

TESE

1163

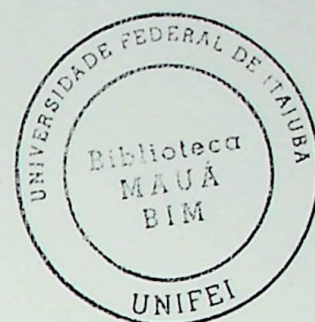
Universidade Federal de Itajubá

ANÁLISE DOS EFEITOS DA LUBRIFICAÇÃO  
NAS VIBRAÇÕES NOS MANCAIS DE  
ROLAMENTOS

**Germano Fontes Braga**

ITAJUBÁ, MAIO DE 2002

**GERMANO FONTES BRAGA**



**ANÁLISE DOS EFEITOS DA LUBRIFICAÇÃO NAS  
VIBRAÇÕES NOS MANCAIS DE ROLAMENTOS.**

*Tese apresentada à  
Universidade Federal de Itajubá para  
obtenção do título de Doutor em  
Engenharia Mecânica.*

Itajubá  
2002

**GERMANO FONTES BRAGA**

**ANÁLISE DOS EFEITOS DA LUBRIFICAÇÃO NAS  
VIBRAÇÕES NOS MANCAIS DE ROLAMENTOS**

*Tese apresentada à Universidade  
Federal de Itajubá para obtenção do título  
de Doutor em Engenharia Mecânica.*

*Área de concentração:  
Projetos e Fabricação*

**ORIENTADOR:**  
*Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida*

**co-ORIENTADOR:**  
*Prof. Dr. Vilmar Arthur Schwarz*

Itajubá  
2002

|         |                   |
|---------|-------------------|
| CLASS.  | 531.14-533(043.2) |
| CUTIER. | B 813a            |
| TOMBO.  | 1163              |

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –  
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB\_6/1700

531.14-533(043.2)  
B813a

Braga, Germano Fontes.

Análise dos efeitos da lubrificação nas vibrações nos mancais de rolamentos / por Germano Fontes Braga; orientado por Márcio Tadeu de Almeida e co-orientado por Vilmar Arthur Schwarz. -- Itajubá, MG: UNIFEI, 2002.

169p. il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Itajubá.

1. Sistemas Mecânicos. 2. Vibrações Mecânicas. 3. Tribologia. I. Almeida, Márcio Tadeu de, orient. II. Schwarz, Vilmar Arthur, co-orient. III. Universidade Federal de Itajubá. IV. Título.



Ministério da Educação  
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ  
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

## PRONUNCIAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA DE TESE DE DOUTORADO

A Comissão Examinadora nomeada pela Portaria nº 107 de 03/05/2002, cumpridas todas as etapas da Sessão de Defesa de Tese previstas no Regulamento do Curso de Doutorado em Engenharia Mecânica, se posiciona favoravelmente à "**Aprovação**" da Tese de Doutorado intitulada: "**Análise dos Efeitos da Lubrificação através de Espectro de Vibrações de Mancais de Rolamentos**" e emite instrução para que o Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, tome as providências necessárias junto ao DRA (Departamento de Registro Acadêmico) para a expedição do título de **Doutor em Ciências em Engenharia Mecânica**, na Área de Concentração **Projeto e Fabricação**, desde que atendidas as demais exigências regimentais, a **Germano Fontes Braga**.

Itajubá, 03 de maio de 2002.

Prof. José Geraldo Trani Brândão  
1º Examinador - FEG/UNESP

Prof. Celso Pinto Morais Pereira  
2º Examinador - FEG/UNESP

Prof. Paulo Fernandes Silva  
3º Examinador - EFEI

Prof. Vilmar Arthur Schawrz  
4º Examinador - EFEI

Prof. Márcio Tadeu de Almeida  
5º Examinador - (orientador) - EFEI

Prof. José Celio Dias  
Moderador - EFEI

## Agradecimentos

A Deus pela minha existência.

Ao meu orientador, professor Dr. Marco Tullio de Almeida e ao meu colaborador Dr. Valmir Arthur Schwarz pelas doutrinas seguras e pela orientação permanente a conclusão da tese.

Aos demais professores e colegas pelas colaborações prestadas.

A todos pelo apoio financeiro.

## Dedicatória

Aos meus amigos pela amizade.

Dedico este trabalho com todo carinho aos meus queridos pais – **Laércio** e **Selma**, e em especial ao meu grande orientador da vida, meu pai, que mesmo *in memoria* está presente em todos os meus trabalhos e, a todos que me apóiam e me auxiliam para alcançar os meus ideais.

## *Agradecimentos*

A Deus pela vitória alcançada.

Ao meu orientador professor Dr. Márcio Tadeu de Almeida e ao meu co-orientador Dr. Vilmar Arthur Schwarz pelas diretrizes seguras e permanentes que possibilitaram a conclusão da tese.

Aos demais professores e colegas pelas colaborações prestadas.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Aos meus amigos pelo incentivo.

E, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.

# SUMÁRIO

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| ÍNDICE DAS FIGURAS..... | i   |
| ÍNDICE DAS TABELAS..... | ii  |
| SIMBOLOGIA.....         | iii |

## CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

|     |                                  |    |
|-----|----------------------------------|----|
| 1.1 | Generalidades.....               | 1  |
| 1.2 | Revisão bibliográfica.....       | 2  |
| 1.3 | Objetivo do trabalho.....        | 17 |
| 1.4 | Desenvolvimento do trabalho..... | 18 |

## CAPÍTULO 2 - PARÂMETROS GEOMÉTRICOS E CINEMÁTICA DOS MANCAIS DE ROLAMENTOS

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Introdução.....   | 21 |
| 2.2 | Elementos básicos do rolamento.....                                 | 21 |
| 2.3 | Rolamento de esfera.....  | 22 |
|     | 2.3.1 Osculação.....  | 22 |
|     | 2.3.2 Definição.....  | 22 |
|     | 2.3.3 Ângulo de contato.....  | 24 |
|     | 2.3.4 Condição de puro rolamento, sem deslizamento.....             | 25 |
| 2.4 | Rotações das esferas no rolamento.....                              | 26 |
|     | 2.4.1 Movimentos da esfera no rolamento.....                        | 29 |
| 2.5 | Velocidades lineares com relação à pista externa.....               | 33 |
|     | 2.5.1 Velocidade linear da pista externa.....                       | 33 |
|     | 2.5.2 Velocidade linear da esfera em relação à pista externa.....   | 34 |
|     | 2.5.3 Deslizamento entre a pista externa e a esfera.....            | 34 |
|     | 2.5.4 Deslizamento transversal na pista externa.....                | 35 |
|     | 2.5.5 Efeito rotacional na pista externa.....                       | 36 |
|     | 2.5.6 Velocidade angular da esfera com relação à pista externa..... | 36 |
| 2.6 | Velocidades lineares com relação à pista interna.....               | 37 |
|     | 2.6.1 Velocidade linear da pista interna.....                       | 38 |
|     | 2.6.2 Velocidade linear da esfera em relação à pista interna.....   | 39 |

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 2.6.3 | Deslizamento entre a pista interna e a esfera.....            | 39 |
| 2.6.4 | Deslizamento transversal na pista interna.....                | 40 |
| 2.6.5 | Efeito rotacional na pista interna.....                       | 40 |
| 2.6.6 | Velocidade angular da esfera com relação à pista interna..... | 41 |
| 2.7   | Movimento orbital.....  | 41 |

### **CAPÍTULO 3 – FREQUÊNCIAS DE DEFEITOS NOS ROLAMENTOS**

|       |                                 |    |
|-------|---------------------------------|----|
| 3.1   | Introdução.....                 | 44 |
| 3.2   | Pista externa estacionária..... | 45 |
| 3.3   | Pista interna estacionária..... | 48 |
| 3.3.1 | Comentários.....                | 50 |
| 3.4   | Mancais axiais.....             | 51 |
| 3.5   | Frequências de defeitos.....    | 52 |
| 3.5.1 | Comentários.....                | 54 |
| 3.6   | Exemplos numéricos.....         | 54 |

### **CAPÍTULO 4 - EFEITOS DA LUBRIFICAÇÃO NAS VIBRAÇÕES DOS MANCAIS DE ROLAMENTO**

|         |  |    |
|---------|--|----|
| 4.1     | Introdução.....  | 58 |
| 4.2     | Cilindro equivalente.....  | 58 |
| 4.3     | Análise dimensional.....   | 63 |
| 4.4     | Expressão simplificada para calcular a espessura do filme de lubrificante..... | 65 |
| 4.5     | Efeitos da lubrificação.....   | 71 |
| 4.5.1   | Efeitos da carga externa.....  | 75 |
| 4.5.1.1 | Primeiro caso.....   | 76 |
| 4.5.1.2 | Segundo caso.....  | 78 |
| 4.5.1.3 | Comentários sobre os efeitos.....  | 79 |
| 4.6     | Viscosidade.....   | 82 |
| 4.6.1   | Efeitos da temperatura na viscosidade dos lubrificantes.....                   | 86 |
| 4.6.2   | Efeitos da pressão na viscosidade dos lubrificantes.....                       | 89 |

### **CAPÍTULO 5 – MÉTODO DO ENVELOPE NO MONITORAMENTO DOS ROLAMENTOS**

|     |                 |    |
|-----|-----------------|----|
| 5.1 | Introdução..... | 92 |
|-----|-----------------|----|

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 5.2     | Generalidades.....  | 92  |
| 5.3     | Modelo teórico.....   | 93  |
| 5.4     | Formulação das vibrações no rolamento.....                            | 98  |
| 5.4.1   | Formulação das vibrações no domínio do tempo.....                     | 98  |
| 5.4.2   | Formulação das vibrações no domínio da frequência.....                | 100 |
| 5.5     | Método do envelope no monitoramento dos rolamentos.....               | 103 |
| 5.5.1   | Introdução.....   | 103 |
| 5.5.2   | O envelope.....   | 104 |
| 5.5.2.1 | Generalidades.....  | 104 |
| 5.5.2.2 | Desenvolvimento da técnica do envelope.....                           | 105 |
| 5.6     | Severidade do sinal.....  | 109 |
| 5.6.1   | O coeficiente $a_2$ .....   | 116 |
| 5.6.1.1 | Influência das imperfeições geométricas no filme de lubrificante..... | 116 |
| 5.6.1.2 | Resultante dos efeitos no coeficiente $a_2$ .....                     | 119 |

## **CAPÍTULO 6 – SENSIBILIDADE DA RIGIDEZ DO FILME DE LUBRIFICANTE**

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 6.1   | Introdução.....   | 121 |
| 6.2   | Análise da sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante.....                                   | 122 |
| 6.3   | Sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante em relação à viscosidade...                       | 122 |
| 6.3.1 | Primeiro caso.....  | 122 |
| 6.3.2 | Segundo caso.....   | 124 |
| 6.3.3 | Comentários sobre a sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante em relação à viscosidade..... | 124 |
| 6.3.4 | Sobreposição dos efeitos na sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante.....                  | 125 |
| 6.3.5 | Desgastes uniformes.....  | 127 |
| 6.4   | Sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante em relação à velocidade.....                      | 128 |
| 6.4.1 | Primeiro caso.....  | 128 |
| 6.4.2 | Segundo caso.....   | 129 |
| 6.4.3 | Comentários sobre a sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante em relação à velocidade.....  | 129 |

## **CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

|     |                 |     |
|-----|-----------------|-----|
| 7.1 | Introdução..... | 131 |
|-----|-----------------|-----|

|   |                 |     |
|---|-----------------|-----|
| 7.2   | Conclusões..... | 135 |
| 7.3   | Sugestões.....  | 141 |
| ANEXO A Rotina do programa para o cálculo das frequências de defeito..... |                 | 143 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....   |                 | 145 |

**APÊNDICE I** Teorema da Convolução

**APÊNDICE II** Transformada de Fourier

**APÊNDICE III** Transformada de Hilbert

## ÍNDICE DAS FIGURAS

### CAPÍTULO 2

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.1  | Rolamento de esferas.....  | 22 |
| 2.2  | Posição das esferas com relação às pistas sob ação das cargas  | 24 |
| 2.3  | Condição de rolamento puro.....  | 25 |
| 2.4  | Velocidades no rolamento.....  | 26 |
| 2.5  | Velocidades angulares na pista externa.....  | 29 |
| 2.6  | Velocidades angulares da esfera no espaço.....   | 31 |
| 2.7  | Decomposição do vetor $\omega_e$ nas direções do maior e menor eixo da elipse.....                     | 31 |
| 2.8  | Componentes dos vetores $\omega_e$ , $\omega_x^1$ e $\omega_z^1$ nas direções dos eixos da elipse..... | 32 |
| 2.9  | Velocidades angulares na pista interna.....  | 37 |
| 2.10 | Componentes dos vetores $\omega_i$ , $\omega_x^1$ e $\omega_z^1$ nas direções dos eixos da elipse..... | 38 |

### CAPÍTULO 3

|     |                                  |    |
|-----|----------------------------------|----|
| 3.1 | Pista externa estacionária ..... | 46 |
| 3.2 | Pista interna estacionária.....  | 48 |

### CAPÍTULO 4

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.1 | Contato do cilindro com a pista interna.....        | 59 |
| 4.2 | Cilindro equivalente com relação às pistas.....     | 60 |
| 4.3 | Relação geométrica com a deformação no contato..... | 61 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 4.4  | Contato do cilindro com a pista externa.....                         | 62 |
| 4.5  | Modelo de Grubin do contato elastohidrodinâmico .....                | 66 |
| 4.6  | Carga transmitida em função do filme de lubrificante.....            | 71 |
| 4.7  | Rigidez do filme de lubrificante em função da velocidade.....        | 73 |
| 4.8  | Rigidez do filme de lubrificante em função da viscosidade.....       | 74 |
| 4.9  | Rigidez do filme de lubrificante em função da carga.....             | 74 |
| 4.10 | Plano deslizando sobre filme de lubrificante de espessura $h$ .....  | 82 |
| 4.11 | Velocidades em um elemento infinitesimal do fluido lubrificante..... | 85 |
| 4.12 | Diagrama da viscosidade em função da temperatura .....               | 87 |

## CAPÍTULO 5

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 5.1 | Modelo teórico de defeito na pista externa.....                            | 95  |
| 5.2 | Relações trigonométricas da esfera com o defeito no impacto.....           | 96  |
| 5.3 | Evolução do defeito na pista externa.....                                  | 97  |
| 5.4 | Amplitude de pulsos periódicos amortecidos.....                            | 99  |
| 5.5 | Exemplo do envelope de um sinal.....                                       | 106 |
| 5.6 | Diagrama dos alarmes em envelope, para o máximo 1000[Hz].....              | 110 |
| 5.7 | Influência do comportamento da rotação nos valores de severidade.....      | 114 |
| 5.8 | Severidade no rolamento em função da rotação e o tipo de lubrificante..... | 115 |
| 5.9 | Irregularidade de fabricação nos componentes do rolamento.....             | 117 |

**CAPÍTULO 6**

6.1 Sobreposição das sensibilidades..... 126

**CAPÍTULO 7**

7.1 Energia de vibração à carga média para rotação de 1000 [rpm]..... 132

7.2 Energia de vibração à carga média para rotação de 2000 [rpm]..... 133

7.3 Energia de vibração à carga total para rotação de 1000 [rpm]..... 133

7.4 Energia de vibração à carga total para rotação de 2000 [rpm]..... 134

7.5 Níveis do lubrificante utilizados para levantamento das curvas das figuras 7.1 a 7.4..... 134

# ÍNDICE DAS TABELAS

## SÍMBOLOGIA

### CAPÍTULO 3

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3.1 | Dimensões do rolamento (padrões de mercado).....   | 55 |
| 3.2 | Frequências de defeitos para o modelo 2200.....    | 56 |
| 3.3 | Frequências de defeitos para o modelo 6200.....    | 56 |
| 3.4 | Frequências de defeitos para o modelo 894/530..... | 56 |
| 3.5 | Frequências de defeitos para o modelo 511/530..... | 57 |

### CAPÍTULO 4

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.1 | Variáveis independentes.....  | 64 |
| 4.2 | Valores do coeficiente e expoentes da relação da espessura mínima do filme de lubrificante.....         | 70 |
| 4.3 | Valores do coeficiente pressão do lubrificante à pressão de 1,075 [MPa], com relação a temperatura..... | 91 |

### CAPÍTULO 5

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 5.1 | Alarmes em função da frequência, diâmetro e rotação ..... | 111 |
|-----|---|-----|

### CAPÍTULO 7

|     |                                     |     |
|-----|-------------------------------------|-----|
| 7.1 | Propriedades dos lubrificantes..... | 132 |
|-----|-------------------------------------|-----|

## SIMBOLOGIA

### Caracteres alfabéticos

|                   |  |
|-------------------|--|
| $a$               | aceleração [ $m/s^2$ ].  |
| $a_c$             | distância do centro da esfera com a linha de contato [m].              |
| $a_e$             | lado maior da elipse de contato com a pista externa [m].               |
| $a_i$             | lado maior da elipse de contato com a pista interna, [m].              |
| $a_v$             | variável auxiliar.   |
| $a_1$             | expoente da severidade.  |
| $a_2$             | coeficiente da severidade.   |
| $a_3$             | expoente da severidade.  |
| $a_4$             | expoente da severidade.  |
| $A$               | variável auxiliar.   |
| $A_E$             | envelope.  |
| $b$               | comprimento [m].   |
| $b_e$             | lado menor da elipse de contato com a pista externa [m].               |
| $b_i$             | lado menor da elipse de contato com a pista interna [m].               |
| $b_v$             | variável auxiliar.   |
| $B$               | variável auxiliar.   |
| BPFI              | freqüência de passagem dos elementos rolantes pela pista interna.      |
| BPFO              | freqüência de passagem dos elementos rolantes pela pista externa.      |
| BPFS              | freqüência de passagem dos elementos rolantes pela pista estacionária. |
| BPFR              | freqüência de passagem dos elementos rolantes pela pista girante.      |
| BSF               | freqüência de rotação da esfera, “ <i>spin</i> ”.                      |
| $c$               | variável auxiliar.   |
| $C$               | variável auxiliar.   |
| $C_0$             | variável auxiliar.   |
| $d$               | operador de derivada total.  |
| $d_e$             | diâmetro do eixo.  |
| $d_m$             | diâmetro médio do rolamento (diametral pitch) [m].                     |
| $d_e$             | diâmetro da pista externa [m].   |
| $D_e$             | diâmetro de montagem externo [m].                                      |
| $D$               | diâmetro da esfera [m].  |
| $e$               | densidade do lubrificante [ $N/m^3$ ].                                 |
| $E_{1,2}$         | módulos de elasticidade dos sólidos [ $N/m^2$ ].                       |
| $E$               | energia [N.m].   |
| $E'$              | módulo de elasticidade do material do par de rolamento [ $N/m^2$ ].    |
| $f$               | relação entre o raio de curvatura da pista e o diâmetro do rolamento.  |
| $f(t)$            | número complexo.   |
| $f_{m\acute{a}x}$ | freqüência máxima.   |
| $f_p$             | freqüência portadora.  |
| $f_1(t)$          | parte real do número complexo $f(t)$ .                                 |
| $\tilde{f}_1(t)$  | parte imaginária do número complexo $f(t)$ .                           |

|           |  |
|-----------|--|
| F         | força [N].   |
| $F_p$     | função genérica.   |
| FDER      | freqüência de defeito do elemento rolante.   |
| FDPE      | freqüência de defeito da pista externa.  |
| FDPI      | freqüência de defeito da pista interna.  |
| FTF       | freqüência fundamental do trem.  |
| G         | adimensional referente ao módulo de elasticidade do material do par de rolamentos. |
| h         | distância entre a esfera e a pista interna [m].                                    |
| $h_0$     | espessura mínima do filme de óleo [m].   |
| $h_{a,b}$ | distância entre pontos [m].  |
| H         | adimensional da espessura do filme de óleo.  |
| $H_0$     | adimensional da espessura mínima do filme de óleo.                                 |
| i         | índice.  |
| j         | número imaginário, $\sqrt{-1}$ .   |
| J         | fator de conversão de potência em calor.   |
| k         | coeficiente de condução:   |
| $k_m$     | rigidez mecânica.  |
| $k_s$     | rigidez das superfícies combinadas dos componentes do rolamento [N/m].             |
| $k_s h_0$ | termo devido à carga dinâmica [N].   |
| $k'_n$    | rigidez equivalente [N/m].   |
| $K''$     | constante genérica.  |
| L         | alarme [gE].   |
| m         | variável auxiliar.   |
| M         | variável auxiliar.   |
| n         | rotação [rpm].   |
| $n_a$     | rotação da pista [rpm].  |
| $n_e$     | rotação da pista externa [rpm].  |
| $n_g$     | rotação da gaiola [rpm].   |
| $n_{gi}$  | rotação da pista interna com relação à gaiola [rpm].                               |
| $n_{eq}$  | rotação equivalente [rpm].   |
| $n_i$     | rotação da pista interna [rpm].  |
| $n_m$     | rotação média no rolamento [rpm].  |
| $n_p$     | deslocamento equivalente   |
| $n_R$     | rotação da esfera [rpm].   |
| p         | pressão [N/m <sup>2</sup> ].   |
| $p_d$     | folga diametral do rolamento [m].  |
| $p_0$     | pressão Hertziana [N/m <sup>2</sup> ].   |
| $P_0$     | adimensional da pressão Hertziana.   |
| q         | pressão reduzida [N/m <sup>2</sup> ].  |
| Q         | adimensional da pressão reduzida;  |
| r         | raio [m].  |
| $r_e$     | raio da ranhura da pista da pista externa [m].                                     |
| $r_e^1$   | distância entre os pontos 0 e 0'', para a pista externa [m].                       |
| $r_i^1$   | distância entre os pontos 0 e 0'', para a pista interna [m].                       |
| $r_i$     | raio da ranhura da pista da pista interna [m].                                     |

|                |  |
|----------------|--|
| R              | raio equivalente do par de rolamento.  |
| $R_a$          | raio da pista; [m].  |
| $R_{ac}$       | raio auxiliar da pista externa [m].  |
| $R_{ai}$       | raio auxiliar da pista interna [m].  |
| $R_b$          | raio do cilindro deformado [m].  |
| $R_c$          | raio equivalente externo; [m].   |
| $R_i$          | raio equivalente interno [m].  |
| s              | variável auxiliar.   |
| t              | tempo [s].   |
| $t_1$          | variável auxiliar.   |
| $t_2$          | variável auxiliar.   |
| u              | velocidade [m/s].  |
| U              | adimensional da velocidade.  |
| v              | velocidade [m/s].  |
| $v_D^e$        | velocidade linear da esfera em relação à pista externa [m/s].                  |
| $v_D^i$        | velocidade linear da esfera em relação à pista interna [m/s].                  |
| $v_e$          | velocidade tangencial na ranhura da pista externa [m/s].                       |
| $v_{esc}^e$    | velocidade linear de escorregamento na pista externa [m/s].                    |
| $v_{esc}^e _t$ | velocidade linear de deslizamento na pista externa [m/s].                      |
| $v_i$          | velocidade tangencial na ranhura da pista interna [m/s].                       |
| $v_m$          | velocidade média no rolamento [m/s].   |
| w              | carga externa por unidade de comprimento [N/m].                                |
| $w_n$          | carga suportada pelo enésimo elemento rolante.                                 |
| $w_{ne}$       | parte da carga suportada pelo enésimo elemento rolante devido à carga externa. |
| W              | adimensional da carga;   |
| $x(t)$         | sinal aleatório obtido pelo acelerômetro.                                      |
| x              | posição na zona de contato.  |
| $x_p$          | variável da função $F_p$ .   |
| $x_0$          | distância infinitesimal [m].   |
| $x_{1,2}$      | comprimento [m].   |
| $x^1$          | eixo coordenado.   |
| X              | adimensional da variável genérica.   |
| y              | valor da penetração da esfera na cavidade do defeito [m].                      |
| $y_p$          | variável da função $F_p$ .   |
| $y_1$          | comprimento [m].   |
| $y(t)$         | valor real a ser determinado da variável complexa $f(t)$ .                     |
| $y'_e(t)$      | valor das irregularidade da superfície externa do rolamento no tempo.          |
| $y'_i(t)$      | valor das irregularidade da superfície interna do rolamento no tempo.          |
| $y_0$          | ponto coordenado.  |
| $y^1$          | eixo coordenado;   |
| $y'_e(t)$      | variável auxiliar.   |
| $y'_i(t)$      | variável auxiliar.   |
| $y'_{de}(t)$   | variável auxiliar.   |
| $y'_{di}(t)$   | variável auxiliar.   |
| Y              | eixo coordenado.   |
| $z^1$          | eixo coordenado.   |

- $z_p$  variável da função  $F_p$ .
- $z'_{de}(t)$  variável auxiliar.
- $z'_{di}(t)$  variável auxiliar.
- $z'_e(t)$  variável auxiliar.
- $z'_i(t)$  variável auxiliar.
- $Z$  eixo coordenado.
- $0$  origem dos eixos coordenados  $x^1, y^1, z^1$ .
- $0'$  origem do raio de curvatura da superfície deformada.
- $0''$  ponto central de contato da esfera com a pista.

## Caracteres Gregos

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $\alpha$                   | expoente da dependência da viscosidade com a pressão. [ $m^2/N$ ].                                |
| $\alpha'$                  | constante do material.  |
| $\beta$                    | ângulo formado entre o eixo de rotação da esfera com o plano da elipse [rad/s].                   |
| $\beta'$                   | ângulo formado entre a projeção da rotação da esfera no plano da elipse com o eixo $x^1$ [rad/s]. |
| $\delta$                   | impulso unitário ou delta de Dirac.   |
| $\Delta$                   | variação de uma grandeza.   |
| $\Delta\%$                 | variação percentual.  |
| $\gamma$                   | relação adimensional;   |
| $\gamma'$                  | expoente de temperatura da viscosidade [1/K].   |
| $\eta$                     | viscosidade dinâmica [ $N.s/m^2$ ].   |
| $\eta_0$                   | viscosidade na entrada de contato com o par de rolamento [ $N.s/m^2$ ].                           |
| $\varphi$                  | argumento do número complexo na forma polar dissipação viscosa.                                   |
| $\lambda$                  | constante empírica.   |
| $\lambda'$                 | constante de amortecimento.   |
| $\nu$                      | viscosidade cinemática [ $m^2/s$ ].   |
| $\omega$                   | velocidade angular [rad/s].   |
| $\omega_e$                 | velocidade angular da pista externa em torno do eixo [rad/s].                                     |
| $\omega_i$                 | velocidade angular da pista interna em torno do eixo [rad/s].                                     |
| $\omega_r$                 | velocidade angular do elemento rolante [rad/s].   |
| $\omega_R$                 | velocidade angular da esfera em torno do seu próprio eixo [rad/s].                                |
| $\omega_{rot}^e$           | velocidade angular de rotação da esfera em relação à pista externa [rad/s].                       |
| $\omega_{rot}^i$           | velocidade angular de rotação da esfera em relação à pista interna [rad/s].                       |
| $\hat{c}$                  | operador de derivada parcial.   |
| $\frac{\hat{c}}{\hat{c}t}$ | derivada parcial no tempo.  |
| $\varphi_e$                | osculação da pista externa.   |
| $\varphi_i$                | osculação da pista interna.   |
| $\theta$                   | ângulo de contato [rad].  |
| $\theta_1$                 | temperatura [K].  |
| $\theta_e$                 | ângulo de contato da pista externa [rad].   |
| $\theta'_e$                | temperatura de entrada [K].   |
| $\theta_i$                 | ângulo de contato da pista interna [rad].   |
| $\theta_m$                 | temperatura média [K].  |
| $\theta_s$                 | temperatura na saída [K].   |
| $\theta'$                  | ângulo [rad].   |
| $\rho$                     | massa específica [ $kg/m^3$ ].  |
| $\sigma_{1,2}$             | coeficientes de Poisson dos sólidos em contato.   |

## RESUMO

### Símbolos

- $\mathcal{F}$  transformada de Fourier
- $\mathcal{H}$  transformada de Hilbert
- $*$  convolução

... análise de vibrações, os fenômenos apresentados diferenciam-se em função das condições de contorno. Nas situações novas são os defeitos devidos à fabricação, porém, com o trabalho há a progressão dos defeitos e o surgimento de novos que estão diretamente relacionados com as solicitações decorrentes do tipo de usinagem, lubrificação e as condições de montagem, desmontagem, defletores de funcionamento.

Os defeitos, em seu gênero, são as causas da vibração e, sendo diretamente relacionados com a amplitude da margem pericla, que são influenciadas, pois, além do mais, podem causar alguns problemas no equipamento. Para que não se desenvolvam, a vibração deve ser controlada no seu momento.

Não há que se esquecer que a substituição do rolamento é exigida em períodos que o equipamento não para para evitar a produção, algumas vezes levando à paralisação de toda a linha, agravando as perdas. Manutenções programadas são largamente utilizadas para evitar os problemas, porém, dependendo do material, que pode ser recuperado, a energia de vibração ainda pode ser utilizada em alguns casos para a paralisação do equipamento para a substituição do rolamento devido a gravidade dos danos.

Na análise das vibrações em máquinas de rolamento, a energia de vibração pode ser monitorada através do nível indicado pela curva característica de potência. Isto para cada tipo de equipamento. A vibração é sempre relacionada com o tipo de equipamento.

## RESUMO

Devido ao tipo e as condições de trabalho, os rolamentos apresentam diferentes evoluções dos defeitos em seus componentes. Nos rolamentos novos têm os defeitos devidos à fabricação, porém, com o trabalho há a progressão dos existentes e o surgimento de outros que estão diretamente relacionada com as solicitações decorrentes do tipo de esforço, lubrificação e as condições de montagem, denominados defeitos de funcionamento.

Os defeitos, em seu gênero, são as causas da vibração e, estão diretamente relacionados com a amplitude da energia gerada, que são indesejadas, pois, além do ruído, podem acarretar sérios problemas no equipamento. Para que não se comprometa o equipamento, a troca do rolamento se faz necessária.

Pode haver momentos em que a substituição do rolamento é exigida em períodos que o equipamento não possa parar devido à produção, algumas vezes levando à paralisação de toda a linha, agravando às perdas. Manutenções programadas são largamente utilizadas para contornar o problema, porém, dependendo do momento, que pode ser inesperado, a energia de vibração atinge valores insustentáveis sendo inevitável a paralisação do equipamento para a substituição do rolamento devido a gravidade dos defeitos.

Na análise das vibrações em mancais de rolamento, a energia da vibração pode ser monitorada através do nível indicado pela curva característica da severidade, isto para cada tipo de equipamento. A severidade representa a amplitude da vibração que é

proporcional à profundidade e ao tamanho do defeito nas superfícies em contato do rolamento.

O trabalho mostra matematicamente a possibilidade de aumentar a vida útil do rolamento ao se alterar a viscosidade do lubrificante, que por sua vez, tem influência na rigidez do filme de lubrificante. Desta forma, “as paradas indesejadas” podem ser contornadas. Contudo, algumas condições devem ser satisfeitas e, uma delas é da energia se encontrar com valores possíveis de serem reduzidos a patamares satisfatórios. outra é o tipo de carga, isto porque a rigidez do filme de lubrificante é variável em função da carga suportada pelo elemento rolante, sendo ela dividida em duas: dinâmica e estática.

As folgas no rolamento são também fator importante, pois elas é que permitirão maior incremento na viscosidade, o que reduz a energia de vibração. Trata-se de condição casuística, pois, no início da vida útil do rolamento se têm as condições iniciais das folgas, com o funcionamento, somado às condições da montagem e a lubrificação, resulta em desgastes discretos, que possibilitarão um maior incremento da viscosidade com o objetivo de reduzir a energia de vibração, o que prolonga um pouco mais a vida útil do rolamento.

No trabalho se conclui que é a carga estática, combinada com as folgas inerentes ao rolamento, viabiliza a diminuição da energia da vibração. Contudo, as cargas dinâmicas, que por sua vez variam em função da viscosidade e da velocidade, estão sempre presentes no fenômeno, dependendo de sua intensidade elas se opõe à redução de energia desejada, o que dá origem à rigidez equivalente.

ABSTRACT

O trabalho traz um tratamento matemático que possibilita obter, tratar e avaliar o sinal da energia de vibração, onde se utiliza como artifícios o envelope e a severidade. Neste, se faz uma análise de seus parâmetros, evidenciando a influência da energia de vibração e a sua aplicabilidade direta em equipamentos em operação.

Também apresenta o trabalho a análise da sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante que, além de mostrar o ganho nos casos analisados, permite avaliar quantitativamente em ordem de grandeza o quanto de energia é possível reduzir para um determinado incremento de viscosidade.

The document treats a vibration energy that is processed because, besides the noise, the vibration can cause serious equipment problems. So, in order not to reduce the equipment, the rolling contact bearing must be changed.

Obviously, there are moments that the rolling contact bearing substitution must be made, in a period in which the equipment owner may not be producing or, sometimes, it is necessary to shut down all the production line for replacing the defective rolling contact bearing by a new one.

Scheduled maintenance are largely used to avoid these problems, although the vibration energy can be unexpected and reaches undesirable values, which makes unavoidable the equipment shut down so that the defect rolling contact bearing may be replaced by a new one.

On the other hand, analyzing the rolling contact bearing vibration, it is possible to measure the vibration energy, through the level indicated by the severity characteristic.

## ABSTRACT

Due to the work type and conditions, the rolling contact bearing presents different defect evolutions in its components. In the new rolling contact bearing, there are manufacture defects, which increase according the work progresses, and there is the appearing of some new ones that are straightly related to the current requests, the effort type, lubrication and assembly conditions. These new defects are called the "operation defects".

The defects cause a vibration energy that is undesired because, besides the noise, the vibration can cause serious equipment problems. So, in order not to endanger the equipment, the rolling contact bearing must be changed.

Otherwise, there are moments that the rolling contact bearing substitution must be made, in a period in which the equipment cannot stop due to the production or, sometimes it is necessary to shut down all the production line for replacing the defective rolling contact bearing by a new one.

Scheduled maintenances are largely used to avoid these problems, although the vibration energy can be unexpected and reaches unsustainable values, which makes unavoidable the equipment shut down so that the defect rolling contact bearing may be replace by a new one.

One the other hand, analyzing the rolling contact bearing vibration, it is possible to monitor the vibration energy, through the level indicated by the severity characteristic

curve, for each kind of equipment. The severity curve represents the vibration amplitude, which is proportional to the damage depth and size in the rolling bearing contact surfaces.

Employing these previously considerations, the work shows the possibility of increasing the rolling contact bearing useful life changing the lubricant viscosity, which influences in the lubricant film stiffness. This way, it is possible to avoid the “undesired shutdown”.

However, some conditions should be satisfied, and one of them is the vibration energy value. Therefore, it must have values that are possible to reduce to a satisfactory condition. Another is the load type, because the lubricant film stiffness varies according to the dynamic and static load borne by the rolling element.

The rolling contact bearing clearances are also an important consideration, because they can allow a large viscosity value increment, reducing even more the vibration energy. It is a fortuitous condition, because in the bearing of the rolling contact bearing useful life the clearances get determined values. But, as the work progresses, the assembly and operation conditions make the clearances become larger, and this effect allows a bigger viscosity increment aiming the reduction of vibration energy. This latter effect is able to prolong the rolling contact bearing useful life a little more.

By the work can be concluded that, the static load combined with the inherent rolling contact bearing clearances, make possible to decrease the vibration energy. However, the dynamic loads always present in the *phenomenon* vary in function of both the viscosity and the speed. So, if the dynamic load value is significantly close to the static load value, happens the superimposed effect, which opposes to the energy reduction. The superimposed effect creates the equivalent stiffness.

The work also brings a mathematical treatment, using the envelope artifice along with the severity, that allows evaluating the sign of the vibration energy. Through the severity parameters analysis, it is possible to evidence the influence of the lubricant viscosity in the vibration energy, and the direct application in the mechanical equipment.

The sensitivity analysis of the lubricant film stiffness and the gain in the analyzed cases are also showed by the work. The mathematical considerations, here developed, allowed evaluating greatness order the possible energy reduction for a determined viscosity increment.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1-) Generalidades

Os rolamentos são dispositivos mecânicos que tem por função facilitar o movimento de rotação de uma peça em relação à outra. Geralmente são elementos de interface entre eixos ou árvores que giram em relação aos suportes fixos.

Os rolamentos são compostos por duas pistas, interna e externa, em forma de anel, tendo entre elas elementos rolantes devidamente espaçados por uma estrutura denominada gaiola. Os elementos rolantes têm a forma de esferas, rolos cilíndricos ou agulhas.

Nas utilizações mais comuns, as pistas externas dos rolamentos encontram-se estacionárias, por serem elas freqüentemente montadas acopladas às carcaças dos equipamentos. Com relação às pistas internas, são geralmente acopladas aos eixos ou árvores que giram a uma determinada rotação.

Tandon e Nakra (1991), através de uma revisão bibliográfica, mostram a importância dos rolamentos que, devido à ampla aplicação nos equipamentos industriais, atraí a atenção de muitos pesquisadores há várias décadas, o que se estende até os dias de hoje.

## 1.2-) Revisão bibliográfica

O desempenho dos rolamentos, em todas as condições de operação, tem sido alvo de vários estudos científicos. Um dos primeiros trabalhos que se tem registro é o de Gustafsson e Tallian (1961), que buscaram detectar defeitos nos mancais de rolamento. Em seguida, os mesmos autores, Tallian e Gustafsson (1965) fizeram outro trabalho buscando investigar e controlar o desenvolvimento das vibrações nos mancais de rolamento. Daí por diante seguiram vários outros, como por exemplo, o trabalho de Poon e Wardle (1978) que estudaram alguns procedimentos de como avaliar a qualidade dos rolamentos nos mancais dos equipamentos industriais.

Contemporaneamente Sunnersjo (1978) realizou trabalhos sobre as alterações das vibrações com o tempo em mancais de rolamento. Em seguida Meyer et al. (1980) publicaram trabalhos sobre modelos analíticos que possibilitam avaliar preditivamente as vibrações em mancais de rolamento devido aos defeitos distribuídos; Sayles e Poon (1981) estudaram a topografia das superfícies de rolamento e as vibrações geradas; Wardle e Poon (1983) avaliaram os ruídos gerados nos mancais de rolamento; desencadeando assim, uma série de trabalhos.

Com o aumento do parque industrial, devido a sua própria função, os rolamentos tornaram componentes críticos, requerendo a cada dia mais técnicas apuradas de observação, que possibilitem detectar com maior precisão o surgimento dos defeitos e as suas evoluções. A técnica mais usual para atender às necessidades é o do monitoramento das vibrações, a qual também é a utilizada no controle de qualidade na fabricação dos rolamentos.

As vibrações e os ruídos nos mancais de rolamento são gerados pelas imperfeições geométricas localizados nos elementos rolantes ou nas pistas de rolamento. Estas imperfeições são oriundas da fabricação, de desgastes normais ou acelerados pela má utilização do rolamento.

Os defeitos oriundos da fabricação são geralmente distribuídos, relacionando a rugosidade e as ondulações das superfícies em contato, os desalinhamentos das pistas, bem como os desvios das dimensões dos elementos rolantes que se encontram fora da faixa de tolerância permitida. As vibrações geradas neste tipo de defeito estão relacionadas com o controle de qualidade na fabricação. Existem várias publicações que abrangem estes fenômenos, como exemplo, o trabalho desenvolvido por Kanai et al. (1987) que estima a rugosidade das superfícies analisando as vibrações desenvolvidas.

O assunto não esgotou até então, pois, estudos mais recentes como o elaborado por Su et al. (1992) dá continuidade, especialmente analisando os efeitos das irregularidades das superfícies nas vibrações dos mancais de rolamento.

Os outros tipos de defeitos são os localizados que são gerados à medida que o rolamento é submetido ao trabalho, podendo classificá-los em: trincas, pequenas cavidades ou remoções de lascas nas superfícies de rolamento. De acordo com os trabalhos no assunto, os dominantes são as remoções de lascas nas superfícies, ocorrendo tanto nas pistas externa e interna, como nas superfícies dos elementos rolantes. Tal fenômeno dá-se devido às fissuras provocadas por fadiga em camadas superficiais um pouco abaixo da superfície de rolamento, propagando-se até aflorar, saindo pequenas lascas formando-se assim, as cavidades. Hampson (1984) analisa o

fenômeno da fissura afirmando que as dimensões dos primeiros materiais removidos podem ter em torno de 100 microns ou até maiores.

Trabalhos anteriores já se preocuparam com os problemas causados pelo contato, como o de Rowe (1971) diagnosticando os danos oriundos dos contatos no rolamento. Na mesma linha de pensamento, Widner e Littmann (1974) analisaram o mesmo fenômeno. Depois, Eschmann (1985) avaliou o problema das trincas superficiais envolvendo teoria e projeto, indicando algumas aplicações para os rolamentos de esferas.

Os defeitos localizados interferem abruptamente no contato entre os elementos rolantes e as pistas, de maneira tal que, quando o local defeituoso é submetido a esforços, surgem forças impulsivas que associam uma quantidade de energia gerando vibrações e ruídos. As vibrações e os ruídos podem ser monitorados através de sinais elétricos, e, com estes sinais, pode-se identificar não só a presença dos defeitos no rolamento como também os locais onde se encontram.

