

TESE

1072

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

ESTUDO DINÂMICO DE CANO DE FUZIL AUTOMÁTICO

Paulo Augusto Capetti Rodrigues Porto

ITAJUBÁ - MG

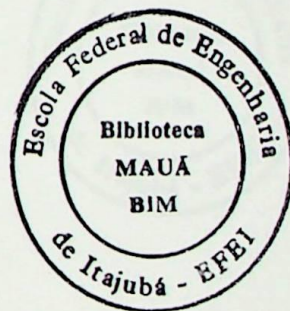
2000

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Estudo Dinâmico de Cano de Fuzil Automático



Autor: Paulo Augusto Capetti Rodrigues Porto

Orientador: Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

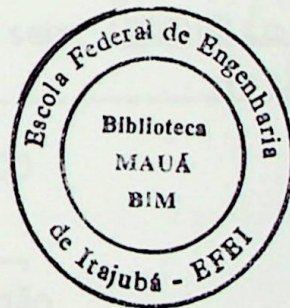
Estudo Dinâmico de Cano de Fuzil Automático

Autor: **Paulo Augusto Capetti Rodrigues Porto**

Orientador: **Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida**

Curso: **Engenharia Mecânica**

Área de Concentração: **Projeto e Fabricação**



Dissertação de Mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Itajubá, 2000

MG - Brasil



Ministério da Educação
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

ANEXO II

FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA

Título da Dissertação: " Estudo Dinâmico de Cano de Fuzil Automático"

Autora: Paulo Augusto Capetti Rodrigues Porto

JULGAMENTO

Examinadores	Conceito	Rubrica
1º	A+	
2º	A+	
3º	A+	
4º	A+	

Resultado Médio ----- A+ ----- Conceito A+, ou seja, Aprovado com distinção
Observações: -----

Itajubá, 22 de novembro 2000

Prof. José Geraldo Trani Brandão
1º Examinador- UNESP-FEG

Prof. Celso Pinto Moraes Pereira
2º Examinador- UNESP-FEG

Prof. André Garcia Chiarello
3º Examinador- EFEI

Prof. Márcio Tadeu de Almeida
4º Examinador - EFEI (Orientador)

Agradecimentos

À Indústria de Material Bélico do Brasil, IMBEL, na pessoa do Superintendente da Fábrica de Itajubá, Engenheiro Alte Saturno Evangelista Zylberberg, pela oportunidade de realizar essa pós graduação e pelas informações e recursos cedidos na realização deste trabalho.

Ao meu Orientador, Professor Doutor Márcio Tadeu de Almeida, por ter aceito a idéia, pela paciência e incentivo .

Ao Engenheiro Everaldo Barros do Instituto de Aeronáutica e Espaço – Centro Técnico Aeroespacial, IAE-CTA, pelas valiosas sugestões e apoio na realização dos ensaios experimentais.

Aos Professores Doutores José Juliano de Lima Júnior e André Garcia Chiarello pela iniciativa de introduzir a cadeira de Análise de Sinais e através dela prover os conhecimentos necessários para uma melhor compreensão da Análise Modal Experimental.

À Escola Federal de Engenharia de Itajubá, representada pelos seus professores, funcionários e colegas de pós graduação pela gratificante convivência durante o período em que tive a honra de pertencer ao seu quadro de alunos.

À minha família pela compreensão e estímulo em todos os momentos e em especial à minha esposa, Lourdes Maria, por ter tornado este trabalho tão importante para ela quanto para mim.

Sumário

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	15
1.1 OBJETIVO	15
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	15
1.3 IMPORTÂNCIA DO ASSUNTO.....	16
CAPÍTULO 2 - CONCEITOS BÁSICOS SOBRE ARMAMENTO LEVE.....	18
2.1 CANO.....	18
2.1.1 Compensadores e Freios de Boca	18
2.1.2 Intensificadores de recuo.....	19
2.1.3 Quebra-chamas	19
2.1.4 Supressores de Ruído	19
2.2 REGIÕES PRINCIPAIS DO CANO	19
2.2.1 Câmara	20
2.2.2 Cone de Forçamento.....	20
2.2.3 Raiamento.....	20
2.3 COMPORTAMENTO DA ARMA DURANTE O TIRO.....	21
2.3.1 Efeito de um único tiro.....	21
2.3.2 Comportamento no tiro automático.....	22
2.4 FENÔMENOS QUE OCORREM DURANTE O TIRO.....	24
2.4.1 Tensões Mecânicas.....	24
2.4.2 Tensões Térmicas.....	25
2.4.3 Vibrações.....	27
2.5 VIBRAÇÕES EM CILINDROS ESPESSOS.....	28
2.5.1 Modos de Vibrações Tridimensionais (3D).....	29
2.5.2 Classificação dos Modos Tridimensionais	29
CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTOS DA ANÁLISE MODAL.....	31
3.1 INTRODUÇÃO	31
3.2 FUNDAMENTOS	31
3.3 SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE.....	33
3.3.1 Domínio do Tempo: Função Resposta ao Impulso	34

3.3.2 Domínio da Freqüência: Função Resposta em Freqüência.....	35
3.3.3 Domínio de Laplace: Função de Transferência	36
3.4 SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE.....	37
3.5 FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA (FRF)	37
3.6 MODOS DE VIBRAÇÃO.....	39
3.6.1 Classificação dos Modos de Vibração.....	39
3.6.2 Constante Modal e Modos	39
CAPÍTULO 4 - ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL	41
4.1 INTRODUÇÃO	41
4.2 CONFIGURAÇÕES DE TESTE.....	41
4.3 EQUIPAMENTO E CONDIÇÕES DE TESTE	42
4.3.1 Excitação	43
4.3.2 Transdutores	44
4.3.3 Analisadores de Sinais.....	45
4.4 CLASSIFICAÇÃO DOS SINAIS.....	46
4.5 ANÁLISE DE SINAIS.....	47
4.5.1 Aliasing.....	48
4.5.2 Leakage.....	49
4.5.3 Windowing	50
4.5.4 Zoom	51
4.5.5 Averaging	52
4.5.6 Coerência.....	52
4.6 PROCESSAMENTO DE SINAIS	53
4.7 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS	54
4.7.1 Método do pico na ressonância.....	55
4.7.2 Método de Ibrahim no Domínio do Tempo	56
CAPÍTULO 5 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	59
5.1 INTRODUÇÃO	59
5.2 MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO.....	59
5.3 PROBLEMA DE VIBRAÇÃO NA FORMA MATRICIAL.....	60
5.4 TEORIA DA ELASTICIDADE	61
5.4.1 Tensões, deformações e Lei de Hooke	62
5.4.2 Relações deformações - deslocamentos.....	62
5.5 OBTENÇÃO DAS MATRIZES ESTRUTURAIS	63
5.5.1 Energia de deformação	63
5.5.2 Trabalho das forças externas.....	63
5.5.3 Matrizes estruturais	64

5.5.3 Matrizes estruturais	64
5.6 ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES	64
5.7 ORTONORMALIZAÇÃO DA SOLUÇÃO.....	65
5.8 MÉTODOS DE SOLUÇÃO.....	65
CAPÍTULO 6 - ESTUDO TEÓRICO/EXPERIMENTAL DE UM CANO DE FUZIL	67
6.1 OBJETIVO	67
6.2 CASO PROPOSTO: CANO FUZIL	67
6.2.1 Elementos de Viga	69
6.2.2 Elementos 3D.....	69
6.3 RESULTADOS NUMÉRICOS	70
6.3.1 Extremidades Livre-Livre.....	70
6.3.2 Extremidades Engastada-Livre	71
6.4 MONTAGEM EXPERIMENTAL.....	72
6.4.1 Montagem Livre-Livre (SISO)	72
6.4.2 Montagem Livre-Livre (SIMO).....	74
6.4.3 Montagem Engastada-Livre (SISO).....	76
6.5 RESULTADOS.....	76
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÃO.....	80
7.1 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES	80
7.2 SUGESTÕES.....	82
ANEXO A - COMPORTAMENTO NÃO LINEAR.....	83
ANEXO B - ARQUIVO DE DADOS (ANSYS – ELM BEAM2).....	86
ANEXO C - ARQUIVO DE DADOS (ANSYS – ELM TET10).....	88
ANEXO D - PROGRAMA PMODAL2.M	90
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	92

Resumo

O problema de vibrações em canos é de suma importância para o projeto de armas, em especial no caso de armas automáticas. Os súbitos carregamentos e descarregamentos que um cano de arma automática é submetido podem provocar vibrações prejudiciais tanto estruturalmente pela falha do material como operacionalmente pela perda de precisão.

Um cano de um fuzil automático é analisado e o problema de vibrações para este componente é abordado numericamente e experimentalmente através da Análise Modal.

As frequências naturais mais baixas são obtidas e os modos vibracionais classificados.

Abstract

The vibrations of gun barrels are of considerable weapon design importance, specially of automatic weapons. The rapid applied and released loads to which an automatic barrel weapon is subjected are likely to excite vibrations which may prove harmful either structurally by causing failure or operationally by reducing accuracy.

A barrel of an automatic rifle is analysed and a numerical and experimental approach for the problem of vibrations of this part is done by Modal Analysis.

The lower frequencies are found and the modes are identified and classified.

Figura 1.7: Testes de tiro em um tubo de parede espessa (Allang, 1971)	28
Figura 1.8: Resonância de uma barra em função da temperatura (Morris Handbook, 1946)	36
Figura 1.9: Modos de vibração tridimensionais em cilindros finos, (a) modo puro $m=2, n=0$, (b) movimento axial com deslocamento $m=2, n=1$, (c) flexão global $m=1, n=2$, (d) modo axial $m=2, n=1$, (e) rotacional $m=0, n=3$, (f) simétrico, excêntrico, $m=1, n=1$ (Wang, 1981)	39
Figura 2.1: Abordagem teórica e experimental de modos de vibração	32
Figura 3.1: FEM de um sistema com vários graus de liberdade	37
Figura 3.2: Resposta ao impulso de um sistema com 1 grau de liberdade	34
Figura 3.3: Diagrama de Modo (armadura) para um sistema de frequência	33
Figura 3.4: Lugar das Raízes - projeto de filtro	35
Figura 4.1: Configuração típica de uma barra	42
Figura 4.2: (a) Função impulso em função do tempo, (b) espectro de frequências	44
Figura 4.3: Resposta em frequência para diferentes frações dos coeficientes	44
Figura 4.4: Processo de amostragem (assumindo analógico, (a) amostra pura ω/ω_0 , (b) função de amostragem ω/ω_0 , (c) sinal digitalizado, (d) reconstituído. (McCornel, 1995)	47
Figura 4.5: Efeito de amostragem (no tempo)	45
Figura 4.6: (a) Espectro de um sinal contínuo com frequência máxima f_c , (b) Espectro de um sinal com taxa de amostragem $f_s > 2f_c$, (c) Espectro de um sinal com taxa de amostragem $f_s < 2f_c$, (d) duas frequências indesejadas (componentes aliadas)	48
Figura 4.7: (a) sinal no tempo com filtro, (b) espectro com filtro, (c) sinal no tempo sem filtro, (d) espectro sem filtro	49
Figura 4.8: Filtro de Antialias	45

Lista de Figuras

Figura 2.1: Acessórios: (a) compensador, (b) quebra-chamas, (c) supressor de ruído.....	19
Figura 2.2: Regiões do cano	20
Figura 2.3: Forças generalizadas atuantes durante o tiro	21
Figura 2.4: Força (a) e deslocamento (b) de um suporte numa rajada (Allsop, 1997).....	22
Figura 2.5: Espectro de forças de uma arma automática durante o tiro (Allsop, 1997).....	23
Figura 2.6: Tensões radial e circunferencial em um tubo de paredes espessas submetido a pressão interna (Shigley, 1986).....	25
Figura 2.7: Tensões térmicas em um tubo de parede espessa (Allsop, 1997)	26
Figura 2.8: Resistência dos aços em função da temperatura (Metals Handbook, 1994).....	26
Figura 2.9: Modos de vibração tridimensionais em cilindros finitos, (a) radial puro $n=2, m=0$, (b) movimento radial com cisalhamento $n=3, m=1$, (c) flexão global $n=1, m=2$, (d) flexão axial $n=2, m=1$, (e) extensional $n=0, m=3$, (f) circunferencial $n=1, m=1$ (Wang, 1998).	29
Figura 3.1: Abordagem teórica e experimental na análise de vibrações	32
Figura 3.2: FRF de um sistema com vários graus de liberdade	33
Figura 3.3: Resposta ao impulso de um sistema com 1 grau de liberdade	34
Figura 3.4: Diagrama de Bode (amplitude e fase no domínio da frequência).....	35
Figura 3.5: Lugar das Raízes - projeção de $H(s)$	36
Figura 4.1: Configuração típica de teste.....	42
Figura 4.2: (a) Função impulso no domínio do tempo, (b) domínio da frequência	44
Figura 4.3: Resposta em frequência para diferentes fixações dos acelerômetros	44
Figura 4.5: Processo de amostragem. (a) Sinal analógico. (b) Função janela $w(t)$. (c) Função de amostragem $s(t)$. (d) Sinal digitalizado $f(t) = w(t)s(t)x(t)$. (McConnel, 1995)	47
Figura 4.6: Efeito de <i>aliasing</i> (no tempo)	48
Figura 4.7: (a) Espectro de um sinal contínuo com frequência máxima f_c , (b) Espectro de um sinal com taxa de amostragem $f_s > 2 f_c$, (c) Espectro de um sinal com taxa de amostragem $f_s < 2 f_c$ (a área hachurada indica os componentes aliased).....	48
Figura 4.8: (a) sinal no tempo com filtro, (b) espectro com filtro, (c) sinal no tempo sem filtro, (d) espectro sem filtro.....	49
Figura 4.9: Efeito de <i>leakage</i>	49

Figura 4.10: Efeito do tamanho janela de tempo. (a) número inteiro de períodos, sem descontinuidade, (b) e (c) metade do número inteiro de períodos, mas com diferentes relações entre as fases, gerando diferentes descontinuidades, quando os finais são unidos em um <i>loop</i>	50
Figura 4.11: Características das janelas no domínio do tempo (McConnell, 1995)	50
Figura 4.12: (a) Sinal original, (b) <i>Zoom</i> na região hachurada.....	51
Figura 4.13: Efeito de <i>averaging</i> : (a) Sinal instantâneo, (b) Média de 8 espectros, (c) Média de 128 espectros.....	52
Figura 4.14: FRF e a respectiva coerência	53
Figura 6.1: Protótipo de fuzil calibre 5,56 (IMBEL-FI).....	67
Figura 6.2: Modelo sólido sem simplificações	68
Figura 6.3: Simplificações do problema.....	68
Figura 6.4: Discretização do cano utilizando elementos tetraédricos (ANSYS).....	70
Figura 6.5: Três primeiros modos para o caso extremidades livre-livre (ANSYS).....	71
Figura 6.6: Primeiro modo no caso de extremidades engastada-livre (ANSYS).....	71
Figura 6.7: Configuração livre-livre (<i>SISO</i>).....	72
Figura 6.8: FRF obtidas na configuração livre-livre <i>SIMO</i> (MATLAB).....	73
Figura 6.9: FRF como apresentada na tela do analisador de sinais SRS780.....	74
Figura 6.10: Configuração livre-livre (<i>SIMO</i>).....	75
Figura 6.11: <i>GenRad - Computer Aided Test System 2515</i>	75
Figura 6.12: Configuração engastada-livre (<i>SISO</i>).....	76
Figura 6.13: FRF obtidas na configuração livre-livre <i>SISO</i> (CADA-PC).....	77
Figura 6.14: FRF obtidas na configuração livre-livre <i>SIMO</i> (CADA-PC).....	77
Figura 6.15: Configuração livre-livre: modos de vibração (CADA-PC)	78
Figura 6.16: Configuração livre-livre: modos de vibração (MATLAB).....	78
Figura 6.17: FRF obtidas na configuração engastada-livre <i>SIMO</i> (MATLAB).....	79
Figura 6.18: Configuração engastada-livre: modos de vibração (MATLAB).....	79
Figura A1: Efeito da não linearidade na qualidade do sinal (Tongue,1996).....	84

Lista de Tabelas

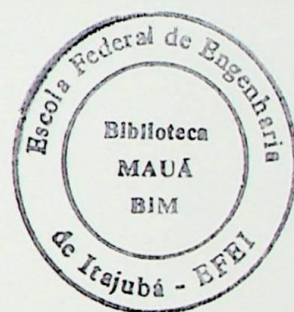
Tabela 2.1: Nível de conforto em função da aceleração (ISO 2631).....	23
Tabela 4.1: Algoritmos para identificação dos parâmetros modais	55
Tabela 6.2: Frequências naturais (Hz): extremidades livre-livre (ANSYS).....	70
Tabela 6.3: Frequências naturais (Hz): extremidades engastada-livre (ANSYS).....	71
Tabela 6.4: Configuração livre-livre: frequência natural (Hz)	76
Tabela 6.5: Configuração livre-livre: amortecimento (%).....	77
Tabela 6.6: Configuração engastada-livre: frequência natural (Hz)	78
Tabela 6.7: Configuração engastada-livre: amortecimento (%).....	79
Tabela A1: Parâmetros modais estimados para viga não linear (Tongue,1996).....	84

f_n	freqüência natural
f_s	freqüência de amostragem
$F(f)$	função resposta em frequência
F_0	força devido ao ruído
G	densidade espectral de potência
$H(\omega)$	função mobilidade
H_{ps}	função resposta em frequência
$[I(\omega)]$	matriz de mobilidade
$[I]$	matriz identidade
$[I_{ps}]$	matriz inércia
I_{ps}	momento de inércia
$[K]$	matriz de rigidez
k_c	coeficiente de condutividade térmica
L, M	operador diferencial linear
$[M]$	matriz de massa
M, R	movimento do corpo rígido
N_n	graus de liberdade
N_s	função de interpolação
P	produto interno
q	função de custo
r	razão de frequências
X	resíduo
λ	auto
T	período
T_n	tempo natural



Simbologia

a, b	dimensão linear
A, A^*, A_{pqr}	resíduo
$[B]$	matriz "primeira deriva das funções de interpolação"
$c, [C], C$	amortecimento, matriz de amortecimento
$[C_0], [D]$	matriz constitutiva
c_T	calor específico
CAE	computer aided engineering
D_e	diâmetro externo
D_i	diâmetro interno
e	distância
$f, [F], F(\omega)$	função de excitação, matriz de excitação
f_n	freqüência natural
f_a, f_s	freqüência de amostragem
FRF	função resposta em freqüência
F_s	força devido ao tiro
G	densidade espectral de potência
$H(\omega)$	função mobilidade
H_{pq}	função resposta em freqüência
$[H(\omega)]$	matriz de mobilidade
$[I]$	matriz identidade
$I(\omega)$	matriz inertância
I_{zz}	momento de inércia
$[K]$	matriz de rigidez
k_T	coeficiente de condutividade térmica
L, M	operador diferencial linear
$[M]$	matriz de massa
MCR	movimento de corpo rígido
N, n	graus de liberdade
N_i	função de interpolação
p	pressão interna
q	fluxo de calor
r	razão de freqüências
R	resíduo
S	área
T	período
T_b, T_p	temperatura



u, v, w	deslocamentos (translação)
V	energia potencial
V_0	velocidade de boca
W_i	função de ponderação
$X(\omega)$	função resposta em freqüência
X_i	coordenada do i -ésimo nó
α_T	difusividade térmica
$\alpha(\omega)$	função compliância
$\hat{\alpha}$	valor máximo da FRF
$\gamma_{rv}^2(\omega)$	função de coerência
ρ	massa específica
$\{\xi\}^T$	vetor deformação
ω_a, ω_b	pontos de meia potência
ω_i, ω_r	freqüência natural
σ_i, ξ_i	fator de amortecimento
σ_{cr}	tensão circunferencial (tangencial)
σ_r	tensão radial
$\{\sigma\}^T$	vetor estado de tensões
$[\phi]$	matriz de autovetores
$[\Omega^2], [\lambda^2]$	matriz de autovalores

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O Capítulo 1 define o objetivo desta dissertação, detalhando a importância do assunto na área de desenvolvimento da Engenharia de Armamentos. Apresenta-se ainda a estrutura do trabalho, consistindo de modo de cada capítulo.

No Capítulo 2 são introduzidas algumas conceitos sobre vibração livre desenvolvidos no projeto de curso de aula. É descrito o comportamento de uma barra em sua frequência que ocorrem durante o tiro com ênfase para os efeitos e origem do fenômeno de vibração. É feita uma comparação entre os modos de vibração em situações especiais e os possíveis modos de vibração num caso de arma.

Os fenômenos característicos da Análise Modal são apresentados no Capítulo 3 sendo estudados os sistemas com um e vários graus de liberdade em função do tempo, de impulso e de Força. Define-se a função resposta em frequência e a maneira pela qual se

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento dinâmico de um cano de um fuzil automático. A peça em estudo faz parte de um protótipo de fuzil em calibre 5,56 mm.

Os conceitos e ferramentas necessárias para o entendimento e análise do problema são apresentados ao longo dos capítulos definindo as formas pelas quais o estudo pode ser feito. Duas abordagens são propostas: na primeira, é feita uma abordagem numérica onde as frequências naturais e modos de vibração são obtidos através da utilização de um programa comercial de Elementos Finitos e na segunda, as frequências e modos são determinados experimentalmente através da Análise Modal Experimental. Os resultados de cada abordagem são apresentados e comparados.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O Capítulo 1 define o objetivo dessa dissertação, destacando a importância do assunto na área de conhecimento da Engenharia de Armamento. Apresenta-se ainda a estrutura do trabalho e o objeto de estudo de cada capítulo.

No Capítulo 2 são introduzidos alguns conceitos sobre armamento leve direcionados ao projeto de canos de armas. É descrito o comportamento da arma quando em uso e os fenômenos que ocorrem durante o tiro com destaque para os efeitos e a origem do fenômeno de vibração. É feita uma comparação entre os modos de vibrações em cilindros espessos e os possíveis modos de vibração num cano de arma.

Os fundamentos matemáticos da Análise Modal são apresentados no Capítulo 3 sendo estudados os sistemas com um e vários grau de liberdade nos domínios do tempo, de Laplace e de Fourier. Define-se a função resposta em frequência e a maneira pela qual se

pode, a partir dela, determinar as frequências naturais, os coeficientes de amortecimento modais e os modos de vibração de um sistema homogêneo, linear e invariante no tempo.

O Capítulo 4 define as formas básicas de se tratar experimentalmente os problemas de vibração, a análise de sinais e a análise de sistemas, bem como as principais configurações de teste. É feita uma descrição de alguns componentes que compõe os equipamentos de ensaio e são introduzidos alguns conceitos referentes à Análise de Sinais. Métodos de extração de parâmetros modais são apresentados e baseado em um deles é feito um programa utilizando o ambiente MATLAB.

A análise de vibrações livres não amortecidas através do Método dos Elementos Finitos é abordada no Capítulo 5. Com base na Teoria da Elasticidade e nos métodos de aproximação, as equações que definem as matrizes estruturais dos elementos são obtidas. As características do sistema de equações matriciais resultante e alguns métodos de solução são comentados.

O Capítulo 6 sintetiza o objetivo e título do trabalho. As formulações e considerações feitas nos capítulos anteriores são aplicadas para um caso real. Modelos de elementos finitos são gerados utilizando elementos de viga e tridimensionais e seus resultados são comparados entre si e com os resultados de ensaios experimentais com configurações de teste e condições de contorno variadas.

A conclusão, Capítulo 7, é feita apontando as dificuldades encontradas. Os resultados obtidos são criticados e como sugestão, são propostos alguns temas para trabalhos futuros.

1.3 IMPORTÂNCIA DO ASSUNTO

É difícil imaginar a existência de um exército sem o emprego de armas leves. Todas as Forças Armadas do mundo são equipadas com elas. Apesar do advento das armas de destruição em massa, bombas inteligentes, guerra eletrônica, etc. o papel que o soldado desempenha no campo de batalha ainda é insubstituível. Todo soldado, independente de sua patente, é dotado com uma arma individual. No teatro de operações moderno a arma base é o fuzil, sendo empregado numa gama extensa de calibres, os menores em torno de 4,5 mm e os maiores excedendo 12,5 mm. Diversas linhas de pesquisa estão em andamento visando desenvolver uma alternativa para as armas leves em uso corrente, mas é improvável a sua substituição num futuro próximo.

A eficiência de uma arma é expressa tanto pelas suas características operacionais como técnicas. Para as armas automáticas, tais características consistem em:

- poder de fogo;
- confiabilidade;
- mobilidade;
- proteção.

Dentre estas características, a mais importante para as armas de combate, o poder de fogo, é medida na capacidade de engajar efetivamente os alvos no menor intervalo de tempo. Essa capacidade, embora dependente de diversos fatores, está intimamente ligada ao projeto de um componente: o cano.

2.1 CANO

O objetivo de um cano de uma arma é impor velocidade e direção ao projétil.

É um sistema um vaso de pressão de parede espessa dentro do qual a carga propulsora queima. Deve, portanto, ser capaz de resistir às elevadas pressões e temperaturas geradas durante o uso.

Na sua parte posterior aloja a munição e a carga propulsora, enquanto à frente ocorre o escape deste gás de forma regularizar o projétil. Em armas calibras o cano também é responsável por induzir ao projétil um movimento de rotação em torno do seu eixo através de ranhuras helicoidais desenvolvidas ao longo da sua extensão. A finalidade de tal movimento é a estabilização giroscópica do projétil durante o voo.

O cano de uma arma se caracteriza por um nível de tensão de compressão operando a elevadas pressões (60 a 120 MPa) e com uma vida útil muito curta (de ordem de dezenas de minutos) devendo permitir que em qualquer regime de tiro tenha o potencial de manuseio empregado seja explorado (AYL, 1993).

