

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

ESTUDO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR
POR CONVECÇÃO MISTA
EM DUTOS HORIZONTAIS E VERTICAIS

JOÃO BATISTA DIAS

ORIENTADOR: PROF. DR. GENÉSIO JOSÉ MENON

Tese Apresentada ao Curso de Pós-graduação em Engenharia Mecânica
como Parte dos Requisitos para a Obtenção do Título de Doutor em Ciências em
Engenharia Mecânica na Área de Concentração em Conversão de Energia.

ITAJUBÁ - MG
2002

536.24(043.2)

D541e

Dias, João Batista

Estudo da Transferência de Calor por Convecção Mista em Dutos Horizontais e Verticais: aplicações em engenharia mecânica/por João Batista Dias; Orientado por Genésio José Menon.-- Itajubá, MG: [s.n.],2002.

175 p.:il.

Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Transferência de calor. 2. Convecção mista. 3. Método de elementos finitos numéricos. 4.Métodos numéricos. I. Menon, Genésio José, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

ESTUDO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR
POR CONVECÇÃO MISTA
EM DUTOS HORIZONTAIS E VERTICAIS

João Batista Dias

Membros da Banca Examinadora

- 1 - Prof. Dr. Maurício Araújo Zanardi – UNESP/FEG
- 2 - Prof. Dr. Luiz Roberto Carrocci – UNESP/FEG
- 3 - Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho – UNIFEI
- 4 - Prof. Dr. Ricardo Dias Martins Carvalho – UNIFEI
- 5 - Prof. Dr. Rogério José da Silva – UNIFEI
- 6 - Prof. Dr. Waldir de Oliveira – Moderador – UNIFEI
- 7 - Prof. Dr. Genésio José Menon – Orientador – UNIFEI

ITAJUBÁ - MG
2002

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pois se ele não quisesse nada disso seria possível; à minha esposa e ao meu filho, por sua dedicação e paciência; aos meus pais, por seu esforço em criar e educar seus filhos; aos meus irmãos e aos meus amigos, por terem sempre me incentivado e ao meu orientador que muito mais que isto, ele é um amigo e companheiro que muito me ajudou na realização deste trabalho. Agradeço também à CAPES, que concedeu a bolsa de doutorado, financiando assim este trabalho.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais que trabalharam muito para que seus filhos tivessem a oportunidade de estudar. Que Deus os tenha!

RESUMO

No presente trabalho utiliza-se o método de elementos finitos com o elemento triangular linear e a formulação de Galerkin para estudar a transferência de calor por convecção mista em dutos horizontais e verticais. O escoamento é considerado bidimensional, desenvolvido, laminar e não permanente. É admitida a aproximação de Boussinesq. O fluido de trabalho é o ar ($Pr = 0,7$). Foram desenvolvidos programas computacionais em linguagem FORTRAN para calcular, conforme o caso estudado, o número de Nusselt local e médio, o produto médio do fator de atrito pelo número de Reynolds, a velocidade axial adimensional média, a temperatura adimensional média e as distribuições de função corrente, velocidade axial adimensional, temperatura adimensional e vorticidade. Foram estudados três problemas de convecção mista em dutos horizontais, a saber: duto retangular horizontal com cilindro interno aquecido, duto retangular horizontal de seção transversal inclinada com cilindro interno aquecido e tubo horizontal com uma placa interna excêntrica. A placa é considerada termicamente isolada. Para os três casos o aquecimento se dá por fluxo de calor axial uniforme com temperatura circumferencial uniforme. Foram estudados 4 problemas de convecção mista em escoamentos verticais, a saber: duto vertical elíptico, banco de tubos alinhados entre placas verticais, banco de tubos alinhados em um escoamento vertical e banco de tubos alternados em um escoamento vertical. No duto elíptico o aquecimento ocorre por fluxo de calor axial uniforme e temperatura periférica uniforme. Nos bancos de tubos o aquecimento se dá por temperatura uniforme, as placas são termicamente isoladas e o fluido tem temperatura e velocidade uniformes na entrada. Os programas desenvolvidos são validados para diversos problemas e os desvios encontrados são considerados suficientemente pequenos para tornarem estes programas aptos para serem utilizados nos problemas propostos.

Palavras-chave: 1 – Transferência de Calor, 2 – Convecção mista,
3 – Métodos de Elementos Finitos, 4 – Métodos Numéricos,
5 – Dutos Horizontais, 6 – Dutos Verticais.

ABSTRACT

In this work, the finite element method using triangular elements and the Galerkin formulation is used to study the mixed convection heat transfer in horizontal and vertical ducts. The flow is considered two-dimensional, developed, laminar and unsteady. The fluid physical properties are considered constant except the density in the buoyancy terms to which the Boussinesq approximation is applied. The fluid used in this work is air ($Pr = 0,7$). Computational programs in FORTRAN language were developed to calculate, according to each case studied, the local and average Nusselt number, the product of the average friction factor by Reynolds number, the average nondimensional axial velocity and the average nondimensional temperature. Moreover, the distributions of stream function, nondimensional axial velocity, nondimensional temperature and vorticity were also calculated. Three mixed convection problems in horizontal ducts were studied. They are as follows – an horizontal rectangular duct with a heated inner cylinder, an horizontal rectangular duct with an inclined cross section and a heated inner cylinder, and a heated horizontal tube with an insulated eccentric inner plate. For the three cases mentioned previously, heating is realized with an uniform axial heat flux and circumferential uniform temperature. Four cases of mixed convection heat transfer with vertical flow were studied. They are as follow – a vertical elliptic duct, a bank of aligned tubes between vertical plates, a bank of aligned tubes in a vertical flow, and a bank of alternate tubes in a vertical flow. The elliptic duct has uniform axial heat flux and peripheral uniform temperature. In the case of the tube banks, the tube walls are kept isothermal, the plates are insulated and the entry fluid has uniform temperature and uniform velocity profiles. The computational programs are validated for several problems and the differences found are small enough to turn these programs applicable to the proposed problems.

Key Words: 1 – Heat Transfer, 2 – Mixed Convection,
3 – Finite Element Methods, 4 – Numerical Methods,
5 – Horizontal Ducts, 6 – Vertical Ducts.

SUMÁRIO

	Página
Resumo	i
Abstract	ii
Sumário	iii
Simbologia	vi
Índice de Figuras	xii
Índice de Tabelas	xvi
 Capítulo 1 – Introdução	
1.1 – Generalidades	1
1.2 – Revisão da Literatura	1
1.2.1 – Escoamento em Dutos Horizontais	1
1.2.2 – Escoamento em Dutos Verticais	6
1.2.3 – Escoamento em Dutos Inclinação	9
1.2.4 – Escoamento sobre Tubos e Banco de Tubos	9
1.3 – Objetivos do Presente Trabalho	10
1.4 – Problemas a Serem Estudados	10
1.5 – Delineamento deste Trabalho	14
 Capítulo 2 – Formulação do Problema	
2.1 – Introdução	16
2.2 – Dutos Horizontais e Verticais	16
2.2.1 – Análise Teórica	17
2.2.2 – Adimensionalização das Equações	20
2.2.3 – Número de Nusselt Médio (Nu) e Produto do Fator de Atrito por Reynolds (fRe)	26
2.3– Banco de Tubos Horizontais em um Escoamento vertical	26
2.3.1 – Análise Teórica	26
2.3.2 – Adimensionalização das Equações	28
2.3.3 – Número de Nusselt	33
 Capítulo 3 – Método de Solução	
3.1 – Introdução	34
3.2 – Forma Geral para as Equações de Conservação	34
3.3– Obtenção das Matrizes Gerais para o Elemento	35

3.3.1 – Obtenção da Matriz $[C]^e$	36
3.3.2 – Obtenção da Matriz $[K_\phi]^e$	37
3.3.3 – Obtenção da Matriz $\{R_\phi\}^e$	38
3.3.4 – Resumo das Equações para Obtenção das Matrizes $[C]^e$, $[K_\phi]^e$ e $\{R_\phi\}^e$	46
3.4– Algoritmo e Fluxograma	48
Capítulo 4 – Validação dos Códigos Computacionais	
4.1 – Introdução	53
4.2 – Validação para Dutos Horizontais	53
4.2.1 – Tubos Horizontais Concêntricos	53
4.2.2 – Tubo Horizontal com uma Placa Interna Excêntrica	57
4.3 – Validação para Dutos Verticais	61
4.4 – Validação para Banco de Tubos em um Escoamento Vertical	64
Capítulo 5 – Resultados	
5.1 – Introdução	69
5.2 – Duto Retangular Horizontal com Cilindro Interno Aquecido para $\gamma = 0^\circ$	69
5.3 – Duto Retangular Horizontal com Cilindro Interno Aquecido para $\gamma \neq 0^\circ$	80
5.4 – Tubo Horizontal com uma Placa Interna Excêntrica	88
5.5 – Duto Vertical Eliptico	97
5.6 – Banco de Tubos Alinhados entre Placas Verticais	105
5.7 – Banco de Tubos Alinhados em um Escoamento Vertical	114
5.8 – Banco de Tubos Alternados em um Escoamento Vertical	123
5.9 – Comparação de Resultados para os Três Casos de Bancos de Tubos Estudados	133
Capítulo 6 – Conclusões	
6.1 – Introdução	135
6.2 – Duto Retangular Horizontal com Cilindro Interno Aquecido para $\gamma = 0^\circ$	135
6.3 – Duto Retangular Horizontal com Cilindro Interno Aquecido para $\gamma \neq 0^\circ$	135
6.4 – Tubo Horizontal com uma Placa Interna Excêntrica	136
6.5 – Duto Vertical Eliptico	137
6.6 – Banco de Tubos Alinhados entre Placas Verticais	137
6.7 – Banco de Tubos Alinhados em um Escoamento Vertical	138
6.8 – Banco de Tubos Alternados em um Escoamento Vertical	139
6.9 – Comparação de Resultados para os Três Casos de Bancos de Tubos Estudados	140
6.10 – Sugestões para Trabalhos Futuros	140

Apêndice 1 – Determinação das Funções de Forma e Cálculo de Gradientes

A1.1 – Introdução	141
A1.2 – Funções de Forma para o Elemento Triangular Linear	141
A1.3 – Verificação das Funções de Forma	143
A1.4 – Cálculo dos Gradientes	144

Apêndice 2 – Números Adimensionais

A2.1 – Número de Nusselt para Dutos Horizontais e Verticais	146
A2.2 – Fator de Atrito para Dutos Horizontais e Verticais	148
A2.3 – Número de Nusselt para Bancos de Tubos em um Escoamento Vertical	149

Apêndice 3 – Método de Galerkin para a Equação Diferencial Bidimensional em Regime Não Permanente

A3.1 – Introdução	151
A3.2 – Método de Galerkin	151
A3.3 – Aproximação do Termo $\{\phi_\tau\}$	157
A3.4 – Regime Permanente	159

Apêndice 4 – Método Matricial para o Cálculo da Vorticidade no Contorno

A4.1 – Introdução	160
A4.2 – Método Matricial	161

Apêndice 5 – Tabelas de Resultados

A5.1 – Duto Retangular Horizontal com Cilindro Interno Aquecido para $\gamma = 0^\circ$	163
A5.2 – Duto Retangular Horizontal com Cilindro Interno Aquecido para $\gamma \neq 0^\circ$	164
A5.3 – Tubo Horizontal com uma Placa Interna Excêntrica	165
A5.4 – Duto Vertical Eliptico	167
A5.5 – Banco de Tubos Alinhados entre Placas Verticais	169
A5.6 – Banco de Tubos Alinhados em um Escoamento Vertical	170
A5.7 – Banco de Tubos Alternados em um Escoamento Vertical	171

Referências Bibliográficas	173
----------------------------	-----

SIMBOLOGIA

CARACTERES LATINOS

Símbolo	Designação	Página
a	Semi-eixo maior da elipse [m]	61
A	Área adimensional	36
A^e	Área adimensional do elemento	37
A_m	Área molhada na seção [m ²]	19
$A_1, \dots, A_7$	Parâmetros	34
AR_1	Razão de aspecto do duto de seção retangular	75
AR_2	Razão de aspecto da placa	58
$[A_\phi]$	Matriz geral global	48
b	Semi-eixo menor da elipse [m]	61
BA	Razão entre o semi-eixo menor e o semi-eixo maior da elipse	63
b_i, b_j, b_k	coeficientes	38
b_α	Coeficiente que assume os valores b_i, b_j ou b_k	37
$[B^e]$	Matriz das derivadas das funções de forma, para o elemento	37
$[B^e]^T$	Matriz transposta das derivadas das funções de forma, para o elemento	37
$\{B_\phi\}$	Vetor geral global	48
c_i, c_j, c_k	Coeficientes	38
c_p	Calor específico a pressão constante [J/Kg °C]	19
c_α	Coeficiente que assume os valores c_i, c_j ou c_k	37
C_g	Constante geométrica	23
$[C]$	Matriz capacitância global	48
$[C]^e$	Matriz capacitância, para o elemento	36
d	Diâmetro hidráulico [m]	20
D	Diâmetro do tubo [m]	28
e	Excentricidade da placa [m]	57
E	Excentricidade adimensional da placa	59
f	Fator de atrito	148
fRe	Produto do fator de atrito médio pelo número de Reynolds, para a convecção mista	26
$(fRe)_0$	Produto do fator de atrito médio pelo número de Reynolds, para a convecção forçada ($Ra = 0$)	56
F	Parâmetro que representa uma função qualquer	153
F_1	Parâmetro	40
F_2	Parâmetro	41
F_3	Parâmetro	42
F_4	Parâmetro	43
F_7	Parâmetro	46
g	Aceleração da gravidade [m/s ²]	18
$\bar{g}$	Vetor aceleração da gravidade	53
$\{g^e\}$	Matriz gradiente para o elemento	155

Gr	Número de Grashof	21
h	Coeficiente de convecção [$\text{W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$]	149
$\bar{h}$	Coeficiente de convecção médio [$\text{W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$]	146
H	Altura da seção transversal do duto [m]	70
H	Distância vertical entre os tubos [m]	65
HD	Distância adimensional vertical entre os tubos	65
H^*	Razão entre a altura da seção do duto e o diâmetro do cilindro	70
$\{I\}$	Matriz integral residual global	156
$\{I\}^e$	Matriz integral residual para o elemento	154
k	Condutividade térmica do fluido [$\text{W/m } ^\circ\text{C}$]	20
$[K_w]$	Matriz de rigidez da velocidade axial adimensional, global	48
$[K_\phi]$	Matriz de rigidez global	48
$[K_\phi]^e$	Matriz de rigidez para o elemento	36
$[K_\theta]$	Matriz de rigidez da temperatura adimensional, global	48
$[K_\omega]$	Matriz de rigidez da vorticidade, global	48
$[K_\psi]$	Matriz de rigidez da função corrente, global	48
$[K_\psi]^e$	Matriz de rigidez da função corrente, para o elemento	161
L	Largura da seção retangular do duto[m]	70
L	Distância horizontal entre os tubos [m]	65
LD	Distância adimensional horizontal entre os tubos	65
L_1	Largura da placa [m]	58
L^*	Razão entre a largura da seção do duto e o diâmetro do cilindro	70
n	Direção perpendicular à superfície	35
NE	Número de elementos	72
N_i, N_j, N_k	Funções de forma do elemento	142
Nu	Número de Nusselt médio para dutos horizontais e verticais	26
Nu	Número de Nusselt médio para bancos de tubos	33
Nu_L	Número de Nusselt local	33
Nu_0	Número de Nusselt médio da convecção forçada ($Ra = 0$)	56
N_α	Função de forma do elemento podendo assumir os valores N_i, N_j, N_k	143
$[N^e]$	Matriz das funções de forma, para o elemento	36
$[N^e]^T$	Matriz transposta das funções de forma, para o elemento	36
p	Pressão [N/m^2]	18
$\bar{p}$	Pressão média na seção [N/m^2]	18
P	Pressão adimensional para dutos horizontais e verticais	20
P	Pressão adimensional para bancos de tubos	28
P_m	Perímetro molhado na seção [m]	20
P_q	Perímetro aquecido na seção [m]	19
Pe	Número de Peclet	30
Pr	Número de Prandtl	20
q	Fluxo de calor por unidade de área [$\text{J}/(\text{s m}^2)$]	146
q_x	Fluxo de calor por unidade de área na direção x [$\text{J}/(\text{s m}^2)$]	149
q_y	Fluxo de calor por unidade de área na direção y [$\text{J}/(\text{s m}^2)$]	149
$\bar{q}$	Fluxo de calor médio circunferencial por unidade de área [$\text{J}/(\text{s m}^2)$]	146
q^e	Fluxo de calor por unidade de área no elemento [$\text{J}/(\text{s m}^2)$]	38

Q_f	Taxa de transferência de calor recebida pelo fluido [J/s]	19
Q_T	Taxa de transferência de calor fornecida ao fluido pelo tubo aquecido [J/s]	19
Q_ϕ	Função especificada no domínio	34
Q_ϕ^e	Função especificada no domínio, para o elemento	36
Ra	Número de Rayleigh	21
Re	Número de Reynolds para dutos horizontais e verticais	22
Re	Número de Reynolds para banco de tubos	29
R_1	Raio do tubo interno [m]	55
R_2	Raio do tubo externo [m]	55
Ri	Número de Richardson	29
RR	Razão de raios (tubos)	55
RR_1	Razão de raios (duto com cilindro interno)	75
RR_2	Razão de raios (tubo com placa excêntrica)	58
$\{R_w\}$	Vetor força global da velocidade axial adimensional	48
$\{R_\phi\}$	Vetor força global	48
$\{R_\phi\}^e$	Vetor força para o elemento	36
$\{R_\theta\}$	Vetor força global da temperatura adimensional	48
$\{R_\omega\}$	Vetor força global da vorticidade	48
$\{R_\psi\}$	Vetor força global da função corrente	48
$\{R_\psi\}^e$	Vetor força, para o elemento, da função corrente	161
$\{R_\phi\}_1^e$	Vetor força com relação ao parâmetro A_1 , para o elemento	41
$\{R_\phi\}_2^e$	Vetor força com relação ao parâmetro A_2 , para o elemento	41
$\{R_\phi\}_3^e$	Vetor força com relação ao parâmetro A_3 , para o elemento	42
$\{R_\phi\}_4^e$	Vetor força com relação ao parâmetro A_4 para o elemento	43
$\{R_\phi\}_5^e$	Vetor força com relação ao parâmetro A_5 , para o elemento	44
$\{R_\phi\}_6^e$	Vetor força com relação ao parâmetro A_6 , para o elemento	45
$\{R_\phi\}_7^e$	Vetor força com relação ao parâmetro A_7 , para o elemento	46
t	Tempo [s]	18
T	Temperatura [$^{\circ}\text{C}$]	18
T_b	Temperatura média do fluido na seção [$^{\circ}\text{C}$]	147
T_b	Temperatura média do fluido na linha horizontal para cada tubo [$^{\circ}\text{C}$]	150
T_{in}	Temperatura na entrada [$^{\circ}\text{C}$]	28
T_w	Temperatura na parede [$^{\circ}\text{C}$]	18
u, v, w	Velocidades nas direções x, y e z, respectivamente [m/s]	18
U, V, W	Velocidades adimensionais nas direções x, y e z para dutos horizontais e verticais	20
$\underline{U}, \underline{V}$	Velocidades adimensionais nas direções x e y para bancos de tubos	28
$\bar{U}$	Velocidade adimensional média na linha horizontal para cada tubo	150
$\bar{U\theta}$	Média do produto da velocidade adimensional pela temperatura na linha horizontal para cada tubo	150
U_{in}	Velocidades na entrada [m/s]	28
V	Volume adimensional	36

V^e	Volume adimensional do elemento	36
$\bar{w}$	Velocidade axial média na seção [m/s]	19
W^e	Velocidades axial adimensional, para o elemento	39
$\bar{W}$	Velocidade axial adimensional média na seção	22
W_i, W_j, W_k	Velocidade axial adimensional para cada ponto nodal do elemento	43
$\overline{W\theta}$	Média do produto da velocidade axial adimensional pela temperatura adimensional	148
$\{W\}$	Matriz velocidade axial adimensional, global	48
$\{W\}^e$	Matriz velocidade axial adimensional, para o elemento	42
$\{W\}_N$	Matriz velocidade axial adimensional, global, no tempo anterior	48
x, y, z	Coordenadas direcionais [m]	18
X, Y	Coordenadas direcionais adimensionais para dutos horizontais e verticais	20
X, Y	Coordenadas direcionais adimensionais para bancos de tubos	28
X_i, X_j, X_k	Abscissas dos pontos nodais do elemento	37
Y_i, Y_j, Y_k	Ordenadas dos pontos nodais do elemento	37

CARACTERES GREGOS

Símbolo	Designação	Página
α	Difusividade térmica do fluido [m^2/s]	20
β	Coeficiente de expansão térmica do fluido [$1/^\circ C$]	18
$\beta_1^e, \beta_2^e, \beta_3^e$	Coeficientes	141
δ	Parâmetro	34
ε_1	Valor de uma grandeza qualquer obtida pelo presente trabalho	56
ε_2	Valor de uma grandeza qualquer obtida por outro trabalho	56
ϕ	Função que pode representar ψ , W , θ ou ω , conforme Tabela 3.1	34
ϕ_{ec}	Função especificada no contorno	35
ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k	Função adimensional para cada ponto do elemento	36
ϕ^e	Função, para o elemento, que pode representar ψ^e , W^e , θ^e ou ω^e	141
$\{\phi\}$	Matriz incógnita global	48
$\{\phi\}^e$	Matriz incógnita para o elemento	36
$\{\phi\}_N^e$	Matriz incógnita no tempo anterior para o elemento	36
$\{\phi_\tau\}$	Matriz da derivada temporal da matriz incógnita global	157
$\{\phi_\tau\}^e$	Matriz da derivada temporal da matriz incógnita para o elemento	155
γ	Ângulo de rotação dos eixos coordenados	18
γ_1	Ângulo com valor 0° para escoamento horizontal e 90° para escoamento vertical	18
γ_2	Ângulo de posição da placa	57
λ	Parâmetro	34
λ_1	Parâmetro com valor 1 para escoamento horizontal e zero para escoamento vertical	18
μ	Viscosidade dinâmica do fluido [$Kg/(m\ s)$]	21

ν	Viscosidade cinemática do fluido [m^2/s]	18
π	Número adimensional ($\pi = 3,14159265\dots$)	71
θ	Temperatura adimensional para dutos horizontais e verticais	20
θ	Temperatura adimensional para bancos de tubos	28
θ_b	Temperatura média adimensional para dutos horizontais e verticais	148
θ_b	Temperatura média adimensional para bancos de tubos	150
θ_{in}	Temperatura adimensional na entrada	33
θ_w	Temperatura adimensional na parede	33
θ^e	Temperatura adimensional para o elemento	39
$\theta_i, \theta_j, \theta_k$	Temperatura adimensional para cada ponto nodal do elemento	41
$\{\theta\}$	Matriz temperatura adimensional, global	48
$\{\theta\}_N$	Matriz temperatura adimensional, global, no tempo anterior	48
ρ	Massa específica [Kg/m^3]	18
τ	Tempo adimensional para dutos horizontais e verticais	20
τ	Tempo adimensional para bancos de tubos	28
ω	Vorticidade	24
ω_M	Vorticidade na parede que é calculada e atualizada a cada passo de tempo	58
ω^e	Vorticidade para o elemento	39
$\omega_i, \omega_j, \omega_k$	Vorticidade para cada ponto nodal do elemento	45
ω_w	Vorticidade na parede	161
$\{\omega\}$	Matriz vorticidade, global	48
$\{\omega\}^e$	Matriz vorticidade, para o elemento	44
$\{\omega\}_N$	Matriz vorticidade, global, no tempo anterior	48
ψ	Função corrente	24
ψ^e	Função corrente para o elemento	39
ψ_i, ψ_j, ψ_k	Função corrente para cada ponto nodal do elemento	39
ψ_{pp}	Função corrente em um ponto próximo à parede	160
$\{\psi\}$	Matriz função corrente, global	48
$\{\psi\}^e$	Matriz função corrente, para o elemento	161
$\{\psi\}_N$	Matriz função corrente no tempo anterior para o elemento	48

ÍNDICES

Símbolo	Designação	Página
e	Elemento	141
ec	Especificado no contorno	35
f_1, f_2, f_3	Potências das funções de forma	37
i, j, k	Pontos nodais do elemento	141
L	Local	33
m	Molhado	19
N	Tempo anterior	48
pp	Próximo à parede	160

q	Aquecido	19
T	Transposta	36
w	Parede	18
W	Velocidade axial	48
α	Ponto nodal do elemento que pode ser i , j ou k	143
ϕ	Função que pode ser ψ , W , θ ou ω	36
θ	Temperatura adimensional	48
ω	Vorticidade	48
ψ	Função corrente	48

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura	Designação	Página
1.1	Tubos horizontais concêntricos	11
1.2	Duto horizontal retangular com um cilindro interno aquecido	11
1.3	Tubo horizontal aquecido com placa excêntrica isolada	11
1.4	Duto vertical elíptico	12
1.5	Banco de tubos alinhados entre placas verticais	12
1.6	Banco de tubos alinhados em um escoamento vertical	13
1.7	Banco de tubos alternados em um escoamento vertical	13
2.1	Tubos horizontais concêntricos	16
2.2	Duto horizontal retangular com um cilindro interno aquecido	17
2.3	Tubo horizontal aquecido com placa excêntrica isolada	17
2.4	Duto vertical elíptico	17
2.5	Ângulos de inclinação dos eixos coordenados	19
2.6	Segmento de duto horizontal	19
2.7	Banco de tubos alinhados entre placas verticais	27
2.8	Banco de tubos alinhados em um escoamento vertical	27
2.9	Banco de tubos alternados em um escoamento vertical	27
3.1	Fluxograma geral dos programas desenvolvidos	52
4.1	Geometria para tubos horizontais concêntricos	53
4.2	Malha (400×229) para tubos horizontais concêntricos com $RR = 3$	55
4.3	Geometria para um tubo com uma placa excêntrica	57
4.4	Malha para $E = 0,00$ e $\gamma_2 = 0^\circ$	59
4.5	a) Malha para $E = 0,15$ com $\gamma_2 = 0^\circ$; b) Malha para $E = 0,15$ com $\gamma_2 = 90^\circ$	59
4.6	a) Malha para $E = 0,25$ com $\gamma_2 = 0^\circ$; b) Malha para $E = 0,25$ com $\gamma_2 = 90^\circ$	60
4.7	Geometria para um duto vertical elíptico	61
4.8	Malha para duto elíptico com $BA = 0,1$	62
4.9	Malha para duto elíptico com $BA = 0,5$	63
4.10	Malha para duto elíptico com $BA = 1,0$	63
4.11	Geometria para um banco de tubos em um duto vertical	65
4.12	a) Malha para $HD = 1,5$ com $LD = 1,5$; b) Malha para $HD = 1,5$ com $LD = 2,0$	67
4.13	Comparação de resultados para banco de tubos	68
5.1	Duto horizontal retangular com um cilindro interno aquecido	69
5.2	Geometria para duto retangular com cilindro interno, $\gamma = 0^\circ$	70
5.3	Malhas testadas para $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$	72
5.4	Influência da malha no número de Nusselt para $AR_1 = 1,25$; $RR_1 = 6,40$; $\gamma = 0^\circ$ e $Pr = 0,7$	73
5.5	Influência da malha no tempo computacional por iteração, para $AR_1 = 1,25$; $RR_1 = 6,40$; $\gamma = 0^\circ$ e $Pr = 0,7$	73

5.6	Malhas para as geometrias: a) $AR_1 = 0,50$; $RR_1 = 8,94$ e b) $AR_1 = 0,80$; $RR_1 = 6,40$	74
5.7	Malhas para as geometrias: a) $AR_1 = 1,00$; $RR_1 = 5,66$ e b) $AR_1 = 2,00$; $RR_1 = 8,94$	74
5.8	Relação Nu/Nu_0 versus Ra para as várias razões de aspecto e de raios	75
5.9	Relação $fRe/(fRe)_0$ versus Ra para as várias razões de aspecto e de raios	75
5.10	Variação de Nu em função do tempo adimensional (τ), para $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$	76
5.11	Produto fRe em função do tempo adimensional (τ), para $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$	76
5.12	Isotermas para $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$, com Ra variando de 0 a 1×10^6	78
5.13	Distribuição de função corrente para $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$, com Ra variando de 0 a 1×10^6	78
5.14	Isotermas para $Ra = 1 \times 10^6$	79
5.15	Distribuição de função corrente para $Ra = 1 \times 10^6$	79
5.16	Duto retangular com cilindro interno, $\gamma \neq 0^\circ$	80
5.17	Malha completa (862×474) para $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$	82
5.18	Relação Nu/Nu_0 versus Ra para vários ângulos de inclinação γ	82
5.19	Relação fRe/fRe_0 versus Ra para vários ângulos de inclinação γ	83
5.20	Variação de Nu em função do tempo adimensional (τ), para vários ângulos γ	84
5.21	Variação de fRe em função do tempo adimensional (τ), para vários ângulos γ	84
5.22	Distribuição de função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e velocidade axial adimensional (W) para $\gamma = 0^\circ$	85
5.23	Distribuição de função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e velocidade axial adimensional (W) para $\gamma = 30^\circ$	86
5.24	Distribuição de função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e velocidade axial adimensional (W) para $\gamma = 45^\circ$	86
5.25	Distribuição de função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e velocidade axial adimensional (W) para $\gamma = 60^\circ$	87
5.26	Distribuição de função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e velocidade axial adimensional (W) para $\gamma = 90^\circ$	87
5.27	Tubo horizontal aquecido com uma placa excêntrica isolada	88
5.28	Geometria para um tubo com uma placa excêntrica	88
5.29	Malha para $E = 0$; $\gamma_2 = 0^\circ$	90
5.30	a) Malha para $E = 0,15$; $\gamma_2 = -90^\circ$; b) Malha para $E = 0,15$; $\gamma_2 = -45^\circ$	90
5.31	a) Malha para $E = 0,15$; $\gamma_2 = 0^\circ$; b) Malha para $E = 0,15$; $\gamma_2 = 45^\circ$	91
5.32	a) Malha para $E = 0,15$; $\gamma_2 = 90^\circ$; b) Malha para $E = 0,25$; $\gamma_2 = -90^\circ$	91
5.33	a) Malha para $E = 0,25$; $\gamma_2 = -45^\circ$; b) Malha para $E = 0,25$; $\gamma_2 = 0^\circ$	91
5.34	a) Malha para $E = 0,25$; $\gamma_2 = 45^\circ$; b) Malha para $E = 0,25$; $\gamma_2 = 90^\circ$	92
5.35	Número de Nusselt médio em função de Ra e γ_2 , para $E = 0,25$	92
5.36	fRe em função de Ra e γ_2 , para $E = 0,25$	93
5.37	Número de Nusselt médio em função de Ra e E , para $\gamma_2 = 0^\circ$	94
5.38	Produto fRe em função de Ra e E , para $\gamma_2 = 0^\circ$	94
5.39	Número de Nusselt médio em função de γ_2 e E , para 3 valores de Ra	95

5.40	Distribuições de função corrente, velocidade axial e temperatura para $Ra = 1 \times 10^4$	96
5.41	Distribuições de função corrente, velocidade axial e temperatura para $Ra = 1 \times 10^5$	96
5.42	Distribuições de função corrente, velocidade axial e temperatura para $Ra = 1 \times 10^6$	96
5.43	Duto vertical elíptico	97
5.44	Geometria para um duto vertical elíptico	97
5.45	Malha para duto elíptico com $BA = 0,1$	99
5.46	Malha para duto elíptico com $BA = 0,5$	99
5.47	Malha para duto elíptico com $BA = 1,0$	99
5.48	Distribuições de temperatura para $Re = 100, 300$ e 500	100
5.49	Distribuições de velocidade axial para $Re = 100, 300$ e 500	100
5.50	Distribuições de temperatura para $Ra = 1 \times 10^3, 3 \times 10^4$ e 1×10^5	100
5.51	Distribuições de velocidade axial para $Ra = 1 \times 10^3, 3 \times 10^4$ e 1×10^5	101
5.52	Número de Nusselt médio versus Ra para $Re = 100$ e $BA = 0,1, 0,5$ e $1,0$	101
5.53	Produto fRe versus Ra para $Re = 100$ e $BA = 0,1, 0,5$ e $1,0$	102
5.54	Número de Nusselt médio versus Ra para $Re = 200$ e $BA = 0,1, 0,5$ e $1,0$	102
5.55	Produto fRe versus Ra para $Re = 200$ e $BA = 0,1, 0,5$ e $1,0$	103
5.56	Número de Nusselt médio versus Ra para $BA = 0,5$ e $Re = 100$ à 500	103
5.57	Produto fRe versus Ra para $BA = 0,5$ e $Re = 100, 200, 300$ e 500	104
5.58	Banco de tubos entre placas verticais	105
5.59	a) Geometria do problema; b) Domínio computacional	106
5.60	Malhas para tubos alinhados em um escoamento vertical	108
5.61a	Linhas de corrente para $Re = 50$	109
5.61b	Isotermas para $Re = 50$	109
5.62a	Linhas de corrente para $Re = 100$	110
5.62b	Isotermas para $Re = 100$	110
5.63	Número de Nusselt local para $Ri = -5,0$	111
5.64	Número de Nusselt local para $Ri = 0,0$	111
5.65	Número de Nusselt local para $Ri = 5,0$	112
5.66	Número de Nusselt local para o Tubo 3	112
5.67	Número de Nusselt médio para $LD = 1,5$	113
5.68	Número de Nusselt médio para $LD = 2,0$	113
5.69	Número de Nusselt médio para $LD = 2,5$	114
5.70	Banco de tubos em um escoamento vertical	115
5.71	a) Geometria do problema; b) Domínio computacional	115
5.72	Malhas para tubos alinhados em um escoamento vertical	117
5.73a	Linhas de corrente para $Re = 50$	118
5.73b	Isotermas para $Re = 50$	118
5.74a	Linhas de corrente para $Re = 100$	119
5.74b	Isotermas para $Re = 100$	119
5.75	Número de Nusselt local para $Ri = -5,0$	120
5.76	Número de Nusselt local para $Ri = 0,0$	120

5.77	Número de Nusselt local para $Ri = 5,0$	121
5.78	Número de Nusselt local para o terceiro tubo	121
5.79	Número de Nusselt médio para $LD = 1,5$	122
5.80	Número de Nusselt médio para $LD = 2,0$	122
5.81	Número de Nusselt médio para $LD = 2,5$	123
5.82	Banco de tubos alternados em um escoamento vertical	124
5.83	a) Geometria do problema; b) Domínio computacional	124
5.84	Malhas para tubos alternados em um escoamento vertical	126
5.85a	Linhas de corrente para $LD = 2,0$; $HD = 1,5$ e $Re = 100$	127
5.85b	Isotermas para $LD = 2,0$; $HD = 1,5$ e $Re = 100$	127
5.86a	Linhas de corrente para $LD = 1,5$; $HD = 2,0$ e $Re = 100$	128
5.86b	Isotermas para $LD = 1,5$; $HD = 2,0$ e $Re = 100$	128
5.87	Número de Nusselt local para os tubos do lado esquerdo, $Ri = -5,0$	129
5.88	Número de Nusselt local para os tubos do lado direito, $Ri = -5,0$	129
5.89	Número de Nusselt local para os tubos do lado esquerdo, $Ri = 5,0$	130
5.90	Número de Nusselt local para os tubos do lado direito, $Ri = 5,0$	130
5.91	Variação do número de Nusselt local com o número de Richardson	131
5.92	Número de Nusselt médio para $Re = 100$ e $HD = 1,5$	131
5.93	Número de Nusselt médio para $Re = 100$ e $HD = 1,75$	132
5.94	Número de Nusselt médio para $Re = 100$ e $HD = 2,0$	132
5.95	Número de Nusselt médio em função de LD e HD	133
5.96	Média do número de Nusselt médio para cada banco de tubos	134
A1.1	Elemento triangular linear	141
A3.1	Esquema de diferença finita central para a aproximação do termo $\{\phi_\tau\}$	157
A4.1	Malha exemplo para o cálculo da vorticidade no contorno	160
A4.2	Exemplo de malha para o cálculo matricial da vorticidade	162

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela	Designação	Página
3.1	Duto horizontal com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme	35
3.2	Duto vertical com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme	35
3.3	Banco de tubos horizontais em um escoamento vertical	35
4.1	Número de Nusselt médio para $RR = 3$ e $Pr = 0,7$	56
4.2	Produto do fator de atrito pelo número de Reynolds para $RR = 3$ e $Pr = 0,7$	56
4.3	Comparação de Nu e fRe para $RR_2 = 2,00$ e $AR_2 = 0,8$	60
4.4	Comparação de resultados do número de Nusselt médio para duto elíptico	63
4.5	Comparação de resultados de fRe para duto elíptico	64
5.1	Influência do número de elementos (NE) no número de Nusselt médio (Nu)	72
A5.1	Valores de Nu , Nu/Nu_0 , fRe e $fRe/(fRe)_0$ para $\gamma = 0^\circ$, $Pr=0,7$; em função da razão de aspecto, da razão de raios e do número de Rayleigh	163
A5.2	Valores de Nu , Nu/Nu_0 , fRe e $fRe/(fRe)_0$ para $Pr = 0,7$; $AR_1 = 1,25$; $RR_1 = 6,40$; $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$ e $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ e 90°	164
A5.3	Valores de Nu , fRe , $\bar{\theta}$ e $\bar{W}$ para $Pr = 0,7$; $RR_2 = 2,00$; $AR_2 = 0,8$; $E = 0$; $0,15$ e $0,25$; $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$ e $\gamma_2 = -90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$ e 90°	166
A5.4	Valores de Nu e fRe para um duto vertical de seção elíptica	168
A5.5	Valores de Nu para $Pr = 0,7$; $HD = 1,5$; $LD = 1,5$; $2,0$ e $2,5$; $Re = 50$ e 100 e $-5,0 \leq Ri \leq 5,0$	169
A5.6	Valores de Nu para $Pr = 0,7$; $HD = 1,5$; $LD = 1,5$; $2,0$ e $2,5$; $Re = 50$ e 100 e $-5,0 \leq Ri \leq 5,0$	169
A5.7	Valores de Nu para um banco de tubos alternados em um escoamento vertical	172

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 – Generalidades

Dependendo de fatores como, por exemplo, o número de Rayleigh ou o número de Richardson, a influência da convecção natural no escoamento em um duto passa a ser significativa. O escoamento secundário originado nas forças de empuxo criadas pela convecção natural pode modificar fortemente os perfis de velocidade e temperatura, alterando assim a transferência de calor. A consideração dos efeitos da convecção natural combinados com a convecção forçada é o que se chama de convecção mista.

Neste trabalho estuda-se, pelo método de elementos finitos, a transferência de calor por convecção mista no interior de dutos horizontais, dutos verticais e sobre bancos de tubos em um escoamento vertical. As condições de contorno consideradas variam para cada problema estudado. O escoamento é considerado desenvolvido, laminar, não permanente e bidimensional. O fluido de trabalho é o ar.

O estudo das convecção mista no interior de dutos horizontais e verticais e sobre bancos de tubos é importante em muitas aplicações como: aquecimento de um fluido por uma resistência elétrica, resfriamento a gás de cabos elétricos, trocadores de calor, resfriamento de barras de combustível nuclear.

Para os casos de dutos horizontais e verticais são resolvidas as equações de conservação na forma adimensional em termos da função corrente, velocidade axial, vorticidade e temperatura. O método de elementos finitos com a formulação de Galerkin é utilizado para se obter as distribuições de função corrente, velocidade axial e temperatura. São calculados também o número de Nusselt médio (Nu) e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) em função de vários parâmetros geométricos e térmicos.

Para os casos de bancos de tubos em um escoamento vertical são resolvidas as equações de conservação na forma adimensional em termos da função corrente, vorticidade e temperatura. O método de elementos finitos com a formulação de Galerkin é utilizado para se obter as distribuições de função corrente e temperatura. São calculados também o número de Nusselt local (Nu_L) e o número de Nusselt médio (Nu) em função de vários parâmetros geométricos e térmicos para os escoamentos pró-empuxo (escoamento secundário no mesmo sentido do escoamento principal) e contra-empuxo (escoamento secundário no sentido oposto ao do escoamento principal).

1.2 – Revisão da Literatura

Muitos estudos têm sido feitos com o objetivo de se avaliar a transferência de calor por convecção natural, forçada e mista, em dutos horizontais, verticais, inclinados e sobre banco de tubos, com diversos formatos de seção transversal e os mais variados tipos de condições de contorno e de escoamento.

Para se fazer esta tese, foram consultados e resumidos alguns trabalhos. Para maior facilidade, eles estão organizados em escoamento em dutos horizontais, escoamento em dutos verticais, escoamento em dutos inclinados e escoamento sobre tubos e banco de tubos.

1.2.1 – Escoamento em Dutos Horizontais

Cho et al. (1982) fizeram uma simulação numérica da convecção natural entre cilindros horizontais concêntricos e excêntricos. O cilindro externo foi submetido a uma temperatura T_0 .

enquanto o cilindro interno foi submetido a uma temperatura T_i , sendo $T_i > T_o$. O escoamento foi considerado permanente e bidimensional. Foi admitida a aproximação de Boussinesq. A validade desta aproximação pode ser vista em Gray & Giorgini (1976). Utilizaram o método de diferenças finitas baseado na iteração de sobre-relaxação sucessiva com o sistema de coordenadas bipolar cilíndrico. Foram estudados problemas com número de Rayleigh, $1 \times 10^3 \leq Ra \leq 5 \times 10^4$, número de Prandtl, $Pr = 0,706$, excentricidade $0,01 \leq \varepsilon \leq 0,90$, ângulo de posição do cilindro interno $\theta_p = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 125^\circ, 135^\circ$ e 180° e razão de raios $0,2 \leq (R_i/R_o) \leq 0,8$. Foram mostrados resultados para a condutividade térmica equivalente média em função de ε de θ_p e para a condutividade equivalente local em cada posição angular na superfície dos cilindros. Foi feita uma comparação entre as distribuições de temperatura deste trabalho com resultados experimentais para três valores de ε . Foram mostrados os perfis de temperatura na direção radial para várias posições angulares e razões de raios. Concluíram que o máximo desvio do coeficiente de transferência de calor local das paredes dos cilindros permanece, por exemplo, para $\varepsilon = 0,01$, $R_i/R_o = 0,3846$ e $Ra = 1,0 \times 10^4$, dentro de apenas 5%. O sistema de coordenadas bipolar pode ser usado para valores de ε bem pequenos, para obter as características térmicas de cilindros concêntricos. Para ε e R_i/R_o fixos, a transferência de calor aumenta com o aumento do ângulo de posição, θ_p , do cilindro interno.

Tsui & Tremblay (1984) estudaram a convecção natural entre cilindros horizontais concêntricos com paredes isotérmicas. O tubo externo foi submetido a uma temperatura T_c e o tubo interno a uma temperatura T_h , sendo $T_h > T_c$. O escoamento foi considerado não permanente, laminar e bidimensional. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo, de acordo com a aproximação de Boussinesq. A diferença de temperatura entre os cilindros foi considerada pequena quando comparada com $1/\beta'$, sendo β' o coeficiente de expansão térmica do fluido. O fluido foi considerado viscoso e incompressível. O aquecimento por atrito foi desprezado. Utilizaram o método de diferenças finitas com malha 16×21 (direção radial $\times$ circunferencial), para a metade da geometria devido à simetria. Foram estudados problemas com razão de raios, $1,2 \leq RR \leq 2,0$, número de Grashof, $7 \times 10^2 \leq Gr \leq 9 \times 10^4$, número de Prandtl, $Pr \approx 0,71$. O passo de tempo foi calculado em cada iteração em função das velocidades e do tamanho da malha. Foram mostradas distribuições de função corrente e de temperatura. Foram calculados número de Nusselt médio (Nu) em função do tempo, de Gr e de RR para os dois cilindros. Determinaram o número de Nusselt médio no regime permanente em função de RR e de Gr . Concluíram que o tempo adimensional máximo de transição do regime transiente para o permanente é menor que 1. Para um dado Gr fixo, se RR passa de 1,2 para 1,5, o número de Nusselt médio aumenta rapidamente. Quando, para Gr fixo, RR aumenta de 1,5 para 2,0, existe um aumento substancial na transferência de calor, porém a taxa de aumento de Nu em função de RR diminui. Do ponto de vista das aplicações de engenharia, não existe vantagem em aumentar RR acima de 2,0 para a convecção natural.

Nieckele & Patankar (1985) estudaram a convecção mista entre tubos horizontais concêntricos. O tubo externo foi considerado isolado enquanto o tubo interno foi submetido a um fluxo de calor axial uniforme com temperatura circunferencial uniforme. O escoamento foi considerado permanente, laminar, bidimensional e desenvolvido. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo, de acordo com a aproximação de Boussinesq. Utilizaram o algoritmo SIMPLER (Patankar, 1980) com malha 29×22 , sendo a malha uniforme na direção circunferencial e mais refinada próximo à parede, na direção radial. Foram estudados problemas com razão de raios, $RR = 1,5; 2; 3$ e 5 , número de Rayleigh, $Ra = 0, 1 \times 10^4, 1 \times 10^5, 1 \times 10^6, 1 \times 10^7$ e número de Prandtl, $Pr = 0,7; 5; 10$ e infinito. Notaram que nas distribuições de função corrente e de temperatura, o escoamento se faz em uma única célula rotativa de cada lado do plano de simetria, para baixos valores de número de Rayleigh. Notaram também que para altos números de Rayleigh este escoamento muda para duas células. Analisaram a variação do perfil de velocidade axial, do produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe), do número de Nusselt médio e do número de Nusselt local com a variação do número de Rayleigh, da razão de raios e do

número de Prandtl. Concluíram que o fluxo secundário gerado pelas forças de empuxo tem efeito significativo na transferência de calor e que, para um dado número de Rayleigh, o efeito do empuxo na transferência de calor é tanto maior quanto maior for o número de Prandtl.

Kaviany (1986) estudou a convecção mista laminar entre tubos horizontais concêntricos. O tubo externo foi isolado enquanto que o tubo interno foi submetido a um fluxo de calor constante. O escoamento foi considerado desenvolvido, permanente, laminar e bidimensional, porém as equações foram resolvidas no regime não permanente. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo, de acordo com a aproximação de Boussinesq. A dissipação viscosa foi desprezada na equação da energia. Utilizaram o método de diferenças finitas com malha 16×61 . Foram estudados problemas com: $RR = 1,25$, número de Rayleigh, $1 \times 10^5 \leq Ra \leq 1 \times 10^8$, o passo de tempo foi calculado em cada iteração em função de vários parâmetros e número de Prandtl, $Pr = 0,7$; 7 e 70. Calcularam a temperatura máxima, a temperatura média na parede do tubo interno, o número de Nusselt médio, a velocidade axial média na seção e as funções corrente máxima e mínima em função de Ra e Pr . Determinaram a distribuição de temperatura superficial no cilindro interno em função de Ra e Pr . Concluíram que enquanto a temperatura média superficial do cilindro interno diminui com o aumento de Ra , a temperatura máxima nesta superfície primeiramente aumenta com Ra e depois diminui. Isto ocorre quando o escoamento muda de uma para duas células. A temperatura média superficial e a temperatura máxima superficial do cilindro interno, diminuem com o aumento de Pr . Os tipos de escoamento, chamados de escoamento de (i) nenhuma célula, (ii) uma células e (iii) duas células, são separados por números de Rayleigh de transição da ordem (para $Pr = 0,7$) de 1×10^4 e 1×10^6 , sendo que o último tipo de escoamento parece se estender até $Ra = 1 \times 10^8$. Estes valores são maiores para valores de Pr maiores.

Ho & Lin (1988) estudaram a convecção natural de água entre cilindros horizontais excêntricos. O cilindro interno foi aquecido com temperatura constante e o externo foi mantido a 0°C . O escoamento foi considerado permanente e bidimensional. Utilizaram o método de diferenças finitas com malhas 45×31 e 45×61 para razão de raios $RR = 2,6$, número de Rayleigh $1 \times 10^3 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$, excentricidade $0 \leq \varepsilon \leq 0,8$, ângulo de posição do cilindro interno $0 \leq \theta_g \leq \pi$ e parâmetro de inversão $0 \leq \theta_m \leq 1$. Analisaram o efeito da inversão da densidade que ocorre a aproximadamente 4°C . Foram mostrados resultados para o número de Nusselt médio, para as linhas de corrente e para as isotermas, em função de Ra , ε e da temperatura do tubo interno. Concluíram que o escoamento e a transferência de calor são fortemente afetados pelo efeito combinado da inversão da densidade da água e a posição do cilindro interno. A transferência de calor mínima é atingida para θ_m entre 0,4 e 0,5, dependendo da posição do cilindro interno.

Ribeiro (1992) estudou a convecção mista entre tubos horizontais concêntricos e excêntricos. Foram analisados dois casos. No primeiro, o tubo externo foi isolado, enquanto que o tubo interno foi mantido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. No segundo, o tubo interno foi isolado e o tubo externo mantido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. O escoamento foi considerado não permanente, laminar, bidimensional e desenvolvido. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo, de acordo com a aproximação de Boussinesq. Utilizaram o método de elementos finitos com o elemento triangular linear, sendo a malha não uniforme. Foram estudados problemas com razão de raios, $RR = 3$ e 5, número de Rayleigh, $0 \leq Ra \leq 3 \times 10^5$, número de Prandtl, $Pr = 0,7$, ângulo de posição do tubo interno, $\alpha = 0^\circ$ e 30° e excentricidade, $E = -0,25$; $-0,50$; 0 ; $0,25$ e $0,50$. Analisaram a variação do produto fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe), do número de Nusselt médio (Nu) e das distribuições de função corrente, de temperatura e de velocidade axial, com a variação do número de Rayleigh, da razão de raios, da excentricidade e do ângulo de inclinação. Concluiu que: o fluxo secundário gerado pelas forças de empuxo tem efeito significativo na transferência de calor; o número de Nusselt médio é maior para tubos concêntricos, exceto para $Ra > 1 \times 10^5$ no caso 1; a relação Nu/Nu_0 , sendo Nu_0 o número de Nusselt médio da convecção forçada, é sempre menor para tubos concêntricos; o produto fRe é sempre maior para tubos concêntricos e o

aumento da relação $fRe/(fRe)_0$, sendo $(fRe)_0$ o produto fator de atrito por Re da convecção forçada, é substancialmente menor que o aumento da relação Nu/Nu_0 . Concluiu também que o número de Nusselt é maior no caso 1 em relação ao caso 2, considerando-se os mesmos parâmetros.

Yang & Farouk (1992) estudaram a convecção mista tridimensional numa cavidade anular horizontal fechada com o cilindro interno aquecido e provido de rotação. As extremidades da cavidade foram isoladas termicamente e o cilindro interno foi submetido a uma temperatura superior à do externo. O escoamento foi considerado não permanente, laminar e tridimensional. Foi admitida a aproximação de Boussinesq. Utilizaram o método de diferenças finitas com malha: $11 \times 24 \times 30$ ($r \times \theta \times z$) para razão de aspecto $1,0 \leq \Gamma \leq 10,0$, razão de raios $\eta = 2,6$, número de Prandtl $Pr = 0,72$, número de Grashof $0 \leq Gr \leq 1,39 \times 10^4$ e número de Reynolds $0 \leq Re \leq 1,3 \times 10^2$. Mostraram linhas de corrente, distribuições de velocidades ao longo do comprimento da cavidade, distribuição de velocidade angular ao longo do plano r - z para vários ângulos θ . Mostram ainda: número de Nusselt (Nu) local em função de θ e z na superfície dos dois cilindros para vários valores de Gr e Γ , número de Nusselt global médio em função de (Gr/Re^2) para 3 valores de Γ , e Nu global médio em função de Γ para dois valores de (Gr/Re^2) . Concluíram que nos casos dominados pela rotação, para $\eta = 2,6$, a transferência de calor global atinge o valor máximo quando a razão de aspecto está entre 3,0 e 4,0. Três pares de células foram observadas na cavidade, para a faixa de Re considerada. Nos casos dominados pelo empuxo, a transferência de calor global aumentou com a razão de aspecto e atinge um valor assintótico (equivalente à solução bidimensional).

Choi & Choi (1994) estudaram a convecção mista não desenvolvida em um tubo horizontal com aquecimento circunferencial não uniforme. O tubo foi submetido a um fluxo de calor uniforme na sua metade inferior e isolamento térmico na metade superior. O escoamento foi considerado permanente, laminar, tridimensional e não desenvolvido. Utilizaram o método de volumes finitos com o algoritmo SIMPLER (Patankar, 1980) modificado e malha $30 \times 30 \times 60$ para número de Prandtl $Pr = 0,7$ e $Pr = 5,0$, número de Grashof $5 \times 10^6 \leq Gr \leq 1 \times 10^7$ e número de Reynolds $Re = 250$. Foram mostrados resultados para a razão entre o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds da convecção mista e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds da convecção forçada ($fRe/(fRe)_0$), para a razão entre o número de Nusselt médio da convecção mista e número de Nusselt médio da convecção forçada (Nu/Nu_0), e para as distribuições de temperatura, de pressão e de velocidade axial, tudo em função de Gr , da posição axial e de Pr . Concluíram que para a faixa de Gr utilizada, o escoamento secundário se desenvolve quase que imediatamente e aumenta consideravelmente a transferência de calor. O movimento do escoamento secundário pode antecipar a reversão do escoamento no lado superior na região não desenvolvida. O escoamento secundário é do tipo duplo vórtice, entretanto, com o aumento do gradiente de temperatura na superfície inferior, um novo par de vórtices pode se desenvolver. O escoamento, na faixa dos parâmetros estudada, se desenvolve para qualquer dos dois tipos de solução. A solução de 4 vórtices ocorre mais frequentemente quando Pr e/ou Gr aumentam.

Shome & Jensen (1995) estudaram a convecção laminar mista de líquidos em dutos circulares horizontais isotérmicos. O tubo foi aquecido com temperatura constante T_w e o fluido na entrada foi considerado com um perfil de velocidade axial w_{in} e com temperatura T_{in} . O escoamento foi considerado permanente, laminar, tridimensional e não desenvolvido. Foram desprezadas a dissipação viscosa a condução axial no fluido e na parede do duto. Foram consideradas a aproximação de Boussinesq e a viscosidade variável. Utilizaram o programa comercial PHOENICS, que é baseado no algoritmo Simplest (Spalding, 1980) de volumes finitos, com malha $60 \times 30 \times 154$ e $60 \times 60 \times 154$ ($r \times \theta \times z$), para número de Prandtl na entrada $2 \leq Pr_{in} \leq 1250$, número de Rayleigh na entrada $1 \times 10^5 \leq Ra_{in} \leq 1 \times 10^8$ e $-30 \text{ K} \leq (T_w - T_{in}) \leq 30 \text{ K}$. Foram mostrados o número de Nusselt médio (Nu) e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe), ambos em função da distância axial para vários valores de Pr_{in} e Ra_{in} e foram apresentadas correlações para Nu e fRe . Concluíram que o efeito do número de Rayleigh da entrada e do perfil de velocidades da entrada no número de Nusselt e em fRe existe somente na região próxima da entrada. As correlações desenvolvidas no trabalho são mais precisas e

têm uma maior faixa de aplicabilidade do que as disponíveis na literatura.

Hsieh & Wen (1996) estudaram a convecção mista, laminar, tridimensional, não desenvolvida, no interior de um tubo horizontal com uma placa interna longitudinal concêntrica. A placa de seção retangular foi isolada, enquanto que o tubo foi mantido com fluxo de calor axial e circunferencial uniforme. O fluido, na entrada, foi considerado com uma velocidade axial uniforme W_m e com uma temperatura uniforme T_{in} . O escoamento foi considerado permanente, laminar, tridimensional e não desenvolvido. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo. A difusão axial (devido aos altos números de Peclet sob estudo, $Pe > 1 \times 10^2$), a dissipação viscosa (para baixas velocidades) e os efeitos de compressibilidade foram desprezados. O fluido foi considerado Newtoniano. Utilizaram o método de diferenças finitas e o algoritmo SIMPLE (Patankar, 1980) com a modificação de que a velocidade, a pressão e a energia devam satisfazer a continuidade global ao longo de cada posição na direção axial. Utilizaram malha 41×21 (direção circunferencial $\times$ radial) e o tamanho Δz da malha na direção axial, variando de 1×10^{-5} à 1×10^{-2} . O super computador CONVEX C3840 foi utilizado nos cálculos. Foram estudados problemas com número de Reynolds, $1 \times 10^2 \leq Re \leq 1 \times 10^3$, número de Grashof, $1 \times 10^3 \leq Gr \leq 1 \times 10^6$, razão de aspecto, $1 \leq AR \leq 8$, razão de raios, $0 \leq R^* \leq 1$ e número de Prandtl, $Pr = 0,7$. Escolheram a malha a ser utilizada, com base no número de Nusselt e no tempo computacional. Mostraram a influência da razão de aspecto nas distribuições de função corrente e temperatura para diversas posições axiais. Analisaram os perfis de velocidade axial para várias posições angulares, várias posições axiais e para duas razões de raios. Calcularam o número de Nusselt médio (Nu) e o produto fator de atrito Reynolds (fRe), em cada seção transversal. Determinaram o comprimento de entrada em função de Gr e Re . Concluíram que a assimetria nos perfis de velocidade axial, aumenta com aumento da razão de raios. A variação do comprimento de entrada com o número de Grashof, se torna menor com o aumento de Gr . Para um dado Gr , o valor do comprimento de entrada aumenta com o aumento de Re . Nu e fRe aumentam e o comprimento de entrada diminui quando R^* aumenta até $R^* \approx 0,5$ e depois fRe e Nu diminuem. Verificaram que o critério convencional para a convecção mista ($0,1 \leq Gr/Re^2 \leq 1,0$) parece não ser válido para escoamentos não desenvolvidos em tubos longitudinais aquecidos, especialmente com placas internas.

Yoo (1996) estudou a existência de duas soluções estáveis para a convecção natural entre tubos horizontais concêntricos. O tubo externo foi submetido a uma temperatura T_o enquanto que o tubo interno foi submetido a uma temperatura T_i , sendo $T_i > T_o$. O escoamento foi considerado não permanente e bidimensional, porém os resultados foram obtidos para o regime permanente. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo, de acordo com a aproximação de Boussinesq. A dissipação viscosa foi desprezada na equação da energia. Utilizou o método de diferenças finitas com malhas: 55×65 para razão de raios $RR > 2$, 35×33 para $RR \approx 1,87$, 21×65 para $RR = 1,5$ e 17×129 para $RR = 1,33$; $1,25$ e $1,2$. Foram estudados problemas com: $1,2 \leq RR \leq 21$, número de Rayleigh, $1 \times 10^3 \leq Ra \leq 2 \times 10^5$, passo de tempo, $1 \times 10^{-5} < \Delta t < 1 \times 10^{-2}$ e número de Prandtl, $Pr = 0,7$. Foram mostrados os número de Nusselt local e médio nos cilindros externo e interno e as distribuições de função corrente e de temperatura. Concluiu que quando Ra , baseado na razão de raios é maior que um valor crítico, surgem dois tipos de escoamento possíveis, um com uma única célula e outro com duas células contra-rotativas, de cada lado do plano de simetria. A distribuição do número de Nusselt local é bem diferente para os dois tipos de escoamento, entretanto, o número de Nusselt médio é pouco afetado pelo tipo de escoamento. Para $1,24 < RR < 1,71$ a dupla solução ocorre quando Ra é maior que $3,8 \times 10^3$. Quando Ra é menor que este valor crítico, somente o escoamento de uma célula é observado. Para $RR = 1,2$ a dupla solução passa a existir quando Ra é maior que $1,9 \times 10^3$. Se o escoamento de uma célula não se transformar em escoamento de duas células quando $Ra = 1,9 \times 10^3$, ele pode persistir até $Ra = 3 \times 10^3$ quando ele se transforma num escoamento multicelular e se mantém estável até $Ra \approx 1 \times 10^4$. O escoamento de duas células se mantém, mesmo na faixa de Ra em que o escoamento multicelular é observado.

Hung et al. (1997) estudaram a convecção forçada no interior de um tubo horizontal com uma placa interna longitudinal excêntrica. A placa de seção retangular foi mantida isolada, enquanto que o tubo foi submetido a um fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. O escoamento foi considerado permanente, laminar, bidimensional e desenvolvido. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura. Utilizaram o método de volumes finitos. Analisaram os efeitos da excentricidade e da posição angular da placa na queda de pressão, na temperatura, na taxa de transferência de calor e no número de Nusselt local. Concluíram que quanto maior a excentricidade, menor é a queda de pressão e menor é a transferência de calor, e que a melhor posição para a placa é o centro do tubo.

Yoo (1998a) estudou a convecção natural entre tubos horizontais concêntricos para pequena razão de raios e com número de Prandtl menor ou igual a 0,3. O tubo externo foi submetido a uma temperatura T_o e o tubo interno a uma temperatura T_i , sendo $T_i > T_o$. O escoamento foi considerado não permanente e bidimensional. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo, de acordo com a aproximação de Boussinesq. A dissipação viscosa foi desprezada na equação da energia. Utilizaram o método de diferenças finitas com malha 15×257 ou 25×129 (direção radial $\times$ circunferencial). Foram estudados problemas com razão de raios, $RR = 1,167$, número de Grashof, $Gr \leq 5 \times 10^4$, passo de tempo, $1 \times 10^{-5} \leq \Delta t \leq 1 \times 10^{-3}$ e número de Prandtl, $0,001 \leq Pr \leq 0,3$. Concluiu que: para $Pr \leq 0,2$, a instabilidade hidrodinâmica induz escoamentos estáveis ou oscilatórios consistindo de múltiplas células rotativas; para $Pr = 0,3$, a instabilidade térmica cria uma célula contra-rotativa na parte superior do espaço anular formado pelos dois tubos; para um fluido de $Pr \approx 0$, múltiplas células são distribuídas uniformemente nas porções superior e inferior do espaço anular e o aumento de Pr faz com que as células se desloquem para cima. As células se deslocam para baixo com o passar do tempo e a velocidade deste deslocamento aumenta com o aumento de Pr . Para $Pr = 0,3$, o número de células contra-rotativas no topo do espaço anular, aumenta com o aumento de Gr .

Yoo (1998b) estudou a convecção mista entre tubos horizontais concêntricos, sendo o cilindro externo frio e dotado de rotação. O tubo externo foi dotado de uma baixa velocidade de rotação no sentido anti-horário e submetido a uma temperatura T_o enquanto que o tubo interno foi mantido fixo e submetido a uma temperatura T_i , sendo $T_i > T_o$. O escoamento foi considerado não permanente, laminar e bidimensional. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo, de acordo com a aproximação de Boussinesq. A dissipação viscosa foi desprezada na equação da energia. Utilizaram o método de diferenças finitas com malha 65×64 , 45×64 ou 65×32 (direção radial $\times$ circunferencial). Foram estudados problemas com razão de raios, $1,4 \leq RR \leq 5$, número de Rayleigh, $Ra \leq 5 \times 10^4$, número de Reynolds baseado na velocidade angular do cilindro externo, $Re \leq 1,5 \times 10^3$, passo de tempo, $1 \times 10^{-5} \leq \Delta t \leq 5 \times 10^{-3}$ e número de Prandtl, $Pr = 0,7$. Classificou o escoamento em três tipos de acordo com o número de células rotativas: escoamento de duas, uma e nenhuma célula. Concluiu que o número de Reynolds de transição entre o escoamento de duas e uma célula, para baixos números de Rayleigh, não é significativamente afetado pela razão de raios. A circulação líquida de fluido na direção da rotação do cilindro, diminui com o aumento de Ra . A transferência de calor total diminui rapidamente quando Reynolds se aproxima do Reynolds de transição do escoamento de duas células para uma célula.

1.2.2 – Escoamento em Dutos Verticais

Lawrence & Chato (1966) estudaram os efeitos da transferência de calor no desenvolvimento do escoamento laminar em tubos verticais. O tubo foi mantido com fluxo de calor constante ou temperatura constante na parede. O escoamento foi considerado pró-empuxo ou contra-empuxo, desenvolvido, permanente e bidimensional. Foi admitida a variação não linear da densidade nos termos de empuxo e da viscosidade. O calor específico a pressão constante e a condutividade foram considerados constantes. A dissipação viscosa e os gradientes de pressão radiais foram desprezados.

Utilizaram o método de diferenças finitas e processos experimentais para a razão do número de Gr pelo número de Reynolds, $54,3 \leq Gr/Re \leq 331$, número de Prandtl, $Pr = 5,18$ e para $208 \leq Re \leq 616$. Concluíram que para aquecimento uniforme com um fluido real num tubo vertical, os perfis de velocidade e temperatura nunca se tornam completamente desenvolvidos. Para a obtenção de boas correlações, ambas a densidade e a viscosidade, devem ser consideradas como funções não lineares da temperatura.

Iqbal et al. (1970) estudaram o efeito do empuxo na convecção forçada em dutos poligonais regulares verticais. O duto foi considerado com fluxo de calor axial e periférico uniforme na parede (Caso 1) ou fluxo de calor axial uniforme com temperatura periférica uniforme na parede (Caso 2). Foi considerado que o fluido pode conter fontes de calor uniformes. O escoamento foi considerado permanente, laminar e desenvolvido. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo na equação da quantidade de movimento. Utilizaram o método de pontos combinados em termos de uma série contendo funções de Bessel para dutos com 3 a 16 faces e para número de Rayleigh $1 \leq Ra \leq 1 \times 10^4$. Obtiveram o número de Nusselt (Nu) em função de Ra, do número de pontos utilizados na parede e do número de faces do polígono. Mostraram também o perfil de temperatura na parede (caso de fluxo periférico uniforme) em função de Ra e do número de faces. Concluíram que os valores de Nu do Caso 1 são maiores que os valores do Caso 2. Estas diferenças no número de Nusselt diminuem com o aumento do número de faces. Nos dois casos, Nu é menos sensível ao número de faces para valores altos de Ra. Quando o parâmetro de empuxo é alto e o número de faces não é grande, o caso 2 resulta em valores do parâmetro de queda de pressão mais altos do que o caso 1.

Ofi & Hetherington (1977) aplicaram o método de elementos finitos na transferência de calor por convecção natural em um canal vertical aberto. O canal foi aquecido com temperatura uniforme e com o mesmo valor para as duas paredes. O escoamento foi considerado permanente. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo. A dissipação viscosa e a velocidade transversal foram desprezadas. Utilizaram o método de elementos finitos com 200 elementos quadrilaterais lineares para número de Rayleigh, $0,1 \leq Ra \leq 1 \times 10^7$, número de Grashof $0,1 \leq Gr \leq 1 \times 10^7$ e número de Prandtl, $Pr = 0,7$. Obtiveram os perfis de temperatura e de velocidade vertical em função de Ra para várias posições na direção vertical, obtêm o número de Nusselt Nu em função de Ra e o número de Reynolds (Re) em função de Gr. Concluíram que existem substanciais diferenças entre as soluções para canais largos e para uma única parede. Os valores dos parâmetros de transferência de calor e de escoamento de fluido, para o canal largo, são maiores em 1,4 e 3,65 vezes, respectivamente.

El-Shaarawi & Sarhan (1980) estudaram a convecção mista no escoamento não desenvolvido entre tubos verticais concêntricos. O tubo interno foi aquecido com temperatura constante e o externo foi mantido adiabático, ou o tubo interno foi mantido adiabático e o externo aquecido com temperatura constante. O escoamento foi considerado permanente, não desenvolvido, laminar e axissimétrico. O fluido pôde escoar no sentido pró-empuxo ou contra-empuxo. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura exceto a densidade nos termos de empuxo. O fluido foi considerado newtoniano e sem geração interna de calor. Foram admitidas as simplificações de camada limite. Foram desprezadas a dissipação viscosa, o trabalho de compressão e a condução axial de calor. Utilizaram o método de diferenças finitas. Estudaram problemas para a razão do número de Grashof pelo número de Reynolds $-7 \times 10^2 \leq Gr/Re \leq 1,5 \times 10^3$, razão de raios $0,5 \leq N \leq 0,9$ e número de Prandtl $Pr = 0,7$. Obtiveram perfis de velocidade axial para diversas posições na direção axial em função de Gr/Re. Determinaram a velocidade axial em função da distância axial para $Gr/Re = 0$, $N = 0,8$ para várias posições na direção radial. Calcularam o comprimento de entrada em função de N e de Gr/Re. Mostraram o efeito de Gr/Re na queda de pressão. Calcularam o número de Nusselt local e a temperatura média em função da distância axial para vários valores de Gr/Re. Concluíram que no escoamento pró-empuxo o fluido acelera próximo à parede aquecida e desacelera próximo à parede isolada. O perfil de velocidade axial não desenvolvida desvia cada vez mais do perfil

isotérmico até uma seção transversal de distorção máxima onde $\partial U/\partial R$ se torna mínimo. Aumentando-se mais a distância axial, o perfil de velocidade axial se recupera e se aproxima do perfil isotérmico desenvolvido, quando a temperatura do fluido se aproxima da temperatura da parede isotérmica. Por outro lado, quando o escoamento é contra-empuxo, as forças de empuxo tendem a retardar o fluido próximo à parede aquecida e a acelerá-lo próximo à parede adiabática. Neste caso, a distorção máxima do perfil de velocidade ocorre quando $\partial U/\partial R$, próximo à parede aquecida, atinge um mínimo. A distância para a qual $\partial U/\partial R$ tende a um mínimo, diminui com o aumento do valor absoluto de Gr/Re , diminui, para um valor fixo de Gr/Re , com o aumento de N e tem um valor menor para a condição de cilindro interno adiabático e externo isotérmico do que para a condição inversa.