Dois métodos de aproximação na identificação dos defeitos têm sido estudados e avaliados, obtendo resultados satisfatórios em ensaios laboratoriais. Usualmente, durante a vida normal do rolamento, após a montagem eles são monitorados antes de apresentarem defeitos localizados para serem comparados aos sinais obtidos durante a sua vida, pois, com o uso ou as condições de trabalho os sinais monitorados apresentam mudanças ao longo do tempo devido aos defeitos gerados. Porém, os defeitos nos rolamentos (desgastes) podem aparecer, dependendo das condições de trabalho do equipamento, demandar um longo tempo, durando dias, meses ou anos, é prudente, para efeito de pesquisa, que sejam induzidos.

Assim, o primeiro método de aproximação para acelerar os defeitos é feito aplicando-se sobrecargas, velocidades elevadas ou mesmo condições deficientes de lubrificação.

Nishio et al. (1979), acelerando os defeitos, investigaram os processos de desgastes nos rolamentos de esferas, monitorando, através das vibrações, os sinais gerados devidos às progressões dos defeitos. Em seguida, Igarashi, em três trabalhos, juntamente com Hamada. (1982), Yabe (1983) e Kato (1985) estudaram métodos de prognósticos das anormalidades nos mancais de rolamento. Kim (1984), por sua vez, apresentou um trabalho sobre monitoramento adequado, obtendo resultados empíricos satisfatórios. Kuhnell e Stecki (1985) também fizeram estudos empíricos relativos aos defeitos nos elementos do rolamento, mas introduzindo considerações sobre a lubrificação. Em seguida, Rao e Swarnamani (1986) aplicaram o método até então avaliado nos mancais de rolamento com esferas e com rolos. Através de comparações de sinais monitorados e das condições de trabalho possibilitaram que Lai e Reif (1989) elaborassem previsões dos defeitos nos rolamentos de esferas.

Estudos dedicados sobre os métodos de acelerações dos defeitos que possibilitam analisar a vida do rolamento foram avaliadas por Kim (1984) também por Rao e Swarnamani (1986). Estes artifícios já tinham sido avaliados por Smith e McGrew (1974) de uma maneira mais abrangente, envolvendo os modos e métodos de atingir o fim da vida útil do rolamento, bem como os métodos dos ensaios.

O outro método de aproximação na identificação dos defeitos, também introduzindo intencionalmente defeitos nos mancais de rolamento, são executados através de ataques com ácidos, erosões localizadas, ranhuras ou marcas mecânicas. As

vibrações geradas por este método são monitoradas e também comparadas com as respostas obtidas em rolamentos em bom estado. As análises são feitas introduzindo defeitos, cujas respostas são obtidas em um curto intervalo de tempo, devido ao próprio método de aceleração, os quais normalmente levariam um tempo considerável para serem apresentados nas condições normais de trabalho.

Trabalhos de pesquisa foram feitos neste sentido por Martin (1970), que analisou o funcionamento de rolamentos de esferas com defeitos localizados, definindo alguns parâmetros. Em outros estudos, como os de Igarashi e Hamada (1982), Igarashi e Yabe (1983), Igarashi e Kato (1985), Miyachi e Seki (1986), e por último Tandon e Nakra (1990) são apresentados métodos de análises que possibilitam avaliar e quantificar o tamanho dos defeitos que foram introduzidos artificialmente.

Apesar da técnica de introdução de defeitos ser uma excelente ferramenta, requer cuidados para obter uma boa reprodução do fenômeno desejado, dizendo, Tandon e Nakra (1991), que a introdução de defeitos requer técnicas especiais, e, além disso, é um trabalho tedioso, onde há necessidade de muita paciência.

Com os trabalhos técnicos já desenvolvidos e, até então apresentados, é possível nos dias atuais simular, avaliar, quantificar, diagnosticar os possíveis defeitos que surgem nos rolamentos dos equipamentos em geral. Ou seja, determinar a vida útil dos rolamentos em condições normais de trabalho.

O monitoramento das vibrações geradas pelos rolamentos no domínio do tempo, por sua vez, pode ser feito por uma simples aproximação com o valor da média quadrada, "RMS", dos sinais ou com os valores de pico destes sinais. Entretanto, nos estágios iniciais dos defeitos, os sinais por eles gerados são de baixa intensidade não

apresentando alterações significativas no valor do sinal RMS. Porém perceptíveis com os valores de pico.

Na década dos anos oitenta destacam-se estudos sobre o monitoramento contínuo, como exemplo os estudos realizados por Lai e Reif (1989), Igrashi e Hamada (1982) e Igrashi e Kato (1985) onde são discutidas e avaliadas as presenças de impactos devidas aos defeitos localizados com análise e monitoramento dos sinais através de osciloscópios ou com o auxílio de cartas obtidas em tempo real traçadas com registradores gráficos. Bom não se perder de vista que estudos no mesmo sentido já foram feitos antes por Gustafsson e Tallian (1961) onde propuseram um método para detectar defeitos baseado no número de picos que ultrapassam um valor pré-definido de voltagem, abrindo caminhos para o monitoramento contínuo.

Das informações obtidas com o monitoramento pode-se então, identificar a procedência dos defeitos e qual a sua origem, ou seja, se eles originam da pista interna, da pista externa ou dos elementos rolantes. Estas informações podem ser facilmente obtidas analisando as frequências das imperfeições. Estudos neste sentido foram apresentados por Harris (1966), também por Hermmings e Smith (1976).

Análises utilizando estatísticas foram apresentadas por Dyer e Stewart (1978), também, Braun e Datner (1979) apresentaram trabalhos no mesmo sentido, envolvendo rolamentos de rolos. Vários outros trabalhos também foram feitos em torno do assunto, como exemplo os de Wang e Shi (1989) sugerem técnicas que possibilitam diagnosticar as falhas como também avaliando a qualidade do sistema comparando os sinais monitorados com sinais padrões. Também Li e Ma (1995) apresentaram trabalho que possibilitam detectar e localizar defeitos em mancais de rolamento através de testes com

hipóteses. Em seguida, Li et al. (1995) também demonstraram em seus estudos a possibilidade de detectar e localizar defeitos através da análise das coerências das vibrações. Ma (1996) apresentou trabalhos relativos à seleção de métodos de diagnosticar os defeitos em mancais de rolamento.

Os sinais dos defeitos são obtidos através de instrumentos, tais como: sensores de fibra óptica, sensores de correntes parasitas, etc. Que são inseridos nas proximidades da pista externa. Estudos dedicados ao assunto foram apresentados por Philips (1980) e por Kim (1984), onde os sinais são monitorados através de osciloscópios. Em outro estudo realizado por Kim (1985), utilizando o mesmo recurso, mostra a possibilidade de identificar exatamente a localização dos defeitos, estando eles tanto na pista externa como na pista interna.

Uma outra técnica que possibilita diagnosticar os defeitos no domínio do tempo é o da “densidade de probabilidade”. A densidade da probabilidade foi sugerida por Dyer e Stewart (1978) como meio também de analisar as condições do rolamento. O princípio é que, quando o rolamento encontra-se em boas condições a aceleração apresenta uma distribuição Gaussiana bem definida. Mas, quando o rolamento encontra-se defeituoso, a aceleração não apresenta esta distribuição, e ainda, com dominantes picos devido ao relativo aumento de sua quantidade com altos valores da aceleração. Outros trabalhos específicos sobre o assunto também foram apresentados por Mathew e Alfredson (1984).

As análises espectrais das freqüências das vibrações nos mancais, talvez seja o método mais utilizado para analisar as condições que envolvem tanto as faixas de baixa

como as de alta frequência. Através da transformada rápida de Fourier (FFT)<sup>1</sup> foi possível analisar os espectros com maior facilidade e eficiência. Usualmente a análise era somente feita através de comparações, ou seja, compara-se o espectro com outro, obtido anteriormente quando o mancal encontrava-se em boas condições.

Conforme comentários anteriores, os defeitos nos rolamentos geram impulsos quando submetidos a esforços, ou seja, quando entram em contato com outro elemento do rolamento, excitando a estrutura, causando aumento da energia de vibração. Entretanto, cada elemento do rolamento tem sua determinada frequência de trabalho, dando origem às frequências de excitação, em outras palavras, as frequências das excitações dependem do componente do rolamento onde se encontra os defeitos, pois, cada elemento tem sua frequência característica de atuação.

Trabalhos desenvolvidos por Martin (1970), Igarashi (1982), Gustafsson (1961), Broderick et al. (1972), Mitchell (1978) e Prashad (1987) apresentaram fórmulas matemáticas que possibilitam o cálculo das frequências características, podendo assim, serem comparadas às frequências dos sinais monitorados.

Indo um pouco além, Martin (1970), Dyer (1973), Igarashi (1982) e Lipovszky (1982) afirmam que obtiveram sucesso em várias análises, monitorando o aumento das vibrações na faixa da alta frequência. Porém, em velocidades normais, as frequências dos defeitos são baixas, inferiores a 500[Hz]. Já, em conclusões anteriores, Broderick et al. (1972), levam a impossibilidade de detectar os defeitos devido a falta de picos significantes no espectro de frequência. Contudo, logo em seguida, Dyer (1973) apresentam conclusões contrárias.

---

<sup>1</sup> FFT – Fast Fourier Transform

Outras pesquisas, seguindo a mesma linha de raciocínio surgiram, como as de Maclain e Hartman (1980), Taylor (1980) e a de Igarashi (1982) também apresentaram conclusões favoráveis.

Lipovszky (1982) conclui algo mais, dizendo que para os rolamentos de esferas as frequências obtidas com o monitoramento divergem das calculadas, devido ao ligeiro escorregamento que ocorre entre os elementos rolantes e as pistas. Na verdade os problemas em detectar os defeitos não foram bem relatados anteriormente. Pois outras pesquisas como as de Osuagwu e Thomas (1982), Higbie (1989) mencionam que há dificuldade em se detectar os defeitos porque as suas frequências às vezes não ocorrem, ou ocorrem, sem existir defeitos. Sendo comum estes fenômenos, tratando-se de baixas frequências. Como é o caso nas máquinas com baixa rotação, cujos sinais podem ser mascarados pelos sinais advindos de outras máquinas. Contudo, Osuagwu e Thomas (1982) afirmam que a análise de tais casos pode ser feita com sucesso através do cepstrum de potência.

O cepstrum de potência é apresentado nos estudos feitos por Collacott (1977) e Randall (1981), definido como sendo o espectro do logaritmo do espectro de potência. O cepstrum de potência identifica e mostra as famílias de picos com iguais espaçamentos presentes no espectro de frequência dos sinais dinâmicos. É ela, uma poderosa ferramenta nas identificações das modulações. Mesmo assim, Ray (1980) destaca em seu trabalho as dificuldades em se obter os sinais dos defeitos em mancais de rolamentos devido às condições hostis de funcionamento.

Com relação às perturbações externas, Braun e Datner (1977) sugeriram em seu trabalho técnicas que utilizam médias ponderadas possibilitando melhor definição entre

os sinais e os ruídos gerados. Outra técnica relativa às perturbações é a “ACN”<sup>2</sup>, apresentada por Chaturvedi e Thomas (1981) que subtrai do sinal perturbado, o ruído; que por sua vez, é obtido com um sensor especial.

A “técnica do envelope”, também conhecida como “HFRT”<sup>3</sup>, é uma importante técnica de processamento que possibilita identificar os defeitos que não estão visíveis diretamente no espectro. Por ser a técnica do envelope amplamente utilizada no monitoramento de mancais de rolamentos, ela é largamente abordada por vários trabalhos desde 1972. Como referência pode-se citar os trabalhos de: Broderick (1972), Burchill et al. (1973), Darlow e Badgley (1975), publicações de McFadden e Smith (1984 e 1985), D’Amato e Rissone (1989), McFadden (1990). Ainda o assunto permanece em pauta, pois trabalhos mais recentes tais como os feitos por Jones (1996), onde divulgam o sucesso da técnica em várias investigações, bem como os problemas apresentados em algumas condições de trabalho.

Um outro método também estudado é o do monitoramento do som. Muito atrativo, pois reflete, muito próximas, as reações da audição humana. Nos anos 70 várias pesquisas foram feitas monitorando as pressões do som geradas nos mancais de rolamentos de esferas em bom estado. Como exemplo pode-se dizer: Lalwani (1973), Jayaram e Jarchow (1978), Nagamatsu e Fukuda (1978), Cempel e Stepaniak (1979). Contudo, poucas publicações comentam sobre esta técnica de identificação de defeitos, mas, entre os trabalhos publicados Igarashi e Yabe (1983) apresentam evidentes vantagens com o monitoramento das variações de pressão do som na identificação de defeitos em rolamentos de esferas axialmente carregado.

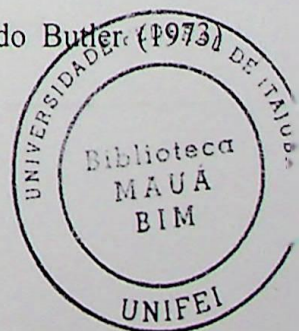
---

<sup>2</sup> ACN – adaptive noise canceling

<sup>3</sup> HFRT – high-frequency resonance technique

Outro método que surgiu na década de 70, sugerido por Rogers (1979), é o monitoramento da emissão acústica gerada por ondas elásticas, porém, com aplicação nas velocidades baixas. Estudos no mesmo seguimento foram feitos por Smith (1982), McFadden e Smith (1984). A emissão acústica é espontaneamente gerada por ondas elásticas produzidas com o material sob tensões mecânicas, onde os principais emissores são: as deformações plásticas e o aumento de trincas. O que possibilitou Yoshioka e Fujiwara (1984) demonstrarem a possibilidade de detectar defeitos em rolamentos de rolos com a emissão acústica gerada por ondas elásticas, antes de serem detectados pelo método da aceleração. Uma das vantagens deste método é detectar o crescimento de trincas que se encontram abaixo das superfícies de rolamento. Bagnoli et al. (1988), utilizando a mesma técnica, detectou defeitos em rolamentos com dupla carreira de esferas. Tandon e Nakra (1990) apresentaram em seus trabalhos algumas vantagens na utilização da emissão acústica.

Outro método desenvolvido para detectar os defeitos nos rolamentos, iniciados também nos anos 70, foi o do monitoramento das ondas ultra-sônicas produzidas por choques mecânicos, causados pelos impactos dos elementos rolantes com os defeitos. O método do pulso do choque "SPM"<sup>4</sup>, de acordo com várias pesquisas, tais como as de Butler (1973), Neville (1979), Kim (1984), Kuhnell e Stecki (1985) relatam que o método foi amplamente aceito nas indústrias pela sua confiabilidade em detectar defeitos em rolamentos. A menos de Engja et al. (1977) que apresentaram em seus trabalhos as influências negativas de algumas características de operação nos sinais monitorados, tais como: a cavitação e a turbulência em bombas. Também, outros estudos com os de Ray (1980), Smith (1982) apresentaram falhas no método quando aplicados em rolamentos submetidos a baixas rotações, mesmo tendo Butler (1973)



demonstrado que o método é funcional em rolamentos com roletes sujeitos a baixas rotações.

Em suma, pode-se dizer que: dos métodos pesquisados desde os anos 60 evidencia-se nos trabalhos uma corrente majoritária adotando as medidas de vibrações do que o método de medidas acústicas. Principalmente em altas frequências. Contudo, as pesquisas ressaltam que o espectro direto da vibração pode não mostrar o sinal do defeito devido à quantidade de harmônicas que poderão aparecer nos sinais amostrados. Todavia, vindo para sanar o problema à análise pela técnica do envelope desenvolvida na década de 70, a qual tem a característica de eliminar as dificuldades inerentes às altas frequências.

Pode-se notar que os pesquisadores trabalharam ao longo do tempo aprimorando e desenvolvendo técnicas de monitoramento com novos algoritmos de diagnósticos. Entretanto, por volta de 1990, com o auxílio do computador, começou-se a usar algoritmos com diagnósticos automáticos, possibilitando uma grande concentração de dados, permitindo cálculos estatísticos. Como exemplo, pode-se citar o trabalho de Barkov e Barkova (1995) que utiliza dados estatísticos para diagnosticar os mancais de rolamentos.

Estudos voltados ao monitoramento de rolamentos tem ainda atraído a atenção de pesquisadores com introduções de novas ferramentas que permitem flexibilidade ou melhoria das já existentes. Como pode ser observado a seguir, a exemplo, o estudo da severidade implementado por Ramakrisha e Chander (1998) cuja relevância consiste em se poder executar o software em um micro computador comum, permitindo a visualização de várias curvas de tendência e parâmetros críticos de operação.

---

<sup>4</sup> SPM – shock pulse method

O envelope, como dito anteriormente, tem sido também largamente explorado nos trabalhos técnicos, como exemplo do de He e Yang (1997) que analisam o envelope com um par de filtros digitais, ortogonais. Outro trabalho, envolvendo envelope, é o de Randall (1998) que mostra os benefícios e a flexibilidade da análise por envelope utilizando bons filtros, mostrando também uma considerável melhoria na análise do sinal quadrático em relação ao seu histórico.

Enfim, os trabalhos feitos em torno dos sinais são vários, sejam eles sobre a qualidade do sinal, a exemplo os acima citados, como também no tipo do método de análise. Neste último seguimento, como trabalho recente, pode-se citar o de: Woodard e Pappa (1998) que apresenta um algoritmo utilizando a lógica fuzzy na identificação de parâmetros nas análises de vibração, também o de Shao (1998) utilizou redes neurais adaptativas no monitoramento dos ruídos. Ainda, o trabalho de Shirkhodaie e Subramanian (1998) utilizando vários artificios – redes neurais, transformada de Fourier e lógica fuzzy – no monitoramento das vibrações. Como se pode ver, os sistemas de controle com maiores inteligências artificiais são a cada dia mais solicitadas devido à flexibilidade, que, somada as necessidades dos usuários, convergem a um rápido reconhecimento dos defeitos incipientes nos rolamentos. Esta característica permite, e já utilizadas em diagnósticos inteligentes. Segundo UNAL (19--), os primeiros trabalhos nesta área, utilizando as redes neurais foram por ele mesmo realizados em 1990, sendo que, na sua implantação utilizou a técnica do envelope.

O trabalho mais recente que se tem notícia, realizado na linha do até então discutido, foi apresentado em Houston, Texas por Berry (2000) com o título “*Integrating Vibration and oil Analysis within Today's Condition Monitoring Programs*” cujo conteúdo apresenta quatro estágios finais da vida do rolamento, dentro

dos 20% finais da vida útil. O primeiro estágio encontra-se entre os 20% a 10% finais da vida útil. O segundo estágio de 5% a 10%, o terceiro estágio de 1% a 5% e o último estágio encontra-se no 1% final, tipicamente uma hora. Dentro destes quatro estágios, mostrando a evolução das vibrações, apresentado a análise química do lubrificante para cada estágio, tendo em suma as seguintes conclusões: da passagem de um estágio para o outro se observou um aumento na concentração das partículas ferrosas; também, aumento no número de elementos metálico. Sendo este, menores nos estágios três e quatro, porém com substancial aumento na concentração das partículas ferrosas.

Resumindo, pode-se notar que o pesquisador, desde o início tem se preocupado em responder três indagações fundamentais. A primeira: se o rolamento encontra-se em boas ou más condições? A segunda: encontrando-se o rolamento em estado ruim, quais são as causas que provocaram o dano? E a última: quais os artifícios que podem ser introduzidos, possibilitando que os rolamentos levemente danificados tenham ainda uma vida útil além da qual normalmente teria? E, em que fases devem ser estes artifícios adotados?

As duas indagações iniciais do parágrafo anterior são alvos freqüentes de pesquisas e de debates, de acordo com o estado da arte apresentado até então. Mas a terceira, apesar de já ter sido abordada em trabalhos, abre campos às pesquisas. Sendo um dentre outros: as condições da lubrificação.

Os lubrificantes, através das suas propriedades, influenciam na energia de vibração que variam em função da espessura do filme de lubrificante formado. Que por sua vez, depende: da carga, da rotação, da viscosidade do lubrificante e da temperatura desenvolvida no funcionamento. Na particularidade abordada surge a indagação: não

seria possível utilizar algum destes efeitos, que alteram a espessura do filme, no sentido de aumentar a vida útil dos rolamentos?

Su et al. (1992) fizeram estudos neste sentido e concluíram que as vibrações sofrem alterações variando-se o nível e as características do lubrificante bem como a velocidade de rotação para uma determinada carga. O trabalho, contudo, não evidenciou os efeitos das temperaturas no lubrificante e a influência dos resultados na vida do rolamento. Porém, possibilitou visualizar novos caminhos para pesquisas com relação à interação do fluido lubrificante com a estrutura, ou seja, a de avaliar as influências provocadas por um determinado defeito no rolamento na parte estrutural do equipamento, quando se altera a espessura do filme de lubrificação.

Pesquisa contemporânea, que se tem notícia, envolvendo lubrificantes é a de Conde et al. (1998) que analisa as condições de rolamento através da acústica, utilizando curvas térmicas. Os autores, em apreço, não consideram que os sistemas sejam integrados, mas sim coordenados. A análise é feita com matemática avançada, utilizando sistemas de multivariáveis, relacionando as vibrações com dados conhecidos dos lubrificantes. Trata-se de um estudo matemático das condições de rolamento. Logo, pode-se notar que estudos relativos às vibrações em função das condições de lubrificação têm sido pouco abordados, justificando uma análise mais detalhada sobre os efeitos dos lubrificantes na severidade dos sinais. Ou seja, como a severidade comporta-se com as alterações da viscosidade, velocidade, volume de lubrificante e a temperatura.

### 1.3-) Objetivo do trabalho

O estado da arte mostrado evidencia as várias pesquisas que tem sido feitas através dos anos com os rolamentos, buscando cada vez mais conhecer o desempenho e a vida útil do rolamento: O fim da vida útil é atingido quando uma alta amplitude de vibração é detectada, indicando assim, o mau estado do rolamento que é diretamente relacionado aos defeitos que, de maneira geral, são influenciados pelos vários tipos de cargas e rotações. Devido a estes fatores motivou-se as várias pesquisas, até então desenvolvidas, envolvendo o monitoramento e a identificação dos defeitos, buscando explicações às suas causas.

A lubrificação, por sua vez, tem um fator importantíssimo na vida útil do rolamento. Algumas pesquisas abordam o efeito da lubrificação no rolamento, mas ainda podendo ser explorado. Surgindo então, um dos objetivos deste trabalho que é acrescentar um pouco mais de informações nas já existentes, como também utilizá-las na análise das possibilidades para aumentar a vida útil de um rolamento que já está apresentando defeitos. Visa-se obter tal artifício alterando a espessura mínima do lubrificante, que varia com a viscosidade, temperatura, com a carga e a rotação. Sendo este o maior objetivo do trabalho, que pode ser mais bem representado pela seguinte indagação: como se comporta o rolamento, com relação às vibrações geradas por defeitos, quando variamos o tipo de lubrificante, o nível, e as solicitações de carga em função das rotações?

Portanto, o objetivo principal do trabalho é conhecer o comportamento das vibrações através da severidade do sinal, para defeitos com dimensões e locais conhecidos quando se altera a condição de lubrificação e as de funcionamento.

As alterações das condições de lubrificação são feitas através de duas variáveis, a viscosidade do lubrificante e o nível do banho no qual estará imerso o rolamento.

De modo similar, as condições de funcionamento também são alteradas através de duas variáveis; a primeira, a carga a ser submetida o rolamento; a segunda, a rotação imposta no funcionamento do mancal de rolamento.

#### **1.4-) Desenvolvimento do trabalho**

Para atingir o proposto, faz-se necessário conhecer as velocidades internas nos rolamentos. Assunto abordado no segundo capítulo titulado “Parâmetros Geométricos e Cinemática dos Mancais de Rolamentos”. Onde, geralmente toma-se como base o caso do rolamento de esferas, e, estando ele sem lubrificação, apresenta velocidades relativas em várias direções entre seus componentes. Da gama de velocidades relativas obtidas, algumas delas desaparecem com a lubrificação. Outras possibilitam obter as frequências características dos defeitos em cada componente do rolamento, que são desenvolvidas matematicamente no terceiro capítulo.

Então, o terceiro capítulo titulado “Frequências de Defeitos nos Rolamentos”, tem o objetivo equacionar as frequências geradas por um determinado defeito em um elemento do rolamento. Que é possível determinando-se inicialmente as frequências dos componentes do rolamento, tanto para a pista interna bem como para a pista externa estacionária. Assim, de posse das frequências nos componentes, obtém-se as frequências dos defeitos para cada componente do rolamento: pista interna, pista externa, gaiola e o elemento rolante.

O quarto capítulo, titulado “Efeitos da Lubrificação nas Vibrações dos Rolamentos”, contém um trabalho sobre os efeitos da lubrificação nas vibrações dos rolamentos. Para alcançar o objetivo, trabalha-se com a expressão da mínima espessura do filme de lubrificante analisando o seu comportamento e determinando a sua rigidez. Enfocando-se, ao final, como a rigidez do filme de lubrificante influencia nas vibrações apresentadas pelo mancal de rolamento. Ou seja, a rigidez é responsável pela maior ou menor amplitude da vibração, caracterizada pelas frequências onde apresentam os defeitos.

Para obter com exatidão os efeitos da rigidez do filme de lubrificante que são analisados através das frequências, normalmente difíceis de serem detectadas, pois podem apresentar-se em harmônicas e em algumas vezes nem aparecerem, faz-se necessário à utilização de artifícios. O artifício utilizado no trabalho é apresentado no quinto capítulo, titulado “Método do Envelope no Monitoramento dos Rolamentos”, onde, inicialmente equaciona a energia de choque de um defeito que influencia nas vibrações. Sendo ela diretamente proporcional à rotação do mancal e às dimensões dos defeitos. As outras variáveis que envolvem o fenômeno são relativas às dimensões dos elementos do rolamento.

O objetivo principal do quinto capítulo é mostrar a técnica do envelope e sua funcionalidade na investigação inicialmente proposta. Para o desenvolvimento matemático desta técnica, torna-se necessário conhecer algumas propriedades das transformadas de Fourier e de Hilbert, que são apresentadas no final do trabalho em adendos. O envelope é uma das técnicas mais utilizadas no mercado para o monitoramento dos rolamentos. Eis o motivo da sua escolha. O capítulo em questão também aborda a severidade do sinal, que é o artifício empregado para determinar

níveis de alarme nos mancais. Os valores de severidade dos sinais são apresentados por diagramas em função dos diâmetros dos eixos, rotações, freqüências e outros parâmetros. Estes diagramas são regidos por uma equação empírica com quatro coeficientes que são determinados com um procedimento que se encontra descrito no mesmo capítulo. Sendo um dos coeficientes, definido como  $a_2$ , influenciado por fatores que podem ser divididos em três grupos, a saber: os relativos às cargas, os relativos aos defeitos e por último os relativos à lubrificação. Este último coeficiente é um dos pontos a ser explorado com os resultados obtidos em laboratório devido a sua importância.

O sexto capítulo apresenta a análise da sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante, que nada mais é do que um desenvolvimento matemático em torno do ponto de trabalho. A sensibilidade permite avaliar a resposta do sistema em relação ao incremento unitário de determinada variável, mantendo as outras constantes. A sensibilidade possibilita nesta tese visualizar os efeitos da viscosidade e da velocidade na energia de vibração para uma variação unitária, nos dois casos analisados no capítulo quatro ou sejam, para a pré-carga dominando o fenômeno e quando ela for desprezível.

No capítulo sétimo se apresenta as conclusões da tese, utilizando levantamentos empíricos feitos anteriormente, o que mostra e comprova a teoria desenvolvida neste trabalho. As análises são feitas utilizando-se as equações matemáticas desenvolvidas no capítulo quatro, bem como o estudo de sensibilidade desenvolvida no capítulo sexto, as quais são comparadas e avaliadas dentro das quatro curvas obtidas empiricamente em trabalhos anteriores. São também apresentadas neste capítulo as sugestões para futuros trabalhos.

## CAPÍTULO 2

### PARÂMETROS GEOMÉTRICOS E CINEMÁTICA DOS MANCAIS DE ROLAMENTOS

#### 2.1-) Introdução

O objetivo deste capítulo é desenvolver as relações dos movimentos relativos entre os componentes do rolamento de esferas.

As relações são desenvolvidas utilizando as dimensões dos componentes, conhecendo-se as velocidades angulares nas pistas.

#### 2.2-) Elementos básicos do rolamento

Os rolamentos consistem basicamente das partes, a saber, o número de elementos rolantes, a pista interna, a pista externa e por último a gaiola. Dependendo do tipo do rolamento, os elementos rolantes poderão ser esferas, rolos cilindros, rolos cônicos ou agulhas. As geometrias das pistas e da gaiola variam com o tipo de elementos rolantes e suas aplicações.

Para os desenvolvimentos matemáticos neste capítulo, será considerado o rolamento rígido de esferas, sendo as equações futuramente adaptadas para o caso em estudo.

## 2.3-) Rolamento de esfera

### 2.3.1-) Osculação

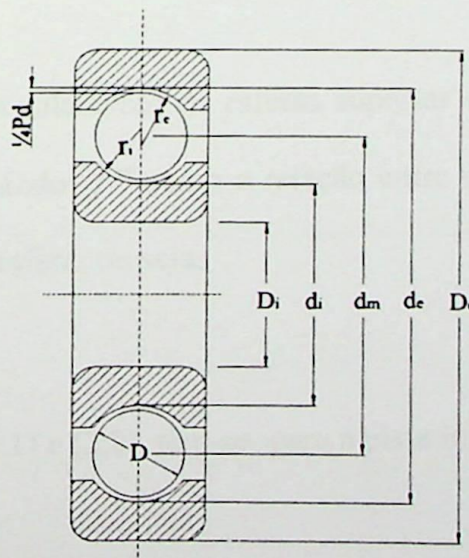
Osculação, segundo Harris (1966), são as relações entre o raio da esfera e os raios de curvatura das pistas, interna e externa, ou seja:

$$\text{para a pista interna, } \varphi_i = \frac{D}{2 r_i}; \quad (2.01)$$

$$\text{para a pista externa, } \varphi_e = \frac{D}{2 r_e}. \quad (2.02)$$

### 2.3.2-) Definição

Os rolamentos de esferas são desenvolvidos para suportarem cargas radiais, suportando também cargas axiais devido ao alto grau de osculação entre as esferas e os canais das pistas interna e externa. A figura 2.1 apresenta o rolamento de esferas,



**Fig. 2.1** Rolamento de esferas, [Harris (1966)].

onde:

$D_i$  – diâmetro de montagem no eixo;

$d_i$  – diâmetro da pista interna;

$d_m$  – diâmetro médio do rolamento (diametral pitch);

$d_e$  – diâmetro da pista externa;

$D_e$  – diâmetro de montagem externo;

$r_i$  – raio da ranhura da pista interna;

$r_e$  – raio da ranhura da pista externa;

$P_d$  – folga diametral do rolamento;

$D$  – diâmetro da esfera.

O diâmetro médio do rolamento é definido como sendo a média entre os diâmetros das pistas interna e externa, ou seja,

$$d_m = \frac{1}{2} (d_i + d_e) \quad (2.03)$$

a folga diametral " $P_d$ " é obtida no plano radial ao rolamento. Observando a figura 2.1 pode-se dizer que:

$$P_d = d_e - d_i - 2D \quad (2.04)$$

A capacidade do rolamento de esferas suportar cargas tem grande dependência com a osculação. Definindo " $f$ " como a relação entre o raio da curvatura da pista em relação ao diâmetro da esfera, ou seja,

$$f = \frac{r}{D} \quad (2.05)$$

que, substituindo em (2.1) e (2.2), têm-se, para a pista interna,

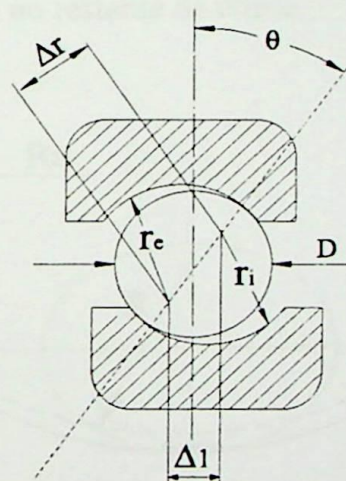
$$\varphi_i = \frac{1}{2 f_i}, \quad (2.06)$$

e para a pista externa,

$$\varphi_e = \frac{1}{2 f_e} \quad (2.07)$$

### 2.3.3-) Ângulo de contato

Ângulo de contato é o ângulo oblíquo entre a linha imaginária que passa pelo centro do elemento rolante, no plano perpendicular, e a linha perpendicular, também imaginária, que passa no centro das áreas deformadas pelos contatos entre o elemento rolante e as pistas interna e externa, “Zona Hertziana”. Conforme apresentado na figura 2.2,



**Fig. 2.2** Posição das esferas com relação às pistas sob ação das cargas, [Harris (1966)].

onde:

$\Delta r$  – distância entre o centro das curvaturas das pistas externa e interna ao longo do eixo de contato da esfera com as pistas;

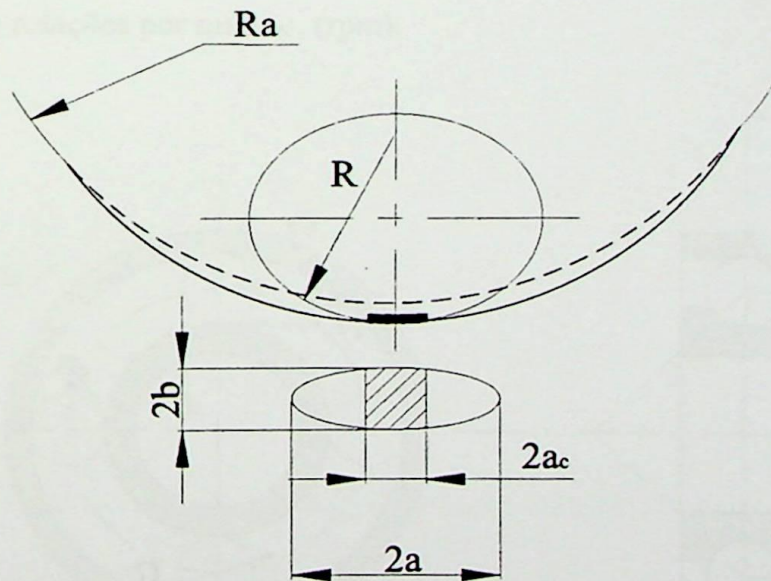
$\Delta l_1$  – projeção da distância entre os centros de curvatura na direção do eixo de rotação;

$\theta$  – ângulo formado pela acomodação da esfera e das pistas, que, segundo Harris (1966), é dado pela expressão:

$$\theta = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{P_d}{2\Delta r} \right). \quad (2.08)$$

#### 2.3.4-) Condição de rolamento puro, sem deslizamento.

Qualquer elemento rolante, quando submetido a uma carga normal, sofre deformações, produzindo um contato elíptico com as pistas. Estando este, entre o raio equivalente “R” e o plano perpendicular. A condição de rolamento puro sem deslizamento, acontece entre as duas linhas simétricas de contato distanciadas entre si de  $2a_c$ , ocorrendo deslizamento no restante da elipse.



**Fig. 2.3** Condição de rolamento puro.

## 2.4-) Rotações das esferas no rolamento

Para o desenvolvimento das condições cinemáticas, segundo Harris (1966), considera-se, inicialmente, que ambas as pistas, interna e externa, estão em movimento e a condição de rolamento impõe o ângulo de contato  $\theta$ , conforme mostrado na figura 2.4.

Sabe-se, pela física clássica que:

$$v = \omega r, \quad (2.09)$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \text{ [rad/s]}. \quad (2.10)$$

Onde:

$v$  – velocidade linear dada em unidade de comprimento por unidade de tempo;

$\omega$  – velocidade angular dada em radianos por segundo;

$r$  – raio em unidade de comprimento;

$n$  – número de rotações por minuto, (rpm).

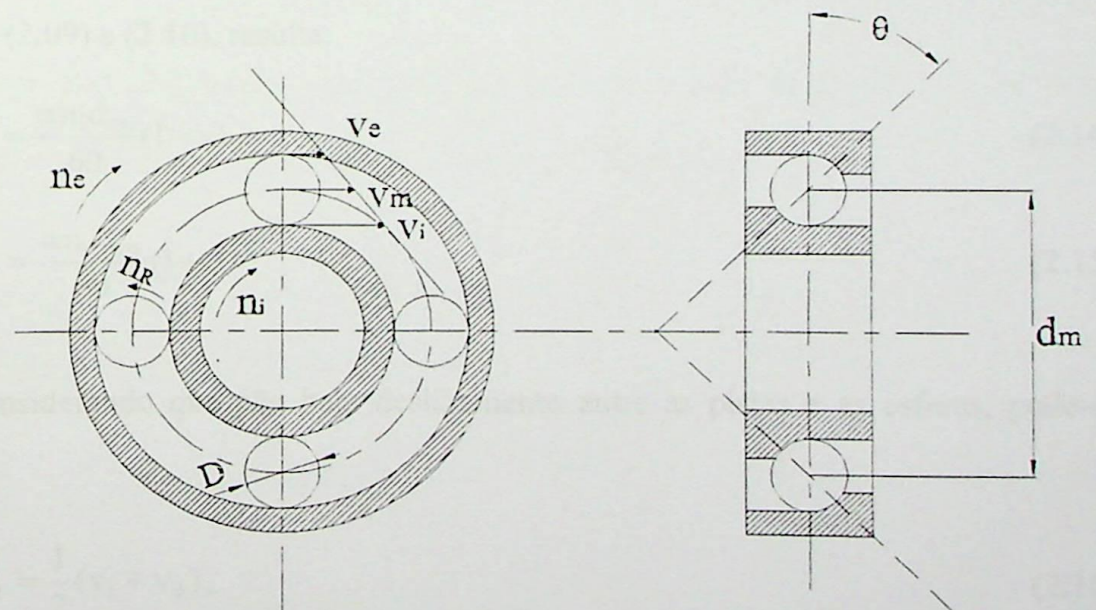


Fig. 2.4 Velocidades no rolamento, [Harris (1966)].

Onde:

$D$  – diâmetro da esfera;

$n_e$  – rotação da pista externa;

$n_i$  – rotação da pista interna;

$n_R$  – rotação da esfera;

$v_e$  – velocidade tangencial na ranhura da pista externa;

$v_i$  – velocidade tangencial na ranhura da pista interna;

$v_m$  – velocidade média das duas pistas.

Analisando a figura 2.4, pode-se dizer que:

$$v_i = \frac{1}{2} \omega_i (d_m - D \cos \theta), \quad (2.11)$$

$$v_e = \frac{1}{2} \omega_e (d_m + D \cos \theta). \quad (2.12)$$

Definindo:

$$\gamma = \frac{D \cos \theta}{d_m}, \quad (2.13)$$

utilizando (2.09) e (2.10), resulta:

$$v_i = \frac{\pi n_i d_m}{60} (1 - \gamma), \quad (2.14)$$

$$v_e = \frac{\pi n_e d_m}{60} (1 + \gamma). \quad (2.15)$$

Considerando que não haja deslizamento entre as pistas e as esferas, pode-se dizer que,

$$v_m = \frac{1}{2} (v_i + v_e), \quad (2.16)$$

onde,  $v_m$  é a velocidade média no rolamento, a qual possibilitará obter a velocidade da gaiola. Logo, substituindo (2.14) e (2.15) em (2.11), resulta,

$$v_m = \frac{\pi d_m}{120} [n_i(1 - \gamma) + n_e(1 + \gamma)], \quad (2.17)$$

mas,

$$v_m = \frac{\pi d_m n_m}{60}; \quad (2.18)$$

comparando (2.17) com (2.18), obtém-se,

$$n_m = \frac{1}{2} [n_i(1 - \gamma) + n_e(1 + \gamma)], \quad (2.19)$$

onde,  $n_m$  é a rotação média no rolamento.

A rotação da gaiola,  $n_g$ , é uma rotação relativa dada pela rotação média subtraindo-se a rotação da pista interna, considerando como referência à pista externa, ou seja:

$$n_g = n_m - n_i. \quad (2.20)$$

A gaiola é o conjunto formado pelas esferas, que desloca sobre a pista interna sem deslizamento. Portanto, a velocidade linear instantânea da gaiola em um ponto qualquer da pista interna é igual à velocidade linear da esfera,

$$\frac{\pi n_g d_m}{60} (1 - \gamma) = \frac{\pi n_R D}{60} \frac{D}{2}, \quad (2.21)$$

substituindo (2.19) e (2.20) em (2.21), resulta:

$$n_R = \frac{1}{2} \frac{d_m}{D} (1 - \gamma)(1 + \gamma)(n_e - n_i). \quad (2.22)$$

Normalmente nos mancais de rolamento o anel externo do rolamento é estacionário, ou seja,  $n_e$  é igual a zero, logo, as equações (2.19) e (2.22), tornam-se:

$$n_m = \frac{1}{2} n_i (1 - \gamma), \quad (2.23)$$

$$n_R = -\frac{1}{2} \frac{d_m}{D} n_i (1 - \gamma^2). \quad (2.24)$$

#### 2.4.1-) Movimentos da esfera no rolamento

Considere inicialmente o contato da esfera com a pista externa, que está submetida a uma carga normal qualquer, definindo uma superfície elíptica com raio de curvatura da superfície deformada representado por  $R_e$ . Entre a linha perpendicular ao eixo de rotação, que passa pelo centro da esfera, e o plano de rolamento da pista externa forma-se o ângulo  $\theta_e$ , cuja direção é normal a superfície deformada, conforme mostrado na figura 2.5.

