

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PRÓ-DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estudo do Acoplamento Acústico-Estrutural de
uma Estrutura do Tipo Casca Cilíndrica
Uniforme

Autor: **Marco Aurélio Rodrigues de Paula**

Orientador: **Prof. Dr. José Juliano de Lima Jr.**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PRÓ-DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estudo do Acoplamento Acústico-Estrutural de
uma Estrutura do Tipo Casca Cilíndrica
Uniforme

Autor: **Marco Aurélio Rodrigues de Paula**

Orientador: **Prof. Dr. José Juliano de Lima Jr.**

Curso: **Engenharia Mecânica**

Área de Concentração: **Projeto e Fabricação**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Itajubá, 2003

M.G. – Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PRÓ-DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estudo do Acoplamento Acústico-Estrutural de
uma Estrutura do Tipo Casca Cilíndrica
Uniforme

Autor: Marco Aurélio Rodrigues de Paula

Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Jr.

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando José de Oliveira Moreira
DTE/GME/EMBRAER

Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida
DME/IEM/UNIFEI

Prof. Dr. José Juliano de Lima Jr., Presidente
DME/IEM/UNIFEI

Itajubá, 10 de Outubro de 2003.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus Pais José Aurélio de Paula e Cleide Marli de Paula, aos meus irmãos Guilherme Rodrigues de Paula e Jaqueline Marli de Paula, meu sobrinho Pedro Henrique, meu cunhado Luis Augusto, e a minha namorada Adriana Vasconcelos de Almeida

Agradecimentos

Ao meu Orientador, Prof. Dr. José Juliano de Lima Jr., pela competência, dedicação, paciência, amizade e por me apresentar esta fascinante área de estudo.

Aos amigos da “pós”, pelo incentivo, apoio, colaboração e amizade.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da UNIFEI, Professores e Funcionários, pela oportunidade e apoio na realização deste trabalho.

Aos meus pais, José Aurélio e Cleide, que me proporcionaram a oportunidade de formação pessoal e profissional e me incentivaram durante todo o tempo.

Aos meus irmãos, Guilherme e Jaqueline, e meu cunhado Luis Augusto, pelo apoio e ajuda.

À minha prima Danielle pela ajuda e companhia em Itajubá.

À minha namorada Adriana pelo apoio final

À CAPES, através do Programa de bolsas, pelo apoio financeiro.

“Algumas pessoas observam o mundo e se perguntam 'por quê?'. Outras pessoas observam o mundo e se perguntam 'por que não?' ”

(George Bernard Shaw)

Índice

Capítulo 1	1
Estado da arte	1
1.1 MOTIVAÇÃO DO TRABALHO	1
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
1.2.1 CAVIDADE ACÚSTICA	2
1.2.2 ANÁLISE DE VIBRAÇÃO EM CASCAS CILÍNDRICAS	2
1.2.3 ACOPLAMENTO ACÚSTICO-ESTRUTURAL	3
1.2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	4
1.3 OBJETIVO DA PESQUISA	5
1.4 CONTEÚDO	5
Capítulo 2	7
Equação da Onda Acústica	7
2.1 INTRODUÇÃO	7
2.2 A EQUAÇÃO DE ESTADO	9
2.3 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE	12
2.4 EQUAÇÃO DE EULER	15
2.5 EQUAÇÃO DE ONDA LINEAR	18
2.6 EQUAÇÃO DE ONDA EM COORDENADAS CILÍNDRICAS	19
2.7 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA	21
2.7.1 CONDIÇÃO DE CONTORNO E CONDIÇÃO INICIAL	24
2.7.2 FREQUÊNCIA NATURAL	29

Capítulo 3	33
Equação Dinâmica da Casca Cilindrica	33
3.1 EQUAÇÕES DE CASCA	33
3.1.1 CONSIDERAÇÕES BÁSICAS	33
3.1.2 SISTEMA DE COORDENADAS	34
3.1.3 RELAÇÕES ENTRE DEFORMAÇÃO E DESLOCAMENTO	36
3.1.4 RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO	40
3.1.5 FORÇAS E MOMENTOS RESULTANTES	40
3.1.6 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	42
3.1.7 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO	45
Capítulo 4	51
Acoplamento Acústico-Estrutural	51
Capítulo 5	57
Metodologia e Simulação no Ansys	57
5.1 CAMPO ACÚSTICO	58
5.2 RESPOSTA ESTRUTURAL NO VÁCUO	60
5.3 ACOPLAMENTO ACÚSTICO – ESTRUTURAL	61
Capítulo 6	63
Análise dos Resultados	63
6.1 CAMPO ACÚSTICO	63
6.1.1 MODELO 1	65
6.1.2 MODELO 2	68
6.2 RESPOSTA DINÂMICA ESTRUTURAL NO VÁCUO	68
6.2.1 MODELO 1	69
6.3 ACOPLAMENTO ACÚSTICO – ESTRUTURAL	75
6.3.1 MODELO 1	75
6.3.2 MODELO 2	77

Capítulo 7	79
Conclusões e Perspectivas Futuras	79
7.1 PERSPECTIVAS FUTURAS	79
7.2 SUGESTÕES DE NOVOS TRABALHOS	80
Referências Bibliográficas	81
Apêndice A	87
Função de Bessel e suas Propriedades	87
FUNÇÃO DE BESSEL	87
Apêndice B	93
Construção do Modelo no ANSYS	93
MODELO	93
INICIANDO PROGRAMA	93
CONSTRUINDO GEOMETRIA	94
ATRIBUINDO ELEMENTOS E MATERIAIS	96
GERANDO A MALHA	97
APLICANDO CARREGAMENTO	97
OBTENDO A SOLUÇÃO	98
REVENDO OS RESULTADOS	99
FLUID30 – FLUIDO ACÚSTICO 3D	99
DESCRIÇÃO DO ELEMENTO	99
FLUID30 SUMÁRIO DE ENTRADA	101
DADOS DE SAÍDA	102
CONSIDERAÇÕES E RESTRIÇÕES	104
SHELL63 – CASCA ELÁSTICA	104
DESCRIÇÃO DO ELEMENTO	104
DADOS DE ENTRADA	105
SHELL63 SUMÁRIO DE ENTRADA	107
DADOS DE SAÍDA	108

CONSIDERAÇÕES E RESTRIÇÕES -----	111
RESTRIÇÕES DO PRODUTO-----	112
ANSYS/PROFESSIONAL. -----	112
Apêndice C _____	113
Elementos Finitos _____	113
MODELO ACÚSTICO-----	114
MODELO ESTRUTURAL -----	116
ACOPLAMENTO -----	118

Resumo

PAULA, M. R. de (2003), *Estudo do Acoplamento Acústico-Estrutural de uma Estrutura do Tipo Casca Cilíndrica Uniforme*, Dissertação de Mestrado, Depto. de Engenharia Mecânica, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 162p.

Nos últimos anos tem aumentado o interesse dos pesquisadores, refletido pelo grande número de publicações, dedicadas ao controle ativo de ruído, em estruturas como aeronáuticas e veiculares. Nesse sentido o estudo da interação estrutura e campo acústico é de fundamental importância na compreensão e aplicação da técnica de controle ativo.

Este trabalho apresenta um estudo do acoplamento estrutura e campo acústico, aplicado a uma estrutura do tipo casca cilíndrica uniforme. Equaciona-se esse comportamento de interação, objetivando o conhecimento do fator de acoplamento. Utiliza-se o programa ANSYS para obtenção das frequências naturais e dos modos acústicos, estruturais. Mostra-se que os modos estruturais e acústicos atuam em faixas diferentes de frequências, que o número de modos de vibração estrutural é maior que o número de modos acústicos e que as frequências naturais de uma estrutura do tipo casca cilíndrica não crescem com o aumento dos índices modais.

Palavras Chaves

Interação fluido-estrutural, acústica, cascas, vibrações mecânicas

Abstract

Paula, M. R. de (2003), *Study Of The Structural-Acoustic Interaction In An Uniform Cylinder Shell Structure*. MSc. Thesis, Mechanical Department, Federal University of Itajubá, 162p.

In the last years it has been increasing the researchers' interest, contemplated by the great number of publications, dedicated to the active control of noise, in structures as aeronautics and vehicular. In that sense the study of the interaction between structures and acoustic fields is of fundamental importance in the understanding and the application of the technique of active control.

This work presents a study of the coupling between structures and acoustic fields, applied in a structure of uniform cylindrical shell type. The ANSYS is used to obtaining the natural frequencies and the acoustic and structural modes. It is shown that the structural and acoustic modes act in different frequencies, that the number of modes of structural vibration is larger than the number of acoustic modes and that the natural frequencies of a structure don't increase with the increase of the modal indexes.

Key Words

Fluid-structural interaction, acoustics, shells, mechanical vibrations

Lista de Figuras

Figura 1 – Volume fluido-----	11
Figura 2 – Fluxo de massa na direção x em um volume fluido-----	13
Figura 3 – Volume fluido sob a ação de forças devido a pressão -----	15
Figura 4 - Função Bessel de segundo tipo e ordem 0 -----	27
Figura 5 - Função Bessel de primeiro tipo e ordem 0-----	28
Figura 6 - Elemento Infinitesimal de Casca -----	35
Figura 7 - Forças Resultantes no Elemento Casca-----	42
Figura 8 - Momentos Resultantes no Elemento Casca-----	42
Figura 9 – Sistema de coordenadas-----	45
Figura 10 – Modos circunferenciais-----	49
Figura 11 – Esquema de acoplamento acústico Estrutural -----	51
Figura 12 – Região de acoplamento do deslocamento da casca, w, e da pressão acústica, p--	51
Figura 13 – Função de Bessel de 1º tipo de ordem 0, 1 e 2 respectivamente -----	54
Figura 14 –Dimensões da estrutura do tipo casca cilíndrica -----	57
Figura 15 – Modelo em Elementos Finitos da cavidade cilíndrica-----	59
Figura 16 – Uso de elementos tetraédricos -----	59
Figura 17 – Uso de elementos triangulares-----	60
Figura 18 – Condição de contorno, deslocamento nulo, nas faces $x = 0$ e $x = L$ -----	61
Figura 19 – Acoplamento fluido-estrutura no ANSYS -----	62
Figura 20 –modo acústico longitudinal -----	63
Figura 21 – modo acústico circunferencial-----	64
Figura 22 – modo acústico radial -----	64
Figura 23 – modo acústico circunferencial $m=1$ -----	66
Figura 24 – modo acústico circunferencial $m=2$ -----	66
Figura 25 – modo acústico circunferencial $m=3$ -----	67
Figura 26 –modo acústico circunferencial $m=4$ -----	67

Figura 27 – modo estrutural circunferencial $m=4$ -----	69
Figura 28 – modo estrutural circunferencial $m=5$ -----	70
Figura 29 – modo estrutural circunferencial $m=3$ -----	70
Figura 30 – modo estrutural circunferencial $m=6$ -----	71
Figura 31 – modo estrutural circunferencial $m=7$ -----	71
Figura 32 – modo estrutural circunferencial $m=2$ -----	72
Figura 33 – modo estrutural circunferencial $m=8$ -----	72
Figura 34 – modo estrutural circunferencial $m=9$ -----	73
Figura 35 – modo estrutural circunferencial $m=10$ -----	73
Figura 36 – modo estrutural circunferencial $m=11$ -----	74
Figura 37 – modo estrutural circunferencial $m=12$ -----	74
Figura 38 – modo de vibração do sistema acoplado – 112 Hz-----	77
Figura 39 – modo de vibração do sistema acoplado – 225 Hz-----	77
Figura 40 - Função Bessel de primeiro tipo e ordem $n = 0$ -----	90
Figura 41 - Função Bessel de primeiro tipo e ordem $n = 1$ -----	90
Figura 42 - Função Bessel de primeiro tipo e ordem $n = 2$ -----	90
Figura 43 - Função Bessel de primeiro tipo e ordem $n = 3$ -----	91
Figura 44 – criação dos Keypoints e das linhas-----	96
Figura 45 – criação das áreas e dos primeiros volumes por extrusão -----	96
Figura 46 – criação dos volumes intermediários e volumes finais -----	96
Figura 47 – Elemento acústico fluido 3D, FLUID30 -----	100
Figura 48 – Elemento para a casca elástica, SHELL63-----	105
Figura 49 – Tensões no elementos casca, SHELL63-----	109
Figura 50 – Fluid-30 3D – Elemento para o fluido acústico -----	115
Figura 51 - Shell-63 elemento de cascas elástica-----	117

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Modos e frequências naturais de uma cavidade cilíndrica (L=20(m) e R = 1 (m)), com ar de referência-----	30
Tabela 2 – Modos acústicos circunferenciais da cavidade -----	31
Tabela 3 – Propriedades dos Materiais Utilizados nos Modelos -----	58
Tabela 4 – Dimensões dos Modelos-----	58
Tabela 5 – Propriedades do Modelo em Elementos Finitos -----	58
Tabela 6 – Propriedades do Modelo de Elementos Finitos-----	60
Tabela 7 – Propriedades do Modelo de Elementos Finitos-----	61
Tabela 8 – Comparação das frequências naturais acústicas de uma cavidade cilíndrica, obtidas analiticamente e pelo ANSYS (L=1,524 (m) e R = 0,3 (m))-----	65
Tabela 9 – Comparação das frequências naturais acústicas de uma cavidade cilíndrica, obtidas analiticamente e pelo ANSYS (L=20 (m) e R = 1 (m))-----	68
Tabela 10 – Frequências naturais de uma estrutura do tipo casca cilíndrica no vácuo, obtidas pelo ANSYS (L=20 (m), R = 1 (m) e h = 0,01(m)) e por Zhang (2001) -----	69
Tabela 11 – Frequências naturais do sistema estrutural no vácuo e acoplado ao campo acústico (L=1,524 (m), R = 0,3 (m) e h = 2,4 (mm))-----	75
Tabela 12 – Frequências naturais acopladas, desacopladas para uma estrutura do tipo casca cilíndrica e o campo acústico interno (L=1,524 (m), R = 0,3 (m) e h = 2,4 (mm)) -----	76
Tabela 13 – Frequências naturais do sistema estrutural desacoplado e acoplado (L=20 (m), R = 1 (m) e h = 0,01(m)) -----	78
Tabela 14 – Frequências naturais do sistema estrutural desacoplado e acoplado Zhang, (2001).78	
Tabela 15 – Pontos de inflexão, χ_{mn} , de $J_m : J'_m = 0$ -----	91
Tabela 16 – Definição da saída do elemento FLUID30 -----	103
Tabela 17 – FLUID30, Item e seqüência numérica para os comandos ETABLE e ESOL --	103
Tabela 18 – Definições de saída do elemento SHELL63-----	109
Tabela 19 – Saídas diversas para o elemento SHELL63 -----	110
Tabela 20 – SHELL63, Item e seqüência numérica para os comandos ETABLE e ESOL --	110

Simbologia

Caracteres Latinos

Variável	Descrição	Dimensão
\vec{r}	posição de equilíbrio de uma partícula fluida em (x,y,z)	[m]
\hat{x} , \hat{y} e \hat{z}	representam vetores unitários nas direções x, y e z, respectivamente	[m]
\vec{u}	velocidade de partícula	[m/s]
s	condensação em um ponto	-
P	pressão instantânea em um ponto	[Pa]
P_0	pressão de equilíbrio constante de um ponto	[Pa]
p	Pressão acústica de um ponto	[Pa]
T	Temperatura em graus Celsius	[°C]
T_k	temperatura em Kelvins	[K]
t	tempo	[S]
c	Velocidade de fase da onda	[m/s]
R	constante dos gases	[kj/kgK]
c_p	calor específico a pressão constante	[kj/kgK]
c_v	calor específico a volume constante	[kj/kgK]
β	módulo adiabático de Bulk	
F	força	[N]

Y	módulo de Young	
\vec{a}	aceleração	[m/s ²]
\hat{e}_i	vetor unitário	-
H	espessura da casca	[m]
R	Raio do cilindro	[m]
L	Comprimento do cilindro	[m]
e_i	deformação	
A_i	Parâmetros de Lamé	
N_i	força resultante nas faces do elemento estrutural	[N]
M_i	momento resultante nas faces do elemento estrutural	[Nm]
\vec{q}	força externa aplicada	[N]
\vec{m}	momento externo aplicado	[Nm]
k_i	curvatura da superfície de referência	
U_i, V_i, W_i	amplitudes de ondas	
U, v, w	deslocamentos da estrutura	[m]

Caracteres Gregos

Variável	Descrição	Dimensão
ξ	deslocamento da partícula da posição de equilíbrio	[m]
ρ	densidade instantânea em um ponto	[kg/m ³]
ρ_0	densidade de equilíbrio constante do fluido	[kg/m ³]
Φ	velocidade potencial	[m/s]
γ	relação entre calores específicos	-
ω	freqüência angular	[rad/s]
χ_{ij}	raiz da derivada da Função de Bessel	-
σ	tensão	[N/m ²]
θ_i	rotações da normal em relação a superfície média	[rad]
ε_i	deformação	
μ	coeficiente de poisson	-
γ_{ij}	fator de acoplamento	

Índices Inferiores

Variável	Descrição
α, β	coordenadas circulares
m, n	índices modais
x, y, z, r, θ	direções

Operadores

Variável	Descrição
$\partial, i = \partial/\partial i$	derivada parcial
$(\dot{*})$	derivada primeira no tempo
$(\ddot{*})$	derivada segunda no tempo
$(\overset{\cdot\cdot}{*})$	derivada terceira no tempo
$(*)^T$	transposição
$(*)^{-1}$	inversão
$\nabla(*) = grad(*)$	gradiente
$\nabla \cdot (*) = div(*)$	divergente
$\nabla^2(*) = \Delta(*)$	Laplaciano
$\ *\ $	normal de um vetor ou matriz

Caracteres Gregos

Variável	Descrição	Dimensão
$\vec{\xi} = \xi_x \hat{x} + \xi_y \hat{y} + \xi_z \hat{z}$	deslocamento da partícula da posição de equilíbrio	
ρ	densidade instantânea em um ponto	
ρ_0	densidade de equilíbrio constante do fluido	
$\Phi \quad \vec{u} = \nabla \Phi$	velocidade potencial	

CAPÍTULO 1

ESTADO DA ARTE

1.1 MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

Em um mundo onde altos níveis de ruídos estão sempre presentes, as pessoas se sentem cada vez mais desconfortáveis. O impacto na saúde humana ainda não é completamente conhecido. Os danos a longo prazo ao corpo humano e ao sistema nervoso ainda são incertos, existe um consenso considerando o ruído prejudicial a saúde. A redução do ruído é uma tarefa de grande importância, carros, trens, aviões, máquinas, eletrodomésticos e diversas outras fontes emitem ruído em níveis que trazem uma sensação de grande desconforto.

O ruído no interior da cabine é um problema presente na maioria das aeronaves. O nível de conforto dos passageiros entra em confronto com o custo, complexidade e limitações das tecnologias de redução de ruído. Esta situação está presente em numerosos projetos onde estão envolvidos motores de alta potência.

Enquanto a demanda por melhores condições para os passageiros persistir, o desenvolvimento e aprimoramento das tecnologias para controle de ruído em veículos e aeronaves permanecerão como importante área de pesquisa. O controle ativo de ruído é uma solução promissora para o problema de ruído no interior da cabine. Altos níveis de ruído em aeronaves, especialmente os originados das vibrações vindas dos motores e da passagem das pás da hélice, são frequentemente mais severos em baixas frequências, onde as técnicas de controle passivo não são eficientes. Entretanto, é exatamente nesta faixa de frequência que o controle ativo tem demonstrado os melhores resultados (Paxton, 1997). Além de apresentar

uma solução atrativa, o sistema de controle ativo adiciona apenas uma leve penalidade em termos de necessidade de peso e espaço adicionais.

Uma clara compreensão do mecanismo de transmissão e radiação sonora no sistema acoplado acústico-estrutural é essencial para o projeto de um eficiente sistema de redução de ruído, de natureza ativa ou passiva. Recentes pesquisas têm demonstrado sucesso no controle do ruído em cabines de aeronaves através da aplicação de forças e momentos diretamente na estrutura da fuselagem (Paxton, 1997), porém a prática sugere não aplicar diretamente à estrutura sem uma análise do efeito na vida em fadiga da aeronave. Para o melhor posicionamento dos atuadores nestes sistemas é preciso separar os movimentos da fuselagem que estão bem acoplados com a cavidade acústica, da resposta total da estrutura, aqui se faz necessário identificar os modos estruturais que são importantes na geração de ruído para o melhor desenvolvimento de um sistema de controle de vibrações e ruídos.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRAFICA

1.2.1 Cavidade Acústica

O estudo da propagação sonora em cavidades cilíndricas tem aplicação prática em várias áreas: salas, aeronaves, submarinos, foguetes, tubulações. (Betts, 1998), (Brito, 2000), (Cazzolato, 1999), (Fuller, 2001), (Hallez, 2001), (Li, 2002), (Markovic, 2000), (Munjaj, 1987), (Paxton, 1997), (Sun, 1996). Partindo da dedução da equação de ondas, passando pela transformação da equação para coordenadas cilíndricas e aplicação das condições de contorno chega-se à equação de ondas para cavidades cilíndricas.

1.2.2 Análise de Vibração em Cascas Cilíndricas

Houve muita discussão na literatura relativo às equações de movimento para cascas cilíndricas. Ao contrário das clássicas equações de movimento para as vigas e placas, não há uma teoria universalmente aceita para equações de cascas cilíndricas. Por causa da complexidade das vibrações em cilindros, deve ser feito um número grande de suposições ao deduzir as equações de movimento a partir das básicas relações de tensão e deslocamento. Diferentes autores fizeram suposições distintas em vários pontos na dedução, chegando a equações de movimento ligeiramente distintas. (Young, 1995)

Leissa (1973) apresenta um extenso resumo das equações deduzidas pelos melhores autores conhecidos. Ele mostrou que, com algumas exceções, todas as teorias eram bem parecidas e produziram resultados consistentes dentro de um baixo percentual na maioria dos casos.

1.2.3 Acoplamento Acústico-Estrutural

O acoplamento fluido-estrutura foi estudado por Sun (1996) com o intuito de definir o posicionamento de atuadores piezelétricos em sistemas de controle ativo acústico-estruturais. Foi feita a comparação do desempenho do controle quando este é feito por meio de aplicação de força pontual e quando é aplicado atuadores PZT distribuídos na superfície da estrutura. O estudo chega a resultados promissores com a redução do ruído e da vibração simultaneamente.

Paxton (1997) faz o estudo do controle ativo acústico-estrutural em uma cabine de avião. Foi avaliado em seu trabalho o posicionamento de sensores e atuadores e o sistema de controle para três tipos de excitação, em uma frequência de ressonância acústica, em uma frequência de ressonância estrutural e em uma frequência fora da ressonância. Microfones foram utilizados como sensores de ruído, um laser vibrômetro como sensor de velocidade da estrutura, alto-falantes como atuadores do controle ativo de ruído e cerâmicas PZT como atuadores no sistema de controle ativo acústico-estrutural. Para excitar a estrutura foi usado um shaker posicionado na base dos motores em uma fuselagem de um Cesna Citation III. Com os alto-falantes ele desenvolveu um sistema de controle ativo de ruído onde foi possível avaliar o acoplamento acústico-estrutural de forma possibilitar o posicionamento dos atuadores piezelétricos para o controle acústico-estrutural. Através da técnica de algoritmos genéticos foi definida a posição ótima de controle para os atuadores. Os resultados alcançados são promissores e validam o sistema de identificação, o sistema de controle ativo acústico-estrutural se mostrou capaz de reduzir o ruído e a vibração da estrutura.

Zhang (2001) estudou os efeitos da presença de um fluido denso no interior de uma casca cilíndrica. Ele utiliza o método de propagação de ondas para estudar o efeito da presença do fluido na resposta da estrutura. As frequências naturais obtidas para um modelo estrutural no vácuo e outro acoplado ao fluido interno apresentam diferenças entre 40 e 50% para um mesmo modo, sendo que o sistema acoplado apresenta metade do valor das

freqüências naturais do sistema desacoplado. Ele ressalta a necessidade de avaliar influência do acoplamento nos modos e freqüências naturais para o correto projeto de um sistema de controle.

1.2.4 Método dos Elementos Finitos

Vários autores desenvolveram seus estudos de cavidades acústicas e do acoplamento acústico-estrutural em modelos de elementos finitos, (Balamurugan, 2001), (Bausys, 1999), (Brito, 2000), (Cazzolato, 1999), (Ding, 2001), (Ohayon, 2001), (Wu, 1998), (Zhang, 2001).

Betts (1998) modelou a propagação de ondas planas em dutos. Em seu estudo foi avaliado a influência do refinamento da malha, da distorção do elemento e da ordem das funções de interpolação na precisão dos resultados do método. Ele apresenta a dedução formal das matrizes de massa, rigidez e o vetor força através do Método dos Resíduos Ponderados segundo Galerkin. Melhores resultados foram obtidos quando utilizado elementos com funções de interpolação de alta ordem em todos os níveis de refinamento. O elemento de 8 nós é menos susceptível à propagação de erros com a distorção do que o elemento de 4 nós, o refinamento também indica redução da sensibilidade à distorção no elemento. O autor recomenda o uso de elementos de alta ordem no modelamento de campos acústicos complexos.

Boyle (1999) menciona a dificuldade em se fazer o modelo para a análise do comportamento acústico-estrutural da estrutura da fuselagem de avião, seria necessário um complexo modelo em Elementos Finitos e os resultados seriam de difícil interpretação e validação. Os autores então fazem o estudo do comportamento acústico-estrutural de uma estrutura do tipo casca cilíndrica, onde um modelo numérico em Elementos Finitos mais simples possibilita melhor interpretação dos resultados e estudo da eficiência das ferramentas de análise e de soluções de projeto para redução de ruído e vibração. Foi realizado o estudo em duas estruturas de cascas cilíndricas, em um dos modelos foi avaliado o comportamento da estrutura com e sem a adição de material visco-elástico, no segundo modelo foi estudado o comportamento vibro-acústico com e sem material poroso. Os resultados alcançados mostram boa correlação entre o modelo experimental e as predições numéricas.

1.3 OBJETIVO DA PESQUISA

Apresentar uma metodologia para o estudo do acoplamento acústico-estrutural de estruturas do tipo cascas cilíndricas; envolvendo modelagem analítica validada via modelo de elementos finitos.

1.4 CONTEÚDO

No capítulo 2 é apresentada a formulação da distribuição de pressão em um campo acústico, a equação de ondas em coordenadas cilíndricas com a respectiva solução. O capítulo 3 apresenta a equação de movimento da estrutura com os respectivos deslocamentos nas direções: axial, radial e circunferencial. No capítulo 4 desenvolve-se o equacionamento do acoplamento da cavidade acústica com a estrutura. No capítulo 5 tem-se a metodologia do trabalho e no capítulo 6 a análise dos resultados. No capítulo 7 é apresentado as conclusões e perspectivas futuras. No Apêndice A é apresentado as Funções de Bessel e algumas de suas propriedades características, no Apêndice B é apresentado a modelagem no software ANSYS incluindo as características dos elementos utilizados e no Apêndice C é mostrado uma abordagem superficial da obtenção do modelo via elementos finitos.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA

2.1 INTRODUÇÃO

A distribuição de pressão em fluido sujeita a uma fonte de vibração é dada pela equação de Helmholtz. Para compreender esta equação são necessárias algumas considerações e restrições, a dedução desta equação começa pelas equações que governam os fluidos. Assumindo que o fluido não apresenta efeitos viscosos, são deduzidas a equação de movimento (Equação de Euler) e a equação da continuidade para um elemento de volume fluido. Utilizando estas duas equações, a equação de onda linear é determinada e é assumido que apresenta resposta harmônica no tempo, através da técnica de separação de variáveis é encontrada a solução da equação de onda.

Para a determinação da equação do campo acústico se faz necessário as seguintes considerações segundo Kinsler (1982):

- ✓ Não existe escoamento fluido;
- ✓ O fluido não apresenta efeitos viscosos;
- ✓ A propagação de onda é um processo adiabático;
- ✓ O fluido é compressível e
- ✓ As variações de pressão e densidade são muito pequenas comparadas aos valores de equilíbrio do fluido.