Guo & Zhang (1992) estudaram a convecção mista em uma cavidade cilíndrica, vertical fechada e rotativa. A convecção se deve à força centrífuga, à força gravitacional e a ambas. A parede do cilindro foi isolada e as extremidades submetidas a uma diferença de temperatura. O escoamento foi considerado permanente, laminar e bidimensional. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de forças de campo (forças centrífugas, de Coriolis e gravitacionais). Utilizaram o método de diferenças finitas com malha: 50×50 ($r \times z$) para razão de aspecto $L/R = 1$, número de Grashof, $0 \leq Gr \leq 4,86 \times 10^5$, número de Reynolds $0 \leq Re \leq 6 \times 10^3$ e $(T_h - T_c) = -35$ e 35 . Mostraram linhas de corrente, isotermas e condutividade equivalente média devido às forças centrífugas, às forças de empuxo e a ambas. Concluíram que ocorre escoamento secundário axissimétrico, sob gravidade nula, se uma diferença de temperatura (não importa se negativa ou positiva) for imposta entre as extremidades. O escoamento deste tipo pode aumentar a transferência de calor. Com o aumento de Re , a condutividade equivalente média aumenta e o centro da célula de circulação se move em direção à parede do cilindro, o que faz a condutividade equivalente local próxima à parede do cilindro, ser muito maior que na região central. A condutividade equivalente média, na convecção mista, inicialmente aumenta com o aumento de Re , devido à variação do padrão de escoamento, depois diminui devido à rápida queda na taxa de circulação do escoamento, o que implica na supressão da convecção natural pelos efeitos rotacionais. O parâmetro $Gr/(36 Re^{1,255})$ é sugerido para medir a importância relativa das forças de empuxo e inerciais na condutividade equivalente média da convecção mista. Para valores $Gr/(36 Re^{1,255}) \leq 1$ a convecção natural pode ser ignorada e para $Gr/(36 Re^{1,255}) = 3$ a condutividade equivalente média da convecção mista atinge seu máximo.

Joye & Wojnovich (1996) estudaram experimentalmente a convecção mista em um tubo vertical. O tubo foi aquecido com temperatura constante na parede. O fluido pôde escoar no sentido do empuxo ou contra ele. O escoamento foi considerado permanente e desenvolvido. Foram estudados problemas para número de Reynolds, $1 \times 10^3 \leq Re \leq 3 \times 10^4$, número de Grashof, $2,8 \times 10^6 \leq Gr \leq 6 \times 10^7$ e número de Prandtl, $Pr \approx 2,8$. Mostraram resultados do número de Nusselt em função de Re e Gr para escoamentos nos sentidos pró-empuxo e contra-empuxo. Concluíram que a convecção mista em tubos verticais mostra significativa melhoria na transferência de calor, não importando o sentido do escoamento. Esta melhoria geralmente é maior para escoamentos no sentido contra-empuxo. Três regiões caracterizam a transferência de calor na convecção mista vertical com condição de temperatura constante na parede. Uma região de escoamento turbulento, para Reynolds acima de aproximadamente 1×10^4 , mostra resultados independentes da condição de temperatura constante ou fluxo de calor constante na parede, sentido do escoamento ou se o fluido está sendo aquecido ou resfriado. A convecção mista nesta região não é importante por causa da turbulência, que domina a transferência de calor. Para Reynolds inferior a aproximadamente 4×10^3 , ocorre uma região onde o escoamento é lento o suficiente para a temperatura de saída do fluido se aproximar da temperatura da parede. Para $4 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^4$, a região de convecção mista existe, pois aos mecanismos de convecção natural e forçada tem a mesma ordem de magnitude e interação. A transferência de calor em escoamentos pró-empuxo é significativamente diferente da transferência de calor em escoamentos contra-empuxo, na região de convecção mista, por isso, costumam ser estudados separadamente.

Joye (1996) estudou experimentalmente a convecção mista em um tubo vertical. O tubo foi

aquecido com temperatura constante na parede. O fluido pôde escoar no sentido do empuxo ou contra ele. O escoamento foi considerado permanente e desenvolvido. Foram estudados problemas para número de Reynolds, $7 \times 10^2 \leq Re \leq 2,5 \times 10^4$, número de Grashof, $1,0 \times 10^7 \leq Gr \leq 1,0 \times 10^8$ e número de Prandtl, $3 \leq Pr \leq 9$ (varia como consequência do escoamento de 3, para baixo Re, até 9, para alto Re). Mostrou resultados do número de Nusselt em função de Re e Gr para escoamentos nos sentidos pró-empuxo e contra-empuxo. A diferença deste trabalho com o trabalho de Joye & Wojnovich (1996) são as faixas de valores de Re, Gr e Pr que são um pouco diferentes, mas as conclusões são as mesmas.

1.2.3 – Escoamento em Dutos Inclinação

Iqbal & Stachiewicz (1966) estudaram a influência da orientação do tubo na convecção mista laminar. O tubo foi mantido inclinado, com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circumferencial uniforme na parede e gradiente constante de pressão. O escoamento foi considerado permanente, laminar, desenvolvido, tridimensional e no sentido pró-empuxo. As propriedades do fluido foram consideradas constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo. A dissipação viscosa foi desprezada na equação da energia. Utilizaram o método de perturbação em termos de séries de potência do número de Rayleigh de ordem 2, para número de Prandtl $Pr = 5$ e $Pr = 0,75$, ângulo de inclinação $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ e produto do número de Rayleigh pelo número de Reynolds $1 \times 10^2 \leq RaRe \leq 3 \times 10^3$. Obtiveram resultados para o número de Nusselt (Nu) em função de α , Ra, RaRe e Pr. Mostraram resultados para os perfis de temperatura e velocidade axial em função de Ra, Re, Pr e α . Concluíram que o Pr tem forte influência na distorção dos perfis de temperatura e de velocidade axial. O aumento da inclinação reduz a distorção nestes perfis até se tornarem simétricos em relação ao eixo axial. Para baixos número de Prandtl, a transferência de calor é afetada apenas levemente por RaRe, mas para altos valores de Pr esta dependência é significativa, para pequenas inclinações. A influência de ambos, Pr e RaRe, diminui com o aumento da inclinação até desaparecer completamente para $\alpha = 90^\circ$ (tubo vertical). Para qualquer combinação de RaRe e Pr, existe um valor ótimo para a inclinação do tubo que dá um valor máximo de Nu. Este máximo parece ocorrer entre 20° e 60° de inclinação.

Choudhury & Patankar (1988) estudaram a convecção mista laminar na região de entrada de um tubo isotérmico inclinado. O tubo foi submetido a uma temperatura constante T_w e o fluido foi considerado com velocidade uniforme, W_{in} , e com temperatura uniforme T_{in} na entrada. O escoamento foi considerado permanente, laminar, tridimensional e não desenvolvido. Foi admitida a aproximação de Boussinesq. Utilizaram o método de diferenças finitas com malha: 22×32 nas direções θ e r , respectivamente, e $1 \times 10^{-6} \leq \Delta z \leq 1 \times 10^{-2}$ na direção axial, $Pr = 0,7, 5$ e 10 , número de Rayleigh modificado $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$ e parâmetro de convecção mista $0 \leq \Omega \leq 500$. Mostraram linhas de corrente e isotermas para algumas posições axiais, perfis de velocidade axial para algumas posições axiais em função de Ra^* e Ω . Mostraram ainda: a razão entre o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds da convecção mista (fRe) e o mesmo produto da convecção forçada ($(fRe)_o$), o número de Nusselt e a temperatura média em função de posições axiais para alguns valores de Ra^* , Ω e Pr. Concluíram que os efeitos de empuxo têm considerável influência no escoamento principal e nas características de transferência de calor do escoamento não desenvolvido. Os efeitos de empuxo aumentam com a direção axial até atingirem um máximo e então decrescem com a situação de escoamento desenvolvido. O escoamento secundário distorce as distribuições de velocidade axial e de temperatura e esta distorção depende da magnitude relativa de Ra^* e Ω . Aumentos em Nu e fRe podem ser tão altos quanto 200% e 225%, respectivamente.

1.2.4 – Escoamento sobre Tubos e Banco de Tubos

Gowda et al. (1997) estudaram a convecção mista no interior de um duto vertical com uma série de cilindros horizontais internos. O duto foi mantido termicamente isolado e os cilindros foram

aquecidos com temperatura constante. O fluido entra com temperatura inferior à dos cilindros. O escoamento foi considerado não permanente, laminar e bidimensional. O fluido foi considerado incompressível com dissipação viscosa desprezível. Utilizaram o método de elementos finitos com o elemento triangular linear e a técnica de resíduos ponderados de Galerkin. Três tipos de malha, 1727×3072 , 2539×4608 e 2945×5376 (nós $\times$ elementos), foram testados, mas foi utilizada a malha 2539×4608 . Foram estudados problemas para espaçamento de paredes do duto : $1,5 \leq S/D \leq 2,5$, número de Reynolds, $Re = 50$ e 100 , número de Richardson $-5,0 \leq Ri \leq 5,0$ e número de Prandtl, $Pr = 0,7$. Obtiveram resultados para as distribuições de função corrente, para as isotermas, para os coeficientes de atrito locais e para os números de Nusselt locais em função de Ri . Mostraram também o número de Nusselt médio, o coeficiente de atrito médio e o coeficiente de pressão em função de Ri e S/D . Concluíram que a máxima melhoria no número de Nusselt médio é de 40% no escoamento pró-empuxo (com $S/D = 2,5$, $Ri = 5$ e $Re = 100$). Porém este valor é de apenas 3% para $S/D = 1,5$. A recuperação da pressão aumenta com o aumento de Ri e a queda de pressão aumenta com o decréscimo de Ri . Para $S/D = 2,5$ e $Ri = -5$, uma quebra na estrutura do escoamento é observada. Um escoamento reverso, próximo à parede, após o 5º cilindro é observado.

Karabulut & Ataer (1998) utilizaram o método de diferenças finitas em coordenadas cilíndricas para a solução das equações de camada limite em um escoamento sobre um cilindro horizontal. As condições de contorno consideradas foram as de temperatura constante na parede do cilindro e diferentes valores de velocidade na entrada. Foi considerada apenas a convecção forçada e os efeitos de radiação foram desprezados. Foram estudados os escoamentos compressível e incompressível. Analisaram os perfis de velocidade e temperatura para diferentes posições angulares. Calcularam o número de Nusselt local em função de vários valores de velocidade de entrada, considerando o cilindro quente ou frio e o escoamento compressível ou incompressível. Verificaram que para altas diferenças de temperatura entre o escoamento e o cilindro se torna necessário considerar o escoamento como compressível.

Matos et al. (2001) utilizaram o método de elementos finitos para estudar a transferência de calor por convecção forçada em um banco de tubos alternados cilíndricos ou elípticos. Analisaram a transferência de calor para o número de Reynolds situado entre 300 e 800. Fizeram um estudo de otimização da geometria com a finalidade de maximizar a transferência de calor tanto para tubos cilíndricos como para tubos elípticos. Observaram, para os tubos elípticos, um ganho de até 13% na transferência da calor em relação aos tubos cilíndricos.

1.3 – Objetivos do Presente Trabalho

Desenvolver o estudo numérico da convecção mista, laminar, bidimensional, em regime não permanente, em geometrias horizontais e verticais de seção transversal arbitrária, com o objetivo de estabelecer relações entre os coeficientes de transferência de calor médio e local em função de parâmetros térmicos e geométricos, possibilitando assim calcular a transferência de calor por convecção mista no duto.

1.4 – Problemas a Serem Estudados

Tubos horizontais concêntricos, sendo o tubo interno aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme e o tubo externo mantido termicamente isolado (Figura 1.1). Este caso será utilizado apenas para a validação do programa computacional apresentada no Capítulo 4.

Duto horizontal de seção transversal retangular inclinada com um cilindro interno concêntrico e aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. O duto de seção retangular é mantido termicamente isolado (Figura 1.2). Os resultados são mostrados no Capítulo 5.

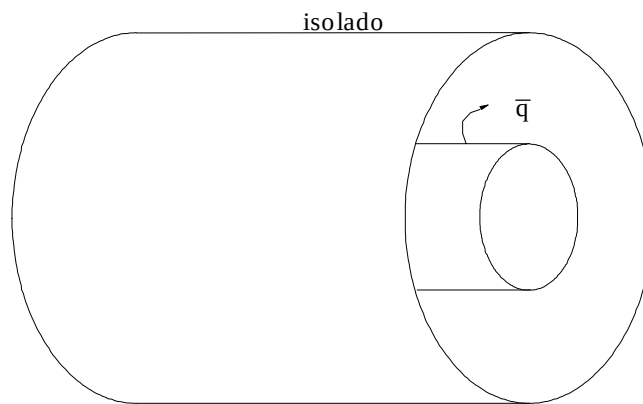


Figura 1.1 – Tubos Horizontais Concêntricos.

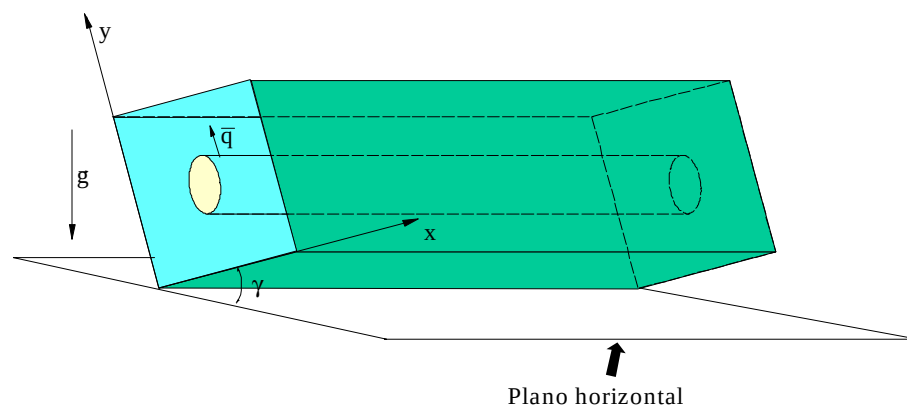


Figura 1.2 – Duto Horizontal Retangular com um Cilindro Interno Aquecido.

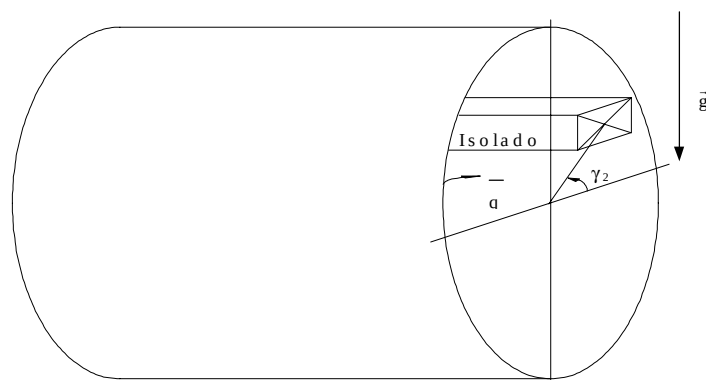


Figura 1.3 – Tubo Horizontal Aquecido com Placa Excêntrica Isolada.

Tubo horizontal aquecido com uma placa interna excêntrica e termicamente isolada. A placa de seção transversal retangular é colocada longitudinalmente no tubo (Figura 1.3). O tubo é aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. Este caso será utilizado para a validação do programa computacional, apresentada no Capítulo 4 e para aplicações novas mostradas no Capítulo 5.

Duto vertical, de seção transversal elíptica, aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura periférica uniforme (Figura 1.4). Este caso será utilizado para a validação do programa computacional apresentada no Capítulo 4 e para aplicações novas mostradas no Capítulo 5,

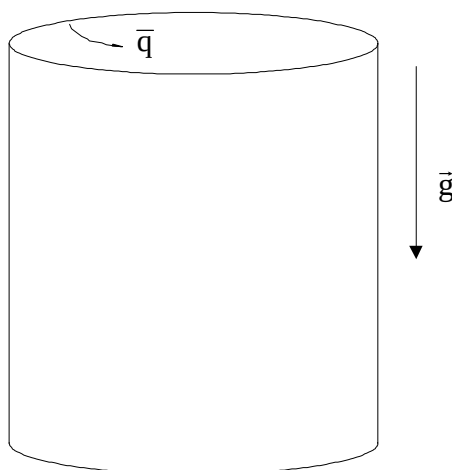


Figura 1.4 – Duto Vertical Elíptico.

Convecção mista sobre um banco de tubos horizontais em um escoamento vertical. A condição de contorno é de velocidade e temperatura uniformes na entrada do escoamento vertical e temperatura uniforme nas paredes dos tubos horizontais. Os casos que se pretende analisar são:

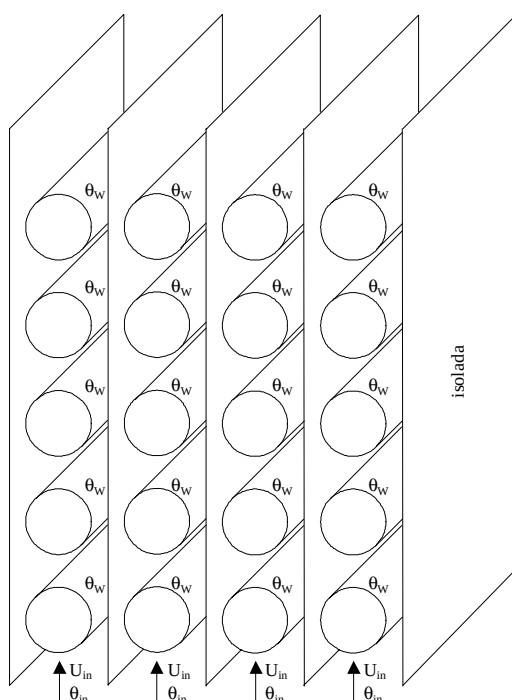


Figura 1.5 – Banco de tubos alinhados entre placas verticais.

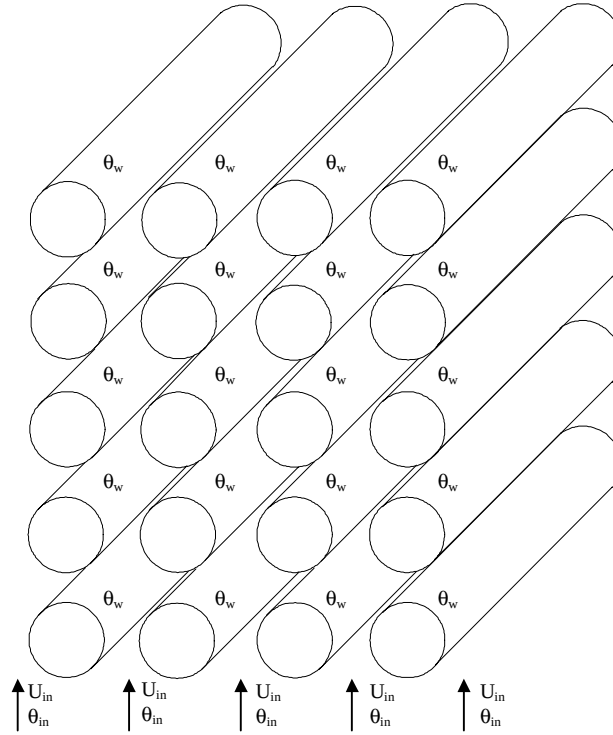


Figura 1.6 – Banco de tubos alinhados em um escoamento vertical.

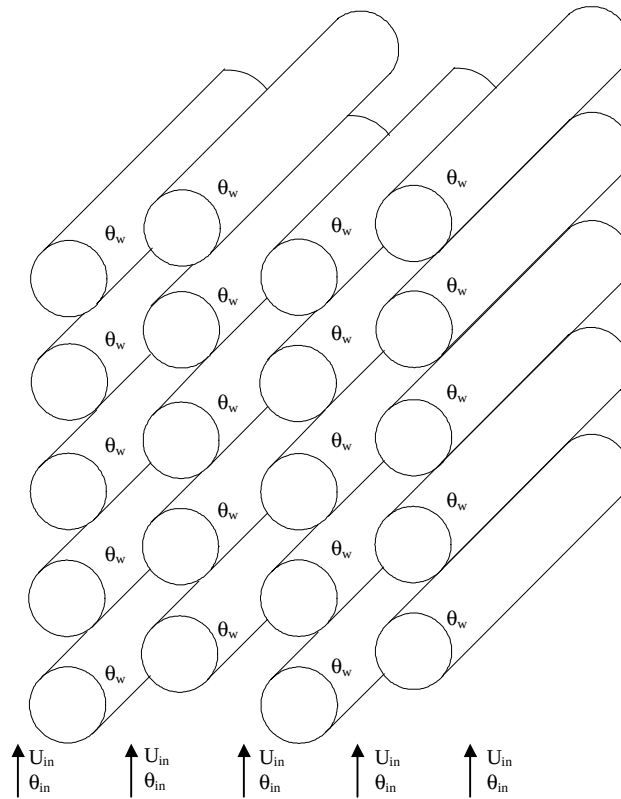


Figura 1.7 – Banco de tubos alternados em um escoamento vertical.

Banco de tubos horizontais alinhados entre placas verticais (Figura 1.5). Os tubos são alinhados e aquecidos com temperatura uniforme e as placas são termicamente isoladas;

Banco de tubos horizontais alinhados em um escoamento vertical (Figura 1.6). Os tubos são alinhados e aquecidos com temperatura uniforme. Não existem placas verticais;

Banco de tubos horizontais alternados em um escoamento vertical (Figura 1.7). Os tubos são alternados e aquecidos com temperatura uniforme. Não existem placas verticais.

1.5 – Delineamento deste Trabalho

A apresentação do presente trabalho é dividida em capítulos e apêndices da seguinte forma:

Capítulo 2 – Formulação do Problema

Neste capítulo são apresentadas as equações de conservação com as condições de contorno na forma dimensional para os problemas em estudo. São feitas as adimensionalizações e apresentadas as equações na forma adimensional. É apresentado um equacionamento geral para dutos horizontais e verticais e um outro equacionamento para bancos de tubos.

Capítulo 3 – Método de Solução

As equações para o método de elementos finitos com formulação de Galerkin são apresentadas de uma forma geral aplicável a todos os casos estudados. É apresentado ainda neste capítulo um algoritmo dos códigos computacionais desenvolvidos no presente trabalho.

Capítulo 4 – Validação dos Códigos Computacionais

Os códigos computacionais desenvolvidos neste trabalho são aplicados para os casos de referência e os resultados são comparados com os de outros autores para que possam ser aplicados para os problemas propostos.

Capítulo 5 – Resultados

Os códigos computacionais, já validados, são utilizados para resolver os problemas propostos e os resultados são apresentados neste capítulo.

Capítulo 6 – Conclusões

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões do trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Apêndice 1 – Determinação das Funções de Forma e Cálculo de Gradientes

As funções de forma para o elemento triangular linear e o cálculo dos gradientes destas funções de forma são apresentados neste apêndice.

Apêndice 2 – Números Adimensionais

Neste apêndice é mostrado o cálculo do número de Nusselt médio (Nu) e do produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) para os casos de dutos horizontais e verticais e os cálculos dos números de Nusselt local e médio para os bancos de tubos.

Apêndice 3 – Método de Galerkin para a Equação Diferencial Bidimensional em Regime Não Permanente

A equação matricial de elementos finitos em regime não permanente é obtida pela aplicação do método de Galerkin para a equação diferencial bidimensional em regime não permanente.

Apêndice 4 – Método Matricial para o Cálculo da Vorticidade no Contorno

Um método matricial, para o cálculo da vorticidade no contorno, é apresentado neste apêndice.

Apêndice 5 – Tabelas de Resultados

Os resultados do Capítulo 5 são apresentados em forma de tabelas neste apêndice.

Referências Bibliográficas

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo são desenvolvidas as equações dimensionais e adimensionais relacionadas à transferência de calor por convecção mista em dutos horizontais ou verticais. No item 2.2 é estudada a convecção mista em dutos horizontais ou verticais com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. No item 2.3 é analisada a convecção mista sobre um banco de tubos horizontais isotérmicos em um escoamento vertical.

2.2 – DUTOS HORIZONTAIS E VERTICAIS

Neste item são estudados dutos horizontais ou verticais com fluxo de calor axial uniforme. As paredes dos dutos tem uma alta condutividade térmica de tal forma que a temperatura circunferencial permanece uniforme. Deve-se notar que a condição térmica adotada no problema é diferente da condição de fluxo de calor uniforme, que admite variações circunferenciais de temperatura. Sempre que o cilindro for de metal, será difícil manter a condição de fluxo de calor local uniforme, por isso a condição de temperatura circunferencial uniforme é mais encontrada em situações práticas. Os casos que se pretende analisar com o equacionamento deste item são:

a) Dutos Horizontais

- Tubos horizontais concêntricos, sendo o tubo interno aquecido e o tubo externo mantido termicamente isolado (Figura 2.1). Este caso será utilizado apenas para a validação do programa computacional apresentada no Capítulo 4;

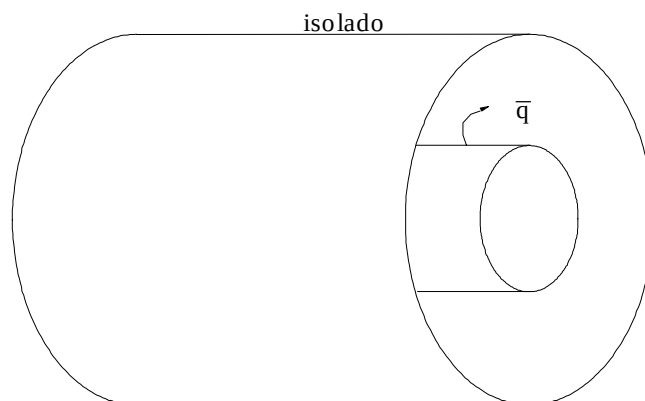


Figura 2.1 – Tubos Horizontais Concêntricos.

- Duto horizontal de seção transversal retangular inclinada com um cilindro interno concêntrico e aquecido. O duto de seção retangular é mantido termicamente isolado (Figura 2.2). Este caso será utilizado para resultados novos mostrados no Capítulo 5;
- Tubo horizontal aquecido com uma placa interna excêntrica e termicamente isolada. A placa de seção transversal retangular é colocada longitudinalmente no tubo (Figura 2.3). Este caso será utilizado para a validação do programa computacional apresentada no capítulo 4 e para aplicações novas mostradas no Capítulo 5;

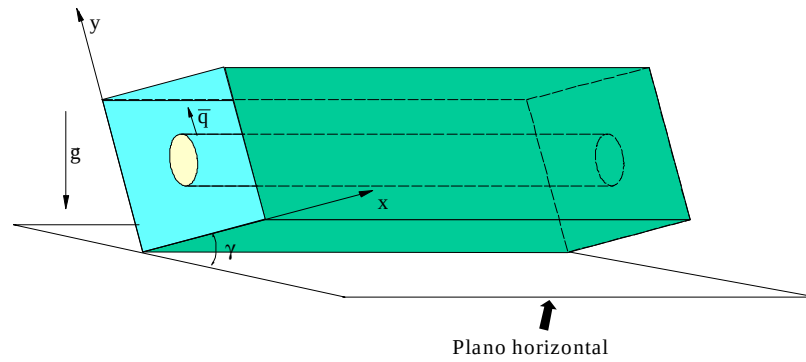


Figura 2.2 – Duto Horizontal Retangular com um Cilindro Interno Aquecido.

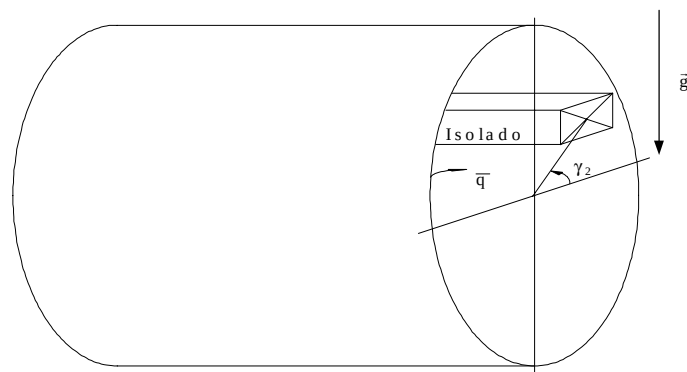


Figura 2.3 – Tubo Horizontal Aquecido com Placa Excêntrica Isolada.

b) Dutos Verticais

- Duto vertical, de seção transversal elíptica, aquecido (Figura 2.4);

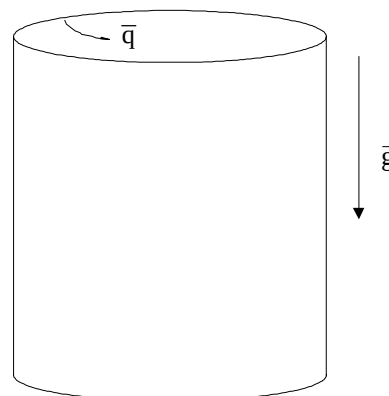


Figura 2.4 – Duto Vertical Elíptico.

2.2.1 – Análise Teórica

Na região completamente desenvolvida do escoamento, as componentes de velocidade u , v e w nas direções x , y e z se tornam independentes da distância axial z . Por isso, pode-se considerar o

escoamento como bidimensional. Considera-se que o material que forma a parede aquecida tem condutividade térmica suficientemente alta, de tal forma que em qualquer seção transversal existe uma temperatura uniforme, T_w , na superfície.

As equações de conservação para o estudo da convecção mista do problema têm as seguintes considerações:

- a) regime não permanente;
- b) escoamento bidimensional e laminar;
- c) escoamento incompressível;
- d) função dissipação viscosa desprezada;
- e) as propriedades do fluido são constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo;
- f) desacoplamento da pressão na direção axial.

As equações de conservação para dutos horizontais e verticais, levando em conta as considerações acima, são:

i. Continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 . \quad (2.1)$$

ii. Quantidade de Movimento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_1 g \beta (T - T_w) \sin \gamma + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \lambda_1 g \beta (T - T_w) \cos \gamma + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \beta (T - T_w) \sin \gamma_1 + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.4)$$

iii. Energia

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (2.5)$$

sendo: x e y as coordenada na seção transversal do duto; z a coordenada na direção axial; u , v e w as velocidades nas direções x , y e z ; t o tempo; ρ a massa específica; p a pressão; $\bar{p}$ a pressão média na seção transversal; g a aceleração da gravidade; β o coeficiente de expansão térmica; T a temperatura; T_w a temperatura na parede; γ o ângulo de inclinação da seção; ν a viscosidade cinemática; α a difusividade térmica do fluido; γ_1 um ângulo que assume o valor 0° para duto horizontal e 90° para o duto vertical e λ_1 um parâmetro que assume o valor 1 (um) para o duto horizontal e zero para o duto vertical. Os ângulos γ e γ_1 podem ser vistos na Figura 2.5.

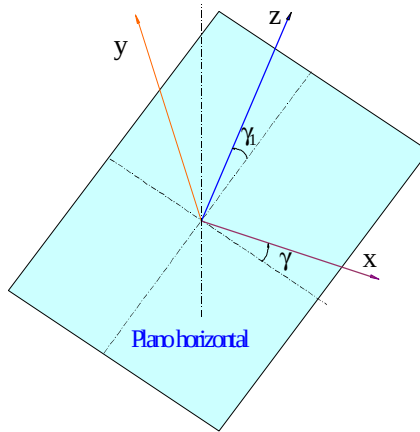


Figura 2.5 – Ângulos de inclinação dos eixos coordenados.

Na região termicamente desenvolvida (veja Figura 2.6), a temperatura local T do fluido varia linearmente com a distância z a uma taxa constante. Esta taxa constante é relacionada com a taxa média de transferência de calor, por meio de um balanço de calor total, na seguinte forma:

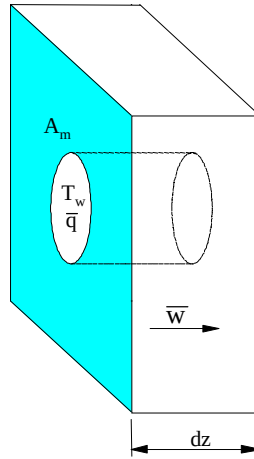


Figura 2.6 – Segmento de duto horizontal.

A taxa de transferência de calor fornecida ao fluido pelo tubo aquecido é dado por:

$$Q_T = \bar{q} P_q dz, \quad (2.6)$$

sendo $\bar{q}$ o fluxo de calor através da parede aquecida, P_q o perímetro aquecido e dz um comprimento infinitesimal do duto.

A taxa de transferência de calor recebida pelo fluido é dado por:

$$Q_f = \rho c_p \bar{w} A_m dT_b, \quad (2.7)$$

sendo c_p o calor específico a pressão constante, $\bar{w}$ a velocidade média na seção, A_m a área molhada ou área livre da seção e dT_b a variação da temperatura média do fluido.

Fazendo um balanço de calor total, a taxa de calor fornecida pelo duto deve ser igual à taxa de calor recebida pelo fluido, o que resulta em:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_w}{dz} = \frac{dT_b}{dz} = \frac{\bar{q} P_q}{\rho c_p \bar{w} A_m}, \quad (2.8)$$

sendo T_b a temperatura média do fluido.

2.2.2 – Adimensionalização das Equações

Com o objetivo de generalizar a análise teórica, são introduzidos os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\alpha t}{d^2}, \quad X = \frac{x}{d}, \quad Y = \frac{y}{d}, \quad U = \frac{u d}{\alpha}, \quad V = \frac{v d}{\alpha}, \\ W &= \frac{w}{-\frac{d \bar{p}}{dz} \frac{d^2}{\rho v}}, \quad P = \frac{p d^2}{\rho v \alpha}, \quad \theta = \frac{T - T_w}{\frac{\bar{q} d}{k}}, \quad d = 4 \frac{A_m}{P_m}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

sendo: τ o tempo adimensional; X e Y as coordenadas adimensionais; d o diâmetro hidráulico; U , V e W as velocidades adimensionais nas direções x , y e z ; P a pressão adimensional; θ a temperatura adimensional; k a condutividade térmica do fluido e P_m o perímetro molhado (perímetro em contato com o fluido no plano xy).

Substituindo (2.9) em (2.1), vem:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (2.10)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais da Equação (2.9) em cada termo da equação da quantidade de movimento (2.2), vem:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{d^3} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\alpha^2}{d^3} U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\alpha^2}{d^3} V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -\frac{v \alpha}{d^3} \frac{\partial P}{\partial X} + \\ \lambda_1 g \beta \frac{\bar{q} d}{k} \theta \sin \gamma + v \frac{\alpha}{d^3} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right). \end{aligned} \quad (2.11a)$$

Multiplicando a equação acima por $[d^3 / (\alpha v)]$, vem:

$$\frac{\alpha}{v} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial X} + \lambda_1 \frac{g \beta \bar{q} d^4}{\alpha v k} \theta \sin \gamma + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right). \quad (2.11b)$$

Mas,

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}, \quad (2.12)$$

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\rho v c_p}{k} = \frac{v}{\alpha}, \quad (2.13)$$

$$Gr = \frac{g \beta \bar{q} d^4}{\nu^2 k}, \quad (2.14)$$

$$Pr Gr = \frac{\nu}{\alpha} \frac{g \beta \bar{q} d^4}{\nu^2 k} = \frac{g \beta \bar{q} d^4}{\alpha k \nu} = Ra, \quad (2.15)$$

sendo Pr o número de Prandtl, μ a viscosidade dinâmica do fluido, Gr o número de Grashof e Ra o número de Rayleigh.

Logo, substituindo as Equações (2.13) e (2.15) na Equação (2.11b), a adimensionalização da Equação (2.2) resulta em:

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial X} + \lambda_1 Ra \theta \sin \gamma + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right). \quad (2.16)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais da Equação (2.9) em cada termo da equação da quantidade de movimento (2.3), vem:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{d^3} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\alpha^2}{d^3} U \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\alpha^2}{d^3} V \frac{\partial V}{\partial Y} = & - \frac{\nu \alpha}{d^3} \frac{\partial P}{\partial Y} + \\ & \lambda_1 g \beta \frac{\bar{q} d}{k} \theta \cos \gamma + \nu \frac{\alpha}{d^3} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right). \end{aligned} \quad (2.17a)$$

Multiplicando a equação acima por $[d^3 / (\alpha \nu)]$, vem:

$$\frac{\alpha}{\nu} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \lambda_1 \frac{g \beta \bar{q} d^4}{\alpha \nu k} \theta \cos \gamma + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right). \quad (2.17b)$$

Substituindo as Equações (2.13) e (2.15) na Equação (2.17b), a adimensionalização da Equação (2.3) resulta em:

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \lambda_1 Ra \theta \cos \gamma + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right). \quad (2.18)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais da Equação (2.9) em cada termo da equação da quantidade de movimento (2.4), vem:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \frac{\alpha}{\mu} \frac{\partial W}{\partial \tau} + \left(- \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \frac{\alpha}{\mu} U \frac{\partial W}{\partial X} + \left(- \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \frac{\alpha}{\mu} V \frac{\partial W}{\partial Y} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \beta \frac{\bar{q} d}{k} \theta \sin \gamma_1 + \nu \left(- \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right). \end{aligned} \quad (2.19a)$$

Multiplicando a equação acima por $-\rho / (\partial \bar{p} / \partial z)$, vem:

$$\frac{\rho \alpha}{\mu} \left(\frac{\partial W}{\partial \tau} + U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} \right) = 1 + \frac{g \beta \bar{q} \rho d}{-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}} \theta \sin \gamma_1 + \frac{\rho \nu}{\mu} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right). \quad (2.19b)$$

Da Equação (2.9), vem:

$$-\frac{d\bar{p}}{dz} = \frac{w\rho v}{Wd^2} = \frac{\bar{w}\rho v}{\bar{W}d^2}, \quad (2.19c)$$

sendo $\bar{W}$ a velocidade axial média adimensional.

Sabe-se que:

$$Re = \frac{\bar{w}\rho d}{\mu} \quad \text{e} \quad \mu = \rho v, \quad (2.19d)$$

sendo Re o número de Reynolds.

Substituindo (2.19d) em (2.19c), vem:

$$-\frac{d\bar{p}}{dz} = \frac{Re\mu^2}{\rho\bar{W}d^3}. \quad (2.19e)$$

Da Equação (2.13) tem-se que:

$$Pr = \frac{v}{\alpha} = \frac{\mu}{\rho\alpha}. \quad (2.20)$$

Da Equação (2.14) tem-se que:

$$Gr = \frac{g\beta\bar{q}d^4}{v^2k}, \quad (2.21)$$

Substituindo as Equações (2.19e), (2.20) e (2.21) na Equação (2.19b), a adimensionalização da Equação (2.4) resulta em:

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial W}{\partial \tau} + U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} \right) = 1 + \frac{Gr}{Re} \bar{W} \theta \sin \gamma_1 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right). \quad (2.22)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais da Equação (2.9) em cada termo da equação da energia (2.5), vem:

$$\frac{\alpha\bar{q}}{kd} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\alpha\bar{q}}{kd} U \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\alpha\bar{q}}{kd} V \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{\alpha\bar{q}}{k} \frac{P_q}{A_m} \frac{W}{\bar{W}} = \frac{\alpha\bar{q}}{kd} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\alpha\bar{q}}{kd} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}. \quad (2.23)$$

Multiplicando a equação acima por $(kd)/(\alpha\bar{q})$, vem:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} + d \frac{P_q}{A_m} \frac{W}{\bar{W}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}, \quad (2.24)$$

mas da Equação (2.9) sabe-se que:

$$d = 4 \frac{A_m}{P_m} . \quad (2.25)$$

Tomando apenas o 4º termo do lado esquerdo da igualdade da Equação (2.24), e substituindo a Equação (2.25) neste termo, vem:

$$d \frac{P_q}{A_m} \frac{W}{\overline{W}} = 4 \frac{A_m}{P_m} \frac{P_q}{A_m} \frac{W}{\overline{W}} = 4 \frac{P_q}{P_m} \frac{W}{\overline{W}} = C_g \frac{W}{\overline{W}} , \quad (2.26)$$

sendo C_g uma constante geométrica cujo valor é dado por:

$$C_g = 4 \frac{P_q}{P_m} . \quad (2.27)$$

Substituindo a Equação (2.26) na Equação (2.24), a adimensionalização da Equação (2.5) resulta em:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} + C_g \frac{W}{\overline{W}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} , \quad (2.28)$$

Em resumo as equações adimensionais de conservação em termos da velocidade U , da velocidade V , da velocidade W e da temperatura θ , são dadas por:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 . \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial X} + \lambda_1 Ra \theta \sin \gamma + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) . \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \lambda_1 Ra \theta \cos \gamma + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) . \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial W}{\partial \tau} + U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} \right) = 1 + \frac{Gr}{Re} \overline{W} \theta \sin \gamma_1 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) . \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} + C_g \frac{W}{\overline{W}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} , \quad (2.33)$$

Derivando a Equação (2.30) em Y e a Equação (2.31) em X e subtraindo a equação resultante de (2.30) da equação resultante de (2.31), os termos de pressão são eliminados.

Derivando cada termo da Equação (2.30) em Y , vem:

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial V}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} \right] =$$

$$-\frac{\partial^2 P}{\partial Y \partial X} + \lambda_1 \text{Ra} \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right). \quad (2.34)$$

Derivando cada termo da Equação (2.31) em X, vem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial Y} \right] = \\ -\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \lambda_1 \text{Ra} \cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Subtraindo a Equação (2.34) da Equação (2.35), vem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial U}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \right. \\ \left. V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial V}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] = \lambda_1 \text{Ra} \left(\cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \\ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Sabe-se que a vorticidade, para o caso bidimensional, é dada por:

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}. \quad (2.37)$$

Introduzindo a vorticidade e o número de Rayleigh na Equação (2.36), vem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} + \omega \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] = \\ \lambda_1 \text{Ra} \left(\cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Mas, pela Equação (2.10):

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (2.39)$$

Substituindo a Equação (2.40) na Equação (2.39), vem:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} \right] = \lambda_1 \text{Ra} \left(\cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2}. \quad (2.40)$$

A função corrente ψ é definida pelas seguintes relações:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad (2.41)$$

$$V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}, \quad (2.42)$$

com as definições dadas acima a equação da continuidade (2.10) fica automaticamente satisfeita, pois:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial X} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} = 0. \quad (2.43)$$

Substituindo as Equações (2.41) e (2.42) em (2.38), vem:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega. \quad (2.44)$$

Substituindo as Equações (2.41) e (2.42) em (2.32), vem:

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} \right) = 1 + \frac{Gr}{Re} \overline{W} \theta \sin \gamma_1 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right). \quad (2.45)$$

Substituindo as Equações (2.41) e (2.42) em (2.33), vem:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + C_g \frac{W}{\overline{W}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}. \quad (2.46)$$

Substituindo as Equações (2.41) e (2.42) em (2.40), vem:

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} \right] = \lambda_1 Ra \left(\cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2}. \quad (2.47)$$

Rescrevendo as Equações (2.44), (2.45), (2.46) e (2.47), vem:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (2.48)$$

$$Pr \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} + Pr + \frac{Ra}{Re} \overline{W} \theta \sin \gamma_1 \right) = \frac{\partial W}{\partial \tau}, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - C_g \frac{W}{\overline{W}} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.50)$$

$$Pr \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} + \lambda_1 Ra Pr \left(\cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (2.51)$$

As Equações (2.48), (2.49), (2.50) e (2.51) são as equações de conservação em termos da função corrente (ψ), velocidade axial adimensional (W), temperatura adimensional (θ) e vorticidade (ω), tendo sido eliminada a pressão. As condições iniciais e de contorno serão apresentadas para cada caso estudado nos Capítulos 4 e 5.

2.2.3 – Número de Nusselt Médio (Nu) e Produto Fator de Atrito por Reynolds (fRe)

As distribuições de função corrente, velocidade axial adimensional, temperatura adimensional e vorticidade são obtidas do sistema de equações formado pelas Equações (2.48), (2.49), (2.50) e (2.51) com as condições iniciais e de contorno que dependem do tipo de problema estudado. Com estas distribuições pode-se calcular o número de Nusselt médio e o produto fator de atrito por Reynolds, ambos definidos no Apêndice 2.

O número de Nusselt médio é dado por:

$$Nu = - \frac{\overline{W}}{\overline{W\theta}}, \quad (2.52)$$

sendo $\overline{W\theta}$ a média do produto da velocidade axial adimensional pela temperatura adimensional.

O produto fator de atrito por Reynolds pode ser calculado por:

$$f Re = \frac{2}{\overline{W}}. \quad (2.53)$$

2.3 – BANCO DE TUBOS HORIZONTAIS EM UM ESCOAMENTO VERTICAL

Neste item são desenvolvidas as equações dimensionais e adimensionais relacionadas à transferência de calor por convecção mista sobre um banco de tubos horizontais em um escoamento vertical. A condição de contorno é de velocidade e temperatura uniformes na entrada e temperatura uniforme nas paredes dos tubos horizontais. Os casos que se pretende analisar com o equacionamento deste item são:

- Banco de tubos alinhados entre placas verticais (Figura 2.7);
- Banco de tubos alinhados em um escoamento vertical (Figura 2.8);
- Banco de tubos alternados em um escoamento vertical (Figura 2.9);

2.3.1 – Análise Teórica

Como os tubos são de grande comprimento, pode-se considerar o escoamento como bidimensional.

As equações de conservação para o estudo da convecção mista no problema têm as seguintes considerações:

- g) regime não permanente;
- h) escoamento bidimensional e laminar;
- i) escoamento incompressível;
- j) função dissipação viscosa desprezada;
- k) as propriedades do fluido são constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo;
- l) desacoplamento da pressão na direção axial.

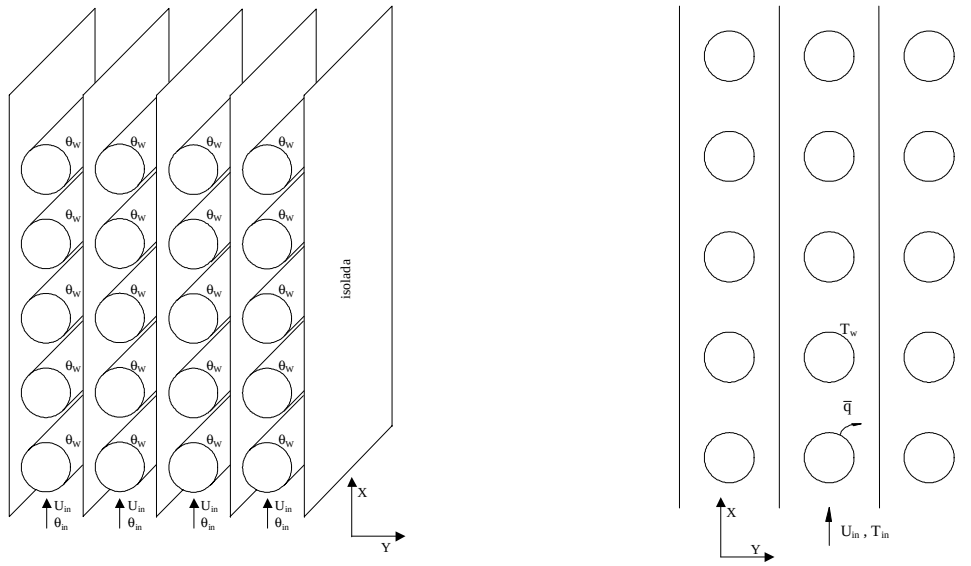


Figura 2.7 – Banco de tubos alinhados entre placas verticais.

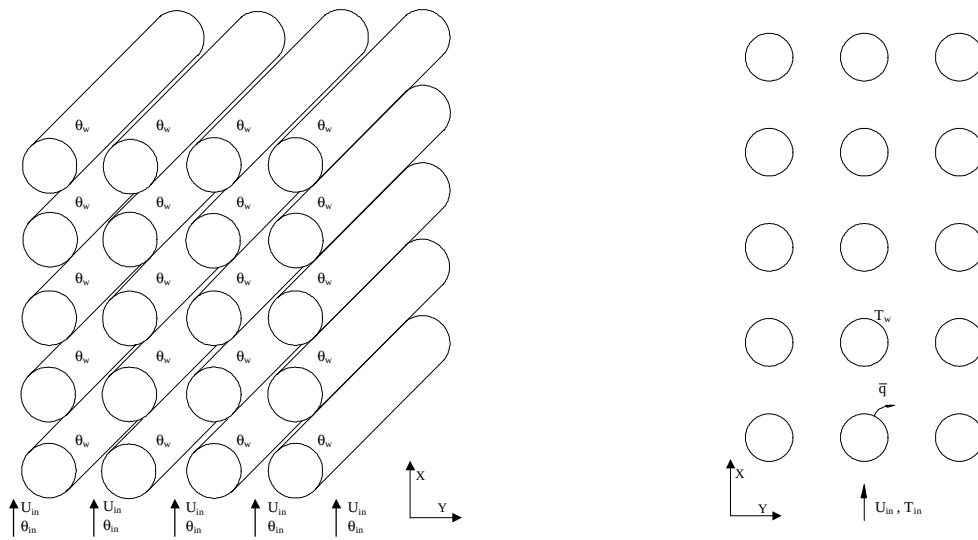


Figura 2.8 – Banco de tubos alinhados em um escoamento vertical.

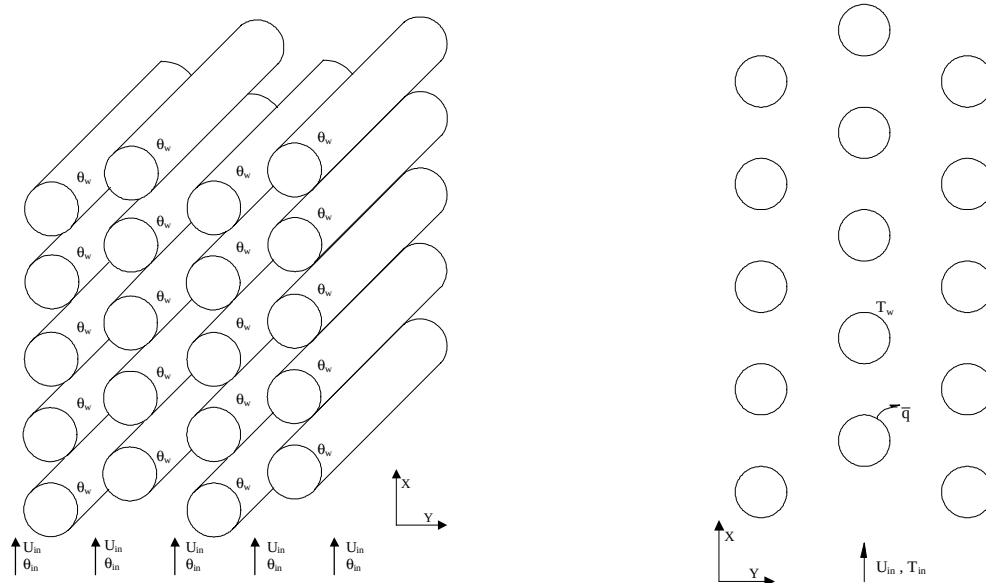


Figura 2.9 – Banco de tubos alternados em um escoamento vertical.

As equações de conservação, levando em conta as considerações acima, são:

i. Continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 . \quad (2.54)$$

ii. Quantidade de Movimento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \beta (T - T_{in}) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.56)$$

iii. Energia

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (2.57)$$

sendo: x coordenada na direção vertical; y a coordenada na direção horizontal; u e v as velocidades nas direções x e y; t o tempo; ρ a massa específica; p a pressão; g a aceleração da gravidade; β o coeficiente de expansão térmica; T a temperatura; T_{in} a temperatura na entrada; ν a viscosidade cinemática e α a difusividade térmica do fluido.

2.3.2 – Adimensionalização das Equações

Com o objetivo de generalizar a análise teórica, são introduzidos os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t U_{in}}{D} , & X &= \frac{x}{D} , & Y &= \frac{y}{D} , & U &= \frac{u}{U_{in}} \\ V &= \frac{v}{U_{in}} , & P &= \frac{p}{\rho U_{in}} , & \theta &= \frac{T - T_{in}}{T_w - T_{in}} , \end{aligned} \quad (2.58)$$

sendo: D o diâmetro do tubo horizontal; U_{in} a velocidade na entrada; T_w a temperatura na parede do tubo horizontal; τ o tempo adimensional; X e Y as coordenadas adimensionais; U e V as velocidades adimensionais nas direções x e y; P a pressão adimensional; θ a temperatura adimensional.

Substituindo (2.58) em (2.54), vem:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 . \quad (2.59)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais, da Equação (2.58) em cada termo da equação da

quantidade de movimento em x (2.55), vem:

$$\frac{U_{in}^2}{D} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{U_{in}^2}{D} U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{U_{in}^2}{D} V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{U_{in}^2}{D} \frac{\partial P}{\partial X} + g \beta (T_w - T_{in}) \theta + \nu \frac{U_{in}}{D^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right). \quad (2.60a)$$

Multiplicando a equação acima por (D / U_{in}^2) , vem:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{g \beta D}{U_{in}^2} (T_w - T_{in}) \theta + \frac{\nu}{D U_{in}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right). \quad (2.60b)$$

Mas o número de Richardson é dado por:

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} = \frac{\frac{g \beta D^3}{\nu^2} (T_w - T_{in})}{\frac{D^2 U_{in}^2}{\nu^2}} = \frac{g \beta D}{U_{in}^2} (T_w - T_{in}), \quad (2.61)$$

e o número de Reynolds e o número de Prandtl são dados por:

$$Re = \frac{D U_{in}}{\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu}{\rho \alpha} \quad (2.62)$$

Logo, substituindo as Equações (2.61) e (2.62) na Equação (2.60b), a adimensionalização da Equação (2.55) resulta em:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial X} + Ri \theta + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right). \quad (2.63)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais, da Equação (2.58) em cada termo da equação da quantidade de movimento (2.56), vem:

$$\frac{U_{in}^2}{D} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{U_{in}^2}{D} U \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{U_{in}^2}{D} V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{U_{in}^2}{D} \frac{\partial P}{\partial Y} + \nu \frac{U_{in}}{D^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right). \quad (2.64a)$$

Multiplicando a equação acima por (D / U_{in}^2) , vem:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\nu}{D U_{in}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right). \quad (2.64b)$$

Substituindo o valor do número de Reynolds, vem:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right). \quad (2.65)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais, da Equação (2.58) em cada termo da equação da energia (2.57), vem:

$$\frac{(T_w - T_{in})U_{in}}{D} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{(T_w - T_{in})U_{in}}{D} U \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{(T_w - T_{in})U_{in}}{D} V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \alpha \frac{(T_w - T_{in})}{D^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (2.66a)$$

Multiplicando a equação acima por $D/[(T_w - T_{in})U_{in}]$, vem:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\alpha}{U_{in} D} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (2.66b)$$

mas sabe-se que o número de Peclet é dado por:

$$\text{Pe} = \frac{D U_{in}}{\alpha} = \text{Re Pr}. \quad (2.67)$$

Substituindo a Equação (2.67) na Equação (2.66b), a adimensionalização da Equação (2.57) resulta em:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (2.68)$$

Em resumo as equações adimensionais de conservação em termos da velocidade U , da velocidade V e da temperatura θ , são dadas por:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (2.69)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial X} + \text{Ri} \theta + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right). \quad (2.70)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right). \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (2.72)$$

Derivando a Equação (2.70) em Y e a Equação (2.71) em X e subtraindo a equação resultante de (2.70) da equação resultante de (2.71), os termos de pressão são eliminados.

Derivando cada termo da Equação (2.70) em Y, vem:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial V}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} \right] = - \frac{\partial^2 P}{\partial Y \partial X} + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right]. \quad (2.73)$$

Derivando cada termo da Equação (2.71) em X, vem:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial Y} \right] = - \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) \right]. \quad (2.74)$$

Subtraindo a Equação (2.73) da Equação (2.74), vem:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial U}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \\ & V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial V}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = - \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \\ & \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Sabe-se que a vorticidade, para o caso bidimensional, é dada por:

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}. \quad (2.76)$$

Introduzindo o conceito de vorticidade na Equação (2.75), vem:

$$\left[\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} + \omega \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] = - \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right). \quad (2.77)$$

Mas, a Equação (2.69) nos diz que:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (2.78)$$

Substituindo a Equação (2.78) na Equação (2.77), vem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = -\text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right). \quad (2.79)$$

A função corrente ψ é definida pela seguinte relação:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad \text{e} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}, \quad (2.80)$$

com a definição dada acima, a equação da continuidade (2.69) fica automaticamente satisfeita, pois:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial X} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} = 0. \quad (2.81)$$

Substituindo a Equação (2.80) em (2.76), vem:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega. \quad (2.82)$$

Substituindo a Equação (2.80) em (2.72), vem:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (2.83)$$

Substituindo a Equação (2.80) em (2.79), vem:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} = -\text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right). \quad (2.84)$$

Rescrevendo as Equações (2.82), (2.83) e (2.84), vem:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega. \quad (2.85)$$

$$\frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (2.86)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (2.87)$$

As Equações (2.85), (2.86) e (2.87) são as equações de conservação em termos da função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e vorticidade (ω), tendo sido eliminada a pressão. As condições iniciais e de contorno serão apresentadas para cada caso estudado nos Capítulos 4 e 5.

2.3.3 – Número de Nusselt

As distribuições de função corrente, temperatura adimensional e vorticidade são obtidas do sistema de equações formado pelas Equações (2.85), (2.86) e (2.87) com as condições iniciais e de contorno que dependem do tipo de problema estudado. Com estas distribuições pode-se calcular o número de Nusselt local (Nu_L) e médio (Nu) para cada tubo horizontal na seguinte forma:

$$Nu_L = \left(\frac{\theta_w - \theta_{in}}{\theta_w - \theta_b} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2}, \quad (2.88)$$

$$Nu = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell Nu_L \, d\ell, \quad (2.89)$$

sendo θ_w a temperatura adimensional na parede do tubo horizontal, θ_{in} a temperatura adimensional na entrada do escoamento, ℓ o perímetro da seção transversal do tubo horizontal e θ_b a temperatura adimensional média na menor seção entre o tubo horizontal e a placa ou linha de simetria vertical, conforme o caso. Esta temperatura média é dada por:

$$\theta_b = \frac{\overline{U\theta}}{\overline{U}}, \quad (2.90)$$

sendo $\overline{U\theta}$ a média do produto da velocidade pela temperatura na linha horizontal imaginária de menor distância entre o tubo e a linha de simetria ou a placa vertical, conforme o caso, $\overline{U}$ a velocidade média nesta linha e U a velocidade adimensional em cada ponto desta linha, dada por:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}. \quad (2.91)$$

Mais detalhes do cálculo dos números de Nusselt local e médio podem ser vistos no Apêndice 2.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE SOLUÇÃO

3.1 – Introdução

A solução das equações diferenciais parciais apresentadas no Capítulo 2 pode ser obtida pelos mais variados métodos numéricos. No presente trabalho optou-se pelo método de elementos finitos devido à facilidade de adaptação às linhas de fronteira e à possibilidade de se utilizar malhas não uniformes, as quais podem concentrar maior número de elementos nos locais onde as grandezas analisadas possuem maior gradiente. A utilização de malhas não uniformes é de especial importância nos problemas de maior complexidade geométrica. Com este tipo de malha pode-se obter a mesma precisão nos resultados utilizando um menor número de elementos que na malha uniforme.

Todas as malhas de elementos finitos utilizadas no presente trabalho são geradas por um programa de geração automática de malhas, disponível na “Internet”, chamado Easymesh. Este programa gera elementos triangulares com a forma a mais próxima possível do triângulo equilátero. Esta preocupação com o formato do elemento triangular se deve ao fato de que os elementos triangulares lineares não devem ter ângulos internos menores $\pi/8$ e nem maiores que $\pi/2$.

O método de elementos finitos, com a formulação de Galerkin mostrada no Apêndice 3, é empregado para resolver as equações de conservação apresentadas no Capítulo 2, com as condições iniciais e de contorno específicas de cada problema estudado. A vorticidade no contorno é calculada por um método matricial mostrado no Apêndice 4.

3.2 – Forma Geral para as Equações de Conservação

As equações de conservação do problemas analisados no Capítulo 2 podem ser escritas numa forma geral como:

$$\delta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \quad (3.1)$$

sendo Q_ϕ uma função especificada e dada por:

$$A_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + A_2 \frac{\partial \theta}{\partial X} + A_3 \frac{\partial \theta}{\partial Y} + A_4 W + A_5 \theta + A_6 \omega + A_7, \quad (3.2)$$

e ϕ uma grandeza que pode representar a função corrente (ψ), a velocidade axial (W), a temperatura (θ) ou a vorticidade (ω).

Os parâmetros δ , A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 , A_7 e λ são dados pela Tabela 3.1 para o duto horizontal com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circumferencial uniforme, pela Tabela 3.2 para o duto vertical com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circumferencial uniforme e pela Tabela 3.3 para o banco de tubos horizontais num escoamento vertical.

Tabela 3.1 – Duto Horizontal com Fluxo de Calor Axial Uniforme e Temperatura Circunferencial Uniforme.

ϕ	δ	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	λ
ψ	1	0	0	0	0	0	1	0	0
W	Pr	1	0	0	0	0	0	Pr	1
θ	1	1	0	0	$-\frac{C_g}{\bar{W}}$	0	0	0	1
ω	Pr	1	Ra Pr cos γ	- Ra Pr sen γ	0	0	0	0	1

Tabela 3.2 – Duto Vertical com Fluxo de Calor Axial Uniforme e Temperatura Circunferencial Uniforme..

ϕ	δ	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	λ
ψ	1	0	0	0	0	0	1	0	0
W	Pr	1	0	0	0	$\frac{Ra \bar{W}}{Re}$	0	Pr	1
θ	1	1	0	0	$-\frac{C_g}{\bar{W}}$	0	0	0	1
ω	Pr	1	0	0	0	0	0	0	1

Tabela 3.3 – Banco de Tubos Horizontais em um Escoamento Vertical.

ϕ	δ	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	λ
ψ	1	0	0	0	0	0	1	0	0
W	0	0	0	0	0	0	0	0	0
θ	$\frac{1}{Pe}$	1	0	0	0	0	0	0	1
ω	$\frac{1}{Re}$	1	0	- Ri	0	0	0	0	1

As condições de contorno relativas às equações de conservação vistas no Capítulo 2 podem ser escritas de uma forma geral como:

$$\phi = \phi_{ec}(X, Y), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad (3.4)$$

sendo n a direção normal à superfície e $\phi_{ec}(X, Y)$ uma função especificada no contorno.

A vorticidade no contorno é tratada separadamente, como mostrado no Apêndice 4.

3.3 – Obtenção das Matrizes Gerais para o Elemento

Como já foi visto no item 3.2, as equações de conservação podem ser escritas de uma forma geral como:

$$\delta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} , \quad (3.5)$$

sendo Q_ϕ uma função especificada e dada por:

$$A_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + A_2 \frac{\partial \theta}{\partial X} + A_3 \frac{\partial \theta}{\partial Y} + A_4 W + A_5 \theta + A_6 \omega + A_7 , \quad (3.6)$$

e os parâmetros $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ e λ dados pelas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3.

Com base no Apêndice 3, a Equação (3.5) pode ser escrita numa forma matricial para o elemento (formulação implícita) como:

$$\left[[K_\phi]^e + \frac{2}{\Delta\tau} [C]^e \right] \{\phi\}^e = \frac{2}{\Delta\tau} [C]^e \{\phi\}_{N}^e - \{R_\phi\}^e , \quad (3.7)$$

sendo $\{\phi\}^e$ a função que está sendo calculada no elemento, $\{\phi\}_N^e$ a função no elemento para o tempo anterior e $\Delta\tau$ o intervalo de tempo adimensional.

Do Apêndice 3, tem-se que:

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV , \quad (3.8)$$

$$[K_\phi]^e = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV , \quad (3.9)$$

$$\{\phi\}^e = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} , \quad (3.10)$$

$$\{R_\phi\}^e = - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA , \quad (3.11)$$

sendo $[N^e]$ a matriz das funções de forma e $[N^e]^T$ a sua transposta, ambas mostradas no Apêndice 1. A matriz dos gradientes $[B^e]$ e sua transposta $[B^e]^T$ são mostradas no Apêndice 3.

