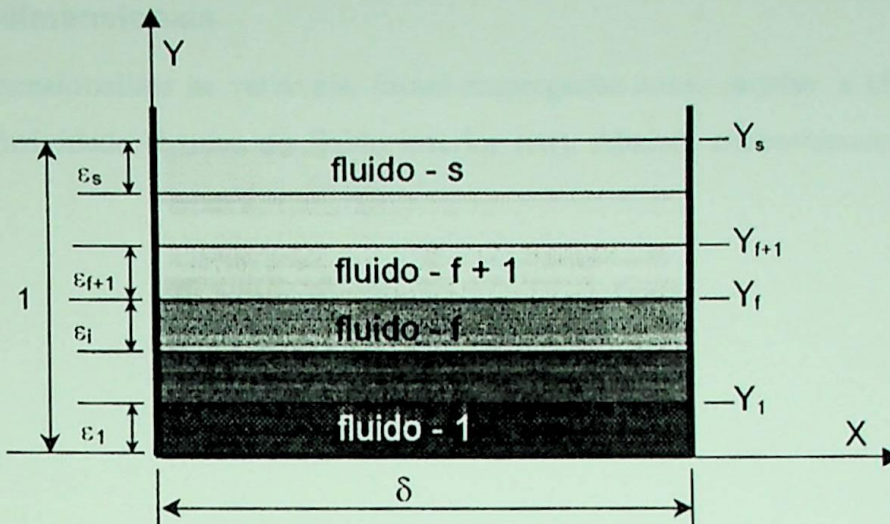


Figura 2.2 – Adimensionalização da geometria da cavidade

Embora, a maior parte das equações resultantes das duas adimensionalizações seja igual, para melhor entendimento do texto, as duas são apresentadas separadamente.

2.3.1- Adimensionalização para cavidade com condição de contorno com temperatura constante

A figura 2.3 exemplifica um caso de cavidade com condição de contorno com temperatura constante.

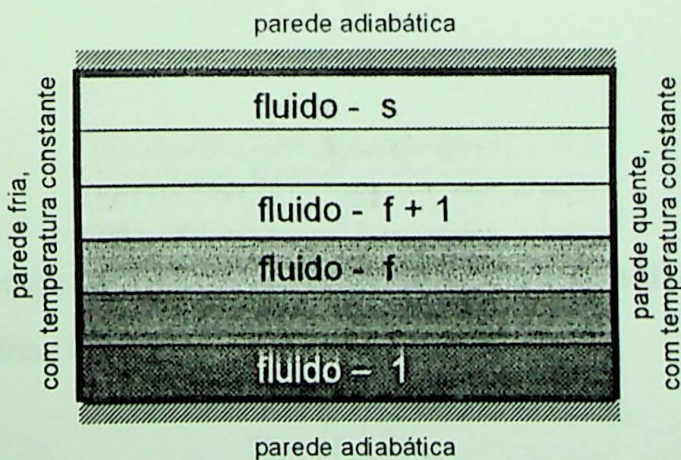


Figura 2.3 - Cavidade fechada com condição de contorno com temperatura constante

▪ Variáveis adimensionais

Para adimensionalizar as variáveis, foram empregadas como escalas a altura total da cavidade (H) e a difusividade térmica do fluido inferior (α_1). Abaixo, encontram-se as variáveis adimensionais:

a) tempo:

$$\tau = \frac{\alpha_1 t}{H^2}. \quad (2.42)$$

b) coordenadas:

$$X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}. \quad (2.43)$$

c) velocidades:

$$U_r = \frac{u_r H}{\alpha_1}, \quad V_r = \frac{v_r H}{\alpha_1}. \quad (2.44)$$

d) função corrente:

$$\Psi_r = \frac{\psi_r}{\alpha_1}. \quad (2.45)$$

e) vorticidade:

$$\Omega_r = \frac{H^2}{\alpha_1} \omega_r. \quad (2.46)$$

f) temperatura:

$$\theta_r = \frac{T_r - T'_r}{\Delta T'}, \quad (2.47)$$

onde T'_r é uma temperatura de referência. Seu valor é dado pela média das temperaturas das paredes quente (T_h) e fria (T_c):

$$T'_r = \frac{T_h + T_c}{2}, \quad (2.48)$$

e $\Delta T'$ é a diferença de temperatura característica dada por:

$$\Delta T' = T_h - T_c, \quad (2.49)$$

▪ Equações de conservação adimensionais

Substituindo as variáveis adimensionais, dadas pelas equações (2.42) a (2.49), nas equações (2.8), (2.9) e (2.10), obtemos as equações de conservação na forma adimensional, dadas a seguir:

$$\frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial Y^2} = -\Omega_r, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \Omega_r}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} \frac{\partial \Omega_r}{\partial X} - \frac{\partial \Psi_r}{\partial X} \frac{\partial \Omega_r}{\partial Y} = \frac{\alpha_r}{\alpha_1} \text{Pr}_r \left[\left(\frac{\partial^2 \Omega_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_r}{\partial Y^2} \right) + \frac{\alpha_r}{\alpha_1} \text{Ra}'_r \frac{\partial \Omega_r}{\partial X} \right], \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} \frac{\partial \theta_r}{\partial X} - \frac{\partial \Psi_r}{\partial X} \frac{\partial \theta_r}{\partial Y} = \frac{\alpha_r}{\alpha_1} \left(\frac{\partial^2 \theta_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial Y^2} \right). \quad (2.52)$$

Nestas equações aparecem os números adimensionais:

- Prandtl (Pr_r):

$$\text{Pr}_r = \frac{\nu_r}{\alpha_r}; \quad (2.53)$$

- Rayleigh (Ra'_r) para condição de contorno com diferença de temperatura constante:

$$\text{Ra}'_r = \frac{g \beta_r (T_h - T_c) H^3}{\alpha_r \nu_r}. \quad (2.54)$$

Forma condensada das equações

As equações (2.50), (2.51) e (2.52) podem ser escritas na forma:

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial Y^2} \right) + Q_{\Psi_r} = 0, \quad (2.55)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_r}{\partial Y^2} \right) + Q_{\Omega_r} = \Lambda 2'_r \frac{\partial \Omega_r}{\partial X}, \quad (2.56)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \theta_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial Y^2} \right) + Q_{\theta_r} = \Lambda 3'_r \frac{\partial \theta_r}{\partial X}, \quad (2.57)$$

onde:

$$Q_{\Psi_r} = \Omega_r, \quad (2.58)$$

$$Q_{\Omega_r} = \Lambda 1'_r \frac{\partial \theta_r}{\partial X} + \Lambda 2'_r \left(\frac{\partial \Psi_r}{\partial X} \frac{\partial \Omega_r}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} \frac{\partial \Omega_r}{\partial X} \right), \tag{2.59}$$

$$Q_{\theta_r} = \Lambda 3'_r \left(\frac{\partial \Psi_r}{\partial X} \frac{\partial \theta_r}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} \frac{\partial \theta_r}{\partial X} \right). \tag{2.60}$$

e

$$\Lambda 1'_r = \frac{\alpha_r}{\alpha_1} Ra'_r, \quad \Lambda 2'_r = \frac{\alpha_1}{\alpha_r} \frac{1}{Pr_r}, \quad \Lambda 3'_r = \frac{\alpha_1}{\alpha_r}. \tag{2.61}$$

Forma geral das equações

As equações (2.55), (2.56) e (2.57) possuem a forma geral:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial Y^2} \right) + Q_{\phi_r} = \lambda_{\phi_r} \frac{\partial \phi_r}{\partial \tau}, \tag{2.62}$$

onde ϕ_r representa as variáveis $\Psi_r, \Omega_r, \theta_r$; Q_{ϕ_r} é uma função de ϕ_r ; e λ_{ϕ_r} é um parâmetro das equações.

A tabela 2.2 apresenta as equações adimensionais de conservação, escritas segundo formulação vorticidade – função corrente, na forma geral.

Tabela 2.2 – Equações de conservação adimensionais na forma geral para cavidade com condição de contorno de temperatura constante

Equação Original	Parâmetros da equação geral (2.62)		
	ϕ_r	Q_{ϕ_r}	λ_{ϕ_r}
(2.55)	Ψ_r	Ω_r	0
(2.56)	Ω_r	$\Lambda 1'_r \frac{\partial \theta_r}{\partial X} + \Lambda 2'_r \left(\frac{\partial \Psi_r}{\partial X} \frac{\partial \Omega_r}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} \frac{\partial \Omega_r}{\partial X} \right)$	$\Lambda 2'_r$
(2.57)	θ_r	$\Lambda 3'_r \left(\frac{\partial \Psi_r}{\partial X} \frac{\partial \theta_r}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} \frac{\partial \theta_r}{\partial X} \right)$	$\Lambda 3'_r$

▪ **Condições de interface adimensionais**

Seguindo as mesmas hipóteses e considerações apresentadas no item 2.2.2, temos as equações pertinentes à linha de interface entre os fluidos f e f+1, para cavidade com condição de contor-

no de temperatura constante. Assim, na região $0 \leq X \leq \delta$, $Y = Y_f$, temos as relações abaixo:

a) interface sem fluxo de massa através dela:

$$\Psi_f = \Psi_{f+1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_f}{\partial X} = \frac{\partial \Psi_{f+1}}{\partial X} = 0 \quad (2.63)$$

b) continuidade da velocidade:

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial Y} = \frac{\partial \Psi_{f+1}}{\partial Y}; \quad (2.64)$$

c) balanço da transferência da quantidade de movimento:

$$\Omega_f - \frac{\mu_{f+1}}{\mu_f} \Omega_{f+1} = \frac{\alpha_f}{\alpha_1} Ma'_f \frac{\partial \theta_f}{\partial X}, \quad (2.65)$$

onde Ma'_f representa o número de Marangoni na interface entre os fluidos f e $f+1$, o qual é dado por:

$$Ma'_f = -\gamma_f \frac{H(\Gamma_h - \Gamma_c)}{\alpha_f \mu_f}, \quad (2.66)$$

e γ_f representa o gradiente de tensão interfacial entre os fluidos f e $f+1$, sendo dado por:

$$\gamma_f = \frac{\partial \sigma_f}{\partial \Gamma_f}; \quad (2.67)$$

d) continuidade da temperatura:

$$\theta_f = \theta_{f+1}; \quad (2.68)$$

e) balanço do fluxo de calor:

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial Y} = \frac{\kappa_{f+1}}{\kappa_f} \frac{\partial \theta_{f+1}}{\partial Y}. \quad (2.69)$$

▪ **Condições de contorno dimensionais**

a) Condição de ausência de fluxo de massa:

- através da parede horizontal inferior ($0 \leq X \leq \delta, Y = 0$):

$$\Psi_l = 0, \quad \frac{\partial \Psi_l}{\partial X} = 0; \quad (2.70)$$

- através da parede horizontal superior ou superfície do fluido s ($0 \leq X \leq \delta, Y = 1$):

$$\Psi_s = 0, \quad \frac{\partial \Psi_s}{\partial X} = 0; \quad (2.71)$$

- através das paredes verticais, esquerda ($X = 0, 0 \leq Y \leq 1$) e direita ($X = \delta, 0 \leq Y \leq 1$):

$$\Psi_r = 0, \quad \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} = 0. \quad (2.72)$$

b) Condição de parede sem escorregamento de fluidos:

- na parede horizontal inferior:

$$\frac{\partial \Psi_l}{\partial Y} = 0, \quad \Omega_l = -\frac{\partial^2 \Psi_l}{\partial Y^2}; \quad (2.73)$$

- na parede horizontal superior:

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial Y} = 0, \quad \Omega_s = -\frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial Y^2}; \quad (2.74)$$

- nas paredes verticais, esquerda e direita:

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial X} = 0, \quad \Omega_r = -\frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial X^2}. \quad (2.75)$$

c) Condição de superfície livre do fluido

$$\Omega_s = \frac{\alpha_s}{\alpha_l} Ma'_s \frac{\partial \theta_s}{\partial X}, \quad (2.76)$$

onde Ma'_s representa o número de Marangoni na superfície do fluido s, o qual é dado por:

$$Ma'_s = -\gamma_s \frac{H(T_h - T_c)}{\alpha_s \mu_s}, \quad (2.77)$$

e γ_s representa o gradiente de tensão superficial no fluido s, sendo dado por:

$$\gamma_s = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \Gamma_s}. \quad (2.78)$$

d) Condição de isolamento térmico:

- na parede horizontal inferior:

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial Y} = 0; \quad (2.79)$$

- na parede horizontal superior ou na superfície do fluido s:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial Y} = 0; \quad (2.80)$$

- nas paredes verticais, esquerda e direita:

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial X} = 0. \quad (2.81)$$

e) Condição de parede com temperatura constante:

- na parede fria:

$$\theta_c = -0,5; \quad (2.82)$$

- na parede quente:

$$\theta_h = 0,5. \quad (2.83)$$

▪ Condições iniciais adimensionais

Para $0 \leq X \leq \delta$, $0 \leq Y \leq 1$, $\tau = 0$, temos:

$$\Psi_r = \Omega_r = \theta_r = 0. \quad (2.84)$$

2.3.2- Adimensionalização para cavidade com condição de contorno com fluxo de calor constante

A figura 2.4 exemplifica um caso de cavidade com condição de contorno com fluxo de calor constante.



Figura 2.4 - Cavidade aberta com condição de contorno com fluxo de calor constante

▪ Variáveis adimensionais

Para adimensionalizar as variáveis, foram empregadas como escalas a altura total da cavidade (H) e a difusividade térmica do fluido inferior (α_1). Assim, temos as variáveis adimensionais abaixo:

a) tempo:

$$\tau = \frac{\alpha_1 t}{H^2}; \quad (2.85)$$

b) coordenadas:

$$X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}; \quad (2.86)$$

c) velocidades:

$$U_r = \frac{u_r H}{\alpha_1}, \quad V_r = \frac{v_r H}{\alpha_1}; \quad (2.87)$$

d) função corrente:

$$\Psi_r = \frac{\Psi_f}{\alpha_1}; \quad (2.88)$$

e) vorticidade:

$$\Omega_r = \frac{H^2}{\alpha_1} \omega_r; \quad (2.89)$$

f) diferença de temperatura característica:

$$\Delta T'' = \frac{qH}{\kappa_1}, \quad (2.90)$$

onde q é o fluxo de calor constante imposto na condição de contorno;

g) temperatura:

$$\theta_r = \frac{T_r - T_r''}{\Delta T''}, \quad (2.91)$$

onde T_r'' é a temperatura de referência, sendo definida como uma temperatura média da cavidade. Note que o valor desta temperatura é importante somente para se levantar as propriedades físicas dos fluidos, e não entra nas demais equações.

▪ Adimensionalização das equações de conservação

Substituindo as variáveis adimensionais, dadas pelas equações (2.85) a (2.91), nas equações (2.8), (2.9) e (2.10), obtemos as equações de conservação na forma adimensional, dadas a seguir:

$$\frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial Y^2} = -\Omega_r, \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial \Omega_r}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} \frac{\partial \Omega_r}{\partial X} - \frac{\partial \Psi_r}{\partial X} \frac{\partial \Omega_r}{\partial Y} = \frac{\alpha_r}{\alpha_1} \text{Pr}_r \left[\left(\frac{\partial^2 \Omega_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_r}{\partial Y^2} \right) + \frac{\alpha_r}{\alpha_1} \frac{\kappa_r}{\kappa_1} \text{Ra}_r'' \frac{\partial \theta_r}{\partial X} \right], \quad (2.93)$$

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} \frac{\partial \theta_r}{\partial X} - \frac{\partial \Psi_r}{\partial X} \frac{\partial \theta_r}{\partial Y} = \frac{\alpha_r}{\alpha_1} \left(\frac{\partial^2 \theta_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial Y^2} \right). \quad (2.94)$$

Nestas equações aparecem os números adimensionais:

- Prandtl (Pr_r):

$$\text{Pr}_r = \frac{\nu_r}{\alpha_r}; \quad (2.95)$$

- Rayleigh (Ra_r'') para condição de contorno com fluxo de calor constante:

$$Ra_r'' = \frac{g \beta_r q H^4}{\alpha_r \kappa_r \nu_r} . \quad (2.96)$$

Forma condensada das equações

As equações (2.90), (2.91) e (2.92) podem ser escritas na forma:

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial Y^2} \right) + Q_{\Psi_r} = 0 , \quad (2.97)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_r}{\partial Y^2} \right) + Q_{\Omega_r} = \Lambda 2_r'' \frac{\partial \Omega_r}{\partial \tau} , \quad (2.98)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \theta_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial Y^2} \right) + Q_{\theta_r} = \Lambda 3_r'' \frac{\partial \theta_r}{\partial \tau} . \quad (2.99)$$

onde:

$$Q_{\Psi_r} = \Omega_r , \quad (2.100)$$

$$Q_{\Omega_r} = \Lambda 1_r'' \frac{\partial \theta_r}{\partial X} + \Lambda 2_r'' \left(\frac{\partial \Psi_r}{\partial X} \frac{\partial \Omega_r}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} \frac{\partial \Omega_r}{\partial X} \right) , \quad (2.101)$$

$$Q_{\theta_r} = \Lambda 3_r'' \left(\frac{\partial \Psi_r}{\partial X} \frac{\partial \theta_r}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} \frac{\partial \theta_r}{\partial X} \right) . \quad (2.102)$$

e

$$\Lambda 1_r'' = \frac{\alpha_r \kappa_r}{\alpha_l \kappa_l} Ra_r'' , \quad \Lambda 2_r'' = \frac{\alpha_l}{\alpha_r} \frac{1}{Pr_r} , \quad \Lambda 3_r'' = \frac{\alpha_l}{\alpha_r} . \quad (2.103)$$

Forma geral das equações

As equações (2.97), (2.98) e (2.99) possuem a forma geral:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi_r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial Y^2} \right) + Q_{\phi_r} = \lambda_{\phi_r} \frac{\partial \phi_r}{\partial \tau} , \quad (2.104)$$

onde ϕ_r representa as variáveis Ψ_r , Ω_r , θ_r ; Q_{ϕ_r} é uma função de ϕ_r ; λ_{ϕ_r} é um parâmetro das equações.

A tabela 2.3 apresenta as equações adimensionais de conservação, escritas segundo formulação vorticidade – função corrente, e na forma geral.

Tabela 2.3 – Equações de conservação adimensionais na forma geral para cavidade com condição de contorno com fluxo de calor constante

Equação Original	Parâmetros da equação geral (2.104)		
	ϕ_f	Q_{ϕ_f}	λ_{ϕ_f}
(2.97)	Ψ_f	Ω_f	0
(2.98)	Ω_f	$\Lambda 1_f'' \frac{\partial \theta_f}{\partial X} + \Lambda 2_f'' \left(\frac{\partial \Psi_f}{\partial X} \frac{\partial \Omega_f}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi_f}{\partial Y} \frac{\partial \Omega_f}{\partial X} \right)$	$\Lambda 2_f''$
(2.99)	θ_f	$\Lambda 3_f'' \left(\frac{\partial \Psi_f}{\partial X} \frac{\partial \theta_f}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi_f}{\partial Y} \frac{\partial \theta_f}{\partial X} \right)$	$\Lambda 3_f''$

▪ Condições de interface adimensionais

Seguindo as mesmas hipóteses e considerações apresentadas no item 2.2.2, temos as equações pertinentes à linha de interface entre os fluidos, para cavidade com condição de contorno de fluxo de calor constante. Assim, na região $0 \leq X \leq \delta$, $y = Y_f$, temos as relações abaixo:

a) interface sem fluxo de massa através dela:

$$\Psi_f = \Psi_{f+1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_f}{\partial X} = \frac{\partial \Psi_{f+1}}{\partial X} = 0; \quad (2.105)$$

b) continuidade da velocidade:

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial Y} = \frac{\partial \Psi_{f+1}}{\partial Y}; \quad (2.106)$$

c) balanço da transferência da quantidade de movimento:

$$\Omega_f - \frac{\mu_{f+1}}{\mu_f} \Omega_{f+1} = \frac{\alpha_f}{\alpha_1} Ma_f'' \frac{\partial \theta_f}{\partial X}, \quad (2.107)$$

onde Ma_f'' representa o número de Marangoni na interface entre os fluidos f e $f+1$, o qual é dado por:

$$\text{Ma}_r^* = -\gamma_r \frac{qH^2}{\alpha_r \kappa_r \mu_r}, \quad (2.108)$$

e γ_r representa o gradiente de tensão interfacial entre os fluidos f e $f+1$, sendo dado por:

$$\gamma_r = \frac{\partial \sigma_r}{\partial \Gamma_r}; \quad (2.109)$$

d) continuidade da temperatura:

$$\theta_r = \theta_{r+1}; \quad (2.110)$$

e) balanço do fluxo de calor:

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial Y} = \frac{\kappa_{r+1}}{\kappa_r} \frac{\partial \theta_{r+1}}{\partial Y}. \quad (2.111)$$

▪ Condições de contorno dimensionais

a) Condição de ausência de fluxo de massa:

- através da parede horizontal inferior ($0 \leq X \leq \delta, Y = 0$):

$$\Psi_1 = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial X} = 0; \quad (2.112)$$

- através da parede horizontal superior ou superfície do fluido s ($0 \leq X \leq \delta, Y = 1$):

$$\Psi_s = 0, \quad \frac{\partial \Psi_s}{\partial X} = 0; \quad (2.113)$$

- através das paredes verticais, esquerda ($X = 0, 0 \leq Y \leq 1$) e direita ($X = \delta, 0 \leq Y \leq 1$):

$$\Psi_r = 0, \quad \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} = 0. \quad (2.114)$$

b) Condição de parede sem escorregamento de fluidos:

- na parede horizontal inferior:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} = 0, \quad \Omega_1 = -\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial Y^2}; \quad (2.115)$$

- na parede horizontal superior:

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial Y} = 0, \quad \Omega_s = -\frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial Y^2}; \quad (2.116)$$

- nas paredes verticais, esquerda e direita:

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial X} = 0, \quad \Omega_r = -\frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial X^2}. \quad (2.117)$$

a) Condição de superfície livre do fluido:

$$\Omega_s = \frac{\alpha_s}{\alpha_l} Ma_s'' \frac{\partial \theta_s}{\partial X}, \quad (2.118)$$

onde Ma_s'' representa o número de Marangoni na superfície do fluido s, o qual é dado por:

$$Ma_s'' = -\gamma_s \frac{qH^2}{\alpha_s \kappa_s \mu_s}, \quad (2.119)$$

e γ_s representa o gradiente de tensão superficial no fluido s, sendo dado por:

$$\gamma_s = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \Gamma_s}. \quad (2.120)$$

f) Condição de isolamento térmico:

- na parede horizontal inferior:

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial Y} = 0; \quad (2.121)$$

- na parede horizontal superior ou na superfície do fluido s:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial Y} = 0; \quad (2.122)$$

- nas paredes verticais, esquerda e direita:

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial X} = 0. \quad (2.123)$$

b) Condição de fluxo de calor constante:

- na parede horizontal inferior:

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial Y} = -1; \quad (2.124)$$

- na parede horizontal superior:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial Y} = -\frac{\kappa_l}{\kappa_s}; \quad (2.125)$$

- nas paredes verticais, esquerda e direita:

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial X} = -\frac{\kappa_1}{\kappa_r}. \quad (2.126)$$

▪ Condições iniciais adimensionais

Para $0 \leq X \leq \delta$, $0 \leq Y \leq 1$, $\tau = 0$, temos:

$$\Psi_r = \Omega_r = \theta_r = 0 \quad (2.127)$$

2.4- Parâmetros adimensionais do problema

2.4.1- Parâmetros de entrada

As equações governantes, juntamente com as equações de acoplamento na interface, condições de contorno e iniciais, definem o tipo de problema que está sendo tratado. Contudo, para estudar cada caso, especificamente, devem ser fornecidos os parâmetros de entrada, que são expressos em termos das relações das propriedades termo-físicas dos fluidos:

$$\bar{\alpha}_r = \frac{\alpha_r}{\alpha_1}, \quad \bar{\beta}_r = \frac{\beta_r}{\beta_1}, \quad \bar{\kappa}_r = \frac{\kappa_r}{\kappa_1}, \quad \bar{\mu}_r = \frac{\mu_r}{\mu_1}, \quad \bar{\rho}_r = \frac{\rho_r}{\rho_1}, \quad \bar{\gamma}_r = \frac{\gamma_r}{\gamma_1}, \quad \bar{C}_{p_r} = \frac{C_{p_r}}{C_{p_1}}; \quad (2.128)$$

das relações geométricas da cavidade: ε_r e δ ; e dos números adimensionais: Prandtl, Rayleigh e Marangoni. Sendo que, os números adimensionais dos fluidos superiores ($f > 1$) são dados, em função do fluido inferior ($f=1$) e das relações das propriedades termo-físicas, por:

$$Pr_r = Pr_1 \frac{\bar{\mu}_r}{\bar{\alpha}_r \bar{\rho}_r}, \quad (2.129)$$

$$Ra'_r = Ra'_1 \frac{\bar{\beta}_r \bar{\rho}_r}{\bar{\alpha}_r \bar{\mu}_r}, \quad (2.130)$$

$$Ra''_r = Ra''_1 \frac{\bar{\beta}_r \bar{\rho}_r}{\bar{\alpha}_r \bar{\kappa}_r \bar{\mu}_r}, \quad (2.131)$$

$$Ma'_r = Ma'_1 \frac{\bar{\gamma}_r}{\bar{\alpha}_r \bar{\mu}_r}, \quad (2.132)$$

$$\text{Ma}_r'' = \text{Ma}_1'' \frac{\bar{\gamma}_r}{\bar{\alpha}_r \bar{\kappa}_r \bar{\mu}_r}, \quad (2.133)$$

onde, as equações (2.130) e (2.132) são válidas para cavidade com condição de contorno de temperatura constante, e as equações (2.131) e (2.133) são para cavidade com condição de contorno de fluxo de calor constante. A equação (2.128) aplica-se aos dois tipos de condições de contorno.

2.4.2- Parâmetros de saída

Dois parâmetros de saída interessantes a serem observados neste estudo são a taxa de transferência de calor por convecção e a velocidade de escoamento do fluido.

A taxa de transferência de calor por convecção na cavidade é avaliada através do número de Nusselt. O número de Nusselt relaciona a transferência de calor por convecção e condução.

No apêndice H são apresentadas quatro formas de cálculo para o número de Nusselt. As formas de cálculo variam conforme as condições de contorno empregadas na cavidade, sendo elas:

- temperatura constante nas paredes horizontais,
- temperatura constante nas paredes verticais,
- fluxo de calor constante nas paredes horizontais,
- fluxo de calor constante nas paredes verticais.

Os valores obtidos para o número de Nusselt dependem da forma como foi definido o cálculo do mesmo. Assim, os resultados obtidos, para o número de Nusselt na cavidade com condição de contorno de temperatura constante, não devem ser comparados com aqueles obtidos na cavidade com condição de contorno de fluxo de calor constante, devido à diferença de adimensionalização entre ambos.

A velocidade de escoamento do fluido é calculada a partir da definição da função corrente, ou seja:

$$U_r = \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y}, \quad V_r = -\frac{\partial \Psi_r}{\partial X}. \quad (2.134)$$

2.5 – Nomenclatura

Símbolos latinos

C_p	calor específico a pressão constante ($J\ kg^{-1}\ K^{-1}$)
g	aceleração local da gravidade ($m\ s^{-2}$)
h	altura da camada de fluido (m)
H	altura total da cavidade (m)
L	largura da cavidade (m)
Ma	número de Marangoni
p	pressão ($N\ m^{-2}$)
Pr	número de Prandtl
q	fluxo de calor ($W\ m^{-2}$)
Q	parâmetro da equação
Ra	número de Rayleigh
t	tempo (s)
u	velocidade horizontal ($m\ s^{-1}$)
U	velocidade horizontal adimensional
v	velocidade vertical ($m\ s^{-1}$)
V	velocidade vertical adimensional
x, y	coordenada (m)
X, Y	coordenada adimensional

Símbolos gregos

α	difusividade térmica ($m^2\ s^{-1}$)
β	coeficiente de expansão volumétrica (K^{-1})
δ	largura adimensional da cavidade, razão de aspecto
ε	altura adimensional da camada de fluido
ϕ	variável que representa as grandezas dimensionais ψ, ω, T
γ	gradiente da tensão superficial ou interfacial ($N\ m^{-1}\ K^{-1}$)
φ	variável que representa as grandezas adimensionais Ψ, Ω, θ
κ	condutividade térmica ($W\ m^{-1}\ ^\circ C^{-1}$)

λ	parâmetro da equação
$\Lambda 1, \Lambda 2, \Lambda 3,$	parâmetro da equação
μ	viscosidade dinâmica ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$)
ν	viscosidade cinemática ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
θ	temperatura adimensional
ρ	densidade (kg m^{-3})
σ	tensão superficial ou interfacial (N m^{-1})
τ	tempo adimensional
ω	vorticidade (s^{-1})
Ω	vorticidade adimensional
ψ	função corrente ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
Ψ	função corrente adimensional

Sub-índices

l	primeira camada de fluido
f	camada de fluido
s	última camada de fluido
const	valor constante
h	parede quente
c	parede fria
r	valor de referência

Sobre-índices

'	temperatura constante
"	fluxo de calor constante
-	relação entre o fluido f e o fluido da primeira camada

Capítulo 3

MÉTODO DE SOLUÇÃO

3.1- Introdução

No Capítulo 2, a partir das equações de conservação e hipóteses simplificadoras, foi desenvolvido um sistema composto por três equações diferenciais parciais, dependentes do tempo, não lineares e acopladas, representando as equações de conservação, para cada camada de fluido, em termos de função corrente, vorticidade e temperatura adimensional; sendo que, neste sistema, cada equação possuía a seguinte forma geral:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} . \quad (3.1)$$

Neste capítulo, utilizaremos o método de elementos finitos, associado ao método de Galerkin, para a obtenção da solução deste sistema de equações.

Para a implementação do método de elementos finitos, a equação (3.1) será desenvolvida na forma matricial, em termos de função corrente, vorticidade e temperatura adimensional, para os elementos da malha.

A nomenclatura utilizada neste capítulo encontra-se no final do mesmo.

3.2- Solução genérica

O Apêndice D apresenta uma solução numérica, para a equação diferencial bidimensional dependente do tempo e genérica dada por:

$$D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} - G \phi + Q = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} . \quad (3.2)$$

A solução desta equação é obtida, através do método de elementos finitos, associado ao método de Galerkin e com o domínio do tempo discretizado, usando o método de diferenças finitas.

Conforme está demonstrado no Apêndice D, a equação (3.2) tem a seguinte solução numérica:

$$[A]\{\Phi\}_n = \{B\}_n, \quad (3.3)$$

onde:

$$[A] = [C] + \Theta \Delta\tau [K], \quad (3.4)$$

$$\{B\}_n = [P]\{\Phi\}_{n-1} + \{F^*\}_n, \quad (3.5)$$

$$[P] = [C] - (1 - \Theta)\Delta\tau [K], \quad (3.6)$$

$$\{F^*\}_n = \Delta\tau [(1 - \Theta)\{F\}_{n-1} + \Theta\{F\}_n], \quad (3.7)$$

e os sub-índices $n-1$ e n são instantes no tempo, separados pelo passo de tempo $\Delta\tau$, sendo:

$$\tau_n = \tau_{n-1} + \Delta\tau. \quad (3.8)$$

Para o parâmetro Θ , existem quatro opções comumente usadas. A tabela (3.1) mostra o valor de Θ e do respectivo nome do esquema de diferenças finitas empregado.

Tabela 3.1 - Valor de Θ em cada esquema de diferenças finitas

Θ	Esquema
0	Diferença para Frente
1/2	Diferença Central
3/2	Galerkin
1	Diferença para Trás

3.2.1- Cálculo das matrizes e vetores para os elementos da malha

As matrizes $[C^{(e)}]$, $[K^{(e)}]$ e o vetor $\{F^{(e)}\}$ são calculados, para cada elemento triangular linear da malha, como mostrado a seguir.

- **Matriz $[C^{(e)}]$**

Esta matriz, conforme a formulação empregada, pode ser calculada de duas formas:

- na formulação consistente:

$$[C^{(e)}] = \frac{\lambda A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} e \quad (3.9.a)$$

- na formulação fragmentada:

$$[C^{(e)}] = \frac{\lambda A}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.9.b)$$

- **Matriz $[K^{(e)}]$**

A matriz $[K^{(e)}]$ é dada por:

$$[K^{(e)}] = [K_D^{(e)}] + [K_G^{(e)}], \quad (3.10)$$

onde:

$$[K_D^{(e)}] = \frac{D_x}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j^2 & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{D_y}{4A} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j^2 & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k^2 \end{bmatrix} e \quad (3.11)$$

$$[K_G^{(e)}] = \frac{GA}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

- **Vetor $\{F^{(e)}\}$**

Se Q for constante dentro do elemento, então temos:

$$\{F^{(e)}\} = \frac{AQ}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.13a)$$

porém, se Q variar linearmente dentro do elemento, ou seja, cada vértice do triângulo possuir um valor diferente, então, o vetor $\{F^{(e)}\}$ será calculado através da expressão matricial:

$$\{F^{(e)}\} = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{Bmatrix}. \quad (3.13b)$$

Note que, na equação (3.13b), se fizermos $Q_i = Q_j = Q_k = Q$, esta resultará na equação (3.13a).

Nos cálculos acima, aparecem os parâmetros A , a_i , a_j , a_k , b_i , b_j , b_k , c_i , c_j , c_k , que estão relacionados à cada elemento da malha empregada na discretização do domínio do espaço. Conforme está apresentado no Apêndice A, estes parâmetros podem ser calculados como segue:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j, & b_i &= Y_j - Y_k, & c_i &= X_k - X_j, \\ a_j &= X_k Y_i - X_i Y_k, & b_j &= Y_k - Y_i, & c_j &= X_i - X_k, \\ a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i, & b_k &= Y_i - Y_j, & c_k &= X_j - X_i, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde as coordenadas X e Y representam os pontos nodais situados nos vértices i , j e k de cada elemento triangular da malha.

3.3- Aplicação da solução genérica às equações de conservação

Conforme está descrito no Capítulo 2, as equações de conservação, para cada camada de fluido, em termos de função corrente (Ψ), vorticidade (Ω) e temperatura (θ) adimensional, possuem a forma geral dada por:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \quad (3.16)$$

onde:

ϕ representa as variáveis Ψ , Ω , θ ;

Q é uma função de ϕ ;

λ é um parâmetro.

A tabela 3.2 apresenta os termos da equação genérica (3.2) relacionados à equação (3.16). Cada linha desta tabela representa uma equação de conservação, em termos de função corrente (Ψ), vorticidade (Ω) e temperatura (θ). Os parâmetros $\Lambda 1$, $\Lambda 2$ e $\Lambda 3$, que aparecem nesta tabela, foram definidos no Capítulo 2.

Tabela 3.2 – Termos da equação de conservação adimensional na forma geral

Termos da equação (3.2) relacionados à equação (3.16)					
ϕ	D_x	D_y	G	Q	λ
Ψ	1	1	0	Ω	0
Ω	1	1	0	$\Lambda 1 \frac{\partial \theta}{\partial X} + \Lambda 2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} \right)$	$\Lambda 2$
θ	1	1	0	$\Lambda 3 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)$	$\Lambda 3$

A seguir é apresentado o esquema de solução das equações de conservação da tabela 3.2.

3.3.1- Solução da equação em termos de função corrente (Ψ)

- **Matriz $[C_{\Psi}^{(e)}]$**

$$[C_{\Psi}^{(e)}] = 0. \quad (3.17)$$

- **Matriz $[K_{\Psi}^{(e)}]$**

$$[K_{\Psi}^{(e)}] = \frac{1}{4\Lambda} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

- **Vetor $\{F_{\Psi}^{(e)}\}$**

$$\{F_{\Psi}^{(e)}\} = \frac{\Lambda}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_i \\ \Omega_j \\ \Omega_k \end{Bmatrix}. \quad (3.19)$$

- **Matriz $[A_{\Psi}]$**

$$[A_{\Psi}] = [C_{\Psi}] + \Theta \Delta \tau [K_{\Psi}]. \quad (3.20)$$

- **Matriz $[P_{\Psi}]$**

$$[P_{\Psi}] = [C_{\Psi}] - (1 - \Theta) \Delta \tau [K_{\Psi}]. \quad (3.21)$$

- **Vetor $\{F_{\Psi}^{\star}\}_n$**

$$\{F_{\Psi}^{\star}\}_n = \Delta \tau [(1 - \Theta) \{F_{\Psi}\}_{n-1} + \Theta \{F_{\Psi}\}_n]. \quad (3.22)$$

- **Vetor $\{B_{\Psi}\}_n$**

$$\{B_{\Psi}\}_n = [P_{\Psi}] \{\Psi\}_{n-1} + \{F_{\Psi}^{\star}\}_n. \quad (3.23)$$

- **Equação para o cálculo de $\{\Psi\}_n$**

$$[A_{\Psi}] \{\Psi\}_n = \{B_{\Psi}\}_n \quad (3.24)$$



3.2- Solução da equação em termos da vorticidade (Ω)

Matriz $[C_{\Omega}^{(e)}]$

na formulação consistente:

$$[C_{\Omega}^{(e)}] = \frac{\Lambda 2 A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad (3.25a)$$

na formulação fragmentada:

$$[C_{\Omega}^{(e)}] = \frac{\Lambda 2 A}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.25b)$$

• Matriz $[K_{\Omega}^{(e)}]$

$$[K_{\Omega}^{(e)}] = \frac{1}{4\Lambda} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Vetor $\{F_{\Omega}^{(e)}\}$

$$\{F_{\Omega}^{(e)}\} = \frac{\Lambda Q_{\Omega}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.27)$$

onde:

$$Q_{\Omega} = \Lambda 1 \frac{\partial \theta}{\partial X} + \Lambda 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} \right) \quad (3.28)$$

de acordo com o Apêndice A, as derivadas $\frac{\partial \psi}{\partial X}$, $\frac{\partial \psi}{\partial Y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial X}$, $\frac{\partial \theta}{\partial Y}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial X}$ e $\frac{\partial \Omega}{\partial Y}$ são calculadas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{1}{2\Lambda} (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k), \quad (3.29a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} = \frac{1}{2\Lambda} (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k), \quad (3.29b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{2\Lambda} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k), \quad (3.29c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{2\Lambda} (c_i \theta_i + c_j \theta_j + c_k \theta_k), \quad (3.34d)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{1}{2\Lambda} (b_i \Omega_i + b_j \Omega_j + b_k \Omega_k) \quad e \quad (3.29e)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{2\Lambda} (c_i \Omega_i + c_j \Omega_j + c_k \Omega_k). \quad (3.29f)$$

- **Matriz $[A_\Omega]$**

$$[A_\Omega] = [C_\Omega] + \Theta \Delta \tau [K_\Omega]. \quad (3.30)$$

- **Matriz $[P_\Omega]$**

$$[P_\Omega] = [C_\Omega] - (1 - \Theta) \Delta \tau [K_\Omega]. \quad (3.31)$$

- **Vetor $\{F_\Omega^\star\}_n$**

$$\{F_\Omega^\star\}_n = \Delta \tau [(1 - \Theta) \{F_\Omega\}_{n-1} + \Theta \{F_\Omega\}_n], \quad (3.32)$$

- **Vetor $\{B_\Omega\}_n$**

$$\{B_\Omega\}_n = [P_\Omega] \{\Omega\}_{n-1} + \{F_\Omega^\star\}_n \quad (3.33)$$

- **Equação para o cálculo de $\{\Omega\}_n$**

$$[A_\Omega] \{\Omega\}_n = \{B_\Omega\}_n \quad (3.34)$$

3.3.3- Solução da equação em termos da temperatura (θ)

- **Matriz $[C_0^{(e)}]$**

Na formulação consistente:

$$[C_0^{(e)}] = \frac{\Lambda^3 \Lambda}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad (3.35)$$

na formulação fragmentada:

$$[C_0^{(e)}] = \frac{\Lambda^3 \Lambda}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

- **Matriz $[K_0^{(e)}]$**

$$[K_0^{(e)}] = \frac{1}{4\Lambda} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

- **Vetor $\{F_0^{(e)}\}$**

$$\{F_0^{(e)}\} = \frac{\Lambda Q_0}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.38)$$

onde:

$$Q_0 = \Lambda^3 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right). \quad (3.39)$$

e as derivadas $\frac{\partial \psi}{\partial X}$, $\frac{\partial \psi}{\partial Y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial X}$ e $\frac{\partial \theta}{\partial Y}$ são calculadas pelas seguintes expressões:

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{1}{2\Lambda} (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k), \quad (3.40a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} = \frac{1}{2\Lambda} (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k), \quad (3.40b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{2A} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k) e \quad (3.40c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{2A} (c_i \theta_i + c_j \theta_j + c_k \theta_k) . \quad (3.40d)$$

- **Matriz $[A_0]$**

$$[A_0] = [C_0] + \Theta \Delta \tau [K_0] . \quad (3.41)$$

- **Matriz $[P_0]$**

$$[P_0] = [C_0] - (1 - \Theta) \Delta \tau [K_0] . \quad (3.42)$$

- **Vetor $\{F_0^*\}_n$**

$$\{F_0^*\}_n = \Delta \tau [(1 - \Theta) \{F_0\}_{n-1} + \Theta \{F_0\}_n] , \quad (3.43)$$

- **Vetor $\{B_0\}_n$**

$$\{B_0\}_n = [P_0] \{\theta\}_{n-1} + \{F_0^*\}_n \quad (3.44)$$

- **Equação para o cálculo de $\{\theta\}_n$**

$$[A_0] \{\theta\}_n = \{B_0\}_n \quad (3.45)$$

3.4- Esquema de diferenças finitas para discretização do domínio do tempo

Neste trabalho, é utilizado o esquema de diferença finita central, para discretização do domínio do tempo.

Tal opção, se deve ao fato deste esquema ser incondicionalmente estável (Donea, 1974) e também por ter sido já testado, com sucesso, em diversos trabalhos afins.