É razoável assumir a propagação de ondas como um processo adiabático, desde que as mudanças de pressão e densidade sejam muito pequenas e rápidas de forma a ter apenas rápidas flutuações de temperatura, com valores desprezíveis. É necessário considerar a compressibilidade do fluido. Ondas acústicas que produzem a sensação sonora são originadas de perturbações de pressão que se propagam em um fluido compressível.

Os níveis de pressão sonora para os seres humanos com características fisiológicas normais se encontra dentro da faixa de 20 (μPa) a 200 (Pa), sendo o limiar da audição e o limiar da dor, respectivamente (Harris, 1979). Comparando com a pressão atmosférica padrão de 1013 (mbar) = 101,300 (Pa), a perturbação acústica de pressão é muito pequena, então a consideração de assumir pequenos distúrbios é justificável em problemas de radiação acústica.

As ondas podem ser classificadas em infra-sônicas, sônicas e ultra-sônicas, em função do espectro de frequência por elas geradas, estarem abaixo, dentro e acima dos limites de percepção do ouvido humano.

Ondas acústicas em fluidos sem viscosidade são ondas longitudinais: as moléculas deste fluido se deslocam na direção de propagação da onda, de um lado para outro em torno da posição de repouso, produzindo regiões adjacentes de compressão e rarefação, semelhante aos produzidos por ondas longitudinais em uma estrutura do tipo barra. Os fluidos exibem menos resistência a deformações que os sólidos. Como resultado, a força de restauração responsável pela propagação da onda é simplesmente devida a variação de pressão que acontece quando um fluido é comprimido ou expandido (Reynolds, 1981).

Inicialmente restringe-se o estudo de ondas ao caso plano, de forma compreender-se o seu comportamento. Posteriormente o estudo será aplicado ao caso de ondas tridimensionais que é o objeto dessa dissertação.

Em ondas planas, as propriedades características acústicas como deslocamento de partícula, densidade e pressão, por exemplo, têm amplitude constante em qualquer plano perpendicular a direção de propagação de onda. Considerando que frentes de onda em qualquer tipo de onda divergente em um meio homogêneo torna-se quase planas longe da

superfície, pode-se esperar que as propriedades das ondas divergentes vão, a grandes distâncias, também ficar similares ao das ondas planas (Kinsler, 1982).

O termo partícula fluida é dado a um elemento de volume, grande o suficiente, que contém milhões de moléculas, de forma que este possa ser considerado como um meio contínuo, contudo pequeno o bastante, para que todas as variáveis acústicas possam ser consideradas constantes ao longo do elemento de volume.

As moléculas de um fluido não têm posição fixa no meio; até mesmo na ausência de uma onda; elas estão sempre em constante movimento, com velocidade média diferente de qualquer velocidade de partícula associado ao movimento de onda. Porém, um volume pequeno pode ser tratado como uma unidade em repouso, desde que as moléculas que atravessem a fronteira, para fora do volume de controle, forem substituídas por um número igual, que possui em média propriedades idênticas, de forma que as propriedades macroscópicas do elemento permaneçam inalteradas.

Por conseqüência, é possível falar de deslocamento e velocidade de partícula ao estudar ondas acústicas em fluidos, assim como para ondas elásticas em sólidos. Na análise seguinte serão negligenciados os efeitos de forças gravitacionais, de forma que ρ_0 e P_0 tenham valores uniformes ao longo do fluido. Também é assumido que o fluido é homogêneo, isotrópico, e perfeitamente elástico; sem efeitos dissipativos como os que surgem devido a viscosidade ou condução de calor presente. Finalmente, a análise é limitada a ondas de amplitude relativamente pequena de forma que alterações na densidade do meio são pequenas comparadas com seu valor de equilíbrio.

2.2 A EQUAÇÃO DE ESTADO

A equação de estado para um fluido relaciona as forças de restauração internas às deformações correspondentes, da mesma forma que é feita para cordas, barras e membranas. Procura-se uma relação linear que, enquanto simplifique o desenvolvimento, fique restrita à quantidade de deformação permitida. Para meios fluidos a equação que rege o comportamento termodinâmico do mesmo é a equação do gás perfeito.

$$P = \rho r T_k \quad (1)$$

onde: P é a pressão total em Pascal (Pa), ρ é a densidade em quilogramas por metro cúbico (kg/m^3), T a temperatura absoluta em Kelvins (K) e r é uma constante cujo valor depende do gás envolvido.

Maior simplificação pode ser alcançada se o processo termodinâmico for restringido. Por exemplo, se o fluido está contido em um recipiente cujas paredes apresentam alta condutividade térmica, então variações lentas de volume do recipiente resultarão em energia térmica, que é transferida entre as paredes e o fluido. Se as paredes têm a capacidade térmica necessária, o recipiente e o fluido permanecerão a temperatura constante. Neste caso, o gás perfeito é descrito pela equação isotérmica de estado:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (2)$$

Por outro lado, é conhecido através de experimentos, que os processos acústicos são quase adiabáticos: há troca insignificante de energia térmica de uma partícula de fluido para outro. Sob estas condições, a entropia, e não a temperatura, do fluido permanece constante, logo o comportamento do gás perfeito nestas condições é descrito pela equação adiabática de estado:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (3)$$

onde: γ é a relação dos calores específicos a pressão constante C_p e volume constante C_v ,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}. \quad (4)$$

Para o processo ser adiabático, elementos vizinhos do fluido não devem trocar energia térmica. Isto significa que a condutividade térmica do fluido e os gradientes térmicos da perturbação devem ser pequeno o bastante para que nenhum fluxo térmico significativo aconteça durante o tempo da perturbação. Para as frequências e amplitudes de interesse em acústica este é o caso (Kinsler, 1982). Os principais efeitos de condutividade térmica são dissipados em frações muito pequenas da energia acústica de forma que a perturbação se atenua lentamente com tempo ou distância.

Para fluidos que apresentam comportamento diferente de um gás perfeito, a equação adiabática de estado é mais complexa. Nestes casos é preferível determinar a relação isentrópica experimentalmente entre pressão e flutuações de densidade.

Assumindo um volume fluido com densidade ρ_0 e pressão P_0 e deformando-se este volume fluido, a densidade e a pressão mudam dos valores iniciais para ρ e P , respectivamente conforme pode ser visto na Figura 1.

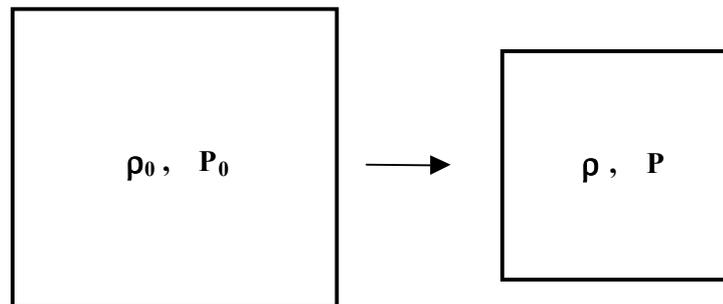


Figura 1 – Volume fluido

A nova pressão no fluido usando expansão em série de Taylor é:

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots \quad (5)$$

onde as derivadas parciais são constantes determinadas para a compressão e expansão adiabática do fluido sobre sua densidade de equilíbrio.

Se as flutuações são pequenas, apenas os termos de primeira ordem em $(\rho - \rho_0)$ precisam ser considerados, assim é obtida uma relação linear entre a flutuação de pressão e a mudança de densidade.

$$P - P_0 = \beta \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \quad (6)$$

onde:

$$\beta = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \quad (7)$$

é o módulo adiabático de Bulk.

Em termos da pressão acústica

$$p = P - P_0 \quad (8)$$

e a condensação

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \quad (9)$$

A equação (6) pode ser reescrita como

$$p = \beta s \quad (10)$$

A restrição essencial é que a condensação deve ser pequena,

$$|s| \ll 1. \quad (11)$$

2.3 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Para relacionar o movimento do fluido a sua compressão ou dilatação precisa-se de uma relação funcional entre a velocidade de partícula \vec{u} e a densidade instantânea ρ .

Considerando um pequeno elemento de volume cúbico

$$dV = dx dy dz \quad (12)$$

a taxa do fluxo de massa no volume através de sua superfície deve ser igual a taxa com que a massa dentro do volume aumenta. Referindo-se a Figura 2, vê-se que o fluxo líquido de massa neste volume espacial, resultando do fluxo na direção x , é:

$$\left\{ \rho u_x - \left[\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx \right] \right\} dydz = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dV \quad (13)$$



Figura 2 – Fluxo de massa na direção x em um volume fluido

expressões semelhantes dão o fluxo líquido para as direções y e z, de forma que o fluxo total deve ser:

$$\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] dV = -[\nabla \cdot (\rho \vec{u})] dV \quad (14)$$

onde: ∇ é o operador divergente e $\vec{u} = u_x \hat{x} + u_y \hat{y} + u_z \hat{z}$ é a velocidade da partícula.

A taxa com que a massa aumenta no volume é $(\partial\rho/\partial t)dV$. Considerando que o fluxo líquido deve ser igual a taxa de acumulação, obtém-se:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (15)$$

que é a equação da continuidade.

Nota-se que esta equação é não linear; o segundo termo envolve o produto da velocidade de partícula e a densidade instantânea, ambos sendo variáveis acústicas. Porém, escrevendo-se

$$\rho = \rho_0(1 + s), \quad (16)$$

usando o fato que ρ_0 é constante no tempo e no espaço, e assumindo que s é muito pequeno, a equação (15) é reescrita como:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (17)$$

equação linearizada da continuidade.

Antes de obter uma equação para a força, combinando-se as equações de estado e da continuidade. Integra-se a equação (17) no tempo:

$$\int \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u} \right) dt = const \quad (18)$$

A constante de integração deve ser zero desde que as variáveis acústicas desaparecem se não houver nenhuma perturbação acústica.

Desde que

$$\int \nabla \cdot \vec{u} dt = \nabla \cdot \int \vec{u} dt = \nabla \cdot \int \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right) dt = \nabla \cdot \vec{\xi}, \quad (19)$$

onde: $\vec{\xi} = \xi_x \hat{x} + \xi_y \hat{y} + \xi_z \hat{z}$ é o deslocamento da partícula em relação a posição de equilíbrio.

$$s = -\nabla \cdot \vec{\xi} \quad (20)$$

combinando com a equação de estado (10) tem-se

$$p = -\beta \nabla \cdot \vec{\xi} \quad (21)$$

Nota-se que considerando ondas unidimensionais, a força de compressão é:

$$f = pS, \quad (22)$$

$\nabla \cdot \vec{\xi}$ reduz a $\partial \xi_x / \partial x$, e a equação (22) se torna:

$$f = -S\beta \partial \xi_x / \partial x \quad (23)$$

que é equivalente a

$$f = -SY \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (24)$$

onde $\beta = Y$ (módulo de elasticidade).

Então

$$p = -\beta \nabla \cdot \vec{\xi} \quad (25)$$

é a equação tridimensional análogo a equação (24), escrito em termos de pressão em lugar de força de compressão.

2.4 EQUAÇÃO DE EULER

Em fluidos reais, temos presença de viscosidade e o processo acústico não sendo perfeitamente adiabático introduzem termos dissipativos. Entretanto como já foi desconsiderado o efeito de condutividade térmica na equação de estado, também se pode ignorar os efeitos de viscosidade.

Considerando um elemento fluido $dV = dz dy dx$ que se move com o fluido, contendo massa específica dm de fluido. A força $d\vec{f}$ no elemento irá acelerar o fluido de acordo com a segunda lei de Newton

$$d\vec{f} = \vec{a} dm . \quad (26)$$



Figura 3 – Volume fluido sob a ação de forças devido a pressão

Na ausência de viscosidade, a força exercida no elemento fluido na direção x conforme a Figura 3 é:

$$df_x = \left[P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \right] dydz = -\frac{\partial P}{\partial x} dV \quad (27)$$

Expressões análogas para df_y e df_z permitem escrever o vetor de força completo

$$d\vec{f} = df_x \hat{x} + df_y \hat{y} + df_z \hat{z} \quad (28)$$

como

$$d\vec{f} = -\nabla P dV \quad (29)$$

A velocidade de partícula \vec{u} é função do tempo e espaço. Quando o elemento fluido com velocidade $\vec{u}(x, y, z, t)$ em (x, y, z) e tempo t se move para o novo ponto $(x + dx, y + dy, z + dz)$ em um tempo posterior $t + dt$, sua nova velocidade é $\vec{u}(x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt)$.

Assim a aceleração é:

$$\vec{a} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt) - \vec{u}(x, y, z, t)}{dt} \quad (30)$$

O deslocamento da posição anterior para a nova permite relacionar os incrementos com os componentes de velocidade do elemento, como:

$$\begin{aligned} dx &= u_x dt \\ dy &= u_y dt \\ dz &= u_z dt \end{aligned} \quad (31)$$

Considerando os incrementos infinitesimais, a nova velocidade pode ser expressa pelos primeiros termos da expansão em série de Taylor.

$$\begin{aligned} \vec{u}(x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt) &= \vec{u}(x, y, z, t) \\ + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (32)$$

e a aceleração do elemento fluido escolhido é:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \quad (33)$$

Definindo-se o operador vetorial $(\vec{u} \cdot \nabla)$, como:

$$(\vec{u} \cdot \nabla) = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (34)$$

então \vec{a} pode ser escrito mais especificamente por :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (35)$$

Agora, como o elemento de massa dm é ρdV , substituindo na equação (26), tem-se:

$$-\nabla P = \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] \quad (36)$$

Esta é a equação não linear de Euler. Pode ser simplificada considerando-se $|s| \ll 1$ e $|(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}| \ll |\partial \vec{u} / \partial t|$. Então ρ pode ser substituído por ρ_0 , e o termo $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ pode ser desconsiderado. Finalmente, pode-se substituir $\nabla P = \nabla p$, desde que P_0 é constante, então:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p \quad (37)$$

que é a equação linear de força, válido para processos acústicos de pequena amplitude.

2.5 EQUAÇÃO DE ONDA LINEAR

As três equações (10), (17), e (37) devem ser combinadas de forma a obter-se uma única equação diferencial com apenas uma variável dependente. A velocidade de partícula pode ser eliminada de (17) e (37). Tomando o divergente de (37)

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla p) = -\nabla^2 p \quad (38)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano tridimensional.

Derivando (17) no tempo e usando,

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \vec{u})}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right), \quad (39)$$

temos:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0 \quad (40)$$

Combinando (38) com (40), tem-se:

$$\nabla^2 p = \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (41)$$

Usando a equação de estado (10) para eliminar s , vem:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (42)$$

Esta equação é a equação linear de propagação do som no meio fluido. A constante c é definida por

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \quad (43)$$

Para um processo adiabático

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\text{adiabático}}} \quad (44)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\text{adiabático}} = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \quad (45)$$

$$c = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} \quad (46)$$

Para o ar a uma temperatura de 0° C tem-se: $\gamma = 1,402$, $P_0 = 1 \text{ (atm)} = 1,013 \times 10^5 \text{ (Pa)}$ e $\rho_0 = 1,293 \text{ (kg/m}^3\text{)}$

$$c = \sqrt{\frac{1,402 \times 1,013 \times 10^5}{1,293}} = 331,6 \text{ (m/s)} \quad (47)$$

2.6 EQUAÇÃO DE ONDA EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

A equação de onda (42) foi obtida espacialmente em função do operador Laplaciano, podendo este ser aplicado nos diversos sistemas de coordenadas. Neste trabalho é avaliada uma estrutura cilíndrica, sendo então mais conveniente o uso do sistema de coordenadas cilíndricas.

O Laplaciano de p é dado por:

$$\nabla^2 p = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} p \quad (48)$$

onde:

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \quad (49)$$

é o operador “del” (delta) em coordenadas cilíndricas.

Portanto,

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial x} \hat{e}_x \quad (50)$$

e

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} p &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial p}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial x} \hat{e}_x \right] \cdot \hat{e}_r + \\ &\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial p}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial x} \hat{e}_x \right] \cdot \hat{e}_\theta + \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial p}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial x} \hat{e}_x \right] \cdot \hat{e}_x \end{aligned} \quad (51)$$

Desenvolvendo (51), e considerando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} &= \hat{e}_\theta \\ \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r} &= -\hat{e}_r \end{aligned} \quad (52)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} p &= \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r} \cdot \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \theta} \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r} \cdot \hat{e}_r + \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial x} \hat{e}_x \cdot \hat{e}_r \\ &+ \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \hat{e}_x}{\partial r} \cdot \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta \partial r} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} \cdot \hat{e}_\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} \cdot \hat{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta \partial x} \hat{e}_x \cdot \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \hat{e}_x}{\partial \theta} \cdot \hat{e}_\theta + \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial r} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_x + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial x} \cdot \hat{e}_x + \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial \theta} \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_x \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial x} \cdot \hat{e}_x + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \hat{e}_x}{\partial x} \cdot \hat{e}_x \end{aligned} \quad (53)$$

Realizando-se as operações vetoriais, obtém-se:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (54)$$

substituindo (54) em (42) tem-se:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (55)$$

que é a equação de ondas em coordenadas cilíndricas.

2.7 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA

A solução da equação diferencial parcial que representa o campo acústico em uma cavidade cilíndrica pode ser obtida pelo método de separação de variáveis.

A equação (55) é separada em duas equações sendo uma função apenas do tempo:

$$p(r, \theta, x, t) = F(r, \theta, x)T(t) \quad (56)$$

substituindo (56) em (55) tem-se:

$$F_{rr}T + \frac{1}{r}F_rT + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta}T + F_{xx}T = \frac{1}{c^2}F\ddot{T}, \quad (57)$$

$$T\left(F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} + F_{xx}\right) = \frac{1}{c^2}F\ddot{T}, \quad (58)$$

$$\frac{1}{F}\left(F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} + F_{xx}\right) = \frac{\ddot{T}}{c^2T}, \quad (59)$$

cada termo da equação (59) precisa ser constante, usa-se então uma constante, denominada constante de separação, para separarmos as duas equações.

Igualando (59) à $-v^2$:

$$\frac{1}{F} \left(F_{rr} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r^2} F_{\theta\theta} + F_{xx} \right) = \frac{\ddot{T}}{c^2 T} = -v^2, \quad (60)$$

o segundo termo da equação (60) é função apenas do tempo t , reescrevendo:

$$\ddot{T} + \lambda^2 T = 0 \quad (61)$$

onde:

$$\lambda = c v, \quad (62)$$

considerando resposta harmônica

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (63)$$

onde a frequência angular ω é definida por:

$$\omega = c v. \quad (64)$$

O primeiro termo da equação (60) é função de (r, θ, x) , reescrevendo:

$$F_{rr} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r^2} F_{\theta\theta} + F_{xx} + v^2 F = 0, \quad (65)$$

a equação (65) é separada em duas equações onde uma é função apenas da coordenada x

$$F(r, \theta, x) = G(r, \theta) X(x), \quad (66)$$

substituindo (66) em (65) tem-se:

$$G_{rr} X + \frac{1}{r} G_r X + \frac{1}{r^2} G_{\theta\theta} X + G X'' + v^2 G X = 0, \quad (67)$$

$$X \left(G_{rr} + \frac{1}{r} G_r + \frac{1}{r^2} G_{\theta\theta} + v^2 G \right) = -G X'' \quad (68)$$

$$-\frac{1}{G} \left(G_{rr} + \frac{1}{r} G_r + \frac{1}{r^2} G_{\theta\theta} + v^2 G \right) = \frac{X''}{X}, \quad (69)$$

Como cada termo da equação (69) precisa ser constante, utiliza-se a constante k^2 para separar estes termos,

$$-\frac{1}{G} \left(G_{rr} + \frac{1}{r} G_r + \frac{1}{r^2} G_{\theta\theta} + v^2 G \right) = \frac{X''}{X} = -k^2, \quad (70)$$

reescrevendo o segundo termo da equação (70), temos uma equação em função apenas da coordenada x :

$$X'' + k^2 X = 0. \quad (71)$$

Reescrevendo o primeiro termos a equação (70),

$$-\frac{1}{G} \left(G_{rr} + \frac{1}{r} G_r + \frac{1}{r^2} G_{\theta\theta} + v^2 G \right) = -k^2, \quad (72)$$

$$G_{rr} + \frac{1}{r} G_r + \frac{1}{r^2} G_{\theta\theta} + v^2 G - k^2 G = 0, \quad (73)$$

definindo η^2 por:

$$\eta^2 = v^2 - k^2, \quad (74)$$

e reescrevendo (73), chega-se em:

$$G_{rr} + \frac{1}{r} G_r + \frac{1}{r^2} G_{\theta\theta} + \eta^2 G = 0, \quad (75)$$

a equação (75) é dividida em duas novas equações:

$$G(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta), \quad (76)$$

substituindo (76) em (75):

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}\Theta''R + \eta^2 R\Theta = 0, \quad (77)$$

$$\Theta \left(R'' + \frac{1}{r}R' + \eta^2 R \right) = -\frac{1}{r^2}\Theta''R \quad (78)$$

$$-\frac{r^2}{R} \left(R'' + \frac{1}{r}R' + \eta^2 R \right) = \frac{\Theta''}{\Theta}, \quad (79)$$

cada termo da equação (79) precisa ser constante, igualando-se a m^2 :

$$-\frac{r^2}{R} \left(R'' + \frac{1}{r}R' + \eta^2 R \right) = \frac{\Theta''}{\Theta} = -m^2, \quad (80)$$

reescrevendo a equação (80) em termos de θ

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -m^2, \quad (81)$$

$$\Theta'' + m^2\Theta = 0. \quad (82)$$

Reescrevendo a equação (80) em termos de r

$$r^2 R'' + rR' + r^2 \eta^2 R - m^2 R = 0, \quad (83)$$

chega-se a seguinte equação, que é conhecida com equação diferencial de Bessel

$$r^2 R'' + rR' + (r^2 \eta^2 - m^2)R = 0. \quad (84)$$

2.7.1 Condição de Contorno e Condição Inicial

Na solução da equação (63) considera-se resposta harmônica chegando-se a solução no tempo por:

$$T(t) = A_t \cos(\omega t) + B_t \text{sen}(\omega t) \quad (85)$$

Considerando que as paredes da cavidade são rígidas, deve-se ter a velocidade de partícula nula nas paredes, a solução geral da equação (71) é:

$$X(x) = A_x \cos(kx) + B_x \sin(kx) \quad (86)$$

aplicando a condição de contorno:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (87)$$

$$X'(x) = -kA_x \sin(k0) + -kB_x \cos(k0) = 0, \quad (88)$$

$$\sin(0) = 0, \quad (89)$$

$$\cos(0) = 1 \quad (90)$$

$$B_x = 0 \quad (91)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=L} = \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (92)$$

$$X'(x) = -kA_x \sin(kL) = 0, \quad (93)$$

$$\sin(kL) = 0, \quad (94)$$

$$kL = \hat{n}\pi, \quad (95)$$

$$k = \frac{\hat{n}\pi}{L}, \quad (96)$$

$$X(x) = A_x \cos\left(\frac{\hat{n}\pi x}{L}\right). \quad (97)$$

A solução geral da equação (82) é:

$$\Theta(\theta) = A_\theta \cos(m\theta) + B_\theta \sin(m\theta), \quad (98)$$

a pressão sonora deve ser contínua em θ , temos para a equação (98):

$$p|_{\theta=0^\circ} = p|_{\theta=360^\circ}, \quad (99)$$

$$p|_{\theta=0^\circ} = F|_{\theta=0^\circ} = G|_{\theta=0^\circ} = \Theta|_{\theta=0^\circ}, \quad (100)$$

$$p|_{\theta=360^\circ} = F|_{\theta=360^\circ} = G|_{\theta=360^\circ} = \Theta|_{\theta=360^\circ}, \quad (101)$$

$$\Theta|_{\theta=0^\circ} = \Theta|_{\theta=360^\circ}, \quad (102)$$

$$A_\theta \cos(m \cdot 0^\circ) + B_\theta \sin(m \cdot 0^\circ) = A_\theta \cos(m \cdot 360^\circ) + B_\theta \sin(m \cdot 360^\circ), \quad (103)$$

$$A_\theta \cdot 1 + B_\theta \cdot 0 = A_\theta \cos(360^\circ m) + B_\theta \sin(360^\circ m), \quad (104)$$

se m for inteiro

$$A_\theta \cdot 1 + B_\theta \cdot 0 = A_\theta \cdot 1 + B_\theta \cdot 0, \quad (105)$$

$$\Theta(\theta) = A_\theta \cos(m\theta). \quad (106)$$

A equação (84) é conhecida como equação diferencial de Bessel e tem solução definida por:

$$r^2 R'' + rR' + (r^2 \eta^2 - m^2)R = 0 \quad (107)$$

$$R(r) = A_r J_m(\eta r) + B_r Y_m(\eta r), \quad (108)$$

sendo J_m a função de Bessel de primeiro tipo e de ordem m , Y_m a função de Bessel de segundo tipo e de ordem m . Como Y_m apresenta singularidade na origem, como pode-se ver na Figura 4, e a função precisa apresentar valor finito para $r \leq R$:

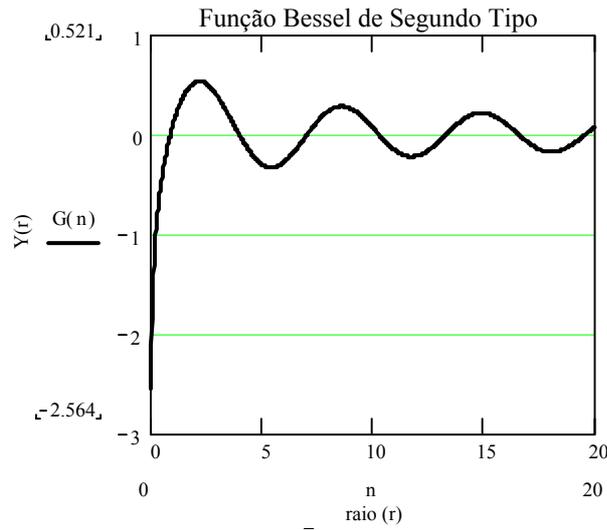


Figura 4 - Função Bessel de segundo tipo e ordem 0

$$Y_1(\eta r)_{r \rightarrow 0} \rightarrow -\infty \tag{109}$$

$$B_r = 0, \tag{110}$$

para as paredes da cavidade rígidas, a velocidade de partícula deve ser nula no contorno, tem-se então para a equação (84):

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial R}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \tag{111}$$

$$R'(r) = A_r \eta J_m'(\eta r) \tag{112}$$

$$R'(r) = A_r \eta J_m'(\eta R) = 0, \tag{113}$$

$$J_m'(\chi_{mn}) = 0, \tag{114}$$

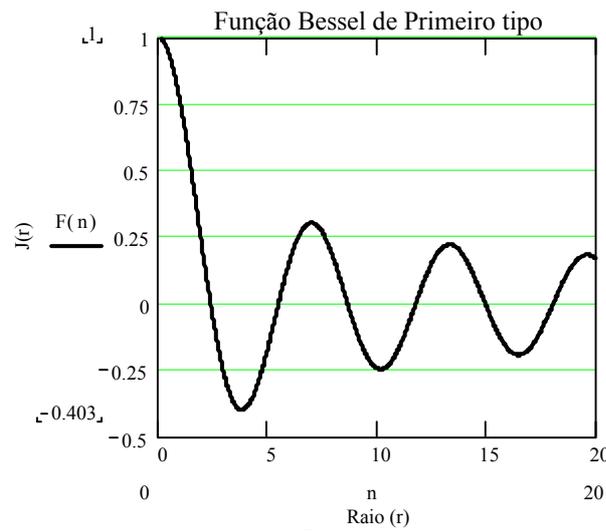


Figura 5 - Função Bessel de primeiro tipo e ordem 0

onde χ_{mn} é uma raiz da função de Bessel de ordem m . Para cada índice m existem n valores que satisfazem a equação. O valor $n = 0$ corresponde ao primeiro valor.

