TESE
1112

LA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

Estudo Dinâmico de Fundações de Máquinas Sujeitas a Carregamento Pulsante

ALEXANDRE AUGUSTO SIMÕES

ITAJUBA' - MG

2001

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ - EFEI.

INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA.

Estudo Dinâmico de Fundações de Máquinas Sujeitas a Carregamento Pulsante.

Autor: **Alexandre Augusto Simões**
Orientador: **Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida**

Tese de Doutorado apresentada à Comissão Examinadora, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica, na Área de Projeto e Fabricação.

Itajubá, 2001
M.G. - Brasil

Ministério da Educação
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

PRONUNCIAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA DE TESE DE DOUTORADO

A Banca Examinadora, abaixo assinada, nomeada pela Portaria nº 128 de 06 de abril de 2001, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Tese de Doutorado intitulada: **"ESTUDO DINÂMICO DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS SUJEITAS À CARREGAMENTO PULSANTE"** apresenta pronunciamento no sentido de que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, solicite ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) a expedição do título de Doutor em Engenharia Mecânica, na Área de Projeto e Fabricação, satisfeitas as demais exigências regimentais, a Alexandre Augusto Simões.

Itajubá, 11 de abril de 2001.

Prof. Dr. Mauro Pedro Peres
1º Examinador - UNESP/FEG

Prof. Dr. Fernando de Azevedo Silva
2º Examinador - UNESP/FEG

Prof. Dr. José Juliano de Lima Júnior
3º Examinador - EFEI

Prof. Dr. Paulo Shigueme Ide
4º Examinador - EFEI

Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida
5º Examinador - EFEI

Prof. Dr. Vilmar Arthur Schwarz
Presidente da Banca

Dedicatória

À minha esposa Liliana,
ao meu filho Alexandre,
e aos meus Pais Teresa e José.

Agradecimentos

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida, pela competência, dedicação, paciência e amizade.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos meus pais, Teresa e José, que sempre me incentivaram na formação e desenvolvimento cultural.

"O caminhar da vida pode ser o da liberdade e da beleza, porém nos extraviamos.
A cobiça envenenou a alma do homem...
levantou, no mundo, as muralhas do ódio...
e tem-nos feito marchar a passos largos para a miséria e os morticínios.
Criamos a época da velocidade, mas nos sentimos enclausurados dentro
dela. A máquina, que produz abundância, tem-nos deixado em penúria.
Nossos conhecimentos fizeram-nos céticos; nossa inteligência, emperdenidos e cruéis.
Pensamos em demasia e sentimos bem pouco. Mais do que máquinas,
precisamos de humanidade. Mais do que inteligência, precisamos de afeição e doçura.
Sem essas duas virtudes, a vida será de violência e tudo será perdido."

Charles Chaplin

Índice

	página
Cap. 1: ESTADO DA ARTE DAS VIBRAÇÕES DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS- INTRODUÇAO	**1**
1.1 - Estado da Arte das Vibrações de Fundações de Máquinas	2
1.2 - Motivação e Objetivos do Trabalho	19
1.3 - Conteúdo	20
Cap. 2: TEORIA DA VIBRAÇÃO DAS FUNDAÇÕES NA SUPERFÍCIE DE UM MEIO ELÁSTICO	**22**
2.1 - Oscilações Verticais de Bases Apoiadas na Superfície do Semi-Espaço Elástico	23
2.2 - Vibrações Torcionais de Base Circulares na Superfície do Semi-Espaço Elástico	39
2.3 - Vibração Horizontal Pura, ou Vibração de Escorregamento, ou Deslizamento, de um Disco Circular Rígido Apoiado na Superfície do Semi-Espaço Elástico	44
2.4 - Balanço de Bases Circulares Rígidas Apoiadas no Semi-Espaço Elástico	48
Cap. 3: RESPOSTA DINÂMICA DE FUNDAÇÕES EMBUTIDAS	53
3.1 - Oscilações Verticais de Fundações Embutidas	
3.2 - Oscilações Horizontais de Fundações Embutidas	
3.3 - Oscilações de Balanço de Fundações em Bloco Embutidas	59
3.4 - Oscilações Torcionais de Fundações Embutidas	62
3.5 - O Efeito do Embutimento na Resposta Dinâmica das Fundações de Máquinas	63
3.6 - O Efeito do Amortecimento Interno do Solo	66
3.7 - Fundação Embutida em uma Camada de Solo	66
Cap. 4: ESTUDO DOS MOVIMENTOS ACOPLADOS EM FUNDAÇÕES EMBUTIDAS	**68**
Cap. 5: A SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES AMORTECIDOS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE.	**73**
5.1- Coordenadas que Desacoplam as Equações do Movimento de Sistemas Dinâmicos Lineares Amortecidos.	73
Cap. 6: A RESPOSTA DE UM SISTEMA LINEAR AMORTECIDO A UM IMPULSO E A UMA EXCITAÇÃO GERAL.	**81**

6.1- Resposta de um Sistema com um Grau de Liberdade a um Impulso. 82
6.2 - Resposta de um Sistema com um Grau de Liberdade a uma Excitação Arbitrária. 84
6.3 - Resposta de um Sistema com Vários Graus de Liberdade a uma Excitação Arbitrária. 87
6.4 - Resposta de um Sistema com Vários Graus de Liberdade a uma Excitação Arbitrária: Método de Newmark 88
Cap. 7: DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DE UM SISTEMA COM PARÂMETROS VARIÁVEIS COM A FREQÜÊNCIA. **90**
7.1 - Determinação da Freqüência Natural e Coeficiente de Amortecimento de um Sistema com Parâmetros Variáveis com a Freqüência. 90
Cap. 8: MODELAGEM DA EXCITAÇÃO PARA ANÁLISE DE FUNDAÇÕES PARA MÁQUINAS DE IMPACTO. **105**
Cap. 9: MODELO DE SISTEMA MÁQUINA-FUNDAÇÃO-SOLO SUJEITA A IMPACTOS EXCÊNTRICOS. **113**
Cap. 10: CONCLUSÕES. **119**
10.1 - Comentários e Conclusões 119
10.2 - Propostas 122
Referências Bibliográficas **123**
Anexo I: DETERMINAÇÃO DA FREQÜÊNCIA NATURAL, FREQÜÊNCIA AMORTECIDA E COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO DO SOLO PARA UM GRAU DE LIBERDADE. **138**
Anexo II: DETERMINAÇÃO DAS FREQÜÊNCIAS NATURAIS, FREQÜÊNCIAS AMORTECIDAS E COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO DO SOLO PARA UM SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE. **143**
Anexo III: DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DE UM SISTEMA COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE NA VIBRAÇÃO LIVRE - MÉTODO DE FOSS. **146**
Anexo IV: DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DE UM SISTEMA COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE A UMA FORÇA CONSTANTE APLICADA SUBTAMENTE - MÉTODO DE FOSS. **149**
Anexo V: DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DE UM SISTEMA COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE A UMA EXCITAÇÃO ARBITRÁRIA - MÉTODO DE NEWMARK. **152**
Anexo VI: RESPOSTA DINÂMICA DE UM SISTEMA NÃO PERFEITAMENTE SIMÉTRICO OU QUE SOFRE IMPACTOS EXCENTRICOS. **155**
Anexo VI: ARTIGO INTERNACIONAL PUBLICADO: PROCEEDINGS OF THE IX DINAME, 5-9 MARCH 2001, FLORIANÓPOLIS-SC-BRAZIL **160**

Resumo

Apresenta-se um modelo com parâmetros concentrados massa-mola-amortecedor para o estudo da resposta dinâmica das fundações das máquinas que geram forças dinâmicas transientes. A operação deste tipo de equipamento pode resultar em níveis excessivos de vibração que podem ser transmitidos pelo solo afetando estruturas vizinhas, causando desconforto aos trabalhadores, erros de instrumentação, e recalques exagerados na própria fundação que suporta tais equipamentos. O nível de vibração pode ser reduzido projetando-se adequadamente o bloco da fundação e introduzindo-se elementos isoladores de vibração. Este trabalho procurou, a partir do modelo estabelecido, simular algumas situações críticas que possam ocorrer quando da instalação destes tipos de equipamentos, visando o dimensionamento adequado da fundação em função dos níveis de vibração esperados. O modelo apresentado é função do tipo de máquina, da configuração adotada na montagem, do perfil do solo e suas propriedades dinâmicas.

Palavras Chaves: vibração, projeto, máquinas de impacto, fundação de máquinas, sistemas massa-mola-amortecedor, modelo massa-mola-amortecedor, estruturas, solo.

Abstract

The objective of this work is to present a damped spring-mass model to the prediction of the vibration response of a machine-foundation system that are excited by transient dynamic forces generated by the normal operating conditions of the machine. Many types of machines produce powerful transient dynamic forces that are very short in duration and can be characterized as pulses or shocks. Typical machines producing this type of load are forging hammers, presses, etc... The operation of these machines can result in undesirable effects such as large settlement of the foundation, excessive vibration levels which may be transmitted through the ground and affect the structures around and cause discomfort to the workers and errors on instrumentation. Some machines operate with fast repeating shocks and the effects of vibration may be aggravated by resonant amplification of amplitudes. The prediction of the response of the foundation is an soil-structure interaction analyses and the description of the stiffness and dashpot parameters of the soil may be evaluated using an elastic medium model that accounts for energy dissipation through elastic waves and describes the stiffness and damping by close formulas including basic constants such as shear modulus or shear wave velocity.

Keywords: vibration, design, impact machines, machine foundations, mass-spring-damping systems, mass-spring-damping models, structures, soil.

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Os problemas considerados por Lamb. a) carga vertical atuando na superfície do meio elástico; b) carga horizontal atuando na superfície do meio elástico; c) força vertical atuando no interior do corpo elástico; d) força horizontal atuando no interior do corpo. 5

Figura 1.2: Funções Deslocamento para fundações rígidas quadradas e coeficiente de Poisson 0,25 [Ref. 44]. 9

Figura 1.3: Fundação Rígida Circular apoiada em uma camada elástica de profundidade H_s. 11

Figura 1.4: Fundação Rígida Circular apoiada em uma camada elástica de profundidade H_s sobre uma outra camada elástica semi-infinita. 12

Figura 1.5. Fundação embutida com contato lateral perfeito e sem contato lateral perfeito. 14

Figura 1.6: O sistema constituído por uma fundação sem massa e o solo. 16

Figura 2.1: Oscilador de massa rotativa e base circular apoiada no meio elástico semi-infinito (semi-espaço elástico). 23

Figura 2.3: Efeito da distribuição de pressão e coeficiente de Poisson nas curvas de resposta teórica para o movimento vertical da base (segundo Richart e Whitman [42]). 27

Figura 2.4: Amplitude versus freqüência para oscilações verticais de uma base circular rígida apoiada no semi-espaço elástico (ν=0,25), segundo Richart [140]. a) Para excitação constante; b) para excitação dependente da freqüência. 29

Figura 2.5: Funções deslocamento para base circular rígida vibrando verticalmente na superfície do semi-espaço elástico (segundo Bycroft [39]). 29

Figura 2.6: Considerações de Hsieh [Ref. (40)] no estudo de vibrações verticais. 31

Figura 2.7: Variação da Função Deslocamento modificada; (Segundo Lysmer e Richart [141]). 32

Figura 2.8: Função Deslocamento F para vibração vertical de um disco sem massa; (Lysmer e Richart, [141]). 33

Figura 2.9: Sistema equivalente de uma fundação em bloco excitada verticalmente por força periódica ou transiente; segundo Lysmer. 36

Figura 2.10: Razão mássica versus freqüência adimensional na ressonância. 37

Figura 2.11: Amplificação dinâmica versus freqüência adimensional para uma base circular rígida excitada verticalmente por força dependente da freqüência de acordo com a solução análoga de Lysmer. 37

Figura 2.12: Amplificação dinâmica versus freqüência adimensional para uma base circular rígida excitada por força constante de acordo com a solução análoga de Lysmer. 38

Figura 2.13: Comparação da equação de Lysmer para a ressonância no caso de força de excitação variável com a freqüência com a equação de Simões [142]. 38

Figura 2.14: Comparação entre o fator de amortecimento encontrado nas literaturas de referência desta obra e o fator de amortecimento determinado apontado por Simões [142], com base nas constantes de mola e amortecimento de acordo com Richart e Whitman [42]. 40

Figura 2.15: Curvas de Amplificação dinâmica para a resposta de uma base circular rígida excitada por momento de força desenvolvido por desbalanceamento [142]. 42

Figura 2.16: Razão mássica versus freqüência adimensional na ressonância para vibrações torcionais causadas por massas desbalanceadas [142]. 43

Figura 2.17: Sistema equivalente para o caso de fundação circular rígida excitada por momento de força em torno de eixo vertical. 43

Figura 2.18: Razão mássica versus freqüência adimensional na ressonância para oscilações torcionais por Richart, Hall e Woods [19]. 44

Figura 2.19: Modelo matemático para o estudo da vibração horizontal pura. 45

Figura 2.20: Fator de amplificação versus freqüência adimensional para o movimento oscilatório de escorregamento na superfície do meio elástico. 46

Figura 2.21: Razão mássica versus freqüência adimensional na ressonância para o escorregamento. 47

Figura 2.22: Modelo equivalente ao sistema máquina-fundação solo para o estudo das oscilações horizontais. 47

Figura 2.23: Movimento de balanço da fundação na superfície do semi-espaço elástico. 49

Figura 2.24: Amplificação dinâmica versus freqüência adimensional para o movimento de balanço de uma fundação circular rígida na superfície do semi-espaço elástico. 51

Figura 2.25: Razão mássica versus freqüência adimensional na ressonância para a vibração em balanço da fundação. 51

Figura 2.26: Sistema com parâmetros concentrados equivalente ao sistema máquina-fundação-meio elástico na vibração em balanço. 52

Figura 2.27: Gráfico razão mássica efetiva versus razão mássica 52

Figura 3.1: Fundação cilíndrica embutida no meio elástico. 53

Figura 3.2: Efeito do embutimento no movimento oscilatório vertical de uma fundação. 65

Figura 4.1: O acoplamento do balanço e deslizamento para fundações embutidas na Teoria do Semi-Espaço Elástico. 68

Figura 4.2: Modelo do Acoplamento. 72

Figura 6.1: Modelo de Força Impulsiva. 82

Figura 6.2: Sistema com um grau de liberdade. 83

Figura 6.3: (a)Excitação de duração t_1, (b)e uma excitação do tipo degrau. 86

Figura 6.4: Pulso Retangular de Amplitude F_0 e duração t_1 como apresentada com a soma de duas funções degraus F_1 e F_2. 87

Figura 7.1: Sistema massa-mola-amortecedor. 91

Figura 7.2: Modelo de Fundação Cilíndrica Embutida. 95

Figura 7.3: Resposta de uma fundação cilíndrica sujeita as condições iniciais Indicadas em (7.21). 96

Figura 7.4: Resposta de uma fundação cilíndrica sujeita as condições iniciais indicadas em (7.21), e parâmetros de rigidez e amortecimento considerados constantes. 97

Figura 7.5: Sistema com dois graus de liberdade. 99

Figura 7.6: Resposta no tempo da coordenada z_1 do modelo de uma fundação. 102

Figura 7.7: Resposta no tempo da coordenada z_2 do modelo de uma fundação. 102

Figura 7.8: Resposta no tempo da coordenada z_1 do modelo de uma fundação 103

Figura 7.9: Resposta no tempo da coordenada z_2 do modelo de uma fundação considerando os parâmetros constantes no modelo. 104

Figura 8.1: Modelo de uma excitação transiente dada por um pulso retangular. 105

Figura 8.2: Simplificação de uma máquina do tipo Martelo montada em sua Fundação apoiada em um meio elástico e seu modelo massa-mola-amortecedor. 106

Figura 8.3: Resposta de um sistema com dois graus de liberdade a um pulso (50 N.s). 108

Figura 8.4: Variação da Resposta de um sistema com dois graus de liberdade a um pulso (50 N.s) de duração tp variável. 109

Figura 8.5: Modelagem da excitação de um sistema submetido a vários impactos por minuto. 110

Figura 8.6: Resposta de um sistema com dois graus de liberdade a um trem de pulsos. 111

Figura 8.7: Espectro de Freqüências de um sistema com dois graus de liberdade excitado por um trem de pulsos 112

Figura 9.1: Modelo de um sistema máquina-fundação-solo com dois graus de liberdade. 113

Figura 9.2: Sistema máquina-fundação-solo cujo modelo deve ser representado por um sistema massa-mola-amortecedor com três graus de liberdade. 114

Figura 9.3: Esquema de sistema com seis graus de liberdade devido a uma excentricidade das massas. 114

Figura 9.4: Vibração na direção vertical de uma fundação perfeitamente simétrica. 116

Figura 9.5: Vibração na direção vertical de uma fundação não perfeitamente simétrica. 117

Figura 9.6: Deslocamento angular do bloco da fundação. 117

Figura 9.7: Deslocamento horizontal, ou deslizamento, do bloco da fundação. 118

Lista de Tabelas

Tabela 1.1: Parâmetros concentrados equivalentes para análise de fundação circular no Semi-Espaço Elástico 8

Tabela 1.2: Avaliação da Rigidez Estática para fundações Circulares em um semi-espaço não- homogêneo [86]. 13

Tabela 2.1: Relação razão mássica e razão mássica efetiva 50

Tabela 3.1 - Parâmetros de Rigidez e Amortecimento para o Semi-Espaço e Camada Lateral [11]. 57

Tabela 3.2 - Parâmetros de Rigidez e Amortecimento para uma Camada de Solo [11]. 67

Tabela 7.1: Resultado da Análise de uma Fundação Cilíndrica Embutida. 95

Tabela 7.2: Resultado da Análise de uma Fundação Cilíndrica Embutida considerando-se parâmetros constantes na determinação da resposta do modelo a certas condições iniciais. 98

Tabela 7.3: Parâmetros de Modelo de Fundação com dois graus de liberdade [Anexos II]. 101

Tabela 7.4: Parâmetros de Modelo de Fundação com dois graus de liberdade e constantes de rigidez e amortecimento do solo dadas pelas expressões (7.22) e (7.23). 103

Simbologia

Caracteres Latinos

Símbolo	Designação
a	distâncias das massas rotativas ao centro de rotação
a_0	razão adimensional das freqüências [eq. (2.2)]
a_{0r}	razão adimensional das freqüências na ressonância
$\overline{a}_0$	razão adimensional
$\overline{a}_{0m}$	razão adimensional de freqüências na ressonância e excitação constante
$\overline{a}_{0mf}$	razão de freqüências na ressonância e excitação variável com a freqüência
A	matriz particionada
b	razão mássica, largura da fundação
B	razão mássica modificada
B	matriz particionada
$\overline{B}$	razão mássica (por Lysmer)
c	constante de amortecimento
c_c	amortecimento crítico
C	função das funções deslocamentos de Reissner
C	matriz amortecimento
d	símbolo da derivada total
e	raio da massa de desbalanceamento
f_1, f_2	funções deslocamento de Reissner
f_r	freqüência de ressonância
F	força, função deslocamento de Bycroft
F_1, F_2	funções que compõem a função deslocamento F de Bycroft
F_0	força de excitação constante
F_X	força na direção x

F_Z	força na direção z
G	aceleração da gravidade
G	Módulo de Elasticidade Transversal Dinâmico
G_S	Módulo de Elasticidade Transversal Dinâmico da camada lateral
h, h_0	altura do CG da máquina-fundação em relação a base da fundação
H	altura da fundação
I	momento de inércia de massa centroidal
I_0	momento de inércia de massa por um eixo que passa pela base no ponto O
k	constante de rizidez
k	matriz rigidez
k_S	constante de mola estático
K	função devida ao embutimento
m	massa desbalanceada
M, M_t	massa total, ou massa da fundação, máquina e acessórios
M	matriz inercial
M_f	massa da fundação
M_x	momento de força em torno do eixo x
M_y	momento de força em torno do eixo y
M_z	momento de força em torno do eixo z
n	rotações por minuto, rpm
N	momento de reação
p	profundidade de embutimento
P_0	módulo da força oscilante
P	matriz característica
q	coordenadas
Q, Q_0	módulo da força oscilante
Q	vetor excitação
r_0	raio da fundação, ou raio equivalente da fundação
R	reação ou resistência ao movimento
S	constante da camada elástica lateral
t	tempo
T_x	momento de excitação em torno do eixo x
T_y	momento de excitação em torno do eixo y

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

T_z	momento de excitação em torno do eixo z
v_S	velocidade das ondas transversais
w	vetor deslocamentos
W	peso da máquina-fundação
x	coordenada segundo o eixo x
X	deslocamento na direção x
y	coordenada segundo o eixo y
Y	deslocamento na direção y
z	coordenada segundo o eixo z
z_S	deslocamento vertical estático
Z	deslocamento da borda
$\overline{Z}$	profundidade para avaliação do módulo de cisalhamento G.

Caracteres Gregos

Símbolo	Designação
X	amplitude do movimento na direção x
Δ	função de ω^2
Φ	amplitude do deslocamento angular no balanço da fundação
α	deslocamento angular
β	amplificação dinâmica [adimensional]
δ	ângulo de perda
ϕ	deslocamento angular no balanço da fundação
γ	peso específico
λ_i	autovalor
ν	coeficiente de Poisson
π	3,141592...
θ	deslocamento angular
ρ	massa específica
ρ_s	massa específica da camada lateral
σ	distribuição de pressão
ω	freqüência circular de excitação, rad/s
ω_n	freqüência natural, rad/s
ξ	coeficiente de amortecimento, adimensional
ψ	deslocamento angular torcional, rad.

Caracteres Inferiores

Símbolo	Designação
C	relativo ao concreto
ef	efetivo
f	relativo a freqüência de excitação
m	máximo
0	que diz respeito a fundação, ao raio da fundação
s	estático, ou lateral
x	relativo ao eixo x
xϕ	diz respeito ao acoplamento, constantes cruzadas
y	relativo ao eixo y
z	relativo ao eixo z
ϕ	relativo ao deslocamento angular de balanço
ψ	relativo ao deslocamento angular torcional

CAPÍTULO 1

ESTADO DA ARTE DAS VIBRAÇÕES DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

INTRODUÇÃO

Existem atualmente várias teorias e métodos disponíveis para determinar a resposta dinâmica de fundações de máquinas. Numerosas soluções foram publicadas na forma gráfica, de tabelas e simples fórmulas para fundações de várias geometrias, profundidade de embutimento e suportadas por vários meios (perfis de solos idealizados). Os vários métodos podem ser classificados como métodos analíticos ou semi-analíticos, métodos de elementos finitos, métodos combinados (analíticos e numéricos) e métodos com técnicas aproximadas [1].

Os métodos analíticos e semi-analíticos podem tratar perfis de solos com várias camadas e fundações com bases retangulares, porém, não tratam do embutimento [2, 3, 4]. Os métodos que utilizam a técnica de elementos finitos podem tratar fundações embutidas ou apenas apoiadas na superfície de um meio, apoiadas sobre pilares, e ainda o perfil do meio pode ter múltiplas camadas. No entanto, a maioria destes métodos são limitados a situações de simetria e ou deformações planas (plane-strain), isto é, estes métodos não tratam formas arbitrárias ou mesmo retangulares [5, 6, 7]. Os métodos combinados, ou seja, numérico-analíticos, tentam tirar vantagem da capacidade de cada um destes métodos individualmente. Nesta categoria, pode-se incluir os métodos de elementos de contorno (boundary element methods) [8, 9, 10]. Métodos, técnicas ou teorias simplificadas, ou aproximadas, adotam hipóteses que tendem a simplificar o problema e podem tratar com fundações embutidas e apoiadas superficialmente na superfície de um meio elástico [11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19].

1.1 - Estado da Arte das Vibrações de Fundações de Máquinas

No passado, as fundações para máquinas eram freqüentemente projetadas por regras sem uma análise prévia das amplitudes das vibrações. Uma dessas regras de projeto estabelecia que a massa da fundação deveria ser de no mínimo três a cinco vezes a massa da máquina a ser suportada. Esta regra, já obsoleta há muito tempo, ignora o efeito de muitas outras variáveis, como por exemplo, o tipo de excitação, a natureza do solo, e outras mais.

Nos anos de 1928 a 1936, um estudo intenso das vibrações das fundações e propriedades do solo foram desenvolvidos pelo Deuteschen Forschungsgesellschaft für Bondenmechanik (DEGEBO) em Berlim. Esse grupo desenvolveu um mecanismo oscilante para excitar um modelo de fundação nos seus modos vertical e torcional. Os resultados das primeiras investigações foram publicados por Hertwig, Früh, e Lorenz [20] onde descreveram o equipamento utilizado e incluíram uma avaliação extensiva da resposta dinâmica na vibração vertical. O comportamento dinâmico revelou ser dependente do peso total do equipamento e da fundação, da área de contato da fundação, da força de excitação e do solo. Uma tabela com as "freqüências características" para vários tipos de solo foi incluída naquele trabalho, sendo considerada como a freqüência natural do solo e reproduzida muitas vezes na literatura para uso em projeto. Em outras publicações [21, 22] estudou-se o efeito do peso do oscilador, área da base de contato, e força de excitação na freqüência de ressonância. Descobriu-se que para uma mesma base e força de excitação, o aumento do peso total decresce a freqüência de ressonância. Para um peso e força de excitação constantes, um aumento na área da base causa um acréscimo na freqüência de ressonância.

Seguindo o pioneirismo experimental de DEGEBO nos anos de 1930, um grande número de procedimentos empíricos foram desenvolvidos e usados extensivamente até a década de 50. Estes métodos tinham como foco unicamente a determinação da freqüência natural da fundação. Neste ponto, o conceito de "massa em fase" e "freqüência natural reduzida" foram desenvolvidos. O primeiro conceito citado assume que uma certa massa do solo imediatamente abaixo da fundação move-se como um corpo rígido em fase com a fundação. O outro conceito diz que a freqüência natural é uma função somente da área de

contato, da pressão média de contato entre a base da fundação e o solo, e do tipo de solo [19, 20].

A física, no entanto, contradiz o conceito de "massa em fase". Nenhuma massa de solo se move como um corpo rígido com a fundação. Ao invés, ondas se propagam da interface fundação-solo causando deformações oscilantes na superfície dissipando uma parte da energia recebida pelo sistema. No entanto, as primeiras tentativas para obter valores específicos desta "massa em fase" foram frustradas devida a sensibilidade com relação ao peso da fundação, modo de vibração, tipo de excitação, área de contato, e a natureza do solo. Aparentemente, não existe nenhum valor nesse conceito, e consequentemente seu uso na prática.

O método de Tschebotarioff, denominado método da "freqüência natural reduzida" [23], baseado nos resultados de alguns casos históricos, estabelecia que a freqüência natural era o produto de uma denominada "freqüência natural reduzida", pelo inverso da raiz quadrada da pressão média de contato. Na determinação da "freqüência natural reduzida" ainda manteve-se o conceito de "massa em fase", ou seja, a massa total era a massa da fundação e uma massa de solo. Este método além de manter o conceito de "massa em fase", sua interpretação levava os projetistas a conclusão de que o parâmetro mais importante no projeto de fundação para máquinas era a pressão suportada pelo solo.

Os métodos da "massa em fase" e da "freqüência natural reduzida", apenas estabeleciam valores de freqüências críticas, porém, não proviam nenhuma informação a respeito das amplitudes de vibração, considerada como necessidade primária para propósitos de projeto. Como conseqüência essas regras são obsoletas hoje em dia.

Um modelo foi introduzido como uma extensão de um conceito de *reação elástica* (*elastic subgrade reaction*), descrito em várias referências [24, 25, 26, 27]. Para simular as características de rigidez do sistema atual substituiu-se o solo por molas elásticas apoiadas numa base rígida. As constantes de mola são avaliadas por testes conduzidos em campo. Na antiga URSS, Barkan [28] definiu um conjunto de coeficientes para representar a reação do solo para cada modo de vibração para fundações apoiadas na superfície. Barkan baseou seus estudos em repetitivos testes estáticos. Barkan apresentou os coeficientes de

reação em função do módulo de elasticidade dinâmico E do solo ou simplesmente módulo de Young, do coeficiente de Poisson ν e da área A da base da fundação, sendo as constantes de mola para os vários modos obtidas pela multiplicação do coeficiente de reação pela área da base da fundação. O método de Barkan foi estendido por Prakash e Puri [29, 30] para o caso de fundações embutidas no meio elástico (solo). Uma das simplificações adotadas no modelo é a de que o amortecimento no sistema pode ser desprezado. Com base neste método, é possível então, representar o sistema máquina-fundação-solo como um sistema massa-mola equivalente no qual a massa representa a fundação (bloco de concreto) e a máquina, e a mola representa a elasticidade do solo.

É evidente que esse modelo pode apresentar informação razoável a baixas freqüências da resposta da fundação. Como nenhum amortecimento é incorporado, a amplitude do movimento a freqüências perto da ressonância não pode ser estimada de forma realística. Argumenta-se que desprezando o amortecimento pode-se obter valores seguros da resposta e ter-se uma boa estimativa da freqüência natural. Por sua vez, o alto amortecimento presente nos modos translacionais, da ordem de 50% do crítico, afetam a freqüência de ressonância e reduzem drasticamente as amplitudes. Nos casos onde os modos rotacionais são os de maior prioridade, com certeza teremos um projeto com baixo fator de segurança pelo fato da rigidez a altas freqüências serem bem menores que a rigidez estática usada na análise.

Uma extensão desse método, denominado *modelo de Winkler-Voigt*, incorpora o amortecimento, substituindo o meio, ou o solo, por um conjunto de molas e amortecedores em paralelo, para promover a reação dinâmica ao movimento da fundação. Da mesma forma, entretanto, os coeficientes de rigidez e amortecimento devem ser obtidos em campo através de testes dinâmicos. Esse método formou a base da Norma de Fundações de Máquinas da antiga URSS de 1971, segundo Barkan e Ilyechev [31]. Barkan e sua equipe detectaram uma grande discrepância entre as constantes de mola dos testes dinâmicos em campo nesse método com aqueles valores da constante de rigidez obtidas por ensaios estáticos repetidos e a freqüências muito baixas obtidos no método previamente descrito. Retomou-se, então, o conceito de "massa em fase" essencialmente para combinar as constantes obtidas pelos dois métodos, mas, descobriu-se que essa massa depende das dimensões e profundidade de embutimento da fundação, e das propriedades e natureza do solo, para uma dado modo de vibração.

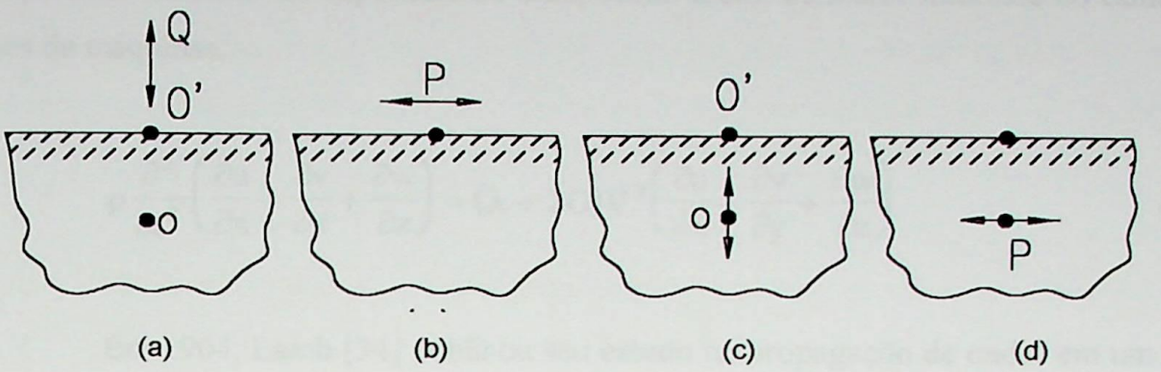


Figura 1.1: Os problemas considerados por Lamb. a) carga vertical atuando na superfície do meio elástico; b) carga horizontal atuando na superfície do meio elástico; c) força vertical atuando no interior do corpo elástico; d) força horizontal atuando no interior do corpo.

A utilização na atualidade dos modelos de Winkler na análise das fundações de máquinas só é explicada pela acumulação de dados de campo que possam ser prontamente utilizados na prática. Deve-se, no entanto, tomar cuidado na hora de tomar coeficientes de campo publicados, por ser praticamente impossível garantir a similaridade física e geométrica da nova fundação e do antigo esquema adotado.

Os métodos modernos de análise de fundações de máquinas tem como base teórica a propagação de ondas em um meio elástico (semi-espaço elástico) ou viscoelástico. Quando uma carga é bruscamente aplicada a um corpo ou meio, apenas as partes mais próximas da fonte do distúrbio são afetadas, ou seja, o meio inteiro não é afetado ao mesmo tempo. A propagação de onda, ou equação de movimento, de um corpo elástico infinito, homogêneo e isotrópico, é dada pela eq. (1.1) [32], sendo u, v e w os deslocamentos nas direções x, y, e z, respectivamente. O fenômeno da propagação de onda em um meio elástico é de grande importância no estudo de fundações de máquinas por várias razões. A velocidade da propagação de onda depende das propriedades do meio, sendo assim, muito útil na determinação das propriedades do meio. As ondas geradas devido a vibração da fundação dissipam parte da energia no meio resultando num efeito de amortecimento (amortecimento geométrico) que reduz as amplitudes das vibrações, porém, podem induzir vibrações indesejáveis nas estruturas e outros equipamentos próximos. No caso de um meio elástico, ou mais especificamente, de um semi-espaço elástico, três tipos de onda são geradas: onda de compressão, de cisalhamento e a onda de Rayleigh [33]. A onda de Rayleigh fica confinada na

região superficial do meio ou superfície do solo, sendo assim de maior interesse no estudo de fundações de máquinas.

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=(\lambda+2G)\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad (1.1)$$

Em 1904, Lamb [34] publicou seu estudo na propagação de ondas em um meio elástico semi-infinito causado por uma força concentrada, problema este conhecido também por "Problema Dinâmico de Boussinesq". Lamb também estendeu seus estudos para outras condições ocasionadas por uma força horizontal oscilatória agindo na superfície do meio, e para uma carga vertical e horizontal atuando dentro do meio elástico [fig. (1.1)]. O trabalho de Lamb constituiu a base para muitos outros trabalhos em dinâmica dos solos e contribuiu muito para os avanços na análise e projeto de fundações de máquinas, principalmente quando Reissner [35], em 1936, publicou seu estudo na resposta de um disco cilíndrico verticalmente carregado na superfície de um semi-espaço elástico. Apenas por uma questão de simplificação uma distribuição de pressão uniforme na zona de contato entre a base da fundação e o solo foi assumida. O tratamento matemático não descrito aqui, pode ser encontrado no trabalho original [35], ou nos trabalhos de Quilan [36] ou Sung [37], e maiores detalhes serão apresentados nos capítulos seguintes. A teoria de Reissner apresentou uma grande contribuição pois acabou revelando a existência de um amortecimento por radiação, um fenômeno não suspeitado anteriormente, mas claramente entendido nos dias de hoje. Toda vez que uma fundação se movimenta ondas são originadas na interface solo-fundação e se propagam pelo meio (ondas de dilatação volumétrica e transversais) e pela superfície do mesmo (ondas de Rayleigh). Essas ondas carregam (dissipam) parte da energia transmitida pela fundação no solo, fenômeno tal qual o de absorção de energia por um amortecedor viscoso.

Para a maioria das fundações assumir uma distribuição uniforme na interface fundação-solo ocasiona uma distribuição não uniforme dos deslocamentos. Para aproximar o movimento de corpo rígido de tais fundações, vários autores na década de 50 assumiram distribuições na zona de contato que produziam deslocamentos uniforme ou lineares na superfície, na influência de forças e momentos estáticos. Sung [37] e Quilan [36] apresentaram resultados para fundações circulares e retangulares oscilantes considerando três distribuições de pressão: rígida, uniforme e parabólica. Arnold et al [38] e Bycroft [39] estudaram

carregamentos horizontais e momentos de uma fundação circular. Essas soluções são na realidade apenas aproximadas, já que, a distribuição de pressão requerida para manter os deslocamentos uniformes ou lineares não são constantes mas variam com a freqüência de vibração.

Ainda nesta época, um dos grandes progressos na teoria foi a descoberta por Hsieh [40] e Lysmer [41] que o comportamento dinâmico de uma fundação circular verticalmente carregada pode ser representada por um sistema massa-mola-amortecedor, com a rigidez e o amortecimento dependentes da freqüência de oscilação. Lysmer, no entanto, foi além, sugerindo o uso de coeficientes independentes da freqüência para aproximar a resposta na faixa de baixa até média freqüência, permitindo assim o uso das expressões clássicas da Teoria de Vibrações na determinação da resposta do sistema máquina-fundação-solo. O sucesso desta aproximação de Lysmer, denominada *Analogia de Lysmer*, na reprodução da resposta do sistema teve um profundo efeito no desenvolvimento posterior da Teoria do Semi-Espaço Elástico e suas aplicações em engenharia.

Richart e Whitman [42] estenderam a Analogia de Lysmer demonstrando que todos os modos de vibrar podem ser estudados como sistemas massa-mola-amortecedor com parâmetros independentes da freqüência apropriadamente selecionados. As oscilações de translação vertical e rotação (torção) em torno do eixo vertical de uma fundação cilíndrica podem ser representadas por um sistema com um grau de liberdade. Já as oscilações de translação horizontal (escorregamento) e rotação (balanço) da fundação podem ser representadas por dois graus de liberdade por se tratar de modos acoplados. Whitman e Richart sugeriram que a escolha apropriada da rigidez no modelo está na faixa da baixa freqüência, e para o amortecimento na média dos valores na faixa em que ocorre ressonância. Recomendam ainda, que, para obter uma boa concordância entre o modelo adotado e o sistema real, uma massa, ou inércia, fictícia seja adicionada a massa, ou inércia, da fundação. Essa recomendação é devida ao fato de que na realidade a rigidez decresce com o incremento na freqüência, e não é devida a uma massa se movendo *"em fase"* com a fundação. Em outras palavras, ao invés de decrescer a rigidez, no modelo é assumida uma massa maior para manter a freqüência de ressonância inalterada.

Tabela 1.1: Parâmetros concentrados equivalentes para análise de fundação circular no Semi-Espaço Elástico

Modo	Vertical	Horizontal	Balanço	Torcional
Rigidez	$\frac{4Gr_0}{1-\nu}$	$\frac{8Gr_0}{2-\nu}$	$\frac{8Gr_0^3}{3(1-\nu)}$	$\frac{16Gr_0^3}{3}$
Razão Mássica B	$\frac{M(1-\nu)}{4\rho r_0^3}$	$\frac{M(2-\nu)}{8\rho r_0^3}$	$\frac{3I_x(1-\nu)}{8\rho r_0^5}$	$\frac{I_z}{\rho r_0^5}$
Fator de Amortecimento ξ	$\frac{0,425}{\sqrt{B_z}}$	$\frac{0,29}{\sqrt{B_x}}$	$\frac{0,15}{(1+B_\phi)\sqrt{B_\phi}}$	$\frac{0,5}{1+2B_\varphi}$
massa fictícia adicionada	$\frac{0,27M}{B_z}$	$\frac{0,095M}{B_x}$	$\frac{0,24I_x}{B_\phi}$	$\frac{0,24I_z}{B_\varphi}$

Ix, Iz : momentos de inércia em torno do eixo horizontal e vertical, respectivamente.

r_o raio da fundação circular ou equivalente. G, ρ, ν são respectivamente o módulo de cisalhamento, a massa específica do solo, e o coeficiente de Poisson.

Whitman e Richart [42] e mais tarde Richart, Woods e Hall [19] e Whitman [43] apresentaram expressões para os parâmetros de todos os modos de vibração. A tabela (1.1) apresenta essas expressões de significativa popularidade na década de 70.

Devido a sua simplicidade, a modelagem do sistema por parâmetros concentrados massa-mola-amortecedor teve um grande impacto na aplicação da Teoria do Semi-Espaço Elástico, demonstrando que a mesma poderia ser posta numa forma simples e usada pelo engenheiro sem nenhuma dificuldade.

Embora, o desenvolvimento nos anos 50 e 60 do modelo com parâmetros concentrados para a fundação rígida circular na superfície do semi-espaço elástico, tenha constituído um avanço na arte de analisar e projetar fundações de máquinas, geralmente, estas são retangulares, quadradas ou de outras formas do que a circular. No entanto, a dificuldade de obter soluções para outras formas forçou a adaptação da teoria para ser usada de forma geral. A resposta dinâmica de uma fundação era calculada tomando-se uma fundação circular. O raio equivalente da fundação circular é obtido pela área da base da fundação, ou pelo momento de inércia da área da base, dependendo do modo de vibração. Hoje, sabe-se que este procedimento não é necessariamente correto, e que a forma da fundação, dada para as fundações retangulares, pela sua relação de aspecto, ou seja pela relação entre as medidas de

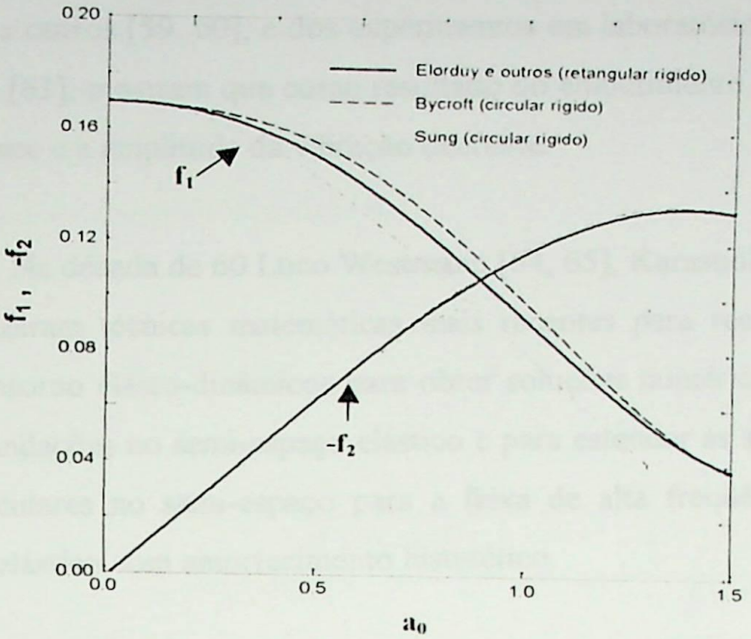


Figura 1.2: Funções Deslocamento para fundações rígidas quadradas e coeficiente de Poisson 0,25 [Ref. 44].

seus lados, tem uma importante influência na rigidez dinâmica e amortecimento. Elorduy, Nieto e Szekely [44] obtiveram soluções para bases retangulares e quadradas apoiadas na superfície do meio elástico, e compararam com as soluções obtidas com base na equivalência. Comparativamente, os resultados foram aceitáveis para valores de aspecto até 2 [fig. (1.2)]. Chae [45] sugere em seu trabalho que a aplicação da equivalência pode ser usada no cálculo da freqüência natural. Doubry e Gazetas [46] e Doubry et alii [47] também concluíram que a forma da fundação influi na rigidez e amortecimento do sistema.

Muitos outros trabalhos também foram publicados visando a determinação de soluções de fundações de formas arbitrárias ou mesmo retangulares [48, 49, 50, 51].

A maioria das fundações de máquinas são embutidas no solo e não apenas apoiadas na sua superfície. Uma solução analítica aproximada para a resposta dinâmica de fundações embutidas foi formulada por Baranov [52] demonstrando-se versátil e facilmente aplicável para todos os modos de vibração [11, 12, 53], e apresentou resultados concordantes

com a resposta obtida pelo Método dos Elementos Finitos [54, 55]. Os resultados das investigações de campo desenvolvidas por Novak [56], Beredugo [57], Beredugo e Novak [11], Fry [58] e outros [59, 60], e dos experimentos em laboratório de Chae [61], Gupta [62], e Vijayvergiya [63], mostram que como resultado do embutimento a freqüência de ressonância do sistema cresce e a amplitude da vibração decresce.

Na década de 60 Luco Westmann [64, 65], Karasudhi e all [66] e Veletsos et all [67, 68], utilizaram técnicas matemáticas mais recentes para resolver problemas mistos de valores de contorno elásto-dinâmicos para obter soluções numéricas para todos os modos de vibração de fundações no semi-espaço elástico e para estender as soluções disponíveis para as fundações circulares no semi-espaço para a faixa de alta freqüências, e também, para um material viscoelástico com amortecimento histerético.

A idealização do solo como meio elástico, isotrópico e homogêneo como foi assumido inicialmente na determinação da resposta dinâmica de fundações raramente corresponde a realidade, isto é, as camadas de solo que suportam as fundações raramente possuem propriedades uniformes dentro de uma larga profundidade ou extensão, geralmente apresenta-se em camadas. Por este motivo a vibração de fundações em um meio com várias camadas recebeu a atenção de vários estudiosos [38, 39, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76]. Vários perfis idealizados foram considerados: uma camada homogênea sobre uma camada rígida; uma camada homogênea sobre um semi-espaço elástico; e um meio com módulo de elasticidade G variável com a profundidade. Os estudos realizados em fundações apoiadas em uma camada homogênea de profundidade H_s sobre uma camada rígida [fig. (1.3)], revelaram que a amplitude de vibração em determinadas freqüências podem crescer muito. Estas freqüências estão associadas com as freqüências naturais desta camada. Para freqüências abaixo da freqüência natural desta camada, o amortecimento geométrico ou por irradiação de ondas é zero. Isto devido ao fato que nenhuma onda é gerada em uma camada de solo em tais freqüências. Neste caso, o amortecimento é devido apenas ao amortecimento interno, isto é, a perda de energia se dá apenas por amortecimento histerético. Para um meio puramente elástico não existe amortecimento. O fenômeno descrito é observado com maior ou menor intensidade dependendo do modo de vibração. Para os modos rotacionais (balanço e torção) a presença de uma camada rígida a uma certa profundidade H_s exerce apenas uma pequena influência na variação dos coeficientes de rigidez e amortecimento do meio que suporta a fundação. Para os

modos translacionais (vertical e horizontal), os coeficientes de rigidez e amortecimento do meio apresentam grandes flutuações com a freqüência. Para o caso de fundações circulares, apenas para relações da profundidade da camada H_s e do raio r_o maiores que 8 ($H_s/r_o>8$) é que os coeficientes de rigidez e amortecimento se aproximam do meio elástico infinito ($H_s \rightarrow \infty$). Como exemplo, a freqüência fundamental vertical da camada, devido as ondas de cisalhamento, com velocidade V_s é dada por:

$$f_{sv} = \frac{Vs}{4H_s} \tag{1.2}$$

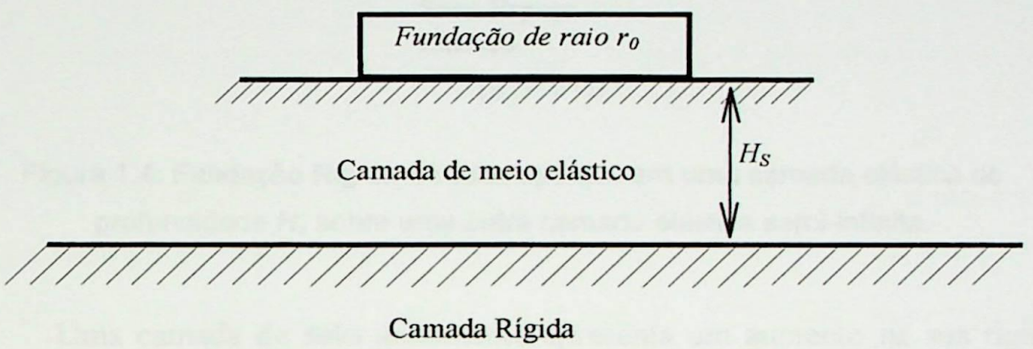


Figura 1.3: Fundação Rígida Circular apoiada em uma camada elástica de profundidade H_s.

O semi-espaço elástico e a camada elástica sobre camada ou base rígida são duas idealizações extremas do perfil do solo. Sendo assim, um modelo, que corresponde a condição entre estas duas situações também foi analisado: uma camada sobre um meio elástico semi-infinito (o dito semi-espaço elástico) [fig. (1.4)]. Note que, quando a razão G_1/G_2 tende para zero, temos a mesma situação de uma camada sobre camada rígida, e quando esta razão tende para um, o modelo é o mesmo de um meio homogêneo semi-infinito, ou seja o semi-espaço elástico. Hadjian e Luco [77] publicaram soluções numéricas para fundações circulares e Gazetas e Roesset [3, 4] estudaram o caso de fundações longas. Gazetas [1] baseado nos resultados de Hadjian e Luco apresentou fórmulas simples para a rigidez estática de fundações circulares, fórmulas estas que podem ser reduzidas as fórmulas também obtidas para os casos extremos ($G_1/G_2 = 0$, ou $G_1/G_2 = 1$). Uma das conclusões obtida neste estudo foi que a medida que a rigidez do semi-espaço elástico diminui, a rigidez estática da fundação também decresce. O amortecimento por irradiação existe para toda faixa de freqüência devido a transmissão de ondas também pelo semi-espaço elástico, levando a uma menor variação da amplitude com a

freqüência do que no caso da base rígida, sendo que o pico de ressonância principalmente na primeira freqüência natural do sistema é menor e mais plano e desloca-se para valores cada vez menores a medida que a razão G_1/G_2 cresce de zero para um [1].

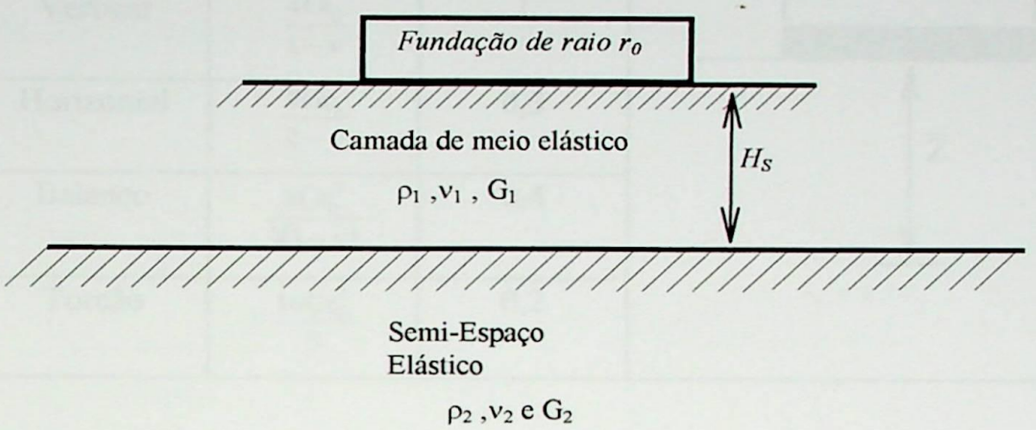
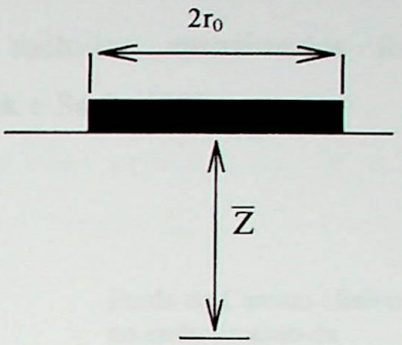


Figura 1.4: Fundação Rígida Circular apoiada em uma camada elástica de profundidade H_s sobre uma outra camada elástica semi-infinita.