3.4.1- Aplicação do esquema de diferença finita central na solução genérica

Nas equações (3.3) à (3.7), se aplicarmos o valor $\Theta = 1/2$, vamos encontrar:

$$[A] \{\Phi\}_n = \{B\}_n , \quad (3.46)$$

onde:

$$[A] = [C] + \frac{\Delta\tau}{2}[K], \quad (3.47)$$

$$\{B\}_n = [P]\{\Phi\}_{n-1} + \{F^*\}_n, \quad (3.48)$$

$$[P] = [C] - \frac{\Delta\tau}{2}[K], \quad (3.49)$$

$$\{F^*\}_n = \frac{\Delta\tau}{2}[\{F\}_{n-1} + \{F\}_n], \quad (3.50)$$

Na equação (3.50), para calcular o valor de $\{F^*\}$, é necessário saber os valores de $\{F\}_{n-1}$ e $\{F\}_n$. O valor de $\{F\}_{n-1}$ é sempre conhecido, pois é calculado com base nas distribuições de $\{\Phi\}$ relativas ao instante atrás (n-1); mas, o valor de $\{F\}_n$ é desconhecido, pois, é calculado com base nos valores de $\{\Phi\}$ do tempo à frente (n).

Para contornarmos esta situação, vamos admitir que o passo de tempo é pequeno, de tal modo que:

$$\{F\}_n \cong \{F\}_{n-1} \quad (3.51)$$

e, assim, poderemos considerar que:

$$\{F^*\}_n = \Delta\tau \{F\}_{n-1}. \quad (3.52)$$

Aplicando as equações (3.47), (3.48), (3.49) e (3.52) na equação (3.46), obtemos:

$$\left([C] + \frac{\Delta\tau}{2}[K]\right)\{\Phi\}_n = \left([C] - \frac{\Delta\tau}{2}[K]\right)\{\Phi\}_{n-1} + \Delta\tau \{F\}_{n-1}. \quad (3.53)$$

Uma vez que, o esquema de diferença finita central trabalha com a derivada $\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}$ no ponto médio do intervalo de tempo, entre o tempo atrás (τ_{n-1}) e o tempo à frente (τ_n), torna-se interessante, também, calcular os valores de $\{\Phi\}$ neste ponto médio.

Com este propósito, a equação (3.53) deve ser escrita da seguinte forma:

$$\left([C] + \frac{\Delta\tau}{2} [K] \right) \left(\frac{\{\Phi\}_{n-1} + \{\Phi\}_n}{2} \right) = [C] \{\Phi\}_{n-1} + \Delta\tau \{F\}_{n-1}. \quad (3.54)$$

resultando:

$$\left([C] + \frac{\Delta\tau}{2} [K] \right) \{\Phi^*\}_n = [C] \{\Phi\}_{n-1} + \Delta\tau \{F\}_{n-1}. \quad (3.55)$$

onde:

$$\{\Phi^*\}_n = \frac{\{\Phi\}_{n-1} + \{\Phi\}_n}{2}, \quad (3.56)$$

ou seja, $\{\Phi^*\}_n$ é o valor das distribuições no instante de tempo médio (τ_n^*), onde:

$$\tau_n^* = \frac{\tau_{n-1} + \tau_n}{2}. \quad (3.56)$$

Os termos da equação (3.55) podem ser agrupados da seguinte forma:

$$[A^*] \{\Phi^*\}_n = \{B^*\}_n, \quad (3.57)$$

onde:

$$[A^*] = [C] + \frac{\Delta\tau}{2} [K], \quad (3.58)$$

$$\{B^*\}_n = [C] \{\Phi\}_{n-1} + \Delta\tau \{F\}_{n-1}. \quad (3.59)$$

3.4.2- Aplicação do esquema de diferença finita central no cálculo das distribuições da função corrente, vorticidade e temperatura

- *Função corrente*

$$[A_\psi^*] \{\Psi^*\}_n = \{B_\psi^*\}_n, \quad (3.60)$$

onde:

$$[A_\psi^*] = [K_\psi], \quad (3.61)$$

$$\{B_\psi^*\}_n = 2 \{F_\psi\}_{n-1}. \quad (3.62)$$

- **Vorticidade**

$$[A_{\Omega}^{\bullet}] \{\Omega^{\bullet}\}_n = \{B_{\Omega}^{\bullet}\}_n, \quad (3.63)$$

onde:

$$[A_{\Omega}^{\bullet}] = [C_{\Omega}] + \frac{\Delta\tau}{2} [K_{\Omega}], \quad (3.64)$$

$$\{B_{\Omega}^{\bullet}\}_n = [C_{\Omega}] \{\Omega\}_{n-1} + \Delta\tau \{F_{\Omega}\}_{n-1}. \quad (3.65)$$

- **Temperatura**

$$[A_0^{\bullet}] \{\theta^{\bullet}\}_n = \{B_0^{\bullet}\}_n, \quad (3.66)$$

onde:

$$[A_0^{\bullet}] = [C_0] + \frac{\Delta\tau}{2} [K_0], \quad (3.67)$$

$$\{B_0^{\bullet}\}_n = [C_0] \{\theta\}_{n-1} + \Delta\tau \{F_0\}_{n-1}. \quad (3.68)$$

3.5- Acoplamento das equações de conservação

Uma vez que, as equações de conservação, representadas na tabela (3.2), são acopladas umas às outras, para calcular os valores das distribuições de $\{\Psi\}$, $\{\Omega\}$ e $\{\theta\}$, devem ser resolvidos simultaneamente os sistemas formados pelas mesmas, em cada passo de tempo.

Numericamente, conforme pode ser observado nas equações matriciais, o acoplamento entre os sistemas se dá através dos vetores $\{F_{\Psi}\}$, $\{F_{\Omega}\}$ e $\{F_0\}$, pois, estes relacionam as distribuições do próprio sistema com as distribuições dos demais. Contudo, devido às aproximações feitas nas equações (3.51) e (3.52), o acoplamento entre os sistemas é obtido de forma aproximada, utilizando-se um passo de tempo pequeno.

Assim, dentro de cada passo de tempo, estes sistemas são resolvidos separadamente, e o acoplamento é realizado com base nas distribuições obtidas no passo de tempo anterior.

Note que, quanto menor for o passo de tempo, melhor será o acoplamento. O Apêndice G mostra como determinar o valor do passo de tempo.

3.6- Imposição das condições de interface e contorno

Os apêndices I e J apresentam a sistemática de cálculo para a aplicação das condições de interface e de contorno.

3.7- Método de solução do sistema de equações lineares

Os sistemas de equações (3.60), (3.63) e (3.66), possuem o número de incógnitas igual ao número de equações.

Para resolver estes sistemas, existem diversos métodos, dentre os quais, os mais comumente usados são:

- eliminação de Gauss,
- fatorização LU (Lower-Upper) , e
- método de Cholesky.

Quando a matriz $[A]$ é quadrada, a fatorização LU e a eliminação de Gauss são igualmente eficientes para resolver qualquer sistema de equações. A fatorização LU é superior quando o sistema deve ser resolvido repetidamente com lados direitos diferentes, porque a mesma fatorização LU de $[A]$ é usada para todo $\{B\}$. Um inconveniente da fatorização LU é o fato de a fatorização não existir quando o elemento pivot é zero. Contudo, na prática isto raramente ocorre e o problema pode ser geralmente eliminado reordenando as equações. Já a eliminação de Gauss é aplicável a todos os sistemas.

Quando a matriz $[A]$ é simétrica e definida positiva, o método de Cholesky é aplicável para resolver o sistema. Segundo Press, W. H., et.al. (1992), o método de Cholesky pode ser até duas vezes mais rápido, em relação a fatorização LU.

A tabela (3.3) apresenta um resumo simplificado quanto às restrições e performance de cada método citado.

Tabela 3.3 – Comparação entre os métodos de solução de sistema de equações lineares

Método	Restrição	Performance
Eliminação de Gauss	Nenhuma	-
Fatorização LU	Fatorização não existe quando o elemento pivot é zero	melhor que a da Eliminação de Gauss
Cholesky	Válido para matriz simétrica e definida positiva	melhor que a da Fatorização LU

Os sistemas de equações (3.60), (3.63) e (3.66), quando aplicados a somente uma camada de fluido, são reais, definidos positivos e simétricos.

Porém, quando os sistemas (3.60), (3.63) e (3.66) são aplicados às cavidades que possuem mais de uma camada de fluido, os mesmos podem deixar de ser simétricos, devido à aplicação das condições de interface. Assim sendo, neste trabalho, foi escolhido o método de fatorização LU. O Apêndice K apresenta este método.

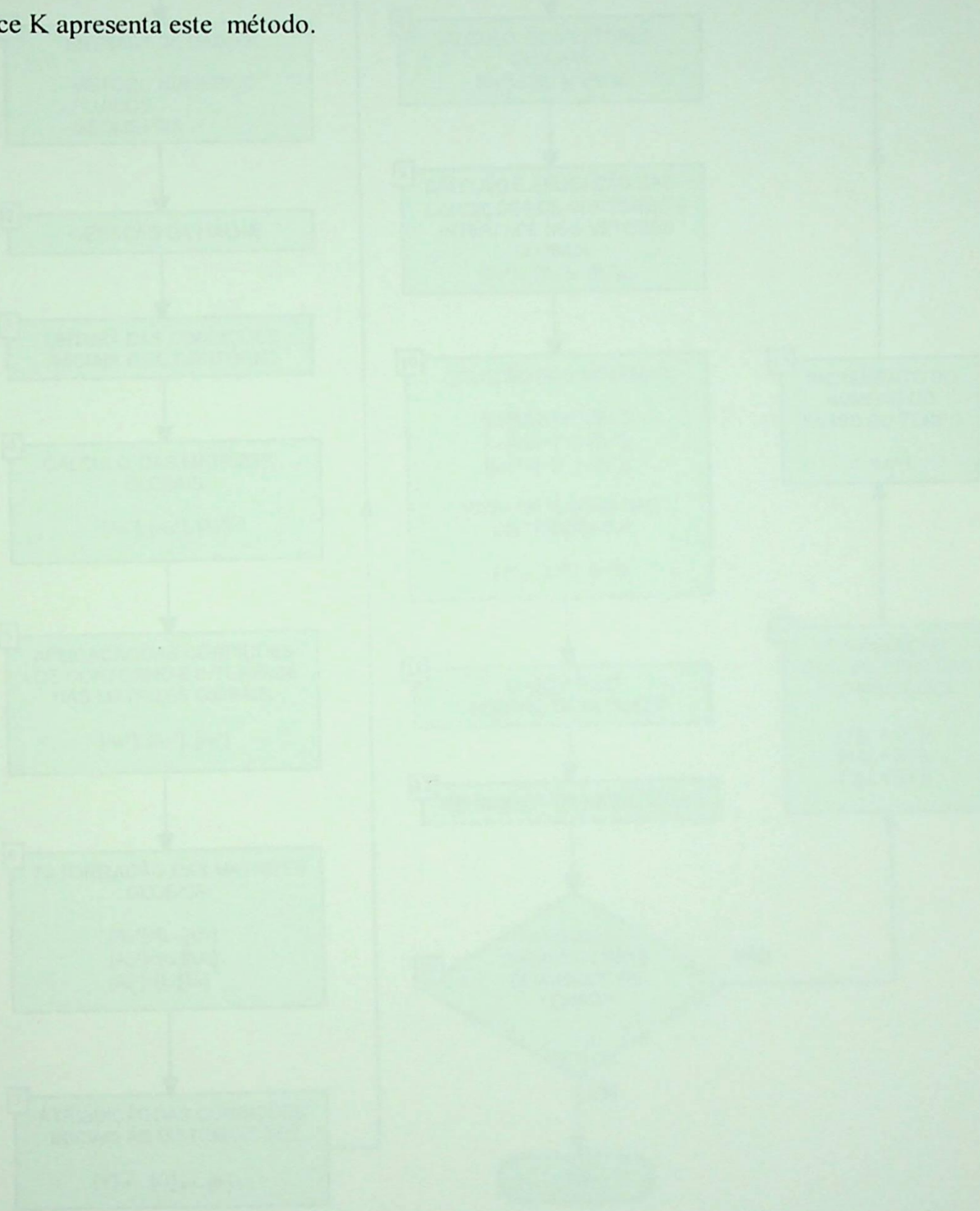


Figura 13 - Fluxograma do Método de Fatorização LU

3.8- Programa computacional

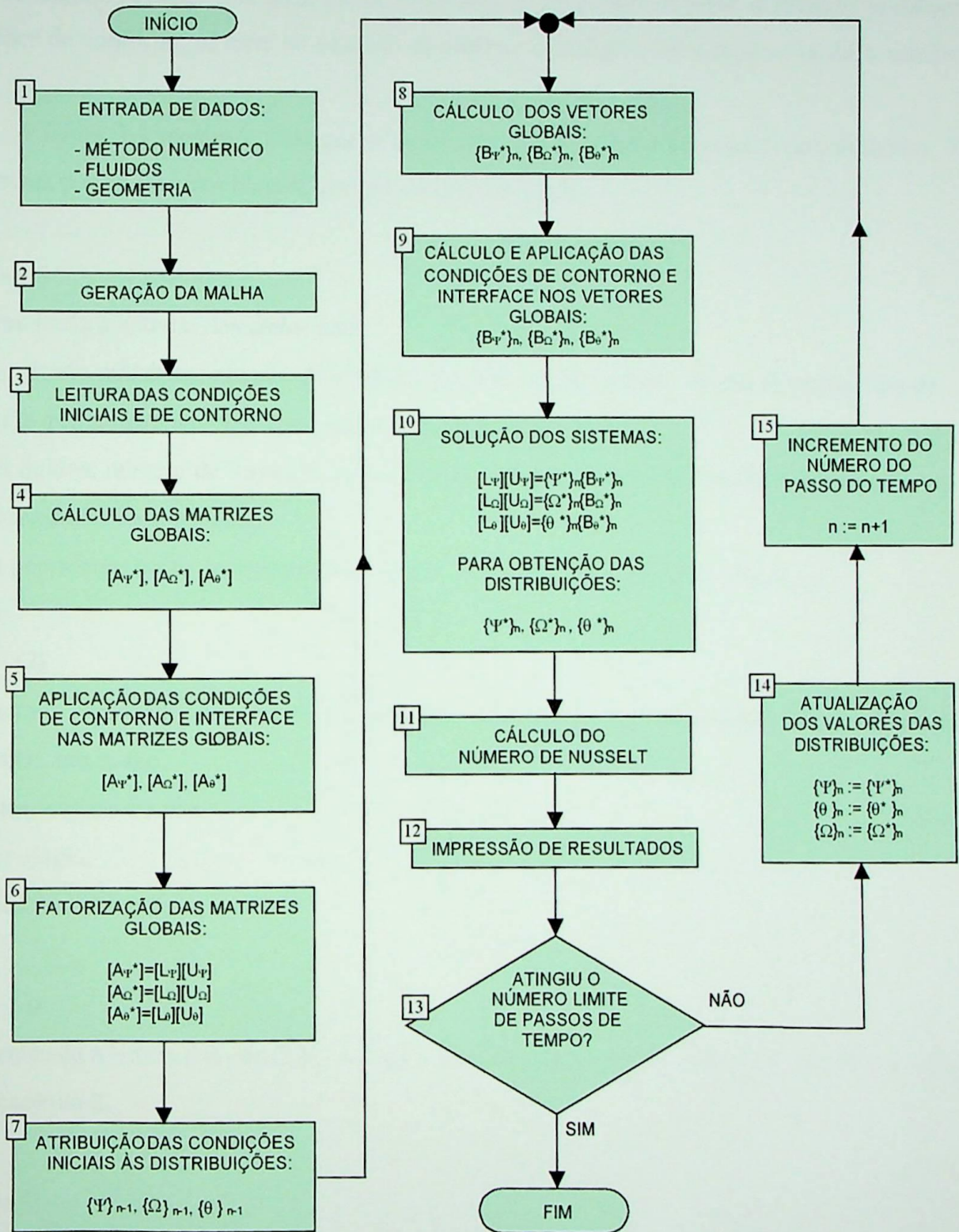


Figura 3.1 – Fluxograma do programa computacional

Para o cálculo das distribuições das variáveis, assim como dos parâmetros de saída, foram desenvolvidos alguns programas em linguagem FORTRAN-90. Basicamente, foram criados dois programas, sendo um para a condição de contorno com temperatura constante e outro para fluxo de calor constante. A razão pela qual, não se criou apenas um programa geral, atendendo as diferentes condições de contorno, se deve ao objetivo de otimizar o código com relação ao custo computacional.

A figura 3.1 mostra o fluxograma geral, que atende a estes programas desenvolvidos. Este fluxograma possui diversos blocos, que são descritos a seguir.

Bloco - (1)

É realizada a entrada dos dados para:

- o método numérico: número de total de passos de tempo, número de nós da malha, tipo da malha que será gerada (espaçamento uniforme ou não);
- os fluidos: número de Rayleigh, número de Marangoni, número de Prandtl, relações entre as propriedades termo-físicas;
- a geometria: razão de aspecto da cavidade, espessura das camadas de fluidos

Bloco - (2)

É gerada uma malha de elementos triangulares lineares, obtendo-se os parâmetros pertinentes a mesma, tais como:

- coordenadas do nós;
- topologia;
- área dos elementos e outros.

Bloco - (3)

É realizada a leitura das condições iniciais e de contorno. Os valores lidos são aqueles descritos no capítulo 2.

Bloco - (4)

As matrizes globais da função corrente, vorticidade e temperatura, são calculadas, respectivamente, conforme as equações (3.61), (3.64) e (3.67).

Bloco - (5)

As matrizes globais são modificadas, para conter as informações relativas as condições de contorno e interface.

Bloco - (6)

As matrizes globais modificadas são fatorizadas na forma LU (apêndice K).

Bloco - (7)

As variáveis são inicializadas com os valores das condições iniciais.

Bloco - (8)

Os vetores globais da função corrente, vorticidade e temperatura, são calculadas, respectivamente, conforme as equações (3.62), (3.65) e (3.68).

Bloco - (9)

As condições de contorno e interface são calculadas conforme os apêndices I e J, e são aplicadas nos vetores globais.

Bloco - (10)

De posse das matrizes globais modificadas fatorizadas e dos vetores globais modificados os sistemas de equações são calculados de acordo com o apêndice K, obtendo-se os valores das distribuições da função corrente, vorticidade e temperatura, para o passo de tempo atual.

Bloco - (11)

Obtidos os valores das distribuições, são calculados os parâmetros de saída (número de Nusselt, etc.), relativos ao passo de tempo em questão.

Bloco - (12)

São impressos os valores das distribuições e parâmetros de saída relativos ao passo de tempo.

Bloco - (13)

É realizada uma verificação do número do passo de tempo atual com o número total de passos

de tempo a ser atingido. Em caso afirmativo, o programa encerra a sua execução, e em caso contrário o programa avança para o bloco (14).

Bloco - (14)

É realizada a atualização das variáveis.

Bloco - (15)

O índice do passo de tempo é incrementado em uma unidade, e o programa avança para o bloco (8).

3.9- Nomenclatura

Símbolos latinos

a, b, c	constante do elemento
A	área do elemento
D_x, D_y	parâmetro da equação diferencial
G	parâmetro da equação diferencial
Q	parâmetro da equação diferencial
X, Y	coordenada adimensional

Símbolos gregos

ϕ	variável que representa as grandezas dimensionais ψ, ω, T
λ	parâmetro da equação de conservação
$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3,$	parâmetro da equação de conservação
θ	temperatura adimensional
Θ	parâmetro relacionado ao esquema de diferenças finitas
τ	tempo adimensional
Ω	vorticidade adimensional
Ψ	função corrente adimensional

Sub-índices

i, j, k	vértice do elemento
$n-1$	instante no tempo atrás
n	instante no tempo à frente

Sobre-índices

*	valor calculado com base nos instantes do tempo atrás e à frente
(e)	matriz ou vetor do elemento

Matrizes e vetores

$\{\Phi\}$	vetor com os valores nodais da variável ϕ
$[A]$	matriz definida no texto
$\{B\}$	vetor definido no texto
$[C]$	matriz capacitância
$\{F\}$	vetor força
$[K]$	matriz rigidez
$[K_D]$	matriz rigidez associada ao parâmetro D
$[K_G]$	matriz rigidez associada ao parâmetro G
$[P]$	matriz definida no texto

Capítulo 4

VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO E DO CÓDIGO COMPUTACIONAL

4.1- Introdução

Este capítulo tem por objetivo realizar a validação do modelo matemático e do código computacional. Com este propósito, alguns casos, reportados na literatura, foram estudados e os resultados comparados.

A seguir, são apresentados os resultados encontrados nos estudos de cavidades preenchidas só com um fluido ou com dois fluidos imiscíveis superpostos.

Para o levantamento destes resultados, foi utilizado um sistema computacional, com as seguintes características:

Hardware:

- processador: Pentium II de 350 MHz
- memória RAM: 128 Mbytes

Software:

- sistema operacional: Microsoft Windows NT Workstation 4.0
- compilador: Microsoft Fortran PowerStation 4.0
- linguagem: FORTRAN 90

4.2- Cavidade com um fluido

Os resultados abaixo são referentes ao cálculo do número de Nusselt, para o regime permanente, em uma cavidade de seção quadrada, tendo uma parede vertical resfriada e outra aquecida. As paredes horizontais são isoladas. A figura 4.1 ilustra a cavidade em estudo.

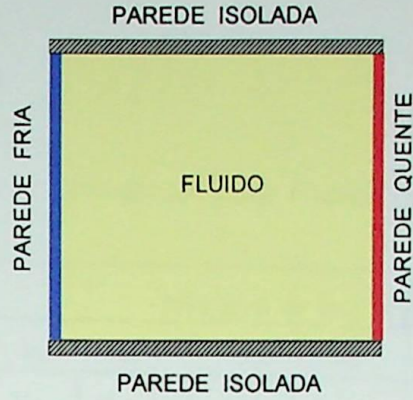


Figura 4.1 – Cavidade quadrada estudada

Os desvios apresentados nas tabelas 4.1 e 4.2 são referentes aos resultados encontrados no presente trabalho em relação aqueles obtidos por Menon, G. J. (1984), Nascimento, M. A. R., (1988), Tabarrok, B. et al. (1977), Ozoe, H. et al. (1975), Figueredo, J. R. et al. (1986), Wong, H. H. et al. (1979), Wilkes et al. (1966).

A tabela-4.1 mostra os resultados para número de Prandtl=0,733 e número de Rayleigh=14.660.

Tabela 4.1 - Comparação entre os resultados para $Pr=0,733$ e $Ra'=14660$

Referência	Nu	Desvio (%)	Método Utilizado
Presente Trabalho	2,595	-	Elementos Finitos (800 elementos)
Nascimento	2,721	4,63	Elementos Finitos (338 elementos)
Menon	2,700	4,05	Elementos Finitos (100 elementos)
Ozoe et al.	2,740	5,59	Experimental
Tabarrok et al.	2,695	3,71	Elementos Finitos (200 elementos)
Wilkes et al.	2,874	9,71	Diferenças Finitas (10x10)
Wilkes et al.	2,516	3,14	Diferenças Finitas (20x20)

A tabela-4.2 apresenta os resultados para número de Prandtl=0,733 e diversos números de Rayleigh. Nesta tabela foram utilizadas as seguintes malhas:

Presente Trabalho - malha 21x21

Nascimento - malha 14x14

Figueredo et al. - malha 21x21
 Wong et al. - malha 22x22

Tabela 4.2 - Comparação entre os resultados para Prandtl=0,733 e diversos números de Rayleigh

Referência	Número de Rayleigh									
	Ra'=25000		Ra'=43980		Ra'=73300		Ra'=100000		Ra'=250000	
	Nu	Desvio (%)	Nu	Desvio (%)	Nu	Desvio (%)	Nu	Desvio (%)	Nu	Desvio (%)
Presente Trabalho	3,051	-	3,615	-	4,209	-	4,610	-	5,966	-
Nascimento	3,22	5,25	3,864	6,44	4,554	7,58	5,027	8,30	6,649	10,27
Figueredo et al.	2,884	5,79	3,468	4,23	4,160	1,18	4,686	1,62	-	-
Wong et al.	2,972	2,66	-	-	-	-	4,510	2,22	5,920	0,78

Conforme pode ser observado, os resultados estão em boa concordância.

4.3- Cavidade com dois fluidos imiscíveis superpostos

Neste tipo de cavidade, foram estudados dois tipos de condições de contorno: condição de paredes verticais com temperatura constante e condição de paredes verticais, com fluxo de calor constante.

4.3.1 Paredes verticais com temperatura constante

Para esta condição de contorno, foi estudado um caso, cujos resultados numéricos e experimentais estavam disponíveis em um trabalho publicado por Prakash, A. & Koster, J. N., (1997).

A figura 4.2 ilustra a cavidade analisada. Os fluidos utilizados foram óleo de silicone (SO 10cSt) sobre fluorinert líquido (FC70). As propriedades físicas dos fluidos imiscíveis sobrepostos, as dimensões da cavidade, e os números de Rayleigh e Marangoni empregados nesta validação encontram-se, respectivamente, nas tabelas 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6. A diferença de temperatura fixada entre as paredes verticais foi de 5K e a aceleração gravitacional de $9,8 \text{ m/s}^2$.

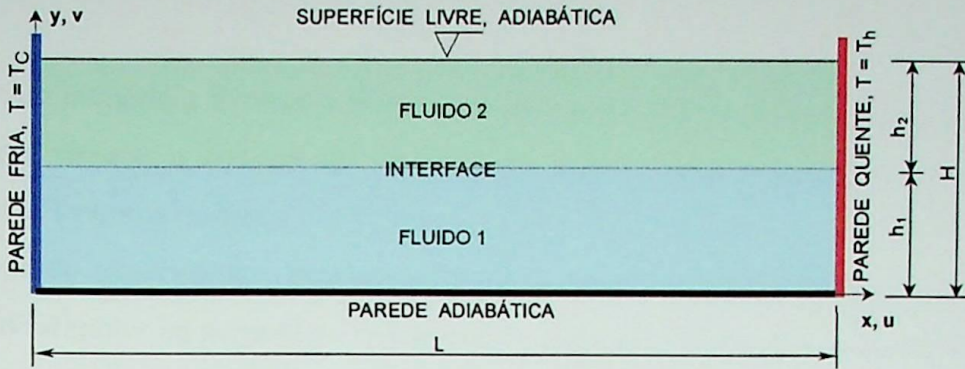


Figura 4.2 - Cavidade estudada

Tabela 4.3 - Propriedades físicas dos fluidos

Propriedades	Fluidos	
	FC70	SO 10cSt
Calor específico c_p ($J\ kg^{-1}\ K^{-1}$)	$1,05 \times 10^3$	$1,51 \times 10^3$
Coefficiente de expansão β (K^{-1})	$1,00 \times 10^{-3}$	$1,10 \times 10^{-3}$
Condutividade térmica κ ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$)	$7,00 \times 10^{-2}$	$1,34 \times 10^{-1}$
Densidade ρ ($kg\ m^{-3}$)	$1,94 \times 10^3$	$9,35 \times 10^2$
Difusividade térmica α ($m^2\ s^{-1}$)	$3,44 \times 10^{-8}$	$9,51 \times 10^{-8}$
Gradiente de tensão superficial γ ($N\ m^{-1}\ K^{-1}$)	$-6,0 \times 10^{-5}$	$-6,7 \times 10^{-5}$
Gradiente de tensão na interface γ ($N\ m^{-1}\ K^{-1}$)	$-2,9 \times 10^{-5}$	
Número de Prandtl Pr	390	105
Tensão superficial σ ($N\ m^{-1}$)	$1,97 \times 10^{-3}$	$1,86 \times 10^{-3}$
Tensão na interface σ ($N\ m^{-1}$)	$6,90 \times 10^{-2}$	
Viscosidade dinâmica μ ($kg\ m^{-1}\ s^{-1}$)	$2,60 \times 10^{-2}$	$9,35 \times 10^{-3}$
Viscosidade cinemática ν ($m^2\ s^{-1}$)	$1,34 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-5}$

Tabela 4.4 - Dimensões da cavidade

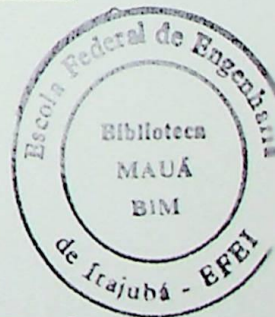
L (m)	H (m)	h_1 (m)	h_2 (m)
$38,0 \times 10^{-3}$	$12,0 \times 10^{-3}$	$6,0 \times 10^{-3}$	$6,0 \times 10^{-3}$

Tabela 4.5 - Número de Rayleigh

Ra'_1	Ra'_2
183875	98040

Tabela 4.6 - Número de Marangoni

Ma'_1	Ma'_2
1945	4520



No estudo numérico, Prakash e Koster utilizaram um código comercial de elementos finitos – FIDAP – para simular o escoamento na cavidade, a qual foi discretizada em uma malha não-uniforme de 51x71 pontos nodais.

Já no estudo experimental, Prakash e Koster fizeram a visualização do escoamento, com a ajuda de um investigador de partículas em suspensão, utilizando partículas de titânio iluminadas por um laser. Para a medição do perfil de velocidade foi utilizado um sistema LDV – “Laser Doppler Velocimetry”.

No presente trabalho, foi utilizada uma malha com espaçamento não-uniforme de 5320 elementos triangulares lineares, conforme mostra a figura 4.3.

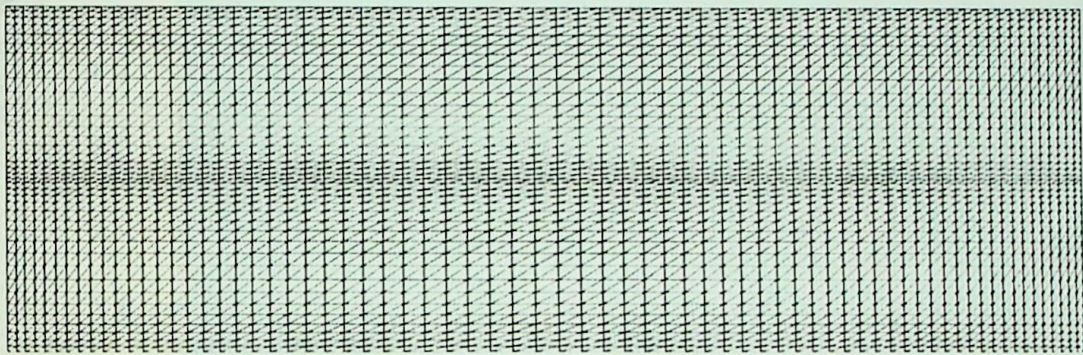


Figura 4.3 – Malha empregada na discretização da cavidade

As figuras 4.4 a 4.7 apresentam, para o regime permanente, o perfil de velocidade horizontal no centro da cavidade e as distribuições da função corrente. Nestas figuras, encontram-se os resultados numéricos do presente trabalho e os resultados numéricos e experimentais obtidos por Prakash e Koster. Conforme pode ser observado, os resultados estão em boa concordância.

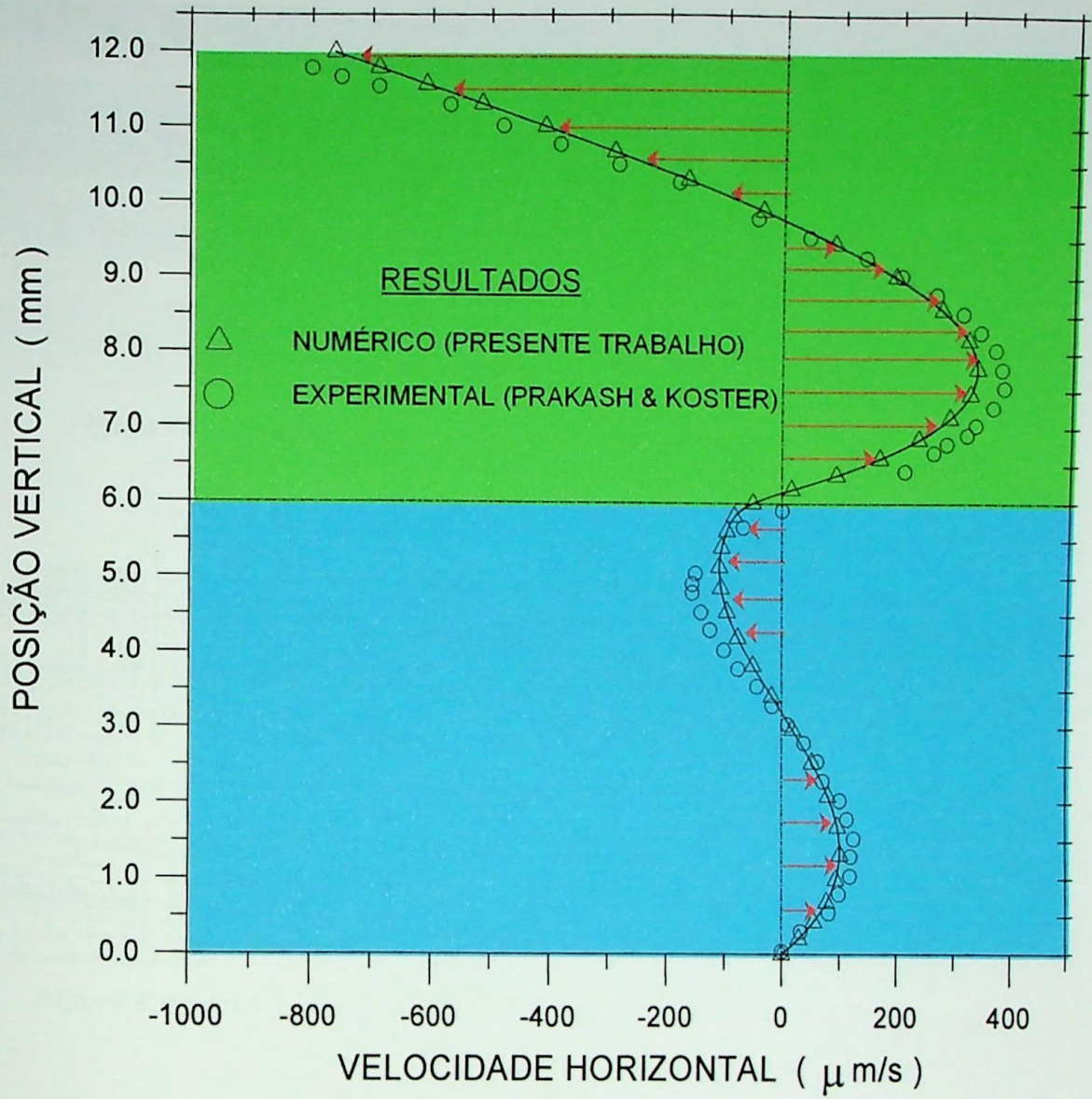


Figura 4.4 - Comparação entre o resultado numérico do presente trabalho e o resultado experimental obtido por Prakash & Koster.



Figura 4.5 - Função corrente obtida numericamente pelo presente trabalho

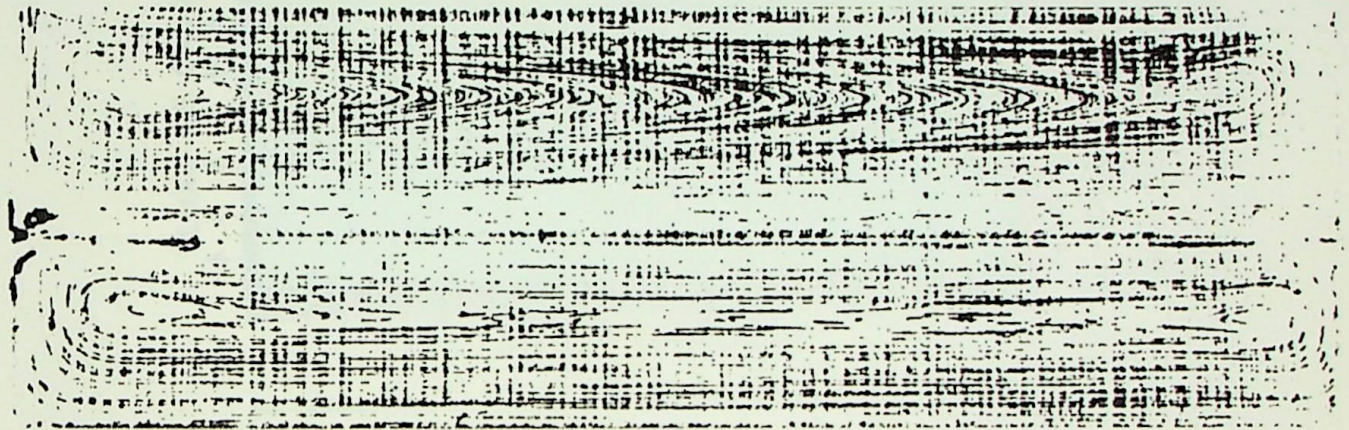


Figura 4.6 - Função corrente obtida experimentalmente por Prakash e Koster

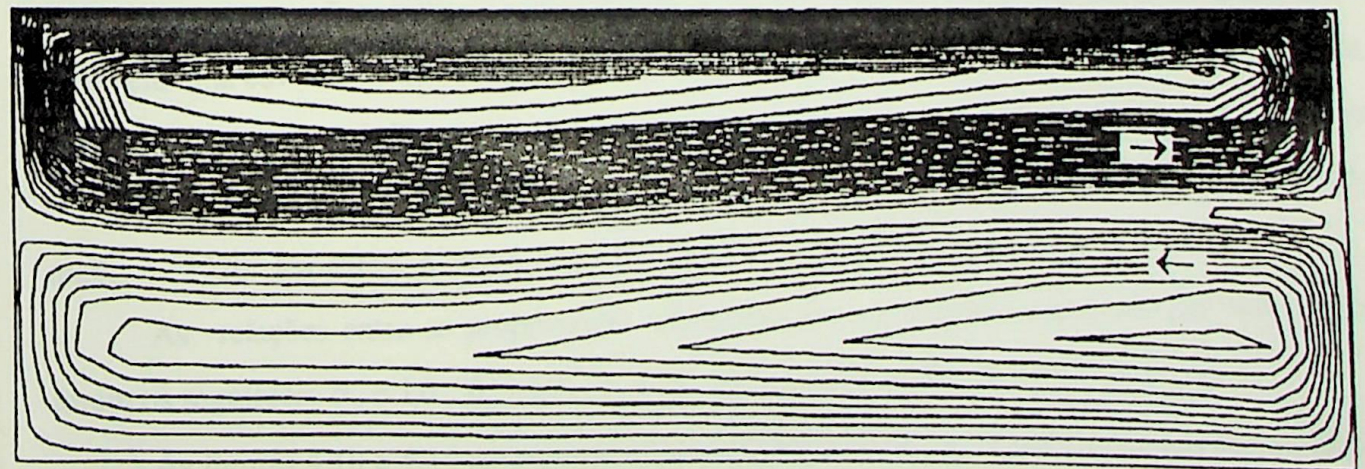


Figura 4.7 - Função corrente obtida numericamente por Prakash e Koster

4.3.2 Paredes verticais com fluxo de calor constante

Para este tipo de condição de contorno, foi estudado um caso, cujos resultados numéricos estavam disponíveis em um trabalho realizado por Bargach, M. & Vasseur, P., (1993). Nesse trabalho, Bargach e Vasseur empregaram o método de volume de controle para estudar uma cavidade fechada, contendo dois fluidos imiscíveis e com fluxo de calor constante nas paredes verticais, tal como mostra a figura 4.8.

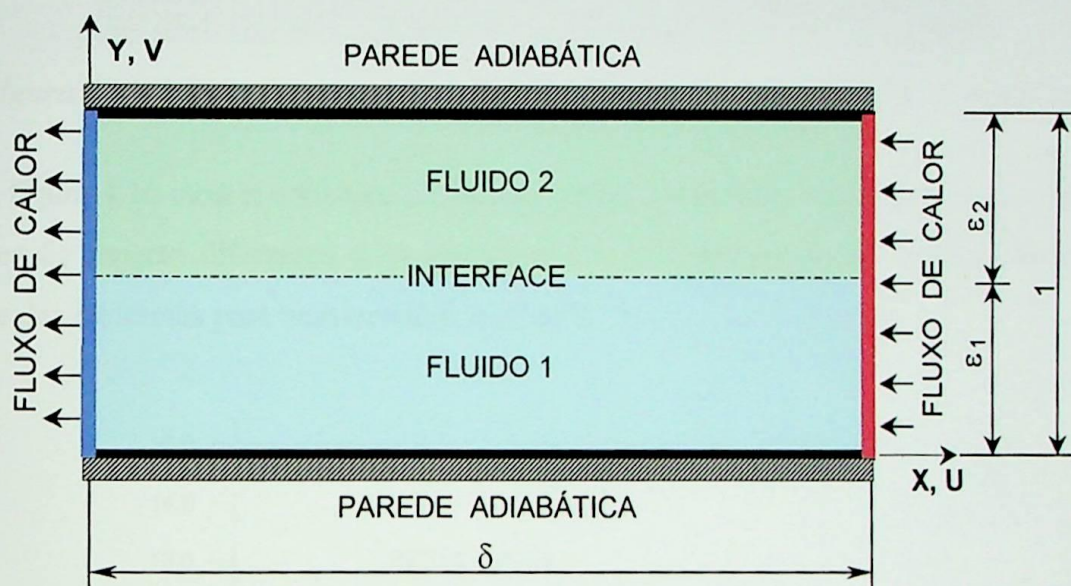


Figura 4.8 - Cavidade fechada com fluxo de calor constante nas paredes verticais

As comparações, entre os resultados do presente trabalho e os de Bargach e Vasseur, foram feitas em uma cavidade com três razões de aspecto diferentes ($\delta=1, 2, 5$), contendo duas camadas de fluidos iguais $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0,5$. Para tal, o presente trabalho utilizou três malhas de elementos triangulares lineares. Para $\delta=1$: malha de 3040 elementos; para $\delta=2$: malha de 3360 elementos; e para $\delta=5$: malha de 3920 elementos. A figura 4.9 exemplifica a malha empregada para $\delta=2$.

As relações entre as propriedades termo-físicas e os números adimensionais dos fluidos foram os seguintes: $\bar{\alpha}_2 = 1,0$, $\bar{\beta}_2 = 1,0$, $\bar{\kappa}_2 = 1,0$, $\bar{\mu}_2 = 1,0$, $\bar{\rho}_2 = 1,0$, $Pr_1 = 1,0$, $Ma_1'' = 0$.

As figuras 4.10 a 4.14 apresentam uma comparação entre os resultados do presente trabalho e aqueles encontrados numericamente por Bargach e Vasseur.

