

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

Espalhamento Compton na Eletrodinâmica
Quântica com Quebra de Simetria de
Lorentz.

Carla Ribeiro Rodrigues da Rocha

Itajubá, 14 de outubro de 2022

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA**

Carla Ribeiro Rodrigues da Rocha

**Espalhamento Compton na Eletrodinâmica
Quântica com Quebra de Simetria de
Lorentz.**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física.

Área de Concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Gabriel Flores Hidalgo

**14 de outubro de 2022
Itajubá**

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Gabriel Flores Hidalgo, meu pai acadêmico, muito obrigada pela paciência infinita, pelo conhecimento dividido e pela amizade, conselhos e piadas. Principalmente, obrigada por acreditar em mim nos momentos que eu mesma não acreditei! Sua orientação fez toda a diferença na minha trajetória acadêmica!

Aos professores que me lecionaram durante o mestrado, Dr. Alexis Roa Aguirre, Dr. Fabrício Barone Rangel e Dr. Eduardo Bittencourt, vocês são incríveis, obrigada por edificarem essa minha etapa acadêmica. À Unifei por toda minha formação e à FAPEMIG pelo financiamento deste projeto.

Aos amigos JP e Roça, por todas as discussões referentes à Física e à vida. Aos amigos Sara, Gabes, Ju, Mari e Gaby, por absolutamente tudo! Amo vocês demais e sou muito feliz de ter vocês como irmãos de coração!!!

Especialmente a Deus, à minha mãe, ao meu vô e minha vó. Como eu gostaria que vocês pudessem ler isso!

E, finalmente, aos meus cães Miojo, Hiena, Fiapo e Sirius, às minhas chinchilas Parmesão, Provolone e Bolacha e à minha calopsita Cléo, por me fazer levantar da cama, vencer os desafios e tornarem uma pessoa melhor. Obrigada por serem minha família e tornarem minha casa um lar.

Resumo

Após uma revisão da Eletrodinâmica Quântica e o cálculo em detalhe da seção de choque associado ao efeito Compton, nesta dissertação, apresentamos os cálculos da seção de choque do espalhamento Compton em um modelo de Eletrodinâmica Quântica com quebra de simetria de Lorentz. No modelo sob estudo, consideramos um termo de violação de simetria de Lorentz que modifica o vértice da teoria deixando os propagadores inalterados.

Palavras-chaves: Eletrodinâmica Quântica. Quebra de Simetria de Lorentz. Efeito Compton.

Abstract

After a review of Quantum Electrodynamics and the calculation in detail of the cross section associated with the Compton scattering effect, in this dissertation, we present the calculations of the Compton scattering cross section in a Quantum Electrodynamics model with a term that breaks Lorentz symmetry. In the model under study, we consider a Lorentz symmetry violation term that modifies the vertex of the theory leaving the propagators unchanged.

Key-words: Quantum Electrodynamics. Lorentz Symmetry Breaking. Compton effect.

Lista de ilustrações

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Diagramas de Feynman para o espalhamento Compton em primeira ordem diferente de zero | 38 |
|---|----|

Sumário

| | | |
|-----|---|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 8 |
| 2 | A LAGRANGIANA DA QED | 14 |
| 2.1 | O campo eletromagnético livre | 17 |
| 2.2 | O campo de Dirac livre | 24 |
| 2.3 | O termo de interação e as regras de Feynman | 34 |
| 3 | ESPALHAMENTO COMPTON NA ELETRODINÂMICA QUÂN- TICA. | 38 |
| 3.1 | A amplitude de espalhamento | 38 |
| 3.2 | A seção de choque diferencial | 40 |
| 3.3 | Seção de choque para elétrons não polarizados | 42 |
| 4 | ESPALHAMENTO COMPTON NA QED COM TERMO DE VIO- LAÇÃO DE LORENTZ | 48 |
| 4.1 | Quebra de Lorentz e Modelo Padrão estendido mínimo | 48 |
| 4.2 | A lagrangeana com quebra de Simetria de Lorentz | 50 |
| 4.3 | Espalhamento Compton na QED com quebra de simetria de Lorentz | 51 |
| 5 | CONCLUSÕES | 55 |
| | BIBLIOGRAFIA | 57 |

1 Introdução

Na Natureza observa-se diversos tipos de simetrias. Duas dessas simetrias que ganham notoriedade são a CPT e a de Lorentz. A simetria CPT nos fala sobre a conjugação de carga (transformação interna que não abrange a estrutura do espaço-tempo, sendo a responsável por cambiar partículas e antipartículas), inversão de paridade (associada à inversão espacial) e reversão temporal (inversão da coordenada temporal). A simetria de Lorentz, por sua vez, nos diz que existe uma simetria observacional (ou equivalência de observação), sendo uma consequência da relatividade restrita. Em outras palavras, as leis da física são equivalentes (invariantes) para todos os observadores inerciais que se movem entre si à velocidade constante. Nas chamadas transformações de Lorentz estão as rotações e os boosts. Temos três categorias para as transformações de Lorentz: as transformações do observador, envolvendo mudanças de coordenadas e relacionando observações realizadas em dois referenciais inerciais com velocidades e orientações relativas; as transformações de partícula, relacionando, através de boosts num mesmo referencial fixo, duas partículas com orientação e momentos de spin relativos (não influenciando campos externos caso estejam presentes) e transformações inversas ativas, que num referencial inercial fixo induzem boosts sobre todas as partículas e campos (mesmo que estes sejam externos) [1][2].

A teoria quântica de campos (TQC), desenvolvida essencialmente a partir da simetria de Lorentz e da mecânica quântica, descreve o comportamento de partículas elementares como excitações localizadas no espaço-tempo. A maturação dessas ideias conceberam o Modelo Padrão (MP) da física de partículas, uma das teorias mais bem consolidadas tanto no aspecto de sua formulação teórica quanto na sua verificação dos resultados experimentais, baseado nas simetrias CPT e de Lorentz. O Modelo Padrão Mínimo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, baseado nas simetrias de gauge, Lorentz e CPT, é a melhor teoria atualmete para descrever de forma unificada três das quatro forças de interações básicas: eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca. O Modelo Padrão descreve a maioria dos blocos básicos constituintes do universo, explicando como quarks (que constituem prótons e nêutrons) e léptons (na qual se incluem elétrons) constituem toda a matéria conhecida. Também explica como as partículas portadoras de força, pertencentes a um grupo mais amplo de bósons, influenciam os quarks e léptons. De forma resumida, a interação eletromagnética é mediada por fótons e envolve a interação de campos elétricos e magnéticos. A força forte, intermediada pelos glúons, é a responsável pela estabilidade de núcleos atômicos. A força fraca, intermediada pelos bósons W e Z , é a responsável pelas reações nucleares que ocorrem no interior de estrelas. No entanto, o Modelo padrão tem limites. Os bóson de Higgs, responsável por gerar massa aos quarks, aos léptons carregados e aos bósons W e Z , e não sabemos se ele gera massa para os neutrinos. Além disso, é falho

com relação a unificação da força gravitacional às outras, esta permanecendo às margens do Modelo Padrão, o qual também não explica a assimetria de matéria e antimatéria. Também as chamadas matéria escura e energia escura não estão encaixadas na teoria.

Existe outro modelo qualitativamente diferente do Modelo Padrão mínimo, que é a Teoria de Cordas, desenvolvida a partir da década de 1960, que tem como proposta a unificação da teoria da relatividade e teoria quântica, tratando de objetos extensos unidimensionais (cordas) como constituintes da matéria, ao invés de partículas (objetos adimensionais). Essa perspectiva eliminaria eventuais problemas associados à presença de partículas pontuais na teoria tradicional. Seus defensores vêem nesta teoria uma possível solução da questão da gravitação quântica, depositando nela também a descrição da interação de outras forças da natureza. Apesar de grandes avanços matemáticos, em especial na teoria de supersimetria, ainda não há, até o presente momento, tecnologia suficiente que permita efetuar experimentos a fim de se testar a teoria. Ainda, na teoria de Cordas, a quebra de simetria ocorre de forma espontânea. O Teorema CPT, que nos diz que sistemas físicos são invariantes sob transformações que envolvam simultaneamente inversões de carga, paridade e tempo, toma suposições para sua demonstração que são inválidas dentro do contexto das Cordas, já que estas são objetos extensos, e mais ainda, possui mais que as quatro dimensões do espaço-tempo. Ao contrário do MP, a teoria das cordas envolve interações que podem desestabilizar o vácuo (temos a possibilidade de uma quebra da simetria de Lorentz que ocorre de forma natural quando o vácuo perturbativo da corda é instável), ocasionando valores esperados não nulos para os tensores de Lorentz, gerando então efeitos físicos pequenos, porém não negligenciáveis. Assim como numa teoria de partículas a quebra espontânea de simetria ocorre quando as simetrias da Lagrangeana não são respeitadas pelo estado fundamental da teoria, na teoria de cordas a mesma ideia se aplica [3][4][5][6].

Numa teoria covariante (aquela que mantém as leis da física da mesma forma para todos os referenciais inerciais) envolvendo além das quatro dimensões do espaço-tempo, já é esperada alguma quebra espontânea da simetria de Lorentz de dimensão mais alta. Quando a quebra de simetria se estende para as quatro dimensões macroscópicas do espaço-tempo, tem-se que a violação de Lorentz aparente pode ocorrer dentro do próprio MP, o que poderia representar um possível efeito observável da teoria fundamental que se origina fora da estrutura convencional dos modelos de gauge nos quais o MP é baseado. Neste sentido, tem sido desenvolvida uma estrutura que possa tratar os efeitos dessas violações espontâneas da simetria de Lorentz dentro do contexto da teoria efetiva de baixa energia, onde pode-se induzir termos que aparentam violar a invariância explicitamente. No entanto, os efeitos são mínimos, já que a simetria de Lorentz continua sendo uma propriedade da teoria fundamental justamente porque a quebra é espontânea, o que implica que características diversas atrativas às teorias fundamentais devem se manter na teoria efetiva de baixa energia. Os métodos de quantização não são afetados. Ainda, um outro

aspecto importante quando há quebra espontânea, é que ambas as teorias fundamental quanto a efetiva de baixa energia permanecem invariantes de Lorentz do observador[5].

Essa estrutura para tratar violação espontânea de Lorentz tem sido usada para obter uma extensão do Modelo Padrão mínimo que viola tanto a simetria de Lorentz quando a CPT. A modificação do Modelo Padrão é feita levando em consideração a possibilidade de uma eventual quebra de simetria CPT e conseqüentemente quebra da simetria de Lorentz, de acordo com o teorema de Greenberg (no entanto, é possível haver violação de Lorentz mantendo-se a invariância CPT) [7]. Essa estrutura para tratar violações espontâneas de Lorentz e possivelmente CPT é proposta por Kostelecký e Colladay [4] e é feita introduzindo-se termos de acoplamentos entre os campos de partículas e os campos que ocasionam a quebra de simetrias de Lorentz e CPT no então denominado Modelo Padrão Estendido (SME). Em adição às características desejáveis da conservação do momento-energia, temos ainda a invariância do observador de Lorentz, quantização convencional, hermiticidade, microcausalidade e positividade da energia. Temos também nessa extensão do MP a invariância de Gauge e renormalização por contagem de potências. Isso emergiria de qualquer teoria fundamental que gera o Modelo Padrão e tem a violação espontânea.[8]

Podemos fazer investigações teóricas da quebra das simetrias de Lorentz e CPT extraíndo do Modelo Padrão estendido uma eletrodinâmica quântica (QED) que envolva violação das simetrias, ou seja, uma QED generalizada que envolva modificações da QED usual nos férmions e fótons, permitindo então as violações. A motivação para esta abordagem é interessante devido aos resultados de testes de alta precisão da QED em diversos experimentos. Neste trabalho ignoraremos diversas questões teóricas importantes tais como se a violação de Lorentz espontânea se estenderia às quatro dimensões físicas e todas as questões envolvendo essa questão, restrições ou efeitos de um Modelo Padrão não mínimo. Também desconsidera-se aqui efeitos gravitacionais[8].

Historicamente, tem-se trabalhos com perspectivas bastantes distintas das apresentadas por Kostelecký. Diversos autores, seguindo trabalhos anteriores de Dirac e Heisenberg, consideraram quebras espontâneas não-físicas de Lorentz de forma a interpretar o fóton como um bóson de Nambu-Goldstone (um bóson sem spin que surge naturalmente em modelos teóricos em que a quebra de simetrias ocorre de forma espontânea). Nielsen [9] por outro lado sugeriu que a simetria de Lorentz pode ser uma manifestação de uma teoria fundamental que não considera a invariância de Lorentz. Ainda, Hawking [10] sugeriu que a Mecânica Quântica convencional seria invalidada por efeitos gravitacionais, o que poderia levar, dentre outros efeitos, à violação da CPT[5].

Na parte experimental, enfrenta-se dificuldades devido à falta de precisão para detectar sinais da quebra de simetria de Lorentz. Alguns testes mais sensíveis no entanto podem fornecer resultados interessantes sobre o efeito de acoplamento da violação de Lorentz. Alguns que podemos citar são: [3]

- Observação de oscilações de méson neutros, cuja predição é a de que sinais para violações de Lorentz e CPT em experimentos com mésons neutros dependeria da magnitude do boost e orientação dos mésons envolvidos, o qual, dentre os diversos efeitos gerados, é que experimentos com sensibilidade estatística comparável aos efeitos de CPT podem, de fato, não ter alcance de equivalente da CPT. Isso pode acontecer se os mésons envolvidos tiverem espectros de momento muito diferentes ou se estiverem bem colimados;
- experimentos da QED comparativos em armadilhas de Penning, que consiste em prender partículas individuais por períodos prolongados de tempo de tal forma que possibilite medições exatas de suas propriedades. Também temos medidas comparativas de frequência de ciclotron e frequência anômala graças a essas armadilhas.
- Medidas de birrefringência cosmológica (medidas de polarização da luz para galáxias distantes), na qual a restrição mais forte vem da ausência de birrefringência em escalas de distâncias cosmológicas.
- Espectroscopia de hidrogênio e anti-hidrogênio, cuja ideia é obter dados a partir de uma espectroscopia de alta precisão para os dois sistemas, que podem ser comparados para prover testes CPT.
- Assimetria de bárions, cuja investigação leva à possibilidade de ser um possível efeito observável da CPT, na qual a assimetria poderia ser produzida em equilíbrio térmico de termos de violação da CPT. Isso poderia representar uma alternativa à bariogênese convencional que requer processos de quebra de simetria CP.

Tudo isso explica o grande interesse em estudar pequenas correções das violações de Lorentz e CPT no Modelo Padrão, já que poderiam surgir de violações maiores da simetria de Lorentz ocorrendo na escala de Plank. Ao longo dos últimos anos tem aparecido diversos trabalhos em modelos de teoria de campos com quebra de simetria de Lorentz, os efeitos da mesma tem sido amplamente investigados em diferentes cenários. Citamos alguns trabalhos em Mecânica Estatística, [11, 12, 13, 14, 15, 16], no Efeito Casimir [17]–[22], na Condensação de Bose-Einstein [23]–[27]. Também há trabalhos no setor da QED, [28]–[32], em modelos com condições de fronteira [33, 34, 35, 36], termos de tipo Chern-Simons [37]–[41], processos de espalhamento [42]–[46], correspondências geométricas [47, 48], modelos de super-simetria [49]–[53], assim como em outros assuntos interessantes. Uma exaustiva lista de referências pode ser encontrada em [54].

Um dos processos físicos de relevância teórica e experimental é o efeito Compton, observado por primeira vez em 1923 por Arthur Holly Compton, o qual foi fundamental para o desenvolvimento da mecânica quântica e a teoria quântica de campos. Este é um espalhamento elástico da luz por um elétron livre, onde se observou que o comprimento

de onda da luz espalhada é diferente do comprimento da radiação inicial, sendo a diferença denominada desvio Compton. Essa descoberta rendeu a Compton o prêmio Nobel de 1927. A relevância do efeito Compton é que ele demonstra que a luz não é exclusivamente um fenômeno ondulatório. O espalhamento Thomson (onda eletromagnética espalhada por partícula livre, explicado de acordo com o eletromagnetismo clássico) não solucionava a questão de desvios do comprimento de ondas em baixas intensidades, onde se faz necessária uma descrição que leva em consideração propriedades do tipo partícula para a luz. Ainda, o espalhamento Compton de um fóton é um processo que pode ser descrito com alta precisão pela QED. A sessão de choque é uma quantidade mensurável que pode ser usada para testar a validade da teoria, e o espalhamento Compton carrega em si a possibilidade de se tornar um teste para a violação de Lorentz. O cálculo das sessões de choque do espalhamento numa teoria com violação de Lorentz podem envolver sutilezas em comparação ao caso invariante. Referenciais diferentes aqui podem não ser mais equivalentes, como no caso tratado por Altschul [55], onde o autor considera um termo de violação de Lorentz na parte quadrática do lagrangeano da QED.

No presente trabalho, consideramos o cálculo da seção de choque em nível de árvore em um modelo de QED com termo de quebra de simetria de Lorentz que modifica o termo de interação mas mantém o termo quadrático com essa simetria. Dessa forma, o cálculo não possui as sutilezas apontadas em [55]. Conforme veremos, nesse caso a amplitude de espalhamento é similar em forma ao caso com simetria de Lorentz, onde agora os vetores de polarização dos fótons aparecem como se fossem rotacionados. Isso permitirá obter a seção de choque de uma maneira bastante simples em um caso particular. Devemos aqui mencionar que um trabalho similar ao apresentado nessa dissertação tem sido considerado em [8], onde os autores também consideram o cálculo das seções de choque de outros processos da QED. Porém, os resultados obtidos, no que tange ao espalhamento Compton são diferentes por um termo.

Com o intuito de tornar este trabalho o mais acessível e didático possível, dentro das limitações de espaço, consideramos em primeiro lugar no capítulo 2 uma revisão da Lagrangeana na QED. Para tal consideramos uma breve revisão da Teoria Clássica de Campos. Nesse capítulo abordamos a quantização do campo eletromagnético livre, pelo método de Gupta-Bleuler e consideramos a obtenção do propagador que será usado para descrevermos as amplitudes de espalhamento através das regras de Feynman. Na sequência abordamos a quantização do campo de Dirac livre, onde chegaremos ao propagador de Dirac. Finalmente consideramos o termo de interação da QED e enunciamos as regras de Feynman correspondentes para o cálculo das amplitudes de espalhamento. No capítulo 3 apresentamos o espalhamento Compton na QED sem violação de Lorentz, onde são apresentados os cálculos explícitos para a amplitude de espalhamento, a sessão de choque diferencial e a sessão de choque para elétrons não polarizados. Ainda, esse capítulo mostra cálculos sobre os traços das matrizes γ . O capítulo 4 trata do espalhamento Comp-

ton na QED sob quebra de simetria de Lorentz em um modelo particular e finalmente apresentamos as nossas conclusões no capítulo 5.

