

TESE  
37

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUAZÉ

FEI

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

APLICAÇÕES DA TEORIA DO CAMPO DE GALOIS  
NO ESTUDO DE CIRCUITOS LÓGICOS

Engº Ignacio Sérgio Miranda Ferreira

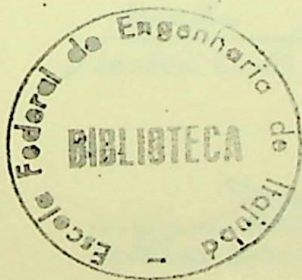
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

APLICAÇÕES DA TEORIA DO CAMPO DE GALOIS

NO ESTUDO DE CIRCUITOS LÓGICOS

• TESE DE MESTRADO DE

*Ignacio Sérgio Miranda Ferreira*



ITAJUBÁ

MINAS GERAIS

1 9 7 2

Exmo. Sr.

Coordenador dos Cursos de Pós-Graduação



A Comissão de exame da Tese de Mestrado "Aplicações da Teoria do Campo de Galois no Estudo de Circuitos Lógicos" do candidato IGNACIO SÉRGIO MIRANDA FERREIRA, em sessão de decisão realizada após a defesa de tese em 30/12/72, decidiu atribuir o conceito "aprovado" à mesma, na forma do artigo 16 do Regulamento de Tese de Mestrado.

EFEI, 30 de dezembro de 1972

A handwritten signature in black ink, appearing to read "José Abel Royo dos Santos".

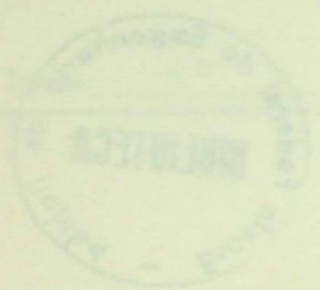
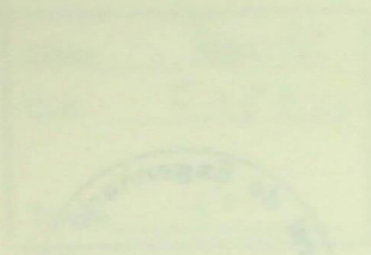
José Abel Royo dos Santos

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Amadeu Casal Caminha".

Amadeu Casal Caminha

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Czesław Lubomiro Barczak".

Czesław Lubomiro Barczak



Commissaire des Douanes de l'Est-Canada

Montreal, Que.

Le certificat de vente de l'Etat de l'Ontario, 1911-12, en vertu duquel le...  
certificat de l'Etat de l'Ontario en vertu duquel le...  
de l'Ontario...  
de l'Ontario...  
de l'Ontario...

1911, en vertu de l'Etat

[Signature]  
Montreal, Que.

[Signature]  
Montreal, Que.

[Signature]  
Montreal, Que.

## A G R A D E C I M E N T O

Ao concluir este trabalho, deixo minhas palavras de agradecimento aos amigos da EFEI que durante nossa presença lá, 1969-1971, direta ou indiretamente me auxiliaram e incentivaram na sua realização.

Aos professores Amadeu Casal Caminha e Czeslau Lubomiro Barczak pelo estímulo e incentivo.

Ao professor José Abel Royo dos Santos pela valiosa orientação prestada.

Agradeço ao Engenheiro Vladislav Lojik da IBM Deutschland Werk Mainz pelo incentivo e valioso auxílio prestado.

A minha esposa Regina pelo carinho, apoio e incentivo.

Mainz 20/outubro/1972

Ignacio Sérgio

Agradeço, também a Srta. Sônia Maria Maia pelo árduo trabalho de interpretar e datilografar o original.

Itajubá, 30/março/1973

APPENDIX

The following table contains the names of the persons who were members of the committee on the subject of the proposed amendments to the constitution of the United States in the year 1787.

The names of the persons who were members of the committee on the subject of the proposed amendments to the constitution of the United States in the year 1787 are as follows:

At the meeting held on the 12th of September 1787, the following persons were present:

George Washington, James Madison, Alexander Hamilton, John Jay, James Wilson, Gouverneur Morris, Edmund Randolph, and others.

A list of the names of the persons who were members of the committee on the subject of the proposed amendments to the constitution of the United States in the year 1787 is given in the following table.

TABLE I

MEMBERS OF THE COMMITTEE

The names of the persons who were members of the committee on the subject of the proposed amendments to the constitution of the United States in the year 1787 are as follows:

TABLE II

# I N D I C E

		Pág.
1	- CONGRUENCIA DE INTEIROS . . . . .	3
2	- VARIÁVEIS ASSOCIADAS A ELEMENTOS DE CIRCUITO DE CHAVEAMENTO . . . . .	10
3	- FUNÇÕES . . . . .	15
4	- CIRCUITOS COM CONTATOS DE DUAS POSIÇÕES - TEORIA DE FUNÇÕES NO $CG(2)$ . . . . .	20
5	- ALGUMAS APLICAÇÕES A CIRCUITOS . . . . .	28
6	- OPERAÇÃO IDEAL DE RELÉS ORDINÁRIOS . . . . .	54
7	- ESTUDO DOS CIRCUITOS A RELÉS . . . . .	78
8	- CIRCUITOS COM CONTATOS DE TRES POSIÇÕES . . . . .	105
9	- APLICAÇÕES DA ALGEBRA DE TRES VALORES A PROBLEMAS DE SIMULAÇÃO LÓGICA, EM DETEÇÃO DE AZARES, DETEÇÃO DE CORRIDAS E AO PROBLEMA DO DESLIGAMENTO . . . . .	146
10	- CONCLUSÕES . . . . .	150
11	- BIBLIOGRAFIA . . . . .	152



## INTRODUÇÃO

Atualmente a Engenharia está conhecendo uma nova Revolução Industrial. O rápido desenvolvimento no campo dos equipamentos lógicos tem levado à aplicação de semicondutores e outros dispositivos de switching ao controle de sistemas de Engenharia. O advento dos circuitos integrados dia a dia torna mais promissor o futuro dos circuitos lógicos.

O estudo da lógica se tornou de primordial importância para todos aqueles que se dedicam aos chamados circuitos lógicos, nesse estudo a ferramenta básica é a Álgebra de Boole.

O objetivo desse trabalho é despertar atenção sobre a aplicação dos conceitos do Campo de Galois como um substituto eventual da Álgebra de Boole no estudo de alguns "switching circuits". Uma das vantagens desse estudo é que todos os cálculos lógicos são feitos através da Álgebra Ordinária; outra vantagem do método do campo de Galois é poder ser aplicado aos vários tipos de circuitos e dispositivos de mais de dois estados.

Nesse nosso trabalho procuramos nos dedicar, sempre que achamos conveniente, às aplicações de dispositivos lógicos de mais de dois estados.

Fizemos aplicações da Teoria dos Campos finitos (Campos de Galois) - CG - a diversos circuitos, o que é mostrado em exemplos bastante práticos; aplicamos a Teoria do CG a problemas de análise, e de síntese com programas dados para elementos de saída. Tentamos seguir sempre o mesmo procedimento de solução e achamos que esse procedimento poderá vir a ser de grande utilidade no desenvolvimento dos circuitos combinacionais e sequenciais.

Estabelecemos um sistema no qual a posição dos contatos de um elemento num dado instante é determinada pelo estado das correntes (dispositivos de saída) e contatos daque-

le elemento no instante precedente; esse sistema, ao qual chamamos "Equações Características", deve ser estabelecido para cada elemento considerado.

Fizemos estudos de dispositivos reais tais como "Relês de corrente reduzida de auto-atracamento", sempre tendo em vista o equacionamento e um mesmo procedimento de solução.

Para alguns dispositivos fizemos estudos sob o aspecto da associação ao CG(2) e também ao CG(3) a fim de se sentir melhor a utilidade da ferramenta que é o CG, aplicado aos "switchings".

Pode-se visualizar com este trabalho que o método do CG, sob alguns aspectos, é uma ferramenta de maior valor no estudo dos "switchings circuits", do que os demais métodos comumente empregados.

#### COMENTÁRIO FINAL

A finalidade desse trabalho, como dissemos, é procurar abrir um campo de desenvolvimento algébrico ao estudo dos "switchings circuits"; a fim de que tornássemos este trabalho mais completo, precisaríamos considerar outros aspectos da Teoria do Campo de Galois associada aos "switching circuits", tais como "congruências em relação a módulos duplos", porém dentro da finalidade deste trabalho achamos desnecessárias tais outras considerações; pois sob o ponto de vista de Engenharia, achamos que, com este trabalho, já estamos despertando atenção sobre o uso da Teoria do Campo de Galois no Estudo dos "switching circuits", e também as aplicações feitas são de grande valor sob o aspecto didático no tratamento dos circuitos combinacionais e sequenciais.

## 1. CONGRUENCIA DE INTEIROS

### 1.1 - Definição

Dizemos que dois inteiros (entende-se por inteiro, um inteiro positivo, ou negativo, incluindo zero)  $x$  e  $y$  são congruentes em relação ao módulo  $m$  ( $m$  sendo um inteiro) se a diferença  $x - y$  é divisível por  $m$ , isto é, é um múltiplo de  $m$ . Se  $x$  e  $y$  são congruentes em relação ao módulo  $m$  escrevemos:

$$x \equiv y \pmod{m}$$

Se  $x$  e  $y$  não são congruentes em relação ao módulo  $m$  escrevemos:

$$x \not\equiv y \pmod{m}$$

#### 1.1.1 - Módulo 2

Para o módulo 2 qualquer inteiro é congruente a 0 ou a 1. Exemplo:

Se  $x = 10$  é congruente a 0

Se  $x = 9$  é congruente a 1

#### 1.1.2 - Módulo $m$

Qualquer inteiro é congruente a um dos números  $0, 1, 2, \dots, m-1$ ; não existe dois números de  $0, \dots, m-1$  que são congruentes em relação ao módulo  $m$ .

### 1.2 - Teorema 1

Qualquer inteiro é congruente consigo mesmo em relação a quaisquer módulos. Em outras palavras, para quaisquer inteiros  $x$  e  $m$ , temos:

$$x \equiv x \pmod{m}$$

pois,  $\frac{x - x}{m} = 0$  portanto satisfaz a definição.

1.3 - Teorema 2

Se  $x \equiv y \pmod{m}$   
então  $y \equiv x \pmod{m}$

Resulta, da definição

$$\frac{x - y}{m} = K$$

ou seja

$$\frac{y - x}{m} = -K$$

Então:  $y \equiv x \pmod{m}$  c.q.d

1.4 - Teorema 3

Se  $x \equiv y \pmod{m}$   
Se  $y \equiv z \pmod{m}$   
Então  $x \equiv z \pmod{m}$

Pode-se provar da seguinte maneira:

Sendo R e S inteiros, temos:

$$x - y = R m$$
$$y - z = S m$$

$$x - z = (x - y) + (y - z) = Rm + Sm = (R+S)m$$

R+S é um inteiro, então:

$$x \equiv z \pmod{m}$$

### 1.4.1 - Consequencia

Dois inteiros congruentes a um terceiro são congruentes entre si, isto é:

$$\text{Se } x \equiv z \pmod{m}$$

$$\text{e Se } y \equiv z \pmod{m}$$

$$\text{Então } x \equiv y \pmod{m}$$

Demonstração:

$$x \equiv z$$

$$y \equiv z \quad \text{Então do Teorema 2: } z \equiv y$$

$$x \equiv z \pmod{m}$$

$$z \equiv y \pmod{m}$$

Pelo Teorema 3:

$$x \equiv y$$

### 1.5 - Teorema 4

Congruencias com relação aos mesmos módulos podem ser somadas, termo a termo. Em outras palavras:

$$\text{Se } x \equiv y \pmod{m}$$

$$\text{e } z \equiv w \pmod{m}$$

(1)

$$\text{Então: } x + z \equiv y + w \pmod{m}$$

Demonstração

$$\text{Se } x \equiv y \quad \text{então } x - y = Km \quad \therefore \quad x = y + Km$$

$$\text{Se } z \equiv w \quad \text{então } z - w = Rm \quad \therefore \quad z = w + Rm$$

Substituindo em (1) temos:

$$y + Km \equiv y \pmod{m}$$

$$w + Rm \equiv w \pmod{m}$$

$y+w + (K+R)m \equiv (y+w) \pmod{m}$ , o que demonstra o teorema.

### 1.6 - Problemas

1. Determinar a que inteiros  $(a+b)$  é congruente, em relação ao módulo 2.

#### Solução

Se  $a \equiv 0$ , e  $b \equiv 0 \pmod{2}$  então  $a+b \equiv 0 \pmod{2}$

Se  $a \equiv 0$ , e  $b \equiv 1 \pmod{2}$  então  $a+b \equiv 1 \pmod{2}$

Se  $a \equiv 1$ , e  $b \equiv 0 \pmod{2}$  então  $a+b \equiv 1 \pmod{2}$

Se  $a \equiv 1$ , e  $b \equiv 1 \pmod{2}$  então  $a+b \equiv 2 \pmod{2}$ ;

mas,  $2 \equiv 0 \pmod{2}$  então  $a+b \equiv 0 \pmod{2}$

Podemos colocar estes resultados sob a forma de tabelas.

	b	
a +	0	1
0	0	1
1	1	0

2. Determinar a que inteiros  $(a+b)$  é congruente em relação ao módulo 3; fazer a tabela.

	b		
a +	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

1.7 - Teorema 5

Congruencias podem ser multiplicadas, termo a termo, isto é:

$$\text{Se } a \equiv b \pmod{m}$$

$$\text{Se } c \equiv d \pmod{m}$$

$$\text{Então } ac \equiv bd \pmod{m}$$

Demonstração:

$$a - b \equiv Km \quad \therefore \quad a = b + Km$$

$$c - d \equiv Rm \quad \therefore \quad c = d + Rm$$

$$(b+Km) (d+Rm) \equiv b.d$$

$$bd + bRm + dKm + KmRm \equiv bd$$

$$bd + m(bR + dK + KmR) \equiv bd$$

mas  $(bR + dK + KmR)$  é inteiro. Então:

$$ac \equiv bd$$

1.8 - Teorema 6

$$\text{Temos: } -x \equiv m-x \pmod{m}$$

Esta propriedade é óbvia, permite-nos escrever o inteiro para o qual  $(-x)$  é congruente, o resultado sendo um inteiro positivo.

1.8.1 - Problema

Para que valores é  $-x$  congruente em relação ao módulo 5 ?

Solução:

$$\text{Aplicando o Teorema 6, temos: } -x \equiv m-x \pmod{m}$$

$$\text{então: } -x \equiv 5-x \pmod{5}$$

x	0	1	2	3	4
-x	0	4	3	2	1

### 1.9 - Teorema 7

Congruências podem ser subtraídas, termo a termo. Assim sendo, se :

$$a \equiv b \pmod{m}$$

$$c \equiv d \pmod{m}$$

Então  $a - c \equiv b - d \pmod{m}$

Demonstração:

$$a = b + Km$$

$$c = d + Rm$$

$$a - c = b - d + m(K-R)$$

$$a - c \equiv b - d \quad \text{já que } K-R \text{ é inteiro.}$$

Este teorema é de pouco uso desde que podemos substituir  $-x$  por  $m-x$ .

Com os números  $0, 1, \dots, m-1$  podemos, de acordo com os teoremas 4, 5, 6 e 7, executar operações de adição, multiplicação e subtração e obtemos tabelas como as seguintes.

#### 1.9.1 - Exemplo

- Determinar os números para os quais  $(a+0)$  é congruente em relação ao módulo  $m$ .

a +	b	0	1	2	...	m-2	m-1
0	0	0	1	2		(m-2)	(m-1)
1	1	1	2	3		(m-1)	0
2	2	2	3	4		0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
(m-2)	(m-2)	(m-2)	(m-1)	0		(m-4)	(m-3)
(m-1)	(m-1)	(m-1)	0	1		(m-3)	(m-2)

### 1.10 - Comentário

Esta aritimética que podemos chamar "aritimética de módulo m", não coincide com a aritimética usual de inteiros. Na verdade, por um lado, somente m elementos entram nessa aritimética, em vez de uma infinidade de inteiros. Por outro lado, a adição executada de acordo com a tabela acima não é a adição usual. Por exemplo, essa adição acarreta:  $3 + (m-2) = 1$ .

O mesmo aplica-se a multiplicação, a qual não é a multiplicação usual; no entanto, os cálculos de módulo m são fáceis de executar.

Quando temos de executar uma série de operações' praticamente, podemos executá-las sem qualquer dificuldades substituindo qualquer número obtido em relação ao módulo m. Por exemplo.

$$U = [(2+3+2)(2+1+1)+(2+1+2)] 2 = (7.4+5).2 \equiv (1.1+2).2 \pmod{3}$$

Desde que  $7 \equiv 1$ ,  $4 \equiv 1$ ,  $5 \equiv 2 \pmod{3}$ . Temos então:

$$U \equiv 0 \pmod{3}$$

Todas as regras de cálculo relativas a adição, multiplicação e subtração, isto é, as propriedades distributivas, comutativas associativas, a supressão de colchetes, parentesis, etc. são válidas na aritimética de módulo m.

Exceção:

Com relação a propriedade da aritimética ordinária referente a produto, "um produto não é nulo a não ser que um de seus fatores seja nulo" e de  $ax = ay$  ( $a \neq 0$ ), deduzimos  $x = y$  também não é válida na aritimética de módulo  $m$ .

### 1.11 - Problema

A que inteiros  $a$  e  $b$  congruente em relação ao módulo 2 ?

Temos:

Se  $a \equiv 0$ ,  $b \equiv 0 \pmod{2}$  então,  $ab \equiv 0.0 \equiv 0 \pmod{2}$

Se  $a \equiv 0$ ,  $b \equiv 1 \pmod{2}$  então,  $ab \equiv 0.1 \equiv 0 \pmod{2}$

Se  $a \equiv 1$ ,  $b \equiv 0 \pmod{2}$  então,  $ab \equiv 1.0 \equiv 0 \pmod{2}$

Se  $a \equiv 1$ ,  $b \equiv 1 \pmod{2}$  então,  $ab \equiv 1.1 \equiv 1 \pmod{2}$

Podemos colocar estes resultados na tabela seguinte.

	b		
a	•	0	1
0		0	0
1		0	1

## 2. VARIÁVEIS ASSOCIADAS A ELEMENTOS DE CIRCUITOS DE CHAVEAMENTO

### 2.1 - Definição

Uma variável que possa assumir  $n$  valores será chamada de valor  $n$  (temos então: valor 2, valor 3, valor 4, ...etc)

2.2 - Variáveis associadas a contactos

Um contacto pode ter duas posições; fig. 1, aberto ou fechado: Associaremos a um contacto uma variável  $x$  para a qual designaremos dois valores 0 e 1, sendo:

- $x = 0$  se o contacto está aberto
- $x = 1$  se o contacto está fechado

pode-se dizer que associamos a um contacto uma variável no CG(2)

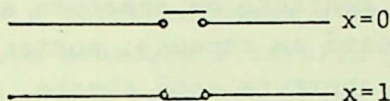


Fig. 1

2.3 - Variáveis associadas a armadura de relés de contacto

Na fig. 2 temos um relé; na parte "a" da figura a armadura está em repouso e na parte "b" está atraída como consequência da corrente no enrolamento do eletromagneto.

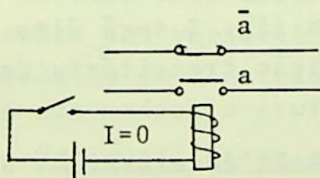


Fig. 2a

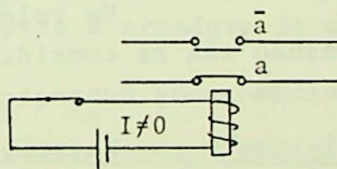


Fig. 2b

Podemos designar 3 variáveis para esta armadura.

- 1) A variável  $A$  que indica a posição da armadura,
  - $A = 0$  se a armadura está em repouso (fig. 2a)
  - $A = 1$  se a armadura está atraída (fig. 2b)

2) a variável "a" é associada ao contacto a que é denominado contacto de fechamento. Pode ser visto que  $a = 0$  se o contacto de fechamento está aberto, isto é, se a armadura está em repouso; portanto se  $A = 0$ . E  $a = 1$  se o contacto de fechamento está fechado, isto é, se a armadura está atraída, portanto se  $A = 1$ .

3) a variável "ā" é associada ao contacto ā que é chamado ' contacto de abertura. Pode ser visto que temos:

$\bar{a} = 1$  se o contacto de abertura está fechado, isto é se a armadura está em repouso; portanto se  $A = 0$ . E  $\bar{a} = 0$  se o contacto de abertura está aberto, isto é, se a armadura está atraída; portanto se  $A = 1$ .