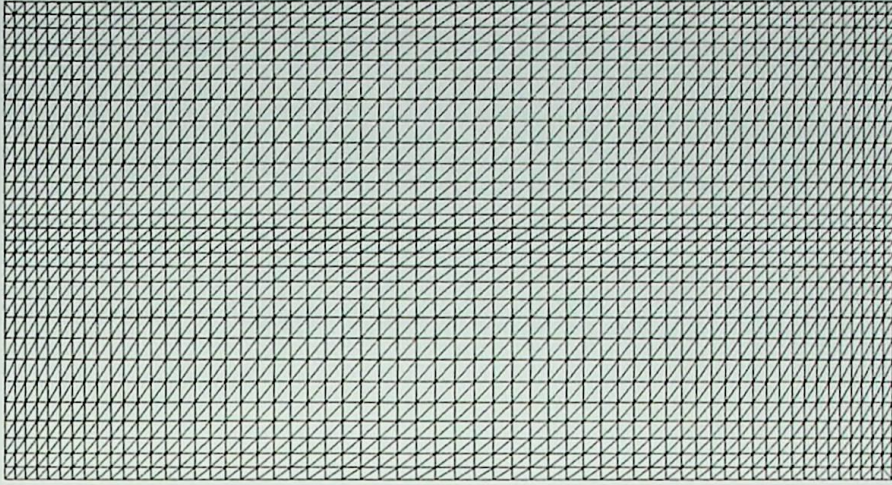


Figura 4.9 – Malha empregada na discretização da cavidade com $\delta=2$ e $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0,5$.

A figura 4.10 mostra o número de Nusselt médio nas paredes verticais de uma cavidade para três razões de aspecto diferentes, e as figuras 4.11 a 4.14 apresentam as distribuições da função corrente e das isotermas para uma cavidade com $\delta=5$.

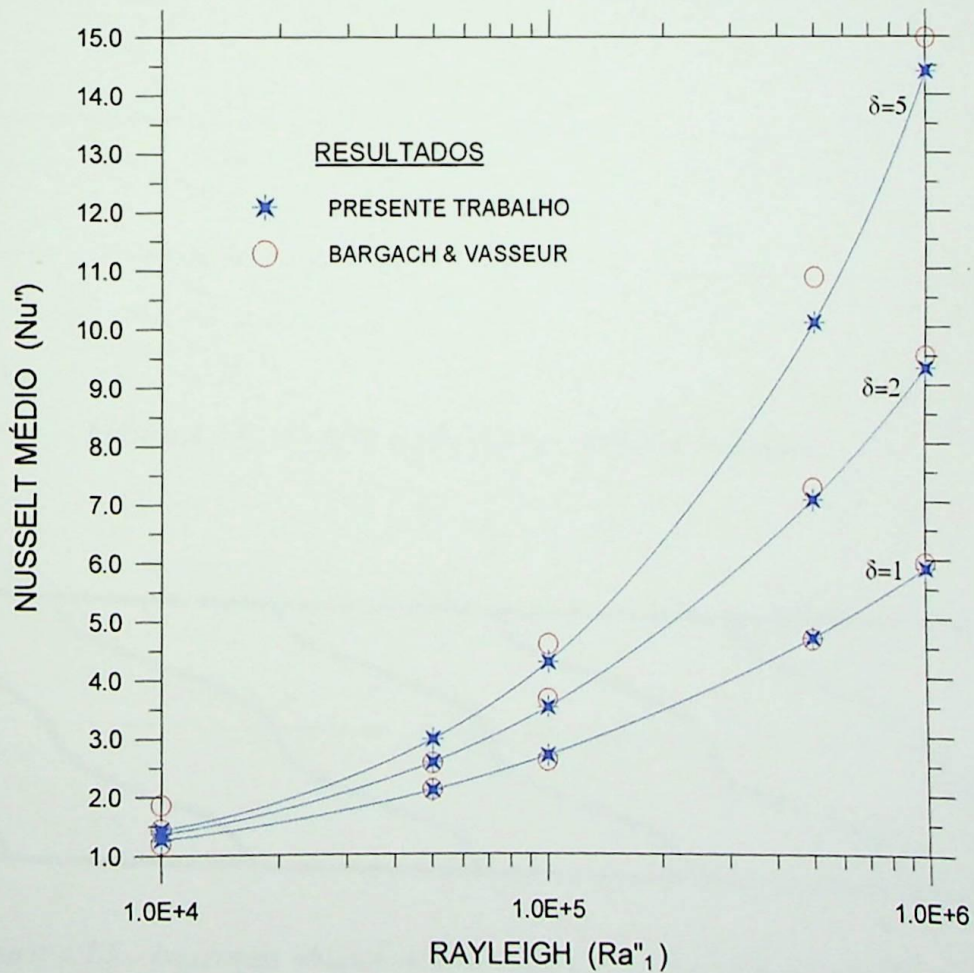


Figura 4.10 – Resultados do presente trabalho e os de Bargach e Vasseur

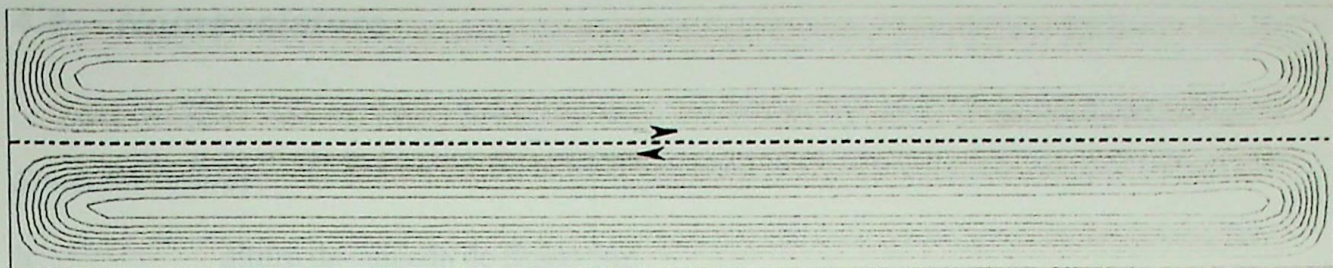


Figura 4.11 – Função corrente obtida no presente trabalho

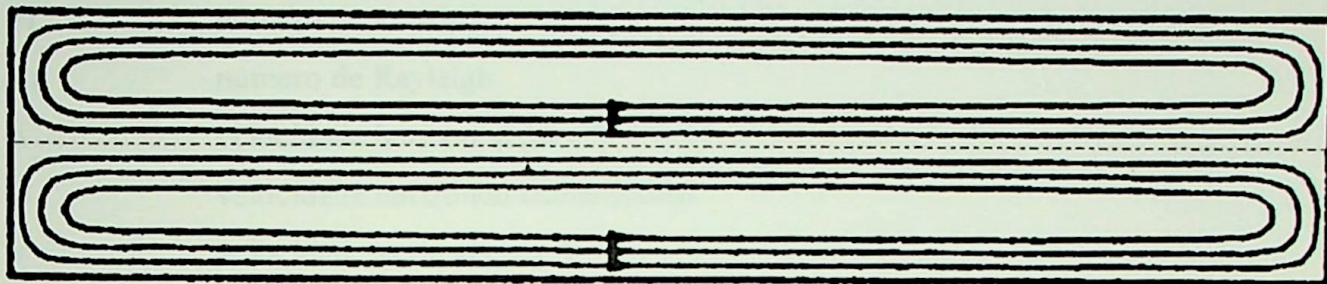


Figura 4.12 – Função corrente obtida numericamente por Bargach e Vasseur

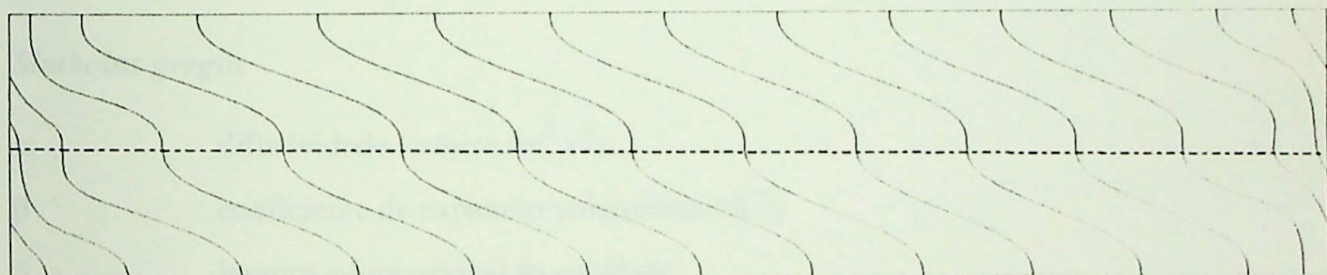


Figura 4.13 – Isotermas obtidas no presente trabalho

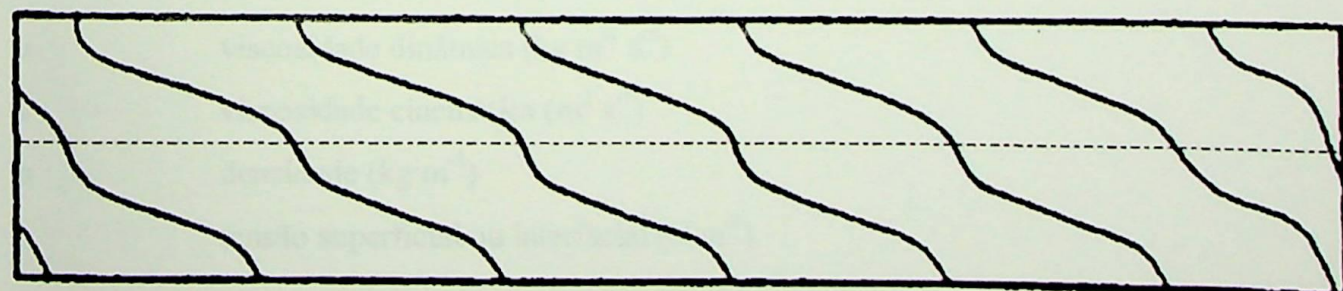


Figura 4.14 – Isotermas obtidas numericamente por Bargach e Vasseur

Conforme pode ser observado nos trabalhos, os resultados estão em boa concordância.

4.4- Nomenclatura

Símbolos latinos

h	altura da camada de fluido (m)
H	altura total da cavidade (m)
L	largura da cavidade (m)
Ma	número de Marangoni
Pr	número de Prandtl
Ra	número de Rayleigh
u	velocidade horizontal ($m\ s^{-1}$)
U	velocidade horizontal adimensional
v	velocidade vertical ($m\ s^{-1}$)
V	velocidade vertical adimensional
x, y	coordenada (m)
X, Y	coordenada adimensional

Símbolos gregos

α	difusividade térmica ($m^2\ s^{-1}$)
β	coeficiente de expansão volumétrica (K^{-1})
δ	largura adimensional da cavidade
ε	altura adimensional da camada de fluido
γ	gradiente da tensão superficial ou interfacial ($N\ m^{-1}\ K^{-1}$)
κ	condutividade térmica ($W\ m^{-1}\ ^\circ C^{-1}$)
μ	viscosidade dinâmica ($kg\ m^{-1}\ s^{-1}$)
ν	viscosidade cinemática ($m^2\ s^{-1}$)
ρ	densidade ($kg\ m^{-3}$)
σ	tensão superficial ou interfacial ($N\ m^{-1}$)

Sub-índices

1	primeira camada de fluido, ou interface entre os fluidos 1 e 2
2	segunda camada de fluido, ou superfície do fluido 2

h	parede quente
c	parede fria

Sobre-índices

'	temperatura constante
"	fluxo de calor constante
-	relação entre os fluidos da segunda e primeira camada

5.1- Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados obtidos na simulação de diversos casos, utilizando o modelo matemático e o código computacional desenvolvido no presente trabalho.

Embora o modelo matemático permita o estudo de uma variedade de geometrias, qualquer que sejam as camadas de fluidos, com o intuito de desenvolver o código computacional, o programa foi desenvolvido para trabalhar com duas camadas, e portanto, os casos aqui simulados serão aqueles de cavidades contendo dois fluidos (líquido e gás).

Conforme foi apresentado no capítulo 2, a quantidade de parâmetros de entrada do problema e a possibilidade de configurações das condições de contorno são muito maiores graças, sobretudo, ao número enorme de estudos de casos. Neste trabalho, devido a limitação de tempo e espaço, os resultados de apenas alguns casos.

A seguir, são apresentados os resultados obtidos, os quais foram agrupados segundo as condições de contorno impostas na cavidade, ou seja:

- condição de temperatura constante nas paredes verticais da cavidade;
- condição de fluxo de calor constante nas paredes verticais da cavidade;

Capítulo 5

RESULTADOS

5.1- Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados obtidos na simulação de diversos casos, utilizando o modelo matemático e o código computacional elaborados no presente trabalho.

Embora o modelo matemático permita o estudo de uma cavidade com um número qualquer de camadas de fluidos, com o intuito de simplificar o código computacional, o programa foi desenvolvido para trabalhar com duas camadas, e portanto, os casos aqui simulados serão restritos às cavidades contendo dois fluidos imiscíveis superpostos.

Conforme foi apresentado no capítulo 2, a quantidade de parâmetros de entrada do problema e a possibilidade de configurações das condições de contorno são relativamente grandes, permitindo um número enorme de estudos de casos. Neste trabalho, devido a limitação de tempo e espaço, nos restringiremos ao estudo de apenas alguns casos.

A seguir, são apresentados os resultados obtidos, os quais foram agrupados segundo às condições de contorno impostas na cavidade, ou seja:

- condição de temperatura constante nas paredes verticais da cavidade; e
- condição de fluxo de calor constante nas paredes verticais da cavidade.

5.2- Resultados para condição de contorno com temperatura constante

A seguir são apresentados os resultados obtidos para as cavidades fechadas e abertas com condição de contorno de temperatura constante nas paredes verticais.

5.2.1 Cavidade fechada

A figura 5.1 ilustra a cavidade estudada. Nesta cavidade temos $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,5$ e $\delta = 2,0$.

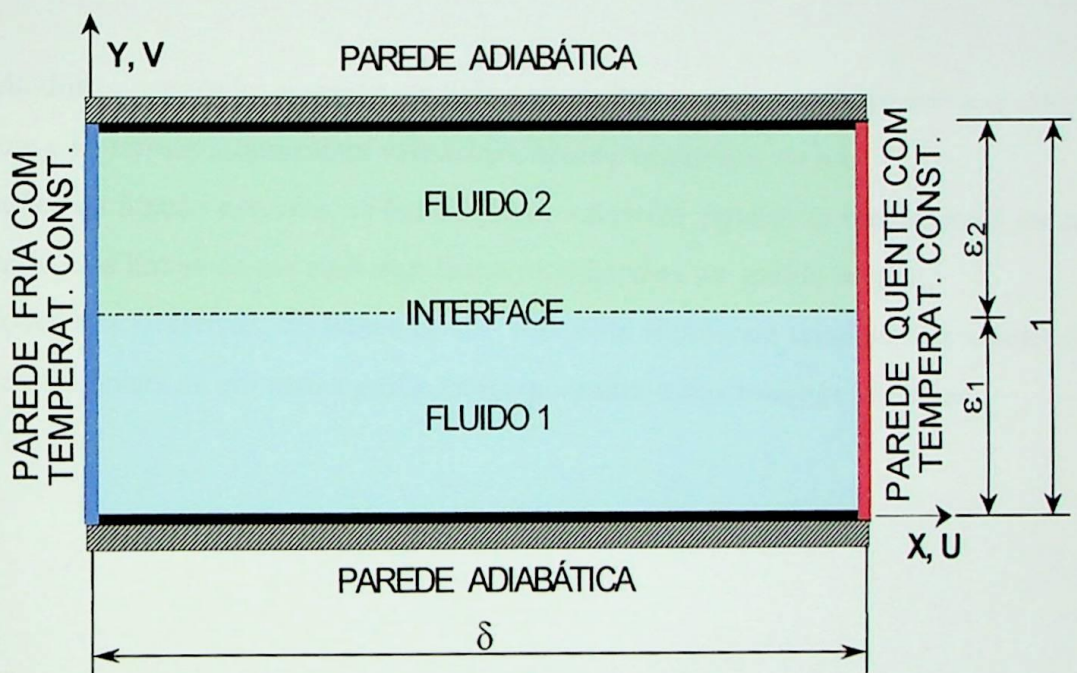


Figura 5.1 – Esquema da cavidade fechada estudada

Com o objetivo de analisar a influência da variação das propriedades termo-físicas do fluido superior sobre o comportamento geral da cavidade, no processo de convecção natural, foram realizados alguns estudos.

Nestes estudos para o fluido inferior foram fixados os números de Rayleigh ($Ra'_1 = 1,0 \times 10^5$) e Prandtl ($Pr_1 = 1,0$). Já algumas das relações entre as propriedades termo-físicas dos fluidos inferior(1) e superior(2) ($\bar{C}_p = \frac{C_{p2}}{C_{p1}}$, $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\bar{\beta} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$, $\bar{\kappa} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$, $\bar{\mu} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, $\bar{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$) e o número de Ma-rangoni na interface (Ma'_1) foram variados.

Nas simulações provenientes destes estudos, a cavidade da figura 5.1 foi discretizada com uma malha 3360 elementos triangulares (61x30 pontos nodais), conforme mostra a figura 5.2.

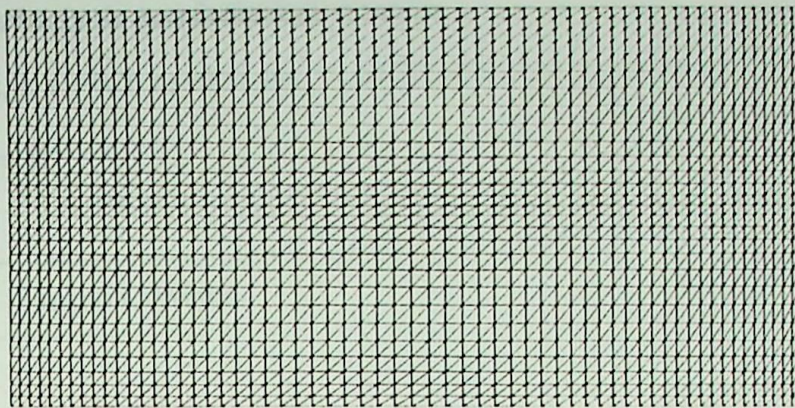


Figura 5.2 – Malha utilizada na discretização da cavidade

Nos resultados apresentados a seguir, as linhas vermelhas e azuis que aparecem nos campos da função corrente e isothermas representam valores positivos e negativos, ou seja:

- nas distribuições da função corrente, as linhas de cor vermelha significam escoamentos no sentido anti-horário e as linhas de cor azul significam escoamentos no sentido horário;
- nas distribuições das isothermas, as linhas de cor vermelha significam temperaturas adimensionais positivas e as linhas de cor azul significam temperaturas adimensionais negativas.

- *Estudo da influência da condutividade térmica*

Parâmetros: $\delta=2,0$; $\varepsilon_1=0,5$; $\varepsilon_2=0,5$; $Ra'_1=1,0 \times 10^5$; $Pr_1=1,0$; $Ma'_1=0,0$; $\bar{\beta}=1,0$; $\bar{\mu}=1,0$; $\bar{\rho}=1,0$; $\bar{C}_p=1,0$; e diversos $\bar{\kappa}$.

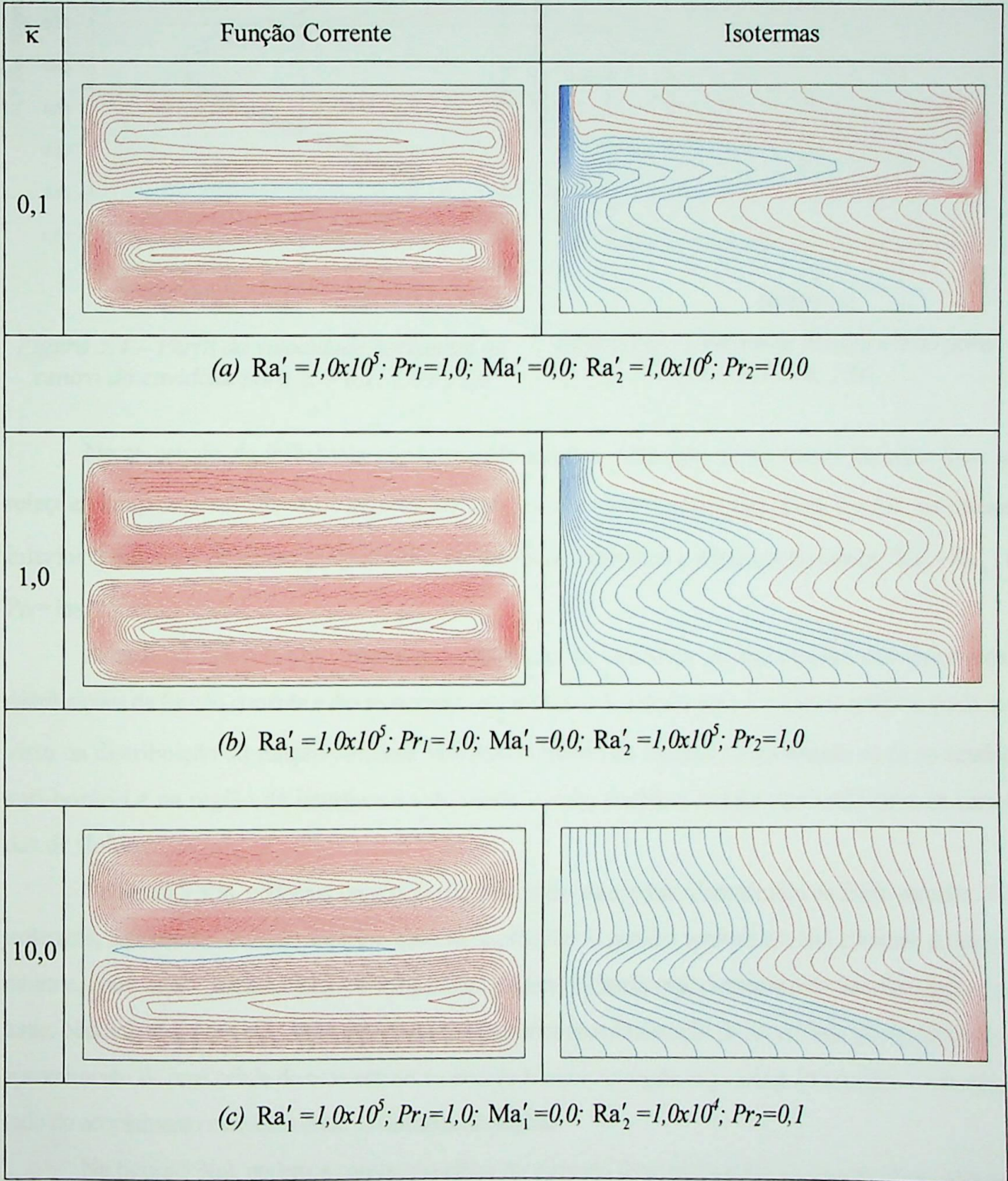


Figura 5.3 – Linhas de correntes e isotermas para (a) $\bar{\kappa} = 0,1$; (b) $\bar{\kappa} = 1,0$; (c) $\bar{\kappa} = 10,0$

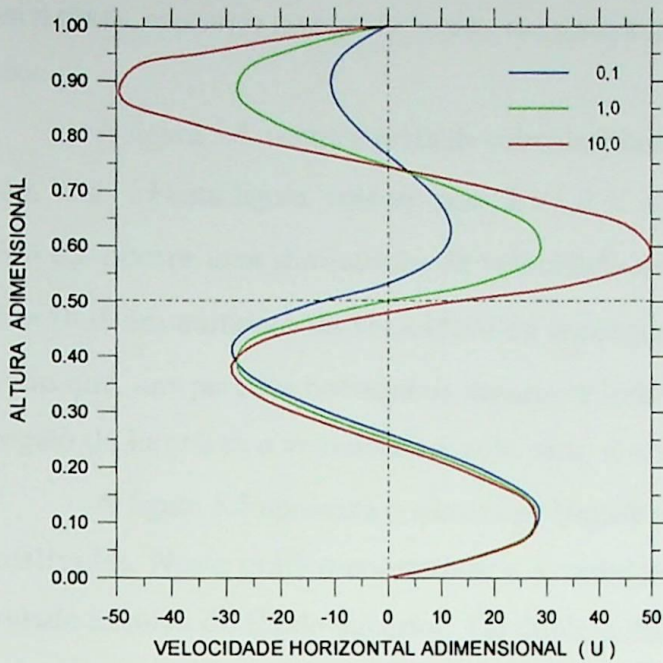


Figura 5.4 – Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $\bar{k} = 0,1; 1,0$ e $10,0$

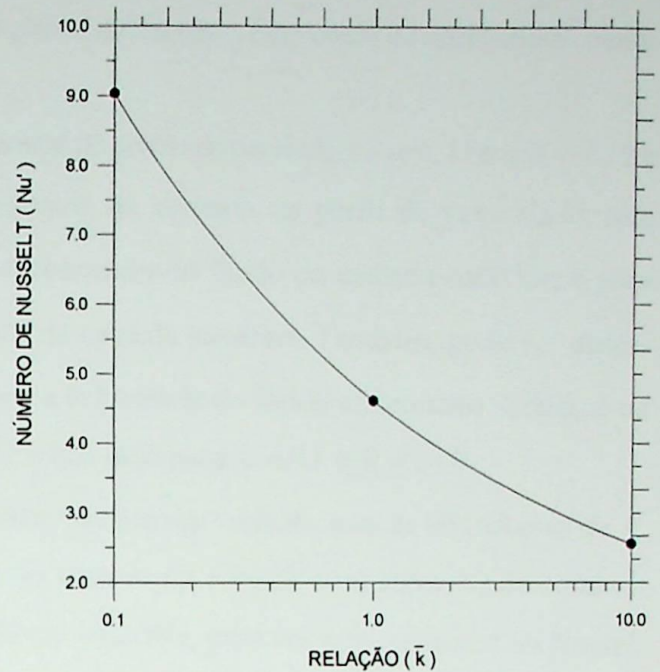


Figura 5.5 – Número de Nusselt médio para $\bar{k} = 0,1; 1,0; 10,0$

Neste estudo da influência condutividade térmica, note que, como foram tomadas fixas as relações de $\bar{\rho} = 1,0$ e $\bar{C}_p = 1,0$, logo temos que $\bar{k} = \bar{\alpha}$. Note também que, para $\bar{k} = 1,0$, os fluidos inferior e superior possuem propriedades termo-físicas idênticas e consequentemente: $Ra'_1 = Ra'_2$ e $Pr_1 = Pr_2$.

Através da figura 5.3(b), observa-se a existência de simetrias no escoamento dos fluidos, nas distribuições da função corrente e das isothermas e no perfil de velocidades para $\bar{k} = 1,0$. Conforme pode ser visto na distribuição da função corrente, nas duas camadas de fluidos o escoamento se dá no sentido anti-horário e na região da interface a velocidade é nula, devido a tensão cisalhante entre as camadas de fluidos.

Na figura 5.3(a), podemos ver o efeito da diminuição da condutividade térmica do fluido superior. Nas isothermas, na camada de fluido superior, observa-se próximo às paredes verticais um alto gradiente de temperatura e, entre estas paredes, linhas de temperatura tendendo à horizontal, caracterizando um meio quase isolante. Nas linhas de corrente, observa-se na camada superior uma diminuição da intensidade do escoamento e o aparecimento de uma célula de escoamento no sentido horário, na região logo acima da interface, como resultado do acoplamento mecânico entre as camadas de fluidos.

Na figura 5.3(c), podemos constatar o efeito do aumento da condutividade térmica do fluido superior. No campo das isothermas, na camada de fluido superior, observamos que as linhas de temperatura encontram-se quase paralelas às paredes verticais, tipificando um meio de alta condutividade térmica. No campo da função corrente, temos um aumento da intensidade do escoamento na camada do fluido superior e o aparecimento de

uma célula, escoando no sentido horário na região logo abaixo da interface, em virtude do acoplamento mecânico.

A figura 5.4 mostra o perfil de velocidade horizontal no centro da cavidade, ou seja, U em $X = \delta/2$ e $0 \leq Y \leq 1$. Nesta figura, nota-se: para $\bar{\kappa} = 1,0$ a existência de simetria no perfil de velocidade; para $\bar{\kappa} = 0,1$ ocorre uma diminuição da velocidade do escoamento do fluido da camada superior; e para $\bar{\kappa} = 10,0$ um aumento da velocidade do escoamento na camada superior. Também, pode ser observado que, nas paredes horizontais superior e inferior, a velocidade do fluido em contato é nula; e na região da interface a velocidade é nula para $\bar{\kappa} = 1,0$ e não nula para $\bar{\kappa} = 0,1$ e $\bar{\kappa} = 10,0$.

A figura 5.5 apresenta o número de Nusselt médio, nas paredes verticais, para as três relações de $\bar{\kappa}$ analisadas. Neste gráfico constata-se a diminuição do número do Nusselt com aumento da condutividade térmica do fluido superior. Tal diminuição já era esperada, uma vez que o número de Nusselt expressa a relação entre a transferência de calor por convecção e por condução (convecção/condução).

O fato de que para $\bar{\kappa} = 0,1$ o número de Nusselt médio ser maior que para $\bar{\kappa} = 10,0$, não significa que no primeiro caso exista maior transferência de calor que no segundo caso. Significa, sim, que para $\bar{\kappa} = 0,1$ o processo de transferência de calor através do transporte de fluido é maior que o calor transferido simplesmente por condução, devido à baixa condutividade térmica do meio.

• *Estudo da influência da viscosidade dinâmica*

Parâmetros: $\delta=2,0$; $\epsilon_1=0,5$; $\epsilon_2=0,5$; $Ra'_1=1,0 \times 10^5$; $Pr_1=1,0$; $Ma'_1=0,0$; $\bar{\beta}=1,0$; $\bar{\kappa}=1,0$; $\bar{\rho}=1,0$; $\bar{C}_p=1,0$; e diversos $\bar{\mu}$.

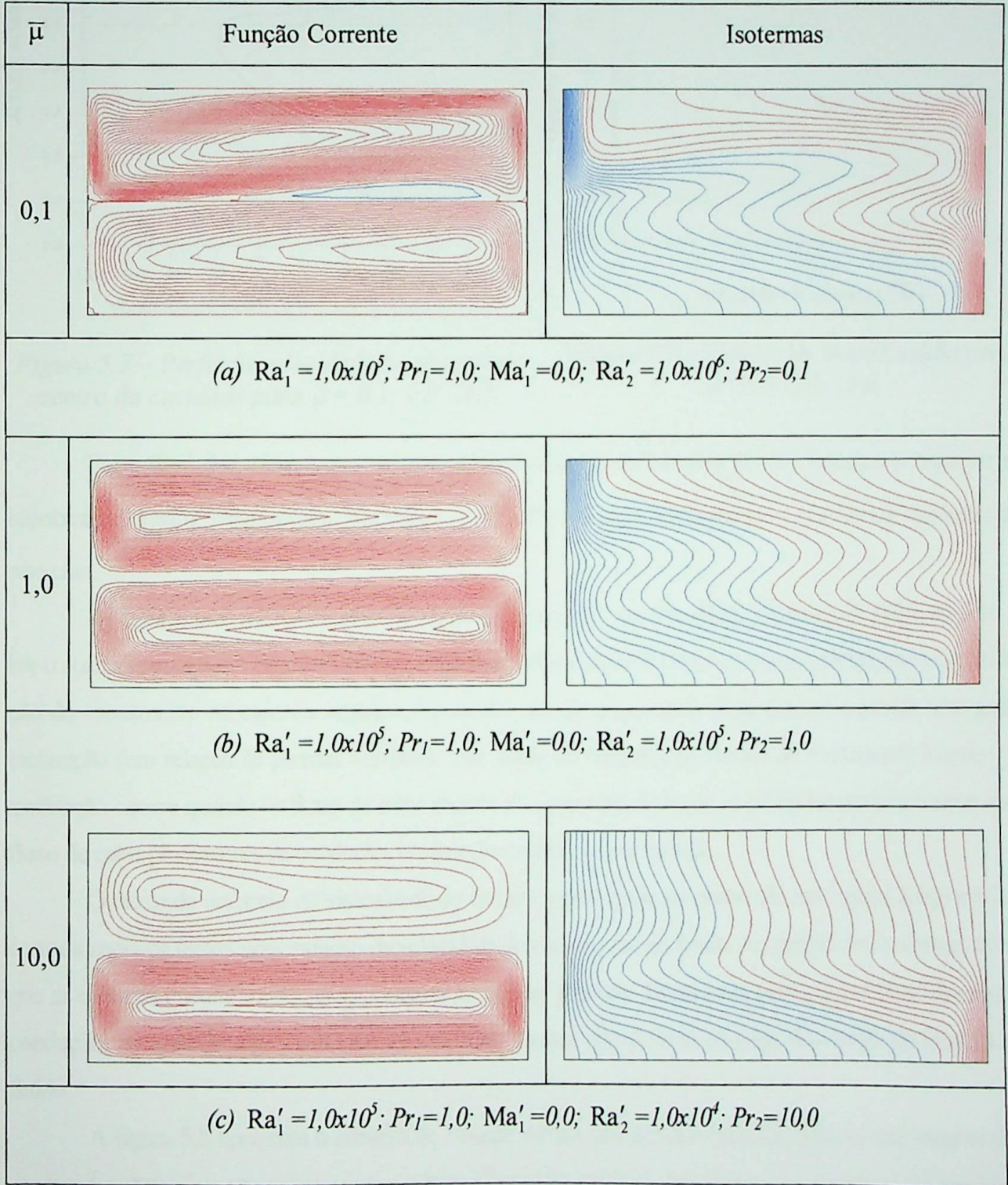


Figura 5.6 – Linhas de correntes e isotermas para (a) $\bar{\mu} = 0,1$; (b) $\bar{\mu} = 1,0$; (c) $\bar{\mu} = 10,0$

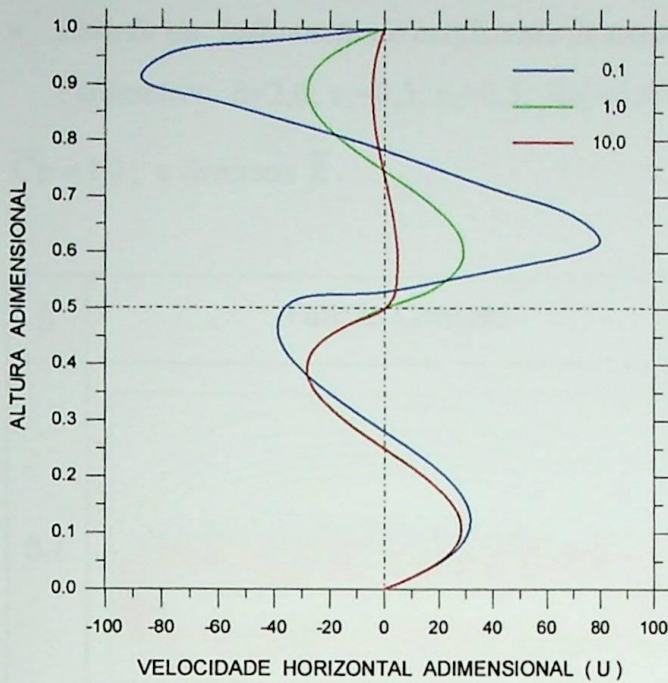


Figura 5.7 – Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $\bar{\mu} = 0,1; 1,0; 10,0$

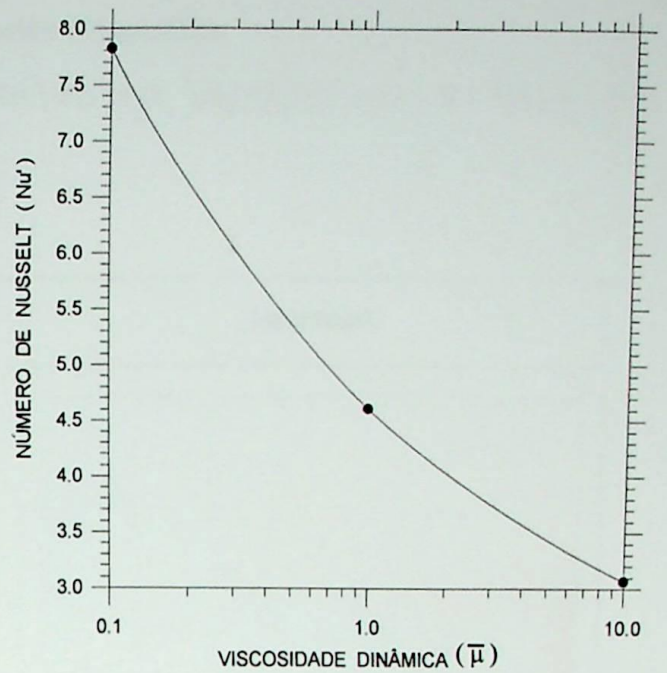


Figura 5.8 – Número de Nusselt médio para $\bar{\mu} = 0,1; 1,0; 10,0$

Para $\bar{\mu}=1,0$, temos que, as propriedades termo-físicas dos fluidos inferior e superior são idênticas e, assim resulta que, $Ra'_1=Ra'_2$ e $Pr_1=Pr_2$. A figura 5.6(b) mostra o escoamento resultante para este caso.

As figuras 5.6(a) e 5.7 mostram o efeito da diminuição da viscosidade dinâmica do fluido superior sobre o comportamento do escoamento da cavidade. Na distribuição da função corrente, percebe-se a intensificação do escoamento na camada superior. No campo das isoterms, nota-se na camada superior, uma grande inclinação (em relação às paredes verticais) nas linhas de temperatura, devido ao escoamento intenso. Tal inclinação ocorre quando o fluxo de calor através do transporte de fluido se dá de forma mais intensa que o fluxo de calor proveniente da condução, ou quando o meio é quase isolante.

O efeito do aumento da viscosidade do fluido superior pode ser observado nas figuras 5.6(c) e 5.7. Na camada superior temos uma redução da velocidade de escoamento do fluido. No campo das isoterms, nota-se que as mesmas encontram-se quase paralelas às paredes verticais. Neste caso, temos que o fluxo de calor por condução, na camada superior de fluido, está mais intenso que o fluxo de calor decorrente do transporte de fluido.

A figura 5.8 apresenta o número de Nusselt médio, nas paredes verticais, para as três relações de $\bar{\mu}$ analisadas. Neste gráfico constata-se a diminuição do número de Nusselt com o aumento da viscosidade dinâmica. Conforme ficou mostrado, através das figuras 5.6 e 5.7, o aumento da viscosidade dinâmica proporciona uma diminuição na velocidade do escoamento e conseqüentemente uma redução do fluxo de calor por convecção, justificando, assim, a queda do número de Nusselt.

- *Estudo da influência do coeficiente de expansão volumétrico*

Parâmetros: $\delta=2,0$; $\varepsilon_1=0,5$; $\varepsilon_2=0,5$; $Ra'_1=1,0 \times 10^5$; $Pr_1=1,0$; $Ma'_1=0,0$; $\bar{\kappa}=1,0$; $\bar{\mu}=1,0$; $\bar{\rho}=1,0$;

$\bar{C}_p=1,0$; e diversos $\bar{\beta}$.

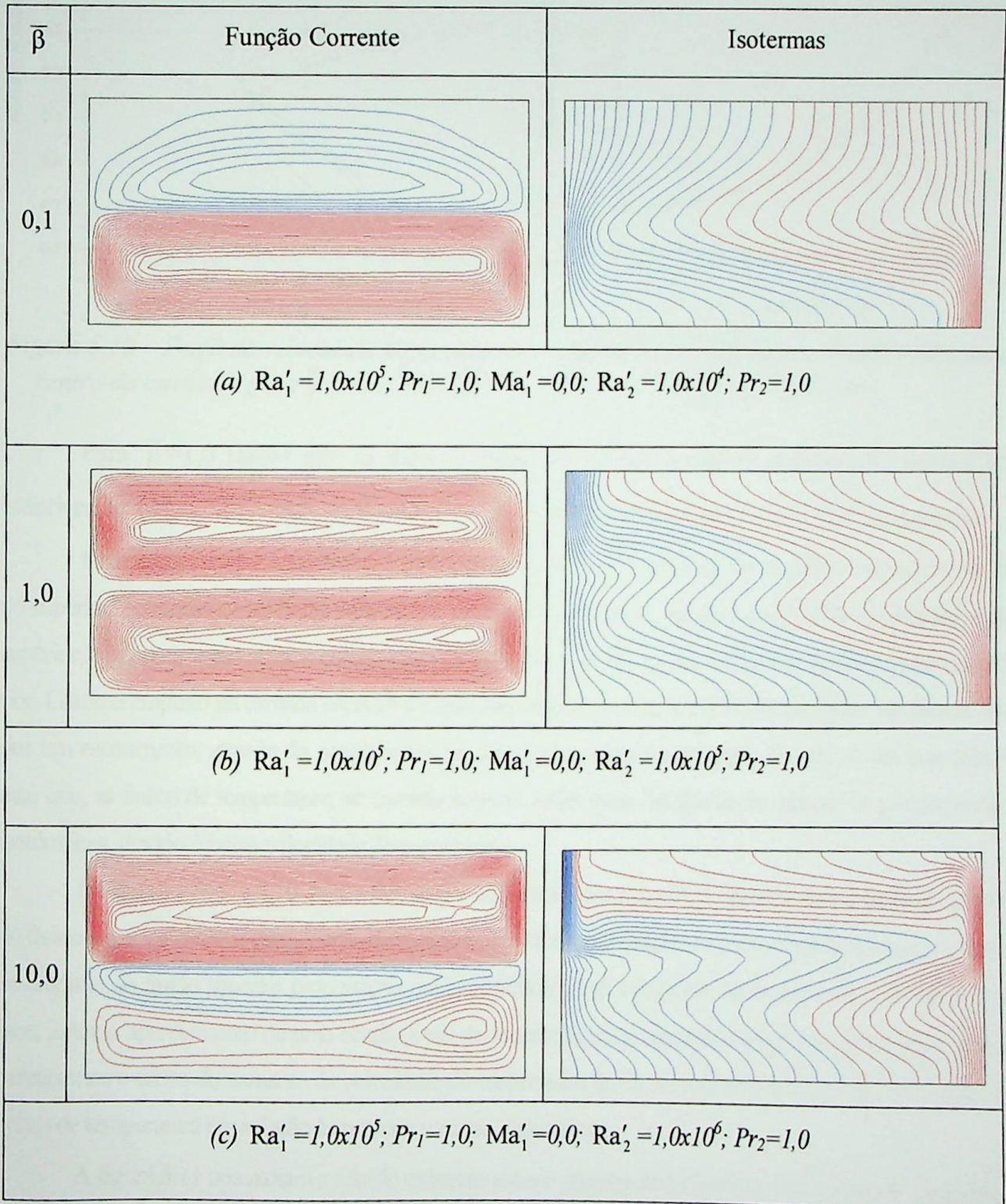


Figura 5.9 – Linhas de correntes e isotermas para (a) $\bar{\beta} = 0,1$; (b) $\bar{\beta} = 1,0$; (c) $\bar{\beta} = 10,0$

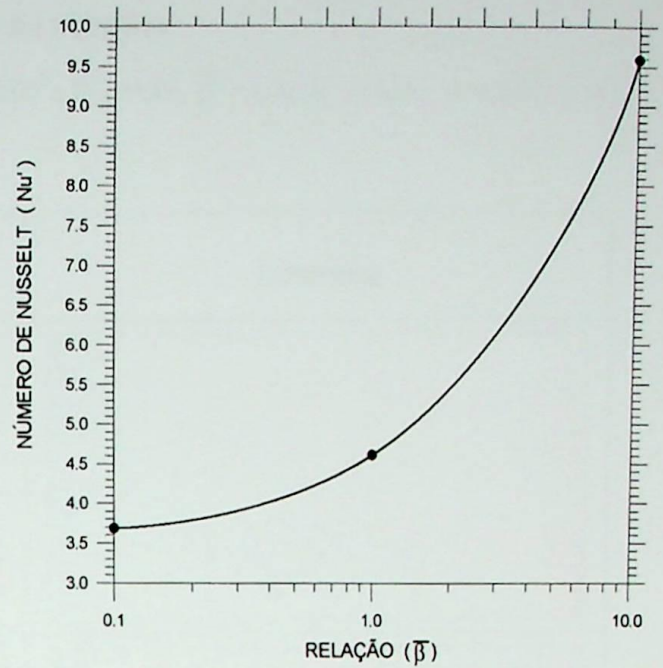
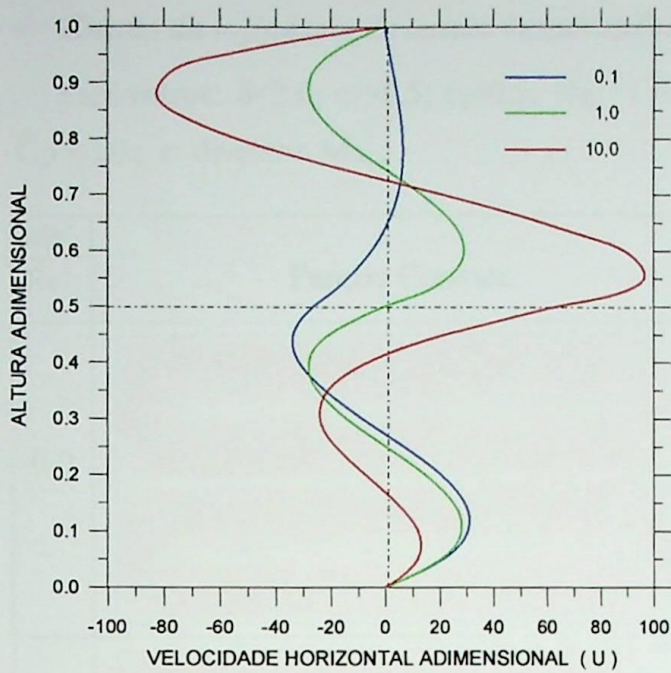


Figura 5.10 – Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $\bar{\beta} = 0,1; 1,0; 10,0$

Figura 5.11 – Número de Nusselt médio para $\bar{\beta} = 0,1; 1,0; 10,0$

Para $\bar{\beta}=1,0$ temos que as duas camadas de fluidos possuem propriedades termo-físicas idênticas, e, assim, $Ra'_1 = Ra'_2$ e $Pr_1 = Pr_2$. A figura 5.9(b) mostra o escoamento resultante para este caso.