Ao longo desta dissertação, a menos que se diga o contrário, usamos unidades naturais $c = \hbar = k_B = 1$ e para a métrica de Minkowski usamos a assinatura $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

2 A Lagrangiana da QED

Nesse capítulo faremos uma revisão da Eletrodinâmica Quântica (QED). A ação da QED é dado por

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \right) \quad (2.1)$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3$ e os índices repetidos estão somados conforme a notação de Einstein. O tensor de campo eletromagnético é dado por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, o campo de Dirac ψ é um campo matricial com quatro componentes e $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. As matrizes γ^μ são matrizes 4×4 que satisfazem a álgebra de Clifford. O primeiro termo em (2.1) descreve o campo eletromagnético livre, o segundo o campo de Dirac livre e o último termo descreve a interação entre esses campos. Nas seguintes seções vamos considerar cada um desses termos, desde o ponto de vista quântico. Veremos que o primeiro termo descreve fótons livres, o segundo elétrons e pósitrons e o último termo a interação entre os mesmos.

Com o intuito de tornarmos esse capítulo o mais independente possível dentro das limitações de espaço, revisamos em primeiro lugar, brevemente e sem demonstração, alguns dos resultados da teoria clássica de campos no que diz respeito às equações de movimento e às leis de conservação segundo o teorema de Noether. Para detalhes veja a referência [56].

Dado um sistema de N campos ϕ_a , com ação

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a), \quad (2.2)$$

onde a *densidade lagrangiana* \mathcal{L} , ou simplesmente lagrangiana, depende dos campos e das suas derivadas primeiras no máximo, as equações de movimento são dadas pelas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) = 0, \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

A partir da lagrangiana obtemos o momento canonicamente conjugado ao campo, $\Pi_a(x)$ como

$$\Pi_a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_a)}. \quad (2.4)$$

Em termos do momento canonicamente conjugado ao campo, definimos o hamiltoniano do sistema por

$$H = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}(\phi_a, \Pi_a), \quad (2.5)$$

onde a densidade hamiltoniana \mathcal{H} , vem dada por

$$\mathcal{H} = \sum_a \Pi_a \partial_0 \phi_a - \mathcal{L}. \quad (2.6)$$

Se o sistema descrito pela ação (2.1) é invariante por translações espaço-temporais

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu, \quad (2.7)$$

então, usando o teorema de Noether, obtemos que as quatro quantidades seguintes se conservam:

$$P^\mu = \int d^3\mathbf{x} T^{0\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3; \quad (2.8)$$

onde o tensor de momento energia, $T^{\mu\nu}$ vem dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial^\nu \phi_a - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.9)$$

na qual consideramos que os índices repetidos estão sendo somados e $\eta^{\mu\nu} = \text{diagonal}(1, -1, -1, -1)$. Em geral, P^0 coincide com o Hamiltoniano do sistema.

Por outro lado, considerando uma transformação de Lorentz

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (2.10)$$

onde $\Lambda^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\nu(\omega)$, a matriz de transformação de Lorentz, depende de seis parâmetros $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, três parâmetros de rotação espacial e três de transformações de Lorentz propriamente ditas, i.e, boosts. Neste caso os campos se transformam segundo

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi'_a(x') = \left(e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}} \right)_{ab} \phi_b(x), \quad (2.11)$$

onde $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$ são seis matrizes cuja dimensão depende do tipo de campo. Assim, por exemplo, se o campo ϕ_a for escalar então $J^{\mu\nu} = 0$, tal que $\phi'_a(x') = \phi_a(x)$. Em geral, essas matrizes, chamadas de geradores do grupo de Lorentz satisfazem a álgebra

$$[J^{\mu\nu}, J^{\alpha\beta}] = i \left(\eta^{\mu\beta} J^{\nu\alpha} + \eta^{\nu\alpha} J^{\mu\beta} - \eta^{\mu\alpha} J^{\nu\beta} - \eta^{\nu\beta} J^{\mu\alpha} \right). \quad (2.12)$$

No caso do campo vetorial, como o eletromagnético A^μ , os geradores são matrizes reais 4×4 , os quais são obtidos colocando a transformação $A^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$ na forma exponencial. Considerando transformações de Lorentz infinitesimais, $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$, onde o $\omega^\mu_\nu \rightarrow 0$, resultado é que as componentes dos geradores são dadas por

$$(J^{\mu\nu})^\alpha_\beta = i \left(\eta^{\mu\alpha} \delta^\nu_\beta - \eta^{\nu\alpha} \delta^\mu_\beta \right). \quad (2.13)$$

Por outro lado, no caso do campo de Dirac, os geradores são matrizes complexas 4×4 , dados por

$$J^{\alpha\beta} = \frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]. \quad (2.14)$$

Se a ação (2.2) é um escalar de Lorentz, i.e, invariante sob transformações (2.10)-(2.11), então de acordo ao teorema de Noether, há seis quantidades conservadas, $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$, dadas por

$$M^{\mu\nu} = \int d^3\mathbf{x} \left(T^{0\mu} x^\nu - T^{0\nu} x^\mu \right) - i \int d^3\mathbf{x} \Pi_a(x) (J^{\mu\nu})_{ab} \phi_b(x). \quad (2.15)$$

Dessas seis quantidades, três têm significado físico direto, os quais são associados à simetria por rotações espaciais, M^{ij} , relacionados com as componentes do momentum angular \mathbf{M} por

$$M_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M^{ij}. \quad (2.16)$$

Em (2.15), considerando as componentes espaciais, o primeiro termo está associado ao momento angular orbital do sistema, o qual pode ser visto pela similaridade do integrando com o momento angular orbital de uma partícula. Por outro lado, o segundo termo depende da natureza intrínseca do campo, sob transformações de Lorentz, e está associado ao momento angular intrínseco do sistema, também chamado de spin. Denotando o spin por \mathbf{S} , temos para as suas componentes uma relação similar a (2.16), onde S^{ij} vem dado por

$$S^{ij} = -i \int d^3\mathbf{x} \Pi_a(x) (J^{ij})_{ab} \phi_b(x). \quad (2.17)$$

As quantidades conservadas anteriores se referem às simetrias espaço-temporais da ação. Consideremos agora simetrias associadas às transformações internas, i.e, que não estão relacionadas com as transformações de coordenadas. Considerando campos complexos, temos as transformações de fase globais,

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi'_a(x) = e^{i\theta} \phi_a(x), \quad \phi_a^*(x) \rightarrow \phi'^*_a(x) = e^{-i\theta} \phi_a^*(x) \quad (2.18)$$

onde θ é real e constante. Se a ação for invariante sob essas transformações de fase, então, usando o teorema de Noether, obtemos a seguinte quantidade conservada,

$$Q = \frac{1}{2i} \int d^3\mathbf{x} (\phi_a(x) \Pi_a^*(x) - \phi_a^*(x) \Pi_a(x)). \quad (2.19)$$

Essa quantidade conservada é relacionada com a carga do sistema. No caso do campo de Dirac, essa quantidade coincide com a carga elétrica do sistema.

Para quantizar o sistema, elevamos os campos e seus momentos canonicamente conjugados à categoria de operadores e impomos relações de comutação ou anti-comutação entre os mesmos. No caso de campos associados a partículas de spin inteiro quantizamos mediante relações de comutação, enquanto que campos associados a partículas de spin semi-inteiro são quantizados mediante relações de anticomutação [57]. Na próxima seção tratamos o caso do campo eletromagnético livre, i.e, o sistema descrito pelo primeiro termo em (2.1). Nesse caso quantizaremos usando relações de comutação. Posteriormente, ao tratar o campo de Dirac livre, segundo termo em (2.1), quantizaremos usando relações de anticomutação.

2.1 O campo eletromagnético livre

A densidade lagrangeana do campo eletromagnético livre é dada pelo primeiro termo da expressão (2.1),

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (2.20)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.21)$$

é o chamado tensor de campo eletromagnético. As componentes do potencial quadrvetor A^μ são dados por

$$A^\mu = (A^0, A^i), \quad (2.22)$$

onde identificamos as componentes temporal e espacial, respectivamente, com o potencial eletrostático e o potencial vetor,

$$A^0 = \phi, \quad A^1 = A_x, \quad A^2 = A_y, \quad A^3 = A_z, \quad (2.23)$$

de onde os campos elétrico e magnético são dados respectivamente por

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.24)$$

Podemos ver que as componentes de $F^{\mu\nu}$ nos dão as componentes dos campos elétrico e magnético,

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

As equações de movimento para o campo, obtidas usando-se as equações de Euler-Lagrange a partir de (2.20), são dadas por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.26)$$

O sistema descrito pela lagrangeana (2.20) é invariante sob transformações de Lorentz e de gauge, isto é, sob transformações,

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad (2.27)$$

temos

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

Em termos do potencial vetor, de (2.26) temos

$$\square A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0. \quad (2.29)$$

Devido à invariância de gauge, temos a liberdade de impor condições nos campos vetoriais. Dessa forma, tomando a condição do gauge de Lorentz,

$$\partial \cdot A = 0, \quad (2.30)$$

temos, da equação anterior

$$\square A^\mu = 0, \quad (2.31)$$

isto é, no gauge de Lorentz, as componentes do campo eletromagnético seguem a equação de Klein-Gordon para um campo escalar sem massa. As soluções para a mesma são dadas por

$$A^\mu(x) = \sum_{r=0}^3 \int \widetilde{d}k \left[a(k, r) \epsilon^\mu(k, r) e^{-ik \cdot x} + a^*(k, r) \epsilon^\mu(k, r) e^{ik \cdot x} \right]; \quad (2.32)$$

no qual

$$\widetilde{d}k = \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega(k)}, \quad \omega(k) = |\mathbf{k}|, \quad (2.33)$$

e $\epsilon^\mu(k, r)$ são quatro vetores linearmente independentes e ortonormais,

$$\epsilon(k, r) \cdot \epsilon^*(k, s) = \eta^{rs}. \quad (2.34)$$

Esse vetores são os vetores de polarização do campo eletromagnético. Uma base explícita para esses vetores pode ser dada na forma:

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu(k, 0) &= (1, 0, 0, 0) \\ \epsilon^\mu(k, 3) &= \left(0, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right) \\ \epsilon^\mu(k, 1) &= (0, \boldsymbol{\epsilon}_1) \\ \epsilon^\mu(k, 2) &= (0, \boldsymbol{\epsilon}_2) \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde $\boldsymbol{\epsilon}_1$ e $\boldsymbol{\epsilon}_2$ são ortonormais entre si e ortogonais ao vetor \mathbf{k} . Dessa forma, vemos que no gauge de Lorentz temos polarizações temporal, $\epsilon^\mu(k, 0)$, longitudinal $\epsilon^\mu(0, 3)$ e transversos $\epsilon^\mu(k, 1)$ e $\epsilon^\mu(k, 2)$.

Para obter o hamiltoniano do sistema e sua posterior quantização, precisamos do momento canonicamente conjugado ao campo A^μ , o qual vem dado por

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0}. \quad (2.36)$$

Tomando $\mu = 0$ na equação anterior temos $\Pi^0 = 0$, isto é, aparece um problema de vínculo que nos impede de estabelecermos as relações de comutação, entre os operadores

de campo e o momento canonicamente conjugado, de forma consistente. Uma forma de contornar esse problema de sistema vinculado é quantizar a teoria em um outro gauge. Podemos usar o chamado gauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ onde resolvemos explicitamente para a componente temporal do campo, isto é reduzindo de forma explícita o número de graus de liberdade do campo, e trabalharmos somente com os graus de liberdade físicos. Porém, esse gauge não é explicitamente covariante de Lorentz, dessa forma tornando certos cálculos extremamente difíceis.

Para contornar os problemas anteriores quantizaremos pelo método de Gupta-Bleuler. O método consiste em modificar a densidade lagrangeana do sistema da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.37)$$

onde λ é uma constante. Note que mediante a imposição do Gauge de Lorentz $\partial \cdot A = 0$, o termo de modificação na expressão anterior se elimina e dessa forma obtemos a equivalência entre os sistemas descritos pela lagrangeana da eletrodinâmica clássica (2.20) e a lagrangeana modificada de Gupta-Bleuler (2.37). Porém, devemos notar que a lagrangeana de Gupta-Bleuler (2.37) não é mais invariante por transformações de Gauge, i.e, o termo $(\partial_\mu A^\mu)^2$ quebra essa simetria. Assim então, para termos a equivalência entre a teoria modificada e o campo eletromagnético a condição de Lorentz deve ser imposta como um vínculo no sistema.

Da lagrangeana (2.37) as equações de movimento são dadas por

$$\square A^\mu + (1 - \lambda)\partial^\mu(\partial \cdot A) = 0, \quad (2.38)$$

no qual, quando tomamos o chamado gauge de Feynman, $\lambda = 1$, temos como soluções para $\square A^\mu = 0$ a expressão dada pela Eq. (2.32). No que segue vamos nos restringir ao caso $\lambda = 1$. Dessa forma, considerando o momento canonicamente conjugado ao campo, temos

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0} - \eta^{\mu 0}(\partial \cdot A), \quad (2.39)$$

onde vemos que não há mais problemas de vínculo, já que $\Pi^0 = -\partial_\mu A^\mu$. Certamente se impormos a condição do gauge de Lorentz, voltamos a ter o problema do vínculo. Dessa forma devemos colocar essa condição de forma adequada em nível quântico, conforme veremos mais abaixo.

De (2.37) obtemos para o Hamiltoniano, considerando o gauge de Feynman, $\lambda = 1$,

$$H = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2} - (\partial_\mu A^\mu)\dot{A}^0 - \frac{1}{2}(\partial_0 A^0 + \partial_j A^j)^2 \right], \quad (2.40)$$

que pode ser reescrita usando (2.32) como

$$H = \int \widetilde{d}k \, \omega(k) \left(\sum_{r=1}^3 a^*(k, r) a(k, r) - a^*(k, 0) a(k, 0) \right). \quad (2.41)$$

Por outro lado para o momentum linear do sistema obtemos, usando o teorema de Noether,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= - \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} \nabla A^\mu \\ &= \int \widetilde{d}k \, \mathbf{k} \left(\sum_{r=1}^3 a^*(k, r) a(k, r) - a^*(k, 0) a(k, 0) \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Para quantizarmos o sistema elevamos os campos à categoria de operadores, $A^\mu, \Pi^\mu \rightarrow \hat{A}^\mu, \hat{\Pi}^\mu$ ou equivalentemente $a, a^* \rightarrow \hat{a}, \hat{a}^\dagger$. Impondo as relações de comutação entre os operadores de campo,

$$[\hat{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^\nu(\mathbf{y}, t)] = -i\eta^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\hat{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \hat{A}^\nu(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad [\hat{\Pi}^\mu(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^\nu(\mathbf{y}, t)] = 0; \quad (2.43)$$

temos em termos dos operadores de aniquilação e criação, \hat{a} e \hat{a}^\dagger ,

$$[\hat{a}(k, r), \hat{a}^\dagger(q, s)] = -(2\pi)^3 2\omega(k) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \eta_{r,s}, \quad (2.44)$$

$$[\hat{a}(k, r), \hat{a}(q, s)] = [\hat{a}^\dagger(k, r), \hat{a}^\dagger(q, s)] = 0. \quad (2.45)$$

Para o operador hamiltoniano, considerando as relações de comutação entre os operadores de aniquilação e criação, teremos em relação ao correspondente clássico (2.41),

$$\hat{H} = \int \widetilde{d}k \, \omega(k) \left(\sum_{r=1}^3 \hat{a}^\dagger(k, r) \hat{a}(k, r) - \hat{a}^\dagger(k, 0) \hat{a}(k, 0) \right) + 2E_0, \quad (2.46)$$

onde o termo extra $2E_0$, com

$$E_0 = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} \, \omega(k) \delta(\mathbf{k} = 0), \quad (2.47)$$

provém como consequência das relações de comutação entre os operadores de aniquilação e criação. Por outro lado para o operador momentum linear temos a mesma expressão (2.42) onde agora aparecerão os operadores de criação e aniquilação,

$$\hat{\mathbf{P}} = \int \widetilde{d}k \, \mathbf{k} \left(\sum_{r=1}^3 \hat{a}^\dagger(k, r) \hat{a}(k, r) - \hat{a}^\dagger(k, 0) \hat{a}(k, 0) \right), \quad (2.48)$$

onde não há termo extra nesse caso devido a que a integração em \mathbf{k} se anula, como consequência de que o integrando correspondente é uma função ímpar em \mathbf{k} .

Das expressões (2.46) e (2.48), podemos ver que o espectro do sistema descrito pela lagrangiana de Gupta-Bleuler consiste de uma partícula sem massa, o fóton, com quatro possíveis estados. Para isto, definimos o estado de vácuo $|0\rangle$ tal que

$$\hat{a}(k, r)|0\rangle = 0, \quad \forall k, r. \quad (2.49)$$

A partir do estado de vácuo, os estados de uma partícula são obtidos aplicando o operador de criação nesse estado, i.e., os estados $\hat{a}^\dagger(k, r)|0\rangle$ são autoestados do operador de energia e momentum com as seguintes características: Os estados de partículas associados às polarizações transversais e longitudinais, i.e., criadas pelos operadores $\hat{a}^\dagger(k, j)$, $j = 1, 2, 3$, possuem momentum \mathbf{k} e energia $\omega(k) = |\mathbf{k}|$. Por outro lado os estados de partículas associados à polarização temporal, criadas pelo operador $\hat{a}^\dagger(k, 0)$, possuem momentum $-\mathbf{k}$ e energia $-\omega(k) < 0$. Este último é problemático devido a que, sob o ponto de vista experimental, partículas livres possuem energia positiva. Por outro lado, esses estados de energia negativa possuem outro severo problema. Tomando o módulo ao quadrado do estado de uma partícula $\hat{a}^\dagger(k, r)|0\rangle$ obtemos

$$\langle 0|\hat{a}(k, r)\hat{a}^\dagger(k, r)|0\rangle = -(2\pi)^3 2\omega(k)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k})\eta_{rr}, \quad (2.50)$$

onde usamos as relações de comutação (2.44) e a relação (2.49). Considerando o estado de partícula temporal, $r = 0$, vemos de (2.50) que o estado correspondente possui norma negativa, o qual quebra a interpretação probabilística de teoria quântica.