Nota-se que existe uma correspondencia entre as tres variáveis dada pela tabela:

A	0	1
a	0	1
ā	1	0

vemos que

$$a \equiv A \pmod{2}$$

pode-se ver também que

$$\bar{a} \equiv A+1 \equiv a+1 \pmod{2}$$

Um relé como o da fig. 2 será dito do tipo ideal quando não se considerar a posição transitória da armadura, quando ambos contactos de abertura e fechamento estão abertos.

Notamos que a fim de descrevermos a posição da armadura é necessário que a variável tome três valores. Então devemos associar "uma variável do CG(3) à armadura de um tal relé eletromecânico com contactos reais.

Existem relés para os quais não podemos considerar somente uma posição transitória dos contactos, principalmente relés nos quais há dois eletromagnetos (fig. 3)

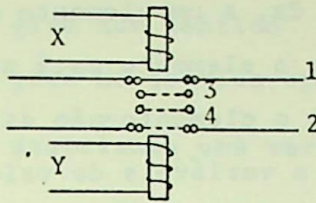


Fig. 3

Se a corrente passa através do enrolamento do eletromagneto x, a armadura é atraída por esse eletromagneto e toma a posição 1; se a corrente passa através do enrolamento do eletromagneto y este atrai a armadura que toma a posição 2; se a corrente não passa através de nenhum dos enrolamentos a armadura permanece na posição 1 ou 2 na qual estava; se a corrente para de fluir antes que a armadura tenha alcançado uma das posições 1 ou 2; ela vai para a posição 1, se estava na posição 3; no entanto irá para a posição 2, se estava na posição 4.

Esta é a operação real dos relés biestáveis. Para este caso portanto, se levarmos em conta as posições transitórias, devemos considerar 4 posições para a armadura, e então associaremos uma variável no CG(4) para a armadura de um relé eletromecânico de 2 enrolamentos.

#### 2.4 - Variáveis associadas a um elemento de n posições

Algumas vezes tem-se necessidade de considerar elementos de n posições; por exemplo, se vamos descrever a posição sequencial de um contacto, será necessário introduzir as várias posições adquiridas nos vários intervalos de tempo.

Devemos associar uma variável de valor n a um elemento de n posições.

É frequentemente mais conveniente associar n va-

riáveis de valor  $2x_i$  a um elemento de  $n$  posições; assim então,

$$x_i = 1 \text{ se o elemento está na posição } i$$

$$x_i = 0 \text{ se o elemento não está na posição } i$$

As  $n$  variáveis de valor 2 irão variar cada uma em um CG(2)

2.5 - Variáveis associadas a corrente

Frequentemente temos de considerar a corrente " fluindo através de uma parte de um circuito. Será necessário " algumas vezes considerar o sentido da corrente; outras vezes is so não é necessário.

Devemos associar com a corrente num circuito uma variável de valor 2, como segue:

$$I = 0 \text{ se a corrente não flui através do circuito}$$

$$I = 1 \text{ se a corrente flui através do circuito}$$

Uma variável de valor 2 associada com a corrente varia sobre um conjunto CG(2).

Podemos associar à corrente num circuito, uma va riável de valor 3, I, como segue:

$$I = 0 \text{ se a corrente não flui através do circuito}$$

$$I = 1 \text{ se a corrente flui num sentido}$$

$$I = 2 \text{ se a corrente flui no sentido oposto}$$

A variável de valor 3, associada com a corrente varia sobre um conjunto CG(3).

2.6 - Variáveis associadas com elementos de saída

Um motor é um elemento de valor 3; associamos uma variável M com ele, definida como segue:

$$M = 0 \text{ se o motor está em repouso}$$

$M = 1$  se o motor gira num sentido

$M = 2$  se o motor gira no sentido oposto.

Então, associamos uma variável no CG(3) com um motor reversível.

### 3. FUNÇÕES

#### 3.1 - Definição

Se  $y$  um elemento de  $Y$  e  $x$  um elemento de  $X$ , se existe uma correspondência associando a qualquer elemento  $x$ , do conjunto  $X$ , a um elemento  $y$ , do conjunto  $Y$ , o elemento  $y$  do conjunto  $Y$  é dito ser uma função do elemento  $x$  do conjunto  $X$ .

A correspondência é escrita

$$y = f(x)$$

No que trataremos os conjuntos  $x$  e  $y$  são finitos, e nesse caso é possível enumerarmos as funções cujo domínio é  $X$  e cujo valor é  $Y$ .

Pode-se achar, por exemplo, todas as funções de domínio e valor no CG(2). Tais funções são definidas quando os valores  $f(0)$  e  $f(1)$  são conhecidos; estes valores podem ser 0 ou 1. Então, temos 4 funções de domínio e campo de valores no CG(2), que são:

$$f_0(0) = 0 \quad f_0(1) = 0$$

$$f_1(0) = 1 \quad f_1(1) = 1$$

$$f_2(0) = 0 \quad f_2(1) = 1$$

$$f_3(0) = 1 \quad f_3(1) = 0$$

A função  $f_0$  é a constante 0

A função  $f_1$  é a constante 1

A função  $f_2(x)$  é a função  $x$

A função  $f_3(x)$  será chamada  $\bar{x}$

$$f_3(x) = \bar{x} \quad \text{vemos que}$$

$$\bar{x} = x+1 \pmod{2}$$

### 3.2.- Teorema

Existem, para um domínio de  $m$  elementos e um campo de valores de  $n$  elementos,  $n^m$  funções.

Demonstração:

A função é definida quando os  $m$  valores são dados,  $f(1), f(2), \dots, f(m)$  sendo  $1, 2, \dots, m$  os elementos do domínio; cada um desses  $m$  valores pode assumir qualquer um dos  $n$  valores dentro do campo de valores; então temos:

$$n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^m$$

$m$  vezes

### 3.3. - Contactos inversos

É dito que dois contactos  $x$  e  $\bar{x}$  são inversos se quando um está aberto o outro está fechado; então, a variável  $\bar{x}$  associada com o contacto inverso ao associado com  $x$  é uma função de  $x$  definida por:

$$\bar{x} = f(x)$$

Se  $x = 0$  (isto é se o contacto  $x$  está aberto), temos que

$$\bar{x} = 1$$

Se  $x = 1$  (isto é se o contacto  $x$  está fechado), temos que

$$\bar{x} = 0$$

$$\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0$$

Pode-se ver que:

$$\bar{\bar{0}} = \bar{1} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\bar{1}} = \bar{0} = 1$$

$$\text{Então } \bar{\bar{x}} = x$$

### 3.4 - Funções de dois terminais com contactos e retificadores

Quando entre dois terminais existem retificadores, a condutividade entre os mesmos depende do sentido da corrente. Podemos então ter para os dois terminais duas funções de trabalho,  $f_D$  e  $f_I$ , tendo seus valores no CG(2), e sendo:

$$f_D(x, y, \dots, z) = 1, \quad \text{quando a corrente circula no sentido D}$$

$$f_D(x, y, \dots, z) = 0, \quad \text{quando a corrente não circula no sentido D}$$

$$f_I(x, y, \dots, z) = 1, \quad \text{quando a corrente circula no sentido I}$$

$$f_I(x, y, \dots, z) = 0, \quad \text{quando a corrente não circula no sentido I.}$$

Dizemos que os dois terminais são simétricos, se

$$f_D(x, y, \dots, z) = f_I(x, y, \dots, z)$$

É o caso, por exemplo, de dois terminais sem retificadores.

### 3.5 - Polinômios congruentes com relação a um módulo

#### 3.5.1 - Definição

Dois polinômios com coeficientes inteiros.

$$A = a_0 x^n + \dots + a_n$$

$$B = b_0 x^n + \dots + b_n$$

são ditos, congruentes em relação ao módulo  $m$ .

$A \equiv B \pmod{m}$ , se seus coeficientes são congruentes em relação ao módulo  $m$ , isto é:

$$a_0 \equiv b_0 \pmod{m}$$

. . . . .

$$a_n \equiv b_n \pmod{m}$$

### 3.6 - Funções geradas por polinômios

Neste trabalho as variáveis dependentes e independentes assumirão um número finito de valores. É então possível definir uma função  $f(x)$ ,  $f(x,y)$ ... escrevendo seus valores para todos os diversos valores das variáveis.

Algumas funções podem também ser definidas como segue.

Se  $A$  é um polinômio com coeficientes inteiros

$$A = a_0 x^n + \dots + a_n$$

então, para qualquer inteiro  $K$  corresponderá um inteiro

$$K' = a_0 K^n + \dots + a_n.$$

Definimos, portanto, uma função de uma variável inteira  $K$ , com os valores inteiros  $K'$

$$K' = f_A(K)$$

A função  $f_A$  é chamada a função gerada pelo polinômio  $A$ .  $f_A(K)$  é o valor do polinômio  $A$  para o valor  $K$  da variável. E é escrito

$$f_A(K) = A(K)$$

3.6.1 - Teorema 1

Se  $K_1 \equiv K_2 \pmod{m}$ , então:

$$A(K_1) \equiv A(K_2) \pmod{m}. \text{ Realmente, se :}$$

$$K_1 \equiv K_2 \pmod{m}, \text{ deduzimos}$$

$$K_1^R \equiv K_2^R \pmod{m} \text{ para qualquer } R, \text{ então:}$$

$$a_0 K_1^n + \dots + a_n \equiv a_0 K_2^n + \dots + a_n \pmod{m} \text{ e}$$

$$A(K_1) \equiv A(K_2) \pmod{m}$$

3.6.2 - Teorema 2

Se  $A \equiv B \pmod{m}$ , então para qualquer  $K$ :

$$A(K) \equiv B(K) \pmod{m}$$

Estes dois teoremas mostram que as funções geradas pelos polinômios, podem ser computadas pela substituição de outro polinômio congruente para um dado polinômio e a substituição de um valor congruente para o valor de uma variável.

Por exemplo, em relação ao módulo 2, qualquer função gerada pelo polinômio é igual a uma função gerada por um polinômio tendo seus coeficientes 0 ou 1. Para todos números pares congruentes a 0, corresponde o mesmo valor  $A(0) \pmod{2}$  e para os números ímpares congruentes a 1, corresponde o mesmo valor  $A(1) \pmod{2}$ .

Então, uma função  $f_A(x)$  gera uma função com  $CG(2)$  como seu domínio e valor.

4. CIRCUITO COM CONTACTOS DE DUAS POSIÇÕES - TEORIA DE FUNÇÕES NO CG(2)

4.1 - Generalidades

Sabemos que a adição e a multiplicação no CG(2) são executadas de acordo com as respectivas tabelas seguintes.

	y		
x	+	0	1
0		0	1
1		1	0

	y		
x	•	0	1
0		0	0
1		0	1

Dessas tabelas vemos que para qualquer elemento 'a' no CG(2); temos:

$$\begin{aligned}
 a + a &= 0 \quad (\text{mod. } 2) \\
 a \cdot a &= a
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Já definimos polinômios com coeficientes no CG(2) e as funções geradas pelo polinômio

$$f_A(x) = a_0 K^n + \dots + a_n$$

a relação (1) mostra que para qualquer K no CG(2), temos:

$$K^n = K$$

Então:  $f_A(K) = (a_0 + \dots + a_{n-1})K + a_n$

Então, qualquer função de uma variável gerada por um polinômio é igual a função gerada por um polinômio do primeiro grau: ax+b.

A função gerada por um polinômio do primeiro grau  $f(x) = ax+b$  toma os valores:

$$f(0) = b$$

$$f(1) = a + b$$

Portanto,  $f(0) + f(1) = a + b + b = a$

Então:

$$f(x) = [f(0) + f(1)]x + f(0) \quad (2)$$

Esta fórmula é chamada "fórmula de interpolação". Ela prova que se  $f(0)$  e  $f(1)$  são dados, há um polinômio do primeiro grau gerando  $f(x)$ .

A fórmula (2) pode ser escrita.

$$f(x) = f(0)(x+1) + f(1)x$$

mas  $x+1$  é a função inversa de  $x$  então:

$$f(x) = f(0)\bar{x} + f(1)x$$

Denominando

$$H_0(x) = \bar{x} = x+1$$

$$H_1(x) = x$$

os quais serão chamados os "polinômios de interpolação de Lagrange". Eles satisfazem as condições:

$$H_0(0) = 1 \quad H_0(1) = 0$$

$$H_1(0) = 0 \quad H_1(1) = 1$$

Temos:

$$H_0(x) + H_1(x) = 1$$

$$H_0(x) \cdot H_1(x) = 0, \text{ bem como:}$$

$$[H_0(x)]^2 = H_0(x)$$

$$[H_1(x)]^2 = H_1(x)$$

a fórmula 2 fica então:

$$f(x) = f(0) H_0(x) + f(1) H_1(x) \quad (3)$$

Consideremos a função de duas variáveis  $f(x,y)$  com  $x,y$  variando no  $CG(2)$ ; para  $y = 0$  e para  $y = 1$  são geradas duas funções de uma variável,  $f(x,0)$  e  $f(x,1)$  e podemos escrever de acordo com a fórmula (3)

$$(A) \quad f(x,0) \equiv f(0,0) H_0(x) + f(1,0) H_1(x) \pmod{2}$$

$$(B) \quad f(x,1) \equiv f(0,1) H_0(x) + f(1,1) H_1(x) \pmod{2}$$

mas para cada  $x = x_0$ ,  $f(x,y)$  é uma função  $f(x_0,y)$  de  $y$  para a qual a fórmula (3) pode ser aplicada:

$$f(x_0,y) \equiv f(x_0,0) H_0(y) + f(x_0,1) H_1(y) \pmod{2}$$

Então,  $x_0$  sendo arbitrário:

$$(C) \quad f(x,y) \equiv f(x,0) H_0(y) + f(x,1) H_1(y) \pmod{2}$$

substituindo em (C) os valores encontrados em (A) e (B), temos:

$$f(x,y) \equiv f(0,0) H_0(x) H_0(y) + f(1,0) H_1(x) H_0(y) + \\ f(0,1) H_0(x) H_1(y) + f(1,1) H_1(x) H_1(y) \pmod{2}$$

ou

$$f(x,y) \equiv \sum_{\alpha,\beta=0,1} f(\alpha,\beta) H_\alpha(x) H_\beta(y) \pmod{2}$$

Analogamente, para  $n$  variáveis, temos:

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n = 0, 1} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n) \pmod{2} \quad (4)$$

Esta fórmula prova o:

#### 4.2 - Teorema 1

Qualquer função de  $n$  variáveis, cada uma das quais varia sobre um CG(2) com valores no CG(2) é uma função gerada pelo polinômio dado pela fórmula de interpolação de Lagrange. (4)

Este polinômio  $A(x_1, \dots, x_n)$  do primeiro grau em cada variável, ele gera uma função  $f_A(x_1, \dots, x_n)$  e provaremos o seguinte:

#### 4.3 - Teorema 2

Qualquer polinômio  $A(x_1, \dots, x_n)$  do primeiro grau em cada variável pode ser escrito na forma:

$$A \equiv \sum C_{\alpha_1 \dots \alpha_n} H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n)$$

seus coeficientes  $C_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  sendo 0 ou 1.

Realmente, se temos um polinômio de uma variável:

$$A = ax + b$$

Levando-se em consideração que:

$$H_0(x) + H_1(x) \equiv 1 \pmod{2}$$

$$H_1(x) \equiv x \pmod{2}$$

podemos escrever:

$$A = aH_1(x) + b[H_0(x) + H_1(x)] \equiv bH_0(x) + (a+b)H_1(x)$$

Do mesmo modo um polinomio de duas variáveis:

$$A \equiv axy + bx + cy + d$$

pode ser escrito

$$\begin{aligned} A &\equiv aH_1(x)H_1(y) + bH_1(x) + cH_1(y) + d \equiv dH_0(x)H_0(y) + \\ &(c+d)H_0(x)H_1(y) + (b+d)H_1(x)H_0(y) + \\ &(a+b+c+d)H_1(x)H_1(y) \end{aligned}$$

Repetindo-se este procedimento, isto é, substituindo-se  $H_1(z)$  por qualquer variável  $z$  onde a variável está ausente e substituindo-se 1 por  $H_0(z) + H_1(z)$  a fórmula requerida é obtida.

A prova completa pode também ser feita levando-se em conta o fato que qualquer polinomio pode ser escrito como segue: por exemplo, no caso de duas variáveis

$$A \equiv axy + bx + cy + d \equiv x(ay+b) + (cy+d)$$

$$A \equiv x(ay+b.1) + (cy+d.1)1$$

No caso de tres variáveis

$$A \equiv axyz + byz + cxy + dxz + ex + fy + gz + h$$

$$A \equiv x(ayz + cy + dz + e) + (byz + fg + gz + h)1$$

$$A \equiv x[y(az + 1c) + 1(dz + 1e)] + 1[y(bz + 1f) + 1(gz + 1h)]$$

e nessa forma a função  $H_1$  deve ser substituída para as variáveis e a soma  $H_0 + H_1$  deve substituir 1.

4.3.1 - Exemplo

Passar a função  $xyz + yz + 1$  para a fórmula de interpolação de Lagrange. Temos então:

$$xyz + yz + 1 \equiv H_1(x) H_1(y) H_1(z) + 1.y.z + 1.1.1$$

$$H_1(x) H_1(y) H_1(z) + [H_0(x) + H_1(x)] H_1(y) H_1(z) + \\ [H_0(x) + H_1(x)] [H_0(y) + H_1(y)] [H_0(z) + H_1(z)]$$

$$xyz + yz + 1 \equiv H_0(x) H_0(y) H_0(z) + H_1(x) H_0(y) H_0(z) +$$

$$H_0(x) H_1(y) H_0(z) + H_0(x) H_0(y) H_1(z) +$$

$$H_1(x) H_0(y) H_1(z) + H_1(x) H_1(y) H_0(z) +$$

$$H_1(x) H_1(y) H_1(z)$$

Pode-se provar que a representação de um polinômio do primeiro grau em cada variável na forma:

$$A \equiv C\alpha_1, \dots, \alpha_n H\alpha_1(x_1) \dots H\alpha_n(x_n)$$

é a única, isto é, os coeficientes  $C\alpha_1, \dots, \alpha_n$  são determinados de maneira única em relação ao módulo 2.

4.4 - Teorema 3

As funções  $f_A(x_1, \dots, x_n)$  e  $f_B(x_1, \dots, x_n)$  geradas por dois polinômios A e B do primeiro grau em cada variável, são iguais somente se os polinômios são congruentes em relação ao módulo 2.

Da definição de congruência de polinômios, deduz-se que como no módulo 2 os coeficientes são 0, ou 1 as funções  $f_A(x)$  e  $f_B(x)$  são iguais para  $x = 0, 1$ . Dois polinômios A, B incongruentes em relação ao módulo 2 podem contudo assegurar duas

funções iguais a  $f_A(x)$ , isto é, tais que:

$$f_A(0) = f_B(0)$$

$$f_A(1) = f_B(1)$$

Por exemplo:

$$A = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$B = x + 1$$

não são congruentes em relação ao módulo 2, mas asseguram:

$$f_A(0) = 1, \quad f_B(0) = 1$$

$$f_A(1) = 0, \quad f_B(1) = 0$$

Então:

$$f_A(x) = f_B(x)$$

Isto não pode acontecer para polinômios do primeiro grau.

Podemos dar a prova geral como segue:

Seja A e B dois polinômios de n variáveis, do primeiro grau em cada variável.

$$A(x_1, \dots, x_n) = x_1 M(x_2, \dots, x_n) + N(x_2, \dots, x_n)$$

$$B(x_1, \dots, x_n) = x_1 P(x_2, \dots, x_n) + Q(x_2, \dots, x_n)$$

sejam;  $f_A(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f_B(x_1, \dots, x_n)$  funções geradas pelos polinômios.

$$\text{Se } f_A(x_1, \dots, x_n) = f_B(x_1, \dots, x_n)$$

Então,

$$f_A(0, x_2, \dots, x_n) = f_B(0, x_2, \dots, x_n) \quad e$$

$$f_A(1, x_2, \dots, x_n) = f_B(1, x_2, \dots, x_n)$$

mas

$$f_A(0, x_2, \dots, x_n) = f_N(x_2, \dots, x_n)$$

$$f_B(0, x_2, \dots, x_n) = f_Q(x_2, \dots, x_n)$$

Então

$$f_N(x_2, \dots, x_n) = f_Q(x_2, \dots, x_n)$$

Do mesmo modo

$$f_A(1, x_2, \dots, x_n) = M(x_2, \dots, x_n) + N(x_2, \dots, x_n) = f_{M+N}(x_2, \dots, x_n) ,$$

$$f_B(1, x_2, \dots, x_n) = f_{P+Q}(x_2, \dots, x_n)$$

Então:

$$f_{M+N}(x_2, \dots, x_n) = f_{P+Q}(x_2, \dots, x_n)$$

O teorema foi provado para  $n = 1$ , supondo ser ele válido para  $n-1$  variáveis, de

$$f_N(x_2, \dots, x_n) = f_Q(x_2, \dots, x_n) \quad e$$

$$f_{M+N}(x_2, \dots, x_n) = f_{P+Q}(x_2, \dots, x_n) , \text{ temos:}$$

$$N \equiv Q \pmod{2}$$

$$M+N \equiv P+Q \pmod{2}$$

Então,

$$M \equiv P \pmod{2} \quad \text{portanto}$$

$$A = x_1 \cdot M+N \equiv x_1 \cdot P+Q = B \pmod{2} \quad e$$

$$A \equiv B \pmod{2}$$

#### 4.4.1 - Corolário

A função  $f_A$  gerada pelo polinómio  $A$  é idênticamente 0, somente se  $A \equiv 0 \pmod{2}$ . Podemos resumir o que foi feito acima através de:

#### 4.5 - Primeiro Teorema Fundamental

Qualquer função de  $n$  variáveis  $f(x_1, \dots, x_n)$  é igual a uma função  $f_A(x_1, \dots, x_n)$  gerada pelo polinómio  $A$  do primeiro grau em cada variável, e este polinómio  $A$  é determinado, de modo único, em relação ao módulo 2, pela função  $f$ .