Devido a requisitos operacionais, junto ao cano podem existir outros acessórios, sendo os mais comuns: os defletores e feixes de bala, identificadores de recuo, quebra-chamas, dispositivos de guilho (excitadores) e bloco de gases.

2.1.1 Compensadores e Feixes de Bala

O feixe de bala realiza a tarefa de arma através do direcionamento dos gases provenientes da queima da carga propulsora após estes ultrapassarem a boca do cano. A eficiência deste impulso depende muito da forma do volume e do impulso de saída dos gases.

Capítulo 2

CONCEITOS BÁSICOS SOBRE ARMAMENTO LEVE

2.1 CANO

O objetivo de um cano de uma arma é impor velocidade e direção ao projétil.

É em síntese um vaso de pressão de parede espessa dentro do qual a carga propelente queima. Deve, portanto ser capaz de resistir às elevadas pressões e temperaturas geradas durante o tiro.

Na sua parte posterior aloja a munição e a carga propelente, enquanto a frente ocorre a expansão desta carga de forma impulsionar o projétil. Em armas raiadas o cano também é responsável por induzir no projétil um movimento de rotação em torno de seu eixo através de ranhuras helicoidais denominadas raias. A finalidade de tal movimento é a estabilização giroscópica do projétil durante o voo.

O cano de uma arma se assemelha a um pistão de motor de combustão operando a elevadas pressões (60 a 420 MPa) e com uma vida útil muito curta (da ordem de dezenas de minutos) devendo permitir que em qualquer regime de tiro todo o potencial da munição empregada seja explorado (AVL, 1990).

Devido a requisitos operacionais, junto ao cano podem existir acessórios, sendo os mais comuns: os defletores e freios de boca, intensificadores de recuo, quebra-chamas, supressores de ruído (silenciadores) e bloco de gases.

2.1.1 Compensadores e Freios de Boca

O freio de boca reduz o recuo da arma através do direcionamento dos gases provenientes da queima da carga propelente após estes ultrapassarem a boca do cano. A eficiência desse impulso negativo varia em função do volume e do ângulo de saída dos gases.

2.1.2 Intensificadores de recuo

Tem o efeito contrário do freio de boca sendo mais utilizados em armas automáticas com princípio de funcionamento por recuo do cano. Para obter este efeito é colocada uma câmara à frente da boca.

2.1.3 Quebra-chamas

Os gases que saem do cano se encontram a altas temperaturas e pressões e contém CO, H₂, CH₄, CO₂, H₂O e N₂. Estes gases ao reagirem com o oxigênio do ar se queimam produzindo uma chama visível. O quebra chamas reduz a temperatura de saída dos gases abaixo da temperatura de ignição da reação química além de mecanicamente dissipar a chama produzida.

2.1.4 Supressores de Ruído

Um tiro disparado por uma arma leve produz um nível de pressão acústica entre 100-150 dB próximo a arma decaindo a 80-90 dB a cerca 1000 metros (Skochko, 1970). As fontes deste ruído são a saída dos gases, a passagem do projétil no ar e ruídos das partes mecânicas da arma. A frente de onda produzida pela saída dos gases é a principal fonte de ruído, assim sendo, em algumas armas especiais o nível de ruído na saída do projétil é reduzido pelo uso de supressores de ruído, popularmente chamados silenciadores. Um silenciador é composto de diversas câmaras de expansão nas quais a velocidade, a temperatura e a pressão dos gases são reduzidas diminuindo o nível de pressão acústica na saída do projétil.

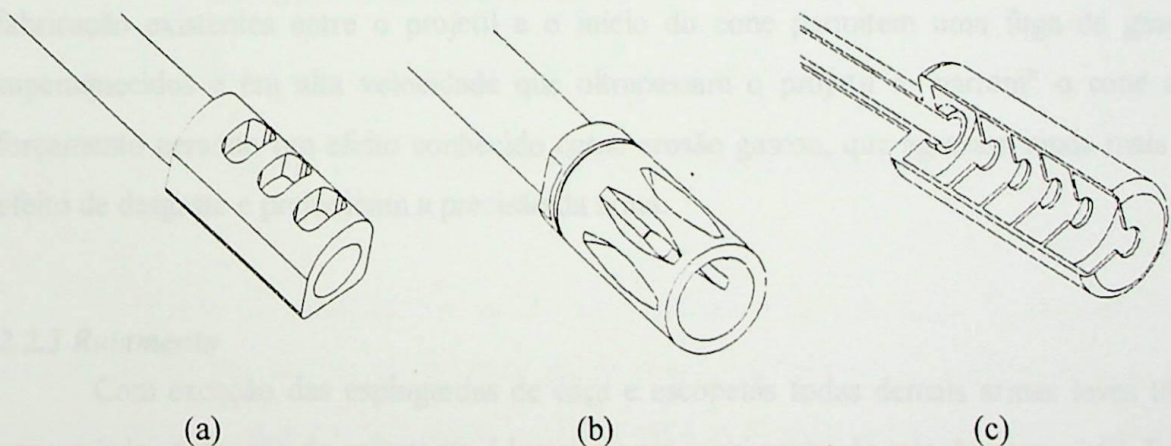


Figura 2.1: Acessórios: (a) compensador, (b) quebra-chamas, (c) supressor de ruído.

2.2 REGIÕES PRINCIPAIS DO CANO

O interior de um cano possui simetria axial em relação ao seu eixo longitudinal e pode ser subdividido nas seguintes partes (Fig. 2.2): câmara, cone de forçamento e raiamento. O calibre é a dimensão principal de um cano e o seu comprimento um

parâmetro muito importante uma vez que afeta a velocidade com a qual o projétil sairá da arma (velocidade de boca - V_0).

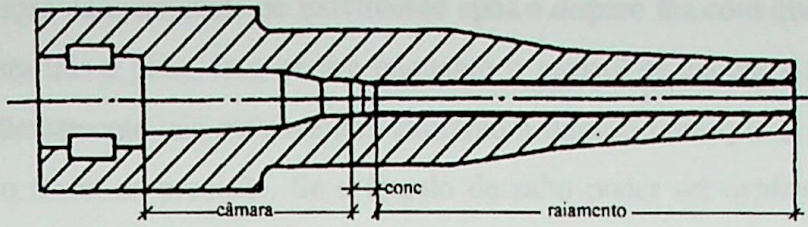


Figura 2.2: Regiões do cano

2.2.1 Câmara

É a região que aloja o cartucho (munição e carga propelente). O volume existente entre a base do projétil e o fundo do estojo determina o volume inicial do processo de queima da carga propelente. A vedação da parte posterior do cano é feita pela própria base do cartucho. A forma e as dimensões da câmara variam de acordo com a munição empregada, entretanto na grande maioria dos casos a forma é ligeiramente cônica de maneira facilitar tanto o carregamento (entrada do cartucho na câmara) como a extração (saída).

2.2.2 Cone de Forçamento

É a região de transição entre a câmara e o início do raiamento, sendo responsável pelo engastamento suave e contínuo do projétil nas raias de tal forma que o projétil se deforme sem que haja cisalhamento do material. Por estar sujeita à elevadas pressões e temperaturas é a região que sofre o maior desgaste durante o tiro. Além disso, as folgas de fabricação existentes entre o projétil e o início do cone permitem uma fuga de gases superaquecidos e em alta velocidade que ultrapassam o projétil e "varrem" o cone de forçamento gerando um efeito conhecido como erosão gasosa, que agravam ainda mais o efeito de desgaste e prejudicam a precisão da arma.

2.2.3 Raiamento

Com exceção das espingardas de caça e escopetas todas demais armas leves têm cano raiado. A função do raiamento é imprimir um movimento de rotação ao projétil. Esta região tem a forma helicoidal podendo sua seção reta ter perfil retangular, trapezoidal, curvo ou poligonal. A largura e profundidade das raias pode ser constante ou ligeiramente cônica (decrecente) em direção à boca de forma assegurar uma melhor vedação. O passo da hélice (passo do raiamento) é determinado pelo tipo (forma, dimensões, peso, velocidade, etc.) de munição empregado.

2.3 COMPORTAMENTO DA ARMA DURANTE O TIRO

A variação da quantidade de movimento após o disparo faz com que a arma tenda a se deslocar para trás e girar. Isso ocorre enquanto o projétil se encontra ainda dentro do cano. Conseqüentemente tais movimentos alterarão a direção com que o projétil sairá da arma influenciando assim na precisão. Se o ângulo de salto puder ser avaliado para um tiro simples, pode-se por superposição, estimar o comportamento durante o tiro automático.

2.3.1 Efeito de um único tiro

A Figura 2.3 mostra as forças atuantes durante o tiro. A arma tende a se mover para trás e girar em torno de seu centro de gravidade. Estes movimentos encontram resistência nos pontos de apoio da arma no atirador (ombro e mão para o caso de uma arma longa). A rigidez desses apoios é elástica por natureza e a força R cresce durante o recuo devido a contração dos músculos do atirador. Após o recuo ocorre o avanço do sistema que é controlado pelo atirador através da empunhadura.

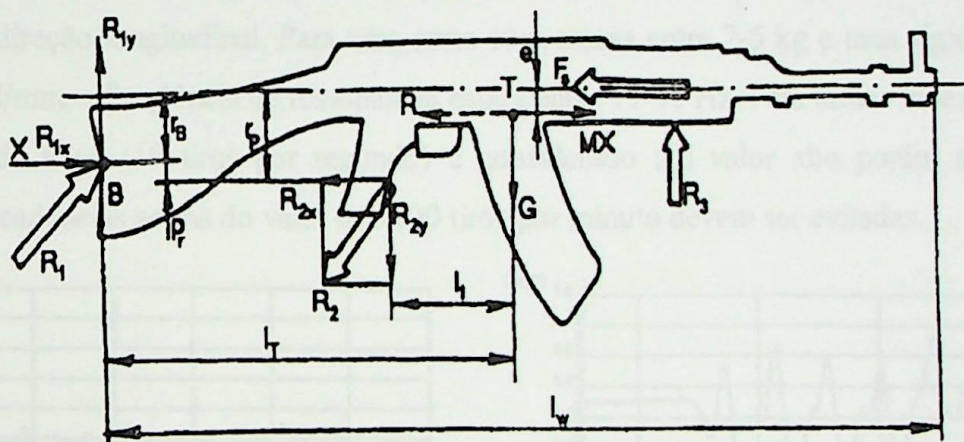


Figura 2.3: Forças generalizadas atuantes durante o tiro

O ângulo de salto ocorre devido ao momento $F_s \cdot e$. A força F_s depende das características balísticas da arma, desta forma para minimizar o momento deve-se atuar sobre a cota e de tal forma que numa condição ideal se obtenha o eixo do cano e o centro de gravidade (CG) alinhados. O ângulo de salto por sua vez é afetado pela forma com que a arma é empunhada, apoiada e o formato da coronha. A modo de empunhar a arma pode afetar seu movimento de 2 maneiras:

- mantendo livre de tal forma que se a força do disparo não passar pelo centro de gravidade a arma irá girar em torno do CG;

- fixar a arma no ponto B (Fig. 2.3) , fazendo com que a mesma gire em torno deste ponto.

Na prática, o movimento da arma se situa entre estes dois extremos, porém bem mais próximo da condição livre visto que quando o projétil se move no interior do cano a resistência da arma ao seu deslocamento é muito pequena se comparada com a força do disparo. A distância de recuo neste intervalo de tempo também é pequena e a resistência imposta pelo ombro do atirador também será.

2.3.2 Comportamento no tiro automático

Após o primeiro disparo a arma recua e a boca da arma sobe devido ao ângulo de salto. As condições para os tiros subseqüentes são por conseguinte diferentes daquelas estabelecidas inicialmente.

O valor médio da rigidez muscular é 100 N/mm e varia entre 75-120 N/mm dependendo do tipo de roupa e posição da pessoa (Harris, 1992). Utilizando esse valor é possível inferir algumas conclusões sobre a frequência de ressonância do conjunto homem-arma na direção longitudinal. Para uma arma com massa entre 2-5 kg e uma rigidez entre 75-120 N/mm, a frequência de ressonância estará entre 19-40 Hz. Para armas leves o limite inferior da faixa (19 tiros por segundo) é considerado um valor alto porém aceitável, portanto cadências acima do valor de 1100 tiros por minuto devem ser evitadas.

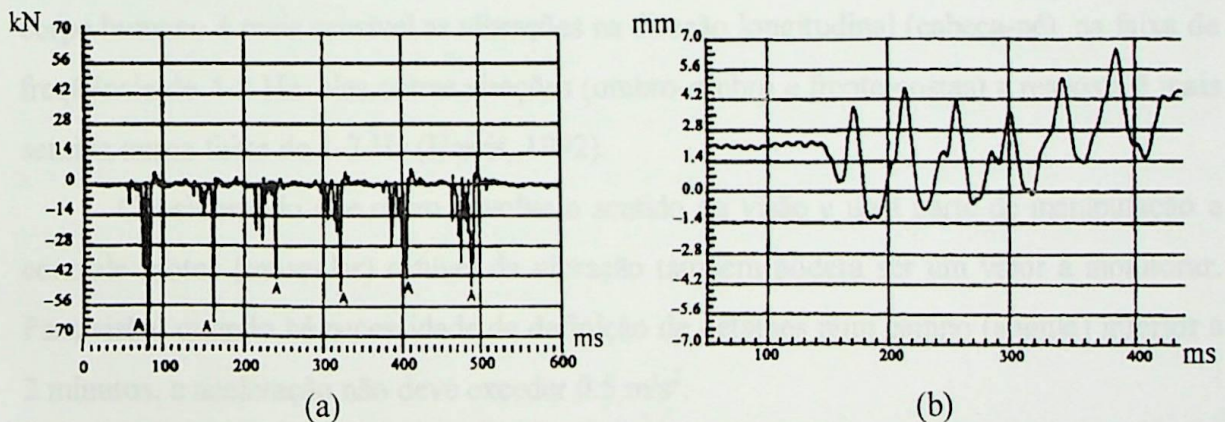


Figura 2.4: Força (a) e deslocamento (b) de um suporte numa rajada (Allsop,1997)

Entretanto, se considerarmos um atirador na posição em pé, o valor para a rigidez flexional será consideravelmente menor o que resultará em frequências de ressonância da ordem de 7 Hz, que equivale a 400 tiros por minuto.

Em um outro extremo tem-se armas fixadas em viaturas ou aeronaves através de suportes "rígidos" ou semi-rígidos. A Figura 2.4 mostra a variação da força aplicada no

reparo de uma arma(à esquerda) e o deslocamento do cano durante uma rajada de 6 tiros(à direita).

Nota-se que a força transmitida é máxima no primeiro disparo diminuindo no segundo e terceiro. O espectro de forças (Fig. 2.5) mostra o primeiro pico em 8.15 Hz que é a cadência da arma. As frequências de 16.5 Hz, 23.77 Hz e 30.66 Hz são os harmônicos.

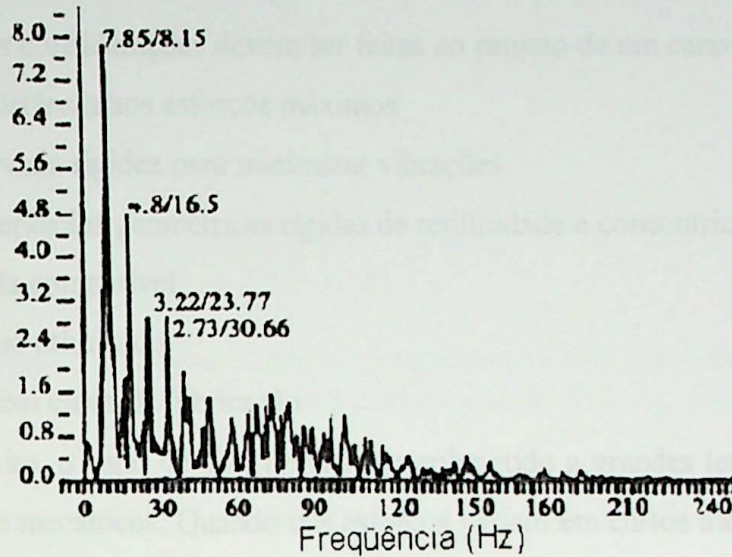


Figura 2.5: Espectro de forças de uma arma automática durante o tiro (Allsop,1997)

Além do problema de ressonância pode-se discutir ainda os efeitos das vibrações num nível de desconforto e percepção no corpo humano como um todo. Sabe-se que o corpo humano é mais sensível as vibrações na direção longitudinal (cabeça-pé) na faixa de frequência de 4-8 Hz. Nas outras direções (ombro-ombro e frente-costas) a resposta é mais sentida numa faixa de 1-2 Hz (Harris, 1992).

Considerando que o tiro envolve o sentido da visão e uma parte de manipulação e controle motor (muscular) o nível da vibração também poderá ser um valor a monitorar. Para visão, quando há necessidade de definição de detalhes num campo (ângulo) inferior a 2 minutos, a aceleração não deve exceder 0.5 m/s^2 .

A Tabela 2.1 apresenta a “sensação de conforto” para diversos níveis de vibrações.

Tabela 2.1: Nível de conforto em função da aceleração (ISO 2631)

Nível RMS(m/s^2)	Reação
<0.315	Aceitável
0.315 – 0.8	Ligeiramente desconfortável
0.8 – 1.6	Desconfortável
1.25-2.5	Muito desconfortável
> 2	Extremamente desconfortável

As considerações feitas indicam que as recomendações encontradas na literatura podem não se aplicar a todos os casos e que, a par dos estudos já feitos nesta área, existe ainda um vasto campo de pesquisa a ser feita.

2.4 FENÔMENOS QUE OCORREM DURANTE O TIRO

As seguintes considerações devem ser feitas no projeto de um cano de arma:

- resistência aos esforços máximos
- elevada rigidez para minimizar vibrações
- tolerâncias geométricas rígidas de retinidade e concentricidade
- vida compatível
- peso otimizado
- baixo custo de fabricação

Durante o tiro, o cano de uma arma vê-se submetido a grandes tensões devido aos esforços térmicos e mecânicos. Quando tais esforços variam em curtos intervalos de tempo ocorrem ainda vibrações que podem provocar danos estruturais e operacionais tais como: perda de precisão, baixa confiabilidade, baixo “número médio de tiros entre falhas” (*MRBF-mean round between failure*), baixo índice de disponibilidade, etc.

2.4.1 Tensões Mecânicas

Os efeitos mecânicos sobre o cano se devem a ação dos gases propelentes e ao projétil. Os gases propelentes exercem uma pressão radial e axialmente simétrica nas paredes internas do cano. As tensões radiais e circunferenciais (tangenciais) são as tensões principais resultantes e podem ser analisadas através das relações de Lamé para um vaso de pressão cilíndrico de paredes espessas:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -p \frac{r_2^2 - 1}{r_1^2 - 1} \\ \sigma_{cr} &= p \frac{r_2^2 + 1}{r_1^2 - 1}\end{aligned}\tag{2.1}$$

A forma com que as tensões variam ao longo da seção é mostrados na Figura 2.6 onde p é a pressão interna de trabalho, r_2 o raio externo e r_1 o raio interno do cano.

O valor real da tensão pode em determinados pontos diferir do valor calculado por ser a pressão neste caso uma carga dinâmica. Além disso, a distribuição de pressão ao longo do cano depende da posição do projétil podendo ser obtida através de instrumentação balística ou cálculos.

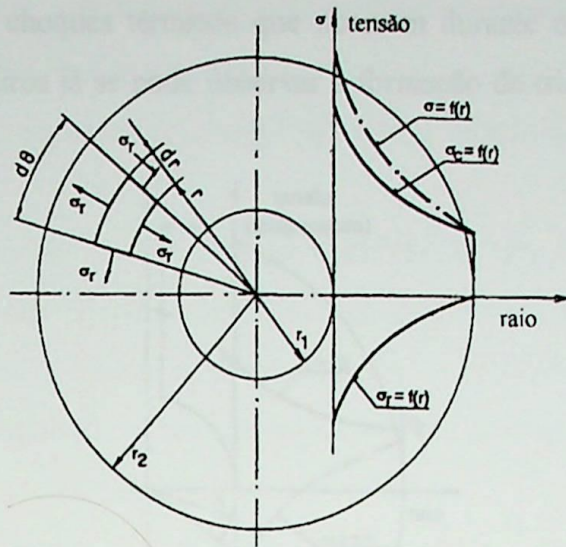


Figura 2.6: Tensões radial e circunferencial em um tubo de paredes espessas submetido a pressão interna (Shigley, 1986)

Na prática, para determinar a espessura mínima de parede ao longo do cano parte-se do ponto de maior pressão e utiliza-se a tensão de escoamento do material como tensão máxima admissível. Verifica-se ainda, que o coeficiente de segurança utilizado pode variar ao longo do comprimento do cano englobando assim as variações possíveis para o caso de carregamento dinâmico.

2.4.2 Tensões Térmicas

As tensões térmicas em um cano podem atingir valores significativos. Os gases quentes gerados na queima do propelente e o atrito do projétil com o interior do cano são as principais fontes, sendo o calor gerado pelos gases muito mais significativo que o atrito.

A transferência de calor é em sua maior parte por convecção, isto é :

$$q = k_T \cdot S \cdot (T_p - T_b) \quad (2.2)$$

A medida que mais tiros são disparados a temperatura num ponto qualquer (T_p) tende a subir até atingir a temperatura no interior (T_b) diminuindo o fluxo de calor. Embora o fluxo seja por natureza tridimensional, sua análise pode ser feita no espaço bidimensional através da equação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \text{onde} \quad \alpha_T = \frac{k_T}{c_T \rho} \quad (2.3)$$

A solução da equação acima pode apenas ser estimada uma vez que é difícil determinar com precisão os valores de entrada. O fenômeno do tiro é localizado, de muito curta duração e a temperatura, na superfície interna, embora dependente do tipo de

propelente, pode facilmente ultrapassar 900°C e cair rapidamente (Fig. 2.7). Conseqüentemente, os choques térmicos que ocorrem durante os ciclos geram elevadas tensões e após alguns tiros já se pode observar a formação de trincas térmicas no interior do cano.

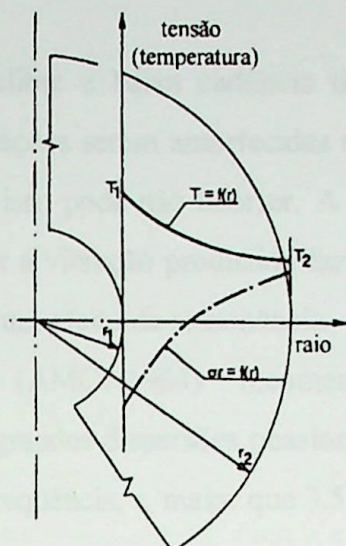


Figura 2.7: Tensões térmicas em um tubo de parede espessa (Allsop, 1997)

Outra consideração importante é que as propriedades mecânicas dos materiais empregados podem variar com o aumento de temperatura restringindo assim qualquer otimização que deseje fazer (Fig. 2.8).

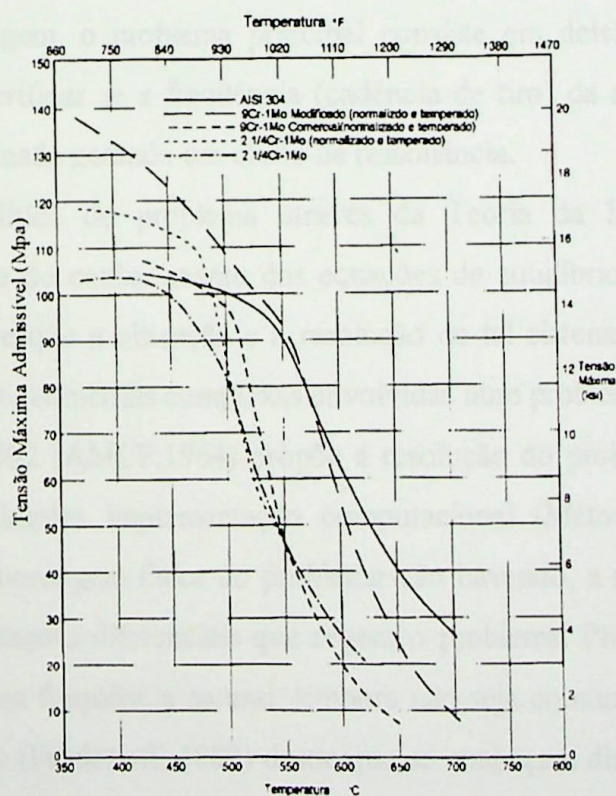


Figura 2.8: Resistência dos aços em função da temperatura (Metals Handbook, 1994)

2.4.3 Vibrações

Os esforços devido a pressão exercida pelos gases propelentes, a ação do projétil sobre o raiamento, a força de inércia da massa recuante, o golpe de boca, a tendência do tubo de alinhar-se ante a passagem do projétil são alguns fatores que constituem fontes de vibrações indesejáveis.

Em armas de grande calibre e baixa cadência de tiro esses efeitos são menos sentidos pois há tempo das vibrações serem amortecidas entre um tiro e outro. Em armas leves e com maiores cadências isso pode não ocorrer. A cadência sendo mais alta que o tempo necessário para amortecer a vibração produzida faz com que o tiro seguinte reforce a vibração, podendo criar assim um efeito de ressonância.

A literatura técnica (AMCP,1964) recomenda, baseada em resultados experimentais, que para evitar grandes dispersões ocasionadas pelas vibrações, uma arma automática tenha sua razão de frequência, r , maior que 3.5 (Eq. 2.4).

$$r \geq \frac{f_n}{f} \quad (2.4)$$

f : cadência da arma em tiros por segundo;

f_n : frequência natural do cano da arma.

A tendência atual de otimizar estrutural e operacionalmente os projetos de forma produzir-se armas cada vez mais leves e de maior poder de fogo faz necessária uma análise mais cuidadosa do possível efeito das vibrações durante o tiro.

Por esta abordagem, o problema principal consiste em determinar a frequência natural do sistema e verificar se a frequência (cadência de tiro) da arma não é igual ou próxima àquela determinada gerando um efeito de ressonância.

