

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
UNIFEI**



**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Análise de Rotações Críticas em Discos  
Rotativos Montados sob Interferência**

**Autor: Francisco Reginaldo da Rosa**

**Orientador: Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida**

Itajubá, Maio de 2006

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
UNIFEI**



**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

# **Análise de Rotações Críticas em Discos Rotativos Montados sob Interferência**

**Autor: Francisco Reginaldo da Rosa**

**Orientador: Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida**

**Curso: Mestrado em Engenharia Mecânica**

**Área de Concentração: Projeto e Fabricação**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Itajubá, Maio de 2006

M.G. – Brasil

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –  
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB\_6/1700

S586e

Rosa, Francisco Reginaldo da  
Análise de rotações críticas em discos rotativos montados  
sob interferência / Francisco Reginaldo da Rosa. -- Itajubá,  
(MG) : [s.n.], 2006.  
96 p. : il.

Orientador : Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Tensões e deformações em discos rotativos. 2. Rotações  
críticas. 3. Interferência. 4. Rotores de turbinas. 5. Matriz de  
transferência. I. Almeida, Márcio Tadeu de, orient. II. Uni-  
versidade Federal de Itajubá. III. Título.

CDU 62-233(043)

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
UNIFEI**



**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

# **Análise de Rotações Críticas em Discos Rotativos Montados sob Interferência**

**Autor: Francisco Reginaldo da Rosa**

**Orientador: Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida**

Composição da Banca Examinadora:

**Prof. Dr. Alexandre Augusto Simões - DEM/UNIS-MG**

**Prof. Dr. José Célio Dias - IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida, Presidente - IEM/UNIFEI**

## **Dedicatória**

*de modo especial,  
à minha esposa Marcia Helena R. Rosa*

## **Agradecimentos**

Em primeiro lugar agradeço a Deus, fonte da vida e da graça. Agradeço pela minha vida, minha inteligência, minha família e meus amigos.

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida pela competência, amizade e incentivo. Sem a sua orientação e dedicação, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível.

Aos meus Pais Afonso e Maria, que apesar das dificuldades enfrentadas, sempre me incentivaram nos estudos e formação.

Aos Irmãos, pelo companheirismo prestado em toda fase de minha vida.

Aos Supervisores e Gerente do SENAI - Pouso Alegre/MG, pela disponibilidade de tempo que me concederam para que eu pudesse estudar e concluir este Trabalho.

Aos Amigos, pela colaboração, amizade e pelo permanente incentivo ao crescimento profissional e pessoal.

Ao Instituto de Engenharia Mecânica da UNIFEI, representado pelos seus dedicados Professores e Funcionários, pela oportunidade de realização do Mestrado.

*“Curiosidade, criatividade, disciplina e especialmente paixão são algumas exigências para o desenvolvimento de um trabalho criterioso, baseado no confronto permanente entre o desejo e a realidade”.*

*Mirian Goldenberg*

## Resumo

**ROSA, F. R. (2006)**, *Análise de Rotações Críticas em Discos Rotativos Montados sob Interferência*, Itajubá, 96p. Dissertação (Mestrado em Projeto e Fabricação) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Este trabalho de dissertação tem como finalidade analisar as tensões e deformações através do Método da Matriz de Transferência em discos rotativos, sujeitos a um gradiente de temperatura e determinar a rotação crítica de funcionamento do sistema árvore-disco em função da interferência de segurança, para que o sistema não esteja sujeito à falhas. Desenvolvem-se as Matrizes de Transferência, para o disco de perfil constante com furo central e árvore do sistema. Os desenvolvimentos matemáticos destas matrizes serão obtidos pela superposição dos efeitos de deformação radial, tensão radial, temperatura e forças de inércia, a partir da equação de equilíbrio de um elemento do disco e da equação fundamental da elasticidade. Desenvolve-se também um programa computacional usando o software Matlab®, para um modelo de aproximação de um perfil variável a uma série de perfis constantes, utilizando o melhor modelo representativo para o mesmo.

### ***Palavras-chave***

Tensões e deformações em discos rotativos, rotações críticas, interferência, rotores de turbinas, matriz de transferência.



## **Abstract**

**ROSA, F. R. (2006)**, *Analysis of Critical Rotations in Assembly Rotative Disks on Interference*, Itajubá, 96p. MSc. Dissertation - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

This dissertation has as purpose to analyze the stress and strain through the Matrix Transfer Method in rotative disks subject to a temperature gradient and also to determine the critical rotation of operation of the system shaft / disk in function of safety's fit interference, so that the system is not subject the failures. The Matrix Transfer Method is developed for the disk of constant profile with central hole and shaft of the system. The mathematical model will be obtained by the overlap of the effects of radial strain, radial stress, temperature and inertia forces, starting from the equilibrium equation of an element of the disk and of the elasticity fundamental equation. It is also developed a program for personal computer using the software MATLAB®, for a model of approach of a variable profile in a group of constant profiles, using the best representative model for the same.

### ***Keywords***

Stress and Strain in Rotative Disks, Critical Rotation, Interference Fit, Rotors of Turbines, Transfer Matrix.

## Sumário

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>III</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>V</b>
<b>SIMBOLOGIA</b>	<b>VI</b>
<b>LETRAS GREGAS</b>	<b>VI</b>
<b>LETRAS LATINAS</b>	<b>VII</b>
<b>SUBSCRITOS</b>	<b>VIII</b>
<b>SIGLAS UTILIZADAS NO TRABALHO</b>	<b>IX</b>
<b>CAPITULO 1</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Revisão da Literatura -----	1
1.2 Objetivo -----	2
<b>CAPITULO 2</b>	<b>3</b>
<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE REGEM AS TENSÕES E DEFORMAÇÕES EM DISCOS ROTATIVOS</b>	<b>3</b>
2.1 Equação diferencial da deformação radial -----	3
2.1.1 Disco de perfil variável -----	3
2.1.2 Disco de Perfil Constante -----	9
2.1.3 Disco de Perfil Hiperbólico-----	9
2.2 Tensão radial e tangencial, em um disco rotativo de espessura constante-----	10
2.4 Disco de Resistência constante-----	14
<b>CAPITULO 3</b>	<b>16</b>
<b>MATRIZES DE TRANSFERÊNCIAS</b>	<b>16</b>
3.1 Conceito -----	16
3.2 Matrizes de Transferências para discos de perfis constantes-----	17

	ii
3.2.1 Disco com Furo Central-----	17
3.2.2 Disco sem furo central -----	31
<b>CAPITULO 4</b> _____	<b>45</b>
<b>APLICAÇÃO DO MÉTODO DA MATRIZ DE TRANSFERENCIA</b> _____	<b>45</b>
4.1 Análise de tensões e deformações em disco de perfil variável-----	50
<b>CAPITULO 5</b> _____	<b>54</b>
<b>VELOCIDADE CRÍTICA DO SISTEMA ÁRVORE-DISCO MONTADOS SOB INTERFERÊNCIA</b> _____	<b>54</b>
<b>CAPITULO 6</b> _____	<b>62</b>
<b>APLICAÇÃO PRÁTICA DO MÉTODO NUMÉRICO</b> _____	<b>62</b>
<b>CAPITULO 7</b> _____	<b>73</b>
<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b> _____	<b>73</b>
7.1 Conclusões -----	73
7.2 Perspectivas Futuras -----	75
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> _____	<b>76</b>
<b>APÊNDICE A</b> _____	<b>78</b>
<b>APLICAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO PARA O DISCO SUBDIVIDIDO EM MAIOR NÚMERO DE ELEMENTOS</b> _____	<b>78</b>
A.1 Disco Variável subdividido em 22 Elementos de Perfil Constante-----	78
<b>APÊNDICE B</b> _____	<b>89</b>
<b>LISTAGEM DOS PROGRAMAS DESENVOLVIDOS</b> _____	<b>89</b>
B.1 Determinação da Tensão Radial e Rotação Crítica do Sistema Árvore-Disco -	89
B.2 Determinação da Deformação Radial-----	94
B.3 Determinação da Tensão Tangencial -----	95
B.4 Rotina Mtt – Montagem e Produto das Matrizes de Transferências-----	96

## Lista de Figuras

Figura 1 - Solicitações em um elemento do disco de perfil constante. -----	4
Figura 2 - Disco de perfil hiperbólico. -----	10
Figura 3 - Distribuição de Tensões em um disco rotativo de perfil constante. -----	13
Figura 4 - Representação gráfica do perfil de resistência constante.-----	15
Figura 5 – Divisão do disco de perfil variável em discos parciais de perfil constante.	20
Figura 6 - Disco rotativo de espessura constante sem furo central. -----	31
Figura 7 - Distribuição de tensões em um disco rotativo sem furo central. -----	44
Figura 8 – Divisão do disco de perfil variável em discos de perfis constantes. -----	45
Figura 9 - Disco de perfil variável. -----	46
Figura 10 - Disco de Perfil Hiperbólico.-----	50
Figura 11 - Disco hiperbólico ( rotores) de turbina a vapor. -----	52
Figura 12 - Interferência do sistema árvore-disco. -----	55
Figura 13 - Distribuição de tensões em sistema disco e árvore maciça.-----	61
Figura 14 - Distribuição de tensões em sistema disco e árvore ôca. -----	61
Figura 15 - Disco de Turbina à vapor, de perfil variável.-----	62
Figura 16 – Relação entre excedente e gradiente de temperatura para um disco de perfil variável. -----	64
Figura 17 - Decomposição do disco de perfil variável em discos parciais de perfil constante. -----	65
Figura 18 – Distribuição da Deformação Radial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em repouso.-----	66
Figura 19 – Distribuição da Tensão Radial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em repouso. -----	67

Figura 20 – Distribuição da Tensão Tangencial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em repouso.-----	67
Figura 21 – Distribuição da Deformação Radial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em rotação a 3200 rpm. -----	68
Figura 22 – Distribuição da Tensão Radial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em rotação a 3200 rpm. -----	69
Figura 23 – Distribuição da Tensão Tangencial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em rotação a 3200 rpm. -----	69
Figura 24 – Distribuição da Deformação Radial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em rotação crítica.	70
Figura 25 – Distribuição da Tensão Radial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em rotação crítica. -----	71
Figura 26 – Distribuição da Tensão Tangencial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em rotação crítica.	71
Figura 27 – Disco variável decomposto em 22 elementos de perfil constante.-----	79
Figura 28 – Distribuição de temperatura para um disco de perfil variável. -----	80
Figura 29 – Deformação Radial para disco de 22 elementos de perfil contante, considerando o sistema em repouso. -----	82
Figura 30 – Tensão Radial para disco de 22 elementos de perfil contante, considerando o sistema em repouso. -----	82
Figura 31 – Tensão Tangencial para disco de 22 elementos de perfil contante, considerando o sistema em repouso. -----	83
Figura 32 – Deformação Radial para disco de 22 anéis de perfil contante, sob rotação de operação a 3200 rpm. -----	84
Figura 33 – Tensão Radial para disco de 22 anéis de perfil contante, sob rotação de operação a 3200 rpm. -----	84
Figura 34 – Tensão Radial para Sistema Árvore-Disco de 22 anéis de perfil contante, sob rotação de operação de 3200 rpm. -----	85
Figura 35 – Deformação Radial para disco de 22 elementos de perfil contante, sob rotação crítica de 3512 rpm. -----	86

Figura 36 – Tensão Radial para disco de 22 elementos de perfil contante, sob rotação crítica de 3512 rpm.-----	86
Figura 37 – Tensão Tangencial para disco de 22 elementos de perfil contante, sob rotação crítica de 3512 rpm. -----	87

## Lista de Tabelas

Tabela 1 – Tensões radiais e tangenciais e Deformação radial para o Sistema árvore-disco em repouso. -----	66
Tabela 2 – Tensões radiais e tangenciais e Deformação radial para o Sistema árvore-disco em Rotação de operação a 3200 rpm. -----	68
Tabela 3 – Tensões radiais e tangenciais e Deformação radial para o Sistema árvore-disco em Rotação Crítica a 3524 rpm. -----	70
Tabela 4 – Distribuição de temperatura constante $\bar{\theta}(r)$ ao longo do raio do disco.--	81
Tabela 5 – Tensões radiais e tangenciais e Deformação radial para o Sistema árvore-disco em repouso. -----	81
Tabela 6 – Tensões radiais e tangenciais e Deformação radial para o Sistema árvore-disco em rotação de operação a 3200 rpm. -----	83
Tabela 7 – Tensões radiais e tangenciais e Deformação radial para o Sistema árvore-disco sob rotação crítica a 3512 rpm. -----	85

## Simbologia

### Letras Gregas

$\alpha$	Coeficiente de dilatação térmica linear	$^{\circ}C^{-1}$
$\beta$	Força de inércia	$N$
$\delta$	Ajuste de Interferência	$mm$
$\theta(r)$	Função Excedente de Temperatura	$^{\circ}C$
$\bar{\theta}(r)$	Gradiente de Temperatura Constante	$^{\circ}C$
$\phi$	Ângulo	$rad$
$\varepsilon_r$	Deformação Específica Radial	$m / m$
$\varepsilon_t$	Deformação Específica Tangencial	$m / m$
$\rho$	Massa Específica	$kg / m^3$
$\mu$	Coeficiente de Poisson	
$\Omega$	Velocidade Angular	$s^{-1}$
$\sigma_r$	Tensão Radial	$MPa$
$\sigma_t$	Tensão Tangencial	$MPa$

## Letras Latinas

$A$	Constante de equação	
$B$	Constante de equação	
$C$	Constante de equação	
$D$	Constante de equação	
$A_i$	Matriz	
$b$	Espessura	$mm$
$C_i$	Constante de Integração	
$E$	Módulo de Elasticidade Longitudinal	$MPa$
$F_t$	Força Tangencial	$N$
$G$	Peso	$N$
$g$	Aceleração da Gravidade	$m / s^2$
$m$	Massa	$kg$
$n$	Rotação	$rpm$
$P$	Tensão Radial por unidade de comprimento circunferencial	$N / mm$
$P_{ct}$	Pressão de Contato devido ao ajuste de Interferência	$MPa$
$P_{int}$	Pressão Interna	$MPa$
$P_{ext}$	Pressão Externa	$MPa$
$P_n$	Pressão externa devido a inércia do disco	$MPa$
$P_0$	Pressão de ajuste árvore-disco, com disco em repouso	$MPa$
$\bar{P}_0$	Pressão de ajuste árvore-disco, com disco em rotação	$MPa$



$R$	Força Radial	$N$
$r$	Raio	$mm$
$\{S\}$	Vetor de Estado	
$sen(*)$	Seno de *	
$S_c$	Tensão Radial no centro do disco	$N / mm$
$T_i$	Matriz de Interferência	
$T_g$	Matriz de Interferência Global	
$U$	Deformação Radial	$mm$

## Subscritos

$c$	relativo ao centro de um disco ou árvore
$ct$	Contato (ajuste de interferência) árvore-disco
$ext$	relativo à externo ( $n$ )
$g$	índice da matriz de transferência global
$i$	índice de uma matriz ou vetor
$int$	relativo à interno ( $0$ )
$n$	vetor final ou estação externa do disco variável
$r$	radial
$t$	tangencial
$0$	vetor inicial ou estação interna do disco variável

## Siglas Utilizadas no Trabalho

TEMP	Gradiente de Temperatura.
ROT	Rotação.
PI	Pressão Interna.
PE	Pressão Externa.
SODERA	Deformação Radial Total em função de todos os efeitos (rotação, temperatura, pressão interna e pressão externa) no sistema árvore-disco.
DERA_PI	Deformação Radial em função de rotação, temperatura e pressão interna no sistema árvore-disco.
DERAE	Deformação Radial em função da pressão externa no sistema árvore-disco.
SOTERA	Tensão Radial Total em função de todos os efeitos (rotação, temperatura, pressão interna e pressão externa) no sistema árvore-disco.
TERA_PI	Tensão Radial em função de rotação, temperatura e pressão interna no sistema árvore-disco.
TERAE	Tensão Radial em função da pressão externa no sistema árvore-disco.
SOTETA	Tangencial Total em função de todos os efeitos (rotação, temperatura, pressão interna e pressão externa) no sistema árvore-disco.
TETA_PI	Tensão Tangencial em função de rotação, temperatura e pressão interna no sistema árvore-disco.
TETAE	Tensão Tangencial em função da pressão externa no sistema árvore-disco.

# **CAPITULO 1**

## **INTRODUÇÃO**

### **1.1 REVISÃO DA LITERATURA**

Para determinação das tensões e deformações em um disco rotativo, deve-se aplicar o melhor Método disponível, desenvolvendo primeiramente, a solução analítica, pela determinação da equação diferencial e sua solução.

Para determinados perfis, como é o perfil hiperbólico e o perfil constante, a equação diferencial é de fácil solução. Para perfis variáveis, a solução da equação diferencial é de grande complexidade matemática, sendo, portanto, inviável a aplicação da solução analítica, adotando assim os métodos numéricos (BHUTANI & LOEWY, 1999; SRINIVASAN & RAMAMURTI, 1981).

Os métodos aproximativos são, hoje, os de grande aplicação ao cálculo de tensões e deformações em discos rotativos. Deve-se isto ao desenvolvimento do cálculo computacional MATLAB®, onde tais métodos podem ser aplicados, e levar a resultados bem próximos dos resultados reais, subdividindo o disco de perfil variável em números maiores de discos de perfis constantes.

## 1.2 OBJETIVO

Será desenvolvido neste trabalho um método aproximado para cálculo de tensões e deformações em um disco rotativo de perfil variável, pela divisão deste em discos parciais de perfil constante, com a finalidade principal de controlar a pressão devida ao ajuste interferente entre árvore-disco, com o disco em rotação.

Para isto, serão desenvolvidas as seguintes etapas:

- a) Desenvolvimento analítico das equações diferenciais que regem as tensões e deformações em um disco rotativo montado sob ajuste de interferência.
- b) Equação diferencial da deformação radial, para um disco de perfil variável, sujeito a um gradiente de temperatura.
- c) Tensão radial e tangencial, em um disco rotativo de espessura constante.
- d) Disco de resistência constante.
- e) Desenvolvimento analítico para obtenção das matrizes de transferência.
- f) Disco de perfil constante com furo central.
- g) Disco de perfil constante sem furo central.
- h) Procedimento para aplicação do método da matriz de transferência.
- i) Aplicação prática do método da matriz de transferência a um perfil variável, pela divisão do mesmo em discos parciais de perfis constantes.
- j) Determinação da rotação crítica do sistema árvore-disco em função do ajuste de interferência de segurança do sistema.
- k) Conclusões e Perspectivas Futuras.

## Capítulo 2

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE REGEM AS TENSÕES E DEFORMAÇÕES EM DISCOS ROTATIVOS

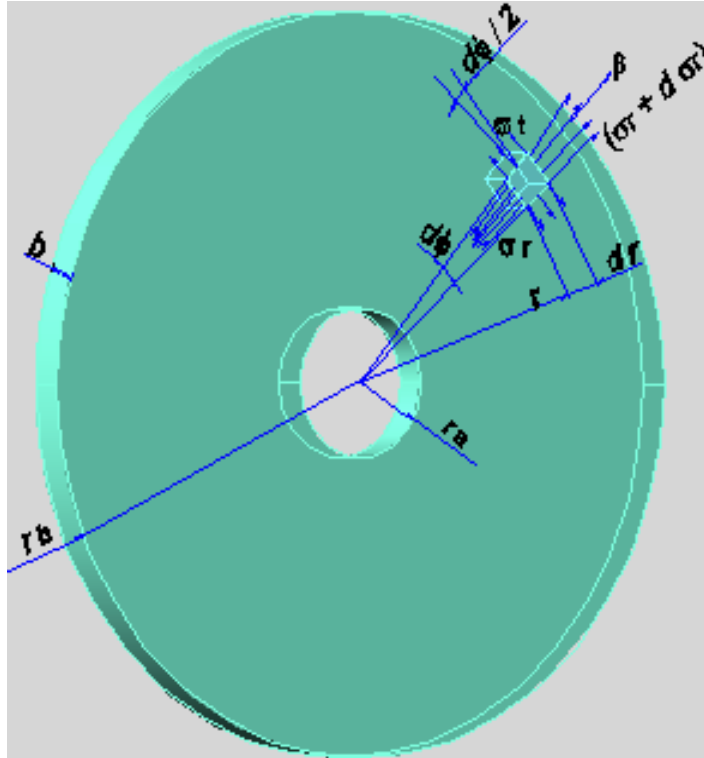
## 2.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA DEFORMAÇÃO RADIAL

### 2.1.1 Disco de perfil variável

A equação diferencial a ser deduzida é para um disco de espessura variável,  $b = b(r)$ , onde são levadas em consideração, as seguintes hipóteses simplificativas:

1. O Material do disco elástico e isotrópico, obedecendo a Lei de Hooke.
2. As propriedades físicas como módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) e coeficiente de dilatação térmica linear ( $\alpha$ ), serão constantes em função da temperatura, podendo ser variáveis se necessário.
3. Os efeitos das tensões axiais são relativamente pequenos comparados com os das tensões radiais e tangenciais, por isso esses efeitos foram desprezados.
4. O plano de simetria do disco é perpendicular ao eixo axial da árvore.
5. O módulo de Poisson ( $\mu$ ) será considerado constante.

Sendo o disco da *Figura 1*, isola-se um elemento infinitesimal de espessura  $b$ , limitado pelas superfícies cilíndricas de raio  $r$  e  $(r + dr)$ , e pelos planos axiais separados entre si de um ângulo infinitesimal  $d\phi$  (DEN HARTOG,1952; TIMOSHENKO & GOODIER,1970).



*Figura 1 - Solicitações em um elemento do disco de perfil constante.*

A força de inércia  $\beta$  originada pela rotação do elemento é dada por:

$$\beta = \rho \Omega^2 r^2 b d\phi dr \quad (2.1)$$

A massa do elemento:

$$dm = \rho r b d\phi dr \quad (2.2)$$

Substituindo-se (2.2) em (2.1), tem-se:

$$\beta = \rho \Omega^2 r^2 b d\phi dr$$

Analisando a *Figura 1*, as Forças que atuam no elemento são dadas por:

Parte inferior:

$$dR_1 = r b d\phi \sigma_r \quad (2.3.b)$$

Parte superior:

$$dR_2 = (r + dr)(b + db) d\phi (\sigma_r + d\sigma_r) \quad (2.3.c)$$

Partes laterais:

$$dF_t = dr b \sigma_t \quad (2.3.d)$$

Considerando-se a espessura  $b$  supostamente pequena em relação às outras dimensões, podemos desprezar os esforços axiais.

Aplicando o princípio D'Alambert, tem-se:

$$\beta + dR' - dR - 2 dF_t \text{sen}(d\phi / 2) = 0 \quad (2.4.a)$$

Fazendo  $\text{sen}(d\phi / 2) = d\phi / 2$ ,

Portanto, a equação (2.4.a) fica:

$$\beta + dR' - dR - dF_t d\phi = 0 \quad (2.4.b)$$

Substituindo-se em (2.4), os valores de  $\beta, dR', dR, dF_t$  e desenvolvendo-se a expressão, desprezando-se os infinitésimos de ordem superior, obtém-se a equação geral de equilíbrio, dada por:

$$\frac{d}{dr}(r b \sigma_r) - b \sigma_t + \rho \Omega^2 r^2 b = 0$$

Analisando as deformações específicas sem o efeito da temperatura, tem-se:

$$\varepsilon_r = \frac{(dr + dU) - dr}{dr} = \frac{dU}{dr} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r+U) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{U}{r} \quad (2.7)$$

Sendo,  $\varepsilon_r$  a deformação específica radial e  $\varepsilon_t$  a deformação específica tangencial.

Considerando um excedente variável de temperatura  $\theta = \theta(r)$  sobre a temperatura inicial em todos os pontos da circunferência de raio  $r$ .

Após a rotação e aquecimento, o valor final do raio será  $(r + U)$ , onde  $U$  representa a Deformação Radial Total (SCHWARZ, 1972).

$$U = U'' + U' \quad (2.8)$$

Onde:

$U =$  deformação radial total.

$U' =$  deformação radial, devido ao efeito da temperatura.

$U'' =$  deformação elástica radial.

A deformação radial elástica será dada por:

$$U'' = U - U' \quad (2.9)$$

A deformação radial devido ao efeito da temperatura de um elemento  $dr$  é dada por:

$$dU' = \alpha \theta(r) dr$$

Sendo assim, a deformação específica radial, considerando um gradiente de temperatura, é dada por:



$$\varepsilon'_r = \frac{dU''}{dr} \quad (2.11)$$

Substituindo-se (2.9) em (2.11), tem-se:

$$\varepsilon'_r = \frac{dU}{dr} - \frac{dU'}{dr} \quad (2.12)$$

Substituindo-se (2.10) em (2.12) tem-se que:

$$\varepsilon'_r = \frac{dU}{dr} - \alpha \theta(r) \quad (2.13)$$

A deformação específica tangencial será dada por:

$$\varepsilon'_t = \frac{U''}{r} \quad (2.14)$$

Substituindo-se (2.9) em (2.14), tem-se:

$$\varepsilon'_t = \frac{U}{r} - \frac{U'}{r} \quad (2.15)$$

Da expressão (2.10), tira-se que:

$$U' = \alpha \theta(r) r \quad (2.16)$$

Substituindo-se (2.16) em (2.15) tem-se que:

$$\varepsilon'_t = \frac{U}{r} - \alpha \theta(r)$$

Pela Lei Fundamental da Elasticidade, podemos escrever que:

$$\varepsilon'_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_t)$$

$$\varepsilon'_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r) \quad (2.19)$$

Da expressão (2.18), isolando a tensão radial, tem-se que:

$$\sigma_r = E \varepsilon'_r + \mu \sigma_t \quad (2.20)$$

Da expressão (2.19), isolando a tensão tangencial, tem-se que:

$$\sigma_t = E \varepsilon'_t + \mu \sigma_r \quad (2.21)$$

Substituindo-se (2.21) em (2.20), tem-se que:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\mu^2)}(\varepsilon'_r + \mu \varepsilon'_t) \quad (2.22)$$

Substituindo-se (2.13) e (2.17) em (2.22), tem-se que:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\mu^2)} \left[ \frac{dU}{dr} + \mu \frac{U}{r} - (1+\mu)\alpha\theta(r) \right] \quad (2.23)$$

Substituindo-se (2.20) em (2.21), tem-se:

$$\sigma_t = \frac{E}{(1-\mu^2)}(\varepsilon'_t + \mu \varepsilon'_r) \quad (2.24)$$

Substituindo-se (2.13) e (2.17) em (2.24), tem-se que:

$$\sigma_t = \frac{E}{(1-\mu^2)} \left[ \frac{U}{r} + \mu \frac{dU}{dr} - (1+\mu)\alpha\theta(r) \right]$$

Desenvolvendo-se a expressão (2.5):

$$r b \frac{d\sigma_r}{dr} + r \sigma_r \frac{db}{dr} + b \sigma_r \frac{dr}{dr} - b \sigma_t = -\rho \Omega^2 r^2 b$$

Substituindo (2.23) e (2.25) em (2.26), resultará em:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dr^2} + \left[ \frac{1}{b} \frac{db}{dr} + \frac{1}{r} \right] \frac{dU}{dr} + \left[ \frac{\mu}{br} \frac{db}{dr} - \frac{1}{r^2} \right] U = \\ = (1 + \mu) \alpha \frac{d\theta(r)}{dr} + (1 + \mu) \frac{1}{b} \frac{db}{dr} \alpha \theta(r) - \frac{(1 - \mu^2)}{E} \rho \Omega^2 r \end{aligned} \quad (2.27)$$

A expressão (2.27) é a EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA DEFORMAÇÃO RADIAL, para um disco de perfil variável, sujeito a um gradiente de temperatura.