### 5. ALGUMAS APLICAÇÕES A CIRCUITOS

#### 5.1 - Circuitos Série-paralelo

##### 5.1.1 - Exemplo 1

Consideremos uma armadura com contactos ideais (Fig. 4). Seja  $x$  o contacto de fechamento e  $y$  o contacto de abertura.

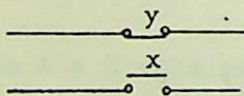


Fig. 4

Se  $x = 0$ ,  $x$  está aberto; então,  $y$  está fechado e  $y = 1$

Se  $x = 1$ ,  $x$  está fechado; então,  $y$  está aberto e  $y = 0$ . Portanto,

$y = f(x) \pmod{2}$ , e temos:

$$f(0) \equiv 1, \quad f(1) \equiv 0$$

Pelo teorema 1

$$y \equiv f(0) H_0(x) + f_1 H_1(x)$$

$$y \equiv 1(x+1) + 0.x \equiv x+1$$

chamamos o contacto  $y$  de contacto inverso de  $x$  e anotamos por  $\bar{x}$

$$\bar{x} = x+1$$

Poderíamos fazer uma tabela como a seguinte e chegarmos ao mesmo resultado, sem necessidade de memorizarmos a fórmula de Lagrange, pois essa sai através de simples visualização da tabela.

$x$	$y = f(x)$
0	1
1	0

$$y = 1.H_0(x) + 0.H_1(x)$$

$$y = 1.H_0(x) = x+1$$

A 2<sup>a</sup> coluna dá um dos termos do produto, com os respectivos valores retirados da 1<sup>a</sup> coluna (mesma fila).

Este tipo de tabela, conforme veremos, será generalizado e amplamente usado.

Os índices de  $H$  são dados pelos valores respectivos da 1<sup>a</sup> coluna; os produtos obtidos em cada fila são adicionados aos demais obtidos das outras filas.

### 5.1.2 - Exemplo 2

Consideremos dois terminais formados por dois contactos  $x, y$  conectados em série (fig. 5). Seja  $S$  a saída do circuito de dois terminais.  $S$  é função de  $x, y$ .

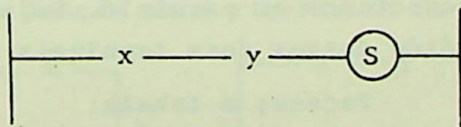


Fig. 5

Sabemos, através do Teorema 1, usando a fórmula (4), que:

$$S = f(x,y) = f(0,0) H_0(x) H_0(y) + f(0,1) H_0(x) H_1(y) + \\ f(1,0) H_1(x) H_0(y) + f(1,1) H_1(x) H_1(y)$$

já que para  $f(0,0) = f(0,1) = f(1,0) = 0$  a lampada está apagada e para  $f(1,1) = 1$ , a lampada está acesa, temos

$$f(x,y) = H_1(x) H_1(y)$$

Sabemos que  $H_1(x) = x$  e  $H_1(y) = y$ , então

$$S = f(x,y) = x.y$$

Façamos pela tabela

x	y	S = f(x,y)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$S = H_1(x) H_1(y) = x.y$

Então, a indicação da lampada S é dada por  $S = x.y$

### 5.1.3 - Exemplo 3

Consideremos dois terminais formados pelos contatos x,y conectados em paralelo. Seja S a lampada indicadora da condutividade desses dois terminais (Fig. 6).

Façamos a tabela:

x	y	S = f(x,y)	
0	0	0	
0	1	1	A .
1	0	1	B
1	1	1	C

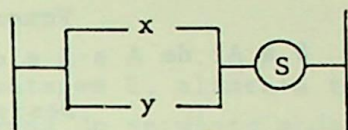


Fig. 6

De (A) tiramos  $1.H_0(x) H_1(y) = (x+1)y$

De (B) tiramos  $1.H_1(x) H_0(y) = x(y+1)$

De (C) tiramos  $1.H_1(x) H_1(y) = xy$

$$S = (A) + (B) + (C)$$

$$S = (x+1)y + x(y+1) + xy$$

$$S = xy + y + xy + x + xy = xy + x + y$$

Usaremos a notação para  $xy + x + y = x \ddagger y$

Daqui para a frente o sinal " $\ddagger$ " indica conexão paralela e o sinal " $\cdot$ " conexão sêrie de circuito. Estes circuitos podem incluir diversos dispositivos, além de contactos.

As condutividades da lampada S para contactos sêrie e contactos paralelos, podem ser generalizadas para quaisquer "unções".

#### 5.1.4 - Exemplo 4

Escrever a função para o circuito da fig. 7

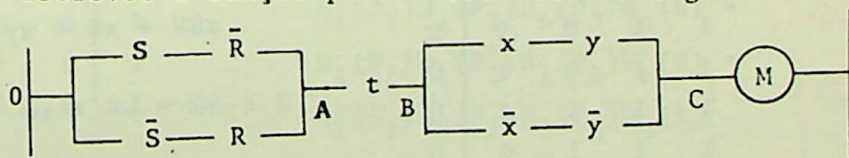


Fig. 7

## Solução

Vemos que o circuito é composto de 3 partes de 0 a A, de A a B e de B a C.

Designando por  $f_1$  a função associada ao trecho de 0 a A e por  $f_2$  a função associada ao trecho de A a B e por  $f_3$  a função associada ao trecho de B a C, temos:

$$f_3 \equiv xy + \bar{x}\bar{y} \equiv xy + \bar{x}\bar{y} + xy \cdot \bar{x}\bar{y} = xy + (x+1)(y+1) = x+y+1$$

$$f_2 = t$$

$$f_1 = R\bar{S} + \bar{R}S = R(S+1) + (R+1)S = R+S$$

$$M = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = (x+y+1)(R+S)$$

## 5.1.5.1 - Exemplo 5

Suponhamos que uma função é definida pela tabela seguinte. Achar a função

x	y	S	R	Z = f(x,y,S,R)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0
1	1	1	0	0

Solução

Por Lagrange, temos:

$$Z \equiv \bar{x}\bar{y}SR + \bar{x}y\bar{S}R + x\bar{y}\bar{S}R + x\bar{y}SR$$

$$Z \equiv (x+1)(y+1)SR + (x+1)y(S+1)R + x(y+1)(S+1)R + x(y+1)S(R+1)$$

$$Z \equiv xySR + ySR + xSR + SR + xySR + ySR + xyR + yR + xySR + xyR + xSR + xR + xySR + xSR + xyS +$$

$$Z \equiv SR + yR + xR + xS + xSR + xyS$$

## 5.1.5.2 - Exemplo 6

Uma esteira rápida de montagem E, alimenta tres postos de trabalho  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  e funciona do seguinte modo:

- 1) quando os 3 operários trabalham, a esteira está imovel
- 2) Todo operário que terminar sua operação deve pressionar um botão junto ao seu posto de trabalho (botões de pressão  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ ).
- 3) Quando dois dos tres operários pressionam seus botões um painel L se acende.
- 4) Este painel fica aceso quando o 3º operário pressionar seu botão
- 5) A esteira se desloca rapidamente e o motor se põe em marcha
- 6) A esteira para quando um dos 3 operários soltar seu botão por razões de segurança.

Pede-se: Estabelecer o circuito de controle a contatos do painel L e do motor da esteira E.

SOLUÇÃO

Façamos a tabela de funcionamento para E

$P_1$	$P_2$	$P_3$	E
1	1	1	1

$$E = H_1(P_1)H_1(P_2)H_1(P_3) = P_1P_2P_3$$

Façamos agora a Tabela de funcionamento para L.

$P_1$	$P_2$	$P_3$	E	L
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1
1	0	1	0	1

$$L = H_0(P_1)H_1(P_2)H_1(P_3)H_0(E) + H_1(P_1)H_1(P_2)H_0(P_3)H_0(E) + H_1(P_2)H_1(P_2)H_1(P_3)H_0(E) + H_1(P_1)H_0(P_2)H_1(P_3)H_0(E)$$

Substituindo-se os correspondentes valores de  $H_0$  e  $H_1$  e efetuando-se, obtemos:

$$L = \bar{E} [P_1(P_2+P_3) + P_2P_3]$$

Execução do circuito:

Por convenção os circuitos a relés são desenhados com os contatos mostrados na posição inoperada do relê; e este procedimento estamos seguindo neste trabalho.

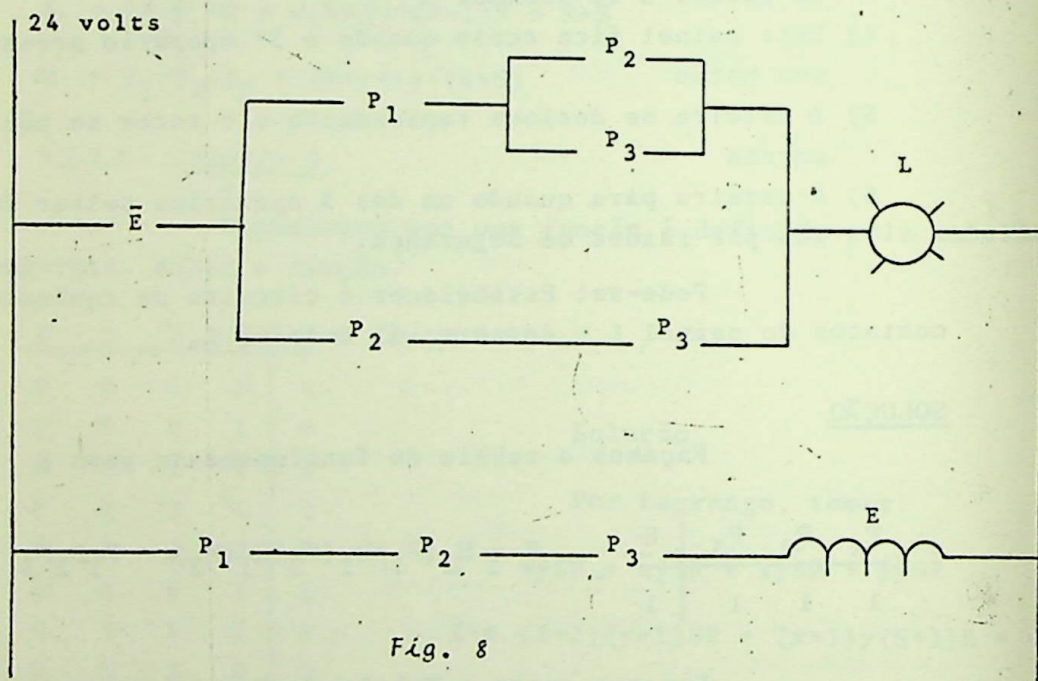


Fig. 8

### 5.1.5.3 - Exemplo 7

Um guindaste deve permitir a elevação de massas compreendidas entre 20 e 80 kilos. Para isso ele comporta uma plataforma repousando sobre molas.

Segundo o peso das cargas a elevar, 3 interruptores são operados.

As condições de funcionamento são as seguintes:

Condição 1

A vazio o guindaste deve funcionar, isto é, se nenhum dos 3 interruptores é operado.

Condição 2

Para cargas compreendidas entre 10 e 20 kilos  $10 < P < 20$  o guindaste não deve funcionar, isto é, se somente o interruptor A está operado.

Condição 3

Para cargas compreendidas entre 20 e 80 kilos o guindaste deve funcionar, isto é, se os 2 interruptores A e B estão operados.

Condição 4

Para cargas superiores a 80 kilos o guindaste não pode funcionar, isto é, se os 3 interruptores A, B e C estão operados.

Deseja-se o circuito elétrico a relés que satisfaça as condições estabelecidas.

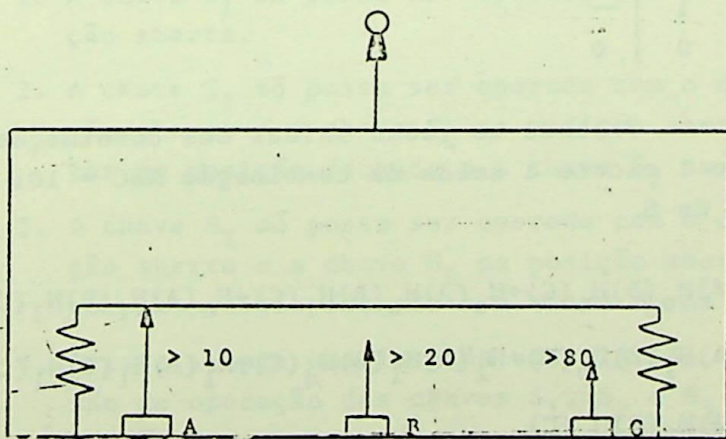


Fig. 9

SOLUÇÃO:

Quando uma dada combinação de entradas não pode ocorrer ela é denominada combinação opcional. Mostra-se que o valor da saída correspondente a uma combinação opcional tanto pode ser 0 como 1, assim sendo algumas ou todas combinações opcionais podem ser somadas a expressão da saída a fim de simplificá-la, a otimização da simplificação pode ser feita por tentativas, ou pode ser feita com o auxílio de computador. Existe um método que permite otimizar a expressão que contenha combinações opcionais. Este método é conhecido como método dos mapas de KARNAUGH e foi o que usamos neste problema, este método é usado somente para poucas variáveis de entrada. Para muitas variáveis de entrada temos de recorrer a computador.

A	B	C	S	
0	0	0	1	
0	0	1	—	0 → representa interruptor inoperado
0	1	1	—	
0	1	0	—	1 → representa interruptor operado
1	1	0	1	
1	1	1	0	Saida opcional representamos por
1	0	1	—	
1	0	0	0	

Fazendo-se todas saídas das combinações de entrada como 1 exceto a saída da combinação ABC = 101 temos a expressão de S

$$\begin{aligned}
 S = & H_0(A)H_0(B)H_0(C) + H_0(A)H_0(B)H_1(C) + H_0(A)H_1(B)H_1(C) + \\
 & H_0(A)H_1(B)H_0(C) + H_1(A)H_1(B)H_0(C) + H_1(A)H_1(B)H_1(C) + \\
 & H_1(A)H_0(B)H_0(C)
 \end{aligned}$$

Efetutando-se e simplificando-se obtemos:

$$S = \bar{A} + B\bar{C}$$

Executando-se o circuito temos:

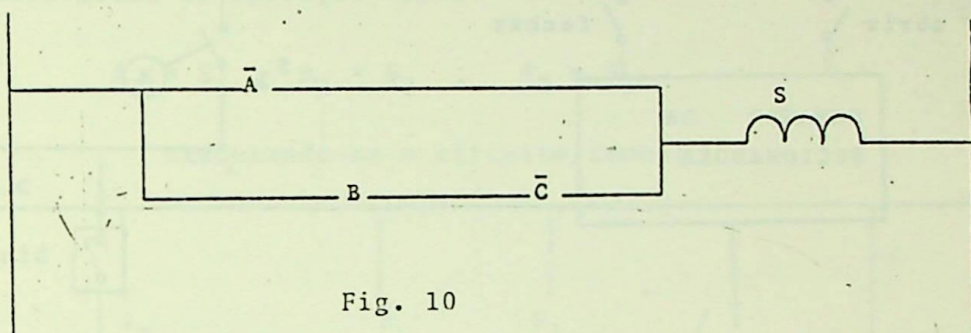


Fig. 10

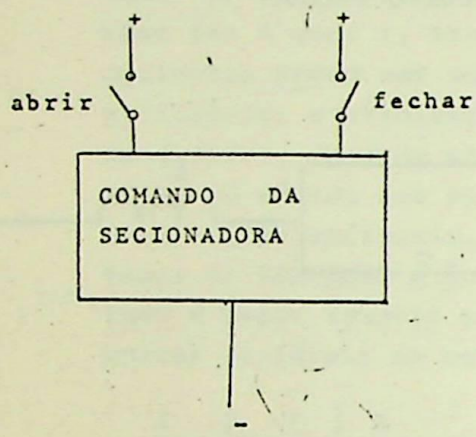
#### 5.1.5.4 - Exemplo 8

No esquema abaixo de barra dupla de uma subestação as chaves seccionadoras  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  são motorizadas.

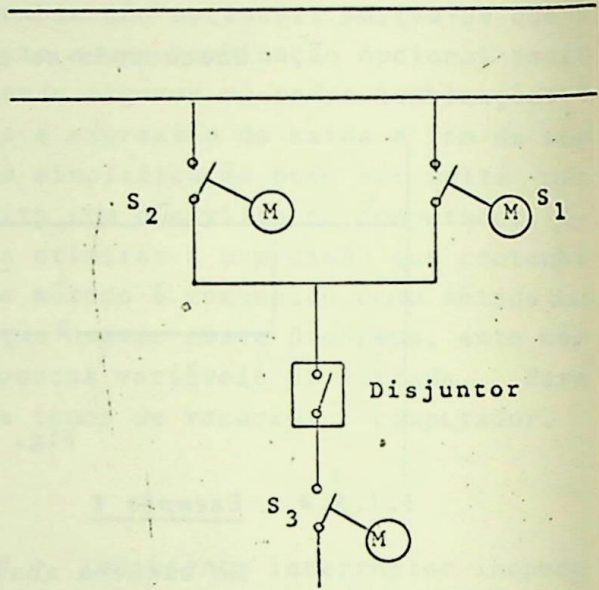
Fazer um circuito de controle para a operação das chaves seccionadoras, tal que:

1. A chave  $S_1$  só possa ser operada com o disjuntor na posição aberta.
2. A chave  $S_1$  só possa ser operada com o disjuntor na posição aberto e a chave  $S_2$  na posição aberta ou o disjuntor na posição fechado e a chave  $S_2$  na posição fechada.
3. A chave  $S_2$  só possa ser operada com o disjuntor na posição aberto e a chave  $S_1$  na posição aberta, ou o disjuntor na posição fechado e a chave  $S_1$  na posição fechada.
4. Existe sempre uma lampada amarela (A) indicando permissão de operação das chaves  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  (isto é, uma chave só pode ser operada se sua correspondente lampada estiver acesa).

Nota:- A fonte de controle disponível é de 125 V<sub>C.C</sub> e o comando da seccionadora é do tipo abaixo.



(a)



(b)

Fig. 11

SOLUÇÃO:

Fazendo-se as tabelas de funcionamento para S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub> e S<sub>3</sub> obtemos as equações correspondentes.