A solução analítica do problema através da Teoria da Elasticidade clássica prescindiria, a princípio do conhecimento das equações de equilíbrio, constitutivas e de compatibilidade. Ocorre que a obtenção e a resolução de tal sistema de equações não é trivial tendo em vista as geometrias complexas envolvidas num problema desta natureza.

A AMCP 706-502 (AMCP,1964) propõe a resolução do problema através de um método iterativo de simples implementação computacional (Método de Stodola). Tal método permite uma abordagem física do problema não havendo, a rigor, necessidade de se ter o sistema de equações diferenciais que regem o problema. Prova-se que o método converge para a primeira frequência natural. Embora não seja comum, o método pode ser aplicado analiticamente (Prodonoff, 1989) desde que se conheça a distribuição de massa e momento de inércia ao longo do domínio.

Por outro lado, considerando a simetria axial de um cano de arma é intuitivo imaginar que o mesmo possa ter um comportamento igual ou próximo ao de um cilindro espesso em vibração.

2.5 VIBRAÇÕES EM CILINDROS ESPESSOS

Segundo Wang, 1998, os primeiros estudos de vibrações em cilindros espessos, feitos por J. E. Greenspon em 1957 e D. C. Gazis em 1959 se basearam na Teoria da Elasticidade 3D. Posteriormente surgiram estudos baseados na teoria de vibrações axissimétricas. Leissa (Leissa, 1973) abordou o assunto através da teoria de cascas tabulando os resultados obtidos. Em estudo mais recente, Singal e Willians (Singal, 1988) investigam o problema usando métodos de energia. Paralelamente, estudos experimentais também foram feitos e resultados foram obtidos para o problema específico de vibrações em cilindros elásticos, isotrópicos com condições de contorno livres.

Para o problema de vibrações livres não existe solução fechada, sendo utilizadas soluções por séries ou através de métodos numéricos, em especial, o Método dos Elementos Finitos (MEF). Uma outra alternativa seria determinar um modelo matemático compatível com os resultados experimentais.

Pelo Método dos Elementos Finitos o problema de vibrações se resume em discretizar o meio contínuo em um número finito de graus de liberdade e resolver um sistema de equações diferenciais da forma:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f \quad (2.5)$$

sendo M a matriz de massa, C matriz de amortecimento, K matriz de rigidez e f o vetor de excitação.

Para o caso específico de vibrações livres sem amortecimento a solução do problema recai em um autossistema (Eq. 2.6), onde o quadrado dos autovalores são as frequências naturais e seus respectivos autovetores representam os modos de vibração associados.

$$(K - \omega^2 M) = 0 \quad (2.6)$$

Utilizando o Método dos Elementos Finitos, Wang, Guan e Willians analisaram o problema de vibrações livres em cilindros finitos de paredes espessas e propuseram um sistema de classificação dos modos de vibrações tridimensionais (Wang, 1998).

2.5.1 Modos de Vibrações Tridimensionais (3D)

Os modos de vibrações 3D em cilindros, em geral, são descritos na direção circunferencial e longitudinal separadamente. Uma forma de classificar um modo se baseia no número de nós existentes na direção circunferencial (n) e na direção longitudinal (m). Apesar de ser um critério simples, constata-se que podem existir dois modos (frequências) distintos com mesmos " n, m ".

Num outro sistema de classificação (Wang,1998), os modos de vibrações em cilindros espessos de comprimento finito são divididos em 6 categorias: radial puro, movimento radial com cisalhamento radial, extensional, circunferencial, flexão axial e global. Esta classificação juntamente com o número de nós circunferenciais (n) e longitudinais (m) segundo o autor é suficiente para identificar unicamente cada modo.

2.5.2 Classificação dos Modos Tridimensionais

Radial Puro: a vibração é devida ao movimento radial puro com o cilindro mantendo sua seção reta constante ao longo do eixo. Além disso, as seções são planas e normais ao eixo.

Movimento Radial com Cisalhamento Radial: o cilindro não mantém sua seção reta plana e constante ao longo do eixo. As geratrizes não são paralelas, ou mesmo retas.

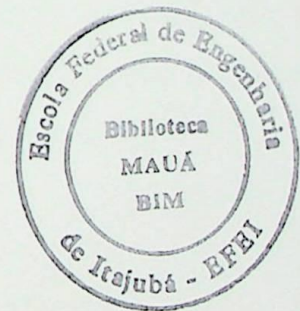
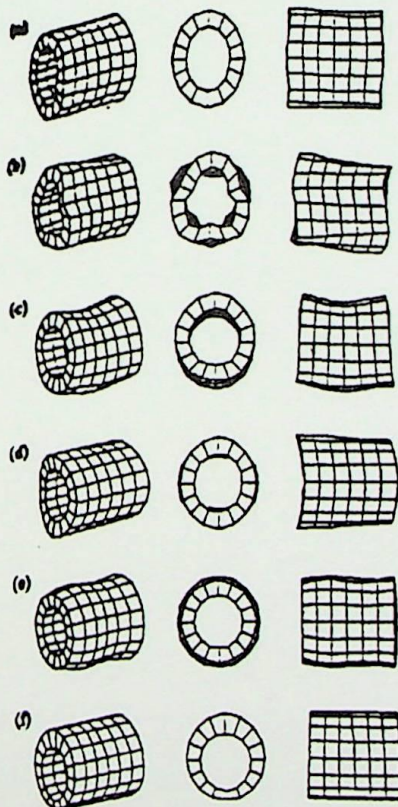


Figura 2.9: Modos de vibração tridimensionais em cilindros finitos, (a) radial puro $n=2, m=0$, (b) movimento radial com cisalhamento $n=3, m=1$, (c) flexão global $n=1, m=2$, (d) flexão axial $n=2, m=1$, (e) extensional $n=0, m=3$, (f) circunferencial $n=1, m=1$ (Wang,1998).

Extensional: a superfície média sofre deformação uniforme ao longo de sua circunferência ($n=0$).

Circunferencial: cada elemento se expande ou contrai na direção circunferencial.

Flexão Axial: a seção reta é dividida em vários segmentos e as seções adjacentes se flexionam em direções axialmente opostas.

Global: neste caso o cilindro se comporta como uma viga vibrando na direção transversal ($n=1$), uma barra sob torção ($n=0$) ou uma barra vibrando na direção longitudinal ($n=0$).

No presente trabalho supõe-se que o estudo de vibrações em canos de armas automáticas possa ser feito através dos conceitos e teorias desenvolvidas para a análise de vibrações em cilindros de paredes espessas permitindo assim a obtenção de outros modos que não podem ser identificados pela abordagem anterior.

3.1 FUNDAMENTOS

Uma forma de modelar sistemas dinâmicos é através de suas propriedades físicas de massa (M), rigidez (K) e amortecimento viscoso (C). O chamado modelo espacial é obtido com a determinação da equação do movimento do problema. O passo seguinte, normalmente, é a análise de vibrações livres e que, para um sistema discreto com n graus de liberdade, resulta em um conjunto de n frequências naturais, e em outro conjunto com os n modos de vibração associados a cada frequência e later de amortecimento (quando este for considerado). Como a solução deste tipo de problema varia muito dependendo das

Capítulo 3

FUNDAMENTOS DA ANÁLISE MODAL

3.1 INTRODUÇÃO

A maioria dos problemas de vibrações e ruído está relacionada com o fenômeno de ressonância onde as forças atuantes no sistema excitam um ou mais modos de vibração. Quando essas forças dinâmicas têm suas freqüências iguais ou próximas às de um dos modos isso pode significar problema.

Através da análise de sinais pode-se medir a vibração de uma estrutura em serviço. O espectro de freqüências obtido mostra como o nível de vibração varia com a freqüência permitindo comparar os resultados obtidos com as especificações de projeto. Embora seja uma técnica bastante eficiente seus resultados só têm significado para as condições de operação não fornecendo informações que permitam caracterizar o sistema.

Uma técnica alternativa faz uso do Analisador de Fourier de dois ou mais canais permitindo medir a razão entre a resposta do sistema e uma excitação conhecida. Através desta, pode-se obter as chamadas Funções Resposta em Freqüência (FRF) e os parâmetros característicos do sistema. A essa técnica dá-se o nome de Análise Modal.

3.2 FUNDAMENTOS

Uma forma de modelar sistemas dinâmicos é através de suas propriedades físicas de massa (M), rigidez (K) e amortecimento viscoso (C). O chamado modelo espacial é obtido com a determinação da equação de movimento do problema. O passo seguinte, normalmente, é a análise de vibrações livres o que, para um sistema discreto com n graus de liberdade, resulta em um conjunto de n freqüências naturais, e em outro conjunto com os n modos de vibração associados a cada freqüência e fator de amortecimento (quando este for considerado). Como a solução deste tipo de problema recai num autossistema, esses

conjuntos, também são chamados respectivamente de autovalores e autovetores e esse modelo, modelo modal.

Uma outra maneira de estudar um sistema dinâmico linear é através da análise da resposta a uma excitação conhecida – o modelo resposta. Nesse caso, o sistema pode ser descrito por uma única matriz, chamada matriz mobilidade, $H(\omega)$, onde cada elemento H_{pq} é uma função resposta em frequência do sistema.

Partindo de um dos modelos é possível, teoricamente, chegar aos outros, seja por uma abordagem teórica ou experimental (Fig. 3.1).

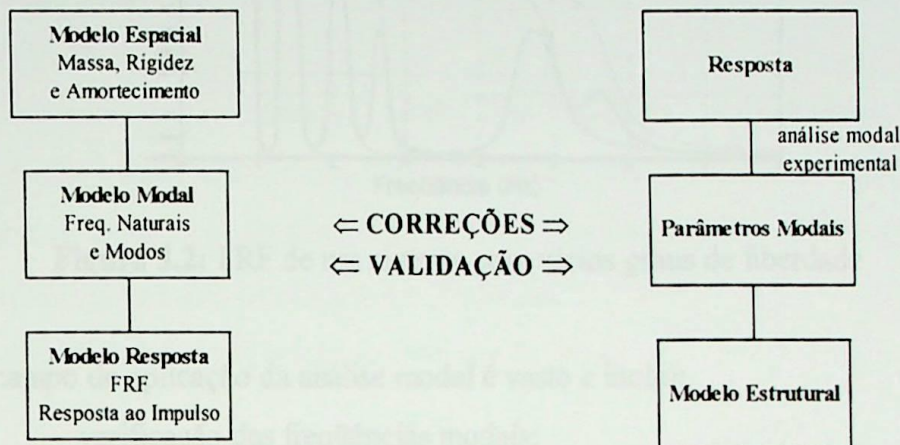


Figura 3.1: Abordagem teórica e experimental na análise de vibrações

A hipótese de que o sistema em estudo seja linear implica em três propriedades fundamentais: superposição, homogeneidade e reciprocidade.

Os princípios da superposição e homogeneidade implicam que a função resposta obtida independe do tipo de excitação aplicada e do nível de intensidade, respectivamente. A reciprocidade indica que toda estrutura apresenta uma forma de simetria (Teorema da Reciprocidade de Maxwell), ou seja a função resposta medida entre dois pontos é sempre a mesma, independente de qual seja o ponto de excitação ou resposta ($H_{pq} = H_{qp}$).

O gráfico de Bode de uma FRF apresenta uma série de picos indicando que podem existir diversas frequências de ressonância. Cada pico, típico de resposta de um sistema com um grau de liberdade, leva a imaginar que a estrutura como um todo se comporta como subestruturas com um grau de liberdade.

Esse é o fundamento da análise modal, ou seja, qualquer deflexão forçada de uma estrutura pode ser representada como uma soma ponderada de seus modos de vibração, sendo cada modo representado por um subsistema com um grau de liberdade (Fig. 3.2).

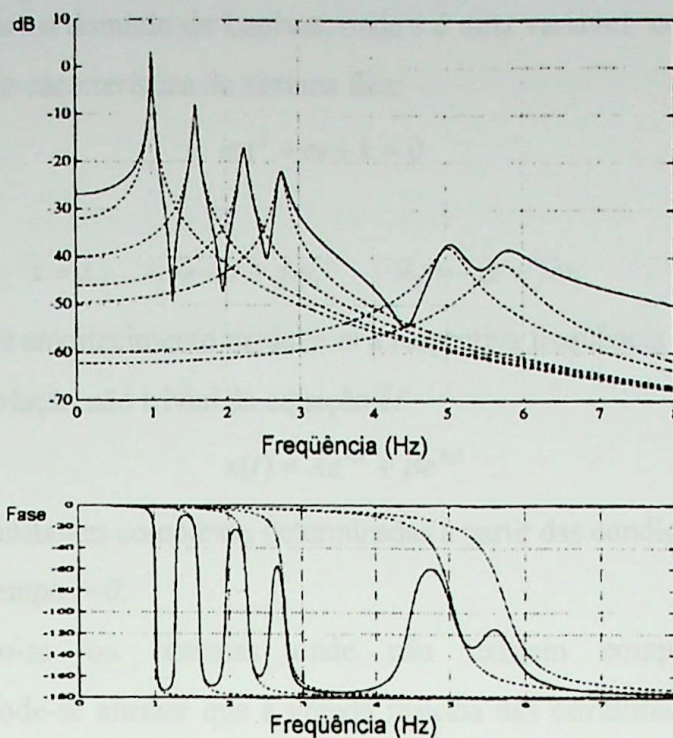


Figura 3.2: FRF de um sistema com vários graus de liberdade

O campo de aplicação da análise modal é vasto e inclui:

- verificação das frequências modais;
- obtenção de uma descrição qualitativa do modo de vibração;
- verificação e otimização de modelos analíticos;
- simulações do comportamento em situações diversas;

Em síntese, qualquer resposta a uma vibração livre ou forçada pode ser reduzida a um conjunto discreto de modos cada qual representado pelos seguintes parâmetros:

- frequência modal;
- amortecimento modal;
- modo de vibração.

Tais parâmetros são chamados parâmetros modais e através deles, dentro de determinada faixa de frequência de interesse, é possível modelar, descrever e prever o comportamento dinâmico de uma estrutura.

3.3 SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

A representação matemática de um sistema com um grau de liberdade é:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k(x) = f(t) \quad (3.1)$$

Levando para o domínio de Laplace, onde s é uma variável complexa (variável de Laplace), a equação característica do sistema fica:

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (3.2)$$

cujas raízes são:

$$s = \lambda, \quad \lambda_1 = -\sigma + j\omega_1 \quad \lambda_2 = -\sigma - j\omega_1 \quad (3.3)$$

sendo, σ o fator de amortecimento modal e ω a respectiva frequência natural amortecida.

Assim, a solução não trivial da equação é:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (3.4)$$

onde, A e B são constantes complexas determinadas a partir das condições iniciais impostas ao problema no tempo $t=0$.

Excetuando-se os sistemas onde não existem componentes ativos de amortecimento, pode-se afirmar que a grande maioria das estruturas mecânicas possuem fator de amortecimento da ordem de 10% ($\xi < 1$), o que significa que as raízes (Eq. 3.3) são conjugados complexos e as constantes A e B também.

As raízes da equação podem ser rescritas da forma:

$$\lambda = -\xi_1 \Omega_1 \pm j\Omega_1 \sqrt{1 - \xi_1^2} \quad (3.5)$$

onde, o fator de amortecimento (parte real da raiz da equação característica) descreve o decaimento (ou crescimento) exponencial da função.

3.3.1 Domínio do Tempo: Função Resposta ao Impulso

A função resposta ao impulso $h(t)$ de um sistema de um grau de liberdade (Fig. 3.3) é definida como a resposta no tempo do sistema considerando as condições iniciais iguais a zero e a função $f(t)$ a função impulso unitário:

$$h(t) = Ae^{\lambda_1 t} + A^* e^{\lambda_2 t} = e^{\sigma t} (Ae^{j\omega_1 t} + A^* e^{-j\omega_1 t}) \quad (3.6)$$

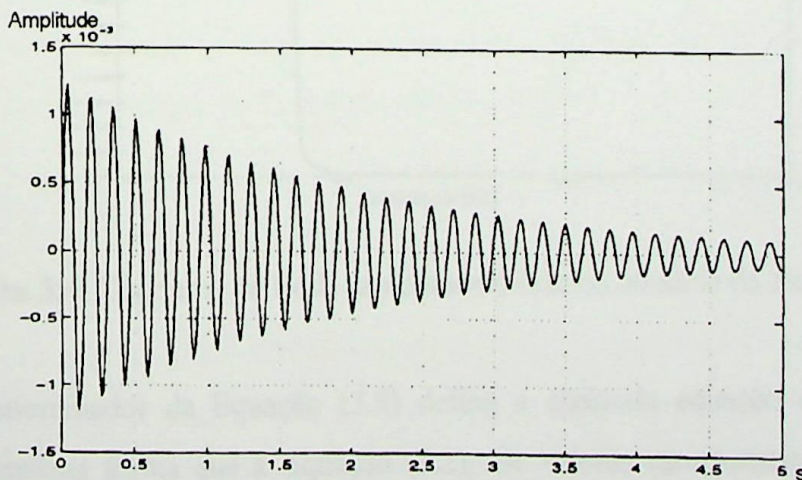


Figura 3.3: Resposta ao impulso de um sistema com 1 grau de liberdade

A constante A controla portanto, a amplitude da resposta ao impulso, a parte real das raízes, a taxa de decaimento e a parte imaginária, a frequência de oscilação.

3.3.2 Domínio da Frequência: Função Resposta em Frequência

Uma equação equivalente a equação de movimento (3.1) pode ser obtida para o domínio de Fourier ou domínio da frequência (ω). A transformação do domínio do tempo para o da frequência é feita através da Transformada de Fourier, ficando a equação de movimento da forma:

$$[-m\omega^2 + jc\omega + k]X(\omega) = F(\omega) \quad (3.7)$$

que pode ser simplificada para:

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad \text{onde,} \quad H(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + jc\omega + k} \quad (3.8)$$

A Equação (3.8) indica que a resposta $X(\omega)$ do sistema está diretamente relacionada com a excitação aplicada $F(\omega)$ através da função $H(\omega)$, denominada Função Resposta em Frequência (FRF).

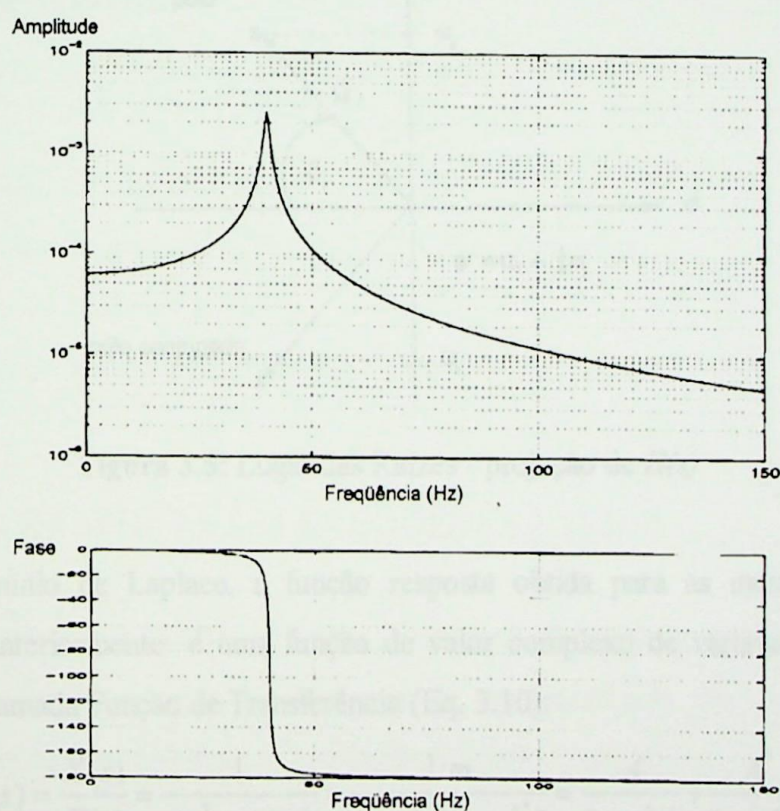


Figura 3.4: Diagrama de Bode (amplitude e fase no domínio da frequência)

O denominador da Equação (3.8) define a chamada equação característica do sistema da mesma forma que a Equação (3.2). Os valores característicos são em geral

números complexos e são chamados pólos do sistema. Rescrevendo a FRF, $H(\omega)$, em função de seus pólos tem-se:

$$H(\omega) = \frac{1/m}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)} \quad (3.9)$$

onde $\lambda_1 = \sigma + j\omega_1$ e $\lambda_1^* = \sigma - j\omega_1$ são respectivamente o pólo complexo e seu conjugado.

Uma vez que a FRF é uma função de valor complexo de variável independente real ω , ela pode ser representada por um par de curvas com mostrado na Figura 3.4.

3.3.3 Domínio de Laplace: Função de Transferência

Da mesma forma que no caso anterior, a equação diferencial de movimento (Eq. 3.1) pode ser transformada em uma equação algébrica através da transformada de Laplace.

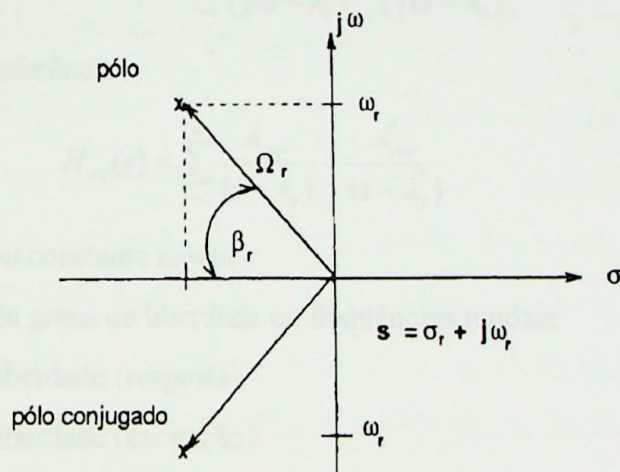


Figura 3.5: Lugar das Raízes - projeção de $H(s)$

No domínio de Laplace, a função resposta obtida para as mesmas condições estabelecidas anteriormente é uma função de valor complexo de variável independente complexa s , chamada Função de Transferência (Eq. 3.10):

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1/m}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_1^*)} = \frac{A}{(s - \lambda_1)} + \frac{A^*}{(s - \lambda_1^*)} \quad (3.10)$$

cujas representações podem ser feitas por um par de superfícies. A projeção destas superfícies em um plano de amplitude zero fornece um gráfico como o mostrado na Figura 3.5.

As constantes A e A^* são chamadas de constantes modais ou resíduos e estão diretamente relacionadas com a amplitude da resposta ao impulso sendo, em geral, valores complexos.

3.4 SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

A obtenção da solução para sistemas com vários graus de liberdade segue o mesmo caminho da solução do sistema com um grau de liberdade, isto é, deve-se buscar uma relação da massa, amortecimento e rigidez do sistema na forma de uma matriz de transferência ou de resposta em frequência que englobe diversos graus de liberdade existentes.

Como consequência do conceito de superposição, as equações para as funções de transferência, de resposta ao impulso e em frequência podem ser definidas como:

Função resposta ao impulso:

$$h_{pq}(t) = \sum_{r=1}^n A_{pqr} e^{\lambda_r t} + A_{pqr}^* e^{\lambda_r^* t} \quad (3.11)$$

Função resposta em frequência

$$H_{pq}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{A_{pqr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{A_{pqr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \quad (3.12)$$

Função de transferência

$$H_{pq}(s) = \sum_{r=1}^n \frac{A_{pqr}}{(s - \lambda_r)} + \frac{A_{pqr}^*}{(s - \lambda_r^*)} \quad (3.13)$$

onde, A_{pqr} : resíduo ou constante modal

n : número de graus de liberdade ou frequências modais

p : grau de liberdade (resposta)

q : grau de liberdade (excitação)

3.5 FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA (FRF)

Um movimento pode ser descrito em termos do deslocamento, velocidade e aceleração. As correspondentes funções resposta em frequência são: compliância ou receptância (deslocamento/força), mobilidade (velocidade/força) e inertância ou acelerância (aceleração/força) sendo suas funções inversas, a rigidez dinâmica, a impedância mecânica e a massa aparente, respectivamente. Essas funções de transferência expressam uma relação efeito/causa (e vice-versa) no domínio da frequência podendo-se deduzi-las a partir da resposta no tempo de um sistema com vários graus de liberdade a uma excitação harmônica (Inman, 1994). A equação de movimento neste caso fica:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = fe^{j\omega t} \quad (3.14)$$

e a equivalente FRF:

$$H_{pqr}(\omega) = \frac{x_p}{f_q} = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_i \psi_i^T}{(\omega_i^2 - \omega_r^2) + (2\xi_i \omega_i \omega_r)j} \quad (3.15)$$

onde ω_r é a frequência natural, ξ_i o coeficiente de amortecimento e o produto $\psi_i \psi_i^T$, a constante modal.

Embora o numerador relacione-se com o modo de vibração seu valor não tem um significado físico direto.

Para se fazer a medição de um sistema com muitos graus de liberdade é necessário que se registre a excitação e correspondente resposta (ou vice-versa) em diversos pontos da estrutura, cada ponto com até seis possíveis graus de liberdade. As FRF assim obtidas podem ser organizadas na forma matricial onde cada índice representa um ponto sobre a estrutura e uma direção associada - é a chamada matriz de mobilidade.

O termo mobilidade aqui empregado é genérico podendo significar compliância (α), mobilidade (H) ou inertância (I). Chamando a função compliância de $\alpha(\omega)$, verifica-se que estas formas guardam entre si as seguintes relações:

$$H(\omega) = i\omega\alpha(\omega) \quad \text{e} \quad I(\omega) = i\omega H(\omega) = -\omega^2\alpha(\omega) \quad (3.16)$$

A exemplo do que ocorre com diversas propriedades estruturais, as matrizes de mobilidade são simétricas (Princípio da Reciprocidade). Em geral, o primeiro índice representa a resposta num dado grau de liberdade e o segundo índice a excitação em outro grau de liberdade. Desta forma, a diagonal principal da matriz de mobilidade contém as FRF para as quais as coordenadas de excitação e a resposta são as mesmas (ponto-guia). Os demais elementos formam as FRF de transferência do sistema (relação espacial).