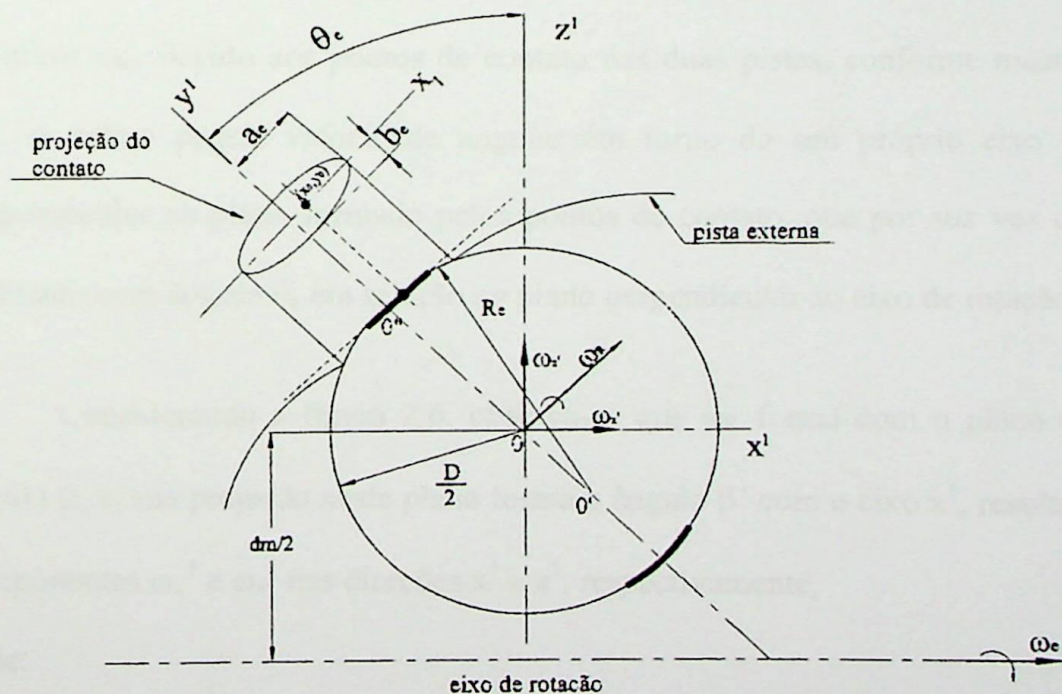


Fig. 2.5 Velocidades angulares na pista externa, [Harris (1966)].

Hertz apud Arris (1966) define que o raio de curvatura  $R_e$  do semicírculo, correspondente a superfície deformada pela pressão, é obtido pela expressão:

$$R_e = \frac{2r_e D}{2r_e + D}. \quad (2.25)$$

Os semi-eixos da elipse são descritos pelas distâncias  $a_c$  e  $b_c$ , variando de  $-a_c$  até  $+a_c$  e  $-b_c$  até  $+b_c$ , respectivamente. O ponto  $(x_0, y_0)$  encontra-se na região de rolamento puro, ocorrendo entre as duas linhas de contato distanciadas de  $2a_c$ , conforme mostra a figura 2.3.

A esfera encontra-se em um ponto fixo no espaço no sistema de coordenadas  $(x^1, y^1, z^1)$ . A pista externa gira com velocidade angular  $\omega_c$ , em torno do eixo de rotação, com direção perpendicular ao plano de rotação, colinear com o eixo do "x". O eixo  $x^1$  forma com o eixo  $z^1$  o plano do papel, de maneira tal que o eixo  $y^1$  entra no plano do papel. Assume a esfera, neste sistema de coordenadas o movimentos rotativos  $\omega_R$ , devido aos pontos de contato nas duas pistas, conforme mostra a figura 2.5. A esfera possui velocidade angular em torno do seu próprio eixo na direção perpendicular ao plano formado pelos pontos de contato, que por sua vez encontra-se inclinado com ângulo  $\theta_c$  em relação ao plano perpendicular ao eixo de rotação.

Considerando a figura 2.6, observa-se que  $\omega_R$  forma com o plano  $(x^1, -y^1)$  o ângulo  $\beta$ , e, sua projeção neste plano forma o ângulo  $\beta'$  com o eixo  $x^1$ , resultando assim componentes  $\omega_x^1$  e  $\omega_z^1$  nas direções  $x^1$  e  $z^1$ , respectivamente,

onde:

$$\omega_x^1 = \omega_R \cos\beta \cos\beta', \quad (2.26)$$

$$\omega_z^1 = \omega_R \cos\beta \sin\beta', \quad (2.27)$$

$$\omega_z^1 = \omega_R \text{sen } \beta. \quad (2.28)$$

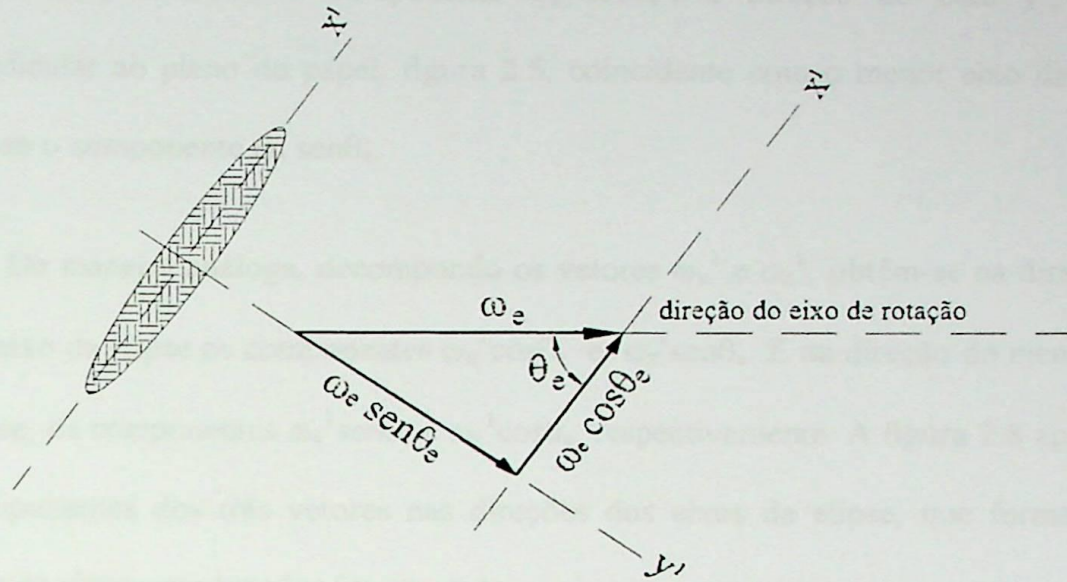


Fig. 2.6 Velocidades angulares da esfera no espaço.

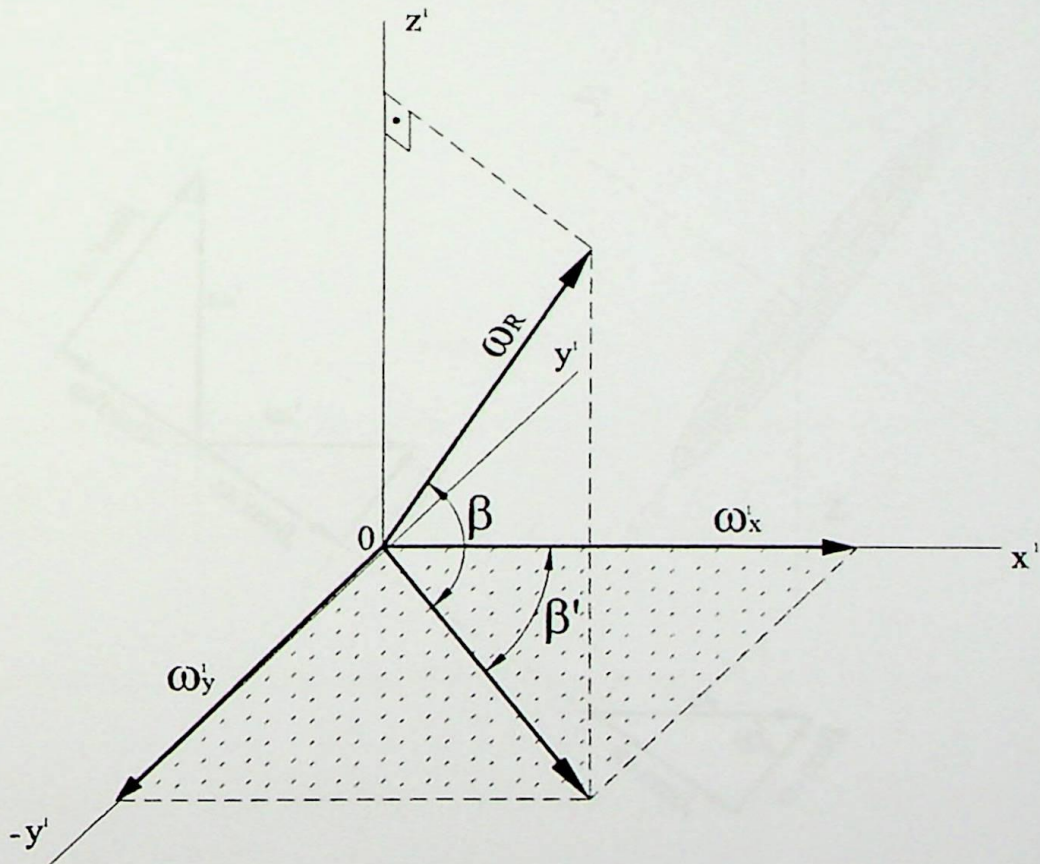


Fig. 2.7 Decomposição do vetor  $\omega_e$  nas direções do maior e menor eixo da elipse.

Decompondo  $\omega_e$  na direção do maior eixo da elipse, eixo  $x^1$ , conforme mostrado na figura 2.7, obtém-se o componente  $\omega_e \cos\theta_e$ . Na direção do eixo  $y^1$ , que é perpendicular ao plano do papel, figura 2.5, coincidente com o menor eixo da elipse, obtém-se o componente  $\omega_e \sin\theta_e$ .

De maneira análoga, decompondo os vetores  $\omega_x^1$  e  $\omega_z^1$ , obtém-se na direção do maior eixo da elipse os componentes  $\omega_x^1 \cos\theta_e$  e  $\omega_z^1 \sin\theta_e$ . E na direção do menor eixo da elipse, os componentes  $\omega_x^1 \sin\theta_e$  e  $\omega_z^1 \cos\theta_e$ , respectivamente. A figura 2.8 apresenta os componentes dos três vetores nas direções dos eixos da elipse, que forma outro sistema de eixos coordenados ( $x_1, y_1, z_1$ ).

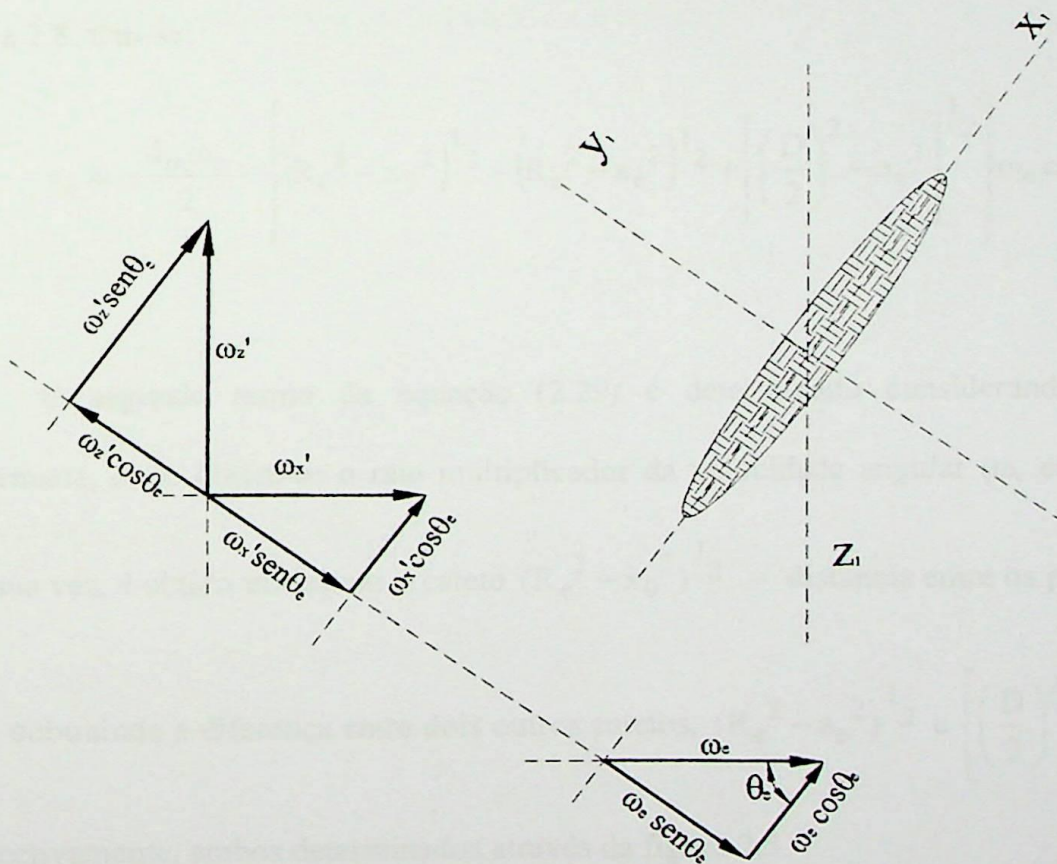


Fig. 2.8 Componentes dos vetores  $\omega_e$ ,  $\omega_x^1$  e  $\omega_z^1$  nas direções dos eixos da elipse.

## 2.5-) Velocidades lineares com relação à pista externa

### 2.5.1-) Velocidade linear da pista externa

Considerando que a esfera esteja fixa em um ponto no espaço. Conseqüentemente, pela figura 2.5, observa-se que a pista externa desloca-se saindo do plano do papel, ou seja, no sentido negativo do eixo  $y^1$ . A velocidade linear da pista externa,  $v_e$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é a soma de duas velocidades. A primeira é a velocidade da pista em relação ao diâmetro médio que gira com velocidade angular  $\omega_e$ . A segunda é a velocidade da esfera em relação ao seu eixo de rotação, distância  $0 - 0'$ , que gira com velocidade angular  $\omega_e \cos\theta_e$ . Considerando-se o raio equivalente  $R_e$  apresentado na figura 2.8, tem-se:

$$v_e = -\frac{d_m \omega_e}{2} - \left\{ \left( R_e^2 - x_0^2 \right)^{1/2} - \left( R_e^2 - a_e^2 \right)^{1/2} + \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - a_e^2 \right]^{1/2} \right\} \omega_e \cos\theta_e. \quad (2.29)$$

O segundo termo da equação (2.29) é determinado considerando a área deformada, onde obtém-se o raio multiplicador da velocidade angular ( $\omega_e \cos\theta_e$ ), que por sua vez, é obtido utilizando o cateto  $(R_e^2 - x_0^2)^{1/2}$  – distância entre os pontos  $0'$  e  $0''$  – subtraindo a diferença entre dois outros catetos,  $(R_e^2 - a_e^2)^{1/2}$  e  $\left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - a_e^2 \right]^{1/2}$  respectivamente, ambos determinados através da figura 2.5.

### 2.5.2-) Velocidade linear da esfera em relação à pista externa

Na figura 2.9 observa-se que a esfera rola saindo do plano do papel, contrária a direção do eixo “y<sup>1</sup>”. Com o auxílio da figura 2.12 pode-se dizer que a velocidade da esfera,  $v_D$ , no ponto de contato  $(x_0, y_0)$  é,

$$v_D^e = -(\omega_x' \cos \theta_e + \omega_z' \sin \theta_e) \left\{ (R_e^2 - x_0^2)^{1/2} - (R_e^2 - a_e^2)^{1/2} + \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - a_e^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (2.30)$$

### 2.5.3-) Deslizamento entre a pista externa e a esfera

De posse das duas velocidades – pista externa e esfera ( $v_e$  e  $v_D$ ) – pode-se determinar a velocidade linear de deslizamento,  $v_{esc}^e$ , existente entre elas, basta para tal obter a diferença,

$$v_{esc}^e = v_e - v_D, \quad (2.31)$$

substituindo (2.29), (2.30) em (2.31), resulta,

$$v_{esc}^e = -\frac{d_m \omega_e}{2} + \left\{ (R_e^2 - x_0^2)^{1/2} - (R_e^2 - a_e^2)^{1/2} + \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - a_e^2 \right]^{1/2} \right\} \times \left[ (\omega_x^1 \cos \theta_e + \omega_z^1 \sin \theta_e - \omega_e \cos \theta_e) \right], \quad (2.32)$$

substituindo (2.26) e (2.27) em (2.32), resulta,

$$v_{esc}^e = -\frac{d_m \omega_e}{2} + \left\{ \left( R_e^2 - x_0^2 \right)^{1/2} - \left( R_e^2 - a_e^2 \right)^{1/2} + \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - a_e^2 \right]^{1/2} \right\} \times \left[ \frac{\omega_R}{\omega_e} (\cos \beta \cos \beta' \cos \theta_e + \sin \beta \sin \theta_e) - \cos \theta_e \right] \omega_e . \quad (2.33)$$

A expressão (2.32) representa o deslizamento entre as esferas e a pista externa na direção do rolamento em relação aos vetores velocidade da esfera,  $\omega_R$ , e da pista externa,  $\omega_e$ .

#### 2.5.4-) Deslizamento transversal na pista externa

A esfera, como pode ser observado na figura 2.6, tem o componente da velocidade angular na direção de  $y^1$  dado pela expressão (2.27), gerando a velocidade de deslizamento transversal da esfera com a pista externa,  $v_{esc|_t}^e$ , cujo seu valor é dado pela expressão:

$$v_{esc|_t}^e = -w_y^1 \left\{ \left( R_e^2 - x_0^2 \right)^{1/2} - \left( R_e^2 - a_e^2 \right)^{1/2} + \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - a_e^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (2.34)$$

substituindo (2.27), resulta em:

$$v_{esc|_t}^e = - \left\{ \left( R_e^2 - x_0^2 \right)^{1/2} - \left( R_e^2 - a_e^2 \right)^{1/2} + \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - a_e^2 \right]^{1/2} \right\} \omega_e \left( \frac{\omega_R}{\omega_e} \right) \cos \beta \sin \beta' . \quad (2.35)$$

A expressão (2.35) representa o deslizamento entre as esferas e a pista externa na direção transversal ao rolamento em relação aos vetores velocidade da esfera  $\omega_R$ , em relação à pista externa, cuja velocidade angular é  $\omega_e$ .

### 2.5.5-) Efeito rotacional na pista externa

Na figura 2.8 observa-se que ambas as velocidades angulares,  $\omega_e$  e  $\omega_R$ , têm componentes no sentido normal a área de contato da elipse, ou sejam,  $\omega_x^1 \text{sen}\theta_e$ ,  $\omega_z^1 \text{cos}\theta_e$  e  $\omega_e \text{sen}\theta_e$ , gerando efeito rotacional da esfera em relação à pista externa, representado pela velocidade angular  $\omega_{\text{rot}}^e$ ,

$$\omega_{\text{rot}}^e = -\omega_e \text{sen}\theta_e - \omega_x^1 \text{sen}\theta_e + \omega_z^1 \text{cos}\theta_e, \quad (2.36)$$

substituindo as relações (2.25) e (2.27) em (2.36), resulta:

$$\omega_{\text{rot}}^e = \omega_e \left[ \frac{\omega_R}{\omega_e} (\text{sen}\beta \text{cos}\theta_e - \text{cos}\beta \text{cos}\beta' \text{sen}\theta_e) - \text{sen}\theta_e \right]. \quad (2.37)$$

A expressão (2.37) representa a rotação das esferas em seu próprio eixo que é perpendicular à superfície deformada na pista externa.

### 2.5.6-) Velocidade angular da esfera com relação à pista externa

Seja  $r_e^1$  a distância entre os pontos 0 e 0'' na figura 2.5, que nada mais é do que o raio de rolamento da esfera deformada na pista externa. Considerando a velocidade



O rolamento forma, neste caso, o ângulo  $\theta_i$  entre o plano de rolamento que é normal a superfície deformada e o plano perpendicular ao eixo de rotação.

A figura 2.10 apresenta os componentes dos vetores nas direções dos eixos da elipse.

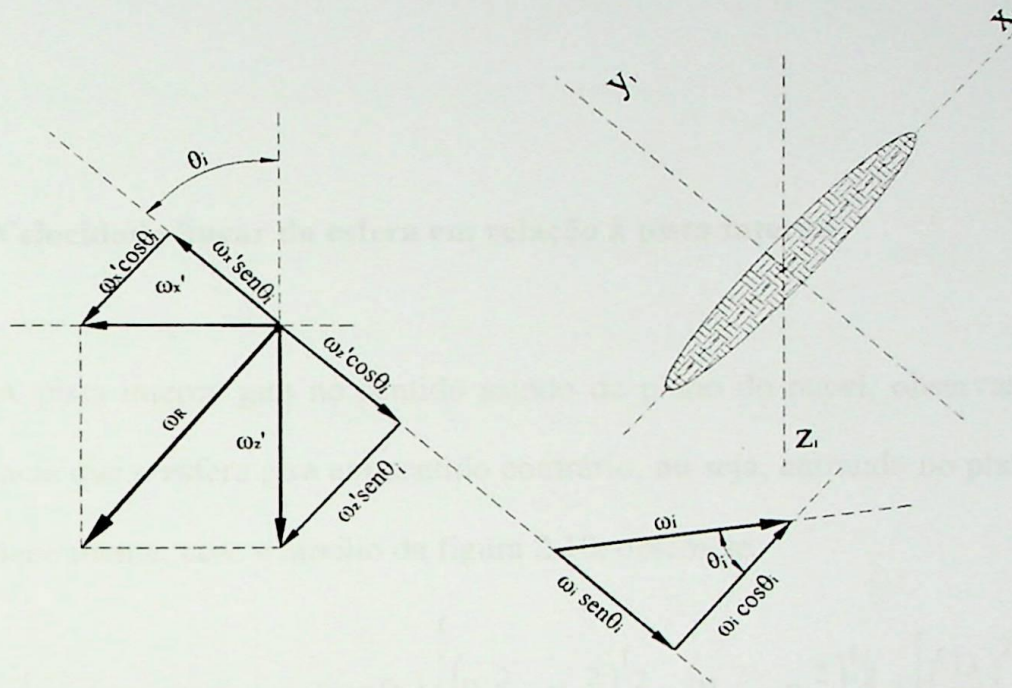


Fig. 2.10 Componentes dos vetores  $\omega_i$ ,  $\omega_x^1$  e  $\omega_z^1$  nas direções dos eixos da elipse.

### 2.6.1-) Velocidade linear da pista interna

De maneira análoga, considera-se a esfera em um ponto fixo no espaço. A velocidade linear da pista interna,  $v_i$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é a soma de duas velocidades, sendo a primeira, a velocidade da pista em relação ao diâmetro médio que gira com velocidade angular  $\omega_i$ . A Segunda, a velocidade da esfera em relação também ao eixo

de rotação, considerando-se o raio  $R_i$  que gira com velocidade angular  $\omega_i \cos\theta_i$ , mostrado na figura 2.10, portanto,

$$v_i = -\frac{d_m \omega_i}{2} \left\{ \left( R_i^2 - x_0^2 \right)^{1/2} - \left( R_i^2 - a_i^2 \right)^{1/2} + \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - a_i^2 \right]^{1/2} \right\} \omega_i \cos\theta_i. \quad (2.40)$$

### 2.6.2-) Velocidade linear da esfera em relação à pista interna

A pista interna gira no sentido saindo do plano do papel, observando a figura 2.9, nota-se que a esfera gira em sentido contrário, ou seja, entrando no plano do papel, conseqüentemente, com o auxílio da figura 2.10, obtém-se,

$$v_D^i = (\omega_x' \cos\theta_i + \omega_z' \sen\theta_i) \left\{ \left( R_i^2 - x_0^2 \right)^{1/2} - \left( R_i^2 - a_i^2 \right)^{1/2} + \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - a_i^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (2.41)$$

### 2.6.3-) Deslizamento entre a pista interna e a esfera

Também, análoga à pista externa, pela diferença entre as velocidades, (2.40) e (2.41), pode-se determinar a velocidade linear do deslizamento,  $v_{esc}^i$ , existente entre a pista interna e a esfera,

$$v_{esc}^i = -\frac{d_m \omega_i}{2} - \left\{ \left( R_i^2 - x_0^2 \right)^{1/2} - \left( R_i^2 - a_i^2 \right)^{1/2} + \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - a_i^2 \right]^{1/2} \right\} \times \left[ \frac{\omega_R}{\omega_i} (\cos \beta \cos \beta' \cos \theta_i + \sin \beta \sin \theta_i) - \cos \theta_i \right] \omega_i. \quad (2.42)$$

#### 2.6.4-) Deslizamento transversal na pista interna

O mesmo efeito ocorrido na pista externa ocorre na pista interna, como pode ser observado nas figura 2.6 e 2.10, a esfera possui o componente da velocidade angular na direção de  $y^1$  dado pela expressão (2.27), gerando deslizamento transversal à pista externa,  $v'_{esc}|_t$ , cujo seu valor é dado pela expressão,

$$v'_{esc}|_t = - \left\{ \left( R_i^2 - x_0^2 \right)^{1/2} - \left( R_i^2 - a_i^2 \right)^{1/2} + \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - a_i^2 \right]^{1/2} \right\} \omega_i \left( \frac{\omega_R}{\omega_i} \right) \cos \beta \sin \beta'. \quad (2.43)$$

#### 2.6.5-) Efeito rotacional na pista interna

Na figura 2.10 observa-se que ambas as velocidades angulares,  $\omega_i$  e  $\omega_R$ , têm componentes no sentido normal a área de contato da elipse, gerando também efeito rotacional, representado pela velocidade angular  $\omega_{rot}^i$ , que de maneira análoga ao equacionado no item 2.36, resulta em,

$$\omega_{rot}^i = \omega_x^1 \sin \theta_i - \omega_i \sin \theta_i - \omega_z^1 \cos \theta_i, \quad (2.44)$$

substituindo as relações (2.26) e (2.28) em (2.44), obtém-se a expressão da rotação da esfera em relação à pista interna:

$$\omega_{\text{rot}}^i = \omega_i \left[ \frac{\omega_R}{\omega_i} (\cos\beta \cos\beta' \sin\theta_i - \sin\beta \cos\theta_i) - \sin\theta_i \right]. \quad (2.45)$$

onde,  $\omega_{\text{rot}}^i$  é a velocidade angular da esfera girando em seu próprio eixo.

### 2.6.6-) Velocidade angular da esfera com relação à pista interna

A velocidade linear da esfera com relação à pista interna  $\omega_R$  é de equacionamento idêntico ao discutido no item 2.5.6, porém, com sentido de rotação diferente, logo,

$$\frac{\omega_R}{\omega_i} = \frac{-\frac{d_m}{2} + r_i^l \cos\theta_i}{r_i^l (\cos\beta \cos\beta' \cos\theta_i + \sin\beta \sin\theta_i)}. \quad (2.46)$$

### 2.7-) Movimento orbital

Ao invés de considerar o centro da esfera fixo em um ponto no espaço, considera-se a pista externa. Conseqüentemente, os centros das esferas irão orbitar em torno do eixo de rotação. Para manter as mesmas condições de rolamento analisado, o conjunto de esferas deverá orbitar com velocidade angular igual ao da pista externa, porém, em sentido contrário, devido ao efeito de interação das esferas com a pista

internas, analisado no item 2.5.2. Sendo  $\omega_g$  a velocidade angular da gaiola, pode-se dizer que,

$$\omega_g = -\omega_e, \quad (2.47)$$

conseqüentemente, a pista interna girará com a velocidade angular  $\omega$  que será a soma da velocidade angular da pista interna analisada anteriormente acrescida da velocidade da gaiola, ou seja,

$$\omega = \omega_i + \omega_g, \quad (2.48)$$

substituindo as relações (2.47), (2.46) em (2.48), seqüencialmente evidenciando  $\omega_R$  da expressão (2.38), obtém-se a velocidade angular com relação à pista interna,

$$\omega_i = \frac{\omega}{1 + \frac{A}{B}}, \quad (2.49)$$

sendo:

$$A = r_e^1 \left[ \left( \frac{dm}{2} \right) - r_i^1 \cos \theta_i \right] (\cos \beta \cos \beta' \cos \theta_e + \sin \beta \sin \theta_e), \quad (2.50)$$

$$B = r_i^1 \left[ \left( \frac{dm}{2} \right) + r_e^1 \cos \theta_e \right] (\cos \beta \cos \beta' \cos \theta_i + \sin \beta \sin \theta_i). \quad (2.51)$$

Analogamente, substituindo (2.47), (2.39) em (2.48), seqüencialmente, evidenciando  $\omega_R$  da expressão (2.46) e também substituindo, resulta na velocidade da pista externa,

$$\omega_e = \frac{-\omega}{1 + \frac{B}{A}}. \quad (2.52)$$

Substituindo (2.39) e (2.46) em (2.48), resulta na velocidade angular da esfera,

$$\omega_R = \frac{-\omega}{C+D}, \quad (2.53)$$

sendo:

$$C = \frac{r_e^1 (\cos \beta \cos \beta' \cos \theta_e + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta_e)}{\left(\frac{dm}{2}\right) + r_e^1 \cos \theta_e}, \quad (2.54)$$

$$M = \frac{r_i^1 (\cos \beta \cos \beta' \cos \theta_i + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta_i)}{\left(\frac{dm}{2}\right) - r_i^1 \cos \theta_i}. \quad (2.55)$$

Similar ao analisado anteriormente, se a pista interna for estacionária, a pista externa gira com a absoluta velocidade angular  $\omega$ , logo:

$$\omega_g = \omega_i, \quad (2.56)$$

$$\omega = \omega_e + \omega_g, \quad (2.57)$$

com os mesmos procedimentos anteriores, resulta:

$$\omega_e = \frac{\omega}{1 + \frac{B}{A}}, \quad (2.58)$$

$$\omega_i = \frac{-\omega}{1 + \frac{A}{B}}, \quad (2.59)$$

$$\omega_R = \frac{\omega}{C+M}. \quad (2.60)$$

As relações anteriormente apresentadas – (2.49), (2.52), (2.53), (2.58), (2.59) e (2.60) – permitem obter as rotações  $\omega_e$ ,  $\omega_i$  e  $\omega_R$  a partir de uma outra referência. Ou seja, obtêm-se as rotações para a esfera estacionária em um ponto do espaço tomando como base à pista externa ou interna estacionária.

## CAPÍTULO 3

### FREQÜÊNCIAS DE DEFEITOS NOS ROLAMENTOS

#### 3.1-) Introdução

As freqüências de vibrações em um mancal são devidas à velocidade do eixo, perturbações externas de outros sistemas, as forças excêntricas induzidas por desalinhamentos etc, por último, às vibrações são induzidas pelas irregularidades superficiais nos componentes do rolamento, ocasionadas por danos, uso indevido, desgastes normais gerados pelas condições ou pelo tempo de trabalho, como também geradas por imperfeições geométricas oriundas da fabricação.

O objetivo do presente capítulo é equacionar as freqüências de vibrações excitadas pelas imperfeições existentes nas pistas ou nos elementos rolantes para uma das pistas estacionárias. Também compõe o objetivo, apresentar alguns exemplos numéricos utilizando rolamentos existentes no mercado.

Conforme apresentado por Xu e Shea (1993), a análise envolve três casos, sendo que o primeiro, é quando a pista externa encontra-se estacionária, o segundo, quando a pista interna está estacionária, e no terceiro caso analisado, são para mancais cujo ângulo de contato excede  $45^\circ$ .

### 3.2-) Pista externa estacionária

As montagens de rolamentos com a pista externa estacionária nas instalações ou equipamentos são normalmente as mais utilizadas. Assim sendo, pela figura 2.4, utilizando a mesma analogia que o da relação (2.20), pode-se dizer que a rotação relativa da pista interna com relação à gaiola,  $n_{gi}$ , é:

$$n_{gi} = n_i - n_m, \quad (3.01)$$

note que (2.20) diferencia-se de (3.01) pela referência adotada.

Como condição geral, utilizada nos três casos, considera-se que não haja deslizamento entre as esferas e a pista interna. Utilizando o mesmo raciocínio do desenvolvimento de (2.31) e (2.32), ou seja, a velocidade linear instantânea da gaiola em um ponto qualquer da pista interna é igual a velocidade da esfera, tem-se,

$$\left( \frac{\pi n_{gi}}{60} \right) \left( \frac{d_m}{2} \right) (1 - \gamma) = \left( \frac{\pi n_R}{60} \right) \left( \frac{D}{2} \right), \quad (3.02)$$

substituindo (2.19) e (3.01) em (3.02), resulta,

$$n'_R = \frac{1}{2} \frac{d_m}{D} (1 - \gamma)(1 + \gamma)(n_i - n_e), \quad (3.03)$$

onde  $n'_R$  é a rotação da esfera, tendo como ponto de referência a gaiola, ou seja, o sentido de rotação apresentado pela relação (3.03) é contrário ao apresentado pela relação (2.32),

$$n'_R = -n_R. \quad (3.04)$$

Como no caso estudado, a pista externa é a estacionária,  $n_e = 0$ . Logo, a relação (3.03) toma a seguinte forma:

$$n'_R = \frac{1}{2} \frac{d_m}{D} (1 - \gamma^2) n_i. \quad (3.05)$$

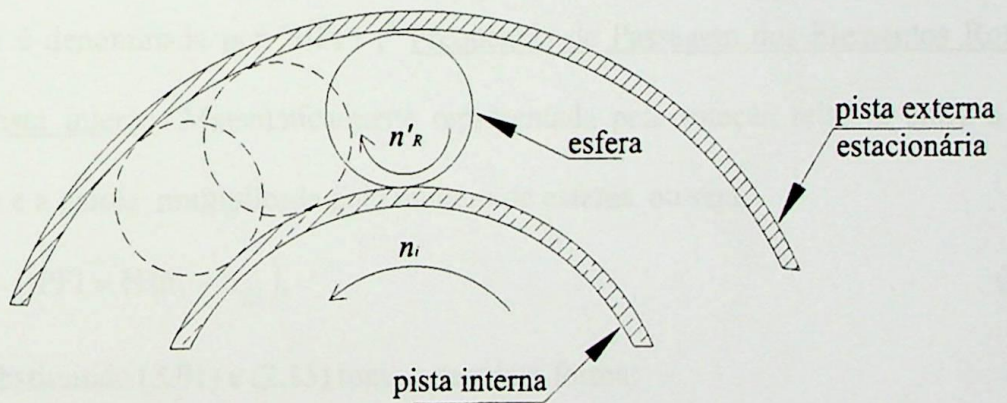
A rotação de referência, aqui denominada como o Frequência Fundamental do Trem, “FTF”<sup>1</sup>, é a rotação média do rolamento que, pela relação (2.29), considerando  $n_\epsilon=0$ , obtém-se,

$$FTF = \frac{1}{2} n_i (1 - \gamma), \quad (3.06)$$

substituindo a relação (2.23), resulta:

$$FTF = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{D}{d_m} \right) \cos \theta \right] n_i. \quad (3.07)$$

Pela figura 3.1 se pode observar o sentido de rotação da esfera como também, visualizar o seu deslocamento sobre às pistas.



**Fig. 3.1** Pista externa estacionária.

A Frequência de Rotação da Esfera, “BSF”<sup>2</sup>, também denominada “SPIN”, é a rotação em torno de seu próprio eixo representada pela relação (3.05) que substituindo a relação (2.13) toma a seguinte forma:

<sup>1</sup> FTF – Fundamental Train Frequency;

<sup>2</sup> BSF – Ball Spin Frequency;

$$\text{BSF} = \frac{1}{2} \frac{d_m}{D} \left[ 1 - \left( \frac{D}{d_m} \right)^2 \cos^2 \theta \right] n_i. \quad (3.08)$$

Considerando o rolamento de  $N$  esferas. A passagem delas por um ponto fixo na pista externa, estacionária, denomina-se de “BPFO”<sup>3</sup> a Frequência de Passagem dos Elementos rolantes na pista Externa, que nada mais é do que a rotação média do rolamento – relação (2.19), multiplicada pelo número de esferas com  $n_c=0$ , ou seja:

$$\text{BPFO} = N \left[ \frac{1}{2} (1 - \gamma) n_i \right], \quad (3.09)$$

substituindo a relação (2.23), torna-se:

$$\text{BPFO} = \frac{N}{2} \left[ 1 - \frac{D}{d_m} \cos \theta \right] n_i. \quad (3.10)$$

A frequência de um determinado ponto fixo na pista interna passando pelas esferas é denominada por “BPFI”.<sup>4</sup> Frequência de Passagem dos Elementos Rolantes pela Pista Interna. Matematicamente representada pela rotação relativa entre a pista interna e a gaiola, multiplicada pelo número de esferas, ou seja,

$$\text{BPFI} = N (n_i - n_{gi}), \quad (3.11)$$

que substituindo (3.01) e (2.13) toma a seguinte forma:

$$\text{BPFI} = \frac{N}{2} \left( 1 + \frac{D}{d_m} \cos \theta \right) n_i. \quad (3.12)$$

Os conjuntos das relações apresentados em 3.13 são as de interesse, na análise das frequências relativas à pista externa estacionária.

<sup>3</sup> BPFO – Ball Pass Frequency - Outer race

<sup>4</sup> BPFI – Ball Pass Frequency - Inner race

$$\left. \begin{aligned} \text{FTF} &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{D}{d_m} \right) \cos \theta \right] n_i \\ \text{BSF} &= \frac{1}{2} \frac{d_m}{D} \left[ 1 - \left( \frac{D}{d_m} \right)^2 \cos^2 \theta \right] n_i \\ \text{BPFI} &= \frac{N}{2} \left( 1 + \left( \frac{D}{d_m} \right) \cos \theta \right) n_i \\ \text{BPFO} &= \frac{N}{2} \left[ 1 - \frac{D}{d_m} \cos \theta \right] n_i \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

### 3.3-) Pista interna estacionária

Sendo a pista interna estacionária,  $n_i=0$ , o movimento se dá conforme figura a seguir:

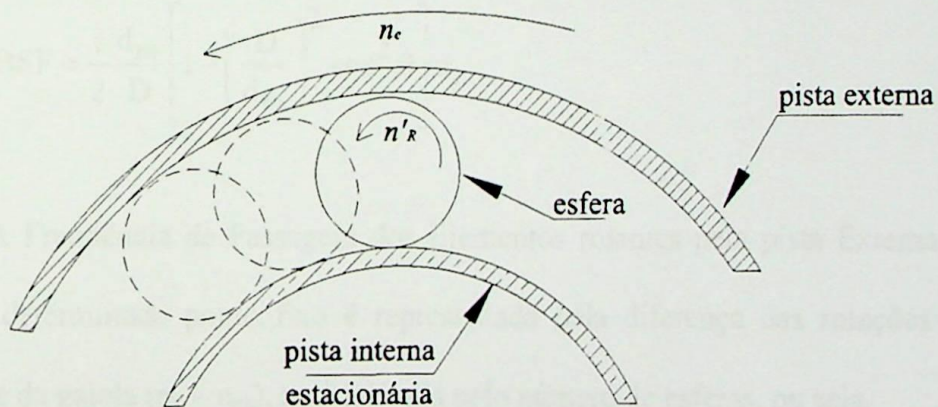


Fig. 3.2 Pista interna estacionária.

Para determinar a rotação das esferas, neste caso, considera-se a mesma condição geral, ou seja, não há deslizamento entre as esferas e a pista interna, somente puro rolamento. Logo, substituindo-se a condição  $n_i=0$ , na relação (3.03), resulta:

$$n'_R = -\frac{1}{2} \frac{d_m}{D} (1 - \gamma^2) n_e \quad (3.14)$$

O sinal negativo da relação (3.14), indica que o sentido de rotação das esferas é oposto à rotação apresentada quando a pista externa é a estacionária. Como pode ser observado pelas figuras 3.1 e 3.2.