Nas figura 5.9(a) e 5.10, temos o efeito da diminuição do coeficiente de expansão volumétrico do fluido superior, resultando num baixo empuxo na camada. No campo da função corrente, observamos, na camada superior, o aparecimento de uma célula (azul) escoando em sentido oposto à célula (vermelho) da camada inferior. Como o empuxo na camada superior é muito pequeno, a camada de fluido inferior induz na camada superior um escoamento, através do acoplamento mecânico que ocorre na interface. No campo das isothermas, temos que, as linhas de temperatura, na camada superior estão pouco inclinadas em relação às paredes verticais isotérmicas, devido à baixa velocidade do escoamento.

Na figura 5.9(c) e 5.10, podemos ver a influência do aumento do coeficiente de expansão volumétrico do fluido superior sobre o escoamento da cavidade. No campo da função corrente, observamos que, o aumento do empuxo do fluido superior proporciona uma intensificação na velocidade do escoamento e, através da interface, induz o aparecimento de uma célula (azul) de acoplamento na camada inferior. No campo das isothermas, percebemos o efeito do aumento da velocidade do escoamento do fluido superior, aumentando a inclinação das linhas de temperatura em relação às paredes verticais isotérmicas.

A figura 5.11 nos mostra a relação existente entre o número de Nusselt e o coeficiente $\bar{\beta}$, para os três casos analisados. A elevação do coeficiente de expansão volumétrico gera um aumento no empuxo que, por sua vez, intensifica a velocidade do escoamento, proporcionando um fluxo de calor maior por convecção, e assim, elevando o número de Nusselt.

- *Estudo da influência da tensão termocapilar na interface*

Parâmetros: $\delta=2,0$; $\varepsilon_1=0,5$; $\varepsilon_2=0,5$; $Ra'_1=1,0 \times 10^5$; $Pr_1=1,0$; $\bar{\beta}=1,0$; $\bar{\kappa}=1,0$; $\bar{\mu}=1,0$; $\bar{\rho}=1,0$; $\bar{C}_p=1,0$; e diversos Ma'_1 .

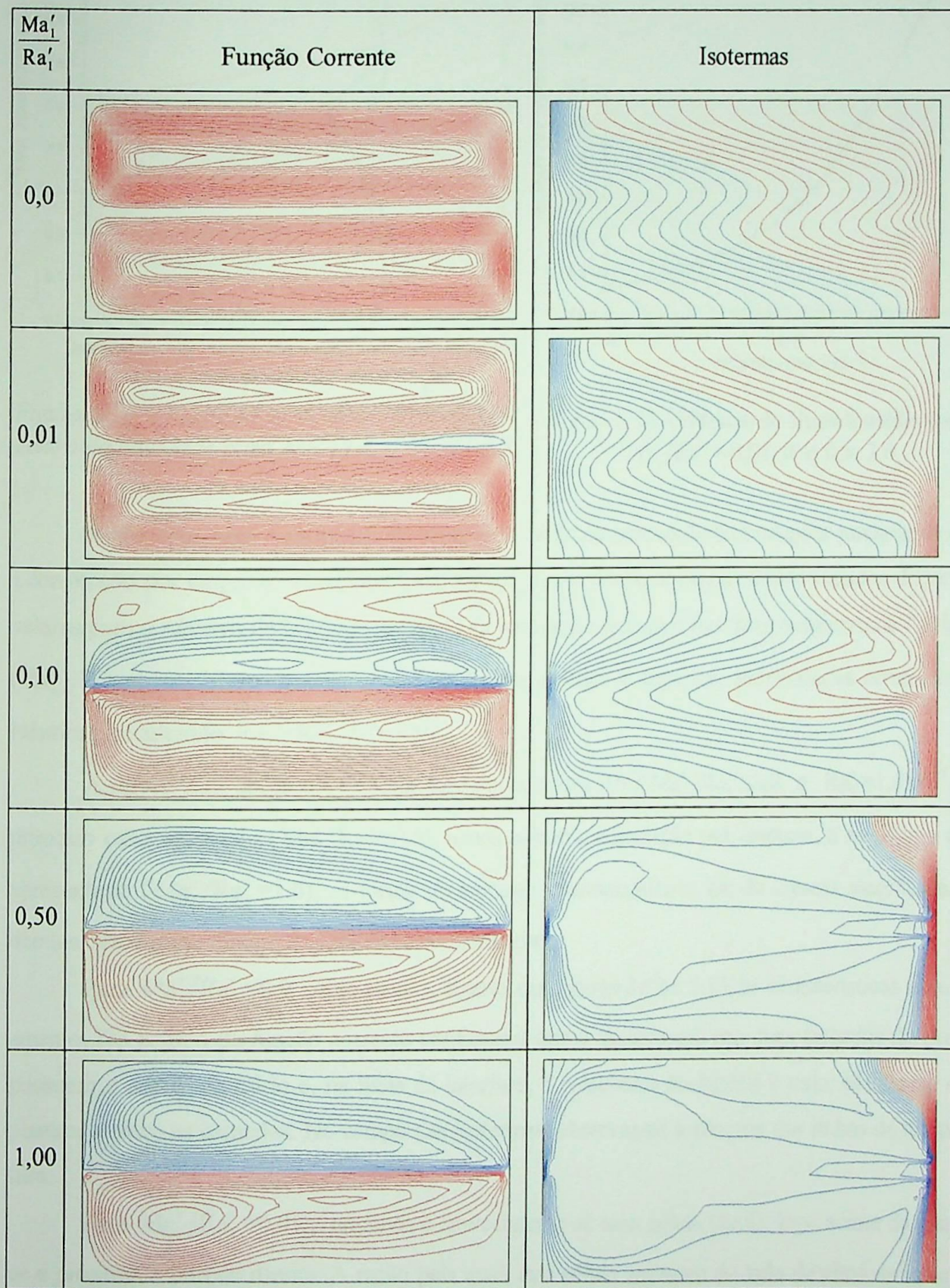


Figura 5.12 – Linhas de correntes e isotermas para diversos Ma'_1/Ra'_1

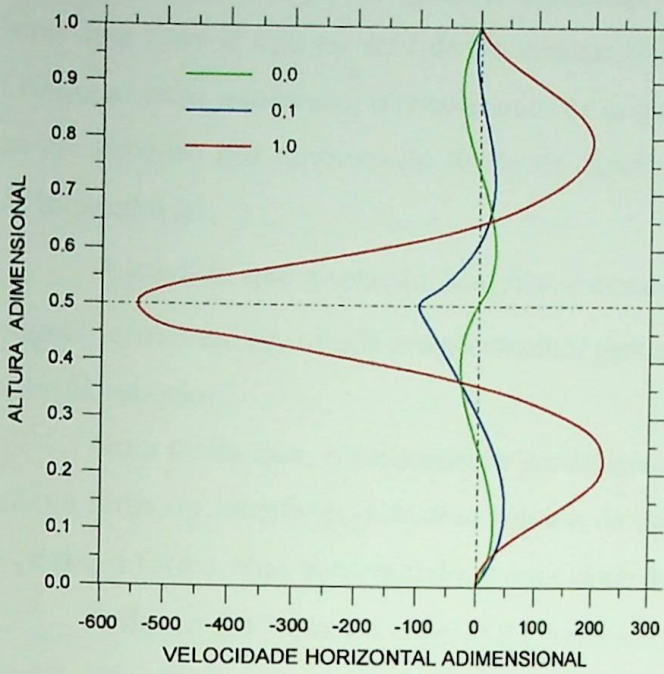


Figura 5.13 – Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $Ma'_1/Ra'_1 = 0,0; 0,1; 1,0$

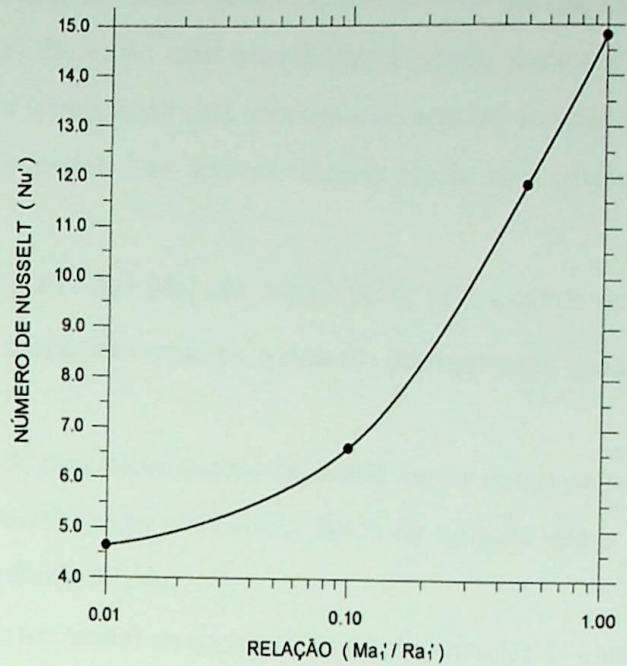


Figura 5.14 – Número de Nusselt médio para $Ma'_1/Ra'_1 = 0,01; 0,1; 0,5; 1,0$

Neste item, com o propósito de observar o efeito da convecção termocapilar juntamente com a convecção por empuxo na cavidade, simulamos alguns casos, nos quais foram tomados diferentes valores para o número de Marangoni (Ma'_1) na interface e um valor fixo para o número de Rayleigh (Ra'_1). Também foram tomadas, para os fluidos inferior e superior, propriedades termo-físicas idênticas, resultando $Ra'_1 = Ra'_2$ e $Pr_1 = Pr_2$.

A figura 5.12 apresenta os resultados obtidos para $0,0 \leq Ma'_1/Ra'_1 \leq 1,0$ e $Ra'_1 = 1,0 \times 10^5$. No primeiro caso mostrado ($Ma'_1/Ra'_1 = 0,0$), temos somente convecção por empuxo, e no último caso apresentado ($Ma'_1/Ra'_1 = 1,0$), as forças de empuxo e termocapilares são de mesma magnitude. Os demais casos representam as situações intermediárias.

Para $Ma'_1/Ra'_1 = 0,0$, observamos, através das figuras 5.12 e 5.13, as características do escoamento. No campo da função corrente verificamos que o escoamento nas duas camadas de fluidos possuem o sentido horário e, na linha da interface, a velocidade horizontal é nula, devido ao acoplamento entre as camadas. No campo das isothermas, observamos a simetria das linhas de temperatura.

Para $Ma'_1/Ra'_1 = 0,01$, notamos o aparecimento de uma célula (azul), logo acima da interface e próxima à parede direita. A razão pela qual, esta célula apareceu do lado de cima da interface está relacionado com o escoamento proveniente do forte desbalanceamento da tensão termocapilar

que está se dando naquela região. O desbalanceamento da tensão termocapilar ocorre na interface e superfície livre e age no sentido de arrastar fluido da região mais quente para a região mais fria. Como, no caso analisado, o escoamento de origem termocapilar está ocorrendo no sentido contrário ao escoamento por empuxo do fluido da camada superior, logo aparece naquela região uma célula de recirculação.

À medida que a relação Ma'_1/Ra'_1 é aumentada (casos $Ma'_1/Ra'_1 = 0,10; 0,50; 1,0$), a célula de origem termocapilar, citada anteriormente, ganha proporções maiores, tomando, praticamente, toda camada superior.

Note ainda que, o escoamento proveniente do desbalanceamento da tensão termocapilar possui, na linha da interface, o mesmo sentido do escoamento por empuxo do fluido da camada inferior, e desta forma atua aumentando a velocidade do fluido inferior.

A figura 5.13 mostra o perfil de velocidade horizontal no centro da cavidade, ou seja: U em $X=\delta/2$ e $0 \leq Y \leq 1$. Nesta figura, pode ser observada, para a relação $Ma'_1/Ra'_1 = 1,0$ (que é a relação na qual a convecção termocapilar está mais intensa), a grande velocidade horizontal na região da interface ($Y=0,5$), em virtude do arraste de fluido da região mais quente para a região mais fria, provocado pelas forças termocapilares.

A figura 5.14 apresenta os valores do número de Nusselt, para as relações de Ma'_1/Ra'_1 simuladas. Como podemos ver, o número de Nusselt aumentou com o aumento da relação Ma'_1/Ra'_1 , devido a intensificação da velocidade do escoamento.

5.2.2 Caverna aberta

Visando observar a influência das forças causadoras do escoamento convectivo natural presentes em uma caverna, foi realizada uma análise das forças de empuxo e termocapilares.

A figura 5.15 ilustra a caverna estudada. As propriedades físicas dos fluidos imiscíveis sobrepostos, as dimensões da caverna, e os números de Rayleigh e Marangoni empregados nesta análise encontram-se no capítulo 4, respectivamente, nas tabelas 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6. A diferença de temperatura fixada entre as paredes verticais foi de 5K e a aceleração gravitacional de $9,8 \text{ m/s}^2$.

A fim de visualizar a influência da tensão termocapilar e das forças de empuxo no processo de convecção natural, três tipos de convecção foram simulados:

- 1) Convecção somente por forças de empuxo ($Ma'_1=0$, $Ma'_2=0$, $Ra'_1=183875$, $Ra'_2=9804$);
- 2) Convecção somente por forças termocapilares ($Ma'_1=1945$, $Ma'_2=4520$, $Ra'_1=0$, $Ra'_2=0$).
- 3) Convecção por empuxo-termocapilar ($Ma'_1=1945$, $Ma'_2=4520$, $Ra'_1=183875$, $Ra'_2=9804$);

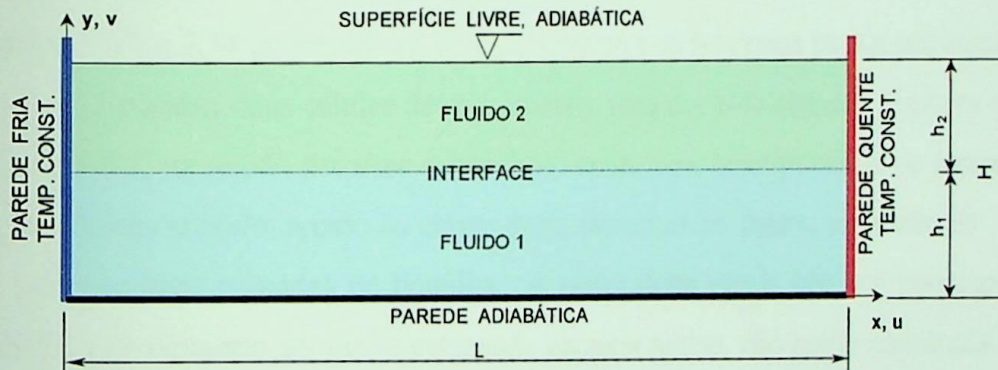
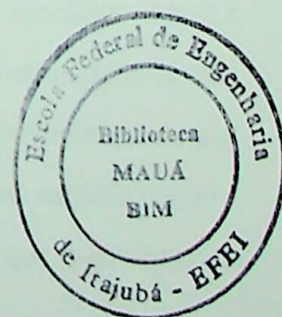


Figura 5.15 - Caverna estudada

A figura 5.16 compara o perfil de velocidade horizontal no centro vertical da caverna, para os três casos. Nesta figura, pode ser notada a influência da tensão termocapilar na superfície livre, aumentando a velocidade do escoamento.



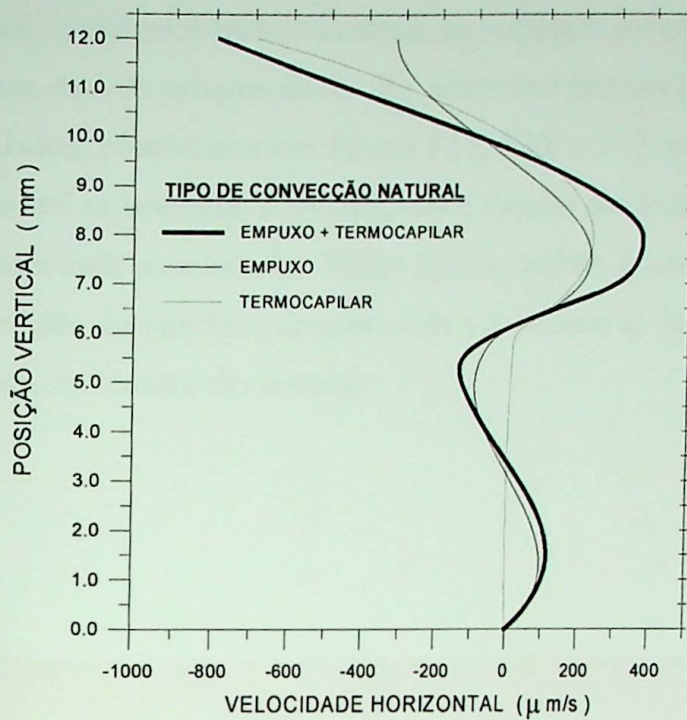


Figura 5.16 - Comparação entre as velocidades em cada tipo de convecção natural

As figuras 5.17 a 5.22 mostram as linhas de corrente e as isothermas desenvolvidas dentro da cavidade, após o sistema atingir o regime permanente, para os três casos estudados.

As figuras 5.17 e 5.18 apresentam a função corrente e as isothermas para a convecção por empuxo. A figura 5.17 mostra duas células de escoamento, uma em cada camada. Embora não possa ser vista na figura 5.17, na região próxima à interface, existe uma terceira célula de escoamento muito delgada, girando em sentido oposto às outras duas, presentes na figura, em razão do acoplamento mecânico entre as duas camadas de líquidos. A razão desta célula não ser visualizada na figura 5.17, se deve ao escoamento ser quase estagnado naquela região, não sendo capturada na plotagem. Contudo, o afastamento das linhas de corrente, a diminuição e inversão da velocidade (ver Figura 5.16), evidenciam a presença desta célula e também a continuidade da velocidade.

O escoamento termocapilar, conforme observado nas figuras 5.19 e 5.20, é estruturalmente mais complexo. A figura 5.19 mostra células de escoamento, na região da interface, próximas às paredes quente e fria. Estas células estão relacionadas com o desbalanceamento da tensão termocapilar, causado pelos fortes gradientes de temperatura naqueles locais. A célula de recirculação que aparece, na camada inferior, no centro da cavidade, é gerada pelo acoplamento mecânico entre a camada superior e a inferior e, também, como resultado do acoplamento das outras duas células laterais. Na figura 5.20, na camada inferior, o fluxo de calor, está se dando predominantemente por condução, isto pode ser constatado através do quase-paralelismo entre as isothermas naquela região.

Na convecção por empuxo-termocapilar, figuras 5.21 e 5.22, observamos que o escoamento

que se desenvolve está mais próximo daquele encontrado na convecção por empuxo do que na convecção termocapilar. Isto se deve às relações de Ma'/Ra' serem bem menores que a unidade.

Nos três casos simulados, observamos nas figuras 5.18, 5.20, e 5.22 que, a região que ejeta fluido horizontalmente possui as isotermas mais espaçadas e a região que recebe fluido (na direção horizontal) tem as isotermas mais concentradas. Nestas figuras, também é possível verificar a inclinação das isotermas, na região da interface, demonstrando a ocorrência de fluxo de calor entre os fluidos, devido ao acoplamento térmico das camadas.

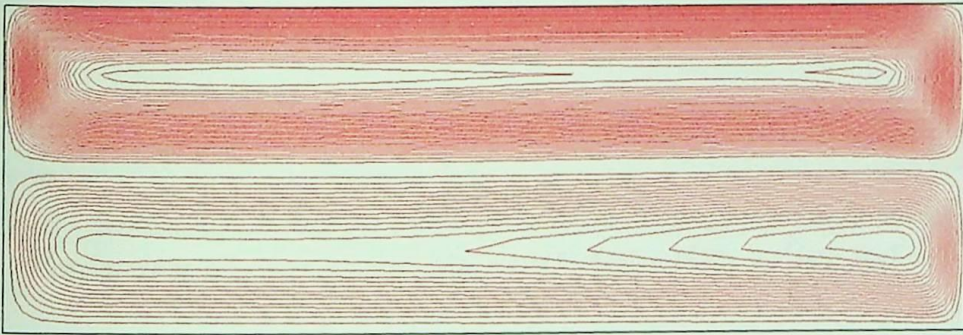


Figura 5.17 - Função corrente obtida na convecção causada somente por forças de empuxo.
Parâmetros do escoamento: $Ma'_1=0$; $Ma'_2=0$; $Ra'_1=183875$; $Ra'_2=98040$.

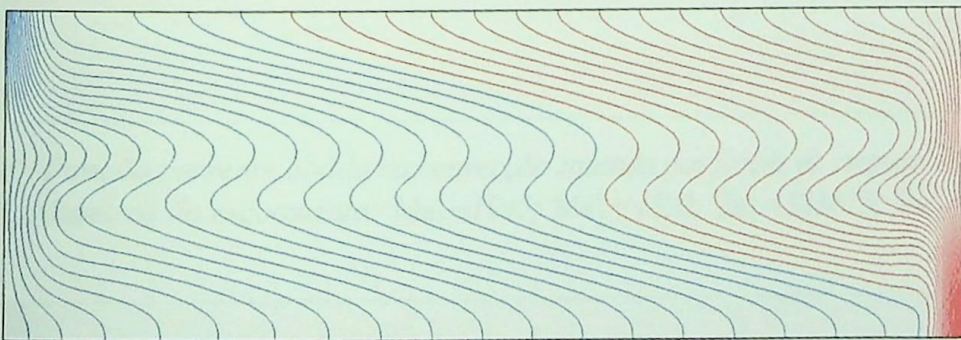


Figura 5.18 – Isotermas obtidas na convecção causada somente por forças de empuxo.
Parâmetros do escoamento: $Ma'_1=0$; $Ma'_2=0$; $Ra'_1=183875$; $Ra'_2=98040$.

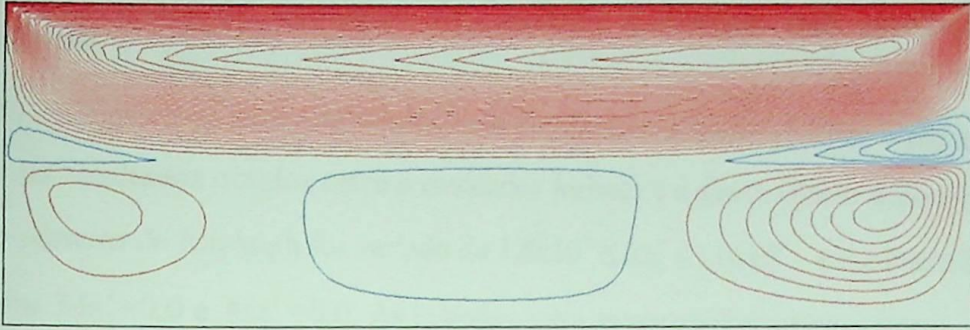


Figura 5.19 - Função corrente obtida na convecção causada somente por forças termocapilares. Parâmetros do escoamento: $Ma'_1=1945$; $Ma'_2=4520$; $Ra'_1=0$; $Ra'_2=0$.

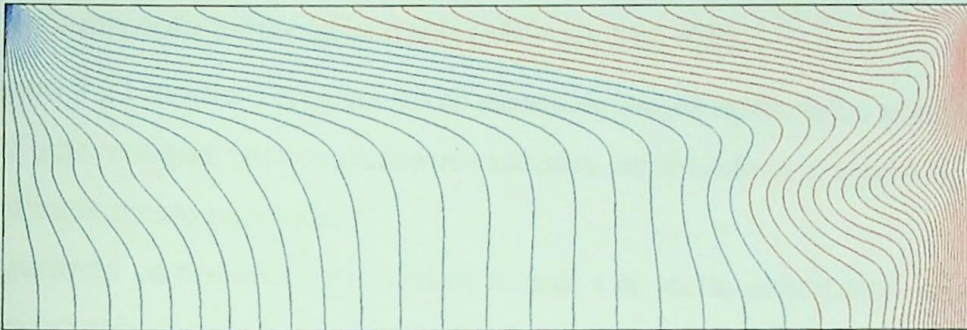


Figura 5.20 - Isotermas obtidas na convecção causada somente por forças termocapilares. Parâmetros do escoamento: $Ma'_1=1945$; $Ma'_2=4520$; $Ra'_1=0$; $Ra'_2=0$.

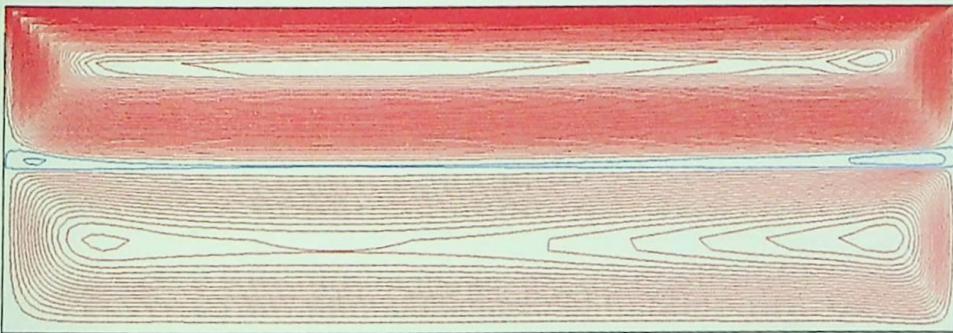


Figura 5.21 - Função corrente obtida na convecção causada por forças de empuxo e termocapilares. Parâmetros do escoamento: $Ma'_1=1945$; $Ma'_2=4520$; $Ra'_1=183875$; $Ra'_2=9804$.

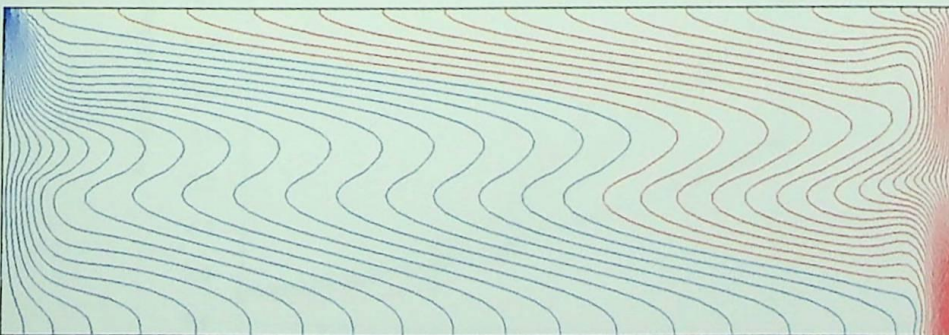


Figura 5.22 - Isotermas obtida na convecção causada por forças de empuxo e termocapilares. Parâmetros do escoamento: $Ma'_1=1945$; $Ma'_2=4520$; $Ra'_1=183875$; $Ra'_2=98040$.

5.2.3 Relação entre os números de Rayleigh e Nusselt nas cavidades aberta e fechada

Com o objetivo de observar a influência do número de Rayleigh sobre o número de Nusselt e comparar os resultados obtidos entre a cavidades fechada e a aberta (fluido superior com superfície livre), o número de Rayleigh foi variado de $1,0 \times 10^4 \leq Ra'_1 \leq 1,0 \times 10^6$ e o número de Marangoni foi fixado em $Ma'_1 = 0,0$ e $Ma'_2 = 0,0$. As relações entre as propriedades termo-físicas e geométricas dos fluidos inferior e superior foram mantidas fixas: $Ma_1 = 0,0$; $Ma_2 = 0,0$; $Pr_1 = 1,0$; $\bar{\beta} = 1,0$; $\bar{\kappa} = 1,0$; $\bar{\mu} = 1,0$; $\bar{\rho} = 1,0$; $\bar{C}_p = 1,0$; $\varepsilon_1 = 0,5$; $\varepsilon_2 = 0,5$. Note que, somente está sendo considerada a convecção por empuxo, a convecção termocapilar é nula ($Ma'_1 = 0,0$; $Ma'_2 = 0,0$).

A figura 5.23 mostra o crescimento do número de Nusselt médio com o aumento do número de Rayleigh, uma vez que, para os parâmetros adotados, aumentando-se o número de Rayleigh intensifica-se o escoamento na cavidade.

Comparando os resultados da cavidade fechada e da aberta, constatamos que, na cavidade aberta, a inexistência da parede superior elimina o atrito entre o fluido e a mesma, promovendo um aumento da velocidade do escoamento e consequentemente elevando o número de Nusselt médio.

Quanto ao aumento do número de Nusselt com o aumento da razão de aspecto, concluímos que quanto mais longa é a cavidade maior é a resistência térmica entre as paredes verticais isotérmicas, dificultando a transferência de calor por condução e tornando a transferência por convecção uma forma mais eficiente na troca de calor nestas cavidades.

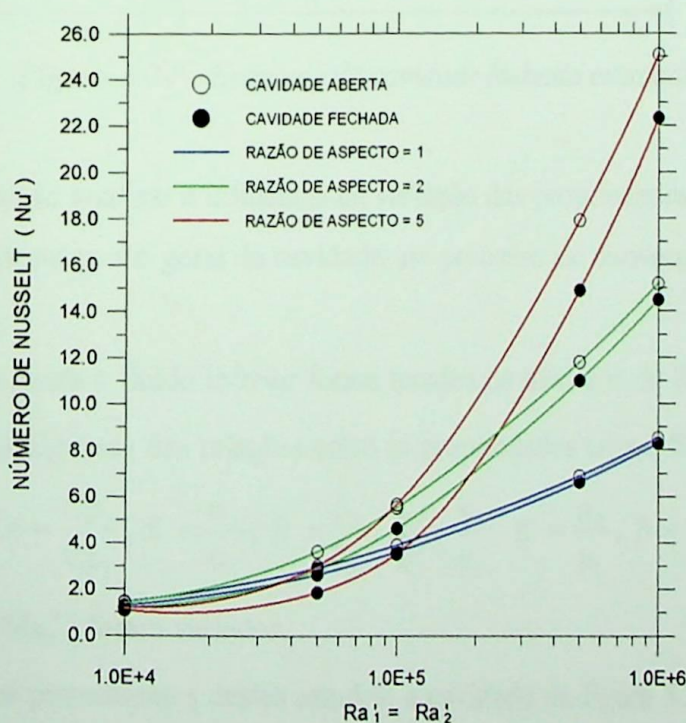


Figura 5.23 - Relação entre os números de Rayleigh e Nusselt médio

5.3- Resultados para condição de contorno com fluxo de calor constante

constante

A seguir, são apresentados os resultados obtidos para as cavidades fechadas e abertas com condição de contorno de fluxo de calor constante nas paredes verticais.

5.3.1 Cavity fechada

A figura 5.24 ilustra a cavidade estudada. Nesta cavidade temos $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,5$ e $\delta = 2,0$.

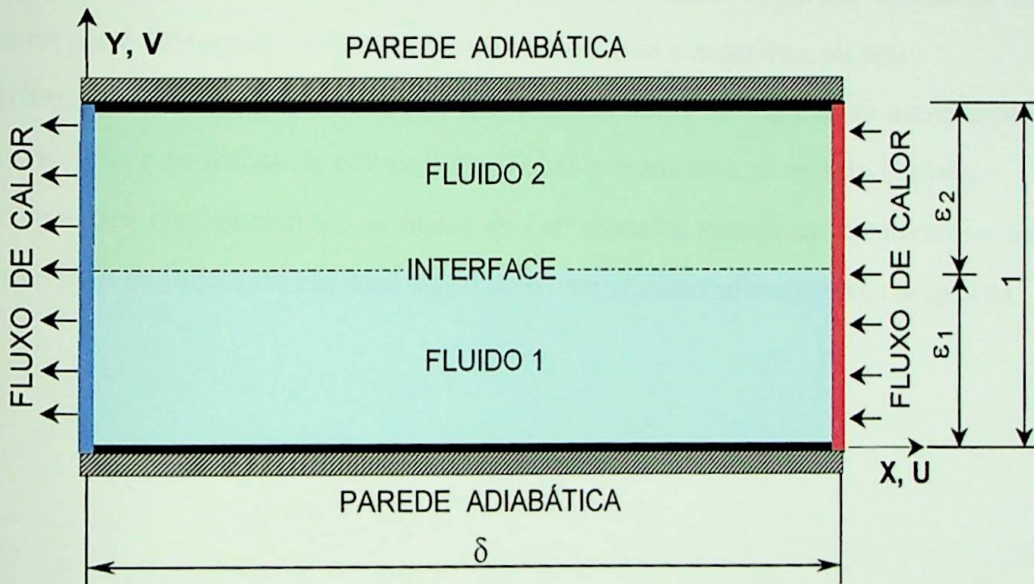


Figura 5.24 – Esquema da cavidade fechada estudada

Com o objetivo de analisar a influência da variação das propriedades termo-físicas do fluido superior sobre o comportamento geral da cavidade, no processo de convecção natural, foram realizados alguns estudos.

Nestes estudos, para o fluido inferior foram fixados os números de Rayleigh ($Ra_1'' = 1,0 \times 10^5$) e Prandtl ($Pr_1 = 1,0$). Já algumas das relações entre as propriedades termo-físicas dos fluidos inferior(1) e superior(2) ($\bar{C}_p = \frac{C_{p2}}{C_{p1}}$, $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\bar{\beta} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$, $\bar{\kappa} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$, $\bar{\mu} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, $\bar{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$) e o número de Marangoni na interface (Ma_1'') foram variados.

Nas simulações provenientes destes estudos, a cavidade da figura 5.24 foi discretizada com uma malha 3360 elementos triangulares (61x30 pontos nodais), conforme mostra a figura 5.25.

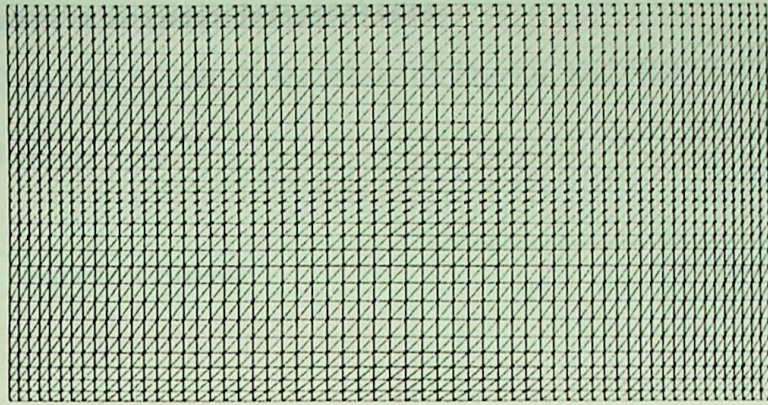


Figura 5.25 – Malha utilizada na discretização da cavidade

Nos resultados apresentados a seguir, as linhas vermelhas e azuis que aparecem nos campos da função corrente e isothermas representam valores positivos e negativos, ou seja:

- nas distribuições da função corrente, as linhas de cor vermelha significam escoamentos no sentido anti-horário e as linhas de cor azul significam escoamentos no sentido horário;
- nas distribuições das isothermas, as linhas de cor vermelha significam temperaturas adimensionais positivas e as linhas de cor azul significam temperaturas adimensionais negativas.

• *Estudo da influência da condutividade térmica*

Parâmetros: $\delta=2,0$; $\varepsilon_1=0,5$; $\varepsilon_2=0,5$; $Ra_1''=1,0 \times 10^5$; $Pr_1=1,0$; $Ma_1''=0,0$; $\bar{\alpha}=1,0$; $\bar{\beta}=1,0$; $\bar{\mu}=1,0$; $\bar{\rho}=1,0$; e diversos $\bar{\kappa}$.

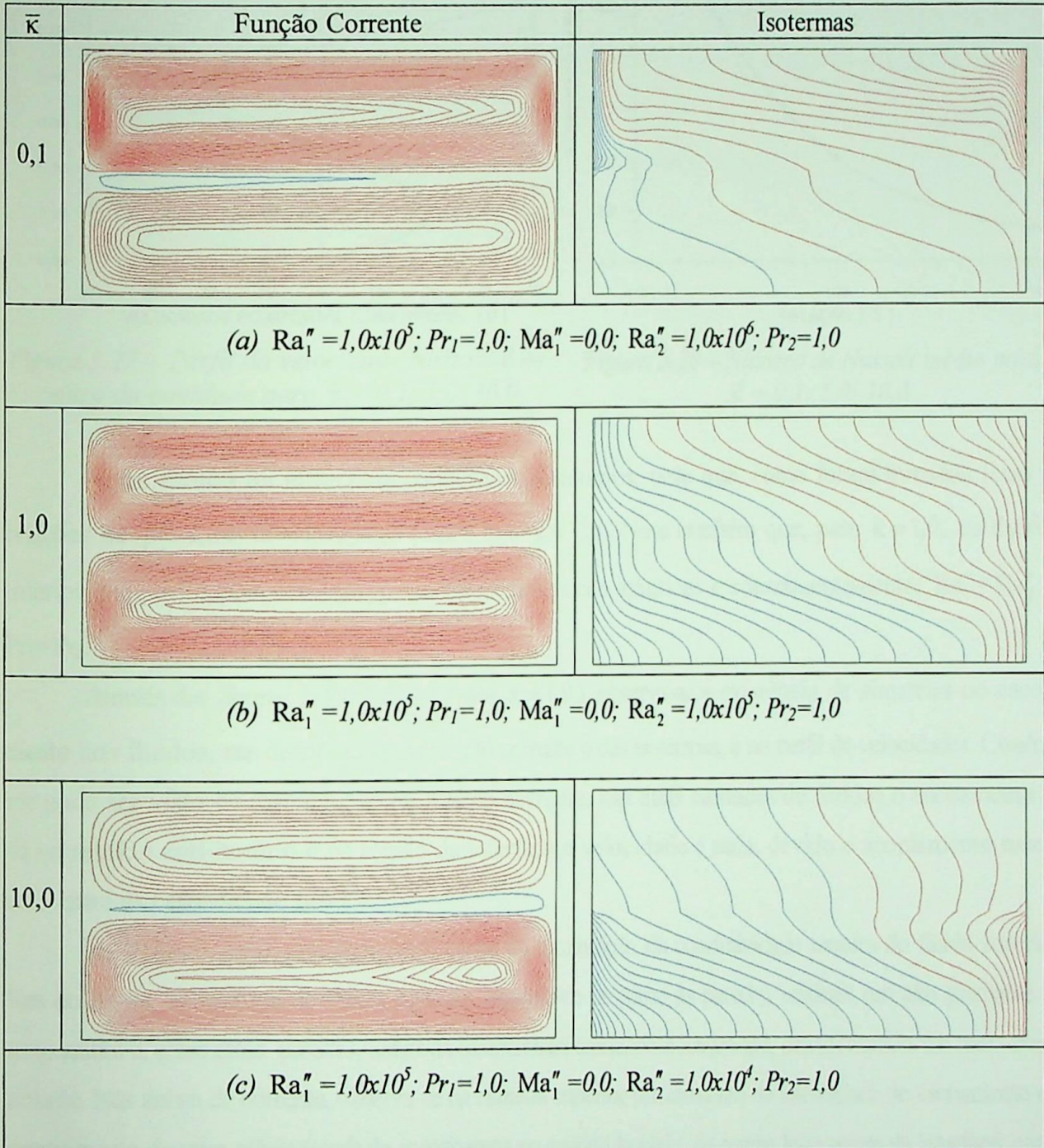


Figura 5.26 – Linhas de correntes e isotermas para (a) $\bar{\kappa} = 0,1$; (b) $\bar{\kappa} = 1,0$; (c) $\bar{\kappa} = 10,0$

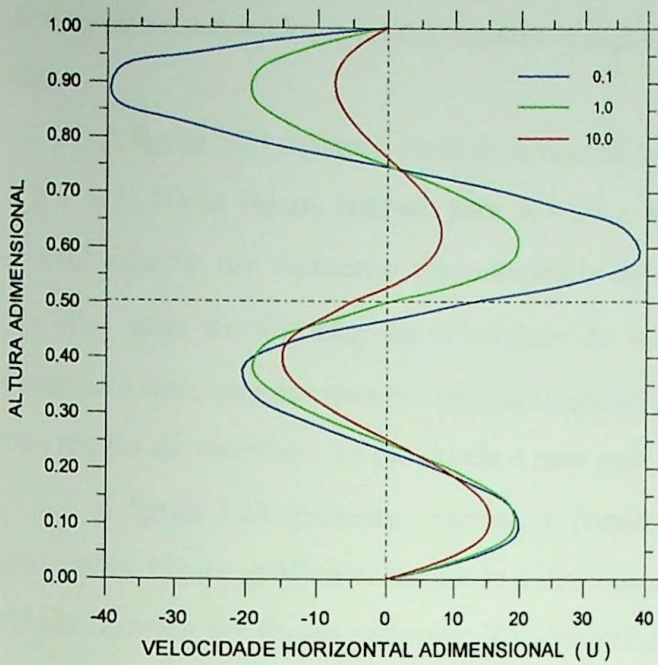


Figura 5.27 – Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $\bar{\kappa} = 0,1; 1,0; 10,0$

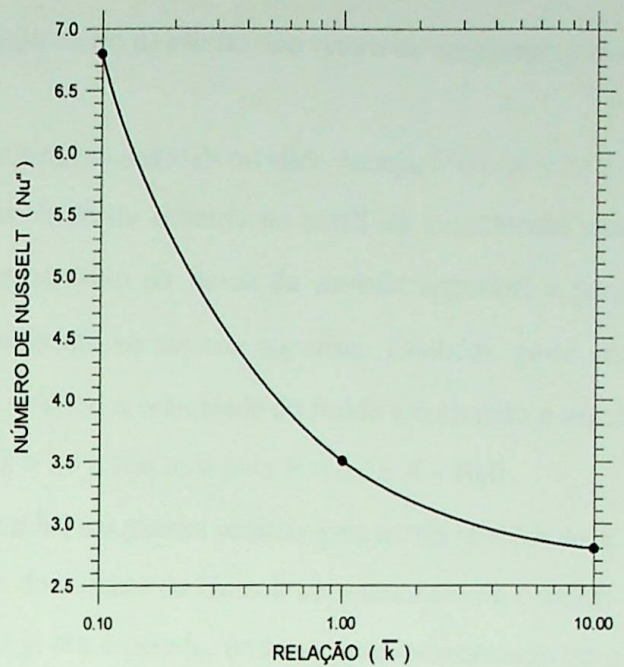


Figura 5.28 – Número de Nusselt médio para $\bar{\kappa} = 0,1; 1,0; 10,0$

Neste estudo da influência condutividade térmica, note que, como foram tomadas fixas as relações de $\bar{\rho} = 1,0$ e $\bar{\alpha} = 1,0$, logo temos que $\bar{\kappa} = \bar{C}_p$. Note também que, para $\bar{\kappa} = 1,0$, os fluidos inferior e superior possuem propriedades termo-físicas idênticas e consequentemente: $Ra_1'' = Ra_2''$ e $Pr_1 = Pr_2$.