Tem-se que:

$$\eta R = \chi_{mn}, \quad (115)$$

$$\eta = \frac{\chi_{mn}}{R}, \quad (116)$$

obtem-se

$$R(r) = A_r J_m \left(\frac{\chi_{mn} r}{R} \right). \quad (117)$$

A solução completa é dada por:

$$p(x, r, \theta, t) = X(x) \cdot \Theta(\theta) \cdot R(r) \cdot T(t), \quad (118)$$

$$p(x, r, \theta, t) = A_x \cos\left(\frac{\hat{n}\pi x}{L}\right) \cdot A_\theta \cos(m\theta) \cdot A_r J_m\left(\frac{\chi_{mn} r}{R}\right) \cdot e^{j\omega t} \quad (119)$$

$$p(x, r, \theta, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=0}^{N-1} P_{mn} \cos\left(\frac{\hat{n}\pi x}{L}\right) \cdot \cos(m\theta) \cdot J_m\left(\frac{\chi_{mn} r}{R}\right) \cdot e^{j\omega t} \quad (120)$$

2.7.2 Frequência Natural

A equação de onda apresenta resposta harmônica no tempo de acordo com a equação (63), onde ω é a frequência natural definida por (64).

Reescrevendo a equação (74):

$$v^2 = k^2 + \eta^2 \quad (121)$$

$$v = \sqrt{k^2 + \eta^2} \quad (122)$$

substituindo a equação (122) em (64), tem-se:

$$\omega = c\sqrt{k^2 + \eta^2} \quad (123)$$

onde k e η foram obtidos aplicando-se as condições de contorno, chegando-se as equações (96) e (116) respectivamente, e substituindo na equação (123)

$$\omega = c\sqrt{\left(\frac{\hat{n}\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\chi_{mn}}{R}\right)^2} \quad (124)$$

Por definição:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (125)$$

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\hat{n}\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\chi_{mn}}{R}\right)^2} \quad (126)$$

A Tabela 1 apresenta as 14 primeiras frequências naturais de uma cavidade cilíndrica com dimensões $L = 20$ (m) e $R = 1$ (m) e os respectivos modos.

Tabela 1 – Modos e frequências naturais de uma cavidade cilíndrica ($L=20(m)$ e $R = 1 (m)$), com ar de referência

Ordem	Frequência (Hz)	Modo (x,r,θ)
1	8,57	(1,0,0)
2	17,15	(2,0,0)
3	25,72	(3,0,0)
4	34,3	(4,0,0)
5	42,87	(5,0,0)
6	51,45	(6,0,0)
7	60,25	(7,0,0)
8	68,6	(8,0,0)
9	77,12	(9,0,0)
10	85,75	(10,0,0)
11	94,32	(11,0,0)
12	100,51	(0,0,1)
13	100,87	(1,0,1)
14	101,95	(2,0,1)

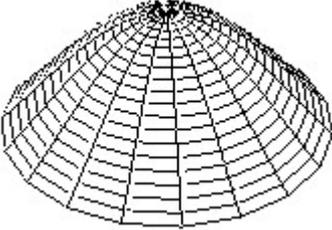
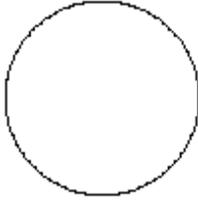
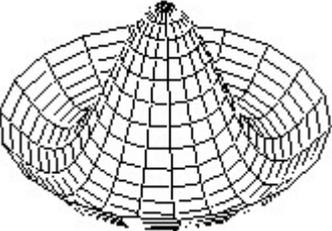
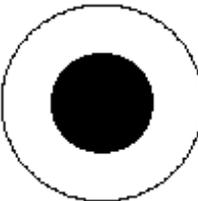
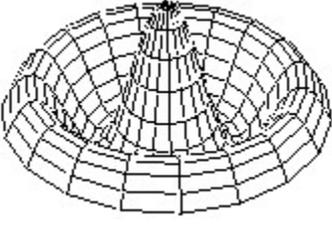
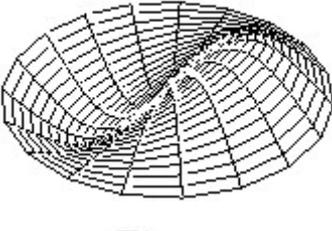
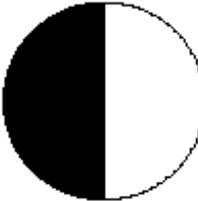
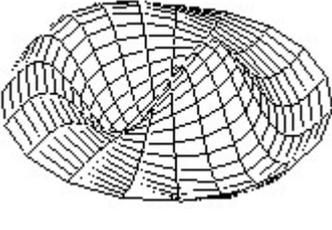
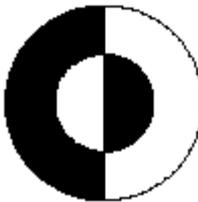
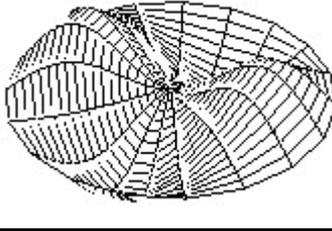
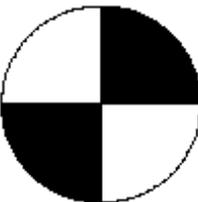
Pode-se ver para o exemplo da Tabela 1 que os primeiros modos se concentram distribuídos na direção x , este fato se deve a grande diferença entre as dimensões L e R da casca, como o raio é menor que o comprimento, temos propagação na direção radial com comprimentos de onda menores que na direção axial. O comprimento de onda que está associado a frequência pela equação (127).

$$c = \lambda f \quad (127)$$

onde λ é o comprimento de onda.

A Tabela 2 apresenta as formas dos modos acústicos circunferências para cavidades cilíndricas.

Tabela 2 – Modos acústicos circunferenciais da cavidade

Modo (r,θ)	Figura 3D	Figura 2D
$(1,0)$		
$(2,0)$		
$(3,0)$		
$(1,1)$		
$(2,1)$		
$(1,2)$		

CAPÍTULO 3

EQUAÇÃO DINÂMICA DA CASCA CILINDRICA

3.1 EQUAÇÕES DE CASCA¹

3.1.1 Considerações Básicas

A descrição de uma casca, aqui apresentada, será limitada à discussão de materiais elásticos, que apresentam uma relação linear entre tensão e deformação. Será considerada uma casca como um sólido, limitado por duas superfícies curvas, separadas por uma distância h . A superfície média será definida como sendo a região, onde os pontos a ela pertencentes, estão na distância média entre as superfícies externas. Os fundamentos da teoria de casca, descritos dessa maneira, foram, inicialmente, estabelecida por *Love*, em seu livro *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, publicado em 1927. Em sua formulação, o autor fez algumas considerações, conhecidas como *Postulados de Love*, que são:

1. A espessura da casca h é muito pequena em comparação com as outras dimensões, tais como raios de curvatura e comprimentos. Essa condição é fundamental para a formulação da teoria de casa fina. A relação entre a espessura h da casca e o menor raio de curvatura deve ser bem menor que a unidade. Na prática, o limite máximo para essa razão é da ordem de 1/10 a 1/20;

¹ O desenvolvimento apresentado segue a metodologia desenvolvida por Lima Jr. (1999).

2. As deformações de casca ocorrem no campo das pequenas deformações. Isso nos permite desprezar os termos de segunda ordem e superiores, com relação aos termos de primeira ordem, nas equações das deformações. Desse modo, essas equações serão lineares. Conseqüentemente, todas as considerações cinemáticas e de equilíbrio serão referenciadas ao estado inicial e não perturbado da casca;
3. A tensão normal σ_z , na direção perpendicular à superfície da casca, é pequena, podendo ser desprezada, quando comparada com as outras tensões normais, σ_α e σ_β . Essa consideração, em combinação com o quarto postulado, trata das propriedades construtivas de casca fina e permite transformar o problema elástico tridimensional em bidimensional;
4. As normais para a superfície de referência da casca permanecerão normais à superfície de referência deformada, isto é, $\gamma_{\alpha z} = \gamma_{\beta z} = 0$, e os segmentos das normais ficarão com os mesmos comprimentos, não havendo, portanto, variação de espessura durante a deformação ($e_z=0$). Essa consideração é análogo às Hipóteses de Kirchhoff para placa fina e de *Euler-Bernoulli*, na teoria de viga fina, onde as seções planas permanecem planas, após a deformação. No caso de casca moderadamente espessa, essa hipótese pode ser relaxada, para permitir efeitos rotacionais e deformações de cisalhamento. Isto conduz às *Teorias de Reissner-Mindlin* para modelos de placa e *Timoshenko* para modelos de viga.

3.1.2 Sistema de Coordenadas

Na definição das coordenadas de casca, escolhe-se a sua superfície média, não perturbada, como a superfície de referência. Sobre essa superfície, estabelece-se um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais, que coincide com as linhas ortogonais na curvatura principal da casca. A direção da espessura, que é normal à superfície de referência, é considerada como a terceira coordenada da casca. Em função do quarto *Postulado de Love*, o deslocamento deve ser linear na coordenada da espessura, sendo possível analisar o comportamento de qualquer ponto sobre a casca, em função de outro correspondente sobre a superfície de referência. Esta pode ser determinada pelo vetor $\vec{r}(\alpha, \beta)$, onde α e β são parâmetros independentes. Para um ponto arbitrário sobre a casca, o vetor posição é definido por:

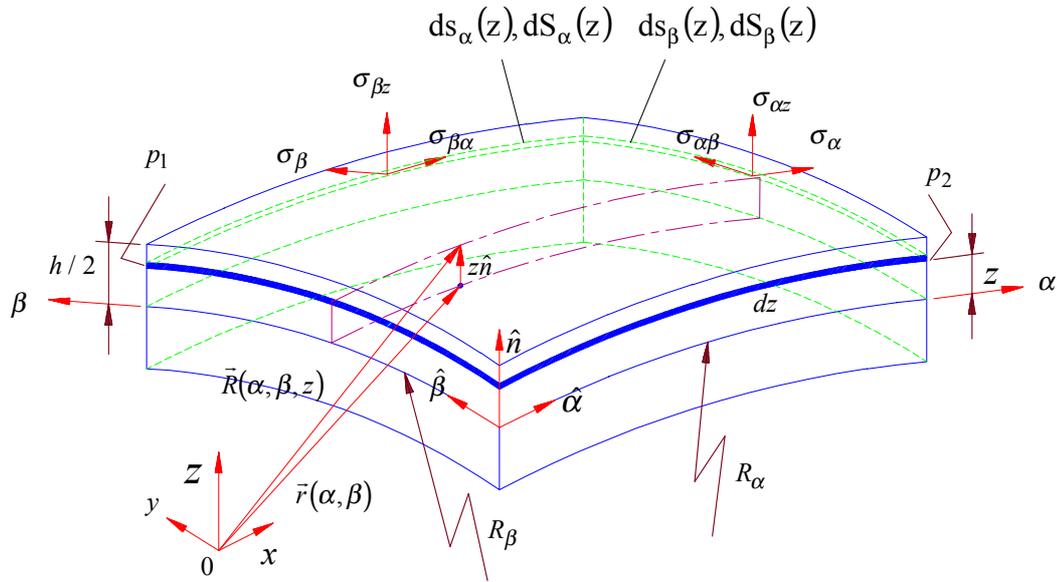


Figura 6 - Elemento Infinitesimal de Casca

$$\vec{R} = (\alpha, \beta, Z) = \vec{r}(\alpha, \beta) + z\hat{n} \quad (128)$$

Onde: \hat{n} é o vetor unitário normal à superfície de referência, z é a medida da distância de um ponto em relação à superfície de referência ao longo de \hat{n} ($-h/2 \leq z \leq h/2$).

Como os pontos p_1 p_2 são infinitamente próximos (adjacentes), o comprimento do arco ds que une esses pontos, é igual ao comprimento da corda, que une p_1 e p_2 , isto é, p_1p_2 é igual a $|d\vec{R}|$. Com o sistema de coordenadas assim estabelecido, defini-se o elemento fundamental de casca tridimensional de espessura dz e altura z da superfície média.

Então, pode-se escrever:

$$(ds)^2 = |d\vec{R}|^2 = d\vec{R} \cdot d\vec{R} \quad (129)$$

Fazendo

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} d\beta \quad (130)$$

$$d\hat{n} = \frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{1}{R_\beta} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \beta} d\beta \quad (131)$$

$$A_\alpha^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \text{ e } A_\beta^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \quad (132)$$

Obtém-se:

$$(ds)^2 = g_1(d\alpha)^2 + g_2(d\beta)^2 + g_3(dz)^2 \quad (133)$$

Sendo que:

$$g_1 = \left[A_\alpha \left(1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) \right]^2, \quad g_2 = \left[A_\beta \left(1 + \frac{z}{R_\beta} \right) \right]^2 \text{ e } g_3 = 1 \quad (134)$$

onde: R_α e R_β são raios de curvatura nas direções α e β , respectivamente; A_α e A_β são os *Parâmetros de Lamé*, e g_1 , g_2 , e g_3 são os coeficientes métricos, que fazem a ligação entre o comprimento do elemento e os diferenciais $d\alpha$, $d\beta$ e dz , (Love, 1944; Tzou & Ye, 1996).

3.1.3 Relações entre Deformação e Deslocamento

As equações entre deformação e deslocamento em coordenadas ortogonais, segundo Borelli & Lynn (1974), são:

$$e_j = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{U^j}{\sqrt{g_j}} \right) + \frac{1}{2g_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_j}{\partial \alpha_k} \frac{U^k}{\sqrt{g_k}}, \quad j = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (135)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_j}} \left[g_i \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{U^i}{\sqrt{g_i}} \right) + g_j \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{U^j}{\sqrt{g_j}} \right) \right], \quad i, j = 1, 2 \text{ e } 3 \text{ e } i \neq j \quad (136)$$

onde: U^i , e_j e γ_{ij} são os deslocamentos, deformação normal e deformação por cisalhamento em um ponto arbitrário do material, respectivamente.

As equações (135) e (136) são colocadas em coordenadas curvilíneas, fazendo:

$$\alpha_1 \equiv \alpha \quad \alpha_2 \equiv \beta \quad \alpha_3 \equiv z$$

$$U^1 \equiv U \quad U^2 \equiv V \quad U^3 \equiv W \quad (137)$$

A substituição dos coeficientes métricos, equação (134), conduz às equações gerais das deformações em função dos deslocamentos:

$$e_\alpha = \frac{1}{1+z/R_\alpha} \left(\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{V}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} + \frac{W}{R_\alpha} \right) \quad (138)$$

$$e_\beta = \frac{1}{1+z/R_\beta} \left(\frac{1}{A_\beta} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{U}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} + \frac{W}{R_\beta} \right) \quad (139)$$

$$e_z = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (140)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{A_\alpha(1+z/R_\alpha)}{A_\beta(1+z/R_\beta)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{U}{A_\alpha(1+z/R_\alpha)} \right] + \frac{A_\beta(1+z/R_\beta)}{A_\alpha(1+z/R_\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{V}{A_\beta(1+z/R_\beta)} \right] \quad (141)$$

$$\gamma_{\alpha z} = \frac{1}{A_\alpha(1+z/R_\alpha)} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + A_\alpha(1+z/R_\alpha) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{U}{A_\alpha(1+z/R_\alpha)} \right] \quad (142)$$

$$\gamma_{\beta z} = \frac{1}{A_\beta(1+z/R_\beta)} \frac{\partial W}{\partial \beta} + A_\beta(1+z/R_\beta) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{V}{A_\beta(1+z/R_\beta)} \right] \quad (143)$$

Segundo o quarto postulado de *Love*, os deslocamentos deverão apresentar variações lineares, ao longo da espessura.

$$U(\alpha, \beta, z) = u(\alpha, \beta) + z\theta_\alpha(\alpha, \beta) \quad (144)$$

$$V(\alpha, \beta, z) = v(\alpha, \beta) + z\theta_\beta(\alpha, \beta) \quad (145)$$

$$W(\alpha, \beta, z) = w(\alpha, \beta) \quad (146)$$

Onde: u , v e w são os deslocamentos de pontos da superfície média nas direções α , β e z , respectivamente. As quantidades θ_α e θ_β são as rotações da normal em relação à superfície média, quando ocorre uma deformação.

De modo a determinar θ_α e θ_β em termos dos deslocamentos u , v e w , segundo a hipótese de Kirchhoff, todos os componentes de deformação na direção normal à superfície de referência serão desprezados.

$$\gamma_{\alpha z} = \gamma_{\beta z} = e_z = 0 \quad (147)$$

Quando se substitui as equações (144) a (146) nas equações (138) a (143), com as restrições observadas pelas equações (147), obtém-se:

$$\theta_\alpha = \frac{u}{R_\alpha} - \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (148)$$

$$\theta_\beta = \frac{v}{R_\beta} - \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (149)$$

As equações das deformações, em função dos deslocamentos u , v e w , no caso de casca fina são obtidas das equações (144) a (146), (148) e (149), quando essas são substituídas nas equações (138) a (143).

$$e_\alpha = \frac{1}{(1 + z/R_\alpha)} (\varepsilon_\alpha + zk_\alpha) \quad (150)$$

$$e_\beta = \frac{1}{(1 + z/R_\beta)} (\varepsilon_\beta + zk_\beta) \quad (151)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{(1 + z/R_\alpha)(1 + z/R_\beta)} \left[\left(1 - \frac{z^2}{R_\alpha R_\beta} \right) \varepsilon_{\alpha\beta} + z \left(1 + \frac{z}{2R_\alpha} + \frac{z}{2R_\beta} \right) \tau \right] \quad (152)$$

Onde ε_α , ε_β e $\varepsilon_{\alpha\beta}$ são as deformações normais e angulares na superfície média ($z = 0$), k_α e k_β são as mudanças na curvatura da superfície média, e τ é a torção da superfície média. Essas quantidades são dadas por:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} + \frac{w}{R_\alpha} \quad (153)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_\beta} \quad (154)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{A_\alpha}{A_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A_\alpha} \right) + \frac{A_\beta}{A_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{A_\beta} \right) \quad (155)$$

$$k_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\theta_\beta}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} \quad (156)$$

$$k_\beta = \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} + \frac{\theta_\alpha}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \quad (157)$$

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{A_\alpha}{A_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\theta_\alpha}{A_\alpha} \right) + \frac{A_\beta}{A_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\theta_\beta}{A_\beta} \right) + \frac{1}{R_\alpha} \left(\frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \right) \\ & + \frac{1}{R_\beta} \left(\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} \right) \end{aligned} \quad (158)$$

Na teoria de Donnell-Mushtari os termos z/R_α e z/R_β são negligenciados nas equações (148) a (158) conduzindo a:

$$\begin{aligned} e_\alpha &= \varepsilon_\alpha + zk_\alpha \\ e_\beta &= \varepsilon_\beta + zk_\beta \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta} + z\tau \end{aligned}$$

$$(159)$$

e

$$\begin{aligned} k_\alpha &= -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{A_\alpha A_\beta^2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \\ k_\beta &= -\frac{1}{A_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A_\beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A_\alpha^2 A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \\ \tau &= -\frac{A_\beta}{A_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A_\beta^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{A_\alpha}{A_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A_\alpha^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \quad (160)$$

3.1.4 Relação Tensão-Deformação

Usando a Lei de Hooke tridimensional pode-se escrever as relações constitutivas da casca considerando que o seu material é elástico e isotrópico.

$$\begin{aligned} e_\alpha &= \frac{1}{Y} [\sigma_\alpha - \mu(\sigma_\beta + \sigma_z)] & \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{2(1+\mu)}{Y} \sigma_{\alpha\beta} \\ e_\beta &= \frac{1}{Y} [\sigma_\beta - \mu(\sigma_\alpha + \sigma_z)] & \gamma_{\alpha z} &= \frac{2(1+\mu)}{Y} \sigma_{\alpha z} \\ e_z &= \frac{1}{Y} [\sigma_z - \mu(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)] & \gamma_{\beta z} &= \frac{2(1+\mu)}{Y} \sigma_{\beta z} \end{aligned} \quad (161)$$

onde: Y é o módulo de Young, μ é o coeficiente de Poisson.

Com base na hipótese de Kirchhoff e na terceira consideração de Love, pode-se escrever o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} e_\alpha &= \frac{1}{Y} (\sigma_\alpha - \mu\sigma_\beta) \\ e_\beta &= \frac{1}{Y} (\sigma_\beta - \mu\sigma_\alpha) \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{2(1+\mu)}{Y} \sigma_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (162)$$

as quais conduzem a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\alpha \\ \sigma_\beta \\ \sigma_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \frac{Y}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\alpha \\ e_\beta \\ \gamma_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (163)$$

3.1.5 Forças e Momentos Resultantes

As forças e momentos são definidos em termos das tensões, apresentadas pela equação (163). Considerando-se primeiramente a face do elemento que é perpendicular ao eixo α , cujas tensões na face são σ_α , σ_α e $\sigma_{\alpha z}$. A força infinitesimal agindo sobre o elemento de área

$ds_\beta(z)dz$ da face é então $\sigma_\alpha ds_\beta(z)dz$. As forças resultantes, agindo sobre a face perpendicular ao eixo α , são expressas por:

$$\begin{bmatrix} N_\alpha \\ N_{\alpha\beta} \\ Q_\alpha \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_\alpha \\ \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha z} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) dz \quad (164)$$

De maneira análoga, as forças resultantes, sobre a face perpendicular ao eixo β , são:

$$\begin{bmatrix} N_\beta \\ N_{\beta\alpha} \\ Q_\beta \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_\beta \\ \sigma_{\beta\alpha} \\ \sigma_{\beta z} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) dz \quad (165)$$

Os momentos resultantes M_α , M_β , $M_{\alpha\beta}$ e $M_{\beta\alpha}$ podem ser determinados, seguindo o mesmo procedimento, uma vez que basta incluir nas integrais a distância z . As direções positivas dos momentos resultantes são mostradas na figura com valores dados por:

$$\begin{bmatrix} M_\alpha \\ M_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_\alpha \\ \sigma_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) z dz \quad (166)$$

$$\begin{bmatrix} M_\beta \\ M_{\beta\alpha} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_\beta \\ \sigma_{\beta\alpha} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) z dz \quad (167)$$

Devido aos momentos resultantes serem definidos com respeito à superfície média, as suas dimensões são momento por unidade de comprimento da superfície média.

Assim com as equações (164) e (165) e considerando que para cascas finas, z / R_α e z / R_β desprezíveis, pois são valores pequenos em comparação com a unidade, resultam nas seguintes equações, com $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$ e $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$.

$$\begin{bmatrix} N_\alpha \\ N_\beta \\ N_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \frac{Yh}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\alpha \\ e_\beta \\ \gamma_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (168)$$

3.1.6 Equações de Equilíbrio

As equações gerais de equilíbrio do elemento de casca são obtidas, através do equilíbrio entre as forças internas e os momento resultantes, como mostrado na Figura 7 e Figura 8, com as forças e momentos externos aplicados.

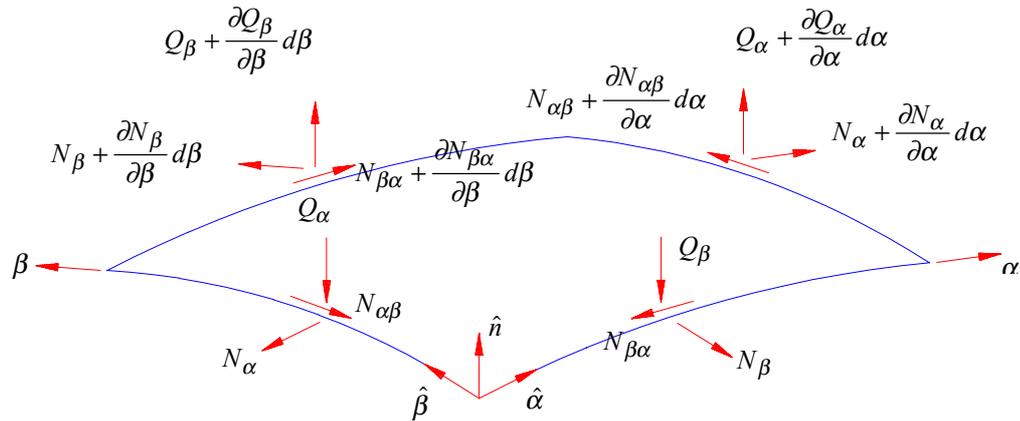


Figura 7 - Forças Resultantes no Elemento Casca

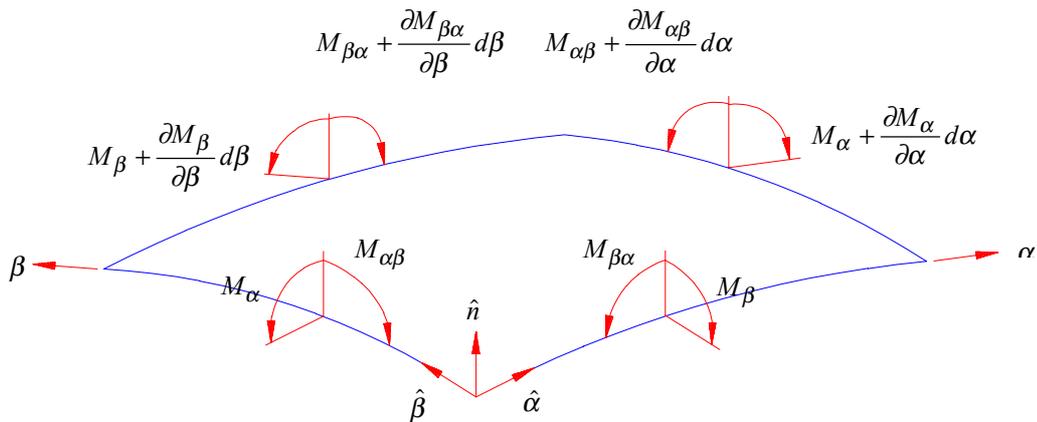


Figura 8 - Momentos Resultantes no Elemento Casca

$$\vec{q} = q_\alpha \hat{\alpha} + q_\beta \hat{\beta} + q_n \hat{n} \quad (169)$$

$$\vec{m} = m_\alpha \hat{\alpha} + m_\beta \hat{\beta} + m_n \hat{n} \quad (170)$$

Tomando as forças resultantes que atuam sobre as faces definidas por $\alpha = \text{constante}$ e $\beta = \text{constante}$ chamadas de \vec{F}_α e \vec{F}_β , respectivamente, então:

$$\begin{aligned}\vec{F}_\alpha &= (N_\alpha \hat{i}_\alpha + N_{\alpha\beta} \hat{i}_\beta + Q_\alpha \hat{i}_n) A_\beta d\beta \\ \vec{F}_\beta &= (N_{\beta\alpha} \hat{i}_\alpha + N_\beta \hat{i}_\beta + Q_\beta \hat{i}_n) A_\alpha d\alpha\end{aligned}\quad (171)$$

O segundo postulado de Love considera que as deflexões são suficientemente pequenas permitindo as equações (171) serem escritas em termos da superfície média deformada ao invés da superfície média indeformada. Nas outras duas faces do elemento de casca as forças correspondentes são $\vec{F}_\alpha + (\partial\vec{F}_\alpha/\partial\alpha)d\alpha$ e $\vec{F}_\beta + (\partial\vec{F}_\beta/\partial\beta)d\beta$. Então a equação vetorial de equilíbrio de forças para o elemento de casca é dado por:

$$\frac{\partial\vec{F}_\alpha}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial\vec{F}_\beta}{\partial\beta} d\beta + \vec{q} A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta = 0 \quad (172)$$

Substituindo as equações (169) e (171) na equação (172) e utilizando as regras para diferenciação de vetores unitários dados pelas equações (173):

$$\begin{aligned}\hat{i}_{n,\alpha} &= \frac{A_\alpha}{R_\alpha} \hat{i}_\alpha \\ \hat{i}_{n,\beta} &= \frac{A_\alpha}{R_\beta} \hat{i}_\beta \\ \hat{i}_{\alpha,\alpha} &= -\frac{1}{A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial\beta} \hat{i}_\beta - \frac{A_\alpha}{R_\alpha} \hat{i}_n \\ \hat{i}_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} \hat{i}_\beta \\ \hat{i}_{\beta,\alpha} &= \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial\beta} \hat{i}_\alpha \\ \hat{i}_{\beta,\beta} &= -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} \hat{i}_\alpha - \frac{A_\alpha}{R_\beta} \hat{i}_n\end{aligned}\quad (173)$$

as equações de equilíbrio podem ser expandidas em três componentes escalares como:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} (A_\beta N_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta} (A_\alpha N_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A_\alpha}{\partial\beta} N_{\alpha\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} N_\beta + \frac{A_\alpha A_\beta}{R_\alpha} Q_\alpha + A_\alpha A_\beta q_\alpha = 0 \quad (174)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta} (A_\alpha N_\beta) + \frac{\partial}{\partial\alpha} (A_\beta N_{\alpha\beta}) + \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} N_{\beta\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial\beta} N_\alpha + \frac{A_\alpha A_\beta}{R_\beta} Q_\beta + A_\alpha A_\beta q_\beta = 0 \quad (175)$$

$$-\frac{A_\alpha A_\beta}{R_\alpha} N_\alpha - \frac{A_\alpha A_\beta}{R_\beta} N_\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\beta Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_\alpha Q_\beta) + A_\alpha A_\beta q_n = 0 \quad (176)$$

Tomando os momentos resultantes que atuam sobre as faces definidas por $\alpha = \text{constante}$ e $\beta = \text{constante}$ chamadas de \vec{M}_α e \vec{M}_β , respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{M}_\alpha &= (-M_{\alpha\beta} \hat{i}_\alpha + M_{\alpha\beta} \hat{i}_\beta) A_\beta d\beta \\ \vec{M}_\beta &= (-M_{\beta\alpha} \hat{i}_\alpha + M_{\beta\alpha} \hat{i}_\beta) A_\alpha d\alpha \end{aligned} \quad (177)$$

Nas outras duas faces do elemento os momentos correspondentes são $\vec{M}_\alpha + (\partial \vec{M}_\alpha / \partial \alpha) d\alpha$ e $\vec{M}_\beta + (\partial \vec{M}_\beta / \partial \beta) d\beta$. Então a equação vetorial de equilíbrio de momentos para o elemento de casca é dado por:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{M}_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{M}_\beta}{\partial \beta} d\beta - (\vec{F}_\alpha \times \hat{i}_\beta) \frac{ds_\beta}{2} - (\vec{F}_\beta \times \hat{i}_\alpha) \frac{ds_\alpha}{2} + \left(\vec{F}_\alpha + \frac{\partial \vec{F}_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha \right) \\ &\times \left(ds_\alpha \hat{i}_\alpha + \frac{ds_\beta}{2} \hat{i}_\beta \right) + \left(\vec{F}_\beta + \frac{\partial \vec{F}_\beta}{\partial \beta} d\beta \right) \times \left(ds_\beta \hat{i}_\beta + \frac{ds_\alpha}{2} \hat{i}_\alpha \right) + \vec{m} A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta = 0 \end{aligned} \quad (178)$$

onde: a origem do sistema é o ponto de referência para os momentos; $(\vec{F}_\alpha \times \hat{i}_\beta) ds_\beta / 2$ representa o momento devido a força F_α localizada pelo vetor $(ds_\beta / 2) \hat{i}_\beta$ com referência a 0 e $ds_\alpha = A_\alpha d\alpha$ e $ds_\beta = A_\beta d\beta$.

