

Universidade Federal de Itajubá
Instituto de Física e Química - IFQ
Programa de Pós-Graduação em Física

**Análise de um colapso gravitacional em um
modelo de universo fechado dominado por um
campo escalar**

Alan de Gois Cesar

Itajubá - MG, 14 de março de 2022

Alan de Gois Cesar

Análise de um colapso gravitacional em um modelo de universo fechado dominado por um campo escalar

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física pela UNIFEI como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Universidade Federal de Itajubá - MG

Instituto de Física e Química - IFQ

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Eduardo Henrique Silva Bittencourt

Coorientadora: Grasielle Batista dos Santos

Itajubá - MG

14 de março de 2022

Alan de Gois Cesar

Análise de um colapso gravitacional em um modelo de universo fechado dominado por um campo escalar

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física pela UNIFEI como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Itajubá - MG, Data de 2022:

Eduardo Henrique Silva Bittencourt
Orientador

Grasiele Batista dos Santos
Coorientadora

Mario Novello
Convidado 1

Jonas Pedro Pereira
Convidado 2

Vitorio Alberto De Lorenci
Convidado 3

Itajubá - MG
14 de março de 2022

Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Eduardo Henrique Silva Bittencourt pela presença, comentários, ensinamentos e questionamentos. À ajuda constante, a pesquisa não seria possível sem a sua orientação.
- À Prof^a Dr^a. Grasielle Batista dos Santos pelos comentários, correções e questionamentos, que me condicionaram a observar detalhes na escrita que estavam confusos.
- Aos professores, Dr. Mario Novello, Dr. Jonas Pereira e Dr. Vitório Alberto de Lorenci, por aceitarem fazer parte de minha banca de defesa.
- Ao meu pai, Julio, e à minha mãe, Rosalina, que me ajudaram financeiramente, e sempre me deram suporte a continuar perseguindo este objetivo de vida.
- À minha companheira Monique por me motivar e fazer companhia durante os períodos difíceis nesta pandemia.
- Aos meus amigos e colegas que tornaram todo meu tempo nesta universidade mais fácil.
- Aos meus professores do programa de mestrado da UNIFEI por todo conhecimento que me foi apresentado.
- À CAPES pela bolsa concedida.

Resumo

É construído um modelo de colapso gravitacional analisando a evolução de uma hipersuperfície que separa duas regiões de uma variedade. Utiliza-se uma métrica para o exterior do tipo Vaidya e para o interior do tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), as quais são coladas utilizando as condições de junção de Darmois. Inicialmente, a fonte da curvatura da região interior é um campo escalar não-minimamente acoplado à geometria, construído de maneira a produzir um modelo de ricochete que não viole a condição nula de energia, no entanto obtêm-se que esta condição limita o modelo a situação de acoplamento mínimo. Com este objetivo é feita uma aproximação em série de potências do sistema de equações formado pelas equações de campo de Einstein e a equação do campo escalar próximo do ricochete. Os resultados obtidos para os coeficientes da expansão e a análise de sua validade reforçam a necessidade de uma tri-curvatura espacial positiva, cujo módulo está definido em intervalos de validade obtidos durante a análise dos parâmetros. Determina-se também condições iniciais que caracterizam o colapso e estuda-se condições que permitam identificar o sua fase final, podendo ocorrer a emissão de toda a massa na forma de radiação eletromagnética, ou seja, uma evaporação. Também é possível obter um modelo singular ou mesmo um ricochete do objeto em si.

Palavras-chave: Colapso gravitacional, condições de junção de Darmois, modelo de ricochete, campo escalar.

Abstract

A gravitational collapse model is constructed by analyzing the evolution of a hypersurface that separates two regions of a manifold. A Vaidya type metric is used for the exterior region and for the interior region the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) type of metric is taken, which are glued using the Darmois matching conditions. Initially, the source of the curvature in the interior region is a scalar field non-minimally coupled to the geometry, in such a way to produce a bouncing model that does not violate the null energy condition, however it is obtained that this condition limits the model to the minimum coupling situation. With this aim, it is made a power series approximation of the system of equations formed by the Einstein field equations and the equation of the scalar field close to the bounce. The results obtained for the coefficients and the validity of the approximation itself reinforce the need for a positive spatial tri-curvature, whose value is defined in the validity intervals obtained during the analysis of the parameters. Initial conditions that characterize the collapse are also determined and conditions that allow the identification of its final stage are studied, which may in the emission of the entirety of the object mass as electromagnetic radiation, that is, an evaporation, It is also possible to obtain a singular model or even a bounce of the object itself.

Keywords: Gravitational collapse, Darmois junction conditions, bouncing models, scalar field.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Evolução de $\tilde{r}(\tilde{t})$ para $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$ sob a escolha de 3 valores de C . A linha descontínua vertical indica o momento em $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.	22
Figura 2 – Evolução de $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ para $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$ sob a escolha de 3 valores C . A linha descontínua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.	23
Figura 3 – Evolução do parâmetro de massa considerando $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$, e sob a escolha de $C = 0.6$, com a escolha de dois valores para \tilde{D} . As linhas verticais descontínuas em negrito e simples indicam respectivamente, \tilde{t}_s e o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.	24
Figura 4 – Evolução da razão entre \dot{u} e \dot{t} , sob três escolhas de C tendo em vista o valor de $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$. A linha descontínua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.	26
Figura 5 – Evolução de $\tilde{r}(\tilde{t})$ para $\tilde{t}_0 = -1.5\sqrt{3}$ sob a escolha de 3 valores de C . A linha descontínua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.	27
Figura 6 – Evolução de $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ para $\tilde{t}_0 = -1.5\sqrt{3}$ sob a escolha de 3 valores de C . A linha descontínua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.	27
Figura 7 – Evolução do parâmetro de massa considerando $\tilde{t}_0 = -1.5\sqrt{3}$, e sob a escolha de $C = 0.900$, com a escolha de dois valores para \tilde{D} . A linha descontínua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.	28
Figura 8 – Evolução do parâmetro de massa considerando $\tilde{t}_0 = -1.5\sqrt{3}$, e sob a escolha de $C = 0.950$, com a escolha de dois valores para \tilde{D} . A linha descontínua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.	29
Figura 9 – Evolução da razão entre \dot{u} e \dot{t} , sob três escolhas de C para $\tilde{t}_0 = -1.5\sqrt{3}$. A linha descontínua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.	30

- Figura 10 – Evolução de $\tilde{r}(\tilde{t})$ para $\tilde{t}_0 = -1.1\sqrt{3}$ sob a escolha de 2 valores de C . A linha descontínua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada. 30
- Figura 11 – Evolução do parâmetro de massa considerando $\tilde{t}_0 = -1.1\sqrt{3}$, e sob a escolha de $C = 1.000$, com a escolha de dois valores para \tilde{D} . A linha descontínua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada. 31
- Figura 12 – Evolução da razão entre \dot{u} e \dot{t} , sob quatro escolhas de C tendo em vista o valor de $\tilde{t}_0 = -1.1\sqrt{3}$. O a linha descontínua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada. 31

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	NOTAÇÃO E FORMULAÇÃO DO MODELO	5
2.1	Métrica do espaço-tempo interior	5
2.2	Métrica do espaço-tempo exterior	5
2.3	Um campo escalar como fonte para as equações de Einstein	6
3	ANÁLISE DAS CONDIÇÕES DE JUNÇÃO	9
3.1	Primeira condição de Darmois	9
3.2	Segunda condição de Darmois	10
3.3	Análise das condições de junção	12
4	ANÁLISE NUMÉRICA DO MODELO	14
4.1	Modelo para aproximação numérica	14
4.2	Condições de Energia	16
4.3	Condições de Junção	18
4.4	Condições iniciais do colapso	19
4.5	Evolução do colapso gravitacional	21
4.5.1	Análise da escolha $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$	21
4.5.2	Análise da escolha $\tilde{t}_0 = -1.5\sqrt{3}$	25
4.5.3	Análise da escolha $\tilde{t}_0 = -1.1\sqrt{3}$	28
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS	32
	APÊNDICES	34
	APÊNDICE A – TENSOR MOMENTUM-ENERGIA PARA A COM- PONENTE ESCALAR	35
	APÊNDICE B – ANÁLISE DAS CONDIÇÕES DE JUNÇÃO	43
	APÊNDICE C – ACRÉSCIMO DE UM FLUIDO NÃO INTERA- GENTE À FONTE INTERIOR	45
	Referências	47

1 Introdução

Desde a introdução da relatividade especial em 1905, tornou-se bastante comum a utilização dos conceitos desenvolvidos por Einstein, assim como em subsequentes publicações nas quais a teoria da relatividade geral foi estruturada, dando os primeiros passos na mudança da percepção com respeito aos fenômenos gravitacionais. Desde então, estas ideias foram testadas repetidamente e se mostram capazes de prever fenômenos que não tem espaço na descrição clássica da gravitação e da descrição de espaço-tempo atrelada ao modelo Newtoniano. Muitos destes testes são realizados através da análise do desvio previsto pela teoria relativística da gravitação no caminho tomado pela luz devido à alteração da geometria do espaço-tempo na presença de um corpo massivo. Outros ramos de estudos são a formação de estruturas em grande escala [1, 2], e o estudo do colapso gravitacional de objetos massivos [2, 3]. O foco desta dissertação está voltado ao último.

O colapso gravitacional de objetos massivos é um ramo de estudos trabalhado tanto em estudos na geração de partículas de alta energia, tais como neutrinos astrofísicos, [4, 5], assim como pode ser tratado no ponto de vista puramente geométrico da relatividade geral [2, 3]. Um dos pontos em comum destas abordagens é analisar o destino desses objetos tendo em vista suas características físicas, tais como sua massa, raio e conteúdo material.

A análise deste tipo de processo consiste na montagem de um espaço-tempo que consistentemente possa descrever um objeto compacto. Diferentes abordagens e análises foram realizadas em uma série de trabalhos individuais ou conjuntos de diversos autores [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. O espaço-tempo para estes objetos usualmente consiste em estruturar regiões interior e exterior a uma hiper-superfície fronteira, a qual é induzida individualmente pela escolha da geometria de cada uma das regiões, juntamente à análise de condições de junção adequadas ao processo.

Estas condições estão relacionadas à continuidade do espaço-tempo, assim como a possibilidade de atravessar a fronteira entre cada região. Existem diferentes construções quando trata-se da junção de variedades, tais como as condições de junção de Darmois [14], as condições de Lichnerowicz [15], as condições de O'Brien & Singe [16] e as condições de Israel [17]. Existem diversos artigos que discutem o papel de cada condição de junção e as equivalências entre elas, tais como as referências [18], [19], [20] e [21].

Na perspectiva deste trabalho serão utilizadas as condições de junção de Darmois, uma vez que se faz uma análise das simetrias dos espaços-tempo independentemente das coordenadas do exterior e do interior, sendo assim conveniente no estudo da junção entre dois espaços-tempo que podem ser construídos independentemente [18, 22].

Para contextualizar a problemática envolvida na análise dos colapsos gravitacionais

em relatividade geral, é necessário estudar soluções obtidas para as equações de campo de Einstein em diferentes contextos. Um resultado importante bastante discutido nesta perspectiva é a métrica de Schwarzschild [2, 3]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right), \quad (1.1)$$

a qual representa um corpo massivo de massa M , esfericamente simétrico e sem rotação. A métrica dada pela Eq. (1.1) apresenta uma singularidade em $r = 0$ e uma “singularidade” aparente em $r = 2M$, podendo esta última ser removida por uma mudança adequada do sistema de coordenadas [3].

Estudos posteriores da métrica de Schwarzschild levaram à definição do chamado raio de Schwarzschild, $r = 2M$, sendo também chamada de horizonte de eventos: superfície que delimita a região da qual a informação não consegue alcançar um observador exterior. Esta definição é uma versão simplificada de uma outra mais formal envolvendo a estrutura causal do espaço-tempo [23]. A equivalência com a superfície de simetria esférica estabelecida em $r = 2M$ é apenas uma situação particular da métrica (1.1), sendo este fato relacionado à característica estática desta solução. Estudos posteriores de sistemas menos simétricos, tais como objetos em rotação e colapsos gravitacionais, mostram que em geral deve-se analisar o horizonte de eventos de um objeto de forma separada às chamadas superfícies de aprisionamento [11].

Estas superfícies surgem como fronteiras que dividem uma região de onde é possível enviar um sinal a um observador externo e uma região na qual isso se torna impossível. Os horizontes de eventos em geral são caracterizados como a maior dentre as possíveis superfícies em dado problema.

Este tipo de fenômeno está usualmente relacionado aos objetos comumente chamados de “buracos negros”, corpos extremamente massivos e densos cujo efeitos gravitacionais causados pela extrema curvatura em seus arredores impedem que até mesmo trajetórias do tipo luz consigam atravessar suas fronteiras. O estudo de colapsos gravitacionais em relatividade geral pode levar ao surgimento destas estruturas e até mesmo maiores complicações com o surgimento de singularidades, assuntos estes bastante debatidos por conta da existência de teoremas que garantem a formação desses objetos a partir de hipóteses bastante gerais, como é o caso do teorema da singularidade [24, 25].

O Teorema de Penrose, assim como as conjecturas de censura cósmica forte e fraca, é construído usando como base a validade de condições de energia [26]. Particularmente, a condição de energia forte é uma condição geométrica que pode ser escrita independentemente de modelo da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0, \quad (1.2)$$

em que (1.2) u^μ é um vetor do tipo tempo qualquer. A equação (1.2) irá tomar formas diferentes levando em conta a configuração estabelecida pelo modelo, dependendo da composição do espaço-tempo, sua métrica e as situações físicas a serem consideradas. Maiores detalhes nesta perspectiva podem ser encontrados no artigo de Senovilla [26], em que o mesmo faz um levantamento histórico e discute conceitualmente as particularidades do desenvolvimento e requerimentos dos teoremas de singularidade.

Quando se trata de analisar a violação das condições de energia, a situação é bastante delicada. Já foram realizadas tentativas neste contexto de forma que o estudo de um colapso gravitacional que obrigatoriamente gere uma superfície de aprisionamento não resulte em geodésicas incompletas ou singularidades [12, 27, 28]. Surgem diferentes tentativas de construir modelos consistentes com a relatividade geral, mas que durante a evolução do sistema não ocorra uma singularidade ou carreguem algum mecanismo que impeça o seu surgimento. Em particular é possível citar os mecanismos de ricochete do fator de escala tais como estudados na referência [12]. Este tipo de formulação é bastante utilizada no tratamento de modelos de cosmologia relativística, uma vez que esta abordagem permite contornar a singularidade inicial presente no modelo cosmológico padrão [27, 29, 30]. As referências [27] e [30] fazem uma extensiva revisão do estado da arte quanto à construção de um modelo de ricochete e discutindo brevemente seus resultados.

Tendo a possibilidade de utilizar modelos de ricochete do fator de escala, e levando em consideração os modelos de colapso gravitacional citados anteriormente, pode-se construir situações de colapso no qual uma singularidade seja evitada sob escolha adequadas da composição do objeto estudado e das condições iniciais do problema. Nesta dissertação é estabelecido um controle sobre as condições de energia de forte e nula, de maneira que um observador no exterior não perceba a violação de nenhuma condição de energia, mas um observador no interior note a violação da condição de energia forte.

No capítulo 2 é estabelecida brevemente a notação e a geometria utilizada na construção do modelo, apresentando as métricas utilizadas para o espaço-tempo interior e exterior, assim como as fontes que irão alimentar as equações de Einstein para cada região da variedade. Segue-se, no capítulo 3, o processo de colagem de ambas as regiões através das condições de junção de Darmois, visando escrever as coordenadas da região exterior em termos das coordenadas do interior. Uma vez que o espaço-tempo está estabelecido, é proposta no capítulo 4 uma aproximação numérica de forma a analisar as expressões obtidas nos capítulos anteriores para as equações de campo de Einstein, as condições de energia e de junção. Este processo culmina na determinação de condições iniciais adequadas para qualificar o modelo como um processo de colapso gravitacional, as quais serão aplicadas nas expressões para a evolução da superfície de separação de ambos espaços-tempo. Assim, através de diferentes escolhas, é observado o surgimento de situações singulares, mas também é possível estabelecer condições de forma que o objeto evapore completamente

durante o colapso ou a singularidade seja evitada através da mudança de um estado de colapso para um estado de expansão do espaço-tempo interior.

2 Notação e formulação do modelo

Neste capítulo será estabelecida a estrutura básica do modelo de colapso gravitacional, estabelecendo as métricas de cada região da variedade, assim como as fontes que alimentam as equações de campo de Einstein.

