

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Equações Diferenciais Binárias  
e Aplicações**

**Douglas Modesto da Fraga Candido**

**Orientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 18 DE FEVEREIRO DE 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# **Equações Diferenciais Binárias e Aplicações**

**Douglas Modesto da Fraga Candido**

**Orientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

**Área de Concentração: Geometria e Topologia**

ITAJUBÁ – MG

18 DE FEVEREIRO DE 2022

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Paulo e Luciete, por todo o apoio, presença e amor que recebi em toda minha vida. Esta dissertação é a prova de que seus esforços valeram a pena. Ao meu irmão e melhor amigo, Nicholas, obrigado por sempre estar do meu lado e cuidar de mim, tenho sorte de tê-lo como irmão.

Agradeço também meu orientador Fabio Scalco Dias, pela dedicação e comprometimento em realizar uma ótima dissertação e por me ensinar tanto nos últimos quatro anos, desde a minha iniciação científica, passando pelo trabalho final de graduação e finalmente a dissertação de mestrado. Aprendi muito com você!

Ao professor Luis Fernando de Osório Mello, que foi parte crucial na minha formação acadêmica, sendo um modelo de dedicação e trabalho duro que sempre vou seguir.

Agradeço à todos da minha família que fizeram parte da minha vida acadêmica, sempre me apoiando e encorajando.

Aos meus colegas de mestrado e da graduação, com certeza passamos ótimos momentos juntos. Em especial à minha grande amiga Thayná, que tornou os dias em Itajubá mais divertidos.

Agradeço a todos os professores da matemática que passaram pela minha vida, eu não chegaria aqui se não fosse por vocês.

A todos que não nomeei, mas que, de alguma forma, passaram pela minha vida e me fizeram crescer.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos de mestrado.

*“ Um dia, quando olhares para trás, verás que os dias mais belos foram aqueles em que lutaste. ”*

*Sigmund Freud.*

# Resumo

Nesta dissertação estudamos a classificação topológica local das curvas integrais da equação diferencial binária (EDB)

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0$$

quando os coeficientes não se anulam simultaneamente na origem e quando os coeficientes se anulam simultaneamente na origem e a função discriminante  $\delta = b^2 - ac$  tem uma singularidade de Morse. Além disso, usamos esta classificação para o entendimento das linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  próximas a um ponto umbílico e o entendimento das configurações topológicas das linhas assintóticas em pontos parabólicos de superfícies em  $\mathbb{R}^4$ .

**Palavras-chave:** Equações diferenciais binárias, Geometria diferencial, Linhas de curvatura, Linhas assintóticas, Superfícies em  $\mathbb{R}^4$ .

# Abstract

In this dissertation we study the local topological classification of the integral curves of the binary differential equation (BDE)

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0$$

when the coefficients do not vanish simultaneously at the origin and when the coefficients vanish simultaneously at the origin and the discriminant function  $\delta = b^2 - ac$  has a Morse singularity. Furthermore, we use this classification to understand the lines of curvature at umbilic points on a surface in  $\mathbb{R}^3$  and to understand the topological configurations of asymptotic lines at a parabolic point on a surface in  $\mathbb{R}^4$ .

**Keywords:** Binary differential equations, Differential geometry, Principal lines, Asymptotic lines, Surfaces in  $\mathbb{R}^4$ .

# Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice	v
Lista de Figuras	vii
Introdução	1
<b>1 Equações Diferenciais Binárias</b>	<b>5</b>
1.1 Formas normais das EDBs do tipo I . . . . .	7
<b>2 EDBs do tipo II</b>	<b>12</b>
2.1 Blowing-up de singularidades de EDBs . . . . .	12
2.2 Levantamento do Campo de Direções . . . . .	14
2.3 Formas normais das EDBs do tipo II . . . . .	19
2.3.1 Redução formal das EDBs . . . . .	20
2.3.2 Partição do plano $(b_1, b_2)$ . . . . .	27
2.3.3 Singularidades mais degeneradas . . . . .	42
<b>3 Linhas de Curvatura de Superfícies em <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>59</b>

<b>4 Superfícies em <math>\mathbb{R}^4</math></b>	<b>68</b>
4.0.1 Elipse de curvatura . . . . .	70
4.0.2 Direções assintóticas em $M$ . . . . .	75
<b>Conclusões</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>84</b>



# Lista de Figuras

1	Da esquerda para direita: família de cúspides, sela dobrada, nó dobrado e foco dobrado. . . . .	2
2	Umbílicos Darbouxianos. . . . .	3
1.1	Configurações topológicas das EDBs $dy^2 + dx^2 = 0$ (esquerda) e $dy^2 - dx^2 = 0$ (direita). . . . .	9
1.2	Configuração topológica da EDB $dy^2 + xdx^2 = 0$ . . . . .	10
1.3	Configurações topológicas das EDBs $dy^2 + (-y - x^2)dx^2 = 0$ (esquerda), $dy^2 + (-y + 1/32x^2)dx^2 = 0$ (centro) e $dy^2 + (-y + x^2)dx^2 = 0$ (direita). . . . .	11
1.4	Configurações topológicas de singularidades degeneradas das EDBs $dy^2 + (-y + x^3)dx^2 = 0$ (esquerda) e $dy^2 + (-y + 1/16x^2)dx^2 = 0$ (direita). . . . .	11
2.1	Partição do plano $(b_1, b_2)$ , juntamente com as regiões $R_i$ , $i = 1, \dots, 4$ . . . . .	29
2.2	Estabilidades das singularidades da EDB (2.14). . . . .	32
2.3	Partição do plano $(b_1, b_2)$ , juntamente com suas regiões $R_i$ , $i = 1, \dots, 8$ . . . . .	34
2.4	Estabilidades das singularidades da EDB (2.15). . . . .	38
2.5	Projeção das curvas integrais de uma sela no caso $\epsilon = -1$ (esquerda) e projeção das curvas integrais de um nó no caso $\epsilon = +1$ (direita). . . . .	40
2.6	Configurações topológicas das EDBs (2.16) quando o discriminante é um ponto isolado. . . . .	41
2.7	Configurações topológicas das EDBs (2.16) quando o discriminante é um par de curvas suaves transversais. . . . .	42

2.8	$b_1 = \pm b_2 + 1$ . . . . .	44
2.9	Configurações topológicas do Teorema 2.2. . . . .	45
2.10	Curvas integrais de (2.19). . . . .	50
2.11	Curvas integrais de (2.20). . . . .	52
2.12	Configurações topológicas da EDB $(y, 2x + 3y + x^2, y) = 0$ à esquerda e da EDB $(y, -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + x^2, y) = 0$ à esquerda. . . . .	53
2.13	Configuração topológica da EDB $(x + y, x^2, y)$ . . . . .	55
2.14	Configurações das EDBs quando $\phi$ e $\alpha_1$ têm duas raízes em comum e seus blow-ups: à esquerda quando $\Lambda_1\Lambda_2 > 0$ e à direita quando $\Lambda_1\Lambda_2 < 0$ . . . . .	56
2.15	Configurações topológicas das EDBs descritas no Teorema 2.4. . . . .	58
3.1	Linhas de curvatura próximas a um ponto umbílico. . . . .	60
4.1	Elipse de curvatura. . . . .	71

# Introdução

Uma equação diferencial implícita é uma equação da forma

$$F(x, y, dy/dx) = 0,$$

onde  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave. A classificação de campo de vetores genéricos e campos de direções, a menos de difeomorfismos e homeomorfismos, é devido a Poincaré, Seigel, Hartman e Grossman. A classificação local de campos direcionais multi-valorados genéricos no plano foi feita por Thom, Dara, Davydov entre outros. Singularidades de equações implícitas de primeira ordem foram escolhidas como tema de uma competição patrocinada pelo Rei Oscar II da Suécia em 1885. Um dos quatro tópicos envolvia encontrar formas normais de uma equação em uma vizinhança de um ponto singular. Em 1932, Cibrario obteve a primeira dessas formas,  $(dy/dx)^2 = x$ , na vizinhança de um ponto singular regular de uma equação implícita. Posteriormente Dara redescobriu esta forma normal e mostrou que os pontos singulares não regulares de uma equação implícita podem ser divididos em cinco tipos, a saber: selas dobradas, nós dobrados, focos dobrados e pontos elípticos e hiperbólicos.

O foco de estudo desta dissertação são as equações diferenciais binárias. Uma equação diferencial binária (EDB) é uma equação diferencial implícita escrita localmente, em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , como

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \tag{1}$$

onde os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  (chamados de coeficientes da EDB (1)) são funções reais e suaves em  $U$ . As EDBs são muito estudadas e têm aplicações em geometria diferencial, equações diferenciais parciais e teoria de controle.

Para cada EDB definimos a função discriminante  $\delta = b^2 - ac$  e o conjunto discriminante

$$\Delta = \{(x, y) \in U : \delta(x, y) = 0\}.$$

A EDB define duas direções em pontos onde  $\delta > 0$ , uma direção em pontos de  $\Delta$  e não define direções em pontos onde  $\delta < 0$ .

Neste trabalho dividimos as EDBs em dois grupos: as equações cujos coeficientes não se anulam simultaneamente em ponto algum de  $U$ , estas são chamadas EDBs do tipo I e as equações cujos coeficientes se anulam simultaneamente em algum ponto, estas são chamadas do tipo II. O problema de encontrar a forma normal de uma EDB é um problema central no estudo das mesmas. No caso das EDBs do tipo I é utilizado a teoria de redução formal de campos vetoriais, desenvolvida por Poincaré, que consiste em aniquilar sucessivamente todos os termos de grau maior ou igual a 2 da equação. Este processo pode, no entanto, não convergir. É mostrado em [5] que uma certa classe de EDBs do tipo I possui como configuração das linhas integrais uma família de cúspides em pontos regulares do discriminante e uma sela/nó/foco dobrados em pontos singulares do discriminante, como mostrado na Figura 1.

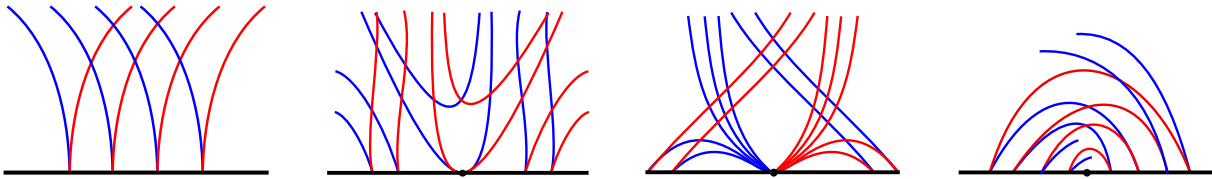


Figura 1: Da esquerda para direita: família de cúspides, sela dobrada, nó dobrado e foco dobrado.

Para o estudo das EDBs do tipo II, um dos meios de encontrar os modelos topológicos é considerar o blow-up de singularidades de EDBs. Guíñez [13] utilizou esta técnica em EDBs onde o discriminante são pontos isolados, chamadas por ele de equações quadráticas positivas. Porém, é mostrado em [20] que esta técnica pode ser estendida para lidar com EDBs mais gerais. Outro meio de encontrar modelos topológicos das EDBs do tipo II é o chamado levantamento do campo de direções, que consiste basicamente em definir uma

superfície  $M$  associada à EDB e um campo de direções  $\xi$  em  $M$  tal que a projeção das curvas integrais de  $\xi$  sejam as curvas integrais da EDB.

Entre as EDBs do tipo II, é de nosso interesse estudar aquelas em que a função  $\delta$  tem uma singularidade do tipo Morse. Esta condição garante que a superfície  $M$  seja suave. Este tipo de equação aparece no estudo das linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Suas configurações são determinadas por uma EDB, cujos coeficientes dependem das primeira e segunda formas fundamentais da superfície. As configurações das linhas de curvatura próximas aos pontos umbílicos foram descobertas por Darboux. Sob condições genéricas na terceira derivada ele encontrou três tipos,  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$ , chamados de umbílicos Darbouxianos. Tais configurações são ilustradas na Figura 2.

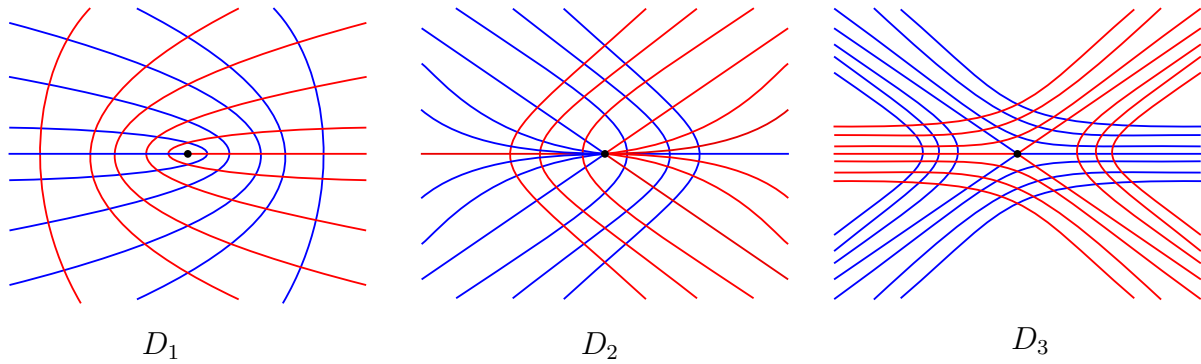


Figura 2: Umbílicos Darbouxianos.

Outra situação em que as EDBs aparecem é no estudo das linhas assintóticas de superfícies em  $\mathbb{R}^4$ . A equação das linhas assintóticas é uma EDB que depende apenas dos coeficientes da segunda forma fundamental da superfície. É mostrado em [7] que, em pontos parabólicos, a equação das linhas assintóticas é equivalente à uma EDB do tipo I e, portanto, tem uma das configurações apresentadas na Figura 1. Já em pontos umbílicos esta equação é equivalente à uma EDB do tipo II e suas configurações são as mesmas estudadas, na sua maioria, por Farid e por Bruce em [4].

Esta dissertação se apresenta como segue:

No capítulo 1 apresentamos uma introdução às equações diferenciais implícitas e às equações diferenciais binárias. Apresentamos também as formas normais das EDBs do

tipo I.

No capítulo 2 apresentamos duas técnicas para o estudo das EDBs, o blow-up de singularidades e o levantamento do campo de direções. Utilizando essas técnicas obtemos as formas normais das EDBs do tipo II cujo discriminante tem uma singularidade de Morse.

No capítulo 3 aplicamos estes estudos para obter o comportamento topológico das linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  próximas aos pontos umbílicos.

No capítulo 4 apresentamos uma introdução à geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^4$ , estudando, por exemplo, a elipse de curvatura. Veremos que, essencialmente, a geometria de segunda ordem destas superfícies em um ponto  $p$  será governada por esta elipse e por sua posição relativamente à origem no plano normal à superfície em  $p$ . Além disso, utilizamos os estudos dos capítulos anteriores para obter o comportamento topológico das linhas assintóticas de superfícies em  $\mathbb{R}^4$ .

Em toda esta dissertação, estamos considerando conhecidos as nomenclaturas e resultados básicos utilizados na teoria de singularidades e na geometria diferencial, tais como: singularidade de Morse,  $k$ -jato, linhas de curvatura, etc. Excelentes referências para esses assuntos são [8] e [10].

# Capítulo 1

## Equações Diferenciais Binárias

Neste capítulo apresentaremos as equações diferenciais implícitas e um caso particular das mesmas; as equações diferenciais binárias. Além disso, estudaremos a classificação topológica local das curvas soluções para uma classe de equações diferenciais binárias, com esta finalidade apresentaremos as formas normais para tal classe. Equações diferenciais implícitas aparecem em diversos ramos da matemática, em particular na geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^4$ .

Uma equação diferencial implícita (EDI) é qualquer equação da forma

$$F(x, y, p) = 0, \tag{1.1}$$

onde  $F$  é uma função suave nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $p = dy/dx$ .

Uma curva integral de (1.1) é uma curva suave

$$\begin{aligned} \alpha : (-1, 1) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t)), \end{aligned}$$

tal que  $\beta(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_2'(t)/\alpha_1'(t))$  é uma solução da equação (1.1), ou seja,  $F(\beta(t)) = 0$ , para todo  $t \in (-1, 1)$ . Se  $F_p$  é diferente de zero em algum ponto  $(x_0, y_0, p_0)$  segue do Teorema da Função Implícita que a equação (1.1) reduz-se, numa vizinhança do ponto  $(x_0, y_0)$ , a uma equação ordinária da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y).$$

Assim, para cada valor de  $p$  tal que  $F(x, y, p) = 0$  e  $F_p(x, y, p) \neq 0$  obtemos uma curva integral que passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$ . Portanto, uma EDI pode ser pensada como uma superposição de equações diferenciais ordinárias e determinará, geralmente, várias curvas integrais por um ponto dado no plano.

Uma EDI é chamada **Equação Diferencial Binária** (EDB) se existem no máximo duas direções para cada ponto do plano. Neste trabalho estudaremos as EDBs da forma

$$(a, b, c) = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (1.2)$$

onde  $a, b$  e  $c$  são funções suaves em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definição 1.1.** *A partir da equação (1.2) definimos a função*

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y),$$

*chamada **função discriminante** da EDB, e o conjunto discriminante*

$$\Delta = \{(x, y) \in U : \delta(x, y) = 0\}.$$

A equação (1.2) define um par de direções em cada ponto  $(x, y) \in U$  onde  $\delta(x, y) > 0$  e não existem direções em pontos onde  $\delta(x, y) < 0$ . Além disso, as duas direções coincidem sobre o conjunto  $\Delta$ , desde que os coeficientes da equação (1.2) não se anulem simultaneamente no ponto. Nesses pontos, toda direção é uma solução de (1.2).

As soluções da equação (1.2) determinam um par de folheações  $\mathcal{F}_i$ ,  $i = 1, 2$ , na região  $\delta > 0$ . Neste trabalho, a **configuração das soluções** de (1.2) é formada pela terna  $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \delta\}$ . Em todas as configurações apresentadas nesta dissertação, desenhamos uma folheação em vermelho e a outra em azul, e o discriminante na cor preta.

**Definição 1.2.** *Uma EDB em que os coeficientes não se anulam simultaneamente em ponto algum é chamada do **tipo I** e uma EDB em que os coeficientes se anulam em algum ponto é chamada do **tipo II**.*

**Definição 1.3.** *Duas equações diferenciais binárias são chamadas **topologicamente equivalentes** se existir um homeomorfismo local do plano que leva a configuração de uma delas na outra.*



## 1.1 Formas normais das EDBs do tipo I

Consideramos aqui as EDBs da forma

$$w = (a, b, c) = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (1.3)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são funções suaves que não se anulam simultaneamente em  $(0, 0)$ .

O estudo desse tipo de equação é feito em [5]. A teoria de redução formal de campos vetoriais para uma forma normal foi desenvolvida por Poincaré. O método de Poincaré consiste em anular sucessivamente os termos de ordem  $k$  ( $k \geq 2$ ) da equação.

Apresentamos aqui uma breve introdução deste método. Primeiramente vamos começar com uma mudança de coordenadas linear na tentativa de anular alguns dos termos constantes das funções  $a, b$  e  $c$ .

Considere a EDB (1.3). Denotemos os termos constantes de  $a$ ,  $b$  e  $c$  por  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente.

A mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y \\ y &= \gamma X + \delta Y, \end{aligned}$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  são números reais e  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ , tal que

$$\begin{aligned} dx &= \alpha dX + \beta dY \\ dy &= \gamma dX + \delta dY, \end{aligned}$$

leva a uma nova EDB com termos constantes  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  tais que

$$\begin{aligned} A' &= A\delta^2 + 2B\beta\delta + C\beta^2 \\ B' &= A\gamma\delta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\alpha\beta \\ C' &= A\gamma^2 + 2B\alpha\gamma + C\alpha^2. \end{aligned}$$

Podemos escrever as igualdades acima, na forma matricial, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix}.$$

Defina a seguinte relação: sejam  $A, B$  matrizes simétricas  $2 \times 2$ , então  $A$  está relacionada com  $B$ , ou  $A \sim B$ , se, e somente se, existe  $S$ , matriz inversível  $2 \times 2$ , tal que

$$SAS^T = B.$$

**Lema 1.1.** *A relação acima é uma relação de equivalência no conjunto das matrizes simétricas  $2 \times 2$ .*

*Demonstração:*

Sejam  $A, B, C$  matrizes simétricas  $2 \times 2$ .

- Reflexiva:  $IAI^T = AI = A$ , assim,  $A \sim A$ .
- Simétrica: se  $A \sim B$ , então existe  $S$ , matriz inversível  $2 \times 2$ , tal que

$$SAS^T = B.$$

Assim

$$A = S^{-1}B(S^T)^{-1} = S^{-1}B(S^{-1})^T,$$

ou seja,  $B \sim A$ .

- Transitiva: se  $A \sim B$  e  $B \sim C$  então existem  $S, T$ , matrizes inversíveis  $2 \times 2$ , tais que

$$SAS^T = B \quad \text{e} \quad TBT^T = C.$$

Logo

$$C = T(SAS^T)T^T = TSA(TS)^T$$

e portanto  $A \sim C$ .

Temos então que a relação  $\sim$  é reflexiva, simétrica e transitiva e, portanto, é uma relação de equivalência.

■

Em [8] temos a Lei de inércia de Sylvester que garante a existência de seis classes de equivalência com respeito a essa relação, sendo elas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, existe uma transformação de coordenadas que transforma a expressão que define a parte constante da EDB (1.3) em uma das seguintes formas:

$$dy^2 + dx^2, \quad dy^2 - dx^2, \quad dy^2 \quad \text{ou} \quad 0,$$

uma vez que podemos multiplicar por uma constante não nula.

Daqui em diante iremos apresentar, sem demonstração, os teoremas que nos dão as formas normais das EDBs do tipo I. As demonstrações podem ser encontradas em [5].

**Proposição 1.1. (Forma inicial  $dy^2 \pm dx^2$ )**

*Suponha que a EDB tenha parte constante  $dy^2 \pm dx^2 = 0$ . Então, para todo  $k \geq 1$ , podemos fazer uma mudança de coordenadas tal que a nova EDB tenha o  $k$ -jato dado por  $dy^2 \pm dx^2 = 0$ .*

As configurações topológicas das EDBs  $dy^2 \pm dx^2 = 0$  estão representados na Figura 1.1.

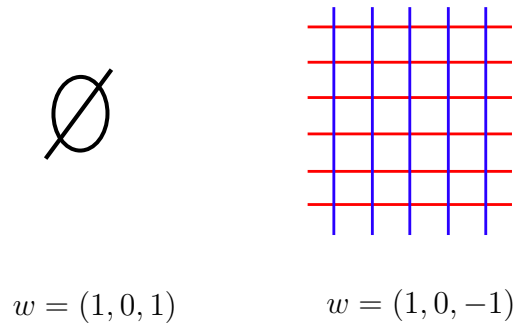


Figura 1.1: Configurações topológicas das EDBs  $dy^2 + dx^2 = 0$  (esquerda) e  $dy^2 - dx^2 = 0$  (direita).

Em EDBs com termo constante  $dy^2$ , todavia, não podemos sempre cancelar todos os

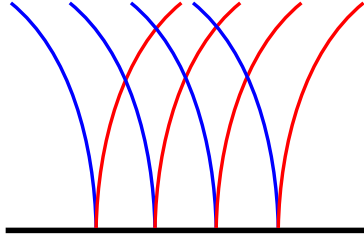
$k$ -jatos. É mostrado em [5] que a forma inicial  $dy^2$  é levada aos seguintes representantes no espaço dos 1-jatos:

$$dy^2 + xdx^2, \quad dy^2 - ydx^2, \quad dy^2.$$

O caso  $dy^2 + xdx^2$  é estudado como os casos anteriores e enunciamos os seguintes teoremas, que omitiremos as demonstrações.

**Proposição 1.2.** *Suponha que a EDB tenha 1-jato dado por  $dy^2 + xdx^2 = 0$ . Então, para todo  $k \geq 1$ , podemos fazer uma mudança de coordenadas tal que a nova EDB tenha o  $k$ -jato dado por  $dy^2 + xdx^2 = 0$ .*

A configuração topológica da EDB  $dy^2 + xdx^2 = 0$  está representado na Figura 1.2.



$$w = (1, 0, x)$$

Figura 1.2: Configuração topológica da EDB  $dy^2 + xdx^2 = 0$ .

O caso  $dy^2 - ydx^2$  é também estudado em [5]. Este caso é um pouco mais complicado. Se prosseguirmos como nos casos anteriores temos problemas para eliminar os termos da forma  $(0, 0, x^k)$  e temos que o 2-jato da nossa EDB pode ser reduzido para  $dy^2 + (-y + \lambda x^2)dx^2 = 0$ .

Para prosseguirmos precisamos de novas técnicas que fogem do escopo deste trabalho. Apresentamos, porém, o resultado sobre a forma normal  $dy^2 - ydx^2$ .

