

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**METODOLOGIA INVERSA QUASE-TRIDIMENSIONAL PARA O PROJETO DE**  
**MÁQUINAS DE FLUXO HIDRÁULICAS**

**Alexandre Ribeiro Souza Carvalho**

**Itajubá, março de 2022**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Alexandre Ribeiro Souza Carvalho**

**METODOLOGIA INVERSA QUASE-TRIDIMENSIONAL**  
**PARA O PROJETO DE MÁQUINAS DE FLUXO**  
**HIDRÁULICAS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de *Mestre em Engenharia Mecânica*.

Área de Concentração: **Térmica, Fluidos e Máquinas de Fluxo (TFMF)**.

Orientador: **Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho**

**Itajubá – MG**  
**Março de 2022**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**ALEXANDRE RIBEIRO SOUZA CARVALHO**

**METODOLOGIA INVERSA QUASE-TRIDIMENSIONAL PARA O PROJETO DE**  
**MÁQUINAS DE FLUXO HIDRÁULICAS**

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Andre Luiz Amarante Mesquita (UFPA)

Prof. Dr. Ramiro Gustavo Ramirez Camacho (Unifei)

Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho (Unifei)

À vovó Sueca.

Aos meus pais, Sandrinha e Xande.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, à Deus pelo sustento, saúde e sopro de vida.

À minha família por todo amor e suporte de sempre. Minha avó, Sueca; meus pais, Sandrinha e Xande; e meus tios, Quinho e Didi.

Aos meus amigos que sempre se fazem presente. Em especial ao Daniel, por todo apoio durante a realização deste trabalho.

Ao meu orientador, Nelson Manzanares Filho, que me mostrou os caminhos a serem seguidos; bem como seus orientados, Marcos e Gabriel, cujos desenvolvimentos foram de extrema importância para a conclusão deste trabalho.

A todos os professores e colegas que ajudaram de forma direta ou indireta na conclusão deste trabalho.

“Se a maré der passagem  
eu vou, vou pro lado de lá.”

(Mestre Virgílio de Ilhéus)

## RESUMO

Metodologias inversas continuam sendo importantes ferramentas computacionais para o projeto de máquinas de fluxo, mesmo perante os sofisticados métodos disponíveis atualmente para análises de escoamentos tridimensionais viscosos. É descrita neste trabalho uma metodologia Quase-Tridimensional baseada na solução interdependente de dois problemas inversos: o problema meridional e o pá-a-pá. Os desenvolvimentos dão continuidade às pesquisas de Santos *et al.* (2012) e Barbosa (2018). A solução do problema meridional – referente ao trabalho de Santos *et al.* (2012) - fornece o formato da superfície média do escoamento e os resultados das linhas de corrente, para atender a uma determinada distribuição de momento hidráulico. Já o problema pá-a-pá inverso – referente aos desenvolvimentos de Barbosa (2018) – fornece a geometria das pás, dado um número finito de pás, nas superfícies de revolução cujas geratrizes são as linhas de corrente resultantes do problema meridional. Até então, os efeitos de espessura e bloqueio eram desconsiderados. Neste trabalho, uma metodologia para inclusão de distribuições de espessuras ao longo das pás é descrita. O efeito da espessura é analisado através da solução direta do problema pá-a-pá (agora considerando perfis) por meio do método de painéis baseado em distribuições lineares de vórtices. Os fatores de bloqueio correspondentes são calculados, e os resultados alimentam a entrada de uma nova solução do problema meridional. Assim, o problema meridional e pá-a-pá passam a ser acoplados. A geometria é calculada novamente, agora considerando o efeito da espessura e do bloqueio. Além disso, são analisados os efeitos de *a)* distribuição do momento hidráulico; *b)* número finito de pás; *c)* espessura; *d)* bloqueio; *e)* combinação de *b)*, *c)* e *d)*; e *f)* linha de empilhamento dos perfis sobre a geometria das pás e seus carregamentos hidrodinâmicos.

**Palavras-chave:** Projeto Inverso, Pá-a-Pá, Cubo-Carça, Método dos Painéis, Vórtices.

## ABSTRACT

Inverse methodologies continue to be important computational tools for the design of flow machines, despite the sophisticated methods currently available for the analysis of viscous three-dimensional flows. A Quasi-Three-Dimensional methodology based on the interdependent solution of two inverse problems is described in this work: the through-flow problem and the blade-to-blade problem. The developments continue the research by Santos et al. (2012) and Barbosa (2018). The solution to the through-flow problem – referring to the work of Santos et al. (2012) - provides the shape of the mean flow surface and the results of the streamlines, to meet a given hydraulic momentum distribution. The inverse blade-to-blade problem – referring to the developments of Barbosa (2018) – provides the geometry of the blades, given a finite number of blades, on surfaces of revolution whose generatrices are the streamlines resulting from the through-flow problem. Until then, the effects of thickness and blocking were disregarded. In this work, a methodology for including thickness distributions along the blades is described. The thickness effect is analyzed through the direct solution of the blade-to-blade problem (now considering profiles) using the panel method based on linear vortex distributions. The corresponding blocking factors are calculated, and the results feed the input of a new solution of the through-flow problem. Thus, the through-flow problem and blade-to-blade become coupled. The geometry is recalculated, now considering the effect of thickness and blocking. Furthermore, the effects of *a*) hydraulic momentum distribution; *b*) finite number of blades; *c*) thickness; *d*) blocking; *e*) combination of *b*), *c*) and *d*); and *f*) profile stacking line on the geometry of the blades and their hydrodynamic loads are analyzed.

**Keywords:** Inverse Method, Blade-to-Blade, Through-Flow, Panel Method, Vortex.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Representação das superfícies $S1$ , $S2$ e $S2m$ (Wu, 1952).....	3
Figura 2.1: Vetores unitários perpendiculares à linha de corrente (Santos <i>et al.</i> , 2012).....	12
Figura 3.1: Canal meridional de uma turbomáquina de fluxo misto (Barbosa, 2019).....	17
Figura 3.2: Mapeamento de uma superfície de revolução $S1$ de uma grade mista, sobre o plano de uma grade linear (Barbosa, 2019).....	18
Figura 3.3: Grade linear com representação de uma fileira de vórtices (Barbosa, 2018).....	23
Figura 3.4: Esquema da região entre duas pás onde é aplicado o Teorema de Stokes (Barbosa, 2018).....	25
Figura 3.5: Fluxograma do algoritmo pá-a-pá (Barbosa, 2018).....	27
Figura 3.6: Geometria da grade linear (Petrucci, 2003).....	29
Figura 3.7: Discretização do perfil de referência (Petrucci, 2003).....	29
Figura 3.8: Densidade de vórtices em dois painéis contíguos (Petrucci, 2003).....	30
Figura 3.9: Análise dos ângulos dos painéis (Petrucci, 2003).....	31
Figura 3.10: Esquema proposto para imposição da condição de Kutta (Petrucci, 2003).....	34
Figura 4.1: Distribuições de momentos hidráulicos testados.....	37
Figura 4.2: Vista meridional do rotor.....	37
Figura 4.3: Vista de topo das linhas de curvatura das superfícies $S2m$ no cubo (azul), meio (lilás) e ponta (rosa).....	38
Figura 4.4: Ângulos de inclinação das linhas de curvatura das superfícies $S2m$ no cubo (azul), meio (lilás) e ponta (rosa).....	39
Figura 4.5: Velocidades meridionais no cubo (azul), meio (lilás) e ponta (rosa).....	39
Figura 4.6: Velocidades relativas no cubo (azul), meio (lilás) e na ponta (rosa).....	40
Figura 4.7: Representação do triângulo de velocidades para os casos de DMH “A” e “B”.....	40
Figura 4.8: Vistas de topo das linhas de esqueleto referentes ao (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá (DMH “B”).....	42
Figura 4.9: Ângulos de inclinação das linhas de esqueleto no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta das pás.....	44
Figura 4.10: Campos de velocidades relativas referentes ao (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá.....	45
Figura 4.11: Velocidades relativas ao redor da pá no cubo (azul), meio (lilás) e ponta (rosa), $N = 3$ .....	46

Figura 4.12: Componente circunferencial da velocidade absoluta no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá.....	47
Figura 4.13: Triângulo de velocidades ilustrativo para os lados de sucção e pressão da pá. ...	48
Figura 4.14: Distribuições de espessuras dos perfis NACA 4 dígitos adotados.....	49
Figura 4.15: Vista de topo dos perfis no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá, $N = 4$ .....	51
Figura 4.16: Ângulos de inclinação dos perfis no (a) cubo, no (b) meio e na (c) ponta da pá, $N = 4$ .....	52
Figura 4.17: Velocidades relativas ao redor da pá no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá ( $N = 4$ ).....	54
Figura 4.18: Componente circunferencial da velocidade absoluta ao redor das pás no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta. ....	55
Figura 4.19: Fator de bloqueio (a) $fb3$ , (b) $fb4$ e (c) $fb5$ . ....	58
Figura 4.20: Linhas de corrente vistas do plano meridional.....	58
Figura 4.21: Vista de topo das linhas de curvatura das superfícies $S2m$ no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.....	60
Figura 4.22: Ângulos de inclinação das linhas de curvatura das superfícies $S2m$ no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta. ....	61
Figura 4.23: Velocidades meridionais no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.....	62
Figura 4.24: Velocidades relativas no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta. ....	64
Figura 4.25: Ilustração do triângulo de velocidades no cubo.....	64
Figura 4.26: Ilustração do triângulo de velocidades na ponta. ....	65
Figura 4.27: Vista de topo das geometrias das pás no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.....	67
Figura 4.28: Ângulos de inclinação dos perfis no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá.....	68
Figura 4.29: Velocidades relativas no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá.....	69
Figura 4.30: Velocidades relativas no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá.....	71
Figura 4.31: Vista lateral e em perspectiva do modelo tridimensional do rotor. ....	72
Figura 4.32: Posição angular da linha de empilhamento.....	73
Figura 4.33: Linhas de corrente vistas do plano meridional.....	73
Figura 4.34: Vista de topo das linhas de curvatura das superfícies $S2m$ no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.....	75
Figura 4.35: Distribuições dos ângulos $\beta$ no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.....	76
Figura 4.36: Velocidades meridionais no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.....	77
Figura 4.37: Distribuições de velocidades relativas no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta. ....	79

Figura 4.38: Distribuições de velocidades relativas no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta. ....	80
Figura 4.39: Vista (a) frontal, (b) lateral e (c) em perspectiva da sobreposição dos modelos tridimensionais do rotor para os casos analisados. ....	81

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 4.1: Características básicas da turbina projetada .....	36
----------------------------------------------------------------	----

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BA	Bordo de Ataque
BF	Bordo de Fuga
<i>CFD</i>	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
DFC	Dinâmica dos Fluidos Computacional
DMH	Distribuição de Momento Hidráulico
Q3D	Quase-Tridimensional
Unifei	Universidade Federal de Itajubá

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Letras latinas

$a$	Parâmetro da transformação conforme
$b$	Largura das pás; largura entre as superfícies $S_1$
$E$	Energia específica total
$f$	Ângulo de torção da pá
$fb$	Fator de bloqueio
$E_R$	Energia específica relativa
$i$	Vetor unitário do eixo $x$ ; $\sqrt{-1}$
$j$	Vetor unitário do eixo $y$
$l$	Comprimento da corda do perfil na grade
$n$	Vetor normal à superfície da pá
$n$	Número de painéis; rotação da máquina
$N$	Número de pás
$N$	Vetor perpendicular à velocidade relativa
$P$	Pressão estática
$r_p$	Vetor posição
$r$	Raio genérico
$s$	Coordenada tangente ao painel
$S_1$	Superfície que se estende de pá-a-pá, quase ortogonal à $S_2$
$S_2$	Superfície que se estende do cubo à carcaça
$S_{2m}$	Superfície média do escoamento
$t$	Espaçamento entre pás
$tol$	Tolerância imposta no algoritmo
$u$	Velocidade circunferencial; componente real da velocidade conjugada induzida
$v$	Componente imaginária da velocidade conjugada induzida
$V$	Velocidade absoluta
$V_\infty$	Velocidade do escoamento incidente no plano da grade
$x$	Abscissa da grade linear
$y$	Ordenadas da grade linear
$w$	Velocidade relativa

$w_{\infty}$	Velocidade relativa referente à velocidade incidente no plano da grade
$z$	Coordenada axial

### Letras gregas

$\Gamma$	Circulação em torno do perfil
$\gamma$	Densidade de vorticidade
$\Delta$	Diferença
$\delta$	Incremento
$\theta$	Coordenada circunferencial
$\lambda$	Ângulo da corda com o eixo $x$
$\pi$	3,14159265
$\rho$	Massa específica
$\sigma$	Coordenada ao longo da linha de corrente do plano meridional
$\Psi$	Função corrente
$\omega$	Velocidade angular do rotor
$\nabla$	Operador nabla

### Sobrescritos

*	Variável parcialmente alterada
---	--------------------------------

### Subscritos

1	Seção de entrada da grade linear
2	Seção de saída da grade linear
$b$	Referente ao efeito de variação de largura
$c$	Referente ao ponto de controle
$gl$	Referente ao plano da grade linear
$i$	Indexação
$j$	Indexação
$L$	Referente ao bordo de fuga

<i>sing</i>	Referente à singularidade
<i>total</i>	Soma das velocidades
<i>v</i>	Referente ao ponto de colocação dos vórtices
<i>x</i>	Referente à componente horizontal na grade
<i>y</i>	Referente à componente vertical na grade
<i>z</i>	Referente à componente axial; vetor posição na grade
$\theta$	Referente à componente circunferencial
$\sigma$	Referente à componente tangencial à linha de corrente

# SUMÁRIO

RESUMO	iv
ABSTRACT	v
LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	viii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	ix
LISTA DE SÍMBOLOS	x
SUMÁRIO	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES E MOTIVAÇÃO	1
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
1.3 OBJETIVOS	8
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	8
2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA MERIDIONAL	9
2.1 EQUACIONAMENTO EM REGIÕES ESTACIONÁRIAS	9
2.2 EQUACIONAMENTO EM REGIÕES GIRANTES (ROTOR)	10
2.3 EQUAÇÃO PRINCIPAL DE MOVIMENTO	12
2.4 SOLUÇÃO DO PROBLEMA MERIDIONAL	16
3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA PÁ-A-PÁ	17
3.1 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA PÁ-A-PÁ	17
3.2 TRANSFORMAÇÃO CONFORME DAS SUPERFÍCIES $S_1$ EM PLANOS DE GRADES LINEARES	19
3.2.1 Efeito de variação de largura	21
3.2.2 Solução do problema pá-a-pá pelo método dos painéis	21
3.2.3 Método de vórtices concentrados aplicado a grades lineares	23
3.2.4 O método inverso	25
3.2.5 Método de distribuições lineares de vórtices aplicado a grades lineares	28

	xiv
4 RESULTADOS	35
4.1 EFEITO DO NÚMERO FINITO DE PÁS	41
4.2 EFEITO DA ESPESSURA	49
4.3 EFEITO DO BLOQUEIO SOBRE O ESCOAMENTO MERIDIONAL	56
4.4 EFEITOS COMBINADOS DE NÚMERO FINITO DE PÁS, ESPESSURA E BLOQUEIO	65
4.5 EFEITO DO EMPILHAMENTO DOS PERFIS	72
5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	82
5.1 CONCLUSÕES	82
5.2 SUGESTÕES	84
REFERÊNCIAS	85

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES E MOTIVAÇÃO

O avanço de técnicas computacionais tem permitido cada vez mais que métodos diretos de análise de escoamento, projeto e otimização de turbomáquinas com base na solução numérica das equações de Navier-Stokes sejam implementadas via Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) – do inglês *Computational Fluid Dynamics (CFD)*. A grande vantagem aqui é a alta fidelidade proporcionada à realização desses projetos, o que faz com que, em alguns casos, a necessidade de ensaios em bancadas de teste seja reduzida ou mesmo eliminada. No entanto, como sua utilização requer alto custo computacional, em fases preliminares de projeto, quando ainda não se sabem muitas informações geométricas da máquina, os cálculos podem se tornar muito custosos, o que pode inviabilizar sua adoção em tempo hábil (Barbosa, 2018). Sendo assim, abordagens mais rápidas merecem ser utilizadas na busca de projetos confiáveis.

Nesse sentido, os métodos inversos se apresentam como uma excelente alternativa para se obter geometrias confiáveis em um curto espaço de tempo (Susan-Resiga, 2008). Os métodos inversos são aqueles cuja geometria a ser projetada é determinada de modo a atender uma grandeza que seria calculada por um método direto. Por exemplo, ao se impor uma distribuição de momento hidráulico requerido, a geometria das pás do rotor de uma turbomáquina pode ser calculada. Comumente, os métodos inversos se baseiam em modelos simplificados em que perdas viscosas são desconsideradas inicialmente. A depender da situação, a geometria obtida já poderia ser aceita, ou mesmo servir como um ponto de partida para um processo de otimização baseado em modelos mais avançados, inclusive em códigos de DFC. Vale ressaltar que as irreversibilidades são relativamente pequenas em máquinas de fluxo operando em condições nominais, devido aos altos números de Reynolds normalmente envolvidos.

Como as ferramentas desenvolvidas nesse sentido, ou não são disponibilizadas, ou são comercializadas a alto custo, o desenvolvimento de uma metodologia inversa para o projeto de componentes hidráulicos de turbomáquinas, com tecnologia própria, é de grande utilidade e relevância. Nesse sentido, este trabalho integra os desenvolvimentos de Santos *et al.* (2012) e Barbosa (2018) para o aprimoramento de uma ferramenta de projeto de turbomáquinas de fluxos axiais, radiais ou mistos, baseada em uma metodologia Quase-Tridimensional (Q3D). A principal motivação é o apoio a trabalhos futuros onde técnicas de otimização multi-fidelidade possam ser empregadas. Essa ferramenta pode ser utilizada na busca por geometrias confiáveis

em uma fase preliminar do projeto, proporcionando grande economia computacional. Por exemplo, pode ser útil para se testar e validar algoritmos de otimização baseados em metamodelos, antes de ser aplicada de maneira integrada com técnicas computacionais caras, via DFC.

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A metodologia inversa apresentada neste trabalho baseia-se na teoria Q3D proposta por Wu (1952). A teoria geral foi proposta para solucionar o escoamento tridimensional em máquinas de fluxo *i*) cujo canal meridional possui geometria arbitrária. Ou seja, a teoria é aplicável às máquinas de fluxo axial, radial e misto; *ii*) que possui número finito de pás com espessura finita e formato arbitrário; *iii*) cuja velocidade do escoamento seja alta (altos números de Reynolds).

Por hipótese, o escoamento do fluido através do estator e do rotor é considerado permanente com relação às pás estacionárias e rotativas, respectivamente. Além disso, o problema tridimensional completo é decomposto em dois problemas iterativos interdependentes, usando duas famílias de superfícies de corrente, denominadas de famílias de superfícies  $S_1$  e  $S_2$ . Dessa forma, a solução do escoamento tridimensional envolvendo três variáveis independentes é estimada pela solução de dois problemas, que envolvem apenas duas variáveis independentes, cada. As superfícies  $S_2$  são superfícies de corrente que se estendem do cubo à carcaça da máquina. Já as superfícies  $S_1$  são superfícies de corrente quase ortogonais às superfícies  $S_2$  e que se estendem de pá a pá. Identifica-se ainda uma superfície que divide em partes iguais a vazão entre duas pás consecutivas, a superfície  $S_{2m}$ , frequentemente chamada de Superfície Média do Escoamento. Os problemas envolvendo as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  são conhecidos, respectivamente, como “pá-a-pá” (Blade-to-Blade) e “cubo-carcaça” ou “meridional” (Hub-to-shroud ou Through-Flow). As superfícies  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_{2m}$  estão ilustradas na Fig. 1.1.

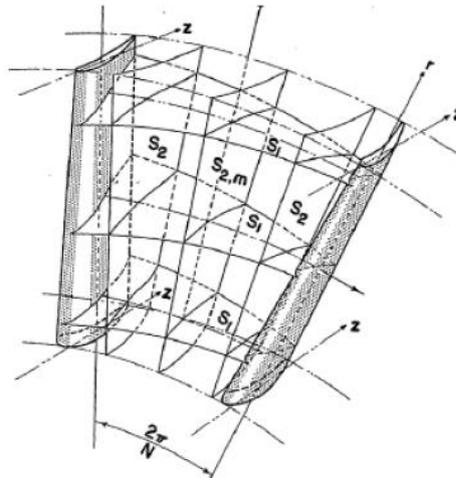


Figura 1.1: Representação das superfícies  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_{2m}$  (Wu, 1952).

Katsanis (1972) descreve três métodos de análises de escoamentos bidimensionais – meridional, pá-a-pá e canal – que quando utilizados em conjunto resultam em uma boa aproximação para solução de escoamentos tridimensionais através de turbomáquinas. Em todos os métodos, assume-se que o escoamento seja permanente com relação às pás e irrotacional, e o fluido, não viscoso. Como exemplo, o escoamento através de um rotor centrífugo foi analisado. Anos mais tarde, Katsanis e McNally (1977a, 1977b) publicaram um manual com um conjunto de programas desenvolvidos em linguagem FORTRAN para cálculo das linhas de corrente, velocidades e ângulos do escoamento pelo método meridional, aplicável em máquinas de fluxo axial, radial ou misto. A solução do problema é obtida a partir da solução simultânea das equações não lineares das superfícies de corrente pelo método de diferenças finitas. Os códigos computacionais serviram de base para diversas futuras pesquisas na área.

Senoo e Nakase (1972) apresentam um método de estudo de escoamentos permanentes, tridimensionais e subsônicos através de turbomáquinas cujo canal meridional possui formato arbitrário. Assume-se que o escoamento se dá em superfícies de revolução. A posição e o formato dessas superfícies, que dependem do trabalho das pás, são determinados através da solução do problema meridional. Além disso, o problema pá-a-pá é associado à metodologia. Seus resultados são utilizados para aprimorar a metodologia meridional, e o procedimento é repetido até que o critério de convergência seja atingido. Alguns exemplos numéricos são discutidos.

Esses autores consolidaram o uso do termo “Quase-Tridimensional” quando a hipótese de superfícies de revolução é adotada para as superfícies  $S_1$ , associada à uma única superfície de corrente  $S_2$ , a chamada superfície média do escoamento,  $S_{2m}$ . Assim, embora mais restrita

comparando-se com a teoria originalmente proposta por Wu (1952), essa concepção é muito menos custosa computacionalmente, o que a levou a ser amplamente adotada. Vários trabalhos seguintes seguiram essa linha.

Hirsch e Warzee (1979) desenvolveram um programa para cálculo Q3D baseado em elementos finitos. Por hipótese, as superfícies que se estendem de pá-a-pá são consideradas de revolução. Os programas de cálculo nas superfícies  $S_1$  e  $S_2$  são integrados em um único pacote, cujo gasto computacional é cerca de 10% maior do aquele caso em que cada um dos programas é resolvido isoladamente. Os resultados obtidos foram comparados com dados experimentais, mostrando estar em concordância.

Jennions e Stow (1985a, 1985b) desenvolveram uma metodologia Q3D para o projeto e análise de pás de máquinas de fluxo. É composto de um programa para solução do problema meridional, um programa para empilhamento dos perfis, e de vários módulos para solução do problema pá-a-pá, a depender da aplicação específica de cada turbomáquina. Um exemplo é apresentado. Os resultados obtidos também são comparados com dados experimentais, resultados de um programa bidimensional e de um outro totalmente tridimensional. O método Q3D apresenta bons resultados.

A teoria de superfícies de vórtices, normalmente considerada como uma ferramenta de análise, foi empregada por Lewis (1982) como uma ferramenta de projeto inverso, onde uma geometria é obtida a partir de distribuições de velocidades requeridas em ambos os lados das pás ou, quando especificada em apenas um lado, uma distribuição de espessuras também deve ser fornecida. O método é apresentado e comparado com clássicas soluções de escoamentos. Além disso, um procedimento para o projeto de aerofólios de turbomáquinas é detalhado.

Zangeneh (1991) descreve uma metodologia inversa tridimensional para o projeto de máquinas de fluxo radial e misto. São adotadas as hipóteses de escoamento invíscido e pás sem espessuras, porém, efeitos do bloqueio das pás são contabilizados. Duas abordagens são apresentadas para solucionar o problema do escoamento compressível: uma aproximada, onde as variações na massa específica são negligenciadas, e, como resultado, obtém-se um algoritmo simples e eficiente, e outra abordagem exata, onde as velocidades e massas específicas são calculadas através do escoamento tridimensional. Os resultados das duas abordagens são comparados para o caso de uma turbina de fluxo radial e é mostrado que as diferenças entre os formatos das pás geradas através das duas abordagens são mínimas.

Borges (1993) propôs um método inverso no qual o escoamento é analisado através de superfícies que se estendem do cubo à carcaça. Na abordagem do problema, assume-se como hipóteses escoamento incompressível, irrotacional e invíscido, e pás sem espessura. A

metodologia foi implementada em código FORTRAN e, de maneira geral, segue o seguinte fluxograma: *i*) entrada de dados referentes à distribuição de momento hidráulico e projeção meridional do rotor; *ii*) primeira aproximação para o formato da pá, assumindo que a velocidade meridional é uniforme ao longo de uma superfície de corrente; *iii*) cálculo do campo de velocidades meridionais; *iv*) atualização do formato da pá; *v*) caso a solução atinja um critério de convergência, obtém-se o campo de velocidades meridionais e o formato das pás. Caso contrário, fazer nova iteração a partir do passo *iii*). O método foi aplicado no projeto de um rotor de uma bomba de fluxo misto, utilizando duas distribuições de momento hidráulicos diferentes e mesma projeção meridional. Em ambos os casos, foram apresentados os resultados de distribuições de pressões no cubo e na ponta das pás do rotor.

Ainda no contexto de metodologias inversas, Wang *et al.* (2000) desenvolveram uma metodologia totalmente tridimensional para o projeto inverso de pás de turbomáquinas. Uma requerida distribuição de pressão nos lados de sucção e pressão das pás é dada e a correspondente geometria das pás é calculada. Os cálculos são baseados nas equações tridimensionais de Navier-Stokes. Dois casos foram testados e os resultados indicaram boa eficiência do método.

Uma importante alternativa para solução do problema pá-a-pá consiste em se mapear as superfícies  $S_1$  em planos de grades lineares. Neste contexto, Eremeef (1974) desenvolveu uma metodologia para solucionar o problema pá-a-pá por meio de uma transformação conforme das superfícies de revolução do escoamento em planos de grades lineares. Os pontos da superfície real e do plano são relacionados por expressões de transformações, assim como as velocidades. Essa mesma metodologia foi adotada para solução deste trabalho – mais detalhes serão apresentados no capítulo 3.

Peng *et al.* (2002a) mencionam que em análises onde o rotor é tratado como parte isolada de turbomáquinas, é necessário que as condições de contorno sejam determinadas experimentalmente (velocidades antes e após o rotor). Entretanto, caso o domínio do problema seja estendido para bem antes do distribuidor e até muito após o rotor, não se faz necessário definir as condições do escoamento na entrada e na saída do rotor. Essa metodologia foi aplicada no processo de otimização de uma turbina tipo Kaplan levando em consideração aspectos de cavitação e perdas hidráulicas no rotor (Peng *et al.*, 2002b).

Dando continuidade aos seus desenvolvimentos, Peng (2005) propôs uma análise tridimensional para solução do problema meridional. Novamente, o domínio foi estendido para bem antes do distribuidor e muito após o rotor, excluindo a necessidade de se determinar a condição do escoamento na entrada e na saída do rotor. A metodologia foi aplicada em um

exemplo de turbina Kaplan. Para verificação numérica, foram comparados resultados de um escoamento circular sem pás do rotor com dados experimentais.