2.1 Métrica do espaço-tempo interior

O modelo será construído de forma a representar o colapso gravitacional de um objeto hipotético que é análogo a uma estrela. Desta forma o espaço-tempo será dividido em duas regiões, o interior da estrela e o seu exterior. Para cada região é conveniente utilizar uma métrica específica e então analisar condições de junção para a sua colagem. O interior será representado utilizando a métrica de Friedmann-Lemaître-Roberston-Walker (FLRW) [1, 31], definida como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[d\chi^2 + \sigma^2(\chi) d\Omega^2 \right]. \quad (2.1)$$

A métrica (2.1) tem simetria esférica e representa um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, na qual define-se que:

$$\sigma_{,\chi} = \frac{d\sigma}{d\chi} = \pm \sqrt{1 - k\sigma^2}. \quad (2.2)$$

É conveniente para a perspectiva do trabalho reescrever a métrica (2.1) no formato

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{b^2(r)} dr^2 + a^2(t) r^2 d\theta^2 + a^2(t) r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (2.3)$$

na qual foi definido que $r = \sigma(\chi)$ e que $b(r) = \pm \sqrt{1 - kr^2}$. Através de (2.3) é estabelecida a geometria do espaço-tempo interior. Para que sejam analisadas as equações de campo, introduz-se uma fonte do tipo campo escalar, a qual será trabalhada com maiores detalhes na seção 2.3.

2.2 Métrica do espaço-tempo exterior

Para o exterior será utilizada a métrica de Vaidya [13] como solução esfericamente simétrica. Esta solução descreve um espaço-tempo composto unicamente por radiação

eletromagnética, tomando a forma

$$ds^2 = - \left(1 - 2 \frac{\bar{m}(u)}{R} \right) du^2 + 2\varepsilon dudR + R^2 \left(d\bar{\theta}^2 + \text{sen}(\bar{\theta})^2 d\bar{\phi}^2 \right). \quad (2.4)$$

A fonte é composta por radiação puramente incoerente, descrita pelo seguinte tensor momento-energia:

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \frac{2\varepsilon}{R^2} \frac{d\bar{m}(u)}{du} l_\mu l_\nu, \quad (2.5)$$

em que l_μ é um vetor nulo que satisfaz $l_\mu dx^\mu = -du$, $\bar{m}(u)$ é a massa geométrica, relacionada a massa M do objeto compacto por um parâmetro de proporcionalidade, M_p^2 . A diferenciação de $\bar{m}(u)$ em termos da coordenada temporal (u) relaciona a radiação que compõe o espaço-tempo à mudança na massa do objeto que emite tal radiação. O valor de ε indica se a radiação considerada está sendo emitida ou penetrando a região considerada. Mais detalhes sobre a escolha do sinal de ε será realizada no capítulo 4.

2.3 Um campo escalar como fonte para as equações de Einstein

A forma da fonte escalar inicialmente foi construída utilizando como inspiração o trabalho de Starkman [28], que traz um campo escalar $\phi(t)$ gerado por um potencial $V(\phi)$. O campo $\phi(t)$ pode ser interpretado em termos de partículas de alta energia peculiares, no entanto não é construído para representar alguma partícula conhecida, tendo em vista que os parâmetros que o definem são obtidos como solução deste modelo. A ação utilizada leva em consideração um acoplamento não-mínimo entre a curvatura do espaço-tempo e o campo escalar da seguinte maneira:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{1}{2} M_p^2 R - \frac{w}{2} - \frac{\alpha}{2} R \phi^2 - V(\phi) \right), \quad (2.6)$$

em que $w = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi$ e α é uma constante acoplamento. Inicialmente estabelece-se um potencial de forma que:

$$V(\phi) = V_0 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\beta}{3} \phi^3 + \frac{\lambda}{4} \phi^4, \quad (2.7)$$

tal qual as constantes m , β , λ e V_0 deverão ser determinadas para que seja possível analisar a evolução do colapso gravitacional, o que está descrito no capítulo 4. É essencial neste momento estudar como a geometria e a fonte dominam a evolução do colapso gravitacional. Com esse objetivo é gerado um sistema de equações diferenciais acopladas através da

seguinte relação entre curvatura e fonte energética, ou como são conhecidas, as equações de campo de Einstein, estabelecidas como:

$$G_{\nu}^{\mu} = R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}g_{\nu}^{\mu}\mathcal{R} = \frac{1}{M_p^2}T_{\nu}^{\mu}, \quad (2.8)$$

G_{ν}^{μ} é o tensor de Einstein, o qual é definido como a diferença entre o tensor de curvatura de Ricci R_{ν}^{μ} e um termo construído através da contração de R_{ν}^{μ} com a métrica $g_{\mu\nu}$, chamado escalar de Ricci \mathcal{R} .

O lado direito da equação (2.8) define a fonte energética através do tensor momento-energia T_{ν}^{μ} que se relaciona à curvatura levando em consideração apenas uma constante de proporcionalidade dada em termos da massa de Planck M_p [2, 3, 28].

Para definir o sistema de equações diferenciais a serem resolvidas é necessário calcular o lado esquerdo de (2.8) utilizando a métrica (2.3). Neste processo são obtidas as equações de Friedmann para a evolução do fator de escala $a(t)$ em termos dos componentes da fonte energética:

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_p^2} - \frac{k}{a^2}, \quad (2.9)$$

$$H_t = -\frac{1}{2M_p^2}(\rho + P) + \frac{k}{a^2}, \quad (2.10)$$

em que $H(t)$ é o parâmetro de Hubble definido como $H(t) = \frac{a_t(t)}{a(t)}$, tal que $f_t = \frac{df}{dt}$, ρ é a densidade de energia do fluido e P sua pressão [1]. É possível determinar ρ e P levando em conta a seguinte definição [27, 32]:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.11)$$

em que g é o determinante da métrica (2.3) e \mathcal{L} é a densidade lagrangeana do sistema, a qual pode ser identificada através da ação (2.6). Detalhes dos cálculos dos componentes do tensor momento-energia podem ser verificados no apêndice A. Assim como em [28] obtêm-se

$$\rho = \frac{1}{2}\phi_t^2 + \frac{\alpha}{2}R\phi^2 + V - 3\alpha\frac{a_{tt}}{a}\phi^2, \quad (2.12)$$

$$p = \frac{1}{2}(1 - 4\alpha)\phi_t^2 - \frac{\alpha}{2}R\phi^2 - V + \alpha\left[\frac{a_{tt}}{a} + 2\left(\frac{a_t}{a}\right)^2 + \frac{2k}{a^2}\right] - 2\alpha\phi\phi_t. \quad (2.13)$$

Vale ressaltar que é possível adicionar um fluido não interagente qualquer sem perda de generalidade, pois o mesmo evoluirá independentemente tal como demonstrado no apêndice

C. Uma terceira equação necessária para esta análise pode ser obtida utilizando o princípio de mínima ação ($\delta S = 0$) em (2.6) com respeito ao campo escalar ϕ , o que resulta em

$$\phi_{tt} + 3H\phi_t + V' + \alpha R\phi = 0. \quad (2.14)$$

Esta é a equação do campo escalar não-minimamente acoplado com a curvatura, sendo $V' = \frac{dV}{d\phi}$. As equações (2.12) e (2.13) são utilizadas em (2.9) e (2.10), e analisadas em conjunto com (2.14), formando assim o sistema de equações diferenciais correspondente ao problema. A solução será analisada em maiores detalhes no capítulo 4. No próximo capítulo serão analisadas as condições de junção de Darmois buscando expressões e vínculos necessários para a colagem das métricas (2.3) e (2.4).

3 Análise das condições de junção

Neste capítulo serão analisadas as condições de junção de Darmois construindo expressões que possibilitam analisar a colagem de ambas regiões da variedade descritas no capítulo anterior. Aqui são obtidas relações que relacionam o sistema de coordenadas quadridimensional $(u, R, \bar{\theta}, \bar{\phi})$ do exterior em termos do sistema (t, r, θ, ϕ) do interior.

3.1 Primeira condição de Darmois

Inicialmente será feito o tratamento das expressões relativas a primeira condição de Darmois, relacionada à continuidade de ambos espaços-tempos separados por uma hipersuperfície Σ cuja geometria é induzida separadamente por cada região da variedade [14, 20].

A hipersuperfície Σ é tridimensional e representada por um sistema de coordenadas tal que $\{\xi^a\} = \{\tau, \vartheta, \varphi\}$. Pode-se induzir a métrica em termos deste sistema de coordenadas utilizando a métrica interior $(g_{\mu\nu}^-)$ e a métrica exterior $(g_{\mu\nu}^+)$ através de [2, 3]:

$$g_{ab}^{\pm} = g_{\mu\nu}^{\pm} \frac{\partial x_{\pm}^{\mu}}{\partial \xi^a} \frac{\partial x_{\pm}^{\nu}}{\partial \xi^b}. \quad (3.1)$$

Utilizando (3.1), o elemento de linha para esta geometria é tal que:

$$ds_{\pm}^2 = g_{ab}^{\pm} d\xi^a d\xi^b. \quad (3.2)$$

Para a métrica exterior, descrita pelo elemento de linha (2.4), é possível aplicar (3.1) considerando a parametrização $u = u(\tau)$, $R = R(\tau)$, $\bar{\theta} = \vartheta$ e $\bar{\phi} = \varphi$ e assim obtendo

$$g_{\tau\tau}^+ = -\bar{\chi}\dot{u}^2 + 2\varepsilon\dot{u}\dot{R},$$

$$g_{\vartheta\vartheta}^+ = R^2, \quad (3.3)$$

$$g_{\varphi\varphi}^+ = R^2 \text{sen}^2 \bar{\theta},$$

em que utiliza-se a notação $\dot{f} = \frac{df}{d\tau}$. Para referência futura é importante lembrar que:

$$\bar{\chi} = 1 - \frac{2\bar{m}(u)}{R}. \quad (3.4)$$

O elemento de linha pode então ser obtido explicitamente através de (3.2), resultando em

$$ds_+^2 = (-\bar{\chi}\dot{u}^2 + 2\varepsilon\dot{u}\dot{R})d\tau^2 + R^2d\vartheta^2 + R^2\text{sen}^2\bar{\theta}d\varphi. \quad (3.5)$$

Realizando um processo análogo para a métrica interior (2.3) e utilizando a parametrização $t = t(\tau)$, $r = r(\tau)$, $\theta = \vartheta$ e $\phi = \varphi$, tem-se

$$g_{\tau\tau}^- = -\dot{t}^2 + \frac{a^2(t)}{1 - kr^2}\dot{r}^2, \quad (3.6)$$

$$g_{\vartheta\vartheta}^- = a^2(t)r^2,$$

$$g_{\varphi\varphi}^- = a^2(t)r^2\text{sen}^2\theta,$$

e para o elemento de linha, obtêm-se

$$ds_-^2 = \left(-\dot{t}^2 + \frac{a^2(t)}{1 - kr^2}\dot{r}^2\right)d\tau^2 + a^2(t)r^2d\vartheta^2 + a^2(t)r^2\text{sen}^2\theta d\varphi^2. \quad (3.7)$$

Para que seja possível analisar a continuidade do espaço-tempo, a primeira condição de junção de Darmois estabelece que:

$$ds_+^2 = ds_-^2, \quad (3.8)$$

da qual se obtêm duas equações da seguinte forma:

$$\dot{t}^2 - \frac{a^2(t)}{1 - kr^2}\dot{r}^2 = \bar{\chi}\dot{u}^2 - 2\varepsilon\dot{u}\dot{R}, \quad (3.9)$$

$$a(t)r = R.$$

As equações (3.9) vão ser analisadas em maior detalhes na seção 3.3, mas antes de realizá-la é necessário obter as relações relativas à segunda condição de junção de Darmois.

3.2 Segunda condição de Darmois

Para esta análise será necessário obter a curvatura extrínseca para cada uma das métricas através de [20]:

$$K_{ab}^\pm = -n_\alpha^\pm \frac{\partial}{\partial \xi^a} \left(\frac{\partial x_\pm^\alpha}{\partial \xi^b} \right) - n_\alpha^\pm \left(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \right)^\pm \frac{\partial x_\pm^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x_\pm^\nu}{\partial \xi^b}, \quad (3.10)$$

em que $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ são as conexões relativas a região interior (-) e região exterior (+) da variedade e, respectivamente tem-se que n_α^\pm são os vetores normais da hipersuperfície Σ . A curvatura extrínseca indica uma projeção das derivadas das coordenadas dos respectivos espaços-tempos sobre um vetor normal à hipersuperfície. Em termos das coordenadas da região interior e exterior, estes vetores são definidos como:

$$\begin{aligned} n_\mu^- &= \frac{\epsilon a \dot{t}}{\sqrt{b^2 \dot{t}^2 - a^2 \dot{r}^2}} \left(-\frac{\dot{r}}{\dot{t}}, 1, 0, 0 \right), \\ n_\mu^+ &= \frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{\dot{u}(\bar{\chi}\dot{u} - 2\varepsilon\dot{R})}} \left(-\dot{R}, \dot{u}, 0, 0 \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

tal que ϵ e $\bar{\epsilon}$ são versores que definem o sentido de n_μ^\pm , os quais serão estabelecidos posteriormente durante a análise do colapso gravitacional no capítulo 4. Usando estas expressões para a métrica (2.3), obtêm-se as seguintes expressões para a curvatura extrínseca:

$$\begin{aligned} K_{\tau\tau}^- &= \frac{\epsilon a}{\sqrt{b^2 \dot{t}^2 - a^2 \dot{r}^2}} \left[\dot{r}\ddot{t} - \dot{t}\ddot{r} - \frac{2a_t \dot{r} \dot{t}^2}{a} + \frac{aa_t \dot{r}^3}{b^2} + \frac{b_r \dot{r}^2 \dot{t}}{b} \right], \\ K_{\vartheta\vartheta}^- &= -\frac{\epsilon ar}{\sqrt{b^2 \dot{t}^2 - a^2 \dot{r}^2}} \left(aa_t \dot{r} r + \dot{t} b^2 \right), \\ K_{\varphi\varphi}^- &= -\frac{\epsilon ar}{\sqrt{b^2 \dot{t}^2 - a^2 \dot{r}^2}} [1 - \cos^2 \theta] \left(aa_t \dot{r} r + \dot{t} b^2 \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Analogamente para a métrica (2.4), têm-se

$$\begin{aligned} K_{\tau\tau}^+ &= \frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{\dot{u}(\bar{\chi}\dot{u} - 2\varepsilon\dot{R})}} \left[\dot{R}\ddot{u} - \dot{u}\ddot{R} + \frac{\varepsilon\dot{\chi}\dot{u}^2}{2} - \frac{\dot{u}\bar{\chi}R}{2} (\bar{\chi}\dot{u}^2 - 2\varepsilon\dot{u}\dot{R}) \right], \\ K_{\vartheta\vartheta}^+ &= \frac{\bar{\epsilon}R}{\varepsilon\sqrt{\dot{u}(\bar{\chi}\dot{u} - 2\varepsilon\dot{R})}} \left(\dot{R} - \frac{\dot{u}\bar{\chi}}{\varepsilon} \right), \\ K_{\varphi\varphi}^+ &= \frac{\bar{\epsilon}R}{\varepsilon\sqrt{\dot{u}(\bar{\chi}\dot{u} - 2\varepsilon\dot{R})}} (1 - \cos^2 \bar{\theta}) \left(\dot{R} - \frac{\dot{u}\bar{\chi}}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Este é um modelo simplificado no qual está se desconsiderando graus de liberdade superficiais ao longo da hipersuperfície, de maneira que tenhamos uma simetria radial na construção do objeto compacto, assim como espera-se que a massa seja distribuída homogeneamente em seu interior. A segunda condição de junção de Darmois diz então que:

$$K_{ab}^+ = K_{ab}^- \quad (3.14)$$

Esta igualdade nos dá um conjunto de equações utilizando (3.12) e (3.13), de forma que seja possível escrever o sistema de coordenadas do exterior em termos das coordenadas do interior de maneira conveniente para a análise do colapso gravitacional.

