

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MATEMÁTICA

Camadas de Transição Estáveis na Equação
de Allen-Cahn Heterogênea.

Marcos Eusébio Agostini

Orientador: Prof. Dr. Maicon Sônego

Itajubá, 12 de setembro de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MATEMÁTICA

Marcos Eusébio Agostini

**Camadas de Transição Estáveis na Equação
de Allen-Cahn Heterogênea.**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

Orientador: Prof. Dr. Maicon Sônego

12 de setembro de 2022

Itajubá

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MATEMÁTICA

Camadas de Transição Estáveis na Equação
de Allen-Cahn Heterogênea.

Marcos Eusébio Agostini

Dissertação aprovada por banca examinadora em
26 de Julho de 2022, conferindo ao autor o título
de **Mestre em Matemática**.

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Maicon Sônego
Prof. Dr. João Biesdorf
Prof. Dr. Jacson Simsen

Itajubá
2022

Marcos Eusébio Agostini

Camadas de Transição Estáveis na Equação de Allen-Cahn Heterogênea/ Marcos Eusébio Agostini. – Itajubá, 12 de setembro de 2022-

41 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Maicon Sônego

Dissertação (Mestrado)

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Programa de pós-graduação em Matemática Matemática, 12 de setembro de 2022.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III. Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 07:181:009.3

Marcos Eusébio Agostini

Camadas de Transição Estáveis na Equação de Allen-Cahn Heterogênea

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado. Itajubá, 26 de Julho de 2022:

Prof. Dr. Maicon Sônego
Orientador

Prof. Dr. Jacson Simsen

Prof. Dr. João Biesdorf

Itajubá
12 de setembro de 2022

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela presença constante nessa caminhada e por ter colocado em meu caminho pessoas especiais. Pessoas estas que me motivaram nos momentos que mais precisei. Agradeço a minha família, em especial minha mãe Romeire, meu pai Luiz e meu irmão Lucas, que estiveram presentes nos bons e maus momentos, sempre motivando para que eu pudesse realizar esse sonho. Agradeço também a UNIFEI por ter me proporcionado a bolsa de estudos, contribuindo assim para minha dedicação exclusiva ao mestrado. Agradeço ao meu orientador Maicon Sônego por compartilhar experiências tão significativas à minha formação, sempre me incentivando e ajudando superar as dificuldades nesse caminho. Aos meus amigos, sou muito grato pela motivação, paciência e empatia nos momentos que precisei, em especial a Ivana e Cleilson que além de todo incentivo, também me ajudaram a compreender melhor algumas experiências vivenciadas no mestrado. Por fim, muito obrigado a todos que contribuíram para que meu sonho se tornasse realidade.

"Se as leis da matemática referem-se à realidade, elas não estão corretas; e, se estiverem corretas, não se referem a realidade."

(Albert Einstein)

Resumo

Esse trabalho estuda a existência de soluções estacionárias para o problema de reação e difusão abaixo

$$\begin{cases} u_t = \epsilon^2 u_{xx} - u(u^2 - \alpha^2(x)), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty) \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \in (0, \infty), \end{cases}$$

onde α é uma função de classe C^2 . Utilizamos a técnica de sub e super-soluções para garantir a existência de soluções estacionárias estáveis que desenvolvem camadas de transição próximas aos pontos nos quais $\alpha(x)$ possui um mínimo local.

Palavras-chaves: Sub e Super-solução. Camadas de Transição. Estabilidade.

Abstract

This work studies the existence of steady-state solutions for the reaction-diffusion problem below

$$\begin{cases} u_t = \epsilon^2 u_{xx} - u(u^2 - \alpha^2(x)), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty) \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \in (0, \infty), \end{cases}$$

where α is a function of class C^2 . We use the sub and super-solutions technique to guarantee the existence of stable steady-state solutions that develop transition layers near to the points where $\alpha(x)$ has a local minimum.

Key-words: Sub and Super-solution. Transition Layers. Stability.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Solução u_ϵ desenvolvendo duas camadas de transição	14
---	----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	PRELIMINARES	16
3	APRESENTAÇÃO DO RESULTADO PRINCIPAL	22
4	RESULTADOS PRELIMINARES	25
5	DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA PRINCIPAL	35
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	38
	REFERÊNCIAS	40

1 Introdução

Neste trabalho consideramos o seguinte problema de reação e difusão com condições de fronteira de Neumann homogêneas

$$\begin{cases} u_t = \epsilon^2 u_{xx} + f(x, u), & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^+ \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $f(x, u) = -u(u^2 - \alpha^2)$ e α é uma função de classe C^2 . O problema acima é um modelo para diversos fenômenos oriundos da física, química ou biologia. Alguns exemplos envolvendo fenômenos de dinâmica populacional e reações químicas podem ser vistos em [1]. O termo de reação $f(x, u) = -u(u^2 - \alpha^2)$ é uma versão heterogênea da famosa não-linearidade presente nos *modelos de Allen-Cahn*, a saber: $f(u) = u - u^3$. Problemas de Allen-Cahn são amplamente estudados desde sua apresentação em [2], e aqui deixamos algumas referências sobre o assunto [3]. Veja também as referências citadas por estes trabalhos [4], [5], [6].

Dizemos que u é uma solução estacionária de (1.1) se u é uma solução independente da variável temporal t e, grosseiramente falando, dizemos que uma solução estacionária u é *estável* se qualquer solução v de (1.1) que em $t = 0$ está próxima de u , continuará próxima quando $t \rightarrow \infty$. O objetivo deste trabalho é, a partir de hipóteses sobre α , conseguir soluções estáveis de (1.1) que desenvolvam camadas de transição no intervalo $(0, 1)$. Isto é, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, procuramos soluções estáveis u_ϵ que em uma região de $(0, 1)$ se aproxima de $-\alpha$ e no complementar desta região se aproxima de α a medida que $\epsilon \rightarrow 0$. A região na qual ocorre a mudança de α para $-\alpha$ (ou vice-versa) é a chamada *interface da camada de transição*. A Figura 1 ilustra uma solução u_ϵ desenvolvendo duas camadas de transição: em $(x_0, 0)$ e em $(x_1, 1)$ vemos u_ϵ se aproximando de α e em (x_0, x_1) u_ϵ se aproxima de $-\alpha$. Em particular, veja que as transições ocorrem próximas aos pontos de mínimos locais de α , em x_0 e x_1 . Tais pontos representam a interface de transição entre os estados α e $-\alpha$. Todos os detalhes e definições sobre estes temas podem ser conferidos no Capítulo 1 desta dissertação.

Resultados de existência ou não de soluções estáveis são fundamentais para a compreensão da dinâmica do problema. Soluções estáveis convergindo para as raízes de f (quando $\epsilon \rightarrow 0$) em todo intervalo $(0, 1)$ (no nosso caso, α e $-\alpha$) são encontradas

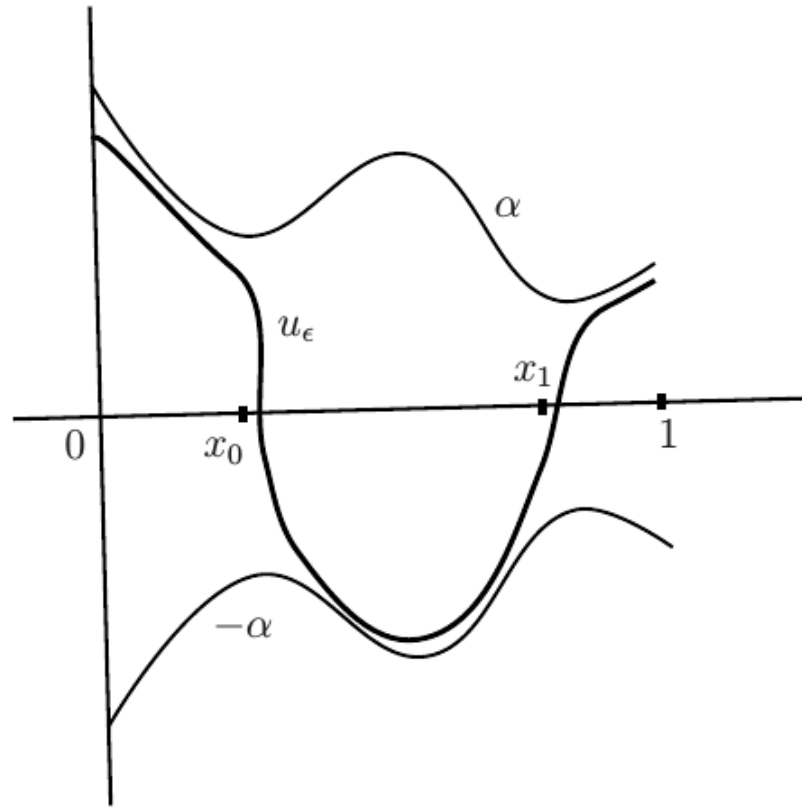


Figura 1 – Solução u_ϵ desenvolvendo duas camadas de transição

mais diretamente no Teorema 3.1. Neste trabalho, nos preocupamos principalmente nas soluções que mudam de fase em determinado ponto de transição, o qual, como veremos, está diretamente relacionado com os pontos de mínimos locais de α .