A Frequência Fundamental do Trem (FTF), como já visto, é a rotação média do rolamento, que pela relação (2.29), considerando  $n_i = 0$ , obtém-se,

$$FTF = \frac{1}{2} n_e (1 + \gamma), \quad (3.15)$$

que substituindo a relação (2.23), resulta:

$$FTF = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{D}{d_m} \right) \cos \theta \right] n_e. \quad (3.16)$$

A Frequência de Rotação da Esfera (BSF), é o valor absoluto da relação (3.14) que substituindo a relação (2.23), toma a seguinte forma:

$$BSF = \frac{1}{2} \frac{d_m}{D} \left[ 1 - \left( \frac{D}{d_m} \right)^2 \cos^2 \theta \right] n_e. \quad (3.17)$$

A Frequência de Passagem dos Elementos rolantes pela pista Externa (BPFO) em um determinado ponto fixo é representada pela diferença das rotações da pista externa e da gaiola ( $n_e - n_{ge}$ ), multiplicada pelo número de esferas, ou seja,

$$BPFO = N (n_e - n_{ge}), \quad (3.18)$$

onde,

$$n_{ge} = (n_e - n_m), \quad (3.19)$$

substituindo em (3.18) as relações (3.19), (2.29) e (2.23) obtém-se:

$$BPFO = \left( \frac{N}{2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{D}{d_m} \right) \cos \theta \right] n_e. \quad (3.20)$$

A Frequência de Passagem dos Elementos rolantes pela pista Interna (BPFI), em um determinado ponto fixo, é representada pela rotação média – relações (2.29) e (2.23) – multiplicada pelo número de esferas considerando  $n_i=0$ , ou seja,

$$\text{BPFI} = N n_m, \quad (3.21)$$

$$\text{BPFI} = \frac{N}{2} n_e \left( 1 + \left( \frac{D}{d_m} \right) \cos \theta \right). \quad (3.22)$$

Em (3.23) são apresentadas as relações de interesse na análise das frequências com a pista interna estacionária.

$$\left. \begin{aligned} \text{FTF} &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{D}{d_m} \right) \cos \theta \right] n_e \\ \text{BSF} &= \frac{1}{2} \frac{d_m}{D} \left[ 1 - \left( \frac{D}{d_m} \right)^2 \cos^2 \theta \right] n_e \\ \text{BPFI} &= \frac{N}{2} \left[ 1 + \left( \frac{D}{d_m} \right) \cos \theta \right] n_e \\ \text{BPFO} &= \frac{N}{2} \left[ 1 - \frac{D}{d_m} \cos \theta \right] n_e \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

### 3.3.1-) Comentários

Comparando as relações apresentadas em (3.13) e (3.23), pode-se dizer que:

- 1-) As frequências de defeitos da esfera BPFO e BPFI nos dois casos têm expressão semelhante, diferenciando-se apenas na rotação de referência;
- 2-) Apesar da direção de rotação das esferas sob o seu próprio eixo, nos dois casos, serem opostas, os valores absolutos são praticamente iguais;

3-) A Freqüência Fundamental do Trem (FTF) será maior com a pista externa girando, pois ocorre a adição de dois termos. Enquanto que, no outro caso, ocorre a subtração. Observa-se também nas relações do FTF – relações (3.13) e (3.23) – que, para os dois casos o termo entre colchetes será positivo, mesmo estando a relação “ $(\frac{D}{d_m}) \cos \theta$ ” precedida de sinal negativo. Pois, a relação dos diâmetros entre parênteses será sempre menor que um.

### 3.4 -) Mancais axiais

Os mancais axiais, também denominados de mancais de empuxo, mancais de encosto ou mancais de impulso, são os mancais cujo ângulo de contato excedem  $45^\circ$ . O mais típico deles é quando o ângulo de contato é  $90^\circ$ , cuja análise matemática é desenvolvida a seguir,

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 90^\circ \\ \gamma = 0 \end{array} \right\} \quad (3.24)$$

Sendo irrelevante, neste caso, a classificação de pista interna ou externa pois ambas são idênticas. Portanto, considerando  $n$  a rotação no mancal, pode-se dizer:

$$n_i = n \rightarrow n_e = 0 \quad \text{ou} \quad n_e = n \rightarrow n_i = 0. \quad (3.25)$$

A Freqüência Fundamental do Trem (FTF), obtém-se aplicando as condições (3.24) e (3.25) em (3.06) ou (3.15), resultando:

$$FTF = \frac{1}{2}n. \quad (3.26)$$

A Frequência de Rotação da Esfera (BSF), obtém-se aplicando as mesmas condições em (3.08) ou (3.17), onde:

$$BSF = \frac{1}{2} \frac{dm}{D} n. \quad (3.27)$$

Analogamente pode-se dizer que, a Frequência de Passagem dos Elementos rolantes pelas Pistas, estando ela estacionária, “BPFS”<sup>5</sup>; ou girando “BPFR”<sup>6</sup>; obtém-se utilizando as relações (3.10) ou (3.12), ou ainda, utilizar as relações (3.20) ou (3.22), resultando em:

$$BPFS = BPFR = \frac{N}{2} n. \quad (3.28)$$

Em (3.29), apresentam reunidas as relações que permitem analisar as frequências nos mancais axiais com ângulo de contato igual a 90°.

$$\left. \begin{aligned} FTF &= \frac{1}{2} n \\ BSF &= \frac{1}{2} \frac{dm}{D} n \\ BPFS &= \frac{N}{2} n \\ BPFR &= \frac{N}{2} n \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

### 3.5 -) Frequências de defeitos

As frequências de defeitos surgem quando pelo menos um dos elementos do rolamento – pista externa, pista interna ou elementos de rolamento – apresenta em sua

---

<sup>5</sup> – Ball Pass Frequency – Stationary race

superfície cavidades, lascas, fendas, enfim, qualquer tipo de defeito devido à fabricação ou aos desgastes normais. Estando as superfícies defeituosas em contato com outras, produzem curtos pulsos de energia – choques – que, com uma rotação constante, resulta em frequências periódicas.

As frequências dos defeitos dependem das frequências de cada componente desenvolvidas no rolamento e das localizações destes defeitos, aquelas, por sua vez, como já analisado anteriormente, dependem da geometria do rolamento e da própria rotação no rolamento, e estão reunidas nas relações (3.13) e (3.23). Conseqüentemente nos equipamentos, os rolamentos defeituosos poderão gerar energias significativas em torno das frequências de ressonância destes equipamentos, comprometendo-os.

As frequências de defeitos dos componentes do rolamento em contato são três, a primeira quando há defeitos na superfície de rolamento da pista externa, denominada Frequência de Defeito da Pista Externa, FDPE, cujo valor para um determinado defeito será idêntico ao valor da frequência de passagem dos elementos pela pista externa (BPFO). A segunda, quando os defeitos encontram-se na pista interna, denominada Frequência de Defeito da Pista Interna, FDPI, de maneira análoga, o seu valor será idêntico ao da frequência de passagem dos elementos rolantes pela pista interna (BPFI). A última, é quando o defeito apresenta-se no elemento rolante, denominada Frequência de Defeito do Elemento Rolante, FDER, cujo valor é o dobro da frequência de rotação da esfera (BSF), pois, o defeito, entra em contato com a pista externa e interna a cada volta do elemento rolante. Logo,

---

<sup>6</sup> – Ball Pass Frequency – Rotating race

$$\left. \begin{aligned} \text{FDPE} &= \text{BPFO} \\ \text{FDPI} &= \text{BPFI} \\ \text{FDER} &= 2 \text{BSF} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

A freqüência de Defeito na Gaiola, FDG, para todos os casos, têm valor igual a Freqüência Fundamentais do Trem, ou seja:

$$\text{FDG} = \text{FTF} \quad (3.31)$$

### 3.5.1 -) Comentários

Analisando as relações agrupadas (3.13) e (3.23), relativas à pista externa estacionária e à pista interna estacionária respectivamente, considerando o mesmo valor numérico da rotação para ambos os casos, ou seja,  $n_i = n_e$ , vê-se que as freqüências de defeitos são semelhantes em ambos os casos, diferenciando-se apenas no fundamental trem de freqüência devido a troca do sinal dentro do colchete. Não ocorrendo esta exceção para o caso das relações apresentadas em (3.29), pois, estas independem de qual das pistas encontra-se estacionária. Ou seja, em ambos os casos os resultados serão os mesmos.

### 3.6 -) Exemplos numéricos

Alguns fabricantes, no mercado de rolamentos, apresentam Boletins Técnicos, para cada classe de rolamento com as freqüências de defeitos, ou softwares que possibilitam os cálculos destas freqüências. Assim sendo, de maneira análoga, propõe-

se com exemplos numéricos a seguir calcular as frequências de rolamentos para a pista externa estacionária – relações (3.13) – e para a pista interna estacionária – relações (3.23) – radialmente carregada. Como também, o cálculo de frequências para rolamentos submetidos a cargas axiais, com ângulo de contato de  $90^\circ$ .

Os valores das frequências de defeitos são obtidos através de uma rotina de programação que se encontra no anexo “A”, denominada “defeito.m”, desenvolvida no “software” MATLAB que utiliza cálculos que sintetizam as relações (3.13), (3.23) e (3.30) anteriormente apresentadas. O ângulo de contato pode variar de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . As características do rolamento e a rotação de trabalho serão fornecidas no arquivo “dados.m”.

Utilizou-se quatro rolamentos de mercado da SKF do Brasil Ltda, sendo dois deles de cargas axiais e dois de cargas radiais. A tabela 3.1 apresenta as dimensões físicas dos rolamentos, onde N é o número de elementos rolantes.

**Tabela 3.1** – Dimensões do rolamento (padrões de mercado), [SKF].

| Modelo do rolamento | Dm [mm] | D [mm] | N [-] | $\theta$ [rad] | $\theta$ [graus] |
|---------------------|---------|--------|-------|----------------|------------------|
| 2200                | 19,21   | 5,56   | 9     | 0,411          | 23°32'55"        |
| 6200                | 20      | 4,76   | 8     | 0,00           | 0°               |
| 894/530L            | 725     | 100    | 15    | 1,57           | 90°              |
| 511/530             | 585     | 39,69  | 42    | 1,57           | 90°              |

As quatro tabelas a seguir apresentam os valores das frequências calculadas através da rotina “defeito.m”.

Na primeira coluna considerou-se que a pista externa encontra-se estacionária e a interna girando com rotação de 60[rpm], ou seja, 1[Hz]. Na segunda coluna considerou-se a interna estacionária e a externa girando com 1[Hz].

**Tabela 3.2** – Frequências de defeitos para o modelo 2200.

| <b>Modelo 2200 – Frequências de Defeitos em [Hz]</b> |                                   |                                   |
|--|-----------------------------------|-----------------------------------|
|  | <b>Pista externa estacionária</b> | <b>Pista interna estacionária</b> |
| <b>FDPE</b>  | 3,31                              | 3,31                              |
| <b>FDPI</b>  | 5,69                              | 5,69                              |
| <b>FDER</b>  | 3,21                              | 3,21                              |
| <b>FDG</b>   | 22,04                             | 37,96                             |

**Tabela 3.3** – Frequências de defeitos para o modelo 6200.

| <b>Modelo 6200 – Frequências de Defeitos em [Hz]</b> |                                   |                                   |
|--|-----------------------------------|-----------------------------------|
|  | <b>Pista externa estacionária</b> | <b>Pista interna estacionária</b> |
| <b>FDPE</b>  | 3,05                              | 3,05                              |
| <b>FDPI</b>  | 4,95                              | 4,95                              |
| <b>FDER</b>  | 3,96                              | 3,96                              |
| <b>FDG</b>   | 22,86                             | 37,14                             |

**Tabela 3.4**–Frequências de defeitos para o modelo 894/530.

| <b>Modelo 894/530L – Frequências de Defeitos em [Hz]</b> |                                   |                                   |
|--|-----------------------------------|-----------------------------------|
|  | <b>Pista externa estacionária</b> | <b>Pista interna estacionária</b> |
| <b>FDPE</b>  | 7,50                              | 7,50                              |
| <b>FDPI</b>  | 7,50                              | 7,50                              |
| <b>FDER</b>  | 7,25                              | 7,25                              |
| <b>FDG</b>   | 30,0                              | 30,00                             |

Tabela 3.5–Frequências de defeitos para o modelo 511/530.

| Modelo 511/530 – Frequências de Defeitos em [Hz] |                            |                            |
|--|----------------------------|----------------------------|
|  | Pista externa estacionária | Pista interna estacionária |
| <b>FDPE</b>                                      | 21,0                       | 21,0                       |
| <b>FDPI</b>                                      | 21,0                       | 21,0                       |
| <b>FDER</b>                                      | 14,74                      | 14,74                      |
| <b>FDG</b>                                       | 30,00                      | 30,00                      |

## CAPÍTULO 4

### EFEITOS DA LUBRIFICAÇÃO NAS VIBRAÇÕES DOS MANCAIS DE ROLAMENTO

#### 4.1-) Introdução

O objetivo deste capítulo é analisar teoricamente os efeitos da lubrificação nas vibrações nos mancais de rolamento sob várias condições. Para alcançá-lo, faz-se necessário determinar a expressão que representa a distribuição de pressão no filme de lubrificante em relação a geometria dos elementos rolantes e as pistas de rolamento, em seguida, determinar a expressão da mínima espessura do filme de lubrificante.

Posteriormente, discutir sucintamente a importância da viscosidade no fluido lubrificante, bem como o seu comportamento com relação as alterações de temperatura e pressão.

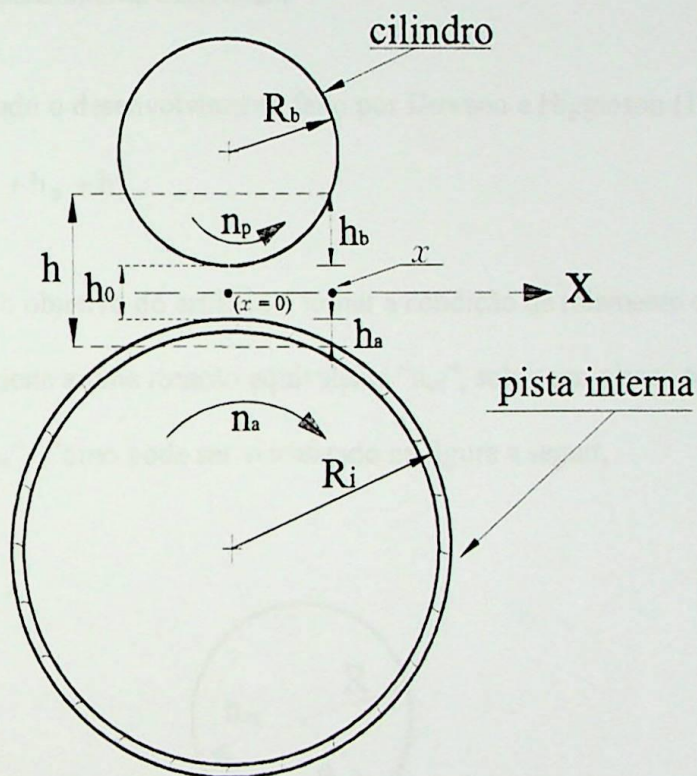
#### 4.2-) Cilindro equivalente

Considerando implícitas as deformações elásticas nas dimensões do cilindro e das pistas, a deformação equivalente nada mais é do que efetuar a transposição dos contatos do cilindro com as pistas, para contatos do cilindro equivalente com planos. Ou seja, mantendo as mesmas condições de contato.

A equivalência de duas superfícies circulares é obtida considerando uma outra superfície circular equivalente em contato com um plano.

Como o cilindro tem contatos tanto com a pista externa como a interna, resulta em dois cilindros de raios equivalentes em relação às superfícies planas, que passaram a representar as pistas.

A figura a seguir apresenta o contato do cilindro com a pista interna,



**Fig. 4.1** Contato do cilindro com a pista interna, [Dowson e Higginson (1977)].

sendo:

$h$  – a distância entre o cilindro e a pista interna em um determinado ponto no eixo  $X$ ;

$h_0$  – a espessura do filme de óleo entre o cilindro e a pista interna ( $x = 0$ );

$h_a$  – a diferença entre o ponto entre os pontos ( $x = 0$ ) e “ $x$ ” relativos à superfície da pista interna, medida sobre uma linha imaginária que corta o eixo  $X$ , perpendicularmente, no ponto de contato “ $x$ ” considerado;

$h_b$  – a diferença entre o ponto entre os pontos ( $x = 0$ ) e “ $x$ ” relativos à superfície do cilindro, medida sobre uma linha imaginária que corta o eixo  $X$ , perpendicularmente, no ponto de contato “ $x$ ” considerado;

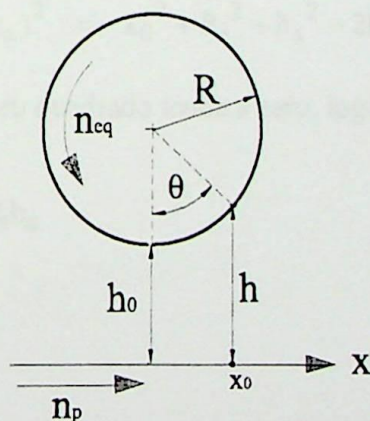
$R_b$  – o raio do cilindro deformado;

$R_i$  – o raio da pista interna deformada.

Utilizando o desenvolvimento feito por Dowson e Higginson (1977),

$$h = h_0 + h_a + h_b. \quad (4.01)$$

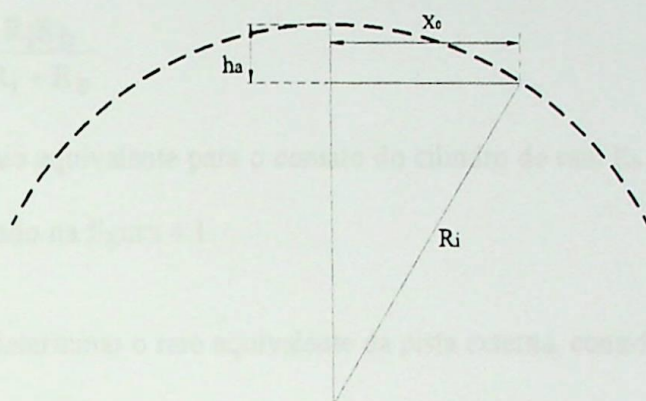
Sendo o objetivo do artifício é tornar a condição de rolamento como um cilindro de raio “ $R$ ” sujeita a uma rotação equivalente “ $n_{cq}$ ”, sobre um plano. com deslocamento equivalente “ $n_p$ ”. Como pode ser visualizado na figura a seguir,



**Fig. 4.2** Cilindro equivalente com relação às pistas, [Dowson e Higginson (1977)].

O ângulo "  $\theta$  " é formado entre as linhas imaginárias que passam pelos pontos onde ocorre o menor filme de óleo. Considerando um dos pontos, o centro do cilindro, o outro ponto é " $x_0$ ".

Considerando a relação triangular entre o raio da pista e a distância infinitesimal " $x_0$ " ao longo do eixo x, onde  $R_i$  é o raio da pista interna deformada, mostrada na figura 4.3,



**Fig. 4.3** Relação geométrica com a deformação no contato.

pode-se dizer que:

$$R_i^2 = x_0^2 + (R_i - h_a)^2 = x_0^2 + R_i^2 + h_a^2 - 2R_i h_a,$$

como  $h_a$  é infinitesimal, o seu quadrado tende a zero, logo

$$R_i^2 \approx x_0^2 + R_i^2 - 2R_i h_a$$

$$x_0^2 \approx 2R_i h_a,$$

$$h_a = \frac{x_0^2}{2R_i}, \quad (4.02)$$

considerando o mesmo para o cilindro, obtém-se,

$$h_b = \frac{x_0^2}{2R_b}, \quad (4.03)$$

substituindo em (4.1), resulta:

$$h \approx h_0 + \frac{x_0^2}{2R_i} + \frac{x_0^2}{2R_b} \approx h_0 + \frac{x_0^2}{2} \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_b} \right), \quad (4.04)$$

definindo,

$$\frac{1}{R} = \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_b} \right), \quad (4.05)$$

resulta em,

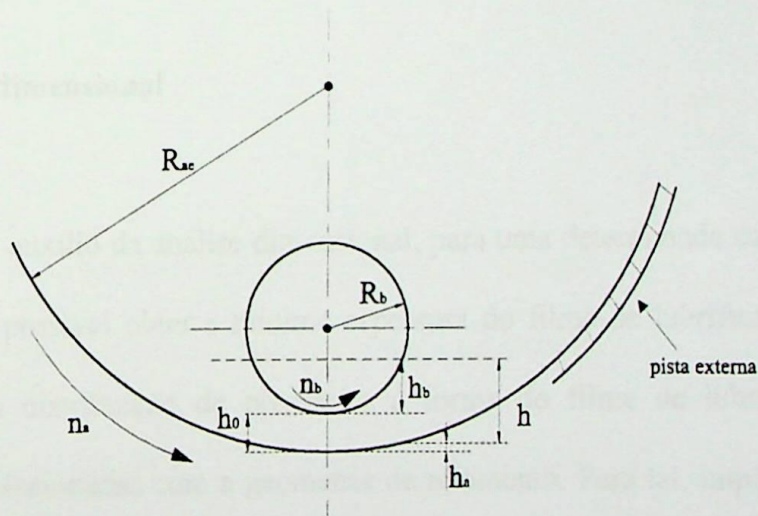
$$R = \frac{R_i R_b}{R_i + R_b}. \quad (4.06)$$

onde  $R$  é o raio equivalente para o contato do cilindro de raio  $R_b$  com a pista interna de raio  $R_i$ , mostrado na figura 4.1.

Para determinar o raio equivalente da pista externa, considere a figura 4.4,

onde:

$$h = h_b + h_0 - h_a. \quad (4.07)$$



**Fig. 4.4** Contato do cilindro com a pista externa.

Substituindo as relações (4.2) e (4.3) em (4.7), resulta:

$$h \approx h_0 + \frac{x_0^2}{2R_b} - \frac{x_0^2}{2R_{ae}} \approx h_0 + x_0^2 \left( \frac{1}{2R_b} - \frac{1}{2R_{ae}} \right) \quad (4.08)$$

Definindo:

$$\frac{1}{R} = \left( \frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_{ae}} \right), \quad (4.09)$$

explicitando R, obtém-se,

$$R = \frac{R_{ae} R_b}{R_{ae} - R_b}, \quad (4.10)$$

onde:

$R_{ae}$  – é o raio da pista externa deformada;

$R$  – o raio equivalente do cilindro;

$R_b$  – o raio do cilindro.

#### 4.3-) Análise dimensional

Com o auxílio da análise dimensional, para uma determinada carga específica e velocidade, é possível obter a mínima espessura do filme de lubrificante exigindo-se que, a devida distribuição de pressão e a forma do filme de lubrificante estejam diretamente relacionadas com a geometria de rolamento. Para tal, impõe-se a condição isotérmica, com as variáveis independentes apresentadas na tabela 4.1. Onde a relação adimensional  $\frac{h}{R}$  é função de três outros parâmetros, também adimensionais:

$$\frac{h}{R} = f\left(\frac{w}{E'R}, \frac{n_0 u}{E'R}, \alpha E'\right). \quad (4.11)$$

Tabela 4.1 – Variáveis independentes.

| Variáveis | Descrição   | Dimensão |
|-----------|---|----------|
| h         | Espessura do filme de lubrificante                                      | L        |
| R         | Raio equivalente do par de rolamentos                                   | L        |
| E'        | Módulo de elasticidade do par de rolamentos                             | $M/LT^2$ |
| $\eta_0$  | Viscosidade nas condições de entrada de contato com o par de rolamentos | $M/LT$   |
| $\alpha$  | Expoente de pressão da viscosidade                                      | $LT^2/M$ |
| w         | carga externa por unidade de comprimento                                | $M/T^2$  |
| U         | Velocidade  | $L/T$    |

Sendo,

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right], \quad (4.12)$$

onde:

$E_{1,2}$  são os módulos de elasticidade dos sólidos em contato;

$\sigma_{1,2}$  são os coeficientes de Poisson dos sólidos em contato.

Da expressão (4.11), o primeiro adimensional refere-se à carga que está submetido cada um dos elementos rolantes, matematicamente representados por,

$$W = \frac{w}{E'R}. \quad (4.13)$$

Segundo Dowson e Higginson (1977), para o aço,  $\underline{w}$  tem o valor de  $3 \times 10^{-4}$ , corresponde a máxima pressão Hertziana, em torno de 1.5 [GPa]. E o valor de  $3 \times 10^{-5}$ , corresponde a máxima pressão em torno de 0,5 [GPa].

O segundo parâmetro adimensional da expressão (4.11), refere-se à velocidade,

$$U = \frac{\eta_0 u}{E'R} \quad (4.14)$$

que, de acordo com os mesmos autores, é a variável mais influenciável nos cálculos. Pois, o valor de  $h/R$  variando na quinta ordem – de  $10^{-7}$  a  $10^{-2}$  – para valores de  $U$  variando também na quinta ordem, ou seja, de  $10^{-13}$  a  $10^{-8}$ .

O último parâmetro adimensional refere-se ao material, representado por,

$$G = \alpha E' \quad (4.15)$$

O valor de  $\alpha$  dos lubrificantes, segundo as publicações existentes, tem pequena faixa de variação, e, os valores do módulo de elasticidade,  $E'$ , para os metais sofrem muito pequenas variações. Conseqüentemente, os valores do adimensional  $G$  têm pequena variação.

#### 4-) Expressão simplificada para calcular a espessura do filme de lubrificante

A teoria de Grubin, apresentada por Dowson e Higginson (1977), possibilita obter a fórmula da espessura do filme de lubrificante utilizando com duas simplificações, a saber:

1<sup>a</sup>-) Considera-se o mesmo perfil de deformação das superfícies em contato que o gerado em contato seco, ou seja, sem lubrificação;

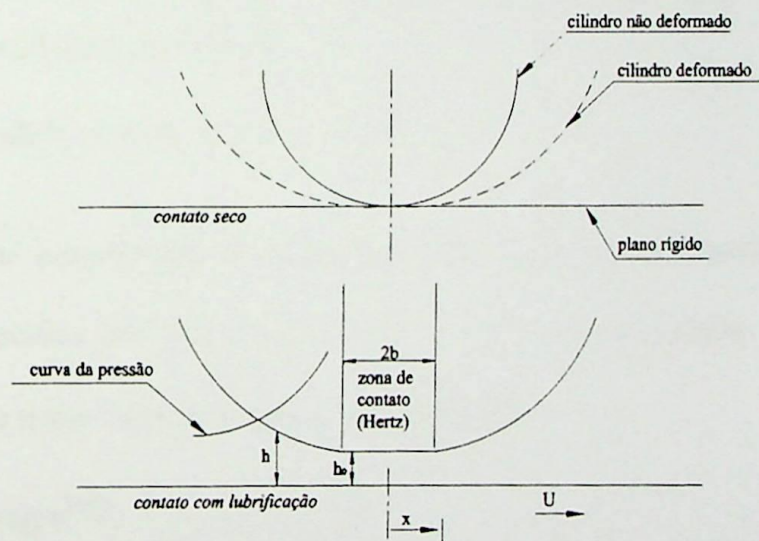
2<sup>a</sup>-) A alta pressão é desenvolvida na entrada da região da zona Hertziana.

Observa-se, na figura 4.5, que a espessura adimensional, fora da zona de contato é dada por,

$$H - H_0 = \frac{h - h_0}{R}, \quad (4.16)$$

sendo,

$$\left. \begin{array}{l} h = HR \\ h_0 = H_0 R \end{array} \right\} \quad (4.17)$$



**Fig. 4.5** Modelo de Grubin do contato elastohidrodinâmico, [Dowson e Higginson (1977)].

O adimensional da variável  $x$  é:

$$X = \frac{x}{b}, \quad (4.18)$$

Sendo  $b$  o valor da metade da largura na zona de contato, figura 4.5, tem-se:

$$dx = b dX . \quad (4.19)$$

Pela equação de Reynolds, sendo o lubrificante incompressível a taxa de variação da pressão  $p$  ao longo da direção  $x$  é dado por,

$$\frac{dp}{dx} = 12\eta u \left[ \frac{h - h_m}{h^3} \right], \quad (4.20)$$

onde:

$x$  – é a posição na zona de contato, variando de  $[-b, b]$ ;

$p$  – a pressão desenvolvida na posição  $x$ ;

$h$  – a espessura do filme de lubrificante na posição  $x$ ;

$h_m$  – a espessura do filme de lubrificante na posição de máxima pressão;

$\eta$  – a viscosidade do lubrificante;

$u$  – a velocidade relativa do deslocamento.

Duas propriedades do lubrificante são afetadas pela pressão, a primeira é a massa específica que aumenta em torno de 20% na alta pressão. E a segunda é a viscosidade  $\eta$  que varia de acordo com a expressão,

$$\eta = \eta_0 e^{\alpha p}, \quad (4.21)$$

sendo  $\eta_0$ , a viscosidade do lubrificante à pressão atmosférica.

Define-se  $q^1$  como sendo a pressão reduzida. E, sua taxa de variação como relação ao deslocamento  $x$  expressa-se por:

$$\frac{dq}{dx} = e^{-\alpha p} \frac{dp}{dx} . \quad (4.22)$$

---

<sup>1</sup> A pressão reduzida será melhor abordada no final do capítulo.

Substituindo 4.21 e 4.22 em 4.20, obtém-se:

$$\frac{dq}{dx} = 12 \eta_0 u \left[ \frac{h - h_0}{h^3} \right]. \quad (4.23)$$

Definindo  $Q$  como,

$$Q = \frac{q}{E'}, \quad (4.24)$$

tem-se,

$$dq = E' dQ. \quad (4.25)$$

Segundo Dowson e Higginson (1977), a relação entre a largura,  $b$ , na zona Hertziana em relação ao raio equivalente,  $R$ , do par de rolamento é,

$$\frac{b}{R} = 4 \left( \frac{W}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = 4 P_0. \quad (4.26)$$

onde,  $W$  é o adimensional da carga que esta submetido cada um dos elementos rolantes, conforme definido em (4.13).  $E, P_0$  é o adimensional da máxima pressão Hertziana, ou seja,

$$P_0 = \frac{P_0}{E'}. \quad (4.27)$$

onde  $p_0$  é a máxima pressão Hertziana.

Explicitando  $u$  de (4.14), substituindo juntamente com as relações (4.17), (4.19) e (4.25) em (4.23), obtém-se,

$$\frac{dQ}{dX} = 12 \frac{b}{R} U \left[ \frac{R(H - H_0)}{H^3} \right], \quad (4.28)$$

que, substituindo (4.26), resulta:

$$\frac{dQ}{dX} = 48 \left( \frac{W}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} U \left[ \frac{H - H_0}{H^3} \right]. \quad (4.29)$$

Conforme apresenta a figura 4.5, o valor do adimensional X, na borda de entrada da zona Hertziana, é igual a (-1), pois  $(-b/b = -1)$ . A pressão desenvolvida neste ponto é dada pela integral,

$$Q_{X=-1} = 48 \left( \frac{W}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} U \int_{-\infty}^{-1} \left[ \frac{H - H_0}{H^3} \right] dX. \quad (4.30)$$

Segundo Dowson e Higginson (1977), Grubin avaliou a integral (4.30) para vários valores de  $H_0$ , definindo a expressão (4.31). Sendo esta a melhor que se ajusta a faixa de valores empiricamente analisados,

$$Q_{[X=-1]} = (48)(0,0986) \left( \frac{W}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} U \left( \frac{\pi}{2W} \right)^2 \left( \frac{\pi H_0}{2W} \right)^{-11/8}. \quad (4.31)$$

A condição de contorno, para determinar a expressão da espessura do filme de lubrificante, no ponto  $(X = -b/b = -1)$  da exponencial apresentada na relação (4.22) é,

$$\alpha p \ll 1, \quad (4.32)$$

ou seja, próximo de zero. Pois neste ponto a viscosidade não sofre alterações.

Integrando a relação (4.22),

$$\int dq = \int e^{-\alpha p} dp, \quad (4.33)$$

aplicando a condição (4.32), resulta:

$$q_{X=-1} \approx \frac{-1}{\alpha}. \quad (4.34)$$

Com o auxílio de (4.15) e (4.24), se tem o adimensional de (4.34):

$$Q_{X=-1} = \frac{1}{G}. \quad (4.35)$$

Aplicando em (4.31), resulta na expressão adimensional da espessura do filme de lubrificante  $H_0$ ,

$$H_0 = \frac{1,95(GU)^{0,727}}{W^{0,091}}. \quad (4.36)$$

Substituindo as relações (4.13) a (4.15) em (4.36) e, tornando literal o coeficiente e os expoentes, obtém-se a expressão desejada,

$$\frac{h_0}{R} = K \left( \frac{u \eta_0}{R E'} \right)^a \left( \frac{w}{R E'} \right)^b (\alpha E')^c. \quad (4.37)$$

Os expoentes (a, b e c) e o coeficiente (K) apresentado em (4.37), foram avaliados por pesquisadores, assumindo valores diferentes. Alguns destes valores foram reunidas por Schwarz (1982) conforme tabela 4.2,

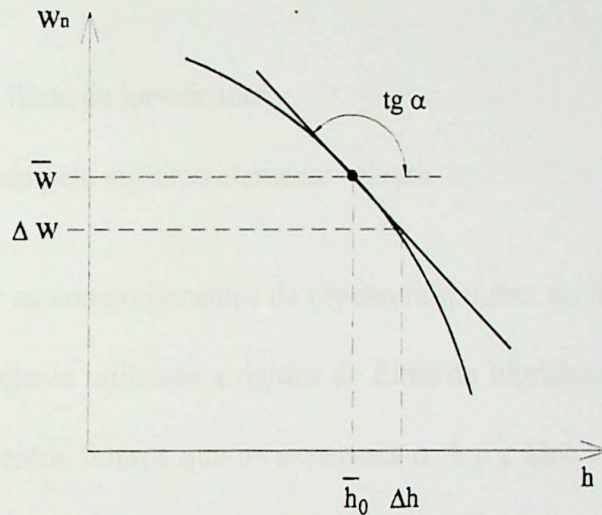
**Tabela 4.2** – Valores do coeficiente e expoentes da relação da espessura mínima do filme de lubrificante, [Schwarz (1982)].

| <u>Fonte</u>              | <u>Coefficiente</u> | <u>Expoentes</u> |        |       |
|---------------------------|---------------------|------------------|--------|-------|
|                           | K                   | a                | b      | c     |
| <b>Grubin</b>             | 1,95                | 0,727            | -0,091 | 0,727 |
| <b>Dowson e Higginson</b> | 1,600               | 0,70             | -0,13  | 0,60  |
| <b>Crook</b>              | 2,120               | 0,75             | -0,125 | 0,75  |
| <b>Cheng</b>              | 1,987               | 0,74             | -0,110 | 0,74  |

#### 4.5-) Efeitos da lubrificação

As vibrações nos mancais de rolamento estão diretamente relacionados com a lubrificação através da rigidez do filme de lubrificante. Alterando-se nas condições de rolamento.

Partindo-se do princípio de que quanto maior a espessura do filme de lubrificante entre os componentes do rolamento, menor é a carga transmitida ao sistema, pode-se representar a curva do comportamento da carga transmitida em função do filme de lubrificante, conforme mostra a figura 4.6,



**Fig. 4.6** Carga transmitida em função do filme de lubrificante.

onde:

$w$  – é a carga transmitida ao sistema;

$\Delta w$  – o incremento de carga;

$\bar{w}$  – a carga no ponto de trabalho;

$\Delta h$  – o incremento do filme de lubrificante;

$\bar{h}_0$  – o filme de lubrificante no ponto de trabalho;

$\text{tg } \alpha$  – o coeficiente da reta.

Considerando que, para um determinado lubrificante em um certo período de tempo, onde os desgastes nos elementos do rolamento podem ser considerados constantes, tem-se na curva apresentada na figura 4.6 um ponto de trabalho, sendo ele caracterizado pela espessura mínima do filme de lubrificante,  $\bar{h}_0$ , e uma carga transmitida  $\bar{w}$ . Para o  $n$ -ésimo elemento rolante, define-se a rigidez do filme como sendo o coeficiente da reta,  $\text{tg } \alpha$ , que passa pelo ponto de trabalho, que nada mais é do que a seguinte aproximação de primeira ordem,

$$k_n = - \left( \frac{\partial w_n}{\partial h} \right) \Big|_{h=h_0}, \quad (4.38)$$

onde:

$h$  – é a espessura do filme de lubrificante;

$w_n$  – a carga suportada pelo  $n$ -ésimo elemento rolante.

Para analisar os comportamentos da espessura mínima do filme  $h_0$  e da carga no  $n$ -ésimo elemento rolante utiliza-se a rigidez do filme de lubrificante, para tal, assume-se nos desenvolvimentos futuros que os expoentes  $a$ ,  $b$  e  $c$  têm valores 0,76; -0,142 e 0,76 respectivamente. Estes valores foram obtidos por Hamrock et al. (1986) apud Su et al. (1992). Que substituídos na expressão (4.37), obtém-se a expressão (4.39),

$$h_0 = C_0 \eta^{0,76} u^{0,76} w_n^{-0,142}, \quad (4.39)$$

sendo  $C_0$  função das dimensões do rolamento, do material e do coeficiente  $K$  da expressão (4.37).

Da expressão (4.39), explicitando  $w_n$ , tem-se,

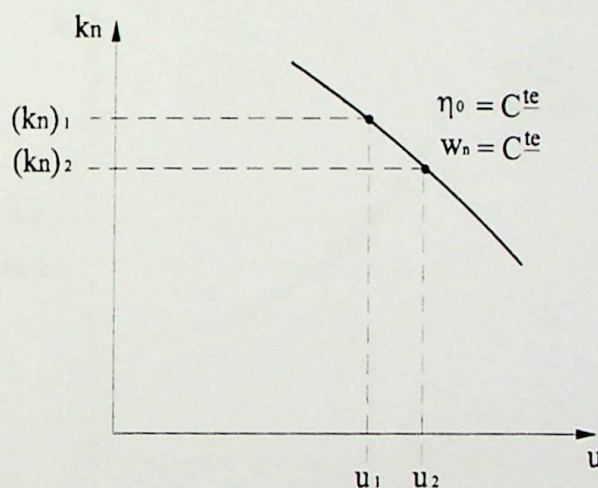
$$w_n^{-0,142} = h_0 \left( \frac{1}{C_0 \eta_0^{0,76} u^{0,76}} \right), \quad (4.40)$$

onde, se obtém a aproximação de primeira ordem considerada em (4.38),

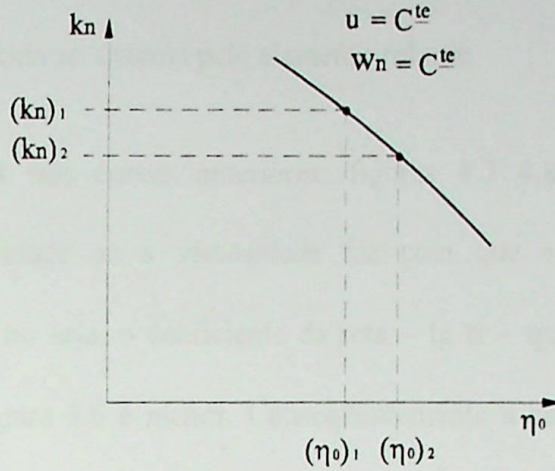
$$k_n = -\frac{\partial w_n}{\partial h_0} = 7,042 \left( C_0^{-1} \eta_0^{-0,76} u^{-0,76} w_n^{1,142} \right). \quad (4.41)$$

A expressão (4.41) apresenta a rigidez do filme de lubrificante em função de três variáveis: velocidade, viscosidade do lubrificante e a carga suportada pelo elemento rolante. A carga suportada pelo elemento rolante é resultante da soma de esforços externos, que são as cargas iniciais denominadas pré-carga e das cargas devido aos defeitos nos componentes do rolamento, gerando as cargas dinâmicas. A viscosidade é função do tipo de lubrificante e a velocidade é inerente ao sistema em análise.

Analisando, na relação (4.41), cada uma das variáveis isoladamente mantendo as outras constantes, inicialmente a velocidade, pode-se dizer pela figura 4.7 que quanto maior a velocidade menor será a rigidez do filme de lubrificante, conseqüentemente menor carga transmitida ao sistema pelo elemento rolante.

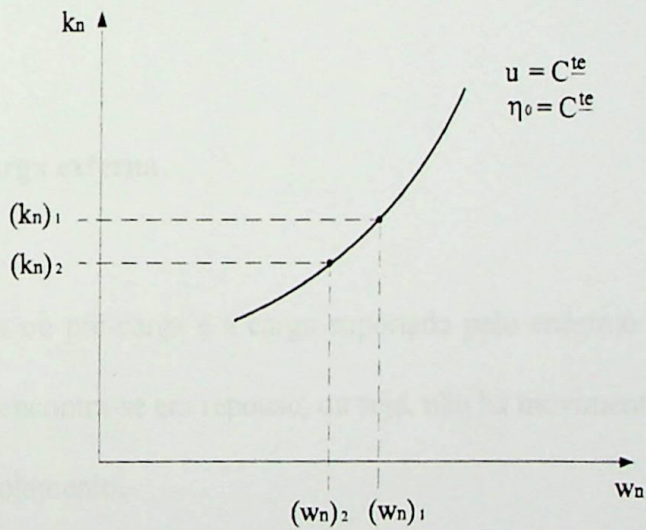


**Fig. 4.7** Rigidez do filme de lubrificante em função da velocidade.



**Fig. 4.8** Rigidez do filme de lubrificante em função da Viscosidade.

De maneira análoga, na figura 4.8, ao analisar o comportamento da rigidez do filme de lubrificante em função da viscosidade, mantendo as outras variáveis independentes constantes, vê-se que tem o mesmo comportamento da curva anteriormente analisada, ou seja, a rigidez do filme de lubrificante diminui quando se aumentar a viscosidade.



**Fig. 4.9** Rigidez do filme de lubrificante em função da carga.

Porém, alterando-se a carga com as outras variáveis constantes, a curva não comporta da mesma maneira que as anteriores, conforme se observa na figura 4.9, pois,

quanto maior a carga maior será a rigidez do filme de lubrificante, conseqüentemente, maior a carga transmitida ao sistema pelo elemento rolante.

Analisando as três curvas anteriores, figuras 4.7 4.8 e 4.9, vê-se que o incremento da velocidade ou a viscosidade faz com que a rigidez do filme de lubrificante diminua, ou seja, o coeficiente da reta –  $\text{tg } \alpha$  – que passa pelo ponto de trabalho –  $h_0$  – na figura 4.6 é menor. Conseqüentemente a carga transmitida para o sistema, conjunto mecânico, será menor. Efeito contrário acontece quando aumenta-se a carga no elemento rolante, figura 4.9, a rigidez do lubrificante aumenta, aumentando-se a carga transmitida ao sistema.

Este resultado ainda é influenciado pela carga externa no sistema (pré-carga), que dependendo de sua magnitude poderá acarretar efeito contraditório ao anteriormente obtido, com se pode ver a seguir.