**Proposição 1.3.** *Para quase todos os valores de  $\lambda$ , a EDB com 2-jato  $dy^2 + (-y + \lambda x^2)dx^2 = 0$  é topologicamente equivalente a  $dy^2 + (-y + \lambda x^2)dx^2 = 0$ .*

Nos casos das EDBs  $dy^2 + (-y + \lambda x^2)dx^2 = 0$ , as configurações topológicas variam conforme o  $\lambda$  muda. A técnica usada para entender cada configuração é o levantamento do campo de direções, que será estudada na seção 2.2. Neste caso, as EDBs têm configurações topológicas constantes para  $\lambda < 0$ ,  $0 < \lambda < 1/16$  e  $\lambda > 1/16$ . A Figura 1.3 mostra essas configurações para  $\lambda = -1$ ,  $\lambda = 1/32$  e  $\lambda = 1$ .

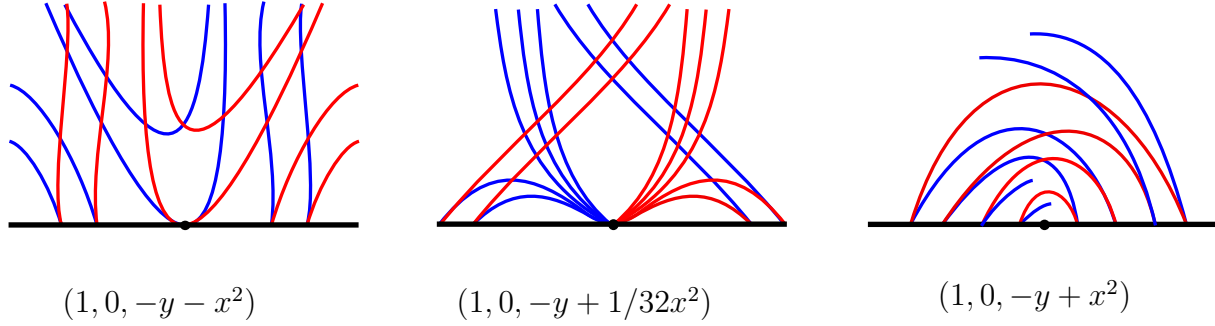


Figura 1.3: Configurações topológicas das EDBs  $dy^2 + (-y - x^2)dx^2 = 0$  (esquerda),  $dy^2 + (-y + 1/32x^2)dx^2 = 0$  (centro) e  $dy^2 + (-y + x^2)dx^2 = 0$  (direita).

**Observação 1.1.** *As configurações topológicas da Figura 1.3 são chamados, respectivamente, da esquerda para a direita, de sela dobrada, nó dobrado e foco dobrado.*

Nos casos onde  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1/16$  temos singularidades mais degeneradas e esses casos são tratados em [3]. As configurações topológicas, nesse caso, são mostradas na Figura 1.4.

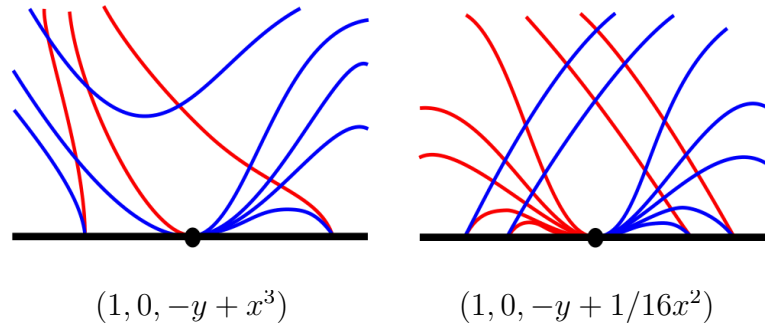


Figura 1.4: Configurações topológicas de singularidades degeneradas das EDBs  $dy^2 + (-y + x^3)dx^2 = 0$  (esquerda) e  $dy^2 + (-y + 1/16x^2)dx^2 = 0$  (direita).

# Capítulo 2

## EDBs do tipo II

Neste capítulo consideramos uma EDB

$$w = (a, b, c) = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (2.1)$$

onde  $a, b, c$  são funções suaves, definidas em um aberto  $U$  contendo a origem e que se anulam em  $(x, y) = (0, 0)$ .

Trataremos da classificação topológica local das curvas integrais da EDB (2.1) quando a função discriminante  $\delta = b^2 - ac$  tem uma singularidade de Morse na origem e chamaremos este caso de EDB do tipo Morse II. Apresentamos nesta dissertação duas técnicas principais para tratar desse problema, a técnica do blow-up de singularidades e a técnica do levantamento do campo de direções. Nas duas seções seguintes faremos uma exposição destas técnicas, para depois utilizá-las na classificação das EDBs (2.1).

### 2.1 Blowing-up de singularidades de EDBs

Um meio de proceder na busca por modelos topológicos das EDBs do tipo II é o blow-up direcional das singularidades da EDB. Guíñez, em [13], utilizou esse método em casos onde o discriminante das EDBs é um ponto isolado, chamadas equações diferenciais quadráticas positivas. Contudo, foi mostrado em [19] e em [20] que a técnica de Guíñez pode ser estendida para lidar com EDBs mais gerais, como, por exemplo, os casos em que o discriminante é formado por um par de curvas suaves transversais.

Mostramos aqui como o método funciona no caso onde o 1-jato da equação (2.1) é dado por  $j^1w = (y, (b_2 - 1)x + b_2y, y) = 0$ . Essa escolha fará mais sentido na próxima seção, onde estudaremos EDBs desta forma.

Sejam  $\mathcal{F}_i(w), i = 1, 2$ , as folheações associadas à EDB 2.1, as quais são tangentes ao campo vetorial

$$a \frac{\partial}{\partial u} + (-b + (-1)^i \sqrt{b^2 - ac}) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Se  $\psi$  é um difeomorfismo do plano real e  $\lambda(x, y)$  é uma função real não nula, foi mostrado em [13] que, para  $i = 1, 2$ , temos as seguintes afirmações:

1.  $\psi(f_i(w)) = f_i(\psi^*(w))$ , se  $\psi$  preserva orientação;
2.  $\psi(f_i(w)) = f_{3-i}(\psi^*(w))$ , se  $\psi$  reverte orientação;
3.  $f_i(\lambda w) = f_i(w)$ , se  $\lambda(x, y)$  é positivo;
4.  $f_i(\lambda w) = f_{3-i}(w)$ , se  $\lambda(x, y)$  é negativo,

onde  $\psi^*$  é a inversa de  $\psi$ .

Escrevemos então

$$w = (y + M_1(x, y), (b_2 - 1)x + b_2y + M_2(x, y), y + M_3(x, y)),$$

onde  $M_i(x, y)$  são funções suaves com 1-jato nulo. Consideraremos o blow-up direcional

$$x = u, \quad y = uv. \tag{2.2}$$

Obtemos então uma nova EDB, que denotaremos por  $w_0$ , com coeficientes

$$\bar{a} = u^2(uv + M_1(u, uv)),$$

$$\bar{b} = uv(uv + M_1(u, uv)) + u((b_2 - 1)u + b_2uv + M_2(u, uv)),$$

$$\bar{c} = v^2(uv + M_1(u, uv)) + 2v((b_2 - 1)u + b_2uv + M_2(u, uv)) + uv + M_3(u, uv).$$

Podemos escrever  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = u(u^2A_1, uB_1, C_1)$  tal que

$$A_1 = v + uN_1(u, v),$$

$$B_1 = v^2 + b_2v + b_2 - 1 + u(N_2(u, v) + vN_1(u, v)),$$

$$C_1 = v(v^2 + 2b_2v + 2b_2 - 1) + u(v^2N_1(u, v) + 2vN_2(u, v) + N_3(u, v)),$$

onde  $M_i(u, uv) = u^2 N_i(u, v)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

A forma quadrática  $w_1 = (u^2 A_1, u B_1, C_1)$  pode ser decomposta em duas 1-formas associadas aos campos de vetores

$$X_i = u^2 A_1 \frac{\partial}{\partial u} + (-u B_1 + (-1)^i \sqrt{u^2 (B_1^2 - A_1 C_1)}) \frac{\partial}{\partial v}, \quad i = 1, 2.$$

Podemos fatorar  $u$  em  $X_i$  e considerar os campos de vetores

$$Y_i = u A_1 \frac{\partial}{\partial u} + (-B_1 + (-1)^i \sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}) \frac{\partial}{\partial v}, \quad i = 1, 2.$$

Na forma de sistema, temos

$$Y_1 = \begin{cases} u' = u A_1 \\ v' = -B_1 - \sqrt{B_1^2 - A_1 C_1} \end{cases}, \quad Y_2 = \begin{cases} u' = u A_1 \\ v' = -B_1 + \sqrt{B_1^2 - A_1 C_1} \end{cases}.$$

A transformação (2.2) preserva orientação se  $u > 0$  e reverte orientação se  $u < 0$ . Como fatoramos o termo  $u$  duas vezes, temos que  $Y_1$  corresponde à folheação  $\mathcal{F}_1$  de  $w$  se  $u > 0$  e à folheação  $\mathcal{F}_2$  se  $u < 0$ ; enquanto  $Y_2$  corresponde à folheação  $\mathcal{F}_2$  de  $w$  se  $u > 0$  e à folheação  $\mathcal{F}_1$  se  $u < 0$ .

Estudaremos, então, os campos vetoriais  $Y_i$  em uma vizinhança da reta  $u = 0$ , e faremos o “blow-down” para obtermos as configurações das curvas integrais da EDB original.

## 2.2 Levantamento do Campo de Direções

Recordamos que as funções  $a, b$  e  $c$  se anulam simultaneamente na origem.

Outro modo de estudarmos os modelos topológicos das EDBs é o método do levantamento do campo de direções. O método do levantamento do campo consiste em desdobrar uma EDB em uma simples EDO sobre um espaço mais complicado.

Considere a EDB 2.1 e o espaço  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ , onde  $\mathbb{R}P^1$  representa o espaço projetivo. Escolhendo uma carta afim em  $\mathbb{R}P^1$ , dada por  $p = dy/dx$ , localmente em  $\mathbb{R}^3$  considere a superfície

$$M = \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 : F = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) = 0\}, \quad (2.3)$$



onde

$$a(x, y) = a_1x + a_2y + o(2), \quad b(x, y) = b_1x + b_2y + o(2) \text{ e } c(x, y) = c_1x + c_2y + o(2).$$

**Observação 2.1.** *Os símbolos  $o(n)$  representam os termos de ordem superior de uma dada expressão, e somente dessa expressão. Por exemplo, no caso anterior, o  $o(2)$  de  $a(x, y)$  não é igual ao  $o(2)$  de  $b(x, y)$ .*

Observe que  $0 \times \mathbb{R}P^1 \subset M$ . Esse conjunto será denotado por **fibra excepcional**.

Poderíamos também ter escolhido uma carta afim em  $\mathbb{R}P^1$ , dada por  $q = dx/dy$  e considerado a superfície

$$N = \{(x, y, q) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 : G = a + 2bq + cq^2 = 0\},$$

neste caso teríamos resultados análogos.

Juntamente com a superfície  $M$  obtemos a projeção natural

$$\begin{aligned} \pi : \quad M &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, p) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

que projeta uma EDO definida sobre  $M$  em uma EDB de  $\mathbb{R}^2$  e que, como mostra a Proposição 2.1, deixa de ser um difeomorfismo local em  $\pi^{-1}(\Delta)$ .

**Definição 2.1.** *O criminante da EDB (2.1) é o fecho do conjunto  $\pi^{-1}(\Delta) \setminus 0 \times \mathbb{R}P^1$ .*

**Proposição 2.1.** *a) A superfície  $M$  dada em (2.3) é suave em uma vizinhança de  $0 \times \mathbb{R}P^1$  se, e somente se, a função discriminante  $\delta$  tem uma singularidade de Morse.*

*b) A projeção  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um difeomorfismo local fora de  $\pi^{-1}(\Delta)$ , onde  $\Delta$  é o conjunto discriminante.*

*Demonstração:*

a) A função  $F_p = \partial F / \partial p = 2ap + 2b$  é identicamente nula em  $0 \times \mathbb{R}P^1$ .

Em uma vizinhança de  $0 \times \mathbb{R}P^1$ ,  $M$  será suave se, e somente se,  $0$  for valor regular de  $F$ . Assim,  $M$  deixa de ser suave em uma vizinhança de  $0 \times \mathbb{R}P^1$  se, e somente se,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0, p) &= a_1 p^2 + 2b_1 p + c_1 \quad \text{e} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0, p) &= a_2 p^2 + 2b_2 p + c_2\end{aligned}$$

forem simultaneamente nulas para algum  $p$ .

A matriz de Sylvester desses dois polinômios é dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & 2b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & 2b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, o resultante de  $\partial F/\partial x(0, 0, p)$  e  $\partial F/\partial y(0, 0, p)$  é

$$R = \det(A) = (c_2 a_1 - c_1 a_2)^2 - 4(b_2 a_1 - b_1 a_2)(c_2 b_1 - c_1 b_2). \quad (2.4)$$

Portanto,  $p$  é solução dos dois polinômios somente quando

$$R = (c_2 a_1 - c_1 a_2)^2 - 4(b_2 a_1 - b_1 a_2)(c_2 b_1 - c_1 b_2) = 0.$$

Por outro lado, a função discriminante é dada por

$$\delta = b^2 - ac = (b_1 x + b_2 y + o(2))^2 - (a_1 x + a_2 y + o(2))(c_1 x + c_2 y + o(2)).$$

Depois de alguns cálculos chegamos que

$$\delta = b^2 - ac = (b_1^2 - c_1 a_1)x^2 + (2b_1 b_2 - c_2 a_1 - c_1 a_2)xy + (b_2^2 - c_2 a_2)y^2 + o(3). \quad (2.5)$$

Como  $\delta_x(0, 0) = 0$  e  $\delta_y(0, 0) = 0$ , a função discriminante possui uma singularidade na origem, esta singularidade será de Morse quando o determinante da matriz Hessiana de  $\delta$ , neste ponto, é diferente de zero. Temos que

$$\begin{aligned}\det(\text{Hess}\delta(0, 0)) &= 4(b_1^2 - a_1 c_1)(b_2^2 - c_2 a_2) - (2b_1 b_2 - c_2 a_1 - c_1 a_2)^2 \\ &= 4(b_2 a_1 - b_1 a_2)(c_2 b_1 - c_1 b_2) - (c_2 a_1 - c_1 a_2)^2 \\ &= -R.\end{aligned} \quad (2.6)$$

Assim,  $\delta$  tem uma singularidade de Morse na origem se, e somente se,  $R = 0$ . Portanto,  $M$  será suave em uma vizinhança de  $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$  se, e somente se,  $\delta$  tem uma singularidade de Morse na origem.

b) A projeção  $\pi$  não é um difeomorfismo local nos pontos  $(x, y, p)$  onde  $F_p(x, y, p) = 0$ , isto é, quando  $F = F_p = 0$ , isto quer dizer que o plano tangente à superfície  $M$  é vertical. É fácil ver que  $F = F_p = 0$  se, e somente se,  $b^2 - ac = 0$ , que é precisamente  $\pi^{-1}(\Delta)$ . ■

Assumindo a superfície  $M$  suave podemos fazer a seguinte construção. Em cada ponto  $(x, y, p)$  de  $M$  podemos escolher uma direção tangente a  $M$  que se projeta sobre uma reta por  $(x, y)$  com direção  $p$ . Explicitamente, seja  $(x, y)$  um ponto de uma curva solução cuja direção tangente é  $p$ , o plano que passa por esta reta tangente e é paralelo ao eixo  $p$  é chamado de **plano de contato**. O plano tangente à superfície  $M$  num ponto  $(x, y, p)$  é diferente do plano de contato sempre que  $F_p \neq 0$ , assim podemos dizer que a intersecção desses planos é uma reta. Logo, os planos tangentes e os planos de contato em todos os pontos vizinhos se interceptam segundo retas, dando origem assim a um campo de direções, que é tangente à superfície  $M$  e determina uma EDO nesta superfície.

**Definição 2.2.** *Um campo vetorial  $\xi$  sobre a superfície  $M$  é chamado de **levantamento** da EDB (2.1) se, e somente se,  $d\pi(\xi)(x, y, p)$  é um vetor de direção  $p$ . Quando  $\xi$  é, além disso, um campo tangente à superfície  $M$ , dizemos que  $\xi$  é um **levantamento adequado** sobre  $M$ .*

**Proposição 2.2.** (a) *O campo vetorial*

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

*é um levantamento adequado sobre  $M$  do campo bivaluado em  $U$ . Esse campo é chamado de **Lie-Cartan**.*

(b) *O campo vetorial  $\xi$  tem genericamente um ou três zeros em  $0 \times \mathbb{R}P^1$ . Estes zeros são do tipo nó ou sela.*

*Demonstração:*

(a) Seja

$$\xi = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial p}$$

um campo vetorial. O campo  $\xi$  é um levantamento adequado se ele é tangente à superfície  $M$  e  $d\pi(\xi)(x, y, p)$  é um vetor de direção  $p$ . Como  $\pi(x, y, p) = (x, y)$  segue que

$$d\pi(\xi)(x, y, p) = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y},$$

portanto  $p = B/A$ . A condição de tangência do campo  $\xi$  em  $M$  é dada por  $AF_x + pAF_y + CF_p = 0$ . Tomando  $A = 1$ , obtemos

$$C = \frac{-(F_x + pF_y)}{F_p}.$$

Multiplicando o campo  $\xi$  por  $F_p$ , segue que

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}.$$

O item (a) está provado.

(b) Os zeros do campo  $\xi$  são dados pelo anulamento de  $F$ ,  $F_p$  e  $F_x + pF_y$ . Quando  $F = F_p = 0$  temos que  $b^2 - ac = 0$ , e isto determina a imagem inversa de  $\Delta$  pela projeção  $\pi$  em  $0 \times \mathbb{R}P^1$ . Assim os zeros do campo  $\xi$  são dados pelos zeros de  $(F_x + pF_y)$  em  $0 \times \mathbb{R}P^1$ , ou seja, por  $(F_x + pF_y)(0, 0, p) = 0$ . Esta equação é uma cúbica em  $p$  dada por

$$\phi(p) = a_2 p^3 + (2b_2 + a_1) p^2 + (2b_1 + c_2) p + c_1.$$

Genericamente podemos escolher  $a_i, b_i, c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , em um conjunto aberto e denso de  $\mathbb{R}^6$ , que é o complementar do conjunto definido pelo anulamento de  $\phi$  e  $\phi'$  simultaneamente, de forma que a cúbica  $\phi$  tenha uma ou três raízes reais distintas. Procuramos agora a natureza dos correspondentes zeros de  $\xi$ . Para isto, é necessário analisar os autovalores da linearização de  $\xi$  nestes pontos. Seja  $p_1$  uma raiz da cúbica  $\phi$ . Escrevendo o campo  $\xi$  na forma de sistema obtemos

$$\xi = \begin{cases} x' = F_p = 2ap + 2b \\ y' = pF_p = 2ap^2 + 2bp \\ p' = -(F_x + pF_y) = -\phi(p) . \end{cases}$$

A linearização do campo  $\xi$  em  $(0, 0, p_1)$  é dada por

$$d\xi(0, 0, p_1) = \begin{pmatrix} 2(a_1p_1 + b_1) & 2(a_2p_1 + b_2) & 0 \\ 2p_1(a_1p_1 + b_1) & 2p_1(a_2p_1 + b_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\phi'(p_1) \end{pmatrix}.$$

Os autovalores desta matriz são dados por

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\phi'(p_1) \quad e \quad \lambda_3 = \alpha_1(p_1) = 2(a_2p_1^2 + (a_1 + b_2)p_1 + b_1).$$

Como  $p_1$  não é uma raiz repetida de  $\phi$ , segue que  $\phi'(p_1) \neq 0$ , logo,  $\lambda_2 \neq 0$ . Genericamente  $\alpha_1$  e  $\phi$  não possuem raízes comuns, assim  $\alpha_1(p_1) \neq 0$ , logo,  $\lambda_3 \neq 0$ . Dessa forma, se  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$ , temos que o zero do campo é um nó, e se  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$ , temos que o zero do campo é uma sela. Portanto, os zeros do campo  $\xi$  sobre  $0 \times \mathbb{R}P^1$  são nós ou selas. ■

**Observação 2.2.** (a) A fibra excepcional  $0 \times \mathbb{R}P^1 \subset \pi^{-1}(\Delta)$  é uma curva integral de  $\xi$ .

(b) A projeção  $\pi$  das curvas integrais do campo  $\xi$  são as soluções da EDB (2.1), com  $p = dy/dx \neq 0$ .

(c) Se considerarmos a carta afim em  $\mathbb{R}P^1$  com  $q = dx/dy$ , as idéias e conclusões seriam análogas e o campo vetorial dado por

$$\psi = qG_q \frac{\partial}{\partial x} + G_q \frac{\partial}{\partial y} - (qG_x + G_y) \frac{\partial}{\partial q} \quad (2.7)$$

seria um levantamento adequado sobre  $N$ .

(d) O discriminante da EDB (2.1) é dado pelo conjunto

$$\{ (x, y, p) \in M \mid F(x, y, p) = F_p(x, y, p) = 0 \}.$$

## 2.3 Formas normais das EDBs do tipo II

Prosseguimos então no estudo dos modelos topológicos das EDBs do tipo II. Daqui em diante consideraremos a EDB

$$w = (a, b, c) = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (2.8)$$

onde

$$a(x, y) = a_1x + a_2y + o(2), \quad b(x, y) = b_1x + b_2y + o(2) \quad \text{e} \quad c(x, y) = c_1x + c_2y + o(2).$$

Associados à EDB (2.8), temos a cúbica  $\phi$  e a quadrática  $\alpha_1$ , dadas por

$$\begin{aligned} \phi(p) &= a_2p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1 \\ \alpha_1(p) &= 2(a_2p^2 + (a_1 + b_2)p + b_1), \end{aligned}$$

apresentadas na demonstração da Proposição 2.2.

Primeiramente reduziremos as EDBs para suas formas normais, dependendo dos polinômios  $\phi$  e  $\alpha_1$ . Reduzir uma EDB consiste em encontrar uma forma normal que seja topologicamente equivalente à ela. A Proposição 2.3 a seguir nos dá formas normais para o 1-jato das EDBs do tipo II.

### 2.3.1 Redução formal das EDBs

Primeiramente demonstraremos um lema que será necessário para a demonstração da Proposição 2.3.

**Lema 2.1.** *Se  $p$  é simultaneamente uma raiz de multiplicidade 2 da cúbica  $\phi$  e uma raiz da quadrática  $\alpha_1$ , então a superfície  $M$  não é regular em  $(0, 0, p)$ , ou seja, a função discriminante  $\delta$  tem uma singularidade pior que Morse.*

*Demonstração:*

Seja

$$L = (a_1x + a_2y)dy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + (c_1x + c_2y)dx^2$$

a expressão que define a parte linear da EDB (2.8). A mudança de coordenadas linear dada por

$$x = \alpha X + \beta Y$$

$$y = \gamma X + \delta Y$$

nos fornece uma nova EDB com parte linear

$$AdY^2 + 2BdXdY + CdX^2 = 0,$$

onde  $A = A_1X + A_2Y$ ,  $B = B_1X + B_2Y$  e  $C = C_1X + C_2Y$ , tais que

$$\begin{aligned} A_1 &= \delta^2(\alpha a_1 + \gamma a_2) + 2\delta\beta(\alpha b_1 + \gamma b_2) + \beta^2(\alpha c_1 + \gamma c_2) \\ A_2 &= a_2\delta^3 + (2b_2 + a_1)\delta^2\beta + (2b_1 + c_2)\delta\beta^2 + c_1\beta^3 \\ B_1 &= \gamma\delta(\alpha a_1 + \gamma a_2) + (\alpha\delta + \gamma\beta)(\alpha b_1 + \gamma b_2) + \alpha\beta(\alpha c_1 + \gamma c_2) \\ B_2 &= \gamma\delta(\beta a_1 + \delta a_2) + (\alpha\delta + \gamma\beta)(\beta b_1 + \delta b_2) + \alpha\beta(\beta c_1 + \delta c_2) \\ C_1 &= a_2\gamma^3 + (2b_2 + a_1)\gamma^2\alpha + (2b_1 + c_2)\gamma\alpha^2 + c_1\alpha^3 \\ C_2 &= \gamma^2(\beta a_1 + \delta a_2) + 2\gamma\alpha(\beta b_1 + \delta b_2) + \alpha^2(\beta c_1 + \delta c_2). \end{aligned}$$

Temos que  $C_1 = \alpha^3\phi(\gamma/\alpha)$ . Como  $\phi$  é uma cúbica,  $\phi$  tem pelo menos uma raiz, que chamamos de  $p_1$ . Defina  $\gamma = \alpha p_1$ . Temos, então, que  $C_1 = 0$ . Podemos, desta forma, considerar uma nova EDB. Por abuso de notação, consideraremos a nova EDB com as mesmas variáveis e parâmetros da EDB original

$$(a_1x + a_2y)dy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + (c_2y)dx^2 = 0. \quad (2.9)$$

Neste caso, temos que os polinômios  $\alpha_1$  e  $\phi$  são dados por

$$\alpha_1(p) = a_2p^2 + (a_1 + b_2)p + b_1, \quad \phi(p) = a_2p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (2b_1 + c_2)p.$$

As raízes de  $\phi$  são

$$0, \quad \frac{-(2b_2 + a_1) + \sqrt{(2b_2 + a_1)^2 - (8a_2b_1 + 4a_2c_2)}}{2a_2} \quad \text{e} \\ \frac{-(2b_2 + a_1) - \sqrt{(2b_2 + a_1)^2 - (8a_2b_1 + 4a_2c_2)}}{2a_2}$$

e as raízes de  $\alpha_1$  são

$$\frac{-(a_1 + b_2) + \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4a_2b_1}}{2a_2}, \quad \frac{-(a_1 + b_2) - \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4a_2b_1}}{2a_2}. \quad (2.10)$$

Temos ainda que o discriminante de  $\phi$  é

$$(2b_1 + c_2)^2((2b_2 + a_1)^2 - (8a_2b_1 + 4a_2c_2)).$$

O discriminante de  $\phi$  ser zero nos garante que  $\phi$  tem raiz repetida. Temos dois casos a considerar

$$(1) \quad 2b_1 + c_2 = 0;$$

$$(2) \quad (2b_2 + a_1)^2 - (8a_2b_1 + 4a_2c_2) = 0.$$

No caso (1), tomando  $c_2 = -2b_1$ , é fácil ver que as raízes de  $\phi$  são

$$0, \quad 0, \quad -\frac{2b_2 + a_1}{a_2}.$$

A raiz  $\lambda = 0$  é, então, a raiz repetida de  $\phi$ . Segue de (2.10) que, se 0 for uma raiz de  $\alpha_1$  obtemos facilmente que  $b_1 = 0$ . Neste caso, ainda, o determinante da Hessiana da função  $\delta$  relativa a EDB (2.9) é dado por

$$\det(H_\delta(0,0)) = -4b_1^2(-2a_2b_1 + 2a_1b_2 + a_1^2),$$

assim, se  $b_1 = 0$  a superfície  $M$  é não regular.