Por outro lado não devemos perder de vista que estamos considerando o sistema descrito pela lagrangiana modificada de Gupta-Bleuler, e não o campo eletromagnético livre. Conforme vimos, no caso clássico, a equivalência entre esses dois sistemas é obtida impondo-se a condição do gauge de Lorentz. Mas não podemos impor essa condição na forma operatorial, já que isso resultaria novamente no vínculo $\hat{\Pi}^0 = -\partial_\mu A^\mu = 0$, o qual estaria em conflito com a primeira das relações de comutação (2.43). Vamos impor a condição do gauge de Lorentz quanticamente da seguinte forma:

$$\langle \psi_{fis}|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\psi_{fis}\rangle = 0, \quad (2.51)$$

onde definimos os estados físicos como os estados $|\psi_{fis}\rangle$ que satisfazem essa condição. Podemos notar que a condição acima é equivalente à condição

$$\partial_\mu \hat{A}^{\mu(+)}|\psi\rangle = 0, \quad (2.52)$$

onde $\hat{A}^{\mu(+)}$ é definido como o termo de *frequências positivas* na expressão (2.32), i.e.,

$$\hat{A}^{\mu(+)}(x) = \sum_{r=0}^3 \int \tilde{d}k \hat{a}(k, r)\epsilon^\mu(k, r)e^{-ik \cdot x}. \quad (2.53)$$

Usando explicitamente $\hat{A}^{\mu(+)}(x)$ na expressão (2.52), obtemos

$$\int \tilde{k}e^{-ik \cdot x} \sum_{r=0}^3 \hat{a}(k, r)\epsilon(k, r) \cdot k|\psi_{fis}\rangle = 0 \quad (2.54)$$

mas, $\epsilon^\mu(k, 1)$ e $\epsilon^\mu(k, 2)$ são ortogonais a k^μ , assim o segundo e o terceiro termo no somatório da expressão anterior são nulos. Por outro lado, $\epsilon(k, 0) \cdot k = k^0 = |\vec{k}|$ e $\epsilon(k, 3) \cdot k = -|\vec{k}|$, e teremos de (2.54), como consequência,

$$\left(\hat{a}(k, 0) - \hat{a}(k, 3)\right)|\psi_{fis}\rangle = 0, \quad (2.55)$$

que é a equação que define os estados físicos da teoria. Como consequência da condição física (2.55), teremos contribuição nos observáveis somente dos fótons transversos. Assim, usando (2.46) e (2.48) nos valores esperados para o hamiltoniano e o operador de momentum nos estados físicos, obtemos respectivamente:

$$\langle \psi_{fis} | \hat{H} | \psi_{fis} \rangle = \langle \psi_{fis} | \left(\sum_{r=1}^2 \int \widetilde{d}k \, \omega(k) \hat{a}^\dagger(k, r) \hat{a}(k, r) + 2\epsilon_0 \right) | \psi_{fis} \rangle \quad (2.56)$$

$$\langle \psi_{fis} | \hat{\mathbf{P}} | \psi_{fis} \rangle = \langle \psi_{fis} | \sum_{r=1}^2 \int \widetilde{d}k \, \mathbf{k} \hat{a}^\dagger(k, r) \hat{a}(k, r) | \psi_{fis} \rangle, \quad (2.57)$$

onde as contribuições das polarizações temporal e longitudinal se cancelam devido à relação (2.55). Temos então dois graus de liberdade que contribuem para energia e o momentum dos estados físicos. Apenas os modos transversos aparecem. Precisamos ainda distinguir esses estados de partículas, já que temos dois com a mesma relação momento energia, $E = \omega(k) = |\mathbf{k}|$. Esses estados são distinguíveis através do momentum angular intrínseco ou spin. Porém, como as partículas não possuem massa, consideramos a helicidade, ou a projeção de spin ao longo da direção de movimento.

A partir da densidade lagrangeana (2.37), usando o Teorema de Noether, o operador de spin no gauge de Feynman é obtido como

$$\hat{S}^{ij} = \int d^3\vec{x} (\hat{\Pi}^i \hat{A}^j - \hat{\Pi}^j \hat{A}^i), \quad (2.58)$$

em termos dos quais as componentes do operador de spin $\hat{\mathbf{S}}$ são dadas por

$$\hat{S}_k = \frac{\epsilon_{ijk}}{2} \hat{S}^{ij}. \quad (2.59)$$

Substituindo a expansão de $\hat{A}^\mu(x)$, $\hat{\Pi}^\nu(x)$ em termos de \hat{a} e \hat{a}^\dagger , obtemos

$$\hat{\mathbf{S}} = i \int \widetilde{d}k \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \left(\hat{a}^\dagger(k, 1) \hat{a}(k, 2) - \hat{a}(k, 1) \hat{a}^\dagger(k, 2) \right), \quad (2.60)$$

onde desconsideramos os termos $\hat{a}(k, 0)$ e $\hat{a}(k, 3)$ devido a que os mesmos não contribuirão nos estados físicos, definidos conforme (2.55). Podemos notar que os estados transversos $\hat{a}^\dagger(k, r)|0\rangle$, $r = 1, 2$ não são autoestados dos operador de spin, nem do operador de helicidade correspondente. Construímos estados transversos que são autoestados do operador de helicidade mediante combinação linear dos estados transversos anteriores. Definindo os operadores transversos positivos e negativos por

$$\begin{aligned} \hat{a}(k, \pm) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}(k, 1) \pm i \hat{a}(k, 2) \right) \\ \hat{a}^\dagger(k, \pm) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}^\dagger(k, 1) \mp i \hat{a}^\dagger(k, 2) \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

e usando (2.44)-(2.45), podemos mostrar que

$$[\hat{a}(k, \pm), \hat{a}^\dagger(q, \pm)] = (2\pi)^3 2\omega(k) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (2.62)$$

e que todos os outros comutadores envolvendo os operadores transversos são nulos. Usando as relações inversas a (2.61), reescrevemos o operador de spin (2.60), obtendo

$$\hat{\mathbf{S}} = \int \widetilde{d\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \left(\hat{a}^\dagger(k, +) \hat{a}(k, +) - \hat{a}^\dagger(k, -) \hat{a}(k, -) \right). \quad (2.63)$$

Para os operadores hamiltoniano e momentum obtemos expressões similares a (2.46) e (2.48) onde os operadores transversos $\hat{a}(k, r)$ e $\hat{a}^\dagger(k, r)$ são substituídos pelos operadores $\hat{a}(k, \pm)$ e $\hat{a}^\dagger(k, \pm)$. Assim, os estados

$$|k, \pm\rangle = a^\dagger(k, \pm)|0\rangle \quad (2.64)$$

são estados de uma partícula de momentum \mathbf{k} e energia $\omega(k) = |\mathbf{k}|$. Já que essas partículas não possuem massa, consideramos a helicidade correspondente a esses estados de partículas. Usando (2.63) obtemos para o operador helicidade ao longo do vetor \mathbf{k}

$$\begin{aligned} \hat{h}(k) &= \hat{\mathbf{S}} \cdot \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \\ &= \int \widetilde{d\mathbf{q}} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}{\omega(k)\omega(q)} \left(\hat{a}^\dagger(q, +) \hat{a}(q, +) - \hat{a}^\dagger(q, -) \hat{a}(q, -) \right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Aplicando esse operador de helicidade ao estado de uma partícula de polarização positiva definido em (2.64), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{h}(k)|k, +\rangle &= \int \widetilde{d\mathbf{q}} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}{\omega(k)\omega(q)} \hat{a}^\dagger(q, +) \hat{a}(q, +) \hat{a}^\dagger(k, +)|0\rangle \\ &= \int \widetilde{d\mathbf{q}} \frac{\vec{q} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}| |\vec{q}|} \hat{a}^\dagger(q, +) (2\pi)^3 2\omega(k) \delta(\vec{k} - \vec{q}) \\ &= |k, +\rangle, \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde usamos as relações de comutação (2.62) e $\hat{a}(k, \pm)|0\rangle = 0$. Da mesma forma, para o estado de polarização negativa, obtemos

$$\hat{h}|k, -\rangle = -|k, -\rangle. \quad (2.67)$$

Dos resultados (2.66) e (2.67), vemos que os possíveis autovalores do operador de spin ao longo da direção de movimento são iguais a +1 e -1, isto é, as partículas associadas aos autoestados correspondentes possuem spin 1 (o estado de projeção nula não aparece porque a partícula não é massiva). Dessa forma, concluímos que o sistema descrito pela lagrangiana modificada de Gupta-Bleuler (2.37), sujeita a condição de Lorentz quântica (2.51), possui por espectro partículas livres de massa nula e de spin 1. Devido a que o campo é real, essas partículas são eletricamente neutras. Temos então dois tipos de partículas distinguíveis pela helicidade, e identificamos essas partículas com os fótons.

O propagador do campo eletromagnético livre é definido por

$$G_{\mu\nu}^{(0)}(x - y) = \langle 0|T(\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(y))|0\rangle, \quad (2.68)$$

onde $T(\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(y))$ é o operador de ordenamento temporal. Aplicando o operador $\delta_\mu^\alpha \square + (1 - \lambda)\partial_\mu \partial^\alpha$ em $G_{\alpha\nu}^{(0)}$, usando as equações de Heisenberg, equivalente às equações (2.38), e usando as relações de comutação (2.43), obtemos de (2.68),

$$\left(\delta_\mu^\alpha \square + (1 - \lambda)\partial_\mu \partial^\alpha\right) G_{\alpha\nu}^{(0)}(x - y) = i\eta_{\mu\nu}\delta(x - y). \quad (2.69)$$

Considerando o gauge de Feynman $\lambda = 1$, temos para o propagador

$$\square_x G_{\mu\nu}^{(0)}(x - y) = i\eta_{\mu\nu}\delta(x - y), \quad (2.70)$$

que é basicamente a equação correspondente para o propagador do campo escalar real com massa nula. Assim, a solução para o propagador no gauge de Feynman é:

$$G_{\mu\nu}^{(0)}(x - y) = -i\eta_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \right], \quad (2.71)$$

onde $\epsilon \rightarrow 0^+$. No caso geral, a solução de (2.70) pode ser obtida usando-se transformada de Fourier. O resultado é dado por

$$G_{\mu\nu}^{(0)}(x - y) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + \frac{(1 - \lambda)k_\mu k_\nu}{\lambda(k^2 + i\epsilon)^2} \right]. \quad (2.72)$$

Da expressão acima obtemos imediatamente o propagador livre no espaço de momentos:

$$G_{\mu\nu}^{(0)}(k) = -i \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + \frac{(1 - \lambda)k_\mu k_\nu}{\lambda(k^2 + i\epsilon)^2} \right]. \quad (2.73)$$

No gauge de Feynman temos

$$G_{\mu\nu}^{(0)}(k) = -i \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (2.74)$$

O propagador no espaço de momentos será de utilidade para expressarmos as amplitudes de espalhamento da QED segundo as Regras de Feynman.

2.2 O campo de Dirac livre

Consideremos agora o segundo termo da lagrangiana (2.1), que descreve o campo espinorial $\psi(x)$, chamado de campo de Dirac livre. Nesse caso a densidade lagrangiana vem dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (2.75)$$

onde as matrizes γ^μ são matrizes 4×4 que satisfazem a álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (2.76)$$

ou seja, essas matrizes satisfazem

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.77)$$

Em (2.75), $\psi(x)$ é um campo com quatro componentes complexas,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

e

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (2.79)$$

Vemos que no total há oito campos reais independentes. Equivalentemente, podemos considerar como campos independentes as quatro componentes de ψ e $\bar{\psi}$. Dessa forma, usando as equações de Euler-Lagrange (2.3), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Teremos então, para ψ e $\bar{\psi}$ respectivamente,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (2.81)$$

e

$$\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0. \quad (2.82)$$

Note que a equação anterior pode ser obtida a partir de (2.81) por conjugação complexa. A equação (2.81) é denominada *equação de Dirac*. Multiplicando por $\bar{\psi}$ e ψ , respectivamente, as equações (2.81) e (2.82), obtemos uma equação de continuidade

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (2.83)$$

onde identificamos a densidade de corrente

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \quad (2.84)$$

Multiplicando por γ^0 na equação de Dirac (2.81), podemos reescrever essa equação como

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = (\vec{\alpha} \cdot \hat{p} + m\beta)\psi, \quad (2.85)$$

onde

$$\beta = \gamma^0, \quad \alpha_i = \gamma^0 \gamma^i. \quad (2.86)$$

Historicamente, a Equação de Dirac foi introduzida pelo Dirac como uma tentativa de generalizar a equação de Schrödinger para uma partícula relativística. [58]. Nesse sentido, em (2.86), o operador $\vec{\alpha} \cdot \hat{p} + m\beta$ é considerado como o operador Hamiltoniano e $\psi(x)$

é visto como uma função de onda. Porém, esse ponto de vista possui inconsistências, como energias negativas para partículas livres. Para detalhes a respeito, assim como a solução de Dirac para esse problema mediante o chamado mar de Dirac, veja [71]. Ainda, considerar $\psi(x)$ como uma função de onda não é correto. Para ver isto, consideremos uma transformação de Lorentz com parâmetros $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\omega)x^{\nu}. \quad (2.87)$$

Sob a transformação anterior, ψ' se transforma segundo

$$\psi'(x') = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}}\psi(x), \quad (2.88)$$

onde $J^{\alpha\beta} = -J_{\beta\alpha}$ são seis matrizes 4×4 que atuam na matriz ψ de 4 componentes. Essas matrizes devem satisfazer a álgebra do grupo de Lorentz (2.12). Essas matrizes são determinadas através da covariância de Lorentz da equação de Dirac, isto é, se $\psi(x)$ satisfaz (2.81) então $\psi'(x')$ deve satisfazer

$$(i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m)\psi'(x'). \quad (2.89)$$

Dessa forma, substituindo (2.88) na expressão anterior e usando (2.81), se encontra que

$$[J^{\alpha\beta}, \gamma^{\mu}] = i(\eta^{\alpha\mu}\gamma^{\beta} - \eta^{\beta\mu}\gamma^{\alpha}), \quad (2.90)$$

que tem como solução

$$J^{\alpha\beta} = \frac{i}{4}[\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}]. \quad (2.91)$$

Finalmente, uma substituição direta da expressão anterior em (2.12) permite verificar que as matrizes $J^{\alpha\beta}$ segundo (2.91) satisfazem a álgebra do grupo de Lorentz. Agora, para que $\psi(x)$ seja vista como uma função de onda, a mesma deve se transformar de forma unitária, assim preservando a sua interpretação probabilística. Para isto, as matrizes $J^{\alpha\beta}$, segundo pode-se ver de (2.88), devem ser hermitianas. Usando (2.77), não é difícil ver de (2.91) que $J^{0i\dagger} = -J^{0i}$ e $J^{ij\dagger} = J^{ij}$, ou seja, a transformação (2.88) não é unitária sob transformações de Lorentz propriamente ditas, mas somente sob as rotações espaciais.

Dessa forma, vemos que, estritamente falando, $\psi(x)$ não pode ser vista como uma função de onda. Essa função deve ser vista como um campo clássico, no mesmo pé de igualdade que o campo eletromagnético clássico. Uma teoria quântica consistente será obtida mediante a quantização desse campo.

Sendo que na representação de Heisenberg as equações clássicas de movimento são equivalentes às equações de Heisenberg para os operadores (de campo), com o intuito de quantizar o campo de Dirac, vamos considerar as soluções da equação de Dirac (2.81). Para tal, consideramos uma representação explícita para as matrizes γ^{μ} . Vamos usar a chamada representação de Dirac, onde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.93)$$

Consideremos soluções de tipo onda plana para (2.81),

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= e^{-ik \cdot x} u(k) \\ \psi^{(-)}(x) &= e^{ik \cdot x} v(k) \end{aligned} \quad (2.94)$$

onde $u(k)$ e $v(k)$ são espinores coluna de quatro componentes, os índices (+) e (-) se referem às soluções chamadas de energias positivas e negativas, respectivamente. Substituindo (2.94) em (2.81) obtemos respectivamente

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu k_\mu - m)u(k) &= 0, \\ (\gamma^\mu k_\mu + m)v(k) &= 0, \end{aligned} \quad (2.95)$$

e

$$k^0 = \omega(k) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (2.96)$$

Para determinar matrizes colunas $u(k), v(k)$, consideramos em primeiro lugar partículas em repouso, onde $\mathbf{k} = 0$, $k_0 = m$. Nesse caso (2.95) se reduzem a

$$\begin{aligned} (\gamma^0 - 1)mu(0) &= 0 \\ (\gamma^0 + 1)mv(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Usando (2.82) para γ^0 na equação acima, teremos duas soluções linearmente independentes, para cada uma dessas equações, que podem ser colocadas na forma

$$u(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.98)$$

Para partículas em movimento $\mathbf{k} \neq 0$, $u(k, r)$ e $v(k, r)$ podem ser obtidas tomando

$$\begin{aligned} u(k, r) &= (\gamma^\mu k_\mu + m)u(0, r) \\ v(k, r) &= (\gamma^\mu k_\mu - m)v(0, r) \end{aligned} \quad (2.99)$$

as quais satisfazem o par de equações (2.95). Dessa forma, usando explicitamente (2.92) obtemos

$$u(k, 1) = \eta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \tilde{k}_z \\ \tilde{k}_+ \end{pmatrix}, \quad u(k, 2) = \eta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tilde{k}_z \\ \tilde{k}_- \end{pmatrix}, \quad (2.100)$$

$$v(k, 1) = \eta_3 \begin{pmatrix} \tilde{k}_z \\ \tilde{k}_+ \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(k, 2) = \eta_4 \begin{pmatrix} \tilde{k}_- \\ -\tilde{k}_z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.101)$$

onde os fatores η_r são fatores de normalização e

$$\begin{aligned} \tilde{k}_z &= \frac{k_z}{k_0 + m} \\ \tilde{k}_\pm &= \frac{k_x \pm ik_y}{k_0 + m}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Tomando os fatores η de tal maneira que

$$\begin{aligned} \bar{u}(k, i)u(k, j) &= \delta_{ij}, \\ \bar{v}(k, i)v(k, j) &= \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

podem-se mostrar às seguintes relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned} u^\dagger(k, i)u(k, j) &= v^\dagger(k, i)v(k, j) = \frac{k_0}{m} \delta_{ij} \\ \bar{u}(k, i)v(k, j) &= \bar{v}(k, i)u(k, j) = 0 \end{aligned} \quad (2.104)$$

e de completudeza

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 u_\alpha(k, i)\bar{u}_\beta(k, i) &= \left(\frac{\not{k} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta} \\ \sum_{i=1}^2 v_\alpha(k, i)\bar{v}_\beta(k, i) &= \left(\frac{\not{k} - m}{2m} \right)_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.105)$$

A solução geral da equação de Dirac, é dada por uma superposição linear de soluções de onda plana (2.94), i.e.,

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^2 \int d\tilde{k} \sqrt{2m} \left(b(k, r)u(k, r)e^{-ik \cdot x} + d^*(k, r)v(k, r)e^{ik \cdot x} \right), \quad (2.106)$$

onde $b(k, r)$ e $d(k, r)$ são os coeficientes de expansão nas soluções em ondas planas.