A técnica usada aqui é aquela conhecida por *sub e super-solução*. Em resumo, para ϵ suficientemente pequeno, procuramos por uma sub-solução $u_*(x)$ e uma super-solução $u^*(x)$ de (1.1) veja as definições precisas na Definição 2.2, de modo que assim, usando determinados resultados conhecidos sobre o assunto, possamos encontrar uma solução estável $u(x)$ tal que $u_* \leq u \leq u^*$. Daí, o comportamento de u_* e u^* quando o parâmetro $\epsilon \rightarrow 0$, ditará o comportamento de u . Um ótimo material sobre a técnica de sub e super-solução pode ser encontrado em [7].

A principal referência desta dissertação é [8] e a dissertação é dividida da seguinte maneira: no Capítulo 1 fornecemos as definições principais necessárias nos capítulos seguintes; no Capítulo 2 apresentamos o principal resultado do trabalho, o Teorema 3.2. No Capítulo 3, demonstramos uma série de resultados necessários para a prova do teorema principal, e no Capítulo 4 apresentamos a prova do Teorema 3.2. Finalmente, no Capítulo

5 discutimos os resultados obtidos e vislumbramos novas possibilidades dentro deste tema.

2 Preliminares

Nesse capítulo serão apresentadas definições e alguns resultados preliminares essenciais para o desenvolvimento do trabalho. O objetivo principal foi provar a existência de soluções estacionárias estáveis para (1.1) que desenvolvem camada de transição interna quando o parâmetro ϵ se aproxima de zero.

Iniciamos com a definição de solução estacionária estável. Para tal, será necessário apresentar a norma $\|\cdot\|_\infty$ no espaço de funções L^∞ e sua norma. Seja S o *espaço das funções mensuráveis e essencialmente limitadas*, isto é, aquelas que são limitadas exceto por conjunto de medida zero. Em S identificamos duas funções que apenas diferem em um conjunto de medida zero, e assim obtemos o espaço de funções L^∞ . A norma apropriada para este espaço é aquela dada pelo *supremo essencial*, a saber

$$\|f\|_\infty := \inf\{C \geq 0; |f(x)| \leq C \text{ q.t.p } x\}.$$

Definição 2.1. *Uma solução u_ϵ de (1.1) é chamada solução estacionária se satisfizer a equação abaixo:*

$$\begin{cases} \epsilon^2 u_{xx} + f(x, u) = 0, & x \in (0, 1) \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Uma solução estacionária u_ϵ será chamada estável, se para cada $\eta > 0$ existir $\delta > 0$ tal que para cada solução v_ϵ de (1.1) satisfazendo $\|v_\epsilon(\cdot; 0) - u_\epsilon(\cdot)\|_{L^\infty} < \delta$ ocorrer $\|v_\epsilon(\cdot; t) - u_\epsilon(\cdot)\|_{L^\infty} < \eta$ para todo $t > 0$.

Iniciamos agora a formulação da definição de sub-solução e super-solução. Para isso considere o problema abaixo:

$$\begin{cases} \epsilon^2 u_{xx} + g(x, u) = 0 & 0 < x < 1 \\ u_x(0) = d_0, \quad u_x(1) = d_1 \end{cases} \quad (2.2)$$

onde g é uma função C^2 e d_0, d_1 são constantes. Seja $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que para um número finito de pontos a_1, a_2, \dots, a_m :

- (i) $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 em $(a_1, a_2) \cup (a_2, a_3) \cdots \cup (a_{m-1}, a_m)$ e

(ii) existem os limites

$$\lim_{x \rightarrow a_i^+} u_x(x), \quad \lim_{x \rightarrow a_i^-} u_x(x)$$

em cada a_i (a notação $x \rightarrow a_i^+$ indica que x tende a a_i pela direita de a_i).

Seja $P(a_1, a_2, \dots, a_m)$ o conjunto de todas as funções u satisfazendo as condições acima.

Definição 2.2. *Seja $u^* \in P(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Diremos que u^* é uma super-solução de (2.2) se as seguintes condições ocorrem:*

(h.1) para cada $i = 1, 2, \dots, m$

$$\epsilon^2 u_{xx}^* + g(x, u^*) \leq 0 \quad \text{em } (a_i, a_i + 1);$$

(h.2) para cada $i = 1, 2, \dots, m$

$$\lim_{x \rightarrow a_i^+} u_x^*(x) \leq \lim_{x \rightarrow a_i^-} u_x^*(x);$$

(h.3) $u_x^*(0) \leq d_0$ e $u_x^*(1) \geq d_1$.

Neste trabalho, uma função $u_* \in P(a_1, a_2, \dots, a_m)$ é chamada sub-solução de (2.2) se u_* satisfaz as desigualdades acima com as desigualdades trocadas.

A proposição abaixo é fundamental para os principais resultados desta dissertação. Sua demonstração pode ser realizada através da combinação de resultados presentes em [9] e [10]. Em resumo, temos em [8] um resultado que fornece condições para a existência de sub e super-soluções num contexto mais geral, isto é, para funções de classe C^2 em todo $[0, 1]$ por exemplo. Já em [10] temos um resultado que garante a existência de uma solução estável entre as sub e super-soluções. Apresentaremos um esboço da prova que, sob as hipóteses presentes aqui, garantimos que a nossa super-solução de (2.2) satisfaz as condições presentes em (2.2) e, com uma conta análoga, mostra-se o mesmo para as sub-soluções.

Proposição 2.1. *Seja $u^* \in P(a_1, a_2, \dots, a_m)$ uma super-solução de (2.2) e seja $u_* \in P(a_1, a_2, \dots, a_m)$ uma sub-solução de (2.2) tal que $u_* \leq u^*$ em $(0, 1)$. Então, existe uma solução estável u para (2.2) tal que $u_* \leq u \leq u^*$.*

Demonstração. Como pode ser visto em [10], a condição necessária para que u^* seja uma super-solução no sentido presente em [9] é

$$\int_0^1 (\epsilon^2 u^* \phi_{xx} + g(x, u^*) \phi) dx - \epsilon^2 d_0 \phi(0) + \epsilon^2 d_1 \phi(1) \leq 0,$$

para toda $\phi \in C^2(I)$ satisfazendo $\phi_x(0) = \phi_x(1) = 0$ e $\phi \geq 0$. O mesmo ocorre para a sub-solução u_* , porém com a desigualdade oposta.

Fazendo a integração por partes na equação acima, segue que:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\epsilon^2 u^* \phi_{xx} + (g(x, u^*)) \phi) dx + \epsilon^2 d_1 \phi(1) - \epsilon^2 d_0 \phi(0) \\ &= \epsilon^2 u^* \phi_x \Big|_0^1 - \int_0^1 \epsilon^2 u_x^* \phi_x - g \phi dx + \epsilon^2 d_1 \phi(1) - \epsilon^2 d_0 \phi(0) \\ &= - \sum_{i=0}^m \int_{a_i}^{a_{i+1}} \epsilon^2 u_x^* \phi_x dx + \int_0^1 g \phi dx + \epsilon^2 d_1 \phi(1) - \epsilon^2 d_0 \phi(0) \\ &= - \sum_{i=0}^m \Big|_{a_i}^{a_{i+1}} \epsilon^2 u_x^* \phi + \sum_{i=0}^m \int_{a_i}^{a_{i+1}} \epsilon^2 u_{xx}^* \phi dx + \int_0^1 g \phi dx + \epsilon^2 d_1 \phi(1) - \epsilon^2 d_0 \phi(0) \\ &= -\epsilon^2 u_x^* \phi \Big|_0^{a_1} - \epsilon^2 u_x^* \phi \Big|_{a_m}^1 - \sum_{i=1}^{m-1} \epsilon^2 u_x^* \phi \Big|_{a_1}^{a_{i+1}} + \sum_{i=0}^m \int_{a_i}^{a_{i+1}} \epsilon^2 u_{xx}^* \phi dx + \int_0^1 g \phi dx + \epsilon^2 d_1 \phi(1) - \epsilon^2 d_0 \phi(0) \\ &= -\epsilon^2 u_x^*(a_{i=1}) \phi(a_{i=1}) + \epsilon^2 u_x^*(0) \phi(0) - \epsilon^2 u_x^*(1) \phi(1) + \epsilon^2 u_x^*(a_m) \phi(a_m) - \sum_{i=1}^{m-1} \epsilon^2 u_x^* \phi \Big|_{a_i}^{a_{i+1}} \\ &\quad + \sum_{i=0}^m \int_{a_i}^{a_{i+1}} \epsilon^2 u_{xx}^* \phi + \int_0^1 g \phi dx + \epsilon^2 d_1 \phi(1) - \epsilon^2 d_0 \phi(0) \\ &= \epsilon^2 \phi(0) (u_x^*(0) - d_0) + \epsilon^2 \phi(1) (d_1 - u_x^*(1)) + \sum_{i=1}^m \epsilon^2 \phi(a_i) (u_x^*(a_i^+) - u_x^*(a_i^-)) \\ &\quad + \sum_{i=0}^m \int_{a_i}^{a_{i+1}} \epsilon^2 u_{xx}^* \phi dx + \int_0^1 g \phi dx \leq 0. \end{aligned}$$

□

A proposição acima é uma importante ferramenta para a obtenção de soluções estáveis. Como dito na Introdução, apresentamos aqui a seguinte proposição que garante a existência de soluções estáveis se aproximando de α e $-\alpha$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Proposição 2.2. *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem soluções estáveis u_ϵ^1 e u_ϵ^2 de (1.1). Além disso, elas satisfazem:*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon^1(x) = -\alpha(x) \text{ uniformemente em } (0, 1) \tag{2.3}$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon^2(x) = \alpha(x) \text{ uniformemente em } (0, 1). \tag{2.4}$$

Demonstração. Iniciaremos a demonstração supondo inicialmente que $-\alpha_x(0) \leq 0$ e $-\alpha_x(1) \geq 0$.

