

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM MATEMÁTICA

Transitividade no Recobrimento Universal via  
Conjunto de Rotação

Tatiane Santana de Almeida

ITAJUBÁ, FEVEREIRO DE 2016.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Tatiane Santana de Almeida

Transitividade no Recobrimento Universal via  
Conjunto de Rotação

Dissertação submetida ao Programa de Pós-  
Graduação em Matemática como parte dos requisi-  
tos para obtenção do Título de Mestre em Ciências  
em Matemática

Área de Concentração: Topologia / Geometria

Orientador: Prof. Dr. Bráulio Augusto Garcia

FEVEREIRO DE 2016

ITAJUBÁ – MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Tatiane Santana de Almeida**

**Transitividade no Recobrimento Universal via  
Conjunto de Rotação**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 22 de  
Fevereiro de 2016, conferindo ao autor o título de **Mes-  
tre em Ciências em Matemática.**

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Bráulio Augusto Garcia (Orientador)

Prof. Dr. Fábio Armando Tal

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

**ITAJUBÁ – MG**

**2016**

*Dedico esta dissertação aos meus pais  
Élio e Neuza  
com muito amor e carinho.*

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela rica oportunidade de buscar novos conhecimentos, conhecer e conviver com pessoas muito especiais aqui em Itajubá.

Agradeço ao meu orientador, Bráulio Augusto Garcia, antes de mais nada pela *paciência*, pela amizade, compreensão pelos ensinamentos, dicas de pesquisas e auxílio na elaboração deste trabalho, Bráulio muito obrigada!

Ao coordenador da Pós-Graduação do Instituto de Matemática da UNIFEI, Luiz Fernando pelo grande exemplo profissional, competência, incentivo e apoio.

Aos meus pais pelo exemplo de vida, incentivo, encorajamento e, principalmente, pela oportunidade de estudar e completar mais essa etapa na minha vida.

Aos amigos que fiz em Itajubá, que tornaram esta caminhada mais agradável. Sou grata pelos conselhos e bons momentos de descontração proporcionados, não mencionarei nomes pois são muitos, mas o importante é que amo todos de coração.

Amigo é coisa para se guardar

Debaixo de sete chaves

Dentro do coração...

Milton Nascimento.

Quero também agradecer aos professores do IMC, pela amizade, ensinamentos e conselhos que foram muito importante para minha formação.

Aos funcionários da UNIFEI, em especial a dona Helena, pela dedicação, atenção e presteza que tiveram comigo.

Não poderia deixar de agradecer uma pessoa que entrou na minha vida no finalzinho do mestrado e se tornou muito especial para mim, meu namorado Ailton. Obrigada pelo carinho, incentivo e por todo amor! Com você meus dias ficaram mais felizes!!!

A toda minha família, por respeitarem minha ausência e me apoiar.

E a todos aqueles que, de alguma forma, doaram um pouco de si para que a conclusão deste trabalho se tornasse possível.

*Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito.*

*Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes.*

*Marthin Luther King*

# Resumo

Este trabalho é baseado principalmente no artigo “*Rotation sets with nonempty interior and transitivity in the universal covering*”, no qual os autores demonstram que dado um homeomorfismo transitivo no toro homotópico à identidade e um levantamento de  $f$  no recobrimento universal do toro é suficiente que a origem do  $\mathbb{R}^2$  pertença ao interior do conjunto de rotação do levantamento para que a dinâmica no recobrimento universal seja transitiva.

Apresentaremos a recíproca desse resultado, ou seja, dado um homeomorfismo,  $f$ , no toro homotópico à identidade e  $\hat{f}$  um levantamento transitivo de  $f$  no plano, então a origem do  $\mathbb{R}^2$  está no interior do conjunto de rotação e  $f$  é transitiva no toro.

**Palavras-chave:** Conjunto de Rotação, Transitividade, Homeomorfismos no Toro que são Homotópicos à Identidade.

# Abstract

This work is mainly based on the article “*Rotation sets with nonempty interior and transitivity in the universal covering*”, in which the authors shown that give a transitive homeomorphism of the torus homotopic to the identity,  $f$ , and a lift of  $f$  on the universal cover of the torus then it is sufficient that the origin belong to the interior of the rotation set for the dynamics on the universal cover be transitive.

We give a reciprocal of this result, that is, given a homeomorphism homotopic to the identity,  $f$ , and  $\hat{f}$  a transitive lift of  $f$  then the origin belongs to the rotation set and  $f$  is transitive on the torus.

**Keywords:** Rotation Set, Transitive, Torus Homeomorphisms Homotopic to the Identity.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Índice</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Ferramentas Básicas . . . . .	5
1.2 Noções Topológicas . . . . .	10
1.3 Transitividade . . . . .	13
1.4 Conjuntos Essenciais e Inessenciais . . . . .	15
<b>2 Conjunto de Rotação</b>	<b>18</b>
2.1 Vetor e Conjunto de Rotação . . . . .	18
2.2 Conjunto de Rotação para medida. . . . .	23
2.3 Exemplos de Conjunto de Rotação. . . . .	29
<b>3 Transitividade no Recobrimento Universal via Conjunto de Rotação</b>	<b>33</b>
3.1 Resultados Necessários . . . . .	33
3.2 Teorema Principal . . . . .	36
3.3 Resultados que serão usados na prova do Teorema 3.2.1 . . . . .	37

3.4 Prova do Teorema 3.2.1 . . . . .	60
<b>4 Recíproca do Teorema Principal</b>	<b>62</b>
4.1 Definição dos conjuntos $B_\theta$ e $C_\theta$ . . . . .	62
4.2 Os Conjuntos Ômega-limite de $B_\theta$ e $C_\theta$ . . . . .	65
4.3 Recíproca do Teorema Principal . . . . .	75
<b>Conclusões</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>78</b>

# Lista de Figuras

1	Modelo de dinâmica com tempo discreto. . . . .	2
1.1	Aplicações no Recobrimento Universal. . . . .	7
1.2	Arco de translação para $f$ . . . . .	12
1.3	Arcos que não são de translação para $f$ . . . . .	12
2.1	Esboço do gráfico da função $\Phi$ . . . . .	20
2.2	Esboço do retrato de fase de $f$ . . . . .	20
2.3	Esboço do gráfico da função $\psi$ . . . . .	30
2.4	Ação do levantamento $\hat{f}$ . . . . .	31
2.5	Ação do levantamento $\hat{g}$ . . . . .	32
3.1	Representação de uma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus K$ contendo um domínio fundamental. . . . .	38
3.2	Ilustração da Proposição 3.3.1 . . . . .	40
3.3	Ilustração da demonstração da Proposição 3.3.2. . . . .	43
3.4	Demonstração da existência de um compacto contendo um domínio fundamental. . . . .	45
3.5	Ilustração da existência de inteiros tal que $S(\bar{v}, 1) \subset I(k_1, \bar{w})$ e $S(R_{\bar{w}}\bar{v}, 1) \subset I(k_2, \bar{w})$ . . . . .	56
3.6	Ilustração da prova da Proposição 3.3.6. . . . .	57
3.7	Ilustração da prova da Proposição 3.3.7. . . . .	60
4.1	Representação pictórica dos conjuntos $V_\theta$ e $V_\theta^+$ . . . . .	63

- 4.2 Escolhemos  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  tais que uma componente conexa  $\Theta$  fique suficientemente próxima da componente conexa  $\Gamma$  de  $\omega(B_\theta)$ . Ligamos essas componentes conexas por um seguimento  $v$ . . . . . 74

# Introdução

A matemática pode ser pensada como uma ciência que evolui a cada dia, sem modificar as verdades já estabelecidas, possuindo várias áreas de pesquisa, sendo os Sistemas Dinâmicos uma delas. Mas o que vem a ser os Sistemas Dinâmicos? O conceito de Sistema Dinâmico nasce da necessidade de se construir um modelo geral (abstrato) de todos os sistemas que evoluem por meio de uma lei que relaciona um estado presente aos estados futuros. Assim, a teoria dos Sistemas Dinâmicos é o estudo da estruturação de técnicas capazes de compreender a evolução de sistemas a longo prazo. Há várias aplicações de resultados e métodos de Sistemas Dinâmicos na explicação de fenômenos complexos nas diversas ciências como na Química (reações químicas, processos industriais), Física (turbulência, transição de fase, ótica), Biologia (competição de espécies, neurobiologia), Economia (modelos de crescimento econômico, mercado financeiro) e muitos outros.

O matemático Henri Poincaré (1854-1912) é considerado um dos criadores da teoria moderna dos Sistemas Dinâmicos, pois foi responsável por estabelecer muitos dos fundamentos da teoria qualitativa das Equações Diferenciais, dentre outras contribuições. Outros matemáticos como Liapunov e Birkhoff, trabalharam no assunto e desde então esta teoria tem ocupado a atenção de inúmeros matemáticos. Pode-se ver os Sistemas Dinâmicos de duas maneiras, a saber, contínuo, na qual aparece o conceito de fluxo, e discreta (que será o enfoque deste trabalho).

Um sistema dinâmico discreto é uma aplicação  $f$  definida em um certo conjunto  $X$ , ou seja,  $f : X \rightarrow X$ . A dinâmica é vista como sendo a iteração dessa aplicação  $f$  e o conjunto obtido pela união das iterações de um ponto  $x$  (estado inicial ou presente) é chamado *órbita futura* de  $x$ , denotado por  $orb(x) = \mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), f(f(x)), \dots, f^n(x), \dots\}$ .

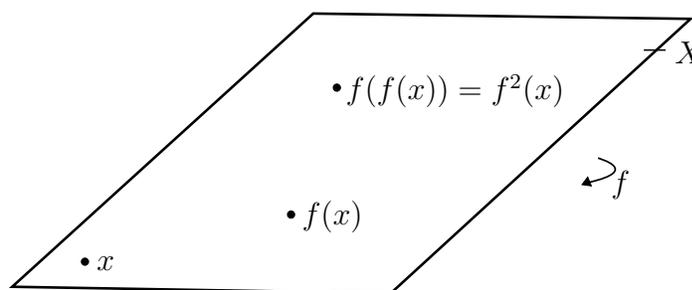


Figura 1: Modelo de dinâmica com tempo discreto.

Em outras palavras, uma espécie de evolução do estado  $x$  sob a ação da dinâmica dada por  $f$  para o estado  $f(x)$ . Uma questão interessante, neste contexto, é estudar de que maneira essa evolução ocorre, ou seja, qual é o comportamento da órbita dos pontos no espaço considerado. Para entender esse comportamento, surgem vários conceitos importantes, como por exemplo, a existência de pontos periódicos (estados que se repetem), pontos fixos, conjuntos minimais, a propriedade de transitividade, entre outros.

Para facilitar o entendimento global de um sistema, dentre os conceitos mencionados anteriormente, usaremos o conceito de transitividade, pois conforme veremos no primeiro capítulo (Proposição 1.3.1), *os abertos invariantes pela ação de uma aplicação transitiva devem ser, necessariamente, densos no espaço ambiente*, dessa forma o conceito de transitividade mostra-se essencial para o entendimento da dinâmica de um dado sistema, sendo assim, uma pergunta interessante neste cenário é sobre a existência de dinâmicas transitivas no plano, isto é, se existe pelo menos um ponto com órbita densa. Ou mais fortemente, se todo ponto pode ter órbita densa, isto é, sobre a existência de dinâmica planar minimal<sup>1</sup>.

No caso de um fluxo planar estudos comprovam que os conjuntos limites de qualquer trajetória são bem entendidos como por exemplo sob certas hipóteses o Teorema de *Poincaré - Bendixson* nos garante que o conjunto  $\omega$ -limite de qualquer trajetória deve ser um ponto de equilíbrio, uma órbita periódica ou um gráfico, portanto, os possíveis conjuntos

<sup>1</sup>Um sistema dinâmico é minimal se, e somente se, todo ponto de  $X$  tem órbita densa em  $X$ .

limites são diferentes do plano e assim não existe fluxo com alguma órbita densa no plano. Entretanto, no toro existem fluxos transitivos, como por exemplo os fluxos irracionais. No entanto, se a dinâmica for discreta podemos ter uma aplicação transitiva no plano a qual é o levantamento <sup>2</sup> de um homeomorfismo do toro, transitivo e homotópico à identidade. Esse será o principal assunto abordado neste trabalho e teremos como base o artigo [6].

Em [12], Henri Poincaré, quando analisava questões de mecânica celeste, introduziu o conceito de número de rotação para homeomorfismos do  $\mathbb{S}^1$  homotópicos à identidade. Esse conceito foi generalizado para homeomorfismos do toro homotópicos à identidade como um subconjunto do plano, conhecido como *Conjunto de Rotação*. Espera-se que tal conjunto contenha informações a respeito da dinâmica do homeomorfismo homotópicos à identidade, como por exemplo, sobre a existência de pontos periódicos. O resultado conhecido como *Teorema de Poincaré*, o qual pode ser encontrado em [11] garante que o número de rotação de um homeomorfismo do círculo  $\mathbb{S}^1$  que preserva orientação é racional se, somente se, o homeomorfismo possui um ponto periódico cujo período é igual ao denominador de tal racional. No caso de um homeomorfismo homotópico à identidade no toro  $\mathbb{T}^2$ , Franks demonstrou em [5] que se  $w \in \mathbb{Z}^2$  e  $q \in \mathbb{N}$  são tais que  $w/q$  é ponto interior do conjunto de rotação então existe  $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\hat{f}^q(\hat{x}) = \hat{x} + w$ , em outras palavras,  $\hat{x}$  se projeta num ponto periódico no toro.

Neste trabalho, o *conjunto de rotação* será umas das principais ferramentas para garantirmos a transitividade no plano. Existem várias noções deste conjunto para aplicações de  $\mathbb{T}^2$ , utilizaremos a definição proposta por *Misiurewicz e Ziemian* em [9], no qual eles definem que dado um levantamento  $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de um homeomorfismo homotópico à identidade, o conjunto de rotação associado a  $\hat{f}$ , denotado por  $\rho(\hat{f})$  é

$$\rho(\hat{f}) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}^{n_i}(\hat{x}_i) - \hat{x}_i}{n_i}, \text{ onde } \hat{x}_i \in \mathbb{R}^2, n_i \rightarrow \infty \right\}.$$

O objetivo desta dissertação é mostrar que *dado um homeomorfismo transitivo no toro  $\mathbb{T}^2$  e  $\hat{f}$  um levantamento de  $f$  no plano é necessário e suficiente que a origem do  $\mathbb{R}^2$  seja*

---

<sup>2</sup> $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um levantamento de  $f$  no plano, se satisfaz  $f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$ , onde  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  aplicação de recobrimento.

um ponto interior de  $\rho(\hat{f})$  para que a dinâmica no plano (recobrimento universal) seja transitiva.

Dessa forma faz sentido pensarmos na recíproca deste resultado, ou seja, *dado um homeomorfismo no toro  $\mathbb{T}^2$  homotópico à identidade e  $\hat{f}$  com um levantamento transitivo de  $f$  é possível que a origem do plano seja ponto interior do conjunto de rotação?*

Em 2010, Fábio Armando Tal na referência [4], enfraquece a hipótese acima, isto é, ao invés de considerar um levantamento transitivo no plano, ele considera um levantamento satisfazendo a propriedade  $T^3$  e mostra que a origem está no interior do conjunto de rotação. Daremos uma ideia da prova deste resultado no último capítulo deste trabalho.

A seguir apresentamos uma breve descrição de como esta dissertação está organizada.

No Capítulo 1, veremos algumas notações, definições e resultados importantes que serão utilizados posteriormente, a saber, o conceito de transitividade e conjuntos essenciais.

O segundo capítulo é baseado no artigo de Michal Misiurewicz e Krystyna Ziemian, "*Rotations Sets for Maps of Tori*" no qual apresentaremos a definição de vetor e conjunto de rotação para homeomorfismos do toro que são homotópicos à identidade, bem como, alguns exemplos e propriedades.

No capítulo 3, demonstraremos o Teorema Principal desta dissertação.

No capítulo 4, definiremos os conjuntos  $B_\theta$  e  $\omega(B_\theta)$  os quais serão fundamentais na elaboração da prova da recíproca do Teorema Principal, dada em [4].

---

<sup>3</sup>Um levantamento  $\hat{f}$  de um homeomorfismo no toro isotópico à identidade é dito ter a Propriedade  $T$  se existe um ponto  $x_T \in \mathbb{R}^2$  cujo o ômega-limite de  $x_T$  por  $\hat{f}$ , o qual denotaremos por  $\omega(x_T)$ , contém todas as translações inteiras de  $x_T$ , ou seja, o conjunto  $x_T + \mathbb{Z}^2$  está contido em  $\omega(x_T)$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados importantes que serão usados ao longo do trabalho.

### 1.1 Ferramentas Básicas

Lembremos que uma relação  $R$  sobre um conjunto  $A$  não vazio é chamada de relação de equivalência sobre  $A$  se, e somente se, ela satisfaz as seguintes condições:

- (i) (Reflexiva) Se  $a \in A$ , então  $aRa$ ;
- (ii) (Simétrica) Se  $a, b \in A$ , e  $aRb$ , então  $bRa$ ;
- (iii) (Transitiva) Se  $a, b, c \in A$ , e  $aRb$  e  $bRc$ , então  $aRc$ .

Geralmente, costuma-se denotar relação de equivalência por “ $\sim$ ”.

**Exemplo 1.1.1.** *Sejam  $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in \mathbb{R}^2$ , denotados por  $\hat{z}_1 = (\hat{x}_1, \hat{y}_1)$  e  $\hat{z}_2 = (\hat{x}_2, \hat{y}_2)$ . Temos que  $\hat{z}_1 \sim \hat{z}_2 \Leftrightarrow \hat{z}_1 - \hat{z}_2 \in \mathbb{Z}^2$  é uma relação de equivalência em  $\mathbb{R}^2$ .*

*De fato,  $\sim$  é reflexiva:*

$$\hat{z}_1 = \hat{z}_2 \Leftrightarrow \hat{z}_1 - \hat{z}_2 = \hat{z}_1 - \hat{z}_1 = (0, 0) \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow \hat{z}_1 \sim \hat{z}_1.$$

*$\sim$  é simétrica:*

$$\hat{z}_1 \sim \hat{z}_2 \Leftrightarrow \hat{z}_1 - \hat{z}_2 \in \mathbb{Z}^2 \text{ e daí } \hat{z}_2 - \hat{z}_1 = -(\hat{z}_1 - \hat{z}_2) \in \mathbb{Z}^2, \text{ ou seja, } \hat{z}_2 \sim \hat{z}_1.$$

$\sim$  é *transitiva*:

$$\hat{z}_1 \sim \hat{z}_2 \Leftrightarrow \hat{z}_1 - \hat{z}_2 \in \mathbb{Z}^2 \text{ e } \hat{z}_2 \sim \hat{z}_3 \Leftrightarrow \hat{z}_2 - \hat{z}_3 \in \mathbb{Z}^2,$$

portanto,

$$\hat{z}_1 - \hat{z}_3 = (\hat{z}_1 - \hat{z}_2) + (\hat{z}_2 - \hat{z}_3) \in \mathbb{Z}^2, \text{ ou seja, } \hat{z}_1 \sim \hat{z}_3.$$

Considere  $\mathbb{R}^2$  munido da relação de equivalência do exemplo anterior, isto é, dados  $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in \mathbb{R}^2$ , definimos

$$\hat{z}_1 \sim \hat{z}_2 \Leftrightarrow \hat{z}_1 - \hat{z}_2 \in \mathbb{Z}^2.$$

Desta forma, podemos definir, para cada  $\hat{z} \in \mathbb{R}^2$ , a classe de equivalência de  $\hat{z}$  como

$$[\hat{z}] = \{\hat{z}_i \in \mathbb{R}^2 \mid \hat{z} \sim \hat{z}_i\}.$$

O conjunto de todas as classes de equivalência

$$\mathbb{R}^2 / \sim := \{[\hat{z}] : \hat{z} \in \mathbb{R}^2\}$$

é chamado do quociente de  $\mathbb{R}^2$  pela relação de equivalência  $\sim$ , a qual denotaremos por

$$\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 := \{[\hat{z}] : \hat{z} \in \mathbb{R}^2\}.$$

Dizemos que  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  é o toro bidimensional ou simplesmente toro.

Nestas condições, existe a seguinte aplicação natural, que projeta cada ponto do plano no toro, a qual é conhecida como aplicação quociente

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ \hat{z} &\longmapsto \pi(\hat{z}) = [\hat{z}], \end{aligned}$$

que também é chamada *aplicação de recobrimento do toro*.

Deste modo, temos que  $z \in \mathbb{T}^2$  representará  $[\hat{z}] \subset \mathbb{R}^2$ , conforme exemplificado na Figura 1.1.

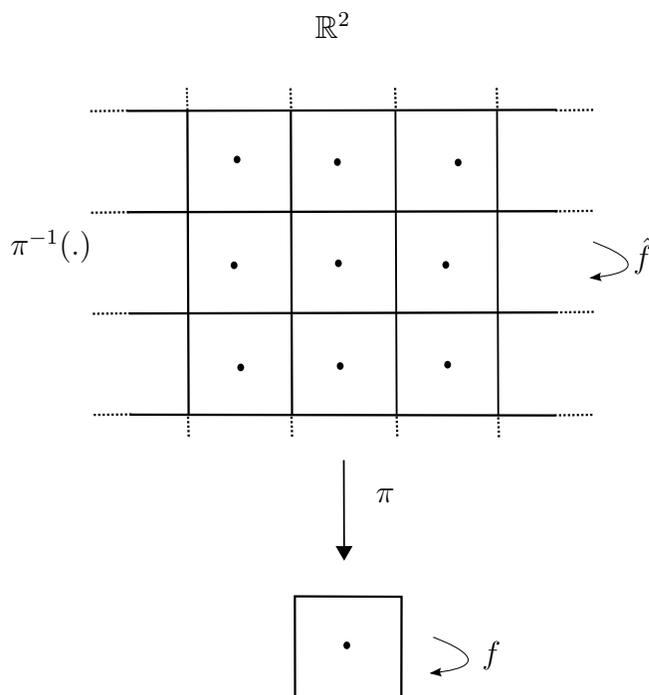


Figura 1.1: Aplicações no Recobrimento Universal.

É imediato que  $\pi$  é uma função contínua, sobrejetora, não injetora e localmente um homeomorfismo, isto é, dado  $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$  existe um aberto  $U$  contendo  $\hat{x}$ , de forma que  $\pi(U) = V$ , onde  $V$  é um aberto em  $\mathbb{T}^2$  e  $\pi$  é um homeomorfismo de  $U$  em  $V$ .

**Definição 1.1.1.** Dada uma dinâmica  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , dizemos que  $f$  é um homeomorfismo homotópico à identidade se existe uma aplicação chamada homotopia, isto é,

$$I_f : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{T}^2$$

$$(x, t) \longmapsto I_f(x, t),$$

tal que para todo  $x \in \mathbb{T}^2$

$$I_f(x, 0) = f(x), \quad I_f(x, 1) = Id(x) = x,$$

e nos instantes  $0 < t_0 < 1$ ,  $I_f(x, t_0)$  é contínua. Além disso, se para cada  $t \in [0, 1]$ ,  $I_f(x, t)$  for um homeomorfismo dizemos que  $f$  é um homeomorfismo isotópico à identidade e  $I_f$  é dita isotopia.

Em superfícies fechadas o conceito de homotopia e isotopia entre aplicações são equivalentes, ver [3].

**Definição 1.1.2.** Dado  $v \in \mathbb{R}^2$ , denotaremos por  $T_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a translação  $\hat{x} \mapsto \hat{x} + v$ .

Conforme já mencionado, se  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  é um homeomorfismo, dizemos que  $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um levantamento de  $f$  se satisfaz

$$f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}, \quad (1.1)$$

ou seja, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{R}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

A referência [2], diz que se  $f$  é homotópico à identidade, então  $\hat{f}$  comuta com o grupo  $\{T_v : v \in \mathbb{Z}^2\}$  das translações inteiras, isto é,  $\hat{f} \circ T_v = T_v \circ \hat{f}, \forall v \in \mathbb{Z}^2$ . Desta forma, dado  $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ , temos:

$$\hat{f} \circ T_v(\hat{x}) = \hat{f}(T_v(\hat{x})) = \hat{f}(\hat{x} + v), \quad (1.2)$$

$$T_v \circ \hat{f}(\hat{x}) = T_v(\hat{f}(\hat{x})) = \hat{f}(\hat{x}) + v. \quad (1.3)$$

De (1.2) e (1.3) segue

$$\hat{f}(\hat{x} + v) = \hat{f}(\hat{x}) + v, \quad \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad \forall v \in \mathbb{Z}^2.$$

Portanto, a condição de  $f$  ser homotópica à identidade, nos diz que os levantamentos dos homeomorfismos de  $\mathbb{T}^2$  satisfazem:

$$\hat{f}(\hat{x} + v) = \hat{f}(\hat{x}) + v, \quad \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad \forall v \in \mathbb{Z}^2. \quad (1.4)$$

É conhecido que tal levantamento é único no seguinte sentido: se existe outro levantamento,  $\hat{g}$ , satisfazendo (1.1), então  $\hat{f}$  e  $\hat{g}$  diferem por um vetor de coordenadas inteiras.