#### 4.5.1-) Efeitos da carga externa

Carga externa ou pré-carga é a carga suportada pelo enésimo elemento rolante quando o rolamento encontra-se em repouso, ou seja, não há movimentos relativos entre os componentes do rolamento.

Para analisar os efeitos devido a carga externa, admite-se que,

$$w_n = w_{ne} + k_s h_0, \quad (4.42)$$

onde,

$w_{ne}$  é o esforço devido à carga externa (pré-carga) sustentada pelo enésimo elemento rolante;

$k_s h_0$  é o termo devido às cargas dinâmicas, oriundas das deformações dos componentes que estão separadas pelo filme de lubrificante;

$k_s$  é a rigidez das superfícies combinadas dos componentes do rolamento.

#### 4.5.1.1-) Primeiro caso

O primeiro caso é definido como a condição de trabalho é tal que,

$$w_{ne} \ll k_s h_0, \quad (4.43)$$

ou seja, a pré-carga é desprezível,  $w_{n0} \rightarrow 0$ .

Substituindo em (4.42) resulta,

$$w_n \approx k_s h_0. \quad (4.44)$$

Escrevendo novamente (4.41) na forma,

$$C_0 n_0^{0,76} u^{0,76} = \frac{7,042 w_n^{1,142}}{k_n}, \quad (4.45)$$

substituindo em (4.39) resulta,

$$w_n = \frac{1}{7,042} h_0 k_n, \quad (4.46)$$

e, comparado com (4.44) obtém-se:

$$k_n \approx 7,042 k_s. \quad (4.47)$$

Substituindo (4.44) e (4.47) em (4.41), resulta:

$$h_0 \approx C_0^{0,8757} \eta_0^{0,6655} u^{0,6655} k_s^{-0,1243} . \quad (4.48)$$

#### 4.5.1.1.1-) Conseqüências do primeiro caso

- 1- A rigidez do filme de lubrificante nas superfícies combinadas dos componentes do rolamento,  $k_s$ , não é constante pois está diretamente relacionada com as cargas desenvolvidas no rolamento, relações (4.41), (4.46) e (4.47), que por sua vez variam de forma não linear com as deformações elásticas nos componentes dos mancais, pois além dos esforços hidrodinâmicos que geram as deformações elásticas. A rigidez do filme depende também da viscosidade do lubrificante, da velocidade e dos esforços externos, pois, apesar de serem desprezíveis, eles existem.
- 2- A rigidez do filme de lubrificante nas superfícies combinadas dos componentes do rolamento,  $k_s$ , esta diretamente relacionada com as cargas dinâmicas, ou seja, quanto maior forem as deformações, maior será  $k_s$ .
- 3- Analisando as expressões (4.48) e (4.47), tanto a rigidez do filme de lubrificante,  $k_n$ , como a rigidez das superfícies combinadas,  $k_s$ , aumentam quando se aumenta a velocidade ou a viscosidade do lubrificante, considerando  $h_0$  constante.
- 4- Pelas relações (4.47) e (4.48) vê-se que a viscosidade não influencia diretamente na rigidez do filme de lubrificante.



#### 4.5.1.2-) Segundo caso

O segundo caso é definido como a condição em que ocorre o domínio da carga inicial – pré-carga – ou seja,

$$w_{ne} \gg k_s h_0. \quad (4.49)$$

Analisando (4.42), conclui-se que,

$$w_n = w_{ne} + \underbrace{k_s h_0}_{\approx 0},$$

logo,

$$w_n \approx w_{ne}. \quad (4.50)$$

Substituindo (4.50) em (4.41) e em (4.39), obtém-se respectivamente:

$$k_n \approx 7,042 \left( C_0^{-1} \eta_0^{-0,76} u^{-0,76} w_{ne}^{1,142} \right), \quad (4.51)$$

e,

$$h_0 = C_0 \eta^{0,76} u^{0,76} w_{ne}^{-0,142}. \quad (4.52)$$

##### 4.5.1.2.1-) Conseqüências do segundo caso

- 1- De acordo com (4.49), pode-se dizer que as cargas dinâmicas são desprezíveis.
- 2- Da expressão (4.51), conclui-se que a rigidez do filme de lubrificante,  $k_n$ , aumenta diminuindo a velocidade ou a viscosidade.
- 3- Pela expressão (4.52), observa-se que aumentando a velocidade ou a viscosidade, aumenta a espessura do filme de lubrificante.

4- Partindo do princípio de que a espessura do filme de lubrificante é limitada pelas folgas inerentes às superfícies do rolamento, observa-se na relação (4.52) que para maiores velocidades, ou, maiores valores de viscosidade acarretam em maiores valores da carga externa,  $w_{ne}$ . Por sua vez, analisando a relação (4.51) nesta nova condição, vê-se que ocorre uma sobreposição de efeitos em torno do valor da rigidez do filme de lubrificante, pois a viscosidade ou a velocidade tende a diminuir o valor da rigidez, em contrapartida, valores maiores de carga externa tendem a aumentá-lo.

#### 4.5.1.3-) Comentários sobre os efeitos

- 1- Pelas expressões (4.44) e (4.51), pode-se dizer de uma maneira geral que: aumentando-se a carga aumenta-se a rigidez do filme de lubrificante.
- 2- Os efeitos da velocidade e da viscosidade na rigidez do filme de lubrificante dependem da magnitude relativa entre a pré-carga,  $w_{ne}$ , e a carga dinâmica oriunda das deformações estruturais,  $k_s h_0$ .
- 3- Nos dois casos ocorrem composições de efeitos ao incrementar-se a viscosidade ou a velocidade, inicialmente no primeiro caso, observando a relação (4.48), vê-se que ocorre um aumento no valor da espessura do filme de lubrificante, porém este é limitado pelas folgas inerentes ao rolamento, podendo não compensar todo o incremento como ocorreria se não fosse limitado. Então, o efeito do incremento da velocidade ou da viscosidade não compensado faz com que o valor da rigidez da superfície combinada,  $k_s$ , aumente. O que, de acordo com a

relação (4.44) ambos,  $h_0$  e  $K_s$ , colaboram para o aumento da carga no elemento rolante.

Já no segundo caso, apesar de também haver uma interação entre os efeitos, conforme já comentado, ocorre em sentido contrário, ou seja, ao incrementar-se a velocidade ou a viscosidade a rigidez diminui, porém, devido ao limite físico do filme de lubrificante imposto pelas folgas, não ocorrendo a compensação total do incremento, de acordo com (4.52), a carga externa,  $w_{ne}$ , irá aumentar compensando as alterações da velocidade ou da viscosidade. A carga externa, por sua vez, faz com que a rigidez do filme do lubrificante aumente, assumindo assim, valores que dependerão das folgas e do valor do incremento introduzido.

- 4- Analisando a expressão (4.51), pode-se observar que aumentando a velocidade  $e$ , ou a viscosidade do lubrificante, considerando a carga externa  $w_{ne}$  constante, ocorrerá a redução da rigidez do filme de lubrificante. Todavia, como já comentado, o filme depende das folgas inerentes ao rolamento, e, com a temperatura de trabalho, tendem a diminuir. Esta tendência faz com que os efeitos devido aos aumentos da viscosidade ou da velocidade serem compensados com acréscimo na carga; expressão (4.52), limitado  $h_0$ . Em primeira análise vê-se que a carga a ser incrementada é a carga externa,  $w_{ne}$ , porém, dependendo do incremento dado pode ela saturar, não compensando totalmente, dando origem à cargas dinâmicas. Assim sendo, pode de maneira geral concluir que: não se deve desprezar as cargas geradas dinamicamente, pois pode ocorrer uma sobreposição de efeitos dando origem à rigidez equivalente, representada por  $k_n'$ .

Considera-se puramente o segundo caso – carga dinâmica desprezada – na situação particular cujo sistema está submetido a extrema carga externa e sob baixíssima velocidade.

- 5- Quanto maior a rigidez equivalente,  $k_n$ , maior será a energia de vibração, devido as forças induzidas.
- 6- Analisando-se somente os efeitos da viscosidade do lubrificante, se as cargas dinâmicas geradas pelo filme dominam a pré-carga ter-se-á altos valores de energia de vibração para altos valores de viscosidade, é o que acontece no primeiro caso. Por outro lado, quando as cargas externas predominam, incrementando-se a viscosidade poderá ocorrer ou não a redução da vibração, pois, irá depender do incremento dado e das folgas no rolamento.
- 7- De maneira análoga, o aumento da velocidade poderá aumentar a rigidez equivalente ou não, o que dependerá da magnitude da pré-carga. Porém, a energia de amortecimento, não considerada no equacionamento será sempre incrementada com o aumento da velocidade. Pois conforme equacionado por Piskounov (1977), o amortecimento depende diretamente da velocidade. As oscilações mecânicas livres são representadas, para uma carga unitária, pela equação diferencial,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + k_m y = 0, \quad (4.53)$$

sendo:

$y$  – deslocamento;

$k_m$  – rigidez mecânica;

$\lambda'$  – constante de amortecimento;

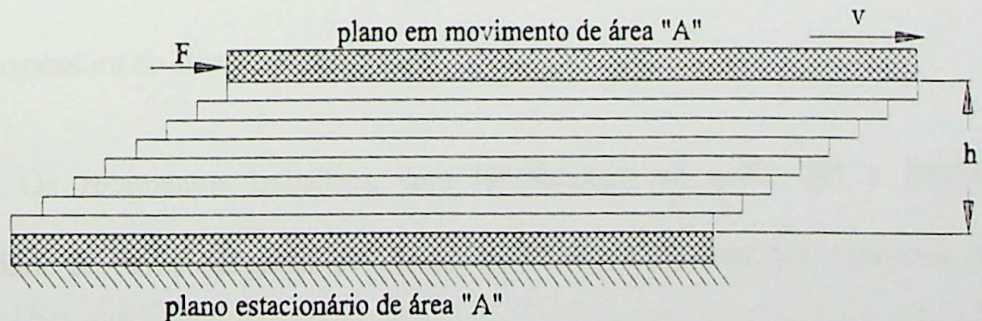
t – tempo.

Logo, considerando  $\lambda$  constante, pode-se dizer que: aumentando-se a velocidade rotacional aumenta-se o deslocamento, que, conseqüentemente, aumenta a energia de vibração. Pois, o deslocamento está relacionado com a velocidade de impacto no defeito<sup>2</sup>.

#### 4.6-) Viscosidade

Viscosidade é uma das mais importantes propriedades do fluido, como também, a mais evidente delas, que é a sua resistência a fluir.

A viscosidade tem em si mesma consideração no próprio sistema hidráulico, seja na transmissão como também na absorção de choques. Pela figura 4.10, observa-se uma superfície movendo-se a uma velocidade  $v$ , em contato com o filme de lubrificante de altura  $h$ , a lâmina de lubrificante em contato direto com esta superfície tem a mesma velocidade da superfície em deslocamento.



**Fig. 4.10** Plano deslizando sobre filme de lubrificante de altura  $h$ , [Rein (1978)].

<sup>2</sup> A energia de impacto será analisada no capítulo 5

Em contrapartida, a outra superfície encontra-se parada, conseqüentemente neste plano, a lâmina de lubrificante encontra-se parada. Analisando a altura do lubrificante como se fossem vários planos, vê-se que há um escorregamento entre eles, resultando num gradual decréscimo da velocidade. Isaac Newton relacionou inicialmente a força de cisalhamento entre os planos por unidade de área, denominada, tensão de cisalhamento,  $F/A$ , e, relacionou a velocidade de deslocamento do plano, com a espessura do filme de lubrificante,  $v/h$ . Observou que determinados fluidos obedeciam, para uma mesma temperatura, a relação (4.54), que é a viscosidade.

$$\eta = \frac{\left(\frac{F}{A}\right)}{\left(\frac{v}{h}\right)}, \quad (4.54)$$

os fluídos que obedecem esta relação, são chamados de fluidos newtonianos.

onde:

$\eta$  – é a viscosidade;

$F$  – a força de cisalhamento;

$A$  – a área da lâmina de lubrificante;

$V$  – a velocidade da lâmina de lubrificante;

$h$  – a espessura do filme de lubrificante.

Os rolamentos trabalham com lubrificantes, os quais têm a fundamental finalidade de evitar desgastes devido aos movimentos relativos dos elementos rolantes com as pistas. Logo, pela presença do lubrificante entre as partes móveis não ocorre o puro rolamento, mas sim, percentual de fricção devido ao deslizamento. Todavia, se não houvesse a fricção, os elementos rolantes iriam deslizar em vez de rolar.

---

<sup>2</sup> A energia de impacto será analisada no capítulo 5

A fricção ocasiona uma grande dissipação de potência em forma de geração de calor. Harris (1966) apresenta em seu trabalho, que, para o caso de alta velocidade de rolamento, o calor gerado,  $H$ , devido ao escorregamento, para cada elemento rolante,  $e$ , em cada pista, é dado pela integral na superfície de contorno  $s$ ,

$$H = \frac{1}{J} \int_s v \, dF. \quad (4.55)$$

onde:

$v$  – é a velocidade de deslizamento do elemento rolante;

$dF$  – a diferencial da força de fricção no elemento rolante;

$J$  – o fator de convenção de potência em calor na unidade de tempo.

Considere a figura 4.3, onde ocorre transformação adiabática em um elemento infinitesimal do lubrificante no filme de lubrificação. Pai (1956) apud Dowson e Higginson (1977) apresenta o princípio da conservação de energia na forma diferencial, ou seja,

$$\underbrace{e \frac{dE}{dt}}_{\text{convecção}} = \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right]}_{\text{condução}} - \underbrace{p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\text{compressão adiabática}} + \underbrace{\phi}_{\text{dissipação viscos a}} \quad (4.56)$$

onde:

$e$  – é a densidade do lubrificante;

$E$  – a energia de convecção;

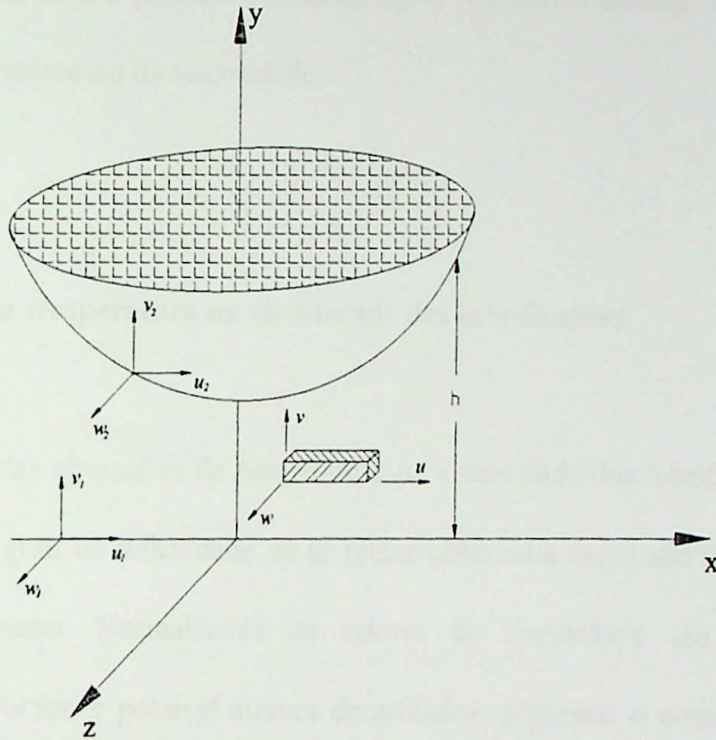
$k$  – o coeficiente de condução;

$P$  – a pressão;

$\theta$  – a temperatura.

O termo da dissipação viscosa,  $\varphi$ , é dada por:

$$\varphi = \eta \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{4}{3} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \right\} \quad (4.57)$$



**Fig. 4.11** Velocidades em um elemento infinitesimal do fluido lubrificante, [Dowson e Higginson (1977)].

O termo da energia responsável pela convecção na equação (4.55), pode ser desprezada devido ao pequeno valor da área de contato no filme de lubrificante. Analogamente, na condução, pode também desprezar os efeitos nas direção x e z, pois os valores são insignificantes comparados com o valor obtido na superfície do rolamento, direção y.

Não havendo velocidade de deslizamento da direção y, logo somente nas direções x e z, e, sendo seus efeitos apenas significantes na direção y, pelos mesmos motivos que o da

convecção. Considera-se portanto, apenas os diferenciais que envolvem as velocidades  $u$  e  $w$  na direção  $y$ . Assim sendo, a equação da conservação da energia (4.45), torna-se:

$$\frac{\hat{c}}{\hat{c}y} \left( k \frac{\hat{c}\theta}{\hat{c}y} \right) - p \left( \frac{\hat{c}u}{\hat{c}x} + \frac{\hat{c}v}{\hat{c}y} + \frac{\hat{c}w}{\hat{c}z} \right) + \eta \left[ \left( \frac{\hat{c}u}{\hat{c}y} \right)^2 + \left( \frac{\hat{c}w}{\hat{c}y} \right)^2 \right] = 0. \quad (4.58)$$

Analisando a equação (4.58), pode-se dizer que a viscosidade varia tanto com a temperatura como com a pressão. Portanto, faz-se necessário analisar cada uma destas causas no comportamento da viscosidade.

#### 4.6.1-) Efeitos da temperatura na viscosidade dos lubrificantes

O efeito das alterações da temperatura na viscosidade dos lubrificantes oferece um determinado grau de dificuldade ao se tentar obter uma expressão matemática que modele o fenômeno. Normalmente os valores da viscosidade são determinados empiricamente. Porém, é possível através de artifícios, expressar o comportamento da viscosidade de um determinado lubrificante através de uma relação matemática, como apresentado por Rein (1978) em sua publicação no informativo técnico da Companhia Texaco Inc., onde apresenta uma relação empírica, determinada como equação de Walther publicada pela ASTM. A equação envolve termos logarítmicos tornando possível determinar a viscosidade cinemática do produto em função da temperatura, conhecendo-se dois pontos distintos da temperatura e da viscosidade cinemática,  $(\nu_1, T_1)$  e  $(\nu_2, T_2)$ . Podendo assim, determinar as constantes  $A$  e  $B$  características a cada condição,

$$\log \log(\nu + 0,7) = A + B \log \theta_1, \quad (4.59)$$

onde:

$\nu$  – é a viscosidade cinemática em [cSt];

$\theta_1$  – a temperatura em [K].

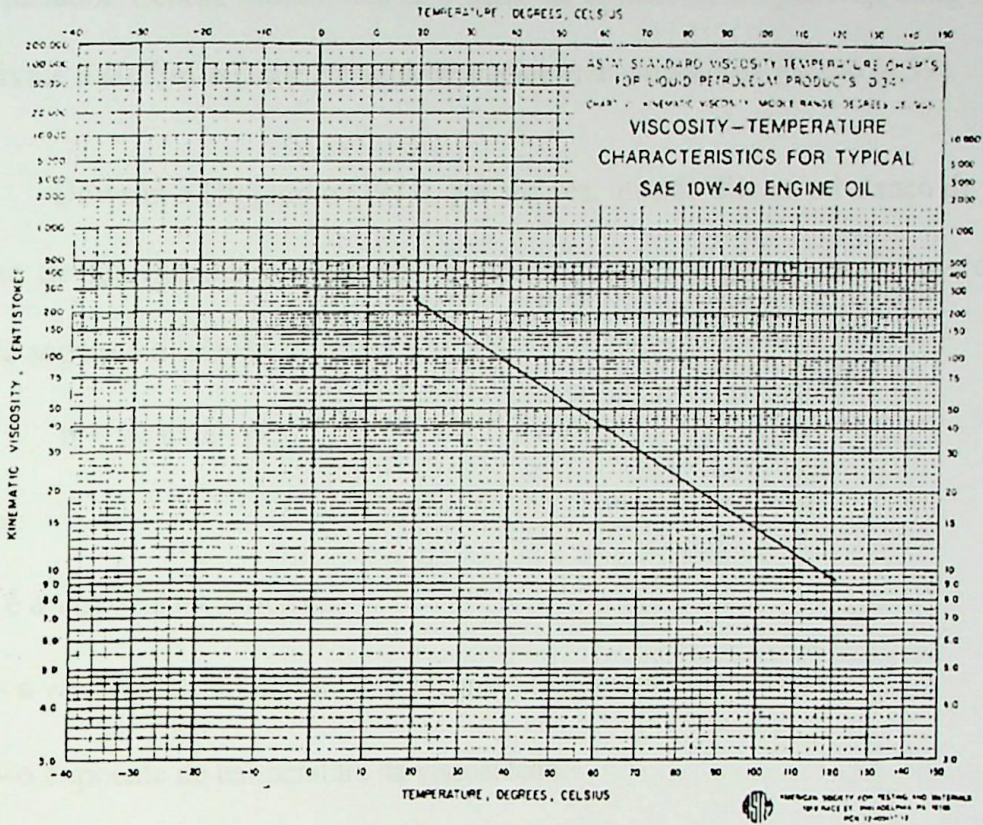


Fig. 4.12 Diagrama da viscosidade em função da temperatura, [Rein (1978)].

A relação matemática (4.59) possibilita traçar uma reta em um diagrama com escalas logarítmicas em seus eixos, diagrama este desenvolvido pela ASTM (*American Society for Testing and Materials*), conforme mostra a figura 4.12, porém, a unidade utilizada não encontra-se no Sistema Internacional (SI), pois, define-se a viscosidade cinemática como sendo a viscosidade dinâmica, apresentada na relação (4.54) dividida pela massa específica do produto,  $\rho$ , cuja unidade no (SI) é [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]. Por sua vez, a unidade da viscosidade dinâmica,  $\eta$ , no (SI) é [ $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2 = \text{Pa}\cdot\text{s}$ ]. Portanto,

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (4.60)$$

a unidade da viscosidade cinemática no (SI) é  $[m^2/s]$ , todavia, em homenagem ao pesquisador George Stokes, deu-se o nome de *centistokes* a  $1[mm^2/s]$ , onde  $1[mm^2/s]$  equivale a  $10^{-6}[m^2/s]$ , que é a unidade amplamente utilizada na relação (4.59).

Dowson e Higginson (1977), por sua vez, quando discute o balanço de calor no filme de lubrificante nos mancais de rolamento assume que a viscosidade dinâmica varia segundo a relação,

$$\eta = \eta_x \exp(-\gamma\theta), \quad (4.61)$$

onde:

$\eta$  – é a viscosidade desejada;

$\eta_x$  – a viscosidade do lubrificante em uma certa posição  $x$  conhecida;

$\gamma$  – o expoente de temperatura da viscosidade.

Mesmo com os dois artifícios apresentados, é tarefa árdua determinar a viscosidade exata no filme de lubrificante nas condições de trabalho, pois, as obtenções exatas da distribuição de temperatura nessas condições são difícilimas devido a dificuldade de acesso e a quantidade de pontos a serem medidos. O habitual, utilizado nos dimensionamentos, é tomar a média das temperaturas entre a entrada e a saída do lubrificante ou seja,

$$\theta_m = \theta_e + \lambda(\theta_s - \theta_e), \quad (4.62)$$

onde:

$\theta_m$  – é a temperatura média;

$\theta_e$  – a temperatura na entrada ( condição de início de carga);

$\theta_s$  – a temperatura na saída ( condição no final da carga);

$\lambda$  – o constante empírica, cujo valor varia para cada mancal específico, bastante influenciado pela rotação e pelas folgas construtivas, varia de 0,5 a 0,8. Normalmente utiliza-se para pequenas folgas o valor 0,5.

#### 4.6.2-) Efeitos da pressão na viscosidade dos lubrificantes

No contato entre os elementos rolantes com as pistas, quando sujeitos a cargas, obtém-se o cilindro equivalente. Deste resulta a zona de contato, ou seja, a zona Hertziana. As pressões geradas no lubrificante nesta pequena área da zona de contato são altas, e a alta pressão influencia tanto no material do rolamento como no lubrificante.

Com relação aos lubrificantes, a alta pressão afeta o peso específico e a viscosidade. Segundo Dowson e Higginson (1977), o peso específico do lubrificante líquido pode aumentar em torno de 20% para pressões muito elevadas. Já a viscosidade, considerando a condição isotérmica, varia na forma exponencial, apresentada na equação (4.21), ou seja,

$$\eta = \eta_0 e^{\alpha p}. \quad (4.63)$$

Esta relação matemática, obtida de maneira empírica, é a que melhor representa o comportamento da viscosidade com a pressão, onde:

$\alpha$  – é o expoente de pressão da viscosidade;

$\eta_0$  – a viscosidade na condição da entrada do contato;

$p$  – a pressão no contato.

A expressão (4.63) foi sugerida por não se conhecer a pressão efetiva em um ponto específico e, desejando-se equacionar o fenômeno com parâmetros conhecidos, determinou-se a pressão aparente  $q$ , também chamada de pressão reduzida, a qual possibilita equacionar a viscosidade efetiva através do valor da viscosidade na entrada do contato, denominada de condição isoviscosa representada por  $\eta_0$ . A qual apresenta uma boa aproximação da relação entre a pressão e a efetiva viscosidade do lubrificante. Por sua vez, a taxa de variação da pressão reduzida em relação a  $x$ , já definida com a relação (4.22),

$$\frac{dq}{dx} = e^{-\alpha p} \frac{dp}{dx}, \quad (4.64)$$

escrevendo a relação (4.64), somente na forma diferencial obtém-se,

$$\frac{dq}{dx} = \frac{-1}{\alpha} \left[ \frac{d}{dx} \left( e^{-\alpha p} \right) \right], \quad (4.65)$$

integrando os dois membros, com a seguinte condição de contorno, para  $p = 0 \rightarrow q = 0$ , na entrada do contato – figura 4.5 – resulta nas expressões que relacionam a pressão real,  $p$ , com a pressão aparente,  $q$ , através da viscosidade na entrada do contato entre o elemento rolante e a pista de rolamento,

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \alpha q) \\ q &= \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha p}) \end{aligned} \right\}. \quad (4.66)$$

O valor de  $\alpha$  é característico para cada tipo de lubrificante. O seu valor é obtido empiricamente, como referenciado por Archard et al. (1964) nos resultados dos trabalhos feitos pelo Dr. H. Naylor no Centro de Pesquisa da Shell em Thornton, cuja pesquisa sintetiza-se no ensaio da viscosidade do lubrificante a três temperaturas,

submetidas a uma alta pressão de 1.075 [MPa] ( 15.000[lb/in<sup>2</sup>] ) e a pressão atmosférica, obtendo a tabela 4.3.

**Tabela 4.3** –Valores do coeficiente pressão do lubrificante à pressão de 1,075 [MPa], com relação a temperatura, [Archard et al. (1964)].

| Temperatura<br>[°C] | Lubrificantes Sintéticos |                                    | Lubrificantes Minerais |                                    |
|---------------------|--------------------------|------------------------------------|------------------------|------------------------------------|
|                     | Viscosidade              | $\alpha$ , [cm <sup>2</sup> /dina] | Viscosidade            | $\alpha$ , [cm <sup>2</sup> /dina] |
| 30                  | 377cP (426 cSt)          | $2,65 \times 10^{-9}$              | 250 cP (283 cSt)       | $2,3 \times 10^{-9}$               |
| 60                  | 67,4cP (77.5 cSt)        | $2,17 \times 10^{-9}$              | 50,6 cP (58,4 cSt)     | $1,96 \times 10^{-9}$              |
| 90                  | 20.7cP (24.3 cSt)        | $1,84 \times 10^{-9}$              | —                      | —                                  |
| 100                 | —                        | —                                  | 12,6 cP (15 ctS)       | $2,65 \times 10^{-9}$              |

## CAPÍTULO 5

### MÉTODO DO ENVELOPE NO MONITORAMENTO DOS ROLAMENTOS

#### 5.1-) Introdução

Conforme já comentado no capítulo 3, as vibrações nos mancais podem ser geradas pelas irregularidades superficiais nos componentes do rolamento, além de outros fenômenos como as perturbações externas de outros sistemas. Os inícios das irregularidades são as vezes difíceis de serem detectadas com precisão e confiança, pois localizam-se nas harmônicas da frequência fundamental e, em algumas vezes, nem aparecem.

O objetivo deste capítulo é apresentar a técnica do envelope que possibilita, através dos sinais enviados por um acelerômetro, analisar claramente as condições do rolamento e, havendo defeitos, identificá-los em seus componentes.

#### 5.2-) Generalidades

Os rolamentos são componentes mecânicos que devido ao seu tipo de trabalho apresentam desgastes em seus componentes e estes são inevitáveis. Podendo ser acentuados por lubrificação inadequada, defeitos r.o eixo ou na estrutura, montagem inadequada, desbalanceamento, defeitos de fabricação e outros. Em situações normais

de trabalho, ou seja, inexistindo as condições anteriormente apontadas, ocorre a fadiga do material que surge independentemente da perfeita fabricação, do perfeito ajuste na montagem ou da lubrificação correta, e sim pelas próprias condições de trabalho. Os desgastes, de uma maneira geral, são chamados de falhas.

As falhas podem surgir aleatoriamente nos componentes do rolamento, tanto na quantidade como nos locais. Geralmente o início de uma falha se dá com ligeiros lascamentos na região carregada de uma das pistas. Com o uso, o defeito evolui aumentando a sua profundidade, ocasionando choques mecânicos gerando transientes de vibração, que aumentam com a evolução do defeito, tendo energia proporcional a velocidade do choque ao quadrado, ou seja,

$$E = \alpha' v_s^2, \quad (5.01)$$

onde:

E – é a energia de choque;

$\alpha'$  – o constante do material;

$v_s$  – a velocidade de choque.

### 5.3-) Modelo teórico

A relação entre a evolução do defeito e o sinal obtido pode ser equacionado, segundo Botö (1978), através da análise do modelo teórico representado na figura 5.1, que representa um trecho de um rolamento de esferas com uma cavidade, gerada por

fadiga, na pista externa estacionária. Análise semelhante pode ser feita com o defeito na pista interna ou no elemento rolante.

O impacto ocorre quando a esfera gira em torno do ponto A atingindo o ponto B, cuja velocidade desejada, para a análise do fenômeno, é  $v_s$  que varia em módulo e direção em função da profundidade do defeito e da distância entre os pontos A e B.

Considerando que não haja escorregamento entre a esfera e a pista interna, as velocidades tangenciais no rolamento identificadas por  $v_i$ , são idênticas nos pontos de contato. Assumindo que, em torno do ponto A, a relação entre a velocidade tangencial com o diâmetro da esfera é igual a relação entre a velocidade de deslocamento  $v_w$ , direcionada ao fundo da cavidade, com a largura da cavidade, que é a distância  $x$  entre os pontos A e B tem-se a proporcionalidade,

$$\frac{v_i}{D} = \frac{v_w}{x}, \quad (5.02)$$

mas,

$$v_i = \pi n_i d_i; \quad (5.03)$$

substituindo (5.03) em (5.02), explicitando  $v_w$ , resulta:

$$v_w = \frac{x \pi n_i d_i}{D}. \quad (5.04)$$

Pela figura 5.1 pode-se dizer que:

$$v_w = v_s \cos \theta', \quad (5.05)$$

onde:

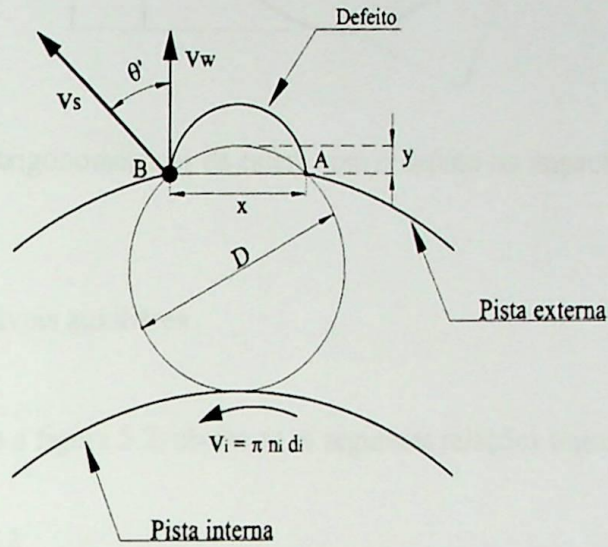
$\theta'$  – é o ângulo formado entre as velocidades  $v_s$  e  $v_w$ ,

como,  $\theta'$  é pequeno, têm-se,

$$v_w \approx v_s, \quad (5.06)$$

substituindo (5.06) em (5.04) resulta:

$$v_s \approx \frac{x \pi n_i d_i}{D}. \quad (5.07)$$



**Fig. 5.1** Modelo teórico de defeito na pista externa, [Botô (1978)].

onde:

$d_i$  – é o diâmetro da pista interna do rolamento;

$y$  – o valor da penetração da esfera na cavidade (profundidade do defeito);

$x$  – o segmento de reta entre os pontos A-B;

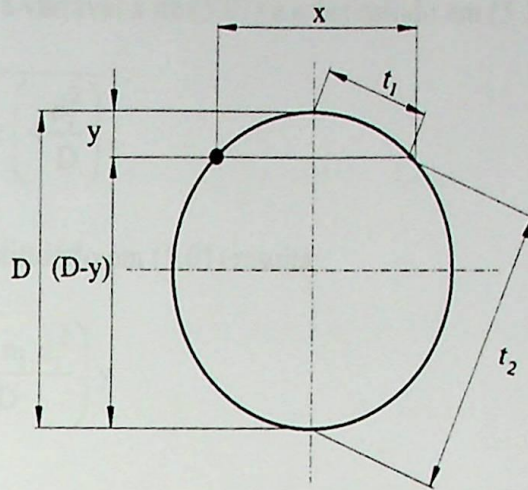
$v_w$  – a velocidade da esfera no ponto de impacto na direção da cavidade;

$v_s$  – a velocidade de impacto;

A – o ponto pivô onde a esfera gira na direção da cavidade;

B – o ponto de impacto da esfera.

Na figura 5.2 mostra as relações trigonométricas formadas no impacto,



**Fig. 5.2** Relações trigonométricas da esfera com o defeito no impacto.

onde:

$t_1$  e  $t_2$  – são as variáveis auxiliares.

Observando a figura 5.2, obtêm-se as seguintes relações trigonométricas:

$$y^2 + \frac{x^2}{4} = t_1^2, \quad (5.08)$$

$$(D - y)^2 + \frac{x^2}{4} = t_2^2, \quad (5.09)$$

$$t_1^2 + t_2^2 = D^2. \quad (5.10)$$

Substituindo (5.08), (5.09) em (5.10), resulta:

$$y(D - y) = \frac{x^2}{4}. \quad (5.11)$$

Por ser, o maior valor do contorno da cavidade pequeno em relação ao diâmetro da esfera, pode-se dizer que a penetração desta naquela é ínfimo, o que permite dizer:

$$(D - y) \cong D \quad (5.12)$$

substituindo (5.12) em (5.11), resulta:

$$x^2 = 4yD. \quad (5.13)$$

Explicitando a variável  $x$  de (5.07) e substituindo em (5.13) tem-se.

$$v_s = \sqrt{\pi^2 n_i y \left( 4 \frac{d_i^2}{D} \right)}, \quad (5.14)$$

que por sua vez, substituindo em (5.01) resulta:

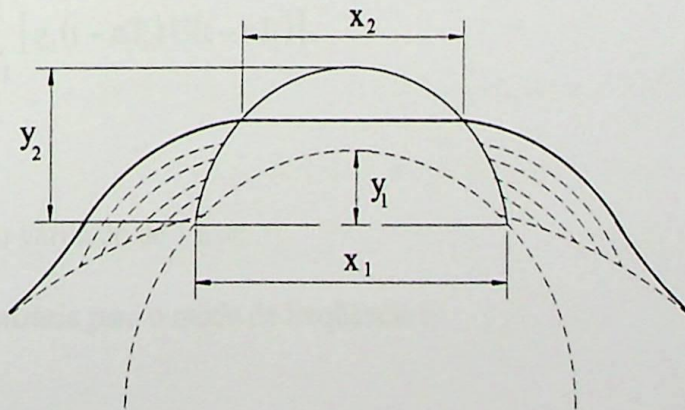
$$E = \alpha' \left( \frac{4 \pi^2 n_i d_i^2}{D} \right) y. \quad (5.15)$$

Esta equação representa teoricamente a máxima energia do choque medida pelo acelerômetro.

Conforme mostrado por Botö (1978), o perímetro do defeito se espalha, tornando-se mais arredondado, devido à influência dos elementos rolantes.

Assim, com o aumento do perímetro, que é temporário, a profundidades de penetrações tornam-se menores diminuindo as condições de impacto, pois, menores distâncias têm-se entre os pontos A e B, ou seja, menores valores de  $y$ .

A figura 5.3 ilustra a progressão do defeito devido ao trabalho, onde o índice 1 refere-se ao início do defeito, o índice 2 após horas de trabalho.



**Fig. 5.3** Evolução do defeito na pista externa, [Botö (1978)].

## 5.4-) Formulação das vibrações nos rolamentos

### 5.4.1-) Formulação das vibrações no domínio do tempo

Na análise do modelo teórico observou-se que, quando o defeito entra em contato com outra superfície, gera pulsos de curta duração. Estes pulsos são gerados com regulares intervalos de tempo  $T_i$  definindo o modo de frequência  $\Omega_i$ , onde o índice  $i$  representa o modo significativo do defeito. A energia é representada pela relação (5.15) que é absorvida pelo amortecimento estrutural, representado pelo índice de amortecimento  $\alpha_i$ . Sabe-se que,

$$T_i = 1/f_i. \quad (5.16)$$

$$T_i = 2\pi/\Omega_i. \quad (5.17)$$

logo,

$$f_i = \Omega_i/2\pi. \quad (5.18)$$

A resposta do sistema no tempo,  $x_i(t)$ , mostrada na figura 5.4 pode ser matematicamente expressa por:

$$x_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [g_i(t - nT_i) U(t - nT_i)], \quad (5.19)$$

onde:

$n$  – número inteiro variando de 1 a  $\infty$ ;

$A_i$  – constante arbitrária para o modo de frequência  $i$ ;

sendo:

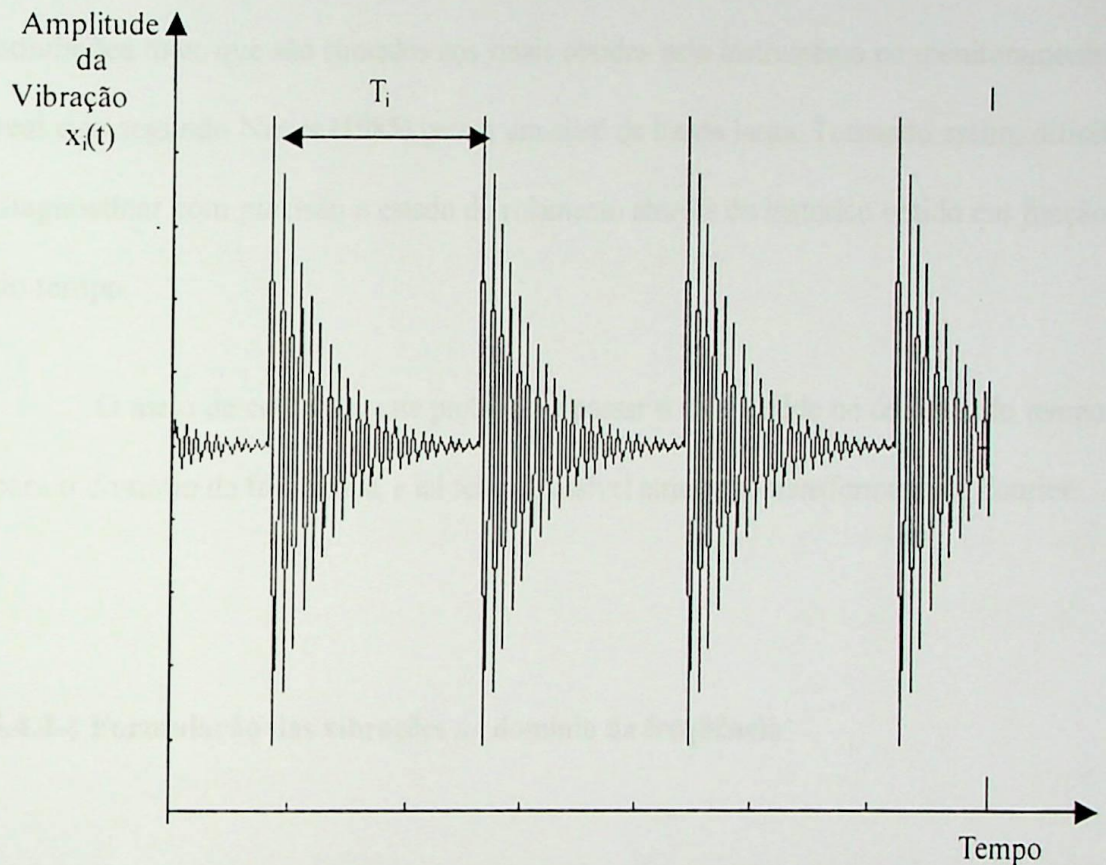
$$g_i(t) = A_i e^{-\alpha_i t} \text{sen}(\Omega_i t), \quad (5.20)$$

que é a equação das oscilações livres amortecidas. E

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t \geq 0 \end{cases}, \quad (5.21)$$

que é a função degrau unitário para  $t \geq 0$ .