Algumas vezes essa classificação se subdivide ainda nas chamadas mobilidade direta e cruzada. Na primeira, excitação e resposta estão na mesma direção, enquanto na segunda são direções diferentes.

Através da análise da FRF (Eq. 3.15) pode-se concluir que as frequências e amortecimentos modais são propriedades globais, ou seja são independentes do grau de liberdade usado para medir ou excitar. Já as constantes modais são propriedades locais, ou seja o índice (pqr) indica que existe um valor associado a cada modo e combinação de graus de liberdade (localização e direção).

3.6 MODOS DE VIBRAÇÃO

Um modo de vibração é um estado de deformação associado a determinada frequência. Na prática, um modo de vibração não ocorre isoladamente e qualquer deformação de uma estrutura é na realidade uma combinação de todos os modos existentes.

Matematicamente, os modos de vibração podem representar os estados de deformação através de funções contínuas. Na abordagem teórica, os modos são obtidos através da solução do autossistema formado a partir do sistema de equações de movimento sem excitação externa (Eq. 3.17).

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (3.17)$$

Sendo os coeficientes das matrizes números reais, os autovalores são da forma real ou complexa (nesse caso em pares conjugados).

3.6.1 Classificação dos Modos de Vibração

Experimentalmente, os modos não são obtidos através de instrumentação direta, mas sim determinados a partir de um conjunto de FRF, sendo representados por um vetor $\{\psi\}_r$ onde r é o número do modo e cada elemento do vetor, ψ_i , é um número complexo descrevendo a amplitude e fase do deslocamento.

Diz-se que um modo é normal quando toda a estrutura se movimenta em fase ou com defasagem de 180° entre as partes. Neste caso os modos podem ser imaginados como ondas estacionárias com nós fixos. Se as partes da estrutura guardam uma defasagem qualquer entre si, diz-se que os modos são complexos sendo comparados a ondas que se propagam sem nós fixos. A distribuição do amortecimento ao longo da estrutura determina se os modos serão normais ou complexos. Estruturas com baixo amortecimento ou amortecimento proporcional tendem a ter modos normais enquanto amortecimentos muito localizados originam modos complexos.

3.6.2 Constante Modal e Modos

O vetor modo de vibração $\{\psi\}_r$, define um deslocamento relativo de cada grau de liberdade, o que permite concluir que cada elemento, ψ_i pode possuir mais de um valor. Alguns algoritmos para extração de autovetores utilizam como critério de normalização que o maior elemento do vetor tenha valor igual a um, mas isso não é regra geral. O fato de estar sujeito a um fator de escala qualquer não influi na “forma” do modo em si.

Sendo $\psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_n]$, o produto $\psi_i \psi_i^T$ que aparece no numerador de (3.15) resulta na matriz:

$$\psi_i \psi_i^T = \begin{bmatrix} \psi_1^2 & \psi_1 \psi_2 & \dots & \psi_1 \psi_n \\ \psi_1 \psi_2 & \psi_2^2 & \dots & \psi_2 \psi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1 \psi_n & \psi_2 \psi_n & \dots & \psi_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Essa representação (Eq. 3.19) mostra a relação existente entre a FRF e os autovetores, onde o pq -ésimo elemento é da forma:

$$H_{pq}(\omega_r) = \sum_{i=1}^n \frac{[\psi_i \psi_i^T]_{pq}}{(\omega_i^2 - \omega_r^2) + (2\xi_i \omega_i \omega_r)j} \quad (3.20)$$

Considerando que as ressonâncias (picos) do sistema estão devidamente espaçadas o somatório é dominado pelo termo correspondente àquela frequência, ou seja, a contribuição dos demais termos do somatório é muito pequena. Isto pode ser constatado fazendo $\omega_r = \omega_i$ em (3.20) e calculando o módulo.

$$|H_{pq}(\omega_r)| = \sum_{i=1}^n \frac{|\psi_i \psi_i^T|_{pq}}{|(\omega_i^2 - \omega_r^2) + (2\xi_i \omega_i \omega_r)j|} = \frac{|\psi_i \psi_i^T|_{pq}}{|2\xi_i \omega_r^2|} \quad (3.21)$$

Rearranjando (3.21):

$$|\psi_i \psi_i^T|_{pq} = |2\xi_i \omega_i^2| |H_{pq}(\omega_i)| \quad (3.22)$$

onde $|H_{pq}(\omega_i)|$ é o módulo da FRF na i -ésima frequência natural.

Através de (3.22) chega-se aos valores absolutos dos elementos ψ_i , sendo seus sinais (positivo ou negativo) obtidos através da fase da FRF, o que permite definir completamente o autovetor ou modo de vibração.

Capítulo 4

ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

4.1 INTRODUÇÃO

Basicamente existem duas formas experimentais de tratar o problema dinâmico de vibrações:

- através da análise de sinais, onde se determina a resposta de um sistema devido a uma excitação, na maioria dos casos, desconhecida;
- através da análise do sistema, onde se deseja determinar as propriedades inerentes de um sistema através da medição da sua resposta a uma excitação conhecida.

Na Análise Modal o foco está sobre a segunda forma. Na sua forma clássica, a Análise Modal Experimental (AME) consiste em determinar experimentalmente um conjunto de Funções Resposta em Frequência (FRF) e a partir delas extrair, com auxílio de um programa computacional, os parâmetros modais do sistema.

4.2 CONFIGURAÇÕES DE TESTE

A parte mais importante da AME é a medição das FRF que devem conter dados confiáveis e suficientes para representar o comportamento dinâmico da estrutura a ser analisada.

Existem pelo menos quatro diferentes configurações de teste para realizar tais medições. Tais configurações estão diretamente relacionadas com o número de respostas e/ou excitações (número de canais do analisador) que podem ser analisadas num mesmo instante:

- entrada e saída simples (*single input/single output -SISO*)
- entrada simples e saída múltipla (*single input/multiple output - SIMO*)
- entrada múltipla e saída simples (*multiple input/single output -MISO*)

- entrada e saída múltipla (*multiple input/multiple output -MIMO*)

Geralmente, considera-se que a melhor configuração é a de múltiplas excitações e respostas (MIMO), uma vez que os dados são coletados no menor tempo possível com o mínimo de modificações nas condições de teste.

4.3 EQUIPAMENTO E CONDIÇÕES DE TESTE

Em muitas aplicações, há necessidade de se definir um grande número de graus de liberdade e de medir as respectivas FRF. Consequentemente, o uso de recursos computacionais é essencial para uma análise rápida e precisa.

O equipamento utilizado para análise modal deve possuir três itens principais:

- um dispositivo para excitação da estrutura ;
- transdutores para medição das grandezas de interesse;
- um analisador que permita extrair as informações a serem tratadas.

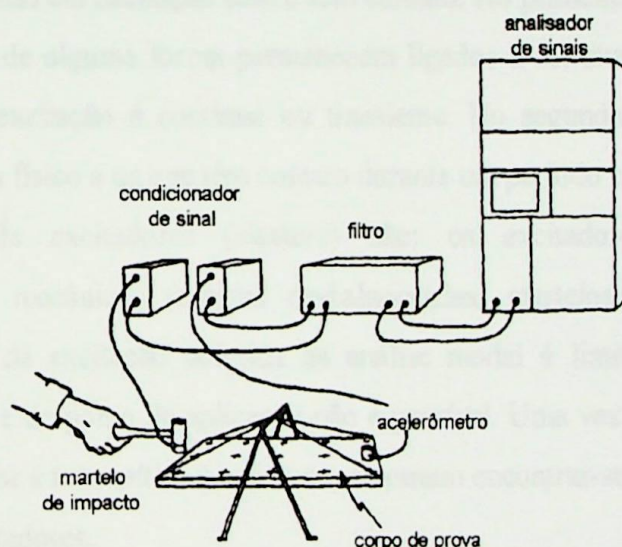


Figura 4.1: Configuração típica de teste

A estrutura pode estar livre ou fixa. Por livre, entende-se que, teoricamente, a estrutura não possui nenhum grau de liberdade restrito, possuindo seus seis possíveis movimentos de corpo rígido com frequência natural de 0 Hz. Na prática, embora isso não ocorra, é possível simular condições próximas suspendendo a estrutura por meio suportes muito elásticos. As frequências naturais mais baixas obtidas não são iguais a zero, mas são muito baixas (por baixas entende-se valores menores que 10-20% da frequência natural do primeiro modo flexional).

A estrutura fixa possui alguma ligação com o ambiente. Se teoricamente é simples fixar uma estrutura, na prática essa condição é bem mais difícil de se obter, uma vez que nenhum suporte ou base fornece rigidez infinita. Uma solução para isso é medir, dentro da faixa de frequência de interesse, a mobilidade do suporte isoladamente e verificar se de fato os valores de mobilidade obtidos são muito menores que os níveis correspondentes para o teste da estrutura no ponto de fixação. Cabe ressaltar entretanto, que as restrições nos graus de liberdade envolvem frequentemente rotações e essas são de difícil medição.

Pode-se inferir portanto que o ideal é realizar as medições no corpo livre, mas ao imaginar um prédio ou uma ponte conclui-se que nem sempre isso é possível. Em outros casos a condição real de operação é muito mais próxima de uma estrutura fixa do que livre, ou seja não existe uma regra fixa e cada caso deve ser ponderado.

4.3.1 Excitação

A excitação da estrutura pode ser feita de várias maneiras, basicamente as formas podem ser classificadas em excitação com e sem contato. No primeiro grupo enquadram-se os dispositivos que de alguma forma permanecem ligados a estrutura durante todo teste, independente se a excitação é contínua ou transiente. No segundo grupo estão os que excitam sem contato físico e os que têm contato durante um período curto.

Exemplos de excitadores (*shakers*) são: os excitadores eletromagnéticos, eletrohidráulicos e mecânicos (massas desbalanceadas, martelos, pêndulos, foguetes, explosões). O uso de excitação acústica na análise modal é limitado uma vez que o controle da direção e do ponto de aplicação não é possível. Uma vez que nem toda a força gerada pelo excitador é transmitida à estrutura, é comum encontrar-se transdutores de força associados aos excitadores.

Para assegurar que a estrutura só seja excitada na direção desejada deve-se conectar o excitador à estrutura através de uma barra (*stinger*) ou qualquer outro corpo que seja rígido o suficiente para transmitir o movimento na direção desejada e relativamente flexível para as outras cinco direções.

Uma forma bastante simples de excitação, embora de difícil repetibilidade, é através dos martelos de impacto, que nada mais são do que um peso associado a uma célula de carga ou transdutor de força para medição da intensidade da força aplicada. A faixa de frequência que se pode trabalhar é função da rigidez das superfícies de contato e o peso do martelo sendo que acima da frequência natural desses valores é difícil trabalhar. O sinal gerado é transiente (curta duração) e o espectro de frequência contínuo, com amplitude máxima em 0 Hz decaindo com o aumento da frequência (Fig. 4.2).

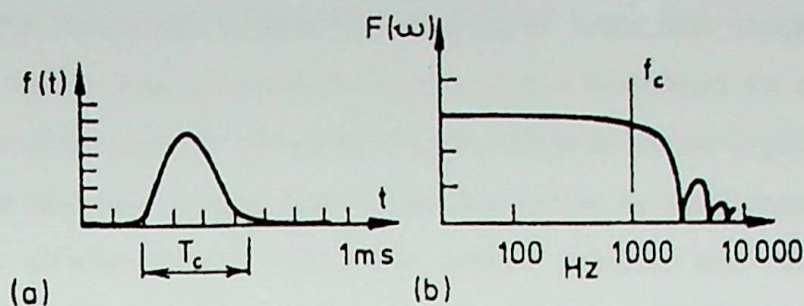


Figura 4.2: (a) Função impulso no domínio do tempo, (b) domínio da frequência

4.3.2 Transdutores

Para medição das respostas o transdutor piezoelétrico é o mais amplamente utilizado na análise modal. Isso se deve aos seguintes fatores:

- boa linearidade;
- baixo peso;
- ampla faixa de resposta em amplitude e frequência;
- construção simples e robusta;
- baixa sensibilidade transversal;
- montagem simples.

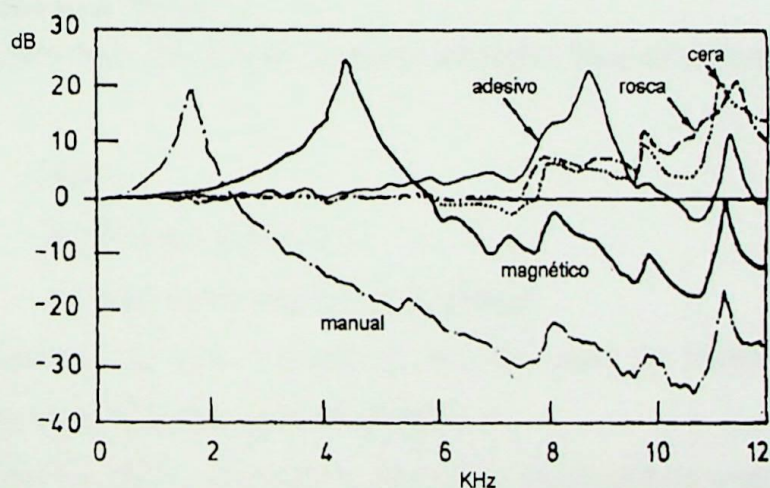


Figura 4.3: Resposta em frequência para diferentes fixações dos acelerômetros

O acelerômetro ideal deve possuir a maior sensibilidade possível, entretanto seu tamanho e peso aumentam a medida que a sensibilidade aumenta, o que pode inviabilizar uma medição. A sensibilidade transversal deve ser baixa também (1-2% para medidas de precisão).

A localização e fixação dos transdutores é de suma importância. A figura 4.3 mostra os limites de frequência aplicáveis a diversos tipos de fixação. Quanto a localização

deve-se ter em mente que independente de qualquer outro fator sempre haverá uma alteração na rigidez local da estrutura. Se porventura a localização for sobre ou muito próxima a um nó do modo de vibração haverá necessidade de removê-lo para outro ponto.

Apesar dos acelerômetros serem o tipo mais comum de transdutores para medição de vibrações, existem diversos outros tipos também utilizados tais como: cabeças de impedância, transdutores de força, transdutores eletrodinâmicos (LVDT), capacitivos, etc.

Com o advento do laser, surgiram técnicas óticas para medição de velocidades e deslocamentos de um dado objeto. Uma técnica desenvolvida para medição de vibrações é a velocimetria Doppler. Nela, um feixe de laser é focalizado em um ponto do objeto que se deseja estudar. O movimento do objeto produz uma variação na frequência das ondas (efeito Doppler) que é proporcional a velocidade da superfície focada. O estudo de vibrações através do uso de vibrômetros laser Doppler (LDV) se resume, então, a detectar e medir esse desvio na frequência das ondas de luz. Essa técnica tem a vantagem de permitir realizar medições em estruturas de difícil acesso ou cujas condições não sejam favoráveis ao uso de transdutores convencionais (estruturas muito pequenas, aplicações biomédicas, etc.).

4.3.3 Analisadores de Sinais

Diferentes tipos de medidas requerem diferentes tipos de analisadores que podem ser:

- filtros;
- analisadores de espectro;
- analisadores de resposta em frequência.

Independente do tipo, o analisador deve ser capaz de transformar as entradas analógicas em sinais digitais a serem processados.

Enquanto os filtros e analisadores de resposta em frequência medem e extraem uma frequência de cada vez os analisadores de espectro medem simultaneamente todos os componentes de frequência presentes no sinal que está no domínio do tempo. Uma forma de saída que um analisador fornece são as frequências presentes no sinal de entrada e suas intensidades relativas.

Para realizar essa tarefa existem circuitos baseados na Transformada de Fourier, que estabelece que uma função $x(t)$, periódica no tempo T , pode ser escrita como uma série infinita:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \quad (4.1)$$

onde a e b podem ser calculados a partir de $x(t)$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \end{aligned} \quad (4.2)$$

Algoritmos mais eficientes para realizar esta transformação do domínio do tempo para o domínio de frequência, como a Transformada Rápida de Fourier (FFT) otimizaram em muito o trabalho. Por outro lado, a necessária amostragem do sinal contínuo tem características e efeitos que se não tratadas devidamente podem levar a conclusões erradas. É necessário, portanto, para o correto emprego da Análise Modal Experimental, que o analista tenha sólidos conhecimentos no campo da Análise Sinais.

4.4 CLASSIFICAÇÃO DOS SINAIS

Na AME são utilizados diferentes tipos de sinais que podem ser classificados da seguinte forma (McConnell, 1995):

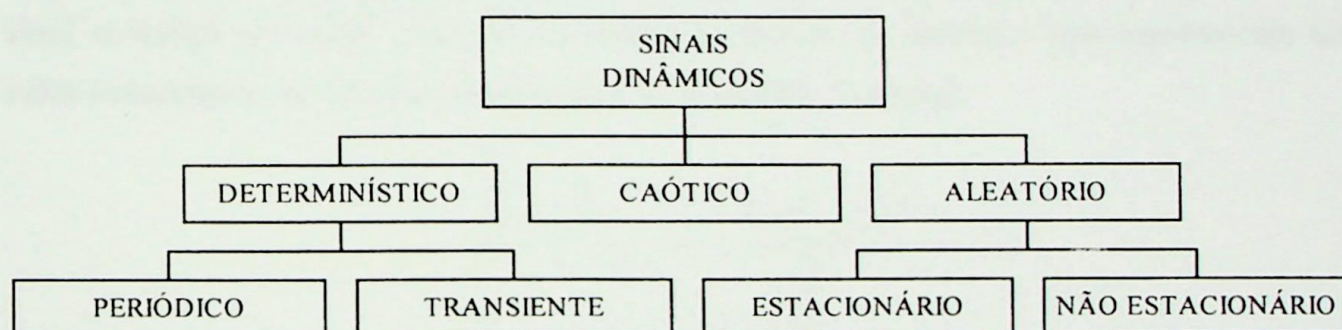


Figura 4.4: Classificação dos sinais dinâmicos

- **sinais periódicos:** são sinais que se repetem a cada período T . Podem ser desde uma simples senóide até um sinal rico em frequências, mas sempre periódico. São sinais ideais na medida que seus espectros podem ser obtidos sem erros de *leakage*.

- **sinais transientes:** também chamados transitórios, são sinais de duração finita no tempo, tais como impactos. Desde que sua duração seja menor ou igual ao tempo de aquisição, também não há erros de *leakage*. Os mais usados na AME são o impacto com o martelo instrumentado, o *burst random* (rajada aleatória) e o *burst chirp* (rajada multiseno). As desvantagens do impacto são a dificuldade de adquirir adequadamente os sinais de curta duração, de excitar o sistema com nível de força ideal e da necessidade de

janelas exponenciais no caso sistemas pouco amortecidos. Os outros sinais não apresentam essa desvantagem.

- **sinais aleatórios:** ou randômicos, foram muito usados na década de 80 por permitir excitar uma larga banda de frequências simultaneamente e linearizar as FRF no caso de presença de não linearidades. Na década de 90 ficou demonstrado que os sinais tipo *chirp* além dessas vantagens, não apresentam *leakage* e necessitam de um menor número de médias para obter um sinal com a mesma qualidade de outro obtido com sinal aleatório (McConnell, 1995). São caracterizados através de parâmetros estatísticos.

Escolhido o tipo de sinal, este é gerado eletronicamente ou sintetizado digitalmente, amplificado e levado até os excitadores. As diversas excitações são então aplicadas, simultaneamente ou não, em diferentes pontos e direções (graus de liberdade) da estrutura. As excitações e respostas são adquiridas e processadas pelo analisador de sinais.

4.5 ANÁLISE DE SINAIS

O processo de amostragem analógico para digital (A/D) é o processo de conversão de um sinal contínuo no tempo para uma seqüência discreta de números que representam um valor instantâneo do sinal em determinado incremento de tempo.

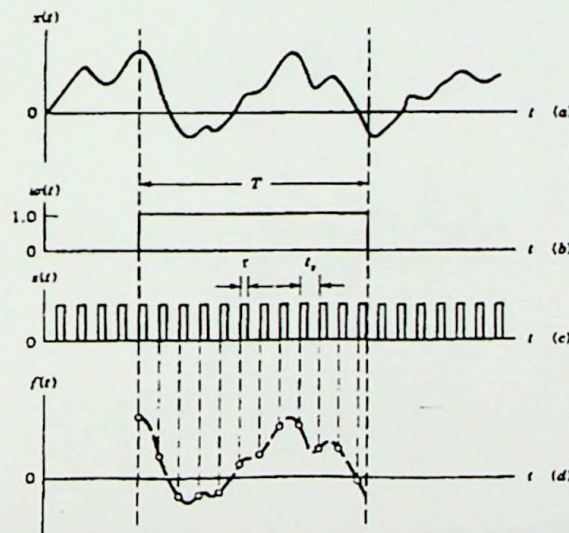


Figura 4.5: Processo de amostragem. (a) Sinal analógico. (b) Função janela $w(t)$. (c) Função de amostragem $s(t)$. (d) Sinal digitalizado $f(t) = w(t)s(t)x(t)$. (McConnel, 1995)

A qualidade do sinal digitalizado é conseqüência das diversas transformações aplicadas sobre o sinal e das características inerentes do processo.

4.5.1 Aliasing

É um efeito introduzido devido a amostragem do sinal contínuo no tempo, que ocasiona que sinais em alta frequência, após a amostragem, tenham o mesmo aspecto de um sinal de baixa frequência (Fig. 4.6), como ocorre num estroboscópio.

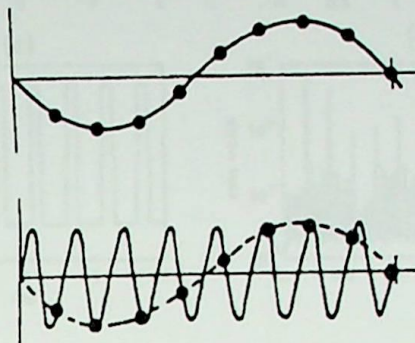


Figura 4.6: Efeito de *aliasing* (no tempo)

A amostragem discreta no domínio do tempo (a multiplicação do sinal por um trem de impulsos unitários) corresponde ao domínio da frequência a uma repetição periódica do espectro com um período igual a frequência de amostragem (f_s). Se o sinal original contiver algum componente de frequência maior que metade da taxa de amostragem não será possível separar corretamente o espectro (Fig. 4.7).

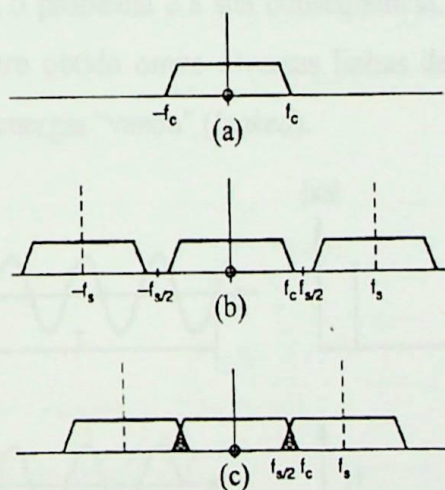


Figura 4.7: (a) Espectro de um sinal contínuo com frequência máxima f_c , (b) Espectro de um sinal com taxa de amostragem $f_s > 2 f_c$, (c) Espectro de um sinal com taxa de amostragem $f_s < 2 f_c$ (a área hachurada indica os componentes aliased)

O efeito de *aliasing* é normalmente evitado com o uso de filtros que excluem as frequências acima de metade da taxa de amostragem antes da amostragem, ou seja, os chamados filtros *anti-aliasing* funcionam como filtros passa-baixa (Fig. 4.8).

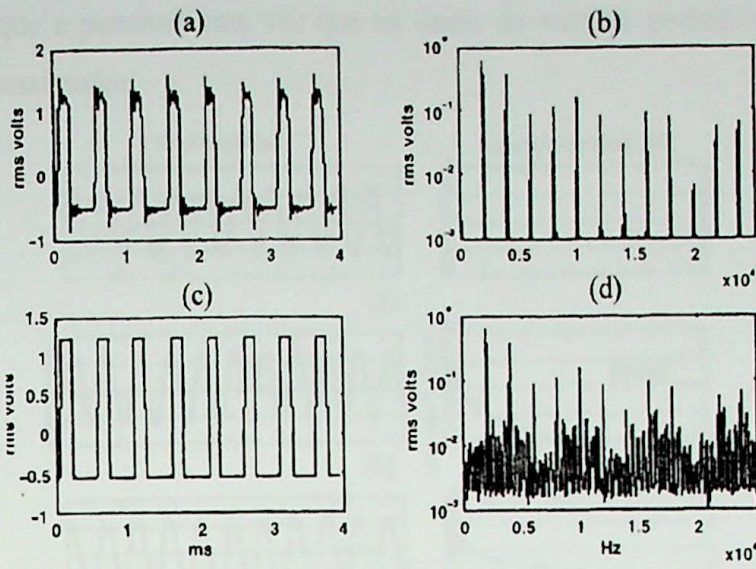


Figura 4.8: (a) sinal no tempo com filtro, (b) espectro com filtro, (c) sinal no tempo sem filtro, (d) espectro sem filtro

4.5.2 Leakage

Ao aplicar a transformada de Fourier em um sinal amostrado, considera-se que dentro da janela capturada existe pelo menos um período completo do sinal original. O efeito de *leakage* ocorre quando o intervalo de tempo do sinal original é maior que o utilizado para a amostragem.

A Figura 4.9 ilustra o problema e a sua consequência. A origem do nome está no fato de que como o espectro obtido omite diversas linhas de frequência e amplitude do sinal original, diz-se que a energia "vazou" (*leaked*).