3.3.1 – Obtenção da Matriz $[C]^e$

Analisando a matriz $[C]^e$, vem:

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} dV = \lambda \int_{V^e} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dV . \quad (3.12)$$

Considerando o elemento de espessura unitária, $dV = 1 \, dA$, vem

$$[C]^e = \lambda \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dA . \quad (3.13)$$

De Segerlind (1984), tem-se que:

$$\int_{A^e} N_i^{f_1} N_j^{f_2} N_k^{f_3} dA = \frac{f_1! f_2! f_3!}{(f_1 + f_2 + f_3 + 2)!} 2 A^e , \quad (3.14)$$

sendo f_1 , f_2 e f_3 os expoentes das funções de forma e A^e a área do elemento dada por:

$$A^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} . \quad (3.15)$$

Usando a Equação (3.14) para calcular a integral dos produtos das funções de forma da Equação (3.13), resulta:

$$[C]^e = \frac{\lambda A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \quad (3.16)$$

3.3.2 – Obtenção da Matriz $[K_\phi]^e$

A matriz das derivadas das funções de forma e sua transposta apresentadas no Apêndice 3 são dadas por:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_j}{\partial Y} & \frac{\partial N_k}{\partial Y} \end{bmatrix} , \quad [B^e]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_i}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_k}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial Y} \end{bmatrix} . \quad (3.17)$$

Do Apêndice 1, tem-se que:

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial X} = \frac{b_\alpha}{2 A^e} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N_\alpha}{\partial Y} = \frac{c_\alpha}{2 A^e} , \quad \text{com } \alpha = i, j, k. \quad (3.18)$$

Substituindo a Equação (3.18) na Equação (3.17), vem:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{b_i}{2A^e} & \frac{b_j}{2A^e} & \frac{b_k}{2A^e} \\ \frac{c_i}{2A^e} & \frac{c_j}{2A^e} & \frac{c_k}{2A^e} \end{bmatrix}, \quad [B^e]^T = \begin{bmatrix} \frac{b_i}{2A^e} & \frac{c_i}{2A^e} \\ \frac{b_j}{2A^e} & \frac{c_j}{2A^e} \\ \frac{b_k}{2A^e} & \frac{c_k}{2A^e} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Substituindo a Equação (3.19) na Equação (3.9), vem:

$$[K_\phi]^e = \int_{V^e} \delta \frac{1}{4(A^e)^2} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dV =$$

$$\frac{\delta}{4(A^e)^2} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \int_{V^e} dV. \quad (3.20)$$

Admitindo-se a espessura unitária para o elemento, vem:

$$\int_{V^e} dV = \int_{A^e} 1 dA = A^e. \quad (3.21)$$

Substituindo a Equação (3.21) na Equação (3.20), vem:

$$[K_\phi]^e = \frac{\delta}{4A^e} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

3.3.3 – Obtenção da Matriz $\{R_\phi\}^e$

Da Equação (3.11), vem:

$$\{R_\phi\}^e = - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi dV - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA. \quad (3.23)$$

Na Equação (3.23) o fluxo de calor q^e é uma condição de contorno. Como, nos casos estudados no presente trabalho, o fluxo de calor não entra como condição de contorno, então $q^e = 0$. Note no Capítulo 2 que o fluxo de calor, que aparece nos problemas de dutos horizontais e verticais, entra na equação para o cálculo de $\partial T / \partial Z$ e não como uma condição de contorno. Portanto, fazendo-se $q^e = 0$ na Equação (3.23), vem:

$$\{R_\phi\}^e = - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV. \quad (3.24)$$

Admitindo-se a espessura unitária para o elemento ($dV = 1 \times dA = dA$) e substituindo a Equação (3.2) na Equação (3.24), vem:

$$\begin{aligned} \{R_\phi\}^e = - \int_{A^e} & \left[A_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + A_2 \frac{\partial \theta}{\partial X} + \right. \\ & \left. A_3 \frac{\partial \theta}{\partial Y} + A_4 W^e + A_5 \theta^e + A_6 \omega^e + A_7 \right] [N^e]^T dA. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A integral acima pode ser escrita como uma soma de integrais da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \{R_\phi\}^e = - \int_{A^e} & \left[A_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) \right] [N^e]^T dA - \int_{A^e} \left[A_2 \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] [N^e]^T dA - \\ & \int_{A^e} \left[A_3 \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] [N^e]^T dA - \int_{A^e} [A_4 W^e] [N^e]^T dA - \\ & \int_{A^e} [A_5 \theta^e] [N^e]^T dA - \int_{A^e} [A_6 \omega^e] [N^e]^T dA - \int_{A^e} A_7 [N^e]^T dA. \end{aligned} \quad (3.26)$$

A Equação (3.26) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\{R_\phi\}^e = \{R_\phi\}_{j_1}^e + \{R_\phi\}_{j_2}^e + \{R_\phi\}_{j_3}^e + \{R_\phi\}_{j_4}^e + \{R_\phi\}_{j_5}^e + \{R_\phi\}_{j_6}^e + \{R_\phi\}_{j_7}^e. \quad (3.27)$$

i. – Cálculo de $\{R_\phi\}_{j_1}^e$

Das Equações (3.26) e (3.27), vem:

$$\{R_\phi\}_{j_1}^e = - \int_{A^e} \left[A_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) \right] [N^e]^T dA. \quad (3.28)$$

Do Apêndice 1 podem-se calcular os gradientes das funções ψ^e e ϕ^e , resultando em:

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial X} = \frac{1}{2A^e} (b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k), \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial Y} = \frac{1}{2A^e} (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k), \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial X} = \frac{1}{2A^e} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k), \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial Y} = \frac{1}{2A^e} (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) . \quad (3.32)$$

Substituindo as Equações (3.29), (3.30), (3.31) e (3.32) na Equação (3.28) e organizando, vem:

$$\begin{aligned} \{R_\phi\}_1^e = & - \int_{A^e} \left[\frac{A_1}{4(A^e)^2} [(b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k)(c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) - \right. \\ & \left. (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k)(b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k)] [N^e]^T dA = \right. \\ & - \frac{A_1}{4(A^e)^2} \left[(b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k)(c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) - \right. \\ & \left. (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k)(b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) \right] \int_{A^e} [N^e]^T dA . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Da equação acima vem:

$$\int_{A^e} [N^e]^T dA = \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dA . \quad (3.34)$$

Usando a Equação (3.14) para calcular a integral das funções de forma da Equação (3.34), resulta:

$$\int_{A^e} [N^e]^T dA = \frac{A^e}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \quad (3.35)$$

Substituindo a Equação (3.35) na Equação (3.33), resulta:

$$\begin{aligned} \{R_\phi\}_1^e = & - \frac{A_1}{12A^e} [(b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k)(c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) - \\ & (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k)(b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k)] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \end{aligned} \quad (3.36)$$

Fazendo:

$$\begin{aligned} F_1 = & - \frac{1}{12A^e} [(b_i \psi_i + b_j \psi_j + b_k \psi_k)(c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) - \\ & (c_i \psi_i + c_j \psi_j + c_k \psi_k)(b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k)] , \end{aligned} \quad (3.37)$$

e substituindo na Equação (3.36), resulta:

$$\{R_\phi\}_{j_1}^e = A_1 F_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.38)$$

ii. – Cálculo de $\{R_\phi\}_{j_2}^e$

Das Equações (3.26) e (3.27), vem:

$$\{R_\phi\}_{j_2}^e = - \int_{A^e} \left[A_2 \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] [N^e]^T dA. \quad (3.39)$$

Da Equação (3.31), fazendo $\phi = \theta$, vem:

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial X} = \frac{1}{2A^e} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k). \quad (3.40)$$

Substituindo a Equação (3.40) na Equação (3.39), vem:

$$\{R_\phi\}_{j_2}^e = - \frac{A_2}{2A^e} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k) \int_{A^e} [N^e]^T dA. \quad (3.41)$$

Substituindo a Equação (3.35) na Equação (3.41), vem:

$$\{R_\phi\}_{j_2}^e = - \frac{A_2}{6} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.42)$$

Fazendo:

$$F_2 = - \frac{1}{6} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k), \quad (3.43)$$

e substituindo na Equação (3.42), resulta:

$$\{R_\phi\}_{j_2}^e = A_2 F_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.44)$$

iii. – Cálculo de $\{R_\phi\}_{j_3}^e$

Das Equações (3.26) e (3.27), vem:

$$\{R_\phi\}_3^e = - \int_{A^e} \left[A_3 \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] [N^e]^T dA . \quad (3.45)$$

Da Equação (3.32), fazendo $\phi = \theta$, vem:

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial Y} = \frac{1}{2A^e} (c_i \theta_i + c_j \theta_j + c_k \theta_k) . \quad (3.46)$$

Substituindo a Equação (3.46) na Equação (3.45), vem:

$$\{R_\phi\}_3^e = - \frac{A_3}{2A^e} (c_i \theta_i + c_j \theta_j + c_k \theta_k) \int_{A^e} [N^e]^T dA . \quad (3.47)$$

Substituindo a Equação (3.35) na Equação (3.47), vem:

$$\{R_\phi\}_3^e = - \frac{A_3}{6} (c_i \theta_i + c_j \theta_j + c_k \theta_k) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \quad (3.48)$$

Fazendo:

$$F_3 = - \frac{1}{6} (c_i \theta_i + c_j \theta_j + c_k \theta_k) , \quad (3.49)$$

e substituindo na Equação (3.48), resulta:

$$\{R_\phi\}_3^e = A_3 F_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \quad (3.49)$$

iv. – Cálculo de $\{R_\phi\}_4^e$

Das Equações (3.26) e (3.27), vem:

$$\{R_\phi\}_4^e = - \int_{A^e} [A_4 W^e] [N^e]^T dA . \quad (3.50)$$

A função W^e pode ser escrita como:

$$W^e = [N^e] \{W\}^e . \quad (3.51)$$

Substituindo a Equação (3.51) na Equação (3.50), vem:

$$\{R_\phi\}_4^e = -A_4 \int_{A^e} [N^e]^T [N^e] \{W\}^e dA . \quad (3.52)$$

Retirando $\{W\}^e$ da integral, vem:

$$\{R_\phi\}_4^e = -A_4 \int_{A^e} [N^e]^T [N^e] dA \begin{Bmatrix} W_i \\ W_j \\ W_k \end{Bmatrix} . \quad (3.53)$$

O cálculo da integral acima já foi apresentado nas Equações (3.12) à (3.16) e resulta em:

$$\int_{A^e} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} dA = \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \quad (3.54)$$

Substituindo a Equação (3.54) na Equação (3.53), vem:

$$\{R_\phi\}_4^e = -\frac{A_4 A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_i \\ W_j \\ W_k \end{Bmatrix} . \quad (3.55)$$

Fazendo:

$$F_4 = -\frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \quad (3.56)$$

e substituindo na Equação (3.55), resulta:

$$\{R_\phi\}_4^e = A_4 F_4 \begin{Bmatrix} W_i \\ W_j \\ W_k \end{Bmatrix} . \quad (3.57)$$

v. – Cálculo de $\{R_\phi\}_5^e$

Das Equações (3.26) e (3.27), vem:

$$\{R_\phi\}_5^e = - \int_{A^e} [A_5 \theta^e] [N^e]^T dA . \quad (3.58)$$

A função θ^e pode ser escrita como:

$$\theta^e = [N^e] \{\theta\}^e . \quad (3.59)$$

Substituindo a Equação (3.59) na Equação (3.58), vem:

$$\{R_\phi\}_5^e = -A_5 \int_{A^e} [N^e]^T [N^e] \{\theta\}^e dA . \quad (3.60)$$

Retirando $\{\theta\}^e$ da integral, vem:

$$\{R_\phi\}_5^e = -A_5 \int_{A^e} [N^e]^T [N^e] dA \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_k \end{Bmatrix} . \quad (3.61)$$

O cálculo da integral acima já foi apresentado nas Equações (3.12) à (3.16) e resulta em:

$$\int_{A^e} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} dA = \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \quad (3.62)$$

Substituindo a Equação (3.62) na Equação (3.61), vem:

$$\{R_\phi\}_5^e = -\frac{A_5 A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_k \end{Bmatrix} . \quad (3.63)$$

Substituindo a Equação (3.56) na equação acima, vem:

$$\{R_\phi\}_5^e = A_5 F_4 \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_k \end{Bmatrix} . \quad (3.64)$$

vi. – Cálculo de $\{R_\phi\}_6^e$

Das Equações (3.26) e (3.27), vem:

$$\{R_\phi\}_6^e = - \int_{A^e} [A_6 \omega^e] [N^e]^T dA . \quad (3.65)$$

A função ω^e pode ser escrita como:

$$\omega^e = [N^e] \{\omega\}^e . \quad (3.66)$$

Substituindo a Equação (3.66) na Equação (3.65), vem:

$$\{R_\phi\}_6^e = -A_6 \int_{A^e} [N^e]^T [N^e] \{\omega\}^e dA . \quad (3.67)$$

Retirando $\{\omega\}^e$ da integral, vem:

$$\{R_\phi\}_6^e = -A_6 \int_{A^e} [N^e]^T [N^e] dA \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} . \quad (3.68)$$

O cálculo da integral acima já foi apresentado nas Equações (3.12) à (3.16) e resulta em:

$$\int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} dA = \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \quad (3.69)$$

Substituindo a Equação (3.69) na Equação (3.68), vem:

$$\{R_\phi\}_6^e = -\frac{A_6 A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} . \quad (3.70)$$

Substituindo a Equação (3.56) na equação acima, vem:

$$\{R_\phi\}_6^e = A_6 F_4 \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} . \quad (3.71)$$

vii. – Cálculo de $\{R_\phi\}_7^e$

Das Equações (3.26) e (3.27), vem:

$$\{R_\phi\}_7^e = - \int_{A^e} A_7 [N^e]^T dA . \quad (3.72)$$

Da Equação (3.35), vem:

$$\int_{A^e} [N^e]^T dA = \frac{A^e}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \quad (3.73)$$

Substituindo a Equação (3.73) na Equação (3.72), vem:

$$\{R_\phi\}_7^e = -A_7 \frac{A^e}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.74)$$

Fazendo:

$$F_7 = -\frac{A^e}{3}. \quad (3.75)$$

Substituindo a Equação (3.75) na Equação(3.74), vem:

$$\{R_\phi\}_7^e = A_7 F_7 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.76)$$

3.3.4 – Resumo das Equações para Obtenção das Matrizes $[C]^e$, $[K_\phi]^e$ e $\{R_\phi\}^e$

Em resumo as matrizes $[C]^e$, $[K_\phi]^e$ e $\{R_\phi\}^e$ da Equação (3.7) são dadas por:

$$[C]^e = \frac{\lambda A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

$$[K_\phi]^e = \frac{\delta}{4A^e} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (3.78)$$

$$\{R_\phi\}^e = \{R_\phi\}_1^e + \{R_\phi\}_2^e + \{R_\phi\}_3^e + \{R_\phi\}_4^e + \{R_\phi\}_5^e + \{R_\phi\}_6^e + \{R_\phi\}_7^e, \quad (3.79)$$

sendo:

$$\{R_\phi\}_1^e = A_1 F_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.80)$$

$$\{R_\phi\}_2^e = A_2 F_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.81)$$

$$\{\mathbf{R}_\phi\}_3^e = \mathbf{A}_3 \mathbf{F}_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.82)$$

$$\{\mathbf{R}_\phi\}_4^e = \mathbf{A}_4 \mathbf{F}_4 \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_i \\ \mathbf{W}_j \\ \mathbf{W}_k \end{Bmatrix}, \quad (3.83)$$

$$\{\mathbf{R}_\phi\}_5^e = \mathbf{A}_5 \mathbf{F}_4 \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_k \end{Bmatrix}, \quad (3.84)$$

$$\{\mathbf{R}_\phi\}_6^e = \mathbf{A}_6 \mathbf{F}_4 \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix}, \quad (3.85)$$

$$\{\mathbf{R}_\phi\}_7^e = \mathbf{A}_7 \mathbf{F}_7 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.86)$$

com:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 = & -\frac{1}{12\mathbf{A}^e} \left[(\mathbf{b}_i \psi_i + \mathbf{b}_j \psi_j + \mathbf{b}_k \psi_k) (\mathbf{c}_i \phi_i + \mathbf{c}_j \phi_j + \mathbf{c}_k \phi_k) - \right. \\ & \left. (\mathbf{c}_i \psi_i + \mathbf{c}_j \psi_j + \mathbf{c}_k \psi_k) (\mathbf{b}_i \phi_i + \mathbf{b}_j \phi_j + \mathbf{b}_k \phi_k) \right], \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{1}{6} (\mathbf{b}_i \theta_i + \mathbf{b}_j \theta_j + \mathbf{b}_k \theta_k), \quad (3.88)$$

$$\mathbf{F}_3 = -\frac{1}{6} (\mathbf{c}_i \theta_i + \mathbf{c}_j \theta_j + \mathbf{c}_k \theta_k), \quad (3.89)$$

$$\mathbf{F}_4 = -\frac{\mathbf{A}^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.90)$$

$$\mathbf{F}_7 = -\frac{\mathbf{A}^e}{3}. \quad (3.91)$$

3.4 – Algoritmo e Fluxograma

Tomando a Equação (3.7) e substituindo ϕ por ψ , W , θ e ω , obtêm-se as equações globais para a função corrente, velocidade axial, temperatura e vorticidade, como apresentado abaixo:

$$\left[[K_\psi] + \frac{2}{\Delta\tau} [C] \right] \{\psi\} = \frac{2}{\Delta\tau} [C] \{\psi\}_N - \{R_\psi\}, \quad (3.92)$$

$$\left[[K_W] + \frac{2}{\Delta\tau} [C] \right] \{W\} = \frac{2}{\Delta\tau} [C] \{W\}_N - \{R_W\}, \quad (3.93)$$

$$\left[[K_\theta] + \frac{2}{\Delta\tau} [C] \right] \{\theta\} = \frac{2}{\Delta\tau} [C] \{\theta\}_N - \{R_\theta\}, \quad (3.94)$$

$$\left[[K_\omega] + \frac{2}{\Delta\tau} [C] \right] \{\omega\} = \frac{2}{\Delta\tau} [C] \{\omega\}_N - \{R_\omega\}. \quad (3.95)$$

As matrizes globais apresentadas a seguir são uma somatória das matrizes para os elementos:

$$[K_\phi] = \sum_{e=1}^E [K_\phi]^e, \quad (3.96)$$

$$\{R_\phi\} = \sum_{e=1}^E \{R_\phi\}^e, \quad (3.97)$$

$$[C] = \sum_{e=1}^E [C]^e, \quad (3.98)$$

$$\{\phi\} = \sum_{e=1}^E \{\phi\}^e, \quad (3.99)$$

sendo que E é o número total de elementos no domínio e ϕ representa as funções ψ , W , θ ou ω .

As somatórias acima são feitas de uma forma especial de acordo com o método de elementos finitos.

As Equações (3.93) a (3.95) podem ser escritas numa forma condensada, como:

$$[A_\phi] \{\phi\} = \{B_\phi\}, \quad (3.100)$$

Foram desenvolvidos programas computacionais em linguagem FORTRAN para a solução da Equação (3.100) para a função corrente (ψ), velocidade axial adimensional (W), temperatura adimensional (θ) e vorticidade (ω), conforme cada caso estudado. Os problemas estudados são os de dutos horizontais e verticais com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme e os de um banco de tubos horizontais isotérmicos em um escoamento vertical. Um fluxograma geral é mostrado na Figura 3.1 e a descrição dos blocos que o compõem está colocada a seguir.

Bloco 1 – Início:

Descrição do programa, declaração e dimensionamento das variáveis e abertura de arquivos.

Bloco 2 – Leitura de dados:

Existem dois arquivos a serem lidos. No primeiro arquivo são lidos o nome do arquivo, os parâmetros geométricos e térmicos, o intervalo de tempo e o número máximo de iterações. No segundo arquivo são lidos o nome do arquivo, o número de pontos nodais, as coordenadas de cada ponto nodal, o número de elementos, a conectividade de cada elemento e as condições de contorno.

Bloco 3 – Cálculos preliminares:

São calculados a semi-largura de banda e os parâmetros que definem a dimensão da matriz coluna que irá armazenar as matrizes $\{\phi\}$, $\{B_\phi\}$ e $[A_\phi]$. A matriz coluna armazena estas matrizes na seguinte forma: a matriz $\{\phi\}$ é armazenada nas NP primeiras linhas, a matriz $\{B_\phi\}$ é armazenada nas linhas de $(NP + 1)$ até $(2 \times NP)$ e a matriz $[A_\phi]$ é armazenada nas linhas de $(2 \times NP + 1)$ até $(2 \times NP + NP \times NBW)$, sendo NP o número de pontos nodais e NBW a semi-largura de banda.

Bloco 4 – Teste de dimensionamento:

São feitos testes para verificar se o número de pontos nodais, o número de elementos e a semi-largura de banda atendem o dimensionamento das matrizes especificado no bloco 1.

Bloco 5 – Impressão de dados:

São impressos alguns dados de entrada e é feita a impressão opcional do número de cada ponto nodal com suas coordenadas, do número de cada elemento com suas conectividades e das condições de contorno.

Bloco 6 – Inicialização das matrizes:

As matrizes são zeradas.

Bloco 7 – Cálculo de parâmetros:

São calculados os valores da área de cada elemento (A^e), dos coeficientes b_i , b_j , b_k , c_i , c_j e c_k e da constante geométrica C_g .

Bloco 8 – Formação das matrizes dos elementos e globais:

São formadas as matrizes $[A_\phi]^e$, $[A_\phi]$, $\{\phi\}^e$ e $\{\phi\}$ que são armazenadas na forma de uma matriz coluna.

Bloco 9 – Incremento do tempo e da iteração

O tempo adimensional é acrescido de $\Delta\tau$ e a iteração é acrescida de uma unidade.

Bloco 10 – Determinação da função corrente (ψ):

A matriz $\{B_\psi\}$ é formada com os valores da vorticidade do tempo anterior. A condição de função corrente conhecida no contorno é imposta e então a função corrente é calculada para todo o domínio

Bloco 11 – Determinação da velocidade axial adimensional (W):

A matriz $\{B_W\}$ é formada com os valores da velocidade axial adimensional do tempo anterior e da função corrente do tempo atual. A condição de velocidade axial conhecida no contorno é imposta e então a velocidade axial adimensional é calculada para todo o domínio. A velocidade axial adimensional média também é calculada e é impressa. No caso do banco de tubos horizontais em um escoamento vertical não existe a velocidade W.

Bloco 12 – Determinação da temperatura adimensional (θ):

A matriz $\{B_\theta\}$ é formada com os valores da temperatura adimensional do tempo anterior e com os valores da função corrente, da velocidade axial adimensional e da velocidade axial adimensional média do tempo atual. A condição de temperatura conhecida no contorno é imposta e então a temperatura adimensional é calculada para todo o domínio. São calculadas ainda a temperatura adimensional média e a média do produto da temperatura adimensional pela velocidade axial adimensional. É feita a impressão do valor da temperatura adimensional média.

Bloco 13 – Determinação da vorticidade (ω):

A matriz $\{B_\omega\}$ é formada com os valores da vorticidade do tempo anterior e com os valores da função corrente e da temperatura adimensional do tempo atual. A condição de vorticidade conhecida no contorno é imposta e então a vorticidade é calculada para todo o domínio.

Bloco 14 – Determinação da vorticidade nas paredes (ω):

A vorticidade nas paredes deve ser atualizada a cada passo de tempo e o cálculo para esta atualização é feito pela Equação (A4.8) que é dada por:

$$[C] \{ \omega \} = [K_\psi] \{ \psi \}, \quad (3.101)$$

sendo que as matrizes $[C]$, $[K_\psi]$ e $\{ \psi \}$ foram determinadas nos blocos anteriores. A matriz $\{ \psi \}$ é para o tempo atual. A condição de vorticidade conhecida (calculada no bloco 13) em todo o domínio fora das paredes é imposta e então a vorticidade é calculada nas paredes. A condição de contorno para o cálculo da vorticidade no domínio (bloco 13) é atualizada com os valores calculados nas paredes.

Bloco 15 – Determinação de Nu e fRe:

Para os dutos horizontais e verticais o número de Nusselt médio pode ser calculado pela Equação (A2.20), que é dada por:

$$Nu = - \frac{\bar{W}}{\bar{W}\theta}. \quad (3.102)$$

Como os valores de $\bar{W}$ e $\bar{W}\theta$ foram calculadas nos blocos 11 e 12, então basta substituir os valores na equação acima.

Com o valor da velocidade axial média $\overline{W}$ calculada no bloco 11 pode-se calcular fRe que é dado pela Equação (A2.26), transcrita a seguir:

$$f Re = \frac{2}{\overline{W}} . \quad (3.103)$$

Para o banco de tubos horizontais em um escoamento vertical traça-se para cada tubo uma linha horizontal na menor distância entre o tubo e a placa ou a linha de simetria do escoamento vertical. Nessa linha calcula-se para cada ponto a velocidade vertical U , dada por:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} . \quad (3.104)$$

Com os valores de θ já calculados no bloco 12 e os valores de U calculados pela equação acima, determina-se a média do produto da velocidade pela temperatura $\overline{U\theta}$ e a velocidade vertical média $\overline{U}$. De posse destes valores calcula-se a temperatura média θ_b em cada linha:

$$\theta_b = \frac{\overline{U\theta}}{\overline{U}} . \quad (3.105)$$

Calcula-se o número de Nusselt local (Nu_L) e médio (Nu) para cada tubo:

$$Nu_L = \frac{\theta_w - \theta_{in}}{\theta_w - \theta_b} \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)^2} , \quad Nu = \frac{1}{\ell} \int_1^\ell Nu_L d\ell . \quad (3.106)$$

sendo θ_w a temperatura na parede do tubo, θ_{in} a temperatura na entrada do escoamento vertical e ℓ o perímetro do tubo que está em contato com o fluido no domínio em estudo.

Bloco 16 – Impressão dos resultados parciais:

Impressão do número de iterações, do tempo adimensional, de Nu e de fRe .

Bloco 17 – Teste para encerrar os cálculos:

É feito um teste para verificar se o número de iterações atingiu o máximo especificado. Se este máximo foi atingido os cálculos são encerrados, se não foi atingido volta-se ao bloco 9 e continua-se com os cálculos.

Bloco 18 – Impressão dos resultados finais:

Impressão, conforme o caso estudado, das distribuições de função corrente, velocidade axial adimensional, temperatura adimensional e vorticidade, do número de Nusselt médio, do número de Nusselt local e do produto do fator de atrito pelo número de Reynolds todas em regime permanente.

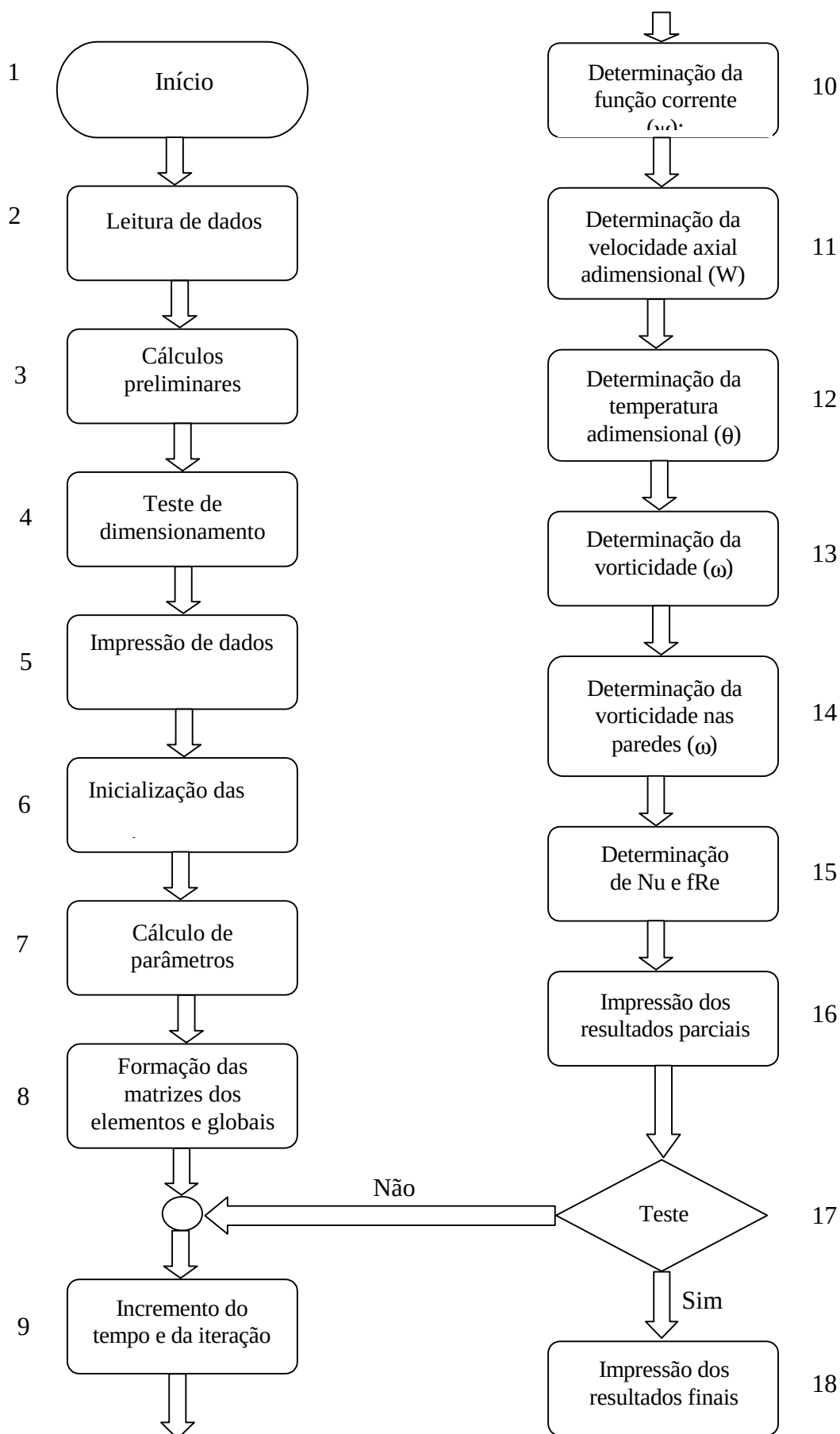


Figura 3.1 – Fluxograma geral dos programas desenvolvidos

CAPÍTULO 4

VALIDAÇÃO DOS CÓDIGOS COMPUTACIONAIS

4.1 – Introdução

Para a solução das equações de conservação apresentadas no Capítulo 2, foram desenvolvidos vários programas computacionais em linguagem FORTRAN, utilizando-se o método de elementos finitos com o elemento triangular linear e formulação de Galerkin. O critério de parada utilizado é que não haja mais variação no número de Nusselt médio até a terceira casa decimal. Para garantir que estes programas produzam resultados confiáveis é necessário que se faça uma comparação com resultados obtidos por outros autores. A isso se dá o nome de validação. Serão feitas validações para três casos, a saber: dutos horizontais, dutos verticais e banco de tubos em um escoamento vertical.

4.2 – Validação para Dutos Horizontais

Na validação do programa computacional para ser utilizado em problemas de transferência de calor em dutos horizontais são feitas duas aplicações: uma para tubos horizontais concêntricos e outra para um tubo horizontal com uma placa interna excêntrica.

4.2.1 – Tubos Horizontais Concêntricos

O programa é aplicado para dois tubos horizontais concêntricos (Figura 4.1) e os resultados são comparados com os trabalhos de Nieckele & Patankar (1985) e Ribeiro (1992).

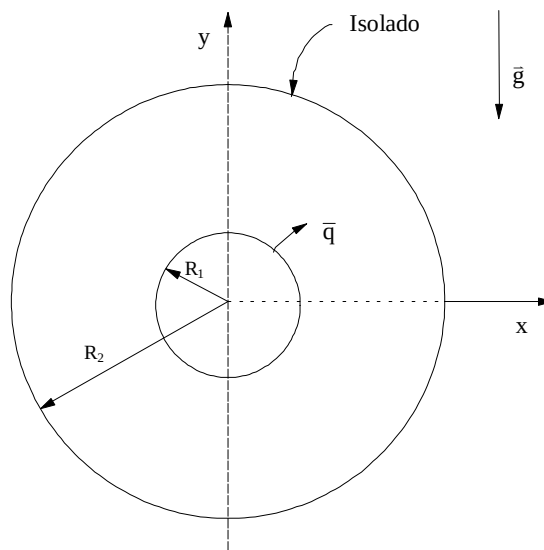


Figura 4.1 – Geometria para tubos horizontais concêntricos.

A seguir são apresentados os resumos dos trabalhos utilizados na validação:

- Nieckele & Patankar (1985) estudam a convecção mista laminar entre tubos horizontais concêntricos, sendo o tubo externo isolado termicamente e o tubo interno com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. Utilizam o algoritmo Simpler com coordenadas cilíndricas e regime permanente. A malha é 29x22 pontos sendo uniforme na

direção circunferencial e não uniforme na direção radial. Resultados são obtidos para $Pr = 0,7; 5,0; 10,0$ e ∞ ; $Ra = 0; 10^4; 10^5; 10^6$ e 10^7 e razão de raios (RR) igual a 1,5; 2,0; 3,0 e 5,0.

- Ribeiro (1992) estuda a convecção mista laminar entre tubos horizontais concêntricos e excêntricos. São estudados dois casos. No primeiro, o tubo externo é isolado termicamente e o tubo interno tem fluxo de calor axial uniforme com temperatura circunferencial uniforme. No segundo, caso as condições são inversas, ou seja, o tubo externo tem fluxo de calor uniforme e o tubo interno é isolado. Utiliza o método de elementos finitos, malha 9×31 pontos, com coordenadas cartesianas e regime não permanente. Resultados são obtidos para $Pr = 0,7; Ra = 0; 1 \times 10^4; 3 \times 10^4; 1 \times 10^5; 3 \times 10^5$ e 1×10^6 ; excentricidade (E) igual a -0,50; -0,25; 0; 0,25 e 0,50; ângulo de posição do tubo interno igual a 0° e 30° e razão de raios (RR) igual a 3,0 e 5,0.

Para se obter as equações de conservação para tubos horizontais concêntricos basta tomar as Equações (2.48), (2.49), (2.50) e (2.51), apresentadas no Capítulo 2 para dutos horizontais e verticais, e fazer: $\gamma_1 = 0^\circ$, $\lambda_1 = 1$ e $\gamma = 0^\circ$, o que resulta em:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0 , \quad (4.1)$$

$$Pr \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} + Pr \right) = \frac{\partial W}{\partial \tau} , \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - C_g \frac{W}{W} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} , \quad (4.3)$$

$$Pr \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} + Ra Pr \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} , \quad (4.4)$$

As condições de contorno consideradas são: tubo externo isolado termicamente e tubo interno com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. A vorticidade no contorno é calculada conforme o Apêndice 4. As condições iniciais e de contorno são dadas por:

- i. Condições iniciais ($\tau = 0$):

Todo o domínio:

$$\psi = \theta = \omega = W = 0 . \quad (4.5)$$

- ii. Condições de contorno ($\tau > 0$):

Parede do tubo externo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \psi = 0 , \quad W = 0 , \quad \omega = \omega_M . \quad (4.6a)$$

Parede do tubo interno:

$$\theta = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad , \quad W = 0 \quad , \quad \omega = \omega_M . \quad (4.6b)$$

Eixo de simetria:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \quad , \quad \omega = 0 \quad , \quad (4.6c)$$

sendo n a direção normal à superfície e ω_M a vorticidade que é calculada e atualizada a cada passo de tempo de acordo com o Apêndice 4.

A constante geométrica (C_g) da Equação (4.3), neste caso, passa a ser:

$$C_g = 4 \frac{P_q}{P_m} = \frac{4}{RR + 1} , \quad (4.7)$$

sendo RR a razão de raios dada por:

$$RR = \frac{R_2}{R_1} , \quad (4.8)$$

sendo R_1 o raio do tubo interno, R_2 o raio do tubo externo.

Como os tubos são concêntricos e o escoamento é laminar, existe simetria em relação a um plano vertical passando pelo centro deles. Por isso, e para redução de tempo computacional, pode-se utilizar apenas a metade da geometria nos cálculos.

A malha (elementos $\times$ nós) utilizada para os tubos concêntricos é de 400×229 e está representada na Figura 4.2.

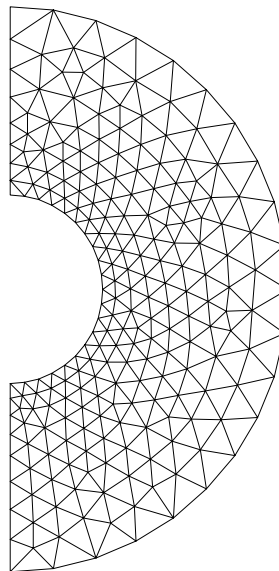


Figura 4.2 – Malha (400×229) para tubos horizontais concêntricos com $RR = 3$.

Nas Tabelas 4.1 e 4.2 são apresentados as comparações de resultados para razão de raios, $RR = 3$, número de Prandtl, $Pr = 0,7$, número de Rayleigh, $Ra = 0, 1 \times 10^5$ e 1×10^6 . O número de Rayleigh igual a zero representa a convecção forçada pura e o número de Prandtl igual a 0,7 representa o ar como sendo o fluido que passa entre os tubos. Os desvios percentuais, em módulo, em relação aos outros dois trabalhos, são calculados como sendo:

$$\text{Desvio} = \left[\frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{\varepsilon_2} \right] \times 100\% , \quad (4.9)$$

sendo ε_1 o valor da grandeza obtido pelo presente trabalho e ε_2 o valor da grandeza obtido pelo trabalho utilizado na comparação. A variável ε pode representar: o número de Nusselt médio (Nu), a razão entre o número de Nusselt médio da convecção mista e o número de Nusselt médio da convecção forçada (Nu/Nu_0), o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) ou razão entre o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds da convecção mista e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds da convecção forçada ($fRe/(fRe)_0$).

As equações de conservação são resolvidas no regime não permanente, mas apresentados apenas os resultados do regime permanente.

Tabela 4.1. Numero de Nusselt médio para $RR = 3$ e $Pr = 0,7$

	Nieckele & Patankar (1985)		Ribeiro (1992)		Presente trabalho	
Ra	Nu	Nu/Nu ₀	Nu	Nu/Nu ₀	Nu	Nu/Nu ₀
0	6,98 (0,04)	1,00 (0,00)	7,058 (1,15)	1,00 (0,00)	6,977	1,00
10^5	8,38 (1,66)	1,20 (1,69)	8,479 (2,81)	1,20 (1,69)	8,241	1,18
10^6	10,47 (0,54)	1,50 (0,67)	11,081 (5,00)	1,53 (1,31)	10,527	1,51

Na Tabela 4.1 os resultados de Nieckele & Patankar (1985) para Nu com $Ra = 0$ são obtidos de uma solução analítica exata. Os desvios percentuais calculados são mostrados entre parênteses. Pode-se notar que o presente trabalho tem um desvio muito pequeno (0,04 %, para o número de Nusselt médio) em relação a esta solução analítica. Os desvios do presente trabalho em relação aos outros dois valores do número de Rayleigh são pequenos, sendo que o máximo é de 5,00 % em relação a Ribeiro (1992) para $Ra = 1 \times 10^6$. Os resultados para Nu/Nu_0 representam a razão entre o número de Nusselt médio da convecção mista ($Ra \neq 0$) e o número de Nusselt médio da convecção forçada ($Ra = 0$). O presente trabalho também obteve valores de Nu/Nu_0 muito próximos aos encontrados por Nieckele & Patankar (1985) e por Ribeiro (1992), sendo o desvio máximo de 1,69%.

Tabela 4.2. Produto do fator de atrito pelo número de Reynolds para $RR = 3$ e $Pr = 0,7$

	Nieckele & Patankar (1985)		Ribeiro (1992)		Presente trabalho (2002)	
Ra	fRe	fRe/(fRe) ₀	fRe	fRe/(fRe) ₀	fRe	fRe/(fRe) ₀
0	94,2 (1,78)	1,00 (0,00)	95,687 (3,31)	1,00 (0,00)	92,521	1,00
10^5	98,1 (3,36)	1,02 (0,00)	97,973 (3,23)	1,02 (0,00)	94,805	1,02
10^6	105,5 (0,34)	1,12 (1,79)	108,561 (3,15)	1,13 (0,88)	105,143	1,14

Na Tabela 4.2 os resultados de Nieckele & Patankar (1985), para fRe com $Ra = 0$, também são obtidos de uma solução analítica exata. Os desvios percentuais calculados são mostrados entre

parênteses. Os resultados do presente trabalho apresentam um desvio de apenas 1,78 % (para fRe) em relação a esta solução. Os desvios em relação aos trabalhos de Nieckele & Patankar (1985) e Ribeiro (1992) são pequenos, sendo que o máximo é de apenas 3,36 % (para fRe) em relação a Nieckele & Patankar (1985) com $Ra = 1 \times 10^5$. O termo $fRe/(fRe)_0$ representa a razão entre o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds para a convecção mista ($Ra \neq 0$) e este produto para a convecção forçada ($Ra = 0$). Os resultados para $fRe/(fRe)_0$ são quase coincidentes com os obtidos pelos outros dois trabalhos, sendo o desvio máximo de 1,79%.

Com base nas comparações de resultados mostradas nas Tabelas 4.1 e 4.2, considera-se que o programa utilizado no presente trabalho conduz a bons resultados e pode ser utilizado para estudar outras geometrias, as quais serão apresentadas no Capítulo 5.

4.2.2 – Tubo Horizontal com uma Placa Interna Excêntrica

O programa é aplicado para um tubo horizontal com uma placa interna excêntrica e os resultados são comparados com o trabalho de Hung et al. (1997), cujo resumo é apresentado abaixo:

- Hung et al. (1997) fizeram um estudo numérico da transferência de calor por convecção forçada em um tubo horizontal com uma placa longitudinal excêntrica, sendo o tubo aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme e a placa termicamente isolada

A Figura 4.3 representa a geometria estudada no trabalho acima.

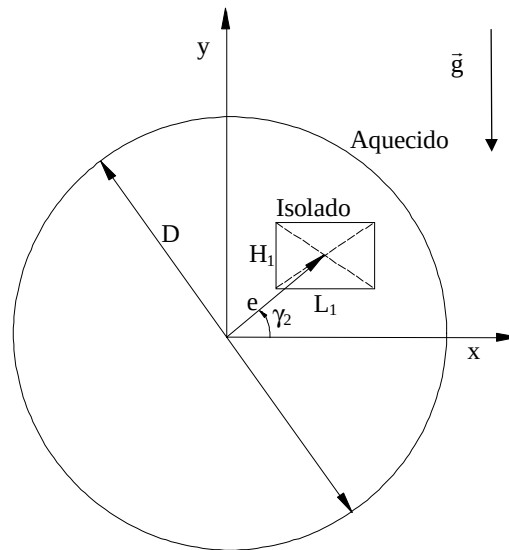


Figura 4.3 – Geometria para um tubo com uma placa excêntrica.

As equações de conservação para este problema são iguais àsquelas apresentadas para tubos horizontais concêntricos, quais sejam:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (4.10)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} + \text{Pr} \right) = \frac{\partial W}{\partial \tau} , \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - C_g \frac{W}{W} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} , \quad (4.12)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} + \text{Ra Pr} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} , \quad (4.13)$$

As condições de contorno consideradas são: tubo aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme e placa termicamente isolada. A vorticidade no contorno é calculada conforme o Apêndice 4. As condições iniciais e de contorno, para o problema, são dadas por:

i. Condições iniciais ($\tau = 0$):

Todo o domínio:

$$\psi = \theta = \omega = W = 0 . \quad (4.14)$$

ii. Condições de contorno ($\tau > 0$):

Parede do tubo:

$$\theta = 0 , \quad \psi = 0 , \quad W = 0 , \quad \omega = \omega_M . \quad (4.15a)$$

Parede da placa:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \psi = 0 , \quad W = 0 , \quad \omega = \omega_M , \quad (4.15b)$$

sendo n a direção normal à superfície e ω_M a vorticidade que é calculada e atualizada a cada passo de tempo de acordo com o Apêndice 4.

A constante geométrica (C_g) da Equação (4.12), neste caso, passa a ser:

$$C_g = 4 \frac{P_q}{P_m} = \frac{4 \pi R R_2 \sqrt{A R_2^2 + 1}}{2(A R_2 + 1) + \pi R R_2 \sqrt{A R_2^2 + 1}} , \quad (4.16)$$

sendo $R R_2$ a razão de raios e $A R_2$ a razão de aspecto dadas por:

$$R R_2 = \frac{D}{\sqrt{H_1^2 + L_1^2}} , \quad A R_2 = \frac{H_1}{L_1} , \quad (4.17)$$

sendo H_1 a altura da placa, L_1 a largura da placa e D o diâmetro do tubo.

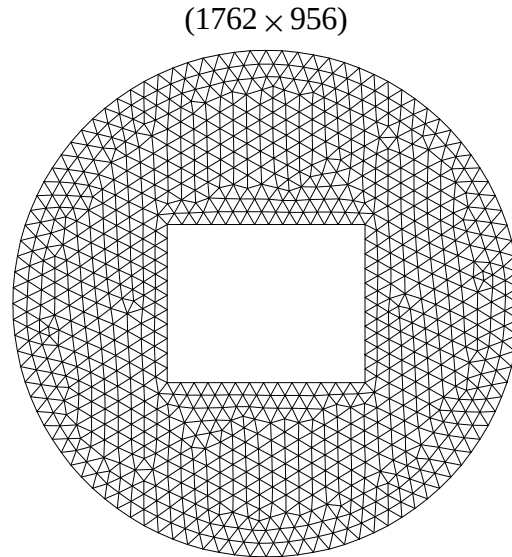


Figura 4.4 – Malha para $E = 0,00$ e $\gamma_2 = 0^\circ$.

As malhas de elementos finitos utilizadas na comparação para um tubo com uma placa interna excêntrica são mostradas nas Figuras 4.4, 4.5 e 4.6. Nestas figuras γ_2 é o ângulo de posição da placa e “E” é a excentricidade adimensional da placa, definida por:

$$E = 2 \frac{e}{D}, \quad (4.18)$$

sendo “e” a excentricidade, ou seja, a distância entre o centro da placa e o centro do tubo (veja Figura 4.3). Para todos os casos: $RR_2 = 2,0$ e $AR_2 = 0,8$. Os números entre parêntesis representam a malha (elementos × nós).

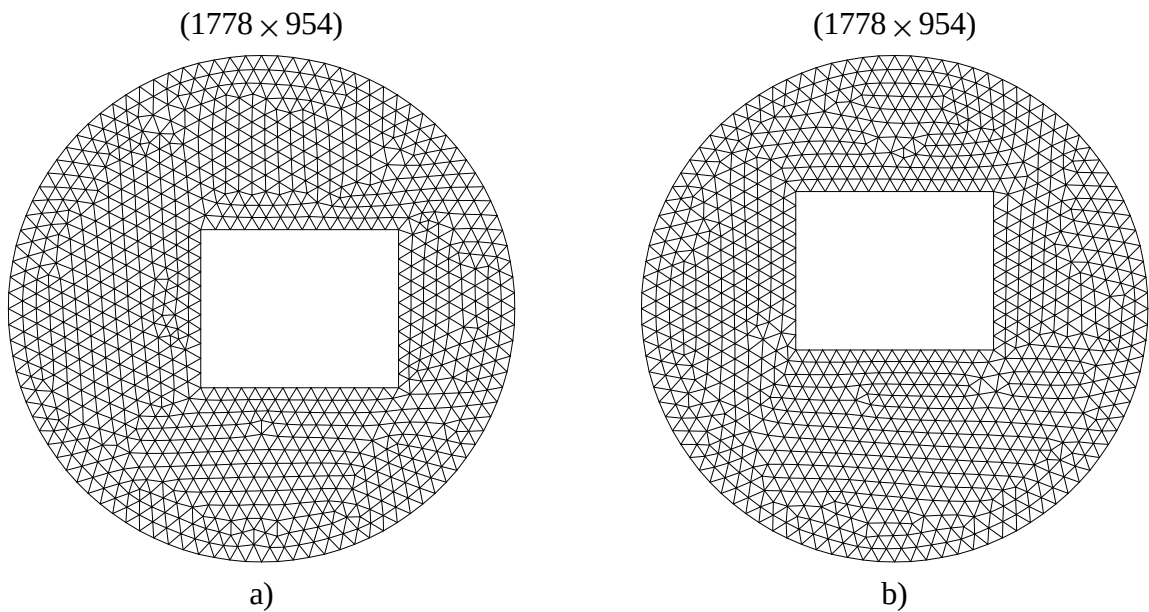


Figura 4.5 – a) Malha para $E = 0,15$ com $\gamma_2 = 0^\circ$; b) Malha para $E = 0,15$ com $\gamma_2 = 90^\circ$.

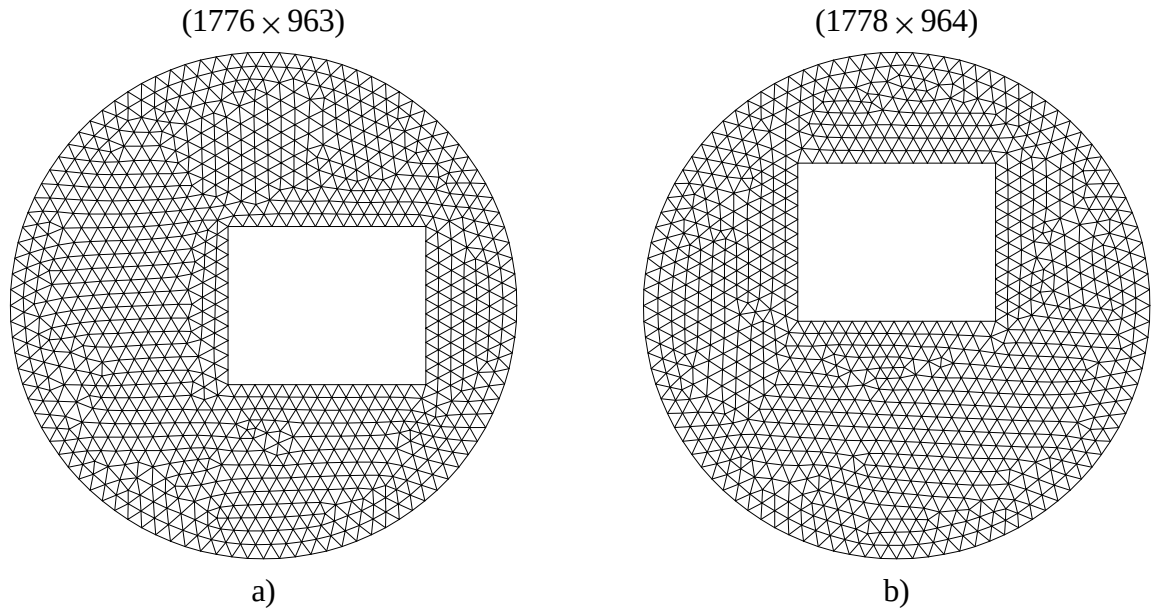


Figura 4.6 – a) Malha para $E = 0,25$ com $\gamma_2 = 0^\circ$; b) Malha para $E = 0,25$ com $\gamma_2 = 90^\circ$.

Na Tabela 4.3 são apresentados as comparações de resultados para número de Rayleigh, $Ra = 0$, razão de raios, $RR_2 = 2,0$, razão de aspecto, $AR_2 = 0,8$, número de Prandtl, $Pr = 0,7$, excentricidade adimensional, $E = 0; 0,15$ e $0,25$ e ângulo de posição da placa, $\gamma_2 = 0^\circ$ e 90° . O número de Rayleigh igual a zero representa a convecção forçada pura e o número de Prandtl igual a $0,7$ representa o ar como sendo o fluido que passa no tubo. Os desvios percentuais, em módulo, em relação ao trabalho de referência, são calculados como sendo:

$$\text{Desvio} = \left[\frac{|\epsilon_1 - \epsilon_2|}{\epsilon_2} \right] \times 100\% , \quad (4.19)$$

sendo ϵ_1 o valor da grandeza obtido pelo presente trabalho e ϵ_2 o valor da grandeza obtido pelo trabalho utilizado na comparação. A variável ϵ pode representar o número de Nusselt médio (Nu) ou o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe).

Tabela 4.3. Comparação de Nu e fRe para: $RR_2 = 2,00$ e $AR_2 = 0,8$

E	γ_2	Hung et al. (1997)		Presente Trabalho	
		Nu	fRe	Nu	fRe
0,00	0°	4,782 (0,25)	92,12 (1,66)	4,770	93,649
0,15	0°	3,997 (0,30)	85,24 (1,63)	3,985	86,626
	90°	3,724 (0,59)	84,52 (1,58)	3,702	85,856
0,25	0°	3,268 (0,46)	75,44 (1,42)	3,283	76,515
	90°	2,939 (0,71)	73,92 (1,44)	2,918	74,981

Alguns cuidados devem ser tomados ao se comparar os resultados do presente trabalho com o trabalho de Hung et al. (1997). As razões de raios e de aspecto definidas em Hung et al. (1997) são o inverso das definidas no presente trabalho, o fator de atrito definido naquele trabalho é $\frac{1}{4}$ do definido neste trabalho e a excentricidade adimensional definida naquele trabalho é o dobro da definida no presente trabalho. Os valores de E , RR_2 e AR_2 da tabela acima seguem as definições do presente trabalho. A excentricidade adimensional (E) de Hung et al. (1997) foi dividida por dois e o produto

fRe de Hung et al. (1997) foi multiplicado por 4, para serem colocados na tabela.

Observando-se a Tabelas 4.3 nota-se que os desvios do presente trabalho em relação ao trabalho de Hung et al. (1997) são pequenos, sendo o máximo de 1,66% para fRe e 0,71% para o número de Nusselt médio. Levando-se em conta que os desvios encontrados são pequenos, o código computacional pode ser considerado validado.

4.3 – Validação para Dutos Verticais

O programa é aplicado para um duto vertical elíptico com fluxo de calor axial uniforme e temperatura periférica uniforme. O escoamento se dá no sentido pró-empuxo, ou seja, o escoamento principal tem o mesmo sentido do escoamento secundário originado pelas forças de empuxo. Os resultados são comparados com os trabalhos de Bhatti ((1984) e Velusamy & Garg (1996). Os resumos destes dois trabalhos são apresentados abaixo:

- Bhatti (1984) fez um estudo sobre a transferência de calor por convecção forçada em um duto elíptico vertical, sendo o duto aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. Apresentou resultados de número de Nusselt médio para $0 \leq BA \leq 1,0$. O parâmetro BA é a razão entre o semi-eixo menor e o semi-eixo maior da elipse.
- Velusami & Garg (1996) utilizaram o método de volume de controle para estudar a transferência de calor por convecção mista em um duto elíptico vertical, sendo o duto aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. Apresentaram distribuições de velocidade axial e de temperatura e determinaram o número de Nusselt médio (Nu) e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) para $0 \leq Ra \leq 3,8 \times 10^4$ e $0,1 \leq BA \leq 1,0$. O parâmetro BA é a razão entre o semi-eixo menor e o semi-eixo maior da elipse.

A Figura 4.7 representa a geometria estudada nos dois trabalhos acima.

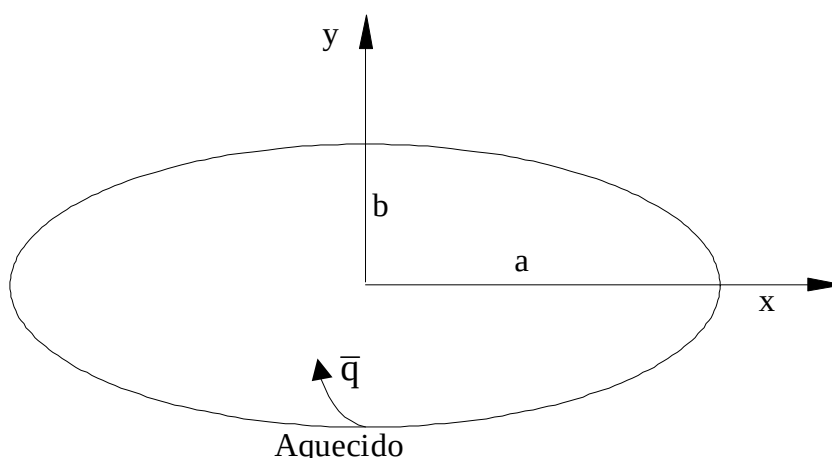


Figura 4.7 – Geometria para um duto vertical elíptico.

Para se obter as equações de conservação para o duto vertical elíptico basta tomar as Equações (2.48), (2.49), (2.50) e (2.51), apresentadas no Capítulo 2 para dutos horizontais e verticais, e fazer: $\gamma_1 = 90^\circ$ e $\lambda_1 = 0$, o que resulta em:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0 , \quad (4.20)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} + \text{Pr} + \frac{\text{Ra}}{\text{Re}} \overline{W} \theta \right) = \frac{\partial W}{\partial \tau} , \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - C_g \frac{W}{\overline{W}} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} , \quad (4.22)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} , \quad (4.23)$$

As condições de contorno consideradas são: duto aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. A vorticidade no contorno é calculada conforme o Apêndice 4. As condições iniciais e de contorno, para o problema, são dadas por:

i. Condições iniciais ($\tau = 0$):

Todo o domínio:

$$\psi = \theta = \omega = W = 0 . \quad (4.24)$$

ii. Condições de contorno ($\tau > 0$):

Parede do duto:

$$\theta = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad , \quad W = 0 \quad , \quad \omega = \omega_M . \quad (4.25)$$

sendo ω_M a vorticidade que é calculada e atualizada a cada passo de tempo conforme o Apêndice 4.

A constante geométrica (C_g) da Equação (4.22), neste caso, passa a ser:

$$C_g = 4 \frac{P_q}{P_m} = 4 , \quad (4.26)$$

As malhas de elementos finitos utilizadas na comparação para o duto vertical elíptico são mostradas nas Figuras 4.8, 4.9 e 4.10 para $BA = 0,1$, $0,5$ e $1,0$, respectivamente. Os números entre parêntesis representam a malha (elementos $\times$ nós).

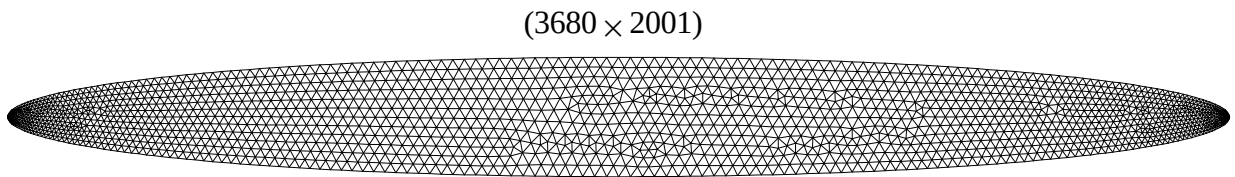


Figura 4.8 – Malha para duto elíptico com $BA = 0,1$.

(3924 × 2048)

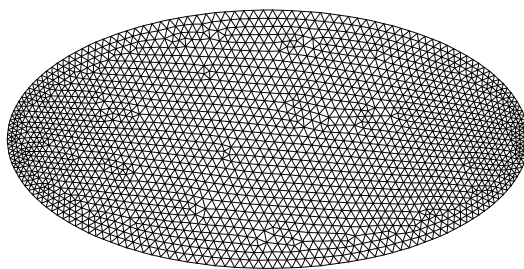


Figura 4.9 – Malha para duto elíptico com BA = 0,5.

(3684 × 1913)

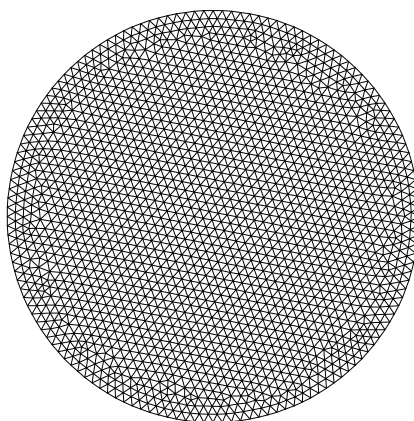


Figura 4.10 – Malha para duto elíptico com BA = 1,0.

Nas Tabelas 4.4 e 4.5 são apresentados as comparações de resultados do número de Nusselt médio (Nu) e do produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) para um duto vertical elíptico com número de Rayleigh variando de $0 \leq Ra \leq 3,8 \times 10^4$, número de Reynolds, $Re = 5$, razão entre o semi-eixo menor e o semi-eixo maior variando de $0,1 \leq BA \leq 1,0$, número de Prandtl, $Pr = 0,7$. O número de Rayleigh igual a zero representa a convecção forçada pura e o número de Prandtl igual a 0,7 representa o ar.

Tabela 4.4 – Comparação de resultados do número de Nusselt médio para duto elíptico.

Ra	Re	BA	Nu		
			Bhatti (1984)	Velusamy & Garg (1996)	Presente Trabalho
0	—	1,0	4,3636 (0,08)	—	4,360
	—	0,5	4,5878 (0,74)	4,552 (0,04)	4,554
	—	0,1	5,2674 (2,13)	5,125 (0,59)	5,155
$0,6 \times 10^4$	5	0,1	—	8,252 (1,14)	8,346
$2,0 \times 10^4$			—	10,879 (0,17)	10,897
$3,8 \times 10^4$			—	12,742 (1,07)	12,878

Os desvios percentuais em módulo do presente trabalho em relação ao outro trabalho são apresentados entre parêntesis nas Tabelas 4.4 e 4.5 e calculados como:

$$\text{Desvio} = \left[\frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{\varepsilon_2} \right] \times 100\% , \quad (4.27)$$

sendo ε_1 o valor da grandeza obtido pelo presente trabalho e ε_2 o valor da grandeza obtido pelo trabalho utilizado na comparação. A variável ε pode representar o número de Nusselt médio (Nu) ou o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe).

Um cuidado deve ser tomado ao se comparar os resultados do presente trabalho com o trabalho de Velusamy & Garg (1996). O fator de atrito definido naquele trabalho é $\frac{1}{4}$ do definido neste trabalho. Os valores do produto fRe de Velusamy & Garg (1996) foram multiplicados por 4, para serem colocados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Comparação de resultados de fRe para duto elíptico.

Ra	Re	BA	fRe	
			Velusamy & Garg (1996)	Presente Trabalho
0	—	0,5	67,276 (0,19)	67,403
	—	0,1	77,228 (2,24)	78,955
$0,6 \times 10^4$	5	0,1	504,260 (10,03)	554,829
$2,0 \times 10^4$	5		1230,000 (11,08)	1366,253
$3,8 \times 10^4$	5		1984,260 (11,67)	2215,578

Observando-se as Tabelas 4.4 e 4.5 nota-se que os desvios do presente trabalho em relação aos trabalhos de Bhatti (1984) e Velusamy & Garg (1996), para $Ra = 0$, são pequenos, sendo o máximo de 2,13% para Nu e 2,24% para fRe. Para $Ra \neq 0$ os desvios no produto fRe foram um pouco maiores, de 10,03 a 11,67, isto se deve talvez ao fato de os trabalhos utilizados na comparação não terem considerado a influência do número de Reynolds. Levando-se em conta os desvios encontrados o código computacional pode ser considerado validado.

4.4 – Validação para Banco de Tubos em um Escoamento Vertical

O programa é aplicado para um banco de tubos em um duto vertical. O duto é termicamente isolado, os tubos são mantidos aquecidos com temperatura uniforme e o escoamento tem temperatura e velocidade uniformes na entrada. O escoamento pode ocorrer no sentido pró-empuxo, ou seja, o escoamento principal tem o mesmo sentido do escoamento secundário originado pelas forças de empuxo ou contra-empuxo, ou seja o escoamento principal tem o sentido oposto ao do escoamento secundário. Os resultados são comparados com o trabalho de Gowda et al. (1997), cujo resumo é apresentado abaixo:

- Gowda et al. (1997) utilizaram o método de elementos finitos com formulação baseada nas variáveis adimensionais: pressão (P), velocidade (U,V) e temperatura (θ) para estudar a convecção mista laminar sobre um banco de tubos horizontais em um duto vertical. Analisaram os escoamentos pró e contra-empuxo, determinaram as distribuições de função corrente e temperatura, os números de Nusselt local e médio e o coeficiente de pressão. As condições de contorno consideradas foram: tubos aquecidos com temperatura uniforme e duto vertical com temperatura e velocidade uniformes na entrada e isolamento térmico nas paredes.

Considere um trocador de calor formado por colunas de tubos horizontais separadas por placas verticais. O escoamento se dá no sentido vertical externamente aos tubos. A Figura 4.11(a) representa a geometria deste trocador de calor. Tomando-se apenas uma coluna de tubos pode-se dizer que se

trata de um banco de tubos em um duto vertical, Figura 4.11(b). Como existe simetria em relação a um plano vertical passando pelo eixo X, e para redução de tempo computacional, pode-se utilizar apenas a metade da geometria, Figura 4.11(c).

Os parâmetros geométricos (veja Figura 4.11) do problema são dados por:

$$LD = \frac{L}{D}, \quad HD = \frac{H}{D}, \quad (4.28)$$

sendo L a largura do duto, H a distância entre os tubos no sentido vertical e D o diâmetro dos tubos.

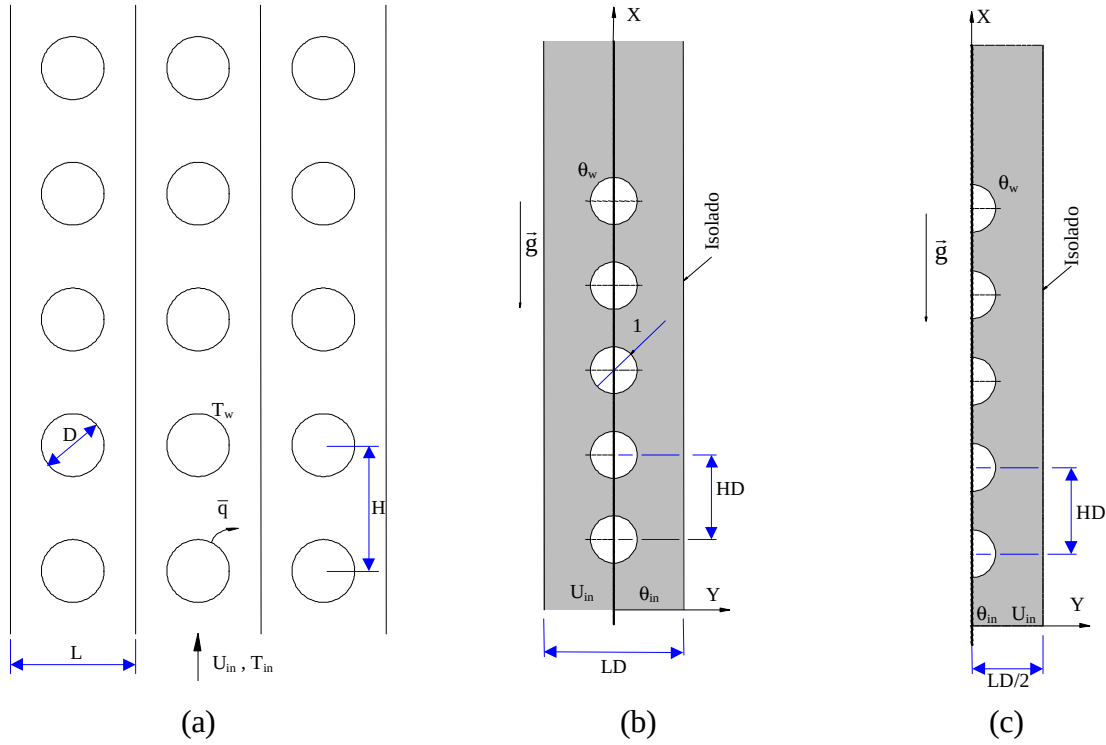


Figura 4.11 – Geometria para um banco de tubos em um duto vertical.

As equações de conservação para um banco de tubos horizontais em um escoamento vertical são as Equações (2.85), (2.86), (2.87), apresentadas no Capítulo 2 e transcritas abaixo.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega, \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (4.30)$$

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - Ri \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (4.31)$$

As condições de contorno consideradas são tubos aquecidos com temperatura uniforme, parede do duto termicamente isolada e temperatura e velocidade uniformes na entrada do duto. A

vorticidade no contorno é calculada conforme o Apêndice 4. As condições iniciais e de contorno, para o problema, são dadas por:

i. Condições iniciais ($\tau = 0$):

Todo o domínio:

$$\psi = \theta = \omega = 0 . \quad (4.32a)$$

ii. Condições de contorno ($\tau > 0$):

Parede dos tubos:

$$\theta = 1 , \quad \psi = 0 , \quad \omega = \omega_M . \quad (4.32b)$$

Entrada do duto ($X = 0$):

$$\theta = 0 , \quad \psi = Y , \quad \omega = 0 . \quad (4.32c)$$

Parede do duto ($Y = LD/2$):

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \psi = Y , \quad \omega = \omega_M , \quad (4.32d)$$

Saída do duto:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 , \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 , \quad (4.32e)$$

Linha de simetria ($Y = 0$):

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \psi = 0 , \quad \omega = 0 , \quad (4.32f)$$

sendo n a direção normal à superfície e ω_M a vorticidade que é calculada e atualizada a cada passo de tempo de acordo com o Apêndice 4.

Os desvios percentuais em módulo do presente trabalho em relação ao outro trabalho são calculados como sendo:

$$\text{Desvio} = \left| \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \right| \times 100\% , \quad (4.33)$$

sendo ϵ_1 o valor da grandeza obtido pelo presente trabalho e ϵ_2 o valor da grandeza obtido pelo trabalho utilizado na comparação.

As malhas de elementos finitos utilizadas na comparação para o problema são mostradas nas Figuras 4.12(a) e 4.12(b). Para os dois casos: $HD = 1,5$. Os números entre parêntesis representam a

malha (elementos $\times$ nós). A distância entre a entrada e o centro do primeiro tubo é igual a D e a distância do centro do último tubo à saída é igual a $3 \times D$

Na Figura 4.13 é apresentado o número de Nusselt médio em função do número de Richardson apenas para o primeiro tubo, com $Pr = 0,7$, número de Richardson, $-5,0 \leq Ri \leq 5,0$, número de Reynolds, $Re = 50$, $HD = 1,5$ e $LD = 1,5$ e $2,0$. O valor negativo do número de Richardson representa o escoamento contra-empuxo enquanto que o valor positivo indica o escoamento pró-empuxo. As duas curvas superiores mostram a comparação de resultados para a largura adimensional do duto (LD) igual a $1,5$ sendo encontrado um desvio máximo de $4,88\%$. As duas curvas inferiores apresentam a comparação para $LD = 2,0$ e o máximo desvio encontrado é de $8,16\%$. Levando-se em conta os valores dos desvios encontrados, o código computacional pode ser considerado validado.

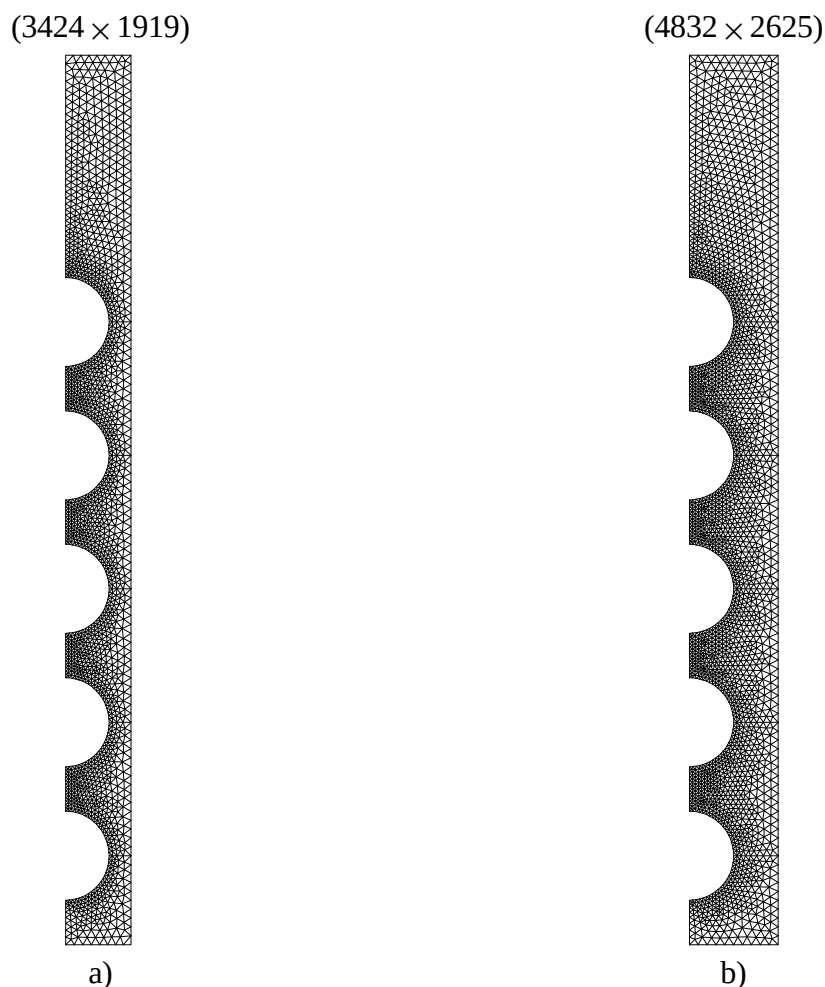


Figura 4.12 – a) Malha para $HD = 1,5$ com $LD = 1,5$; b) Malha para $HD = 1,5$ com $LD = 2,0$.

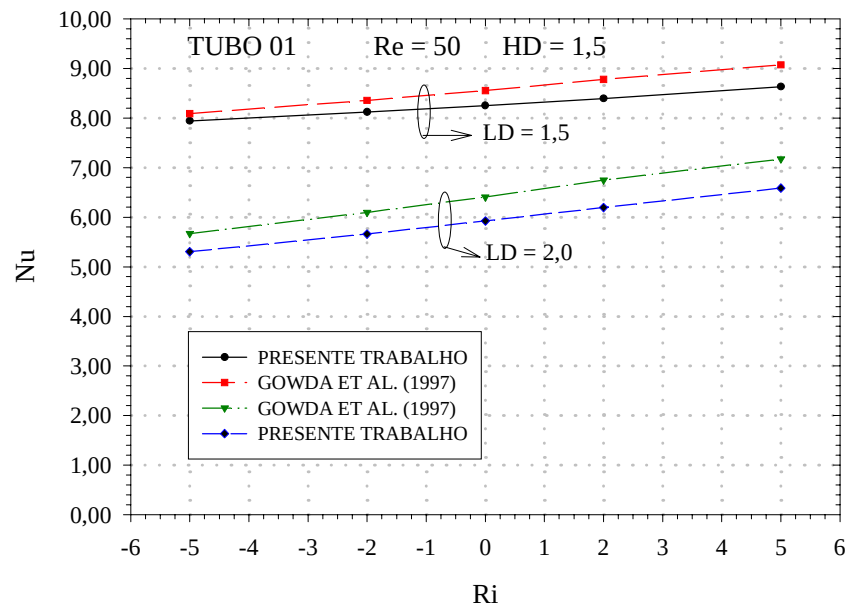


Figura 4.13 – Comparação de resultados para banco de tubos.

CAPITULO 5

RESULTADOS

5.1 – Introdução

Para a solução das equações de conservação apresentadas no Capítulo 2, foram desenvolvidos vários programas computacionais em linguagem FORTRAN utilizando o método de elementos finitos com o elemento triangular linear e formulação de Galerkin. No Capítulo 4 foram apresentadas as validações destes programas tornando-os aptos para serem aplicados aos problemas de transferência de calor por convecção mista laminar propostos para o presente trabalho. No presente Capítulo serão apresentados resultados para os seguintes problemas:

Dutos Horizontais:

- Duto retangular horizontal com cilindro interno aquecido para $\gamma = 0^\circ$;
- Duto retangular horizontal com cilindro interno aquecido para $\gamma \neq 0^\circ$;
- Tubo horizontal com placa interna excêntrica;

Dutos Verticais:

- Duto Vertical Elíptico;

Bancos de Tubos em um Escoamento Vertical:

- Banco de tubos alinhados entre placas verticais;
- Banco de tubos alinhados em um escoamento vertical;
- Banco de tubos alternados em um escoamento vertical.