Finalmente, no caso (2), podemos tomar  $b_1 = ((2b_2 + a_1)^2 - 4a_2c_2)/(8a_2)$ . Assim temos que as raízes de  $\phi$  são

$$0, \quad -\frac{2b_2 + a_1}{a_2}, \quad -\frac{2b_2 + a_1}{a_2}.$$

Portanto, para que  $-(2b_2 + a_1)/a_2$  seja raiz de  $\alpha_1$  devemos ter

$$0 = \alpha_1 \left( -\frac{2b_2 + a_1}{a_2} \right) = \frac{4b_2^2 - a_1^2 - 4a_2c_2}{8a_2}.$$

Por outro lado, o determinante da Hessiana da função  $\delta$  relativa a EDB (2.9) é dado por

$$\det(H_\delta(0,0)) = \frac{-c_2(4b_2^2 - a_1^2 - 4a_2c_2)^2}{16a_2}$$

e, portanto, se  $-(2b_2 + a_1)/a_2$  é raiz de  $\alpha_1$ , então a superfície  $M$  é não regular. Temos assim demonstrado o lema. ■

**Proposição 2.3.** *Se  $M$  é regular, a expressão que define o 1-jato dos coeficientes da EDB (2.8) pode ser reduzido, por mudanças de coordenadas lineares e multiplicação por um fator não nulo a uma das formas normais a seguir:*

(1) *Se  $\phi$  tem mais que uma raiz ou  $\alpha_1$  e  $\phi$  não têm raízes em comum:*

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy \pm ydx^2.$$



(2) Se  $\alpha_1$  e  $\phi$  têm uma raiz em comum e  $\phi$  tem apenas uma raiz:

$$(x + a_2y)dy^2 + ydx^2, \quad a_2 > \frac{1}{4}.$$

*Demonstração:*

(1) Seja

$$L = (a_1x + a_2y)dy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + (c_1x + c_2y)dx^2$$

a expressão que define a parte linear da EDB (2.8). A mudança de coordenadas linear

$$x = \alpha X + \beta Y$$

$$y = \gamma X + \delta Y$$

nos fornece uma nova EDB com parte linear

$$AdY^2 + 2BdXdY + CdX^2 = 0,$$

onde  $A = A_1X + A_2Y$ ,  $B = B_1X + B_2Y$  e  $C = C_1X + C_2Y$ , tais que

$$A_1 = \delta^2(\alpha a_1 + \gamma a_2) + 2\delta\beta(\alpha b_1 + \gamma b_2) + \beta^2(\alpha c_1 + \gamma c_2)$$

$$A_2 = a_2\delta^3 + (2b_2 + a_1)\delta^2\beta + (2b_1 + c_2)\delta\beta^2 + c_1\beta^3$$

$$C_1 = a_2\gamma^3 + (2b_2 + a_1)\gamma^2\alpha + (2b_1 + c_2)\gamma\alpha^2 + c_1\alpha^3$$

$$C_2 = \gamma^2(\beta a_1 + \delta a_2) + 2\gamma\alpha(\beta b_1 + \delta b_2) + \alpha^2(\beta c_1 + \delta c_2).$$

Temos que  $C_1 = \alpha^3\phi(\gamma/\alpha)$  e  $A_2 = \beta^3\phi(\delta/\beta)$ , onde  $\phi$  é a cúbica que nos dá os zeros do campo levantado  $\xi$  em  $0 \times \mathbb{R}P^1$ .  $\phi$  tem pelo menos uma raiz, que chamamos de  $p_1$ . Defina  $\gamma = \alpha p_1$ . Temos, então, que  $C_1 = 0$ . Além disso, temos que se  $\delta = \beta p_1$ , a matriz da mudança de coordenadas tem determinante nulo, ou seja  $\delta \neq \beta p_1$ .

As expressões de  $A_1$  e  $C_2$  ficam:

$$A_1 = \alpha\{(a_2p_1 + a_1)\delta^2 + 2(b_2p_1 + b_1)\delta\beta + (c_2p_1 + c_1)\beta^2\}$$

$$C_2 = \alpha^2\{(a_1p_1^2 + 2b_1p_1 + c_1)\beta + (a_2p_1^2 + 2b_2p_1 + c_2)\delta\}.$$

- $C_2$  é genericamente não nulo.

De fato, como  $a_1p_1^2 + 2b_1p_1 + c_1 = F_x(0, 0, p_1)$  e  $a_2p_1^2 + 2b_2p_1 + c_2 = F_y(0, 0, p_1)$  (onde  $F = ap + 2bp + c$ ) não são simultaneamente zero (caso contrário a função discriminante é degenerada), podemos assumir  $a_2p_1^2 + 2b_2p_1 + c_2 \neq 0$  e assim, para zerar  $C_2$ , colocamos

$$\delta = -\frac{a_1p_1^2 + 2b_1p_1 + c_1}{a_2p_1^2 + 2b_2p_1 + c_2}\beta.$$

Mas, então, a matriz da mudança de coordenadas

$$(x, y) \mapsto \left( \alpha X + \beta Y, \alpha p_1 X - \frac{a_1p_1^2 + 2b_1p_1 + c_1}{a_2p_1^2 + 2b_2p_1 + c_2}\beta Y \right)$$

tem determinante

$$-\frac{\alpha\beta}{a_2p_1^2 + 2b_2p_1 + c_2}\phi(p_1) = 0.$$

Portanto, não podemos zerar  $C_2$ .

- Podemos fazer  $A_1 = 0$ .

De fato,  $A_1 = 0$  se, e somente se,

$$(a_2p_1 + a_1)\delta^2 + 2(b_2p_1 + b_1)\delta\beta + (c_2p_1 + c_1)\beta^2 = 0.$$

Enxergando a expressão acima como um polinômio em função de  $\delta/\beta$  sabemos que a equação tem duas soluções, sendo uma delas  $\delta/\beta = p_1$ , que já descartamos. Uma outra solução terá a forma  $\delta/\beta = \lambda$ . Suponhamos agora que  $p_1$  é raiz dupla do polinômio, ou seja, que  $p_1 = \lambda$ . Então

$$p_1 = -\frac{b_2p_1 + b_1}{a_2p_1 + a_1}.$$

Equivalentemente

$$0 = a_2p_1^2 + (b_2 + a_1)p_1 + b_1 = \frac{1}{2}\alpha_1(p_1).$$

Se  $\alpha_1$  e  $\phi$  não têm raízes em comum, chegamos a uma contradição. Se  $\phi$  tem mais de uma raiz, temos duas situações:  $\phi$  tem 3 raízes ou  $\phi$  tem uma raiz de multiplicidade 2. No primeiro caso sempre podemos escolher  $p_1$  de modo que  $\alpha_1(p_1) \neq 0$ . No segundo caso, ou seja, quando  $\phi$  tem uma raiz de multiplicidade 2, digamos  $p_1$ , então o Lema 2.1 garante que  $\alpha_1(p_1) \neq 0$ , pois caso contrário a superfície  $M$  não seria regular.

Portanto  $\lambda \neq p_1$ . Definimos assim  $\delta = \lambda\beta$  anulando  $A_1$ .

Por uma mudança de escala, temos  $A_2 = 1$  e  $C_2 = \pm 1$  e a equação

$$A_2 Y dY^2 + 2(B_1 X + B_2 Y) dX dY + C_2 Y dX^2 = 0$$

pode ser escrita como

$$Y dY^2 + 2(B_1 X + B_2 Y) dX dY \pm Y dX^2 = 0.$$

Por abuso de notação, escrevemos

$$j^1(a, b, c) = y dy^2 + 2(b_1 x + b_2 y) dx dy \pm y dx^2.$$

(2) Seja

$$L = (a_1 x + a_2 y) dy^2 + 2(b_1 x + b_2 y) dx dy + (c_1 x + c_2 y) dx^2$$

a expressão que define a parte linear da EDB (2.8).

Com uma mudança de coordenadas linear obtemos, como no caso (1), que  $L$  pode ser levada em uma EDB com 1-jato

$$(A_1 x + A_2 y) dy^2 + 2(B_1 x + B_2 y) dx dy + (C_2 y) dx^2 = 0,$$

onde  $A_2 \neq 0$  e  $C_2 \neq 0$ . Por abuso de notação, vamos considerar a EDB com 1-jato

$$(a_1 x + a_2 y) dy^2 + 2(b_1 x + b_2 y) dx dy + (c_2 y) dx^2 = 0, \quad (2.11)$$

onde  $a_2 \neq 0$  e  $c_2 \neq 0$ . A cúbica  $\phi$  e a quadrática  $\alpha_1$  de (2.11) são

$$\phi(p) = a_2 p^3 + (2b_2 + a_1) p^2 + (2b_1 + c_2) p$$

$$\alpha_1(p) = a_2 p^2 + (a_1 + b_2) p + b_1.$$

As raízes de  $\phi$  são

$$0, \quad \frac{-(2b_2 + a_1) - \sqrt{(2b_2 + a_1)^2 - (8a_2 b_1 + 4a_2 c_2)}}{2a_2} \quad \text{e}$$

$$\frac{-(2b_2 + a_1) + \sqrt{(2b_2 + a_1)^2 - (8a_2 b_1 + 4a_2 c_2)}}{2a_2}.$$

As raízes de  $\alpha_1$  são

$$\frac{-(a_1 + b_2) - \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4a_2 b_1}}{2a_2}, \quad \frac{-(a_1 + b_2) + \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4a_2 b_1}}{2a_2}.$$

A condição para  $\alpha_1$  ter raiz comum com  $\phi$ , ou seja, a origem, é  $a_2 = 0$  ou  $b_1 = 0$ . Como  $a_2 \neq 0$ , temos que  $b_1 = 0$ . Temos então que (2.11) é da forma

$$(a_1x + a_2y)dy^2 + 2(b_2y)dxdy + (c_2y)dx^2 = 0. \quad (2.12)$$

A mudança de coordenadas linear

$$x = \alpha X + \beta Y$$

$$y = \delta Y$$

nos fornece uma nova EDB com parte linear

$$AdY^2 + 2BdXdY + CdX^2 = 0,$$

onde  $A = A_1X + A_2Y$ ,  $B = B_1X + B_2Y$  e  $C = C_1X + C_2Y$ , tais que

$$A_1 = a_1\delta^2\alpha$$

$$A_2 = 2b_2\delta^2\beta + c_2\delta\beta^2 + a_1\beta\delta^2 + a_2\delta^3$$

$$B_1 = 0$$

$$B_2 = c_2\delta\alpha\beta + b_2\delta^2\alpha$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = c_2\delta\alpha^2.$$

Tomando  $\beta := -b_2\delta/c_2$  obtemos  $B_2 = 0$ . Tomando a mudança de escala

$$\delta = \left(\frac{c_2}{a_1^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \alpha = \frac{1}{a_1 \left(\frac{c_2}{a_1^2}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

obtemos  $A_1 = 1$  e  $C_2 = 1$ . Assim, a equação 2.12 é equivalente à equação

$$(x + A_2y)dy^2 + ydx^2 = 0.$$

Por abuso de notação, escrevemos

$$(x + a_2y)dy^2 + ydx^2 = 0.$$

Além disso observe que o discriminante de  $\phi$  é  $-4a_2 + 1$ . Assim, como  $\phi$  tem apenas uma raiz, temos que  $a_2 > 1/4$ . ■

**Observação 2.3.** *O caso onde  $M$  é singular foge do escopo deste trabalho e sua demonstração pode ser encontrada em [6].*

### 2.3.2 Partição do plano $(b_1, b_2)$

Estudaremos nesta seção EDBs da forma

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + \epsilon ydx^2 = 0, \quad \epsilon = \pm 1. \quad (2.13)$$

Uma EDB dessa forma divide o plano de parâmetros  $(b_1, b_2)$  de acordo com o tipo de singularidade do campo levantado  $\xi$ . Primeiro, notemos que a mudança de coordenadas  $(x, y) \mapsto (-x, y)$  produz a EDB  $ydy^2 + 2(b_1x - b_2y)dxdy \pm ydx^2 = 0$  dada pelo par  $(b_1, -b_2)$ . Temos assim uma simetria em relação ao eixo  $b_1$  no plano  $(b_1, b_2)$ . Por esse motivo consideraremos nesta seção, sem perda de generalidade,  $b_2 > 0$ .

No caso da EDB (2.13) o número e os tipos de singularidades de  $\xi$  são determinadas pelo par  $(b_1, b_2)$ . Além disso, existem curvas especiais no plano  $(b_1, b_2)$  que limitam regiões abertas onde as configurações das EDBs são topologicamente equivalentes, tais regiões serão descritas nos próximos teoremas.

Estudaremos primeiramente a EDB  $ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy - ydx^2 = 0$  e, em seguida, realizaremos o estudo do caso  $\epsilon = +1$ .

•  **$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy - ydx^2 = 0$  :**

A próxima proposição descreve as curvas que irão dividir o plano  $(b_1, b_2)$  nos abertos citados anteriormente.

**Proposição 2.4.** *Dada a EDB*

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy - ydx^2 = 0 \quad (2.14)$$

*temos que:*

(1) A função discriminante  $\delta$  tem uma singularidade degenerada na origem se, e somente se,  $b_1 = 0$ .

(2)  $\phi$  tem raiz dupla se, e somente se,

$$b_1 = \frac{1}{2} \text{ ou } b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 + 1).$$

(3)  $\phi$  e  $\alpha_1$  têm uma raiz em comum se, e somente se,

$$b_1 = 0.$$

*Demonstração:*

(1) A função  $\delta$  da equação (2.14) é dada por  $\delta(x, y) = (b_1x + b_2y)^2 + y^2$ . A matriz Hessiana de  $\delta(x, y)$  é dada por

$$H_\delta(0, 0) = 2 \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 \\ b_1b_2 & b_2^2 + 1 \end{pmatrix}$$

e, portanto,  $\det(H_\delta(0, 0)) = 4b_1^2$ . Assim, a função discriminante tem uma singularidade degenerada na origem se, e somente se,  $b_1 = 0$ . Finalizamos, assim, a prova do caso (1).

As provas dos casos (2) e (3) seguem formatos semelhantes. Observamos primeiramente que as funções  $\phi$  e  $\alpha_1$  são dadas, respectivamente, por

$$\phi(p) = p(p^2 + 2b_2p + 2b_1 - 1), \quad \alpha_1(p) = 2p^2 + 2b_2p + 2b_1.$$

As raízes de  $\phi$  são

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}, \quad p_3 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}.$$

(2)  $\phi$  tem raiz dupla se  $p_1 = p_2$  ou  $p_1 = p_3$  ou ainda  $p_2 = p_3$ . Temos que essas condições são satisfeitas se, e somente se,  $b_1 = 1/2$  ou  $b_1 = (b_2^2 + 1)/2$ . Finalizando a prova do caso (2).

(3) Finalmente,  $\phi$  e  $\alpha_1$  têm pelo menos uma raiz em comum quando

$$\alpha_1(p_1) = 2b_1 = 0,$$

$$\alpha_1(p_2) = 2(b_2^2 - b_1 + 1 - b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}) = 0,$$

$$\alpha_1(p_3) = 2(b_2^2 - b_1 + 1 + b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}) = 0,$$

que é satisfeito se, e somente se,  $b_1 = 0$ .

■

A Figura 2.1 mostra a partição do plano de parâmetros  $(b_1, b_2)$ .

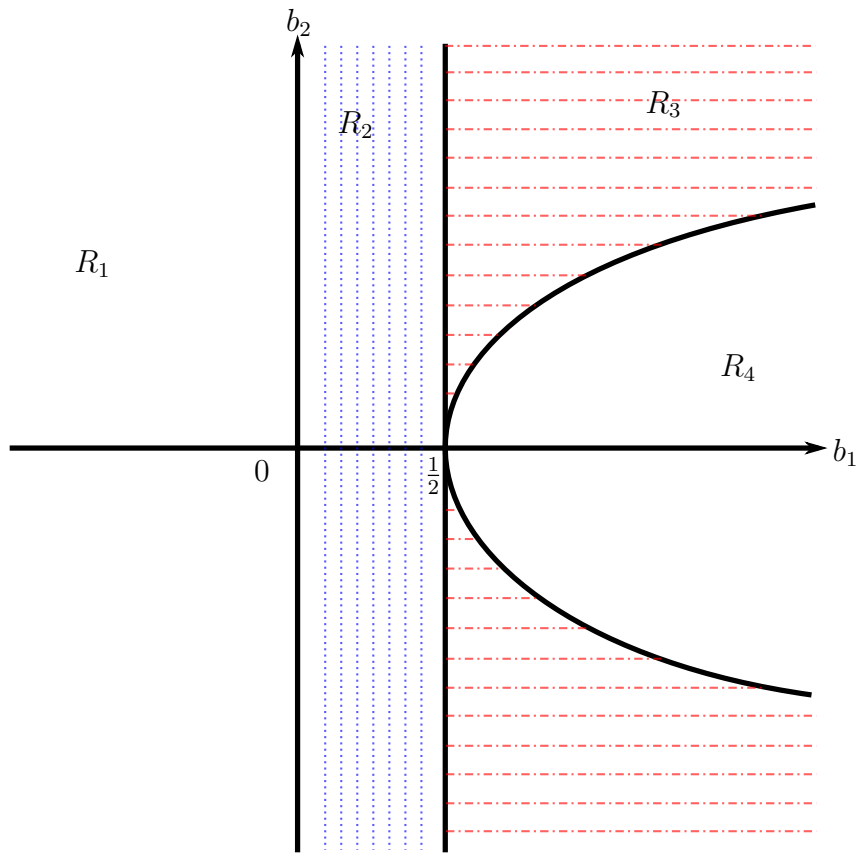


Figura 2.1: Partição do plano  $(b_1, b_2)$ , juntamente com as regiões  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

Analisaremos o tipo de cada uma das singularidades do campo levantado em cada uma das regiões  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  descritas na Figura 2.1. A fim de organizarmos melhor

os resultados seguintes, necessitamos da forma explícita das regiões  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , descritas por

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 < 0\}; \\ R_2 &= \left\{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < b_1 < \frac{1}{2} \right\}; \\ R_3 &= \left\{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < b_1 < \frac{(b_2^2 + 1)}{2} \right\}; \\ R_4 &= \left\{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 > \frac{(b_2^2 + 1)}{2} \right\}. \end{aligned}$$

**Proposição 2.5.** *Considerando a EDB*

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy - ydx^2 = 0,$$

as singularidades do campo de Lie-Cartan, nas regiões  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , são classificadas como segue:

- (1) Na região  $R_1$  temos três singularidades hiperbólicas do tipo sela;
- (2) Na região  $R_2$  temos duas singularidades hiperbólicas do tipo sela e uma do tipo nó;
- (3) Na região  $R_3$  temos duas singularidades hiperbólicas do tipo sela e uma do tipo nó;
- (4) Na região  $R_4$  temos uma singularidade hiperbólica do tipo sela.

*Demonstração:*

Relembramos que a cúbica  $\phi$  tem a forma

$$\phi(p) = p(p^2 + 2b_2p + 2b_1 - 1).$$

Os zeros do campo  $\xi$  são os pontos  $(0, 0, p)$  tais que  $\phi(p) = 0$ , ou seja, os pontos singulares são

$$(0, 0, p_1), \quad (0, 0, p_2), \quad (0, 0, p_3),$$

onde

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}, \quad p_3 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}.$$



A fim de determinar a estabilidade das singularidades precisamos dos autovalores do campo de Lie-Cartan  $\xi$ . Os autovalores da linearização de  $\xi$  são dados por

$$-\phi'(p) = -(3p^2 + 4b_2p + 2b_1 - 1) \quad \text{e} \quad \alpha_1(p) = 2(p^2 + b_2p + b_1).$$

Portanto, os autovalores em cada singularidade são

$$\begin{cases} -\phi'(p_1) = 1 - 2b_1, \\ \alpha_1(p_1) = 2b_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\phi'(p_2) = -2(-b_2p_2 - 2b_1 + 1), \\ \alpha_1(p_2) = 2(-b_2p_2 - b_1 + 1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\phi'(p_3) = -2(-b_2p_3 - 2b_1 + 1), \\ \alpha_1(p_3) = 2(-b_2p_3 - b_1 + 1). \end{cases}$$

Estamos prontos para determinar a natureza das singularidades em cada uma das regiões  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Todos os cálculos a seguir serão feitos para  $b_2 > 0$ , ver comentário no início da seção 2.3.2.

- Na região  $R_1$  temos que  $b_1 < 0$ , então:
  - 1)  $\alpha_1(p_1) < 0$  e  $-\phi'(p_1) > 0$ . Portanto  $(0, 0, p_1)$  é uma sela.
  - 2)  $\alpha_1(p_2) > 0$  e  $-\phi'(p_2) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_2)$  é uma sela.
  - 3)  $\alpha_1(p_3) > 0$  e  $-\phi'(p_3) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_3)$  é uma sela.
- Na região  $R_2$  temos que  $0 < b_1 < 1/2$ , então:
  - 1)  $\alpha_1(p_1) > 0$  e  $-\phi'(p_1) > 0$ . Portanto  $(0, 0, p_1)$  é um nó.
  - 2)  $\alpha_1(p_2) > 0$  e  $-\phi'(p_2) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_2)$  é uma sela.
  - 3)  $\alpha_1(p_3) > 0$  e  $-\phi'(p_3) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_3)$  é uma sela.
- Na região  $R_3$  temos que  $1/2 < b_1 < (b_2^2 + 1)/2$ , então:
  - 1)  $\alpha_1(p_1) > 0$  e  $-\phi'(p_1) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_1)$  é uma sela.
  - 2)  $\alpha_1(p_2) < 0$  e  $-\phi'(p_2) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_2)$  é um nó.

3)  $\alpha_1(p_3) > 0$  e  $-\phi'(p_3) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_3)$  é uma sela.

- Na região  $R_4$  temos que  $b_1 > (b_2^2 + 1)/2$ , o campo tem apenas a singularidade  $(0, 0, p_1)$ . Temos que  $\alpha_1(p_1) > 0$  e  $-\phi'(p_1) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_1)$  é uma sela.