Uma camada de solo geralmente apresenta um aumento na sua rigidez com a profundidade, sendo assim, estudos da resposta de superfícies arbitrárias carregadas de um semi-espaço elástico ou de uma camada elástica, com o módulo G linearmente variável com a profundidade foram publicados, dos quais destacam-se os trabalhos de Gibson e seus co-autores [78, 79, 80, 81]. Expressões para a rigidez vertical estática para as várias formas suportadas por tais meios foram obtidas, e freqüentemente, solos com estas características são denominados de "Solo de Gibson". A não homogeneidade dos solos pode ser considerada uma das causas da discrepância observada entre os resultados experimentais e os resultados da teoria do semi-espaço elástico [82, 83, 84] e, em particular, o amortecimento por irradiação medido é muito menor do que o previsto pela teoria, estando tipicamente na ordem de 50% do valor teórico para a resposta vertical.

Na prática, o problema da não-homogeneidade do solo é geralmente contornado pela escolha de um valor equivalente para o módulo de cisalhamento G, medido a uma determinada profundidade $\overline{Z}$. Entretanto, este valor representativo deve ser diferente para os vários modos de vibração, como mostra a tabela 1.2 [85, 86].

Tabela 1.2: Avaliação da Rigidez Estática para fundações Circulares em um semi-espaço não- homogêneo [86].

Modo	Constante de Rigidez	$\frac{\overline{Z}}{r_0}$	Notação
Vertical	$\frac{4Gr_0}{1-\nu}$	1	
Horizontal	$\frac{8Gr_0}{2-\nu}$	0,5	
Balanço	$\frac{8Gr_0^3}{3(1-\nu)}$	0,4	
Torção	$\frac{16Gr_0^3}{3}$	0,2	

O comportamento dinâmico e estático de uma fundação longa de largura *B* suportada por um semi-espaço elástico ou por um meio cuja velocidade de onda cresce linearmente com a profundidade foi estudada por Gazetas [87]. Nos seus estudos, Gazetas, mostrou que os deslocamentos vertical e horizontal de uma fundação longa em um meio não-homogêneo apresentam aproximadamente os mesmos níveis dos deslocamentos em um meio elástico (semi-espaço elástico), tomando-se o módulo *G* a uma profundidade igual a largura *B* da fundação. Entretanto, no movimento de balanço no meio homogêneo o deslocamento fica e inferior ao obtido em um meio não-homogêneo. Para obter-se resultados semelhantes no modo rotacional o módulo do meio não- homogêneo a uma profundidade *B/2* (metade da largura da fundação) ou um pouco menos deve ser igual ao módulo do meio-homogêneo.

Como resultados dos vários estudos da não-homogeneidade do solo, concluiu-se que os picos de ressonância em solos não- homogêneos são mais planos e o amortecimento por irradiação nunca é zero, em contraste com o caso da presença de uma camada rígida a uma certa profundidade da superficie que resulta em picos mais pronunciados ocorrendo a determinadas freqüências, denominadas freqüências naturais do depósito.

O efeito do embutimento também depende muito da homogeneidade do solo ou da falta desta. É sabido que o embutimento provoca o aumento da rigidez e o do amortecimento por irradiação. Porém, assumindo-se a condição de homogeneidade e perfeito

contato lateral entre a fundação e o solo [fig. (1.5)], os valores para a rigidez e o amortecimento ficam superestimados. Nas condições de operação da máquina um vão geralmente ocorre por volta da fundação devido ao efeito das cargas repetitivas, o que resulta em um embutimento efetivo menor. É claro o nível da dificuldade de se levar em conta este efeito corretamente, se não impossível, sendo assim, métodos aproximados foram introduzidos, sendo um destes métodos introduzidos por Novak e Sachs [88].

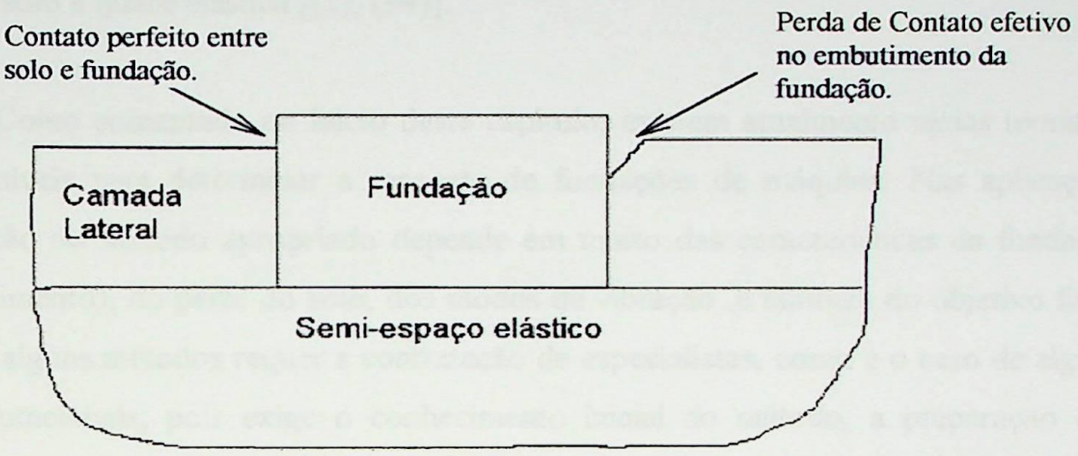


Figura 1.5. Fundação embutida com contato lateral perfeito e sem contato lateral perfeito.

Os depósitos de solo na realidade são meios não-isotrópicos, devido a fenômenos ou processos ocorridos durante sua formação. Sendo assim, alguns estudos foram realizados na tentativa de verificar a influência deste fato na resposta dinâmica das fundações. Resultados foram apresentados para solos com um tipo de *não isotropia cruzada* (cross-anisotropic soils) para fundações longas e circulares. Enquanto um material elástico é caracterizado por apenas duas constantes elásticas independentes (O módulo de cisalhamento G e o coeficiente de Poisson ν), um material com anisotropia cruzada precisa de cinco constantes para ser definido: o módulo de Young na direção vertical E_V; o módulo de Young na direção horizontal E_H, sendo a razão entre o modulo vertical e o horizontal constante e dado por $g=E_H/E_V$; o coeficiente de Poisson ν_{VH} (efeito da deformação vertical na horizontal); o coeficiente de Poisson ν_{HH} horizontal; e o módulo de cisalhamento G. O maior efeito da anisotropia na rigidez estática do sistema fundação-solo aparece como a principal conclusão dos estudos realizados. Para os modos de compressão (vertical e balanço), a influência da anisotropia é apreciável mas parece diminuir a medida que a espessura H_s decresce [fig. (1.3)].

O efeito nos modos cisalhantes, horizontal e torcional, parece ser independente da espessura da camada. Para obter maiores detalhes faz-se necessário o estudo dos diversos trabalhos publicados [78, 81, 89, 90, 91, 92, 93].

Nos métodos correntes de análise da interação solo-estrutura é comum considerar o comportamento plástico não-linear do solo como aproximadamente linear. Isto pode ser considerado verdade desde que o limite do movimento para um funcionamento satisfatório da máquina usualmente requer deslocamentos da fundação da ordem em que a deformação do solo é quase elástica [(1), (94)].

Como comentado no início deste capítulo, existem atualmente várias teorias e métodos disponíveis para determinar a resposta de fundações de máquina. Nas aplicações práticas a seleção do método apropriado depende em muito das características da fundação (forma e embutimento), do perfil do solo, dos modos de vibração, e também do objetivo final. A aplicação de alguns métodos requer a contratação de especialistas, como é o caso de alguns métodos computacionais, pois exige o conhecimento inicial do método, a preparação dos dados de entrada, e o conhecimento do uso do software. Como uma alternativa prática, muitos pesquisadores desenvolveram métodos aproximados, apresentando os resultados na forma de tabelas ou gráficos, ou simplesmente interpolando os resultados numéricos obtidos, sendo o ponto chave a determinação da impedância $\Re$ do sistema, isto é, da determinação da rigidez dinâmica e do amortecimento de uma fundação rígida, porém, sem massa, conforme a fig. (1.6) [1, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104].

Apenas para uma compreensão melhor do termo impedância, a impedância vertical $\Re_v$ de um sistema com um grau de liberdade, por exemplo é dada por:

$$\Re_V = \left(k_V - M\omega^2\right) + i\omega C_V \tag{1.3}$$

Lembrando que a equação de equilíbrio do movimento é dada por:

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + kz = F_z(t) \tag{1.4}$$

Considerando a excitação harmônica, podemos escrever a eq. (1.4) na seguinte forma:

$$\Re_v z = F_z(t) \tag{1.5}$$

Agora temos a impedância do sistema definida:

$$\Re_v = \frac{F_z(t)}{z} \tag{1.6}$$

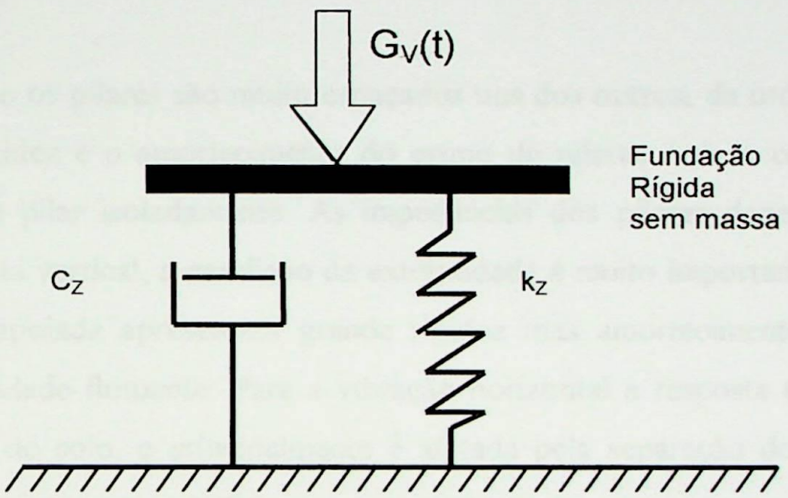


Figura 1.6: O sistema constituído por uma fundação sem massa e o solo.

Na literatura pode-se obter tabelas com as impedâncias dinâmicas do sistema, isto é, a rigidez e o amortecimento do sistema, conforme fig. (1.6). A informação geralmente aparece na forma de fórmulas algébricas e gráficos relativos a todos os modos de vibrar, para fundações de formas arbitrárias apoiadas ou embutidas em perfis de solos idealizados [102, 103, 105]. A reação do solo ao movimento da fundação, é então, descrito por uma impedância dinâmica dependente da freqüência $\Re(\omega)$ [eq. (1.7)], ou seja, por uma rigidez (mola) $\Re_1(\omega)$ e amortecimento $\Re_2(\omega)$. Uma vez determinados estes parâmetros para a freqüência particular de interesse, resolve-se a equação ou sistema de equações, conforme a eq. (1.8), obtendo a amplitude ou vetor do movimento na coordenada q genérica, e as freqüências críticas para uma fundação de massa M_f [105].

$$\Re(\omega) = \Re_1(\omega) + i\Re_2(\omega) \tag{1.7}$$

$$M_f \ddot{q} + \Re = F(t) \qquad (1.8)$$

As fundações para máquinas podem ser suportadas por estacas especialmente se a capacidade de carga admissível do solo é ultrapassada, e dependendo da natureza das forças de excitação, o conjunto fundação-pilar(es) fica sujeito a vibrações verticais, horizontais, de balanço e de torção. Soluções para o caso de um pilar isolado para todos os modos de vibração foram estudados, e também o efeito do uso de grupo de estacas. Para uma revisão completa do assunto pode-se recorrer ao livro de Prakash e Puri [32]. As análises iniciais por Barkan [28] e Maxwell et al. [106] se mostraram de limitada aplicação.

Quando os pilares são muito espaçados uns dos outros, da ordem de dez vezes o seu diâmetro, a rigidez e o amortecimento do grupo de pilares é dada como a soma das propriedades de cada pilar isoladamente. As impedâncias dos pilares dependem de muitos fatores. Para a resposta vertical, a condição da extremidade é muito importante porque pilares com a extremidade apoiada apresentam grande rigidez mas amortecimento inferior ao de pilares com a extremidade flutuante. Para a vibração horizontal a resposta é particularmente dependente do perfil do solo, e principalmente é afetada pela separação do solo próxima a superficie devido ao carregamento cíclico.

Quando os pilares são menos afastados estes interagem uns com os outros. Esta interação modifica a rigidez e amortecimento do sistema, tornando-as muito mais sensíveis ou dependentes da freqüência. Dependendo das condições, a impedância do grupo pode apresentar mudanças rápidas com a freqüência resultando em dois picos de ressonância.

Existem duas maneiras de estabelecer a impedância de grupos de pilares: a análise direta (mais rigorosa) e a aplicação de fatores de interação. A análise direta é preferível mas depende do uso ou desenvolvimento de programas computacionais. Tais análises foram formuladas por Kaynia e Kausel [107], Davis et all [108], El-Sharnouby e Novak [109] e Sheta e Novak [110].

A aplicação de fatores de interação é uma extensão do fator de interação estático pioneiramente introduzido por Poulos [111]. Kaynia e Kausel [107] mostraram que

essa aproximação pode ser aplicada no caso de interação dinâmica e apresentaram os fatores dinâmicos de interação na forma de tabelas para todos os modos de vibração e faixa de parâmetros. Nesta aproximação a impedância do pilar isoladamente é estabelecida primeiramente e o efeito do agrupamento é obtido pela superposição utilizando-se os fatores dinâmicos de interação. Tais fatores são complexos e dependentes da freqüência.

Através do uso da impedância individual do pilar e dos fatores de interação, fórmulas para a impedância do grupo de pilares podem ser obtidas para todos os modos de vibração. Estas fórmulas foram apresentadas para todos os modos de vibração por Novak e Mitwally [112].

Ainda, para o caso da vibração vertical de pilares atuando individualmente, Novak [113, 114] apresentou uma análise fazendo uso das propriedades do solo e do pilar. No caso de um conjunto de pilares, Novak e Grigg [115] tentaram agrupar os efeitos como no caso estático, porém, Sheta e Novak [110] desenvolveram uma teoria aproximada para a vibração vertical de grupo de pilares. Nogami e Liang [116, 117, 118] também obtiveram soluções para grupos de pilares e concluíram que o efeito dinâmico é extremamente dependente da freqüência, do espaçamento entre os pilares e do comprimento da onda propagando no solo.

As vibrações horizontais de pilares foram investigadas considerando o pilar como uma viga equivalente [119, 120]. Novak [113] apresentou constantes de amortecimento e de rigidez para os modos horizontal e de balanço separadamente, bem como no caso do acoplamento. Novak e El-Sharnouby [121] estudaram as vibrações verticais e horizontais para solos com módulo de elasticidade variável com a profundidade. Para vibrações torcionais Novak e Howell [122] apresentaram uma solução. Nogami [116, 117, 118] estudou o caso da vibração de fundações com pilares em solos não homogêneos e solos em camadas. As funções impedância de pilares em solo em camadas também foi objeto de estudo e de trabalho publicado por Novak e Aboula-Ella [123].

Dobry e Gazetas [124] e Gazetas e Makris [125] desenvolveram simples fórmulas para a determinação da impedância de grupos de pilares, levando também em conta a interação entre os pilares.

Com as funções impedâncias já avaliadas para o tipo de fundação escolhida, e as forças de excitação especificadas, o próximo passo, e o mais importante, é a previsão ou determinação das amplitudes de vibração em operação. A resposta é a solução do sistema de equações dada, na forma matricial, por:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{w}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{w}} + [\mathbf{k}]\mathbf{w} = \mathbf{F(t)} \tag{1.9}$$

As formulações básicas para a análise de fundações sujeitas a choques foram formuladas por Rausch [129], Barkan [28], Novak [130] e Rivin [131]. Novak e El Hifnawy [132, 133] incorporaram de forma rigorosa o amortecimento na determinação da resposta, antes comumente desprezado na análise.

A determinação das cargas dinâmicas atuantes no sistema é tarefa crucial no projeto. Informações adicionais com relação as cargas dinâmicas podem ser obtidas nas obras de Richart [134], Barkan [28], Richart et al. [19], Arya e al. [135], Major [136, 137], e Prakash e Puri [32].

1.2 - Motivação e Objetivos do Trabalho

A necessidade sempre crescente de adquirir novos conhecimentos, através da pesquisa científica, é um fato bem sabido hoje em dia, constituindo-se em ponto fundamental para o progresso da humanidade, como é para muitos países, ditos de primeiro mundo, onde é dada especial atenção a educação com o objetivo de gerar e acumular conhecimentos. Muitos trabalhos (livros, artigos, teses, etc...) são publicados todos os anos. Mas, infelizmente, sempre nos deparamos com um problema que é a recuperação destas informações. Isto é, os resultados de muitos trabalhos científicos em determinada área, ainda que existam, estão dispersos, e muitas vezes não estão nem mesmo acessíveis ao usuário final, ou são de difícil aquisição, inviabilizando, ou mesmo comprometendo, um projeto ou uma pesquisa.

Com atenção ao que foi exposto no parágrafo anterior este trabalho teve como um dos objetivos prover informações suficientes para engenheiros e pesquisadores no problema dinâmico de interação solo-estrutura, porém, concentrado principalmente na busca

de um modelo para análise do caso particular da resposta dinâmica das fundações de máquinas sujeitas a carregamentos pulsantes.

Espera-se então, com este trabalho, dar subsídios para pesquisadores e engenheiros envolvidos em projetos de fundações para equipamentos que produzem forças dinâmicas de curtíssima duração e que podem ser caracterizadas como pulsos ou choques.

Os seguintes pontos foram abordados neste trabalho:

- Elaboração do *Estado da Arte em Dinâmica de Fundações de Máquinas*;
- Modelagem do solo como meio elástico. Apresentação das constantes de rigidez e amortecimento para os vários graus de liberdade;
- Estabelecimento de um modelo para o sistema máquina-fundação;
- Apresentação das equações diferenciais do movimento do sistema;
- Determinação da resposta do sistema a uma excitação do tipo pulso e também a uma excitação do tipo trem de pulsos;
- Estabelecimento de algumas propostas, critérios, e recomendações de projetos;
- Redação e apresentação do trabalho em Congresso Internacional;
- Proposta para trabalhos futuros.

1.3 - Conteúdo

O ponto-chave na análise dinâmica de sistemas com interação com o solo, denominados problemas de interação solo-estrutura, é a determinação da impedância associada ao movimento da fundação, ou seja, o estabelecimento das constantes de rigidez e amortecimento do meio. Os capítulos 2, 3 e 4 apresentaram soluções analíticas para o caso de fundações circulares apoiadas ou embutidas no meio, dito semi-infinito e elástico. O efeito do embutimento é discutido no capítulo 3. Nestes capítulos, buscou-se inovar, apresentando-se os resultados, obtidos pela *Teoria do Semi-Espaço Elástico*, sempre em consonância com a *Clássica Teoria dos Sistemas Vibratórios*.

Ainda, com relação aos parâmetros dinâmicos do solo, os mesmos foram apresentados, nos capítulos citados no parágrafo anterior, em função da freqüência adimensional a_o , dada pela eq. (2.2). Parâmetros constantes podem ser adotados no modelo, porém, dentro de uma certa faixa, podendo ser ajustados de acordo com a faixa de interesse, o que depende da freqüência de excitação. No caso em que o sistema é submetido a certas condições iniciais, ou a um impacto ou choque, o sistema vibra livre o que requer a determinação das freqüências da oscilação, e também dos respectivos coeficientes de amortecimentos, que no caso de sistema com parâmetros constantes, são determinados resolvendo-se a equação característica do sistema, ou obtendo-se os autovalores [Cap. 5]. O Cap. 6 é uma revisão da resposta de um sistema linear amortecido a um impulso e a uma excitação geral.

O problema da vibração livre de um sistema cujos parâmetros dinâmicos são dependentes das freqüências de oscilação foi tratado no Cap. 7, e a resposta obtida comparada com a resposta do sistema admitindo-se constantes os parâmetros da equação diferencial do movimento. O método utilizado constituiu-se em um método de tentativa e erro. Novak [130], propôs um método similar, porém, não resolvendo a equação diferencial do movimento, utilizando-se da expressão clássica da freqüência natural para um sistema massa-mola com apenas um grau de liberdade. A expressão citada é a raiz quadrada da razão da rigidez pela massa.

O Cap. 8 abordou o problema da modelagem da excitação para análise das fundações para máquinas de impacto. O Cap. 9 apresentou a modelagem dos sistemas máquina-fundação-solo, e de acordo com aquele capítulo, o modelo de um sistema máquina-fundação-solo pode ter um ou mais graus de liberdade, sendo que, um modelo com dois ou três graus de liberdade é suficiente para descrever o comportamento da maioria dos equipamentos. Um sistema com seis graus de liberdade foi apresentado com o intuito de analisar a resposta de um sistema não perfeitamente simétrico, ou que sofre impactos excêntricos.

O Cap. 10 tece as principais conclusões do trabalho.

CAPÍTULO 2

TEORIA DA VIBRAÇÃO DAS FUNDAÇÕES NA SUPERFÍCIE DE UM MEIO ELÁSTICO

Este capítulo apresenta algumas das principais soluções obtidas para o comportamento dinâmico de fundações suportadas por um meio elástico. O meio elástico geralmente considerado é homogêneo, isotrópico, semi-infinito, conhecido simplesmente por "semi-espaço elástico". O método do semi-espaço elástico idealiza o sistema máquina-fundação como um oscilador mecânico com uma base circular na superfície do solo assumido como meio elástico, o próprio semi-espaço elástico [fig. (2.1)]. Estudos do comportamento dinâmico do solo demonstram que o solo pode ser considerado aproximadamente elástico para pequenas amplitudes de deformação.

Lamb [34] publicou o primeiro trabalho baseado na teoria do semi-espaço elástico. Neste trabalho Lamb apresenta seu estudo na vibração do semi-espaço elástico causado por uma carga atuando em uma linha ou ponto, problema este também conhecido por "Problema Dinâmico de Boussinesq", estendendo para outras condições ocasionadas por uma força horizontal oscilatória agindo na superfície do meio, e para uma carga vertical e horizontal atuando dentro do meio elástico [fig. (1.1)]. As soluções de Lamb consideram ainda oscilações em estado permanente e casos transientes. Pela integração da solução para uma força vertical sobre uma área finita da superfície a pressão de contato produzida no semi-espaço elástico por uma base oscilante pode ser descrita, e a resposta dinâmica da base no meio pode ser avaliada [35, 36, 37].

2.1 - Oscilações Verticais de Bases Apoiadas na Superfície do Semi-espaço Elástico

E. Reissner [35] estabeleceu uma teoria para avaliação da resposta dinâmica de bases oscilatórias influenciadas pelas propriedades do solo. Reissner escolheu o semi-espaço elástico para representar o solo. Os parâmetros necessários na descrição das propriedades do meio elástico foram o módulo de elasticidade transversal G, o coeficiente de Poisson ν, e a massa específica ρ. A base oscilatória foi representada por uma massa oscilante que produzia uma pressão vertical periódica uniformemente distribuída por uma área circular de raio r_o na superfície do semi-espaço elástico [fig. (2.1)].

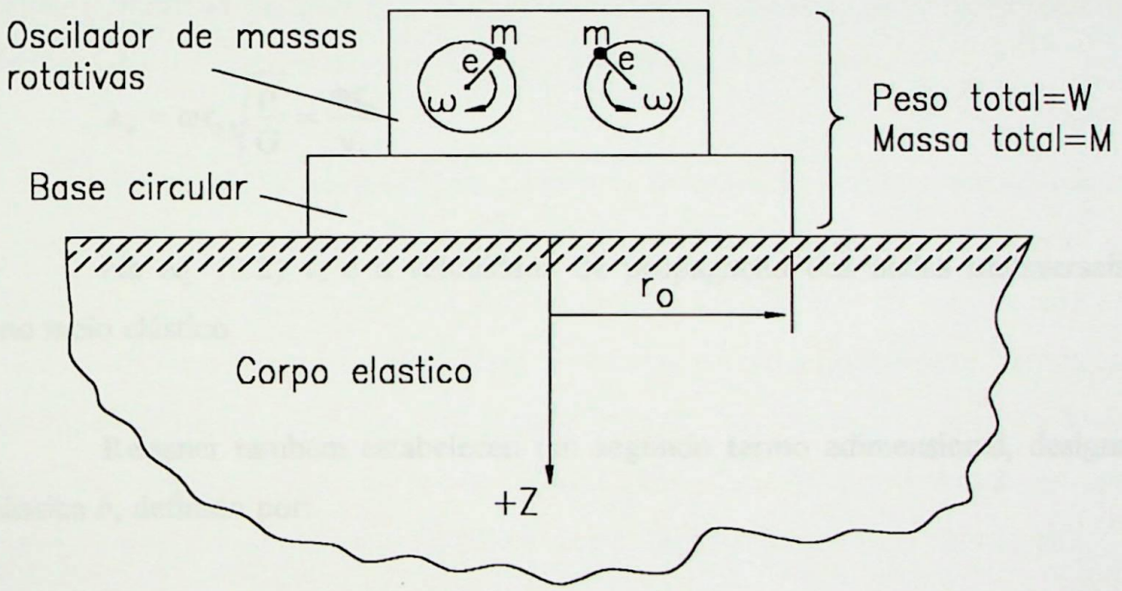


Figura 2.1: Oscilador de massa rotativa e base circular apoiada no meio elástico semi-infinito (semi-espaço elástico).

A partir deste modelo matemático, Reissner desenvolveu uma solução analítica para o deslocamento vertical no centro da área circular carregada da superfície. Reissner obteve esta solução pela integração da solução de Lamb na superfície circular. O tratamento matemático não será descrito aqui, mas pode ser encontrado no paper original ou nos papers de Quilan [36] ou Sung [37]. O deslocamento vertical é expresso por:

$$z = \frac{P_0 e^{i\omega t}}{G r_0}(f_1 + i f_2) \tag{2.1}$$

Onde:

$P_o \rightarrow$ amplitude da força oscilante aplicada.

$\omega \rightarrow$ freqüência circular de excitação rad/s.

$G \rightarrow$ módulo de elasticidade transversal.

$r_o \rightarrow$ raio da área de contato.

f_1, $f_2 \rightarrow$ funções deslocamento de Reissner.

As funções deslocamento de Reissner são dependentes do coeficiente de Poisson e do termo adimensional a_o definido por:

$$a_o = \omega r_o \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{\omega r_o}{v_s} \tag{2.2}$$

Na eq. (2.2) v_s é a velocidade de propagação das ondas transversais (shear waves) no meio elástico.

Reissner também estabeleceu um segundo termo adimensional, designado por razão mássica b, definido por:

$$b = \frac{M}{\rho r_o^3} = \frac{W}{\gamma r_o^3} \tag{2.3}$$

Onde:

M$\rightarrow$ massa total da base, incluindo o mecanismo de excitação (máquina).

Reissner determinou a seguinte expressão para a amplitude do movimento para um sistema excitado por uma força periódica Q:

$$A_z = \frac{Q_o}{Gr_o}\sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{\left(1 - ba_o^2 f_1\right)^2 + \left(ba_o^2 f_2\right)^2}} \qquad (2.4)$$

sendo, $Q = Q_o e^{i\omega t}$ a força externa periódica.

A teoria de Reissner formou a base para aproximadamente todos os posteriores estudos analíticos de osciladores apoiados no semi-espaço elástico, ainda que esta teoria não tenha recebido imediata aceitação pelos engenheiros da área da Dinâmica dos Solos porque os resultados teóricos não concordavam completamente com os testes de campo. Existem várias razões para isso, incluindo deformações permanentes desenvolvidas durante muitos testes, violando as condições assumidas para um meio elástico; grandes amplitudes requeridas pelos instrumentos disponíveis permitiam que o excitador saltasse claramente do solo atuando como um martelo; a hipótese de uma distribuição uniforme de pressão na zona de contato solo-oscilador; e existia um erro no cálculo de f_2 que influenciava os resultados.

Quilan [36] e Sung [37] estenderam a solução de Reissner considerando outras distribuições de pressão na superfície do semi-espaço elástico. Quilan estabeleceu as equações para pressões oscilantes de contato que variam através do diâmetro da área de contato numa distribuição parabólica, com uma distribuição uniforme, e com a distribuição correspondente a uma base rígida (aproximação), desenvolvendo solução apenas para o caso de base rígida. Sung também estabeleceu as equações básicas para as três distribuições de pressão e apresentou soluções para cada caso. As distribuições de pressão consideradas foram:

a) base rígida

$$\sigma_z = \frac{P_o e^{i\omega t}}{2\pi r_o \sqrt{r_o^2 - r^2}} \qquad \text{para } r \leq r_o$$
$$\sigma_z = 0 \qquad \text{para } r > r_o \qquad (2.5a)$$

b) Uniforme

$$\sigma_z = \frac{P_o e^{i\omega t}}{\pi r_o^2} \qquad \text{para } r \leq r_o$$
$$\sigma_z = 0 \qquad \text{para } r \rangle r_o \tag{2.5b}$$

c) Parabólico

$$\sigma_z = \frac{2P_o\left(r_o^2 - r^2\right)e^{i\omega t}}{\pi r_o^4} \qquad \text{para } r \leq r_o$$
$$\sigma_z = 0 \qquad \text{para } r \rangle r_o \tag{2.5c}$$

Essas três distribuições de pressão desenvolveram três diferentes formas de deslocamento na superfície carregada. Em seguida, Sung estabeleceu a resposta dinâmica da massa apoiada no semi-espaço para cada um dos tipos de distribuição de pressão de contato considerando que o centro de gravidade da massa se movimentava com a mesma distância que o centro da área carregada. Essa suposição produziu curvas de resposta consideradas exageradas para as distribuições de pressão parabólica e uniforme porque o ponto central possui deslocamento bem maiores que a média. Entretanto essas curvas são instrutivas na visualização da influência da distribuição de pressão de contato no sistema [fig. (2.3)]. Uma melhoria na apresentação das curvas de resposta foram apresentadas por Housner e Castellani [138], que determinaram curvas de resposta baseadas no deslocamento carregado médio o qual baseia-se no trabalho da força dinâmica total. Os picos das curvas são mostrados na fig. (2.3a) por círculos cheios designados por P, U, e R. Essas curvas indicam ao projetista que pode-se influenciar na resposta dinâmica de uma fundação controlando sua flexibilidade, por exemplo por pós-tensionamento, como descrito por Fistedis [Ref. 139].

A figura (2.3b) ilustra a influência da mudança do coeficiente de Poisson do semi-espaço elástico na resposta em estado permanente para o caso de distribuição de pressão de base rígida e b=5. Esse diagrama mostra que a amplitude é maior e a freqüência é menor quando ν=0. Geralmente, a solução para ν=0 representa o pior caso a baixas freqüências. Algumas soluções para outros modos de oscilação são disponíveis somente para ν=0, sendo útil ter em mente a variação para uma condição mais real de ν=0,33 ou 0,40.

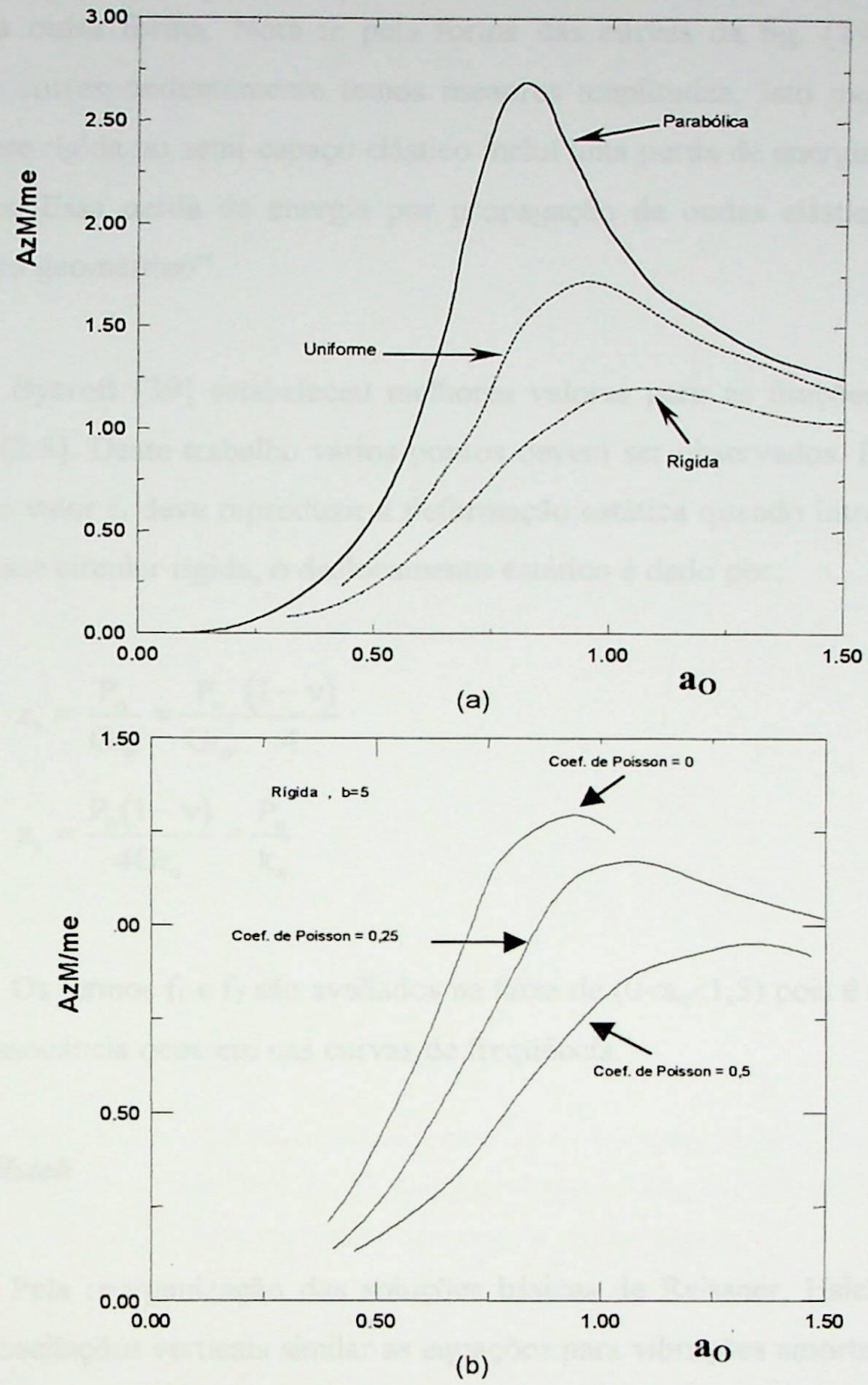


Figura 2.3: Efeito da distribuição de pressão e coeficiente de Poisson nas curvas de resposta teórica para o movimento vertical da base (segundo Richart e Whitman [42]).

Sung estabeleceu valores para as funções deslocamento f_1 e f_2 para valores de ν de 0, 0,25, 0,33, e 0,5, para cada distribuição de pressão na faixa de a_o de 0 a 1,5. Essas funções deslocamentos foram introduzidas na equação (2.4) para avaliar a curva de amplitude por freqüência (A_z versus a_o) para diferentes valores de razão mássica b [fig. (2.4)]. Baseado nestas curvas pode-se determinar as máximas amplitudes de movimento e a freqüência em que ocorrem. Richart [134, 140] construiu uma curva relacionando máxima amplitude e o termo adimensional a_o para uso em projeto e análises. A mesma informação é apresentada na fig.

(2.10) de uma outra forma. Nota-se pela forma das curvas da fig. (2.4) que para valores menores de b correspondentemente temos menores amplitudes. Isto mostra que oscilações verticais de base rígida no semi-espaço elástico incluí uma perda de energia por propagação de ondas elásticas. Essa perda de energia por propagação de ondas elásticas é definida como "amortecimento geométrico".

Bycroft [39] estabeleceu melhores valores para as funções deslocamentos de Reissner [fig. (2.5]. Deste trabalho vários pontos devem ser observados. Para o caso estático (a_o=0) f_2=0 e o valor f_1 deve reproduzir a deformação estática quando introduzida na equação (4.1). Para a base circular rígida, o deslocamento estático é dado por:

$$z_s = \frac{P_o}{Gr_o} = \frac{P_o}{Gr_o}\frac{(1-\nu)}{4}$$

$$z_s = \frac{P_o(1-\nu)}{4Gr_o} = \frac{P_o}{k_s} \qquad (2.6)$$

Os termos f_1 e f_2 são avaliados na faixa de ($0<a_o<1,5$) pois é a faixa prática onde os picos de ressonância ocorrem nas curvas de freqüência.

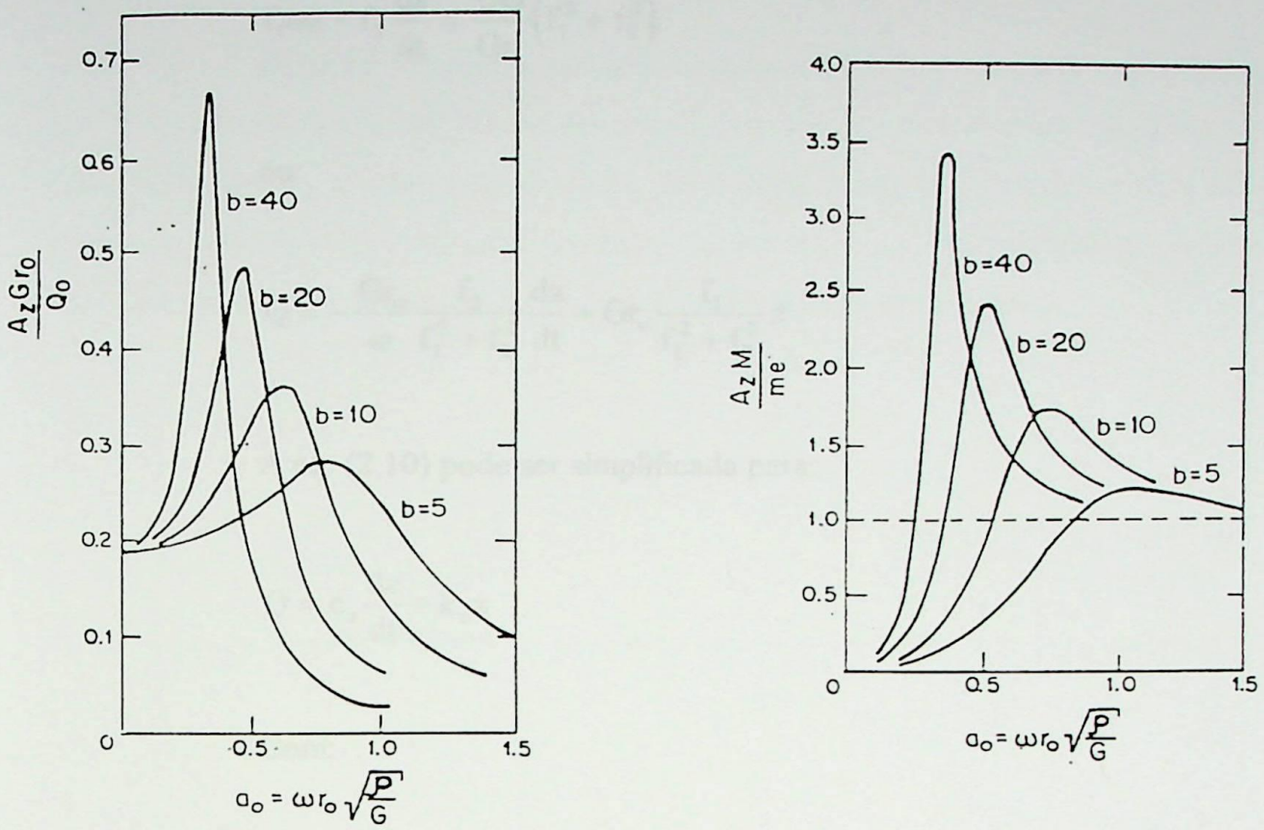
Analogia de Hsieh

Pela reorganização das soluções básicas de Reissner, Hsieh [40] obteve uma equação para oscilações verticais similar as equações para vibrações amortecidas com um grau de liberdade. Hsieh primeiro considerou um disco circular rígido de raio r_o sem massa apoiado na superfície do semi-espaço elástico [fig. (2.6a)]. Esse disco está sujeito a uma força vertical oscilante

$$Q = Q_o\, e^{i\omega t} \qquad (2.7)$$

Derivando a eq. (2.1) com relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q_o \omega e^{i\omega t}}{Gr_o}(if_1 - f_2) \qquad (2.8)$$



(a) (b)

Figura 2.4: Amplitude versus freqüência para oscilações verticais de uma base circular rígida apoiada no semi-espaço elástico (ν=0,25), segundo Richart [140]. a) Para excitação constante; b) para excitação dependente da freqüência.

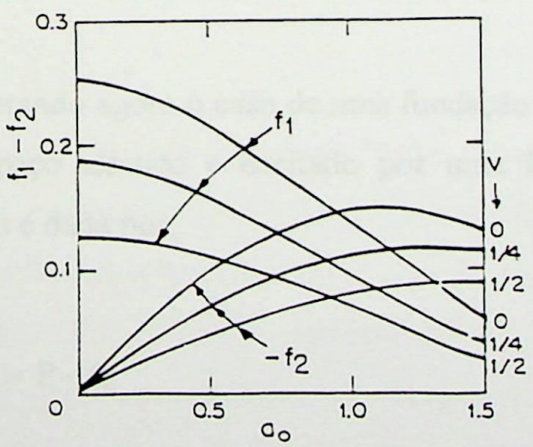


Figura 2.5: Funções deslocamento para base circular rígida vibrando verticalmente na superfície do semi-espaço elástico (segundo Bycroft [39]).

Então:

$$f_1 \omega z - f_2 \frac{dz}{dt} = \frac{Q\omega}{Gr_o}\left(f_1^2 + f_2^2\right) \tag{2.9}$$

ou:

$$Q = -\frac{Gr_o}{\omega}\frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2}\frac{dz}{dt} + Gr_o \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} z \tag{2.10}$$

A eq. (2.10) pode ser simplificada para:

$$Q = c_z \frac{dz}{dt} + k_z z \tag{2.11}$$

Com:

$$c_z = \frac{Gr_o}{\omega}\left(\frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2}\right) = \frac{r_o^2}{a_o}\sqrt{G\rho}\left(\frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2}\right) \tag{2.12}$$

$$k_z = Gr_o\left(\frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}\right) \tag{2.13}$$

Note que ambos c_z e k_z incluem f_1 e f_2 , logo dependem também de a_o e ν.

Considerando agora o caso de uma fundação cilíndrica rígida e peso total W na superfície do semi-espaço elástico e excitado por uma força periódica P [fig. (2.6b)], a equação do movimento é dada por:

$$\frac{W}{g}\frac{d^2 z}{dt^2} = P - Q \tag{2.14}$$

Substituindo a eq. (2.11) na eq. (2.14), obtém-se:

$$\frac{W}{g}\frac{d^2z}{dt^2} + c_z\frac{dz}{dt} + k_z z = P \qquad (2.15)$$

A eq. (2.15) revela que uma base na superfície do semi-espaço elástico excitada por força oscilatória pode ser representada por um sistema massa-mola-amortecido. Está estabelecida assim, a *Analogia de Hsieh* do sistema máquina-fundação-meio elástico com o sistema amortecido com um grau de liberdade, porém, com o inconveniente das constante de rigidez e amortecimento serem dependentes da freqüência de excitação.

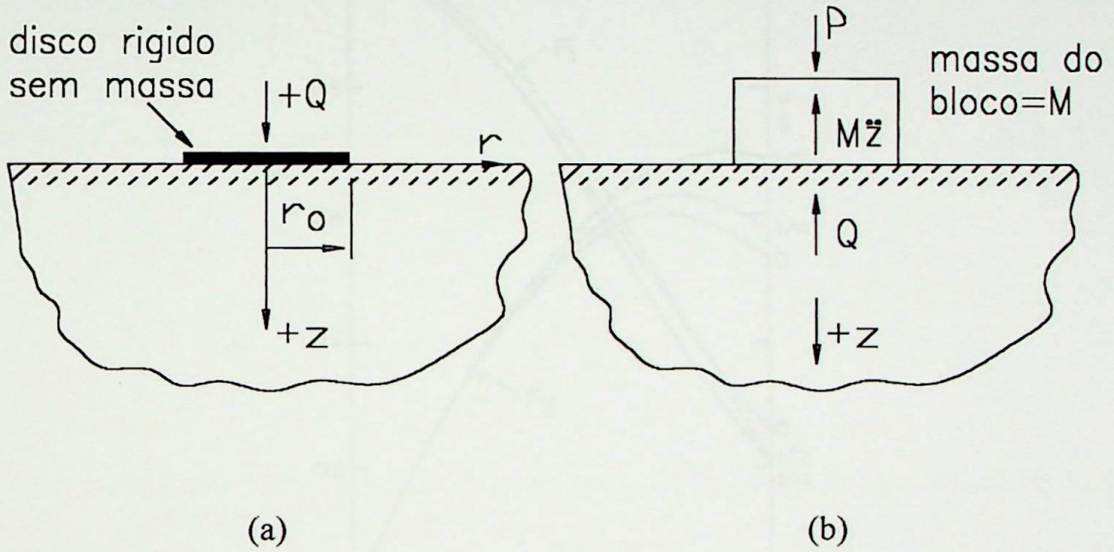


Figura 2.6: Considerações de Hsieh [Ref. (40)] no estudo de vibrações verticais.

Analogia de Lysmer

Lysmer [41] considerou uma base constituída de uma série de anéis concêntricos, e aplicou pressões uniformes de diferentes magnitudes em cada anel, sendo assim possível desenvolver uma deflexão constante abaixo da base e avaliar a resposta dinâmica a uma excitação periódica. No processo desenvolvimento da solução, Lysmer criou várias notações convenientes para simplificação. A função deslocamento [eq. (2.16)] incluí o coeficiente de Poisson, mas se multiplicada pelo fator $4/(1-\nu)$, uma nova função deslocamento é obtida [eq. (2.17)] aproximadamente independente de ν.

$$f = f_1 + if_2 \tag{2.16}$$

$$F = \frac{4}{1-\nu} f = F_1 + iF_2 \tag{2.17}$$

A fig. (2.7) ilustra as funções deslocamento de Bycroft modificadas pela eq. (2.17). Lysmer calculou valores de F_1 e F_2 na faixa de ($0<a_o<8$) e estendeu para $a_o \rightarrow \infty$. É interessante notar que a solução prévia somente considerou as funções deslocamento até $a_o=1{,}5$ o que não possibilitou a clara identificação do pico na curva de f_2 [fig. (2.8)].

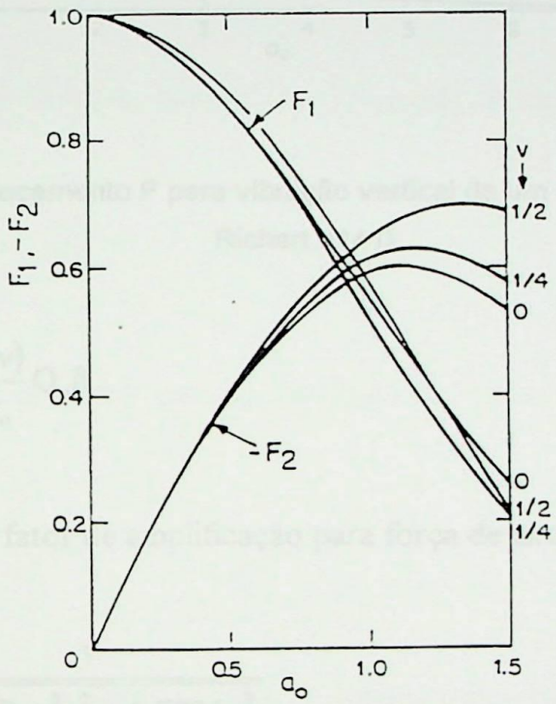
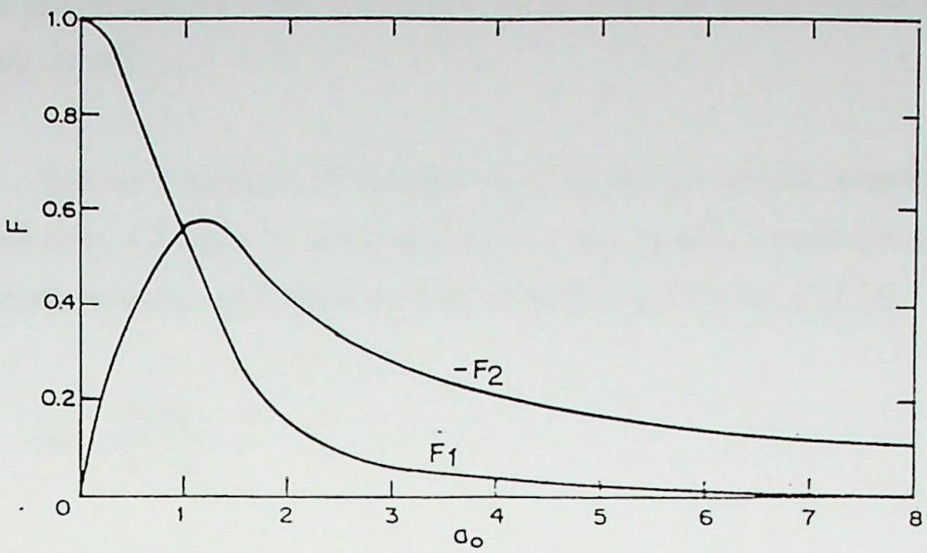


Figura 2.7: Variação da Função Deslocamento modificada;
(Segundo Lysmer e Richart [141]).

Lysmer também definiu o fator de massa modificado ou razão mássica modificado B_z [eq. (2.18)], e desenvolveu curvas de resposta introduzindo as expressões modificadas de F e B_z na eq. (2.4), obtendo a eq. (2.19).

$$B_z = \frac{1-\nu}{4} b = \frac{1-\nu}{4} \frac{M}{\rho r_o^3} \tag{2.18}$$



Escola Federal de Engenharia de Itajubá - BFBI
Biblioteca MAUÁ BIM

Figura 2.8: Função Deslocamento F para vibração vertical de um disco sem massa; (Lysmer e Richart, [141).

$$A_z = \frac{(1-\nu)}{4Gr_o} Q_o \beta \tag{2.19}$$

onde β é o fator de amplificação para força de excitação constante, dado por:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1 - B_z a_o^2)^2 + 0{,}7225 a_o^2}} \tag{2.20}$$

Para uma excitação dependente da freqüência a equação é expressa da seguinte forma:

$$A_z = \frac{me}{M} \beta a_o^2 B_z = \frac{me}{M} \beta_f \tag{2.21}$$

onde β_f é o fator de amplificação para força dependente da freqüência.

A curva de B_z versus a_{om} (na ressonância) indica a freqüência de máxima amplitude do movimento vertical da base circular para ambas força constante e dependente da freqüência [fig. (2.10)].