5.2 – Duto Retangular Horizontal com Cilindro Interno Aquecido para $\gamma = 0^\circ$

A primeira aplicação do presente trabalho é o estudo da convecção mista laminar em um duto horizontal de seção retangular com um cilindro interno aquecido. O duto é termicamente isolado e o cilindro interno é aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. O ângulo de inclinação γ da seção retangular do duto em relação a um plano horizontal é igual a zero (veja Figura 5.1). O número de Prandtl (Pr) é igual a 0,7 (ar). O número de Rayleigh (Ra) varia de

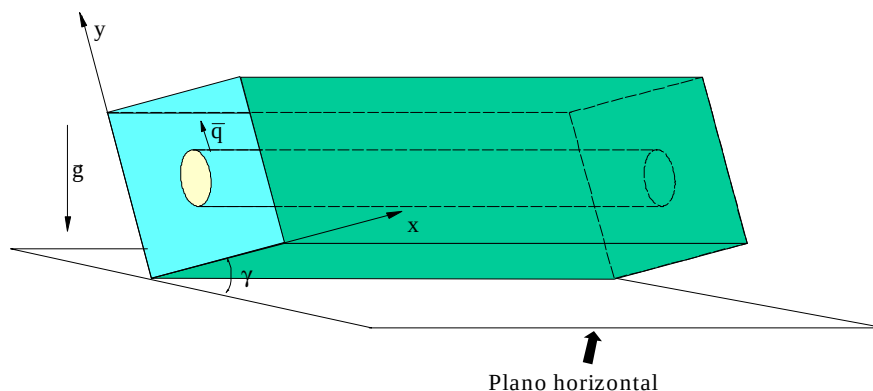


Figura 5.1 – Duto horizontal retangular com um cilindro interno aquecido.

raios (RR_1) os valores 5,66; 6,40 e 8,94. O cilindro interno está posicionado no centro do duto retangular.

A geometria estudada pode ser representada pela Figura 5.2.

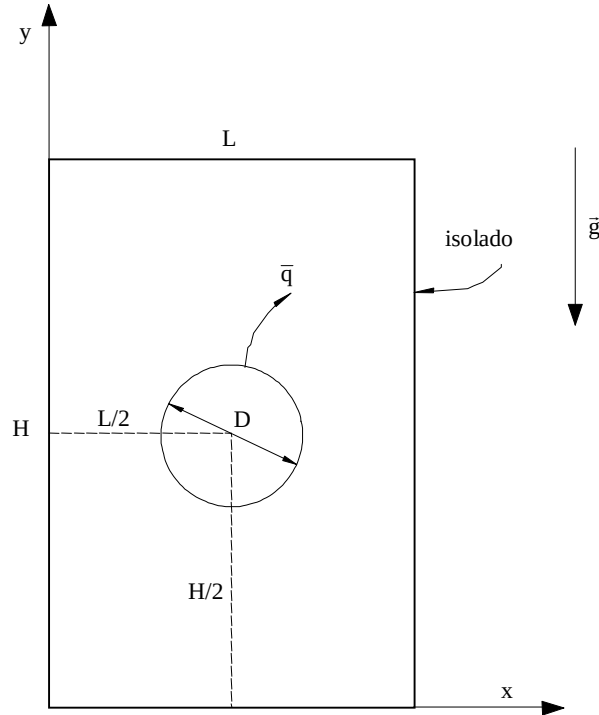


Figura 5.2 – Geometria para duto retangular com cilindro interno, $\gamma = 0^\circ$.

Define-se H^* e L^* como:

$$H^* = \frac{H}{D}, \quad L^* = \frac{L}{D}. \quad (5.1)$$

sendo H a altura e L a largura da seção transversal do duto e D o diâmetro do cilindro interno.

A razão de aspecto (AR_1) é dada pela razão entre a altura e a largura da seção retangular, e razão de raios (RR_1) é dada pela razão entre a diagonal da seção retangular e o diâmetro do cilindro interno, como pode ser visto a seguir.

$$AR_1 = \frac{H}{L} = \frac{H^*}{L^*}, \quad RR_1 = \frac{\sqrt{H^2 + L^2}}{D} = \sqrt{\frac{H^2}{D^2} + \frac{L^2}{D^2}} = \sqrt{(H^*)^2 + (L^*)^2} \quad (5.2)$$

Para se obter as equações de conservação para este caso basta tomar as Equações (2.48), (2.49), (2.50) e (2.51), apresentadas no Capítulo 2 para dutos horizontais e verticais, e fazer: $\gamma_1 = 0^\circ$ (duto horizontal), $\lambda_1 = 1$ (duto horizontal) e $\gamma = 0^\circ$, o que resulta em:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (5.3)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} + \text{Pr} \right) = \frac{\partial W}{\partial \tau} , \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - C_g \frac{W}{\overline{W}} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} , \quad (5.5)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} + \text{Ra Pr} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} , \quad (5.6)$$

As condições de contorno consideradas são: duto externo isolado termicamente e cilindro interno com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. A vorticidade no contorno é calculada conforme o Apêndice 4. As condições iniciais e de contorno são dadas por:

i. Condições iniciais ($\tau = 0$):

Todo o domínio:

$$\psi = \theta = \omega = W = 0 . \quad (5.7)$$

ii. Condições de contorno ($\tau > 0$):

Parede do duto retangular:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \psi = 0 , \quad W = 0 , \quad \omega = \omega_M . \quad (5.8a)$$

Parede do cilindro interno:

$$\theta = 0 , \quad \psi = 0 , \quad W = 0 , \quad \omega = \omega_M . \quad (5.8b)$$

Eixo de simetria (plano vertical passando pelo centro do cilindro):

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \psi = 0 , \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0 , \quad \omega = 0 , \quad (5.8c)$$

sendo n a direção normal à superfície e ω_M a vorticidade que é calculada e atualizada a cada passo de tempo de acordo com o Apêndice 4.

A constante geométrica (C_g) da Equação (5.5), para este caso, passa a ser:

$$C_g = 4 \frac{P_q}{P_m} = \frac{4 \pi}{2(H^* + L^*) + \pi} = \frac{4 \pi \sqrt{AR_1^2 + 1}}{\pi \sqrt{AR_1^2 + 1} + 2 RR_1 (AR_1 + 1)} , \quad (5.9)$$

sendo P_q o perímetro aquecido (cilindro) e P_m o perímetro em contato com o fluido (duto e cilindro)

Como o ângulo de inclinação γ da seção transversal do duto é igual a zero e o escoamento é

laminar, então existe simetria em relação a um plano vertical passando pelo centro do duto. Aproveitando esta simetria e visando uma diminuição do tempo computacional, será utilizada apenas a metade da geometria como domínio computacional.

Três malhas foram testadas para a aplicação do método de elementos finitos. As Figuras 5.3a, 5.3b e 5.3c mostram as malhas A, B e C, usadas como teste para a escolha da melhor malha para a geometria com $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$. Os números entre parêntesis representam as malhas (elementos $\times$ nós).

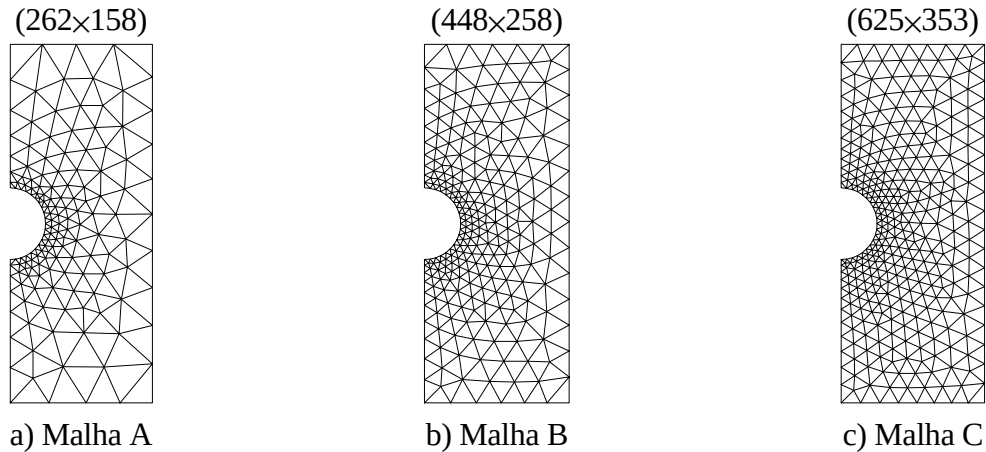


Figura 5.3 – Malhas testadas para $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$.

Os resultados do número de Nusselt médio (Nu) obtidos pelo uso das malhas A, B e C, podem ser vistos na Tabela 5.1. O desvio percentual em módulo, mostrado entre parêntesis nesta tabela, é calculado em relação ao número de Nusselt médio obtido pela utilização da malha C, da seguinte forma:

$$\text{Desvio} = \left[\frac{|\text{Nu}_{(\text{malha A ou B})} - \text{Nu}_{(\text{malha C})}|}{\text{Nu}_{(\text{malha C})}} \right] \times 100 \% . \quad (5.10)$$

Tabela 5.1 – Influência do número de elementos (NE) no número de Nusselt médio (Nu)

	Malha A		Malha B		Malha C	
Ra	NE	Nu	NE	Nu	NE	Nu
0	262	7,662 (2,24)	448	7,524 (0,40)	625	7,494
1×10^4		7,688 (2,15)		7,555 (0,39)		7,526
1×10^5		9,076 (0,68)		9,037 (0,24)		9,015
1×10^6		11,397 (0,56)		11,373 (0,34)		11,334

Pode-se notar os resultados obtidos pela utilização de uma malha “grosseira” como a malha A são bem próximos aos encontrados pela utilização da malha C, que é bem mais refinada. O desvio percentual no número de Nusselt médio obtido com a malha A em relação a malha C não passa de 2,24 % para $Ra = 0$ e esse desvio diminui com o aumento do número de Rayleigh. Nota-se também que o desvio percentual com o uso da malha B em relação a malha C é ainda menor, não passando de 0,40 % para $Ra = 0$.

Os resultados da Tabela 5.1 podem ser vistos, numa forma gráfica, na Figura 5.4. Nesta figura, observa-se uma pequena variação no número de Nusselt médio obtido para cada malha com $Ra = 0$ e

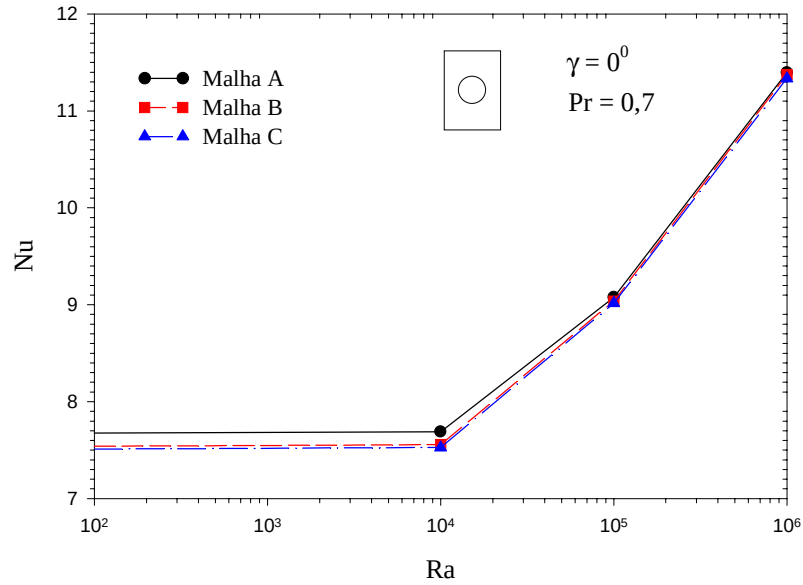


Figura 5.4 – Influência da malha no número de Nusselt para $AR_1 = 1,25$; $RR_1 = 6,40$; $\gamma = 0^0$ e $Pr = 0,7$.

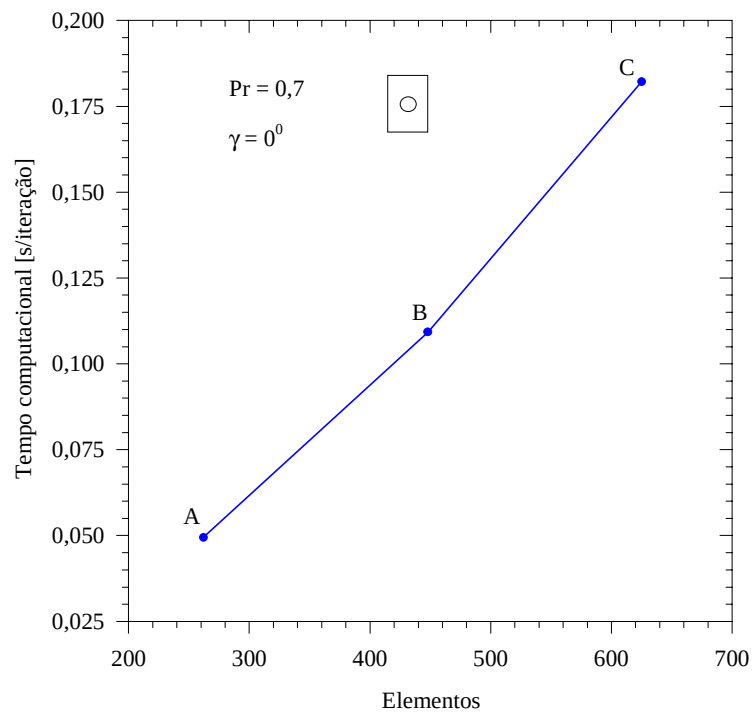


Figura 5.5 – Influência da malha no tempo computacional por iteração, para $AR_1 = 1,25$; $RR_1 = 6,40$; $\gamma = 0^0$ e $Pr = 0,7$.

$Ra = 1 \times 10^4$, mas esta diferença é quase imperceptível para $Ra = 1 \times 10^5$ e $Ra = 1 \times 10^6$.

Na Figura 5.5 mostra-se que o tempo computacional gasto no uso de cada uma das três malhas testadas aumenta muito com o refinamento da malha. Com base nas observações feitas para a Tabela 5.1, e para as Figuras 5.4 e 5.5, foi decidido que será utilizada malha B (Figura 5.3b) nos cálculos realizados no presente trabalho para a geometria com $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$, pois esta malha gera um número de Nusselt médio muito próximo ao gerado pela malha C (desvio máximo de 0,40 %) demandando menos tempo computacional.

O mesmo processo de escolha de malha para a geometria com $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$ foi utilizado para a escolha das malhas para as demais razões de aspecto e de raios. As malhas escolhidas para as geometrias com: $AR_1 = 0,50$ e $RR_1 = 8,94$, $AR_1 = 0,80$ e $RR_1 = 6,40$, $AR_1 = 1,00$ e $RR_1 = 5,66$, $AR_1 = 2,00$ e $RR_1 = 8,94$ são representadas, respectivamente, pelas Figuras 5.6, 5.7a e 5.7b.

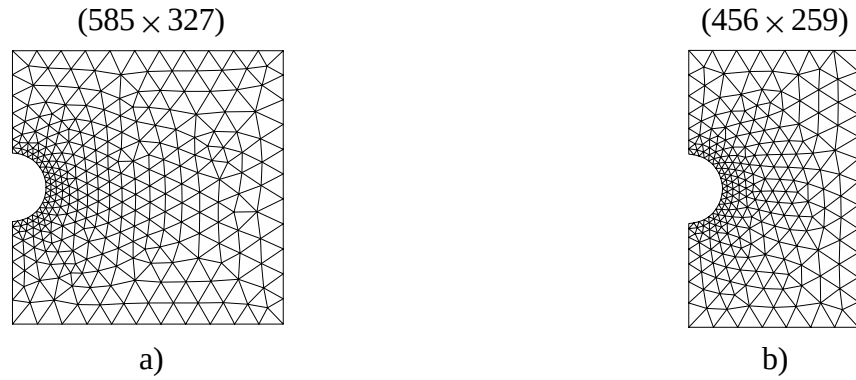


Figura 5.6 – Malhas para as geometrias: a) $AR_1 = 0,50$; $RR_1 = 8,94$ e b) $AR_1 = 0,80$; $RR_1 = 6,40$.

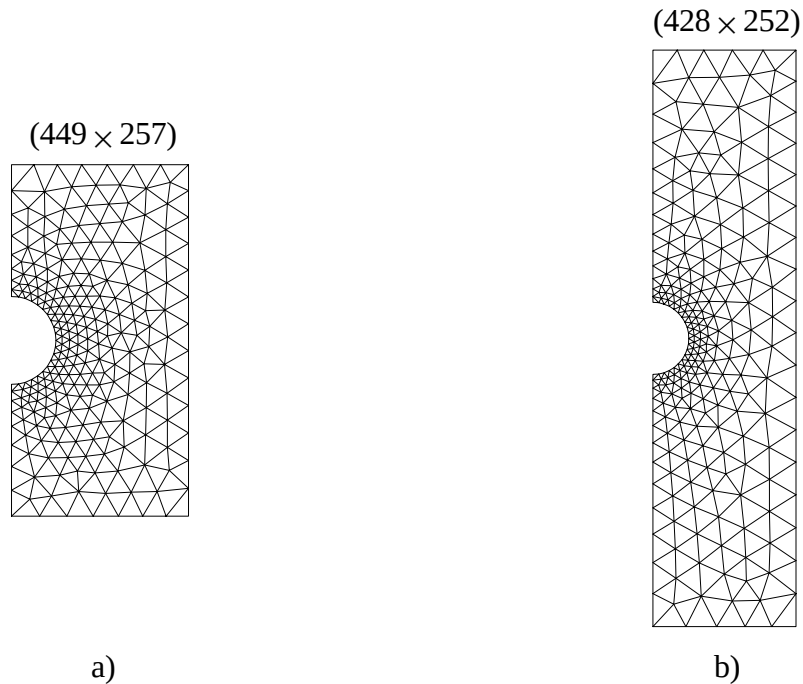


Figura 5.7 – Malhas para as geometrias: a) $AR_1 = 1,00$; $RR_1 = 5,66$ e b) $AR_1 = 2,00$; $RR_1 = 8,94$.

Na Tabela A5.1 do Apêndice 5 são apresentados os resultados, no regime permanente, para o número de Nusselt médio (Nu), para a razão entre o número de Nusselt médio da convecção mista e o número de Nusselt médio da convecção forçada pura (Nu/Nu_0), para o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) e para a razão entre este produto para a convecção mista e este produto para a convecção forçada pura [$fRe/(fRe)_0$]. Os valores de Nu_0 e $(fRe)_0$ são obtidos para a convecção forçada pura fazendo-se $Ra = 0$. Todos os valores mencionados são obtidos para $\gamma = 0^0$, $Pr=0,7$, $AR_1 = 0,50$; $0,80$; $1,00$; $1,25$ e $2,00$, $RR_1 = 5,66$; $6,40$ e $8,94$ e para $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$.

A partir dos valores listados na referida tabela foram feitas as Figuras 5.8 e 5.9, as quais mostram, respectivamente, a variação de Nu/Nu_0 e de $fRe/(fRe)_0$ em função de Ra , AR_1 e de RR_1 e as Figuras 5.10 e 5.11 mostram a variação de Nu e de fRe em função do tempo adimensional (τ), para a geometria com $AR_1 = 1,25$; $RR_1 = 6,40$ e $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$.

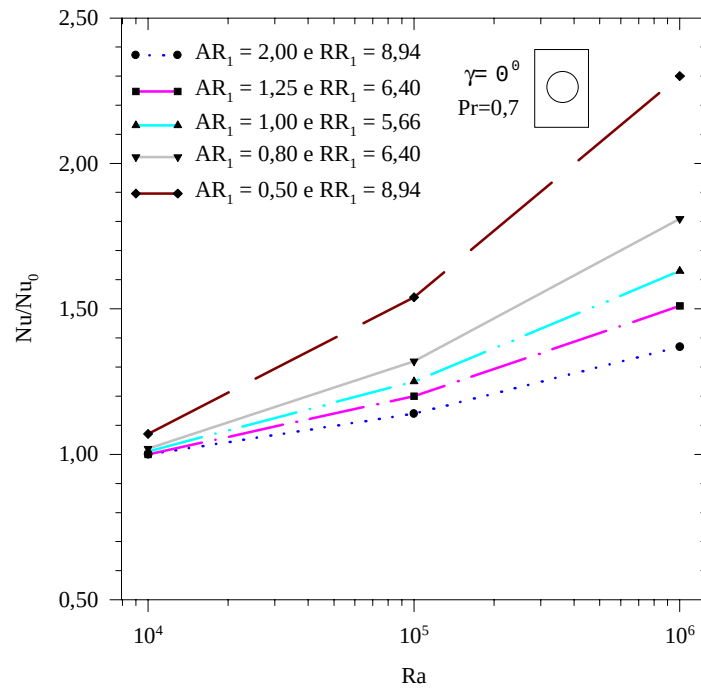


Figura 5.8 – Relação Nu/Nu_0 versus Ra para as várias razões de aspecto e de raios.

Na Figura 5.8 são apresentados resultados da razão entre o número de Nusselt da convecção mista e o número de Nusselt da convecção forçada (Nu/Nu_0) para as diversas razões de aspecto e de raios, em função do número de Rayleigh. Pode-se observar que quanto menor a razão de aspecto maior a razão Nu/Nu_0 , ou seja, maior a transferência de calor na convecção mista em relação à convecção forçada e quanto maior o número de Rayleigh maior também a relação Nu/Nu_0 , para todas as razões de aspecto e de raios.

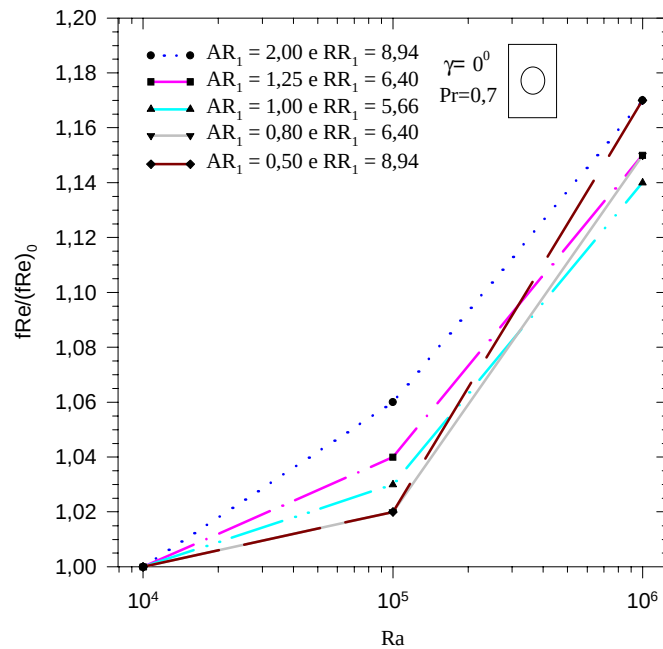


Figura 5.9 – Relação $fRe/(fRe)_0$ versus Ra para as várias razões de aspecto e de raios.

Na Figura 5.9 são mostrados resultados da razão entre o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds da convecção mista e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds da convecção forçada ($fRe/(fRe)_0$) para as diversas razões de aspecto e de raios, em função do número de Rayleigh (Ra). Pela figura é possível de se observar que para $Ra \leq 1 \times 10^5$, quanto maior a razão de aspecto maior a relação $fRe/(fRe)_0$. Para $Ra = 1 \times 10^6$ pode-se dizer que quanto maior a razão de raios maior é o valor da relação $fRe/(fRe)_0$ e que mantida constante a razão de raios e variando a razão de aspecto (AR_1), a razão $fRe/(fRe)_0$ se mantém constante.

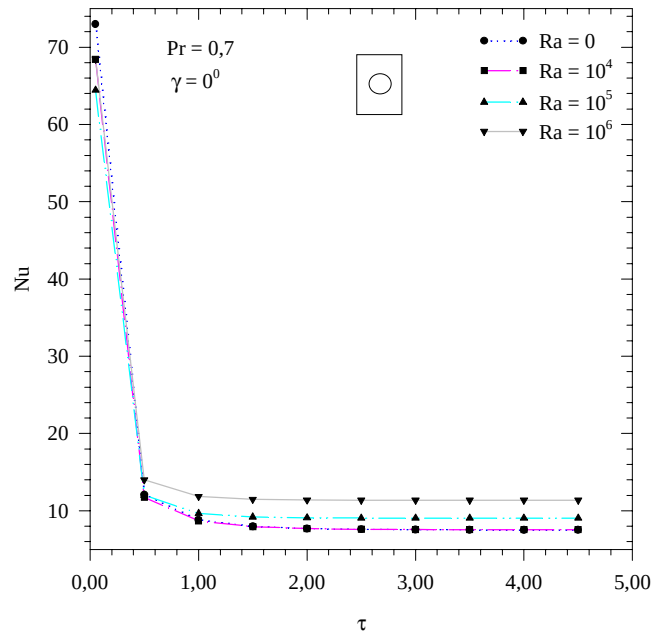


Figura 5.10 – Variação de Nu em função do tempo adimensional (τ), para $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$.

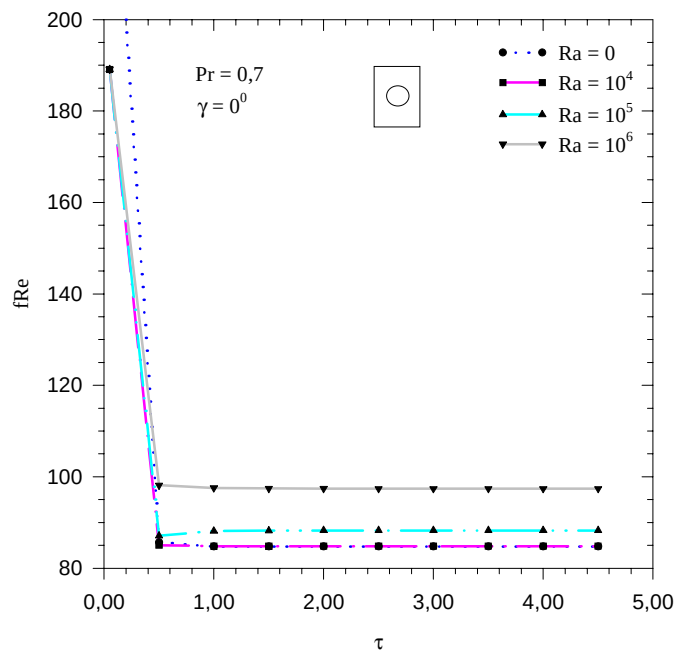


Figura 5.11 – Produto fRe em função do tempo adimensional (τ), para $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$.

A variação do número de Nusselt médio (Nu) em função do tempo adimensional e do número de Rayleigh para razão de aspecto, $AR_1 = 1,25$ e para a razão de raios, $RR_1 = 6,40$, pode ser vista na Figura 5.10. Nota-se claramente que o número de Nusselt aumenta com o aumento do número de Rayleigh e que para $Ra \leq 1 \times 10^4$ esse aumento é quase imperceptível. Nota-se que o número de Nusselt médio praticamente não varia mais após $\tau \approx 1,5$, sendo τ o tempo adimensional, ou seja, após este tempo as variações são tão pequenas que pode-se considerar como sendo o regime permanente.

A variação do produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) com o tempo adimensional (τ) e com o número de Rayleigh (Ra), para razão de aspecto, $AR_1 = 1,25$ e para a razão de raios, $RR_1 = 6,40$, pode ser visto na Figura 5.11. O aumento do produto fRe com o aumento do número de Rayleigh pode ser notado para $Ra > 1 \times 10^4$. Observa-se que após $\tau \approx 1,0$, praticamente não há mais variação no produto fRe , ou seja, o valor de fRe atinge um regime permanente antes do valor do número de Nusselt médio, que atinge este regime após $\tau \approx 1,5$.

A seguir são apresentadas as Figuras 5.12 e 5.13 que mostram a influência do número de Rayleigh ($0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$) nas distribuições de temperatura e de função corrente para $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$. São apresentadas também as Figuras 5.14 e 5.15 que mostram a influência das razões de aspecto e de raios nas distribuições de temperatura e função corrente, para $Ra = 1 \times 10^6$.

Na Figura 5.12 estão representadas as isotermas para $AR_1 = 1,25$, $RR_1 = 6,40$ e o número de Rayleigh variando de 0 a 1×10^6 . Quando $Ra = 0$, as isotermas são simétricas em relação a um plano horizontal passando pelo centro do cilindro. Isto significa que não existe o escoamento secundário devido ao empuxo, caracterizando assim apenas a convecção forçada. Para $Ra = 1 \times 10^4$, observando-se com atenção nota-se que começa a existir uma assimetria em relação àquele plano horizontal. As isotermas localizadas logo abaixo do cilindro estão mais próximas umas das outras, do que as localizadas logo acima do cilindro. Isto mostra o início de um escoamento transversal (escoamento secundário) causado pela convecção natural. Com o aumento do número de Rayleigh para $Ra = 1 \times 10^5$ e $Ra = 1 \times 10^6$, a assimetria em relação ao plano horizontal se intensifica ainda mais, indicando um escoamento secundário ainda mais forte. Este escoamento caracteriza uma forte influência da convecção natural no escoamento principal.

A distribuição de função corrente para $AR_1 = 1,25$, $RR_1 = 6,40$ e número de Rayleigh variando de 0 a 1×10^6 , pode ser vista na Figura 5.13. Quando $Ra = 0$, a função corrente tem valor zero para todos os pontos, o que significa dizer que não há fluxo secundário, ou seja, não há convecção natural. Para $Ra = 1 \times 10^4$ existe apenas uma grande célula de escoamento secundário com seu centro localizado um pouco acima do cilindro interno. Para $Ra = 1 \times 10^5$, existe uma grande célula na parte superior da geometria. Na parte inferior inicia-se a formação de um nova célula de escoamento, que não aparece porque o número de linhas representado é pequeno e os valores de função corrente desta nova célula são próximos de zero. A nova célula de escoamento já pode ser vista para $Ra = 1 \times 10^6$. Na Figura 5.13 observa-se que apesar de ser mantido o mesmo $\Delta\psi$, existe um número muito maior de linhas de corrente para $Ra = 1 \times 10^6$ do que para $Ra = 1 \times 10^5$, isto significa dizer que houve um aumento na velocidade do fluido no escoamento secundário de $Ra = 1 \times 10^5$ para $Ra = 1 \times 10^6$.

A influência da razão de aspecto na distribuição de temperatura pode ser verificada na Figura 5.14, para $Ra = 1 \times 10^6$.

Na Figura 5.15 pode ser analisada a influência da razão de aspecto sobre a distribuição de função corrente, para $Ra = 1 \times 10^6$. Para todas as razões de aspecto e de raios, existem duas células contra rotativas, mas a medida que a razão de aspecto diminui, a célula inferior se desloca para o canto inferior direito da geometria. Espera-se que diminuindo ainda mais a razão de aspecto, a célula inferior se posicione no lado direito da geometria.

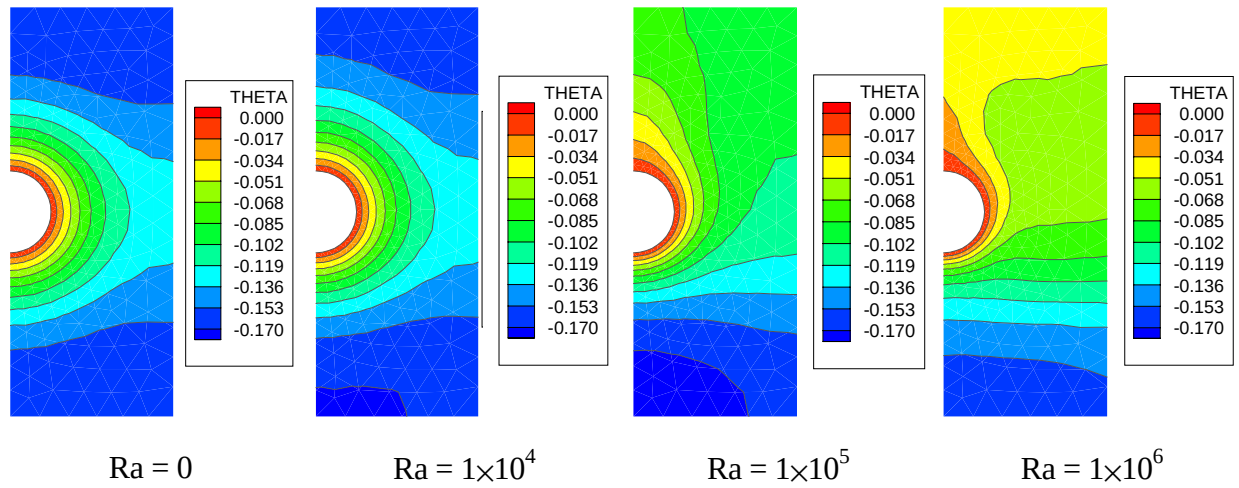


Figura 5.12 – Isotermas para $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$, com Ra variando de 0 a 1×10^6 .

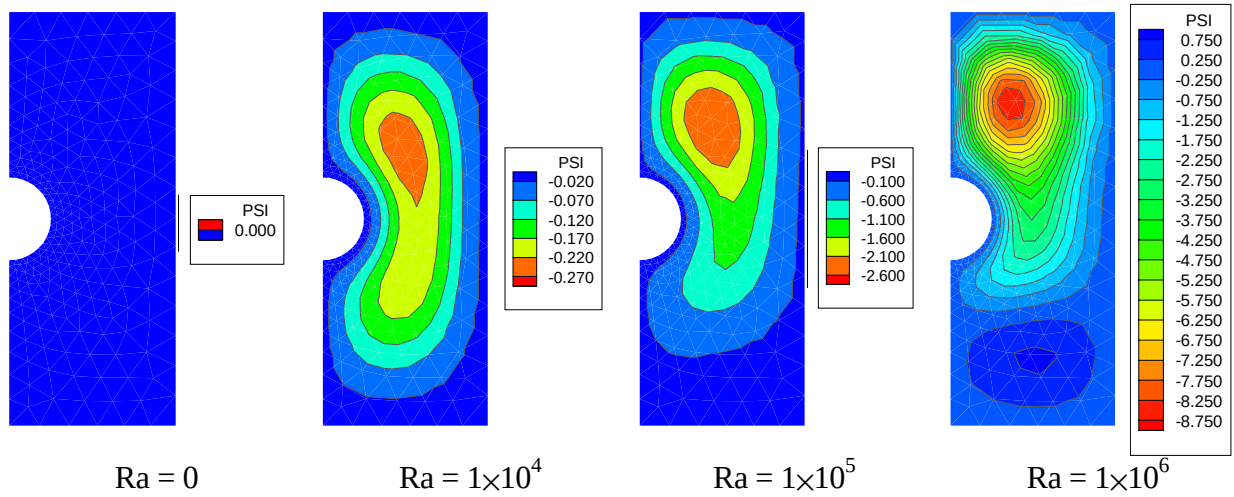


Figura 5.13 – Distribuição de função corrente para $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$, com Ra variando de 0 a 1×10^6 .

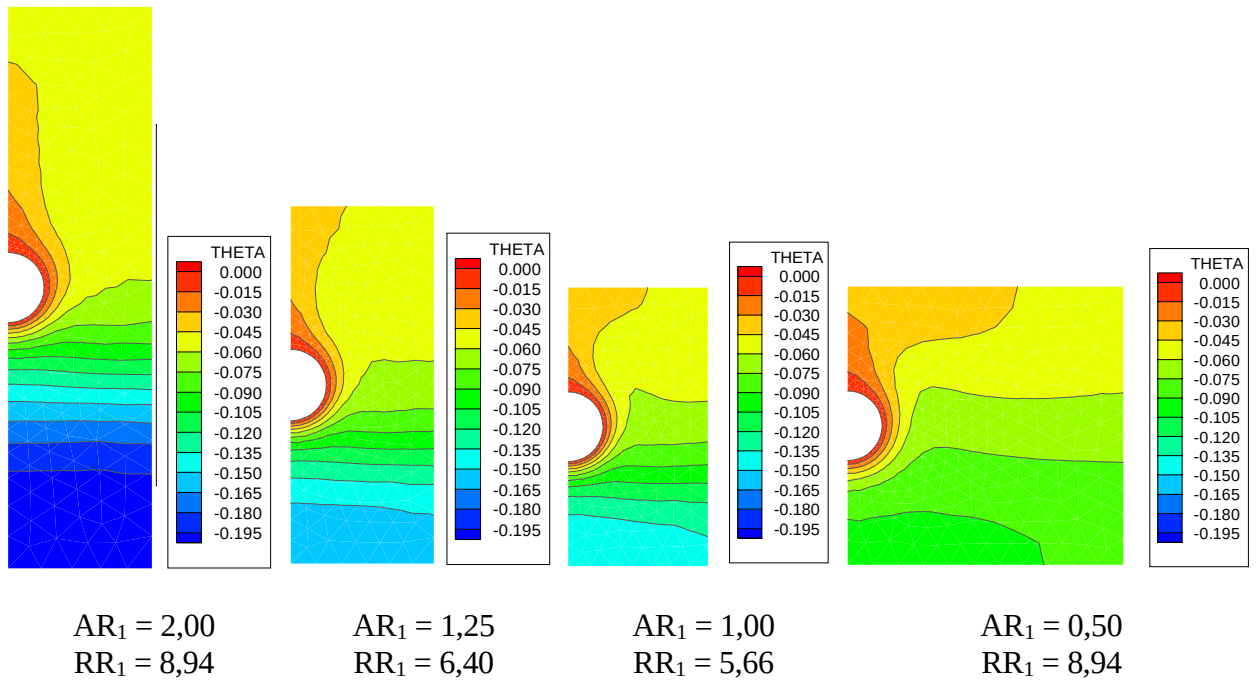


Figura 5.14 – Isotermas para $Ra = 1 \times 10^6$.

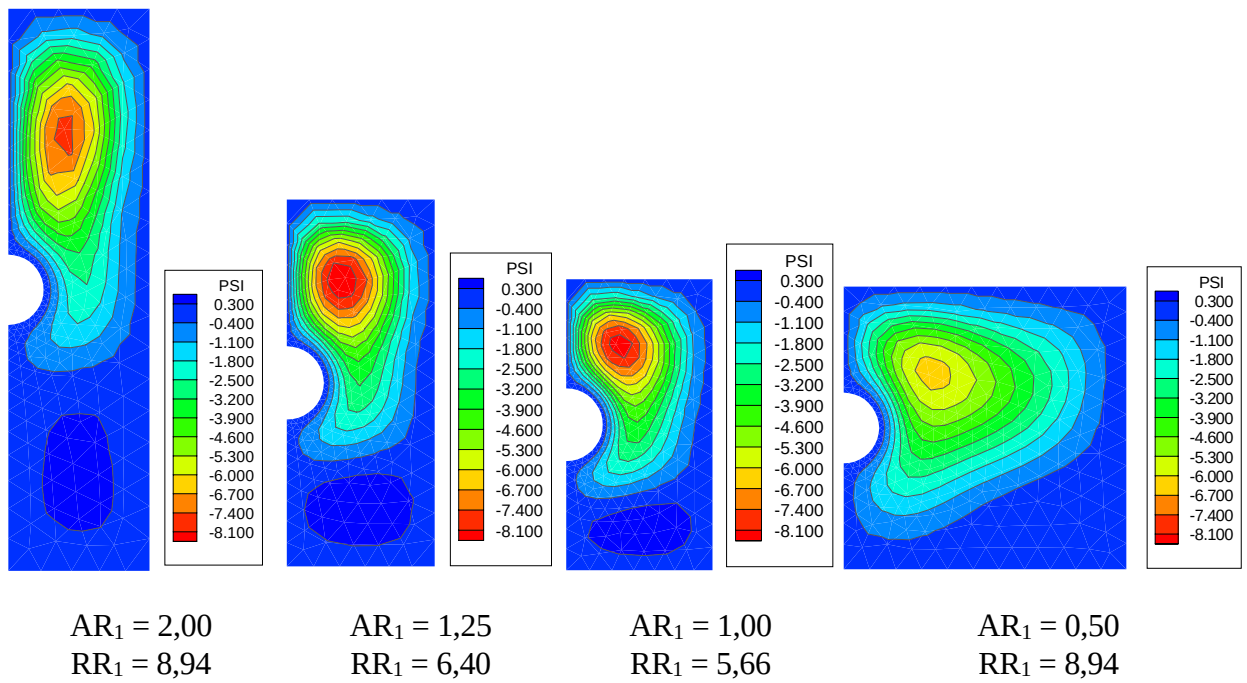


Figura 5.15 – Distribuição de função corrente para $Ra = 1 \times 10^6$

5.3 – Duto Retangular Horizontal com Cilindro Interno Aquecido para $\gamma \neq 0^\circ$

O objetivo desta aplicação é analisar a influência do ângulo de inclinação (γ) da seção retangular do duto nas distribuições de temperatura (θ), função corrente (ψ) e velocidade axial (W), no número de Nusselt médio (Nu) e no produto do fator de atrito médio pelo número de Reynolds (fRe). O problema consiste de um duto retangular horizontal termicamente isolado com um cilindro interno aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. O problema é estudado para número de Prandtl (Pr) igual a 0,7 (ar), razão de aspecto, $AR_1 = 1,25$, razão de raios, $RR_1 = 6,40$, número de Rayleigh $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$ e ângulo de inclinação $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ e 90° . O cilindro está localizado no centro do duto. Como a simetria em relação a um plano vertical passando pelo centro do cilindro, só existe para $\gamma = 0^\circ$, então deve-se utilizar a geometria completa para o estudo. A Figura 5.16 ilustra a geometria estudada.

Os parâmetros H^* e L^* são definidos como:

$$H^* = \frac{H}{D}, \quad L^* = \frac{L}{D}. \quad (5.11)$$

sendo H a altura e L a largura da seção transversal do duto e D o diâmetro do cilindro interno.

A razão de aspecto (AR_1) é dada pela razão entre a altura e a largura da seção retangular, e razão de raios (RR_1) é dada pela razão entre a diagonal da seção retangular e o diâmetro do cilindro interno, como pode ser visto a seguir.

$$AR_1 = \frac{H}{L} = \frac{H^*}{L^*}, \quad RR_1 = \frac{\sqrt{H^2 + L^2}}{D} = \sqrt{\frac{H^2}{D^2} + \frac{L^2}{D^2}} = \sqrt{(H^*)^2 + (L^*)^2} \quad (5.12)$$

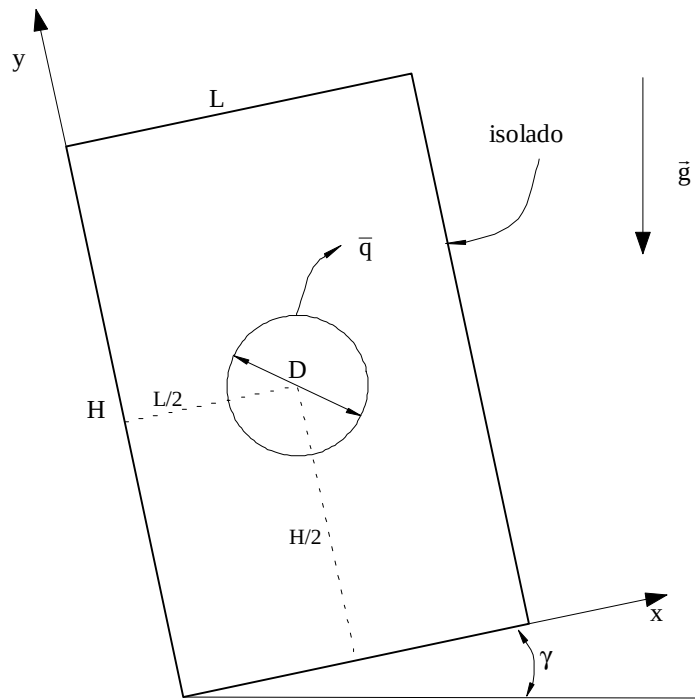


Figura 5.16 – Duto retangular com cilindro interno, $\gamma \neq 0^\circ$.

Para se obter as equações de conservação para este caso, basta tomar as Equações (2.48) à (2.51), apresentadas no Capítulo 2 para dutos horizontais e verticais, e fazer: $\gamma_1 = 0^\circ$ (duto horizontal) e $\lambda_1 = 1$ (duto horizontal), o que resulta em:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0 , \quad (5.13)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} + \text{Pr} \right) = \frac{\partial W}{\partial \tau} , \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - C_g \frac{W}{W} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} , \quad (5.15)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} + \text{Ra Pr} \left(\cos \gamma \frac{\partial \theta}{\partial X} - \sin \gamma \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} , \quad (5.16)$$

As condições de contorno consideradas são: duto externo isolado termicamente e tubo interno com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. A vorticidade no contorno é calculada conforme o Apêndice 4. As condições iniciais e de contorno são dadas por:

i. Condições iniciais ($\tau = 0$):

Todo o domínio:

$$\psi = \theta = \omega = W = 0 . \quad (5.17)$$

ii. Condições de contorno ($\tau > 0$):

Parede do duto retangular:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \psi = 0 , \quad W = 0 , \quad \omega = \omega_M . \quad (5.18a)$$

Parede do cilindro interno:

$$\theta = 0 , \quad \psi = 0 , \quad W = 0 , \quad \omega = \omega_M , \quad (5.18b)$$

sendo n a direção normal à superfície e ω_M a vorticidade que é calculada e atualizada a cada passo de tempo de acordo com o Apêndice 4.

A constante geométrica (C_g) da Equação (5.15), neste caso, passa a ser:

$$C_g = 4 \frac{P_q}{P_m} = \frac{4 \pi}{2(H^* + L^*) + \pi} = \frac{4 \pi \sqrt{AR_1^2 + 1}}{\pi \sqrt{AR_1^2 + 1} + 2 R R_1 (AR_1 + 1)} , \quad (5.19)$$

Algumas malhas foram testadas para uso nesta aplicação, sendo escolhida a malha com 862 elementos e 474 pontos nodais, representada na Figura 5.17.

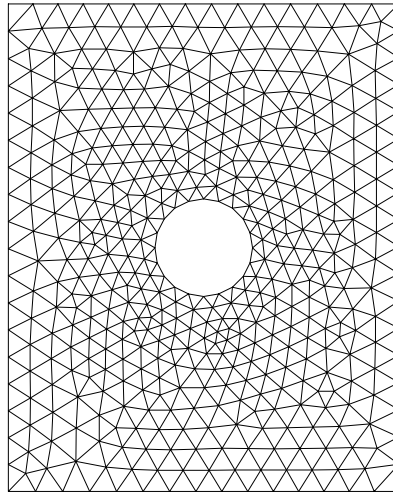


Figura 5.17 – Malha completa (862×474) para $AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$.

Na Tabela A5.2 do Apêndice 5 são apresentados os resultados, no regime permanente, para o número de Nusselt médio (Nu), para a razão entre o número de Nusselt médio da convecção mista e o número de Nusselt médio da convecção forçada pura (Nu/Nu_0), para o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) e para a razão entre este produto para a convecção mista e este produto para a convecção forçada pura $[fRe/(fRe)_0]$. Os valores de Nu_0 e $(fRe)_0$ são obtidos para a convecção forçada pura, fazendo-se $Ra = 0$. Todos os valores mencionados são obtidos para $Pr = 0,7$ (ar), $AR_1 = 1,25$, $RR_1 = 6,40$, para $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$ e para $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ e 90° . A partir dos valores listados na referida tabela foram feitas as Figuras 5.18 e 5.19, as quais mostram, respectivamente, a variação de Nu/Nu_0 e de $fRe/(fRe)_0$ em função de Ra e de γ .

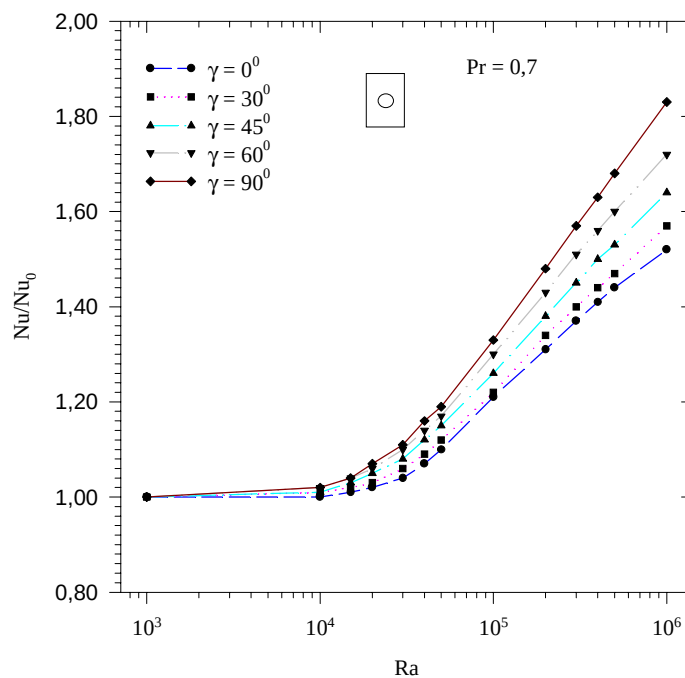


Figura 5.18 – Relação Nu/Nu_0 versus Ra para vários ângulos de inclinação γ .

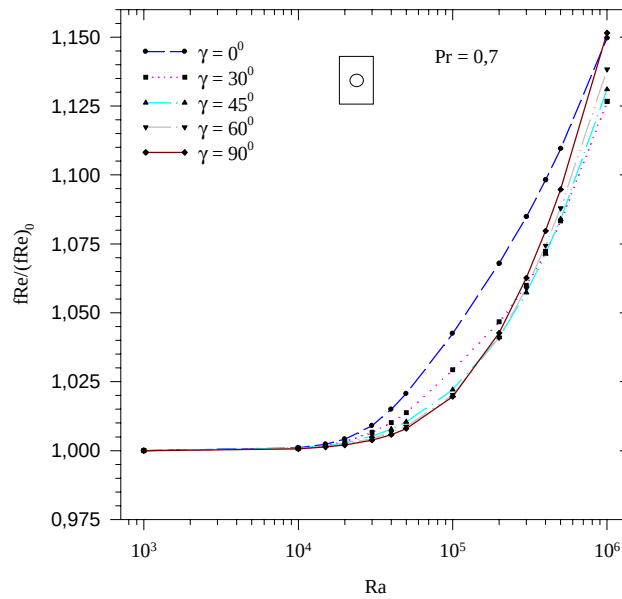


Figura 5.19 – Relação $fRe/(fRe)_0$ versus Ra para vários ângulos de inclinação γ .

Na Figura 5.18 são apresentados os resultados da razão Nu/Nu_0 para $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ e 90° , em função do número de Rayleigh. Pode-se observar que quanto maior o ângulo γ , maior é a razão entre o número de Nusselt médio da convecção mista (Nu) e o número de Nusselt médio da convecção forçada (Nu_0). Esta observação é válida para uma razão de aspecto, $AR_1 > 1$. Evidentemente se AR_1 fosse menor que 1 (por exemplo $AR_1 = 0,80$), aumentando-se o ângulo γ , haveria uma diminuição da razão Nu/Nu_0 . Nota-se também que aumentando-se o número de Rayleigh, há um aumento da razão Nu/Nu_0 , para todos os ângulos γ .

Na Figura 5.19 são mostrados os resultados de $fRe/(fRe)_0$ para $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ e 90° , em função do número de Rayleigh. Pelo gráfico é possível observar que para o número de Rayleigh menor ou igual a aproximadamente 1×10^5 , quanto menor o ângulo γ , maior é a relação $fRe/(fRe)_0$. Para $Ra > 5 \times 10^5$, pode-se dizer que a razão $fRe/(fRe)_0$ mínima ocorre para $\gamma \approx 30^\circ$. Para número de Rayleigh na faixa entre 1×10^5 e 5×10^5 , ocorre uma transição entre a primeira situação e a segunda.

As Figuras 5.20 e 5.21 mostram a variação do número de Nusselt médio e do produto fRe em função do tempo adimensional (τ), para $Ra = 1 \times 10^6$ e $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ e 90° .

A variação do número de Nusselt médio em função do tempo adimensional e do ângulo de inclinação γ para $Ra = 1 \times 10^6$, pode ser vista na Figura 5.20. Nota-se claramente que o número de Nusselt médio aumenta com o aumento do ângulo γ . Observa-se que o número de Nusselt médio (Nu) praticamente não varia mais após $\tau \approx 1,2$, sendo τ o tempo adimensional, ou seja, após este tempo as variações são tão pequenas que pode-se considerar como sendo o regime permanente.

A variação de fRe com o tempo adimensional (τ) e com o ângulo de inclinação γ para $Ra = 1 \times 10^6$, pode ser vista na Figura 5.21. Nota-se que o mínimo do produto do fator de atrito médio pelo número de Reynolds (fRe), ocorre para o ângulo de inclinação $\gamma \approx 30^\circ$. Observa-se que após $\tau \approx 1,0$, praticamente não há mais variação em fRe , ou seja, o valor de fRe atinge um regime permanente antes do valor de número de Nusselt médio, que atinge este regime após $\tau \approx 1,2$.

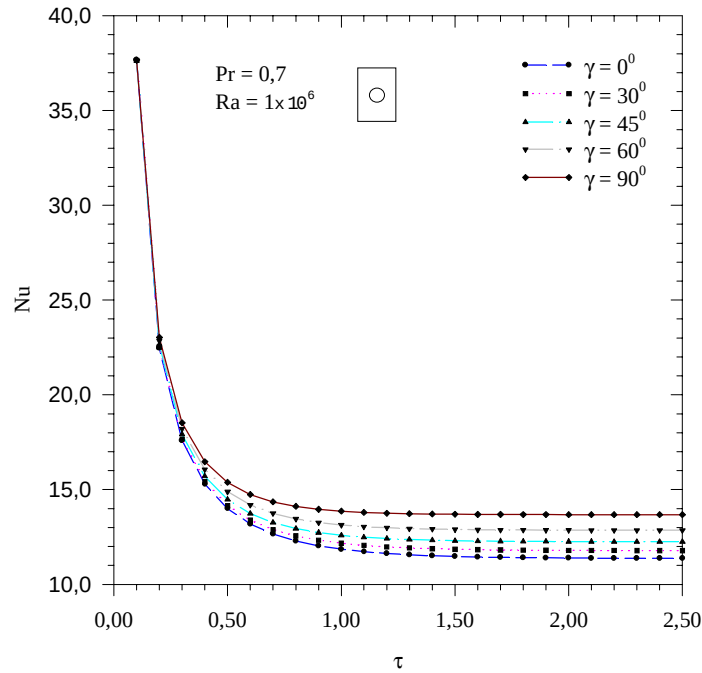


Figura 5.20 – Variação de Nu em função do tempo adimensional (τ), para vários ângulos γ .

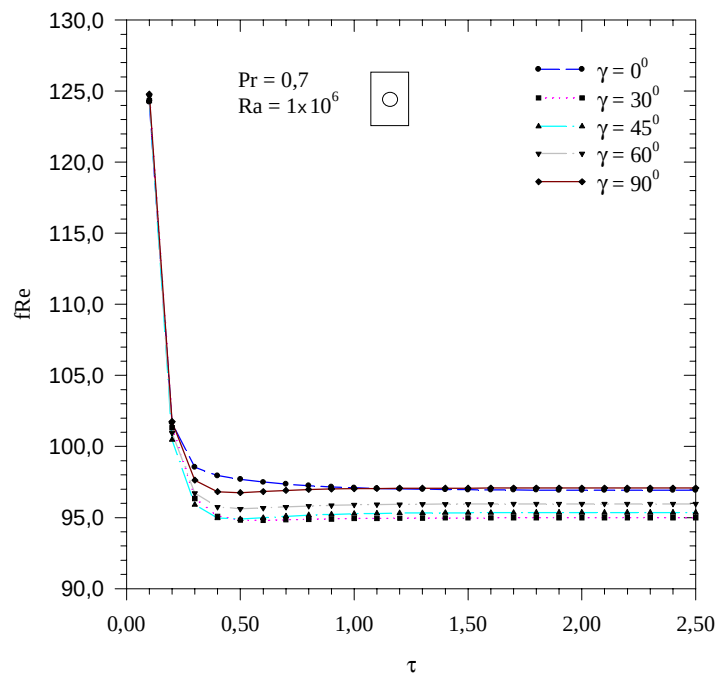


Figura 5.21 – Variação de fRe em função do tempo adimensional (τ), para vários ângulos γ .

A seguir são apresentadas as Figuras 5.22, 5.23, 5.24, 5.25 e 5.26, que mostram a influência do ângulo de inclinação ($0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$) nas distribuições de temperatura (θ), de função corrente (ψ) e de velocidade axial (W) para $Ra = 1 \times 10^6$. As legendas da Figura 5.22 são válidas também para as Figuras 5.23, 5.24, 5.25 e 5.26.

Nota-se na Figura 5.22 ($\gamma = 0^\circ$) que existe simetria em relação a um plano vertical passando pelo centro do cilindro para as distribuições de função corrente, temperatura e de velocidade axial. Esta simetria já havia sido prevista e utilizada na aplicação anterior ($\gamma = 0^\circ$), quando foi analisada apenas a

metade da geometria. Ainda sobre a Figura 5.22, é possível observar, nas distribuições de função corrente, que as células inferior e superior são contra-rotativas pois têm valores de função corrente com sinais opostos. Na distribuição de velocidade axial nota-se que a velocidade máxima ocorre entre o cilindro e a parte inferior do duto, onde o escoamento secundário é menos intenso, ou seja, onde o escoamento secundário interfere menos no escoamento principal.

Nota-se nas distribuições de função corrente, temperatura e velocidade axial das Figuras 5.22 a 5.26 que para $\gamma = 0^\circ$ existe simetria em relação a um plano vertical passando pelo centro do cilindro. Com o aumento do ângulo de inclinação esta simetria é perdida e só volta a existir para $\gamma = 90^\circ$.

Analisando as linhas de velocidade axial, Figuras 5.22 a 5.26, nota-se que com o aumento do ângulo de inclinação a velocidade axial máxima permanece localizada sempre na parte inferior do duto, onde o escoamento secundário é menos intenso.

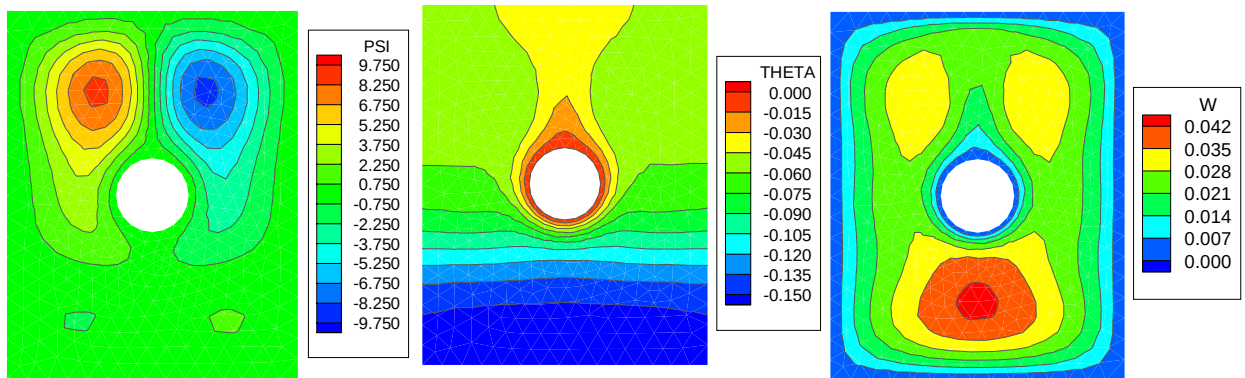


Figura 5.22 – Distribuição de função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e velocidade axial adimensional (W) para $\gamma = 0^\circ$.

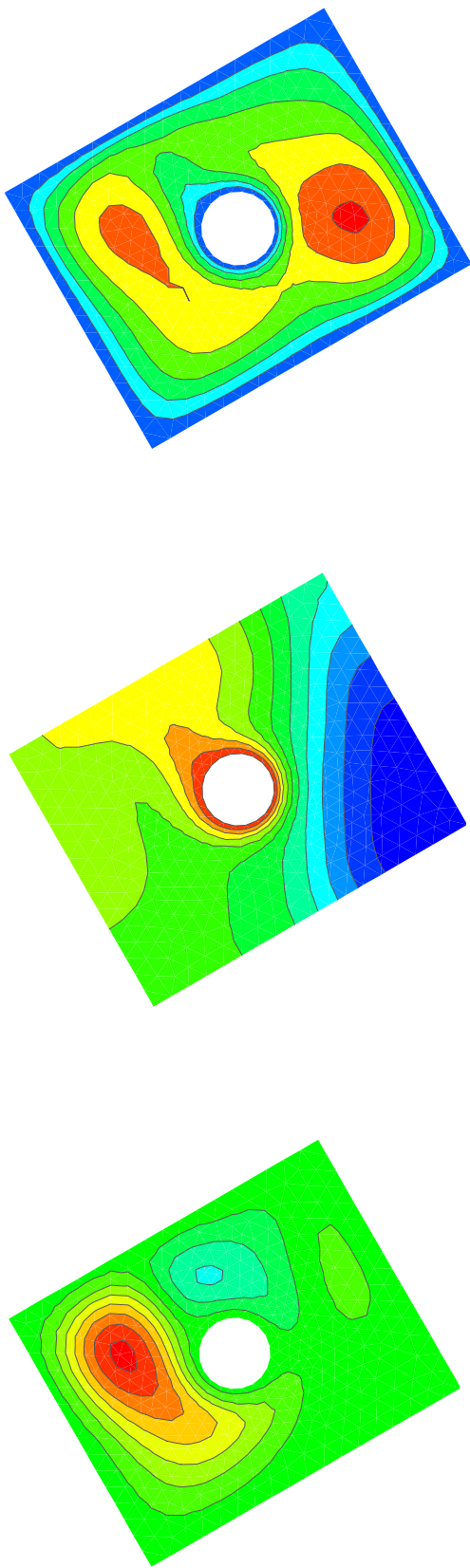


Figura 5.23 – Distribuição de função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e velocidade axial adimensional (W) para $\gamma = 30^\circ$.

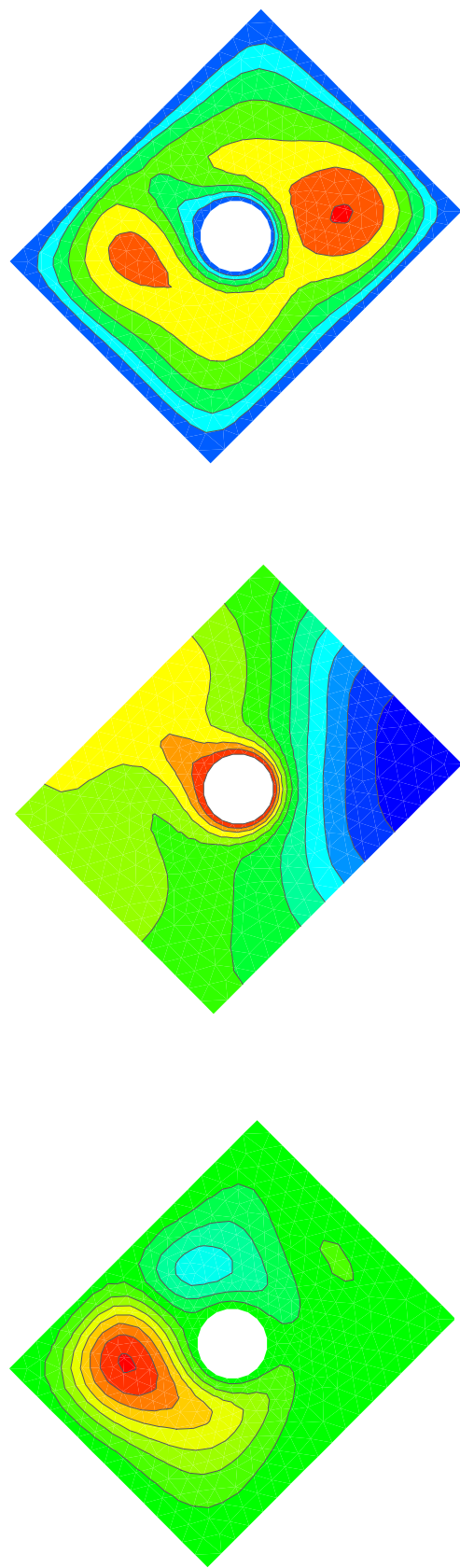


Figura 5.24 – Distribuição de função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e velocidade axial adimensional (W) para $\gamma = 45^\circ$.

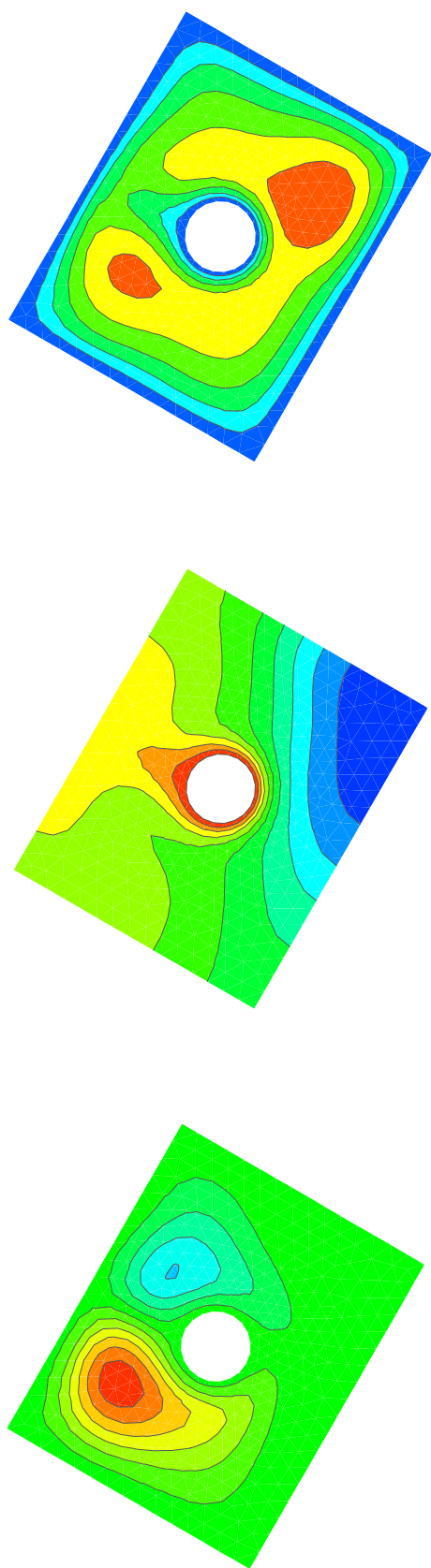


Figura 5.25 – Distribuição de função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e velocidade axial adimensional (W) para $\gamma = 60^\circ$.

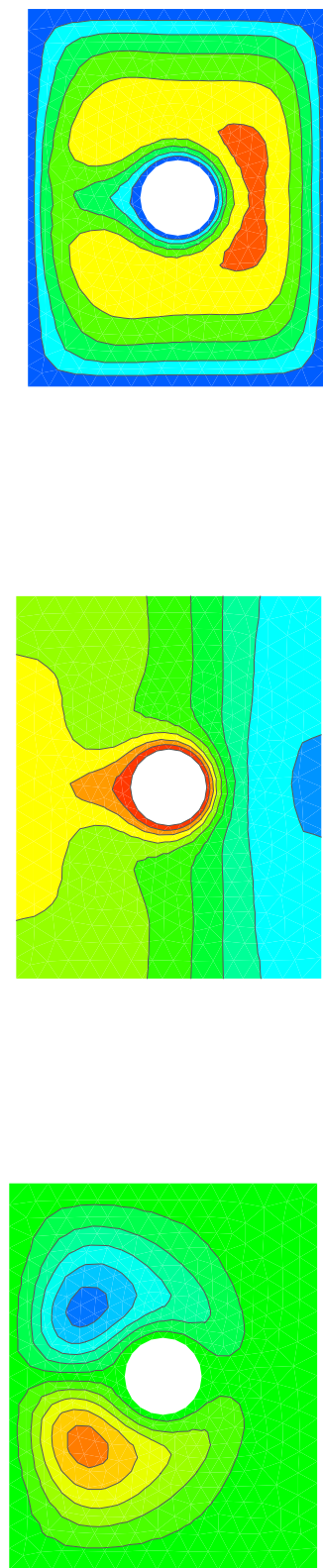


Figura 5.26 – Distribuição de função corrente (ψ), temperatura adimensional (θ) e velocidade axial adimensional (W) para $\gamma = 90^\circ$.

Fazendo-se $\gamma_1 = 0^\circ$ (duto horizontal) e $\lambda_1 = 1$ (duto horizontal) e $\gamma = 0$ nas Equações (2.48) à (2.51) do Capítulo 2, obtemos as equações de conservação na forma adimensional para a função corrente, velocidade axial, temperatura e vorticidade, mostradas a seguir:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0 , \quad (5.20)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} + \text{Pr} \right) = \frac{\partial W}{\partial \tau} , \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - C_g \frac{W}{\overline{W}} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} , \quad (5.22)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} + \text{Ra Pr} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} . \quad (5.23)$$

As condições de contorno consideradas são: tubo aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme e placa termicamente isolada. A vorticidade no contorno é calculada de uma forma matricial conforme o Apêndice 4. As condições iniciais e de contorno, para o problema, são dadas por:

i. Condições iniciais ($\tau = 0$):

Todo o domínio:

$$\psi = \theta = \omega = W = 0 . \quad (5.24)$$

ii. Condições de contorno ($\tau > 0$):

Parede do tubo:

$$\theta = 0 , \quad \psi = 0 , \quad W = 0 , \quad \omega = \omega_M . \quad (5.25a)$$

Parede da placa:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \psi = 0 , \quad W = 0 , \quad \omega = \omega_M , \quad (5.25b)$$

sendo n a direção normal à superfície e ω_M a vorticidade que é calculada e atualizada a cada passo de tempo de acordo com o Apêndice 4.

A constante geométrica (C_g) da Equação (5.22), para este caso é dada por:

$$C_g = 4 \frac{P_q}{P_m} = \frac{4 \pi R R_2 \sqrt{A R_2^2 + 1}}{2(A R_2 + 1) + \pi R R_2 \sqrt{A R_2^2 + 1}} , \quad (5.26)$$

sendo P_q o perímetro aquecido (parede do tubo), P_m o perímetro em contato com o fluido (paredes do tubo e da placa) e RR_2 a razão de raios e AR_2 a razão de aspecto da placa, dadas por:

$$RR_2 = \frac{D}{\sqrt{H_1^2 + L_1^2}}, \quad AR_2 = \frac{H_1}{L_1}, \quad (5.27)$$

sendo H_1 a altura da placa, L_1 a largura da placa e D o diâmetro do tubo.