A Lagrangeana de Dirac (2.75) não depende explicitamente das coordenadas espaço-temporais, ou seja, temos invariância por translações de espaço e tempo, que nos resulta em conservação do momento e da energia. De forma geral, a Lagrangeana também é invariante por transformações de Lorentz, que inclui as rotações espaciais, que nos resulta na conservação do momento angular total do sistema. Usando (2.8)-(2.9), onde consideramos os campos ψ e $\bar{\psi}$ como independentes obtemos para a energia e o momentum linear do sistema, respectivamente

$$P^0 = i \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(x) \partial_0 \psi(x), \quad (2.107)$$

e

$$\mathbf{P} = -i \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(x) \nabla \psi(x). \quad (2.108)$$

Para o momento angular intrínseco, usando (2.17) e (2.91) obtemos

$$S^{ij} = \frac{1}{4} \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(x) [\gamma^i, \gamma^j] \psi(x). \quad (2.109)$$

Finalmente, notemos que a lagrangiana de Dirac também é invariante por transformações de fase globais

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x) \\ \psi^\dagger &= e^{-i\alpha} \psi^\dagger(x), \end{aligned} \quad (2.110)$$

onde $\alpha = cte$. Como consequência temos outra quantidade conservada, a qual é equivalente à quantidade conservada devido à equação de continuidade, (2.83), i.e, dado por

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3\mathbf{x} J^0(x) \\ &= \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(x) \psi(x). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Usando a expansão em ondas planas, (2.106), nas equações (2.107), (2.108) e (2.109) encontramos respectivamente,

$$P^0 = \sum_{r=1}^2 \int d\tilde{k} k_0 \left(b^*(k, r) b(k, r) - d(k, r) d^*(k, r) \right), \quad (2.112)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{r=1}^2 \int d\tilde{k} \mathbf{k} \left(b^*(k, r) b(k, r) - d(k, r) d^*(k, r) \right) \quad (2.113)$$

e

$$Q = \sum_{r=1}^2 \int d\tilde{k} \left(b^*(k, r) b(k, r) + d(k, r) d^*(k, r) \right). \quad (2.114)$$

Considerando agora o momento canonicamente conjugado ao campo, usando a lagrangeana do campo de Dirac, obtemos

$$\Pi(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \psi)} = i\psi^\dagger(x), \quad (2.115)$$

de onde podemos obter o momento canonicamente conjugado a $\bar{\psi}$ tomando o adjunto da expressão anterior:

$$\Pi^\dagger(x) = -i\psi(x). \quad (2.116)$$

Usando (2.115) e (2.116), obtemos o Hamiltoniano do sistema como sendo equivalente a P^0 , i.e,

$$H = P^0, \quad (2.117)$$

dados pela equação (2.112).

Com os ingredientes acima, podemos considerar a questão da quantização do campo de Dirac. Para tal elevamos os campos e os correspondentes operadores canonicamente conjugados à categoria de operadores,

$$\psi \rightarrow \hat{\psi}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \hat{\bar{\psi}}, \quad \Pi \rightarrow \hat{\Pi}, \quad \Pi^\dagger \rightarrow \hat{\Pi}^\dagger \quad (2.118)$$

e postulamos, para t fixo, as relações de anticomutação seguintes entre esses operadores,

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}_\beta(\mathbf{y}, t)\} &= i\delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \{\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}_\beta^\dagger(\mathbf{y}, t)\} &= i\delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \end{aligned} \quad (2.119)$$

e todas as outras relações de anti-comutação são nulas quando avaliadas no mesmo instante de tempo. Usando $\Pi = i\psi^\dagger$ e $\Pi^\dagger = -i\psi$ chegamos a

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.120)$$

Na representação de Heisenberg os operadores de campo satisfazem as equações clássicas de movimento. Assim, podemos tomar como operador de campo a expansão em ondas planas (2.106),

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{r=1}^2 \int \tilde{d}\mathbf{k} \sqrt{2m} \left(\hat{b}(k, r) u(k, r) e^{-ik \cdot x} + \hat{d}^\dagger(k, r) v(k, r) e^{ik \cdot x} \right) \quad (2.121)$$

onde agora $\hat{b}(k, r)$ e $\hat{d}(k, r)$ passam a ser operadores. Da equação anterior e seu adjunto, podemos resolver para esses operadores em termos dos operadores de campo, e usando (2.120) encontramos que

$$\begin{aligned} \{\hat{b}(k, r), \hat{b}^\dagger(q, s)\} &= \{\hat{d}(k, r), \hat{d}^\dagger(q, s)\} = (2\pi)^3 2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \delta_{rs}, \\ \{\hat{b}^\dagger(k, s), \hat{b}^\dagger(q, s)\} &= \{\hat{d}^\dagger(k, r), \hat{d}^\dagger(q, s)\} = \{\hat{b}(k, r), \hat{d}(q, s)\} = 0, \\ \{\hat{b}(k, r), \hat{d}^\dagger(q, s)\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Em termos dos operadores de criação e aniquilação temos para as expressões (2.112), (2.113) e (2.114), respectivamente

$$\hat{H} = \sum_{r=1}^2 \int \tilde{d}\mathbf{k} k_0 \left(\hat{b}^\dagger(k, r) \hat{b}(k, r) + \hat{d}^\dagger(k, r) \hat{d}(k, r) \right) - 2E_0, \quad (2.123)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{r=1}^2 \int \tilde{d}\mathbf{k} \mathbf{k} \left(\hat{b}^\dagger(k, r) \hat{b}(k, r) + \hat{d}^\dagger(k, r) \hat{d}(k, r) \right) \quad (2.124)$$

$$\hat{Q} = \sum_{r=1}^2 \int \tilde{d}\mathbf{k} \left(\hat{b}^\dagger(k, r) \hat{b}(k, r) - \hat{d}^\dagger(k, r) \hat{d}(k, r) \right) + Q_0 \quad (2.125)$$

onde usamos as relações de comutação (2.122) e

$$Q_0 = 2 \int d\tilde{k} (2\pi)^3 2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}) \quad (2.126)$$

é uma constante que tende a infinito.

Analisemos o espectro a partir do estado de vácuo $|0\rangle$, definido por

$$\hat{b}(k, r)|0\rangle = \hat{d}(k, r)|0\rangle = 0. \quad (2.127)$$

Usando (2.123)-(2.126), podemos ver que o estado de vácuo $|0\rangle$ possui energia $-2E_0$ e carga Q_0 infinitos, assim como momento linear nulo. Por outro lado, aplicando os operadores (2.123)-(2.125) nos estados $\hat{b}^\dagger(k, s)|0\rangle$ e $\hat{d}^\dagger(k, s)|0\rangle$, encontramos, usando as relações de anticomutação (2.122), respectivamente

$$\hat{H}\hat{b}^\dagger(k, s)|0\rangle = (k_0 - 2E_0)\hat{b}^\dagger(k, s)|0\rangle, \quad (2.128)$$

$$\hat{\mathbf{P}}\hat{b}^\dagger(k, s)|0\rangle = \mathbf{k}\hat{b}^\dagger(k, s)|0\rangle, \quad (2.129)$$

$$\hat{Q}\hat{b}^\dagger(k, s)|0\rangle = (1 + Q_0)\hat{b}^\dagger(k, s)|0\rangle, \quad (2.130)$$

$$\hat{H}\hat{d}^\dagger(k, s)|0\rangle = (k_0 - 2E_0)\hat{d}^\dagger(k, s)|0\rangle, \quad (2.131)$$

$$\hat{\mathbf{P}}\hat{d}^\dagger(k, s)|0\rangle = \mathbf{k}\hat{d}^\dagger(k, s)|0\rangle, \quad (2.132)$$

e

$$\hat{Q}\hat{d}^\dagger(k, s)|0\rangle = (-1 + Q_0)\hat{d}^\dagger(k, s)|0\rangle. \quad (2.133)$$

As equações (2.128)-(2.130) nos mostram que o estado $\hat{b}^\dagger(k, s)|0\rangle$ descreve uma partícula relativística de momento-energia (k_0, \mathbf{k}) e carga $+1$, onde consideramos essas quantidades referidas em relação à energia e à carga do estado de vácuo $|0\rangle$. De forma, similar as equações (2.131)-(2.133) mostram que o estado $\hat{b}^\dagger(k, s)|0\rangle$ descreve uma partícula relativística de momento-energia (k_0, \mathbf{k}) e carga -1 . De forma mais precisa, os estados $\hat{b}^\dagger(k, s)|0\rangle$ e $\hat{d}^\dagger(k, s)|0\rangle$ descrevem, cada um, dois tipos de partículas com as mesmas energias e cargas, cada estado de partícula sendo distinguido pelo número quântico $s = 1, 2$. Para distinguir essas partículas, consideramos a componente do spin ao longo de uma determinada direção, o qual tomaremos sem perda de generalidade como sendo o eixo z . Usando $\hat{S}_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}S^{jk}$, de (2.109), encontramos para o operador de spin ao longo do eixo z

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(x) \begin{pmatrix} \sigma_z & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \sigma_z \end{pmatrix} \hat{\psi}(x), \quad (2.134)$$

onde usamos a representação de Dirac para as matrizes γ^μ e tomamos o campo como operador. Usando a expansão em ondas planas (2.121) em (2.134) e aplicando esse operador no estado de uma partícula em repouso $\hat{b}^\dagger(0, r)|0\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{S}_z \hat{b}^\dagger(0, r)|0\rangle &= m \sum_{s,l=1}^2 \int d^3\mathbf{x} \int \widetilde{dk} \widetilde{dq} \left(\hat{b}^\dagger(k, s) u^\dagger(k, s) e^{ik \cdot x} + \hat{d}^\dagger(k, s) v^\dagger(k, s) e^{-ik \cdot x} \right) \\ &\quad \begin{pmatrix} \sigma_z & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \sigma_z \end{pmatrix} \left(\hat{b}(q, l) u(q, l) e^{-iq \cdot x} + \hat{d}^\dagger(q, l) v(q, l) e^{iq \cdot x} \right) \hat{b}^\dagger(0, r)|0\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 u^\dagger(0, s) \begin{pmatrix} \sigma_z & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \sigma_z \end{pmatrix} u(0, r) \hat{b}^\dagger(0, s)|0\rangle \\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{2} \hat{b}^\dagger(0, r)|0\rangle, \end{aligned} \quad (2.135)$$

onde usamos as relações de anticomutação (2.122), a forma explícita das matrizes de Pauli e das matrizes colunas $u(0, r)$ dadas por (2.98), assim como as relações de ortogonalidade (2.104). Em (2.135) também foi desconsiderada a contribuição infinita do spin do vácuo. Da mesma forma considerando o estado de partícula $\hat{d}^\dagger(0, r)|0\rangle$, podemos obter

$$\hat{S}_z \hat{d}^\dagger(0, r)|0\rangle = \frac{(-1)^r}{2} \hat{d}^\dagger(0, r)|0\rangle. \quad (2.136)$$

O resultado em (2.135) nos diz que o estado de partícula $\hat{b}^\dagger(0, r)|0\rangle$ pode ter projeção de spin ao longo do eixo z igual a $\pm 1/2$, o que nos indica que essas partículas possuem spin $1/2$. De forma similar de (2.136) os estados de partículas $\hat{d}^\dagger(0, r)|0\rangle$ representam estados de uma partícula de spin $1/2$. Assim, concluímos que no espectro do campo de Dirac temos 4 tipos de partículas relativísticas de massa m . Dessas quatro partículas duas possuem cargas positivas e as outras duas cargas negativas. Dentro das partículas positivas ou negativas, diferenciamos as partículas pela projeção de spin em uma dada direção. Identificamos as partículas criadas pelo operador $\hat{b}^\dagger(k, r)$ com os elétrons e as criadas pelo operador $\hat{d}^\dagger(k, r)$ com os pósitrons.

Podemos generalizar de forma simples os resultados acima e mostrar que o espectro mais geral do campo de Dirac vem dado por estados

$$\hat{b}^\dagger(k_1, r_1) \hat{b}^\dagger(k_2, r_2) \dots \hat{b}^\dagger(k_n, r_n) \hat{d}^\dagger(q_1, s_1) \hat{d}^\dagger(q_2, s_2) \dots \hat{d}^\dagger(q_m, s_m) |0\rangle, \quad (2.137)$$

o qual representa um estado de $n + m$ partículas relativísticas livres de spin $1/2$, onde n partículas possuem carga positiva e m partículas possuem carga oposta. Note que segundo a expressão (2.137) não existe um estado onde mais de uma partícula possua os mesmos números quânticos, já que nesse caso, usando as regras de anticomutação, obteríamos um estado nulo, isto devido a que $\hat{b}^\dagger(k, r) \hat{b}^\dagger(k, r) = 0$ ou $\hat{d}^\dagger(q, s) \hat{d}^\dagger(q, s) = 0$. Dessa forma vemos que o espectro do Campo de Dirac satisfaz o princípio de exclusão de Pauli.

Analisemos agora o propagador do campo de Dirac. Não é difícil mostrar que

$$\langle 0 | T(\hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(y)) | 0 \rangle = 0 \quad (2.138)$$

e

$$\langle 0|T(\hat{\psi}_\alpha^\dagger(x)\hat{\psi}_\beta^\dagger(y))|0\rangle = 0. \quad (2.139)$$

Dessa forma definimos o propagador do campo de Dirac como

$$iS_F(x-y) = \langle 0|T(\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y))|0\rangle, \quad (2.140)$$

onde $iS_F(x-y)$ tem estrutura matricial 4×4 , com componentes $\langle 0|T(\hat{\psi}_\alpha(x)\hat{\psi}_\beta(y))|0\rangle$. O ordenamento temporal para o campo de Dirac é definido como

$$T(\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y)) = \Theta(x^0 - y^0)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y) - \Theta(y^0 - x^0)\hat{\psi}(y)\hat{\psi}(x). \quad (2.141)$$

Aplicando $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$ em (2.140) e usando (2.141) temos

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu\partial_\mu^x - m)S_F(x,y) &= (i\gamma^\mu\partial_\mu^x - m)\langle 0|T(\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y))|0\rangle \\ &= \langle 0|i\gamma^0\delta(x^0 - y^0)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y) + i\gamma^0\delta(x^0 - y^0)\hat{\psi}(y)\hat{\psi}(x)|0\rangle \\ &+ \langle 0|T((i\gamma^\mu\partial_\mu^x - m)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y))|0\rangle \\ &= \langle 0|i\gamma^0\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)\}\delta(x_0 - y_0)|0\rangle, \end{aligned} \quad (2.142)$$

onde usamos a equação de Dirac (2.81) para cancelar o último termo da segunda igualdade. Devido ao termo $\delta(x_0 - y_0)$, o anticomutador na última linha da expressão anterior está avaliado no mesmo instante do tempo. Assim, podemos usar a relação de anticomutação (2.120). Dessa forma, usando $\hat{\psi}(y) = \hat{\psi}^\dagger(y)\gamma^0$, não é difícil encontrar que

$$\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\gamma^0. \quad (2.143)$$

Substituindo em (2.140) e usando $(\gamma^0)^2 = 1$, temos

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu^x - m)S_F(x,y) = \delta(x-y). \quad (2.144)$$

Para resolver essa equação, tomemos

$$S_F(x,y) = (i\gamma^\mu\partial_\mu^x + m)\Delta_F(x-y). \quad (2.145)$$

Substituindo em (2.144) e usando $(i\gamma^\mu\partial_\mu^x - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu^x + m) = -\square - m^2$, obtemos que

$$(\square + m^2)\Delta_F(x-y) = -\delta(x-y), \quad (2.146)$$

isto é, $\Delta_F(x-y)$ é o propagador do campo escalar real, cuja solução vem dada por

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.147)$$

onde $\epsilon \rightarrow 0^+$. Substituindo (2.147) em (2.145) encontramos para o propagador do campo de Dirac

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= (i\gamma^\mu \partial_\mu^x + m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\gamma^\mu k_\mu + m)e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Da expressão anterior podemos obter o propagador do campo de Dirac, no espaço de momentos como sendo o integrando a menos do fator exponencial,

$$S_F(k) = \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.149)$$

onde usamos a notação

$$\not{k} = \gamma^\mu k_\mu. \quad (2.150)$$

A expressão (2.149) também pode ser escrito como

$$S_F(k) = \frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon}, \quad (2.151)$$

onde usamos que

$$k^2 - m^2 + i\epsilon = (\not{k} - m + i\epsilon)(\not{k} + m - i\epsilon). \quad (2.152)$$

2.3 O termo de interação e as regras de Feynman

Nas seções anteriores vimos que os dois primeiros termos da lagrangiana da QED (2.1) nos descrevem fótons, elétrons e pósitrons livres. O último termo de (2.1) descreve, a grosso modo, a interação entre essas partículas. Para confrontar os resultados teóricos com os dados experimentais, tratamos a seguinte situação física. Inicialmente consideramos um conjunto de partículas livres, os quais são descritos pelo vetor de estado $|i\rangle$, os quais sofrem um processo de colisão. Como resultado desse processo, após a colisão o estado final é em geral diferente ao estado inicial. Segundo os postulados da Teoria Quântica, o que podemos prever a respeito do estado final é a amplitude de probabilidade de encontrarmos o estado final em algum estado (de partículas) $|f\rangle$. Essa amplitude de probabilidade de colisão vem dada pela chamada matriz S ,

$$S_{i \rightarrow f} = \langle f | \hat{U}_I(\infty, -\infty) | i \rangle, \quad (2.153)$$

onde $\hat{U}_I(-\infty, \infty)$ é o operador de evolução na chamada representação de interação, onde os operadores de campo evoluem de forma livre. Esse operador satisfaz

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_I = \hat{H}_I \hat{U}_I, \quad (2.154)$$

onde \hat{H}_I é a parte de interação do Hamiltoniano, o qual no caso da QED vem dado a partir do último termo de (2.1)

$$\hat{H}_I = e \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x). \quad (2.155)$$

A equação anterior pode ser resolvida de forma iterativa, obtendo-se

$$\hat{U}_I(\infty, -\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T[\bar{\psi}_1 \mathcal{A}_1 \psi_1 \dots \bar{\psi}_n \mathcal{A}_n \psi_n], \quad (2.156)$$

onde $\mathcal{A} = \gamma^\mu A_\mu$ e o subíndice avaliado no ponto correspondente. Usando a expressão acima em (2.3.1), podemos calcular as amplitudes de espalhamento a ordem em e . Dessa forma, usando o Teorema de Wick podemos obter as chamadas regras de Feynman para a matriz S . Em lugar de deduzir essas regras, vamos aqui citar as mesmas e no final dessa seção forneceremos uma justificativa do chamado vértice da teoria, com o intuito de ver como esse termo se modifica quando introduzirmos posteriormente o modelo com quebra de simetria de Lorentz.