De fato, observe que para qualquer  $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$  existe  $v_1$  com coordenadas inteiras tal que

$$\hat{f}(\hat{x} + v_1) = \hat{f}(\hat{x}) + v_1,$$

analogamente, existe  $v_2 \in \mathbb{Z}^2$ , tal que

$$\hat{g}(\hat{x} + v_2) = \hat{f}(\hat{x}) + v_2,$$

como  $\pi(\hat{f}(\hat{x})) = f(\pi(\hat{x})) = \pi(\hat{g}(\hat{x}))$  temos que

$$\pi(\hat{f}(\hat{x})) = \pi(\hat{g}(\hat{x})) \Leftrightarrow \pi(\hat{f}(\hat{x}) + v_1) = \pi(\hat{g}(\hat{x}) + v_2).$$

E, conseqüentemente,  $\hat{f}(\hat{x}) - \hat{g}(\hat{x}) = v_2 - v_1 = v \in \mathbb{Z}^2$ .

Denotaremos por  $\zeta_2$  a classe de todos os levantamentos de todas as funções contínuas definidas no toro  $\mathbb{T}^2$  que são homotópicas à identidade.

Assim os elementos de  $\zeta_2$  são funções contínuas, tais que para todo  $k \in \mathbb{Z}^2$  temos

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\hat{x} + k) &\longmapsto \hat{f}(\hat{x} + k) = \hat{f}(\hat{x}) + k. \end{aligned}$$

**Observação 1.1.1.** *Se  $f$  é um homeomorfismo homotópico à identidade, então  $f$  preserva orientação.*

**Definição 1.1.3.** *Dizemos que  $x$  é um ponto periódico de período  $p$  se  $p$  é o menor inteiro tal que  $f^p(x) = x$ . Quando  $p = 1$ , ou seja,  $f(x) = x$ , dizemos simplesmente que  $x$  é um ponto fixo para  $f$ .*

Quando temos uma órbita  $\mathcal{O}_f(x)$  podemos procurar os seus pontos de acumulação, ou seja, os pontos em torno dos quais a órbita irá passar uma infinidade de vezes. Esse conjunto é conhecido como  $\omega$ -limite de  $x$  e denotado por  $\omega(x)$ . De forma mais técnica, dizemos que  $y \in \omega(x)$  se existe uma sequência infinita e crescente de números naturais tal que  $f^{n_i}(x) \rightarrow y$ .

**Definição 1.1.4.** Um ponto  $x \in X$  é chamado *recorrente* se  $x \in \omega(x)$ .

Observe que todo ponto periódico é um ponto recorrente.

**Definição 1.1.5.** (*Função não-errante*). Seja  $X$  um espaço métrico e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua, dizemos que  $U \subset X$  é *não-errante* se existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$f^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$

*Caso contrário*  $U$  é *errante*. Dizemos que  $z \in X$  é um ponto *não-errante*, se toda vizinhança de  $z$  é não-errante. E, finalmente, dizemos que  $f$  é *não-errante* se todo ponto  $z \in X$  é não-errante.

Neste trabalho utilizaremos também a seguinte versão do Lema de Brouwer, a qual será utilizada na demonstração da recíproca do Teorema Principal desta dissertação e pode ser encontrada nos trabalhos de Fathi em [1] e Brouwer em [7].

**Teorema 1.1.1.** Se  $f$  é um homeomorfismo que preserva a orientação do plano e possui um ponto não-errante, então  $f$  tem ponto fixo.

Em outras palavras, diante destas hipóteses é possível concluir que qualquer tipo de recorrência no plano implica em ponto fixo. Em particular, *não podemos ter uma dinâmica minimal visto que a órbita do ponto fixo não é densa no plano.*

## 1.2 Noções Topológicas

Nesta seção apresentaremos algumas definições básicas que podem ser facilmente encontrada em vários livros como por exemplo em [10].

Um espaço métrico é um par  $(X, d)$  onde  $X$  é um conjunto e  $d$  é uma métrica definida em  $X$ .

**Definição 1.2.1.** Seja  $X$  um espaço métrico. Uma *cisão* em  $X$  é um par  $U$  e  $V$  de conjuntos abertos disjuntos em  $X$  cuja união é o próprio  $X$ . Se  $U$  ou  $V$  for igual ao conjunto vazio, tal cisão será chamada de *Cisão Trivial*. Um espaço métrico é dito *Conexo* se não existe nenhuma outra *Cisão* além da *Trivial*.

**Observação 1.2.1.** Se  $A_n \subset X$  é conexo para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$  então

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ é conexo.}$$

O seguinte lema é uma consequência direta do Lema 3.1 de [8].

**Lema 1.2.1.** Sejam  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e  $K \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto conexo tal que  $K \cap T_v(K) = \emptyset$ . Então  $K \cap T_v^i(K) = \emptyset$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$  com  $i \neq 0$ .

**Definição 1.2.2.** Um caminho ou arco em um espaço métrico  $X$  é uma função contínua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ , tal que os pontos  $\gamma(0)$  e  $\gamma(1)$  são chamados respectivamente de ponto inicial e ponto final do caminho e  $\gamma$  é dito ligar o ponto  $\gamma(0)$  ao  $\gamma(1)$ .

**Definição 1.2.3.** Um espaço métrico é dito conexo por caminhos se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um caminho.

**Definição 1.2.4.** Seja  $X$  um espaço métrico. Para cada ponto  $x \in X$ , definimos a Componente Conexa do ponto  $x$  em  $X$  como sendo a reunião  $C_x$  de todos os subconjuntos conexos de  $X$  que contém o ponto  $x$ .

Segue imediatamente da Definição 1.2.4 que  $C_x$  é o maior subconjunto conexo de  $X$  que contém o ponto  $x$ , e ainda, dados dois pontos  $x, y \in X$ , suas componentes conexas  $C_x$  e  $C_y$  em  $X$ , ou coincidem ou são disjuntas.

Dado  $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$  denotamos por  $(\hat{x}_1)$  a projeção de  $\hat{x}$  na primeira coordenada e por  $(\hat{x}_2)$  a projeção de  $\hat{x}$  na segunda coordenada. A norma em  $\mathbb{R}^2$  utilizada neste trabalho será a norma do máximo, dada pela seguinte expressão:

$$\|\hat{x}\|_\infty = \max\{|\hat{x}_1|, |\hat{x}_2|\}.$$

**Definição 1.2.5.** Se  $f$  é um homeomorfismo no plano, diremos que um arco  $\gamma = \gamma([0, 1])$  é arco de translação para  $f$  se

$$f(\gamma(0)) = \gamma(1) \text{ e } [\gamma] \cap f([\gamma]) = \{\gamma(1)\}.$$

**Exemplo 1.2.1.** A Figura 1.2 nos fornece um exemplo de arco de translação para  $f$ .

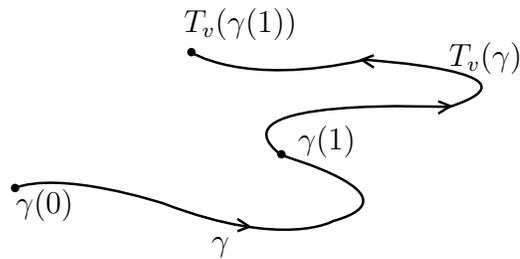


Figura 1.2: Arco de translação para  $f$ .

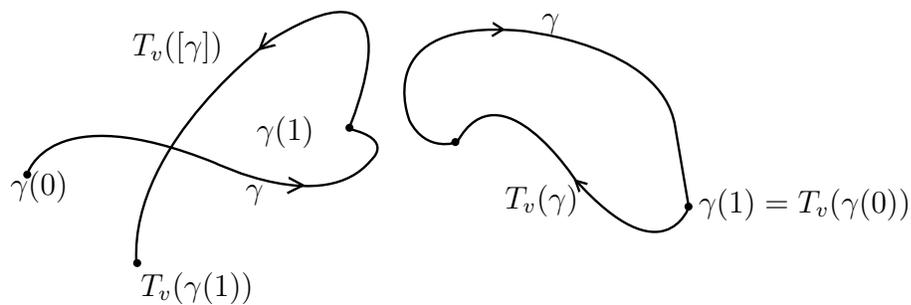


Figura 1.3: Arcos que não são de translação para  $f$ .

**Exemplo 1.2.2.** A Figura 1.3 exemplifica arcos que não são arcos de translação para  $f$ .

Um espaço topológico <sup>1</sup> que satisfaz o seguinte teorema é chamado de Baire.

**Teorema 1.2.1. (Teorema de Baire).** Seja  $X$  um espaço métrico completo. Se  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão de subconjuntos abertos e densos de  $X$ , então

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

é denso em  $X$ .

<sup>1</sup>Um espaço Topológico é um par  $(X, \tau)$  onde  $X$  é um conjunto e  $\tau$  é uma topologia em  $X$ .

### 1.3 Transitividade

As seguintes definições e resultados podem ser encontrados em [11] e [13].

**Definição 1.3.1.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua num espaço topológico, diremos que  $f$  é transitiva, se existe pelo menos um ponto  $x \in X$  cuja órbita é densa em  $X$ .*

Embora esta definição seja a mais comum de *transitividade*, em alguns momentos usaremos a definição que resulta do seguinte teorema de equivalência.

**Teorema 1.3.1.** *Seja  $f : X \rightarrow X$ , onde  $X$  é um espaço de Baire com base enumerável de abertos. Então  $f$  é transitiva se, e somente se, dados quaisquer dois abertos  $U, V \subset X$ , existe um inteiro  $n \geq 1$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $f$  é transitiva, então existe  $x \in X$  cuja órbita é densa em  $X$ , isto é,

$$\overline{\{f^n(x)\}_{n \geq 1}} = X.$$

Dessa forma, dado um aberto  $U \subseteq X$  existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $f^i(x) \in U$ . Como  $f^i(x) \in \{f^n(x)\}_{n \geq 1}$ , que é denso em  $X$  então a órbita de  $f^i(x)$  também é densa em  $X$ , isto é,

$$\overline{\{f^n(f^i(x))\}_{n \geq 1}} = X,$$

pois  $X$  não possui pontos isolados e suas órbitas  $\{f^n(x)\}_{n \geq 1}$  e  $\{f^n(f^i(x))\}_{n \geq 1}$  diferem de apenas um número finito de pontos. Assim, pelo mesmo argumento, dado outro aberto  $V \subseteq X$ , existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $f^j(f^i(x)) \in V$ . Dessa forma, tomando  $n = j$  temos que  $f^n(f^i(x)) \in V$  e conforme já mencionado  $f^i(x) \in U$ , logo,

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Portanto, dados dois abertos  $U$  e  $V$  existe iterada de um que intercepta o outro.

Reciprocamente, suponha que dados dois abertos  $U$  e  $V$  ambos contidos em  $X$  existe um inteiro  $n \geq 1$  tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset. \tag{1.5}$$

Aplicando  $f^{-n}$  em (1.5)

$$U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset.$$

Vamos supor que vale a condição de intersecção dos abertos.

Pela hipótese,  $f^{-n}(V)$  intercepta qualquer aberto  $U \subset X$ , então

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V)$$

é denso em  $X$  para todo aberto  $V$ . Como  $X$  é um espaço métrico com subconjunto enumerável denso, então existe uma base enumerável  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  para a topologia de  $X$ . Assim,

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V_i)$$

é intersecção enumerável de abertos densos em  $X$  e, portanto, pelo teorema de Baire, é denso e, em particular, não vazio. Tomando

$$x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V_i)$$

temos que  $\mathcal{O}_f(x) = X$ , e assim  $f$  é transitiva.  $\square$

**Proposição 1.3.1.** *Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua e transitiva num espaço topológico e  $A \subset X$  um aberto não vazio tais que  $f(A) \subseteq A$ , isto é,  $A$  um conjunto  $f$ -invariante. Então  $\overline{A} = X$ .*

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que existe um aberto não denso  $A \subset X$  tal que  $f(A) \subseteq A$ . Como  $A$  é não denso, podemos tomar um aberto  $B \subset A^c$ , sendo assim  $f^n(A) \cap B = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pelo Teorema 1.3.1 temos que  $f$  não é transitiva, contrariando a hipótese.  $\square$

Portanto, os abertos invariantes pela ação de uma aplicação transitiva são densos no espaço ambiente.

**Observação 1.3.1.** *Note que se  $f$  é um homeomorfismo transitivo então  $f$  é não-errante.*

*De fato, considere  $A$  e  $f^1(A)$  como sendo dois abertos arbitrários, uma vez que  $f$  é transitivo segue que existe  $n \geq 1$  tal que*

$$f^n(A) \cap f^1(A) \neq \emptyset. \tag{1.6}$$

Aplicando  $f^{-1}$  em (1.6)

$$f^{n-1}(A) \cap A \neq \emptyset,$$

isto é, dado um aberto  $A$  existe uma iterada de  $A$  que o intercepta, logo pela Definição 1.1.5 temos que  $f$  é não-errante.

## 1.4 Conjuntos Essenciais e Inessenciais

Os seguintes conceitos são definidos em [2].

**Definição 1.4.1.** (*Conjunto essencial, inessencial e totalmente essencial*).

Seja  $A \subset \mathbb{T}^2$ , um conjunto aberto. Dizemos que  $A$  é inessencial se toda curva fechada em  $A$  é homotopicamente trivial em  $\mathbb{T}^2$ , caso contrário  $A$  é dito essencial. Um subconjunto  $U \subset \mathbb{T}^2$  é totalmente essencial se seu complementar em  $\mathbb{T}^2$  for inessencial, isto é, se o seu complementar está contido na união de discos topológicos<sup>2</sup> abertos.

**Definição 1.4.2.** Seja  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  um homeomorfismo homotópico à identidade.

(i) Diremos que  $x \in \mathbb{T}^2$  é um ponto inessencial de  $f$  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que o conjunto

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(B_\varepsilon(x)) \text{ é inessencial.}$$

(ii) Diremos que  $x \in \mathbb{T}^2$  é um ponto essencial de  $f$  se para todo  $\varepsilon > 0$  o conjunto

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(B_\varepsilon(x)) \text{ é essencial.}$$

(iii) Denotaremos por

$$Ess(f) = \{x \in \mathbb{T}^2; x \text{ é essencial}\}$$

e

$$Ine(f) = \mathbb{T}^2 \setminus Ess(f) = \{x \in \mathbb{T}^2; x \text{ é inessencial}\}.$$

**Lema 1.4.1.** Se  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  é um homeomorfismo homotópico à identidade, então:

---

<sup>2</sup>Disco Topológico é um subconjunto aberto homeomorfo à um disco do plano.

(i)  $Ine(f)$  é aberto;

(ii)  $Ess(f)$  é fechado;

(iii)  $Ine(f)$  e  $Ess(f)$  são  $f$ -invariantes.

*Demonstração.* Primeiramente mostraremos que  $Ine(f)$  é aberto, para isto considere  $x \in Ine(f)$ , sendo assim  $x$  é inessencial, isto é, existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B_\varepsilon(x)) \text{ é inessencial.}$$

Suponha por contradição que existe

$$y \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B_\varepsilon(x)) \text{ tal que } y \text{ é essencial,}$$

dessa forma,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B_\varepsilon(x)) \text{ seria essencial,}$$

o que é um absurdo, pois, por hipótese, o conjunto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B_\varepsilon(x)) \text{ é inessencial.}$$

Portanto, todo ponto em

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B_\varepsilon(x))$$

é ponto interior e assim  $Ine(f)$  é aberto.

Visto que  $Ess(f) = \mathbb{T}^2 \setminus Ine(f)$  e  $Ine(f)$  é aberto segue que  $Ess(f)$  é fechado.

Agora mostraremos que  $Ess(f)$  é  $f$ -invariante, isto é  $f(Ess(f)) = Ess(f)$ .

Dado  $x \in Ess(f)$  então para todo  $\varepsilon > 0$  o conjunto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B_\varepsilon(x)) \text{ é essencial.}$$

Observe que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B_\varepsilon(x)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^{n+1}(f^{-1}B_\varepsilon(x)),$$

sendo assim  $f^{-1}(x)$  é ponto essencial, em outras palavras,

$$f^{-1}(x) \in Ess(f) \Leftrightarrow x \in f(Ess(f)).$$

Portanto,  $Ess(f)$  é  $f$ -invariante.

Notemos que

$$f(\mathbb{T}^2 \setminus Ess(f)) = f(\mathbb{T}^2) \setminus f(Ess(f)) = \mathbb{T}^2 \setminus Ess(f).$$

Logo,  $Ine(f)$  é  $f$ -invariante.  $\square$

**Observação 1.4.1.** *Em  $\mathbb{T}^2$  um conjunto essencial, conexo, aberto e periódico ou é totalmente essencial ou está contido em um conjunto periódico homeomorfo a um anel essencial.*

Dado  $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  usaremos a notação  $v^\perp = (-b, a)$  para representar o vetor ortogonal de  $v$ . Dado  $f$  um homeomorfismo homotópico à identidade no toro, dizemos que  $f$  é anelar se existir um levantamento de  $f$  no plano,  $M > 0$  e  $v \in \mathbb{Z}^2$  tais que

$$\left| P_{v^\perp}(\hat{f}^n(\hat{x}) - \hat{x}) \right| < M, \quad \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

**Definição 1.4.3.** *Dizemos que  $f$  é irrotacional se existir um levantamento  $\hat{f}$  tal que  $\rho(\hat{f}) = \{(0, 0)\}$ .*

O seguinte teorema fornece uma classificação da *dinâmica toral*<sup>3</sup> em termos dos conjuntos definidos anteriormente, para outras informações veja [2].

**Teorema 1.4.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , um homeomorfismo não-errante homotópico à identidade. Então vale umas das afirmações a seguir:*

1. *Existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $Fix(f^k)$  é totalmente essencial e  $f^k$  é irrotacional;*
2. *Existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k$  é anelar; ou*
3.  *$Ess(f)$  é não vazio, conexo e totalmente essencial, e ainda,  $Ine(f)$  é união disjunta de conjuntos periódicos, simplesmente conexos e limitados.*

Vale ressaltar que, em conexão com essa dissertação, quando o conjunto de rotação do homeomorfismo tem interior não vazio, então  $f$  satisfaz o item 3 deste teorema e, portanto, denominado *dinâmica estritamente toral*.

---

<sup>3</sup>Dizemos que uma dinâmica é estritamente toral se esta tem propriedades próprias do toro, ou seja, não está presente em homeomorfismo definidos no plano ou no anel.

# Capítulo 2

## Conjunto de Rotação

Neste capítulo introduziremos o conceito de vetor de rotação e conjunto de rotação para homeomorfismos do toro  $\mathbb{T}^2$  que são homotópicos à identidade. Como veremos, isto pode ser feito naturalmente de três maneiras distintas.

### 2.1 Vetor e Conjunto de Rotação

A ideia é estudar a velocidade com que os pontos estão se movendo no recobrimento universal do toro sob a ação de algum levantamento  $\hat{f}$ , com o objetivo de extrair informações, acerca da dinâmica  $f$ , através desses conjuntos.

Matematicamente, este conjunto é dado pelos pontos de acumulação da seguinte sequência

$$\left\{ \frac{\hat{f}^n(\hat{x}) - \hat{x}}{n} : n \geq 1, \hat{x} \in \pi^{-1}(x) \right\}. \quad (2.1)$$

Denotaremos o conjunto dos pontos de acumulação de (2.1) por  $\rho(\hat{f}, x)$ .

Quando  $\rho(\hat{f}, x)$  for um único vetor, isto é, (2.1) convergir, diremos que

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}^n(\hat{x}) - \hat{x}}{n} \quad (2.2)$$

é o *vetor de rotação* de  $x \in \mathbb{T}^2$  com respeito a  $\hat{f}$ . E ainda, nestas condições diremos que  $v \in \mathbb{R}^2$  é realizado (como um vetor de rotação) por um ponto  $x \in \mathbb{T}^2$ . Caso contrário, ou seja, quando o limite de (2.2) não existir,  $\rho(\hat{f}, x)$  será o *conjunto de rotação* de  $x \in \mathbb{T}^2$ .

Ao invés de pensar no vetor de rotação de cada ponto no toro, pensaremos no que seria as velocidades possíveis para  $\hat{f}$  por todos os pontos do toro, em tempos quaisquer. Assim, estudaremos como o homeomorfismo  $f$  está agindo em termos de rotações no toro. Uma maneira intuitiva para prosseguir com esse raciocínio, seria definir o conjunto de rotação como sendo

$$\bigcup_{x \in \mathbb{T}^2} \rho(\hat{f}, x),$$

em outras palavras, é o conjunto das velocidades que algum ponto terá. Definido desta forma, esse conjunto é conhecido como Conjunto de Rotação Pontual de  $\hat{f}$ , denotado por  $\rho_p(\hat{f})$ .

Note que  $\rho(\hat{f}, x)$  pode depender de  $x$  e não possuir em geral boas propriedades topológicas. Como estamos considerando homeomorfismos do toro  $\mathbb{T}^2$  homotópicos à identidade temos que  $\rho(\hat{f}, x)$  depende apenas de  $x = \pi(\hat{x})$  e não do ponto  $\hat{x}$  escolhido em  $\pi^{-1}(x)$ . Neste caso, o conjunto  $\rho(\hat{f})$  não precisa ser convexo, nem mesmo conexo, como apresentado no exemplo a seguir.

**Exemplo 2.1.1.** *Considere uma aplicação no toro  $\mathbb{T}^2$ , com o seguinte levantamento*

$$\hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\hat{x}_1 + \cos(2\pi\hat{x}_2), \Phi(\hat{x}_2))$$

onde,

$$\Phi(\hat{x}_2) = \begin{cases} \hat{x}_2 + \hat{x}_2 \cdot (\frac{1}{2} - \hat{x}_2), & \text{se } 0 \leq \hat{x}_2 < \frac{1}{2} \\ \hat{x}_2 + (\hat{x}_2 - 1) \cdot (\frac{1}{2} - \hat{x}_2), & \text{se } \frac{1}{2} \leq \hat{x}_2 \leq 1. \end{cases}$$

Note que

$$\begin{cases} \hat{f}(0, 0) = (1, 0), \\ \hat{f}(0, \frac{1}{2}) = (-1, \frac{1}{2}), \\ \hat{f}(0, 1) = (1, 1). \end{cases}$$

Ainda, para  $\hat{x}_1 \in [-1, 1]$  temos

$$\begin{cases} \hat{f}(\hat{x}_1, 0) = (\hat{x}_1 + 1, 0) = (\hat{x}_1, 0) + (1, 0), \\ \hat{f}(\hat{x}_1, \frac{1}{2}) = (\hat{x}_1 - 1, \frac{1}{2}) = (\hat{x}_1, \frac{1}{2}) - (1, 0), \\ \hat{f}(\hat{x}_1, 1) = (\hat{x}_1 + 1, 1) = (\hat{x}_1, 0) + (1, 1). \end{cases}$$

Observe que o gráfico de  $\Phi$  é esboçado na Figura 2.1,

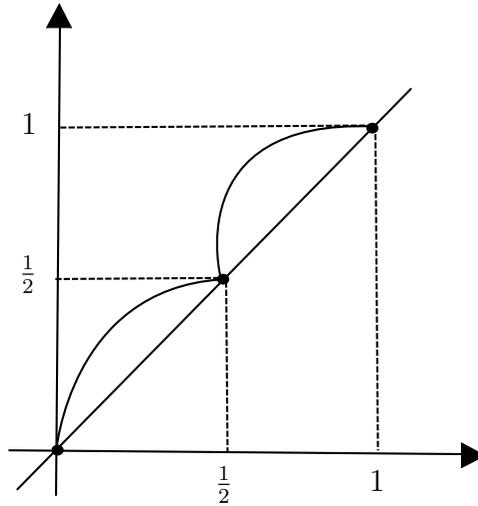


Figura 2.1: Esboço do gráfico da função  $\Phi$ .

Portanto, sobre os segmentos de retas  $[-1, 1] \times \{0\}$ ,  $[-1, 1] \times \{\frac{1}{2}\}$  e  $[-1, 1] \times \{1\}$  o levantamento age como uma translação de  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ , respectivamente. Uma vez que a órbita de qualquer ponto no toro  $\mathbb{T}^2$  tende a um dos segmentos de retas  $[-1, 1] \times \{0\}$ ,  $[-1, 1] \times \{\frac{1}{2}\}$  e  $[-1, 1] \times \{1\}$ , veja a Figura 2.2.