As malhas de elementos finitos escolhidas para serem utilizadas nas aplicações do presente trabalho para $RR_2 = 2,00$, $AR_2 = 0,80$ e de acordo com a posição da placa são mostradas nas Figuras 5.29 a 5.34. Os números entre parêntesis representam a malha (elementos $\times$ nós).

(1762 $\times$ 956)

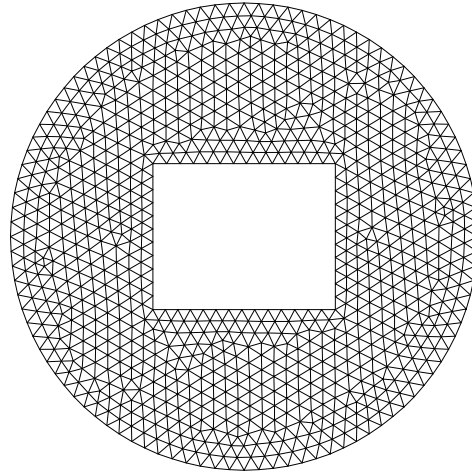
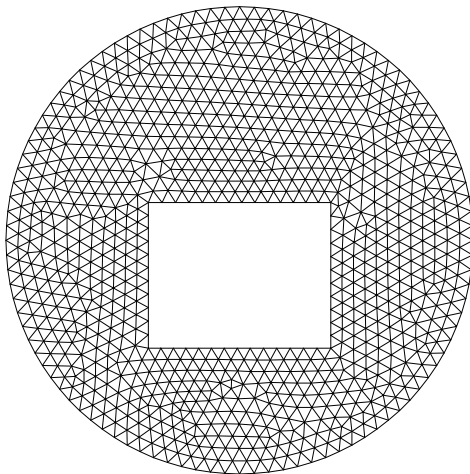
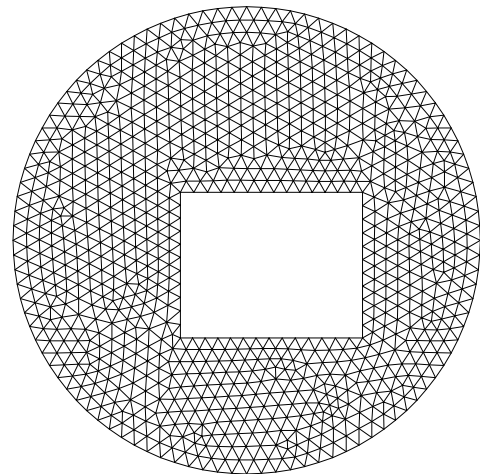


Figura 5.29 – Malha para $E = 0$; $\gamma_2 = 0^\circ$.

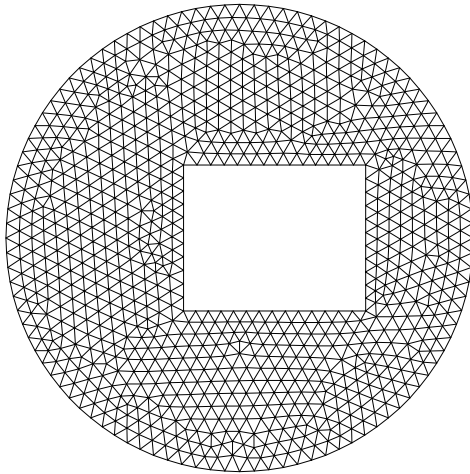


a) (1778 $\times$ 964)

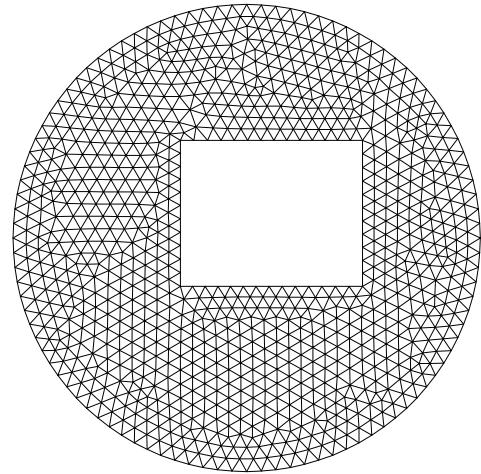


b) (1776 $\times$ 963)

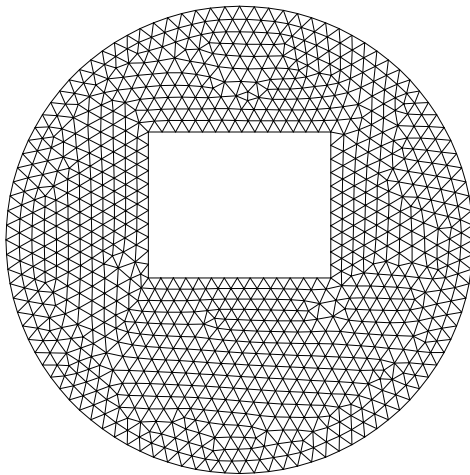
Figura 5.30 – a) Malha para $E = 0,15$; $\gamma_2 = -90^\circ$; b) Malha para $E = 0,15$; $\gamma_2 = -45^\circ$.



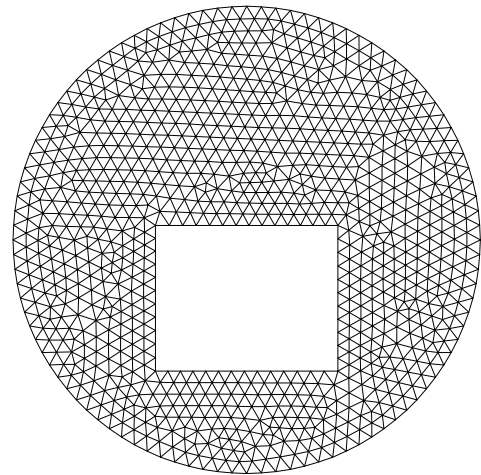
a) (1778 × 964)



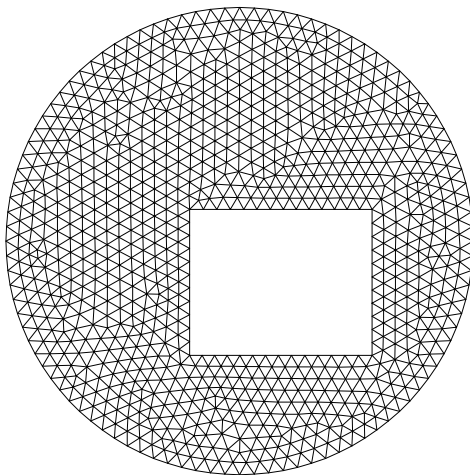
b) (1766 × 958)

Figura 5.31 – a) Malha para $E = 0,15$; $\gamma_2 = 0^\circ$; b) Malha para $E = 0,15$; $\gamma_2 = 45^\circ$.

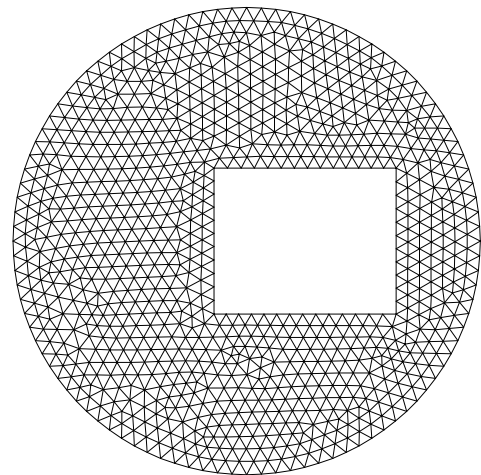
a) (1778 × 964)



b) (1778 × 964)

Figura 5.32 – a) Malha para $E = 0,15$; $\gamma_2 = 90^\circ$; b) Malha para $E = 0,25$; $\gamma_2 = -90^\circ$.

a) (1762 × 956)



b) (1776 × 963)

Figura 5.33 – a) Malha para $E = 0,25$; $\gamma_2 = -45^\circ$; b) Malha para $E = 0,25$; $\gamma_2 = 0^\circ$.

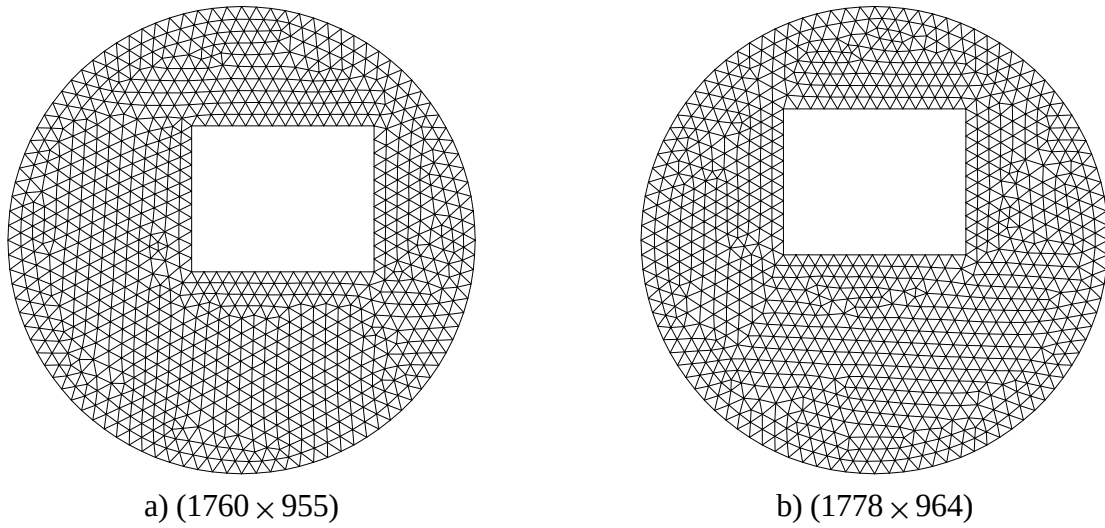


Figura 5.34 – a) Malha para $E = 0,25$; $\gamma_2 = 45^\circ$; b) Malha para $E = 0,25$; $\gamma_2 = 90^\circ$.

Na Tabela A5.3 do Apêndice 5 são apresentados os resultados, no regime permanente, para o número de Nusselt médio (Nu), para o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe), para a temperatura média na seção ($\bar{\theta}$) e para a velocidade axial média na seção ($\bar{W}$). Todos os valores mencionados são obtidos para $Pr = 0,7$ (ar), $RR_2 = 2,00$, $AR_2 = 0,8$, $E = 0; 0,15$ e $0,25$, $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$ e para $\gamma_2 = -90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$ e 90° . A excentricidade adimensional E é definida como:

$$E = 2 \frac{e}{D}, \quad (5.28)$$

sendo “e” a distância entre o centro da placa e o centro do tubo (veja Figura 5.27).

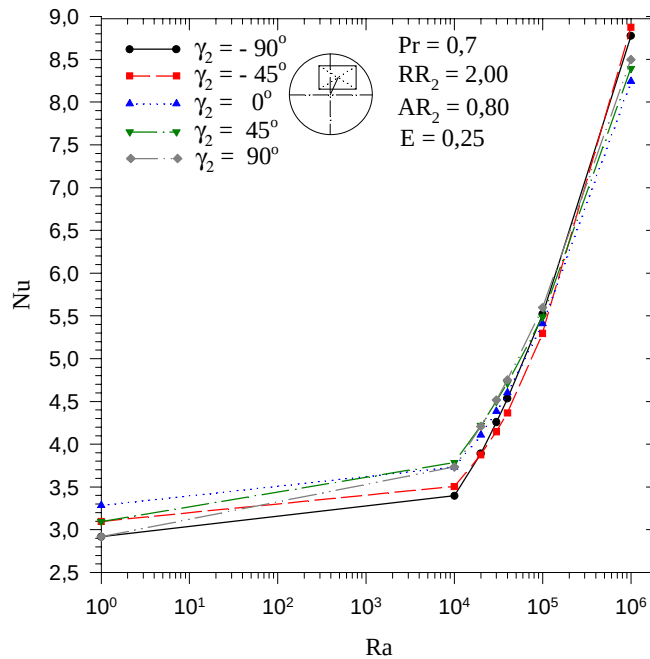


Figura 5.35 – Número de Nusselt médio em função de Ra e γ_2 , para $E = 0,25$.

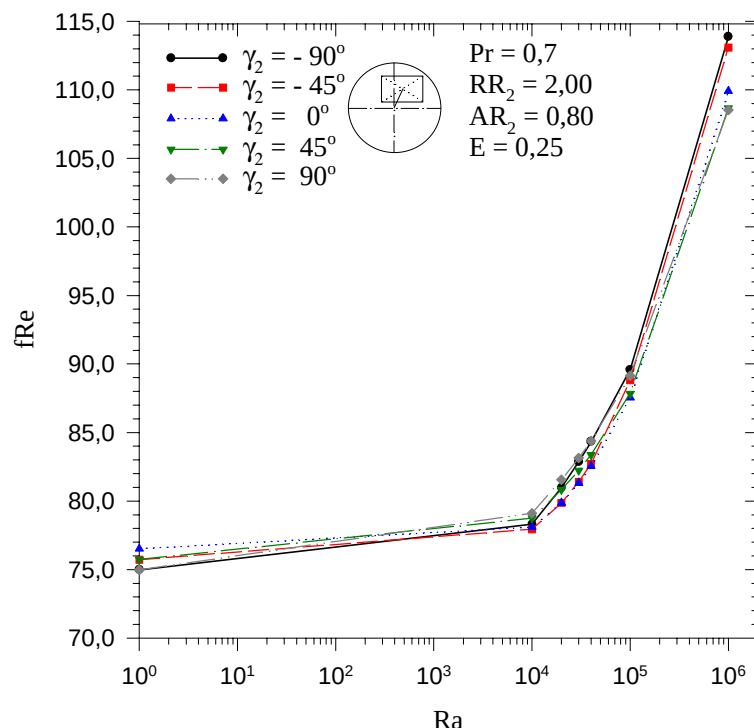


Figura 5.36 - fRe em função de Ra e γ_2 , para $E = 0,25$.

A partir dos valores listados na referida tabela foram feitas as Figuras 5.35 a 5.39, as quais mostram a variação do número de Nusselt médio e do produto do fator de atrito pelo número de Reynolds em função de vários fatores geométricos e térmicos.

A influência do número de Rayleigh e do ângulo de posição γ_2 no número de Nusselt médio e no produto fRe , para $E = 0,25$, pode ser vista nas Figuras 5.35 e 5.36.

Na Figura 5.35, o número de Nusselt médio aumenta com o aumento do número de Rayleigh, sendo esse aumento mais acentuado a partir de $Ra = 1 \times 10^4$. A variação de Nu com o ângulo de posição da placa vai depender do número de Rayleigh. Por exemplo, para $Ra = 0$ (convecção forçada) Nu é mínimo para $\gamma_2 = -90^\circ$ e 90° e máximo para $\gamma_2 = 0^\circ$, o que coincide com os resultados obtidos por [Hung et al. 1997]. Para $Ra = 1 \times 10^4$, o número de Nusselt médio é mínimo para $\gamma_2 = -90^\circ$ e máximo para $\gamma_2 = 45^\circ$ e quando $Ra = 1 \times 10^6$, Nu é mínimo para $\gamma_2 = 0^\circ$ e máximo para $\gamma_2 = -45^\circ$.

Na Figura 5.36 o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds aumenta com o aumento do número de Rayleigh. A variação de fRe com o ângulo de posição da placa também depende do número de Rayleigh. Por exemplo, para $Ra = 0$ (convecção forçada) fRe é mínimo para $\gamma_2 = -90^\circ$ e 90° e máximo para $\gamma_2 = 0^\circ$. Para $Ra = 1 \times 10^4$, fRe é mínimo para $\gamma_2 = -45^\circ$ e máximo para $\gamma_2 = 90^\circ$ e quando $Ra = 1 \times 10^6$, os maiores valores de fRe ocorrem para a placa localizada na parte inferior do tubo.

A influência do número de Rayleigh e da excentricidade no número de Nusselt médio e no produto do fator de atrito pelo número de Reynolds, para $\gamma_2 = 0^\circ$, pode ser vista nas Figuras 5.37 e 5.38.

Nas Figuras 5.37 e 5.38, o número de Nusselt médio e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds aumentam com o aumento do número de Rayleigh para qualquer excentricidade, e com a diminuição da excentricidade para qualquer número de Rayleigh. A maior variação do número de Nusselt médio e do produto fRe com a excentricidade ocorre quando $Ra = 0$ (convecção forçada) e as maiores variações do número de Nusselt médio e do produto fRe com o número de Rayleigh ocorrem para $Ra > 1 \times 10^4$.

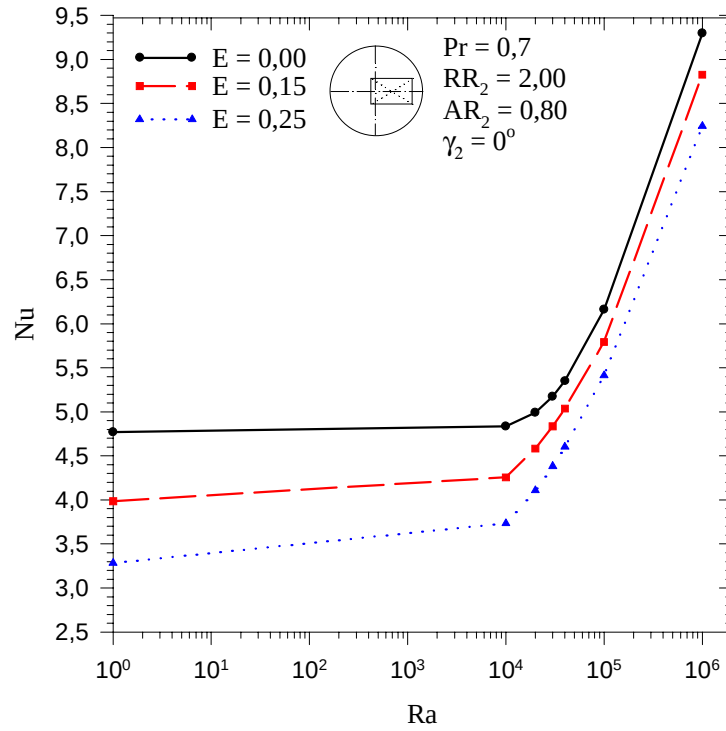


Figura 5.37 – Número de Nusselt médio em função de Ra e E , para $\gamma_2 = 0^\circ$.

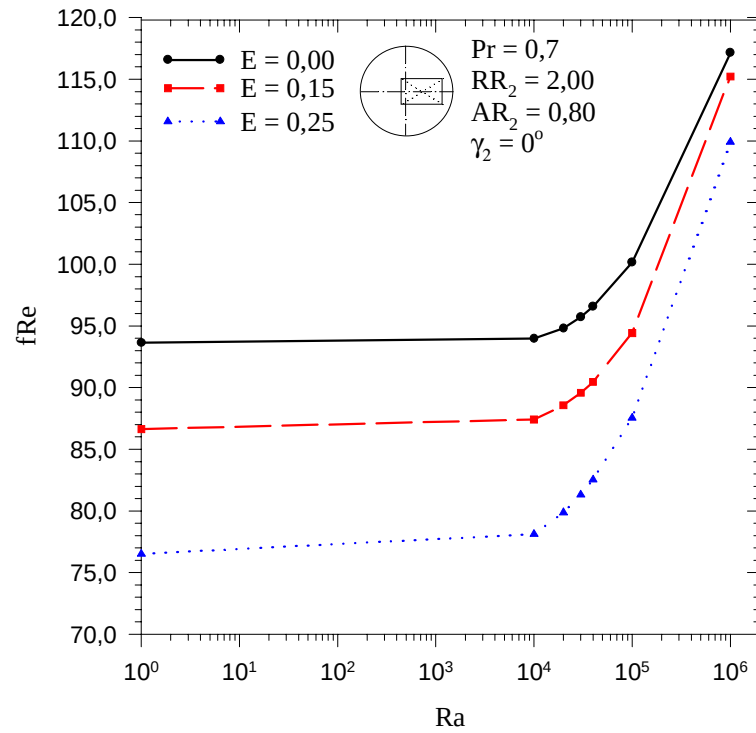


Figura 5.38 – Produto fRe em função de Ra e E , para $\gamma_2 = 0^\circ$.

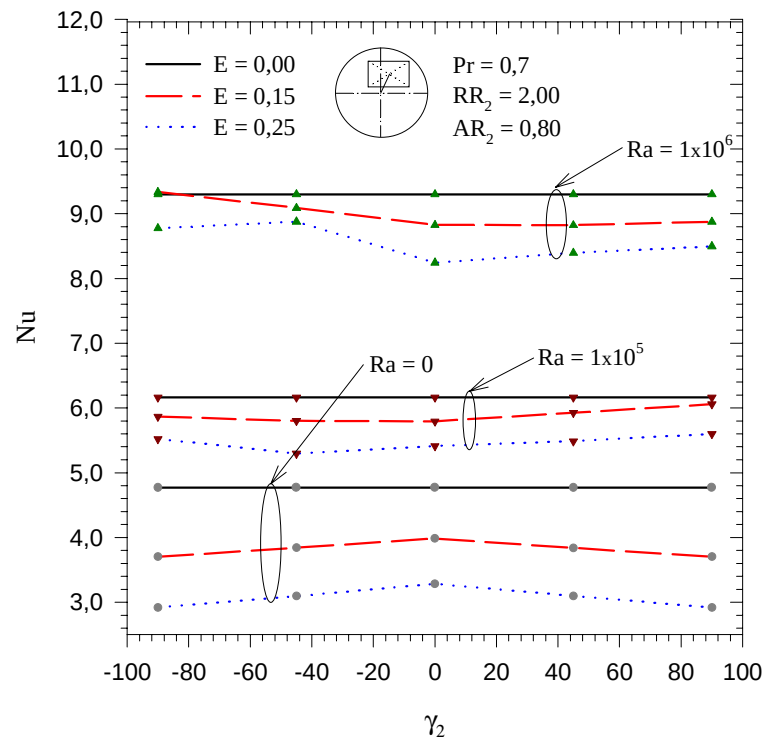


Figura 5.39 – Número de Nusselt médio em função de γ_2 e E para 3 valores de Ra .

A Figura 5.39 mostra a variação do número de Nusselt médio com o ângulo de posição γ_2 e com a excentricidade E para 3 valores do número de Rayleigh. O número de Nusselt médio aumenta com o aumento do número de Rayleigh e com a diminuição da excentricidade para qualquer ângulo de posição da placa. A variação de Nu com o ângulo de posição vai depender da excentricidade e do número de Rayleigh. Como exemplo observa-se que para $Ra = 1 \times 10^6$ e $E = 0,15$, Nu diminui com o aumento do ângulo γ_2 de -90° até 90° , mas para $E = 0,25$, Nu aumenta com o aumento de γ_2 de -90° até -45° , depois diminui até γ_2 atingir 0° e volta a aumentar até $\gamma_2 = 90^\circ$.

O objetivo das Figuras 5.40, 5.41 e 5.42 é mostrar a influência do número de Rayleigh nas distribuições de função corrente (ψ), velocidade axial adimensional (W) e temperatura adimensional (θ) para $RR_2 = 2,0$, $AR_2 = 0,80$, $\gamma_2 = 0^\circ$, $E = 0,25$ e $Ra = 1 \times 10^4$, 1×10^5 e 1×10^6 . As isothermas têm seu valor máximo na parede do tubo. A função corrente e a velocidade axial tem o valor zero nas paredes da placa e do tubo. Nota-se que o aumento de Ra causa um aumento da velocidade do escoamento secundário, uma diminuição da velocidade axial e um aumento na temperatura mínima do fluido.

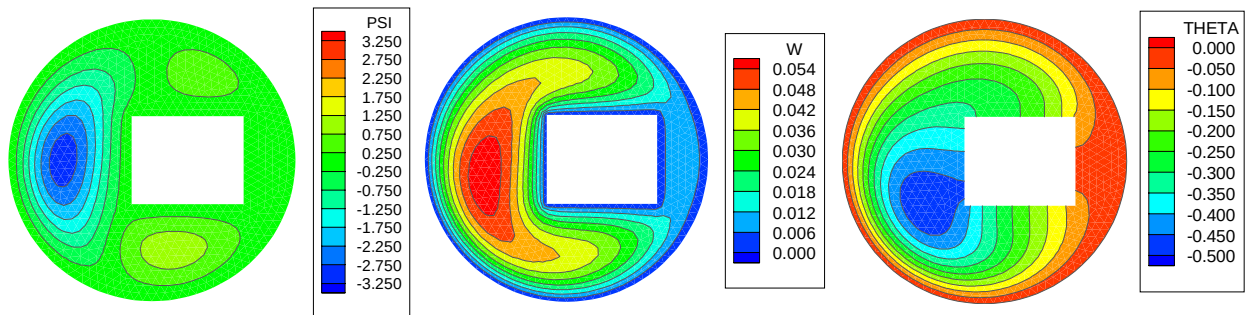


Figura 5.40 - Distribuições de função corrente, velocidade axial e temperatura para $Ra = 1 \times 10^4$.

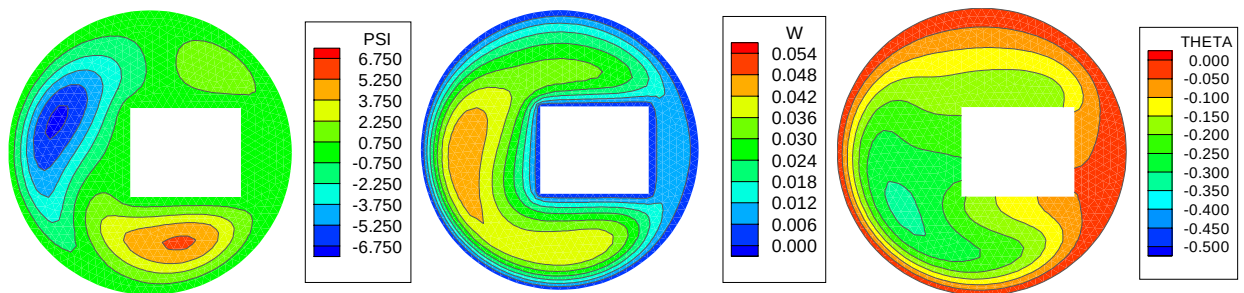


Figura 5.41 - Distribuições de função corrente, velocidade axial e temperatura para $Ra = 1 \times 10^5$.

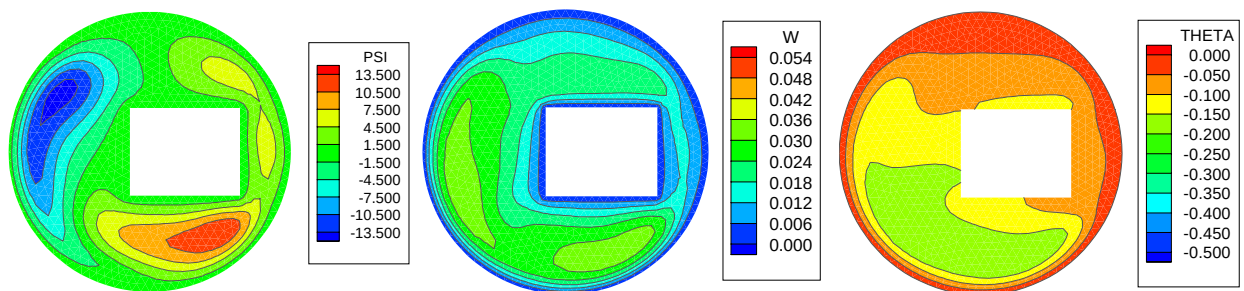


Figura 5.42 - Distribuições de função corrente, velocidade axial e temperatura para $Ra = 1 \times 10^6$.

5.5 – Duto Vertical Elíptico

O problema estudado neste item é a convecção mista laminar em um duto vertical de seção elíptica o que pode ser visto na Figura 5.43. O duto é de grande comprimento de modo que o escoamento, para cima ou para baixo, possa ser tratado como bidimensional. As condições de contorno consideradas são: duto aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. As equações bidimensionais de conservação na forma adimensional são resolvidas para a temperatura, função corrente, velocidade axial e vorticidade. O número de Nusselt médio (Nu) e o do produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) são calculados considerando o número de Prandtl fixo, $Pr = 0,7$, e em função do número de Rayleigh (Ra), do número de Reynolds (Re) e da razão entre o semi-eixo menor e o semi-eixo maior da seção elíptica (BA). O número de Rayleigh igual a zero representa a convecção forçada pura e o número de Prandtl igual a $0,7$ representa o ar.

Neste trabalho é analisada a influência do número de Rayleigh (Ra), do número de Reynolds (Re) e da razão BA no número de Nusselt médio (Nu) e no produto fRe para número de Prandtl do ar ($Pr = 0,7$). O número de Rayleigh mede a contribuição da convecção natural sobre a convecção forçada sendo que quanto maior seu valor maior será a contribuição. A análise é feita apenas para o escoamento pró-empuxo, ou seja, mantendo-se o duto aquecido, o escoamento principal ocorre no sentido ascendente.

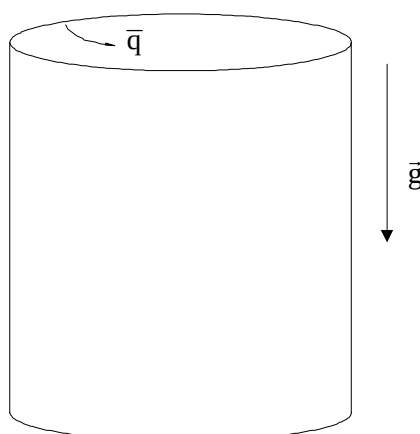


Figura 5.43 – Duto vertical elíptico.

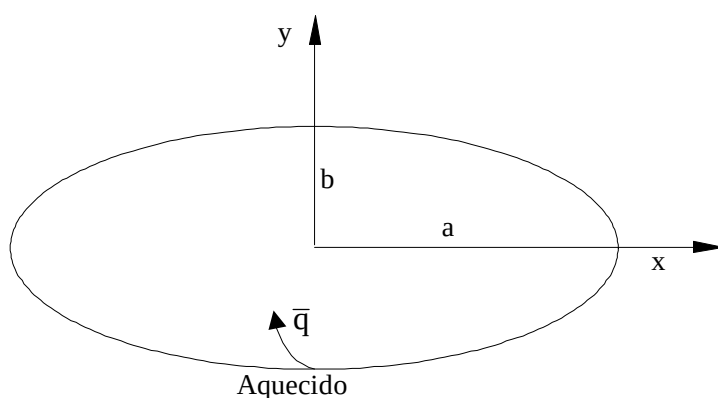


Figura 5.44 – Geometria para um duto vertical elíptico.

A Figura 5.44 mostra a geometria do problema, sendo x e y as coordenadas, “ a ” o semi-eixo

maior de elipse, “b” o semi-eixo menor de elipse e $\bar{q}$ o fluxo de calor.

Para se obter as equações de conservação para o duto vertical elíptico basta tomar as equações apresentadas no Capítulo 2 para dutos horizontais e verticais, e fazer: $\gamma_1 = 90^\circ$ (duto vertical) e $\lambda_1 = 0$ (duto vertical), o que resulta em:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0 , \quad (5.29)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} + \text{Pr} + \frac{\text{Ra}}{\text{Re}} \bar{W} \theta \right) = \frac{\partial W}{\partial \tau} , \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - C_g \frac{W}{\bar{W}} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} , \quad (5.31)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} , \quad (5.32)$$

As condições de contorno consideradas são: duto aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. A vorticidade no contorno é calculada conforme o Apêndice 4. As condições iniciais e de contorno, para o problema, são dadas por:

i. Condições iniciais ($\tau = 0$):

Todo o domínio:

$$\psi = \theta = \omega = W = 0 . \quad (5.33)$$

ii. Condições de contorno ($\tau > 0$):

Parede do duto:

$$\theta = 0 , \quad \psi = 0 , \quad W = 0 , \quad \omega = \omega_M . \quad (5.34)$$

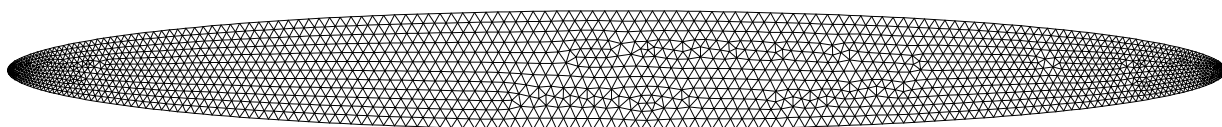
sendo ω_M a vorticidade que é calculada e atualizada a cada passo de tempo conforme o Apêndice 4.

A constante geométrica (C_g) da Equação (5.31), para este caso é dada por:

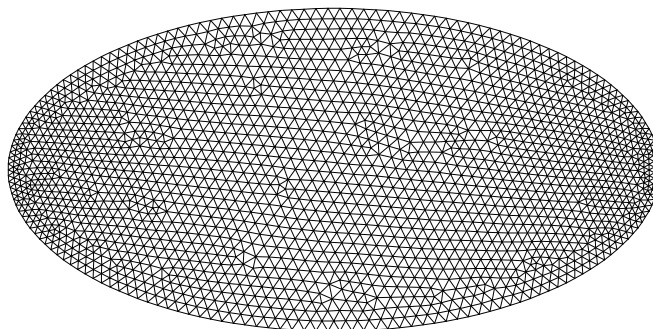
$$C_g = 4 \frac{P_q}{P_m} = 4 , \quad (5.35)$$

As malhas de elementos finitos utilizadas para o duto vertical elíptico são mostradas nas Figuras 5.45, 5.46 e 5.47 para BA = 0,1, 0,5 e 1,0, respectivamente. Os número entre parêntesis representam a malha (elementos $\times$ nós).

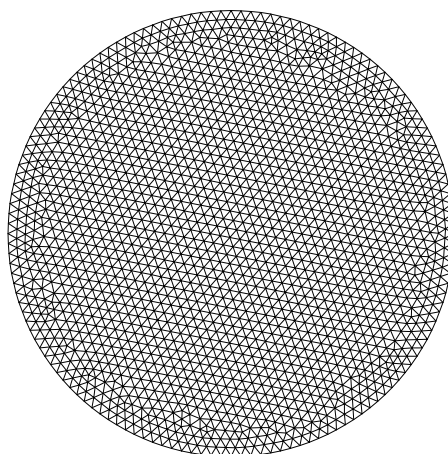
(3680 × 2001)

Figura 5.45 – Malha para duto elíptico com $BA = 0,1$.

(3924 × 2048)

Figura 5.46 – Malha para duto elíptico com $BA = 0,5$.

(3684 × 1913)

Figura 5.47 – Malha para duto elíptico com $BA = 1,0$.

Os resultados da análise da convecção mista laminar em um duto vertical de seção elíptica são apresentados na Tabela A5.4, onde são mostrados os valores do número de Nusselt médio (Nu) e do produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) em função da razão entre o semi-eixo menor e o semi-eixo maior da elipse (BA), do número de Reynolds (Re) e do número de Rayleigh (Ra) para $Pr = 0,7$ (ar). A razão BA assume os valores 0,1, 0,5 e 1,0, o número de Reynolds os valores 5, 100, 200, 300 e 500 e o número de Rayleigh os valores $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$.

As distribuições de temperatura adimensional (θ) e velocidade axial adimensional (W) para $Pr = 0,7$, $BA = 0,5$, $Ra = 1 \times 10^5$ e $Re = 100, 200$ e 500 podem ser vistas nas Figuras 5.48 e 5.49. Nota-se que com o aumento do número de Reynolds há uma diminuição da temperatura mínima do fluido (Figura 5.48) e que há um aumento da velocidade axial e o deslocamento do valor máximo da velocidade axial dos polos para o centro da elipse (Figura 5.49).

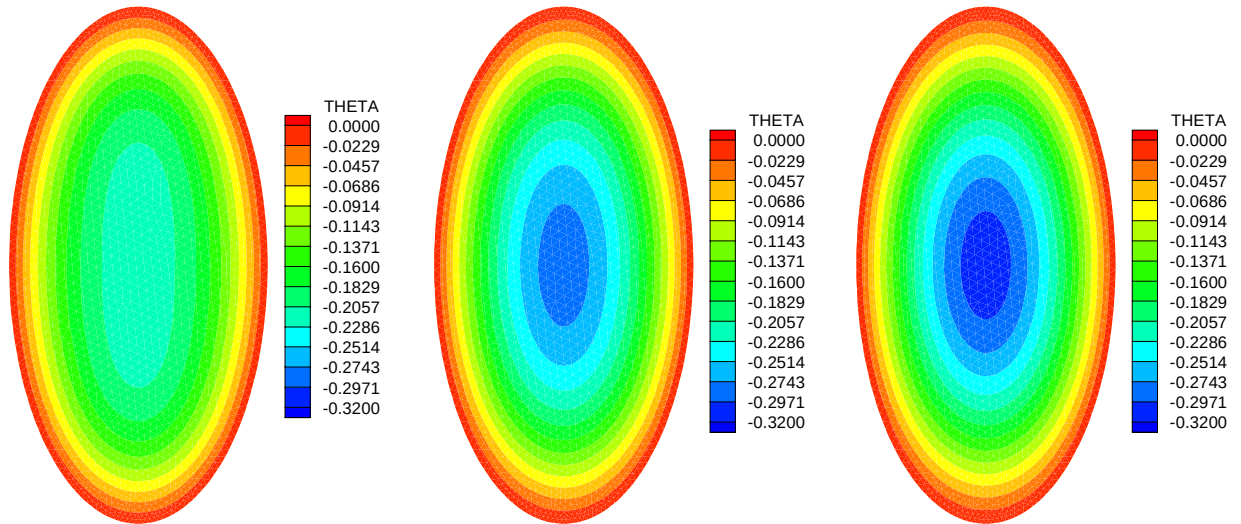


Figura 5.48 – Distribuição de temperatura para $Re = 100, 300$ e 500 .

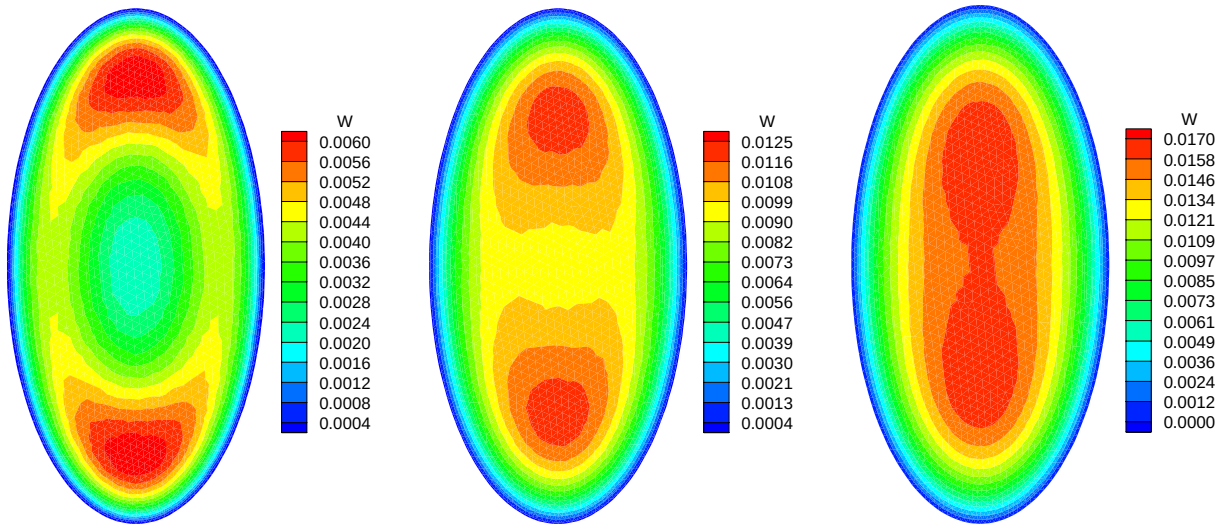


Figura 5.49 – Distribuição de velocidade axial para $Re = 100, 300$ e 500 .

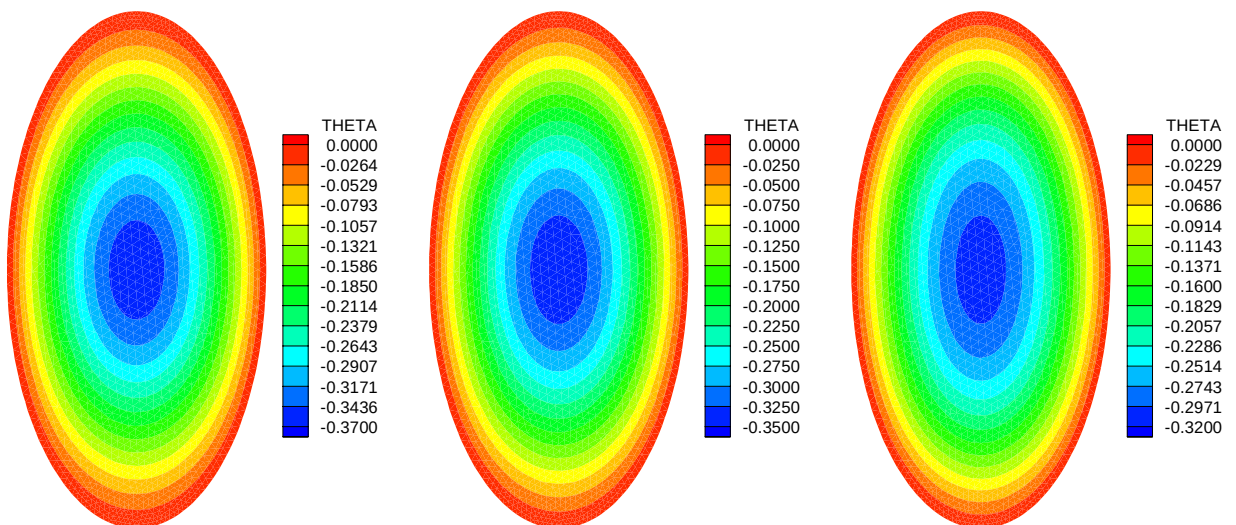


Figura 5.50 – Distribuição de temperatura para $Ra = 1 \times 10^3, 3 \times 10^4$ e 1×10^5 .

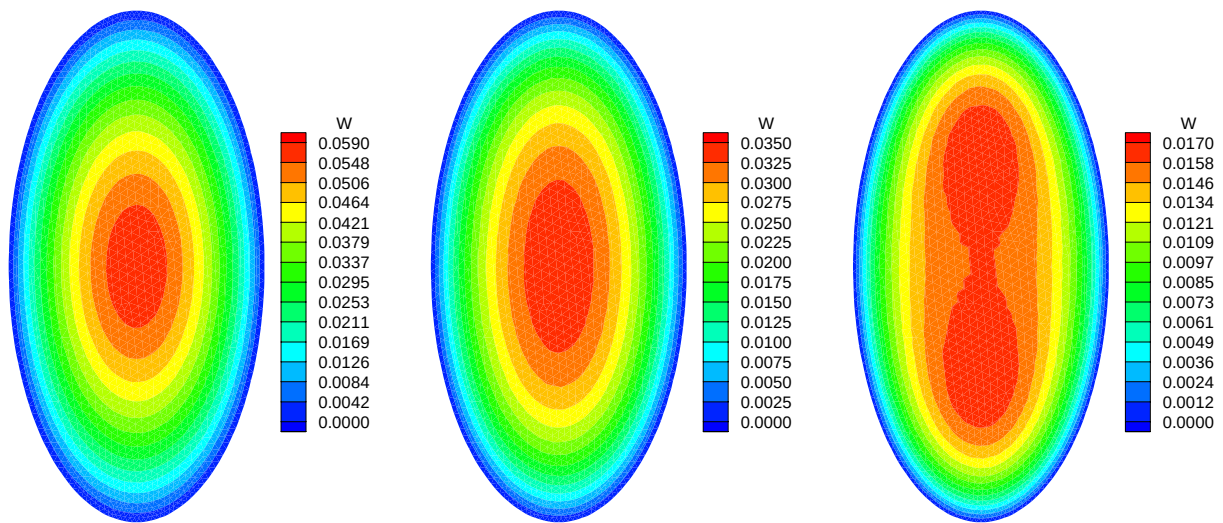


Figura 5.51 – Distribuição de velocidade axial para $Ra = 1 \times 10^3$, 3×10^4 e 1×10^5 .

As distribuições de temperatura e velocidade axial para $Pr = 0,7$, $BA = 0,5$, $Re = 500$ e $Ra = 1 \times 10^3$, 3×10^4 e 1×10^5 podem ser vistas nas Figuras 5.50 e 5.51. Nota-se na Figura 5.50 que há um aumento da temperatura mínima com o aumento do número de Rayleigh. O aumento do número de Rayleigh causa uma diminuição da velocidade axial e o deslocamento do valor máximo da velocidade axial do centro para os polos da elipse, como pode ser visto na Figura 5.51.

Na Figura 5.52 pode ser visto a influência do número de Rayleigh e da razão BA sobre o número de Nusselt médio para $Pr = 0,7$ e para um valor fixo do número de Reynolds, $Re = 100$. Observa-se que o número de Nusselt médio (Nu) aumenta com o aumento do número de Rayleigh e com a diminuição de BA . Observa-se também que para $Ra < 1 \times 10^3$ o número de Nusselt médio praticamente não varia com o número de Rayleigh.

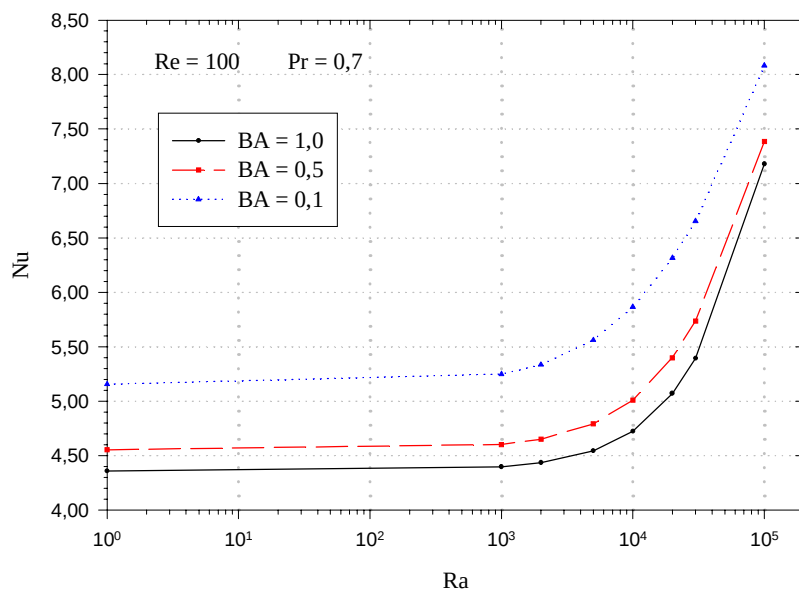


Figura 5.52 - Número de Nusselt médio versus Ra para $Re = 100$ e $BA = 0,1$, $0,5$ e $1,0$.

Na Figura 5.53 pode ser visto a influência do número de Rayleigh e da razão BA sobre o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds, fRe , para $Pr = 0,7$ e para um valor fixo do

número de Reynolds, $Re = 100$. Observa-se que o produto fRe aumenta com o aumento do número de Rayleigh. A influência de BA sobre o produto fRe é pequena e varia de acordo com o número de Rayleigh. Para Ra menor que aproximadamente 1×10^4 a número de Nusselt médio aumenta com a diminuição de BA , ocorrendo o oposto para valores maiores de Ra . Observa-se também que para Ra menor que aproximadamente 1×10^3 o produto fRe praticamente não varia com o número de Rayleigh.

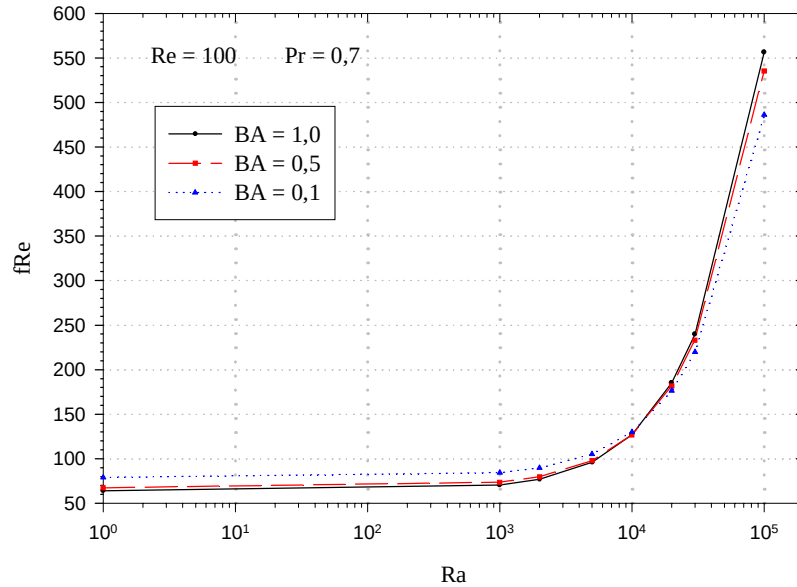


Figura 5.53 - Produto fRe versus Ra para $Re = 100$ e $BA = 0,1, 0,5$ e $1,0$.

Na Figura 5.54 pode ser visto a influência do número de Rayleigh e da razão BA sobre o número de Nusselt médio para $Pr = 0,7$ e para um valor fixo do número de Reynolds, $Re = 200$. A diferença desta figura para a Figura 5.53 é que a influência do número de Rayleigh é menor para $Re = 200$.

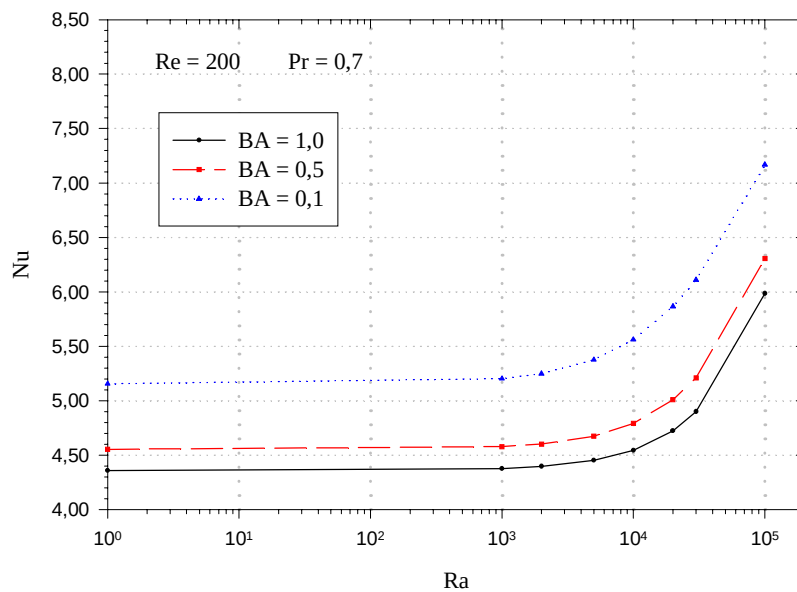


Figura 5.54 - Número de Nusselt médio versus Ra para $Re = 200$ e $BA = 0,1, 0,5$ e $1,0$.

Na Figura 5.55 pode ser visto a influência do número de Rayleigh e da razão BA sobre o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds, fRe , para $Pr = 0,7$ e para um valor fixo do número de Reynolds, $Re = 200$. Observa-se neste caso, uma menor influência causada pelo número de Rayleigh no produto fRe do que aquela vista na Figura 5.53 quando o valor de Re foi mantido em 100.

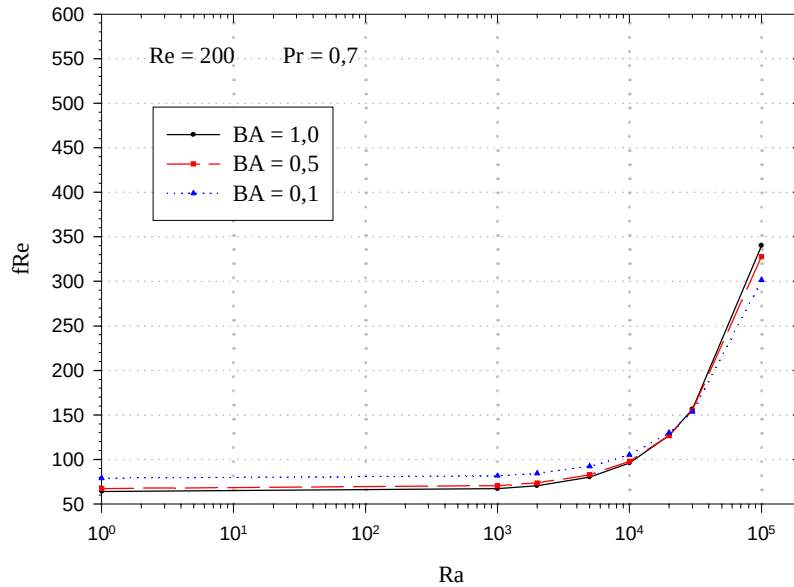


Figura 5.55 – Produto fRe versus Ra para $Re = 200$ e $BA = 0,1, 0,5$ e $1,0$.

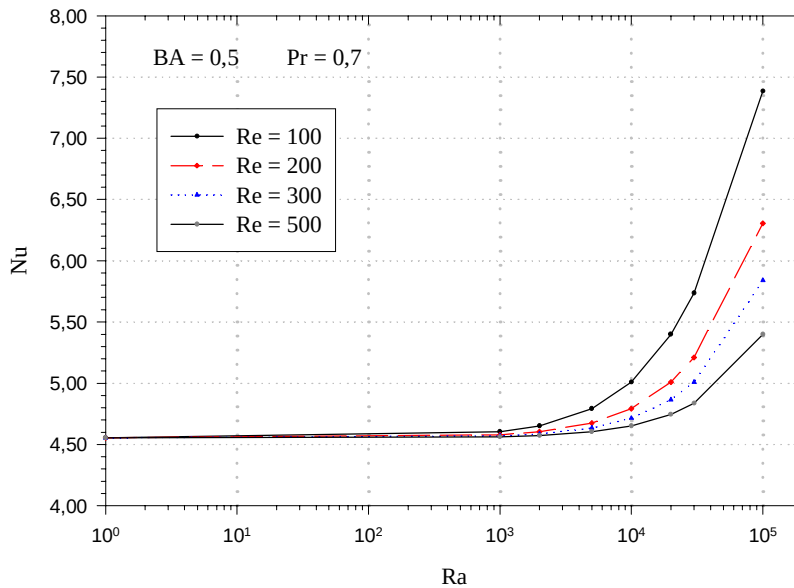


Figura 5.56 – Número de Nusselt médio versus Ra para $BA = 0,5$ e $Re = 100$ à 500 .

Na Figura 5.56 pode ser visto a influência do número de Rayleigh e do número de Reynolds sobre o número de Nusselt médio para $Pr = 0,7$ e para um valor fixo da razão BA ($BA = 0,5$). Observa-se que o número de Nusselt médio aumenta com o aumento do número de Rayleigh. A diminuição do número de Reynolds causa um aumento do número de Nusselt médio para Ra maior.

que aproximadamente 1×10^3 e este aumento é crescente com o aumento de Ra.

Na Figura 5.57 pode ser visto a influência do número de Rayleigh e do número de Reynolds sobre o produto fRe para $Pr = 0,7$ e para um valor fixo da razão BA, BA = 0,5. Observa-se que o produto fRe aumenta com o aumento do número de Rayleigh. A influência de Re sobre o produto fRe pode ser notada para Ra maior que aproximadamente 1×10^3 e esta influência aumenta com o aumento de Ra.

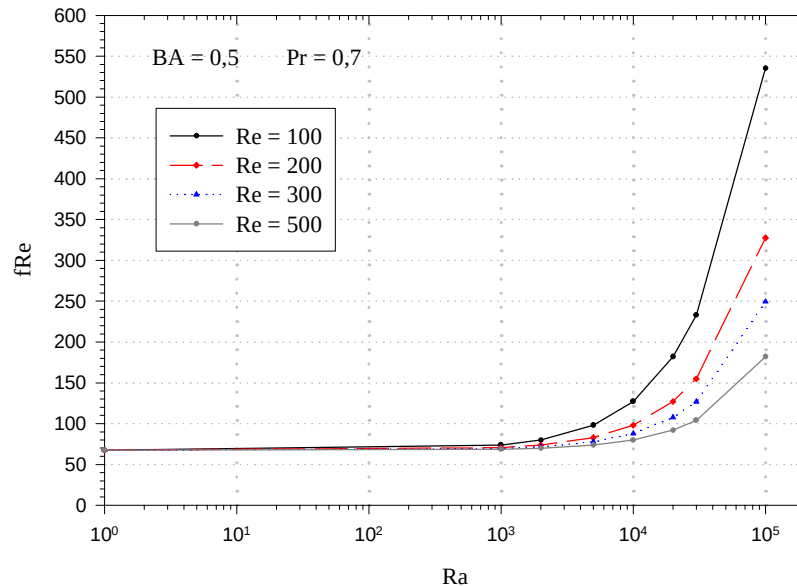


Figura 5.57 – Produto fRe versus Ra para BA = 0,5 e Re = 100, 200, 300 e 500.

De um modo geral observa-se que para um valor fixo do número de Reynolds o número de Nusselt médio (Nu) aumenta com o aumento do número de Rayleigh e com a diminuição de BA. Para Ra menor que 1×10^3 o número de Nusselt médio e o produto fRe praticamente não variam com o número de Rayleigh. O produto fRe aumenta com o aumento do número de Rayleigh. A influência de BA sobre o produto fRe é pequena e varia de acordo com o número de Rayleigh. Aumentando-se o valor de Re a influência do número de Rayleigh diminui tanto para Nu quanto para fRe .

Fixando-se o valor de BA (BA = 0,5), nota-se que o número de Nusselt médio e o produto fRe aumentam com o aumento do número de Rayleigh. A influência de Re sobre o número de Nusselt médio e sobre o produto fRe pode ser notada para Ra maior que aproximadamente 1×10^3 e esta influência aumenta com o aumento de Ra.

Para o problema estudado, o aumento do número de Rayleigh e/ou a diminuição da razão BA causam um aumento na transferência de calor. A diminuição do número de Reynolds juntamente com o aumento do número de Rayleigh também aumentam a transferência de calor.

5.6 – Banco de Tubos Alinhados entre Placas Verticais

A convecção mista laminar que ocorre num banco de tubos composto por n colunas de tubos separadas por placas verticais é estudada neste item. Os tubos são de grande comprimento de modo que o escoamento, para cima ou para baixo, possa ser tratado como bidimensional. Os tubos são mantidos isotérmicos enquanto que o fluido entra no trocador de calor com velocidade e temperatura uniformes. As equações bidimensionais de conservação na forma adimensional são resolvidas para a temperatura, função corrente e vorticidade. O número de Nusselt médio (Nu), para cada tubo, é calculado para o número de Prandtl, $Pr = 0,7$, em função da distância adimensional entre os tubos na direção vertical (HD), da distância adimensional entre as placas (LD), do número de Reynolds (Re) e do número de Richardson (Ri). São mostradas as distribuições de temperatura e de função corrente em função de diversos parâmetros geométricos e térmicos. A distância adimensional LD é igual à distância entre as placas dividida pelo diâmetro dos tubos e a distância adimensional HD é a distância entre os tubos na direção vertical dividida pelo diâmetro dos tubos. A Figura 5.58 mostra o trocador de calor estudado.

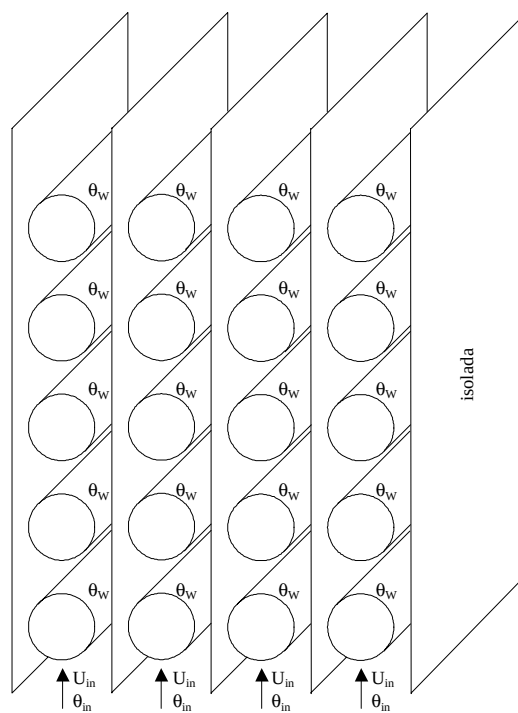


Figura 5.58 – Banco de tubos entre placas verticais.

Para o problema em estudo tomando-se apenas uma coluna de tubos pode-se dizer que se trata de um escoamento sobre um banco de tubos em um duto vertical, o que pode ser visto na Figura 5.59(a). Como neste caso existe simetria em relação a um plano vertical passando pelo centro dos tubos, então pode-se utilizar apenas a metade da geometria como domínio computacional, o que está representado pela Figura 5.59(b).

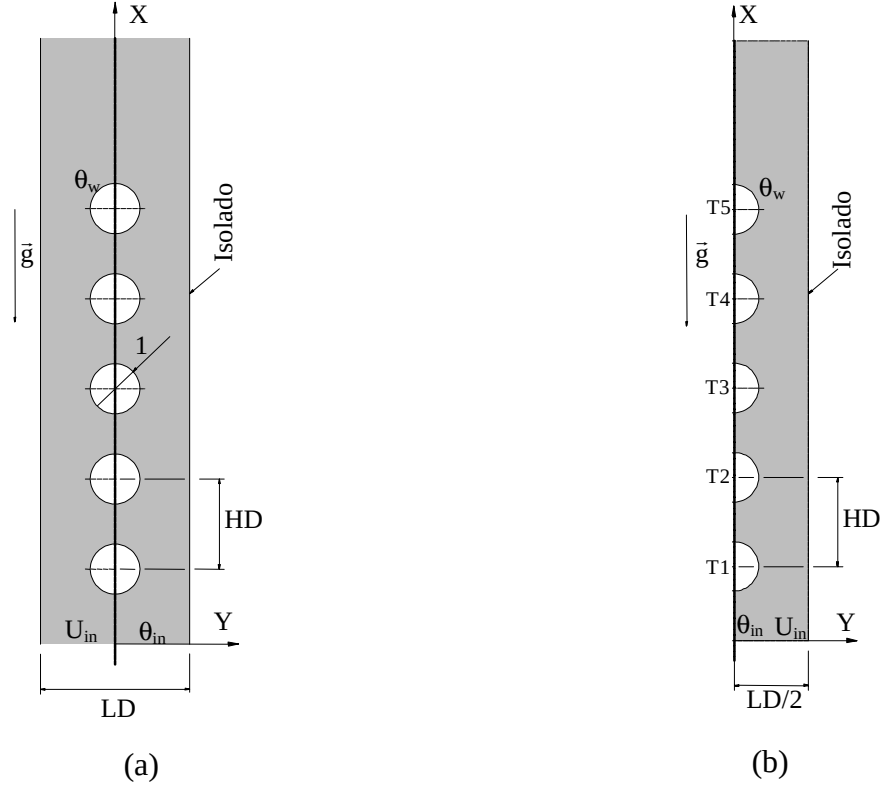


Figura 5.59 - a) Geometria do problema; b) Domínio computacional.

As equações de conservação para este problema já foram apresentadas no Capítulo 4 e são mostradas a seguir:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (5.36)$$

$$\frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (5.37)$$

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) - Ri \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (5.38)$$

As condições de contorno consideradas são: tubo aquecido com temperatura uniforme, placas termicamente isoladas, velocidade e temperatura uniformes na entrada. A vorticidade no contorno é calculada conforme o Apêndice 4. As condições iniciais e de contorno, para o problema, são dadas por:

- i. Condições iniciais ($\tau = 0$):

Todo o domínio:

$$\psi = \theta = \omega = 0. \quad (5.39)$$

- ii. Condições de contorno ($\tau > 0$):

Escoamento na entrada:

$$\theta_{in} = 0 \quad , \quad \psi = Y \quad , \quad \omega = 0. \quad (5.40a)$$

Parede dos tubos:

$$\theta_w = 1 \quad , \quad \psi = 0 \quad , \quad \omega = \omega_M. \quad (5.40b)$$

Placas:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad , \quad \psi = Y \quad , \quad \omega = \omega_M. \quad (5.40c)$$

Escoamento na saída:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0. \quad (5.40d)$$

Linha de simetria:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad , \quad \omega = 0. \quad (5.40e)$$

sendo n a direção normal à superfície, ω_M a vorticidade que é calculada e atualizada a cada passo de tempo de acordo com o Apêndice 4, θ_{in} a temperatura do fluido na entrada e θ_w a temperatura na parede dos tubos.

O número de Richardson mede a influência da convecção natural sobre a convecção forçada. O valor nulo de Ri caracteriza a convecção forçada pura. Valores negativos de Ri caracterizam o escoamento contra-empuxo enquanto valores positivos indicam o escoamento pró-empuxo. Mantendo o escoamento do fluido no sentido ascendente, o escoamento contra-empuxo ocorre quando os tubos são resfriados e o escoamento pró-empuxo ocorre quando os tubos são aquecidos. Mantendo os tubos aquecidos, o escoamento contra-empuxo ocorre quando o escoamento principal é descendente, e o escoamento pró-empuxo ocorre quando o escoamento principal é ascendente.

As malhas de elementos finitos escolhidas para uso nas aplicações do presente trabalho para $HD = 1,5$ e $LD = 1,5, 2,0$ e $2,5$ são mostradas na Figura 5.60, sendo adotada a distância entre a entrada e o centro do primeiro tubo igual a D e a distância do centro do último tubo à saída igual a $3 \times D$. Os números entre parêntesis representam a malha (elementos $\times$ nós). As malhas são não uniformes, concentrando mais elementos próximo às paredes dos tubos onde estão os maiores gradientes de temperatura.

Na Tabela A5.5 do Apêndice 5 são apresentados os valores do número de Nusselt médio de cada tubo (Nu) em função da distância adimensional entre as placas (LD), do número de Reynolds e do número de Richardson. Os valores do número de Prandtl, $Pr = 0,7$ (ar), e da distância adimensional entre os tubos na direção vertical, $HD = 1,5$, são fixos. A distância LD assume os valores $1,5, 2,0$ e $2,5$, o número de Reynolds os valores 50 e 100 e o número de Richardson os valores $-5,0, -2,0, 0,0, 2,0$ e $5,0$.

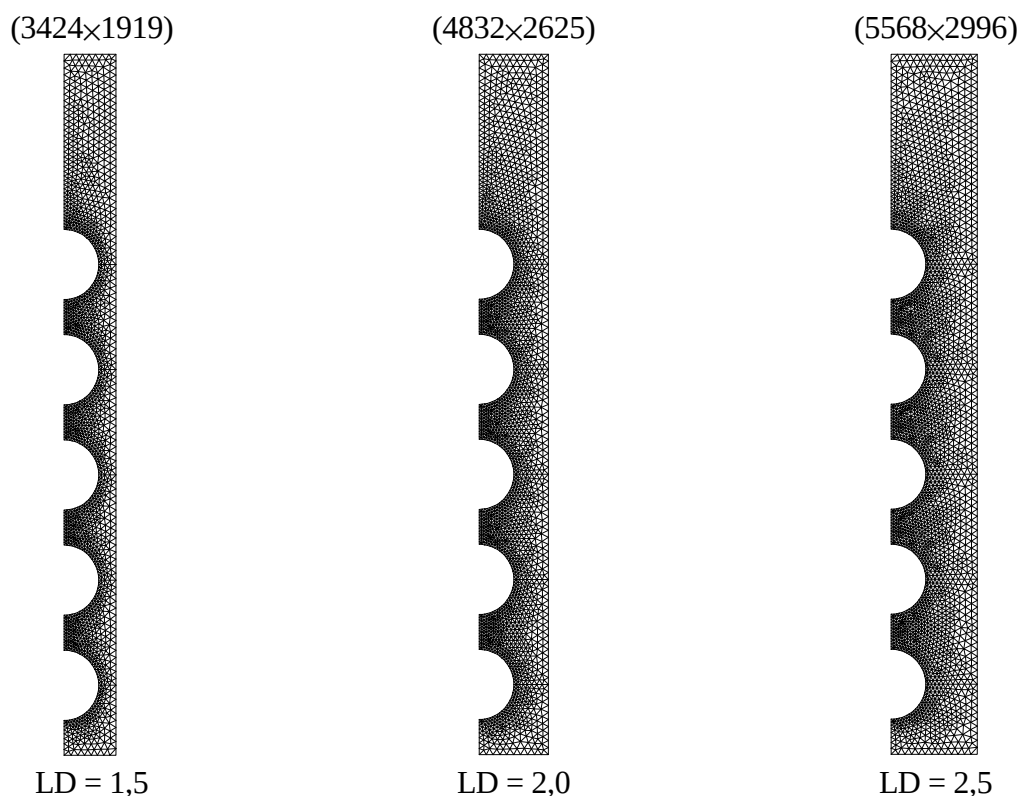


Figura 5.60 – Malhas para tubos alinhados em um escoamento vertical.

As distribuições de função corrente e de temperatura para $Pr = 0,7$, $LD = 2,0$, $HD = 1,5$ e $Re = 50$ podem ser vistas nas Figuras 5.61a e 5.61b e para $Pr = 0,7$, $LD = 2,0$, $HD = 1,5$ e $Re = 100$ nas Figuras 5.62a e 5.62b. Observa-se que o aumento do número de Reynolds causa um aumento no tamanho das regiões de recirculação. Analisando as linhas de corrente na Figura 5.61a e na Figura 5.62a verifica-se que: no escoamento contra-empuxo, quando Ri diminui de 0,0 para $-5,0$, as regiões de recirculação aumentam de tamanho, a velocidade do fluido tende a aumentar junto à parede do duto e a diminuir próximo aos tubos. Pode-se dizer que no escoamento contra-empuxo o aumento da influência da convecção natural tende a diminuir a velocidade do fluido junto aos tubos, diminuindo assim a transferência de calor. No escoamento pró-empuxo, quando Ri aumenta de 0,0 para 5,0, as regiões de recirculação diminuem de tamanho, a velocidade do fluido tende a diminuir junto a parede do duto e a aumentar próximo aos tubos, ou seja, no escoamento pró-empuxo o aumento da influência da convecção natural tende a aumentar a velocidade do fluido junto aos tubos, causando assim um aumento da transferência de calor.