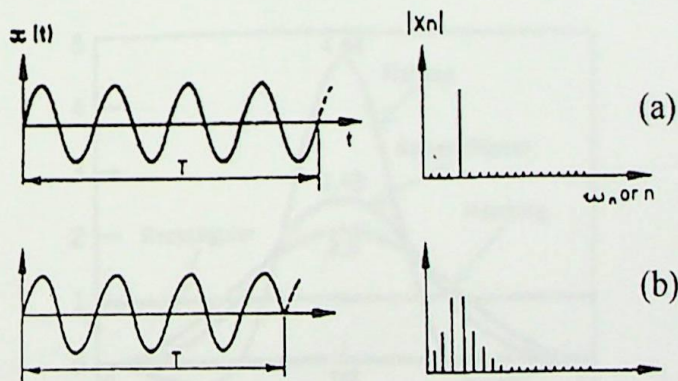


Figura 4.9: Efeito de *leakage*

Uma forma de contornar o problema é aumentar a janela de tempo de amostragem. Outra forma, empregada na análise modal experimental, é fazer com que a janela dos dados adquiridos contenha um número inteiro de períodos de todas as frequências

importantes, o que é possível uma vez que os sinais de entrada podem ser sincronizados com o ciclo do analisador.

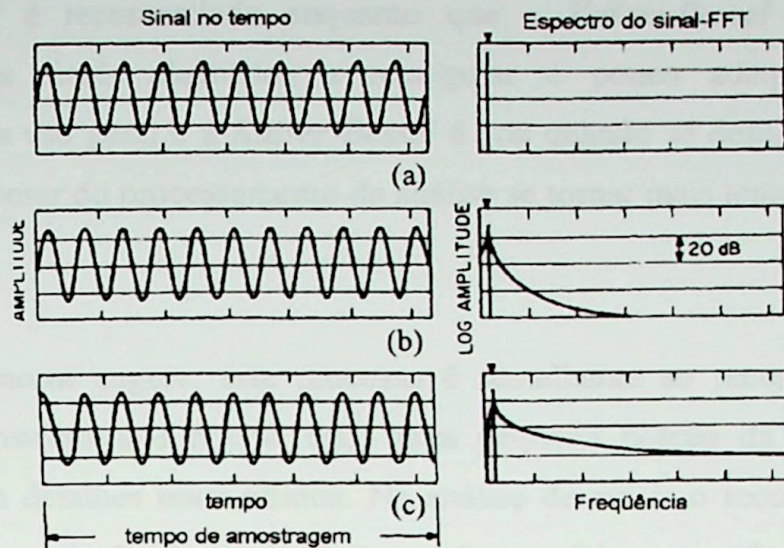


Figura 4.10: Efeito do tamanho janela de tempo. (a) número inteiro de períodos, sem descontinuidade, (b) e (c) metade do número inteiro de períodos, mas com diferentes relações entre as fases, gerando diferentes descontinuidades, quando os finais são unidos em um *loop*

4.5.3 Windowing

Windowing ou janelamento dos dados é uma função peso pela qual os dados são multiplicados antes de se aplicar as transformadas de Fourier. O objetivo do janelamento é minimizar o efeito de descontinuidade e conseqüente erro de *leakage* que ocorre quando parte de um sinal contínuo é juntado a outro.

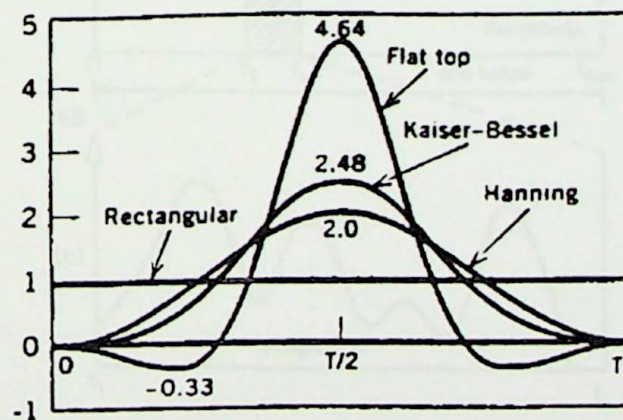


Figura 4.11: Características das janelas no domínio do tempo (McConnell, 1995)

Exemplos de algumas janelas mais comuns são apresentados na Figura 4.11. Percebe-se que a janela retangular trata o sinal por igual durante o tempo T , enquanto nas demais o sinal inicia e termina em zero minimizando os efeitos de *leakage*.

A escolha da janela mais adequada varia em função do tipo de sinal. De uma forma geral para sinais periódicos a janela retangular é pouco adequada. Com sinais transientes a janela retangular é recomendada enquanto que a *Kaiser-Bessel* e *flat-top* não são apropriadas. Para sinais aleatórios a retangular é pouco adequada, a *hanning* é recomendada para uso geral e a *Kaiser-Bessel* é boa quando se deseja uma boa resolução em freqüência, apesar do processamento da análise se tornar mais lento.

4.5.4 Zoom

Como o nome sugere, este processo é semelhante ao recurso de mesmo nome observado em instrumentos óticos, onde uma pequena porção da imagem é ampliada obtendo-se assim detalhes mais nítidos. Na análise de sinais o recurso de *zoom* permite uma melhoria da resolução do sinal (Δf) dentro de uma faixa específica de freqüência. Com isso, é possível analisar com maior precisão sinais que contenham:

- múltiplos harmônicos de freqüências baixas (como ocorre em rolamentos);
- freqüências de ressonância muito próximas;
- um elevado número de harmônicos de uma ou mais freqüências naturais (como em trem de engrenagens).

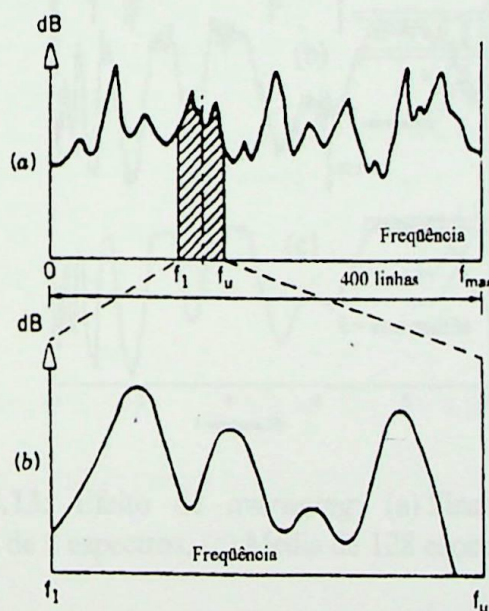


Figura 4.12: (a) Sinal original, (b) Zoom na região hachurada

A maneira pela qual este recurso é obtido varia podendo ser feito, por exemplo, aumentando o número de linhas da FFT o que requer um equipamento com mais recursos, ou através de uma transformação matemática que resulta no deslocamento da origem da banda de freqüência do sinal analisado para o centro da banda desejada (“heterodinagem”

A maneira pela qual este recurso é obtido varia podendo ser feito, por exemplo, aumentando o número de linhas da FFT o que requer um equipamento com mais recursos, ou através de uma transformação matemática que resulta no deslocamento da origem da banda de frequência do sinal analisado para o centro da banda desejada ("heterodinagem" ou *zoom* em tempo real). Devido ao seu "custo" inicial menor, este último processo é o mais amplamente utilizado.

4.5.5 Averaging

Este recurso está diretamente relacionado com processamento de sinais aleatórios, que a rigor, não possuem transformadas de Fourier sendo caracterizados estatisticamente através de estimadores para as funções de correlação e densidades espectrais de potência.

Na prática esse processo envolve diversas amostragens individuais até que se obtenha um resultado confiável e livre de ruídos aleatórios.

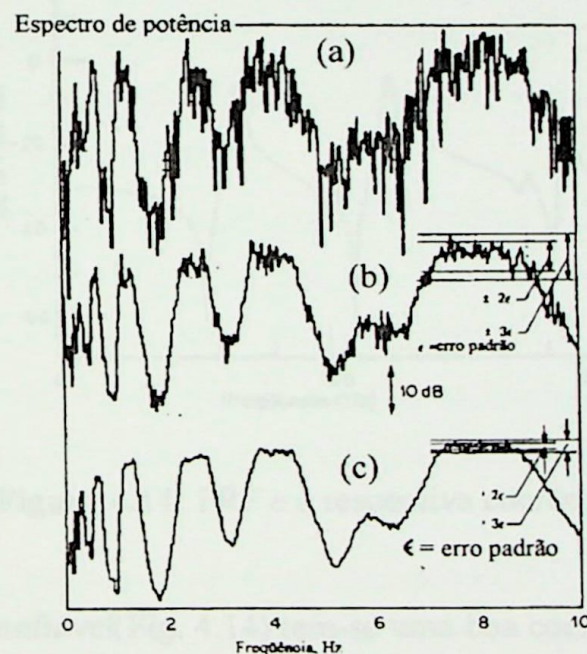


Figura 4.13: Efeito de *averaging*: (a) Sinal instantâneo, (b) Média de 8 espectros, (c) Média de 128 espectros.

4.5.6 Coerência

A coerência é uma função que permite estimar o grau de relação entre a entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$. É uma quantidade real definida como:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_x(f)G_y(f)} \quad (4.3)$$

onde G , por definição é a densidade espectral de potência do sinal. (McConnell, 1995).

Para o caso ideal de um sistema linear com parâmetros constantes com entrada e saída bem definidas tem-se que a função de coerência $\gamma_{xy}^2 = 1$. Se $x(t)$ e $y(t)$ não se relacionam a função é igual a zero. Quando a função assume valores entre zero e um então uma ou mais das situações podem ocorrer:

- presença de ruído na medição;
- o sistema não é linear;
- $y(t)$ não é uma resposta devido a excitação $x(t)$.

Nos sistemas lineares γ_{xy}^2 pode ser interpretada como a fração do valor médio quadrático da saída $y(t)$ devido a entrada $x(t)$ na frequência f sendo freqüentemente utilizada para indicar a qualidade da medição realizada.

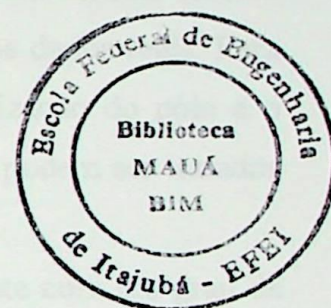
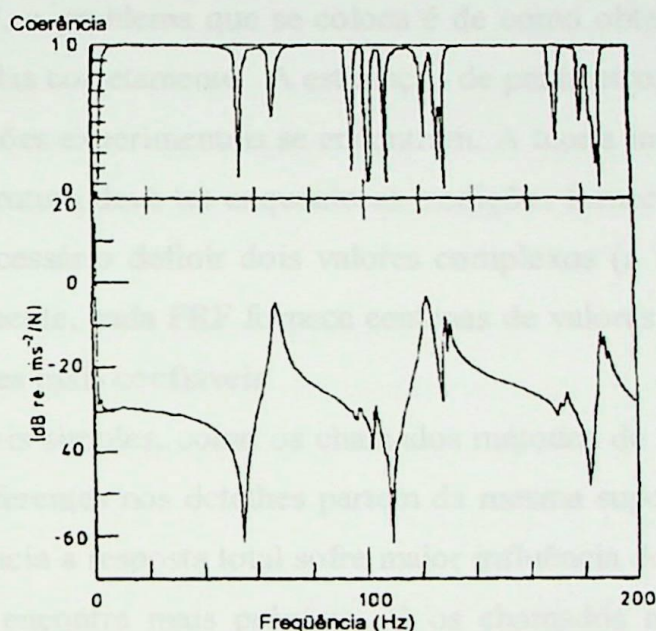


Figura 4.14: FRF e a respectiva coerência

Numa medição confiável (Fig. 4.14) tem-se uma boa coerência ($\gamma_{xy}^2 \rightarrow 1$) em todos os pontos, exceto próximo as ressonâncias e antirressonâncias.

4.6 PROCESSAMENTO DE SINAIS

Os dados de saída do analisador consistem numa série de valores de frequência, amplitude e fase. As expressões teóricas de cada FRF devem ser ajustadas aos valores de saída. Existem diversos métodos para fazer esse ajuste, cada um com suas vantagens e desvantagens, não havendo um método ideal para todos os casos. A complexidade dos métodos vão desde a simples análise de uma parte da FRF, passando pela curva com

diversas ressonâncias até chegar no conjunto de FRF de uma estrutura. Qualquer que seja o caso porém, o objetivo é sempre o mesmo: obter os coeficientes de uma expressão teórica para a FRF que melhor se ajusta aos dados coletados e a partir desta obter os parâmetros modais do sistema. A grande maioria dos métodos trabalha no domínio da frequência, ou seja com as FRF propriamente ditas, mas existem métodos que trabalham no domínio do tempo. Esses métodos se baseiam no fato que a transformada inversa de Fourier da FRF é uma função característica do sistema - a função resposta ao impulso.

4.7 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

Obtidas as FRF, o problema que se coloca é de como obter os parâmetros modais que podem representá-las corretamente. A estimação de parâmetros modais é onde a teoria matemática e as medições experimentais se encontram. A teoria indica um modelo teórico que a FRF de uma estrutura deve ter enquanto as medições fornecem os dados reais. Para obter cada modo é necessário definir dois valores complexos (a localização do pólo e o resíduo), mas normalmente, cada FRF fornece centenas de valores que podem ser tratados visando fornecer valores mais confiáveis.

Os métodos mais simples, como os chamados métodos de “ajuste com um grau de liberdade”, embora diferentes nos detalhes partem da mesma suposição: na vizinhança de onde ocorre a ressonância a resposta total sofre maior influência do modo de vibração cuja frequência natural se encontra mais próxima. Já os chamados métodos de “ajuste com múltiplos graus de liberdade”, embora mais complexos permitem obter resultados mais precisos.

Matematicamente, pode-se por exemplo, tomår a FRF:

$$H(\omega) = i\omega \sum_{r=1}^N \frac{A_r}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (4.5)$$

e ajustar o conjunto de valores medidos $H_m(\omega_1)$, $H_m(\omega_2)$... a esta expressão, de forma que se possa obter A_1 , A_2 ,... e λ_1 , λ_2 ,... Este método entretanto, não é considerado eficiente. Além de não explorar as propriedades na ressonância nenhum tratamento é feito quanto a qualidade dos dados.

A Tabela (4.1) apresenta o nome e o acrônimo de alguns algoritmos de ajuste utilizados para identificação de parâmetros modais.

Tabela 4.1: Algoritmos para identificação dos parâmetros modais

CEA	<i>Complex exponential algorithm</i>
LSCE	<i>Least square complex exponential</i>
PTD	<i>Polyreference time domain</i>
ITD	<i>Ibrahim time domain</i>
MRITD	<i>Multiple reference Ibrahim time domain</i>
ERA	<i>Eigensystem realization algorithm</i>
PFD	<i>Polyreference frequency domain</i>
SFD	<i>Simultaneous frequency domain</i>
MRFD	<i>Multireference frequency domain</i>
RFD	<i>Rational fraction polynomial</i>
OP	<i>Orthogonal polynomial</i>
CMFI	<i>Complex mode indication function</i>

4.7.1 Método do pico na ressonância

O método do pico na ressonância é muito adequado para estruturas que apresentam os modos bem definidos e cujo amortecimento não seja ao mesmo tempo nem tão baixo, permitindo que as medições sejam feitas com maior precisão e nem muito alto ou localizado a ponto de que a resposta em dada ressonância sofra muita influência de outros modos.

A aplicação do método segue os seguintes passos:

-os picos de ressonância são identificados na FRF e a frequência no ponto de maior amplitude é considerada a frequência natural daquele modo (ω);

-o valor máximo da FRF ($|\hat{\alpha}|$) é registrado e a largura de banda para um nível de resposta igual a $|\hat{\alpha}|/\sqrt{2}$ é determinada ($\Delta\omega$). Os dois pontos obtidos ω_a e ω_b são os chamados pontos de meia potência;

-o amortecimento do modo em questão pode ser estimado a partir de uma das fórmulas :

$$\begin{aligned}\eta_r &= (\omega_a - \omega_b) / \omega_r \\ \xi_r &= 2\eta_r\end{aligned}\quad (4.6)$$

Para se obter a constante do modo de vibração analisado considera-se que a resposta total nesta região de ressonância é atribuída a um único termo de toda FRF.

$$A_r = |\hat{\alpha}| \omega_r^2 \eta_r \quad (4.7)$$

Uma limitação deste método é que os parâmetros obtidos dependem muito da precisão na medição do máximo da FRF. A hipótese de considerar cada modo independente também é uma limitação, uma vez que nem sempre isso ocorre na prática e o modo analisado sempre sofre influência de outros modos. Além disto, apenas as constantes

reais podem ser obtidas o que significa que apenas modos reais ou estruturas com amortecimento proporcional podem ser analisadas por este método.

4.7.2 Método de Ibrahim no Domínio do Tempo

O método consiste na obtenção dos parâmetros modais partindo de um conjunto de medições feitas em uma análise, ou seja não é um ajuste de curva propriamente dito ou a análise de uma única FRF por vez, mas sim um processo que envolve todas as medições de uma só vez. Outra característica interessante deste método é que ele pode ser utilizado mesmo sem o conhecimento da excitação envolvida. No caso da excitação ser conhecida, é possível se obter os autovetores em escala caso contrário, é possível obter apenas os autovetores fora de escala, a frequência e o amortecimento modal.

A obtenção dos resultados se baseia na solução de um sistema livre de vários graus de liberdade e com amortecimento viscoso. Considera-se que a resposta tem a seguinte forma:

$$x_i(t_j) = \sum_{r=1}^{2m} r \psi_r e^{s_r t_j} \quad r = 1, \dots, 2m \quad (4.8)$$

onde i é o índice relativo a coordenada, j o incremento de tempo no qual a resposta é medida, s_r é r -ésima raiz ou autovalor complexo da equação característica do sistema e ψ_r o autovetor correspondente sendo $r\psi_r$ o r -ésimo elemento deste vetor.

Até este ponto os autovetores estão fora de escala. Considera-se ainda que o número de graus de liberdade disponíveis é m . Isso não implica que m seja igual ao grau de liberdade total do sistema, N , mas sim que m é o mínimo necessário para representar a medição realizada. Na prática isso ocorre quando, por exemplo, se limita a faixa de frequência de interesse.

Medindo-se a resposta nos pontos i da estrutura ($i=1, m$) em diversos instantes ($j=1, q$) obtém-se a equação do sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \dots & x_1(t_q) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \dots & x_2(t_q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) & \dots & x_n(t_q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\psi_1 & 2\psi_1 & \dots & 2m\psi_1 \\ 1\psi_2 & 2\psi_2 & \dots & 2m\psi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1\psi_n & 2\psi_n & \dots & 2m\psi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s_1 t_1} & \dots & \dots & e^{s_1 t_q} \\ e^{s_2 t_1} & \dots & \dots & e^{s_2 t_q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{s_{2m} t_1} & \dots & \dots & e^{s_{2m} t_q} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

ou numa forma mais simples:

$$[x] = [\psi][\Lambda] \quad (4.10)$$

A matriz $[x]_{n \times q}$ contém os valores conhecidos das medidas feitas da estrutura, $[\psi]_{n \times 2m}$ contém os autovetores (a determinar) e $[\Delta]_{2m \times q}$ é função dados autovalores complexos (a determinar) e das respostas no domínio tempo.

Outro conjunto de equações é formado a partir de um segundo conjunto de respostas defasadas Δt do primeiro conjunto de equações.

$$x_i(t_i + \Delta t) = \sum_{r=1}^{2m} r \psi_i e^{s_r(t_j + \Delta t)} \quad (4.11)$$

Ou de outra forma:

$$\hat{x}_i = \sum_{r=1}^{2m} r \hat{\psi}_i e^{s_r t_j} \quad \text{onde} \quad r \hat{\psi} = r \psi e^{s_r \Delta t} \quad (4.12)$$

que leva ao seguinte conjunto de equações na forma matricial:

$$[\hat{x}] = [\hat{\psi}] [A] \quad (4.12)$$

Fazendo $n=2m$, de tal forma que as matrizes $[\hat{\psi}]$, $[\hat{x}]$ fiquem quadradas define-se a matriz $[A]$, matriz do sistema como:

$$[A][\hat{\psi}] = [\hat{x}] \quad (4.13)$$

Das equações (4.12) e (4.13) chega-se:

$$[A][\hat{x}] = [\hat{x}] \quad (4.14)$$

Se além da consideração já feita ($n=m$) for selecionado um número de amostras no tempo (q) igual ao número de pontos (n) então $[A]$ pode ser obtida diretamente. Entretanto é comum fazer-se $q > 2m$ e neste caso a matriz $[A]$ pode ser obtida pelo processo da pseudo-inversa:

$$[A] = [\hat{x}][\hat{x}]^T ([\hat{x}][\hat{x}]^T)^{-1} \quad (4.15)$$

Voltando a Equação (4.8) observa-se que:

$$(\hat{\psi})_r = (\psi)_r e^{s_r \Delta t} \quad (4.16)$$

o que permite escrever:

$$[A](\psi)_r = (e^{s_r \Delta t})(\psi)_r \quad (4.17)$$

Para uma boa estimação é necessário garantir que o posto da matriz $[A]$ seja igual a n . A solução de (4.17) é obtida através da determinação dos autovalores da matriz $[A]$. Cabe ressaltar que esses autovalores não são os mesmos obtidos através da equação de movimento, embora estejam diretamente relacionados. As correspondentes frequências

naturais complexas (s_r) podem ser determinadas e a partir delas, as frequências naturais e o fator de amortecimento do sistema.

$$\begin{aligned}
 e^{s_r \Delta t} &= \lambda_r = a_r + ib_r = e^{-\omega_r \xi_r \Delta t} e^{i \omega_r \Delta t} = c_r e^{i \theta_r} \\
 c_r &= \sqrt{(a_r^2 + b_r^2)} \quad \text{e} \quad \theta_r = \tan^{-1}(-b_r/a_r) \\
 \omega_r \xi_r &= -\ln \frac{(a_r^2 + b_r^2)}{2 \Delta t} \\
 \omega_r &= \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} = \tan^{-1}(-b_r/a_r \Delta t)
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

Os modos de vibração que se pode obter a partir daí, em geral estão fora de escala, inadequados portanto para reproduzir as curvas FRF. Apenas se a resposta à vibração livre fosse obtida a partir da resposta ao impulso poder-se-ia normalizar em relação a massa os autovetores calculados.

Vários métodos podem ser aplicados para as obter soluções aproximadas de equações diferenciais. Estes métodos são chamados de métodos de aproximação sendo muito utilizados para representar o comportamento de um meio contínuo através de um conjunto de equações algébricas. Alguns destes métodos estão diretamente relacionados com o Método de Ritz.

Existem pelo menos três formas generalizadas baseadas no Método de Ritz para obtenção de um modelo matemático representativo de um meio contínuo. Deste ponto, o método "R" e o método "p" se baseiam no procedimento de valores e de frequências do meio contínuo com um número finito de pontos materiais. A terceira forma, chamada de "Método dos Elementos de Campos", se baseia no Teorema de Galerkin para determinar o comportamento no interior do volume e parte do seu comportamento no contorno. Neste último caso, apenas o contorno é representado por um conjunto finito de pontos materiais.

Neste capítulo será apresentada uma abordagem de análise de vibrações livres não amortecidas através do Método dos Elementos dos Campos (MEC). Com o advento e popularização dos recursos computacionais o MEC se tornou a ferramenta base de diversos programas tipo CAE (Computer Aided Engineering) auxiliando não só na fase de projeto como também na de validação de resultados obtidos por outras técnicas, como por exemplo a Análise Modal Experimental (AME).

5.2 MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO

Seja a equação diferencial

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta \dot{u}(t) + u(t) = 0 \tag{5.1}$$

Capítulo 5

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

5.1 INTRODUÇÃO

Vários métodos podem ser aplicados para se obter soluções aproximadas de equações diferenciais. Esses métodos são chamados de métodos de aproximação sendo muito utilizados para representar o comportamento de um meio contínuo através de um conjunto de equações algébricas. Alguns destes métodos estão diretamente relacionados com o Método de Ritz..

Existem pelo menos três formas generalizadas baseadas no Método de Ritz para obtenção de um modelo matemático representativo do meio contínuo. Duas dessas, o método “*h*” e o método “*p*” se baseiam no preenchimento do volume e da fronteira do meio contínuo com um número finito de pontos materiais. A terceira forma, chamada de “Método dos Elementos de Contorno” se baseia no Teorema de Green para descrever o comportamento no interior do volume a partir do seu comportamento no contorno. Neste último caso, apenas o contorno é representado por um conjunto finito de pontos materiais.

Neste capítulo será apresentada uma formulação da análise de vibrações livres não amortecidas através do Método dos Elementos dos Finitos (MEF). Com o advento e popularização dos recursos computacionais o MEF se tornou a ferramenta base de diversos programas tipo CAE (*Computer Aided Enginnering*) auxiliando não só na fase de projeto como também na de validação de resultados obtidos por outras técnicas, como por exemplo a Análise Modal Experimental (AME).

5.2 MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO

Seja a equação diferencial:

$$A(\phi) = L\phi + p = 0 \quad (5.1)$$

onde, L é um operador diferencial linear e p é independente de ϕ , e A satisfaz as seguintes condições de contorno:

$$B(\phi) = M\phi + r = 0 \text{ no contorno } \Gamma. \quad (5.2)$$

sendo M , operador linear e r independente de ϕ .