3.3 Análise das condições de junção

É possível escrever as coordenadas exteriores em termos das coordenadas interiores utilizando as expressões (3.9) juntamente com a análise da igualdade (3.14). As coordenadas radiais estão diretamente relacionadas pela segunda expressão de (3.9) e pode-se diferenciar em termos de τ a relação entre elas obtida de modo que:

$$\dot{R} = a_t \dot{t} r + a \dot{r}, \quad (3.15)$$

$$\ddot{R} = r a_{tt} \dot{t}^2 + r a_t \ddot{t} + 2 a_t \dot{r} \dot{t} + a \ddot{r}.$$

A primeira derivada da coordenada temporal do exterior em termos de τ pode ser obtida avaliando a segunda condição de junção para (3.13) e (3.12). Nota-se que das expressões para $K_{\vartheta\vartheta}^{\pm}$ e $K_{\varphi\varphi}^{\pm}$ obtêm-se as mesmas relações após considerar (3.14), uma vez que $\bar{\theta} = \vartheta = \theta$. Portanto, obtêm-se o seguinte resultado:

$$\dot{u} = \frac{1}{\bar{\chi}} \left[\frac{\epsilon \bar{\epsilon}^2}{\bar{\epsilon}} \left(\frac{a a_t \dot{r} r}{b} + \dot{t} b \right) + \epsilon \dot{R} \right] = \frac{1}{\bar{\chi}} \left[\epsilon \bar{\epsilon} \left(\frac{a a_t \dot{r} r}{b} + \dot{t} b \right) + \epsilon \dot{R} \right]. \quad (3.16)$$

Após uma extensiva sucessão de passos algébricos ¹ e utilizando as expressões (3.9), (3.15) e (3.16), pode-se obter:

$$\dot{t}^2 - \frac{a^2 \dot{r}^2}{b^2} = \frac{1}{\bar{\chi}} \left[\left(\frac{r \dot{r} a a_t}{b} + \dot{t} b \right)^2 - \left(r a_t \dot{t} + a \dot{r} \right)^2 \right]. \quad (3.17)$$

Utilizando as expressões em (3.12) e (3.13) para aplicar a segunda condição de junção para a componente K_{00}^+ e utilizando (3.4), (3.15), (3.16), (3.17) juntamente com as equações de Friedmann (2.9) e (2.10), obtêm-se

$$\frac{\dot{r}}{\dot{t}} = r_t = \frac{\epsilon \bar{\epsilon} \epsilon b P}{a \rho}. \quad (3.18)$$

A expressão (3.18) nos indica a evolução da coordenada radial da região interior da variedade em termos dos componentes da fonte como dados em (2.12) e (2.13). Através

¹ Maiores detalhes relativos aos passos algébricos para a obtenção destas expressões estão dispostos no apêndice B.

de (3.4) e de (3.18) também pode-se obter:

$$\frac{\dot{m}}{\dot{t}} = \bar{m}_t = \frac{r^2 a^2}{2} (\epsilon \bar{\epsilon} b - r a_t) \frac{P}{M_p^2}. \quad (3.19)$$

Com (3.19) é possível estabelecer condições iniciais para o colapso gravitacional, processo tal que será realizado no capítulo 5.

Através da análise das equações de Friedmann (2.9) e (2.10), juntamente com (3.15) e (3.16), deriva-se a seguinte relação:

$$\frac{\dot{u}}{\dot{t}} = \frac{1}{(\epsilon \bar{\epsilon} b - \epsilon r a_t)} \frac{\rho + P}{\rho}. \quad (3.20)$$

A expressão (3.20) indica a coerência na evolução temporal em cada região da variedade, ou seja, é necessário que esta razão seja positiva uma vez que isto indica que as coordenadas temporais evoluem em um mesmo sentido, possivelmente com taxas diferentes. Esta condição é respeitada dentro dos intervalos de validade do colapso gravitacional e da aproximação numérica proposta, tal qual será discutido no capítulo 4 a seguir.

4 Análise numérica do modelo

Nesta seção será proposta uma aproximação numérica para o sistema de equações diferenciais formado por (2.9), (2.10) e (2.14), de forma que seja possível obter soluções analíticas nos arredores do ricochete do fator de escala ($t = 0$). Os parâmetros presentes em (2.7) e novos parâmetros apresentados no decorrer deste capítulo serão determinados.

4.1 Modelo para aproximação numérica

Define-se inicialmente para o fator de escala $a(t)$ uma aproximação em série de potências até termos de segunda ordem, dada por:

$$a(t) = a_b + a_1 t^2 + \mathcal{O}(t^3), \quad (4.1)$$

em que a_b é um parâmetro adimensional que indica o valor do fator de escala no momento do ricochete, e a_1 é um parâmetro cujas dimensões em unidades naturais ($c=\hbar=1$) equivale a comprimento⁻², também é importante apontar que os termos de primeira ordem são tomados como nulos para manter a simetria do ricochete. Analogamente é proposto para o campo escalar:

$$\phi(t) = \phi_0 + \phi_1 t^2 + \mathcal{O}(t^3). \quad (4.2)$$

Em (4.2) ambos ϕ_0 e ϕ_1 são parâmetros a determinar. Pode-se aplicar ambas as equações (4.1) e (4.2) no sistema de equações diferenciais formado pelas equações de Friedmann (2.9) e (2.10) e a equação do campo escalar (2.14). Realizando a substituição inicialmente na equação (2.9) e realizando uma expansão em série de potências em torno do ricochete ($t = 0$), obtêm-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \frac{k}{a_b^2} - \frac{1}{12} \frac{\lambda \phi_0^4}{M_p^2} - \frac{1}{9} \frac{\beta \phi_0^3}{M_p^2} - \frac{1}{6} \frac{m^2 \phi_0^2}{M_p^2} - \frac{\alpha k \phi_0^2}{a_b^2 M_p^2} - \frac{1}{3} \frac{V_0}{M_p^2} + \\ & + \left(-\frac{2a_1 k}{a_b^3} - \frac{2}{3} \frac{\phi_1^2}{M_p^2} + \frac{2a_1 \alpha k \phi_0^2}{a_b^3 M_p^2} + 4 \frac{a_1^2}{a_b^2} - \frac{1}{3} \frac{\lambda \phi_0^3 \phi_1}{M_p^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{3} \frac{\beta \phi_0^2 \phi_1}{M_p^2} - \frac{1}{3} \frac{m \phi_0 \phi_1}{M_p^2} - \frac{2\alpha k \phi_0 \phi_1}{a_b^2 M_p^2} - \frac{4\alpha a_1^2 \phi_0^2}{a_b^2 M_p^2} \right) t^2 = 0. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Realizando um processo análogo para a equação (2.10) têm-se

$$\begin{aligned} \frac{2a_1}{a_b} - \frac{2\alpha a_1 \phi_0^2}{M_p^2 a_b} - \frac{1}{3} \frac{V_0}{M_p^2} - \frac{1}{6} \frac{m^2 \phi_0^2}{M_p^2} - \frac{1}{9} \frac{\beta \phi_0^3}{M_p^2} - \frac{1}{12} \frac{\lambda \phi_0^4}{M_p^2} - \frac{2\alpha \phi_0 \phi_1}{M_p^2} + \\ + \left(-\frac{2a_1^2}{a_b^2} + \frac{4}{3} \frac{\phi_1^2}{M_p^2} - \frac{4\alpha a_1 \phi_0 \phi_1}{M_p^2 a_b} + \frac{2\alpha a_1^2 \phi_0^2}{a_b^2 M_p^2} - \frac{1}{3} \frac{m^2 \phi_0 \phi_1}{M_p^2} + \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \frac{m^2 \phi_0 \phi_1}{M_p^2} - \frac{1}{3} \frac{\beta \phi_0^2 \phi_1}{M_p^2} - \frac{1}{3} \frac{\lambda \phi_0^3 \phi_1}{M_p^2} - \frac{6\alpha \phi_1^2}{M_p^2} \right) t^2 = 0. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Realizando o mesmo processo para a equação do campo escalar (2.14), obtêm-se

$$\begin{aligned} 2\phi_1 + m^2 \phi_0 + \beta \phi_0^2 + \lambda \phi_0^3 + \frac{12\alpha a_1 \phi_0}{a_b} + \frac{6\alpha k \phi_0}{a_b^2} + \\ + \left(\frac{12a_1 \phi_1}{a_b} + m^2 \phi_1 + 2\beta \phi_0 \phi_1 + 3\lambda \phi_0^2 \phi_1 + 3\lambda \phi_0^2 \phi_1 + \right. \\ \left. + \frac{12\alpha a_1 \phi_1}{a_b} + \frac{12\alpha a_1^2 \phi_0}{a_b^2} + \frac{6\alpha k \phi_1}{a_b^2} - \frac{12\alpha a_1 k \phi_0}{a_b^3} \right) t^2 = 0. \quad (4.5) \end{aligned}$$

As equações (4.3), (4.4) e (4.5) formam um conjunto de seis equações algébricas para os coeficientes V_0 , β , m^2 e λ do potencial $V(\phi)$ dado por (2.7), os coeficientes da aproximação em segunda ordem do campo escalar, ϕ_0 e ϕ_1 , em (4.2) e os coeficientes da aproximação em segunda ordem do fator de escala, a_b e a_1 , estabelecidos em (4.1). Juntamente aos oito parâmetros listados acima, também está presente nas equações o parâmetro α de acoplamento em (2.6). Buscando uma solução para o sistema de equações deixam-se três parâmetros livres, estes sendo β , ϕ_0 e a_b .

Foi obtido um conjunto de soluções para este sistema de equações de forma que o ricochete ocorra e que a condição nula de energia não seja violada. Desta forma, foi escolhida uma solução cujo parâmetro a_1 seja diferente de 0. Para que ocorra o ricochete é necessário que a condição de energia forte seja violada [27].

Durante a análise computacional do sistema algébrico acima encontrou-se soluções cujo parâmetro de acoplamento α é nulo e também soluções não nulas, respectivamente modelos de acoplamento mínimo e acoplamento não mínimo. A possibilidade em que $\alpha \neq 0$ resulta na violação da condição de energia nula como estabelecida na expressão (4.8) nos arredores de $t = 0$, portanto a solução de interesse para a proposta deste trabalho é tal que:

$$\begin{aligned} V_0 = \frac{1}{24} \frac{\beta a_b^2 \phi_0^3 + 72kM_p^2 + 15M_p k \phi_0 - 18k\phi_0^2}{a_b^2}, \quad m^2 = -\frac{1}{2} \frac{\beta \phi_0^2 a_b^2 + 3kM_p - 6k\phi_0}{\phi_0 a_b^2}, \\ \lambda = \frac{1}{2} \frac{1 - \beta \phi_0^2 a_b^2 + kM_p - 6k\phi_0}{\phi_0^3 a_b^2}, \quad a_1 = \frac{1}{2} \frac{k}{a_b}, \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$\alpha = 0, \quad \phi_1 = \frac{1}{2} \frac{kM_p}{a_b^2}.$$

Sob as mesmas condições há também a seguinte solução:

$$V_0 = \frac{1}{24} \frac{\beta a_b^2 \phi_0^3 + 72kM_p^2 - 15M_p k \phi_0 - 18k\phi_0^2}{a_b^2}, \quad m^2 = \frac{1 - \beta \phi_0^2 a_b^2 + 3kM_p + 6k\phi_0}{2 \phi_0 a_b^2},$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \frac{\beta \phi_0^2 a_b^2 + kM_p + 6k\phi_0}{\phi_0^3 a_b^2}, \quad a_1 = \frac{1}{2} \frac{k}{a_b}, \quad (4.7)$$

$$\alpha = 0, \quad \phi_1 = -\frac{1}{2} \frac{kM_p}{a_b^2}.$$

Ambas soluções (4.6) e (4.7) são relativas à um sistema minimamente acoplado, assim como as unidades dos parâmetros a_1 e ϕ_1 estão adequadas para manter a adimensionalidade do fator de escala e do campo escalar em unidades naturais. A discussão de colapsos gravitacionais com a presença de um campo escalar é ampla, como pode ser notado em [27], alguns trabalhando na perspectiva de formação de buracos negros [33], e na tentativa de evitar singularidades [34], também há modelos que analisam modelos do tipo $f(R)$ mais gerais [35], nestes colapsos há a tendência de se encontrar possíveis soluções singulares, mas também encontram-se resultados que evitam as singularidades através da violação de condição de energia forte [28, 36]. No entanto, busca-se nesta dissertação analisar o colapso gravitacional em escalas astrofísicas, e analisar a viabilidade de um ricochete do fator de escala para evitar uma singularidade.

Um valor de k levemente positivo é resultado de observações do telescópio Planck [37, 38], e ACT (*Atacama Cosmology Telescope*) [39]. Evidências cosmológicas para a possibilidade de uma curvatura positiva na perspectiva cosmológica dá abertura para uma discussão de outros modelos nos quais $k > 0$, tais como o estabelecido nesta pesquisa. A próxima seção discute as relações obtidas para a condição de energia nula (NEC) e condição de energia forte (SEC) aproximadas numericamente para os arredores do ricochete.

4.2 Condições de Energia

As expressões para a NEC e para a SEC podem ser obtidas respectivamente analisando as seguintes desigualdades:

$$\rho(t) + P(t) \geq 0, \quad (4.8)$$

$$\rho(t) + 3P(t) \geq 0. \quad (4.9)$$

Durante a discussão na seção anterior argumentou-se que a SEC deveria ser violada dentro da perspectiva do ricochete analisada neste modelo, uma vez que espera-se uma expansão acelerada do fator de escala após o ricochete. Tendo esta afirmação em vista é possível utilizar as expressões (2.9) e (2.10) para obter a equação da aceleração como:

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{1}{6M_p^2} (\rho(t) + 3P(t)). \quad (4.10)$$

Para que seja possível um universo com expansão acelerada é necessário que tenha-se um razão positiva em (4.10), isto apenas ocorre se $\rho + 3P \leq 0$.

Visando analisar com maior profundidade estas condições e suas implicações nas condições iniciais do modelo, é necessário aplicar a aproximação numérica proposta. Ambas as soluções (4.6) e (4.7) resultam em expressões idênticas quando analisadas nesta perspectiva. Utilizando então as expressões (2.12) e (2.13) juntamente com as expressões propostas (4.1) e (4.2), obtêm-se:

$$\rho(t) = \frac{3kM_p^2}{a_b^2}, \quad (4.11)$$

$$P(t) = \frac{kM_p^2 (kt^2 - 3a_b^2)}{a_b^4}. \quad (4.12)$$

Note que com a escolha $k > 0$ a densidade de energia (4.11) é sempre positiva e nesta aproximação independente do tempo. A pressão (4.12) troca de sinal no intervalo $|t| < \frac{\sqrt{3}a_b}{\sqrt{k}}$ e este será um ponto de interesse na determinação das condições iniciais para o colapso gravitacional no capítulo 5 tendo em vista que ela domina o sinal na expressão (3.19), e é um fator importante na expressão (3.18). Avaliando então estas expressões em (4.8) e (4.9), obtêm-se para a NEC:

$$\frac{k^2 M_p^2 t^2}{a_b^4} \geq 0, \quad (4.13)$$

e para a SEC que:

$$\frac{3kM_p^2(kt^2 - 2a_b^2)}{a_b^4} \geq 0. \quad (4.14)$$

Note que a NEC (4.13) não é violada, independentemente do instante de tempo ou o valor de a_b , e percebe-se que há um pequeno intervalo no qual a SEC (4.14) é violada quando $|t| \leq \frac{\sqrt{2}a_b}{\sqrt{k}}$. É importante notar também que o sinal da curvatura é indiferente para a condição de energia nula, mas note que uma curvatura negativa não permite que a condição de energia forte seja violada, indicando que para este modelo não seria possível construir um ricochete se $k < 0$.