### 2.1.2 Disco de Perfil Constante

Para um disco de perfil constante, tem-se a seguinte condição de contorno:

$$\frac{db}{dr} = 0 \quad (2.27.a)$$

Assim, a expressão (2.27) é simplificada para:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = (1 + \mu) \alpha \frac{d\theta(r)}{dr} - \frac{(1 - \mu^2)}{E} \rho \Omega^2 r \quad (2.27.b)$$

### 2.1.3 Disco de Perfil Hiperbólico

Sendo a condição de contorno conforme *Figura 2* é dada por:

$$b = B_{\kappa} r^{-n}$$

Aplicando-se esta na expressão (2.27), resulta-se em:

$$\begin{aligned}
 r^2 \frac{d^2 U}{dr^2} - r(n-1) \frac{dU}{dr} - (n\mu+1)U &= \\
 = (1+\mu)r^2 \alpha \frac{d\theta(r)}{dr} - (1+\mu)rn\alpha \theta(r) - \frac{(1-\mu^2)}{E} \rho \Omega^2 r^3 & \quad (2.27.d)
 \end{aligned}$$

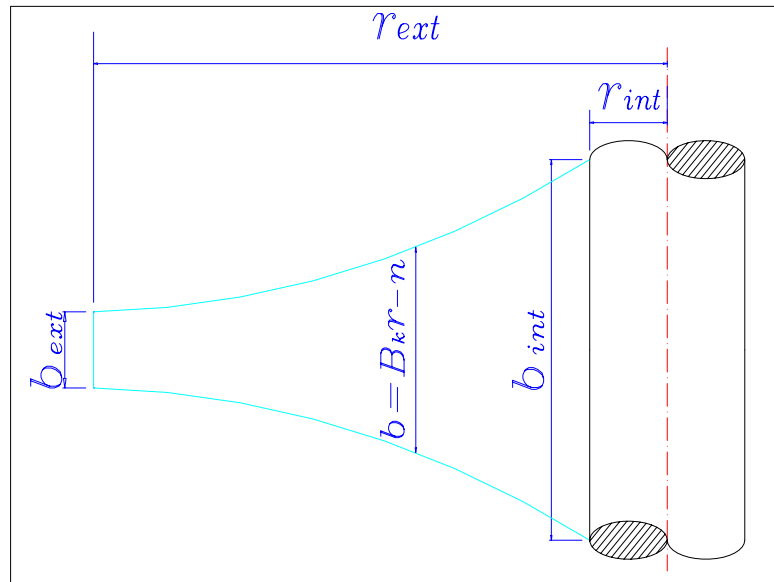


Figura 2 - Disco de perfil hiperbólico.

## 2.2 TENSÃO RADIAL E TANGENCIAL, EM UM DISCO ROTATIVO DE ESPESSURA CONSTANTE

A equação diferencial da deformação radial em um disco de espessura constante, sem efeito da temperatura, é dada por (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970),

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = - \frac{(1-\mu^2)}{E} \rho \Omega^2 r$$

Mas:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(Ur)}{dr} \right]$$

Portanto:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(Ur)}{dr} \right] = - \frac{(1-\mu^2)}{E} \rho \Omega^2 r \quad (2.29)$$

Integrando a equação (2.29), tem-se:

$$\frac{d(Ur)}{dr} = - \frac{(1-\mu^2)}{E} \rho \Omega^2 \frac{r^3}{2} + C_1 r \quad (2.30)$$

Integrando (2.30):

$$U = - \frac{(1-\mu^2)}{8E} \rho \Omega^2 r^3 + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad (2.31)$$

Onde,  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração.

De (2.30) tira-se que:

$$\frac{dU}{dr} = - \frac{(1-\mu^2)}{2E} \rho \Omega^2 r^2 + C_1 - \frac{U}{r} \quad (2.32)$$

Nesta Dissertação serão adotados as seguintes constantes para algumas equações:

$$A = \frac{E}{(1-\mu^2)} \quad (2.33.a)$$

$$B = \frac{E}{(1-\mu)} \quad (2.33.b)$$

$$C = \rho \Omega^2$$

$$D = (1 + \mu) \alpha$$

As equações (2.23) e (2.25) sem o efeito de temperatura serão dadas por:

$$\sigma_r = A \left[ \frac{dU}{dr} + \mu \frac{U}{r} \right] \quad (2.34.a)$$

$$\sigma_t = A \left[ \frac{U}{r} + \mu \frac{dU}{dr} \right] \quad (2.34.b)$$

Onde  $A$  é a constante dada por (2.33.a).

Substituindo-se (2.31) e (2.32) na equação (2.34.a), tem-se:

$$\sigma_r = A \left[ -\frac{(3+\mu)}{8A} \rho \Omega^2 r^2 + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 - \frac{(1-\mu)}{r^2} C_2 \right] \quad (2.34.c)$$

Substituindo-se (2.31) e (2.32) na equação (2.34.b), tem-se:

$$\sigma_t = A \left[ -\frac{(1+3\mu)}{8A} \rho \Omega^2 r^2 + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 + \frac{(1-\mu)}{r^2} C_2 \right] \quad (2.34.d)$$

As tensões nas estações internas e externas de um disco de perfil constante são dadas pelas condições de contorno abaixo, conforme *Figura 3*:

$$r=r_a \Rightarrow \sigma_r=0$$

$$r=r_b \Rightarrow \sigma_r=0$$

Aplicando as condições de contorno na equação (2.34.c), acha-se as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$ , dadas por:

$$C_1 = \frac{2(3+\mu)}{8(1+\mu)A} \rho \Omega^2 (r_a^2 + r_b^2) \quad C_2 = \frac{(3+\mu)}{8(1-\mu)A} \rho \Omega^2 r_a^2 r_b^2$$

Substituindo-se essas constantes de integração em (2.34.c), tem-se:

$$\sigma_r = \frac{(3+\mu)}{8} \rho \Omega^2 \left[ (r_a^2 + r_b^2) - \frac{(r_a^2 r_b^2)}{r^2} - r^2 \right]$$

Substituindo-se (2.31) e (2.32) na equação (2.34.d) e considerando as constantes de integração obtidas pelas condições de contorno, tem-se que:

$$\sigma_t = \frac{(3 + \mu)}{8} \rho \Omega^2 \left[ r_b^2 + r_a^2 + \frac{r_a^2 r_b^2}{r^2} - \frac{(1 + 3\mu)}{(3 + \mu)} r^2 \right] \quad (2.36)$$

A distribuição de tensões em um disco de perfil constante é representada pela Figura 3. Sendo a figura à esquerda, com efeito de rotação e à direita com efeito de temperatura.

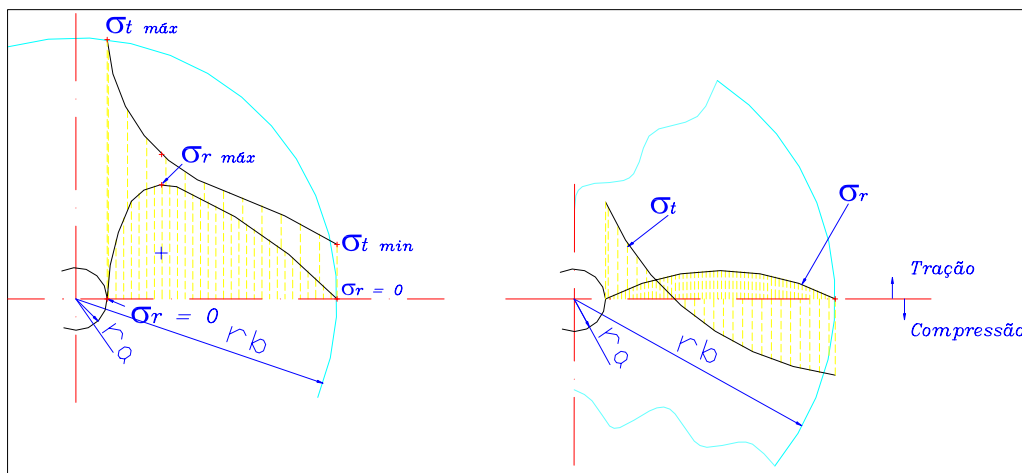


Figura 3 - Distribuição de Tensões em um disco rotativo de perfil constante.

Com efeito de um gradiente de temperatura (PISARENKO; YÁKOVLEV; MATVÉEV, 1979), as tensões são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{(3 + \mu)}{8} \rho \Omega^2 \left[ r_b^2 + r_a^2 - \frac{r_a^2 r_b^2}{r^2} - r^2 \right] + \\ & + \alpha E \left[ -\frac{1}{r} \int_{r_a}^r r \theta(r) dr + \frac{(r^2 - r_a^2)}{r^2 (r_b^2 - r_a^2)} \int_{r_a}^{r_b} r \theta(r) dr \right] \quad (2.37) \\ \sigma_t = & \frac{(3 + \mu)}{8} \rho \Omega^2 \left[ r_b^2 + r_a^2 - \frac{r_a^2 r_b^2}{r^2} - \frac{(1 + 3\mu)}{(3 + \mu)} r^2 \right] + \\ & + \alpha E \left[ -\theta(r) + \frac{1}{r} \int_{r_a}^r r \theta(r) dr + \frac{r^2 + r_a^2}{r^2 (r_b^2 - r_a^2)} \int_{r_a}^{r_b} r \theta(r) dr \right] \end{aligned}$$

## 2.4 DISCO DE RESISTÊNCIA CONSTANTE

Objetiva-se obter um perfil, de modo que as tensões ao longo do raio permaneçam constantes (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970).

Da EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO, dada por (2.5), para que as tensões permaneçam constantes ao longo do raio, deve-se ter:

$$\sigma_r = \sigma_t = \bar{\sigma} = \text{constante} \quad (2.39)$$

Substituindo-se (2.39) em (2.5), tem-se:

$$\frac{d}{dr}(\bar{\sigma} b r) - \bar{\sigma} b + \rho \Omega^2 b r^2 = 0 \quad (2.40)$$

Multiplicando-se (2.40) por  $\left(\frac{1}{\bar{\sigma}}\right)$ , tem-se:

$$\frac{d}{dr}(b r) - b + \frac{\rho \Omega^2 b r^2}{\bar{\sigma}} = 0 \quad (2.41)$$

Desenvolvendo-se a derivada do produto e simplificando, tem-se:

$$\frac{db}{dr} = -\frac{\rho \Omega^2 b r}{\bar{\sigma}} \quad (2.42)$$

Integrando (2.42), obtêm-se:

$$\ln b - \ln b_0 = \left[ -\frac{\rho \Omega^2 r^2}{2 \bar{\sigma}} \right]$$



ou,

$$\frac{b}{b_0} = e^{-\left[\frac{\rho \Omega^2 r^2}{2 \sigma}\right]} \quad (2.43.b)$$

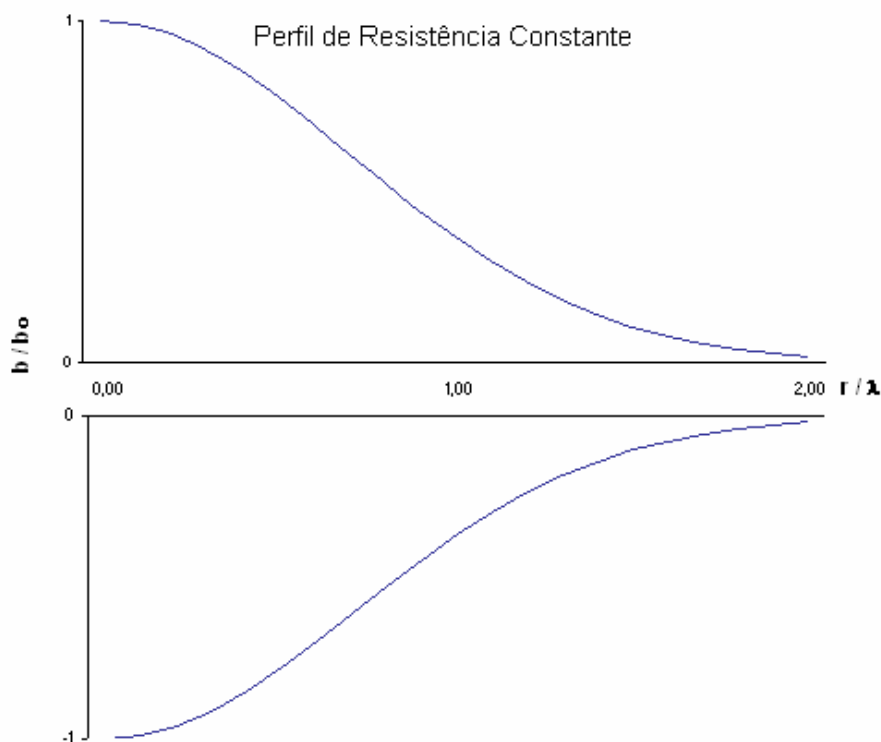
Assim:

$$\frac{b}{b_0} = e^{-\left[\frac{r}{\lambda}\right]^2} \quad (2.43.c)$$

Sendo o termo constante da exponencial, dado por:

$$\frac{l}{\lambda} = \sqrt{\frac{\rho \Omega^2}{2 \sigma}} \quad (2.44)$$

Conforme demonstrado, o perfil de resistência constante é dado pela expressão (2.44) e sua representação gráfica é dada pela *Figura 4*.



*Figura 4 - Representação gráfica do perfil de resistência constante.*

## CAPITULO 3

# MATRIZES DE TRANSFERÊNCIAS

O objetivo do método da matriz de transferência consiste em dividir um sistema grande em subsistemas, com propriedades elásticas e dinâmicas simples.

### 3.1 CONCEITO

A matriz de transferência é dada pelo produto de duas matrizes: (PESTEL; LECKIE, 1963; ALMEIDA, 1990).

Com a matriz campo relaciona-se um vetor de estado à direita de um ponto  $i$  do sistema, com vetor de estado à esquerda do ponto  $(i + 1)$ , região esta entre os dois pontos. Desta forma, podemos escrever:

$$\{\mathbf{S}\}_{(i+1)}^E = \mathbf{A}_1 \{\mathbf{S}\}_i^D$$

A matriz  $\mathbf{A}_1$  denomina-se matriz campo.

*(matriz campo = traduz as propriedades elásticas do subsistema)*

Com a matriz ponto, relaciona-se um vetor de estado a esquerda de um ponto  $i$  do sistema, com um vetor de estado a direita do ponto  $i$ .

$$\{S\}_i^D = \mathbf{A}_2 \{S\}_i^E \quad (3.2)$$

A matriz  $\mathbf{A}_2$  denomina-se matriz ponto.

*(matriz ponto = traduz as propriedades dinâmicas do subsistema)*

Substituindo a expressão (3.2) em (3.1), resulta-se em:

$$\{S\}_{(i+1)}^E = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \{S\}_i^E \quad (3.3.a)$$

Ao produto  $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2$  chamamos de matriz de transferência  $\mathbf{T}_1$ :

Assim, a expressão (3.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{S\}_{(i+1)}^E = \mathbf{T}_1 \{S\}_i^E \quad (3.3.b)$$

## 3.2 MATRIZES DE TRANSFERÊNCIAS PARA DISCOS DE PERFIS CONSTANTES

### 3.2.1 Disco com Furo Central

Conforme demonstrado no Capítulo 2, a equação diferencial da deformação radial para um disco rotativo de perfil constante (*Figura 1*) sujeito a um gradiente de temperatura é dada pela equação (2.27.b).

Usando a simplificação dada por (2.28), obtêm-se:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(Ur)}{dr} \right] = (1 + \mu) \alpha \frac{d\theta(r)}{dr} - \frac{(1 - \mu^2)}{E} \rho \Omega^2 r \quad (3.4)$$

Substituindo as constantes (2.33.a), (2.33.c), (2.33.d) na equação (3.4), tem-se:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(Ur)}{dr} \right] = D \frac{d\theta(r)}{dr} - \frac{C r}{A} \quad (3.5)$$

Considerando-se que o gradiente de temperatura ao longo do raio do disco é uma função e integrando a equação (3.5), tem-se:

$$\frac{1}{r} \frac{d(Ur)}{dr} = D \theta(r) - \frac{C r^2}{2 A} + C_1 \quad (3.5.a)$$

ou ainda,

$$\frac{d(Ur)}{dr} = D r \theta(r) - \frac{C r^3}{2 A} + C_1 r \quad (3.5.b)$$

Integrando a equação (3.5.b), tem-se:

$$Ur = -\frac{C r^4}{8 A} + D \int_0^r r \theta(r) dr + \frac{C_1 r^2}{2} + C_2 \quad (3.5.c)$$

Finalmente,

$$U = -\frac{C r^3}{8 A} + \frac{D}{r} \int_0^r r \theta(r) dr + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

Sendo,

$$\frac{d(Ur)}{dr} = r \frac{dU}{dr} + U$$

Assim a equação (3.5.b) é reescrita como:

$$r \frac{dU}{dr} + U = - \frac{C r^3}{2 A} + D r \theta(r) + C_1 r$$

onde

$$\frac{dU}{dr} = - \frac{C r^2}{2 A} + D \theta(r) + C_1 - \frac{U}{r} \quad (3.5.e)$$

Considerando a equação (2.23) e as constantes dadas por (2.33.a) e (2.33.d), vem:

$$\sigma_r = A \left[ \frac{dU}{dr} + \mu \frac{U}{r} - D \theta(r) \right] \quad (3.6)$$

Considerando a tensão por unidade de comprimento circunferencial, tem-se que:

$$\sigma_r = \frac{P}{b} \quad (3.7)$$

Substituindo-se (3.7) em (3.6), tem-se:

$$P = A b \left[ \frac{dU}{dr} + \mu \frac{U}{r} - D \theta(r) \right] \quad (3.8)$$

Substituindo-se (3.5.e) em (3.8) tem-se:

$$P = A b \left[ - \frac{C r^2}{2 A} + D \theta(r) + C_1 - \frac{U}{r} \right] + A b \mu \frac{U}{r} - A b D \theta(r)$$

Desenvolvendo, tem-se:

$$P = -b \frac{C r^2}{2} + A b C_1 - (1 - \mu) A b \frac{U}{r} \quad (3.10)$$

A constante  $C_1$  da equação (3.10), será dada por:

$$C_1 = \frac{P}{A b} + \frac{C r^2}{2 A} + (1 - \mu) \frac{U}{r} \quad (3.11)$$

A constante  $C_2$  resultará na substituição da equação (3.11) em (3.5.d):

$$U = -\frac{C r^3}{8 A} + \frac{D}{r} \int_0^r r \theta(r) dr + \frac{r}{2} \left( \frac{P}{A b} + \frac{C r^2}{2 A} + (1 - \mu) \frac{U}{r} \right) + \frac{C_2}{r} \quad (3.12)$$

Logo,

$$C_2 = -\frac{C r^4}{8 A} - \frac{P r^2}{2 A b} - D \int_0^r r \theta(r) dr + \frac{(1 + \mu)}{2} U r \quad (3.13)$$

Dado que, a equação diferencial é linear, pode-se, portanto, aplicar o princípio da superposição. Para isto, divide-se o disco em discos parciais limitados pelas estações  $(i) - (i - 1)$ .

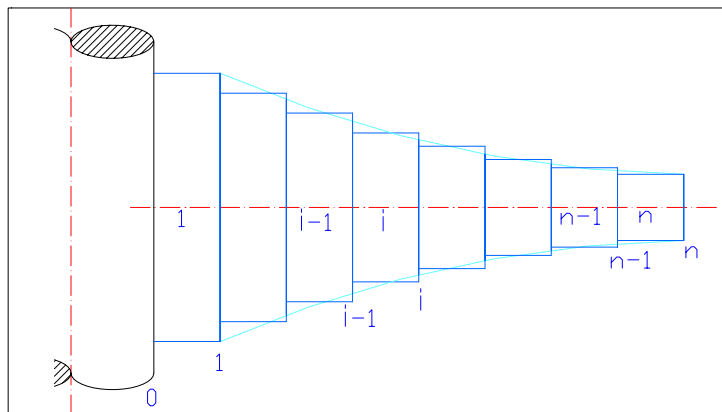


Figura 5 – Divisão do disco de perfil variável em discos parciais de perfil constante.

Considerando apenas a influência da deformação radial, atuando sobre a estação  $(i - 1)$  do disco parcial  $(i - 1) \rightarrow (i)$ , tem-se que:

$$U_{i-1} \neq 0 \quad ; \quad P_{i-1} = 0 \quad ; \quad \Omega = 0 \quad ; \quad \theta(r) = 0 \quad ;$$

Da equação (3.11), tem-se:

$$C_1 = \frac{P_{i-1}}{Ab_{i-1}} + \frac{C}{2A} r_{i-1}^2 + (1 - \mu) \frac{U_{i-1}}{r_{i-1}} \quad (3.14)$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se:

$$C_1 = (1 - \mu) \frac{U_{i-1}}{r_{i-1}} \quad (3.15)$$

Da equação (3.13) tem-se:

$$C_2 = -\frac{Cr_{i-1}^4}{8A} - \frac{P_{i-1} r_{i-1}^2}{2Ab_{i-1}} - D \int_0^{r_{i-1}} r \theta(r) dr + \frac{(1 + \mu)}{2} U_{i-1} r_{i-1} \quad (3.16)$$

Com as condições de contorno:

$$C_2 = \frac{(1 + \mu)}{2} U_{i-1} r_{i-1} \quad (3.17)$$

Para a estação  $(i)$  pode-se escrever a equação (3.5.d), como:

$$U_i = -\frac{C}{8A} r_i^3 + \frac{D}{r_i} \int_0^{r_i} r \theta(r) dr + \frac{C_1}{2} r_i + \frac{C_2}{r_i}$$

Aplicando as condições de contorno, vem:

$$U_i = \frac{C_1}{2} r_i + \frac{C_2}{r_i}$$

Substituindo as constantes de integração dadas pelas expressões (3.15) e (3.17) na equação (3.19.a), tem-se:

$$U_i = \frac{(1-\mu)}{2} \frac{r_i}{r_{i-1}} U_{i-1} + \frac{(1+\mu)}{2} \frac{r_{i-1}}{r_i} U_{i-1} \quad (3.19.b)$$

Desenvolvendo, pode-se escrever que:

$$U_i = \frac{r_i}{r_{i-1}} \left\{ 1 - \frac{(1+\mu)}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \right\} U_{i-1} \quad (3.20)$$

Para a estação ( $i$ ), reescrevendo a equação (3.10), vem:

$$P_i = -\frac{C}{2} b_i r_i^2 + A b_i C_1 - (1-\mu) A \frac{b_i}{r_i} U_i \quad (3.21)$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se:

$$P_i = A b_i C_1 - (1-\mu) A \frac{b_i}{r_i} U_i \quad (3.22.a)$$

Substituindo a equação (3.20) e a constante de integração dada pela expressão (3.15) na equação (3.22.a), tem-se:

$$P_i = (1-\mu) A \frac{b_i}{r_{i-1}} U_{i-1} - \dots \\ + (1-\mu) A \frac{b_i}{r_i} \left\{ \frac{r_i}{r_{i-1}} \left[ 1 - \frac{(1+\mu)}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \right] \right\} U_{i-1}$$

Sendo o perfil constante, substitui-se ( $b = b_{i-1} = b_i$ ) na equação (3.22.b):



$$\begin{aligned}
P_i &= (1 - \mu) A \frac{b}{r_{i-1}} U_{i-1} - \dots \\
&+ (1 - \mu) A \frac{b}{r_i} \left\{ \frac{r_i}{r_{i-1}} \left[ 1 - \frac{(1 + \mu)}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \right] \right\} U_{i-1}
\end{aligned} \tag{3.22.c}$$

Desenvolvendo e substituindo a constante dada por (2.33.a) em (3.22.c), tem-se:

$$P_i = \frac{Eb}{2r_{i-1}} U_{i-1} - \frac{Eb}{2} \frac{r_{i-1}}{r_i^2} U_{i-1} \tag{3.22.d}$$

Simplificando:

$$P_i = \frac{Eb}{2r_{i-1}} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] U_{i-1} \tag{3.23}$$

Considerando apenas a influência da Tensão por unidade de comprimento circunferencial, atuando na estação  $(i - 1)$  do disco parcial  $(i - 1) - (i)$ , tem-se:

$$U_{i-1} = 0 \quad ; \quad P_{i-1} \neq 0 \quad ; \quad \Omega = 0 \quad ; \quad \theta(r) = 0 \quad ;$$