Um método para se obter soluções aproximadas consiste em fazer:

$$\phi \cong \hat{\phi} = \sum_{i=1}^N N_i \hat{\phi}_i \quad (5.3)$$

sendo que o domínio Ω do problema deve ser dividido em vários subdomínios Ω_e . A Equação (5.3) é aplicada a cada subdomínio e as funções de interpolação, N_i , são definidas nos n pontos do subdomínio de tal forma que:

$$N_i = \begin{cases} 1 & , \text{ no ponto } i \\ 0 & , \text{ nos demais} \end{cases} \quad (5.4)$$

Uma vez feita a aproximação, o método dos resíduos ponderados poderá ser aplicado para obtenção das incógnitas de aproximação, ou seja fazendo:

$$\int_{\Omega} W_j R_{\Omega} d\Omega = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.5)$$

onde W_j são as funções de ponderação e $R_{\Omega} \equiv A(\hat{\phi}) \equiv L\hat{\phi} + p$ é o resíduo da aproximação.

Logo:

$$\int_{\Omega} W_j (L\hat{\phi} + p) d\Omega = 0 \quad (5.6)$$

Utilizando o critério de Galerkin, as funções de ponderação no método dos resíduos ponderados serão as próprias funções de interpolação utilizadas na aproximação:

$$\int_{\Omega} N_j (L\hat{\phi} + p) d\Omega = 0 \quad (5.7)$$

cuja solução é da forma:

$$[K]\{\hat{\phi}\} = \{f\} \quad (5.8)$$

5.3 PROBLEMA DE VIBRAÇÃO NA FORMA MATRICIAL

Seja um sistema linear mecânico com n graus de liberdade que vibra em torno de uma posição de equilíbrio e cujo movimento pode ser descrito através de n deslocamentos generalizados $x_j(t)$ iguais a zero na posição de equilíbrio. A energia potencial V pode ser expressa em termos desses deslocamentos através de uma forma quadrática. Já a energia cinética T e a dissipada D podem ser expressas como formas quadráticas em termos das

velocidades generalizadas. A equação de movimento pode ser obtida aplicando as equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial V}{\partial x_j} = f_j(t) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

A força externa generalizada $f_j(t)$ para cada coordenada pode ser uma força no sentido comum ou uma força resultante da movimentação das coordenadas.

Se cada termo da Equação (5.9) é tomado como o j -ésimo elemento da coluna da matriz, todas as n equações podem ser consideradas simultâneas e escritas na forma matricial ficam:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = f \quad (5.10)$$

As formas quadráticas na notação matricial são:

$$T = 1/2 (\dot{x}^T M \dot{x}) \quad D = 1/2 (\dot{x}^T C \dot{x}) \quad V = 1/2 (x^T K x) \quad (5.11)$$

onde a matriz de massa (inércia) M , o amortecimento C e a rigidez K são matrizes quadradas de ordem n . Pela regra da diferenciação chega-se a:

$$\frac{d}{dt} (M \dot{x}) + C \dot{x} + K x = f \quad (5.12)$$

ou simplesmente:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = f \quad (5.13)$$

como as equações de movimento para um sistema linear vibrante qualquer com n graus de liberdade. As características do sistema estão implícitas nas matrizes estruturais e o tipo de excitação no vetor f .

Quando a excitação f é zero, a Equação 5.13 descreve uma vibração livre do sistema. Se f é diferente de zero a equação descreve uma vibração forçada. Neste caso, quando f é periódica e estável no tempo, a solução do problema pode ser dividida em 2 partes: a resposta estacionária e a resposta transiente.

Para solução do problema de vibração na forma apresentada, independente do método de solução, há que se definir as matrizes estruturais (M , C , K , f) do sistema.

5.4 TEORIA DA ELASTICIDADE

Para que se melhor entenda a obtenção das matrizes estruturais serão revistos alguns conceitos fundamentais da Teoria da Elasticidade associados aos métodos de aproximação.

5.4.1 Tensões, deformações e Lei de Hooke

O estado de tensão de um ponto é definido pelos seis componentes podendo ser escritos sob forma de um vetor coluna (Eq. 5.14). Estas tensões são produzidas pelas forças internas que surgem se contrapondo a ação de uma força externa generalizada atuante sobre o corpo, e são representados pelo vetor.

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}] \quad (5.14)$$

A aplicação de uma força (serão desprezados os efeitos da temperatura) faz com que o corpo venha a se deformar, ou seja, alguns pontos do corpo se movem para uma nova posição. Os deslocamentos resultantes têm três componentes: u , v , w (direções paralelas a x , y , z respectivamente). Seis componentes de deformação são definidos de forma auxiliar o entendimento de como o corpo se deforma:

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{yz}] \quad (5.15)$$

As tensões e as deformações podem ser relacionadas pela chamada Lei de Hooke generalizada através de uma série de coeficientes, assim:

$$\{\varepsilon\} = [C_o]\{\sigma\} \quad \text{ou} \quad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (5.16)$$

De (5.16) tem-se que $[D][C_o] = [C_o][D] = [I]$, onde $[I]$ é a matriz identidade.

5.4.2 Relações deformações - deslocamentos

Cada componente do vetor deslocamento é uma função das coordenadas x , y , z , $u_i = f_i(x, y, z)$. O objetivo da análise através dos elementos finitos é determinar essas funções ou uma aproximação para elas:

$$\{\phi\} = [N]\{U^{(e)}\} \quad (5.17)$$

onde $\{U^{(e)}\}$ é um vetor coluna que contém os deslocamentos nodais e a matriz $[N]$ é a matriz que contém as funções de interpolação.

Pela Teoria da Elasticidade sabe-se que as deformações e os deslocamentos estão relacionados pelas equações:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.18)$$

que podem ser rescritas na forma matricial. Para tanto lança-se mão de uma matriz auxiliar $[B]$ cuja primeira linha é obtida diferenciando a equação dos deslocamentos u em relação a x , $\partial u / \partial x$. Da mesma forma, a segunda linha tem $\partial v / \partial y$ e assim sucessivamente.

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U^{(e)}\} \quad (5.19)$$

5.5 OBTENÇÃO DAS MATRIZES ESTRUTURAIS

O Princípio do Trabalho Virtual estabelece que uma variação virtual (muito pequena) na energia de deformação (U) deve ser compensada por uma variação idêntica do trabalho devido à ação de forças externas (V), isto é:

$$\delta U = \delta V \quad (5.20)$$

5.5.1 Energia de deformação

A energia de deformação de um sólido elástico tridimensional é dada por:

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (5.21)$$

Utilizando a relação deformação - deslocamento (Eq. 5.19) e observando que u não varia ao longo do volume pode-se escrever a energia de deformação em termos dos deslocamentos nodais:

$$\delta U = \{\delta u\}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \{u\} \quad (5.22)$$

5.5.2 Trabalho das forças externas

O trabalho das forças externas pode ser dividido em três parcelas de contribuição: relativas às forças de corpo, de superfície e cargas concentradas.

Inicialmente, analisamos o trabalho relativo às forças de corpo (inércia):

$$\delta V_1 = - \int_V \{\delta\phi\}^T \frac{\{F^a\}}{V} dV \quad (5.23)$$

Pela segunda lei de Newton:

$$\frac{\{F^a\}}{V} = \rho \frac{\partial^2 \{w\}}{\partial t^2} \quad (5.24)$$

Utilizando novamente (5.19) e considerando que a massa específica não varia ao longo do elemento:

$$\delta V_1 = -\{\delta u\}^T \rho \int_V [N]^T [N] dV \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} \quad (5.25)$$

Para uma força resultante de cargas distribuídas ou forças de superfície atuantes na direção normal a superfície do corpo tem-se que:

$$\delta V_2 = \int_A \{\delta\phi\}^T \{P\} dA \quad (5.26)$$

Combinando as equações (5.17) e (5.26) :

$$\delta V_2 = \{\delta u\}^T \int_A [N]^T [P] dA \quad (5.27)$$

Para cargas concentradas o trabalho é obtido de forma direta:

$$\delta V_3 = \{\delta u\}^T \{F\} \quad (5.28)$$

5.5.3 Matrizes estruturais

Finalmente as equações podem ser combinadas:

$$\{\delta u\}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \{u\} = -\{\delta u\}^T \rho \int_V [N]^T [N] dV \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \{\delta u\}^T \int_A [N]^T [P] dA + \{\delta u\}^T \{F\}$$

Observando que o vetor dos deslocamentos é um conjunto qualquer de deslocamentos virtuais, comum em todos os termos, a equação pode ser resumida como:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\} \quad (5.30)$$

que é a equação de movimento do problema. Onde:

$$\begin{aligned} [K] &= \int_V [B]^T [D] [B] dV \\ [M] &= \rho \int_V [N]^T [N] dV \\ \{f\} &= \int_A [N]^T [P] dA + \{F\} \end{aligned} \quad (5.31)$$

5.6 ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES

Na ausência de forças externas, a análise de vibrações estruturais não amortecidas consiste em resolver a seguinte equação:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (5.32)$$

Seja a solução de (5.32) como da forma:

$$\{u(t)\} = \text{Re}\{ue^{j\omega t}\} \quad (5.33)$$

onde u é um vetor coluna de amplitudes desconhecidas e ω é uma frequência desconhecida. Substituindo a solução real considerada em (5.32) tem-se o chamado problema de autovalor generalizado (Eq. 5.34). Onde u e ω são valores a determinar.

$$\begin{aligned} [K]\{u\} &= \omega^2 [M]\{u\} \\ ([K] - \omega^2 [M])\{u\} &= 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Rescrevendo a equação verifica-se que o autosistema é formado por um conjunto de n equações homogêneas com n variáveis, isto é, existirão soluções não triviais desde que:

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (5.35)$$

Expandindo o determinante chega-se a um polinômio de ordem n em ω^2 , chamado polinômio característico. As n raízes (autovalores) determinam as n frequências naturais livres do sistema, que quando levadas à equação (5.34) permitem determinar os n modos de vibração (autovetores u).

5.7 ORTONORMALIZAÇÃO DA SOLUÇÃO

Os autovetores obtidos não possuem valores absolutos de escala sendo comum a utilização de um processo de normalização de forma diminuir o esforço numérico ou facilitar a interpretação física dos resultados. No caso do problema de vibrações é comum adotar-se a M-normalização ou normalização em relação à matriz de massa global, neste caso,

$$\{u\}^T [M] \{u\} = [I] \quad (5.35)$$

Definindo uma matriz $[\phi]$ cujas colunas são formadas pelos autovetores u e uma matriz diagonal $[\Omega^2]$ cuja diagonal principal é formada pelos autovalores ω , as n autosoluções podem ser dadas por:

$$[K][\phi] = [M][\phi][\Omega^2] \quad (5.36)$$

Pré multiplicando por $[\phi]^T$ e considerando que os autovetores são M-normalizados vem:

$$[\phi]^T [K][\phi] = [\phi]^T [M][\phi][\Omega^2] = [I][\Omega^2] = [\Omega^2] \quad (5.37)$$

5.8 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Existem diversos métodos para solução de autosistemas genéricos. Entretanto na análise por elementos finitos o enfoque está em um tipo de problema específico (Eq. 5.32), onde as matrizes envolvidas possuem características próprias: matrizes em banda, positiva definida, ordem elevada, etc. Em geral, os programas comerciais de elementos finitos implementam soluções que se utilizam dessas características obtendo assim, algoritmos otimizados para o cálculo dos autovalores e autovetores.

É intuitivo imaginar que a solução dinâmica requeira um esforço computacional maior que a solução estática. Mesmo que se imagine um problema dinâmico no qual a solução seja obtida por superposição modal, verifica-se que o esforço principal neste caso, está na obtenção dos autovalores e autovetores cuja solução é de fato mais complexa que a análise estática.

Sendo a ordem das matrizes elevada, a obtenção da solução exata é muitas vezes proibitivas devido ao elevado custo computacional. É natural portanto que se tenham desenvolvido técnicas de aproximação. Cabe ressaltar que a solução do problema é, essencialmente, a busca pelas raízes do polinômio característico de grau igual a ordem das matrizes K e M . Uma vez que para o caso geral em que as matrizes tem ordem maior que 4 não existe fórmula explícita para determinação das raízes do polinômio característico, todas essas técnicas de aproximação devem ser iterativas.

Uma fórmula bem conhecida e utilizada em sistemas de pequena ordem consiste na determinação dos coeficientes do polinômio característico e depois no cálculo das raízes. Este método pode ser estendido para sistemas maiores apesar do algoritmo ter complexidade fatorial. Entretanto, a grande desvantagem deste método é que pequenos erros, quase sempre inevitáveis (truncagem, arredondamento, etc.) na determinação dos coeficientes levam a grandes erros no cálculo das raízes.

Os métodos de aproximação se concentram particularmente na obtenção do menor autovalor e seu respectivo autovetor. Uma forma de classificação adotada reúne os métodos em quatro grupos básicos (Harris, 1992):

- métodos de iteração vetorial (direta e inversa);
- métodos de transformação (Jacobi, Householder);
- métodos de iteração polinomial (explícita e implícita);
- métodos baseados na seqüência de Sturm.

Um grande número de algoritmos foi desenvolvido implementando os métodos de cada grupo bem como combinando os conceitos de dois ou mais grupos (Lanczos, Iteração no Subespaço). A adequação de um ou outro método é função da ordem, do tipo de problema e do número de soluções que se deseja obter.

O método de Jacobi generalizado, por exemplo, determina todos os autovalores e autovetores do sistema. sendo por isso de elevado esforço computacional quando utilizado em sistemas com muitos graus de liberdade. Já o método da Iteração no Subespaço quando utilizado em conjunto com outros métodos permite que se determine apenas os autovalores e os correspondentes autovetores num intervalo de frequência pré-determinado, direcionando e reduzindo assim o custo da solução.

Capítulo 6

ESTUDO TEÓRICO/EXPERIMENTAL DE UM CANO DE FUZIL

6.1 OBJETIVO

Utilizar os conceitos apresentados no estudo dinâmico de um cano de um fuzil automático obtendo suas frequências e modos de vibração.

Para tanto duas abordagens distintas são feitas: na primeira, é feita uma abordagem numérica onde as frequências naturais e modos de vibração são obtidos através da utilização de um programa comercial de Elementos Finitos e na segunda, as frequências e modos são obtidos através da Análise Modal Experimental.

6.2 CASO PROPOSTO: CANO FUZIL

A peça (cano) em estudo faz parte de um protótipo de fuzil automático em calibre 5,56 mm (Fig. 6.1) capaz de disparar rajadas entre 900 e 1200 tiros por minuto, ou seja a cadência de tiro está na faixa de 15 a 20 Hz.



Figura 6.1: Protótipo de fuzil calibre 5,56 (IMBEL-FI)

A obtenção dos primeiros modos de vibração foi feita utilizando-se o programa comercial de elementos finitos ANSYS (versão 5.4).

Na geração do modelo geométrico [ANSYS Modeling and Meshing Guide, p.1-1] utilizou-se as duas formas possíveis:

- geração direta;
- importação do modelo gerado por um programa de CAD.

No segundo caso, os arquivos importados foram gerados a partir de um modelo sólido criado com o programa Pro-Engineer v20. (Fig. 6.2).

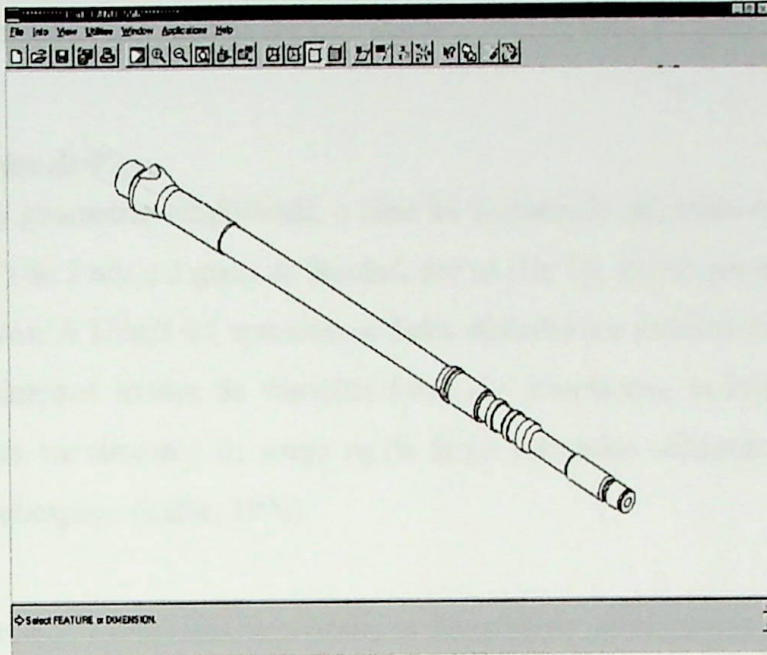


Figura 6.2: Modelo sólido sem simplificações

Devido a elevada complexidade do modelo sólido original, decidiu-se simplificar o modelo a ser exportado mantendo somente as características geométricas (*features*) julgadas essenciais para uma correta representação do problema. Essa estratégia permite reduzir o grau de refinamento da malha e o esforço computacional para resolução.

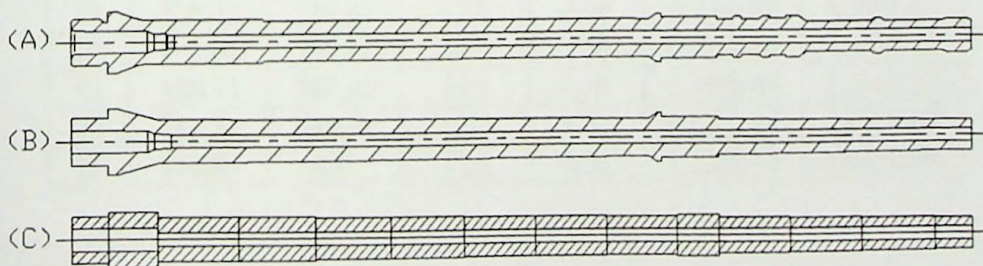


Figura 6.3: Simplificações do problema

A Figura 6.3 (A) apresenta um corte do modelo sólido com todos os detalhes, ao centro (B), um corte do modelo sólido simplificado utilizado na modelagem com elementos 3D, e abaixo (C) uma modelagem do cano em seções cilíndricas a partir das

quais foram obtidas as propriedades de área e momento de inércia para a discretização do modelo em elementos de viga.

Utilizando elementos finitos unidimensionais e tridimensionais os modelos foram analisados considerando a hipótese do cano com as extremidades livre-livre e engastada-livre.

As constantes do material bem como os demais dados constam dos arquivos de entrada apresentados nos Anexos B e C.

6.2.1 Elementos de Viga

Com a geometria simplificada, o cano foi discretizado utilizando-se elementos de viga (*BEAM2*) de 2 nós e 3 graus de liberdade por nó (U_x , U_y , ROT_z), perfazendo um total de 15 elementos. A Tabela 6.1 apresenta os dados utilizados nos arquivos de entrada.

Os primeiros modos de vibrações livres não amortecidas, incluindo os modos associados aos movimentos de corpo rígido foram calculados utilizando o Método da Iteração no Subespaço (Bathe, 1996).

Tabela 6.1: Constantes reais usadas na discretização por elementos de viga

Elm	X1[mm]	X2[mm]	De[mm]	Di[mm]	A[m ²]	Izz [m ⁴]
1	0	15,81	20	9,6	2,418E-04	7,437E-09
2	15,81	19,81	28	9,6	5,434E-04	2,975E-08
3	19,81	37,32	23,6	9,6	3,651E-04	1,481E-08
4	37,32	73,72	18,8	5,56	2,533E-04	6,085E-09
5	73,72	109,72	18,4	5,56	2,416E-04	5,580E-09
6	109,72	145,72	17,6	5,56	2,190E-04	4,663E-09
7	145,72	181,72	17,3	5,56	2,108E-04	4,350E-09
8	181,72	217,72	16,9	5,56	2,000E-04	3,957E-09
9	217,72	253,72	16,6	5,56	1,921E-04	3,680E-09
10	253,72	289,72	16,2	5,56	1,818E-04	3,334E-09
11	289,72	310,81	17,3	5,56	2,108E-04	4,350E-09
12	310,81	346,81	14,9	5,56	1,501E-04	2,373E-09
13	346,81	382,81	14,3	5,56	1,363E-04	2,006E-09
14	382,81	418,81	13,7	5,56	1,231E-04	1,682E-09
15	418,81	437	13,2	5,56	1,126E-04	1,443E-09

6.2.2 Elementos 3D

Diferentemente do que foi feito no modelo de elementos de viga, um modelo sólido simplificado foi importado (formato IGES) e o volume gerado foi discretizado utilizando-se elementos tetraédricos (*TET10*) de 10 nós com 3 graus de liberdade translacionais por nó (U_x , U_y , U_z), num total de 11302 elementos (Fig. 6.4).

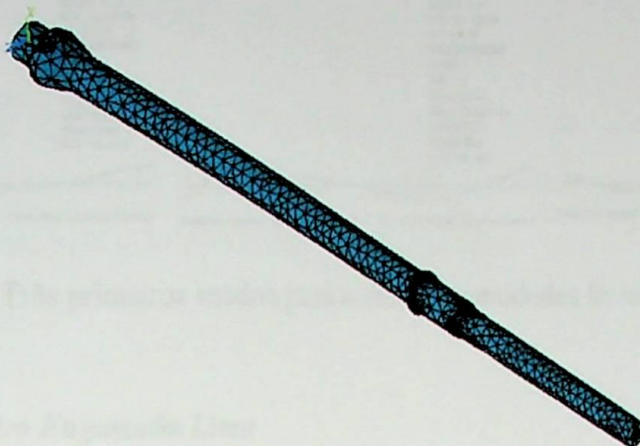


Figura 6.4: Discretização do cano utilizando elementos tetraédricos (ANSYS)

Os primeiros modos de vibrações livres não amortecidas também foram calculados através do Método da Iteração no Subespaço (Bathe, 1996).

6.3 RESULTADOS NUMÉRICOS

6.3.1 Extremidades Livre-Livre

As primeiras freqüências foram obtidas para cada um dos modelos gerados e os modos classificadas de acordo com o sistema proposto para cilindros espessos (Wang, 1998).

A Figura 6.5 apresenta os três primeiros modos.

Tabela 6.2: Freqüências naturais (Hz): extremidades livre-livre (ANSYS)

Modo	Elm. viga	Elm. 3D	Classificação
1	0	0	MCR
2	429	426	Flexional
3	1151	1122	Flexional
4	2233	2153	Flexional
5	3708	3542	Flexional
6	-	3612	Global
7	5515	5187	Flexional
8	5996	5989	Extensional

Na Tabela 6.2, o modo número 1 reúne os movimentos de corpo rígido associados a cada modelo, ou seja, para o modelo com elementos de viga, 3 modos e para o modelo 3D, 6 modos. Nos demais modos comuns aos dois modelos, os valores diferem de menos de 1%.

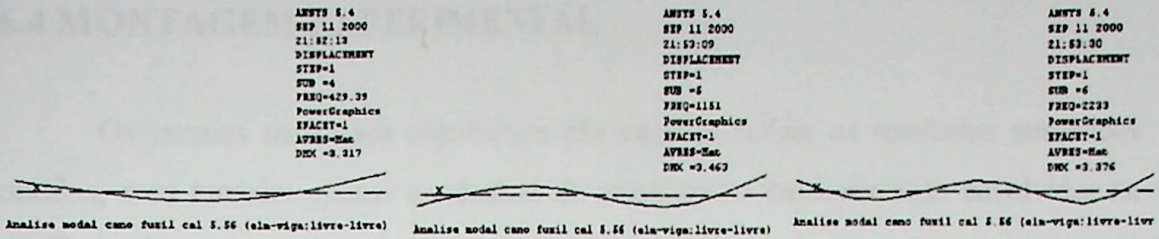


Figura 6.5: Três primeiros modos para o caso extremidades livre-livre (ANSYS)

6.3.2 Extremidades Engastada-Livre

A Tabela 6.3 apresenta as 7 primeiras freqüências de vibração e classifica os modos. A exemplo do que ocorreu no caso livre-livre, pode-se observar que existe uma diferença entre os valores obtidos, entretanto, neste caso, os modos encontrados são comuns aos dois modelos.

Tabela 6.3: Freqüências naturais (Hz): extremidades engastada-livre (ANSYS)

Modo	Elm. viga	Elm. 3D	Classificação
1	103	100	Flexional
2	526	515	Flexional
3	1346	1305	Flexional
4	2557	2464	Flexional
5	3622	3577	Extensional
6	4194	3994	Flexional
7	6169	5760	Flexional

O programa utilizado permite que se faça a animação e visualização dos modos calculados em uma ou mais vistas. A Figura 6.6 mostra um quadro da animação para o primeiro modo de vibração do modelo.

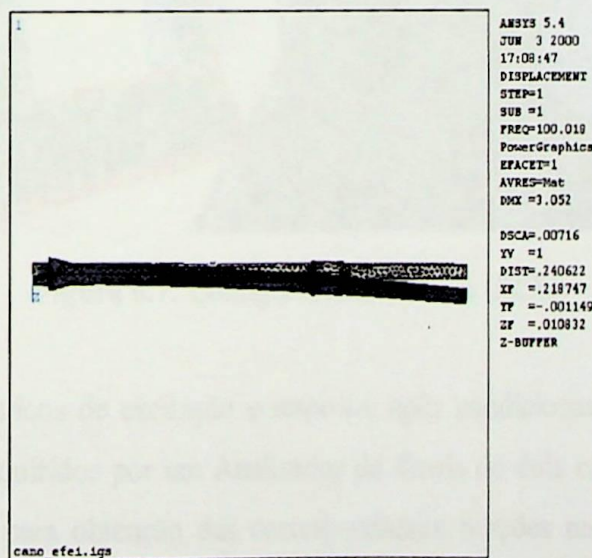


Figura 6.6: Primeiro modo no caso de extremidades engastada-livre (ANSYS)

6.4 MONTAGEM EXPERIMENTAL

Os ensaios realizados objetivaram não somente validar os resultados numéricos obtidos, mas também aplicar as técnicas de montagem e instrumentação envolvidas na AME, desde a preparação até a interpretação dos resultados.

Foram realizados três montagens distintas:

- livre-livre (*SISO*);
- livre-livre (*SIMO*);
- engastada-livre (*SIMO*).