Susan-Resiga *et al.* (2005) citam que um algoritmo iterativo que soluciona os problemas meridionais e pá-a-pá obteria as características de um escoamento tridimensional. Porém, dependendo da complexidade, problemas de estabilidade e convergência podem acontecer. Assim, para contornar essa situação, são consideradas as seguintes simplificações. As superfícies de corrente  $S_1$  são superfícies de revolução. Assim, faz-se necessário apenas uma superfície de corrente  $S_2$ , a chamada superfície média do escoamento,  $S_{2m}$ .

Susan-Resiga *et al.* (2006a) mapearam as superfícies  $S_1$  de uma turbomáquina em planos de grades lineares para projetar e analisar as linhas de esqueleto de perfis. O trabalho é dividido em duas partes, sendo que a primeira consiste no projeto baseado no carregamento sobre a pá, em função do tamanho da grade. Na segunda parte do trabalho, foram feitas análises numéricas utilizando elementos finitos e volumes finitos, verificando a precisão dos métodos nos exemplos analisados e otimizando as geometrias (Susan-Resiga *et al.* 2006b).

Projetos e análises preliminares de turbomáquinas podem ser realizadas assumindo hipótese de escoamento invíscido, visto que as perdas podem ser consideradas desprezíveis quando a máquina opera no ponto de projeto – próxima à condição sem choque. Assim, uma geometria obtida por meio de um método inverso que desconsidere efeitos viscosos pode servir de projeto preliminar para aprimoramento de uma máquina, baseado em modelos mais avançados que incluam perdas, a fim de se otimizar a geometria em estudo. Nesse sentido, Susan-Resiga (2008) apresenta a formulação teórica clássica do método Q3D para o projeto e análise de pás de máquinas de fluxo, considerando o escoamento invíscido. A partir das equações da continuidade e da quantidade de movimento linear, a equação principal de movimento para as pás estacionárias e girantes é formulada. A metodologia foi aplicada no projeto de pás do rotor de uma turbina axial e das pás do seu sistema diretor. Os autores enfatizam que, atualmente, a disponibilidade de abordagens numéricas eficientes para solução do escoamento tridimensional viscoso faz com que os métodos Q3D diretos tornem-se obsoletos. No entanto, os métodos inversos ainda representariam a primeira opção para o projeto preliminar de turbinas e bombas. Ainda hoje, eles continuam dando origem à novas melhorias em projetos (Yang *et al.*, 2019).

Santos *et al.* (2012) desenvolveu um algoritmo em linguagem FORTRAN para solução das equações governantes do problema meridional. Em sua abordagem, são assumidas as hipóteses de escoamento incompressível, irrotacional e invíscido. O escoamento é considerado axissimétrico, e nenhum efeito de bloqueio foi levado em consideração. De maneira geral, a

metodologia segue as seguintes etapas: *i*) entrada de dados referentes ao formato do canal meridional da máquina e distribuição de momento hidráulico no domínio das pás; *ii*) estimativa inicial da distribuição da função corrente; *iii*) cálculo de uma primeira aproximação para a geometria das superfícies  $S_{2m}$ ; *iv*) cálculo de uma nova aproximação dos valores da distribuição da função corrente; *v*) os passos *iii* e *iv* são repetidos até que o critério de convergência seja atingido. A função corrente e as componentes da velocidade meridional são calculadas por um método de quadratura diferencial com funções de base radial (Santos *et al.*, 2018). No método, não se emprega uma malha, mas sim uma nuvem de pontos proveniente de qualquer tipo de gerador, baseado em malha ou não – resultando em grande liberdade geométrica para o domínio dos cálculos. O esquema foi testado em uma situação de projeto de uma turbina hidráulica axial tubular, baseado nos desenvolvimentos de Souza (1989). São apresentados os resultados de distribuição de função corrente, projeções cilíndricas da geometria das pás e as velocidades meridionais no cubo e na ponta da pá.

Note que a superfície de corrente  $S_{2m}$  representa o formato da pá para hipótese conceitual de escoamento perfeitamente guiado por número infinito de pás sem espessuras, cada pá com carregamento hidrodinâmico nulo. Em princípio, as pás podem ser construídas com esse formato, desde que o número de pás não seja muito pequeno. No entanto, o efeito do número finito de pás sobre sua própria geometria e o escoamento só pode ser efetivamente analisado usando um esquema inverso para o problema pá-a-pá. Barbosa (2018) descreve o desenvolvimento de tal esquema, baseado no mapeamento das superfícies de revolução  $S_1$  em planos de grades lineares. Dado um número finito de pás, a geometria é calculada por um processo iterativo baseado na solução do escoamento através do método de painéis com vórtices concentrados, onde as distribuições de momentos hidráulicos requeridos são associadas às intensidades de vórtices nos painéis. O esquema é semelhante ao desenvolvido por Susan-Resiga *et al.* (2016a, b), entretanto inclui o efeito de variação de largura entre as superfícies de corrente  $S_1$ . A metodologia foi testada a partir dos resultados de Santos *et al.* (2012), para os casos de números de pás 3, 5 e 7. Foram apresentados os resultados das geometrias das pás, ainda sem espessuras, e de velocidades relativas ao redor das pás.

Vale ressaltar que a inclusão de uma distribuição de espessuras nas pás e o estudo dos seus efeitos sobre sua própria geometria e carregamentos é de grande importância para a metodologia. Em princípio, as pás poderiam ser construídas com o formato calculado (linha de arqueamento) sem levar em consideração o efeito de bloqueio – porém, engrossadas com distribuições de espessuras de interesse. Isso até seria razoável no caso de poucas pás e pequenas espessuras. Entretanto, o efeito da inclusão da espessura só pode ser realmente

analisado utilizando uma metodologia pá-a-pá que leve em consideração suas distribuições e, além disso, comunique-se com a metodologia cubo-carcaça, associando os bloqueios do canal meridional às suas correspondentes distribuições de espessuras. Assim, os problemas pá-a-pá e meridional tornam-se acoplados. Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um esquema desse tipo.

### **1.3 OBJETIVOS**

O principal objetivo deste trabalho é o aprimoramento de uma metodologia inversa Q3D para o projeto de máquinas de fluxo hidráulicas. Ela parte dos desenvolvimentos já realizados por Santos et al. (2012) e Barbosa (2018), e contempla os seguintes objetivos específicos:

*i)* Inclusão de distribuições de espessuras nas linhas de arqueamento das pás, utilizando-se perfis NACA 4 dígitos.

*ii)* Verificação dos efeitos da inclusão das distribuições de espessuras integrando o método de painéis baseado em distribuições lineares de vórtices aplicado a grades lineares na solução do problema pá-a-pá de maneira direta.

*iii)* Aplicar a ferramenta no projeto de uma turbina hidráulica de fluxo axial, baseado nos desenvolvimentos de Souza (1989), com finalidade principal de verificação qualitativa e conceitual da metodologia a partir de análises dos efeitos das distribuições de momento hidráulicos, do número finito de pás, das espessuras, do bloqueio e do empilhamento sobre a geometria das pás e o escoamento.

### **1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

Este trabalho é dividido em 5 capítulos: Nos capítulos 2 e 3, discorre-se a respeito da formulação geral do problema meridional e pá-a-pá, respectivamente, que compõem a metodologia Q3D em desenvolvimento. São apresentadas as hipóteses, equações governantes dos problemas e os métodos de solução. A metodologia foi testada no projeto de uma turbina de fluxo axial cujas características básicas foram inspiradas nos desenvolvimentos de Souza (1989). Os resultados são apresentados e discutidos no Capítulo 4, onde os efeitos da distribuição de momento hidráulico, do número finito de pás, da espessura, do bloqueio e do empilhamento dos perfis sobre a geometria da pá e o escoamento são analisados. Por fim, no capítulo 5, encontram-se as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA MERIDIONAL

O problema conhecido como meridional ou cubo-carcaça relaciona-se com a superfície média do escoamento,  $S_{2m}$ . Na formulação do problema, assume-se que o escoamento através do rotor ou estator seja aximétrico. Assim, as variações do escoamento na direção circunferencial são nulas. Além disso, assumem-se as hipóteses de escoamento incompressível e escoamento invíscido.

### 2.1 EQUACIONAMENTO EM REGIÕES ESTACIONÁRIAS

Em regiões estacionárias da máquina de fluxo (regiões sem pás, pré-distribuidor e distribuidor), é aceitável que o escoamento absoluto seja considerado permanente. Para essas regiões, devido à hipótese de escoamento incompressível ( $\rho = cte$ ), a equação da continuidade fica:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.1)$$

A equação da quantidade de movimento linear (QML), particularizada para escoamentos invíscidos em regime permanente, é dada pela Eq. (2.2) - Eq. de Euler - (Susan-Resiga, 2008).

$$\rho \left[ \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} \right] = -\nabla p \quad (2.2)$$

onde  $p$  é a soma da pressão estática com o termo hidrostático ( $\rho g z$ ). A Eq. (2.2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = -\nabla E \quad (2.3)$$

onde  $E = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$  é a energia específica total de uma partícula fluída. Note que, da QML, a energia específica total é constante ao longo de uma linha de corrente do escoamento absoluto. Ou seja,

$$\mathbf{V} \cdot \nabla E = 0 \quad (2.4)$$

Além disso, se o escoamento for potencial ( $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ ), tem-se que a energia específica total é constante em todo domínio analisado.

## 2.2 EQUACIONAMENTO EM REGIÕES GIRANTES (ROTOR)

Nas regiões com pás móveis, é conveniente que o campo de velocidades analisado seja o relativo. A velocidade relativa é dada por  $\mathbf{W} = \mathbf{V} - \mathbf{u}$ , onde  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{u}$  são, respectivamente, os vetores de velocidades relativa, absoluta e circumferencial. É aceitável que o escoamento relativo seja considerado permanente. Para essas regiões, devido à hipótese de escoamento incompressível, a equação da continuidade fica:

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = 0 \quad (2.5)$$

Desenvolvendo-se a aceleração total de uma partícula fluída, com auxílio de um referencial não-inercial cuja velocidade de translação é nula e de rotação,  $\boldsymbol{\omega}$ , obtém-se a equação da QML particularizada para escoamentos invíscidos em regime permanente (Susan-Resiga, 2008).

$$\rho \left[ \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} + \nabla \left( \frac{W^2}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{W}) \times \mathbf{W} \right] = -\nabla p \quad (2.6)$$

Sabendo-se que  $2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ , e  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\nabla \left( \frac{u^2}{2} \right)$ , reescreve-se a Eq. (2.6):

$$(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{W} = -\nabla(E_R) \quad (2.7)$$

onde  $E_R = \frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{u^2}{2}$ , é a energia específica relativa de uma partícula fluída. A energia específica absoluta e a relativa relacionam-se da seguinte forma:

$$E - u V_\theta = E_r \quad (2.8)$$

Da Eq. (2.7), conclui-se que a energia específica relativa é constante ao longo de uma linha de corrente do escoamento relativo. Assim,

$$\mathbf{W} \cdot \nabla E_R = 0 \quad (2.9)$$

Novamente, se o escoamento for potencial ( $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ ), tem-se que a energia específica relativa é constante em todo domínio analisado.

Em regiões onde existem pás, o escoamento se dá em superfícies de corrente absolutas ou relativas definidas por:

$$\alpha(r, \theta, z) = \theta - f(r, z) = \text{const} \quad (2.10)$$

onde  $f(r, z)$  é o ângulo de torção da pá na direção circunferencial, e  $r, \theta$  e  $z$  são as coordenadas cilíndricas do sistema. Conceitualmente, essas superfícies  $\alpha = \text{const}$  correspondem às superfícies  $S_2$  propostas por Wu (1952), desde que as pás sejam consideradas infinitamente finas.

O vetor unitário,  $\mathbf{n}$ , normal à superfície de corrente é dado por:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} = \frac{-r \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta - r \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z}{\sqrt{\left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + 1 + \left(r \frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \quad (2.11)$$

A Fig. 2.1 ilustra uma superfície de corrente e os vetores  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{N}$ . O vetor  $\mathbf{N}$ , dado pela Eq. (2.12), é um vetor unitário que é tangente às superfícies de corrente e normal ao campo de velocidades relativas. A Equação Principal de Movimento é obtida a partir da projeção da equação da quantidade de movimento linear na direção  $\mathbf{N}$ .

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{W}}{W} \times \mathbf{n} \quad (2.12)$$

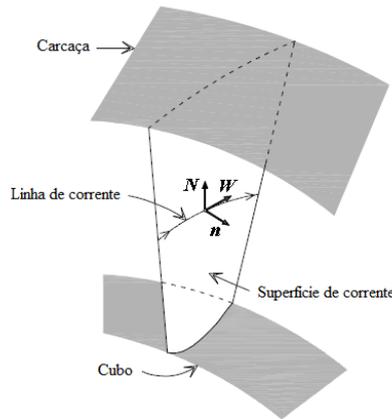


Figura 2.1: Vetores unitários perpendiculares à linha de corrente (Santos *et al.*, 2012).

Em regiões estacionárias, o campo de velocidades absolutas tangencia as superfícies de corrente. Já em regiões com pás móveis, o campo de velocidades que tangencia as superfícies de corrente é o relativo. Essas relações são expressas pelas seguintes equações, respectivamente:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{W} = 0 \quad (2.14)$$

## 2.3 EQUAÇÃO PRINCIPAL DE MOVIMENTO

A Equação Principal de Movimento, como já mencionado, é obtida a partir da projeção da equação da quantidade de movimento linear - Eq. (2.7), na direção  $\mathbf{N}$ .

$$[(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{W}] \cdot \mathbf{N} = [-\nabla(E_R)] \cdot \mathbf{N}$$

O lado esquerdo da projeção fica:

$$[(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{W}] \cdot \mathbf{N} = -(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{W}\mathbf{n}$$

$$[(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{W}] \cdot \mathbf{N} = W n_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\theta}{\partial z} \right) - W n_\theta \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) - W n_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\theta}{\partial r} \right)$$

O lado direito da projeção fica:

$$\begin{aligned}
-\nabla(E_R) \cdot \mathbf{N} &= - \left[ \left( \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z \right] \cdot \left( \frac{\mathbf{W}}{W} \times \mathbf{n} \right) \\
\left( \frac{\mathbf{W}}{W} \times \mathbf{n} \right) &= \frac{1}{W} [(W_\theta n_z - W_z n_\theta) \mathbf{e}_r + (W_z n_r - W_r n_z) \mathbf{e}_\theta + (W_r n_\theta - W_\theta n_r) \mathbf{e}_z] \\
-\nabla(E_R) \cdot \mathbf{N} &= - \frac{1}{W} \left[ \left( \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) (W_\theta n_z - W_z n_\theta) + \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) (W_r n_\theta - W_\theta n_r) \right]
\end{aligned}$$

Assim, após um desenvolvimento algébrico, a projeção da equação da quantidade de movimento linear na direção  $\mathbf{N}$ , também chamada de equação principal de movimento, fica:

$$\begin{aligned}
-n_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\theta}{\partial z} \right) + n_\theta \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + n_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\theta}{\partial r} \right) = \\
\frac{1}{W^2} \left[ \left( \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) (W_\theta n_z - W_z n_\theta) + \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) (W_r n_\theta - W_\theta n_r) \right]
\end{aligned} \quad (2.15)$$

Da Eq. (2.11), tem-se a orientação do vetor normal à superfície de corrente:

$$\frac{n_z}{n_\theta} = -r \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2.16)$$

$$\frac{n_r}{n_\theta} = -r \frac{\partial f}{\partial r} \quad (2.17)$$

Dada a orientação do vetor normal à superfície de corrente, e sabendo-se que as componentes meridionais das velocidades absoluta e relativa são iguais, reescreve-se a equação principal de movimento.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} = - \frac{\partial f}{\partial r} \left( \frac{\partial r V_\theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial r V_\theta}{\partial r} \right) \\
+ \frac{1}{W^2} \left[ - \left( \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) \left( W_z + r \frac{\partial f}{\partial z} W_\theta \right) + \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) \left( W_r + r \frac{\partial f}{\partial r} W_\theta \right) \right]
\end{aligned} \quad (2.18)$$

É conveniente que se introduza a função corrente ( $\Psi$ ) na abordagem do problema, visto que o escoamento, por hipótese, é axissimétrico e, portanto, depende apenas de  $r$  e  $z$ . Dessa forma, reduz-se o número de variáveis do problema. A função  $\Psi$  relaciona-se da seguinte forma com o campo de velocidades:

$$W_z = \frac{1}{fb} r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (2.19)$$

$$W_r = -\frac{1}{fb} r \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (2.20)$$

Nas regiões compreendidas entre pás de uma turbomáquina, as espessuras finitas das pás são contabilizadas através do fator de bloqueio,  $fb < 1$ . Para hipótese de pás infinitamente finas, ou em regiões sem pás, tem-se que  $fb = 1$ . A partir dos resultados das Eq. (2.19) e (2.20), reescreve-se a equação principal de movimento - Eq. (2.18):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{fb} r \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{fb} r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = \\ & \frac{\partial f}{\partial r} \left( \frac{\partial r V_\theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial r V_\theta}{\partial r} \right) \\ & + \frac{1}{W^2} \left[ \left( \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) \left( W_z + r \frac{\partial f}{\partial z} W_\theta \right) - \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) \left( W_r + r \frac{\partial f}{\partial r} W_\theta \right) \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como já comentado, a energia específica relativa não varia ao longo de uma linha de corrente, visto que os efeitos dissipativos são desconsiderados. Assim,  $E_r$  depende apenas do valor da função corrente. As derivadas parciais de  $E_r$  podem ser reescritas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_r}{\partial r} &= \frac{dE_r}{d\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = fb r W_z \frac{dE_r}{d\Psi} \\ -\frac{\partial E_r}{\partial z} &= -\frac{dE_r}{d\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = fb r W_r \frac{dE_r}{d\Psi} \end{aligned}$$

Assim, a parcela  $\frac{1}{W^2} \left[ \left( \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) \left( W_z + r \frac{\partial f}{\partial z} W_\theta \right) - \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) \left( W_r + r \frac{\partial f}{\partial r} W_\theta \right) \right]$  da equação principal fica:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{W^2} \left[ \left( \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) \left( W_z + r \frac{\partial f}{\partial z} W_\theta \right) - \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) \left( W_r + r \frac{\partial f}{\partial r} W_\theta \right) \right] = \\ & fb r \frac{dE_r}{d\Psi} \frac{1}{W^2} \left[ W_z^2 + W_r^2 + W_\theta \left( r \frac{\partial f}{\partial z} W_z + r \frac{\partial f}{\partial r} W_r \right) \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Da condição de tangencia do escoamento, Eq. (2.14), tem-se:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{W} = \left( -\frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (W_r \mathbf{e}_r + W_\theta \mathbf{e}_\theta + W_z \mathbf{e}_z) = 0$$

$$r \frac{\partial f}{\partial r} W_r + r \frac{\partial f}{\partial z} W_z = W_\theta \quad (2.23)$$

A Eq. (2.22) fica:

$$\frac{1}{W^2} \left[ \left( \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) \left( W_z + r \frac{\partial f}{\partial z} W_\theta \right) - \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) \left( W_r + r \frac{\partial f}{\partial r} W_\theta \right) \right] = f b r \frac{dE_r}{d\Psi}$$

Como resultado, a equação principal de movimento para turbomáquinas cujo escoamento é axissimétrico e perdas são desconsideradas fica:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{f b r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{f b r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = \frac{\partial f}{\partial r} \left( \frac{\partial r V_\theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial r V_\theta}{\partial r} \right) + f b r \frac{dE_r}{d\Psi} \quad (2.24)$$

Dada uma determinada distribuição de momento hidráulico ( $rV_\theta$ ) nas regiões das pás, a Eq. (2.24) fornece uma relação entre a função corrente ( $\Psi$ ) e o ângulo de torção da pá ( $f$ ). O termo  $\frac{dE_r}{d\Psi}$  é conhecido na entrada da região com pás e é função de  $\Psi$ . Outra relação entre  $\Psi$  e  $f$  deriva da condição de tangência do escoamento, dada pela Eq. (2.23). Após alguns desenvolvimentos algébricos, a Eq. (2.23) torna-se:

$$-\left( \frac{1}{f b} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial r} + \left( \frac{1}{f b} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial z} = V_\theta - u \quad (2.25)$$

ou então

$$W_m r^2 \frac{df}{dm} = rV_\theta - \omega r^2 \quad (2.26)$$

O modelo matemático apresentado para escoamentos em turbomáquinas possui três variáveis dependentes: a função corrente,  $\Psi(r, z)$ , a distribuição de momento hidráulico,  $rV_\theta$ , e o ângulo de torção da pá,  $f(r, z)$ . Como são disponíveis apenas duas equações governantes, Eqs. (2.24) e (2.26), para se obter a solução do escoamento deve-se especificar ou a distribuição de momento hidráulico ou o ângulo de torção da pá, enquanto que a função corrente sempre é

calculada. Assim, existem duas possibilidades de se resolver as equações governantes: *a)* o modo de análise (ou método direto), onde para um dado formato de superfície de corrente, calcula-se o campo de velocidades e a distribuição de momento hidráulico correspondente; ou *b)* o modo de projeto (ou método inverso), onde para uma dada distribuição de momento hidráulico pode-se calcular o formato da superfície de corrente  $S_2$ . Neste caso, os seguintes dados devem ser fornecidos: *i)* o formato do canal meridional; *ii)* a linha de empilhamento de cada componente; *iii)* a distribuição do momento hidráulico de cada componente; e *iv)* as condições de contorno do canal (na entrada, na saída e nos limite cubo-carcaça).

Segundo Suzan-Resiga (2008), como já existem eficientes métodos numéricos para solução direta de escoamentos tridimensionais invíscidos e viscosos, o modo de análise citado acima tornou-se obsoleto. Entretanto, o modo de projeto permaneceria ainda como a primeira opção para o projeto preliminar de bombas e turbinas hidráulicas.

## 2.4 SOLUÇÃO DO PROBLEMA MERIDIONAL

O sistema formado pelas equações diferenciais parciais (2.24) e (2.26), dadas condições de contorno apropriadas – posição da linha de empilhamento dos perfis, e os valores das funções corrente no cubo e na carcaça – permite o cálculo de  $\Psi(r, z)$  e  $f(r, z)$  nas regiões com pás. Santos *et al.* (2012) desenvolveu um algoritmo em linguagem FORTRAN para solução dessas equações. Assim, para um determinado formato do canal meridional de uma turbomáquina, dada uma distribuição de momento hidráulico na região das pás, pode-se determinar o formato das superfícies médias do escoamento  $S_{2m}$  e os valores da função corrente, através de um processo iterativo que segue o seguinte esquema: primeiramente, a partir de uma estimativa inicial da distribuição da função corrente ao longo do domínio, determina-se uma primeira aproximação para o ângulo de torção da pá,  $f(r, z)$ , através da Eq. (2.26). Assim, com os valores estimados dos ângulos de torção da pá, calculam-se as distribuições de funções correntes,  $\Psi$ , pela Eq. (2.24), por um método de quadratura diferencial com funções de base radial. Esses valores de  $\Psi$  substituem a primeira aproximação utilizada e o processo é repetido até que o critério de convergência seja satisfeito.

### 3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA PÁ-A-PÁ

No problema meridional, para um determinado ponto  $P$  do plano meridional, determina-se a velocidade meridional média, independentemente da posição circunferencial do ponto. Já no problema pá-a-pá, para um dado ponto, permitem-se que as componentes da velocidade variem na direção circunferencial. Assim, pode-se analisar a influência do número finito de pás no escoamento.

Na formulação do problema, assume-se que o escoamento através do rotor ou estator se dá em superfícies de revolução cujas geratrizes são as linhas de corrente obtidas pela solução do problema meridional. Além disso, assume-se hipótese de escoamento potencial.

#### 3.1 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA PÁ-A-PÁ

A partir do problema meridional, determinam-se as linhas de corrente e as velocidades meridionais médias do escoamento. Sendo  $\sigma$  a coordenada natural ao longo de uma linha de corrente média, situada entre duas linhas de correntes vizinhas separadas por uma largura  $b(\sigma)$ , (Fig. 3.1), e  $r$ , a posição radial de um ponto dessa linha, que depende de  $\sigma$  ( $r = r(\sigma)$ ), tem-se:

$$V_\sigma = \sqrt{V_r^2 + V_z^2} \quad (3.1)$$

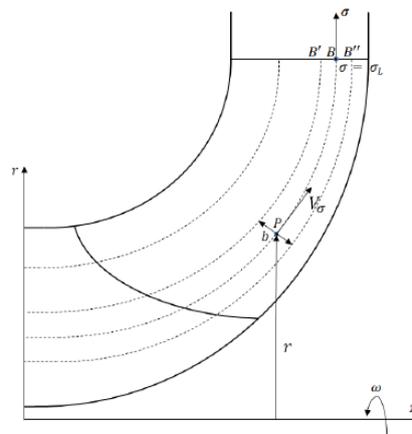


Figura 3.1: Canal meridional de uma turbomáquina de fluxo misto (Barbosa, 2019).

A equação da continuidade nas superfícies de revolução  $S_1$  (Fig. 3.2) e a condição de vorticidade nula normal às superfícies  $S_1$  são dadas pelas Equações (3.2) e (3.3), respectivamente.

$$\frac{\partial V_\sigma}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_\sigma \left( \frac{1}{b} \frac{db}{d\sigma} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \right) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial \sigma} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_\sigma}{\partial \theta} + \frac{V_\theta}{r} \frac{dr}{d\sigma} = 0 \quad (3.3)$$

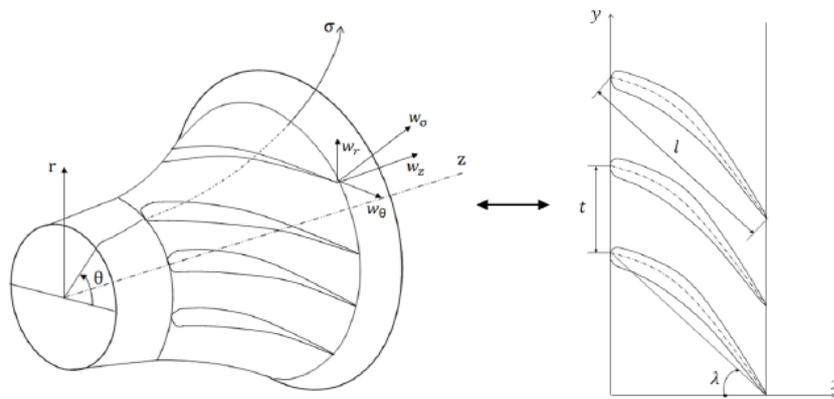


Figura 3.2: Mapeamento de uma superfície de revolução  $S_1$  de uma grade mista, sobre o plano de uma grade linear (Barbosa, 2019).

Sabendo-se que as componentes meridionais da velocidade absoluta e relativa são iguais, e que as componentes circunferências relacionam-se por  $V_\theta = W_\theta + \omega r$ , pode-se reescrever as Equações (3.2) e (3.3) da seguinte forma:

$$\frac{\partial W_\sigma}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + W_\sigma \left( \frac{1}{b} \frac{db}{d\sigma} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\sigma} \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial W_\theta}{\partial \sigma} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_\sigma}{\partial \theta} + \frac{W_\theta}{r} \frac{dr}{d\sigma} = -2\omega \frac{dr}{d\sigma} \quad (3.5)$$

A solução do escoamento do problema pá-a-pá pode ser obtida resolvendo-se o sistema de equações diferenciais formado pelas Equações (3.4) e (3.5). Entretanto, neste trabalho a influência do número finito de pás é estudada através da solução do problema pá-a-pá por meio

do método dos painéis, onde realiza-se uma análise direta da geometria dos perfis das pás, cujas linhas de esqueleto são obtidas a partir da interseção entre as superfícies  $S_{2m}$  e  $S_1$ .