E sendo o disco de perfil constante, tem-se que:  $(b = b_{i-1} = b_i)$

Aplicando as condições de contorno na equação (3.14), tem-se:

$$C_1 = \frac{P}{Ab} \tag{3.24}$$

Com as condições de contorno na equação (3.16), vem:

$$C_2 = - \frac{P}{2Ab} \frac{r_{i-1}^2}{r_{i-1}}$$

Para a estação  $(i)$ , aplicando as condições de contorno na equação da deformação (3.18), tem-se:

$$U_i = \frac{C_1}{2}r_i + \frac{C_2}{r_i} \quad (3.26.a)$$

Substituindo as constantes de integração dadas pelas expressões (3.24) e (3.25) na equação (3.26.a), tem-se:

$$U_i = \frac{r_i}{2} \left( \frac{P_{i-1}}{Ab} \right) + \frac{l}{r_i} \left( -\frac{P_{i-1} r_{i-1}^2}{2Ab} \right) \quad (3.26.b)$$

Desenvolvendo e simplificando, resulta-se em:

$$U_i = \frac{r_i}{2Ab} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] P_{i-1} \quad (3.27)$$

Substituindo o valor da constante dada pela equação (2.33.a) em (3.27), tem-se:

$$U_i = \frac{r_i}{Eb} \frac{(1-\mu^2)}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] P_{i-1} \quad (3.28)$$

Para a estação  $(i)$ , aplicando as condições de contorno na equação (3.21) da tensão por unidade de comprimento circunferencial, tem-se:

$$P_i = AbC_1 - (1-\mu)A \frac{b}{r_i} U_i$$

Substituindo a equação (3.28) e a constante de integração dada pela expressão (3.24) na equação (3.29.a), tem-se:

$$P_i = Ab \frac{P_{i-1}}{Ab} - (1 - \mu) A \frac{b}{r_i} \left\{ \frac{r_i}{2Ab} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] P_{i-1} \right\} \quad (3.29.b)$$

Desenvolvendo e simplificando, colocando  $P_{i-1}$  em evidência, tem-se:

$$P_i = \left\{ 1 - \frac{(1 - \mu)}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \right\} P_{i-1} \quad (3.30)$$

Considerando apenas a influência da Rotação, atuando sobre a estação  $(i - 1)$  do disco parcial  $(i - 1) - (i)$ , tem-se que:

$$U_{i-1} = 0 \quad ; \quad P_{i-1} = 0 \quad ; \quad \Omega \neq 0 \quad ; \quad \theta(r) = 0 \quad ;$$

Sendo o disco de perfil constante, tem-se que:  $(b = b_{i-1} = b_i)$

Aplicando as condições de contorno na equação (3.14), tem-se:

$$C_1 = \frac{C}{2A} r_{i-1}^2 \quad (3.31)$$

Com as condições de contorno na equação (3.16), vem:

$$C_2 = - \frac{C}{8A} r_{i-1}^4 \quad (3.32)$$

Para a estação  $(i)$ , aplicando as condições de contorno na equação (3.18) da deformação radial, tem-se:

$$U_i = - \frac{C}{8A} r_i^3 + \frac{r_i}{2} C_1 + \frac{1}{r_i} C_2$$

Substituindo as constantes de integração (3.31) e (3.32) na equação (3.33.a), tem-se:

$$U_i = -\frac{C}{8A}r_i^3 + \frac{r_i}{2}\left(\frac{C}{2A}r_{i-1}^2\right) + \frac{I}{r_i}\left(-\frac{C}{8A}r_{i-1}^4\right) \quad (3.33.b)$$

Desenvolvendo

$$U_i = -\frac{C}{8A}r_i^3 + \frac{C}{4A}r_i r_{i-1}^2 - \frac{C}{8A}\frac{r_{i-1}^4}{r_i} \quad (3.33.c)$$

Multiplicando o 2º termo por  $(r_i/r_i)^2$  e o 3º termo por  $(r_i/r_i)^3$ , tem-se:

$$U_i = -\frac{C}{8A}r_i^3 + \frac{C}{4A}r_i^3 \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} - \frac{C}{8A}r_i^3 \frac{r_{i-1}^4}{r_i^4} \quad (3.33.d)$$

Sendo,

$$\frac{C}{4A}r_i^3 \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} = \frac{C}{8A}r_i^3 \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} + \frac{C}{8A}r_i^3 \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \quad (3.33.e)$$

e substituindo em (3.33.d), tem-se:

$$U_i = -\frac{C}{8A}r_i^3 + \frac{C}{8A}r_i^3 \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} + \frac{C}{8A}r_i^3 \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} - \frac{C}{8A}r_i^3 \frac{r_{i-1}^4}{r_i^4} \quad (3.33.f)$$

Colocando em evidência  $(-r_i/2)$ , tem-se:

$$U_i = -\frac{r_i}{2}\left[\frac{C}{4A}r_i^2 - \frac{C}{4A}r_i^2 \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} - \frac{C}{4A}r_i^2 \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} + \frac{C}{4A}r_i^2 \frac{r_{i-1}^4}{r_i^4}\right]$$

Colocando em evidência  $(Cr_i^2/4A)$ , tem-se:

$$U_i = -\frac{r_i}{2} \left[ \frac{C}{4A} r_i^2 \left[ I - 2 \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} + \frac{r_{i-1}^4}{r_i^4} \right] \right] \quad (3.33.h)$$

Como,

$$\left[ I - 2 \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} + \frac{r_{i-1}^4}{r_i^4} \right] = \left[ I - \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right] \left[ I - \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right] \quad (3.33.i)$$

Então, pode-se escrever que:

$$U_i = -\frac{r_i}{2} \left[ \frac{C}{4A} r_i^2 \left[ I - \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right] \left[ I - \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right] \right] \quad (3.34)$$

ou

$$U_i = -\frac{r_i}{2} \left[ I - \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right] \left( \frac{C}{4A} r_i^2 \left[ I - \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right] \right) \quad (3.35)$$

Substituindo os valores das constantes dadas por (2.33.a), (2.33.b) na expressão (3.35), tem-se:

$$U_i = -\frac{r_i}{2} \left[ I - \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right] \left( \frac{(1-\mu^2) \rho \Omega^2 r_i^2}{4E} \left[ I - \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right] \right) \quad (3.36)$$

Para a estação ( $i$ ), aplicando as condições de contorno na equação (3.21), tem-se:

$$P_i = -\frac{C}{2} b r_i^2 + A b C_i - (1-\mu) A \frac{b}{r_i} U_i$$

Substituindo a equação (3.35) e a constante de integração dada pela expressão (3.31) na equação (3.37.a), tem-se:

$$P_i = -\frac{Cb}{2}r_i^2 + Ab\left(\frac{C}{2A}r_{i-1}^2\right) - \dots \\ + (1-\mu)A\frac{b}{r_i}\left\{-\frac{r_i}{2}\left[1-\frac{r_{i-1}^2}{r_i^2}\right]\left(\frac{C}{4A}r_i^2\left[1-\frac{r_{i-1}^2}{r_i^2}\right]\right)\right\} \quad (3.37.b)$$

Resultando em:

$$P_i = -\frac{b}{2}\left[1-\left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\right)^2\right]\left(\frac{\rho\Omega^2 r_i^2}{2}\left\{1+\mu-\frac{(1-\mu)}{2}\left[1+\left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\right)^2\right]\right\}\right) \quad (3.38)$$

Considerando apenas a influência da Temperatura, atuando sobre a estação  $(i-1)$  do disco parcial  $(i-1) - (i)$ , tem-se que:

$$U_{i-1} = 0 \quad ; \quad P_{i-1} = 0 \quad ; \quad \Omega = 0 \quad ; \quad \theta(r) \neq 0 \quad ;$$

Sendo o disco de perfil constante, tem-se que:  $(b = b_{i-1} = b_i)$

Aplicando as condições de contorno na equação (3.14), tem-se:

$$C_1 = 0 \quad (3.39)$$

Com as condições de contorno na equação (3.16), vem:

$$C_2 = -D \int_0^{r_{i-1}} r \theta(r) dr$$

Para a estação (  $i$  ), aplicando as condições de contorno na equação (3.18), tem-se:

$$U_i = \frac{D}{r_i} \int_0^{r_i} r \theta(r) dr + \frac{C_1}{2} r_i + \frac{C_2}{r_i} \quad (3.41)$$

Substituindo a constante de integração dada por (3.39) e (3.40) na equação (3.41), tem-se:

$$U_i = \frac{D}{r_i} \int_0^{r_i} r \theta(r) dr - \frac{D}{r_i} \int_0^{r_i} r \theta(r) dr \quad (3.42)$$

Como,

$$\int_0^{r_i} r \theta(r) dr = \int_0^{r_{i-1}} r \theta(r) dr + \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \theta(r) dr \quad (3.43.a)$$

Então, pode-se escrever que:

$$U_i = \frac{D}{r_i} \left( \int_0^{r_{i-1}} r \theta(r) dr + \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \theta(r) dr \right) - \frac{D}{r_i} \int_0^{r_i} r \theta(r) dr \quad (3.43.b)$$

Desenvolvendo

$$U_i = \frac{D}{r_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \theta(r) dr \quad (3.43.c)$$

Substituindo a constante dada por (2.33.d) em (3.43), tem-se:

$$U_i = \frac{(1+\mu)}{r_i} \alpha \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \theta(r) dr$$

Para a estação (  $i$  ), aplicando as condições de contorno na equação (3.21), tem-se:

$$P_i = AbC_1 - (1-\mu) A \frac{b}{r_i} U_i$$

Substituindo a constante de integração dada por (3.39), e a equação (3.44) na equação (3.45.a), tem-se:

$$P_i = Ab(0) - (1 - \mu) A \frac{b}{r_i} \left[ \frac{(1 + \mu)}{r_i} \alpha \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \theta(r) dr \right] \quad (3.45.b)$$

Desenvolvendo e substituindo a constante dada por (2.33.a), tem-se:

$$P_i = -\frac{bE}{r_i^2} \alpha \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \theta(r) dr \quad (3.46)$$

A Deformação Radial na estação ( $i$ ), função da estação ( $i-1$ ) será dada pela superposição das equações (3.20), (3.28), (3.36) e (3.44).

Para facilidade e melhor representação, adotam-se:

$$UUU = (3.20)$$

$$UUP = (3.28)$$

$$FU = (3.36) + (3.44)$$

A Tensão Radial, por unidade de comprimento circunferencial da estação ( $i$ ), função da estação ( $i-1$ ) do disco parcial, será dada pela superposição das equações (3.23), (3.30), (3.38) e (3.46).

Para facilidade e melhor representação, adotam-se:

$$UPU = (3.23)$$

$$UPP = (3.30)$$

$$FP = (3.38) + (3.46)$$



Através das representações indicadas, pode-se escrever que:

$$U_i = UUU \cdot U_{i-1} + UUP \cdot P_{i-1} + FU \quad (mm) \quad (3.47.a)$$

$$P_i = UPU \cdot U_{i-1} + UPP \cdot P_{i-1} + FP \quad \left( \frac{N}{mm} \right) \quad (3.47.b)$$

Na Forma Matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} UUU & UUP & FU \\ UPU & UPP & FP \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_{(i-1)} \quad (3.47.c)$$

Sendo,

$$T_i = \begin{bmatrix} UUU & UUP & FU \\ UPU & UPP & FP \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.47.d)$$

### 3.2.2 Disco sem furo central

O disco sem furo central, considerado no sistema como árvore, é um caso particular do disco com furo central, a qual se tem o raio interno nulo ( $r_{i-1} = 0$ ).

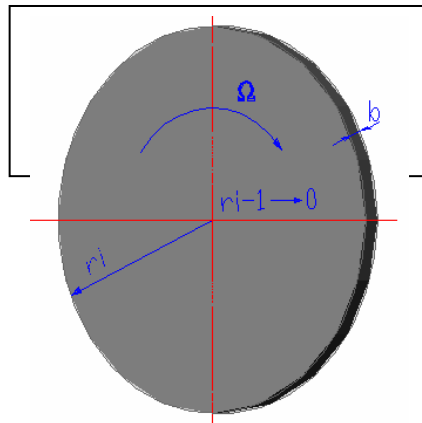


Figura 6 - Disco rotativo de espessura constante sem furo central.

Estuda-se este caso aplicando as condições de contorno, a partir das expressões do disco com furo central, estudado no capítulo anterior. Será feito antecipadamente uma análise das tensões radiais e tangenciais no centro do disco.

Conforme demonstrado anteriormente, no Capítulo 2, as tensões radiais e tangenciais para um disco de perfil constante em rotação e sujeito a um gradiente de temperatura, são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_r = A \left[ -\frac{(3+\mu)}{8A} \rho \Omega^2 r^2 + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 - \frac{(1-\mu)}{r^2} C_2 \right] + \dots \quad (3.48) \\ + A \left[ -\frac{1}{r^2} (1-\mu^2) \alpha \int_{r_a}^r r \theta(r) dr + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 - \frac{(1-\mu)}{r^2} C_2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_t = A \left[ -\frac{(1+3\mu)}{8A} \rho \Omega^2 r^2 + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 + \frac{(1-\mu)}{r^2} C_2 \right] + \dots \quad (3.49) \\ + A \left[ \frac{1}{r^2} (1-\mu^2) \alpha \int_{r_a}^r r \theta(r) dr + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 + \frac{(1-\mu)}{r^2} C_2 - (1-\mu^2) \alpha \theta(r) \right] \end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno para o disco sem furo, ou seja,  $r$  tendendo a zero, nas expressões (3.48) e (3.49), tem-se:  $\sigma_r = -\infty$  e  $\sigma_t = +\infty$ .

Portanto, para que as tensões sejam finitas é necessário que a constante de integração  $C_2$  seja igual a zero. Assim, para a expressão (3.48), tem-se, após integração:

$$\begin{aligned} \sigma_r = A \left[ -\frac{(3+\mu)}{8A} \rho \Omega^2 r^2 + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 \right] + \dots \\ + A \left[ -\frac{1}{r^2} (1-\mu^2) \alpha \frac{r^2}{2} \theta(r) + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 \right] \end{aligned}$$

Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} \sigma_r = & A \left[ -\frac{(3+\mu)}{8A} \rho \Omega^2 r^2 + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 \right] + \dots \\ & + A \left[ -\frac{1}{2} (1-\mu^2) \alpha \theta(r) + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 \right] \end{aligned} \quad (3.48.b)$$

Aplicando as condições de contorno para o disco sem furo, ou seja,  $r$  tendendo a zero:

$$\sigma_r = A \left[ \frac{(1+\mu)}{2} C_1 \right] + A \left[ -\frac{1}{2} (1-\mu^2) \alpha \theta(r) + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 \right] \quad (3.48.c)$$

Substituindo  $C_2 = 0$ , na expressão (3.49), para que a tensão seja finita, e integrando, vem:

$$\begin{aligned} \sigma_t = & A \left[ -\frac{(1+3\mu)}{8A} \rho \Omega^2 r^2 + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 \right] + \dots \\ & + A \left[ \frac{1}{r^2} (1-\mu^2) \alpha \frac{r^2}{2} \theta(r) + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 - (1-\mu^2) \alpha \theta(r) \right] \end{aligned} \quad (3.49a)$$

Desenvolvendo e aplicando as condições de contorno para o disco sem furo, ou seja,  $r$  tendendo a zero, tem-se:

$$\sigma_t = A \left[ \frac{(1+\mu)}{2} C_1 \right] + A \left[ -\frac{1}{2} (1-\mu^2) \alpha \theta(r) + \frac{(1+\mu)}{2} C_1 \right] \quad (3.49.b)$$

A constante de integração  $C_1$  da primeira parte da equação é devido a condição somente de rotação  $\Omega$  do disco, sendo:

$$C_1 = \frac{2(3+\mu)}{8AC} \rho \Omega^2 (r_a^2 + r_b^2)$$

A constante de integração  $C_1$  da segunda parte da equação, o disco está sob ação de um gradiente de temperatura  $\theta(r)$ , sendo:

$$C_1 = \frac{2}{(r_b^2 - r_a^2)} B \alpha \int_0^{r_b} r \theta(r) dr \quad (3.50.b)$$

Observa-se que as Tensões Radiais e Tangenciais para um disco sem furo central dadas pelas equações (3.48.c) e (3.49.b) são iguais. Assim pode-se escrever que:

$$b \sigma_r = b \sigma_t.$$

Fazendo,

$$b \sigma_r = b \sigma_t = S_c \quad (3.51)$$

A expressão da deformação específica tangencial para um disco rotativo de espessura constante, sujeito a um gradiente de temperatura, dada pela equação (2.17), aplicada à estação  $(i - 1)$  de um disco com furo central, resulta-se:

$$\varepsilon'_t = \frac{U_{i-1}}{r_{i-1}} - \alpha \theta(r)_{i-1} \quad (3.52)$$

Multiplicando equação (2.19) pela espessura  $b$  do disco, tem-se:

$$b \varepsilon'_t = \frac{b \sigma_t}{E} - \mu \frac{b \sigma_r}{E} \quad (3.52.a)$$

Substituindo (3.51) em (3.52.a) e desenvolvendo, tem-se para o centro do disco (árvore):

$$\varepsilon_t^* = \frac{S_c}{b E} (1 - \mu)$$

A deformação específica tangencial no centro de um disco sem furo central é dada por:

$$\varepsilon_t^* = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \varepsilon'_t \quad (3.52.c)$$

Substituindo (3.52) em (3.52.c), vem:

$$\varepsilon_t^* = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \left( \frac{U_{i-1}}{r_{i-1}} - \alpha \theta(r)_{i-1} \right) \quad (3.52.d)$$

Substituindo (3.52.b) em (3.52.d), e desenvolvendo o limite, tem-se:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{U_{i-1}}{r_{i-1}} = \frac{S_c}{bE} (1 - \mu) \quad (3.53)$$

$$\text{Pois } \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \alpha \theta(r) = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \alpha \theta(r)_{i-1} = 0$$

Com  $\theta(r)$  representando uma função do gradiente de temperatura ao longo do raio  $r$  do disco de espessura constante.

Para um disco com furo central, a estação ( $i$ ) é relacionada à estação ( $i-1$ ) pela Matriz de Transferência, dada como:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} UUU & UUP & FU \\ UPU & UPP & FP \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_{(i-1)} \quad (3.54)$$

Desenvolvendo o sistema de equação matricial, tem-se:

$$U_i = UUU.U_{i-1} + UUP.P_{i-1} + FU$$

$$P_i = UPU.U_{i-1} + UPP.P_{i-1} + FP$$

Sendo,

$$UUU = \frac{r_i}{r_{i-1}} \left\{ 1 - \frac{(1+\mu)}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.57)$$

$$UUP = \frac{r_i}{Eb} \frac{(1-\mu^2)}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \quad (3.58)$$

$$FU = -\frac{r_i}{2} \left[ 1 - \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right] \left\{ \frac{(1-\mu^2)}{4} \frac{\rho \Omega^2 r_i^2}{E} \left[ 1 - \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right] \right\} + \dots$$

$$+ \frac{(1+\mu)}{r_i} \alpha \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \theta(r) dr \quad (3.59)$$

$$UPU = \frac{Eb}{2r_{i-1}} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \quad (3.60)$$

$$UPP = \left\{ 1 - \frac{(1-\mu)}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.61)$$

$$FP = -\frac{b}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \left( \frac{\rho \Omega^2 r_i^2}{2} \left\{ 1 + \mu - \frac{(1-\mu)}{2} \left[ 1 + \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \right\} \right) + \dots$$

$$- \frac{bE}{r_i^2} \alpha \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \theta(r) dr$$

Para um disco sem furo central, a tensão radial e a deformação radial na estação ( $i$ ) serão dadas por:

$$U_i = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UUU.U_{i-1} + UUP.P_{i-1} + FU) \quad (3.63)$$

$$P_i = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UPU.U_{i-1} + UPP.P_{i-1} + FP) \quad (3.64)$$

Desenvolvendo a expressão (3.63), tem-se:

$$U_i = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UUU.U_{i-1}) + \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UUP.P_{i-1}) + \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (FU) \quad (3.65)$$

Os limites da expressão (3.65) serão resolvidos por partes. A primeira parcela da equação (3.65) é:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UUU.U_{i-1}) = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \left\{ \left[ \frac{r_i}{r_{i-1}} - \frac{(1+\mu)}{2} \left( \frac{r_i}{r_{i-1}} - \frac{r_{i-1}}{r_i} \right) \right] U_{i-1} \right\} \quad (3.66)$$

Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UUU.U_{i-1}) &= \dots \\ &= \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{U_{i-1}}{r_{i-1}} \cdot \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} r_i - \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{U_{i-1}}{r_{i-1}} \cdot \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} r_i \frac{(1+\mu)}{2} \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\text{Pois, } \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{r_{i-1}}{r_i} U_{i-1} = 0$$

Substituindo (3.53) em (3.67) e desenvolvendo os limites, tem-se:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UUU.U_{i-1}) = r_i(1-\mu) \frac{S_c}{bE} - (1-\mu) \frac{S_c}{bE} r_i \frac{(1+\mu)}{2}$$

Portanto,

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UUU.U_{i-1}) = r_i(1-\mu) \frac{S_c}{bE} - r_i \frac{(1-\mu^2)}{2} \frac{S_c}{bE} \quad (3.69)$$

A segunda parcela da equação (3.65) é representada pelo seguinte limite matemático:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UUP.P_{i-1}) = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \left\{ \left[ \frac{r_i}{Eb} \frac{(1-\mu^2)}{2} - \frac{(1-\mu^2)}{Eb2} \frac{r_{i-1}^2}{r_i} \right] P_{i-1} \right\} \quad (3.70)$$

Desenvolvendo-se, vem:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UUP.P_{i-1}) = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{r_i}{Eb} \frac{(1-\mu^2)}{2} \cdot \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} P_{i-1} \quad (3.71)$$

Pois,  $\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{(1-\mu^2)}{Eb2} \frac{r_{i-1}^2}{r_i} P_{i-1} = 0$

Sabendo-se da equação (3.51) que:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} P_{i-1} = S_c \quad (3.71.a)$$

A equação (3.71) resultará em:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UUP.P_{i-1}) = r_i \frac{(1-\mu^2)}{2} \frac{S_c}{bE} \quad (3.72)$$

A terceira parcela da equação (3.65) é dada pelo limite matemático a desenvolver:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} FU = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \left\{ \left[ -\frac{(1-\mu^2)}{8E} \rho \Omega^2 r_i^3 + \frac{(1-\mu^2)}{8E} \rho \Omega^2 r_i r_{i-1}^2 + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1-\mu^2)}{8E} \rho \Omega^2 r_i r_{i-1}^2 - \frac{(1-\mu^2)}{8E} \rho \Omega^2 \frac{r_{i-1}^4}{r_i} + \frac{(1+\mu)}{r_i} \alpha \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \theta(r) dr \right] \right\}$$



Desenvolvendo,

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} FU = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} -\frac{(1-\mu^2)}{8E} \rho \Omega^2 r_i^3 + \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{(1+\mu)}{r_i} \alpha \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \theta(r) dr \quad (3.74)$$

Portanto,

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} FU = -\frac{(1-\mu^2)}{8E} \rho \Omega^2 r_i^3 + \frac{(1+\mu)}{r_i} \alpha \int_0^{r_i} r \theta(r) dr \quad (3.75)$$

Pois,

$$\begin{aligned} & \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{(1-\mu^2)}{8E} \rho \Omega^2 r_i r_{i-1}^2 + \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{(1-\mu^2)}{8E} \rho \Omega^2 r_i r_{i-1}^2 - \dots \\ & - \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{(1-\mu^2)}{8E} \rho \Omega^2 \frac{r_{i-1}^4}{r_i} = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Substituindo-se as expressões (3.69), (3.72) e (3.75) em (3.65), tem-se:

$$\begin{aligned} U_i &= r_i (1-\mu) \frac{S_c}{bE} - r_i \frac{(1-\mu^2)}{2} \frac{S_c}{bE} + r_i \frac{(1-\mu^2)}{2} \frac{S_c}{bE} + \dots \\ & - \frac{(1-\mu^2)}{8E} \rho \Omega^2 r_i^3 + \frac{(1+\mu)}{r_i} \alpha \int_0^{r_i} r \theta(r) dr \end{aligned} \quad (3.77)$$

Desenvolvendo-se, vem:

$$U_i = r_i (1-\mu) \frac{S_c}{bE} - \frac{(1-\mu^2)}{8E} \rho \Omega^2 r_i^3 + \frac{(1+\mu)}{r_i} \alpha \int_0^{r_i} r \theta(r) dr$$

Desenvolvendo a expressão (3.64), vem:

$$P_i = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UPU.U_{i-1}) + \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UPP.P_{i-1}) + \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (FP)$$

Os limites da expressão (3.79) serão resolvidos por partes. A primeira parcela de (3.79) é dada por:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UPU.U_{i-1}) = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \left\{ \frac{Eb}{2r_{i-1}} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] U_{i-1} \right\} \quad (3.80)$$

Desenvolvendo, vem:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UPU.U_{i-1}) = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{U_{i-1}}{r_{i-1}} \frac{bE}{2} \quad (3.81)$$

Pois, 
$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \left[ -\frac{Eb}{2} \frac{r_{i-1}}{r_i^2} U_{i-1} \right] = 0$$

Substituindo (3.53) em (3.81), tem-se:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UPU.U_{i-1}) = \frac{S_c}{bE} (1 - \mu) \frac{bE}{2} \quad (3.82)$$

Desenvolvendo, vem:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UPU.U_{i-1}) = \frac{(1 - \mu)}{2} S_c \quad (3.83)$$

A segunda parcela da equação (3.79) é dada pelo limite matemático a desenvolver:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UPP.P_{i-1}) = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \left\{ \left[ 1 - \frac{(1 - \mu)}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \right] P_{i-1} \right\}$$

Desenvolvendo, tem-se:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UPP.P_{i-1}) = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{(1+\mu)}{2} \cdot \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} P_{i-1} \quad (3.85)$$

$$\text{Pois, } \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \left\{ \left[ \frac{(1-\mu)}{2} \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] P_{i-1} \right\} = 0$$

Aplicando a equação (3.71.a) em (3.85), e desenvolvendo os limites, tem-se:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (UPP.P_{i-1}) = \frac{(1+\mu)}{2} S_c \quad (3.86)$$