O fenômeno é graficamente representado pela figura 5.4,



**Fig. 5.4** Amplitude de pulsos periódicos amortecidos, [Nunes (1985)].

A expressão (5.19) representa o sinal para um defeito, considerando  $m$  defeitos, e que o sinal característico de cada defeito é modificado pela resposta impulsiva da estrutura. A resposta obtida para  $m$  defeitos,  $x(t)$ , modificada pela estrutura é dada por

$$x(t) = \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_i e^{-\alpha_i(t-nT_i)} \text{sen}[\Omega_i(t-nT_i)] U(t-nT_i) \right\} \right\} * h(t), \quad (5.22)$$

sendo  $h(t)$  a resposta impulsiva do caminho de transmissão entre o ponto de geração dos pulsos e do ponto de onde se obtém os sinais. O símbolo  $*$  representa o produto da convolução cujo teorema encontra-se no anexo C.

Pode-se dizer que o sinal obtido na equação (5.22) considera os contatos dos defeitos com outras superfícies e em um determinado caminho de transmissão. Porém não considera sinais aleatórios gerados por outros contatos nas superfícies em boas condições mas, que são somados aos sinais obtidos pelo instrumento no monitoramento real que segundo Nunes (1985) geram um sinal de banda larga. Tornando assim, difícil diagnosticar com precisão o estado do rolamento através do histórico obtido em função do tempo.

O meio de contornar este problema e passar o sinal obtido no domínio do tempo para o domínio da frequência, e tal feito é possível através da transformada de Fourier.

#### 5.4.2-) Formulação das vibrações no domínio da frequência

A transformação de uma função no domínio do tempo  $f(t)$  para o domínio da frequência  $F(\omega)$  é conhecida como a integral de Fourier ou transformada de Fourier. Simbolizada por  $\mathfrak{F}$ , e definida por:

$$F(\omega) = \mathfrak{F} [f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (5.23)$$

onde  $j$  representa os números imaginários, cujo valor é  $\sqrt{-1}$ .

A condição para a existência da Transformada de Fourier e de que a função seja absolutamente integrável, isto é:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (5.24)$$

Geralmente  $F(\omega)$  é uma função complexa da frequência. Por ser  $f(t)$  uma função periódico no domínio do tempo, a função  $F(\omega)$  é uma seqüência de picos equidistantes no domínio da frequência e separados por um intervalo igual à frequência fundamental. A demonstração matemática da Transformada de Fourier encontra-se no anexo D.

A Transformada Inversa de Fourier é definida por:

$$f(t)F(\omega) = \mathfrak{T}^{-1} [F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.25)$$

O sinal obtido, monitorando um rolamento com defeito, descrito pela relação matemática (5.19) é periódica conforme ilustrada na figura 5.4. Utilizando a propriedade,

$$\mathfrak{T} [1] = 2\pi \delta(\omega), \quad (5.26)$$

onde,  $\delta$  é a função impulso unitário, conhecida também como Delta de Dirac, comentada também no anexo D. Utilizando o teorema da convolução (anexo C), tem-se

$$\mathfrak{T} [f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega); \quad (5.27)$$

onde,

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{T} [f_1(t)] &= F_1(\omega) \\ \mathfrak{T} [f_2(t)] &= F_2(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

sendo,

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= g_i(t) \\ f_2(t) &= U(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Utilizando (5.26), (5.28) e (5.19) obtém-se,

$$\mathfrak{T}[x_i(t)] = X_i(\omega) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} X_{in}(\omega) \delta(\omega - n\omega_i), \quad (5.30)$$

onde a frequência fundamental em  $i$ , é

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}. \quad (5.31)$$

e,  $X_{in}$  é o coeficiente da série exponencial de Fourier, dado por:

$$X_{in} = \frac{1}{T_i} \int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} (g_i(t) e^{-jn\omega t}) dt. \quad (5.32)$$

Aplicando novamente o teorema da convolução para o sinal com a resposta do caminho de transmissão no tempo,  $h(t)$  para  $m$  defeitos, tem-se:

$$V(\omega) = \left[ 2\pi \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} X_{in}(\omega) \delta(\omega - n\omega_i) \right] H(\omega). \quad (5.33)$$

A transformada de Fourier do sinal dos ruídos aleatórios de banda larga,  $R(\omega)$ , deverá ser somada à relação (5.33), ou seja:

$$V_m(\omega) = \left[ 2\pi \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} X_{in}(\omega) \delta(\omega - n\omega_i) \right] H(\omega) + R(\omega). \quad (5.34)$$

Analisando o modelo matemático simplificado, relação (5.34), para  $m$  defeitos, pode-se dizer que o espectro deverá apresentar picos discretos nas frequências dos defeitos e suas harmônicas. As amplitudes destes picos dependem da resposta em frequência do caminho de transmissão,  $H(\omega)$ , e dos coeficientes  $X_{in}(\omega)$ . A análise

espectral baseia-se no fato de que  $X_{in}(\omega)$  é proporcional à amplitude de  $A_i$  da relação matemática (5.20), que está diretamente relacionada à profundidade do defeito que evoluem com o tempo de trabalho, conseqüentemente aumentando a energia da vibração. Que por sua vez, aumenta os picos das freqüências.

Não obstante a análise anterior onde a energia da vibração está diretamente relacionada à profundidade do defeito, deve-se ponderar que em determinados momentos o perímetro do defeito espalha e se torna mais arredondado devido a influência do próprio elemento rolante, tendo assim, temporariamente, uma profundidade de penetração menor, resultando conseqüentemente, em menores níveis de energia devido aos menores impactos.

O caminho de transmissão  $H(\omega)$  influencia diferentemente para os vários picos da freqüência, atenuando uns e ampliando outros. Motivo pelo qual, no monitoramento dos rolamentos deve-se basear em um conhecido espectro do rolamento em estado novo, isto é, sem horas de trabalho, sendo este o parâmetro dedicado para cada montagem efetuada, e que será comparado os espectros obtidos nos monitoramentos periódicos.

## **5.5-) Método do envelope no monitoramento dos rolamentos**

### **5.5.1-) Introdução**

Mesmo com o sinal no domínio da freqüência o problemas nos mancais de rolamento, de maneira geral, são difíceis de serem detectados com precisão. Em alguns

casos os defeitos são mostrados nas harmônicas da frequência fundamental e em outros não são possíveis de serem identificados.

O envelope é uma técnica que, utilizando filtros e processos de retificações nos sinais obtidos pelos acelerômetros, permite avaliar claramente as condições dos mancais de rolamento. Uma das vantagens do método do envelope é que os defeitos aparecem claramente nas frequências fundamentais dos componentes defeituosos.

## 5.5.2-) O envelope

### 5.5.2.1-) Generalidade

Ao se transformar o sinal no domínio do tempo para o domínio da frequência, obtém-se o sinal em espectro de frequência, que caracteriza, como já analisado, em distribuição de energia. Em outras palavras, espectro é o meio pelo qual se observa o efeito proveniente da distribuição de energia numa onda ou num feixe de partículas.

No estudo em particular, pode-se dizer que o princípio da técnica do envelope se dá ao considerar as frequências obtidas como sendo o valor de  $\underline{a}_v$  na forma complexa,

$$z = \underbrace{r \cos \varphi}_{a_v} + j \underbrace{r \sin \varphi}_{b_v}, \quad (5.35)$$

sendo:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{a_v^2 + b_v^2} \\ \varphi &= \text{arc tg} \frac{b_v}{a_v} \end{aligned} \right\}, \quad (5.36)$$

e,  $\underline{b}_v$  é o valor a ser determinado de maneira tal a tornar o módulo  $\underline{r}$  uma curva suave unindo os picos da energia dos defeitos, esta por sua vez amplificada, com um valor mínimo igual ao valor original ( $b_v=0$ ).

Observa-se que o valor de  $\underline{r}$  é sempre:  $r \geq a_v$  e  $r \geq b_v$ .

### 5.5.2.2-) Desenvolvimento da técnica do envelope

Assumindo a equação (5.35) na forma,

$$f(t) = x(t) + j y(t), \quad (5.37)$$

onde,

$x(t)$  – é o sinal aleatório obtido pelo acelerômetro e considerado como a parte real da variável complexa  $a(t)$ ;

$y(t)$  – o valor real a ser determinado da variável complexa  $f(t)$ , de maneira tal que se obtenha uma curva suave unindo os picos de  $x(t)$ , como mostra a figura 5.5.

Para as escolhas adequadas de  $y(t)$  assume-se a forma polar, onde,  $x(t)$  é harmônico, assim sendo,

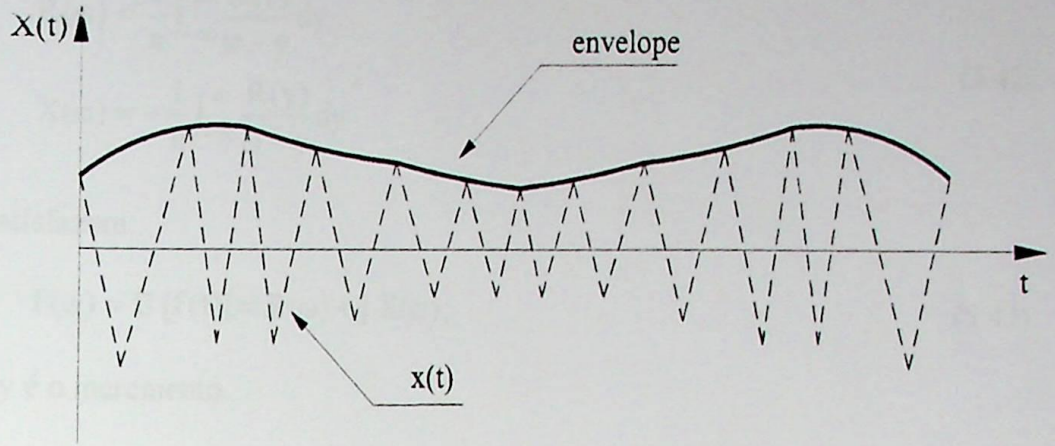
$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A_E \cos(\omega t) \\ y(t) &= A_E \sin(\omega t) \end{aligned} \right\}, \quad (5.38)$$

onde,

$$\omega = 2\pi f_p, \quad (5.39)$$

$f_p$  – frequência portadora;

$A_E$  – envelope.



**Fig. 5.5** Exemplo do envelope de um sinal, [Nunes (1985)].

O resultado de  $y(t)$  pode ser relacionado funcionalmente com  $x(t)$  por dois meios. O primeiro é o valor negativo da derivada no tempo de  $x(t)$ , dividida pela fase  $\omega$ , ou seja,

$$y(t) = \frac{-\frac{d}{dt}x(t)}{\omega}, \quad (5.40)$$

obtendo-se assim o envelope em função do tempo:

$$A_E(t) = \left[ (x(t))^2 + \left( \frac{-\frac{d}{dt}x(t)}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.41)$$

Este é o envelope definido por Crandall e Mark apud Nunes (1985), conhecido como envelope de energia, utilizado em processos estocásticos.

O segundo meio de relacionar  $y(t)$  com  $x(t)$  é através da transformada de Hilbert. Hsu (1970) define a transformada de Hilbert de uma função  $f(t)$  como sendo as relações,

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{\omega - y} dy \\ X(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{\omega - y} dy \end{aligned} \quad (5.42)$$

que satisfazem:

$$F(\omega) = \mathfrak{F}[f(t)] = R(\omega) + j X(\omega), \quad (5.43)$$

onde  $y$  é o incremento.

Por sua vez, conforme apresentado nos trabalhos de Bendat (ca. 1985),  $f(t)$  pode ser escrita na forma,

$$f(t) = f_1(t) + j \tilde{f}_1(t), \quad (5.44)$$

cuja representação em coordenadas polares é

$$f(t) = A_E(t) e^{j\phi(t)}, \quad (5.45)$$

onde,

$A_E(t)$  – é o envelope do sinal;

$\phi(t)$  – a fase instantânea do sinal.

Colocando  $A_E(t)$  e  $\phi(t)$  em função de  $f_1(t)$  e  $\tilde{f}_1(t)$ , têm-se:

$$A_E(t) = \sqrt{\left(f_1(t)\right)^2 + \left(\tilde{f}_1(t)\right)^2}, \quad e \quad (5.46)$$

$$\phi(t) = \tan^{-1} \left( \frac{\tilde{f}_1(t)}{f_1(t)} \right). \quad (5.47)$$

Denominando de  $f_0$  a frequência instantânea, o seu valor é dado por:

$$f_0 = \left( \frac{1}{2\pi} \right) \left( \frac{d}{dt} \phi(t) \right). \quad (5.48)$$

Determina-se  $\tilde{f}_1(t)$  através da transformada de Hilbert da função  $f_1(t)$ , dada pela expressão:

$$\tilde{f}_1(t) = \mathcal{H} [f_1(t)] = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\tau)}{(t - \tau)} d\tau \quad (5.49)$$

onde:

$\mathcal{H}$  – representa a transformada de Hilbert;

$\tau$  – o incremento no tempo.

A função  $\tilde{f}_1(t)$  é também definida como a integral da convolução de  $f_1(t)$  com

$\left( \frac{1}{\pi t} \right)$ , ou seja,

$$f_1(t) = f_1(t) * \left( \frac{1}{2\pi} \right). \quad (5.50)$$

A transformada de Hilbert é apresentada em maiores detalhes no apêndice III.

Segundo Nunes (1985), o envelope definido na expressão (5.45) é o utilizado nos problemas de vibrações aleatórias, bem como em processos estacionários e não estacionários.

### 5.6-) Severidade do sinal

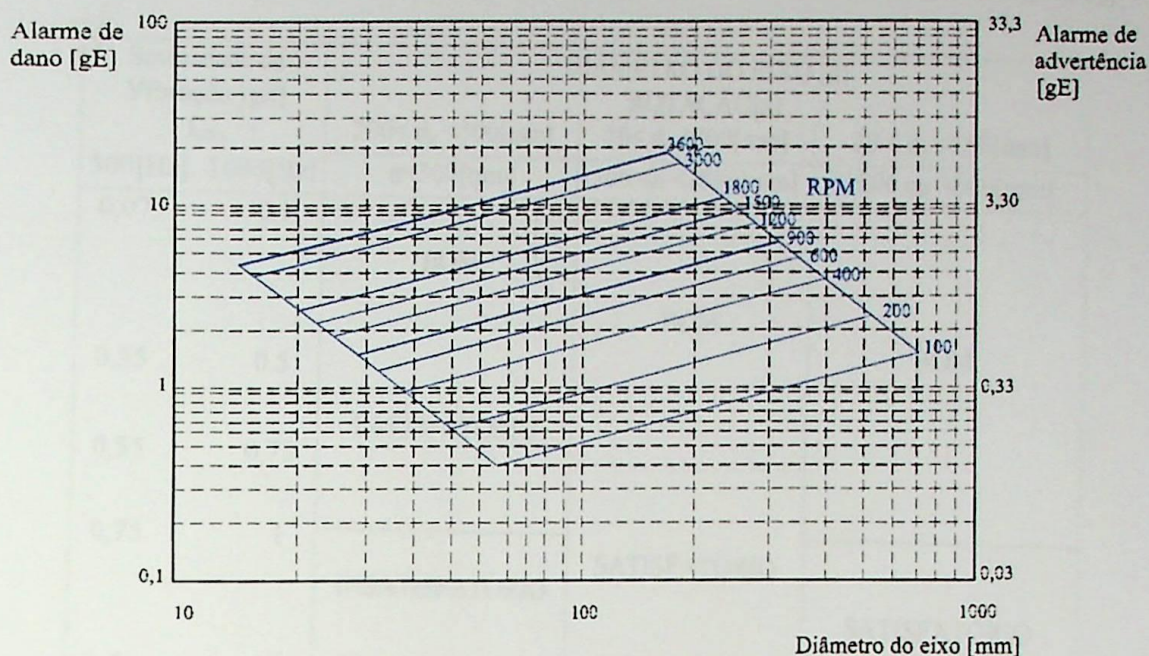
Define-se severidade do sinal a grandeza obtida pelo sinal medido em função do diâmetro e da rotação, enfim todas as causas que influenciam o valor medido, como a lubrificação e as condições dos defeitos.

A severidade do sinal é largamente utilizada nas indústrias com o objetivo de determinar níveis de alarmes nos monitoramentos automaticamente supervisionados como também nos periódicos.

Basicamente são utilizados dois níveis de alarme, o alarme de perigo ou dano e o alarme de advertência que é em torno de 33% do valor do anterior. Os valores dos alarmes são definidos através de vários diagramas cuja seleção têm como pré-requisitos o equipamento o qual está sendo medido, o modelo do acelerômetro e o filtro utilizado no monitoramento, como também a frequência máxima que estes sinais são apresentados.

A figura 5.6 mostra um desses diagramas para uma frequência máxima de 1000[Hz], o qual foi utilizado no artigo de Barclay e Wei (1998) com o título: *General Alarm Guidelines for Enveloped Acceleration Measurements*".

Para determinar os níveis de alarme através do diagrama da figura 5.6 necessita-se somente do diâmetro do eixo e a sua rotação.



**Fig. 5.6** Diagrama dos alarmes em envelope, para no máximo 1.000[Hz], [Barclay e Wei (1998)].

A severidade é também apresentada em forma de tabelas, definidas por faixas que possibilitam analisar as condições do mancal de rolamento. Uma destas é apresentada na tabela 5.1, sendo que as três últimas colunas que definem a faixa do diâmetro do eixo e a rotação, e a coluna da esquerda permite selecionar a frequência máxima em função da severidade, que comparada com as outras colunas obtém-se a condição do rolamento.

A condição de rolamento pode ser classificada em quatro categorias, a saber: bom, satisfatório, insatisfatório e inaceitável. Permitindo determinar o valor do alarme desejado, a exemplo, o alarme de advertência poderá ser ajustado na faixa de insatisfatório, enquanto o alarme de perigo na faixa de inaceitável.

**Tab. 5.1** Alarmes em função da frequência, diâmetro e rotação, [Barclay e Wei (1998)].

| Severidade da<br>Vibração [gE]<br>$f_{\max}$ |          | DIÂMETRO DO EIXO [d]                  |   |   |
|--|----------|---------------------------------------|---|---|
|  |          | ROTAÇÃO [n]                           |   |   |
| 500[Hz]                                      | 1000[Hz] | 200 < $d_e$ < 500[mm]<br>n < 500[rpm] | 50 < $d_e$ < 300[mm]<br>500 < n < 1800[rpm] | 20 < $d_e$ < 150[mm]<br>1800 ou 3600[rpm] |
| 0,075  | 0,1      | BOM                                   | BOM   | BOM                                       |
| 0,35   | 0,5      | SATISFATÓRIO                          |   |   |
| 0,55   | 0,75     |                                       |   |   |
| 0,75   | 1        | INSATISFATÓRIO                        | SATISFATÓRIO                                | SATISFATÓRIO                              |
| 1,5  | 2        |                                       | INSATISFATÓRIO                              |   |
| 3,5  | 4        |                                       |   |   |
|  |          | INACEITÁVEL                           | INACEITÁVEL                                 | INSATISFATÓRIO                            |
| 7,5  | 10       |                                       |   | INACEITÁVEL                               |

Tanto as tabelas como os diagramas são determinados através de um modelo matemático empírico, que segundo a última citação, Barclay e Wei (1998), baseou-se em experiências passadas e utilizando as grandezas que mais afetam o envelope, ou sejam, a frequência máxima definida como  $f_{\max}$ , a rotação do eixo definida como  $n$ , o diâmetro do eixo definido como  $d_e$  e os coeficientes  $a_1$ ,  $a_3$ , e  $a_4$  e o coeficiente  $a_2$  sendo, estes quatro últimos, valores obtidos empiricamente, determinados estatisticamente com históricos reais, e finalmente,  $L$ , é o valor do alarme desejado,

$$L = \left( \frac{f_{\text{máx}}}{1000} \right)^{a_1} (a_2) (n^{a_3}) (d_e^{a_4}). \quad (5.51)$$

No artigo referenciado anteriormente, os valores dos coeficientes, para bombas com motores que giram a 3.600[rpm], como também para rolos em máquinas de papel que giram a 400[rpm] têm os seguintes valores,

$$a_1 = 0,43;$$

$$a_2 = 3,26 \times 10^{-4};$$

$$a_3 = 1;$$

$$a_4 = 0,55;$$

com confiabilidade entre 80% a 90%.

Os valores foram determinados com o que se segue:

1. Utilização de valores estatisticamente significantes para cada banco de dados;
2. Obtendo informações de campo com engenheiros e técnicos com experiência no assunto;
3. Utilização de métodos de ajuste de curva, obtendo uma fórmula genérica.

A equação (5.51), para o alarme de perigo ou dano torna-se então:

$$L = \left( \frac{f_{\text{máx}}}{1000} \right)^{0,43} (3,26 \times 10^{-4}) (n) (d_e^{0,55}). \quad (5.52)$$

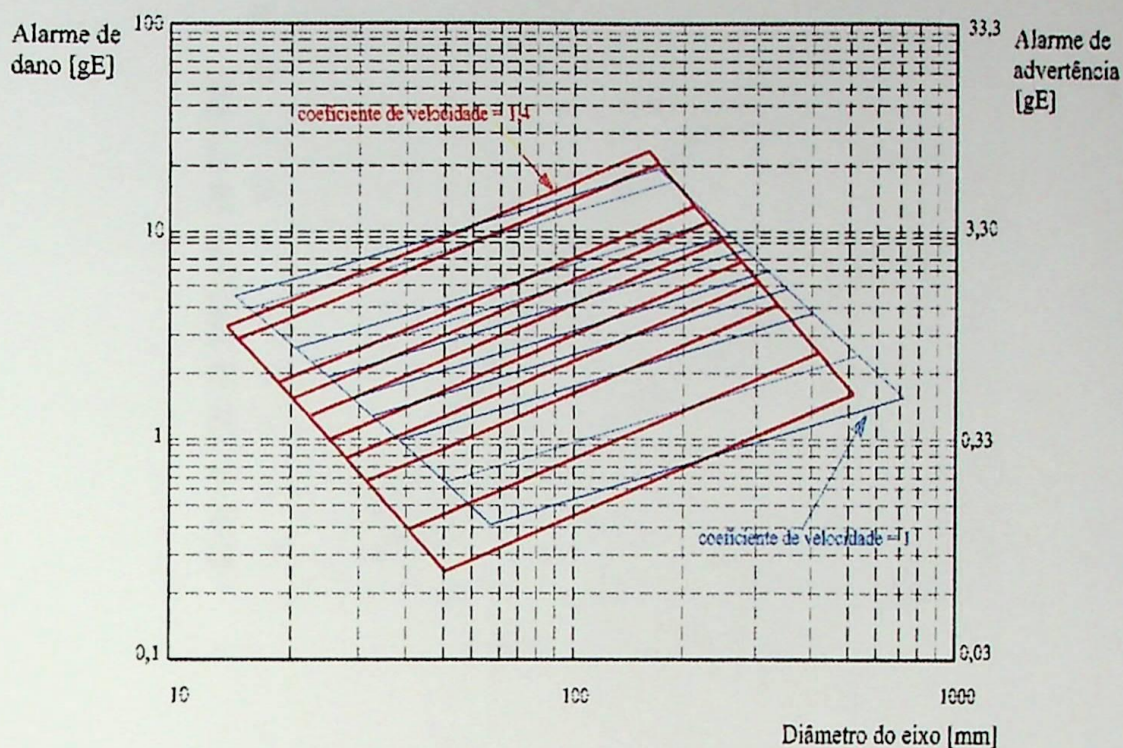
Sendo o alarme de advertência 33,33% do anterior, tem-se:

$$L = \left( \frac{f_{\text{máx}}}{1000} \right)^{0,43} (1,09 \times 10^{-4}) (n) (d_e^{0,55}). \quad (5.53)$$

O procedimento para determinar os valores dos coeficientes de velocidade foi o seguinte: observando os bancos de dados dos históricos em função da rotação notou-se que os valores registrados variavam mais próximos de uma forma linear do que de uma forma exponencial. O que permitiu definir o valor de  $a_3$  como 1, os outros valores foram ajustados com os valores obtidos na aquisição.

Se em um outro processo tal fenômeno não acontecer, ou seja, o efeito da rotação for mais próximo de uma exponencial, outros valores de  $a_3$  devem ser utilizados no ajuste de curva, obtendo assim conseqüentemente outros valores para os coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_4$ . A figura 5.7 mostra os diagrama de severidade sobrepostos para um mesmo sistema considerando  $a_3=1$  e  $a_3=1,4$ .

Com relação a freqüência, observando a tabela 5.1, vê-se que a energia é maior para freqüências maiores. Isto porque inclui-se maior volume de freqüências no sinal obtido pelo envelope. Melhor dizendo, para um determinado valor de severidade poderá um mancal estar em situação de alarme de advertência e outro gozar de boas condições, isto devido a freqüência. Como exemplo, observando o valor da severidade de 4[gE], na tabela 5.1, para os diâmetros entre 20 a 150[mm] com rotação entre 1800 a 3600[rpm]; se a freqüência máxima for 1.000[Hz] o mancal encontra-se na condição satisfatória, entretanto, se a freqüência máxima for 500[Hz] o mancal encontra-se na condição de alarme de advertência. A unidade utilizada [gE] é uma unidade comercial que significa: aceleração do envelope. Sendo g a aceleração da gravidade que no sistema internacional tem valor de  $9,81[m/s^2]$ .



**Fig. 5.7** Influência do comportamento da rotação nos valores de severidade, [Barclay e Wei (1998)].

As figuras 5.8, a seguir, apresentam duas cartas de severidade levantadas empiricamente por Almeida (2000), com curvas que evidenciam o tipo de lubrificação, nos rolamentos de rolos e de esferas respectivamente.

As cartas devem ser utilizadas, conforme recomendadas, para determinar a severidade em máquinas rotativas numa faixa de frequência de 0 a 1000[Hz], utilizando filtro para demodulação de banda entre 500 a 10.000[Hz] sobre um espectro em aceleração RMS de 0 a 10.000[Hz]. A unidade [G'S] significa, unidade de aceleração gravitacional em RMS.

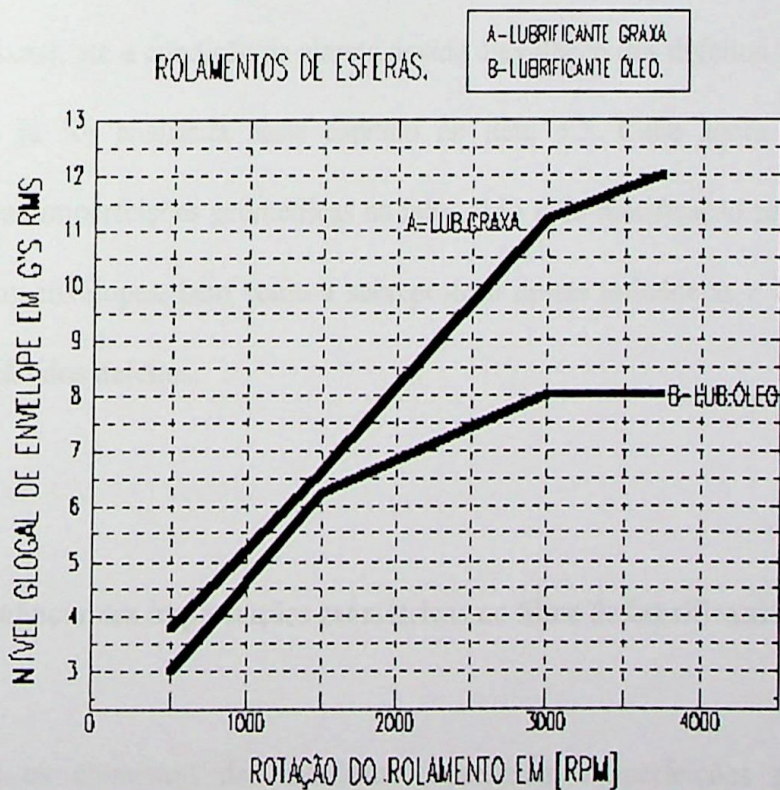
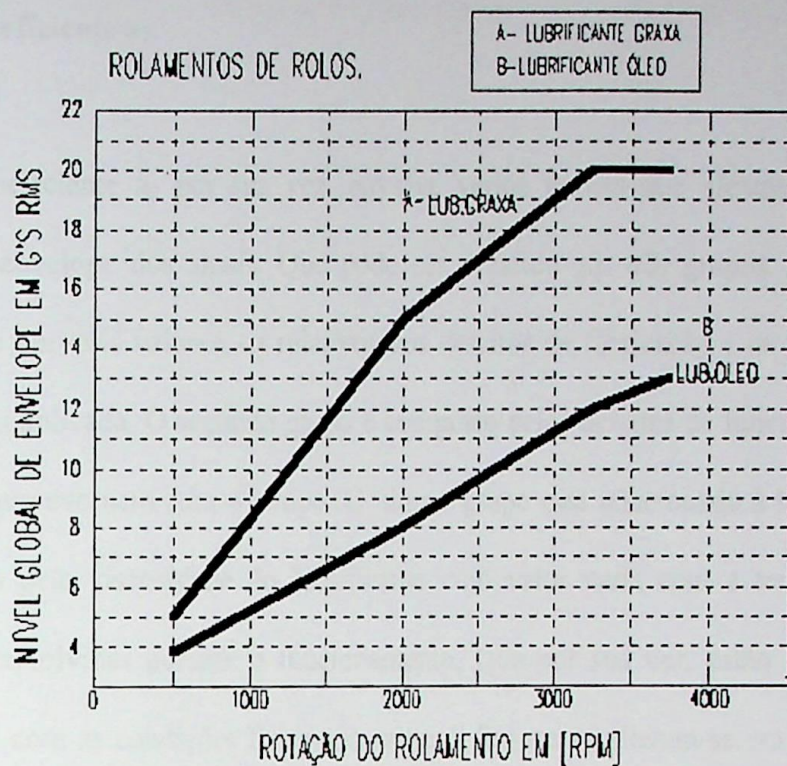


Fig. 5.8 Severidade no rolamento em função da rotação e o tipo de lubrificante, [Almeida (2000)].

### 5.6.1-) O coeficiente $a_2$

O coeficiente  $a_2$  por sua vez, envolve vários fatores que afetam os valores obtidos no envelope dos sinais. Que pode ser dividido em três grupos. O primeiro subdivide-se em dois valores, os relativos aos defeitos de fabricação e os relativos ao tipo de carga aplicada. O segundo grupo é composto pelos defeitos de funcionamento e montagem que evoluem com o tempo. O último grupo está relacionado à lubrificação, representada pela viscosidade do lubrificante cujo valor varia com a temperatura e pressão desenvolvidas durante o funcionamento. Que por sua vez, estão diretamente relacionadas com as condições físicas do mancal. Em suma, alteram-se em função das condições de contato.

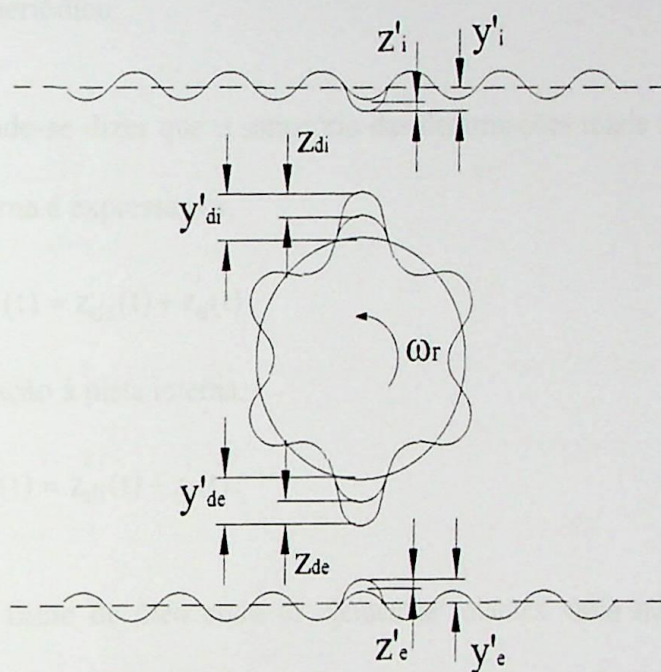
Se considerar a partir da equação empírica (5.51) valores fixos para  $a_1$ ,  $a_3$  e  $a_4$  vê-se que  $a_2$  varia de um valor inicial, dado pelas condições de fabricação e lubrificação (condições fixas), até a condição de alarme devido a evolução dos defeitos. A evolução dos defeitos já foi analisada neste capítulo no item 5.3. Cabe agora analisar as influências das imperfeições geométricas na fabricação e da lubrificação na severidade dos sinais nos envelopes, bem como a sobreposição destas influências e compará-las com a evolução dos defeitos.

#### 5.6.1.1-) Influência das imperfeições geométricas no filme de lubrificante

Todos os elementos dos rolamentos apresentam imperfeições geométricas devido à fabricação. Estas imperfeições resultam em ondulações e rugosidades que

causam cargas dinâmicas na estrutura das máquinas por dois caminhos, segundo Su et al. (1992). O primeiro caminho é o que diretamente transmite à estrutura cargas dinâmicas pelos contatos das imperfeições dos elementos rolantes com as imperfeições da pista externa. E o segundo os indiretamente transmitidos à estrutura das máquinas pelas variações de cargas entre os elementos rolantes e a pista interna.

A figura 5.9 apresenta estas irregularidades.



**Fig. 5.9** Irregularidade de fabricação nos componentes do rolamento, [Su et al. (1992)].

Onde:

$z'_{di}(t)$  – são as deformações elásticas do elemento rolante em contato com a pista interna no tempo periódico;

$z'_{de}(t)$  – as deformações elásticas do elemento rolante em contato com a pista externa no tempo periódico;

$z'_i(t)$  – as deformações elásticas da pista interna no tempo periódico;

$z'_e(t)$  – as deformações elásticas da pista externa no tempo periódico;

$y'_e(t)$  – as irregularidades da pista externa no tempo periódico;

$y'_i(t)$  – as irregularidades da pista interna no tempo periódico;

$y'_{de}(t)$  – as irregularidades do elemento rolante em relação à pista externa no tempo periódico;

$y'_{di}(t)$  – as irregularidades do elemento rolante em relação à pista interna no tempo periódico.

Pode-se dizer que o somatório das deformações totais no tempo com relação à pista externa é expressa por,

$$z_e(t) = z'_{de}(t) + z'_e(t), \quad (5.54)$$

e com relação à pista interna,

$$z_i(t) = z'_{di}(t) + z'_i(t). \quad (5.55)$$

O filme de óleo entre os elementos rolantes varia no tempo em função das variações superficiais e das deformações elásticas. Considerando que, a variação de força no  $n$ -ésimo elemento rolante com as pistas, pode ser aproximada como sendo o produto da rigidez do óleo  $k(t)$ , pela variação da espessura mínima do filme de óleo, ou seja,

$$\Delta w_n(t) = (k(t)) (\Delta h_0(t)) \quad (5.56)$$

onde,

$$\Delta h_0(t) = [g_e(t) + g_i(t) + y_e(t) + y_i(t) - z_e(t) - z_i(t)]/2, \quad (5.57)$$

que são os sinais obtidos nas monitorizações das primeiras horas de funcionamento do rolamento. Após tempo de funcionamento, o rolamento apresenta defeitos, conforme modelo teórico analisado no item 5.3, gerando teoricamente a energia de vibração dada

pela relação (5.15) diferentes das geradas pela equação (5.56). Conseqüentemente tendo, o coeficiente  $a_2$ , valores diferentes no decorrer do tempo de trabalho até atingir os limites de alarme, ou melhor, os limites nas condições de insatisfatórios e inaceitáveis.

#### 5.6.1.2-) Resultante dos efeitos no coeficiente $a_2$

Os efeitos dos defeitos devidos a fabricação bem como os apresentado durante o funcionamento, por analogia, podem ser somados, convergindo para uma força resultante suportada pelo filme de óleo.

Conforme analisado no capítulo 4, o filme de óleo está diretamente relacionado com a viscosidade, e esta, por sua vez, varia com função da temperatura e da pressão desenvolvida no contato. Portanto, trata-se de um sistema complexo e interativo representado durante a vida do rolamento pelo coeficiente  $a_2$ . Em uma análise instantânea, ou seja, em um determinado momento o coeficiente  $a_2$  é influenciado pelo somatório das causas: condições de fabricação, evolução dos defeitos, viscosidade do lubrificante, temperatura e pressão desenvolvida no exato momento do contato, tipo de carga e a rotação. Representando matematicamente estas condições instantâneas tem-se:

$$a_2 = f(\eta, T, p, y, n, w_n, \text{fabricação}). \quad (5.58)$$

Se, se considerar constantes a profundidade do defeito, rotação, carga no elemento rolante e as imperfeições de fabricação e representá-los por  $k''$  pode-se dizer que:

$$a_2 = k'' f(\eta, T, p), \quad (5.59)$$

a qual permite dizer que a severidade do sinal do envelope, para determinadas condições de trabalho instantâneo, tais como, tipo de carga, profundidade do defeito, etc., pode aumentar ou diminuir dependendo das condições da lubrificação. Em outras palavras, alterando-se as condições da lubrificação, altera-se o valor do coeficiente  $a_2$  para uma mesma condição física do rolamento. Sendo a viscosidade e a temperatura as duas variáveis principais neste fenômeno que são interativamente influenciadas pelas altas pressões desenvolvidas no contato.

Conforme já mencionado, a viscosidade tem duas variáveis independentes e de grande influência em seu valor, que são a temperatura e a pressão. A temperatura, analisada no capítulo 4, item 4.5.1 altera a viscosidade segundo a relação exponencial (4.50)

$$\eta = \eta_0 \exp(-\gamma\theta), \quad (5.60)$$

diminuindo a valor da viscosidade quando ocorre aumento da temperatura.

A influencia da pressão ocorre devido às altas pressões desenvolvidas entre os elementos rolantes e as pistas, cuja influência também é exponencial. De acordo com o analisado no item 4.5.2, relação (4.52),

$$\eta = \eta_0 \exp(\alpha p). \quad (5.61)$$

aumentando a pressão aumenta-se o valor da viscosidade.

Logo, há uma interação dos efeitos que podem atenuar ou aumentar os valores do coeficiente  $a_2$ .

## CAPÍTULO 6

### SENSIBILIDADE DA REGIDEZ DO FILME DE LUBRIFICANTE

#### 6.1-) Introdução

A sensibilidade é definida como a primeira derivada parcial da grandeza desejada com relação à variável em análise. De posse da derivada parcial se obtém a variação da grandeza desejada em relação ao incremento da variável em análise, ou seja, sendo

$$F_p = f(x_p, y_p, z_p, \dots), \quad (6.01)$$

a sensibilidade de " $F_p$ " em relação à " $x_p$ " será:

$$\frac{\partial F_p}{\partial x_p}. \quad (6.02)$$

Para tornar a sensibilidade adimensional divide-se a derivada parcial,  $\left(\frac{\partial F_p}{\partial x_p}\right)$ , pela relação entre a grandeza desejada e a variável em análise, no ponto de trabalho, ou seja, divide-se por  $\left(\frac{F_p}{x_p}\right)$  obtendo assim o adimensional da sensibilidade,

$$\frac{\left(\frac{\partial F_p}{\partial x_p}\right)}{\left(\frac{F_p}{x_p}\right)} \Bigg|_{x_p=x_0} \quad (6.03)$$

sendo " $x_0$ " o ponto de trabalho.

Importante ressaltar que a sensibilidade é válida em torno do ponto de trabalho, ou seja, onde é mantida a validade da reta de trabalho.

## 6.2-) Análise da sensibilidade na rigidez do filme de lubrificante

Como já comentado, a sensibilidade a seguir desenvolvida tem validade em torno do ponto de trabalho, melhor, onde se definiu a rigidez do filme de lubrificante, relação (4.28), isto porque as variações pequenas em torno do valor da espessura mínima do filme de lubrificante, ( $h_0$ ), apresenta um comportamento linear.

## 6.3-) Sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante em relação à viscosidade.

Partindo da definição sintetizada na relação (6.3), tem-se a seguinte relação para a sensibilidade desejada:

$$\frac{\left(\frac{\partial k_n}{\partial \eta_0}\right)}{\left(\frac{k_n}{\eta_0}\right)} \quad (6.04)$$

### 6.3.1-) Primeiro caso

O primeiro caso ocorre quando se satisfaz a relação (4.43), ou seja,

$$w_{ne} \ll k_s h_0. \quad (6.05)$$

Explicitando "k<sub>s</sub>" da relação (4.48), tem-se:

$$k_s = C_0^{7,045} \eta_0^{5,354} u^{5,354} h_0^{-8,045}. \quad (6.06)$$

Sabe-se, pela relação (4.47) que,

$$k_n = 7,042 k_s. \quad (6.07)$$

Logo,

$$\frac{\partial k_s}{\partial \eta_0} = 5,354 C_0^{7,045} \eta_0^{4,354} u^{5,354} h_0^{-8,045}, \quad (6.08)$$

e,

$$\partial k_n = 7,042 \partial k_s. \quad (6.09)$$

Substituindo (6.09) em (6.08) e (6.06) em (6.07), tem-se,

$$\frac{\partial k_n}{\partial \eta_0} = (5,354 \times 7,042) C_0^{7,045} \eta_0^{4,354} u^{5,354} h_0^{-8,045}, \quad (6.10)$$

substituindo (6.06) em (6.07), obtém-se.

$$k_n = 7,042 C_0^{7,045} \eta_0^{5,354} h_0^{-8,045}. \quad (6.11)$$

Substituindo (6.10) e (6.11) em (6.04), resulta na sensibilidade adimensional da rigidez do filme de lubrificante às variações unitárias da viscosidade para cargas dinâmicas dominantes:

$$\frac{\left( \frac{\partial k_n}{\partial \eta_0} \right)}{\left( \frac{k_n}{\eta_0} \right)} = 5,354. \quad (6.12)$$

### 6.3.2-) Segundo caso

O segundo caso ocorre quando se satisfaz a relação (4.49), ou seja,

$$w_{ne} \gg k_s h_0. \quad (6.13)$$

sendo “ $k_n$ ” dado pela relação (4.51):

$$k_n = 7,042 \left( C_0^{-1} \eta_0^{-0,76} u^{-0,76} w_{ne}^{1,142} \right), \quad (6.14)$$

logo,

$$\frac{\partial k_n}{\partial \eta_0} = (-0,76 \times 7,042) C_0^{-1} \eta_0^{-1,76} u^{-0,76} w_{ne}^{1,142}. \quad (6.15)$$

Substituindo (6.14) e (6.15) em (6.04), resulta na sensibilidade adimensional da rigidez do filme de lubrificante às variações unitárias da viscosidade quando há o domínio da pré-carga:

$$\frac{\left( \frac{\partial k_n}{\partial \eta_0} \right)}{\left( \frac{k_n}{\eta_0} \right)} = -0,76. \quad (6.16)$$

### 6.3.3-) Comentários sobre a sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante em relação à viscosidade.

Ao se observar que para o primeiro caso, onde a carga dinâmica predomina, ou seja, a pré-carga é próxima de zero, a sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante varia o seu valor em torno de 5,354 vezes quando ocorre a variação da viscosidade em uma unidade, logo as respostas da rigidez às variações são grandes e positivas,

aumentando a energia de vibração em 5,354 vezes, tratando-se portanto de um ganho alto e indesejado pois, compromete ainda mais os equipamentos.