Através das figuras 5.26(b) e 5.27 (para $\bar{\kappa} = 1,0$), observa-se a existência de simetrias no escoamento dos fluidos, nas distribuições da função corrente e das isothermas, e no perfil de velocidades. Conforme pode ser visto na distribuição da função corrente, nas duas camadas de fluidos o escoamento se dá no sentido anti-horário e na região da interface a velocidade é nula, devido o acoplamento mecânico entre as camadas de fluidos.

Na figura 5.26(a), podemos ver o efeito da diminuição da condutividade térmica do fluido superior. Nas isothermas, na camada de fluido superior, observa-se próximo às paredes verticais um alto gradiente de temperatura e, entre estas paredes, linhas de temperatura tendendo à horizontal, caracterizando um meio quase isolante. Nas linhas de corrente, observa-se na camada superior um aumento da intensidade do escoamento e o aparecimento de uma célula (azul) de escoamento no sentido horário, na região logo acima da interface, como resultado do acoplamento mecânico entre as camadas de fluidos.

Na figura 5.26(c), podemos constatar o efeito do aumento da condutividade térmica do fluido superior. No campo das isothermas, na camada de fluido superior, observamos que as linhas de temperatura encontram-se quase paralelas às paredes verticais, tipificando um meio de alta condutividade térmica. No campo da função corrente, temos um diminuição da intensidade do escoamento na camada do fluido superior e o aparecimento

de uma célula escoando no sentido horário na região logo abaixo da interface em virtude do acoplamento mecânico.

A figura 5.27 mostra o perfil de velocidade horizontal no centro da cavidade, ou seja, U em $X = \delta/2$ e $0 \leq Y \leq 1$. Nesta figura, nota-se: para $\bar{\kappa} = 1,0$ a existência de simetria no perfil de velocidade; para $\bar{\kappa} = 0,1$ ocorre um aumento da velocidade do escoamento do fluido da camada superior; e para $\bar{\kappa} = 10,0$ uma diminuição da velocidade do escoamento na camada superior. Também, pode ser observado que, nas paredes horizontais superior e inferior, a velocidade do fluido em contato é nula; e na região da interface a velocidade é nula para $\bar{\kappa} = 1,0$ e não nula para $\bar{\kappa} = 0,1$ e $\bar{\kappa} = 10,0$.

A figura 5.28 apresenta o número de Nusselt médio, nas paredes verticais, para as três relações de $\bar{\kappa}$ analisadas. Neste gráfico constata-se a diminuição do número do Nusselt com aumento da condutividade térmica do fluido superior. Tal diminuição já era esperada, uma vez que, aumentando-se a condutividade térmica, diminui-se a diferença de temperatura entre as paredes verticais com fluxo de calor constante; e o número de Nusselt, para a condição de contorno com fluxo de calor constante, expressa a relação entre as diferenças de temperaturas, nas paredes verticais, obtidas na condução pura e na convecção ($\Delta\theta_{\text{condução pura}} / \Delta\theta_{\text{convecção}}$).

• *Estudo da influência da viscosidade dinâmica*

Parâmetros: $\delta=2,0$; $\varepsilon_1=0,5$; $\varepsilon_2=0,5$; $Ra_1''=1,0 \times 10^5$; $Pr_1=1,0$; $Ma_1''=0,0$; $\bar{\alpha}=1,0$; $\bar{\beta}=1,0$; $\bar{\kappa}=1,0$; $\bar{\rho}=1,0$; e diversos $\bar{\mu}$.

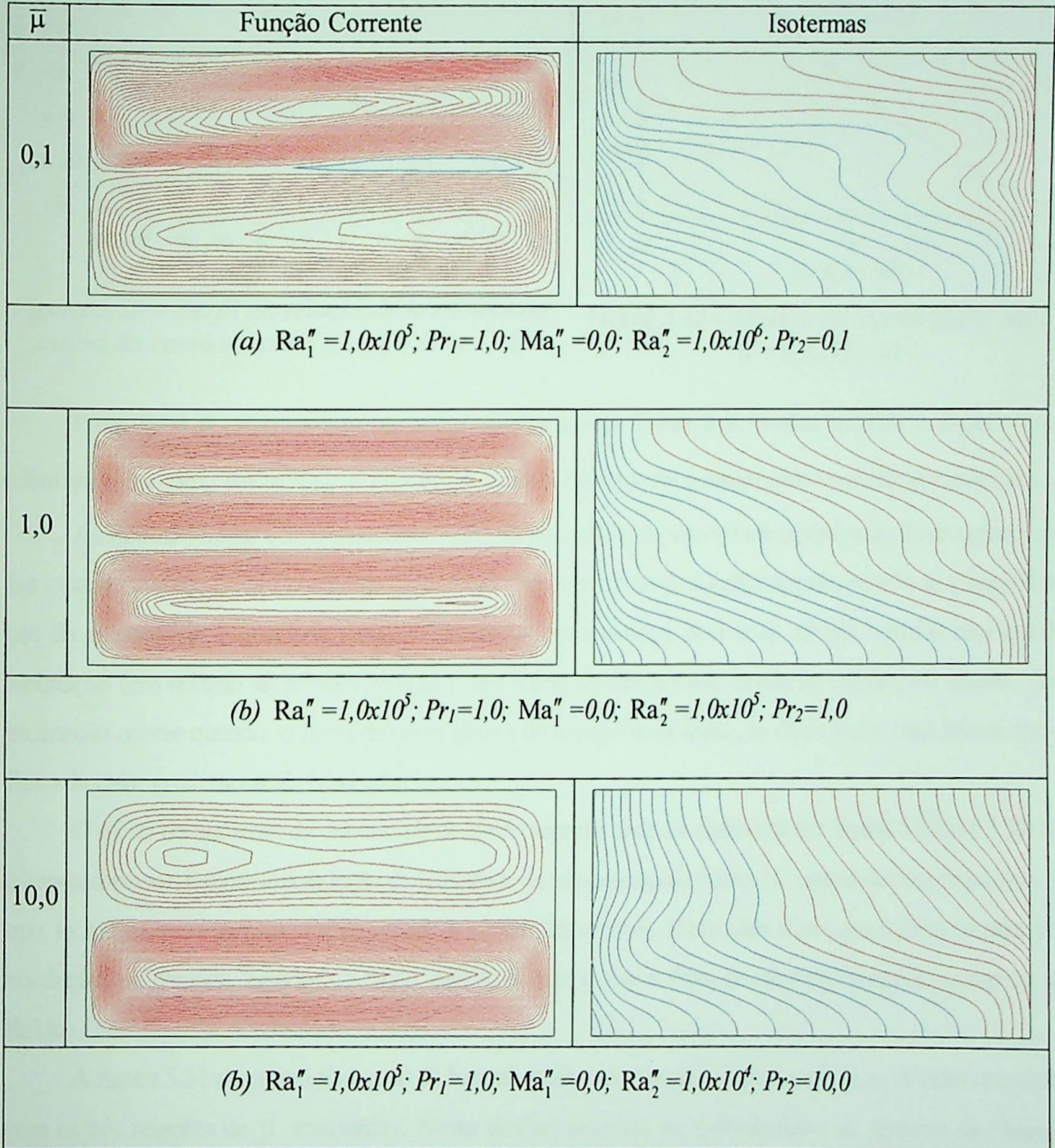


Figura 5.29 – Linhas de correntes e isotermas para (a) $\bar{\mu} = 0,1$; (b) $\bar{\mu} = 1,0$; (c) $\bar{\mu} = 10,0$

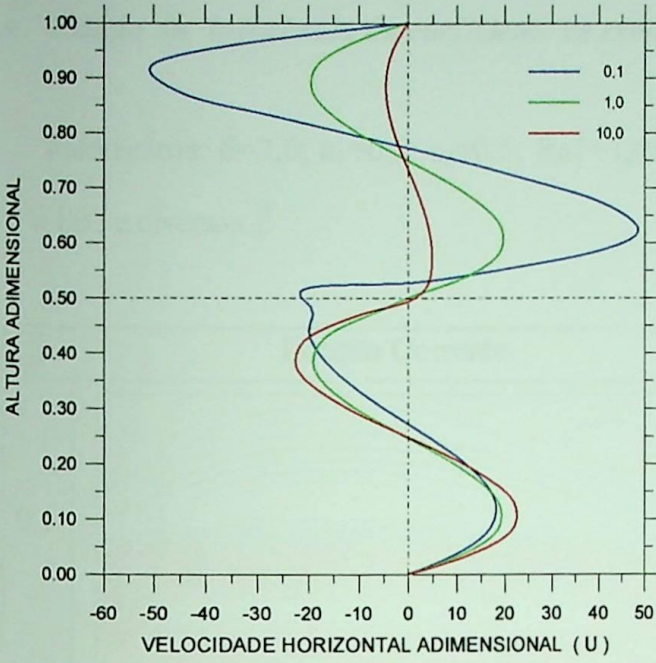


Figura 5.30 – Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $\bar{\mu} = 0,1; 1,0$ e $10,0$

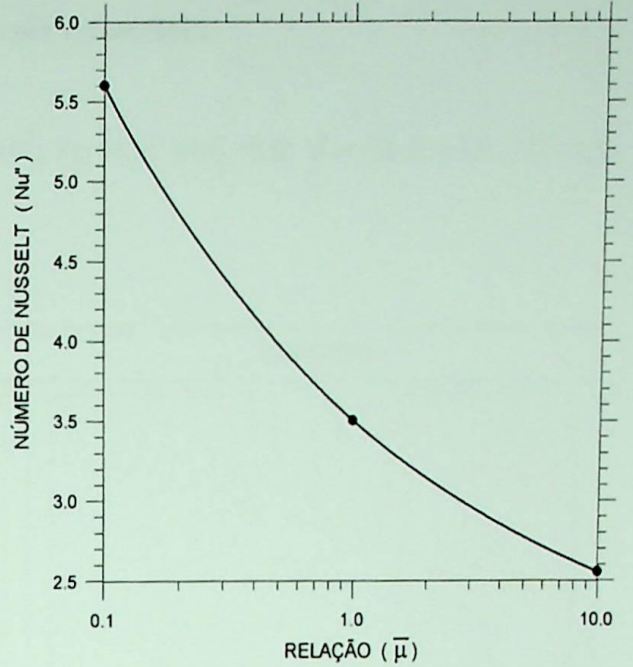


Figura 5.31 – Número de Nusselt médio para $\bar{\mu} = 0,1; 1,0; 10,0$

Para $\bar{\mu}=1,0$, temos que, as propriedades termo-físicas dos fluidos inferior e superior são idênticas e, assim, $Ra_1'' = Ra_2''$ e $Pr_1 = Pr_2$. A figura 5.29(b) mostra o escoamento resultante para este caso.

As figuras 5.29(a) e 5.30 mostram o efeito da diminuição da viscosidade dinâmica do fluido superior sobre o comportamento do escoamento da cavidade. Na distribuição da função corrente, percebe-se a intensificação do escoamento na camada superior. No campo das isoterms, nota-se na camada superior, uma grande inclinação (em relação às paredes verticais) nas linhas de temperatura, devido ao escoamento intenso. Tal inclinação ocorre quando o fluxo de calor, através do transporte de fluido, se dá de forma mais intensa que o fluxo de calor proveniente da condução.

O efeito do aumento da viscosidade do fluido superior pode ser observado nas figuras 5.29(c) e 5.30. Na camada superior, temos uma redução da velocidade de escoamento do fluido. No campo das isoterms, nota-se que, as mesmas encontram-se quase paralelas às paredes verticais. Neste caso, temos que o fluxo de calor por condução, na camada superior de fluido, está mais intenso que o fluxo de calor decorrente do transporte de fluido.

A figura 5.31 apresenta o número de Nusselt médio, nas paredes verticais com fluxo de calor constante, para as três relações de $\bar{\mu}$ analisadas. Neste gráfico constata-se a diminuição do número de Nusselt com o aumento da viscosidade dinâmica. Conforme ficou mostrado, através das figuras 5.29 e 5.30, o aumento da viscosidade dinâmica proporciona uma diminuição na velocidade do escoamento e conseqüentemente um aumento da diferença de temperatura entre as paredes verticais, justificando, assim, a queda do número de Nusselt.

• *Estudo da influência do coeficiente de expansão volumétrico*

Parâmetros: $\delta=2,0$; $\varepsilon_1=0,5$; $\varepsilon_2=0,5$; $Ra_1''=1,0 \times 10^5$; $Pr_1=1,0$; $Ma_1''=0,0$; $\bar{\alpha}=1,0$; $\bar{\kappa}=1,0$; $\bar{\mu}=1,0$;
 $\bar{\rho}=1,0$; e diversos $\bar{\beta}$

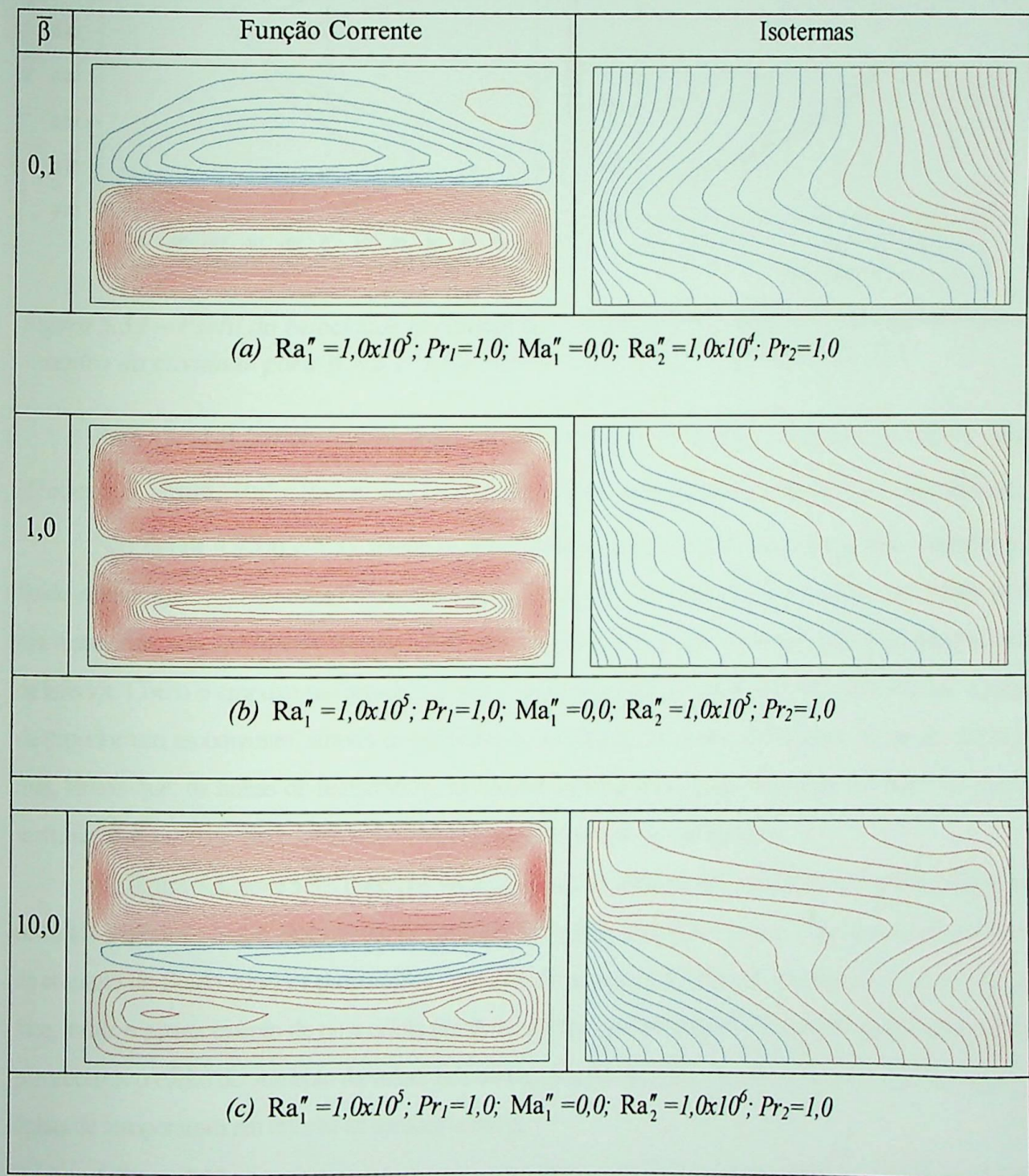


Figura 5.32– Linhas de correntes e isotermas para (a) $\bar{\beta}=0,1$; (b) $\bar{\beta}=1,0$; (c) $\bar{\beta}=10,0$

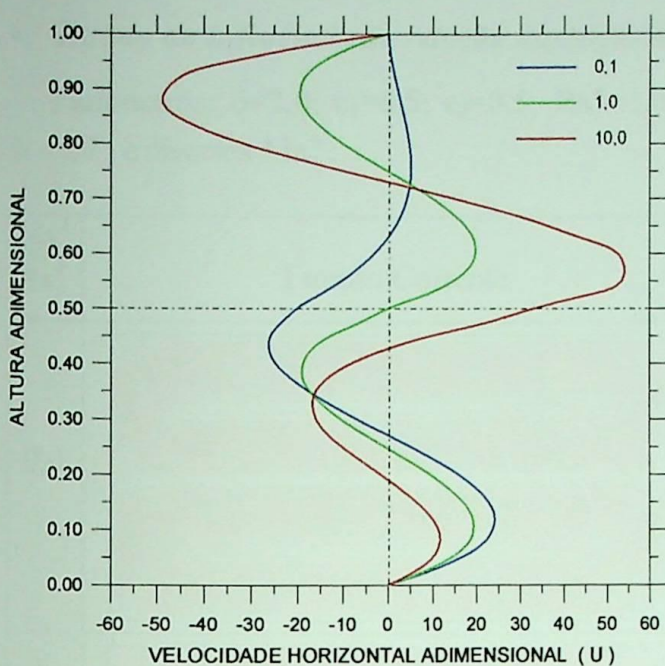


Figura 5.33 – Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $\bar{\beta} = 0,1; 1,0$ e $10,0$

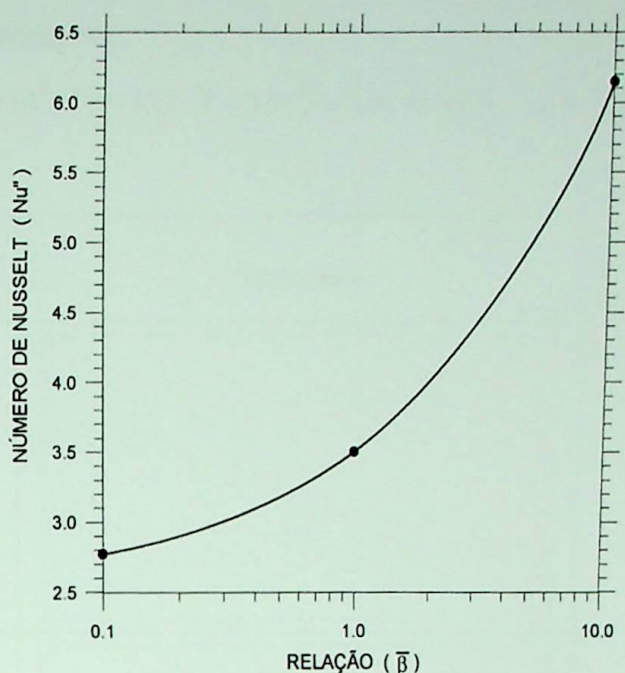


Figura 5.34 – Número de Nusselt médio para $\bar{\beta} = 0,1; 1,0; 10,0$

Para $\bar{\beta}=1,0$ temos que as duas camadas de fluidos possuem propriedades termo-físicas idênticas, e, assim, $Ra_1'' = Ra_2''$ e $Pr_1 = Pr_2$. A figura 5.32(b) mostra o escoamento resultante para este caso.

Nas figura 5.32(a) e 5.33, temos o efeito da diminuição do coeficiente de expansão volumétrico do fluido superior, resultando num baixo empuxo na camada. No campo da função corrente, observamos, na camada superior, o aparecimento de uma célula (azul) escoando em sentido oposto à célula (vermelho) da camada inferior. Como o empuxo na camada superior é muito pequeno, a camada de fluido inferior induz na camada superior um escoamento, através do acoplamento mecânico que ocorre na interface. No campo das isothermas, temos que, as linhas de temperatura, na camada superior estão pouco inclinadas em relação às paredes verticais com fluxo de calor constante, devido à baixa velocidade do escoamento.

Na figura 5.32(c) e 5.33, podemos ver a influência do aumento do coeficiente de expansão volumétrico do fluido superior sobre o escoamento da cavidade. No campo da função corrente, observamos que, o aumento do empuxo do fluido superior proporciona uma intensificação na velocidade do escoamento e, através da interface, induz o aparecimento de uma célula (azul) de acoplamento na camada inferior. No campo das isothermas, perceberemos o efeito do aumento da velocidade do escoamento do fluido superior, aumentando a inclinação das linhas de temperatura em relação às paredes verticais.

A figura 5.33 nos mostra a relação existente entre o número de Nusselt médio e o coeficiente $\bar{\beta}$, para os três casos analisados. A elevação do coeficiente de expansão volumétrico gera um aumento no empuxo que, por sua vez, intensifica a velocidade do escoamento, diminuindo a diferença de temperatura entre as paredes verticais, e assim, elevando o número de Nusselt.

• *Estudo da influência da relação Rayleigh/Marangoni*

Parâmetros: $\delta=2,0$; $\varepsilon_1=0,5$; $\varepsilon_2=0,5$; $Ra_1''=1,0 \times 10^5$; $Pr_1=1,0$; $\bar{\alpha}=1,0$; $\bar{\beta}=1,0$; $\bar{\kappa}=1,0$; $\bar{\mu}=1,0$; $\bar{\rho}=1,0$; e diversos Ma_1'' .

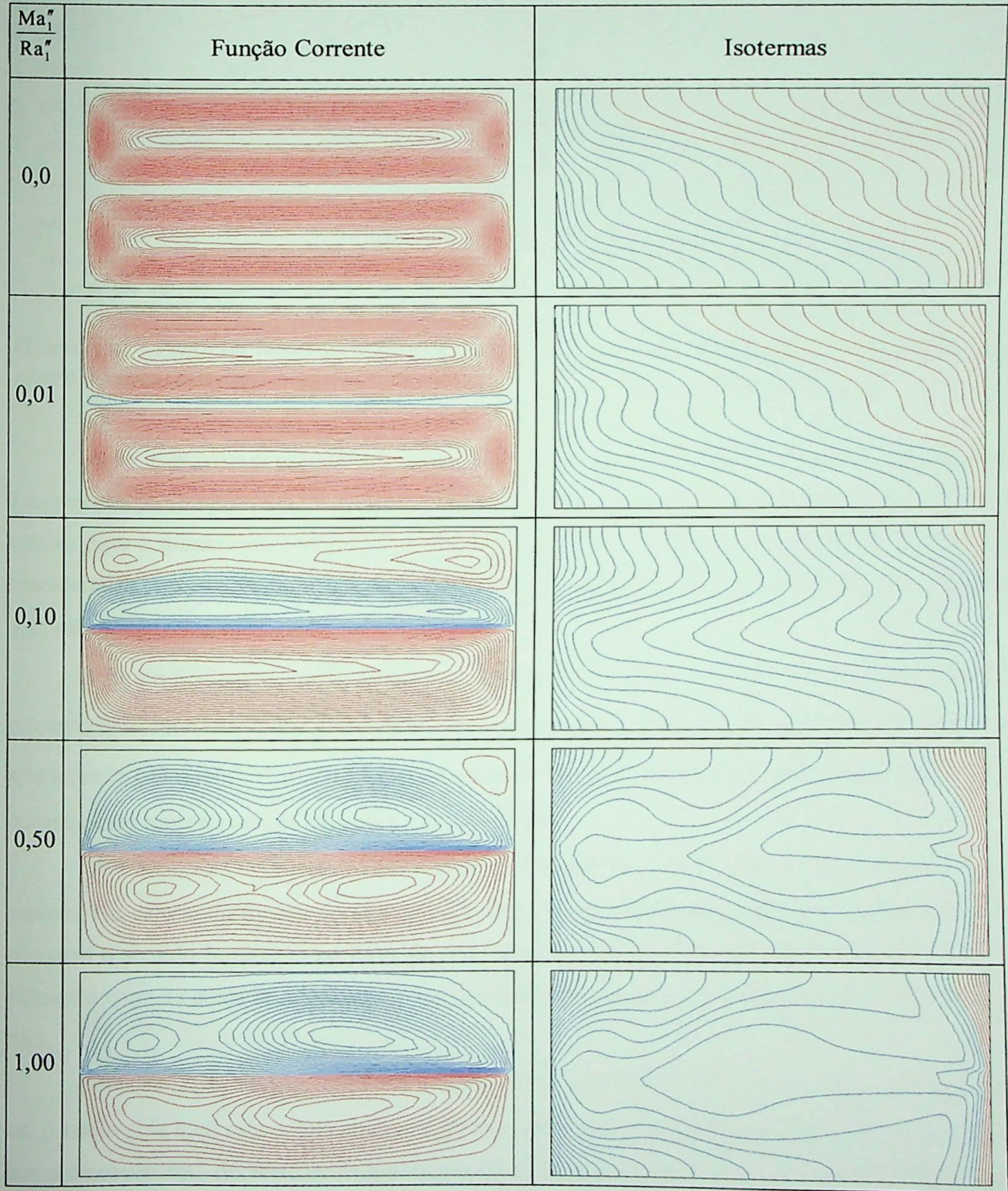


Figura 5.35 – Linhas de correntes e isotermas para diversos Ma_1''/Ra_1''

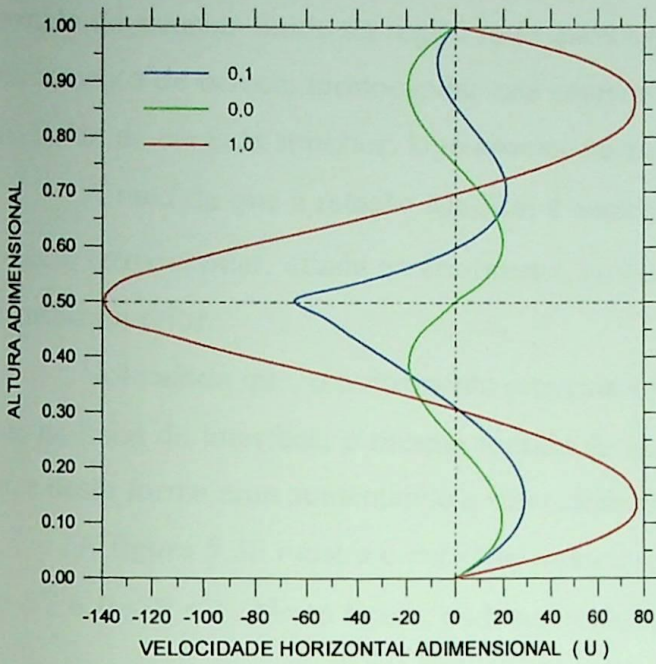


Figura 5.36 – Perfil da velocidade horizontal no centro da cavidade para $Ma_1''/Ra_1'' = 0,0; 0,1; 1,0$

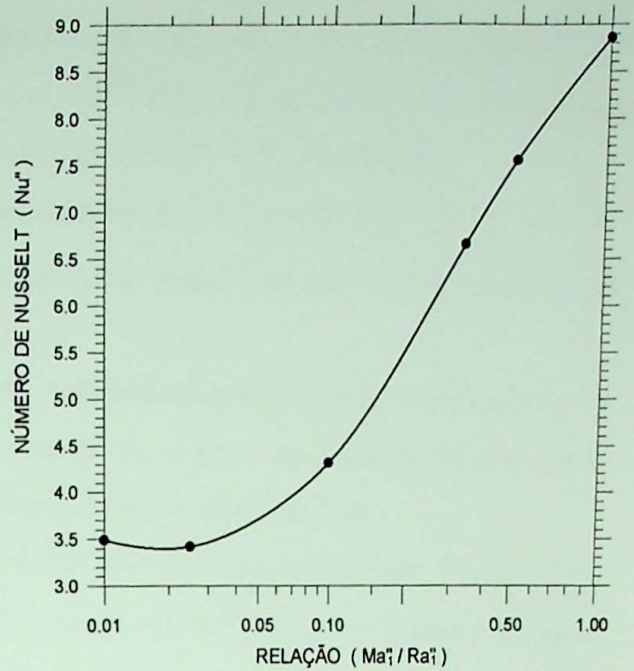


Figura 5.37 – Número de Nusselt médio para diversos Ma_1''/Ra_1''

Neste item, com o propósito de observar o efeito da convecção termocapilar juntamente com a convecção por empuxo na cavidade, simulamos alguns casos, nos quais foram tomados diferentes valores para o número de Marangoni e um valor fixo para o número de Rayleigh. Também foram consideradas, para os fluidos inferior e superior, propriedades termo-físicas idênticas, resultando $Ra_1'' = Ra_2''$ e $Pr_1 = Pr_2$.

A figura 5.35 apresenta os resultados obtidos para $0,0 \leq Ma_1''/Ra_1'' \leq 1,0$ e $Ra_1'' = 1,0 \times 10^5$. No primeiro caso mostrado ($Ma_1''/Ra_1'' = 0,0$), temos somente convecção por empuxo, e no último caso apresentado ($Ma_1''/Ra_1'' = 1,0$), as forças de empuxo e termocapilares são de mesma magnitude. Os demais casos representam as situações intermediárias.

Para $Ma_1''/Ra_1'' = 0,0$, observamos, através das figuras 5.35 e 5.36, as características do escoamento. No campo da função corrente, verificamos que o escoamento nas duas camadas de fluidos possuem o sentido horário e, na linha da interface, a velocidade horizontal é nula, devido ao acoplamento entre as camadas. No campo das isothermas, observamos a simetria das linhas de temperatura.

Para $Ma_1''/Ra_1'' = 0,01$, notamos o aparecimento de uma célula (azul), logo acima da interface. A razão pela qual esta célula apareceu do lado de cima da interface está relacionada com o escoamento proveniente do forte desbalanceamento da tensão termocapilar, que está se dando naquela região. O desbalanceamento da tensão termocapilar ocorre na interface e superfície livre e age no

sentido de arrastar fluido da região mais quente para a região mais fria. Como, no caso analisado, o escoamento de origem termocapilar está ocorrendo no sentido contrário ao escoamento por empuxo do fluido da camada superior, logo aparece naquela região uma célula de recirculação.

À medida que a relação Ma_1/Ra_1 é aumentada (casos $Ma_1''/Ra_1''=0,10; 0,50; 1,0$), a célula de origem termocapilar, citada anteriormente, ganha proporções maiores, tomando, praticamente, toda camada superior.

Note ainda que, o escoamento proveniente do desbalanceamento da tensão termocapilar possui, na linha da interface, o mesmo sentido do escoamento por empuxo do fluido da camada inferior, e desta forma atua aumentando a velocidade do escoamento do fluido inferior.

A figura 5.36 mostra o perfil de velocidade horizontal no centro da cavidade, ou seja: U em $X=\delta/2$ e $0 \leq Y \leq 1$. Nesta figura, pode ser observada, para a relação $Ma_1''/Ra_1''=1,0$ (que é a relação na qual a convecção termocapilar está mais intensa), a grande velocidade horizontal na região da interface ($Y=0,5$), em virtude do arraste de fluido da região mais quente para a região mais fria, provocado pelas forças termocapilares.

A figura 5.37 apresenta os valores do número de Nusselt, para as relações de Ma_1''/Ra_1'' simuladas. Como podemos ver, o número de Nusselt aumentou com o aumento da relação Ma_1''/Ra_1'' , devido a intensificação da velocidade do escoamento e a conseqüente diminuição das diferenças de temperaturas nas paredes verticais.

5.3.2 Caverna aberta

Este item mostra o desenvolvimento da convecção termocapilar pura, no regime transiente, em uma caverna aberta com fluxo de calor constante nas paredes verticais.

A figura 5.38 ilustra a caverna estudada, na qual temos $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,5$ e $\delta = 2,0$.

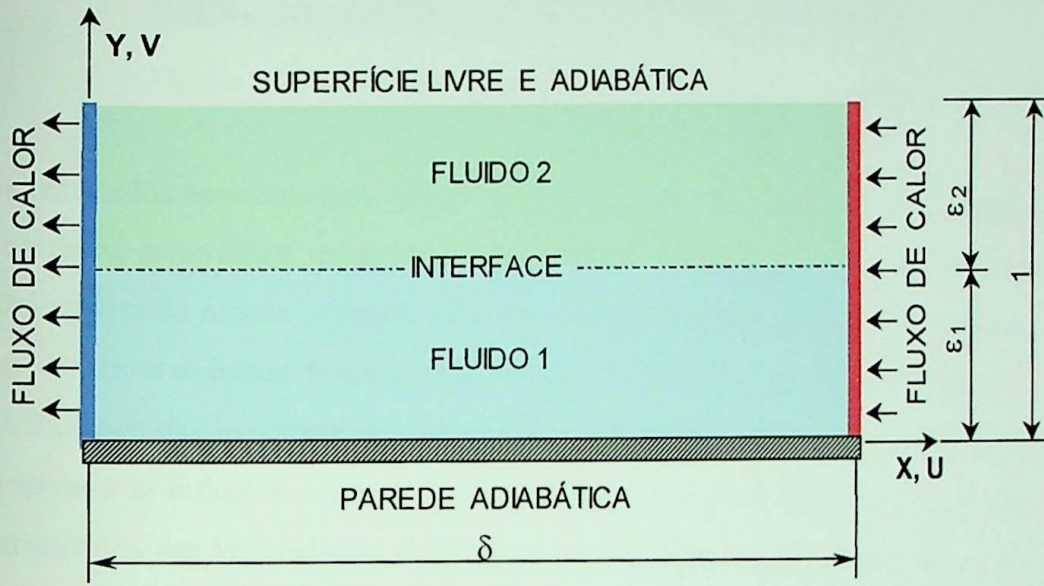


Figura 5.38 – Esquema da caverna aberta estudada

Nesta caverna, para os fluidos inferior e superior foram fixados os números de Rayleigh ($Ra_1'' = Ra_2'' = 0,0$) e Prandtl ($Pr_1 = Pr_2 = 1,0$). As propriedades termo-físicas dos fluidos inferior(1) e superior(2) ($\bar{C}_p = \frac{C_{p2}}{C_{p1}}$, $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\bar{\beta} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$, $\bar{\kappa} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$, $\bar{\mu} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, $\bar{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$) foram consideradas idênticas, ou seja: $\bar{\alpha} = 1,0$; $\bar{\beta} = 1,0$; $\bar{\kappa} = 1$; $\bar{\mu} = 1,0$; $\bar{\rho} = 1,0$; $\bar{C}_p = 1,0$. Também foram tomados como fixos os números de Marangoni na interface ($Ma_1'' = 1,0 \times 10^3$) e superfície livre ($Ma_2'' = 1,0 \times 10^3$).

A caverna da figura 5.38 foi discretizada com uma malha 3360 elementos triangulares (61x30 pontos nodais), conforme mostra a figura 5.39.

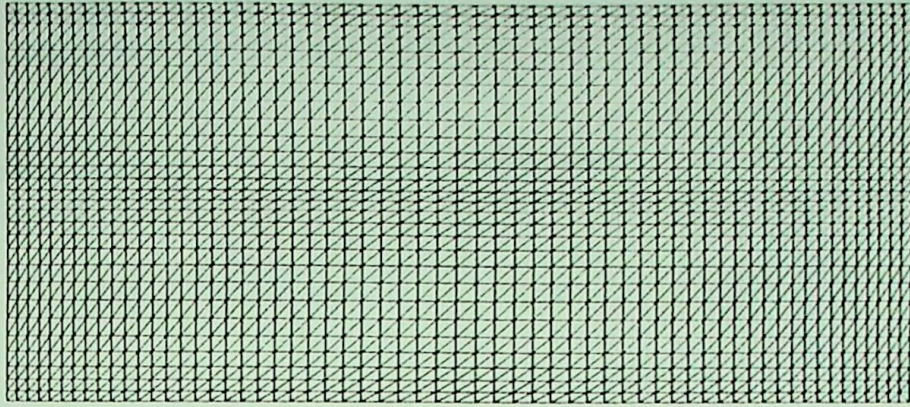


Figura 5.39 – Malha utilizada na discretização da cavidade

Nos resultados apresentados a seguir, as linhas vermelhas e azuis que aparecem nos campos da função corrente, isothermas e vorticidades representam valores positivos e negativos, ou seja:

- nas distribuições da função corrente, as linhas de cor vermelha significam escoamentos no sentido anti-horário e as linhas de cor azul significam escoamentos no sentido horário.
- nas distribuições das isothermas, as linhas de cor vermelha significam temperaturas adimensionais positivas e as linhas de cor azul significam temperaturas adimensionais negativas.
- nas distribuições das vorticidades as linhas de cor vermelha representam rotação do fluido no sentido anti-horário e as linhas de cor azul significam rotação no sentido horário.

Na figura 5.40, o passo do tempo adimensional utilizado foi de $\Delta\tau=1,262 \times 10^{-4}$. Este passo de tempo foi calculado, segundo a metodologia apresentada nos apêndices F e G.