A terceira parcela da equação (3.79) é representada pelo seguinte limite matemático:

$$\begin{aligned} \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (FP) = \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \left\{ -\frac{b}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \left( \frac{\rho \Omega^2 r_i^2}{2} \{ 1 + \mu + \dots \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(1-\mu)}{2} \left[ 1 + \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \right\} - \frac{bE}{r_i^2} \alpha \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \theta(r) dr \right\} \quad (3.87) \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \left\{ -\frac{b}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \left( \frac{\rho \Omega^2 r_i^2}{2} \left\{ 1 + \mu - \frac{(1-\mu)}{2} \left[ 1 + \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \right\} \right) \right\} = \dots (3.88) \\ \left\{ -\frac{1}{4} b \rho \Omega^2 r_i^2 - \frac{\mu}{4} b \rho \Omega^2 r_i^2 - \frac{(1-\mu)}{8} b \rho \Omega^2 r_i^2 - \frac{(1-\mu)}{8} b \rho \Omega^2 r_{i-1}^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{4} b \rho \Omega^2 r_{i-1}^2 + \frac{\mu}{4} b \rho \Omega^2 r_{i-1}^2 + \frac{(1-\mu)}{8} b \rho \Omega^2 r_{i-1}^2 + \frac{(1-\mu)}{8} b \rho \Omega^2 \frac{r_{i-1}^4}{r_i^2} \right\} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (FP) &= - \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{1}{4} b \rho \Omega^2 r_i^2 - \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{\mu}{4} b \rho \Omega^2 r_i^2 + \dots \\
&- \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{(1-\mu)}{8} b \rho \Omega^2 r_i^2 - \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{b E}{r_i^2} \alpha \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \theta(r) dr
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Pois,

$$\begin{aligned}
&\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} - \frac{(1-\mu)}{8} b \rho \Omega^2 r_{i-1}^2 + \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{1}{4} b \rho \Omega^2 r_{i-1}^2 + \dots \\
&+ \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{\mu}{4} b \rho \Omega^2 r_{i-1}^2 + \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{(1-\mu)}{8} b \rho \Omega^2 r_{i-1}^2 + \dots \\
&+ \lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} \frac{(1-\mu)}{8} b \rho \Omega^2 \frac{r_{i-1}^4}{r_i^2} = 0
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Desenvolvendo os limites de (3.90), tem-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (FP) &= - \frac{b E}{r_i^2} \alpha \int_0^{r_i} r \theta(r) dr + \dots \\
&\left( - \frac{1}{4} b \rho \Omega^2 r_i^2 - \frac{\mu}{4} b \rho \Omega^2 r_i^2 - \frac{(1-\mu)}{8} b \rho \Omega^2 r_i^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Colocando em evidência  $\rho \Omega^2 b r_i^2$ , e desenvolvendo, vêm:

$$\lim_{r_{i-1} \rightarrow 0} (FP) = - \frac{(3+\mu)}{8} \rho \Omega^2 b r_i^2 - \frac{b E}{r_i^2} \alpha \int_0^{r_i} r \theta(r) dr \tag{3.92}$$

Substituindo-se as expressões (3.83), (3.86) e (3.92) em (3.79), obtêm-se, após desenvolvimento:

$$P_i = S_c - \frac{(3+\mu)}{8} \rho \Omega^2 b r_i^2 - \frac{b E}{r_i^2} \alpha \int_0^{r_i} r \theta(r) dr$$

Considerando as equações (3.78) e (3.93) e fazendo:

$$UUP_0 = r_i(1 - \mu) \frac{1}{bE} \quad (3.94)$$

$$FU_0 = -\frac{(1-\mu^2)}{8E} \rho \Omega^2 r_i^3 + \frac{(1+\mu)}{r_i} \alpha \int_0^{r_i} r \theta(r) dr \quad (3.95)$$

$$UPP_0 = 1 \quad (3.96)$$

$$FP_0 = -\frac{(3+\mu)}{8} \rho \Omega^2 b r_i^2 - \frac{bE}{r_i^2} \alpha \int_0^{r_i} r \theta(r) dr \quad (3.97)$$

Substituindo-se (3.94) e (3.95) em (3.78), escreve-se que (PILKEY, 1978).

$$U_i = UUP_0 \cdot S_c + FU_0 \quad (mm) \quad (3.98)$$

Substituindo-se (3.96) e (3.97) em (3.93), obtêm-se:

$$P_i = UPP_0 \cdot S_c + FP_0 \quad \left( \frac{N}{mm} \right) \quad (3.99)$$

Na Forma Matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 0 & UUP_0 & FU_0 \\ 0 & 1 & FP_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ S_c \\ I \end{Bmatrix}_0 \quad (3.100)$$

Sendo,

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & UUP_0 & FU_0 \\ 0 & 1 & FP_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A Matriz de Transferência  $T_0$  liga o vetor de estado da estação (0) (Centro do disco-árvore), ao vetor de estado da estação (i).

A distribuição de tensões em um disco rotativo sem furo central, é dada por (SOVINAL, 1967).

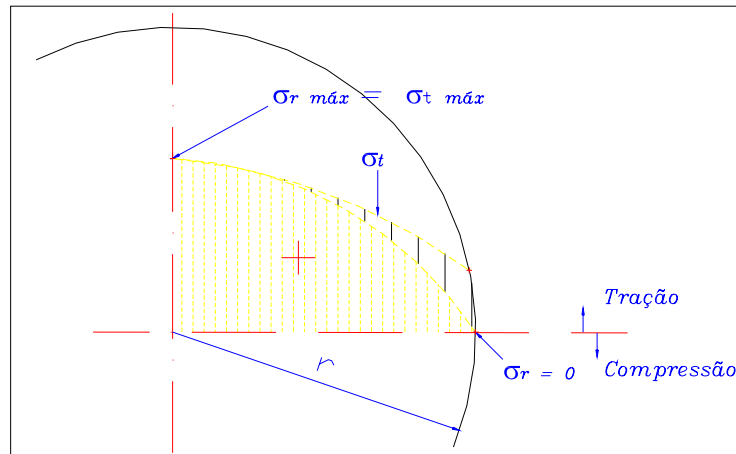


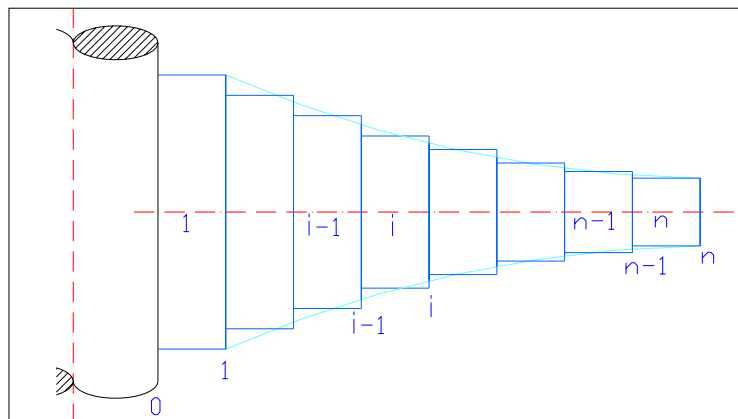
Figura 7 - Distribuição de tensões em um disco rotativo sem furo central.

## Capítulo 4

# APLICAÇÃO DO MÉTODO DA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

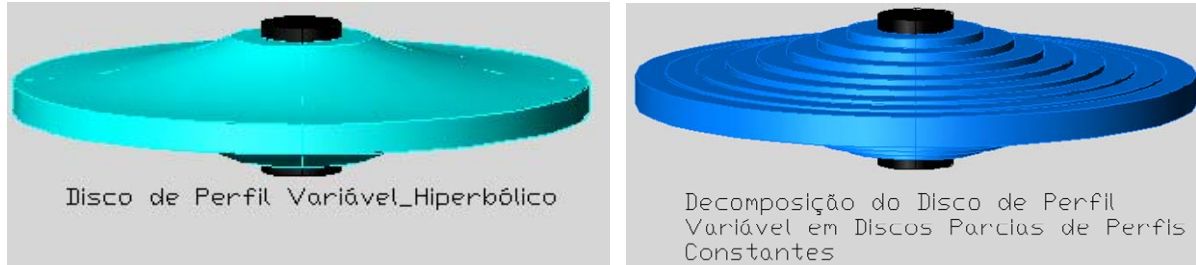
Desenvolve-se neste capítulo, o procedimento para análise das Tensões e Deformações em um Disco de Perfil Variável.

Foi desenvolvida no capítulo anterior a Matriz de Transferência para um Disco de Perfil Constante com furo central, sujeito a um gradiente de temperatura. A Matriz citada é a base para análise de Tensões e Deformações pelo método em questão, fazendo a aproximação do perfil variável a um número determinado de perfis constantes, conforme *Figura 8*.



*Figura 8 – Divisão do disco de perfil variável em discos de perfis constantes.*

A precisão de aplicação do método da Matriz de Transferência será tão melhor, quanto maior o número de divisões que o disco de perfil variável for dividido em disco de perfil constante.



*Figura 9 - Disco de perfil variável.*

Conforme *Figura 8* para um disco parcial limitado pelas estações  $(i-1)-(i)$ , pode-se escrever o vetor de estado da estação  $(i)$  e o vetor de estado da estação  $(i-1)-(i)$ , respectivamente, como:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_i \quad (4.1)$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_{i-1} \quad (4.2)$$

O vetor de estado da estação  $(i)$ , função do vetor de estado da estação  $(i-1)$ , é dado por:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_i = T_i \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_{i-1} \quad (4.3)$$

Sendo,  $T_i$  = Matriz de Transferência de um disco de perfil constante, que relaciona o vetor de estado da estação  $(i-1)$  do disco, ao vetor de estado da estação  $(i)$ .



Fazendo-se uma análise da estação interna à estação externa do disco de perfil variável, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_1 = T_1 \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_0 \quad (4.4)$$

Sendo, o vetor de estado da estação (1) e o vetor de estado da estação (0), dados, respectivamente, por:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_1 \quad (4.5)$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_0 \quad (4.6)$$

$T_1$  é Matriz de Transferência de um disco de perfil constante, que relaciona o vetor de estado da estação interna (0) do disco, ao vetor de estado da estação (1).

Analisando a estação (2) do disco de perfil variável, pode-se escrever que:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_2 = T_2 \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_1 \quad (4.7)$$

Sendo,  $\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_2$  o vetor de estado da estação (2),  $\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_1$  o vetor de estado da estação (1) e  $T_2$  a Matriz de Transferência de um disco de perfil constante, que

relaciona o vetor de estado da estação interna (1) do disco, ao vetor de estado da estação (2).

Substituindo (4.4) em (4.7), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_2 = T_2 \cdot T_1 \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_0 \quad (4.8)$$

Analisando seqüencialmente, até a estação externa do disco de perfil variável, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_n = T_n \cdot T_{n-1} \dots T_i \cdot T_{i-1} \dots T_2 \cdot T_1 \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_0 \quad (4.9)$$

Sendo, o produto  $(T_n \cdot T_{n-1} \dots T_i \cdot T_{i-1} \dots T_2 \cdot T_1)$  a Matriz de Transferência Global ( $T_g$ ), de um disco de perfil variável, que relaciona o vetor de estado da estação interna (0) do disco, ao vetor de estado da estação externa (n).

O vetor de estado da estação externa do disco e o vetor de estado da estação interna do disco, são dados, respectivamente, por:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_n \quad (4.10)$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_0$$

Desde que cada uma das matrizes é conhecida, a Matriz Global ( $T_g$ ) é perfeitamente determinada.

Determinada a Matriz Global ( $T_g$ ) e conhecendo-se as condições de contorno, processa-se a determinação das condições iniciais, conhecendo-se, assim, o vetor de estado da estação interna ( $0$ ) do disco de perfil variável.

Com as condições iniciais, pode-se, portanto, determinar o vetor de estado em uma posição qualquer do disco de perfil variável.

$$\left\{ \begin{array}{c} U \\ P \\ I \end{array} \right\}_i = T_i \cdot T_{i-1} \dots T_K \dots T_2 \cdot T_1 \left\{ \begin{array}{c} U \\ P \\ I \end{array} \right\}_0 \quad (4.12)$$

Sendo,

$\left\{ \begin{array}{c} U \\ P \\ I \end{array} \right\}_i$  o vetor de estado da estação ( $i$ ), onde se determinará as tensões e deformações.

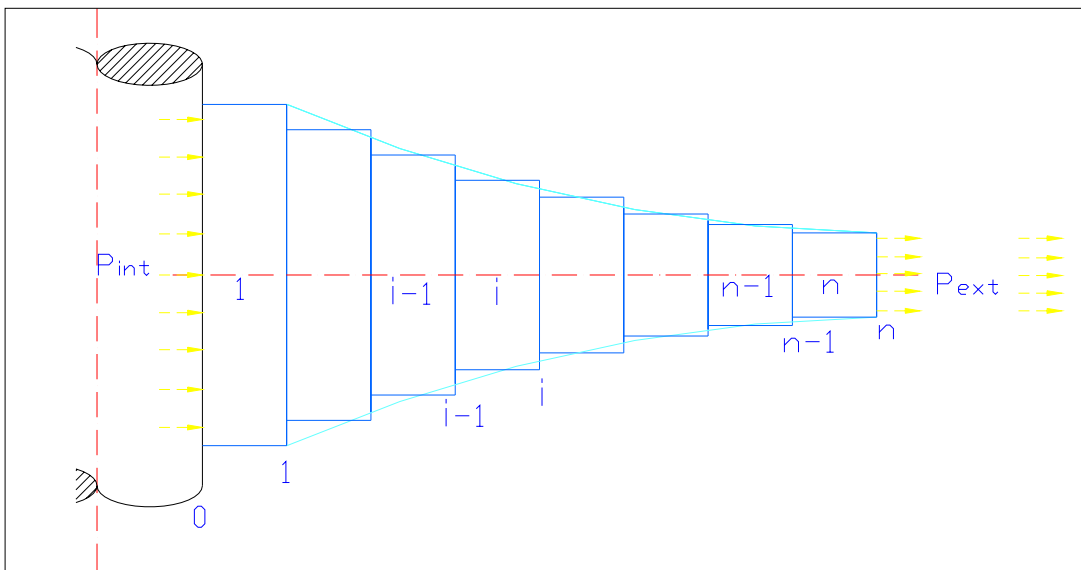
$\left\{ \begin{array}{c} U \\ P \\ I \end{array} \right\}_0$  o vetor de estado da estação ( $0$ ), ou seja, estação interna do disco.

( $T_i \cdot T_{i-1} \dots T_K \dots T_2 \cdot T_1$ ) é o produto das Matrizes de Transferências do disco de perfil constante da estação interna ( $0$ ) a estação ( $i$ ) do disco de perfil variável.

De posse das análises feitas anteriormente, estuda-se os casos possíveis em que um disco de perfil variável possa estar sujeito, como: Rotação, Temperatura, Pressão interna devido ao ajuste de interferência e Pressão externa devido à inércia do disco e das pás, analisado de acordo com que eles ocorrem em um determinado Sistema em estudo (PILKEY, 1978).

## 4.1 ANÁLISE DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES EM DISCO DE PERFIL VARIÁVEL

Sendo o disco variável de perfil hiperbólico em rotação e sujeito a um gradiente de temperatura, pressão interna e pressão externa, dada pela *Figura 10*:



*Figura 10 - Disco de Perfil Hiperbólico.*

A Matriz de Transferência Global  $T_{gl}$  para o disco variável, sendo divididos em  $n$  discos parciais de perfis constantes é dada por:

$$T_{gl} = \begin{bmatrix} UUU_1 & UUP_1 & FU_1 \\ UPU_1 & UPP_1 & FP_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Relacionando os vetores (4.10) e (4.11), obtêm-se:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_n = T_{gl} \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_0$$

Substituindo (4.13) em (4.14), escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} UUU_1 & UUP_1 & FU_1 \\ UPU_1 & UPP_1 & FP_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_0 \quad (4.15)$$

Desenvolvendo-se o sistema (4.15), tem-se:

$$U_n = UUU_1 \cdot U_0 + UUP_1 \cdot P_0 + FU_1 \quad (4.16)$$

$$P_n = UPU_1 \cdot U_0 + UPP_1 \cdot P_0 + FP_1 \quad (4.17)$$

Utiliza-se a expressão (4.17) para a determinação da condição inicial, obtendo-se:

$$U_0 = \frac{P_n - (UPP_1 \cdot P_0 + FP_1)}{UPU_1} \quad (4.18)$$

Conhecendo-se  $U_0$ , tem-se, portanto, definido o vetor de estado inicial.

As Tensões e Deformações em um ponto qualquer do disco serão dadas por:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_i = T_i \cdot T_{i-1} \dots T_k \dots T_2 \cdot T_1 \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_0 \quad (4.19)$$

Sendo,  $\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_i$  o vetor de estado da estação ( $i$ ) do disco e  $(T_i \cdot T_{i-1} \dots T_k \dots T_2 \cdot T_1)$

o produto das Matrizes de Transferências da estação ( $i$ ) a estação interna ( $0$ ) do disco.

Deve-se salientar que, a pressão radial externa  $P_n$  suposta, é determinada dependendo do sistema em análise.

Em relação a esta pressão externa do sistema, pode-se citar como exemplo: tensão das correias nas polias, engrenamento dos dentes de uma engrenagem e principalmente as forças de inércia das pás de um rotor de turbina, que será nossa aplicação neste trabalho.

Como o objetivo principal deste trabalho é a análise de Tensões e Deformações em rotores de turbinas, assim, a Pressão Radial Externa pode ser determinada por:

$$\sigma'_r = \frac{\beta}{A} \quad (4.20)$$

sendo,  $\beta$  e  $A$  dados por:

$$\beta = \frac{G}{g} \Omega^2 r_a \quad (4.21)$$

$$A = 2\pi r_e b \quad (4.22)$$

Considerando que  $G$  é o peso total de todas as pás.

Portanto, substituindo (4.21) e (4.22) em (4.20), tem-se:

$$\sigma'_r = \frac{G}{g} \Omega^2 \frac{r_a}{2\pi r_e b} \quad (4.23)$$

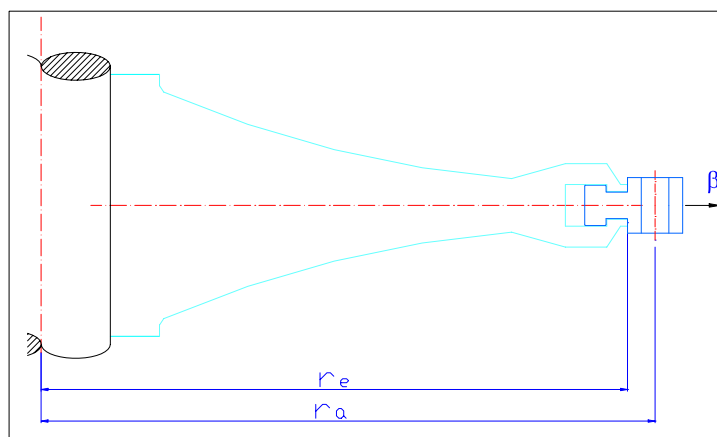


Figura 11 - Disco hiperbólico ( rotores) de turbina a vapor.

A pressão radial na estação interna ( $P_0$ ) é determinada pela Pressão de Contato, devido ao ajuste de interferência na montagem do sistema árvore-disco.

No próximo capítulo será tratado o problema da Interferência, determinando a Pressão de contato entre a árvore e o disco, bem como a velocidade crítica e o Ajuste de segurança para o sistema.

Os efeitos considerados acima são parâmetros essenciais na determinação da Tensão Radial e Deformação Radial em cada ponto do disco, com a aplicação do Método da Matriz de Transferência.

Sendo assim, para uma estação ( $i$ ) do disco, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_{i(R+T)} + \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_{i(P_{ext})} + \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_{i(P_{int})} = \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_{i(T)} \quad (4.24)$$

Sendo,

$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_{i(R+T)}$ , o vetor de estado da estação ( $i$ ) do disco, em função de Rotação e Temperatura.

$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_{i(P_{ext})}$ , o vetor de estado da estação ( $i$ ), em função da Pressão Radial na estação externa do disco.

$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_{i(P_{int})}$ , o vetor de estado da estação ( $i$ ), em função da Pressão Radial na estação interna do disco.

$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_{i(T)}$ , o vetor de estado da estação ( $i$ ), em função de todos os efeitos que o disco está sujeito.

## **Capítulo 5**

# **VELOCIDADE CRÍTICA DO SISTEMA ÁRVORE-DISCO MONTADOS SOB INTERFERÊNCIA**

Para o bom funcionamento, sem ocorrência de falha no sistema árvore-disco, um ajuste com interferência é de suma importância.

Assim, em função da rotação do sistema árvore-disco deve-se ter, na montagem deste, a certeza da interferência entre árvore-disco.

Para isto, desenvolve-se neste capítulo um método de verificação da eficiência da interferência adotada para o sistema e a determinação da velocidade crítica deste, para que não se tenha uma sobrecarga na chaveta ou em caso extremo, o desacoplamento total do disco da árvore.

O limite de funcionamento do sistema é para um valor nulo na deformação radial na superfície da árvore, onde se tem a carga total aplicada sobre a chaveta ou o desalojamento do disco da árvore.



Assim sendo, deve-se adotar no problema o valor máximo da deformação radial de compressão na árvore, proveniente da interferência e tensão radial atuante, para que não ocorra falha no sistema árvore-disco.

De acordo com o sistema, em termos de deformação e interferência, tem-se:

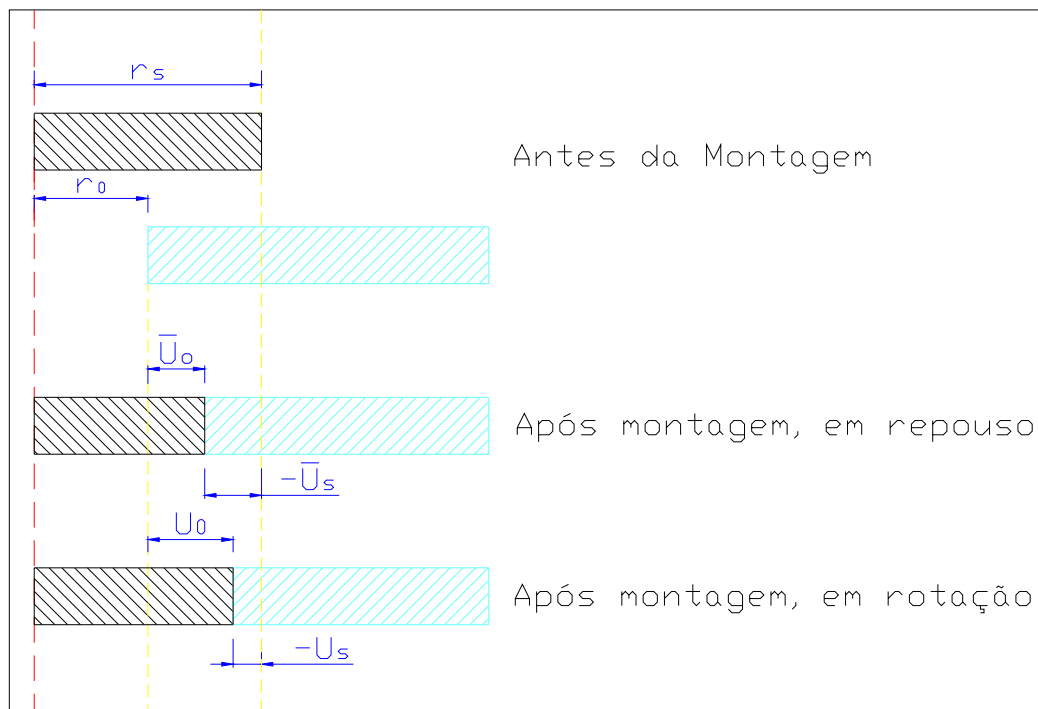


Figura 12 - Interferência do sistema árvore-disco.

Analisando a Figura 12, pode-se concluir que a interferência do sistema árvore-disco é dada, antes da montagem, por: (PESTEL; LECKIE, 1963)

$$\delta = r_s - r_0 \quad (5.1)$$

Sendo,  $r_s$  o raio externo da árvore e  $r_0$  o raio interno do disco.

Para o sistema em repouso, após montagem, tem-se:

$$\delta = \bar{U}_0 - \bar{U}_s$$

Sendo,  $\bar{U}_0$  a deformação radial do disco em repouso e  $\bar{U}_s$  a deformação radial da árvore em repouso.

Para o sistema em rotação, tem-se:

$$\delta = U_0 - U_s \quad (5.3)$$

Sendo,  $U_0$  a deformação radial do disco em rotação e  $U_s$  a deformação radial da árvore em rotação.

Para a determinação de tensões e deformações em um sistema disco rotativo e árvore sem furo, usa-se a expressão (4.14).

Sendo a mesma expressão (4.14), estendida, como se segue:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_n = T_{g1} \cdot T_0 \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_c \quad (5.4)$$

Assim, se estabelece uma análise completa em termos de deformações e tensões desde o centro da árvore (matriz  $T_0$ ) à superfície externa do disco de perfil variável (matriz  $T_{g1}$ ).

A matriz de transferência para um disco de perfil constante sem furo central (árvore) é dada pela matriz (3.101).

A relação entre os vetores de estados do raio externo (índice zero) da árvore ao centro (índice C) é dada por:

$$\begin{Bmatrix} U_s \\ P \\ I \end{Bmatrix}_0 = T_0 \begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_c$$

Sendo o vetor de estado da estação externa da árvore e o vetor de estado do centro da árvore dado, respectivamente, por:

$$\begin{Bmatrix} U_s \\ P \\ I \end{Bmatrix}_o \quad (5.6.a)$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ I \end{Bmatrix}_c \quad (5.6.b)$$

A condição de contorno para o disco sem furo central é dada por,  $U_c = 0$ , que corresponde a deformação radial no centro da árvore.

Substituindo a condição de contorno e a matriz de transferência  $T_o$ , dada por (3.101), em (5.5), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} U_s \\ P \\ I \end{Bmatrix}_o = \begin{bmatrix} 0 & UUP_o & FU_o \\ 0 & 1 & FP_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ I \end{Bmatrix}_c \quad (5.7)$$

Desenvolvendo o sistema (5.7), vem:

$$U_{s_o} = UUP_o \cdot P_c + FU_o \quad (5.8)$$

e,

$$P_o = P_c + FP_o$$

Substituindo  $P_c$  de (5.9) em (5.8), tem-se:

$$U_{s_o} = UUP_o (P_o - FP_o) + FU_o$$

Através da expressão (5.10), determina-se a deformação radial da árvore  $U_s$  em rotação, após a interferência fornecida ao sistema.