6.4.1 Montagem Livre-Livre (*SISO*)

Esta configuração de entrada e saída simples é mostrada na Figura 6.7. O cano do fuzil foi suspenso por elementos flexíveis (fios de nylon, elásticos ou molas) simulando as condições de contorno pretendidas.

Para medição da força impulsiva foi utilizado um martelo de impacto (BK8202), instrumentado com um transdutor de força (BK8200). A resposta foi obtida através de um acelerômetro piezoelétrico (PCB353B33), fixado magneticamente à estrutura.

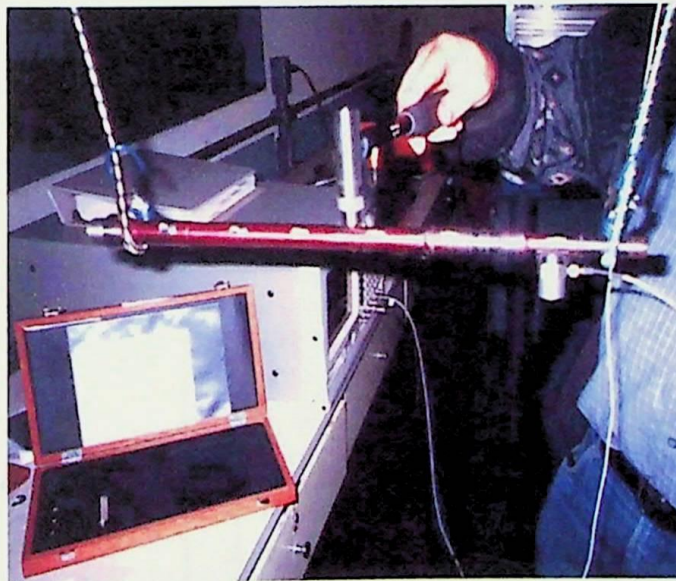


Figura 6.7: Configuração livre-livre (*SISO*)

Os sinais elétricos de excitação e resposta, após condicionamento e amplificação (BK2626), foram adquiridos por um Analisador de Sinais de dois canais (SRS780), que processou os dados para obtenção das correspondentes funções resposta em frequência (FRF) como a apresentada na Figura 6.9. Foram adquiridas 6 FRF em 6 pontos preestabelecidos fixando-se a posição do acelerômetro e variando-se os pontos de excitação.

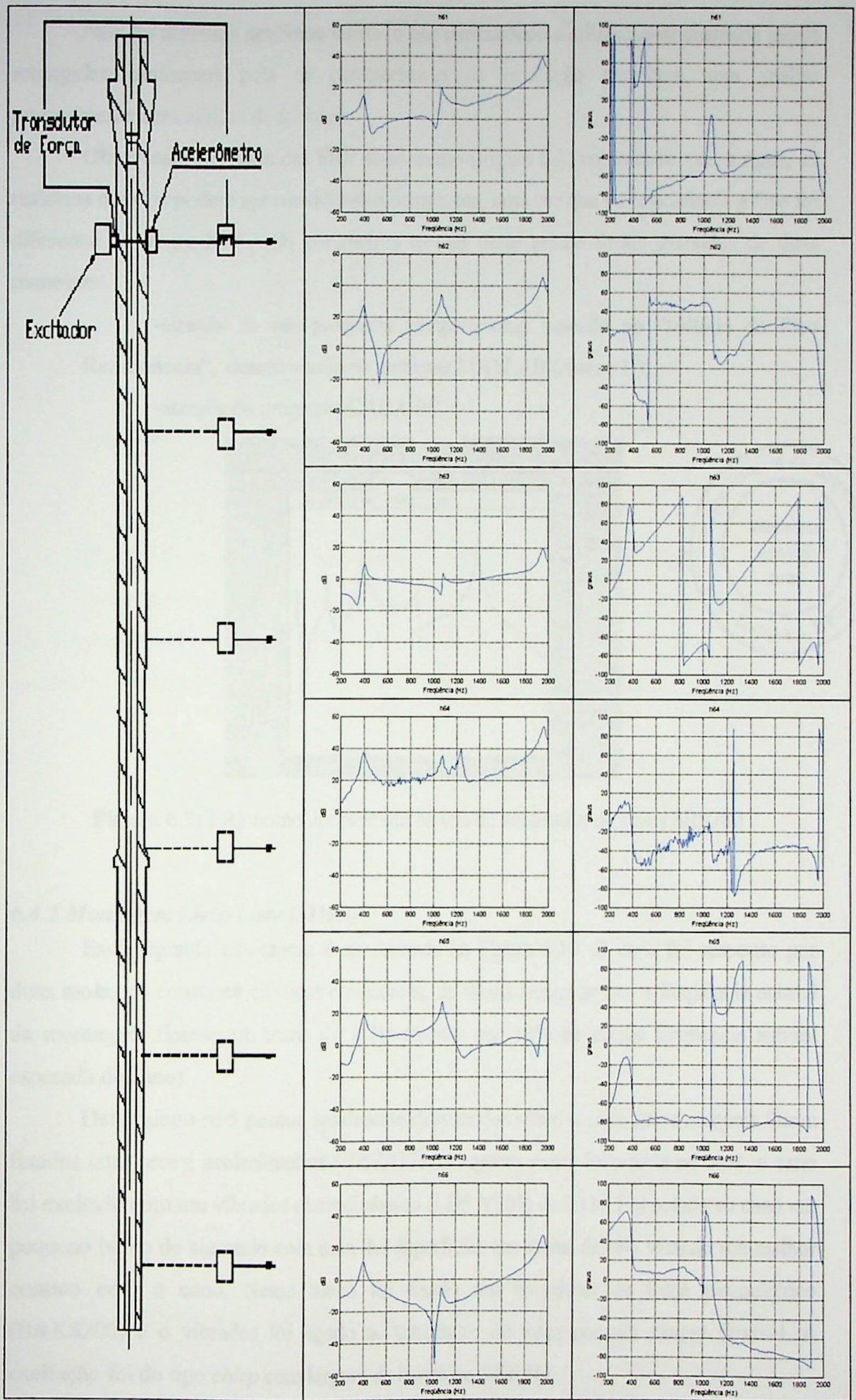


Figura 6.8: FRF obtidas na configuração livre-livre SIMO (MATLAB)

Não foi utilizada nenhuma janela (o que corresponde a utilização da chamada janela retangular uniforme) pois as características da excitação permitem uma análise praticamente sem efeitos de *leakage*.

Observando as fases das FRF neste ensaio (Figura 6.8) constata-se que, a rigor, os resíduos obtidos podem ser considerados complexos, uma vez que na ressonância a fase foi diferente de 0° ou 180° . Os parâmetros modais deste ensaio foram extraídos de duas maneiras:

- através de um programa computacional baseado no "Método do Pico Ressonância", desenvolvido no ambiente MATLAB (Anexo D);
- através do programa CADA-PC.

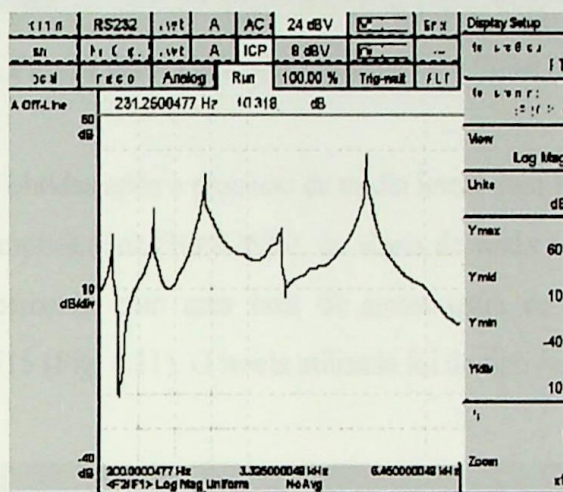


Figura 6.9: FRF como apresentada na tela do analisador de sinais SRS780

6.4.2 Montagem Livre-Livre (SIMO)

Essa segunda montagem é apresentada na Figura 6.10. O cano foi suspenso por duas molas de constante elástica conhecidas, de forma assegurar que a frequência natural da montagem ficasse em torno de 8 Hz (menor que 10% da menor frequência natural esperada do cano).

Determinou-se 5 pontos igualmente distribuídos sobre o cano sobre os quais foram fixados com cera 4 acelerômetros (B&K4375). O quinto ponto foi aquele no qual o cano foi excitado com um vibrador eletrodinâmico (LDS V201) de 20 N. Foi colado ao cano um pequeno bloco de alumínio com uma das superfícies em forma de raio visando um melhor contato com o cano. Nesse bloco foi fixado um transdutor de força piezoelétrico (B&K8200) e o vibrador foi ligado ao transdutor de força por um *stinger* flexível. A excitação foi do tipo *chirp* com largura de banda de 4096 Hz.

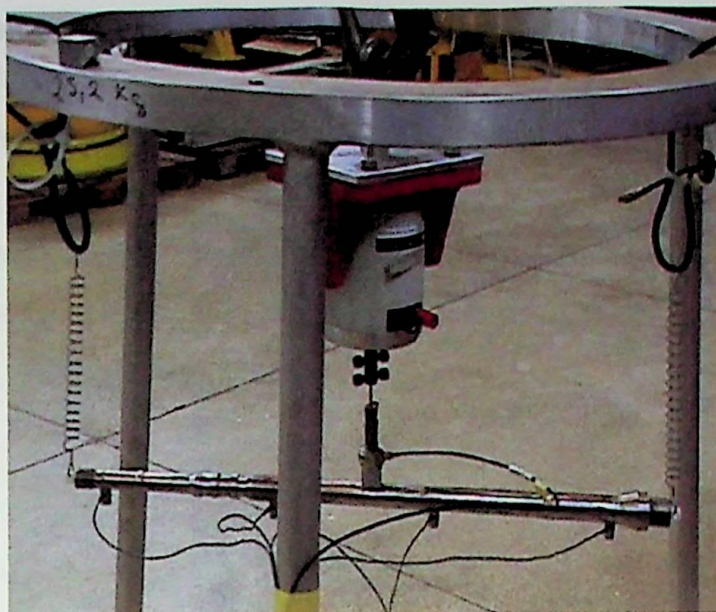


Figura 6.10: Configuração livre-livre (*SIMO*)

As FRF foram obtidas após o processo de média linear com 100 amostras.

Após serem amplificados (B&K2626), os sinais de saída e o de excitação foram adquiridos simultaneamente com uma taxa de amostragem de 51.2 kHz através do analisador GenRad 2515 (Fig. 6.11). O janelamento utilizado foi do tipo *hanning*.



Figura 6.11: GenRad - Computer Aided Test System 2515

Os parâmetros modais deste ensaio foram extraídos somente com o programa CADA-PC.

6.4.3 Montagem Engastada-Livre (SISO)

A Figura 6.12 ilustra esta montagem. A menos das condições de contorno, as condições de ensaio e o equipamento utilizado foram os mesmos da montagem "livre-livre (SISO)".

O cuidado especial tomado neste ensaio foi garantir que a mobilidade da placa de fixação, dentro da faixa de frequência analisada era inferior a da estrutura testada.

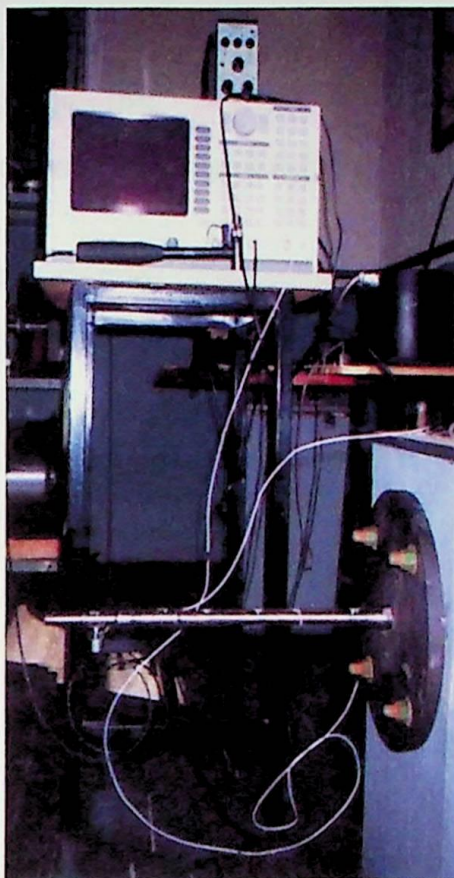


Figura 6.12: Configuração engastada-livre (SISO)

6.5 RESULTADOS

Os resultados obtidos experimentalmente são apresentados a seguir na forma de gráficos e tabelas e comparados com resultados numéricos.

Tabela 6.4: Configuração livre-livre: frequência natural (Hz)

MODO	SISO (MATLAB)	SISO (CADA-PC)	SIMO (CADA-PC)	MEF (Elm Tet10)	MEF (Elm Beam2)
1	395	394	397	426	429
2	1075	1073	1067	1122	1151
3	1950	1960	1926	2153	2233

Tabela 6.5: Configuração livre-livre: amortecimento (%)

MODO	SISO (MATLAB)	SISO (CADA-PC)	SIMO (CADA-PC)	MEF (Elm Tet10)	MEF (Elm Beam2)
1	3.4	3.35	2.38	0	0
2	0.94	0.97	0.47	0	0
3	0.77	0.64	0.61	0	0

Observa-se na Tabela 6.4 que entre os ensaios experimentais houve uma variação máxima em torno de 1.5% nos valores de frequência, ao passo que entre os modelos numéricos, que tiveram frequências naturais maiores que as obtidas nos ensaios experimentais, esta variação chegou a 10%.

Essa tendência se repetiu no modelo engastado-livre (Tabela 6.6).

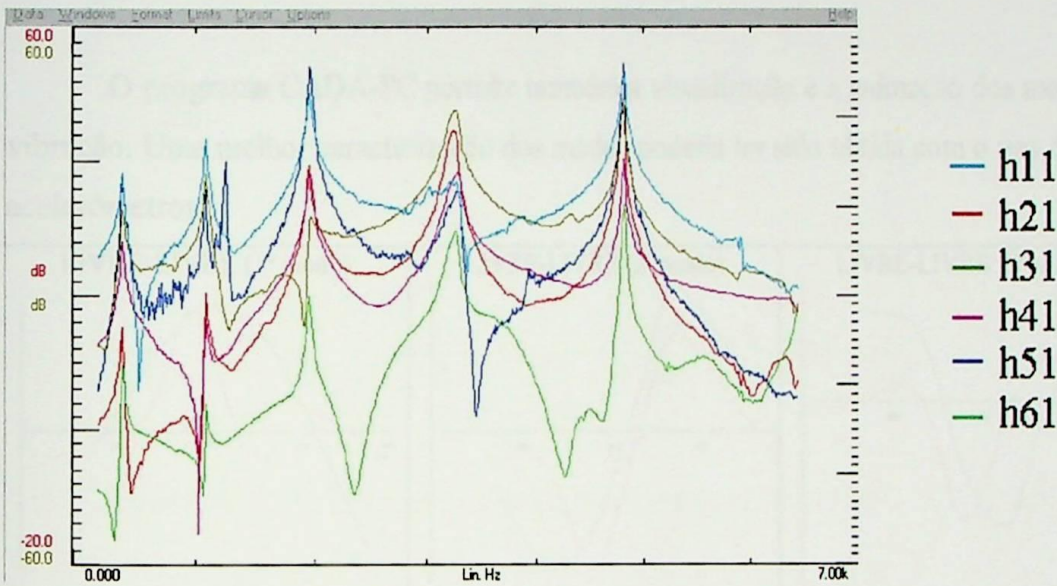


Figura 6.13: FRF obtidas na configuração livre-livre *SISO* (CADA-PC)

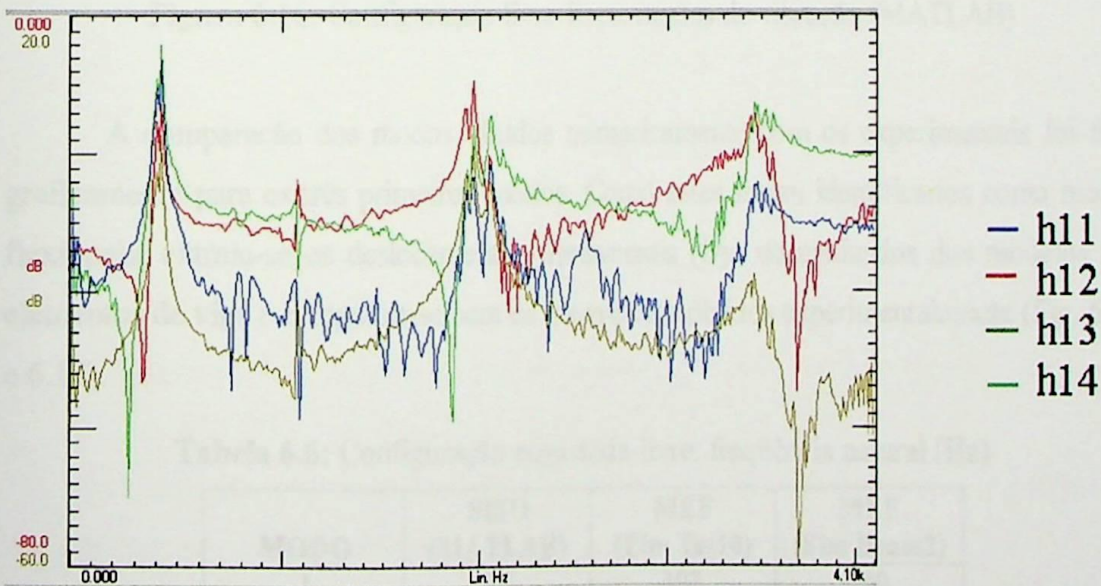


Figura 6.14: FRF obtidas na configuração livre-livre *SIMO* (CADA-PC)

As curvas apresentadas nas figuras 6.13 e 6.14 mostram como as FRF de cada ensaio são apresentadas na tela do programa CADA-PC. Nos dois casos pode-se identificar que todas as funções possuem picos aproximadamente nos mesmos pontos. Estes pontos caracterizam as frequências de ressonância do cano.

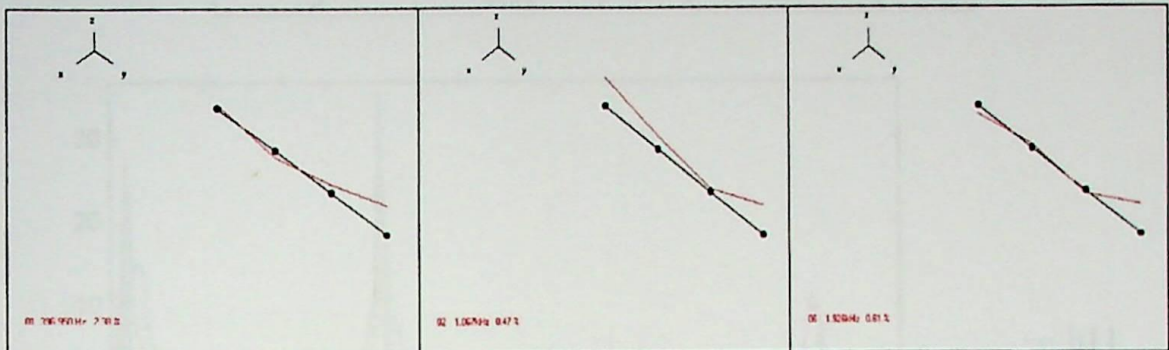


Figura 6.15: Configuração livre-livre: modos de vibração (CADA-PC)

O programa CADA-PC permite também a visualização e a animação dos modos de vibração. Uma melhor caracterização dos modos poderia ter sido obtida com o uso de mais acelerômetros.

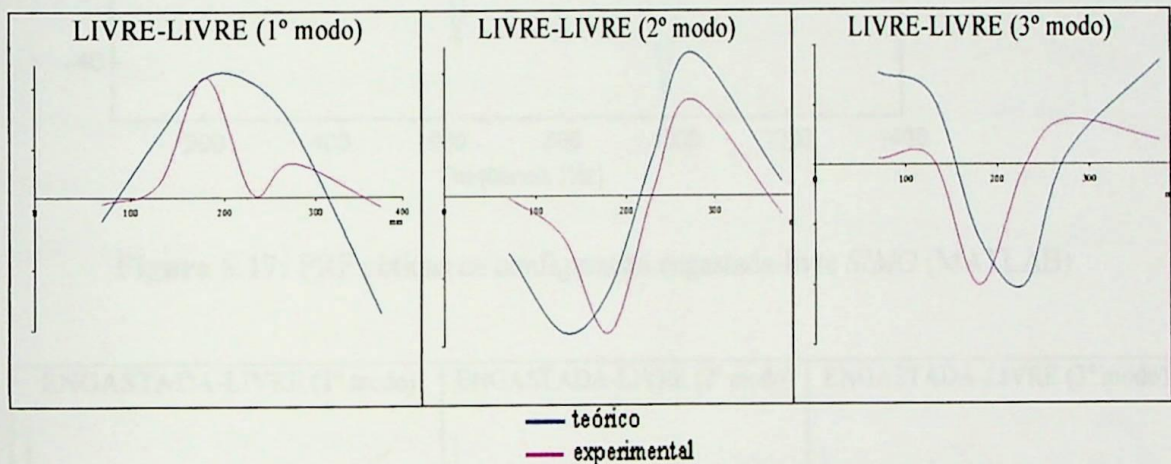


Figura 6.16: Configuração livre-livre: modos de vibração (MATLAB)

A comparação dos modos obtidos numericamente com os experimentais foi feita graficamente para os três primeiros modos. Como estes foram identificados como modos flexionais, extraiu-se os deslocamentos transversais (U_y) normalizados dos modelos por elementos de viga e comparou-se com os autovetores obtidos experimentalmente (Fig. 6.16 e 6.18).

Tabela 6.6: Configuração engastada-livre: frequência natural (Hz)

MODO	SISO (MATLAB)	MEF (Elm Tet10)	MEF (Elm Beam2)
1	86	103	100
2	488	526	515
3	1257	1346	1305

Tabela 6.7: Configuração engastada-livre: amortecimento (%)

MODO	SISO (MATLAB)	MEF (Elm Tet10)	MEF (Elm Beam2)
1	1.89	0	0
2	0.12	0	0
3	0.94	0	0

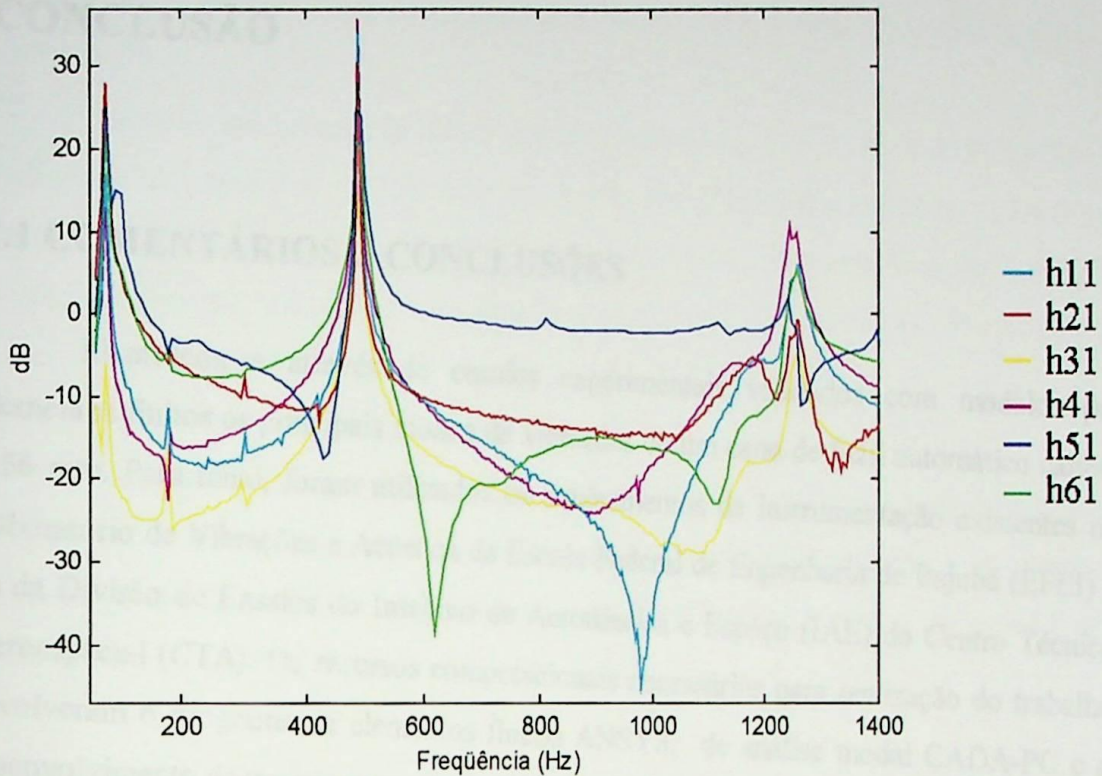


Figura 6.17: FRF obtidas na configuração engastada-livre SIMO (MATLAB)

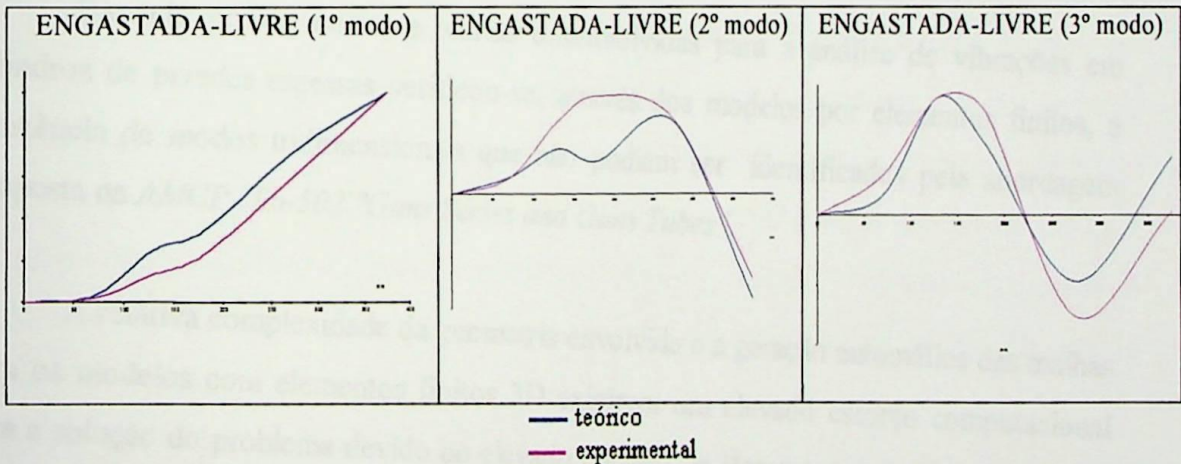


Figura 6.18: Configuração engastada-livre: modos de vibração (MATLAB)

O procedimento adotado para o caso livre-livre foi repetido para a configuração engastada-livre como mostram as tabelas 6.6 e 6.7 e as figuras 6.17 e 6.18.