4.3 Condições de Junção

Nesta seção serão analisadas as condições obtidas no capítulo 3 para a colagem de ambas as regiões da variedade aplicando às expressões (3.18), (3.19) e (3.20), escritas em termos de (4.11) e (4.12), a solução (4.6), ou (4.7), obtida na seção 4.1 (4.6). Primeiro, é de interesse do trabalho simplificar (3.18) utilizando $b(r) = \sqrt{1 - kr^2}$, obtendo:

$$\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \epsilon \bar{\epsilon} \epsilon \frac{P}{a\rho} dt. \quad (4.15)$$

Pode-se resolver o lado esquerdo de (4.15) utilizando o método de substituição trigonométrica de forma que:

$$\arcsen\left(\sqrt{|k|r}\right) = \sqrt{|k|} \int \epsilon \bar{\epsilon} \epsilon \frac{P}{a\rho} dt. \quad (4.16)$$

Para prosseguir é necessário levar em consideração os sinais dos versores ϵ , $\bar{\epsilon}$ e ϵ . Tendo em vista que este é um modelo de colapso gravitacional em que radiação é emitida pelo corpo ao longo de seu colapso, é possível inferir, analisando (2.5), que $\epsilon \frac{d\bar{m}(u)}{du} \geq 0$, ou seja, a massa é uma grandeza que varia negativamente, e portanto é necessário que ϵ seja negativo, de forma que a emissão de radiação esteja direcionada para o exterior da região interna da variedade. Para ϵ e $\bar{\epsilon}$ no entanto, o sinal é escolhido tendo em vista a expressão (3.11). Escolhe-se que o produto $\epsilon \bar{\epsilon}$ seja positivo para que exista coerência no sentido dos vetores normais escrito em termos das coordenadas da métrica interior e da métrica exterior. Tendo isto em vista (4.16) toma a forma:

$$\arcsen\left(\sqrt{|k|r}\right) = -\sqrt{|k|} \int \frac{P}{a\rho} dt. \quad (4.17)$$

Substituindo então as expressões (4.1) com os parâmetros obtidos em (4.6), assim como (4.11) e (4.12) em (4.17), pode-se obter uma expressão a menos de uma constante de integração arbitrária adimensional com o seguinte formato:

$$\arcsen\left(\sqrt{|k|r}\right) = \sqrt{|k|} \left(-\frac{2}{3} \frac{t}{a_b} + \frac{5}{3} \frac{\sqrt{2} \arctg\left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{|k|} t \sqrt{2}}{a_b}\right)}{\sqrt{|k|}} \right) + C. \quad (4.18)$$

A determinação de um intervalo de valores adequados para a constante de integração será realizada tendo em vista a escolha de condições para (3.18) e (3.19) que caracterizem

um colapso gravitacional. Com o objetivo de avaliar estas condições também se faz necessário avaliar (3.19) em termos dos parâmetros obtidos nesta seção, obtendo

$$\bar{m}_t = -\frac{1}{2} \frac{r^2 \left(\frac{1}{2} \frac{kt^2}{a_b} + a_b^2 \right)^2 \left(\sqrt{-kr^2 + 1} + \frac{rkt}{a_b} \right) k (kt^2 - 3a_b^2)}{a_b^4}. \quad (4.19)$$

A expressão (4.19) é coerente em uma análise dimensional, assim como (4.18). Para integrá-la, no entanto, e obter a evolução temporal do parâmetro de massa, é necessário primeiro obter um intervalo para a constante de integração C em (4.18). Por último é necessário escrever (3.20) analogamente ao feito para a obtenção de (4.16) e (4.19), de forma que:

$$\frac{\dot{u}}{\dot{t}} = \frac{du}{dt} = \frac{k}{3a_b^2} \frac{t^2}{\left(\frac{rkt}{a_b} + \sqrt{-kr^2 + 1} \right)}. \quad (4.20)$$

A expressão (4.20) é adimensional e será importante na análise da coerência do modelo durante a evolução do colapso, já que é necessário que durante todo o intervalo de validade do modelo esta razão seja sempre positiva. Tendo em mãos as expressões necessárias é possível então avaliar as condições que caracterizam este modelo como um colapso gravitacional.

4.4 Condições iniciais do colapso

A escolha das condições iniciais deve ser realizada de maneira adequada para que o modelo caracterize um colapso gravitacional. Para isso serão propostas condições específicas para a evolução de (4.16) e (4.19). No contexto desejado é necessário que a coordenada radial, r , da superfície do objeto compacto e o parâmetro de massa, \bar{m} , tenham taxas de variação negativas em um instante inicial de tempo $t = t_0$. Isto pode ser representado analisando as seguintes desigualdades:

$$r_t(t = t_0) < 0, \quad (4.21)$$

$$\bar{m}_t(t = t_0) < 0. \quad (4.22)$$

A afirmação (4.22) se deve à suposição de que a radiação é emitida do corpo, tal qual foi discutido na seção anterior durante a escolha do sinal de ε na expressão (2.5). Analisando a condição (4.22) juntamente com a expressão (4.19) é possível estabelecer intervalos de caracterização para o colapso gravitacional. A relação (4.19) estabelece duas condições, sendo a primeira delas:

$$P(t_0) > 0 \longrightarrow \frac{kM_p^2 (kt_0^2 - 3a_b^2)}{a_b^4} > 0.$$

Como discutido anteriormente, para o contexto do ricochete é necessário que a curvatura tome um valor positivo $k > 0$, e assim a desigualdade toma a seguinte forma:

$$\frac{M_p^2 (kt_0^2 - 3a_b^2)}{a_b^4} > 0 \longrightarrow \frac{kt_0^2}{a_b^2} - 3 > 0 \longrightarrow \tilde{t}_0^2 - 3 > 0, \quad (4.23)$$

na qual define-se o parâmetro adimensional, \tilde{t} , como:

$$\tilde{t} = \frac{\sqrt{kt}}{a_b}. \quad (4.24)$$

A desigualdade (4.23) leva a dois intervalos de validade para esta condição, sendo estes:

$$P(\tilde{t}_0) > 0 \longrightarrow \tilde{t}_0 > +\sqrt{3},$$

ou

$$P(\tilde{t}_0) > 0 \longrightarrow \tilde{t}_0 < -\sqrt{3}. \quad (4.25)$$

O segundo intervalo é de interesse para o modelo uma vez que se busca um colapso que ocorra previamente ao ricochete, o qual ocorre em $t = 0$. A condição sobre a pressão determina completamente o sinal de $r_t(t = t_0)$ mas, no entanto, é necessário avaliar uma segunda condição para a determinar o sinal de $\bar{m}_t(t = t_0)$.

É necessário considerar a mudança de sinal de \bar{m}_t quando em (3.19) o termo $b + ra_t$ se torna negativo, pois desta maneira obtêm-se um segundo intervalo de validade para condições iniciais:

$$\begin{aligned} b(r = r_0) + r_0 a_t(t = t_0) > 0 &\longrightarrow \sqrt{1 - kr_0^2} + r_0 a_t(t = t_0) > 0 \longrightarrow \\ \left(\sqrt{1 - kr_0^2} + r_0 a_t(t = t_0) \right) \left(\sqrt{1 - kr_0^2} - r_0 a_t(t = t_0) \right) > 0 &\longrightarrow 1 > r_0^2 (k + a_t^2(t = t_0)), \end{aligned}$$

em que $r(t = t_0) = r_0$. Usando então a expressão (4.1) para a_t juntamente com a solução (4.6) para o parâmetro a_1 , pode-se escrever:

$$r_0^2 < \frac{1}{k + a_t(t = t_0)^2} = \frac{1}{k + \left(\frac{kt_0}{a_b} \right)^2} \rightarrow kr^2 < \frac{1}{1 + \frac{kt_0^2}{a_b^2}} \rightarrow \tilde{r}_0^2 < \frac{1}{1 + \tilde{t}_0^2}, \quad (4.26)$$

em que foi utilizada a expressão (4.24) e definida a variável radial adimensional $\tilde{r} = \sqrt{kr}$. Da expressão (4.26), ao escolher um instante inicial \tilde{t}_0 encontra-se um limite superior para

a coordenada radial inicial da superfície. Verificando regiões de interesse na desigualdade encontra-se o seguinte intervalo de validade para o valor de \tilde{r}_0 :

$$0 < \tilde{r}_0 < \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{t}_0^2}}. \quad (4.27)$$

A escolha de diferentes valores para \tilde{t}_0 será feita de forma a encontrar um conjunto de valores possíveis para a constante de integração C em (4.18). Tendo estes resultados em mãos, é possível integrar a expressão (4.19) e analisar a evolução do colapso próximo do ricochete para diferentes casos e, assim, compreender melhor o comportamento qualitativo do sistema.

4.5 Evolução do colapso gravitacional

Para que esta análise seja possível é conveniente escolher valores de \tilde{t}_0 que respeitem a condição (4.25). Nesta perspectiva, serão analisados três casos: $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$, $\tilde{t}_0 = -1.5\sqrt{3}$ e $\tilde{t}_0 = -1.1\sqrt{3}$. Estas expressões indicam limites superiores para o valor do raio inicial \tilde{r}_0 por meio de (4.27).

4.5.1 Análise da escolha $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$

Para a escolha $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$, utilizando a expressão (4.27), limita-se o intervalo de validade para \tilde{r}_0 em

$$0 < \tilde{r}_0 < \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Dentro deste intervalo é possível escolher valores para a constante de integração C em (4.18). Primeiro, reescrevendo a expressão como:

$$\tilde{r}(\tilde{t}) = \text{sen} \left(-\frac{2}{3}\tilde{t} + \frac{5}{3}\sqrt{2}\text{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{t} \right) + C \right), \quad (4.28)$$

e avaliando (4.28) no instante \tilde{t}_0 escolhido, obtêm-se

$$\tilde{r}_0 = \text{sen} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{5}{3}\sqrt{2}\text{arctg}(-\sqrt{6}) + C \right).$$

Analisando o valor de \tilde{r}_0 nos limites da desigualdade acima, e aproximando o resultado obtido até a terceira casa decimal, pode-se estabelecer que a constante adimensional C deve estar no intervalo

$$0.480 < C < 0.761. \quad (4.29)$$

Através deste intervalo é possível estudar a evolução de $\tilde{r}(\tilde{t})$, como representado na figura (1). Para esta escolha de instante inicial, percebe-se que $\tilde{r}(\tilde{t})$ vai a zero em um instante de tempo finito \tilde{t}_s , antes da violação da condição de energia forte, $\tilde{t}_v = -\sqrt{2}$. O valor de \tilde{t}_s é

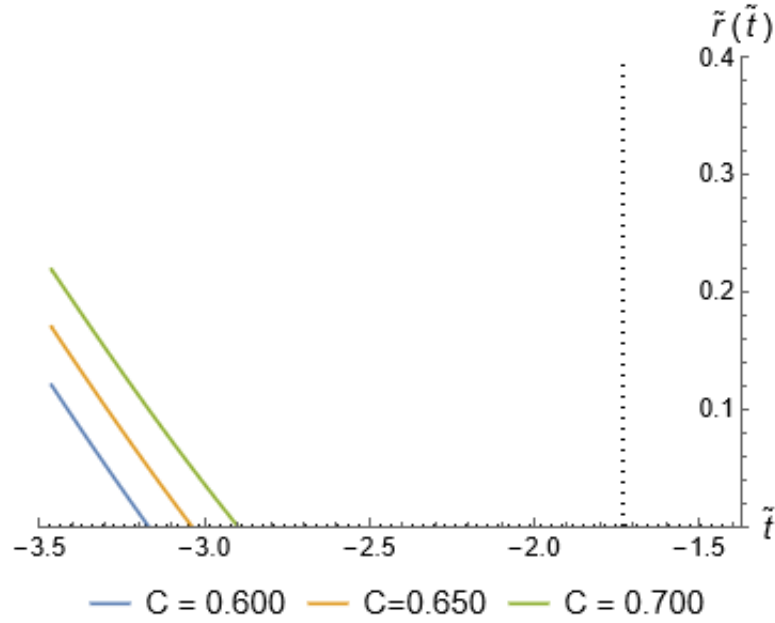


Figura 1 – Evolução de $\tilde{r}(\tilde{t})$ para $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$ sob a escolha de 3 valores de C . A linha descontinua vertical indica o momento em $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.

obtido individualmente para cada escolha de C no intervalo (4.29), e através da análise do parâmetro de massa $\tilde{m}(t)$ é possível estudar situações físicas diferentes, tais como a evaporação do objeto compacto ou um colapso singular.

Para realizar a análise de $\tilde{m}(t)$ é preciso obtê-lo em termos dos parâmetros da aproximação numérica. Com este objetivo, reescreve-se a expressão (3.19) em termos de (4.24), obtendo

$$\tilde{m}_{\tilde{t}} = -\frac{\tilde{r}^2}{2} \left(1 + \frac{\tilde{t}^2}{2}\right)^2 \left(\sqrt{1 - \tilde{r}^2} + \tilde{r}\tilde{t}\right) (\tilde{t}^2 - 3), \quad (4.30)$$

em que define-se $\tilde{m} = \frac{\sqrt{k}}{a_b} \tilde{m}$. A evolução de (4.30) depende explicitamente dos valores de \tilde{r} , e portanto, depende da escolha de C no intervalo (4.29). Escolhendo valores para C , representa-se a evolução de $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ na figura (2). Nota-se que a taxa de variação de $\tilde{m}(\tilde{t} = \tilde{t}_0)$ é negativa, o que é coerente dada as condições propostas para o modelo. Também é importante notar que as taxas com que $\tilde{m}(\tilde{t})$ varia são diferentes para cada escolha de C .

Para analisar a evolução de $\tilde{m}(\tilde{t})$ é necessário realizar a integração de (3.19). No entanto, devido à complexidade da expressão se faz necessário analisar o problema numericamente, que em primeira ordem se comporta como

$$\tilde{m}_t = \frac{3}{2} \text{sen}^2(C) \sqrt{1 - \text{sen}^2(C)} + 3 \text{sen}(C) \cos(C) \sqrt{1 - \text{sen}^2(C)} \frac{\sqrt{k}}{a_b} t + \mathcal{O}(t^2). \quad (4.31)$$

Pode-se realizar a integração de (4.31) em termos de t , ignorando termos de $\mathcal{O}(t^3)$,

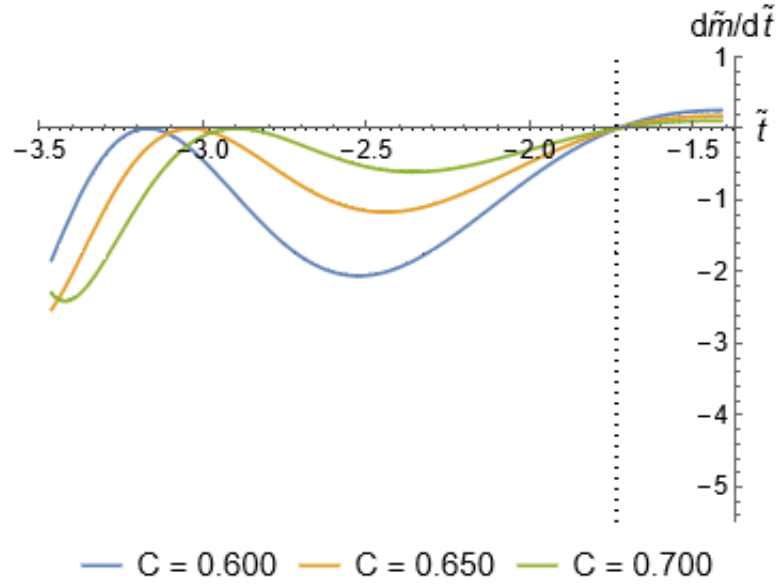


Figura 2 – Evolução de $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ para $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$ sob a escolha de 3 valores C . A linha descontinua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.

para obter

$$\tilde{m} = \frac{3}{2}\text{sen}^2(C)\cos(C)\tilde{t} + \frac{3}{2}\text{sen}(C)\cos^2(C)\tilde{t}^2 + \tilde{D}, \quad (4.32)$$

em que foram utilizadas as redefinições para \tilde{m} e \tilde{t} . Também define-se $\tilde{D} = \sqrt{k}D$, onde D é uma constante de integração com unidades de comprimento no sistema de unidades natural. A escolha de \tilde{D} permite avaliar situações físicas diferentes, tais como um modelo de evaporação, um modelo singular ou um modelo em que se viola a condição de energia forte. Para estabelecer os intervalos de validade de \tilde{D} , utiliza-se dois instantes de tempo: avalia-se \tilde{t}_s , instante de tempo em que, para uma escolha específica de C , $\tilde{r}(\tilde{t}_s) = 0$, e também $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$ de maneira que $\tilde{m}(\tilde{t}_0)$ seja maior do que zero. Sob estas condições, e escolhendo $C = 0.6$, encontra-se o seguinte intervalo de validade para \tilde{D} :

$$-5.556 < \tilde{D} < -4.546. \quad (4.33)$$

O intervalo acima indica a escolha para \tilde{D} em que $\tilde{m}(\tilde{t})$ se anula anteriormente a \tilde{t}_s e posteriormente a \tilde{t}_0 , ou seja, o objeto evaporou devido à perda de massa antes do surgimento de uma singularidade no modelo. O comportamento de $\tilde{m}(\tilde{t})$ está representado na figura (3), a qual exemplifica a evaporação do objeto para a escolha de $\tilde{D} = -5.000$, evitando assim o colapso singular. Nota-se que para $\tilde{D} = -4.000$, no entanto, a evaporação ocorreria apenas em um instante de tempo posterior à $\tilde{r}(\tilde{t}_s) = 0$, portanto têm-se um colapso singular.