Analisando sistema a partir da estação interna do disco, encontra-se a expressão (4.18), utilizada para determinar a deformação radial do disco em rotação, após a interferência fornecida ao sistema.

Voltando para a determinação do ajuste de interferência antes da montagem do disco sobre a árvore, dada pela expressão (5.1), determina-se a interferência  $\delta$  de tal maneira que, durante a rotação com velocidade angular  $\Omega$  uma Pressão de Ajuste  $P_0$  esteja presente.

Analisando a *Figura 12*, verifica-se a validade das expressões (5.2) e (5.3):

$$\delta = \bar{U}_0 - \bar{U}_s = U_0 - U_s \quad (5.11)$$

Assim, a interferência  $\delta$  é encontrada para uma Pressão de ajuste  $P_0$  prescrita durante a rotação, através do desenvolvimento da expressão (5.3), substituindo (5.10) e (5.16):

$$\delta = \left[ \frac{I}{UPU_1} (P_n - UPP_1 \cdot P_0 - FP_1) \right] - [UUP_0 (P_0 - FP_0) + FU_0] \quad (5.12)$$

Desenvolvendo,

$$\delta = \left[ \frac{P_n}{UPU_1} - \frac{UPP_1 \cdot P_0}{UPU_1} - \frac{FP_1}{UPU_1} - UUP_0 \cdot P_0 + UUP_0 \cdot FP_0 - FU_0 \right]$$

Organizando os termos em comum, vem:

$$\delta = -P_0 \left( \frac{UPP_1}{UPU_1} + UUP_0 \right) + \frac{I}{UPU_1} (P_n - FP_1) + UUP_0 \cdot FP_0 - FU_0 \quad (5.14)$$

Através da expressão (5.14), determina-se a velocidade crítica de um disco rotativo de espessura variável em função da interferência  $\delta$ , pressão de ajuste  $P_0$  e pressão externa  $P_n$  (proveniente da inércia das pás e peso do disco), a partir da análise de todo o sistema.

Os termos  $(FP_1)$ ,  $(FP_0)$  e  $(FU_0)$  de (5.19) dependem da velocidade angular  $\Omega$ , necessária na determinação da rotação crítica do disco, onde a partir desta velocidade, considerada “caso crítico”, a deformação radial de compressão da árvore é nula, acarretando o desacoplamento total do disco da árvore.

Interessa-se determinar também a pressão de ajuste  $\bar{P}_0$  quando o sistema está em repouso, obtendo as seguintes condições de contorno:

- Pressão de ajuste árvore-disco  $\Rightarrow P_0 = \bar{P}_0$ ;
- Pressão externa, devido a inércia  $\Rightarrow P_n = 0$ ;
- Deformação radial do disco, em repouso  $\Rightarrow U_0 = \bar{U}_0$ ;
- Equação que apresenta a componente  $\Omega$   $\Rightarrow FP_1 = 0$ .

Aplicando as condições de contorno na equação (4.17) e desenvolvendo, obtêm-se a deformação radial do disco em repouso, em função somente do ajuste de interferência árvore-disco:

$$\bar{U}_0 = -\frac{UPP_1 \cdot \bar{P}_0}{UPU_1}$$

Correspondentemente para a equação (5.10) com  $\Omega = 0$ , tem-se:

- Pressão de ajuste árvore-disco  $\Rightarrow P_0 = \bar{P}_0$ ;
- Deformação radial do disco, sem rotação  $\Rightarrow Us_0 = \bar{U}_s$ ;

- Termos que apresentam  $\Omega$   $\Rightarrow FP_0 = 0$ ;
- $\Rightarrow FU_0 = 0$ .

Substituindo as condições anteriores, vem:

$$\bar{U}_s = UUP_0 \cdot \bar{P}_0 \quad (5.16)$$

Sendo a equação (5.16) necessária para determinação da deformação radial da árvore em repouso.

Aplicando, portanto, as equações (5.20) e (5.21) em (5.2), obtêm-se:

$$\delta = -\frac{UPP_1 \cdot \bar{P}_0}{UPU_1} - UUP_0 \cdot \bar{P}_0 \quad (5.17)$$

Desenvolvendo, vem:

$$\delta = -\bar{P}_0 \cdot \left( UUP_0 + \frac{UPP_1}{UPU_1} \right) \quad (5.18)$$

Portanto:

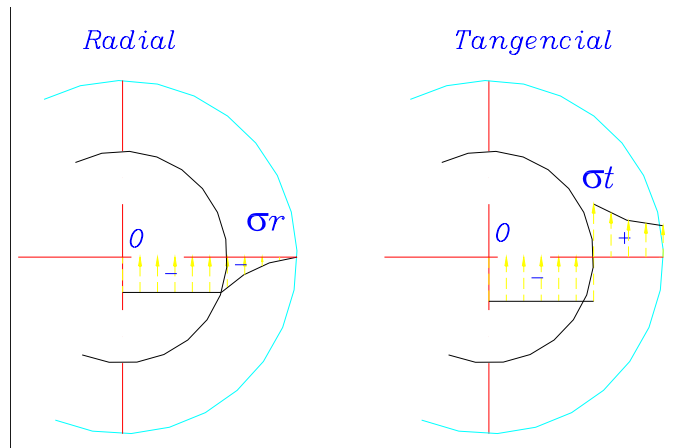
$$\bar{P}_0 = -\frac{\delta}{\left( UUP_0 + \frac{UPP_1}{UPU_1} \right)} \quad (5.19)$$

Através da equação (5.19) determina-se a pressão de ajuste devido à junção da árvore no disco com uma interferência adotada  $\delta$ .

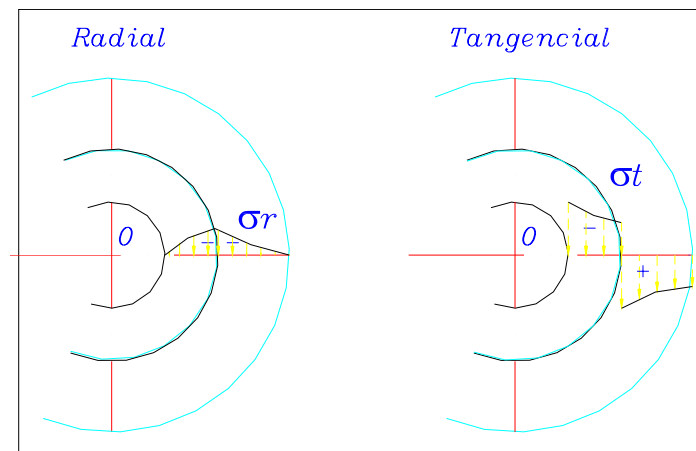
A determinação das tensões e deformações no disco em repouso é realizada da mesma maneira que antes, com a aplicação da matriz de transferência.

Vale lembrar que a rotação crítica de um sistema árvore-disco em análise, onde a junção destes é por interferência, dependerá da pressão de ajuste, pressão externa e da rotação que o sistema está submetido.

A distribuição de tensões para um disco de perfil constante em repouso, devido a interferência são dadas pelas *Figuras 13 e 14*, abaixo:



*Figura 13 - Distribuição de tensões em sistema disco e árvore maciça.*



*Figura 14 - Distribuição de tensões em sistema disco e árvore ôca.*

## Capítulo 6

# APLICAÇÃO PRÁTICA DO MÉTODO NUMÉRICO

Abaixo, *Figura 15*, estão representados sistemas árvore-disco, sendo o disco de turbina à vapor de perfil variável, acoplado ao eixo-árvore sob Ajuste de Interferência:



*Figura 15 - Disco de Turbina à vapor, de perfil variável.*

Será analisada a distribuição de Tensões e Deformações ao longo do raio do Disco e, principalmente, a Rotação Crítica e a Interferência de segurança de funcionamento do sistema árvore-disco.



O limite de funcionamento é o desacoplamento total do disco da árvore ou a conseqüente carga total aplicada sobre a chaveta, dependendo da montagem do sistema.

Têm-se como dados para a Análise:

$$E = 210 \text{ GPa}; \quad \mu = 0,3;$$

$$\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}; \quad \rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3;$$

$$n = 3200 \text{ rpm}; \quad \Omega = 335,1 \text{ s}^{-1};$$

$$\delta = 405 \text{ } \mu\text{m} \text{ (H6 x5) - Ajuste Fixo Prensado.}$$

A ajustagem selecionada trata-se de Ajuste “com possível carga sobre a chaveta”, para turbina a vapor sobre recomendação da empresa fabricante.

Trata-se, também, de acoplamentos (junção árvore-disco) fixos, não desmontáveis. São peças ajustadas de modo a comportarem como se fossem uma única, para não mais serem desmontadas e destinadas a transmitir fortes cargas axiais e momento torsor sem o uso de chaveta ou similares, sendo possível desmontagem somente sob pressão a quente. Essa ajustagem são aplicadas, por exemplo, a engates de grande responsabilidade.

A Tensão Radial externa devido à inércia (peso das pás) foi calculada para uma rotação nominal de  $n = 2000 \text{ rpm}$ , obtendo-se:

$$P_{ext} = 49,82 \text{ [MPa]}$$

Para uma rotação qualquer  $n$ , tem-se:

$$P_{ext} = 49,82 \cdot \left( \frac{n}{2000} \right)^2 \text{ [MPa]}$$

Para uma rotação de operação  $n = 3200 \text{ rpm}$ , a pressão externa atuante será:

$$P_{ext} = 127,54 \text{ [MPa]}$$

A Tensão Radial interna  $P_{int}$  dependerá do ajuste de interferência e da rotação em que o sistema árvore-disco estará submetido em trabalho.

Considerando a interferência de montagem  $\delta = 405 \mu m$ , a Pressão de Ajuste em que o sistema árvore-disco estará sujeito, em repouso ( $n=0$ ):

$$P_{int} = -54,51 \text{ MPa}$$

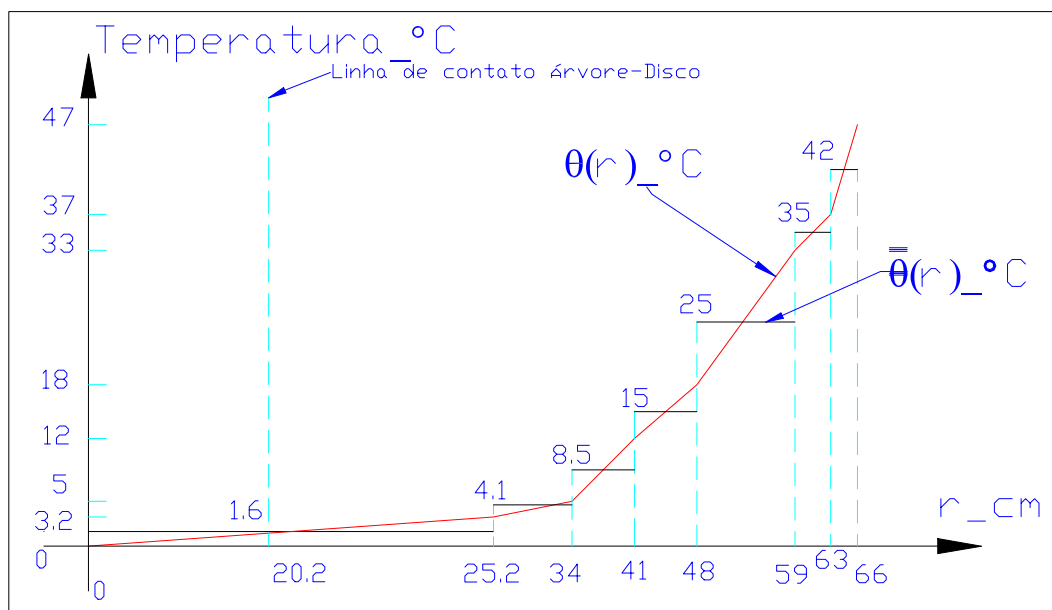
Em funcionamento, com uma rotação  $n = 3200 \text{ rpm}$ :

$$P_{int} = -9,56 \text{ MPa}$$

Em funcionamento, na rotação crítica  $n_{crit}$ :

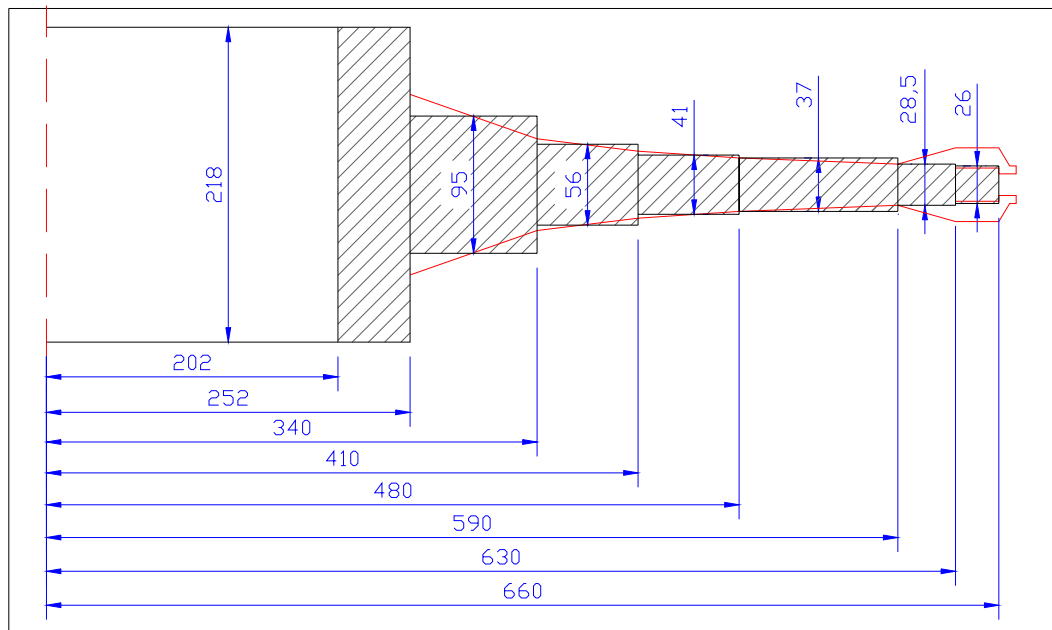
$$P_{int} = 0$$

A distribuição do excedente de temperatura  $\theta(r)$  e gradiente de temperatura  $\bar{\theta}(r)$ , ao longo do raio do disco de perfil variável é apresentada na *Figura 16*.



*Figura 16 – Relação entre excedente e gradiente de temperatura para um disco de perfil variável.*

A decomposição do disco de perfil variável em discos parciais de perfil constante, é apresentada conforme *Figura 19*.



*Figura 17 - Decomposição do disco de perfil variável em discos parciais de perfil constante.*

Utilizando um programa desenvolvido no software MatLab®, calculam-se as deformações radiais e tensões radiais e tangenciais para cada elemento do disco parcial, usando o Método de Matrizes de Transferências desenvolvido nesta Dissertação. O código do programa encontra-se no Apêndice B.

As tabelas a seguir mostram os resultados obtidos pelo programa. Para a determinação das Tensões Radiais e Tangenciais e Deformação Radial, levam-se em consideração todos os efeitos atuantes no Sistema Árvore-Disco: rotação, temperatura, pressão interna e pressão externa.

Tabela 1 – Tensões radiais e tangenciais e Deformação radial para o Sistema árvore-disco em repouso.

Raio( r ) (mm)	Deformação Radial (mm)	Tensão Radial (MPa)	Tensão Tangencial (MPa)
202	0,171	-54,51	156,86
252	0,154	-38,39	112,58
340	0,140	-10,24	71,58
410	0,142	0,69	47,90
480	0,155	4,97	25,07
590	0,196	4,38	-2,55
630	0,218	2,34	-29,77
660	0,238	0	-48,09

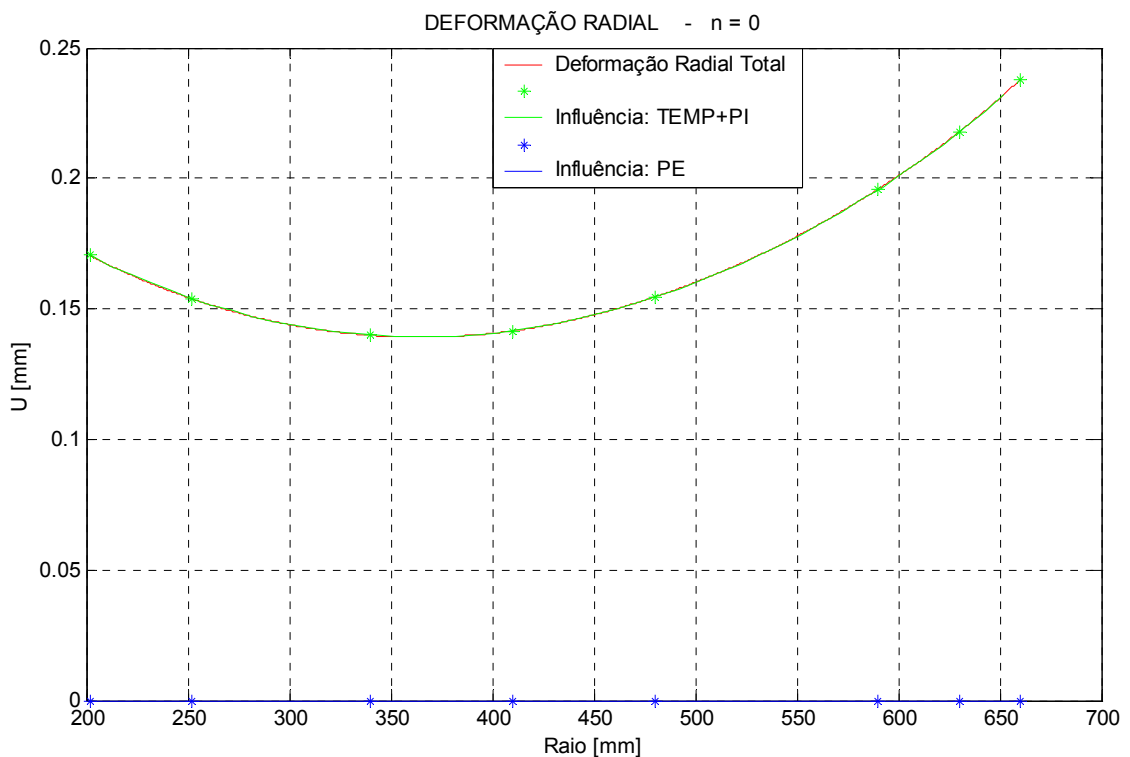


Figura 18 – Distribuição da Deformação Radial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em repouso.

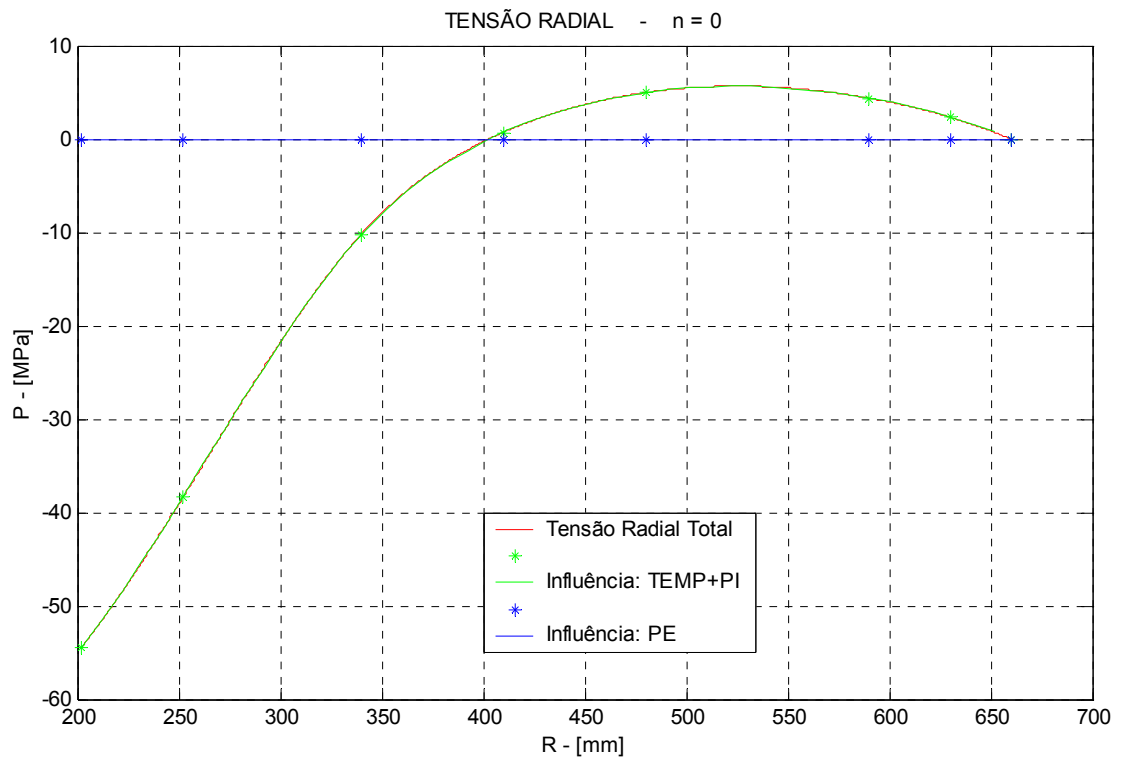


Figura 19 – Distribuição da Tensão Radial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em repouso.

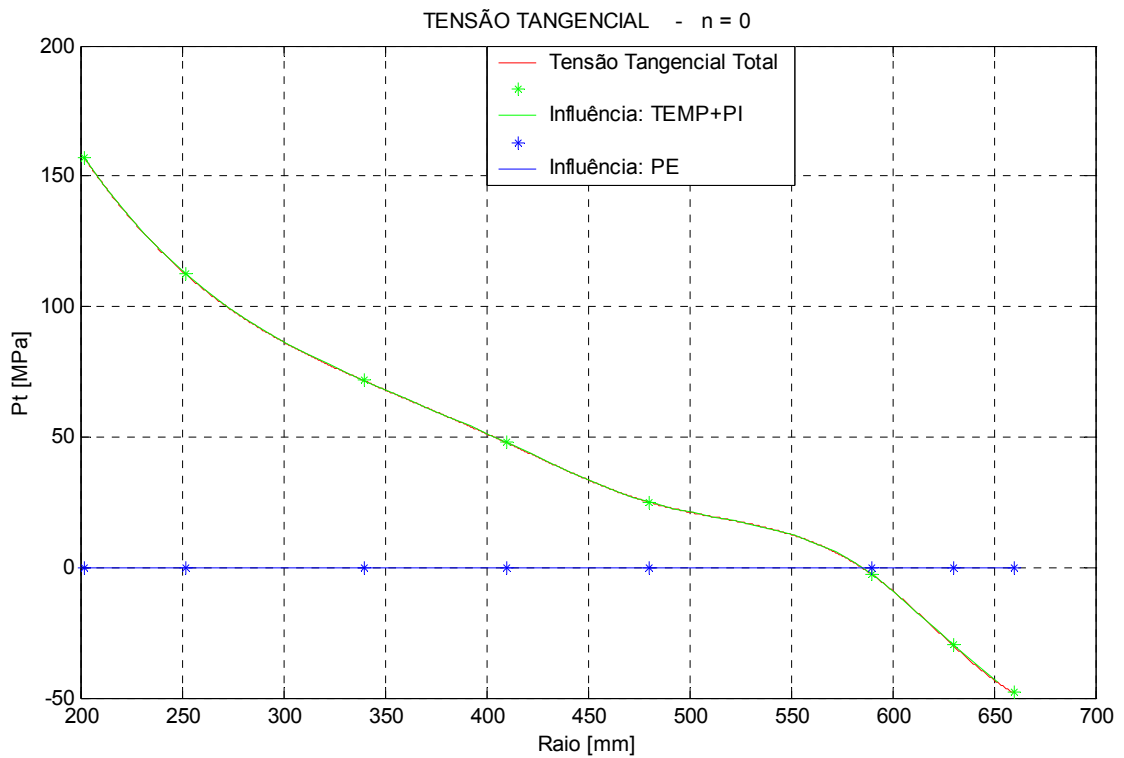


Figura 20 – Distribuição da Tensão Tangencial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em repouso.

Tabela 2 – Tensões radiais e tangenciais e Deformação radial para o Sistema árvore-disco em Rotação de operação a 3200 rpm.

Raio( r ) (mm)	Deformação Radial (mm)	Tensão Radial (MPa)	Tensão Tangencial (MPa)
202	0,277	-9,56	281,32
252	0,264	75,85	238,54
340	0,278	152,19	206,22
410	0,316	186,76	193,63
480	0,372	176,14	171,73
590	0,466	157,90	140,21
630	0,507	146,85	110,55
660	0,541	127,53	87,04

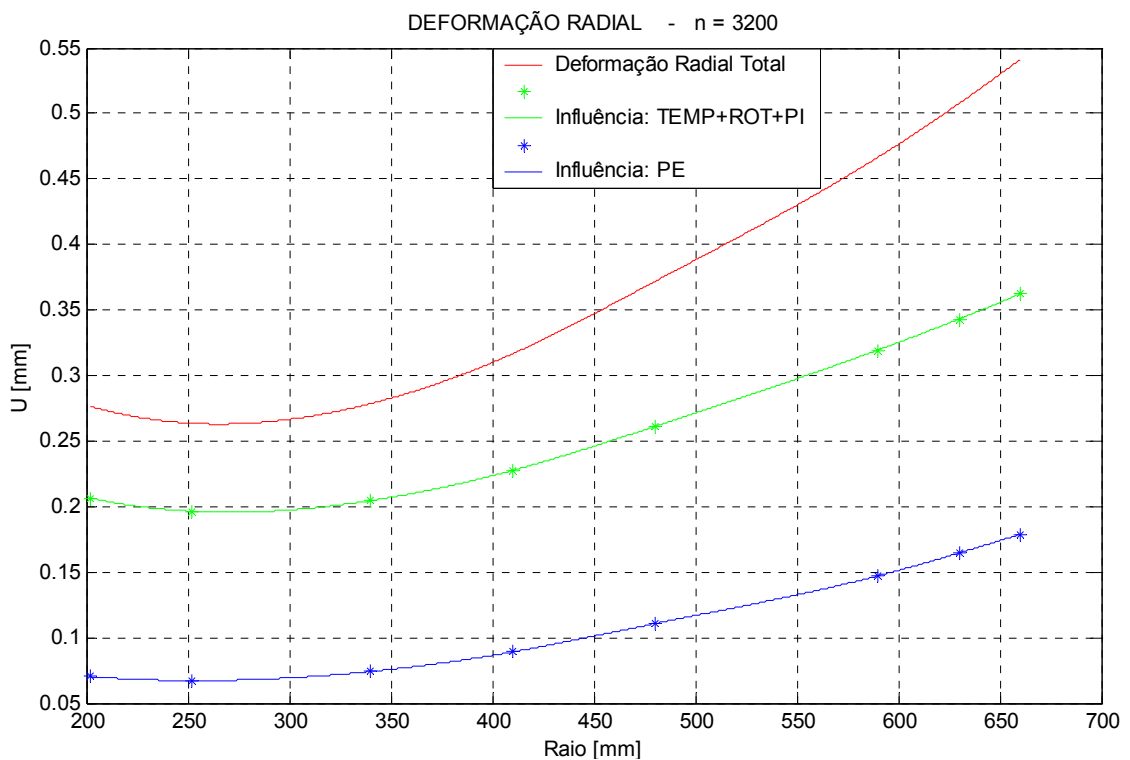


Figura 21 – Distribuição da Deformação Radial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em rotação a 3200 rpm.