Lysmer descobriu estudando as variações do amortecimento e coeficiente de mola (rigidez) com a freqüência adimensional a_o , que valores constantes podem ser usados, escolhendo a constante de mola igual ao valor estático (a_o= 0), [eq. (2.22)]:

$$k_z = \frac{4Gr_o}{1-\nu} \tag{2.22}$$

O amortecimento na faixa ($0<a_o<1,0$) pode ser calculado:

$$c_z = \frac{3,4r_o^2}{1-\nu}\sqrt{\rho G} \tag{2.23}$$

A equação do movimento na Analogia de Lysmer é, então expressa por:

$$M\ddot{z} + \frac{3.4r_o^2}{(1-\nu)}\sqrt{G\rho}\dot{z} + \frac{4Gr_o}{(1-\nu)}z = Q \tag{2.24}$$

Estabelecida a analogia com o sistema com um grau de liberdade, pode-se então, determinar o fator amortecimento ξ, freqüência natural e de ressonância e máxima amplitude de vibração.

O fator amortecimento é dado por:

$$\xi = \frac{0,425}{\sqrt{B_z}} \tag{2.25}$$

A freqüência natural por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_z}{M}} = \frac{v_s}{r_o}\frac{\sqrt{B_z}}{B_z} \tag{2.26}$$

Para excitação por força constante, a freqüência de ressonância é dada por:

$$\omega_r = \frac{v_s}{r_o}\frac{\sqrt{B_z - 0{,}36}}{B_z} \tag{2.27}$$

A correspondente amplitude de oscilação na ressonância por:

$$A_z = \frac{Q_o(1-\nu)}{4Gr_0}\frac{B_z}{0{,}85\sqrt{B_z - 0{,}18}} \tag{2.28}$$

Quando a força de excitação é função da freqüência, a expressão de Lysmer para a freqüência de ressonância é:

$$\omega_r = \frac{v_s}{r_o}\sqrt{\frac{0{,}9}{B_z - 0{,}45}} \tag{2.29}$$

E a amplitude máxima é dada por:

$$A_{zm} = \frac{me}{M}\frac{B_z}{0{,}85\sqrt{B_z - 0{,}18}} \tag{2.30}$$

Concluindo, o resultado mais importante do estudo de Lysmer foi o estabelecimento da ponte entre a teoria do semi-espaço elástico e o sistema massa-mola-amortecedor provendo valores para as constantes de mola e amortecimento [fig. (2.9)]. Usando a eq. (2.24) pode-se avaliar a resposta de um sistema para excitação periódica [figs (2.11), (2.12)] ou transiente.

Simões [142], desenvolveu uma expressão para a freqüência de ressonância de sistemas excitados por forças ocasionadas por massas desbalanceadas diferente da eq. (2.29)

de Lysmer. A equação tem como base a teoria clássica de sistemas elementares vibratórios e é expressa por:

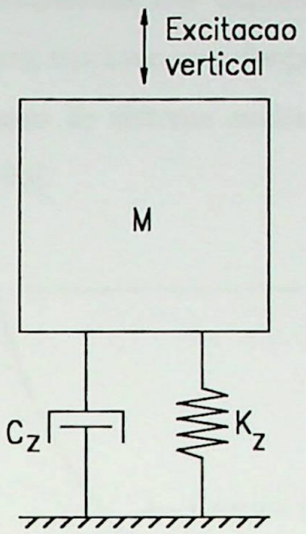


Figura 2.9: Sistema equivalente de uma fundação em bloco excitada verticalmente por força periódica ou transiente; segundo Lysmer.

$$\omega_r = \frac{v_s}{r_o}\frac{1}{\sqrt{B_z - 0{,}36}} \tag{2.31}$$

A fig. (2.13) apresenta ambas as soluções de forma que se possa comparar as soluções obtidas, sendo que as eqs. (2.29) e (2.31) podem ser escritas na seguinte forma:

$$a_{or} = \frac{\omega_r r_o}{v_s} = \sqrt{\frac{0.9}{B_z - 0{,}45}} \tag{2.32}$$

$$a_{or} = \frac{\omega_r r_o}{v_s} = \frac{1}{\sqrt{B_z - 0{,}36}} \tag{2.33}$$

Existem duas relações muito importantes na determinação das equações de amplificação dinâmica, as quais são:

$$\bar{B} = \frac{Mk}{c^2} = \frac{Mk_z}{c_z^2} = 1{,}384B_z \tag{2.34}$$

$$\bar{a}_o = \frac{\omega c}{k} = \omega \frac{c_z}{k_z} = 0{,}85 a_o \qquad (2.35)$$

As relações acima introduzidas nas expressões de amplificação resultam nas expressões de amplificação para sistema excitado por força constante, eq. (2.19), com β dado pela expressão (2.20), e de amplificação de sistema excitado por força com módulo variável com a freqüência, eq. (2.21) [Ref. (142)].

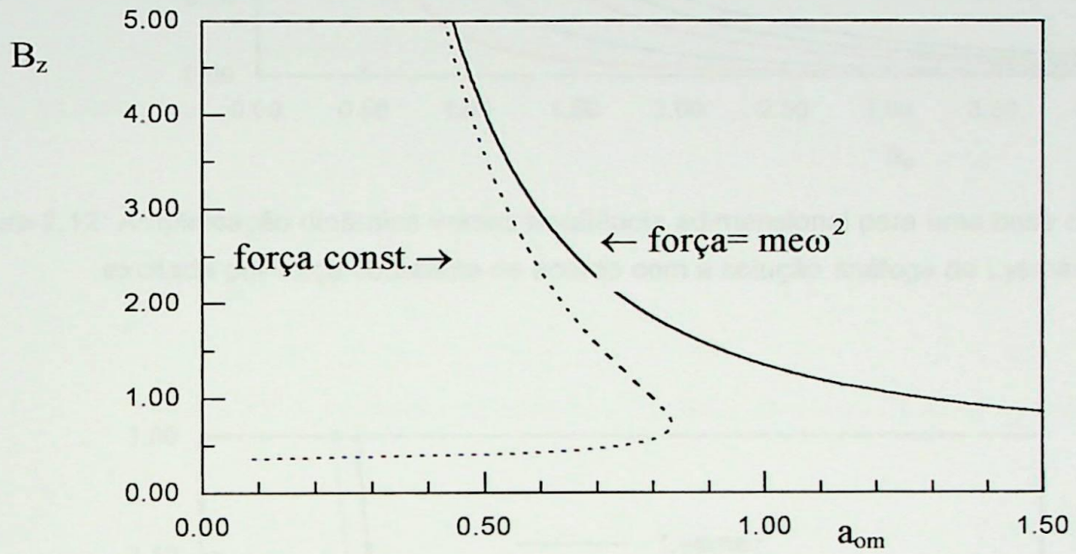


Figura 2.10: Razão mássica versus freqüência adimensional na ressonância.

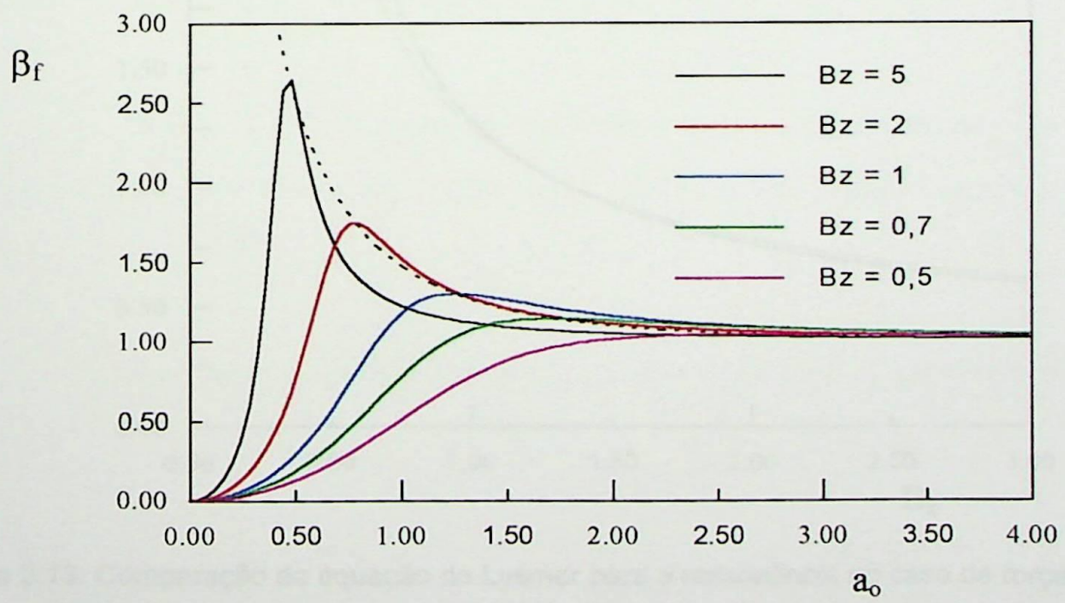


Figura 2.11: Amplificação dinâmica versus freqüência adimensional para uma base circular rígida excitada verticalmente por força dependente da freqüência de acordo com a solução análoga de Lysmer.

$$\beta = \frac{4Gr_oA_z}{(1-\nu)Q_o}$$

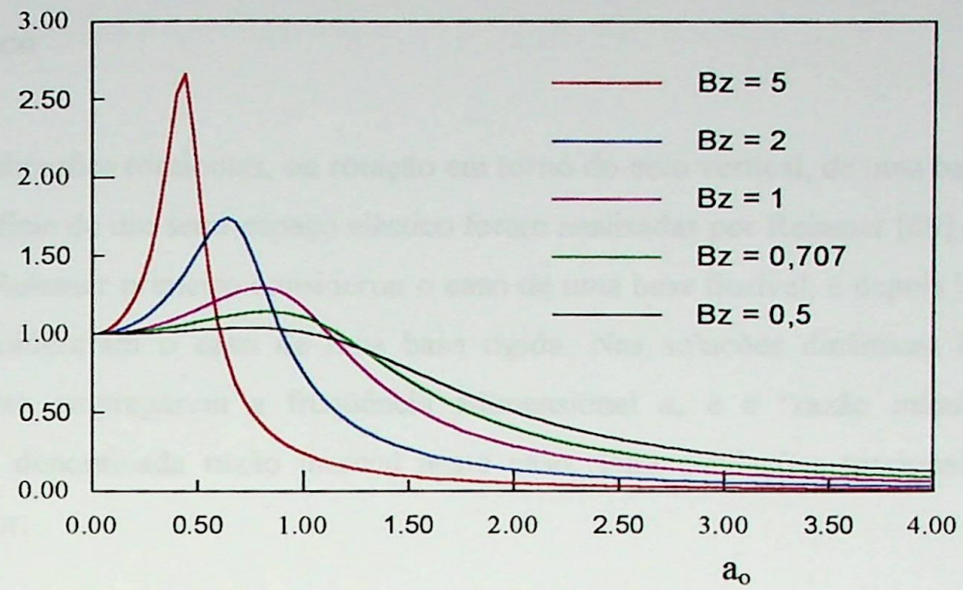


Figura 2.12: Amplificação dinâmica versus freqüência adimensional para uma base circular rígida excitada por força constante de acordo com a solução análoga de Lysmer.

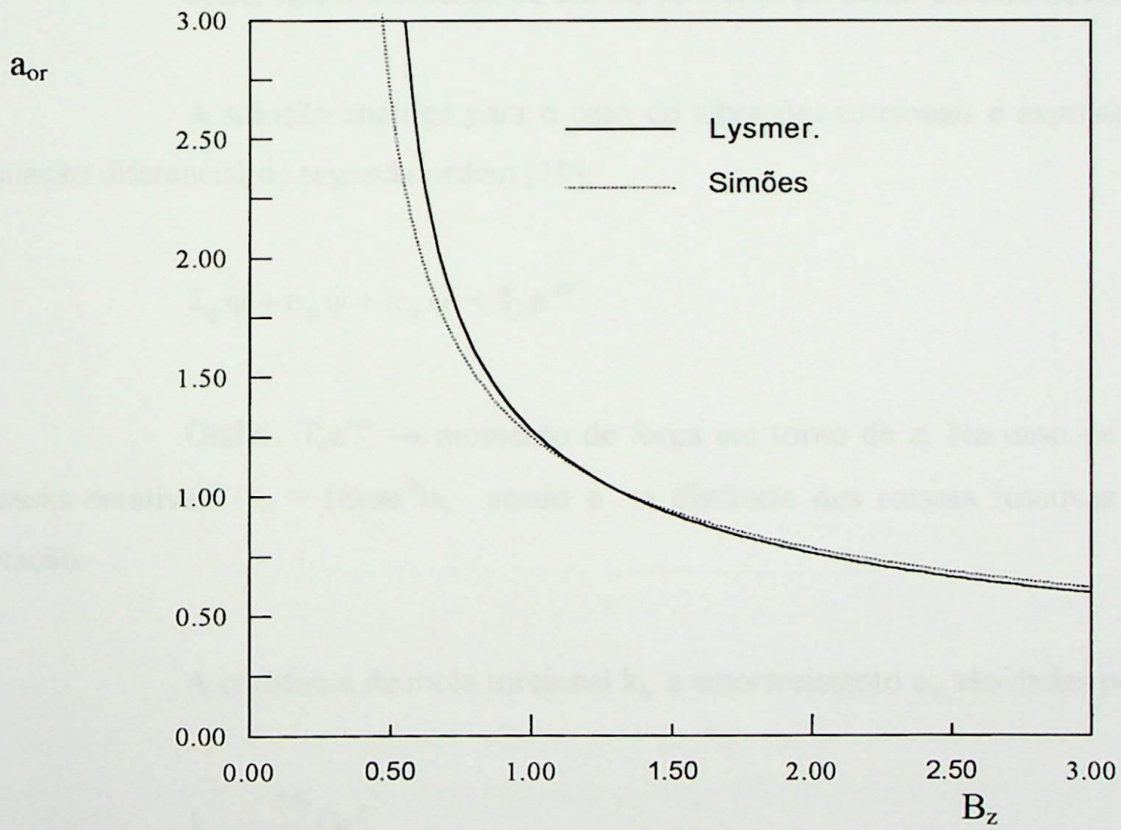


Figura 2.13: Comparação da equação de Lysmer para a ressonância no caso de força de excitação variável com a freqüência com a equação de Simões [142].

2.2 - Vibrações Torcionais de Bases Circulares na Superfície do Semi-Espaço Elástico

Vibrações torcionais, ou rotação em torno do eixo vertical, de uma base circular apoiada na superfície de um semi-espaço elástico foram analisadas por Reissner [69] e Reissner e Sagoci [143]. Reissner primeiro considerou o caso de uma base flexível, e depois juntamente com Sagoci consideraram o caso de uma base rígida. Nas soluções dinâmicas Reissner e Sagoci novamente empregaram a freqüência adimensional a_o e a "razão mássica", mais apropriadamente denominada razão inercial neste caso. Para oscilações torcionais a razão inercial é dada por:

$$B_\psi = \frac{I_\psi}{\rho r_o^5} \tag{2.36}$$

onde, I_ψ é o momento de inércia de massa em torno do eixo de rotação.

A solução análoga para o caso de vibrações torcionais é expressa na forma da equação diferencial de segunda ordem [19]:

$$I_\psi \ddot{\psi} + c_\psi \dot{\psi} + k_\psi \psi = T_Z e^{i\omega t} \tag{2.37}$$

Onde: $T_z e^{i\omega t} \rightarrow$ momento de força em torno de z. No caso de excitação por massas rotativas: $T_z = (me\omega^2)a$, sendo a $\rightarrow$ distância das massas rotativas ao centro de rotação.

A constante de mola torcional k_ψ e amortecimento c_ψ são dadas por [42]:

$$k_\psi = \frac{16}{3} G r_o^3 \tag{2.38}$$

$$c_\psi = \frac{1{,}6 r_o^4 \sqrt{G\rho}}{1 + B_\psi} \tag{2.39}$$

A expressão para o fator de amortecimento comumente apresentada nas literaturas de diversos autores é a seguinte:

$$\xi_\psi = \frac{0{,}5}{(1+2B_\psi)} \tag{2.40}$$

Entretanto, com base na definição do fator de amortecimento ξ, uma outra expressão pode ser obtida [142]:

$$\xi_\psi = \frac{c_\psi}{2\sqrt{k_\psi I_\psi}} = \frac{0{,}3464}{(1+B_\psi)\sqrt{B_\psi}} \tag{2.41}$$

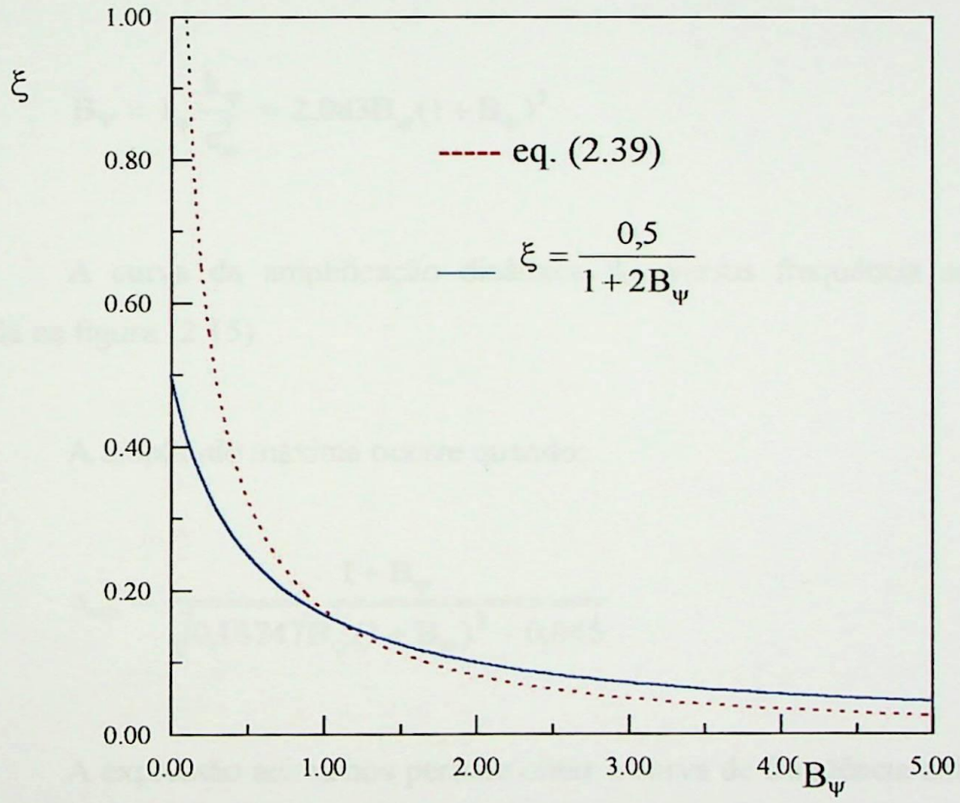


Figura 2.14: Comparação entre o fator de amortecimento encontrado nas literaturas de referência desta obra e o fator de amortecimento determinado apontado por Simões [142], com base nas constantes de mola e amortecimento de acordo com Richart e Whitman [42].

Os resultados obtidos pelo uso das equações (2.40) e (2.41) são apresentados na figura (2.14), onde percebe-se a discordância dos resultados para valores de $B_\psi < 1$.

A amplificação Dinâmica da resposta para o caso de massas desbalanceadas é dada por [142]:

$$\beta_{f\psi} = \frac{I_\psi}{mea} A_\psi = \frac{0{,}18747 B_\psi a_o^2}{\sqrt{(1 - 0{,}18747 B_\psi a_o^2)^2 + \frac{0{,}09}{(1+B_\psi)^2} a_o^2}} \tag{2.42}$$

A expressão acima deriva da Teoria da Vibração para sistemas com um grau de liberdade a partir dos parâmetros adimensionais de Lysmer, os quais são:

$$\bar{a}_o = \frac{\omega c_\psi}{k\psi} = a_o \frac{0{,}3}{(1+B_\psi)} \tag{2.43}$$

$$\bar{B}_\psi = I_\psi \frac{k_\psi}{c_\psi^2} = 2{,}083 B_\psi (1+B_\psi)^2 \tag{2.44}$$

A curva da amplificação dinâmica $\beta_{f\psi}$ versus freqüência adimensional a_o é apresentada na figura (2.15).

A amplitude máxima ocorre quando:

$$a_{om} = \frac{1+B_\psi}{\sqrt{0{,}18747 B_\psi (1+B_\psi)^2 - 0{,}045}} \tag{2.45}$$

A expressão acima nos permite obter a curva de freqüência adimensional versus razão inercial [fig. (2.16)]. A mesma curva pode ser encontrada na obra "Vibrations of Soils and Foundations", de Richart, Hall e Woods [19], porém com resultados ligeiramente diferentes [fig. (2.18)].

Deve-se notar que a solução teórica para oscilações torcionais não é influenciada pelo coeficiente de Poisson, e que, a energia é dissipada somente pela propagação de ondas elásticas transversais, consequentemente o efeito do amortecimento geométrico é

inferior ao caso de vibrações verticais, onde a energia é dissipada pela propagação de três tipos de ondas: transversais, de compressão, e as ondas de Rayleigh ou ondas superficiais.

O sistema equivalente para o caso de base circular excitada torcionalmente por momento de força periódico é apresentada na figura (2.17).

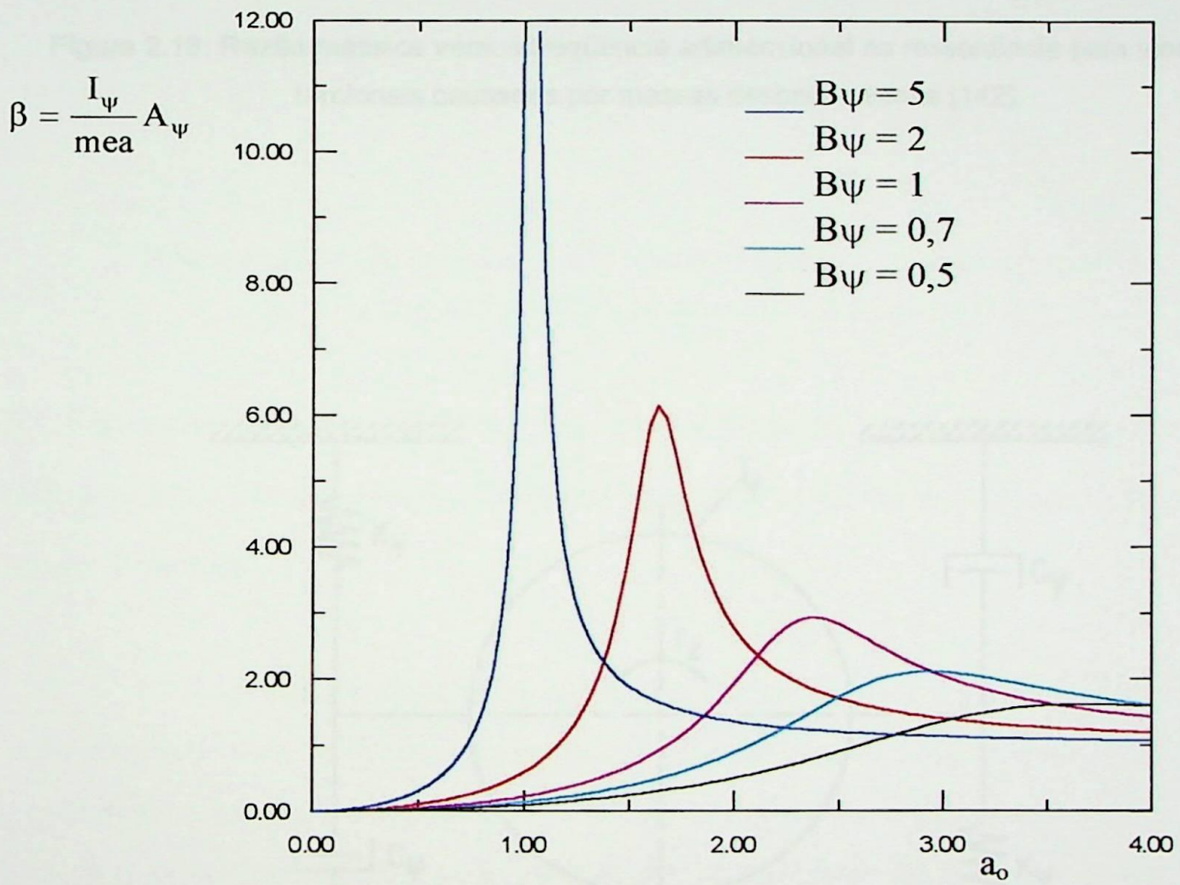


Figura 2.15: Curvas de Amplificação dinâmica para a resposta de uma base circular rígida excitada por momento de força desenvolvido por desbalanceamento [142].

$$B_\psi = \frac{I_\psi}{\rho r_o^5}$$

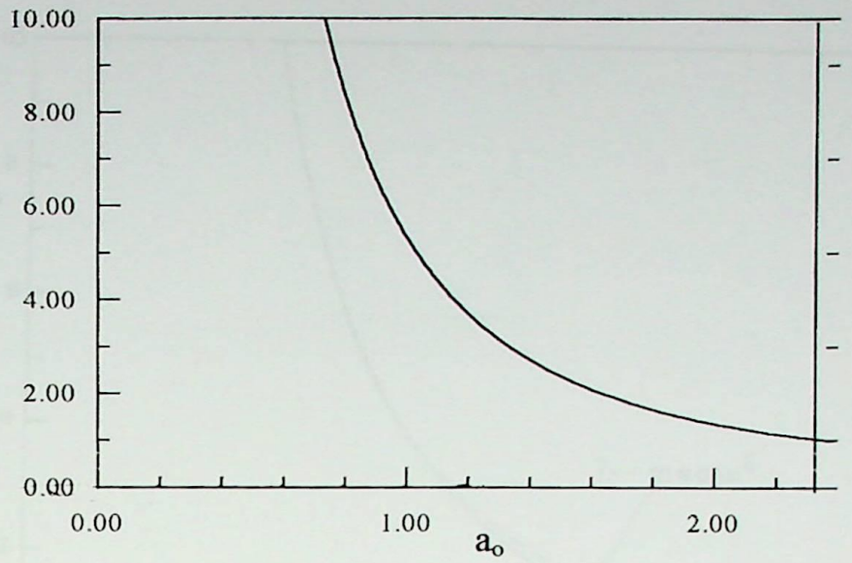


Figura 2.16: Razão mássica versus freqüência adimensional na ressonância para vibrações torcionais causadas por massas desbalanceadas [142].

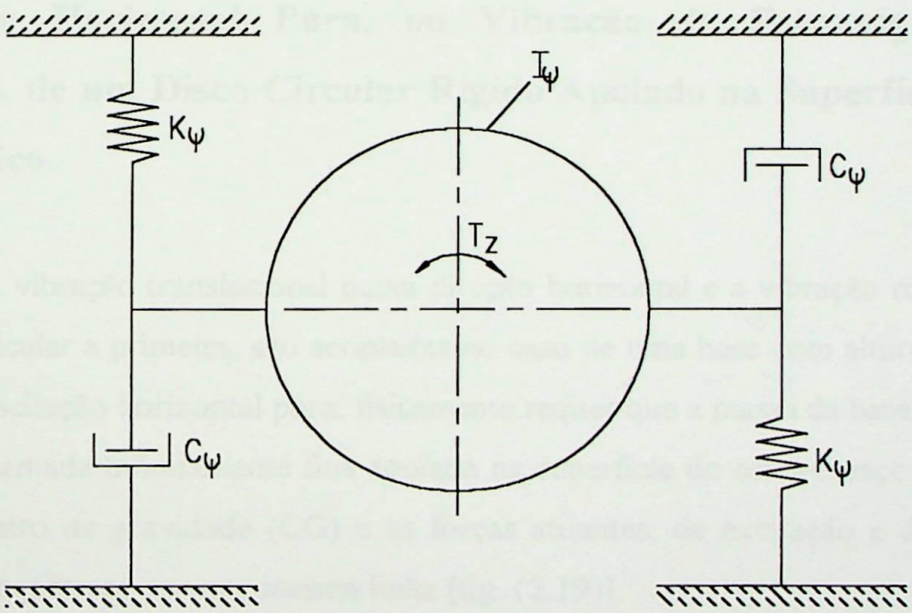


Figura 2.17: Sistema equivalente para o caso de fundação circular rígida excitada por momento de força em torno de eixo vertical.

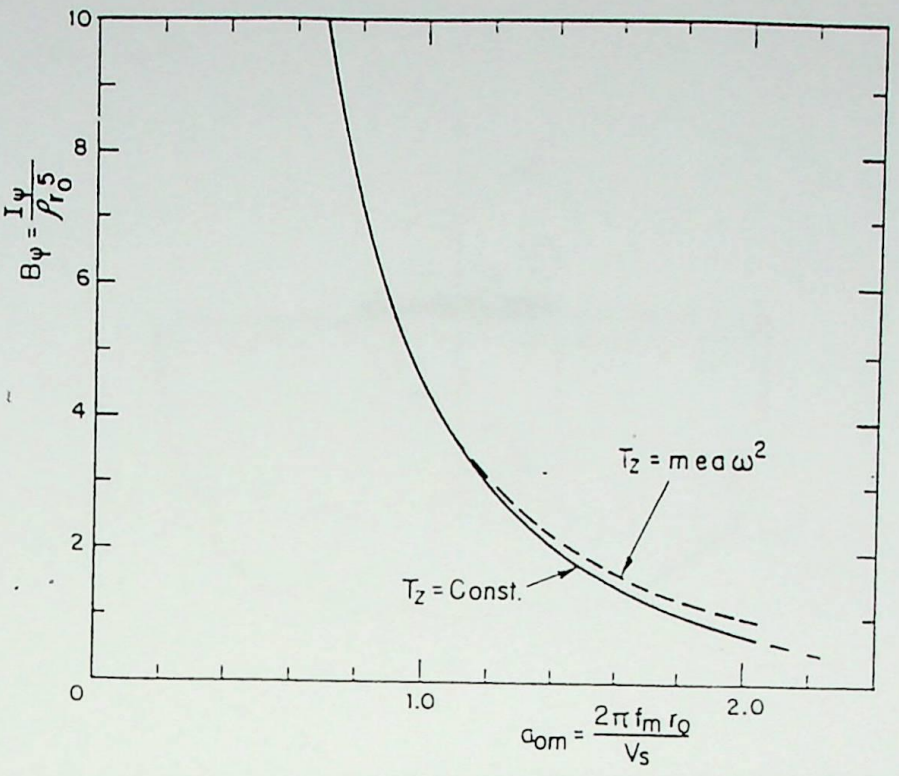


Figura 2.18: Razão mássica versus freqüência adimensional na ressonância para oscilações torcionais por Richart, Hall e Woods [19].

2.3.-.Vibração Horizontal Pura, ou Vibração de Escorregamento, ou Deslizamento, de um Disco Circular Rígido Apoiado na Superfície do Semi-Espaço Elástico

A vibração translacional numa direção horizontal e a vibração rotacional numa direção perpendicular a primeira, são acopladas no caso de uma base com altura finita. Então, o problema da oscilação horizontal pura, fisicamente requer que a massa da base seja confinada dentro de uma camada infinitamente fina apoiada na superfície do semí-espaço elástico de tal forma que o centro de gravidade (CG) e as forças atuantes, de excitação e de restrição do movimento, se encontrem em uma mesma linha [fig. (2.19)].

A solução analítica para a translação de um disco circular rígido foi apresentada por Arnold, Bycroft e Warburton [38], e por Bycroft [39]. Os resultados foram expressos em termos do fator adimensional a_o , e da razão mássica b [eq. (2.3)].

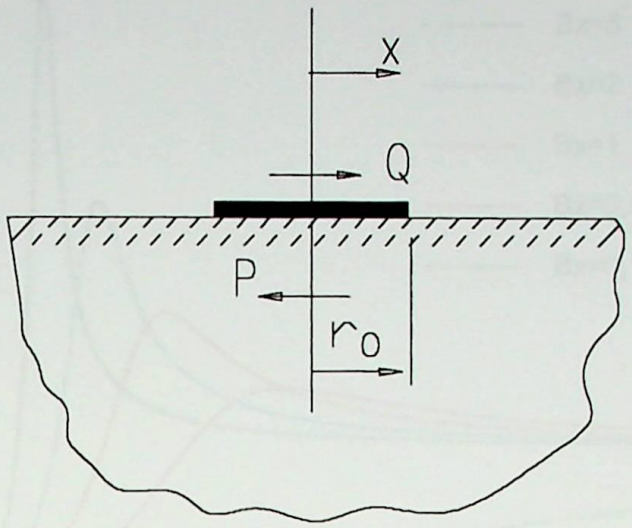


Figura 2.19: Modelo matemático para o estudo da vibração horizontal pura.

Hall [144] definiu a razão mássica modificada B_x para o caso translacional puro, eliminando assim o efeito do coeficiente de Poisson das funções deslocamentos.

$$B_x = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)}\frac{M}{\rho r_o^3} \tag{2.46}$$

Hall ainda definiu uma constante de mola e uma constante de amortecimento, estabelecendo assim a analogia com o sistema massa-mola-amortecedor:

$$k_x = \frac{32(1-\nu)}{7-8\nu} G r_o \tag{2.47}$$

$$c_x = \frac{18{,}4(1-\nu)}{7-8\nu} r_o^2 \sqrt{\rho G} \tag{2.48}$$

O fator de amortecimento ξ_x é dado então por:

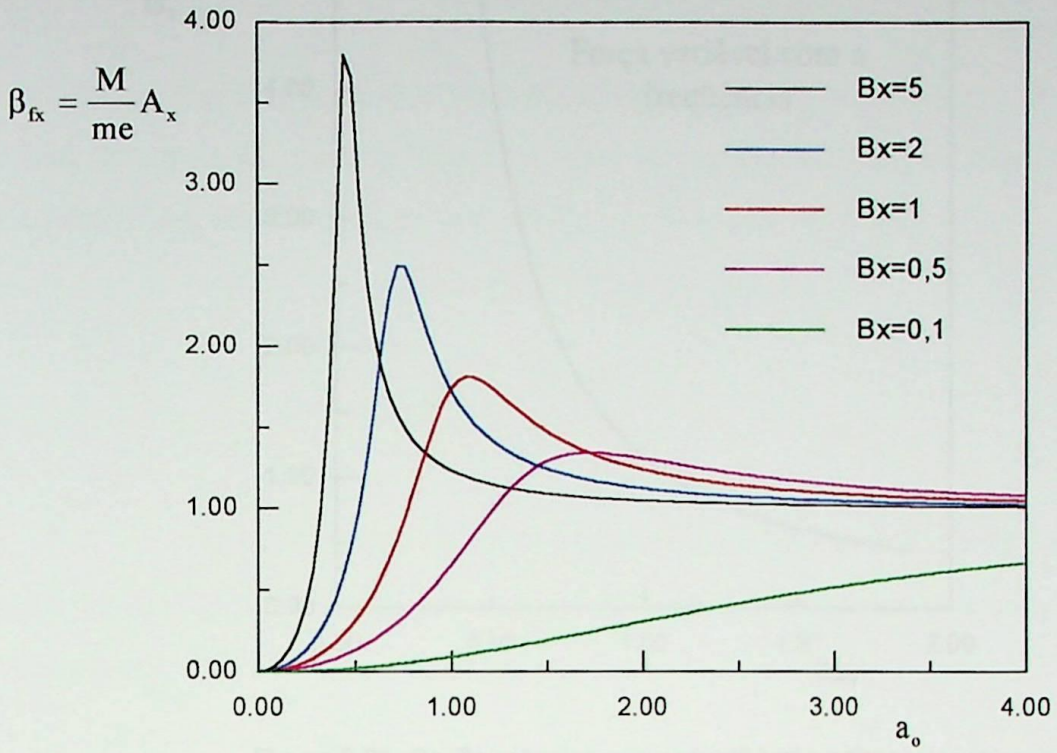


Figura 2.20: Fator de amplificação versus freqüência adimensional para o movimento oscilatório de escorregamento na superfície do meio elástico.

$$\xi_x = \frac{c_x}{2\sqrt{k_x M}} = \frac{0{,}2875}{\sqrt{B_x}} \tag{2.49}$$

Os parâmetros adimensionais de Lysmer são:

$$\bar{a}_0 = 0{,}575 a_o \tag{2.50}$$

$$\overline{B}_x = 3{,}0246 B_x \tag{2.51}$$

A expressão do fator de amplificação β_{fx} , para excitação com módulo variável com a freqüência, é portanto expresso por:

$$\beta_{fx} = \frac{B_x a_o^2}{\sqrt{(1 - B_x a_o^2)^2 + 0{,}33 a_0^2)}} \tag{2.52}$$

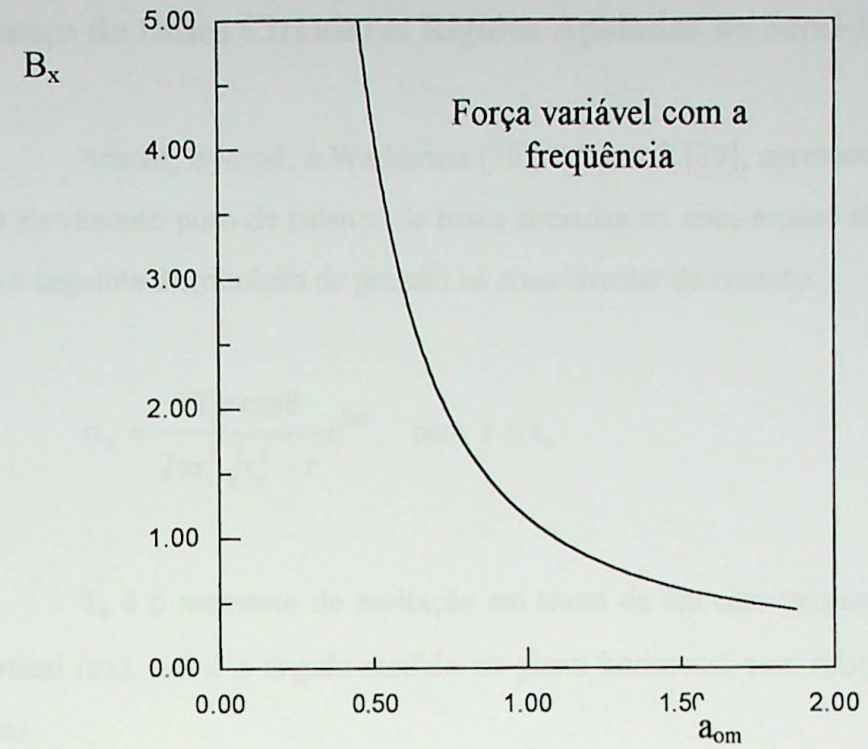


Figura 2.21: Razão mássica versus freqüência adimensional na ressonância para o escorregamento.

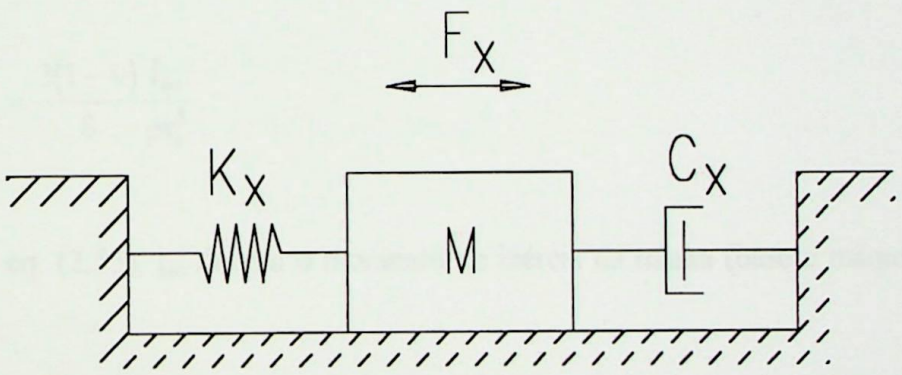


Figura 2.22: Modelo equivalente ao sistema máquina-fundação solo para o estudo das oscilações horizontais.

A condição de ressonância é a seguinte:

$$a_{om} = \frac{1}{\sqrt{B_x - 0{,}1653}} \tag{2.53}$$

As curvas β_{fx} versus freqüência adimensional a_o , e B_x versus a_{om} são apresentadas nas figuras (2.20) e (2.21). O sistema equivalente está representado na figura (2.22).

2.4. Balanço de Bases Circulares Rígidas Apoiadas no Semí-Espaço Elástico

Arnold, Bycroft, e Warburton [38], e Bycroft [39], apresentaram soluções para o caso do movimento puro de balanço de bases apoiadas no semi-espaço elástico [fig. (2.23)], adotando a seguinte distribuição de pressão na zona circular de contato:

$$\sigma_z = \frac{3T_\phi r\cos\theta}{2\pi r_o^3\sqrt{r_o^2 - r}}e^{i\omega t} \quad \text{para } r \le r_o \tag{2.54}$$

T_ϕ é o momento de excitação em torno de um eixo perpendicular (x ou y) ao plano vertical (zx), e θ é o ângulo medido no plano horizontal com relação a um dos eixos horizontais.

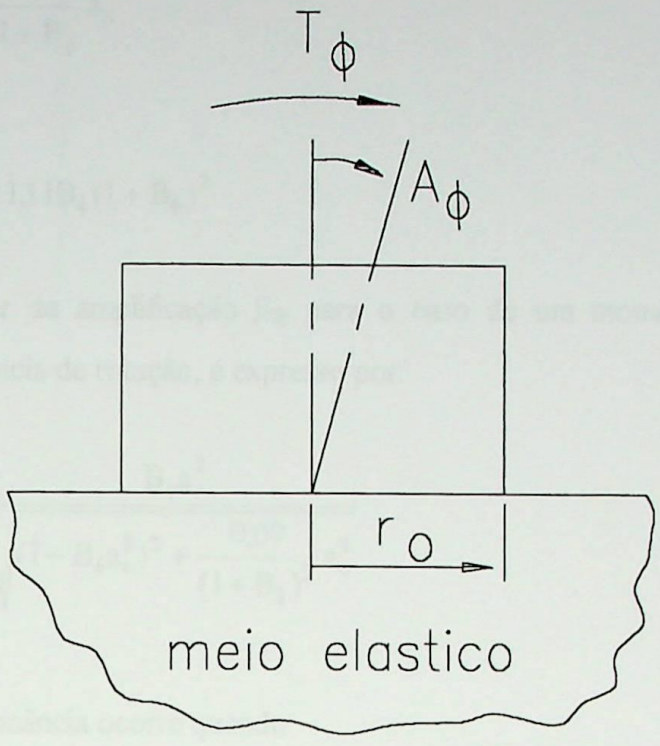
Em condições dinâmicas a amplitude A_ϕ é uma função da razão inercial [eq. (2.55)], e da freqüência adimensional [eq. (2.2)].

$$B_\phi = \frac{3(1-\nu)}{8}\frac{I_{\phi o}}{\rho r_o^5} \tag{2.55}$$

Na eq. (2.55), $\underline{I}_{\phi o}$ denota o momento de inércia da massa (base e máquina) em torno do ponto $\underline{O}$.

Hall [144] propôs um modelo equivalente na forma de um sistema massa-mola-amortecedor para avaliar a resposta de uma base rígida em balanço na superfície do semí-espaço elástico. A analogia é estabelecida a partir da seguinte equação do movimento:

$$I_{\phi o}\ddot{\phi} + c_\phi\dot{\phi} + k_\phi\phi = T_\phi e^{i\omega t} \tag{2.56}$$



Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

Figura 2.23: Movimento de balanço da fundação na superfície do semi-espaço elástico.

Onde:

$k_\phi \rightarrow$ constante de mola no balanço;

$c_\phi \rightarrow$ constante de amortecimento.

Com:

$$k_\phi = \frac{8Gr_o^3}{3(1-\nu)} \tag{2.57}$$

$$c_\phi = \frac{0{,}80r_o^4\sqrt{G\rho}}{(1-\nu)(1+B_\phi)} \tag{2.58}$$

O fator de amortecimento ξ_ϕ é portanto dado por:

$$\xi_\phi = \frac{c_\phi}{2\sqrt{k_\phi I_\phi}} = \frac{0{,}15}{(1+B_\phi)\sqrt{B_\phi}} \tag{2.59}$$

As constantes adimensionais de Lysmer são dadas por:

$$\bar{a}_{o\phi} = \frac{0,3}{1+B_\phi} a_o \tag{2.60}$$

$$\bar{B}_\phi = 11,11 B_\phi (1+B_\phi)^2 \tag{2.61}$$

O fator de amplificação $\beta_{f\phi}$ para o caso de um momento T_ϕ com módulo variável com a freqüência de rotação, é expresso por:

$$\beta_{f\phi} = \frac{B_\phi a_o^2}{\sqrt{(1-B_\phi a_o^2)^2 + \frac{0,09}{(1+B_\phi)^2} a_o^2}} \tag{2.62}$$

A ressonância ocorre quando:

$$a_{omf} = \frac{1+B_\phi}{\sqrt{B_\phi (1+B_\phi)^2 - 0,045}} \tag{2.63}$$

As curvas características $\beta_{f\phi}$ versus a_o e B_ϕ versus a_{omf}, são apresentadas a seguir nas figuras (2.24) e (2.25) respectivamente. O sistema com parâmetros concentrados equivalente ao sistema máquina-base-meio elástico é apresentado na figura (2.26).

Hall também definiu um fator mássico efetivo $B_{\phi cf}$, com o qual conseguiu uma melhor concordância entre a solução análoga e a solução obtida pelo método do semí-espaço elástico. A relação entre o fator mássico efetivo $B_{\phi cf}$ e o fator B_ϕ [eq. (2.55)] é apresentado na figura (2.27). O gráfico $B_{\phi cf}$ versus B_ϕ foi construído com base na tabela abaixo, obtida a partir de um fator de correção η definido por Hall [135].

Tabela 2.1: Relação razão mássica e razão mássica efetiva

B_ϕ	5	3	2	1	0,8	0,5	0,2
$B_{\phi cf}$	5,395	3,3	2,286	1,219	1,0008	0,689	0,32

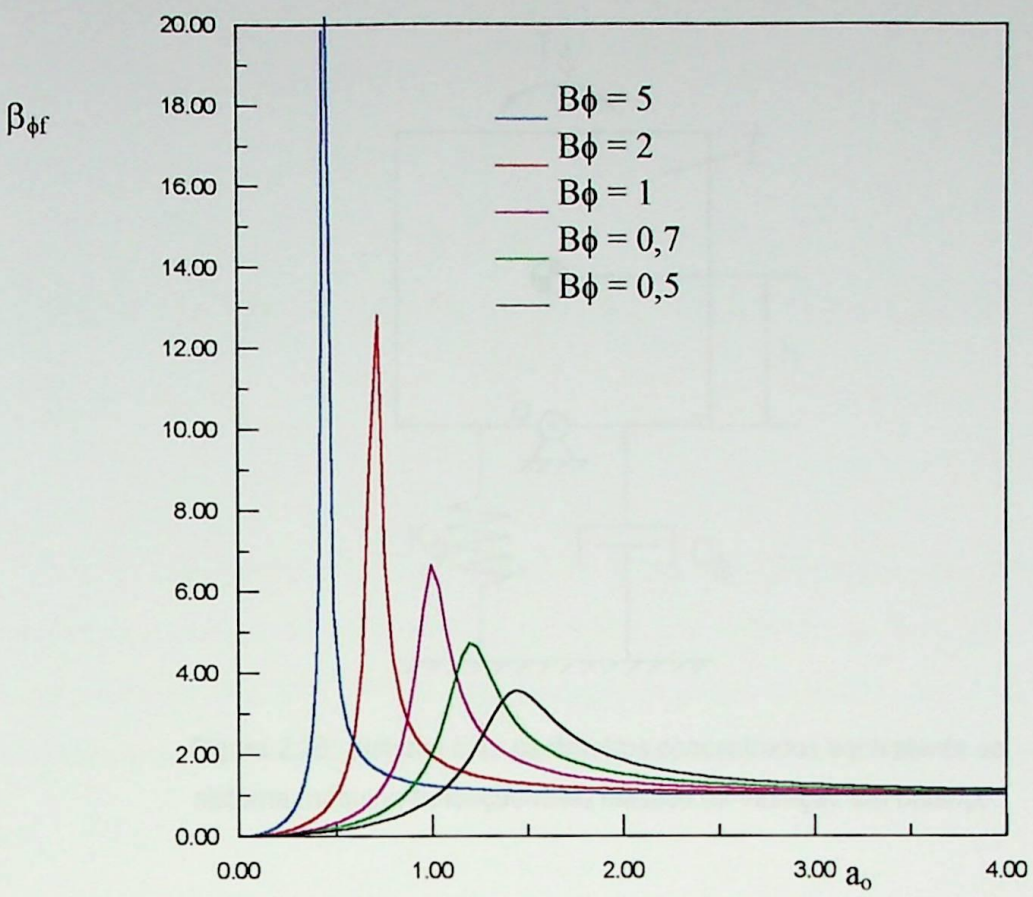


Figura 2.24: Amplificação dinâmica versus freqüência adimensional para o movimento de balanço de uma fundação circular rígida na superfície do semi-espaço elástico.

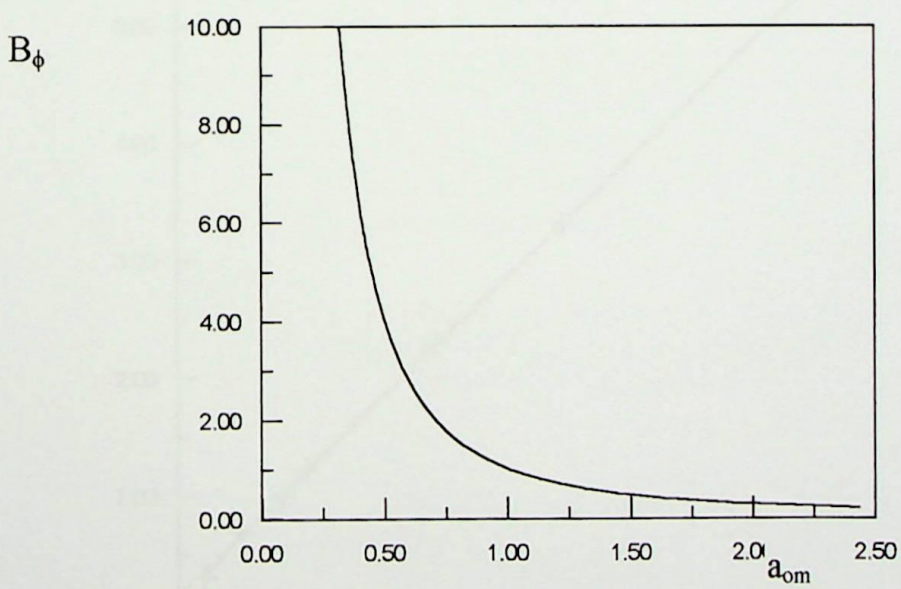


Figura 2.25: Razão mássica versus freqüência adimensional na ressonância para a vibração em balanço da fundação.

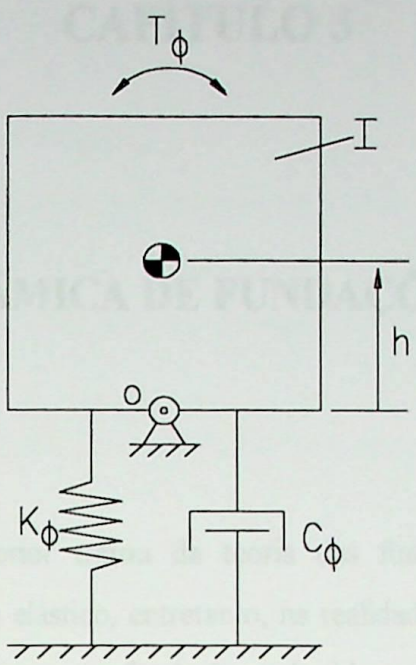


Figura 2.26: Sistema com parâmetros concentrados equivalente ao sistema máquina-fundação-meio elástico na vibração em balanço.