Substituindo as equações (170), (171) e (177) na equação (178), fazendo o produto vetorial indicado e utilizando as equações (173), a equação vetorial pode ser expandida nos três componentes escalares a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\beta M_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_\alpha M_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} M_{\alpha\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} M_\beta - A_\alpha A_\beta Q_\alpha + A_\alpha A_\beta m_\beta = 0 \quad (179)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\alpha M_\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\beta M_{\alpha\beta}) + \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} M_{\beta\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} M_\alpha - A_\alpha A_\beta Q_\beta + A_\alpha A_\beta m_\alpha = 0 \quad (180)$$

$$N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\alpha} - \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\beta} = 0 \quad (181)$$

3.1.7 Equação de Movimento

Aplica-se a segunda Lei de Newton para desenvolver a equação que governa o movimento de vibração livre de uma estrutura do tipo casca cilíndrica, as forças de inércias se igualam às resultantes em cada direção. Tendo-se as seguintes componentes de força inerciais:

$$\begin{aligned} q_\alpha &= -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ q_\beta &= -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ q_n &= -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (182)$$

As equações para uma casca cilíndrica, resultante das equações gerais de casca previamente apresentadas são obtidas com a escolha dos seguintes parâmetros:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x, & \beta &= \theta \\ A_\alpha &= 1, & A_\beta &= R \\ R_\alpha &= \infty, & R_\beta &= R \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

Nas equações (174) a (176) e (179) a (181) substitui-se as condições da equação (183).

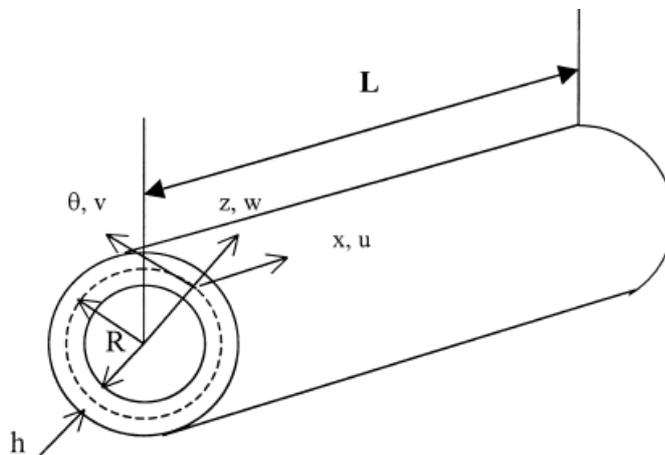


Figura 9 – Sistema de coordenadas

Adicionando os termos inerciais, as equações de equilíbrio ficam:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (184)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (185)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (186)$$

Com base na hipótese de Kirchhoff, na terceira consideração de Love, na teoria de Donnell-Mushtari e na equação (183), pode-se escrever as forças e o momento resultantes como:

$$\begin{aligned} (N_x, N_\theta, N_{x\theta}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}) dz \\ (M_x, M_\theta, M_{x\theta}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}) z dz \end{aligned} \quad (187)$$

Para uma casca cilíndrica fina, as equações (159) e (163) podem ser escrita, como:

$$\begin{aligned} e_x &= \varepsilon_x + zk_x \\ e_\theta &= \varepsilon_\theta + zk_\theta \\ \gamma_{x\theta} &= \varepsilon_{x\theta} + z\tau \end{aligned} \quad (188)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (189)$$

onde: e_x , e_θ e $\gamma_{x\theta}$ são as deformações nas direções axial e circunferencial e deformação de cisalhamento a uma distância z da superfície de referência, respectivamente; ε_x , ε_θ e $\varepsilon_{x\theta}$ são deformações da superfície de referência e k_x , k_θ e τ são curvaturas da superfície de referência.

As deformações e curvaturas da superfície de referências são definidas como:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma_{x\theta}] &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \\ [k_x, k_\theta, \tau] &= \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{1}{R^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \frac{2}{R} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (190)$$

Pela substituição das equações (188) e (190) na equação (189) e então substituindo o resultado na equação (187), as forças e momentos resultantes podem ser obtidos como:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{66} & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ k_x \\ k_\theta \\ \tau \end{bmatrix} \quad (191)$$

onde: A_{ij} , B_{ij} e D_{ij} são as rigidezas extensional, de acoplamento e de flexão definidas respectivamente, como:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (192)$$

Para casca fina, a qual é considerada no estado plano de tensões, Q_{ij} são as rigidezas definidas por:

$$Q_{11} = \frac{Y}{1-\mu^2}, Q_{12} = \frac{Y\mu}{1-\mu^2}, Q_{22} = \frac{Y}{1-\mu^2}, Q_{66} = \frac{Y}{2(1-\mu)} \quad (193)$$

Substituindo a equação (191), com as substituições das equações (192) e (193), nas equações (184) a (186), essas equações podem ser escritas na forma matricial, como:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad (194)$$

onde L_{ij} e b_i ($i, j = 1, 2, 3$) são operadores diferenciais em x , θ e r definido por: (Leissa, 1973)

$$L_{11} = (1 - 2\mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + 2(1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (195)$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x}, \quad (196)$$

$$L_{13} = \frac{\partial^2}{\partial r \partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (197)$$

$$L_{22} = (1 - 2\mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + 2(1 - \mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (198)$$

$$L_{23} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + (3 - 4\mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (199)$$

$$L_{31} = \frac{\partial^2}{\partial r \partial x}, \quad (200)$$

$$L_{32} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - (3 - 4\mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (201)$$

$$L_{33} = 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + (1 - 2\mu) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \quad (202)$$

$$(b_1, b_2, b_3) = \Delta^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u, v, w) \quad (203)$$

$$\Delta^2 = \frac{2(1 + \mu)(1 - 2\mu)\rho}{Y} \quad (204)$$

Os deslocamentos da casca podem ser expressos na forma de uma equação de propagação de onda, associado com o número de onda axial k_m e com o parâmetro modal circunferencial n , por:

$$\begin{aligned}
 u &= U_m \cos(m\theta)e^{(i\omega t - ik_n x)} \\
 v &= V_m \sin(m\theta)e^{(i\omega t - ik_n x)} \\
 w &= W_m \cos(m\theta)e^{(i\omega t - ik_n x)}
 \end{aligned}
 \tag{205}$$

onde U_m, V_m, W_m , são respectivamente a amplitude de onda nas direções x, θ e z , ω é frequência circular de excitação.

A solução da equação diferencial de movimento da casca pode ser obtida usando o método da separação de variáveis que conduz a:

$$w(x, \theta, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{\hat{n}=1}^N W_{m\hat{n}} \cdot \cos\left(\frac{\hat{n}\pi x}{l}\right) \cdot \cos(m\theta) \cdot e^{j\omega t}
 \tag{206}$$

A figura Figura 10 apresenta os modos circunferenciais da casca cilíndrica para $n = 1 \dots 5$.

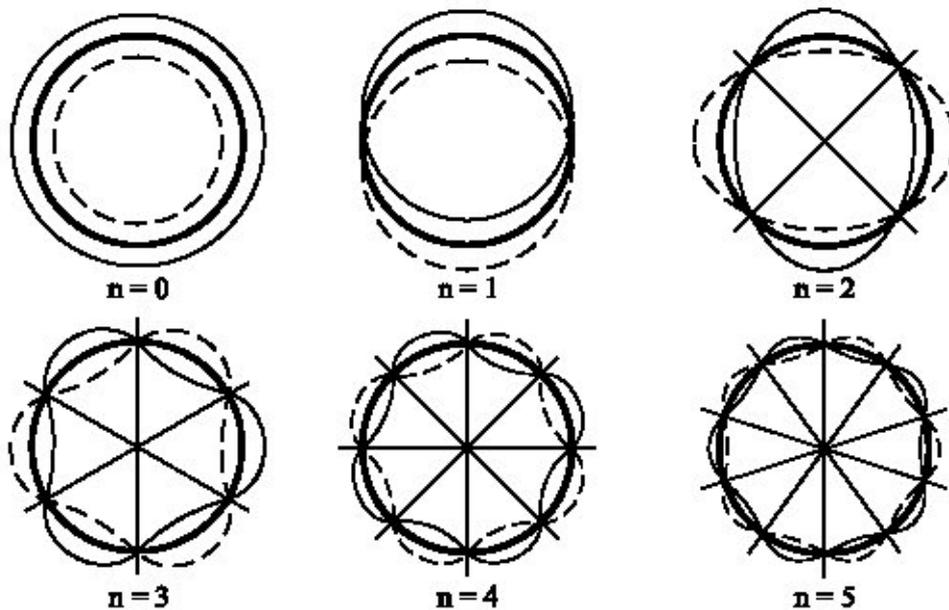


Figura 10 – Modos circunferenciais

CAPÍTULO 4

ACOPLAMENTO ACÚSTICO-ESTRUTURAL

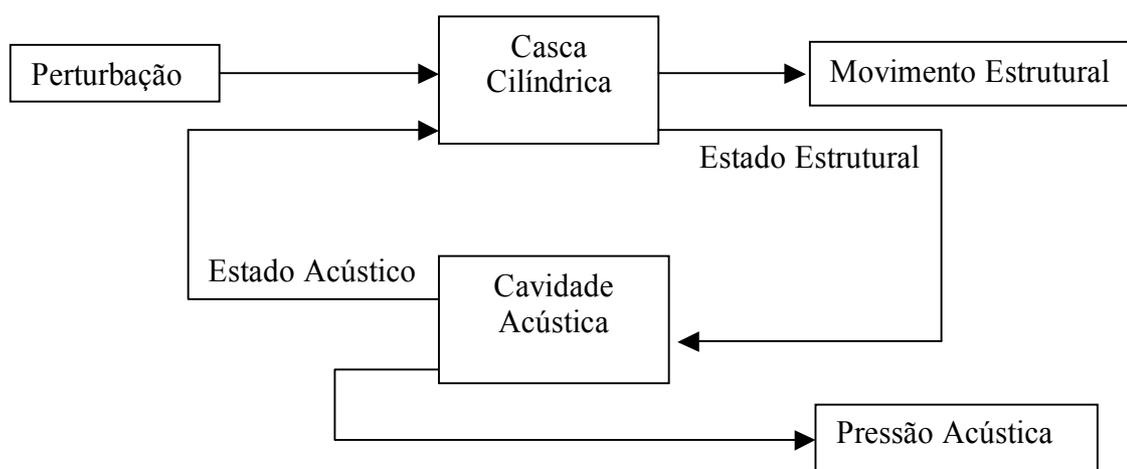


Figura 11 – Esquema de acoplamento acústico Estrutural

A interação fluido-estrutura na interface provoca uma força na estrutura causada pela pressão acústica, como também, um carregamento no fluido devido ao movimento estrutural.

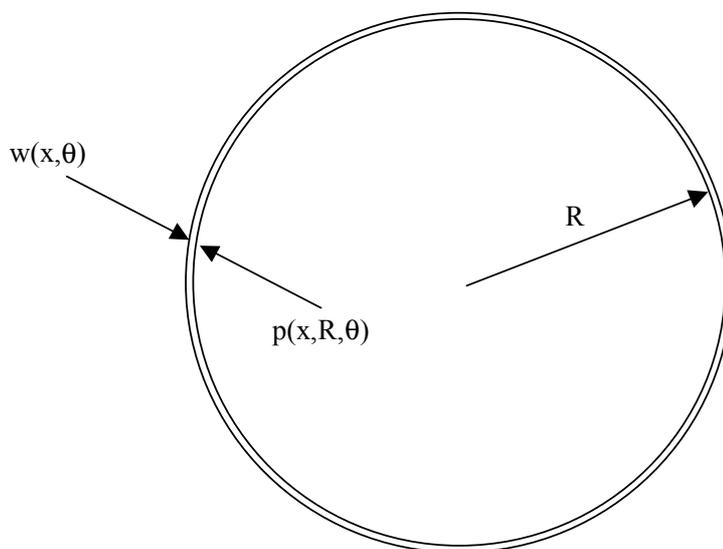


Figura 12 – Região de acoplamento do deslocamento da casca, w , e da pressão acústica, p

A condição de contorno para a interface entre o campo acústico e a casca cilíndrica relaciona o movimento estrutural com a pressão do campo acústico.

$$\rho_0 \ddot{w}(x, \theta, t) = \left. \frac{\partial P(x, r, \theta, t)}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad (207)$$

da equação (206) tem-se para o modo (m, n):

$$w(x, \theta, t) = W_{m\hat{n}} \cdot \cos\left(\frac{\hat{n}\pi x}{l}\right) \cdot \cos(m\theta) \cdot e^{j\omega t}, \quad (208)$$

para a aceleração da casca:

$$\ddot{w} = W_{m\hat{n}} \cdot \omega^2 \cdot \cos\left(\frac{\hat{n}\pi x}{l}\right) \cdot \cos(m\theta) \cdot e^{j\omega t}, \quad (209)$$

da equação (120) tem-se para o modo (m,n):

$$p(x, r, \theta, t) = P_{mn} \cos\left(\frac{\hat{n}\pi x}{L}\right) \cdot \cos(m\theta) \cdot J_m\left(\frac{\chi_{mn} r}{R}\right) \cdot e^{j\omega t}, \quad (210)$$

derivando a equação (210) tem-se:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=R} = P_{mn} \cdot \frac{\chi_{mn}}{R} \cdot \cos\left(\frac{\hat{n}\pi x}{l}\right) \cdot \cos(m\theta) \cdot J_m'\left(\frac{\chi_{mn}}{R} R\right) \cdot e^{j\omega t}, \quad (211)$$

aplicando a condição de contorno e sabendo-se que $e^{j\omega t} \neq 0$,

$$\left[\rho_0 W_{mn} \omega^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos(m\theta) - P_{mn} \frac{\chi_{mn}}{R} \cos\left(\frac{\hat{n}\pi x}{l}\right) \cos(m\theta) J_m'\left(\frac{\chi_{mn}}{R} R\right) \right] e^{j\omega t} = 0, \quad (212)$$

avalia-se o acoplamento para uma posição x fixa, por exemplo $x = 0$. Segundo Sun (1996), os modelos, acústico e estrutural, trocam energia dentro do mesmo modo circunferencial, tal que:

a equação (212) fica:

$$\rho_0 \cdot W_{mn} \cdot \omega^2 = P_{mn} \cdot \frac{\chi_{mn}}{R} \cdot J_m'(\chi_{mn}), \quad (213)$$

chega-se na relação entre o deslocamento modal W_{mn} e a pressão modal P_{mn} (Fuller, 1996)

$$P_{mn} = \frac{\rho_0 \cdot \omega^2}{\frac{\chi_{mn}}{R} \cdot J_m'(\chi_{mn})} \cdot W_{mn}, \quad (214)$$

onde ρ_0 é a densidade do fluido acústico. A equação pode ser reescrita por:

$$P_{mn} = \gamma_{mn} W_{mn}, \quad (215)$$

onde γ_{mn} representa o fator de acoplamento entre a casca e o fluido para as amplitudes de ondas nos modos (m,n).

Limitando a avaliação das amplitudes modais da casca em um número finito M e avaliando a pressão interna em um número igual de pontos, permite expressar o vetor de pressões em forma de matriz como:

$$\begin{bmatrix} p_m^1 \\ p_m^2 \\ \vdots \\ p_m^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{m1} \Psi_{m1}^1 & \gamma_{m2} \Psi_{m2}^1 & \cdots & \gamma_{mM} \Psi_{mM}^1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \gamma_{m1} \Psi_{m1}^M & \gamma_{m2} \Psi_{m2}^M & \cdots & \gamma_{mM} \Psi_{mM}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{m1} \\ W_{m2} \\ \vdots \\ W_{mM} \end{bmatrix} \quad (216)$$

onde

$$\Psi_{mn} = J_m \left(\frac{\chi_{mn} r}{R} \right) \quad (217)$$

é a forma do modo radial do campo de pressão e o índice $j=1,2...M$ se refere a cada ponto de avaliação da pressão discreta.

A equação (216) revela que o comportamento acústico estrutural ocorre essencialmente à baixas frequências, isto é devido a função de Bessel apresentar valores

baixos para ordens superiores e para valores mais altos de χ_{mn} como pode ser visto pelo gráfico da Figura 13.

Para ilustrar o efeito dos diferentes fatores de acoplamento entre os deslocamento da casca e a resposta acústica, um exemplo com variação de γ_{mn} é analisado. Considerando a variação de γ_{mn} , W_{mn} pode ser muito pequeno, enquanto γ_{mn} associado pode ser muito grande, devido $J_m'(\chi_{mn}) \cong 0$ próximo da frequência de ressonância da cavidade, neste caso, a pressão do fluido acoplada ao movimento da casca, relativamente pequeno, será grande. Por outro lado, W_{mn} pode ser grande enquanto o componente modal de pressão é pequeno devido a $J_m\left(\frac{\chi_{mn}R}{R}\right) \cong 0$ (Paxton, 1997).

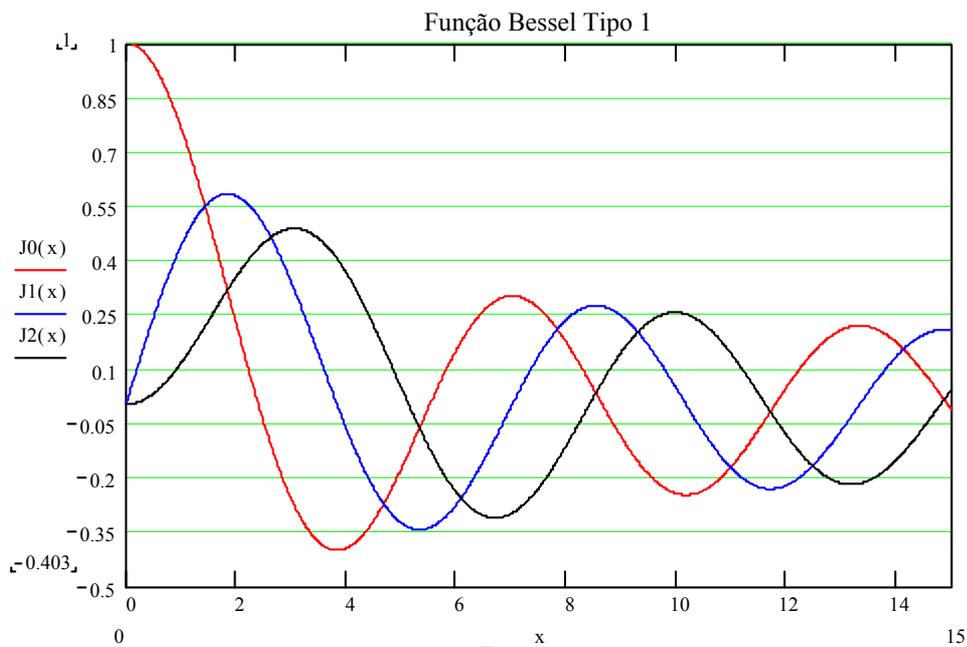


Figura 13 – Função de Bessel de 1º tipo de ordem 0, 1 e 2 respectivamente

Este comportamento apresenta a dificuldade em identificar os modos estruturais que são importantes em termos dos níveis sonoros interiores, quando as amplitudes modais da estrutura forem pequenas comparadas a outros que são fracamente acopladas à cavidade interior.

Uma possível solução para este problema é o uso de uma fonte sonora auxiliar para gerar uma distribuição de pressão no interior da cavidade de forma que o campo acústico resultante se aproxime do campo gerado devido à perturbação estrutural original. A vibração

resultante na estrutura nos modos acoplados devido à perturbação acústica pode ser analisada para determinar os modos estruturais importantes e os modos estruturais que podem ser descartados na análise direta do campo de vibração original. Invertendo a equação (216) tem-se:

$$\begin{bmatrix} W_{m1} \\ W_{m2} \\ \vdots \\ W_{mM} \end{bmatrix} = [\beta] \begin{bmatrix} p_m^1 \\ p_m^2 \\ \vdots \\ p_m^M \end{bmatrix} \quad (218)$$

onde β é o inverso da matriz quadrada $[\gamma^m \psi^m]$. A pressão total em $(0,r,\theta)$ é obtida pela somatória dos modos circunferenciais, como (Paxton, 1997)

$$p(r, \theta) = p_0 + p_1 \cos(\theta) + p_2 \cos(2\theta) + p_3 \cos(3\theta) + \dots \quad (219)$$

onde $e^{j\omega t}$ teve que ser omitido.

Considerando a linearidade do sistema, reproduzindo com exatidão o campo de pressão, deve ser reproduzida também as vibrações originais da estrutura. Porém, se uma aproximação grosseira do campo de pressão for aplicada, consistindo apenas dos modos dominantes da cavidade, devido ao fraco acoplamento dos modos estruturais, estes não deveriam ser excitados. (Paxton, 1997)

CAPÍTULO 5

METODOLOGIA E SIMULAÇÃO NO ANSYS

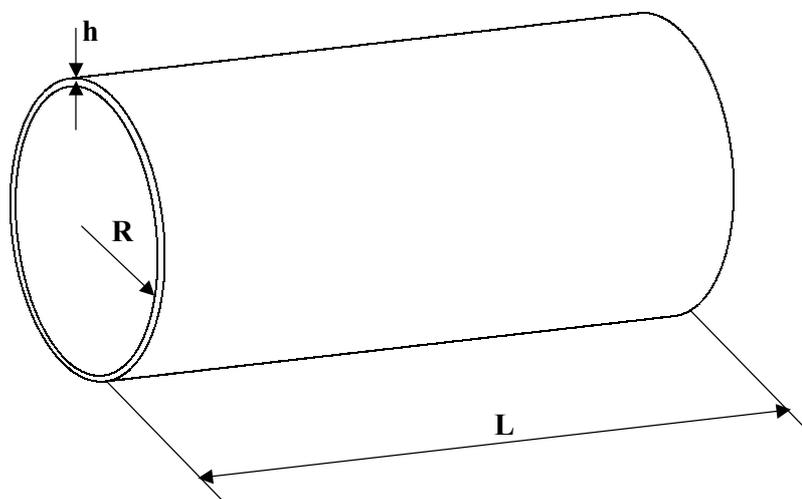


Figura 14 –Dimensões da estrutura do tipo casca cilíndrica

O estudo consiste em dois modelos de cascas cilíndricas uniformes. O primeiro com estrutura em alumínio e ar no interior da cavidade, com 1,524 m de comprimento, 0,3 m de raio e 2,4 mm de espessura, deseja-se observar a influência do acoplamento na resposta do sistema acoplado; o segundo com estrutura em aço e água no interior da cavidade, com 20 m de comprimento, 1 m de raio e 10 mm de espessura, neste modelo deseja-se observar a influência do acoplamento na frequência natural da estrutura do sistema acoplado em comparação com a estrutura no vácuo. As estruturas são fechadas nas extremidades é observada a propagação sonora no interior da cavidade.

Estuda-se os sistemas acústicos e estruturais desacoplados por meios de modelos de cavidades rígidas e estruturas no vácuo. Posteriormente os sistemas são acoplados e são avaliados as influências do acoplamento na resposta.

A Tabela 3 e a Tabela 4 apresentam as propriedades dos materiais utilizados nos modelos e as dimensões dos mesmos respectivamente.

Tabela 3 – Propriedades dos Materiais Utilizados nos Modelos

Propriedades dos materiais	Modelo 1		Modelo 2	
	Meio	Valor	Meio	Valor
Densidade	Ar	1,21 kg/m ³	Fluido denso	1000 kg/m ³
Velocidade do som		343 m/s		1500 m/s
Módulo de elasticidade	Alumínio	73 GPa	Aço	210 GPa
Densidade		2770 kg/m ³		7850 kg/m ³
Espessura		0,0024 m		0,01 m
Coefficiente de Poisson		0,33		0,3

Tabela 4 – Dimensões dos Modelos

	Modelo 1	Modelo 2
H (m)	0,0024	0,01
L (m)	1,524	20
R (m)	0,3	1

5.1 CAMPO ACÚSTICO

A cavidade acústica é modelada com elementos tetraédricos do tipo FLUID-30 na ausência de estrutura. Aqui é observado apenas a propagação sonora com suas frequências naturais e os modos acústicos.

Tabela 5 – Propriedades do Modelo em Elementos Finitos

Nº de elementos	34450 / 21733
Tipo de elemento	Fluid-30
Condições de contorno	Cavidade Rígida (ausência de movimento estrutural)
Forma do elemento	Tetraédrico de 4 nós

Os elementos de forma prismática de 8 nós são recomendados pela maior precisão nos resultados porém para geometrias cilíndricas existe a impossibilidade da discretização com elementos prismáticos sendo necessário utilizar elementos tetraédricos.