### 3.2 TRANSFORMAÇÃO CONFORME DAS SUPERFÍCIES $S_1$ EM PLANOS DE GRADES LINEARES

Como o método de painéis utilizado na análise é aplicável às grades lineares, utilizou-se uma transformação conforme que mapeia as superfícies  $S_1$  em planos de grades lineares (Fig. 3.2). As grades lineares são modeladas como se existissem infinitas pás igualmente espaçadas por uma distância  $t$ . Observe que esta distância é sempre a mesma para quaisquer dois pontos similares entre as pás.

As equações que regem a transformação são (Eremeef, 1974):

$$x(\sigma, r) = l \cos\lambda \left( \frac{1}{a_L} \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{r} \right) \quad (3.6)$$

$$y(\theta) = \frac{l \cos\lambda}{a_L} \theta \quad (3.7)$$

onde  $\lambda$  é o ângulo de montagem do perfil, no plano transformado,  $l$ , é o comprimento da corda do perfil, que serve como um fator de escala para a transformação podendo ser escolhido convenientemente, e  $L$  corresponde a um ponto do bordo de fuga da pá, na superfície  $S_1$ . Além disso,

$$a_L = \int_0^{\sigma_L} \frac{d\sigma}{r} \quad (3.8)$$

$$\cos\lambda = \frac{a_L}{\sqrt{a_L^2 + \theta_L^2}} \quad (3.9)$$

O espaçamento,  $t$ , é dado por

$$t = \frac{2\pi l \cos\lambda}{N a_L} \quad (3.10)$$

onde  $N$  é o número de pás.

A transformação que relaciona as velocidades do escoamento no plano da grade linear,  $C_{gl}$ , com as velocidades do escoamento no espaço físico,  $C_r$ , é a seguinte:

$$C_{gl} = C_r \frac{2\pi r}{t N} \quad (3.11)$$

Assim, as velocidades no plano transformado ficam:

$$V_x = V_\sigma \frac{2\pi r}{t N} \quad (3.12)$$

$$V_y = V_\theta \frac{2\pi r}{t N} \quad (3.13)$$

Para o campo de velocidades relativas, tem-se:

$$W_x = W_\sigma \frac{2\pi r}{t N} \quad (3.13a)$$

$$W_y = W_\theta \frac{2\pi r}{t N} \quad (3.13b)$$

Note que a transformação das superfícies  $S_1$  para o plano da grade linear preserva o ângulo do escoamento relativo.

$$\tan \beta = \frac{W_\sigma}{W_\theta} = \frac{W_x}{W_y} \quad (3.14)$$

A equação da continuidade nas superfícies  $S_1$  e a condição de vorticidade nula normal às superfícies  $S_1$ , dadas pelas Eqs. (3.4) e (3.5) podem ser estendidas para o plano transformado. Elas ficam, respectivamente:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} V_x \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0 \quad (3.16)$$

O termo à direita da igualdade da Eq. (3.15) expressa o efeito da variação de largura entre as linhas de corrente do escoamento.

### 3.2.1 Efeito de variação de largura

A análise do escoamento através de uma superfície  $S_1$  (Fig. 3.2), sem levar em consideração o formato do canal meridional, pode levar à conclusão de que a componente meridional da velocidade está diminuindo à medida que o escoamento se dá em circunferências cada vez maiores. Essa conclusão, entretanto, é equivocada, visto que o formato do canal meridional pode provocar um distanciamento ou aproximação das linhas de corrente do escoamento, vistas no plano meridional. Por esse motivo, quando o escoamento é estudado no plano da grade, há a necessidade de inclusão de uma fonte de velocidade,  $V_b$ , que se relaciona com o formato do canal meridional.

Eremeff (1974) desenvolveu em sua pesquisa uma primeira aproximação para levar em conta este efeito. Essa aproximação, utilizada no presente trabalho, é a seguinte:

$$V_{b_x} \cong V_{1x} \left[ \frac{b_1}{b(x)} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b_1}{b_2} \right) \right] \quad (3.17)$$

$$V_{b_y} \cong 0 \quad (3.18)$$

### 3.2.2 Solução do problema pá-a-pá pelo método dos painéis

O método dos painéis é uma ferramenta de solução de escoamentos, frequentemente utilizada para análise e projeto de perfis aerodinâmicos isolados ou em grades de turbomáquinas. Baseia-se na utilização de singularidades (fontes e vórtices) pontuais ou distribuídas, que simulam o efeito de corpos que se encontram submersos em escoamentos. Para solução numérica, são impostas as condições de Neumann (impenetrabilidade), e de Kutta no bordo de fuga – velocidades tangenciais do escoamento no primeiro e último painéis possuem mesma intensidade.

Tratando-se de turbomáquinas, a condição de impenetrabilidade deve ser imposta levando-se em consideração que a rotação da máquina faz com que os perfis da grade linear transladem na direção  $y$ . Vale lembrar que a magnitude da velocidade de translação

transformada também segue a relação dada pela Eq. (3.11). Assim, a condição de Neumann é expressa pela seguinte equação:

$$(\mathbf{V}_{total_i} - \mathbf{u}_{t_i}) \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{V}_{total_i}$  é a soma de todas as velocidades absolutas que atuam em um ponto de controle  $i$ ;  $\mathbf{u}_{t_i}$  é a velocidade de translação transformada do ponto de controle na direção  $y$ ; e  $\mathbf{n}_i$  é um vetor normal ao painel do ponto de controle.

A velocidade total,  $\mathbf{V}_{total_i}$ , induzida no ponto de controle  $i$  é resultado das contribuições das velocidades induzidas pelas singularidades,  $\mathbf{V}_{sing_i}$ , da velocidade incidente,  $\mathbf{V}_\infty$ , e da fonte de velocidade incluída na abordagem devido ao efeito de variação da largura das pás,  $\mathbf{V}_{b_i}$ .

$$\mathbf{V}_{total_i} = \mathbf{V}_{sing_i} + \mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_{b_i} \quad (3.20)$$

Pode-se mostrar que, segundo a aproximação nas Eqs. (3.17) e (3.18), a soma das parcelas  $V_{\infty_x}$  e  $V_{b_{ix}}$  é igual à velocidade meridional (obtida a partir da solução do problema *through-flow*) transformada,  $V_{x_i}$ , no ponto de controle  $i$ . Assim, as componentes da velocidade total ficam:

$$V_{total_{ix}} = V_{sing_{ix}} + V_{x_i} \quad (3.20a)$$

$$V_{total_{iy}} = V_{sing_{iy}} + V_{\infty_y} \quad (3.20b)$$

onde  $V_{\infty_y}$  é a média das componentes  $y$  das velocidades transformadas do escoamento na entrada e na saída da grade.

$$V_{\infty_y} = \frac{V_{y_{entrada}} + V_{y_{saida}}}{2} \quad (3.21)$$

Em uma fase preliminar de projeto, quando ainda não se conhecem as espessuras dos perfis das pás, é admissível se considerar as hipóteses de perfis sem espessura e condição de escoamento incidente sem choque. Nesse caso, segundo Barbosa (2019), é interessante adotar

um método de vórtices concentrados para solução do problema pá-a-pá. Em uma fase mais avançada do projeto, quando já se conhecem as espessuras desejáveis dos perfis, é conveniente a utilização do método dos painéis baseado em distribuições lineares de vórtices.

### 3.2.3 Método de vórtices concentrados aplicado a grades lineares

Considere a grade linear ilustrada na Fig. 3.3. Ao vórtice colocado no ponto  $P$ , pertencente à uma pá de referência, corresponde uma infinidade de vórtices equivalentes colocados nos pontos similares das demais pás espaçadas da distância  $t$ . Pode-se determinar a velocidade que toda a fileira de vórtices induz em um ponto qualquer,  $z$ . Tal velocidade é denominada velocidade complexa conjugada induzida e é expressa como (Gostelow, 1984):

$$\bar{V}(z) = \frac{i\Gamma}{2t} \coth \left[ \frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right] \quad (3.22)$$

onde  $\zeta$  é o ponto de colocação de um vórtice de intensidade ( $\Gamma$ ).

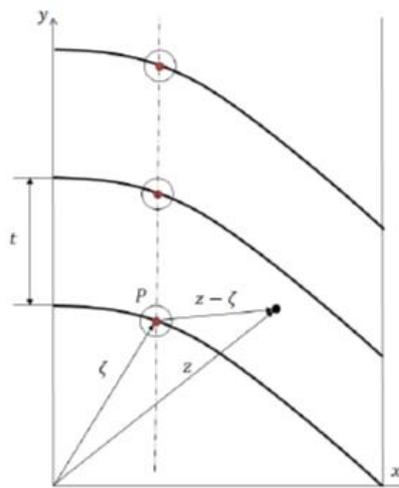


Figura 3.3: Grade linear com representação de uma fileira de vórtices (Barbosa, 2018).

Cada pá é discretizada em um polígono de  $n$  painéis retilíneos. Cada painel  $j = 1, \dots, n$  tem comprimento  $\Delta s_j = |z_{j+1} - z_j|$ , sendo  $z_j$  e  $z_{j+1}$  os pontos extremos do painel  $j$  a montante e a jusante, respectivamente. Em cada painel  $j$  é colocado um vórtice de intensidade  $\Gamma_j$  à distância  $\Delta s_j/4$ , em relação a  $z_j$ ; para efeito de aplicação da condição de Neumann, é escolhido um ponto de controle  $z_{c_j}$  à distância  $3\Delta s_j/4$ , também em relação a  $z_j$ . Desse modo, são

formadas  $n$  fileiras de vórtices cuja velocidade complexa conjugada é expressa pelo somatório do efeito de cada fileira:

$$\bar{V}(z) = \sum_{j=1}^n \frac{i\Gamma_j}{2t} \coth \left[ \frac{\pi}{t} (z - \zeta_j) \right] \quad (3.23)$$

A velocidade induzida pela grade pode ainda ser expressa em função das suas componentes:

$$u(z) = \sum_{j=1}^n u_j^*(z) \Gamma_j \quad (3.24)$$

$$v(z) = \sum_{j=1}^n v_j^*(z) \Gamma_j \quad (3.25)$$

Note-se que  $u_j(z)$  e  $-v_j(z)$  são, respectivamente, a parte real e imaginária de  $\bar{V}(z)$ . Assim, das Eqs. (3.19), (3.20a) e (3.20b), tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [u_{ij}^*(y_{i+1} - y_i) + v_{ij}^*(x_{i+1} - x_i)] \Gamma_j = \\ -V_{x_i}(y_{i+1} - y_i) + (V_{\infty y} - u_{t_i})(x_{i+1} - x_i) \end{aligned} \quad (3.26)$$

É importante destacar que  $u_{ij}^*$  e  $v_{ij}^*$  equivalem às componentes da velocidade induzida por uma fileira de vórtices unitários correspondentes ao ponto de colocação  $\zeta_j$ , no ponto de controle  $z_{c_i}$ ;  $y_{i+1} - y_i$  e  $x_{i+1} - x_i$  correspondem às coordenadas do vetor normal ao painel  $i$ ;  $V_{x_i}$  é a velocidade meridional transformada correspondente ao ponto  $z_{c_i}$ ; e  $u_{t_i}$  é a velocidade de translação do ponto  $z_{c_i}$  do perfil.

### 3.2.4 O método inverso

O método inverso baseado em painéis com vórtices concentrados necessita que uma circulação requerida seja especificada para cada vórtice. Essa circulação relaciona-se, nas máquinas de fluxos, com a distribuição de momento hidráulico.

Considere a grade ilustrada na Fig. 3.4. Os sinais “+” e “-” indicam os lados de pressão e de sucção das pás, respectivamente. As linhas verticais foram traçadas passando pelos pontos  $x$  e  $x + \Delta x$ . A circulação total,  $\Gamma_t$ , no sentido anti-horário através da curva periférica à região  $B$  é dada por:

$$\Gamma_t = \left( \bar{V}_{total(x)_y} - \bar{V}_{total(x+\Delta x)_y} \right) t + \Gamma \quad (3.27)$$

onde  $\Gamma$  corresponde à circulação no trecho de pá considerado,  $\bar{V}_{total(x)_y}$  e  $\bar{V}_{total(x+\Delta x)_y}$  são as médias das componentes  $y$  da velocidade total referente às coordenadas  $x$  e  $x + \Delta x$ , respectivamente.

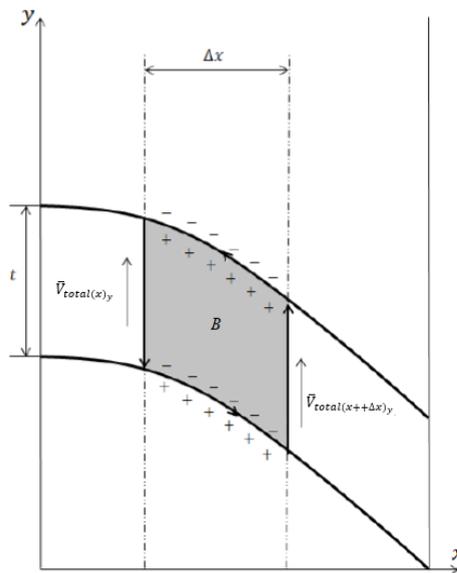


Figura 3.4: Esquema da região entre duas pás onde é aplicado o Teorema de Stokes (Barbosa, 2018).

Como o escoamento é irrotacional, pelo Teorema de Stokes tem-se que a circulação total,  $\Gamma_t$ , através de qualquer curva fechada é nula. Assim, a Eq. (3.27) fica:

$$\Gamma = \Delta \left( V_{total(x)y} \right) t \quad (3.28)$$

Foi visto que a componente  $y$  da velocidade do escoamento no plano da grade relaciona-se com a componente circunferencial da velocidade absoluta do escoamento no espaço físico (Eq. (3.13)). Associa-se, então, a média requerida da componente  $y$  da velocidade total referente a qualquer coordenada  $x$ ,  $\bar{V}_{req(x)y}$ , à correspondente componente circunferencial da velocidade absoluta requerida para a solução do problema meridional

$$V_y = \bar{V}_{req(x)y} = V_\theta \frac{2\pi r}{t N} \quad (3.13)$$

e, finalmente:

$$\Gamma_{req} = -\frac{2\pi}{N} \Delta(rV_\theta) \quad (3.29)$$

A partir da circulação requerida através de cada painel do perfil, Barbosa (2018) desenvolveu em sua pesquisa um método inverso para cálculo da geometria das pás levando-se em consideração o efeito do número finito de pás. O fluxograma do algoritmo desenvolvido é ilustrado na Fig. 3.5.

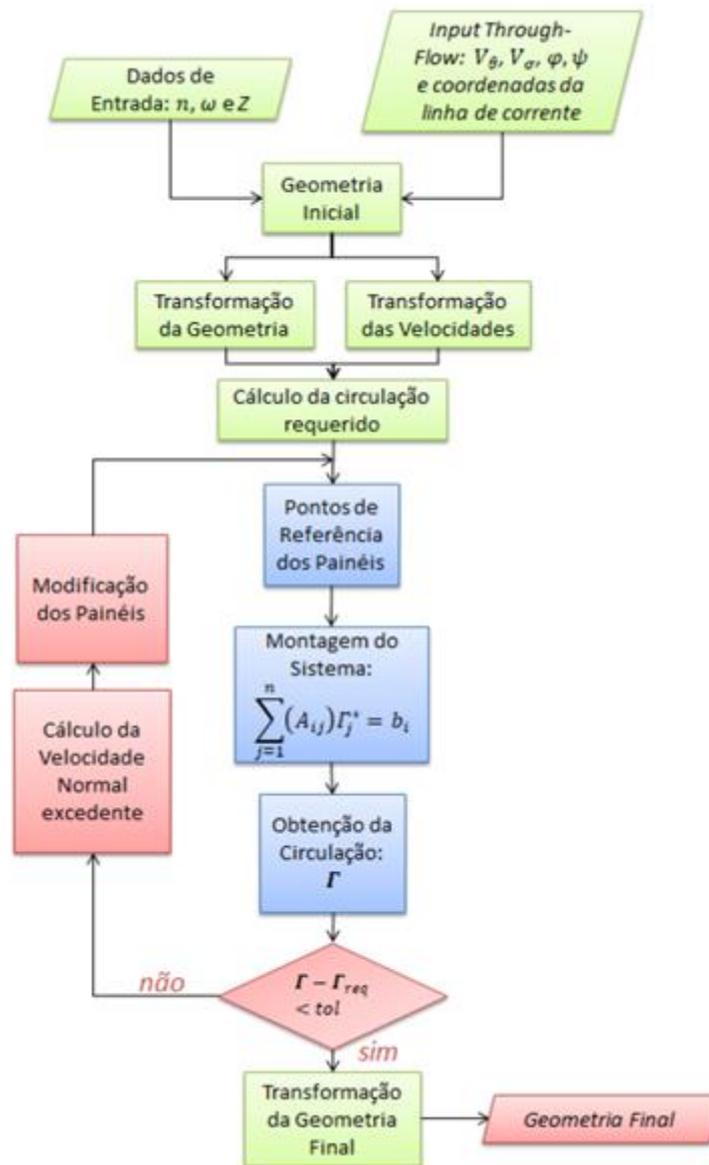


Figura 3.5: Fluxograma do algoritmo pá-a-pá (Barbosa, 2018).

O programa se inicia com a leitura dos resultados do problema *through-flow*, que correspondem aos desenvolvimentos de Santos *et al.* (2012). Os resultados de interesse são: *i*) as coordenadas e os valores das linhas de corrente no plano meridional; *ii*) os ângulos de torção das superfícies  $S_{2m}$ ; e *iii*) as componentes meridionais e circunferenciais da velocidade. Além dos resultados do problema *through-flow*, são lidos os seguintes parâmetros de entrada: número de painéis, número máximo de iterações, número de pás do rotor e rotação da máquina.

A geometria inicial considerada é a da própria superfície média do escoamento,  $S_{2m}$ . As superfícies  $S_1$  são geradas a partir das linhas de corrente do escoamento. Na sequência, o algoritmo entra em um processo iterativo para cada uma dessas superfícies. A transformação

conforme das superfícies  $S_1$  em planos de grades lineares é aplicada tanto na geometria inicial como nas velocidades meridionais e circunferenciais. Em seguida, a circulação requerida é calculada. Quando uma tolerância,  $tol$ , é satisfeita ou o número máximo de iterações é atingido, o programa é interrompido e fornece as coordenadas do perfil da pá no plano transformado. Na sequência, as velocidades tangenciais às pás são calculadas, tanto nos lados de sucção quanto nos de pressão.

Enfim, uma transformação reversa é aplicada para que a geometria final e a distribuição de velocidades nas pás sejam determinadas nas superfícies  $S_1$ .

### 3.2.5 Método de distribuições lineares de vórtices aplicado a grades lineares

A partir dos resultados do método inverso do problema pá-a-pá, a geometria das pás sem espessura fica determinada levando-se em consideração um número finito de pás. De maneira conveniente, as linhas de esqueleto das pás podem ser engrossadas por uma distribuição de espessuras desejável, nas superfícies  $S_1$ . Então, o método dos painéis baseado em distribuições lineares de vórtices é aplicado para se resolver o problema pá-a-pá de maneira direta e se verificar a influência das espessuras dos perfis no escoamento.

Considere a Fig. 4.6. A velocidade complexa conjugada induzida pela grade pode ser representada por uma distribuição de vórtices,  $\gamma(s)$ , no contorno de cada perfil. Sendo  $\zeta$  um ponto do contorno do perfil de referência ( $p = 0$ ), a velocidade complexa conjugada induzida pela grade é dada por:

$$\bar{V}(z) = \frac{i}{2\pi} \oint_c \gamma(s) \frac{\pi}{t} \coth \left[ \frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right] ds \quad (3.30)$$

onde  $c$  é a curva a qual encontra-se a distribuição  $\gamma$ .

Para o caso em que o passo tende ao infinito, a formulação da grade tende à formulação do perfil isolado. Assim, a Eq. (3.30) fica:

$$\bar{V}(z) = \frac{i}{2\pi} \oint_c \frac{\gamma(s)}{z - \zeta} ds \quad (3.31)$$

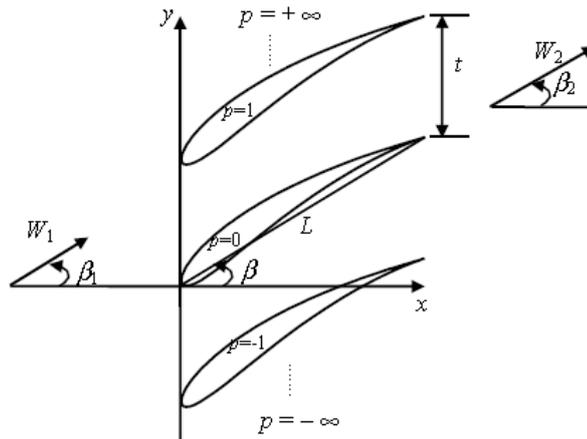


Figura 3.6: Geometria da grade linear (Petrucci, 2003).

O perfil de referência é discretizado por um conjunto de  $m + 1$  pontos, ilustrado pela Fig. 3.7, tal que suas coordenadas representam os limites dos painéis que aproximam o contorno do perfil. O corpo é discretizado do bordo de fuga (ponto  $z_1$ ) em sentido ao bordo de ataque, estando o corpo do perfil sempre à direita, e, então, do bordo de ataque ao bordo de fuga, parando no último ponto, que coincide com o primeiro ponto ( $z_{m+1} = z_1$ ). Em cada painel, o ponto de controle é escolhido, convenientemente, como sendo o ponto médio, onde a condição de Neumann deve ser satisfeita. Distribuições lineares de vórtices são colocadas sobre os painéis, de modo que a intensidade fique associada ao nó  $j$ , conforme a Fig. 3.8.

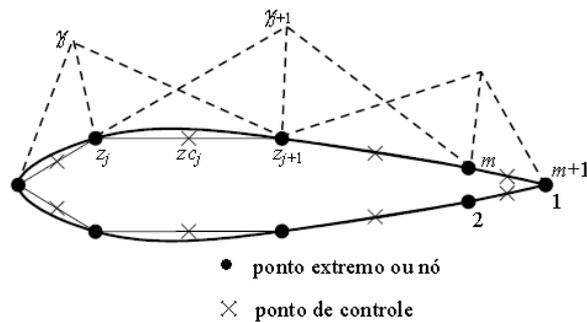


Figura 3.7: Discretização do perfil de referência (Petrucci, 2003).

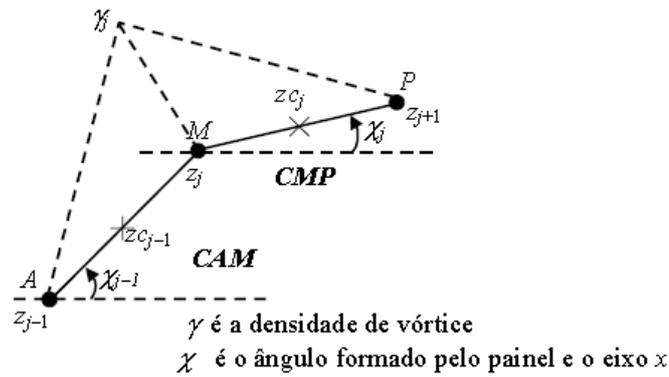


Figura 3.8: Densidade de vórtices em dois painéis contíguos (Petrucci, 2003).

É conveniente separar o efeito do perfil isolado da influência do restante da grade da seguinte maneira, onde  $K_I$  é a função núcleo para o perfil isolado, e  $K_G$  é a função núcleo para a grade.

$$\bar{V}(z) = \frac{i}{2\pi} \oint_c \gamma(s) K_I(z, \zeta) ds + \frac{i}{2\pi} \oint_c \gamma(s) K_G(z, \zeta) ds \quad (3.32)$$

onde,

$$K_I(z, \zeta) = \frac{1}{z - \zeta} \quad (3.33)$$

$$K_G(z, \zeta) = \frac{\pi}{t} \coth \left[ \frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right] - \frac{1}{z - \zeta} \quad (3.34)$$

Note que há uma descontinuidade na função núcleo para o perfil isolado quando  $\zeta \rightarrow z$ . Desse modo, necessita-se de um tratamento especial para a integral da influência do perfil isolado.

A contribuição  $\bar{V}_{I_j}(z)$  da intensidade  $\gamma_j$ , Fig. 3.8, para a integral do perfil isolado (núcleo  $K_I$ ) é determinada de forma puramente analítica, considerando as variações lineares de vórtices dos painéis  $j$  e  $j-1$ , contíguos. A velocidade complexa conjugada, no ponto  $z$ , para um perfil isolado, com  $j$  variando de 2 até  $m$ , será:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{I_j}(z) = & i\gamma_j \left\{ e^{-i\chi_{j-1}} \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \log \left( \frac{z - z_{j-1}}{z - z_j} \right) - 1 \right] \right. \\ & \left. + e^{-i\chi_j} \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} \log \left( \frac{z - z_j}{z - z_{j+1}} \right) + 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

*CAM* e *CMP* referem-se à influência das distribuições de vórtices dos painéis anterior e posterior ao nó  $j$ , respectivamente. São dados por:

$$CAM = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \log \left( \frac{z - z_{j-1}}{z - z_j} \right) - 1 \right] \quad (3.36)$$

$$CMP = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} \log \left( \frac{z - z_j}{z - z_{j+1}} \right) + 1 \right] \quad (3.37)$$

A Eq. (3.35) é descontínua para valores de  $z$  pertencentes aos painéis contíguos, em particular, para  $z$  igual a  $z_{c_{j-1}}$  (*CAM*) e  $z_{c_j}$  (*CMP*), onde deve ser feito um estudo dos argumentos de cada painel.

Supondo que o painel anterior ao ponto  $j$  seja curvilíneo, com os pontos extremos  $A$  e  $M$ , e ponto médio  $z_{c_{j-1}}$ , conforme ilustrado na Fig. 3.9.

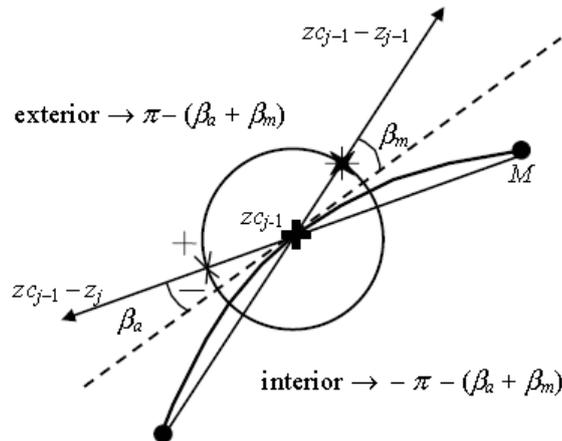


Figura 3.9: Análise dos ângulos dos painéis (Petrucci, 2003).

Quando o ponto  $z$  coincidir com o ponto de controle do painel anterior,  $z_{c_{j-1}}$ , a parcela *CAM* necessitará de uma análise de argumentos, enquanto que a parcela *CMP*, não.