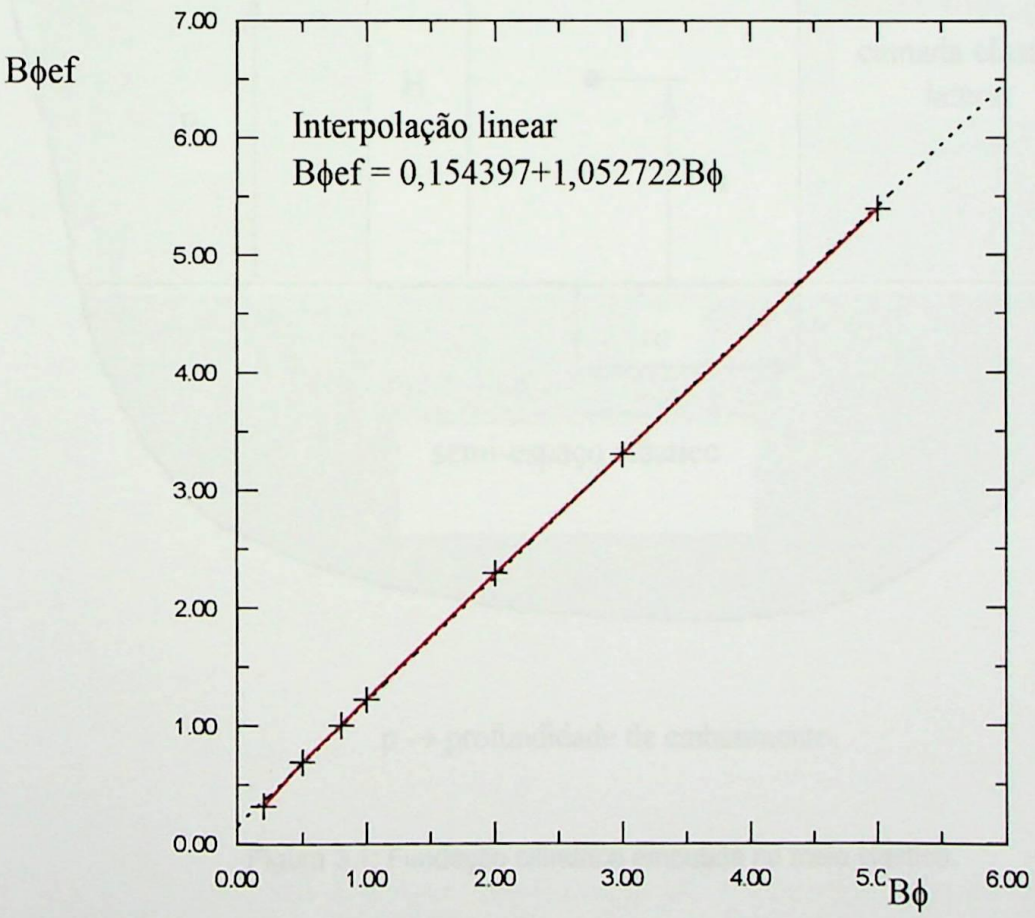
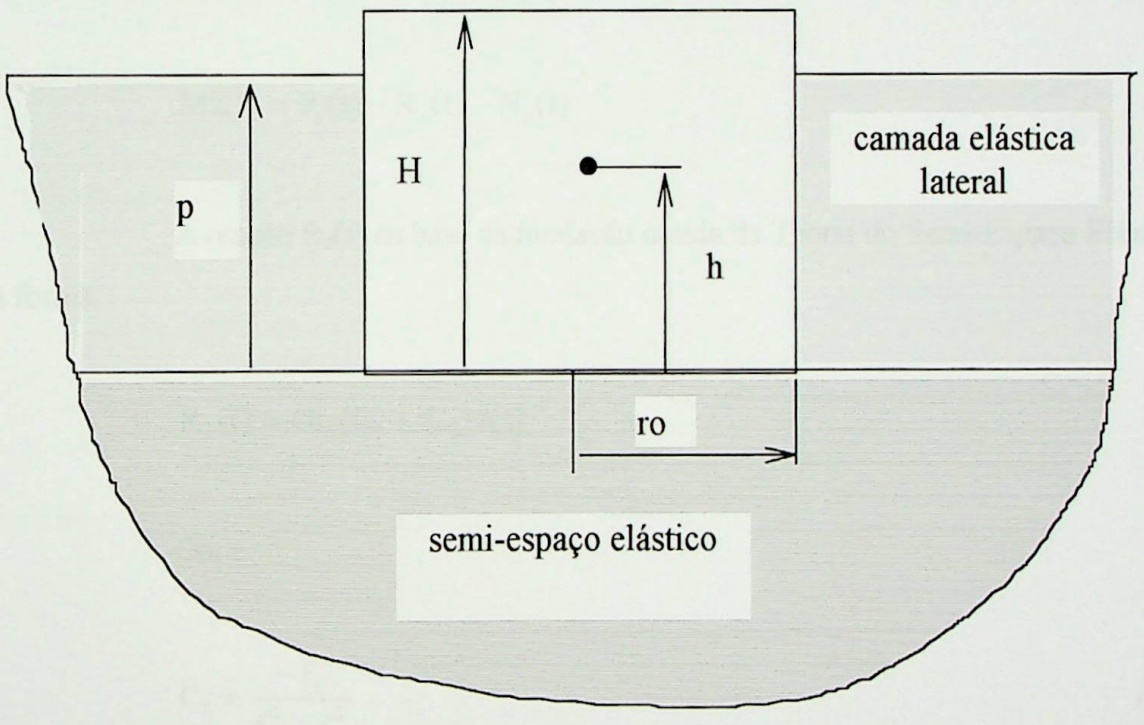


Figura 2.27: Gráfico razão mássica efetiva versus razão mássica

CAPÍTULO 3

RESPOSTA DINÂMICA DE FUNDAÇÕES EMBUTIDAS

O capítulo anterior tratou da teoria das fundações das máquinas apenas apoiadas na superfície do meio elástico, entretanto, na realidade, as fundações são embutidas no meio elástico [fig. (3.1)]. Para uma fundação embutida a reação lateral do meio elástico (solo) tem uma influência significativa na resposta dinâmica das fundações de máquinas.



p → profundidade de embutimento.

Figura 3.1: Fundação cilíndrica embutida no meio elástico.

As primeiras soluções para a resposta dinâmica de fundações de máquinas foram obtidas por Baranov [52] e estendidas por Novak e Beredugo [11, 53], Beredugo [57, 145], e Novak e Sachs [88].

As seguintes hipóteses foram feitas na obtenção das soluções:

1- A fundação é cilíndrica e rígida;

2- A base da fundação apoia-se na superfície de um semí-espaço elástico;

3- A reação na base da fundação é independente da profundidade de embutimento;

4- A reação lateral é produzida por uma camada elástica independente acima do nível da base da fundação;

5- Existe uma perfeita ligação, ou contato perfeito, entre o meio elástico e a lateral embutida da fundação.

3.1 - Oscilações Verticais de Fundações Embutidas

A equação do movimento para uma fundação cilíndrica embutida sujeita a uma excitação vertical $P_z(t)$ é dada na forma [11]:

$$M\ddot{z}(t) = P_z(t) - R_z(t) - N_z(t) \tag{3.1}$$

A reação $R_z(t)$ na base da fundação obtida da Teoria do Semí-Espaço Elástico é da forma:

$$R_z(t) = Gr_o(C_1 + iC_2)z(t) \tag{3.2}$$

Onde:

$$C_1 = \frac{-f_1}{f_1^2 + f_2^2} \tag{3.2a}$$

$$C_2 = \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \tag{3.2b}$$

f_1 e f_2 são as funções deslocamento introduzidas por Reissner apresentadas no capítulo 2, item 2.1 [35, 39, 65, 36, 37].

A reação dinâmica da camada elástica na lateral da fundação é dada por:

$$N_z(t) = G_s p(S_1 + iS_2)z(t) \tag{3.3}$$

Substituíndo (3.2) e (3.3) em (3.1), obtêm-se:

$$M\ddot{z}(t) + Gr_o\left[C_1 + iC_2 + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}(S_1 + iS_2)\right]z(t) = P_z(t) \tag{3.4}$$

$$M\ddot{z}(t) + \frac{Gr_o}{\omega}\left[C_2 + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_2\right]i\omega z(t) + Gr_o(C_1 + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_1)z(t) = P_z(t) \tag{3.4a}$$

A equação do movimento de um sistema vibratório elementar é da forma:

$$M\ddot{z}(t) + c_z\dot{z}(t) + k_z z(t) = P_z e^{i\omega t} \tag{3.5}$$

Se a resposta em regime permanente é da forma: $z(t) = Ze^{i\omega t}$,então (3.5) pode ser escrita na seguinte forma:

$$M\ddot{z}(t) + c_z i\omega z(t) + k_z z(t) = P_z e^{i\omega t} \tag{3.5a}$$

Assim, podemos definir as constantes de rigidez k_z e amortecimento c_z para o movimento oscilatório vertical comparando (3.5a) com (3.4a):

$$k_z = Gr_o\left(C_1 + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_1\right) \tag{3.7}$$

$$c_z = \frac{Gr_o}{\omega}\left(C_2 + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_2\right) \tag{3.8}$$

Os parâmetros C_1 e C_2 , são dependentes do coeficiente de Poisson ν e da freqüência adimensional a_o , e os parâmetros S_1 e S_2 são dependentes da freqüência adimensional [Tabela (1)]. Porém, pode-se admitir, sem distorções significativas da resposta,

dentro de uma faixa para a_0, tornando os parâmetros da rigidez constantes, e os parâmetros do amortecimento proporcionais a freqüência adimensional [11]:

$$C_1 = \bar{C}_1 \tag{3.9}$$

$$S_1 = \bar{S}_1 \tag{3.10}$$

$$C_2 = \bar{C}_2\, a_o = \bar{C}_2\, \omega r_o \sqrt{\frac{\rho}{G}} \tag{3.11}$$

$$S_2 = \bar{S}_2\, a_{os} = \bar{S}_2\, \omega r_o \sqrt{\frac{\rho_s}{G_s}} \tag{3.12}$$

Onde a_{os} é a freqüência adimensional considerando as propriedades da camada lateral ρ_s, G_s.

Os valores para os parâmetros constantes $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{S}_1$ e $\bar{S}_2$, podem ser aproximados por [142]:

$$\bar{C}_1 = \frac{4}{1-\nu} \tag{3.13}$$

$$\bar{C}_2 = \frac{3{,}4}{1-\nu} \tag{3.14}$$

$$\bar{S}_1 = 2{,}70 \tag{3.15}$$

$$\bar{S}_2 = 6{,}70 \tag{3.16}$$

Substituindo as expressões (3.13) e (3.15) em (3.7), temos:

$$k_z = \frac{4Gr_o}{1-\nu}\left(1 + 0{,}675(1-\nu)\frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}\right) \tag{3.17}$$

Substituindo as expressões (3.14) e (3.16) em (3.8), temos:

$$c_z = \frac{3{,}4}{1-\nu} r_o^2 \sqrt{\rho G}\left(1 + 1{,}97(1-\nu)\sqrt{\frac{\rho_s G}{\rho G}}\frac{p}{r_o}\right) \tag{3.18}$$

Tabela 3.1 - Parâmetros de Rigidez e Amortecimento para o Semi-Espaço e Camada Lateral [11].

ν	Valores	Parâmetros constantes	faixa de Validade
	Semi-Espaço		
0,0	$C_1 = 4,0 - 0,08356a_0 + 0,6346a_0^2 - 2,6a_0^3 + 1,801a_0^4 - 0,3646a_0^5$ $C_2 = 3,438a_0 + 0,5742a_0^2 - 1,154a_0^3 + 0,7433a_0^4$	$\overline{C}_1 = 3,90$ $\overline{C}_2 = 3,50$	$0 \le a_0 \le 1,5$
0,25	$C_1 = 5,37 + 0,364a_0 - 1,41a_0^2$ $C_2 = 5,06a_0$	$\overline{C}_1 = 5,20$ $\overline{C}_2 = 5,00$	
0,5	$C_1 = 8,0 + 2,186a_0 - 12,63a_0^2 + 20,73a_0^3 - 16,47a_0^4 + 4.458a_0^5$ $C_2 = 7,414a_0 - 2,986a_0^2 + 4,324a_0^3 - 1,782a_0^4$	$\overline{C}_1 = 7,50$ $\overline{C}_2 = 6,80$	
	Camada Lateral		
Qualquer valor	$S_1 = 0,2153a_0 + \frac{2,760a_0}{a_0 + 0,06084}$ $S_2 = 6,059a_0 + \frac{0,7022a_0}{a_0 + 0,01616}$	$\overline{S}_1 = 2,70$ $\overline{S}_2 = 6,70$	$0 \le a_0 \le 2,0$

3.2 - Oscilações Horizontais de Fundações Embutidas

A equação do movimento horizontal para uma fundação cilíndrica embutida excitada por força periódica $P_x(t)$, é dada na seguinte forma [12, 53];

$$M\ddot{x}(t) = P_x(t) - R_x(t) - N_x(t) \tag{3.19}$$

A reação $R_x(t)$ é a mesma para uma fundação apoiada na superfície do semi-espaço elástico:

$$R_x(t) = Gr_o(C_{x1} + iC_{x2})x(t) \tag{3.20}$$

A reação da camada lateral é dada por:

$$N_x(t) = G_s p(S_{x1} + iS_{x2})x(t) \tag{3.21}$$

Substituindo (3.20) e (3.21) em (3.19), temos:

$$M\ddot{x}(t) + Gr_o(C_{x1} + iC_{x2})x(t) + G_s p(S_{x1} + iS_{x2})x(t) = P_x e^{i\omega t} \tag{3.22}$$

Para $x(t) = Xe^{i\omega t}$, vêm:

$$M\ddot{x}(t) + \frac{Gr_o}{\omega}\left(C_{x2} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_{x2}\right)i\omega x(t) + Gr_o\left(C_{x1} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_{x1}\right)x(t) = P_x(t) \tag{3.23}$$

Da mesma forma que na vibração vertical, podemos definir a constante de rigidez k_x e de amortecimento c_x para a oscilação horizontal:

$$k_x = Gr_o\left(C_{x1} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_{x1}\right) \tag{3.24}$$

$$c_x = \frac{Gr_o}{\omega}\left(C_{x2} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_{x2}\right) \tag{3.25}$$

Os parâmetros C_{x1}, C_{x2}, S_{x1}, e S_{x2}, são variáveis com o coeficiente de Poisson e a freqüência adimensional [53]. Mas, pode-se adotar as seguintes simplificações:

$$C_{x1} = \frac{8}{2-\nu} \tag{3.26}$$

$$S_{x1} = 3{,}9 \tag{3.27}$$

$$C_{x2} = \frac{4{,}6}{2-\nu}a_o \tag{3.28}$$

$$S_{x2} = 9{,}3a_{os} \tag{3.29}$$

Substituindo as expressões acima nas expressões (3.24) e (3.25), temos:

$$k_x = \frac{8Gr_o}{2-\nu}\left(1 + 0{,}49(2-\nu)\frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}\right) \tag{3.30}$$

$$c_x = \frac{4{,}6r_o^2\sqrt{\rho G}}{2-\nu}\left(1+2(2-\nu)\sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}}\frac{p}{r_o}\right) \tag{3.31}$$

3.3 - Oscilações em Balanço de Fundações em Bloco Embutidas

A equação do movimento de balanço de uma fundação cilíndrica em bloco é da forma:

$$I_o\ddot{\phi}(t) + R_\phi(t) + N_\phi(t) = T_\phi(t) \tag{3.32}$$

I_o é o momento de inércia de massa da fundação em torno do eixo de rotação na base. T_ϕ é o momento de excitação: $T_\phi(t) = T_\phi e^{i\omega t}$.

O momento resistente em torno do centro de gravidade ocasionado pela resistência do meio elástico na base é [12]:

$$R_\phi(t) = Gr_o^3(C_{\phi 1} + iC_{\phi 2})\phi(t) \tag{3.33}$$

O momento resistente em torno do centro de gravidade ocasionado pela reação lateral do meio em resposta ao balanço é:

$$N_\phi(t) = G_s\left(r_o^2 p(S_{\phi 1} + iS_{\phi 2}) + \frac{p^3}{3}(S_{x1} + iS_{x2})\right)\phi(t) \tag{3.34}$$

Substituindo as expressões (3.33) e (3.34) em (3.35), podemos definir as constantes de rigidez e amortecimento:

$$k_\phi = Gr_o^3\left(C_{\phi 1} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_{\phi 1} + \frac{G_s}{G}\frac{p^3}{3r_o^3}S_{x1}\right) \tag{3.35}$$

$$c_\phi = \frac{Gr_o^3}{\omega}\left(C_{\phi 2} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_{\phi 2} + \frac{G_s}{G}\frac{p^3}{3r_o^3}S_{x2}\right) \tag{3.36}$$

Nas expressões acima, os parâmetros $C_{\phi 1}$, e $C_{\phi 2}$, são dependentes do coeficiente de Poisson e da freqüência adimensional, e os parâmetros $S_{\phi 1}$, e $S_{\phi 2}$, são dependentes exclusivamente da freqüência adimensional. Os parâmetros S_{x1}, e S_{x2}, são dependentes do coeficiente de Poisson e da freqüência adimensional [12]. Entretanto, simplificações podem ser adotadas [142], as quais são:

$$C_{\phi 1} = \bar{C}_{\phi 1} = \frac{8}{3(1-\nu)} \tag{3.37}$$

$$C_{\phi 2} = \bar{C}_{\phi 2} = 0{,}43a_o \tag{3.38}$$

$$S_{\phi 1} = \bar{S}_{\phi 1} = 2{,}50 \tag{3.39}$$

$$S_{\phi 2} = \bar{S}_{\phi 2}\, a_{os} = 1{,}80a_{os} \tag{3.40}$$

$$S_{x1} = \bar{S}_{x1} = 3{,}9 \tag{3.41}$$

$$S_{x2} = \bar{S}_{x2} = 9{,}3a_{os} \tag{3.42}$$

As expressões acima levadas em (3.35) e (3.36), resultam nas seguintes expressões para as constantes de rigidez e amortecimento:

$$k_\phi = \frac{8}{3(1-\nu)}Gr_o^3\left(1 + 0{,}94(1-\nu)\frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o} + 0{,}52(1-\nu)\frac{G_s}{G}\frac{p^3}{r_o^3}\right) \tag{3.43}$$

$$c_\phi = 0{,}43r_o^4\sqrt{\rho G}\left(1 + 4{,}2\sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}}\frac{p}{r_0} + 7{,}21\sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}}\frac{p^3}{r_o^3}\right) \tag{3.44}$$

Na obra "Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines", [135], temos as seguintes expressões para as constantes de rigidez e amortecimento:

$$k_\phi = \frac{8Gr_o^3}{3(1-\nu)}\left(1+1{,}2(1-\nu)\frac{p}{r_o}+0{,}2(2-\nu)\frac{p}{r_o}\right) \tag{3.45}$$

$$c_\phi = \frac{0{,}8r_o^4\sqrt{\rho G}}{(1-\nu)(1+B_{\phi ef})}\left(1+0{,}7(1-\nu)\frac{p}{r_0}+0{,}6(2-\nu)\frac{p^3}{r_o^3}\right) \tag{3.46}$$

A constante de amortecimento c_ϕ , dada na forma da expressão (3.46), não corresponde a um valor efetivo, sendo necessário, então, proceder-se a uma correção daquela constante. Para tanto, pode-se recorrer a seguinte expressão [142]:

$$c_{\phi ef} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{3{,}26912}{I_o k_\phi}+\dfrac{\left(1{,}42698-3{,}77.10^{-4}\,\bar{B}_\phi+1{,}38.10^{-7}\,\bar{B}_\phi^{\,2}\right)}{c_\phi^2}}} \tag{3.47}$$

Onde, como já apresentada anteriormente, a razão mássica é determinada operando-se com a inércia, a constante de mola, e a constante de amortecimento.

$$\bar{B}_\phi = \frac{I_o k_\phi}{c_\phi^2} \tag{3.48}$$

A expressão (3.47) foi determinada dentro da seguinte faixa de valores para a razão mássica simplificada [item (2.4)]:

$$0{,}2 \le B_\phi \le 5{,}0 \tag{3.49}$$

A determinação da constante de amortecimento efetiva, tem sua origem, na definição por Hall, de uma razão mássica simplificada e efetiva [item (2.4)], buscando assim, uma melhor concordância entre a solução análoga e a Teoria do Semí-Espaço Elástico. Partindo-se desta observação, e utilizando-se da tabela corretiva [item (2.4)] obtida por Hall em seus estudos, obtêm-se a razão mássica efetiva (3.50) operando-se com a expressão (2.59). Por um processo de interpolação por mínimos quadrados, obtêm-se a expressão da razão

mássica efetiva com a pseudo-razão mássica destacada em (3.49). Desta expressão, então, extraímos a constante de amortecimento efetiva.

$$\bar{B}_{\phi ef} = \frac{I_o k_\phi}{c_{\phi ef}^2} \tag{3.50}$$

3.4 - Oscilações Torcionais de Fundações Embutidas

A equação do movimento torcional de uma fundação é dada na forma:

$$I\ddot{\psi}(t) + R_\psi(t) + N_\psi(t) = T_z(t) \tag{3.51}$$

I, ou I_ψ, é o momento de inércia de massa da fundação em torno do eixo vertical z. $T_z(t)$ é o momento de excitação: $T_z(t) = T_z e^{i\omega t}$.

O valor do momento resistente $R_\psi(t)$ em torno do eixo vertical na base da fundação é dado, segundo Novak e Sachs [88], por:

$$R_\psi(t) = Gr_o^3(C_{\psi 1} + iC_{\psi 2})\psi(t) \tag{3.52}$$

O momento resistente $N_\psi(t)$ na lateral é dado por:

$$N_\psi(t) = G_s r_o^2 p(S_{\psi 1} + iS_{\psi 2})\psi(t) \tag{3.53}$$

Substituindo (3.52) e (3.53) na expressão (3.51), podemos determinar as constantes de rigidez e amortecimento:

$$k_\psi = Gr_o^3\left(C_{\psi 1} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_{\psi 1}\right) \tag{3.54}$$

$$c_\psi = \frac{Gr_o^3}{\omega}\left(C_{\psi 2} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_{\psi 2}\right) \tag{3.55}$$

Novak e Sachs [88] sugeriram as seguintes aproximações na determinação dos parâmetros $C_{\psi 1}$, $C_{\psi 2}$, $S_{\psi 2}$, e $S_{\psi 2}$:

$$C_{\psi 1} = \bar{C}_{\psi 1} = 4{,}3 \tag{3.56}$$

$$S_{\psi 1} = \bar{S}_{\psi 1} = 10{,}4 \tag{3.57}$$

$$C_{\psi 2} = \bar{C}_{\psi 2}\, a_o = 0{,}643 a_o \tag{3.58}$$

$$S_{\psi 2} = \bar{S}_{\psi 2}\, a_{os} = 5 a_{os} \tag{3.59}$$

Tem-se, então:

$$k_\psi = 4{,}3Gr_o^3\left(1 + 2{,}42\frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}\right) \tag{3.60}$$

$$c_\psi = 0{,}643\sqrt{G\rho}r_o^4\left(1 + 7.78\sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}}\frac{p}{r_o}\right) \tag{3.61}$$

3.5 - O Efeito do Embutimento na Resposta Dinâmica das Fundações de Máquinas

Os resultados das investigações de campo das fundações embutidas desenvolvidas por Novak [56, 146], Beredugo [57], Beredugo e Novak [11], Fry [58], Stokoe [59], Stokoe e Richart [60], e dos experimentos em laboratório de Chae [61], Gupta [62] e Vijayvergiya [63] mostram que como resultado do embutimento a freqüência natural do sistema fundação-solo cresce e a amplitude da vibração decresce.

As experiências indicaram também que a teoria do Semi-Espaço Elástico tende a superestimar o amortecimento geométrico da fundação superficial na direção vertical em um valor por volta de 100% [146]. A razão apontada para essa discrepância parece ser devido a

reflexão das ondas de volta para a fonte (fundação), fato este que leva a conclusão de que o solo sempre apresenta-se em camadas. Sendo assim, recomenda-se dividir o valor de $\overline{C}_2$ da eq. (3.14) pelo fator 2, para o caso da vibração vertical.

Para o caso do movimento oscilatório vertical, pode-se determinar a resposta do sistema máquina-fundação-solo:

$$\bar{B}_z = \frac{Mk}{c^2} = 1{,}384 B_z \frac{K}{C^2} \tag{3.62}$$

$$\bar{a}_o = \frac{\omega c}{k} = 0{,}85 a_o \frac{C}{K} \tag{3.63}$$

onde:

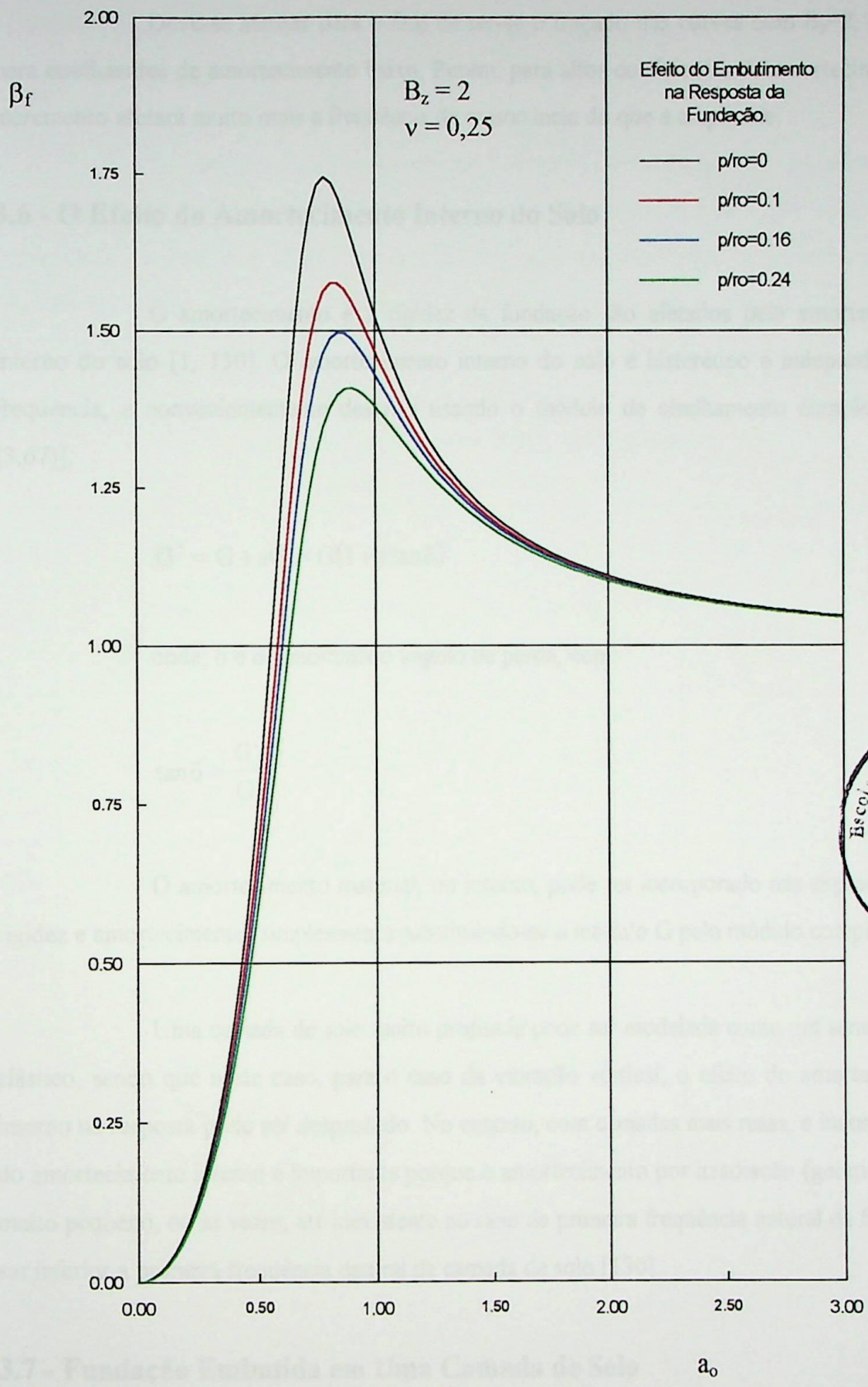
$$K = 1 + 0{,}675(1 - \nu)\frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o} \tag{3.64}$$

$$C = 1 + 1{,}97(1 - \nu)\sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}}\frac{p}{r_o} \tag{3.65}$$

A resposta do sistema a uma excitação por desbalanceamento é dada por:

$$\beta_f = \frac{\frac{B_z a_o^2}{K}}{\sqrt{\left(1 - \frac{B_z a_o^2}{K}\right)^2 + 0{,}7225\left(\frac{C}{K}\right)^2 a_o^2}} \tag{3.66}$$

A figura (3.2) apresenta a resposta do sistema a uma excitação vertical, para diversas razões de embutimento p/r_o, porém com o parâmetro adimensional B_z fixo e $G_s\rho_s/G\rho=1$. Desta figura observa-se que a freqüência de ressonância foi pouca afetada pelo incremento no embutimento, entretanto, a amplitude foi afetada de forma considerável.



Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

Figura 3.2: Efeito do embutimento no movimento oscilatório vertical de uma fundação.

Deve-se atentar para o fato de ter-se o traçado das curvas com B_z=2, ou seja, para coeficientes de amortecimento baixo. Porém, para altos coeficientes de amortecimento, o incremento afetará muito mais a freqüência de ressonância do que a amplitude.

3.6 - O Efeito do Amortecimento Interno do Solo

O amortecimento e a rigidez da fundação são afetados pelo amortecimento interno do solo [1, 130]. O amortecimento interno do solo é histerético e independente da freqüência, e convenientemente descrito usando o módulo de cisalhamento complexo [eq. (3.67)].

$$G^* = G + iG' = G(1 + i\tan\delta) \tag{3.67}$$

onde, δ é o denominado ângulo de perda, com:

$$\tan\delta = \frac{G'}{G} \tag{3.68}$$

O amortecimento material, ou interno, pode ser incorporado nas expressões da rigidez e amortecimento, simplesmente substituindo-se o módulo G pelo módulo complexo G^*.

Uma camada de solo muito profunda pode ser modelada como um semi-espaço elástico, sendo que neste caso, para o caso da vibração vertical, o efeito do amortecimento interno na resposta pode ser desprezado. No entanto, com camadas mais rasas, a incorporação do amortecimento interno é importante porque o amortecimento por irradiação (geométrico) é muito pequeno, ou as vezes, até inexistente no caso da primeira freqüência natural da fundação ser inferior a primeira freqüência natural da camada de solo [130].

3.7 - Fundação Embutida em Uma Camada de Solo

As respostas de fundações embutidas em uma camada de solo de profundidade H_S, podem ser analisadas usando as funções f_1 e f_2 apropriadas para calcular os parâmetros $C_{1,2}$

[Tabela (3.2)]. Os parâmetros das reações laterais $S_{1,2}$ são os mesmos como apresentados anteriormente.

As investigações concluíram que fundações com um alto grau de embutimento ficam menos sujeita ao efeito da profundidade limitada da camada de solo, e que, a omissão do embutimento resulta em valores superestimados para as amplitudes, e contrariamente, a omissão do efeito da limitada espessura da camada resulta em amplitudes inferiores ou subestimadas.

Tabela 3.2 - Parâmetros de Rigidez e Amortecimento para uma Camada de Solo [11].

H_S/r_0	ν=0,25	Parâmetros Constantes	Faixa de Validade
1,0	$C_1 = 12{,}23 - 1{,}178a_0 - 0{,}3056a_0^2 - 1{,}177a_0^3 + 0{,}416a_0^4$ $C_2 = 0{,}2395a_0^2 + 0{,}5646a_0^3 + 0{,}0227a_0^4 - 0{,}3403a_0^5 + 0{,}203a_0^6$	$\overline{C}_1 = 10{,}0$ $\overline{C}_2 = 0{,}3$	$0 \le a_0 \le 1{,}5$
2,0	$C_1 = 8{,}13 + 0{,}8516a_0 - 3{,}664a_0^2 - 8{,}289a_0^3 + 11{,}18a_0^4 - 3{,}978a_0^5$ $C_2 = 0{,}004044a_0 - 0{,}7386a_0^2 + 13{,}27a_0^3 - 39{,}61a_0^4 + 49{,}8a_0^5 + \ldots$ $- 26{,}95a_0^6 + 5{,}069a_0^7$	$\overline{C}_1 = 7{,}0$ $\overline{C}_2 = 0{,}45$	$0 \le a_0 \le 1{,}25$
3,0	$C_1 = 7{,}04 + 0{,}4659 - 6{,}989a_0^2$ $C_2 = 0{,}7361a_0^2 - 1{,}462a_0^3 + 3{,}573a_0^4$	$\overline{C}_1 = 5{,}5$ $\overline{C}_2 = 0{,}65$	$0 \le a_0 \le 0{,}81$
4,0	$C_1 = 6{,}579 - 0{,}2422a_0 - 0{,}3889a_0^2 - 29{,}69a_0^3 + 7{,}711a_0^4 + \ldots$ $+ 76{,}44a_0^5 - 77{,}42a_0^6$ $C_2 = 0{,}02804a_0 + 3{,}02a_0^2 + 7{,}458a_0^3 - 184{,}2a_0^4 + 655{,}7a_0^5 + \ldots$ $- 804{,}9a_0^6 + 314{,}2a_0^7$	$\overline{C}_1 = 4{,}3$ $\overline{C}_2 = 1{,}0$	$0 \le a_0 \le 0{,}62$

CAPÍTULO 4

ESTUDO DOS MOVIMENTOS ACOPLADOS EM FUNDAÇÕES EMBUTIDAS

O capítulo anterior apresentou as equações para os vários movimentos de uma fundação em bloco sem considerar a influência que um possa ter sobre outro, ou seja, os vários graus de liberdade foram tratados como desacoplados. Porém, é sabido que os movimentos de balanço e deslizamento (escorregamento) são acoplados. Este é o objeto de estudo desse capítulo.

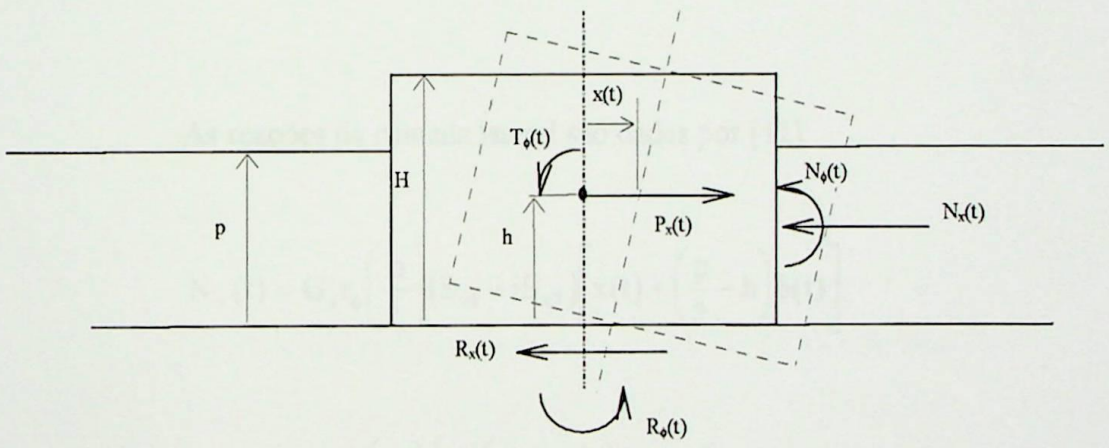


Figura 4.1: O acoplamento do balanço e deslizamento para fundações embutidas na Teoria do Semi-Espaço Elástico.

As equações dos movimentos oscilatórios horizontal e de balanço de uma fundação excitada por uma força horizontal $P_x(t)$, e um momento $T_\phi(t)$, ambos aplicados no centro de gravidade do sistema máquina-fundação, são da forma [22], [fig. (4.1)]:

$$M\ddot{x}(t) + R_x(t) + N_x(t) = P_x e^{i\omega t} \qquad (4.1)$$

$$I\ddot{\phi}(t) + R_{\phi}(t) + N_{\phi}(t) = T_{\phi}e^{i\omega t} \tag{4.2}$$

A reação do solo $R_x(t)$, e o momento resistente ao balanço $R_\phi(t)$, são, segundo Beredugo e Novak, [12]:

$$R_x(t) = Gr_o\left(C_{x1} + iC_{x2}\right)x_b(t) \tag{4.3a}$$

$$R_x(t) = Gr_o\left(C_{x1} + iC_{x2}\right)[x(t) - h\phi(t)] \tag{4.3b}$$

E:

$$R_\phi(t) = Gr_o^3\left(C_{\phi 1} + iC_{\phi 2}\right)\phi(t) - R_x(t)h \tag{4.4a}$$

$$R_\phi(t) = Gr_o^3\left(C_{\phi 1} + iC_{\phi 2}\right)\phi(t) - Gr_o\left(C_{x1} + iC_{x2}\right)[x(t)h - h^2\phi(t)] \tag{4.4b}$$

As reações da camada lateral são dadas por [12]:

$$N_x(t) = G_s r_o\left(\frac{p}{r_o}\right)\left(S_{x1} + iS_{x2}\right)\left[x(t) + \left(\frac{p}{2} - h\right)\phi(t)\right] \tag{4.5}$$

$$N_\phi(t) = G_s r_o^3\left(\frac{p}{r_o}\right)\left\{\frac{1}{r_o}\left(\frac{p}{2r_o} - \frac{h}{r_o}\right)\left(S_{x1} + iS_{x2}\right)x(t) + \ldots\right.$$

$$\left. + \left[\left(S_{\phi 1} + iS_{\phi 2}\right) + \left(\frac{p^2}{3r_o^2} - \frac{ph}{r_o^2} + \frac{h^2}{r_o^2}\right)\left(S_{x1} + iS_{x2}\right)\right]\phi(t)\right\} \tag{4.6}$$

Substituindo as expressões (4.3b), (4.4b), (4.5), e (4.6), nas equações (4.1) e (4.2), obtemos:

$$M\ddot{x}(t) + r_o\left[G\left(C_{x1} + iC_{x2}\right) + G_s\frac{p}{r_o}\left(S_{x1} + iS_{x2}\right)\right]x(t) + \ldots$$

$$+r_o\left[-Gp\left(C_{x1} + iC_{x2}\right) + G_s\frac{p}{r_o}\left(\frac{p}{2} - h\right)\left(S_{x1} + iS_{x2}\right)\right]\phi(t) =$$

$$= P_x(t) \tag{4.7}$$

$$I\ddot{\phi}(t) + r_o^2\left[G_s\frac{p}{r_o}\left(\frac{p}{2r_o} - \frac{h}{r_o}\right)\left(S_{x1} + iS_{x2}\right) + \right.$$

$$\left.-G\frac{h}{r_o}\left(C_{x1} + iC_{x2}\right)\right]x(t) + r_o^3\left\{G\left(C_{\phi 1} + iC_{\phi 2}\right) + \right.$$

$$+G_s\frac{p}{r_o}\left[\left(S_{\phi 1} + iS_{\phi 2}\right) + \left(\frac{p^2}{3r_o^2} - \frac{ph}{r_o^2} + \frac{h^2}{r_o^2}\right)\left(S_{x1} + iS_{x2}\right)\right] +$$

$$\left.+G\frac{h^2}{r_o^2}\left(C_{x1} + iC_{x2}\right)\right\}\phi(t) = T_\phi e^{i\omega t} \tag{4.8}$$

Consideremos as seguintes soluções particulares:

$$x(t) = Xe^{i\omega t} \tag{4.9}$$

$$\phi(t) = \Phi e^{i\omega t} \tag{4.10}$$

Substituindo as expressões acima em (4.7) e (4.8), obtemos:

$$-MX\omega^2 + k_x X + c_x i\omega X + k_{x\phi}\Phi + c_{x\phi} i\omega\Phi = P_x \tag{4.11}$$

$$-I\Phi\omega^2 + k_\phi\Phi + c_\phi i\omega\Phi + k_{x\phi}X + c_{x\phi} i\omega X = T_\phi \tag{4.12}$$

Onde:

$$k_x = Gr_o\left(C_{x1} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_{x1}\right) \tag{4.13}$$

$$c_x = \frac{Gr_o}{\omega}\left(C_{x2} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_{x2}\right) \tag{4.14}$$

$$k_\phi = Gr_o^3\left\{C_{\phi 1} + \frac{h^2}{r_o^2}C_{x1} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_{\phi 1} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}\left(\frac{p^2}{3r_o^2} - \frac{ph}{r_o^2} + \frac{h^2}{r_o^2}\right)S_{x2}\right\} \tag{4.15}$$

$$c_\phi = \frac{Gr_o^3}{\omega}\left\{C_{\phi 2} + \frac{h^2}{r_o^2}C_{x2} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_{\phi 2} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}\left(\frac{p^2}{3r_o^2} - \frac{ph}{r_o^2} + \frac{h^2}{r_o^2}\right)S_{x2}\right\} \tag{4.16}$$

$$k_{x\phi} = -Gr_o\left[hC_{x1} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}\left(h - \frac{p}{2}\right)S_{x1}\right] \tag{4.17}$$

$$c_{x\phi} = \frac{-Gr_o}{\omega}\left[hC_{x2} + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}\left(h - \frac{p}{2}\right)S_{x2}\right] \tag{4.18}$$

Os parâmetros C_{x1}, C_{x2}, S_{x1}, S_{x2}, e os parâmetros $C_{\phi 1}$, $C_{\phi 2}$, $S_{\phi 1}$, e $S_{\phi 2}$, são aqueles definidos para os casos dos movimentos oscilatórios puros das fundações embutidas [ver capítulo 3], portanto, podem ser representados simplificadamente por valores constantes, ou por valores proporcionais a freqüência adimensional a_o [12]. Desta forma as expressões para as constantes de rigidez e amortecimento para os dois modos acoplados (k_x, k_ϕ, c_x, c_ϕ), e as expressões para as constantes de rigidez e amortecimento devidas ao acoplamento ($k_{x\phi}$, $c_{x\phi}$), denominadas também de constantes cruzadas, podem ser expressas nas seguintes formas:

$$k_x = \frac{8Gr_o}{2-\nu}\left[1 + 0{,}49(2-\nu)\frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}\right] \tag{4.19}$$

$$c_x = \frac{4{,}6r_o^2\sqrt{\rho G}}{2-\nu}\left[1 + 2(2-\nu)\sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}}\right] \tag{4.20}$$

$$k_\phi = \frac{8Gr_o^3}{3(1-\nu)}\left[1+\frac{3(1-\nu)}{2-\nu}\frac{h^2}{r_o^2}+0{,}94(1-\nu)\frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}+\right.$$

$$\left.+1{,}46(1-\nu)\frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}\left(\frac{p^2}{3r_o^2}-\frac{ph}{r_o^2}+\frac{h^2}{r_o^2}\right)\right] \tag{4.21}$$

$$c_\phi = 0{,}43r_o^4\sqrt{\rho G}\left[1+\frac{10{,}7}{2-\nu}\frac{h^2}{r_o^2}+4{,}2\frac{p}{r_o}\sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}}+\right.$$

$$\left.+21{,}63\frac{p}{r_o}\sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}}\left(\frac{p^2}{3r_o^2}-\frac{ph}{r_o^2}+\frac{h^2}{r_o^2}\right)\right] \tag{4.22}$$

$$k_{x\phi} = \frac{-8Gr_o}{2-\nu}\left[h+0{,}49(2-\nu)\frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}\left(h-\frac{p}{2}\right)\right] \tag{4.23}$$

$$c_{x\phi} = \frac{-4{,}6r_o^2\sqrt{\rho G}}{2-\nu}\left[h+2(2-\nu)\frac{p}{r_o}\sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}}\left(h-\frac{p}{2}\right)\right] \tag{4.24}$$

A figura (4.2) apresenta o modelo do sistema máquina-fundação-meio elástico.

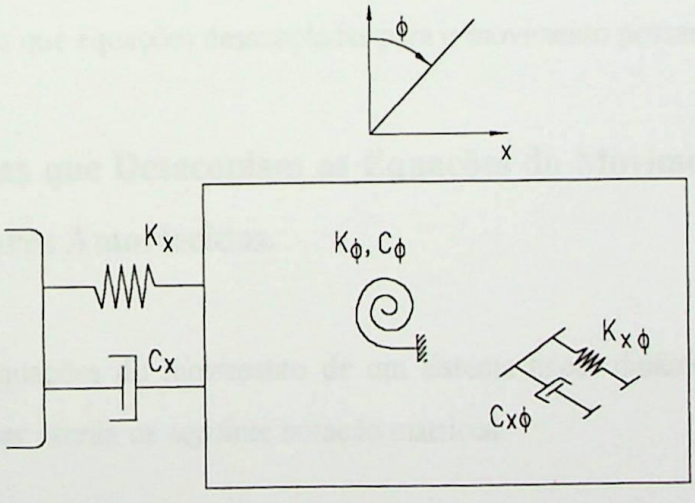


Figura 4.2: Modelo do Acoplamento.

Capítulo 5

A SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES AMORTECIDOS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE.

É bem sabido que sistemas lineares dinâmicos não amortecidos possuem modos normais, e que em cada modo normal o sistema vibra com a mesma fase [149]. Nos sistemas amortecidos, entretanto, esta propriedade é geralmente violada e os clássicos modos normais não existem. Nestes casos, o tratamento mais geral de Foss [128] é requerido. Rayleigh [147] mostrou que se a matriz amortecimento é uma combinação linear das matrizes rigidez e inercial, o sistema amortecido terá modos normais clássicos. Entretanto, pode-se demonstrar que a condição necessária e suficiente para que um sistema tenha modos normais é que a matriz amortecimento seja diagonalizada pela mesma transformação que desacopla o sistema não amortecido, sendo a solução de Rayleigh um caso especial [149]. Este capítulo apresenta o método de Foss [128] onde relações de ortogonalidade entre os autovetores do sistema linear dinâmico amortecido são demonstradas, e a partir dessas relações coordenadas são encontradas de forma que equações desacopladas para o movimento possam ser obtidas.

5.1 - Coordenadas que Desacoplam as Equações do Movimento de Sistemas Dinâmicos Lineares Amortecidos.

As equações do movimento de um sistema linear dinâmico com parâmetros concentrados pode ser escrita na seguinte notação matricial:

$$[\mathbf{m}]\ddot{\mathbf{w}} + [\mathbf{c}]\dot{\mathbf{w}} + [\mathbf{k}]\mathbf{w} = [\mathbf{F}_i(t)] \tag{5.1}$$

ou,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{F}(t) \tag{5.1a}$$

Fazendo:

$$\mathbf{u}_1 = \dot{\mathbf{w}} \tag{5.2a}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{w} \tag{5.2b}$$

em (5.1):

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_1 = -\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_2 - \mathbf{K}\mathbf{u}_2 + \mathbf{F} \tag{5.3}$$

Temos que:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{M}\mathbf{u}_1 \tag{5.4}$$

Combinando (5.3) e (5.4):

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \tag{5.5}$$

Podemos escrever a equação acima, denominada *equação reduzida do sistema*, na seguinte forma [126]:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{Q} \tag{5.6}$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \tag{5.7a}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \tag{5.7b}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F(t)} \end{Bmatrix} \tag{5.7c}$$

A solução homogênea da Equação Reduzida:

A eq. (5.8) é solução homogênea da eq. (5.6) na vibração livre:

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}e^{\lambda t} \tag{5.8}$$

Substituindo a eq. (5.8) na eq. (5.6), obtêm-se um problema de autovalor na seguinte forma:

$$\left(-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \lambda\ \mathbf{I}\right)\mathbf{V} = \mathbf{0} \tag{5.9}$$

A solução da equação acima resulta em 2n autovalores, λ_i, e 2n autovetores $\mathbf{V}_i$, sendo *n* o número de graus de liberdade e i = 1,2,3,...,2n [127, 128].