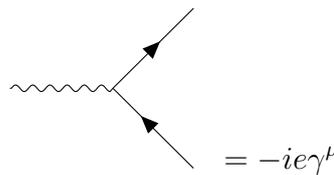
A proposta das regras de Feynman para a matriz S é expressar em gráficos a série perturbativa que aparece na mesma. Para tal se consideram os seguintes ingredientes: propagadores e vértices. Os propagadores são obtidos a partir do termo livre da Lagrangiana, e são os mesmos já obtidos nas seções anteriores. O vértice é obtido a partir do termo de interação. No caso da QED temos dois propagadores, os quais são representados por linhas. Representamos o propagador eletromagnético por

$$\text{~~~~~}^k = iD_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}, \quad (2.157)$$

enquanto que o propagador fermiônico é representado pela linha:

$$\text{---}\xrightarrow{p}\text{---} = iS_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}. \quad (2.158)$$

O vertice é representado pelo seguinte gráfico de três linhas



$$= -ie\gamma^\mu \quad (2.159)$$

Dado um processo de espalhamento, representamos os elétrons iniciais por linhas fermiônicas que apontam na direção do fluxo do tempo enquanto que os pósitrons iniciais são representados por linhas que apontam em direção contrária. Os elétrons e pósitrons finais após a colisão são representados respectivamente por linhas que apontam em direções contrárias aos iniciais. Os fótons iniciais e finais são representados por linhas onduladas. Tanto a energia e momentum fluem no sentido do fluxo do tempo para todas as partículas. Uma vez feitas essas representações, essas linhas são consideradas as linhas externas. As mesmas devem ser etiquetadas com os números quânticos das partículas que representam, i.e, momentum-energia, spin, polarização e carga. À continuação ligamos essas linhas externas mediante os vértices (2.159). O número de vértices em um dado gráfico nos fornece

a ordem de aproximação em potências da constante de acoplamento e . Uma vez fixada uma determinada ordem, ou número de vértices, devem ser desenhados todos os gráficos compatíveis com as linhas externas e vértices. Como cada vértice contém uma linha de elétron e uma linha de pósitron, a construção anterior garante de forma automática a conservação da carga elétrica em todo processo de colisão da QED. Desconsiderando colisões triviais, ficamos com os gráficos chamados de conexos, isto é, gráficos que estão completamente conectados.

Uma vez desenhados os gráficos correspondentes a um dado processo de colisão, as linhas internas devem ser etiquetadas com valores de quadrimomentum respeitando a conservação dessas quantidades nos vértices. Uma vez feito isto, atribuímos valores de acordo com as regras de Feynman para a QED:

- Cada vértice com índice μ do quadrivetor contribui com um fator $-ie\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$. O índice μ é referente ao propagador de fóton, e os índices α, β são referentes aos propagadores fermiônicos.
- Cada linha interna de fóton, de quadrimomento k , contribui com um fator $i\tilde{D}_{F\mu\nu}(k)$, no qual μ e ν são contraídos com os índices dos vértices em suas terminações.
- Cada linha interna de elétron de quadrimomento p contribui com um fator $iS_F(p)$
- Cada linha externa de fóton, de momento k e polarização $\epsilon(k)$ contribui com um fator de $\epsilon^{\mu}(k)$, no qual μ é contraído com o índice do vértice no qual a linha está conectada
- Cada linha externa de elétron inicial, de momento p e spin s , contribui com um fator de $\sqrt{2m}u(p, s)$. Por outro lado, cada linha de pósitron inicial contribui com o fator $\sqrt{2m}\bar{u}(p, s)$.
- Cada linha de elétron final, de momento p e spin s , contribui com um fator de função de onda de $\sqrt{2m}\bar{u}(p, s)$. Cada linha de pósitron final contribui com o fator $\sqrt{2m}v(p, s)$.
- Cada laço fechado fermiônico contribui com um fator de -1
- Gráficos obtidos a partir de outros por permutações de linhas externas fermiônicas devem ser multiplicadas pelo fator -1 se o número de permutações for ímpar.
- Cada quadrimomento interno independente k é integrado, com o fator $\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$
- Deve ser tomado o traço sobre cada laço fechado fermiônico.
- Cada gráfico deve ser multiplicado pelo fator $s_n/n!$ onde s_n é a multiplicidade do gráfico e n o número de vértices.
- A expressão completa deve ser multiplicada pelo fator total $(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)$, onde P_i e P_f são os quadrivetores de momento-energia total inicial e final respectivamente.

Para finalizar essa seção, vejamos como justificar o vértice da QED e a conservação

do momento-energia na mesma. Para tal tomemos a transformada de Fourier dos campos

$$\psi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{\psi}(k) \quad (2.160)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \tilde{\bar{\psi}}(k) \quad (2.161)$$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{A}_\mu(k) \quad (2.162)$$

e substituindo na integral temporal da Eq. (2.155), obtemos

$$\begin{aligned} \int dt \hat{H}_I &= e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4x e^{-i(k-q+p) \cdot x} \tilde{\psi}(q) \gamma^\mu \tilde{\psi}(k) \tilde{A}_\mu(p) \\ &= e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \tilde{\psi}(q) \gamma^\mu \tilde{\psi}(k) \tilde{A}_\mu(p) \delta(p - q + k) \end{aligned} \quad (2.163)$$

Integramos em t devido a que é esse termo que aparece na expressão para o operador de evolução temporal. Na expressão acima, a delta de Dirac garante a conservação do momento-energia em cada vértice.

3 Espalhamento Compton na Eletrodinâmica Quântica.

Nesse capítulo apresentamos o cálculo da seção de choque no efeito Compton, segundo a Eletrodinâmica Quântica. Embora o cálculo do mesmo seja apresentando em diferentes livros textos, apresentamos aqui um cálculo em detalhe, com o propósito de facilitar os cálculos do próximo capítulo.

3.1 A amplitude de espalhamento

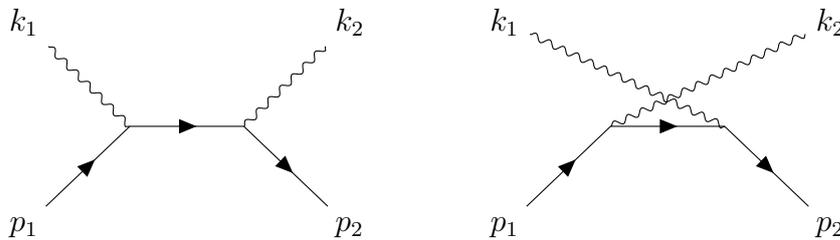


Figura 1 – Diagramas de Feynman para o espalhamento Compton em primeira ordem diferente de zero

O caso de nosso interesse é o espalhamento Compton, no qual iremos calcular a seção de choque. Temos que o estado inicial é descrito por um elétron de momento p_1 e um fóton de momento k_1 , e o estado final é dado pelo elétron de momento p_2 e um fóton de momento k_2 . Ou seja, os estados inicial e final após a colisão são respectivamente

$$|i\rangle = |p_1, k_1\rangle, \quad (3.1)$$

$$|f\rangle = |p_2, k_2\rangle. \quad (3.2)$$

Nos vetores de estado anteriores não escrevemos explicitamente as polarizações dos fótons e elétrons. Os diagramas de Feynman para o efeito Compton, são mostrados na figura 1, onde nos limitamos aos dois termos de mais baixa ordem, diferentes de zero, i.e, diagramas de dois vértices. Usando as regras de Feynman para o elemento de matriz S , e somando os dois termos representados pelos gráficos na figura 1, obtemos

$$S_{i \rightarrow f} = -i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) T_{if}, \quad (3.3)$$

onde a chamada amplitude de espalhamento vem dada por

$$T_{if} = e^2(2m) \left(\bar{u}_2 \not{\epsilon}_2 \frac{1}{\not{p}_1 + \not{k}_1 - m} \not{\epsilon}_1 u_1 + \bar{u}_2 \not{\epsilon}_1 \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_2 - m} \not{\epsilon}_2 u_1 \right), \quad (3.4)$$

com $u_1 = u(p_1, s_1)$, $u_2 = u(p_2, s_2)$, $\epsilon_1^\mu = \epsilon^\mu(k_1)$ e $\epsilon_2^\mu = \epsilon^\mu(k_2)$. Em (3.4) desconsideramos o fator $\epsilon \rightarrow 0$ no denominador dos propagadores, já que o mesmo não terá efeito algum nos resultados finais. Usando

$$\frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \quad (3.5)$$

na equação (3.4), obtemos

$$T_{if} = e^2(2m) \left[\bar{u}_2 \not{\epsilon}_2 \frac{\not{p}_1 + \not{k}_1 + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2} \not{\epsilon}_1 u_1 + \bar{u}_2 \not{\epsilon}_1 \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}_2 u_1 \right].$$

que, colocando os termos comuns em evidência, teremos

$$T_{if} = e^2(2m)\bar{u}_2 \left[\not{\epsilon}_2 \frac{\not{p}_1 + \not{k}_1 + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2} \not{\epsilon}_1 + \not{\epsilon}_1 \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}_2 \right] u_1. \quad (3.6)$$

Por simplicidade dos cálculos, tomaremos o referencial do laboratório onde o elétron inicial é considerado em repouso. Teremos portanto

$$p_1 \cdot \epsilon_i = 0. \quad (3.7)$$

O quadrivetor de polarização e o quadrivetor de onda são ortogonais, i.e.,

$$k_i \cdot \epsilon_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.8)$$

Sendo os fótons sem massa, temos

$$k_i^2 = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.9)$$

Usando para o elétron

$$p^2 = m^2, \quad (3.10)$$

temos para os denominadores em (3.6)

$$(p_1 + k_1)^2 - m^2 = p_1^2 + 2p_1 \cdot k_1 + k_1^2 - m^2 = m^2 + 2p_1 \cdot k_1 - m^2 = 2p_1 \cdot k_1 \quad (3.11)$$

$$(p_1 - k_2)^2 - m^2 = p_1^2 - 2p_1 \cdot k_2 + k_2^2 - m^2 = m^2 - 2p_1 \cdot k_2 - m^2 = -2p_1 \cdot k_2 \quad (3.12)$$

Analisemos agora os numeradores de (3.6). Usando a identidade

$$\cancel{A}\cancel{B} + \cancel{B}\cancel{A} = 2A \cdot B \quad (3.13)$$

obtemos

$$\not{p}_1 \not{\epsilon}_i u_1 + \not{\epsilon}_i \not{p}_1 u_1 = 2p_1 \cdot \epsilon_i u_1 = 0,$$

de onde

$$\not{p}_1 \not{\epsilon}_i u_1 = -\not{\epsilon}_i \not{p}_1 u_1 = -m \not{\epsilon}_i u_1; \quad (3.14)$$

onde na última linha usamos a equação de Dirac para u . Dessa forma temos para os numeradores em (3.6), respectivamente,

$$\not{\epsilon}_2 (\not{p}_1 + \not{K}_1 + m) \not{\epsilon}_1 u_1 = \not{\epsilon}_2 (-m + \not{K}_1 + m) \not{\epsilon}_1 u_1 = \not{\epsilon}_2 \not{K}_1 \not{\epsilon}_1 u_1, \quad (3.15)$$

$$\not{\epsilon}_1 (\not{p}_1 - \not{K}_2 + m) \not{\epsilon}_2 u_1 = \not{\epsilon}_1 (-m - \not{K}_2 + m) \not{\epsilon}_2 u_1 = -\not{\epsilon}_1 \not{K}_2 \not{\epsilon}_2 u_1. \quad (3.16)$$

Substituindo (3.11)-(3.12) e (3.15)-(3.16) em (3.6), obtemos uma expressão mais simples para a amplitude de espalhamento,

$$T_{if} = e^2 m \bar{u}_2 \Gamma u_1, \quad (3.17)$$

onde

$$\Gamma = \frac{\not{\epsilon}_2 \not{K}_1 \not{\epsilon}_1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{\not{\epsilon}_1 \not{K}_2 \not{\epsilon}_2}{p_1 \cdot k_2}. \quad (3.18)$$

3.2 A seção de choque diferencial

Consideremos estados de partículas onde os estados de uma partícula $|p\rangle$ estão normalizados de acordo com

$$\langle p|q\rangle = (2\pi)^3 2p_0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (3.19)$$

Agora consideremos o processo de espalhamento onde duas partículas distintas de momentum-energia q_1 e q_2 colidem. Se o estado final após a colisão, consiste de n partículas diferentes de momentum-energias q_3, q_4, \dots, q_{n+2} , a seção de choque diferencial vem dada por [72]

$$d\sigma = \frac{1}{4[(q_1 \cdot q_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}} \int_{\Delta} \widetilde{d}q_3 \dots \widetilde{d}q_{n+2} |T_{if}|^2 \delta^4(q_3 + \dots + q_{n+2} - q_1 - q_2), \quad (3.20)$$

onde Δ representa um domínio de valores para os momentos das partículas finais, o qual dependerá do grau de resolução dos aparelhos de medida para as partículas finais.

Agora consideremos a seção de choque diferencial no caso do efeito Compton. Sendo que as partículas iniciais são diferentes, assim como os finais, podemos usar imediatamente a fórmula (3.20), fazendo $q_1 = k_1$, $q_2 = p_1$, $q_3 = k_2$ e $q_4 = p_2$. Dessa forma $m_1 = 0$, $m_2 = m$, e tomando o elétron inicialmente em repouso, temos

$$d\sigma = \frac{1}{4m\omega} \int_{\Delta} \widetilde{d}k_2 \widetilde{d}p_2 |T_{if}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_2 + p_2 - k_1 - p_1), \quad (3.21)$$

onde denotamos $\omega = |\mathbf{k}_1|$.

Em um processo de espalhamento Compton, detectores são dispostos de forma a medir fótons espalhados em determinados ângulos, independentemente do valor da energia

dos mesmos. Também, os elétrons após a colisão não são medidos. Dessa forma, integrando em todo \mathbf{p}_2 e nas energias dos fótons finais $|\mathbf{k}_2|$, o qual denotamos simplesmente como ω' , temos para (3.21)

$$d\sigma = \frac{1}{16m(2\pi)^2\omega} d\Omega \int_0^\infty d\omega' \frac{\omega'^2 |T_{if}|^2 \delta^4(\omega' + E_2 - \omega - E_1)}{\omega' \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m^2}}. \quad (3.22)$$

onde integramos de forma direta a $\delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1)$ espacial, e cujo resultado equivale a substituir $\mathbf{p}_2 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2$ em (3.22). Também denotamos por $E_i = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m^2}$ a energia dos elétrons. Para efetuar a última integral em (3.21) vamos usar a identidade

$$\delta(f(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - x_j)}{|f'(x_j)|}, \quad (3.23)$$

onde x_j são os zeros de $f(x)$. No referencial de laboratório $\mathbf{p}_1 = 0$, $E_1 = m$, então

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \quad (3.24)$$

e o argumento da delta em (3.23) é

$$\begin{aligned} f(\omega') &= \omega' + E_2 - \omega - m \\ &= \omega' + \sqrt{\omega^2 + \omega'^2 - \omega\omega' \cos\theta + m^2} - \omega - m, \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde usamos E_2 em termos de \mathbf{p}_2 , e θ é o ângulo entre os vetores \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 , i.e, entre os fótons incidente e espalhado. Procurar os zeros de $f(\omega')$ equivale a procurar ω' por conservação de energia, $\omega' + E_2 - \omega - m = 0$. Dessa forma, igualando a zero (3.25) e resolvendo para ω' encontramos para a solução positiva

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}. \quad (3.26)$$

Sendo que o intervalo de integração em (3.22) contempla somente valores positivos de ω' , a solução negativa não contribui para a integral. Aplicando a propriedade (3.23) e (3.26) em (3.22) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{16m(2\pi)^2\omega} \frac{\omega' |T_{if}|^2}{(\omega' - \omega \cos\theta + E_2)} \\ &= \frac{1}{16(2\pi)^2} \frac{\omega'^2 |T_{if}|^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_2)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

a qual pode ser escrita usando (3.17) como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4 m^2}{16(2\pi)^2} \frac{\omega'^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_2)} |\bar{u}_2 \Gamma u_1|^2. \quad (3.28)$$

3.3 Seção de choque para elétrons não polarizados

Como mencionado, no arranjo experimental do efeito Compton, os fótons espalhados são medidos sem importar o estado de spin tanto dos elétrons iniciais e finais. Dessa forma podemos somar sobre todos os estados possíveis de spin nos estados finais e tomar uma média nos estados de spins iniciais. Então, temos de (3.28)

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} \frac{e^4 m^2}{16(2\pi)^2} \frac{\omega'^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_2)} |u_2 \Gamma u_1|^2. \\ &= \frac{e^4 m^2}{32(2\pi)^2} \frac{\omega'^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_2)} X\end{aligned}\quad (3.29)$$

onde

$$X = \sum_{s_1, s_2} |\bar{u}_2 \Gamma u_1|^2. \quad (3.30)$$

Usando $|A|^2 = A^\dagger A$, temos para X :

$$\begin{aligned}X &= \sum_{s_1, s_2} u_1^\dagger \Gamma^\dagger \bar{u}_2^\dagger \bar{u}_2 \Gamma u_1 \\ &= \sum_{s_1, s_2} \bar{u}_1 \tilde{\Gamma} u_2 \bar{u}_2 \Gamma u_1,\end{aligned}\quad (3.31)$$

onde

$$\tilde{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0. \quad (3.32)$$

Agora, escrevendo explicitamente os argumentos de u_1 e u_2 , assim como os produtos matriciais, temos em (3.29)

$$\begin{aligned}X &= \sum_{s_1, s_2} \bar{u}_\alpha(p_1, s_1) \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta} u_\beta(p_2, s_2) \bar{u}_\rho(p_2, s_2) \Gamma_{\rho\lambda} u_\lambda(p_1, s_1) \\ &= \sum_{s_1, s_2} u_\lambda(p_1, s_1) \bar{u}_\alpha(p_1, s_1) \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta} u_\beta(p_2, s_2) \bar{u}_\rho(p_2, s_2) \Gamma_{\rho\lambda}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Usando a identidade

$$\sum_s u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) = \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{2m}, \quad (3.34)$$

obtemos em (3.33)