Observando as isotermas da Figura 5.61b e da Figura 5.62b verifica-se que no escoamento contra-empuxo, quando Ri diminui de 0,0 para $-5,0$, a distância entre as isotermas aumenta próximo aos tubos indicando uma diminuição do gradiente de temperatura nestas regiões, ou seja, no escoamento contra-empuxo o aumento da influência da convecção natural tende a diminuir o gradiente de temperatura junto aos tubos, diminuindo assim a transferência de calor. No escoamento pró-empuxo, quando Ri aumenta de 0,0 para 5,0, a distância entre as isotermas diminui próximo aos tubos indicando um aumento do gradiente de temperatura nestas regiões, ou seja, no escoamento pró-empuxo o aumento da influência da convecção natural tende a aumentar o gradiente de temperatura junto aos tubos, causando assim um aumento da transferência de calor.

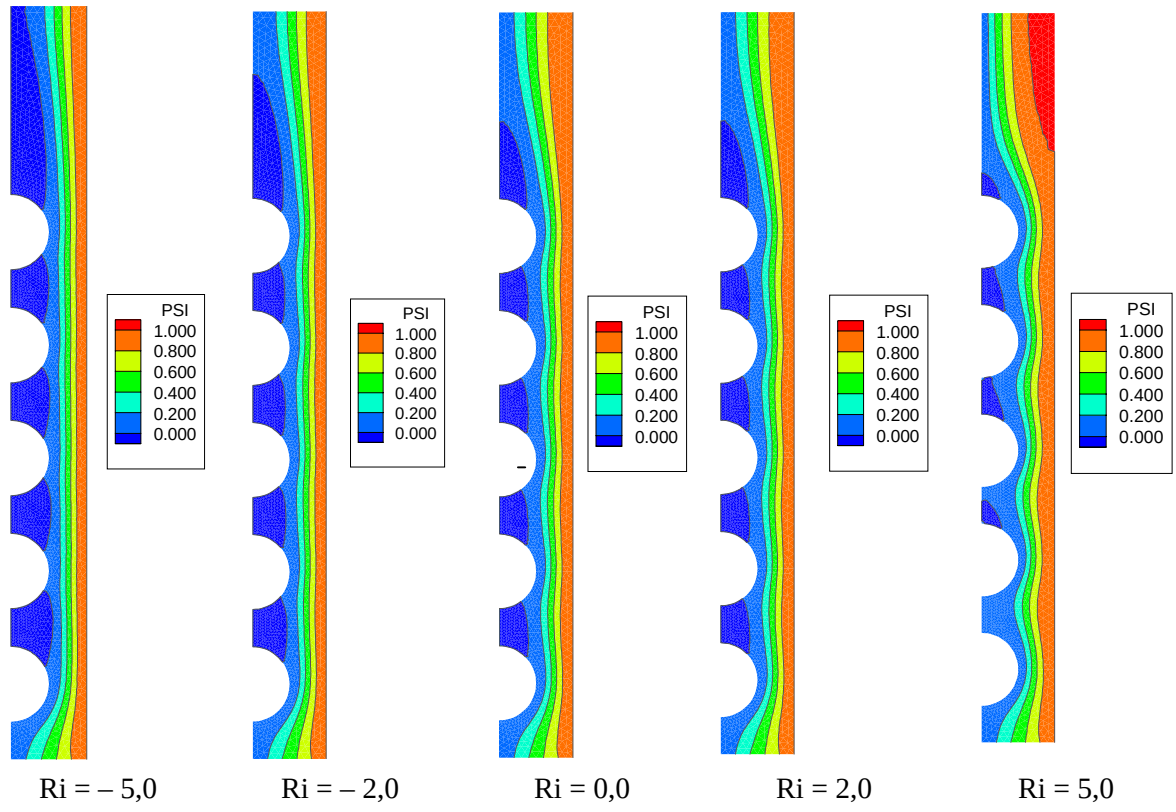


Figura 5.61a – Linhas de corrente para $Re = 50$.

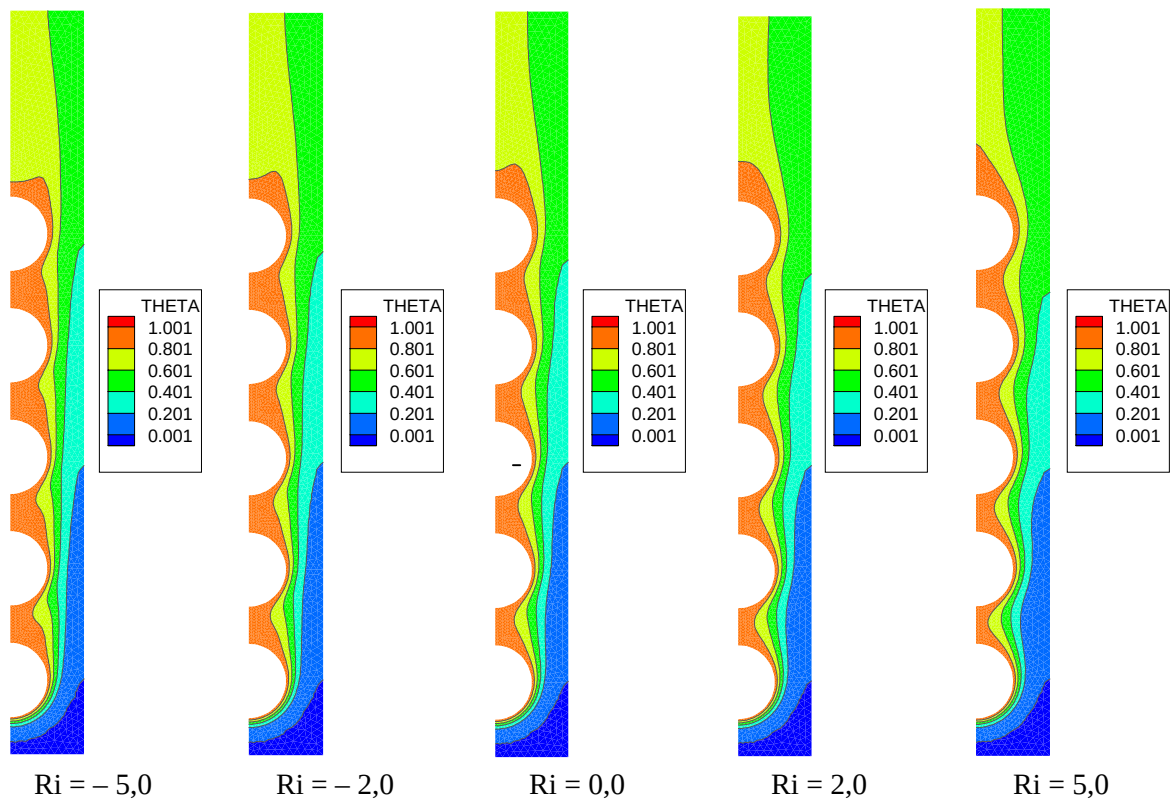


Figura 5.61b – Isotermas para $Re = 50$.

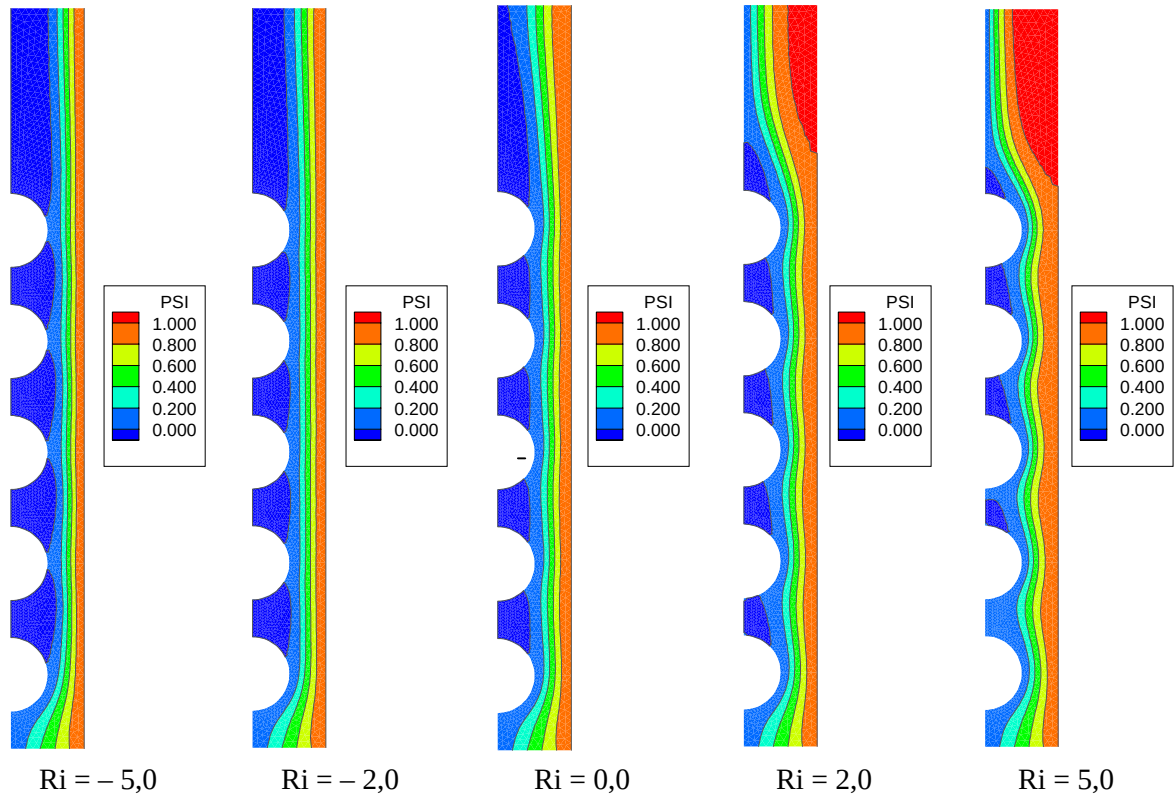


Figura 5.62a – Linhas de Corrente para $Re = 100$.

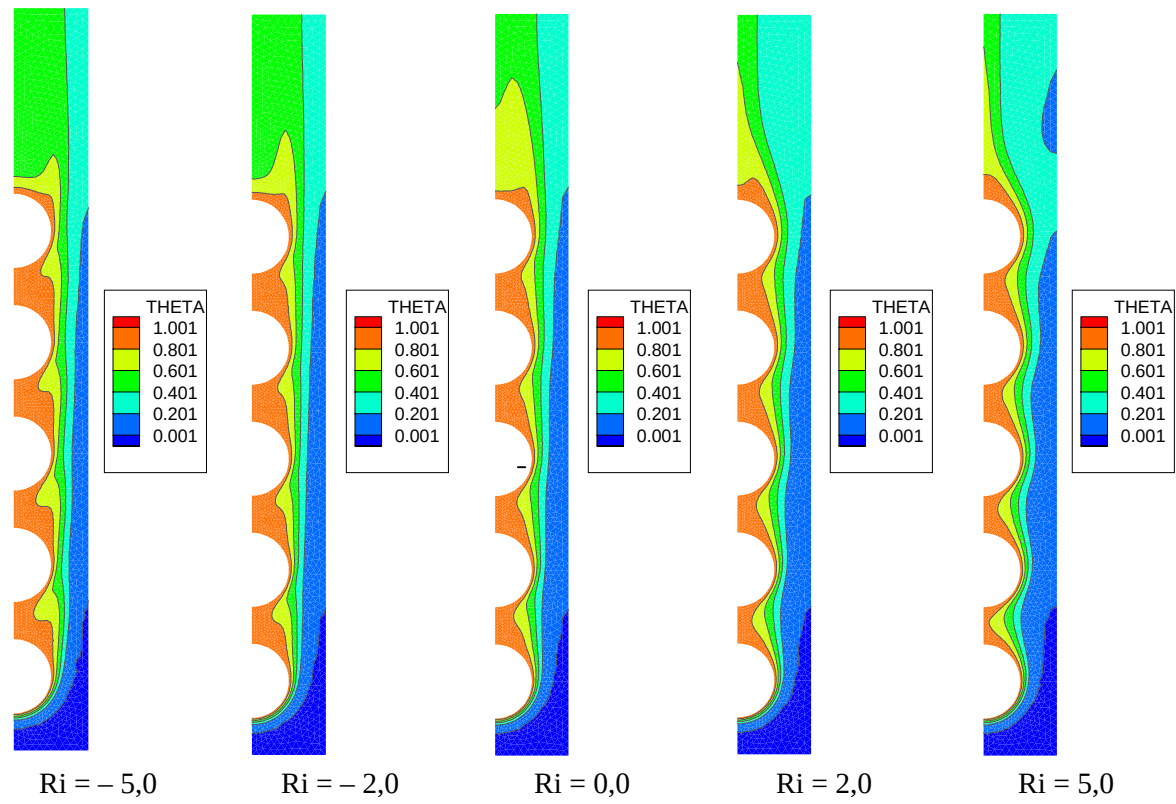


Figura 5.62b – Isotermas para $Re = 100$.

Nas Figuras 5.63, 5.64 e 5.65 pode-se observar a influência do número de Richardson sobre o número de Nusselt local para $Re = 100$, $HD = 1,5$ e $LD = 1,5$. O ângulo é medido na superfície do tubo, do menor para o maior valor da coordenada vertical. Nota-se que o número de Nusselt local no primeiro tubo tem um comportamento diferenciado na metade inferior do tubo, mas se comporta como os tubos intermediários na metade superior. O número de Nusselt local no último tubo se comporta como nos tubos intermediários até um ângulo aproximadamente 130° , quando então se eleva de valor diferenciando-se destes tubos. O comportamento de Nu_L nos tubos 2, 3 e 4 é praticamente o mesmo sendo que no tubo 2 seu valor é um pouco maior. O valor máximo de Nu_L ocorre para um ângulo de aproximadamente 72° , para os tubos de 2 a 5.

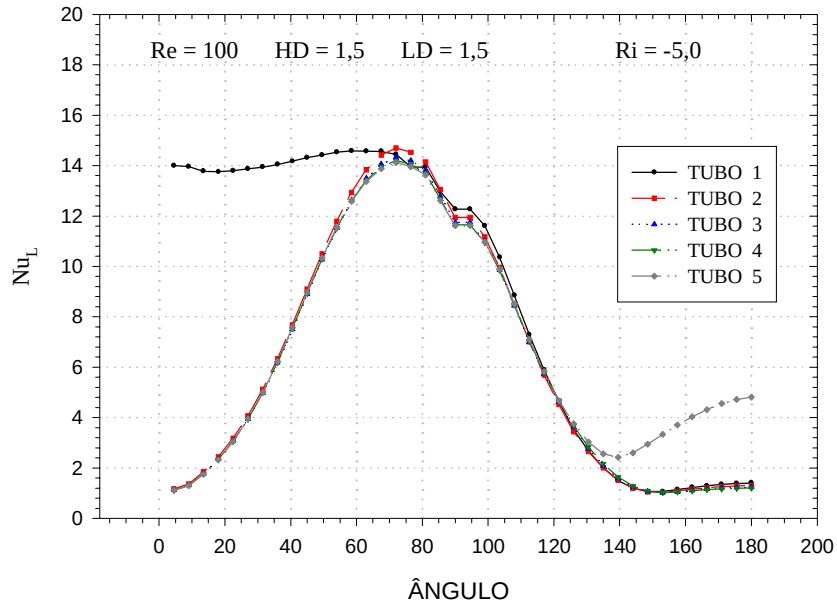


Figura 5.63 – Número de Nusselt local para $Ri = -5,0$.

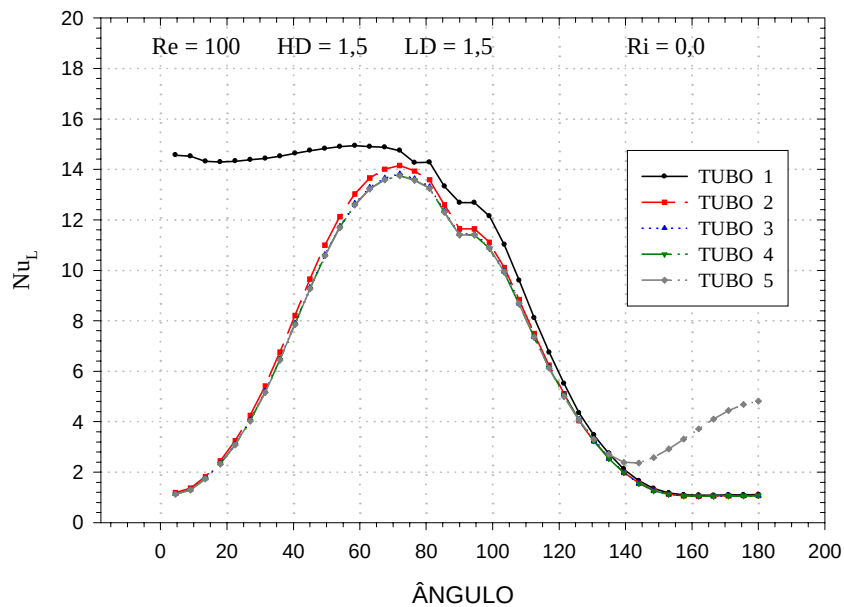


Figura 5.64 – Número de Nusselt local para $Ri = 0,0$.

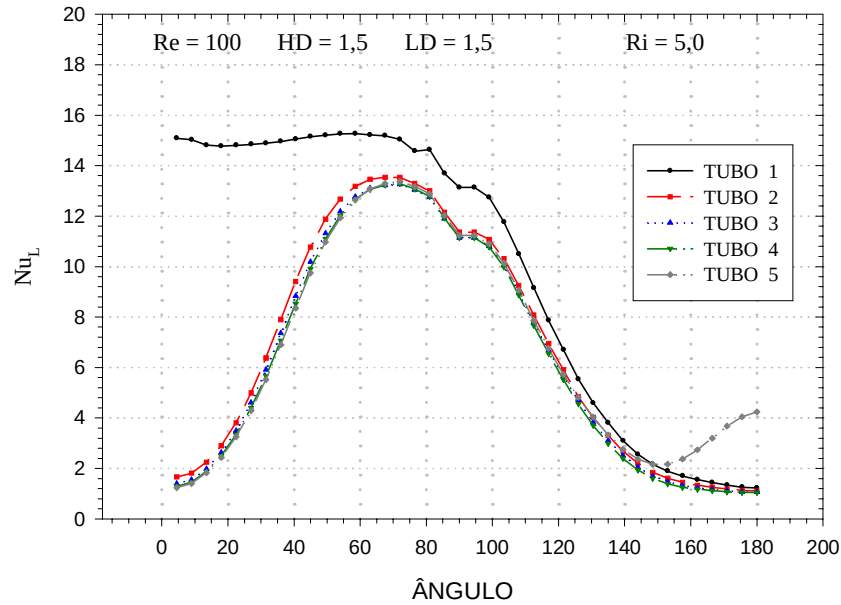


Figura 5.65 – Número de Nusselt local para Ri = 5,0.

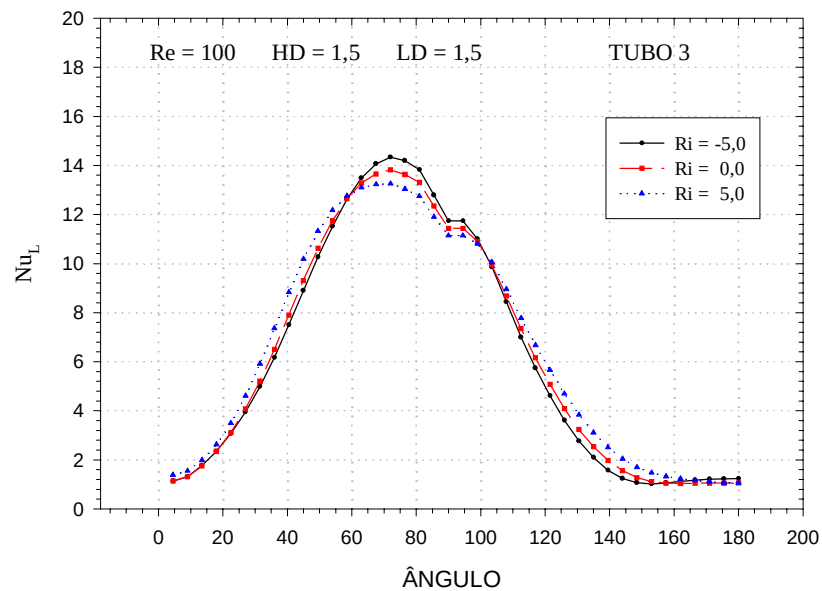


Figura 5.66 – Número de Nusselt local para o Tubo 3.

Na Figura 5.66 mostra-se o valor do número de Nusselt local apenas para o Tubo 3, que é um tubo de comportamento médio, com o objetivo de se analisar a influência do número de Richardson. Verifica-se que no escoamento contra-empuxo aumentando-se a convecção natural no escoamento, ou seja, variando-se Ri de 0,0 para -5,0 há uma diminuição do número de Nusselt local para ângulos abaixo de 60° ou acima de 100° e um aumento para ângulos entre estes valores. No escoamento pró-empuxo aumentando-se a convecção natural no escoamento, ou seja, variando-se Ri de 0,0 para 5,0 há um aumento do número de Nusselt local para ângulos abaixo de 60° ou acima de 100° e uma diminuição para ângulos entre estes valores. Pode-se dizer então que, de uma maneira geral, no escoamento pró-empuxo a convecção natural prejudica a troca de calor na parte intermediária do tubo e melhora a troca nas partes inferior e superior do tubo. No escoamento contra-empuxo ocorre o oposto.

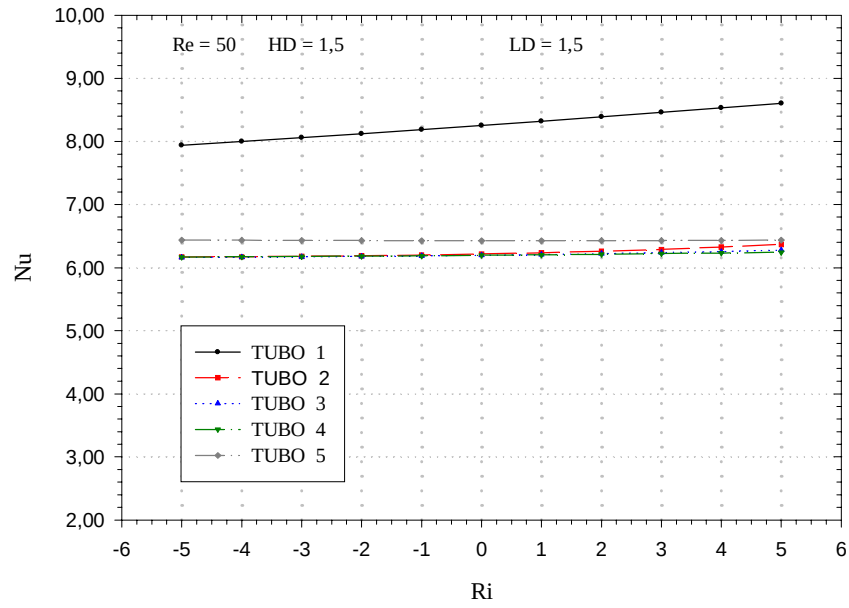


Figura 5.67 – Número de Nusselt médio para LD = 1,5.

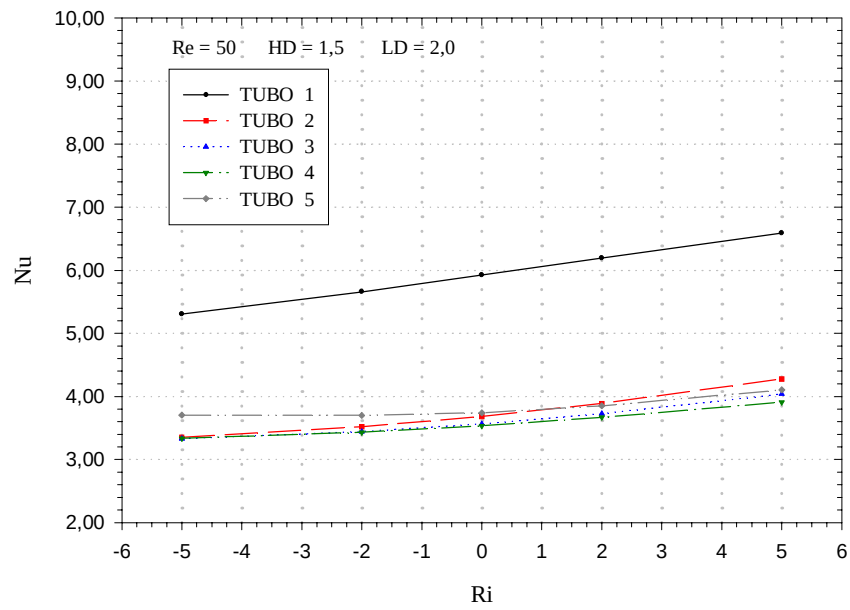


Figura 5.68 – Número de Nusselt médio para LD = 2,0.

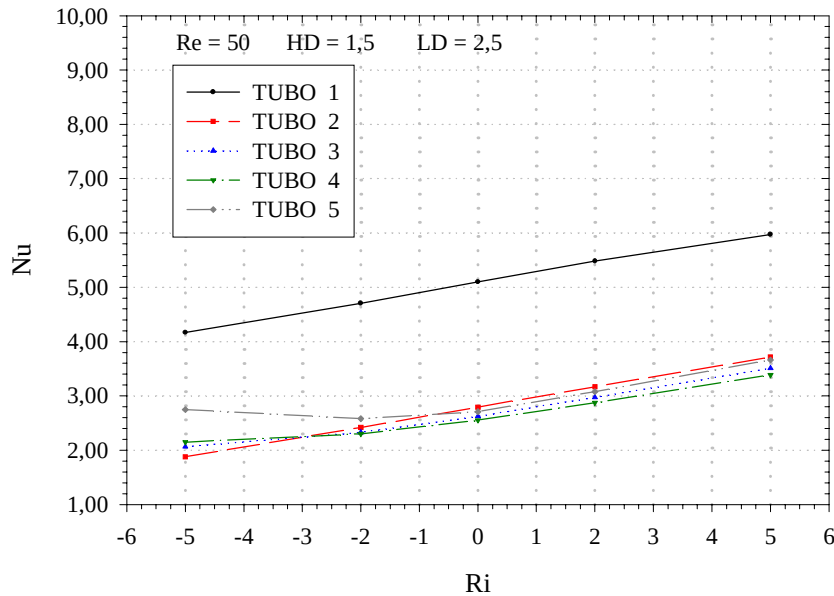


Figura 5.69 – Número de Nusselt médio para LD = 2,5.

Nas Figuras 5.67, 5.68 e 5.69 são apresentados valores do número de Nusselt médio para: $Pr = 0,7$, $Re = 50$, $HD = 1,5$ e $LD = 1,5, 2,0$ e $2,5$. Analisando os gráficos verifica-se que: no escoamento contra-empuxo ($Ri < 0$), o número de Nusselt médio aumenta com a diminuição da largura adimensional do duto e diminui quando Ri se reduz de $0,0$ para $-5,0$ e esta diminuição é tanto maior quanto maior for a largura adimensional do duto. Note-se que para o Tubo 5 Nu aumenta quando Ri se reduz de 0 para $-5,0$. No escoamento pró-empuxo, o número de Nusselt médio aumenta com a diminuição da largura adimensional do duto e com o aumento de Ri de $0,0$ para $5,0$. O aumento de Nu com a elevação de Ri é tanto maior quanto maior for a largura adimensional do duto. Conclui-se destas observações que Nu diminui com o aumento da largura adimensional do duto tanto para o escoamento contra-empuxo quanto para o escoamento pró-empuxo e que o aumento da convecção natural causa um aumento do número de Nusselt médio no escoamento pró-empuxo e uma diminuição deste valor no escoamento contra-empuxo. A influência da convecção natural no número de Nusselt médio é tanto maior quanto maior for a largura adimensional do duto.

Para o problema estudado, o aumento da convecção natural causa um aumento na transferência de calor no escoamento pró empuxo e uma diminuição da transferência de calor no escoamento contra-empuxo.

5.7 – Banco de Tubos Alinhados em um Escoamento Vertical

O problema estudado neste item é semelhante ao anterior mas sem as placas verticais entre as colunas de tubos. Os tubos são de grande comprimento de modo que o escoamento, para cima ou para baixo, possa ser tratado como bidimensional. Os tubos são mantidos isotérmicos enquanto que o fluido entra no trocador de calor com velocidade e temperatura uniformes. As equações bidimensionais de conservação na forma adimensional são resolvidas para a temperatura, função corrente e vorticidade. O número de Nusselt médio (Nu) é calculado para cada tubo considerando o número de Prandtl fixo, $Pr = 0,7$, e em função da distância adimensional entre os tubos, na direção vertical, (HD), da distância adimensional entre os tubos na direção horizontal (LD), do número de Reynolds (Re) e do número de Richardson (Ri). São mostradas as distribuições de temperatura e de função corrente em função de alguns parâmetros geométricos e térmicos. A distância adimensional LD é igual a distância dimensional entre os tubos (direção horizontal) dividida pelo diâmetro dos

tubos e a distância adimensional HD é igual a distância dimensional entre os tubos (direção vertical) dividida pelo diâmetro dos tubos. A Figura 5.70 mostra o trocador de calor estudado.

As equações de conservação para este problema são as Equações (5.36) a (5.38) do banco de tubos entre placas verticais, o que muda são as condições de contorno.

As condições de contorno consideradas são: tubo aquecido com temperatura uniforme, velocidade e temperatura uniformes na entrada. A vorticidade no contorno é calculada conforme o Apêndice 4. As condições iniciais e de contorno, para o problema, são dadas por:

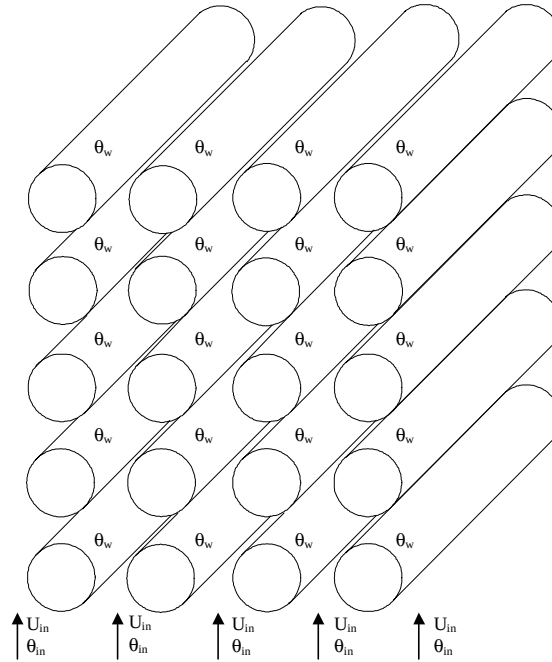


Figura 5.70 – Banco de tubos em um escoamento vertical.

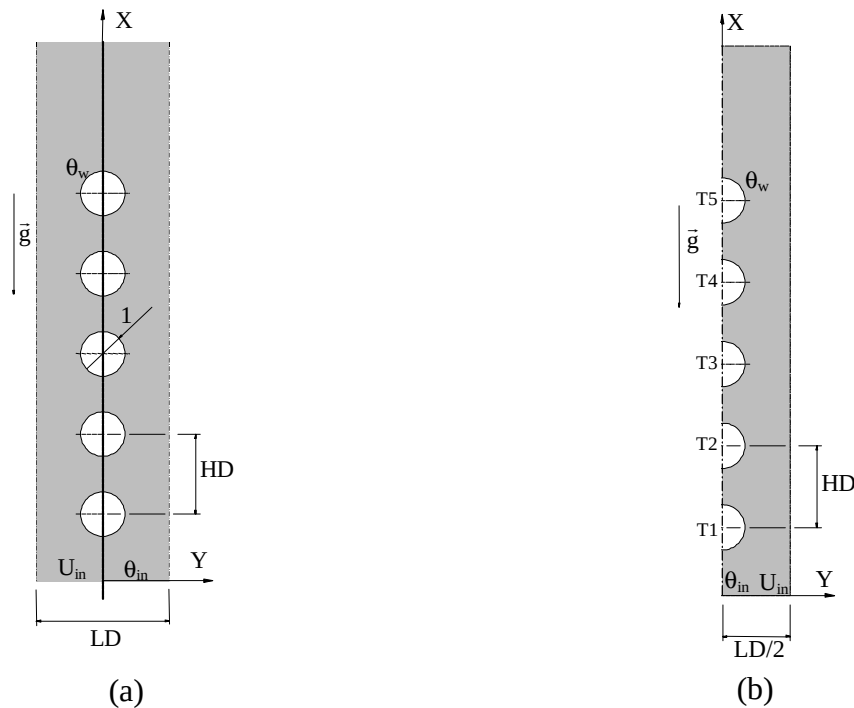


Figura 5.71 - a) Geometria do problema; b) Domínio computacional.

- i. Condições iniciais ($\tau = 0$):

Todo o domínio:

$$\psi = \theta = \omega = 0 . \quad (5.41)$$

- ii. Condições de contorno ($\tau > 0$):

Escoamento na entrada:

$$\theta = \theta_{in} = 0 , \quad \psi = Y , \quad \omega = 0 . \quad (5.42a)$$

Parede dos tubos:

$$\theta = \theta_w = 1 , \quad \psi = 0 , \quad \omega = \omega_M . \quad (5.42b)$$

Escoamento na saída:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 , \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 . \quad (5.42c)$$

Linha de simetria para $Y = 0$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \psi = 0 , \quad \omega = 0 . \quad (5.42d)$$

Linha de simetria para $Y = LD/2$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \psi = Y , \quad \omega = 0 . \quad (5.42e)$$

sendo n a direção normal à superfície, ω_M a vorticidade que é calculada e atualizada a cada passo de tempo de acordo com o Apêndice 4, θ_{in} a temperatura do fluido na entrada e θ_w a temperatura na parede dos tubos.

As malhas de elementos finitos escolhidas para uso nas aplicações do presente trabalho para $HD = 1,5$ e $LD = 1,5, 2,0$ e $2,5$ são mostradas na Figura 5.72. Os números entre parêntesis representam a malha (elementos $\times$ nós). As malhas são não uniformes, concentrando mais elementos próximo às paredes dos tubos onde estão os maiores gradientes de temperatura.

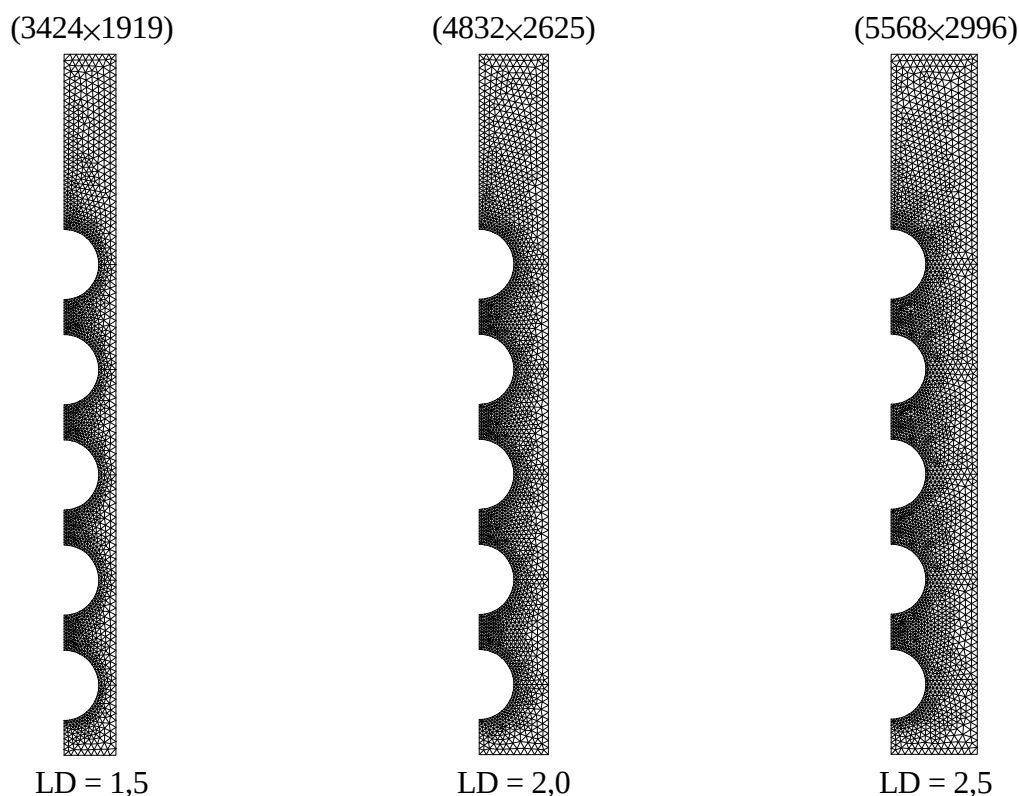


Figura 5.72 – Malhas para tubos alinhados em um escoamento vertical.

Na Tabela A5.6 do Apêndice 5 são apresentados os valores do número de Nusselt médio de cada tubo (Nu) em função da distância adimensional horizontal entre os tubos (LD), do número de Reynolds e do número de Richardson para $Pr = 0,7$ (ar) e distância adimensional vertical entre os tubos, $HD = 1,5$. A distância LD assume os valores 1,5, 2,0 e 2,5, o número de Reynolds os valores 50 e 100 e o número de Richardson os valores $-5,0$, $-2,0$, $0,0$, $2,0$ e $5,0$.

As distribuições de função corrente e de temperatura para $Pr = 0,7$, $LD = 2,0$, $HD = 1,5$ e $Re = 50$ podem ser vistas nas Figuras 5.73a e 5.73b e para $Pr = 0,7$, $LD = 2,0$, $HD = 1,5$ e $Re = 100$ nas Figuras 5.74a e 5.74b. Observa-se que o aumento do número de Reynolds causa um aumento no tamanho das regiões de recirculação. Analisando as linhas de corrente na Figura 5.73a e na Figura 5.74a verifica-se que: no escoamento contra-empuxo, quando Ri diminui de $0,0$ para $-5,0$, as regiões de recirculação aumentam de tamanho, a velocidade do fluido tende a diminuir próximo aos tubos. Pode-se dizer que no escoamento contra-empuxo o aumento da influência da convecção natural tende a diminuir a velocidade do fluido junto aos tubos, diminuindo assim a transferência de calor. No escoamento pró-empuxo, quando Ri aumenta de $0,0$ para $5,0$, as regiões de recirculação diminuem de tamanho, a velocidade do fluido tende a aumentar próximo aos tubos, ou seja, no escoamento pró-empuxo o aumento da influência da convecção natural tende a aumentar a velocidade do fluido junto aos tubos, causando assim um aumento da transferência de calor.

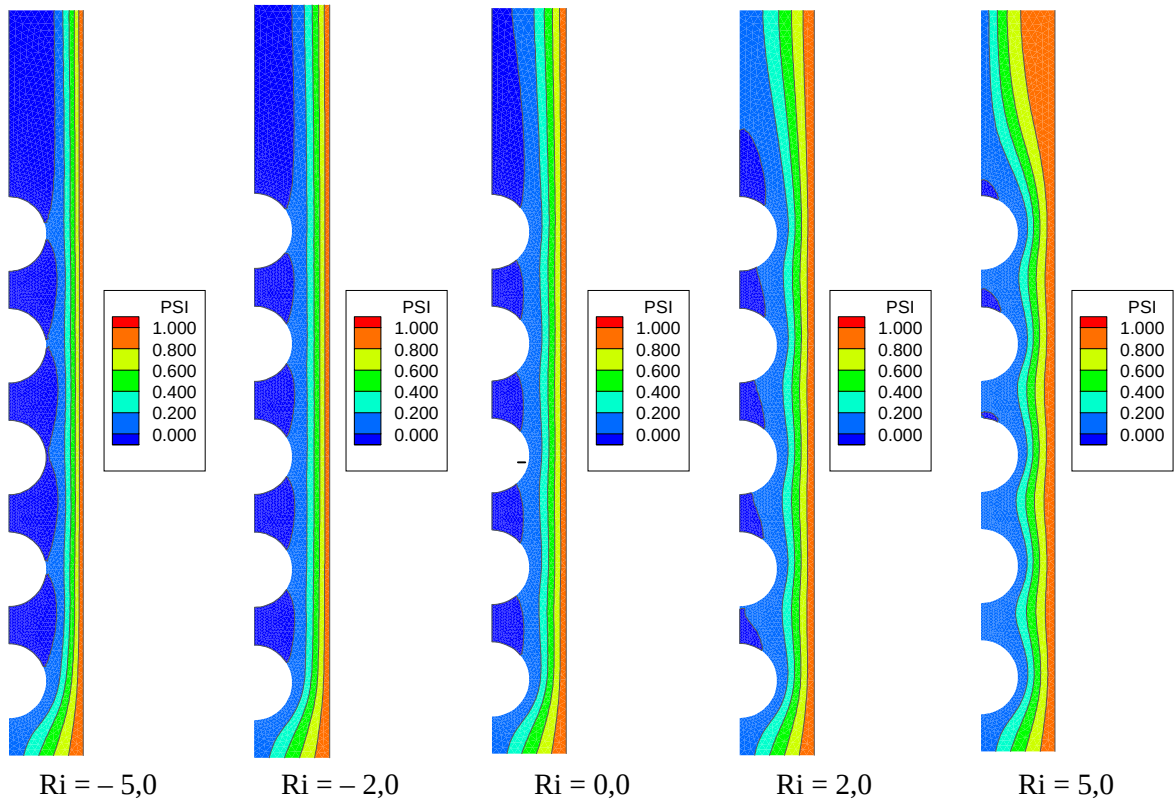


Figura 5.73a – Linhas de Corrente para $Re = 50$.

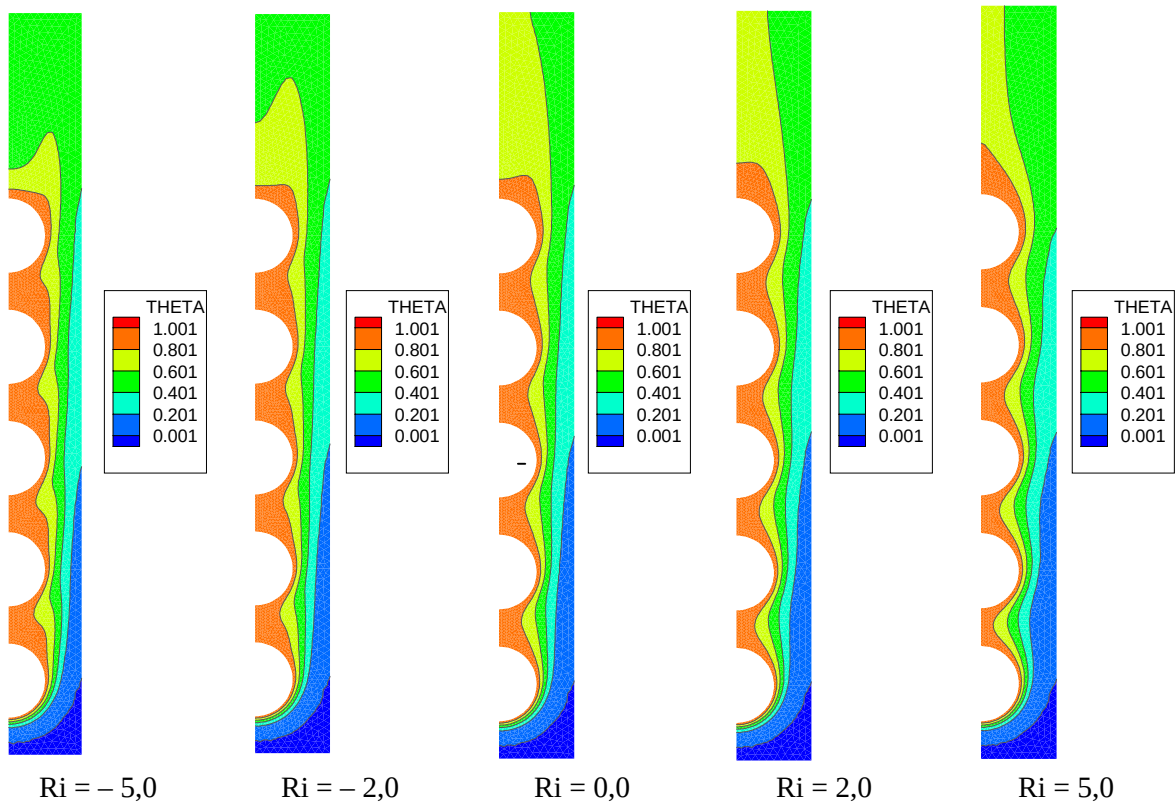


Figura 5.73b – Isotermas para $Re = 50$.

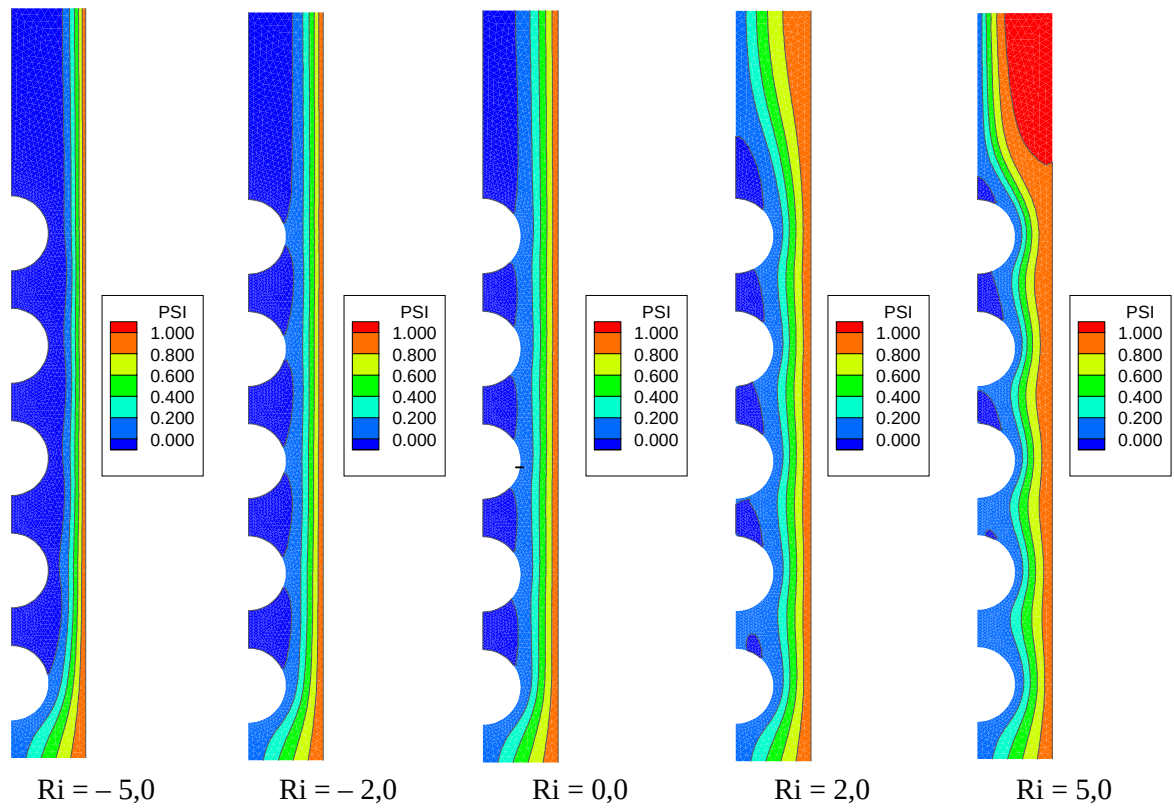


Figura 5.74a – Linhas de Corrente para $Re = 100$.

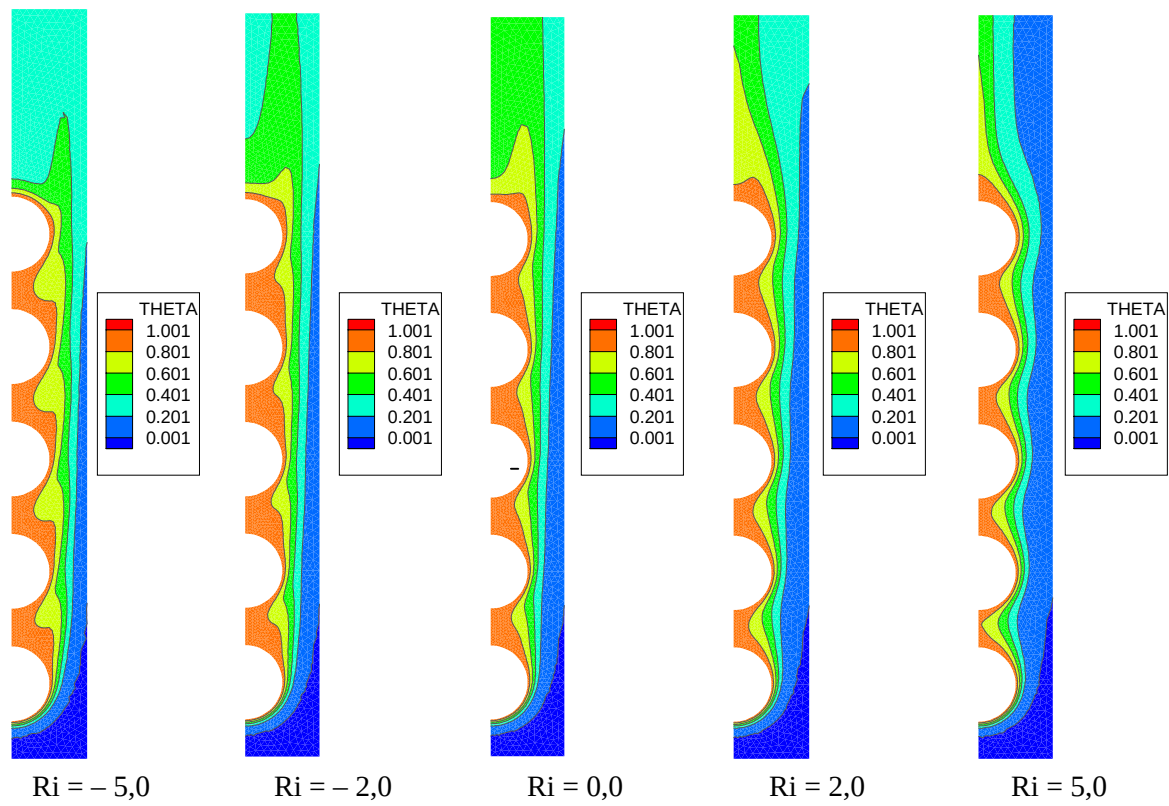


Figura 5.74b – Isotermas para $Re = 100$.

Nas Figuras 5.75, 5.76 e 5.77 pode-se observar a influência do número de Richardson sobre o número de Nusselt local (Nu_L) para $Re = 100$, $HD = 1,5$ e $LD = 1,5$. O ângulo é medido na superfície do tubo, do menor para o maior valor da coordenada vertical. Verifica-se que o valor máximo de Nu_L ocorre para um ângulo de aproximadamente 75° . No primeiro tubo o valor máximo de Nu_L ocorre para o ângulo de 0° e aumenta com o aumento do número de Richardson.

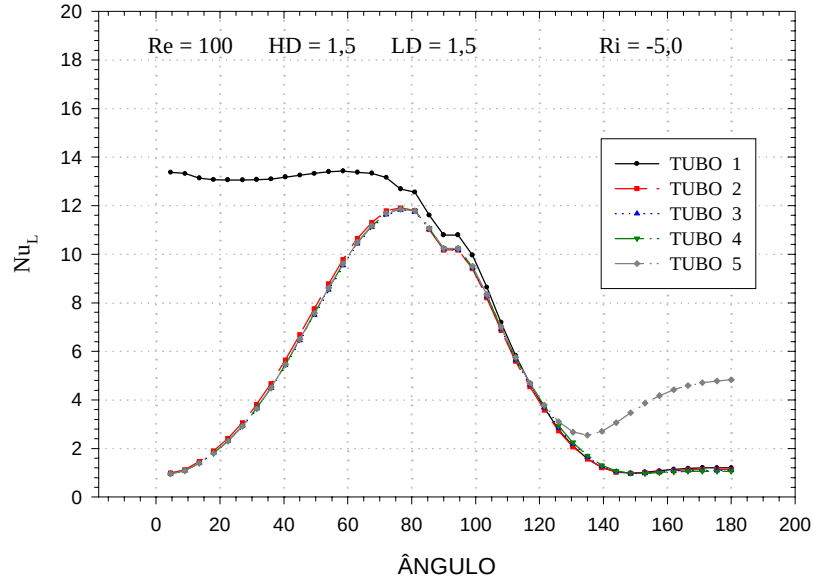


Figura 5.75 – Número de Nusselt local para $Ri = -5,0$.

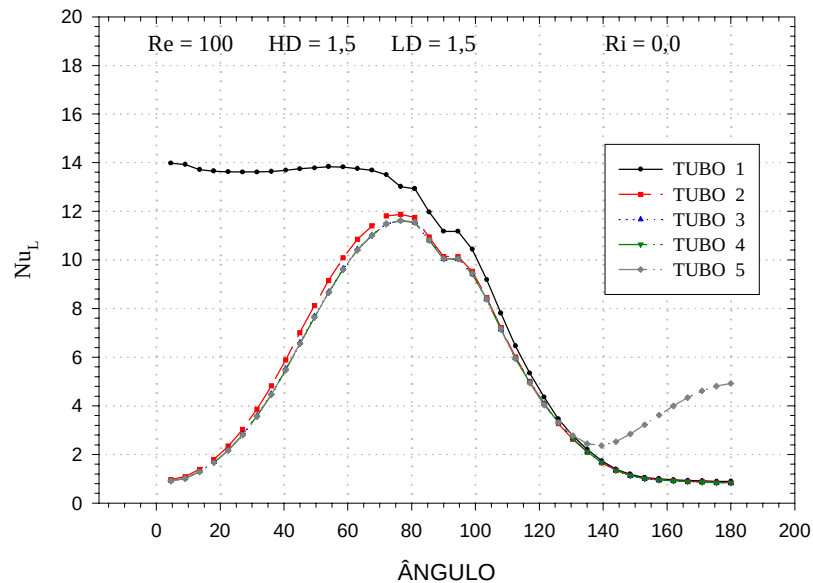


Figura 5.76 – Número de Nusselt local para $Ri = 0,0$.

Nota-se que a curva do número de Nusselt local para o primeiro tubo tem um comportamento diferenciado das curvas para os tubos intermediários. Este comportamento fica ainda mais diferenciado a medida que se aumenta o número de Richardson de $-5,0$ a $5,0$. A curva do número de Nusselt local para o último tubo tem um comportamento semelhante ao das curvas para os tubos intermediários até um ângulo de aproximadamente 120° , para $Ri = -5,0$, quando então o número de Nusselt local passa a aumentar de valor. Este ângulo aumenta com o aumento de Ri . O

comportamento de Nu_L nos tubos 2, 3 e 4 é praticamente o mesmo sendo que no tubo 2 seu valor é um pouco maior. O valor máximo de Nu_L ocorre para um ângulo de aproximadamente 75° , para os tubos de 2 à 5.

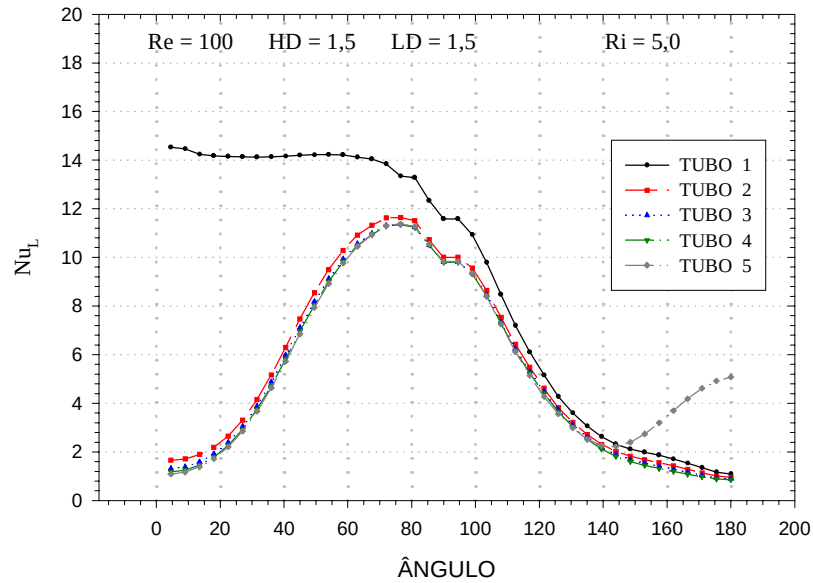


Figura 5.77 – Número de Nusselt local para $Ri = 5,0$.

Na Figura 5.78 pode-se observar o comportamento de Nu_L com a variação do número de Richardson para o terceiro tubo que é o tubo de comportamento médio e por isso foi escolhido para a análise. No escoamento contra-empuxo, o aumento da convecção natural causa um aumento no valor de Nu_L para ângulos entre 65° e 100° e uma diminuição de Nu_L , principalmente na metade superior do tubo. No escoamento pró-empuxo, o aumento da convecção natural causa uma diminuição no valor máximo de Nu_L e um aumento de Nu_L para ângulos inferiores a 60° ou superiores a 110° .

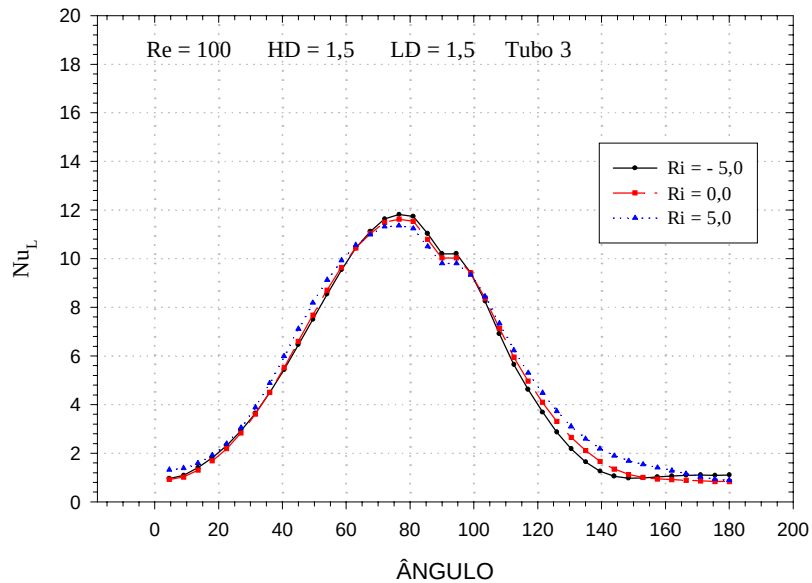


Figura 5.78 – Número de Nusselt local para o terceiro tubo.

Com relação ao número de Nusselt local podemos dizer que o aumento da convecção natural no escoamento contra-empuxo prejudica a troca de calor nas partes superior e inferior do tubo e melhora a troca de calor na parte intermediária do tubo e que o aumento da convecção natural no escoamento pró-empuxo tem o efeito contrário, ou seja, melhora a troca de calor nas partes inferior e superior e prejudica a troca de calor na parte intermediária do tubo.

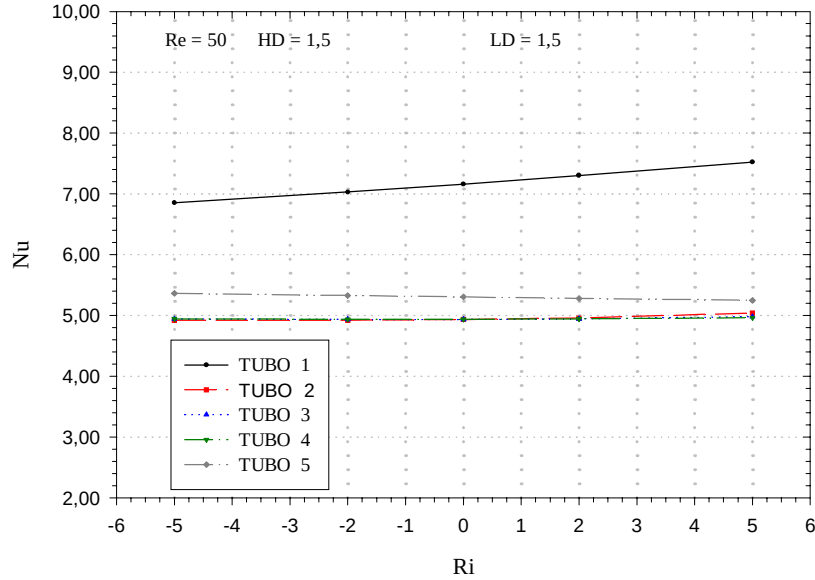


Figura 5.79 – Número de Nusselt médio para LD = 1,5.

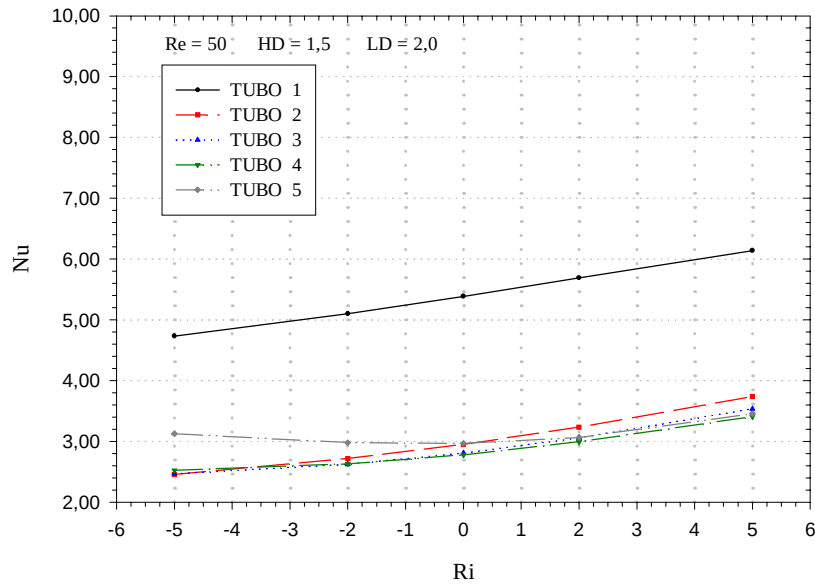


Figura 5.80 – Número de Nusselt médio para LD = 2,0.

Nas Figuras 5.79, 5.80 e 5.81 são apresentados valores do número de Nusselt médio (Nu) para: $Pr = 0,7$, $Re = 50$, $HD = 1,5$ e $LD = 1,5, 2,0$ e $2,5$. Com relação a distância adimensional LD , verifica-se que a sua diminuição causa um aumento no número de Nusselt médio tanto no escoamento contra-empuxo quanto no escoamento pró-empuxo. Para os tubos 1, 2, 3 e 4 o aumento da convecção natural causa uma diminuição do número de Nusselt médio no escoamento contra-empuxo e um aumento do número de Nusselt médio no escoamento pró-empuxo qualquer que seja a distância LD . Esta variação de Nu é tanto maior quanto maior for a distância LD . Para o tubo 5, o comportamento do número de Nusselt médio vai depender da distância LD como pode ser visto nas referidas figuras.

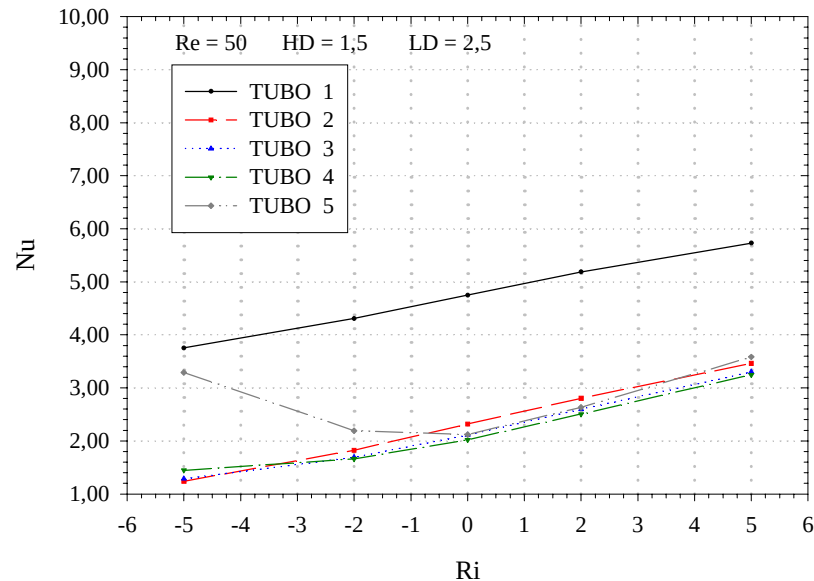


Figura 5.81 – Número de Nusselt médio para $LD = 2,5$.

De uma maneira geral observa-se que o número de Nusselt médio diminui com o aumento da distância adimensional LD tanto para o escoamento contra-empuxo quanto para o escoamento pró-empuxo e que o aumento da convecção natural causa um aumento do número de Nusselt médio no escoamento pró-empuxo e uma diminuição deste valor no escoamento contra-empuxo, exceto para o último tubo. A influência da convecção natural no número de Nusselt médio é tanto maior quanto maior for a distância adimensional LD .

5.8 – Banco de Tubos Alternados em um Escoamento Vertical

O problema estudado neste item é semelhante ao anterior mas as colunas de tubos verticais são alternadas, como pode ser visto na Figura 5.82. Os tubos são de grande comprimento de modo que o escoamento, para cima ou para baixo, possa ser tratado como bidimensional. Os tubos são mantidos isotérmicos enquanto que o fluido entra no trocador de calor com velocidade e temperatura uniformes. As equações bidimensionais de conservação na forma adimensional são resolvidas para a temperatura, função corrente e vorticidade. O número de Nusselt médio (Nu) é calculado para cada tubo considerando o número de Prandtl fixo, $Pr = 0,7$, e em função da distância adimensional entre os tubos, na direção vertical, (HD), da distância adimensional entre os tubos na direção horizontal (LD), do número de Reynolds (Re) e do número de Richardson (Ri). São mostradas as distribuições de temperatura e de função corrente em função de alguns parâmetros geométricos e térmicos. A distância adimensional LD é igual a distância dimensional entre os tubos (direção horizontal) dividida pelo diâmetro dos tubos e a distância adimensional HD é igual a distância dimensional entre os tubos (direção vertical) dividida pelo

diâmetro dos tubos.

Para o problema em estudo não é necessário utilizar o banco de tubos completo na análise. Pode-se utilizar apenas uma coluna de tubos, o que é mostrado na Figura 5.83(a). Considerando-se que para esta coluna de tubos existe simetria em relação a um plano vertical passando pelo centro

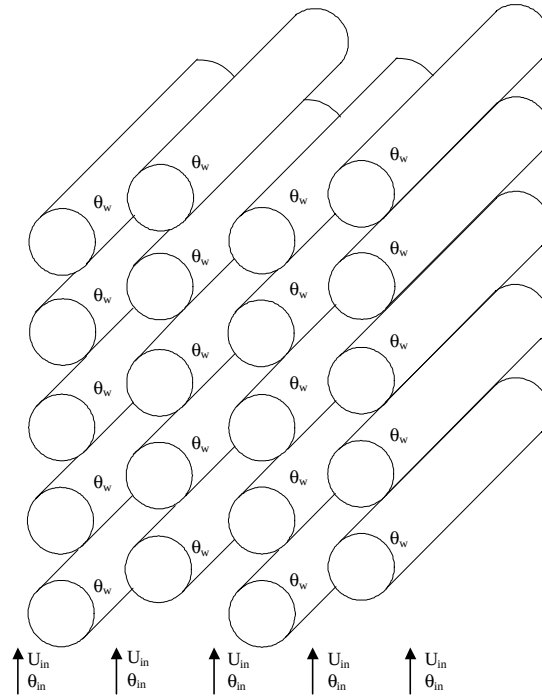


Figura 5.82 – Banco de tubos alternados em um escoamento vertical.

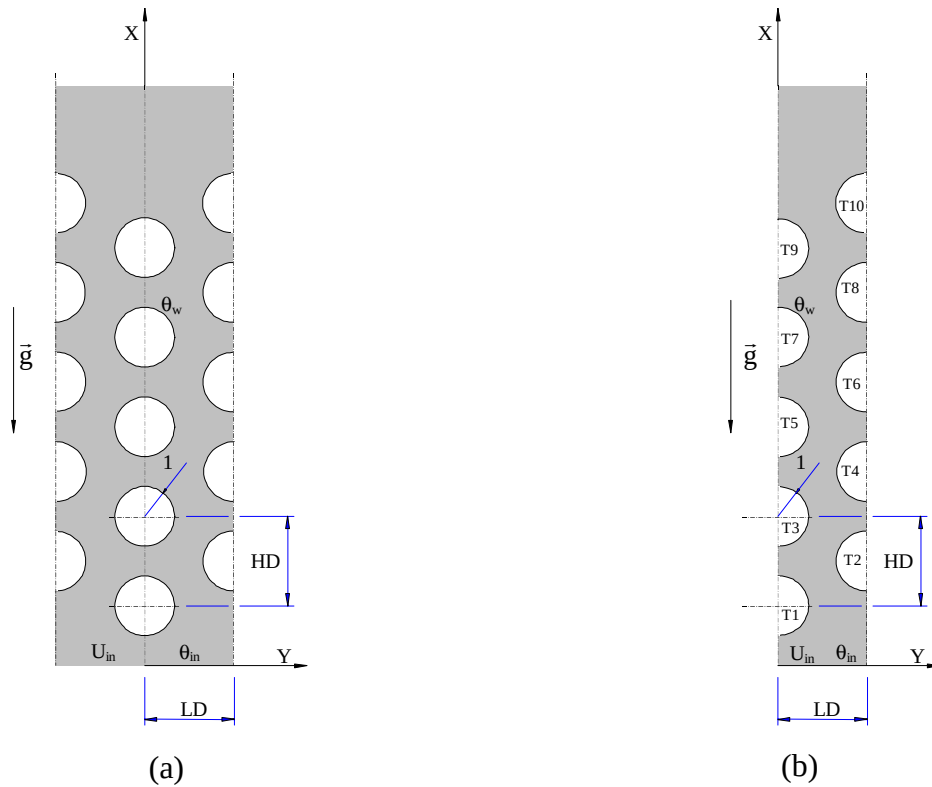


Figura 5.83 - a) Geometria do problema; b) Domínio computacional.

dos tubos, então pode-se utilizar apenas a metade da coluna de tubos como domínio computacional, o que é mostrado na Figura 5.83(b), onde T1, T2, ... , T10 representam os tubos de 1 a 10.