O autovalor λ_r e o autovetor $\mathbf{V}_r$, satisfazem a eq. (5.9) na forma:

$$\mathbf{B}\mathbf{V}_r = -\lambda_r \mathbf{A}\mathbf{V}_r \tag{5.10}$$

O autovalor λ_s e o autovetor $\mathbf{V}_s$ satisfazem uma equação da mesma forma:

$$\mathbf{B}\mathbf{V}_s = -\lambda_s \mathbf{A}\mathbf{V}_s \tag{5.11}$$

Multiplicando-se as eqs. (5.10) e (5.11) por $\mathbf{V}_s^T$ e $\mathbf{V}_r^T$ respectivamente, temos:

$$\mathbf{V}_s^T\mathbf{B}\mathbf{V}_r = -\lambda_r \mathbf{V}_s^T\mathbf{A}\mathbf{V}_r \tag{5.12}$$

$$\mathbf{V}_r^T\mathbf{B}\mathbf{V}_s = -\lambda_s \mathbf{V}_r^T\mathbf{A}\mathbf{V}_s \tag{5.13}$$

A transposta da eq. (5.13) é dada por:

$$\mathbf{V}_s^T \mathbf{B} \mathbf{V}_r = -\lambda_s \mathbf{V}_s^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r \tag{5.14}$$

Subtraindo a eq. (5.14) da eq. (5.12), resulta:

$$(\lambda_s - \lambda_r)\mathbf{V}_s^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r = 0 \tag{5.15}$$

Da expressão acima conclui-se que para $s \neq r$:

$$\mathbf{V}_s^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r = 0 \tag{5.16}$$

A condição acima é conhecida como *condição de ortogonalidade*. Para s = r, temos:

$$\mathbf{V}_s^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r = a_j \quad j = 1, 2, 3, \ldots 2n \tag{5.17}$$

Considere a matriz P, denominada matriz modal:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V}_1\ \mathbf{V}_2\ \mathbf{V}_3 \ldots \mathbf{V}_{2n}] \tag{5.18}$$

Uma matriz diagonal $\mathbf{A}_D$ pode ser obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{A}_D \tag{5.19}$$

onde:

$$\mathbf{A}_D = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & 0 \\ & & a_3 & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & a_{2n} \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

Podemos escrever numa forma compacta, com base nas eqs. (5.10) e (5.11), a seguinte expressão:

$$\mathbf{BP} = -\mathbf{AP\Lambda} \tag{5.21}$$

Onde Λ é a denominada matriz espectral:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{2n} \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

Multiplicando a eq. (5.21) pela transposta de P, obtemos:

$$\mathbf{P}^T\mathbf{BP} = -\mathbf{P}^T\mathbf{AP\Lambda} \tag{5.23a}$$

$$\mathbf{P}^T\mathbf{BP} = -\mathbf{A}_D\mathbf{\Lambda} \tag{5.23b}$$

$$\mathbf{P}^T\mathbf{BP} = -\mathbf{B}_D \tag{5.23c}$$

Sendo que:

$$\mathbf{B}_D = \begin{bmatrix} b_1 = \lambda_1 a_1 & & & & \\ & b_2 = \lambda_2 a_2 & & 0 & \\ & & b_3 = \lambda_3 a_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & b_{2n} = \lambda_{2n} a_{2n} \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

Vamos introduzir, utilizando a matriz modal **P**, a coordenada q, usando a seguinte transformação linear:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Pq(t)} = \mathbf{Pq} \tag{5.25}$$

Substituindo a eq. (5.25) na eq. (5.6) para a vibração livre:

$$\mathbf{APq} + \mathbf{BPq} = \mathbf{0} \tag{5.26}$$

Multiplicando-se a equação acima por $\mathbf{P}^T$, obtemos:

$$\mathbf{P}^T\mathbf{APq} + \mathbf{P}^T\mathbf{BPq} = 0 \tag{5.27}$$

Logo, podemos escrever a eq. (5.27) na seguinte forma:

$$\mathbf{A}_D\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B}_D\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{5.28}$$

Sendo $\mathbf{A}_D$ e $\mathbf{B}_D$ matrizes diagonais, a eq. (5.28) corresponde a um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem independentes:

$$a_j\dot{q}_j - b_jq_j = 0 \qquad j=1,2,3,...,2n \tag{5.29}$$

$$\dot{q}_j - \lambda_jq_j = 0 \qquad j=1,2,3,...,2n \tag{5.29a}$$

A solução da equação (29a) é:

$$q_j = q_j(0)e^{\lambda_j t} \tag{5.30}$$

onde a constante $q_j(0)$ é determinada a partir das condições iniciais:

$$q_j(0) = \mathbf{P}^{-1}u_j(0) \tag{5.31}$$

Vibração Forçada

Vamos rescrever a eq. (5.26) novamente, porem , com F≠0:

$$\mathbf{APq} + \mathbf{BPq} = \mathbf{Q} \tag{5.32}$$

Multiplicando-se a equação acima por $\mathbf{P}^T$, obtemos:

$$\mathbf{P}^T\mathbf{APq} + \mathbf{P}^T\mathbf{BPq} = \mathbf{P}^T\mathbf{Q}$$

(5.33)

Podemos escrever a eq. (5.33) na forma:

$$\mathbf{A}_D\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B}_D\mathbf{q} = \mathbf{P}^T\mathbf{Q} \tag{5.34}$$

Logo, a eq. (5.34) corresponde a um conjunto de equações diferenciais não homogêneas de primeira ordem independentes:

$$\dot{q}_j - \lambda_j q_j = \frac{f_j}{a_j} \qquad j=1,2,3,...,2n \tag{5.35}$$

A solução completa da eq. (5.35) é:

$$q_j = q_j(0)e^{\lambda_j t} + \frac{1}{a_j}\int_0^t e^{\left[\lambda_j(t-\tau)\right]} f_j(\tau)d\tau \tag{5.36}$$

Segue, da expressão (5.34) que:

$$f_j = \mathbf{V}_j^T\mathbf{Q} \tag{5.37}$$

Para o caso especial em que apenas um dos elementos do vetor **Q** é diferente de zero, por exemplo:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.38}$$

A expressão (5.37) se torna:

$$f_j = \begin{bmatrix} V_j^1 & V_j^2 & V_j^3 & V_j^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.39}$$

e considerando as condições iniciais nulas, o resultado para a expressão (5.36), será:

$$q_j = F_0 \frac{V_j^3}{a_j} \left(\frac{e^{\lambda_j t} - 1}{\lambda_j} \right) \tag{5.40}$$

Da mesma forma, para:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_0 \operatorname{sen}(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.41}$$

A integração da expressão (5.36) resultará em,

$$q_j = F_0 \frac{V_j^3}{\left(\lambda_j^2 + \omega^2\right) a_j} \left[-\lambda_j \operatorname{sen}(\omega t) + \omega \left(e^{\lambda_j t} - \cos(\omega t) \right) \right] \tag{5.42}$$

se as condições iniciais são nulas.

Capítulo 6

A RESPOSTA DE UM SISTEMA LINEAR AMORTECIDO A UM IMPULSO E A UMA EXCITAÇÃO GERAL.

Uma fonte comum de vibração é a aplicação súbita de uma força de curta duração denominada *impulso*. Um impulso representa uma carga devida a um choque, e é uma excitação não periódica. A resposta de um sistema a um impulso é idêntica a resposta livre de um sistema com certas condições iniciais.

Considere o modelo matemático de uma excitação do tipo impulso dado pela expressão (6.1). Um gráfico do modelo no tempo de um impulso é dado na figura (6.1). Este é um exemplo de pulso retangular.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau - \varepsilon \\ \dfrac{\hat{F}}{2\varepsilon} & \tau - \varepsilon < t < \tau + \varepsilon \\ 0 & t > \tau + \varepsilon \end{cases} \qquad (6.1)$$

O impulso da força F(t) é definido pela integral I(ε) dada por:

$$I(\varepsilon) = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} F(t)dt \qquad (6.2)$$

Sendo F(t) zero fora do intervalo τ-ε até τ+ε, os limites de integração podem ser estendidos.

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt \tag{6.3}$$

No caso da integral de F(t), sendo F(t) dado pela expressão (6.1), obtêm-se:

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = \frac{\hat{F}}{2\varepsilon} 2\varepsilon = \hat{F} \tag{6.4}$$

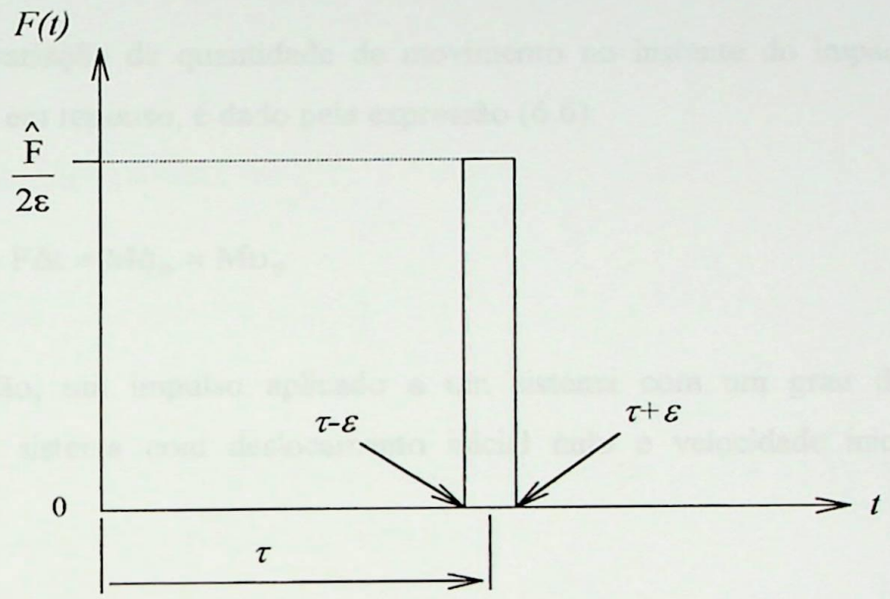


Figura 6.1: Modelo de Força Impulsiva.

Pode-se, então, definir a função impulso por [149]:

$$\begin{cases} F(t-\tau) = 0, \quad t \neq \tau \\ \int_{-\infty}^{\infty} F(t-\tau)dt = \hat{F} \end{cases} \tag{6.5}$$

6.1 - Resposta de um Sistema com um Grau de Liberdade a um Impulso.

A resposta de um sistema com um grau de liberdade [fig. (6.2)] a uma carga impulsiva, com o sistema inicialmente em repouso, é obtida em função da variação da quantidade de movimento, sendo conveniente, neste caso, apenas por uma questão de simplicidade considerar-se τ=0 na definição de um impulso [eq. (6.5)].

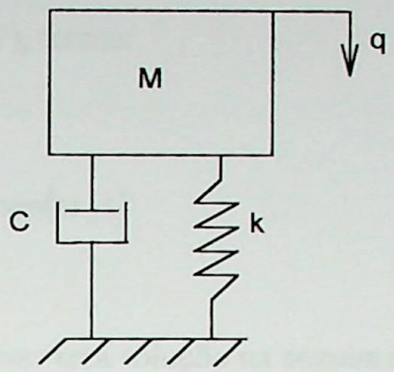


Figura 6.2: Sistema com um grau de liberdade.

A variação da quantidade de movimento no instante do impacto, estando a massa inicialmente em repouso, é dado pela expressão (6.6).

$$\hat{F} = F\Delta t = M\dot{q}_0 = M\upsilon_0 \tag{6.6}$$

Então, um impulso aplicado a um sistema com um grau de liberdade é equivalente a um sistema com deslocamento inicial nulo e velocidade inicial dada pela expressão (6.7).

$$\dot{q}_0 = \upsilon_0 = \frac{F\Delta t}{M} \tag{6.7}$$

Para um sistema subamortecido ($0<\xi<1$), a resposta a condições iniciais é dada por:

$$q(t) = \frac{\sqrt{\left(\upsilon_0 + \xi\omega_n q_0\right)^2 + \left(q_0\omega_d\right)^2}}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t}\, \mathrm{sen}\left(\omega_d t + \eta\right) \tag{6.8}$$

com,

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}, \qquad \eta = \tan^{-1}\frac{q_0\omega_d}{\upsilon_0 + \xi\omega_n q_0} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{C}{2M\omega_n}$$

Para a condição em que o deslocamento inicial é nulo, isto é, $q_0=0$, e a velocidade inicial dada pela eq. (6.7), temos:

$$q(t) = \frac{\hat{F}}{M\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t) \tag{6.9}$$

É conveniente escrever esta solução na seguinte forma:

$$q(t) = \hat{F}\, h(t) \tag{6.10}$$

onde h(t) é definida por,

$$h(t) = \frac{1}{M\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t) \tag{6.11}$$

A função h(t) é a resposta a um impulso unitário (1 N.s) aplicado em t=0. Se o impulso é aplicado em um tempo $t=\tau$, $\tau\neq 0$, temos que:

$$h(t-\tau) = \frac{1}{M\omega_d} e^{-\xi\omega_n (t-\tau)} \operatorname{sen}(\omega_d (t-\tau)) \qquad t>\tau \tag{6.12}$$

6.2 - Resposta de um Sistema com um Grau de Liberdade a uma Excitação Arbitrária.

A resposta de um sistema com um grau de liberdade a uma força arbitrária F(t) pode ser calculada a partir dos conceitos apresentados no item (6.1). O processo é dividir a força em impulsos infinitesimais, calcular a resposta para cada impulso individualmente e adicionar as respostas obtendo a resposta total [149].

A resposta a um impulso em um tempo t_i é dada por:

$$\Delta q(t_i) = F(t_i)h(t - t_i)\Delta t \tag{6.13}$$

Assim, a resposta pode ser expressa pela seguinte soma:

$$q(t_j) = \sum_{i=1}^{j} F(t_i)h(t - t_i)\Delta t \tag{6.14}$$

Isto é valido levando-se em conta que a equação do movimento é linear, de tal maneira que o principio da superposição é aplicável.

Para $\Delta t \rightarrow 0$, resulta:

$$q(t) = \int_0^t F(\tau)h(t - \tau)d\tau \tag{6.15}$$

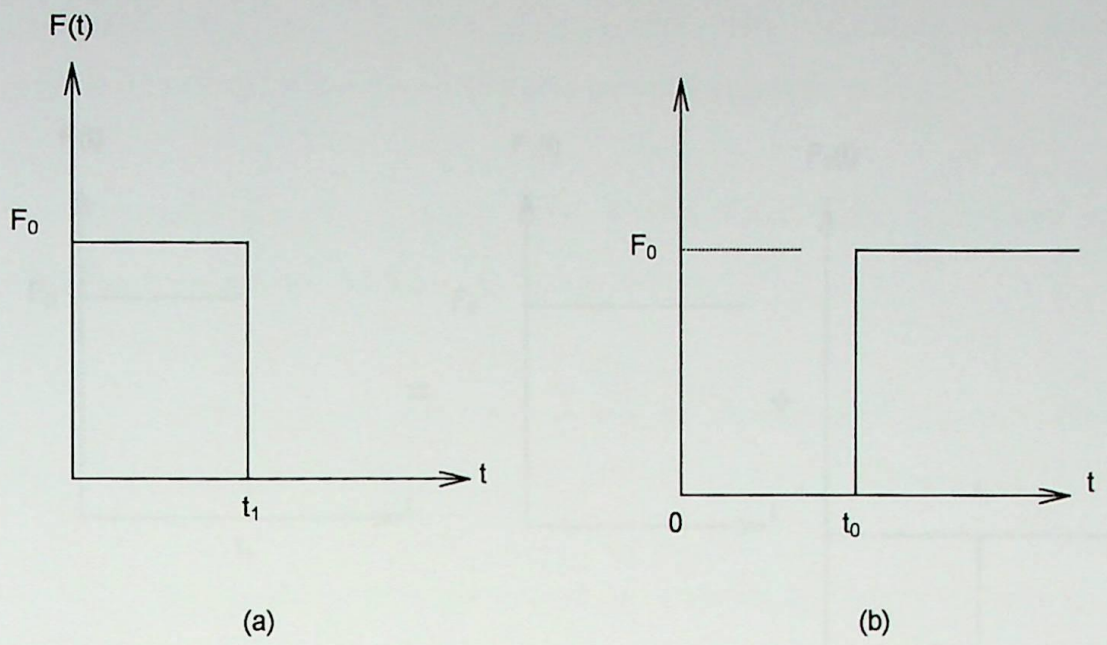
Para um sistema subamortecido ($0<\xi<1$) $h(t-\tau)$ é dada pela eq. (6.12). Substituindo a eq. (6.12) na eq. (6.15), temos o resultado da resposta do sistema a uma excitação arbitrária F(t):

$$q(t) = \frac{1}{M\omega_d} \int_0^t F(t - \tau)e^{-\xi\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d \tau)d\tau \tag{6.16}$$

sendo as condições iniciais nulas.

A integral na equação (6.16) é conhecida como *Integral de Duhamel* ou a *Integral da Convolução*.

Um tipo de excitação é a de uma força constante aplicada por um curto período de tempo t_1 após o qual é removida [fig. (6.3a)]. A resposta do sistema a este tipo de excitação pode ser calculada somando-se a resposta do sistema a uma combinação de funções degraus [fig. (6.3b)].



(a) (b)

Figura 6.3: (a)Excitação de duração t_1, (b)e uma excitação do tipo degrau.

Aplicando a Integral da Convolução dada pela eq. (6.16), a resposta de um sistema a uma excitação do tipo degrau [fig. (6.3b)] é dada na forma:

$$q(t) = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n(t-t_0)} \cos[\omega_d(t-t_0) - \varsigma] \qquad t \geq t_0 \qquad (6.17)$$

com,

$$\varsigma = \tan^{-1} \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

A resposta a uma excitação de duração t_1 [fig. (6.3a)], pode então, ser determinada pela superposição das resposta de duas funções degraus [fig. (6.4)]. Sendo assim, temos a seguinte resposta:

$$q(t) = \frac{F_0 e^{-\xi\omega_n t}}{k\sqrt{1-\xi^2}} \left\{ e^{\xi\omega_n t} \cos[\omega_d(t-t_1) - \varsigma] - \cos(\omega_d t - \varsigma) \right\} \qquad t > t_1 \qquad (6.18)$$

A resposta para $t<t_1$ é dada pela eq. (6.17) fazendo-se $t_0=0$.

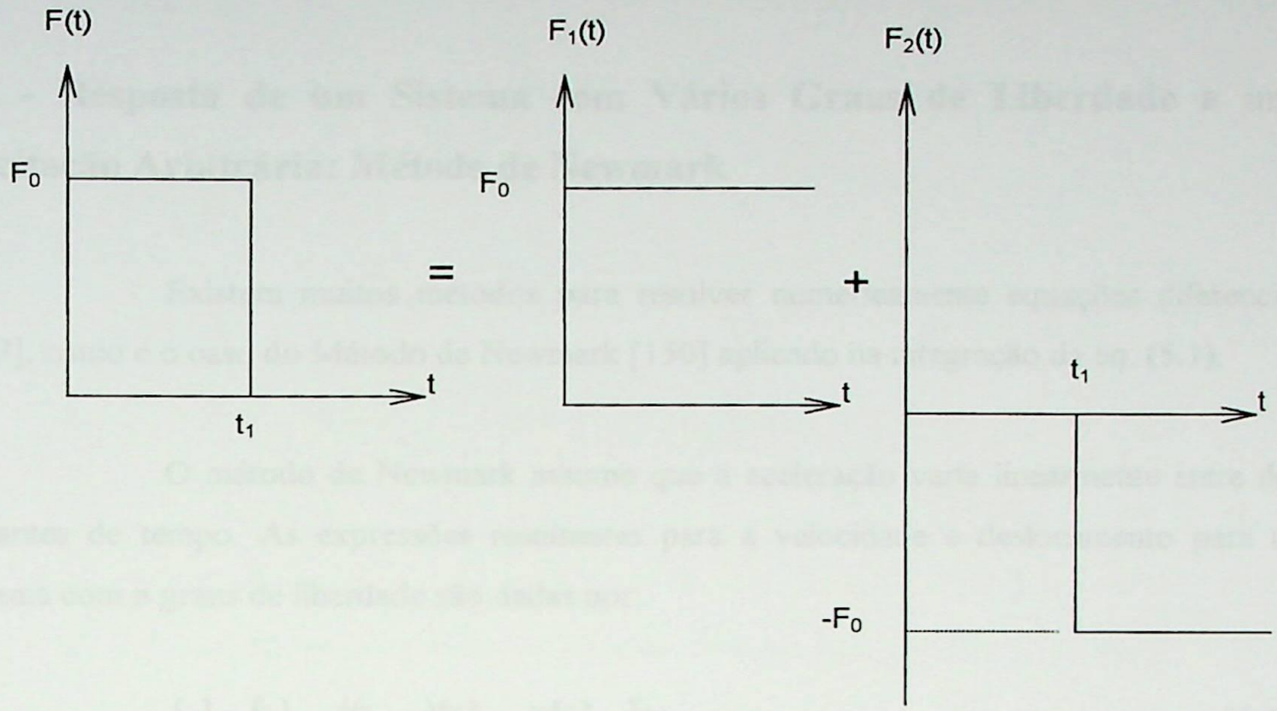


Figura 6.4: Pulso Retangular de Amplitude F_0 e duração t_1 como apresentada com a soma de duas funções degraus F_1 e F_2.

6.3 - Resposta de um Sistema com Vários Graus de Liberdade a uma Excitação Arbitrária.

No caso de um sistema com vários graus de liberdade o tratamento de Foss [128] descrito no capítulo anterior é aplicável. Como foi apresentado naquele capítulo, a resposta é obtida solucionando-se um conjunto de equações diferenciais independentes [eq. (5.35)], cuja solução completa é dada pela eq.(5.36), reproduzida abaixo:

$$q_j = q_j(0)e^{\lambda_j t} + \frac{1}{a_j}\int_0^t e^{[\lambda_j(t-\tau)]} f_j(\tau)d\tau \qquad (6.19)$$

O primeiro termo da eq. (6.19) pode ser usado para descrever a resposta do sistema a certas condições iniciais, correspondendo a solução homogênea do sistema; o segundo termo pode ser usado para avaliar a resposta a uma excitação no tempo, harmônica ou não. No caso de uma força constante aplicada apenas durante um intervalo de tempo t_i,

como apresentada na fig. (3a), a solução homogênea deve ser aplicada para descrever a resposta do sistema para o tempo excedendo o tempo de aplicação da força.

6.4 - Resposta de um Sistema com Vários Graus de Liberdade a uma Excitação Arbitrária: Método de Newmark

Existem muitos métodos para resolver numericamente equações diferenciais [149], como é o caso do Método de Newmark [150] aplicado na integração da eq. (5.1).

O método de Newmark assume que a aceleração varia linearmente entre dois instantes de tempo. As expressões resultantes para a velocidade e deslocamento para um sistema com n graus de liberdade são dadas por:

$$\{\dot{q}\} = \{\dot{q}\}_i + [(1-\gamma)\{\ddot{q}\}_i + \lambda\{\ddot{q}\}_{i+1}]\Delta t \tag{6.20}$$

$$\{q\}_{i+1} = \{q\}_i + \Delta t\{\dot{q}\}_i + \left[\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\{\ddot{q}\}_i + \lambda\{\ddot{q}\}_{i+1}\right]\Delta t^2 \tag{6.21}$$

sendo Δt o intervalo de integração.

Os parâmetros γ e λ indicam de que modo a aceleração entra no fim do intervalo da velocidade e do deslocamento, e devem ser escolhidos para obter as características de precisão e estabilidade desejadas. Quando γ=0,5 e λ=1/6, as eqs. (6.20) e (6.21) correspondem ao Método da Aceleração Linear. Quando γ=0,5 e λ=1/4, as eqs. (6.20) e (6.21) correspondem em assumir que a aceleração é constante entre t_i e t_{i+1}.

Para encontrar $\{\ddot{q}\}_{i+1}$, a eq. (5.1), é considerada em $t=t_{i+1}$, tal que:

$$\mathbf{M}\{\ddot{q}\}_{i+1} + \mathbf{C}\{\dot{q}\}_{i+1} + \mathbf{k}\{q\}_{i+1} = \{F\}_{i+1} \tag{6.22}$$

A eq. (6.21) pode ser usada para expressar $\{\ddot{q}\}_{i+1}$ em termos de $\{q\}_{i+1}$, e a eq. (6.20) para expressar $\{\dot{q}\}_{i+1}$ em termos de $\{q\}_{i+1}$. Pela substituição dessas expressões para $\{\dot{q}\}_{i+1}$ e $\{\ddot{q}\}_{i+1}$ na eq. (6.22), podemos obter a relação [eq. (6.23)]para calcular $\{q\}_{i+1}$.

$$\{q\}_{i+1} =$$
$$\left[\frac{1}{\lambda\Delta t^2}\mathbf{M}+\frac{\gamma}{\lambda\Delta t}\mathbf{C}+\mathbf{k}\right]^{-1}\left\{\{F\}_{i+1}+\mathbf{M}\left(\frac{1}{\lambda\Delta t^2}\{q\}_i+\frac{1}{\lambda\Delta t}\{\dot{q}\}_i+\left(\frac{1}{2\lambda}-1\right)\{\ddot{q}\}_i\right)+\ldots\right.$$
$$\left.+\mathbf{C}\left(\frac{\gamma}{\lambda\Delta t}\{q\}_i+\left(\frac{\gamma}{\lambda}-1\right)\{\dot{q}\}_i+\left(\frac{\gamma}{\lambda}-2\right)\frac{\Delta t}{2}\{\ddot{q}\}_i\right)\right\} \tag{6.23}$$

Conhecidas as condições iniciais, isto é, $\{q\}_{t=0}=\{q_0\}$, e $\{\dot{q}\}_{t=0}=\{\dot{q}_0\}$, $\{\ddot{q}_0\}$ fica determinado por:

$$\{\ddot{q}_0\}=\mathbf{M}^{-1}[\{F_0\}-\mathbf{C}\{\dot{q}_0\}-\mathbf{k}\{q_0\}] \tag{6.24}$$

O vetor $\{q\}_{i+1}$, a partir de t=0 pode ser calculado usando-se a eq. (6.23). Os vetores $\{\ddot{q}\}_{i+1}$ e $\{\dot{q}\}_{i+1}$ são dados por:

$$\{\ddot{q}\}_{i+1}=\frac{1}{\lambda\Delta t^2}\left(\{q\}_{i+1}-\{q\}_i\right)-\frac{1}{\lambda\Delta t}\{\dot{q}\}_i-\left(\frac{1}{2\lambda}-1\right)\{\ddot{q}\}_i \tag{6.25}$$

$$\{\dot{q}\}_{i+1}=\{\dot{q}\}_i+(1-\gamma)\Delta t\{\ddot{q}\}_i+\gamma\Delta t\{\ddot{q}\}_{i+1} \tag{6.26}$$

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - BFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

Capítulo 7

DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DE UM SISTEMA COM PARÂMETROS VARIÁVEIS COM A FREQÜÊNCIA.

Se os parâmetros de rigidez e amortecimento da equação diferencial do movimento de um sistema vibratório [eq. (5.1)] são constantes a solução homogênea e não-homogênea podem ser obtidas como apresentado no capítulo 5. No entanto, o modelo dinâmico de uma fundação apoiada ou embutida em um meio pode ser representada por um sistema constituído por massas, molas e amortecedores, sendo as constantes de rigidez e amortecimento variáveis em função da freqüência adimensional a_0 [eq. (2.2)] como apresentado nos capítulos 2, 3, e 4. Parâmetros constantes podem ser adotados no modelo para representar as constantes de rigidez e amortecimento, porém, dentro de uma certa faixa, e podem ser ajustados de acordo com a faixa de interesse, o que depende da freqüência de excitação [11]. O problema da vibração livre requer a determinação das freqüências naturais e coeficientes de amortecimento do sistema, que no caso de um sistema com parâmetros constantes, é determinado resolvendo-se a equação característica do sistema, ou da mesma forma obtendo-se os autovalores do sistema [Cap. 5]. As freqüências naturais e coeficientes de amortecimento de um sistema são então extraídos dos autovalores [149, 151]. A resposta livre do sistema com parâmetros variáveis com a freqüência será tratado neste capítulo.

7.1 - Determinação da Freqüência Natural e Coeficiente de Amortecimento de um Sistema com Parâmetros Variáveis com a Freqüência.

Seja o sistema dado pela fig. (7.1) com parâmetros constantes.

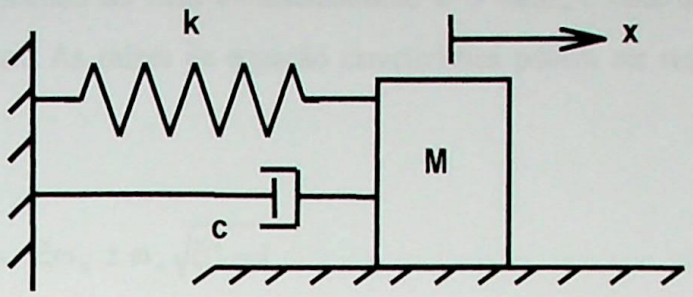


Figura 7.1: Sistema massa-mola-amortecedor.

Usando-se de um simples balanço de forças na massa da fig. (7.1) na direção $\underline{x}$, obtemos a equação do movimento:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{7.1}$$

A solução da eq. (7.1) é dada na forma da eq. (7.2):

$$x(t) = ve^{\lambda t} \tag{7.2}$$

Na eq. (7.2), v e λ constantes a serem determinadas. Substituindo a eq. (7.2) na eq. (7.1) resulta:

$$\left(M\lambda^2 + c\lambda + k\right)ve^{\lambda t} = 0 \tag{7.3}$$

Sendo $ve^{\lambda t} \neq 0$, a eq. (7.3) se reduz a uma equação do segundo grau na variável λ na forma:

$$M\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \tag{7.4}$$

A solução da eq. (7.4), denominada *equação característica*, resulta em duas raízes:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2M} \pm \frac{1}{2M}\sqrt{c^2 - 4kM} \tag{7.5}$$

Dependendo do valor do discriminante $c^2 - 4kM$, o valor das raízes λ podem ser real ou complexas. As raízes da equação característica podem ser rescritas da seguinte forma:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{7.6}$$

onde,

$$\xi = \frac{c}{c_{CR}} = \frac{c}{2M\omega_n}$$

A expressão (7.6) deixa claro que o fator de amortecimento ξ determina quando as raízes são complexas ou reais, o que por sua vez determina a natureza da resposta do sistema.

No caso do coeficiente de amortecimento ξ ser inferior a 1 ($0<\xi<1$), o discriminante da eq. (7.6) é negativo, resultando em um par de raízes complexas conjugadas, as quais são:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,j = -\xi\omega_n \pm \omega_d\,j \tag{7.7}$$

Isto implica na existência de duas soluções na forma da eq. (7.2). A eq. (7.1) é uma equação linear. Sendo assim, a soma de duas soluções também é uma solução. Logo, a solução da eq. (7.1), a certas condições iniciais de deslocamento e velocidade, é da forma:

$$x(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} + v_2 e^{\lambda_2 t} \tag{7.8}$$

Substituindo os valor de λ_1 e λ_2, resulta em:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(v_1 e^{\omega_d jt} + v_2 e^{\omega_d jt}\right) \tag{7.9}$$

A expressão (7.9) pode ser simplificada para a seguinte forma:

$$x(t) = Xe^{-\xi\omega_n t}\,\mathrm{sen}\left(\omega_d t + \Omega\right) \tag{7.10}$$

As constantes X e Ω são constantes de integração a serem determinadas a partir das condições iniciais [149].

No caso dos parâmetros *k* e *c* na eq. (7.1) serem variáveis este tratamento não é mais aplicável. Considere o caso da vibração vertical de uma fundação cilíndrica embutida [Cap. 3]. A equação do movimento é dada na mesma forma da eq. (7.1):

$$M\ddot{z} + c_Z\dot{z} + k_Z z = 0 \tag{7.11}$$

sendo as constantes k_Z e c_Z dadas por:

$$k_z = Gr_o\left(C_1 + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_1\right) \tag{7.12}$$

$$c_z = \frac{Gr_o}{\omega}\left(C_2 + \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}S_2\right) \tag{7.13}$$

Os parâmetros $C_{1,2}$ e $S_{1,2}$ são variáveis com a freqüência adimensional a_0 [Tabela (3.2)].

Segundo Novak e Beredugo [11] a freqüência natural $\underline{\omega}_n$ da fundação embutida deve ser determinada por um processo de tentativa e erro a partir da eq. (7.14) abaixo, pois a mesma aparece em C_1 e S_1.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_Z}{M}} = \sqrt{\frac{Gr_0}{M}\left(C_1 + \frac{G_S}{G}\frac{p}{r_0}S_1\right)} \tag{7.14}$$

De outra forma, o que tem-se é um problema de determinação da solução de uma equação semelhante a eq. (7.4), porém na seguinte forma:

$$M\lambda^2 + c_Z(a_0)\lambda + k_Z(a_0) = 0 \tag{7.15}$$

Considerando a_0 fixo, a solução da eq. (7.15) possui a mesma forma da solução da eq. (7.4), isto é, as raízes são dadas pela eq. (7.6). Sendo a_0 dada na forma abaixo, de acordo com a eq. (2.2) e a eq. (7.10), e considerando ξ na faixa $0<\xi<1$:

$$a_0 = \frac{\omega_d r_0}{v_S} \tag{7.16}$$

a freqüência natural amortecida ω_d é extraída da parte imaginária das raízes da equação, podendo ser obtida por:

$$\omega_d = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2j} \tag{7.17}$$

com:

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,j = -\xi\omega_n + \omega_d\,j. \tag{7.17a}$$

A freqüência natural ω_n é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{(-\xi\omega_n)^2 + (\omega_d)^2} \tag{7.18}$$

A solução da eq. (7.15) pode ser obtida variando-se a_0 dentro da faixa $0 \le a_0 \le 1{,}5$ [ver Tabela (3.1)] até que o valor de ω_d dado pela expressão (7.17) coincida com o valor de ω_d dado pela expressão:

$$\omega_d = a_0 \frac{v_S}{r_0} \tag{7.19}$$

sendo esta expressão derivada da eq. (7.16).

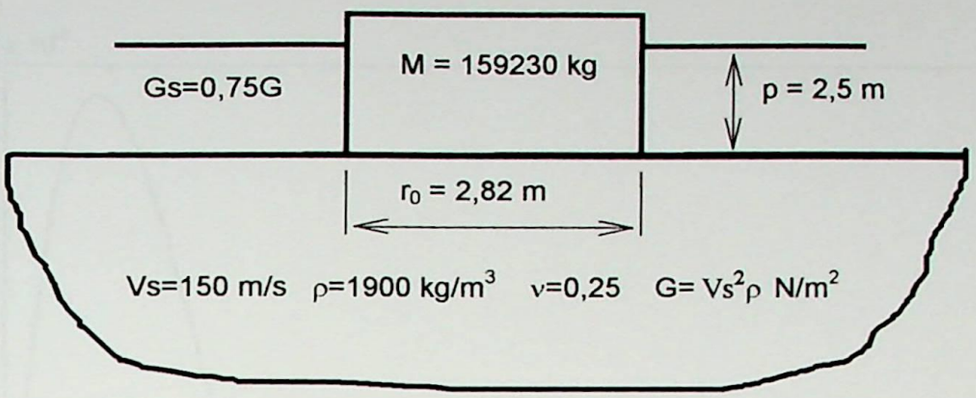


Figura 7.2: Modelo de Fundação Cilíndrica Embutida.

De outra forma podemos admitir um valor inicial para a_0, determinar o valor de ω_d na expressão (7.19), calcular as raízes da eq. (7.15), e comparar o valor de ω_d obtido [eq. (7.7)] com o adotado inicialmente. Se os valores forem iguais, ou muito próximos, a freqüência natural amortecida ω_d, a freqüência natural ω_n, e o coeficiente de amortecimento do sistema na vibração livre estão determinados, e a resposta da fundação dada pela eq. (7.10). Caso o valor da eq. (7.7) não corresponder ao valor inicialmente adotado, um novo valor deve ser escolhido para a_0, o que pode ser feito utilizando-se do valor de ω_d obtido na eq. (7.7). Este processo constitui-se em um método de tentativa e erro.

A metodologia descrita acima pode ser adequadamente posta na forma de uma rotina computacional e aplicada a uma fundação embutida. Para ilustrar o problema, uma rotina [Anexo I] foi desenvolvida utilizando-se do software *Matlab* e aplicada a uma fundação cilíndrica embutida [fig. (7.2)], estando os resultados obtidos apresentados na tabela (7.1) abaixo:

Tabela 7.1: Resultado da Análise de uma Fundação Cilíndrica Embutida.

Raízes da eq. característica	$\lambda_{1,2} = -39{,}365 \pm 52{,}0321j$
Freqüência adimensional a_0 [\]	0,9785
Freqüência amortecida ω_d [rad/s]	52,0321
Freqüência natural ω_n [rad/s]	65,2452
coef. de amortec. ξ_Z [\]	0,6033
Constante de amortec. C_Z [Ns/m]	$1{,}2536.10^7$
Constante de rigidez k_Z [N/m]	$6{,}7785.10^8$

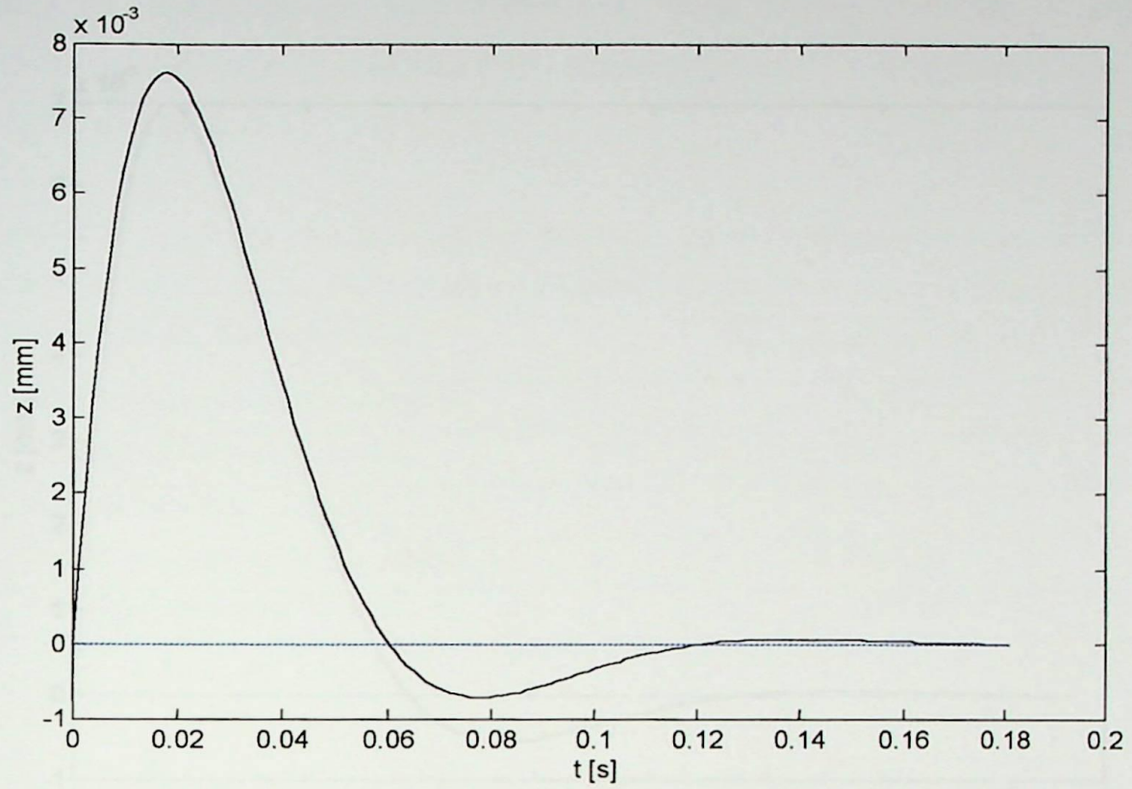


Figura 7.3: Resposta de uma fundação cilíndrica sujeita as condições iniciais indicadas em (7.21).

Logo, a resposta da fundação a determinadas condições inicias pode ser determinada. Sendo z_0 e v_{z0} respectivamente o deslocamento e velocidade iniciais, a resposta pode ser escrita na seguinte forma [149]:

$$z(t) = \sqrt{\frac{\left(\upsilon_{Z0} + \xi_Z \omega_n z_0\right)^2 + \left(z_0 \omega_d\right)^2}{\omega_d}} \operatorname{sen}(\omega_d + \Omega_z) \tag{7.20}$$

com,

$$\Omega_Z = \tan^{-1} \frac{z_0 \omega_d}{\upsilon_0 + \xi_z \omega_n z_0}$$

Considerando a fundação sujeita as seguintes condições iniciais dadas abaixo, a resposta pode ser calculada e apresentada na forma gráfica. Veja figura (7.3).

$$\text{condições iniciais} = \begin{cases} z_0 = 0; \\ \upsilon_{z0} = 1[\text{mm}/\text{s}] = 0{,}001[\text{m}/\text{s}] \end{cases} \tag{7.21}$$

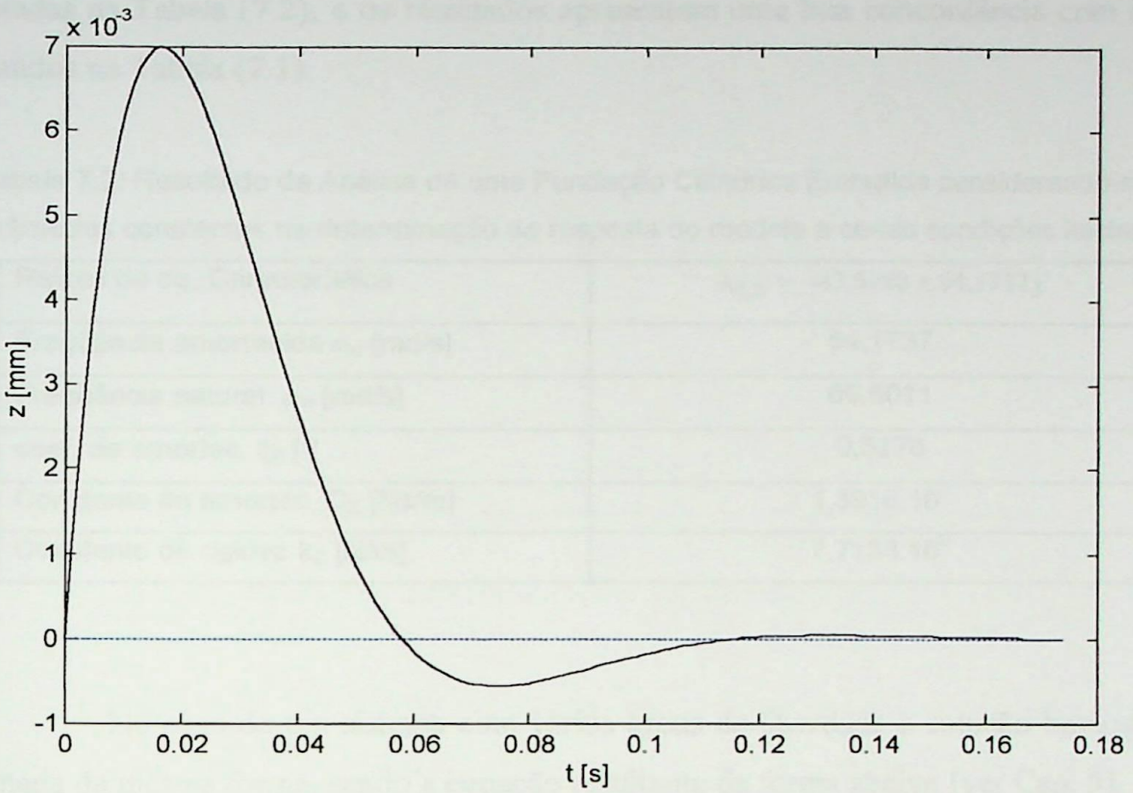


Figura 7.4: Resposta de uma fundação cilíndrica sujeita as condições iniciais indicadas em (7.21), e parâmetros de rigidez e amortecimento considerados constantes.

Como apresentado no Capítulo 3 as constantes k_Z e C_Z podem ser dadas aproximadamente por [11]:

$$k_z = Gr_o\left(\overline{C}_1 + \overline{S}_1 \frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}\right) = Gr_o\left(5{,}20 + 2{,}7\frac{G_s}{G}\frac{p}{r_o}\right) \tag{7.22}$$

$$c_z = r_0{}^2\sqrt{\rho G}\left(\overline{C}_2 + \overline{S}_2 \frac{p}{r_o}\sqrt{\frac{G_S}{G}\frac{\rho_S}{\rho}}\right) = r_0{}^2\sqrt{\rho G}\left(2{,}5 + 6{,}7\frac{p}{r_o}\sqrt{\frac{G_S}{G}\frac{\rho_S}{\rho}}\right) \tag{7.23}$$

ou pelas equações (3.18) e (3.19). Como sugerido por Novak, o parâmetro C_2 deve ser dividido por 2 [130].

Aplicando-se as expressões (7.22) e (7.23), a resposta da fundação cilíndrica as condições iniciais dadas pela expressão (7.21), pode ser determinada. Veja figura (7.4). As constantes de rigidez k_Z, amortecimento C_Z, freqüência natural ωn, freqüência natural

amortecida ω_d, coeficiente de amortecimento ξ_Z, e as raízes características $\lambda_{1,2}$, estão apresentadas na Tabela (7.2), e os resultados apresentam uma boa concordância com aqueles apresentados na Tabela (7.1).

Tabela 7.2: Resultado da Análise de uma Fundação Cilíndrica Embutida considerando-se parâmetros constantes na determinação da resposta do modelo a certas condições iniciais.

Raízes da eq. Característica	$\lambda_{1,2} = -43{,}6980 \pm 54{,}1737\,j$
Freqüência amortecida ω_d [rad/s]	54,1737
Freqüência natural ω_n [rad/s]	69,6011
coef. de amortec. ξ_Z [\]	0,6278
Constante de amortec. C_Z [Ns/m]	$1{,}3916.10^{7}$
Constante de rigidez k_Z [N/m]	$7{,}7138.10^{8}$

No caso de um sistema com vários graus de liberdade a solução homogênea é determinada da mesma forma, sendo a equação resultante da forma abaixo [ver Cap. 5],

$$\left(-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{V} = \mathbf{0} \tag{7.24}$$

Para uma solução não trivial, isto é, $\mathbf{V=0}$, o determinante da matriz $\mathbf{[-A^{-1}B-\lambda I]}$ deve ser nulo, ou melhor, a matriz deve ser singular [127, 128]. Aplicando a condição de singularidade para uma solução não trivial, devemos então escrever:

$$\left|-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \lambda\,\mathbf{I}\right| = \mathbf{0} \tag{7.25}$$

Da expressão acima resulta uma equação algébrica com uma única variável (λ). Como já mencionado, esta expressão é denominada *equação característica do sistema*, e para um sistema com dois graus de liberdade [Fig. (7.5)], é dada por:

$$\begin{aligned} &M_1M_2\lambda^4 + \left[M_1\left(c_1 + c_2\right) + M_2c_1\right]\lambda^3 + \ldots \\ &+ \left[M_1\left(k_1 + k_2\right) + M_2k_1 + c_1c_2\right]\lambda^2 + \ldots \\ &+ \left[c_1k_2 + c_2k_1\right]\lambda + k_1k_2 = 0 \end{aligned} \tag{7.26}$$

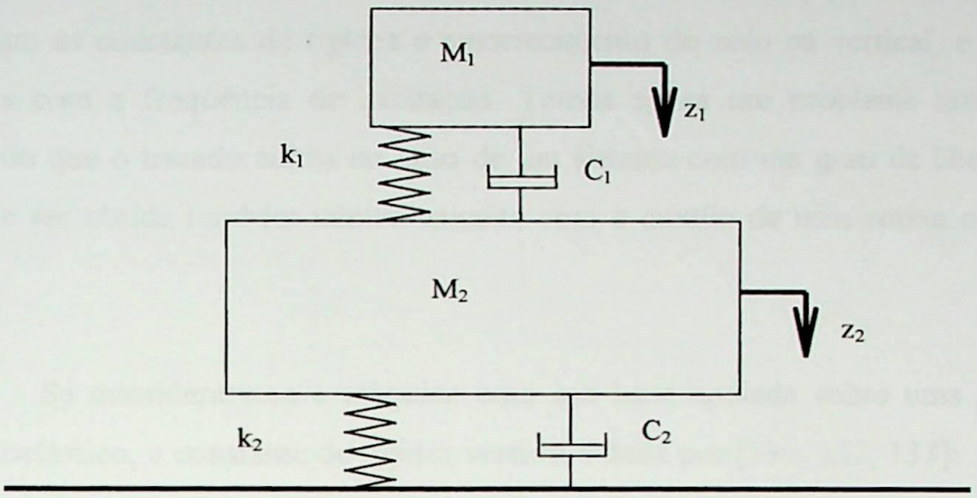


Figura 7.5: Sistema com dois graus de liberdade.

Sendo que, para o caso em questão temos quatro raízes complexas λ_1, λ_2, λ_3, e λ_4, também denominadas de autovalores, justamente por serem também solução de um problema denominado *Problema de Autovalor e Autovetor*. Sendo **S** uma matriz, **V** um vetor e λ um escalar, um problema de Autovalor Padrão é dado na forma [127, 128]:

$$\mathbf{SV} = \lambda\ \mathbf{V} \tag{7.27}$$

A solução do *Problema de Autovalor* produz um conjunto de números complexos em pares conjugados na forma:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= -\xi_i \omega_{ni} - \omega_{ni}\sqrt{1-\xi_i^2}\,j \\ \overline{\lambda}_i &= \lambda_{i+1} = -\xi_i \omega_{ni} + \omega_{ni}\sqrt{1-\xi_i^2}\,j \end{aligned} \tag{7.28}$$

onde, ω_{ni} é a freqüência natural do i-ésimo modo e ξ_i é o coeficiente de amortecimento modal associado ao i-ésimo modo. Outras formas para as raízes características ou autovalores também podem ser esperados e sua interpretação pode ser encontrada na Ref. (151).

O sistema com dois graus de liberdade é muito útil na análise de fundações de máquinas, pois em muitos casos, a máquina é suportada por elementos isoladores, ou mesmo

por uma *placa* de algum material de borracha, cortiça, ou madeira, apoiados em um bloco de concreto geralmente embutido no solo, o qual denominamos de fundação. Os parâmetros C_2 e k_2 representam as constantes de rigidez e amortecimento do solo na vertical, e sendo assim, são variáveis com a freqüência de excitação. Temos agora um problema um pouco mais complicado do que o tratado acima no caso de um sistema com um grau de liberdade, mas a solução pode ser obtida também numericamente com o auxílio de uma rotina computacional [Anexo II].

Se considerarmos a máquina com sua base apoiada sobre uma *placa* de um material viscoelástico, a constante de rigidez vertical é dada por [130, 132, 133]:

$$k_1 = \frac{E_p A_p}{d_p} \tag{7.28}$$

onde, E_p é o módulo de Young do material; A_p é a área; d_p é a altura ou espessura do material viscoelástico.

A constante de amortecimento, calculada em termos do módulo complexo de Young, é dada por:

$$c_1 = \left(\tan \delta_p\right) \frac{k_p}{\omega_p} \tag{7.29}$$

onde, δ_p é conhecido como ângulo de perda do material; k_p é a rigidez do material, e portanto, $k_p=k_1$ e dado pela eq. (7.28); ω_p é a freqüência natural dada por:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k_1}{M_1}} = \sqrt{\frac{k_p}{M_1}} \tag{7.30}$$

Considerando que a fundação cilíndrica possui as características da fig. (7.2), e que o material de apoio da máquina possui as seguintes propriedades:

E_p= 103 MPa, A_p=3,0 m2, tan δ_p=0,10 , e d_p=0,15 m

Tabela 7.3: Parâmetros de Modelo de Fundação com dois graus de liberdade [Anexos II].

k_1 [N/m]	$2{,}06.10^9$
k_2 [N/m]	$6{,}9081.10^8$
C_1 [Ns/m]	$1{,}0149.10^6$
C_2 [Ns/m]	$1{,}2574.10^7$
Freqüência amortecida ω_{d1} [rad/s]	49,3828
Freqüência amortecida ω_{d2} [rad/s]	231,2449
Freqüência natural ω_{n1} [rad/s]	57,5237
Freqüência natural ω_{n2} [rad/s]	232,4176
coef. de amortec. ξ_1 [\]	0,5129
coef. de amortec. ξ_2 [\]	0,1003

podemos determinar a resposta do sistema a certas condições iniciais [eqs (7.31)].

$$z_0 = \begin{Bmatrix} z_{10} = 0 \\ z_{20} = 0 \end{Bmatrix} \quad [m] \tag{7.31a}$$

$$\upsilon_{Z0} = \begin{Bmatrix} \upsilon_{Z10} = 1{,}0.10^{-3} \\ \upsilon_{Z20} = 0 \end{Bmatrix} \quad [m/s] \tag{7.31b}$$

A solução da equação característica do sistema, eq. (7.26), para uma massa M_1=50000 [kg], resulta nos seguintes autovalores:

$$\lambda_{1,2} = -29{,}5010 \pm 49{,}3828j \tag{7.32a}$$

$$\lambda_{3,4} = -23{,}3181 \pm 231{,}2429j \tag{7.32b}$$

A Tabela (7.3) reproduz as constantes de rigidez e amortecimento obtidas, bem como as freqüências e coeficientes de amortecimentos modais. A resposta do sistema, é então dada pelas expressões abaixo, e aparecem representadas nas figuras (7.6) e (7.7).

$$z_1(t) = Z_{11}e^{-\xi_1 t}\,\mathrm{sen}(\omega_{d1}t + \Omega_{11}) + Z_{12}e^{-\xi_2 t}\,\mathrm{sen}(\omega_{d2}t + \Omega_{12}) \tag{7.33a}$$

$$z_2(t) = Z_{21}e^{-\xi_1 t}\sin(\omega_{d1}t + \Omega_{21}) + Z_{22}e^{-\xi_2 t}\,\mathrm{sen}(\omega_{d2}t + \Omega_{22}) \tag{7.33b}$$

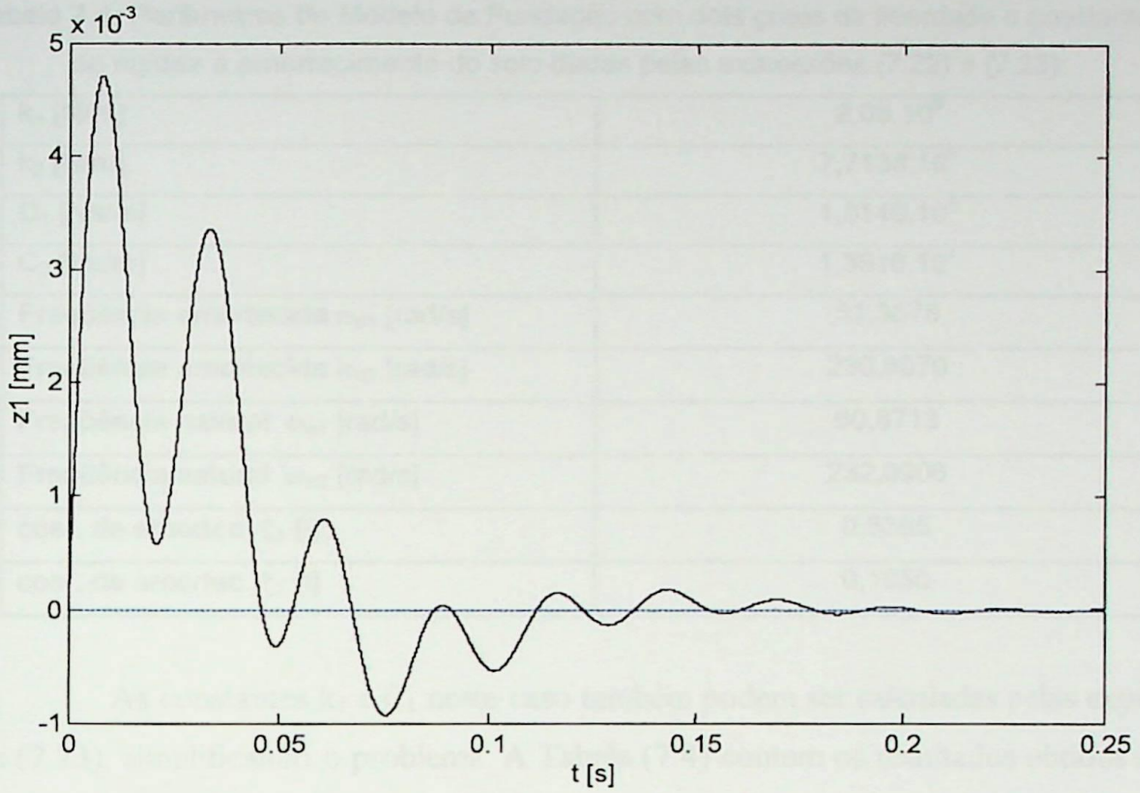


Figura 7.6: Resposta no tempo da coordenada z_1 do modelo de uma fundação.