Seja $u^*(x) = -\alpha(x) + \epsilon^{2-\theta_1}$ com $0 < \theta_1 < 2$, então obtemos

$$\epsilon^2 u_{xx}^* + f(x, u^*) = (-\epsilon^2)(\alpha_{xx}) + f(x, -\alpha(x) + \epsilon^{2-\theta_1}).$$

Aqui devemos notar, que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $0 < x < 1$, temos

$$f(x, -\alpha(x) + \epsilon^{2-\theta_1}) \leq -m_0 \epsilon^{2-\theta_1}$$

para algum $m_0 > 0$. De fato, substituindo u por $u^* = -\alpha(x) + \epsilon^{2-\theta_1}$ em $f(x, u) = -u(u^2 - \alpha^2)$, temos que

$$\begin{aligned} f(x, -\alpha + \epsilon^{2-\theta_1}) &= -(-\alpha + \epsilon^{2-\theta_1})(-\alpha + \epsilon^{2-\theta_1})^2 - (\alpha^2) \\ &= (\alpha - \epsilon^{2-\theta_1})(\alpha^2 - 2\alpha\epsilon^{2-\theta_1} + \epsilon^{4-2\theta_1} - \alpha^2) \\ &= -2\alpha^2\epsilon^{2-\theta_1} + \alpha\epsilon^{4-2\theta_1} + 2\alpha\epsilon^{4-2\theta_1} - \epsilon^{6-3\theta_1} \\ &= -2\alpha^2\epsilon^{2-\theta_1} + 3\alpha\epsilon^{4-2\theta_1} - \epsilon^{6-3\theta_1} \\ &= (-2\alpha^2 + 3\alpha\epsilon^{2-\theta_1} - \epsilon^{4-2\theta_1})\epsilon^{2-\theta_1} \\ &\leq -m_0\epsilon^{2-\theta_1}. \end{aligned}$$

Portanto, podemos notar que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $3\alpha\epsilon^{2-\theta_1} - \epsilon^{4-2\theta_1} < 2\alpha^2$, u^* satisfaz **(h.1)**, uma vez que

$$\epsilon^2 u_{xx}^* + f(x, u^*) = -\epsilon^2 \alpha_{xx} + f(x, -\alpha + \epsilon^{2-\theta_1}) \leq -\epsilon^2 \alpha_{xx} - m_0 \epsilon^{2-\theta_1} \leq 0.$$

A condição **(h.2)** vem diretamente da regularidade de α .

Além disso, considerando $-\alpha_x(0) \leq 0$ e $-\alpha_x(1) \geq 0$, temos que u^* também satisfaz **(h.3)** de modo que u^* se torna uma super-solução para (1.1).

De fato, u^* satisfaz o item **(h.3)** quando $u^*(x) = -\alpha(x) + \epsilon^{2-\theta_1}$. Derivando $u^*(x)$ segue que

$$u_x^*(x) = -\alpha'(x).$$

Como estamos considerando a hipótese $-\alpha_x(0) \leq 0$ e $-\alpha_x(1) \geq 0$ então concluímos que u^* satisfaz o item **(h.3)**. Portanto, construímos uma super-solução u^* de (2.3).

Se $-\alpha_x(0) > 0$ ou $-\alpha_x(1) < 0$, então precisamos de alguma modificação de u^* próximo a $x = 0$ ou $x = 1$. Iremos explicar nossa ideia para o caso $-\alpha_x(0) > 0$. Consideremos θ_2 e θ_3 valores positivos satisfazendo $\theta_3 < \theta_2 < 2\theta_3$ e $\theta_2 < \theta_1$. Para $0 \leq x \leq \epsilon^{\theta_3}$,

modificamos u^* para $u^*(x) = -\alpha(x) + \epsilon^{2-\theta_1} + \epsilon^{-\theta_2}(x - \epsilon^{\theta_3})^2$. Em $(0, \epsilon^{\theta_3})$ podemos mostrar que:

$$\epsilon^2 u_{xx}^* + f(x, u^*) \leq -\epsilon^2 \alpha_{xx} + 2\epsilon^{2-\theta_2} - m_0 \epsilon^{2-\theta_1}, \quad (2.5)$$

onde usamos novamente que:

$$f(x, u^*) \leq f(x, -\alpha(x) + \epsilon^{2-\theta_1}) \leq -m_0 \epsilon^{2-\theta_1}, \quad (2.6)$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Como $\theta_1 > \theta_2$, o lado direito da desigualdade (2.5) é negativo se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Consequentemente, podemos notar que, para $u^* = -\alpha(x) + \epsilon^{2-\theta_1} + \epsilon^{-\theta_2}(x - \epsilon^{\theta_3})^2$ temos

$$-\epsilon^2 u_{xx}^* + f(x, u^*) \leq 0$$

satisfazendo portanto o item **(h.1)**.

Observemos que u^* também satisfaz **(h.2)** devido à regularidade de u^* em $[0, 1]$.

Resta verificar que u^* também satisfaz **(h.3)** em $x = 0$. Para que u^* satisfaça **(h.3)** é necessário que $u_x^*(0) \leq 0$. Observemos então que, derivando

$$u^*(x) = -\alpha(x) + \epsilon^{2-\theta_1} + \epsilon^{-\theta_2}(x - \epsilon^{\theta_3})^2$$

segue que

$$u_x^*(x) = -\alpha_x(x) + 2\epsilon^{-\theta_2}(x - \epsilon^{\theta_3}).$$

Aplicando no ponto $x = 0$, obtemos

$$u_x^*(0) = -\alpha_x(0) - 2\epsilon^{\theta_3-\theta_2}.$$

Um método análogo pode ser feito caso $-\alpha(1) < 0$.

Logo, concluímos que u^* para o caso $-\alpha_x(0) > 0$ satisfaz o item **(h.3)**.

Similarmente, podemos construir uma sub-solução satisfazendo $u_* < u^*$. Portanto, concluímos que pela Proposição 2.1, podemos encontrar soluções estáveis u_ϵ^1 satisfazendo (2.3). A existência de soluções estáveis u_ϵ^2 satisfazendo (2.4) pode ser demonstrada analogamente. \square

Apresentaremos a seguir três propriedades no Lema 2.1 que serão fundamentais para a construção de super-soluções e sub-soluções, além disso, pelo item (i) e (ii) do

lema a seguir podemos observar como e com qual velocidade a solução u se aproxima de γ e $-\gamma$.

Lema 2.1. (Lema 2.3, p. 6, [8]) Para cada $\gamma > 0$ existe uma única solução $U(z; \gamma)$ de

$$u_{zz} + u(\gamma - u)(\gamma + u) = 0, \quad u(-\infty) = -\gamma, \quad u(+\infty) = +\gamma, \quad (2.7)$$

com $U(0; \gamma) = 0$. Além disso, temos as seguintes propriedades:

(i) $\frac{d}{dz}U(z; \gamma) > 0$ quando $z \in \mathbb{R}$;

(ii) existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que,

$$|U(z; \gamma) - \gamma| < C_1 e^{-C_2 z} \text{ se } z \geq 0,$$

$$|U(z; \gamma) + \gamma| < C_1 e^{C_2 z} \text{ se } z \leq 0.$$

(iii) $\frac{d^2}{dz^2}U(z; \gamma) \geq 0$ para $z \leq 0$ e $\frac{d^2}{dz^2}U(z; \gamma) \leq 0$ para $z \geq 0$.

Apresentamos aqui os seguintes resultados e definições que serão usados no decorrer desse trabalho:

Definição 2.3. Sejam h uma função real de classe C^2 e $p \in D_h$ onde D_h representa o domínio de h . Dizemos que p é um ponto crítico de h se $h'(p) = 0$ e p é ponto de máximo local de h se existir $r > 0$ tal que

$$h(x) \leq h(p)$$

para todo x em $]p - r, p + r[\cap D_h$, e neste caso $h''(p) \leq 0$. Por outro lado, dizemos que p é um ponto de mínimo local de h se existir $r > 0$ tal que

$$h(x) \geq h(p)$$

para todo x em $]p - r, p + r[\cap D_h$ e, neste caso, temos $h''(p) \geq 0$.

Definição 2.4. Escrevemos $f = O(g)$ quando $x \rightarrow 0$ desde que exista uma constante C tal que:

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

para todo x suficientemente pequeno. Escrevemos ainda $f = o(g)$ quando $x \rightarrow 0$ se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

3 Apresentação do Resultado Principal

O objetivo deste capítulo é contextualizar e apresentar o principal resultado deste trabalho. Muitos autores, por exemplo, [8] e suas referências, consideram o problema (1.1) assumindo $f(x, u) = -(u - a(x))(u - b(x))(u - c(x))$ tal que a, b, c sejam funções de classe C^2 e existe um número finito de pontos $\{x_i\}_{i=1}^N$ ($0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < 1$) que são raízes de $W(x, a(x)) - W(x, c(x))$ onde

$$W(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$$

e tais que

$$(A) \quad (-1)^i W(x, a(x)) - W(x, c(x)) > 0 \text{ para } x \in (x_i, x_{i+1}), \text{ com } i = 0, 1, \dots, N,$$

onde $x_0 = 0$ e $x_{N+1} = 1$.