Para encontrar a constante de integração C presente em (4.28), avalia-se esta equação no instante de tempo inicial, t_0 , sob uma escolha de raio inicial. Para isso é importante notar que a escolha de um raio inicial para o objeto deve ser coerente com os

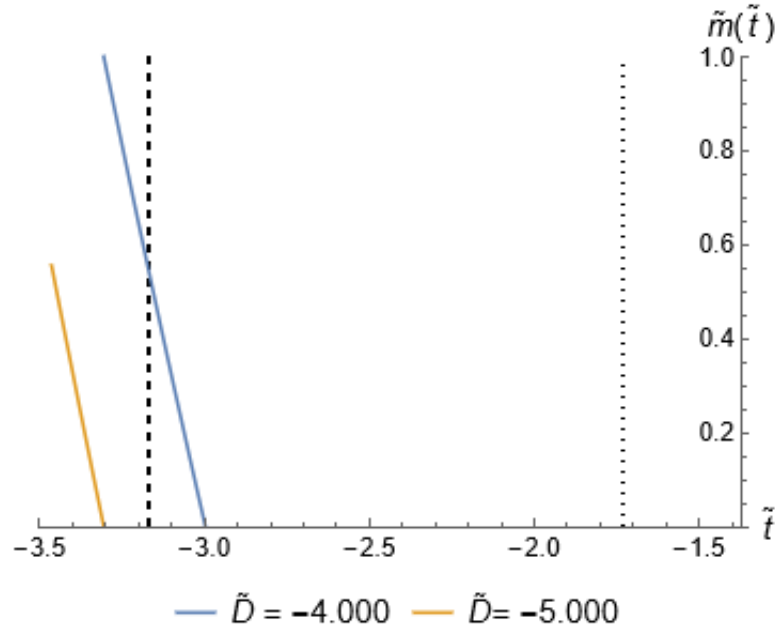


Figura 3 – Evolução do parâmetro de massa considerando $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$, e sob a escolha de $C = 0.6$, com a escolha de dois valores para \tilde{D} . As linhas verticais descontínuas em negrito e simples indicam respectivamente, \tilde{t}_s e o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.

limites de validade dados por (4.27). Ao fixar o valor de r_0 , estabelece-se um intervalo de validade para \sqrt{k} , lembrando que $\tilde{r} = \sqrt{k}r$. A curvatura pode ser relacionada diretamente com a densidade de energia nas proximidades do ricochete analisando a expressão (4.11). Nesse caso, seu valor independe do tempo e, portanto, tem-se a seguinte relação

$$\rho_b = \frac{3kM_p^2}{a_b^2}, \quad (4.34)$$

a qual também é obtida em [28]. Sob a escolha de um valor fixo para a_b , avaliando o intervalo (4.27), encontra-se uma região de validade para a determinação de ρ_b , em que r_0 é um valor fixo com unidade de comprimento. Para este intervalo de validade, obtêm-se:

$$0 < \sqrt{\rho_b} < \frac{\sqrt{3}M_p}{r_0\sqrt{1 + \tilde{t}_0^2}}, \quad (4.35)$$

em que toma-se $a_b = 1$. Note que fixar o valor de a_b estabelece um valor para a curvatura k por meio de (4.34). É possível então verificar através da definição (4.24) a validade da expansão em torno de $t = 0$. Avaliando então (4.24) utilizando (4.34) com $a_b = 1$, têm-se:

$$\tilde{t} = \sqrt{k}t \rightarrow t = \frac{\sqrt{3}M_p}{\sqrt{\rho_b}}\tilde{t}, \quad (4.36)$$

tendo em vista que $M_p \rightarrow \mathcal{O}(-8)$ [40] e que durante o colapso é esperado que tenhamos altas densidades de energia, é adequado interpretar que $t \rightarrow 0$, ou seja, a escolha de valores de \tilde{t}_0 ainda está nas proximidades de $t = 0$.

Temos que para uma escolha arbitrária de r_0 é possível estabelecer condições iniciais para o colapso, contanto que ρ_b obedeça a relação (4.35). Com a escolha de ρ_b , e através da análise de (4.28) determina-se C e, com este resultado, é possível analisar a fase final do objeto, tendo em vista a expressão (4.32). Para uma escolha de ρ_b , utilizando que $\bar{m}(t) = M_p^2 M$ [3, 13], obtêm-se para (4.32) a seguinte expressão

$$\frac{\sqrt{\rho_b} M}{M_p^2} = \frac{3}{2} \text{sen}^2(C) \cos(C) \tilde{t}_0 + \frac{3}{2} \text{sen}(C) \cos^2(C) \tilde{t}_0^2 + \tilde{D}. \quad (4.37)$$

Uma análise final importante é a evolução das coordenadas temporais do objeto durante o colapso. Para isso, avalia-se a expressão (4.20) em termos de \tilde{t} e \tilde{r} , obtendo

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} = \frac{1}{3} \frac{\tilde{t}^2}{(\tilde{r}\tilde{t} + \sqrt{1 - \tilde{r}^2})}, \quad (4.38)$$

em que define-se $\tilde{u} = \frac{\sqrt{k}}{a_b} u$. A evolução desta razão está representada na figura (4). O comportamento é fisicamente aceitável pois (4.38) nunca se torna negativa. Portanto, a evolução das coordenadas temporais do interior e do exterior tem sempre o mesmo sentido. Percebe-se também que a taxa com que a coordenada temporal evolui é diferente para a região interior e para a região exterior da variedade em questão. A escolha de C tem o papel de quantificar o quão maior é uma taxa em relação à outra.

Como dito anteriormente, as análises realizadas nesta seção dependem da escolha do instante inicial do colapso \tilde{t}_0 . Nas duas próximas seções serão avaliadas, analogamente, as dinâmicas do colapso tendo em vista escolhas diferentes para \tilde{t}_0 .

4.5.2 Análise da escolha $\tilde{t}_0 = -1.5\sqrt{3}$

O processo de análise do colapso é análogo ao feito na seção anterior. Inicialmente, estabelece-se um intervalo de validade para C tendo em vista as expressões (4.28) e o intervalo de caracterização do colapso (4.27), dos quais obtêm-se

$$0.795 < C < 1.162. \quad (4.39)$$

O comportamento de (4.28) para diferentes escolhas de C é representado na figura (5). Daí, é perceptível que diferentemente do resultado obtido para a escolha de $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$, agora existem escolhas de C que não levam a um objeto singular. Desta maneira, busca-se condições sobre $\tilde{m}(\tilde{t})$ para as diferentes situações, como a evaporação do objeto, um colapso singular ou o ricochete do fator de escala. Tendo isto em vista, é necessário avaliar o comportamento de $\tilde{m}_{\tilde{t}}$, representado pela figura (6).

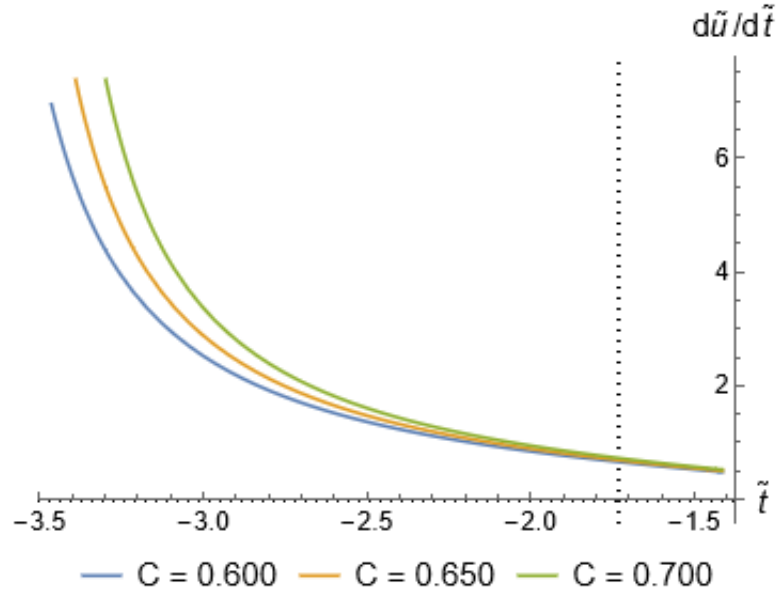


Figura 4 – Evolução da razão entre \dot{u} e \dot{t} , sob três escolhas de C tendo em vista o valor de $\tilde{t}_0 = -2\sqrt{3}$. A linha descontinua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.

Novamente, a evolução de $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ é coerente com as condições iniciais para o colapso, e a interpretação das taxas de variação é feita de maneira análoga ao discutido na seção anterior. Avaliando a expressão (4.32) é possível obter intervalos de \tilde{D} para que ocorra um colapso singular em \tilde{t}_s , ou para que a condição de energia forte seja violada em \tilde{t}_v .

Para determinadas escolhas de C é possível obter modelos singulares, ou modelos de ricochete como fica evidente na figura (5). Avaliando o intervalo de \tilde{D} , obtido na análise de $\tilde{m}(\tilde{t}_s) = 0$, juntamente com $\tilde{m}(\tilde{t}_0) = 0$, encontra-se

$$-1.578 < \tilde{D} < -0.849. \quad (4.40)$$

Este intervalo indica valores de \tilde{D} em que ocorre a evaporação do objeto antes que $\tilde{r}(\tilde{t}_s) = 0$. Analogamente, se (4.32) for avaliada para $\tilde{t}_v = -\sqrt{2}$, com $C = 0.950$, obtém-se o intervalo

$$-1.287 < \tilde{D} < -0.009, \quad (4.41)$$

no qual o objeto evapora antes de um ricochete mas sem a possibilidade de que ocorra um colapso singular. Estes resultados estão representados nas figuras (7) e (8).

A figura (7) tem a evaporação do objeto para $\tilde{D} = -0.700$ e um modelo singular para $\tilde{D} = -0.900$, uma vez que para a primeira escolha temos que $\tilde{m}(\tilde{t})$ se anula antes de \tilde{t}_s . Da mesma maneira, temos que a figura (8) representa uma situação em que o objeto evapora antes do ricochete para $\tilde{D} = -0.500$ e viola a condição de energia forte se $\tilde{D} = -0.050$, tendo em vista que na primeira escolha $\tilde{m}(\tilde{t})$ se anula previamente ao instante de tempo $\tilde{t}_v = -\sqrt{2}$.

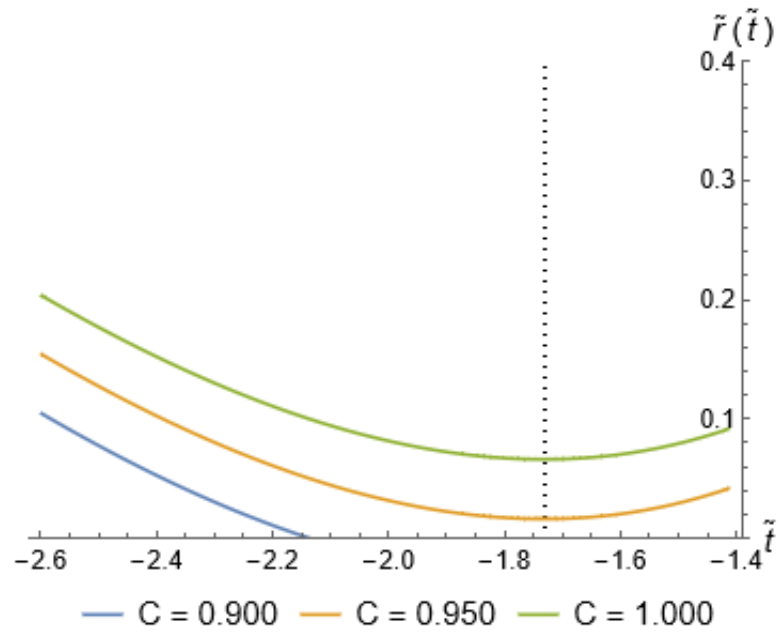


Figura 5 – Evolução de $\tilde{r}(\tilde{t})$ para $\tilde{t}_0 = -1.5\sqrt{3}$ sob a escolha de 3 valores de C . A linha descontinua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.

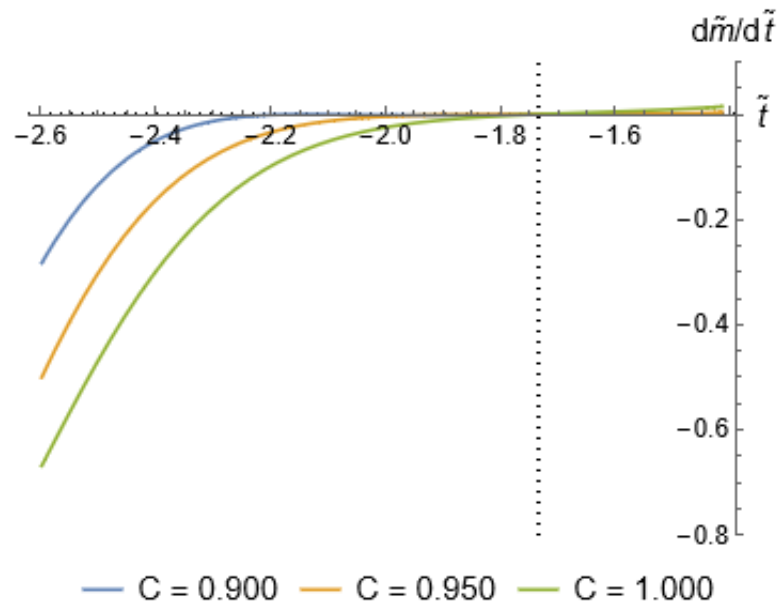


Figura 6 – Evolução de $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ para $\tilde{t}_0 = -1.5\sqrt{3}$ sob a escolha de 3 valores de C . A linha descontinua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.

A figura (9) representa a evolução das coordenadas temporais que, qualitativamente, se comportam como na seção anterior.

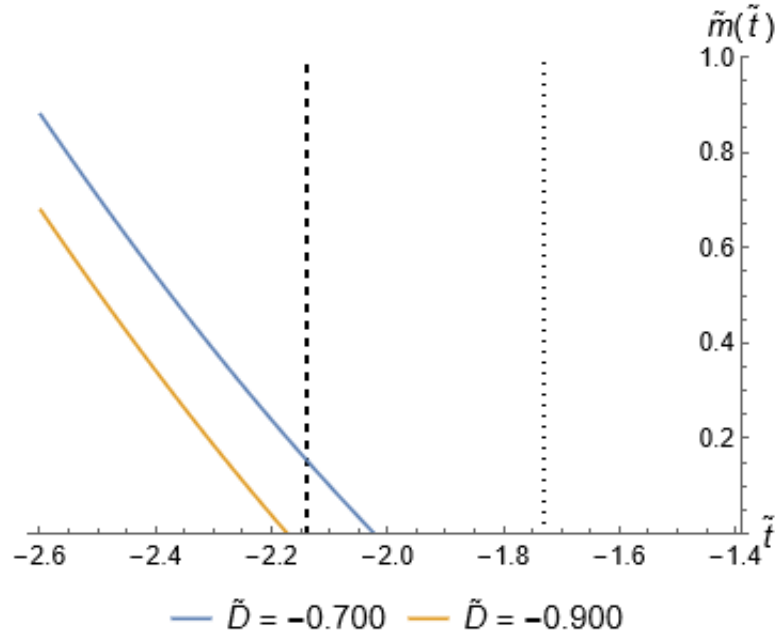


Figura 7 – Evolução do parâmetro de massa considerando $\tilde{t}_0 = -1.5\sqrt{3}$, e sob a escolha de $C = 0.900$, com a escolha de dois valores para \tilde{D} . A linha descontinua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.

4.5.3 Análise da escolha $\tilde{t}_0 = -1.1\sqrt{3}$

Os processos realizados nesta seção são análogos aos feitos anteriormente na determinação de todos os intervalos de validade. Nesse sentido, obtêm-se para C o seguinte intervalo

$$0.927 < C < 1.411. \quad (4.42)$$

Da figura (10), nota-se que devido à proximidade do limite superior para \tilde{t}_0 , dado por (4.25), as possibilidades de obter um modelo singular são mais remotas, requerendo valores próximos ao limite inferior de (4.42).

O parâmetro $\tilde{m}(\tilde{t})$ pode novamente ser obtido através de (4.32), utilizando o instante de tempo de violação da condição de energia forte, $\tilde{t}_v = -\sqrt{2}$, e o instante inicial $\tilde{t}_0 = -1.1\sqrt{3}$. Daí, obtêm-se os intervalos para \tilde{D} em que é possível ocorrer a evaporação do objeto, como sendo

$$-0.244 < \tilde{D} < 0.075. \quad (4.43)$$

A evolução de $\tilde{m}(\tilde{t})$ é representada pela figura (11). As escolhas $\tilde{D} = 0.300$ e $\tilde{D} = 0.100$ representam um objeto que evapora e um colapso no qual a condição de energia forte é violada.

Por fim, a evolução das coordenadas temporais, representada agora na figura (12), nos dá novamente que a taxa du/dt é sempre positiva no intervalo de validade do modelo.