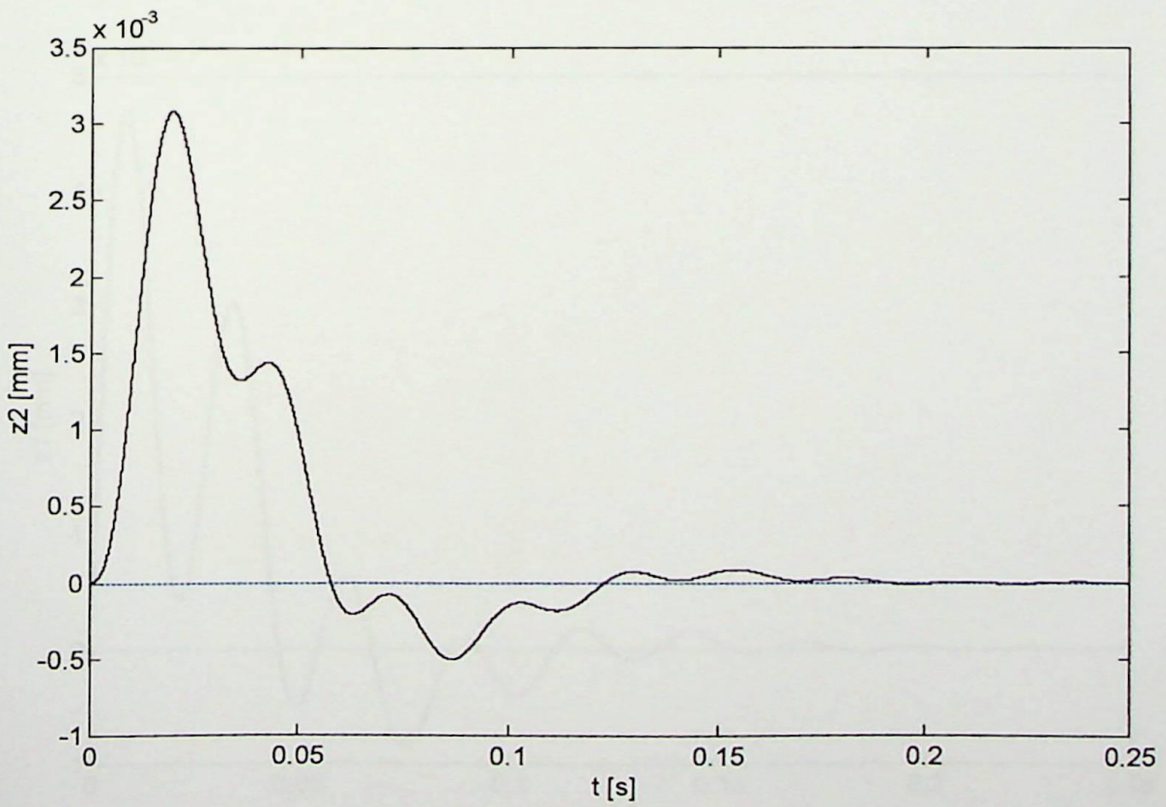


Figura 7.7: Resposta no tempo da coordenada z_2 do modelo de uma fundação.

Tabela 7.4: Parâmetros de Modelo de Fundação com dois graus de liberdade e constantes de rigidez e amortecimento do solo dadas pelas expressões (7.22) e (7.23).

k_1 [N/m]	$2{,}06.10^9$
k_2 [N/m]	$7{,}7138.10^8$
C_1 [Ns/m]	$1{,}0149.10^6$
C_2 [Ns/m]	$1{,}3916.10^7$
Freqüência amortecida ω_{d1} [rad/s]	51,3678
Freqüência amortecida ω_{d2} [rad/s]	230,8070
Freqüência natural ω_{n1} [rad/s]	60,8713
Freqüência natural ω_{n2} [rad/s]	232,0906
coef. de amortec. ξ_1 [\]	0,5365
coef. de amortec. ξ_2 [\]	0,1050

As constantes k_1 e C_1 neste caso também podem ser calculadas pelas expressões (7.22) e (7.23), simplificando o problema. A Tabela (7.4) contem os resultados obtidos com k_1 e C_1 , calculados pelas expressões (7.22) e (7.23), e a resposta no tempo apresentada nas figuras (7.8) e (7.9).

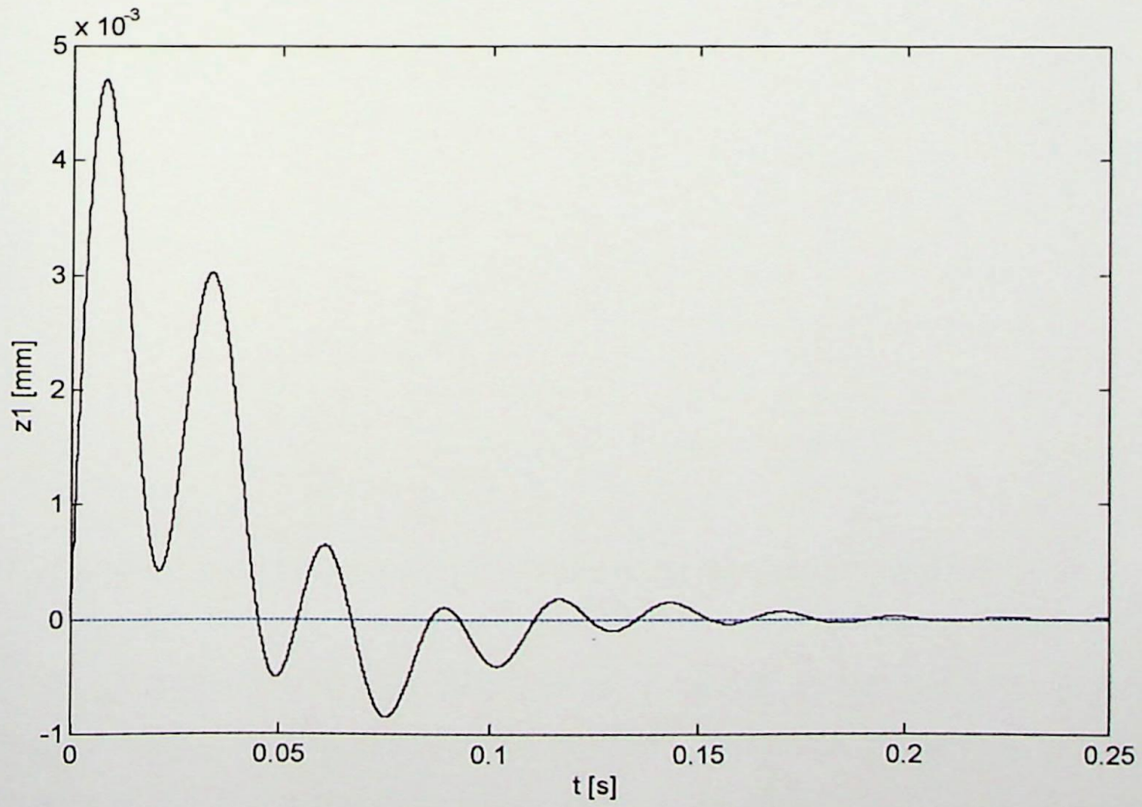


Figura 7.8: Resposta no tempo da coordenada z_1 do modelo de uma fundação

considerando os parâmetros constantes no modelo.

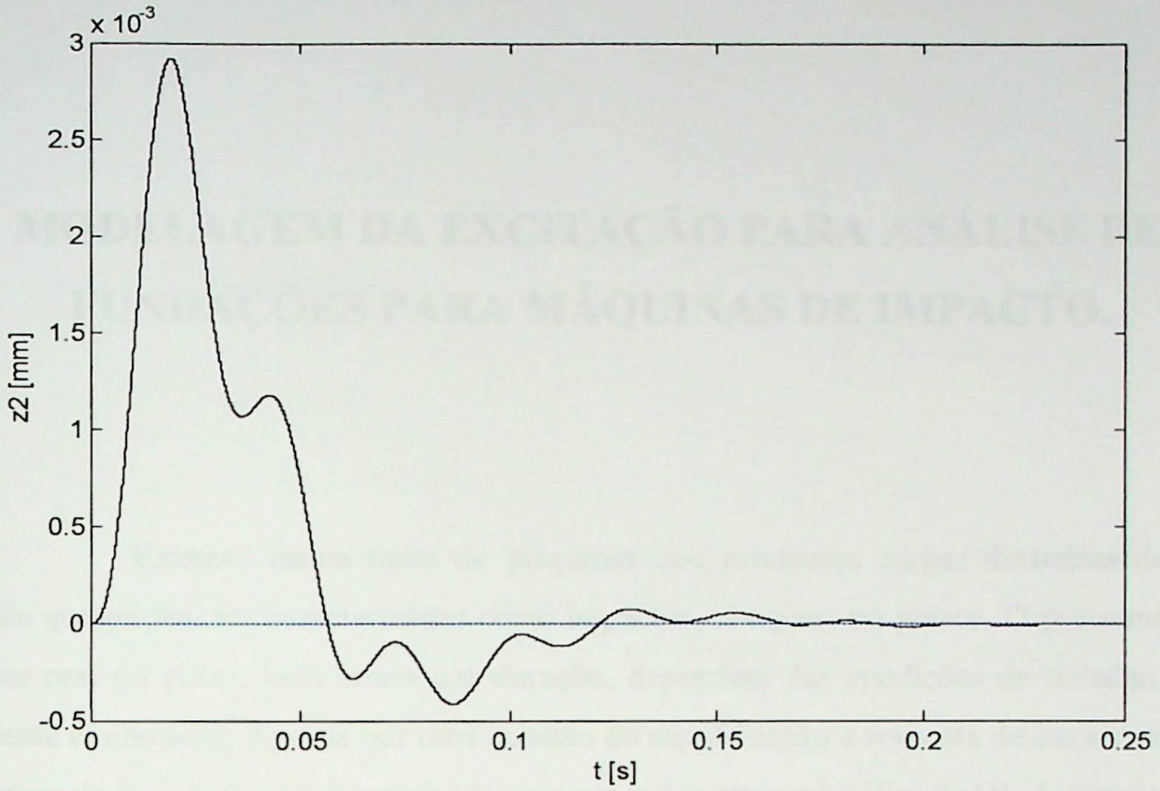


Figura 7.9: Resposta no tempo da coordenada z_2 do modelo de uma fundação considerando os parâmetros constantes no modelo.

Capítulo 8

MODELAGEM DA EXCITAÇÃO PARA ANÁLISE DE FUNDAÇÕES PARA MÁQUINAS DE IMPACTO.

Existem vários tipos de máquinas que produzem cargas dinâmicas de curta duração que podem ser caracterizadas como impactos, choques, ou pulsos. O problema é que a forma real do pulso, bem como sua duração, dependem das condições de trabalho, e são raramente conhecidas. Apenas por uma questão de simplificação a resposta de um sistema com dois graus de liberdade será determinada para um pulso retangular [fig. (8.1)]. A resposta a um carregamento pulsante periódico (trem de pulsos) também será analisada.

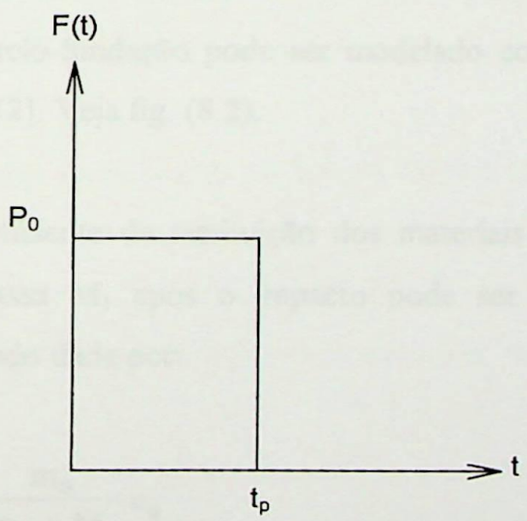


Figura 8.1: Modelo de uma excitação transiente dada por um pulso retangular.

Martelos são típicas máquinas de impactos usadas para uma variedade de operações, e consistem, basicamente, de uma estrutura, uma massa de queda m_0, a bigorna, e a fundação [Fig. (8.2)]. O impacto é devido a colisão da massa m_0 com a massa da bigorna M_1. No momento do impacto, a velocidade da massa m_0, é conhecida e dada por:

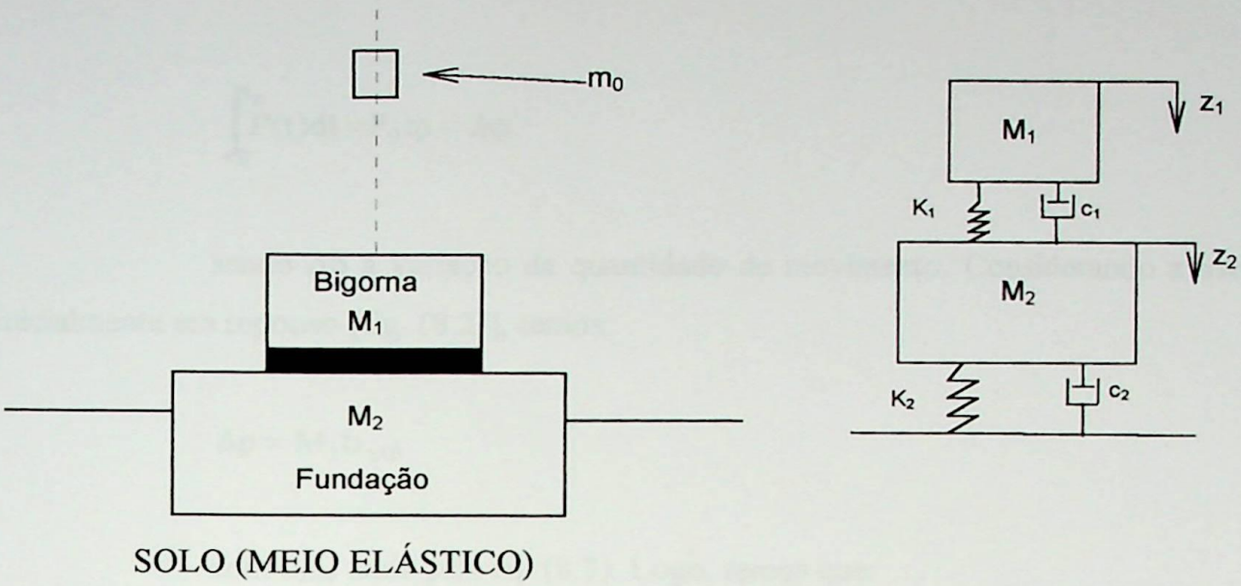


Figura 8.2: Simplificação de uma máquina do tipo Martelo montada em sua Fundação apoiada em um meio elástico e seu modelo massa-mola-amortecedor.

$$c_0 = \eta\sqrt{2gh_q} \tag{8.1}$$

onde, h_q é altura de queda; η é a eficiência de queda, sendo: $0{,}65 \leq \eta \leq 1$ [32].

O sistema martelo-fundação pode ser modelado como um sistema com dois graus de liberdade [32, 130, 132]. Veja fig. (8.2).

Sendo ε o coeficiente de restituição dos materiais envolvidos no choque, a velocidade inicial υ_{Z10} da massa M_1 após o impacto pode ser determinada pela Lei da Conservação do Momento, sendo dada por:

$$\upsilon_{Z10} = (1+\varepsilon)\frac{m_0}{m_0 + M_1}c_0 \tag{8.3}$$

O coeficiente de restituição se encontra na faixa de $0 \leq \eta \leq 1$, sendo $\eta = 0{,}5$ o valor tipicamente empregado em projetos [32, 130, 132]. A velocidade υ_{Z20} é nula inicialmente, bem como os deslocamentos z_{10} e z_{20}.

O impulso de uma força P_0 atuando por um tempo t_p é dado por:

$$\int_0^{t_p} P(t)dt = P_0 tp = \Delta p \tag{8.4}$$

sendo Δp a variação da quantidade de movimento. Considerando a massa M_1 inicialmente em repouso [fig. (8.2)], temos:

$$\Delta p = M_1 \upsilon_{z10} \tag{8.5}$$

com υ_{Z10} dada pela eq. (8.3). Logo, temos que:

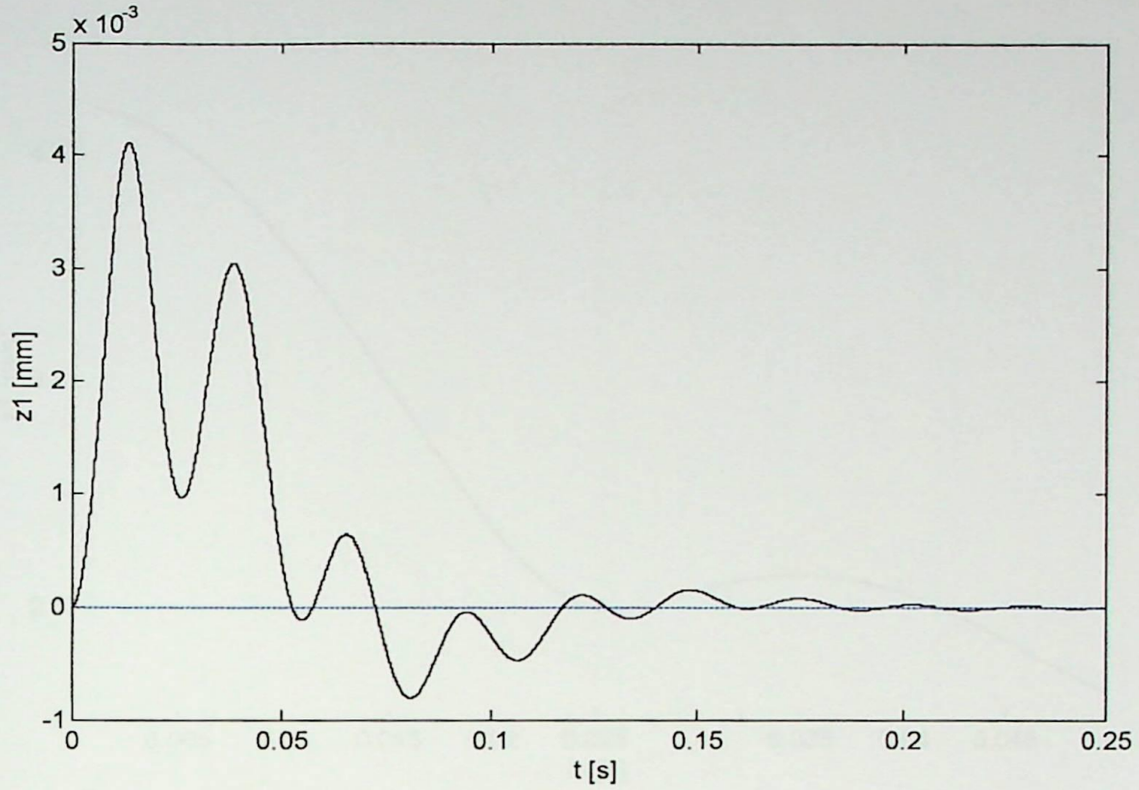
$$P_0 = \frac{M_1 \upsilon_{z10}}{t_p} \tag{8.6}$$

Para martelos, a duração t_p do pulso é da ordem de 0.001 a 0.02 [s] [132].

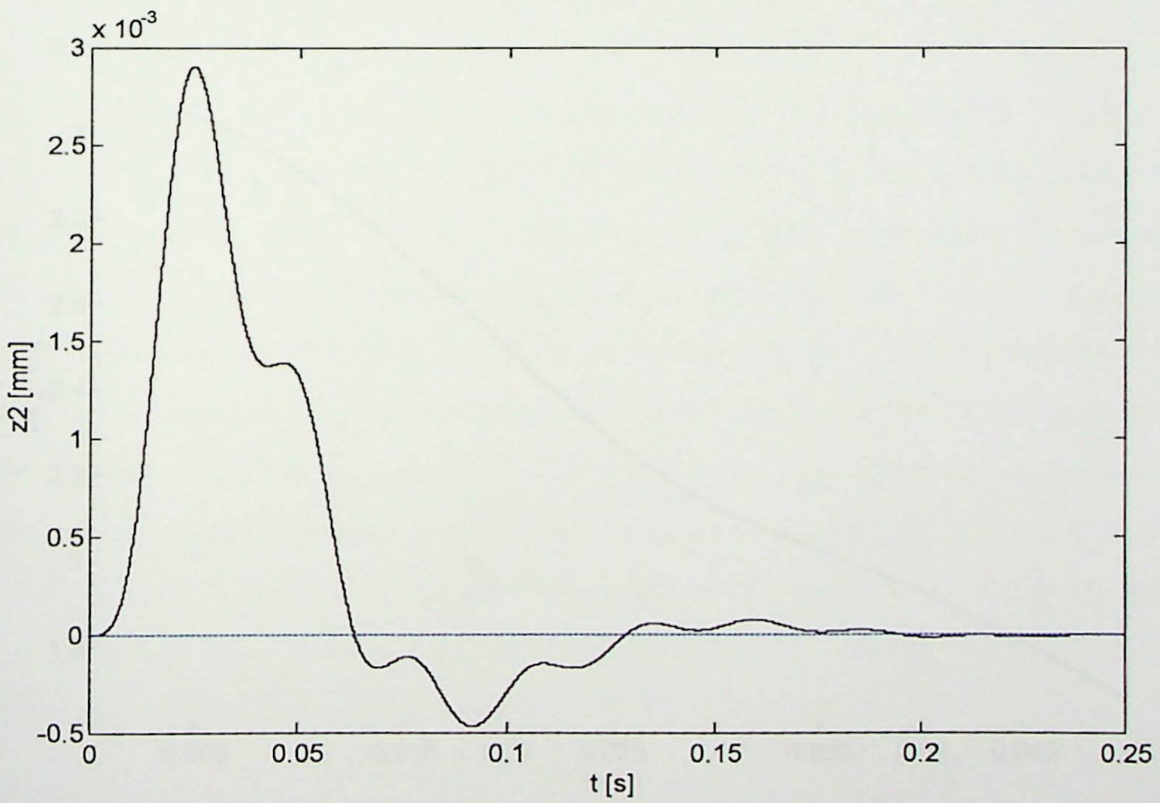
A resposta de um sistema com vários graus de liberdade a um pulso pode ser determinada pelo método de Foss apresentado no capítulo 5 [Anexo IV]. A resposta de um sistema com apenas um grau de liberdade foi tratado no capítulo 6.

As figs. (8.3) são as respostas no tempo do sistema a um pulso de duração tp=0,01 (s). O sistema analisado é o mesmo sistema com dois graus de liberdade do final do capítulo 7, e a resposta do sistema [figs. (7.6) e (7.7)] as condições iniciais dadas pelas expressões (7.31a) e (7.32b) pode ser comparada a resposta obtida quando o sistema é excitado por um pulso.

A variação da resposta do sistema a duração t_p do pulso também pode ser analisada. As figuras (8.4) apresentam a variação da resposta do sistema para a duração do pulso na faixa de $0,01 \leq t_p \leq 0,05$ (s). É possível observar-se a tendência da resposta para t_p cada vez mais próximo a zero.

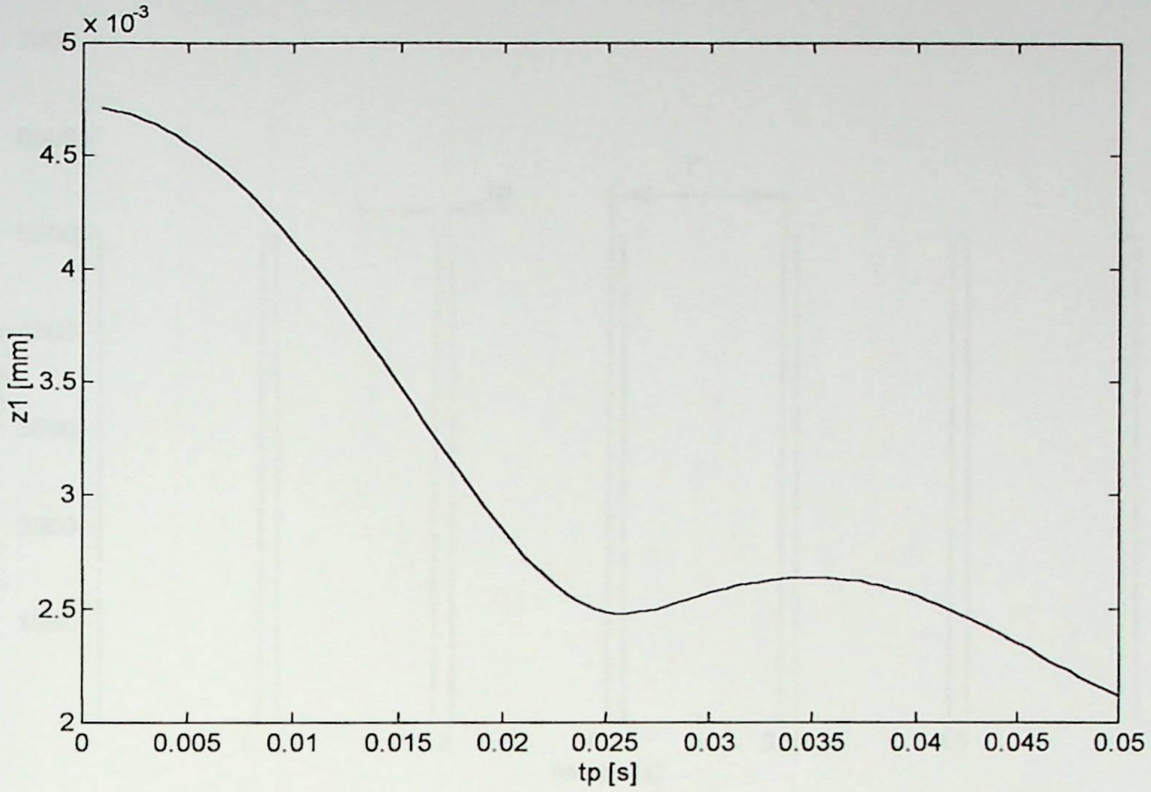


(a)

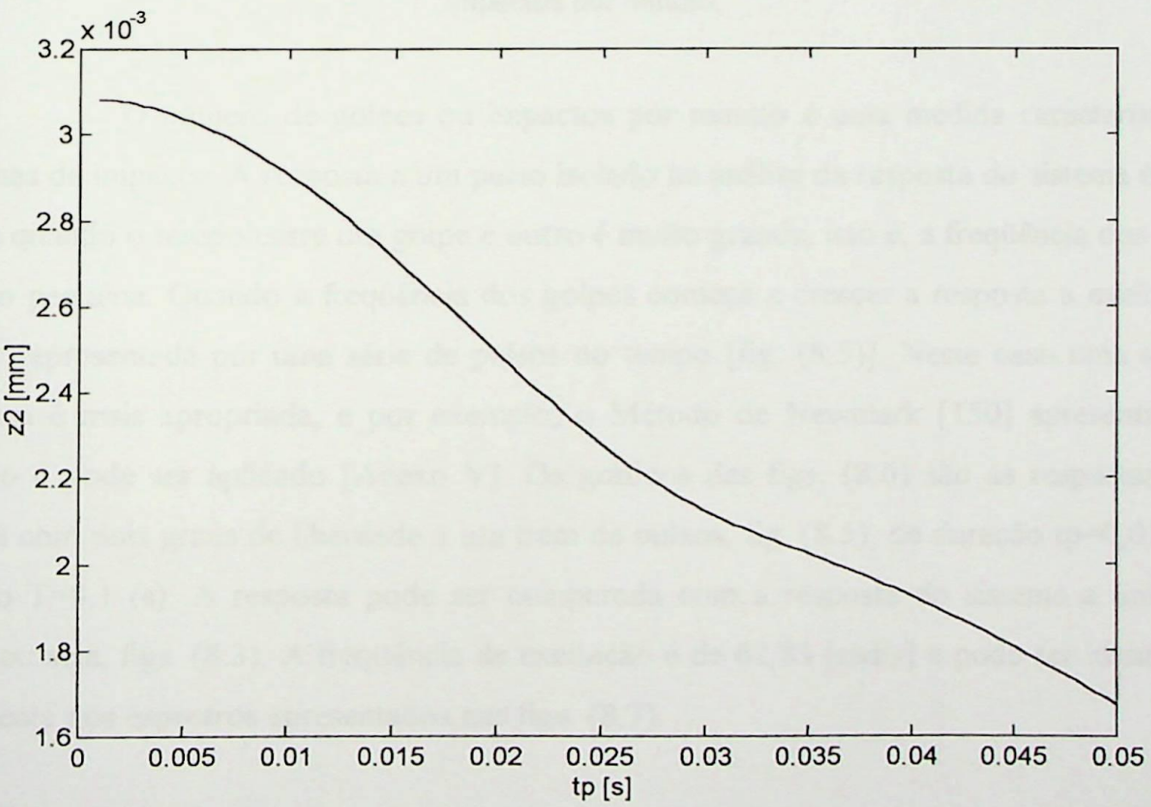


(b)

Figura 8.3: Resposta de um sistema com dois graus de liberdade a um pulso (50 N.s).



(a)



(b)

Figura 8.4: Variação da Resposta de um sistema com dois graus de liberdade a um pulso (50 N.s) de duração tp variável.

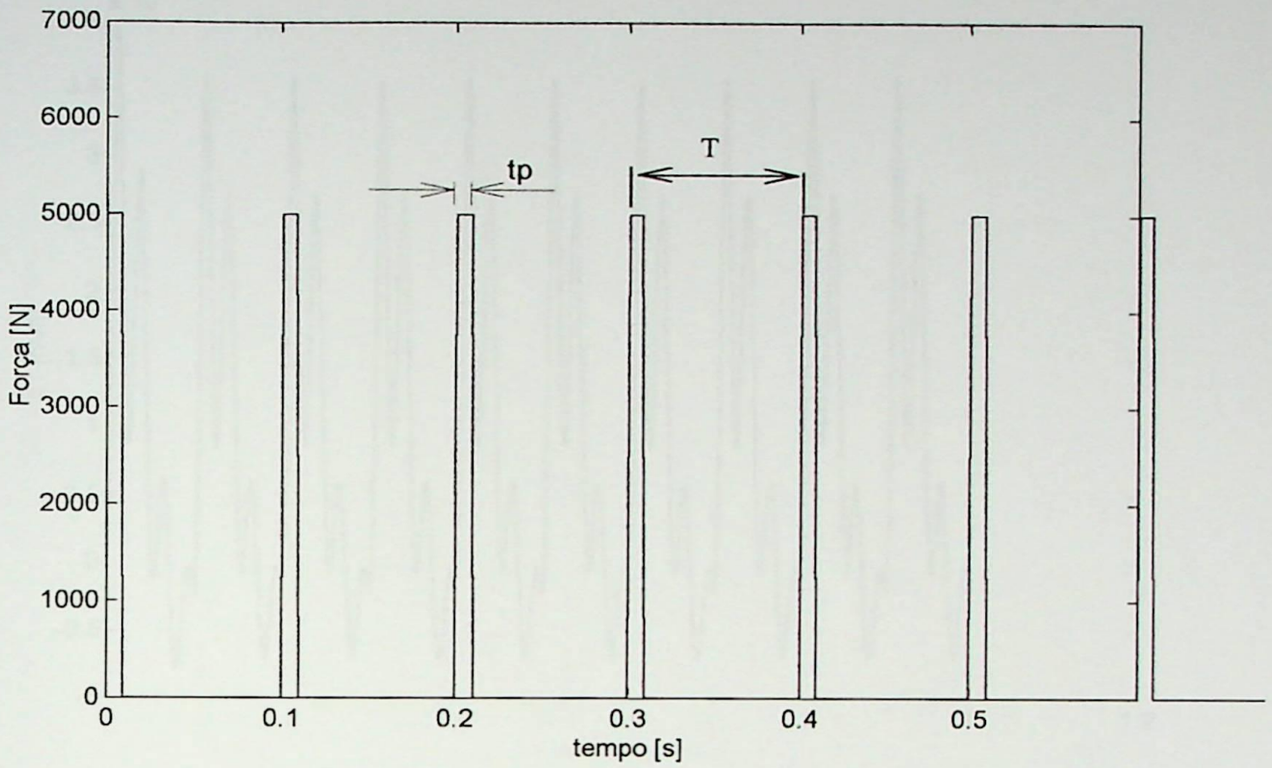
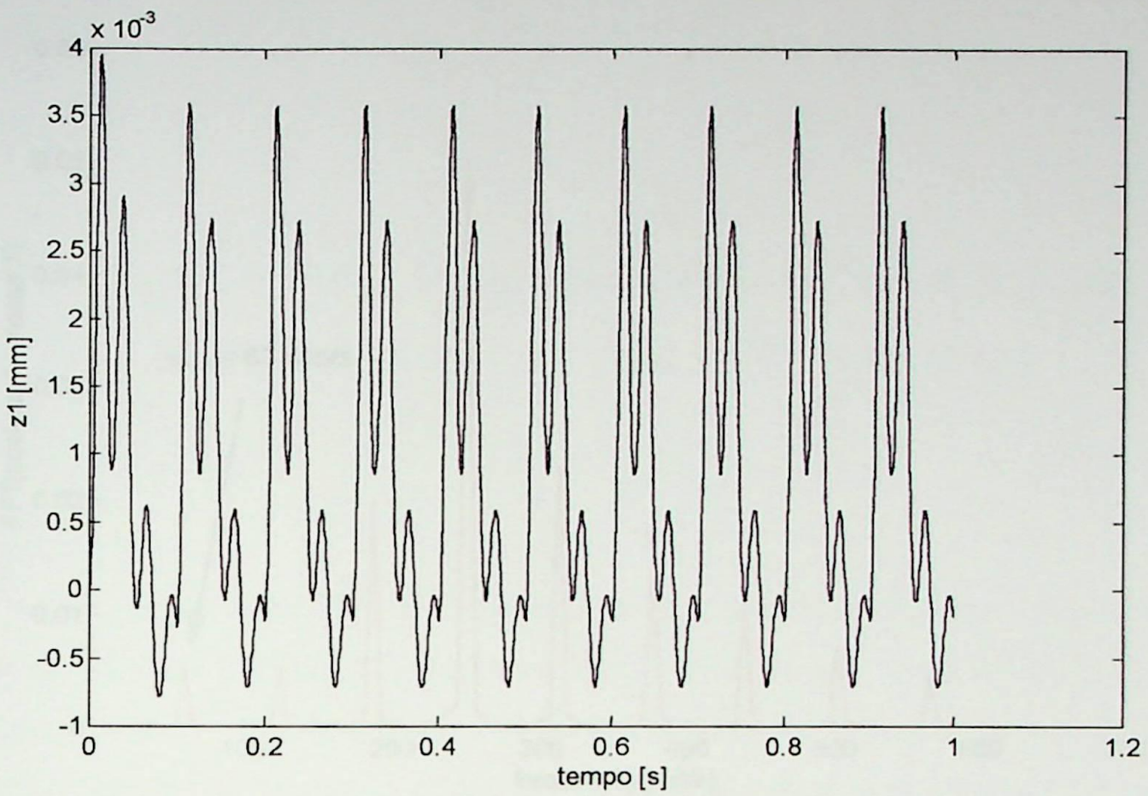
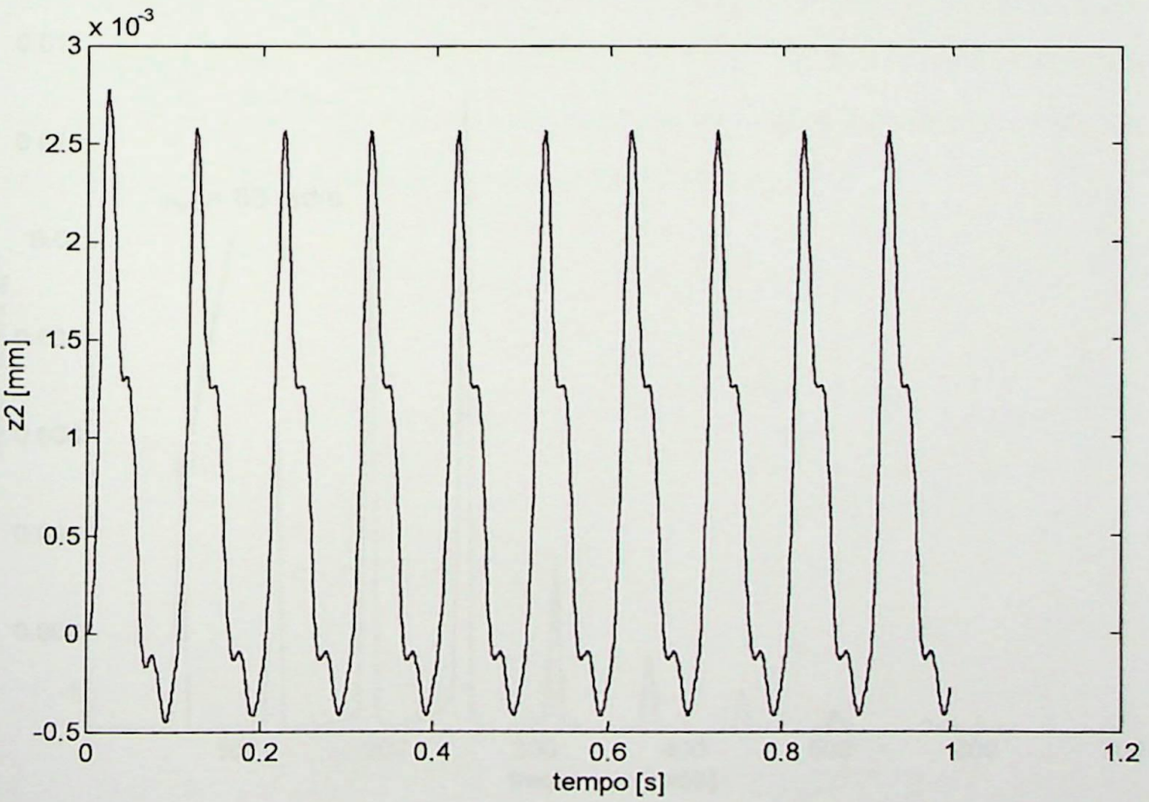


Figura 8.5: Modelagem da excitação de um sistema submetido a vários impactos por minuto.

O número de golpes ou impactos por minuto é uma medida característica de máquinas de impacto. A resposta a um pulso isolado na análise da resposta do sistema é valida apenas quando o tempo entre um golpe e outro é muito grande, isto é, a freqüência dos golpes é muito pequena. Quando a freqüência dos golpes começa a crescer a resposta a excitação é melhor representada por uma série de pulsos no tempo [fig. (8.5)]. Neste caso uma solução numérica é mais apropriada, e por exemplo, o Método de Newmark [150] apresentado no capítulo 6 pode ser aplicado [Anexo V]. Os gráficos das figs. (8.6) são as respostas a um sistema com dois graus de liberdade a um trem de pulsos, fig. (8.5), de duração tp=0,01 (s), e período T=0,1 (s). A resposta pode ser comparada com a resposta do sistema a um único pulso, ou seja, figs. (8.3). A freqüência de excitação é de 62,83 [rad/s] e pode ser identificada claramente nos espectros apresentados nas figs. (8.7).

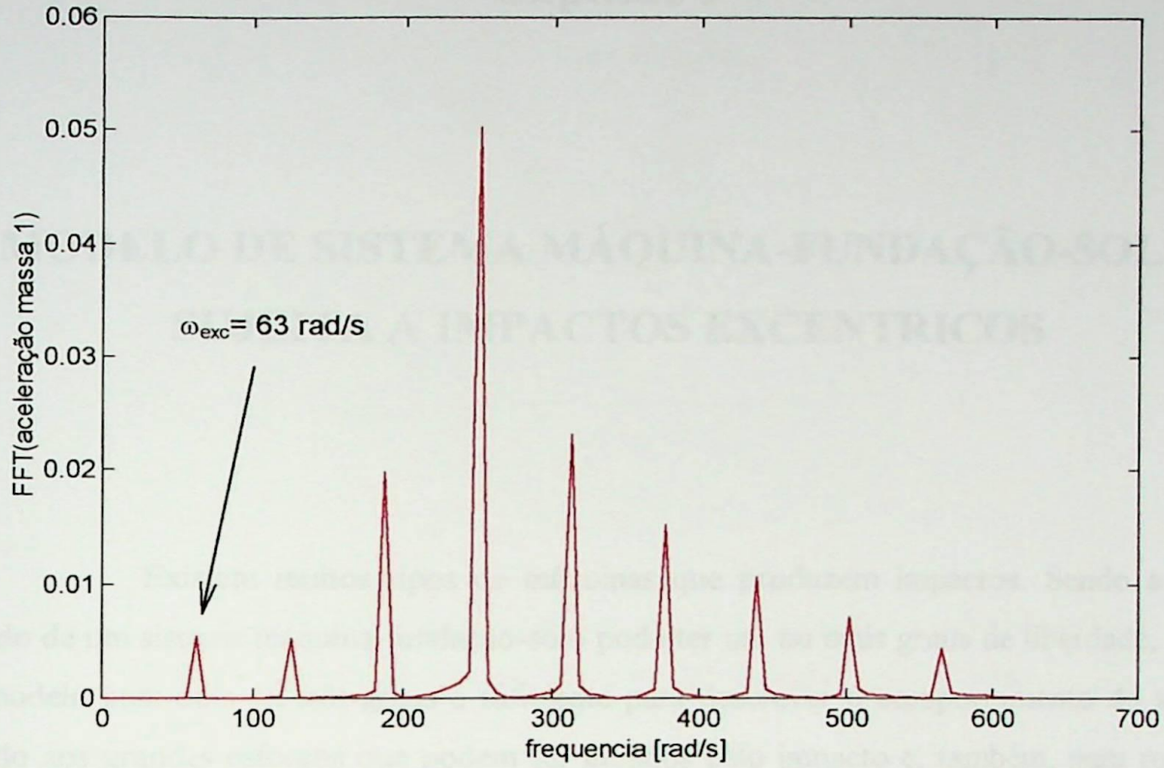


(a)

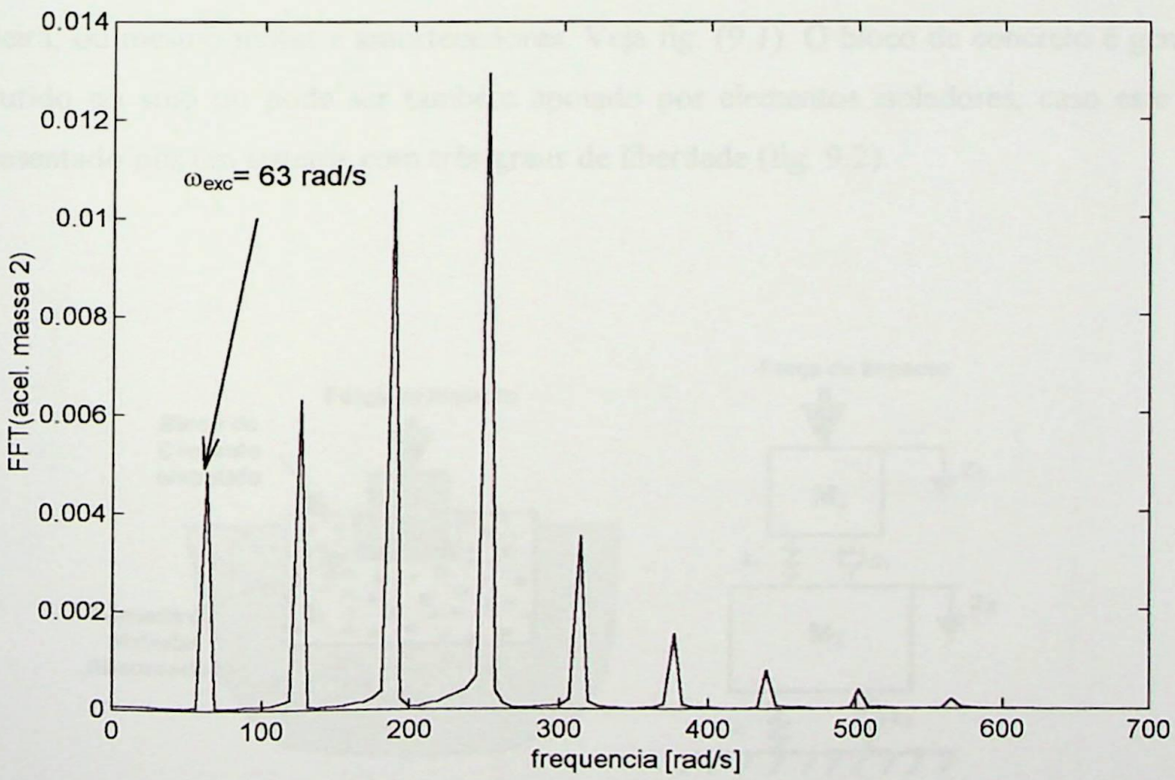


(b)

Figura 8.6: Resposta de um sistema com dois graus de liberdade a um trem de pulsos.



(a)



(b)

Figura 8.7: Espectro de Freqüências de um sistema com dois graus de liberdade excitado por um trem de pulsos

Capítulo 9

MODELO DE SISTEMA MÁQUINA-FUNDAÇÃO-SOLO SUJEITA A IMPACTOS EXCENTRICOS

Existem muitos tipos de máquinas que produzem impactos. Sendo assim, o modelo de um sistema máquina-fundação-solo pode ter um ou mais graus de liberdade, porém, um modelo com dois ou três graus é suficiente para descrever o comportamento do sistema. Devido aos grandes esforços que podem ser gerados pelo impacto e, também, para reduzir a tensão no concreto do bloco inercial, a parte do equipamento que sofre ou recebe os impactos, geralmente denominada de bigorna, deve ser isolada por uma camada de material viscoelástico, madeira, ou mesmo molas e amortecedores. Veja fig. (9.1). O bloco de concreto é geralmente embutido no solo ou pode ser também apoiado por elementos isoladores, caso este melhor representado por um sistema com três graus de liberdade (fig. 9.2).

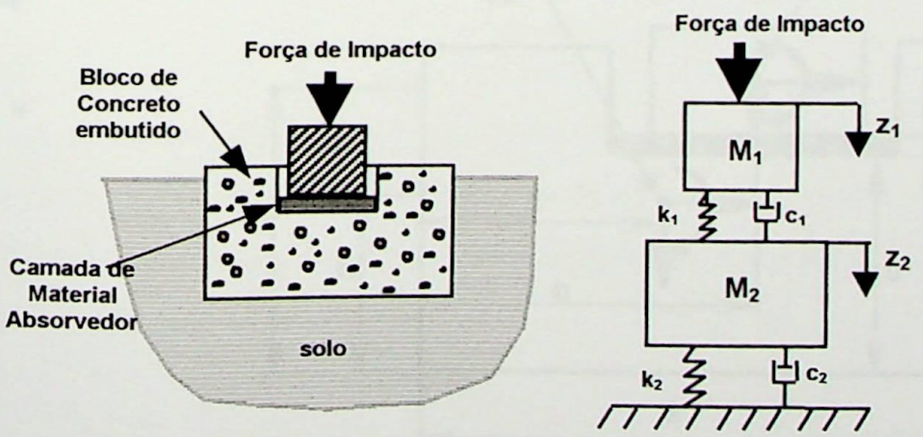


Figura 9.1: Modelo de um sistema máquina-fundação-solo com dois graus de liberdade.

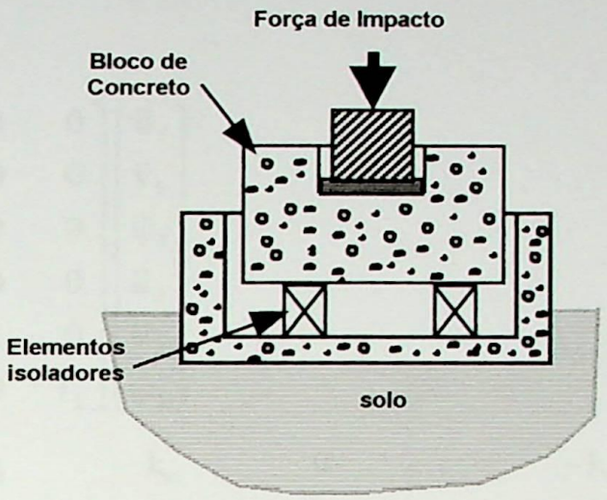


Figura 9.2: Sistema máquina-fundação-solo cujo modelo deve ser representado por um sistema massa-mola-amortecedor com três graus de liberdade.