Seja D = 1 Disjuntor fechado  
 S = 1 Chave operada

D	S <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>
0	0	1
1	1	1

$$S_1 = H_0(D)H_0(S_2) + H_1(D)H_1(S_2)$$

Obtemos

$$S_1 = (\bar{D} \uparrow S_2)(D \uparrow \bar{S}_2)$$

Analogamente temos  $S_2 = (\bar{D} \text{---} S_1) (D \text{---} \bar{S}_1)$

D	$S_3$
0	1

$S_3 = H_0(D) = \bar{D}$

Sendo  $A_1, A_2$  e  $A_3$  as respectivas lampadas de permissividade de operação temos:

$A_1 = S_1 ; A_2 = S_2 ; A_3 = S_3$

Executando-se o circuito temos:

+ 125 V C.C

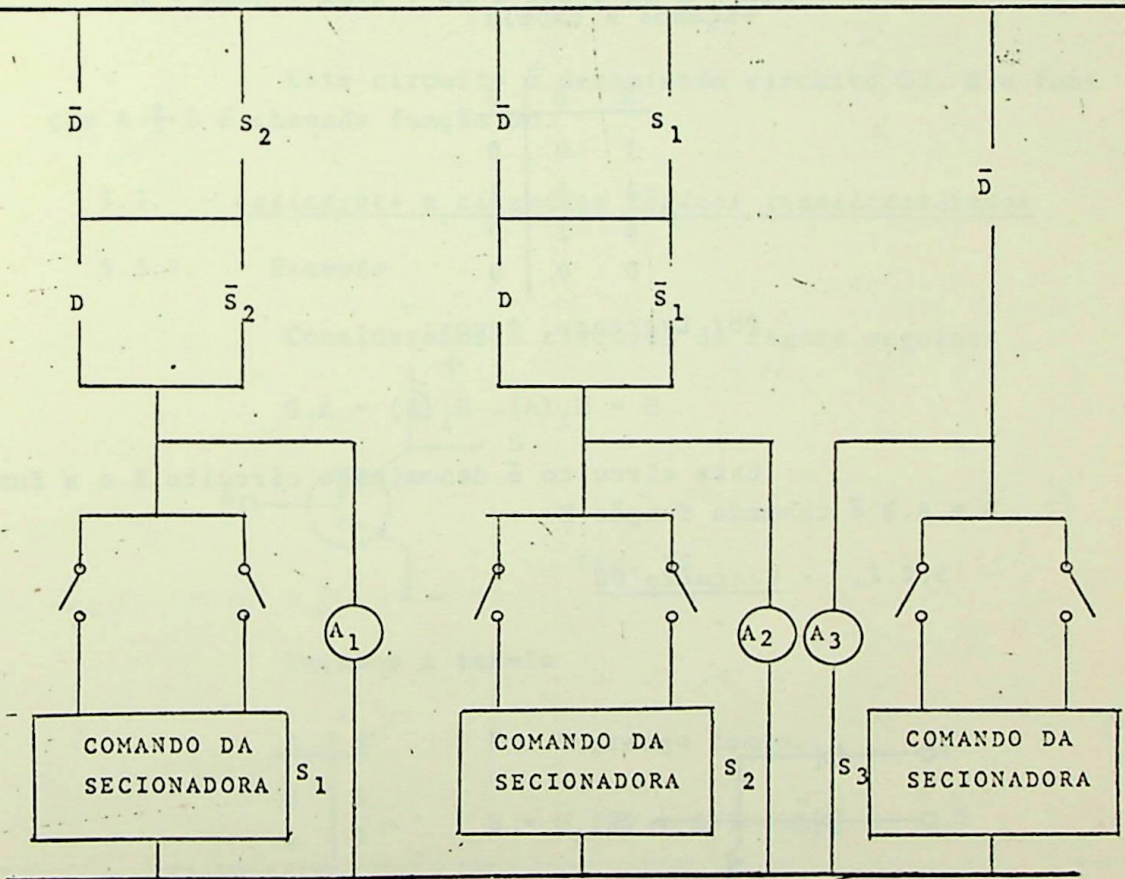


Fig. 12

5.2 - Aplicações a circuitos lógicos diodos

Consideremos + como 1 e - como 0, isto é, usando lógica positiva.

5.2.1. - Circuito E

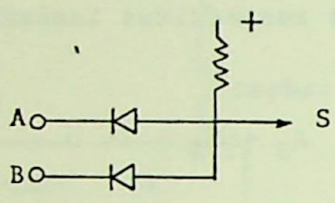


Fig. 13

Façamos a tabela

A	B	S
1	0	0
1	1	1
0	1	0
0	0	0

Por Lagrange, temos:

$$S = H_1(A) \cdot H_1(B) = A \cdot B$$

Este circuito é denominado circuito E e a função  $S = A \cdot B$  é chamada função E

5.2.2. - Circuito OU

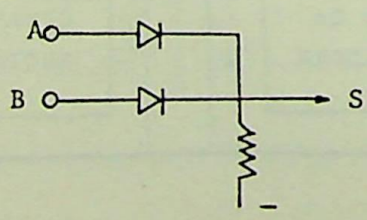


Fig. 14

Façamos a tabela

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Por Lagrange temos:

$$S = H_0(A) H_1(B) + H_1(A) H_0(B) + H_1(A) H_1(B)$$

$$S = AB + \bar{A}B + A\bar{B} + AB = A + B + AB = A \uparrow B$$

Este circuito é denominado circuito OU. E a função  $A \uparrow B$  é chamada função OU.

### 5.3. - Aplicações a circuitos lógicos transistorizados

#### 5.3.1. - Exemplo

Consideremos o circuito da figura seguinte

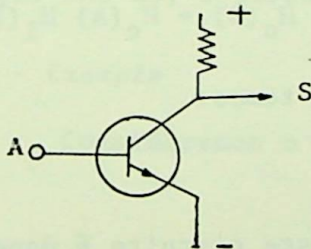


Fig. 15

Façamos a tabela

A	S
0	1
1	0

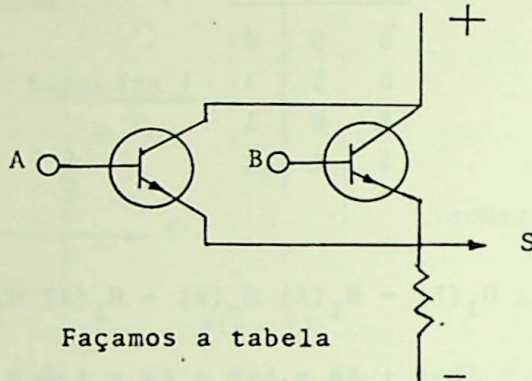
Por Lagrange temos:

$$S = H_0(A) = A + 1 = \bar{A}$$

Este circuito executa a função NÃO. É denominado circuito inversor.

5.3.2. - Exemplo

Consideremos o circuito da figura seguinte.



Façamos a tabela

Fig- 16

A	B	S
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Por Lagrange temos:

$$S = H_1(A) H_1(B) + H_1(A) H_0(B) + H_0(A) H_1(B)$$

Simplificando temos:

$$S = A \vee B$$

Como vimos, este circuito é denominado circuito OU.

5.3.3. - Exemplo

Consideremos o circuito da figura seguinte.

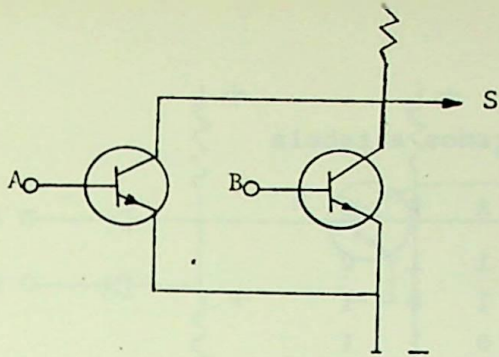


Fig. 17

Façamos a tabela

A	B	S
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Por Lagrange tiramos:

$$S = H_0(A) H_0(B) = (A+1)(B+1) = \overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Vemos que temos uma função OU negada que é denominada função NÃO-OU, o circuito é então um circuito NÃO-OU.

#### 5.3.4. - Exemplo

Consideremos o circuito da figura seguinte.

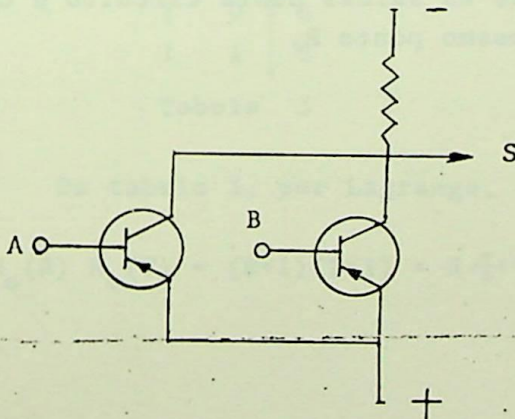


Fig. 18

Façamos a tabela

A	B	S
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Por Lagrange temos:

$$S = H_1(A) H_0(B) + H_0(A) H_1(B) + H_0(A) H_0(B)$$

$$S = A(B+1) + (A+1)B + (A+1)(B+1) = AB+A+AB+B+AB+A+B+1$$

$$S = AB+1 = \overline{A \cdot B}$$

Vemos que esta é uma função E negada que é chamada da função NÃO.E.

O circuito anterior é então denominado um circuito NÃO.E

### 5.3.5. - Exemplo

Consideremos o circuito da figura abaixo, que é feito removendo-se uma resistencia de carga de um circuito NÃO E e conectando-se as saidas deste circuito e de um outro circuito NÃO.E no mesmo ponto P.

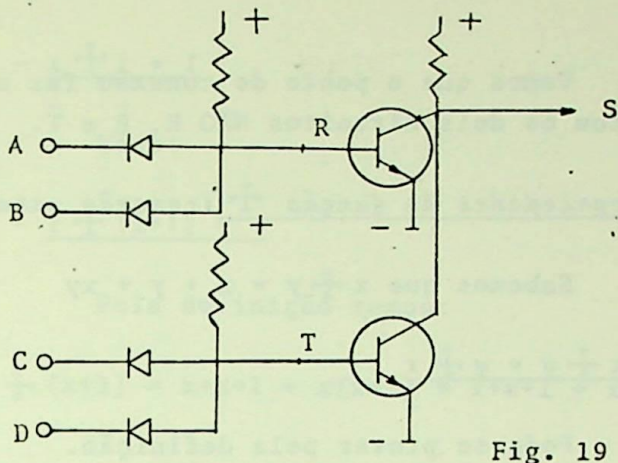


Fig. 19

As tabelas para um tal circuito são:

A	B	R
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabela 1

C	D	T
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tabela 2

R	T	P
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Tabela 3

Da tabela 3, por Lagrange, temos:

$$P = H_0(R) H_0(T) \therefore (R+1)(T+1) = R \bar{1} \bar{1} T = \bar{R} \bar{T}$$

Vemos que o ponto de conexão faz o papel de um circuito E com os dois circuitos NÃO E,  $\bar{R}$  e  $\bar{T}$ .

#### 5.4 - Propriedades da função $\uparrow$ (conexão paralelo)

Sabemos que  $x \uparrow y = x + y + xy$

$$5.4.1 - \underline{x \uparrow y = y \uparrow x}$$

Pode-se provar pela definição.

$$x \uparrow y = x+y + xy = y+x + xy = y \uparrow x$$

$$5.4.2 - \underline{x \uparrow x = x}$$

$$x \uparrow x = x + x + xx = x + x + x = x$$

$$5.4.3 - \underline{x \uparrow (y \uparrow z) = (x \uparrow y) \uparrow z}$$

Pode-se provar desenvolvendo-se ambos os membros

$$\begin{aligned} \text{a) } x \uparrow (y \uparrow z) &= x+(y \uparrow z) + x(y \uparrow z) = x+(y+z+yz) + \\ &+(y+z+yz)x = x+y+z+yz+xy+xz+xyz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x \uparrow y) \uparrow z &= (x \uparrow y)+z + (x \uparrow y)z = (x+y+xy)+z + \\ &+(x+y+xy)z = x+y+z+yz+xy+xz+xyz \end{aligned}$$

Vemos que o resultado de a) é igual ao de b).

$$5.4.4 - \underline{x \uparrow 0 = x}$$

Vêde!

$$5.4.5 - \underline{x \oplus 1 = 1}$$

Vêde:

$$5.4.6 - \underline{x \oplus (x+1) = 1}$$

Pela definição temos:

$$x \oplus (x+1) = x+x+1 + x(x+1) = x+x+1 + x+x = 1$$

### 5.5 - Lemas

#### 5.5.1 - Lema 1:

Se  $ab \equiv 0 \pmod{2}$

$$a \oplus b \equiv a + b$$

#### 5.5.2 - Lema 2:

Se  $f(a_1, \dots, a_n)$  e  $g(a_1, \dots, a_n)$  asseguram para qualquer valor das variáveis,  $f(a_1, \dots, a_n) g(a_1, \dots, a_n) = 0$ .  
Então:  $f(a_1, \dots, a_n) \oplus g(a_1, \dots, a_n) \equiv f(a_1, \dots, a_n) + g(a_1, \dots, a_n)$ .

#### 5.5.3 - Lema 3

Se  $f_i(a_1, \dots, a_n)$  são  $r$  funções as quais para quaisquer valores das variáveis no  $CG(2)$  assegura para  $i \neq j$

$$f_i(a_1, \dots, a_n) f_j(a_1, \dots, a_n) \equiv 0 \pmod{2}$$

Então:

$$\oplus f_i = \Sigma f_i$$

### 5.6 - Teorema

Se a função  $f$  é expandida na forma de Lagrange

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n)$$

$C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$  sendo 0 ou 1

Então:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n).$$

Para provar isso é suficiente aplicar o lema 3 recair no 1º teorema fundamental de acordo com o qual quaisquer dois termos da soma tem um produto nulo.

Este teorema mostra-nos que se nós temos uma função  $f(a_1, \dots, a_n)$ , então esta função pode ser expandida na forma de Lagrange.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n)$$

com  $C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$  sendo 0 ou 1 pode portanto ser escrito

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n)$$

Então, esta é a "função de trabalho" de um network formado pela conexão paralela dos dois terminais tendo as funções de trabalho.

$$C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n)$$

Mas,  $C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$  são 0 ou 1; então  $f$  é a função de trabalho de dois terminais obtidos conectando-se em paralelo os dois terminais tendo como função de trabalho

$$H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n)$$

para os quais  $C_{\alpha_1}, \dots, \alpha_n = 1$ . Então o circuito é obtido pela conexão paralela de dois terminais tendo como função de trabalho

$$H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n)$$

Cada um desses dois terminais é obtido conectando-se em série os dois terminais tendo como função de trabalho  $H(x_1), \dots, H(x_n)$ . Então o circuito é um circuito obtido pela conexão série e paralelo de dois terminais tendo funções de trabalho da forma:  $H_{\alpha_i}(x_i)$ , mas  $H_1(x_i) = x_i$  é a função de trabalho do contacto  $x_i$ , e  $H_0(x_i) = \bar{x}_i + 1$  é a função de trabalho do contacto inverso  $\bar{x}_i$ .

Portanto o circuito tendo  $f$  como função de trabalho é de dois terminais tendo  $x_1, \dots, x_n$  como contacto e  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  como contactos inversos.

Então provamos o 2º Teorema Fundamental.

Qualquer função de trabalho pode ser realizada como uma função de trabalho de um circuito série paralelo.

### 5.6.1 - Achar a função de trabalho de:

$$\text{---}x \text{---}y \text{---} \rightarrow z = f(x, \bar{y})$$

Solução:

Formando a tabela temos:

x	$\bar{y}$	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$Z = H_1(x) H_1(\bar{y}) = x\bar{y}$$

5.6.2 - Achar a função de trabalho de:

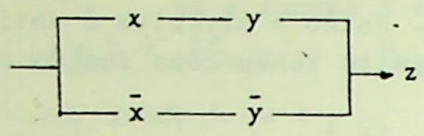


Fig. 20

Solução:

Fazendo a tabela temos:

$xy$	$\bar{x}\bar{y}$	$z$
0	1	1
1	0	1

$$Z = H_0(xy) H_1(\bar{x}\bar{y}) + H_1(xy) H_0(\bar{x}\bar{y})$$

$$Z = (xy+1) (x+1)(y+1) + xy (x+1)(y+1)+1$$

$$Z = xy+xy+xy+xy+xy+x+y+1+xy+xy+xy = x+y+1$$

5.6.3 - Consideremos o circuito ponte da figura abaixo

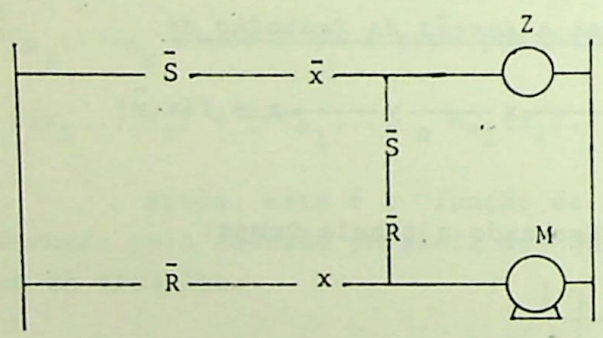


Fig. 21

onde:

$$Z = f_1(R, S, x) \quad \text{e} \quad M = f_2(R, S; x)$$

sendo que  $f_1(R, S, x)$  e  $f_2(R, S, x)$  são dadas por:

R	S	x	Z
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

R	S	x	M
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Então:

$$f_1(R, S, x) = (R+1)(S+1)(x+1) + (R+1)(S+1)x + (R+1)s(x+1) + R(S+1)(x+1) = RS+R+S+1+RSx+RS+Sx+S+RSx + Rx+RS+R$$

$$f_1(R, S, x) = (R+S)x + RS + 1$$

$$f_2(R, S, x) = (R+1)(S+1)(x+1) + (R+1)(S+1)x + (R+1)Sx+R(S+1)x = (R+1)(S+1) + RSx + Sx+RSx+Rx = RS+R+S+1+Sx+Rx$$

$$f_2(R, S, x) = RS + (R+S)(x+1)+1$$

A expressão:  $f_2 = (R+1)(S+1)+RSx + Sx + RSx + Rx = (R+1)(S+1)+(R+S)x$  assegura

$$f_2 = (R+1)(S+1) + (R+S)x$$

já que:  $(R+1)(S+1)+(R+S)x = 0$

Tendo em vista que:

$$R+S = R\bar{S} + \bar{R}S = R\bar{S} + \bar{R}S + R\bar{S}R\bar{S} = R(S+1)(R+1)S = RS+R+RS+S = R + S.$$

Temos:

$$f_2 = \bar{R} \bar{S} + (\bar{R}\bar{S} + \bar{R}S)x$$

$$f_2 = \bar{R} \bar{S} + (R + S)(\bar{R} + S)x$$

Similarmente:

$$f_1 = (S+1)(Rx+1) + (R+1)S(x+1) = (S+1)[(R+1)(x+1) + (R+1)(x+1)] + (R+1)S(x+1)$$

$$f_1 = (S+1)[(\bar{R} + x) + (R+1)S(x+1)]$$

$$f_1 = \bar{S}(\bar{R} + x) + \bar{R}S\bar{x} = \bar{S}(\bar{R} + x) + \bar{R}\bar{x}$$

Temos que o circuito considerado é equivalente ao da figura 22 abaixo:

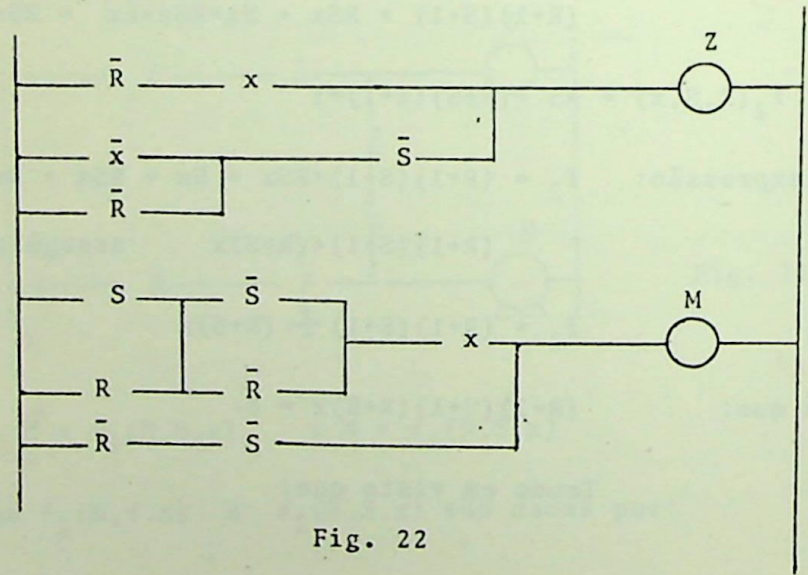


Fig. 22

5.7 - Algebra Booleana

No CG(2) as funções de duas variáveis " $\cdot$ ", " $\oplus$ " e a função de uma variável " $\bar{\quad}$ " satisfazem certas propriedades seguintes:

- 1 -  $a \cdot a = a$
- 2 -  $a \oplus a = a$
- 3 -  $ab = ba$
- 4 -  $a \oplus b = b \oplus a$
- 5 -  $a(b+c) = (ab)c$
- 6 -  $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
- 7 -  $0 \cdot a = 0$
- 8 -  $0 \oplus a = a$
- 9 -  $1 \cdot a = a$
- 10 -  $1 \oplus a = 1$

Provaremos agora outras propriedades importantes

- 11 -  $a(a \oplus b) = a$   
 $a(a + b + ab) = aa + ab + ab = a$
- 12 -  $a \oplus ab = a$   
 $a + ab + aab = a + ab + ab = a$
- 13 -  $a(b \oplus c) = ab \oplus ac$   
 $a(b \oplus c) = a(b+c+bc) = ab + ac + abc = ab \oplus ac$
- 14 -  $a \oplus bc = (a \oplus b)(a \oplus c)$   
 $a+bc+abc = (a+b+ab)(a+c+ac)$   
 $a+bc+abc = a+ac+ac+ab+bc+abc+ab+abc+abc$   
 $a+bc+abc = a+bc+abc$

Teoremas de De Morgan 15 e 16

- 15 -  $a \oplus b = \bar{a} \bar{b}$   
 $a + b + ab + 1 = (a+1)(b+1)$   
 $a+b+ab+1 = ab+a+b+1$

16 -  $\overline{ab} = \overline{a} \uparrow \overline{b}$   
 $ab+1 = (a+1)+(b+1)+(a+1)(b+1)$   
 $ab+1 = a+1+b+1+ab+a+b+1$   
 $ab+1 = ab+1$

17 -  $a \cdot \overline{a} = 0$   
 $a(a+1) = aa+a = a+a = 0$

18 -  $a \uparrow \overline{a} = 1$   
 $a+a+1+a(a+1) = a+a+1+a+a = 1$

19 -  $\overline{\overline{a}} = a$   
 $\overline{\overline{a}} = \overline{a+1} = a+1+1 = a$

A algebra De Boole obedece as propriedades de 1 a 19.