■

A Proposição 2.5 pode ser resumida na Figura 2.2, onde apresentamos uma localização e a estabilidade de cada singularidade da EDB

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy - ydx^2 = 0.$$

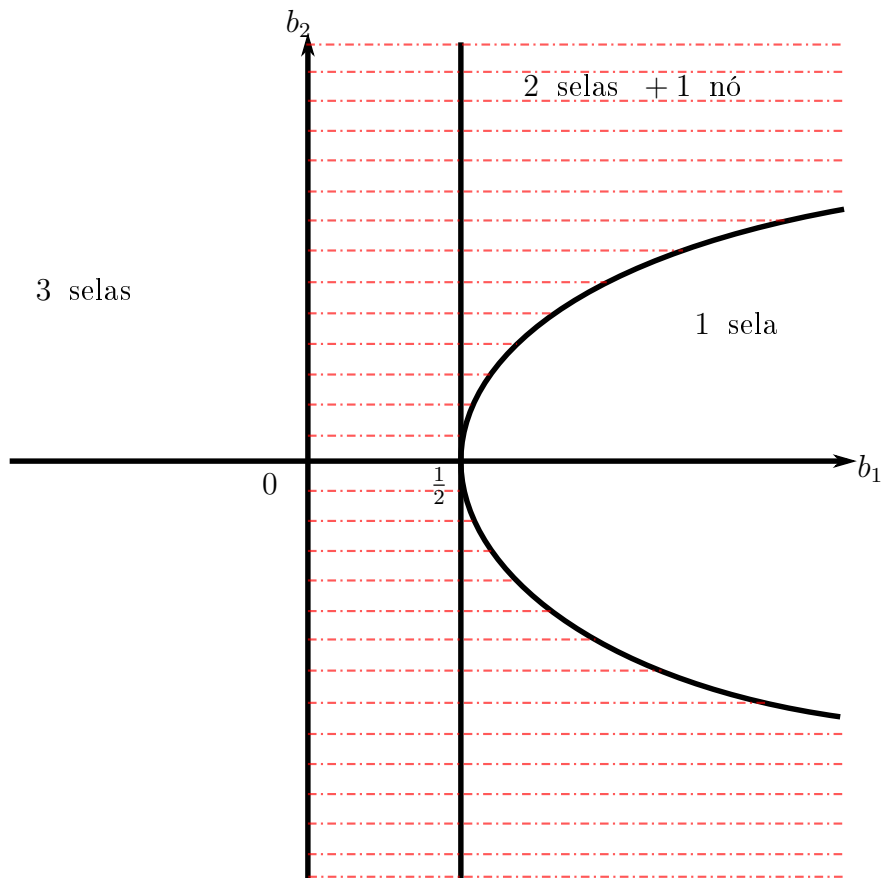


Figura 2.2: Estabilidades das singularidades da EDB (2.14).

Finalizamos, assim, o estudo da EDB (2.13) quando  $\epsilon = -1$ . Passaremos agora ao estudo da EDB (2.13) quando  $\epsilon = +1$ . Neste caso, a EDB é dada por:

•  $ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + ydx^2 = 0$  :

De modo análogo ao estudo quando  $\epsilon = -1$  temos a seguinte proposição.

**Proposição 2.6.** *Dada a EDB*

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + ydx^2 = 0 \quad (2.15)$$

temos que:

(1) A função discriminante  $\delta$  tem uma singularidade degenerada na origem se, e somente se,  $b_1 = 0$ .

(2)  $\phi$  tem raiz dupla se, e somente se,

$$b_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 - 1).$$

(3)  $\phi$  e  $\alpha_1$  têm uma raiz em comum se, e somente se,

$$b_1 = 0 \quad \text{ou} \quad b_1 = \pm b_2 - 1.$$

*Demonstração:*

(1) A função  $\delta$  da equação (2.15) é dada por  $\delta(x, y) = (b_1x + b_2y)^2 - y^2$ . A matriz Hessiana de  $\delta$  é

$$H_\delta(0, 0) = 2 \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 \\ b_1b_2 & b_2^2 - 1 \end{pmatrix}$$

e, portanto,  $\det(H_\delta(0, 0)) = -4b_1^2$ . Assim, a função discriminante tem uma singularidade degenerada na origem se, e somente se,  $b_1 = 0$ . Finalizamos, assim, a prova do caso (1).

As provas dos casos (2) e (3) seguem formatos semelhantes. Observamos primeiramente que as funções  $\phi$  e  $\alpha_1$  são dadas, respectivamente, por

$$\phi(p) = p(p^2 + 2b_2p + 2b_1 + 1), \quad \alpha_1(p) = 2p^2 + 2b_2p + 2b_1.$$

As raízes de  $\phi$  são

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}, \quad p_3 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}.$$

(2)  $\phi$  tem raiz dupla se  $p_1 = p_2$  ou ainda  $p_1 = p_3$  ou  $p_2 = p_3$ . Temos que essas condições são satisfeitas se, e somente se,  $b_1 = -1/2$  ou  $b_1 = (b_2^2 - 1)/2$ . Finalizamos, então, a prova do caso (2).

(3) Finalmente,  $\phi$  e  $\alpha_1$  têm pelo menos uma raiz em comum quando

$$\alpha_1(p_1) = 2b_1 = 0,$$

$$\alpha_1(p_2) = 2(b_2^2 - b_1 - 1 - b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}) = 0,$$

$$\alpha_1(p_3) = 2(b_2^2 - b_1 - 1 + b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}) = 0,$$

que é satisfeito se, e somente se,  $b_1 = 0$  ou  $b_1 = b_2 - 1$  ou ainda  $b_1 = -b_2 - 1$

■

A Figura 2.3 mostra a partição do plano de parâmetros  $(b_1, b_2)$ .

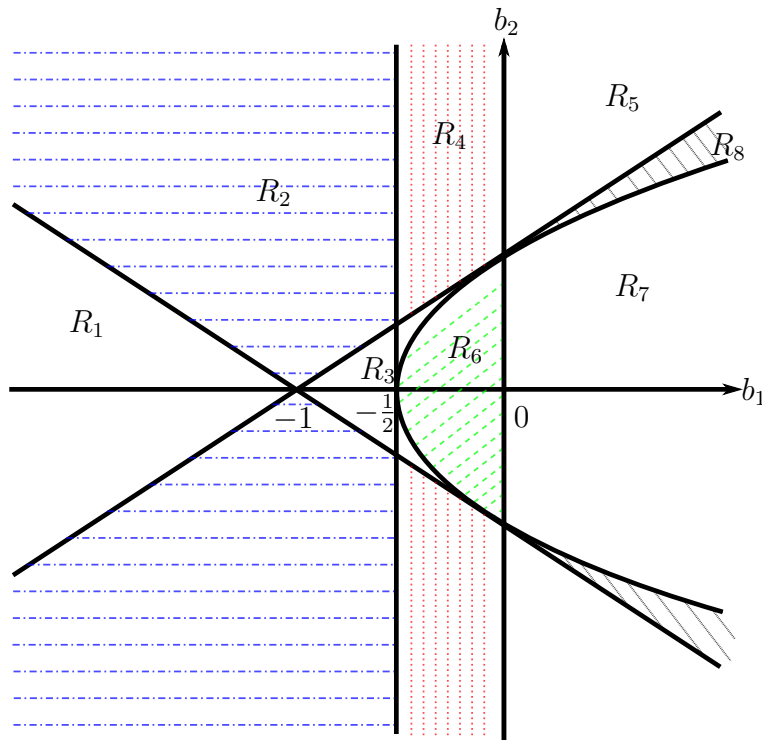


Figura 2.3: Partição do plano  $(b_1, b_2)$ , juntamente com suas regiões  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ .

Analisaremos o tipo de cada uma das singularidades do campo levantado em cada uma das regiões  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  descritas na Figura 2.3. A fim de organizarmos melhor

os resultados seguintes necessitamos da forma explícita das regiões  $R_i$  descritas por

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 < b_2 - 1, b_1 < -b_2 - 1\}; \\
R_2 &= \left\{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 < b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1, b_1 < -\frac{1}{2} \right\}; \\
R_3 &= \left\{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 > b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1, b_1 < 0, b_1 < \frac{(b_2^2 - 1)}{2} \right\}; \\
R_4 &= \left\{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 < b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1, -\frac{1}{2} < b_1 < 0 \right\}; \\
R_5 &= \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 < b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1, b_1 > 0\}; \\
R_6 &= \left\{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 > \frac{(b_2^2 - 1)}{2}, b_1 < 0 \right\}; \\
R_7 &= \left\{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 > \frac{(b_2^2 - 1)}{2}, b_1 > 0 \right\}; \\
R_8 &= \left\{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 > b_2 - 1, b_1 > -b_2 - 1, b_1 > 0, b_1 < \frac{(b_2^2 - 1)}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

**Proposição 2.7.** *Considerando a EDB*

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + ydx^2 = 0,$$

as singularidades do campo de Lie-Cartan são classificadas, nas regiões  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , como segue:

- (1) Na região  $R_1$  temos três singularidades hiperbólicas do tipo sela;
- (2) Na região  $R_2$  temos duas singularidades hiperbólicas do tipo sela e uma do tipo nó;
- (3) Na região  $R_3$  temos duas singularidades hiperbólicas do tipo nó e uma do tipo sela;
- (4) Na região  $R_4$  temos duas singularidades hiperbólicas do tipo sela e uma do tipo nó;
- (5) Na região  $R_5$  temos três singularidades hiperbólicas do tipo sela;
- (6) Na região  $R_6$  temos uma singularidade hiperbólica do tipo nó;
- (7) Na região  $R_7$  temos uma singularidade hiperbólica do tipo sela;

(8) Na região  $R_8$  temos duas singularidades hiperbólicas do tipo sela e uma do tipo nó.

*Demonstração:*

Relembramos que a cúbica  $\phi$  tem a forma

$$\phi(p) = p(p^2 + 2b_2p + 2b_1 + 1).$$

Os zeros do campo  $\xi$  são os pontos  $(0, 0, p)$  tais que  $\phi(p) = 0$ , ou seja, os pontos singulares são

$$(0, 0, p_1), \quad (0, 0, p_2), \quad (0, 0, p_3),$$

onde

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}, \quad p_3 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}.$$

A fim de determinar a estabilidade das singularidades precisamos dos autovalores do campo de Lie-Cartan  $\xi$ . Os autovalores da linearização de  $\xi$  são

$$-\phi'(p) = -(3p^2 + 4b_2p + 2b_1 + 1) \quad \text{e} \quad \alpha_1(p) = 2(p^2 + b_2p + b_1).$$

Portanto, em cada singularidade os autovalores são

$$\begin{cases} -\phi'(p_1) = -1 - 2b_1, \\ \alpha_1(p_1) = 2b_1; \end{cases} \quad \begin{cases} -\phi'(p_2) = -2(-b_2p_2 - 2b_1 - 1), \\ \alpha_1(p_2) = 2(-b_2p_2 - b_1 - 1); \end{cases} \quad \begin{cases} -\phi'(p_3) = -2(-b_2p_3 - 2b_1 - 1), \\ \alpha_1(p_3) = 2(-b_2p_3 - b_1 - 1). \end{cases}$$

Estamos prontos para determinar a natureza das singularidades em cada uma das regiões  $R_i$ ,  $1 \leq i \leq 8$ . Todos os cálculos a seguir serão feitos para  $b_2 > 0$ .

- Na região  $R_1$  temos que  $b_1 < b_2 - 1$  e  $b_1 < -b_2 - 1$  então:

1)  $\alpha_1(p_1) < 0$  e  $-\phi'(p_1) > 0$ . Portanto  $(0, 0, p_1)$  é uma sela.

2)  $\alpha_1(p_2) > 0$  e  $-\phi'(p_2) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_2)$  é uma sela.

- 3)  $\alpha_1(p_3) > 0$  e  $-\phi'(p_3) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_3)$  é uma sela.
- Na região  $R_2$  temos que  $b_1 > -b_2 - 1$ ,  $b_1 < b_2 - 1$  e  $b_1 < -1/2$  então:
    - 1)  $\alpha_1(p_1) < 0$  e  $-\phi'(p_1) > 0$ . Portanto  $(0, 0, p_1)$  é uma sela.
    - 2)  $\alpha_1(p_2) < 0$  e  $-\phi'(p_2) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_2)$  é um nó.
    - 3)  $\alpha_1(p_3) > 0$  e  $-\phi'(p_3) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_3)$  é uma sela.
  - Na região  $R_3$  temos que  $b_1 > -b_2 - 1$ ,  $b_1 > b_2 - 1$ ,  $b_1 < 0$  e  $b_1 < (b_2^2 - 1)/2$ , então:
    - 1)  $\alpha_1(p_1) < 0$  e  $-\phi'(p_1) > 0$ . Portanto  $(0, 0, p_1)$  é uma sela.
    - 2)  $\alpha_1(p_2) < 0$  e  $-\phi'(p_2) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_2)$  é um nó.
    - 3)  $\alpha_1(p_3) < 0$  e  $-\phi'(p_3) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_3)$  é um nó.
  - Na região  $R_4$  temos que  $b_1 > -b_2 - 1$ ,  $b_1 < b_2 - 1$  e  $-1/2 < b_1 < 0$ , então:
    - 1)  $\alpha_1(p_1) < 0$  e  $-\phi'(p_1) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_1)$  é um nó.
    - 2)  $\alpha_1(p_2) < 0$  e  $-\phi'(p_2) > 0$ . Portanto  $(0, 0, p_2)$  é uma sela.
    - 3)  $\alpha_1(p_3) > 0$  e  $-\phi'(p_3) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_3)$  é uma sela.
  - Na região  $R_5$  temos que  $b_1 > -b_2 - 1$ ,  $b_1 < b_2 - 1$  e  $b_1 > 0$ , então:
    - 1)  $\alpha_1(p_1) > 0$  e  $-\phi'(p_1) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_1)$  é uma sela.
    - 2)  $\alpha_1(p_2) < 0$  e  $-\phi'(p_2) > 0$ . Portanto  $(0, 0, p_2)$  é uma sela.
    - 3)  $\alpha_1(p_3) > 0$  e  $-\phi'(p_3) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_3)$  é uma sela.
  - Na região  $R_6$  temos que  $b_1 > (b_2^2 - 1)/2$  e  $b_1 < 0$ , então o campo tem apenas a singularidade  $(0, 0, p_1)$ . Temos que  $\alpha_1(p_1) < 0$  e  $-\phi'(p_1) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_1)$  é um nó.
  - Na região  $R_7$  temos que  $b_1 > (b_2^2 - 1)/2$  e  $b_1 > 0$ , então o campo tem apenas a singularidade  $(0, 0, p_1)$ . Temos que  $\alpha_1(p_1) > 0$  e  $-\phi'(p_1) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_1)$  é uma sela.

- Na região  $R_8$  temos que  $b_1 > -b_2 - 1$ ,  $b_1 > b_2 - 1$ ,  $b_1 > 0$  e  $b_1 < (b_2^2 - 1)/2$ , então:

- 1)  $\alpha_1(p_1) > 0$  e  $-\phi'(p_1) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_1)$  é uma sela.
- 2)  $\alpha_1(p_2) > 0$  e  $-\phi'(p_2) > 0$ . Portanto  $(0, 0, p_2)$  é um nó.
- 3)  $\alpha_1(p_3) > 0$  e  $-\phi'(p_3) < 0$ . Portanto  $(0, 0, p_3)$  é uma sela.

■

A Proposição 2.7 pode ser resumida na Figura 2.4, onde apresentamos uma localização e a estabilidade de cada singularidade da EDB

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + ydx^2 = 0.$$

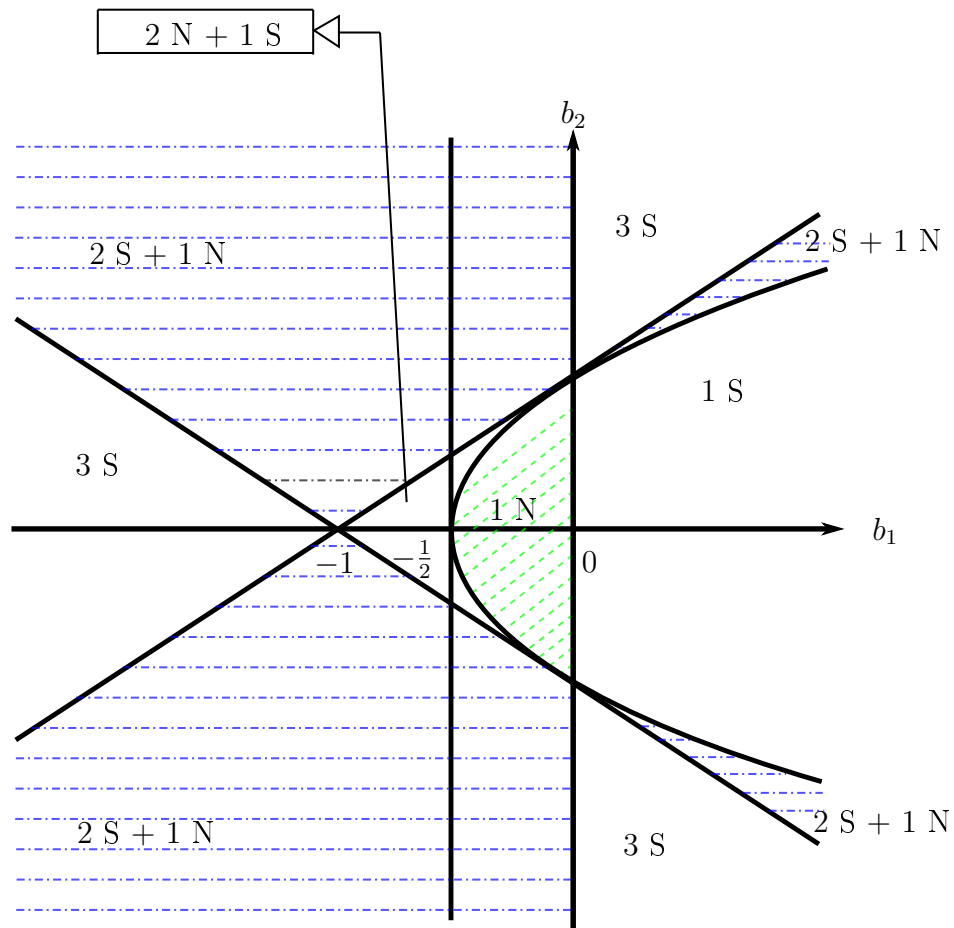


Figura 2.4: Estabilidades das singularidades da EDB (2.15).



Nas proposições anteriores dividimos o plano  $(b_1, b_2)$  em regiões, onde em cada região o campo de Lie-Cartan tem uma quantidade finita de selas e nós hiperbólicos. A projeção das curvas integrais do campo de Lie-Cartan pela aplicação  $\pi$  são as curvas integrais da equação diferencial implícita.

A seguir obtemos as curvas integrais da equação diferencial implícita no plano  $(x, y)$ . Para isto escolhemos um ponto  $(b_1, b_2)$  qualquer em cada uma das regiões e estudamos as curvas integrais da equação associada a esses parâmetros.

Por exemplo, no caso da EDB

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy - ydx^2 = 0,$$

o ponto  $(b_1, b_2) = (1, 0)$  está na região  $R_4$ , onde o campo de Lie-Cartan tem apenas uma sela hiperbólica. Obtemos, então, a superfície  $M$  e as curvas integrais do campo de Lie-Cartan, em seguida projetamos no plano  $(x, y)$  obtendo as curvas integrais da EDB  $ydy^2 + 2xdxdy - ydx^2 = 0$ .

Similarmente no caso da EDB

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + ydx^2 = 0,$$

o ponto  $(b_1, b_2) = (-1/4, 0)$  está na região  $R_6$ , onde o campo de Lie-Cartan tem apenas um nó hiperbólico. Obtemos, então, a superfície  $M$ , as curvas integrais do campo de Lie-Cartan e as curvas que compõem o discriminante, em seguida projetamos no plano  $(x, y)$  obtendo as curvas integrais da EDB  $ydy^2 + (-x/2)dxdy + ydx^2 = 0$ . A Figura 2.5

ilustra a técnica descrita. O software ODEinR2 [18] foi utilizado nesta dissertação para auxiliar no desenho das configurações das EDBs.

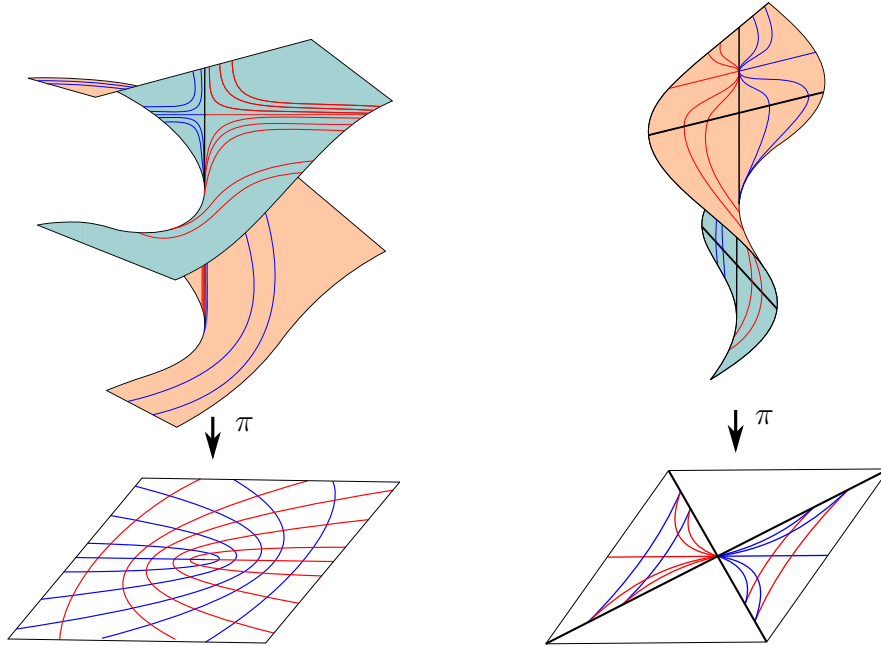


Figura 2.5: Projeção das curvas integrais de uma sela no caso  $\epsilon = -1$  (esquerda) e projeção das curvas integrais de um nó no caso  $\epsilon = +1$  (direita).

Em resumo, obtemos o seguinte teorema que nos dá formas normais topológicas para as EDBs (2.13), mais detalhes sobre este teorema podem ser obtidos em [2] e [4].

**Teorema 2.1.** *Considere uma EDB*

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (2.16)$$

onde  $a, b, c$  são funções suaves que se anulam na origem e a função discriminante  $\delta$  tem uma singularidade de Morse na origem. Se  $\phi$  não tem raiz dupla ou se  $\phi$  e  $\alpha_1$  não têm raízes em comum, então a EDB (2.16) é topologicamente equivalente à:

(1) O conjunto discriminante é um ponto isolado:

(a)  $ydy^2 + 2xdxdy - ydx^2 = 0$  (1 sela, Lemon);

(b)  $ydy^2 - 2xdxdy - ydx^2 = 0$  (3 selas, Star);

(c)  $ydy^2 + 1/2xdxdy - ydx^2 = 0$  (2 selas e 1 nó, *Monstar*).

(2) O conjunto discriminante é um par de curvas suaves transversais:

(a)  $ydy^2 + 2xdxdy + ydx^2 = 0$  (1 sela);

(b)  $ydy^2 - 1/2xdxdy + ydx^2 = 0$  (1 nó);

(c)  $ydy^2 - 4xdxdy + ydx^2 = 0$  (3 selas);

(d)  $ydy^2 + 2(y - x)dxdy + ydx^2 = 0$  (2 selas + 1 nó);

(e)  $ydy^2 - 4/3xdxdy + ydx^2 = 0$  (1 sela + 2 nós).

As configurações topológicas das EDBs acima estão representadas nas Figuras 2.6 e 2.7.

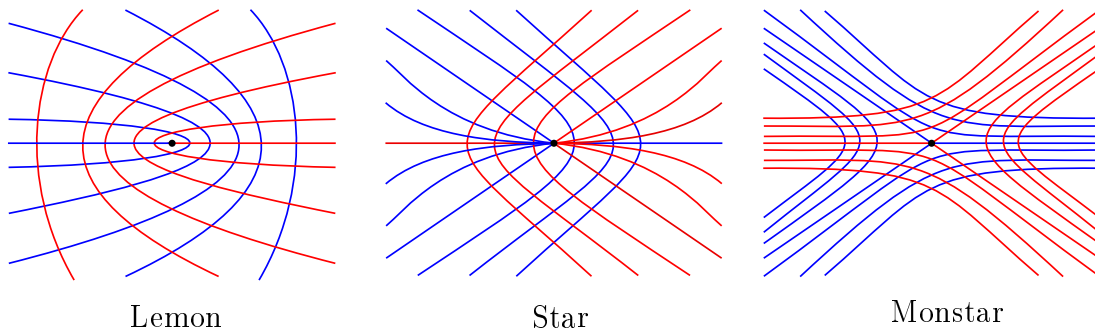


Figura 2.6: Configurações topológicas das EDBs (2.16) quando o discriminante é um ponto isolado.