Sabendo-se que a função logarítmica,  $\xi$ , de um número complexo,  $z$ , é dada por:

$$\xi = \ln(r) + \mathbf{i}(\theta) \quad (3.38)$$

onde  $r$  é a norma, e  $\theta$ , o argumento do número complexo,  $z$ . Assim, a Eq. (3.36) pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} CAM_j &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{z_{c_{j-1}} - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \left[ \log \left( \frac{z_{c_{j-1}} - z_{j-1}}{z_{c_{j-1}} - z_j} \right) \right] - 1 \right\} \\ CAM_j &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{z_{c_{j-1}} - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \left[ \ln \left| \frac{z_{c_{j-1}} - z_{j-1}}{z_{c_{j-1}} - z_j} \right| - \mathbf{i} \left[ \arg(z_{c_{j-1}} - z_j) - \arg(z_{c_{j-1}} - z_{j-1}) \right] \right] - 1 \right\} \\ CAM_j &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{z_{c_{j-1}} - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \left[ \ln \left| \frac{z_{c_{j-1}} - z_{j-1}}{z_{c_{j-1}} - z_j} \right| - \mathbf{i}[\pi - (\beta_a - \beta_m)] \right] - 1 \right\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Tratando-se de painéis retos, que é o caso em estudo, os quais possuem ponto de controle situado no ponto médio de cada painel, tem-se:

$$\beta_a = \beta_m = 0 \quad (3.40a)$$

$$\ln \left| \frac{z_{c_{j-1}} - z_{j-1}}{z_{c_{j-1}} - z_j} \right| = \ln(1) = 0 \quad (3.40b)$$

$$\frac{z_{c_{j-1}} - z_{j-1}}{z_{c_{j-1}} - z_j} = \frac{1}{2} \quad (3.40c)$$

Portanto, das Eq. (3.40a), (3.40b) e (3.40c), a Eq. (3.39) fica:

$$\begin{aligned} CAM_j &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} (0 - \mathbf{i}\pi) - 1 \right] \\ CAM_j &= -\frac{1}{2\pi} - \frac{\mathbf{i}}{4} \end{aligned} \quad (3.41)$$

De maneira análoga, pode-se determinar a parcela  $CMP$  quando o ponto  $z$  coincidir com o ponto de controle do painel posterior,  $z_{c_j}$ . Assim, a Eq. (3.37) fica:

$$CMP_j = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{z_{j+1} - z_{c_j}}{z_{j+1} - z_j} \left[ \ln \left| \frac{z_{c_j} - z_j}{z_{c_j} - z_{j+1}} \right| - \mathbf{i}[\pi - (\beta_m - \beta_p)] \right] + 1 \right\}$$

$$CMP_j = \frac{1}{2\pi} - \frac{i}{4} \quad (3.42)$$

Para incorporar o efeito da influência da grade, toma-se o termo  $K_G$ , da Eq. (3.34), e considera-se a contribuição dos painéis contíguos ao ponto  $z_j$ . Assim, tem-se:

$$\bar{V}_{G_j}(z) = \frac{i}{2\pi} \left( \int_{z_{j-1}}^{z_j} \gamma_j e^{-i\chi_{j-1}} K_G(z, \zeta) d\zeta + \int_{z_j}^{z_{j+1}} \gamma_j e^{-i\chi_j} K_G(z, \zeta) d\zeta \right) \quad (3.43)$$

À medida que  $\zeta$  tende à  $z$ , a função  $K_G$  tende à zero, provando que a autoindução e as descontinuidades são próprias do perfil isolado. Neste trabalho, optou-se por calcular o valor das velocidades  $\bar{V}_{G_j}$ , utilizando a técnica de integração numérica da regra dos trapézios, considerando uma variação linear do integrando ( $\gamma_j K_G$ ), no painel. Isto é, na primeira integral, o integrando varia de zero até  $\gamma_j K_{G_j}$ , e na segunda, de  $\gamma_j K_{G_j}$  até zero. O que resulta:

$$\bar{V}_{G_j}(z) = \frac{i}{4\pi} \gamma_j K_{G_j}(z) [e^{-i\chi_{j-1}}(z_j - z_{j-1}) + e^{-i\chi_j}(z_{j+1} - z_j)] \quad (3.44)$$

onde

$$K_G(z, \zeta) = \frac{\pi}{t} \coth \left[ \frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right] - \frac{1}{z - \zeta} \quad (3.34)$$

A fim de se obter bons resultados no bordo de fuga de perfis afilados, impõe-se que a distribuição de vórtices seja nula no bordo de fuga, fazendo-se  $\gamma_{m+1} = -\gamma_1$ .

Somando-se as contribuições de todas as intensidades  $\gamma_j$ , com a condição de intensidade nula no bordo de fuga ( $\gamma_{m+1} = -\gamma_1$ ), e aplicando-se a condição de impenetrabilidade em cada ponto de controle,  $z_{c_j}$ , com  $j$  variando de 1 até  $m$ , resulta em um sistema de  $m$  equações lineares, com  $m$  incógnitas  $\gamma_j$ . Assim, como no método de vórtices concentrados, levam-se em consideração efeitos da grade, da variação de largura das linhas de corrente no plano meridional e da rotação da máquina.

Mesmo tendo um sistema bem definido, os resultados obtidos podem não ser satisfatórios, quando o perfil possuir bordo de fuga afilado. Assim, faz-se necessário a

imposição da condição de Kutta. Considerando-se um ponto de controle adicional, a uma distância adequada do bordo de fuga, sobre o bissetor dos painéis a ele contíguos, a condição de Kutta é imposta fazendo-se que a velocidade tangencial (na direção do bissetor) à esse ponto adicional seja o próprio valor da intensidade de vórtice do bordo de fuga ( $-\gamma_1$ ). A Fig. 3.10 ilustra o esquema proposto.

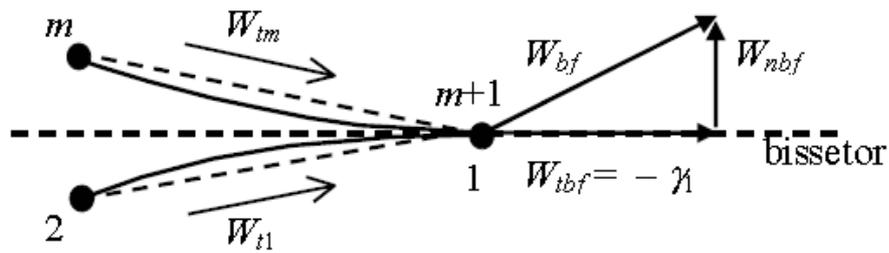


Figura 3.10: Esquema proposto para imposição da condição de Kutta (Petrucci, 2003).

A condição adicional é representada pela Eq. (3.45), onde  $W_{tbf}$  é a velocidade tangencial no ponto de controle adicional (bordo de fuga).

$$W_{tbf} = -\gamma_1 \quad (3.45)$$

Com a condição adicional, o sistema passa a ter  $m+1$  equações, e continua com  $m$  incógnitas. Assim, passa a ser um sistema sobredeterminado. O sistema é resolvido pelo método dos mínimos quadrados.

## 4 RESULTADOS

Os resultados obtidos neste trabalho fazem parte e dão continuidade às pesquisas a respeito de Máquinas de Fluxo desenvolvidas pelo Instituto de Engenharia Mecânica da Unifei. Sem os desenvolvimentos anteriores do grupo, em especial, as pesquisas de Souza (1989), Santos *et al.* (2012) e Barbosa (2018), não seria possível a realização deste trabalho.

Como já comentado, Santos *et al.* (2012) e Barbosa (2018) desenvolveram algoritmos em linguagem FORTRAN para solução das equações governantes dos problemas inversos meridional e pá-a-pá, respectivamente. Foi integrada à metodologia, a solução direta do problema pá-a-pá, onde as geometrias das linhas de arqueamento - resultantes do problema inverso pá-a-pá - são engrossadas com a distribuição de espessura dos perfis NACA 4 dígitos. Assim, o efeito da distribuição de espessuras sobre o escoamento é analisado.

Os resultados discutidos aqui seguem o seguinte fluxograma: *i)* inicialmente, quando ainda não se sabem os formatos das superfícies de corrente  $S_1$  e, portanto, onde encontram-se os perfis hidrodinâmicos, o problema meridional é resolvido sem considerar qualquer efeito de bloqueio; *ii)* os resultados geométricos e de velocidades do problema meridional alimentam o problema pá-a-pá inverso como dados de entrada. A solução fornece a geometria das pás para um número finito de pás. *iii)* As geometrias resultantes do problema pá-a-pá inverso são espessadas com perfis de interesse. Então, resolve-se o problema pá-a-pá de maneira direta. Agora, definida uma primeira aproximação para a geometria das pás, calculam-se os bloqueios correspondentes à distribuição de espessuras utilizada. Os resultados são integrados à metodologia meridional, que é corrigida, agora levando em consideração um fator de bloqueio do canal meridional. Os passos, *i)* *ii)* e *iii)* são repetidos, fazendo uma espécie de única iteração. Dessa forma, as metodologias meridionais e pá-a-pá tornam-se acopladas.

A metodologia foi aplicada no projeto de uma turbina hidráulica de fluxo axial cujas características básicas foram inspiradas nos desenvolvimentos de Souza (1989) - indicadas na Tab. 4.1. Trata-se de um modelo de turbina hélice do tipo tubular que foi projetado, construído e ensaiado para a antiga Mecânica Pesada de Taubaté – SP. O projeto foi realizado segundo hipótese de “vórtice potencial” e utilizando-se da Teoria da Asa de Sustentação (ou Teoria do Elemento de Pá) para se determinar a geometria das pás (Bran e Souza, 1980). Os dados experimentais dos ensaios do modelo da turbina estão disponíveis em forma de um relatório interno (Souza, 1989). Assim, se conveniente, os resultados obtidos a partir da metodologia Q3D proposta podem ser comparados com os dados do ensaio. Esse é o principal motivo para que o modelo tenha servido como referência para as principais características da turbina

projetada, principalmente: *a)* vazão; *b)* rotação da máquina; *c)* diâmetros interno e externo das pás; *d)* ângulo do escoamento absoluto ao sair do distribuidor; *e)* projeção meridional do rotor. Além disso, foram feitos testes para os casos de número de pás iguais à 3, 4 e 5 – valores que incluem e são próximos do número de pás do modelo.

Tabela 4.1: Características básicas da turbina projetada

<i>Vazão volumétrica, <math>Q</math></i>	0,286 m <sup>3</sup> /s
<i>Rotação, <math>n</math></i>	1145 rpm
<i>Altura, <math>H</math></i>	4,0 m
<i>Rotação específica, <math>n_{qA}</math></i>	652
<i>Diâmetro interno, <math>D_i</math></i>	112 mm
<i>Diâmetro externo, <math>D_e</math></i>	280 mm
<i>Número de pás, <math>N_{pá}</math></i>	4
<i>Rendimento esperado, <math>\eta</math></i>	85 %
<i>Potência de eixo esperada, <math>P_e</math></i>	9,5 kW
<i>Ângulo de saída do distribuidor, <math>\alpha_2</math></i>	60°

Duas diferentes distribuições de momento hidráulico (DMH, “A” e “B” ilustradas na Fig. 4.1) foram consideradas para teste. Cada uma delas é dada ao longo das linhas de corrente consideradas – 26, neste trabalho, das quais 5 estão ilustradas na Fig. 4.2 – cujos formatos são desconhecidos, inicialmente. Dessa forma, dada uma DMH, a correspondente potência da pá é vinculada à metodologia, visto que a vazão que passa através de linhas de corrente é associada com os seus respectivos valores.

Ambas as distribuições assumem valores iguais na entrada do rotor ( $\sigma/\sigma_L = 0$ ), simulando o efeito do sistema diretor com pás não torcidas (ângulo do escoamento constante na saída do sistema). Através do rotor, as distribuições diminuem seus valores de forma suave até a saída do rotor ( $\sigma/\sigma_L = 1$ ), onde a DMH “A” mantém parte do momento hidráulico, enquanto que a DMH “B” assume valores próximos de zero. Além disso, a DMH “B” é mais abrupta do que a DMH “A” na saída do rotor, e dessa forma deve intensificar os carregamentos hidrodinâmicos das pás nessa região.

Nas Figs. 4.2 a 4.6, linhas tracejadas referem-se à DMH “A” e linhas contínuas, DMH “B”.

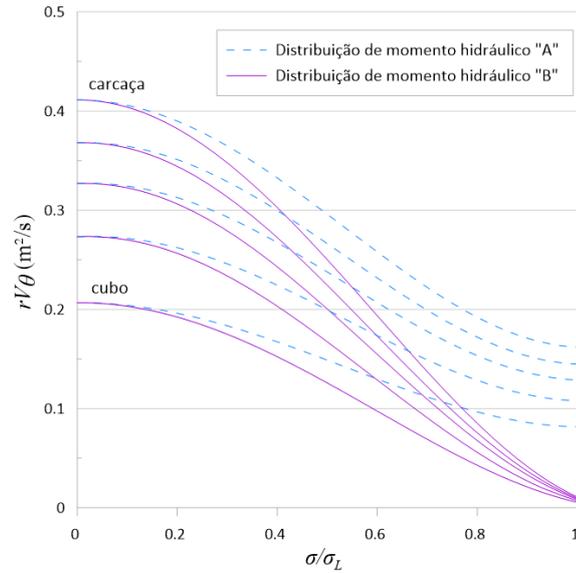


Figura 4.1: Distribuições de momentos hidráulicos testados.

A Fig. 4.2 mostra uma vista fora de escala do plano meridional do rotor. Os resultados das linhas de corrente obtidos com as duas DMH's também são comparados.

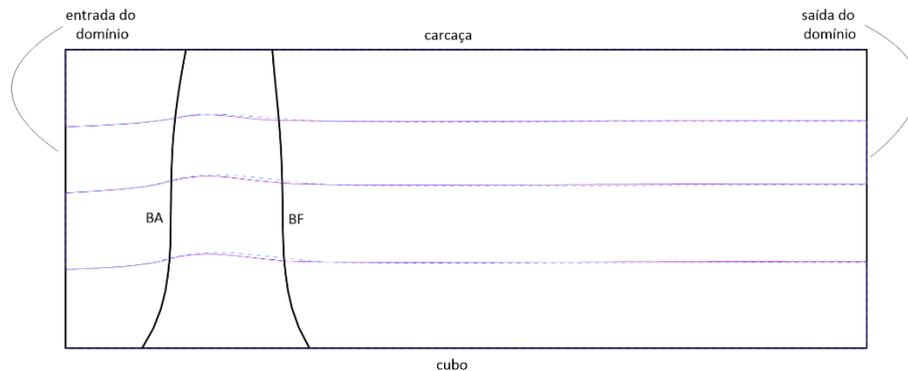


Figura 4.2: Vista meridional do rotor.

A diferença entre os resultados das linhas de corrente é sutil. Note que elas sofrem um deslocamento radial, principalmente na região do rotor. Isso é ocasionado pela diferença de momentos hidráulicos entre linhas de corrente enquanto o momento angular é transferido do fluido para as pás. Esse fato evidencia a importância do uso de uma metodologia Q3D até mesmo no projeto de máquinas de fluxo axiais com variação de momento hidráulico.

As potências desenvolvidas pelas pás ( $P_{pá}$ ) podem ser calculadas pela seguinte equação:

$$P_{pá} = \rho \omega \int_{\Psi_{cubo}}^{\Psi_{ponta}} (rV_{\theta}(\sigma_0) - rV_{\theta}(\sigma_L)) d\Psi \quad (4.1)$$

A Eq. 4.1 é resolvida numericamente pelo método dos trapézios. As potências associadas às DMH “A” e “B” são, respectivamente, 6,85 kW e 10,9 kW. Como era de se esperar, a potência associada à DMH “A” é menor do que aquela associada à DMH “B”.

A Fig. 4.3 mostra a vista de topo de algumas linhas de curvatura das superfícies de corrente  $S_{2m}$ . Elas representam o formato das pás quando  $N = \infty$ .

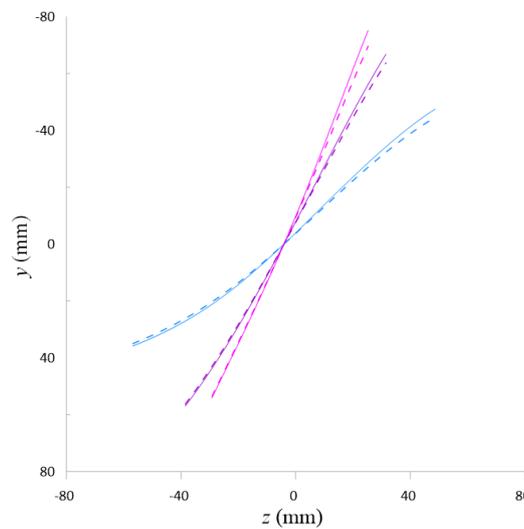


Figura 4.3: Vista de topo das linhas de curvatura das superfícies  $S_{2m}$  no cubo (azul), meio (lilás) e ponta (rosa).

Novamente, o efeito da DMH aparenta ser pequeno, mas de maneira mais pronunciada na região próxima da saída do rotor, como esperado.

Os correspondentes ângulos de inclinação das linhas de curvatura,  $\beta$  (ângulos do escoamento relativo com relação à direção circunferencial,  $\theta$ ), medido em graus, são mostrados na Fig. 4.4 em função da coordenada meridional normalizada – ou seja, a coordenada normalizada das linhas de corrente no plano meridional. Agora, a influência da DMH aparece de forma mais clara, especialmente no cubo – uma diferença de cerca de 6 graus na saída do rotor.

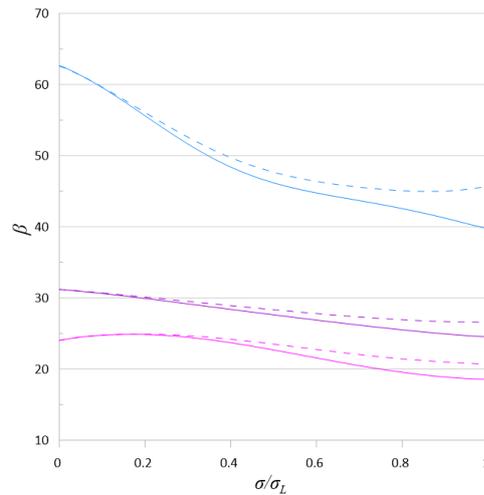


Figura 4.4: Ângulos de inclinação das linhas de curvatura das superfícies  $S_{2m}$  no cubo (azul), meio (lilás) e ponta (rosa).

A Fig. 4.5 mostra a variação da velocidade meridional ao longo das mesmas linhas de correntes consideradas nas Figs. 4.3 e 4.4.

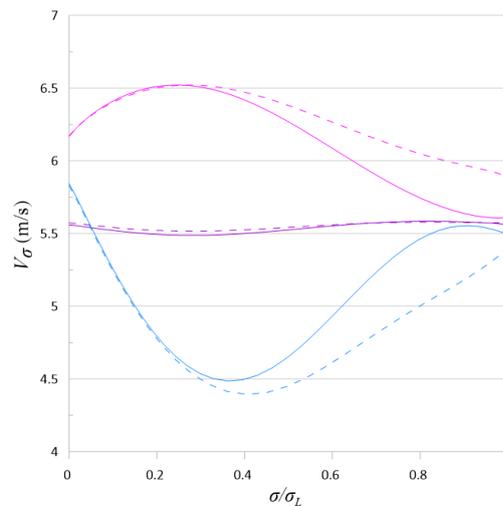


Figura 4.5: Velocidades meridionais no cubo (azul), meio (lilás) e ponta (rosa).

Para ambas as DMHs, essas variações são consistentes com os deslocamentos radiais das linhas de corrente da Fig. 4.2. Na região do rotor, com relação ao cubo, inicialmente as linhas de corrente da vizinhança afastam-se e depois aproximam-se. Dessa forma, a componente meridional da velocidade diminui, e depois aumenta. Já com relação à carcaça, as linhas de corrente da vizinhança primeiro aproximam-se e depois se distanciam. Assim, o escoamento primeiro é acelerado, e depois sofre uma desaceleração. Além disso, de maneira mais clara, a DMH “B” intensifica essa variação em relação à DMH “A” à medida em que o escoamento se

aproxima da saída do rotor. Note que, em relação às linhas de corrente no meio, esse efeito é contrabalanceado, de maneira que as variações nas velocidades meridionais ocorrem de forma amena.

As variações nas velocidades relativas são mostradas na Fig. 4.6.

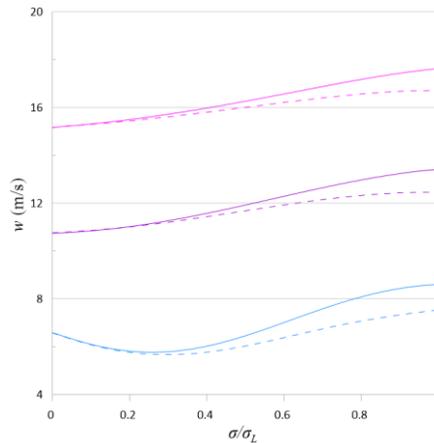


Figura 4.6: Velocidades relativas no cubo (azul), meio (lilás) e na ponta (rosa).

Há consistência entre os resultados e acelerações esperadas do escoamento relativo de rotores de turbinas de fluxo axial – o escoamento relativo é acelerado da entrada do rotor até a saída – (mesmo que uma pequena desaceleração ocorra nas proximidades do cubo, inicialmente). Também esperado, a DMH “B” produz maior aceleração no escoamento relativo do que a DMH “A”, à medida em que o escoamento se aproxima da saída do rotor. Note que, diferentemente do que ocorre com a componente meridional da velocidade, o efeito da DMH sobre a velocidade relativa é mais uniformemente distribuído ao longo das linhas de corrente. A Fig. 4.7 ilustra o triângulo de velocidades do escoamento sobre a pá. As componentes em azul e lilás referem-se aos casos de DMH “A” e “B”, respectivamente.

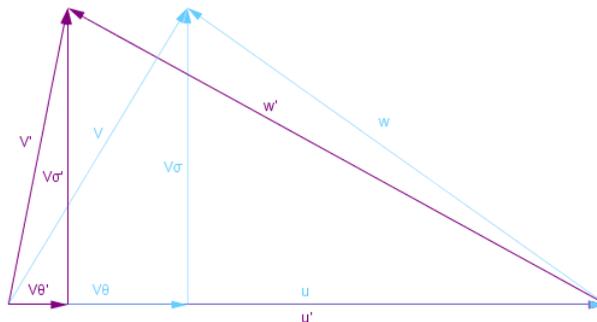


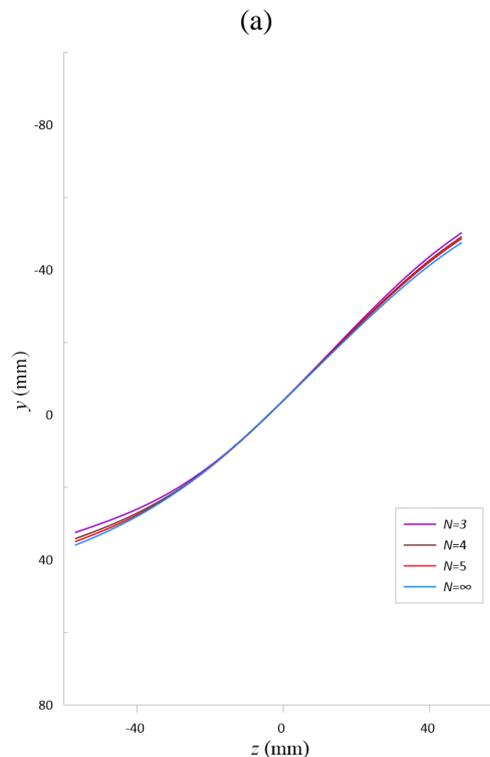
Figura 4.7: Representação do triângulo de velocidades para os casos de DMH “A” e “B”.

De posse dos resultados do problema meridional, o próximo passo do estudo é analisar a influência do número finito de pás sobre a geometria do rotor, e os resultados das distribuições de velocidades, por meio do problema pá-a-pá. O escoamento é estudado através das superfícies  $S_1$ , cujas geratrizes são as linhas de correntes resultantes da solução do problema meridional.

## 4.1 EFEITO DO NÚMERO FINITO DE PÁS

Para ilustrar os efeitos do número finito de pás, foi considerada a DMH “B”. Em uma primeira análise, onde as linhas de esqueleto ainda não foram espessadas, a solução do problema pá-a-pá é obtida por meio do método de painéis baseado em vórtices concentrados. Como a distribuição de momento hidráulico é influenciada pelo número finito de pás, nessa etapa é realizado um processo iterativo que parte das geometrias das linhas de curvatura das superfícies  $S_{2m}$ , e se determina a geometria final das linhas de esqueleto das pás, respeitando uma determinada distribuição de momento requerida.

Os resultados para  $N = 3, 4$  e  $5$  foram obtidos e comparados com o caso  $N = \infty$ , ainda sem considerar qualquer efeito de bloqueio ou espessura, que serão discutidos posteriormente. A Fig. 4.8 mostra os resultados das linhas de esqueletos em seções no cubo, no meio e na ponta.



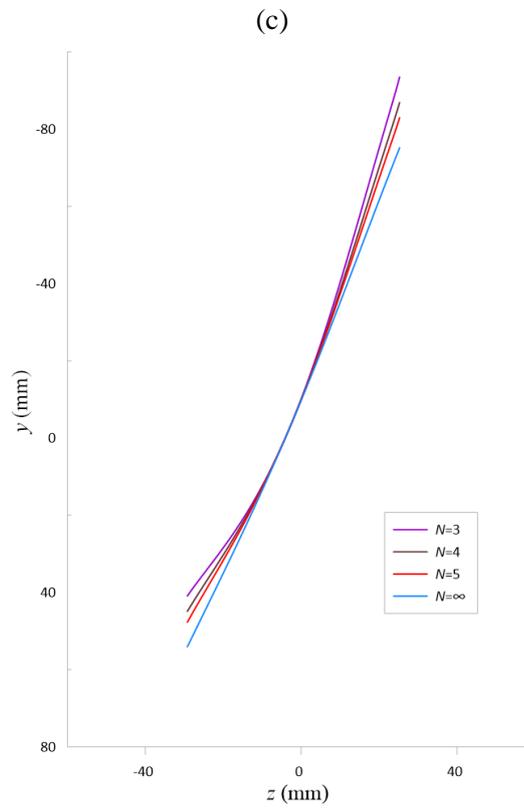
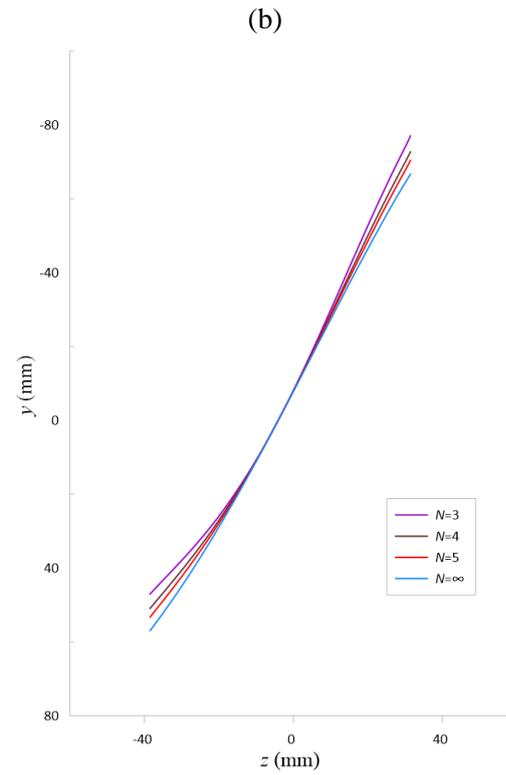
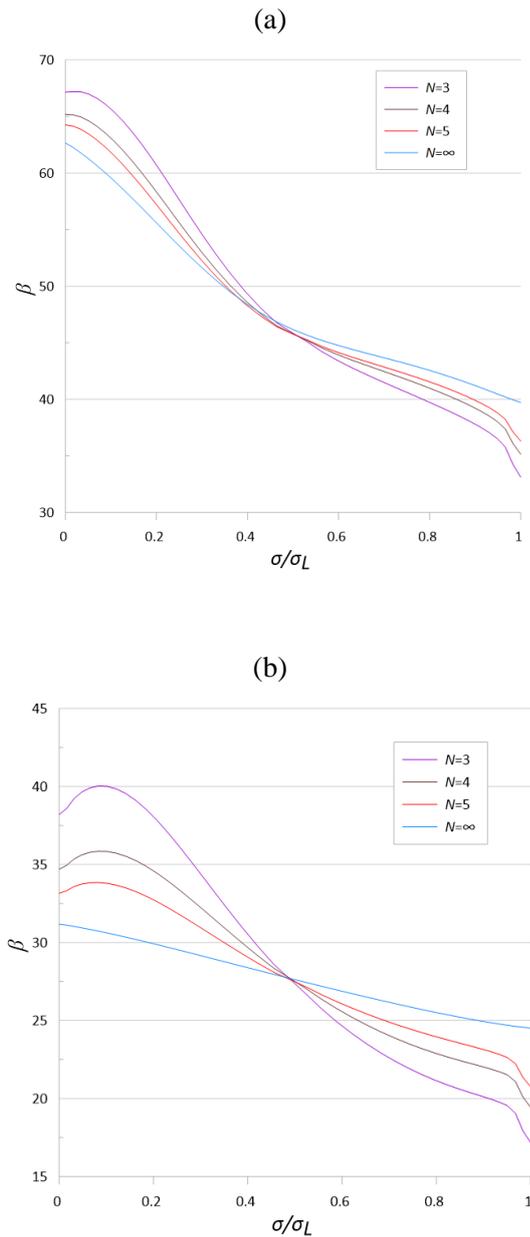


Figura 4.8: Vistas de topo das linhas de esqueleto referentes ao (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá (DMH “B”).