6. OPERAÇÃO IDEAL DE RELES ORDINÁRIOS

6.1 - Descrição da operação sequencial

Consideremos um elemento de dois valores para o qual associamos a variável x. Durante a operação x pode variar, sendo função do tempo T.

$$x = x(T)$$

Faremos a suposição que esta função é suficientemente regular, assim a transição do valor  $x(T) = 0$  para  $x(T)=1$  não ocorre um infinito número de vezes dentro de um intervalo finito de tempo.

Nesse caso, a função terá uma variação de tempo da forma:

$$\begin{aligned}
 x(T) &= 0 & T_0 < T < T_1 \\
 x(T) &= 1 & T_1 < T < T_2 \\
 x(T) &= 0 & T_2 < T < T_3
 \end{aligned}$$

Suporemos que os intervalos de tempo  $T_0T_1, T_1T_2, T_2T_3, \dots$  são comensuráveis. Sobretudo, suporemos que existe uma medida comum para os correspondentes intervalos para todas variáveis que aparecem em um circuito; assim sendo, em qualquer intervalo,

$$N\tau < T < (N+1)\tau$$

Deveremos ter para qualquer variável um valor constante, que anotaremos por  $x_n, y_n, \dots$

Poderemos representar graficamente a variação de uma função do tempo, desenhando para tais funções os intervalos quando ela assume o valor 1. Na figura 23 temos a função  $x(T)$  representada, e para a qual  $x_0 = x_3 = x_4 = x_6 = 0$  e  $x_1 = x_2 = x_5 = 1$ .

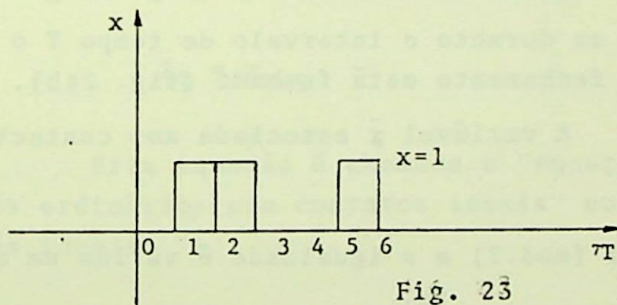


Fig. 23

De maneira similar podemos representar no mesmo diagrama as variações de qualquer número de funções, tomando-se diferentes unidades no eixo das ordenadas, para as várias funções.

### 6.2 - Equação característica de um relê ideal

No caso de um relê ordinário, temos duas variáveis a considerar: a variável "I" associada a corrente e a variável "x" associada aos contactos de fechamento.

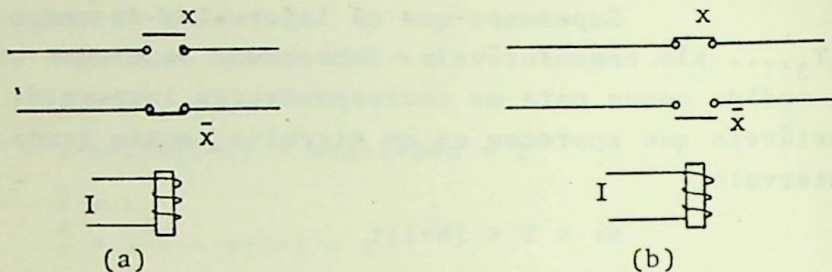


Fig. 24

A variável x associada aos contactos de fechamento assume para cada intervalo de tempo T um dos seguintes dois valores:

$x_T = 0$ , se durante o intervalo de tempo T o contacto de fechamento está aberto (fig. 24a)

$x_T = 1$ , se durante o intervalo de tempo T o contacto de fechamento está fechado (fig. 24b).

A variável  $\bar{x}$  associada aos contactos de abertura é:

$\bar{x} \equiv x+1 \pmod{2}$  e a igualdade é válida em qualquer instante.

A variável I\* associada à corrente no enrolamento do relê, toma em cada intervalo de tempo T um dos seguintes valores.

\* na maioria das vezes associamos a corrente de um relê com contactos à variável maiúscula; Ex.: para um relê com contactos x, associamos a variável X para a corrente, em vez de I.

$I_T = 0$ , se durante o intervalo de tempo  $T$ , nenhuma corrente passa através do enrolamento do relé;

$I_T = 1$ , se durante o intervalo de tempo  $T$  uma corrente passa através do enrolamento do relé.

Suponhamos que a corrente passando através do enrolamento durante o intervalo  $T$ , age sobre os contatos durante o intervalo de tempo seguinte  $T+1$ ; isto quer dizer que se durante o intervalo de tempo  $T$ , uma corrente passa através do enrolamento, durante o intervalo de tempo  $T+1$  o contato de fechamento é fechado, isto é:

$$\text{Se } I_T = 1, \text{ então } x_{T+1} = 1$$

Se durante o intervalo de tempo  $T$ , nenhuma corrente passa através do enrolamento, durante o intervalo  $T+1$  o contato de fechamento está aberto, isto é, se:

$$I_T = 0, \text{ então } x_{T+1} = 0$$

Deduz-se então:

$$I_T = x_{T+1}$$

Esta equação é chamada a "equação característica para relés ordinários com contatos ideais" ou, abreviadamente, para relés ideais.

### 6.3 - Papel de transmissão de um relé

Suponhamos que nos dois terminais A queremos substituir nos vários locais  $x$  pelos dois terminais B.

Isto pode ser executado por meio de um relé. Realmente na fig. 25 seja  $f(a_1, \dots, a_n, x)$  a função de trabalho dos dois terminais A e seja  $g(a_1, \dots, a_n, x)$  a função de trabalho dos dois terminais B. Construamos agora,

$$f[a_1, \dots, a_n, g(a_1, \dots, a_n)]$$

é suficiente tomar

$$x_{T+1} = (I_T = X_T)$$

$$(X_T = I_T) = g(a_{1T}, \dots, a_{nT})$$

$$W_{T+1} = f(a_{1T+1}, \dots, a_{nT+1}, x_{T+1})$$

$$a_{1T+1} = a_{1T} \dots a_{nT+1} = a_{nT}$$

a fim de ter:

$$W_{T+1} = f[a_{1T+1}, \dots, a_{nT+1}, g(a_{1T+1}, \dots, a_{nT+1})]$$

Dessa maneira substituímos os dois terminais junto com sua função de trabalho  $g$  nos dois terminais A nos locais indicados pela letra  $x$ , com no entanto um delay de 1 intervalo de tempo.

#### 6.4 - Papel de inversão de um relê

Suponhamos que se deseja introduzir dois terminais tendo a função de trabalho  $g$ , em dois terminais tendo a função de trabalho  $f$ , em certos locais indicados por  $\bar{x}$ . Isto pode ser executado por meio de um relê.

É suficiente que:

$$x_{T+1} = X_T$$

$$X_T = g_T$$

$$W_{T+1} = f(a_{1T+1}, \dots, a_{nT+1}, \bar{x}_{T+1})$$

$$a_{1T+1} = a_{1T} \dots a_{nT+1} = a_{nT}$$

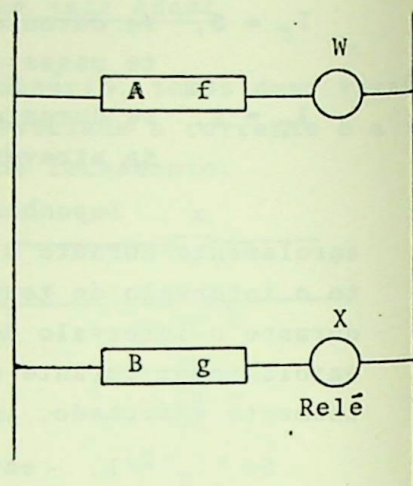


Fig. 25

A fim de termos:

$$W_{T+1} = f [a_{1T+1}, \dots, a_{nT+1}, g(\overline{a_{1T+1}}, \dots, \overline{a_{nT+1}})]$$

com um delay de um intervalo de tempo

### 6.5 - Shunt parcial de um circuito

O shunt como o da figura 26 dá:

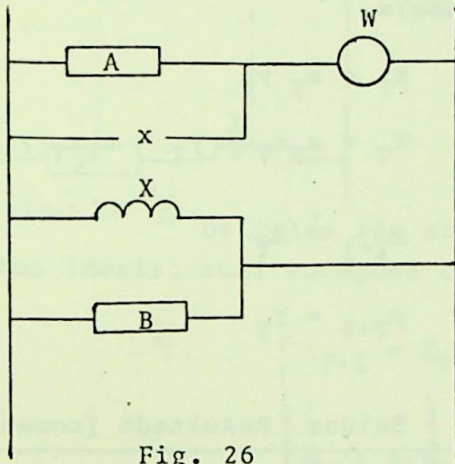


Fig. 26

$$x_{T+1} = (I_T = X_T)$$

$$I_T = \bar{B}_T$$

$$W_{T+1} = A_{T+1} \overline{\overline{I_T}} x_{T+1}$$

Então, se:

$$B_{T+1} = B_T$$

$$W_{T+1} = A_{T+1} \overline{\overline{B_{T+1}}}$$

com um delay de um intervalo de tempo.

### 6.6 - O papel da realimentação de um relê

Um relê pode ser operado pelo efeito de sua própria ação.

Exemplo: na fig. 27, quando pressionamos o "botão de pressão"

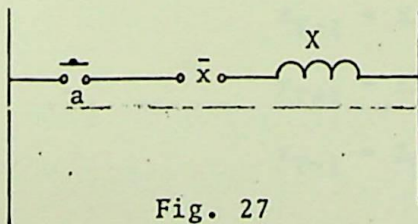


Fig. 27

o eletromagneto do relê X abre o contato  $\bar{x}$  e portanto corta a alimentação da bobina; o circuito então é desenergizado e o contato  $\bar{x}$  é novamente fechado e vol

ta a alimentar a bobina e assim sucessivamente.

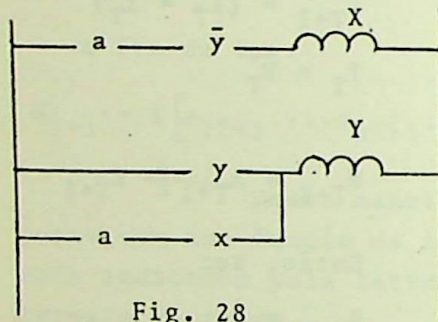
Temos as equações:

$$(X_T = I_T) = a \cdot \bar{x}_T$$

$$\bar{x}_{T+1} = (X_T = I_T)$$

### 6.7.- Exemplos

Consideremos o circuito da fig. 28. Estudar sua evolução e fazer uma tabela.



$$X_T = a_T \bar{y}_T$$

$$Y_T = a_T x_T + y_T = a_T x_T + y_T + a_T x_T y_T$$

$$x_{T+1} = X_T$$

$$y_{T+1} = Y_T$$

Fig. 28

Operação	Inst	Entradas			Saidas		Resultado (comentário)
		a	x	y	x	y	
Repouso	0	0	0	0	0	0	
Botão de + pressão é operado	1	1	0	0	1	0	Relé X é energizado
	2	1	1	0	1	1	Contato x é fechado; relé y é energizado
	3	1	1	1	0	1	Ação de feed-back sobre
	4	1	0	1	0	1	x abre e y permanece fe-
	5	1	0	1	0	1	chado posição estável.

## 6.8 - Análise da operação de circuito com relês ideais

Consideremos o circuito como o da fig. 29, os relês são operados por dois terminais tendo as funções de trabalho  $f, \dots, g$  as quais são funções dos contatos dos botões de pressão  $a_1, \dots, a_n$ , e dos contatos de relê  $x, \dots, y$ . A corrente no relê  $X, \dots, Y$  é:

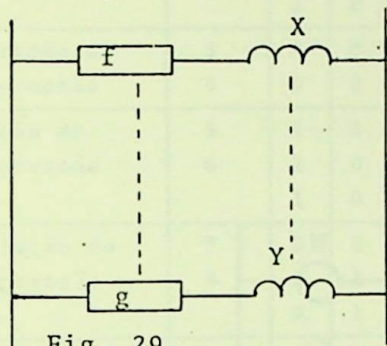


Fig. 29

$$\begin{cases} X_T = f(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) \\ \vdots \\ Y_T = g(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) \end{cases} \quad (1)$$

Os relês são supostos do tipo ordinário com contatos ideais; suas equações características são portanto:

$$\begin{cases} x_{T+1} = X_T \\ \vdots \\ y_{T+1} = Y_T \end{cases} \quad (2)$$

Os sistemas de equações (1) e (2) descrevem a operação do circuito para os vários programas de operação. A posição de repouso é opcional.

### 6.8.1 - Exemplo

No circuito da fig. 30, as equações são:

$$x_{T+1} = X_T$$

$$y_{T+1} = Y_T$$

$$z_{T+1} = Z_T$$

$$x_T = \bar{a}_T(y_T \bar{z}_T + x_T z_T) + a_T x_T$$

$$y_T = \bar{a}_T(y_T \bar{z}_T + \bar{x}_T z_T) + a_T y_T$$

$$z_T = a_T(\bar{x}_T \bar{y}_T + x_T y_T) + \bar{a}_T z_T$$

$$W_T = (\bar{a}_T + y_T) x_T z_T$$

$$V_T = (\bar{a}_T + \bar{x}_T) y_T \bar{z}_T$$

$$U_T = (\bar{a}_T + \bar{y}_T) \bar{x}_T z_T$$

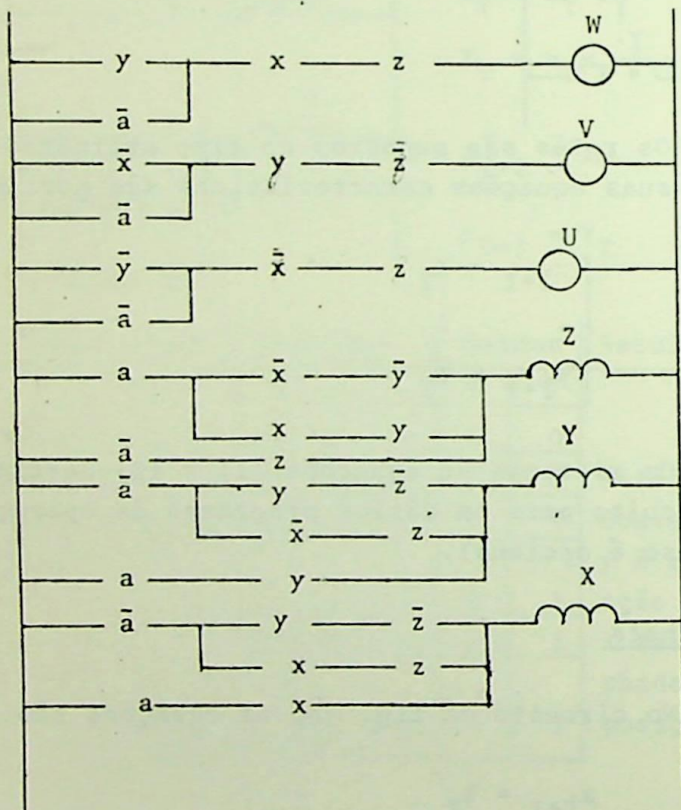


Fig. 30

Podemos iniciar a operação de repouso:

$$x_0 = y_0 = z_0 = X_0 = Y_0 = Z_0 = U_0 = V_0 = W_0 = 0$$



Vamos agora descrever, o programa de operação de relés do circuito anterior, fig. 30

Inicialmente há uma posição de repouso estável, o botão de pressão e os relés não estão operados.

Na primeira operação do botão de pressão, o relé Z é operado; quando o botão de pressão é liberado, Y opera e permanece operado.

Na segunda operação do botão de pressão Z é inoperado e Y permanece operado.

Quando o botão de pressão é novamente liberado, X é operado e Y permanece operado.

Na terceira operação do botão de pressão Z é operado e X e Y permanecem operados.

Quando o botão de pressão é liberado, Y cessa de operar e X e Z permanecem operados.

Na quarta operação do botão de pressão Z é inoperado e X permanece operado.

Quando o botão de pressão é inoperado, X é também inoperado.

#### 6.8.2 - Programa de operação das lampadas do circuito da fig. 30

Na primeira operação do botão de pressão, a lampada U é acesa, e permanece acesa mesmo após o botão de pressão ser liberado.

Na segunda operação do botão de pressão a lampada U é apagada, a lampada V é acesa e permanece acesa mesmo após a liberação do botão de pressão.

Na terceira operação do botão de pressão, a lampada V é apagada, a lampada W é acesa e a lampada U permanece apagada; Esta situação é mantida quando o botão de pressão é liberado.

Na quarta operação do botão de pressão, a lâmpada W é apagada, as lâmpadas U e V permanecem apagadas; esta situação persiste quando o botão de pressão é liberado e o circuito retorna a posição de repouso.

### 6.9 - O princípio da determinação

#### Sistema de equações recorrentes de um circuito

Como vimos, a análise da operação de um circuito é feita com auxílio de dois sistemas de equações:

$$\begin{cases} X_T = f(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) \\ \vdots \\ Y_T = g(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_{T+1} = X_T \\ \vdots \\ y_{T+1} = Y_T \end{cases} \quad (2)$$

O primeiro sistema, nos dá a função de trabalho dos relés; e o segundo é formado pelas equações características dos relés.

Eliminando  $X_T$  e  $Y_T$  temos:

$$\begin{cases} x_{T+1} = f(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) \\ \vdots \\ y_{T+1} = g(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) \end{cases} \quad (3)$$

Este sistema de equações recorrentes com suas variáveis no CG(2) será chamado: Sistema de Equações Recorrentes do Circuito. Obviamente, podemos eliminar  $x_T, \dots, y_T$ , obtendo:

$$\begin{cases} X_T = f(a_{1T}, \dots, a_{nT}, X_{T-1}, \dots, Y_{T-1}) \\ \vdots \\ Y_T = g(a_{1T}, \dots, a_{nT}, X_{T-1}, \dots, Y_{T-1}) \end{cases} \quad (4)$$

Se durante um intervalo de tempo não mudamos as entradas, os  $a_{1T}, \dots, a_{nT}$ , são constantes durante aquele intervalo de tempo.

As equações:

$$\begin{cases} x_{T+1} = f(a_1, \dots, a_n, x_T, \dots, y_T) \\ \vdots \\ y_{T+1} = g(a_1, \dots, a_n, x_T, \dots, y_T) \end{cases} \quad (5)$$

São as equações de evolução do circuito para uma dada entrada, (ou de evolução autonoma do circuito).

Consideremos o sistema (5) de equações. É claro desde que  $a_1 \dots a_n$  são constantes, se conhecemos os valores de  $x_0, \dots, y_0$ , o sistema (5) nos leva a  $x_1, \dots, y_1$  os valores  $x_1, \dots, y_1$  introduzidos nas equações (5) levam-nos a  $x_2 \dots y_2$ , e assim sucessivamente, então:

*Sob uma dada entrada, se as posições dos contatos são conhecidas num dado instante, a evolução subsequente do circuito é conhecida.*

Obviamente, se o programa de controle é dado, então a evolução do circuito é conhecida para cada entrada, e desde que a mudança de entrada quando os contatos estão em certa posição, segue que a evolução subsequente para a mudança de entrada é também conhecida. Podemos portanto estabelecer o

#### PRINCIPIO DA DETERMINAÇÃO

*A evolução subsequente de um circuito é determinada quando o programa de controle e a posição dos contatos são conhecidas num dado momento.*

Eliminando  $x_T$  das equações (1) e (2) e escrevendo a equação (2) na forma

$$\begin{cases} x_{T-1} = x_T \\ \vdots \\ y_{T-1} = y_T \end{cases}$$

Obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x_T = f(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_{T-1}, \dots, y_{T-1}) \\ y_T = g(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_{T-1}, \dots, y_{T-1}) \end{cases}$$

Este é o sistema de equações recorrentes do circuito, escrito para os relés (corrente nas bobinas). É óbvio que este sistema nos permite estabelecer o princípio da determinação de outra forma.

*A evolução subsequente de um circuito é conhecida quando seu programa de entrada e a situação das correntes nas bobinas num dado instante são conhecidas.*

Na análise da operação de um circuito, se em dois diferentes momentos para as mesmas entradas achamos a mesma posição dos contatos. Ex.