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{4m^2} (\not{p}_1 + m)_{\lambda\alpha} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta} (\not{p}_2 + m)_{\beta\rho} \Gamma_{\rho\lambda} \\ &= \frac{1}{4m^2} \text{Tr} [(\not{p}_1 + m) \tilde{\Gamma} (\not{p}_2 + m) \Gamma].\end{aligned}\quad (3.35)$$

Usando (3.18) podemos obter $\tilde{\Gamma}$, dado por (3.32)

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} &= \gamma^0 \left(\frac{\not{\epsilon}_2 \not{k}_1 \not{\epsilon}_1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{\not{\epsilon}_1 \not{k}_2 \not{\epsilon}_2}{p_1 \cdot k_2} \right)^\dagger \gamma^0 \\ &= \gamma^0 \left(\frac{\not{\epsilon}_1^\dagger \not{k}_1^\dagger \not{\epsilon}_2^\dagger}{p_1 \cdot k_1} \gamma^0 + \frac{\not{\epsilon}_2^\dagger \not{k}_2^\dagger \not{\epsilon}_1^\dagger}{p_1 \cdot k_2} \gamma^0 \right) \\ &= \left(\frac{\not{\epsilon}_1 \not{k}_1 \not{\epsilon}_2}{p_1 \cdot k_1} + \frac{\not{\epsilon}_2 \not{k}_2 \not{\epsilon}_1}{p_1 \cdot k_2} \right),\end{aligned}\quad (3.36)$$

onde usamos $\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu$ e $\gamma^0\gamma^0 = \mathbb{I}$. Dessa forma temos para (3.35),

$$X = \frac{1}{4m^2} \text{Tr} \left[\left(\frac{\not{\epsilon}_1 \not{k}_1 \not{\epsilon}_2}{p_1 \cdot k_1} + \frac{\not{\epsilon}_2 \not{k}_2 \not{\epsilon}_1}{p_1 \cdot k_2} \right) (\not{p}_2 + m) \left(\frac{\not{\epsilon}_2 \not{k}_1 \not{\epsilon}_1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{\not{\epsilon}_1 \not{k}_2 \not{\epsilon}_2}{p_1 \cdot k_2} \right) (\not{p}_1 + m) \right]. \quad (3.37)$$

Por conveniência, vamos reescrever os termos entre parênteses no trazo anterior. Usando $\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2a \cdot b$ e $\epsilon_2 \cdot k_2 = \epsilon_1 \cdot k_1 = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 &= -\not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \\ \not{\epsilon}_2 \not{k}_2 &= -\not{k}_2 \not{\epsilon}_2. \end{aligned}$$

e substituindo as expressões anteriores em (3.37), temos

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{4m^2} \text{Tr} \left[\left(\frac{\not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2}{p_1 \cdot k_1} + \frac{\not{k}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1}{p_1 \cdot k_2} \right) (\not{p}_2 + m) \left(\frac{\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{k}_2}{p_1 \cdot k_2} \right) (\not{p}_1 + m) \right] \\ &= \frac{1}{4m^2} \text{Tr} \left[\frac{\not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 \not{p}_1}{(p_1 \cdot k_1)^2} + \frac{\not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{k}_2 \not{p}_1}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} + \frac{\not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 m^2}{(p_1 \cdot k_1)^2} \right. \\ &\quad + \frac{\not{k}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{k}_2 m^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} + \frac{\not{k}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 \not{p}_1}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} + \frac{\not{k}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{k}_2 \not{p}_1}{(p_1 \cdot k_2)^2} \\ &\quad \left. + \frac{\not{k}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{k}_1 m^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} + \frac{\not{k}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{k}_2 m^2}{(p_1 \cdot k_2)^2} \right], \quad (3.38) \end{aligned}$$

onde os termos proporcionais a m se anulam, devido a que o traço do produto de um número ímpar de matrizes γ 's se anula, i.e.,

$$\text{Tr}[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{2n+1}] = 0. \quad (3.39)$$

Por outro lado, quando o produto de matrizes for par, temos

$$\text{Tr}[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{2n}] = a_1 \cdot a_2 \text{Tr}[\not{a}_3 \dots \not{a}_{2n}] - a_1 \cdot a_3 \text{Tr}[\not{a}_2 \not{a}_4 \dots \not{a}_{2n}] + \dots + a_1 \cdot a_{2n} \text{Tr}[\not{a}_2 \dots \not{a}_{2n-1}] \quad (3.40)$$

Usando o resultado acima vamos determinar os traços das matrizes que aparecem em (3.38). Para tal, vamos usar as seguintes identidades no decorrer dos cálculos:

$$k_i \cdot k_i = 0, \quad k_i \cdot \epsilon_i = 0, \quad \epsilon_i^2 = -1; \quad i = 1, 2. \quad (3.41)$$

Como estamos adotando o elétron inicial com momento p_1 em repouso, tendo portanto somente a componente temporal não nula, teremos:

$$p_1 \cdot \epsilon_1 = p_1 \cdot \epsilon_2 = 0. \quad (3.42)$$

Da conservação do momento-energia temos

$$k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1, \quad \epsilon_2 \cdot p_2 = \epsilon_2 \cdot k_1, \quad p_1 \cdot k_1 = p_2 \cdot k_2. \quad (3.43)$$

Enumeremos cada um dos termos em (3.38) pela ordem na qual aparecem, como *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, *VI*, *VII* e *VIII*. Começaremos calculando *III*. Usando (3.40) temos

$$\begin{aligned}
III &= \frac{m^2}{(p_1 \cdot k_1)^2} \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1] \\
&= \frac{m^2}{p_1 \cdot k_1} \left[k_1 \cdot \epsilon_1 \text{Tr}(\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1) - k_1 \cdot \epsilon_2 \text{Tr}(\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1) + k_1 \cdot \epsilon_2 \text{Tr}(\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1) \right. \\
&\quad \left. - k_1 \cdot \epsilon_1 \text{Tr}(\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_1) + k_1 \cdot k_1 \text{Tr}(\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1) \right] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

onde usamos (3.41).

Procedemos agora ao cálculo de *IV*:

$$\begin{aligned}
IV &= \frac{m^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2] \\
&= \frac{m^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \left[k_1 \cdot \epsilon_1 \text{Tr}(\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2) - k_1 \cdot \epsilon_2 \text{Tr}(\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2) + k_1 \cdot \epsilon_1 \text{Tr}(\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_1) \right. \\
&\quad \left. - k_1 \cdot \epsilon_2 \text{Tr}(\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_2) + k_1 \cdot k_2 \text{Tr}(\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2) \right] \\
&= \frac{4m^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_2)} \left[-k_1 \cdot \epsilon_2 [(\epsilon_1 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot k_2) - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot k_2) + (\epsilon_1 \cdot k_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)] \right. \\
&\quad \left. - k_1 \cdot \epsilon_2 [(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot k_2) - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot k_2) + (\epsilon_1 \cdot k_2)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_1)] \right. \\
&\quad \left. + k_1 \cdot k_2 [(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_2) + (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_1)] \right],
\end{aligned}$$

agrupando termos similares obtemos

$$IV = \frac{4m^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \left[-2(k_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot k_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) + 2(k_1 \cdot k_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - k_1 \cdot k_2 \right]. \tag{3.45}$$

Podemos obter *VII*,

$$VII = \frac{m^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \text{Tr}[\mathcal{K}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1],$$

comparando com *IV*, vemos que são equivalentes quando efetuamos a troca em $k_1 \leftrightarrow k_2$ e $\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2$, portanto, o resultado é obtido diretamente de mediante essa troca em *IV*,

$$VII = \frac{4m^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \left[-2(k_2 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot k_1)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_1) + 2(k_1 \cdot k_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - k_1 \cdot k_2 \right]. \tag{3.46}$$

Para o termo *VIII*, temos

$$VIII = \frac{m^2}{(p_1 \cdot k_2)^2} \text{Tr}[\mathcal{K}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2]$$

onde mediante a troca $k_1 \leftrightarrow k_2$ e $\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2$, teremos *III*, portanto,

$$VIII = 0. \tag{3.47}$$

Agora determinemos o termo I em (3.38),

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)^2} \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1 \not{p}_1] \\
 &= \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)^2} \text{Tr}[\not{p}_1 \mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1] \\
 &= \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)^2} \left[(p_1 \cdot k_1) \text{Tr}[\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1] - (p_1 \cdot \epsilon_1) \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1] \right. \\
 &\quad + (p_1 \cdot \epsilon_2) \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1] - (p_1 \cdot p_2) \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1] + (p_1 \cdot \epsilon_2) \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1] \\
 &\quad \left. - (p_1 \cdot \epsilon_1) \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_1] + (p_1 \cdot k_1) \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1] \right].
 \end{aligned}$$

Pela ciclicidade dos traços, o último termo é igual ao primeiro, e usando $p_1 \cdot \epsilon_i = 0$, temos,

$$I = \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)^2} \left[2(k_1 \cdot p_1) \text{Tr}[\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1] - (p_1 \cdot p_2) \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1] \right]$$

O último traço na equação anterior tem a forma de $VIII$ quando realizamos a troca $k_2 \leftrightarrow k_1$, que resulta em zero. Então teremos

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)^2} 2(k_1 \cdot p_1) \text{Tr}[\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1] \\
 &= \frac{2}{(p_1 \cdot k_1)^2} (k_1 \cdot p_1) \left[(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \text{Tr}[\not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1] - (\epsilon_1 \cdot p_1) \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1] + (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1] \right. \\
 &\quad \left. - \epsilon_1^2 \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_1] + (\epsilon_1 \cdot k_1) \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1] \right] \\
 &= \frac{8(k_1 \cdot p_1)}{(p_1 \cdot k_1)^2} \left[(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \left((p_2 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot k_1) - (p_2 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot k_1) + (p_2 \cdot k_1)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \right) \right. \\
 &\quad - (\epsilon_1 \cdot p_2) \left((\epsilon_2 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot k_1) + (\epsilon_2 \cdot k_1)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_1) \right) \\
 &\quad + (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \left((\epsilon_2 \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot k_1) - (\epsilon_2 \cdot \epsilon_1)(p_2 \cdot k_1) + (\epsilon_2 \cdot k_1)(p_2 \cdot \epsilon_1) \right) \\
 &\quad \left. + \left((\epsilon_2 \cdot p_2)(\epsilon_2 \cdot k_1) - \epsilon_2^2(p_2 \cdot k_1) + (\epsilon_2 \cdot k_1)(p_2 \cdot \epsilon_2) \right) \right] \\
 &= \frac{8}{(p_1 \cdot k_1)} \left[2(k_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2) \right],
 \end{aligned}$$

e usando $\epsilon_2 \cdot p_2 = \epsilon_2 \cdot k_1$ e $k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1$, teremos finalmente:

$$I = \frac{8}{(p_1 \cdot k_1)} \left[2(k_1 \cdot \epsilon_2)^2 + (k_2 \cdot p_1) \right]. \quad (3.48)$$

Para calcular VI ,

$$VI = \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)^2} \text{Tr}[\mathcal{K}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2 \not{p}_1]$$

comparando com I , vemos que a diferença é nos índices de k e ϵ dentro do traço. Fazendo a mudança $k_1 \rightarrow -k_2$ e $k_2 \rightarrow -k_1$, afim de respeitar a conservação do momento, teremos:

$$\begin{aligned}
 VI &= \frac{-8}{(p_1 \cdot k_2)} \left[2(-k_2 \cdot \epsilon_1)^2 + (-k_1 \cdot p_1) \right] \\
 &= \frac{8}{(p_1 \cdot k_2)} \left[(k_1 \cdot p_1) - 2(k_2 \cdot \epsilon_1)^2 \right].
 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Vamos calcular agora o termo II :

$$II = \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2 \not{p}_1]$$

aplicando a ciclicidade do traço afim de simplificar os cálculos, e usando repetidamente (3.40), temos

$$\begin{aligned} II &= \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \text{Tr}[\not{p}_1 \mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2] \\ &= \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \left[(p_1 \cdot k_1) \text{Tr}[\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2] - (p_1 \cdot \epsilon_1) \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2] \right. \\ &\quad + (p_1 \cdot \epsilon_2) \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2] - (p_1 \cdot p_2) \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2] + (p_1 \cdot \epsilon_1) \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2] \\ &\quad \left. - (p_1 \cdot \epsilon_2) \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_2] + (p_1 \cdot k_2) \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2] \right] \\ &= \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \left[(p_1 \cdot k_1) \left((\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \text{Tr}[\not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2] - (\epsilon_1 \cdot p_2) \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2] \right) \right. \\ &\quad + \epsilon_1^2 \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2] - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_2] + (\epsilon_1 \cdot k_2) \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2] \left. \right) \\ &\quad + (p_1 \cdot p_2) \left((k_1 \cdot \epsilon_1) \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2] - (k_1 \cdot \epsilon_2) \text{Tr}[\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2] + (k_1 \cdot \epsilon_1) \text{Tr}[\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2] \right. \\ &\quad \left. - (k_1 \cdot \epsilon_2) \text{Tr}[\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_2] + (k_1 \cdot k_2) \text{Tr}[\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2] \right) \\ &\quad + (p_1 \cdot k_2) \left((k_1 \cdot \epsilon_1) \text{Tr}[\not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2] - (k_1 \cdot \epsilon_2) \text{Tr}[\not{\epsilon}_1 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2] + (k_1 \cdot p_2) \text{Tr}[\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2] \right. \\ &\quad \left. - (k_1 \cdot \epsilon_1) \text{Tr}[\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2] + (k_1 \cdot \epsilon_2) \text{Tr}[\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{p}_2 \not{\epsilon}_1] \right) \left. \right] \\ &= \frac{4}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \left[(p_1 \cdot k_1) \left[2(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 (k_2 \cdot p_2) - 2(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_2 \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot k_2) - 2(\epsilon_1 \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot k_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (k_2 \cdot p_2) \right] - (p_1 \cdot p_2) \left[-2(k_1 \cdot \epsilon_2)(k_2 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) + 2(k_1 \cdot k_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - (k_1 \cdot k_2) \right] \right. \\ &\quad \left. + (p_1 \cdot k_2) \left[-2(k_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_2 \cdot p_2) - 2(k_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot p_2) + 2(k_1 \cdot p_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - (k_1 \cdot p_2) \right] \right] \end{aligned}$$

de onde agrupando termos obtemos

$$\begin{aligned} II &= \frac{4}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \left[(p_1 \cdot k_1)^2 (2(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 1) - (p_1 \cdot p_2) \left[(k_1 \cdot k_2) (2(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(k_1 \cdot \epsilon_2)(k_2 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \right] - 2(p_1 \cdot k_1) \left[(k_2 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(k_1 \cdot \epsilon_2) - (k_2 \cdot \epsilon_1)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2(p_1 \cdot k_2) \left[(k_1 \cdot \epsilon_2)^2 - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot k_2)(\epsilon_2 \cdot k_1) \right] + (p_1 \cdot k_2)^2 \left[2(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 1 \right] \right]. \quad (3.50) \end{aligned}$$

Finalmente calculemos V :

$$V = \frac{1}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \text{Tr}[\mathcal{K}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \not{p}_2 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1 \not{p}_1].$$

Aqui, vemos que os índices em ϵ e k são invertidos em relação à II , logo, podemos tomar o resultado de II fazendo a substituição $k_1 \leftrightarrow -k_2$, e $\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2$, que nos resulta em

$$\begin{aligned}
V = & \frac{4}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \left[(p_1 \cdot k_2)^2 (2(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 1) - (p_1 \cdot p_2) \left[(k_1 \cdot k_2) (2(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 1) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(k_2 \cdot \epsilon_1)(k_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \right] + 2(p_1 \cdot k_2) \left[(k_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(k_2 \cdot \epsilon_1) - (k_1 \cdot \epsilon_2)^2 \right] \right. \\
& \left. + 2(p_1 \cdot k_1) \left[(k_2 \cdot \epsilon_1)^2 - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_2 \cdot k_1)(\epsilon_1 \cdot k_2) \right] + (p_1 \cdot k_1)^2 \left[2(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 1 \right] \right]. \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.44), (3.45), (3.46), (3.47), (3.48), (3.49), (3.50) e (3.51) em (3.38) obtemos,

$$X = \frac{1}{4m^2} \left[\frac{8}{(p_1 \cdot k_1)} (k_2 \cdot p_1) + \frac{8}{(p_1 \cdot k_2)} (k_1 \cdot p_1) + 16(2(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 1) \right]. \quad (3.52)$$

Usando $p_1 \cdot k_1 = m\omega$ e $p_1 \cdot k_2 = m\omega'$, simplificamos a expressão anterior:

$$X = \frac{2}{m^2} \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2(2(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 1) \right], \quad (3.53)$$

e substituindo em (3.29), finalmente obtemos para a seção de choque diferencial:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{e^4}{16(2\pi)^2} \frac{\omega'^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_2)} \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 2 \right] \\
&= \frac{\alpha^2}{4m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 2 \right], \quad (3.54)
\end{aligned}$$

onde usamos $p_2 \cdot k_2 = p_1 \cdot k_1 = m\omega$ e α é a constante de estrutura fina,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (3.55)$$

A expressão (3.54) é conhecida como seção de choque de Klein-Nishina [56].

4 Espalhamento Compton na QED com termo de violação de Lorentz

4.1 Quebra de Lorentz e Modelo Padrão estendido mínimo

É esperado, para qualquer teoria ou modelo (simetria), limites de aplicabilidade, e não seria diferente no caso da simetria de Lorentz. V.A. Kostelecký e S. Samuel investigaram a questão de simetria para o limite de baixas energias da teoria de Cordas, nos quais valores esperados de campos vetoriais ou tensoriais poderiam ser não-nulos no vácuo, ocasionando uma direção privilegiada, no qual quebra-se a invariância de Lorentz. Ainda, temos outras questões relacionadas à quebra de simetria que nos poderia servir como motivação, tais como a explicar a aceleração cósmica, ou o fato de que a cosmologia naturalmente apresenta quebra de simetria devido ao fator de se ter uma direção privilegiada (tempo), a gravitação quântica de loop, hipóteses sobre a anisotropia do espaço-tempo, rotação do universo, observações de radiação cósmica de fundo ou ainda, se é possível desenvolver uma teoria efetiva da matéria condensada (já que anisotropia em cristais é natural)[59] [6].