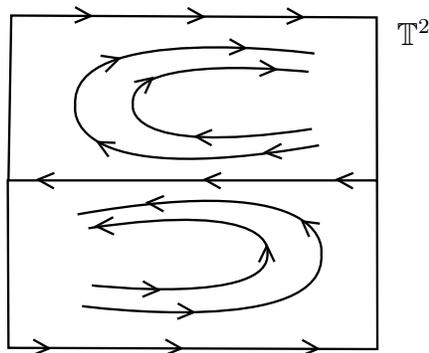


Figura 2.2: Esboço do retrato de fase de  $f$ .

Segue que

$$\rho_p(\hat{f}) = \bigcup_{x \in \mathbb{T}^2} \rho(\hat{f}, x) = \{(-1, 0), (1, 0)\}.$$

Há, no entanto, a seguinte definição do conjunto de rotação proposta por Misiurewicz e Ziemian em [9], de modo que propriedades importantes são preservadas.

**Definição 2.1.1.** *Dado  $\hat{f} \in \zeta_2$ , então o conjunto de rotação associado a  $\hat{f}$  é dado por*

$$\rho(\hat{f}) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}^{n_i}(\hat{x}_i) - \hat{x}_i}{n_i}, \text{ onde } \hat{x}_i \in \mathbb{R}^2, n_i \rightarrow \infty \right\}.$$

Note que segue diretamente da definição  $\rho_p(\hat{f}) \subset \rho(\hat{f})$ .

A próxima proposição nos fornece uma forma mais compacta da Definição 2.1.1.

**Proposição 2.1.1.** *Dado  $\hat{f} \in \zeta_2$ , temos que*

$$\rho(\hat{f}) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\left( \bigcup_{k \geq n} K_k(\hat{f}) \right)} \quad (2.3)$$

onde,

$$K_k(\hat{f}) = \left\{ \frac{\hat{f}^k(\hat{x}) - \hat{x}}{k} : \hat{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ e } k \geq 1 \right\}.$$

O próximo resultado o qual está provado em [9] nos garante que o conjunto de rotação definido como na Definição 2.1.1 é sempre conexo.

**Teorema 2.1.1.** *Se  $f$  um homeomorfismo homotópico à identidade e  $\hat{f}$  é um levantamento de  $f$  no plano, então o conjunto de rotação associado a  $\hat{f}$ ,  $\rho(\hat{f})$ , é conexo.*

O seguinte resultado, cuja a prova também pode ser encontrada em [9], é uma consequência da Definição 2.1.1.

**Teorema 2.1.2.** *Sejam  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  um homeomorfismo homotópico à identidade no toro e  $\hat{f} \in \zeta_2$ , então o conjunto de rotação,  $\rho(\hat{f})$ , é convexo.*

**Observação 2.1.1.** *Vale ressaltar que o conjunto de rotação é conexo em  $\mathbb{T}^m$  para qualquer  $m$  porém, é convexo apenas para  $m = 2$ .*

O conjunto de rotação não depende apenas de  $f$ , se substituirmos  $\hat{f}$  por outro levantamento  $\hat{g}$ , temos que  $\rho(\hat{g})$  é apenas um transladado inteiro de  $\rho(\hat{f})$ , por esta razão o conjunto de rotação é denotado por  $\rho(\hat{f})$  e não por  $\rho(f)$ , o seguinte lema confirma esta afirmação.

**Lema 2.1.1.** *Para todo  $v \in \mathbb{Z}^2$  temos que  $\rho(\hat{f} + v) = \rho(\hat{f}) + v$ .*

**Lema 2.1.2.** *O conjunto de rotação  $\rho(\hat{f})$  é compacto.*

*Demonstração.* Inicialmente, note que o vetor de rotação é invariante por translações de vetores com coordenadas inteiras, ou seja,

$$\left\{ \frac{\hat{f}^k(\hat{x} + v) - (\hat{x} + v)}{k} \right\} = \left\{ \frac{\hat{f}^k(\hat{x}) + v - (\hat{x} + v)}{k} \right\} = \left\{ \frac{\hat{f}^k(\hat{x}) - \hat{x}}{k} \right\}, \quad \forall v \in \mathbb{Z}^2.$$

Sendo assim, o conjunto de rotação pode ser definido usando somente pontos de um domínio fundamental, que pode ser pensado como correspondente ao toro original. Dessa forma, temos

$$K_k(\hat{f}) = \left\{ \frac{\hat{f}^k(\hat{x}) - \hat{x}}{k} : \hat{x} \in [0, 1]^2 \right\}.$$

Logo, os conjuntos  $K_k(\hat{f})$  são compactos, pois são imagens do compacto  $[0, 1]^2$  por uma função contínua, a saber,  $\frac{1}{k}(\hat{f} - id)$ . Portanto,  $\rho(\hat{f})$  é compacto.  $\square$

A seguinte proposição relaciona  $\rho(\hat{f}^n)$  e  $\rho(\hat{f})$ .

**Proposição 2.1.2.** *Dado  $n \in \mathbb{N}$  temos que  $\rho(\hat{f}^n) = n \cdot \rho(\hat{f})$ .*

O estudo da geometria destes conjuntos e suas implicações dinâmicas formam uma área de pesquisa extremamente rica e de grande interesse. Como por exemplo o seguinte teorema obtido por John Franks em [5], o qual garante que se o interior do conjunto de rotação possui um ponto com coordenadas racionais, então existem órbitas periódicas.

**Teorema 2.1.3. (Franks).** *Seja  $\hat{f}$  um levantamento no plano de um homeomorfismo no toro homotópico à identidade. Se  $w \in \mathbb{Z}^2$  e  $n \in \mathbb{N}$  são tais que*

$$\frac{w}{n} \in \rho(\hat{f}), \quad \text{então existe } \hat{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que } \hat{f}^n(\hat{x}) = \hat{x} + w.$$

## 2.2 Conjunto de Rotação para medida.

Nesta seção apresentaremos outra definição do conjunto de rotação. Conforme mencionado na seção anterior o conjunto de rotação é definido como sendo a velocidade com que os pontos estão se movendo no recobrimento universal sob a ação de algum levantamento, em outras palavras, o conjunto de rotação é a média temporal do deslocamento (variação de posição de um ponto em um dado intervalo de tempo) de um ponto no recobrimento universal. Como temos a média temporal da órbita de um dado ponto então faz sentido pensar o que seria a média espacial, isto é, ao invés de fixar um ponto e analisar o seu futuro, fixaremos um determinado tempo e analisaremos o comportamento de todos os pontos de uma vez, calculando a média em relação a uma medida de probabilidade  $f$ -invariante. Isso nos leva a definição de conjunto de rotação para medida, mas antes de definirmos precisamente o conjunto de rotação para medida, faremos uma breve revisão de alguns conceitos e teoremas da Teoria da Medida e da Teoria Ergódica. Para mais detalhes pode-se consultar [11] e [13].

**Definição 2.2.1.** ( *$\sigma$ -álgebra*). *Dado um conjunto  $X \neq \emptyset$ , dizemos que uma coleção  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  de subconjuntos de  $X$  é uma  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$  se satisfaz as seguintes condições:*

- $\emptyset \in \mathcal{B}$ ;
- Se  $A \in \mathcal{B}$ , então  $A^c \in \mathcal{B}$ ;
- Se  $A_n \in \mathcal{B}$ ,  $\forall n \geq 1$ , então  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{B}$ .

Nestas condições, o par ordenado  $(X, \mathcal{B})$  é denominado espaço mensurável e os elementos de  $\mathcal{B}$  são denominados conjuntos mensuráveis.

**Exemplo 2.2.1.** *Se  $X$  é qualquer conjunto não vazio, então  $\{\emptyset, X\}$  e  $\mathcal{P}(X)$  são  $\sigma$ -álgebras.*

**Definição 2.2.2.** *Se  $X$  é um espaço topológico, chama-se  $\sigma$ -álgebra Boreliana de  $X$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pela família de todos os subconjuntos abertos de  $X$ .*

**Definição 2.2.3.** *Uma medida em um espaço mensurável  $(X, \mathcal{B})$  é uma função  $\mu$  definida em  $\mathcal{B}$  e com valores em  $[0, +\infty]$  satisfazendo:*

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
2.  $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$  para quaisquer  $A_n \in \mathcal{B}$  dois-a-dois disjuntos.

A terna ordenada  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  é chamado de espaço de medida.

Considerando uma dinâmica  $f$  nesse espaço teremos o seguinte sistema dinâmico  $((X, \mathcal{B}, \mu), f)$ .

Dizemos que a medida  $\mu$  é finita, se  $\mu(X) < \infty$ . Quando  $\mu(X) = 1$  dizemos que  $\mu$  é uma probabilidade, neste último caso  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  é um *espaço de probabilidade*.

**Definição 2.2.4.** *Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação. Dizemos que  $f$  é mensurável se para qualquer conjunto mensurável  $A \subset X$ ,  $f^{-1}(A)$  é mensurável.*

Apresentaremos o conceito de *medida invariante* pois o seu estudo pode nos conduzir a informações importantes sobre o comportamento dinâmico do sistema, que seria difícil obter de outro modo.

**Definição 2.2.5.** *Sejam  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação mensurável, dizemos que a medida  $\mu$  é invariante por  $f$  se*

$$\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)) \text{ para todo conjunto mensurável } B \subset X.$$

Heuristicamente, isto pode ser interpretado da seguinte forma: a probabilidade de um ponto estar num dado conjunto é igual a probabilidade de que sua imagem esteja nesse conjunto.

Neste caso também dizemos que  $f$  preserva  $\mu$ .

Em termos de integral temos o seguinte teorema cuja prova pode ser encontrada em [13].

**Proposição 2.2.1.** *Sejam  $f : X \rightarrow X$  um transformação mensurável e  $\mu$  uma medida em  $X$ . Então*

$$f \text{ preserva a medida } \mu \text{ se, e somente se, } \int \Phi d\mu = \int (\Phi \circ f) d\mu,$$

para toda função integrável  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

O seguinte teorema o qual está provado em [13] garante a existência de medidas invariantes para uma classe muito ampla de transformações.

**Teorema 2.2.1.** (*Existência de medidas invariantes*). *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Então existe pelo menos uma medida de probabilidade em  $X$  que é invariante por  $f$ .*

**Definição 2.2.6.** *Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida e  $P$  uma propriedade referente aos elementos de  $X$ . Dizemos que  $P$  é verdadeiro em  $\mu$ -quase todo ponto, o qual denotamos por  $\mu$ -qtp, se  $P$  é verdadeiro para o complementar de um conjunto de medida  $\mu$ -nula.*

O próximo teorema cuja prova se encontra em [13], afirma que órbita de quase todo ponto, relativamente a qualquer medida invariante finita, regressa arbitrariamente perto de seu estado inicial.

**Teorema 2.2.2.** (*Recorrência de Poincaré*). *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação mensurável e seja  $\mu$  uma medida finita invariante por  $f$ . Seja  $B \subset X$  qualquer conjunto mensurável com  $\mu(B) > 0$ . Então para  $\mu$  quase todo ponto  $x \in B$  existem infinitos valores de  $n$  para os quais  $f^n(x)$  também está em  $B$ .*

Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação fixada. E denote por  $\mathcal{M}_f(X)$  o espaço de todas as medidas de probabilidade Boreliana invariantes por  $f$ .

**Lema 2.2.1.** *O espaço  $\mathcal{M}_f(X)$  é não vazio, compacto (com a topologia fraca\*)<sup>1</sup> e convexo.*

Neste contexto, um conceito análogo ao da transitividade (da dinâmica topológica) é o de ergodicidade: o sistema é formado por uma única peça dinâmica, isto é, o estudo do sistema não pode ser dividido em diferentes partes “relevantes”, independentes entre si, com respeito a uma dada medida.

---

<sup>1</sup>A topologia fraca\* em  $\mathcal{M}_f(X)$  é a topologia gerada pela base de vizinhanças  $\{V(\mu, \Phi, \varepsilon)\}$  de  $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ , onde  $\Phi = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$  (conjunto finito de funções contínuas limitadas),  $\varepsilon > 0$ ,  $V(\mu, \Phi, \varepsilon) := \{\nu \in \mathcal{M}_f(X) : |\int \Phi_i d\mu - \int \Phi_i d\nu| < \varepsilon\}$  e  $V(\mu, \Phi, \varepsilon) = \cap_{i=1}^n V(\mu, \Phi_i, \varepsilon)$ .

**Definição 2.2.7.** *Uma medida  $\mu$  é dita ergódica com respeito a  $f$  se, para todo conjunto  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $f^{-1}(B) = B$ , temos  $\mu(B) = 0$  ou  $\mu(B) = 1$ .*

Existem várias maneiras equivalentes de caracterizar ergodicidade de uma aplicação  $f : X \rightarrow X$  com respeito à uma medida de probabilidade invariante.

**Definição 2.2.8.** *Seja  $X$  um subconjunto convexo de um espaço vetorial. Dizemos que  $x \in X$  é um ponto extremal de  $X$  quando não for combinação convexa (não trivial) de nenhum ponto de  $X$ .*

A proposição seguinte cuja prova se pode ser vista em [13] nos afirma que as medidas ergódicas são os elementos extremais do convexo  $\mathcal{M}_f(X)$ .

**Proposição 2.2.2.** *Dada  $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$  uma probabilidade invariante,  $\mu$  é ergódica se, e somente se, não é possível escrevê-la na forma  $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$  com  $t \in (0, 1)$  e  $\mu_1, \mu_2$  probabilidades invariantes distintas.*

Um teorema fundamental da teoria ergódica o qual a prova pode ser encontrada em [13] é o seguinte.

**Teorema 2.2.3.** *(Teorema Ergódico de Birkhoff). Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de probabilidade e  $f : X \rightarrow X$  uma função mensurável que preserva  $\mu$ . Então, dada qualquer função integrável  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , o limite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x))$$

existe  $\mu$ -qtp em  $X$ . E quando  $\mu$  for ergódica, tem-se

$$\tilde{\varphi}(x) = \int \varphi d\mu \quad \mu\text{-qtp em } X.$$

**Observação 2.2.1.** *Visto que  $f$  é um homeomorfismo homotópico à identidade, (veja equação (1.4)) segue que  $\hat{f} - Id$  é bi-periódica de período inteiro. E além disso é limitada.*

*De fato, seja  $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$  e  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  então*

$$\hat{f}(\hat{x} + (p, q)) - \hat{f}(\hat{x}) = (p, q). \tag{2.4}$$

Note que

$$\hat{f}(\hat{x}) - \hat{x} = (\phi_1(\hat{x}), \phi_2(\hat{x})) \quad (2.5)$$

e

$$\hat{f}(\hat{x} + (p, q)) - \hat{x} - (p, q) = (\phi_1(\hat{x} + (p, q)), \phi_2(\hat{x} + (p, q))). \quad (2.6)$$

Tomando a diferença membro a membro de (2.6) e (2.5) temos que

$$\underbrace{\hat{f}(\hat{x} + (p, q)) - \hat{f}(\hat{x})}_{(p, q)} - (p, q) = (\phi_1(\hat{x} + (p, q)) - \phi_1(\hat{x}), \phi_2(\hat{x} + (p, q)) - \phi_2(\hat{x})).$$

Por (2.4) segue que

$$(\phi_1(\hat{x} + (p, q)) - \phi_1(\hat{x}), \phi_2(\hat{x} + (p, q)) - \phi_2(\hat{x})) = (0, 0).$$

Portanto,

$$\phi_1(\hat{x}) = \phi_1(\hat{x} + (p, q)) \quad e \quad \phi_2(\hat{x}) = \phi_2(\hat{x} + (p, q)).$$

Logo,  $\hat{f} - Id$  é limitada.

Defina

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \phi(x) = \hat{f}(\hat{x}) - \hat{x}, \quad \text{onde } \hat{x} \in \pi^{-1}(x). \end{aligned}$$

Note que a função  $\phi$  nos fornece o deslocamento no recobrimento universal de qualquer ponto  $x \in \mathbb{T}^2$ . Pela Observação 2.2.1 temos que  $\phi$  é  $\mathbb{Z}^2$ -periódica e uniformemente limitada sendo assim  $\phi$  está bem definida, além disso  $\phi$  é integrável. Desse modo, podemos considerar  $\mu$  uma medida ergódica  $f$ -invariante e aplicar o Teorema Ergódico de Birkhof 2.2.3 para as coordenadas da função  $\phi$ , fazendo isto segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(x)) = \int_{\mathbb{T}^2} \phi d\mu \quad \mu - qtp.$$

Observe que como  $\pi(\hat{x}) = x$ , então  $\pi(\hat{f}^k(\hat{x})) = f^k(x)$ ,  $\forall n \geq 0$  sendo assim,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(x)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\pi(\hat{f}^k(\hat{x}))).$$

E ainda, pela definição da  $\phi$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(x)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(\hat{f}^k(\hat{x})) - \hat{f}^k(\hat{x}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}^{k+1}(\hat{x}) - \hat{f}^k(\hat{x}) \\ &= \frac{\hat{f}^n(\hat{x}) - \hat{x}}{n}. \end{aligned}$$

Portanto, para  $\mu$ -quase todo  $x \in \mathbb{T}^2$ , se  $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}^n(\hat{x}) - \hat{x}}{n} = \int_{\mathbb{T}^2} \phi d\mu. \quad (2.7)$$

Sendo assim

$$\int_{\mathbb{T}^2} \phi d\mu \subset \rho_p(\hat{f}).$$

Desta forma podemos definir o conjunto de rotação médio, o qual denotaremos por  $\rho_m(\hat{f})$ , da seguinte forma,

$$\rho_m(\hat{f}) = \left\{ \int_{\mathbb{T}^2} \phi d\mu \ ; \ \mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{T}^2) \right\}.$$

Além disso, temos a seguinte relação de inclusão

$$\rho_m(\hat{f}) \subset \rho_p(\hat{f}) \subset \rho(f).$$

**Definição 2.2.9.** (*Conjunto de rotação para medida*). Dada  $\mu$  uma medida Boreliana de probabilidade  $f$ -invariante, onde  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , definimos o conjunto de rotação associado a  $\mu$  por

$$\rho_\mu(\hat{f}) = \int_{\mathbb{T}^2} \phi d\mu.$$

Note que  $\rho_\mu(\hat{f})$  é um vetor, pois  $\Phi$  é uniformemente limitada em  $\mathbb{T}^2$ , e esse vetor é o deslocamento médio do centro de massa de  $f$ .

Diante das definições do conjunto de rotação dadas anteriormente, adotaremos neste trabalho a Definição 2.1.1.

**Definição 2.2.10.** Definimos o suporte de uma medida  $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$  como sendo:

$$\text{supp}(\mu) = \{x \in X : \text{tais que } \mu(V) > 0 \text{ para toda vizinhança } V \text{ de } x\}.$$

Os seguintes resultados, os quais são provados em [13], relacionam o conceito de medida com transitividade.

**Teorema 2.2.4.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua, onde  $X$  é um espaço de Baire com base enumerável de abertos e  $\mu$  é uma medida ergódica para  $f$ . Então a restrição de  $f$  ao suporte de  $\mu$  é transitiva.*

**Teorema 2.2.5.** *Suponha que  $f$  é uma aplicação contínua definida num espaço métrico compacto. Se existe uma única medida ergódica  $\mu$  para  $f$ , então  $f$  restrita ao suporte de  $\mu$  é minimal. Em particular, transitiva.*

## 2.3 Exemplos de Conjunto de Rotação.

Conforme já mencionado anteriormente o conjunto de rotação de um homeomorfismo do  $\mathbb{T}^2$ , homotópico à identidade, é um subconjunto compacto e convexo do  $\mathbb{R}^2$ . Desta forma ele pode ser um ponto, um segmento de reta ou possuir interior não vazio. Para uma melhor compreensão desses conjuntos em relação a dinâmica apresentaremos alguns exemplos.

**Exemplo 2.3.1.** *Considere a seguinte translação no toro  $\mathbb{T}^2$  na direção  $v$*

$$\hat{f}(\hat{x}) = \hat{x} + v, \text{ onde } v \in \mathbb{R}^2.$$

Note que

$$\hat{f}^k(\hat{x}) = \hat{x} + k.v, \quad \forall k \geq 1.$$

Sendo assim para todo  $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$  e  $k \geq 1$ .

$$K_k(\hat{f}) = \left\{ \frac{\hat{f}^k(\hat{x}) - \hat{x}}{k} \right\} = \left\{ \frac{\hat{x} + k.v - \hat{x}}{k} \right\} = \{v\}.$$

Como  $K_k(\hat{f}) = \{v\}$  segue que

$$\rho(\hat{f}) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\left( \bigcup_{k \geq n} \{v\} \right)} = \bigcap_{n \geq 1} \{v\} = \{v\}.$$

Portanto, o conjunto de rotação é apenas um ponto, isto é,  $\rho(\hat{f}) = \{v\}$ .

**Exemplo 2.3.2.** Dado um conjunto  $\mathbb{A} \subset \mathbb{T}^2$ , periódico homeomorfo a um anel então o conjunto de rotação de todo ponto  $x \in \mathbb{A}$  está contido em um segmento de reta.

**Observação 2.3.1.** Se  $f$  é anelar com direção  $v$  então  $\rho(\hat{f}) \subset \mathbb{R} \cdot v$ , isto é, o conjunto de rotação de  $f$  está contido em um segmento de reta com direção  $v$  e portanto  $\rho(\hat{f}) = \emptyset$ . Com efeito, dado  $v \in \rho(\hat{f})$ , então existem sequências  $\{\hat{x}_i\} \subset \mathbb{R}^2$  e  $\{n_i\} \subset \mathbb{N}$  tais que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}^{n_i}(\hat{x}_i) - \hat{x}_i}{n_i} = v.$$

De (1.7) implica que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{P_{v^\perp}(\hat{f}^{n_i}(\hat{x}_i) - \hat{x}_i)}{n_i} = 0.$$

Logo,  $P_{v^\perp}(v) = 0$ , isto é,  $P_{v^\perp}(\rho(\hat{f})) = 0$  que é equivalente à  $\rho(\hat{f}) \subset \mathbb{R} \cdot v$ .

**Exemplo 2.3.3.** Considere uma aplicação no toro  $\mathbb{T}^2$ , com os seguintes levantamentos

$$\hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2 + \psi(\hat{x}_1)) \quad e \quad \hat{g}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\hat{x}_1 + \psi(\hat{x}_2), \hat{x}_2),$$

onde

$$\Psi(\hat{s}) = \begin{cases} 2s, & \text{se } 0 \leq s < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2s, & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad e \quad \psi(s+1) = \psi(s).$$

O gráfico da  $\psi$  é esboçado na Figura 2.3.

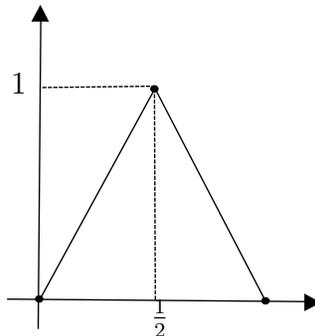


Figura 2.3: Esboço do gráfico da função  $\psi$ .

Observe que  $\hat{f}$  mantém cada vertical invariante e faz um deslocamento ao longo dessa. E ainda,  $\hat{f}$  tem os seguintes pontos fixos

$$\begin{cases} \hat{f}(0,0) = (0,0), \\ \hat{f}(1,0) = (1,0), \\ \hat{f}(1,1) = (1,1), \\ \hat{f}(0,1) = (0,1). \end{cases}$$

Além disso,

$$\begin{cases} \hat{f}(\frac{1}{2},0) = (\frac{1}{2},1), \\ \hat{f}(\frac{1}{2},1) = (\frac{1}{2},2). \end{cases}$$

Sendo assim a imagem do  $[0,1]^2$  por  $\hat{f}$  é a região hachurada da Figura 2.4.

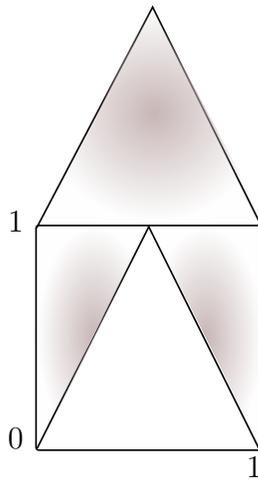


Figura 2.4: Ação do levantamento  $\hat{f}$ .