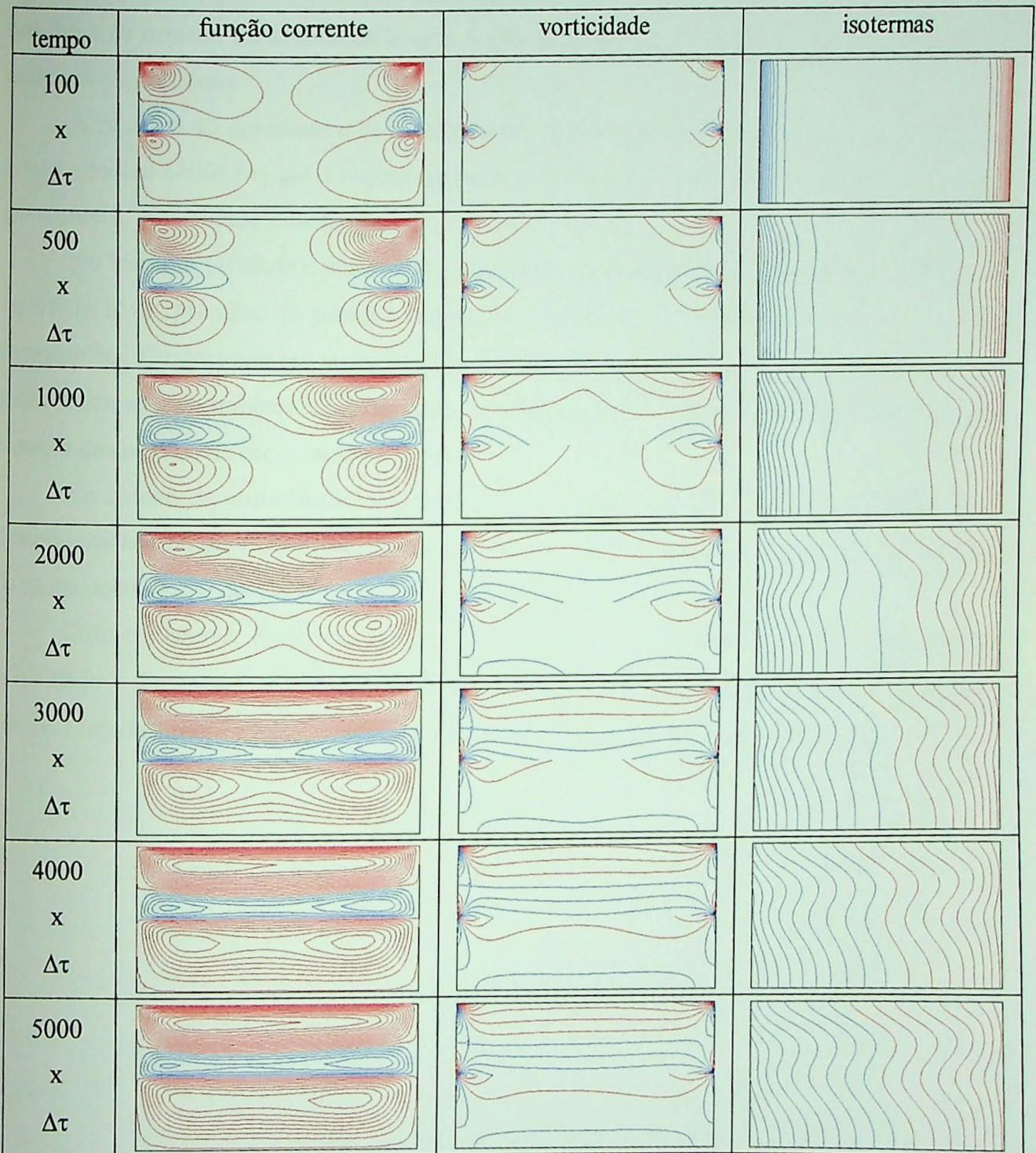


Figura 5.40- Desenvolvimento da convecção termocapilar no regime transiente

Conforme já foi dito anteriormente, a origem da convecção termocapilar está no desbalanceamento da tensão que ocorre na interface e na superfície livre dos fluidos, devido a presença de um gradiente de temperaturas. Quando assim ocorre, o desbalanceamento da tensão termocapilar cria uma força de arraste, no sentido de levar o fluido da região mais quente para a região mais fria, gerando um escoamento.

A figura 5.40 apresenta o desenvolvimento da convecção termocapilar pura, do instante próximo ao inicial ($100 \times \Delta\tau$) até o regime permanente ($5000 \times \Delta\tau$), onde temos as distribuições da função corrente, vorticidade e isothermas.

No instante ($100 \times \Delta\tau$), observamos, no campo da função corrente, nas regiões da interface e superfície livre, próximo às paredes verticais, o surgimento de células de escoamento de origem termocapilar. Como pode ser visto, no campo das isothermas, próximo às paredes verticais, existem fortes gradientes de temperaturas, os quais agem sobre a tensão termocapilar e promovem o aparecimento das células de escoamento citadas.

No campo da vorticidade, nota-se a descontinuidade das linhas na região da interface. Esta descontinuidade se deve ao desbalanceamento da tensão termocapilar, conforme pode ser constatado na equação (2.20) do Capítulo 2.

Com o decorrer do tempo, temos o desenvolvimento das distribuições da função corrente, vorticidade e isothermas, até o sistema atingir o regime permanente ($5000 \times \Delta\tau$), onde percebemos que, na camada superior, o escoamento é mais intenso, em razão da cavidade ser aberta.

5.3.3 Comparação entre os números de Rayleigh e Nusselt nas cavidades fechada e aberta

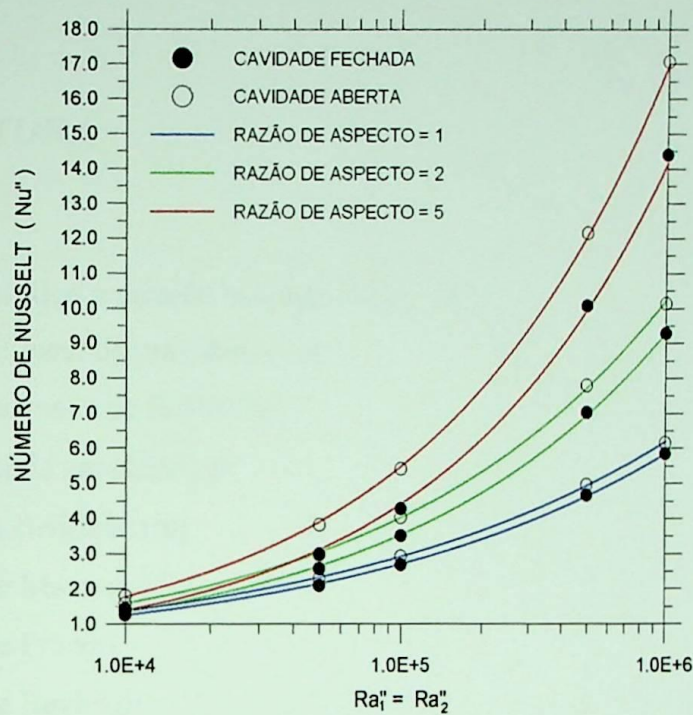


Figura 5.41 - Relação entre os números de Rayleigh e Nusselt médio

Com o objetivo de observar a influência do número de Rayleigh sobre o número de Nusselt e comparar os resultados obtidos entre a cavidade fechada e a aberta (fluido superior com superfície livre e adiabática), o número de Rayleigh foi variado de $1,0 \times 10^4 \leq Ra_1 \leq 1,0 \times 10^6$ e o número de Marangoni foi fixado em $Ma_1'' = 0,0$ e $Ma_2'' = 0,0$. As relações entre as propriedades termo-físicas dos fluidos inferior e superior foram mantidas fixas: $Pr_1 = 1,0$; $\bar{\beta} = 1,0$; $\bar{\kappa} = 1,0$; $\bar{\mu} = 1,0$; $\bar{\rho} = 1,0$; $\bar{C}_p = 1,0$. As alturas das camadas de fluidos nestas cavidades foram $\epsilon_1 = 0,5$ e $\epsilon_2 = 0,5$.

Note que, somente está sendo considerada a convecção por empuxo, a convecção termocapilar é nula ($Ma_1'' = 0,0$; $Ma_2'' = 0,0$).

A figura 5.41 mostra o crescimento do número de Nusselt médio com o aumento do número de Rayleigh, uma vez que, para os parâmetros adotados, aumentando-se o número de Rayleigh intensifica-se o escoamento na cavidade.

Comparando os resultados da cavidade fechada e da aberta, constatamos que, na cavidade aberta, a inexistência da parede superior elimina o atrito entre o fluido e a mesma, promovendo um aumento da velocidade do escoamento e conseqüentemente elevando o número de Nusselt médio.

Quanto ao aumento do número de Nusselt com o aumento da razão de aspecto, concluímos

que, quanto mais longa é a cavidade maior e a resistência térmica entre as paredes verticais isotérmicas, dificultando a transferência de calor por condução e tornando a transferência por convecção uma forma mais eficiente na troca de calor nestas cavidades.

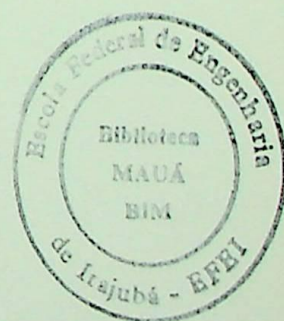
5.4 - NOMENCLATURA

Símbolos latinos

C_p	calor específico a pressão constante ($J\ kg^{-1}\ K^{-1}$)
g	aceleração local da gravidade ($m\ s^{-2}$)
h	altura da camada de fluido (m)
H	altura total da cavidade (m)
L	largura da cavidade (m)
Ma	número de Marangoni
Pr	número de Prandtl
Ra	número de Rayleigh
U	velocidade horizontal adimensional
V	velocidade vertical adimensional
X, Y	coordenada adimensional

Símbolos gregos

α	difusividade térmica ($m^2\ s^{-1}$)
β	coeficiente de expansão volumétrica (K^{-1})
δ	largura adimensional da cavidade
ε	altura adimensional da camada de fluido
κ	condutividade térmica ($W\ m^{-1}\ ^\circ C^{-1}$)
μ	viscosidade dinâmica ($kg\ m^{-1}\ s^{-1}$)
ν	viscosidade cinemática ($m^2\ s^{-1}$)
ρ	densidade ($kg\ m^{-3}$)
τ	tempo adimensional



Sub-índices

- 1 primeira camada de fluido
- 2 segunda camada de fluido
- const. valor constante

Sobre-índices

- ' temperatura constante
- " fluxo de calor constante
- relação entre uma propriedade do fluido da segunda camada e do fluido da primeira camada

Capítulo 6

CONCLUSÕES

6.1- Conclusões sobre o desenvolvimento do trabalho

Neste trabalho, consideramos atingido o objetivo de estudar numericamente, através do método de elementos finitos, a convecção natural que ocorre no interior de uma cavidade retangular composta por fluidos imiscíveis superpostos.

No Capítulo 2 - *Formulação do Problema* e no Capítulo 3 - *Modelo Matemático*, foi apresentado um equacionamento para multi-camadas de fluidos dentro de uma cavidade sujeita a diversas possibilidades de condições de contorno. Contudo, visando a simplificação do código computacional, o programa foi desenvolvido para tratar com duas camadas de fluidos sobrepostas.

Através do Capítulo 4 - *Validação do Modelo Matemático e do Código Computacional*, alguns casos publicados na literatura foram estudados e os resultados comparados com aqueles obtidos no presente trabalho. Entre os trabalhos reportados na literatura encontram-se trabalhos numéricos (utilizando diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos) e experimentais. A comparação entre os resultados revelou boa concordância entre os mesmos, validando o modelo matemático e o código computacional desenvolvidos neste trabalho.

No Capítulo 5 - *Resultados*, foram desenvolvidos alguns estudos de casos. Conforme foi apresentado no Capítulo 2, a quantidade de parâmetros de entrada do problema e a possibilidade de configurações das condições de contorno são relativamente grandes, permitindo um número enorme de estudos de casos. Contudo, devido à limitação de tempo e espaço, os estudos ficaram restritos a alguns casos, totalizando 84 simulações diferentes.

Os casos estudados foram agrupados segundo às condições de contorno impostas nas cavidades, ou seja: condição de temperatura constante nas paredes verticais; e condição de fluxo de calor constante nas paredes verticais. Nestes estudos foram tratadas tanto as cavidades fechadas como as abertas.

Para essas condições de contorno realizaram-se estudos da influência da relação das propriedades termofísicas dos fluidos e análises das forças de empuxo e termocapilares no processo de convecção natural.

Nos casos simulados, foram apresentados os gráficos das distribuições da função corrente, temperatura, vorticidade, perfil de velocidade horizontal, e número de Nusselt médio.

Em cada caso estudado, realizou-se uma análise dos resultados, com o objetivo de procurar compreender o problema tratado.

6.2- Conclusões sobre o processo de convecção em cavidades contendo fluidos imiscíveis sobrepostos

Através dos resultados encontrados, foi possível notar a influência das forças de empuxo e termocapilares no processo de convecção natural em cavidades abertas e fechadas, contendo duas camadas de fluidos, sujeitas às condições de contorno de temperatura constante ou fluxo de calor constante nas paredes verticais. Sendo também observada, a influência da relação das propriedades termofísicas dos fluidos.

Na interface entre as camadas de fluidos ocorrem dois tipos de acoplamentos: o mecânico e o térmico. O acoplamento mecânico se dá através do balanço da transferência da quantidade de momento e continuidade da velocidade. Ao passo que, o acoplamento térmico ocorre por meio da continuidade da temperatura e balanço da transferência de calor.

Quanto às forças responsáveis pelo escoamento na convecção natural, elas podem ser de empuxo e ou termocapilares. O empuxo age no volume, impulsionando o fluido quente a subir e o fluido frio a descer. Já a força de origem termocapilar age na interface, e superfície livre, arrastando horizontalmente o fluido, da região mais quente para a região mais fria.

A respeito da influência da relação das propriedades termofísicas dos fluidos na convecção natural, concluímos que, salvo naqueles casos em que somente uma propriedade é alterada, o processo é em geral complexo e de difícil análise e previsão, pelo fato das equações governantes do problema serem diferenciais parciais não-lineares e acopladas; tornando, assim, imprescindível o uso de métodos numéricos para previsão da configuração do escoamento e levantamento dos coeficientes de transferência de calor.

Na comparação dos resultados da cavidade fechada e da aberta, constatamos que, na cavidade aberta, a inexistência da parede superior elimina o atrito entre o fluido e a mesma,

promovendo um aumento da velocidade do escoamento e conseqüentemente elevando o número de Nusselt médio.

Quanto à razão de aspecto da cavidade, concluímos que, quanto mais longa é a cavidade maior é a resistência térmica entre as paredes, dificultando a transferência de calor por condução e tornando a transferência por convecção uma forma mais eficiente na troca de calor nessas geometrias.

6.3- Contribuições do presente trabalho

Neste trabalho, foi apresentado um equacionamento sistemático e detalhado para o estudo de cavidades contendo multi-camadas de fluidos sobrepostos, propiciando a continuidade deste estudo em trabalhos futuros.

A partir do modelo matemático foram desenvolvidos programas computacionais, que permitem simular o escoamento e a transferência de calor em cavidades contendo um ou dois fluidos imiscíveis sujeitos à diversas condições de contorno, visualizando as distribuições da função corrente, vorticidade, temperatura, e calculando as relações entre os coeficientes de transferência de calor.

Através destes programas foram feitos diversos estudos de casos, sobre a influência dos parâmetros térmicos e geométricos no processo de convecção natural, visando aumentar a compreensão do fenômeno.

6.4- Recomendações para trabalhos futuros

Como sugestão para trabalhos futuros, na área de convecção natural em cavidades com fluidos imiscíveis sobrepostos, citamos:

- considerar a deformação que ocorre, na superfície livre e interface entre os fluidos, devido os efeitos da tensão termocapilar;
- estudar outras geometrias de importância na engenharia, tal como as cilíndricas, as esféricas e as arbitrarias;
- estudar cavidades com três, ou mais, camadas de fluidos, as quais possuem aplicações na armazenagem de combustíveis (ex.: água - combustível líquido – vapor do combustível) e encapsulamento de cristais (ex.: líquido inerte - material do cristal na fase líquida – líquido inerte - ar).

Apêndice A

ELEMENTO TRIANGULAR LINEAR

A.1 - Introdução

A figura A.1 mostra um elemento triangular linear. Este elemento tem três lados retos e um nó em cada vértice. Cada vértice do triângulo é denominado ponto nodal e a este ponto associa-se um valor da grandeza ϕ^e . Os valores nodais da grandeza ϕ^e são Φ_i , Φ_j , Φ_k , e suas coordenadas nodais são, respectivamente, (X_i, Y_i) , (X_j, Y_j) e (X_k, Y_k) .

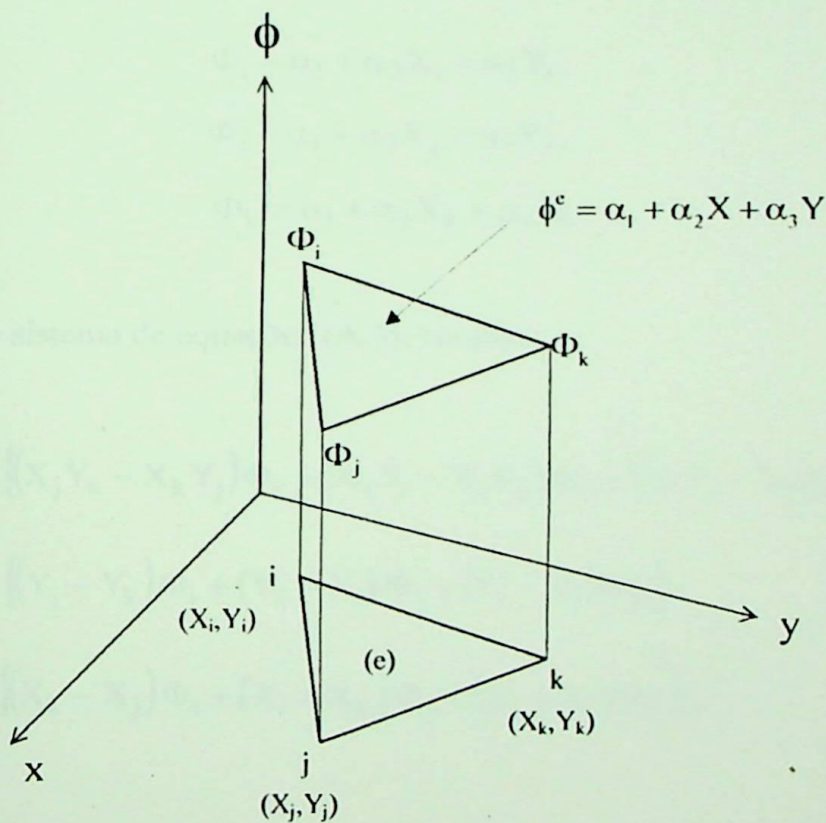


Figura A.1- Elemento triangular linear

A.2 - Equações

Admitindo que a função ϕ^e varia linearmente no elemento (e), a distribuição de ϕ^e é dada pela seguinte expressão:

$$\phi^e = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y \quad (\text{A.1})$$

juntamente com as condições nodais:

$$\phi = \Phi_i \quad \text{em} \quad x = X_i, \quad y = Y_i, \quad (\text{A.2.a})$$

$$\phi = \Phi_j \quad \text{em} \quad x = X_j, \quad y = Y_j, \quad (\text{A.2.b})$$

$$\phi = \Phi_k \quad \text{em} \quad x = X_k, \quad y = Y_k, \quad (\text{A.2.c})$$

produzindo o sistema de equações:

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i, \quad (\text{A.3.a})$$

$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j, \quad (\text{A.3.b})$$

$$\Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k. \quad (\text{A.3.c})$$

Resolvendo o sistema de equações (A.3), resulta:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} \left[(X_j Y_k - X_k Y_j) \Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) \Phi_k \right], \quad (\text{A.4.a})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} \left[(Y_j - Y_k) \Phi_i + (Y_k - Y_i) \Phi_j + (Y_i - Y_j) \Phi_k \right], \quad (\text{A.4.a})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} \left[(X_k - X_j) \Phi_i + (X_i - X_k) \Phi_j + (X_j - X_i) \Phi_k \right], \quad (\text{A.4.a})$$

onde A é a área do elemento dada por:

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo (A.4) em (A.1), resulta:

$$\phi^c = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (\text{A.6})$$

onde:

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y], \quad (\text{A.7.a})$$

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j,$$

$$b_i = Y_j - Y_k,$$

$$c_i = X_k - X_j,$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y], \quad (\text{A.7.b})$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k,$$

$$b_j = Y_k - Y_i,$$

$$c_j = X_i - X_k,$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y], \quad (\text{A.7.c})$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i,$$

$$b_k = Y_i - Y_j,$$

$$c_k = X_j - X_i.$$

A equação (A.6) também pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\phi^e = [N_i \quad N_j \quad N_k]^e \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix}^e. \quad (\text{A.8})$$

A.3 - Cálculo dos gradientes

As funções N_i , N_j e N_k são denominadas funções de forma do elemento. Sendo lineares com relação às variáveis x e y , os gradientes em ambas as direções, x ou y , são constantes em cada elemento.

Os gradientes nas direções x e y são, respectivamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} \Phi_k \quad (\text{A.9.a})$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} \Phi_k \quad (\text{A.9.b})$$

Mas

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = \frac{b_\beta}{2A} \quad \text{com } \beta = i, j, k \quad (\text{A.10.a})$$

e

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial y} = \frac{c_\beta}{2A} \quad \text{com } \beta = i, j, k \quad (\text{A.10.b})$$

Portanto,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2A} (b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k) \quad (\text{A.11.a})$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2A} (c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_k \Phi_k) \quad (\text{A.11.b})$$

A.4 - Nomenclatura

Símbolos latinos

A	área do elemento
a	constante
b	constante
c	constante
N	função de forma do elemento
X	coordenada do ponto nodal
Y	coordenada do ponto nodal
x	coordenada
y	coordenada

Símbolos gregos

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	constantes
ϕ	função escalar
Φ	valor nodal da função escalar

Sobre-índice

e	referente ao elemento
---	-----------------------

Sub-índices

β	ponto nodal
i	ponto nodal
j	ponto nodal
k	ponto nodal

Apêndice B

MÉTODO DE GALERKIN PARA EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL INDEPENDENTE DO TEMPO

B.1 - Introdução

Seja a equação diferencial bidimensional independente do tempo:

$$D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G\phi + Q = 0 . \quad (\text{B.1})$$

O método de resíduos ponderados requer que:

$$\int_{\Omega} W \left(D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G\phi + Q \right) d\Omega = 0 , \quad (\text{B.2})$$

onde W é uma função peso especificada e Ω é o domínio da equação.

O método de Galerkin é um método de resíduos ponderados e usa para a função peso W a mesma função que é usada na equação de aproximação do elemento, resultando:

$$\int_{\Omega} [N]^T \left(D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G\phi + Q \right) d\Omega = 0 , \quad (\text{B.3})$$

onde $[N]^T$ é um vetor coluna, contendo a função de forma de cada elemento.

B.2 - Equações integrais para as matrizes do elemento

A contribuição do elemento para o sistema de equações é dada por:

$$\{R^{(e)}\} = - \int_A [N]^T \left(D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G\phi + Q \right) dA, \quad (B.4)$$

mas

$$\frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = [N]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (B.5)$$

então, rearranjando (B.5), temos:

$$- [N]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (B.6)$$

e integrando (B.6), resulta:

$$- \int_A [N]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dA = - \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dA + \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dA. \quad (B.7)$$

Do Teorema de Green, vem:

$$\int_A \frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dA = \int_{\Gamma} [N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \varphi d\Gamma, \quad (B.8)$$

onde φ é o ângulo formado entre o fluxo e a normal sobre o lado do elemento no contorno; e Γ é o lado do elemento no contorno. Substituindo (B.8) em (B.7), temos:

$$- \int_A [N]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dA = - \int_{\Gamma} [N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \varphi d\Gamma + \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dA. \quad (B.9)$$

Um conjunto semelhante de operações para a variável y produz:

$$-\int_{\Lambda} [N]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} d\Lambda = -\int_{\Gamma} [N]^T \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \varphi d\Gamma + \int_{\Lambda} \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} d\Lambda . \quad (\text{B.10})$$

Substituindo e rearranjando (B.10) e (B.9) em (B.4), resulta:

$$\begin{aligned} \{R^{(e)}\} = & -\int_{\Gamma} [N]^T \left(D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \varphi + D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \varphi \right) d\Gamma \\ & + \int_{\Lambda} \left(D_x \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + D_y \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d\Lambda \\ & + \int_{\Lambda} G [N]^T \phi d\Lambda - \int_{\Lambda} Q [N]^T d\Lambda \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Introduzindo a relação:

$$\phi^{(e)} = [N] \{\Phi^{(e)}\} \quad (\text{B.12})$$

em (B.11) e rearranjando, obtemos:

$$\begin{aligned} \{R^{(e)}\} = & -\int_{\Gamma} [N]^T \left(D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \varphi + D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \varphi \right) d\Gamma \\ & + \int_{\Lambda} \left(D_x \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + D_y \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) d\Lambda \{\Phi^{(e)}\} \\ & + \int_{\Lambda} G [N]^T [N] d\Lambda \{\Phi^{(e)}\} - \int_{\Lambda} Q [N]^T d\Lambda \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

A equação (B.13) tem a seguinte forma geral:

$$\{R^{(e)}\} = \{I^{(e)}\} + [K^{(e)}] \{\Phi^{(e)}\} - \{F^{(e)}\} = 0 \quad (\text{B.14})$$

onde:

$$\{I^{(e)}\} = -\int_{\Gamma} [N]^T \left(D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \varphi + D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \varphi \right) d\Gamma , \quad (\text{B.15})$$

$$[K^{(c)}] = \int_{\Lambda} \left(D_x \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + D_y \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) d\Lambda + \int_{\Lambda} G [N]^T [N] d\Lambda, \quad (B.16)$$

$$\{F^{(c)}\} = \int_{\Lambda} Q [N]^T d\Lambda. \quad (B.17)$$

A matriz $[K^{(c)}]$ é usualmente escrita na seguinte forma:

$$[K^{(c)}] = [K_D^{(c)}] + [K_G^{(c)}], \quad (B.18)$$

onde:

$$[K_D^{(c)}] = \int_{\Lambda} [B]^T [D] [B] d\Lambda = [B]^T [D] [B] \int_{\Lambda} d\Lambda = [B]^T [D] [B] \Lambda, \quad (B.19)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial x} \\ \frac{\partial [N]}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (B.20)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{bmatrix}, \quad (B.21)$$

e

$$[K_G^{(c)}] = \int_{\Lambda} G [N]^T [N] d\Lambda. \quad (B.22)$$

B.3 - Cálculo das matrizes para o elemento triangular

Matriz $[K_D^{(e)}]$

Como:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}, \quad (B.23)$$

logo:

$$[K_D^{(e)}] = \frac{D_x}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j^2 & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{D_y}{4A} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j^2 & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k^2 \end{bmatrix}. \quad (B.24)$$

Matriz $[K_G^{(e)}]$

Como:

$$[K_G^{(e)}] = \int_{\Lambda} G \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} d\Lambda, \quad (B.25)$$

logo:

$$[K_G^{(e)}] = G \int_{\Lambda} \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 \end{bmatrix} d\Lambda. \quad (B.26)$$

O cálculo desta integral produz:

$$[K_G^{(e)}] = \frac{GA}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (B.27)$$

Vetor $\{F^{(e)}\}$

Como:

$$\{F^{(e)}\} = Q \int_{\Lambda} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dA, \quad (\text{B.28})$$

logo, o cálculo desta integral produz:

$$\{F^{(e)}\} = \frac{QA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.29})$$

Vetor $\{I^{(e)}\}$

Este vetor está associado às condições de contorno que envolvem a derivada $\partial\phi/\partial n$ (onde n é um vetor normal ao contorno do domínio Ω) e é analisado no Apêndice C.

B.4 - Nomenclatura***Símbolos latinos***

A	área do elemento
a	constante do elemento
b	constante do elemento
c	constante do elemento
D	parâmetro da equação diferencial
G	parâmetro da equação diferencial
n	vetor normal ao contorno do domínio Ω
Q	parâmetro da equação diferencial
W	função peso
x, y	coordenadas
X, Y	coordenadas do ponto nodal

Matrizes e vetores

[B]	matriz definida no texto
[D]	matriz definida no texto
{F}	vetor força
{I}	vetor interelementar
[K]	matriz rigidez
[K _D]	matriz rigidez associada ao parâmetro D

$[K_G]$	matriz rigidez associada ao parâmetro G
$[N]$	matriz linha da função de forma do elemento
$\{R\}$	vetor resíduo
$\{\Phi\}$	vetor do valor nodal

Símbolos gregos

α	constante
ϕ	função escalar
Φ	valor nodal da função escalar
Ω	domínio da equação diferencial
φ	ângulo entre o fluxo e a normal sobre o lado do elemento no contorno
Γ	lado do elemento no contorno

Sobre-índice

(e)	elemento
-----	----------

Sub-índices

1	índice da constante
2	índice da constante
3	índice da constante
β	ponto nodal
i	ponto nodal
j	ponto nodal
k	ponto nodal

Apêndice C

CONDIÇÕES DE CONTORNO COM DERIVADAS NO MÉTODO DE GALERKIN

C.1 - Introdução

A maioria dos problemas tem uma combinação de tipos de condições de contorno. Os valores da função ϕ são especificados sobre algumas partes da fronteira e os valores das derivadas $\partial\phi/\partial x$ e $\partial\phi/\partial y$ são especificados sobre as outras partes da mesma.

A inclusão das condições de contorno do tipo convecção especificada no cálculo de elementos finitos é feita usando o vetor $\{I^{(c)}\}$ dado por:

$$\{I^{(c)}\} = - \int_{\Gamma} [N]^T \left(D_x \frac{\partial\phi}{\partial x} \cos\varphi + D_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \sin\varphi \right) d\Gamma. \quad (C.1)$$

A integral (C.1) pode ser separada em duas, ou seja:

$$\{I^{(c)}\} = \{I_{bc}^{(c)}\} + \{I_i^{(c)}\}, \quad (C.2)$$

onde

$$\{I_{bc}^{(c)}\} = - \int_{\Gamma_{bc}} [N]^T \left(D_x \frac{\partial\phi}{\partial x} \cos\varphi + D_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \sin\varphi \right) d\Gamma, \quad (C.3)$$

$$\{I_i^{(c)}\} = - \int_{\Gamma_i} [N]^T \left(D_x \frac{\partial\phi}{\partial x} \cos\varphi + D_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \sin\varphi \right) d\Gamma = 0. \quad (C.4)$$

e Γ_{bc} é o lado do elemento sobre o qual as condições de contorno do tipo convecção são especificadas. O vetor $\{I_i^{(c)}\}$ contém a integral (C.1), que ocorre sobre o lado do elemento que tem as condições de contorno de fluxo especificado.

Definindo a relação:

$$D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \varphi + D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \varphi = -M\phi_b + S \quad (C.5)$$

e substituindo-a em (C.3), obtemos:

$$\{I_{bc}^{(e)}\} = - \int_{\Gamma_{bc}} [N]^T (-M\phi_b + S) d\Gamma, \quad (C.6)$$

onde ϕ_b é dado pela equação do elemento:

$$\phi_b^{(e)} = [N] \{\Phi^{(e)}\}. \quad (C.7)$$

Substituindo (C.7) em (C.6) e rearranjando, obtemos:

$$\{I_{bc}^{(e)}\} = \int_{\Gamma_{bc}} (M [N]^T [N] d\Gamma) \{\Phi^{(e)}\} - \int_{\Gamma_{bc}} S [N]^T d\Gamma. \quad (C.8)$$

A expressão (C.8) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\{I_{bc}^{(e)}\} = [K_M^{(e)}] \{\Phi^{(e)}\} - \{F_S^{(e)}\}, \quad (C.9)$$

onde

$$[K_M^{(e)}] = \int_{\Gamma_{bc}} M [N]^T [N] d\Gamma \quad (C.10)$$

e

$$\{F_S^{(e)}\} = \int_{\Gamma_{bc}} S [N]^T d\Gamma \quad (C.11)$$

A componente $[K_M^{(e)}]$ pode ser adicionada à matriz $[K^{(e)}]$, e a componente $\{F_S^{(e)}\}$ ao vetor $\{F^{(e)}\}$.

C.2 - Cálculo das integrais para o elemento triangular

Vetor $\{F_S^{(e)}\}$

O cálculo da equação (C.11), para os lados ij, jk e ik do elemento triangular, dá os seguintes resultados:

$$\{F_{S_{ij}}^{(e)}\} = \frac{SL_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (C.12)$$

$$\{F_{S_{jk}}^{(e)}\} = \frac{SL_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (C.13)$$

e

$$\{F_{S_{ik}}^{(e)}\} = \frac{SL_{ik}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (C.14)$$

onde os valores de L_{ij} , L_{jk} e L_{ik} são, respectivamente, os comprimentos de cada lado do elemento triangular.

Matriz $[k_M^{(c)}]$

O desenvolvimento da equação (C.10), para os lados ij, jk e ik do elemento triangular, dá os seguintes resultados:

$$[K_{M_{ij}}^{(c)}] = \frac{ML_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (C.15)$$

$$[K_{M_{jk}}^{(c)}] = \frac{ML_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (C.16)$$

$$[K_{M_k}^{(c)}] = \frac{Ml_{,ik}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (C.17)$$

C.3 - Nomenclatura deste apêndice

Símbolos latinos

D_x	parâmetro da equação diferencial
D_y	parâmetro da equação diferencial
L	comprimento do lado do elemento
M	parâmetro da equação
S	parâmetro da equação
x	coordenada
y	coordenada

Matrizes e vetores

$[D]$	matriz definida no texto
$\{F\}$	vetor força
$\{F_s\}$	vetor força associado ao parâmetro S
$\{I\}$	vetor interelementar
$[K]$	matriz rigidez
$[K_M]$	matriz rigidez associada ao parâmetro M
$[N]$	matriz linha da função de forma do elemento
$\{\Phi\}$	vetor do valor nodal

Símbolos gregos

ϕ	função escalar
ϕ_b	valor de ϕ em Γ_{bc}
Φ	valor nodal da função escalar

- φ ângulo entre o fluxo e a normal sobre o lado do elemento no contorno
- Γ_{bc} lado do elemento com condições de contorno do tipo convecção especificada
- Γ_i lado do elemento com condições de contorno de fluxo especificado

Sobre-índice

- (e) referente à matriz ou vetor do elemento

Apêndice D

MÉTODO DE GALERKIN PARA EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL DEPENDENTE DO TEMPO

D.1 - Introdução

Para ilustrar a aplicação do método de Galerkin consideremos a equação diferencial bidimensional dependente do tempo:

$$D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G \phi + Q = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} . \quad (D.1)$$

O método de resíduos ponderados requer que:

$$\int_{\Omega} W \left(D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G \phi + Q - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) d\Omega = 0 , \quad (D.2)$$

onde W é uma função peso especificada e Ω é o domínio da equação.

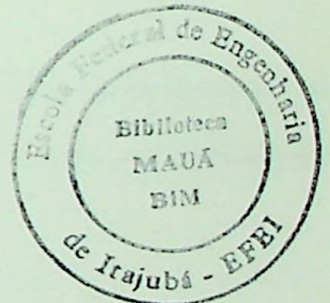
A contribuição do elemento para o sistema de equações é dada por:

$$\{R^{(e)}\} = - \int_{\Lambda} [W]^T \left(D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G \phi + Q - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) d\Lambda . \quad (D.3)$$

A equação (D.3) pode ser separada em duas integrais, ou seja:

$$\{R^{(e)}\} = - \int_{\Lambda} [W]^T \left(D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G \phi + Q \right) d\Lambda + \int_{\Lambda} [W]^T \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) d\Lambda , \quad (D.4)$$

que possui a seguinte forma geral:



$$\{R^{(e)}\} = \{R_D^{(e)}\} + \{R_\lambda^{(e)}\} , \quad (D.5)$$

onde:

$$\{R_D^{(e)}\} = - \int_{\Lambda} [W]^T \left(D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G \phi + Q \right) d\Lambda , \quad (D.6)$$

$$\{R_\lambda^{(e)}\} = \int_{\Lambda} [W]^T \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) d\Lambda . \quad (D.7)$$

No cálculo de $\{R_D^{(e)}\}$, se definirmos $[W]^T = [N]^T$, teremos o mesmo resultado da integral (B.4) que fora calculada no Apêndice B. Desta forma, nos resta apenas calcular o termo $\{R_\lambda^{(e)}\}$.

A equação (D.7) tem duas soluções. Uma solução é chamada de Formulação Consistente e a outra de Formulação Fragmentada.

É provado que a Formulação Fragmentada possui uma faixa operacional numericamente estável mais ampla que a Formulação Consistente, permitindo o uso de passos de tempo maiores (Segerlind, L. J., 1984).

D.2 - Formulação consistente

Esta formulação define que a derivada $\partial\phi/\partial t$ é uma função que varia linearmente entre os valores nodais $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dots, \dot{\phi}_p$. Assim, a derivada $\partial\phi/\partial t$, dentro do elemento, pode ser definida da seguinte forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = [N] \{\dot{\phi}^{(e)}\} \quad (D.8)$$

ou

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = [N_i \ N_j \ N_k] \{\dot{\phi}^{(e)}\} . \quad (D.9)$$

Substituindo a equação (D.8) em (D.7), encontramos:

$$\{R_\lambda^{(e)}\} = \int_{\Lambda} \lambda [W]^T [N] \{\dot{\phi}^{(e)}\} d\Lambda \quad (D.10)$$

e tomando $[W]^T = [N]^T$ na equação acima, obtemos:

$$\{R_\lambda^{(e)}\} = \left(\int_\Lambda \lambda [N]^T [N] d\Lambda \right) \{\dot{\Phi}^{(e)}\} = [C^{(e)}] \{\dot{\Phi}^{(e)}\}, \quad (D.11)$$

onde

$$[C^{(e)}] = \int_\Lambda \lambda [N]^T [N] d\Lambda \quad (D.12)$$

e a matriz $[C^{(e)}]$ é usualmente chamada de matriz capacitância.

Calculando a equação (D.12) obtemos:

$$[C^{(e)}] = \frac{\lambda \Lambda}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (D.13)$$

O vetor $\dot{\Phi}^{(e)}$ é dado por:

$$\{\dot{\Phi}^{(e)}\}^T = \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \right]. \quad (D.14)$$

De posse do cálculo de $\{R_\lambda^{(e)}\}$, a equação (D.5) pode ser reescrita. O resultado final é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem dado por:

$$[C] \{\dot{\Phi}\} + [K] \{\Phi\} - \{F\} = \{0\}. \quad (D.15)$$

D.3 - Formulação fragmentada

Esta fórmula define que a variação $\partial\phi/\partial t$, em relação a x e y, possui três valores constantes dentro do elemento triangular. Cada região, com valor constante, situa-se entre um nó, o ponto médio de cada lado e o centro do triângulo. A figura D.1 ilustra esta formulação.

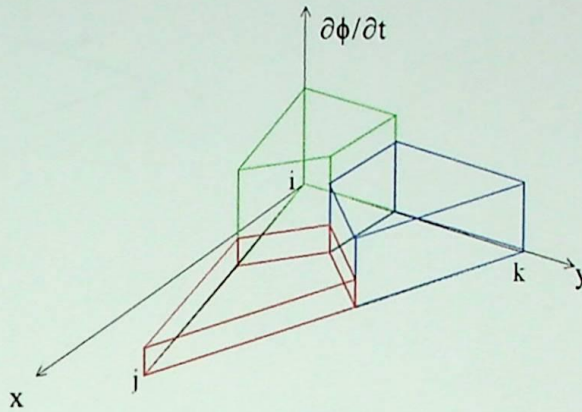


Figura D.1 - Variação de $\partial\phi/\partial t$ dentro de um elemento triangular

A variação $\partial\phi/\partial t$ dentro do elemento pode ser expressa como:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = [N^*] \{\dot{\Phi}^{(e)}\} \tag{D.16}$$

ou

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = [N_i^* \ N_j^* \ N_k^*] \{\dot{\Phi}^{(e)}\}, \tag{D.17}$$

onde N_i^* , N_j^* e N_k^* são funções que atendem à formulação apresentada pela figura (D.2) e que têm as seguintes propriedades:

$$N_\alpha^* N_\alpha^* = N_\beta^* N_\beta^* = 1 \quad \text{e} \quad N_\alpha^* N_\beta^* = 0 \tag{D.18}$$

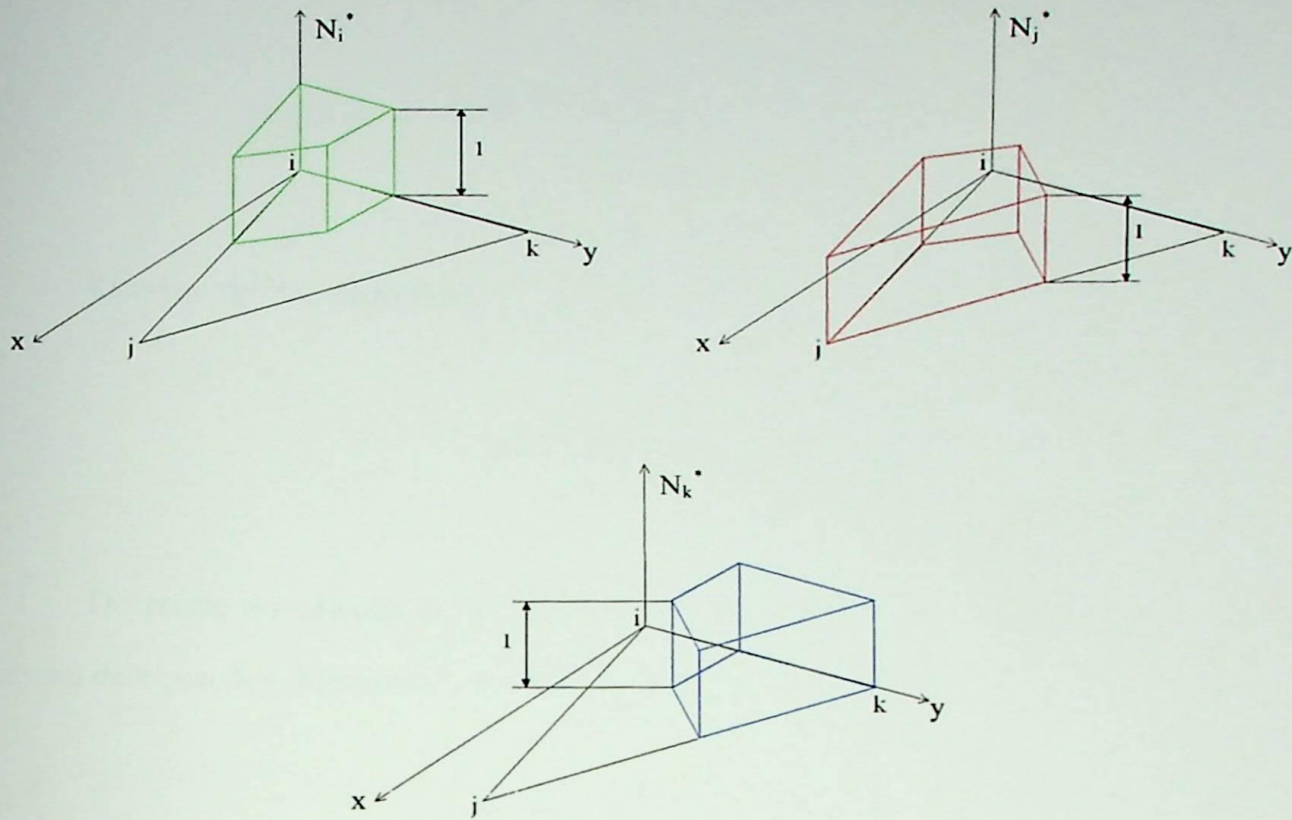


Figura D.2 - Representação das funções N_i^* , N_j^* , N_k^*

Usando a equação (D.16), as propriedades (D.18), e as definições representadas pela figura (D.2), na equação (D.7), obtemos:

$$\{R_\lambda^{(e)}\} = \int_A \lambda [W]^T [N^*] \{\Phi^{(e)}\} dA \tag{D.19}$$

e tomando $[W]^T = [N^*]^T$ na equação acima, encontramos:

$$\{R_\lambda^{(e)}\} = \left(\int_A \lambda [N^*]^T [N^*] dA \right) \{\Phi^{(e)}\} = [C^{(e)}] \{\Phi^{(e)}\} , \tag{D.20}$$

onde

$$[C^{(e)}] = \int_A \lambda [N^*]^T [N^*] dA \tag{D.21}$$

e $[C^{(e)}]$ é a nova matriz capacitância.