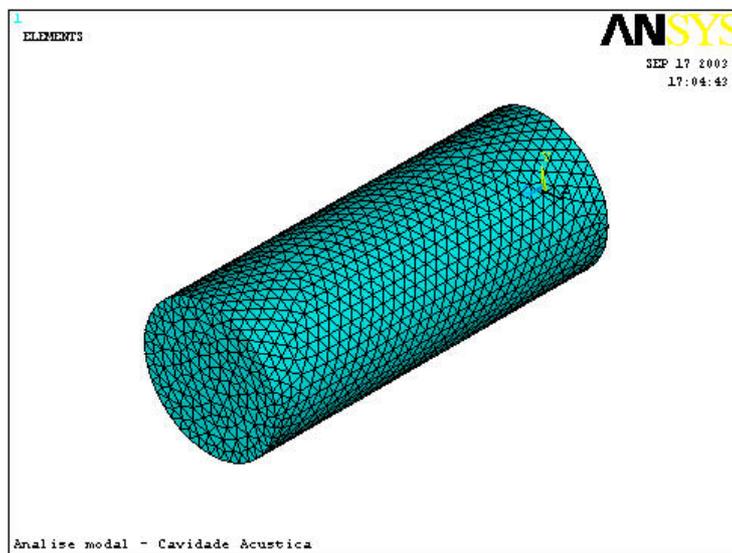


Figura 15 – Modelo em Elementos Finitos da cavidade cilíndrica

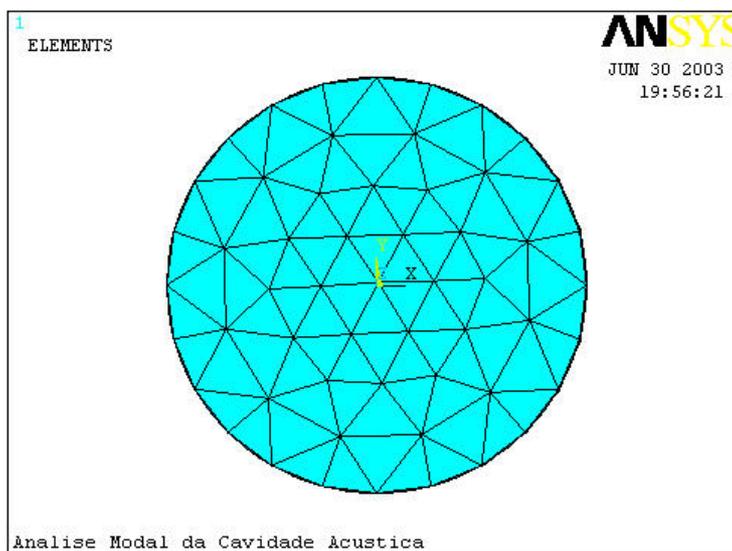


Figura 16 – Uso de elementos tetraédricos

A Figura 15 e a Figura 16 mostram o uso de elementos tetraédricos na discretização da cavidade acústica, o grande nº de elementos é devido à necessidade de ter-se uma relação alta entre o nº de elementos por comprimento de onda. Com elementos menores é possível o estudo de frequências mais altas.

5.2 RESPOSTA ESTRUTURAL NO VÁCUO

A estrutura é modelada na ausência do campo acústico para se obter as frequências naturais e os modos de vibração da casca cilíndrica.

Tabela 6 – Propriedades do Modelo de Elementos Finitos

Nº de elementos	3076 / 3320
Tipo de elemento	Shell-63
Condições de contorno	Deslocamento = 0, em $x=0$ e $x=L$
Forma do elemento	Triangular de 3 nós

É recomendado o uso de elementos quadrangulares de 4 nós, mas para se fazer o acoplamento com os elementos tetraédricos no campo acústico foi modelado a geometria com elementos triangulares.

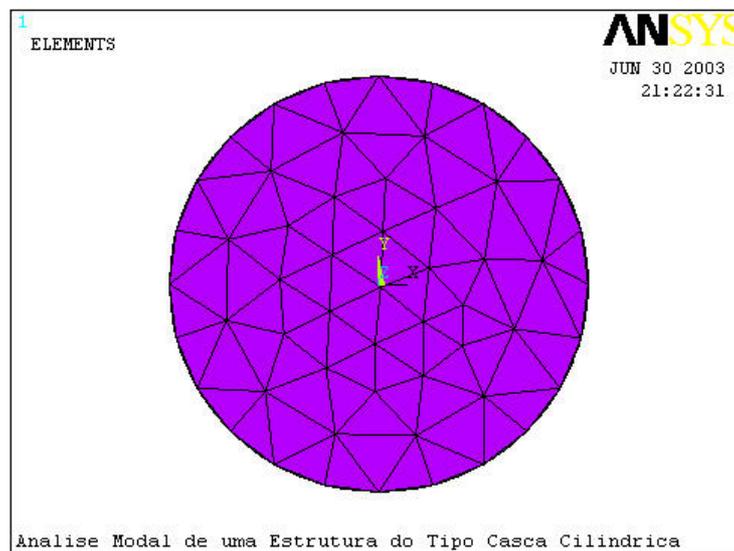


Figura 17 – Uso de elementos triangulares

O modelo tem por condições de contorno deslocamento nulo nos nós das faces $x=0$ e $x=L$. Assim é possível avaliar os modos circunferenciais da estrutura limitando o movimento de “viga”.

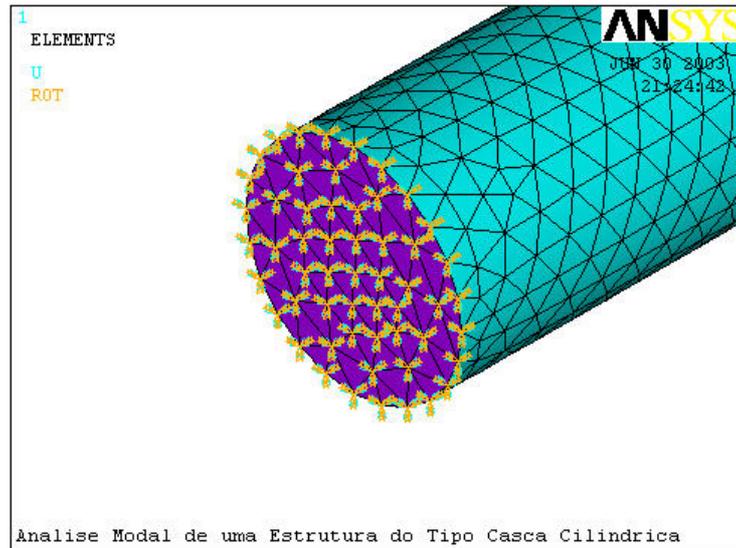


Figura 18 – Condição de contorno, deslocamento nulo, nas faces $x = 0$ e $x = L$

5.3 ACOPLAMENTO ACÚSTICO – ESTRUTURAL

O acoplamento acústico estrutural se dá nos nós da interface fluido-estrutural. Para os nós sem contato com a estrutura tem-se apenas a pressão no nó como grau de liberdade, para o acoplamento dos dois sistemas altera-se as propriedades dos nós dos elementos acústico em comum com os nós dos elementos estruturais de forma possibilitar o deslocamento destes nós.

Tabela 7 – Propriedades do Modelo de Elementos Finitos

Nº de elementos	28538 /
Tipo de elemento	Shell-63 / Fluid-30
Condições de contorno	Casca acoplada ao fluido
Forma do elemento	Tetraédrico e triangular

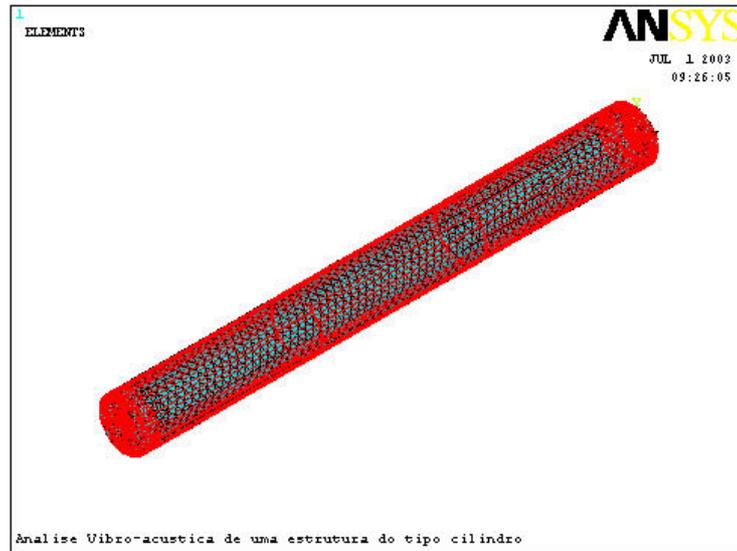


Figura 19 – Acoplamento fluido-estrutura no ANSYS

CAPÍTULO 6

ANÁLISE DOS RESULTADOS

6.1 CAMPO ACÚSTICO

A distribuição de pressão no interior da cavidade é dada pelos modos acústicos excitados. A Figura 20, Figura 21 e Figura 22 apresentam os tipos de modos possíveis em uma cavidade cilíndrica.

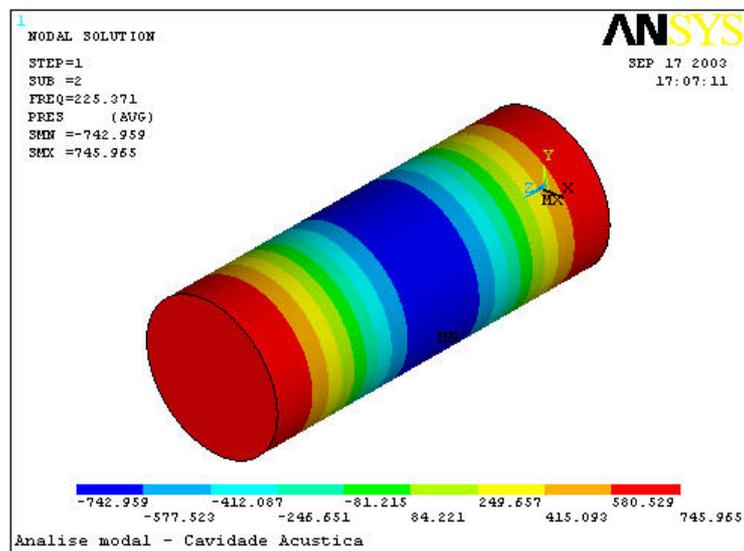


Figura 20 –modo acústico longitudinal

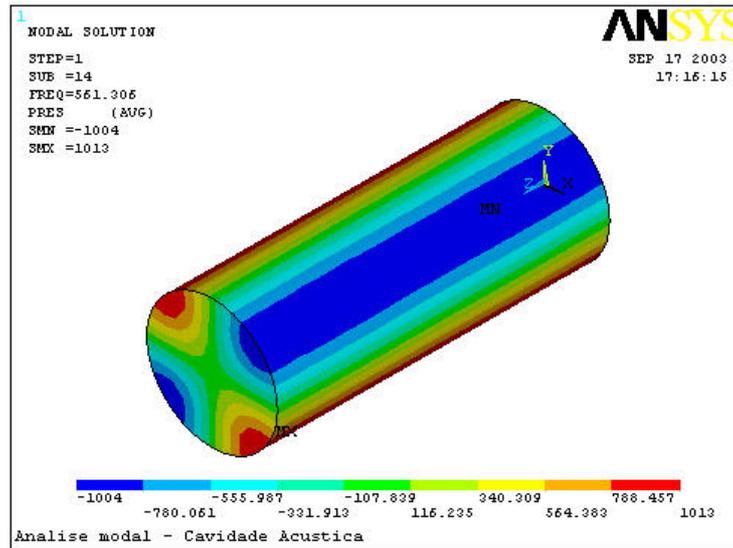


Figura 21 – modo acústico circunferencial

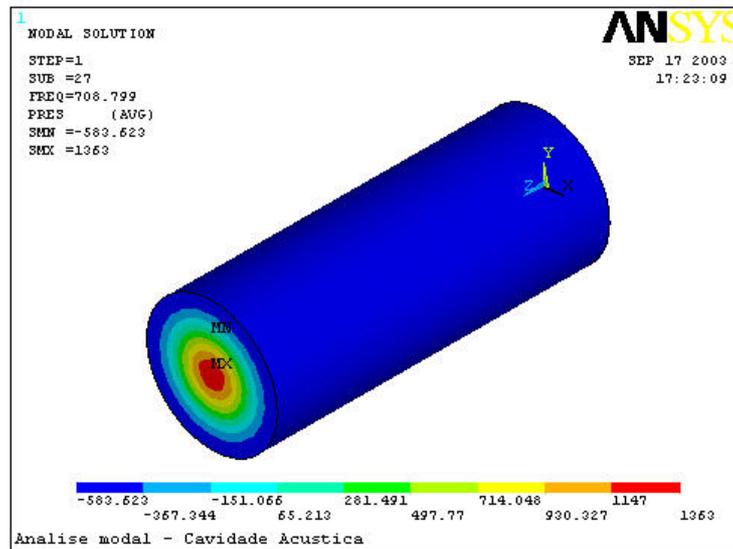


Figura 22 – modo acústico radial

6.1.1 Modelo 1

O modelo 1 tem por característica a presença de um fluido de baixa densidade no interior de uma cavidade cilíndrica.

A Tabela 8 mostra que as frequências naturais obtidas analiticamente são próximas às obtidas pelo programa ANSYS para o modelo 1, com diferenças inferiores a 1%. O modelo em elementos, para a cavidade acústica, é validado por esta concordância.

Tabela 8 – Comparação das frequências naturais acústicas de uma cavidade cilíndrica, obtidas analiticamente e pelo ANSYS (L=1,524 (m) e R = 0,3 (m))

Frequência Natural (Hz)				
Ordem	ANSYS	Analítico	Erro %	Modo (x,r,θ)
1	112,57	112,53	0%	(1,1,0)
2	225,37	225,06	0%	(2,1,0)
3	336,50	334,81	1%	(0,1,1)
4	338,75	337,59	0%	(3,1,0)
5	355,04	353,22	1%	(1,1,1)
6	405,98	403,43	1%	(2,1,1)
7	452,76	450,13	1%	(4,1,0)
8	479,05	475,47	1%	(3,1,1)
9	561,17	554,99	1%	(0,1,2)
10	566,65	561,00	1%	(4,1,1)

Na faixa de frequência de 0 a 1000 Hz, tem-se apenas quatro modos circunferenciais, sendo estes apresentados nas Figura 23 à Figura 26.

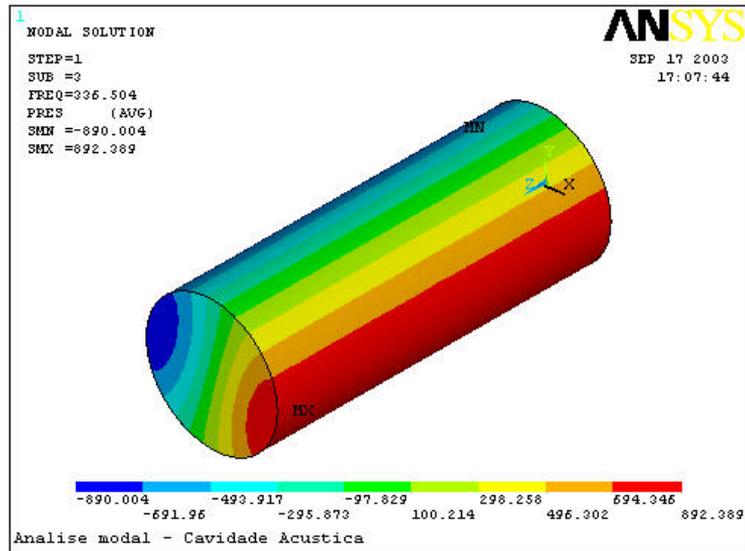


Figura 23 – modo acústico circunferencial m=1

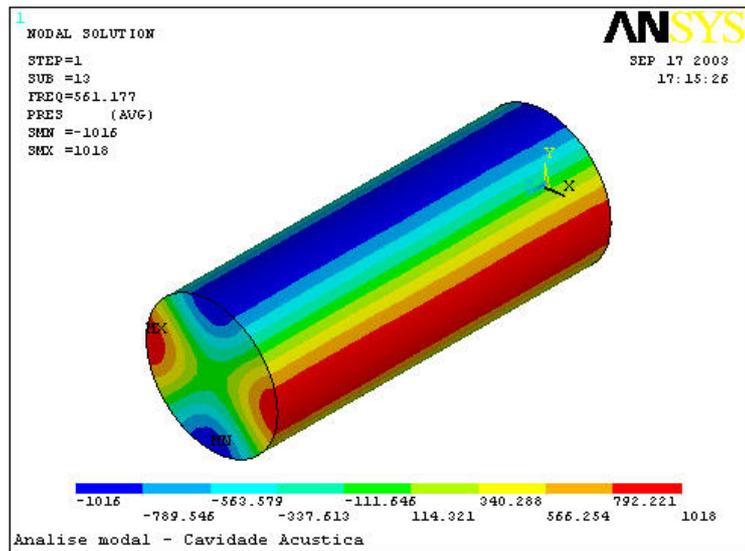


Figura 24 – modo acústico circunferencial m=2

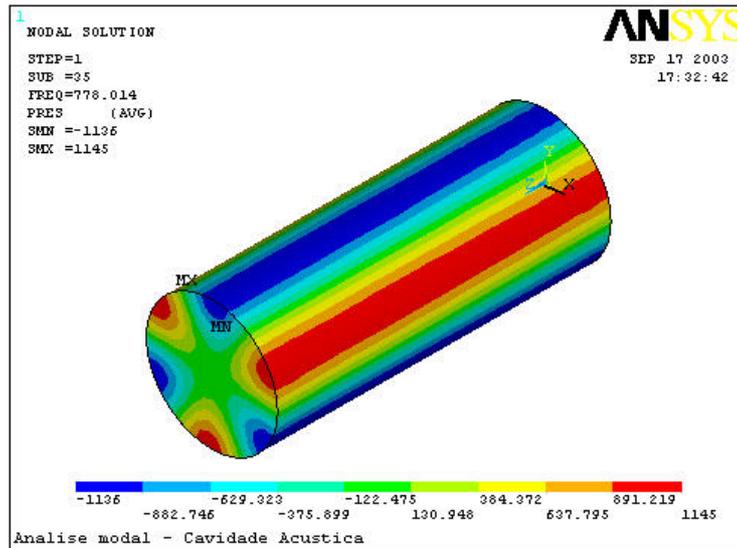


Figura 25 – modo acústico circunferencial m=3

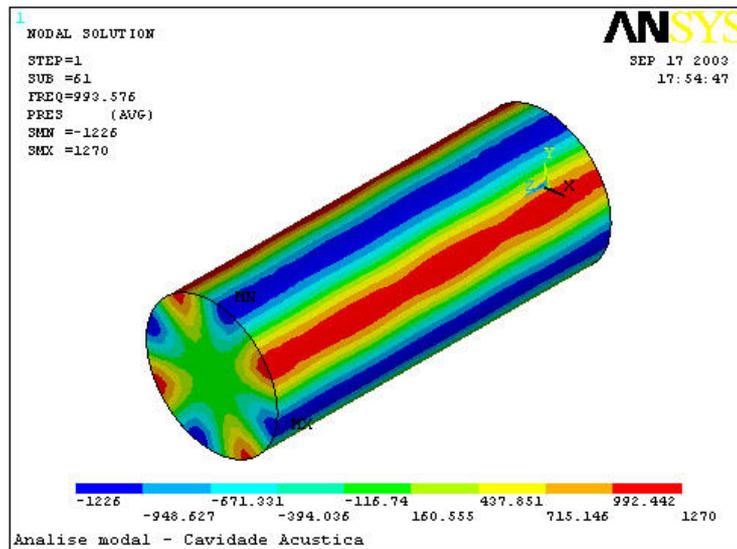


Figura 26 – modo acústico circunferencial m=4

6.1.2 Modelo 2

O modelo 2 apresenta um fluido de densidade mais elevada no interior de uma cavidade cilíndrica de grandes dimensões. As frequências naturais do campo acústico calculadas e as obtidas no ANSYS são apresentados na Tabela 9.

Tabela 9 – Comparação das frequências naturais acústicas de uma cavidade cilíndrica, obtidas analiticamente e pelo ANSYS (L=20 (m) e R = 1 (m))

Frequência Natural (Hz)				
Ordem	ANSYS	Analítico	Erro %	Modo (x,r, θ)
1	37,492	37,5	0%	(1,0,0)
2	75,006	75	0%	(2,0,0)
3	112,56	112,5	1%	(3,0,0)
4	150,19	150	0%	(4,0,0)
5	187,89	187,5	1%	(5,0,0)
6	225,71	225	1%	(6,0,0)
7	263,64	262,5	1%	(7,0,0)
8	301,72	300	1%	(8,0,0)
9	339,98	337,5	1%	(9,0,0)
10	378,32	375	1%	(10,0,0)

6.2 RESPOSTA DINÂMICA ESTRUTURAL NO VÁCUO

Para validar o modelo em elementos finitos da estrutura comparou-se os resultados obtidos no programa ANSYS com os resultados apresentados por Zhang (2001), modelo 2. Pela Tabela 10 é possível ver que o modelo criado no ANSYS apresenta desvio médio de 1%. O modelo em elementos finitos representa satisfatoriamente o modelo estudado por Zhang (2001) validando portanto a metodologia de modelagem e o tipo de elemento empregado para o estudo de uma casca cilíndrica uniforme.

Tabela 10 – Frequências naturais de uma estrutura do tipo casca cilíndrica no vácuo, obtidas pelo ANSYS (L=20 (m), R = 1 (m) e h = 0,01(m)) e por Zhang (2001)

Frequência Natural (Hz)				
Ordem	Zhang,2001	ANSYS(Hz)	Erro %	Modo (x, θ)
1	12,17	12,154	0%	(1,2)
2	19,61	19,766	1%	(1,3)
3	23,28	23,579	1%	(2,3)
4	28,06	27,483	2%	(2,2)
5	31,98	32,440	1%	(3,3)
6	36,47	36,656	1%	(1,4)
7	37,37	37,750	1%	(2,4)
8	39,78	40,334	1%	(3,4)

6.2.1 Modelo 1

Para a faixa de frequência de 0 a 1000 Hz temos 11 modos circunferenciais presentes na estrutura, apresentados da Figura 27 à Figura 37. Estes modos são responsáveis pelo acoplamento entre o campo acústico e o campo estrutural.