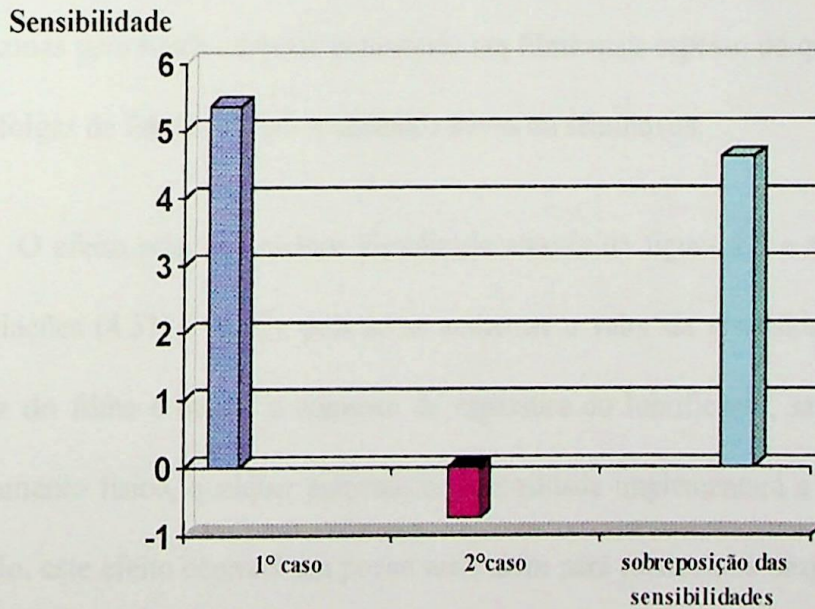
Por outro lado, quando a pré-carga domina o sistema a sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante se encontra no patamar de (-0,76) vezes, ou seja, quando se varia a viscosidade em uma unidade, a rigidez do filme de lubrificante varia negativamente em 0,76 vezes, ganho baixo, menor do que um, porém desejado pois proporciona a diminuição da energia de vibração. Em outras palavras, para uma variação positiva unitária na viscosidade do lubrificante se tem uma variação negativa na rigidez do filme de lubrificante diminuindo a carga transmitida ao sistema o que conseqüentemente diminui a energia de vibração.

Infelizmente o ganho é menor que a unidade, tem-se portanto baixa sensibilidade, logo, para obter uma redução apreciável na energia de vibração transmitida faz-se necessário um grande aumento a viscosidade, porém, deve ser observada a validade da reta em torno do ponto de controle, figura 4.6, para que não seja extrapolado o limite caso em que o desenvolvimento matemático perderá a sua validade.

#### **6.3.4-) Sobreposição dos efeitos na sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante**

Voltado ao objetivo do trabalho que é avaliar a possibilidade de reduzir a energia de vibração utilizando a lubrificação o que é possível, conforme já comentado, quando se tem a pré-carga dominando o sistema (segundo caso) com ganho baixo, inferior a uma unidade.

Entretanto, o ganho baixo não é a única dificuldade, pois, conforme já analisado nos comentários de número 4 nos itens 4.5.1.2.1 e 4.5.1.3 existem as limitações das folgas que não permitem o acréscimo da espessura do filme de lubrificante compensando o incremento de viscosidade. Pois, em primeira análise ao se aumentar o valor da viscosidade aumentar-se-ia a espessura do filme de lubrificante diminuindo sua rigidez, porém dependendo do incremento dado, devido às limitações das folgas, tal fenômeno não acontece em sua plenitude pois gera cargas dinâmicas ocorrendo sobreposição das sensibilidades analisadas anteriormente, ou seja, a sensibilidade quando a pré-carga domina se compõe com a sensibilidade da carga dinâmica gerada pelo incremento de viscosidade e não compensada pelo aumento na espessura do filme de lubrificante, resulta assim em ganho positivo, cujos valores sobrepostos resulta em 4,594. A sobreposição da sensibilidade é mostrada pela figura 6.1.



**Fig. 6.1** Sobreposição das sensibilidades.

### 6.3.5-) Desgastes uniformes

Um outro fator que pode ser analisado, e é característico para cada rolamento são os desgastes uniformes no rolamento. Pois existe, para cada rolamento, uma condição inicial nas tolerâncias dos componentes e, devido a sua montagem atrelada às condições de funcionamento, de carga, de lubrificação, solicitações em serviço, etc. acarretam discretamente desgastes nas pistas e em seus elementos rolantes nas regiões mais concentradas, ou seja, para cada rolamento devido às horas de trabalho nas condições características existem desgastes que aumentam as folgas e elas são discretas.

Estes desgastes discretos dos componentes para cada rolamento possibilitam uma maior espessura do filme de lubrificante retardando as cargas dinâmicas devidas ao excesso de incremento da viscosidade, pois, sendo as folgas maiores ao se aumentar a viscosidade poderá o filme de lubrificante aumentar sua espessura até atingir as folgas produzidas pelo funcionamento permitindo um filme mais espesso do que os produzidos pelas folgas de fabricação em rolamentos novos ou seminovos.

O efeito pode ser melhor visualizado através da figura 4.8 e analisado através das relações (4.51) e (4.52), pois ao se aumentar o valor da viscosidade diminui-se a rigidez do filme e ocorre o aumento da espessura do lubrificante, saturado este pelo espaçamento físico, qualquer aumento na viscosidade implementará a carga dinâmica, contudo, este efeito ocorrerá um pouco mais além para rolamentos desgastados que são intrínsecos a cada caso nas suas condições de montagem funcionamento, lubrificação, severidade de operação, etc.

#### 6.4-) Sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante em relação à velocidade.

Partindo da mesma definição sintetizada na relação (6.3), tem-se a seguinte relação para a sensibilidade desejada:

$$\frac{\left(\frac{\partial k_n}{\partial u}\right)}{\left(\frac{k_n}{u}\right)} \quad (6.17)$$

##### 6.4.1-) Primeiro caso

Para a velocidade o desenvolvimento é semelhante à viscosidade, tendo inclusive os mesmos valores, ou seja, o primeiro caso ocorre quando se satisfaz a relação (4.43),

$$w_{ne} \ll k_s h_0 \quad (6.18)$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento feito para a viscosidade se obtém:

$$\frac{\partial k_n}{\partial u} = (5,354 \times 7,042) C_0^{7,045} \eta_0^{5,354} u^{4,354} h_0^{-8,045} \quad (6.19)$$

Substituindo (6.19) e (6.11) em (6.17), resulta na sensibilidade adimensional da rigidez do filme de lubrificante a variações unitárias da velocidade para cargas dinâmicas dominantes:

$$\frac{\left(\frac{\partial k_n}{\partial u}\right)}{\left(\frac{k_n}{u}\right)} = 5,354 \quad (6.20)$$

#### 6.4.2-) Segundo caso

O segundo caso ocorre quando se satisfaz a relação (4.49), ou seja,

$$w_{ne} \gg k_s h_0. \quad (6.21)$$

sendo "k<sub>n</sub>" dado pela relação (4.51):

$$k_n = 7.042 \left( C_0^{-1} \eta_0^{-0.76} u^{-0.76} w_{ne}^{1.142} \right). \quad (6.22)$$

logo,

$$\frac{\partial k_n}{\partial u} = (-0.76 \times 7.042) C_0^{-1} \eta_0^{-0.76} u^{-1.76} w_{ne}^{1.142}. \quad (6.23)$$

Substituindo (6.22) e (6.23) em (6.17), resulta na sensibilidade adimensional da rigidez do filme de lubrificante a variações unitárias da viscosidade quando há o domínio da pré-carga:

$$\frac{\left( \frac{\partial k_n}{\partial \eta_0} \right)}{\left( \frac{k_n}{\eta_0} \right)} = -0.76. \quad (6.24)$$

#### 6.4.3-) Comentários sobre a sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante em relação à velocidade.

A sensibilidade para variações unitárias da velocidade comporta de maneira análoga às variações da sensibilidade para a viscosidade, porém, difícil e sem praticidade é variar a velocidade próxima a valores em torno do ponto de trabalho, pode até dizer que é impraticável a menos de variações de velocidade em sistemas de

controle, caso em que, pelo seu dinamismo não tem ponto fixo e as variações podem ser pequenas ou grandes o que depende da necessidade.

Portanto, a alteração na velocidade, de maneira prática, faz com que o desenvolvimento matemático até então sustentado não tenha aplicabilidade pois foge da região de trabalho em que a lubrificação esta sendo realizada, não sendo mais válida a reta do ponto de trabalho validada pela aproximação de primeira ordem.

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 7.1-) Introdução

Com o objetivo de validar e discutir os resultados obtidos serão utilizados os levantamentos empíricos obtidos por Su et al. (1992) com o objetivo principal de mostrar a influência do nível de lubrificante na energia de vibração, porém, estão intrínsecos nas curvas os efeitos até então analisados.

O trabalho em referência analisa a influência dos níveis de lubrificante, para três tipos, de acordo com a tabela a seguir. Os ensaios foram realizados com rolamentos de rolos cônicos, tipo SKF 32208, e lubrificadas por salpicos.

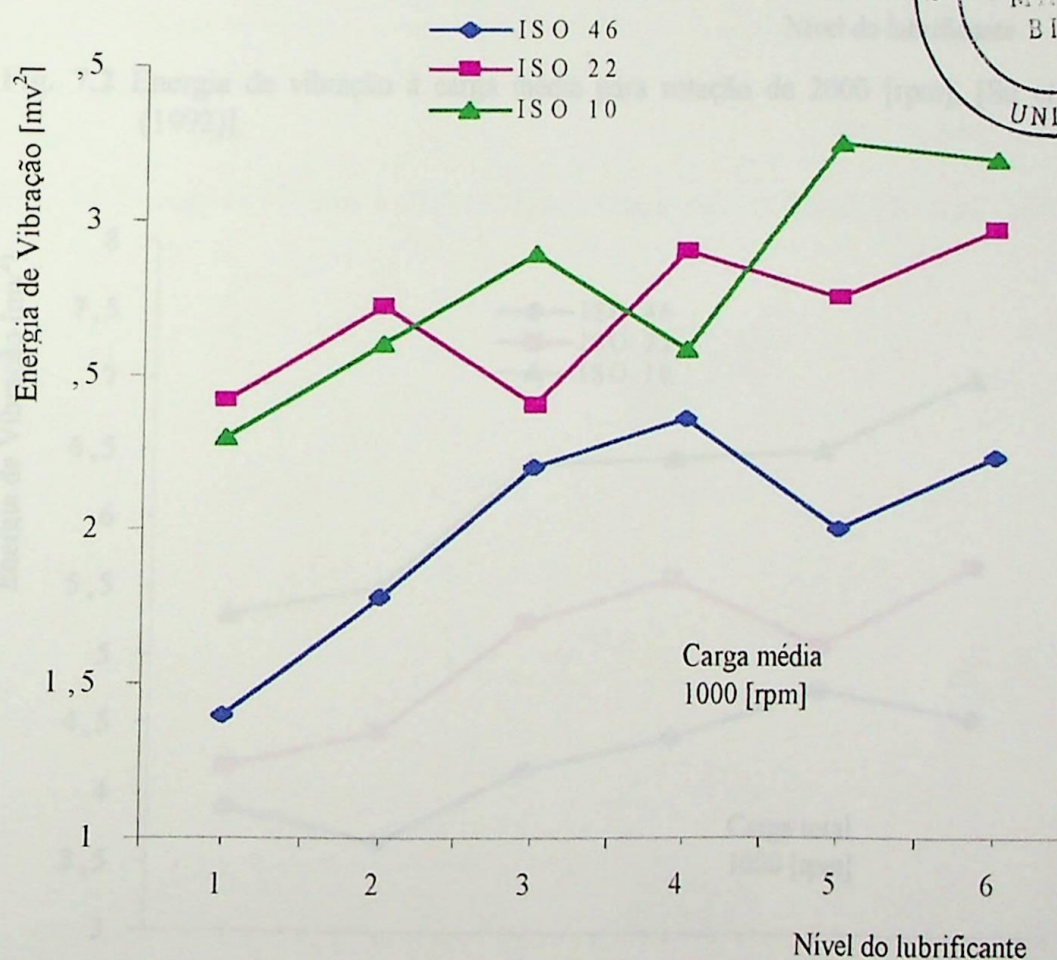
Nos ensaios foram utilizadas duas velocidades de rotação 1000 e 2000 [rpm]. Também foram utilizadas duas intensidades de carga referidas como carga média e carga total, comparada com a carga dinâmica do rolamento.

A carga média é consequência da carga total, e esta por sua vez, de acordo com a definição do fabricante de rolamentos SKF (1980), é definida como a capacidade de carga que o rolamento poderá suportar atingindo uma vida nominal de um milhão de revoluções.

**Tabela 7.1** – Propriedade dos lubrificantes, [Su et al. (1992)].

| Lubrificante \ Propriedade | Móbil DTE 25<br>ISO 46 | Móbil Velocite 10<br>ISO 22 | Móbil Velocite 6<br>ISO 10 |
|----------------------------|------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| Densidade                  | 0,876                  | 0,865                       | 0,858                      |
| Centelhamento[°C]          | 201                    | 182                         | 155                        |
| Viscosidade[cSt/100°.C]    | 6,2                    | 4,1                         | 2,6                        |

As figuras 7.1 a 7.4, Su et al. (1992), mostram o comportamento da energia de vibração para os tipos de lubrificantes nas duas intensidades de pré-carga variando a quantidade de lubrificante em seis níveis, sendo o nível 1 o mais alto, e o nível 6 o mais baixo, conforme figura 7.5.

**Fig. 7.1** Energia de vibração à carga média para rotação de 1000 [rpm], [Su et al. (1992)].

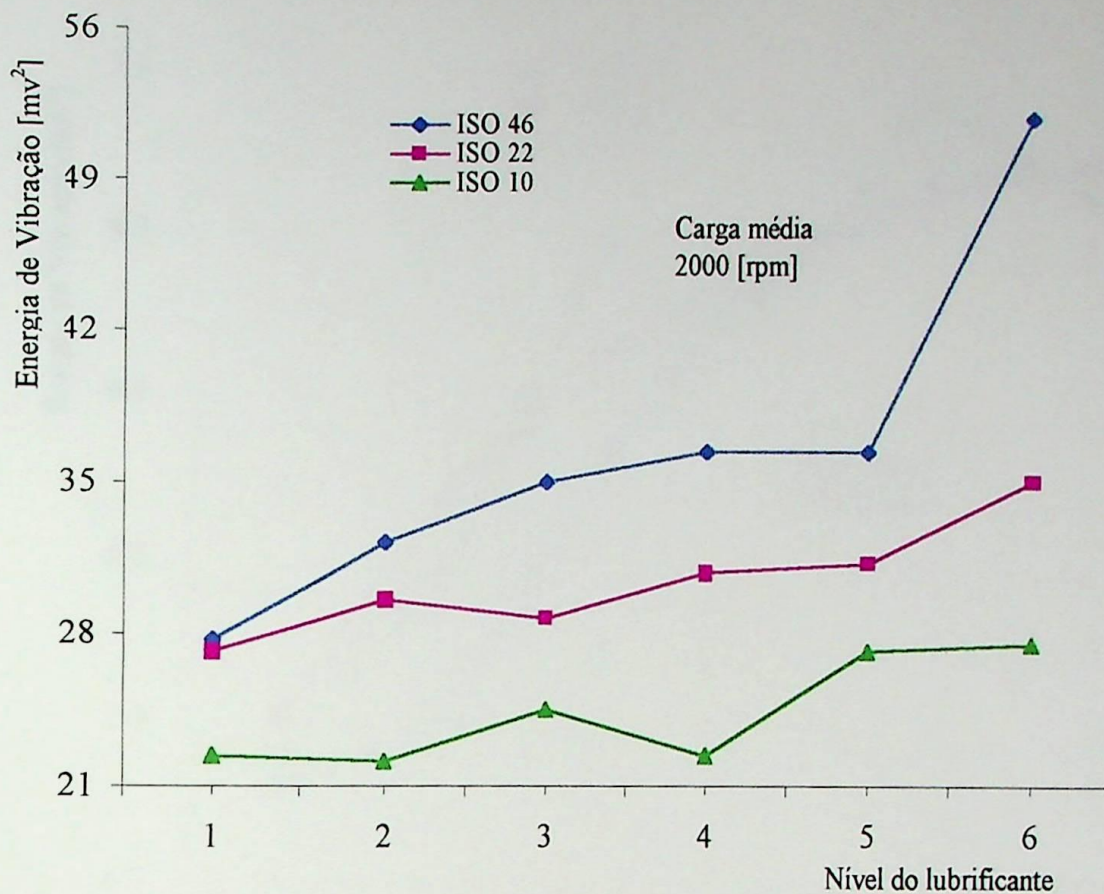


Fig. 7.2 Energia de vibração à carga média para rotação de 2000 [rpm], [Su et al. (1992)].

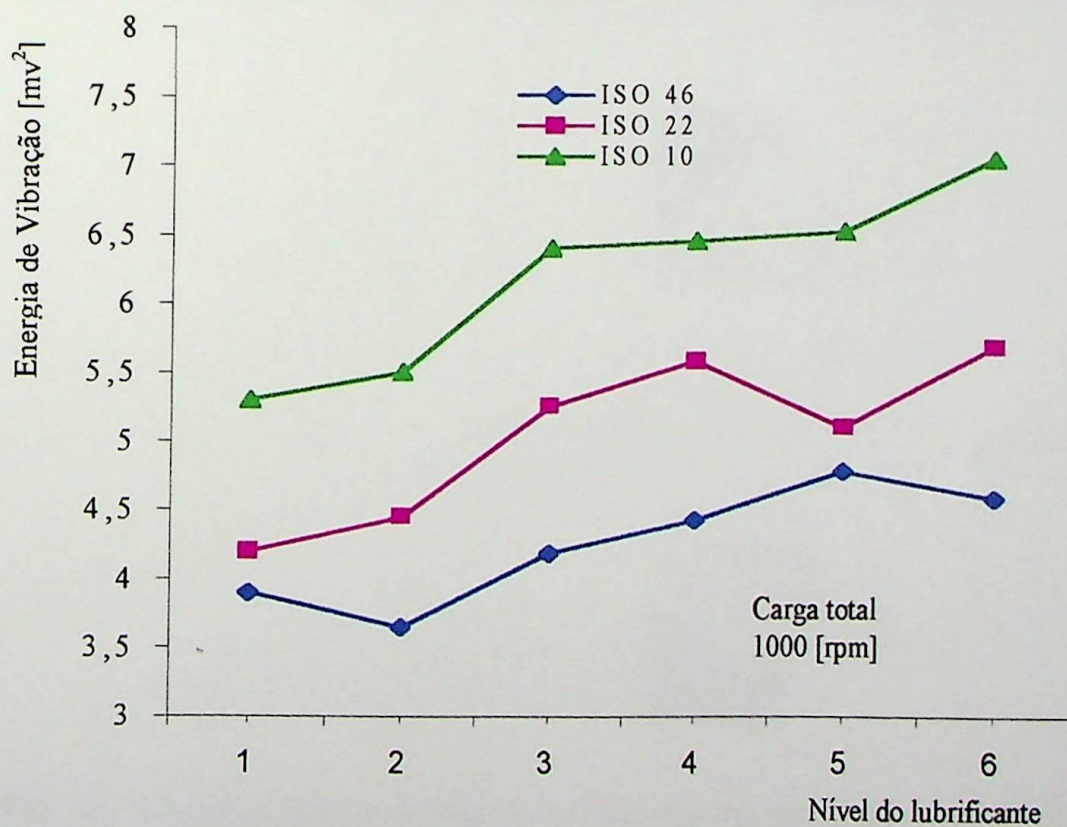


Fig. 7.3 Energia de vibração à carga total para rotação de 1000 [rpm], [Su et al. (1992)].

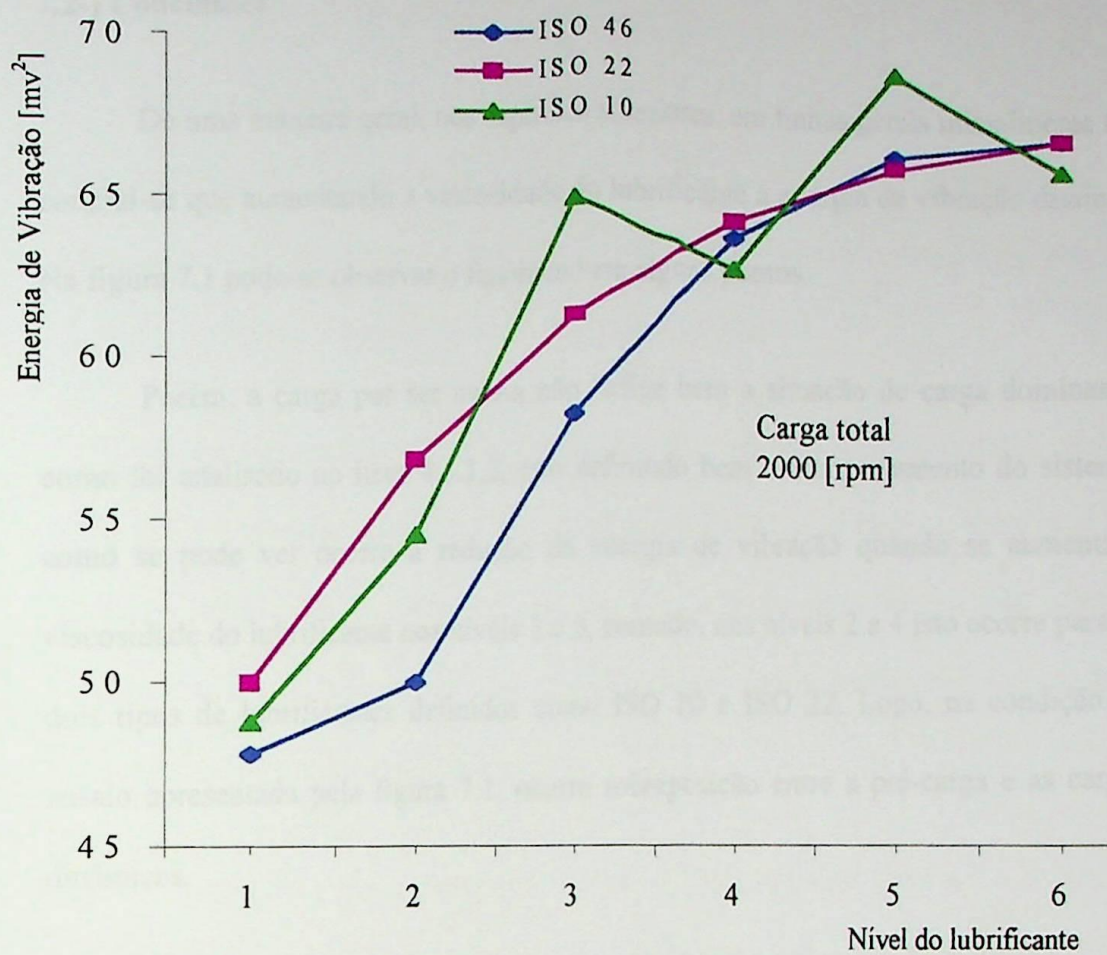


Fig. 7.4 Energia de vibração à carga total para rotação de 2000 [rpm], [Su et al. (1992)].

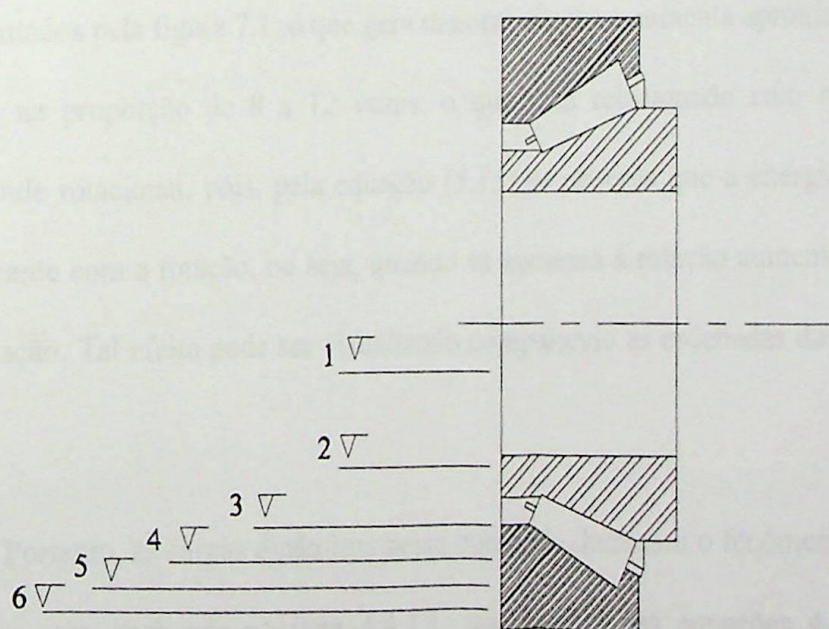


Fig. 7.5 Níveis do lubrificante utilizados para levantamento das curvas das figuras 7.1 a 7.4, [Su et al. (1992)].

## 7.2-) Conclusões

De uma maneira geral, nos capítulos anteriores, em linhas gerais inicialmente foi concluí-se que aumentando a viscosidade do lubrificante a energia de vibração diminui. Na figura 7.1 pode-se observar o fenômeno em alguns pontos.

Porém, a carga por ser média não define bem a situação de carga dominante, como foi analisado no item 4.5.1.2, não definindo bem o comportamento do sistema; como se pode ver ocorre a redução da energia de vibração quando se aumenta a viscosidade do lubrificante nos níveis 3 e 5, contudo, nos níveis 2 e 4 isto ocorre para os dois tipos de lubrificantes definidos como ISO 10 e ISO 22. Logo, na condição de ensaio apresentada pela figura 7.1, ocorre sobreposição entre a pré-carga e as cargas dinâmicas.

Na condição de ensaio representado pela figura 7.2 as cargas dinâmicas predominam no sistema, isto porque a rotação foi dobrada em relação aos ensaios representados pela figura 7.1, o que gera maiores cargas e aumenta aproximadamente os valores na proporção de 8 a 12 vezes, o que está relacionado com o aumento da velocidade rotacional, pois, pela equação (5.15) se observa que a energia se relaciona diretamente com a rotação, ou seja, quando se aumenta a rotação aumenta-se a energia de vibração. Tal efeito pode ser visualizado comparando as ordenadas das figuras 7.1 e 7.2.

Portanto, as cargas dinâmicas nesta condição dominam o fenômeno ocorrendo o primeiro caso analisado no item 4.4.1.1, que resulta nas equações 4.47 e 4.48 na condição de  $h_0$  constante, transcritas a seguir:

$$k_n \approx 7,042 k_s, \quad (7.01)$$

$$\left( h_0 = c^{te} \right) \approx C_0 \eta_0^{0,6655} u^{0,6655} k_s^{-0,1243}. \quad (7.02)$$

Assim, pelas relações, quando se aumenta a viscosidade do lubrificante a energia de vibração também aumenta pois, na relação (7.02) a rigidez da superfície combinada aumenta quando se aumenta a viscosidade, satisfazendo as condições físicas impostas ( $h_0 = c^{te}$ ). É o que se observa em todos os pontos na figura 7.2.

Logo, para se reduzir a energia de vibração nesta condição de trabalho, pode-se diminuir a viscosidade do lubrificante; contudo, deverá ser avaliado e observado se o filme de lubrificante não reduzirá além do valor imposto pelas folgas, caso contrário poderá ocorrer contato de metais gerando choques mecânicos produzindo maiores danos ao equipamento que na condição anterior.

O segundo caso analisado no capítulo 4 deste trabalho, item 4.4.1.2, pode ser claramente visualizado na figura 7.3, ou seja, quando há o domínio da pré-carga. Assim, ao se aumentar a viscosidade do lubrificante a energia de vibração reduz. O comportamento da energia na figura 7.3 com relação à viscosidade corresponde às condições suportadas pelas relações matemáticas (4.51) e (4.52), a seguir transcritas,

$$k_n = 7,042 \left( C_0^{-1} \eta_0^{-0,76} u^{-0,76} w_{ne}^{1,142} \right), \quad (7.03)$$

$$h_0 = C_0 \eta_0^{0,76} u^{0,76} w_{ne}^{0,142}. \quad (7.04)$$

Portanto, neste caso a pré-carga é suficientemente grande para a condição de funcionamento na qual encontra-se implícita a velocidade angular. E também, a espessura do filme de lubrificante é menor do que na condição anterior, ou seja, para a carga média com 1000 [rpm].

Logo, esta condição de lubrificação e rotação permite que as relações matemáticas (6.3) e (6.4) se compensem sem produzir cargas dinâmicas além das já existentes e nem ultrapassá-las.

Assim, se tomar o nível 3 como referência com o sistema lubrificado com o ISO 10 a energia de vibração é de  $6,4 \text{ [mv}^2\text{]}$ . Já para o lubrificante ISO 22 o valor da energia reduz para  $5,25 \text{ [mv}^2\text{]}$ . E para o ISO 46 a energia de vibração é reduzida para  $4,18 \text{ [mv}^2\text{]}$ . Confirmando-se, portanto, que para valores significativos da pré-carga pode-se reduzir a energia de vibração, se aumentar a viscosidade do lubrificante, que concorda com a teoria apresentada nesta tese.

A sensibilidade da rigidez do filme de lubrificante também pode ser validada nas figuras mencionadas com os valores obtidos nas relações (6.12) e (6.13). Entretanto, a comparação deverá ser feita em termos de ordem de grandeza, pois, como discutido anteriormente a viscosidade do lubrificante é alterada com a temperatura desenvolvida no funcionamento devido a força de cisalhamento das partículas, equação (4.54), assim pode-se afirmar que as temperaturas desenvolvidas para os três lubrificantes não são iguais nas condições de trabalho, o que impossibilita saber ao certo o valor da viscosidade para cada caso. Motivo pelo qual a análise da sensibilidade deverá ser em termos de ordem de grandeza pois, para o seu cálculo é necessário o valor da viscosidade nas condições de operação.

Para a análise proposta será utilizada a viscosidade à  $100 \text{ [}^\circ\text{C]}$ , supondo que para os três tipos de lubrificante fosse esta a temperatura desenvolvida, motivo pelo qual os valores obtidos deverão ser comparados em termos de ordem de grandeza.

Para viabilizar a análise é necessário fazê-lo comparando energia, logo, pela definição de impulso se tem,

$$E = w \int_0^t dt. \quad (7.05)$$

Pode-se dizer pela curva (4.6) no ponto de trabalho que,

$$w = k_n h_0, \quad (7.06)$$

substituindo (7.06) em (7.05), resulta:

$$E = k_n h_0 \int_0^t dt. \quad (7.07)$$

Considerando para um determinado defeito os dois últimos termos da relação (7.07) são constantes cujo valor é  $a$ , tem-se,

$$E = a k_n, \quad (7.08)$$

logo,

$$dk_n = \frac{dE}{a}. \quad (7.09)$$

Podendo, portanto, ser utilizado na análise da sensibilidade nas curvas, infelizmente afetado pelo valor da constante  $a$  que é de difícil determinação.

Logo, quando a pré-carga domina o sistema a sensibilidade tem valor de (-0,76), relação (6.16). Trata-se portanto das curvas traçadas na figura 7.3, que poderão ser analisadas. Inicialmente será analisada a sensibilidade entre os lubrificantes ISO 22 e ISO 46. Na tabela 7.1 a viscosidade à 100 [°C] para o lubrificante ISO 46 é 6,2[cSt] e para o ISO 22 é 4,1[cSt] cuja diferença é 2,1[cSt]. Utilizando o valor da sensibilidade calculada na reação (6.16), tem-se:

$$\left( \frac{\left( \frac{\partial E}{a} \right)}{E} \right) \left( \frac{\eta}{\partial \eta} \right) = -0,76, \quad (7.10)$$

substituindo os valores de  $\underline{E}$  e  $\underline{\eta}$  para o lubrificante ISO 22 em (7.10), resulta:

$$\frac{\partial E}{a} = -2,043. \quad (7.11)$$

Assim a relação que rege a diminuição da energia para o nível 3 da figura 7.3 entre os lubrificantes ISO 46 e ISO 22, considerando a viscosidade à 100 [°C] é:

$$E|_{\text{ISO 22}} = 5,25 - 2,043 a. \quad (7.12)$$

Como dito, devido a utilização dos valores da viscosidade à 100[°C], somado aos desvios de valores obtidos de forma empírica, que vem se acumulando desde a substituição de valores na relação (4.39), pode-se dizer que em termos de ordem de grandeza a sensibilidade determinada pela relação (6.16) representa as alterações nas curvas, pois  $\underline{a}$  faz presente na maioria dos pontos da figura (7.3), como exemplo, tomando o valor de  $\underline{a}$  em (7.12) é 0,5245. Utilizando este valor no nível 3 da figura (7.3) para os lubrificantes ISO 10 e ISO 22, com respectivas viscosidades de 2,6[cSt] e 4,1[cSt], tem-se,

$$E|_{\text{ISO 22}} = 4,95 \text{ [mv}^2\text{]}. \quad (7.13)$$

A mesma aproximação pode ser considerada para os níveis 1, 2 e 4. Portanto, como se trata de ordem de grandeza a sensibilidade pode ser utilizada, como uma boa aproximação, para determinar a redução do valor da energia, devido a elevação da viscosidade em sistemas onde se tem a pré-carga dominante.

O acima discutido tem validade para valores próximos ao ponto de trabalho, ou seja, dentro da reta, assim sendo, as alterações de velocidade entre as figuras (7.3) e (7.4) extrapolam a reta, não sendo mais válidas as sensibilidades calculadas.

A energia de vibração aumenta seu valor aumentando a carga aplicada que está implícita na velocidade de impacto ( $v_s$ ), bem como aumentando a rotação, de acordo com o desenvolvimento feito através da figura 5.1 resultando na relação (5.15), o que para a carga pode ser visualizado entre as figuras 7.1 e 7.3 bem como entre as figuras 7.2 e 7.4. Já para a rotação o aumento de energia pode ser avaliado através das figuras 7.1 e 7.2 e entre as figuras 7.3 e 7.4. Como exemplo, tomando as duas últimas figuras, para o nível 3, a energia de vibração para o lubrificante ISO 46 é  $4,18[mv^2]$  à  $1000[rpm]$ . Já para a rotação de  $2000[rpm]$  o mesmo ponto tem valor de energia de  $58,2[mv^2]$ . Não sendo válido, portanto, a aproximação de primeira ordem que determina a reta de trabalho porque ocorre alteração do ponto de trabalho e não variação de valores em torno deste.

Logo, mesmo estando o sistema com alto valor de pré-carga, o aumento da rotação faz com que surjam cargas dinâmicas, tornando o sistema instável, ocorrendo a sobreposição dos efeitos, dando origem a rigidez equivalente analisada no item 4.5.1.3. Tal efeito pode ser observado entre as figuras 7.3 e 7.4. Há instabilidade, quando se têm cargas dinâmicas presentes, pois, elas influenciam na pré-carga, como pode ser observado na figura 7.4. Como exemplo, no nível 2, a energia de vibração para o lubrificante ISO 22 tem valor maior do que para o ISO 10, já no nível 3 é menor. Neste ponto o comportamento da viscosidade corresponde ao analisado no segundo caso, ou seja, maior viscosidade menor energia de vibração, o que não é válido no nível 2. Já nos níveis 4, 5 e 6 predomina a sobreposição dos efeitos, pois, não satisfaz em momento

algum as equações do primeiro caso nem a do segundo, evidencia a sobreposição dos efeitos que depende da intensidade das cargas dinâmicas geradas.

### 7.3-) Sugestões

O intuito deste item é fazer sugestões para o prosseguimento do trabalho até então desenvolvido atingindo assim maiores abrangências em aplicação direta em plantas e equipamentos em funcionamento.

Portanto, para o objetivo se deve confeccionar uma bancada de testes que permita variar as cargas axiais e radiais nos rolamentos ensaiados de forma contínua e com pequenos incrementos, o que possibilitará assim, avaliar os seus efeitos.

Os ensaios poderão obter melhores resultados com variações de cargas independentes e monitoradas, pois poderá se fazer uma melhor análise dos resultados.

Com o objetivo de acompanhar o comportamento da viscosidade do lubrificante nos ensaios e resultar ainda em uma melhor análise, a temperatura deverá ser monitorada em vários pontos de forma contínua, o que possibilitará obter a viscosidade real na condição de trabalho através de ensaios em viscosímetro.

Como o fenômeno é também sensível à velocidade, melhor seria confeccionar a bancada com sistema de variação de velocidade de forma contínua e realimentado de maneira que permita avaliar os efeitos das pequenas alterações na rotação.

Finalmente, para uma melhor qualidade dos resultados dos ensaios, todos os sinais obtidos na bancada deverão ser monitorados através de um sistema de Aquisição

de Dados em tempo real e que permita a análise da fase transitória, ou seja, o comportamento do rolamento desde o início do funcionamento até o regime contínuo isto, para cada nova situação.

anexos

Anexo A – Bases de programas para el cálculo de frecuencias de defecto.