Capítulo 7

CONCLUSÃO

7.1 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Identificou-se através de ensaios experimentais validados com modelos por elementos finitos os principais modos de vibrações de um cano de fuzil automático calibre 5.56 mm. Para tanto, foram utilizados os equipamentos de instrumentação existentes no Laboratório de Vibrações e Acústica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá (EFEI) e os da Divisão de Ensaios do Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE) do Centro Técnico Aeroespacial (CTA). Os recursos computacionais necessários para realização do trabalho envolveram o programa de elementos finitos ANSYS, de análise modal CADA-PC e o desenvolvimento de um programa no ambiente MATLAB para identificação de parâmetros modais baseado no Método da Ressonância no Pico.

Baseado nos conceitos e teorias desenvolvidas para a análise de vibrações em cilindros de paredes espessas verificou-se, através dos modelos por elementos finitos, a existência de modos tridimensionais que não podiam ser identificados pela abordagem proposta na *AMCP 706-502 "Guns Series and Guns Tubes"*.

A relativa complexidade da geometria envolvida e a geração automática das malhas para os modelos com elementos finitos 3D exigiram um elevado esforço computacional para a solução do problema devido ao elevado número de elementos e graus de liberdade. Os modos flexionais por serem dominantes e de frequências naturais mais baixas foram identificados como sendo, do ponto de vista do projetista de armas, os mais importantes. Nota-se, portanto, que a simplificação do modelo considerando-o como uma viga (engastada ou livre) é válida para uma primeira abordagem do problema.

Os valores de amortecimento (Tabela 6.5) tiveram uma variação de 1.5% até cerca de 50%. Os pré-testes realizados visando fazer o *setup* do equipamento e determinar a

melhor configuração de montagem mostraram que a situação "livre-livre" é extremamente suscetível às condições de montagem, ou seja, houve variação dos parâmetros modais de frequência e amortecimento em função do tipo de suspensão (mola, fio de nylon e elástico simples ou duplo) utilizada. Constatou-se também que a cabagem exerce grande influência, o que é razoável uma vez que dependendo do número e da posição, os cabos podem vir a dissipar considerável energia da estrutura aumentando assim o efeito do amortecimento.

Embora analiticamente difícil de se prever, há que se considerar também a influência da massa e da posição do acelerômetro que podem vir a influir na massa total e na rigidez local alterando significativamente o comportamento da estrutura. Por limitações na instrumentação, o acelerômetro utilizado nos ensaios *SISO* pesava cerca 7% do peso do cano.

Comparando os parâmetros obtidos (para um mesmo ensaio) através do programa CADA-PC e pelo Método da Ressonância no Pico verifica-se a validade do programa desenvolvido no MATLAB e do processo de identificação (guardadas as limitações já comentadas no Capítulo 4).

O gráficos dos modos (Figura 6.14) mostram que, ainda que com alguns desvios, os modos puderam ser identificados através dos ensaios experimentais. Tais desvios são, numa primeira análise, decorrentes do próprio processo de identificação utilizado. Considerando que a frequência natural é obtida a partir de um ponto (pico) de uma das FRF, o amortecimento de dois pontos relativos a este pico, e os modos, a partir da razão entre os picos das n FRF medidas, constata-se que, se forem cometidos erros na estimativa dos picos devido a um amortecimento elevado ou a contribuição de outros modos (que sempre ocorre ainda que o nível de amortecimento seja baixo), a imprecisão no modo de vibração será muito maior que a imprecisão na determinação da frequência ou do amortecimento.

Observando as fases das FRF no ensaio *SIMO* (Figura 6.9) constata-se que, ainda que se estabeleça uma dispersão aceitável de fase de $\pm 10^\circ$, a rigor, os resíduos obtidos podem ser considerados complexos, isto é, na ressonância a fase foi diferente de $0^\circ \pm 10^\circ$ ou $180^\circ \pm 10^\circ$. Isto é um forte indicador de baixa qualidade nas FRF medidas ou de não linearidade do sistema..

Nas análises experimentais foram usados 2 tipos de excitações transientes: impacto e *chirp*. Como a segunda permite um maior controle da excitação (amplitude e frequência) e repetibilidade essa foi escolhida para análise da coerência.

O valor da coerência nesse caso tem um significado bem específico, uma vez que, foi utilizado o tratamento das excitações aleatórias para uma excitação transiente. Considerando que a rigor, a excitação tinha um valor determinístico e não aleatório, os cálculos não carregaram incertezas, ou seja os possíveis motivos de um baixo valor de coerência seriam devido a baixa resolução da FFT, não linearidade do sistema ou ruído na medição.

Como, no ensaio *SIMO* após 100 medições (*averaging*) houve melhora na coerência (maior que 0.86), conclui-se que os resíduos complexos obtidos no ensaio *SIMO* foram devidos a presença de ruídos aleatórios durante as medições.

Como conclusão final, pode-se afirmar que nenhuma das FRF, ou dos modos obtidos numericamente, mostraram frequência naturais próximas da cadência de funcionamento da arma em tiro automático. A condição de contorno "engastada-livre" resultou em frequências naturais mais baixas, mas ainda assim, com razão de frequência acima de 3.5 como sugere a literatura (AMCP, 1964).

7.2 SUGESTÕES

Como proposta para trabalhos futuros sugere-se:

- desenvolver outros algoritmos para extração de parâmetros modais;
- analisar a influência das dimensões, posição e massa do acelerômetro no comportamento dinâmico de algumas estruturas;
- analisar o comportamento do fuzil durante o funcionamento verificando quais modos conseguem ser excitados durante o tiro e quais as condições de contorno mais adequadas para modelagem do problema.

ANEXO A

COMPORTAMENTO NÃO LINEAR

O que ocorre numa análise supostamente linear quando é introduzida alguma não linearidade?

Se a não linearidade for pequena não se nota grandes efeitos. Entretanto, a medida que ela se torna mais significativa pode vir a alterar substancialmente os resultados da análise. A dificuldade principal é determinar se as não linearidades são devidas ao sistema em si ou a ruídos na medição.

Fontes de não linearidades são comuns, a saber:

- rigidez e amortecimento não lineares;
- condições de contorno não lineares;
- folgas entre componentes;
- presença de forças elétricas e magnéticas não lineares;
- ação de controladores servo-assistidos e componentes eletrônicos.

Para ilustrar como uma não linearidade pode alterar a resposta de uma estrutura, propõe-se o seguinte experimento (Tongue, 1996): uma viga de alumínio engastada-livre vibrando com um pequeno bloco colocado a uma distância controlada de seu ponto médio. Quando o bloco está a uma distância grande, a viga vibra sem jamais tocá-lo resultando numa resposta linear. A medida que o bloco vai sendo aproximado, os choques com a viga vão se tornando mais freqüentes.

A Figura A1 à esquerda, apresenta o caso linear. Pode-se observar 2 picos de ressonância a aproximadamente 30 e 175 rad/s e uma anti-ressonância a 105 rad/s. A resposta em fase é bem definida mostrando que, de acordo com a freqüência, o sistema está ou em fase ou fora de fase, ocorrendo nas freqüências de ressonância uma mudança brusca de fase. Por fim, a coerência está próxima do ideal, ou seja, a exceção dos pontos próximos das ressonâncias e anti-ressonâncias seu valor é aproximadamente igual a 1. Não se deve esperar realmente uma boa coerência nas ressonâncias e anti-ressonâncias. Na ressonância devido ao efeito de ganho qualquer ruído na excitação, por menor que seja, é muito amplificado, enquanto nas anti-ressonâncias a resposta é muito pequena predominando

qualquer ruído da instrumentação. O fato da coerência estar próxima de 1 em todos os demais pontos é um indicador que os resultados obtidos são confiáveis.

No segundo caso (Fig. A1 ao centro) contatos esporádicos da viga com o bloco induzem pequenas não linearidades no sistema causando alterações nas respostas em amplitude e fase. Alterações intuitivas são a aparente redução do amortecimento (pico achatado) e a contaminação na fase. A real indicação contudo vem da degradação da coerência.

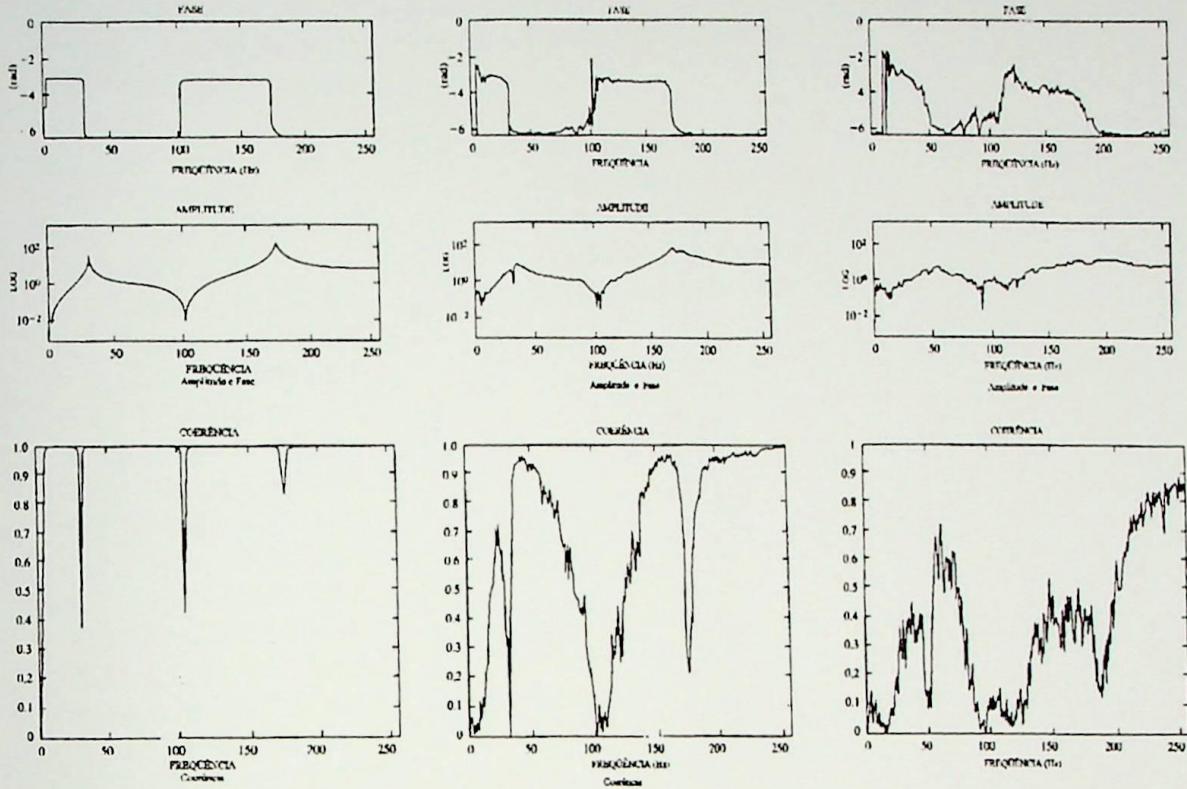


Figura A1: Efeito da não linearidade na qualidade do sinal (Tongue,1996)

A medida que vai se aumentando o efeito da não linearidade a degradação aumenta até que a resposta em fase esteja dominada por ruídos e não mais se consiga distinguir os picos de ressonância na resposta em amplitude. A baixa coerência ao longo do espectro analisado indica que a confiabilidade de tal medição é baixíssima (Fig. A1 à direita).

Tabela A1: Parâmetros modais estimados para viga não linear (Tongue,1996)

	1º MODO		2º MODO	
	Frequência	Amortecimento	Frequência	Amortecimento
1º Caso	31.2	0.009	174	0.005
2º Caso	32.2	0.011	174	0.005
3º Caso	34.8	0.003	173	0.002
4º Caso	56.0	0.111	174	0.051

A Tabela A1 mostra os resultados obtidos para cada caso analisado pelo autor. Uma vez que o bloco restringe o movimento da viga, ou seja, aumenta a rigidez, o resultado

ANEXO B

ARQUIVO DE DADOS (ANSYS – ELM BEAM2)

```
/FILNAM, aplic1
/TITLE, Analise modal cano fuzil cal 5.56 (elm-viga:livre-livre)
/OUTPUT,aplic1_resu.txt
/PREP7
ET,1,BEAM3                ! elemento de viga
MP,EX,1,207e9             ! coeficiente de elasticidade
MP,DENS,1,7810            ! massa específica
MP,PRXY,0.29              ! coeficiente de Poisson
R,1,2.418e-4,7.437e-9,1,, , ,
R,2,5.434e-4,2.975e-8,1,, , ,
R,3,3.651e-4,1.481e-8,1,, , ,
R,4,2.533e-4,6.085e-9,1,, , ,
R,5,2.416e-4,5.580e-9,1,, , ,
R,6,2.190e-4,4.663e-9,1,, , ,
R,7,2.108e-4,4.350e-9,1,, , ,
R,8,2.000e-4,3.957e-9,1,, , ,
R,9,1.921e-4,3.680e-9,1,, , ,
R,10,1.818e-4,3.334e-9,1,, , ,
R,11,2.108e-4,4.350e-9,1,, , ,
R,12,1.501e-4,2.373e-9,1,, , ,
R,13,1.363e-4,2.006e-9,1,, , ,
R,14,1.231e-4,1.682e-9,1,, , ,
R,15,1.126e-4,1.443e-9,1,, , ,
N,1,0,0,0,, , ,          ! define nó,número do nó,x,y,z
N,2,15.81e-3,0,0,, , ,
N,3,19.81e-3,0,0,, , ,
N,4,37.32e-3,0,0,, , ,
N,5,73.72e-3,0,0,, , ,
N,6,109.72e-3,0,0,, , ,
N,7,145.72e-3,0,0,, , ,
N,8,181.72e-3,0,0,, , ,
N,9,217.72e-3,0,0,, , ,
N,10,253.72e-3,0,0,, , ,
N,11,289.72e-3,0,0,, , ,
N,12,310.81e-3,0,0,, , ,
N,13,346.81e-3,0,0,, , ,
N,14,382.81e-3,0,0,, , ,
N,15,418.81e-3,0,0,, , ,
N,16,437.00e-3,0,0,, , ,
TYPE,1                    ! seleciona o elemento
MAT,1                     ! seleciona o conjunto de constantes materiais
REAL,1                    ! seleciona o conjunto de constantes reais
ESYS,0                    ! seleciona o sistema de coordenadas
TSHAP,LINE                ! seleciona a linha como representação visual do elemento
E,1,2                     ! define 1º elemento do nó 1 ao 2
```

```

REAL,2                ! seleciona o segundo conjunto de constantes reais
E,2,3                ! define o próximo elemento do nó 2 ao 3
REAL,3
E,3,4
REAL,4
E,4,5
REAL,5
E,5,6
REAL,6
E,6,7
REAL,7
E,7,8
REAL,8
E,8,9
REAL,9
E,9,10
REAL,10
E,10,11
REAL,11
E,11,12
REAL,12
E,12,13
REAL,13
E,13,14
REAL,14
E,14,15
REAL,15
E,15,16
E,PLOT
FINISH

/SOLU
ANTYPE,2
* MODOPT,SUBSP,20
MXPAND,20
LUMPM,0
PSTRES,0
MODOPT,SUBSP,20,0,0, ,OFF
RIGID,ALL
SUBOPT,0,0,0,0,0,ALL
! D,1,ALL                ! restringe todos os GL do nó 1
! D,2,ALL                ! restringe todos os GL do nó 2
SOLVE
FINISH

/POST1
SET,LIST,2                ! lista as frequências naturais calculadas
FINISH

```

ANEXO C

ARQUIVO DE DADOS (ANSYS – ELM TET10)

```
/FILNAM,aplic4
/TITLE,Analise Modal cano fuzil cal 5.56 - (elm tet10:engastada-livre)
/OUTPUT,aplic4_resu,txt,..\.\.\.MEUSDO~1\_DISSE~1\APLICA~1\APLIC4\
/AUX15
IOPTN,IGES,ALTERNATE
!*
IOPTN,MERGE,YES
IOPTN,SOLID,YES
IOPTN,GTOLER,DEFA
IGESIN,cano_efe3d,igs,c:\temp\
!*
/PREP7
ET,1,SOLID92
UIMP,1,EX,,207e9,
UIMP,1,DENS,,7850,
UIMP,1,PRXY,,0.29,
APLOT
FLST,2,29,5,ORDE,2
FITEM,2,30
FITEM,2,-58
VA,P51X
SMRT,10
MSHAPE,1,3D
MSHKEY,0
CM,_Y,VOLU
VSEL,, , , 1
CM,_Y1,VOLU
CHKMSH,'VOLU'
CMSEL,S,_Y
!*
VMESH,_Y1
!*
CMDEL,_Y
CMDEL,_Y1
CMDEL,_Y2
!*
/UI,MESH,OFF
FINISH
/SOLU
!*
ANTYPE,2
!*
MODOPT,SUBSP,26
EQSLV,FRONT
```

```

MXPAND,26, , ,0
LUMPM,0
PSTRES,0
!*
MODOPT,SUBSP,26,0,0, ,OFF
RIGID,ALL
SUBOPT,0,0,0,0,0,ALL
/STAT,SOLU
SOLVE

```

RAMA PMODALL.M

%EXTRACÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS PARA PONTAS

%ENTRADA: FREQ - SECTO (frequência em Hz)

clear all

%definição do número de FREQ a serem lidas

%definição do número de arquivos a serem lidos

%definição do modo a ser lido

%EXTRACÇÃO PARA CADA FREQ

do i=1,nf

readfreq,i

readfreq,i

readfreq,i

readfreq,i

readfreq,i

readfreq,i

%GRAFICO DA FREQ

plot,mag

clear all

readfreq,i

end

%SELECÇÃO ANÁLISE DE PONTAS PROXIMAS DAS RESSONÂNCIAS

%definição do número de pontos a serem analisados

%definição do número de pontos

%BUSCA E IMPLANTAÇÃO DE RESSONÂNCIAS MÁXIMAS LOCAIS

do i=1,nf

%FREQUÊNCIA NATURAL E AMPLITUDE

readfreq,i

%definição do número de pontos a serem analisados

%definição do número de pontos a serem analisados

%definição do número de pontos a serem analisados

%definição do número de pontos a serem analisados

%definição do número de pontos a serem analisados

%definição do número de pontos a serem analisados

end

clear all

%definição do número de pontos a serem analisados

end

ANEXO D

PROGRAMA PMODAL2.M

```
% EXTRAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS(PEAK-PICKING)
% ENTRADA: FRF - SRS780 (amplitude em dB)
clear all;
clf;
nfrf=input('Nr de FRF a serem lidas: ');
a=input('Nome do arquivo + número fixo: ','s');
nm=input('Nr de modos a serem extraídos: ');
% EXTRAÇÃO PARA CADA FRF (nfrf arquivos)
for v=1:nfrf,
    s=int2str(v);
    arq=strcat(a,s);
    eval(['load ',arq]);
    y=eval(arq);
    n=length(y);
    f=y(:,1);
    mag=y(:,3);
    resol=f(2)-f(1);
    % GRÁFICO DA FRF
    plot(f,mag);
    title(arq);
    xlabel('Frequência (Hz)');
    grid;
    % SELECIONANDO OS nm PONTOS PRÓXIMOS DAS RESSONÂNCIAS
    %   A: freq      B: amplitude      ind: índice no vetor
    [A,B]=ginput(nm);
    ind=(ceil((A-f(1))/resol)+1);
    % BUSCA EM TORNO DA RESSONANCIA (MÁXIMO LOCAL)
    for k=1:nm,
        % FREQUÊNCIA NATURAL E AMPLITUDE
        p=ind(k);
        [temp,kk]=max(mag(p-3:p+3)); % valor máximo e índice no intervalo (p-3:p+3)
        ii=p-3+kk-1; % índice do valor máximo no vetor completo
        fn(k,v)=f(ii); % frequência natural mais próxima do ponto escolhido
        Afn(k,v)=mag(ii); % amplitude
        band=Afn(k,v)-3; % amplitude a -3dB
        % LOCALIZAÇÃO DOS PONTOS DE 1/2 POTÊNCIA
        q=ii;
        while mag(q-1) > band
            q=q-1;
        end % ponto à esquerda menor que o ponto de meia
        potência
        X=f(q-1:q);
        Y=mag(q-1:q);
        fb=interp1(Y,X,band,'spline'); % frequência inferior
        q=ii;
```

```

while mag(q+1) >= band
    q=q+1;
end % ponto à direita menor que o ponto de meia potência
X=f(q:q+1);
Y=mag(q:q+1);
fa=interp1(Y,X,band,'spline'); % frequência superior
% AMORTECIMENTO E CONSTANTE MODAL
ksi(k,v)=(fa-fb)/(2*fn(k,v));
cmodal(k,v)=10^(Afn(k,v)/20)*(fn(k,v)^2)*(2*ksi(k,v));
end
end
% RESULTADOS
fn
ksi
cmodal
% MODOS (6 GRAUS DE LIBERDADE)
for k=1:nm
    a1=sqrt(cmodal(k,1));
    a2=cmodal(k,2)/a1;
    a3=cmodal(k,3)/a1;
    a4=cmodal(k,4)/a1;
    a5=cmodal(k,5)/a1;
    a6=cmodal(k,6)/a1;
    A=[a1 a2 a3 a4 a5 a6];
    av(k,:)=A(1,:);
end
av=double((av'));
maxav=max(abs(av));
for k=1:nm
    v=av(:,k)/maxav(k) % valor absoluto dos autovalores normalizados
end;

```



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Allsop, D., Popelínský, L., et al, 1997**, "Military Small Arms-Design Principles and Operating Methods", Brassey's, London, UK.
- Almeida, M. T., 1990**, "Vibrações Mecânicas para Engenheiros", 2ª Edição, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, Brasil.
- AMCP 706-252, 1964**, "Gun Series and Gun Tubes", US Material Command, Washington, USA.
- Ansys Modeling and Meshing Guide, 1997**, 2nd Edition, SAS IP Inc.
- AVL, 1990**, "Ballistic Instrumentation and High Pressure Technical", AVL LIST GmbH, Graz, Austria.
- Bathe, K. J., 1996**, "Finite Element Procedures", Prentice-Hall Inc., New Jersey, USA.
- Bendat, J. S., Piersol, A. G., 1971**, "Random Data: Analysis and Measurement Procedures", John Wiley&Sons, New York, USA.
- Dossing, O., 1988**, "Structural Testing Part I: Mechanical Mobility Measurements", Brüel & Kjaer.
- Dossing, O., 1988**, "Structural Testing Part II: Modal Analysis and Simulation", Brüel & Kjaer.
- Ewins, D. J., 1984**, "Modal Testing: Theory and Practice", Research Studies Press, Letchworth, England.
- Freschi, A. A., 1998**, "Técnicas Óticas para Medida de Vibrações e Deformações – Velocimetria Doppler", UNICAMP, Campinas, Brasil.
- Harris, C. M., 1992**, "Shock and Vibration Handbook", 4th Edition, McGraw-Hill, New York, USA.
- Inman, D. , 1994**, "Engineering Vibration", Prentice-Hall Inc., New Jersey, USA.
- Leissa, A. W., 1973**, "Vibrations of Plates", NASA Report NASA-SP-288, Washington, USA.
- McConnell, K. G., 1995**, "Vibration Testing – Theory and Practice", 1st Edition, John Wiley&Sons, New York, USA.

Metals Handbook, 1994, "Properties and Selection: Irons, Steels and High Performance Alloys", ASM International, Ohio, USA.

Prodonof, V., 1989, "Vibrações Mecânicas - Métodos e Análise", CENPES, Rio de Janeiro, Brasil.

Segerlind, L. J., 1984, "Applied Finite Element Analysis", John Willey and Sons, New York, USA.

Shigley, J. E., 1986, "Mechanical Engineering Design", 1st Metric Edition, McGraw-Hill, New York, USA.

Singal, R. K., Willians, K., 1988, "A Theoretical and Experimental Study of Vibrations of Circular Cylindrical Shell and Rings", ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol 110, pp533-537.

Skochko, L. W., Greveris, H., 1971, "Silencers: Patterns and Principles - The Frankford Arsenal Report R-1896", Novmount Techical Publications, Arizona, USA.

SRS, 1996, "SR780 Operating Manual and Programming Reference", Revision 2.2 , California, USA.

Timoshenko, S., Young, D. H., Weaver Jr, W., 1974, "Vibration Problems in Enginnering", 4th Edition, John Wiley&Sons, New York, USA.

Tongue, B.H., 1996, "Principles of Vibration", 1st Edition, Oxford University Press, London, UK

Wang, W., Willians, K., Guan, W, 1998, "A Vibrational Mode Analysis of Free Finite-Length Thick Cylinders Using the Finite Element Method", *Journal of Vibrations and Acoustics*, Vol. 120,pp 371-377.