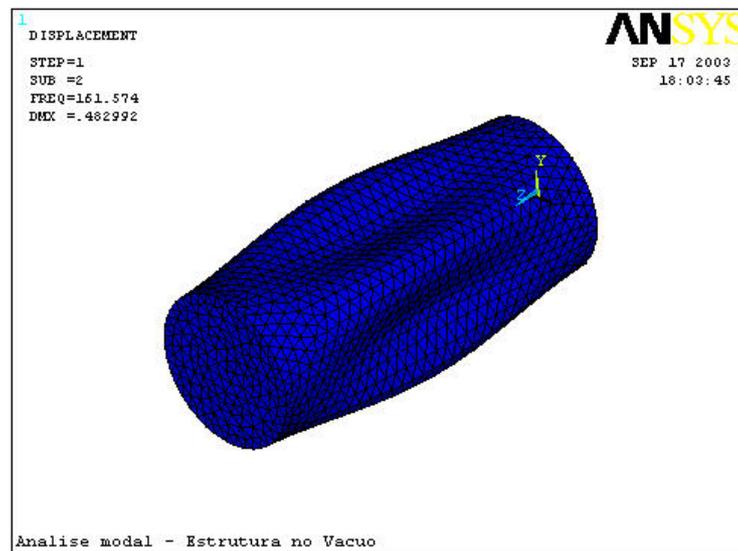


Figura 27 – modo estrutural circunferencial m=4

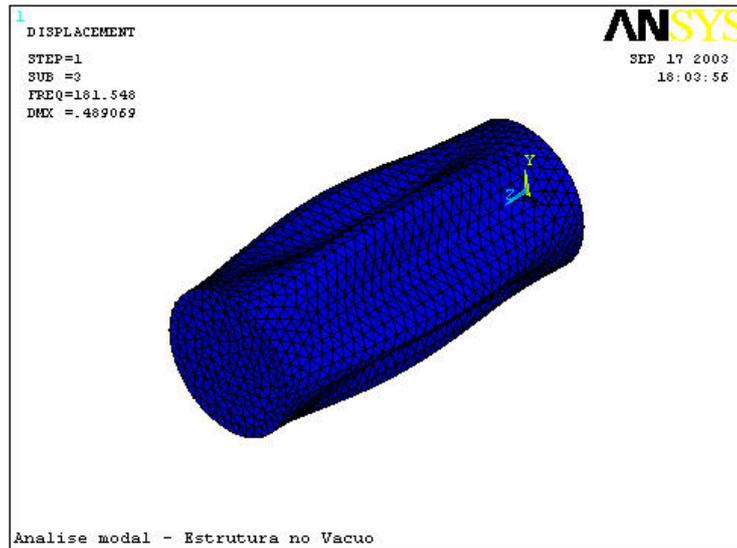


Figura 28 – modo estrutural circunferencial m=5

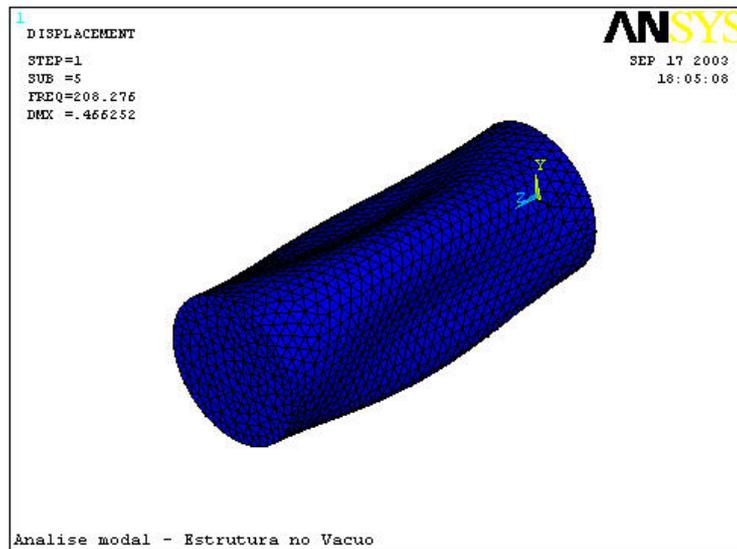


Figura 29 – modo estrutural circunferencial m=3

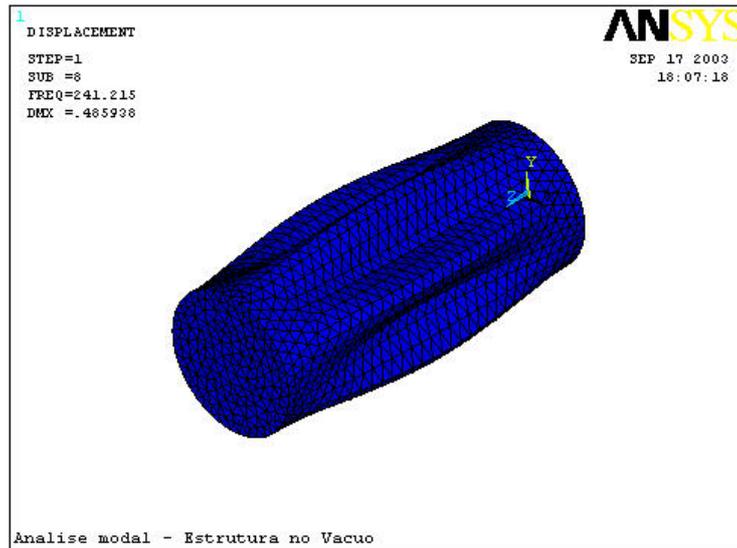


Figura 30 – modo estrutural circunferencial m=6

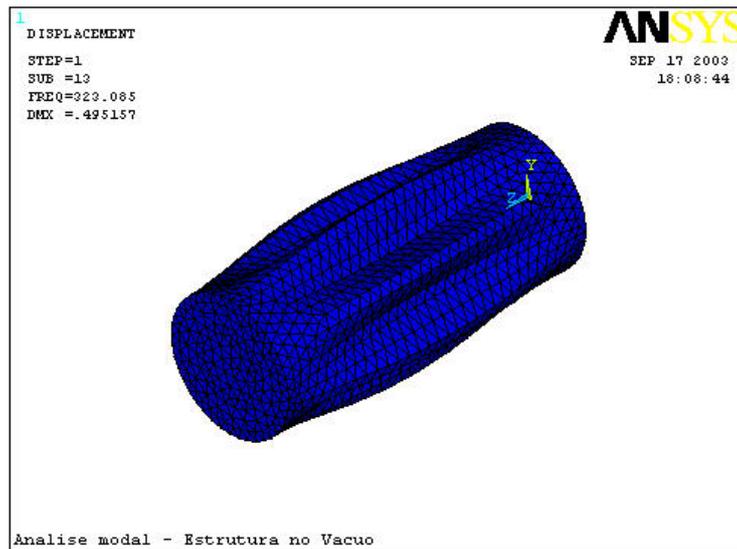


Figura 31 – modo estrutural circunferencial m=7

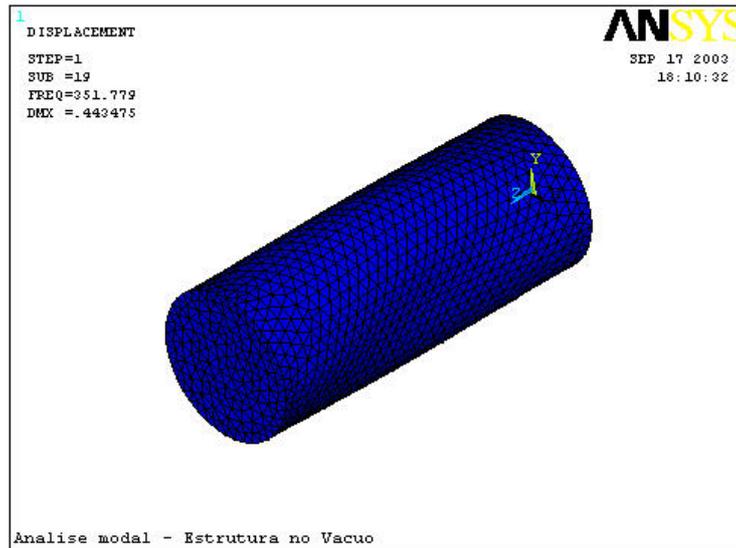


Figura 32 – modo estrutural circunferencial $m=2$

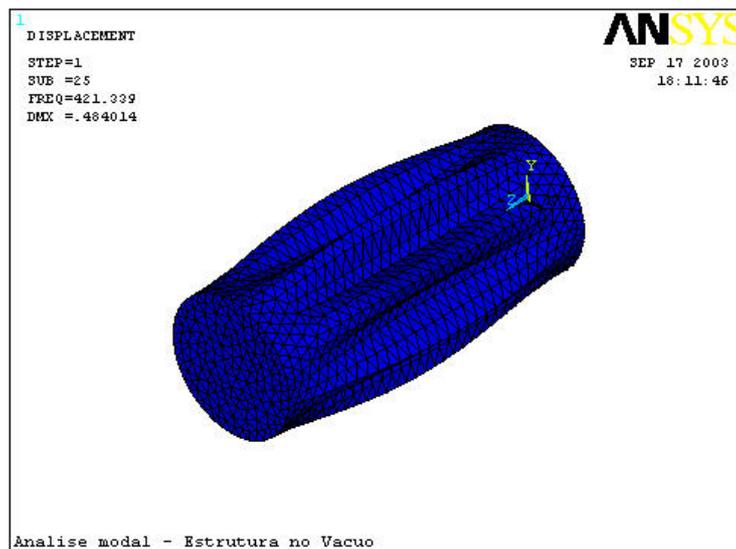
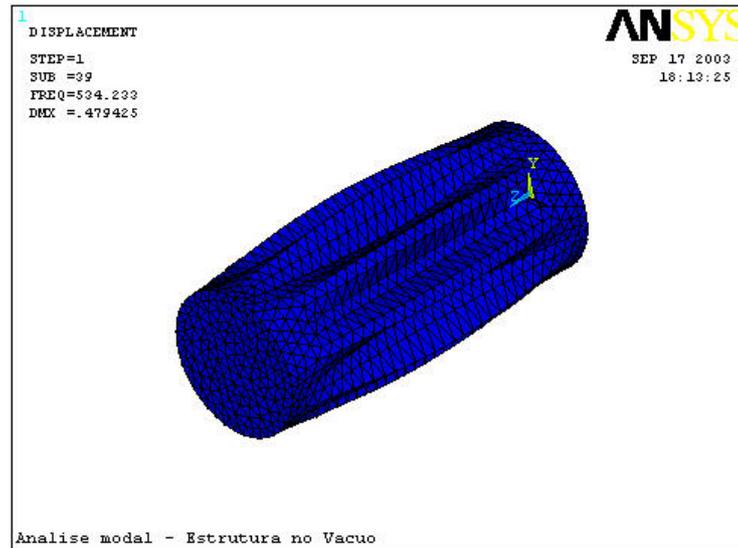
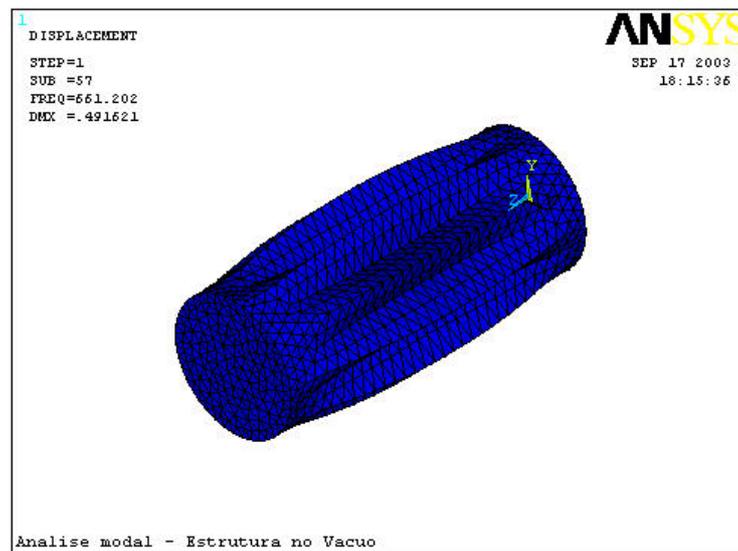


Figura 33 – modo estrutural circunferencial $m=8$

Figura 34 – modo estrutural circunferencial $m=9$ Figura 35 – modo estrutural circunferencial $m=10$

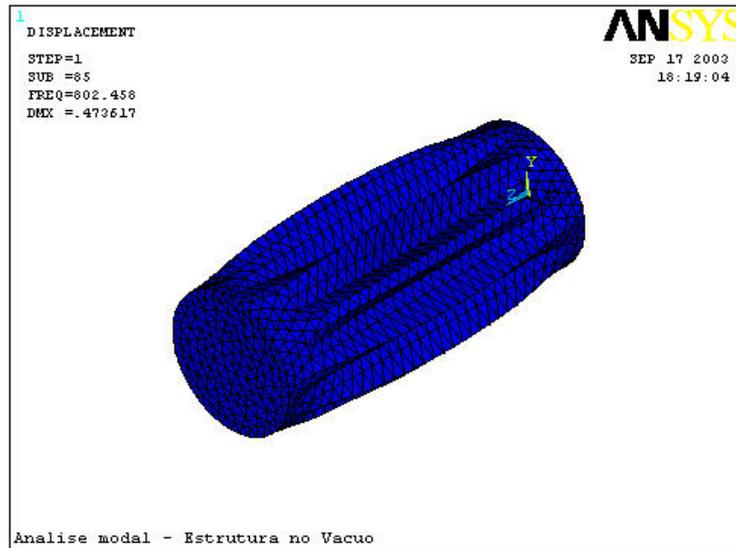


Figura 36 – modo estrutural circunferencial $m=11$

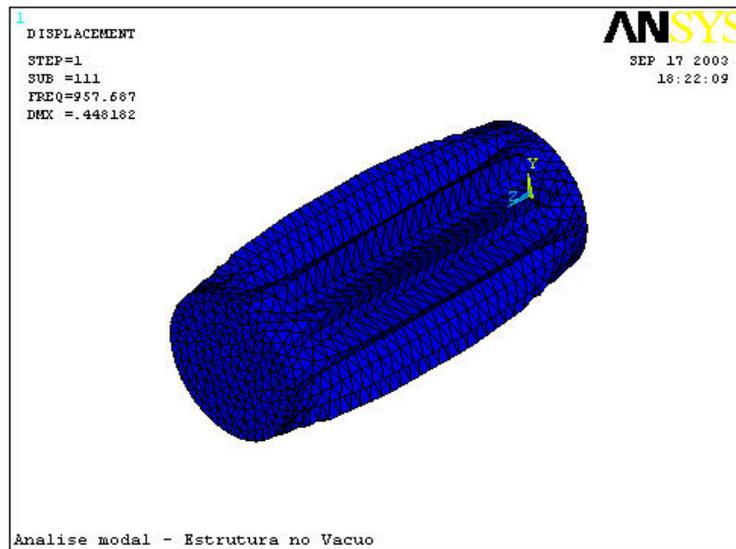


Figura 37 – modo estrutural circunferencial $m=12$

6.3 ACOPLAMENTO ACÚSTICO – ESTRUTURAL

6.3.1 Modelo 1

De acordo com o desenvolvimento analítico o acoplamento acústico-estrutural se dá nos modos circunferenciais. Para a faixa de frequência de 0 a 1000 Hz temos 4 modos acústicos circunferenciais e 11 modos estruturais circunferenciais. O acoplamento no modelo estudado se dá apenas para os modos de ordem até 4.

Não foi observado alterações significativas nas frequências naturais da estrutura quando o movimento desta está acoplado à pressão sonora da cavidade acústica como pode-se ver na Tabela 11. Este fato era esperado devido à massa e rigidez do ar serem pequenas quando comparadas à massa e rigidez da estrutura.

Tabela 11 – Frequências naturais do sistema estrutural no vácuo e acoplado ao campo acústico ($L=1,524$ (m), $R = 0,3$ (m) e $h = 2,4$ (mm))

Frequência Natural (Hz)				
Ordem	Desacoplado	Acoplado	Razão	Modo (r,x)
1	161,34	160,373	0,99	(4,1)
2	181,54	180,85	1,00	(5,1)
3	208,27	205,72	0,99	(3,1)
4	241,21	240,29	1,00	(6,1)
5	275,33	274,91	1,00	(5,2)
6	289,45	288,90	1,00	(6,2)
7	323,08	322,24	1,00	(7,1)
8	328,10	325,73	0,99	(4,2)
9	349,53	349,12	1,00	(7,2)
10	389,38	388,41	1,00	(6,3)

A Tabela 12 apresenta as frequências naturais para os sistemas desacoplados e para os sistema acoplado.

Tabela 12 – Frequências naturais acopladas, desacopladas para uma estrutura do tipo casca cilíndrica e o campo acústico interno ($L=1,524$ (m), $R = 0,3$ (m) e $h = 2,4$ (mm))

Frequência Natural (Hz)		
Ordem	Acústico	Estrutural Acoplado
1	112,57	112,48
2		161,34 160,37
3		181,54 180,85
4		208,27 205,61
5	225,37	225,52
6		241,21 240,30
7		275,33 274,91
8		289,45 288,90
9		323,08 322,24
10		328,10 329,67
11	336,50	338,26
12	338,75	338,94
13		349,53 349,13

A Figura 38 e a Figura 39 apresentam dois modos de vibração do sistema acoplado quando este vibra nas frequências naturais do campo acústico.

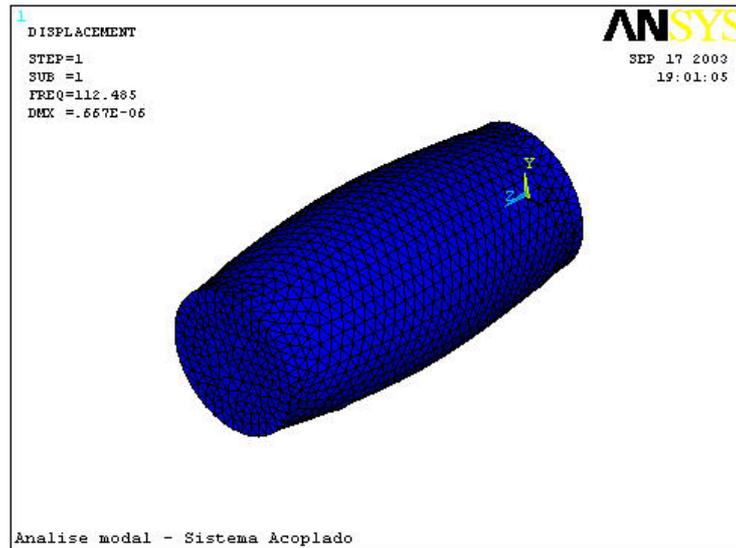


Figura 38 – modo de vibração do sistema acoplado – 112 Hz

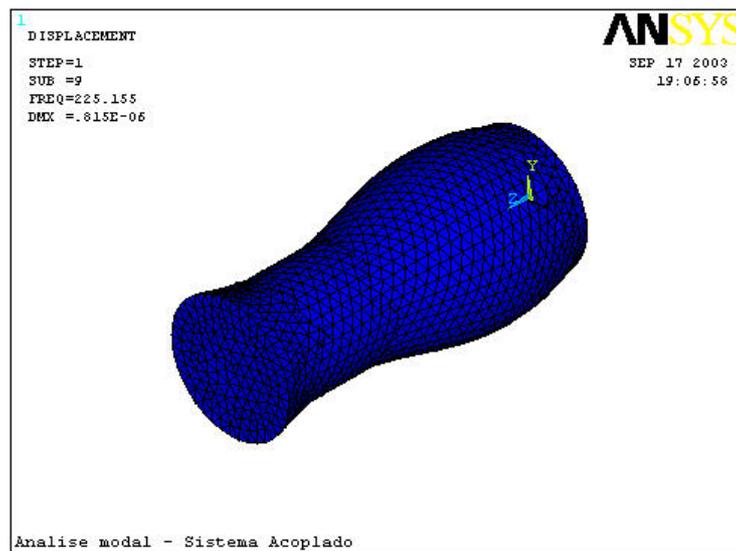


Figura 39 – modo de vibração do sistema acoplado – 225 Hz

6.3.2 Modelo 2

O segundo modelo apresenta alterações significativas para as frequências naturais da estrutura quando o sistema acústico-estrutural está acoplado. A Tabela 13 apresenta as frequências naturais da estrutura para o sistema desacoplado e o sistema acoplado. Observa-se

que as frequências para o sistema acoplado variam de 0,42 à 0,57 do valor das frequências naturais do sistema desacoplado, evidenciando o impacto do acoplamento. Estes resultados concordam com os resultados obtidos por Zhang, (2001), Tabela 14.

Tabela 13 – Frequências naturais do sistema estrutural desacoplado e acoplado ($L=20$ (m), $R = 1$ (m) e $h = 0,01$ (m))

Frequência Natural (Hz)			
Ordem	Desacoplado	Acoplado	Razão
1	12,154	5,105	0,42
2	19,766	9,817	0,50
3	23,579	11,62	0,49
4	27,483	11,77	0,43
5	32,44	16,23	0,50
6	36,65	20,98	0,57
7	37,75	21,39	0,57
8	40,33	21,74	0,54

Tabela 14 – Frequências naturais do sistema estrutural desacoplado e acoplado Zhang, (2001).

Frequência Natural (Hz)			
Ordem	Desacoplado	Acoplado	Razão
1	12,17	4,93	0,41
2	19,61	8,94	0,46
3	23,28	10,64	0,46
4	28,06	11,48	0,41
5	31,98	14,66	0,46
6	36,47	18,26	0,50
7	37,37	18,73	0,50
8	39,78	19,96	0,50

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

O acoplamento entre uma cavidade cilíndrica e uma estrutura flexível foi modelado analiticamente evidenciando a troca de energia entre o sistema acústico e o sistema estrutural, acentuando a pressão sonora e o deslocamento estrutural em baixas frequências onde temos acoplamento mais forte.

O estudo em Elementos Finitos mostrou a influência do acoplamento nas frequências naturais e nos modos de vibração. Quando a diferença entre a densidade do fluido e a densidade da casca são pequenas o efeito do acoplamento é mais pronunciado nas alterações das frequências naturais. Este fato mostra a importância em se avaliar os efeitos do acoplamento em projetos de controle de forma se evitar grandes erros.

Ao contrário do comportamento característico de estruturas do tipo viga e placa, estruturas do tipo casca cilíndrica uniforme não apresentam a frequência natural em ordem crescente com o valor dos parâmetros modais, foram observados modos de baixa ordem com frequências mais elevadas.

7.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

O crescimento das necessidades de redução do ruído aliado ao desenvolvimento de estruturas mais leves e motores mais potentes, impulsionam o estudo do acoplamento acústico estrutural com o desenvolvimento de técnicas de controle ativo. O conhecimento mais aprofundado nesta área com o desenvolvimento de sistemas de controle de vibração e ruído

eficazes tendem em um futuro próximo se tornar ferramentas indispensáveis no desenvolvimento de novos equipamentos.

7.2 SUGESTÕES DE NOVOS TRABALHOS

Sugere-se que em trabalhos futuros seja feita a análise experimental do acoplamento fluido-estrutural na determinação das frequências naturais e da influência do acoplamento no sistema para comparação com os resultados numéricos.

Outra sugestão de estudo é o modelamento de simulação numérica do controle acústico estrutural com posterior implementação de um sistema de controle ativo.

Desenvolvimento de uma análise experimental de modo a identificar quais as frequências na estrutura são de origem acústica.

Desenvolvimento de um sistema de controle ativo de forma a minimizar a resposta da estrutura devido ao acoplamento acústico estrutural.

Analisar a influência do controle ativo estrutural no campo acústico, pois pode controlar a estrutura, mas excitar o campo acústico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, M. T. e GÓZ, R. D. S. (1988)**, “*Curso de Controle e Isolação de Vibrações em Sistemas Mecânicas*”, FUPAI, Itajubá-MG, 195p.
- BALAMURUGAN, V., NARAYANAN, S. (2001)**, Shell Finite Element for Smart Piezoelectric Composite Plate//Shell Structures and its Application to the Study of Active Vibration Control. *Finite Element in Analysis and Design*, 37, p. 713-738.
- BAUSYS, R., WIBERG N. E. (1999)**, Adaptive Finite Element Strategy for Acoustic Problems. *Journal of Sound and Vibration*, 226(5), p. 905-922.
- BETTS, J. F. (1998)**, *Finite Element Study of Plane Wave Acoustic Phenomena in Ducts*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, no. p
- BLEVINS, R. D. (1979)**, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. Krieger Publishing Company.
- BORESI, P.C. P., LYNN, A. P. (1974)**, *Elasticity in Engineering Mechanics*, Prentice Hall
- BOYLE, S. CHARRON, F. (1999)**, The Vibroacoustic Response of a Cylindrical Shell Structure with Viscoelastic and Poroelastic Materials. *Applied Acoustics*, 58, p. 131-152.
- BRITO, L. A. P. F. (2000)**, *Estudo da Influência dos Componentes de uma Fuselagem na Freqüência de Vibração Livre da Estrutura e seu Acoplamento com o Fluido Interno*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica) – Divisão de Pós-Graduação, ITA, São José dos Campos.

- BRÜCKNER, S. (1998)**, *Impact of Fluid Loading on the Radiated Sound Power of Vibrating Plates*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Institut Für Aerodynamik und Gasdynamik, Stuttgart.
- CAZZOLATO, B. S. (1999)**, *Sensing Systems for Active Control of Sound Transmission into Cavities*. Tese (Doctor of Philophy em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Adelaide, Austrália.
- DING, W. P., CHEN, H. L. (2001)**, A Symmetrical Finite Element Model for Structure-Acoustic Coupling Analysis of an Elastic, Thin-Walled Cavity. *Journal of Sound and Vibration*, 243(3), p. 547-559.
- FRENDI, A. et al. (1995)**, An Efficient Model for Coupling Structural Vibrations with Acoustic Radiation. *Journal of Sound and Vibration*, 182(5), p. 741-757.
- FRISWELL, M. I. (2001)**, On the Design of Modal Actuators and Sensors. *Journal of Sound and Vibration*, 241(3), p. 361-372.
- FULLER, C. R. (2001)**, *Active Control of Vibration*. San Diego: Academic Press.
- HALLEZ, R. (2001)**, *Investigation of the Herschel-Quincke Tube Concept as a Noise Control Device for Turbofan Engines*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia.
- HARRIS, C. M. (1979)**, *Handbook of Noise Control*. EUA: McGraw-Hill.
- HENRY, J. K., CLARK, R. L. (2002)**, Active Control of Sound Transmission Through a Curved Panel Into a Cylindrical Enclosure. *Journal of Sound and Vibration*, 249(2), p. 325-349.
- HONG, K. L., KIM, J. (1995)**, Analysis of Free Vibration of Structural-Acoustic Coupled Systems. Part I: Development and Verification of the Procedure. *Journal of Sound and Vibration*, 188(4), p. 561-575.

- HONG, K. L., KIM, J. (1995)**, Analysis of Free Vibration of Structural-Acoustic Coupled Systems. Part II: Two- and Three- Dimensional Examples. *Journal of Sound and Vibration*, 188(4), p. 577-600.
- JEONG, K. et al. (2001)**, Free Vibration Analysis of a Cylindrical Shell Eccentrically Coupled with a Fluid-filled Vessel. *Computers & Structures*, 79, p. 1517-1524.
- JUNGER, M. C. (1995)**, Acoustic Fluid-Elastic Structure Interactions: Basic Concepts. *Computer & Structures*, Vol. 65, p. 287-293.
- KINSLER, L. E. et al. (1982)**, *Fundamentals of Acoustics*. New York: John Willey & Sons.
- LEE, J. H., KIM, J. (2002)**, Sound Transmission Through Periodically Stiffened Cylindrical Shells. *Journal of Sound and Vibration*, 251(3), p. 431-456.
- LEE, J. H., KIM, J.** Analysis and Measurement of Sound Transmission Through a Double-Walled Cylindrical Shell. *Journal of Sound and Vibration*, 251(4) (2002), p. 631-649.
- LEISSA A. W. (1973)**, *Vibration of Shells*. Washington, D. C.: NASA.
- LI, D. S. et al. (2002)**, Analysis of Structural Acoustic Coupling of a Cylindrical Shell with an Internal Floor Partition. *Journal of Sound and Vibration*, 250(5), p. 903-921.
- LIMA Jr., J. J. (1999)**, *Modelagem de Sensores e Atuadores Piezelétricos Aplicados em Controle Ativo de Estruturas. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - UNICAMP*
- LIN, O. R. et al. (2001)**, Cylindrical Panel Interior Noise Control Using a Pair of Piezoelectric Actuator and Sensor. *Journal of Sound and Vibration*, 246(3), p. 525-541.
- LIN, Q. et al. (2001)**, Active Control of Structural Acoustic Pressure in a Rectangular Cavity Using Piezoelectric Actuators. *Journal Mechanic Solids*, 20, p. 573-583.
- MARKOVIC, V. et al. (2000)**, Determination of Complex Resonant Frequencies in Rectangular and Cylindrical Rooms. *Applied Acoustics*, 59, p. 265-274.
- MISSAOUI, J., CHENG, L. (1999)**, Vibroacoustic Analysis of a Finite Cylindrical Shell with Internal Floor Partition. *Journal of Sound and Vibration*, 226(1), p. 101-123.

- MUNJAL, M. L. (1987)**, *Acoustic of Ducts and Mufflers*. India.: John Wiley & Sons.
- OHAYON, R. (2001)**, Reduced Symmetric Models for Modal Analysis of Internal Structural-Acoustic and Hydroelectric-Sloshing Systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, p. 3009-3019.
- PAXTON, S. (1997)**, *System Identification and Optimization Methodologies for Active Structural Acoustic Control of Aircraft Cabin Noise*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia.
- PRADHAN S. C. et al. (2000)**, Vibration Characteristics of Functionally Graded Cylindrical Shells Under Various Boundary Conditions. *Applied Acoustics*, 61, p. 111-129.
- REYNOLDS, D. D. (1981)**, *Engineering Principles of Acoustics Noise and Vibration Control*. Boston: Allyn and Bacon.
- RUOTOLO, R. (2001)**, A Comparison of Some Thin Shell Theories Used for the Dynamic Analysis of Stiffened Cylinders. *Journal of Sound and Vibration*, 243(5), p. 847-860.
- SLEPYAN, L. I., SOROKIN, S. V. (1995)**, Analysis of Structural-Acoustic Coupling Problems by a Two-Level Boundary Integral Method, Part I: A General Formulation and Test Problems. *Journal of Sound and Vibration*, 184(2), p. 195-211.
- SLEPYAN, L. I., SOROKIN, S. V. (1995)**, Analysis of Structural-Acoustic Coupling Problems by a Two-Level Boundary Integral Method, Part II: Vibrations of a Cylindrical Shell of Finite Length in a Acoustic Medium. *Journal of Sound and Vibration*, 184(2), p. 213-228.
- SUN, J. Q., NORRIS, M. A. et al. (1996)**, Distributed Piezoelectric Actuators for Shell Interior Noise Control. *Transactions of the ASME*, Vol. 118, p. 676-681.
- THOMAS, D. R. et al. (1993)**, Active Control of the Transmission of Sound Through a Thin Cylindrical Shell, Part I: The Minimization of Vibrational Energy. *Journal Of Sound and Vibration*, 167(1), p. 91-111.

- THOMAS, D. R. et al. (1993)**, Active Control of the Transmission of Sound Through a Thin Cylindrical Shell, Part II: The Minimization of Acoustic Potential Energy. *Journal Of Sound and Vibration*, 167(1), p. 113-128.
- WANG, C., LAI, J. C. S. (2000)**, Prediction of Natural Frequencies of Finite Length Circular Cylindrical Shells. *Applied Acoustics*, 59, p.385-400.
- WU, J. H. et al. (2000)**, A Method to Predict Sound Radiation from a Plate-ended Cylindrical Shell Excited by an External Force. *Journal of Sound and Vibration*, 237(5), p.793-803.
- WU, S. W. et al. (1998)**, A Finite Element Model for Acoustic Radiation. *Journal of Sound and Vibration*, 215(3), p. 489-498.
- YOUNG, J. A. (1995)**, *Active Control of Vibration in Stiffened Structures*. Tese (Doctor of Philophy em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Adelaide, Austrália.
- ZHANG, X. M., et al. (2001)**, Coupled Vibration Analysis of Fluid-filled Cylindrical Shells Using the Wave Propagation Approach. *Applied Acoustics*, 62, p. 229-243.

APÊNDICE A

FUNÇÃO DE BESSEL E SUAS PROPRIEDADES

FUNÇÃO DE BESSEL

A função de Bessel ou função cilíndrica aparece na solução da equação de ondas em cavidades cilíndricas. Lista-se aqui para referência, algumas das mais importantes propriedades.

A equação diferencial linear de segunda ordem

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0 \quad (220)$$

é chamada Equação de Bessel de ordem n e tem a seguinte solução geral:

$$R = C_1 J_n(r) + C_2 Y(r). \quad (221)$$

$J_n(r)$ é conhecido como Função Bessel de Primeiro Tipo de ordem n . Para valores positivos de n , $J_n(r)$ é definido, para valores finitos de r , pela série:

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (r/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}, \quad (222)$$

e satisfaz as seguintes relações

$$\frac{d}{dz} [r^n J_n(r)] = r^n J_{n-1}(r), \quad (223)$$

$$\frac{d}{dz} [r^{-n} J_n(r)] = -r^{-n} J_{n+1}(r),$$

$$J_{n-1}(r) + J_{n+1}(r) = \frac{2n}{r} J_n(r) \quad n = 1, 2, \dots, \quad (224)$$

$$J_{n-1}(r) - J_{n+1}(r) = 2J'_n(r) \quad n = 1, 2, \dots, \quad (225)$$

para $n = 0$ tem-se:

$$J'_0(r) = -J_1(r). \quad (226)$$

E também:

$$J_{-n}(r) = (-1)^n J_n(r). \quad (227)$$

$Y(r)$ é chamado de Função de Bessel de Segundo Tipo de ordem n . É definido pela série:

$$Y(r) = \frac{2}{\pi} J_n(r) \log \frac{r}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (r/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)] \quad (228)$$

onde

$$\psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}, \quad (229)$$

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \gamma = 0.5772156 \quad (230)$$

é a constante de Euler, e para o caso $n = 0$, o primeiro termo é pode ser considerado igual a zero.