Por exemplo, o teorema a seguir presente em [8], apresenta condições para se obter informações sobre a posição e direção das camadas de transição de uma solução estável.

Teorema 3.1. *Assuma (A) com $a \equiv 0$ e $c \equiv 1$. Para cada $\delta > 0$ e $\sigma > 0$, existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que, se $0 < \epsilon < \epsilon_0$, então existe uma solução estável $u_\epsilon(x)$ de (1.1) tal que $1 - \sigma < u(x) < 1$ em $(0, \bar{x}_1 - \delta) \cup (\bar{x}_2 + \delta, \bar{x}_3 - \delta) \cup \dots$, e $0 < u(x) < \sigma$ em $(\bar{x}_1 + \delta, \bar{x}_2 - \delta) \cup (\bar{x}_3 + \delta, \bar{x}_4 - \delta) \cup \dots$*

Podemos ver pelo teorema acima que o que decide o local e a direção das camadas de transição é o sinal de $W(x, 1) - W(x, 0)$. Aqui conseguimos informações sobre a localização de camadas de transição de soluções de (1.1) quando não há diferença entre $W(x, \alpha(x))$ e $W(x, -\alpha(x))$ para $x \in [0, 1]$. Uma conta simples mostra que, de fato, este é o caso assumido aqui. Importante observar, ao custo de um pouco mais de contas, podemos chegar em um resultado análogo ao nosso assumindo $f(x, u) = -(u - a(x))(u - b(x))(u - c(x))$. Neste caso, para termos $W(x, a(x)) - W(x, c(x)) = 0$ bastaria assumir $b(x) = (a(x) + c(x))/2$ para todo $x \in [0, 1]$. Aqui, optamos por fazer apenas o caso particular $c(x) = -a(x) = \alpha(x)$ e, no capítulo final desta dissertação comentamos um pouco mais sobre o caso geral.

Apresentamos agora as hipóteses sobre α .

$$(C.1) \quad \alpha(\cdot) \in C^2[0, 1];$$

(C.2) $\alpha(x)$ possui um mínimo local estrito não degenerado em um número finito de pontos $x_1, x_2, \dots, x_N \in (0, 1)$, isto é,

$$\alpha'(x_i) = 0 \text{ e } \alpha''(x_i) < 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.1)$$

Defina $L := \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, escolhamos um subconjunto qualquer \hat{L} de $L \cup \{0, 1\}$, tal que \hat{L} é composto por um número par de elementos. Assim, sendo representado por $\hat{L} = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_{2M}\}$, seja $\Omega_1 = \bigcup_{i=1}^M (x'_{2i-1}, x'_{2i})$ e $\Omega_2 = (0, 1) \setminus \bar{\Omega}_1$, onde $\bar{\Omega}$ denota o fecho de Ω . Para $\delta > 0$ pequeno, definimos $\Omega_i^\delta = \{x \in \Omega_i : d(x, \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega) > \delta\}$ ($i = 1, 2$).

Para uma melhor compreensão das definições acima, apresentaremos um exemplo que ilustra tais conjuntos.

Exemplo 3.1. *Suponha $L = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ e $\hat{L} = \{x'_1, x'_2, x'_3, x'_4\}$ tal que $x'_1 = 0$, $x'_2 = x_1$, $x'_3 = x_4$ e $x'_4 = x_6$. Neste caso, temos*

$$\Omega_1 = (0, x_1) \cup (x_4, x_6)$$

e

$$\Omega_2 = (x_1, x_4) \cup (x_6, 1).$$

Além disso,

$$\Omega_1^\delta = (0, x_1 - \delta) \cup (x_4 + \delta, x_6 - \delta)$$

e

$$\Omega_2^\delta = (x_1 + \delta, x_4 - \delta) \cup (x_6 + \delta, 1).$$

O principal teorema deste trabalho é apresentado abaixo.

Teorema 3.2. *Assuma (C.1) e (C.2). Sejam Ω_1 e Ω_2 fixados. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma família de soluções estáveis u_ϵ de (1.1), tal que:*

$$|\alpha(x) - u_\epsilon| < \sigma \text{ em } \Omega_1^\delta \text{ e } |-\alpha(x) - u_\epsilon| < \sigma \text{ em } \Omega_2^\delta,$$

onde $\sigma = \sigma(\epsilon)$ e $\delta = \delta(\epsilon)$ são números positivos satisfazendo $\sigma(\epsilon), \delta(\epsilon) \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Observação 3.1. *Seja x_i algum ponto em L . Se $x_i \in \hat{L}$, então o Teorema 3.2 implica que existe solução de (2.1) que possui camada de transição próxima a $x = x_i$. Além disso, se x_i é ponto de fronteira de um intervalo aberto em Ω_1 , então u_ϵ é monótona crescente próximo*

a $x = x_i$. Nesse sentido, o Teorema 3.2 implica que a camada de transição aparece próxima de algum ponto de L e que a camada pode tomar qualquer direção. Essas informações são os principais avanços deste trabalho pois complementam aquelas já obtidas em [8], cujo resultado principal pode ser visto no Teorema 3.1 desta dissertação.

Observação 3.2. Fusco e Hale [11] consideraram o problema relacionado, em que o coeficiente de difusão é não-homogêneo: $u_t = (c(x)u_x)_x + f(u)$, onde $f(u)$ é do tipo não-linear biestável de modo que os dois mínimos locais do potencial

$$W(u) = - \int_0^u f(s) ds$$

são iguais, como no nosso caso. Por um método completamente diferente, e usando a não-homogeneidade do coeficiente de difusão, eles mostraram a existência de soluções com multi-camadas de transição e uma solução estável com única camada de transição. A existência de soluções estáveis com multi-camadas não foi discutida.

4 Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentamos resultados preliminares essenciais para a demonstração do nosso teorema principal, o Teorema 3.2. Inicialmente, para simplificar, assumimos aqui $L = \{x_0\}$ com $\alpha'(x_0) = 0$ e $\alpha''(x_0) > 0$.

Lema 4.1. *Para ϵ suficientemente pequeno, ζ_1 é unicamente determinado por (4.6). Além disso, também satisfaz*

$$(i) \quad -\epsilon^{1-\sigma_1-\sigma_2-\delta(\epsilon)} < \zeta_1 + \epsilon^{1-\sigma_1} < -\epsilon^{1+\sigma_1-\sigma_2+\delta(\epsilon)},$$

onde δ é um valor positivo tal que $\delta(\epsilon) \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$

$$(ii) \quad -\alpha'(\zeta_1 + x_0) \geq \epsilon^{-1}U_z(\epsilon^{-1}\zeta_1 + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})).$$

Demonstração. Considere

$$F_1(x) = U(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) + \alpha(x) - \epsilon^{2-\sigma_2}.$$

Pelo item (iii) do Lema 2.1, observamos que:

$$U(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}) \text{ é convexo para } x \leq x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}.$$

De fato,

$$\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1} \leq 0 \Rightarrow \epsilon^{-1}x - \epsilon^{-1}x_0 \leq -\epsilon^{-\sigma_1} \Rightarrow \frac{\epsilon^{-1}x}{\epsilon^{-1}} \leq \frac{\epsilon^{-1}x_0}{\epsilon^{-1}} - \frac{\epsilon^{-\sigma_1}}{\epsilon^{-1}} \Rightarrow x \leq x_0 - \epsilon^{-\sigma_1+1}.$$

Notemos que $F_1(x)$ é também convexa em $(x_0 - 2\epsilon^{1-\sigma_1}, x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})$, pois $U'' > 0$ nesse intervalo, e $\alpha''(x_0) > 0$ quando $x \in (x_0 - 2\epsilon^{1-\sigma_1}, x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})$.