Enquanto,  $\hat{g}$  mantém a horizontal invariante fazendo um deslocamento ao longo dessa. Note que  $\hat{g}$  tem os seguintes pontos fixos

$$\begin{cases} \hat{g}(0,0) = (0,0), \\ \hat{g}(1,0) = (1,0), \\ \hat{g}(1,1) = (1,1), \\ \hat{g}(0,1) = (0,1). \end{cases}$$

E ainda,

$$\begin{cases} \hat{g}(0, \frac{1}{2}) = (1, \frac{1}{2}), \\ \hat{g}(1, \frac{1}{2}) = (2, \frac{1}{2}). \end{cases}$$

Portanto, a imagem de  $[0, 1]^2$  por  $\hat{g}$  é a região hachurada da Figura 2.5 .

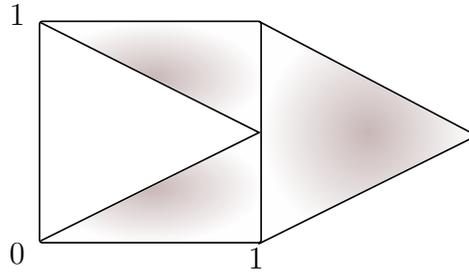


Figura 2.5: Ação do levantamento  $\hat{g}$ .

Defina  $\hat{h} = \hat{g} \circ \hat{f}$ .

Observe que  $\hat{h}$  tem 4 pontos fixos no toro  $\mathbb{T}^2$ , a saber,  $(0, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2}, 0)$  e  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Além disso,

$$\begin{cases} \hat{h}(0, 0) = (0, 0), \\ \hat{h}(0, \frac{1}{2}) = (0, \frac{1}{2}) + (1, 0), \\ \hat{h}(\frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, 0) + (0, 1), \\ \hat{h}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + (1, 1). \end{cases}$$

Logo, os pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 1)$  estão no conjunto de rotação, como  $\rho(\hat{f})$  é um convexo segue que  $[0, 1]^2 \subset \rho(\hat{f})$  e por hipótese  $\psi(s+1) = \psi(s)$  então pode-se provar que  $\rho(\hat{f}) = [0, 1]^2$ .

# Capítulo 3

## Transitividade no Recobrimento

### Universal via Conjunto de Rotação

Este capítulo é dedicado à prova do Teorema Principal desta dissertação que garante a transitividade no recobrimento universal .

Na Seção 3.1 apresentaremos os resultados que serão usados para a prova do Teorema Principal, a qual será feita na Seção 3.2. Na Seção 3.3 será apresentado e demonstrado a maioria dos resultados usados na prova do teorema 3.2.1, cuja prova será feita na Seção 3.4.

#### 3.1 Resultados Necessários

Conforme mencionado anteriormente, nesta seção apresentaremos os resultados que serão usados na prova da Teorema Principal, a qual será feita na próxima seção.

**Teorema 3.1.1.** *Sejam  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  um homeomorfismo não-errante homotópico à identidade e  $\hat{f}$  um levantamento de  $f$  no plano. Se  $\text{int}\rho(\hat{f})$  é não vazio, então  $\text{Ine}(f)$  é união disjunta de conjuntos periódicos, simplesmente conexos e limitados.*

*Demonstração.* Uma vez que estamos trabalhando com homeomorfismo  $f$  transitivo homotópico à identidade, segue da Observação 1.3.1 que  $f$  é não-errante, sendo assim, vale pelo menos uma das afirmações do Teorema 1.4.1. Mostraremos que diante de nossas

hipóteses as afirmações (1) e (2) não valem. E portanto vale (3), isto é,  $Ine(f)$  é união disjunta de conjuntos periódicos, simplesmente conexos e limitados, conforme desejado. Por hipótese,  $int\rho(\hat{f})$  é não vazio, sendo assim  $f$  não é irrotacional então para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos que  $\hat{f}^k$  também não é irrotacional e portanto a afirmação (1) não é válida.

Observe que o homeomorfismo  $f$  é não anelar para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Com efeito, suponha a existência de algum  $k \in \mathbb{N}$ , de forma que  $\hat{f}^k$  é anelar, sendo assim, pelo Observação 2.3.1 temos que  $int\rho(\hat{f}^k) = \emptyset$ , em particular para  $k = 1$ , isto é,  $int\rho(\hat{f}) = \emptyset$  o que é uma contradição com a hipótese, deste modo a afirmação (2) não é válida.  $\square$

**Lema 3.1.1.** *Suponha que  $f$  é transitiva e o interior do conjunto de rotação do levantamento de  $f$  é não vazio, então  $Ess(f) = \mathbb{T}^2$ .*

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $Ine(f)$  é não vazio, sendo assim, considere  $x_0 \in Ine(f)$ , logo  $x_0$  é um ponto inessencial, isto é, existe  $\varepsilon > 0$  tal que o conjunto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B_\varepsilon(x_0)) \text{ é inessencial.}$$

Como  $f$  é transitiva, existe pelo menos um ponto  $x$  em  $\mathbb{T}^2$ , de modo que,  $\{f^n(x)\}$  é densa em  $\mathbb{T}^2$ , portanto, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$x_1 = f^{n_0}(x) \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B_\varepsilon(x_0)).$$

Denote por  $D$  a componente conexa de  $Ine(f)$  contendo  $x_1$ , como  $Ine(f)$  é um conjunto aberto, então  $D$  é uma componente conexa aberta. Pelo Teorema 3.1.1,  $D$  é um conjunto periódico, simplesmente conexo e limitado. Sendo assim, a componente conexa  $\hat{D}$ , de  $\pi^{-1}(D)$  é limitada.

Pela Observação 1.3.1, segue que  $f$  é não-errante, deste modo, existe  $k \in \mathbb{N}$ , tal que  $f^k(D) = (D)$ .

Seja  $\hat{f}$  o levantamento de  $f$  no plano, então  $\hat{f}^k(\hat{D}) = \hat{D} + v$  para algum  $v \in \mathbb{Z}^2$ .

Observe que definindo  $\hat{g}$  como sendo,  $\hat{g} = T_v^{-1} \circ \hat{f}^k$  segue que  $D$  é periódico.

Com efeito,

$$\hat{g}(\hat{D}) = \hat{f}^k(\hat{D}) - v = \hat{D} + v - v = \hat{D}.$$

Em virtude das observações acima, o conjunto

$$\hat{U} = \bigcup_{n=0}^{k-1} \hat{f}^n(\hat{D}) \text{ é limitado pela ação de } \hat{g} \text{ e ainda é } \hat{g}\text{-invariante.}$$

Além disso, observe que

- $\hat{U} \subset B_\varepsilon(\hat{x}) \Rightarrow \overline{\hat{U}} \subset \overline{B_\varepsilon(\hat{x})}$ , assim,  $\overline{\hat{U}}$  é limitado.
- O fato de  $\hat{D}$  ser uma componente conexa e  $\hat{g}$  ser um homeomorfismo implica que a imagem de  $\hat{D}$  por  $\hat{g}$  é uma componente conexa, sendo assim podemos dizer que  $\overline{\hat{U}}$  é  $\hat{g}$ -invariante.

Com isso, todos os pontos de  $\overline{\hat{U}}$  tem órbita  $g$ -limitada. Agora, consideraremos a projeção de  $\hat{U}$  no toro, a qual denotaremos por  $U$ , isto é,  $U = \pi(\hat{U})$ . Como  $\hat{U}$  é limitado e  $\hat{g}$ -invariante implica que  $U$  é limitado e  $f$ -invariante em  $\mathbb{T}^2$ , em outras palavras,

$$U = \bigcup_{n=0}^{k-1} f^n(D).$$

Sendo assim  $U$  contém  $x$  cuja órbita é densa em  $\mathbb{T}^2$  então,  $U$  é denso em  $\mathbb{T}^2$ , ou seja,  $\overline{U} = \mathbb{T}^2$ .

Portanto, todo ponto no toro tem órbita  $f$ -limitada e conseqüentemente, todo ponto no  $\mathbb{R}^2$  tem órbita  $\hat{g}$ -limitada. Com isso o conjunto de rotação de qualquer ponto de  $\mathbb{R}^2$  é dado por

$$\rho(\hat{g}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\hat{g}^{n_i}(\hat{x}_i) - \hat{x}_i}{n_i} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{M}{n_i} = (0, 0).$$

Logo,

$$\rho(\hat{g}) = (0, 0).$$

Como

$$\hat{g} = \hat{f}^k - v \text{ então } \rho(\hat{f}^k - v) = (0, 0),$$

e pelo Lema 2.1.1 temos

$$\rho(\hat{f}^k - v) = \rho(\hat{f}^k) - v.$$

E ainda pela Proposição 2.1.2 segue que

$$\rho(\hat{f}^k) - v = k \cdot \rho(\hat{f}) - v = k \cdot \frac{v}{k} - v = 0.$$

E assim,

$$\rho(\hat{f}) = \frac{v}{k}.$$

Portanto,  $\text{int}\rho(\hat{f}) = \emptyset$ , contradizendo a hipótese. Desta forma,  $\text{Ine}(f) = \emptyset$ , isto implica que  $\text{Ess}(f) = \mathbb{T}^2$ , conforme desejado.  $\square$

## 3.2 Teorema Principal

Nesta seção demonstraremos o Teorema Principal assumindo o seguinte teorema cuja prova será feita na última seção deste capítulo.

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  um homeomorfismo homotópico à identidade e seja  $\hat{f}$  um levantamento de  $f$  no plano, de forma que  $(0,0)$  está no interior de  $\rho(\hat{f})$ . Seja  $O \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto, conexo, tal que  $\overline{\pi(O)}$  é inessencial e*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\pi(O)) \text{ é totalmente essencial.}$$

Então para cada  $w \in \mathbb{Z}^2$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\hat{f}^{n_0}(O) \cap T_w(O) \neq \emptyset$ .

**Teorema 3.2.2. (Teorema Principal).** *Seja  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  um homeomorfismo transitivo homotópico à identidade e seja  $\hat{f}$  um levantamento de  $f$  no plano. Se a origem é ponto interior do conjunto de rotação então  $\hat{f}$  é transitiva.*

*Demonstração.* Conforme já mencionado, usaremos o Teorema 3.2.1 para demonstrar este resultado, sendo assim, considere  $O_1$  e  $O_2$  abertos do plano e  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  a aplicação de recobrimento, dessa forma,  $\pi(O_1)$  e  $\pi(O_2)$  são abertos em  $\mathbb{T}^2$ . Visto que  $f$  é transitiva, segue que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $f^{n_0}(\pi(O_1)) \cap (\pi(O_2)) \neq \emptyset$ . Logo existe  $w \in \mathbb{Z}^2$  tal que  $\hat{f}^{n_0}(O_1) \cap T_w(O_2) \neq \emptyset$ .

Seja  $\hat{x} \in \hat{f}^{n_0}(O_1) \cap T_w(O_2)$ , uma vez que  $\hat{f}^{n_0}(O_1) \cap T_w(O_2)$  é um conjunto aberto, então  $\hat{x}$  é ponto interior. Tome  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(\hat{x}) \subset \hat{f}^{n_0}(O_1) \cap T_w(O_2)$ .

Note que, para  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ , o conjunto  $\overline{\pi(B_\varepsilon(\hat{x}))}$  é inessencial. Portanto, para aplicar o Teorema 3.2.1 resta construir um conjunto totalmente essencial no toro. Por hipótese,

$f$  é transitiva e o interior do conjunto de rotação é não vazio, então pelo Lema 3.1.1,  $Ess(f) = \mathbb{T}^2$ , ou seja, dado  $x \in \mathbb{T}^2$  e  $\varepsilon > 0$  temos que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(B_\varepsilon(x)) \text{ é essencial.}$$

Para facilitar a notação denotaremos tal conjunto essencial por  $A$ , note que além de  $A$  ser essencial,  $A$  também é aberto e invariante. Sejam  $x \in A$  e  $C_x$  a componente conexa de  $A$  que contém  $x$ . Visto que  $A$  é um conjunto  $f$ -invariante, sendo  $f$  não-errante,  $C_x$  é periódica. Em suma,  $C_x$  é um conjunto aberto, essencial, conexo e periódico. Pela Observação 1.4.1 um subconjunto com essas características, é totalmente essencial ou está contido em um conjunto periódico homeomorfo a um anel essencial. Pelo Exemplo 2.3.2 segue que  $C_x$  não satisfaz o segundo caso, visto que o conjunto de rotação não é um segmento de reta. Assim,  $C_x$  é totalmente essencial e como  $C_x \subset A$  segue que  $A$  é totalmente essencial.

Observe que,  $B_\varepsilon(\hat{x})$  satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2.1, portanto, para cada  $w \in \mathbb{Z}^2$  existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\hat{f}^{n_1}(B_\varepsilon(\hat{x})) \cap T_{(-w)}(B_\varepsilon(\hat{x})) \neq \emptyset.$$

Desse modo,

$$\hat{f}^{n_0+n_1}(O_1) \cap T_{(-w)}(T_w(O_2)) \neq \emptyset.$$

Tomando  $n = n_0 + n_1$  segue que

$$\hat{f}^n(O_1) \cap O_2 \neq \emptyset,$$

portanto,  $\hat{f}$  é transitiva no plano. □

### 3.3 Resultados que serão usados na prova do Teorema

#### 3.2.1

Nas hipóteses do Teorema 3.2.1, nosso objetivo é enunciar e demonstrar alguns resultados que serão essenciais para provar que dado um conjunto  $O \subset \mathbb{R}^2$ , aberto, conexo e inessencial, então existe uma iterada de  $O$  que intersecta um dado transladado (inteiro) de  $O$ .

Precisamente, para cada  $w \in \mathbb{Z}^2$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\hat{f}^{n_0}(O) \cap T_w(O) \neq \emptyset.$$

Para isto, suponha construído um compacto  $K$  do plano tal que  $\mathbb{R}^2 \setminus K$  tenha uma componente conexa  $U$  limitada contendo um domínio fundamental, como na Figura 3.1 .

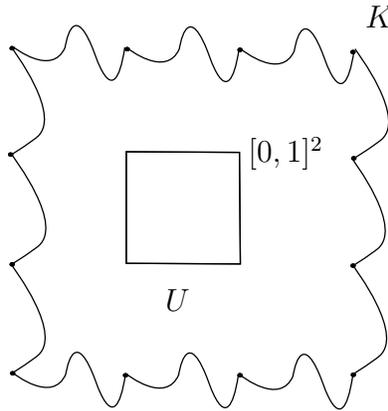


Figura 3.1: Representação de uma componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus K$  contendo um domínio fundamental.

Suponha ainda que exista um inteiro positivo  $M$  de modo que,

$$K \subset \bigcup_{(i,v) \in \Sigma(M)} T_v(\hat{f}^i(O)), \text{ onde } \Sigma(M) = \{(i, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2 : |i| \leq M, \|v\|_\infty \leq M\}.$$

Por hipótese,  $(0, 0) \in \text{int}\rho(\hat{f})$  então podemos escolher  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta((0, 0)) \subset \text{int}\rho(\hat{f})$ . Dessa forma, se

$$n > \frac{\|w\|}{\delta} \text{ então, } \frac{w}{n} \in \text{int}\rho(\hat{f}), \text{ donde podemos usar o Teorema de Franks 2.1.3.}$$

**Afirmção 3.3.1.** Para cada  $w \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$\text{se } n > \frac{\|w\|}{\delta} \Rightarrow \hat{f}^n([0, 1]^2) \cap T_w([0, 1]^2) \neq \emptyset.$$

Com efeito, visto que  $w \in \mathbb{Z}^2$  e  $n \in \mathbb{N}$  são tais que

$$\frac{w}{n} \in \rho(\hat{f}),$$

segue do Teorema de Franks 2.1.3, que existe  $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\hat{f}^n(\hat{x}) = T_w(\hat{x})$ .

Se  $\hat{x} \in [0, 1]^2 \Rightarrow \hat{f}^n([0, 1]^2) \cap T_w([0, 1]^2) \neq \emptyset$ , agora se  $\hat{x} \notin [0, 1]^2$ , basta tomar um representante em  $[0, 1]^2$  e teremos que  $\hat{f}^n([0, 1]^2)$  intercepta  $T_w([0, 1]^2)$ .

A partir desta afirmação e do fato que  $U$  contém um domínio fundamental podemos concluir o seguinte resultado.

**Proposição 3.3.1.** *Sejam  $w \in \mathbb{R}^2$  e  $n \in \mathbb{N}$  então existe  $(j_w, v_w) \in \Sigma(2M)$  tal que*

$$\hat{f}^n(\hat{f}^{j_w}(T_{v_w}(O))) \cap T_w(O) \neq \emptyset.$$

*Demonstração.* Visto que  $\hat{f}^n([0, 1]^2) \cap T_w([0, 1]^2) \neq \emptyset$  e  $[0, 1]^2$  está contido na componente conexa limitada  $U$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus K$ , então,  $\hat{f}^n(U) \cap T_w(U) \neq \emptyset$ , sendo  $U$  limitada, segue que  $\hat{f}^n(\partial U) \cap T_w(\partial U) \neq \emptyset$ . Uma vez que,  $\partial U \subset K$ , implica que

$$\hat{f}^n(K) \cap T_w(K) \neq \emptyset, \text{ onde, } \frac{w}{n} \in \text{int}\rho(\hat{f}),$$

em outras palavras, a  $n$ -ésima iterada do compacto  $K$  intercepta o transladado  $w$  de  $K$ . E ainda, como

$$K \subset \bigcup_{(i,v) \in \Sigma(M)} T_v(\hat{f}^i(O)),$$

segue que existem inteiros  $n_1, n_2 \in [-M, M]$  e  $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}^2$  com  $\|v_1\|_\infty < M$  e  $\|v_2\|_\infty < M$ , tais que

$$\hat{f}^n[T_{v_1}(\hat{f}^{n_1}(O))] \cap [T_{v_2}(\hat{f}^{n_2}(O) + w)] \neq \emptyset. \text{ (Ver Figura 3.2).}$$

Fazendo  $\hat{f}^n[T_{v_1}(\hat{f}^{n_1}(O))] = A$  e  $\hat{f}^{n_2}(O) = B$  segue que

$$A \cap T_{v_2+w}(B) \neq \emptyset.$$

Aplicando  $T_{-v_2}$  vem

$$T_{-v_2}(A) \cap T_w(B) \neq \emptyset.$$

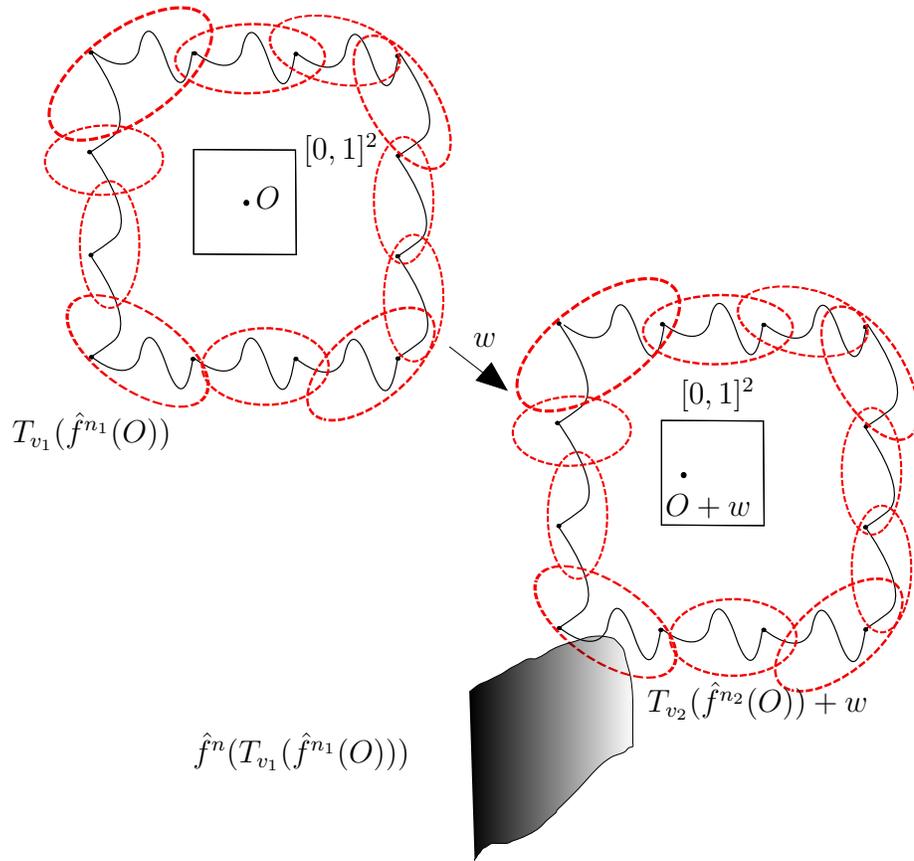


Figura 3.2: Ilustração da Proposição 3.3.1 .

Note que  $T_w(B) = T_w(\hat{f}^{n_2}(O))$  e ainda fato de  $f$  ser homotópica à identidade implica que,  $T_w(\hat{f}^{n_2}(O)) = \hat{f}^{n_2}(T_w(O))$ . Dessa maneira,

$$T_{-v_2}(A) \cap T_w(\hat{f}^{n_2}(O)) \neq \emptyset.$$

Aplicando  $\hat{f}^{-n_2}$  segue que

$$\hat{f}^{-n_2}(T_{-v_2}(A)) \cap T_w(O) \neq \emptyset.$$

Como  $A = \hat{f}^n[T_{v_1}(\hat{f}^{n_1}(O))]$  temos que

$$\hat{f}^{-n_2}(T_{-v_2}(\hat{f}^n[T_{v_1}(\hat{f}^{n_1}(O))])) \cap T_w(O) \neq \emptyset.$$

Como o levantamento de  $f$  e a função translação são homeomorfismos então,

$$\hat{f}^n(\hat{f}^{n_1-n_2}T_{v_1-v_2}(O)) \cap T_w(O) \neq \emptyset.$$

Concluimos então que  $j_w = n_1 - n_2$  e  $v_w = v_1 - v_2$ . E assim,

$$\hat{f}^n(\hat{f}^{j_w}(T_{v_w}(O))) \cap T_w(O) \neq \emptyset.$$

□

Agora, enunciaremos e demonstraremos o seguinte resultado o qual será de extrema importância para provar o Teorema 3.2.1.

**Proposição 3.3.2.** *Sejam  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $K_1$  e  $K_2$  dois subconjuntos conexos por caminhos de  $\mathbb{R}^2$  tais que  $T_v(K_1) \cap K_1 = \emptyset$  e  $T_v(K_2) \cap K_2 = \emptyset$ . Suponha ainda que há inteiros  $i, j$  com  $i \geq 0, j > 0$  tais que  $T_v^{-i}(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset$  e  $T_v^j(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset$ . Então  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ . Além disso, existe um arco de translação de  $T_v$  contido em  $K_1 \cup K_2$  e que liga ao ponto  $x \in K_1$  a  $T_v(x) \in K_2$ .*

*Demonstração.* Primeiramente mostraremos que  $K_1$  intercepta  $K_2$ . Para isso defina um arco simples  $\alpha : [0, 1] \rightarrow K_2$ , tal que  $\alpha(0) \in T_v^{-i}(K_1)$  e  $\alpha(1) \in T_v^j(K_1)$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $K_1$  é compacto e ainda como  $[\alpha]$  é compacto (por ser imagem de um compacto por uma função contínua) e  $v$  é diferente de zero, segue que existe  $n_0 \in \mathbb{Z}$  tal que se  $|n| > n_0$  então  $T_v^n(K_1) \cap [\alpha] = \emptyset$ .