Se o impacto é excêntrico, ou o sistema não é perfeitamente simétrico, o modelo deve possuir seis ou mais graus de liberdade para levar em conta os modos de deslizamento e balanço da fundação. Veja a fig. (9.3) dada abaixo.

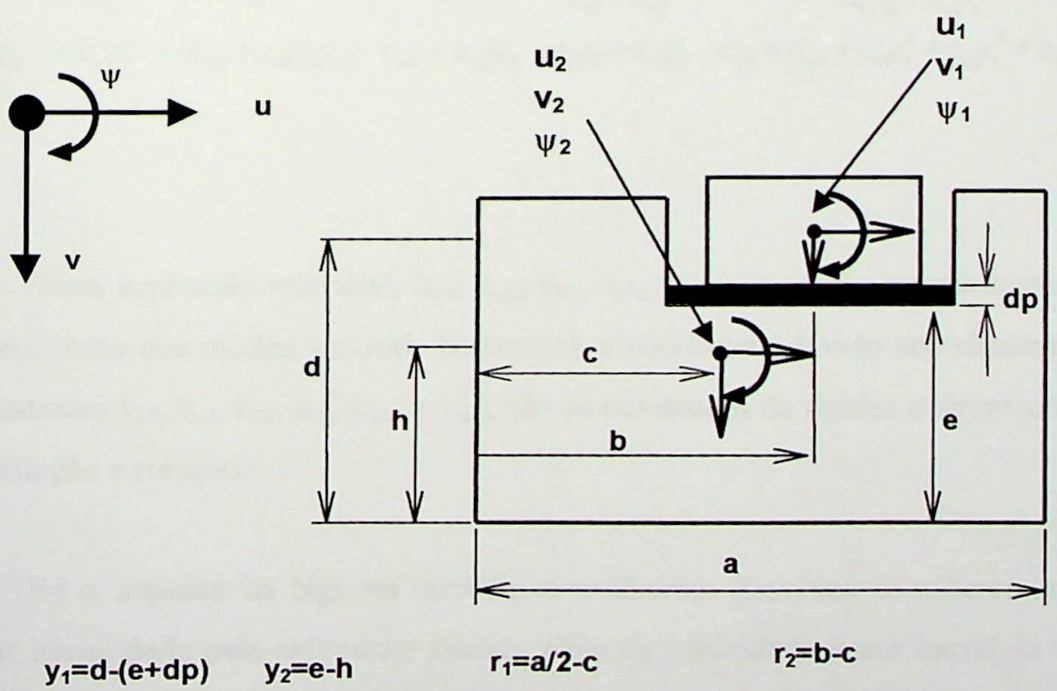


Figura 9.3: Esquema de sistema com seis graus de liberdade devido a uma excentricidade das massas.

A equação do movimento do sistema da fig. (9.3) é dado a seguir em sua forma matricial.

$$
\begin{bmatrix}
m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{\psi}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\psi}_2
\end{Bmatrix} +
$$

$$
\begin{bmatrix}
k_{u1} & 0 & -k_{u1}y_1 & -k_{u1} & 0 & -k_{u1}y_2 \\
0 & k_{v1} & 0 & 0 & -k_{v1} & -k_{v1}r_2 \\
-k_{u1}y_1 & 0 & k_{\psi 1}+k_{u1}y_1^2 & k_{u1}y_1 & 0 & -k_{\psi 1}+k_{u1}y_1y_2 \\
-k_{u1} & 0 & k_{u1}y_1 & k_{u1}+k_{u2} & 0 & k_{u\psi}+k_{u1}y_2 \\
0 & -k_{v1} & 0 & 0 & k_{v1}+k_{v2} & k_{v1}r_2+k_{v2}r_1 \\
-k_{u1}y_2 & -k_{v1}r_2 & -k_{\psi 1}+k_{u1}y_1y_2 & k_{u\psi}+k_{u1}y_2 & k_{v1}r_2+k_{v2}r_1 & k_{\psi 1}+k_{\psi 2}+k_{v1}r_2^2+k_{v2}r_1^2+k_{u1}y_2^2
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
u_1 \\ v_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \psi_2
\end{Bmatrix} +
$$

$$
\begin{bmatrix}
c_{u1} & 0 & -c_{u1}y_1 & -c_{u1} & 0 & -c_{u1}y_2 \\
0 & c_{v1} & 0 & 0 & -c_{v1} & -c_{v1}r_2 \\
-c_{u1}y_1 & 0 & c_{\psi 1}+c_{u1}y_1^2 & c_{u1}y_1 & 0 & -c_{\psi 1}+c_{u1}y_1y_2 \\
-c_{u1} & 0 & c_{u1}y_1 & c_{u1}+c_{u2} & 0 & c_{u\psi}+c_{u1}y_2 \\
0 & -c_{v1} & 0 & 0 & c_{v1}+c_{v2} & c_{v1}r_2+c_{v2}r_1 \\
-c_{u1}y_2 & -c_{v1}r_2 & -c_{\psi 1}+c_{u1}y_1y_2 & c_{u\psi}+c_{u1}y_2 & c_{v1}r_2+c_{v2}r_1 & c_{\psi 1}+c_{\psi 2}+c_{v1}r_2^2+c_{v2}r_1^2+c_{u1}y_2^2
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\psi}_2
\end{Bmatrix} = \{F\}
$$

(9.1)

Nesta expressão matricial, k_{u1}, c_{u1}, k_{v1}, c_{v1}, $k_{\psi 1}$, e $c_{\psi 1}$, são as constantes de rigidez e amortecimento nos modos vertical, horizontal, e rotacional, devido aos elementos isoladores. As constantes k_{u2}, c_{u2}, k_{v2}, c_{v2}, $k_{\psi 2}$, e $c_{\psi 2}$, são as constantes de rigidez e amortecimento do solo na translação e rotação.

Se o impacto na bigorna também é excêntrico devemos considerar uma velocidade angular inicial dada pela expressão abaixo, além da velocidade linear inicial, já comentada no capítulo anterior:

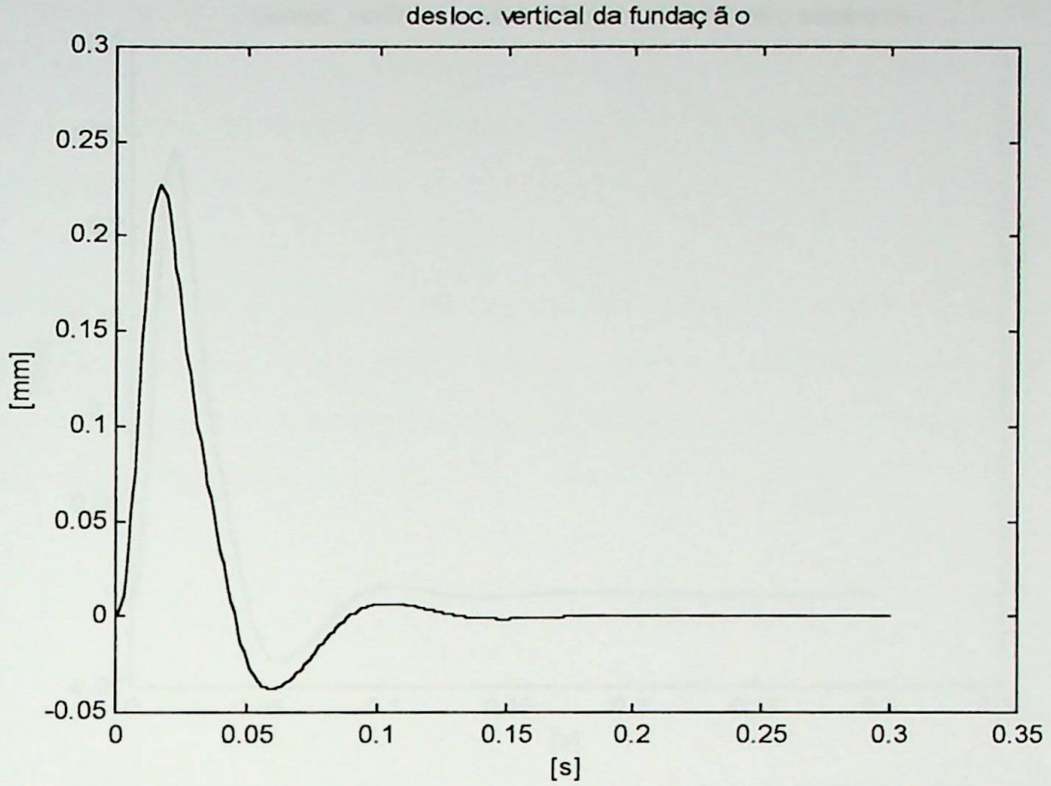


Figura 9.4: Vibração na direção vertical de uma fundação perfeitamente simétrica.

$$\dot{\psi}_{10} = (1+\varepsilon)\frac{\mu}{r_G^2\left(1+\frac{M_1}{m_0}\right)+\mu^2} \tag{9.2}$$

Na expressão acima, μ é a excentricidade do impacto, e r_G é o raio de giração da massa M_1.

Comparando os resultados obtidos a partir de um modelo perfeitamente simétrico, com os resultados obtidos para um sistema não simétrico, ou que sofre impactos excêntricos, podemos concluir que o nível da vibração na direção vertical de um sistema perfeitamente simétrico é um pouco inferior a de um não simétrico, mas principalmente que, impactos em sistemas não simétricos, ou mesmo sistemas simétricos que recebem impactos excêntricos, ficam sujeitos a vibrações de rotação, ditas de balanço, e vibrações horizontais, ditas de deslizamentos, sendo que nestes modos, o coeficiente de amortecimento, se apresenta bem inferior ao do modo vertical, precisando assim, as vibrações, de um tempo maior para se extinguirem totalmente. Este fato pode levar o sistema a apresentar altos níveis de vibração, considerando o caso de máquinas onde o número de impactos na unidade de tempo se eleva muito.

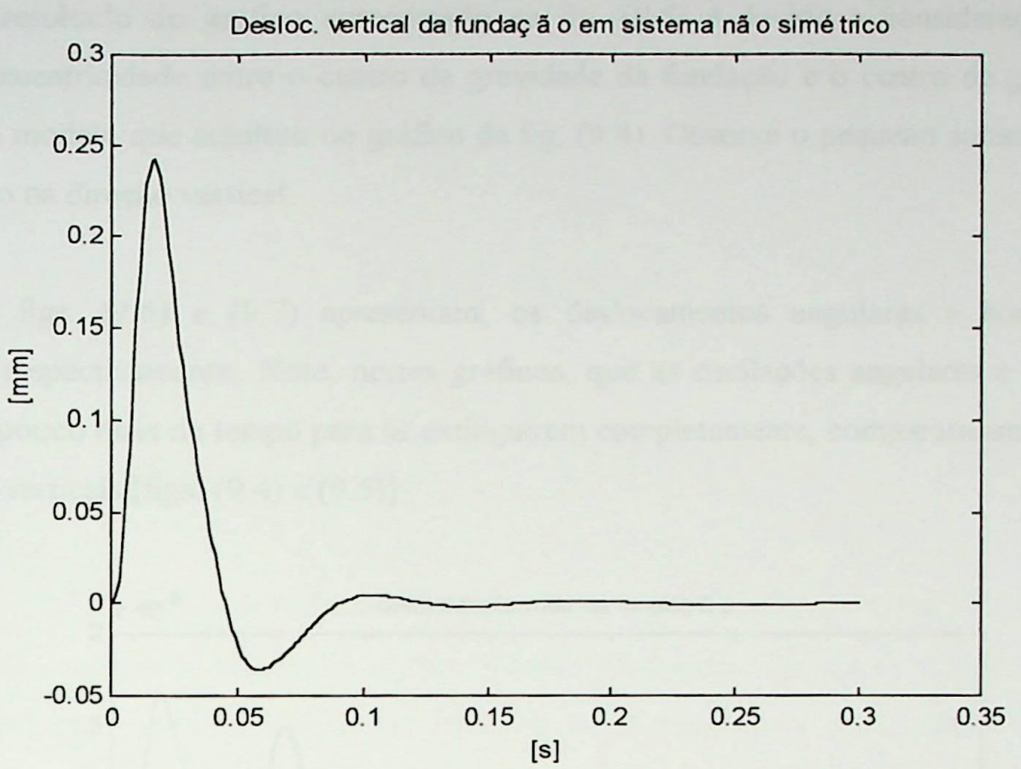


Figura 9.5: Vibração na direção vertical de uma fundação não perfeitamente simétrica.

As figuras seguintes foram extraídas de algumas simulações utilizando o programa apresentado no anexo VI. Este programa foi desenvolvido considerando-se o modelo apresentado na fig. (9.3) e eq. (9.1).

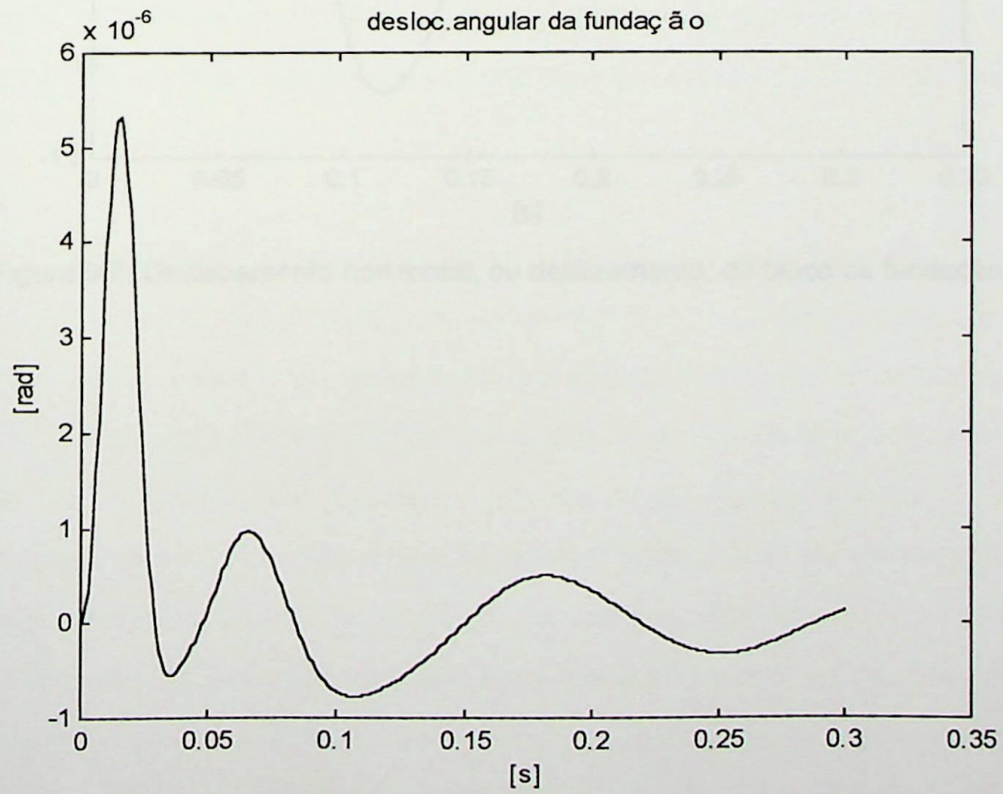


Figura 9.6: Deslocamento angular do bloco da fundação.

O resultado do gráfico apresentado na fig. (9.5) é devido a consideração de uma pequena excentricidade entre o centro de gravidade da fundação e o centro de gravidade da bigorna no modelo que resultou no gráfico da fig. (9.4). Observe o pequeno aumento do nível de vibração na direção vertical.

As figs. (9.6) e (9.7) apresentam, os deslocamentos angulares e horizontais da fundação, respectivamente. Note, nestes gráficos, que as oscilações angulares e horizontais, levam um pouco mais de tempo para se extinguirem completamente, comparativamente com as oscilações verticais [figs. (9.4) e (9.5)]

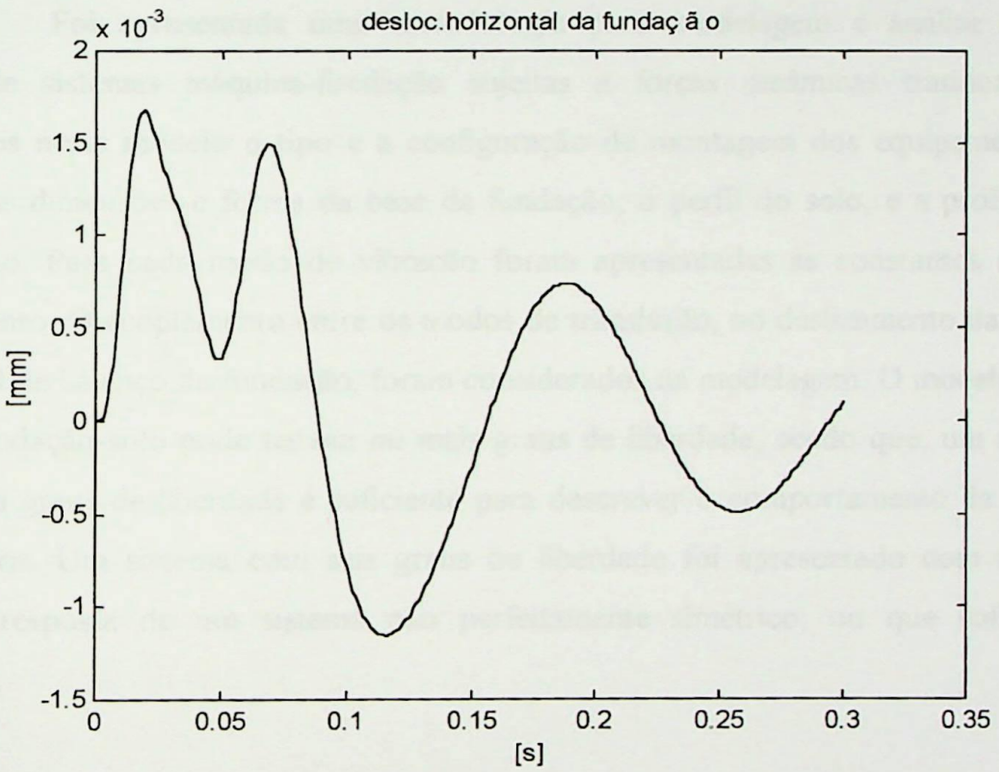


Figura 9.7: Deslocamento horizontal, ou deslizamento, do bloco da fundação.

Capítulo 10

CONCLUSÕES

10.1 - Comentários e Conclusões

Foi apresentada uma metodologia para modelagem e análise da resposta dinâmica de sistemas máquina-fundação sujeitas a forças dinâmicas transientes. Foram considerados neste modelo o tipo e a configuração de montagem dos equipamentos na sua fundação, as dimensões e forma da base da fundação, o perfil do solo, e a profundidade de embutimento. Para cada modo de vibração foram apresentadas as constantes de rigidez e amortecimento. O acoplamento entre os modos de translação, no deslizamento da fundação, e o rotacional de balanço da fundação, foram considerados na modelagem. O modelo do sistema máquina-fundação-solo pode ter um ou mais graus de liberdade, sendo que, um modelo com dois ou três graus de liberdade é suficiente para descrever o comportamento da maioria dos equipamentos. Um sistema com seis graus de liberdade foi apresentado com o intuito de analisar a resposta de um sistema não perfeitamente simétrico, ou que sofre impactos excêntricos.

Com relação aos parâmetros dinâmicos do solo, os mesmos foram apresentados, nos capítulos citados no parágrafo anterior, em função da freqüência adimensional a_o , dada pela eq. (2.2). Parâmetros constantes podem ser adotados no modelo, porém, dentro de uma certa faixa, podendo ser ajustados de acordo com a faixa de interesse, o que depende da freqüência de excitação. No caso em que o sistema é submetido a determinadas condições iniciais, ou a um impacto ou choque, o sistema vibra livre o que requer a determinação das freqüências da oscilação, e também dos respectivos coeficientes de amortecimentos, que no caso de sistema com parâmetros constantes, são determinados resolvendo-se a equação característica do sistema, ou obtendo-se os autovalores [Cap. 5]. O problema da vibração livre de um sistema cujos parâmetros dinâmicos são dependentes das

freqüências de oscilação foi tratado no Cap. 7, e a resposta obtida comparada com a resposta do sistema admitindo-se constantes os parâmetros da equação diferencial do movimento. O método utilizado constituiu-se em um método de tentativa e erro. Novak [130], propôs um método similar, porém, não resolvendo a equação diferencial do movimento, utilizando-se da expressão clássica da freqüência natural para um sistema massa-mola com apenas um grau de liberdade. A expressão citada é a raiz quadrada da razão da rigidez pela massa.

O efeito da profundidade limitada da camada do solo, e o efeito do embutimento do bloco da fundação no solo, foram analisados para diferentes razões de embutimento e profundidade da camada de solo. Veja o artigo no anexo VII para alguns casos. Os resultados revelaram alguns aspectos importantes. O modo vertical apresenta um alto amortecimento. Os modos horizontais e de balanço são modos menos amortecimentos, isto é, as oscilações horizontais e de balanço de uma fundação exigem um tempo maior para se extinguirem totalmente. Logo, uma fundação não perfeitamente simétrica, ou que recebe impactos excêntricos, pode ficar sujeita a níveis maiores de vibração e, no caso de máquinas com maior freqüência de impactos, o fenômeno da ressonância pode vir a ocorrer. Em sistemas onde existem apenas uma pequena excentricidade ou imperfeição na simetria, as vibrações na vertical são muito pouco afetadas, principalmente considerando-se a fundação devidamente embutida em uma camada de solo cuja razão da profundidade do solo com a dimensão característica, denominada de raio equivalente, não é muito inferior a 4, ou quando a primeira freqüência natural da camada do solo é inferior as freqüências críticas, ou de excitação do sistema. Veja o artigo publicado, Anexo VII.

Em algumas máquinas, a grande energia dos impactos induzem vibrações que tendem a formar, com o tempo, um vão, ou um descolamento entre a fundação e o terreno ao seu redor, diminuindo assim, o efeito do embutimento e, portanto, diminuindo a rigidez e amortecimento do meio. O resultado é um aumento no nível das vibrações.

O caso mais desfavorável, constatado nas análises, é o de uma fundação não embutida no solo sobre camada de solo de pequena profundidade. Neste caso, o amortecimento tende a um valor muito pequeno, ficando então, o sistema sujeito a níveis muito alto de vibração e ressonância. Considerando o modelo apresentado o valor para o amortecimento pode ser zero. Na verdade, o amortecimento não se anula totalmente, devido

ao fato do solo apresentar o que denominamos de amortecimento material, o que não foi considerado no equacionamento, ficando assim como proposta para futuros trabalhos. A solução técnica mais adequada para fundações que devem ser instaladas em rasas camadas de solo é o embutimento da fundação, que deve ser o maior possível.

Outro ponto importante observado é que fundações que apresentam o parâmetro denominado razão massica muito maior que a unidade, isto válido para todos os modos, devem ser evitadas por apresentarem uma maior amplificação da vibração em determinadas freqüências [Veja o Cap. 2]. O efeito do embutimento, discutido no capítulo 3, é dependente da razão mássica, porém, nos casos de fundações com baixo coeficiente de amortecimento, ou com valores para a razão mássica muito maiores que a unidade, o embutimento da fundação no solo causa uma diminuição na amplitude da vibração, porém, uma pequena influência no valor da freqüência crítica.

Como a razão mássica, bem como a razão de embutimento, estão diretamente ligados com as dimensões da fundação, estas devem ser escolhidas de tal forma a proporcionar um valor para a razão mássica suficiente para absorver os impactos sofridos de tal forma que o nível de vibração atingido seja o *aceitável*. Valores altos para as razões mássicas implicam em fundações menores, porém, proporcionam uma maior amplificação da vibração em determinadas freqüências, podendo assim, dependendo da freqüência dos impactos causar um efeito de ressonância no sistema. Baixos valores para a razão mássica resultam em altos coeficientes de amortecimento, porém, exigem fundações mais robustas e, consequentemente mais onerosas. Para o caso de fundações para camadas rasas de solo, a razão de embutimento deve ser alta, como comentado anteriormente, porém, a razão entre a profundidade da camada e o raio equivalente h/ro deve ser, de preferência, o maior possível. Em algumas situações, principalmente para sistemas menos amortecidos, que é o caso de fundações com baixos valores para a razão mássica, a razão h/ro =2 parece fornecer uma maior amplificação da resposta vibratória. Para valores desta razão acima de 8 a resposta se aproxima muito de um solo com profundidade infinita.

10.2 - Propostas

Ficam as seguintes propostas para trabalhos futuros, os quais são:

- Introdução do amortecimento material do solo no equacionamento do movimento vibratório;
- Apresentação de um modelo com elementos finitos e comparação com este modelo analítico apresentado;
- Levantamento das constantes do solo por teste de impacto, via identificação de parâmetros - análise modal. Comparação das constantes dinâmicas obtidas a partir das formulações apresentadas, e das constantes elásticas do solo, obtidas via teste de laboratório e campo.

BIBLIOGRAFIA

1 - Gazetas, G. (1983)- "Analyses of machine foundation vibration: state of the art" - *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 2, N° 1

2 - Luco, J. E. (1976)- "Vibrations of a rigid disc on a layered viscoelastic medium" - *Nuclear Engineering and Design*, 36, pp. 325-340.

3 - Gazetas, G. e Roesset, J.M. (1976)- "Forced vibrations of strip footings on layered soils" - *Methods of Structural Analysis*, ASCE, Vol. 1, pp. 115-131.

4 - Gazetas, G. e Roesset, J.M. (1979)- "Vertical vibrations of machine foundations" - *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, 105, pp. 1435-1454.

5 - Waas, G. (1972)- "Analysis method for footing vibrations through layered media" - Tese, Universidade da Califórnia, Berkeley.

6 - Kausel, E. e Ushijima, R. (1979)- "Vertical and Torsional Stiffness of Cylindrical Footings" - Research Report R76-6, MIT.

7 - Lysmer, J., Udaka, T., Tsai, C. F., e Seed, H. B. (1975)- "FLUSH - A computer program for approximate 3-D Analysis of Soil-Structure Interaction Problems" - Report No. EERC 75-30, University of California, Berkeley.

8 - Kausel, E. (1981)- "An Explicit Solution for the Green Functions for Dynamics Loads in Layered Media" - Research Report R81-13, MIT.

9 - Lysmer, J., Tabatabaie, R. M., Tajirian, F., Vahdani, S., e Ostadan, F. (1981)- "SASSI - A System for Analysis of Soil-Structure Interaction" - Research Report GT81-02, University of California, Berkeley.

10 - Tassoulas, J. L. (1981) - "Elements for Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Media" - Research Report R81-2, MIT.

11 - Novak, M., e Beredugo, Y. O. (1972) - "Vertical vibration of embedded footings" - *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, 98 (SM12), pp. 1291-1310.

12 - Beredugo, Y. O., e Novak, M., (1972) - "Coupled horizontal and rocking vibrations of embedded footings" - *Canadian Geotechnical Journal*, 9, pp. 477-497.

13 - Meek, J. W. e Veletsos, A. S. (1973), - "Simple models for foundations in lateral and rocking motions" - *Proceedings, 5th World Conference on Earthquake Engineering*, Rome, paper 331.

14 - Novak, M., Nogami, T., e Aboul-Ellas, F. (1978) - "Dynamic soil reactions for plane strain case" - *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 104, pp. 1024-1041.

15 - Nogami, T. e Konagai, K. (1985) - "Simple approach for evaluation of compliance matrix of pile groups" - *Vibration Problems in Geotechnical Engineering*, ed. G. Gazetas e E. T. Selig, ASCE, pp. 47-74.

16 - Gazetas, G., e Dobry, R. (1984) - "Horizontal response of piles in layered soils" - *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 110, pp. 20-40.

17 - Wolf, J. P., (1985) - "Dynamic Soil-Structure Interaction" - Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

18 - Gazetas, G. e Tassoulas, J. L. (1987) - "Horizontal stiffness of arbitrarily shaped embedded foundations" - Journal of Geotechnical Engineering, 113, pp. 440-457.

19 - Richart, F. E., Woods, R. D. e Hall, J., (1970) -"Vibrations of Soils and Foundations"- Prentice Hall.

20 - Hertwig, A., Früh, G., e Lorenz, H. (1933) - "Die Ermittlung der für das Bauwesen wichtigsten Eigenschaften des Bodens durch erzwungene Schwingungen"- DEGEBO No. 1, J. Springer, Berlin, 45 pp.

21 - Lorenz, H. (1934) - "Neue Ergebnisse der dynamische Baugrundurntersuchung" - ZVDI , Vol. 78, No. 12, pp. 379-385.

22 - Hertwig, A., e Lorenz, H. (1935) - "Das Dynamische Bodenuntersuchngsverfahren"- *Der Bauingenieur*, Vol. 16, pp. 279-285.

23 - Tschebotarioff, G. P., Ward, E. R. (1948)-"The Response of Machine Foundations and the Soil Coefficients Which Affect It"- *Proc. 2nd ICSMFE*, Vol l , 309.

24 - Hayashi, K. (1921) - "Theorie des Tragers auf Elastischer Unterlage" - Springer-Verlag, Berlin and New York.

25 - Heteyni, M. (1946) - "Beams on Elastic Foundations" - Univ. of Michigan Press, Ann Arbor.

26 - Terzaghi, K. (1943) - "Theoretical Soil Mechanics" - Wiley, New York.

27 - Terzaghi, K. (1955) - "Evaluation of coefficients of subgrade reaction" - *Geotechnique*, 5, 297-326.

28 - Barkan, D. D. (1962) -"Dynamics of Bases and Foundations"- McGraw Hill (transleted).

29 - Prakash, S., e Puri, V. K. (1971) - "Dynamic response of embedded foundation in vertical and torsional modes (unpublished report)" - University of Roorkee, Roorkee, India.

30 - Prakash, S., e Puri, V. K. (1972) - "Coupled rocking and sliding vibrations of embedded foundations (unpublished report)" - University of Roorkee, Roorkee, India.

31 - Barkan, D. D. e Ilyichev, V. A. (1977) - "Dynamics of Bases and Foundations"- *Proc. 9th ICSMFE*, Tokyo, 2, 630.

32 - Prakash, Shamsher e Puri, Vilay K. (1988) - "Foundations for Machines Analysis and Design"- John Wiley & Sons, Inc.

33 - Rayleigh, L. (1885) - "On waves propagated along the plane surface of an elastic solid" - *Proc. London Math Soc.*, 17, 4-11.

34 - Lamb, H. (1904) -"On the Propagation of Tremos over the Surface of an Elastic Solid"- *Philosophical Transactions of Royal Society, London*, Ser. A. Vol. 203, p. 1-42.

35 - Reissner, E. (1936)-"Stationäre, axialsymmetrische, durch eine Schüt-telnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastichen Halbraumes"- Ingenieur Archiv, Vol. 7, p. 381-396.

36 - Quinlan, P. M. (1953) -"The Elastic Theory of Soil Dynamics"- *Symposium on Dynamic Testing of Soils*, ASTM STP Nº 156, p. 3-34.

37 - Sung, T. Y. (1953)-"Vibrations in Semi-Infinite Solids due to Periodic Surface Loading" - *Symposium on Dynamic Testing of Soils*, ASTM STP Nº 156, p.35 - 64.

38 - Arnold, R. N. et alii. (1955)-"Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid"- J. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 77, p. 391-401.

39 - Bycroft, G. N. (1956)- "Forced Bibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-Infinite Elastic Space and on an Elastic Estratum"-Philosophical Trans., Royal Society, London, Vol. 248, p. 327-368.

40 - Hsieh, T. K. (1962)-"Foundation Vibrations" - Proc. Instituion of Civil Engineers, Vol. 22, pp. 211-226

41 - Lysmer, J. (1965)-"Vertical Motion of Rigid Footings" -Univ. Michigan, Tese de Pós Doutorado.

42 - Richart, F. E. e Whitman, R. V., (1967)-"Comparison of Footing Vibration Tests with Theory"-*J. Soil Mech. and Found. Div.*, Proc. ASCE, Vol. 93, p. 143-168

43 - Whitman, R. V. (1976)-"Soil-Platform Interaction"- *Proc. Conf. on Behav. of Offshore Struct.*, NGI, Oslo, 1, 817.

44 - Elorduy, J., et alii (1967)- "Dynamic Response of Bases of Arbitrary Shape Subjected to Periodic Vertical Loading"- *Proc. International Symposium on wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, University of New Mexico, Albuquerque*.

45 - Chae, Y. S. (1969)- "Vibrations of non-circular foundations"- J. Soil Mech. Found. Div., Am. Soc. Civ. Eng., pp 1411-1430.

46 - Dobry, R., Gazetas, G. (1986) - "Dynamic Response of Arbitrarily Shaped Foundations" - *Journal of Geotechnical Engineering*, Am. Soc. Civ. Eng .,112 (GT-2), pp. 109-135.

47 - Dobry, R., et alii (1986)- "Dynamic Response of Arbitrarily Shaped Foundations" - *Journal of Geotech. Eng. Div., Am. Soc. Civ. Eng* .,112 (GT-2), pp. 136-159.

48 - Wong, H. L, e Luco, J. E., (1976) – "Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape" - *Earthq. Engrg. Struct. Dyn., 4, 579.*

49 - Awojobi, A. O., e Tabiowo, P. H., (1976) - "Vertical vibration of rigid bodies with rectangular bases on elastic media" - *Earth. Engrg. Struct. Dyn.*, 4, 439.

50 - Kitamura, Y., e Sakurai, S., (1979) - "Dynamic stiffness to rectangular rigid foundations on a semi-infinite elastic medium"- *Int. J. Anal. Num. Meh. Geomech.*

51 - Dominguez, J. e Roesset, J. M. (1978) - "Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations"- *Research Report R78-20,* MIT.

52 - Baranov, V. A. (1967) - "On the Calculation of Excited Vibrations of an Embedded Foundation"- Voprosy Dynamiki i Prochnocti, No. 14, Polytechnical Institute of Riga, pp. 195-209.

53 - Novak, M. e Beredugo, Y. O. (1971) - "Effect of Embedment on Footing Vibration"- Proceedings of 1st Canadian Conference on Earthquake Engineering, Univ. of British Columbia, Vancouver, Canada, pp. 111-125.

54 - Lysmer, J., e Kuhlemeyer, R. L. (1969) -"Finite Dynamic Model for Infinite Media" - *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 95, No. EM4, pp. 859-877.

55 - Kaldjian, M. J. (1969) discussion of- "Design Procedures for Dynamically Loaded Foundations"- by R. V. Whitman, F. E. Richard, Jr. , *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 95, No. SM1, Proc. Paper 6324, pp. 364-366.

56 - Novak, M. (1985) - "Experiments with shallow and deep foundations"- Proc. Symp. Vib. Probl. Geotech. Eng. Am. Soc. Civ. Eng., pp 1-26.

57 - Beredugo, Y. O. (1971) - "Vibrations of embedded symmetric footings"- Univ. Western Ontario, Canada, Tese.

58 - Fry, Z. B. (1973) - "Development and Evaluation of Soil Bearing Capacity, Foundation of Structures"- Waterways Exp. Sta. Tech. Rep. No.

59 - Stokoe, K. H., II (1972) - "Dynamic response of embedded foundations"- Univ. Michigan. Tese.

60 - Stokoe, K. H., II e Richart, F. E., Jr. (1974) - "Dynamic response of embedded machine foundation"- J. Geotech. Eng. Div., ASCE, 100 (GT-4), pp. 427-447.

61 - Chae, Y. S. (1971)- "Dynamic Behaviour of embedded Foundation soil systems" - Higw. Res. Rec. 323, pp. 49-59.

62 - Gupta, B. N. (1972)- "Effect of foundation embedment on the dynamic behaviour of the foundation soil system" - Geotechnique 22 (1), pp. 129-137.

63 - Vijayvergiya, R. C. (1981) - "Response of embedded Foundations"- Univ. Roorkee, India, Tese.

64 - Luco, J. E. e Westmann, R. A. (1968) -"Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic halfspace"- *J. Appl. Mech.*, ASME, 35E, 697.

65 - Luco, J. E. e Westmann, R. A. -"Dynamic response of circular footings"- *J. Engng. Mech. Div.*, ASCE, 1971, 97. EM5, 1381

66 - Karasudhi, P., Keer, L.M., e Lee, S. L. (1968)-"Vibratory motion of a body on an elastic half plane"- *J. Appl. Mech.*, ASME, 35E,697

67 - Veletsos, A. S. e Wei, Y. T. (1971)-"Lateral and rocking vibrations of footings"- *J. Soil Mech. Found. Div.*, ASCE, 97, SM9, 1227.

68 - Veletsos, A. S. e Verbic, B. (1973) -"Vibration of viscoelastic foundations"- *Inst. J. Earth. Engrg. Struct. Dyn.*, 2, 87.

69 - Reissner, E. (1937) - "Freie und Erzawungene Torsionschwingungen des Elastichen Halbraumes"- *Ing. Arch.* 8 (4), pp 229 -245.

70 - Warbuton, G. B. (1957) -"Forced vibrations of a body upon an elastic stratum" - *Trans. ASME*, 24, pp. 55-58.

71 - Kaussel, E. (1974) - "Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media"- *Research Rep. R74-11*, MIT.

72 - Kaussel, E. e Roesset, J. M. (1975) - "Dynamic stiffness of circular foundations"- *J. Engrg. Mech. Div., ASCE,* 101, EM12, 771.

73 - Kaussel, E. e Ushijima, R. (1979) - "Vertical and Torsional Stiffness of Cylindrical Footings"- *Research Rep. R76-6,* MIT.

74 - Roesset, J. M. (1980) - "The use of simple models in soil-strutucture interaction"- *Civ. Engrg. & Nucl. Power,* ASCE, II, 10/3/1-25.

75 - Luco, J. E. (1974) - "Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium"- *Nucl. Engrg. Des.*, 31, 204.

76 - Gazetas, G., (1975) - "Dynamic Stiffness Functions of Strip and Retangular Footings on Layered Soil" - *S. M. Thesis*, MIT.

77 - Hadjian, A. H. e Luco, J. E. (1977) - "On the importance of Layering on Impedance functions"- *Proc. 6th WCEE*, New Delhi.

78 - Gibson, R. E. (1974) - "The analytical method in soil mechanics"- *Geotechnique*, 24, No. 2, 115.

79 - Brown, P. T. e Gibson, R. E. (1972) -"Surface Settlement of a deep elastic stratum whose modulus increases linearly with depth" - *Can. Geotech. J.*, 9, 467.

80 - Gibson, R. E. e Kalsi, G. S. (1974) - "The surface settlement of a linearly inhomogeneous cross-anisotropic elastic halfspace"- *Z. Angew. Math. Phys.*, 24, 843.

81 - Gazetas, G. (1981) - "Strip foundations on cross-anisotropic soil layer subjected to static and dynamic loading"- *Geotechnique*, 31, No. 2, 161.

82 - Kim, T. C. e Novak, M. (1981) - "Dynamic Properties of Some Cohesive Soils of Ontario"- Canadian Geotech. J., Vol. 18, No. 3, pp. 371-389.

83 - Verbic, B. (1985) -"Experimental and Analytical Analysis of Soil-Structure Interaction" - Res. Rep., Fac. Of Civil Eng., Sajevo, p. 99.

84 - Novak, M. (1985) - "Experiments with shallow and deep foundations" - *Proc. Of Symp. On Vibration Problems in Geotech. Eng.*, ASCE, Conv., Detroit, Mich., pp.1-26.

85 - Holzlöhner, U. (1986) - "The Use of an Equivalent Homogeneous Half-Space in Soil Structure Interaction Analysis"- SMIRT5, Berlin, M10/3.

86 - Werkle, H. e Wass, G. (1986) - "Dynamic Stiffness of Foundations on Inhomogeneous Soils"- *Proc. 8th European Conf. On Earthq. Eng.*, Lisbon, Vol. 2, pp. 5.6/17-23.

87 - Gazetas, G. (1980) - "Static and dynamic displacements of foundations on heterogeneous multilayered soils" - *Geotechnique*, 30, No. 2, 159.

88 - Novak, M. e Sachs, K. (1973) - "Torsional and Coupled Vibrations of Embedded Footings" - *Earthq. Eng. e Struct. Dyn.,* Vol. 2, pp. 11-33.

89 - Gerrard, C. M. e Harrison, W. J. (1970) - "Circular Loads Applied to a Cross-Anisotropic HalfSpace" - Paper 8. *Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization: Div. Appl. Mech.*, Australia.

90 - Gerrard, C. M. e Harrison, W. J. (1970) -"Stresses and Displacements in a Loaded Orthorhombic Halfspace" - Paper 9. *Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization: Div. Appl. Mech.*, Australia.

91 - Kirkner, D. J. (1979) - "Steady-state Response of a Circular Foundation on a Transversely Isotropic Half-space" - *Tese,* Case Western Reserve University.

92 - Gazetas, G. (1981) - "Importance of soil anisotropy on foundation displacement functions" - *Advances in Geotech. Earthq. Engrg. Soil Dyn.*, 3, 1039.

93 - Gazetas, G. (1981) - "Dynamic compliance matrix of rigid strip footing bonded to a viscoelastic cross-anisotropic halfspace" - *Int. J. Mech. Sc.*, 23, No. 9, 547.

94 - Jakub, M., e Roesset, J. M. (1977) - "Nonlinear Stiffness of Foundations" - *Research Report* R77-35, MIT.

95 - Jakub, M., e Roesset, J. M. (1977) - "Dynamic Stiffness of Foundations: 2-D vs 3-D Solutions" - *Research Report* R77-36, MIT.

96 - Lysmer, J. (1978) - "Analytical Procedures in Soil Dynamics" - *Earthquake Engrg. Soil Dynamics,* ASCE, 3, 1267-1316.

97 - Roesset, J. M. (1980) - "Stiffness and damping coefficients in foundations" -, *Dynamic response of pile foundations*, M. O'Neil and R. Dobry, eds., New York, N.Y., ASCE, 1-30.

98 - Roesset, J. M. (1980) - "The use of simple models in soil-structure interaction" -, *Civil Engineering and Nuclear Power,* ASCE No. 10/3, ASCE, New York, N.Y., 1-25.

99 - Luco, J. E. (1982) - "Linear soil-structure interaction: A review" - *Earthquake ground motion and its effects on structures,* ASME, New York, N.Y., 41-57.

100 - Novak, M. (1987) - "State of the art in analysis and design of machine foundations" - *Soil-structure interaction,* Elsevier and Computational Mechanics Ltd., New York, N. Y., 171-192.

101 - Pais, A. e Kausel, E. (1988). - "Approximate formulas for dynamic stiffness of rigid foundations" - *Soil Dynamics and Earthquake Engrg.,* 7, 213-227.

102 - Gazetas, G. (1991) - "Formulas and Charts for Impedances of Surface and Embedded Foundations" - *Journal of Geotechnical Engineering*, vol. 117, No. 9.

103 - Dobry, R., Gazetas, G. - "Dynamic Response of Arbitrarily Shaped Foundations: Experimental Verification" - *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 112, No. 2, pp. 109-135.

104 - Dobry, R., Gazetas, G. e Kenneth H. Stokoe II, (1986) - "Dynamic Response of Arbitrarily Shaped Foundations: Experimental Verification" - *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 112, No. 2, pp. 136-154.

105 - Gazetas, G., -"Foundation Vibrations"- *Foundation Engineering Handbook*, 2nd Edition, H.Y. Fang, Ed., Van Nostrand Reinholds, Chapter 15, pp. 553-593, 1991.

106 - Maxwell, A. A., Fry, Z. B., e Poplin, J. K. (1969) - "Vibratory loading of pile foundations"- ASME *Spec. Tech. Publ.*, STP 444, 338-361.

107 - Kaynia, A. M. e Kausel, E. (1982) - "Dynamic Stiffness and Seismic Response of Pile Groups" - *Research Report* R82-03, MIT.

108 - Davies, T. G., Sem, R. e Banerjee, P. K. (1985) - "Dynamic Behavior of Pile Groups in Inhomogeneous Soil" - *J. Geotech. Eng.*, Vol. 111, No. 12, pp. 1365-1379.

109 - El Sharnouby, B. e Novak, M. (1985) - "Static and Low Frequency Response of Pile Groups" - *Canadian Geotech. J.*, Vol. 22, No. 1, pp. 79-84.

110 - Sheta, M., e Novak M. (1982) - "Vertical vibrations of pile groups" - *J. Geotech. Eng. Div., Am. Soc. Civ. Eng.* 108(GT-4), 570-590.

111 - Poulos, H. G. e Davis, E. H. (1980) - "Pile Foundation Analysis and Design" - John Wiley & Sons.

112 - Novak, M. e Mitwally, H. (1987) - "Random Response of Offshore Towers With Pile-Soil-Pile Interaction" - *Proc. 6th Int. Symp. on Offshore Mechanics and Arctic Eng. (OMAE)*, Houston, Tex., March.

113 - Novak, M. (1974) - "Dynamic Stiffness and damping of piles" - *Canad. Geotech. J.* , 11, 574.

114 - Novak, M. (1977) - "Vertical vibration of floating piles"- *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, 103, EM1, 153.

115 - Novak, M. e Grigg, R. F. (1976) - "Dynamic experiments with small pile foundation"- *Can. Geotech. J.* , 13(4), 372-395.

116 - Nogami, T. (1980) - "Dynamic stiffness and damping of pile groups in inhomogeous soil"- *Proc. Dyn. Response Pile Found. Anal. Aspects, Am. Soc. Civ. Eng.*, Hollywood FL 1980, 31-52.

117 - Nogami, T. (1983) - "Dynamic group effect in axial responses of grouped piles"- *J. Geotech. Eng., Am. Soc. Civ. Eng.*, 109(No. GT-2), 220-223.

118 - Nogami, T. e Liang, H. (1983) - "Behavior of pile groups subjected to dynamic loads" - *Proc. Can. Conf. Eq. Eng.*, 4th, Vancouver B. C. 414-420.

119 - Prakash, S. (1981) - "Soil Dynamics"- McGraw-Hill, New York.

120 - Tucker, R. L. (1964) - "Lateral analysis of piles with dynamic behaviour'- *Proc. Conf. Deep Found.* , Mexico City, Vol. 1, 157-171.

121 - Novak, M. e El-Sharnouby, B. (1983) - "Stiffness and damping constants of single piles"- *J. Geotech. Eng. Div., Am. Soc. Civ. Eng.*, 109 (GT-7), 961-974.

122 - Novak, M., e Howell, J. F. (1977) - "Torsional vibrations of pile foundations"- *J. Geotech. Eng. Div., Am. Soc. Civ. Eng.*, 103(GT-4), 271-285.

123 - Novak, M., e Aboula-Ella (1978) - "Impedance functions for piles in layered media" - *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE.

124 - Dobry, R. e Gazetas, G. (1988) - "Simple method for dynamic stiffness and damping of floating pile groups" - *Géotechnique*, 38, No. 4, pp. 557-574.

125 - Gazetas, G. e Makris, N. (1990) - "Dynamic pile-soil-pile interaction, I: Analysis of axial vibration"- *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18.

126 - Frazer, R. A., Duncan, W. J. e Collar, A. R. (1946) - "Elementary Matrices"- Cambridge University Press. London, England.

127 - Pipes, L. A. and Hovanessian, S. A. (1969) - "*Matrix - Computer Methods in Engineering*" - John Wiley & Sons, Chap. 8.

128 - Foss, K. A. (1958) - "*Coordinates which uncouple the equations of motion of damped linear dynamic systems*" - J. Appl. Mech., ASME, 25, 361.

129 - Rausch, E. (1950) - "Maschinen Fundamente" - VDI-Verlag, Dusseldorf (in German), Chap. 6, pp. 107,232

130 - Novak, M. (1983) - "Foundations for shock-producing machines" - *Can. Geotech. J.*, No. 1.

131 - Rivin, E. I. (1978) - "Design of vibration isolation systems for forging hammers"- *Sound and Vibration.*

132 - Novak, M. e El Hifnawy, L. (1983) - "Vibration of Hammer Foundations" - *J. Soil Dyn. & Earthq. Eng.* , Vol. 2, No. 1, 43-53.

133 - El Hifnawy, L. e Novak, M. (1984) - "Response of Hammer Foundations to Pulse Loadings" - *J. Soil Dyn. & Earthq. Eng.*, Vol. 3, No. 3, pp. 124-132.

134 - Richart, F. E. (1975) - "Foundation vibrations" - *Foundation Engineering Handbook*, 1st edn, Van Nostrand Reinhold, New York, N. Y., pp. 673-699.

135 - Arya, S., O'Neil, M., e Pincus, G. (1979), - "Design of Structures and Foudantions for Vibrating Machines" - Gulf Publ. Co., Houston, Texas.

136 - Major, A. (1980) - "Dynamics in Civil Engineering"- Akadémical Kiadó, Badapes, Volumes I-IV.

137 - Major, A. (1962) - "Vibration Analysis and Design of Foundations for Machines and Turbines "-, Collet's Holdings Ltd, London

138 - Housner, G. W e Castellani, A. (1969) - "Discussion of Comparison of Footing Vibration Tests with Teory" - por F. E. Richart, Jr. E R. V. Whitman, J., Soil Mech. and Found. Div. Proc. ASCE, Vol. 95, p. 360-364.

139 - Fistedis, S. H. (1957) - "Vibration-Resistant Prestessed Concrete Foundations for Engines and Compressors", Proc. World Conference on Prestressed Concrete, San Francisco.

140 - Richart, F. E., Jr. (1962) - "Foundation Vibrations" - Trans. ASCE, Vol. 127, pp. 863-898.

141 - Lysmer, J. e Richart, F. E., Jr. (1966) - "Dynamic Response of Footings to Vertical Loading" - *J. Soil Mech. and Found. Div.*, Proc. ASCE, Vol. 92, p. 65-91.

142 - Almeida, M. T. e Simões A. A. (1997) - "Análise da Sensibilidade dos Parâmetros no Projeto Dinâmico de Fundações sobre Blocos de Compressores Alternativos" - *Dissertação de Mestrado,* Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI, Brasil.

143 - Reissner, E. e Sagoci, H. F. (1944)- "Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space" - J. of Appl. Phys., Vol. 15, pp. 652-662.

144 - Hall, J. R., Jr. (1967) - "Coupled Rocking and Sliding Oscillations of Rigid Circular Footings" - *Proc. International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials*, Albuquerque.

145 -Beredugo, Y. O. (1976) - "Modal analysis of couple motion of horizontally excited embedded footings"- Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dyn. 4, pp. 3-410.

146 - Novak, M., (1970) - "Prediction of footing vibrations" - *J. Soil Mech. Found. Div.*, Am. Soc. Civ. Eng. 96 (SM-3), pp. 836-861.

147 - Lord Rayleigh, (1945) - "Theory of Sound" - Vol. 1, Dover Publications, New York, N. Y.

148 - Caughey, T. K., (1960) - "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems" - *Journal of Applied Mechanics*, ASME, pp. 269 - 271.

149 - Inman, D. J., (1994)- "*Engineering Vibration*", Prentice Hall, Englewood Cliffs., Chaps. 4 e 9.

150 - Newmark, N. M., (1959) - "A Method of Computation for Structural Dynamics" - *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 85, pp. 67-94.

151 - Inman, D. J., (1989) - "Vibration with Measurement and Stability" - Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.

152 - Nayfeh, Ali Hasan, (1933) - "Introduction to Pertubation Techniques"- A Wiley-Interscience Publication, JOHN WILEY & SONS, New York.