As relações anteriores são válidas para $Y(r)$.

A Função de Bessel do primeiro tipo e de ordem arbitrária é definida por:

$$J_\nu(r) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (r/2)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \quad \arg|r| < \pi, \quad (231)$$

e satisfaz as relações anteriores, com n sendo substituído por ν .

A solução geral para a Equação de Bessel de ordem não inteira é:

$$R(r) = C_1 J_\nu(r) + C_2 J_{-\nu}(r), \quad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (232)$$

As Funções de Bessel de primeiro e segundo tipo de ordem não inteira ν estão relacionados por:

$$Y_\nu(r) = \frac{J_\nu(r) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(r)}{\sin(\nu\pi)}, \quad (233)$$

Por mudança de variáveis, é possível mostrar que a solução geral para a equação:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_r^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (234)$$

é

$$R(r) = C_1 J_n(k_r r) + C_2 Y_n(k_r r). \quad (235)$$

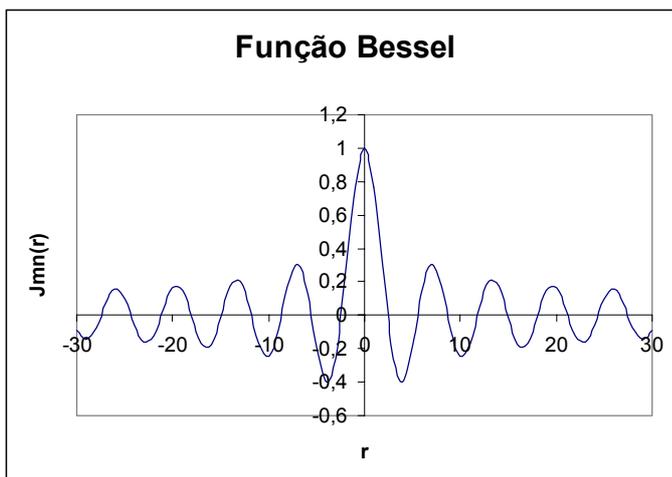


Figura 40 - Função Bessel de primeiro tipo e ordem $n = 0$

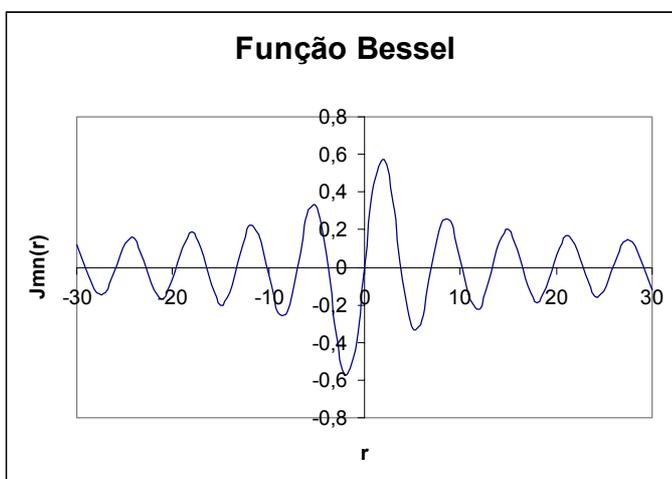


Figura 41 - Função Bessel de primeiro tipo e ordem $n = 1$

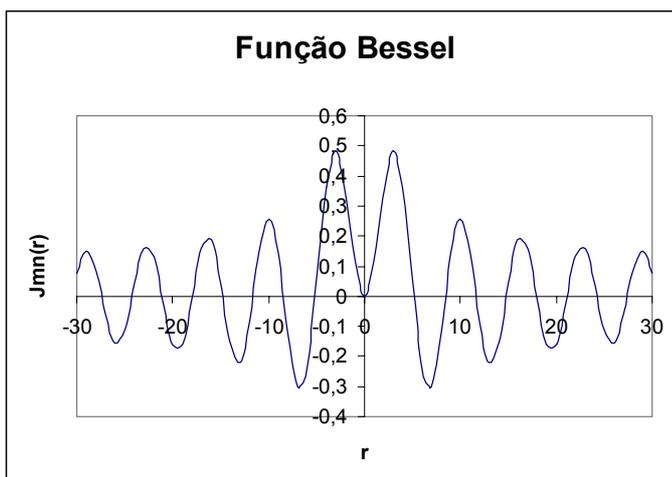


Figura 42 - Função Bessel de primeiro tipo e ordem $n = 2$

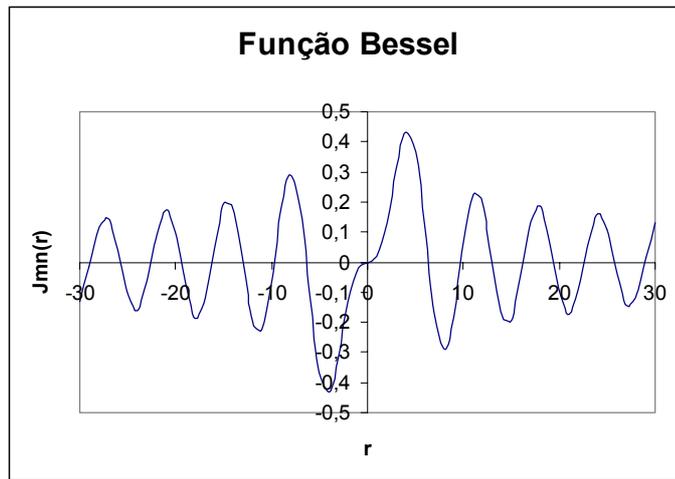


Figura 43 - Função Bessel de primeiro tipo e ordem $n = 3$

Tabela 15 – Pontos de inflexão, χ_{mn} , de $J_m : J'_m = 0$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5
0	0	3,83	7,02	10,17	13,32
1	1,84	5,33	8,54	11,71	14,86
2	3,05	6,71	9,97	13,17	16,35
3	4,20	8,02	11,35	14,59	17,79
4	5,32	9,28	12,68	15,96	19,20
5	6,41	10,52	13,99	17,31	20,58

Fonte: (Kinsler, 1982), p. 453

APÊNDICE B

CONSTRUÇÃO DO MODELO NO ANSYS

MODELO

É apresentado nesta seção uma breve descrição do modelamento em elementos finitos no ANSYS, da interação fluido-estrutural de uma estrutura do tipo casca cilíndrica uniforme e do campo acústico interno à mesma.

Iniciando programa

Clique na opção **Interactive** no menu de programas do Ansys.

Na janela aberta devem ser definidos:

- A pasta de trabalho
- O nome do projeto

Na barra de menus na opção **File** escolha **Change Title** para alterar o título

Devem ser definidas as áreas de estudo onde será habilitada as opções para análise estrutural e análise acústica.

Main menu: **Preferences**

Escolha **Structural** e **Ansys Fluid**

A próxima etapa consiste em definir os tipos de elementos, as constantes reais dos elementos e os materiais dos modelos.

Main menu: **Preprocessor** → **Element Type** → **Add/Edit/Delete**

Adiciona-se o elemento Shell-63 para a casca e o elemento Fluid-30 para o meio fluido. Deve-se observar a necessidade de se adicionar dois elementos do tipo Fluid-30, sendo que nas opções para este elemento deve ser definida a presença de estrutura para um elemento e ausência de estrutura para o outro.

Main menu: **Preprocessor** → **Real Constants** → **Add/Edit/Delete**

Para o elemento Shell-63 é definido a espessura do elemento nesta opção, para o elemento Fluid-30 é definida a pressão de referência (2×10^{-5} Pa).

Main menu: **Preprocessor** → **Material Props** → **Material Models**

Aqui são definidos os materiais presentes no modelo. No menu **Material** escolhe-se **new model** onde são definidas as propriedades dos materiais; i.e. densidade, módulo de elasticidade e Coeficiente de Poisson para o elemento estrutural, densidade e velocidade do som para o fluido.

Construindo geometria

Definidos os elementos e suas propriedades, a próxima etapa é construir o modelo geométrico. O modelo desenvolvido neste trabalho consiste de uma estrutura cilíndrica e do campo acústico interno.

O modelo utiliza 3 elementos, sendo o elemento de casca, o elemento acústico em contato com a casca e o elemento acústico sem contato com a casca. O elemento de casca é atribuído

a uma superfície, e os elementos acústicos são atribuídos a volumes distintos. Para cada tipo de elemento é necessário uma superfície ou volume separado.

Para a construção do modelo devem ser definidos Keypoints que servirão de base para a construção de linhas, estas serão as direções para se extrudadar as áreas circunferenciais para geração dos volumes. O modelo irá conter 6 volumes distintos, onde as faces são comuns para os volumes em contato entre si, garantindo assim que malha gerada irá ter nós comuns para os elementos de volumes e de área em contato.

Keypoints

Main menu: **Preprocessor** → Modeling – **Create** → **Keypoints** → **In Active CS**

Linhas

Main menu: **Preprocessor** → Modeling – **Create** → Lines - **Straight Line**

Circunferência Interna

Main menu: **Preprocessor** → Modeling – **Create** → Areas – **Circle**

Circunferência Externa

Main menu: **Preprocessor** → Modeling – **Create** → Areas – **Annulus**

Geração dos volumes

Main menu: **Preprocessor** → Modeling – **Operate** → **Extrude** → Areas – **Along Lines**

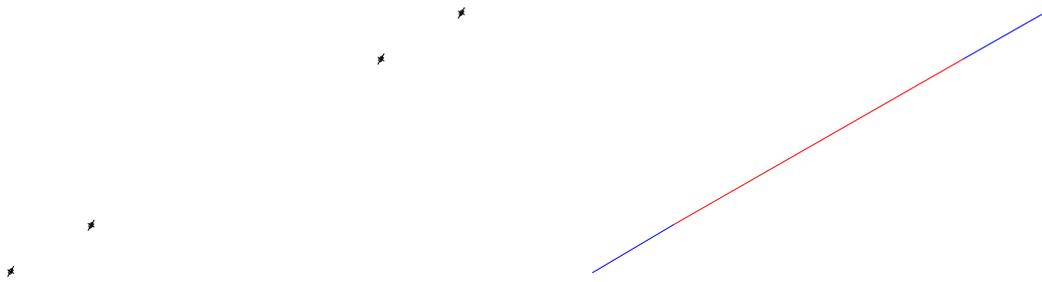


Figura 44 – criação dos Keypoints e das linhas

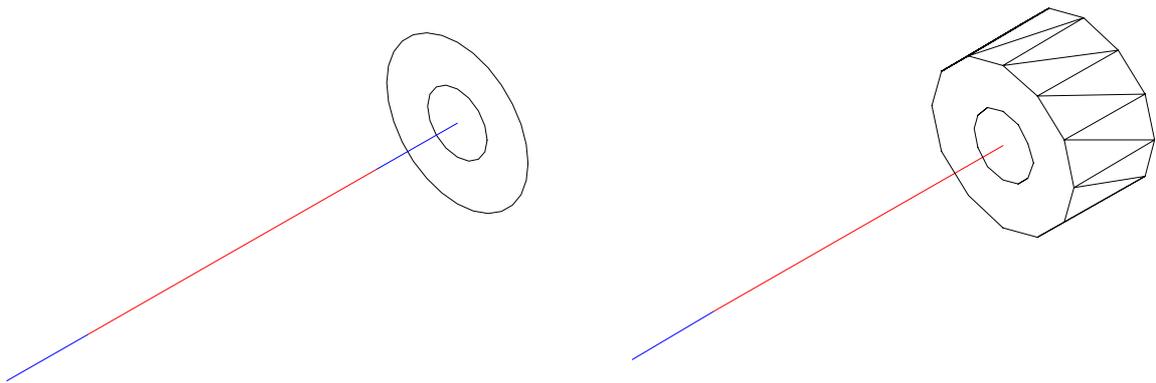


Figura 45 – criação das áreas e dos primeiros volumes por extrusão

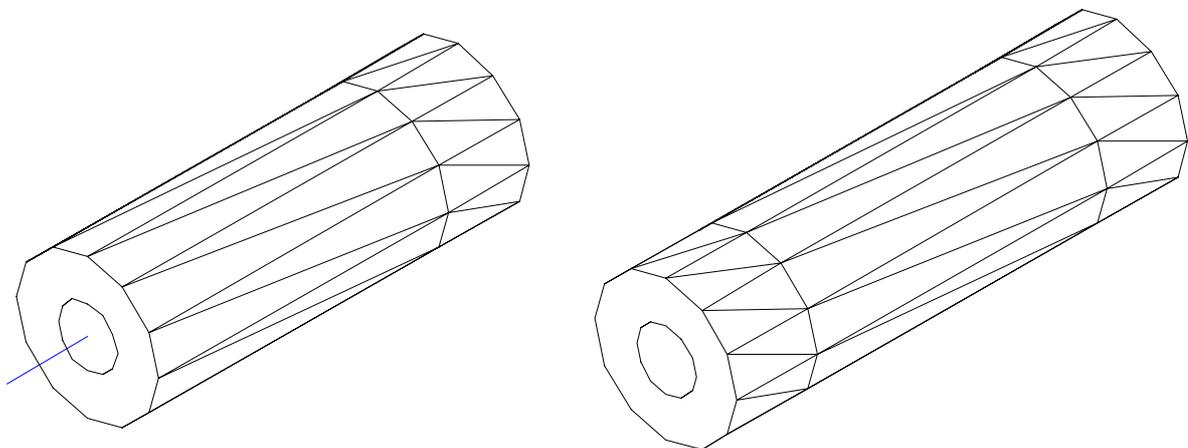


Figura 46 – criação dos volumes intermediários e volumes finais

Atribuindo Elementos e Materiais

Para atribuir o elemento Shell-63 usa-se o comando a seguir e escolhe-se as áreas externas.

Main menu: **Preprocessor** → Attribute – **Define** → Areas – **Picked Areas**

Para atribuir o elemento Fluid-30 usa-se o comando a seguir e escolhe-se os volumes com os respectivos elementos. Os volumes externos recebem o elemento Fluid-30 com a presença de estrutura e o volume interno recebe o elemento Fluid-30 sem a presença de estrutura.

Main menu: **Preprocessor** → Attribute – **Define** → Areas – **Picked Volumes**

Gerando a malha

Na geração da malha o primeiro passo é definir o tamanho do elemento ou o número de divisões. Utiliza-se o comando:

Main menu: **Preprocessor** → Meshing – **Size Cntrls** → Manual Size – Global – **Size**

Em seguida deve se definir a forma do elemento. Este deve ser triangular para as áreas e tetraédricos para os volumes.

Main menu: **Preprocessor** → Meshing – **Mesher Opts**

Escolhe-se elementos triangulares e tetraédricos como opções principais

A geração da malha é finalmente dada pelos comandos:

Main menu: **Preprocessor** → Meshing – **Mesh** → Areas – **Free**

Main menu: **Preprocessor** → Meshing – **Mesh** → Volumes – **Free**

Aplicando carregamento

É necessário para a análise Modal definir as condições de contorno do modelo e o aplicar a condição de interação fluido-estrutura na interface.

São restringidos os movimentos dos nós das faces $x=0$ e $x=L$ da estrutura com o comando:

Main menu: **Preprocessor** → **Loads** → Loads – **Apply** → Structural – **Displacement** → **On Nodes**

É definido deslocamento nulo para todos os graus de liberdade.

Na área externa, superfície de contato fluido-estrutura, é aplicado a condição de interação entre a estrutura e o campo acústico com o comando:

Main menu: **Preprocessor** → **Loads** → Loads – **Apply** → Fluid/Ansys – **Fluid-Struct** → **On Areas**

Obtendo a solução

Na obtenção da solução é necessário definir o tipo de análise a ser feita, i.e. estática, modal, harmônica, transiente, etc...

Main menu: **Solution** → Analysis Type – **New Analysis** → **Modal**

Definido o tipo de análise é configurado a análise com o método , nº de modos e faixa de frequência de interesse.

Main menu: **Solution** → Analysis Type – **Analysis Options** → **Unsymmetric**

Define-se aqui o nº de modos a serem avaliados e a faixa de frequência

Para iniciar a análise usa-se o comando:

Main menu: **Solution** → Solve – **Current LS**

Reverendo os resultados

Após o término da simulação os resultados podem ser vistos com o comando:

Main menu: **General Postproc** → **Results Summary**

FLUID30 – FLUIDO ACÚSTICO 3D

Descrição do elemento

FLUID30 é usado para modelar o meio fluido e a interface em problemas de interação fluido/estrutura. Aplicações típicas incluem problemas de propagação sonora e dinâmica de estruturas submersas em meio fluido. A equação que governa a acústica, isto é, a equação de ondas tridimensional, pode ser discretizada considerando o acoplamento da entre a pressão acústica e o movimento estrutural na interface. O elemento apresenta oito nós com quarto graus de liberdade por nó: pressão e translação do nó nas direções x , y e z . As translações, entretanto, são aplicáveis apenas nos nós que estão na interface.

O elemento tem a capacidade para incluir amortecimento do som referente ao material de absorção da interface. O elemento pode ser usado com outros elementos estruturais tridimensionais para executar análise modal não-simétrica ou amortecida, resposta harmônica completa e análises transientes completas (veja a descrição do comando **TRNOPT**). Quando não houver nenhum movimento estrutural, o elemento também é aplicável a análise estática, análises reduzidas de resposta harmônicas e modais. Ver seção 14.30 do *ANSYS Theory Reference* para maiores detalhes deste elemento.

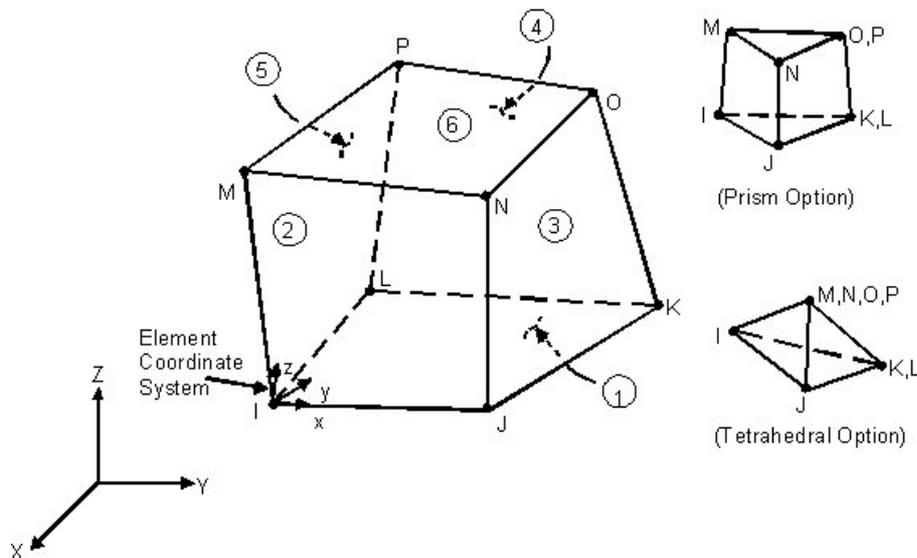


Figura 47 – Elemento acústico fluido 3D, FLUID30

Dados de Entrada

A geometria, localização dos nós e sistema de coordenadas são mostrados em *FLUID30*. O elemento é definido por oito nós, pressão de referência e propriedades isotrópicas do material. A pressão de referência (**PREF**) é usada para calcular o nível de pressão sonora ($20 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$). A velocidade do som ($\sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$) nos fluidos, é inserida como **SONC** onde β é o módulo de Bulk do fluido (Força/Área) e ρ_0 é a densidade média do fluido (Massa/Volume) (inserida como **DENS**). Os efeitos dissipativos referentes a velocidade do fluido são desconsideradas, mas a absorção do som na interface é considerada pela matriz de amortecimento usada na área da superfície da interface. Medições experimentais no contorno para absorção Sonora do material podem ser definidas nas propriedades do material **MU** (com valores de 0.0 a 1.0). **MU** = 0.0 representa material sem absorção sonora e **MU** = 1.0 representa absorção sonora total. **DENS**, **SONC** e **MU** são avaliados para media das temperaturas nodais.

A taxa de fluxo nodal pode ser especificada pelo comando **F** onde ambos componentes, reais e imaginários precisam ser definidos.

O carregamento nos nós do elemento são descritos em *Node and Element Loads*. A interface Fluido/Estrutura (**FSI**) pode ser aplicada por carregamento de superfície nas faces do elemento como mostrados pelos números circulosados no *FLUID30*. Especificando o rótulo **FSI** (sem um valor) [**SF**, **SFA**, **SFE**] irá acoplar o movimento estrutural e a pressão do fluido na interface. Retirando-se a **FSI** especificada [**SFDELE**, **SFADELE**, **SFEDELE**] remove-se o

acoplamento. Este acoplamento necessita ser especificado para o elemento fluido na interface. Ver Acoustics no *ANSYS Coupled-Field Analysis Guide* para maiores informações de como aplicar o acoplamento da interação fluido-estrutura. O rótulo de carregamento de superfície **IMPD** com valor igual a unidade precisa ser usado para incluir amortecimento que pode estar presente no contorno da estrutura com a absorção sonora. O valor igual a zero para **IMPD** remove o cálculo de amortecimento. Os graus de liberdade de deslocamento (UX, UY e UZ) nos nós do elemento que não estão na interface precisam ser iguais a zero para evitar mensagens de advertência.

A temperatura pode ser definida como carregamento de corpo nos nós. A temperatura do nó **I T(I)** define **TUNIF**. Se todas as outras temperaturas não estiverem especificadas, elas serão definidas por **T(I)**. Para qualquer outro padrão de distribuição, as temperaturas não especificadas assumem **TUNIF**.

KEYOPT(2) é usada para especificar a ausência de estrutura na interface e, portanto, a ausência de acoplamento entre fluido e estrutura. Desde que temos ausência de acoplamento, é gerado matrizes simétricas para o elemento, e a análise simétrica [**MODOPT**] pode ser usada na análise modal. Entretanto, para problemas de acoplamento a correspondente análise não simétrica [**MODOPT**] precisa ser usada.

O sumário de entradas do elemento é dado em *Input Summary*. Uma descrição geral das entradas do elemento é dado em *Element Input*.

FLUID30 Sumário de Entrada

Nome do Elemento: FLUID30

Nós: I, J, K, L, M, N, O, P

Graus de Liberdade: UX, UY, UZ, PRES se **KEYOPT (2) = 0**; PRES se **KEYOPT (2) = 1**

Constantes Reais: PREF

Propriedades do Material: DENS, SONC, MU

Carregamento de superfície: Fluido-estrutura interface: face 1 (J-I-L-K), face 2 (I-J-N-M), face 3 (J-K-O-N), face 4 (K-L-P-O), face 5 (L-I-M-P), face 6 (M-N-O-P)

Impedância: face 1 (J-I-L-K), face 2 (I-J-N-M), face 3 (J-K-O-N), face 4 (K-L-P-O), face 5 (L-I-M-P), face 6 (M-N-O-P)

Carregamento de corpo: Temperaturas -- T (I), T (J), T (K), T (L), T (M), T (N), T(O), T(P)

KEYOPT(2)

0 -- Estrutura presente na interface (matriz do elemento não simétrica)

1 -- Sem presença da estrutura na interface (matriz do elemento simétrica)

Dados de saída

A solução associada ao elemento tem duas formas:

Deslocamento nodal e pressão nodal, incluídas na solução nodal global saídas adicionais para o elemento é mostrada em *FLUID30 Element Output Definitions*.

Uma descrição geral para a saída de solução é obtida em *Solution Output*. Ver o *ANSYS Basic Analysis Guide* que mostra os passos para ver os resultados.

A tabela de definições de saída do elemento usa a seguinte notação:

Dois pontos (:) na coluna Nome indica que o item pode ser acessado pelo **Component Name method** [ETABLE, ESOL]. A coluna indica a disponibilidade do item no arquivo Jobname.OUT. A coluna R indica a disponibilidade do item no arquivo de resultado.

Nas colunas O ou R, Y indica que o item está sempre *disponível*, o número refere ao rodapé da tabela que descreve em que condições o item está disponível, e a – indica que o item não está disponível.

Tabela 16 – Definição da saída do elemento FLUID30

Nome	Definição	O	R
EL	Número do elemento	Y	Y
NODES	Nós - I, J, K, L, M, N, O, P	Y	Y
MAT	Número do material	Y	Y
VOLU:	Volume	Y	Y
XC, YC, ZC	Location where results are reported	Y	2
TEMP	T(I), T(J), T(K), T(L), T(M), T(N), T(O), T(P)	Y	Y
PRESSURE	Pressão media	Y	Y
PG(X,Y,Z,SUM)	Componentes e vetor soma do gradiente de pressão	Y	Y
VL(X,Y,Z,SUM)	Componentes e vetor soma da velocidade do fluido	1	1
SOUND PR. LEVEL	Nível de pressão sonora (in decibels)	1	1

1 Saída apenas para ANTYPE,HARMIC

2 Disponível apenas para o centróide como o item *GET.

FLUID30 Item and Sequence Numbers lista as saídas disponíveis através do comando **ETABLE** usando o método da seqüência numérica. Ver **General Postprocessor (POST1)** em *ANSYS Basic Analysis Guide* e a tabela "*Item and Sequence Number*" deste manual para maiores informações. A notação a seguir é usada para o *FLUID30 Item and Sequence Numbers*:

Os nomes das quantidades de saída são definidas em *FLUID30 Element Output Definitions*

Tabela 17 – FLUID30, Item e seqüência numérica para os comandos ETABLE e ESOL

Nome	Ítem	E
PGX	SMISC	1
PGY	SMISC	2
PGZ	SMISC	3
VLX	SMISC	4
VLY	SMISC	5
VLZ	SMISC	6
PRESSURE	NMISC	1
PGSUM	NMISC	2

VLSUM	NMISC	3
SOUND PR. LEVEL	NMISC	4

Considerações e Restrições

O elemento não deve ter um volume nulo. Os nós do elemento podem ser numerados como mostrados no *FLUID30* ou podem ter os planos IJKL e MNOP trocados. Também, o elemento pode ser distorcido como se tivesse dois volumes separados. Isto ocorre normalmente quando os nós do elemento não estiverem na seqüência correta.

Todos elementos possuem 8 nós. Um elemento prismático pode ser formado definindo K igual a L e O igual a P (veja Triângulo, Prisma e Elementos tetraédricos). A forma tetraédrica também está disponível.

A pressão acústica no meio fluido é determinada pela equação de onda com as considerações a seguir:

O fluido é compressível (a densidade varia com a variação de pressão).

O fluido não tem viscosidade (sem efeitos dissipativos referentes a viscosidade).

Não há escoamento no fluido.

A pressão e densidade média são constantes em todo fluido. Note que a pressão acústica é o excesso de pressão referente a pressão média.

A análise é limitada a uma pressão acústica relativamente pequena já que as variações de densidade são pequenas comparadas com a densidade média.

A formulação de matriz de massa lumped [**LUMPM,ON**] não é permitido neste elemento.

SHELL63 – CASCA ELÁSTICA

Descrição do Elemento

SHELL63 apresenta comportamento de membrana e de viga. São permitidos carregamentos no plano e na direção normal. O elemento possui seis graus de liberdade em cada nó: translações dos nós nas direções x, y, e z; e rotações em torno dos eixos x, y, e z dos nós. Estão incluídas a capacidade de rigidez a tensão e grandes deflexões. A opção de matriz de

rigidez consistente tangencial está disponível para uso na análise de grandes deflexões (rotação finita). Ver seção 14.63 do *ANSYS Theory Reference* para maiores detalhes sobre este elemento. Elementos similares são SHELL43 e SHELL181 (permite plasticidade), e SHELL93 (permite nós no meio das faces). O comando **ETCHG** converte os elementos SHELL57 e SHELL157 em SHELL63.