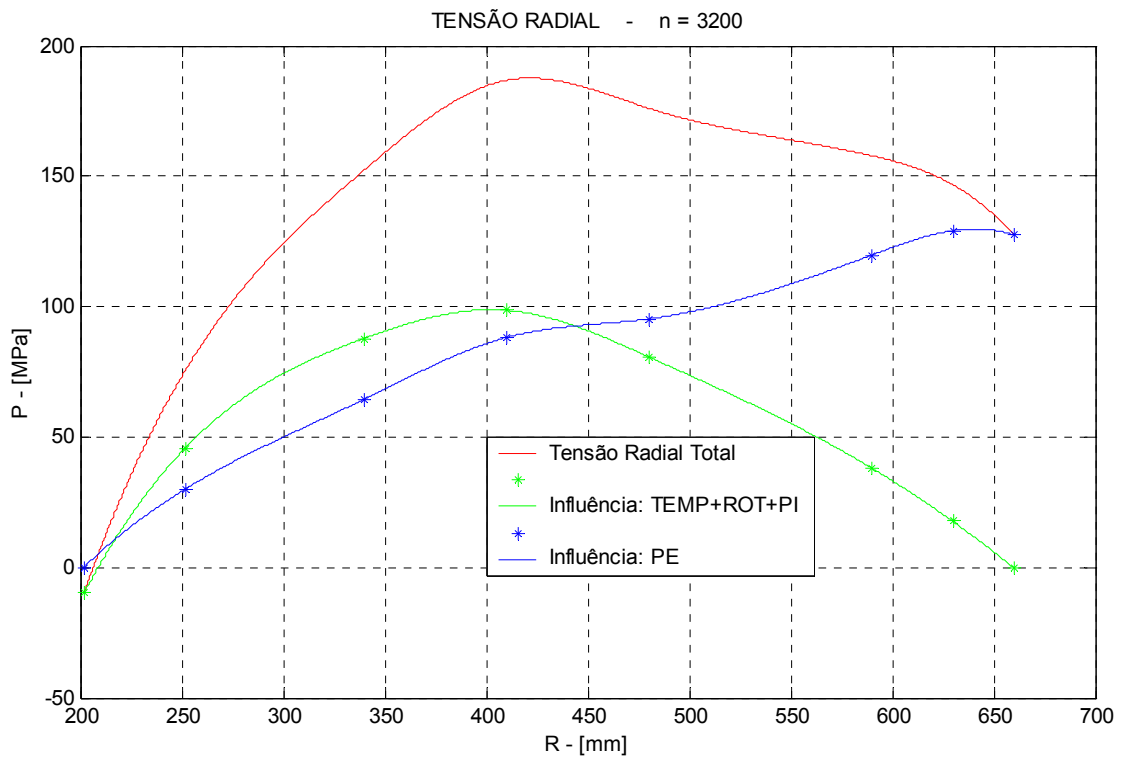


Figura 22 – Distribuição da Tensão Radial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em rotação a 3200 rpm.

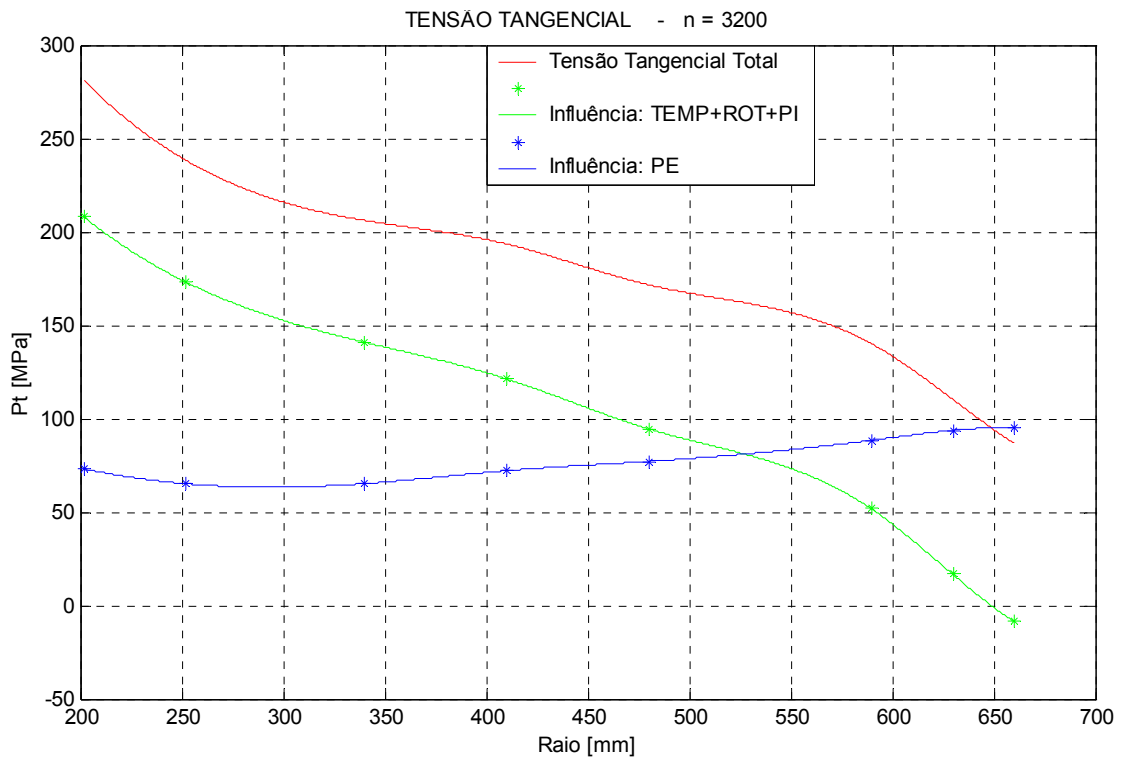


Figura 23 – Distribuição da Tensão Tangencial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em rotação a 3200 rpm.

Tabela 3 – Tensões radiais e tangenciais e Deformação radial para o Sistema árvore-disco em Rotação Crítica a 3524 rpm.

Raio( r ) (mm)	Deformação Radial (mm)	Tensão Radial (MPa)	Tensão Tangencial (MPa)
20.2	0,299	0	307,80
25.2	0,287	100,16	265,34
34.0	0,308	186,75	234,86
41.0	0,354	226,35	224,63
48.0	0,418	212,55	202,93
59.0	0,524	190,56	170,58
63.0	0,569	177,59	140,40
66.0	0,605	154,67	115,78

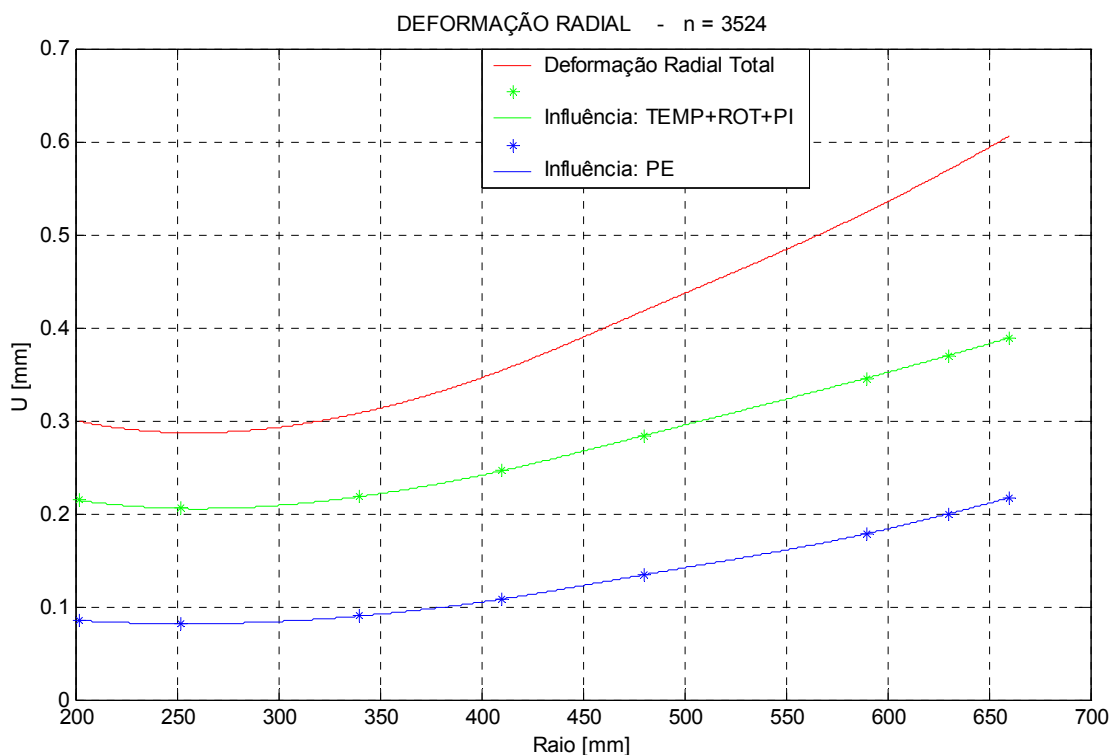
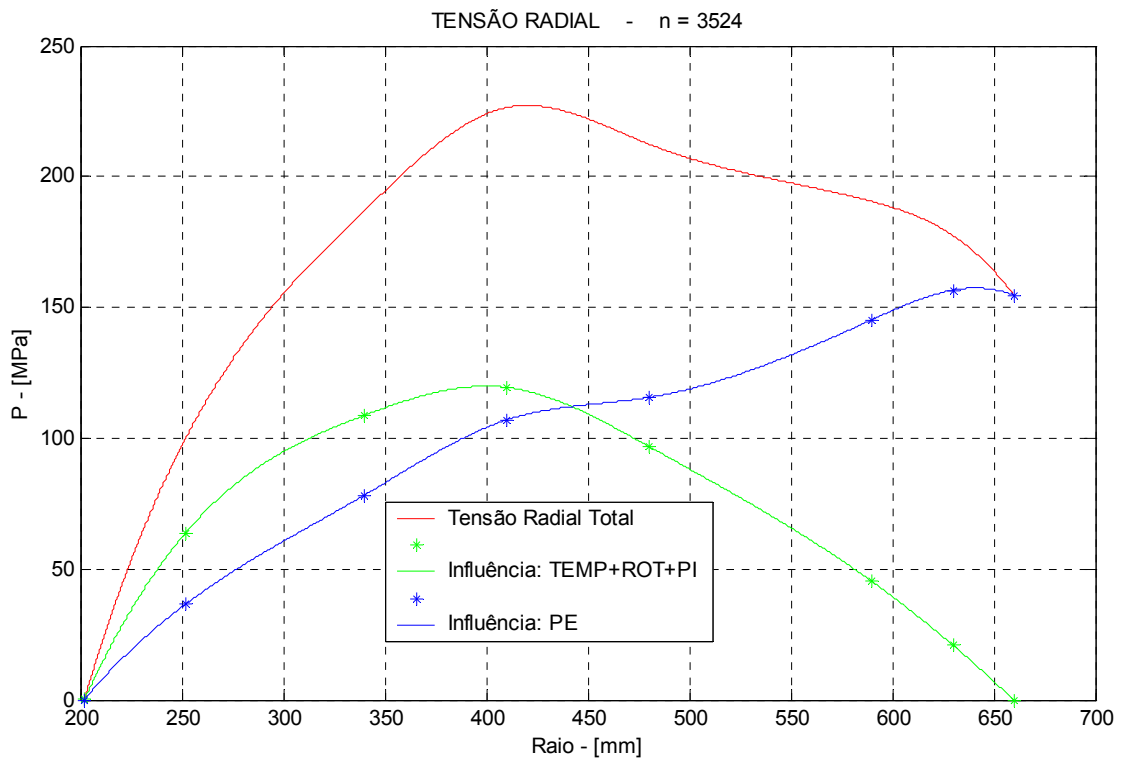
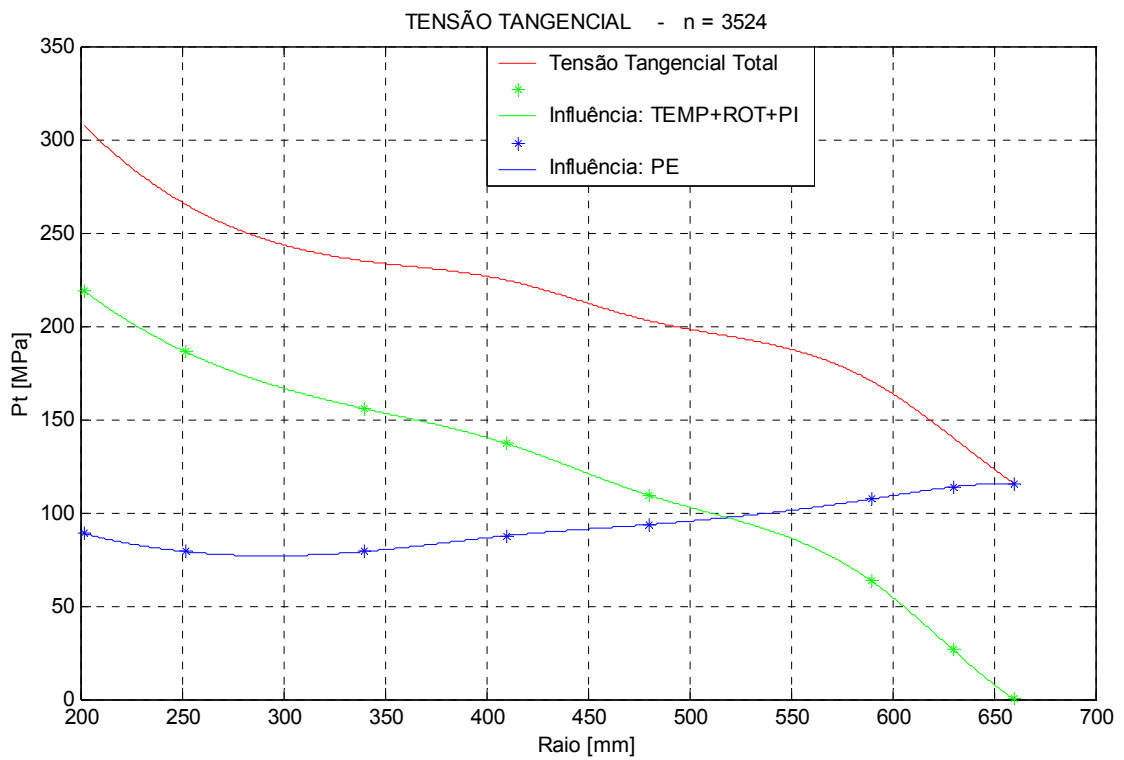


Figura 24 – Distribuição da Deformação Radial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em rotação crítica.





*Figura 25 – Distribuição da Tensão Radial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em rotação crítica.*



*Figura 26 – Distribuição da Tensão Tangencial em um disco de perfil variável decomposto em discos de perfil constante, considerando o sistema em rotação crítica.*

A rotação crítica do sistema para que não ocorram falhas, é determinada variando a rotação até o limite de desacoplamento, ou seja, quando não há ajuste entre árvore-disco. Assim, obtém-se a seguinte rotação:

$$\Omega_{crit} = 369,03 \text{ s}^{-1} \quad \text{ou} \quad n_{crit} = 3524 \text{ rpm}$$

Os limites de rotação crítica do sistema é determinada utilizando os ajustes recomendados para Turbinas a vapor (Ajuste com possível carga sobre a chaveta):

Ajuste:  $H6 / x5$

Tolerância Dimensional do disco de turbina e da árvore:  $D_{+40}^0 \quad d_{+385}^{+405}$

Interferência Mínima:  $345 \mu m$ ; Interferência Máxima:  $405 \mu m$

$$337,3 \text{ s}^{-1} \leq \Omega_{crit} \leq 369,03 \text{ s}^{-1}$$

$$3221 \text{ rpm} \leq n_{crit} \leq 3524 \text{ rpm}$$

Considerando que a árvore-disco de turbina da aplicação em questão opera numa rotação de ( $n = 3200 \text{ rpm}$ ), então os limites de rotações do Sistema serão de:

( $n = 21 \text{ rpm}$ )  $\Rightarrow$  para uma montagem em interferência mínima, com pressão de contato  $P_c = -0.591 \text{ MPa}$ ;

( $n = 324 \text{ rpm}$ )  $\Rightarrow$  para uma montagem em interferência máxima, com pressão de contato  $P_c = -9.561 \text{ MPa}$ ;

Para que o sistema não fique sujeito a falhas, deve-se executar a montagem em interferência mais próxima da máxima, onde se terá maior limite de rotação de trabalho e Pressão de Contato (compressão) árvore-disco.

Em relação a interferência adotada para o sistema árvore-disco, nota-se que se tem após uma rotação de  $369 \text{ rad} / \text{s}$  um alívio total da árvore e, portanto, a carga total aplicada sobre a chaveta.

## **Capítulo 7**

# **CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS**

## **7.1 CONCLUSÕES**

Neste trabalho desenvolveu-se um método de cálculo usando Matrizes de Transferências, tendo como objetivo final calcular as tensões e deformações em discos (rotores de turbinas, por exemplo) em função da rotação do eixo, temperatura e ajuste com interferência do sistema.

A escolha do Método das Matrizes de Transferências se deu pela simplicidade de modelagem e facilidade para desenvolver um programa computacional para calcular as tensões e deformações.

O programa desenvolvido calcula a rotação crítica do sistema, ou seja, a rotação em que a Pressão de Contato devida ao ajuste torna-se nula. Portanto, essa rotação representa o limite de trabalho do disco para o sistema em movimento. Considera-se

que este cálculo é a maior contribuição para o projeto de rotores montados por interferência, e que geralmente giram em altas velocidades.

Para desenvolver esta Dissertação, seguiu-se uma sistemática de exploração em três campos complementares: uma revisão bibliográfica, um estudo teórico e aplicação numérica via programação em um projeto real.

Através de uma revisão bibliográfica no Cap.2, foi apresentada a equação diferencial que regem as tensões e deformações em disco rotativo de perfis constante, variável e hiperbólico, sendo a base para o desenvolvimento das matrizes do método numérico aplicado. Destacando-se entre estas, a equação diferencial da deformação radial, tensões radiais e tangenciais em disco de espessura constante e um modelo de disco (perfil) de resistência constante.

No Cap.3 foram desenvolvidas as equações diferenciais das tensões e deformações, necessárias para o desenvolvimento das Matrizes de Transferências.

No Cap.4 sistematizou-se o procedimento para acoplar as equações diferenciais em forma de matrizes de transferências para as seguintes influências: rotação, gradiente de temperatura, pressão de ajuste e pressão externa das pás.

No Cap.5 desenvolveu-se um processo iterativo para calcular as tensões e deformações nos elementos do rotor em função da rotação. Considerando como condição de contorno a pressão nula no ajuste, determina-se qual a rotação em que há este desacoplamento disco-eixo. Esta rotação é de suma importância para um projeto confiável de turbinas à vapor ou à gás.

No Cap.6 foi aplicada toda metodologia desenvolvida nesta Dissertação para um rotor real de uma turbina à vapor, onde foram considerados todos os efeitos fornecidos pelo fabricante do equipamento: gradiente de temperatura, rotação, ajuste do eixo e pressão externa devida a centrifugação das pás. Utilizando dados reais calculou-se a rotação

crítica deste sistema (3524 rpm) que foi comparada com a fornecida pelo fabricante (3610 rpm), havendo, portanto, um desvio de aproximadamente de 2,5% .

Conclui-se que o Método da Matriz de Transferência é um processo de simples aplicação, que nos leva a valores satisfatórios para cálculos de Tensões, Deformações e Velocidades Críticas para Projetos de Turbinas.

No exemplo apresentado utilizamos uma subdivisão do disco em 7 elementos, o que pode ser aumentada a critério do projetista. Esta divisão executada sobre o disco é aquela que melhor representa os elementos, com suas temperaturas consideradas constantes, conforme dados fornecidos pelo fabricante do equipamento; dependendo do problema, o número de elementos pode ser aumentado desde que se interpolem as temperaturas entre os elementos. A partir dessa aplicação prática conclui-se realmente que a aplicação desse método é eficiente para discos rotativos com solicitações nas regiões periféricas.

A validade da aplicação do método é funcional, pois, os resultados são obtidos com precisão e rapidez com um modelo simples de elementos em forma de anéis. Uma modelagem do sistema por elementos finitos seria mais complexa e dependeria de software comercial ou seu desenvolvimento, para executar os cálculos.

## **7.2 PERSPECTIVAS FUTURAS**

Desenvolver um trabalho semelhante usando Método de Elementos Finitos para calcular as tensões e deformações em discos rotativos e também a velocidade crítica devido ao ajuste interferente.

Analisar as influências da tensão e deformação axiais na rotação crítica para um ajuste de interferência.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BHUTANI, N., LOEWY, R.G. (Oct 1999), *Combined Finite Element-Transfer Matrix Method*, Journal of Sound and Vibration, vol.226, pp.1048-1052.
- BEER, F. P., JOHNSTON JR., E. R. (1999), *Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática*, Makron Books, Rio de Janeiro, 5ed., 793p.
- ALMEIDA, M.T. (1990), *Vibrações Mecânicas: para Engenheiros*, Edgar Blücher Ltda, São Paulo, 2.ed., pp.166-172, 445p.
- OHGA, M., SHIGEMATSU, T., HARA, T. (Jan 1986), *Structural Analysis by a Combined Boundary Element - Transfer Matrix Method*, Computers and Structures, vol.24, pp.385-389.
- OHGA, M., SHIGEMATSU, T., HARA, T. (Jan 1983), *Structural Analysis by a Combined Finite Element - Transfer Matrix Method*, Computers and Structures, vol.17, pp.321-326.
- SRINIVASAN, V., RAMAMURTI, V. (Aug 1981), *Finite Element Analysis of the in-plane Behaviour of Anular Disks*, Computers and Structures, vol.13, pp.553-561.
- PISARENKO, G. S., YÁKOVLEV, A.V., MATVÉEV, V. V. (1979), *Manual de Resistência dos Materiais*, Mir Moscú, Romênia, 1ed., pp.405-424, 695p.

- PILKEY, WALTER D. CHANG, PIN YU (1978), *Modern Fórmulas Statics and Dynamis*, McGraw-Hill, New York.
- WEISS, S., BAKER G.S., GUPTA R.D. (1976), *Vibrational Residual Stress Relief in a Plain Carbon Steel Weldment*, Welding Research Supplement, p.47-50.
- THOMAS, JR., BRINTON, G. (1974), *Cálculo*, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro.
- LUCINI, M. (1972), *Turbomáquinas de Vapor y Gás su Cálculo y Construcción*, Dossat, Madrid, 4ed.
- SCHWARZ, V. A. (1972), *Distribuição das Tensões nos Discos em Rotações Submetidos a um Gradiente Radial de Temperatura: Aplicação aos Motores de Turbinas Térmicas*, Tese de Mestrado em Engenharia, Itajubá, EFEI.
- TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. (1970), *Theory of Elasticity*, Mc Graw-Hill, New York, 3ed.
- SOVINALL, R. C. (1967), *Stress, Strain and Strength*, McGraw-Hill, New York.
- MAURER, W. A. (1967), *Curso de Cálculo Diferencial e Integral*, Edgard Blücher, São Paulo.
- PESTEL, E. C., LECKIE, F. A. (1963), *Matrix Methods in Elastomechanics*, McGraw-Hill, New York.
- SEELY, FRED B. ET ALU (1952), *Advanced Mechanics of materials*, J. Wiley, Tokyo, Japan, 2ed.
- DEN HARTOG, J. P. (1952), *Advanced Strength of materials*, McGraw-Hill, New York.
- STODOLA, A. (1945), *Steam and gas turbines*, P. Smith, New York, 6ed.

## **Apêndice A**

# **APLICAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO PARA O DISCO SUBDIVIDIDO EM MAIOR NÚMERO DE ELEMENTOS**

## **A.1 DISCO VARIÁVEL SUBDIVIDIDO EM 22 ELEMENTOS DE PERFIL CONSTANTE**

Para o disco variável de turbina à vapor, dado anteriormente no Cap.6, executa-se a subdivisão em 22 elementos em forma de anel de perfil constante, conforme *Fig.27*.

Será analisada a distribuição de Tensões e Deformações ao longo do raio do Disco e, principalmente, a Rotação Crítica e a Interferência de segurança de funcionamento do sistema árvore-disco. Estes dados a determinar servirão de base para comparação do desvio obtido em relação ao sistema com disco variável subdividido em menor quantidade de elementos de perfil constante, como se desenvolveu no Cap.6.