Mesmo para um número pequeno de pás, o efeito do número finito de pás sobre a geometria final das linhas de esqueleto aparenta ser relativamente pequeno, porém não deve ser desprezado. Para melhor visualizar esse efeito, a Fig. 4.9 mostra os correspondentes ângulos de inclinação das linhas de esqueleto,  $\beta$ , medido em graus, em função da coordenada meridional normalizada.



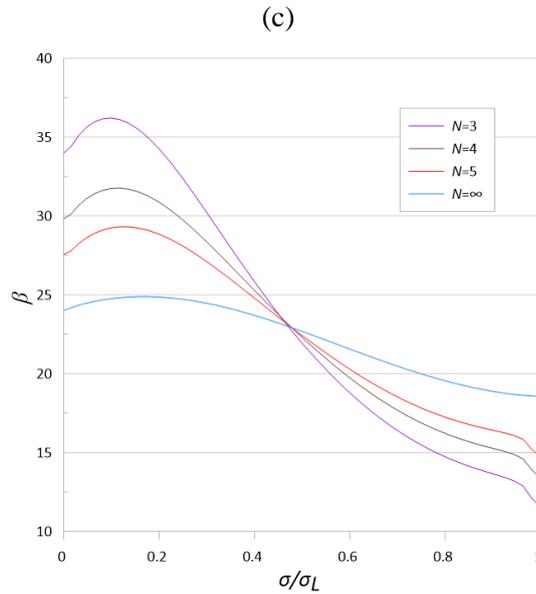
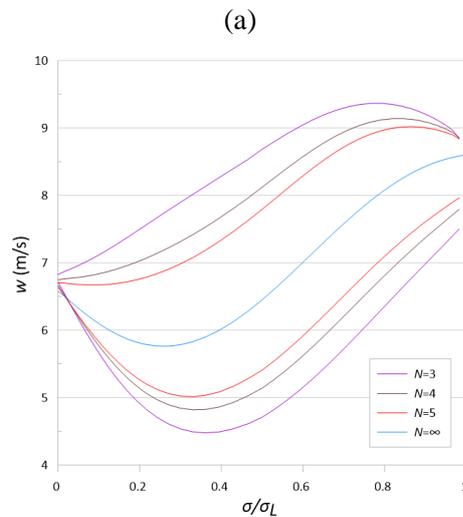


Figura 4.9: Ângulos de inclinação das linhas de esqueleto no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta das pás.

Analisando os resultados de  $\beta$ , a influência do número finito de pás fica mais evidente, especialmente na ponta da pá – uma diferença de cerca de 10 graus na entrada do rotor ocorre entre o caso de  $N = 3$  e  $N = \infty$ . Mesmo em regiões onde ocorrem pequenas variações na geometria – próximo à metade do canal do rotor (local onde os perfis são empilhados) – grandes variações hidrodinâmicas podem acontecer. A metodologia inversa é capaz de capturar esse efeito, que é de grande importância para se projetar pás de turbomáquinas axiais.

Os resultados correspondentes das velocidades relativas ao redor das pás são mostrados na Fig. 4.10.



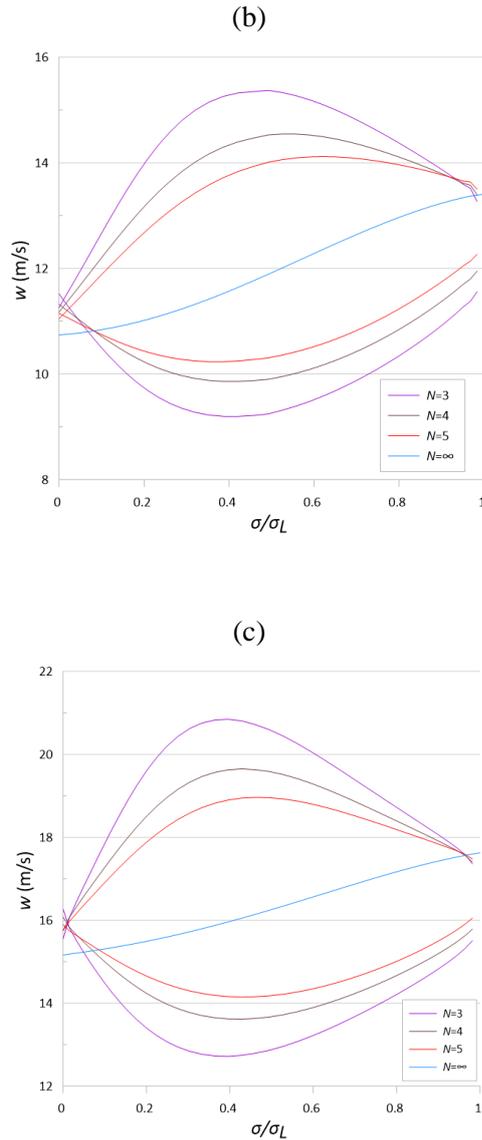


Figura 4.10: Campos de velocidades relativas referentes ao (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá.

Como esperado, o carregamento cresce do cubo à ponta da pá – as diferenças das velocidades relativas entre os lados de sucção e pressão das pás experimentadas na ponta (Fig. 4.10c) são maiores do que aquelas no cubo (Fig. 4.10a) –, em concordância com a DMH. Além disso, nas proximidades da saída do rotor há uma diferença significativa entre as velocidades dos lados de sucção e pressão, de maneira que o carregamento hidrodinâmico na região do bordo de fuga pode ser considerado excessivo. Entretanto, esse comportamento é consistente com a variação abrupta da DMH “B”, como já mencionado. Apenas para ilustrar esse efeito, a Fig. 4.11 mostra um comparativo das velocidades relativas referentes às DMH’s “A” e “B”, para o caso  $N = 3$ . Linhas tracejadas e contínuas permanecem referindo-se às DMH “A” e “B”, respectivamente.

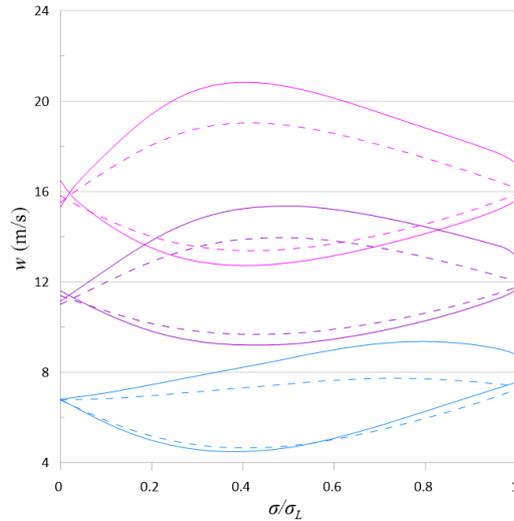


Figura 4.11: Velocidades relativas ao redor da pá no cubo (azul), meio (lilás) e ponta (rosa),  $N = 3$ .

Em toda sua extensão, a pá projetada a partir da DMH “A” é menos carregada do que aquela a partir da DMH “B”, como esperado. Além disso, distribuições que apresentam variações suaves podem ser consideradas mais apropriadas.

Como o comportamento da distribuição de momento hidráulico e da componente circunferencial da velocidade absoluta relacionam-se, para efeito de verificação, são calculadas as velocidades  $V_\theta$ , segundo as seguintes equações.

$$W_\theta = W \cos \beta \quad (4.2)$$

$$V_\theta = u - W_\theta \quad (4.3)$$

Onde  $u$  é a velocidade tangencial do escoamento, devido rotação da máquina. É dada por  $u = \omega r$ .

Os resultados das velocidades  $V_\theta$ , ao redor das pás nas correspondentes seções da Fig. 4.8, são mostrados na Fig. 4.12.

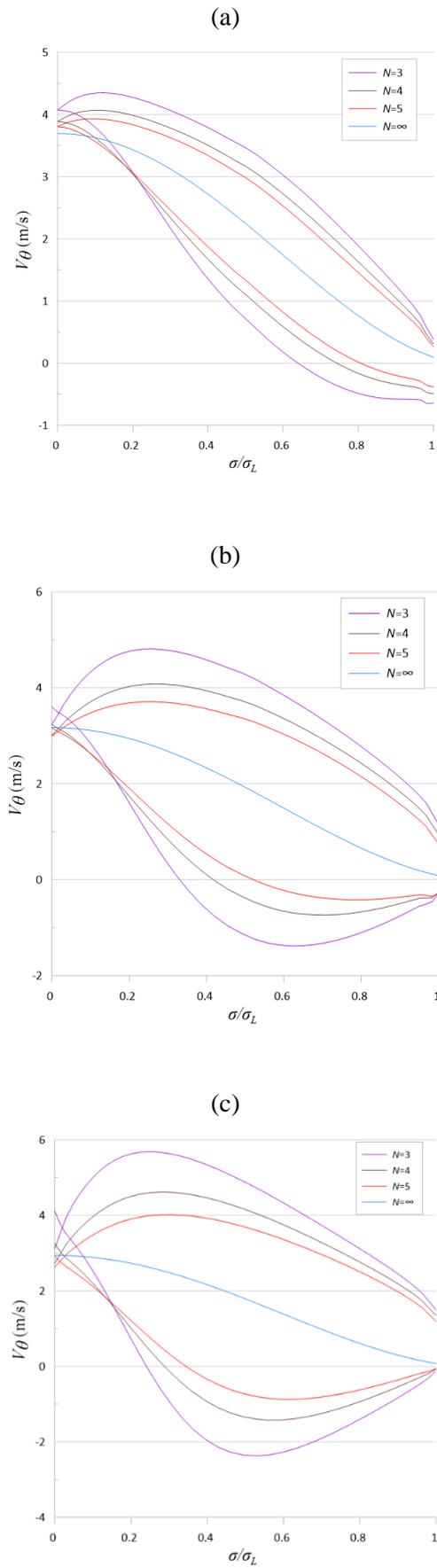


Figura 4.12: Componente circunferencial da velocidade absoluta no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá.

A componente circunferencial da velocidade,  $V_\theta$ , apresenta maiores valores no lado de pressão da pá, ao contrário da velocidade relativa. Em geral, as médias das velocidades  $V_\theta$  calculadas a partir dos resultados do problema pá-a-pá apresentam valores próximos do caso  $N = \infty$ . Note que, como as velocidades meridionais assumem valores diferentes nos lados de sucção e pressão das pás, a média da componente  $V_\theta$  ponderada pela vazão volumétrica é que deve corresponder à distribuição de momento hidráulico requerida.

A Fig. 4.13 ilustra o triângulo de velocidades em um ponto da pá nos lados de sucção e pressão – vetores indicados em azul e lilás (nomenclatura com sobrescrito “ ’ ”), respectivamente.

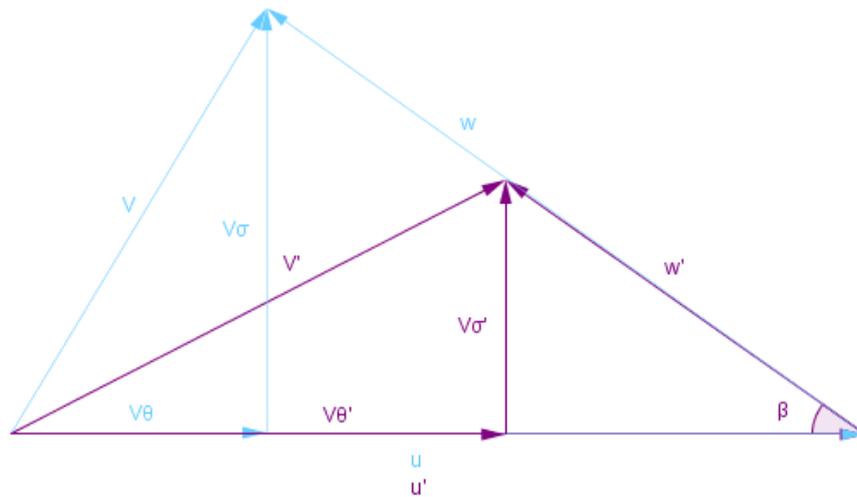


Figura 4.13: Triângulo de velocidades ilustrativo para os lados de sucção e pressão da pá.

Dos resultados obtidos através do problema pá-a-pá inverso, é importante pontuar. (1) À medida em que se aumentam o número de pás, os resultados tendem à solução conceitual de número infinito de pás. (2) De modo geral, a média das velocidades calculadas para um número finito de pás aproxima-se do caso  $N = \infty$ , havendo maiores divergências em regiões onde a diferença entre os ângulos das pás e das superfícies médias do escoamento,  $S_{2m}$ , são maiores.

Determinadas as geometrias das linhas de esqueleto das pás, respeitando uma dada distribuição de momento hidráulico para o caso de número finito de pás, as linhas de arqueamento são engrossadas com distribuições de espessura adotadas convenientemente.

## 4.2 EFEITO DA ESPESSURA

As distribuições de espessuras adotadas foram baseadas no projeto de Souza (1989), em que foram utilizados perfis Goettingem. Como neste trabalho as linhas de arqueamento são determinadas através do método inverso pá-a-pá, por conveniência, foi utilizada a distribuição de espessuras dos perfis NACA 4 dígitos para o espessamento – a construção dos perfis Goettingem são realizadas por meio de coordenadas base dos lados de sucção e pressão do perfil, ou seja, a linha de arqueamento é um resultado, enquanto que os perfis NACA são construídos por meio de uma distribuição de espessura que deve ser aplicada nos pontos da linha de arqueamento. A distribuição de espessura total é dada por:

$$e = \frac{e_{max}}{0,20} (0,29648\sqrt{x} - 0,12642x - 0,35202x^2 + 0,28388x^3 - 0,10192x^3) \quad (4.4)$$

onde  $x$  é a coordenada natural da corda, e  $e_{max}$ , a máxima espessura - ocorre à 30% da corda assim como nos perfis Goettingem. Por se tratar de uma máquina de fluxo axial, optou-se por espessar as linhas de arqueamento no plano transformado da grade. As espessuras máximas utilizadas por Souza (1989) foram mantidas. Note-se que os coeficientes da Eq. (4.4) não são exatamente aqueles referentes à distribuição de espessuras dos perfis NACA 4 dígitos. Um fator de correção foi adotado para que o perfil fechasse no bordo de fuga.

A Fig. 4.14 mostra as distribuições de espessuras correspondentes às linhas de arqueamento da Fig. 4.8.

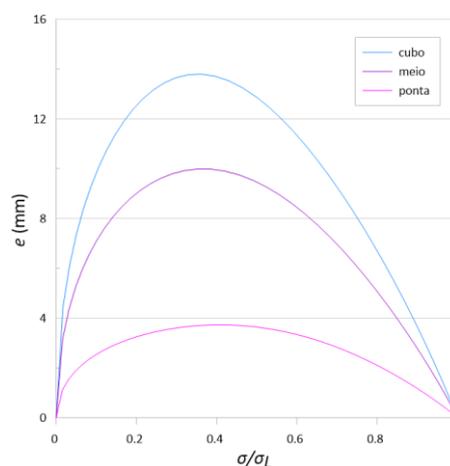
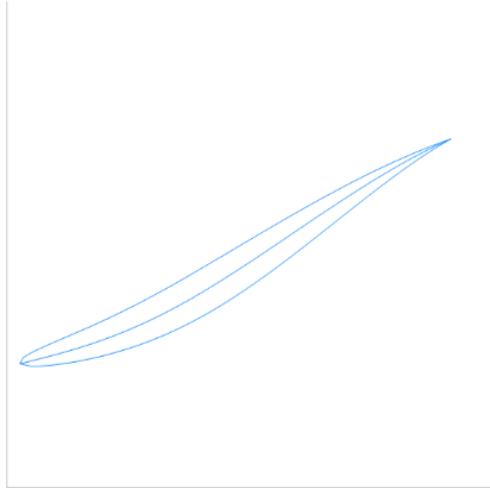


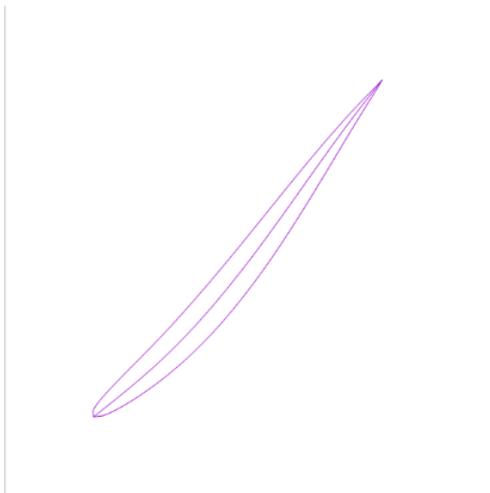
Figura 4.14: Distribuições de espessuras dos perfis NACA 4 dígitos adotados.

A Fig. 4.15 mostra as linhas de esqueleto e os perfis correspondentes para o caso  $N = 4$ .

(a)



(b)



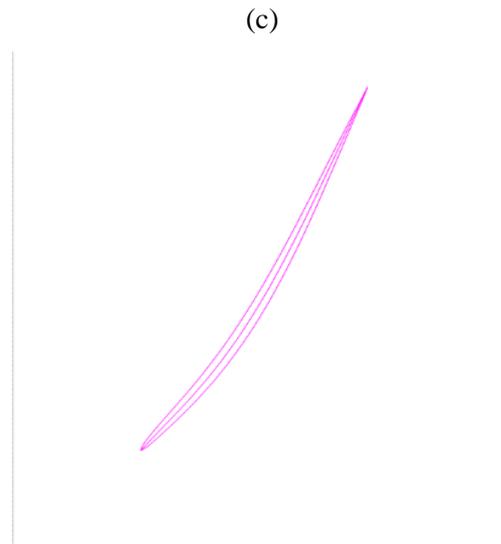
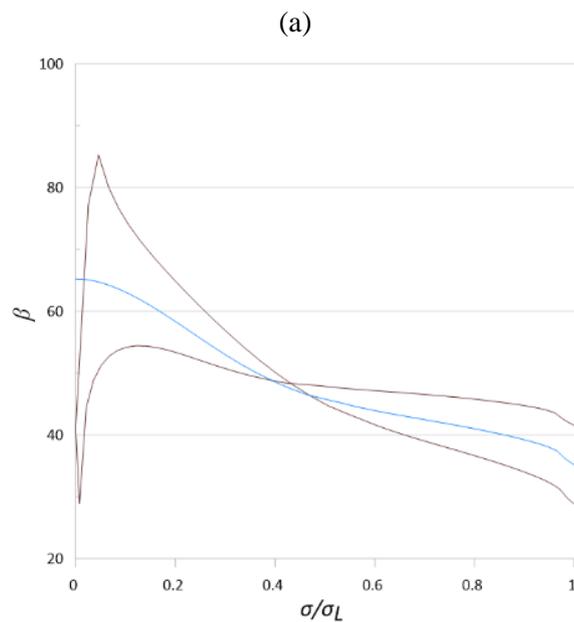


Figura 4.15: Vista de topo dos perfis no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá,  $N = 4$ .

As seções mais próximas do cubo apresentam perfis mais espessos do que aquelas na região da carcaça. Assim, é de se esperar que efeitos das distribuições de espessuras sejam mais acentuados em regiões próximas do cubo. Além disso, essa região é onde os menores espaçamentos entre as pás ocorrem.

A Fig. 4.16 mostra os resultados correspondentes dos ângulos  $\beta$  de inclinação dos perfis e das linhas de arqueamento - linhas em marrom e azul, respectivamente.



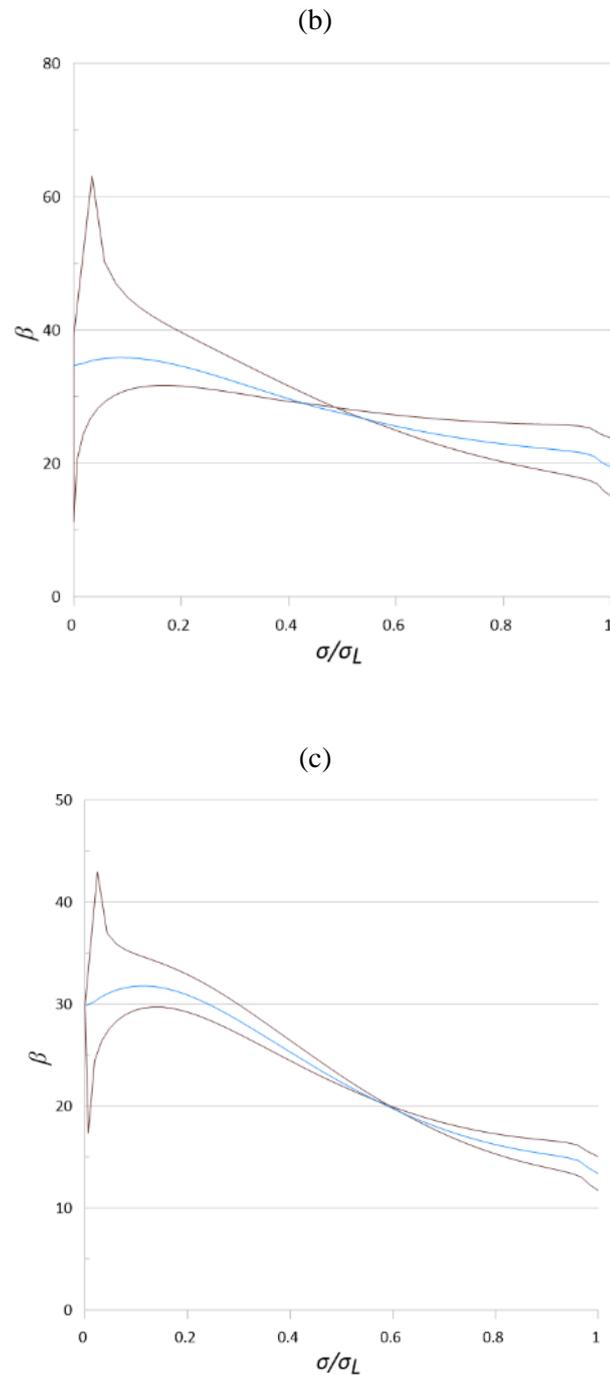


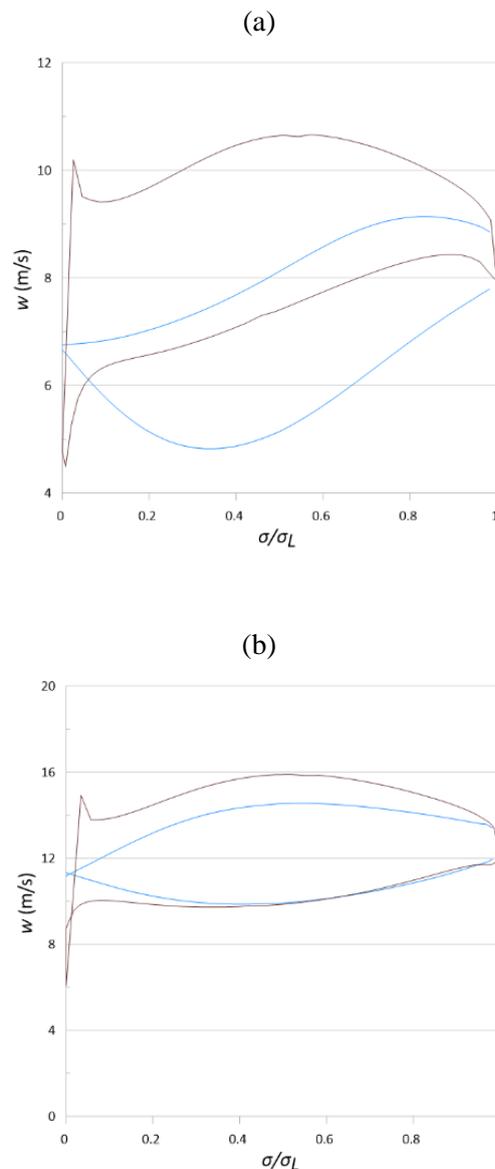
Figura 4.16: Ângulos de inclinação dos perfis no (a) cubo, no (b) meio e na (c) ponta da pá,  $N = 4$ .

A distribuição de espessuras faz com que haja uma diferença de ângulos entre os lados de sucção e pressão das pás. Essa variação é mais evidente no bordo de ataque, especialmente no cubo – uma diferença de cerca de 65 graus entre os lados de sucção e pressão. Isso ocorre devido às grandes variações da espessura na região. Entretanto, de

maneira geral, a média entre os ângulos dos lados de sucção e pressão dos perfis seguem o comportamento da inclinação das linhas de esqueleto.

Definidas as distribuições de espessuras, pode-se solucionar o problema pá-a-pá novamente, agora de maneira direta, considerando o correspondente espessamento das linhas de arqueamento calculadas pela metodologia inversa. A solução é obtida através do método dos painéis baseado em distribuições lineares de vórtices. As velocidades incidentes são as mesmas do método inverso.

A Fig. 4.17 mostra um comparativo entre os resultados correspondentes das velocidades relativas ao redor das pás para os casos com e sem espessura (curvas em marrom e azul, respectivamente).



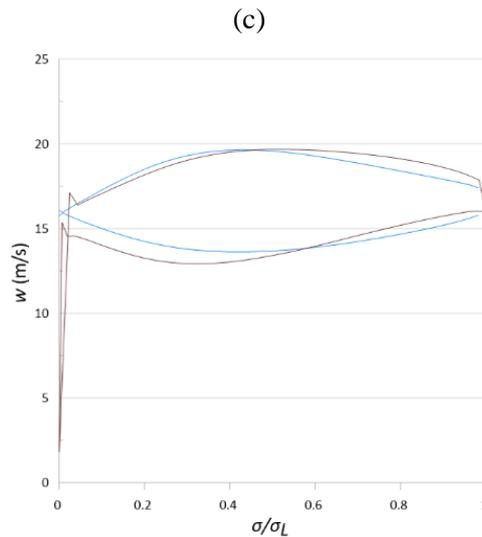


Figura 4.17: Velocidades relativas ao redor da pá no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá ( $N = 4$ ).

Como esperado, há uma grande influência do efeito da espessura sobre o escoamento, em especial na entrada do rotor e em toda extensão do cubo. No bordo de ataque, os perfis com espessura são capazes de captar um ponto de estagnação - as velocidades relativas tendem a zero. Esse importante efeito físico não era verificado sem considerar as distribuições de espessuras. Além disso, as velocidades relativas apresentam maiores valores em toda extensão da pá, em especial no cubo - excetuando a região de entrada da ponta da pá.