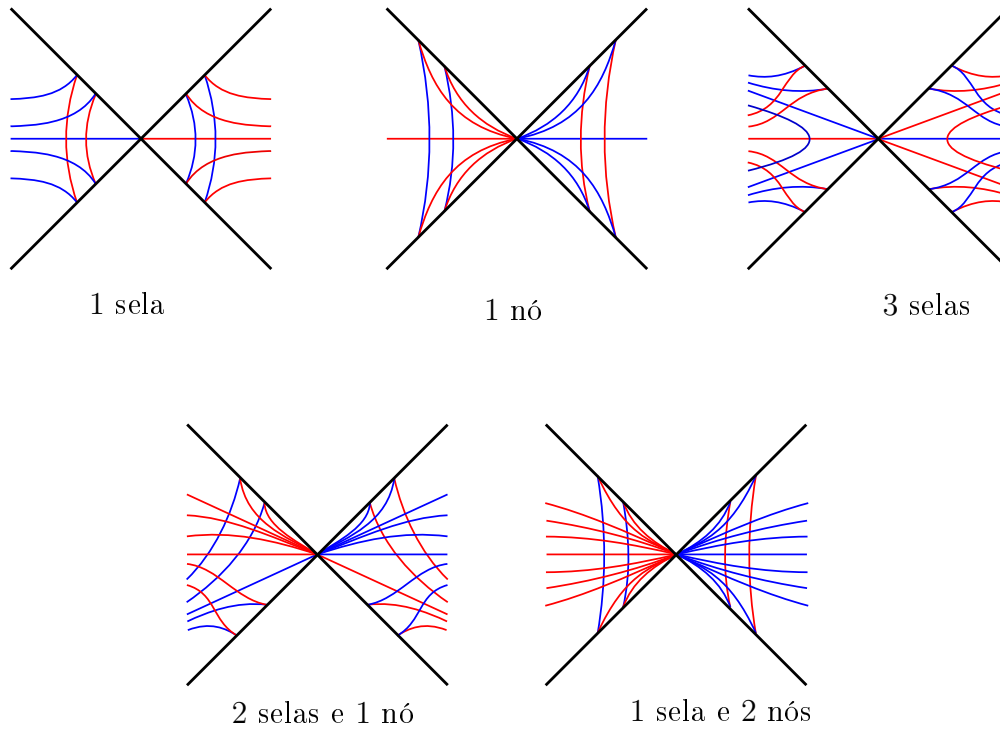


Figura 2.7: Configurações topológicas das EDBs (2.16) quando o discriminante é um par de curvas suaves transversais.

### 2.3.3 Singularidades mais degeneradas

Quando o 1-jato de uma EDB do tipo Morse II é escrito na forma  $(y, b_1x + b_2y, \pm y)$ , degenerescências locais ocorrem quando  $(b_1, b_2)$  é um ponto sobre as curvas excepcionais descritas nas Proposições 2.4 e 2.6. Degenerescências locais também ocorrem se o 1-jato da EDB for da forma  $(x + a_2y, 0, y)$ ,  $a_2 > 1/4$ , conforme Proposição 2.3. Ambos os casos são incluídos em uma das categorias abaixo.

- (1) *Singularidade sela-nó sobre o discriminante do tipo Morse II*: Ocorre quando a quadrática  $\alpha_1$  e a cúbica  $\phi$  têm uma raiz em comum.
- (2) *Singularidade sela-nó fora do discriminante do tipo Morse II*: Ocorre quando  $\phi$  tem uma raiz dupla.

As motivações dos nomes dados às singularidades vêm do estudo das configurações topológicas das EBDs pelo método do levantamento de direções. Quando os casos acima ocorrem, o campo  $\xi$  tem uma sela-nó e esta pode ocorrer no criminante ou fora dele.

Para estudar as configurações topológicas nas singularidades descritas acima utilizaremos, porém, o método do blow-up de singularidades.

• **Singularidade sela-nó sobre o criminante do tipo Morse II.**

Esta singularidade ocorre quando a quadrática  $\alpha_1$  e a cúbica  $\phi$  têm uma raiz em comum. Temos, então, dois casos a considerar, dependendo do número de raízes de  $\phi$ .

O primeiro caso que consideramos aqui é quando  $\phi$  tem mais de uma raiz.

Segue da Proposição 2.3 que podemos tomar  $j^1w = (y, b_1x + b_2y, \pm y)$ . Como vimos na Proposição 2.4, no caso  $j^1w = (y, b_1x + b_2y, -y)$ , os polinômios  $\phi$  e  $\alpha_1$  têm raízes em comum se, e somente se,  $b_1 = 0$ . Não estudaremos, portanto, esta binária, pois a função discriminante tem uma singularidade pior que Morse.

Do comentário acima, estudaremos somente o caso  $j^1w = (y, b_1x + b_2y, y)$ .

Sabemos que  $\alpha_1$  e  $\phi$  têm raiz em comum se, e somente se,  $b_1 = \pm b_2 - 1$ , como visto na Proposição 2.6. É possível fazer uma mudança de coordenadas linear que leva a reta  $b_1 = -b_2 - 1$  na reta  $b_1 = b_2 - 1$ . Podemos, então, considerar apenas o caso  $b_1 = b_2 - 1$ . Neste caso,  $\phi$  e  $\alpha_1$  são dados por

$$\phi(p) = (p + 1)(p + 2b_2 - 1)p \quad \text{e} \quad \alpha_1(p) = (p + 1)(p + b_2 - 1). \quad (2.17)$$

Observe ainda que consideramos em todo este trabalho  $(b_1, b_2) \neq (0, 1)$ , pois neste caso o discriminante tem uma singularidade pior que Morse. Além disso, o caso em que  $\alpha_1$  e  $\phi$  têm duas raízes em comum será estudado posteriormente no Teorema 2.3. Assim, para o Teorema 2.2,  $\alpha_1$  e  $\phi$  têm apenas uma raiz em comum e, portanto,  $(b_1, b_2) \neq (-1, 0)$ .

Quando a cúbica  $\phi$  tem apenas uma raiz, pela Proposição 2.3, podemos tomar  $j^1w = (x + a_2y, 0, y)$  com  $a_2 > 1/4$ . Neste caso,

$$\phi(p) = p(a_2p^2 + p + 1) \quad \text{e} \quad \alpha_1(p) = p(a_2p + 1).$$

Nas seções anteriores classificamos topologicamente as EDBs (2.13) nos casos onde  $(b_1, b_2)$  se encontram nos abertos descritos pelas curvas definidas nas Proposições 2.4 e 2.6. Em resumo, no teorema a seguir estudaremos os casos onde  $(b_1, b_2)$  estão sobre as curvas da Figura 2.8.

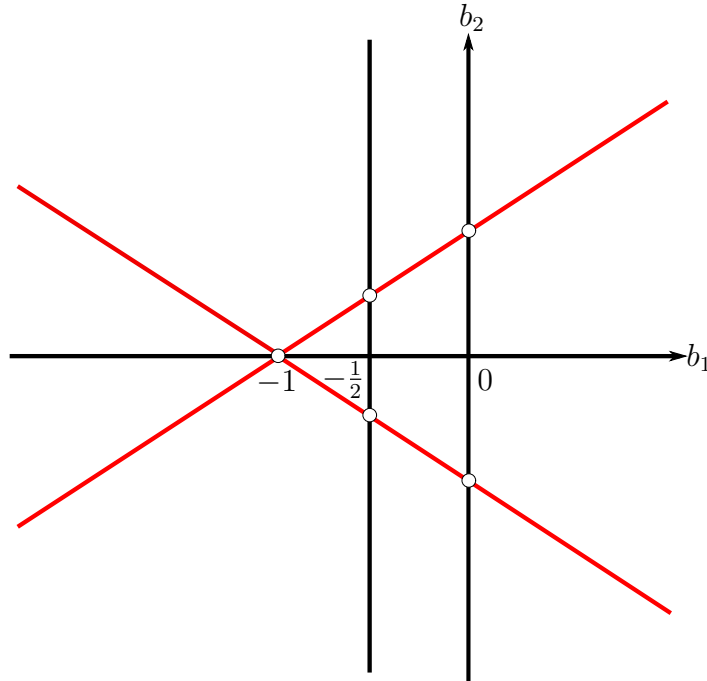


Figura 2.8:  $b_1 = \pm b_2 + 1$ .

Observe ainda que, como comentamos, excluimos os pontos  $(b_1, b_2) = (0, 1), (0, -1), (-1, 0), (-1/2, 1/2)$  e  $(-1/2, -1/2)$ . Os casos  $(b_1, b_2) = (0, 1)$  e  $(0, -1)$ , como foi dito anteriormente, não serão estudados neste trabalho, enquanto os casos  $(b_1, b_2) = (-1, 0), (-1/2, 1/2)$  e  $(-1/2, -1/2)$  serão estudados após o Teorema 2.2.

O próximo teorema mostra que a configuração topológica de uma EDB com singularidade sela-nó no criminante do tipo Morse II é completamente determinada pelo 2-jato dos coeficientes da mesma.

Grosseiramente falando, a palavra genericamente no Teorema 2.2 diz que o resultado é válido para quase todos os coeficientes da EDB, o significado preciso deste termo pode ser encontrado em [20] página 773.

**Teorema 2.2.** *Genericamente, uma EDB com uma singularidade sela-nó sobre o criminante do tipo Morse II é topologicamente equivalente a uma das seguintes formas normais.*

(1) *Se  $\phi$  tem três raízes:*

(i)  $(y, 2x + 3y + x^2, y) = 0,$

(ii)  $(y, -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + x^2, y) = 0,$

(2) *Se  $\phi$  tem uma raiz:*

(iii)  $(x + y, x^2, y) = 0.$

As configurações das EDBs acima estão representadas na Figura 2.9.

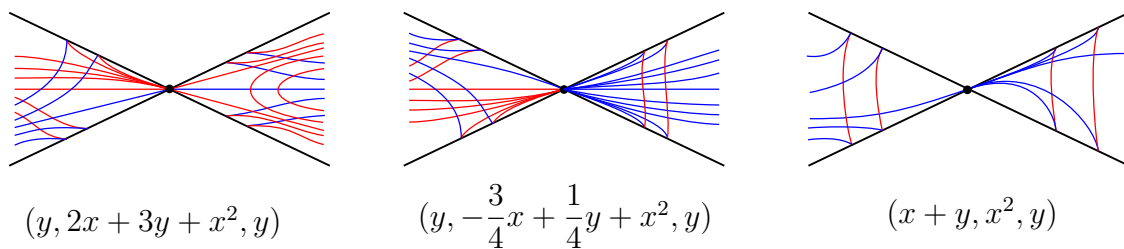


Figura 2.9: Configurações topológicas do Teorema 2.2.

*Demonstração:*

Utilizaremos aqui a técnica no Blow-up de singularidades.

Por hipótese, a EDB tem uma singularidade do tipo sela-nó no criminante do tipo Morse II, portanto a quadrática  $\alpha_1$  e a cúbica  $\phi$  têm uma raiz em comum. Logo, o 1-jato dos coeficientes da EDB depende da quantidade de raízes da cúbica  $\phi$ .

(i) – (ii) Sabemos, da Proposição 2.3 e dos comentários antes do enunciado deste teorema, juntamente com o fato que  $b_1 = b_2 - 1$ , que, como  $\phi$  tem três raízes, o 1-jato da EDB é da forma

$$j^1w = (y, (b_2 - 1)x + b_2y, y) = 0.$$

Escrevemos então  $w = (y + M_1(x, y), (b_2 - 1)x + b_2y + M_2(x, y), y + M_3(x, y))$ , onde  $M_i(x, y)$  são funções suaves com 1-jato nulo. Consideraremos o blow-up direcional  $x = u, y = uv$ . Obtemos, então, uma nova EDB  $w_0$  com coeficientes

$$\begin{aligned}\bar{a} &= u^2(uv + M_1(u, uv)), \\ \bar{b} &= uv(uv + M_1(u, uv)) + u((b_2 - 1)u + b_2uv + M_2(u, uv)), \\ \bar{c} &= v^2(uv + M_1(u, uv)) + 2v((b_2 - 1)u + b_2uv + M_2(u, uv)) + uv + M_3(u, uv).\end{aligned}$$

Podemos escrever  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = u(u^2A_1, uB_1, C_1)$  tal que

$$\begin{aligned}A_1 &= v + uN_1(u, v), \\ B_1 &= v^2 + b_2v + b_2 - 1 + u(N_2(u, v) + vN_1(u, v)), \\ C_1 &= v(v^2 + 2b_2v + 2b_2 - 1) + u(v^2N_1(u, v) + 2vN_2(u, v) + N_3(u, v)),\end{aligned}$$

onde  $M_i(u, uv) = u^2N_i(u, v), i = 1, 2, 3$ .

A forma quadrática  $w_1 = (u^2A_1, uB_1, C_1)$  pode ser decomposta em duas 1-formas associadas aos campos de vetores

$$X_i = u^2A_1 \frac{\partial}{\partial u} + (-uB_1 + (-1)^i \sqrt{u^2(B_1^2 - A_1C_1)}) \frac{\partial}{\partial v}, \quad i = 1, 2.$$

Podemos fatorar  $u$  em  $X_i$  e considerar os campos de vetores

$$Y_i = uA_1 \frac{\partial}{\partial u} + (-B_1 + (-1)^i \sqrt{B_1^2 - A_1C_1}) \frac{\partial}{\partial v}, \quad i = 1, 2.$$

Na forma de sistema, temos

$$Y_1 = \begin{cases} u' = uA_1 \\ v' = -B_1 - \sqrt{B_1^2 - A_1C_1}, \end{cases} \quad Y_2 = \begin{cases} u' = uA_1 \\ v' = -B_1 + \sqrt{B_1^2 - A_1C_1}. \end{cases}$$

A transformação blowing-up preserva orientação se  $u > 0$  e reverte orientação se  $u < 0$ . Como fatoramos o  $u$  duas vezes temos que  $Y_1$  corresponde à folheação  $\mathcal{F}_1$  de  $w$  se  $u > 0$  e à folheação  $\mathcal{F}_2$  se  $u < 0$ ; enquanto  $Y_2$  corresponde à folheação  $\mathcal{F}_2$  de  $w$  se  $u > 0$  e à folheação  $\mathcal{F}_1$  se  $u < 0$ .



Estudamos, então, os campos vetoriais  $Y_i$  em uma vizinhança da fibra  $u = 0$ , e fazemos o blow-down para obter a configuração das curvas integrais da EDB original.

Os campos estão definidos apenas quando  $B_1^2 - A_1C_1 \geq 0$ , em  $u = 0$  isso significa

$$B_1^2 - A_1C_1 = (b_2^2 - 1)(v + 1) \left( v + \frac{b_2 - 1}{b_2 + 1} \right) \geq 0.$$

Assim temos que analisar os campos  $Y_1$  e  $Y_2$  nos pontos singulares na fibra e nos pontos do bordo  $v = -1$  e  $v = -(b_2 - 1)/(b_2 + 1)$ .

Primeiramente estudaremos o campo  $Y_1$ . As singularidades de  $Y_1$  em  $u = 0$  ocorrem quando  $-B_1 - \sqrt{B_1^2 - A_1C_1} = 0$ , ou seja, quando  $-B_1 = \sqrt{B_1^2 - A_1C_1}$ . Equivalentemente

$$A_1C_1 = v^2(v + 1)(v + 2b_2 - 1) = 0 \quad \text{e} \quad B_1 = (v + 1)(v + b_2 - 1) \leq 0.$$

Portanto, os possíveis pontos singulares na fibra são os pontos  $(0, v)$  onde

(a)  $v = -2b_2 + 1$ ,

(b)  $v = 0$ ,

(c)  $v = -1$ .

(a) Quando  $v = -2b_2 + 1$ , temos que  $B_1 = 2b_2(b_2 - 1)$ . Neste caso,  $v = -2b_2 + 1$  é uma singularidade se  $0 < b_2 < 1$ . O 1-jato de  $Y_1$  em  $(0, -2b_2 + 1)$  é dado por

$$j^1Y_1 = \begin{cases} u' = (-2b_2 + 1)u \\ v' = \beta u + \frac{(2b_2 - 1)^2}{b_2}(v + 2b_2 - 1), \end{cases}$$

para algum escalar  $\beta$ . Agora é fácil ver que, no ponto  $(0, -2b_2 + 1)$  os autovalores da linearização do campo  $j^1Y_1$  são dados por

$$\lambda_1 = -2b_2 + 1, \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{(2b_2 - 1)^2}{b_2}.$$

Portanto, a singularidade é um nó se  $0 < b_2 < 1/2$  e é uma sela se  $1/2 < b_2 < 1$ .

- (b) Quando  $v = 0$ , temos que  $B_1 = b_2 - 1$ . Neste caso,  $v = 0$  é uma singularidade se  $b_2 < 1$ . Assim,  $B_1(0, 0) = b_2 - 1 < 0$ , então

$$-B_1 - \sqrt{B_1^2 - A_1 C_1} = -B_1 + B_1 \sqrt{1 - \frac{A_1 C_1}{B_1^2}} = -\frac{A_1 C_1}{2B_1} + A_1^2 g(u, v)$$

para algum germe de função suave  $g$  com 1-jato nulo na origem. A última igualdade segue quando expandimos em Taylor na origem o termo  $\sqrt{1 - A_1 C_1 / B_1^2}$ . Assim  $Y_1$  é singular ao longo da curva  $A_1 = 0$ . Consideramos então o campo vetorial  $\tilde{Y}_1 = Y_1 / A_1$ .

O 1-jato de  $\tilde{Y}_1$  na origem é dado por

$$j^1 \tilde{Y}_1 = \begin{cases} u' = u \\ v' = \beta u - \frac{2b_2 - 1}{2(b_2 - 1)} v, \end{cases}$$

para algum escalar  $\beta$ . Os autovalores da linearização do campo  $j^1 \tilde{Y}_1$  são

$$\lambda_1 = 1, \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{2b_2 - 1}{2(b_2 - 1)}.$$

Portanto,  $\tilde{Y}_1$  tem uma sela na origem se  $b_2 < 1/2$  e um nó se  $1/2 < b_2 < 1$ .

- (c) O ponto  $v = -1$  é uma singularidade de  $Y_1$  para qualquer valor de  $b_2$ .

Podemos fazer mudanças de coordenadas lineares para definir  $j^k a = y$ , para todo  $k \geq 2$ . Vamos considerar, além disso,

$$M_2(x, y) = b_{20}x^2 + b_{21}xy + b_{22}y^2 \quad \text{e} \quad M_3(x, y) = c_{20}x^2 + c_{21}xy + c_{22}y^2,$$

onde  $M_2(x, y)$  e  $M_3(x, y)$  são as partes quadráticas de  $j^2 b$  e  $j^2 c$ , respectivamente.

Fazemos, então, no sistema  $Y_1$ , a mudança de coordenadas  $s = u$  e  $t^2 = B_1^2 - A_1 C_1$ , com  $t \geq 0$ . Para efetuar a mudança de coordenadas, necessitamos encontrar  $v$  em função de  $s$  e  $t$ . Para isso escreva  $G(s, v, t) = B_1^2 - A_1 C_1 - t^2$ . Diferenciando  $G$  em relação a  $v$ , obtemos  $G_v(0, -1, 0) = 2 - 2b_2$ . Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, se  $b_2 \neq 1$ , podemos escrever  $v = g(s, t)$  com  $G(s, g(s, t), t) = 0$ . Escrevendo, então,  $j^2 g(s, t) = 1 + as + bt + cs^2 + dst + ft^2$  e substituindo na equação  $G(s, g(s, t), t) = 0$ , obtemos uma forma para  $v$ .

Com a ajuda do programa computacional Maple, obtemos que

$$v = j^2 g(s, t) = 1 + bt + cs^2 + ft^2,$$

onde

$$b = \frac{-c_{22} + c_{21} - c_{20} - a_{20} + 2b_{22} + a_{21} + 2b_{20} - a_{22} - 2b_{21}}{2 - 2b_2},$$

$$c = \frac{1}{2 - 2b_2}$$

e

$$f = \frac{1}{8(b_2 - 1)^2} (b_2 c_{22}^2 + 16c_{22}b_{22} + 8c_{22}b_{20} + 2a_{21}c_{20}b_2 - 6c_{22}c_{20} + a_{21}^2 b_2 - 4a_{20}b_{21} - 2a_{22}c_{22}b_2$$

$$+ 8c_{22}c_{21} - 6a_{20}a_{22} + a_{22}^2 b_2 - 2c_{21}b_2c_{22}$$

$$- 2c_{21}c_{20}b_2 - 2a_{21}a_{20}b_2 - 2a_{21}a_{22}b_2 + 16b_{22}a_{22}$$

$$- 12a_{22}b_{21} + 2c_{22}c_{20}b_2 - 5c_{22}^2 - 5a_{22}^2$$

$$+ 2a_{20}a_{22}b_2 - c_{20}^2 + 8a_{21}b_{21} + 8a_{21}a_{22} - 4c_{21}b_{20}$$

$$- 12b_{22}a_{21} - 2a_{20}c_{22}b_2 - 2a_{22}c_{20}b_2 + a_{20}^2 b_2 - 8b_{21}^2$$

$$+ 2a_{22}c_{21}b_2 - 4a_{21}b_{20} - 3a_{21}^2 + 8c_{21}b_{21}$$

$$- 12c_{21}b_{22} - 16b_{22}^2 - 16b_{22}b_{20} + 24b_{22}b_{21}$$

$$+ 8b_{20}b_{21} - 4c_{20}b_{21} - 3c_{21}^2 + 2a_{20}c_{21}b_2 + 4c_{21}c_{20} - a_{20}^2 + 8a_{20}b_{22}$$

$$+ b_2c_{21}^2 + 8c_{20}b_{22} + 4a_{22}c_{21} - 2a_{22}c_{20} + 8b_{20}a_{22}$$

$$- 2a_{20}c_{22} + 2a_{20}c_{20} + 4a_{21}c_{22} - 2a_{21}c_{21} - 2a_{20}c_{20}b_2$$

$$- 2a_{21}c_{21}b_2 - 12c_{22}b_{21} + c_{20}^2 b_2 + 2a_{21}c_{22}b_2 - 6a_{22}c_{22} + 4a_{20}a_2).$$

Depois de efetuar a mudança, o sistema  $Y_1$  fica da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{s} = s \left( \frac{B_1^2 - t^2}{C_1} \right) \\ g_s \dot{s} + g_t \dot{t} = -B_1 - t \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{s} = s \left( \frac{B_1^2 - t^2}{C_1} \right) \\ \dot{t} = -\frac{(B_1 + t)}{g_t} - \frac{g_s s}{g_t C_1} (B_1^2 - t^2), \end{array} \right.$$

onde  $g_s$  e  $g_t$  são as derivadas parciais de  $g$  com relação a  $s$  e  $t$ , respectivamente. Multiplicando este último sistema por  $-\frac{C_1 g_t}{B_1^2 - t^2}$ , obtemos

$$\begin{cases} \dot{s} = -s g_t \\ \dot{t} = \frac{C_1}{B_1 - t} + s g_s. \end{cases} \quad (2.18)$$

ou ainda

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{st}{b_2 - 1} + o(3) \\ \dot{t} = \Lambda s + \frac{2 - 2b_2}{2(b_2 - 1)} t + o(2), \end{cases} \quad (2.19)$$

onde

$$\Lambda = \frac{(3 - b_2)(c_{20} - c_{21} + c_{22}) - 4(b_{20} - b_{21} + b_{22})}{2(b_2 - 1)}.$$

Então, a origem é uma singularidade sela-nó do campo (2.19) quando  $\Lambda$  é não nulo.

As curvas integrais de (2.19), a menos de reflexão pelo eixo vertical, são mostradas na Figura 2.10. Notemos que as curvas integrais de  $Y_1$  são como na Figura 2.10 desconsiderando as linhas pontilhadas. Essas configurações dependem apenas dos 2-jatos dos coeficientes da EDB, mais precisamente de  $\Lambda \neq 0$ .

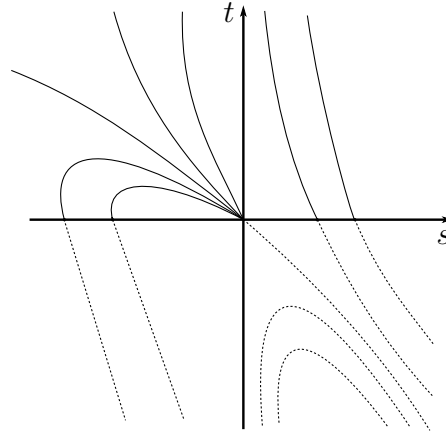


Figura 2.10: Curvas integrais de (2.19).

No ponto do bordo  $v = -(b_2 - 1)/b_2 + 1$ , as curvas integrais de  $Y_1$  são curvas suaves transversais ao discriminante.