Agora considere

$$s_0 = \max \left\{ t \in [0, 1] : \alpha(t) \in \bigcup_{n=0}^{n_0} T_v^{-n}(K_1) \right\},$$

$$s_1 = \min \left\{ t \in [s_0, 1] : \alpha(t) \in \bigcup_{n=1}^{n_0} T_v^n(K_1) \right\},$$

como  $\alpha(s_0) \in T_v^{-n}(K_1)$  para algum inteiro  $0 \leq n \leq n_0$  então podemos supor que  $n = i_0$  sendo assim,  $\alpha(s_0) \in T_v^{-i_0}(K_1)$ , e analogamente considere  $j_0$  o inteiro tal que  $\alpha(s_1) \in T_v^{j_0}(K_1)$ . Assim,  $\alpha(t) \big|_{(s_0, s_1)}$  não está contido em  $T_v^n(K_1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$  tal que  $n \leq n_0$ . Dessa forma, podemos considerar o seguinte conjunto conexo o qual denotaremos por  $K_3$ .

$$K_3 = T_v^{-i_0}(K_1) \cup \alpha([s_0, s_1]) \cup T_v^{j_0}(K_1).$$

**Afirmção 3.3.2.**  $i_0 = 0$  e  $j_0 = 1$ .

Suponha, por contradição, que  $i_0 + j_0 > 1$ . Note que, por construção,

$$\alpha(s_0, s_1) \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T_v^n(K_1). \quad (3.1)$$

e por hipótese  $T_v(K_1) \cap K_1 = \emptyset$ , sendo assim segue do Lema (1.2.1) que

$$T_v^n(K_1) \cap K_1 = \emptyset, \quad \forall n \neq 0. \quad (3.2)$$

Como  $n = i_0 + j_0$  que por sua vez é diferente de zero segue por (3.2) que

$$T_v(T_v^{-i_0}(K_1)) \cap T_v^{j_0}(K_1) = \emptyset. \quad (3.3)$$

Lembrando que

$$K_3 = T_v^{-i_0}(K_1) \cup \alpha([s_0, s_1]) \cup T_v^{j_0}(K_1),$$

então,

$$T_v(K_3) = T_v^{1-i_0}(K_1) \cup T_v \alpha([s_0, s_1]) \cup T_v^{j_0+1}(K_1).$$

Segue de (3.1), (3.2) e (3.3) que

$$\begin{aligned} T_v^{-i_0}(K_1) \cap T_v^{1-i_0}(K_1) &= \emptyset, \\ T_v^{-i_0}(K_1) \cap T_v \alpha([s_0, s_1]) &= \emptyset, \\ T_v^{-i_0}(K_1) \cap T_v^{j_0+1}(K_1) &= \emptyset, \\ \alpha([s_0, s_1]) \cap T_v^{1-i_0}(K_1) &= \emptyset, \\ \alpha([s_0, s_1]) \cap T_v \alpha([s_0, s_1]) &= \emptyset, \\ \alpha([s_0, s_1]) \cap T_v^{j_0+1}(K_1) &= \emptyset, \\ T_v^{j_0}(K_1) \cap T_v^{1-i_0}(K_1) &= \emptyset, \\ T_v^{j_0}(K_1) \cap T_v \alpha([s_0, s_1]) &= \emptyset \text{ e} \\ T_v^{j_0}(K_1) \cap T_v^{j_0+1}(K_1) &= \emptyset, \end{aligned}$$

logo,  $T_v(K_3) \cap K_3 = \emptyset$ . Sendo assim, segue do Lema 1.2.1 que

$$T_v^n(K_3) \cap K_3 = \emptyset, \quad \forall n \neq 0. \quad (3.4)$$

Mas, note que, considerando  $n = i_0 + j_0$  temos que

$$T_v^{i_0+j_0}(K_3) = T_v^{j_0}(K_1) \cup T_v^{i_0+j_0}\alpha([s_0, s_1]) \cup T_v^{2j_0+i_0}(K_1).$$

Visto que  $T_v^{j_0}(K_1) \subset K_3$  segue que  $T_v^{i_0+j_0}(K_3) \cap K_3 \neq \emptyset$ , contrariando (3.4). Logo,  $i_0 + j_0$  não pode ser maior que 1, uma vez que  $i_0$  e  $j_0$  são inteiros não negativos, a única possibilidade é que  $i_0 + j_0 = 1$ , por hipótese  $j_0$  não pode ser zero, sendo assim  $i_0 = 0$  e  $j_0 = 1$ .

Note que, por construção,  $\alpha(s_0) \in K_2 \cap T_v^{-i_0}(K_1)$ , como  $i_0 = 0$  segue que  $\alpha(s_0) \in K_1 \cap K_2$ , ou seja,  $K_1$  intercepta  $K_2$ , como queríamos. (Veja Figura 3.3).

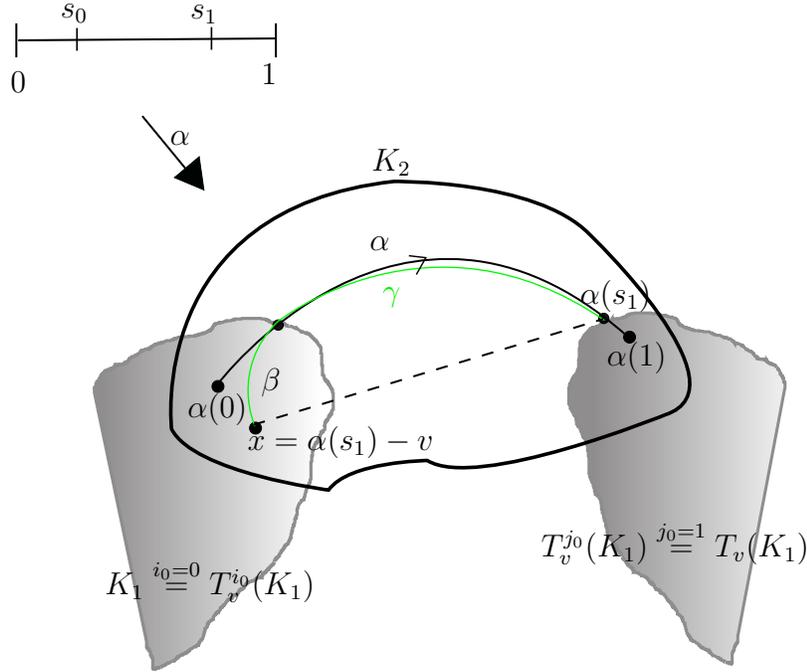


Figura 3.3: Ilustração da demonstração da Proposição 3.3.2.

Agora mostraremos a existência do arco de translação para  $T_v$ , contido em  $K_1 \cup K_2$ . Observe que  $\alpha(s_1) \in T_v^{j_0}(K_1) = T_v(K_1)$ , e seja  $\beta : [0, 1] \rightarrow K_1$  um arco simples juntando  $\alpha(s_1) - v$  com  $\alpha(s_0)$ .

Dessa forma,  $[\beta] \subset K_1$  e  $\alpha([s_0, s_1]) \cap T_v(K_1) \cup T_{-v}(K_1) = \emptyset$ . Segue que

$$[\beta] \cap T_v(\alpha([s_0, s_1])) = \emptyset = T_v[\beta] \cap \alpha([s_0, s_1]).$$

Seja  $\gamma$  a concatenação de  $\beta$  com  $\alpha|_{[s_0, s_1]}$ , como  $T_v(\gamma(\alpha(s_1) - v)) = \gamma(1)$  e  $[\gamma] \cap T_v([\gamma]) = \{\gamma(1)\}$  portanto,  $\gamma$  é um arco de translação para  $T_v$  juntando o  $x = \alpha(s_1) - v \in K_1$  com  $T_v(x) \in K_2$ . (Para facilitar o entendimento, veja novamente Figura 3.3).  $\square$

A seguinte proposição mostrará a existência do compacto  $K$ .

**Proposição 3.3.3.** *Diante de nossas hipóteses existe um inteiro  $M$  e um compacto  $K$  tal que,  $[0, 1]^2$  está contido em uma componente conexa limitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus K$  e*

$$K \subset \bigcup_{(i,v) \in \Sigma(M)} T_v(\hat{f}^i(O)).$$

*Demonstração.* Pelo Lema 3.1.1 segue que todo ponto no toro é ponto essencial, isto é, dado  $x \in \mathbb{T}^2$  e para todo  $\varepsilon > 0$ , segue que,

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(B_\varepsilon(x)) \text{ é essencial.}$$

Para facilitar notação denotaremos tal conjunto por  $A$ . Conforme já foi mostrado na seção 3.3,  $A$  é totalmente essencial. Consideremos  $\hat{U}$  como sendo o correspondente de  $A$  no plano, ou seja,

$$\hat{U} = \bigcup_{(i,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2} T_v(\hat{f}^i(B_\varepsilon(\hat{x}))).$$

É fácil ver que  $\hat{U}$  é invariante por translações inteiras, pois a projeção descarta inteiros, é aberto por ser pré imagem de abertos, e ainda segue da Observação 1.2.1 que  $\hat{U}$  é conexo. E ainda, o fato de  $\hat{U} \subset \mathbb{R}^2$  e, ser aberto e conexo implica que  $\hat{U}$  é conexo por caminhos. Dessa forma, dado  $\hat{y} \in \hat{U}$ , existem dois arcos conexos  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\alpha$  conecta  $\hat{y}$  com  $\hat{y} + (1, 0)$  e  $\beta$  conecta  $\hat{y}$  com  $\hat{y} + (0, 1)$ . Considere

$$\Gamma_\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T_{(1,0)}^n[\alpha] \quad \text{e} \quad \Gamma_\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T_{(0,1)}^n[\beta].$$

Observe que  $\Gamma_\alpha$  e  $\Gamma_\beta$  pertencem a  $\hat{U}$ . Fixe  $R \in \mathbb{Z}$ , tal que  $R > \max\{\|x\| : x \in [\alpha] \cup [\beta]\}$ . Seja  $x \in [\alpha]$ , observe que, se  $\max\{(x)_2 : x \in \Gamma_\alpha\} = \max\{(x)_2 : x \in [\alpha]\} < R$  e  $\min\{(x)_2 : x \in \Gamma_\alpha\} > -R$ , segue que,  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_\alpha$  tem duas componentes conexas. Uma contendo do semi-plano  $\{x : (x)_2 \geq R\}$  e outra contendo o semi-plano  $\{x : (x)_2 \leq R\}$ .

O mesmo ocorre se  $x \in [\beta]$ , isto é,  $\max\{(x)_1 : x \in \Gamma_\beta\} = \max\{(x)_1 : x \in [\beta]\} < R$  e  $\min\{(x)_1 : x \in \Gamma_\beta\} > -R$ , segue que,  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_\beta$  tem duas componentes conexas. Uma contendo do semi-plano  $\{x : (x)_1 \geq R\}$  e outra contendo o semi-plano  $\{x : (x)_1 \leq R\}$ .

Agora considere,

$$F = (\Gamma_\alpha - (0, R)) \cup (\Gamma_\alpha + (0, R + 1)) \cup (\Gamma_\beta - (R, 0)) \cup (\Gamma_\beta + (R + 1, 0)).$$

É fácil ver que  $F \subset \hat{U}$  e  $\mathbb{R}^2 \setminus F$  tem pelo menos duas componentes conexas, consideraremos a componente conexas que contém  $[0, 1]^2$  e está contida em  $[-2R, 2R + 1] \times [-2R, 2R + 1]$ , a qual denotaremos por  $W$ . Veja Figura 3.4.

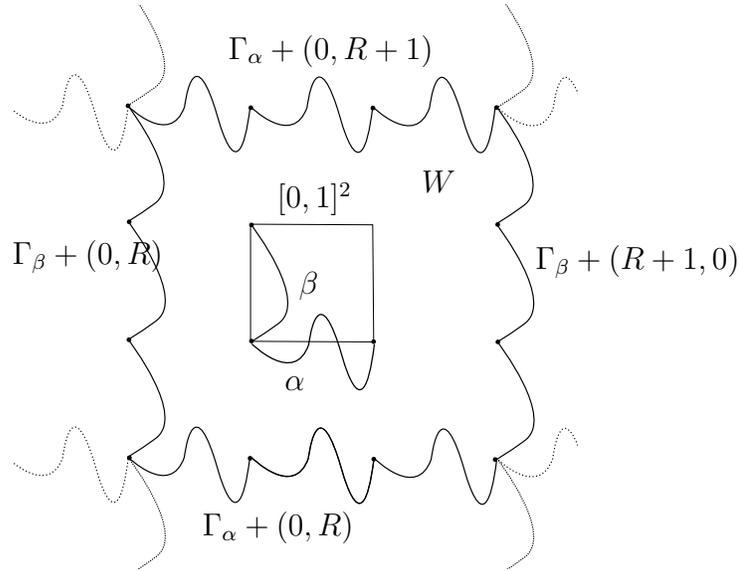


Figura 3.4: Demonstração da existência de um compacto contendo um domínio fundamental.

Seja  $K = \partial W$ , como  $K$  é subconjunto fechado de um compacto, então  $K$  é compacto. Note que  $[0, 1]^2$  está contido na componente conexas limitada, digamos,  $U$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus K$ . Lembrando que

$$\hat{U} = \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^2} \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} T_v(\hat{f}^i(B_\varepsilon(\hat{x})))$$

e como  $K \subset \hat{U}$ , segue que

$$\hat{U} = \bigcup_{(i,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2} (T_v \hat{f}^i(B_\varepsilon(\hat{x})))$$

é uma cobertura aberta de  $K$ , uma vez que  $K$  é compacto segue que,

$$K \subset T_{v_1}(\hat{f}^{i_1}(B_\varepsilon(\hat{x}))) \cup T_{v_2}(\hat{f}^{i_2}(B_\varepsilon(\hat{x}))) \cup \dots \cup T_{v_n}(\hat{f}^{i_n}(B_\varepsilon(\hat{x}))).$$

$$\Leftrightarrow K \subset \bigcup_{(i,v) \in \Sigma(M)} T_v \hat{f}^i(B_\varepsilon(\hat{x})).$$

□

Em virtude da Proposição 3.17 temos que

$$\hat{f}^n(\hat{f}^{j_w}(T_{v_w}(O))) \cap T_w(O) \neq \emptyset,$$

para simplificar a notação definiremos para cada  $(j, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$  o conjunto

$$I(j, v) = \{w \in \mathbb{Z}^2 : \hat{f}^j(T_v(O)) \cap T_w(O) \neq \emptyset\},$$

a partir do qual podemos concluir as seguintes observações.

**Observação 3.3.1.** Para quaisquer  $\bar{w}, v \in \mathbb{Z}^2$  e  $j \in \mathbb{Z}$ , temos  $T_{\bar{w}}(I(j, v)) = I(j, T_{\bar{w}}(v))$ .

Com efeito, seja  $u \in T_{\bar{w}}(I(j, v))$ , então  $u = w + \bar{w} \Leftrightarrow w = u - \bar{w}$ .

Note que  $w \in I(j, v)$ , sendo assim

$$\begin{aligned} \hat{f}^j(T_v(O)) \cap T_w(O) \neq \emptyset &\Leftrightarrow \\ \hat{f}^j(T_v(O)) \cap T_{u-\bar{w}}(O) \neq \emptyset &\Leftrightarrow \\ \hat{f}^j(T_{v+\bar{w}}(O)) \cap T_u(O) \neq \emptyset, \end{aligned}$$

portanto,  $u \in I(j, v + \bar{w}) = I(j, T_{\bar{w}}(v))$ .

**Observação 3.3.2.** Se  $R > 0$  e  $n > \frac{R}{\delta}$ , então

$$\mathbb{Z}^2 \cap B_R((0, 0)) \subset \bigcup_{(n,v) \in \Sigma(2M)} I(j + n, v).$$

De fato, pela Proposição 3.17 existe  $(j_R, v_R) \in \Sigma(2M)$  tal que

$$\hat{f}^n(\hat{f}^{j_R}(T_{v_R}(O))) \cap T_R(O) \neq \emptyset, \quad \text{ou seja,} \quad \hat{f}^{n+j_R}(T_{v_R}(O)) \cap T_R(O) \neq \emptyset,$$

que por definição é  $I(n + j_R, v_R)$ . Portanto,

$$\mathbb{Z}^2 \cap B_R((0, 0)) \subset \bigcup_{(i,v) \in \Sigma(2M)} I(j + n, v).$$

**Proposição 3.3.4.** *Seja  $i, k_0, k_1, j$  inteiros tais que  $k_0 < k_1$  e  $u \in \mathbb{Z}^2$ . Se ambos  $(i, k_0)$  e  $(i, k_1)$  pertencem a  $I(j, u)$ , então  $(i, k) \in I(j, u)$ , para cada inteiro  $k \in [k_0, k_1]$ . Do mesmo modo se ambos  $(k_0, i)$  e  $(k_1, i)$  pertencem a  $I(j, u)$ , então  $(k, i) \in I(j, u) \forall k \in [k_0, k_1]$ .*

*Demonstração.* Primeiramente mostraremos que  $(i, k) \in I(j, u), \forall k \in [k_0, k_1]$ , ou seja,  $f^j(T_u(O)) \cap T_{(i,k)}(O) \neq \emptyset$ .

Observe que considerando  $K_1 = O + (i, k), K_2 = \hat{f}^j(T_u(O))$  e  $v = (0, 1)$ , claramente as seguintes afirmações são satisfeitas.

**Afirmção 3.3.3.**  $K_1$  e  $K_2$  são subconjuntos conexos por caminhos de  $\mathbb{R}^2$ .

**Afirmção 3.3.4.**  $T_{(0,1)}(K_1) \cap (K_1) = \emptyset$  e  $T_{(0,1)}(K_2) \cap (K_2) = \emptyset$ , sendo assim temos:

- (i)  $T_{(0,1)}(\hat{f}^j(T_u(O))) \cap (\hat{f}^j(T_u(O))) = \emptyset$ .

De fato, suponha por contradição que  $T_{(0,1)}(\hat{f}^j(T_u(O))) \cap \hat{f}^j(T_u(O)) \neq \emptyset$

$$\Leftrightarrow T_{(0,1)+u}(O) \cap T_u(O) \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow T_{(0,1)+u-u}(O) \cap (O) \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow T_{(0,1)}(O) \cap O \neq \emptyset.$$

O que é um absurdo pois de acordo com nossas hipóteses o transladado inteiro de qualquer aberto  $0 \subset \mathbb{R}^2$  não intercepta  $O$ .

- (ii)  $T_{(0,1)}(T_{(i,k)}(O)) \cap (T_{(i,k)}(O)) = \emptyset$ .

Suponha por contradição que  $T_{(0,1)}(T_{(i,k)}(O)) \cap T_{(i,k)}(O) \neq \emptyset$

$$\Leftrightarrow T_{(i,1+k)}(O) \cap T_{(i,k)}(O) \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow T_{(i,1+k)-(i,k)}(O) \cap (O) \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow T_{(0,1)}(O) \cap (O) \neq \emptyset.$$

O que é um absurdo, conforme já mencionado o transladado inteiro de qualquer aberto  $0 \subset \mathbb{R}^2$  não intercepta  $O$ .

**Afirmação 3.3.5.** *Existem inteiros  $i, j$  com  $i \geq 0$  e  $j > 0$  tais que  $T_v^{-i}(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset$  e  $T_v^j(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset$ .*

*De fato, primeiro mostraremos a existência do  $i$ .*

(i)  $T_{(0,1)}^{-i}(O + (i, k)) \cap (\hat{f}^j(T_u(O))) \neq \emptyset$ .

*Por hipótese,  $\hat{f}^j(T_u(O)) \cap T_{(i,k_1)}(O) \neq \emptyset$ , usando algumas propriedades básicas temos que*

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \hat{f}^j(T_u(O)) \cap T_{(i,k_1)}(O) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow T_{(i,k_1-k+k)}(O) \cap \hat{f}^j(T_u(O)) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow T_{(i,k)+(0,k_1-k)}(O) \cap \hat{f}^j(T_u(O)) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow T_{(0,k_1-k)}(O + (i, k)) \cap \hat{f}^j(T_u(O)) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow T_{(0,1)}^{k_1-k}(O + (i, k)) \cap \hat{f}^j(T_u(O)) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

*Portanto, nesse caso  $i = k_1 - k$ .*

*Resta mostrar a existência do  $j$ , para isto mostraremos a seguinte afirmação.*

(ii)  $T_{(0,1)}^j(O + (i, k)) \cap \hat{f}^j(T_u(O)) \neq \emptyset$ .

*Por hipótese,  $\hat{f}^j(T_u(O)) \cap T_{(i,k_0)}(O) \neq \emptyset$ , novamente usando algumas propriedades básicas obtemos*

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \hat{f}^j(T_u(O)) \cap T_{(i,k_0)}(O) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow T_{(i,k_0-k+k)}(O) \cap \hat{f}^j(T_u(O)) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow T_{(0,k_0-k)+(i,k)}(O) \cap \hat{f}^j(T_u(O)) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow T_{(0,k_0-k)}(O + (i, k)) \cap \hat{f}^j(T_u(O)) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow T_{(0,1)}^{k_0-k}(O + (i, k)) \cap \hat{f}^j(T_u(O)) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

*Portanto, nesse caso  $j = k_0 - k$ .*

Logo, de acordo com a Proposição 3.3.2 segue que  $K_1$  intercepta  $K_2$ , ou melhor,

$$\hat{f}^j(T_u(O)) \cap T_{(i,k)}(O) \neq \emptyset,$$

em outras palavras,  $(i, k) \in I(j, u)$  para cada  $k \in [k_0, k_1]$ .

Agora mostraremos que  $(k, i) \in I(j, u)$  para cada  $k \in [k_0, k_1]$ , ou seja,

$$\hat{f}^j(T_u(O)) \cap T_{(k,i)}(O) \neq \emptyset.$$

O procedimento é análogo ao caso anterior, basta considerar

$$K_1 = T_{(k,i)}(O), \quad K_2 = \hat{f}^j(T_u(O)) \text{ e } v = (1, 0).$$

Dessa forma os três itens seguintes são imediatos.

- (i)  $K_1$  e  $K_2$  são subconjuntos conexos por caminhos de  $\mathbb{R}^2$ .
- (ii)  $T_{(1,0)}(K_1) \cap (K_1) = \emptyset$  e  $T_{(1,0)}(K_2) \cap (K_2) = \emptyset$ , sendo assim temos:

$$T_{(1,0)}(\hat{f}^j(T_u(O))) \cap (\hat{f}^j(T_u(O))) = \emptyset \text{ e}$$

$$T_{(1,0)}(T_{(i,k)}(O)) \cap (T_{(i,k)}(O)) = \emptyset.$$

- (iii) Existem inteiros  $i, j$  com  $i \geq 0$  e  $j > 0$  tais que,

$$T_{(0,1)}^{-i}(O + (i, k)) \cap (\hat{f}^j(T_u(O))) \neq \emptyset \text{ e}$$

$$T_{(0,1)}^j(O + (i, k)) \cap \hat{f}^j(T_u(O)) \neq \emptyset.$$

Portanto, novamente pela Proposição 3.3.2 segue que  $\hat{f}^j(T_u(O)) \cap T_{(k,i)}(O) \neq \emptyset$ , isto é,

$$(k, i) \in I(j, u) \quad \forall k \in [k_0, k_1].$$

□

O seguinte lema é um dos principais resultados a partir do qual demonstraremos duas propriedades que serão fundamentais para a prova do Teorema 3.2.1.

Para simplificar a notação para todo  $v \in \mathbb{R}^2$  e  $L \in \mathbb{N}$ , defina a bola fechada quadrada de centro  $L$  e raio  $w$  como sendo:

$$S(v, L) = \{w \in \mathbb{Z}^2 : \|w - v\|_\infty \leq L\}.$$

**Lema 3.3.1.** *Dado  $C_1 > 0$  existe  $C_2 > 0$  tal que, para qualquer  $w_1 \in \mathbb{Z}^2$ ,  $C > C_2$ , e  $n > \frac{(\|w_1\| + \sqrt{2}C)}{\delta}$  existem  $w_2 \in \mathbb{Z}^2$  e  $\bar{j} \in [-2M, 2M] \cap \mathbb{Z}$ , tal que*

$$S(w_2, C_1) \subset S(w_1, C) \cap I(n + \bar{j}, \bar{w}).$$

*Demonstração.* Defina as constantes auxiliares  $L = (4M + 1)^3 + 1$ , com cardinalidade maior que  $\Sigma(2M)$ .

$R = 2M + \|\bar{w}\|_\infty$ ,  $D = 2C_1 + 2R + 1$  e  $C_2 = L^L D$ . Note que  $\|w_1\| + \sqrt{2}C > T$  então  $S(w_1, C) \subset B((0, 0), T)$ . Por hipótese  $T > 0$  e  $n > \frac{T}{\delta}$ , então pela Proposição 3.17, existem  $(j_T, v_T) \in \Sigma(2M)$ , tais que  $T \in I(n + j_T, v_T)$ . Isto implica que

$$B((0, 0), T) \subset \bigcup_{(j,v) \in \Sigma(2M)} (n + j, v).$$

Portanto,

$$S(w_1, C) \subset \bigcup_{(j,v) \in \Sigma(2M)} (n + j, v). \quad (3.5)$$

Agora, considere  $(i_0, k_0)$  inteiros tal que  $(i_0, k_0) = w_1 - (c, c)$ .

Note que  $(L - 1) \cdot D = L \cdot D - D < C_2 < C$ . Sendo assim faz sentido definirmos para  $1 \leq s \leq L - 1$ ,  $k_s = k_0 + s \cdot D$ . E para  $1 \leq s \leq L$ , podemos definir  $i_s \in \mathbb{Z}$  e  $(j_s, v_s) \in \Sigma(2M)$  satisfazendo as seguintes propriedades:

- **(1)** :  $i_{s-1} \leq i_s \leq i_{s-1} + \frac{C_2}{L^{s+1}}$ ,

Nos diz que quanto maior o índice menor é o intervalo, sendo assim o menor intervalo tem tamanho  $\frac{D}{L}$  e o maior tem tamanho  $\frac{C_2}{L^2}$ .