Calculando a equação (D.21) obtemos:

$$[C^{(e)}] = \frac{\lambda \Lambda}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (D.22)$$

O vetor $\dot{\Phi}^{(e)}$ é dado por:

$$\{\dot{\Phi}^{(e)}\}^T = \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \right]. \quad (D.23)$$

De posse do cálculo de $\{R_\lambda^{(e)}\}$ a equação (D.5) pode ser reescrita. O resultado final é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem dado por:

$$[C]\{\dot{\Phi}\} + [K]\{\Phi\} - \{F\} = \{0\}. \quad (D.24)$$

D.4 - Solução no domínio do tempo

Utilizando o método de aproximação por diferenças finitas, conforme apresentado no apêndice E, as equações (D.16) ou (D.24) podem ser discretizadas no domínio do tempo e reescritas na seguinte forma geral:

$$[A]\{\Phi\}_n = [P]\{\Phi\}_{n-1} + \{F^*\}, \quad (D.25)$$

onde:

$$[A] = [C] + \Theta \Delta t [K], \quad (D.26)$$

$$[P] = [C] - (1 - \Theta) \Delta t [K], \quad (D.27)$$

$$\{F^*\} = \Delta t \left[(1 - \Theta) \{F\}_{n-1} + \Theta \{F\}_n \right], \quad (D.28)$$

e os sub-índice $n-1$ e n são instantes no tempo separados pelo passo de tempo Δt .

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t. \quad (D.29)$$

Quanto ao parâmetro Θ , existem quatro opções comumente usadas. A tabela (D.1) mostra o valor de Θ e do respectivo nome esquema de diferenças finitas:

Tabela D.1 - Valor de Θ em cada esquema

Θ	Método
0	Diferença para Frente
1/2	Diferença Central
3/2	Galerkin
1	Diferença para Trás

Maiores detalhes sobre o método de aproximação por diferenças finitas para solução no domínio do tempo são apresentados no apêndice E.

D.5 - Nomenclatura

Símbolos latinos

A	área do elemento
D	parâmetro da equação diferencial
G	parâmetro da equação diferencial
Q	parâmetro da equação diferencial
t	tempo
W	função peso
x	coordenada
y	coordenada

Matrizes e vetores

$[C^{(e)}]$	matriz capacitância do elemento
$[C]$	matriz capacitância global
$\{F\}$	vetor força global

$[K^{(e)}]$	matriz rigidez do elemento
$[K]$	matriz rigidez global
$[N]$	matriz da função de forma do elemento
$[N^*]$	matriz da função de interpolação dos valores nodais de $\partial\phi/\partial t$
$\{R^{(e)}\}$	vetor resíduo do elemento
$\{\Phi^{(e)}\}$	vetor com os valores nodais da função escalar (sobre o elemento)

Símbolos gregos

$\Delta()$	intervalo de ()
ϕ	função escalar
Φ	valor nodal da função escalar
λ	parâmetro da equação diferencial
Ω	domínio da equação diferencial
Θ	parâmetro do esquema de diferenças finitas

Sobre-índice

(e)	referente à matriz ou vetor do elemento
-----	---

Sub-índices

n-1	instante no tempo atrás
n	instante no tempo à frente
i, j, k	ponto nodal
α, β	ponto nodal

Apêndice E

SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO ATRAVÉS DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

E.1 - Introdução

Os problemas de elementos finitos dependentes do tempo produzem um sistema linear de equações diferenciais de primeira ordem no domínio do tempo, cuja a forma geral é dada pela equação (E.1):

$$[C]\{\dot{\Phi}\} + [K]\{\Phi\} - \{F\} = 0 \quad . \quad (E.1)$$

Uma das formas de resolver este problema é através da aplicação do método de diferenças finitas, o qual usaremos neste apêndice.

E.2 - Solução

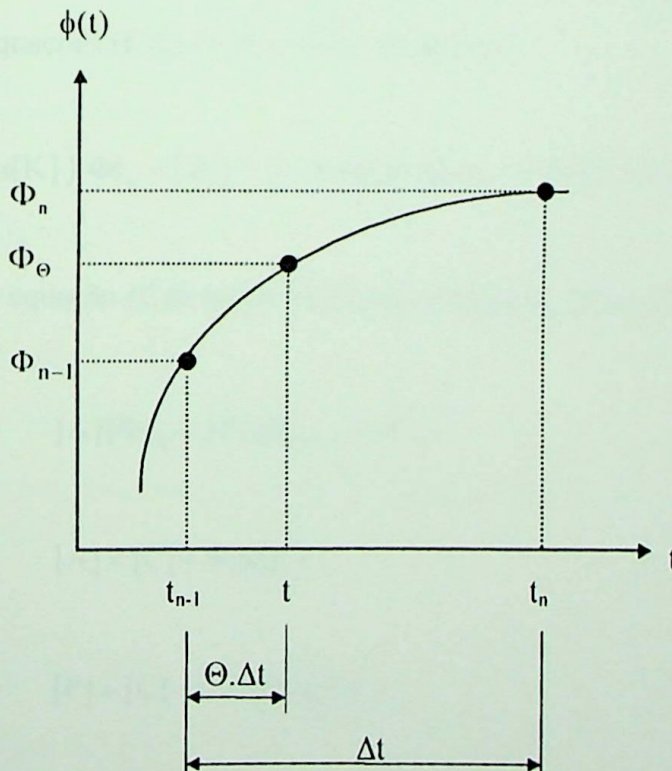


Figura E.1 - Definição do valor de Θ

Conforme mostra a figura (E.1), o valor de $\{\Phi\}_\Theta$ pode ser definido em termos de Θ como:

$$\{\Phi\}_\Theta = (1 - \Theta)\{\Phi\}_{n-1} + \Theta\{\Phi\}_n, \quad (\text{E.2})$$

onde

$$\Theta = \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t} \quad \text{e} \quad 0 \leq \Theta \leq 1. \quad (\text{E.3})$$

Usando as equações (E.2) e (E.3) calculamos a derivada $\{\dot{\Phi}\}_\Theta$ da forma como segue:

$$\{\dot{\Phi}\}_\Theta = \frac{d\{\Phi\}_\Theta}{dt} = \frac{d\{\Phi\}_\Theta}{d\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = (-\{\Phi\}_{n-1} + \{\Phi\}_n) \frac{1}{\Delta t} = \frac{\{\Phi\}_n - \{\Phi\}_{n-1}}{\Delta t}. \quad (\text{E.4})$$

Similarmente, o valor de $\{F\}_\Theta$ pode ser definido em termos de Θ como:

$$\{F\}_\Theta = (1 - \Theta)\{F\}_{n-1} + \Theta\{F\}_n. \quad (\text{E.5})$$

A equação (E.1) é escrita, agora, em termos de $\{\Phi\}_{n-1}$, $\{\Phi\}_n$, $\{F\}_{n-1}$, $\{F\}_n$, Θ , Δt , através das substituições das equações (E.2), (E.4) e (E.5), resultando:

$$([C] + \Theta\Delta t[K])\{\Phi\}_n = ([C] - (1 - \Theta)\Delta t[K])\{\Phi\}_{n-1} + \Delta t((1 - \Theta)\{F\}_{n-1} + \Theta\{F\}_n). \quad (\text{E.6})$$

Reescrevendo a equação (E.6) numa forma mais compacta, obtemos:

$$[A]\{\Phi\}_n = [P]\{\Phi\}_{n-1} + \{F^*\}, \quad (\text{E.7})$$

onde:

$$[A] = [C] + \Theta\Delta t[K], \quad (\text{E.8})$$

$$[P] = [C] - (1 - \Theta)\Delta t[K], \quad (\text{E.9})$$

$$\{F^*\} = \Delta t((1 - \Theta)\{F\}_{n-1} + \Theta\{F\}_n). \quad (\text{E.10})$$

Na equação (E.10), os valores de Θ podem variar de 0 a 1, porém, existem quatro opções comumente usadas. A tabela (E.1) mostra o valor para o parâmetro Θ e o respectivo nome do esquema de diferenças finitas empregado.

Tabela E.1 - Valor de Θ em cada esquema

Θ	Esquema
0	Diferença para Frente
1/2	Diferença Central
3/2	Galerkin
1	Diferença para Trás

E.3 - Nomenclatura

Símbolos latinos

t tempo

Matrizes e vetores

[A] matriz definida no texto

[C] matriz capacitância

{F} vetor força

{F^{*}} vetor definido no texto

[K] matriz rigidez

[P] matriz definida no texto

{ Φ } vetor com os valores nodais da função escalar

{ $\dot{\Phi}$ } vetor com os valores nodais da derivada temporal da função escalar

Símbolos gregos

$\Delta()$ intervalo de ()

ϕ função escalar

Φ valor nodal da função escalar

Θ parâmetro da equação

Sub-índices

- n-1 instante no tempo atrás
- n instante no tempo à frente

F.1 - Introdução

De acordo com o método de diferenças finitas, a solução numérica de um problema de valor em contorno é obtida através da discretização do domínio do tempo. São elas:

- i - taxa de discretização;
- ii - estabilidade numérica das soluções;
- iii - precisão numérica.

Com relação à taxa de discretização, a estabilidade numérica das soluções é dada por um critério de estabilidade, aproximadamente, para o caso de problemas de valor em contorno, a estabilidade é dada por:

F.2 - Resultados numéricos para problemas de valor em contorno

Os problemas de contorno são resolvidos através da discretização do domínio do tempo, gerando o seguinte sistema de equações de diferenças finitas:

Através da aplicação do método de diferenças finitas, a solução numérica de um problema de valor em contorno é obtida através da discretização do domínio do tempo, gerando o seguinte sistema de equações de diferenças finitas:

$$\begin{aligned}
 & \text{[Equações de diferenças finitas]} \\
 & \text{[Equações de diferenças finitas]} \\
 & \text{[Equações de diferenças finitas]}
 \end{aligned}$$

Apêndice F

FALHAS NUMÉRICAS NO PROCESSO DE SOLUÇÃO

F.1 - Introdução

De acordo com Segerlind, L. J. (1984), existem basicamente três tipos de falhas que podem ocorrer num processo de cálculo, na solução de problemas de elementos finitos dependentes do tempo. São elas:

- i - falta de estabilidade;
- ii - resultado incoerente com a realidade física;
- iii - oscilação numérica.

Com relação à falta de estabilidade, há muitas referências que provam que as soluções em problemas dependentes do tempo são sempre estáveis quando $\Theta \geq \frac{1}{2}$. Quanto aos outros tipos de falhas, apresentaremos neste apêndice as condições necessárias que devem ser satisfeitas, para que as mesmas sejam evitadas.

F.2 - Resultados incoerentes com a realidade física

Os problemas de elementos finitos, dependentes do tempo, produzem um sistema linear de equações diferenciais de primeira ordem no domínio do tempo, cuja forma geral é dada pela equação (F.1):

$$[C]\{\dot{\Phi}\} + [K]\{\Phi\} - \{F\} = 0, \quad (F.1)$$

Através da aplicação do método de diferenças finitas, o sistema (F.1) pode ser discretizado no domínio do tempo, gerando o sistema (F.2), dado por:

$$[A]\{\Phi\}_n = [P]\{\Phi\}_{n-1} + \{F'\}, \quad (F.2)$$

onde:

$$[A] = [C] + \Theta\Delta t[K], \quad (F.3)$$

$$[P] = [C] - (1 - \Theta)\Delta t[K], \quad (F.4)$$

$$\{F^*\} = \Delta t \left((1 - \Theta) \{F\}_{n-1} + \Theta \{F\}_n \right), \quad (F.5)$$

$$\Theta = \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t} \quad \text{e} \quad 0 \leq \Theta \leq 1. \quad (F.6)$$

Considerando que a matriz $[A]$ possui a inversa $[A]^{-1}$, e multiplicando a equação (F.2) por $[A]^{-1}$, obtemos:

$$\{\Phi\}_n = [A]^{-1}[P]\{\Phi\}_{n-1} + [A]^{-1}\{F^*\}. \quad (F.7)$$

Na equação dada por (F.7), para garantir que o sentido da variação de $\{\Phi\}_n$ coincida com o sentido de $\{F^*\}$ é necessário que todos os coeficientes de $[A]^{-1}$ sejam positivos. Caso contrário, teríamos uma situação, em que, por exemplo, num determinado passo de tempo, um nó estaria recebendo calor e ao mesmo tempo sua temperatura e de seus nós vizinhos estariam diminuindo de valor, o que é incoerente com a Lei de Fourier.

Segundo estudos realizados por Maadooliat (1983), todos os coeficientes de $[A]^{-1}$ serão positivos, se a matriz $[A]$, possuir todos os coeficientes da diagonal principal positivos e os demais coeficientes todos negativos.

$$[A] = \begin{bmatrix} + & - & - & . & . & - \\ - & + & - & . & . & - \\ - & - & + & . & . & - \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ - & - & - & . & . & + \end{bmatrix}$$

Figura F.1 - Pré-requisito para evitar a incoerência com a realidade física

Assim, o pré-requisito necessário a ser cumprido, para a evitar a incoerência com a realidade física, está relacionado com a matriz $[A]$, a qual deverá possuir seus coeficientes segundo a forma mostrada pela figura (F.1).

F.3 - Oscilação numérica

Segundo estudos realizados por Myers (1971), as oscilações numéricas nos valores de $\{\Phi\}_i$ estão relacionadas com os autovalores β do produto das matrizes $[A]^{-1}[P]$. Conforme os autovalores obtidos, podemos ter as seguintes situações apresentadas na tabela (F.1):

Tabela F.1 - Autovalores e falhas numéricas

VALOR DOS AUTO-VALORES β	INSTABILIDADE NUMÉRICA	OSCILAÇÃO NUMÉRICA
$\beta > 0$	não	não
$-1 < \beta < 0$	não	sim
$\beta < -1$	sim	sim

A partir da tabela (F.1), podemos concluir que para se evitar oscilações numérica, o pré-requisito necessário a ser cumprido é fazer com que os autovalores do produto das matrizes $[A]^{-1}[P]$ sejam positivos.

Os autovalores β de $[A]^{-1}[P]$ podem ser calculados a partir da equação (F.8).

$$\det([A]^{-1}[P] - \beta[I]) = 0. \quad (F.8)$$

Multiplicando (F.8) por $[A]$ obtemos:

$$\det([P] - \beta[A]) = 0. \quad (F.9)$$

Segundo Hildebrand (1965), na equação (F.9) β é positivo quando ambas as matrizes $[A]$ e $[P]$ forem definidas positivas.

Analisando a equação (F.3), temos que $[C]$ é uma matriz definida positiva e $[K]$ é na pior das hipóteses singular. Assim, a adição de $[K]$ em $[C]$ não altera a característica do resultado e a matriz $[A]$ sempre será definida positiva. Então o pré-requisito para evitar a oscilação numérica se reduz à análise da matriz $[P]$.

A equação (F.4) pode ser escrita na seguinte forma:

$$[P] = [C] - \alpha[K], \quad (F.10)$$

onde

$$\alpha = (1 - \Theta)\Delta t \quad (F.11)$$

Na equação (F.10), devemos determinar qual é o valor de α que torna a matriz $[P]$ singular. Pois, utilizando um valor inferior a este determinado, estaremos garantindo que a matriz $[P]$ é definida positiva, uma vez que a matriz $[C]$ é definida positiva e a matriz $[K]$ é na pior das hipóteses singular.

Segundo estudos realizados por Fried (1979), o menor autovalor encontrado para uma matriz global é maior que o menor autovalor encontrado nas matrizes dos elementos.

Então, vamos definir a matriz do elemento $[P^{(e)}]$ dada por:

$$[P^{(e)}] = [C^{(e)}] - \alpha[K^{(e)}] \quad (F.12)$$

O autovalor $\beta^{(e)}$ da matriz $[P^{(e)}]$ satisfaz a equação (F.14):

$$\det([P^{(e)}] - \beta^{(e)}[I]) = 0. \quad (F.14)$$

Uma vez que estamos procurando encontrar uma matriz $[P^{(e)}]$ singular, vamos fixar o valor de $\beta^{(e)} = 0$. Assim a equação (F.14) é escrita como:

$$\det([P^{(e)}]) = 0. \quad (F.15)$$

Substituindo a equação (F.12) em (F.15) obtemos:

$$\det([C^{(e)}] - \alpha[K^{(e)}]) = 0. \quad (F.16)$$

O desenvolvimento da equação (F.16) gera um polinômio, cujo grau dependerá do tipo do elemento. A solução desta equação nos dará o valor de α procurado.

Finalmente, o critério para evitar as oscilações numéricas compreende em escolher o passo de tempo que satisfaz a equação (F.17)

$$\Delta t \leq \frac{\alpha}{1 - \Theta}, \quad (\text{F.17})$$

na qual o valor de α a ser adotado deverá ser o menor real positivo, dentre todos os valores de α encontrados em todos os elementos da malha.

F.4 - Nomenclatura

Símbolos latinos

t tempo

Matrizes e vetores

[A] matriz definida no texto

[C] matriz capacitância

{F} vetor força

{F*} vetor definido no texto

[K] matriz rigidez

[P] matriz definida no texto

{Φ} vetor com os valores nodais da função escalar

{Φ̇} vetor com os valores nodais da derivada temporal da função escalar

Símbolos gregos

α parâmetro definido no texto

β autovalor

Δ intervalo

φ função escalar

Φ valor nodal da função escalar

Θ parâmetro da equação

Sub-índices

n-1 instante no tempo (atrás)

n instante no tempo (à frente)

Sobre-índice

- (e) referente à matriz ou vetor do elemento

DETERMINAÇÃO DO PASSO DE TEMPO

6.1 - Introdução

Segundo alguns autores (por exemplo, [1] e [2]) a estabilidade numérica de um método de diferenças finitas para a equação de calor é dada por

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha} \quad (6.1)$$

onde α é o maior valor real positivo que aparece no denominador

$$\det(I - \alpha K) = 0 \quad (6.2)$$

e as matrizes I e K são formadas a partir dos coeficientes da equação

6.2 - Solução

Na simulação tridimensional temos

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Apêndice G

DETERMINAÇÃO DO PASSO DE TEMPO

G.1 - Introdução

Segundo estudos realizados por Hildebrand(1965), Myers(1971), Fried(1979) e Segerlind(1984), e conforme apresentado no apêndice F, as oscilações numéricas nos problemas de elementos finitos são evitadas quando:

$$\Delta t \leq \frac{\alpha}{1 - \Theta}, \quad (\text{G.1})$$

onde α é o menor valor real e positivo que satisfaz a equação

$$\det ([C^{(e)}] - \alpha [K^{(e)}]) = 0 \quad (\text{G.2})$$

e as matrizes $[C^{(e)}]$ e $[K^{(e)}]$ são correspondentes ao elemento mais crítico da malha.

G.2 - Solução

Na formulação fragmentada temos:

$$[C^{(e)}] = \frac{A\lambda}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{G.3})$$

A matriz $K^{(e)}$ é simétrica e é dada por:

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}. \quad (G.4)$$

Calculando o determinante da equação (G.2), encontramos a seguinte expressão polinomial do terceiro grau:

$$\xi_1 \alpha^3 + \xi_2 \alpha^2 + \xi_3 \alpha + \xi_4 = 0, \quad (G.5)$$

onde:

$$\xi_1 = -k_{11}k_{22}k_{33} + k_{11}k_{23}^2 + k_{12}^2k_{33} - 2k_{12}k_{13}k_{23} + k_{13}^2k_{22}, \quad (G.6a)$$

$$\xi_2 = \frac{\Lambda \lambda}{3} (k_{22}k_{33} - k_{23}^2 + k_{11}k_{33} + k_{11}k_{22} - k_{12}^2 - k_{13}^2), \quad (G.6b)$$

$$\xi_3 = -\left(\frac{\Lambda \lambda}{3}\right)^2 (k_{11} + k_{22} + k_{33}), \quad (G.6c)$$

$$\xi_4 = \left(\frac{\Lambda \lambda}{3}\right)^3. \quad (G.6d)$$

A equação (G.5) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\alpha^3 + a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3 = 0, \quad (G.7)$$

onde:

$$a_1 = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad a_2 = \frac{\xi_3}{\xi_1}, \quad a_3 = \frac{\xi_4}{\xi_1}. \quad (G.8)$$

A equação (G.7) possui 3 raízes, que podem ser calculadas através das equações (G.9), (G.10) e (G.11) [Spiegel, M. R., (1992)].

$$\alpha_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1, \quad (\text{G.9})$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T), \quad (\text{G.10})$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T), \quad (\text{G.11})$$

onde:

$$S = [R + (Q^3 + R^2)]^{1/3}, \quad (\text{G.12})$$

$$T = [R - (Q^3 + R^2)]^{1/3}, \quad (\text{G.13})$$

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}, \quad (\text{G.14})$$

$$R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}. \quad (\text{G.15})$$

G.3 - Nomenclatura

Símbolos latinos

a	parâmetro da equação
A	área do elemento triangular
Q	parâmetro da equação
R	parâmetro da equação
S	parâmetro da equação
t	tempo
T	parâmetro da equação

Matrizes

[C]	matriz capacitância
[K]	matriz rigidez

Símbolos gregos

α	raiz da equação
Δ	intervalo
λ	parâmetro da equação
Θ	parâmetro da equação (definido conforme o esquema de diferenças finitas)
ξ	parâmetro da equação

Sobre-índice

(e)	referente à matriz ou vetor ao elemento
-----	---

Apêndice H

NÚMEROS ADIMENSIONAIS

Nas definições dos números adimensionais, dadas a seguir, as figuras H.1.a e H.1.b são utilizadas para apresentar parte da nomenclatura empregada.

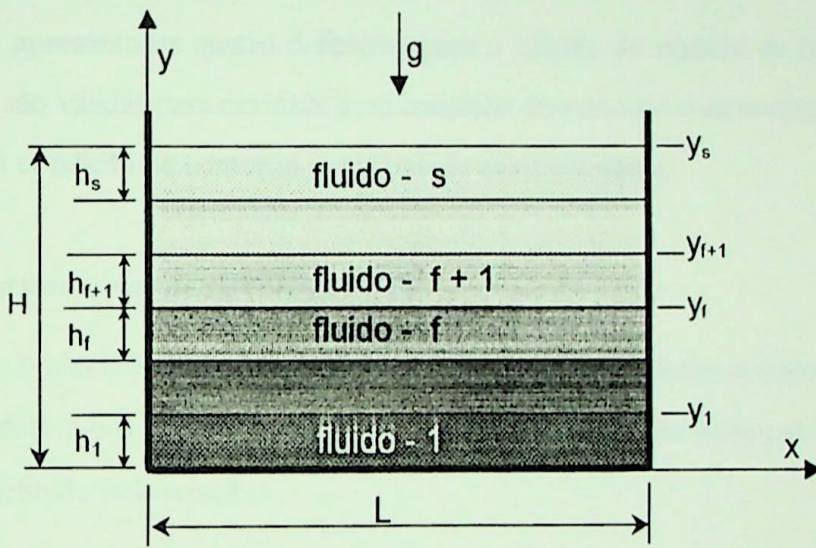


Figura H.1.a – Variáveis dimensionais

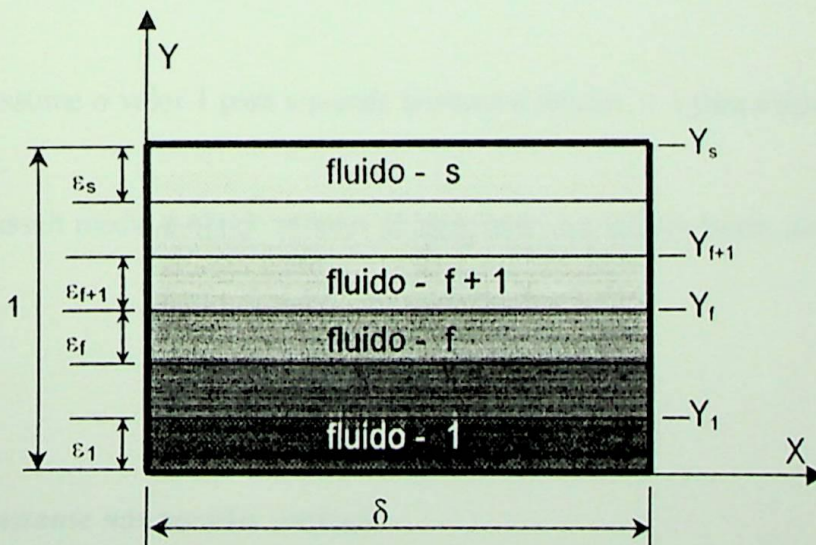


Figura H.1.b – Variáveis adimensionais

H.1 - Número de Nusselt

A taxa de transferência de calor por convecção na cavidade é avaliada através do número de Nusselt. O número de Nusselt relaciona a transferência de calor por convecção e condução.

Os valores obtidos para o número de Nusselt dependem da forma como foi definido o cálculo do mesmo. Os resultados encontrados para o número de Nusselt na cavidade com condição de contorno de temperatura constante não devem ser comparados com aqueles obtidos na cavidade com condição de contorno de fluxo de calor constante, devido à diferença de adimensionalização entre ambos.

A seguir são apresentadas quatro definições para o cálculo do número de Nusselt. As duas primeiras definições são válidas para cavidade com condição de contorno com temperatura constante e as outras duas para condição de contorno com fluxo de calor constante.

- *Temperatura constante nas paredes horizontais*

O número de Nusselt local ao longo das paredes horizontais inferior e superior (ou entre a parede horizontal inferior e a superfície do fluido s), com condição de contorno de temperatura constante pode ser definido pela relação:

$$\text{Nu}'_{L(x)} = \frac{\partial \theta_f}{\partial Y}, \quad (\text{H.1})$$

onde o sub-índice f assume o valor 1 para a parede horizontal inferior, e s para a parede superior ou superfície do fluido s .

O número Nusselt médio é obtido através da integração dos valores locais, sendo dado por:

$$\text{Nu}' = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \text{Nu}'_{L(x)} dX. \quad (\text{H.2})$$

- *Temperatura constante nas paredes verticais*

O número de Nusselt local ao longo das paredes verticais, esquerda e direita, com condição de contorno de temperatura constante pode ser definido pela relação:

$$\text{Nu}'_{L(Y)} = \frac{\partial \theta_r}{\partial X}, \quad (\text{H.3})$$

e o número Nusselt médio é obtido através da integração dos valores locais, sendo dado por:

$$\text{Nu}' = \int_0^1 \text{Nu}'_{L(Y)} dY. \quad (\text{H.4})$$

• *Fluxo de calor constante nas paredes horizontais*

O número de Nusselt local ao longo das paredes horizontais, inferior e superior (ou entre a parede horizontal inferior e a superfície do fluido s), pode ser definido pela relação:

$$\text{Nu}''_{L(X)} = \frac{\Delta \theta^*}{\Delta \theta_{(X)}}, \quad (\text{H.5})$$

onde $\Delta \theta^*$ é a diferença de temperatura adimensional entre as paredes horizontais inferior e superior (ou entre a parede horizontal inferior e a superfície do fluido s), no regime de condução pura; e $\Delta \theta_{(X)}$ é a diferença de temperatura adimensional, encontrada entre as paredes horizontais inferior e superior (ou entre a parede horizontal inferior e a superfície do fluido s), em cada posição ao longo da direção (X), no regime de convecção.

No regime de condução pura, temos que o fluxo de calor, através de camada de fluido, é dado por:

$$q_r^* = q. \quad (\text{H.6})$$

A Eq. (H.6) pode ser reescrita como:

$$\kappa_r \frac{\Delta T_r^*}{h_r} = \frac{\kappa_f \Delta T''}{H}, \quad (\text{H.7})$$

onde ΔT_r^* é a diferença de temperatura dimensional em cada camada de fluido no regime de condução pura.

Agrupando os termos da Eq. (H.7), obtemos :

$$\frac{\Delta T_r^*}{\Delta T''} = \frac{\kappa_l h_r}{\kappa_r H}, \quad (\text{H.8})$$

que é reescrita para nos dar o valor da diferença de temperatura adimensional ($\Delta\theta_r^*$) em cada camada de fluido no regime de condução pura:

$$\Delta\theta_r^* = \frac{\varepsilon_r}{\bar{\kappa}_r}. \quad (\text{H.9})$$

A diferença de temperatura $\Delta\theta^*$ é dada por:

$$\Delta\theta^* = \sum_{r=1}^s \Delta\theta_r^* = \sum_{r=1}^s \left(\frac{\varepsilon_r}{\bar{\kappa}_r} \right). \quad (\text{H.10})$$

O número de Nusselt médio é obtido através da integração dos valores locais, sendo dado por:

$$\text{Nu}'' = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \text{Nu}_{L(X)} dX. \quad (\text{H.11})$$

- ***Fluxo de calor constante nas paredes verticais***

O número de Nusselt local ao longo das paredes verticais pode ser definido pela relação:

$$\text{Nu}_{L(Y)}'' = \frac{\Delta\theta_r^{**}}{\Delta\theta_{(Y)}}, \quad (\text{H.12})$$

onde $\Delta\theta_r^{**}$ é a diferença de temperatura adimensional entre as paredes verticais no regime de condução pura; e $\Delta\theta_{(Y)}$ é a diferença de temperatura adimensional, encontrada entre as paredes verticais, em cada posição ao longo da direção (Y), no regime de convecção.

No regime de condução pura, temos que o fluxo de calor, em cada camada de fluido, é dado por:

$$q_r^{**} = q. \quad (\text{H.13})$$

A Eq. (H.13) pode ser reescrita como:

$$\kappa_r \frac{\Delta T_r^{**}}{L} = \frac{\kappa_l \Delta T''}{H}, \quad (\text{H.14})$$

onde ΔT_r^{**} é a diferença de temperatura dimensional entre as paredes verticais no regime de condução pura.

Agrupando os termos da Eq. (H.14), obtemos:

$$\frac{\Delta T_r^{**}}{\Delta T''} = \frac{\kappa_l L}{\kappa_r H}, \quad (\text{H.15})$$

que é reescrita para nos dar o valor de $\Delta \theta_r^{**}$:

$$\Delta \theta_r^{**} = \frac{\delta}{\bar{\kappa}_r}. \quad (\text{H.16})$$

O número de Nusselt médio é obtido através da integração dos valores locais, sendo dado por:

$$\text{Nu}'' = \int_0^1 \text{Nu}_{l,(Y)} dY. \quad (\text{H.17})$$

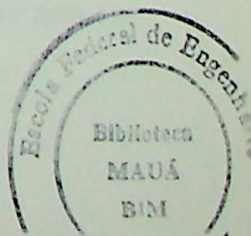
H.2 - Número de Grashof

O número de Grashof expressa a relação entre a força de empuxo e a força viscosa. Para cada camada de fluido, este número é definido pelas equações (H.18) e (H.19):

$$\text{Gr}'_r = \frac{g \beta_r \Delta T' H^3}{\nu_r^2}, \quad (\text{H.18})$$

$$\text{Gr}''_r = \frac{g \beta_r q H^4}{\nu_r^2}, \quad (\text{H.19})$$

onde a equação (H.18) é empregada no caso de condição de contorno com temperatura constante e a equação (H.19) para fluxo de calor constante.



H.3 - Número de Prandtl

O número de Prandtl relaciona a difusividade da quantidade de movimento com a difusividade térmica. Este número, para cada camada de fluido, é dado pela equação:

$$\text{Pr}_r = \frac{\nu_r}{\alpha_r}. \quad (\text{H.20})$$

H.4 - Número de Rayleigh

O número de Rayleigh, para cada camada de fluido, é dado pelas equações:

$$\text{Ra}'_r = \text{Gr}'_r \text{Pr}_r = \frac{g \beta_r \Delta T' H^3}{\alpha_r \nu_r}. \quad (\text{H.21})$$

$$\text{Ra}''_r = \text{Gr}''_r \text{Pr}_r = \frac{g \beta_r q H^4}{\alpha_r \kappa_r \nu_r}. \quad (\text{H.22})$$

onde a equação (H.21) é empregada no caso de condição de contorno com temperatura constante e a equação (H.22) para fluxo de calor constante.

H.5 - Número de Marangoni

A tensão superficial (σ) é uma propriedade física do líquido e depende da temperatura (T), composição química, presença de contaminantes e, no caso de fluidos superpostos, também depende do outro fluido que está em contato.

Uma relação linear entre a tensão e a temperatura pode ser assumida, se a diferença de temperatura ao longo da superfície (ou interface) for pequena. Neste caso, $\partial\sigma/\partial T$ será uma constante.

O valor de $\partial\sigma/\partial T$ é conhecido como gradiente da tensão superficial (ou interfacial) e em geral possui valor negativo.

Quando um gradiente de temperatura $\partial T/\partial x$ é aplicado na interface entre dois líquidos, ou na interface entre um líquido e um gás, ou em uma superfície livre de um líquido, ocorre naquele local uma variação da tensão superficial, dada por $\partial\sigma/\partial x$. Se a força resultante, deste desbalanceamento local de tensão, for maior que a resistência viscosa do fluido, então, ocorrerá um desloca-

mento de fluido, dando origem a um escoamento. Como o valor de $\partial\sigma/\partial T$ em geral é negativo, o escoamento que se origina, devido o efeito termocapilar, se dá no sentido da região de fluido quente para a região de fluido frio. A figura H.2 ilustra as forças atuantes no escoamento termocapilar.

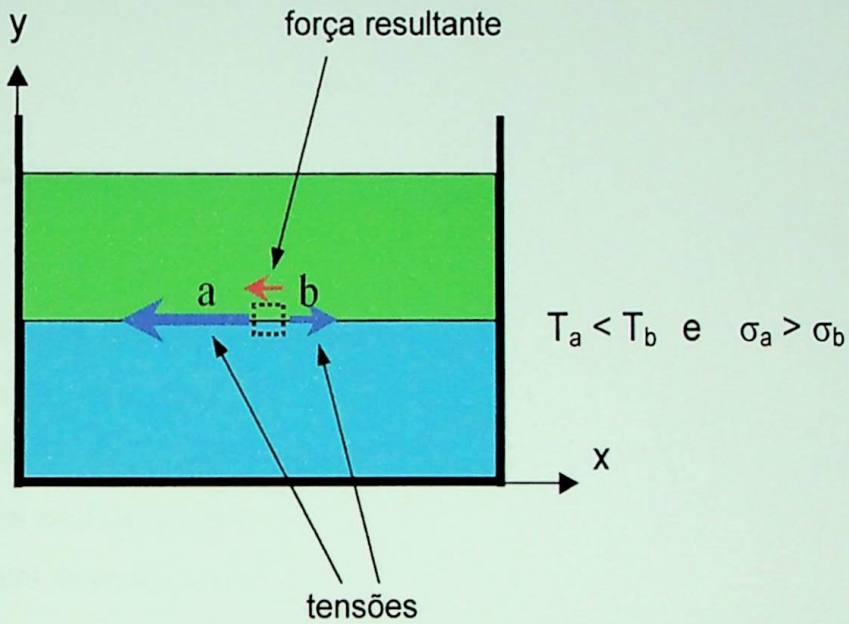


Figura H.2 – Forças atuantes no escoamento termocapilar

Esta forma de transferência de calor é conhecida como convecção termocapilar ou convecção de Marangoni e a intensidade deste tipo de convecção é caracterizada pelo número de Marangoni (Ma).

O número de Marangoni, relaciona as forças de origem termocapilar, causadas pelo desequilíbrio da tensão superficial, com as forças resistência viscosa. Sua definição pode mudar, dependendo das condições de contorno empregadas. Na equação (H.23), temos o número de Marangoni para condição de contorno com temperatura constante, e na equação (H.24) para fluxo de calor constante.

$$Ma'_f = -\gamma_f \frac{H \Delta T'}{\alpha_f \mu_f}, \tag{H.23}$$

$$Ma''_f = -\gamma_f \frac{qH^2}{\alpha_f \kappa_f \mu_f}. \tag{H.24}$$

Nas equações (H.23) e (H.24), γ_r representa o valor do gradiente de tensão superficial (ou interfacial) dependente da temperatura, ou seja:

$$\gamma_r = -\frac{\partial \sigma_r}{\partial T}. \quad (\text{H.25})$$

H.6 - Nomenclatura

Símbolos latinos

g	aceleração gravitacional (m s^{-2})
Gr	número de Grashof
h	espessura da camada de fluido
H	altura total da cavidade (m)
L	largura da cavidade (m)
Ma	número de Marangoni
Nu	número de Nusselt médio
Nu_l	número de Nusselt local
Pr	número de Prandtl
q	fluxo de calor (W m^{-2})
Ra	número de Rayleigh
T	temperatura ($^{\circ}\text{C}$)
x, y	coordenadas (m)
X, Y	coordenadas adimensionais

Símbolos Gregos

α	difusividade térmica ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
β	coeficiente de expansão volumétrica (K^{-1})
δ	largura adimensional da cavidade
ε	espessura adimensional da camada de fluido
γ	gradiente da tensão superficial ou interfacial ($\text{N m}^{-1} \text{K}^{-1}$)
κ	condutividade térmica ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)

μ	viscosidade dinâmica ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$)
ρ	densidade (kg m^{-3})
σ	tensão superficial ou interfacial (N m^{-1})
θ	temperatura adimensional
ν	viscosidade cinemática ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)

Sub-índices

1	primeira camada de fluido
a, b	pontos de referência
f	camada de fluido
s	última camada de fluido
L	valor local
(X)	ao longo da direção de X
(Y)	ao longo da direção de Y

Sobre-índices

*	na direção vertical no regime de condução pura
**	na direção horizontal no regime de condução pura
'	para condição de contorno de temperatura constante
"	para condição de contorno de fluxo de calor constante
-	relação entre a propriedade termo-física do fluido da camada (f) e a do fluido da camada (1)

Apêndice I

CONDIÇÕES DE INTERFACE

I.1 - Introdução

As equações, para as condições de interface entre os fluidos, levam em conta as seguintes considerações e hipóteses simplificadoras:

- a interface permanece plana e indeformável;
- não há vazão de massa através da interface;
- a temperatura, fluxo de calor e balanço da quantidade de movimento são contínuos através da interface.

A figura I.1 mostra o esquema empregado no estudo da interface.

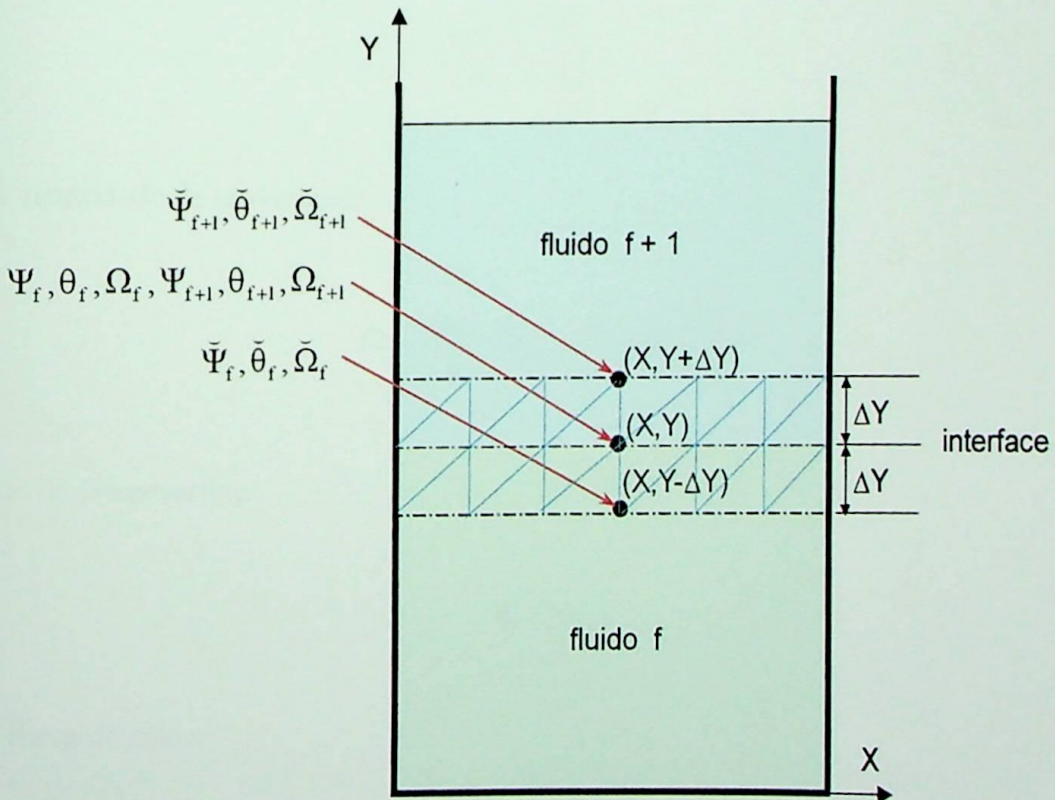


Figura I.1 – Esquema da interface

Nesta figura, $\Psi_r, \theta_r, \Omega_r, \Psi_{r+1}, \theta_{r+1}, \Omega_{r+1}$, representam os valores das distribuições da função corrente, temperatura e vorticidade dos fluidos em contato, em um ponto (X, Y) situado na linha da interface. Os outros dois conjuntos de distribuições $(\tilde{\Psi}_r, \tilde{\theta}_r, \tilde{\Omega}_r)$ e $(\tilde{\Psi}_{r+1}, \tilde{\theta}_{r+1}, \tilde{\Omega}_{r+1})$ representam, respectivamente, os valores dos pontos que distam verticalmente ΔY abaixo e acima da interface.