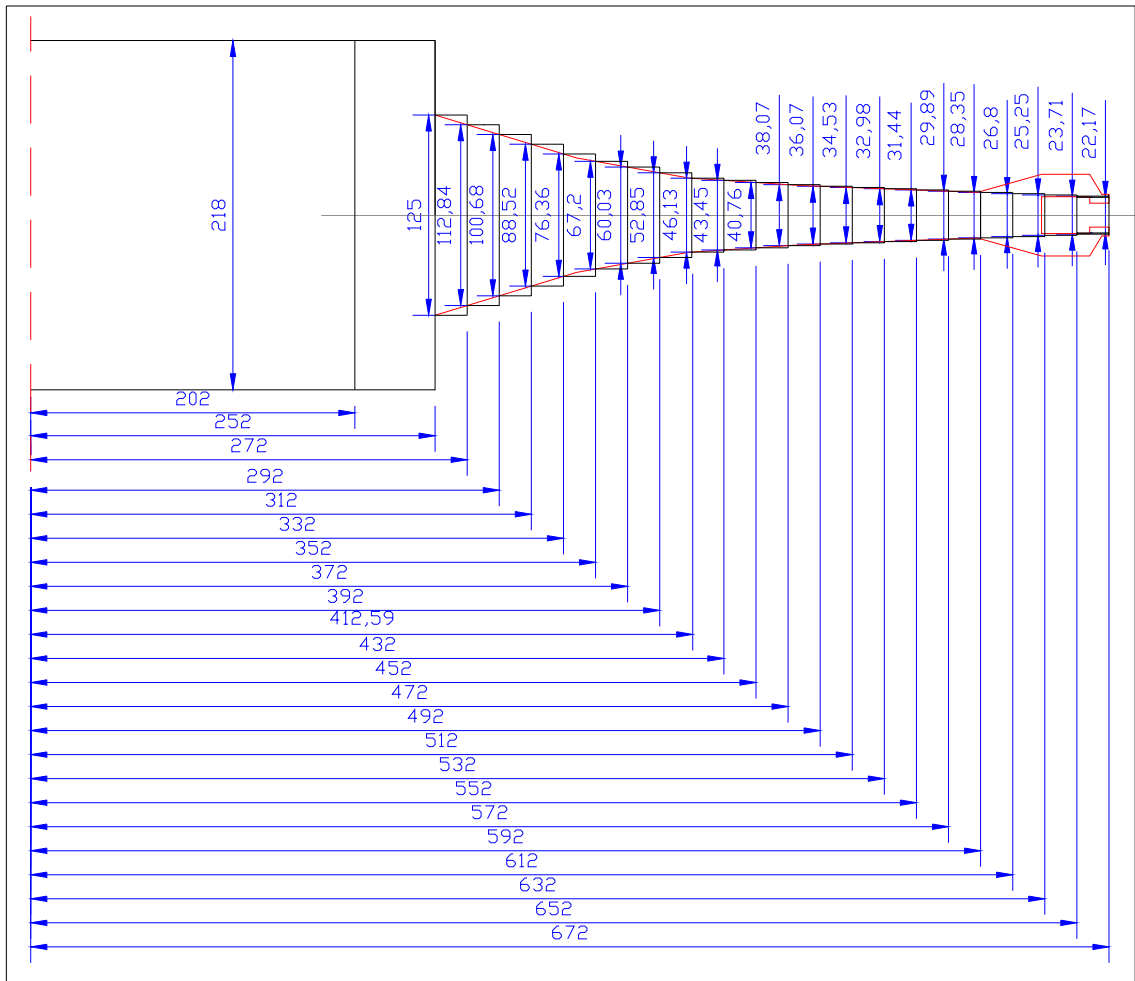


Figura 27 – Disco variável decomposto em 22 elementos de perfil constante.

Têm-se como dados para a análise e desenvolvimento do programa:

$$E = 210 \text{ GPa};$$

$$\mu = 0,3;$$

$$\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1};$$

$$\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3;$$

$$n = 3200 \text{ rpm};$$

$$\Omega = 335,1 \text{ s}^{-1}; \quad \text{Ajuste } \delta = 405 \text{ } \mu\text{m} \text{ (H6 x5)}.$$

A Tensão Radial externa devido à inércia (peso das pás), para uma rotação nominal de  $n = 2000 \text{ rpm}$ , é dada por  $P_{ext} = 49,82 \text{ [MPa]}$ .

Para uma rotação qualquer  $n$ , tem-se

$$P_{ext} = 49,82 \cdot \left( \frac{n}{2000} \right)^2 \text{ [MPa]}$$

Para uma rotação de operação  $n = 3200 \text{ rpm}$ , a pressão externa atuante será:

$$P_{ext} = 127,54 \text{ [MPa]}$$

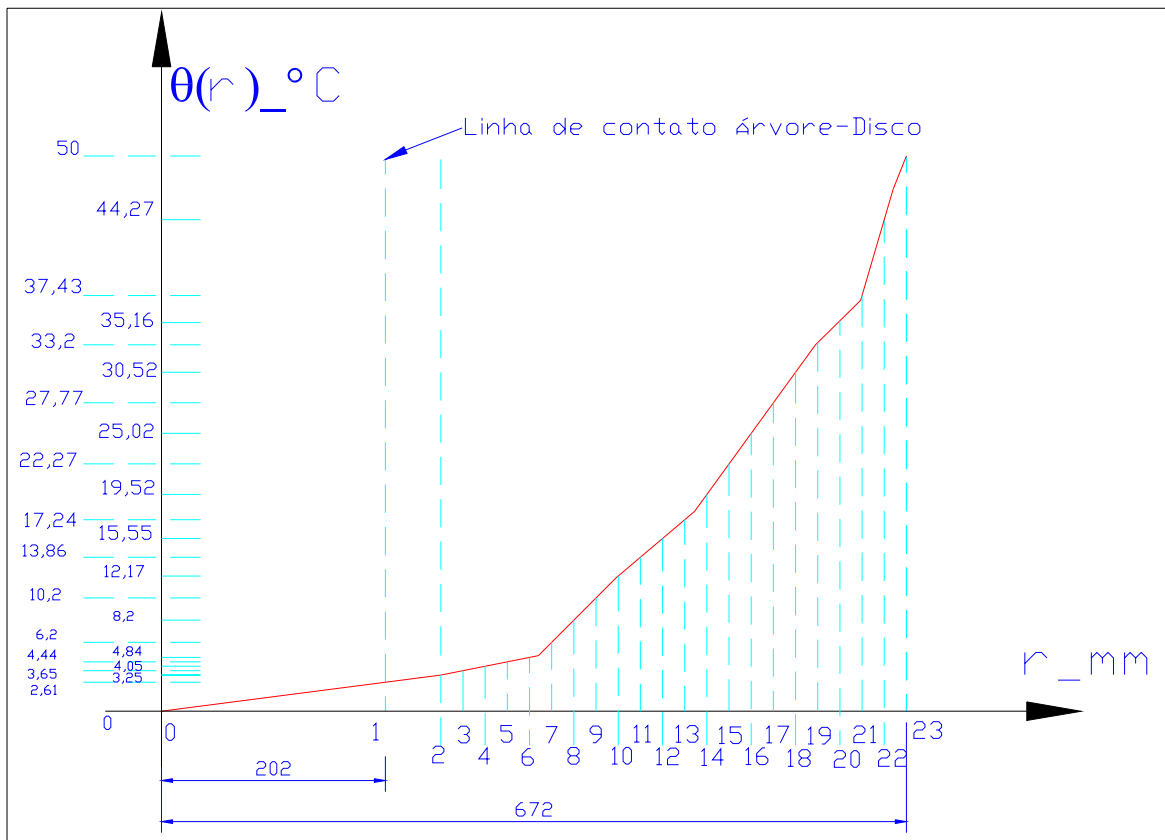
A Tensão Radial interna  $P_{int}$  dependerá do ajuste de interferência e da rotação em que o sistema árvore-disco estará submetido em trabalho.

Considerando a interferência de montagem  $\delta = 405 \mu\text{m}$ , a Pressão de Ajuste em que o sistema árvore-disco estará sujeito, em repouso ( $n=0$ ):  $P_{int} = -54,51 \text{ MPa}$

Em funcionamento, com uma rotação  $n = 3200 \text{ rpm}$ :  $P_{int} = -9,56 \text{ MPa}$

Em funcionamento, na rotação crítica  $n_{crit}$ :  $P_{int} = 0$

A distribuição do excedente de temperatura  $\theta(r)$  ao longo do raio do disco de perfil variável é apresentada na *Figura 28*.



*Figura 28 – Distribuição de temperatura para um disco de perfil variável.*

Tabela 4 – Distribuição de temperatura constante  $\bar{\theta}(r)$  ao longo do raio do disco.

Raio (mm)	$\bar{\theta}(r)$ (°C)	Raio (mm)	$\bar{\theta}(r)$ (°C)	Raio (mm)	$\bar{\theta}(r)$ (°C)	Raio (mm)	$\bar{\theta}(r)$ (°C)
202	1,305	352	5,520	472	16,395	592	31,860
252	2,930	372	7,200	492	18,380	612	34,180
272	3,450	392	9,200	512	20,895	632	36,295
292	3,850	412	11,185	532	23,645	652	40,850
312	4,245	432	13,015	552	26,395	672	47,135
332	4,640	452	14,705	572	29,145		

As tabelas a seguir mostram os resultados obtidos pelo programa.

Tabela 5 – Tensões radiais e tangenciais e Deformação radial para o Sistema árvore-disco em repouso.

Raio (r) (mm)	Deformação Radial (mm)	Tensão Radial (MPa)	Tensão Tangencial (MPa)
202	0,169	-55,65	155,71
252	0,153	-32,67	109,81
272	0,149	-25,13	97,56
292	0,145	-19,16	87,72
312	0,143	-14,33	79,48
332	0,141	-10,34	72,47
352	0,139	-6,72	65,21
372	0,139	-3,60	56,63
392	0,140	-1,02	47,99
412	0,142	1,17	40,13
432	0,145	2,86	33,26
452	0,149	4,22	27,25
472	0,153	5,32	21,62
492	0,158	6,05	15,44
512	0,165	6,40	8,02
532	0,172	6,45	0,23
552	0,180	6,23	-7,29
572	0,189	5,77	-14,58
592	0,199	5,09	-21,57
612	0,210	4,25	-27,27
632	0,221	3,26	-32,28
652	0,234	1,90	-44,21
672	0,249	0	-60,87

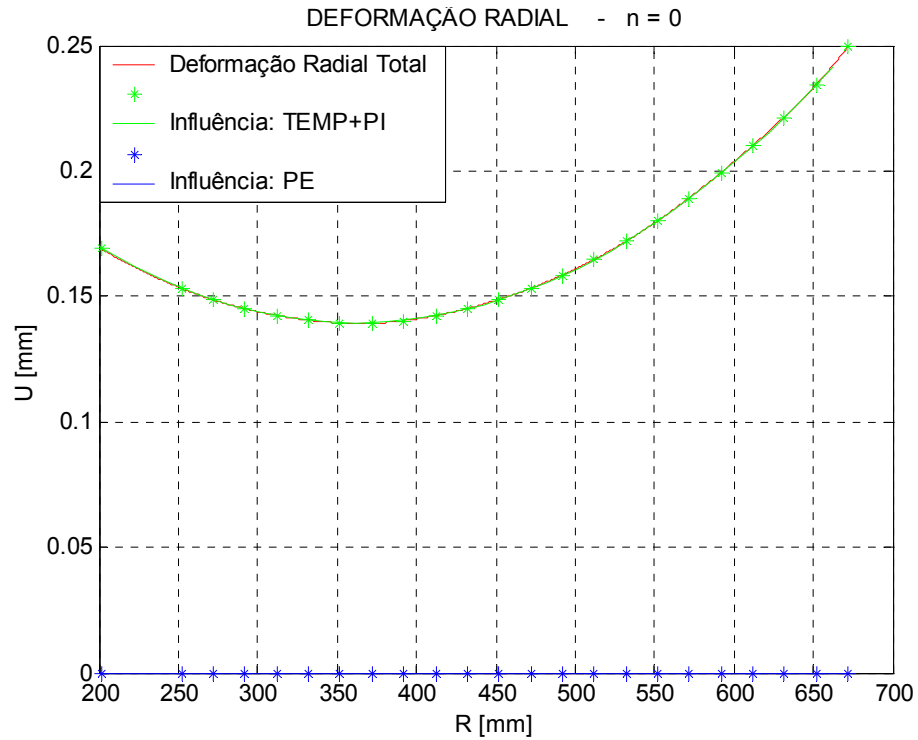


Figura 29 – Deformação Radial para disco de 22 elementos de perfil contante, considerando o sistema em repouso.

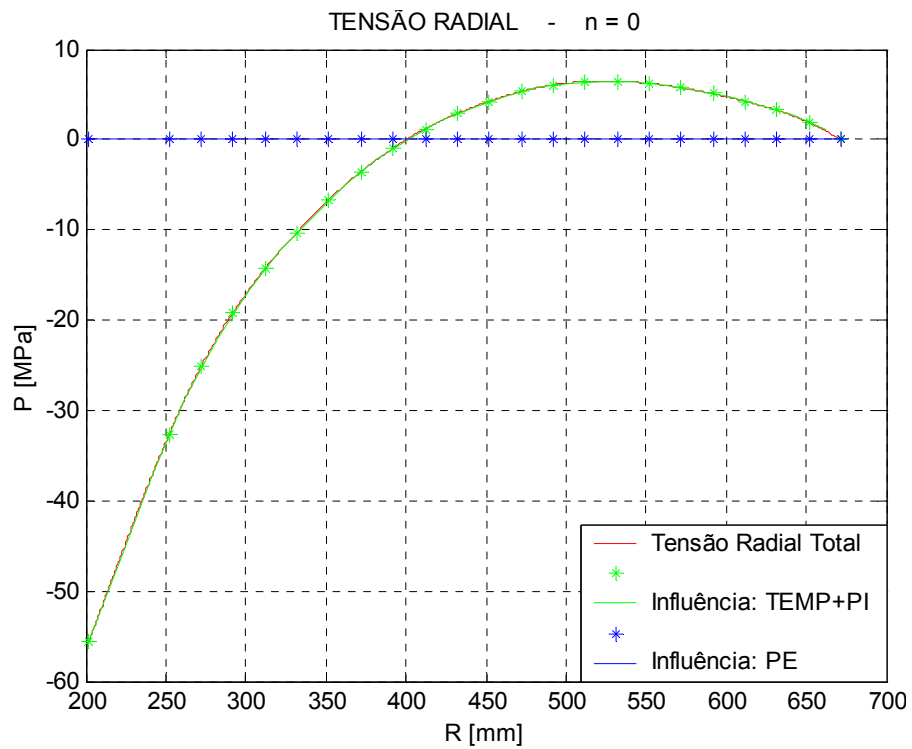


Figura 30 – Tensão Radial para disco de 22 elementos de perfil contante, considerando o sistema em repouso.

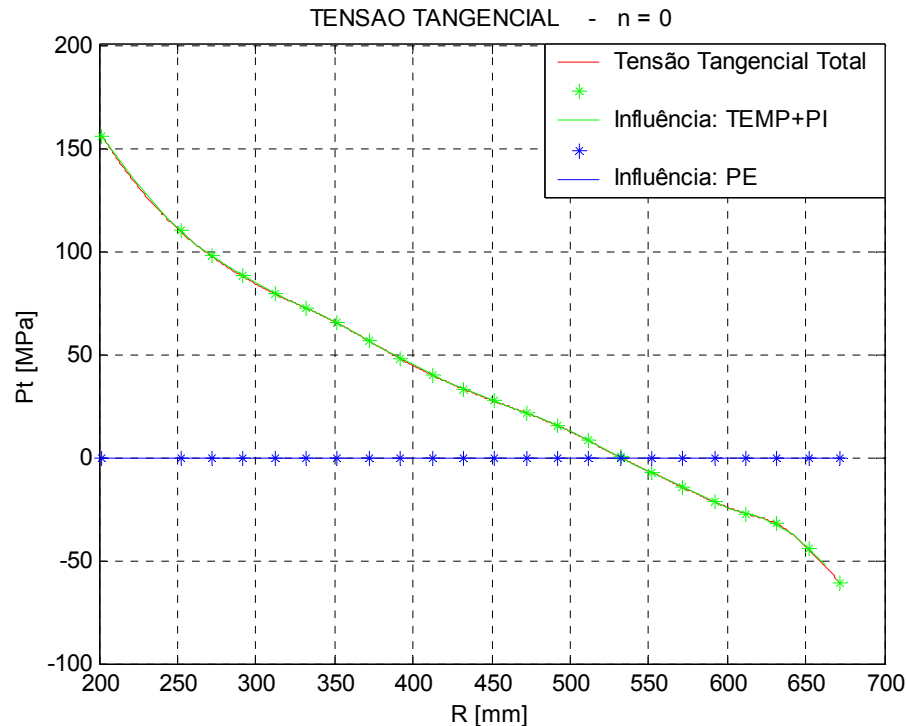


Figura 31 – Tensão Tangencial para disco de 22 elementos de perfil contante, considerando o sistema em repouso.

Tabela 6 – Tensões radiais e tangenciais e Deformação radial para o Sistema árvore-disco em rotação de operação a 3200 rpm.

Raio( r ) (mm)	Deformação Radial (mm)	Tensão Radial (MPa)	Tensão Tangencial (MPa)
202	0,264	-9,45	269,21
252	0,253	52,559	218,56
272	0,253	66,12	205,81
292	0,255	78,93	196,41
312	0,258	92,07	189,65
332	0,263	106,82	185,44
352	0,270	119,43	181,02
372	0,278	130,00	175,23
392	0,288	142,37	170,34
412	0,300	156,33	167,16
432	0,313	158,47	161,92
452	0,327	160,68	157,53
472	0,343	63,08	153,55
492	0,359	162,64	148,20
512	0,375	159,90	140,89
532	0,393	156,86	133,01
552	0,411	153,46	125,19
572	0,430	149,81	117,45
592	0,450	145,85	109,84

612	0,470	141,74	103,39
632	0,490	137,46	97,51
652	0,511	132,75	84,60
672	0,535	127,53	66,87

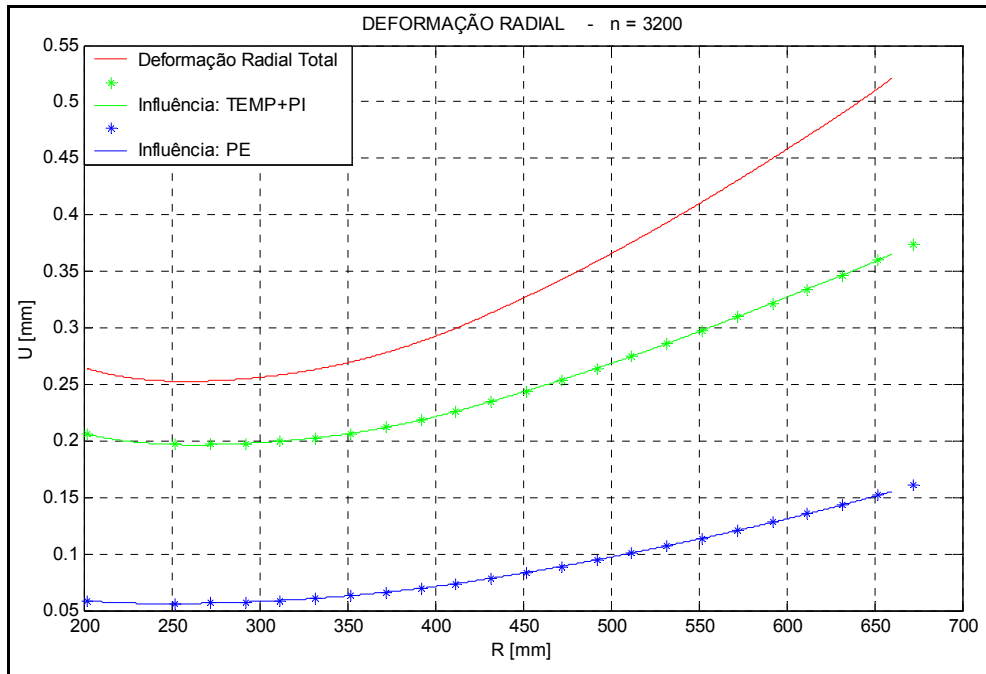


Figura 32 – Deformação Radial para disco de 22 anéis de perfil contante, sob rotação de operação a 3200 rpm.

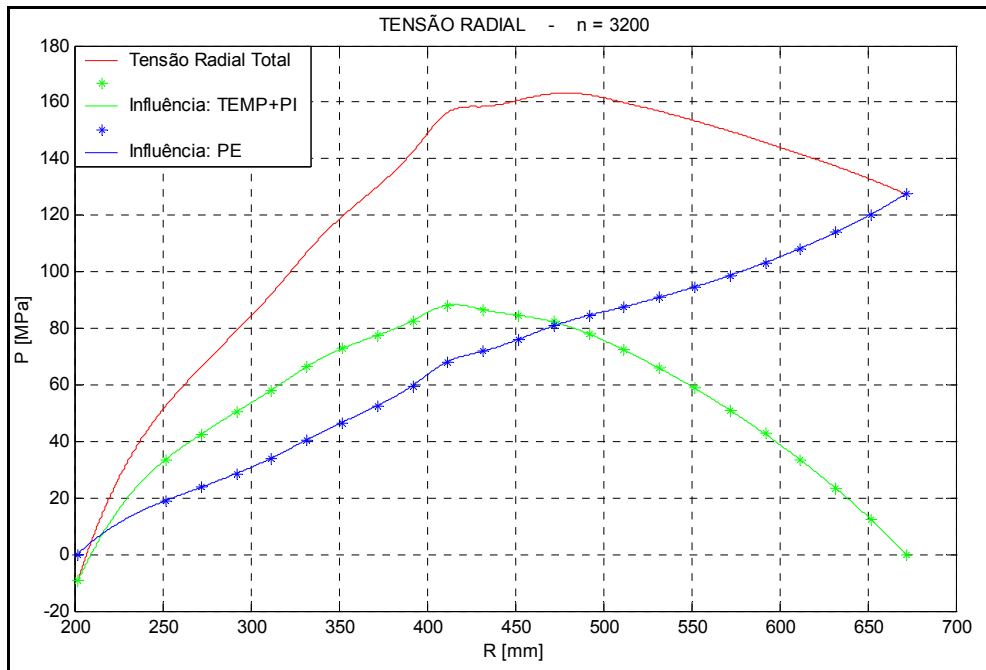


Figura 33 – Tensão Radial para disco de 22 anéis de perfil contante, sob rotação de operação a 3200 rpm.

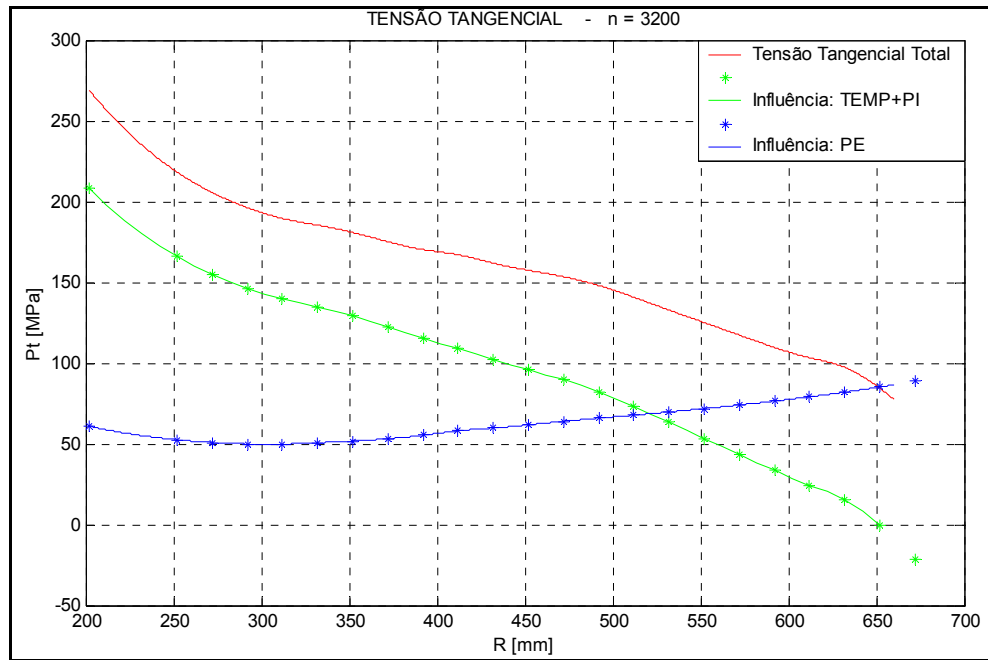


Figura 34 – Tensão Radial para Sistema Árvore-Disco de 22 anéis de perfil contante, sob rotação de operação de 3200 rpm.

Tabela 7 – Tensões radiais e tangenciais e Deformação radial para o Sistema árvore-disco sob rotação crítica a 3512 rpm.