- **(2)** :  $\forall i \in [i_s, i_s + \frac{C_2}{L^s}]$  o ponto  $(i, k_{s-1}) \in I(n + j_s, v_s)$ .

Nosso objetivo agora é mostrar que (1) e (2) estão bem definidos. Para isto, basta definirmos de maneira recursiva  $i_{s+1}$  e  $(j_{s+1}, v_{s+1})$  e mostrar que ambos satisfazem (1) e (2).

Para isto, considere os pontos da forma  $(i_{s,r}, k_s)$  com  $0 \leq r \leq L - 1$ , onde

$$i_{s,r} = i_s + r \cdot \frac{C_2}{L^{s+1}} \quad (3.6)$$

Note que

$$i_{s,r} = i_s + (L - 1) \cdot \frac{C_2}{L^{s+1}} = i_s + L \cdot \frac{C_2}{L^{s+1}} - \frac{i_s}{L^{s+1}} \leq i_s + \frac{C_2}{L^s}. \quad (3.7)$$

Observe que por (3.6) temos  $i_s \leq i_{s,r}$ ,  $\forall r \in [0, L - 1]$  e por (3.7) segue que

$$i_{s,r} \leq i_s + \frac{C_2}{L^s} \quad \forall r \in [0, L - 1].$$

Daí,

$$i_s \leq i_{s,r} \leq i_s + \frac{C_2}{L^s} \quad \forall r \in [0, L-1]. \quad (3.8)$$

Por (1) temos que

$$i_s \leq i_{s-1} + \frac{C_2}{L^{s-1}} - \frac{C_2}{L^s} = i_{s-1} + L \cdot \frac{C_2}{L^s} - \frac{C_2}{L^s} = i_{s-1} + (L-1) \cdot \frac{C_2}{L^s}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} i_s &\leq i_{s-1} + (L-1) \cdot \frac{C_2}{L^s} \\ &\leq i_{s-2} + (L-1) \cdot \frac{C_2}{L^{s-1}} + (L-1) \cdot \frac{C_2}{L^{s-1}} \\ &\leq i_{s-3} + (L-1) \cdot \frac{C_2}{L^{s-2}} + (L-1) \cdot \frac{C_2}{L^{s-1}} + (L-1) \cdot \frac{C_2}{L^s} \\ &= i_{s-3} + L \cdot \frac{C_2}{L^{s-2}} - \frac{C_2}{L^{s-2}} + L \cdot \frac{C_2}{L^{s-1}} - \frac{C_2}{L^{s-1}} + L \cdot \frac{C_2}{L^s} - \frac{C_2}{L^s} \\ &= i_{s-3} + L^2 \cdot L \cdot \frac{C_2}{L^s} - L^2 \cdot \frac{C_2}{L^s} + L^2 \cdot \frac{C_2}{L^s} - L \cdot \frac{C_2}{L^s} + L \cdot \frac{C_2}{L^s} - \frac{C_2}{L^s} \\ &= i_{s-3} - \frac{C_2}{L^{s-3}} - \frac{C_2}{L^s} \\ &= i_0 - C_2 - \frac{C_2}{L^s}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$i_s \leq i_0 + C_2 - \frac{C_2}{L^s}.$$

Então,

$$\begin{aligned} i_{s,r} &\leq i_0 + C_2 - \frac{C_2}{L^s} + (L-1) \cdot \frac{C_2}{L^{s+1}} \\ &= i_0 + C_2 - \frac{C_2}{L^s} + L \cdot \frac{C_2}{L^s} \cdot L^{-1} - \frac{C_2}{L^{s+1}} \\ &\leq i_0 + C_2 \\ &\leq i_0 + C. \end{aligned}$$

Assim para  $k_s$  fixado segue que  $(i_{s,r}, k_s) \in S(w_1, c)$ ,  $\forall r \in [0, L-1]$  e por (3.5) existe  $(j_{s,r}, v_{s,r}) \in \Sigma(2M)$  tal que  $(i_{s,r}, k_s) \in I(n + j_{s,r}, v_{s,r})$ .

Como a cardinalidade de  $L$  é maior que a cardinalidade de  $\Sigma(2M)$ , pelo princípio da

casas dos pombos<sup>1</sup>, existem  $r_1 < r_2$  tais que  $(j_{s,r_1}, v_{s,r_1}) = (j_{s,r_2}, v_{s,r_2})$ , ou seja,  $(i_{s,r_1}, k_s)$  e  $(i_{s,r_2}, k_s) \in I(n + j_{s,r_1}, v_{s,r_1})$ . Pela Proposição 3.3.4 segue que

$$\forall i \in [i_{s,r_1}, i_{s,r_2}] \text{ o ponto } (i, k_s) \in I(n + j_{s,r_1}, v_{s,r_1}).$$

Note que

$$i_{s,r_1} = i_s + r_1 \cdot \frac{C_2}{L^s + 1} \text{ então } i_{s,r_2} = i_{s,r_1} + (r_2 - r_1) \cdot \frac{C_2}{L^{s+1}}.$$

Como  $r_2 - r_1 \geq 1$  temos que

$$i_{s,r_2} \leq i_{s,r_1} + \frac{C_2}{L^{s+1}}.$$

Portanto,

$$\forall i \in i_{s,r_1} \leq i \leq i_{s,r_1} + \frac{C_2}{L^{s+1}} \text{ o ponto } (i, k_s) \in I(n + j_{s,r_1}, v_{s,r_1}). \quad (3.9)$$

Defina

$$i_{s+1} = i_{s,r_1} \quad (3.10)$$

e

$$(j_{s+1}, v_{s+1}) = (j_{s,r_1}, v_{s,r_1}). \quad (3.11)$$

Observe que (3.8) é válido  $\forall r \in [0, L - 1]$ , em particular é válido para  $r_1$ , sendo assim por (3.10) segue que  $i_s \leq i_{s+1} \leq i_s + \frac{C_2}{L^s}$  e portanto (1) é satisfeito. E ainda por (3.15), vem

$$\forall i \in i_{s+1} \leq i \leq i_{s+1} + \frac{C_2}{L^{s+1}} \text{ o ponto } (i, k_s) \in I(n + j_{s,r_1}, v_{s,r_1}).$$

E assim (2) é satisfeito. Portanto,  $i_s$  e  $(j_s, v_s)$  estão bem definidos  $\forall 1 \leq s \leq L$ .

Como a cardinalidade de  $\Sigma(2M)$  é menor que a cardinalidade de  $L$ , podemos usar novamente o princípio da casa dos pombos. Assim existem  $s_1 < s_2$  tais que  $(j_{s_1}, v_{s_1}) = (j_{s_2}, v_{s_2})$  e pela propriedade (2) temos que

$$\forall i \in \left[ i_{s_2}, i_{s_2} + \frac{C_2}{L^{s_2}} \right] \text{ o ponto } (i, k_{s_2-1}) \in I(n + j_{s_2}, v_{s_2}).$$

---

<sup>1</sup>Essa é uma ideia simples, mas bastante útil: se temos  $n$  caixas (as casas dos pombos) e queremos distribuir  $k$  objetos (os pombos) entre as caixas, com  $k > n$ , então certamente uma das caixas terá mais de um objeto.

Como  $i_{s_1}$  e  $i_{s_2} + \frac{C_2}{L^{s_2}} < i_{s_1} + \frac{C_2}{L^{s_1}}$ . Então,  $[i_{s_2}, i_{s_2} + \frac{C_2}{L^{s_2}}] \subset [i_{s_1}, i_{s_1} + \frac{C_2}{L^{s_1}}]$ . Novamente pela propriedade (2) temos que

$$\forall i \in \left[ i_{s_1}, i_{s_1} + \frac{C_2}{L^{s_1}} \right] \text{ o ponto } (i, k_{s_1-1}) \in I(n + j_{s_1}, v_{s_1}).$$

Portanto,  $(i, k_{s_2-1}), (i, k_{s_1-1}) \in I(n + j_{s_2}, v_{s_2}) = I(n + j_{s_1}, v_{s_1})$ . Sendo assim,

$$\forall i \in i_{s_2} \leq i \leq i_{s_2} + \frac{C_2}{L^{s_2}}, \text{ todos os inteiros } (i, k_{s_1}) \text{ e } (i, k_{s_2}) \text{ pertencem a } I(n + j_{s_2}, v_{s_2}).$$

Logo, pela Proposição 3.3.4, temos

$$\forall k \in [k_{s_1-1}, k_{s_2-1}], \text{ o ponto } (i, k) \in I(n + j_{s_2}, v_{s_2}).$$

Em suma,

$$\left\{ (i, k) : i \in \left[ i_{s_2}, i_{s_2} + \frac{C_2}{L^{s_2}} \right] \text{ e } k \in [k_{s_1-1}, k_{s_2-1}] \right\} \subset I(n + j_{s_2}, v_{s_2}).$$

Note que  $\frac{C_2}{L^{s_2}} \geq D$  e  $k_{s_2-1} - k_{s_1-1} \geq D$ . E conforme definido no início da demonstração  $D = 2C_1 + 2R + 1$ , então se definirmos

$$w_2 = (i_{s_2}, k_{s_1-1}) + (R + C_1 + 1, R + C_1 + 1), \text{ temos que } S(w_2, R + C_1) \subset I(n + j_{s_2}, v_{s_2}),$$

e ainda como  $C > R + C_1$  segue que

$$S(w_2, R + C_1) \subset S(w_1, C).$$

Assim temos

$$S(w_2, R + C_1) \subset S(w_1, C) \cap I(n + j_{s_2}, v_{s_2}).$$

**Afirmção 3.3.6.** *Uma vez que  $w_2$  e  $v_{s_2}$  pertencem a  $\mathbb{Z}^2$  e  $n + j_{s_2} \in \mathbb{Z}$  temos que se  $S(w_2, R + C_1) \subset I(n + j_{s_2}, v_{s_2})$ , então  $S(w_2, R + C_1 - \|v_{s_2} - \bar{w}\|_\infty) \subset I(n + j_{s_2}, v_{s_2})$ .*

*De fato, dado  $z \in S(w_2, R + C_1 - \|v_{s_2} - \bar{w}\|_\infty)$  temos que*

$$\|z - w_2\|_\infty \leq R + C_1 - \|v_{s_2} - \bar{w}\|_\infty \Leftrightarrow \|z - w_2\|_\infty + \|v_{s_2} - \bar{w}\|_\infty \leq R + C_1$$

*Como*

$$\|z - w_2 + v_{s_2} - \bar{w}\|_\infty \leq \|z - w_2\|_\infty + \|v_{s_2} - \bar{w}\|_\infty,$$

segue que

$$\|(z + v_{s_2} - w_2) - \bar{w}\|_\infty \leq R + C_1.$$

Então,

$$(z + v_{s_2} + \bar{w}) \in S(w_2, R + C_1)$$

Por hipótese,  $S(w_2, R + C_1) \subset I(n + j_{s_2}, v_{s_2})$ , logo  $(z + v_{s_2} + \bar{w}) \in I(n + j_{s_2}, v_{s_2})$ , fazendo a seguinte translação temos

$$T_{\bar{w}-v_{s_2}}(z + v_{s_2} - \bar{w}) \in T_{\bar{w}-v_{s_2}}I(n + j_{s_2}, v_{s_2}),$$

pela Observação, 3.3.1

$$T_{\bar{w}-v_{s_2}}(z + v_{s_2} - \bar{w}) \in I(n + j_{s_2}, T_{\bar{w}-v_{s_2}}(v_{s_2})) = I(n + j_{s_2}, \bar{w}).$$

Como  $T_{\bar{w}-v_{s_2}}(z + v_{s_2} - \bar{w}) = z$  então  $z \in I(n + j_{s_2}, \bar{w})$ .

Desta forma, de acordo com a Afirmação 3.3.6 concluímos que

$$S(w_2, R + C_1 - \|v_{s_2} - \bar{w}\|_\infty) \subset S(w_1, C) \cap I(n + j_{s_2}, v_{s_2}).$$

Visto que  $\|v_{s_2} - \bar{w}\|_\infty \leq R$  segue que  $S(w_2, C_1) \subset S(w_1, C) \cap I(n + j_{s_2}, v_{s_2})$  e ainda considerando  $j_{s_2} = \bar{j}$  e  $v_{s_2} = \bar{w}$  temos  $S(w_2, C_1) \subset S(w_1, C) \cap I(n + \bar{j}, \bar{w})$ , como queríamos.

□

Denotaremos o ponto simétrico de  $v$  com relação a  $\bar{w}$  por  $R_{\bar{w}}(v) = 2\bar{w} - v = T_{\bar{w}-v}^2(v)$ .

**Proposição 3.3.5.** *Diante das nossas hipóteses mostraremos a existência de inteiros  $k_1, k_2$  e  $\bar{v}$  tal que  $S(\bar{v}, 1) \subset I(k_1, \bar{w})$  e  $S(R_{\bar{w}}\bar{v}, 1) \subset I(k_2, \bar{w})$ .*

*Demonstração.* Para mostrar a existência de  $k_1$  e  $k_2$  e  $\bar{v}$ , aplicaremos o Lema 3.3.1 três vezes.

Seja  $C_1 = 1$  então existe  $C_2 > 0$  tal que, para qualquer  $w_1 \in \mathbb{Z}^2$ ,  $C > C_2$ , e  $n > \frac{(\|w_1\| + \sqrt{2}C)}{\delta}$  existem  $w_2 \in \mathbb{Z}^2$  e  $\bar{j} \in [-2M, 2M] \cap \mathbb{Z}$ , tais que

$$S(w_2, 1) \subset S(w_1, C) \cap I(n + \bar{j}, \bar{w}). \quad (3.12)$$

Agora seja  $C_1 = C_2 + 1$  e  $w_1 = (0, 0)$  então existe  $C'_2 > 0$  tal que para qualquer  $C > C'_2$  e  $n > \frac{(\|w_1\| + \sqrt{2}C)}{\delta}$  existem  $v_1 \in \mathbb{Z}^2$  e  $j_1 \in [-2M, 2M] \cap \mathbb{Z}$ , tais que

$$S(v_1, C_2 + 1) \subset S((0, 0), C'_2 + 1) \cap I(n_1 + j_1, \bar{w}). \quad (3.13)$$

Como (4.2) é válida para qualquer  $w_1 \in \mathbb{Z}^2$ , então podemos escolher  $w_1 = R_{\bar{w}}(v_1)$ . Dessa forma para  $C > C_2$ , e  $n > \frac{(\|w_1\| + \sqrt{2}C)}{\delta}$  existem  $v_2 \in \mathbb{Z}^2$  e  $j_2 \in [-2M, 2M] \cap \mathbb{Z}$ , tais que

$$S(v_2, 1) \subset S(R_{\bar{w}}(v_1), C_2 + 1) \cap I(n_2 + j_2, \bar{w}). \quad (3.14)$$

Note que considerando  $v_2 = \bar{v}$  e  $k_1 = n_2 + j_2$ , por (3.14) segue que

$$S(\bar{v}, 1) \subset I(k_1, \bar{w}).$$

Agora observe que

$$S(R_{\bar{w}}(\bar{v}), 1) = R_{\bar{w}}(S(\bar{v}, 1)) \subset R_{\bar{w}}(S(R_{\bar{w}}(\bar{v}_1), C_2 + 1)) = S(v_1, C_2 + 1).$$

Fazendo  $k_2 = n_1 + j_1$  por (3.13) segue que  $S(R_{\bar{w}}(\bar{v}), 1) \subset I(k_2, \bar{w})$ .

Para um melhor entendimento veja Figura 3.5. □

**Proposição 3.3.6.** *Para cada  $R > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, se  $n > n_0$  então  $\hat{f}^n(O)$  intercepta cada um dos quatro conjuntos*

$$U_1 = \{(x, y) : x > R, y > R\}, \quad U_2 = \{(x, y) : x < -R, y > R\},$$

$$U_3 = \{(x, y) : x > R, y < -R\}, \quad U_4 = \{(x, y) : x < -R, y < -R\}.$$

*Demonstração.* Mostraremos que existe  $n_0$  tal que se  $n > n_0$  então

$$\hat{f}^n(O) \cap U_i \neq \emptyset \text{ para todo } i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Considere  $C_1$  tal que  $O \subset B_{C_1}((0, 0))$  e seja  $C_2 = \max_{x \in \mathbb{R}^2} \|\hat{f}(x) - x\|$ , que é finito pois  $f$  é homotópica à identidade.

Seja  $C > 2M(C_2 + 1) + C_1 + R$ , inteiro. E considere também

$$w_1 = (C, C), w_2 = (C, -C), w_3 = (-C, C) \text{ e } w_4 = (-C, -C).$$

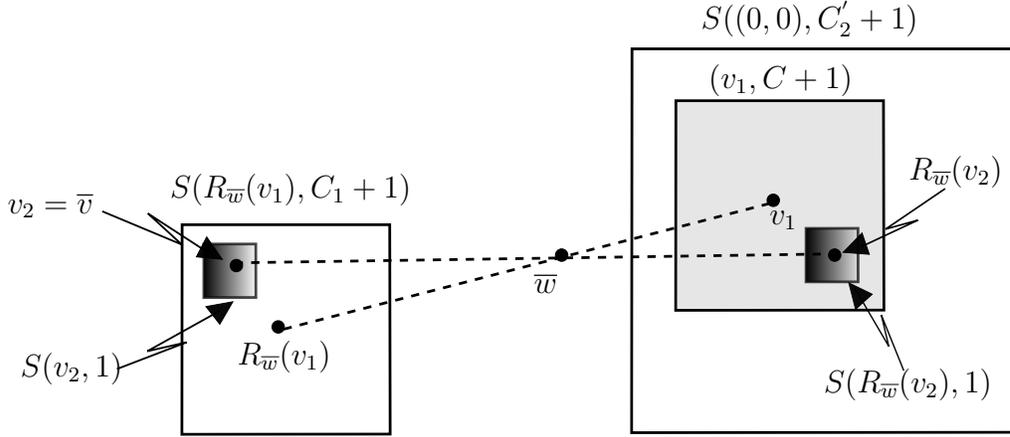


Figura 3.5: Ilustração da existência de inteiros tal que  $S(\bar{v}, 1) \subset I(k_1, \bar{w})$  e  $S(R_{\bar{w}}\bar{v}, 1) \subset I(k_2, \bar{w})$ .

Lembrando que estamos considerando  $(0, 0)$  no interior do conjunto de rotação, sendo assim, para  $n$  suficientemente grande

$$\frac{\sqrt{2}C}{\delta} \in \text{int}\rho(\hat{f})$$

e portanto segue da Proposição 3.3.1 que para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  existem  $(j_i, v_i) \in \Sigma(2M)$  tais que  $w_i \in I(n + j_i, v_i)$ , isto é,

$$\hat{f}^n(\hat{f}^{j_i}(T_{v_i}(O))) \cap T_{w_i}(O) \neq \emptyset.$$

Como  $T_{w_i}(O) \subset T_{w_i}(B_{c_1}(0, 0)) = B_{c_1}(w_i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , segue que  $\hat{f}^n(\hat{f}^{j_i}(T_{v_i}(O)))$  intercepta  $B_{c_1}(w_i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Note que

$$C_2 = \max_{x \in \mathbb{R}^2} \left\| \hat{f}(x) - x \right\|, \Rightarrow j_i \cdot C_2 = \max_{x \in \mathbb{R}^2} \left\| \hat{f}^{j_i}(x) - x \right\|,$$

sendo assim,

$$\left\| \hat{f}^{n+j_i}(x) - \hat{f}^n(x) \right\| \leq |j_i| \cdot C_2 \leq 2MC_2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

Dessa forma,

$$\hat{f}^n(T_{v_i}O) \cap B_{c_1+2MC_2}(w_i) \neq \emptyset.$$

Como  $\hat{f}$  é homotópica à identidade então

$$T_{v_i}(\hat{f}^n(O)) \cap B_{c_1+2MC_2}(w_i) \neq \emptyset \Leftrightarrow \hat{f}^n(O) \cap T_{v_i}^{-1}(B_{c_1+2MC_2}(w_i)) \neq \emptyset.$$

Uma vez que  $\|v_i\|_\infty \leq 2M$ , segue que,

$$T_{v_i}^{-1}(B_{c_1+2MC_2}(w_i)) \subset B_{c_1+2M(C_2+1)}(w_i) \subset U_i.$$

Portanto,  $\hat{f}^n(O) \cap U_i \neq \emptyset$ . Para facilitar o entendimento veja Figura 3.6. □

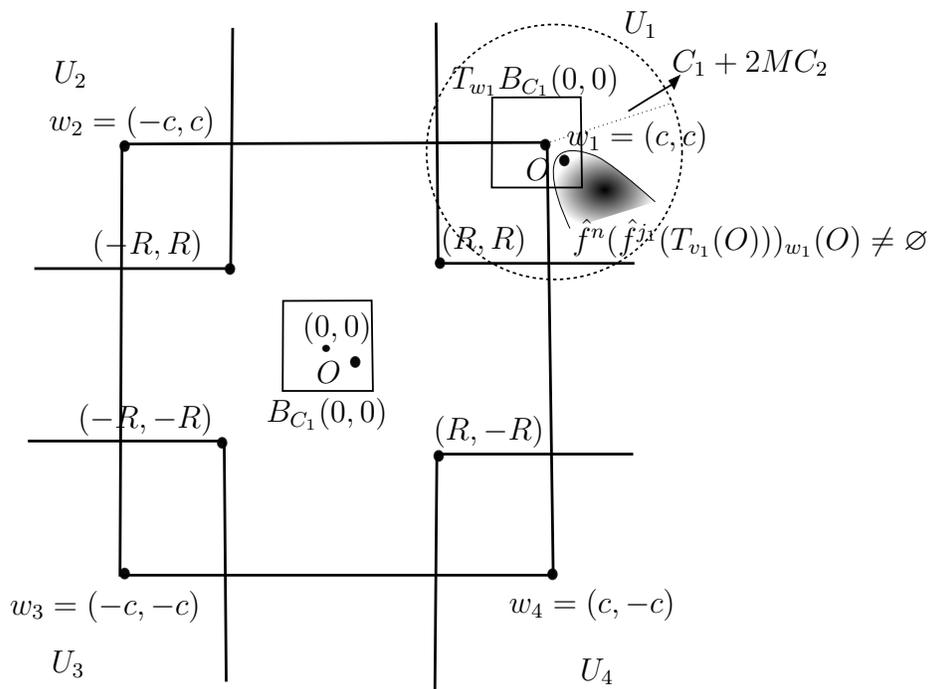


Figura 3.6: Ilustração da prova da Proposição 3.3.6.

**Proposição 3.3.7.** *Suponha que  $\hat{f}^n(O) \cap T_{\bar{w}}(O) = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Seja  $k \in \mathbb{N}$  e  $v \in \mathbb{Z}^2$  tais que  $S(v, 1) \subset I(k, \bar{w})$ . Então para cada  $n$  suficientemente grande, temos que  $v \in I(n, (0, 0))$ .*

*Demonstração.* Suponha por contradição que existe uma sequência  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  com  $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$  tal que  $\forall i \in \mathbb{N}, v \notin I(n_i, (0, 0))$ , ou seja,

$$\hat{f}^{n_i}(O) \cap T_v(O) = \emptyset,$$

assim pela Proposição 3.3.4, segue que não podemos ter  $v \pm(0, 1)^2 \notin I(n_i, (0, 0))$  para uma mesma iterada. E o mesmo ocorre com  $v \pm(0, 1)$ , ou seja,  $v \pm(0, 1) \notin I(n_i, (0, 0))$  simultaneamente.

Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que para muitos valores de  $i$ ,  $v \pm(1, 0)$  e  $v \pm(0, 1)$  não pertencem a  $I(n_i, (0, 0))$ .

Visto que os outros casos são análogos a partir de agora consideraremos apenas  $v + (1, 0)$  e  $v + (0, 1)$ , ou seja,

$$\hat{f}^{n_i}(O) \cap (T_v(O) \cup T_{v+(1,0)}(O) \cup T_{v+(0,1)}(O)) = \emptyset. \quad (3.15)$$

Como já foi mencionado (3.15) é válida para muitos infinitos valores de  $i$ , sendo assim podemos extrair uma subsequência de  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  e assumir que (3.15) vale para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Por hipótese,  $\hat{f}^k T_{\bar{w}}(O) \cap T_{(1,0)}(T_v(O)) \neq \emptyset$  e  $\hat{f}^k T_{\bar{w}}(O) \cap T_{(0,1)} T_v(O) \neq \emptyset$ .