Mediante as considerações apresentadas, na linha da interface, as equações, em termos das variáveis ψ , Ω e θ , são as seguintes:

interface plana e indeformável:

$$\Psi_r = \Psi_{r+1} = 0 ; \quad (1.1)$$

velocidade vertical nula:

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial X} = \frac{\partial \Psi_{r+1}}{\partial X} = 0 ; \quad (1.2)$$

continuidade da velocidade horizontal:

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} = \frac{\partial \Psi_{r+1}}{\partial Y} ; \quad (1.3)$$

balanço da quantidade de movimento:

$$\Omega_r - \frac{\mu_{r+1}}{\mu_r} \Omega_{r+1} = \frac{\alpha_r}{\alpha_1} \text{Ma}_r \frac{\partial \theta_r}{\partial X} ; \quad (1.4)$$

continuidade da temperatura:

$$\theta_r = \theta_{r+1} ; \quad (1.5)$$

balanço do fluxo de calor:

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial Y} = \frac{\kappa_{r+1}}{\kappa_r} \frac{\partial \theta_{r+1}}{\partial Y} . \quad (1.6)$$

As equações (I.1) e (I.5) estabelecem que as variáveis Ψ e θ são contínuas na interface. Já a equação (I.4) demonstra que, em geral, a vorticidade é descontínua naquela região. Ou seja, um ponto, situado na linha da interface, pode ter dois valores distintos para a vorticidade.

No método de elementos finitos, em cada instante de tempo, cada ponto nodal pode assumir um único valor. Sendo assim, para contornarmos o problema da descontinuidade da vorticidade na interface, nós criamos dois pontos nodais para cada ponto físico da interface.

O método empregado consiste em gerar uma malha para cada camada de fluido e, em seguida, unir as malhas. Ou seja, o domínio do espaço da cavidade é dividido conforme o número de camadas de fluidos, e a região da interface passa a atuar como um contorno comum aos pares de fluidos em contato.

A figura I.2 ilustra esta solução adotada, no estudo de uma cavidade com duas camadas de fluidos.

Com o objetivo de criar dois pontos nodais para o mesmo ponto físico da interface, o domínio do espaço foi dividido. Este método solucionou o problema da vorticidade na interface, mas, por outro lado, fez com que os pares de pontos nodais em contato perdessem a conectividade. Pois, no método de elementos finitos, para realizar a união das malhas, não basta apenas fazer coincidir os pares de pontos nodais da interface.

Assim, para restabelecer a conectividade entre os pares de pontos nodais, coincidentes na linha da interface, são impostas às condições relativas à interface, dadas pelas equações (I.1) à (I.6).

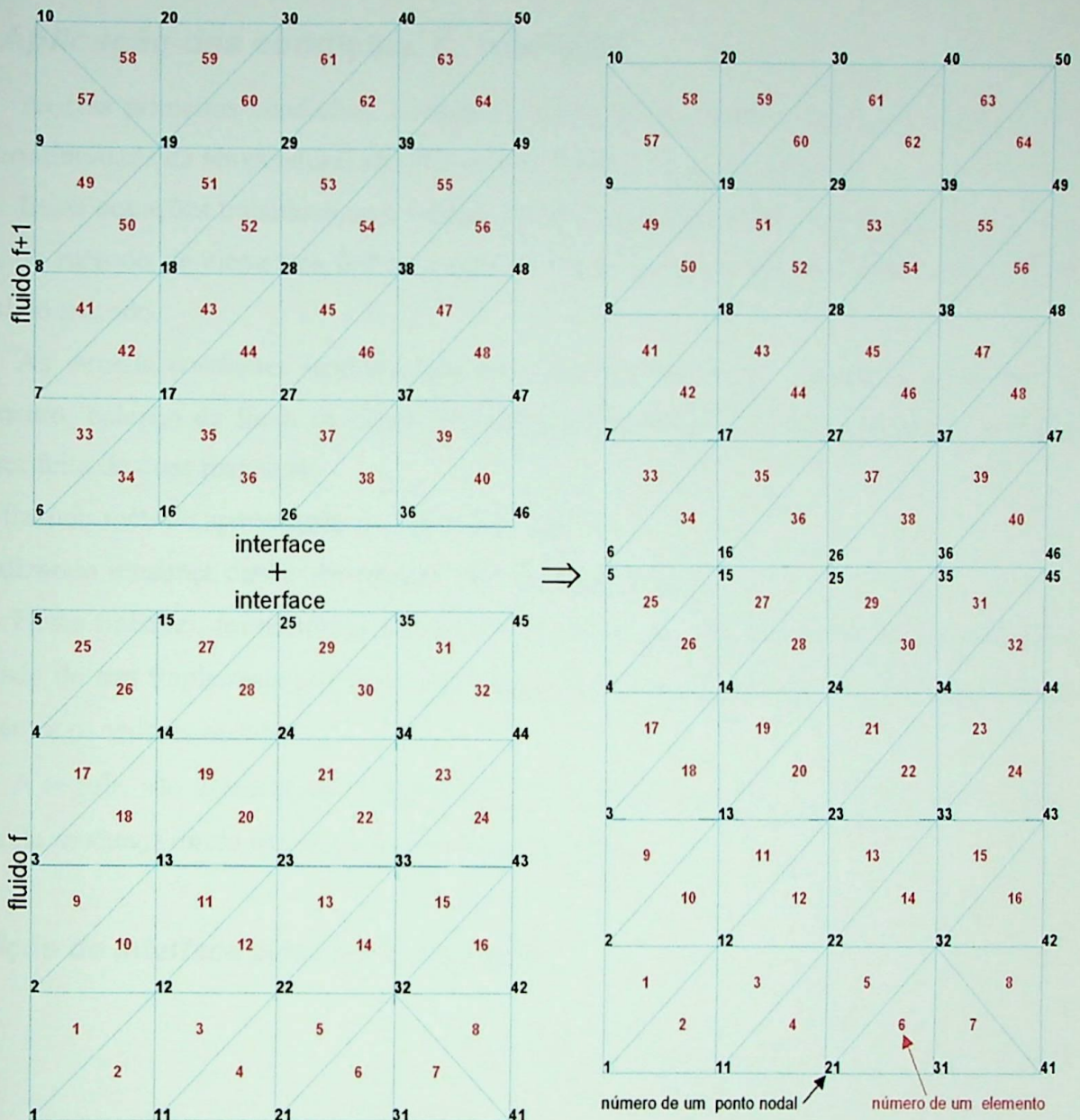


Figura I.2 – Exemplo de discretização de uma cavidade com duas camadas de fluidos

1.2 - Aplicação das condições de interface

As três primeiras condições, a seguir (interface plana e indeformável, velocidade vertical nula, continuidade da temperatura) são impostas da forma como se apresentam.

Estas equações trabalham com valores nodais e derivadas nulas. A imposição de um valor nodal, no método de elementos finitos, é feita de modo direto e a derivada nula é uma condição natural do método.

As demais condições (continuidade da velocidade horizontal, balanço da quantidade de movimento, balanço do fluxo de calor) necessitam ser trabalhadas. A aplicação destas condições pode ser feita de duas maneiras:

- utilizando método apresentado no Apêndice C ou
- realizando mudança direta nas matrizes globais dos sistemas

Neste trabalho, foi escolhida a mudança direta nas matrizes globais dos sistemas, devido à facilidade de sua implementação. Para a aplicação deste método, é necessário obter uma relação linear entre os valores nodais.

A seguir, são apresentadas as condições de interface na forma como podem ser impostas, através da mudança direta nas matrizes globais dos sistemas.

Condição de interface plana e indeformável

$$\Psi_r = \Psi_{r+1} = 0 . \quad (1.7)$$

Condição de velocidade vertical nula

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial X} = \frac{\partial \Psi_{r+1}}{\partial X} = 0 . \quad (1.8)$$

Condição de continuidade da temperatura

$$\theta_r = \theta_{r+1} . \quad (1.9)$$

Condição de continuidade da velocidade horizontal

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} = \frac{\partial \Psi_{r+1}}{\partial Y} . \quad (1.10)$$

Expandindo as variáveis Ψ_r e Ψ_{r+1} em série de Taylor e considerando os termos até segunda ordem, obtemos:

$$\tilde{\Psi}_r = \Psi_r - \Delta Y \frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} + \frac{\Delta Y^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial Y^2}, \quad (I.11)$$

$$\tilde{\Psi}_{r+1} = \Psi_{r+1} + \Delta Y \frac{\partial \Psi_{r+1}}{\partial Y} + \frac{\Delta Y^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi_{r+1}}{\partial Y^2}. \quad (I.12)$$

Na linha da interface, no lado inferior e superior, temos que:

- a função corrente, conforme a equação (I.7) é dada por:

$$\Psi_r = 0 \quad \text{e} \quad (I.13)$$

$$\Psi_{r+1} = 0; \quad (I.14)$$

- e a vorticidade é dada por:

$$\Omega_r = -\frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial Y^2} \quad \text{e} \quad (I.15)$$

$$\Omega_{r+1} = -\frac{\partial^2 \Psi_{r+1}}{\partial Y^2}. \quad (I.16)$$

Substituindo as equações (I.13), (I.14), (I.15) e (I.16) nas equações (I.11) e (I.12), e rearranjando-as, obtemos:

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} = -\frac{1}{\Delta Y} \left(\tilde{\Psi}_r + \frac{\Delta Y^2}{2} \Omega_r \right), \quad (I.16)$$

$$\frac{\partial \Psi_{r+1}}{\partial Y} = \frac{1}{\Delta Y} \left(\tilde{\Psi}_{r+1} + \frac{\Delta Y^2}{2} \Omega_{r+1} \right). \quad (I.17)$$

Aplicando as equações (I.16) e (I.17) em (I.10), encontramos:

$$\Omega_r + \Omega_{r+1} = -\frac{2}{\Delta Y^2} (\tilde{\Psi}_r + \tilde{\Psi}_{r+1}). \quad (I.18)$$

A equação (I.18) estabelece a continuidade da velocidade horizontal na linha da interface. Esta equação encontra-se em função dos valores nodais da vorticidade e função corrente, permitindo a sua implementação de forma direta no método de elementos finitos.

Condição de continuidade da quantidade de movimento

$$\Omega_r - \frac{\mu_{f+1}}{\mu_f} \Omega_{r+1} = \frac{\alpha_f}{\alpha_1} Ma_f \frac{\partial \theta_r}{\partial X}. \tag{I.19}$$

Para realizar a imposição da condição de interface, referente ao balanço de quantidade de movimento, necessitamos deixar a derivada $\frac{\partial \theta_r}{\partial X}$ da equação (I.19) em termos de valores nodais da temperatura θ_r . A figura I.3 ilustra o esquema utilizado.

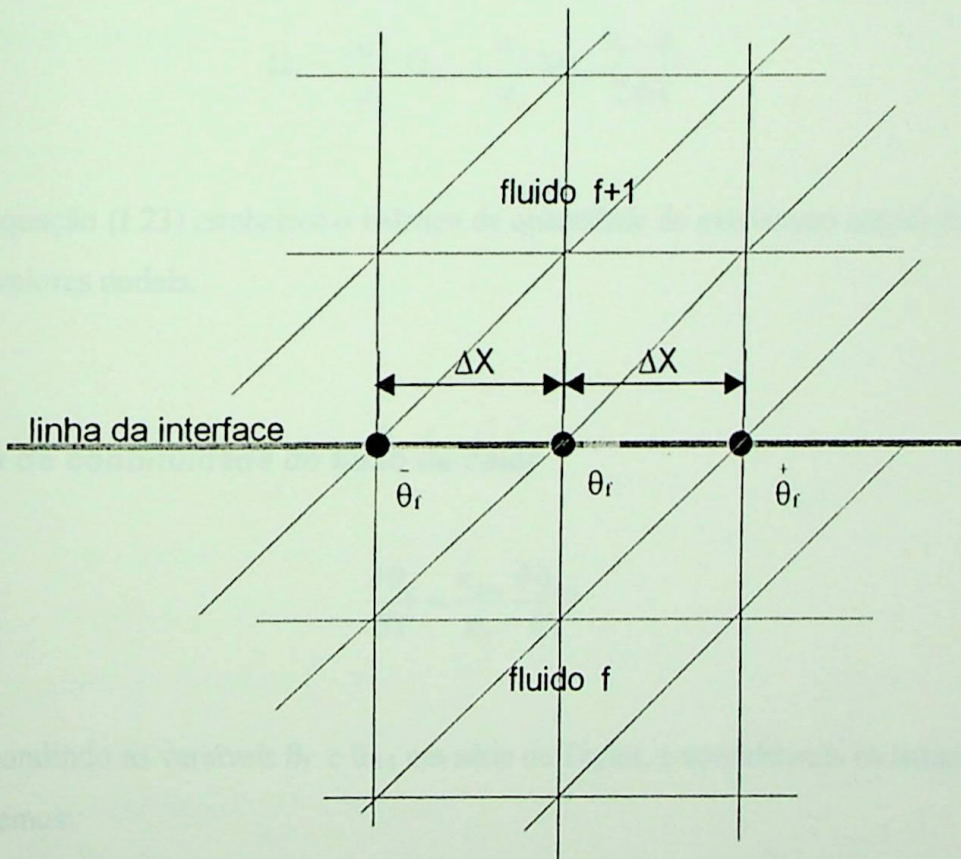


Figura I.3 - Esquema dos pontos nodais

Expandindo a variável θ_r , para frente e para trás, em série de Taylor e considerando os termos até primeira ordem, obtemos, respectivamente:

$$\theta_r^+ = \theta_r + \Delta X \frac{\partial \theta_r}{\partial X} \quad e \quad (1.20)$$

$$\theta_r^- = \theta_r - \Delta X \frac{\partial \theta_r}{\partial X}. \quad (1.21)$$

Subtraindo a equação (I.21) da (I.20) e rearranjando os termos, encontramos:

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial X} = \frac{\theta_r^+ - \theta_r^-}{2 \Delta X}. \quad (1.22)$$

Substituindo a equação (I.22) na equação (I.19), obtemos:

$$\Omega_r - \frac{\mu_{r+1}}{\mu_r} \Omega_{r+1} = \frac{\alpha_r}{\alpha_l} \text{Ma}_r \frac{\theta_r^+ - \theta_r^-}{2 \Delta X}. \quad (1.23)$$

A equação (I.23) estabelece o balanço da quantidade de movimento através da interface, em termos de valores nodais.

Condição de continuidade do fluxo de calor

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial Y} = \frac{\kappa_{r+1}}{\kappa_r} \frac{\partial \theta_{r+1}}{\partial Y}. \quad (1.24)$$

Expandindo as variáveis θ_r e θ_{r+1} em série de Taylor, e considerando os termos até primeira ordem, obtemos:

$$\tilde{\theta}_r = \theta_r - \Delta Y \frac{\partial \theta_r}{\partial Y}, \quad (1.25)$$

$$\tilde{\theta}_{r+1} = \theta_{r+1} + \Delta Y \frac{\partial \theta_{r+1}}{\partial Y}. \quad (1.26)$$

Explicitando as derivadas, nas equações (1.25) e (1.26), e substituindo-as na equação (1.24), resulta:

$$\frac{\theta_f - \check{\theta}_f}{\Delta Y} = \frac{\kappa_{f+1}}{\kappa_f} \frac{\check{\theta}_{f+1} - \theta_{f+1}}{\Delta Y}. \quad (1.27)$$

Na equação (1.27), aplicando a equação (1.9) e rearranjando os termos, encontramos:

$$\theta_f = \frac{\kappa_f}{\kappa_f + \kappa_{f+1}} \check{\theta}_f + \frac{\kappa_{f+1}}{\kappa_f + \kappa_{f+1}} \check{\theta}_{f+1}. \quad (1.28)$$

A equação (1.28) estabelece o balanço do fluxo de calor através da interface, em termos de valores nodais da temperatura.

1.3 – Nomenclatura

Símbolos latinos

Ma	número de Marangoni
X, Y	coordenadas adimensionais

Símbolos gregos

α	difusividade térmica ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
κ	condutividade térmica ($\text{W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$)
μ	viscosidade dinâmica ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$)
θ	temperatura adimensional
Ω	vorticidade adimensional
Ψ	função corrente adimensional

Sub-índices

1	primeira camada de fluido
f	camada de fluido
f+1	camada de fluido situada acima da camada f

Sobre-índices

- ~ ponto situado acima ou abaixo da interface
- ponto situado à esquerda da referência
- + ponto situado à direita da referência

1.1- Introdução

No capítulo 2, foram apresentadas as condições de interface para os elementos finitos. Algumas condições precisam ser aplicadas a todos os elementos, outras apenas a alguns, outras necessitam de referência. Este capítulo apresenta as condições de interface que não são aplicadas a todos os elementos, mas a alguns elementos de cada elemento finito.

As figuras 1.1 e 1.2 são exemplos de condições de interface para os elementos finitos.



Figura 1.1 - Condições de interface para os elementos finitos.

Apêndice J

CONDIÇÕES DE CONTORNO

J.1- Introdução

No capítulo 2, foram apresentadas as condições de contorno empregadas nas cavidades estudadas. Algumas condições permitem sua aplicação de forma direta, tal como aparecem nas equações, outras necessitam ser trabalhadas para sua implementação. Neste apêndice, as condições de contorno que não são aplicadas diretamente são modificadas, visando a sua implementação no método de elementos finitos.

As figuras J.1.a e J.1.b são utilizadas para mostrar parte da nomenclatura empregada neste apêndice.

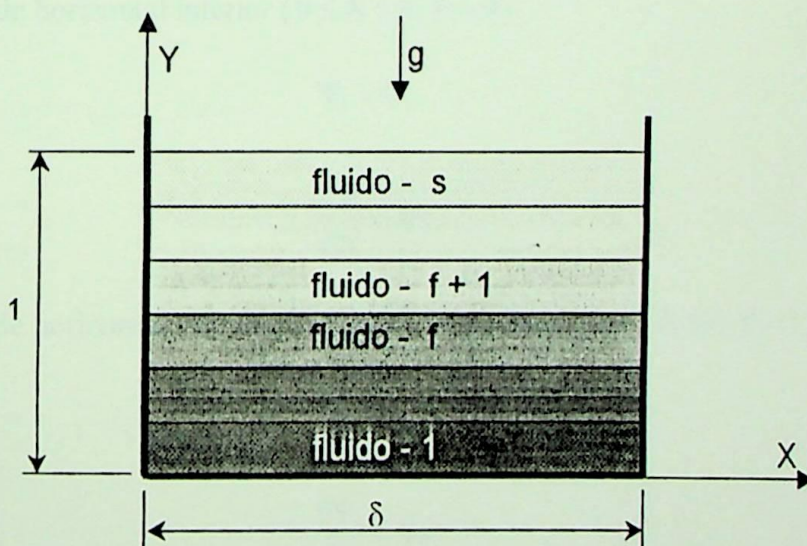


Figura J.1.a – Cavidade aberta com fluidos imiscíveis superpostos

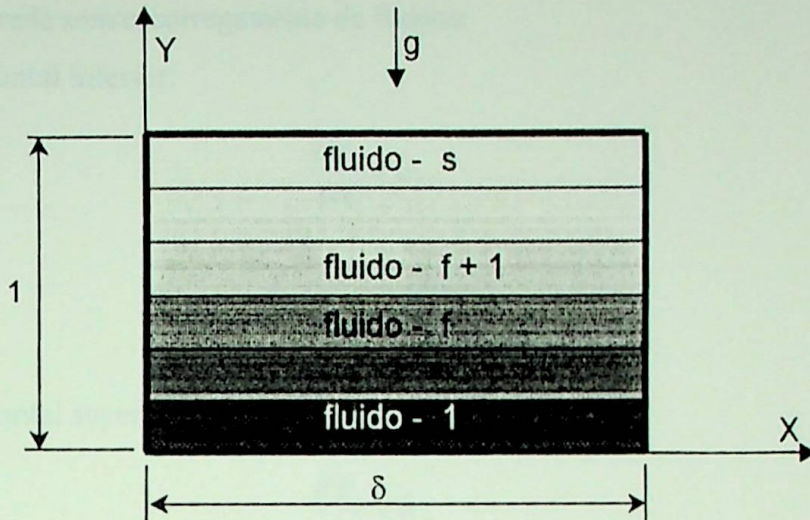


Figura J.1.b – Cavidade fechada com fluidos imiscíveis superpostos

J.2- Condições de contorno

As condições de contorno, tal como se apresentam no capítulo 2, são as seguinte:

a) Condição de ausência de fluxo de massa:

- através da parede horizontal inferior ($0 \leq X \leq \delta, Y = 0$):

$$\Psi_1 = 0, \tag{* (J.1)}$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial X} = 0; \tag{* (J.2)}$$

- através da parede horizontal superior ou superfície do fluido s ($0 \leq X \leq \delta, Y = 1$):

$$\Psi_s = 0, \tag{* (J.3)}$$

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial X} = 0; \tag{* (J.4)}$$

- através das paredes verticais, esquerda ($X = 0, 0 \leq Y \leq 1$) e direita ($X = \delta, 0 \leq Y \leq 1$):

$$\Psi_r = 0, \tag{* (J.5)}$$

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial Y} = 0. \tag{* (J.6)}$$

b) Condição de parede sem escorregamento de fluidos:

- na parede horizontal inferior:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} = 0, \quad *(J.7)$$

$$\Omega_1 = -\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial Y^2}; \quad (J.8)$$

- na parede horizontal superior:

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial Y} = 0, \quad *(J.9)$$

$$\Omega_s = -\frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial Y^2}; \quad (J.10)$$

- nas paredes verticais, esquerda e direita:

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial X} = 0, \quad *(J.11)$$

$$\Omega_r = -\frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial X^2}. \quad (J.12)$$

c) Condição de superfície livre do fluido

$$\Omega_s = \frac{\alpha_s}{\alpha_1} Ma_s \frac{\partial \theta_s}{\partial X}, \quad (J.13)$$

onde Ma_s representa o número de Marangoni na superfície do fluido s.

Condição de isolamento térmico:

- na parede horizontal inferior:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Y} = 0; \quad *(J.14)$$

- na parede horizontal superior ou na superfície do fluido s:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial Y} = 0; \quad *(J.15)$$

- nas paredes verticais, esquerda e direita:

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial X} = 0. \quad *(J.16)$$

- d) Condição de parede com temperatura constante:

- na parede fria:

$$\theta_r = -0,5; \quad *(J.17)$$

- na parede quente:

$$\theta_r = 0,5. \quad *(J.18)$$

- e) Condição de fluxo de calor constante:

- nas parede horizontal inferior:

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial Y} = -1; \quad (J.19)$$

- na parede horizontal superior:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial Y} = -\frac{\kappa_l}{\kappa_s}; \quad (J.20)$$

- nas paredes verticais, esquerda e direita:

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial X} = -\frac{\kappa_l}{\kappa_r}. \quad (J.21)$$

J.3- Aplicação das condições de contorno

Nas equações acima, aquelas marcadas com (*) são aplicadas na forma como se apresentam. Estas equações trabalham com valores nodais e derivadas nulas. A imposição de um valor nodal, no método de elementos finitos, é feita de modo direto e a derivada nula é uma condição natural do método.

De modo semelhante ao apresentado no apêndice I, as condições que não podem ser aplicadas, na forma em que se encontram, são trabalhadas, utilizando o seu desenvolvimento em série de Taylor.

A seguir, são apresentadas todas as condições de contorno, já na forma a serem implementadas.

a) Condição de ausência de fluxo de massa:

– através da parede horizontal inferior ($0 \leq X \leq \delta, Y = 0$):

$$\Psi_1 = 0, \tag{J.22}$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial X} = 0; \tag{J.23}$$

– através da parede horizontal superior ou superfície do fluido n ($0 \leq X \leq \delta, Y = 1$):

$$\Psi_s = 0, \tag{J.24}$$

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial X} = 0; \tag{J.25}$$

– através das paredes verticais, esquerda ($X = 0, 0 \leq Y \leq 1$) e direita ($X = \delta, 0 \leq Y \leq 1$):

$$\Psi_f = 0, \tag{J.26}$$

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial Y} = 0. \tag{J.27}$$

b) Condição de parede sem escorregamento de fluidos:

– na parede horizontal inferior (figura J.2):

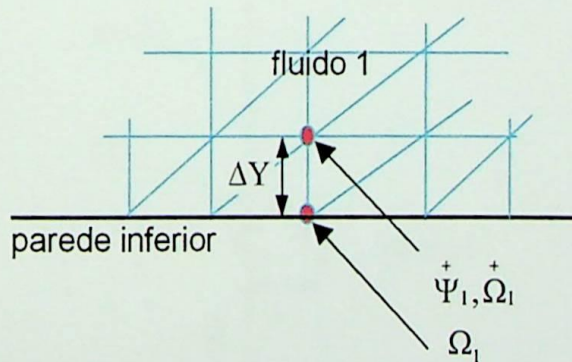


Figura J.2 – Esquema dos pontos nodais na parede inferior

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} = 0, \tag{J.28}$$

$$\Omega_1 = -3 \frac{\dot{\Psi}_1}{\Delta Y^2} - \frac{\dot{\Omega}_1}{2}; \tag{J.29}$$

- na parede horizontal superior (figura J.3):

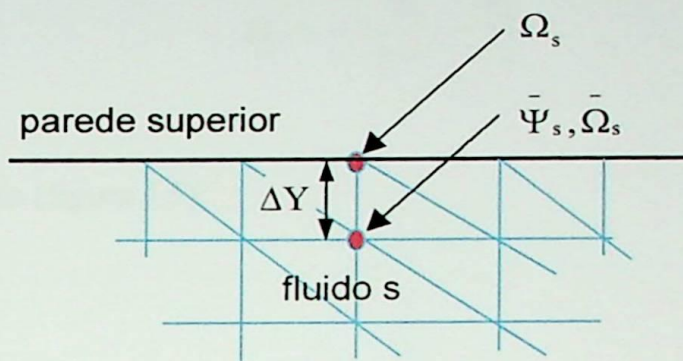


Figura J.3 – Esquema dos pontos nodais na parede superior

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial Y} = 0, \tag{J.30}$$

$$\Omega_s = -3 \frac{\bar{\Psi}_s}{\Delta Y^2} - \frac{\bar{\Omega}_s}{2}; \tag{J.31}$$

- na parede vertical esquerda (figura J.4):

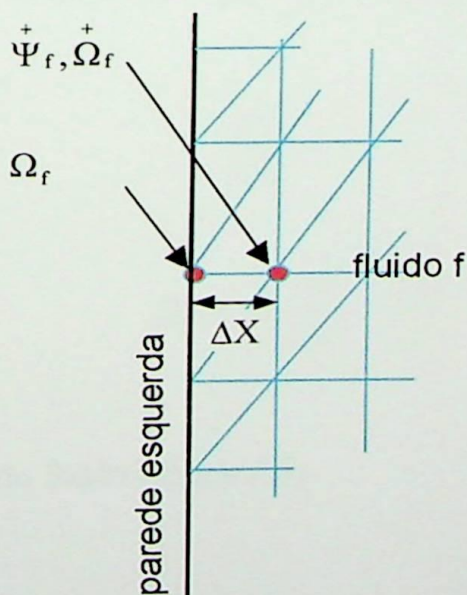


Figura J.4 – Esquema dos pontos nodais na parede esquerda

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial X} = 0, \tag{J.32}$$

$$\Omega_f = -3 \frac{\bar{\Psi}_f}{\Delta X^2} - \frac{\bar{\Omega}_f}{2}; \tag{J.33}$$

– na parede vertical direita (figura J.5):

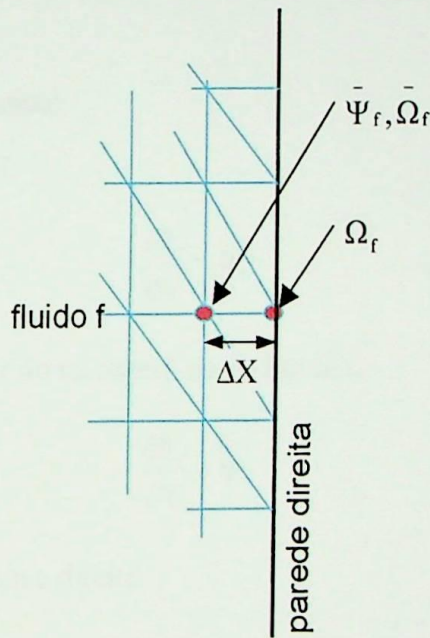


Figura J.5 – Esquema dos pontos nodais na parede direita

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial X} = 0, \tag{J.34}$$

$$\Omega_f = -3 \frac{\bar{\Psi}_f}{\Delta X^2} - \frac{\bar{\Omega}_f}{2}. \tag{J.35}$$

c) Condição de superfície livre do fluido (figura J.6):

$$\Omega_s = \frac{\alpha_s}{\alpha_1} Ma_s \frac{\theta_s^+ - \theta_s^-}{2 \Delta X}. \tag{J.36}$$

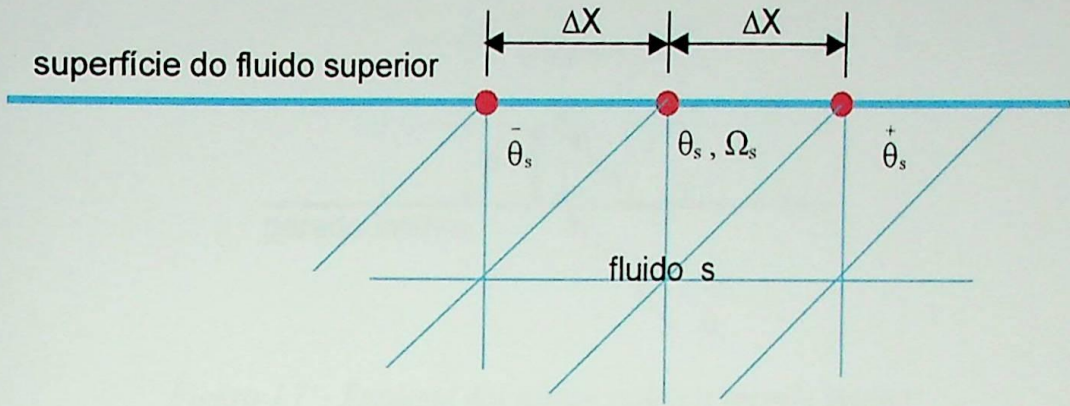


Figura J.6 – Esquema dos pontos nodais na superfície do fluido superior

d) Condição de isolamento térmico:

– na parede horizontal inferior:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Y} = 0; \tag{J.37}$$

– na parede horizontal superior ou na superfície do fluido s:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial Y} = 0; \tag{J.38}$$

– nas paredes verticais, esquerda e direita:

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial X} = 0. \tag{J.39}$$

e) Condição de parede com temperatura constante:

– na parede fria:

$$\theta_f = -0,5; \tag{J.40}$$

– na parede quente:

$$\theta_f = 0,5. \tag{J.41}$$

f) Condição de fluxo de calor constante:

– nas parede horizontal inferior (figura J.7):

$$\theta_1 = \theta_1^+ + \Delta Y; \tag{J.42}$$

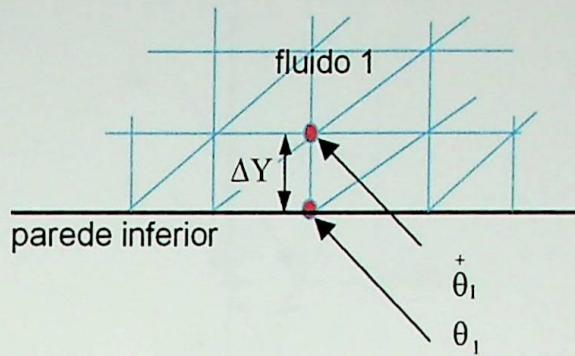


Figura J.7 – Esquema dos pontos nodais na parede inferior

– na parede horizontal superior (figura J.8):

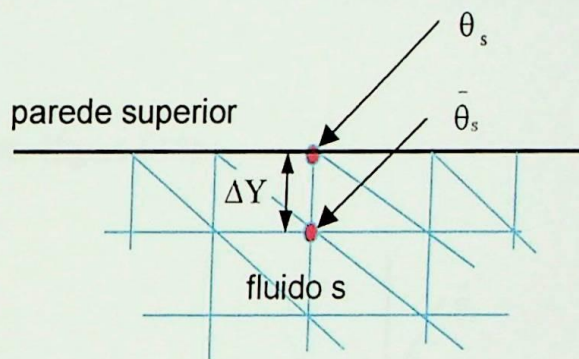


Figura J.8 – Esquema dos pontos nodais na parede inferior

$$\theta_s = \bar{\theta}_s - \Delta Y \frac{\kappa_l}{\kappa_s}; \tag{J.43}$$

– na parede vertical esquerda (figura J.9):

$$\theta_f = \theta_f^+ + \frac{\kappa_l}{\kappa_f} \Delta X; \tag{J.44}$$

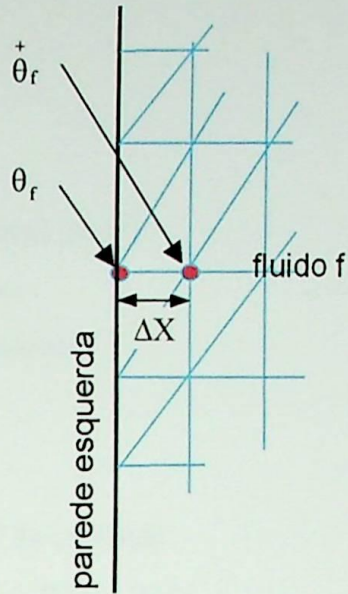


Figura J.9 – Esquema dos pontos nodais na parede esquerda

– na parede vertical direita (figura J.10):

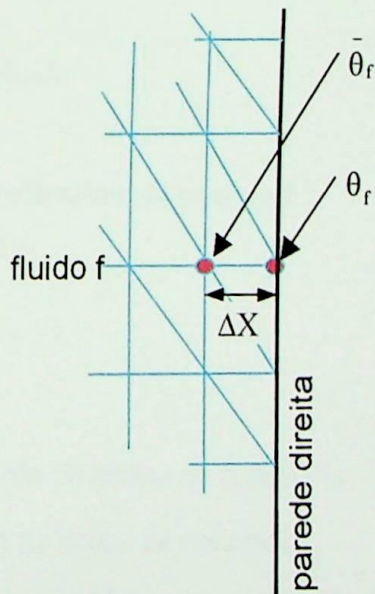


Figura J.10 – Esquema dos pontos nodais na parede direita

$$\theta_f = \bar{\theta}_f - \frac{\kappa_l}{\kappa_f} \Delta X. \tag{J.45}$$

J.4 – Nomenclatura

Símbolos latinos

g	aceleração gravitacional ($m\ s^{-2}$)
Ma	número de Marangoni
X, Y	coordenadas adimensionais

Símbolos gregos

δ	largura adimensional da cavidade
κ	condutividade térmica ($W\ m^{-1}\ ^\circ C^{-1}$)
θ	temperatura adimensional
Ω	vorticidade adimensional
Ψ	função corrente adimensional

Sub-índices

1	primeira camada de fluido
f	camada de fluido
$f+1$	camada de fluido situada acima da camada f
s	última camada de fluido

Sobre-índices

-	ponto situado à esquerda ou abaixo da referência
+	ponto situado à direita ou acima da referência

Apêndice K

MÉTODO DA FATORIZAÇÃO LU

K.1- Método

As decomposições LU (Lower-Upper) são úteis para solução de sistemas de equações lineares, quando o número de incógnitas é igual ao número de equações e o sistema deve ser resolvido repetidamente com lados direitos diferentes, porque a mesma fatorização LU de $[A]$ é usada para todo o $\{B\}$.

Seja o sistema de equações lineares dado por:

$$[A]\{\Phi\} = \{B\}. \quad (\text{K.1})$$

A matriz $[A]$ pode ser decomposta em uma matriz triangular inferior $[L]$ e outra triangular superior $[U]$, ou seja:

$$[A] = [L][U]. \quad (\text{K.2})$$

Substituindo (K.2) em (K.1) obtemos:

$$([L][U])\{\Phi\} = \{B\}. \quad (\text{K.3})$$

A equação (K.3) pode ser reescrita como:

$$[L]\{V\} = \{B\}, \quad (\text{K.4})$$

onde:

$$[U]\{\Phi\} = \{V\}. \quad (\text{K.5})$$

Na equação (K.4), o vetor $\{V\}$ é facilmente calculado por retro-susbtituição. E uma vez conhecido o vetor $\{V\}$, resolve-se, então, por substituição posterior o sistema dado pela equação (K.5), obtendo-se, finalmente o vetor $\{\Phi\}$.

Um inconveniente da fatorização LU é o fato de a fatorização não existir quando o elemento pivot é zero. Contudo, na prática isto raramente ocorre e o problema pode ser geralmente eliminado reordenando as equações.

Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências Press, W. H., et. al. (1992); Golub, G. H. e Loan, C. F. V. (1996); Bronson, R. (1993).

K.2- Nomenclatura

[A]	matriz quadrada dos coeficientes
{B}	vetor dos termos independentes
[L]	matriz triangular inferior
[U]	matriz triangular superior
{V}	vetor definido no texto
{ Φ }	vetor das incógnitas

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aydemir, N.U. and Sousa, A. C. M. and Venart, J. E. S., (1986), "Transient Laminar Free Convection in Horizontal Cylinders", *Warme- und Stoffbertragung* 20,59-67.
- Bargash, M and Vasseur, P., (1993), "Natural Convection in Shallow Cavity Containing Two Superposed Layers of Immiscible Liquids", *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol.24, pp. 357-373.
- Bronson, R., (1993), "Matrizes", Editora McGraw-Hill de Portugal, Lisboa.
- Chang, K. S. and Won, Y. H. and Cho, C. H., (1983), "Patterns of Natural Convection Around a Square Cylinder Placed Concentrically in a Horizontal Circular Cylinder", *Journal of Heat Transfer*, vol.105, no2, pp.273-280.
- Donea, J., (1974), "On the Accuracy of Finite Element Solutions to The Transient Heat-Conduction Equation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 8, pp.103-110.
- Fernandes, S., (1992), "Análise Teórica da Convecção Natural em Cavidades Retangulares Inclínadas com Partições Diatérmicas Ligadas à Superfície Fria", *Dissertação de Mestrado*, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Itajubá, Minas Gerais.
- Figueredo, J. R. and Ganzarolli, M. M. and Almeida, P. I. F., (1986), "Convecção Natural em Cavidade Retangular - Solução Numérica", *II congresso Latinoamericano de Transferência de Calor e Matéria*, pp. 62-73.
- Fried, I., (1979), "Numerical Solution of Differential Equations", Academic Press, New York.
- Golub, G. H. and Loan. C.F.V., (1996) "Matrix Computation", 3rd Edition, The Johns Hopkins Press Ltd., London.

- Guimarães, P. M., (1992), "Estudo Conjugado de Transferência de Calor por convecção Natural em Cavidades Retangulares com Condução na Partição e nas Paredes Laterais", Dissertação de Mestrado, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Itajubá, Minas Gerais.
- Hildebrand, F. B., (1965), "Methods of Applied Mathematics", 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- Kaviany, M., (1984), "Effect of a Protuberance on Thermal Convection in a Square Cavity", Journal of Heat Transfer, vol.106, nº 4, pp.830-834, November.
- Kwun, S. S. and Kehn, T. H. and Lee, T. S., (1982), "Natural Convection in the Annulus Between Horizontal Circular Cylinders with Three Axial Spacers", Journal of Heat Transfer, vol.104, pp.118-124.
- Maadooliat, R., (1983), "Element and Time Step Criteria for Solving Time-Dependent field Problems Using the Finite Element Method", unpublished Ph.D. Dissertation, Michigan State University, East Lansing, Mich.
- Menon, G. J., (1984), "Convecção Natural no Interior de Coletores Solares Concentradores de Parábolas Compostas", Tese de Doutorado, ITA, São José dos Campos.
- Menon, G. J., (1989), "Convecção Natural Transiente no Interior de Cavidade Retangular Inclinada", X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, pp. 257-260.
- Myers, G. E., (1971), "Analytical Methods in Conduction Heat Transfer", McGraw-Hill, New York.
- Nascimento, M. A. R., (1988), "Estudo Teórico de Convecção Natural em Coletores Concentradores com Absorvedor Cilíndrico", Dissertação de Mestrado, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Itajubá, Minas Gerais.
- Oosthuizen, P. H. and Kuhn, D., (1984), "Unsteady Free Convective Flow in a Circular Container Half-filled With a Liquid and Half-filled with a Gas", The Winter Annual Meeting of The ASME, Vol. 39, pp. 1-11.

- Ozoe, H., and Yamamoto, K., and Churchill, S. W., (1975), "Natural Convection in a Inclined Rectangular Channel at Various Aspect Ratios and Angles-Experimental Measurements", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 18, pp. 1425-1431.
- Prakash, A. and Koster, J. N., (1994), "Convection in Multiple Layers of Immiscible Liquids in a Shallow Cavity – I", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 20, No. 2, pp. 383-396.
- Prakash, A. and Koster, J. N., (1996), "Steady Rayleigh-Bénard Convection in a Two-layer system of Immiscible liquids", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 18, pp. 366-373.
- Prakash, A. and Koster, J. N., (1997), "Steady Natural Convection in a Two-layer system of Immiscible liquids", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 40, pp. 2799-2812.
- Press, W. H., et al. (1992), "Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing", 2nd Edition, Cambridge University Press, New York.
- Ribeiro, M. N., (1992), "Estudo da Transferência de Calor por Convecção Mista no Interior de Tubos Horizontais Concêntricos e Excêntricos", Dissertação de Mestrado, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Itajubá, Minas Gerais.
- Segerlind, L. J., (1984), "Applied Finite Element Analysis", 2nd edition, John Wiley and Sons, New York.
- Spiegel, M. R., (1992), "Manual de Fórmulas, Métodos e Tabelas de Matemática", 2^a Edição, Makron, McGraw-Hill, são Paulo.
- Tabarrok, B. and Lin, R. C., (1977), "Finite Element Analysis of Free Convection Flows", *Int. J. Heat Mass Transfer*. - Vol. 20, pp.945-952.
- Villers, D., and Platten, J. K., (1988), "Thermal Convection in Superposed Immiscible Liquid Layers", *Applied Scientific Research*, Vol. 45, pp.145-152.
- Villers, D., and Platten, J. K., (1990), "Influence of Interfacial Tension gradients on Thermal Convection in Two Immiscible Liquid Layers", *Applied Scientific Research*, Vol. 47, pp.177-191.

- Wang, P., Kahawita, R. and Nguyen, D. L., (1994), "Numerical Simulation of Buoyancy-Marangoni Convection in Two Superposed Immiscible Liquid Layers With a Free Surface", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, No. 7, pp. 1111-1122
- Wilkes, J. O. and Churchill, S. W., (1966), "The Finite-Difference Computation of Natural Convection in a Rectangular Enclosure", *A.I.Ch.E. Journal*, Vol.12, No.1, pp.161-166, 91/90.
- Wong, H. H. and Raithby, G. D., (1979), "Improved Finite Difference Methods Based on a Critical Evaluation of the Approximation Errors", *Numerical Heat Transfer*, Vol.2, pp. 139-163.