Raio( r ) (mm)	Deformação Radial (mm)	Tensão Radial (MPa)	Tensão Tangencial (MPa)
202	0,284	0	292,42
252	0,273	69,97	240,80
272	0,274	84,78	227,95
292	0,277	98,99	218,64
312	0,282	113,82	212,19
332	0,288	130,77	208,54
352	0,296	145,23	204,70
372	0,306	157,32	199,48
392	0,318	171,70	195,36
412	0,332	188,06	193,13
432	0,347	190,29	188,23
452	0,364	192,67	184,17
472	0,381	195,34	180,53
492	0,400	194,66	175,35
512	0,419	191,29	168,06
532	0,438	187,62	160,16
552	0,459	183,57	152,28
572	0,479	179,27	144,45
592	0,501	174,64	136,71
612	0,523	169,85	130,11

632	0,545	164,90	124,06
652	0,568	159,51	110,94
672	0,593	153,62	92,9

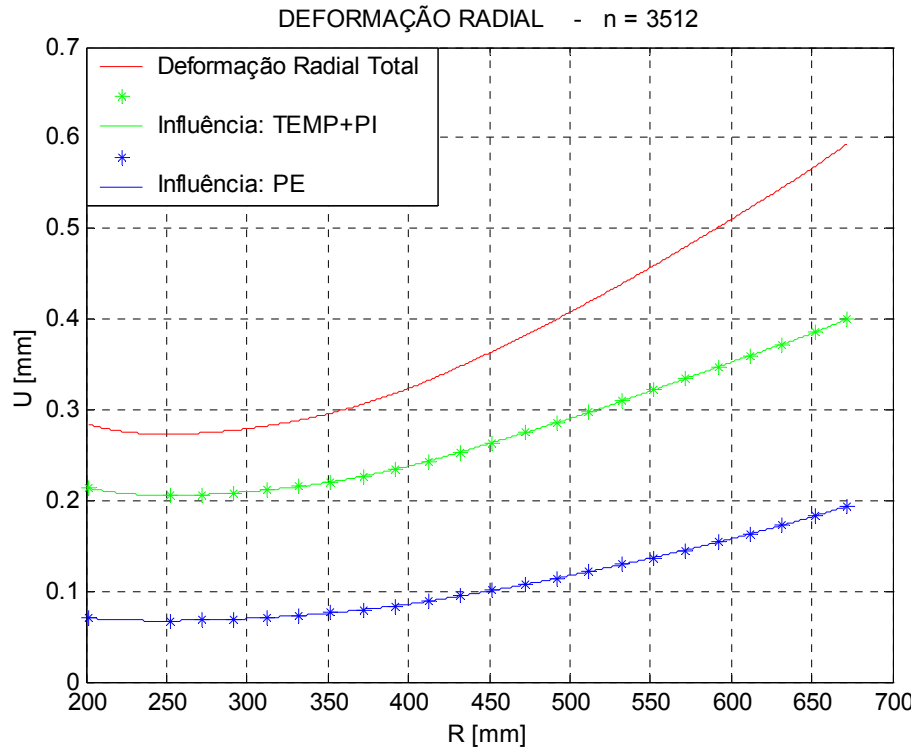


Figura 35 – Deformação Radial para disco de 22 elementos de perfil contante, sob rotação crítica de 3512 rpm.

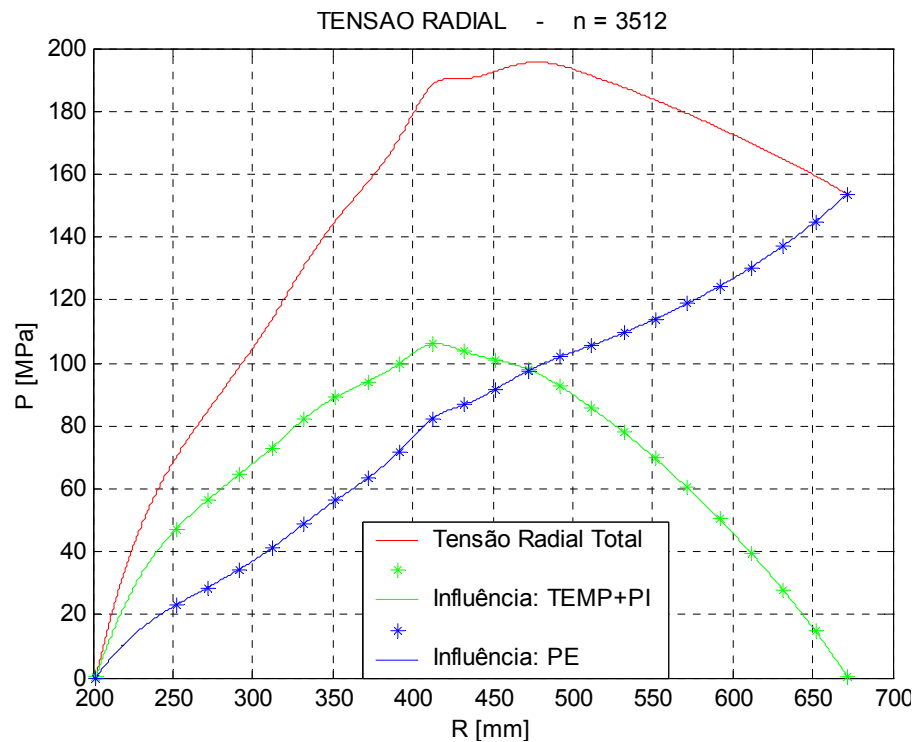


Figura 36 – Tensão Radial para disco de 22 elementos de perfil contante, sob rotação crítica de 3512 rpm.



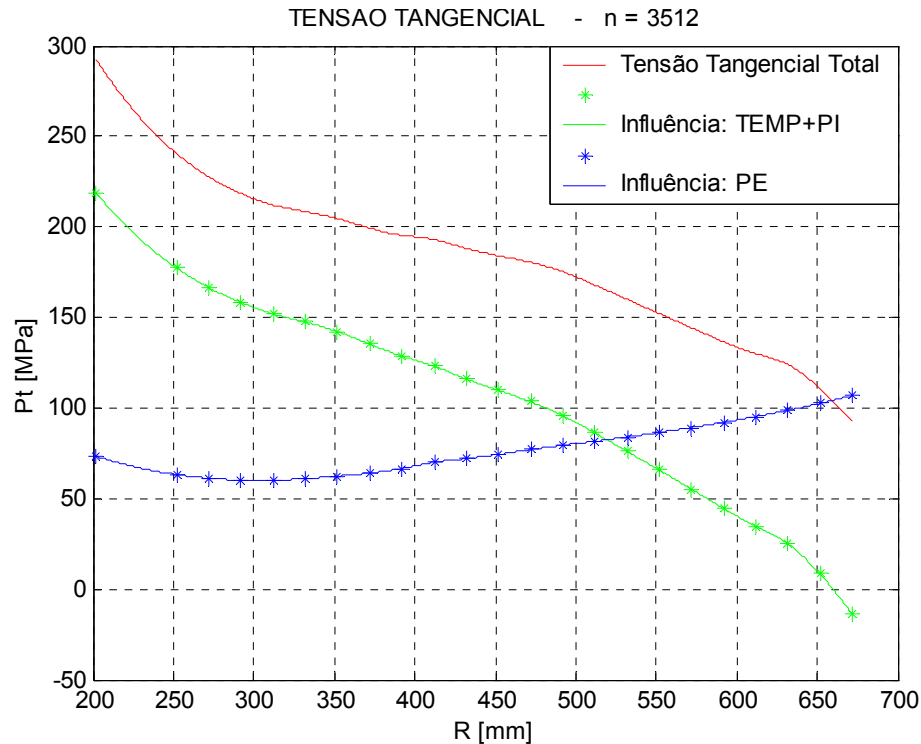


Figura 37 – Tensão Tangencial para disco de 22 elementos de perfil contante, sob rotação crítica de 3512 rpm.

A rotação crítica do sistema com disco variável subdividido em 22 elementos de perfil constante, é determinada novamente variando a rotação até o limite de desacoplamento, ou seja, quando não há ajuste entre árvore-disco. Obtendo assim, a seguinte rotação:

$$n_{crit} = 3512 \text{ rpm}$$

Comparando com a rotação crítica obtida anteriormente, no Cap.7, para o sistema com disco subdividido em apenas 7 elementos, observa-se um desvio de 0,34% em relação ao valor obtido acima.

Os novos limites de rotação crítica do sistema é determinada utilizando os ajustes recomendados para Turbinas a vapor (Ajuste com possível carga sobre a chaveta):

Ajuste:  $H6 / x5$

Tolerância Dimensional do disco de turbina e da árvore:  $D_{+40}^0 d_{+385}^{+405}$ .

Obtendo assim, os seguintes valores:

$$3206 \text{ rpm} \leq n_{crit} \leq 3512 \text{ rpm}$$

Considerando que a árvore-disco de turbina da aplicação em questão opera numa rotação de ( $n = 3200 \text{ rpm}$ ), então as novas pressões de contato proveniente do ajuste de montagem do Sistema serão de:

$P_c = -0,16 \text{ MPa} \Rightarrow$  para uma montagem em interferência mínima;

$P_c = -9,45 \text{ MPa} \Rightarrow$  para uma montagem em interferência máxima;

Para que o sistema não fique sujeito a falhas, deve-se executar a montagem em interferência mais próxima da máxima, onde se terá maior limite de rotação de trabalho e Pressão de Contato (compressão) árvore-disco.

A pressão de contato devido ao ajuste árvore-disco obtida para o sistema em repouso foi de  $P_c = -55,65 \text{ MPa}$ .

Assim, observa-se que houve uma variação de 2,05% em relação ao valor encontrado anteriormente para o disco de 7 elementos,  $P_c = -54,51 \text{ MPa}$ .

## Apêndice B

### LISTAGEM DOS PROGRAMAS DESENVOLVIDOS

#### B.1 DETERMINAÇÃO DA TENSÃO RADIAL E ROTAÇÃO CRÍTICA DO SISTEMA ÁRVORE-DISCO

```
_____ X X _____  
PREPARAÇÃO DO AMBIENTE  
clear all  
close all  
_____ X X _____  
VARIÁVEIS DE ENTRADA:  
% n = Número de rotações por minuto (RPM)  
n=input('Entre com o valor da rotação do sistema. [RPM] ');  
% deltaR = Interferência do sistema árvore-disco em repouso - (cm)  
deltaR=input('Entre com o valor da interferência do sistema. [mm] ');  
% Valor do Incremento para Rotação  
incrpm=input('Entre com o valor de Incremento para Rotação. [RPM] ');  
% Numero de Iterações  
itrpm=input('Entre com o Numero de Iterações para Rotação ');  
_____ X X _____  
SUBROTINAS  
'Valor Final da Rotação'  
rotf=n+(incrpm*itrpm)
```

```
pause(2);
```

```
itcomp=itrpm;
```

```
for j=1:itrpm
```

---

X X

---

```
% DADOS INICIAIS - CONSTANTES DO PROBLEMA:
```

```
% E = Módulo de Elasticidade [MPa]
```

```
E=210,84e3;
```

```
% u = Coeficiente de Poisson
```

```
u=0,3;
```

```
% ro = Massa Específica [N.s2/mm4]
```

```
ro=7,85e-9;
```

```
% alfa = Coeficiente de Dilatação Térmica [°C-1]
```

```
alfa=14e-6;
```

```
% omega = Velocidade Angular [s-1]
```

```
omega=(2*pi*n)/60;
```

```
% Pext = Tensão Radial, devido às Pás, na estação externa do Disco [MPa]
```

```
Pext=49,82*((n/2000)^2);
```

---

X X

---

```
% DADOS INICIAIS - VETORES DE ENTRADA:
```

```
% Numero de amostras (na) - n° de discos de perfil constante
```

```
na=8;
```

```
% Vetor de Raios do Disco referente aos elementos parciais de perfil constante [mm];
```

```
R=[202;252;340;410;480;590;630;660]; %R(1)=20.2 - R(2)=25.2 ... para todos use "for"
```

```
% Vetor de Espessura do Disco referente aos elementos parciais de perfil constante [mm];
```

```
B=[218;95;56;41;37;28.5;26;26];
```

```
% Vetor de Gradiente de Temperatura constante do Disco referente aos elementos parciais do disco [°C];
```

```
theta_R=[1.6;1.6;4.1;8.5;15.0;25.0;35.0;42.0];
```

---

X X

---

```
% EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO DISCO VARIÁVEL:
```

```
% Função deformação(UUU): Calcula o elemento deformação (1,1) da MT em função da deformação radial do disco:
```

```
for i=2:na
```

```
    UUU(i-1) = (R(i)/R(i-1))*(1-((1+u)/2)*(1-(R(i-1)/R(i))^2));
```

```
end
```

```
% Função deformação(UUP): Calcula o elemento deformação (1,2) da MT em função da tensão radial do disco:
```

```
for i=2:na
```

```
    UUP(i-1) = (R(i)/(E*B(i-1)))*((1-u^2)/2)*(1-(R(i-1)/R(i))^2);
```

```
end
```

% Função deformação(FU): Calcula o elemento deformação (1,3) da MT em função da rotação e temperatura do disco:

for i=1:na-1

for i=2:na

$$FU(i) = (-R(i)/2) * ((1 - R(i-1)/R(i))^2)^2 * (((1 - u^2)/(4 * E)) * ro * omega^2 * R(i)^2) +$$

$$+ (((1 + u) * alfa * (theta\_R(i))) / (2 * R(i))) * (R(i)^2 - R(i-1)^2)$$

end

end

% Função tensão(UPU): Calcula o elemento pressão radial (2,1) da MT em função da deformação radial do disco:

for i=2:na

$$UPU(i-1) = (E * B(i-1)) / (2 * R(i-1)) * (1 - (R(i-1)/R(i))^2);$$

end

% Função tensão(UPP): Calcula o elemento pressão radial (2,2) da MT em função da tensão radial do disco:

for i=2:na

$$UPP(i-1) = 1 - ((1 - u)/2) * (1 - (R(i-1)/R(i))^2);$$

end

% Função tensão(FP): Calcula o elemento pressão radial (2,3) da MT em função da rotação e temperatura do disco:

for i=1:na-1

for i=2:na

$$FP(i) = (-B(i-1)/2) * (1 - (R(i-1)/R(i))^2) * ((ro * (omega^2) * R(i)^2) / 2) * (1 + u + ((1 - u)/2) * (1 +$$

$$+ (R(i-1)/R(i))^2)) + (-((B(i-1) * E * alfa * (theta\_R(i))) / (2 * R(i)^2)) * (R(i)^2 - R(i-1)^2));$$

end

end

X X

% EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DA ÁRVORE (EIXO):

% Função Deformação (UUP0)= Calcula o elemento deformação (1,2) da MT em função da tensão radial da árvore:

$$UUP0 = (1 - u) * R(1) / (B(1) * E);$$

% Função Deformação (FU0)= Calcula o elemento deformação (1,3) da MT em função da rotação e temperatura da árvore:

$$FU0 = -((1 - u^2) * ro * omega^2 * R(1)^3 / (8 * E)) + ((1 + u) * R(1) * alfa * theta\_R(1) / 2);$$

% Função Tensão (FP0)= Calcula o elemento pressão radial (2,3) da MT em função da rotação e temperatura da árvore:

$$FP0 = -((3 + u) * ro * omega^2 * B(1) * R(1)^2 / 8) - (B(1) * E * alfa * theta\_R(1) / 2);$$

X X

% MONTAGEM DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIAS:

mtt

X X

% PRODUTO PROGRESSIVO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIAS:

%Estão sendo chamadas em mtt.

X X

% TENSÃO RADIAL\_P0 PARA O 1ºELEMENTO DO DISCO DE PERFIL VARIÁVEL, COM EFEITO DE ROTTEMP+PINT:

$$P0=-(((\Delta R)+A7(2,3)/A7(2,1))-(UUP0*FP0)+(FU0))/((A7(2,2)/A7(2,1))+(UUP0))/B(1);$$

X X

% DETERMINAÇÃO DA DEFORMAÇÃO RADIAL "INTERNA\_U0" PARA 1ºELEMENTO DO DISCO DE PERFIL VARIÁVEL:

% 1) (UINT) - ROTAÇÃO, TEMPERATURA:

$$U0(1)=-A7(2,3)/A7(2,1);$$

% 2) (UINTRI) - PRESSÃO INTERNA:

$$U0(2)=-A7(2,2)*P0*B(1)/A7(2,1);$$

% 3)(UINT\_PI) - ROTAÇÃO, TEMPERATURA E PRESSÃO INTERNA

$$U0(3)=U0(1)+U0(2);$$

% 4) (UINTRE) - PRESSÃO EXTERNA:

$$U0(4)=(Pext/A7(2,1))*B(na);$$

X X

% DETERMINAÇÃO DA TENSÃO RADIAL (SOTERA) PARA CADA ELEMENTO DO DISCO PERFIL VARIÁVEL:

%A)ROTAÇÃO, TEMPERATURA E PRESSÃO INTERNA – TENSÃO RADIAL (TERA\_PI)

%Condição de Contorno:

%PO => dependera do ajuste de interferência dado e da rotação do sistema;

%P0>=0 (se deltaR=0 e omega=crit);

%P0=Pressão Ajuste (se omega=0)

%Pn=P7=0;

$$P1=(((A1(2,1)*U0(3))+A1(2,3)+(A1(2,2)*P0*B(1)))/B(2));$$

$$P2=(((A2(2,1)*U0(3))+A2(2,3)+(A2(2,2)*P0*B(1)))/B(3));$$

$$P3=(((A3(2,1)*U0(3))+A3(2,3)+(A3(2,2)*P0*B(1)))/B(4));$$

$$P4=(((A4(2,1)*U0(3))+A4(2,3)+(A4(2,2)*P0*B(1)))/B(5));$$

$$P5=(((A5(2,1)*U0(3))+A5(2,3)+(A5(2,2)*P0*B(1)))/B(6));$$

$$P6=(((A6(2,1)*U0(3))+A6(2,3)+(A6(2,2)*P0*B(1)))/B(7));$$

$$P7=(((A7(2,1)*U0(3))+A7(2,3)+(A7(2,2)*P0*B(1)))/B(8));$$

$$TERA\_PI=[P0 P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7];$$

X X

%B)PRESSÃO EXTERNA (PEXT) DEVIDO À INÉRCIA (PÁS) – TENSÃO RADIAL (TERAE):

%Condição de Contorno:

%P0=0;

```

        %Pn=P7=Pext=49.818 MPa p/ omega = 2000RPM;
P0=0;
P1=((A1(2,1)*U0(4))/B(2));
P2=((A2(2,1)*U0(4))/B(3));
P3=((A3(2,1)*U0(4))/B(4));
P4=((A4(2,1)*U0(4))/B(5));
P5=((A5(2,1)*U0(4))/B(6));
P6=((A6(2,1)*U0(4))/B(7));
P7=((A7(2,1)*U0(4))/B(8));

TERAE=[P0 P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7];
_____ X X _____

% SOMA TOTAL DOS EFEITOS PARA A TENSÃO RADIAL:
SOTERA=TERA_PI+TERAE;
_____ X X _____

% RESULTADOS FINAIS
disp ('TERA_PI= [MPa]');
disp (TERA_PI);
disp ('TERAE= [MPa]');
disp (TERAE);
disp ('SOTERA= [MPa]');
disp (SOTERA);
_____ X X _____

% SUBROTINAS - FIM DAS ITERAÇÕES:
if SOTERA(1)>=0
    break
else
n=n+incrpm;
end %end do if
end %end do for
if itcomp==j
'Rotação Critica não encontrada'
'Pressão de Ajuste de Interferência'
SOTERA(1)
elseif SOTERA(1)>=0
'Rotação Crítica Encontrada [RPM] = '
n
'Pressão Interna Encontrada [MPa] = '
SOTERA(1)
end
_____ X X _____

% PLOTAGEM DOS GRÁFICOS
figure,plot(R,SOTERA,'r-'), grid on, title ('TENSÃO RADIAL TOTAL'), xlabel ('Raio [mm]'), ylabel ('P-Tensão Radial [MPa]')
hold on
plot (R,TERA_PI,'g*')

```

```
hold on
plot (R,TERAE,'b*')
legend('Tensão Radial Total','Influência: TEMP+Rot+PI','Influência: PE');
```

---

X X

---

## B.2 DETERMINAÇÃO DA DEFORMAÇÃO RADIAL

---

X X

---

```
% DETERMINAÇÃO DA DEFORMAÇÃO RADIAL (SODERA) PARA CADA ELEMENTO DO DISCO
PERFIL VARIÁVEL:
```

```
%A)ROTAÇÃO, TEMPERATURA E PRESSAO INTERNA - DEFORMAÇÃO RADIAL (DERA_PI):
```

```
U1=(A1(1,1)*U0(3))+A1(1,3)+(A1(1,2)*P0*B(1));
```

```
U2=(A2(1,1)*U0(3))+A2(1,3)+(A2(1,2)*P0*B(1));
```

```
U3=(A3(1,1)*U0(3))+A3(1,3)+(A3(1,2)*P0*B(1));
```

```
U4=(A4(1,1)*U0(3))+A4(1,3)+(A4(1,2)*P0*B(1));
```

```
U5=(A5(1,1)*U0(3))+A5(1,3)+(A5(1,2)*P0*B(1));
```

```
U6=(A6(1,1)*U0(3))+A6(1,3)+(A6(1,2)*P0*B(1));
```

```
U7=(A7(1,1)*U0(3))+A7(1,3)+(A7(1,2)*P0*B(1));
```

```
DERA_PI=[U0(3) U1 U2 U3 U4 U5 U6 U7];
```

---

X X

---

```
%B)PRESSÃO EXTERNA (Pext) DEVIDO À INÉRCIA (Pás) - DEFORMAÇÃO RADIAL (DERAE):
```

```
U1=(A1(1,1)*U0(4));
```

```
U5=(A5(1,1)*U0(4));
```

```
U2=(A2(1,1)*U0(4));
```

```
U6=(A6(1,1)*U0(4));
```

```
U3=(A3(1,1)*U0(4));
```

```
U7=(A7(1,1)*U0(4));
```

```
U4=(A4(1,1)*U0(4));
```

```
DERAE=[U0(4) U1 U2 U3 U4 U5 U6 U7];
```

---

X X

---

```
% SOMA TOTAL DOS EFEITOS PARA A DEFORMAÇÃO RADIAL:
```

```
SODERA=DERA_PI+DERAE;
```

---

X X

---

```
% RESULTADOS FINAIS
```

```
disp ('DERA_PI= [mm]');
```

```
disp (DERAE');
```

```
disp (DERA_PI);
```

```
disp ('SODERA= [mm]');
```

```
disp ('DERAE= [mm]');
```

```
disp (SODERA);
```



---

X X

---

```

% PLOTAGEM DOS GRÁFICOS
figure,plot(R,SODERA,'r-'), grid on,title('DEFORMAÇÃO RADIAL TOTAL'), xlabel('Raio [mm]'),ylabel('U-
Deformação Radial [mm]')
hold on
plot (R,DERA_PI,'g*')
hold on
plot (R,DERAE,'b*')
legend('Deformação Radial Total','Influência: TEMP+PI','Influência: PE');

```

---

X X

---

## B.3 DETERMINAÇÃO DA TENSÃO TANGENCIAL

---

X X

---

```

% DETERMINAÇÃO DA TENSÃO TANGENCIAL (SOTETA) PARA CADA ELEMENTO DO DISCO
PERFIL VARIÁVEL:

%A)ROTAÇÃO, TEMPERATURA E PRESSAO INTERNA – TENSÃO TANGENCIAL (TETA_PI):
Pt0=((U0(3)*E)/R(1)+(u*P0)-(E*alfa*theta_R(1));          Pt4=((U4*E)/R(5)+(u*P4)-(E*alfa*theta_R(5));
Pt1=((U1*E)/R(2)+(u*P1)-(E*alfa*theta_R(2));          Pt5=((U5*E)/R(6)+(u*P5)-(E*alfa*theta_R(6));
Pt2=((U2*E)/R(3)+(u*P2)-(E*alfa*theta_R(3));          Pt6=((U6*E)/R(7)+(u*P6)-(E*alfa*theta_R(7));
Pt3=((U3*E)/R(4)+(u*P3)-(E*alfa*theta_R(4));          Pt7=((U7*E)/R(8)+(u*P7)-(E*alfa*theta_R(8));

TETA_PI=[Pt0 Pt1 Pt2 Pt3 Pt4 Pt5 Pt6 Pt7];

%B)PRESSÃO EXTERNA (Pext) DEVIDO À INÉRCIA (Pás) - TENSÃO TANGENCIAL (TETA_E):
Pt0=((U0(4)*E)/R(1)+(u*P0);          Pt4=((U4*E)/R(5)+(u*P4);
Pt1=((U1*E)/R(2)+(u*P1);          Pt5=((U5*E)/R(6)+(u*P5);
Pt2=((U2*E)/R(3)+(u*P2);          Pt6=((U6*E)/R(7)+(u*P6);
Pt3=((U3*E)/R(4)+(u*P3);          Pt7=((U7*E)/R(8)+(u*P7);

TETA_E=[Pt0 Pt1 Pt2 Pt3 Pt4 Pt5 Pt6 Pt7];

```

---

X X

---

```

% SOMA TOTAL DOS EFEITOS PARA A TENSÃO TANGENCIAL:
SOTETA=TETA_PI+TETA_E;

```

---

X X

---

```
% RESULTADOS FINAIS
```

```
disp ('TETA_PI= [MPa]');
```

```
disp (TETA_PI);
```

```
disp ('TETAE= [MPa]');
```

```
disp (TETAE');
```

```
disp ('SOTETA= [MPa]');
```

```
disp (SOTETA);
```

---

X X

---

```
% PLOTAGEM DOS GRÁFICOS
```

```
figure,plot(R,SOTETA,'r-'),grid on,title('TENSÃO TANGENCIAL TOTAL'), xlabel('Raio [mm]'),ylabel('Pt-  
Tensão Tangencial [MPa]')
```

```
hold on
```

```
plot (R,TETA_PI)
```

```
hold on
```

```
plot (R,TETAE,'b*')
```

```
legend('Tensão Tangencial Total','Influência: TEMP+PI','Influência: PE');
```

---

X X

---

## B.4 ROTINA MTT – MONTAGEM E PRODUTO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIAS:

```
% MONTAGEM DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIAS:
```

```
T1=[UUU(1) UUP(1) FU(1); UPU(1) UPP(1) FP(1); 0 0 1];
```

```
T2=[UUU(2) UUP(2) FU(2); UPU(2) UPP(2) FP(2); 0 0 1];
```

```
T3=[UUU(3) UUP(3) FU(3); UPU(3) UPP(3) FP(3); 0 0 1];
```

```
T4=[UUU(4) UUP(4) FU(4); UPU(4) UPP(4) FP(4); 0 0 1];
```

```
T5=[UUU(5) UUP(5) FU(5); UPU(5) UPP(5) FP(5); 0 0 1];
```

```
T6=[UUU(6) UUP(6) FU(6); UPU(6) UPP(6) FP(6); 0 0 1];
```

```
T7=[UUU(7) UUP(7) FU(7); UPU(7) UPP(7) FP(7); 0 0 1];
```

```
% PRODUTO PROGRESSIVO DAS MATRIZES DE TRANSFERÊNCIAS:
```

```
A1=T1;
```

```
A5=T5*A4;
```

```
A2=T2*A1;
```

```
A6=T6*A5;
```

```
A3=T3*A2;
```

```
A7=T7*A6;
```

```
A4=T4*A3;
```