Além disso, $F_1(x)$ tem no máximo duas raízes em $(x_0 - 2\epsilon^{1-\sigma_1}, x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})$. Verifiquemos que de fato essas raízes existem. Seja k algum valor tal que $k < \sigma_2 - \sigma_1$ e $|k| < 2\sigma_1 - \sigma_2$. Escolhendo $x_k = x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1} - \epsilon^{1+\sigma_1-\sigma_2+k}$, e substituindo em

$$F_1(x) = U(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) + \alpha(x) - \epsilon^{2-\sigma_2},$$

segue que

$$\begin{aligned}
F_1(x_k) &= U(\epsilon^{-1}(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1} - \epsilon^{1+\sigma_1-\sigma_2+K} - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) + \alpha(x_k) - \epsilon^{2-\sigma_2} \\
&= U(-\epsilon^{-\sigma_1} - \epsilon^{\sigma_1-\sigma_2+k} + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) + \alpha(x_k) - \epsilon^{2-\sigma_2} \\
&= U(-\epsilon^{\sigma_1-\sigma_2+K}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) + \alpha(x_k) - \epsilon^{2-\sigma_2}.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.1 observemos que:

$$F_1(x_k) = -\alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) + \underbrace{\alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1} - \epsilon^{1+\sigma_1-\sigma_2+k})}_{x_k} - \epsilon^{2-\sigma_2} + O(\epsilon^2).$$

Usando a expansão de Taylor de α no ponto $x = x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}$, podemos notar:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_n(x), \text{ onde } R_n(x) = \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2 \text{ com } a \leq c \leq x$$

$$\alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1} - \epsilon^{1+\sigma_1-\sigma_2+k}) - \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) = \alpha'(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})(-\epsilon^{1+\sigma_1-\sigma_2+k}) + \frac{\alpha''(c)}{2!}(\epsilon^{1+\sigma_1-\sigma_2+k})^2.$$

Portanto

$$F_1(x_k) = -\alpha'(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})\epsilon^{1+\sigma_1-\sigma_2+k} - \epsilon^{2-\sigma_2} + \underbrace{o(\epsilon^2) + c_3\epsilon^{(1+\sigma_1-\sigma_2+k)^2}}_{o(\epsilon^{2+2\sigma_1-2\sigma_2+2k})}, \text{ onde } c_3 = \frac{\alpha''(c)}{2!}$$

$$F_1(x_k) = -\alpha'(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})\epsilon^{1+\sigma_1-\sigma_2+k} - \epsilon^{2-\sigma_2} + o(\epsilon^{2+2\sigma_1-2\sigma_2+2k}).$$

Aqui, devemos notar que:

$$-\alpha'(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})\epsilon^{1+\sigma_1-\sigma_2+k} = \alpha''(x_0)\epsilon^{2-\sigma_2+k} + o(\epsilon^{2-\sigma_2+k})$$

Portanto, visto que $|k| < 2\sigma_1 - \sigma_2$, podemos deduzir:

$$F_1(x_k) = \alpha''(x_0)\epsilon^{2-\sigma_2+k} - \epsilon^{2-\sigma_2} + o(\epsilon^{2-\sigma_2+k}).$$

Seja $k > 0$ fixado. Uma vez que $\alpha''(x_0) > 0$ é fácil ver que

$$F_1(x_k) < 0, \quad F_1(x_{-k}) > 0 \tag{4.1}$$

com $x_{-k} < x_k$. Consequentemente, usando o teorema do valor intermediário, podemos encontrar ζ_1 tal que $F(x_0 + \zeta_1) = 0$ e $x_0 + \zeta_1 \in (x_{-k}, x_k)$. De (4.1), podemos observar que $\frac{dF_1}{dx}(\zeta_1 + x_0) \leq 0$ que significa que $x_0 + \zeta_1$ é o menor ponto zero de F_1 em $(x_0 - 2\epsilon^{1-\sigma_1}, x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})$. Claramente ζ_1 satisfaz (ii), portanto a prova está completa.

□

Lema 4.2. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno existe um único $\zeta_2 \in (-\epsilon^{1-\sigma_1}, 0)$ satisfazendo $\alpha(\zeta_2 + x_0) + \epsilon^{2-\sigma_2} = U(\epsilon^{-1}\zeta_2 + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}))$.

Demonstração. Escolhendo

$$F_2(x) = \alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} - U(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})),$$

devemos mostrar que

$$F_2(x_0) < 0, \quad F_2(x_0 + \epsilon^{1-\sigma_1}) > 0 \text{ e } \frac{dF_2}{dx} < 0 \text{ em } (x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}, x_0)$$

para obtermos a conclusão. Pelo item (ii) do Lema 2.1, observemos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue que:

$$\begin{aligned} -U(\epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) + \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) &< C_1 e^{-C_2 \epsilon^{-\sigma_1}} \\ -U(\epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) &< -\alpha(x_0 - \epsilon^{x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}}) + C_1 e^{-C_2 \epsilon^{-\sigma_1}} \\ -U(-\epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) &= -\alpha(x_0 + \epsilon^{1-\sigma_1}) + O(e^{-C_2 \epsilon^{-\sigma_1}}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$F_2(x_0) = \alpha(x_0) + \epsilon^{2-\sigma_2} - U(\epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) = \alpha(x_0) + \epsilon^{2-\sigma_2} - \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) + O(e^{-C_2 \epsilon^{-\sigma_1}}).$$

Pela expansão de Taylor de α em x_0 , segue que

$$\alpha(x) = \alpha(x_0) + \alpha'(x_0)(x - x_0) + \frac{\alpha''(c_1)}{2!}(x - x_0)^2 \text{ com } a \leq c_1 \leq x$$

$$\alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) = \alpha(x_0) + \frac{\alpha''(c_1)\epsilon^{2-2\sigma_1}}{2!}$$

$$F_2(x_0) = \alpha(x_0) + \epsilon^{2-\sigma_2} - \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) + O(e^{-C_2 \epsilon^{-\sigma_1}})$$

$$F_2(x_0) = \epsilon^{2-\sigma_2} - \frac{1}{2}\alpha''(x_0)\epsilon^{2-2\sigma_1} + o(\epsilon^{2-2\sigma_1}) < 0,$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, pois $2\sigma_1 > \sigma_2$ e $\alpha''(x_0) > 0$. Portanto, verificamos que $F_2(x_0) < 0$. Observemos agora, que $F_2(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) > 0$. De fato, substituindo x por $x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}$ em

$$F_2(x) = \alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} - U(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})),$$

segue que

$$F_2(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) = \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) + \underbrace{\epsilon^{2-\sigma_2} U(\epsilon^{-1}(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1-x_0}) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}))}_{=0}.$$

Assim, obtemos

$$F_2(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) = \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) + \epsilon^{2-\sigma_2} > 0 \quad (4.2)$$

e concluímos que $F_2(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) > 0$.

Finalmente, pelo item (i) do Lema 2.1 segue que:

$$\frac{d}{dx} F_2(x) = \alpha'(x) - \epsilon^{-1} U_z(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) < 0, \quad 0 \leq x \leq x_0. \quad (4.3)$$

De fato, podemos notar que a desigualdade acima é satisfeita, pois pelo item (i) do Lema 2.1 temos que

$$U_z(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) > 0.$$

Como $\alpha'(0) \geq 0$ e $\alpha(x_0) = 0$ temos que $\alpha'(x) \leq 0$. Logo, concluímos que a desigualdade (4.3) é satisfeita. Portanto a prova está completa. \square

Proposição 4.1. *Assuma $\alpha'(0) \geq 0$ e $\alpha'(1) \geq 0$. Sejam σ_1 e σ_2 números positivos satisfazendo $\sigma_1 < 1$ e $\sigma_1 < \sigma_2 < 2\sigma_1$. Para ϵ suficientemente pequeno, existem $\zeta_1 = \zeta_1(\epsilon)$ e $\zeta_2 = \zeta_2(\epsilon)$ tais que $-2\epsilon^{1-\sigma_1} < \zeta_1 < -\epsilon^{1-\sigma_1} < \zeta_2 < 0$ e a seguinte função*

$$u^*(x) = \begin{cases} -\alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2}, & 0 \leq x \leq x_0 + \zeta_1, \\ U(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}, \alpha(x_0 - \epsilon^{-\sigma_1})), & x_0 + \zeta_1 \leq x \leq x_0 + \zeta_2 \\ \alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2}, & x_0 + \zeta_2 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4.4)$$

é uma super-solução para

$$\begin{cases} \epsilon^2 u_{xx} + u(\alpha(x) - u)(\alpha(x) + u) = 0, & 0 < x < 1 \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Na Proposição 4.1, devemos mencionar que ζ_1 e ζ_2 são escolhidos tal que $u^* \in P(x_0 + \zeta_1, x_0 + \zeta_2)$ satisfaz **(h.1)** e **(h.2)**. Mais precisamente ζ_1 é determinado por:

$$\zeta_1 = \min\{\zeta \in (-x_0, -\epsilon^{1-\sigma_1}) : -\alpha(x_0 + \zeta) + \epsilon^{2-\sigma_2} = U(\epsilon^{-1}\zeta + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}))\} \quad (4.6)$$

e ζ_2 é um número negativo satisfazendo $\zeta_2 \in (-\epsilon^{1-\sigma_1}, 0)$ e

$$\alpha(\zeta_2 + x_0) + \epsilon^{2-\sigma_2} = U(\epsilon^{-1}\zeta_2 + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})). \quad (4.7)$$

Demonstração da Proposição 4.1. Primeiro, mostraremos que u^* satisfaz **(h.1)** em cada intervalo, $I_1 := 0 \leq x \leq x_0 + \zeta_1$, $I_2 := x_0 + \zeta_1 \leq x \leq x_0 + \zeta_2$ e $I_3 := x_0 + \zeta_2 \leq x \leq 1$. Definimos $\Phi_1(u)(x) = \epsilon^2 u_{xx} + u(\alpha^2(x) - u^2)$. Em I_1 , podemos verificar que:

$$\begin{aligned} \Phi_1(u^*)(x) &= -\epsilon^2 \alpha''(x) + (-\alpha + \epsilon^{2-\sigma_2})(\alpha^2 - (-\alpha + \epsilon^{2-\sigma_2})^2) \\ &= -\epsilon^2 \alpha''(x) + (-\alpha + \epsilon^{2-\sigma_2})(\alpha^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\epsilon^{2-\sigma_2} + \epsilon^{4-2\sigma_2})) \\ &= -\epsilon^2 \alpha''(x) + (-\alpha + \epsilon^{2-\sigma_2})(2\alpha\epsilon^{2-\sigma_2} - \epsilon^{4-2\sigma_2}) \\ &= -\epsilon^2 \alpha''(x) - 2\alpha^2 \epsilon^{2-\sigma_2} + \alpha\epsilon^{4-2\sigma_2} + 2\alpha\epsilon^{4-2\sigma_2} - \epsilon^{6-3\sigma_2} < 0 \\ &= -\epsilon^2 \alpha''(x) - 2\alpha(x)\epsilon^{2-\sigma_2} + O(\epsilon^{4-2\sigma_2}) < 0. \end{aligned}$$

Observe que, na equação acima $O(\epsilon^{4-2\sigma_2}) = \alpha\epsilon^{4-2\sigma_2} + 2\alpha\epsilon^{4-2\sigma_2} - \epsilon^{6-3\sigma_2}$ a medida que ϵ se aproxima de 0. Vejamos que u^* satisfaz **(h.1)** no intervalo $I_2 = (\zeta_1 + x_0, \zeta_2 + x_0)$.