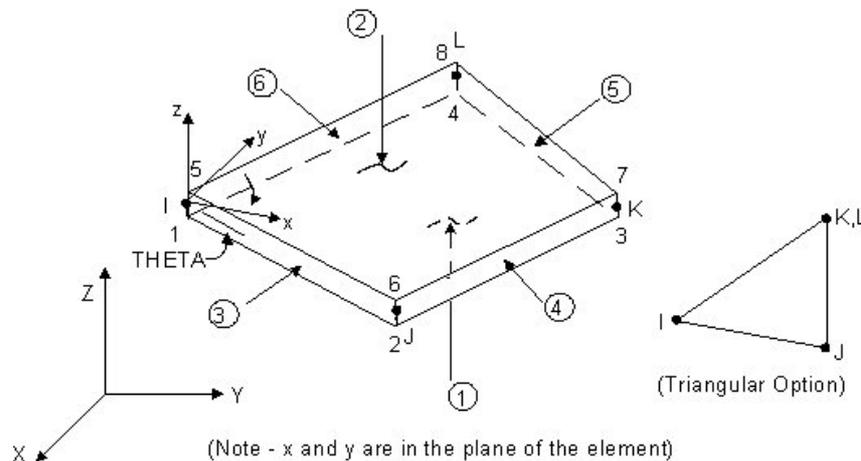


Figura 48 – Elemento para a casca elástica, SHELL63

Dados de Entrada

A geometria, localização dos nós, e o sistema de coordenadas para este elemento são mostrados em *SHELL63*. O elemento é definido por quatro nós, quatro espessuras, fundação elástica, propriedades ortotrópicas do material. As direções ortotrópicas do material correspondem as direções do sistema de coordenadas. A orientação do sistema de coordenadas é descrito em *Coordinate Systems*. O eixo x do elemento pode ser rotacionado por um ângulo THETA (em graus).

É considerado que a espessura varia levemente em toda área do elemento, com a espessura dada para os quatro nós. Se o elemento possui espessura constante, apenas o TK(I) precisa ser definida na entrada de dados. A fundação elástica (EFS) é definida como a pressão necessária para gerar uma deflexão unitária na fundação. A fundação elástica é desconsiderada se o valor de EFS for menor ou igual a zero.

Os carregamentos no elemento são descritos em *Node and Element Loads*. Pressão pode ser definida como carregamento de superfície nas faces do elemento como mostrados pelos números circulos em *SHELL63*. Pressão positiva age dentro do elemento. A pressão é dada por unidade de comprimento. A pressão lateral pode ser equivalente ao carregamento aplicado nos nós (KEYOPT(6) = 0) ou distribuído na face do elemento (KEYOPT(6) = 2). O

carregamento equivalente no elemento gera resultados de tensão mais precisos com elementos planos representando uma superfície curva ou em elementos sujeitos a fundação elástica desde que as tensões de flexão são eliminadas.

KEYOPT(1)

É disponível para negligenciar a rigidez de membrana ou a rigidez de curvatura, se desejado. Uma matriz massa reduzida é também utilizada quando a rigidez de curvatura é negligenciada.

KEYOPT(2)

É usada para ativar a matriz consistente de rigidez tangencial (isto é, a matriz é composta da matriz de rigidez tangencial principal mais a matriz consistente de rigidez) em análises de grande deflexão [**NLGEOM,ON**]. Pode-se frequentemente obter convergência mais rapidamente na análise geometricamente não linear. Entretanto, pode-se não utilizar esta opção se estiver sendo utilizado um elemento para simular uma ligação rígida ou um grupo de nós acoplados. Mudanças abruptas na rigidez da estrutura tornam a matriz consistente de rigidez tangente inadequada para tais aplicações.

KEYOPT(3)

permite incluir (**KEYOPT(3) = 0 or 2**) ou suprimir (**KEYOPT(3) = 1**) formas de deslocamentos extras. Permite também escolher o tipo de rigidez rotacional em um plano.

KEYOPT(3)

0 or 1 ativa a rigidez de rotação do tipo mola em torno do eixo z do elemento.

KEYOPT(3)

2 ativa a rigidez no plano de rotação mais real (rigidez rotacional de Allman –o programa usa os valores padrões de $d_1 = 1.0E-6$ e $d_2 = 1.0E-3$).

Usando a rigidez de Allman irá proporcionar melhor convergência em análise de estruturas planas com grandes deflexões (rotação finita).

KEYOPT(7)

permite redução na formulação na matriz de massa (os graus de liberdade rotacionais são apagados). Esta opção é útil para aumentar as tensões de flexão na membrana devido a carregamento de massa.

KEYOPT(8)

permite redução na matriz de rigidez (os graus de liberdade rotacionais são apagados). Esta opção é útil para melhorar o cálculo dos modos e uma maior precisão no fator de carregamento em análises com curvatura em estruturas do tipo casca.

O sumário das entradas para o elemento é dado em *Input Summary*. Uma descrição geral das entradas para o elemento é dado em *Element Input*.

SHELL63 Sumário de Entrada

Element Name: SHELL63

Nós: I, J, K, L

Graus de Liberdade: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ

Constantes Reais: TK(I), TK(J), TK(K), TK(L), EFS, THETA, RMI, CTOP, CBOT, (em branco), ADMSUA

Material Properties: EX, EY, EZ, (PRXY, PRYZ, PRXZ or NUXY, NUYZ, NUXZ), ALPX, ALPY, ALPZ, DENS, GXY, DAMP

Carregamentos de Superfície: Pressão -- face 1 (I-J-K-L) (inferior, na direção +Z), face 2 (I-J-K-L) (superior, na direção -Z), face 3 (J-I), face 4 (K-J), face 5 (L-K), face 6 (I-L)

Carregamentos de Corpo: Temperaturas -- T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8

Características Especiais: Tensão enrijecida, grandes deflexões, nascimento e morte

KEYOPT(1)

0 -- Rigidez de viga e membrana

1 -- Apenas rigidez de membrana

2 -- Apenas rigidez de viga

KEYOPT(5)

- 0 -- Impressão básica para o elemento
- 2 -- Impressão das tensões nodais

KEYOPT(6)

- 0 -- Carregamento reduzido de pressão (precisa ser usada se **KEYOPT(1) = 1**)
- 2 -- Carregamento de pressão consistente

KEYOPT(7)

- 0 – Matriz massa consistente
- 1 – Matriz massa reduzida

KEYOPT(8)

- 0 – Matriz de rigidez consistente (padrão)
- 1 – Matriz de rigidez reduzida

KEYOPT(9)

- 0 – Sem uso de subrotina para definir sistema de coordenadas do elemento
- 4 – Eixo x do elemento posicionado pelo uso da sub-rotina **USERAN**

(ver o *ANSYS Guide to User Programmable Features* para sub-rotinas escritas pelo usuário)

Dados de Saída

Existem duas formas de solução associada ao elemento:

deslocamento nodal incluído na solução global
saída adicional para o elemento com mostrado em *Element Output Definitions*

Vários itens são ilustrados nos resultados de tensão. A saída de impressão inclui o momento sobre a face x (MX), o momento sobre a face y (MY), e o momento de torção (MXY). Os momentos são calculados por unidade de comprimento no sistema de coordenadas do elemento. As direções de tensão são paralelas ao sistema de coordenadas do elemento. A

descrição geral da solução é obtida na **Solution Output**. Ver **ANSYS Basic Analysis Guide** para as opções de visualização dos resultados.

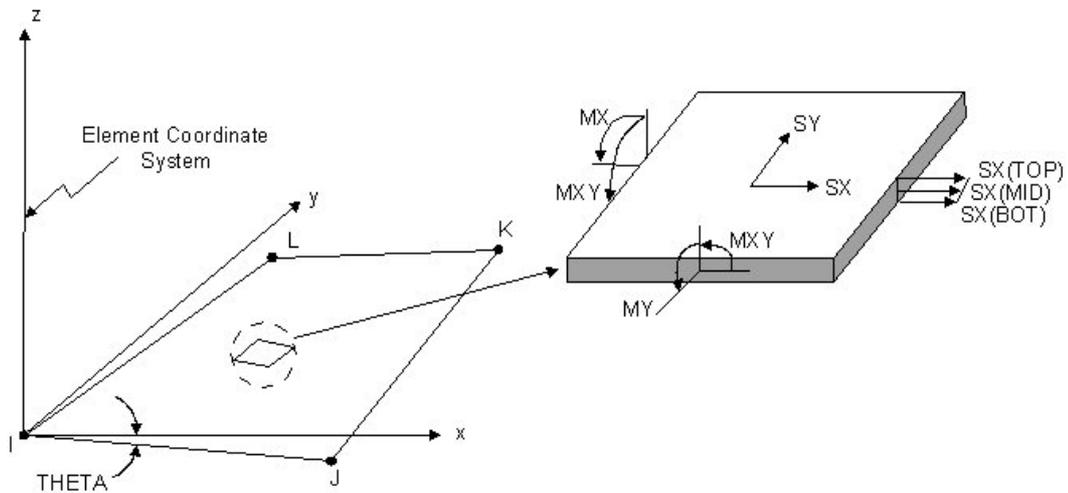


Figura 49 – Tensões no elementos casca, SHELL63

A tabela com as definições de saída para o elemento usa as seguintes notações:

Dois pontos (:) na coluna Nome indica que o item pode ser acessado pelo método do nome do componente [**ETABLE**, **ESOL**]. A coluna O indica a disponibilidade do item no arquivo `Jobname.OUT`. A coluna R indica a disponibilidade do item no arquivo de resultados.

Em ambas as colunas, O ou R, Y indica que o item está sempre disponível, o número refere a nota ao pé da tabela descrevendo quando o item está condicionalmente disponível, e indica o item que não está disponível.

Tabela 18 – Definições de saída do elemento SHELL63

Nome	Definição	O	R
EL	Número do elemento	Y	Y
NODES	Nós - I, J, K, L	Y	Y
MAT	Número do material	Y	Y
AREA	Área	Y	Y
XC, YC, ZC	Local onde os resultados serão avaliados	Y	1
PRES	Pressões P1 nos nós I, J, K, L; P2 at I, J, K, L; P3 at J, I; P4 at K, J; P5 at L, K; P6 at I, L	Y	Y
TEMP	Temperaturas T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8	Y	Y
T(X, Y, XY)	Elemento no plano X, Y, e XY forças	Y	Y
M(X, Y, XY)	Elemento X, Y, e XY momento	Y	Y

FOUND.PRESS	Pressão da fundação (se não nulo)	Y	--
LOC	Superior, média, ou inferior	Y	Y
S: X, Y, Z, XY	Tensão de membrana e viga combinadas	Y	Y
S: 1, 2, 3	Tensões principais	Y	Y
S:INT	Intensidade da tensão	Y	Y
S:EQV	Tensão equivalente	Y	Y

1 Disponível apenas no centróide como no item *GET.

Tabela 19 – Saídas diversas para o elemento SHELL63

Descrição	Nome dos itens de saída	O	R
Nodal Stress Solution	TEMP, S(X, Y, Z, XY), SINT, SEQV	1	--

1 Saída em cada nó, se **KEYOPT(5) = 2**, repete cada posição

Item e a Seqüência Numérica para ETABLE e ESOL lista a saída disponível através do comando **ETABLE** usando o método da seqüência numérica. Ver The General Postprocessor (**POST1**) no *ANSYS Basic Analysis Guide* e *The "Item and Sequence Number" Table* para mais informações. A notação a seguir é usada em *Item and Sequence Numbers para ETABLE e ESOL*:

Os nomes dos itens de saída são definidos em *Element Output Definitions*

O campo rotulado como ítem no commando **ETABLE, E**, apresenta a seqüência numérica com valor único ou constantes em todo o elemento I,J,K,L e seqüência numérica para os dados nos nós I,J,K,L

Tabela 20 – SHELL63, Item e seqüência numérica para os comandos ETABLE e ESOL

Nome	Ítem	E	I	J	K	L
TX	SMISC	1	--	--	--	--
TY	SMISC	2	--	--	--	--
TXY	SMISC	3	--	--	--	--
MX	SMISC	4	--	--	--	--
MY	SMISC	5	--	--	--	--
MXY	SMISC	6	--	--	--	--
P1	SMISC	--	9	10	11	12

P2	SMISC	--	13	14	15	16
P3	SMISC	--	18	17	--	--
P4	SMISC	--	--	20	19	--
P5	SMISC	--	--	--	22	21
P6	SMISC	--	23	--	--	24
Top						
S:1	NMISC	--	1	6	11	16
S:2	NMISC	--	2	7	12	17
S:3	NMISC	--	3	8	13	18
S:INT	NMISC	--	4	9	14	19
S:EQV	NMISC	--	5	10	15	20
Bot						
S:1	NMISC	--	21	26	31	36
S:2	NMISC	--	22	27	32	37
S:3	NMISC	--	23	28	33	38
S:INT	NMISC	--	24	29	34	39
S:EQV	NMISC	--	25	30	35	40

Considerações e Restrições

Não são permitidos elementos de área igual a zero. Isto acontece frequentemente sempre que os elementos não são numerados corretamente. Não são permitidos elementos de espessura nula ou elementos que se afilem atingindo zero em qualquer um dos cantos. O gradiente térmico aplicado transversalmente varia linearmente através da espessura e apresenta variação quadrática sobre a superfície da casca.

Uma malha de elementos planos de casca podem produzir uma boa aproximação de uma superfície curva, contanto que cada elemento não esteja inclinado mais que 15° de outro elemento adjacente. Se uma fundação elástica rígida estiver presente, um-quarto do total é aplicado a cada nó. A deflexão de cisalhamento não é incluída neste elemento de casca fina.

O elemento triangular pode ser criado juntando os nós K e L como descrito para elementos *Triangulares, Prismáticos e Tetraédricos*. As funções de formas extras são automaticamente apagadas para os elementos triangulares tal que a rigidez de membrana se reduz a formulação de deformação constante. Em análises de grandes deflexões, se **KEYOPT(1) = 1** (apenas rigidez de membrana), o elemento precisa ser triangular.

Os quatro nós que definem o elemento precisam necessariamente estar contido em um mesmo plano; entretanto uma pequena tolerância é permitida de forma que o elemento pode ter uma forma ligeiramente deformada. A moderada deformação do elemento produzirá uma mensagem de advertência na saída. Se a deformação for muito pronunciada, teremos uma mensagem fatal e um elemento triangular deverá ser usado. Se a formulação de matriz de massa lumped é especificada [**LUMPM,ON**], o efeito que implica em compensação na matriz de massa é ignorado para elementos SHELL63 deformados.

Restrições do Produto

Quando for utilizado na versão listada abaixo, a versão-específica declarada apresenta restrições aplicadas a este elemento em adição às considerações e restrições gerais dados nas seções anteriores.

ANSYS/Professional.

A propriedade de amortecimento do material não é permitida.

As únicas características especiais permitidas são rigidez a tensão e grandes deflexões.

KEYOPT(2) pode ser definido como 0 (padrão).

KEYOPT(9) pode ser definido como 0 (padrão).

APÊNDICE C

ELEMENTOS FINITOS

Neste trabalho faz-se a análise da interação fluido-estrutura através do método dos elementos finitos (MEF) com a utilização do programa comercial ANSYS. O método dos elementos finitos apresenta um grande número de vantagens em relação a outros métodos analíticos (Munjal, 1987), por exemplo:

- Tem aplicação em problemas generalizados, visto que não apresenta limitação com respeito a geometria e propriedades do meio.
- As condições de contorno podem ser especificadas em qualquer ponto do sistema.
- Qualquer grau de precisão pode ser alcançado pelo incremento do número de elementos com o qual o sistema é subdividido.

O ANSYS tem a capacidade de modelar a interação do campo acústico com a estrutura; entretanto, as equações acopladas obtidas para o sistema acoplado modelado, são caracterizadas por matrizes de massa e rigidez não simétricas. A solução para as equações acopladas exigem um esforço computacional muito maior do que o necessário para solucionar as equações simétricas equivalentes obtidas para os sistemas desacoplados, o princípio físico envolvendo o acoplamento dos modos estruturais com os modos acústicos da cavidade também podem ser esclarecidos através da análise dos sistemas desacoplados, porém sem o total esclarecimento obtido pela análise do sistema acoplado. Não havendo recursos computacionais disponíveis para executar a análise de elementos finitos completa para os sistemas acoplados a serem investigados, uma aproximação do acoplamento modal foi usada com menor número de elementos.

MODELO ACÚSTICO

A pressão sonora, p , no interior da cavidade considerando as paredes rígidas é descrita pela equação de ondas homogênea.

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (236)$$

onde c_0 é a velocidade do som no ar. A velocidade da particular de ar, v , é relacionada com a pressão sonora por

$$\nabla p = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (237)$$

onde ρ_0 é a densidade do ar. Na formulação para a pressão, baseada no elemento fluido, é expressa em termos dos valores de pressão nos nós como

$$p = \sum_{i=1}^m N_i p_i \quad (238)$$

onde, N_i são as funções de forma, p_i são as pressões nodais e m o número de nós.

Substituindo a expressão de pressão (238) na equação de onda (236) e aplicando o método dos resíduos ponderados segundo Galerkin obtém-se a seguinte equação matricial para os elementos da malha fluida (Manual Teórico do ANSYS, 1998, Capítulo 8.2)

$$[K_f] \Phi_i - \omega_i^2 [M_f] \Phi_i = 0 \quad (239)$$

onde $[K_f]$ é a matriz de rigidez equivalente para o fluido, $[M_f]$ é a matriz de massa equivalente, e Φ_i e ω_i são o vetor de modos (autovetores) e as frequências naturais do respectivo modo i . Os autovetores e autovalores são obtidos usando o método de *Block Lanczos* que é descrito no guia de análise estrutural de ANSYS (1998). O amortecimento é desconsiderado pois a resposta para sistemas não amortecidos no ANSYS é significativamente mais rápida que para sistemas amortecidos.

O elemento acústico *Fluid-30* foi usado na análise modal para a cavidade acústica. Este elemento está disponível em três configurações, duas estão disponíveis para o processo de geração automática de malhas e são mostrados na Figura 9. O elemento cúbico (8 nós) está disponível somente para cavidades de 6 lados. Todas outras geometrias requerem o uso do elemento tetraédrico. A solução obtida com o elemento tetraédrico é menos precisa do que a obtida com o uso do elemento cúbico equivalente; uma malha mais refinada é necessária quando se usa elementos tetraédricos para alcançar os mesmos resultados obtidos com o uso de elementos cúbicos.

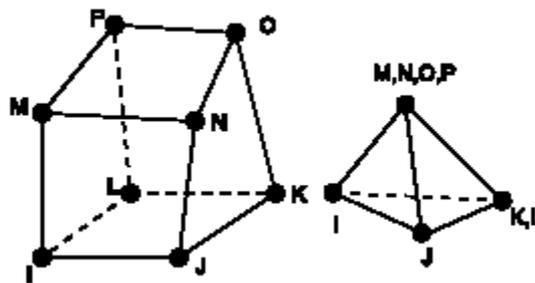


Figura 50 – Fluid-30 3D – Elemento para o fluido acústico

Os vetores dos modos da cavidade obtidos no ANSYS podem ser normalizados para unidade ou para a matriz massa.

Normalizando os modos pela matriz de massa, o volume modal da cavidade pode ser obtido diretamente; (Manual Teórico do ANSYS, 1998, Capítulo 17.3)

$$\Phi_i^T [M_{f_e}] \Phi_i = 1 \quad (240)$$

onde Φ_i é o vetor da função modal para o modo i e $[M_{f_e}]$ é a matriz de massa definida para o elemento fluido (Manual Teórico do ANSYS, 1998, Capítulo 8.2)

$$[M_{f_e}] = \frac{1}{c_0^2} \int_{V_e} [N][N]^T dV \quad (241)$$

onde $[N]$ é o vetor com as funções de forma para o elemento fluido. Se este vetor for normalizado para a unidade (ie. o máximo elemento vale 1) então por definição

$$\hat{\Phi}_i^T [M_{f_e}] \hat{\Phi}_i = \frac{\Lambda_i}{c_0^2} \quad (242)$$

onde $\hat{\Phi}_i$ é o vetor com as funções de forma normalizadas para unidade e Λ_i é o volume modal da cavidade definido por:

$$\lambda_i = \int \phi_i^2(\vec{r}) dV(\vec{r}) \quad (243)$$

Ewins (1995) mostra a relação entre a função de forma normalizada pela massa Φ_i e a forma geral $\hat{\Phi}_i$ com o maior elemento normalizado pela unidade é simplesmente: (Ewins 1995)

$$\Phi_i = \frac{c_0}{\sqrt{\Lambda_i}} \hat{\Phi}_i \quad (244)$$

Portanto, tomando o $\max(\hat{\Phi}_i) = 1$ o elemento máximo de vetor modal normalizado pela massa através do ANSYS é igual a raiz quadrada da razão da velocidade do som no ar e o volume modal, isto é:

$$\Lambda_i = \frac{c_0^2}{\max(\Phi_i^2)} \quad (245)$$

A equação (5.10) é verdadeira porque cada nó apresenta apenas um grau de liberdade. Para o elemento estrutural com 6 graus de liberdade, esta técnica não é válida sempre.

O volume modal é utilizado na análise no software MATLAB onde foi-se obtido os modos acústicos e estruturais posteriormente normalizados para unidade para análise subsequente.

MODELO ESTRUTURAL

Dois elementos estruturais foram utilizados na discretização da estrutura pelo Método dos Elementos Finitos. O elemento *Shell-63* é um elemento sólido tridimensional para uma

casca elástica e está disponível nas configurações de quatro nós (quadrilateral) e em três nós (triangular) conforme mostra a Figura 13. O elemento quadrilateral pode ser aplicado apenas em superfícies de 4 lados. Todas as outras geometrias requerem o uso do elemento triangular. Para ter nós coincidentes nos modelos acústicos e estruturais é necessário o uso de elementos triangulares em conjunto com elementos tetraédricos e elementos quadrilaterais em conjunto com elementos cúbicos do fluido.

Para sistemas com geometria de 6 lados, como caixas, é possível gerar uma malha com elementos quadrilaterais e elementos cúbicos. Entretanto para utilizar o gerador de malhas automático do ANSYS para sistemas com geometrias mais complexas, é necessário o uso de elementos triangulares e elementos tetraédricos.

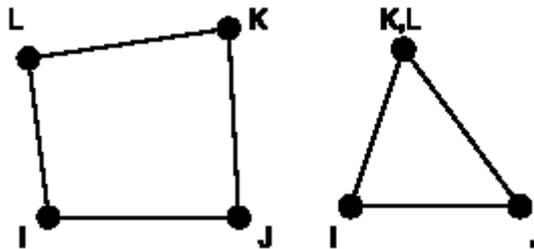


Figura 51 - Shell-63 elemento de cascas elástica

Os modos estruturais obtidos no ANSYS podem ser normalizados para unidade ou com a matriz massa, a massa modal da estrutura pode ser obtida diretamente (Manual Teórico do ANSYS, 1998, Capítulo 17.3)

$$\Psi_i^T [M_{se}] \Psi_i = 1 \quad (246)$$

onde Ψ_i é a função modal para o modo i e $[M_{se}]$ é a matriz massa do elemento estrutural, definido como (Manual Teórico do ANSYS, 1998, Capítulo 2.2)

$$[M_{se}] = \rho \int_{V_e} [N][N]^T dV \quad (247)$$

onde $[N]$ é o vetor com as funções de forma para o elemento estrutural. Quando a matriz massa para o elemento Shell63 é formulada com o ANSYS tem-se uma matriz de massa consistente, a exata formulação é dependente da função de forma específica do elemento. Em termos físicos isto significa que a matriz massa é completa ou semi-completa e não

necessariamente diagonal. A exata massa modal pode ser obtida através da análise dos modos acústicos bem como o volume modal (ver Equação (245)) é necessário negligenciar a inércia rotacional do elemento. Esta exigência é necessária para validar o estudo de cascas finas da mesma maneira que na teoria clássica de viga de Bernoulli-Euler. No ANSYS é possível retirar os termos rotacionais da matriz massa do elemento *Shell-63* provendo maior precisão na solução comparada com a matriz massa consistente.

Acoplamento

A equação de onda na área da fonte acústica dentro do domínio fluido é:

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial q}{\partial t} = 0, \quad (248)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano, p a pressão sonora, c a velocidade do som no meio fluido, t o tempo, ρ_f é a densidade do meio fluido e q a distribuição de velocidade na área de fonte acústica, que se torna zero fora desta área. Para uma cavidade com paredes elásticas, a condição de contorno é:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (249)$$

onde n é o vetor normal unitário na interface fluido-estrutura, e w o deslocamento normal das paredes da cavidade.

Com o uso do método dos elementos finitos, o domínio fluido e o domínio estrutural podem ser divididos em elementos. Expandindo P e w em diferentes funções de interpolação para a pressão sonora e o deslocamento estrutural, i.e., $\{N_p\}$ e $\{N_\xi\}$, tem-se:

$$p = \{N_p\} \{P\}^{(e)}, \quad (250)$$

$$w = \{N_\xi\} \{\xi\}^{(e)}, \quad (251)$$

onde $\{P\}^{(e)}$ é o valor de pressão sonora nos nós do elemento fluido e $\{\xi\}^{(e)}$ é o deslocamento estrutural nos nós do elemento estrutural.

Substituindo as equações (251), (250) e (249) na equação(236), tomando a formulação de elementos finitos no domínio fluido através do método de Galerkin tomando $\{N_p\}$ como funções de ponderação:

$$[G]\{\ddot{P}\} + [H]\{P\} = \{I_q\} - [A]\{\dot{\xi}\} \quad (252)$$

Onde $[G]$ é matriz de massa acústica, $[H]$ é a matriz de rigidez acústica, $[A]$ é a matriz de acoplamento e $\{I_q\}$ é o vetor de excitação acústica.

No domínio estrutural, a formulação em elementos finitos podem ser deduzidas baseado na teoria do trabalho virtual:

$$[M_\xi]\{\ddot{\xi}\} + [K_\xi]\{\xi\} = \{I_s\} + \rho_f^{-1}[A]^T\{P\} \quad (253)$$

Onde $[M_\xi]$ é a matriz de massa estrutural, $[K_\xi]$ é a matriz de rigidez estrutural e $\{I_s\}$ é o vetor de excitação estrutural.

O modelo em Elementos Finitos do acoplamento acústico-estrutural pode ser escrito da forma:

$$\begin{bmatrix} [G] & [A] \\ [0] & [M_\xi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{P}\} \\ \{\dot{\xi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [H] & [0] \\ -\rho_f^{-1}[A]^T & [K_\xi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{\xi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{I_q\} \\ \{I_s\} \end{Bmatrix} \quad (254)$$

Por causa da existência da matriz $[A]$, a equação (254) representa um sistema não simétrico. As matrizes correspondentes às sub-matrizes da equação (254) são respectivamente:

$$[G]^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \frac{1}{c^2} \{N_p\}^T \{N_p\} d\Omega, \quad (255)$$

$$[H]^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \{\nabla N_p\}^T \cdot \{\nabla N_p\} d\Omega, \quad (256)$$

$$[M_\xi]^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \rho_s \{N_\xi\}^T \{N_\xi\} dV \quad , \quad (257)$$

$$[K_\xi]^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \{N_\xi\}^T [B]^T [D] [B] \{N_\xi\} dV \quad , \quad (258)$$

$$[A]^{(e)} = \int_{\Sigma_a^{(e)}} \rho_f \{N_p\}^T \{N_\xi\} d\Sigma \quad , \quad (259)$$

$$[I_q]^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \{N_p\}^T \rho_f \frac{\partial q}{\partial t} d\Omega \quad , \quad (260)$$

$$[I_s]^{(e)} = \int_{\Sigma_b^{(e)}} \{N_\xi\}^T f d\Sigma \quad , \quad (261)$$

onde ∇ é o operador nabla, ρ_s é a densidade do material da estrutura, f é o distúrbio causado pelo carregamento externo na estrutura, $[B]$ é a matriz de geometria estrutural, $[D]$ é a matriz de elasticidade estrutural, $\Omega^{(e)}$ o elemento de volume fluido, $V^{(e)}$ o volume do elemento estrutural e $\Sigma_b^{(e)}$ é a área do elemento estrutural sujeita a força f .