Estudaremos agora o campo  $Y_2$ . O estudo é análogo ao caso  $Y_1$ . As singularidades de  $Y_2$  em  $u = 0$  ocorrem quando  $B_1 - \sqrt{B_1^2 - A_1 C_1} = 0$ , ou seja, quando  $B_1 = \sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}$ . Equivalentemente,

$$A_1 C_1 = v^2(v + 1)(v + 2b_2 - 1) = 0 \quad \text{e} \quad B_1 = (v + 1)(v + b_2 - 1) \geq 0.$$

Logo, os possíveis pontos singulares na fibra são os pontos  $(0, v)$ , onde

$$(a)v = -2b_2 + 1, \quad (b)v = 0, \quad (c)v = -1.$$

- (a) Quando  $v = -2b_2 + 1$ , temos que  $B_1 = 2b_2(b_2 - 1)$ . Neste caso,  $v = -2b_2 + 1$  é uma singularidade se  $b_2 < 0$  ou  $b_2 > 1$ . O 1-jato de  $Y_1$  em  $(0, -2b_2 + 1)$  é dado por

$$j^1 Y_2 = \begin{cases} u' = (-2b_2 + 1)u \\ v' = \beta u + \frac{(2b_2 - 1)^2}{b_2}(v + 2b_2 - 1), \end{cases}$$

para algum escalar  $\beta$ . Portanto, a singularidade é sempre uma sela.

- (b) Quando  $v = 0$ , temos que  $B_1 = b_2 - 1$ . Neste caso,  $v = 0$  é uma singularidade se  $b_2 > 1$ . Similarmente ao caso  $Y_1$ , o campo  $Y_2$  é singular ao longo da curva  $A_1(u, v) = 0$ . O 1-jato do campo vetorial  $\tilde{Y}_2 = Y_2/A_1$  em  $(0, 0)$  é dado por

$$j^1 \tilde{Y}_2 = \begin{cases} u' = u \\ v' = \beta u - \frac{2b_2 - 1}{2(b_2 - 1)}v, \end{cases}$$

para algum escalar  $\beta$ . Portanto,  $\tilde{Y}_2$  tem uma sela na origem.

- (c) O ponto  $v = -1$  é uma singularidade de  $Y_2$  para qualquer valor de  $b_2$ . Analogamente ao caso  $Y_1$  em  $v = -1$ , obtemos o campo dado por

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{st}{b_2 - 1} + o(3) \\ \dot{t} = \Lambda s - \frac{2 - 2b_2}{2(b_2 - 1)}t + o(2), \end{cases} \quad (2.20)$$

onde

$$\Lambda = \frac{(3 - b_2)(c_{20} - c_{21} + c_{22}) - 4(b_{20} - b_{21} + b_{22})}{2(b_2 - 1)}.$$

Então, a origem é uma singularidade sela-nó do campo (2.20) quando  $\Lambda$  é não nulo. As curvas integrais de (2.20) são como na Figura 2.11 e as curvas integrais de  $Y_2$  são como na Figura 2.11 desconsiderando as linhas pontilhadas.

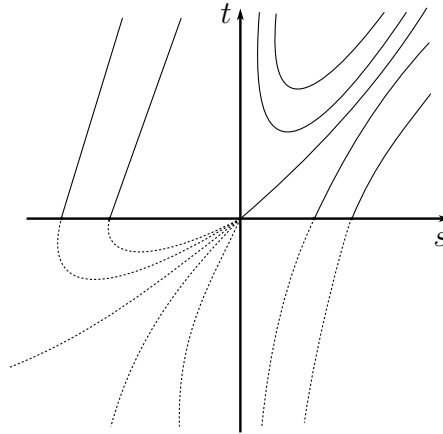


Figura 2.11: Curvas integrais de (2.20).

No ponto do bordo  $v = -(b_2 - 1)/b_2 + 1$ , as curvas integrais de  $Y_1$  são curvas suaves transversais ao discriminante.

Podemos, então, desenhar as curvas integrais dos campos  $Y_1$  e  $Y_2$  e fazer o blow down para obter as configurações das curvas integrais associadas a EDB.

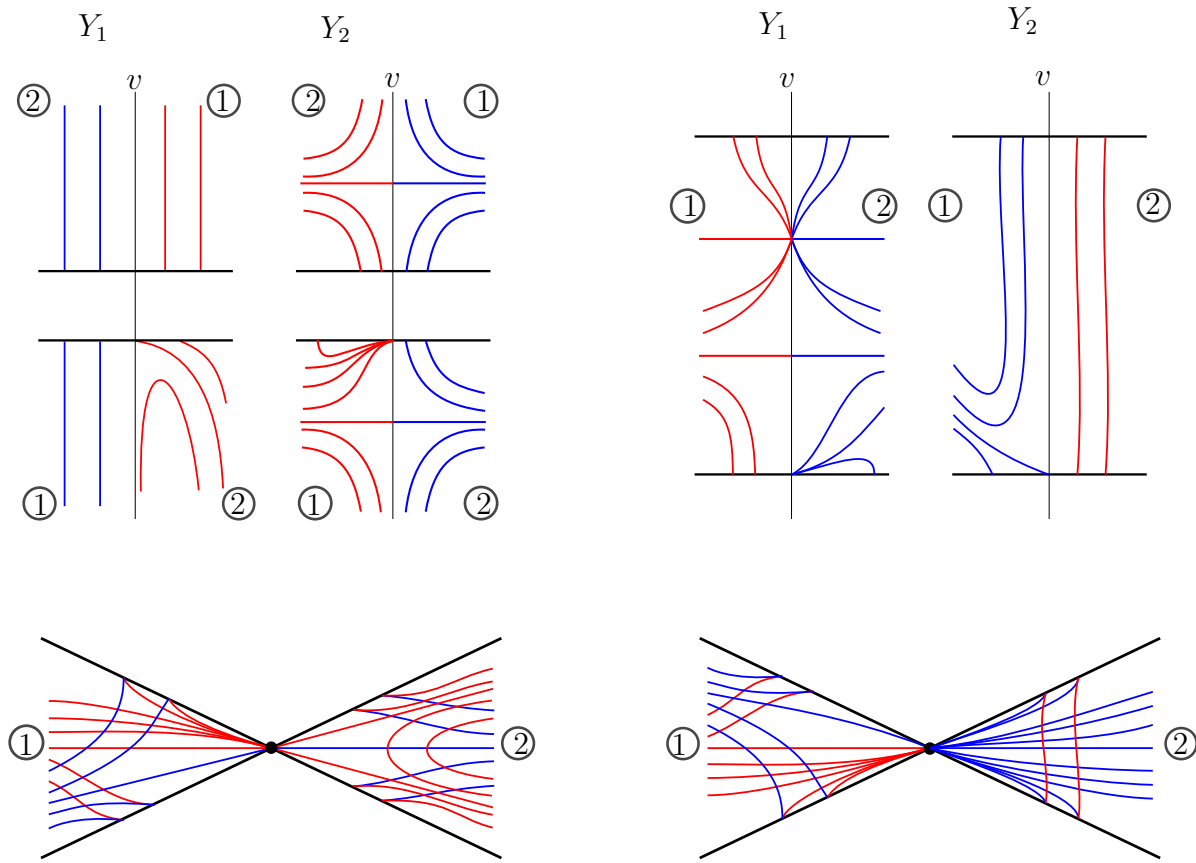


Figura 2.12: Configurações topológicas da EDB  $(y, 2x + 3y + x^2, y) = 0$  à esquerda e da EDB  $(y, -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + x^2, y) = 0$  à esquerda.

Não mostraremos aqui, mas pode-se mostrar, usando o método em [3], que duas EDBs com a mesma configuração são topologicamente equivalentes. As configurações dependem apenas do tipo de singularidades de  $\xi$  e de  $\Lambda \neq 0$ , podemos então tomar  $(b_1, b_2)$  tal que  $b_1 = b_2 - 1$ , com  $b_2 \neq 0, 1/2, 1$ . A fim de encontrarmos os modelos das EDBs apresentados no enunciado do teorema, basta escolhermos valores para os coeficiente dos termos de grau dois tais que  $\Lambda \neq 0$ . No enunciado do teorema, genericamente significa que o teorema é verdadeiro para todos os valores dos coeficientes, exceto aqueles que anulam  $\Lambda$ .

(iii) Neste caso, por hipótese,  $\phi$  tem apenas uma raiz. Assim, segue da Proposição 2.3, que o 1-jato da EDB é da forma  $j^1w = (x + ay, 0, y) = 0$ ,  $a > \frac{1}{4}$ .

Escrevemos então  $w = (x + ay + M_1(x, y), M_2(x, y), y + M_3(x, y))$ , onde  $M_i(x, y)$  são funções suaves com 1-jato nulo. Consideraremos o blow-up direcional  $x = u$ ,  $y = uv$ . Obtemos, então, uma nova EDB  $w_0$  com coeficientes

$$\begin{aligned}\bar{a} &= u^2(u + av + M_1(u, uv)), \\ \bar{b} &= uv(u + av + M_1(u, uv)) + uM_2(u, uv), \\ \bar{c} &= v^2(u + av + M_1(u, uv)) + vM_2(u, uv) + uv + M_3(u, uv).\end{aligned}$$

Podemos escrever  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = u(u^2A_1, uB_1, C_1)$  tal que

$$\begin{aligned}A_1 &= 1 + av + uN_1(u, v), \\ B_1 &= v(1 + av) + u(vN_1(u, v) + N_2(u, v)), \\ C_1 &= v(1 + v + av^2) + u(v^2N_1(u, v) + 2vN_2(u, v) + N_3(u, v)).\end{aligned}$$

A forma quadrática  $w_1 = (u^2A_1, uB_1, C_1)$  pode ser decomposta em duas 1-formas associadas aos campos de vetores

$$X_i = u^2A_1 \frac{\partial}{\partial u} + (-uB_1 + (-1)^i \sqrt{u^2(B_1^2 - A_1C_1)}) \frac{\partial}{\partial v}, \quad i = 1, 2.$$

Podemos fatorar  $u$  em  $X_i$  e considerar os campos de vetores

$$Y_i = uA_1 \frac{\partial}{\partial u} + (-B_1 + (-1)^i \sqrt{B_1^2 - A_1C_1}) \frac{\partial}{\partial v}, \quad i = 1, 2.$$

Na forma de sistema, temos

$$Y_1 = \begin{cases} u' = uA_1 \\ v' = -B_1 - \sqrt{B_1^2 - A_1C_1}, \end{cases} \quad Y_2 = \begin{cases} u' = uA_1 \\ v' = -B_1 + \sqrt{B_1^2 - A_1C_1}. \end{cases}$$

Estudaremos os campos  $Y_i$ ,  $i = 1, 2$ , em uma vizinhança da fibra  $u = 0$ . Os campos estão definidos apenas quando  $B_1^2 - A_1C_1 \geq 0$ , em  $u = 0$  isso significa

$$-v(1 + av) \geq 0.$$



Assim, temos que analisar os campos  $Y_1$  e  $Y_2$  nos pontos singulares na fibra e nos pontos do bordo  $v = 0$  e  $v = -1/a$ .

De forma análoga aos casos anteriores, temos que os pontos singulares dos campos são

$$(a) v = 0, \quad (b) v = -1/a.$$

Cálculos similares aos anteriores mostram que as configurações das curvas integrais estão representadas na Figura 2.13 na parte superior e o blow down na parte inferior. A configuração depende apenas do 2-jato dos coeficientes da EDB, mais precisamente, de  $b_{20} \neq 0$ . Podemos tomar, então,  $(x + y, x^2, y)$  como modelo topológico.

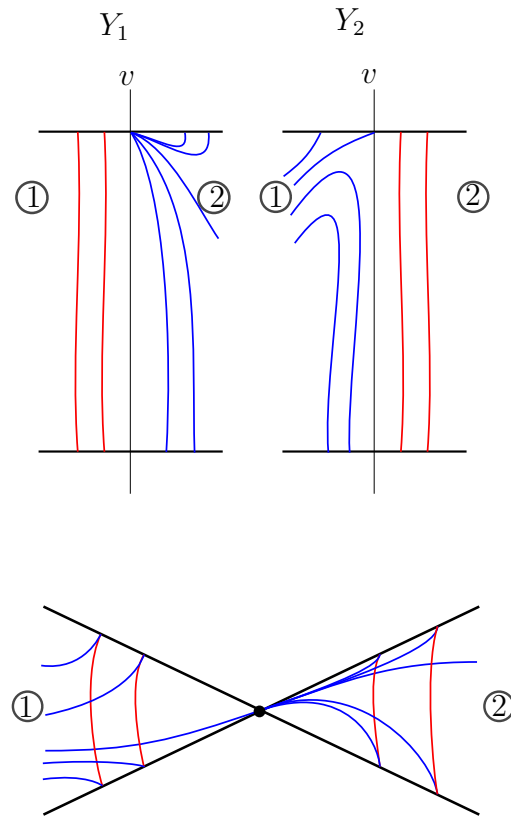


Figura 2.13: Configuração topológica da EDB  $(x + y, x^2, y)$ .

■

Como comentado anteriormente, o caso em que  $\phi$  tem 3 raízes e  $\alpha_1$  e  $\phi$  tem duas raízes em comum ainda não foi estudado. Neste caso, conforme Proposição 2.3 e os comentários antes do Teorema 2.2, a EDB é escrita da forma

$$ydy^2 + (-x)dxdy + ydx^2 = 0,$$

ou seja,  $(b_1, b_2) = (-1, 0)$ . O próximo teorema mostra que a configuração topológica de uma EDB sob as hipóteses acima é completamente determinado pelo 2-jato dos coeficientes da mesma. A técnica utilizada na demonstração do Teorema 2.3 é o blow-up de singularidades e a demonstração é bem parecida com a do Teorema 2.2. Apresentamos, assim, somente o enunciado do teorema, sua prova pode ser encontrada em [19].

**Teorema 2.3.** *Genericamente, uma EDB tal que  $\phi$  e  $\alpha_1$  têm duas raízes em comum e  $\phi$  tem três raízes é topologicamente equivalente a uma das formas a seguir:*

(i)  $(y, 2(-x + y^2), y) = 0,$

(ii)  $(y, 2(-x + xy), y) = 0.$

As configurações dos blow-ups e blow-downs das EDBs acima estão representadas na Figura 2.14. Na demonstração do Teorema 2.3, as configurações topológicas das EDBs dependem de constantes  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  e do sinal de  $\Lambda_1\Lambda_2$ .

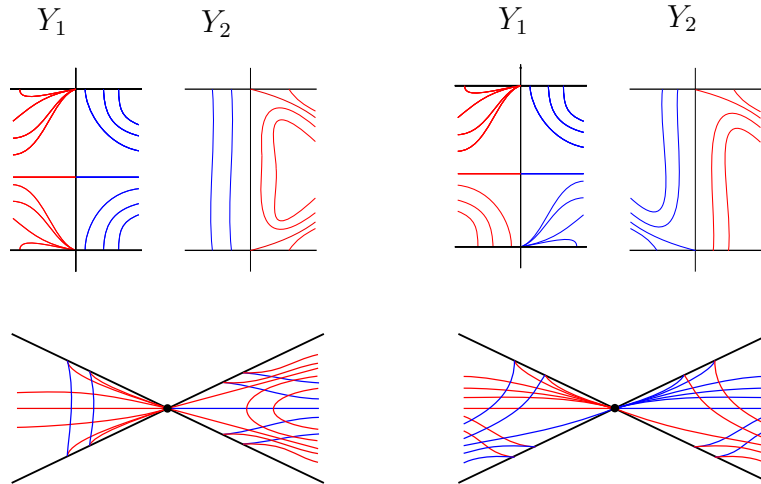


Figura 2.14: Configurações das EDBs quando  $\phi$  e  $\alpha_1$  têm duas raízes em comum e seus blow-ups: à esquerda quando  $\Lambda_1\Lambda_2 > 0$  e à direita quando  $\Lambda_1\Lambda_2 < 0$ .

Estudamos, nos Teoremas 2.2 e 2.3, as configurações da EDB com 1-jato  $(y, b_1x + b_2y, y) = 0$  quando  $(b_1, b_2)$  está sobre as retas  $b_1 = \pm b_2 - 1$  (exceto nos pontos onde  $b_2 = \pm 1/2$  que serão estudados logo a seguir) e da EDB com 1-jato  $(x + a_2y, 0, y) = 0$ ,  $a_2 > 1/4$ .

Finalmente, estudaremos a seguir a EDB com 1-jato  $(y, b_1x + b_2y, y) = 0$  nos pontos que faltam ser vistos, ou seja, nas curvas  $b_1 = (b_2^2 - \epsilon)/2$  e  $b_1 = -\epsilon/2$ ,  $\epsilon = \pm 1$ , descritas nas Proposições 2.4 e 2.6. Observamos aqui que os pontos faltantes  $b_2 = \pm 1/2$  são os pontos das interseções das retas  $b_1 = \pm b_2 - 1$  com a reta  $b_1 = -1/2$ .

• **Singularidade sela-nó fora do criminante do tipo Morse II.**

Esta singularidade ocorre quando  $\phi$  tem uma raiz dupla. Portanto, da Proposição 2.3, a EDB pode ser reduzida a  $j^1w = (y, b_1x + b_2y, \epsilon y) = 0$ , com  $\epsilon = \pm 1$ .

Segue das Proposições 2.4 e 2.6, que a cubica  $\phi$  tem uma raiz dupla se, e somente se,

$$b_1 = (b_2^2 - \epsilon)/2 \quad \text{ou} \quad b_1 = -\epsilon/2.$$

Podemos tomar  $b_2 > 0$ , pois a mudança de coordenadas  $(x, y) \mapsto (-x, y)$  produz a EDB  $yy^2 + 2(b_1x - b_2y)dxdy \pm ydx^2 = 0$  dada pelo par  $(b_1, -b_2)$ . Temos, assim, uma simetria em relação ao eixo  $b_1$  no plano  $(b_1, b_2)$ .

Assim, como anteriormente, o teorema mostra que a configuração topológica de uma EDB com singularidade sela-nó fora do criminante do tipo Morse II é completamente determinada pelo 2-jato dos coeficientes da mesma. A demonstração será mais uma vez omitida, uma vez que a técnica de blow-up de singularidades utilizada é análoga ao Teorema 2.2 e pode ser encontrada em [13] e [20].

**Teorema 2.4.** *Genericamente, uma EDB com uma singularidade sela-nó fora do criminante do tipo Morse II é topologicamente equivalente a uma das formas normais.*

$$(i) \quad (y, x + y + y^2, -y) = 0,$$

$$(ii) \quad (y, 4x + 3y + y^2, y) = 0,$$

$$(iii) \quad (y, -\frac{3}{8}x + \frac{1}{2}y + y^2, y) = 0.$$

A Figura 2.15 apresenta as configurações topológicas das EDBs do Teorema 2.4 com seus respectivos blow-ups.

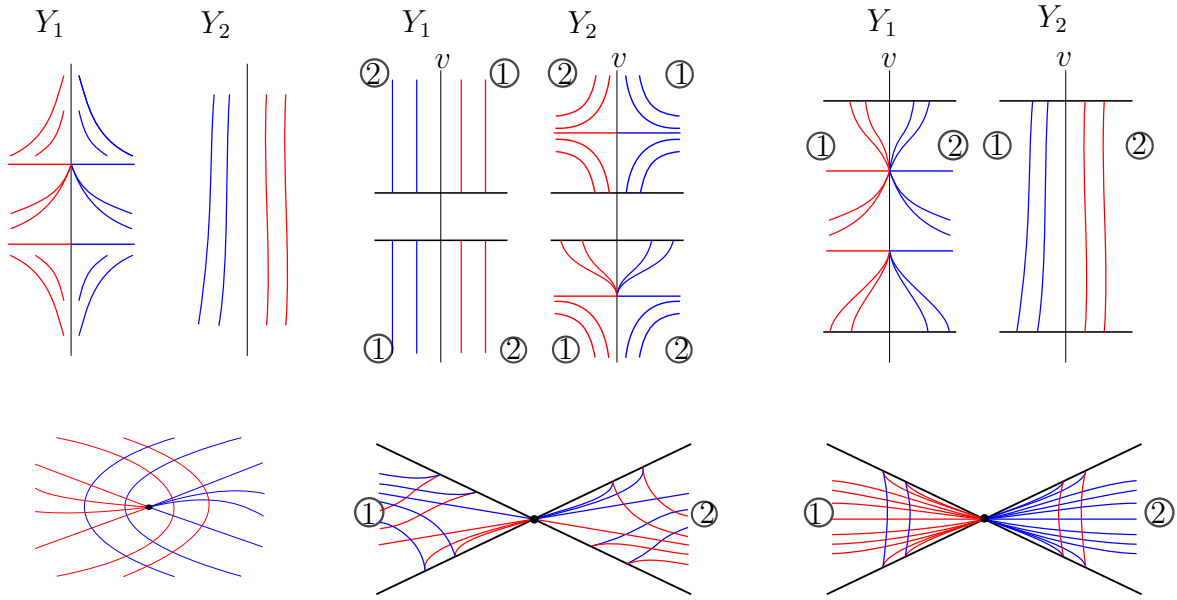


Figura 2.15: Configurações topológicas das EDBs descritas no Teorema 2.4.

# Capítulo 3

## Linhas de Curvatura de Superfícies em $\mathbb{R}^3$

As EDBs aparecem em vários ramos da matemática, em particular na geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Utilizando o material da seção anterior, apresentamos o comportamento das linhas de curvatura de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  próximas a um ponto umbílico. A descrição dessas linhas foi descoberta por Darboux [9] no século XIX, usando as técnicas de equações diferenciais ordinárias desenvolvida por H. Poincaré. Mais detalhes podem ser encontrados em [11] e [15]. Neste capítulo admitiremos conhecidos conceitos introdutórios sobre a geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Para mais detalhes e demonstrações dos resultados aqui apresentados, indicamos [10].

**Definição 3.1.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície. Um ponto  $p \in S$  é dito **umbílico** quando  $k_1 = k_2$ , sendo  $k_1$  e  $k_2$  as curvaturas principais.*

**Definição 3.2.** *Seja  $p$  um ponto umbílico em uma superfície  $S$ , diremos que  $p$  é um ponto **umbílico Darbouxiano** se as duas condições seguintes ocorrerem:*

**T: (Condição de Transversalidade)** *A superfície  $M$  é suave em  $\pi^{-1}(p)$ .*

**D: (Condição do Discriminante)** *As singularidades do campo de Lie-Cartan são hiperbólicas e são dadas por um dos casos abaixo, ver Figura 3.1:*

**D<sub>1</sub>:** *uma única sela, ou*

$D_2$ : um único nó e duas selas, ou

$D_3$ : três selas.

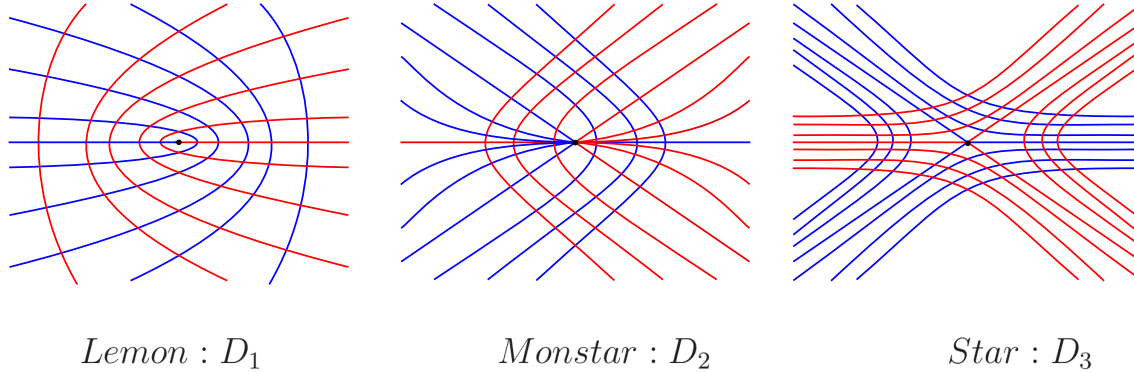


Figura 3.1: Linhas de curvatura próximas a um ponto umbílico.

**Teorema 3.1.** (Gutierrez-Sotomayor [14]) *Seja  $p$  um ponto umbílico de uma imersão  $\alpha$  dada em uma carta de Monge  $(x, y)$ , da superfície  $S$ , por:*

$$\alpha(x, y) = \left( x, y, \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}xy^2 + \frac{c}{6}y^3 + o(4) \right).$$

*Suponhamos as seguintes condições:*

- T)**  $b(b - a) \neq 0$ ;
- $D_1$ )**  $\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0$ ;
- $D_2$ )**  $\left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 > \frac{a}{b} > 1, a \neq 2b$ ;
- $D_3$ )**  $\frac{a}{b} < 1$ .