As equações de conservação para este problema são as Equações (5.36) a (5.38) do banco de tubos entre placas verticais, o que varia é a maneira de impor as condições de contorno.

As condições de contorno consideradas são: tubo aquecido com temperatura uniforme, velocidade e temperatura uniformes na entrada. A vorticidade no contorno é calculada conforme o Apêndice 4. As condições iniciais e de contorno, para o problema, são dadas por:

- i. Condições iniciais ($\tau = 0$):

Todo o domínio:

$$\psi = \theta = \omega = 0 . \quad (5.43)$$

- ii. Condições de contorno ($\tau > 0$):

Escoamento na entrada:

$$\theta = \theta_{in} = 0 , \quad \psi = Y , \quad \omega = 0 . \quad (5.44a)$$

Parede dos tubos lado esquerdo:

$$\theta = \theta_w = 1 , \quad \psi = 0 , \quad \omega = \omega_M . \quad (5.44b)$$

Parede dos tubos lado direito:

$$\theta = \theta_w = 1 , \quad \psi = LD , \quad \omega = \omega_M . \quad (5.44c)$$

Escoamento na saída:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 , \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 . \quad (5.44d)$$

Linha de simetria para $Y = 0$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \psi = 0 , \quad \omega = 0 . \quad (5.44e)$$

Linha de simetria para $Y = LD$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 , \quad \psi = Y , \quad \omega = 0 . \quad (5.44f)$$

sendo n a direção normal à superfície, ω_M a vorticidade que é calculada e atualizada a cada passo de tempo de acordo com o Apêndice 4, θ_{in} a temperatura do fluido na entrada e θ_w a temperatura na parede dos tubos.

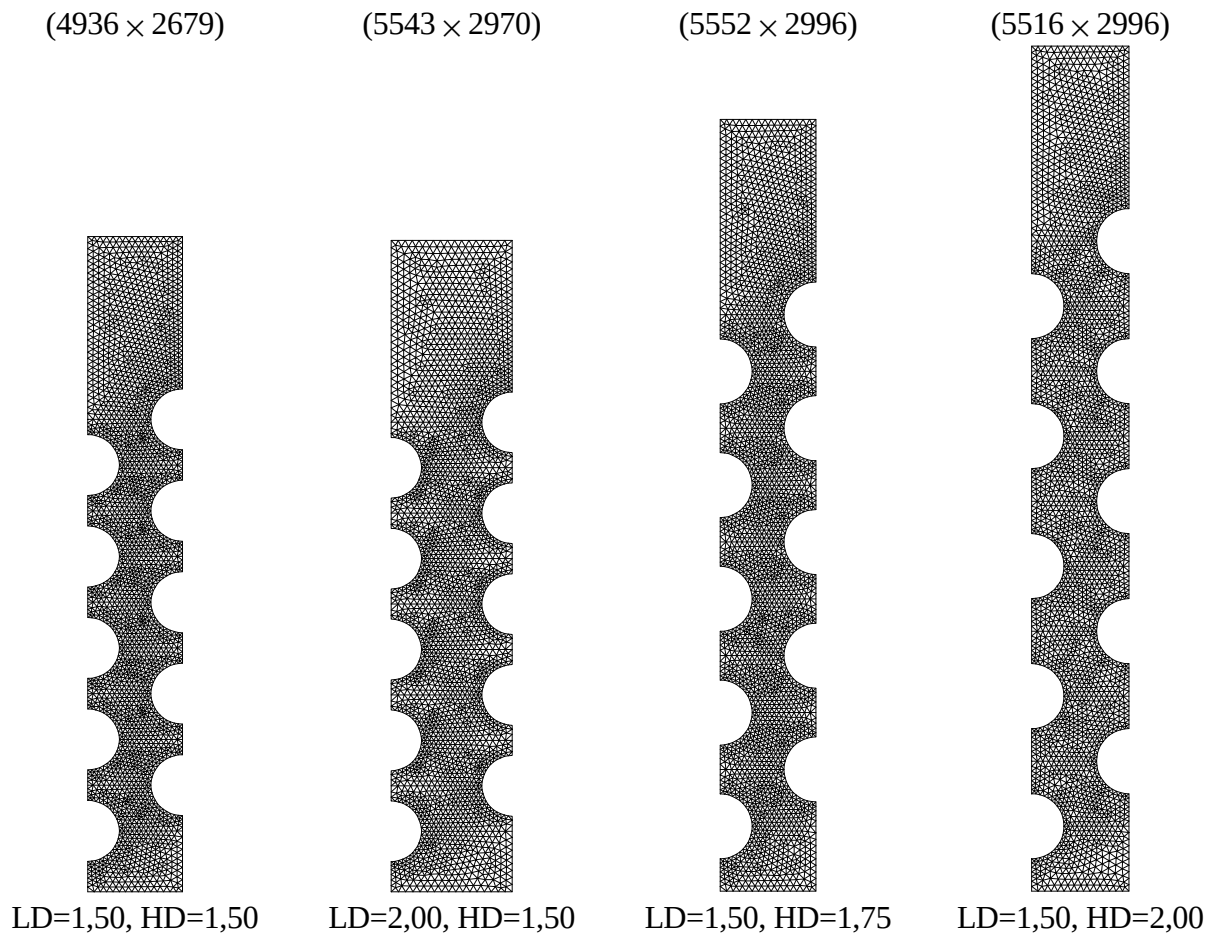


Figura 5.84 – Malhas para tubos alternados em um escoamento vertical.

As malhas de elementos finitos escolhidas para uso nas aplicações do presente trabalho para $LD = 1,5$ com $HD = 1,5$, $LD = 2,0$ com $HD = 1,5$, $LD = 1,5$ com $HD = 1,75$ e $LD = 1,5$ com $HD = 2,0$ são mostradas na Figura 5.84. Os números entre parêntesis representam a malha (elementos × nós). As malhas são não uniformes, concentrando mais elementos próximo às paredes dos tubos onde estão os maiores gradientes de temperatura.

As distribuições de função corrente e de temperatura para $Pr = 0,7$, $LD = 2,0$, $HD = 1,5$ e $Re = 100$ podem ser vistas nas Figuras 5.85a e 5.85b e para $Pr = 0,7$, $LD = 1,5$, $HD = 2,0$ e $Re = 100$ nas Figuras 5.86a e 5.86b.

Analisando as linhas de corrente na Figura 5.85a e na Figura 5.86a verifica-se que: no escoamento contra-empuxo, quando Ri diminui de 0,0 para $-5,0$, as regiões de recirculação aumentam de tamanho, a velocidade do fluido tende a diminuir próximo aos tubos. No escoamento pró-empuxo, quando Ri aumenta de 0,0 para 5,0, as regiões de recirculação diminuem de tamanho, a velocidade do fluido tende a aumentar próximo aos tubos.

Observando as isotermas da Figura 5.85b e da Figura 5.86b verifica-se que: no escoamento contra-empuxo, quando Ri diminui de 0,0 para $-5,0$, a distância entre as isotermas aumenta próximo aos tubos indicando uma diminuição do gradiente de temperatura nestas regiões. No escoamento pró-empuxo, quando Ri aumenta de 0,0 para 5,0, a distância entre as isotermas diminui próximo aos tubos indicando um aumento do gradiente de temperatura nestas regiões.

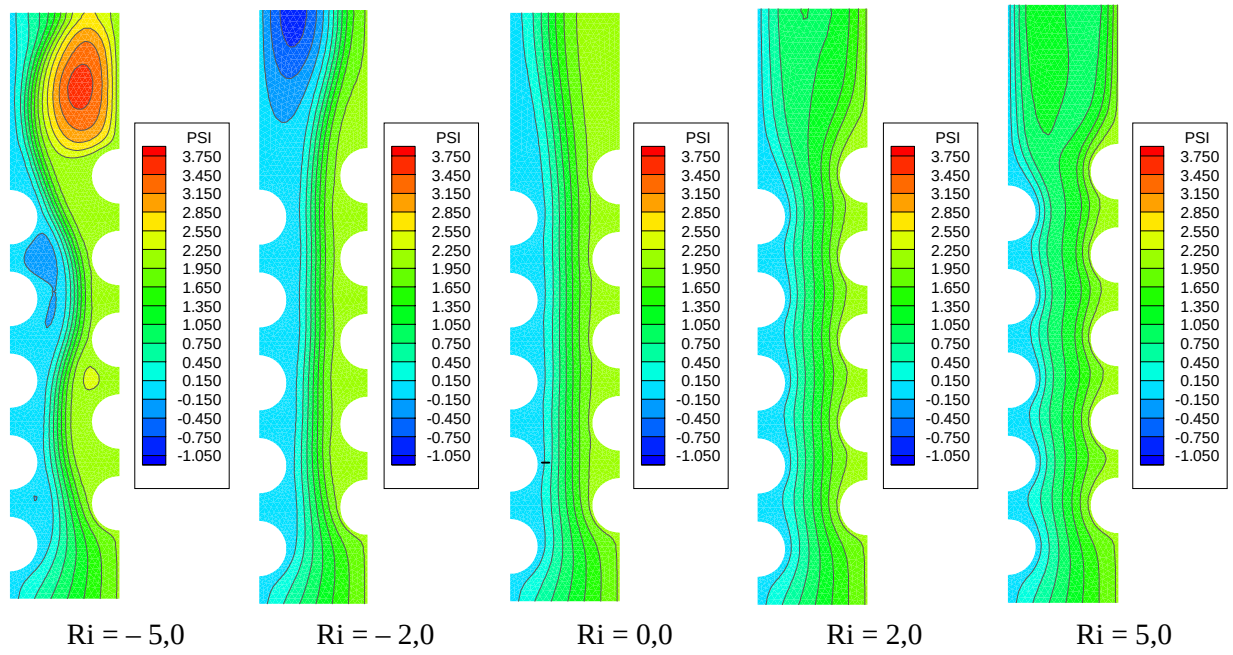


Figura 5.85a – Linhas de corrente para $LD = 2,0$; $HD = 1,5$ e $Re = 100$.

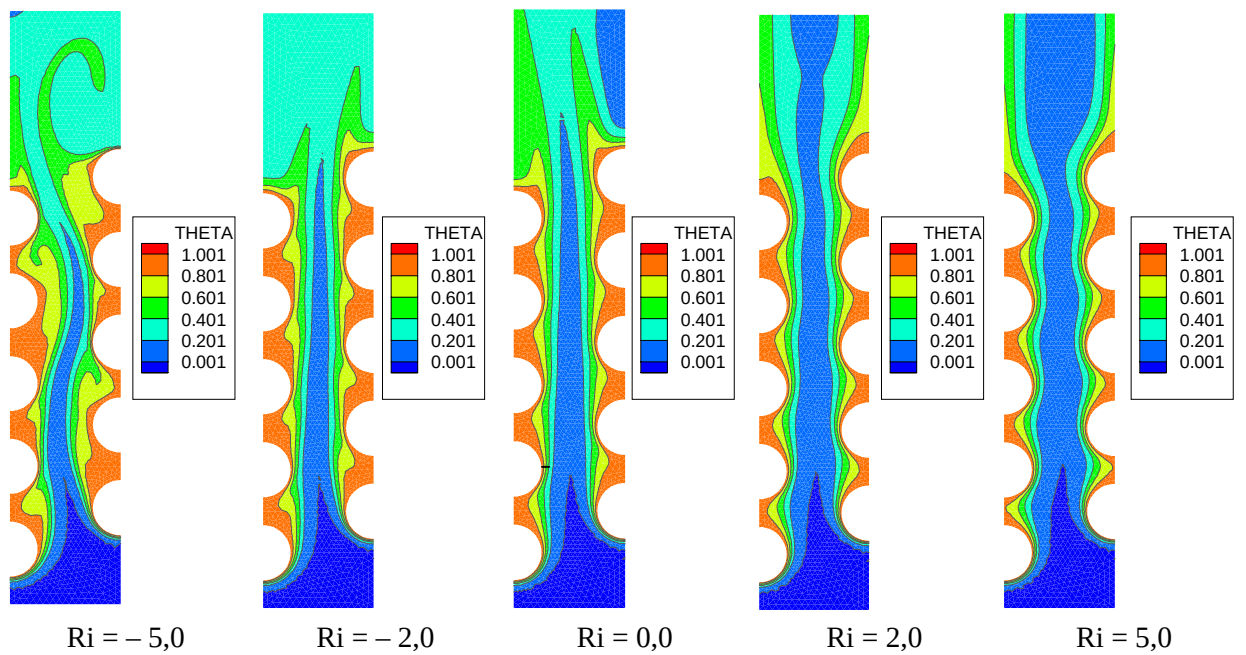


Figura 5.85b – Isotermas para $LD = 2,0$; $HD = 1,5$ e $Re = 100$.

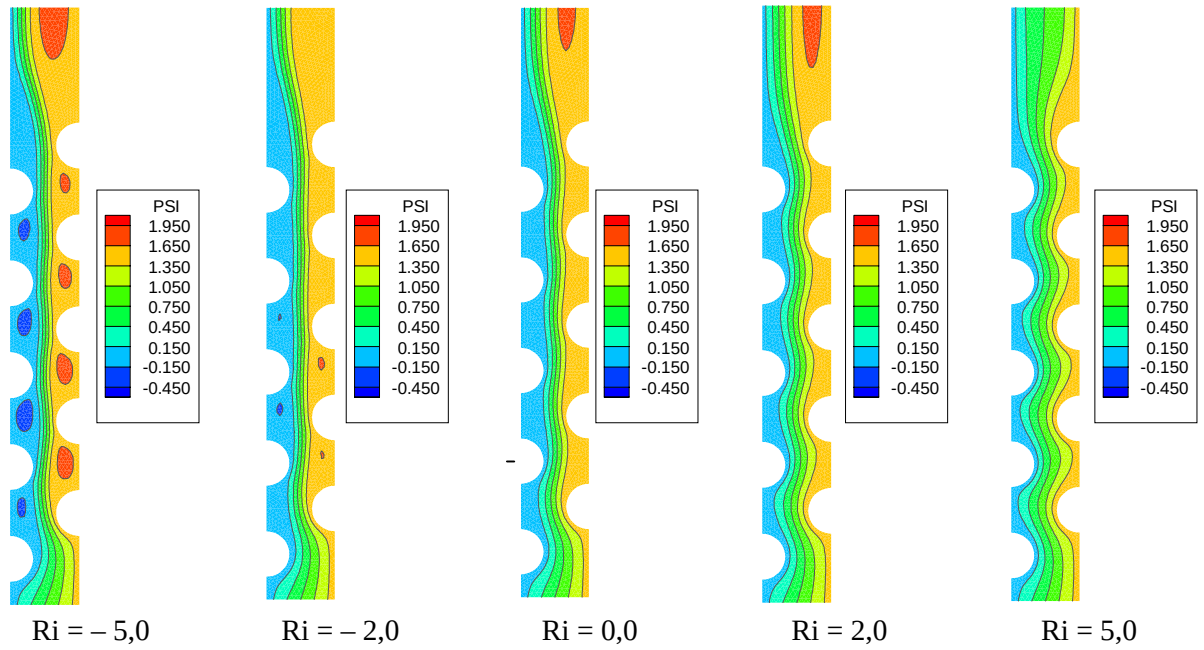


Figura 5.86a – Linhas de corrente para LD = 1,5; HD = 2,0 e Re = 100.

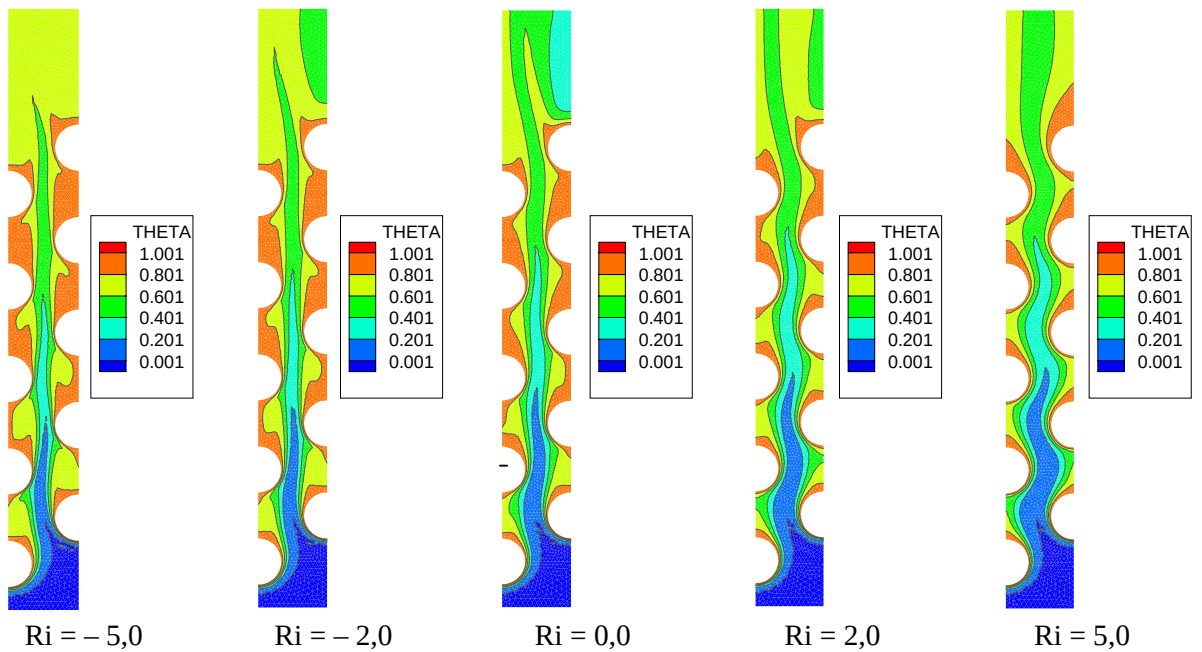


Figura 5.86b – Isotermas para LD = 1,5; HD = 2,0 e Re = 100.

Na Tabela A5.7 do Apêndice 5 são apresentados os valores do número de Nusselt médio de cada tubo (Nu) em função da distância adimensional LD, da distância adimensional HD, do número de Reynolds e do número de Richardson para $Pr = 0,7$ (ar). A distância LD assume os valores 1,5 e 2,0, a distância HD assume os valores 1,5, 1,75 e 2,0, o número de Reynolds os valores 50 e 100 e o número

de Richardson os valores $-5,0$, $-2,0$, $0,0$, $2,0$ e $5,0$.

Nas Figuras 5.87, 5.88 e 5.89 pode-se observar a influência do número de Richardson sobre o número de Nusselt local para $Re = 100$, $HD = 1,5$ e $LD = 1,5$. O ângulo é medido na superfície do tubo, do menor para o maior valor da coordenada vertical.

Na Figura 5.87 é mostrado o número de Nusselt local para os tubos do lado esquerdo do escoamento, para $Ri = -5,0$, enquanto que na Figura 5.88 é mostrado o número de Nusselt local para os tubos do lado direito do escoamento, também para $Ri = -5,0$. Nota-se que o número de Nusselt local do tubo 5 é praticamente o mesmo do 7 e que o número de Nusselt local do tubo 6 é praticamente o mesmo do 8. As curvas de Nu_L para os tubos 1 e 2 são decrescentes com o aumento do ângulo.

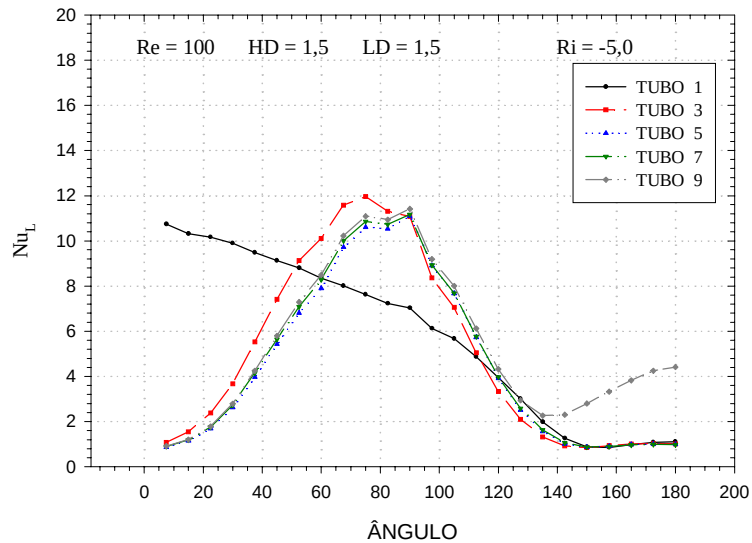


Figura 5.87 – Número de Nusselt local para os tubos do lado esquerdo, $Ri = -5,0$.

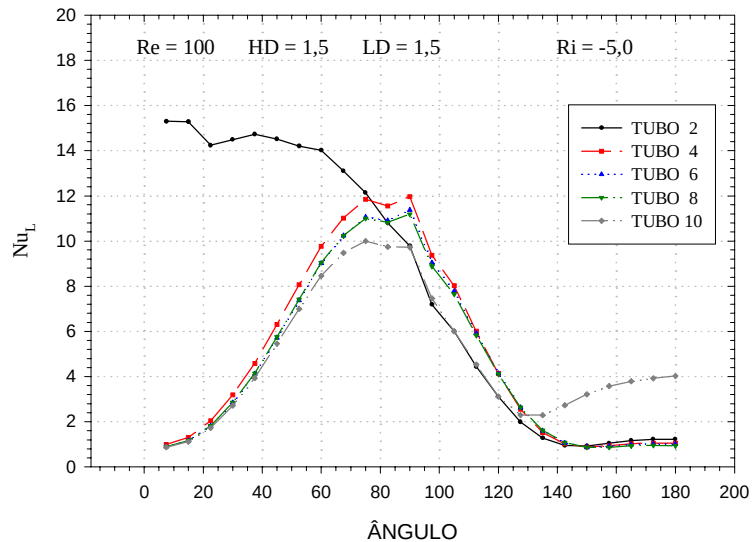


Figura 5.88 – Número de Nusselt local para os tubos do lado direito, $Ri = -5,0$.

Na Figura 5.89 é mostrado o número de Nusselt local para os tubos do lado esquerdo do escoamento, para $Ri = 5,0$, enquanto que na Figura 5.90 é mostrado o número de Nusselt local para os tubos do lado direito do escoamento, também para $Ri = 5,0$. Nota-se que o número de Nusselt

local do tubo 5 é praticamente o mesmo do 7 e que o número de Nusselt local do tubo 6 é praticamente o mesmo do 8. As curvas de Nu_L para os tubos 1 e 2 são decrescentes com o aumento do ângulo. Verifica-se que o número de Nusselt local nos tubos de 2 a 9 tem seu valor máximo para um ângulo de aproximadamente 70° .

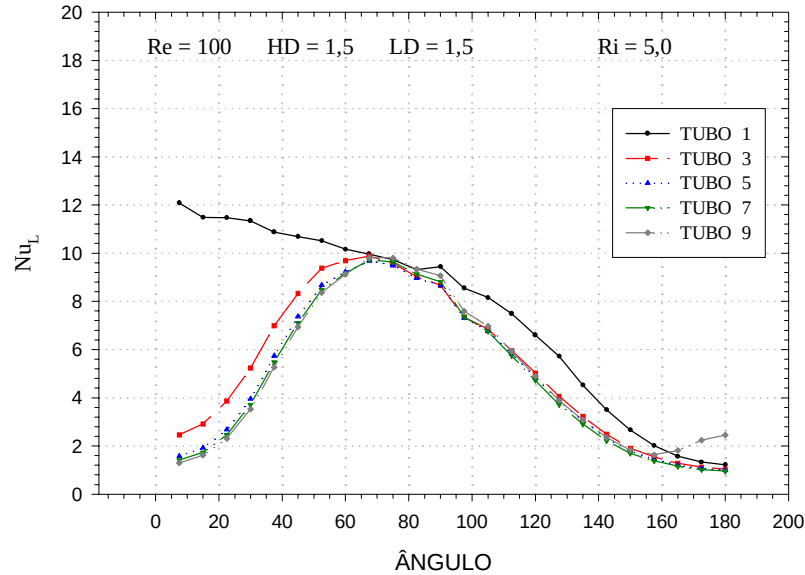


Figura 5.89 – Número de Nusselt local para os tubos do lado esquerdo, $Ri = 5,0$.

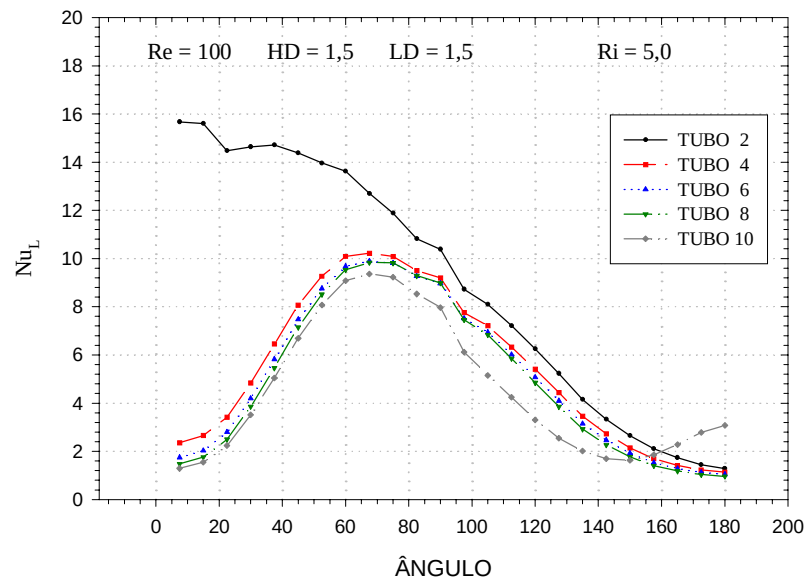


Figura 5.90 – Número de Nusselt local para os tubos do lado direito, $Ri = 5,0$.

Nota-se nas Figuras 5.87 a 5.90 que os tubos 5, 6, 7 e 8 têm um comportamento médio no que se refere ao número de Nusselt local. Para se observar o comportamento de Nu_L com a variação do número de Richardson tomamos o tubo 5 que é um dos tubos de comportamento médio e apresentamos o resultado na Figura 5.91. Observa-se, nesta figura, que o número de Nusselt local aumenta com o aumento do número de Richardson para ângulos inferiores a 67° ou superiores a 115° e com a diminuição de Ri para ângulos entre estes dois valores. Conclui-se com estas

observações que o aumento da influência da convecção natural no escoamento contra-empuxo prejudica a troca de calor na parte inferior e superior do tubo e melhora a troca de calor na parte central do duto. O aumento da influência da convecção natural no escoamento pró-empuxo tem um comportamento inverso, ou seja, melhora a troca de calor nas partes inferior e superior do tubo e prejudica a troca na parte média do duto.

Nas Figuras 5.92, 5.93 e 5.94 são apresentados valores do número de Nusselt médio (Nu) para: $Pr = 0,7$, $Re = 100$, $LD = 1,5$ e $HD = 1,50; 1,75; 2,00$.

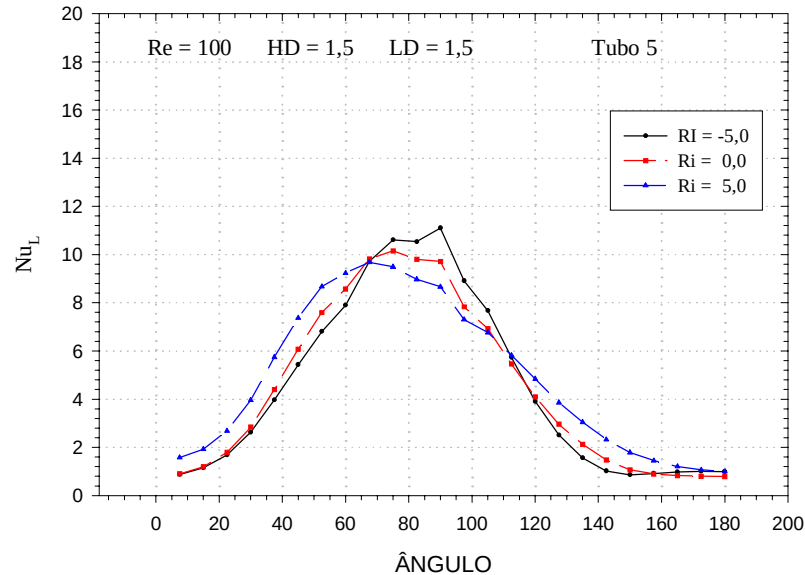


Figura 5.91 – Variação do Número de Nusselt local com o número de Richardson.

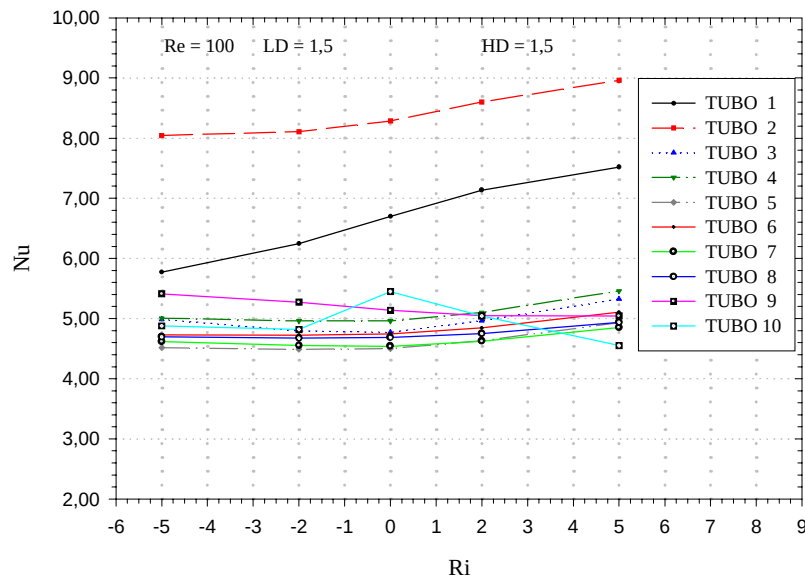


Figura 5.92 – Número de Nusselt médio para $Re = 100$ e $HD = 1,5$.

Com relação à Figura 5.93 ($HD = 1,5$), nota-se que no escoamento contra-empuxo o aumento da convecção natural prejudica a troca de calor para os tubos 1 e 2. Esta diminuição da troca de calor no tubo 10 só é verificada para Ri variando de 0 a $-2,0$. Nos demais tubos, e no tubo 10 de $Ri = -2,0$ a $-5,0$, o aumento da convecção natural melhora a troca de calor. No escoamento pró-

empuxo o aumento da convecção natural prejudica a troca de calor nos tubos 9 e 10 e melhora a troca nos demais.

Na Figura 5.93 ($HD = 1,75$), nota-se que no escoamento contra-empuxo o aumento da convecção natural pouco afeta a troca de calor no tubo 2 e prejudica a troca de calor para o tubo 1. A diminuição da troca de calor no tubo 10 só é verificada para Ri variando de 0 a $-2,0$. Para os demais tubos o aumento da convecção natural melhora a troca de calor. No escoamento pró-empuxo o aumento da convecção natural prejudica a troca de calor nos tubos 9 e 10 e melhora a troca nos demais.

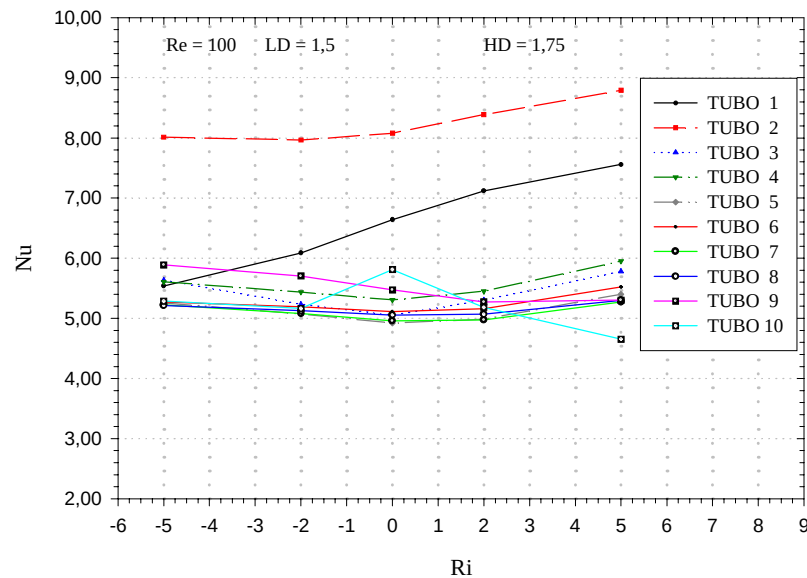


Figura 5.93 – Número de Nusselt médio para $Re = 100$ e $HD = 1,75$.

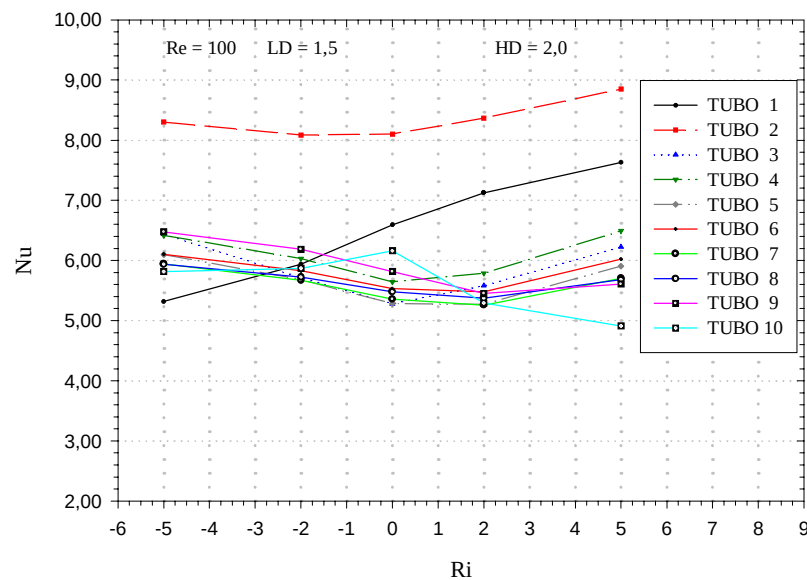


Figura 5.94 – Número de Nusselt médio para $Re = 100$ e $HD = 2,0$.

Na Figura 5.94 ($HD = 2,00$), nota-se que no escoamento contra-empuxo o aumento da convecção prejudica a troca de calor para os tubos 1 e 10. Para os demais tubos o aumento da convecção natural melhora a troca de calor. No escoamento pró-empuxo o aumento da convecção natural prejudica a troca de calor nos tubos 9 e 10 e melhora a troca nos demais.

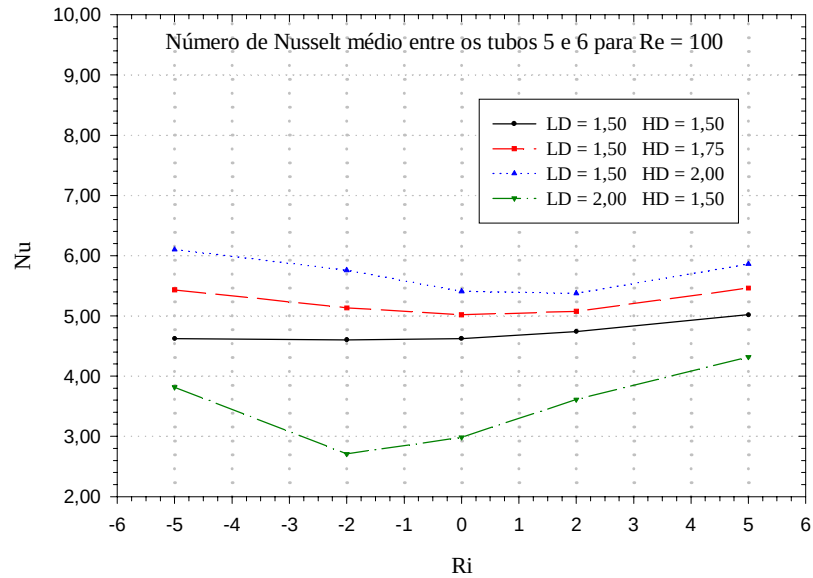


Figura 5.95 – Número de Nusselt médio em função de LD e HD.

Para se representar o comportamento do número de Nusselt médio com a variação do número de Richardson e das distâncias adimensionais LD e HD para os tubos intermediários foram calculadas as médias dos números de Nusselt médio entre os tubos 5 e 6 para cada configuração de LD versus HD. Com isso pôde ser traçada a Figura 5.95.

Nota-se na Figura 5.95 que para LD = 1,5 e HD = 1,5 o aumento da convecção natural melhora a troca de calor no escoamento pró-empuxo e praticamente não afeta a troca no escoamento contra-empuxo. Mantendo-se a distância LD fixa e aumentando-se a distância HD, nota-se que o aumento da convecção natural melhora a troca de calor, tanto no escoamento contra-empuxo quanto no pró-empuxo. Esta melhora é tanto mais intensa quanto maior for a distância HD. Para LD = 2,0 e HD = 1,5, no escoamento contra-empuxo, o aumento da convecção natural prejudica a troca de calor de Ri = 0 para Ri = -2,0 e melhora a troca de Ri = -2,0 para Ri = -5,0. No escoamento pró-empuxo o aumento da convecção natural melhora a troca de calor. Mantendo-se a distância HD fixa e aumentando-se a distância LD, nota-se uma piora na troca de calor.

5.9 – Comparação de Resultados para os Três Casos de Bancos de Tubos Estudados

Comparando-se os três casos de banco de tubos estudados observou-se que os valores do número de Nusselt local são menores no escoamento com tubos alternados. Fixando-se a distância horizontal (LD = 1,5), a distância vertical entre os tubos (HD = 1,5) e o número de Reynolds (Re = 100) e tomando o número de Nusselt médio de cada tubo e fazendo-se a média destes valores, verificou-se que o menor valor da média do número de Nusselt médio ocorre para tubos alternados e o maior valor ocorre para tubos alinhados entre placas verticais como pode ser visto na Figura 5.96.

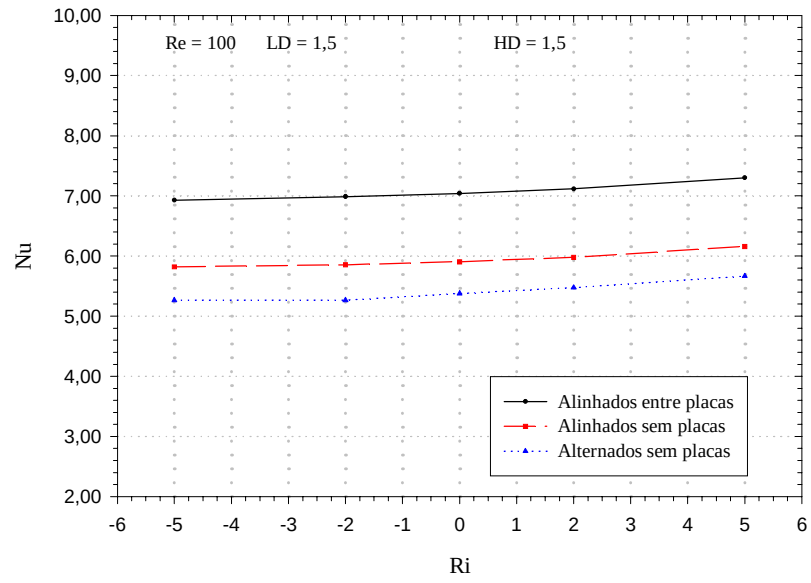


Figura 5.96 – Média do número de Nusselt médio para cada banco de tubos.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

6.1 – Introdução

No presente trabalho utiliza-se o método de elementos finitos com o elemento triangular linear e a formulação de Galerkin para estudar a transferência de calor por convecção mista em dutos horizontais e verticais. O escoamento é considerado bidimensional, desenvolvido, laminar e não permanente. É admitida a aproximação de Boussinesq. O fluido de trabalho é o ar ($Pr = 0,7$).

Foram desenvolvidos programas computacionais em linguagem FORTRAN para calcular, conforme o caso estudado, o número de Nusselt local e médio, o produto médio do fator de atrito pelo número de Reynolds, a velocidade axial adimensional média, a temperatura adimensional média e as distribuições de função corrente, velocidade axial adimensional, temperatura adimensional e vorticidade.

Os programas foram validados para problemas já estudados por outros autores e os resultados apresentados no Capítulo 4 foram considerados satisfatórios.

Após a validação os programas foram aplicados para os problemas propostos e os resultados apresentados no Capítulo 5 e Apêndice 5. As principais conclusões da solução destes problemas são apresentadas a seguir.

6.2 – Duto Retangular Horizontal com Cilindro Interno Aquecido $\gamma = 0$

O caso estudado é o de convecção mista em um duto retangular horizontal com um cilindro interno aquecido. O duto é isolado termicamente e o cilindro tem fluxo de calor axial uniforme com temperatura circunferencial uniforme. Foram analisadas a influência da razão de aspecto, da razão de raios e do número de Rayleigh (Ra) no número de Nusselt médio (Nu), no produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) e nas distribuições de função corrente (ψ), velocidade axial (W) e temperatura (θ).

Foi constatado que a transferência de calor na convecção mista em relação à convecção forçada (Nu/Nu_0) aumenta com a diminuição da razão de aspecto da seção transversal do duto (AR_1) e com o aumento do número de Rayleigh. O produto do fator de atrito pelo número de Reynolds da convecção mista em relação à forçada ($fRe/(fRe)_0$) aumenta com o aumento do número de Rayleigh. A influência da razão de aspecto no produto do fator de atrito pelo número de Reynolds da convecção mista em relação à forçada ($fRe/(fRe)_0$) vai depender do número de Rayleigh. Como exemplo pode-se dizer que para $Ra \leq 1 \times 10^4$ a razão $fRe/(fRe)_0$ não sofre influência da razão de aspecto nem da razão de raios (RR_1). Para $Ra = 1 \times 10^6$ quanto maior a razão de raios, maior é a razão $fRe/(fRe)_0$, e mantida constante a razão de raios, a razão $fRe/(fRe)_0$ não varia com a razão de aspecto.

Mantendo-se constantes a razão de aspecto e a razão de raios, o número de Nusselt médio e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds aumentam com o aumento do número de Rayleigh. Esse aumento é quase imperceptível para $Ra \leq 1 \times 10^4$.

6.3 – Duto Retangular Horizontal com Cilindro Interno Aquecido $\gamma \neq 0$

O caso estudado é o mesmo do item anterior, porém as razões de aspecto e de raios são mantidas constantes ($AR_1 = 1,25$ e $RR_1 = 6,40$) e o que se analisou foi a influência do ângulo de inclinação da seção retangular do duto (γ) e a influência do número de Rayleigh (Ra) no número de Nusselt médio (Nu), no produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) e nas distribuições de função corrente, velocidade axial e temperatura.

Através dos resultados apresentados no Capítulo 5 pôde-se verificar que para a razão de aspecto maior que o valor unitário ($AR_1 > 1$), quanto maior o ângulo de inclinação, maior é a transferência de calor por convecção mista em relação a convecção forçada (Nu/Nu_0). A razão Nu/Nu_0 aumenta também com o aumento do número de Rayleigh para qualquer ângulo de inclinação e esse aumento é quase imperceptível para $Ra \leq 1 \times 10^3$.

A influência do ângulo de inclinação no produto do fator de atrito pelo número de Reynolds da convecção mista em relação à forçada ($fRe/(fRe)_0$) vai depender do número de Rayleigh. Como exemplo pode-se dizer que para $Ra \leq 1 \times 10^5$ a razão $fRe/(fRe)_0$ diminui com o aumento do ângulo de inclinação. Para $Ra = 1 \times 10^6$ o valor máximo de $fRe/(fRe)_0$ ocorre para $\gamma = 90^\circ$ e o valor mínimo para $\gamma = 30^\circ$.

Para a razão de aspecto maior que o valor unitário ($AR_1 > 1$) e para um valor fixo do número de Rayleigh ($Ra = 1 \times 10^6$) o número de Nusselt médio aumenta com o aumento do ângulo de inclinação da seção transversal do duto.

6.4 – Tubo Horizontal com uma Placa Interna Excêntrica

O caso estudado é o de convecção mista laminar em um tubo horizontal com uma placa interna excêntrica. A placa é termicamente isolada e o tubo é aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme. Os valores da razão de aspecto e da razão de raios foram mantidos fixos ($AR_2 = 0,8$ e $RR_2 = 2,00$). Analisou-se a influência da excentricidade (E), do ângulo de posição da placa (γ_2) e do número de Rayleigh (Ra) no número de Nusselt médio (Nu), no produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) e nas distribuições de função corrente, velocidade axial e temperatura. Quando o ângulo de posição é de -90° , 0° ou 90° a placa está localizada, respectivamente, na parte inferior, no lado direito ou na parte superior do tubo.

Mantida a excentricidade fixa ($E = 0,25$) e variando-se o ângulo de posição da placa, verificou-se que o número de Nusselt médio aumenta com o aumento do número de Rayleigh, sendo esse aumento mais acentuado a partir de $Ra = 1 \times 10^4$. A variação do número de Nusselt médio com o ângulo de posição da placa vai depender do número de Rayleigh. Por exemplo, para $Ra = 0$ (convecção forçada) Nu é mínimo para $\gamma_2 = -90^\circ$ e 90° e máximo para $\gamma_2 = 0^\circ$, o que coincide com os resultados obtidos por [Hung et al. 1997]. Para $Ra = 1 \times 10^4$, Nu é mínimo para $\gamma_2 = -90^\circ$ e máximo para $\gamma_2 = 45^\circ$ e quando $Ra = 1 \times 10^6$, Nu é mínimo para $\gamma_2 = 0^\circ$ e máximo para $\gamma_2 = -45^\circ$. O produto do fator de atrito pelo número de Reynolds aumenta com o aumento do número de Rayleigh. A variação de fRe com o ângulo de posição da placa também depende do número de Rayleigh. Por exemplo, para $Ra = 0$ (convecção forçada) fRe é mínimo para $\gamma_2 = -90^\circ$ e 90° e máximo para $\gamma_2 = 0^\circ$. Para $Ra = 1 \times 10^4$, fRe é mínimo para $\gamma_2 = -45^\circ$ e máximo para $\gamma_2 = 90^\circ$ e quando $Ra = 1 \times 10^6$, os maiores valores de fRe ocorrem para a placa localizada na parte inferior do tubo.

Variando-se a excentricidade, o ângulo de posição e o número de Rayleigh, verificou-se que o número de Nusselt médio aumenta com o aumento do número de Rayleigh e com a diminuição da excentricidade para qualquer ângulo de posição da placa. A variação de Nu com o ângulo de posição vai depender da excentricidade e do número de Rayleigh. Como exemplo observou-se que para $Ra = 1 \times 10^6$ e $E = 0,15$, Nu diminui com o aumento do ângulo γ_2 de -90° até 90° , mas para $E = 0,25$, Nu aumenta com o aumento de γ_2 de -90° até -45° , depois diminui até γ_2 atingir 0° e volta a aumentar até $\gamma = 90^\circ$.

Mantendo-se fixos a excentricidade e o ângulo de posição e variando-se apenas o número de Rayleigh verificou-se que o aumento do número de Rayleigh causa um aumento da velocidade do escoamento secundário, uma diminuição da velocidade axial e um aumento na temperatura mínima do fluido.

6.5 – Duto Vertical Elíptico

O caso estudado é o de convecção mista laminar em um duto vertical de seção transversal elíptica. O duto é aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura periférica uniforme. Analisou-se a influência da razão entre o semi-eixo menor e o semi-eixo maior da seção elíptica (BA), do número de Reynolds (Re) e do número de Rayleigh (Ra) no número de Nusselt médio (Nu), no produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) e nas distribuições velocidade axial e temperatura.

Mantendo-se fixos os valores da razão BA ($BA = 0,5$) e do número de Rayleigh ($Ra = 1 \times 10^5$) e aumentando-se o número de Reynolds verificou-se que houve uma diminuição da temperatura mínima do fluido, um aumento da velocidade axial do fluido e o deslocamento do valor máximo desta velocidade dos polos para o centro da elipse.

Mantendo-se fixos os valores da razão BA ($BA = 0,5$) e do número de Reynolds ($Re = 500$) e aumentando-se o número de Rayleigh verificou-se que houve um aumento da temperatura mínima do fluido, uma diminuição da velocidade axial do fluido e o deslocamento do valor máximo desta velocidade do centro para os polos da elipse.

Mantendo-se fixo o valor do número de Reynolds ($Re = 100$). Observa-se que o número de Nusselt médio aumenta com o aumento do número de Rayleigh e com a diminuição da razão BA . Observa-se também que para $Ra < 1 \times 10^3$ o número de Nusselt médio praticamente não varia com o número de Rayleigh. O produto do fator de atrito pelo número de Reynolds aumenta com o aumento do número de Rayleigh. A influência da razão BA sobre o produto fRe é pequena e varia de acordo com o número de Rayleigh. Como exemplo, para Ra menor que aproximadamente 1×10^4 a número de Nusselt médio aumenta com a diminuição de BA , ocorrendo o oposto para valores maiores de Ra . Para Ra menor que aproximadamente 1×10^3 o produto fRe praticamente não se altera com a variação do número de Rayleigh. Fixando-se um valor maior para o número de Reynolds ($Re = 200$) nota-se que há uma diminuição da influência do número de Rayleigh no número de Nusselt médio e no produto do fator de atrito pelo número de Reynolds.

Fixando-se o valor da razão BA ($BA = 0,5$). Observa-se que o número de Nusselt médio e o produto fRe aumentam com o aumento do número de Rayleigh e com a diminuição do número de Reynolds. Para Ra menor que aproximadamente 1×10^3 o número de Nusselt médio e o produto fRe praticamente não se alteram com a variação do número de Rayleigh. Pode-se dizer que quanto maior é o número de Rayleigh maior é a influência do número de Reynolds no número de Nusselt médio e no produto fRe ou que quanto menor o número de Reynolds maior é a influência do número de Rayleigh no número de Nusselt médio e no produto fRe .

6.6 – Banco de Tubos Alinhados entre Placas Verticais

O caso estudado é o de convecção mista laminar sobre um banco de tubos em um escoamento vertical separados por placas verticais. Os tubos são aquecidos com temperatura uniforme, as placas são termicamente isoladas e o fluido tem temperatura e velocidade uniformes na entrada. Analisou-se a influência da distância adimensional entre as placas (LD), do número de Reynolds (Re) e do número de Richardson (Ri) no número de Nusselt local (Nu_L), no número de Nusselt médio (Nu) e nas distribuições função corrente e temperatura, tanto para o escoamento contra-empuxo quanto para o escoamento pró-empuxo. O número de Richardson mede a participação da convecção natural no escoamento. Quanto maior seu valor em módulo maior é esta participação. No escoamento contra-empuxo o valor do número de Richardson é negativo e no escoamento pró-empuxo seu valor é positivo. Mantendo-se os tubos aquecidos o escoamento pró-empuxo ocorre quando o escoamento principal está no sentido ascendente e o escoamento contra-empuxo ocorre quando o escoamento principal está no sentido descendente.

Mantendo-se fixos os valores da distância entre as placas ($LD = 2,0$) e do número de

Richardson, observou-se que o aumento do número de Reynolds causa um aumento no tamanho das regiões de recirculação entre os tubos. Mantendo-se fixos os valores da distância entre as placas ($LD = 2,0$) e do número de Reynolds, verificou-se que o aumento da contribuição da convecção natural causa um aumento no tamanho das regiões de recirculação no escoamento contra-empuxo (Ri variando de $0,0$ a $-5,0$) e uma diminuição no tamanho destas regiões no escoamento pró-empuxo (Ri variando $0,0$ a $5,0$). Nas regiões de recirculação o fluido fica preso trocando pouco calor com os tubos, portando o aumento do tamanho destas regiões provoca uma diminuição na transferência de calor entre o tubo e o fluido.

Fixando-se os valores do número de Reynolds ($Re = 100$), da distância entre as placas verticais ($LD = 1,5$) e do número de Richardson ($Ri = -5,0$) e calculando-se o número de Nusselt local sobre a superfície dos tubos, verificou-se que nas regiões de recirculação (partes inferior e superior dos tubos) a troca de calor é menor e na região central da superfície dos tubos a troca de calor é mais intensa, o que já era esperado. Na parte inferior do primeiro tubo não existe recirculação, por isso a troca de calor nesta região não diminui. Na extremidade superior do último tubo não existe a interferência de outros tubos e por isso há um aumento na troca de calor nesta região em relação aos tubos intermediários. O comportamento do número de Nusselt local nos tubos intermediários é praticamente o mesmo sendo que seu valor máximo ocorre para um ângulo de aproximadamente 72° .

Calculando-se o número de Nusselt local sobre a superfície de um tubo intermediário (Tubo 3) tendo fixado os valores do número de Reynolds ($Re = 100$) e da distância entre as placas verticais ($LD = 1,5$), verificou-se que no escoamento contra-empuxo aumentando-se a convecção natural no escoamento, ou seja, variando-se Ri de $0,0$ para $-5,0$ há uma diminuição na troca de calor (Nu_L) para ângulos abaixo de 60° ou acima de 100° e um aumento para ângulos entre estes valores. No escoamento pró-empuxo aumentando-se a convecção natural no escoamento, ou seja, variando-se Ri de $0,0$ para $5,0$ há um aumento da troca de calor para ângulos abaixo de 60° ou acima de 100° e uma diminuição para ângulos entre estes valores. Pode-se dizer então que, de uma maneira geral, no escoamento pró-empuxo a convecção natural prejudica a troca de calor na parte intermediária do tubo e melhora a troca nas partes inferior e superior do tubo e no escoamento contra-empuxo ocorre o oposto.

Fixando-se o valor do número de Reynolds ($Re = 50$) e calculando-se o número de Nusselt médio para cada tubo, verificou-se que no escoamento contra-empuxo ($Ri < 0$), o número de Nusselt médio aumenta com a diminuição da convecção natural (Ri variando de $-5,0$ para $0,0$). observou-se que para o último tubo o número de Nusselt médio aumenta com o aumento da convecção natural. No escoamento pró-empuxo, o número de Nusselt médio aumenta com o aumento da convecção natural (Ri variando de $0,0$ para $5,0$) para todos os tubos. O número de Nusselt médio aumenta com a diminuição da largura adimensional do duto tanto para o escoamento contra-empuxo quanto para o escoamento pró-empuxo. A influência da convecção natural no número de Nusselt médio é tanto maior quanto maior for a largura adimensional do duto, tanto para o escoamento contra-empuxo quanto para o escoamento pró-empuxo. De uma maneira geral, para o problema estudado, o aumento da convecção natural causa um aumento na transferência de calor no escoamento pró empuxo e uma diminuição da transferência de calor no escoamento contra-empuxo.

6.7 – Banco de Tubos Alinhados em um Escoamento Vertical

O caso estudado é o de convecção mista laminar sobre um banco de tubos em um escoamento vertical. Os tubos são aquecidos com temperatura uniforme e o fluido tem temperatura e velocidade uniformes na entrada. Analisou-se a influência da distância adimensional horizontal entre os tubos (LD), do número de Reynolds (Re) e do número de Richardson (Ri) no número de Nusselt local (Nu_L), no número de Nusselt médio (Nu) e nas distribuições função corrente e temperatura.

Todas as observações feitas no caso anterior são válidas para este caso.

Comparando-se os dois casos observou-se que os valores do número de Nusselt local são menores no escoamento sem as placas, qualquer que seja a distância LD e o número de Richardson. A exceção ocorre para a extremidade superior do último tubo onde o número de Nusselt local é maior no escoamento sem as placas. O valor do número de Nusselt médio é menor no escoamento sem as placas, qualquer que seja a distância LD e o número de Richardson. A exceção ocorre para o último tubo com LD = 2,5 e Ri = -5,0 onde o número de Nusselt médio é maior no escoamento sem as placas.

De um modo geral pode-se dizer que a transferência de calor no escoamento com as placas é melhor que no escoamento sem as placas.

6.8 – Banco de Tubos Alternados em um Escoamento Vertical

O caso estudado é o de convecção mista laminar sobre um banco de tubos em um escoamento vertical. Os tubos são alinhados na direção vertical, porém são alternados na direção horizontal. Os tubos são aquecidos com temperatura uniforme e o fluido tem temperatura e velocidade uniformes na entrada. Analisou-se a influência da distância adimensional horizontal entre os tubos (LD), da distância adimensional vertical entre os tubos (HD), do número de Reynolds (Re) e do número de Richardson (Ri) no número de Nusselt local (Nu_L), no número de Nusselt médio (Nu) e nas distribuições função corrente e temperatura.

Mantendo-se fixos os valores do número de Reynolds (Re = 100), da distância vertical entre os tubos (HD = 1,5) e do número de Richardson, observou-se que o aumento da distância horizontal entre os tubos pode gerar grandes regiões de recirculação prejudicando a troca de calor. Mantendo-se fixos os valores do número de Reynolds (Re = 100), da distância vertical entre os tubos (HD = 1,5) e da distância horizontal entre os tubos, verificou-se que o aumento da participação da convecção natural causa um aumento no tamanho das regiões de recirculação no escoamento contra-empuxo (Ri variando de 0,0 a -5,0) e uma diminuição no tamanho destas regiões no escoamento pró-empuxo (Ri variando 0,0 a 5,0).

Fixando-se os valores do número de Reynolds (Re = 100), da distância horizontal entre os tubos (LD = 1,5) e do número de Richardson (Ri = -5,0) e calculando-se o número de Nusselt local sobre a superfície dos tubos, verificou-se que nas regiões de recirculação (partes inferior e superior dos tubos) a troca de calor é menor e na região central da superfície dos tubos a troca de calor é mais intensa, o que já era esperado. Na parte inferior do primeiro tubo tanto do lado esquerdo quanto do lado direito não existe recirculação, por isso a troca de calor nesta região não diminui. Na extremidade superior do último tubo do lado direito não existe a interferência de outros tubos e na extremidade superior do último tubo do lado esquerdo praticamente não existe interferência de outros tubos, por isso há uma aumento na troca de calor nestas regiões em relação aos tubos intermediários. O comportamento do número de Nusselt local nos tubos intermediários é praticamente o mesmo sendo que seu valor máximo ocorre para um ângulo de aproximadamente 70°.

Calculando-se o número de Nusselt local sobre a superfície de um tubo intermediário (Tubo 5) tendo fixado os valores do número de Reynolds (Re = 100), da distância vertical entre os tubos (HD = 1,5) e da distância horizontal entre os tubos (LD = 1,5), verificou-se que no escoamento contra-empuxo aumentando-se a convecção natural no escoamento, ou seja, variando-se Ri de 0,0 para -5,0 há uma diminuição na troca de calor (Nu_L) para ângulos abaixo de 65° ou acima de 110° e um aumento para ângulos entre estes valores. No escoamento pró-empuxo aumentando-se a convecção natural no escoamento, ou seja, variando-se Ri de 0,0 para 5,0 há um aumento da troca de calor para ângulos abaixo de 65° ou acima de 110° e uma diminuição para ângulos entre estes valores. Pode-se dizer então que, de uma maneira geral, no escoamento pró-empuxo a convecção natural prejudica a troca de calor na parte intermediária do tubo e melhora a troca nas partes inferior e

superior do tubo e no escoamento contra-empuxo ocorre o oposto.

Fixando-se o valor do número de Reynolds ($Re = 100$), escolhendo-se os tubos intermediários 5 e 6 e calculando-se o a média do número de Nusselt médio nestes tubos, verificou-se que para $LD = 1,5$ e $HD = 1,5$ o aumento da convecção natural melhora a troca de calor no escoamento pró-empuxo e praticamente não afeta a troca no escoamento contra-empuxo. Mantendo-se a distância LD fixa e aumentando-se a distância HD , notou-se que o aumento da convecção natural melhora a troca de calor, tanto no escoamento contra-empuxo quanto no pró-empuxo. Esta melhora é tanto mais intensa quanto maior for a distância HD . Para $LD = 2,0$ e $HD = 1,5$, no escoamento contra-empuxo, o aumento da convecção natural prejudica a troca de calor de $Ri = 0,0$ para $Ri = -2,0$ e melhora a troca de $Ri = -2,0$ para $Ri = -5,0$. No escoamento pró-empuxo o aumento da convecção natural melhora a troca de calor. Mantendo-se a distância HD fixa e aumentando-se a distância LD , nota-se uma piora na troca de calor.

6.9 – Comparação de Resultados para os Três Casos de Bancos de Tubos Estudados

Comparando-se os três casos de banco de tubos, para o caso: distância horizontal ($LD = 1,5$), distância vertical entre os tubos ($HD = 1,5$) e número de Reynolds ($Re = 100$) verificou-se que o menor valor do número de Nusselt médio em todos os tubos ocorre para tubos alternados e o maior valor ocorre para tubos alinhados entre placas verticais.

6.10 – Sugestões para Trabalhos Futuros

Sugerimos para aqueles que pretendam continuar estudando este assunto os seguintes itens:

- i. Variação da razão de raios e da razão de aspecto da placa no tubo com placa excêntrica;
- ii. Análise da perda de carga em banco de tubos;
- iii. Fazer uma análise para descobrir os valores ótimos de LD e HD para banco de tubos;
- iv. A convecção mista em um banco de dutos elípticos;
- v. Utilizar a geometria completa na análise da convecção mista em um banco de tubos;
- vi. Convecção mista em tubos verticais concêntricos;
- vii. Estudar escoamentos turbulentos.

APÊNDICE 1

DETERMINAÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA E CÁLCULO DE GRADIENTES

A1.1 - Introdução

Este apêndice se dedica à determinação das funções de forma para o elemento triangular linear e à determinação dos gradientes de uma função ϕ . As funções de forma seguem as seguintes regras:

1. São funções que têm o valor unitário em seu próprio nó e o valor nulo para os demais nós;
2. Cada função de forma é um polinômio de mesmo grau da equação de interpolação.

A1.2 - Funções de Forma para o Elemento Triangular Linear

A Figura A1.1 mostra um elemento triangular cujos vértices i , j e k , formam os três pontos nodais do elemento. O elemento bidimensional está contido no plano x, y . A grandeza ϕ no interior do elemento é função das coordenadas x, y . Nos pontos nodais i, j, k os valores da grandeza ϕ são respectivamente ϕ_i, ϕ_j e ϕ_k .

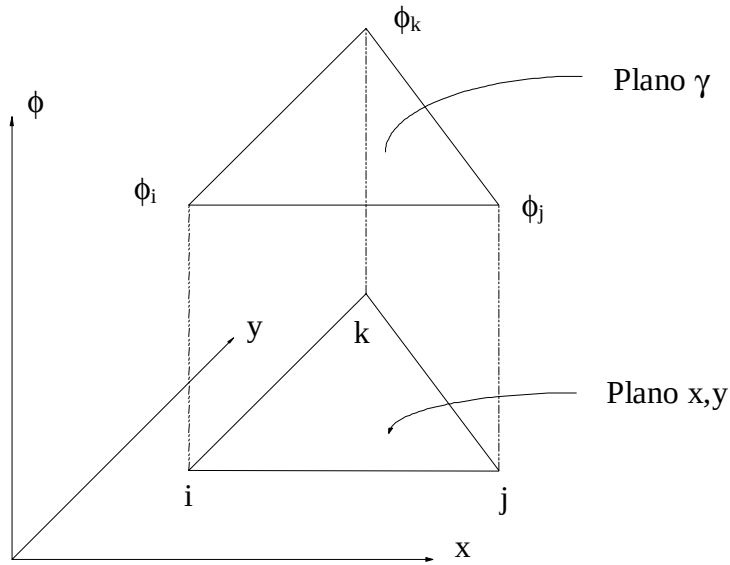


Figura A1.1 - Elemento Triangular Linear

Considere um plano γ no espaço x, y, ϕ conforme mostra a Figura A1.1, descrito por:

$$\phi^e = \phi^e(x, y) = \beta_1^e + \beta_2^e x + \beta_3^e y . \quad (A1.1)$$

Da Equação (A1.1), para os pontos nodais i, j, k , tem-se que:

$$\phi_i = \beta_1^e + \beta_2^e X_i + \beta_3^e Y_i , \quad (A1.2a)$$

$$\phi_j = \beta_1^e + \beta_2^e X_j + \beta_3^e Y_j , \quad (A1.2b)$$

$$\phi_k = \beta_1^e + \beta_2^e X_k + \beta_3^e Y_k . \quad (A1.2c)$$

Resolvendo o sistema (A1.2) em termos de β_1 , β_2 e β_3 , resulta:

$$\beta_1^e = \left(\frac{X_j Y_k - X_k Y_j}{2 A^e} \right) \phi_i + \left(\frac{X_k Y_i - X_i Y_k}{2 A^e} \right) \phi_j + \left(\frac{X_i Y_j - X_j Y_i}{2 A^e} \right) \phi_k , \quad (A1.3a)$$

$$\beta_2^e = \left(\frac{Y_j - Y_k}{2 A^e} \right) \phi_i + \left(\frac{Y_k - Y_i}{2 A^e} \right) \phi_j + \left(\frac{Y_i - Y_j}{2 A^e} \right) \phi_k , \quad (A1.3b)$$

$$\beta_3^e = \left(\frac{X_k - X_j}{2 A^e} \right) \phi_i + \left(\frac{X_i - X_k}{2 A^e} \right) \phi_j + \left(\frac{X_j - X_i}{2 A^e} \right) \phi_k , \quad (A1.3c)$$

sendo A^e a área do elemento dada por:

$$A^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} . \quad (A1.3d)$$

Substituindo (A1.3) em (A1.1) e rearranjando, vem:

$$\phi^e = \left(\frac{a_i + b_i X + c_i Y}{2 A^e} \right) \phi_i + \left(\frac{a_j + b_j X + c_j Y}{2 A^e} \right) \phi_j + \left(\frac{a_k + b_k X + c_k Y}{2 A^e} \right) \phi_k , \quad (A1.4a)$$

sendo:

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j ; b_i = Y_j - Y_k ; c_i = X_k - X_j , \quad (A1.4b)$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k ; b_j = Y_k - Y_i ; c_j = X_i - X_k , \quad (A1.4c)$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i ; b_k = Y_i - Y_j ; c_k = X_j - X_i . \quad (A1.4d)$$

A distribuição da grandeza ϕ^e no interior do elemento, em termos das funções de forma, pode ser escrita como:

$$\phi^e = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k , \quad (A1.5a)$$

ou na forma matricial,

$$\phi^e = [N] \{ \phi \}^e = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} . \quad (A1.5b)$$

Comparando (A1.4a) e (A1.5a), vê-se imediatamente que as funções de forma N_i , N_j , N_k são dadas por:

$$N_\alpha = \frac{a_\alpha + b_\alpha X + c_\alpha Y}{2 A^e}, \quad \text{com } \alpha = i, j, k. \quad (\text{A1.6})$$

A1.3 – Verificação das Funções de Forma

A função de forma em um determinado nó, tem o valor unitário para este nó e o valor nulo para os demais nós. Verificação:

Cálculo de N_i para o nó i:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2 A^e} (a_i + b_i X_i + c_i Y_i) = \frac{1}{2 A^e} (X_j Y_k - X_k Y_j + Y_j X_i - Y_k X_i + X_k Y_i - X_j Y_i) = \\ &= \frac{1}{2 A^e} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2 A^e} (2 A^e) = 1. \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

Cálculo de N_i para o nó j:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2 A^e} (a_i + b_i X_j + c_i Y_j) = \\ &= \frac{1}{2 A^e} (X_j Y_k - X_k Y_j + Y_j X_j - Y_k X_j + X_k Y_j - X_j Y_j) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A1.8})$$

Cálculo de N_i para o nó k:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2 A^e} (a_i + b_i X_k + c_i Y_k) = \\ &= \frac{1}{2 A^e} (X_j Y_k - X_k Y_j + Y_j X_k - Y_k X_k + X_k Y_k - X_j Y_k) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

Cálculo de N_j para o nó i:

$$\begin{aligned} N_j &= \frac{1}{2 A^e} (a_j + b_j X_i + c_j Y_i) = \\ &= \frac{1}{2 A^e} (X_k Y_i - X_i Y_k + Y_k X_i - Y_i X_i + X_i Y_i - X_k Y_i) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A1.10})$$

Cálculo de N_j para o nó j:

$$N_j = \frac{1}{2 A^e} (a_j + b_j X_j + c_j Y_j) = \frac{1}{2 A^e} (X_k Y_i - X_i Y_k + Y_k X_j - Y_i X_j + X_i Y_j - X_k Y_j) =$$

$$\frac{1}{2A^e} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2A^e} (2A^e) = 1 . \quad (\text{A1.11})$$

Cálculo de N_j para o nó k:

$$N_j = \frac{1}{2A^e} (a_j + b_j X_k + c_j Y_k) = \frac{1}{2A^e} (X_k Y_i - X_i Y_k + Y_k X_k - Y_i X_k + X_i Y_k - X_k Y_k) = 0 . \quad (\text{A1.12})$$

Cálculo de N_k para o nó i:

$$N_k = \frac{1}{2A^e} (a_k + b_k X_i + c_k Y_i) = \frac{1}{2A^e} (X_i Y_j - X_j Y_i + Y_i X_i - Y_j X_i + X_j Y_i - X_i Y_i) = 0 . \quad (\text{A1.13})$$

Cálculo de N_k para o nó j:

$$N_k = \frac{1}{2A^e} (a_k + b_k X_j + c_k Y_j) = \frac{1}{2A^e} (X_i Y_j - X_j Y_i + Y_i X_j - Y_j X_j + X_j Y_j - X_i Y_j) = 0 . \quad (\text{A1.14})$$

Cálculo de N_k para o nó k:

$$N_k = \frac{1}{2A^e} (a_k + b_k X_k + c_k Y_k) = \frac{1}{2A^e} (X_i Y_j - X_j Y_i + Y_i X_k - Y_j X_k + X_j Y_k - X_i Y_k) = \frac{1}{2A^e} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2A^e} (2A^e) = 1 . \quad (\text{A1.15})$$

A1.4 – Cálculo dos Gradientes

As funções de forma N_α são lineares com relação às variáveis x e y . Por isso os gradientes nas direções x e y são constantes em cada elemento.