Sabemos que pelo Lema 2.1, $U(z; \gamma)$ é solução de

$$u_{zz} + u(\gamma^2 - u^2) = 0. \quad (4.8)$$

Como

$$u^* = U(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) \text{ em } I_2,$$

observamos que, substituindo u por u^* em $\Phi_1(u)(x) = \epsilon^2 u_{xx} + u(\alpha^2(x) - u^2)$ quando $x \in I_2$, segue que

$$\Phi_1(u^*)(x) = \epsilon^2 u_{xx}^* + u^*(\alpha^2(x) - (u^*)^2).$$

Logo, derivando u^* no intervalo I_2 , obtemos

$$\begin{aligned} u_x^* &= U_x \epsilon^{-1} = \frac{U_x}{\epsilon} \\ u_{xx}^* &= \frac{U_{xx}}{\epsilon^2} = \epsilon^2 U_{xx}^* = U_{xx}. \end{aligned}$$

Agora, substituindo u_{xx}^* segue que

$$\begin{aligned} \Phi_1(u^*)(x) &= \epsilon^2 u_{xx}^* + u^*(\alpha^2(x) - (u^*)^2) \\ \Phi_1(u^*)(x) &= U_{xx} + U(\alpha^2(x) - U^2). \end{aligned}$$

Como $U(z; \gamma)$ é solução de (4.8), segue que $U(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}))$ satisfaz

$$u_{xx} + u(\alpha^2((x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) - u^2) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Phi_1(u^*)(x) &= -U(\alpha^2(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}) - u^2) + u(\alpha^2(x) - u^2) \\
&= U(\alpha^2(x) - \alpha^2(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) \\
&= U(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) \{\alpha^2(x) - \alpha^2(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})\}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Aqui observemos que

$$\left\{ \begin{array}{ll} U(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) > 0 & \text{e } \alpha(x) < \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}), \\ & \text{se } x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1} < x < x_0 + \zeta_2, \\ \\ U(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) < 0 & \text{e } \alpha(x) > \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}), \\ & \text{se } x_0 + \zeta_1 < x < x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1} \end{array} \right.$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, o lado direito de (4.9) é negativo tal que **(h.1)** está verificado em cada I_i ($i = 1, 2, 3$).

Agora, vamos mostrar que u^* satisfaz **(h.1)** quando $u^*(x) = \alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2}$ no intervalo $I_3 = (\zeta_2 + x_0, 1)$ de (4.1). Para isso consideramos novamente $\Phi_1(u)(x) = \epsilon^2 u_{xx} + u(\alpha(x)^2 - u^2)$. Aplicando em u^* , obtemos

$$\begin{aligned}
\Phi_1(u^*)(x) &= \epsilon^2 \alpha''(x) + (\alpha + \epsilon^{2-\sigma_2})(\alpha^2 - (\alpha + \epsilon^{2-\sigma_2})^2) \\
&= \epsilon^2 \alpha'' + (\alpha + \epsilon^2)(\alpha^2 - \alpha^2 - 2\alpha\epsilon^{2-\sigma_2} - (\epsilon^{2-\sigma_2})^2) \\
&= \epsilon^2 \alpha'' - 2\alpha^2 \epsilon^{2-\sigma_2} - \alpha \epsilon^{2(2-\sigma_2)} - 2\alpha \epsilon^{2(2-\sigma_2)} - \epsilon^{3(2-\sigma_2)} \\
&= \epsilon^2 \alpha'' - 2\alpha^2 \epsilon^{2-\sigma_2} + O(\epsilon^{4-2\sigma_2}) < 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, garantimos que o item **(h.1)** está satisfeito. Para verificar que u^* satisfaz o item **(h.2)** precisamos utilizar o item (ii) do Lema 4.1 e a equação (4.3), os quais relembremos aqui:

$$-\alpha'(\zeta_1 + x_0) \geq \epsilon^{-1} U_z(\epsilon^{-1}\zeta_1 + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})),$$

$$\frac{d}{dx} F_2(x) = \alpha'(x) - \epsilon^{-1} U_z(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) < 0.$$

Primeiramente, consideramos o intervalo $[0, x_0 + \zeta_1]$ para verificar o item **(h.2)**.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0 + \zeta_1^+} u_x^*(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0 + \zeta_1^+} \epsilon^{-1} U_z(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) \\
&= \epsilon^{-1} U_z(\epsilon^{-1}\zeta_1 + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) \\
&\leq -\alpha'(\zeta_1 + x_0) \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0 + \zeta_1^-} -\alpha'(x) \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0 + \zeta_1^-} u_x^*(x).
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + \zeta_1^+} u_x^*(x) = \alpha'(\zeta_1 + x_0) \epsilon^{-1} U_z(\epsilon^{-1}\zeta_1 + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1}))$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + \zeta_1^+} u_x^*(x) = \epsilon^{-1} U_z(\epsilon^{-1}\zeta_1 + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) \leq -\alpha'(\zeta_1 + x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + \zeta_1^+} -\alpha'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + \zeta_1^-} u_x^*(x).$$

Analogamente ao resultado anterior, iremos garantir o item **(h.2)** utilizando o intervalo $[x_0 + \zeta_2, 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + \zeta_2^+} u_x^*(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + \zeta_2^+} \alpha'(x) = \alpha'(x_0 + \zeta_2)$$

Pelo item *(ii)* do lema (4.1), temos que

$$\begin{aligned}
\alpha'(x_0 + \zeta_2) &< \epsilon^{-1} U_z(\epsilon^{-1}\zeta_2 + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0 + \zeta_2^-} \epsilon^{-1} U_z(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})) \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0 + \zeta_2^-} u_x^*(x).
\end{aligned}$$

Vejamos agora que u^* satisfaz o item **(h.3)** pela hipótese de $\alpha'(0) \geq 0$ e $\alpha'(1) \geq 0$.

Para que u^* satisfaça **(h.3)** precisamos verificar que:

$$u_x^*(0) \leq d_0 \text{ e } u_x^*(1) \geq d_1.$$

Pelo problema (4.5), vimos que d_1 e d_0 são iguais, dessa forma podemos concluir que a solução u^* também será. Logo quando u^* torna-se super-solução de (4.5) ela também irá satisfazer o item **(h.3)**. \square

Proposição 4.2. *Assuma $\alpha'(0) < 0$ e $\alpha'(1) < 0$. Sejam σ_1 e σ_2 os mesmos valores da Proposição 4.1 e sejam σ_3 e σ_4 valores positivos satisfazendo $\sigma_4 < \sigma_3 < 2\sigma_4$ e $\sigma_3 < \sigma_2$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue que a seguinte função:*

$$u^* = \begin{cases} -\alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} + \epsilon^{-\sigma_3}(x - \epsilon^{\sigma_4})^2, & 0 \leq x \leq \epsilon^{\sigma_4}, \\ -\alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2}, & \epsilon^{\sigma_4} \leq x \leq \zeta_1 + x_0, \\ U(\epsilon^{-1}(x - x_0) + \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 - \epsilon^{1-\sigma_1})), & \zeta_1 + x_0 \leq x \leq \zeta_2 + x_0, \\ \alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2}, & \zeta_2 + x_0 \leq x \leq 1 - \epsilon^{\sigma_4}, \\ \alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} + \epsilon^{-\sigma_3}(x - 1 + \epsilon^{\sigma_4})^2, & 1 - \epsilon^{\sigma_4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

é uma super-solução de (4.5). Aqui, ζ_1 e ζ_2 são as mesmas constantes citadas na Proposição 4.1.