Instante	Entradas	Contatos	Relés
	$a, \dots C$	$x, \dots y$	$X \dots Y$
R	$a_R, \dots C_R$	$x_R, \dots y_R$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
S	$a_S, \dots C_S$	$x_S, \dots y_S$	

Se para  $a_R = a_S, \dots C_R = C_S$

Tem-se  $x_R = x_S, \dots y_R = y_S$

Então podemos estar certos que as evoluções do circuito são as mesmas, se as entradas são mantidas.

Em particular, se para uma dada entrada temos

$$x_{T+1} = x_T, \dots y_{T+1} = y_T$$

Então a posição é estável até que a entrada é mudada.

Instante	Entradas	Contatos	Relés	Comentário
	$a, \dots C$	$x, \dots y$	$X, \dots Y$	
T	$a_0, \dots C_0$	$x_0, \dots y_0$	.	Posição estável
⋮	⋮	⋮		
T+1	$a_0, \dots C_0$	$x_0, \dots y_0$		

Do mesmo modo se para uma dada entrada a situação das correntes é a mesma.

Instante	Entradas	Contatos	Relés	Comentário
	$a, \dots C$	$x, \dots y$	$X, \dots Y$	
T	$a_0, \dots C_0$		$X_0, \dots Y_0$	Posição estável
⋮	⋮		⋮	
T+1	$a_0, \dots C_0$		$X_0, \dots Y_0$	

Em outras palavras se a operação dos botões de pressão de entrada  $a_0, \dots C_0$ , não modifica a situação dos relés  $X_0, \dots Y_0$ , esta situação é estável até que a entrada é modificada.

6.10 - Evolução sob uma dada entrada

Para um dado número  $n$  de variáveis no CG(2) podemos ter  $2^n$  combinações de valores. Chamando de  $P$  o conjunto de  $n$  componentes,  $(x, \dots, y)$ , como cada variável pode assumir 2 valores,  $P$  pode ter  $2^n$  valores como dissemos.

Associando estes valores às posições dos contatos dos relés, por exemplo, no caso de um circuito com dois relés  $X, Y$  temos  $2^2 = 4$  posições dos contatos dos relés que são:

	x	y
$P_1$	0	0
$P_2$	0	1
$P_3$	1	1
$P_4$	1	0

O princípio da determinação nos diz que se a posição  $P_0$  dos contatos do relé num dado instante 0 é conhecida

$$P_0 = P_{i0}$$

Então a evolução subsequente do circuito para uma dada entrada é conhecida.

$$P_1 = P_{i1}$$

$$\vdots$$

$$P_n = P_{in}$$

A evolução do circuito para uma dada entrada é descrita por  $P_{i0}, P_{i1}, \dots, P_{iT}$  (A). Do mesmo modo, o princípio da determinação nos diz que se em dois diferentes intervalos de tempo  $R$  e  $S$  temos:

$$P_R = P_S$$

Então devemos ter também  $P_{R+1} = P_{S+1}$

mas na sequência (A) o número de termos diferentes  $P_{iS}$  é finito, desde que temos no máximo  $2^n$  posições, então dois termos da série serão certamente iguais.

Suponhamos que:

$P_{i0}, P_{i1}, \dots, P_{iS-1}$  são diferentes mas que  $P_{iS}$  é igual a um desses

$$P_{iS} = P_{iR} \quad (R < S)$$

nesse caso

$$P_{iS} \neq P_{iG} \quad (G < R)$$

Pelo principio da determinação temos

$$\begin{array}{ccc} P_{iS+1} & = & P_{iR+1} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{i2S-R} & = & P_{iS} = P_{iR} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Então pela evolução

$$P_{iR}, P_{iR+1}, \dots, P_{iS-1}, P_{iR}, P_{iR+1}, \dots, P_{iS-1}, P_{iR}, P_{iR+1}, \dots, P_{iS-1}$$

Então a evolução do circuito é composta de uma evolução não periódica  $P_{i0}, \dots, P_{iR-1}$  e de uma evolução ciclica tendo o periodo  $P_{iR}, \dots, P_{iS-1}$ , chamaremos a tal evolução de : Evolução Eventualmente Ciclica.

Alguns casos especiais

Se  $S = R+1$ , após a evolução não periodica o circuito se torna estável

$$P_{i0}, \dots, P_{iR-1}, P_{iR}, P_{iR}, \dots$$

Chamaremos tal evolução de: Evolução Finalmente Estabilizada.

Se  $R = 0$ , a parte não periódica desaparece e a evolução é:

$$P_{i_0}, \dots, P_{i_{S-1}}, P_{i_0}, \dots, P_{i_{S-1}}, P_{i_0}, \dots$$

Chamaremos tal evolução de: Evolução Ciclica

Se  $R = 0$ ,  $S = 1$ , então o circuito permanece na posição inicial.

$$P_{i_0}, P_{i_0}, P_{i_0}, \dots, P_{i_0}, \dots$$

Diremos que a posição  $P_{i_0}$  é uma posição estável.

### 6.11 - Exemplos

#### 6.11.1 - Exemplo de um circuito com evolução ciclica

Seja o circuito dado pelas equações de recorrência

$$\begin{cases} x_{T+1} = y_T \pmod{2} \\ y_{T+1} \equiv x_T + 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Para:

$$\begin{cases} x_{T+2} \equiv y_{T+1} \equiv x_T + 1 \\ y_{T+2} \equiv x_{T+1} + 1 \equiv y_T + 1 \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} x_{T+4} \equiv x_{T+2} + 1 \equiv x_T \pmod{2} \\ y_{T+4} \equiv y_{T+2} + 1 \equiv y_T \pmod{2} \end{cases}$$

Então o circuito tem uma evolução ciclica de 4 passos. Por exemplo, se começamos de  $x_T = y_T = 0$ , temos:

$$\begin{cases} x_{T+1} = 0 \\ y_{T+1} = 0+1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{T+2} = y_{T+1} = 1 \\ y_{T+2} = x_{T+1} + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{T+3} = y_{T+2} = x_{T+1} + 1 = 1 \\ y_{T+3} = x_{T+2} + 1 = y_{T+1} + 1 = 1 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{T+4} = y_{T+3} = 0 \\ y_{T+4} = x_{T+3} + 1 = 1 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{T+5} = y_{T+4} = 0 \\ y_{T+5} = x_{T+4} + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{T+6} = y_{T+5} = 1 \\ y_{T+6} = x_{T+5} + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{T+7} = y_{T+6} = 1 \\ y_{T+7} = x_{T+6} + 1 = 1 + 1 = 0 \end{cases}$$

Vemos pelos resultados obtidos que o período se repete a partir de  $x_4$ , isto é:

Instante	$x_T$	$y_T$		
0	0	0	$x_4 = x_0$	$y_4 = y_0$
1	0	1		
2	1	1	$x_5 = x_1$	$y_5 = y_1$
3	1	0		
4	0	0	$x_6 = x_2$	$y_6 = y_2$
5	0	1	$x_7 = x_3$	$y_7 = y_3$
6	1	1		
7	1	0		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

Para construir o circuito notamos que:

$$\begin{cases} x_{T+1} = y_T \\ y_{T+1} = x_{T+1} = \bar{x}_T \end{cases} \quad (1)$$

Sendo  $x$  e  $y$  contatos ideais de relés ordinários, sabemos que são operados da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x_{T+1} = X_T \\ y_{T+1} = Y_T \end{cases}$$

Sendo  $X_T$  e  $Y_T$  as bobinas dos relés; substituindo em (1), temos:

$$\begin{cases} X_T = Y_T \\ Y_T = \bar{X}_T \end{cases}$$

Executando o circuito, temos: (fig. 17)

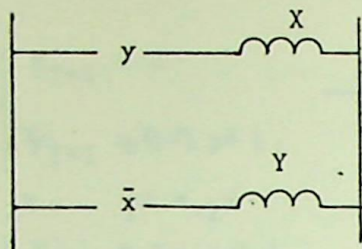


Fig. 31

6.11.2 - Exemplo de um circuito com evolução finalmente estabilizada

Consideremos as equações de recorrência:

$$\begin{cases} x_{T+1} \equiv x_T y_T + x_T + y_T & (\text{mod. } 2) \\ y_{T+1} \equiv x_T + 1 & (\text{mod. } 2) \end{cases}$$

Vamos construir o circuito

Já que estamos trabalhando com relés ordinários de contatos ideais temos:

$$\begin{cases} x_{T+1} = X_T \\ y_{T+1} = Y_T \end{cases}$$

Substituindo nas equações de recorrência, temos:

$$X_T = x_T y_T + x_T + y_T = x_T \uparrow y_T$$

$$Y_T = x_T + 1 = \bar{x}_T$$

Executando o circuito temos: (fig. 32)

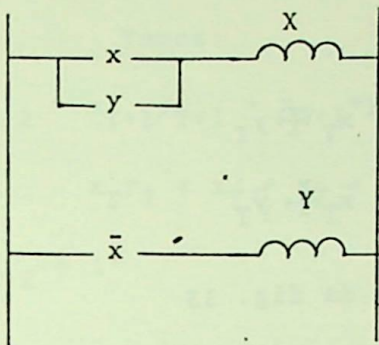


Fig. 32

Façamos a evolução do circuito

Instante	$x_{T+1}$	$y_{T+1}$
0	0	0
1	0	1
2	1	1
3	1	0
4	1	0
5	1	0
6	1	0
7	1	0

Desde que a posição no instante 3 é igual a posição no instante 4, este é o estado estável; então, temos:

$$x_3 = x_4 = x_5 = \dots$$

$$y_3 = y_4 = y_5 = \dots$$

### 6.11.3 - Circuito com evolução eventualmente cíclica

Consideremos as relações:

$$\begin{cases} x_{T+1} = x_T y_T + x_T + y_T \\ y_{T+1} = x_T y_T + 1 \end{cases}$$

Executando o circuito, temos levando-se em conta que estamos nos referindo a relés ordinários de contatos ideais:

$$\begin{cases} x_{T+1} = X_T \\ y_{T+1} = Y_T \end{cases}$$

Temos, então:

$$X_T = x_T y_T + \bar{x}_T + y_T = \bar{x}_T \vee y_T$$

$$Y_T = x_T y_T + 1 = \bar{x}_T \vee \bar{y}_T$$

que corresponde ao circuito da fig. 33

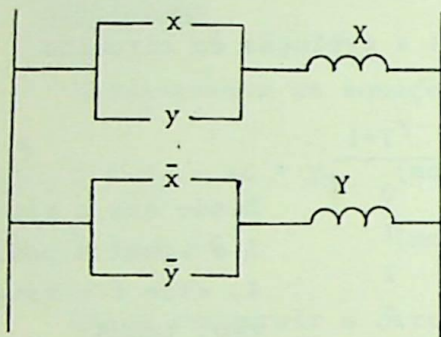


Fig. 33

Façamos a tabela de evolução

Instante	$x_{T+1}$	$y_{T+1}$
0	0	0
1	0	1
2	1	1
3	1	0
4	1	1

Vemos que o relé X é estável e o relé Y pulsa.

Esta conclusão poderia ter sido alcançada através do manuseio conveniente das equações, isto é:

$$\begin{cases} x_{T+1} = x_T y_T + x_T + y_T \\ y_{T+1} = x_T y_T + 1 \end{cases}$$

Temos:

$$x_{T+2} = x_{T+1}y_{T+1} + x_{T+1} + y_{T+1} = (x_T y_T + x_T + y_T)(x_T y_T + 1) + x_T y_T + x_T + y_T + x_T y_T + 1$$

$$x_{T+2} = 1$$

$$y_{T+2} = x_{T+1}y_{T+1} + 1 = (x_T y_T + x_T + y_T)(x_T y_T + 1) + 1$$

$$y_{T+2} = x_T + y_T + 1$$

$$x_{T+3} = x_{T+2}y_{T+2} + x_{T+2} + y_{T+2} = 1 \cdot (x_T + y_T + 1) + 1 + x_T + y_T + 1$$

$$x_{T+3} = 1$$

$$y_{T+3} = x_{T+2}y_{T+2} + 1 = 1(x_T + y_T + 1) + 1 = y_{T+2} + 1$$

$$x_{T+4} = 1$$

$$y_{T+4} = y_{T+2}$$

Então:

$$x_{T+2} = x_{T+4} = x_{T+6} = \dots = 1$$

$$y_{T+2} = y_{T+4} = y_{T+6} = \dots$$

$$x_{T+3} = x_{T+5} = 1$$

$$y_{T+3} = y_{T+5} = \dots = y_{T+2} + 1$$

## 7. ESTUDO DOS CIRCUITOS A RELÉS

### 7.1 - Síntese de circuito série-paralelo para programas de operação de relés

#### 7.1.1 - Introdução

Este problema surge do seguinte: o circuito é conhecido e tem os botões de pressão A,...C e os relés X,...Y; achar a estrutura do circuito que satisfaça certo programa para ligar ou desligar os relés quando o programa de operação dos botões de pressão é dado.

#### 7.1.2 - Exemplo

Dado o programa seguinte, construir o circuito "que satisfaça-o."

#### 7.1.3 - Programa

Inicialmente há uma posição de repouso estável, o botão de pressão e o relé não estão operados.

Na primeira operação do botão de pressão o relé Z é operado. Quando o botão de pressão é liberado, Y opera e Z permanece operado.

Na segunda operação do botão de pressão Z é inoperado e Y permanece operado.

Quando o botão de pressão é novamente liberado X é operado e Y permanece operado.

Na terceira operação do botão de pressão Z é operado e X e Y permanecem operados.

Quando o botão de pressão é liberado, Y cessa de operar e X e Z permanecem operados.

Na quarta operação do botão de pressão, Z é inoperado e X permanece operado.

Quando o botão de pressão é inoperado X é também inoperado.

7.1.4 - Façamos a solução matemática geral para problemas desse tipo

Notamos que o sistema de equações recorrentes sendo:

$$\begin{aligned} x_{T+1} &= X_T = f(a_T, \dots, C_T, x_T, \dots, y_T) \\ \vdots & \\ y_{T+1} &= Y_T = g(a_T; \dots, C_T, x_T, \dots, y_T) \end{aligned}$$

As funções  $f$  e  $g$  não são conhecidas, se o diagrama do circuito não é conhecido.

Estas funções devem ser determinadas de tal maneira que o programa é satisfeito.

Cada exigência no programa é estabelecida como segue: "os relés estando numa dada posição e os botões de pressão sendo operados numa certa maneira, os relés vão para outra posição".

Em outras palavras, cada ponto do programa é estabelecido.

$a_T, \dots, C_T, x_T, \dots, y_T$ ; então  $x_{T+1}, y_{T+1}$  são conhecidos.

Se  $a_T = \alpha, \dots, C_T = \beta, x_T = \lambda, \dots, y_T = \gamma$

Então:

$$x_{T+1} = \lambda_1, \dots, y_{T+1} = \gamma_1$$

O programa assegura as relações:

$$\begin{cases} \lambda_1 = f(\alpha, \dots, \beta, \lambda, \dots, \gamma) \\ \vdots \\ \lambda_1 = g(\alpha, \dots, \beta, \lambda, \dots, \gamma) \end{cases}$$

— pela expansão de:

$$f(a, \dots, C, x, \dots, y) \dots g(a, \dots, C, x, \dots, y) \text{ no } CG(2)$$

Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(a, \dots, C, x, \dots, y) = \lambda_1 H_\alpha(a) \dots H_\beta(C), H_\lambda(x) \dots H_\gamma(y) + \dots \\ \vdots \\ g(a, \dots, C, x, \dots, y) = \lambda_1 H_\alpha(a) \dots H_\beta(C), H_\lambda(x) \dots H_\gamma(y) + \dots \end{array} \right.$$

isto é, determinamos os coeficientes de

$$H_\alpha(a), \dots, H_\beta(C), H_\lambda(x) \dots H_\gamma(y)$$

Para o problema ser possível, é necessário que duas condições idênticas não devam guiar a coeficientes diferentes.

$$\lambda_R \dots \gamma_R$$

Em outras palavras, esta condição importa a estabelecer que o princípio da determinação é satisfeito.

Há no mínimo um circuito que satisfaça um dado programa de operação de relês se este programa satisfaz o princípio da determinação.

Obviamente, pode acontecer que o programa não determine todos os coeficientes da expressão de Lagrange de f...g. Nesse caso alguns dos coeficientes permanecem indeterminados e temos diversos circuitos que satisfaçam ao programa.

Uma vez que as funções f, ...g são conhecidas as funções de operação dos relês são também conhecidas.

$$\left\{ \begin{array}{l} X = f(a, \dots, C, x, \dots, y) \\ \vdots \\ Y = g(a, \dots, C, x, \dots, y) \end{array} \right.$$

Podemos portanto construir um circuito s3rie-pa-  
ralelo, os rel3s do qual tem estas fun33es de trabalho.

7.1.5 - Solu33o do problema

Voltando ao problema cujo programa foi enuncia-  
do, achar o circuito com um bot3o de press3o e tres rel3s que  
o satisfa3am. As equa33es de recorrencia do circuito s3o da  
forma:

$$\begin{cases} X_T = f(a_T, x_T, y_T, z_T) \\ Y_T = g(a_T, x_T, y_T, z_T) \\ Z_T = h(a_T, x_T, y_T, z_T) \end{cases}$$

As fun33es f, g, h s3o desconhecidas; lembrando  
que para rel3s ordin3rios de contatos ideais, temos:

$$\begin{cases} x_{T+1} = X_T \\ y_{T+1} = Y_T \\ z_{T+1} = Z_T \end{cases}$$

Fa3amos a tabela de acordo com o enunciado do  
problema:

Da tabela (fig. 34), grupando por Lagrange todas  
as condi33es dos respectivos rel3s operados, de maneira an3lo-  
ga como j3 fizemos anteriormente em outras tabelas, temos:

$$\begin{aligned} X = & H_0(a)H_0(x)H_1(y)H_0(z) + H_0(a)H_1(x)H_1(y)H_0(z) + \\ & H_1(a)H_1(x)H_1(y)H_0(z) + H_1(a)H_1(x)H_1(y)H_1(z) + \\ & H_0(a)H_1(x)H_1(y)H_1(z) + H_0(a)H_1(x)H_0(y)H_1(z) + \\ & H_1(a)H_1(x)H_0(y)H_1(z) + H_1(a)H_1(x)H_0(y)H_0(z) \end{aligned}$$

Instante da Operação	Variáveis				Relês			Comentário Programa
	a	x	y	z	X	Y	Z	
Repouso	0	0	0	0	0	0	0	Estado estável
1a. operação do botão de pressão	1	0	0	0	0	0	1	Relé Z operado
	1	0	0	1	0	0	1	Estado estável
Liberação do botão de pressão	0	0	0	1	0	1	1	Relé Y é operado
	0	0	1	1	0	1	1	Estado estável
2a. operação do botão de pressão	1	0	1	1	0	1	0	Z é inoperado
	1	0	1	0	0	1	0	Estado estável
Liberação do botão de pressão	0	0	1	0	1	1	0	X é operado
	0	1	1	0	1	1	0	Estado estável
3a. operação do botão de pressão	1	1	1	0	1	1	1	Z é operado
	1	1	1	1	1	1	1	Estado estável
Liberação do botão de pressão	0	1	1	1	1	0	1	Y é inoperado
	0	1	0	1	1	0	1	Estado estável
4a. operação do botão de pressão	1	1	0	1	1	0	0	Z é inoperado
	1	1	0	0	1	0	0	Estado estável
Liberação do botão de pressão	0	1	0	0	0	0	0	X é inoperado
	0	0	0	0	0	0	0	Repouso(estado estável)