Note que, considerando  $K_1 = T_v(O)$ ,  $K_2 = \hat{f}^k T_{\bar{w}}(O)$  e  $v = (0, 1)$  é imediato que:

- $K_1$  e  $K_2$  são subconjuntos conexos por caminhos de  $\mathbb{R}^2$ ;
- $T_{(1,0)}(T_v(O)) \cap (T_v(O)) = \emptyset$  e  $T_{(1,0)}(\hat{f}^k T_{\bar{w}}(O)) \cap (\hat{f}^k T_{\bar{w}}(O)) = \emptyset$ .
- Existem inteiros  $i = 1$  e  $j = 1$  tais que

$$T_{(1,0)}^{-1}(T_v(O)) \cap \hat{f}^k(T_{\bar{w}}(O)) \neq \emptyset \text{ e } T_{(1,0)}^1(T_v(O)) \cap \hat{f}^k(T_{\bar{w}}(O)) \neq \emptyset.$$

Dessa forma, pela Proposição 3.3.2,  $T_v(O)$  intercepta  $\hat{f}^k T_{\bar{w}}(O)$ . E ainda, existe um arco de translação  $\beta \subset T_v(O) \cup \hat{f}^k T_{\bar{w}}(O)$  para  $T_{(0,1)}$ , juntando os pontos  $x_1 \in T_v(O)$  com

---

<sup>2</sup> $v \pm(0, 1) = v + (0, 1)$  e  $v - (0, 1)$

$T_{(0,1)}(x_1) \in \hat{f}^k T_{\bar{w}}(O)$ . Uma vez que  $\hat{f}^n(O) \cap T_{\bar{w}}(O) = \emptyset$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$  segue que para cada inteiro  $k$

$$\hat{f}^{n+k}(O) \cap \hat{f}^k T_{\bar{w}}(O) = \emptyset \Leftrightarrow \hat{f}^{n_i}(O) \cap \hat{f}^k T_{\bar{w}}(O) = \emptyset, \forall i \in \mathbb{N}.$$

E ainda como  $v \notin I(n_i, (0, 0))$ , isto é,  $\hat{f}^{n_i}(O) \cap T_v(O) = \emptyset$ , concluimos que

$$[\beta] \cap \hat{f}^{n_i}(O) = \emptyset \forall i \in \mathbb{N}.$$

Agora considerando  $K_1$  e  $K_2$  como anteriormente e  $v = (1, 0)$  novamente a proposição (3.3.2) garante a existência de arco de translação  $\alpha$  para  $T_{(1,0)}$ , tal que  $[\alpha] \subset T_v(O) \cup \hat{f}^k T_{\bar{w}}(O)$ , onde  $\alpha$  conecta  $x_2 \in T_v(O)$  com  $T_{(1,0)}(x_2) \in \hat{f}^k T_{\bar{w}}(O)$ . E ainda  $[\alpha] \cap \hat{f}^{n_i}(O) = \emptyset \forall i \in \mathbb{N}$ , pelo mesmo argumento  $\beta$  é disjunto de  $\hat{f}^k T_{\bar{w}}(O)$ . Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow T_v(O)$  um arco de translação conectando  $x_1$  a  $x_2$ . Defina

$$\alpha^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_{(1,0)}^i([\alpha]), \alpha^- = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_{(1,0)}^{-i}([\alpha]), \beta^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_{(0,1)}^i([\beta]) \text{ e } \beta^- = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_{(0,1)}^{-i}([\beta]).$$

Note que,  $\hat{f}^{n_i}(O)$  é disjunto de  $[\alpha] \cup [\beta] \cup [\gamma]$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ , e  $[\alpha], [\beta], [\gamma]$ , são arcos de translações disjuntos. Segue do Lema 1.2.1 que  $\hat{f}^{n_i}(O)$  é disjunto de pelo menos um dos quatro conjuntos abaixo:

$$F_1 = \alpha^+ \cup \beta^+ \cup [\alpha], F_2 = \alpha^- \cup \beta^+ \cup [\alpha], F_3 = \alpha^- \cup \beta^- \cup [\alpha], F_4 = \alpha^+ \cup \beta^- \cup [\alpha].$$

Em outras palavras, existe  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  tal que  $\hat{f}^{n_i}(O) \cap F_j = \emptyset$  para infinitos valores de  $i$ . Assumindo  $j = 1$ , visto que os outros casos são análogos, e extraindo novamente uma subsequência de  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  podemos assumir que  $\hat{f}^{n_i}(O) \cap F_1 = \emptyset$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Seja

$$R_1 = \max_{(x,y) \in \alpha} \|(x,y)\|, R_2 = \max_{(x,y) \in \beta} \|(x,y)\|, R_3 = \max_{(x,y) \in \gamma} \|(x,y)\|.$$

E ainda note que,

$$\max_{(x,y) \in \alpha^+} y \leq R_1 \text{ e } \max_{(x,y) \in \beta^+} x \leq R_2.$$

Finalmente, seja  $R = \max\{R_1, R_2, R_3\}$ , de modo que

$$F_1 \subset \{(x,y) : |x| \leq R\} \cup \{(x,y) : |y| \leq R\}.$$

Note que os conjuntos

$$U_1 = \{(x, y) : x > R, y > R\} \quad \text{e} \quad U_2 = \{(x, y) : y < -R, y > R\}.$$

são subconjuntos de componentes conexas disjuntas de  $\mathbb{R}^2 \setminus F_1$ , então para todo  $i \in \mathbb{N}$  o conjunto  $\hat{f}^{n_i}(O)$  é disjunto de  $U_1$  ou  $U_2$ .

O que é um absurdo, pois pela Proposição 3.3.6 existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que

$$\hat{f}^{n_i}(O) \cap U_1 \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \hat{f}^{n_i}(O) \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Para entender melhor veja Figura 3.7.

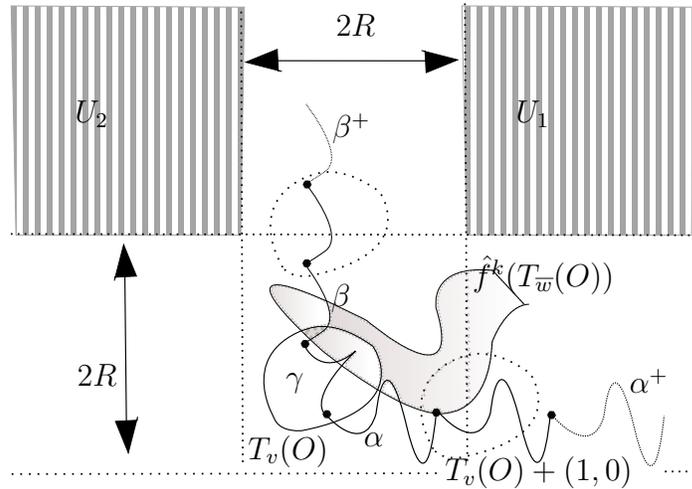


Figura 3.7: Ilustração da prova da Proposição 3.3.7.

□

### 3.4 Prova do Teorema 3.2.1

Agora demonstraremos o Teorema 3.2.1, usado na prova do Teorema Principal desta dissertação. Nas hipóteses do Teorema 3.2.1 provaremos que para cada  $w \in \mathbb{Z}^2$  existe algum  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\hat{f}^n(O) \cap T_w(O) \neq \emptyset$ .

Com efeito, seja  $O \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto, conexo tal que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\pi(O)) \quad \text{é totalmente essencial}$$

e  $\overline{\pi(O)}$  é inessencial. Suponha por contradição que para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe  $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$ , tal que

$$\hat{f}^n(O) \cap T_{\bar{w}}(O) = \emptyset. \quad (3.16)$$

E como a Proposição 3.3.5 garante que existem  $k_1, k_2$  inteiros e  $\bar{v} \in \mathbb{Z}^2$  tais que

$$S(\bar{v}, 1) \subset I(k_1, \bar{w}) \quad \text{e} \quad S(2\bar{w} - \bar{v}, 1) \subset I(k_2, \bar{w})$$

Segue da Proposição 3.3.7 que para cada  $n$  suficientemente grande  $\bar{v}$  e  $2\bar{w} - \bar{v}$  pertencem a  $I(n, (0, 0))$ , ou seja,

$$\hat{f}^n(O) \cap T_{\bar{v}}(O) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \hat{f}^n(O) \cap T_{2\bar{w} - \bar{v}}(O) \neq \emptyset. \quad (3.17)$$

Note que, considerando  $K_1 = T_{\bar{w}}(O)$ ,  $K_2 = \hat{f}^n(O)$  e  $v = \bar{w} - \bar{v}$ , é imediato que

- $K_1$  e  $K_2$  são subconjuntos conexos por caminho de  $\mathbb{R}^2$ .
- $T_{\bar{w} - \bar{v}}(T_{\bar{w}}(O)) \cap (T_{\bar{w}}(O)) = \emptyset$  e ainda,  $T_{\bar{w} - \bar{v}}(\hat{f}^n(O)) \cap (\hat{f}^n(O)) = \emptyset$ .
- Segue de (3.17) que para  $i = 1$  e  $j = 1$

$$T_{\bar{w} - \bar{v}}^{-1}(T_{\bar{w}}(O)) \cap (\hat{f}^n(O)) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad T_{\bar{w} - \bar{v}}(T_{\bar{w}}(O)) \cap (\hat{f}^n(O)) \neq \emptyset.$$

Logo, pela Proposição 3.3.2 segue que  $K_1$  intercepta  $K_2$ , ou seja,  $\hat{f}^n(O) \cap T_{\bar{w}}(O) \neq \emptyset$ . Absurdo pois estamos supondo que  $\hat{f}^n(O) \cap T_{\bar{w}}(O) = \emptyset$ .

# Capítulo 4

## Recíproca do Teorema Principal

Neste capítulo daremos uma ideia da recíproca do teorema principal desta dissertação. Conforme já mencionado, ao invés de considerar um levantamento transitivo no plano, consideraremos um levantamento satisfazendo a propriedade  $T$ , ou seja, existe  $x_T \in \mathbb{R}^2$  tal que o  $\omega$ -limite de  $x_T$  por  $\hat{f}$  contém todas as translações inteiras de  $x_T$ .

Claramente a hipótese acima é mais fraca do que se considerarmos  $\hat{f}$  transitiva. É comum para difeomorfismos do  $\mathbb{T}^2$  preservando área, a existência de ilhas elípticas e assim tais difeomorfismos e seus respectivos levantamentos não podem ser transitivos, mas é possível que sejam externamente transitivos, isto é, transitivos no complementar do interior dessas ilhas. Deste modo, podendo ter a propriedade  $T$ .

Antes de enunciarmos precisamente a recíproca do teorema principal, definiremos os conjuntos  $B_\theta$ ,  $C_\theta$  e estudaremos sua estrutura bem como algumas de suas propriedades.

### 4.1 Definição dos conjuntos $B_\theta$ e $C_\theta$

Considere a compactificação de  $\mathbb{R}^2$  por um ponto, note que  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  é homeomorfo a esfera  $\mathbb{S}^2$ , ou seja,  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \sim \mathbb{S}^2$ .

Associaremos ao homeomorfismo  $f$  do toro  $\mathbb{T}^2$  e ao seu levantamento  $\hat{f}$  no plano um terceiro homeomorfismo o qual é induzido por  $\hat{f}$  em  $\mathbb{S}^2$  fixando o infinito, denotado por  $\tilde{f}$ , assim,  $\tilde{f} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  é o homeomorfismo induzido por  $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Definição 4.1.1.** Para cada  $\theta \in [0, 2\pi)$ , definimos os conjuntos

$$V_\theta^+ := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^2; \langle \hat{x}; e_\theta \rangle \geq 0\} \quad e \quad V_\theta := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^2; \langle \hat{x}; e_\theta \rangle = 0\}$$

onde,  $e_\theta = (\cos\theta, \text{sen}\theta)$ .

Nestas condições, fixando  $\theta$  temos que a representação pictórica dos conjuntos  $V_\theta^+$  e  $V_\theta$  é dada na Figura 4.1.

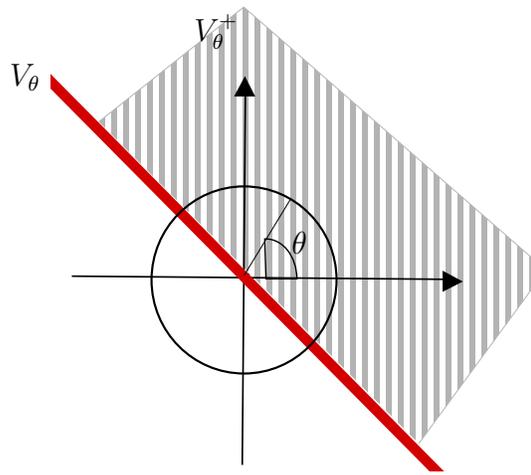


Figura 4.1: Representação pictórica dos conjuntos  $V_\theta$  e  $V_\theta^+$ .

Observe que para  $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \pi$  e  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  os respectivos  $V_\theta^+$  são da forma:

$$V_0^+ := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^2; (\hat{x})_1 \geq 0\},$$

$$V_\pi^+ := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^2; (\hat{x})_1 \leq 0\},$$

$$V_{\frac{\pi}{2}}^+ := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^2; (\hat{x})_2 \geq 0\} \text{ e}$$

$$V_{\frac{3\pi}{2}}^+ := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^2; (\hat{x})_2 \leq 0\}.$$

Considere os conjuntos

$$\tilde{V}_\theta^+ := V_\theta^+ \cup \{\infty\} \text{ e } \tilde{V}_\theta := V_\theta \cup \{\infty\},$$

como sendo os correspondentes de  $V_\theta^+$  e  $V_\theta$ , respectivamente, em  $\mathbb{S}^2$ .

Agora, estamos interessados nos pontos  $\tilde{x} \in \tilde{V}_\theta^+$  os quais para iteradas futuras permanecem em  $\tilde{V}_\theta^+$ , em outras palavras, estamos interessados no seguinte conjunto fechado

$$\tilde{V}_\theta^+ \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{V}_\theta^+) \cap \dots \cap \tilde{f}^{-n}(\tilde{V}_\theta^+) \cap \dots$$

Denote por  $\tilde{B}_\theta$  a componente conexa de

$$\bigcap_{n \leq 0} \tilde{f}^n(\tilde{V}_\theta^+) \quad (4.1)$$

que contém o infinito e, por  $\tilde{C}_\theta$  a componente conexa de

$$\bigcap_{n \geq 0} \tilde{f}^n(\tilde{V}_\theta^+) \quad (4.2)$$

que contém o infinito. Desse modo, podemos definir  $B_\theta$  e  $C_\theta$  em  $\mathbb{R}^2$  que correspondem, respectivamente, aos conjuntos  $\tilde{B}_\theta$  e  $\tilde{C}_\theta$ . Uma vez que  $\tilde{B}_\theta$  e  $\tilde{C}_\theta$  são componentes conexas no  $\mathbb{S}^2$  contendo o infinito segue que seus respectivos correspondentes  $B_\theta$  e  $C_\theta$  no plano são uniões de componentes conexas ilimitadas dos conjuntos dado em (4.1) e (4.2), respectivamente. Em suma, cada componente conexa de  $B_\theta$  e  $C_\theta$  é ilimitada. Observe também que, como  $V_\theta^+$  é fechado e  $\tilde{f}$  é um homeomorfismo,  $\tilde{B}_\theta$  e  $\tilde{C}_\theta$  são fechados e assim  $B_\theta$  e  $C_\theta$  são subconjuntos fechados do plano.

**Lema 4.1.0.1.**  *$B_\theta$  é a união de todas as componentes conexas ilimitadas de  $\mathbb{R}^2$ , a qual denotaremos por  $D$ , cuja órbita futura está contida em  $V_\theta^+$ . Em outras palavras,*

$$\langle \hat{f}^n(\hat{x}); e_\theta \rangle \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ e } \forall \hat{x} \in D.$$

*Demonstração.* Conforme mencionado anteriormente  $\tilde{B}_\theta$  é fechado e por definição é conexo. Claramente,  $B_\theta$  não precisa ser conexo pois retiramos o ponto no infinito, mas cada uma de suas componentes conexas precisa ser conexa e fechada, além de ilimitada. Como  $B_\theta$  é a união de suas componentes conexas, basta ver que a órbita futura dos seus pontos permanecem em  $V_\theta^+$  para sempre. Mas isto é consequência direta da Definição 4.1.  $\square$

**Observação 4.1.1.** *Se  $B_\theta(\hat{f}^{-1})$  denota o conjunto  $B_\theta$  para  $\hat{f}^{-1}$  então  $B_\theta(\hat{f}^{-1}) = C_\theta$ . Sendo assim,  $C_\theta$  é a união de componentes conexas ilimitadas dos conjuntos dos pontos  $x$  que estão em  $V_\theta^+$  e permanecem no mesmo para tempo passado.*

**Proposição 4.1.1.** *Para todo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , temos que:*

1.  $B_\theta$  é  $\hat{f}$ -invariante, isto é,  $\hat{f}(B_\theta) \subset B_\theta$  e para  $C_\theta$ ,  $\hat{f}^{-1}(C_\theta) \subset C_\theta$ .
2. Se  $(p, q)$  são pontos em  $V_\theta^+ \cap \mathbb{Z}^2$ , então  $B_\theta + (p, q) \subset B_\theta$ , e o mesmo vale para  $C_\theta$ .

*Demonstração.* Provaremos apenas para  $B_\theta$ , pois o raciocínio é análogo para  $C_\theta$ . Primeiramente mostraremos a invariância de  $B_\theta$  por  $\hat{f}$ , para isto, basta considerar um ponto  $\hat{x} \in B_\theta$  e mostrar que  $\hat{f}(\hat{x}) \in B_\theta$ .

De fato, seja  $\Gamma$  uma componente conexa de  $B_\theta$  tal que  $\hat{x} \in \Gamma$ , sendo assim,  $\hat{f}(\hat{x}) \in \hat{f}(\Gamma) = \Gamma'$ , que por sua vez é conexo e ilimitado e, portanto  $\hat{f}(\hat{x}) \in B_\theta$ .

Agora, sejam  $\hat{x} \in B_\theta$  e  $(p, q) \in V_\theta^+ \cap \mathbb{Z}^2$ , mostraremos que  $\hat{x} + (p, q) \in B_\theta$  e assim o item (2) será provado. Para isto consideremos  $\Gamma$  uma componente conexa de  $B_\theta$  contendo  $\hat{x}$ , devemos mostrar que  $\Gamma + (p, q) \subset B_\theta$ .

Uma vez que a órbita futura de todo ponto em  $B_\theta$  permanece em  $V_\theta^+$  segue que para todo  $\hat{y} \in \Gamma$ ,

$$\hat{f}^j(\hat{y}) \in V_\theta^+, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Isto implica que se  $\hat{z}$  é um ponto em  $\Gamma + (p, q)$  então para todo inteiro  $j$

$$\hat{f}^j(\hat{z}) \in V_\theta^+.$$

Portanto,  $\Gamma + (p, q)$  é um conjunto conexo, fechado, ilimitado cuja órbita futura de qualquer ponto permanece em  $V_\theta^+$ .

Logo,  $\Gamma + (p, q) \subset B_\theta$ , conforme desejado. □

## 4.2 Os Conjuntos Ômega-limite de $B_\theta$ e $C_\theta$

Considere o ômega-limite de  $B_\theta$ , denotado por  $\omega(B_\theta)$  e definido por

$$\omega(B_\theta) := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} \hat{f}^j(B_\theta).$$

Note que dado  $\hat{x} \in \omega(B_\theta)$ , existe uma sequência de inteiros positivos  $\{n_i\}$  com  $n_i$  tendendo ao infinito tal que

$$\hat{x} \in \hat{f}^{ni}(B_\theta).$$

Segue da Proposição 4.1.1 que  $\hat{f}(B_\theta) \subset B_\theta$ , visto que  $B_\theta$  é fechado e  $\hat{f}$  é um homeomorfismo concluímos que  $\hat{f}^{i+1}(B_\theta) \subset \hat{f}^i(B_\theta)$ ,  $\forall i \geq 0$ .

Como

$$\omega(B_\theta) := \bigcap_{i=1}^{\infty} \underbrace{(\hat{f}^i(B_\theta) \cup \hat{f}^{i+1}(B_\theta) \cup \dots)}_{\hat{f}^i(B_\theta)},$$

temos que o ômega-limite de  $B_\theta$  é dado por

$$\omega(B_\theta) := \bigcap_{i=1}^{\infty} \hat{f}^i(B_\theta).$$

E em  $\mathbb{S}^2$  temos,

$$\omega(\tilde{B}_\theta) := \bigcap_{i=1}^{\infty} \tilde{f}^i(B_\theta).$$

Definiremos também os seguintes conjuntos no plano e em  $\mathbb{S}^2$ , respectivamente.

$$\omega(C_\theta) := \bigcap_{i=1}^{\infty} \hat{f}^{-i}(C_\theta) \text{ e } \omega(\tilde{C}_\theta) := \bigcap_{i=1}^{\infty} \tilde{f}^{-i}(\tilde{C}_\theta).$$

Neste cenário temos que  $\omega(B_\theta)$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi)$  é subconjunto fechado do plano e como  $\{\infty\} \subset \omega(\tilde{B}_\theta)$  segue que todas as suas componentes conexas são ilimitadas. E ainda,  $\omega(\tilde{B}_\theta)$  é um conjunto conexo não vazio. Sendo  $B_\theta$  um conjunto  $\hat{f}$ -invariante, segue que  $\omega(B_\theta) \subset B_\theta$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi)$  e  $\hat{f}(\omega(B_\theta)) = \omega(B_\theta)$ .

De fato,

$$\hat{f}(\omega(B_\theta)) = \hat{f}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \hat{f}^i(B_\theta)\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \hat{f}^{i+1}(B_\theta) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (\hat{f}^i(\hat{f}(B_\theta))) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \underbrace{(\hat{f}^i(B_\theta))}_{\subset B_\theta} = \omega(B_\theta).$$

Neste caso diremos que  $\omega(B_\theta)$  é *Totalmente Invariante por  $\hat{f}$* .

**Proposição 4.2.1.** *Se  $(p, q)$  são pontos em  $V_\theta^+ \cap \mathbb{Z}^2$ , então  $\omega(B_\theta) + (p, q) \subset \omega(B_\theta)$  e o mesmo se aplica para  $\omega(C_\theta)$ .*

*Demonstração.* Como  $\omega(B_\theta) := \bigcap_{i=1}^{\infty} \hat{f}^i(B_\theta)$ , temos

$$\omega(B_\theta) + (p, q) = \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} \hat{f}^i(B_\theta) \right) + (p, q) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \hat{f}^i(B_\theta + (p, q)).$$

Uma vez que  $\hat{f}$  é um homeomorfismo e  $B_\theta + (p, q) \subset B_\theta$ , vem

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \hat{f}^i(B_\theta + (p, q)) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \hat{f}^i(B_\theta) = \omega(B_\theta).$$

Portanto,  $\omega(B_\theta) + (p, q) \subset \omega(B_\theta)$ . □

**Proposição 4.2.2.** *Para todo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , temos que  $\omega(B_\theta) = \omega(C_\theta)$ .*

*Demonstração.* A prova pode ser encontrada em [6].

**Proposição 4.2.3.** *O conjunto  $\omega(B_\theta)^c$  possui uma única componente conexa e o conjunto  $B_\theta^c$  possui uma única componente conexa.*

Provaremos apenas o que conjunto  $B_\theta^c$  possui uma única componente conexa, pois o outro caso é análogo.

*Demonstração.* Primeiramente, note que  $B_\theta \subset V_\theta^+$ , de forma que podemos considerar  $\Omega$  a componente conexa de  $B_\theta^c$  que contém  $\mathbb{R}^2 / V_\theta^+$ . Mostraremos que  $\Omega^c = B_\theta$  e assim  $\Omega$  será a única componente conexa de  $B_\theta^c$ . Para isto mostremos as seguintes inclusões:

$$B_\theta \subset \Omega^c \quad \text{e} \quad \Omega^c \subset B_\theta.$$

Como estamos supondo que  $\Omega$  é componente conexa de  $B_\theta^c$ , segue que

$$\Omega \subset B_\theta^c \Rightarrow B_\theta \subset \Omega^c. \tag{4.3}$$

Desse modo, resta mostrar que  $\Omega^c \subset B_\theta$ . Inicialmente mostraremos que  $\Omega^c$  é  $\hat{f}$ -invariante.

De fato, uma vez que  $B_\theta$  é  $\hat{f}$ -invariante, isto é,  $\hat{f}(B_\theta) \subset B_\theta$  então,

$$B_\theta^c \subseteq \hat{f}(B_\theta^c) \tag{4.4}$$

De (4.3) e (4.4), vem que

$$\Omega \subset \hat{f}(B_\theta^c) \tag{4.5}$$

E ainda por (4.3) temos

$$\hat{f}(\Omega) \subset \hat{f}(B_\theta^c) \quad (4.6)$$

De (4.5) e (4.6) segue que

$$\Omega \cap \hat{f}(\Omega) \neq \emptyset.$$

Visto que  $\Omega$  é componente conexa temos que  $\Omega \subset \hat{f}(\Omega)$  e, portanto,  $\hat{f}(\Omega^c) \subset \Omega^c$ , como queríamos.