## CÁLCULO DE LAS FRECUENCIAS DE DEFECTO

1. Datos

2.  $n$

3.  $n_1$

4. Cálculo de frecuencia de defecto de una muestra

$$FDP = \frac{n_1}{n} \quad \text{Ejemplo: } FDP = \frac{10}{100} = 0.10$$

5.  $n_2$

6. Cálculo de frecuencia de defecto de otra muestra

$$FDP = \frac{n_2}{n} \quad \text{Ejemplo: } FDP = \frac{15}{100} = 0.15$$

7.  $n_3$

8. Cálculo de frecuencia de defecto de tercera muestra

$$FDP = \frac{n_3}{n} \quad \text{Ejemplo: } FDP = \frac{12}{100} = 0.12$$

9.  $n_4$

10. Cálculo de frecuencia

11.  $n_5$

$$FDP = \frac{n_5}{n} \quad \text{Ejemplo: } FDP = \frac{18}{100} = 0.18$$

12.  $n_6$

13. Cálculo de frecuencia de defecto de sexta muestra

14.  $n_7$

$$FDP = \frac{n_7}{n} \quad \text{Ejemplo: } FDP = \frac{14}{100} = 0.14$$

15.  $n_8$

16. Cálculo de frecuencia de defecto de octava muestra

## 4. DATOS PARA DETERMINAR LAS FRECUENCIAS DE DEFECTO

17. Diámetro nominal (mm)  $\phi$

18.  $\phi = 50$

19.  $n$

20. Diámetro de aceptación (mm)  $\phi_a$

21.  $\phi_a = 50.02$

22.  $n_1$

23. Número de elementos rechazados

24.  $n_1 = 2$

25.  $n_2$

26. Ángulo de cono (grados)  $\alpha = 10^\circ$

27.  $\alpha = 10^\circ$

28.  $n_3$

29. Relación de ajuste (ppm)  $R$

30.  $R = 100$

31.  $n_4$

32.  $n_5$

33.  $n_6$

34.  $n_7$

35.  $n_8$

# anexos

## Anexo A – Rotina de programa para o cálculo das freqüências de defeito

```

% CÁLCULO DAS FRQÜÊNCIAS DE DEFEITO%
clear all;
dados
%
% cálculo da freqüência de defeito da pista externa
FDPE=(N/2)*(1-D/dm*cos(teta))*(RPM/60)
%
% cálculo da freqüência de defeito da pista interna
FDPI=(N/2)*(1+D/dm*cos(teta))*RPM/60
%
% cálculo da freqüência de defeito do elemento rolante
FDER=(dm/D)*(1-(D/dm)^2*(cos(teta))^2)*RPM/60

% cálculo da freqüência fundamental do trem, para a
% pista externa estacionária
FTFe=abs(0.5*(1-(D/dm)*cos(teta))*RPM)

% cálculo da freqüência fundamental do trem, para a
% pista interna estacionária
FTFi=abs(0.5*(1+(D/dm)*cos(teta))*RPM)

*****
% DADOS PARA O CÁLCULO DAS FREQÜÊNCIAS DE DEFEITO %
% Diâmetro médio [mm] %%%
dm=585;
%
% Diâmetro do elemento rolante [mm] %
D=39.69;
%
% Número de elementos rolantes %
N=42;

% Ângulo de contato [radianos] - (0° ~ pi/2°) %
teta=pi/2;

% rotação da pista [rpm] %
RPM=60;
%

```

## BIBLIOGRAFIA

- ALMEIDA, M. T. *Severidade de Vibrações*. [www.mrwebnet.com.br/mta.htm](http://www.mrwebnet.com.br/mta.htm), Maio 2000.
- ARCHARD, J. F. et al. *Some Experiments Upon the Behavior of Hypoid Oils in Heavily Loaded Contacts*. The institution of Mechanical Engineers – 1 Birdcage Walk, England, 1964, p. 1-8.
- BAGNOLI, S. et al. *Comparison of Accelerometer and Acoustic Emission Signals as Diagnostic Tools in Assessing Bearing Damage*. Proc. 2<sup>nd</sup> Intl. Conf. Condition Monitoring, London, Maio 1988, p. 117-125.
- BARCLAY, J; WEI, J. *General Alarm Guidelines for Enveloped Acceleration Measurements*. SKF Condition Monitoring, USA, 1998, p. 6-10.
- BARKOV, A. B.; BARKOVA N. A. *Assessing Condition and Lifetime of Rolling Element Bearings from a Single Measurement*. Inc., St. Petersburg, Russia, 1995, [www.vmt.fi/\\_wpapers/bbmvi95/index.htm](http://www.vmt.fi/_wpapers/bbmvi95/index.htm).
- BENDAF, J. S. *The Hilbert Transform and Applications to Correlation Measurements*. Brüel & Kjaer, New York, 1985, p. 3-13.
- BERRY, J. E. *Integrating Vibration and Oil Analysis within Today's Condition Monitoring Programs*. Enteract 2000, Houston, Texas, Maio 2000.
- BOTÖ, P. A. *Detection of Bearing Damage by Shock Pulse Measurement*. Ball Bearing Vibration 167, 1978, p. 1-7.
- BRAUN, S.; DATNER, B. *Analysis of Roller/Ball Bearing Vibration*. Journal of Mechanical Design, v. 101, 1979, p. 118-125.
- BRAUN, S.; DATNER, B. *Analysis of Roller/Ball Bearing Vibrations*. ASME, paper 77-WA/DE-5, 1977, p. 1-8.
- BRODERICK, J.J. et al. *Design and Fabrication of Prototype System for Early Warning of Impending Bearing Failure*. MTI Report MTI-71, NASA, Jan. 1972.
- BURCHILL, R.F. et al. *New Machinery Health Diagnostic Techniques Using High-Frequency Vibration*. SAE paper 730930, 1973, p. 1-12.
- BUTLER, D.E. *The Shock Pulse Method for the Detection of Damaged Rolling Bearings*. NDT Intl., Abr. 1973, p. 92-95.
- CEMPEL, C.; STEPANIAK, Z. *Noise and Vibration of the New Ball Bearings*. Proc. 4<sup>th</sup> Intl. Tribology Conf., Paisley-Glasgow, Set. 1979, p. 425-433.

CHATURVEDI, G.K.; THOMAS, D.W. Bearing Fault Detection Using Adaptive Noise Canceling. ASME paper 81-DET-7, 1981, p. 1-10.

COLLACOTT, R.A. *Mechanical Fault Diagnosis*. Chapman and Hall, London, 1977, p. 130.

CONDE, J. et al. *Design of an Expert System for Defect Diagnosis in Lubrication Mechanical Systems Based on the Integration of Vibration and Lubricant Analysis*. The Shock and Vibration Digest, SAGE Science Press, London, Set. 1998, 30(5).

D'AMATO, E.; RISSONE, P. *Using the Envelope Method to Monitor Rolling Bearings*. Proc. 1 st Intl. Mach. Monitoring Diagnostics Conf., NV, Set. 1989, p. 560-566.

DARLOW, M.S.; BADGLEY, R.H. *Early Detection Defects Rolling-Element Bearings*. SAE paper 750209, Feb. 1975, p. 1-12.

DOWSON, D.; HIGGINSON, G. R. *Elasto-Hydrodynamic Lubrication*. SI edition Pergamon Press Ltd. Oxford, England, 1977, p. 17-19.

DOWSON, D.; HIGGINSON, G. R. *Elasto-Hydrodynamic Lubrication*. SI edition Pergamon Press Ltd. Oxford OX3 OBW, England, 1977, p. 28-29.

DOWSON, D.; HIGGINSON, G. R. *Elasto-Hydrodynamic Lubrication*. SI edition Pergamon Press Ltd. Oxford OX3 OBW, England, 1977, p. 163-166.

DOWSON, D.; HIGGINSON, G. R. *Elasto-Hydrodynamic Lubrication*. SI edition Pergamon Press Ltd. Oxford OX3 OBW, England, 1977, p. 51-56.

DOWSON, D.; HIGGINSON, G. R. *Elasto-Hydrodynamic Lubrication*. SI edition Pergamon Press Ltd. Oxford OX3 OBW, England, 1977, p. 45-71.

DYER, D. *Bearing Condition Monitoring*. Dept. of Mech. Engrg., Univ. of Southampton Interim Report 1, Abr. 1973.

DYER, D.; STEWART, R.M. *Detection of Rolling Element Bearing Damage by Statical Vibration Analysis*. ASME 100(2), Abril de 1978, p. 229-235.

DYER, D.; STEWART, R.M. *Detection of Rolling Element Bearing Damage by Statistical Vibration Analysis*. Journal of Mechanical Design, V.100, Abr. 1978, p. 229-235.

ENGJA, H. et al. *Vibration Analysis Used for Detection of Roller Bearing Failures*. Norwegian Maritime Res., 3, 1977, p. 23-33.

ESCHMANN, P. *Ball and Roller Bearings – Theory, Design and Application*. John Wiley & Sons Ltd, 1985, p. 342-355.

GUSTAFSSON, O. G.; TALLIAN, T. *Detection of Damage in Assembled Rolling Element Bearings*. ASLE 61-AM3B-1, 1961, p. 1-39.

- HARRIS, T. A. *Rolling Bearing Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. New York. EUA. 1966, p. 203-220.
- HARRIS, T. A. *Rolling Bearing Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. New York, London, Sydney, 1966, p. 454-463.
- HARRIS, T. A. *Rolling Bearing Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966, p. 318.
- HARRIS, T.A. *Rolling Bearing Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966, p. 203-207.
- HE, L.; YANG, S. *Envelope Estimation by a Pair of Digital Filters*. The Shock and Vibration Digest, SAGE Science Press, London, Maio. 1998, 30(3).
- HERMMINGS, R. C.; SMITH J.D. *Information from Bearing Vibration*. ImechE. Proc. Vibrations in Rotating Machinery Conf., Cambridge, Set. 1976, p. 117-121.
- HIGBIE, N.B., *Automatic Fault Detection in Machinery*. Proc. 1<sup>st</sup> Intl. Mach. Monitoring Diagnosis Conf. NV, Set. 1989, p. 541-545.
- HSMPSON, L. G. *Diagnostic Checks for Rolling Bearings*. Rolling Element Bearings. ImechE, 1984, p. 17-22.
- HSU, H. P. *Fourier Analysis*. Simon and Schuster, Inc., New York, 1970, p.1-120.
- IGARASHI, T. et al *A Study on the Prediction of Abnormalities in Rolling Bearing*. J. JSLE Intl. , Nov. de 1980, p. 71-76.
- IGARASHI, T.; YABE, S. *Studies on the Vibration and Sound of Defective Rolling Bearings: ( Second Report: Vibration of Ball Bearings with One Defect)*, Bull. JSME, 26 (220) , Out. 1983, p. 1791-1798.
- IGSRASHI, T.; HAMADA, H. *Studies on the Vibration and Sound of Defective Rolling Bearings: ( First Report: Vibration of Ball Bearings with One Defect)*, Bull. JSME, 25 (204) , Jun. 1982, p. 994-1001.
- IGSRASHI, T.; KATO, J. *Studies on the Vibration and Sound of Defective Rolling Bearings: ( Third Report: Vibration of Ball Bearings with Multipl<sup>t</sup> Defects)*, Bull. JSME, 28 (237) , Mar. 1985, p. 492-499.
- JAYARAM, V.D.; JARCHOW, F. *Experimental Studies on Ball Bearing Noise*. Wear, 46, 1978, p. 321-326.
- JONES, R.M. *Enveloping for Bearing Analysis*. Sound and Vibration, Fev. de 1996.
- KANAY, H. et al. *Estimation of the Surface Roughness on the Race or Balls of Ball Bearings by Vibration Analysis*. ASME n ° 109, Jan. 1987, p. 60-68.

- KIM, P.Y. *An Effective Method of Bearing Health Monitoring*. Proc. 7<sup>th</sup> Intl. Symp. Air Breathing Engines, Set. 1985, p. 183-190.
- KIM, P.Y. *A Review of Rolling Element Bearing Health Monitoring (III): Preliminary Test Results on Eddy Current Proximity Transducer Technique*. Proc. 3<sup>rd</sup> Intl. Conf. Vib. Rotating Mach. York., Set. 1984, p. 119-125.
- KIM, P.Y. *A Review of Rolling Elements Bearing Health Monitoring (II): Preliminary Test Results on Current Technologies*. Proc. Mach. Vib. Monitoring Analysis, Vib. Inst., New Orleans, LA, Jun. 1984, p. 127-137.
- KUHNELL, B.T.; STECKI, J.S. *Correlation of Vibration, Wear Debris Analysis and Oil Analysis in Rolling Element Bearing Condition Monitoring*. Maintenance Management. Intl, 1985, p. 105-115.
- LAI, M.S.; REIF, Z. *Prediction of Ball Bearing Failures*. Proc. 1<sup>o</sup> Intl. Mech. Monitoring Diagnosis Conf. NV, Set. 1989, p. 122-126.
- LALWANI, R.J. *Some Aspects of Ball Bearing Noise*. Proc. Inter-Noise 73, Copenhagen, Ago. 1973, p. 171-175.
- LI, C.J. et al *Bearing Localized Defect Detection by Bicoherence Analysis of Vibrations* Journal of Engineering for Industry. v. 117 n<sup>o</sup> 4, 1995, p. 625-629.
- LI, C.J.; MA, J. *Detection of Localized Defects in Rolling Element Bearings via Composite Hypothesis Test*. Mechanical Systems and Signal Processing. v. 9, 1995, p. 63-75.
- LIPOVSZKY, G.; SOLYOMVARI, K. *Testing Used Roller Bearings for Quality and Service Life*. Periodica Polytechnica, Transportation Engrg., 10 (1), 1982. p. 27-40.
- MA, J. *Method of feature selection in fault diagnosis of roller bearings*. Mechanical Science and Technology. v. 15, n<sup>o</sup> 5, Set. 1996, p. 790.
- MACLAIN, D.A.; HARTMAN, D.L. *Analysis of Defective Anti-Friction Bearings in the Paper Industry*. Virginia-Carolina Section, Tappi Winter Mtg., Nov. 1980, p. 1-28.
- MARTIN, R.L. *Detection of Ball Bearing Mal-functions*. Instrum. Control Sys, Dez. 1970., p. 79-82.
- MATHEW, J.; ALFREDSON, R.J. *The Condition Monitoring of Rolling Elements Bearings Using Vibration Analysis*. ASM 106, Jul. 1984, p. 447-453.
- MCFADDEN, P.D. *Condition Monitoring of Rolling Element Bearings by Vibration Analysis*. ImechE paper, Solid Mech. Machine Systems Group Seminar, Jan. 1990, p. 49-53.
- MCFADDEN, P.D.; SMITH, J.D. *Information from the Vibration of Rolling Bearings*. Condition Monitoring Conf, Swansea, Abr. 1984, p. 178-190.

MCFADDEN, P.D.; SMITH, J.D. *Model for the Vibration Produced by a Single Point Defect in a Rolling Elements Bearing*. J. Sound Vib. 96(1), 1984, p. 69-82.

MCFADDEN, P.D.; SMITH, J.D. *The Vibration Produced by Multiple Point Defects in a Rolling Elements Bearing*. J. Sound Vib. 98(2), 1985, p. 263-273.

MCFADDEN, P.D.; SMITH, J.D. *Vibration Monitoring of Rolling Element Bearings by the High-Frequency Resonance Technique: A Review*. Trib. Intl., 17(1), Fev. 1984, p. 3-10.

MCFADDEN, P.D.; SMITH, J.D. *Acoustic Emission Transducers for the Vibration Monitoring of Bearings at Low Speeds*. Proc. ImechE, 198c(8), 1984, p. 127-130.

MEYER, L.D. et al., *An Analytical Model for Ball Bearing Vibrations to Predict Vibration Response to Distributed Defects*. ASME n° 102, Abril de 1980, p. 205-210.

MITCHELL, J.S. *Bearing Diagnostics: An Overview*. San Francisco: ASME Winter Ann. Mtg. Dez. 1978, p. 15-24.

MIYACHI, T.; SEKI, K. *An Investigation of the Early Detection of Defects in Ball Bearings Using Vibration Monitoring—Practical Limit of Detectability and Growth Speed of Defects*. Proc. Intl. Conf. On Rotordynamics, JSME IFToMM, Tokio, Set. 1986, p. 403-408.

NAGAMATSU, A.; FUKUDA, M. *Sound Noise Generated from Ball Bearing in High Speed Rotation*. Bull. JSME, 21 (158), Ago. 1978, p. 1306-1310.

NEVILLE, W.E. *Condition Monitoring of Anti-Friction Bearings Using Vibration and Shock Pulse Methods*. Proc. Intl. Conf. Mining, Mach., Brisbane, Jun. 1979, p. 404-407.

NISHIO, K. et al. *An Investigation of the Early Detection of Defects in Ball Bearing by the Vibration Monitoring*. ASME-DET 45, 1979, p. 1-12.

NUNES, M. A. C. *Diagnóstico de Defeitos em Rolamentos pela Técnica do Envelope*. Espírito Santo. 109p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo.

OSUAGWU, C.C.; THOMAS, D.W. *Effect of Inter-Modulation and Quasi-Periodic Instability in the Diagnosis of Rolling Element Incipient Defect*. J. Mech. Des., Trans. ASME, 104 (2), Abr. 1982, p. 296-302.

PHILIPS, G.J. *Rotating Machinery Rolling Element Bearing Performance Monitoring Using the Fiber Optic Method*. ASME Conf. Rel., Ago. 1980, p. 36-43.

PISKOUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral*. Lopes da Silva Editora, Porto, 1977, p. 103-112, V(II).

PISKOUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral*. Lopes da Silva Editora, Porto, 1977, p. 249-261, V(I).

POON,S.Y.; WARDLE,F.P. *Running Quality of Rolling Bearings Assessed*. CME. Abril de 1978, p. 74-77.

PRASHAD, H. *The Effect of Cage and Roller Slip on the Measured Defect Frequency Response of Rolling Element Bearings*. ASLE Trans., 30 (3), 1987, p. 360-367.

RAMAKRISHNA, K.; CHANDER, T. *Development of Condition Assessment Methodology for High Pressure Boiler Feed Pumps*. The Shock and Vibration Digest, SAGE Science Press, London, Fev. 1998, 30(5).

RANDALL, R. B. *Cepstrum Analysis*. B&K tech. Ver.,3. 1981.

RANDALL, R. B. *Distinguished Plenary Keynote Address*. The Shock and Vibration Digest, SAGE Science Press, London, Set. 1998, 30(5).

RAO, B.V.A.; SWARNAMANI, S. *Studies on a Test Rig to Check Defective and Spurious Ball and Roller Bearings*. Proc. Natl. Conf. Indus. Trib., Bombay, Dez. 1986, p. V 1.1-1.10.

RAY, A. G. *Monitoring Rolling Element Contact Bearings Under Adverse Conditions*. Proc. 2 nd Intl. Conf. Vib. Rotating Mach., Cambridge, Set. 1980, p. 187-194.

REIN, S. W. *Viscosity-I*. Texaco Inc. New York, R.F.Meeker.Editor. V64 (1), 1978, p. 1-12.

ROGERS, L.M. *The application of Vibration Signature Analysis and Acoustic Emission Source Location to On-line Condition Monitoring of Anti-Friction Bearings*. Trib. Intl. Abr. 1979, p. 51-59.

ROWE,F.D. *Diagnosis of Rolling Contact Bearing Damage*. Tribology, Ago. 1971, p. 137-146.

SAYLES, R.S.; POON, S.Y.; *Surface Topography and Rolling Element Vibration*. Precision Engrg. , 1981, p. 137-144.

SCHWARZ, V. A. *Experimental and Analytical Studies on Temperature Distributions in Bath Lubricated Radial Roller Bering Assemblies*. Ph.D Thesis, Cranfield Institute of Technology, Scholl of Mechanical Engineering, England, 1982, p. 131-136.

SHAO, Y. et al. *Extracting Early Symptoms of Bearing Fault Using Adaptive Neural Networks*. The Shock and Vibration Digest, SAGE Science Press, London, Nov. 1998, 30(6).

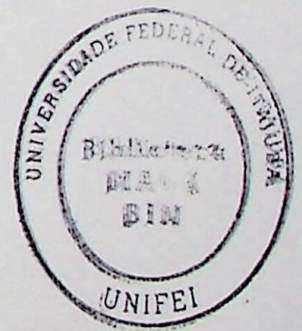
SHIRKHODAIE, A.; SUBRAMANIAN, S. *Fuzzy-logic Assisted Bearing Faults Diagnosis*. The Shock and Vibration Digest, SAGE Science Press, London, Nov. 1998, 30(6).

SKF. Catálogo Geral. São Paulo, 1980, publicação 3000 PB, p.27.

- SMITH, J.D. *Vibration Monitoring of Bearings at Low Speeds*. Trib. Intl, Jun. 1982, p. 139-144.
- SMITH, R.L.; MCGREW, J.M. *Failure Modes and Accelerated Life Test Methods for Despun Antenna Bearings*. J. ASLE 30(1), Jan. 1974, p. 17-26.
- SU, Y.T et al., *The Effects of Surface Irregularities on Roller Bearing Vibrations*. Journal of Sound and Vibration, n° 105(5), Mar. 1992, p. 455-466.
- SU, Y.T. et al. *Signature Analysis of Roller Bearing Vibrations: Lubrication Effects*. Journal of Mechanical Engineering Science, ImechE, 1992, p. 193-198.
- SUNNERSJO, C.S., *Varying Compliance Vibrations of Rolling Bearing*. Journal of Sound and Vibration, n° 58(3), 1978, p. 363-373.
- TALLIAN, T.E.; GUSTAFSSON, O. G. *Progress in Roller Bearing Vibration Research and Control*. ASLE Trans., 1965, p. 195-207.
- TANDON, N.; NAKRA, B.C. *Defect Detection in Rolling Element Bearings by Acoustic Emission Method*. J. Acoust. Emission, 9(1), 1990, p. 25-28.
- TANDON, N.; NAKRA, B.C. *The Application of Sound Intensity Technique to Defect Detection in Rolling Element Bearings*. Appl. Acoust., 29(3), 1990, p. 207-217.
- TANDON, N.; NAKRA, B.C. *Vibration and Acoustic Monitoring Techniques for the Detection of Defects in Rolling Element Bearings*, ITMMEC - India, 1991, p. 3-11.
- TAYLOR, J.I. *Identification of bearing Defects by Spectral Analysis*. J. Mech. Des., Trans. ASME, 102, Abr. 1980, p. 199-204.
- ÜNAL, A. *Intelligent Diagnostics of Ball Bearings*. Penn State University, Harrisburg, 19--.
- WANG, X.F.; SHI, X.Z. *The fault Diagnosis and Quality Evaluation of Ball Bearings by Vibration Signal Processing*. Proc. 1 Intl. Mach. Monitoring Diagnosis Conf., NV, Set. 1989, p. 318-321.
- WARDLE, F.P.; POON, S.Y.; *Rolling Bearing Noise—Cause and Cure*. CME, Jul./Ago. de 1983, p. 36-40.
- WIDNER, R.L.; LITTMANN, W.E. *Bearing Damage Analysis*. National Bureau of Standards, Maio de 1974, USA, p. 1-55.
- WOODARD, S. E.; PAPPAS, R. S. *Development of Structural Identification Accuracy Indicators Using Fuzzy Logic*. The Shock and Vibration Digest, SAGE Science Press, London, Nov. 1998, 30(6).
- XU, M.; SHEA, J. M. *Using Vibration Analysis To Determine Bearing Preload In Machine Tool Spindles*. IRD Mechanalysis Inc., Columbus, Ohio, 1993, p. 25-36.

YOSHIOKA,T.; FUJIWARA,T. *Application of Acoustic Emission Technique to Detection of Rolling Bearing Failure*. Acoustic Emission Monitoring and Analysis in Manufacturing, David A. Dornfeld Ed., ASME, NY, 1984, p. 55-75.

apêndices



Este apêndice contém os teoremas de cálculo que são necessários para a compreensão dos resultados principais deste livro. Os teoremas são apresentados em forma de enunciados e demonstrações, com exemplos e contraexemplos.

## apêndices

Seja  $f$  uma função contínua definida em um intervalo  $I$  e seja  $a$  um ponto de  $I$ . Se  $f$  for contínua em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$  e  $f$  é contínua em  $a$ .

Seja  $f$  uma função contínua definida em um intervalo  $I$  e seja  $a$  um ponto de  $I$ . Se  $f$  for contínua em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$  e  $f$  é contínua em  $a$ .

Seja  $f$  uma função contínua definida em um intervalo  $I$  e seja  $a$  um ponto de  $I$ . Se  $f$  for contínua em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$  e  $f$  é contínua em  $a$ .

Seja  $f$  uma função contínua definida em um intervalo  $I$  e seja  $a$  um ponto de  $I$ . Se  $f$  for contínua em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$  e  $f$  é contínua em  $a$ .

Seja  $f$  uma função contínua definida em um intervalo  $I$  e seja  $a$  um ponto de  $I$ . Se  $f$  for contínua em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$  e  $f$  é contínua em  $a$ .

Seja  $f$  uma função contínua definida em um intervalo  $I$  e seja  $a$  um ponto de  $I$ . Se  $f$  for contínua em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$  e  $f$  é contínua em  $a$ .

Seja  $f$  uma função contínua definida em um intervalo  $I$  e seja  $a$  um ponto de  $I$ . Se  $f$  for contínua em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$  e  $f$  é contínua em  $a$ .

Seja  $f$  uma função contínua definida em um intervalo  $I$  e seja  $a$  um ponto de  $I$ . Se  $f$  for contínua em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$  e  $f$  é contínua em  $a$ .

## Apêndice I – Teorema da Convolução

Este anexo tem o objetivo de apresentar sucintamente o teorema da convolução. Foram utilizadas as bibliografias: Piskounov (1997) e Hsu (c.a. 1985) para o desenvolvimento.

### I.1-) Função imagem

Seja  $f(t)$  uma função no domínio do tempo, de maneira tal que exista os números  $M$  e  $n$  positivos e constantes que satisfaçam a condição,

$$|f(t)| < M e^{(nt)}, \quad (I.01)$$

de existência da primeira integral no intervalo infinito  $[0 \leq t < \infty]$ .

Denomina-se  $F(p)$  a função imagem de  $f(t)$ , definida em função do número complexo  $p = a + jb$ , onde  $a > 0$ , como

$$F(p) = \int e^{-pt} f(t) dt, \quad (I.01)$$

em outras palavras, a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (I.02)$$

define uma certa função de  $p$ , denominada de imagem de  $f(t)$ .

As notações que representa a imagem da função  $f(t)$  e sua inversa são:

$$\begin{aligned}
 F(p) &\rightarrow f(t), \\
 f(t) &\leftarrow F(p).
 \end{aligned}
 \tag{1.03}$$

## 1.2-) Desenvolvimento do teorema da convolução

Seja  $F_1(p)$  e  $F_2(p)$  as imagens das funções  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  respectivamente.

Definindo a função,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau,
 \tag{1.04}$$

satisfazendo as seguintes condições:

$$\left. \begin{aligned}
 f_1(t) &= 0 \\
 f_2(t) &= 0
 \end{aligned} \right\} p/t < 0.
 \tag{1.05}$$

Pela definição, (1.01), a imagem de  $f(t)$  para  $0 < t < \infty$  é de acordo com as condições (1.05), pode-se dizer que  $f(t)$  encontra-se no domínio de

$$\left. \begin{aligned}
 \tau &= 0 \\
 \tau &= t
 \end{aligned} \right\},
 \tag{1.06}$$

definindo duas retas, primeira constante de valor zero, a segunda variando de  $\tau$  até  $\infty$ .

Substituindo os limites de integração e mudando a ordem de integração em (1.05), vem

$$F(p) = \int_0^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f_2(t - \tau) dt \right] d\tau,
 \tag{1.07}$$

isolando a integral interna de (1.07) e efetuando a seguinte mudança de variável,

$$t - \tau = y,
 \tag{1.08}$$

tem-se:

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f_2(t - \tau) dt = \int_0^{\infty} e^{-p(y+\tau)} f_2(y) dy = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-py} f_2(y) dy,$$

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f_2(t - \tau) dt = e^{-p\tau} F_2(p).$$
 (I.09)

substituindo em (I.07), vem:

$$F(p) = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau} F_2(p) \right] d\tau = F_2(p) \int_0^{\infty} \left[ f_1(\tau) e^{-p\tau} \right] d\tau = F_2(p) F_1(p),$$

$$F(p) = F_2(p) F_1(p).$$
 (I.10)

O sinal da convolução entre duas funções é convenicionado pelo símbolo \*, ou seja,

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau,$$
 (I.11)

A convolução obedece a lei comutativa, isto é basta para tal substituir a variável  $(t-\tau)$  por  $z$  em (I.11). Logo, fazendo a substituição

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - z) f_2(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z) f_1(t - z) dz = f_2(t) * f_1(t),$$

o que resulta em,

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t).$$
 (I.12)

## Apêndice II – Transformada de Fourier

Este apêndice tem o objetivo de apresentar uma sucinta dedução da transformada de Fourier e sua aplicação na função impulso. Foram utilizadas as bibliografias: Piskounov (1997) e Hsu (c. a. 1985) para o desenvolvimento.

### II.1-) Transformada de Fourier

Chama-se série de Fourier a série trigonométrica de uma função periódica  $f(x)$  de período  $2\pi$  a expressão,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots \quad (\text{II.01})$$

representada na forma compacta para o intervalo  $(-\pi, +\pi)$  tem-se,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(kx) + b_n \sin(kx)], \quad (\text{II.02})$$

onde,  $a_0$ ,  $a_k$  e  $b_k$  são as constantes sendo  $k$  número inteiro variando de  $(k=1, 2, \dots, \infty)$ .

Os valores de  $a_0$ ,  $a_k$  e  $b_k$  são obtidos pelas seguintes expressões:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (\text{II.03})$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad (\text{II.04})$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx. \quad (\text{II.05})$$

Para a transformada de Fourier considere a função  $f(x)$  absolutamente integrável definida no intervalo de  $(-\infty)$  a  $(+\infty)$ , ou melhor, que o integral,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = C, \quad (\text{II.06})$$

existe. Sendo  $C$  o valor numérico resultante da integral.

Admitindo-se que  $f(x)$  seja desenvolvida em série de Fourier em qualquer intervalo de  $(-m, +m)$ , logo:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{m} x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{m} x\right), \quad (\text{II.07})$$

onde:

$$a_k = \frac{1}{m} \int_{-m}^m f(t) \cos\left(k \frac{\pi}{m} t\right) dt, \quad (\text{II.08})$$

$$b_k = \frac{1}{m} \int_{-m}^m f(t) \sin\left(k \frac{\pi}{m} t\right) dt, \quad (\text{II.09})$$

sendo  $t$  o tempo.

Substituindo (II.08) e (II.09) em (II.07), com algumas manipulações, resulta

$$f(x) = \frac{1}{2m} \int_{-m}^m f(t) dt + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_{-m}^m f(t) \cos\left(\frac{k\pi(t-x)}{m}\right) dt \right], \quad (\text{II.10})$$

sendo o incremento,

$$\Delta\omega_k = \frac{\pi}{m}. \quad (\text{II.11})$$

Quando  $m \rightarrow \infty$ , pode-se dizer que:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{m}; \omega_2 = \frac{2\pi}{m}; \dots; \omega_k = \frac{k\pi}{m}; \dots \quad (\text{II.12})$$

Considerando a igualdade,

$$\frac{1}{\pi} \Delta\omega_k = \frac{1}{m} \frac{\pi}{\pi}. \quad (\text{II.13})$$

e substituindo no segundo membro de (II.10), tem-se,

$$f(x) = \frac{1}{2m} \int_{-m}^m f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_{-m}^m f(t) \cos(\omega_k (t-x)) dt \right] \Delta\omega_k. \quad (\text{II.14})$$

O primeiro membro da direita tende a zero quando  $m$  tende para infinito, com base na consideração inicial, (II.06), pois,

$$\frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{2m} C \rightarrow 0, \quad (\text{II.15})$$

substituindo em (II.10) e tornando o somatório numa integral, resulta,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(t-x)) dt \right) d\omega, \quad (\text{II.16})$$

expressão denominada de integral de Fourier.

Por ser a integral de Fourier uma função par é perfeitamente determinável para valores negativos de  $\omega$ , logo:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(t-x)) dt \right) d\omega. \quad (\text{II.17})$$

Sendo uma função ímpar, no intervalo de  $(-\infty, +\infty)$  igual a zero, pode-se dizer que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sen}(\omega(t-x)) dt \right) d\omega = 0, \quad (\text{II.18})$$

pois a expressão entre parênteses é zero. Multiplicando-a por  $\frac{j}{2\pi}$  e acrescentando à direita de (II.17), tem-se.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{ \cos[\omega(t-x)] + j \operatorname{sen}[\omega(t-x)] \} dt \right\} d\omega, \quad (\text{II.19})$$

podendo ser escrita na forma,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega(t-x)} dt \right] d\omega, \quad (\text{II.20})$$

também na forma,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] e^{-j\omega x} d\omega. \quad (\text{II.21})$$

Pode-se então dizer que a transformada de Fourier de uma função no domínio do tempo  $f(t)$ , representada por  $\mathfrak{T}[f(t)] = F(\omega)$ , é

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt, \quad (\text{II.22})$$

e a sua inversa,  $\mathfrak{T}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$ ,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega. \quad (\text{II.23})$$

Difere-se pelo sinal no expoente, podendo também ser escritas invertidas ou seja,

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (\text{II.24})$$

e a sua inversa

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{II.25})$$

Escrevendo II.21 na seguinte forma,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] e^{-j\omega x} d\omega. \quad (\text{II.26})$$

Agora, a transformada de Fourier de uma função no domínio do tempo  $f(t)$ , representada também por  $\mathfrak{T}[f(t)] = F(\omega)$ , é

$$F(\omega) = \mathfrak{T}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (\text{II.27})$$

E a sua inversa,  $\mathfrak{T}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$ , é:

$$f(t) = \mathfrak{T}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{II.28})$$

## II.2-) Aplicação da Transformada de Fourier

I-) Inicialmente considere a função impulso unitário, também denominada função delta ou função delta de Dirac, podendo ser definida de várias maneiras, mas usualmente expressa pela relação

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & p/t \neq 0 \\ \infty & p/t = 0 \end{cases}, \text{ onde} \quad (\text{II.29})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1, \text{ sendo } \varepsilon > 0. \quad (\text{II.30})$$

A transformada de Fourier de uma função impulso, utilizando, (II.24), é dada por:

$$\mathfrak{T}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (\text{II.31})$$

II-) Considerando a definição em (II.30), tem-se:

$$\mathfrak{T}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1 \quad (\text{II.32})$$

III-) Aplicando-se a transformada inversa de Fourier no valor 1, utilizando (II.28), tem-se

$$\delta(t) = \mathfrak{T}^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{j\omega t} d\omega, \quad \text{logo}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{II.33})$$

IV-) Escrevendo (II.33) na forma

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\omega t) + j\text{sen}(\omega t)] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} j\text{sen}(\omega t) d\omega,$$

por ser a função seno uma função ímpar tem-se:

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega t) d\omega. \quad (\text{II.34})$$

V-) O valor da transformada de Fourier de um incremento de impulso, é:

$$\mathfrak{T}[\delta(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} d\omega = e^{-j\omega t} \Big|_{t=t_0},$$

$$\mathfrak{T}[\delta(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0}. \quad (\text{II.35})$$

### II.3-) Algumas propriedades da Transformada de Fourier

I-) A transformada de Fourier da função  $f(t-t_0)$  é dada por:

$$\mathfrak{T}[f(t - t_0)] = F(\omega) e^{-j\omega t_0}, \quad (\text{II.36})$$

como pode se observado no desenvolvimento a seguir;

$$\mathfrak{T}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt, \text{ fazendo}$$

$t - t_0 = x$ , conseqüentemente,  $dt = dx$ , vem:

$$\mathfrak{T}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx. \text{ Logo}$$

$$\mathfrak{T}[f(t - t_0)] = F(\omega) e^{-j\omega t_0}, \text{ c.q.d.}$$

II-) O teorema da convolução no tempo. Seja  $\mathfrak{T}[f_1(t)] = F_1(\omega)$  e  $\mathfrak{T}[f_2(t)] = F_2(\omega)$ , deseja-se a transformada de Fourier da convolução de  $f_1(t) * f_2(t)$ , ou seja

$$\mathfrak{T}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t - x) dx \right] e^{-j\omega t} dt,$$

invertendo a ordem de integração,

$$\mathfrak{T}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - x) e^{-j\omega t} dt \right] dx,$$

utilizando (II.33), tem-se,

$$\mathfrak{T}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) F_2(\omega) e^{-j\omega x} dx = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-j\omega x} dx \right] F_2(\omega),$$

por definição, resulta:

$$\mathfrak{T}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega). \quad (\text{II.37})$$

III-) O teorema da convolução na frequência. Seja

$$\mathfrak{T}^{-1}[F_1(\omega)] = f_1(t) \quad \text{e} \quad \mathfrak{T}^{-1}[F_2(\omega)] = f_2(t).$$

Deseja-se a transformada inversa de Fourier da convolução de  $F_1(\omega) * F_2(\omega)$ , ou seja,

$$\mathfrak{T}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = \mathfrak{T}^{-1} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy \right] e^{j\omega t} d\omega,$$

trocando a ordem de integração e substituindo  $\omega - y = x$ , vem,

$$\mathfrak{T}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x) e^{j(x+y)t} dx \right] dy,$$

abrindo em duas integrais, e resolvendo, tem-se:

$$\mathfrak{T}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = 2\pi [f_1(t) f_2(t)]. \quad (\text{II.38})$$

Conseqüentemente:

$$\mathfrak{T}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy. \quad (\text{II.39})$$

### Apêndice III – Transformada de Hilbert

Este apêndice tem o objetivo de apresentar uma sucinta dedução da transformada de Hilbert e a sua relação com a transformada de Fourier. Foram utilizadas as bibliografias: Hsu[97] e Bendat[100] para o desenvolvimento.

A transformada de Hilbert de uma função  $f(x)$  onde o tempo  $t$  varia de  $-\infty$  a  $+\infty$ , é o valor real da função  $\tilde{x}(t)$ , definida por:

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{H}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau. \quad (\text{III.01})$$

Observando a definição em (III.01), pode-se compará-la a integral de convolução, expressão (I.04) no apêndice I, onde

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(t), \quad e \\ f_2(x) &= \left(\frac{1}{\pi}\right)t, \quad \text{logo} \\ \tilde{x}(t) &= f(t) * \left[\left(\frac{1}{\pi}\right)t\right]. \end{aligned} \quad (\text{III.02})$$

De acordo com Bendat[100], a transformada de Fourier de para um sistema com fase de  $\frac{\pi}{2}$ , tem-se:

$$\mathfrak{F}\left[\left(\frac{1}{\pi}\right)t\right] = (-j \operatorname{sgn} f) = \begin{cases} -j & p/\omega > 0 \\ +j & p/\omega < 0 \end{cases}. \quad (\text{III.03})$$

Sendo a  $\mathfrak{F}[f(t)] = F(\omega)$ , utilizando a convolução na transformada de Fourier, equação (D.34) no anexo D, a transformada de Hilbert torna-se,

$$\tilde{x}(\omega) = (-j \operatorname{sgn} f) F(\omega). \quad (\text{III.04})$$

A transformada de Hilbert de um sinal analítico definido por

$$z(t) = x(t) + j \tilde{x}(t) \quad (\text{III.05})$$

que pode ser escrita na forma,

$$z(t) = A(t) e^{j\phi(t)}, \quad (\text{III.06})$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= \sqrt{x^2(t) + \left(\tilde{x}(t)\right)^2}, & e \\ \phi(t) &= \tan^{-1} \left[ \frac{\tilde{x}(t)}{x(t)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.07})$$

Sendo  $Z(\omega)$  a transformada de Fourier de  $z(t)$

$$Z(\omega) = \mathfrak{T} \left[ x(t) + j \tilde{x}(t) \right]. \quad (\text{III.08})$$

A propriedade distributiva é válida para a transformada de Fourier, logo

$$Z(\omega) = \mathfrak{T} [x(t)] + j \mathfrak{T} [\tilde{x}(t)] = X(\omega) + j \tilde{X}(\omega). \quad (\text{III.09})$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier em  $Z(\omega)$ , tem-se:

$$z(t) = \mathfrak{T}^{-1} [Z(\omega)] = x(t) + j \tilde{x}(t), \quad (\text{III.10})$$

onde  $x(t)$  é a parte real e  $\tilde{x}(t)$  é a parte imaginária, transformada de Hilbert de  $x(t)$ .

Porém, a transformada de Hilbert de  $x(t)$ , pela equação (III.04) é dada por

$$\tilde{x}(\omega) = (-j \operatorname{sgn} \omega) F(\omega), \quad (\text{III.11})$$

substituindo em (III.09) resulta em,

$$Z(\omega) = [1 + \operatorname{sgn} f] X(\omega) = B(\omega) X(\omega). \quad (\text{III.12})$$

Utilizando (III.03), tem-se,

$$B(\omega) = \begin{cases} 2 & p/\omega > 0 \\ 0 & p/\omega < 0 \end{cases}. \quad (\text{III.13})$$

logo, pode-se dizer que:

$$Z(\omega) = \begin{cases} [2 X(\omega)] & p/\omega > 0 \\ e & \\ 0 & p/\omega < 0 \end{cases}. \quad (\text{III.14})$$

Seja,

$$F(\omega) = \mathfrak{Z}[f(t)] = R(\omega) + jX(\omega). \quad (\text{III.15})$$

Se  $f(t)$  não contém impulso na origem, então são válidas as equações:

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{\omega - y} dy, \quad (\text{III.16})$$

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{\omega - y} dy. \quad (\text{III.17})$$

Para demonstrar esta relação, considera-se que,

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t), \quad (\text{III.18})$$

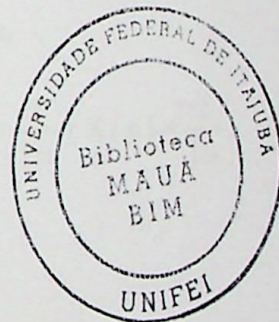
onde  $f_p(t)$  é uma função par e  $f_i(t)$  é uma função ímpar, sendo,

$$f(t) = 0 \quad p/ \quad t < 0, \text{ tem-se:}$$

$$f_p(t) = -f_i(t) \quad p/ \quad t < 0. \quad (\text{III.19})$$

Sendo  $f(t)$ , uma função periódica, pode-se demonstrar que:

$$f(t) = 2 f_p(t) = 2 f_i(t) \quad p/t > 0. \quad (\text{III.20})$$



Assim, pode-se dizer que:

$$\left. \begin{aligned} f_p(t) &= f_i(t) \operatorname{sgn} t \\ f_i(t) &= f_p(t) \operatorname{sgn} t \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.21})$$

onde:

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1 & p/t > 0 \\ -1 & p/t < 0 \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

Também, demonstra-se que: se  $f(t)$  que se uma função real e par a sua transformada de Fourier é uma função real. E a transformada de Fourier de uma função ímpar é puro imaginário, ou seja:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{T}[f_p(t)] &= R(\omega) \\ \mathfrak{T}[f_i(t)] &= j X(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.23})$$

e

$$\mathfrak{T}[\operatorname{sgn} t] = \frac{2}{j\omega} \quad (\text{III.24})$$

logo, de acordo com (II.36) do apêndice II tem-se,

$$R(\omega) = \mathfrak{T}[f_p(t)] = \mathfrak{T}[f_i(t) (\operatorname{sgn} t)] = \frac{1}{2\pi} j X(\omega) * \frac{2}{j\omega}, \quad (\text{III.25})$$

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{\omega - y} dy. \quad (\text{III.26})$$

Similarmente,

$$j X(\omega) = \mathfrak{T}[f_i(t)] = \mathfrak{T}[f_p(t) (\operatorname{sgn} t)] = \frac{1}{2\pi} R(\omega) * \frac{2}{j\omega}, \quad (\text{III.27})$$

$$\mathfrak{T}[f_i(t)] = -j \frac{1}{\pi} R(\omega) * \frac{1}{\omega}, \quad (\text{III.28})$$

logo:

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} R(\omega) * \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{\omega - y} dy. \quad (\text{III.29})$$