Como a geometria das pás são determinadas através da metodologia pá-a-pá inversa, onde efeitos da espessura são desconsiderados, é interessante que se verifique a influência das espessuras dos perfis sobre as distribuições de momentos hidráulicos requeridos. A Fig. 4.18 mostra o comparativo entre os resultados correspondentes do problema pá-a-pá inverso e direto para  $V_\theta$ .

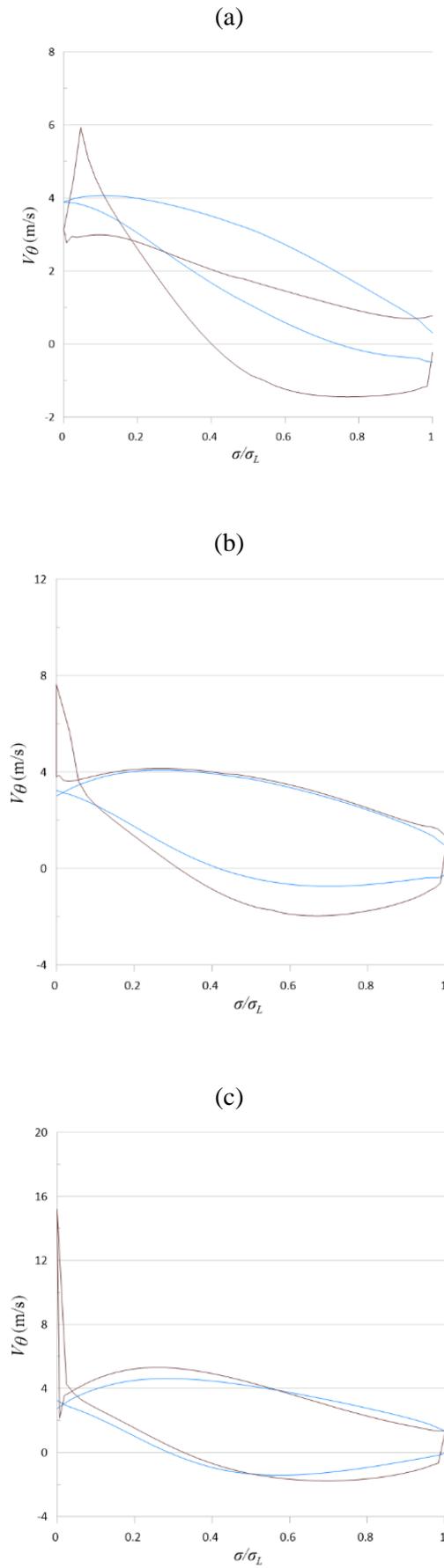


Figura 4.18: Componente circunferencial da velocidade absoluta ao redor das pás no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.

As distribuições da componente circunferencial da velocidade absoluta,  $V_\theta$ , sofre grande influência da espessura no cubo e na região de entrada do rotor. Entretanto, esse efeito passa a ser relativamente pequeno nas demais regiões, visto que a turbina em questão possui poucas pás cujas espessuras são relativamente pequenas em regiões mais afastadas do cubo.

O efeito da espessura aqui analisado pode ser entendido como um bloqueio localizado do canal das superfícies de escoamento  $S_1$ . Assim, o efeito sobre uma determinada superfície (por exemplo, a referente ao cubo), não influencia no escoamento das demais (por exemplo, a da carcaça). Dessa forma, para todas as superfícies  $S_1$ , o escoamento é acelerado na direção meridional. Além disso, outro importante efeito da espessura é a diferença dos ângulos das pás entre os lados de pressão e sucção, como já visto.

Além desse efeito de bloqueio localizado, a inclusão das distribuições de espessuras também apresenta um efeito global na máquina. Esse efeito pode ser analisado no problema meridional. Definidas as distribuições de espessuras e o número de pás da turbina, pode-se calcular o bloqueio correspondente do canal meridional. Esse efeito é denominado aqui de “bloqueio sobre o escoamento meridional” e será discutido a seguir.

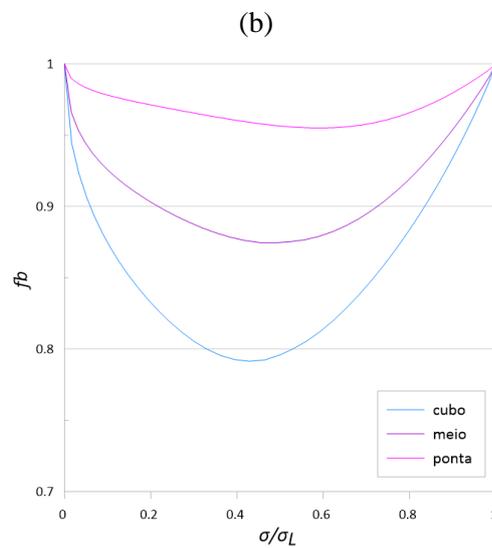
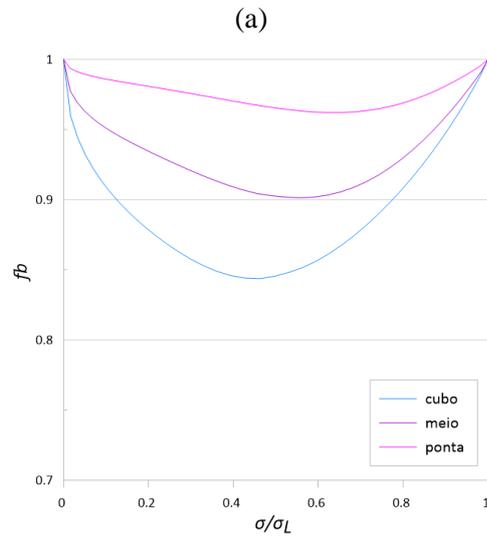
### 4.3 EFEITO DO BLOQUEIO SOBRE O ESCOAMENTO MERIDIONAL

Uma única distribuição de espessura foi considerada (Fig. 4.14), entretanto testadas para os casos  $N = 3, 4$  e  $5$  e comparadas com o caso  $N = \infty$ . É importante pontuar que os resultados do problema meridional não dependem do número de pás quando se despreza o bloqueio. Porém, como o bloqueio depende do número de pás, quando considerado, o problema meridional passa a depender do número de pás também, o que faz com que haja uma relação de interdependência entre os problemas pá-a-pá e cubo-carcaça.

Os fatores de bloqueio correspondentes à cada caso são denominados  $fb_3, fb_4, fb_5$  e  $fb_\infty$ , respectivamente. São calculados como se segue.

$$fb = 1 - \frac{e N}{2\pi r \operatorname{sen}(\beta)} \quad (4.5)$$

O fator de bloqueio pode ser entendido como a relação entre o comprimento livre e o comprimento total (livre mais bloqueado), do canal da turbina na direção circunferencial. Assim, quanto menor o  $fb$ , maior será o efeito do bloqueio. A Fig. 4.19 mostra os resultados dos  $fb$ 's para os casos  $N = 3, 4$  e  $5$ .  $fb_{\infty} = 1$  para toda extensão da pá.



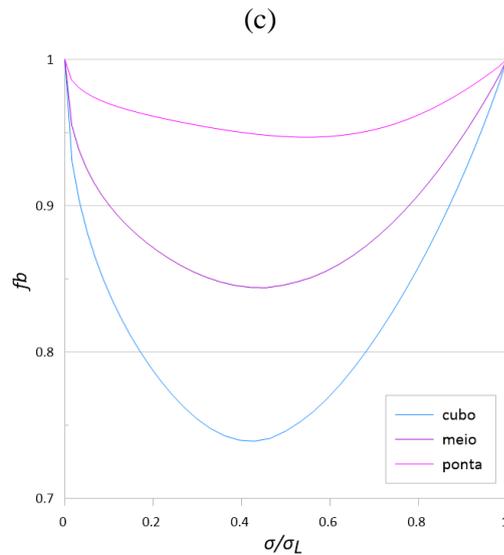


Figura 4.19: Fator de bloqueio (a)  $fb_3$ , (b)  $fb_4$  e (c)  $fb_5$ .

Como esperado, os menores valores de  $fb$  estão associados ao caso  $N = 5$ . Além disso, para todos os casos,  $fb = 1$  nos bordos de ataque e de fuga, visto que as distribuições de espessuras são nulas na entrada e na saída do rotor.

A Fig. 4.20 mostra um comparativo entre os resultados das linhas de corrente, vistas do plano meridional.

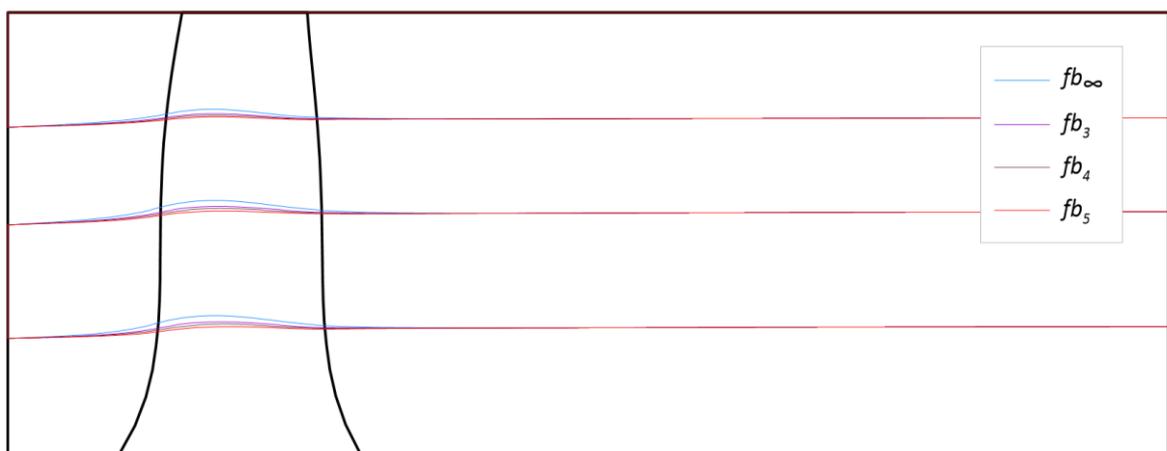
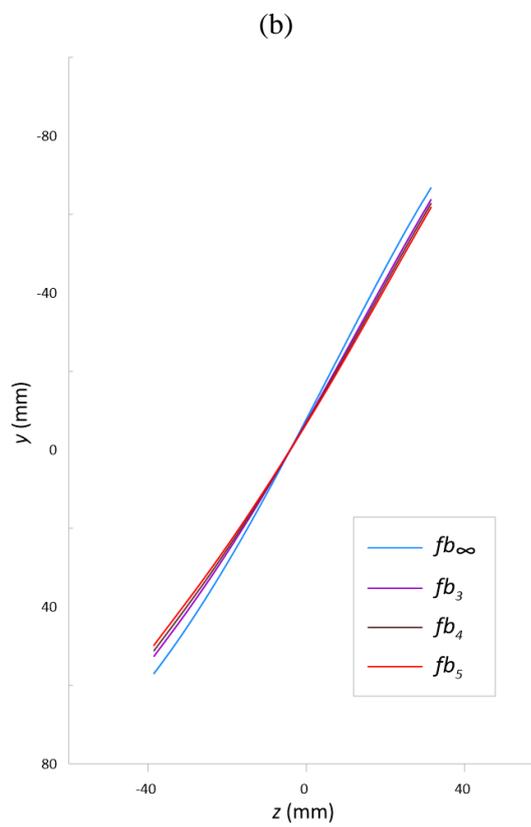
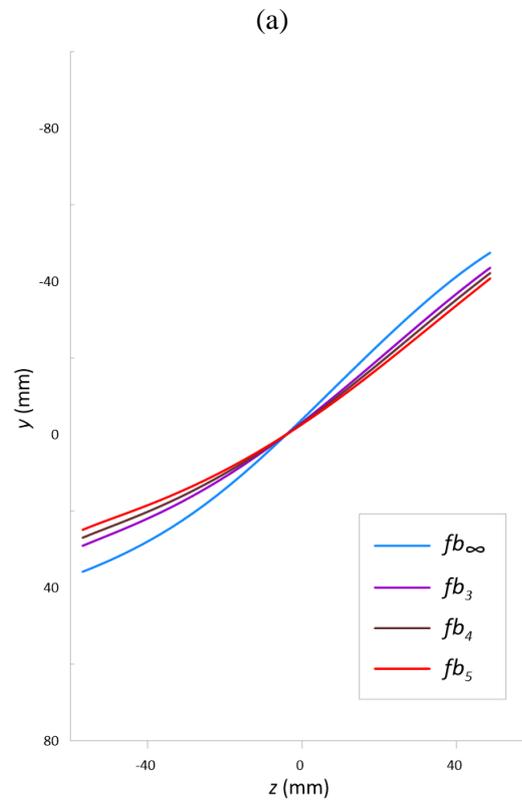


Figura 4.20: Linhas de corrente vistas do plano meridional.

A principal diferença entre os resultados se dá quando o escoamento passa pelo rotor. Quanto maior o bloqueio, menor é o deslocamento das linhas de corrente na direção radial. Note que os resultados das linhas de corrente são mais sensíveis ao efeito do bloqueio do que à DMH (Fig. 4.2). Nas regiões mais afastadas do rotor, os resultados tendem a se igualar.

A Fig. 4.21 mostra os resultados das linhas de curvatura das superfícies  $S_{2m}$  em seções no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.



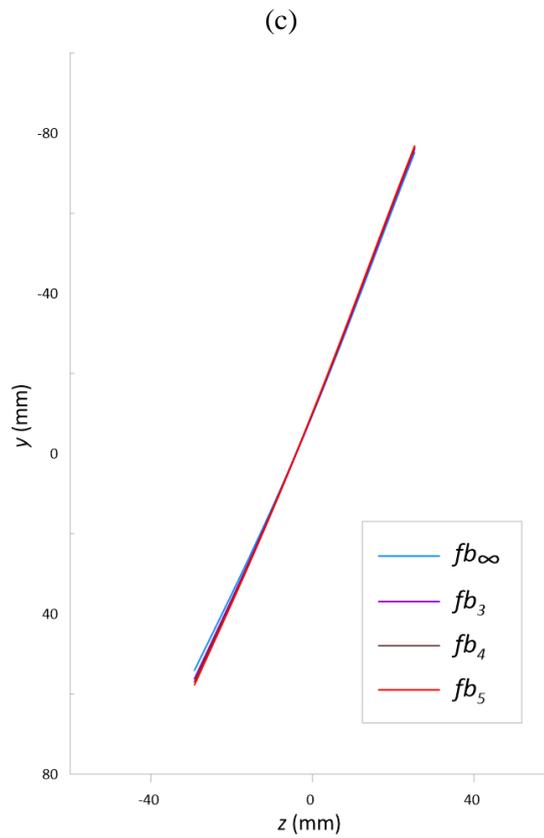
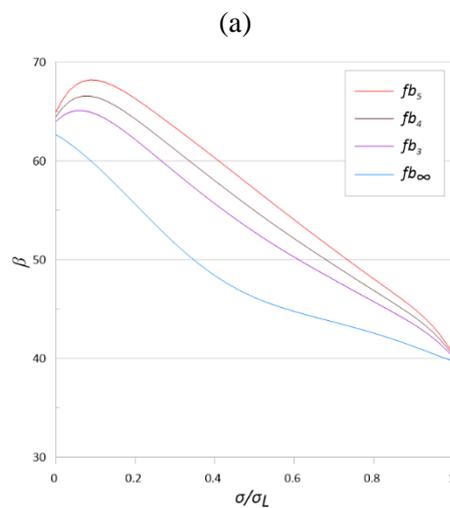


Figura 4.21: Vista de topo das linhas de curvatura das superfícies  $S_{2m}$  no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.

O efeito do bloqueio sobre a geometria das superfícies  $S_{2m}$  aparenta ser pequeno, mas aparece de maneira mais pronunciada na região próxima do cubo. Os correspondentes ângulos de inclinação das linhas de curvatura,  $\beta$ , em graus, são mostrados na Fig. 4.22 em função da coordenada meridional normalizada.



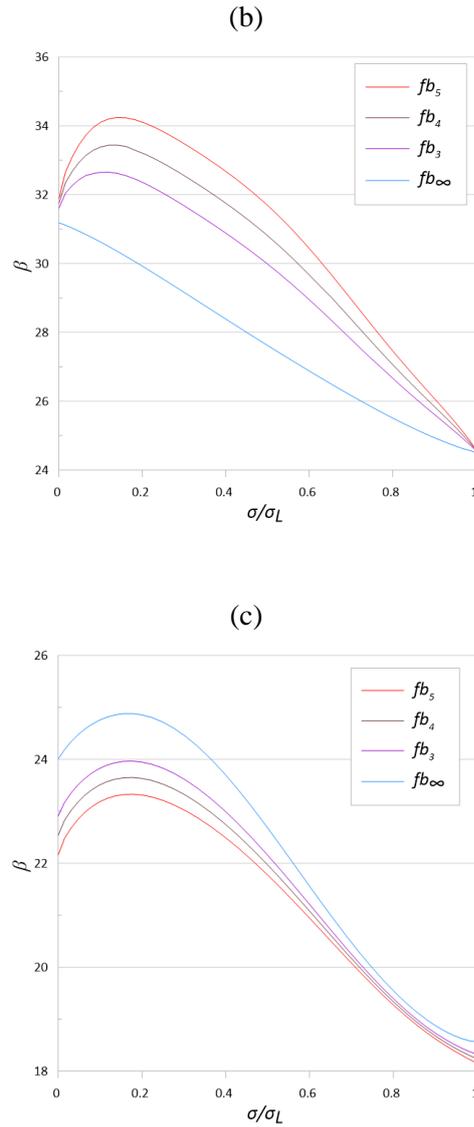


Figura 4.22: Ângulos de inclinação das linhas de curvatura das superfícies  $S_{2m}$  no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.

Agora, a influência do bloqueio aparece de forma mais clara, especialmente no cubo – uma diferença de cerca de 15 graus na metade do rotor.

A Fig. 4.23 mostra o resultado da velocidade meridional ao longo das linhas de corrente correspondentes.

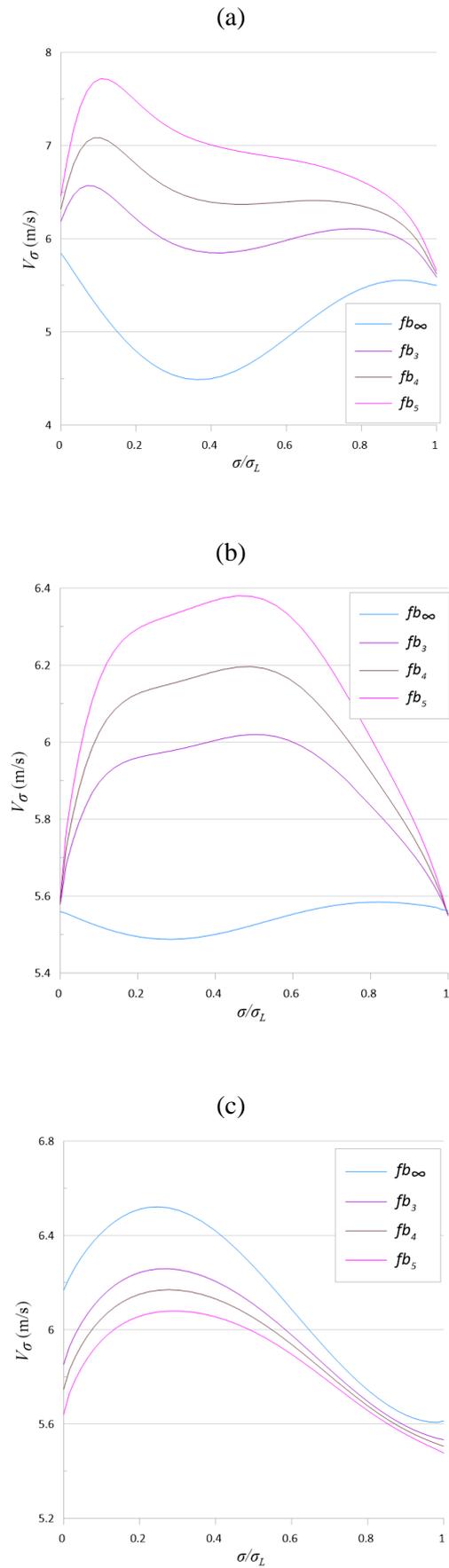
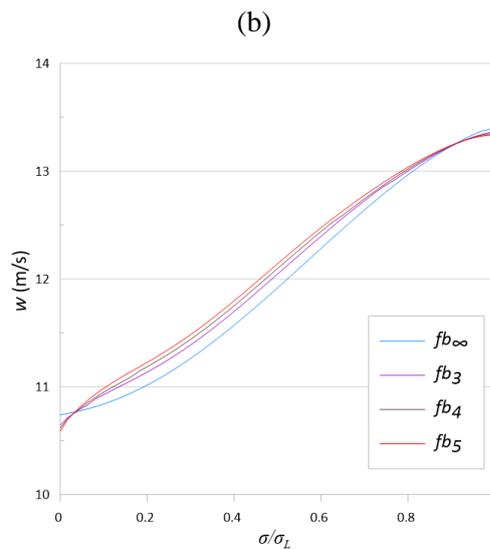
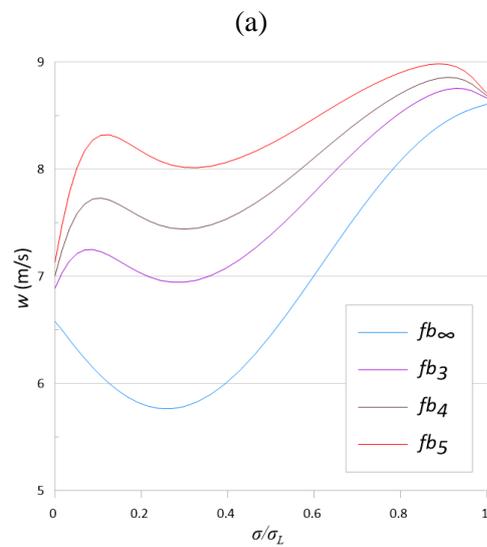


Figura 4.23: Velocidades meridionais no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.

As variações da velocidade meridional são consistentes com os deslocamentos radiais das linhas de corrente (Fig. 4.20). Na região do rotor, com relação ao cubo, quanto maior o bloqueio, mais as linhas de corrente se aproximam. Assim, a componente meridional da velocidade aumenta. O mesmo efeito, porém, de maneira mais discreta, acontece na região do meio da pá. Já com relação à carcaça, as linhas de corrente afastam-se ao se aumentar o bloqueio. Dessa forma, a velocidade meridional diminui.

Os resultados das variações das velocidades relativas são mostrados na Fig. 4.24.



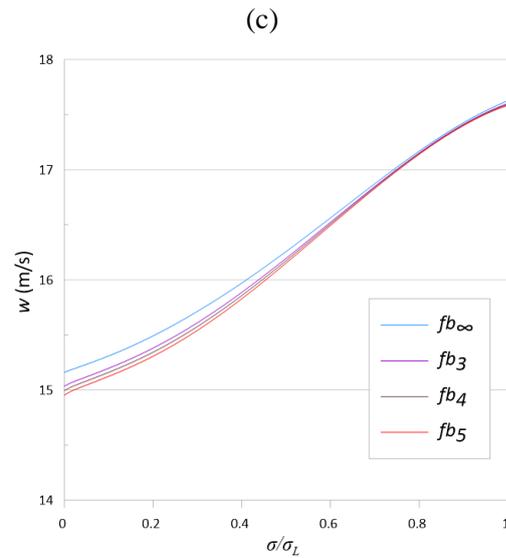


Figura 4.24: Velocidades relativas no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.

Com relação ao cubo, região onde ocorrem mesmos momentos hidráulicos, mesmas velocidades circunferenciais e maiores velocidades meridionais, quanto maior o bloqueio, mais as velocidades relativas aumentam. Já com relação à ponta, como a velocidade meridional diminui, a velocidade relativa acompanha esse comportamento. Ocorre algo semelhante ao ilustrado nas Figs. 4.25 e 4.26 com o triângulo de velocidades no cubo e na ponta, respectivamente. As componentes dos vetores em azul correspondem ao caso sem bloqueio. Lilás, com bloqueio.

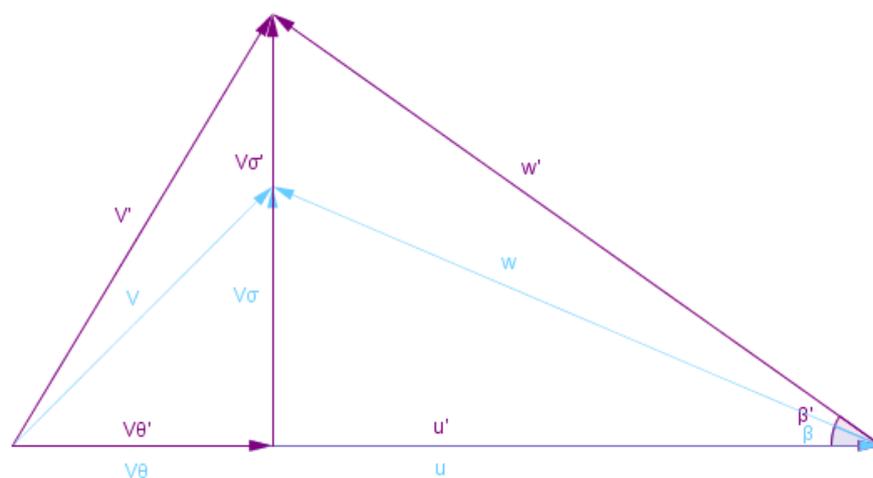


Figura 4.25: Ilustração do triângulo de velocidades no cubo.

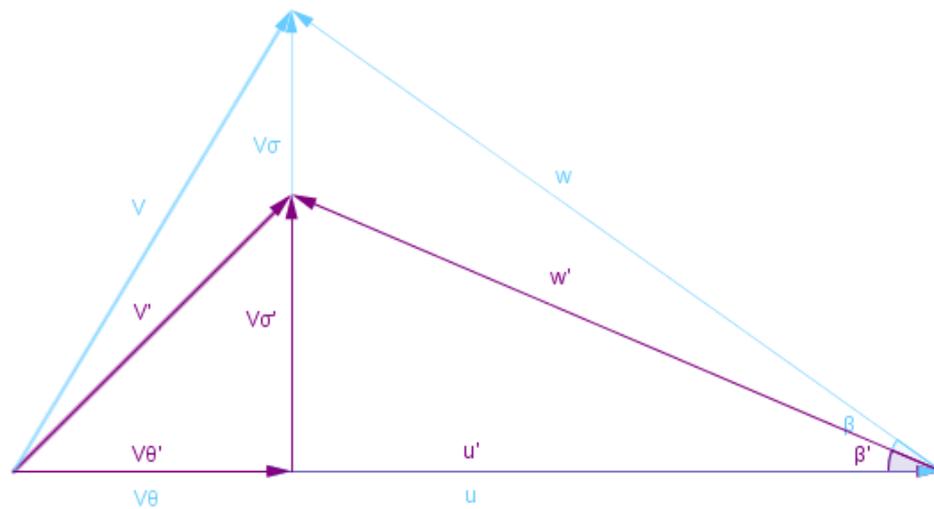


Figura 4.26: Ilustração do triângulo de velocidades na ponta.