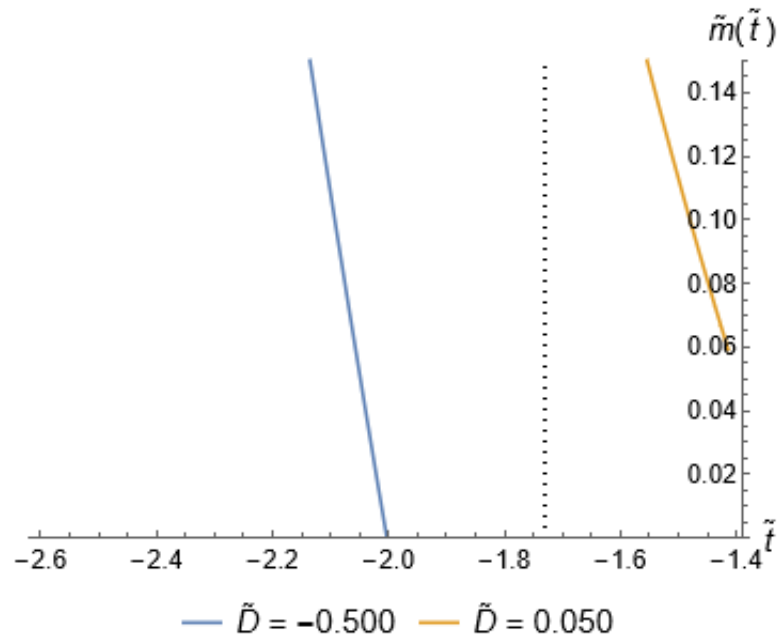


Figura 8 – Evolução do parâmetro de massa considerando $\tilde{t}_0 = -1.5\sqrt{3}$, e sob a escolha de $C = 0.950$, com a escolha de dois valores para \tilde{D} . A linha descontinua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.

No próximo capítulo serão apresentadas as considerações finais relevantes, assim como as perspectivas futuras para este trabalho, tendo em vista o que foi desenvolvido ao longo deste texto.

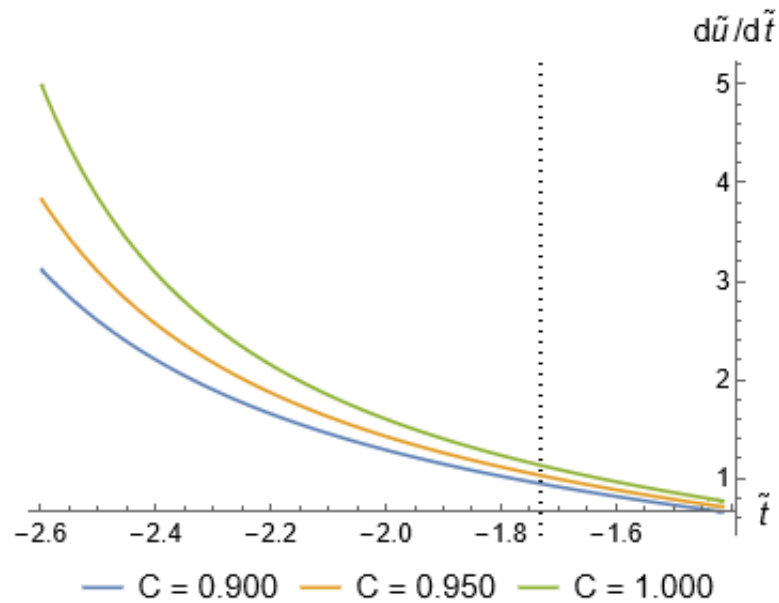


Figura 9 – Evolução da razão entre \dot{u} e \dot{t} , sob três escolhas de C para $\tilde{t}_0 = -1.5\sqrt{3}$. A linha descontinua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.

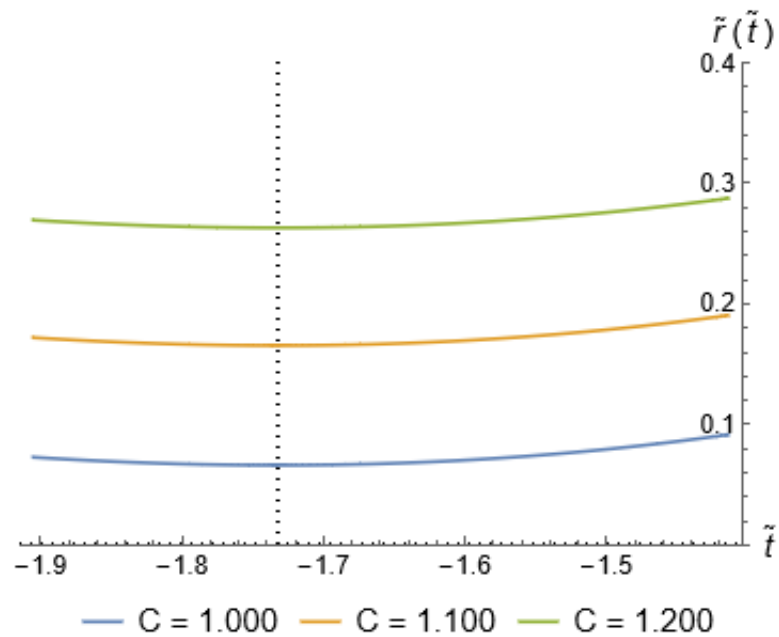


Figura 10 – Evolução de $\tilde{r}(\tilde{t})$ para $\tilde{t}_0 = -1.1\sqrt{3}$ sob a escolha de 2 valores de C . A linha descontinua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.

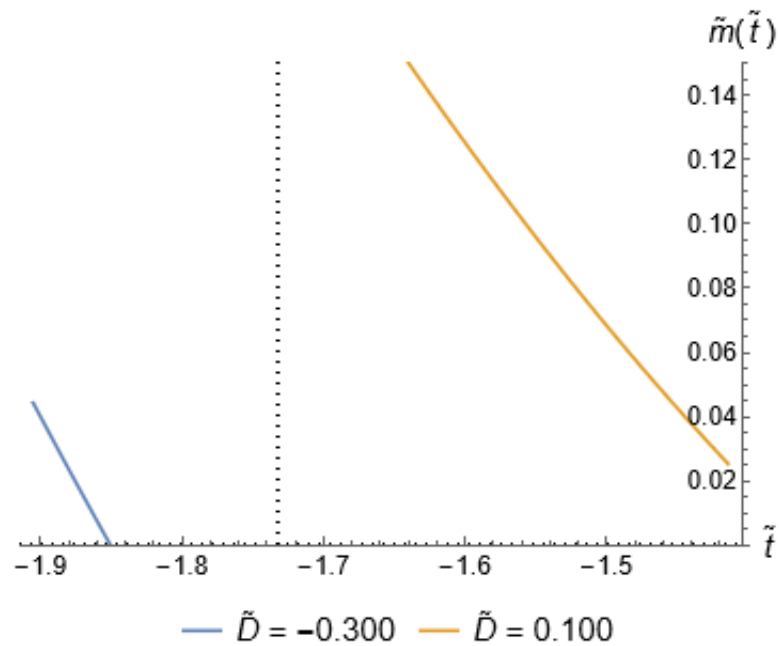


Figura 11 – Evolução do parâmetro de massa considerando $\tilde{t}_0 = -1.1\sqrt{3}$, e sob a escolha de $C = 1.000$, com a escolha de dois valores para \tilde{D} . A linha descontinua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.

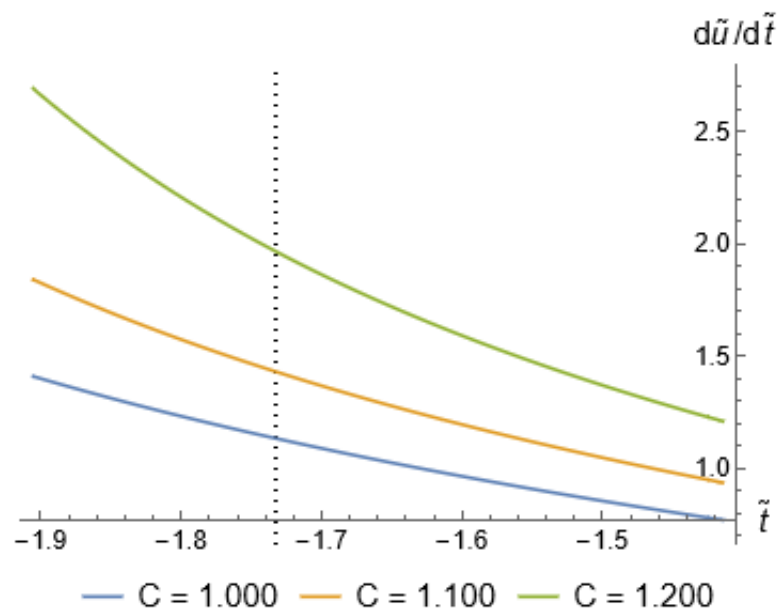


Figura 12 – Evolução da razão entre \dot{u} e \dot{t} , sob quatro escolhas de C tendo em vista o valor de $\tilde{t}_0 = -1.1\sqrt{3}$. O a linha descontinua vertical indica o momento em que $\tilde{m}_{\tilde{t}}$ muda de sinal e o eixo vertical indica o momento a partir do qual a SEC passa a ser violada.

5 Considerações finais e perspectivas

Neste trabalho buscou-se construir um modelo de colapso gravitacional não singular utilizando um espaço-tempo composto por um interior, cuja geometria é descrita pela métrica de Friedmann, e um exterior do tipo Vaidya. A fonte do exterior é radiação eletromagnética puramente incoerente descrita pela equação (2.5) proveniente da variação da massa de um objeto compacto durante o colapso gravitacional. Inicialmente, propõe-se uma fonte para o interior como um campo escalar com acoplamento não-mínimo descrito em termos de uma ação dada por (2.6).

Após avaliar as condições de junção de Darmois através de uma hipersuperfície Σ , construída de forma a transição entre regiões da variedade seja suave, assim como seja possível manter a continuidade da primeira e segunda forma fundamental restritas pela superfície. Utilizando as equações de Friedmann (2.9) e (2.10), assim como a equação do campo escalar (2.14), é possível aplicar as componentes (2.12) e (2.13), e o potencial (2.7) para estabelecer um sistema de equações diferenciais não-lineares.

Com o objetivo de resolver o sistema de equações, foi proposto uma expansão em série de potências até segunda ordem para o fator de escala (4.1), assim como para o campo escalar (4.2). As soluções desejadas nesta pesquisa são as que possibilitam o ricochete do fator de escala em $t = 0$, buscando evitar que houvesse a violação da condição de energia nula (4.8).

As soluções adequadas, dadas pelas equações (4.6) e (4.7), indicam um modelo de acoplamento mínimo, $\alpha = 0$ em (2.6). Ambas as soluções violam a condição de energia forte (4.9) em um intervalo de tempo em que $|t| \leq \frac{\sqrt{2}a_b}{\sqrt{k}}$, uma vez que tenha-se uma curvatura positiva $k > 0$. As soluções também trazem resultados equivalentes para as condições de energia forte e nula, assim como as expressões da dinâmica do colapso, tais como (3.18) e (3.19). É necessário analisar no entanto a possibilidade de instabilidade térmica no modelo de acoplamento mínimo [41].

Mostrou-se que o modelo tem uma dependência forte na escolha das condições iniciais. É possível estabelecer intervalos nos quais o resultado final do colapso gravitacional seja diferente. Os intervalos que caracterizam o colapso gravitacional, e portanto seu resultado final, são os intervalos estabelecidos sobre a constante de integração C , que estabelece um intervalo para o raio inicial apropriado para o objeto compacto, e a constante \tilde{D} cujo intervalo indica uma região na qual a massa do objeto compacto é totalmente emitida. Através de escolhas específicas, é possível obter diferentes resultados para o colapso do objeto compacto proposto, tais como a sua evaporação, um modelo singular, ou o ricochete do fator de escala. O resultado do colapso depende diretamente da razão

$\frac{M}{r_0}$, em que $\sqrt{kr_0}$ é estabelecido dentro do intervalo (4.27).

Vale ressaltar que, para que seja possível um modelo de ricochete que não viole a condição de energia nula, é necessário que o universo considerado seja fechado, ou seja, $k > 0$. Atualmente, observações e experimentos tais como a colaboração Planck, e o telescópio cosmológico do Atacama, indicam uma curvatura levemente positiva, mas ainda existe a possibilidade que o refinamento das medidas através de experimentos futuros possa aproximar a uma curvatura nula, $k = 0$. Mesmo que estes resultados sejam vistos na perspectiva cosmológica, a existência de situações físicas possíveis em um modelo de universo fechado é um resultado que dá viabilidade a situação analisada neste trabalho.

É necessário realizar uma análise qualitativa destes parâmetros. Através da construção de um espaço de parâmetros é possível estudar regiões sobre a escolha das condições iniciais que levam a resultados diferentes para o colapso gravitacional.

Também é possível verificar a estabilidade do modelo sob a presença de perturbações nos parâmetros obtidos. Pode-se também analisar os parâmetros termodinâmicos do colapso, tais como a energia liberada durante o colapso, assim como a variação da entropia do sistema, tal como feito em [9], buscando-se uma perspectiva mais astrofísica do sistema.

De maneira a analisar este modelo em uma perspectiva mais realista de um objeto compacto em colapso gravitacional, tal como uma estrela, também é interessante introduzir graus de liberdade superficiais em sua construção, generalizando as condições de junção de maneira adequada.

Como discutido no apêndice C, é possível adicionar um segundo fluido não interagente ao modelo sem causar alterações na dinâmica no sistema. Neste sentido, uma perspectiva futura a ser estudada seria a introdução de acoplamentos mais complexos ao modelo e estudar os resultados do colapso de um objeto compacto.

É necessário então esclarecer que mesmo que este trabalho utilize de parâmetros e construções que provem de argumentos da teoria quântica de campos, o campo escalar e seu potencial, o modelo é construído inteiramente na perspectiva clássica. Generalizar a fonte interior para estudar fenômenos quânticos é possível, mas não está presente no escopo deste trabalho.

Apêndices

APÊNDICE A – Tensor momentum-energia para a componente escalar

Aqui estarão em detalhes as passagens para a obtenção do tensor momento-energia como em [28]. É necessário utilizar a definição dada em (2.11) para identificar esta grandeza realizando a variação em termos da métrica de (2.6). Inicialmente, têm-se

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{1}{2} M_p^2 \mathcal{R} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{\alpha}{2} \mathcal{R} \phi^2 - \bar{V}(\phi) \right).$$

Aplicando a fórmula de Leibniz para a derivação de funções, que se dá de maneira análoga quando se trata de variações, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-g}) \left(\frac{1}{2} M_p^2 \mathcal{R} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{\alpha}{2} \mathcal{R} \phi^2 - \bar{V}(\phi) \right) \right] + \\ &+ \int d^4x \left[\sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} M_p^2 \delta(\mathcal{R}) - \frac{1}{2} \delta(g^{\mu\nu}) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{\alpha}{2} \delta(\mathcal{R} \phi^2) - \delta(\bar{V}(\phi)) \right) \right]. \end{aligned}$$

As grandezas escalares têm variação nula em relação a métrica, portanto pode-se afirmar que $\delta(\bar{V}(\phi)) = 0$ e $\delta(\phi) = 0$, o que resulta em

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-g}) \left(\frac{1}{2} M_p^2 \mathcal{R} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{\alpha}{2} \mathcal{R} \phi^2 - \bar{V}(\phi) \right) \right] + \\ &+ \int d^4x \left[\sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} M_p^2 \delta(\mathcal{R}) - \frac{1}{2} \delta(g^{\mu\nu}) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{\alpha}{2} \delta(\mathcal{R} \phi^2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Inicialmente, é necessário calcular as variações $\delta(\sqrt{-g})$ e $\delta(\mathcal{R})$. Primeiro, analisa-se a expressão para $\delta(\sqrt{-g})$ em que g é o determinante do tensor métrico. A métrica $g_{\mu\nu}$ é uma matriz invertível tal que sua inversa $g^{\mu\nu}$ pode ser obtida da seguinte maneira:

$$g^{\mu\nu} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g}, \quad (\text{A.2})$$

em que $\Delta^{\mu\nu}$ é a matriz de cofatores de $g_{\mu\nu}$, e cada um de seus componentes é obtido calculando o determinante de matrizes com $n - 1$ linhas e colunas, tal que n é a ordem de $g^{\mu\nu}$. Usando a expressão de Laplace para calcular o determinante de $g_{\mu\nu}$,

$$g = \sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^{\mu+\nu} g_{\mu\nu} M^{\mu\nu},$$

em que $(-1)^{\mu+\nu}M_{\mu\nu}$ é a definição de $\Delta^{\mu\nu}$, com $M_{\mu\nu}$ sendo a matriz menor, realizando a expansão ao longo de uma linha e calculando sua derivada em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, pode-se inferir que:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = \Delta^{\mu\nu}.$$

Uma vez que $\Delta^{\mu\nu}$ não depende explicitamente do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e usando a definição (A.2), obtêm-se