Demonstração. Precisamos verificar **(h.1)**, **(h.2)** e **(h.3)** em I_4 e I_5 , sendo $I_4 = (0, \epsilon^{\sigma_4})$ e $I_5 = (1 - \epsilon^{\sigma_4}, 1)$, pois u^* é idêntico com u^* em $(0, 1)/I_4 \cup I_5$. Para $u^* = -\alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} + \epsilon^{-\sigma_3}(x - \epsilon^{\sigma_4})^2$ de 4.2, certifiquemos que ela satisfaz o item **(h.1)**: Primeiro, vamos encontrar a derivada de segunda ordem para u^* , então, derivando u^* acima em relação a x , obtemos:

$$\begin{aligned} u_x^*(x) &= -\alpha'(x) + 2\epsilon^{-\sigma_3}(x - \epsilon^{\sigma_4})(1) \\ u_{xx}^*(x) &= -\alpha''(x) + 2(\epsilon^{-\sigma_3}(x))' + 2(\epsilon^{\sigma_4}(\epsilon^{-\sigma_3}))' \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$u_{xx}^*(x) = -\alpha''(x) + 2\epsilon^{-\sigma_3}.$$

Dessa forma, podemos observar que

$$\epsilon^2 u_{xx}^* + f(x, u^*) = -\epsilon^2 \alpha''(x) + 2\epsilon^{2-\sigma_3} + f(x, u^*).$$

Da desigualdade (2.6) de 2.2, obtemos a seguinte relação

$$-\epsilon^2 \alpha_{xx} + 2\epsilon^{2-\sigma_2} + f(x, u^*) \leq -\epsilon^2 \alpha_{xx} + 2\epsilon^{2-\sigma_2} - m_0 \epsilon^{2-\sigma_2} \leq 0.$$

Portanto, segue que o item **(h.1)** está satisfeito. Notemos que o item **(h.2)** também será satisfeito, pois como u^* é C^2 próximo ao intervalo $x = \epsilon^{\sigma_4}$ e $x = 1 - \epsilon^{\sigma_4}$, logo u^* será

contínua e os limites

$$\lim_{x \rightarrow a_i^+} u_x^*(x) \leq \lim_{x \rightarrow a_i^-} u_x^*(x)$$

serão iguais. Dessa forma, temos o item **(h.2)** satisfeito. Por fim, vamos mostrar que u^* satisfaz o item **(h.3)**. Similarmente a demonstração da Proposição 2.2 observemos que: Escolhendo $u^*(x) = -\alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} + \epsilon^{-\sigma_3}(x - \epsilon^{\sigma_4})^2$ de 4.2 segue que:

$$u_x^*(0) = -\alpha_x(0) - 2\epsilon^{\sigma_4-\sigma_3} \leq 0.$$

Logo, temos que $u_x^*(0) \leq d_0$ com $d_0 = 0$ é satisfeito em **(h.3)**. Analogamente iremos verificar que $u_x^*(1) \geq d_1$. Aplicando a derivada da u^* no ponto $x = 1$, obtemos

$$u_x^*(x) = \alpha'(x) + 2\epsilon^{-\sigma_3}(x - 1 + \epsilon^{\sigma_4})$$

$$u_x^*(1) = \alpha'(1) + 2\epsilon^{-\sigma_3}((1) - 1 + \epsilon^{\sigma_4})$$

$$u_x^*(1) = \alpha'(1) + 2\epsilon^{\sigma_4-\sigma_3} > 0.$$

Como $2\epsilon^{\sigma_4-\sigma_3} \rightarrow +\infty$, temos que a $u^*(1) > d_0$, satisfazendo assim o item **(h.3)**. Consideremos agora, da Proposição 4.2, a seguinte u^* :

$$u^*(x) = \alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} + \epsilon^{-\sigma_3}(x - 1 + \epsilon^{\sigma_4})^2.$$

Derivando a u^* acima, temos que $u_{xx}^*(x) = \alpha''(x)$. Assim pela desigualdade (2.6), apresentada na Proposição 2.2, segue que

$$\epsilon^2 \alpha''(x) + f(x, u^*) \leq 0.$$

Portanto, temos que a u^* acima satisfaz o item **(h.1)**. Como vimos anteriormente, sabemos que $u^* = \alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} + \epsilon^{-\sigma_3}(x - 1 + \epsilon^{\sigma_4})^2$ é C^2 próximo a $x = 1 - \epsilon^{\sigma_4}$, portanto será contínua, e assim, os limites

$$\lim_{x \rightarrow a_i^+} u_x^*(x) \leq \lim_{x \rightarrow a_i^-} u_x^*(x)$$

são iguais, satisfazendo assim o item **(h.2)**. Agora veriquemos que para u^* acima, o item **(h.3)** também será satisfeito. Derivando u^* , obtemos: $u_x^*(0) = \alpha'(0) - 2\epsilon^{-\sigma_3} + 2\epsilon^{2\sigma_4-\sigma_3}$. Portanto, como $\alpha'(0) < 0$ concluímos que

$$u_x^*(x) = \alpha'(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} + \epsilon^{-\sigma_3}(x - 1 + \epsilon^{\sigma_4})^2$$

satisfaz a condição **(h.3)**. Concluímos então, que em I_4 e I_5 , u^* satisfaz os itens **(h.1)**, **(h.2)** e **(h.3)**, como queríamos demonstrar. \square

Com uma demonstração análoga as demonstrações anteriores pode-se obter a seguinte.

Proposição 4.3. *Para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a seguinte u_* é uma sub-solução de 2.3:*

$$u_* = \begin{cases} -\alpha(x) - \epsilon^{2-\sigma_2} - \epsilon^{-\sigma_3}(x - \epsilon^{\sigma_4})^2 & 0 \leq x \leq \epsilon^{\sigma_4}, \\ -\alpha(x) - \epsilon^{2-\sigma_2}, & \epsilon^{\sigma_4} \leq x \leq \zeta_3 + x_0, \\ U(\epsilon^{-1}(x - x_0) - \epsilon^{\sigma_1}; \alpha(\epsilon^{1-\sigma_1+x_0})), & \zeta_3 + x_0 \leq x \leq \zeta_4 + x_0 \\ \alpha(x) - \epsilon^{2-\sigma_2}, & \zeta_4 + x_0 \leq x \leq 1 - \epsilon^{\sigma_4}, \\ \alpha(x) - \epsilon^{2-\sigma_2} - \epsilon^{-\sigma_3}(x - 1 + \epsilon^{\sigma_4})^2, & 1 - \epsilon^{\sigma_4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Onde $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_4$ são os mesmos valores das Proposições 4.1 e 4.2, e ζ_3 e ζ_4 são números positivos definidos pelas seguintes relações:

$$-\alpha(x_0 + \zeta_3) + \epsilon^{2-\sigma_2} = U(\epsilon^{-1}\zeta_3 - \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 + \epsilon^{1-\sigma_1}))$$

$$\zeta_4 = \max\{\zeta \in (\epsilon^{1-\sigma_1}, 1 - x_0); \alpha(x_0 + \zeta) - \epsilon^{2-\sigma_2} = U(\epsilon^{-1}\zeta - \epsilon^{-\sigma_1}; \alpha(x_0 + \epsilon^{1-\sigma_1}))\}.$$

5 Demonstração do Teorema Principal

Iniciamos com a prova para o caso $L = \{x_0\}$. Primeiramente supomos $\hat{L} = \{x_0, 1\}$. Das Proposições 4.1 e 4.2, podemos mostrar que existe uma super-solução u^* de (1.1) com as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \alpha(x) < u^*(x) < \alpha(x) + \epsilon^\rho, & x_0 \leq x \leq 1, \\ -\alpha(x) < u^*(x) < -\alpha(x) + \epsilon^\rho, & 0 \leq x \leq x_0 - 2\epsilon^{1-\sigma_1}, \end{cases} \quad (5.1)$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\rho > 0$ tal que $0 < \rho < \min\{2 - \sigma_2, -\sigma_3 + 2\sigma_4\}$. A verificação segue abaixo; faremos as contas seguindo a definição de u^* apresentada na Proposição 4.2, uma vez que as contas para u^* definida na Proposição 4.1 são casos particulares. Para $x_0 + \zeta_2 \leq x \leq 1 - \epsilon^{\sigma_4}$, temos $u^* = \alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2}$, e então

$$\alpha(x) < \alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} < \alpha(x) + \epsilon^\rho.$$

Como $\epsilon^{2-\sigma_2} > 0$ e $\rho > 0$, tal que $\rho < 2 - \sigma_2$, podemos observar que a desigualdade acima é satisfeita.

Para $1 - \epsilon^{\sigma_4} \leq x \leq 1$ temos $u^* = \alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} + \epsilon^{-\sigma_3}(x - 1 + \epsilon^{\sigma_4})^2$ e segue que

$$\begin{aligned} u^*(x) &= \alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} + \epsilon^{-\sigma_3}(x - 1 + \epsilon^{\sigma_4})^2 \\ &< \alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} + \epsilon^{-\sigma_3+2\sigma_4} \\ &< \alpha(x) + \epsilon^\rho. \end{aligned}$$

Portanto, temos que a desigualdade $\alpha(x) < u^* < \alpha(x) + \epsilon^\rho$ é satisfeita no intervalo $x_0 \leq x \leq 1$. Verifiquemos agora que no intervalo $0 \leq x \leq x_0 - 2\epsilon^{1-\sigma_1}$ de (5.1), a desigualdade também é satisfeita. Para $u^* = -\alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2}$ nesse intervalo, podemos notar claramente que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\rho > 0$ tal que $\rho < 2 - \sigma_2$, temos que as desigualdades $-\alpha(x) < -\alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2}$ e $-\alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} < -\alpha(x) + \epsilon^\rho$ são satisfeitas. Para $0 \leq x \leq \epsilon^{\sigma_4}$ temos $u^* = -\alpha(x) + \epsilon^{2-\sigma_2} + \epsilon^{-\sigma_3}(x - \epsilon^{\sigma_4})^2$, e a desigualdade ocorre de maneira semelhante com argumento semelhante àquele usado anteriormente (no intervalo $1 - \epsilon^{\sigma_4} \leq x \leq 1$).