Fig. 34

$$X = (a+1)(x+1)y(z+1) + (a+1)xy(z+1) + axyz + (a+1)xyz + \\ (a+1)x(y+1)z + ax(y+1)z + ax(y+1)(z+1) + axy(z+1)$$

$$X = ax + (a+1) [xz + y(z+1)]$$

Desde que:

$$xzy(z+1) = 0 \quad e \quad ax(a+1) [xz+y(z+1)] = 0$$

Temos:

$$X = ax + (a+1) [xz + y(z+1)]$$

$$Y = H_0(a)H_0(x)H_0(y)H_1(z) + H_0(a)H_0(x)H_1(y)H_1(z) + \\ H_1(a)H_0(x)H_1(y)H_1(z) + H_1(a)H_0(x)H_1(y)H_0(z) + \\ H_0(a)H_0(x)H_1(y)H_0(z) + H_0(a)H_1(x)H_1(y)H_0(z) + \\ H_1(a)H_1(x)H_1(y)H_0(z) + H_1(a)H_1(x)H_1(y)H_1(z)$$

$$Y = (a+1)(x+1)(y+1)z + (a+1)x+1)yz + a(x+1)yz + a(x+1)y(z+1) + \\ (a+1)(x+1)y(z+1) + (a+1)xy(z+1) + axy(z+1) + axyz$$

$$Y = (a+1)(x+1)z + a(x+1)y + (a+1)y(z+1) + axy$$

$$Y = ay + (a+1) [(x+1)z + y(z+1)]$$

$$Y = ay + (a+1) (\bar{x}z + y\bar{z})$$

$$Z = H_1(a)H_0(x)H_0(y)H_0(z) + H_1(a)H_0(x)H_0(y)H_1(z) + \\ H_0(a)H_0(x)H_0(y)H_1(z) + H_0(a)H_0(x)H_1(y)H_1(z) + \\ H_1(a)H_1(x)H_1(y)H_0(z) + H_1(a)H_1(x)H_1(y)H_1(z) + \\ H_0(a)H_1(x)H_1(y)H_1(z) + H_0(a)H_1(x)H_0(y)H_1(z)$$

$$Z = a(x+1)(y+1)(z+1) + a(x+1)(y+1)z + (a+1)(x+1)(y+1)z + (a+1)(x+1)yz + axy(z+1) + axyz + (a+1)xyz + (a+1)x(y+1)z$$

$$Z = a(x+1)(y+1) + (a+1)(x+1)z + zxy + (a+1)xz$$

$$Z = (a+1)z + a xy + (x+1)(y+1)$$

$$Z = \bar{a}z + a(xy + \bar{x}\bar{y})$$

Temos portanto:

$$X = f(a, x, y, z) = ax + \bar{a}(xz + y\bar{z})$$

$$Y = g(a, x, y, z) = ay + \bar{a}(\bar{x}z + y\bar{z})$$

$$Z = h(a, x, y, z) = \bar{a}z + a(xy + \bar{x}\bar{y})$$

Executando, temos o circuito da Fig. 35

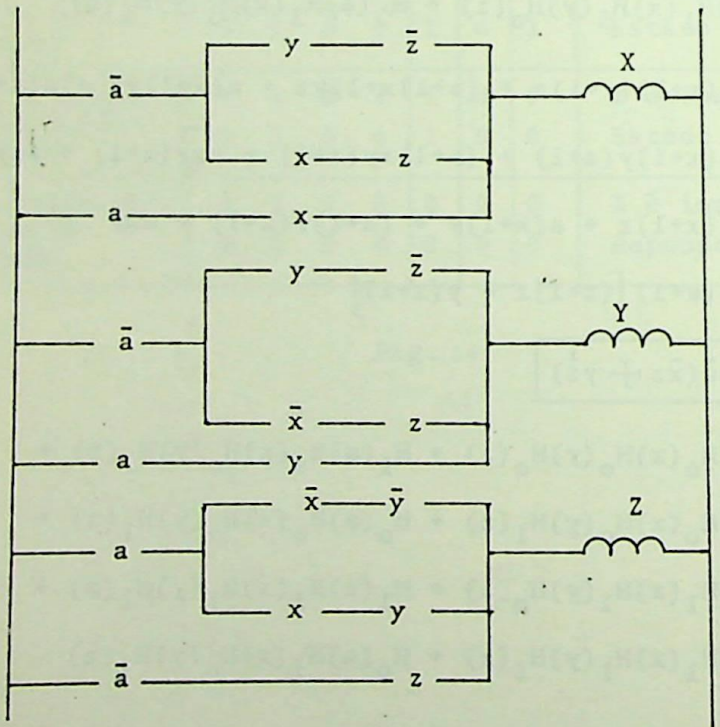


Fig. 35

## 7.2 - Análise e síntese de circuitos shunt

A operação de um circuito shunt pode ser descrita usando os mesmos princípios.

### Exemplo:

Consideremos o circuito shunt da fig. 36

Sejam X e Y as variáveis associadas a corrente dos relês X e Y respectivamente. Se a corrente passa através dos dois terminais tendo a função de trabalho  $(\bar{a} \vdash y)(ay \vdash \bar{x})$ , então não passa através do enrolamento X, e vice-versa:

$$X = (\bar{a} \vdash y)(ay \vdash \bar{x}) + 1 = a(x+y+1) + x$$

O mesmo é válido para Y:

$$Y = (\bar{a} \vdash x)(\bar{a}\bar{x} \vdash \bar{y}) + 1 = a(x+y) + x$$

As equações de recorrência são então:

$$X_T = x_{T+1} = a_T(x_T + y_{T+1}) + x_T$$

$$Y_T = y_{T+1} = a_T(x_T + y_T) + x_T$$

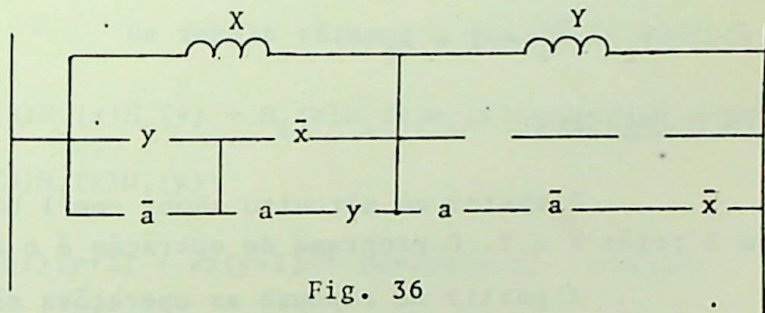


Fig. 36

## 7.3 - Circuitos inversos

Dois circuitos são denominados inversos se suas fórmulas de estrutura são:

$$A_1 X_1 \vdash \dots \vdash A_n X_n$$

$$(\bar{A}_1 \vdash Y_1) \dots (\bar{A}_n \vdash Y_n).$$

pode-se provar que dois circuitos inversos tem a mesma operação.

Realmente (ver Fig. 37)

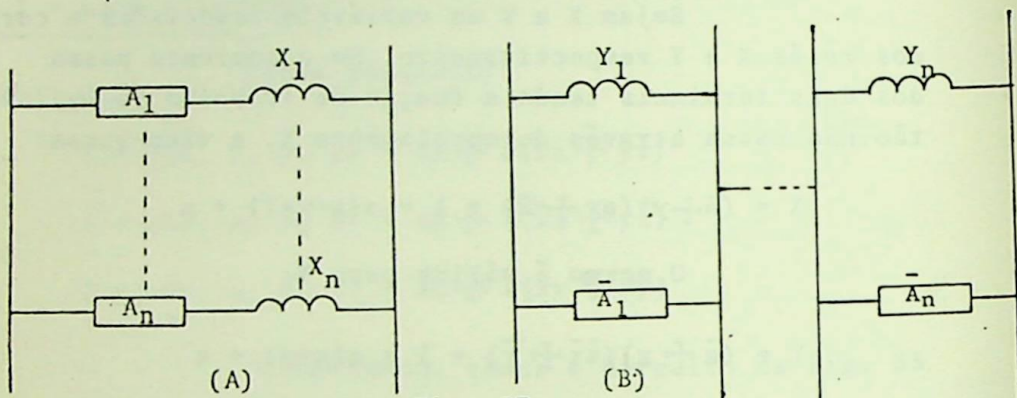


Fig. 37

a corrente nos enrolamentos dos relés  $X_1, \dots, X_n$  é:

$$X_i = A_i$$

e, nos enrolamentos dos relés  $Y_1, \dots, Y_n$  é:

$$Y_i = \bar{A}_i + 1 = A_i$$

#### 7.4 - Problema:

Projetar um circuito shunt com 1 botão de pressão e 2 relés X e Y. O programa de operação é o seguinte:

A partir do repouso as operações são:

1. O botão de pressão é operado pela primeira vez e o relé X é energizado;
2. o botão de pressão é liberado e o relé Y é energizado;
3. o botão de pressão é operado pela 2a. vez e o relé X é inoperado;

4. o botão de pressão é liberado e o relé Y é inoperado. O circuito volta então a posição de repouso.

Solução:

Façamos a tabela:

Operação	Entrada			Relés		Comentário do programa
	a	x	y	X	Y	
0	0	0	0	0	0	Repouso
1	1	0	0	1	0	Relé X é operado
	1	1	0	1	0	Posição estável
2	0	1	0	1	1	Relé Y é operado
	0	1	1	1	1	Posição estável
3	1	1	1	0	1	Relé X é inoperado
	1	0	1	0	1	Posição estável
4	0	0	1	0	0	Relé Y é inoperado
	0	0	0	0	0	Posição estável

Executaremos o problema para circuito serie-para-  
lelo, depois tomaremos o complemento da função de trabalho, e  
teremos a função de trabalho do circuito shunt.

Da tabela tiramos a função de trabalho do relé X.

$$X = H_1(a)H_0(x)H_0(y) + H_1(a)H_1(x)H_0(y) + H_0(a)H_1(x)H_0(y) + H_0(a)H_1(x)H_1(y)$$

$$X = a(x+1)(y+1) + ax(y+1) + (a+1)x(y+1) + (a+1)xy$$

$$X = a\bar{y} + \bar{a}x$$

O complemento dessa expressão será:

$$\bar{X} = a(y+1) + (a+1)x+1 = ay + a(x+1) + x+1$$

$$\bar{X} = ay + \bar{a}\bar{x}$$

$$\bar{X} = ay \text{ † } \bar{a}\bar{x}$$

Temos na fig. 38 os respectivos circuitos representativos serie-paralelo e shunt para o relê X

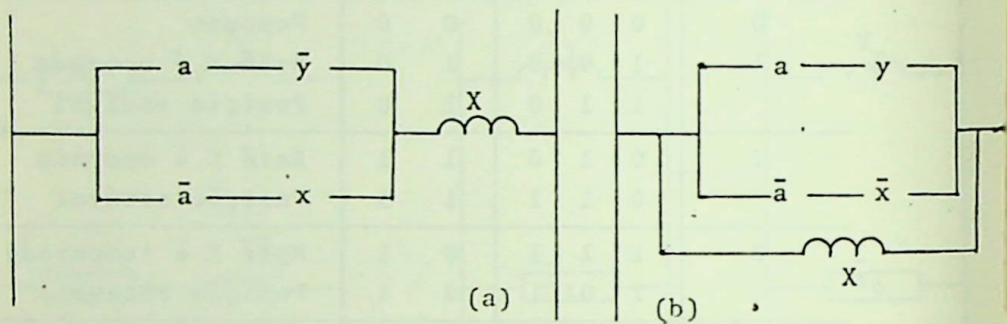


Fig. 38

Da tabela tiramos para Y

$$Y = \bar{a}x\bar{y} + \bar{a}xy + axy + a\bar{x}y = \bar{a}x \text{ † } ay$$

$$\bar{Y} = \bar{a}\bar{x} \text{ † } a\bar{y}$$

Executando os respectivos temos Fig. 39

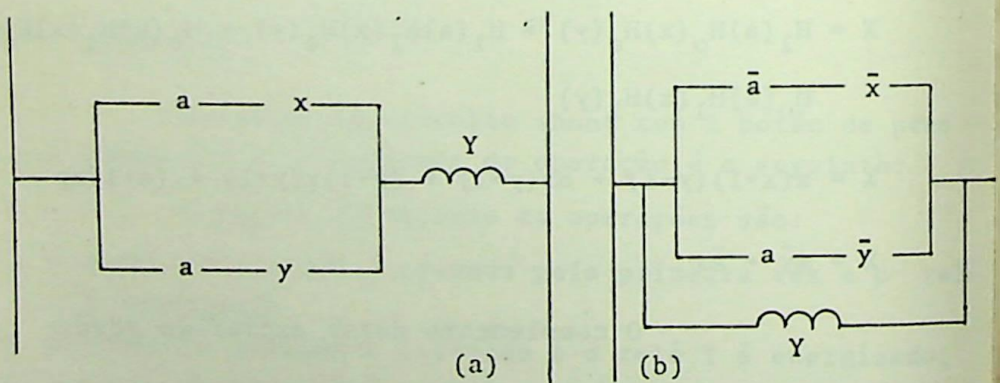


Fig. 39

O circuito shunt que satisfará ao programa será o da Fig. 40.

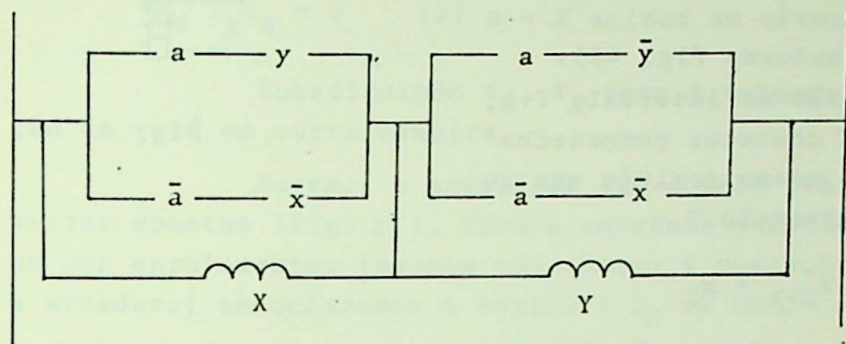


Fig. 40

O circuito inverso série-paralelo que também satisfará o programa é o da Fig. 41.

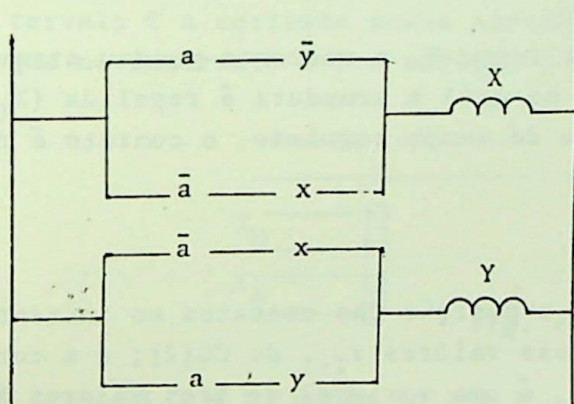


Fig. 41

## 7.5 - Relês biestáveis

### 7.5.1 - Generalidades

Denominaremos "relês biestáveis" aos relês cuja armadura é magnética, mas que tem somente duas posições e permanecem nessas posições até que uma nova operação ocorra. Fig. 42.

a) no intervalo de tempo T, nenhuma corrente passou através da bobina X = 0 (conforme Fig. 42).

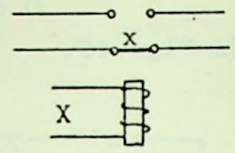


Fig. 42

Então no intervalo T+1, os contatos permanecem na mesma posição que no intervalo T,

$$x_{T+1} = x_T$$

b) se no intervalo de tempo T, a corrente passou através da bobina no sentido em que a armadura é atraída ( $X_T = 1$ ), então no intervalo de tempo seguinte o contato é atraído

$$x_{T+1} = 1$$

c) se no intervalo de tempo T, a corrente passou através da bobina no sentido no qual a armadura é repelida ( $X_T = 2$ ), então no intervalo de tempo seguinte, o contato é repelido

$$x_{T+1} = 0$$

Vemos que a posição dos contatos no instante T+1 é uma variável de dois valores  $x_{T+1}$  do CG(2); e a corrente na bobina no instante T, é uma variável de tres valores  $X_T$  do CG(3). Por outro lado, a corrente  $X_T$  do CG(3) é uma função de variáveis do CG(2),  $a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T$ , associadas a posição dos botões de pressão e contatos dos relés.

Para evitarmos o uso simultaneo dos campos CG(2) e CG(3), podemos usar o seguinte artifício:

Para a corrente na bobina do relé X do CG(3), associamos duas variáveis:

$X_H$  e  $X_A$  (\*) do CG(2) com

$$X_H \cdot X_A = 0 \quad (1)$$

Substituindo  $X_H$ ,  $X_A$  para  $X$  teremos a representação do relê em outra maneira.

Faremos a suposição que o relê tem dois enrolamentos opostos (Fig. 43). Para a corrente passando através de um dos enrolamentos (aquele que quando a corrente passa, atrai a armadura) associaremos a variável  $X_H$  do CG(2).

Associaremos a variável  $X_A$  para o outro enrolamento.

$X_{HT} = 1$  (Então de (1)  $X_{AT} = 0$ ) significa que no intervalo  $T$  a corrente passa através de um dos enrolamentos e que no intervalo  $T+1$  o contato é atraído  $x_{T+1} = 1$

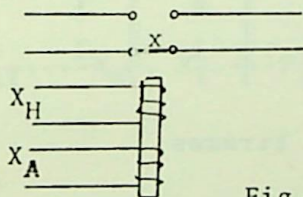


Fig. 43

$X_{AT} = 1$  (Então de (1)  $X_{HT} = 0$ ) significa que no instante de tempo  $T$ , a corrente passa através de outro enrolamento e que no intervalo de tempo  $T+1$  o contato é repellido,

$$x_{T+1} = 0$$

(\*) H de Horário (numa referencia ao sentido horário)

A de antihorário

$X_{AT} = X_{HT} = 0$  significa que no intervalo T nenhuma corrente passa através de qualquer dos enrolamentos, e no intervalo T+1 o contato permanece na posição que estava.

$$x_{T+1} = x_T$$

Temos:

$$x_{T+1} = f(X_{HT}, X_{AT}, x_T)$$

Organizando a tabela, e tendo em vista que  $X_{HT} = X_{AT} = 0$ , temos:

$X_{HT}$	$X_{AT}$	$x_T$	$x_{T+1}$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	0	1	1

Por Lagrange tiramos:

$$x_{T+1} = \bar{X}_{HT} \bar{X}_{AT} x_T + X_{HT} \bar{X}_{AT} \bar{x}_T + X_{HT} \bar{X}_{AT} x_T$$

$$x_{T+1} = (X_{HT+1})(X_{AT+1})x_T + X_{HT}(X_{AT+1})(x_{T+1}) + X_{HT}(X_{AT+1})x_T$$

$$x_{T+1} = (X_{HT} + X_{AT+1})x_T + X_{HT} x_T + X_{HT} + X_{HT}x_T$$

$$\boxed{x_{T+1} = (X_{HT} + X_{AT+1})x_T + X_{HT}} \quad (2)$$

Esta é a equação característica dos relés bi-estáveis.

### 7.5.2 - Análise de circuitos com relés bi-estáveis

Se  $X, \dots, Y$  são relés bi-estáveis, a partir do diagrama do circuito tiramos:

$$\begin{cases} X_H = f_H(a_1, \dots, a_n, x, \dots, y) \\ X_A = f_A(a_1, \dots, a_n, x, \dots, y) \\ \vdots \\ Y_H = g_H(a_1, \dots, a_n, x, \dots, y) \\ Y_A = g_A(a_1, \dots, a_n, x, \dots, y) \end{cases}$$

A operação do circuito é portanto dada pelas equações de recorrência escritas no CG(2).

$$\begin{cases} x_{T+1} = f_H(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) + x_T f_A(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) \\ \vdots \\ y_{T+1} = g_H(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) + y_T g_A(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) \end{cases}$$

#### Exemplo

Consideremos o circuito da Fig. 44.

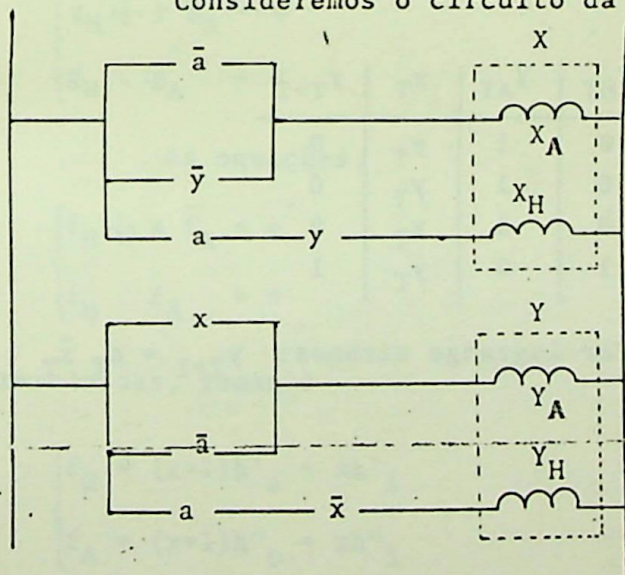


Fig. 44

Temos:

$$X_H = ay$$

$$X_A = \bar{a} + \bar{y}$$

$$Y_H = a\bar{x}$$

$$Y_A = \bar{a} + x$$

Façamos a tabela para  $x_{T+1}$

$a_T$	$y_T$	$X_{HT}$	$X_{AT}$	$x_T$	$x_{T+1}$
0	0	0	1	$x_T$	0
0	1	0	1	$x_T$	0
1	1	1	0	$x_T$	1
1	0	0	1	$x_T$	0

Por Lagrange tiramos  $x_{T+1} = a_T y_T$

Comprovemos este resultado pela equação (C)

$$x_{T+1} = a_T y_T + (\bar{a}_T + \bar{y}_T)x_T = a_T y_T + a_T x_T y_T = a_T y_T$$

Façamos a tabela para  $y_{T+1}$

$a_T$	$x_T$	$Y_{HT}$	$Y_{AT}$	$y_T$	$y_{T+1}$
0	0	0	1	$y_T$	0
0	1	0	1	$y_T$	0
1	1	0	1	$y_T$	0
1	0	1	0	$y_T$	1

Por Lagrange tiramos:  $y_{T+1} = a_T \bar{x}_T$

De modo análogo, pode-se comprovar este resultado.