*Então o comportamento das linhas de curvatura próximas a um ponto umbílico  $p$ , nos casos  $D_1, D_2$  e  $D_3$ , são como na Figura 3.1.*

*Demonstração:*

Calculando os coeficientes da 1ª e 2ª formas fundamentais de  $\alpha$  encontramos:

$$\begin{aligned} E &= 1 + \left( kx + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + o(2) \right)^2, \\ F &= \left( kx + \frac{a}{2}x^2 + bxy + o(2) \right) \cdot \left( ky + bxy + \frac{c}{2}y^2 + o(2) \right), \\ G &= 1 + \left( ky + bxy + \frac{c}{2}y^2 + o(2) \right)^2, \\ e &= \frac{k + ax + o(2)}{|\alpha_x \times \alpha_y|}, \quad f = \frac{by + o(2)}{|\alpha_x \times \alpha_y|} \quad \text{e} \quad g = \frac{k + bx + cy + o(2)}{|\alpha_x \times \alpha_y|}. \end{aligned}$$

A equação das linhas de curvatura é dada por, veja [10]

$$(gF - fG)dy^2 + (gE - eG)dydx + (fE - eF)dx^2 = 0.$$

Multiplicando esta última equação por  $|\alpha_x \times \alpha_y|$  e substituindo os valores das primeira e segunda formas fundamentais obtemos,

$$(-by + o(2))dy^2 + ((b - a)x + cy + o(2))dx dy + (by + o(2))dx^2 = 0. \quad (3.1)$$

Associada a equação diferencial binária (3.1) consideremos a superfície

$$M = \{(x, y, p) : F(x, y, p) = (-by + o(2))p^2 + ((b - a)x + cy + o(2))p + (by + o(2)) = 0\}$$

com  $p = dy/dx$ , como em (2.3). Primeiramente, verificaremos que a condição  $T$  é equivalente à superfície  $M$  ser suave. Pela Proposição 2.1, isto é equivalente à função discriminante da equação  $F(x, y, p) = 0$  ter uma singularidade de Morse em  $(0, 0, p)$ . O 2-jato do discriminante da equação é dado pela função

$$j^2\delta(x, y) = ((b - a)x + cy)^2 + 4b^2y^2 = (b - a)^2x^2 + 2c(b - a)xy + (c^2 + 4b^2)y^2 = 0.$$

De fato, a origem é singularidade de  $\delta$ . Além disso, o determinante da Hessiana desta função é dada por

$$\det(\text{Hess}\delta(0, 0)) = (2c(b - a))^2 - 4((b - a)^2)((c^2 + 4b^2)) = -16b^2(b - a)^2.$$

Portanto, a função é Morse se, e somente se,  $T = b(b - a) \neq 0$ .

Para estudar o comportamento das linhas de curvatura, consideremos o campo de Lie-Cartan, ver Proposição 2.2, dado por

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Podemos escrever o campo  $\xi$  na forma de sistema

$$\xi = \begin{cases} x' = F_p = -2byp + (b-a)x + cy + o(2), \\ y' = pF_p = p(-2byp + (b-a)x + cy + o(2)), \\ p' = -(F_x + pF_y) = -((b-a)p + p(-bp^2 + cp + b) + o(2)). \end{cases} \quad (3.2)$$

Os equilíbrios de (3.2) são dados por  $F = F_p = F_x + pF_y = 0$ . As equações  $F = F_p = 0$ , nos fornecem os pontos  $(0, 0, p) \in 0 \times \mathbb{R}P^1$  ( $F = 0$ , para que o ponto esteja na superfície  $M$ ). Os pontos onde  $F_x + pF_y = 0$  em  $0 \times \mathbb{R}P^1$  são dados por uma cúbica  $\phi$  em  $p$

$$\phi(p) = -(F_x + pF_y)(0, 0, p) = -(b-a)p - p(-bp^2 + cp + b) = p(bp^2 - cp + a - 2b).$$

A raízes dessa cúbica são:

$$p_0 = 0 \quad \text{e} \quad p_{\pm} = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\lambda},$$

onde

$$\lambda = \left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2.$$

Portanto, quando  $\lambda > 0$  o sistema apresenta três pontos de equilíbrio, denotados por

$$E_0 = (0, 0, 0) \quad E_+ = (0, 0, p_+) \quad E_- = (0, 0, p_-).$$

As raízes da cúbica  $\phi$  representam as direções possíveis ao longo das quais as linhas de curvatura podem se aproximar do ponto umbílico. Quando  $\lambda < 0$  o sistema tem apenas  $E_0$  como equilíbrio. Passamos, agora, a estudar a natureza desses equilíbrios. A linearização do campo  $\xi$  dado em (3.2) no ponto  $(0, 0, p)$ , onde  $p \in \{0, p_-, p_+\}$  tem a forma

$$D\xi(0, 0, p) = \begin{pmatrix} b-a & c-2bp & 0 \\ (b-a)p & (c-2bp)p & 0 \\ 0 & 0 & 3bp^2 - 2cp + a - 2b \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$



Os autovalores de (3.3) são dados por

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3bp^2 - 2cp + a - 2b, \quad \lambda_3 = -2bp^2 + cp + b - a.$$

Observar que, como  $p$  é raiz da cúbica  $\phi(p) = p(bp^2 - cp + a - 2b)$ , podemos simplificar a escrita dos autovalores  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  como

$$\lambda_2 = 3bp^2 - 2cp + a - 2b = \underbrace{bp^2 - cp + a - 2b}_{=0} + 2bp^2 - cp = \underbrace{bp^2 - cp}_{=2b-a} + bp^2 = bp^2 + 2b - a.$$

$$\lambda_3 = -2bp^2 + cp + b - a = -\underbrace{(bp^2 - cp + a - 2b)}_{=0} - bp^2 - b \Rightarrow \lambda_3 = -b(p^2 + 1).$$

De agora em diante, assumiremos então  $\lambda_2 = bp^2 + 2b - a$  e  $\lambda_3 = -b(p^2 + 1)$ .

$$\mathbf{Caso } D_1: \left( \lambda = \left( \frac{c}{2b} \right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0 \right).$$

Neste caso, a origem é a única raiz real de  $\phi(p)$ , ou seja, temos apenas  $E_0$  como ponto de equilíbrio. Os autovalores de  $D\xi(E_0)$  são  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = b - a$  e  $\lambda_3 = a - 2b$ . Para que tenhamos uma singularidade do tipo  $D_1$  é suficiente mostrar que os autovalores  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  tenham sinais opostos. Como  $\lambda < 0$ , segue que

$$\frac{a - 2b}{b} > 0.$$

Portanto,  $(a - 2b)$  e  $b$  têm mesmo sinal. Assim

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{b - a}{a - 2b} = -1 - \frac{b}{a - 2b} < 0.$$

Segue, então, que  $E_0$  é uma sela.

$$\mathbf{Caso } D_2: \left( \lambda = \left( \frac{c}{2b} \right)^2 - \frac{a}{b} + 2 > 0, \quad \frac{a}{b} > 1, \quad a \neq 2b \right).$$

Neste caso, temos três pontos de equilíbrios. Dividimos esse caso em dois sub-casos.

Primeiramente consideraremos

$$1 < \frac{a}{b} < 2.$$

É fácil ver que  $E_0$  é um nó, pois

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{b-a}{a-2b} = \frac{b\left(1 - \frac{a}{b}\right)}{b\left(\frac{a}{b} - 2\right)} = \frac{\overbrace{\left(1 - \frac{a}{b}\right)}^{<0}}{\underbrace{\left(\frac{a}{b} - 2\right)}_{<0}} > 0.$$

Para estudar a natureza dos pontos de equilíbrio  $E_{\pm}$ , consideremos a razão

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{2b-a+bp^2}{-b(p^2+1)} = \frac{b\left(2 - \frac{a}{b} + p^2\right)}{-b(p^2+1)} = \frac{2 - \frac{a}{b} + p^2}{-(p^2+1)} < 0.$$

Portanto,  $E_{\pm}$  são selas, independentemente da escolha de  $p$ .

No segundo sub-caso, consideraremos

$$2 < \frac{a}{b} < 2 + \left(\frac{c}{2b}\right)^2.$$

De modo análogo ao sub-caso anterior, é fácil ver que  $E_0$  é uma sela, ou seja,  $\lambda_2/\lambda_3 < 0$ . Estudaremos agora a natureza dos pontos de equilíbrio  $E_{\pm}$ . Novamente consideraremos a razão

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{2b-a+bp^2}{-b(p^2+1)} = \frac{b\left(2 - \frac{a}{b} + p^2\right)}{-b(p^2+1)} = \frac{2 - \frac{a}{b} + p^2}{-(p^2+1)}.$$

Neste caso, temos que o sinal da razão depende do valor de  $p$  e é dado pelo numerador, já que o denominador é sempre negativo, independentemente de  $p$ . Passamos assim a estudar o sinal da expressão  $N_{\pm} = 2 - \frac{a}{b} + p_{\pm}^2$ . Substituindo, o valor de  $p_{\pm}$  em  $N_{\pm}$ , chegamos na seguinte equação

$$N_{\pm} = 2\lambda \pm \frac{c}{2b}\sqrt{\lambda} = 2\sqrt{\lambda}\left(\sqrt{\lambda} \pm \frac{c}{2b}\right).$$

Como  $\lambda > 0$  os sinais de  $N_{\pm}$  seguem da expressão dentro do parênteses. Assim, supondo  $bc > 0$ , segue que  $N_+$  é sempre positivo e o sinal  $N_-$  segue de

$$\left(\sqrt{\delta} - \frac{c}{2b}\right) = \left(\sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2} - \frac{c}{2b}\right) < \left(\sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{c}{2b}}\right) = \left|\frac{c}{2b}\right| - \frac{c}{2b} = 0.$$

A desigualdade segue do fato que  $2 < a/b$  e a última igualdade segue, pois estamos considerando  $bc > 0$ . Assim, temos que  $E_+$  é uma sela e  $E_-$  é um nó. De modo análogo, supondo  $bc < 0$ , concluímos que  $E_+$  é um nó e  $E_-$  é uma sela.

**Caso  $D_3$ :**  $\left(\frac{a}{b} < 1\right)$ .

Neste caso, temos 3 pontos de equilíbrios e todos são selas. De fato, a natureza de  $E_0$  segue do sinal da razão

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{b-a}{a-2b} = \frac{\overbrace{(1-a/b)}^{>0}}{\underbrace{(a/b-2)}_{<0}} < 0.$$

A natureza dos pontos de equilíbrio  $E_-$  e  $E_+$  são dadas pelo sinal da seguinte razão

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{2b-a+bp^2}{-b(p^2+1)} = \frac{b(2-\frac{a}{b}+p^2)}{-b(p^2+1)} = \frac{\overbrace{(2-\frac{a}{b})+p^2}^{>0}}{-(p^2+1)} < 0.$$

■

Uma interpretação geométrica para a condição  $T$  é dada pela proposição abaixo.

**Proposição 3.1.** *A condição de transversalidade  $T$  significa que as curvas diferenciáveis  $(gF - fG)(x, y) = by + o(2) = 0$  e  $(gE - eG)(x, y) = (b-a)x + cy + o(2) = 0$ , na equação (3.1), cuja intersecção define os pontos umbílicos, são regulares e se encontram transversalmente em  $(0, 0)$ .*

*Demonstração:*

Suponha  $A(x, y) = (gF - fG)(x, y) = 0$  e  $B(x, y) = (gE - eG)(x, y) = 0$ , então  $gF = fG$  e  $gE = eG$ . Temos então que

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{2eG - 2fF}{EG - F^2} = \frac{eG - fF}{EG - F^2},$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
H^2 - K &= \left( \frac{eG - fF}{EG - F^2} \right)^2 - \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{(eG - fF)^2 - (eg - f^2)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{-2eGfF + egF^2 + f^2EG}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{-2eGfF + efGF + feGF}{(EG - F^2)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como

$$\left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 = H^2 - K = 0,$$

temos que  $k_1 = k_2$  e a interseção das duas curvas será ponto umbílico.

Por outro lado, nos pontos umbílicos temos que os coeficientes da equação das linhas de curvatura se anulam simultaneamente, em particular

$$(gF - fG)(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad (gE - eG)(x, y) = 0.$$

Logo, os pontos umbílicos são exatamente a interseção das duas curvas.

Defina

$$A(x, y) = (gF - fG)(x, y) = by + o(2) = 0,$$

$$B(x, y) = (gE - eG)(x, y) = (b - a)x + cy + o(2) = 0.$$

Temos

$$\det \begin{pmatrix} A_x(0, 0) & A_y(0, 0) \\ B_x(0, 0) & B_y(0, 0) \end{pmatrix} = -b(b - a).$$

Assim, se valer a condição T, o determinante anterior será diferente de 0. Logo, as linhas da matriz acima não se anulam e portanto as curvas são regulares em  $(0, 0)$ . Além disto, o determinante diferente de zero significa que seus vetores tangentes são linearmente independentes, ou seja, as curvas se encontram transversalmente em  $(0, 0)$ .

■

Na demonstração da proposição acima podemos ver que os pontos umbílicos correspondem às singularidades do campo levantado associado a equação das linhas de curvatura dada em (3.1).

# Capítulo 4

## Superfícies em $\mathbb{R}^4$

Neste capítulo buscamos o entendimento das configurações das linhas assintóticas de superfícies em  $\mathbb{R}^4$  perto e longe de pontos umbílicos. Primeiramente, veremos algumas definições sobre superfícies em  $\mathbb{R}^4$ , tais como primeira e segunda forma fundamentais, o vetor curvatura normal, o vetor curvatura média e a elipse de curvatura. Em seguida, estudaremos a configuração topológica das linhas assintóticas de superfícies em  $\mathbb{R}^4$  como uma aplicação do estudo de EDBs feito neste trabalho.

Neste capítulo todas as imersões serão suaves. Seja  $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular, compacta e orientada em  $\mathbb{R}^4$ , o qual está munido do produto interno Euclidiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e está orientado.

Denote, respectivamente, por  $TM$  e  $NM$  os fibrados tangente e normal de  $\alpha$ . Para cada  $p \in M$ , sejam  $\{\alpha_u, \alpha_v\}$  uma base para o espaço tangente  $T_pM$  e  $\{N_1, N_2\}$  uma base ortogonal do complemento ortogonal de  $T_pM$ , chamado  $N_pM$ . Tome uma carta positiva  $(u, v)$  tal que

$$\{\alpha_u, \alpha_v, N_1, N_2\}$$

seja um referencial positivo de  $\mathbb{R}^4$ .

**Definição 4.1.** 1. *A primeira forma fundamental de  $\alpha$ ,  $I_\alpha$ , é dada por*

$$I = I_\alpha = \langle d\alpha, d\alpha \rangle = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

onde  $E = \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle$ ,  $F = \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle$ ,  $G = \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle$ .

2. A **segunda forma fundamental** de  $\alpha$ ,  $II_\alpha$ , é definida em termos da forma quadrática com valores em  $NM$

$$II = II_\alpha = \langle d^2\alpha, N_1 \rangle N_1 + \langle d^2\alpha, N_2 \rangle N_2 = II_{1,\alpha} N_1 + II_{2,\alpha} N_2,$$

onde

$$II_i = II_{i,\alpha} = e_i du^2 + 2f_i dudv + g_i dv^2,$$

sendo  $e_i = \langle \alpha_{uu}, N_i \rangle$ ,  $f_i = \langle \alpha_{uv}, N_i \rangle$ ,  $g_i = \langle \alpha_{vv}, N_i \rangle$ , para  $i = 1, 2$ .

As seguintes funções estão associadas à imersão  $\alpha$  :

1. O **vetor curvatura normal** de  $\alpha$  em um ponto  $p$  na direção  $w$  é dado por

$$\eta(p, w) = \frac{II(p, w)}{I(p, w)}.$$

2. O **vetor curvatura média** de  $\alpha$  é definido por

$$H = H_\alpha = H_1 N_1 + H_2 N_2,$$

onde

$$H_i = H_{i,\alpha} = \frac{Eg_i - 2Ff_i + Ge_i}{2(EG - F^2)}, \quad i = 1, 2.$$

3. A **curvatura Gaussiana** de  $\alpha$

$$K = K_\alpha = \frac{e_1 g_1 - f_1^2 + e_2 g_2 - f_2^2}{EG - F^2}.$$

4. O **resultante**  $\Delta$  de  $II_{1,\alpha}$  e  $II_{2,\alpha}$  é dado por

$$\Delta = \Delta_\alpha = \frac{1}{4(EG - F^2)} \begin{vmatrix} e_1 & 2f_1 & g_1 & 0 \\ e_2 & 2f_2 & g_2 & 0 \\ 0 & e_1 & 2f_1 & g_1 \\ 0 & e_2 & 2f_2 & g_2 \end{vmatrix}. \quad (4.1)$$

5. A matriz da segunda forma fundamental é

$$\mathcal{M}(p) = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix} (p).$$

### 4.0.1 Elipse de curvatura

De modo análogo ao estudo de imersões de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , podemos analisar o vetor curvatura normal da seguinte maneira: para cada vetor unitário  $w \in T_pM$ , seja

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$$

uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, satisfazendo

$$\gamma(0) = p \quad \text{e} \quad \gamma'(0) = w.$$

Assim,  $\eta(p)(w) = \eta(p, w)$  é a projeção de  $\gamma''(0)$  sobre o plano normal  $N_pM$ . Além disso, esta interpretação independe da escolha da curva  $\gamma$ .

Considere um sistema de coordenadas isotérmicas em  $M$ , ou seja, uma carta  $(u, v)$  de modo que

$$E = G = 1 \quad \text{e} \quad F = 0.$$

A prova de que existem sistemas isotérmicos de coordenadas para qualquer superfície regular é delicada e não será apresentada aqui, para detalhes consultar [1].

Temos que  $\{\alpha_u, \alpha_v\}$  é um referencial ortonormal de  $T_pM$  e podemos escrever

$$w = \phi(t) = \cos t \alpha_u + \sin t \alpha_v, \quad w \in T_pM.$$

Desta forma,

$$\eta(p)(w) = \eta(p)(\phi(t)) = \begin{bmatrix} e_1 \cos^2 t + 2f_1 \cos t \sin t + g_1 \sin^2 t \\ e_2 \cos^2 t + 2f_2 \cos t \sin t + g_2 \sin^2 t \end{bmatrix}$$

e

$$H(p) = \begin{bmatrix} (e_1 + g_1)/2 \\ (e_2 + g_2)/2 \end{bmatrix},$$

onde aparecem as componentes com relação ao referencial ortonormal  $\{N_1, N_2\}$  de  $N_pM$  nas expressões acima.

Utilizando as identidades trigonométricas

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \quad \text{e} \quad \sin 2t = \sin t \cos t$$



temos que

$$\eta(p)(w) = \begin{bmatrix} (e_1 - g_1)/2 & f_1 \\ (e_2 - g_2)/2 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \text{sen } 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (e_1 + g_1)/2 \\ (e_2 + g_2)/2 \end{bmatrix},$$

de onde

$$\eta(p)(w) - H(p) = \begin{bmatrix} (e_1 - g_1)/2 & f_1 \\ (e_2 - g_2)/2 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \text{sen } 2t \end{bmatrix}.$$

Como  $\eta(p) : T_pM \rightarrow N_pM$  é uma transformação afim, a imagem da circunferência unitária  $S^1 \subset T_pM$  pela aplicação  $\eta$  é, em geral, uma elipse em  $N_pM$  centrada em  $H(p)$ , chamada **elipse de curvatura** de  $\alpha$  no ponto  $p$  e denotada por  $\epsilon_\alpha(p)$ .

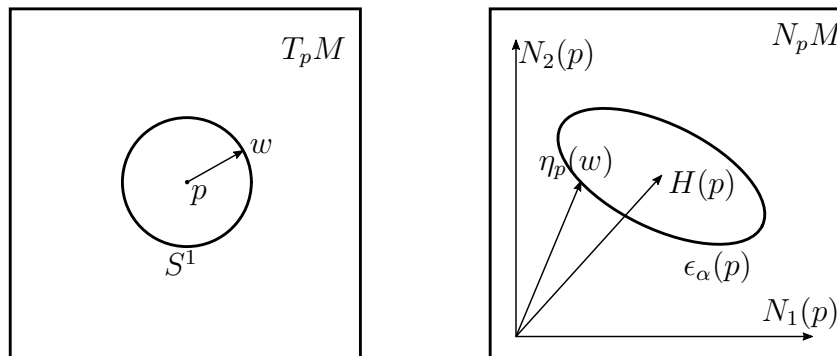


Figura 4.1: Elipse de curvatura.

Esta elipse pode se degenerar em um segmento de reta radial, caso em que  $p$  é conhecido como **ponto de inflexão** (ou ponto umbílico) da superfície. O ponto de inflexão é classificado do **tipo real** quando a origem,  $0 \in N_pM$ , pertence à elipse de curvatura e do **tipo imaginário** caso contrário. Em ambos os casos, dizemos também que o ponto de inflexão é não degenerado. Um ponto de inflexão é dito degenerado quando a origem é um extremo da elipse de curvatura, que, neste caso, é um segmento de reta.

**Definição 4.2.** Um ponto  $p \in M$  é dito **hiperbólico**, **elíptico** ou **parabólico**, dependendo se o ponto  $0 \in N_pM$  está fora, dentro ou sobre a elipse de curvatura, respectivamente.

Para entender melhor estas configurações temos o seguinte teorema, mostrado por Little em [16], o qual admitiremos sem demonstração.

**Teorema 4.1.** 1. Se  $\Delta > 0$ , então a origem está dentro da elipse;

2. Se  $\Delta = 0$ , então a origem está sobre a elipse;

3. Se  $\Delta < 0$ , então a origem está fora da elipse.

Portanto, um ponto  $p \in M$  é hiperbólico (respectivamente, elíptico/parabólico) se  $\Delta < 0$  (respectivamente,  $\Delta > 0/\Delta = 0$ ).

Um estudo mais detalhado, realizado em [17], permite distinguir as seguintes possibilidades:

**Proposição 4.1.** 1. Se  $\Delta = 0$  e  $K > 0$ , então a origem é um ponto de inflexão do tipo imaginário;

2. Se  $\Delta = 0$ ,  $K < 0$  e  $\text{rank}\mathcal{M} = 2$ , então a elipse de curvatura é não degenerada;

3. Se  $\Delta = 0$ ,  $K < 0$  e  $\text{rank}\mathcal{M} = 1$ , então a origem é um ponto de inflexão do tipo real;

4. Se  $\Delta = 0$  e  $K = 0$ , então a origem é um ponto de inflexão degenerado.

**Proposição 4.2.** A área da elipse  $\epsilon_\alpha(p)$  é dada por

$$A(\epsilon_\alpha(p)) = \frac{\pi}{2}[f_2(e_1 - g_1) - f_1(e_2 - g_2)].$$

*Demonstração:*

Seja

$$\epsilon_\alpha(p) = \left( \frac{e_1 - g_1}{2} \cos 2t + f_1 \sin 2t + \frac{e_1 + g_1}{2}, \frac{e_2 - g_2}{2} \cos 2t + f_2 \sin 2t + \frac{e_2 + g_2}{2} \right).$$

Segue do Teorema de Green que a área de uma região  $D$  delimitada por uma curva  $C$  de equações paramétricas  $x = \phi(t)$  e  $y = \psi(t)$  é dada por

$$A(D) = - \oint_C \psi(t)\phi'(t)dt.$$

Note que  $\eta(p)$  restrita a  $S^1$  é uma aplicação quadrática e, portanto, recobre duplamente a elipse de curvatura. Desta forma limitaremos a integral entre 0 e  $\pi$ . Pela afirmação acima, a área da elipse será dada por

$$\begin{aligned}
A(\epsilon_\alpha(p)) &= \int_0^\pi \left( \frac{e_2 - g_2}{2} \cos 2t + f_2 \sin 2t + \frac{e_2 + g_2}{2} \right) (-(-e_1 - g_1) \sin 2t + 2f_1 \cos 2t) dt \\
&= - \int_0^\pi \left( -\frac{(e_2 - g_2)(e_1 - g_1)}{2} \cos 2t \sin 2t + f_1(e_2 - g_2) \cos^2 2t - f_2(e_1 - g_1) \sin^2 2t \right) \\
&\quad + \left( 2f_1 f_2 \cos 2t \sin 2t - \frac{(e_2 + g_2)(e_1 - g_1)}{2} \sin 2t + f_1(e_2 + g_2) \cos 2t \right) dt \\
&= \left( \frac{(e_2 - g_2)(e_1 - g_1)}{2} - 2f_1 f_2 \right) \int_0^\pi \cos 2t \sin 2t dt - f_1(e_2 - g_2) \int_0^\pi \cos^2 2t dt \\
&\quad + f_2(e_1 - g_1) \int_0^\pi \sin^2 2t dt + \frac{(e_2 + g_2)(e_1 - g_1)}{2} \int_0^\pi \sin 2t dt - f_1(e_2 + g_2) \int_0^\pi \cos 2t dt \\
&= \left( \frac{(e_2 - g_2)(e_1 - g_1)}{2} - 2f_1 f_2 \right) \left( -\frac{\cos 4\pi}{8} + \frac{\cos 0}{8} \right) \\
&\quad - f_1(e_2 - g_2) \left[ \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\sin 4\pi}{8} \right) - \left( 0 + \frac{\sin 0}{8} \right) \right] \\
&\quad + f_2(e_1 - g_1) \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{8} \right) - \left( 0 - \frac{\sin 0}{8} \right) \right] \\
&\quad + \frac{(e_2 + g_2)(e_1 - g_1)}{2} \left[ \left( -\frac{\cos 4\pi}{2} \right) - \left( -\frac{\cos 0}{2} \right) \right] \\
&\quad - f_1(e_2 + g_2) \left[ \left( \frac{\sin 4\pi}{2} - \left( \frac{\sin 0}{2} \right) \right) \right] \\
&= \frac{\pi}{2} [f_2(e_1 - g_1) - f_1(e_2 - g_2)].
\end{aligned}$$

■

Destacamos a seguir algumas observações em relação à elipse de curvatura:

**Observação 4.1.** 1. A aplicação  $\eta(p)$  restrita a  $S^1$ , sendo quadrática, é um duplo recobrimento da elipse de curvatura, ou seja, a todo ponto  $A \in \epsilon_\alpha(p)$  está associada

uma direção formada pelas antípodas  $A'$  e  $A''$  em  $S^1$ ;

2. A elipse de curvatura é invariante por rotações nos planos tangente e normal.

É mostrado em [16] que a curvatura normal, a norma do vetor curvatura média, o resultante  $\Delta$  e a curvatura Gaussiana são também invariantes da imersão.