Agora, mostraremos que  $\Omega^c \subset B_\theta$ , para isto basta considerar  $\hat{z} \in \Omega^c$  e  $\Gamma$  uma componente conexa de  $\Omega^c$  contendo  $z$  e mostrar que  $\Gamma$  está contido em  $B_\theta$ .

Com efeito, como  $\Gamma \subset \Omega^c$  e  $\Omega^c$  é  $\hat{f}$ -invariante segue que  $\hat{f}^n(\Gamma) \subset \Omega^c$  para todo  $n \geq 0$ . Então,

$$\hat{f}^n(\Gamma) \cap \Omega = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.7)$$

Além disso, visto que  $(V_\theta^+)^c \subset \Omega$  segue que  $\Omega^c \subset V_\theta^+$  e como  $\Gamma$  é conexo e  $V_\theta^+$  é invariante temos que a órbita futura de  $\Gamma$  não sai de  $V_\theta^+$ , isto é,

$$\hat{f}^n(\Gamma) \subset V_\theta^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Note que  $\Gamma$  é um conjunto fechado por ser componente conexa de  $\Omega^c$ , que por sua vez é fechado. Além disso, como  $\partial(\Omega^c) \subseteq B_\theta$ , temos que  $\Gamma \cap B_\theta \neq \emptyset$ .

Sendo assim seja  $\hat{z} \in \Gamma \cap B_\theta$  e  $\Theta$  a componente conexa de  $B_\theta$  contendo  $\hat{z}$ . Sendo cada componente conexa de  $B_\theta$  ilimitada segue que  $\Theta$  é ilimitada. Além disso,  $\Theta \cap \Gamma \neq \emptyset$  então  $\Theta \subset \Gamma$ . Logo,  $\Gamma$  é ilimitado. Em suma,  $\Gamma$  é ilimitado, fechado cuja órbita futura de qualquer ponto em  $\Gamma$  permanece em  $V_\theta^+$  para todo tempo, portanto,  $\Gamma \subseteq B_\theta$ . Portanto,  $\Omega^c \subset B_\theta$ .  $\square$

Agora, provaremos o teorema que será a nossa principal ferramenta para garantir a existência de vetores de rotação para a dinâmica  $\hat{f}$ , mas antes de enunciá-lo precisamente, consideremos o seguinte lema intermediário.

**Lema 4.2.1.** *Se  $\omega(B_\theta) = \emptyset$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $i > n$*

$$\hat{f}^i(B_\theta) \subset V_\theta^+ + (1, 0).$$

*Demonstração.* De fato, suponha por contradição, que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , existe  $i > n$  tal que  $\hat{f}^i(B_\theta)$  não está contido em  $V_\theta^+ + (1, 0)$ , em outras palavras, existe uma sequência  $i_j \rightarrow \infty$  tal que para todo  $j$ , temos que o ponto  $\hat{x}_j \in V_\theta$  de forma que

$$\hat{f}^{i_j}(\hat{x}_{i_j}) \in V_\theta^+ \setminus (V_\theta^+ + (1, 0)).$$

Isto implica que existe sequência de pares  $p_j, q_j$  inteiros tais que

$$\langle (p_j, q_j), e_\theta \rangle \geq 0,$$

e ainda,

$$\hat{f}^{i_j}(x_{i_j}) + (p_j, q_j) \in [1, 2] \times [0, 1].$$

Uma vez que,  $\hat{x}_{i_j} \in V_\theta^+ \subseteq B_\theta$  e  $\langle (p_j, q_j), e_\theta \rangle \geq 0$  segue do item (2) da Proposição 4.1.1 que  $B_\theta + (p_j, q_j) \subseteq B_\theta$  e portanto,  $\hat{x}_{i_j} + (p_j, q_j) \in B_\theta$ . Mas, por compacidade, o conjunto  $\{\hat{f}^{i_j}(\hat{x}_{i_j} + (p_j, q_j))\}_{j \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência convergindo para um ponto  $\hat{w} \in \omega(B_\theta)$ , o que é um absurdo, pois estamos supondo que  $\omega(B_\theta) = \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 4.2.1.** *Se  $\omega(B_\theta) = \emptyset$ , então existe um número real positivo  $a$  tal que:*

- Para todo  $\hat{x} \in B_\theta$ ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle \hat{f}^n(\hat{x}); e_\theta \rangle}{n} \geq a.$$

- Para todo  $\hat{x} \in C_\theta$ ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle \hat{f}^{-n}(\hat{x}); e_\theta \rangle}{n} \geq a.$$

*Demonstração.* Assumiremos sem perda de generalidade que  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$  e provaremos apenas o primeiro item, pois o segundo é análogo.

Agora mostraremos que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\hat{f}^n(B_\theta) \subseteq B_\theta + (1, 0)$ .

Para isto, seja  $\hat{x} \in B_\theta$  e  $\Gamma$  uma componente conexa de  $B_\theta$  contendo  $\hat{x}$ , pela afirmação anterior temos que existe  $n \in \mathbb{Z}^+$  tal que

$$\hat{f}^j(\Gamma) \subset V_\theta^+ + (1, 0), \forall j > n,$$

sendo assim,

$$\hat{f}^j(\Gamma) - (1, 0) \subset V_\theta^+, \forall j > n.$$

Como  $\Gamma$  é fechado, ilimitado, conexo e  $\hat{f}$  é um homeomorfismo segue que  $\hat{f}^j(\Gamma)$  também é fechado, ilimitado e conexo. Logo,

$$\hat{f}^j(\Gamma) - (1, 0) \subset B_\theta,$$

dessa forma,

$$\hat{f}^j(\Gamma) \subset B_\theta + (1, 0).$$

Visto que a escolha de  $\Gamma$  é arbitrária segue que

$$\hat{f}^j(B_\theta) \subset B_\theta + (1, 0). \quad (4.8)$$

Aplicando  $\hat{f}^j$  em (4.8)

$$\hat{f}^j(\hat{f}^j(B_\theta)) \subset \hat{f}^j(B_\theta + (1, 0)) \iff \hat{f}^{2j}(B_\theta) \subset \underbrace{\hat{f}^j(B_\theta)}_{\subset B_\theta + (1, 0)} + (1, 0).$$

Logo,

$$\hat{f}^{2 \cdot j}(B_\theta) \subset B_\theta + (2, 0).$$

Indutivamente, para  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\hat{f}^{k \cdot j}(B_\theta) \subset B_\theta + (k, 0) \subset V_\theta^+ + (k, 0).$$

Em outras palavras,

$$\hat{f}^{k \cdot j}(\hat{x}) \in V_\theta^+ + (k, 0) \Rightarrow \hat{f}^{k \cdot j}(\hat{x}) - (k, 0) \in V_\theta^+.$$

Portanto,

$$\langle \hat{f}^{k \cdot j}(\hat{x}) - (k, 0); e_\theta \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \hat{f}^{k \cdot j}(\hat{x}); e_\theta \rangle - \langle (k, 0); e_\theta \rangle \geq 0,$$

desse modo,

$$\langle \hat{f}^{k \cdot j}(\hat{x}); e_\theta \rangle \geq k \cdot \langle (1, 0); e_\theta \rangle,$$

Como  $\|(1, 0)\| = 1$  e  $\|e_\theta\| = 1$ , além disso,  $\langle (1, 0), e_\theta \rangle = \|(1, 0)\| \cdot \|e_\theta\| \cdot \cos(\theta)$ , temos

$$\langle \hat{f}^{k \cdot j}(\hat{x}); e_\theta \rangle \geq k \cdot \cos(\theta).$$

Dividindo ambos os membros por  $k \cdot j$ , vem que

$$\underbrace{\frac{\langle \hat{f}^{k \cdot j}(\hat{x}); e_\theta \rangle}{k \cdot j}}_{a_{k \cdot j}} \geq \frac{k \cdot \cos(\theta)}{k \cdot j}$$

Tomando o  $\liminf$  da sequência  $\{a_{k \cdot j}\}_{k \geq 1}$  temos que para todo  $\hat{x} \in B_\theta$

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\langle \hat{f}^i(\hat{x}); e_\theta \rangle}{i} \geq \frac{\cos(\theta)}{j},$$

conforme desejado. □

O seguinte corolário é uma consequência imediata do teorema anterior.

**Corolário 4.2.1.** *Se  $\omega(B_\theta) = \emptyset$ , então existe  $r_1, r_2 \in \rho(\hat{f})$  tal que*

$$\langle r_1; e_\theta \rangle \geq 0 \quad e \quad \langle r_2; e_\theta \rangle < 0.$$

**Teorema 4.2.2.** *Para cada  $\theta \in [0, \pi)$  pelo menos  $\omega(B_\theta)$  e  $\omega(B_{\theta+\pi})$  é vazio.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que existe  $\theta \in [0, \pi)$  tal que  $\omega(B_\theta)$  e  $\omega(B_{\theta+\pi})$  são ambos não vazios, sem perda de generalidade vamos assumir que  $\theta = 0$ , sendo assim,  $\omega(B_0)$  e  $\omega(B_\pi)$  são ambos não vazios. As respectivas projeções no toro podem ou não se interceptarem. Assim, teremos dois casos a considerar:

$$(1) \quad \pi(\omega(B_0)) \cap \pi(\omega(B_\pi)) \neq \emptyset;$$

e,

$$(2) \quad \pi(\omega(B_0)) \cap \pi(\omega(B_\pi)) = \emptyset.$$

Mostraremos que ambos os casos não podem ocorrer e assim o teorema será provado.

Começaremos pelo caso (1), inicialmente observe que se  $\pi(\omega(B_0)) \cap \pi(\omega(B_\pi)) \neq \emptyset$  e uma vez que a aplicação  $\pi$  identifica pontos que diferem por coordenadas inteiros segue que existem  $(p_1, p_2)$  e  $(q_1, q_2)$  ambos com coordenadas inteiras, tais que

$$(\omega(B_0) + (p_1, p_2)) \cap (\omega(B_\pi) + (q_1, q_2)) \neq \emptyset. \tag{4.9}$$

e ainda para simplificar notação, faremos

$$(p, q) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2).$$

Assim, a expressão (4.9) fica da seguinte forma

$$\omega(B_0) \cap (\omega(B_\pi) + (p, q)) \neq \emptyset.$$

Agora, denote o complementar da união deste conjunto por  $O$ , ou seja,

$$O = [\omega(B_0) \cup (\omega(B_\pi) + (p, q))]^C.$$

Além disso, considere

$$O_1 = [\omega(B_0) - (1, 1) \cup (\omega(B_\pi) + (p + 1, q + 1))]^C.$$

Claramente,  $O_1$  é aberto, invariante e o Lema 4.2.2, o qual a prova pode ser encontrada em [4], nos assegura que  $O_1$  possui infinitas componentes conexas.

**Lema 4.2.2.** *O conjunto aberto  $O_1 = [\omega(B_0) - (1, 1) \cup (\omega(B_\pi) + (p + 1, q + 1))]^C$  tem infinitas componentes conexas. Além disso, o conjunto  $x_T + \mathbb{Z}^2$  intercepta infinitas componentes conexas de  $O_1$ .*

Por hipótese,  $\hat{f}$  satisfaz a propriedade  $T$ , isto é, existe  $x_T$  tal que  $\omega(x_T)$  contém todas as translações inteiras de  $x_T$ , desse modo, como o conjunto

$$\omega(B_0) \cup (\omega(B_\pi) + (p, q))$$

é invariante, segue que  $x_T$  não pode pertencer a este conjunto e, portanto  $x_T$  pertence ao seu complementar, o qual foi denotado por  $O_1$ .

Visto que o ômega-limite de  $x_T$  contém todas as translações inteiras de  $x_T$ , em particular,  $x_T \in \omega(x_T)$ , segue que  $x_T$  é um ponto recorrente. Logo, existe  $n$  tal que  $\hat{f}^n(x_T)$  e  $x_T$  estão numa mesma componente conexa de  $O_1$ , digamos  $U$ . Nessas condições temos que,

$$\hat{f}^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Uma vez que  $O_1$ , é invariante,  $U$  é componente conexa de  $O_1$  e  $\hat{f}$  é um homeomorfismo segue que

$$\hat{f}^n(U) = U.$$

Em outras palavras, a órbita de  $x_T$  intercepta uma quantidade finita de componentes conexas de  $O_1$ , o que é uma contradição, pois diante de nossas hipóteses, o Lema 4.2.2 nos garante que  $x_T + \mathbb{Z}^2$  intercepta infinitas componentes conexas de  $O_1$ . Portanto, a projeção de  $\omega(B_0)$  e  $\omega(B_\pi)$  no toro não pode se interceptar.

Agora, mostraremos que o caso (2) não pode ocorrer, isto é, assumiremos que  $\pi(\omega(B_0)) \cap \pi(\omega(B_\pi)) = \emptyset$  e sob nossas hipóteses chegaremos em uma contradição. Mas, primeiramente enunciaremos o resultado, o qual a prova pode ser encontrada em [4], que nos garante que diante de nossas hipóteses, embora  $x_T \notin \omega(B_\theta)$ , sua projeção no toro intercepta  $\overline{\pi(\omega(B_\theta))}$ .

**Lema 4.2.3.** *Seja  $\hat{f}$  um homeomorfismo satisfazendo a propriedade T. Então para todo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , se  $\omega(B_\theta) \neq \emptyset$  segue que*

$$\pi(x_T) \subset \overline{\pi(\omega(B_\theta))}.$$

Por hipótese, existe  $x_T$ , cuja órbita futura intercepta infinitas vizinhanças de transladados inteiros de  $x_T$ , ou melhor, dada  $U$  uma vizinhança de  $x_T + (p, q)$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $i > n$  temos que

$$\hat{f}^i(x_T) \in U.$$

Logo, a órbita de  $x_T$  não é composta apenas por transladados inteiros de  $x_T$ , sendo assim,  $x_T$  projetado no toro não pode ser ponto fixo.

Uma vez que  $\pi(x_T)$  não é ponto fixo no toro, existe  $\varepsilon > 0$  tal que considerando a bola fechada de centro  $\pi(x_T)$  e raio  $\varepsilon$  segue que

$$\hat{f}(B_\varepsilon[\pi(x_T)]) \cap B_\varepsilon[\pi(x_T)] = \emptyset. \quad (4.10)$$

Pelo Corolário 4.2.3 temos que

$$\pi(x_T) \subset \overline{\pi(\omega(B_0))} \cap \overline{\pi(\omega(B_\pi))}.$$

Conforme já foi argumentado,  $x_T \notin \omega(B_0) \cup \omega(B_\pi)$ , além disso, é fácil ver que diante de nossas hipóteses, há  $x_T$  tal que  $\pi^{-1}(\pi(x_T)) \subset \omega(x_T)$  então o conjunto  $x_T + \mathbb{Z}^2$  também tem a mesma propriedade, dessa forma o conjunto  $x_T + \mathbb{Z}^2$  não está contido em  $\omega(B_\theta)$ ,

porém  $x_T + \mathbb{Z}^2$  está próximo de  $\omega(B_\theta)$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , em particular, podemos considerar  $\hat{y} \in x_T + \mathbb{Z}^2$  e  $p, q$  inteiros tais que a distância de  $\hat{y}$  a  $\omega(B_0)$  é  $\varepsilon$  e a distância entre  $\hat{y} - (p, q)$  e  $\omega(B_\pi)$  também é  $\varepsilon$ .

Por hipótese,  $\pi(\omega(B_0)) \cap \pi(\omega(B_\pi)) = \emptyset$  então a distância entre os conjuntos compactos  $\omega(B_0) \cap B_\varepsilon[\hat{y}]$  e  $(\omega(B_\pi) + (p, q)) \cap B_\varepsilon[\hat{y}]$  é um número estritamente positivo  $a$ . Note que  $a \leq \varepsilon$ . Chamaremos de  $v$  o segmento aberto de reta de comprimento  $a$  ligando um ponto  $u \in \omega(B_0) \cap B_\varepsilon[\hat{y}]$  e  $w \in (\omega(B_\pi) + (p, q)) \cap B_\varepsilon[\hat{y}]$ . Pela expressão (4.10) temos que

$$\hat{f}(B_\varepsilon[\hat{y}]) \cap B_\varepsilon[\hat{y}] = \emptyset.$$

então,

$$\hat{f}(v) \cap v = \emptyset.$$

Seja  $\Gamma$  uma componente conexa de  $\omega(B_0)$  que contém  $u$  e  $\Theta$  uma componente conexa de  $\omega(B_\pi) + (p, q)$  contendo  $w$ . (Ver Figura 4.2).

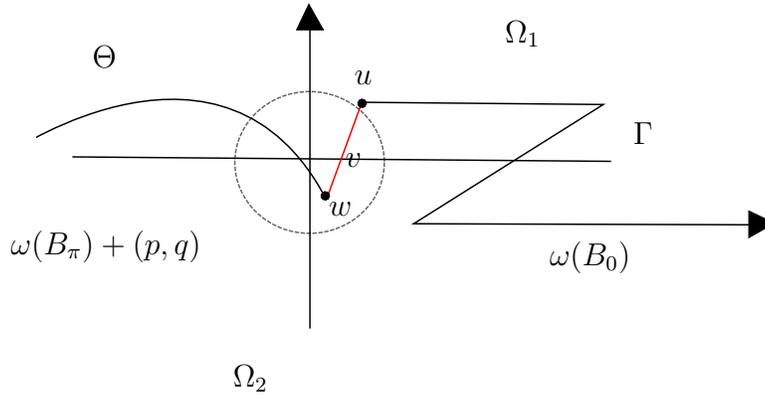


Figura 4.2: Escolhemos  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  tais que uma componente conexa  $\Theta$  fique suficientemente próxima da componente conexa  $\Gamma$  de  $\omega(B_\theta)$ . Ligamos essas componentes conexas por um segmento  $v$ .

Nestas cenário, enunciaremos os seguintes resultados, os quais as provas podem ser encontradas em [6].

**Lema 4.2.4.** *O conjunto  $(\Gamma \cup \Theta)^C$  possui uma única componente conexa. O conjunto  $(\Gamma \cup \Theta \cup v)^C$  possui exatamente duas componentes conexas, as quais denotaremos por  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . Além disso, para todo  $x \in \mathbb{T}^2$  temos que  $\pi^{-1}(x)$  intercepta  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ .*

**Lema 4.2.5.** *Diante de nossas hipóteses, temos que  $\hat{f}(\Omega_1) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$  e  $\hat{f}(\Omega_2) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ .*

Com isso obtemos a seguinte proposição.

**Proposição 4.2.4.** *Ou  $\hat{f}(\overline{\Omega_1}) \subset \overline{\Omega_1}$  ou  $\hat{f}(\overline{\Omega_2}) \subset \overline{\Omega_2}$ .*

Nessas condições, observe que pelo Lema 4.2.4 existem iteradas de  $x_T$ , cuja sua órbita intercepta  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , o que é um absurdo, pois a Proposição 4.2.4 nos assegura que  $\Omega_1$  ou  $\Omega_2$  são  $\hat{f}$  invariantes. Portanto, para cada  $\theta \in [0, \pi)$  pelo menos  $\omega(B_\theta)$  e  $\omega(B_{\theta+\pi})$  é vazio.  $\square$

Tendo em mente esses resultados, podemos entender a prova da Recíproca do Teorema Principal deste trabalho.

### 4.3 Recíproca do Teorema Principal

Esta seção é dedicado à prova da recíproca do Teorema Principal, com a alteração mencionada no início do primeiro capítulo.

**Teorema 4.3.1.** *Sejam  $f$  um homeomorfismo do  $\mathbb{T}^2$  isotópico à identidade e  $\hat{f}$  um levantamento de  $f$  no plano com a propriedade  $T$ . Então  $(0, 0) \in \text{int}\rho(\hat{f})$ .*

*Demonstração.* Por hipótese  $\hat{f}$  satisfaz a propriedade  $T$ , ou seja, existe  $x_T \in \mathbb{R}^2$  tal que o conjunto  $x_T + \mathbb{Z}^2$  está contido em  $\omega(x_T)$ . Em particular,  $x_T$  é um ponto recorrente e pelo Teorema 1.1.1, existe  $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$  ponto fixo por  $\hat{f}$ . Logo  $(0, 0) \in \rho(\hat{f})$ .

Dessa forma,  $(0, 0)$  é ponto interior ou ponto fronteira do conjunto de rotação de  $\hat{f}$ , ou seja,

$$(0, 0) \in \text{int}\rho(\hat{f}) \quad \text{ou} \quad (0, 0) \in \partial[\rho(\hat{f})].$$

Mostraremos que  $(0, 0)$  não pode estar no bordo de  $\rho(\hat{f})$ .

Suponha que  $(0, 0) \in \partial[\rho(\hat{f})]$ , por convexidade existe uma reta passando pela origem

de forma que o conjunto de rotação está contido numa das componentes conexas do complementar da reta. Considerando a componente conexa em que se encontra o conjunto de rotação temos que existe  $\theta \in [0, 2\pi[$  tal que

$$\forall r \in \rho(\hat{f}), \quad \langle r; e_\theta \rangle \geq 0.$$

E, como o conjunto de rotação se encontra apenas em uma das componentes conexas do complementar da reta segue que não existe  $r_2 \in \rho(\hat{f})$  tal que  $\langle r_2; e_\theta \rangle < 0$  assim, temos pelo Corolário 4.2.1 que  $\omega(B_\theta) \neq \emptyset$ . Por outro lado, o Lema 4.2.2 nos garante que  $\omega(B_\theta)$  e  $\omega(B_{\theta+\pi})$  não podem ser ambos diferentes de vazio, dessa forma, como  $\omega(B_\theta) \neq \emptyset$  então  $\omega(B_{\theta+\pi}) = \emptyset$ .

Sendo  $\omega(B_{\theta+\pi}) = \emptyset$  pelo Corolário 4.2.1 existe  $r \in \rho(\hat{f})$  tal que

$$\langle r; e_\theta \rangle < 0,$$

mas isso é um absurdo pois não temos vetores de rotação nesta direção. Logo  $(0, 0) \in \text{int}\rho(\hat{f})$ , conforme desejado.  $\square$

# Conclusões

De acordo com o que foi retratado no decorrer do trabalho chegamos a conclusão que dada uma dinâmica (de um fluxo ou de um homeomorfismo) no plano não é possível estabelecer condições para que tal dinâmica seja minimal. Por outro lado, sob certas hipóteses rotacionais é possível termos uma dinâmica transitiva no plano, desde que a dinâmica seja oriunda de um homeomorfismo transitivo do toro  $\mathbb{T}^2$ .

Além disso, podemos concluir o presente trabalho na forma do seguinte teorema:

**Teorema 4.3.2.** *Seja  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  um homeomorfismo transitivo homotópico à identidade e  $\hat{f}$  um levantamento de  $f$  no plano, temos que*

$$\hat{f} \text{ é transitivo se, e somente se, } (0,0) \in \text{int}\rho(\hat{f}).$$

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Fathi, *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*. L'Enseignement Mathématique, v.3, n. 3-4, pp. 315-322, 1987.
- [2] A. Koropecki, F. A. Tal, *Strictly toral dynamics*, Invent Math., (196), pp. 339-381, 2014.
- [3] D. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. 115 (1966), pp. 83-107
- [4] F. A. Tal, *Transitivity and Rotation sets with nonempty interior and for homeomorphisms of the 2-torus*, Proc. Amer. Math. Soc 140, pp. 3567-3579, 2012.
- [5] J. Franks, *Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms*, Trans. Am. Math. Soc., 311(1), pp.107-115, 1989.
- [6] N. Guelmam, A. Koropecki, F.A. Tal, *Rotation sets with nonempty interior and transitivity in the universal covering*, Ergodic Theory, pp. 1-11, 2013.
- [7] M. Brown, *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*. Houston Journal of Mathematics, V.10, n.1, pp. 35-41, 1984.
- [8] M. Brown, *Homeomorphisms of two-dimensional manifolds*, Houston J. Math. 11, n. 4, pp. 455-469, 1985.
- [9] M. Misiurewicz, K. Ziemian, *Rotation sets for maps of tori*, J. London. Math. Soc, 40, pp. 490-506, 1989.
- [10] Munkres, J. R. *Topology*, 2 ed. N. Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2000.

- [11] Katok. A., Hasselblatt, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University press, 1995.
- [12] H. Poincaré, *Oeuvres complètes, tome 1*. Gauthier-Villars, Paris, pp. 137-158, 1952.
- [13] M. Viana, K. Oliveira, *Fundamentos da Teoria Ergódica*, Rio de Janeiro, SBM. 90, 2014.