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}.$$

Analogamente, é possível inferir em termos de variações que:

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.3})$$

aplicando o resultado em (A.3) ao problema original $\delta(\sqrt{-g})$, têm-se

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} \frac{-g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}.$$

Tendo em vista o objetivo do problema proposto, é necessário que a variação $\delta g_{\mu\nu}$ esteja no formato contravariante. No entanto, para fazer o levantamento dos índices é preciso tomar certos cuidados quando se trata da variação da métrica. Note que

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu \rightarrow \delta(g^{\mu\rho} g_{\rho\nu}) = 0,$$

a qual, aplicando a formula de Leibniz nos dá

$$(\delta g^{\mu\rho}) g_{\rho\nu} + g^{\mu\rho} (\delta g_{\rho\nu}) = 0 \rightarrow g_{\rho\nu} \delta g^{\mu\rho} = -g^{\mu\rho} \delta g_{\rho\nu}. \quad (\text{A.4})$$

No caso particular em que $\mu = \nu = \alpha$ e $\rho = \beta$, têm-se $g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$ e, portanto,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.5})$$

Agora se faz necessário calcular $\delta\mathcal{R}$. Para isso, é conveniente calcular primeiro a variação do tensor de Riemann definido como

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (\text{A.6})$$

Calculando a variação sobre a definição (A.6), obtêm-se:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \delta(\Gamma_{\mu\lambda}^\rho) \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \delta(\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda) - \delta(\Gamma_{\nu\lambda}^\rho) \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \delta(\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda). \quad (\text{A.7})$$

A variação da conexão $\delta(\Gamma)_{\mu\nu}^\rho$ pode ser vista como uma diferença de conexões. Isto é conveniente, uma vez que esta diferença é um tensor, podendo ser demonstrada da seguinte forma:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\bar{(1)}\mu} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{(1)\alpha} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{x^\gamma}{\bar{x}^\sigma},$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{(2)\mu} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{(2)\alpha} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\bar{x}^\sigma}.$$

Note que o segundo termo é equivalente em ambas as expressões e, assim, tomando a diferença, obtêm-se

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{(1)\mu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{(2)\mu} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\gamma} \left(\Gamma_{\beta\gamma}^{(1)\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{(2)\alpha} \right),$$

a qual obedece a definição intrínseca de tensores [3]. Desta maneira é possível avaliar a derivada covariante do tensor

$$\nabla_\lambda \left(T_\gamma^{\alpha\beta} \right) = \partial_\lambda T_\gamma^{\alpha\beta} + \Gamma_{\sigma\lambda}^\alpha T_\gamma^{\sigma\beta} + \Gamma_{\sigma\lambda}^\beta T_\gamma^{\alpha\sigma} - \Gamma_{\gamma\lambda}^\sigma T_\sigma^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.8})$$

que, aplicando a definição (A.8) para o tensor construído, têm-se

$$\nabla_\lambda \left(\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho \right) = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho. \quad (\text{A.9})$$

Renomeando os índices mudos adequadamente em (A.9), identifica-se que (A.7) toma a forma:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \nabla_\mu \left(\delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \right) - \nabla_\nu \left(\delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \right). \quad (\text{A.10})$$

A expressão acima pode ser então utilizada para encontrar a variação do tensor de Ricci, definido como:

$$R_{\sigma\nu} = g_\rho^\mu R_{\sigma\mu\nu}^\rho = g^{\alpha\mu} g_{\rho\alpha} R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \delta_\rho^\mu R_{\sigma\mu\nu}^\rho = R_{\sigma\rho\nu}^\rho.$$

Realizando, então, a variação desta expressão, podemos obter seu resultado a partir da contração dos índices ρ e μ de maneira adequada em (A.10), ou seja,

$$\delta R_{\sigma\nu} = \nabla_\rho \left(\delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \right) - \nabla_\nu \left(\delta \Gamma_{\rho\sigma}^\rho \right). \quad (\text{A.11})$$

O problema original requer a variação do escalar de Ricci, definido como

$$\mathcal{R} = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu}. \quad (\text{A.12})$$

Realizando a variação em (A.12) e aplicando a regra de Leibniz, obtêm-se

$$\delta \mathcal{R} = (\delta g^{\sigma\nu}) R_{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu} \delta R_{\sigma\nu} = (\delta g^{\sigma\nu}) R_{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu} \left[\nabla_\rho \left(\delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \right) - \nabla_\nu \left(\delta \Gamma_{\rho\sigma}^\rho \right) \right].$$

Usando que $\nabla_\mu g^{\sigma\nu} = 0$, é possível reescrever $\delta \mathcal{R}$ como

$$\delta \mathcal{R} = R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + \nabla_\nu \left(g^{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - g^{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\rho\sigma}^\nu \right). \quad (\text{A.13})$$

Substituindo esta expressão e (A.5) em (A.1), têm-se

$$\delta S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} M_p^2 \mathcal{R} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{\alpha}{2} \mathcal{R} \phi^2 - \bar{V}(\phi) \right) \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} M_p^2 \left[R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + \nabla_\nu \left(g^{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - g^{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\rho\sigma}^\rho \right) \right] \right) - \\
 & - \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \delta(g^{\mu\nu}) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \frac{\alpha}{2} \left[R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + \nabla_\nu \left(g^{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - g^{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\rho\sigma}^\rho \right) \right] \phi^2 \right). \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

O segundo termo da segunda linha na expressão acima é uma integral de superfície sobre seu contorno. Portanto, resolvendo a integração obtêm-se um valor nulo aplicando o Teorema de Gauss. Logo,

$$\begin{aligned}
 \delta S = & \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} M_p^2 \mathcal{R} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{\alpha}{2} \mathcal{R} \phi^2 - \bar{V}(\phi) \right) \right] + \\
 & + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} M_p^2 R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} \right) - \\
 & - \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \delta(g^{\mu\nu}) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \frac{\alpha}{2} \left[R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + \nabla_\nu \left(g^{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - g^{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\rho\sigma}^\rho \right) \right] \phi^2 \right).
 \end{aligned}$$

Rearranjando os termos multiplicados por ambos $\delta g^{\mu\nu}$ e $\sqrt{-g}$ e renomeando os índices mudos de maneira apropriada, obtêm-se

$$\begin{aligned}
 \delta S = & \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} M_p^2 \mathcal{R} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - \frac{\alpha}{2} \mathcal{R} \phi^2 - \bar{V}(\phi) \right) \right] \delta g^{\mu\nu} + \\
 & + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} M_p^2 R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{\alpha}{2} R_{\mu\nu} \phi^2 \right) \delta g^{\mu\nu} - \\
 & - \frac{\alpha}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu \left(g^{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - g^{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\rho\sigma}^\rho \right) \phi^2. \tag{A.15}
 \end{aligned}$$

As duas primeiras linhas desta equação não requerem alterações futuras, no entanto ainda é necessário reescrever a terceira linha. Com este objetivo, define-se dois vetores auxiliares:

$$\xi^\nu = g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\nu, \tag{A.16}$$

e

$$\eta^\nu = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho. \tag{A.17}$$

Com estes objetos, podemos reescrever a terceira linha de (A.15) da seguinte maneira:

$$-\frac{\alpha}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu (\xi^\nu - \eta^\nu) \phi^2 = -\frac{\alpha}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu \xi^\nu \phi^2 + \frac{\alpha}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu \eta^\nu \phi^2, \tag{A.18}$$

de onde é possível identificar as divergências de ambos os vetores definidos acima. Utilizando a expressão para a divergência definida em [3], onde

$$\nabla_\alpha \gamma^\alpha = \text{div}(\vec{\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\gamma^\alpha \sqrt{-g}), \tag{A.19}$$

podemos escrever as integrais de (A.18) da forma

$$-\frac{\alpha}{2} \int d^4x \partial_\nu (\xi^\nu \sqrt{-g}) \phi^2 + \frac{\alpha}{2} \int d^4x \partial_\nu (\eta^\nu \sqrt{-g}) \phi^2. \tag{A.20}$$

É possível utilizar a fórmula de Leibniz e o teorema de Gauss para simplificar (A.20) consideravelmente através da expressão

$$\partial_\nu (\phi^2 \xi^\nu \sqrt{-g}) = (\partial_\nu \phi^2) \xi^\nu \sqrt{-g} + \phi^2 \partial_\nu (\xi^\nu \sqrt{-g}),$$

obtendo

$$\phi^2 \partial_\nu (\xi^\nu \sqrt{-g}) = \partial_\nu (\phi^2 \xi^\nu \sqrt{-g}) - 2\phi \partial_\nu \phi \xi^\nu \sqrt{-g}, \quad (\text{A.21})$$

e, analogamente, para η^ν :

$$\phi^2 \partial_\nu (\eta^\nu \sqrt{-g}) = \partial_\nu (\phi^2 \eta^\nu \sqrt{-g}) - 2\phi \partial_\nu \phi \eta^\nu \sqrt{-g}. \quad (\text{A.22})$$

Ao substituir (A.21) e (A.22) em (A.20), os primeiros termos em ambas as expressões se anulam ao ser integrados na fronteira da superfície, reduzindo a expressão a

$$\alpha \int d^4x \phi \partial_\nu \phi \xi^\nu \sqrt{-g} - \alpha \int d^4x \phi \partial_\nu \phi \eta^\nu \sqrt{-g}. \quad (\text{A.23})$$

Rescrevendo a expressão acima em termos da variação das conexões, usando as definições (A.16) e (A.17), obtêm-se

$$\alpha \int d^4x \phi \partial_\nu \phi (g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\nu) \sqrt{-g} - \alpha \int d^4x \phi \partial_\nu \phi (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho) \sqrt{-g}. \quad (\text{A.24})$$

É necessário agora calcular a variação da conexão. Para isso, utiliza-se sua definição em termos da métrica:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_c g_{bd} + \partial_b g_{cd} - \partial_d g_{bc}). \quad (\text{A.25})$$

Calculando sua variação, obtêm-se

$$\delta \Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} \delta g^{ad} (\partial_c g_{bd} + \partial_b g_{cd} - \partial_d g_{bc}) + \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_c \delta g_{bd} + \partial_b \delta g_{cd} - \partial_d \delta g_{bc}). \quad (\text{A.26})$$

Para reescrever (A.26) é preciso considerar a seguinte relação para a variação da métrica:

$$\delta (g^{ef}) = \delta (g^{ae} g^{df} g_{ad}) = \delta g^{ae} g^{df} g_{ad} + \delta g^{df} g^{ae} g_{ad} + \delta g_{ad} g^{ae} g^{df} = \delta g^{ae} \delta_a^f + \delta g^{df} \delta_d^e + \delta g_{ad} g^{ae} g^{df},$$

$$\delta g^{ef} = 2\delta g^{ef} + \delta g_{ad} g^{ae} g^{df} \rightarrow \delta g^{ef} = -\delta g^{ae} g^{df} g_{ad}. \quad (\text{A.27})$$

Utilizando (A.27) para baixar os índices em (A.26), obtêm-se

$$\delta \Gamma_{bc}^a = -\frac{1}{2} g^{ea} g^{fd} \delta g_{ef} (\partial_c g_{bd} + \partial_b g_{cd} - \partial_d g_{bc}) + \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_c \delta g_{bd} + \partial_b \delta g_{cd} - \partial_d \delta g_{bc}). \quad (\text{A.28})$$

No primeiro termo em (A.28) é possível identificar a definição de conexão dada por (A.25), portanto,

$$\begin{aligned}
 \delta\Gamma_{bc}^a &= -g^{ea}\delta g_{ef}\Gamma_{bc}^f + \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_c\delta g_{bd} + \partial_b\delta g_{cd} - \partial_d g_{bc}) = \\
 &= \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_c\delta g_{bd} + \partial_b\delta g_{cd} - \partial_d g_{bc} - 2g^{ea}g_{ad}\delta g_{ef}\Gamma_{bc}^f) = \\
 &= \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_c\delta g_{bd} + \partial_b\delta g_{cd} - \partial_d g_{bc} - 2\delta_d^e\delta g_{ef}\Gamma_{bc}^f) = \\
 &= \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_c\delta g_{bd} + \partial_b\delta g_{cd} - \partial_d g_{bc} - 2\delta g_{df}\Gamma_{bc}^f). \tag{A.29}
 \end{aligned}$$

Tendo em vista a definição (A.8) são adicionados e removidos termos em (A.29) de maneira à não alterar o seu valor, desta maneira identificando que:

$$\delta\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\nabla_c\delta g_{bd} + \nabla_b\delta g_{cd} - \nabla_d\delta g_{bc}). \tag{A.30}$$

Utilizando (A.30) em (A.24), têm-se

$$\begin{aligned}
 &\alpha \int d^4x \sqrt{-g} \phi \partial_\nu \phi g^{\mu\sigma} \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} (\nabla_\mu \delta g_{\sigma\lambda} + \nabla_\sigma \delta g_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\sigma\mu}) + \\
 &-\alpha \int d^4x \sqrt{-g} \phi \partial_\nu \phi g^{\mu\nu} \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\nabla_\mu \delta g_{\rho\lambda} + \nabla_\rho \delta g_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\rho\mu}). \tag{A.31}
 \end{aligned}$$

Cada um dos seis termos entre parênteses em (A.31) formam vetores de duas maneiras distintas, podendo ser identificados como vetores do primeiro tipo:

$$\nabla_\mu g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} \delta g_{\sigma\lambda} = \nabla_\mu T^{\mu\nu}, \tag{A.32}$$

ou vetores do segundo tipo:

$$\nabla_\mu g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \delta g_{\rho\lambda} = \nabla_\mu V^{\mu\nu}. \tag{A.33}$$

Os dois primeiros termos em parênteses em (A.31) são vetores do primeiro tipo, enquanto os quatro termos restantes nos parênteses são do segundo tipo. Levando isto em consideração é possível somar e anular termos dentro das integrais e simplificar o problema à resolução de:

$$\alpha \int d^4x \sqrt{-g} \phi \partial_\nu \phi \nabla_\mu T^{\mu\nu} - \alpha \int d^4x \sqrt{-g} \phi \partial_\nu \phi \nabla_\mu V^{\mu\nu}. \tag{A.34}$$

Aplicando novamente a expressão (A.19) e reescrevendo (A.34) em termos de derivadas ordinárias como:

$$\alpha \int d^4x \phi \partial_\nu \phi \partial_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) - \alpha \int d^4x \phi \partial_\nu \phi \partial_\mu (\sqrt{-g} V^{\mu\nu}). \tag{A.35}$$

Analogamente ao feito anteriormente para (A.21) e (A.22) é possível utilizar a regra de Leibniz para reescrever e anular termos avaliados sobre a fronteira da superfície, obtendo

$$\alpha \int d^4x \sqrt{-g} \partial_\mu (\phi \partial_\nu \phi) V^{\mu\nu} - \alpha \int d^4x \sqrt{-g} \partial_\mu (\phi \partial_\nu \phi) T^{\mu\nu}. \quad (\text{A.36})$$

Utilizando (A.32) e (A.33) para $V^{\mu\nu}$ e $T^{\mu\nu}$, têm-se

$$\alpha \int d^4x \sqrt{-g} \partial_\mu (\phi \partial_\nu \phi) g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} - \alpha \int d^4x \sqrt{-g} \partial_\mu (\phi \partial_\nu \phi) g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.37})$$

Para identificar os termos de $\delta g^{\mu\nu}$ é preciso levantar os índices da variação da métrica por meio de (A.4) e (A.27). Fazendo as operações indiciais adequadas, assim como as derivações necessárias obtêm-se

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[\alpha \nabla_\mu (\nabla_\nu \phi) \phi + \alpha \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \alpha \phi \square \phi g_{\mu\nu} - \alpha \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.38})$$

Utilizando a definição $\square \phi = \partial^\nu (\partial_\nu \phi)$ e que $\nabla_\mu = \partial_\mu \phi$. Pode-se então retornar ao problema original em (A.15) para obter

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} M_p^2 \mathcal{R} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - \frac{\alpha}{2} \mathcal{R} \phi^2 - \bar{V}(\phi) \right) \right] \delta g^{\mu\nu} + \\ & + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} M_p^2 R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{\alpha}{2} R_{\mu\nu} \phi^2 \right) \delta g^{\mu\nu} + \\ & + \int d^4x \sqrt{-g} \left[\alpha \nabla_\mu (\nabla_\nu \phi) \phi + \alpha \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \alpha \phi \square \phi g_{\mu\nu} - \alpha \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

O integrando de (A.39) pode ser identificado com a equação do movimento total deste sistema, portanto, identifica-se através de (2.11) que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} M_p^2 g_{\mu\nu} \mathcal{R} - M_p^2 R_{\mu\nu} + (1 - 2\alpha) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} (1 - 4\alpha) g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi + \\ & - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \alpha \mathcal{R} \phi^2 + \bar{V}(\phi) \right) + \alpha R_{\mu\nu} \phi^2 - 2\alpha \phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + 2g_{\mu\nu} \alpha \phi \square \phi = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Usando a definição do tensor de Einstein, $G^{\mu\nu}$, para identificar a diferença nos dois primeiro termos de (A.40), tal que:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = \frac{1}{M_p^2} T_{\mu\nu},$$

na qual foi definido como $T_{\mu\nu}$ a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = & (1 - 2\alpha)\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}(1 - 4\alpha)g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi + \\
& -g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\alpha R\phi^2 + \bar{V}(\phi)\right) + \alpha R_{\mu\nu}\phi^2 - 2\alpha\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + 2g_{\mu\nu}\alpha\phi\Box\phi. \tag{A.41}
\end{aligned}$$

Assim como foi utilizado no corpo deste trabalho e no trabalho de [28].