Os gradientes nas direções x e y são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial N_i}{\partial X} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial X} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial X} \phi_k , \quad (\text{A1.16})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{\partial N_i}{\partial Y} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial Y} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial Y} \phi_k . \quad (\text{A1.17})$$

Mas

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{2A_e} (a_\alpha + b_\alpha X + c_\alpha Y) \right) = \frac{b_\alpha}{2A_e} , \quad \text{com } \alpha = i, j, k, \quad (\text{A1.18})$$

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{2A_e} (a_\alpha + b_\alpha X + c_\alpha Y) \right) = \frac{c_\alpha}{2A_e} , \quad \text{com } \alpha = i, j, k. \quad (\text{A1.19})$$

Portanto das Equações (A1.16), (A1.17), (A1.18) e (A1.19), resulta:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{1}{2A_e} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) , \quad (\text{A1.20})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{1}{2A_e} (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) . \quad (\text{A1.21})$$

APÊNDICE 2

NÚMEROS ADIMENSIONAIS

Os parâmetros adimensionais utilizados neste trabalho são apresentados neste apêndice.

A2.1 – Número de Nusselt para Dutos Horizontais e Verticais

Para o cálculo dos números de Nusselt local e médio é necessário o conhecimento dos fluxos de calor local e médio dados, respectivamente, por:

$$q = h (T_w - T_b) , \quad (A2.1)$$

$$\bar{q} = \bar{h} (T_w - T_b) , \quad (A2.2)$$

sendo h o coeficiente de transferência de calor por convecção local, T_w a temperatura da parede, T_b a temperatura média do fluido, $\bar{h}$ o coeficiente de transferência de calor por convecção médio.

Os números de Nusselt local e médio são definidos, respectivamente, por:

$$Nu_L = \frac{h d}{k} , \quad (A2.3)$$

$$Nu = \frac{\bar{h} d}{k} , \quad (A2.4)$$

sendo k a condutividade térmica do fluido e d o diâmetro hidráulico definido por:

$$d = \frac{4 A_m}{P_m} , \quad (A2.5)$$

sendo A_m a área molhada e P_m o perímetro molhado.

Substituindo (A2.1) e (A2.2) em (A2.3) e (A2.4), vem:

$$Nu_L = \frac{q d}{k (T_w - T_b)} , \quad (A2.6)$$

$$Nu = \frac{\bar{q} d}{k (T_w - T_b)} . \quad (A2.7)$$

A temperatura média do fluido T_b e a temperatura média adimensional do fluido θ_b são definidas, respectivamente, por:

$$T_b = \frac{\iint T W \, d x \, d y}{\iint W \, d x \, d y} , \quad (A2.8)$$

$$\theta_b = \frac{T_b - T_w}{\bar{q} \, d / k} , \quad (A2.9)$$

sendo T a temperatura e W a velocidade axial.

Do capítulo 2, Equação 2.9, tem-se que:

$$x = X \, d , \quad y = Y \, d , \quad (A2.10)$$

$$T = \left(\frac{\bar{q} \, d}{k} \right) \theta + T_w , \quad (A2.11)$$

$$T_b = \left(\frac{\bar{q} \, d}{k} \right) \theta_b + T_w . \quad (A2.12)$$

Substituindo as Equações (A2.10), (A2.11) e (A2.12) na Equação (A2.8), vem:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{q} \, d}{k} \right) \theta_b + T_w &= \frac{\iint d^2 \left[\left(\frac{\bar{q} \, d}{k} \right) \theta + T_w \right] W \, d X \, d Y}{\iint d^2 W \, d X \, d Y} = \\ &= \frac{\iint \left(\frac{\bar{q} \, d}{k} \right) \theta W \, d X \, d Y + \iint W T_w \, d X \, d Y}{\iint W \, d X \, d Y} . \end{aligned} \quad (A2.13)$$

Como T_w é constante, então:

$$\left(\frac{\bar{q} \, d}{k} \right) \theta_b + T_w = \left(\frac{\bar{q} \, d}{k} \right) \frac{\iint \theta W \, d X \, d Y}{\iint W \, d X \, d Y} + T_w \frac{\iint W \, d X \, d Y}{\iint W \, d X \, d Y} . \quad (A2.14)$$

Logo:

$$\theta_b = \frac{\iint \theta W \, d X \, d Y}{\iint W \, d X \, d Y} . \quad (A2.15)$$

Dividindo o numerador e o denominador pela área A , vem:

$$\theta_b = \frac{\frac{1}{A} \iint \theta W dX dY}{\frac{1}{A} \iint W dX dY} . \quad (A2.16)$$

Mas:

$$\frac{1}{A} \iint \theta W dX dY = \overline{\theta W} \quad \text{e} \quad \frac{1}{A} \iint W dX dY = \overline{W} , \quad (A2.17)$$

sendo $\overline{\theta W}$ a média do produto da temperatura adimensional pela velocidade axial adimensional e $\overline{W}$ a velocidade axial adimensional . Logo:

$$\theta_b = \frac{\overline{\theta W}}{\overline{W}} . \quad (A2.18)$$

Substituindo a Equação (A2.12) na Equação (A2.7), vem:

$$Nu = \frac{\bar{q} d}{k \left[T_w - \left(\frac{\bar{q} d}{k} \theta_b + T_w \right) \right]} = \frac{\bar{q} d}{-\bar{q} d \theta_b} = -\frac{1}{\theta_b} . \quad (A2.19)$$

Substituindo a Equação (A2.18) na Equação (A2.19), vem:

$$Nu = -\frac{\overline{W}}{\overline{\theta W}} . \quad (A2.20)$$

A2.2 – Fator de Atrito para Dutos Horizontais e Verticais

O fator de atrito f , é definido como:

$$f = \frac{(-d \bar{p} / dz) d}{(1/2) \rho \bar{w}^2} , \quad (A2.21)$$

sendo ρ a massa específica do fluido e $\bar{w}$ sua velocidade axial média.

A velocidade média adimensional do fluido $\overline{W}$ e o número de Reynolds Re são dados por:

$$\overline{W} = \frac{\bar{w}}{\frac{d \bar{p}}{dz} \frac{d^2}{\mu}} , \quad (A2.22)$$

$$Re = \frac{\rho \bar{w} d}{\mu} , \quad (A2.23)$$

sendo μ a viscosidade dinâmica do fluido.

Substituindo (A2.23) em (A2.21), vem:

$$f = \frac{(-d\bar{p}/dz)d^2}{(1/2)\bar{W}\mu Re} . \quad (A2.24)$$

Substituindo (A2.22) em (A2.24), vem:

$$f = \frac{(-d\bar{p}/dz)d^2}{(1/2)\left(-\frac{d\bar{p}}{dz}\right)\frac{d^2}{\mu}\bar{W}\mu Re} = \frac{2}{\bar{W} Re} . \quad (A2.25)$$

Logo:

$$f Re = \frac{2}{\bar{W}} . \quad (A2.26)$$

A2.3 – Número de Nusselt para Bancos de Tubos em um Escoamento Vertical

O número de Nusselt local para cada tubo pode ser calculado por:

$$Nu_L = \frac{h D}{k} , \quad (A2.27)$$

sendo D o diâmetro do tubo, k a condutividade térmica do fluido e h o coeficiente de transferência de calor por convecção local, dado por:

$$h = \frac{q}{T_w - T_b} , \quad (A2.28)$$

sendo T_w a temperatura no tubo, T_b a temperatura média do fluido na linha horizontal imaginária de menor distância entre o tubo e a linha de simetria ou a parede do duto, conforme o caso.

O fluxo de calor é dado por:

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} , \quad (A2.29)$$

sendo q_x e q_y os fluxos de calor nas direções x e y dados, respectivamente por:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} , \quad (A2.30)$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} . \quad (A2.31)$$

Adimensionalizando q_x e q_y , utilizando os parâmetros adimensionais vistos no Capítulo 2, e substituindo em (A2.29), vem:

$$q = \frac{k(T_w - T_{in})}{D} \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)^2}, \quad (A2.32)$$

sendo T_{in} a temperatura na entrada, θ a temperatura adimensional e X e Y as coordenadas adimensionais.

Substituindo a Equação (A2.32) na Equação (A2.28), vem:

$$h = \frac{k}{D} \frac{T_w - T_{in}}{T_w - T_b} \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)^2}. \quad (A2.33)$$

Substituindo a Equação (A2.33) na Equação (A2.27), vem:

$$N_L = \frac{T_w - T_{in}}{T_w - T_b} \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)^2}. \quad (A2.34)$$

Adimensionalizando as temperaturas T_w , T_{in} e T_b , vem:

$$N_L = \frac{\theta_w - \theta_{in}}{\theta_w - \theta_b} \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)^2}, \quad (A2.35)$$

sendo θ_w a temperatura adimensional na parede do tubo horizontal, θ_{in} a temperatura adimensional na entrada e θ_b a temperatura adimensional média do fluido na linha horizontal imaginária de menor distância entre o tubo e a linha de simetria ou a parede do duto, dada por:

$$\theta_b = \frac{\overline{U\theta}}{\overline{U}}, \quad (A2.36)$$

sendo $\overline{U\theta}$ a média do produto da velocidade pela temperatura na linha horizontal imaginária de menor distância entre o tubo e a linha de simetria ou a parede do duto, $\overline{U}$ a velocidade média nesta linha e U a velocidade adimensional em cada ponto desta linha, dada por:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad (A2.37)$$

O número de Nusselt médio para cada tubo pode ser calculado como uma média dos números de Nusselt locais, da seguinte forma:

$$Nu = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell Nu_L d\ell, \quad (A2.38)$$

sendo ℓ o perímetro do tubo em contato com o fluido.

APÊNDICE 3

MÉTODO DE GALERKIN PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL BIDIMENSIONAL EM REGIME NÃO PERMANENTE

A3.1- Introdução

Seja a equação diferencial bidimensional em regime não permanente (Segerlind, 1984):

$$\delta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \quad (A3.1)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\phi = \phi_{ec}(X, Y), \quad (A3.2)$$

$$q = \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad (A3.3)$$

sendo ϕ uma função escalar, $\phi_{ec}(X, Y)$ uma função especificada no contorno, X e Y as coordenadas, q o fluxo de calor normal à superfície de contorno, λ e δ parâmetros de valor constante, τ o tempo adimensional, n a direção normal à superfície e Q_ϕ uma função especificada no domínio.

A3.2 - Método de Galerkin

A Equação (A3.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\delta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + \left(Q_\phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (A3.4)$$

A integral residual para o problema é a integral de volume apresentada na seguinte forma:

$$\{I\}^e = - \int_{V^e} [N^e]^T \left\{ \delta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + \left(Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) \right\} dV = 0. \quad (A3.5)$$

A Equação (A3.5) pode ser escrita como sendo:

$$\begin{aligned} - \int_{V^e} [N^e]^T \delta \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} dV - \int_{V^e} [N^e]^T \delta \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial Y^2} dV - \\ \int_{V^e} [N^e]^T \left(Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV = 0. \end{aligned} \quad (A3.6)$$

As derivadas de 2ª ordem devem ser transformadas para as formas de menor ordem. Para isto,

usa-se a seguinte derivada do produto:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left([N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) = [N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} + \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} . \quad (A3.7)$$

Rearranjando a Equação (A3.7), vem:

$$[N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left([N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) - \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} . \quad (A3.8)$$

Fazendo-se o mesmo procedimento para a derivada de 2ª ordem em Y, da Equação(A3.6), vem:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left([N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) = [N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial Y^2} + \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} . \quad (A3.9)$$

Rearranjando a Equação (A3.9), resulta:

$$[N^e]^T \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y} \left([N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) - \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} . \quad (A3.10)$$

Substituindo as Equações (A3.8) e (A3.10) na Equação (A3.6), resulta:

$$\begin{aligned} & - \int_{V^e} \left[\delta \frac{\partial}{\partial X} \left([N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) - \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right] dV - \\ & \int_{V^e} \left[\delta \frac{\partial}{\partial Y} \left([N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) - \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dV - \\ & \int_{V^e} [N^e]^T \left(Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV = 0 . \end{aligned} \quad (A3.11)$$

Rearranjando a Equação (A3.11), resulta:

$$\begin{aligned} & \int_{V^e} \left[\delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dV - \\ & \int_{V^e} \left[\delta \frac{\partial}{\partial X} \left([N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) + \delta \frac{\partial}{\partial Y} \left([N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) \right] dV - \\ & \int_{V^e} [N^e]^T \left(Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV = 0 . \end{aligned} \quad (A3.12)$$

A segunda integral de volume da Equação (A3.12) pode ser transformada em uma integral de superfície usando o teorema de Gauss, dado por:

$$\int_V \frac{\partial(F)}{\partial X} dV = \int_A F dA, \quad (A3.13)$$

sendo F uma função qualquer.

Comparando o 1º membro da Equação (A3.13) e a integral

$$\int_{V^e} \delta \frac{\partial}{\partial X} \left([N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) dV,$$

nota-se que:

$$F = \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X}. \quad (A3.14)$$

Substituindo a Equação (A3.14) na Equação (A3.13), vem:

$$\int_{V^e} \delta \frac{\partial}{\partial X} \left([N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) dV = \int_{A^e} \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} dA. \quad (A3.15)$$

Rearranjando a equação acima, vem:

$$\int_{V^e} \delta \frac{\partial}{\partial X} \left([N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) dV = \int_{A^e} \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} dA. \quad (A3.16)$$

Fazendo o mesmo procedimento para a integral

$$\int_{V^e} \delta \frac{\partial}{\partial X} \left([N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right) dV,$$

resulta:

$$\int_{V^e} \delta \frac{\partial}{\partial Y} \left([N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) dV = \int_{A^e} \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} dA. \quad (A3.17)$$

Somando-se os segundos membros das Equações (A3.16) e (A3.17), vem:

$$\int_{A^e} \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} dA + \int_{A^e} \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} dA = \int_{A^e} \left[\delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dA. \quad (A3.18)$$

A Equação (A3.18) pode ser reduzida para a seguinte forma:

$$\int_{A^e} \left[\delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta [N^e]^T \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dA = \int_{A^e} [N^e]^T \left(\delta \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) dA . \quad (A3.19)$$

Substituindo a Equação (A3.3) na Equação (A3.19), vem:

$$\int_{A^e} [N^e]^T \left(\delta \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right) dA = \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA . \quad (A3.20)$$

Portanto, a integral residual completa fica na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \{I\}^e = & \int_{V^e} \left[\delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right] dV - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA - \\ & \int_{V^e} [N^e]^T \left(Q_\phi^e - \lambda \frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} \right) dV = 0 . \end{aligned} \quad (A3.21)$$

A função escalar ϕ^e pode ser definida na seguinte forma matricial:

$$\phi^e = [N^e] \{ \phi^e \} . \quad (A3.22)$$

As derivadas $\frac{\partial \phi^e}{\partial X}$ e $\frac{\partial \phi^e}{\partial Y}$ na primeira integral da Equação (A3.21) podem ser substituídas por:

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial X} = \frac{\partial [N^e]}{\partial X} \{ \phi^e \} \text{ e } \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} = \frac{\partial [N^e]}{\partial Y} \{ \phi^e \} . \quad (A3.23)$$

A derivada $\frac{\partial \phi^e}{\partial \tau}$ na última integral da Equação (A3.21) pode ser substituída por:

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial \tau} = \frac{\partial ([N^e] \{ \phi^e \})}{\partial \tau} = [N^e] \frac{\partial \{ \phi^e \}}{\partial \tau} . \quad (A3.24)$$

Portanto, substituindo as Equações (A3.22), (A3.23) e (A3.24) na Equação (A3.21), e rearranjando, resulta:

$$\begin{aligned} \{I\}^e = & \left[\int_{V^e} \left(\delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial [N^e]}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial [N^e]}{\partial Y} \right) dV \right] \{ \phi^e \} - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA - \\ & \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV + \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] \frac{\partial \{ \phi^e \}}{\partial \tau} dV = 0 . \end{aligned} \quad (A3.25)$$

Pode-se definir $\{ \phi_\tau^e \}$ como sendo:

$$\{\phi_\tau^e\} = \frac{\partial \{\phi^e\}}{\partial \tau} . \quad (\text{A3.26})$$

Pode-se definir a matriz gradiente $\{g^e\}$ como sendo:

$$\{g^e\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \\ \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial N_i^e}{\partial X} & \frac{\partial N_j^e}{\partial X} & \frac{\partial N_k^e}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial Y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial Y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial Y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{array} \right\} = [B^e] \{\phi^e\} , \quad (\text{A3.27})$$

sendo a matriz das derivadas das funções de forma, $[B^e]$, dada por:

$$[B^e] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_j}{\partial Y} & \frac{\partial N_k}{\partial Y} \end{array} \right] . \quad (\text{A3.28})$$

A matriz $[B^e]^T$ é dada por:

$$[B^e]^T = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_i}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial X} & \frac{\partial N_j}{\partial Y} \\ \frac{\partial N_k}{\partial X} & \frac{\partial N_k}{\partial Y} \end{array} \right] . \quad (\text{A3.29})$$

A primeira integral da Equação (A3.25), com o uso das Equações (A3.28) e (A3.29), pode ser escrita como:

$$\left[\int_{V^e} \left(\delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial X} \frac{\partial [N^e]}{\partial X} + \delta \frac{\partial [N^e]^T}{\partial Y} \frac{\partial [N^e]}{\partial Y} \right) dV \right] \{\phi^e\} = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV \{\phi^e\} . \quad (\text{A3.30})$$

A última integral da Equação (A3.25), com o uso da Equação (A3.26), pode ser escrita como:

$$\int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] \{\phi_\tau^e\} dV = [C]^e \{\phi_\tau^e\} , \quad (\text{A3.31})$$

sendo:

$$[C]^e = \int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV . \quad (\text{A3.32})$$

Substituindo as Equações (A3.30) e (A3.31) em (A3.25), resulta:

$$\{I\}^e = \left[\int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV \right] \{\phi^e\} - \int_{A^e} [N^e]^T q^e dA - \int_{V^e} [N^e]^T Q_\phi^e dV + [C]^e \{\phi_\tau^e\} = 0 . \quad (A3.33)$$

Definindo as matrizes $[K]^e$ e $\{R\}^e$ como sendo:

$$[K]^e = \int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV , \quad (A3.34)$$

$$\{R\}^e = \int_{A^e} -[N^e]^T q^e dA + \int_{V^e} -[N^e]^T Q_\phi^e dV . \quad (A3.35)$$

A Equação (A3.33) pode ser escrita na seguinte forma condensada para o elemento:

$$\{I\}^e = [C]^e \{\phi_\tau^e\} + [K]^e \{\phi^e\} + \{R\}^e = 0 . \quad (A3.36)$$

Fazendo a minimização de $\{I\}^e$, tem-se:

$$\{I\} = \sum_{e=1}^E \{I\}^e = 0 . \quad (A3.37)$$

Logo, substituindo (A3.33) em (A3.37), resulta:

$$\{I\} = \sum_{e=1}^E \left[\int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV \right] \{\phi^e\} + \sum_{e=1}^E \left[\int_{A^e} -[N^e]^T q^e dA \right] + \sum_{e=1}^E \left[\int_{V^e} -[N^e]^T Q_\phi^e dV \right] + \sum_{e=1}^E [C]^e \{\phi_\tau^e\} = 0 . \quad (A3.38)$$

A Equação (A3.38) pode ser escrita na seguinte forma condensada global:

$$\{I\} = [C] \{\phi_\tau\} + [K] \{\phi\} + \{R\} = 0 , \quad (A3.39)$$

sendo:

$$[C] = \sum_{e=1}^E [C]^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV \right] , \quad (A3.40)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^E [K]^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{V^e} \delta [B^e]^T [B^e] dV \right], \quad (A3.41)$$

$$\{R\} = \sum_{e=1}^E \{R\}^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{V^e} -[N^e]^T Q_\phi^e dV \right] + \sum_{e=1}^E \left[\int_{A^e} -[N^e]^T q^e dA \right]. \quad (A3.42)$$

A3.3 – Aproximação do Termo $\{\phi_\tau\}$

O termo $\{\phi_\tau\}$ da Equação (A3.39) pode ser aproximado usando um esquema de diferença finita central, na seguinte forma:

$$\{\phi_\tau\} = \frac{1}{\Delta\tau} (\{\phi\}_{N+1} - \{\phi\}_N), \quad (A3.43)$$

sendo: $\{\phi\}_{N+1}$ a distribuição de ϕ obtida no tempo τ_{N+1} ; $\{\phi\}_N$ a distribuição de ϕ obtida no tempo τ_N ; e $\Delta\tau$ o incremento de tempo dado por $\Delta\tau = \tau_{N+1} - \tau_N$.

A figura A3.1 ilustra os valores de ϕ , ϕ_N e ϕ_{N+1} .

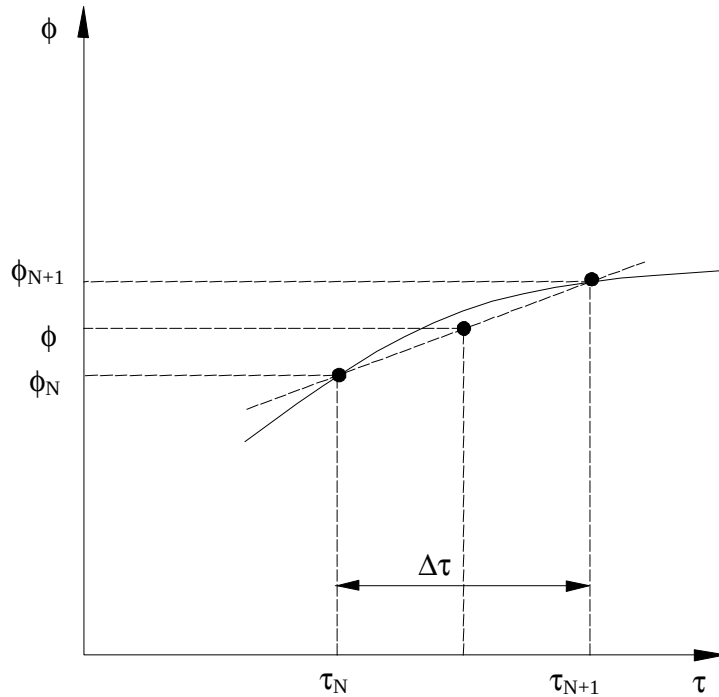


Figura A3.1 – Esquema de diferença finita central para a aproximação do termo $\{\phi_\tau\}$.

O termo $\{\phi\}$ da Equação (A3.39) pode ser avaliado como sendo a média das distribuições de ϕ dos tempos τ_N e τ_{N+1} , ou seja:

$$\{\phi\} = \frac{1}{2} (\{\phi\}_{N+1} + \{\phi\}_N), \quad (A3.44)$$

sendo $\{\phi\}$ a distribuição de ϕ que se quer calcular.

Substituindo as Equações (A3.43) e (A3.44) na Equação (A3.39), vem:

$$[C] \frac{1}{\Delta \tau} (\{\phi\}_{N+1} - \{\phi\}_N) + [K] \frac{1}{2} (\{\phi\}_{N+1} + \{\phi\}_N) + \{R\} = 0 . \quad (A3.45)$$

Multiplicando ambos os membros da Equação (A3.45) por 2, vem:

$$\frac{2}{\Delta \tau} [C] (\{\phi\}_{N+1} - \{\phi\}_N) + [K] (\{\phi\}_{N+1} + \{\phi\}_N) + 2 \{R\} = 0 . \quad (A3.46)$$

Colocando $\{\phi\}_{N+1}$ e $\{\phi\}_N$ em evidência, vem:

$$\left([K] + \frac{2}{\Delta \tau} [C] \right) \{\phi\}_{N+1} + \left([K] - \frac{2}{\Delta \tau} [C] \right) \{\phi\}_N + 2 \{R\} = 0 . \quad (A3.47)$$

Isolando os termos que multiplicam $\{\phi\}_{N+1}$, no primeiro membro, vem:

$$\left([K] + \frac{2}{\Delta \tau} [C] \right) \{\phi\}_{N+1} = - \left([K] - \frac{2}{\Delta \tau} [C] \right) \{\phi\}_N - 2 \{R\} , \quad (A3.48)$$

mas, da Equação (A3.44), tem-se que:

$$\{\phi\} = \frac{1}{2} (\{\phi\}_{N+1} + \{\phi\}_N) , \quad (A3.49)$$

então:

$$\{\phi\}_{N+1} = 2 \{\phi\} - \{\phi\}_N . \quad (A3.50)$$

Substituindo a Equação (A3.50) na Equação (A3.48), vem:

$$\left([K] + \frac{2}{\Delta \tau} [C] \right) (2 \{\phi\} - \{\phi\}_N) = - \left([K] - \frac{2}{\Delta \tau} [C] \right) \{\phi\}_N - 2 \{R\} . \quad (A3.51)$$

Isolando os termos que multiplicam $\{\phi\}$, no primeiro membro, vem:

$$2 \left([K] + \frac{2}{\Delta \tau} [C] \right) \{\phi\} = \left(-[K] + \frac{2}{\Delta \tau} [C] + [K] + \frac{2}{\Delta \tau} [C] \right) \{\phi\}_N - 2 \{R\} . \quad (A3.52)$$

Dividindo a Equação (A3.52) por 2, resulta:

$$\left([K] + \frac{2}{\Delta \tau} [C] \right) \{\phi\} = \frac{2}{\Delta \tau} [C] \{\phi\}_N - \{R\} , \quad (A3.53)$$

sendo $\{\phi\}$ a distribuição de ϕ que se quer calcular (tempo atual) e $\{\phi\}_N$ a distribuição de ϕ calculada

no tempo anterior.

A Equação (A3.53) pode ser escrita na forma para o elemento, como sendo:

$$\left([K]^e + \frac{2}{\Delta\tau} [C]^e \right) \{\phi\}^e = \frac{2}{\Delta\tau} [C]^e \{\phi\}_N^e - \{R\}^e . \quad (A3.54)$$

A3.4 – Regime Permanente

Para se obter a equação de elementos finitos para o regime permanente, basta fazer a matriz [C] igual a zero na Equação (A3.53), o que resulta em:

$$[K] \{\phi\} = -\{R\} . \quad (A3.55)$$

Na forma para o elemento, a Equação (A3.55) passa a ser:

$$[K]^e \{\phi\}^e = -\{R\}^e . \quad (A3.56)$$

APÊNDICE 4

MÉTODO MATRICIAL PARA O CÁLCULO DA VORTICIDADE NO CONTORNO

A4.1- Introdução

Normalmente a vorticidade num ponto do contorno (parede) é calculada a partir do valor da função corrente de um ponto vizinho e da distância deste ponto à parede (direção perpendicular). Este cálculo é feito pela seguinte equação:

$$\omega_w = - \frac{2 \psi_{pp}}{(\Delta n)^2} , \quad (A4.1)$$

sendo ω_w a vorticidade num ponto da parede, ψ_{pp} a função corrente num ponto vizinho à parede e Δn a distância deste ponto à parede (direção perpendicular). Como exemplo, a vorticidade no ponto 2 da Figura A4.1 pode ser calculado conhecendo-se a função corrente no ponto 6 e a distância ΔY .

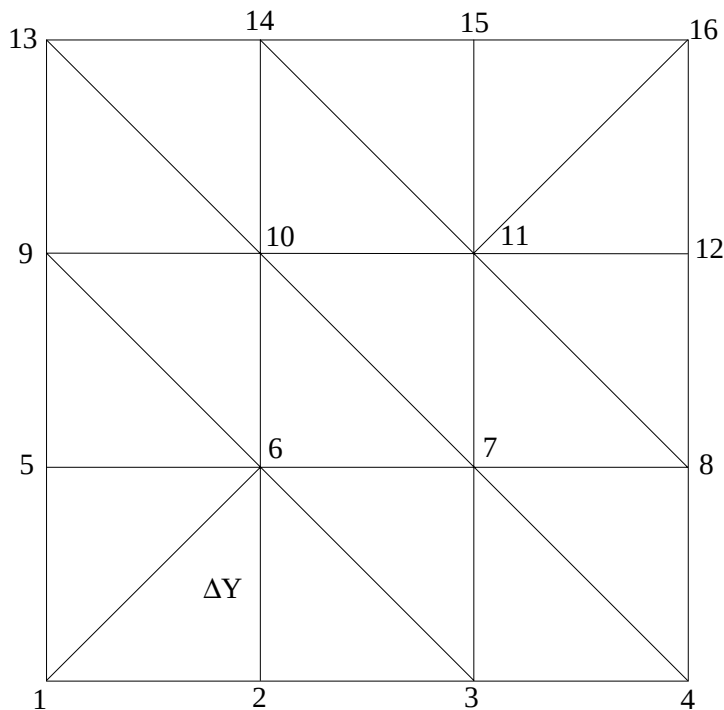


Figura A4.1 – Malha exemplo para o cálculo da vorticidade no contorno

Quando a geometria é complexa ou a malha não é uniforme, este modo de calcular a vorticidade no contorno passa a apresentar uma série de limitações. Nestes casos o cálculo da vorticidade no contorno deve ser feito de uma forma que não se necessite saber quais são os pontos vizinhos e nem qual a distância destes pontos à parede. Este modo de calcular a vorticidade no contorno, é apresentada a seguir.

A4.2- Método Matricial

No Capítulo 3 foi mostrado que a função corrente pode ser calculada da seguinte forma:

$$[K_\psi]^e \{\psi\}^e = -\{R_\psi\}^e, \quad (A4.2)$$

sendo:

$$\{R_\psi\}^e = -\frac{A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix}. \quad (A4.3)$$

Mas:

$$[C]^e = \frac{A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\omega]^e = \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix}. \quad (A4.4)$$

Substituindo a Equação (A4.4) na Equação (A4.3), vem:

$$\{R_\psi\}^e = -[C]^e \{\omega\}^e. \quad (A4.5)$$

Substituindo a Equação (A4.5) na Equação (A4.2), vem:

$$[K_\psi]^e \{\psi\}^e = [C]^e \{\omega\}^e, \quad (A4.6)$$

ou na forma global:

$$[K_\psi] \{\psi\} = [C] \{\omega\}. \quad (A4.7)$$

Quando se está calculando a função corrente pela Equação (A4.7), os valores de $[K_\psi]$, $[C]$ e $\{\omega\}$ são conhecidos. Para o cálculo da vorticidade no contorno, usa-se a mesma equação mas, neste caso, os valores de $[K_\psi]$, $\{\psi\}$ e $[C]$ são conhecidos e deseja-se calcular $\{\omega\}$. Então a Equação (A4.7) se torna:

$$[C] \{\omega\} = [K_\psi] \{\psi\}, \quad (A4.8)$$

ou na forma para o elemento:

$$[C]^e \{\omega\}^e = [K_\psi]^e \{\psi\}^e. \quad (A4.9)$$

Os valores da vorticidade nos pontos interiores e nos pontos do contorno onde ela não será

calculada, entram como condição de contorno para a solução da Equação (A4.8)

Como exemplo, imagine o escoamento sobre uma placa plana, figura A4.2. Os valores de vorticidade nos pontos 5, 8, 9, 12, 13, 14, 15 e 16 são conhecidos, os valores da vorticidade nos pontos 6, 7, 10 e 11 já foram calculados. Deseja-se agora calcular a vorticidade na placa, pontos 1, 2, 3 e 4. Conhecendo-se os valores da função corrente em todos os pontos da figura A4.2 calcula-se a vorticidade nos pontos de 1 a 4 usando a Equação (A4.8). A vorticidade nos pontos de 5 a 16 entra como condição de contorno.

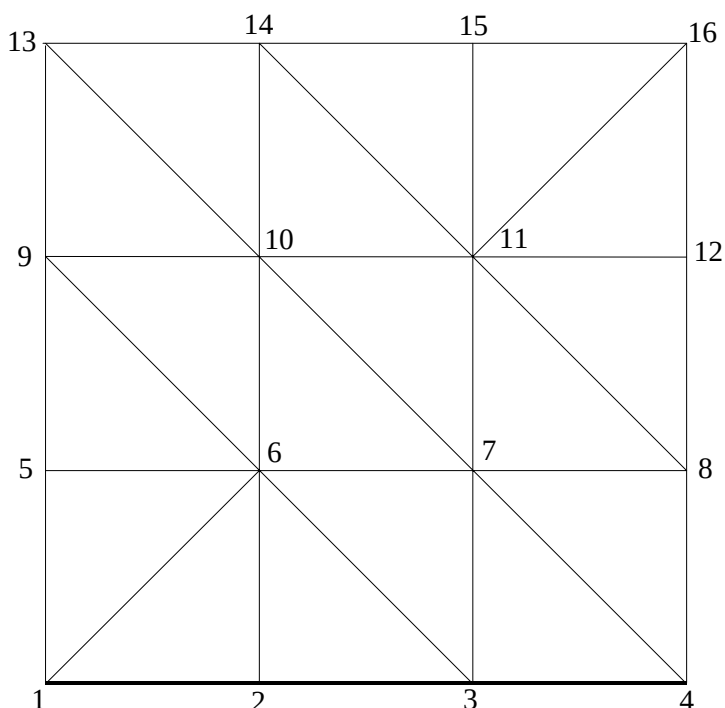


Figura A4.2 – Exemplo de malha para o cálculo matricial da vorticidade

Esta forma de se calcular a vorticidade no contorno exige que a função corrente já tenha sido determinada em todos os pontos do domínio. Os valores da vorticidade nos pontos do contorno onde ela precisa ser atualizada a cada passo de tempo e nos pontos interiores, também precisam ser conhecidos ou já terem sido calculados.

APÊNDICE 5

TABELAS DE RESULTADOS

As tabelas com os resultados de alguns dos casos estudados no Capítulo 5 são apresentadas neste apêndice.

A5.1 – Duto Retangular Horizontal com Cilindro Interno Aquecido para $\gamma = 0^\circ$

Na tabela A5.1 são apresentados os resultados para um duto retangular horizontal com um cilindro interno aquecido e ângulo de inclinação $\gamma = 0$. O escoamento ocorre em regime permanente. São mostrados resultados para o número de Nusselt médio (Nu), para a razão entre o número de Nusselt médio da convecção mista e o número de Nusselt médio da convecção forçada pura (Nu/Nu₀), para o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) e para a razão entre este produto para a convecção mista e este produto para a convecção forçada pura [fRe/(fRe)₀]. Os valores de Nu₀ e (fRe)₀ são obtidos para a convecção forçada pura fazendo-se Ra = 0. Todos os valores mencionados são obtidos para $\gamma = 0^\circ$, Pr=0,7, AR₁ = 0,50, 0,80, 1,00, 1,25 e 2,00, RR₁ = 5,66, 6,40 e 8,94 e para $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$, sendo AR₁ a razão de aspecto da seção transversal do duto, RR₁ a razão de raios e NE o número de elementos de cada malha utilizada.

Tabela A5.1 – Valores de Nu, Nu/Nu₀, fRe e fRe/(fRe)₀ para $\gamma = 0^\circ$, Pr=0,7; em função da razão de aspecto, da razão de raios e do número de Rayleigh

Ra	AR ₁	RR ₁	Nu	Nu/Nu ₀	fRe	(fRe)/(fRe) ₀
0	2,00	8,94	6,590	1,00	78,114	1,00
	1,25	6,40	7,524	1,00	84,729	1,00
	1,00	5,66	7,462	1,00	86,718	1,00
	0,80	6,40	7,522	1,00	84,734	1,00
	0,50	8,94	6,569	1,00	77,613	1,00
10 ⁴	2,00	8,94	6,592	1,00	78,139	1,00
	1,25	6,40	7,555	1,00	84,807	1,00
	1,00	5,66	7,538	1,01	86,718	1,00
	0,80	6,40	7,684	1,02	84,782	1,00
	0,50	8,94	7,030	1,07	77,663	1,00
10 ⁵	2,00	8,94	7,504	1,14	82,686	1,06
	1,25	6,40	9,037	1,20	88,245	1,04
	1,00	5,66	9,327	1,25	88,943	1,03
	0,80	6,40	9,904	1,32	86,316	1,02
	0,50	8,94	10,085	1,54	79,325	1,02
10 ⁶	2,00	8,94	9,024	1,37	91,475	1,17
	1,25	6,40	11,373	1,51	97,394	1,15
	1,00	5,66	12,199	1,63	98,933	1,14
	0,80	6,40	13,587	1,81	97,399	1,15
	0,50	8,94	15,111	2,30	91,082	1,17

A5.2 – Duto Retangular Horizontal com Cilindro Interno Aquecido para $\gamma \neq 0^\circ$

Na tabela A5.2 são apresentados os resultados para um duto retangular horizontal com um cilindro interno aquecido e ângulo de inclinação $\gamma \neq 0$. O escoamento ocorre em regime permanente. São mostrados resultados para o número de Nusselt médio (Nu), para a razão entre o número de Nusselt médio da convecção mista e o número de Nusselt médio da convecção forçada pura (Nu/Nu₀), para o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) e para a razão entre este produto para a convecção mista e este produto para a convecção forçada pura [fRe/(fRe)₀]. Os valores de Nu₀ e (fRe)₀ são obtidos para a convecção forçada pura, fazendo-se Ra = 0. Todos os valores mencionados são obtidos para Pr = 0,7 (ar), AR₁ = 1,25, RR₁ = 6,40, $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$ e para $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ e 90° , sendo: $\Delta\tau$ o intervalo de tempo adimensional.

Tabela A5.2 – Valores de Nu, Nu/Nu₀, fRe e fRe/(fRe)₀ para Pr = 0,7; AR₁ = 1,25; RR₁ = 6,40; $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$ e $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ e 90° .

Ra	γ	$\Delta\tau$	Nu	Nu/Nu ₀	fRe	fRe/(fRe) ₀
0	0°	0,05	7,482	1,00	84,303	1,00
	30°	0,05	7,482	1,00	84,303	1,00
	45°	0,05	7,482	1,00	84,303	1,00
1×10^3	0°	0,002	7,482	1,00	84,304	1,00
	30°	0,002	7,483	1,00	84,304	1,00
	45°	0,002	7,483	1,00	84,304	1,00
	60°	0,002	7,483	1,00	84,304	1,00
	90°	0,002	7,484	1,00	84,304	1,00
1×10^4	0°	0,002	7,514	1,00	84,386	1,00
	30°	0,002	7,551	1,01	84,377	1,00
	45°	0,002	7,586	1,01	84,369	1,00
	60°	0,002	7,620	1,02	84,362	1,00
	90°	0,002	7,651	1,02	84,355	1,00
$1,5 \times 10^4$	0°	0,002	7,557	1,01	84,493	1,00
	30°	0,002	7,630	1,02	84,465	1,00
	45°	0,002	7,696	1,03	84,443	1,00
	60°	0,002	7,757	1,04	84,425	1,00
	90°	0,002	7,813	1,04	84,410	1,00
2×10^4	0°	0,002	7,619	1,02	84,646	1,00
	30°	0,002	7,726	1,03	84,579	1,00
	45°	0,002	7,824	1,05	84,534	1,00
	60°	0,002	7,910	1,06	84,501	1,00
	90°	0,002	7,988	1,07	84,475	1,00
3×10^4	0°	0,002	7,796	1,04	85,065	1,01
	30°	0,002	7,940	1,06	84,856	1,01
	45°	0,002	8,089	1,08	84,742	1,01
	60°	0,002	8,219	1,10	84,674	1,00
	90°	0,002	8,332	1,11	84,626	1,00
4×10^4	0°	0,002	8,008	1,07	85,556	1,01
	30°	0,002	8,154	1,09	85,160	1,01
	45°	0,002	8,343	1,12	84,962	1,01
	60°	0,002	8,504	1,14	84,859	1,01
	90°	0,002	8,643	1,16	84,795	1,01

5×10^4	0°	0,002	8,221	1,10	86,040	1,02
	30°	0,002	8,355	1,12	85,468	1,01
	45°	0,002	8,574	1,15	85,181	1,01
	60°	0,002	8,759	1,17	85,049	1,01
	90°	0,002	8,918	1,19	84,975	1,01
1×10^5	0°	0,002	9,017	1,21	87,881	1,04
	30°	0,002	9,134	1,22	86,775	1,03
	45°	0,002	9,433	1,26	86,167	1,02
	60°	0,002	9,690	1,30	86,002	1,02
	90°	0,002	9,921	1,33	85,956	1,02
2×10^5	0°	0,002	9,817	1,31	90,023	1,07
	30°	0,002	10,000	1,34	88,241	1,05
	45°	0,002	10,351	1,38	87,771	1,04
	60°	0,002	10,700	1,43	87,760	1,04
	90°	0,002	11,045	1,48	87,897	1,04
3×10^5	0°	0,002	10,246	1,37	91,454	1,08
	30°	0,002	10,473	1,40	89,365	1,06
	45°	0,002	10,856	1,45	89,133	1,06
	60°	0,002	11,275	1,51	89,271	1,06
	90°	0,002	11,715	1,57	89,578	1,06
4×10^5	0°	0,002	10,533	1,41	92,581	1,10
	30°	0,002	10,792	1,44	90,390	1,07
	45°	0,002	11,198	1,50	90,325	1,07
	60°	0,002	11,668	1,56	90,573	1,07
	90°	0,002	12,187	1,63	91,022	1,08
5×10^5	0°	0,002	10,747	1,44	93,530	1,11
	30°	0,002	11,033	1,47	91,327	1,08
	45°	0,002	11,456	1,53	91,380	1,08
	60°	0,002	11,964	1,60	91,714	1,09
	90°	0,002	12,551	1,68	92,288	1,09
1×10^6	0°	0,002	11,363	1,52	96,915	1,15
	30°	0,002	11,776	1,57	94,984	1,13
	45°	0,002	12,245	1,64	95,350	1,13
	60°	0,002	12,850	1,72	95,960	1,14
	90°	0,002	13,676	1,83	97,076	1,15

A5.3 – Tubo Horizontal com uma Placa Interna Excêntrica

Na tabela A5.3 são apresentados os resultados da análise de um escoamento em regime permanente em um tubo com uma placa interna excêntrica para o número de Nusselt médio (Nu), para o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe), para a temperatura média na seção ($\bar{\theta}$) e para a velocidade axial média na seção ($\bar{W}$). Todos os valores mencionados são obtidos para $Pr = 0,7$ (ar), $RR_2 = 2,00$, $AR_2 = 0,8$, $E = 0, 0,15$ e $0,25$, $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$ e para $\gamma_2 = -90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$ e 90° , sendo: $\Delta\tau$ o intervalo de tempo adimensional.

Tabela A5.3 – Valores de Nu, fRe $\bar{\theta}$ e $\bar{W}$ para Pr = 0,7; RR₂ = 2,00; AR₂ = 0,8; E = 0; 0,15 e 0,25; $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$ e $\gamma_2 = -90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$ e 90° .

E	γ_2	Ra	$\Delta\tau$	Nu	fRe	$\bar{\theta}$	$\bar{W}$
0,00	0°	0	1,0000	4,770	93,649	-0,18303	0,02136
		1×10^4	0,0030	4,835	93,979	-0,18055	0,02128
		2×10^4	0,0030	4,992	94,793	-0,17491	0,02110
		3×10^4	0,0030	5,174	95,715	-0,16878	0,02090
		4×10^4	0,0030	5,352	96,567	-0,16317	0,02071
		1×10^5	0,0030	6,162	100,152	-0,14113	0,01997
		1×10^6	0,0008	9,297	117,133	-0,09131	0,01707
0,15	-90°	0	1,0000	3,702	85,856	-0,20495	0,02329
		1×10^4	0,0030	3,957	87,384	-0,20223	0,02289
		2×10^4	0,0030	4,352	89,155	-0,19005	0,02243
		3×10^4	0,0030	4,676	90,571	-0,18003	0,02208
		4×10^4	0,0030	4,936	91,715	-0,17238	0,02181
		1×10^5	0,0030	5,867	96,192	-0,14863	0,02079
		1×10^6	0,0007	9,336	115,276	-0,09432	0,01735
0,15	-45°	0	1,0000	3,840	86,219	-0,20247	0,02320
		1×10^4	0,0030	4,069	87,305	-0,19697	0,02291
		2×10^4	0,0030	4,398	88,643	-0,18507	0,02256
		3×10^4	0,0030	4,667	89,793	-0,17594	0,02227
		4×10^4	0,0030	4,892	90,805	-0,16886	0,02203
		1×10^5	0,0030	5,800	95,293	-0,14514	0,02099
		1×10^6	0,0008	9,089	115,550	-0,09496	0,01731
0,15	0°	0	1,0000	3,985	86,626	-0,19999	0,02309
		1×10^4	0,0030	4,256	87,407	-0,18726	0,02288
		2×10^4	0,0030	4,583	88,563	-0,17421	0,02258
		3×10^4	0,0030	4,836	89,574	-0,16559	0,02233
		4×10^4	0,0030	5,037	90,455	-0,15948	0,02211
		1×10^5	0,0030	5,793	94,418	-0,14080	0,02118
		1×10^6	0,0008	8,826	115,217	-0,09462	0,01736
0,15	45°	0	1,0000	3,839	86,234	-0,20248	0,02319
		1×10^4	0,0030	4,289	87,760	-0,18038	0,02279
		2×10^4	0,0030	4,697	89,333	-0,16593	0,02239
		3×10^4	0,0030	4,972	90,432	-0,15763	0,02212
		4×10^4	0,0030	5,178	91,303	-0,15198	0,02191
		1×10^5	0,0030	5,925	94,901	-0,13465	0,02107
		1×10^6	0,0008	8,822	114,140	-0,09234	0,01752
0,15	90°	0	1,0000	3,702	85,856	-0,20495	0,02329
		1×10^4	0,0030	4,257	88,016	-0,17835	0,02272
		2×10^4	0,0030	4,707	89,918	-0,16320	0,02224
		3×10^4	0,0030	5,010	91,185	-0,15452	0,02193
		4×10^4	0,0030	5,239	92,166	-0,14859	0,02170
		1×10^5	0,0030	6,058	95,995	-0,13089	0,02083
		1×10^6	0,0008	8,874	113,682	-0,09094	0,01759

0,25	-90°	0	1,0000	2,918	74,981	-0,23586	0,02667
		1×10^4	0,0030	3,396	78,300	-0,22034	0,02554
		2×10^4	0,0030	3,891	80,970	-0,19967	0,02470
		3×10^4	0,0030	4,254	82,864	-0,18609	0,02414
		4×10^4	0,0030	4,534	84,323	-0,17654	0,02372
		1×10^5	0,0030	5,522	89,598	-0,14897	0,02232
		1×10^6	0,0008	8,774	113,881	-0,09699	0,01756
0,25	-45°	0	1,0000	3,096	75,723	-0,23027	0,02641
		1×10^4	0,0030	3,506	77,943	-0,21237	0,02566
		2×10^4	0,0030	3,876	79,861	-0,19478	0,02504
		3×10^4	0,0030	4,146	81,389	-0,18373	0,02457
		4×10^4	0,0030	4,366	82,715	-0,17575	0,02418
		1×10^5	0,0030	5,296	88,817	-0,14988	0,02252
		1×10^6	0,0008	8,875	113,039	-0,09702	0,01769
0,25	0°	0	1,0000	3,283	76,515	-0,22469	0,02614
		1×10^4	0,0030	3,734	78,103	-0,19752	0,02561
		2×10^4	0,0030	4,108	79,866	-0,18049	0,02504
		3×10^4	0,0030	4,383	81,315	-0,17043	0,02460
		4×10^4	0,0030	4,602	82,540	-0,16348	0,02423
		1×10^5	0,0030	5,411	87,535	-0,14295	0,02285
		1×10^6	0,0008	8,242	109,907	-0,09897	0,01820
0,25	45°	0	1,0000	3,096	75,736	-0,23027	0,02641
		1×10^4	0,0030	3,784	78,741	-0,18791	0,02540
		2×10^4	0,0030	4,219	80,821	-0,17033	0,02475
		3×10^4	0,0030	4,501	82,237	-0,16091	0,02432
		4×10^4	0,0030	4,713	83,361	-0,15457	0,02399
		1×10^5	0,0030	5,488	87,844	-0,13548	0,02277
		1×10^6	0,0008	8,394	108,658	-0,09279	0,01841
0,25	90°	0	1,0000	2,918	74,981	-0,23586	0,02667
		1×10^4	0,0030	3,734	79,112	-0,18560	0,02528
		2×10^4	0,0030	4,208	81,550	-0,16707	0,02452
		3×10^4	0,0030	4,516	83,147	-0,15712	0,02405
		4×10^4	0,0030	4,751	84,390	-0,15042	0,02370
		1×10^5	0,0030	5,599	89,148	-0,13058	0,02243
		1×10^6	0,0008	8,496	108,539	-0,09008	0,01843

A5.4 – Duto Vertical Elíptico

Os resultados da análise da convecção mista laminar em um duto vertical de seção elíptica são apresentados na Tabela A5.4. O duto é aquecido com fluxo de calor axial uniforme com temperatura periférica uniforme. Nessa tabela são mostrados os valores do número de Nusselt médio (Nu) e do produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) em função da razão entre o semi-eixo menor e o semi-eixo maior da elipse (BA), do número de Reynolds (Re) e do número de Rayleigh (Ra) para $Pr = 0,7$ (ar). A razão BA assume os valores 0,1, 0,5 e 1,0, o número de Reynolds os valores 5, 100, 200, 300 e 500 e o número de Rayleigh os valores $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$.

Tabela A5.4 – Valores de Nu e fRe para um duto vertical de seção elíptica.

BA	Re	Ra	Nu	fRe
1,0	—	0	4,360	64,047
	100	1×10^3	4,397	70,562
		2×10^3	4,434	77,023
		5×10^3	4,545	96,086
		1×10^4	4,725	126,865
		2×10^4	5,070	185,123
		3×10^4	5,394	239,651
		1×10^5	7,178	556,180
		-1×10^4	3,999	0,016
	200	1×10^3	4,378	67,311
		2×10^3	4,397	70,562
		5×10^3	4,453	80,233
		1×10^4	4,545	96,088
		2×10^4	4,725	126,865
		3×10^4	4,900	156,507
		1×10^5	5,985	339,908
0,5	—	0	4,554	67,403
	100	1×10^3	4,603	73,613
		2×10^3	4,651	79,775
		5×10^3	4,792	97,893
		1×10^4	5,010	126,981
		2×10^4	5,398	181,750
		3×10^4	5,736	232,954
		1×10^5	7,384	535,320
		1×10^6	13,657	2850,080
	200	1×10^3	4,578	70,507
		2×10^3	4,603	73,613
		5×10^3	4,675	82,833
		1×10^4	4,792	97,893
		2×10^4	5,010	126,981
		3×10^4	5,211	154,876
		1×10^5	6,306	327,583
	300	1×10^3	4,570	69,468
		2×10^3	4,586	71,544
		5×10^3	4,635	77,728
		1×10^4	4,715	87,894
		2×10^4	4,866	107,734
		3×10^4	5,010	126,981
		1×10^5	5,840	249,377

0,5	500	1×10^3	4,563	68,635
		2×10^3	4,573	69,883
		5×10^3	4,603	73,613
		1×10^4	4,651	79,775
		2×10^4	4,746	91,913
		3×10^4	4,837	103,816
		1×10^5	5,398	181,750
0,1	—	0	5,155	78,955
	5	6×10^3	8,346	554,829
		2×10^4	10,897	1366,253
		$3,8 \times 10^4$	12,742	2215,578
	100	1×10^3	5,249	84,384
		2×10^3	5,335	89,717
		5×10^3	5,562	105,255
		1×10^4	5,866	129,941
		2×10^4	6,315	176,221
		3×10^4	6,654	219,724
		1×10^5	8,063	486,079
	200	1×10^3	5,203	81,685
		2×10^3	5,249	84,384
		5×10^3	5,376	92,353
		1×10^4	5,562	105,255
		2×10^4	5,866	129,941
		3×10^4	6,110	153,506
		1×10^5	7,168	301,304

A5.5 – Banco de Tubos Alinhados entre Placas Verticais

Da análise do escoamento em um banco de tubos alinhados entre placas verticais é gerada a Tabela A5.5 onde estão apresentados os valores do número de Nusselt médio (Nu) de cada tubo em função da distância adimensional entre as placas (LD), do número de Reynolds e do número de Richardson. Os valores do número de Prandtl, $Pr = 0,7$ (ar), e da distância adimensional entre os tubos na direção vertical, $HD = 1,5$, são fixos. A distância LD assume os valores 1,5, 2,0 e 2,5, o número de Reynolds os valores 50 e 100 e o número de Richardson os valores -5,0, -2,0, 0,0, 2,0 e 5,0. Os tubos são indicados por T1, T2, T3, T4 e T5. O intervalo de tempo adimensional utilizado para cada caso é representado por $\Delta\tau$.

Tabela A5.5 – Valores de Nu para $Pr = 0,7$; $HD = 1,5$; $LD = 1,5$; 2,0 e 2,5;
 $Re = 50$ e 100 e $-5,0 \leq Ri \leq 5,0$.

LD	Re	Ri	Nu_{T1}	Nu_{T2}	Nu_{T3}	Nu_{T4}	Nu_{T5}	$\Delta\tau$
1,5	50	-5,0	7,940	6,170	6,163	6,169	6,436	0,01
		-2,0	8,122	6,188	6,178	6,182	6,428	0,01
		0,0	8,253	6,215	6,196	6,195	6,427	0,01
		2,0	8,389	6,260	6,221	6,212	6,428	0,01
		5,0	8,603	6,367	6,277	6,244	6,436	0,01

1,5	100	-5,0	9,040	6,328	6,219	6,202	6,855	0,008
		-2,0	9,267	6,364	6,236	6,217	6,838	0,008
		0,0	9,441	6,417	6,269	6,242	6,822	0,008
		2,0	9,645	6,508	6,328	6,286	6,813	0,008
		5,0	10,016	6,770	6,499	6,401	6,827	0,008
2,0	50	-5,0	5,303	3,353	3,330	3,335	3,704	0,01
		-2,0	5,659	3,521	3,443	3,433	3,700	0,01
		0,0	5,923	3,682	3,565	3,535	3,740	0,01
		2,0	6,195	3,890	3,728	3,667	3,850	0,01
		5,0	6,588	4,276	4,038	3,910	4,103	0,01
	100	-5,0	6,341	3,286	3,271	3,283	3,969	0,01
		-2,0	6,822	3,729	3,506	3,428	3,914	0,01
		0,0	7,208	4,053	3,782	3,664	4,009	0,01
		2,0	7,652	4,435	4,150	4,004	4,311	0,01
		5,0	8,274	5,140	4,822	4,640	5,033	0,01
2,5	50	-5,0	4,169	1,880	2,065	2,148	2,747	0,008
		-2,0	4,702	2,417	2,327	2,302	2,581	0,008
		0,0	5,099	2,793	2,625	2,553	2,708	0,008
		2,0	5,481	3,169	2,973	2,873	3,079	0,008
		5,0	5,969	3,715	3,509	3,388	3,663	0,008
	100	-5,0	4,945	1,233	1,601	2,081	4,627	0,008
		-2,0	5,777	2,434	2,246	2,180	2,818	0,008
		0,0	6,375	3,232	2,926	2,769	2,984	0,008
		2,0	6,997	3,849	3,554	3,416	3,770	0,008
		5,0	7,734	4,679	4,347	4,231	4,753	0,008

A5.6 – Banco de Tubos Alinhados em um Escoamento Vertical

O estudo de um banco de tubos em um escoamento vertical gera a Tabela A5.6 onde são apresentados os valores do número de Nusselt médio de cada tubo (Nu) em função da distância adimensional horizontal entre os tubos (LD), do número de Reynolds e do número de Richardson para $Pr = 0,7$ (ar) e distância adimensional vertical entre os tubos, $HD = 1,5$. A distância LD assume os valores 1,5, 2,0 e 2,5, o número de Reynolds os valores 50, 100 e 150 e o número de Richardson os valores $-5,0$, $-2,0$, $0,0$, $2,0$ e $5,0$. Os tubos são indicados por T1, T2, T3, T4 e T5. O intervalo de tempo adimensional utilizado para cada caso é representado por $\Delta\tau$.

Tabela A5.6 – Valores de Nu para $Pr = 0,7$; $HD = 1,5$; $LD = 1,5$; 2,0 e 2,5;
 $Re = 50$ e 100 e $-5,0 \leq Ri \leq 5,0$.

LD	Re	Ri	Nu_{T1}	Nu_{T2}	Nu_{T3}	Nu_{T4}	Nu_{T5}	$\Delta\tau$
1,5	50	-5,0	6,854	4,919	4,943	4,943	5,362	0,01
		-2,0	7,030	4,920	4,933	4,937	5,326	0,01
		0,0	7,159	4,931	4,933	4,937	5,303	0,01
		2,0	7,299	4,957	4,943	4,942	5,280	0,01
		5,0	7,523	5,038	4,980	4,961	5,249	0,01

1,5	100	-5,0	8,190	5,056	5,006	5,029	5,820	0,005
		-2,0	8,405	5,122	5,013	5,018	5,718	0,01
		0,0	8,569	5,179	5,039	5,029	5,711	0,01
		2,0	8,770	5,257	5,092	5,063	5,711	0,01
		5,0	9,135	5,493	5,272	5,190	5,708	0,01
	150	-5,0	9,322	5,264	5,030	5,035	5,946	0,005
		-2,0	9,562	5,405	5,096	5,047	6,040	0,005
		0,0	9,739	5,516	5,178	5,099	6,330	0,005
		2,0	9,976	5,638	5,301	5,199	6,393	0,005
		5,0	10,464	6,019	5,653	5,502	6,322	0,005
2,0	50	-5,0	4,730	2,455	2,468	2,525	3,126	0,01
		-2,0	5,099	2,719	2,624	2,629	2,979	0,01
		0,0	5,385	2,950	2,808	2,777	2,966	0,01
		2,0	5,691	3,233	3,059	2,991	3,064	0,01
		5,0	6,135	3,738	3,536	3,406	3,454	0,01
	100	-5,0	5,825	2,397	2,340	2,383	4,111	0,006
		-2,0	6,325	2,965	2,685	2,588	3,194	0,006
		0,0	6,730	3,403	3,067	2,921	3,231	0,006
		2,0	7,225	3,895	3,579	3,432	3,534	0,006
		5,0	7,914	4,750	4,456	4,343	4,763	0,006
2,5	50	-5,0	3,753	1,238	1,288	1,447	3,292	0,01
		-2,0	4,309	1,824	1,690	1,661	2,193	0,01
		0,0	4,747	2,317	2,111	2,023	2,121	0,01
		2,0	5,184	2,804	2,599	2,506	2,635	0,01
		5,0	5,731	3,463	3,301	3,249	3,584	0,01
	100	-5,0	4,706	1,488	1,864	2,659	6,335	0,0009
		-2,0	5,467	2,017	1,985	2,021	3,586	0,0009
		0,0	6,237	3,252	3,067	3,160	3,738	0,0005
		2,0	6,746	3,578	3,282	3,145	3,402	0,0009
		5,0	7,552	4,529	4,185	4,082	4,633	0,0009

A5.7 – Banco de Tubos Alternados em um Escoamento Vertical

O estudo de um banco de tubos alternados em um escoamento vertical gera a Tabela A5.7 onde estão apresentados os valores do número de Nusselt médio de cada tubo (Nu) em função da distância adimensional LD , da distância adimensional HD , do número de Reynolds e do número de Richardson para $Pr = 0,7$ (ar). A distância LD assume os valores 1,5 e 2,0, a distância HD assume os valores 1,50, 1,75 e 2,00, o número de Reynolds os valores 100 e 150 e o número de Richardson os valores -5,0, -2,0, 0,0, 2,0 e 5,0. Os tubos são indicados por T1, T2, ..., T10. O intervalo de tempo adimensional utilizado para cada caso é representado por $\Delta\tau$.

Tabela A5.7 – Valores de Nu para um banco de tubos alternados em um escoamento vertical

LD	HD	Re	Ri	Nu _{T1}	Nu _{T2}	Nu _{T3}	Nu _{T4}	Nu _{T5}	Nu _{T6}	Nu _{T7}	Nu _{T8}	Nu _{T9}	Nu _{T10}	$\Delta\tau$
1,50	1,50	100	-5,0	5,773	8,045	4,988	5,007	4,518	4,727	4,616	4,695	5,412	4,880	0,005
			-2,0	6,245	8,106	4,795	4,962	4,488	4,724	4,555	4,676	5,274	4,820	0,005
			0,0	6,701	8,285	4,771	4,961	4,502	4,744	4,541	4,684	5,138	5,450	0,005
			2,0	7,132	8,599	4,967	5,103	4,633	4,846	4,626	4,752	5,048	5,043	0,005
			5,0	7,516	8,962	5,324	5,459	4,932	5,105	4,851	4,938	5,046	4,551	0,005
		150	-5,0	6,642	9,017	5,467	5,258	4,531	4,779	4,687	4,813	6,033	5,744	0,0015
			-2,0	7,207	9,045	5,240	5,252	4,590	4,827	4,607	4,809	5,760	5,999	0,0015
			0,0	7,751	9,215	5,204	5,285	4,669	4,901	4,628	4,814	5,586	6,112	0,0015
			2,0	8,284	9,605	5,460	5,497	4,891	5,101	4,803	4,963	5,468	5,234	0,0015
			5,0	8,756	10,079	5,961	6,049	5,361	5,571	5,209	5,337	5,540	5,015	0,0015
2,00	1,50	100	-5,0	4,440	6,053	3,793	1,820	2,599	5,033	1,934	3,618	6,636	6,149	0,0015
			-2,0	5,098	6,288	3,190	2,480	2,573	2,848	2,288	2,694	3,461	3,391	0,0015
			0,0	5,814	6,608	3,384	3,276	2,947	3,023	2,823	2,855	3,340	3,343	0,0015
			2,0	6,474	7,191	3,935	3,947	3,568	3,651	3,442	3,484	3,648	3,523	0,0015
			5,0	6,996	7,772	4,573	4,710	4,243	4,397	4,147	4,241	4,579	4,708	0,0015
		150	-5,0	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
			-2,0	5,962	7,160	3,688	2,464	2,780	3,552	2,179	3,162	4,555	3,806	0,0015
			0,0	6,770	7,517	3,842	3,670	3,288	3,363	3,119	3,131	3,798	3,687	0,0015
			2,0	7,561	8,223	4,517	4,518	4,064	4,159	3,899	3,958	4,222	4,167	0,0015
			5,0	8,201	8,948	5,330	5,478	4,862	5,040	4,697	4,842	5,265	5,433	0,0015
1,50	2,00	100	-5,0	5,317	8,300	6,437	6,418	6,097	6,105	5,942	5,937	6,476	5,817	0,005
			-2,0	5,939	8,084	5,712	6,030	5,681	5,830	5,669	5,724	6,186	5,872	0,005
			0,0	6,594	8,101	5,281	5,645	5,282	5,532	5,360	5,481	5,817	6,161	0,005
			2,0	7,123	8,364	5,581	5,787	5,271	5,481	5,259	5,373	5,452	5,293	0,005
			5,0	7,631	8,849	6,226	6,493	5,907	6,021	5,702	5,682	5,609	4,913	0,005
	1,75	100	-5,0	5,537	8,013	5,636	5,606	5,258	5,274	5,223	5,216	5,889	5,285	0,005
			-2,0	6,086	7,964	5,234	5,437	5,070	5,193	5,083	5,128	5,705	5,165	0,005
			0,0	6,638	8,078	5,053	5,306	4,922	5,112	4,959	5,056	5,474	5,811	0,005
			2,0	7,119	8,386	5,304	5,450	4,987	5,162	4,974	5,068	5,275	5,184	0,005
			5,0	7,557	8,789	5,782	5,950	5,402	5,523	5,269	5,300	5,304	4,655	0,005

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bhatti, M. S., Heat Transfer in the Fully Developed Region of Elliptical Ducts With Uniform Wall Heat Flux, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 106, pp. 895-898, Nov. 1984.
- Cho, C. H., Chang, K. S. & Park, K. H., Numerical Simulation of Natural Convection in Concentric and Eccentric Horizontal Cylindrical Annuli, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 104, pp. 624-630, Nov. 1982.
- Choi, D. K. & Choi, D. H., Developing Mixed Convection Flow in a Horizontal Tube Under Circumferentially Non-Uniform Heating, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, nº 13, pp. 1899-1913, Sep. 1994.
- Choudhury, D. & Patankar, S. V., Combined Forced and Free Laminar Convection in the Entrance Region of an Inclined Isothermal Tube, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 110, nº 4(A), pp. 901-909, Nov. 1988.
- El-Shaarawi, M. A. I. & Sarhan, A., Free Convection Effects on the Developing Laminar Flow in Vertical Concentric Annuli, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 102, pp. 617-622, Nov. 1980.
- Gowda, Y. T., Narayana, P. A. A. & Seetharamu, K. N., Mixed Convection Heat Transfer Past In-Line Cylinders in a Vertical Duct, *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 31, pp. 551-562, 1997.
- Gowda, Y. T., Narayana, P. A. A. & Seetharamu, K. N., Finite Element Analysis of Mixed Convection Over In-line Tube Bundles, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, nº 11, pp. 1613-1619, 1998.
- Gray, D. D., & Giorgini, A., The Validity of Boussinesq Approximation for Liquids and Gases, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 545-551, 1976.
- Guo, Z. Y. & Zhang, C. M., Thermal Drive in Centrifugal Fields-Mixed Convection in a Vertical Rotating Cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, nº 7, pp. 1635-1644, Jul. 1992.
- Ho, C. J. & Lin, Y. H., Natural Convection Heat Transfer of Cold Water Within an Eccentric Horizontal Cylindrical Annulus, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 110, nº 4(A), pp. 894-900, Nov. 1988.
- Hsieh, S. S. & Wen, M. Y., Developing Three-Dimensional Laminar Mixed Convection in a Circular Tube Inserted with Longitudinal Strips, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, nº 2, pp. 299-310, 1996.
- Hung, C. I., Lin, Y. S. & Chen, J. D., Numerical Study of Heat Transfer Enhancement of a Horizontal Tube with an Eccentrically Inserted Plate, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 40, nº 7, pp. 1687-1692, May 1997.
- Iqbal, M. & Stachiewicz, J. W., Influence of Tube Orientation on Combined Free and Forced Laminar Convection Heat Transfer, *Journal of Heat Transfer*, pp. 109-116, Feb. 1966.

Iqbal, M., Ansari, S. A. & Aggarwala, B. D., Effect of Buoyancy on Forced Convection in Vertical Regular Polygonal Ducts, *Journal of Heat Transfer*, pp. 237-244, May 1970.

Joye, D. D. & Wojnovich, M. J., Aiding and Opposing Mixed Convection Heat Transfer in a Vertical Tube: Loss of Boundary Condition at Different Grashof Numbers, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 17, pp. 468-473, 1996.

Joye, D. D., Comparison of Aiding and Opposing Mixed Convection Heat Transfer in a Vertical Tube with Grashof Number Variation, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 17, pp. 96-101, 1996.

Karabulut, H. & Ataer, Ö. E., Numerical Solution of Boundary Layer Equations in Compressible Cross-flow to a Cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, nº 17, pp. 2677-2685, Sep. 1998.

Kaviany, M., Laminar Combined Convection in Horizontal Annulus Subject to Constant Heat Flux Inner Wall and Adiabatic Outer Wall, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 392-397, May 1986.

Lawrence, W. T. & Chato, J. C., Heat-Transfer Effects on the Developing Laminar Flow Inside Vertical Tubes, *Journal of Heat Transfer*, pp. 214-222, May 1966.

Matos, R. S., Vargas, J. V. C., Laursen, T. A. & Saboya, F. E. M., Optimization Study and Heat Transfer Comparison of Staggered Circular and Elliptic Tubes in Forced Convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, pp. 3953-3961, 2001.

Nieckele, A. O. & Patankar, S. V., Laminar Mixed Convection in a Concentric Annulus with Horizontal Axis, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 902-909, Nov. 1985.

Ofi, O. & Hetherington, H. J., Application of the Finite Element Method to Natural Convection Heat Transfer from the Open Vertical Channel, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 20, pp. 1195-1204, 1977.

Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, 1980.

Ribeiro, M. M., Estudo da Transferência de Calor por Convecção Mista no Interior de Tubos Horizontais Concêntricos e Excêntricos, *Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá*, 1992.

Segerlind, L. J., *Applied Finite Element Analysis - Second Edition*, John Wiley and Sons, Singapore, 1984.

Shome, B. & Jensen, M. K., Mixed Convection Laminar Flow and Heat Transfer of Liquids in Isothermal Horizontal Circular Ducts, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, nº 11, pp. 1945-1956, Jul. 1995.

Spalding, D. B., *Mathematical Modeling of Fluid Mechanics, Heat transfer, and Chemical Reaction Processes – a Lecture Course*, CFDU Report HTS/80/1, 1980.

Tsui, Y. T. & Tremblay, B., On Transient Natural Convection Heat Transfer in the Annulus between Concentric, Horizontal Cylinders with Isothermal Surfaces, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 27, n^o 1, pp. 103-111, 1984.

Velusamy, K & Garg, V. K., Laminar Mixed Convection in Vertical Elliptic ducts, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, n^o 4, pp. 745-752, 1996.

Yang, L. & Farouk, B., Three-Dimensional Mixed Convection Flows in a Horizontal Annulus With a Heated Rotating Inner Circular Cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, n^o 8, pp. 1947-1956, Aug. 1992.

Yoo, J. S., Dual Steady Solutions in Natural Convection between Horizontal Concentric Cylinders, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 17, n^o 6, pp. 587-593, Dec. 1996.

Yoo, J. S., Mixed Convection of Air Between Two Horizontal Concentric Cylinders with a Cooled Rotating Outer Cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, n^o 2, pp. 293-302, Jan. 1998a.

Yoo, J. S., Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus: $Pr \leq 0.3$, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, n^o 20, pp. 3055-3073, Oct. 1998b.