Como esperado, a discussão sobre a simetria de Lorentz não ficou restrita à teoria de Cordas, passando a ser estudada separadamente dessa. Essa quebra de Lorentz pode ser feita tomando-se, para baixas energias, o potencial efetivo $V_{eff} = 0$, onde podemos escolher um vácuo que satisfaça essa igualdade para construirmos uma teoria efetiva. No entanto, quando o fazemos, temos como resultado uma direção privilegiada, ou seja, a simples escolha de um vácuo implica em quebra espontânea da simetria de Lorentz, que pode ser feita quando induzimos um tensor constante não invariante de Lorentz de rank arbitrário. Pelo princípio da relatividade, todos os referenciais são equivalentes. Kostelecký introduziu então dois tipos de transformações de Lorentz: uma transformação de observador, cujo princípio da Relatividade é satisfeito para observadores, e uma transformação de partícula, em que o princípio da Relatividade não é satisfeito para as partículas. Ou seja, uma violação de Lorentz é invariante sob transformações de observador, porém não sob transformações de partículas. No Modelo Padrão Estendido com violação de Lorentz temos a quebra da simetria de Lorentz, porém mantemos o Princípio da Relatividade.

Resta então o interesse na construção de extensões com violação de Lorentz para modelos da teoria quântica e quais os modelos que envolvem tais violações. Parte-se do princípio que a violação da simetria é pequena, o que resulta que a Lagrangeana da teoria tratada no caso terá termos aditivos pequenos. Ainda, para se manter o número de graus de liberdade corretos, é admitido que não há quebra da simetria de gauge. Temos dois

tipos de acoplamentos: mínimos (renormalizáveis) e não-mínimos (não renormalizáveis). O modelo padrão mínimo com quebra de simetria de Lorentz é assumido como sendo renormalizável, envolvendo então somente acoplamentos mínimos. Ainda, nas teorias invariantes de Lorentz, altas derivadas quebram a unitariedade. Assim, um interesse é que quando quebramos a simetria de Lorentz, podemos então ter altas derivadas sem haver quebra de unitariedade.

A quebra de simetria pode ocorrer de maneira explícita ou espontânea. Na maneira explícita, que consiste em basicamente inserir o vetor constante quase como uma definição, nos deparamos com o problema de explicar a origem do termo de quebra de simetria pela teoria. Na violação espontânea, no entanto, temos explicação para a origem do termo de quebra de simetria, visto que teremos uma direção privilegiada que emerge naturalmente como resultado de uma escolha de vácuo de algum potencial.

Podemos enunciar efeitos clássicos da violação da simetria, como o da QED com termos aditivos nas Lagrangeanas, o qual pode resultar numa modificação da relação de dispersão para o caso não trivial (o vetor constante aditivo não é zero), e pode-se observar efeitos óticos como birrefringência, rotação do plano de polarização. Temos também efeitos perturbativos em teorias que consideram violação de Lorentz, com efeitos das condições de laços [60].

O Modelo Padrão Mínimo Estendido com quebra de simetria de Lorentz é a generalização do Modelo Padrão, consistindo na adição de termos de quebra de simetria, dentre outros requisitos como simetria de gauge, afim de se manter o número de graus de liberdade, e derivadas de ordens superiores sendo uma extensão natural da QED que nos permite estudar relações de dispersão, equações de movimento, problemas relacionados à causalidade e à unitariedade, impactos perturbativos (que geram extensões não-mínimas) e acoplamentos (inclusibe com a gravitação). Tratamos a extensão mínima da QED com violação de Lorentz. Aqui, o mínimo é devido ao fato da teoria ser renormalizável, afim de não termos problemas como os limites nas baixas energias e garantir a validade da teoria para quaisquer energias.

Ainda, temos extensões não-mínimas do Modelo Padrão devido a acoplamentos não-mínimos (não-renormalizáveis), cuja violação emerge de forma espontânea, com proposta de uma derivada covariante na equação de Dirac e suas consequências. Alguns interesses no acoplamento não-mínimo é a questão da unitariedade, já que o problema de altas derivadas na ação quadrática pode ser evitado (resíduos de campos se manifestam através de acoplamentos não mínimos). Outro interesse é a questão de renormalizabilidade, na qual o termo divergente é desprezado devido à massa numa expansão perturbativa. Podemos encontrar na literatura casos de acoplamento não-mínimo envolvendo fótons e férmions [61] tratando do Modelo Padrão Estendido não-mínimo, acoplamento não-mínimo e correções do espectro no átomo de hidrogênio [62], correções radioativas

[63], [64], espalhamento Bhabha com violação de Lorentz [65],[44], acoplamentos não mínimos no setor de gauge e no setor fermiônico [66], [67], extensões do Modelo Padrão Estendido não-mínimo [68] e altas derivadas [69]. O trabalho de Kostelecký [] nos traz tabelas de acoplamentos de $d \leq 6$ [70]. No entanto, iremos focar nossa atenção para o caso da violação de Lorentz no espalhamento Compton.

4.2 A lagrangeana com quebra de Simetria de Lorentz

Neste capítulo voltaremos nosso interesse à Lagrangeana da QED com termo de quebra de simetria de Lorentz. Quando temos quebra de simetria de Lorentz e quebra da simetria CPT, temos como consequência efeitos de interações a baixas energias, gerando efeitos físicos interessantes. Podemos introduzir essa quebra da simetria de Lorentz modificando o vértice elétron-fóton. Para tal, introduzimos uma constante de acoplamento ξ^μ entre o tensor de campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ e a corrente $\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$, i.e, tomamos como lagrangeana do sistema

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{\lambda}{2}(\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}A_\mu\gamma^\mu\psi + \xi^\mu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi F_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

no qual o último termo é o da quebra de simetria, devido ao parâmetro ξ . Esse termo pode ser entendido como provindo de uma modificação da derivada covariante de $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ para $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu - i\xi_\nu F_{\mu\nu}$. Como o termo quadrático da lagrangiana não muda, as relações entre energia e momentum das partículas e o espectro das mesmas, assim como os propagadores eletromagnético e fermiônico continuam sendo os mesmos da QED usual. Também a fórmula para seção de choque em termos da amplitude de espalhamento continua sendo a mesma. O que muda agora é o vértice da teoria. Para obtermos essa modificação consideramos, como no final do capítulo 1, a transformada de Fourier dos campos no hamiltoniano de interação, que agora vem dada por

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \int d^3\mathbf{x} \left(e\bar{\psi}A_\mu\gamma^\mu\psi - \xi^\mu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi F_{\mu\nu}, \right) \\ &= \int d^3\mathbf{x} \left[e\bar{\psi}A_\mu\gamma^\mu\psi - \xi^\mu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde no lado direito entendemos que os campos são operadores. Usando as Eqs. (2.160), (2.161) e (2.162) na expressão anterior, encontramos para a integral no tempo de \hat{H}_I

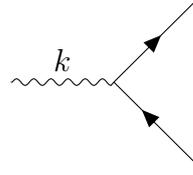
$$\begin{aligned} \int dt \hat{H}_I &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \left[e\tilde{\psi}(q)\gamma^\mu\tilde{\psi}(p)\tilde{A}_\mu(k) \right. \\ &\quad \left. - \xi^\mu\tilde{\psi}(q)\gamma^\nu\tilde{\psi}(p)[-ik_\mu\tilde{A}_\nu(k) + ik_\nu\tilde{A}_\mu(k)] \right] \delta(p - q + k) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 [e\gamma^\mu + i\xi \cdot k\gamma^\mu - ik\xi^\mu] \tilde{A}_\mu(k)\delta(p - q + k), \end{aligned} \quad (4.3)$$

de onde comparando com (2.163), encontramos que o vértice continua tendo três linhas, um para cada campo: $\tilde{\psi}$, $\tilde{\psi}$ e \tilde{A}_μ . Também podemos ver que além do termo $e\gamma^\mu$ temos os

termos $i\xi \cdot k \gamma^\mu - i\not{k} \xi^\mu$. Dessa forma, multiplicando esses termos pelo fator $-i$ encontramos que o vértice modificado vem dado por

$$-i\Gamma^\mu(k) = -ie\gamma^\mu + (\xi \cdot k)\gamma^\mu - \not{k}\xi^\mu, \quad (4.4)$$

onde $-ie\gamma^\mu$ é o vértice usual, os dois termos $(\xi \cdot k)\gamma^\mu - \not{k}\xi^\mu$ nos fornecem a modificação do vértice e k é o quadri-momentum carregado pela linha de fóton no vértice. Assim temos para o vértice modificado



$$= -ie\Gamma^\mu(k). \quad (4.5)$$

Com o vértice modificado segundo o gráfico acima, as regras de Feynman para a lagrangeada com quebra de simetria de Lorentz segundo (4.1), são as mesmas da QED, onde a única modificação provém do vértice modificado e é dada por (4.4). Para uso posterior, vamos reescrever essa expressão como

$$-ie\Gamma^\mu(k) = -iea^\mu_\nu(k)\gamma^\nu, \quad (4.6)$$

onde

$$a^\mu_\nu(k) = \left(1 + i\frac{\xi \cdot k}{e}\right) \delta^\mu_\nu - i\frac{k_\nu \xi^\mu}{e}. \quad (4.7)$$

4.3 Espalhamento Compton na QED com quebra de simetria de Lorentz

Embora possam ser calculados os diferentes processos da QED, vamos nos limitar nessa dissertação ao cálculo da seção de choque do efeito Compton, levando em conta o vértice modificado. Os diagramas de Feynman são os mesmos do capítulo anterior, onde agora o vértice vem dado por (4.6). Na ordem mais baixa diferente de zero, temos os diagramas dados na figura 1. Considerando as mesmas configurações inicial e final, e usando as regras de Feynman, encontramos para a amplitude de espalhamento a expressão dada pela Eq. (3.4) com as matrizes γ^μ substituídas por $a^\mu_\nu \gamma^\nu$, ou equivalentemente $\not{\epsilon}(k) = \gamma^\mu \epsilon_\mu(k)$ substituída por $\Gamma^\mu = a^\mu_\nu(k)\gamma^\nu \epsilon_\mu(k) = \gamma^\nu \tilde{\epsilon}_\nu(k) = \tilde{\not{\epsilon}}(k)$, onde

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_\mu(k) &= a^\nu_\mu(k)\epsilon_\nu(k) \\ &= \left(1 + i\frac{\xi \cdot k}{e}\right) \epsilon_\mu(k) - i\frac{\xi \cdot \epsilon(k)}{e} k_\mu. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dessa forma, temos em lugar de (3.4),

$$\begin{aligned} T_{if} &= e^2(2m)\bar{u}_2 \left[\tilde{\epsilon}_2 \frac{1}{\not{p}_1 + \not{k}_1 - m} \tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_1 \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_2 - m} \tilde{\epsilon}_2 \right] u_1 \\ &= e^2 m \bar{u}_2 \left[\frac{\tilde{\epsilon}_2 (\not{p}_1 + \not{k}_1 + m) \tilde{\epsilon}_1}{p_1 \cdot k_1} - \frac{\tilde{\epsilon}_1 (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m) \tilde{\epsilon}_2}{p_1 \cdot k_2} \right] u_1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Usando $\not{a}\not{b} = -\not{b}\not{a} + 2a \cdot b$ e $(\not{p} - m)u = 0$, podemos reescrever a expressão anterior como

$$T_{if} = e^2 m \bar{u}_2 \Gamma_{\text{mod}} u_1 \quad (4.10)$$

onde

$$\Gamma_{\text{mod}} = \frac{\tilde{\epsilon}_2 \not{k}_1 \tilde{\epsilon}_1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{\tilde{\epsilon}_1 \not{k}_2 \tilde{\epsilon}_2}{p_1 \cdot k_2} + 2 \frac{p_1 \cdot \tilde{\epsilon}_1}{p_1 \cdot k_1} \tilde{\epsilon}_2 - 2 \frac{p_1 \cdot \tilde{\epsilon}_2}{p_1 \cdot k_2} \tilde{\epsilon}_1. \quad (4.11)$$

Comparando a expressão anterior com a correspondente ao do capítulo anterior, vemos que além dos vetores de polarização modificados, temos o aparecimento de dois termos extras, devido a que agora $p_1 \cdot \tilde{\epsilon}_i \neq 0$. Isto devido a que $\tilde{\epsilon}_i$ não é paralelo a ϵ_i , devido ao último termo em (4.8).

Substituindo a amplitude de transição (4.10) na fórmula da seção de choque diferencial e somando sobre os spins de elétrons iniciais e finais, obteremos a mesma expressão do capítulo anterior, Eq. (3.29), onde agora o fator X vem dado por

$$X_{\text{mod}} = \frac{1}{4m^2} \text{Tr} \left[(\not{p}_1 + m) \tilde{\Gamma}_{\text{mod}} (\not{p}_2 + m) \Gamma_{\text{mod}} \right] \quad (4.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\text{mod}} &= \gamma^0 \Gamma_{\text{mod}}^\dagger \gamma^0 \\ &= \frac{\tilde{\epsilon}_1^* \not{k}_1 \tilde{\epsilon}_2^*}{p_1 \cdot k_1} + \frac{\tilde{\epsilon}_2^* \not{k}_2 \tilde{\epsilon}_1^*}{p_1 \cdot k_2} + 2 \frac{p_1 \cdot \tilde{\epsilon}_1^*}{p_1 \cdot k_1} \tilde{\epsilon}_2^* - 2 \frac{p_1 \cdot \tilde{\epsilon}_2^*}{p_1 \cdot k_2} \tilde{\epsilon}_1^*. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Na expressão anterior, $\tilde{\epsilon}^* = \gamma \cdot \tilde{\epsilon}^*$. Embora os vetores de polarização modificados $\tilde{\epsilon}(k)$ não são em geral paralelos a $\epsilon(k)$, eles ainda satisfazem às relações de ortogonalidade

$$\tilde{\epsilon}(k) \cdot k = 0 \quad (4.14)$$

já que para os fótons, $k^2 = 0$. Dessa forma temos que $\tilde{\epsilon}_i k_i + k_i \tilde{\epsilon}_i = 2\epsilon_i \cdot k_i = 0$. Usando essa relação e as equações (4.11) e (4.13) em (4.12), temos

$$\begin{aligned} X_{\text{mod}} &= \frac{1}{4m^2} \text{Tr} \left[\frac{\mathcal{K}_1 \tilde{\epsilon}_1^* \tilde{\epsilon}_2^* \not{p}_2 \tilde{\epsilon}_2 \tilde{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1 \not{p}_1}{(p_1 \cdot k_1)^2} + \frac{\mathcal{K}_1 \tilde{\epsilon}_1^* \tilde{\epsilon}_2^* \not{p}_2 \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2 \not{p}_1}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} + \frac{\mathcal{K}_1 \tilde{\epsilon}_1^* \tilde{\epsilon}_2^* \tilde{\epsilon}_2 \tilde{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1 m^2}{(p_1 \cdot k_1)^2} \right. \\ &\quad + \frac{\mathcal{K}_1 \tilde{\epsilon}_1^* \tilde{\epsilon}_2^* \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2 m^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} + \frac{\mathcal{K}_2 \tilde{\epsilon}_2^* \tilde{\epsilon}_1^* \not{p}_2 \tilde{\epsilon}_2 \tilde{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1 \not{p}_1}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} + \frac{\mathcal{K}_2 \tilde{\epsilon}_2^* \tilde{\epsilon}_1^* \not{p}_2 \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2 \not{p}_1}{(p_1 \cdot k_2)^2} \\ &\quad + \frac{\mathcal{K}_2 \tilde{\epsilon}_2^* \tilde{\epsilon}_1^* \tilde{\epsilon}_2 \tilde{\epsilon}_1 \mathcal{K}_1 m^2}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} + \frac{\mathcal{K}_2 \tilde{\epsilon}_2^* \tilde{\epsilon}_1^* \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2 \mathcal{K}_2 m^2}{(p_1 \cdot k_2)^2} + \not{p}_1 \tilde{Y} \not{p}_2 \tilde{Z} + \not{p}_1 \tilde{Z} \not{p}_2 \tilde{Y} \\ &\quad \left. + m^2 \tilde{Y} \tilde{Z} + m^2 \tilde{Z} \tilde{Y} + \not{p}_1 \tilde{Z} \not{p}_2 \tilde{Z} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde

$$Y = \frac{\tilde{\epsilon}_2 \tilde{\epsilon}_1 k_1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2 k_2}{p_1 \cdot k_2}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{Y} = \frac{k_1 \tilde{\epsilon}_1^* \tilde{\epsilon}_2^*}{p_1 \cdot k_1} + \frac{k_2 \tilde{\epsilon}_2^* \tilde{\epsilon}_1^*}{p_1 \cdot k_2}, \quad (4.17)$$

$$Z = -2 \frac{p_1 \cdot \tilde{\epsilon}_1}{p_1 \cdot k_1} \tilde{\epsilon}_2 + 2 \frac{p_1 \cdot \tilde{\epsilon}_2}{p_1 \cdot k_2} \tilde{\epsilon}_1, \quad (4.18)$$

$$\tilde{Z} = -2 \frac{p_1 \cdot \tilde{\epsilon}_1^*}{p_1 \cdot k_1} \tilde{\epsilon}_2^* + 2 \frac{p_1 \cdot \tilde{\epsilon}_2^*}{p_1 \cdot k_2} \tilde{\epsilon}_1^*. \quad (4.19)$$

Os primeiros oito termos na expressão (4.15) são similares aos termos que aparecem no caso sem violação de Lorentz, onde os vetores de polarização que agora aparecem são os modificados complexos. Os outros termos aparecem devido a que esses vetores de polarização modificados não são ortogonais ao quadri-momentum do elétron inicial em repouso, p_1 .

Caso onde o parâmetro de violação é de tipo tempo: $\xi \cdot \epsilon_i = 0$. Consideremos o caso onde o parâmetro de violação de Lorentz é do tipo tempo e dado por $\xi^\mu = (\xi, 0, 0, 0)$. Nesse caso, temos $\xi \cdot \epsilon_i = 0$ já que os vetores de polarização transversos não possuem componente temporal e os vetores de polarização modificados vem dados de (4.8) por

$$\tilde{\epsilon}(k) = \left(1 + i \frac{k \cdot \xi}{e}\right) \epsilon(k), \quad (4.20)$$

i.e, são paralelos aos vetores de polarização. Neste caso Z e \tilde{Z} , dados pelas equações (4.18) e (4.19) se anulam, devido a que $p_1 \cdot \tilde{\epsilon}_i = 0$. Usando (4.20) nos primeiros 8 termos de (4.15), podemos fatorar os fatores de proporcionalidade entre os vetores de polarização e os modificados, resultando em

$$X_{\text{mod}} = \left(1 + \frac{(k_1 \cdot \xi)^2}{e^2}\right) \left(1 + \frac{(k_2 \cdot \xi)^2}{e^2}\right) X, \quad (4.21)$$

onde X é expressão do caso sem violação de Lorentz e cujo resultado vem dado pela equação (3.53). Dessa forma, usando esse resultado, temos para X_{mod} ,

$$X_{\text{mod}} = \left(1 + \frac{(k_1 \cdot \xi)^2}{e^2}\right) \left(1 + \frac{(k_2 \cdot \xi)^2}{e^2}\right) \frac{2}{m^2} \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2(2(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 1)\right]. \quad (4.22)$$

Substituindo na fórmula da seção de choque diferencial obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2} \left(1 + \frac{(k_1 \cdot \xi)^2}{e^2}\right) \left(1 + \frac{(k_2 \cdot \xi)^2}{e^2}\right) \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 2\right] \quad (4.23)$$

Separando a contribuição do termo de violação de Lorentz temos,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{LS}} + \left[\frac{\alpha}{16\pi m^2} \left((k_1 \cdot \xi)^2 + (k_2 \cdot \xi)^2 \right) + \frac{(k_1 \cdot \xi)^2 (k_2 \cdot \xi)^2}{64\pi^2 m^2} \right] \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 2\right], \quad (4.24)$$

onde o primeiro termo é a seção de choque diferencial da QED sem quebra de simetria de Lorentz e dado pela Eq. (3.54). Na expressão acima vemos que os termos extras, devido à modificação do vértice, são de ordem α e de ordem zero na constante de estrutura fina.