APÊNDICE B – Análise das condições de junção

O objetivo deste apêndice é trazer em maiores detalhes as passagens algébricas utilizadas na obtenção das expressões (3.18), (3.19) e (3.20), a partir da segunda condição de junção (3.14), que pode ser escrita para as componentes K_{00}^{\pm} como

$$K_{00}^+ - K_{00}^- = 0.$$

Para expandir estas expressões é necessário obter a segunda derivada da expressão (3.16) como

$$\begin{aligned} \ddot{u} = & -\frac{\dot{\bar{\chi}}}{\bar{\chi}^2} \left[\epsilon \bar{\epsilon} \left(\frac{aa_t r \dot{r}}{b} + b \dot{t} \right) + \epsilon \dot{R} \right] + \\ & + \frac{1}{\bar{\chi}} \left\{ \epsilon \bar{\epsilon} \left[-\frac{aa_t b_r \dot{r}^2}{b^2} + b \ddot{t} + b_r \dot{t} \dot{r} + \frac{1}{b} \left(a_t^2 r \dot{t} \dot{r} + aa_{tt} r \dot{t} \dot{r} + aa_t r \ddot{r} + aa_t \dot{r}^2 \right) \right] + \epsilon \ddot{R} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Para reescrever (B.1) em termos das coordenadas do interior é conveniente utilizar $Bar\chi$ como definido em (3.4) juntamente com as expressões (3.9) e (3.16), obtendo

$$\begin{aligned} \bar{\chi} &= b^2 - r^2 a_t^2 \\ \dot{\bar{\chi}} &= 2bb_r \dot{r} - 2ra_t (a_t \dot{r} + a_{tt} r \dot{t}). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Durante o processo para demonstrar a primeira expressão em (B.2) é obtida a expressão (3.9). Após utilizar (3.16), (B.1), (B.2) em (3.18) e expandir os termos cuidadosamente será possível evidenciar a expressão dada por (3.9), assim como anular todas as componentes de derivadas superiores \ddot{r} e \ddot{t} , após estas passagens, obtêm-se

$$\begin{aligned} & -\frac{r}{b} (a_t^3 r \dot{r} + b^2 \dot{t} a_{tt} - bb_r \dot{r} a_t) + \\ & + \frac{\epsilon \bar{\epsilon} \epsilon}{2} \left\{ (-2r^2 a_t a_{tt} \dot{t} - 2ra_t^2 \dot{r} + 2bb_r \dot{r}) - \left[\epsilon \bar{\epsilon} \epsilon \left(\frac{r \dot{r} a a_t}{b} + b \dot{t} \right) + (ra_t \dot{t} + a \dot{r}) \right] \bar{\chi}_R \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Utilizando em (B.3) que $\dot{r} = r_t \dot{t}$ e usando a seguinte definição:

$$\bar{\chi}_R = \frac{1 - \bar{\chi}}{ar},$$

é possível evidenciar os termos de r_t , e identificando corretamente as expressões (2.9) e (2.10), obtêm-se

$$r_t = \frac{\epsilon \bar{\epsilon} \epsilon b P}{a \rho}. \quad (\text{B.4})$$

Esta expressão pode ser usada para avaliar a evolução do parâmetro de massa $m(u)$, definido através de (3.4) e da coordenada temporal u , em termos das coordenadas do interior. Utilizando a expressão (B.2) juntamente com a equação (2.9) têm-se

$$\bar{m}(u, R) = \bar{m}(t, r) = \frac{a}{2} (a^2 r^3 + k r^3) = \frac{a^3 r^3}{6} \rho. \quad (\text{B.5})$$

Diferenciando (B.5) em termos de τ e lembrando que $\bar{m} = \bar{m}_t \dot{t}$ de forma a identificar (2.9) e (2.10), obtendo

$$\bar{m}_t = \frac{a^2 r^2}{2} [(\epsilon \bar{\epsilon} \epsilon b - a_t r)] \frac{P}{M_p^2}. \quad (\text{B.6})$$

Fazendo um processo análogo para (3.16) obtêm-se

$$\frac{\dot{u}}{\dot{t}} = \frac{(\rho + P)}{\rho} \frac{1}{(\epsilon \bar{\epsilon} b - \epsilon r a_t)}. \quad (\text{B.7})$$

As expressões (B.4), (B.6) e (B.7) descrevem o colapso gravitacional como um todo, sendo possível estabelecer as condições iniciais necessárias para o modelo, assim como verificar se o mesmo é adequado tendo em vista as condições de energia e os intervalos de validade da aproximação numérica realizada no capítulo 4.

APÊNDICE C – Acréscimo de um fluido não interagente à fonte interior

Neste apêndice será discutida a inserção de um fluido não interagente ao problema discutido neste trabalho. O fluido escolhido para esta análise é perfeito e estático, no entanto não é estacionário. O tensor de momento-energia que descreve este fluido é tal que:

$$T^{\mu\nu} = -(\rho_1 + P_1) V^\mu V^\nu - P_1 g^{\mu\nu}.$$

Podendo ser escrito convenientemente no formato misto,

$$T^\mu_\nu = -(\rho_1 + P_1) V^\mu V_\nu - P_1 \delta^\mu_\nu, \quad (\text{C.1})$$

em que V^μ , pode ser definido através de:

$$\begin{cases} V^\mu V_\mu = -1, \\ V^\mu = \{1, 0, 0, 0\}. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Este modelo permite escrever um tensor momento-energia de ambos os fluidos em que $\rho = \rho_\phi + \rho_1$ e $P = P_\phi + P_1$, ou seja, é possível analisar independentemente cada componente em momentos distintos do colapso gravitacional, analisando a relevância de cada componente tendo em vista as características físicas do problema. A consistência desta afirmação pode ser evidenciada observando a lei de conservação do tensor de momento-energia, definida como [3]

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{C.3})$$

Através de (C.3) é possível obter as expressões para a equação da continuidade expandindo os termos de $\mu = 0$ e utilizando (A.8), analogamente, pode-se obter as equações de Euler expandindo as coordenadas espaciais ($\mu = i$). Por interesse desta discussão é importante notar que utilizando a métrica (2.4), é possível obter

$$\rho_t - 3 \frac{a_t}{a} (\rho + P) = 0. \quad (\text{C.4})$$

A expressão (C.4) é a equação da continuidade e as três equações de Euler são:

$$\partial_r P = \frac{1}{b^2 r} (1 + b^2) P,$$

$$\begin{aligned}\partial_\theta P &= -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}P, \\ \partial_\phi P &= 0.\end{aligned}\tag{C.5}$$

O conjunto de equações (C.5) e (C.4) pode ser escrito em termos das componentes independentes de ρ e P , e note que uma vez estabelecido dominância de um fluido sobre o outro não há mudança no formato das equações de conservação do tensor de momento-energia, portanto há a liberdade de estabelecer limites nos quais uma componente é desprezível.

A equação de estado que domina um fluido estático, tal como o descrito por (C.1), é [1]

$$\begin{aligned}P_1 &= \lambda\rho_1, \\ \rho_1 &= \frac{\rho_0}{a^{3(1+\lambda)}},\end{aligned}\tag{C.6}$$

em que λ indica o tipo de fluido que está sendo levado em consideração, exemplos são $\lambda = 0$ para um fluido tipo poeira e $\lambda = \frac{1}{3}$ para radiação.

O processo de colagem realizado no capítulo 3 é realizado de maneira análoga ao descrito no apêndice B, e nos leva as seguintes expressões:

$$r_t = \frac{\epsilon\bar{\epsilon}b(P_1 + P_\phi)}{a(\rho_1 + \rho_\phi)},\tag{C.7}$$

$$\bar{m}_t = \frac{r^2 a^2}{2} (\epsilon\bar{\epsilon}b - r a_t) \frac{(P_1 + P_\phi)}{M_p^2},\tag{C.8}$$

$$\frac{\dot{t}}{\bar{t}} = \frac{1}{(\epsilon\bar{\epsilon} - \epsilon r a_t)} \frac{(\rho_1 + \rho_\phi) + (P_1 + P_\phi)}{(\rho_1 + \rho_\phi)}.\tag{C.9}$$

As três expressões indicam claramente que não há uma mudança no comportamento do colapso devido a adição do novo fluido, apenas uma atenuação ou acentuação dos efeitos, é esperado que os valores obtidos para as condições iniciais e intervalo de validade destas condições sejam alterados. Acoplamentos mais complexos, ou detalhes relativos a esse acoplamento pode ser assunto de trabalhos futuros na perspectiva de um colapso gravitacional. A análise de um colapso em modelos de dois fluidos pode ser acompanhada no trabalho [9].

Referências

- [1] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, Cambridge, Massachusetts, 2003. [1](#), [5](#), [7](#), [46](#)
- [2] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. FREEMAN AND COMPANY - San Francisco, San Francisco, California, 1932. [1](#), [2](#), [7](#), [9](#)
- [3] R. Adler, M. Bazin, and M. Schiffer. *Introduction to General Relativity*. Mc-Graw Hill Book Company, San Francisco, California, 1975. [1](#), [2](#), [7](#), [9](#), [25](#), [37](#), [38](#), [45](#)
- [4] A. G Vereshchagin, G. V.and Arsenov. *Neutrino, Gravitational Collapsee and Supernovae*. Cambridge University Press, Published Online, 2017. [1](#)
- [5] R. Mayle and J. R. Wilson. Neutrinos from gravitational collapse. *The American Astronomical Society*, pages 288–306, July 1987. [1](#)
- [6] F. Fayos, J. M. Senovilla, and R. Torres. General matching of two spherically symmetric spacetimes. *Physical Review D*, pages 4862–4872, October 1996. [1](#)
- [7] F. Fayos, X. Jáen, E. Llanta, and J. M. Senovilla. Interior of vaydia’s radiating metric: Gravitational collapse. *Phys. Rev. D 45*, pages 2732–2738, April 1992. [1](#)
- [8] X. Fayos, F. Jaen, E. Llanta, and J. M. M. Senovilla. Matching of the vaidya and robertson-walker metric. *Class. Quantrun Grav. 8*, pages 2057–2068, June 1991. [1](#)
- [9] L. Herrera and N. O. Santos. Local anisotropy in self-gravitating systems. *Physical Reports 286*, pages 53–130, 1997. [1](#), [33](#), [46](#)
- [10] W Bonnor and P. A. Vickers. Junctions conditions in general relativity. *General Relativity and Gravitation - Splinger*, pages 29–36, Janeiro 1981. [1](#)
- [11] J. M. M. Senovilla. Trapped surfaces. *International Journal of Modern Physics D, Vol. 20, No. 11*, pages 2139–2168, September 2011. [1](#), [2](#)
- [12] E. Bittencourt, V. P. Freitas, J. M. Salim, and G. B. Santos. Radiating spherical collapse for an inhomogeneous interior solution. *General Relativity and Gravitation (2019) 51:26 - Springer*, pages 25–43, Fevereiro 2019. [1](#), [3](#)
- [13] P. D. Vaidya. The gravitational field of a radiating star. *Bombay University - Maarastra, India*, pages 264–276, Abril 1950. [1](#), [5](#), [25](#)
- [14] M. G. Darmois. Les équations de la gravitation einsteinienne. *Mémorial des Sciences Mathématiques*, 1927. [1](#), [9](#)

-
- [15] A. Lichnerowicz and T. Teichmann. Théories relativistes de la gravitation et de l'Électromagnétisme. *Physics Today*, vol. 8, issue 10, pages 24–??, Outubro 1955. [1](#)
- [16] S. O'Brien and J. L. Synge. Jump conditions at discontinuities in general relativity. *Commun. of the Dublin Institute for Advanced Studies Series A*, n°9, page 61, 1952. [1](#)
- [17] W. Israel. Discontinuities in spherically symmetric gravitational fields and shells of radiation. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, page 404, 1958. [1](#)
- [18] K. Lake. Revisiting the darmois and lichnerowicz junction conditions. *General Relativity and Gravitation* 49, page Article 134, May 2017. [1](#)
- [19] R. Mansouri and M. Khorrami. The equivalence of darmois-israel and distributional method for thin shells in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, page 5672, August 1996. [1](#)
- [20] R. C. Arcuri. Núcleos atrasados de matéria no universo de friedman. *Tese de Mestrado - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas*, Junho 1982. [1](#), [9](#), [10](#)
- [21] E. H. Robson. Junctions conditions in general relativity theory. *Annales de l'I. H. P., section A*, tome 16, no 1, pages 41–50, 1972. [1](#)
- [22] W. Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *II Nuovo Cimento B (1965-1970) volume 44 - Springer*, pages 1–14, Dezembro 1966. [1](#)
- [23] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge University Press, 1977. [2](#)
- [24] R. Penrose. Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.* 14, 57, January 1965. [2](#)
- [25] S. W. Hawking and R Penrose. The singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 314, pages 529–548, 1970. [2](#)
- [26] J.M.M. Senovilla and D. Garfinkle. The 1965 penrose singularity theorem. *Classical and Quantum Gravity*, Volume 32, Number 12, June 2015. [2](#), [3](#)
- [27] M. Novello and S. E. P. Bergliaffa. Bouncing cosmologies. *Physics Reports Volume 463, Issue 4*, pages 127–213, July 2008. [3](#), [7](#), [15](#), [16](#)
- [28] Ö. Güngör and G. D. Starkman. A classical, non-singular, bouncing universe. *JCAP*, pages 1–19, Janeiro 2021. [3](#), [6](#), [7](#), [16](#), [24](#), [35](#), [42](#)
- [29] W. C. Silva and I. L. Shapiro. Bounce and stability in the early cosmology with anomaly-induced corrections. *Symmetry*, 13, 50, December 2020. [3](#)

-
- [30] D. Battefeld and P. Peter. A critical review of classical bouncing cosmologies. *Physics Reports*, Vol. 571, pages 1–66, April 2015. [3](#)
- [31] V. Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge, UK, 2005. [5](#)
- [32] M. Forger and H. Römer. Currents and energy-momentum tensor in classical field theory: A fresh look at an old problem. *Annals Phys.* 309, pages 306–389, Julho 2004. [7](#)
- [33] S. Carneiro and J. C. Fabris. Scalar field black holes. *The European Physical Journal C volume 78, Article number: 676*, August 2018. [16](#)
- [34] J. M. Hernández, M. Bellini, and C. Moreno. Collapse driven by a scalar field without final singularity. *Physics of the Dark Universe Volume 23,100251*, January 2019. [16](#)
- [35] C. Zhang, Z. Tang, and B. Wang. Gravitational collapse of massless scalar field in $f(r)$ gravity. *Phys. Rev. D* 94, 104013, November 2016. [16](#)
- [36] K. Ganguly and N. Banerjee. Spherically symmetric scalar field collapse. *Pramana - J Phys* 80, page 439–448, March 2013. [16](#)
- [37] E. Valentiano, A. Melchiorri, and J. Silk. Planck evidence for a closed universe and a possible crisis for cosmology. *Nature Astron.*, 4(2), pages 196–203, 2019. [16](#)
- [38] Planck Collaboration. Planck 2018 results - vi. cosmological parameters. *A A*, 641:A6, 2020. [16](#)
- [39] S. Aiola, E. Calabrese, L. Maurin, B. L. Naess, S. Schmitt, M. H. Abitbol, G. E. Addison, P. A. R. Ade, D. Alonso, M. Amiri, and et al. The atacama cosmology telescope: Dr4 maps and cosmological parameters. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, page Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, December 2020. [16](#)
- [40] P.A. Zyla et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2020(8):083C01, 2020. [25](#)
- [41] V. A. De Lorenci, L. G. Gomes, and Moreira Jr. E. S. Hot scalar radiation setting bounds on the curvature coupling parameter. *Classical and Quantum Gravity*, Volume 32, Number 8, March 2015. [32](#)