153 - Ide, P. S., (1987) - "Análise da Sensibilidade dos Parâmetros de Projeto Dinâmico de Fundações de Máquinas sobre Estacas" - dissertação de Mestrado, Itajubá-MG, *EFEI*.

154 - Luciana, R. C. S, (1997) - "Estudo da Interação Dinâmica do Sistema Ventilador - Fundação" - dissertação de Mestrado, Itajubá-MG, *EFEI*.

155 - Simões, A. A., Almeida, M. T., (1996) - "Parâmetros de Projeto Dinâmico de Fundações de Máquinas" - *IV Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste*, Vol. 2, Recife-Pe.

156 - Almeida, M. T., Luciana, R. C. S., Simões, A. A., (1998) - "Estudo da Sensibilidade das Dimensões de uma Fundação Rígida na Resposta Dinâmica de uma Máquina Rotativa com Interação Solo/Fundação/Filme de óleo/Rotor Flexível" - *III Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional*, Outro Preto-MG.

157 - Simões, A. A., Almeida, M.T. (1997) - "Comportamento Dinânico de uma Fundação em Bloco Embutida no Semi-Espaço Elástico" - *III Congresso Iberoamericano de Engenharia Mecânica*, Cidade de Havana-Cuba.

ANEXO I

DETERMINAÇÃO DA FREQÜÊNCIA NATURAL, FREQÜÊNCIA AMORTECIDA E COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO DO SOLO PARA UM GRAU DE LIBERDADE

Programa 1

```
% Determinação da freqüência natural, freqüência amortecida e
% coeficiente de amortecimento do solo
% para um grau de liberdade

clear all
% Entrada de Dados
%referencia para a determinação do erro rdif
rdif=0.1;

n=1;
cont=1;

Bz=input('Razao mássica  =');

Vs=150;

psoil=1900;

v=0.25;

G=Vs.^2.*psoil;

Gs=0.5*G;

ps=0.75*psoil;
```

```
p=2.5;
vs=v;

ro=sqrt(25./pi);

M=(4.*psoil.*ro.^3.*Bz)./(1-v);

passo=1./10000;

for ao=0.01:passo:1.5,

w=ao.*Vs./ro;

C1=5.37+0.364.*ao-1.41.*ao.^2;

C2=.5.*(5.06.*ao);

S1=0.2153.*ao+2.760.*ao./(ao+0.06084);

S2=6.059.*ao+0.7022.*ao./(ao+0.01616);

K=G.*ro.*(C1+Gs.*p.*S1./(G.*ro));

C=(G.*ro./w).*(C2+Gs.*p.*S2/(G.*ro));

pol=[M C K];

H=roots(pol);

av=diag(H);

imav=(av'-av)*i/2;
rav=(av+av')/2;
vwn=abs(rav^2+imav^2).^.5;
vqsi=-rav/vwn;


vwnd=sum(abs(diag(imav))./2;
vwn=sum(abs(diag(vwn)))./2;
vqsi=sum(abs(diag(vqsi)))./2;
```

```
        dif=abs(vwnd-w);
        if dif<=rdif,

        param=[M,C,K,vwnd,vwn,vqsi,ao]; rdif=dif; autv=H; dif;

        end

Wnd(1,cont)=vwnd;
W(1,cont)=w;

cont=cont+1;

end


M=param(1,1),
C=param(1,2),
K=param(1,3),

fy=[M, C, K];

resid=polyval(fy, autv)

wnd=param(1,4),
wn=param(1,5),
qsi=param(1,6)
ao=param(1,7)
autv

%gráfico
figure(1)
plot(W, W./Wnd)
ylabel('wd')
xlabel('w')
grid
```

Programa 2 (mais rápido)

```
% Determinação da freqüência natural, freqüência amortecida e
% coeficiente de amortecimento do solo
% para um grau de liberdade

clear all
% Entrada de Dados
%referencia para a determinação do erro rdif
dif=0.1;

Bz=input('Razao mássica  =');

Vs=150;

psoil=1900;

v=0.25;

G=Vs.^2.*psoil;

Gs=0.5*G;

ps=0.75*psoil;

p=2.5;

vs=v;

ro=sqrt(25./pi);

M=(4.*psoil.*ro.^3.*Bz)./(1-v);

%chute inicial em ao
ao=.5;
w=ao.*Vs./ro;

while dif>0.5e-06,

C1=5.37+0.364.*ao-1.41.*ao.^2;
```

```
C2=.5.*(5.06.*ao);

S1=0.2153.*ao+2.760.*ao./(ao+0.06084);

S2=6.059.*ao+0.7022.*ao./(ao+0.01616);

K=G.*ro.*(C1+Gs.*p.*S1./(G.*ro));

C=(G.*ro./w).*(C2+Gs.*p.*S2/(G.*ro));

pol=[M C K];

H=roots(pol);

av=diag(H);

imav=(av'-av)*i/2;
rav=(av+av')/2;
vwn=abs(rav^2+imav^2).^.5;
vqsi=-rav/vwn;

wnd=sum(abs(diag(imav))./2;
wn=sum(abs(diag(vwn)))./2;
qsi=sum(abs(diag(vqsi)))./2;

dif=abs(wnd-w);

w=wnd;
ao=w.*ro./Vs;

end

M,C,K, wnd, wn, qsi, ao, H,

fy=[M, C, K];
resid=polyval(fy, H)
```

ANEXO II

DETERMINAÇÃO DAS FREQÜÊNCIAS NATURAIS, FREQÜÊNCIAS AMORTECIDAS E COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO DO SOLO PARA UM SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE.

```
% Simulação de Sistema com 2 Graus de liberdade
% - determinação da frequencia natural por tentativa
% e erro
%
clear all
%  Dados

%diferença inicial
dif=0.1;

cont=1;

n=2;

M1=50000;

M2=159230;

Vs=150;

psoil=1900;

v=0.25;

G=Vs.^2.*psoil;

Gs=0.5*G;
ps=0.75*psoil;
```

```
vs=v;

area=25;

ro=sqrt(area./pi);

k1=(103.*10.^6.*3)./0.15;

c1=0.10.*k1./sqrt(k1./M1);

p=2.5;

%chute inicial na frequencia
ao=.5;
w=ao.*Vs./ro;
%vetor com todos os elementos 1
vuni=ones(4,1);
vref=w.*vuni

disp('vetor inicial dado acima')

%*************

%tentativa e erro

while dif>0.5e-12,

ao=w.*ro./Vs;

C1=5.37+0.364.*ao-1.41.*ao.^2;

C2=.5.*(5.06.*ao);

S1=0.2153.*ao+2.760.*ao./(ao+0.06084);

S2=6.059.*ao+0.7022.*ao./(ao+0.01616);

k2=G.*ro.*(C1+Gs.*p.*S1./(G.*ro));

c2=(G.*ro./w).*(C2+Gs.*p.*S2/(G.*ro));
```

```
M=[M1 0;0 M2];

C=[c1 -c1; -c1  c1+c2];

K=[k1 -k1; -k1 k1+k2];

% ****************************************
A=[zeros(n), M; M C];

B=[-M zeros(n); zeros(n) K];

AB=-inv(A)*B;
[P AV]=eig(AB);


RAV=(AV+AV')./2;
IAV=abs((AV-AV')*i./2);
wn=(RAV.^2+IAV.^2).^.5;
qsi=-RAV/wn;
W(1,cont)=w;
Wd(:,cont)=diag(IAV);
A0(1,cont)=ao;

w=min(diag(IAV));

difx=abs(diag(IAV)-vref);

vref=diag(IAV);
dif=max(difx)

cont=cont+1;


end

Wd
```

ANEXO III

DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DE UM SISTEMA COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE NA VIBRAÇÃO LIVRE - MÉTODO DE FOSS.

```
% Simulação de Sistema com Vários Graus de liberdade - Vibração livre
% ****************** Método de Foss **********************************

% Entrada de Dados

n=input('Numero de Graus de Liberdade = ');

M=input('Matriz M =');

C=input('Matriz C =');

K=input('Matriz K =');

disp(' ')

disp('Condições Iniciais')

d=input('deslocamentos  d = ');

v=input('velocidades   v = ');

tf=input('tempo final tf= ');

%passo de tempo previamente definido

pt=0.001;
pt=input('passo de tempo pt= ');
```

```
save saida  n M K C d v -ascii

%vetor inicial
uo=[v;d];
% ****************************************
A=[zeros(n), M; M C];

B=[-M zeros(n); zeros(n) K];

AB=-inv(A)*B;
[P AV]=eig(AB);

av=diag(AV);
P;


% diagonalizar a matriz A
Ad=P.'*A*P;

% ....

Bd=Ad*AV;



% ....

qo=inv(P)*uo;

% criando uma matriz diagonal auxiliar

Maux=diag(qo);

% coeficientes ...

coef=P*Maux;

% Observação: o vetor tempo é um vetor linha

t=0:pt:tf;
% Coeficiente dos números exponenciais elevados ao autovalor*tempo
% É uma matriz com n linhas e 2*n colunas
```

```
a=coef(n+1:2*n,:);

% .....

%saida

% Cada linha da matriz z abaixo é a resposta a um grau de liberdade de acordo com a disposição
% de entrada e em concordância com o vetor deslocamento na equação do movimento
% a constante 1000 apenas altera a unidade de metros para milímetros

z=1000.*real(a*exp(av*t));

% O comando plot cria o gráfico da seguinte tempo versus cada linha do vetor z

% - Se o tempo fosse um vetor coluna, então o comando plota o gráfico coluna versus linha da
mesma forma
figure(1)
plot(t,z)
xlabel('t [s]')
ylabel('z [mm]')
```

ANEXO IV

DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DE UM SISTEMA COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE A UMA FORÇA CONSTANTE APLICADA SUBTAMENTE - MÉTODO DE FOSS.

```
% Simulação de Sistema com Vários Graus de liberdade - Vibração devido a uma força
% constante aplicada subitamente a um sistema com 2 graus de liberdade
% 2 graus de liberdade

%Obs: condições iniciais nulas

% Entrada de Dados

n=input('Numero de Graus de Liberdade = ');

M=input('Matriz M =');

C=input('Matriz C =');

K=input('Matriz K =');

disp(' ')

disp('Condições Iniciais nulas')

%passo de tempo previamente definido

pt=0.001;

tp=input('tempo final do pulso tp = ');

tf=input('tempo final no gráfico tf= ');
```

```
pt=input('passo de tempo pt= ');

t=0:pt:tp;

disp('  ')

disp('Amplitude do Pulso   :')

Fo=input('Força de Excitação      =');

Q=[0;0;Fo;0]

%save saida  n M K C d v -ascii


% ****************************************
A=[zeros(n), M; M C];

B=[-M zeros(n); zeros(n) K];

AB=-inv(A)*B;
[P AV]=eig(AB);


av=diag(AV);

% diagonalizar a matriz A
Ad=P.'*A*P;

% ....

Bd=Ad*AV;



% ********************

f=P.'*Q;

q=inv(Bd)*(diag(f)*(exp(av*t)-1));
```

Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Biblioteca
MAUÁ
EFEI

```
% resposta durante o pulso
zp=real(P(n+1:2.*n,:)*q);


%condições iniciais na vibração livre

d=zp(:,length(t));

dqdt=inv(Bd)*diag(f)*AV*exp(av*tp);

v=real(P(n+1:2.*n,:)*dqdt);

zf=freev(P,av,d,v,tp,tf,pt,n);

zf=zf(:,2:length(zf));

% ---------- saida ----------

tempo=0:pt:tf;
z=1000.*[zp,zf];



%plot(tempo,z,tempo,zeros(size(tempo)), 'b --')

figure(1)
plot(tempo,z(1,:),tempo,zeros(size(tempo)), 'b --')
xlabel('t [s]')
ylabel('z1 [mm]')
figure(2)
plot(tempo,z(2,:),tempo,zeros(size(tempo)), 'b --')
xlabel('t [s]')
ylabel('z2 [mm]')
```

ANEXO V

DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DE UM SISTEMA COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE A UMA EXCITAÇÃO ARBITRÁRIA - MÉTODO DE NEWMARK.

```
% *** Método de Newmark ***

clear all
%
% Sistema com vários graus de liberdade
% Entrada de Dados

n=input('Numero de Graus de Liberdade = ');

M=input('Matriz M =');

C=input('Matriz C =');

if C==0,
C=zeros(n);
end

K=input('Matriz K =');

disp(' ')

tf=input('tempo final no gráfico tf= ');

%passo de tempo previamente definido

dt=0.001;

dt=input('passo de tempo dt (0.001)    = ');

%tempo
t=0:dt:tf;

% condições iniciais: deslocamento, velocidade e aceleração

%t=0;

disp('  ')
```

```
disp('Condições Iniciais')

q=input('deslocamentos  d = ');

if q==0,
q=zeros(n,1);
end

v=input('velocidades   v = ');

if v==0,
v=zeros(n,1);
end



disp('')
F=zeros(n,length(t));
disp('Entre com a excitação:')
disp('')
for nn=1:n,
disp('linha'),disp(nn)
excit=input('');
if excit==0,
excit=zeros(1,length(t));
else
F(nn,:)=excit;
end

end


%aceleração inicial
a=inv(M)*(F(n,1)-C*v-K*q);


% **********************************
alfa=1./6;
beta=0.5;

JR=1;
Q=q;


for tempo=2:length(t),



% cálculo do deslocamento para t=t+dt

aux1=M./(alfa.*dt.^2)+beta.*C./(alfa.*dt)+K;
aux2=q./(alfa.*dt.^2)+v./(alfa.*dt)+a.*(1./(2.*alfa)-1);
aux3=beta.*q./(alfa.*dt)+(beta./alfa-1).*v+a.*(beta./alfa-2).*dt.*0.5;

q1=inv(aux1)*(F(:,tempo)+M*aux2+C*aux3);


% cálculo da aceleração

        a1=[q1-q]./(alfa.*dt.^2)-v./(alfa.*dt)-a.*[1./(2.*alfa)-1];
```

```
% cálculo da velocidade

        v=v+(1-beta).*dt.*a+beta.*dt.*a1;

q=q1;
a=a1;



Q=[Q q];


end

H=0;

for graf=1:n,
H=H+1;
figure(H)
plot(t,Q(graf,:))
end

disp('Análise Modal :')
disp('')

[wn, qsi, wnd]=modal(M,C,K)
```

ANEXO VI

RESPOSTA DINÂMICA DE UM SISTEMA NÃO PERFEITAMENTE SIMÉTRICO OU QUE SOFRE IMPACTOS EXCÊNTRICOS.

```
% Simulação de Sistema com impacto excentrico
% 6 Graus de liberdade - Vibração livre
% camada de solo infinita

clear all

% Entrada de Dados

n=6;

%Dados do solo:
% mu = coeficiente de Poisson [/]
% G = Módulo de Elasticidade Transversal do Semi-Espaço Elástico [N/m2]
% Gs = Módulo de Elast. Transv. da camada lateral [N/m2]
% Vs = velocidade das ondas de cisalhamento [m/s]
% psoil= massa específica do solo [kg/m3]
% pside= massa específica da camada lateral [kg/m3]
mu=0.25;
v=mu;
Vs=150;
psoil=1800;
G=Vs.^2.*psoil;
Gs=G;
pside=psoil;

% Dados da Fundação :
% d1 = uma das dimensões da fundação. Por exemplo largura [m]
% d2 = uma das dimensões da fundação. Por exemplo comprimento [m]
% HB = altura da fundação [m]
% p = profundidade de embutimento da fundação na camada lateral [m]
% Area= área da base da fundação [m2]
% ro = raio equivalente da fundação [m]
% M2 = massa da fundação [kg]
% pconc = 2400 kg/m3 (massa específica do concreto)
% Vconc = volume de concreto [m3]. O Vconc deve ser calculado
% de acordo com o projeto. Se o bloco não possuí furos, a expressão
% Vconc = d1*d2*H pode ser usada.
% k2 = constante de mola do solo [N/m]
% c2 = constante de amortecimento do solo [Ns/m]
pconc=2400;
d1=3;
d2=2;
HB=2.8;
```

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Biblioteca MAUÁ BIM

```
% Vbig = Volume de concreto devido ao furo quadrado
%no bloco onde deve ser embutida a bigorna
%e a placa de material viscoelástico
%Mfr = Massa da Estrutura montada diretamente sobre o Bloco
%da fundação.
Vbig=1.2*0.8*1.2;
Vconc=d1.*d2.*HB-Vbig;
p=.9*HB;
Area=d1.*d2;
ro=sqrt(Area./pi);
Mfr=0;
M2=Mfr+pconc.*Vconc;
Bz=0.25.*(1-mu).*M2./(psoil.*ro.^3)

%C1,C2 são as constantes do Semi-Espaço Elástico
%S1,S2 são as constantes da Camada Lateral de embutimento do Bloco no Solo
C1=5.2;
S1=2.7;
C2=5.0;
S2=6.7;
%k2,c2 são a rigidez e amortecimento do solo, respectivamente.
kv2=G.*ro.*(C1+(Gs./G).*(p./ro).*S1);
cv2=sqrt(psoil.*G).*ro.^2.*(0.5.*C2+S2.*(p./ro).*sqrt(pside.*Gs./(psoil.*G)));

% *** Cálculo do C.G do bloclo
% em relação a base da fundação
h=1.4;
%Cálculo do raio equivalente na rotação
rofw=(d2.*d1.^3./(3.*pi)).^0.25;
%
%Cálculo das constantes de mola
%no deslizamento
pr=p./ro;
ku2=(8.*G.*ro./(2-v)).*(1+0.49.*(2-v).*pr);
%modos rotacionais
hp=p.^2./3-p.*h+h.^2;
hrw=(h./rofw).^2;
prfw=p./rofw;
%
kfi2=(8.*G.*rofw.^3./(3.*(1-v))).*(1+3.*(1-v)*hrw./(2-v)+prfw.*0.94.*(1-v)+...
1.46.*(1-v)*prfw.*hp./(rofw.^2));
kufi2=(-8.*G*rofw./(2-v)).*(h+0.49.*(2-v).*prfw.*(h-p./2));
%
%Cálculo das constantes de amortecimento
cu2=(4.6.*ro.^2.*sqrt(psoil.*G)./(2-v)).*(1+2.*(2-v).*pr);
cfi2=0.43.*rofw.^4.*sqrt(psoil.*G).*(1+10.7.*hrw./(2-v)+4.2.*prfw+...
21.63.*prfw.*hp./(rofw.^2));
cufi2=(-4.6.*rofw.^2.*sqrt(psoil.*G)./(2-v)).*(h+2.*(2-v).*prfw.*(h-p./2));
%
%Dados de Trabalho
%Vimp = Velocidade de Impacto do martelo. É função da altura de queda.
%kr é o coeficiente de restituição
%mh é a massa do martelo
Vimp=6.3;
kr=0.5;
mh=250;

% Dados da rigidez e amortecimento da placa de material viscoelastico
% que sustenta a bigorna
% Ep = Módulo de Young do material [Pa],[N/m2]
% Ap = área de contato da placa com a bigorna [m2]
% dp = espessura da placa [m]
```

```
% k1 = constante de mola, ou rigidez, da placa [N/m]
% M1 = massa da bigorna + equipamentos + coluna [kg]
% tgperda = tangente do ângulo de perda do material
% c1 = constante de amortecimento da placa [Ns/m]
% aperda = ângulo de perda em graus
M1=50000;
dp=0.15;
aperda=6;
tgperda=(aperda.*pi./180);
Ap=2.*1.2;
Ep = 103e6;
kv1=(Ep.*Ap)./dp;
wv=sqrt(kv1./M1);
cv1=tgperda.*kv1./wv;

I1=50000.*0.8.^2;
I2=M2.*(HB.^2+d1.^2)./12+M2.*1.4.^2;

Gp = 103e6/2.3;
ku1=(Gp.*Ap)./dp;
wu=sqrt(ku1./M1);
aperda=6;
cu1=tgperda.*ku1./wu;

Ip=2.^3.*1.2./12;
kfi1=(Gp.*Ip)./dp;
wfi=sqrt(kfi1./Ip);
aperda=6;
cfi1=tgperda.*kfi1./wfi;


%Outros dados do modelo
%excentricidade r2
r1=0.05;
%r1=0;
r2=0.10;
%r2=0.15;
y1=0.8;
%y1=0.8;
y2=0.4;
%y2=0.4;

% ***  Sistema ***

M=diag([M1 M1 I1 M2 M2 I2]);

K=[ku1 0 -ku1.*y1 -ku1 0 -ku1.*y2;
   0 kv1 0 0 -kv1 -kv1.*r2;
   -ku1.*y1 0 kfi1+ku1.*y1.^2 ku1.*y1 0 -kfi1+ku1.*y1.*y2;
   -ku1 0  ku1.*y1 ku1+ku2  0 kufi2+ku1.*y2;
   0 -kv1 0 0 kv1+kv2 kv1.*r2+kv2.*r1;
-ku1.*y2 -kv1.*r2 -kfi1+ku1.*y1.*y2 kufi2+ku1.*y2 kv1.*r2+kv2.*r1
 kfi1+kfi2+kv1.*r2.^2+kv2.*r1.^2+ku1.*y2.^2];

C=[cu1 0 -cu1.*y1 -cu1 0 -cu1.*y2;
   0 cv1 0 0 -cv1 -cv1.*r2;
   -cu1.*y1 0 cfi1+cu1.*y1.^2 cu1.*y1 0 -cfi1+cu1.*y1.*y2;
   -cu1 0  cu1.*y1 cu1+cu2  0 cufi2+cu1.*y2;
   0 -cv1 0 0 cv1+cv2 cv1.*r2+cv2.*r1;
-cu1.*y2 -cv1.*r2 -cfi1+cu1.*y1.*y2 cufi2+cu1.*y2 cv1.*r2+cv2.*r1
 cfi1+cfi2+cv1.*r2.^2+cv2.*r1.^2+cu1.*y2.^2];
```

```
% Matriz A e B

A=[zeros(n), M; M C];

B=[-M zeros(n); zeros(n) K];

%condições iniciais

%deslocamentos
d=[0;0;0;0;0;0];
%velocidades
v10=Vimp.*(1+kr).*mh./(mh+M1);
% eb é a excentricidade do impacto na massa M1.
eb=0.0;
fi10=(1+kr).*eb.*v10./((I1./M1).^2.*(1+M1./mh)+eb.^2);

vi=[0;v10;fi10;0;0;0];
%vetor inicial uo
uo=[vi;d];

% Autovalores e Autovetores

AB=-inv(A)*B;
[P AV]=eig(AB);
%disp('Autovalores do sistema =')
diag(AV)';
reav=(AV+AV')./2;
imav=(AV'-AV)*i/2;
wn=(reav^2+imav^2).^.5;
qsi=-reav/wn;
Fn=diag(wn)./(2.*pi);
%fn=[[1 0 0 0]*Fn [0 0 1 0]*Fn ];
qsi=diag(qsi);
%qsi=[[1 0 0 0]*qsi [0 0 1 0]*qsi ];
Fnd=abs(diag(imav))./(2.*pi);
%fnd=[[1 0 0 0]*Fnd [0 0 1 0]*Fnd ];
%[fn, qsi, fnd]=modal(M,C,K);
%disp('1a Natural amortecida [Hz] do Sistema = ')
%fnd1=min(fnd)
%disp('2a Natural amortecida [Hz] do Sistema = ')
%fnd2=max(fnd)


%vetor coluna dos autovalores
av=diag(AV);

%vetor transformado inicial qo
qo=inv(P)*uo;
%matriz coeficientes
coef=P*diag(qo);

%vetor linha do tempo
%tf é o tempo final da simulação
%passo é o passo de tempo
tf=0.3;
dt=0.001;
t=0:dt:tf;

%resposta da forma reduzida
%observação: o fator 1000 apenas altera a unidade de metros
%para milímetros
u=real(coef*exp(av*t));
```

```
%
%disp('max desloc. fund =')
%max(1000.*u(4,:))
%disp('max desloc. anvil =')
%max(1000.*u(3,:))

%Gráfico da velocidade da massa 2 na vertical
figure(1)
plot(t,u(5,:))
xlabel('[s]')
ylabel('[m/s]')
title('veloc. da fundação na vertical ')
%Gráfico da velocidade angular da massa 2
figure(2)
plot(t,u(6,:),'k')
xlabel('[s]')
ylabel('[rad/s]')
title('veloc. ang. da fundação ')
%Gráfico do deslocamento da massa fundação na vertical
figure(3)
plot(t,1000.*u(11,:),'k')
xlabel('[s]')
ylabel('[mm]')
title('desloc. vertical da fundação')
%Gráfico do deslocamento angular da fundação
figure(4)
plot(t,u(12,:),'k')
xlabel('[s]')
ylabel('[rad]')
title('desloc.angular da fundação')

%Gráfico do deslocamento na borda da fundação
figure(5)
plot(t,1000.*u(11,:)+1000.*d1.*u(12,:),'k')
xlabel('[s]')
ylabel('[mm]')
title('Desloc. vertical da fundação em sistema não simétrico')

%Gráfico do deslocamento da bigorna na vertical
figure(6)
plot(t,1000.*u(8,:))
xlabel('[s]')
ylabel('[mm]')
title('desloc. vertical da bigorna')
%Gráfico da velocidade da bigorna
figure(7)
plot(t,u(2,:))
xlabel('[s]')
ylabel('[m/s]')
title('velocidade da bigorna na vertical')

%Gráfico do deslocamento horizontal da bigorna
figure(8)
plot(t,1000.*u(10,:),'k')
xlabel('[s]')
ylabel('[mm]')
title('desloc.horizontal da fundação')
```

ANEXO VII

ARTIGO INTERNACIONAL PUBLICADO:

Proceedings of the IX DINAME, 5-9 March 2001,
Florianópolis - SC - Brazil

Proceedings of the IX DINAME, 5-9 March 2001, Florianópolis - SC - Brazil
Edited by J. J. de Espíndola, E. M. O. Lopes and F. S. V. Bázan

Dynamic Study of Foundations Subject to Shock Load

Alexandre Augusto Simões
Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Engenharia de Varginha-Unis
Av. Coronel José Alves, 256, Vila Pinto,Varginha-MG, CEP 37010540 - Brasil
engsimoes@uol.com.br

Márcio Tadeu de Almeida
Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Federal de Engenharia de Itajubá
Av. BPS, 1303, Pinheirinho, Itajubá-MG, CEP 37500000 - Brasil
tadeu@iem.efei.br

***Abstract**: The objective of this paper is to present a damped spring-mass model to the prediction of the vibration response of a machine-foundation system that are excited by transient dynamic forces generated by the normal operating conditions of the machine. Many types of machines produce powerful transient dynamic forces that are very short in duration and can be characterized as pulses or shocks. In this paper two methods are proposed. One method, suitable for the case when the frequency of the shocks are very low, and another suitable for those cases when the frequency of the shocks are not very low or even close to one of the natural frequencies of system. The study presented indicated that the response of the system is affected by the depth of the soil layer and foundation embedment on the soil. With lower embedment ratios and a low depth soil layer the system may undergo high levels of vibrations that can be very aggravated in the case of very fast repeating shocks. In the case of higher embedment the dependence on the layer thickness is very reduced.*
***Keywords**: machine foundation, shock, dynamic model, vibration.*

Introduction

This paper presents a study of the dynamic response of machines that produce transient dynamic forces. Typical machines producing this type of load are forging hammers, presses, etc... The operation of these machines can result in undesirable effects such as large settlement of the foundation, excessive vibration levels which may be transmitted through the ground and affect the structures around and cause discomfort to the workers and errors on instrumentation. Some machines operate with fast repeating shocks and the effects of vibration may be aggravated by resonant amplification of amplitudes. The prediction of the response of the foundation is an soil-structure interaction analyses and the description of the stiffness and dashpot parameters of the soil may be evaluated using an elastic medium model that accounts for energy dissipation through elastic waves and describes the stiffness and damping by close formulas including basic constants such as shear modulus or shear wave velocity. As the stiffness and dashpot parameters are frequency dependent the free response of the system is of obvious mathematical difficulties and solved by an trial and error approach or may be considerably simplified if the parameters are taken as constant, i. e., frequency independent. The problem of prediction the vibration response of the system is solved here in two ways. One, is the analytical solution of the governing equation of motion of the system model. The analytical solution may be obtained from initial conditions and/or presumed time history of the pulse load. This method is more adequate to the case when the frequency of the shock is very low. The other way is an numerical method which is more convenient to the cases when the dynamic load must be model as a pulse train as in the case of a very powerful and fast repeating shock producing machines.

Nomenclature

A = partioned matrix, area, m^2
a = one of the elements of the diagonalized matrix A
B = partioned matrix
b = mass ratio, dimensionless
C = n-th order damping square matrix, parameters of the soil reaction at the base of the foundation, dimensionless
c = dashpot, Ns/m
d = pad thickness, m
F = nth-orderm column vector of the generalized force
f = frequency Hz
G = Shear Modulus, Pa
H = total depth of the soil layer, m
h = thickness of the soil layer under the footing, m
I = unit matrix
K = nth order stiffness square matrix
k = spring constante, N/m
M = nth order inertia matriz, mass, kg
n = number of degrees of freedom, dimensionless
O = zero matrix column
P = square modal matrix
p = embedmente depth, m
Q = 2nth-order vector of the reduced equation
q = modal coordinate
r = radius, m
S = parameters of the reaction on the sides of the foundation, dimensionless
t = time, s
u = 2nth column vector containg the velocity and displacemt
$\dot{u}$ = first derivad of the vector u
V = velocity, m/s
w = displacemt nth-order column vector, m, rad
$\dot{w}$ = velocity nth-order column vector, m/s,rad/s.
$\ddot{w}$ = acceleration nth-order column vector,m/s2,rad/s2

Greek Symbols

δ = loss angle of the material, deg.
λ = eingenvalue
ν = Poisson's ratio, dimensionless
π = 3.14159265358979, dimensionless
ρ = mass density, kg/m^3
ω = circular of the harmonic excitation, rad/s

Subscripts

b relative to base area
j relative to position in a vector or matrix
L relative to layer
N relative to natural
O relative to equivalent
p relative to pad
S relative to side, shear
t relative to total
z relative to vertical
1 relative to the stiffness
2 relative to the damping

Mathematical Models of the Machine-Foundation-Soil System

There are many types of shock producing machine. The model of a machine-foundation-soil system may have one or more degrees of freedom but generally a model with two or three degrees of freedom is enough to describe the behavior of the system. Because of the powerful shock loads that may be generated by the operation of the machine and to reduce the stress in the concrete of the inertial block the part of the machine that suffers the impacts may be isolated by a pad of viscoelastic material, a layer of hardwood, or a set of springs and dampers. See fig. 1. The inertia block generally is embedded in soil or may be supported by vibration isolating elements in which case a model with three degrees of freedom is needed to perfectly model the system (fig. 1b). If eccentric impact occurs and the system is not perfectly symmetrical the number of degrees of freedom must grow to take in consideration the horizontal and rotation modes of vibration.

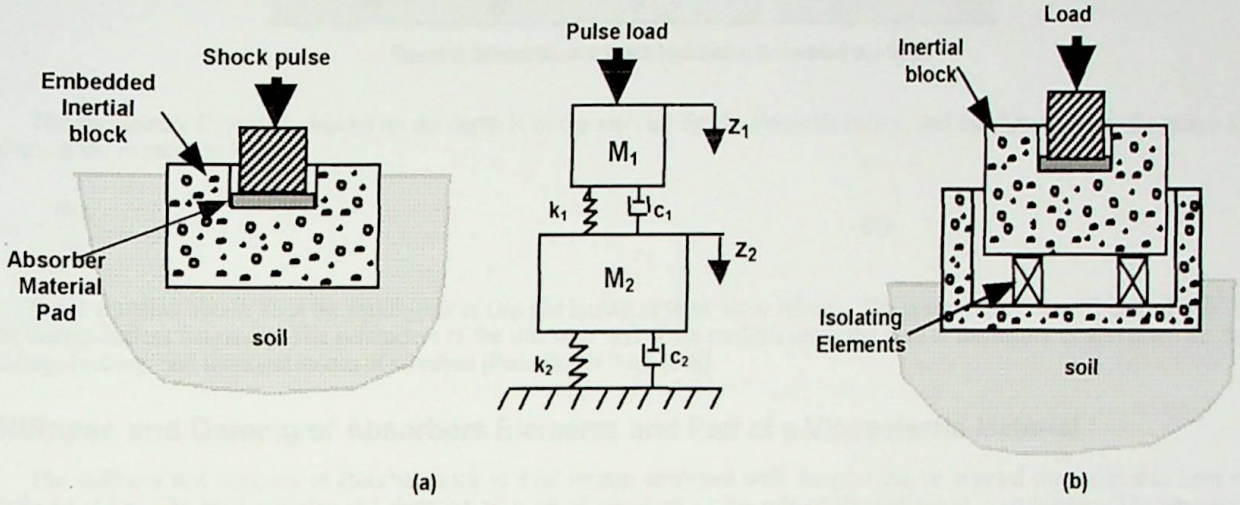


Figure 1: (a) model of a machine-foundation system with the inertial block cast on soil and its two degree of freedom model. (b) schematic of a system with the inertial block supported by vibration isolating elements.

The equation of motion of the nth-order damped spring-mass model of the machine-foundation-soil system can be written as

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{F} \qquad (1)$$

in which M is the nth-order inertia matrix; C and K are the nth-order damping and stiffness matrices, respectively; **F** is the nth-order column matrix of generalized external forces, and finally w is the nth-order column matrix of the generalized coordinates.

Soil Stiffness and Damping Constants

Soil stiffness and damping of a rigid block foundation resting on the surface of an elastic medium, or embedded on it, can be evaluated using elastic half-space theory. The principal advantages of this theory are that the dynamic parameters of the soil are given in close forms and to any vibration mode what permits the machine-foundation-system be represented in terms of an equivalent damped spring-mass model with the difference that the stiffness and damping are frequency dependent parameter [Simões, 1996; Gazetas, 1991; Prakash and Puri, 1988; Novak and Beredugo, 1972; Beredugo and Novak, 1972; Richart, Woods and Hall, 1970].

The vertical stiffness, k_{ZS} , and damping, c_{ZS} , for an embedded foundation are given by eq. (2) and eq. (3):

$$k_{ZS} = Gr_o\left(C_1 + \frac{Gs}{G}\frac{p}{r_o}S_1\right) \qquad (2)$$

$$c_{ZS} = \frac{Gr_o}{\omega}\left(C_2 + \frac{Gs}{G}\frac{p}{r_o}S_2\right) \qquad (3)$$

Here, C_1 and C_2 are dimensionless parameters derived from the soil reaction at the base of the foundation, and S_1 and S_2 are parameters derived from the reactions acting on the sides of the block foundation. G and ρ are respectively the shear modulus and the mass density of the soil layer under the base of the foundation; G_S and ρ_S are the shear modulus and mass density of the layer surrounding the sides of the block foundation as shown in fig. 2. The parameter p is the embedment depth and ω is the circular frequency of oscillation. If the footing is circular, r_O is the radius of the footing. In the case of a rectangular, square, or other footing shape of area A_b the equivalent radius r_o is given by eq. (4).

$$r_o = \sqrt{\frac{A_b}{\pi}} \qquad (4)$$

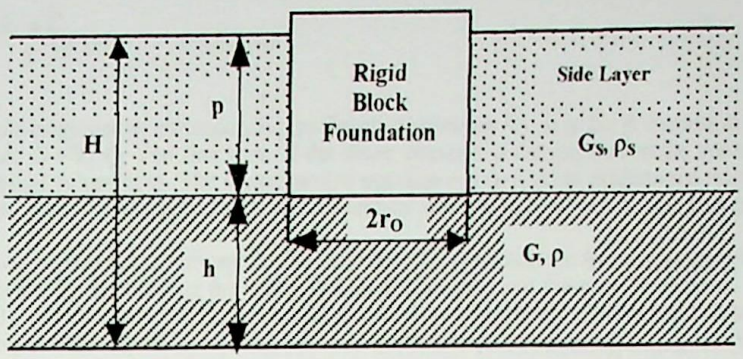


Figure 2: Schematic of a Block foundation Embedded in a Soil.

The parameters C_1 and C_2 depend on the depth H of the soil (see fig. 1), Poisson's ratio ν, and the dimensionless frequency a_O given in the expression below.

$$a_O = \frac{\omega r_O}{V_S} \tag{5}$$

In the equation above Vs is the square-root of G/ρ and known as shear wave velocity. The parameters S1 and S2 depend only on the dimensionless frequency. The parameters of the side layer and of the medium under the base of foundation is also given for the sliding, rocking and torcional modes of vibration [Prakash and Puri, 1988].

Stiffness and Dampig of Absorbers Elements and Pad of a Viscoelastic Material

The stiffness and damping of absorbers such as steel springs combined with dampers can be selected from available lines or made to order. The total stiffness and damping of a set of absorbers is the sum of the individual contributions. The absorbers elements may be used to support the inertial block or even the anvil - the part of the machine that will receive the impacts. When the inertial block or the anvil is supported by a pad of viscoelastic material, the vertical stiffness constant of the pad is

$$k_{ZP} = \frac{A_P E_P}{d} \tag{6}$$

in which E_P is the Young's Modulus, A_P the area of the pad, and d its thickness. The damping constant is given by eq. (7) below.

$$c_{ZP} = \tan g(\delta)\frac{k_{ZP}}{\omega_{NP}} \tag{7}$$

In the eq. (7), δ is the loss angle of the pad material and ω_{NP} is the natural frequency calculated with k_{ZP} and the supported mass.

Response to Pulse Loading

In various manufacturing processes a very common source of vibration is the application of shocking loads. A pulse excitation is a force that is applied for a very short, or infinitesimal, length of time and represents the shock loads. The response is obtained considering the pulse given by its presumed time history and/or estimated initial conditions. Rectangular and Half-Sine Pulse are basic types of pulse time histories to be considered.

In order to obtain the free and forced oscillations of the damped system, we must obtain the general solution of the reduced equation of the system given below [Pipes, 1969].

$$A\dot{\mathbf{u}} + B\mathbf{u} = \mathbf{Q} \tag{8}$$

In eq. (8), $\mathbf{u}=[\dot{w} \quad w]^T$; $\mathbf{Q}=[0 \quad F]^T$; A e B are partitioned matrices defined by the eqs. (9).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \tag{9a}$$

$$B = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \tag{9b}$$

Considering the linear transformation $\mathbf{u}=P\mathbf{q}$, where P is a square modal matrix having the eingenvectors as columns and applying the orthogonality conditions, eq. (8) decouple into independent differential equations of the first order. See [Pipes,1969] for more details. The complete solution of such first order equations is

$$q_j = q_j(0)e^{\lambda_j t} + \frac{1}{a_j}\int_0^t e^{\left[\lambda_j(t-\tau)\right]} f_j(\tau)d\tau \qquad j=1,2,...,2n \qquad (10)$$

In eq. (10), λ_J is the jth-eingenvalue corresponding to the jth-eigenvector $\mathbf{V}_J$; a_j is the jj element of the matrix obtained by the diagonalization of matrix A; $\mathbf{f}_J = \mathbf{V}_J^T\mathbf{Q}$. The first term of the above equation is the response of the system to initial conditions with $q_J(0)$ evaluated from the initial values of w. The second part of equation can be used to evaluate the response to a pulse given by its time history, and for simple shapes of the pulse, such as a rectangular one, the integral can be obtained in close forms [Hifnawy and Novak, 1984].

The solution given by eq. (10) is not readily applicable since the soil parameters are frequency dependent. Thus, the evaluation of the response should commence by establishing the values of C and S stiffness and damping parameters. A trial and error method is suggested by Novak (1983). In a rigorous way it isn't a very easy task and a carefully analysis must be taken in the eigenvector and eigenvalues given by the eigenvector equation, eq.(11), and its characteristic polynomial, eq. (12), given below.

$$[-A^{-1}B - \lambda I]\mathbf{P} = \mathbf{0} \qquad (11)$$

$$\left|-A^{-1}B - \lambda I\right| = 0 \qquad (12)$$

In eq. (11) and eq. (12) I is the unit matrix of order 2n.

The response analysis can be simplified if the frequency dependent parameters are replaced by suitably chosen constants independent of frequency. Some constant values to the C and S parameters can be found in literature for some range of the dimensionless frequency a_O [Simões, 1996; Prakash and Puri, 1988].

The Depth to Bedrock and Embedment Effects on the Response of the System

The effect of the depth to bedrock and embedment on the response of a two degree of system was analyzed considering a pulse load first. The system model considered is the same as that of fig. 1a and is the one of a typical Hammer Foundation. Referring to that figure the parameters of the machine-foundation and the undisturbed soil system are given in table 1. Undisturbed soil means that all the parameters of the side layer are equal to the soil layer under the base of the Block foundation.

The system response computed for three embedment ratios p/ro and different values to the depth H are presented in table 2 and fig. 3.

The results of a pulse type loading method shows that the vertical oscillation are not so high and is typical of such kind of equipment. Also can be noted that highly embedded foundation provides significant damping and stiffness. However, with heavy vibration induced by the impact machines a gap may occur due to the soil separation from the block sides. The effect of the smaller embedment is quite the contrary of the highly embedded foundation.

The effect of a finite soil layer is increases the stiffness and decreases the damping specially when the first frequency of the natural layer is greater than the natural frequency of the foundation. The first natural frequency ω_{SL} of the soil layer in vertical is (Nogami and Novak, 1976).

$$\omega_{SL} = \frac{\pi V_S}{2H}\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \quad \text{rad/s} \qquad (13)$$

When the soil thickness is not so high and the embedment ratio is very low the system damping may be drastically reduced.

Table 1: Parameters of a machine-foundation-system.

Area of the Block Foundation	16.0m^2	Soil Mass Density	1800kg/m^3
Foundation Height	3.5m	Shear Wave Velocity	150m/s^2
Concrete Mass density	2400kg/m^3	Poisson's ratio	0.25
Pad dimensions	1.2X1.2X0.8 m	Modified Mass ratio	1.4196
Loss angle of the viscoelastic material	6^O	Drop height	2.0m
Mass of the frame	25000 kg	Mass of the head	250kg
Anvil Mass	23000kg	Coefficient of restitution	0.5
Pad Young 's Modulus	103MPa		

Table2: Three Response Computed of a soil interaction system.

	1° Case	2° Case	3° Case	4° Case	5° Case	6° Case
Embedment depth p	1.5m	1.5m	1.5m	0.2m	0.2m	0.0m
Equivalent radius ro	2.26m	2.26m	2.26m	2.26m	2.26m	2.26m
Embedment ratio p/ro	0.66	0.66	0.66	0.089	0.089	0.0
Soil depth to bedrock layer H	∞	3.76m	6.01m	2.4568m	4.71m	4.52m
First damped natural frequency	8.51Hz	11.98Hz	10.19Hz	11.42Hz	9.62Hz	9.47Hz
First modal damping ratio	0.44	0.22	0.277	0.031	0.037	0.002
Second damped natural frequency	45.54Hz	45.74Hz	45.65Hz	45.84	45.70Hz	45.70Hz
Second modal damping ratio	0.07	0.066	0.066	0.057	0.057	0.056
Block Foundation Vertical Amplitude	0.1612mm	0.1681mm	0.1720mm	0.2086mm	0.2217mm	0.2303mm
Anvil Vertical Amplitude	0.3557mm	0.3558mm	0.3558mm	0.3736mm	0.4155mm	0.4339mm

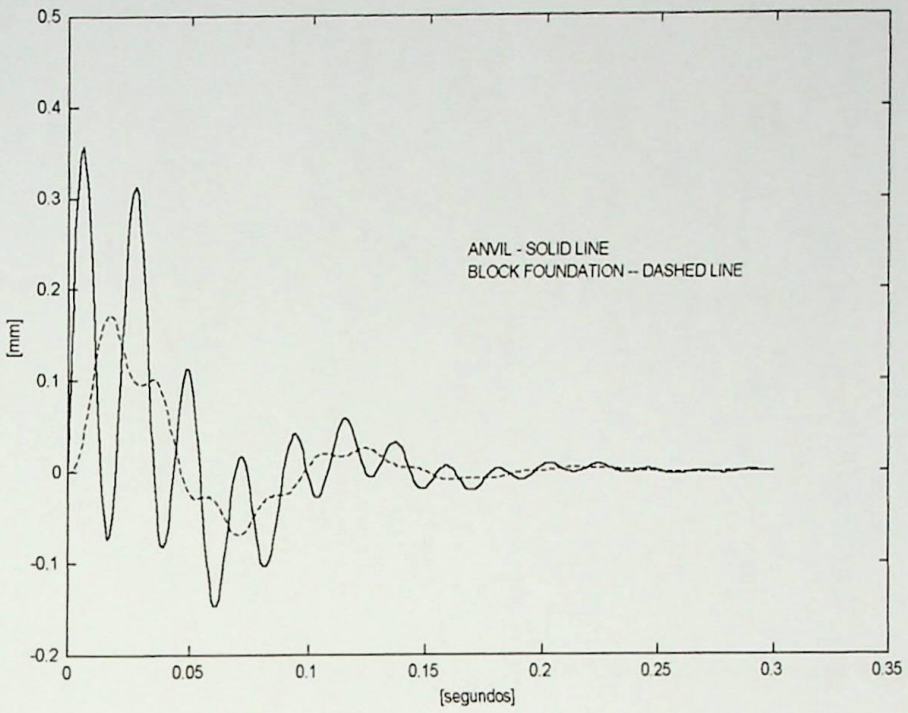


Figure3. Response of the anvil and block foundation in a soil layer - 3° Case in Table 2.

Response to Periodic Shock Load

When the time duration between one shock and another are not so large the response may be obtained considering the excitation as a periodic disturbance. According to the most introductory engineering vibration or differential equations texts any periodic function may be represent by an infinite sum of sines and cosines, known as Fourier Series. If the system is linear, the response is calculated by computing the response to the individual terms of the series and adding the results. This is how superposition and Fourier Series are used together to compute the solution for any periodic input. However, this is not numerically efficient. It is more efficient to compute the time response using numerical procedures of time integration and differential equation solving. There are many methods for numerically solving ordinary differential equations. The Newmark's Method [Newmark, 1959] was used in this work to compute the response of the machine-foundation-soil system subjected to a periodic excitation.

In the case of a periodic shock load the stiffness and damping soil parameters are calculated in the fundamental frequency, i. e, the frequency of the impacts.

The case of a block foundation badly embedded in a limit soil layer (h/ro=2) was analyzed to a slow impact machine (1.2Hz). See fig. 4. The vibration amplitudes of the anvil and block foundation were found to be 0.34 mm and 0.49mm which are a little greater than the results presented in table 2. However when the embedment ratio tends to zero the amplitudes of the anvial and block were found to increase to values greater than 0.7mm to the anvil and 0.6mm to the block foundation.

Conclusions

The response to a pulse load approach may be considered to very slow machines when the time duration between one shock and the next is enough to the oscillation die out or to highly damped system as in the case of a highly embedded foundation in a homogeneous deep soil layer ($H\rightarrow\infty$) with mass ratio value not greater than 2. The mass ratio is defined in eq. (14) below.

$$b = \frac{M_{st}}{\rho r_O^3} \qquad (14)$$

In eq. (14) M_{ST} is the mass of the block foundation plus the mass of the machine that is directly attached to the block.

In the case of a very fast repeating shock machine the frequency of the impacts may induce heavy vibrations on the system. This is due to the block foundation isn't perfectly bond to the soil what can result in very low embedment ratios. Also the foundation may be supported by a layered soil or by a finite thickness homogeneous soil over a bedrock. With shallow layers the damping may be very small mainly if the first natural frequency of the layer is greater than the first natural frequency of the system or the frequency of the impacts. Considerable underestimation of the response can be obtained if the influence of the thickness ratio H/ro is not considered in the reduction of the damping. In the case of a badly embedded foundation the material damping of the soil is the main source of damping.

Finally, if a critical frequency is equal or multiple of the impact frequency heavy vibration must occur. This is the most important point in vibration suppression design.

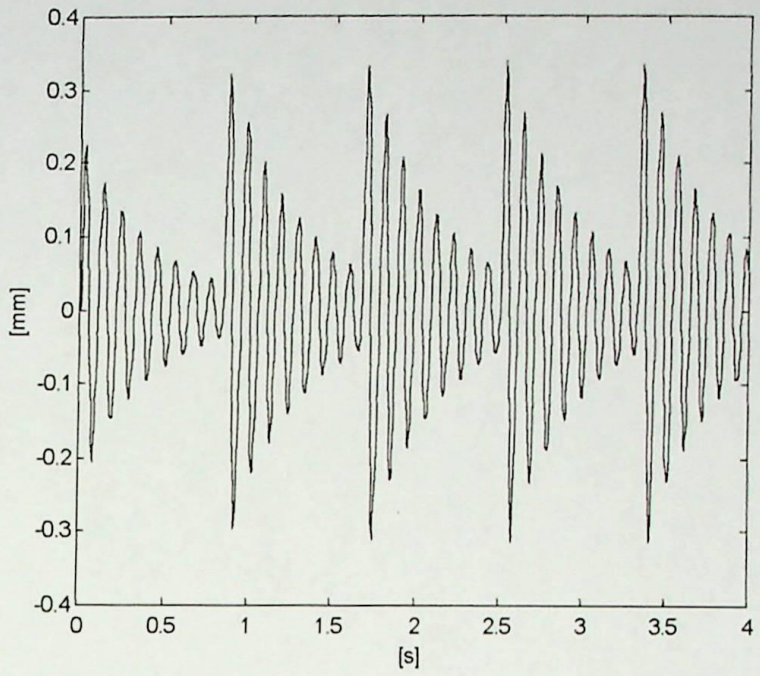


Figure 4: Response of a badly embedded foundation block subjected to a periodic shock pulse of 1.2Hz.

References

Beredugo, Y. O., e Novak, M., 1972 - "Coupled Horizontal na Rocking vibrations of Embedded Footings"- Canadian Geotechnical Journal, 9, pp. 477-497.

Gazetas, G., 1991 "Foundations Vibrations", - *Foundation Handbook*, 2° Edition, EH. Y. Fang Ed., Van Nostrand Reinholds, Chaper 15, pp. 553-593

Hifnawy, L. El, and M. Novak, 1984 -"Response of Hammer Foundations to Pulse Loading"- Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Volume 3, No. 3 .

Newmark, N. M., 1959 -"A method of computation for structural dynamics" - Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 85, pp. 67-94.

Nogami, T., and Novak, M., 1976 -"Soil-pile interaction in vertical vibration"-International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 4, pp. 277-293.

Novak M., 1983, "Foundations for Shock-Producing Machines"- Canadian Geotechnical Journal, Volume 20, 141-158pp.

Novak, M., and Beredugo, Y. O., 1972 - "Vertical Vibration of Embedded Footing"- Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 98 (SM12), pp. 1291-1310.

Pipes, L. A., and Hovanessian, S. A., 1969-"Matrix Computer Methods in Engineering"- John Wiley & Sons, Inc..

Prakash, S., and Puri, V. K., 1988 - "Foundations for Machines Analysis and Design"- John Wiley & Sons, Inc..

Simõe, A. A., 1996-"An Dynamic Analysis of a Reciprocating Compressor Block Foundation"- (In Portuguese) dissertation, EFEI, Itajubá, MG, Brazil, 177p.

Richart, F. E., Woods, R. D. and Hall, J., 1970 - "Vibrations of Soils and Foundations"-Prentice Hall, Inc..