Portanto, concluímos que a desigualdade

$$-\alpha(x) < u^*(x) < -\alpha(x) + \epsilon^\rho, \quad 0 \leq x \leq x_0 - 2\epsilon^{1-\sigma_1}$$

é satisfeita. Similarmente, a Proposição 4.3 nos permite encontrar uma sub-solução u_* , satisfazendo:

$$\begin{cases} \alpha(x) - \epsilon^\rho < u_*(x) < \alpha(x) & \text{para } x_0 + 2\epsilon^{1-\sigma_1} \leq x \leq 1 \\ -\alpha(x) - \epsilon^\rho < u_*(x) < -\alpha(x) & \text{para } 0 \leq x \leq x_0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Uma vez que a Proposição 2.1 assegura a existência de uma solução estável u tal que $u_* \leq u \leq u^*$, desse modo, mostraremos que u satisfaz:

$$\begin{cases} |u(x) - \alpha(x)| < \epsilon^\rho & \text{para } x_0 + 2\epsilon^{1-\sigma_1} \leq x \leq 1 \\ |u(x) + \alpha(x)| < \epsilon^\rho & \text{para } 0 \leq x \leq x_0 - 2\epsilon^{1-\sigma_1}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Considerando $u_* \leq u \leq u^*$ e as desigualdades de (5.1) e (5.2), observe que

$$\alpha(x) - \epsilon^\rho \leq u_* \leq u \leq u^* \leq \alpha(x) + \epsilon^\rho.$$

Subtraindo α em todas as partes, obtemos

$$-\epsilon^\rho \leq u_* - \alpha(x) \leq u(x) - \alpha(x) \leq u^* - \alpha(x) \leq \epsilon^\rho.$$

Portanto, temos a relação $|u(x) - \alpha(x)| < \epsilon^\rho$ satisfeita. Verifiquemos agora que $|u(x) + \alpha(x)| < \epsilon^\rho$. Considerando a u_* no intervalo $0 \leq x \leq x_0$ de (5.1) e a u^* no intervalo $0 \leq x \leq x_0 - 2\epsilon^{1-\sigma_1}$ de (5.2), segue que:

$$-\alpha(x) - \epsilon^\rho \leq u_* \leq u \leq u^* \leq -\alpha(x) + \epsilon^\rho.$$

Adicionando $\alpha(x)$ em todas as partes, obtemos

$$-\epsilon^\rho \leq u_* + \alpha(x) \leq u(x) + \alpha(x) \leq u^* + \alpha(x) \leq \epsilon^\rho.$$

Logo, concluímos que, de fato, a relação $|u(x) + \alpha(x)| < \epsilon^\rho$ de (5.3) está satisfeita.

Portanto, a prova está completa para $\hat{L} = \{x_0, 1\}$, $\Omega_1 = (x_0, 1)$ e $\Omega_2 = (0, x_0)$. Para $\hat{L} = \{0, x_0\}$, consideremos somente (4.5) com u e α substituídos por $v(x) = u(1-x)$ e $\beta(x) = \alpha(1-x)$ respectivamente. No procedimento acima podemos visualizar a existência de soluções estáveis v para:

$$\begin{cases} \epsilon^2 v_{xx} + v(\beta^2(x) - v^2) = 0 & \in (0, 1) \\ v_x(0) = v_x(1) = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

tal que v é monótona crescente próximo a $x = 1 - x_0$ e v satisfaz (5.3) com α e x_0 substituídos por β e $1 - x_0$. Portanto, $u(x) = v(1 - x)$ torna-se a solução desejada.

Finalmente, estudamos o caso quando L é composto de muitos pontos de mínimos locais. Tome $\hat{L} = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_{2N}\}$. Os argumentos anteriores nos permitem construir uma super-solução u^* e uma sub-solução u_* adequadas. Por exemplo, em (x'_1, x'_2) com $0 < x'_1 < x'_2 < 1$, uma super-solução é definida por $u^*(x) = \alpha(x) + \epsilon^{1-\sigma_2}$ e uma sub-solução u_* é definida por $u_*(x) = \alpha(x) - \epsilon^{1-\sigma_2}$ em $(x'_1 + 2\epsilon^{1-\sigma_1}, x'_2 - 2\epsilon^{1-\sigma_1})$ com $\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 > 0$. Observemos que se x está em uma vizinhança de $x = x'_i$, então u^* e u_* são definidas com o uso de dilatação, translação ou reflexão adequada da solução U para (2.7) com $U(0; \gamma) = 0$. Portanto, a prova está completa.

6 Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho estudamos um problema de reação e difusão com não-linearidade heterogênea do tipo biestável $f(x, u) = u(\alpha^2(x) - u^2)$. Através da técnica conhecida por sub e super-solução, obtemos soluções estáveis desenvolvendo camadas de transição interna quando determinado parâmetro tende a zero. Vimos que tais camadas podem aparecer próximas aos pontos de mínimos locais de $\alpha(x)$ e também conseguimos valiosas informações acerca da direção da transição.

Gostaríamos aqui de indicar alguns pontos que podem ser abordados a partir da teoria estudada neste trabalho e que, aparentemente, ainda aparecem em aberto.

- O mesmo problema, mas com coeficiente de difusibilidade não-constante, digamos $k(x)$, poderia ser considerado uma vez que tal coeficiente desempenha papel fundamental quanto a existência e comportamento de soluções estáveis; aplicar este método e entender as relações entre $k(x)$ e $\alpha(x)$ na procura por soluções estáveis desenvolvendo camadas de transição parece um ótimo tema de pesquisa.
- É bem conhecido que problemas deste tipo quando considerados em uma bola n -dimensional, apenas possuem soluções estáveis com simetria radial (desde que as heterogeneidades do problema também sejam radiais). Daí, na procura por tais soluções, o problema se torna unidimensional, de modo que se torna viável estudá-lo usando as técnicas abordadas aqui. Situação similar ocorre para problemas postos sob superfícies de revolução imersas em \mathbb{R}^3 .
- Uma leitura atenta no texto mostra que as condições de fronteira de Neumann não parecem determinantes para o resultado principal, dessa forma pode-se considerar estudar este problema adotando outras condições de fronteira, como as condições de Dirichlet ou condições mistas.

Por fim, é importante destacar que, com um pouco mais de contas, seria possível generalizar o resultado aqui apresentado para uma não-linearidade do tipo $f(x, u) = (u - a(x))(b(x) - u)(u - c(x))$ com $a(x) < b(x) = \frac{a(x)+c(x)}{2} < c(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. A presente dissertação tratou o caso particular $c(x) = -a(x) = \alpha(x)$, então, vale observar

que, no caso geral, as camadas de transição aparecem próximas aos mínimos locais de $c(x) - a(x)$. Os detalhes para esse caso podem ser conferidos na seção final de [8].

Referências

- [1] D. G. Aronson and H. F. Weinberger, “Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics,” *Advances in Mathematics*, vol. 30, no. 1, pp. 33–76, 1978.
- [2] S. M. Allen and J. W. Cahn, “A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening,” *Acta metallurgica*, vol. 27, no. 6, pp. 1085–1095, 1979.
- [3] A. S. do Nascimento and M. Sônego, “Stable equilibria of a singularly perturbed reaction–diffusion equation when the roots of the degenerate equation contact or intersect along a non-smooth hypersurface,” *Journal of Evolution Equations*, vol. 16, no. 2, pp. 317–339, 2016.
- [4] K. Nakashima, “Multi-layered stationary solutions for a spatially inhomogeneous allen–cahn equation,” *Journal of Differential Equations*, vol. 191, no. 1, pp. 234–276, 2003.
- [5] K. Nakashima and K. Tanaka, “Clustering layers and boundary layers in spatially inhomogeneous phase transition problems,” *Annales de l’I.H.P. Analyse non linéaire*, vol. 20, no. 1, pp. 107–143, 2003.
- [6] J. Yang and X. Yang, “Clustered interior phase transition layers for an inhomogeneous allen-cahn equation in higher dimensional domains,” *Communications on Pure & Applied Analysis*, vol. 12, no. 1, p. 303, 2013.
- [7] C. V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. Plenum Press, New York, Springer New York, NY, 1 ed., 1992.
- [8] K. Nakashima, “Stable transition layers in a balanced bistable equation,” *Differential and Integral Equations*, vol. 13, no. 7-9, pp. 1025–1038, 2000.
- [9] H. Matano, “Existence of nontrivial unstable sets for equilibriums of strongly order-preserving systems,” *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, vol. 30, pp. 645–673, 1984.

-
- [10] D. H. Sattinger, “Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems,” *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 21, no. 11, pp. 979–1000, 1972.
- [11] G. Fusco and J. K. Hale, “Stable equilibria in a scalar parabolic equation with variable diffusion,” *SIAM journal on mathematical analysis*, vol. 16, no. 6, pp. 1152–1164, 1985.