Além da elipse de curvatura, podemos usar também um outro objeto para descrever a geometria de segunda ordem da superfície  $M$ , a saber o pencil de formas quadráticas binárias determinado pela segunda forma fundamental de  $M$  em um ponto  $p$ , digamos pelo par de formas quadráticas  $(e_1x^2 + 2f_1xy + g_1y^2, e_2x^2 + 2f_2xy + g_2y^2)$ , onde  $e_i, f_i$  e  $g_i$ ,  $i = 1, 2$ , são os coeficientes da segunda forma fundamental de  $M$ .

Se pensarmos em uma forma quadrática  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  como um ponto  $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ , podemos identificar o espaço das formas quadráticas em duas variáveis com o espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . Temos definido, então, o cone  $B^2 - AC = 0$  de formas quadráticas degeneradas. Este cone, por sua vez, determina uma cônica no espaço projetivo  $\mathbb{R}P^2$  ao qual nos referimos como o cone de formas quadráticas degeneradas. Os pontos do lado de dentro da cônica representam as formas quadráticas de tipo elíptico, enquanto que os pontos do lado de fora representam as formas de tipo hiperbólico.

Com a identificação acima, um par de formas quadráticas  $(Q_1, Q_2)$  pode ser pensado como um par de vetores em  $\mathbb{R}^3$ . Se as formas quadráticas  $Q_1 = (e_1x^2 + 2f_1xy + g_1y^2)$  e  $Q_2 = (e_2x^2 + 2f_2xy + g_2y^2)$  são linearmente independentes, então elas determinam um plano pela origem em  $\mathbb{R}^3$  e uma reta em  $\mathbb{R}P^2$ . Não é difícil ver que esta reta intercepta a cônica em 0, 1 ou 2 pontos dependendo se  $\delta = (e_1g_2 - e_2g_1) + 4(f_1e_2 - e_1f_2)(f_1g_2 - g_1f_2) < 0, = 0$  ou  $> 0$ , respectivamente.

Observamos aqui que  $\delta = -\Delta$ , onde  $\Delta$  é o resultante definido em (4.1). Assim, segue da Definição 4.2 e do Teorema 4.1 que, se  $\delta < 0$  o respectivo ponto é elíptico, se  $\delta = 0$  o ponto é parabólico e se  $\delta > 0$  o ponto é hiperbólico.

Por outro lado, se  $Q_1$  e  $Q_2$  são formas linearmente dependentes (mas não nulas) a matriz  $\mathcal{M}(p)$  tem rank 1. Neste caso elas determinam um ponto em  $\mathbb{R}P^2$  que pode estar dentro, sobre ou fora da cônica. Consideramos aqui o grupo  $GL(2, \mathbb{R})$  das matrizes

$2 \times 2$  inversíveis. Existe uma ação do grupo  $GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$  sobre pares de formas quadráticas. As órbitas desta ação são descritas em [12] e são como a seguir:

$$\begin{aligned}
 (x^2, y^2) & \text{ ponto hiperbólico;} \\
 (xy, x^2 - y^2) & \text{ ponto elíptico;} \\
 (x^2, xy) & \text{ ponto parabólico;} \\
 (x^2 \pm y^2, 0) & \text{ ponto umbilico;} \\
 (x^2, 0) & \text{ ponto umbilico degenerado;} \\
 (0, 0) & \text{ ponto umbilico degenerado.}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Podemos escrever as órbitas acima em função do resultante  $\Delta$ , da matriz da segunda forma fundamental  $\mathcal{M}(p)$  e da curvatura Gaussiana  $K$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 (x^2, y^2) & \text{ se } \Delta(p) > 0; \\
 (xy, x^2 - y^2) & \text{ se } \Delta(p) < 0; \\
 (x^2, xy) & \text{ se } \Delta(p) = 0 \text{ e } \text{rank}\mathcal{M}(p) = 2; \\
 (x^2 \pm y^2, 0) & \text{ se } \Delta(p) = 0, \text{rank}\mathcal{M}(p) = 1 \text{ e } K > 0; \\
 (x^2, 0) & \text{ se } \Delta(p) = 0 \text{ e } K < 0; \\
 (0, 0) & \text{ se } \Delta(p) = 0 \text{ e } K = 0.
 \end{aligned}$$

#### 4.0.2 Direções assintóticas em $M$

Temos, agora, o material necessário para estudar as possíveis configurações topológicas das linhas assintóticas em pontos parabólicos de superfícies em  $\mathbb{R}^4$ . Veremos que as equações das linhas assintóticas têm as formas normais estudadas nos Capítulos 1 e 2 deste trabalho. Referências para esta seção são encontradas em [7] e [17].

**Definição 4.3.** *Uma direção  $[\theta] \in T_p M$  para a qual  $\frac{\partial \eta}{\partial \theta}(\theta)$  e  $\eta(\theta)$  são paralelos é chamada uma direção assintótica.*

Iniciamos nosso estudo calculando a expressão local para as equações diferenciais das linhas assintóticas sobre superfícies em  $\mathbb{R}^4$ .

**Proposição 4.3.** *Seja  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma parametrização de  $M$  dada por  $(x, y, \alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y))$ . Então a equação diferencial das linhas assintóticas de  $M$  tem a forma*

$$A(x, y)dy^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2 = 0, \quad (4.3)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \alpha_{1yy}\alpha_{2xy} - \alpha_{1xy}\alpha_{2yy}, \\ B &= \frac{1}{2}(\alpha_{1yy}\alpha_{2xx} - \alpha_{1xx}\alpha_{2yy}), \\ C &= \alpha_{1xy}\alpha_{2xx} - \alpha_{1xx}\alpha_{2xy}. \end{aligned}$$

*Demonstração:*

Seja  $p \in M$  e suponhamos a imersão  $\alpha$  localmente na forma de monge:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) &\longmapsto \alpha(x, y) = (x, y, \alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y)), \end{aligned}$$

com a segunda forma fundamental de  $\alpha(M)$  caracterizada pelas duas formas quadráticas:

$$Q_1(x, y) = e_1x^2 + 2f_1xy + g_1y^2 \quad \text{e} \quad Q_2(x, y) = e_2x^2 + 2f_2xy + g_2y^2.$$

Consideremos

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \gamma(s) = (x(s), y(s)), \end{aligned}$$

uma parametrização pelo comprimento de arco de uma curva assintótica de  $M$  em uma vizinhança de  $p$ . Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \xi = \alpha \circ \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ s &\longmapsto \alpha(x, y) = (x(s), y(s), \alpha_1(x(s), y(s)), \alpha_2(x(s), y(s))). \end{aligned}$$

Calcularemos  $\eta(\theta(s))$  para cada  $s \in \mathbb{R}$ . Observemos que em cada  $p \in M$ ,

$$T_pM = [g_1, g_2] = [(1, 0, \alpha_{1x}, \alpha_{2x}), (0, 1, \alpha_{1y}, \alpha_{2y})] \quad \text{e} \quad N_pM = [g_3, g_4],$$

onde a notação  $[v_1, v_2]$  representa o espaço gerado por  $v_1$  e  $v_2$ . Além disso,

$$g_3 = (-\alpha_{1x}, -\alpha_{1y}, 1, 0)$$

e

$$g_4 = (-\alpha_{2x} - \alpha_{1y}(\alpha_{2x}\alpha_{1y} - \alpha_{1x}\alpha_{2y}), -\alpha_{2y} - \alpha_{1x}(\alpha_{1x}\alpha_{2y} - \alpha_{1y}\alpha_{2x}), \\ -\alpha_{1x}\alpha_{2x} - \alpha_{1y}\alpha_{2y}, 1 + \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2).$$

Denotamos por  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  a base do  $\mathbb{R}^4$  dada por  $e_i = g_i/|g_i|$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Como

$$\xi'(s) = (x'(s), y'(s), \alpha_{1x}(\gamma(s))x'(s) + \alpha_{1y}(\gamma(s))y'(s), \alpha_{2x}(\gamma(s))x'(s) + \alpha_{2y}(\gamma(s))y'(s)),$$

e

$$\xi''(s) = (x''(s), y''(s), U, V),$$

onde

$$U = \alpha_{1xx}(\gamma(s))(x'(s))^2 + 2\alpha_{1xy}(\gamma(s))x'(s)y'(s) + \alpha_{1yy}(\gamma(s))(y'(s))^2 \\ + \alpha_{1x}(\gamma(s))x''(s) + \alpha_{1y}y'',$$

$$V = \alpha_{2xx}(\gamma(s))(x'(s))^2 + 2\alpha_{2xy}(\gamma(s))x'(s)y'(s) + \alpha_{2yy}(\gamma(s))(y'(s))^2 \\ + \alpha_{2x}(\gamma(s))x''(s) + \alpha_{2y}y'',$$

a projeção de  $\xi''(s)$  em  $N_{\xi(s)}M$  é dada por

$$\eta(\theta(s)) = \langle \xi''(s), e_3(s) \rangle e_3(s) + \langle \xi''(s), e_4(s) \rangle e_4(s),$$

ou seja

$$\eta(\theta(s)) = \frac{1}{|g_3|} (\alpha_{1xx}(x'(s))^2 + 2\alpha_{1xy}(x'(s))(y'(s)) + \alpha_{1yy}(y'(s))^2) e_3(s) \\ - \frac{1}{|g_4|} (A(x'(s))^2 + 2B(x'(s))(y'(s)) + C(y'(s))^2) e_4(s),$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \alpha_{1xx}(\alpha_{1x}\alpha_{2x} + \alpha_{1y}\alpha_{2y}) - \alpha_{2xx}(1 + \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2), \\ B &= \alpha_{1xy}(\alpha_{1x}\alpha_{2x} + \alpha_{1y}\alpha_{2y}) - \alpha_{2xy}(1 + \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2), \\ C &= \alpha_{1yy}(\alpha_{1x}\alpha_{2x} + \alpha_{1y}\alpha_{2y}) - \alpha_{2yy}(1 + \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\theta}(\theta(s)) &= \frac{2}{|g_3|} [(\alpha_{1yy} - \alpha_{1xx})x'(s)y'(s) + \alpha_{1xy}(x'(s)^2 - y'(s)^2)]e_3(s) \\ &\quad - \frac{2}{|g_4|} [(C - A)x'(s)y'(s) + B(x'(s)^2 - y'(s)^2)]e_4(s). \end{aligned}$$

Eliminando  $\beta$  em  $\eta(\theta(s)) = \beta \frac{d\eta}{d\theta}(\theta(s))$ , obtemos

$$\begin{aligned} &(\alpha_{1xy}\alpha_{2xx} - \alpha_{1xx}\alpha_{2xy})x'^2 + (\alpha_{1yy}\alpha_{2xx} - \alpha_{1xx}\alpha_{2yy})x'^3y' + ((\alpha_{2xx} - \alpha_{2yy})\alpha_{2xy} \\ &- (\alpha_{1xx} - \alpha_{1yy})\alpha_{2xy})x'^2y'^2 + (\alpha_{1yy}\alpha_{2xx} - \alpha_{1xx}\alpha_{2yy})x'y'^3 + (\alpha_{1yy}\alpha_{2xy} - \alpha_{1xy}\alpha_{2yy})y'^4 = 0. \end{aligned}$$

Lembrando que  $x'(s) = \cos \theta(s)$  e  $y'(s) = \sin \theta(s)$  e utilizando, ainda, as substituições

$$\cos^3 \theta \sin \theta = (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta \sin \theta, \quad \cos^4 \theta = (1 - \sin^2 \theta) \cos^2 \theta, \quad \sin^4 \theta = (1 - \cos^2 \theta),$$

temos

$$\begin{aligned} &(\alpha_{1xy}\alpha_{2xx} - \alpha_{1xx}\alpha_{2xy}) \cos^2 \theta + (\alpha_{1yy}\alpha_{2xx} - \alpha_{1xx}\alpha_{2yy}) \cos \theta \sin \theta \\ &\quad + (\alpha_{1yy}\alpha_{2xy} - \alpha_{1xy}\alpha_{2yy}) \sin^2 \theta = 0. \end{aligned}$$

A equação diferencial das linhas assintóticas é, então, dada por

$$A(x, y)dy^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2 = 0, \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \alpha_{1yy}\alpha_{2xy} - \alpha_{1xy}\alpha_{2yy}, \\ B(x, y) &= \frac{1}{2}(\alpha_{1yy}\alpha_{2xx} - \alpha_{1xx}\alpha_{2yy}), \\ C(x, y) &= \alpha_{1xy}\alpha_{2xx} - \alpha_{1xx}\alpha_{2xy}. \end{aligned}$$

■



Finalizamos este trabalho explorando um pouco mais sobre as configurações topológicas das linhas assintóticas em pontos parabólicos de superfícies em  $\mathbb{R}^4$ . Existem duas situações a se considerar, a saber, quando a origem do plano normal está sobre o conjunto parabólico e este é, ou não, um ponto umbílico, ver Definição 3.1.

### A origem não é um ponto umbílico:

Neste caso estamos considerando a origem sobre o conjunto parabólico, mas não sendo um ponto umbílico. Como vimos em (4.2), o par de quadráticas  $(Q_1, Q_2)$  pode ser tomado, após uma mudança de coordenadas afim, na forma  $(xy, x^2)$ . Podemos, então, escrever a imersão,  $\alpha$ , da forma  $\alpha(x, y) = (x, y, \alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y))$ , onde as funções  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são da forma

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= xy + r_0x^3 + r_1x^2y + r_2xy^2 + r_3y^3, \\ \alpha_2 &= x^2 + b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3.\end{aligned}$$

Os 1-jatos das componentes dos coeficientes da EDB (4.3) são dados por

$$\begin{aligned}\alpha_{1xx} &= 6r_0x + 2r_1y, \\ \alpha_{1xy} &= 1 + 2r_1x + 2r_2y, \\ \alpha_{1yy} &= 2r_2x + 6r_3y, \\ \alpha_{2xx} &= 2 + 6b_0x + 2b_1y, \\ \alpha_{2xy} &= 2b_1x + 2b_2y, \\ \alpha_{2yy} &= 2b_2x + 6b_3y.\end{aligned}$$

Após alguma contas, o 1-jato da EDB (4.3) é dado por

$$A dy^2 + 2B dx dy + C dx^2 = 0,$$

onde

$$\begin{aligned}A &= -b_2x - 3b_3y, \\ B &= r_2x + 3r_3y, \\ C &= 1 + (3b_0 + 2r_1)x + (b_1 + 2r_2)y.\end{aligned}$$

Esta EDB é topologicamente equivalente à  $dx^2 + ydy^2 = 0$  se, e somente se,  $b_3 \neq 0$ . Neste caso, as curvas assintóticas (curvas integrais da EDB (4.3)) formam uma família de cúspides, como na Figura 1.2.

Quando  $b_3 = 0$  e  $b_2 \neq 0$  podemos, com contas análogas às feitas na seção 2.3, reduzir o 2-jato da EDB (4.3) para

$$dx^2 + \left( -x - \frac{3}{b_2^2}(3r_3^2 - \frac{5}{2}b_2r_3 + 2c_4)y^2 \right) dy^2 = 0$$

se  $\lambda \neq 0, 1/16$ , onde  $\lambda = -3(3r_3^2 - (5/2)b_2r_3 + 2c_4)/b_2^2$ .

As configurações topológicas das EDBs  $dy^2 + (-y + \lambda x^2)dx^2 = 0$  são descritas no Capítulo 1, após a Proposição 1.3. Tal EDB tem uma sela dobrada quando  $\lambda < 0$ , um nó dobrado quando  $0 < \lambda < 1/16$  e um foco dobrado quando  $\lambda > 1/16$  e os modelos são como na Figura 1.3.

Quando  $\lambda$  assume os valores  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1/16$  e  $b_3 = 0$  e  $b_2 = 0$  a EDB 4.3 apresenta singularidades mais degeneradas, cujo estudo foge do escopo do trabalho, ver [5].

### A origem é um ponto umbílico:

Quando a origem é um ponto umbílico, não é difícil ver que os coeficientes da EDB das linhas assintóticas se anulam simultaneamente na origem e, em geral, o discriminante tem uma singularidade de Morse, ou seja, temos uma EDB do tipo Morse II.

Como vimos na seção 4.0.1, existem dois tipos de pontos umbílicos: o primeiro ocorre quando par de quadráticas  $(Q_1, Q_2)$  é equivalente à  $(x^2 + y^2, 0)$ , neste caso o discriminante é um ponto isolado, e o segundo, em que  $(Q_1, Q_2)$  é equivalente à  $(x^2 - y^2, 0)$  e o discriminante, neste caso, é um par de curvas transversais. Trataremos desses casos separadamente.

- Caso  $(x^2 + y^2, 0)$  :

Neste caso, a imersão  $\alpha$  é da forma

$$\alpha(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 + O(3), v(x, y) + O(4)),$$

onde  $v(x, y) = b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3$ . Assim, o 1-jato da EDB (4.3) é dado por

$$v_{xy}dx^2 + (v_{yy} - v_{xx})dxdy - v_{xy}dy^2 = 0. \quad (4.5)$$

Não é difícil ver que este é exatamente o 1-jato da equação das linhas de curvatura da superfície  $(x, y, k_0(x^2 + y^2) + v(x, y) + O(4)) \in \mathbb{R}^3$  próximas a um ponto umbílico. Portanto, como foi mostrado no Capítulo 3, a configuração das linhas assintóticas próximas à origem será, genericamente, Lemon, Monstar ou Star. Tais configurações estão representadas na Figura 3.1.

- Caso  $(x^2 - y^2, 0)$  :

Para simplicidade dos cálculos, observe primeiramente que a mudança de coordenadas  $(x, y) \mapsto ((x + y)/2, (x - y)/2)$  leva a forma quadrática  $x^2 - y^2$  na forma  $xy$ .

Neste caso, então, a imersão  $\alpha$  pode ser escrita da forma

$$\alpha(x, y) = (x, y, xy + O(3), v(x, y) + O(4)),$$

onde  $v(x, y) = b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3$ . É possível, realizando mudanças de coordenadas lineares similares às da demonstração da Proposição 2.3, reduzir  $v(x, y)$  para a forma  $x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + y^3$ , desde que  $b_0$  e  $b_3$  sejam não nulos.

Com esta parametrização, os coeficientes  $A, B$  e  $C$  da EDB (4.3) são dados por

$$A = -v_{yy} = -(6y + 2b_2x),$$

$$B = 0,$$

$$C = v_{xx} = 6x + 2b_1y.$$

Portanto, o 1-jato da EDB (4.3), se escreve como

$$-(6y + 2b_2x)dy^2 + 6x + 2b_1ydx^2 = 0. \quad (4.6)$$

Calculando a cúbica  $\phi$  e a quadrática  $\alpha_1$ , descritas na demonstração da Proposição 2.2, obtemos

$$\phi(p) = -2(3p^3 - b_2p^2 - b_1p - 6) \quad \text{e} \quad \alpha_1(p) = -4p(3p + b_1).$$

Com isso, obtemos que, genericamente,  $\phi$  e  $\alpha_1$  não têm raízes em comum, portanto, segue da Proposição 2.3 que a EDB (4.6) se escreve como

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy \pm ydy^2 = 0.$$

Finalmente, não é difícil ver que o discriminante da equação (4.6) é formado por um par de curvas transversais, assim, genericamente, a EDB (4.6) é topologicamente equivalente à

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + ydy^2 = 0.$$

Estes casos são estudados na seção 2.3, onde obtemos as configurações destas EDBs.

Podemos, então, enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 4.2.** *As linhas assintóticas em pontos parabólicos de uma superfície  $M$  em  $\mathbb{R}^4$  têm genericamente as seguintes configurações:*

1. *Fora dos pontos umbílicos:*

(a) *Uma família de cúspides, ver Figura 1.2;*

(b) *Um nó/sela/foco dobrados, ver Figura 1.3.*

2. *Nos pontos umbílicos:*

(c) *Lemon, Monstar ou Star, ver Figura 2.6;*

(d) *como na Figura 2.7.*

# Conclusões

Nesta dissertação fizemos uma introdução às equações diferenciais binárias (EDBs), apresentando as principais definições e resultados utilizadas no trabalho. Apresentamos também resultados que classificam as EDBs do tipo I e suas principais formas normais. Para as EDBs do tipo Morse II estudamos duas técnicas para tratar da classificação de tais equações, a saber, a técnica do blow-up de singularidades e a técnica do levantamento do campo de direções. Munido dessas duas técnicas abordamos o problema de reduzir as EDBs do tipo II para as formas normais.

Utilizando os resultados obtidos na classificação das EDBs estudamos o comportamento das linhas de curvatura em superfícies no  $\mathbb{R}^3$  próximas a um ponto umbílico e vimos as possíveis configurações para tais curvas integrais. Outra aplicação foi o estudo das linhas assintóticas de superfícies no  $\mathbb{R}^4$ , para tal, introduzimos resultados de geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^4$  e em seguida estudamos o comportamento das linhas assintóticas em pontos parabólicos de superfícies em  $\mathbb{R}^4$ .

Para a realização deste trabalho foi necessário o uso do software Maple para uma grande parte das contas apresentadas aqui e do software ODEinR2 [18] no auxílio das configurações das EDBs.

# Referências Bibliográficas

- [1] L. Bers, *Riemann Surfaces*, New York University, Institute os Mathematical Sciences, New York, 1957-1958, 15-35.
- [2] J. W. Bruce, D. Fidal, *On binary differential equations and umbilics*, Proc. R. Soc. Edinburgh, 111, 1989, 147 - 168.
- [3] J. W. Bruce, G. J. Fletcher, F. Tari, *Bifurcations of implicit differential equations*, Proc. Royal Soc. Eldinburgh 130A, 2000, 485-506.
- [4] J. W. Bruce, F. Tari, *On binary differential equations*, Nonlinearity, 8, 1995, 255.
- [5] J. W. Bruce, F. Tari, *Implicit Differential Equations from the singularity theory view point*, Singularities and differential equations (Warsaw, 1993), Banach Center Publ., 33, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1996.
- [6] J. W. Bruce, F. Tari, *On the multiplicity of implicit differential equations*, J. on Differential Equations, 148, 1998, 122-147.
- [7] J. W. Bruce, F. Tari, *Families of surfaces in  $\mathbb{R}^4$* , Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2), 45, 2002, 181-203.
- [8] D. P. L. Castrigiano, S.A. Hayes, *Catastrophe theory*. New York : Addison-Wesley, 1993.
- [9] G. Darboux, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces*, Gauthiers-Villars, Paris volume I-IV, 1896.

- [10] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, SBM, 2005.
- [11] R. Garcia, J. Sotomayor, *Differential Equations of Classical Geometry*, a Qualitative Theory, Brazilian 27th Math. Coll., IMPA, 2009.
- [12] C. G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*, Pitman Research Notes in Mathematics, vol.25, 1979.
- [13] V. Guíñez, *Locally stable singularities for positive quadratic differential forms*, J. Differential Equations, 110, 1994, 1-37.
- [14] C. Gutierrez, J. Sotomayor, *Structurally stable configurations of lines of principal curvature*, Asterisque, 1982, 98-99, 195-215.
- [15] C. Gutierrez, J. Sotomayor, *Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces*, Brazilian 18th Math. Coll., IMPA 1991, Reprinted as Structurally Stable Configurations of Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces, Monografias del IMCA, Lima, Peru, 1998.
- [16] J.A. Little, *On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces*, Ann. Math. Pura Appl., 83, 1969, 261-336.
- [17] D. K. H. Mochida, *Geometria genérica de subvariedades em codimensão maior que um em  $\mathbb{R}^n$* , Tese de doutorado do ICMSC, 1993.
- [18] A. Montesinos Amilibia, ODEinR2 v. 1.2.5. Computer program freely available at <http://www.uv.es/?montesin>.
- [19] F. Tari, *On pairs of geometric foliations on a cross-cap*, Tohoku Math. J. (2) 59 (2), 2007, 233 - 258.
- [20] F. Tari, *Two parameter families of binary differential equations*, Discrete & Continuous Dynamical Systems, 22 (3), 2008, 759-789.