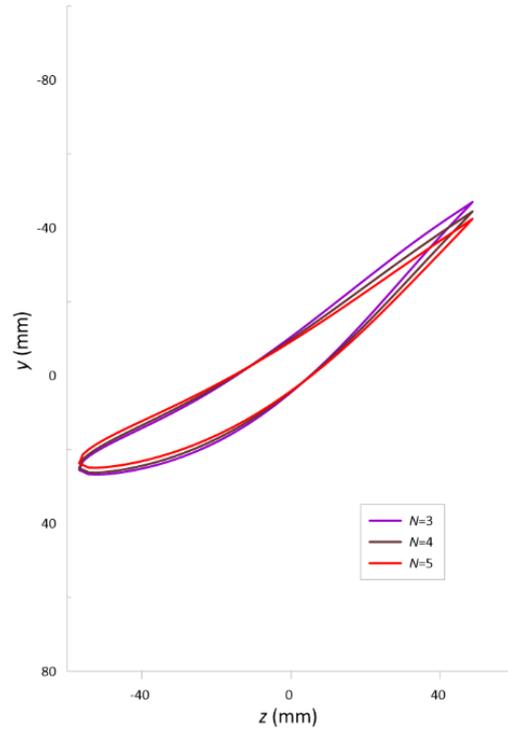
Como já comentado, com a inclusão dos efeitos de espessura e bloqueio, a metodologia meridional e pá-a-pá passam a ser acopladas. Para cada caso, solucionam-se os problemas pá-a-pá inverso e direto. Os efeitos de número finito de pás, espessura e bloqueio são analisados simultaneamente.

#### 4.4 EFEITOS COMBINADOS DE NÚMERO FINITO DE PÁS, ESPESSURA E BLOQUEIO

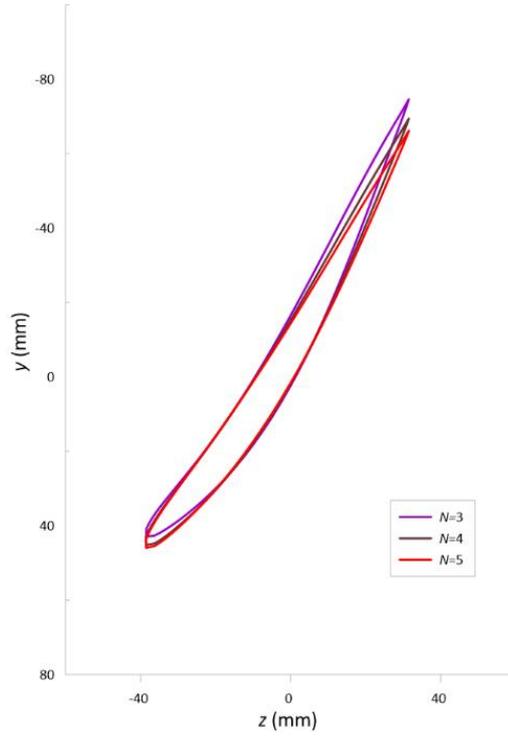
Após solução do problema meridional, agora levando em consideração um bloqueio (associado à uma determinada distribuição de espessuras e número finito de pás), resolve-se novamente o problema pá-a-pá inverso e direto.

A Fig. 4.27 mostra os resultados das geometrias dos perfis para os casos  $N = 3, 4$  e  $5$ .

(a)



(b)



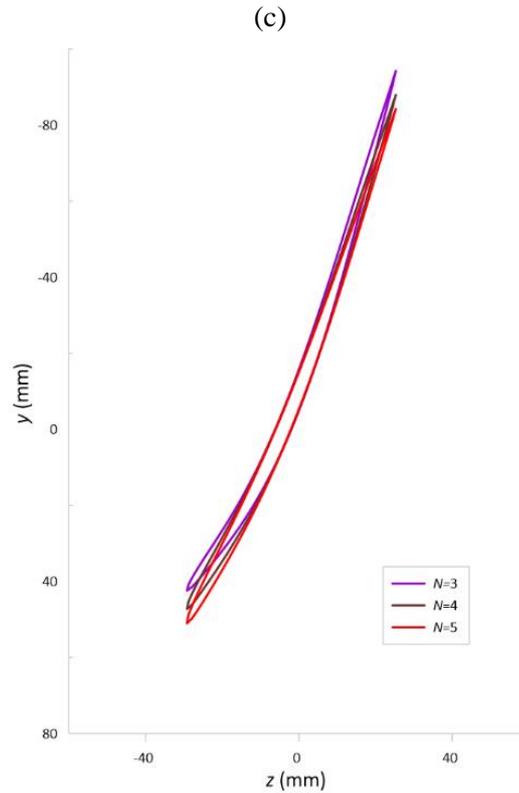
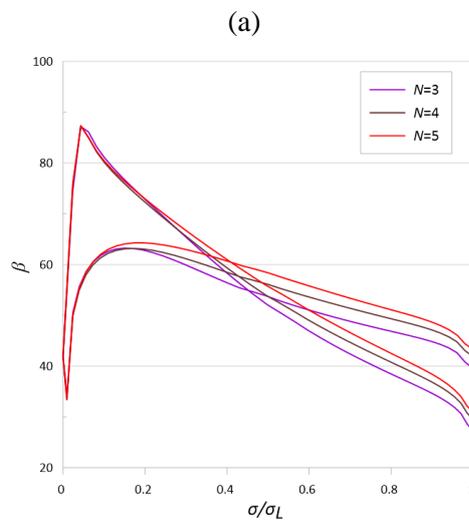


Figura 4.27: Vista de topo das geometrias das pás no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.

Mesmo com a combinação de todos os efeitos analisados anteriormente, ainda assim as variações na geometria das pás aparentam ser pequenas, mas de maneira mais pronunciada na região da carcaça.

Os correspondentes ângulos de inclinação das pás,  $\beta$ , medido em graus, são mostrados na Fig. 4.28 em função da coordenada meridional normalizada.



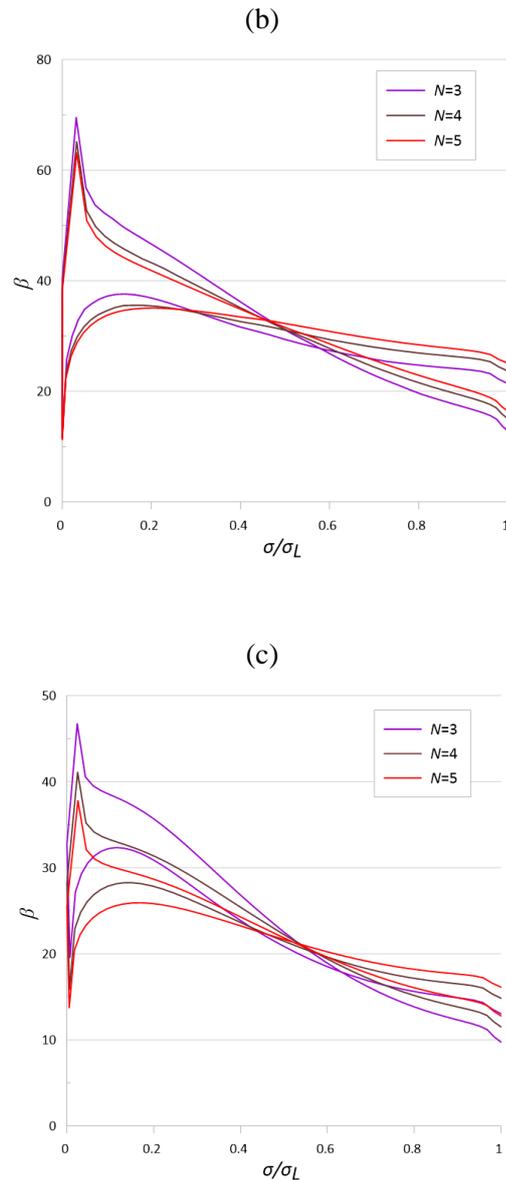


Figura 4.28: Ângulos de inclinação dos perfis no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá.

Nas regiões mais afastadas do cubo, o efeito do número finito de pás sobre os resultados das geometrias acaba prevalecendo. Quanto menor o número de pás, maiores são os ângulos dos perfis da entrada do rotor até próximo à região de empilhamento dos perfis (metade do rotor). A partir daí são menores, até a saída do rotor. Esse efeito é contrabalanceado na região de entrada do rotor no cubo, devido ao bloqueio, visto que quanto maior o bloqueio (mais pás), maiores são os ângulos  $\beta$ .

A Fig. 4.29 mostra os resultados das velocidades relativas correspondentes.

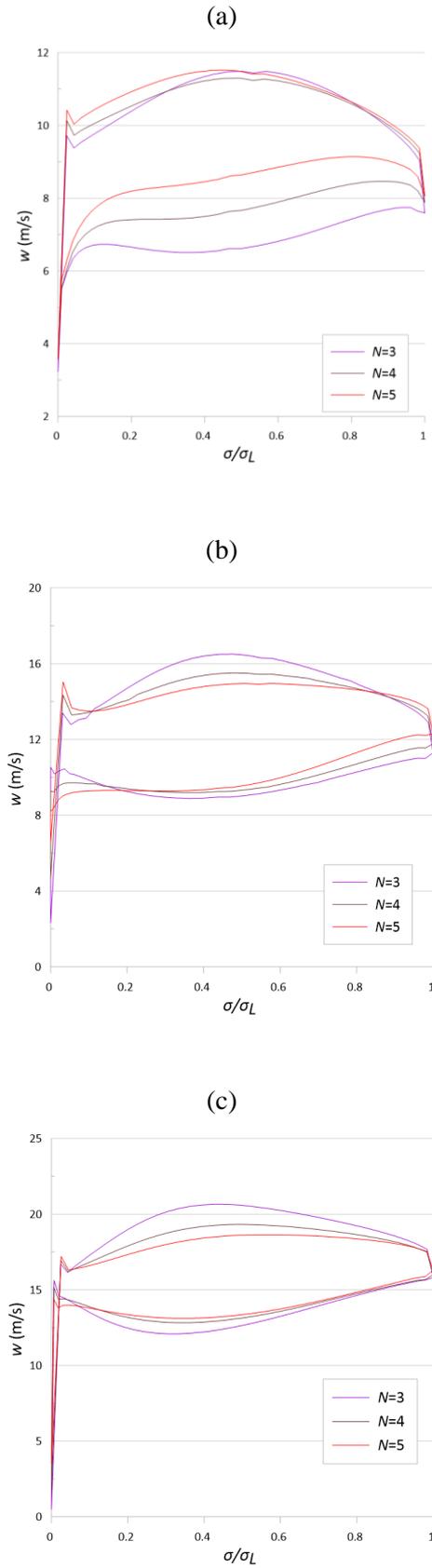


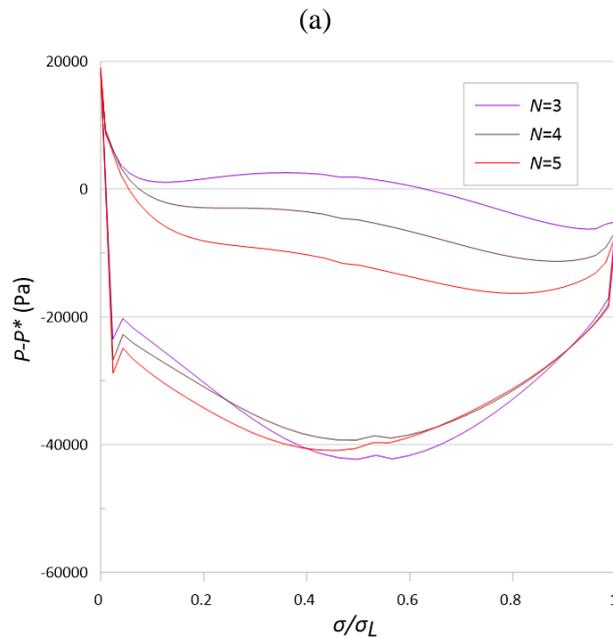
Figura 4.29: Velocidades relativas no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá.

Em toda extensão da pá, o carregamento diminui à medida em que se aumentam o número de pás, devido ao efeito do número finito de pás. Com relação ao cubo, quanto maior o efeito do bloqueio, mais o escoamento é acelerado. Assim, as velocidades do lado de sucção das pás acabam sobrepondo-se para os casos analisados, enquanto que as diferenças de velocidades no lado de pressão passam a ser maiores. Já na ponta da pá, o escoamento é desacelerado, havendo uma tendência de sobreposição entre as velocidades do lado de pressão. No lado de sucção, as velocidades passam a ter maiores diferenças. No meio da pá, o efeito do bloqueio não é acentuado.

Os resultados correspondentes dos carregamentos de pressão estática são calculados de acordo com a Eq. de Bernoulli para sistemas rotativos – Eq. (4.6) – e são mostrados na Fig. 4.30:

$$p - p^* = \rho \left[ \frac{(u^2 - w^2) + (w^{*2} - u^{*2})}{2} \right] \quad (4.6)$$

onde o índice “\*” refere-se à entrada do rotor. Nesse caso, as velocidades consideradas foram as provenientes da metodologia meridional.



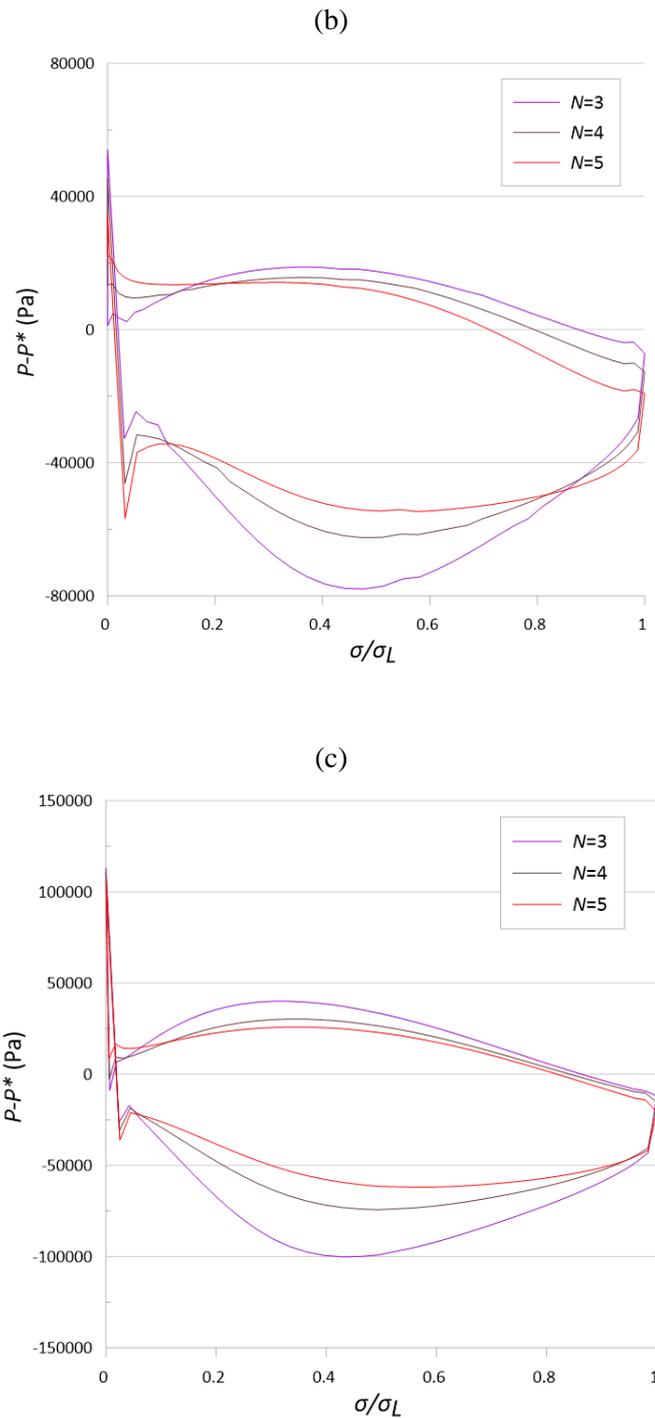


Figura 4.30: Velocidades relativas no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta da pá.

Há consistência entre os resultados de velocidades relativas e das distribuições de pressões. Enquanto que o escoamento é acelerado da entrada até a saída da máquina, a pressão estática diminui, como esperado tratando-se de uma turbina de fluxo axial. Além disso, dos resultados obtidos através da metodologia pá-a-pá, é importante pontuar. *a)* O efeito do número finito de pás tem grande influência na geometria e nos carregamentos hidrodinâmicos das pás;

*b)* as distribuições de espessuras geram importantes alterações nos ângulos do escoamento. Além disso, na entrada do rotor passa a se captar um ponto de estagnação e o escoamento é localmente acelerado nas superfícies de corrente  $S_1$ ; *c)* a partir das distribuições de espessuras, calculam-se os fatores de bloqueio correspondentes. Os problemas pá-a-pá e meridional passam a ser interdependentes.

Apenas para efeito ilustrativo, a Fig. 4.31 mostra o modelo tridimensional do rotor para o caso  $N = 4$  (DMH “B”).

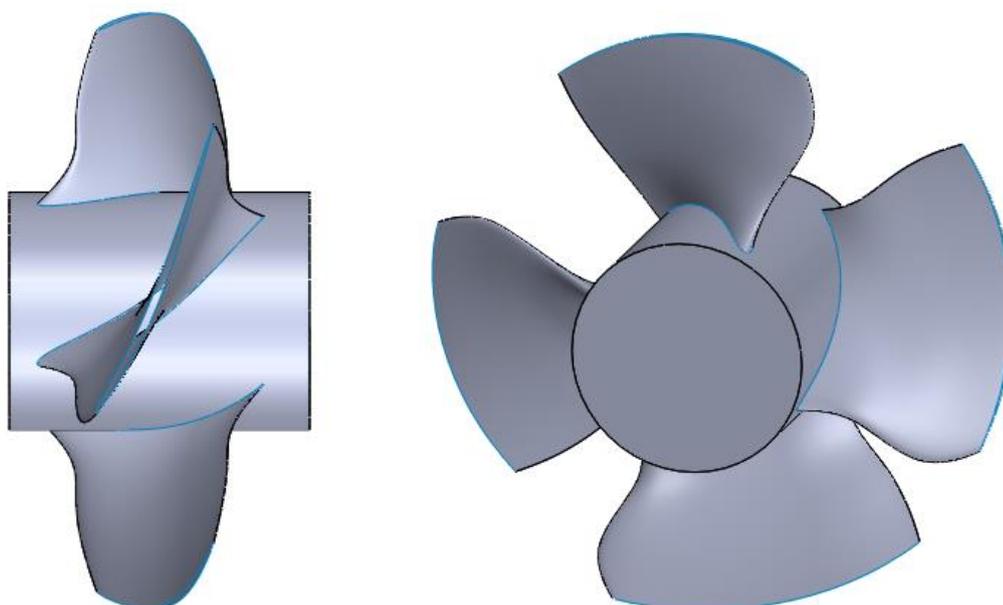


Figura 4.31: Vista lateral e em perspectiva do modelo tridimensional do rotor.

## 4.5 EFEITO DO EMPILHAMENTO DOS PERFIS

Foram testadas duas diferentes disposições da linha de empilhamento dos perfis e comparadas com o empilhamento puramente radial –  $N = 4$  para todos os casos. A coordenada axial da linha de empilhamento foi mantida. Variou-se a posição angular apenas, sendo o deslocamento angular aqui denominado de diedro meridional, medido em graus. As disposições são mostradas na Fig. 4.32, em função do raio, e são identificadas pelo valor do diedro meridional na ponta da pá. Do cubo até o meio da pá as variações no diedro meridional são bem pequenas. Maiores variações ocorrem apenas na região próxima à carcaça.

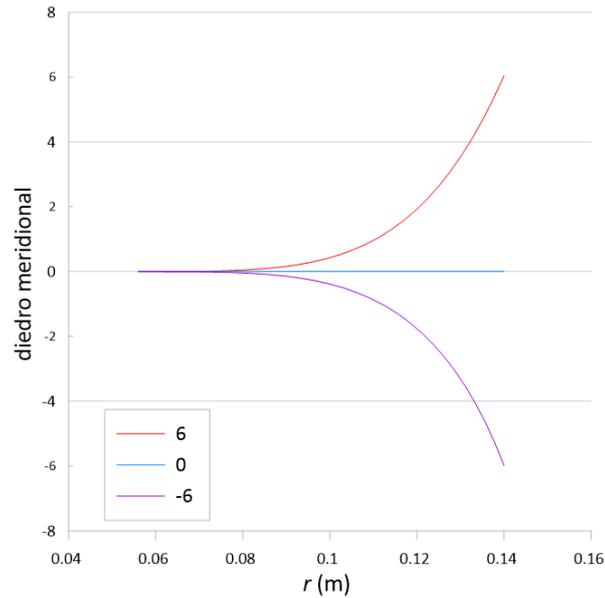


Figura 4.32: Posição angular da linha de empilhamento.

Quando a linha de empilhamento é deslocada no mesmo sentido de rotação da máquina, o diedro é positivo. Negativo, quando no sentido contrário.

A Fig. 4.33 mostra os resultados das linhas de correntes vistas do plano meridional.

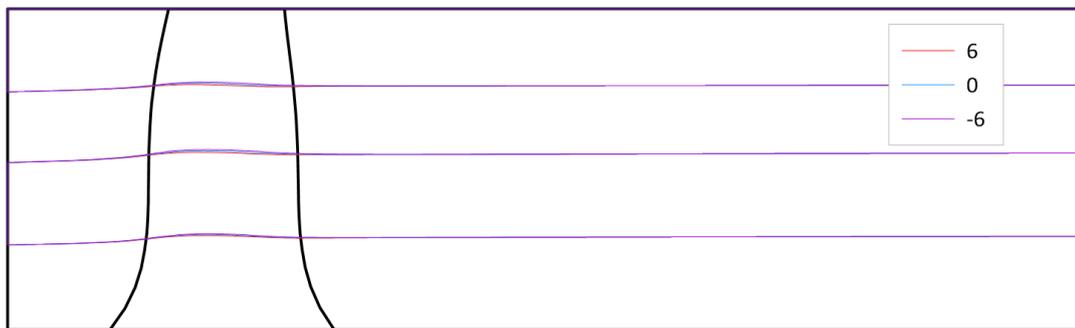
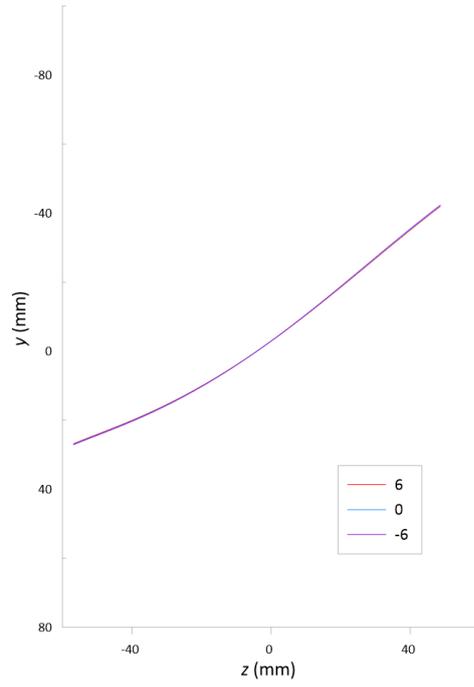


Figura 4.33: Linhas de corrente vistas do plano meridional.

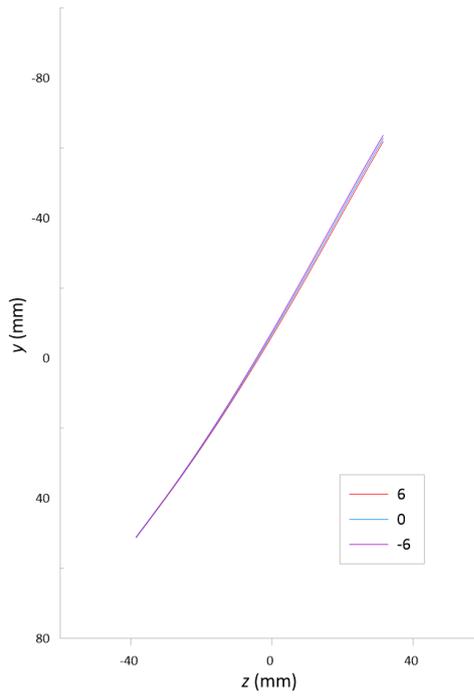
Novamente, a principal diferença entre os resultados se dá quando o escoamento passa pelo rotor. À medida em que os perfis são deslocados no sentido de rotação da máquina, as linhas de corrente sofrem menores deslocamentos radiais.

A Fig. 4.34 mostra os resultados das linhas de curvatura das superfícies  $S_{2m}$  em seções no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.

(a)



(b)



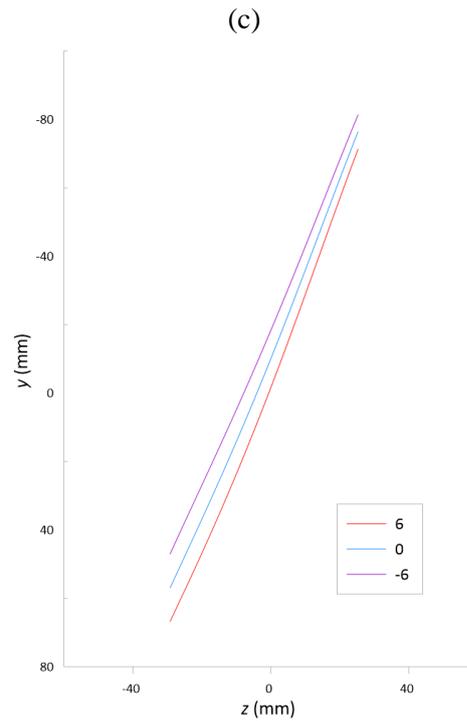
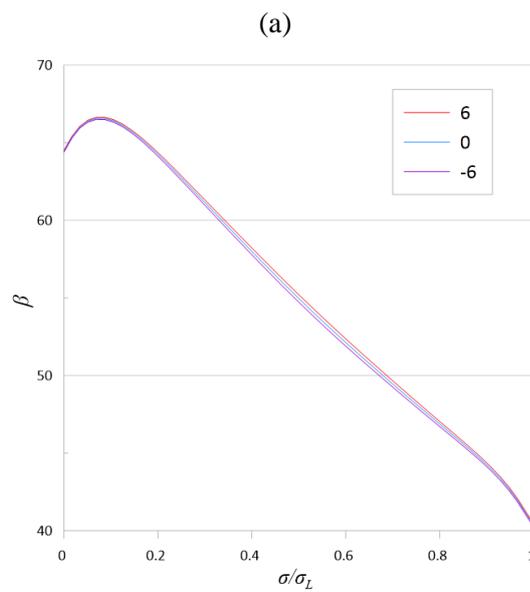


Figura 4.34: Vista de topo das linhas de curvatura das superfícies  $S_{2m}$  no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.

Na região do cubo, onde o diedro é nulo para todos os casos, e até mesmo no meio da pá, os resultados das linhas de curvatura praticamente se sobrepõem. As maiores diferenças acontecem na ponta, como esperado.

A Fig. 4.35 mostra os resultados correspondentes dos ângulos  $\beta$  das linhas de curvatura.