O cálculo da seção de choque no caso geral também pode ser obtido tomando-se o traço das matrizes em (4.15). O resultado é complicado e aqui só mencionaremos que o resultado geral contém além do primeiro termo da Eq. (4.24), termos proporcionais a $\alpha^{3/2}$, α e de ordem zero na constante de estrutura fina. O termo de ordem $\alpha^{3/2}$ é linear em ξ^μ , o de ordem α é quadrático em ξ^μ e o termo de ordem zero é de potência 4 em ξ^μ . Esse resultado, assim como o caso especial, dado por (4.24), contrastam com os calculados em [8], onde os autores determinaram que os termos provindos do termo de violação de Lorentz são lineares em α . Porém, considerando que os parâmetros de violação são muito pequenos, no caso onde o mesmo é do tipo tempo, podemos desconsiderar em (4.24) o termo de ordem zero na constante de estrutura fina, e nesse caso o resultado coincide com o determinado em [8].

5 Conclusões

Nessa dissertação fizemos uma revisão detalhada da Eletrodinâmica Quântica com o intuito de tornar o trabalho o mais auto-conteúdo possível. Tratamos em detalhe o cálculo da seção de choque associado ao espalhamento Compton, com o propósito de entendermos os cálculos no caso da Eletrodinâmica Quântica com quebra de simetria de Lorentz, apresentado no capítulo anterior.

Devido ao termo quadrático na lagrangeana com quebra de simetria de Lorentz permanecer inalterado, o espectro de partículas, assim como os propagadores, permanecem os mesmos da QED. A única modificação é no vértice da teoria, que agora depende do momentum da linha de fóton. Assim as regras de Feynman permanecem inalteradas, onde agora devemos usar o vértice modificado. Também, a fórmula da seção de choque em termos da amplitude de espalhamento continua sendo válida. Assim, em princípio podemos calcular os diferentes processos de espalhamento, mas neste trabalho nos limitamos ao cálculo da seção de choque no efeito Compton.

Encontramos que a amplitude de espalhamento Compton é similar ao caso usual da QED, onde agora os vetores de polarização são substituídos por outros vetores de polarização modificados, dados pela Eq. (4.8). Devido a esses vetores serem complexos, devemos tomar cuidado ao calcular a probabilidade correspondente, onde agora aparecerão o complexo conjugado dos mesmos. Também, esses vetores modificados não são mais ortogonais ao quadrimomentum do elétron inicialmente em repouso. Este último faz com que novos termos apareçam, no caso, um termo que entra na fórmula da seção de choque e é dado pela expressão (4.15), onde vemos termos proporcionais a $\tilde{\epsilon}_i \cdot p_1$. Embora os traços em (4.15) possam ser calculados, a expressão resultante para a seção de choque seria bastante complicada. Dessa forma nesta dissertação nos limitamos a determinar a seção de choque no caso em que o parâmetro de violação é do tipo tempo e dado por $\xi^\mu = (\xi, 0, 0, 0)$. Nesse caso, temos que $\tilde{\epsilon}_i \cdot p_1 = 0$, e o cálculo é imediato, obtendo para a seção de choque a expressão dada pela Eq. (4.24), onde no termo extra há termos proporcionais a α e um termo de ordem zero em α . No caso geral teríamos termos proporcionais a $\alpha^{3/2}$, α e um termo de ordem zero em α . Esses resultados contrastam com o resultado obtido em [8], onde os autores encontraram um termo proporcional a α . No entanto, se tomarmos os parâmetros de violação ξ^μ como sendo muito pequenos, podemos manter somente os termos de mais baixa ordem em ξ^μ . Nesse caso o resultado aqui calculado coincide com o encontrado em [8]. Dessa forma, os limites para os valores de ξ^μ , serão os mesmos que os encontrados em [8].

Uma extensão natural deste trabalho é calcular outros processos da QED, como

aniquilação de pares, espalhamento Bhabha, assim como a situação em campos externos, onde poderemos determinar, por exemplo, correções ao momento magnético anômalo do elétron, provindos do termo de violação. Esperamos abordar estes problemas em trabalhos futuros.

Bibliografia

- 1 N.Russel, *Framing Lorentz symmetry*, CERN Courier. Retrieved 2019-11-08. <https://cerncourier.com/a/framing-lorentz-symmetry/>
- 2 G.A.M.A. Fernandes, *Efeitos planares em eletrodinâmica quântica com violação das simetrias de Lorentz e CPT*, Tese de doutorado - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, (2018), <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/189504>
- 3 V.A. Kostelecký, *The status of CPT*, arXiv:hep-ph/9810365
- 4 D. Colladay, V.A. Kostelecký, *CPT violation and the standart model*, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1996). arXiv:hep-ph/9703464
- 5 D. Colladay, V.A. Kostelecký, *Lorentz-Violating Extension of the Standard Model*, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998). arXiv:hep-ph/9809521
- 6 V.A. Kostelcký, S. Samuel, *Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory*, Phys. Rev. D **39**, 683 (1989).
- 7 O.W. Greenberg, *CPT violation implies violation of Lorentz invariance*, Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002). arXiv:hep-ph/0201258
- 8 G.P. de Brito, J.T. Guaitolini Junior, D. Kroff, P.C. Malta and C. Marques, *Lorentz violation in simple QED proesses*, Phys. Rev. D **94**, 056005 (2016). arXiv:1605.08059 [hep-ph].
- 9 H.B. Nielsen and I.Picek, *CPT violation implies violation of Lorentz invariance*, Nuc. Phys. **211**, 269 (1983).
- 10 S.W. Hawking, Phys. Rev. D **14**, 2460 (1976) 2460; Commun. Math. Phys. **87** (1982) 395.
- 11 D. Colladay and P. McDonald, *Statistical Mechanics and Lorentz violation*, Phys. Rev. D **70** (2004) 125007.
- 12 A.A. A. Filho, and R.V Maluf, *Thermodynamic Properties in Higher-Derivative Electrodynamics*, Braz. J. Phys. **51** (2021) 820.
- 13 A.A.A. Filho, *Lorentz-violating scenarios in a thermal reservoir*, Eur. Phys. J. Plus **136** (2021) 417.

- 14 A.A.A. Filho, and J.A.A.S Reis *Thermal aspects of interacting quantum gases in Lorentz-violating scenarios*, Eur. Phys. J. Plus **136** (2021) 310.
- 15 A.A.A. Filho and A. Yu Petrov, *Higher-derivative Lorentz-breaking dispersion relations: a thermal description*, [arXiv:2103.08738].
- 16 A.R. Aguirre, G. Flores-Hidalgo, R.G. Rana, E.S. Souza, *The Lorentz-violating real scalar field at thermal equilibrium*, Eur. Phys. J. C (2021) 81:459. arXiv:2103.08724 [hep-th].
- 17 M. B. Cruz, E. R. Bezerra de Mello, and A. Yu Petrov, *Casimir effects in Lorentz-violating scalar field theory*, Phys. Rev. D **96** (2017) 045019.
- 18 C. A. Escobar, L. Medel, and A. Martín-Ruiz, *Casimir effect in Lorentz-violating scalar field theory: A local approach*, Phys. Rev. D **101** (2020) 095011.
- 19 C. A. Escobar, A. Martín-Ruiz, O. J. Franca and M. A. G. García, *A non-perturbative approach to the scalar Casimir effect with Lorentz symmetry violation*, Phys. Lett. B **807** (2020) 135567.
- 20 M.B Cruz, E. R. Bezerra de Mello, and H. F. Santana Mota, *Casimir energy and topological mass for a massive scalar field with Lorentz violation*, Phys. Rev. D **102** (2020) 045006.
- 21 A. Mojavezi and R. Moazzemi and M. E. Zomorrodian, *NLO radiative correction to the Casimir energy in Lorentz-violating scalar field theory*, Nucl. Phys. B **941** (2019) 145.
- 22 A. Erdas, *Casimir effect of a Lorentz-violating scalar in magnetic field*, Int. J. Mod. Phys. A **35** (2020) 2050209.
- 23 D. Colladay and P. McDonald, *Bose-Einstein condensates as a probe for Lorentz violation*, Phys. Rev. D **73** (2006) 105006.
- 24 E. Castellanos and A. Camacho, *Stability of Bose-Einstein Condensates in a Lorentz Violating Scenario*, Mod. Phys. Lett. A **25** (2010) 459.
- 25 R. Casana and K. A. da Silva, *Lorentz-violating effects in the Bose-Einstein condensation of an ideal bosonic gas*, Mod. Phys. Lett. A **30** (2015) 1550037.
- 26 M. B. Cruz, E. R. Bezerra de Mello, and A. Yu Petrov, *Thermal corrections to the Casimir energy in a Lorentz-breaking scalar field theory*, Mod. Phys. Lett. A **33** (2018) 1850115.
- 27 J. Furtado, A. C. A. Ramos, and J. F. Assunção, *Effects of Lorentz violation in the Bose-Einstein condensation*, EPL (Europhysics Letters) **132** (2020) 31001.

- 28 R. Casana, M. M. Ferreira Jr., J. S. Rodrigues, and M. R. O. Silva, *Finite Temperature behavior of the CPT-even and parity-even electrodynamics of the Standard Model Extension*, Phys. Rev. D 80 (2009) 085026 [arXiv:0907.1924v3].
- 29 R. Casana, M. M. Ferreira Jr., and M. R. O. Silva, *Parity-odd and CPT-even electrodynamics of the SME at Finite Temperature*, Phys. Rev. D 81 (2010) 105015 [arXiv:0910.3709v1].
- 30 M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov, A. F. Santos and A. J. da Silva, *Free energy of Lorentz-violating QED at high temperature*, Phys. Rev. D 81 (2010), 045013 [arXiv:0910.4560 [hep-th]].
- 31 R. Bufalo, *Lorentz-violating effects in three-dimensional QED*, Int. J. Mod. Phys. A **29** (2014), 1450112 [arXiv:1408.2915 [hep-th]].
- 32 C.A. Escobar and M.A.G. Garcia, *The Full CPT-Even Photon Sector of the Standard Model Extension at Finite Temperature*, Phys. Rev. D 92 (2015) no.2, 025034 [arXiv:1505.00069 [hep-th]].
- 33 L. H. C. Borges, and F.A. Barone, *A perfectly conducting surface in electrodynamics with Lorentz symmetry breaking*, Eur. Phys. J. C **77** (2017) 693.
- 34 L. H. C. Borges, A.F. Ferrari, and F.A. Barone, *Mirrors and field sources in a Lorentz-violating scalar field theory*, Nucl. Phys. B **954** (2020) 114974.
- 35 L.H.C Borges and F.A Barone, *New Effects in the Vicinity of a Perfectly Conducting Plate in a Non-minimal Lorentz Violation Scenario*, Braz J Phys **50**, 647–657 (2020).
- 36 L.H.C Borges and F.A Barone, *Field Sources in a CPT-Even Lorentz-Violation Maxwell Electrodynamics*, Braz J Phys **49**, (2019) 571.
- 37 T. Mariz, J.R. Nascimento, E.Passos, R.F.Ribeiro and F.A. Brito, *A Remark on Lorentz violation at finite temperature*, JHEP 10 (2005) 019. [arXiv:0509008 [hep-th]].
- 38 M. Gomes, J. R. Nascimento, E. Passos, A. Yu. Petrov, and A. J. da Silva, *Induction of the four-dimensional Lorentz-breaking non-Abelian Chern-Simons action*, Phys. Rev. D **76** (2007) 047701.
- 39 J. R. Nascimento, E. Passos, and A. Yu. Petrov, *Lorentz-CPT violation, radiative corrections and finite temperature*, JHEP 06 (2007) 016.
- 40 E. Passos and A.Y. Petrov, *Two-dimensional Lorentz-violating Chern-Simons-like action*, Phys. Lett. B **662** (2008), 441 [erratum: Phys. Lett. B **664** (2008), 318] [arXiv:0801.4946 [hep-th]].

- 41 F.A. Brito, L.S. Grigorio, M.S. Guimaraes, E. Passos and C. Wotzasek, *Lorentz-violating Chern-Simons action under high temperature in massless QED*, Phys. Lett. B 681 (2009) 495 [arXiv:0906.2786 [hep-th]].
- 42 R. Casana, M.M. Ferreira, R.V. Maluf and F.E.P.dos Santos, *Effects of a CPT-even and Lorentz-violating nonminimal coupling on the electron-positron scattering*, Phys. Rev. D 86 (2012) 125033 [arXiv:1212.6230 [hep-th]].
- 43 G. P. de Brito, J. T. Guaitolini Junior, D. Kroff, P. C. Malta and C. Marques, *Lorentz violation in simple QED processes*, Phys. Rev. D 94 (2016) 056005 [arXiv:1605.08059 [hep-ph]].
- 44 A. F. Santos and F. C. Khanna, *Lorentz violation in Bhabha scattering at finite temperature*, Phys. Rev. D 95 (2017) 125012.
- 45 A. F. Santos and F. C. Khanna, *Lorentz violation, Möller scattering and finite temperature*, Adv. High Energy Phys. 2018 (2018) 4596129 [arXiv:1804.08566 [hep-th]].
- 46 P.R.A. Souza, A.F. Santos, S.C. Ulhoa and F.C. Khanna, *On Lorentz violation in $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ scattering at finite temperature*, Phys. Lett. B 791 (2019) 195.
- 47 B. R. Edwards and V. A. Kostelecký, *Riemann-Finsler geometry and Lorentz-violating scalar fields*, Phys. Lett. B 786 (2018) 319.
- 48 D. Colladay and L. Law, *Spontaneous CPT breaking and fermion propagation in the Schwarzschild geometry*, Phys. Lett. B 795 (2019) 457.
- 49 M. S. Berger and V. Alan Kostelecký, *Supersymmetry and Lorentz violation*, Phys. Rev. D 65 (2002) 091701.
- 50 S. G. Nibbelink and M. Pospelov, *Lorentz violation in supersymmetric field theories*, Phys. Rev. Lett. 94 (2005) 081601.
- 51 H. Belich, L. D. Bernal, P. Gaete, J. A. Helayël-Neto and F. J. L. Leal, *Aspects of CPT-even Lorentz-symmetry violating physics in a supersymmetric scenario*, Eur. Phys. J. C 75 (2015) 291 [arXiv:1502.06126 [hep-th]].
- 52 P. A. Ganai, O. Ahmad, J. P. Tobia, A. Fennell and V. Vyas, *Lorentz symmetry breaking in supersymmetric quantum electrodynamics*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 17 (2020) 2050038.
- 53 L. D. Bernal, P. Gaete, Y. P. M. Gomes and J. A. Helayël-Neto, *Lorentz-symmetry violating physics in a supersymmetric scenario in $(2 + 1)$ -D*, EPL **129** (2020) 11005 [arXiv:1912.00523 [hep-th]].

-
- 54 V. A. Kostelecký, *Developments in Lorentz and CPT Violation*, Proceedings of the Eighth Meeting on CPT and Lorentz Symmetry (CPT'19), Indiana University, Bloomington, 2019.
- 55 B. Altschul, *Compton scattering in the presence of Lorentz and CPT violation*, Phys. Rev. D **70**, 056005 (2004). arXiv:hep-ph/0405084
- 56 W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer (Junho de 2013).
- 57 R.F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Princeton University Press (Dezembro de 2000).
- 58 P.A.M. Dirac, *The Quantum Theory of the Electron*, Proceedings of the Royal Society of London, 117, 610 (1928).
- 59 A.G. Grushin, *Consequences of a condensed matter realization of Lorentz-violating QED in Weyl semi-metals*, Phys. Rev. D. **86** 045001 (2012).
- 60 R. Jackiw, V. Alan Kostelecký *Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Electrodynamics*.
- 61 H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr, J. A. Helayël-Neto, *Non-minimal coupling to a Lorentz-violating background and topological implications*, Eur. Phys. J. C 41 (2005) 421.
- 62 *Lorentz-violating corrections on the hydrogen spectrum induced by a non-minimal coupling*, H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayël-Neto, F. M. O. Mouchereck, Phys.Rev. D74 (2006) 065009 [arXiv:hep-th/0604149].
- 63 *QED with minimal and nonminimal couplings: on the quantum generation of Lorentz-violating terms in the pure photon sector*, G. Gazzola, H. G. Fargnoli, A. P. Baêta Scarpelli, Marcos Sampaio, M. C. Nemes, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 39 035002 (2006).
- 64 *Perturbative generation of the higher-derivative Lorentz-breaking terms*, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, Phys. Rev. D 85 (2002) 125003.
- 65 *Lorentz violation bounds on Bhabha scattering*, B. Charneski, M. Gomes, R. V. Maluf, A. J. da Silva, Phys. Rev. D 86 (2012) 045003.
- 66 *Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension*, V. Alan Kostelecký, Matthew Mewes, Phys. Rev. D 80, (2009) 015020.
- 67 *Fermions with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension*, V. Alan Kostelecký, Matthew Mewes, Phys. Rev. D 88 (2013) 096006.

-
- 68 *Quantum field theoretic properties of Lorentz-violating operators of nonrenormalizable dimension in the photon sector*, M. Schreck, Phys. Rev. D 89 (2014) 105019.
- 69 *New effects in the interaction between electromagnetic sources mediated by nonminimal Lorentz violating interactions*, L. H. C. Borges, A. F. Ferrari, F. A. Barone, Eur. Phys. J. C 76 (2016) 599. arXiv:1606.00940 [hep-th] Eur. Phys. J. C
- 70 *Gauge field with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension*, V. Alan Kostelecký, Zonghao Li, Phys. Rev. D 99 (2019) 056016.
- 71 W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations*. Springer; terceira edição (15 junho 2000).
- 72 C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Dover Publications (Fevereiro 2006).