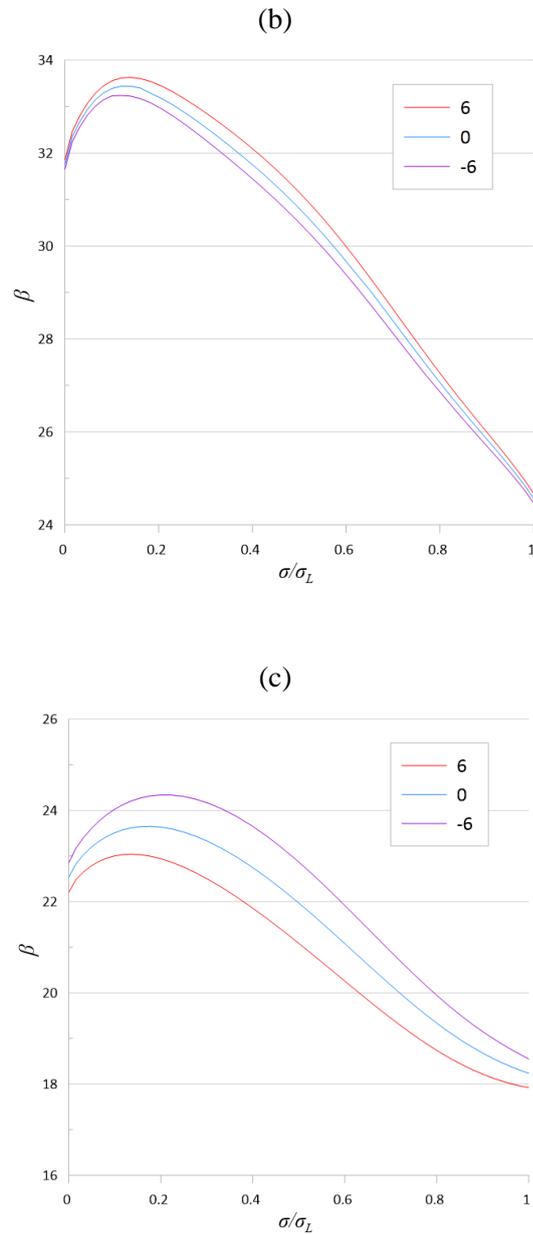


Figura 4.35: Distribuições dos ângulos  $\beta$  no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.

As diferenças entre os resultados são sutis. Mesmo na ponta da pá, onde o efeito do diedro é mais intenso, a variação máxima é de cerca de 2 graus. Na região do cubo e do meio, à medida em que se aumenta o diedro,  $\beta$  também aumenta. Já na ponta, diminui.

A Fig. 4.36 mostra os resultados correspondentes das velocidades meridionais.

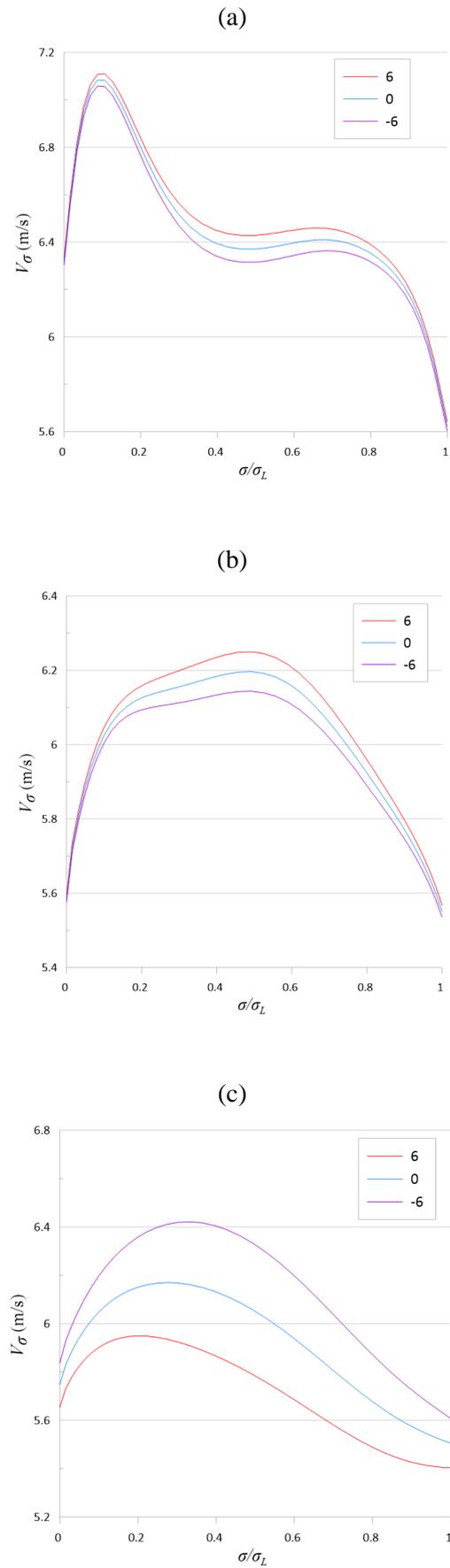
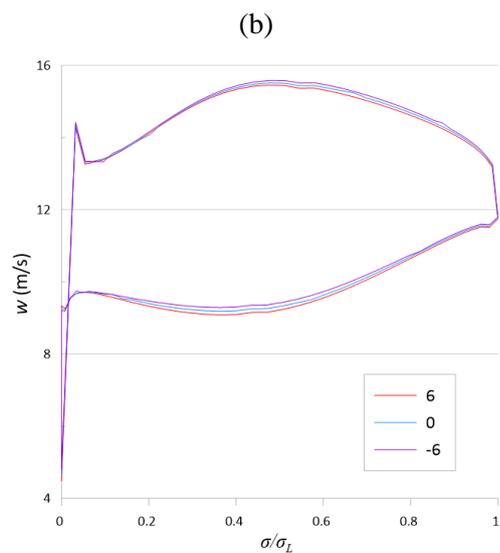
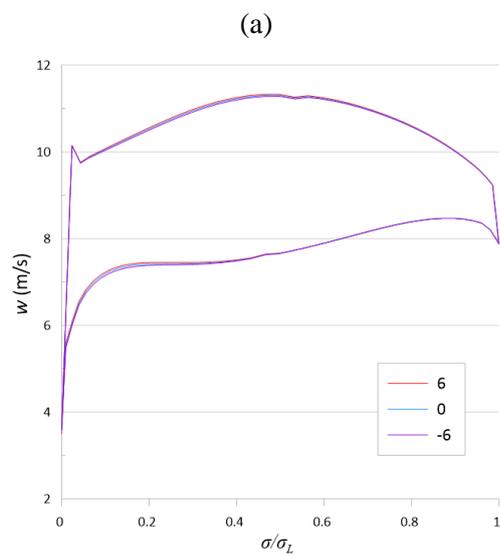


Figura 4.36: Velocidades meridionais no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.

As variações da velocidade meridional são consistentes com os deslocamentos radiais das linhas de corrente (Fig. 4.33). Na região do rotor, com relação ao cubo, quanto maior o diedro, mais as linhas de corrente se aproximam. Assim, a componente meridional da velocidade aumenta. O mesmo efeito, porém, de maneira mais discreta, acontece na região do meio da pá. Já com relação à carcaça, as linhas de corrente afastam-se ao se aumentar o diedro. Dessa forma, a velocidade meridional diminui.

Os campos de velocidades relativas e pressões correspondentes, obtidos a partir do problema pá-a-pá, são mostradas nas Figs. 4.37 e 4.38, respectivamente.



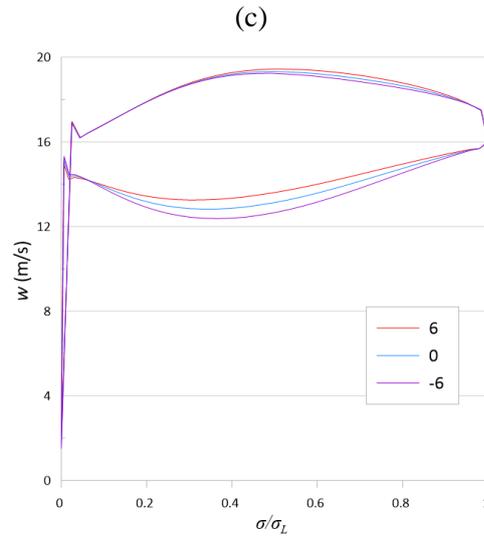
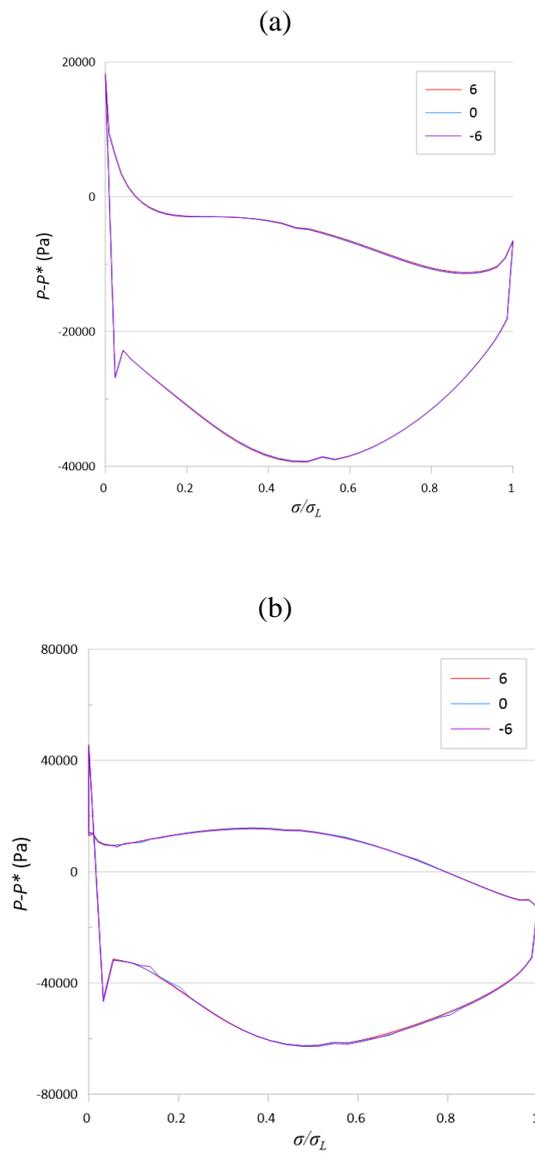


Figura 4.37: Distribuições de velocidades relativas no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.



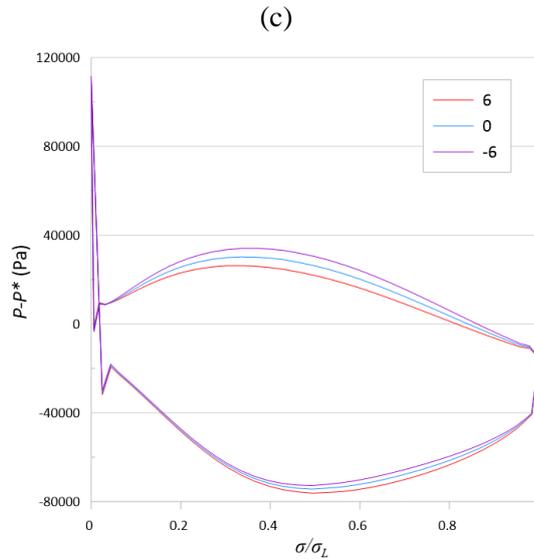
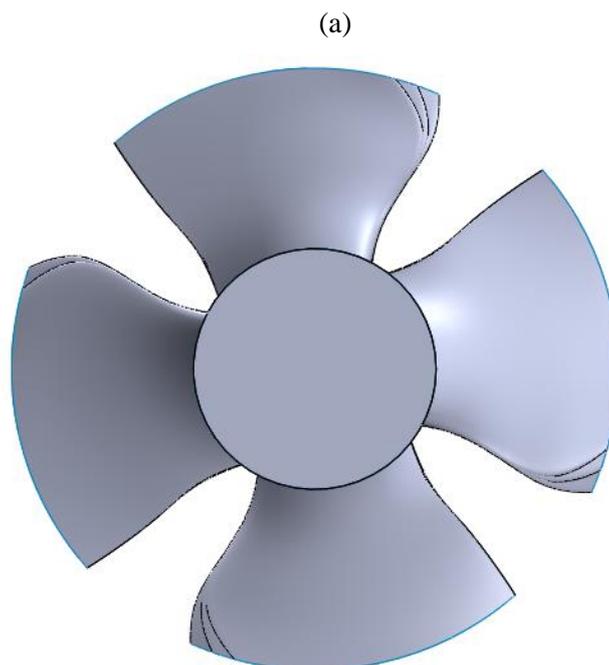


Figura 4.38: Distribuições de velocidades relativas no (a) cubo, (b) meio e (c) ponta.

Como esperado, a região da ponta da pá é a mais sensível ao efeito do diedro – é nessa região onde ocorrem as maiores variações entre os ângulos de diedro meridional. À medida em que o diedro aumenta, o carregamento diminui. Mais uma vez, a metodologia pá-a-pá se mostra uma importante ferramenta para o projeto de turbomáquinas, capaz de captar importantes efeitos geométricos e hidrodinâmicos.

A Fig. 4.39 mostra um comparativo (sobreposição) dos resultados geométricos tridimensionais dos casos.



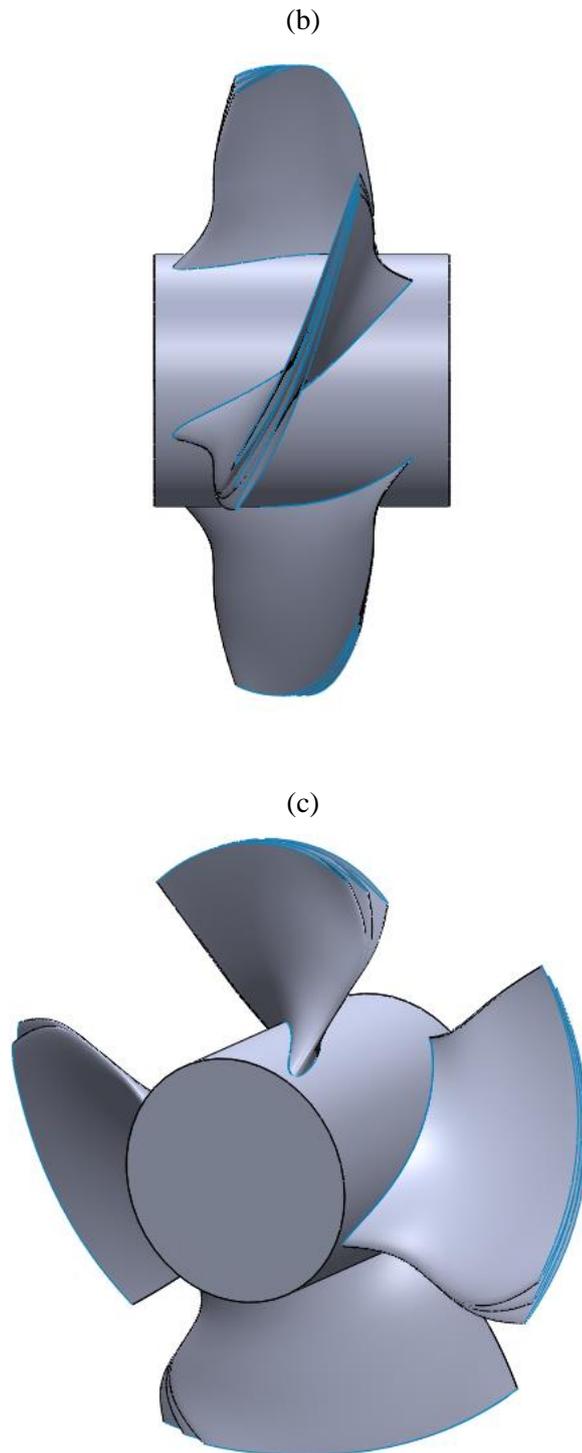


Figura 4.39: Vista (a) frontal, (b) lateral e (c) em perspectiva da sobreposição dos modelos tridimensionais do rotor para os casos analisados.

## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 5.1 CONCLUSÕES

Com a inclusão de uma distribuição de espessuras às geometrias calculadas a partir da metodologia, é possível que importantes efeitos geométricos e hidrodinâmicos sobre o projeto sejam analisados – formato das linhas de curvatura e carregamento nas pás. Além disso, os problemas pá-a-pá e meridional tornam-se acoplados, de maneira que os resultados de uma metodologia sirvam para aprimorar os dados de entrada da outra. Esse esquema pode ser implementado de maneira iterativa até que um critério de convergência seja obtido. Entretanto, neste trabalho foi feita apenas uma iteração – suficiente para o estudo dos efeitos de espessura e bloqueio. Além disso, os resultados obtidos durante esse processo foram utilizados para realizar importantes análises que reforçam quão útil e versátil é a metodologia.

Vale ressaltar que, neste trabalho, o objetivo principal da utilização da ferramenta desenvolvida ainda não foi o projeto de uma turbina otimizada – o que só seria possível com a inclusão de efeitos viscosos. Entretanto, a verificação da ferramenta qualitativa e conceitualmente a partir da análise de importantes efeitos, por vezes até óbvios e esperados – outras, nem tanto. Nesse sentido, foram discutidos:

a) Efeito da DMH: foram testadas duas DMH. Os efeitos foram analisados quase que totalmente no âmbito do problema meridional. Foi visto que, para mesmas condições na entrada do rotor, DMH com menores valores na saída geram superfícies  $S_{2m}$  mais torcidas na direção circunferencial – menores ângulos  $\beta$ . Além disso, os correspondentes carregamentos nas pás são maiores.

b) Efeito do número de pás: foram testados os casos  $N = 3, 4$  e  $5$  e comparados com o caso  $N = \infty$ . Os efeitos foram analisados a partir dos resultados do problema pá-a-pá inverso. À medida em que o número de pás cresce, as soluções tendem ao caso conceitual de número infinito de pás.

c) Efeito da espessura: foram comparados os resultados do problema pá-a-pá inverso (sem espessura) com os resultados do problema pá-a-pá direto (com espessura), ambos para o caso  $N = 4$ , e velocidades incidentes provenientes do problema meridional sem bloqueio. No caso com espessura, identifica-se um ponto de estagnação no bordo de ataque das pás (velocidade relativa tende a zero), o que não era possível no caso sem espessura. Além disso, o

escoamento é acelerado, principalmente no cubo - região com maiores espessuras e menores espaçamentos entre as pás.

d) Efeito do bloqueio: as pás calculadas pelo método inverso para os casos  $N = 3, 4$  e  $5$ , ainda sem considerar qualquer efeito de bloqueio, foram engrossadas por distribuições de espessuras de interesse e os correspondentes fatores de bloqueio foram calculados. Os resultados integram os dados de entrada de novos problemas meridionais, cada um referente à uma distribuição de espessura e número de pás. Os novos resultados do problema meridional são comparados, inclusive com o caso sem bloqueio. À medida em que o bloqueio aumenta, os deslocamentos radiais das linhas de corrente diminuem, e as velocidades meridionais aumentam na região do cubo e diminuem na carcaça. As variações dos ângulos de inclinação das superfícies  $S_{2m}$  acompanham a tendência das velocidades meridionais – maiores velocidades, maiores ângulos.

e) Efeitos combinados do número de pás, espessura e bloqueio: os casos  $N = 3, 4$  e  $5$  foram testados. Os resultados do problema pá-a-pá direto referentes ao final da primeira (e única) iteração foram comparados. Ao contrário do efeito do número de pás sobre a geometria das pás e o escoamento, o efeito do bloqueio cresce com o  $N$ . À medida em que se aumentam o número de pás, os carregamentos hidrodinâmicos diminuem. Entretanto, na região do cubo, há uma sobreposição dos resultados no lado de sucção da pá. Isso ocorre devido ao efeito do bloqueio, que faz com que o escoamento seja acelerado nessa região. Ao se aproximar da região da carcaça, a influência do bloqueio é cada vez menor.

f) Efeito do empilhamento: por fim, foram testadas diferentes disposições da linha de empilhamento dos perfis, variando apenas sua coordenada circunferencial (diedro meridional). Analisando os resultados do problema pá-a-pá direto, observa-se que o carregamento hidrodinâmico, especialmente na ponta – região onde ocorrem os maiores valores de diedro meridional -, sofre influência da linha de empilhamento. Note que, apesar das mesmas distribuições de momentos hidráulicos, quanto mais as pás são torcidas na direção de rotação da máquina, menor é o carregamento. Essa informação pode ser útil em análises de cavitação, por exemplo.

Como visto, a metodologia em desenvolvimento já abrange vários aspectos relativos ao projeto de turbomáquinas. São diversos parâmetros que podem ser variados e analisados em um processo de busca de um projeto otimizado. Com a inclusão de efeitos viscosos à metodologia, a ferramenta desenvolvida poderá servir inclusive para processos de otimização multifidelidade.

## 5.2 SUGESTÕES

- *Adição de outros componentes hidráulicos.* Diversas pesquisas publicadas levam em conta outros componentes hidráulicos de turbomáquinas, além do rotor. Peng *et al.* (2002a) cita que a inclusão de um distribuidor à metodologia minimiza a dificuldade que existe em se estimar os valores das grandezas do escoamento na entrada do rotor de uma turbina, por exemplo.
- *Variação da linha de empilhamento na direção axial (sweep meridional).* Já é possível que se variem as coordenadas da linha de empilhamento dos perfis na direção circunferencial. Além disso, para maior versatilidade da ferramenta, é interessante que variações na direção axial também sejam testadas e analisadas.
- *Construção de um exemplo para turbina de fluxo misto.* Até o momento, a metodologia Q3D foi testada apenas no caso de uma turbina de fluxo axial – embora já com efeitos que não poderiam ter sido captados por uma metodologia puramente 2D.
- *Inclusão de modelos de perdas.* Deve-se realizar uma pesquisa a respeito dos possíveis métodos de inclusão de efeitos viscosos à metodologia. As rotinas que incluem os modelos de perdas devem ser desenvolvidas e integradas à metodologia existente.
- *Criação de uma metodologia de otimização numérica.* A principal motivação deste trabalho foi o desenvolvimento de uma ferramenta robusta e de baixo custo computacional que possa ser integrada à uma metodologia de otimização numérica multifidelidade.

## REFERÊNCIAS

- BORGES, J.E., **A proposed Through-Flow Inverse Method for the Design of Mixed-Flow Pumps**. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 17, pp. 1097-1114, 1993.
- BARBOSA, Gabriel O. **Problema Inverso De Escoamento Potencial Em Grades Mistas De Máquinas De Fluxo**. Minas Gerais, 2018.
- BARBOSA, Gabriel O., MANZANARES-FILHO, Nelson, SANTOS, Marcos A. R. **Problema Inverso de Escoamento Potencial em Grades Mistas de Máquinas de Fluxo**. Cartagena, COL. CEBIM, 2019.
- BRAN, R., SOUZA, Z. **Máquinas de Fluxo: Turbinas, Bombas, Ventiladores**. Livro técnico. Rio de Janeiro, 1980.
- EREMEFF, L. R. **Calcul des Ecoulements dans les Turbomachines en Fluide Parfit et Incompressible**. Grenoble, FRA, 1974.
- HIRSCH, CH. e WARZEE, G., **An Integrated Quasi-3D Finite Element Calculation Program for Turbomachinery Flows**. *Journal of Engineering for Power*, 1979, Vol. 101(1), pp. 141-148.
- JENNIONS. I., K. e STOW, P., **A Quase-Three-Dimensional Turbomachinery Blade Design System: Part I – Throughflow Analysis**. *Journal of Engineering for Power*, 1985a, Vol. 107(2), pp. 301-307.
- JENNIONS. I., K. e STOW, P., **A Quase-Three-Dimensional Turbomachinery Blade Design System: Part II – Computerized System**. *Journal of Engineering for Power*, 1985b, Vol. 107(2), pp. 308-314.
- KATSANIS, T., **Computer Program for Calculating Velocities and Streamlines on a Blade-to-Blade Stream Surface of a Turbomachine**. Cleveland: NASA Technical Notes D-4525, 1968.
- KATSANIS, T., MCNALLY, W.D., **Revised FORTRAN Program for Calculating Velocities and Streamlines on Hub-Shroud Midchannel Stream Surface on an Axial-, Radial-, or Mixed-Flow Turbomachine or Annular Duct. I – User’s manual**. Cleveland: NASA Technical Notes D-, 1968.
- LEWIS, R. I., **A Method for Inverse Aerofoil and Cascade Design by Surface Vorticity**. ASME, 1982. *International Gas Turbine Conference and Exhibit*, 1982, London, England. Vol. 1, nº 82-GT-154, 10p.
- MORAN, Jack. **An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics**. USA, 1984.
- PETRUCCI, Denis R. **Métodos Inversos para o Projeto Aerodinâmico de Grades de Turbomáquinas Axiais**. Minas Gerais, 2003.

- PENG, G., **A Practical Combined Computational Method of Mean Through-Flow for 3D Inverse Design of Hydraulic Turbomachinery Blades**. Journal of Fluids Engineering, 172, pp. 1183 – 1190, 2005.
- PENG, G., CAO, S., ISHIZUKA, M. e HAYAMA, S., **Design Optimization of Axial Flow Hydraulic Turbine Runner: Part I – an Improved Q3D Inverse Method**. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 39, pp. 517 – 531, 2002a.
- PENG, G., CAO, S., ISHIZUKA, M. e HAYAMA, S., **Design Optimization of Axial Flow Hydraulic Turbine Runner: Part II – Multi-Objective Constrained Method**. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 39, pp. 533 – 548, 2002b.
- SANTOS, L. G. C., MANZANARES FILHO, N., MENON, G. J., ABREU, E., **Comparing RBF-FD Approximations Based on Stabilized Gaussians and on Polyharmonic Splines with Polynomials**. International Journal for Numerical Methods in Engineering 115(4), 462-500, 2018.
- SANTOS, M. A. R., MANZANARES FILHO, N., OLIVEIRA, W., e SANTOS, L. G. C., **Inverse Computation Scheme of Turbomachinery Blade Shapes Applied to Axial Hydro-Turbine Runners**. 3<sup>rd</sup> International Conference on Engineering Optimization, EngOpt, Rio de Janeiro, July, 2012.
- SENOO, Y., e NAKASE, Y., **An Analysis of Flow Through a Mixed Flow Impeller**. Journal of Engineering for Power, 1972, Vol. 94(1), pp. 43-50.
- SOUZA, Sulcy. **Relatório de Teste e Operação da Turbina Hidráulica Tipo Tubo da MEP**. Relatório interno, Unifei. Itajubá, MG, 1989.
- SOARES, Lucas L. F. **Escoamento Potencial e Método Dos Painéis. Solução de Escoamentos Elementares e Formulação do Método dos Painéis**. Minas Gerais.
- SUSAN-RESIGA, R., MILOS, T., BAYA, A. e MUNTEAN, S., **Mathematical and Numerical Models for Axisymmetric Swirling Flows for Turbomachinery Applications**. Workshop on Vortex Dominated Flows – Achievements an Open Problems, Timisoara, Romania, 2005.
- SUSAN-RESIGA, R., MUNTEAN, S., BERNAD, S., FRUNZA, T. e BALINT, D., **Thin Hydrofoil Cascade Design and Numerical Flow Analysis Part I - Design**. Proceedings of the Romanian Academy, Timiasora, Romênia, 2006a, vol. 7, n° 2/2006, 10 pags.
- SUSAN-RESIGA, R., MUNTEAN, S., BERNAD, S., FRUNZA, T. e BALINT, D., **Thin Hydrofoil Cascade Design and Numerical Flow Analysis Part II - Analysis**. Proceedings of the Romanian Academy, Timiasora, Romênia, 2006b, vol. 7, n° 3/2006, 10 pags.
- SUSAN-RESIGA, R., MUNTEAN, S. e BOSIOC, A., **Blade Design for Swirling Flow Generator**. Stuttgart, Germany. 4<sup>th</sup> German-Romain Workshop on Turbomachinery Hydrodynamics. 2008.

- WANG, Z., CAI, R., CHEN, H., e JIA, X., **A Three-Dimensional Inverse Method Using Navier-Stokes Equations for Turbomachinery Blading**. Inverse Problems in Engineering, Negano, Japan, 2000, Vol. 8, pp. 529-551.
- WU, C.-H. **A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial-, Radial-, and Mixed-Flow Types**. NACA Technical Note 2604, 1952.
- YANG, W., LIU, B., XIAO, R., **Three-Dimensional Inverse Design Method for Hydraulic Machinery**. Energies. 12, 3210, 1-19, 2019.
- ZANGENEH, M., **A Compressible Three-Dimensional Design Method for Radial and Mixed Flow Turbomachinery Blades**. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 13(5), 599-624, 1991.