### 7.5.3 - Síntese de circuitos com relés bi-estáveis

As equações (C) são da forma:

$$\begin{aligned} x_{T+1} &= \phi(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) \\ &\vdots \\ y_{T+1} &= \theta(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) \end{aligned}$$

Se o programa de operação do relé é dado, isto permite determinarmos as funções  $\phi$  e  $\theta$  da mesma maneira que fizemos no exemplo anterior.

Uma vez que as funções  $\phi$  e  $\theta$  são conhecidas, devemos achar  $f_A, \bar{f}_A, \dots, g_H, \bar{g}_A$  com:

$$\begin{cases} f_H \bar{f}_A = \phi \\ f_H \cdot f_A = 0 \\ \vdots \\ g_H \bar{g}_A = \theta \\ g_H \cdot g_A = 0 \end{cases}$$

As equações,

$$\begin{cases} f_H \bar{f}_A = \phi \\ f_H \cdot f_A = 0 \end{cases}$$

são resolvidas, tomam o

$$\begin{cases} f_H = (x+1)h'_0 + xh'_1 \\ f_A = (x+1)h''_0 + xh''_1 \end{cases}$$

e decompondo

$$\phi = (x+1)\phi_0 + x\phi_1$$

Levando-se em conta que  $x(x+1) = 0$ , estas equações dão:

$$f_h \cdot f_A = 0$$

$$[(x+1)h'_0 + xh'_1] [(x+1)h''_0 + xh''_1] = 0$$

$$(x+1)h'_0 h''_0 + xh'_1 h''_1 = 0$$

$$h'_0 h''_0 = 0$$

$$h'_1 h''_1 = 0$$

$$\phi = f_H \bar{f}_A = f_H + x\bar{f}_A + x\bar{f}_A f_H$$

$$\phi = (x+1)h'_0 + xh'_1 + x\{ [(x+1)h''_0 + xh''_1] + 1\} +$$

$$x\{ [(x+1)h''_0 + xh''_1] + 1\} [(x+1)h'_0 + xh'_1]$$

$$\phi = (x+1)h'_0 + xh'_1 + xh''_1 + x + [xh''_1 + x] [(x+1)h'_0 + xh''_1]$$

$$\phi = (x+1)h'_0 + xh'_1 + xh''_1 + x + xh''_1 h''_1 + xh'_1 =$$

$$(x+1)h'_0 + x + xh''_1 + xh'_1 h''_1$$

$$\text{mas, } h'_1 h''_1 = 0$$

$$\phi = (x+1)h'_0 + x + xh''_1 = (x+1)h'_0 + x(h''_1 + 1)$$

$$(x+1)h'_0 + x(h''_0 + 1) = (x+1)\phi_0 + x\phi_1$$

$$\phi_0 = h'_0$$

$$\phi_1 = h''_1 + 1 \quad \dots \quad h''_1 = \phi_1 + 1$$

### 7.6 - Operações de relés com corrente reduzida de auto-atracamento

Consideremos o relé da Figura seguinte tal que uma certa corrente é necessária para atrair sua armadura, mas uma vez que a armadura está na posição atraída, uma corrente reduzida é suficiente para mante-la atraída.

#### 7.6.1 - Equação característica

Sejam  $X_N$  e  $X_R$  duas variáveis no CG(2) indicando respectivamente, corrente normal e corrente reduzida.

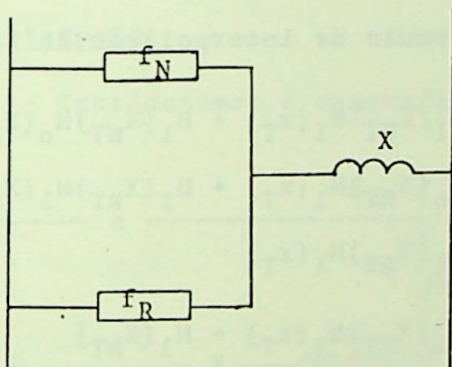


Fig. 45

$X_N = 1$  significa que a corrente é suficiente para atrair a armadura

$X_N = 0$  significa que a corrente é insuficiente para atrair a armadura

$X_R = 1$  significa que a corrente é suficiente para manter a armadura atraída

$X_R = 0$  significa que a corrente não é suficiente para manter a armadura atraída.

O valor de  $x_{T+1}$  é uma função de  $X_{NT}$ ,  $X_{RT}$  e  $x_T$ .

$$x_{T+1} = \phi(x_{NT}, x_{RT}, x_T)$$

que satisfaz as condições da tabela da Fig. 46.

$x_{NT}$	$x_{RT}$	$x_T$	$x_{T+1}$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Fig. 46

A fórmula de interpolação de Lagrange dá:

$$x_{T+1} = H_0(x_{NT})H_1(x_{RT})H_1(x_T) + H_1(x_{NT})H_0(x_{RT})H_0(x_T) +$$

$$H_1(x_{NT})H_0(x_{RT})H_1(x_T) + H_1(x_{RT})H_1(x_{RT})H_0(x_T) +$$

$$H_1(x_{NT})H_1(x_{RT})H_1(x_T)$$

$$x_{T+1} = H_0(x_{NT})H_1(x_{RT})H_1(x_T) + H_1(x_{NT})$$

$x_{T+1} = x_{NT} + (x_{NT}+1)x_{RT}x_T$
--

Esta é a "equação característica dos relés com corrente reduzida de auto-atracamento".

As correntes  $x_N$  e  $x_R$  passam respectivamente através dos dois terminais (Fig. 45):

$$x_{NT} = f_N(a_T, \dots, c_T, x_T, \dots, y_T)$$

$$x_{RT} = f_R(a_T, \dots, c_T, x_T, \dots, y_T)$$

Tais equações são válidas para cada relé  $X, \dots, Y$ .

Eliminando  $X_{NT}, X_{RT}, \dots, Y_{NT}, Y_{RT}$ , obtemos um sistema de equações recorrentes no CG(2).

$$\begin{aligned}
 x_{T+1} &= \phi (a_T, \dots, c_T, x_T, \dots, y_T) \\
 \vdots & \\
 y_{T+1} &= \theta (a_T, \dots, c_T, x_T, \dots, y_T)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \phi &= f_N + (f_{N+1})f_R x \\
 \vdots & \\
 \theta &= g_N + (g_{N+1})g_R y
 \end{aligned}$$

7.6.2 - Exemplos

7.6.2.1 - Consideremos o circuito da Figura 47<sup>(\*)</sup>

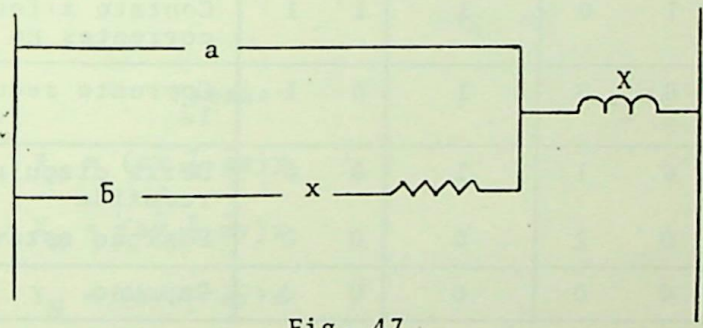


Fig. 47

(\*) Este circuito resolve um problema prático que é o de uma caixa d'água que deve ter dois níveis, e a água é fornecida por uma bomba que deve ligar sempre que a água atingir o nível mais baixo (a) e desligar somente quando atingir o nível mais alto (b); os botões de pressão a e b são comandados por uma boia.

Temos:

$$X_N = a$$

$$X_R = \bar{b} x$$

e

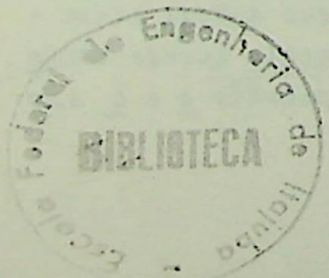
$$X = x_{T+1} = X_{NT} + (X_{NT} + 1) x_{RT} x_T$$

Para o seguinte programa de operação dos botões de pressão:

Posição de repouso, a é ligado, a é desligado, b é ligado, b é desligado; o circuito opera como segue:

Instante	Entradas		Contato x	Relé		Comentário
	a	b		X <sub>N</sub>	X <sub>R</sub>	
Repouso	0	0	0	0	0	Posição estável
1	1	0	0	1	0	Relé X é energizado, corrente normal
2	1	0	1	1	1	Contato x fecha, duas correntes no relé
3	0	0	1	0	1	Corrente reduzida no relé
4	0	1	1	0	0	Deixa circular corrente reduzida
5	0	1	0	0	0	Posição estável
6	0	0	0	0	0	Repouso

7.6.2.2 - Consideremos o circuito como o da Figura 48



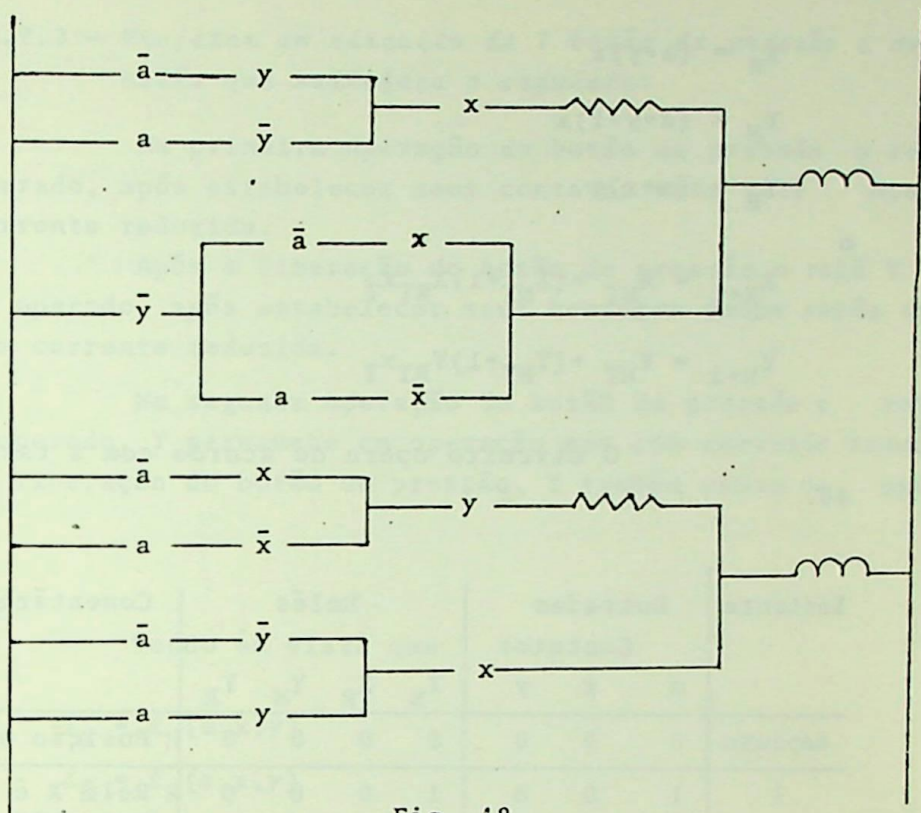


Fig. 48

Temos:

$$X_N = (a\bar{x} + \bar{a}x)y$$

$$X_R = (a\bar{y} + \bar{a}y)x$$

$$Y_N = (ay + \bar{a}\bar{y})x$$

$$Y_R = (a\bar{x} + \bar{a}x)y$$

Então

$$X_N = [a(x+1) + (a+1)x](y+1) = (ax+a+ax+x)(y+1)$$

$$X_N = (a+x)(y+1)$$

$$X_R = (a+y)x$$

$$Y_N = (a+y+1)x$$

$$Y_R = (a+x)y$$

e

$$X_{N+1} = X_{NT} + (X_{NT}+1)X_{RT}x_T$$

$$Y_{N+1} = Y_{NT} + (Y_{NT}+1)Y_{RT}x_T$$

O circuito opera de acordo com a tabela da Fig.

49.

Instante	Entradas Contatos			Relés				Comentário
	a	x	y	X <sub>N</sub>	X <sub>R</sub>	Y <sub>N</sub>	Y <sub>R</sub>	
Repouso	0	0	0	0	0	0	0	Posição estável
1	1	0	0	1	0	0	0	Relé X é operado com corrente normal
2	1	1	0	1	1	0	0	Contato x é fechado
3	0	1	0	1	0	1	0	Relé Y é operado com corrente normal
4	0	1	1	0	1	0	1	Contato y é fechado corrente real e normal em Y
5	1	1	1	0	0	1	0	Relé X é desenergizado
6	1	0	1	0	0	0	1	Corrente reduzida em Y
7	0	0	1	0	0	0	0	Relé Y é desenergizado
8	0	0	0	0	0	0	0	Posição Repouso

Fig. 49

7.6.2.3 - *Projetar um circuito de 1 botão de pressão e dois relês que satisfaça o seguinte:*

Na primeira operação do botão de pressão o relê X é operado, após estabelecer seus contatos este relê opera com corrente reduzida.

Após a liberação do botão de pressão o relê Y é também operado, após estabelecer seus contatos ambos relês operam com corrente reduzida.

Na segunda operação do botão de pressão o relê X é inoperado, Y permanece em operação mas com corrente reduzida. Na liberação do botão de pressão, Y também cessa de operar.

Solução:

Tendo em vista que

$$X_N = f_N(a, x, y)$$

$$X_R = f_R(a, x, y)$$

$$Y_N = g_N(a, x, y)$$

$$Y_R = g_R(a, x, y)$$

Façamos a tabela: (Vide página seguinte)

pela fórmula de interpolação de Lagrange tiramos da tabela:

$$X_N = a \bar{x} \bar{y}$$

$$X_R = ax\bar{y} + \bar{a}x\bar{y} + \bar{a}xy = ax\bar{y} + \bar{a}x$$

$$X_R = x(a\bar{y} + \bar{a}) = x(\bar{a} + \bar{y})$$

$$Y_N = \bar{a} x \bar{y}$$

$$Y_R = \bar{a}xy + axy + a\bar{x}y = \bar{a}xy + ay = y(\bar{a}x + a)$$

$$Y_R = y(x + a)$$

Instante	Entradas			Relês				Comentário
	a	x	y	$X_N$	$X_R$	$Y_N$	$Y_R$	
0	0	0	0	0	0	0	0	Repouso
1	1	0	0	1	0	0	0	Relê X é operado
2	1	1	0	0	1	0	0	Contato x é operado, X com corrente reduzida
3	0	1	0	0	1	1	0	Relê Y é operado
4	0	1	1	0	1	0	1	Contato y é operado, Y com corrente reduzida
5	1	1	1	0	0	0	1	Relê X é inoperado
6	1	0	1	0	0	0	1	Contato x é desoperado
7	0	0	1	0	0	0	0	Relê Y é inoperado
8	0	0	0	0	0	0	0	Contato y é desoperado Repouso

Temos então o circuito da Fig. 50

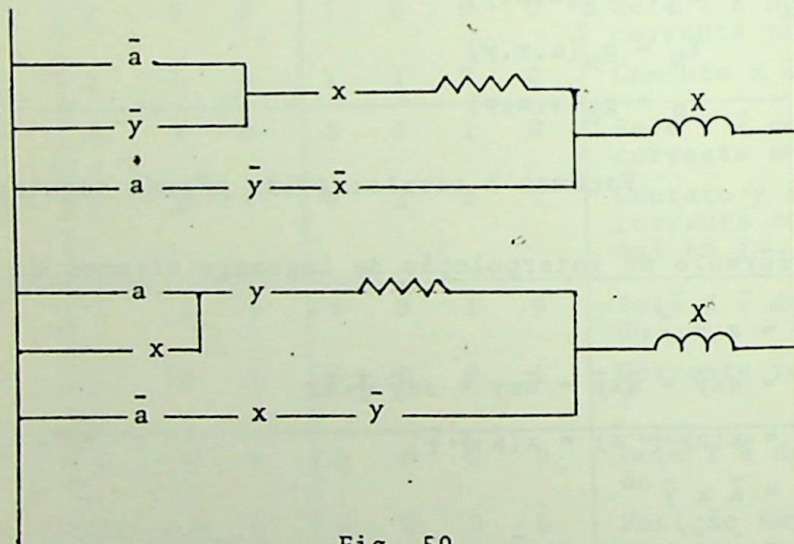


Fig. 50

## 8 - CIRCUITOS COM CONTATOS DE TRES POSIÇÕES

Vejam os inicialmente a teoria das funções no CG  
(3)

### 8.1 - Propriedades Algébricas

O conjunto  $CG(3)$  consiste de 3 elementos 0,1,2 ;  
desde que  $-1 \equiv 2 \pmod{3}$

Podemos chamar os 3 elementos de 0, +1, -1; Este  
conjunto será chamado o campo  $CG(3)$ .

A adição e multiplicação no  $CG(3)$  são dados por:

a	b	0, 1, 2		
0	+	0	1	2
1	+	1	2	0
2	+	2	0	1

a	b	0, 1, 2		
0	.	0	0	0
1	.	0	1	2
2	.	0	2	1

Dessas tabelas, vemos que no  $CG(3)$  temos:

$$a + a + a = 3a = 0 \pmod{3}$$

Do mesmo modo, temos:

a	0 1 2		
$a^2$	0	1	1

Então, para qualquer elemento  $a \neq 0$  no  $CG(3)$ , te  
mos:  $a^2 = 1 \pmod{3}$

De

a	0 1 2		
$a^3$	0	1	2

Concluimos que:

Para qualquer elemento no  $CG(3)$ , temos

$$a^3 = a \pmod{3}.$$

Da relação  $a^2 = 1$  deduzimos que para qualquer  $a \neq 0 \pmod{3}$  no  $CG(3)$  existe um elemento  $a^{-1}$  no  $CG(3)$  com

$$a \cdot a^{-1} = 1 \pmod{3}$$

$$a^{-1} = a \pmod{3}$$

### 8.2 - Formula de interpolação

Associamos a qualquer polinomio, com coeficientes no  $CG(3)$ .

$$A = a_0x^n + \dots + a_n \pmod{3}$$

Uma função que mapeia qualquer inteiro  $q$  em um elemento  $0, \pm 1$  do  $CG(3)$  dado por:

$$f_A(q) \equiv a_0q^n + \dots + a_n$$

Como sabemos  $x^3 = x \pmod{3}$

Segue  $x^4 = x^2 \pmod{3}$

$$x^5 = x \pmod{3}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Então:

$$f_A(x) = a_n + (a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-5} + \dots)x + (a_{n-2} + a_{n-4} + \dots)x^2$$

Então qualquer função de uma variável gerada por um polinomio é igual a função gerada pelo polinomio do segundo grau.

$$ax^2 + bx + c$$

A função  $f(x)$  com argumento e valores no  $CG(3)$  é determinada pelos dados.

$$f(0), f(1), f(2)$$

e  $f(0), f(1), f(2)$  podem ser 0, 1 ou 2. Então existem  $3^3$  funções de uma variável com argumento e valores no  $CG(3)$ .

A função gerada por um polinômio de segundo grau  $f(x) = ax^2 + bx + c \pmod{3}$ , assegura

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= c \\ f(1) &= a + b + c \\ f(2) &= a + 2b + c \end{aligned} \right\} \pmod{3}$$

Então  $f(1) = a + b + f(0)$

$$f(2) = f(1) + b$$

$$a + b = f(1) - f(0) \text{ porém } -1 = 2 \pmod{3}$$

$$a + b = f(1) + 2f(0)$$

Portanto:

$$a = f(1) - f(0) - b$$

$$a = f(1) + 2f(0) + 2b$$

Porém  $b = f(2) - f(1) = f(2) + 2f(1)$

$$a = f(1) + 2f(0) + 2[f(2) + 2f(1)]$$

$$a = 2[f(0) + f(1) + f(2)]$$

$$b = 2f(1) + f(2)$$

$$c = f(0)$$

Então:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \pmod{3}$$

$$f(x) = 2[f(0) + f(1) + f(2)]x^2 + [2f(1) + f(2)]x + f(0)$$

$$f(x) = f(0)(1+2x^2) + f(1)(2x+2x^2) + f(2)(x+2x^2) \quad (A)$$

Introduzindo os polinômios de interpolação de Lagrange:

$$H_0(x) = 2x^2 + 1$$

$$H_1(x) = 2x^2 + 2x$$

$$H_2(x) = 2x^2 + x$$

e as funções de interpolação de Lagrange definida por esses polinômios.

$$H_0(0) = 1 \quad H_0(1) = 0 \quad H_0(2) = 0$$

$$H_1(0) = 0 \quad H_1(1) = 1 \quad H_1(2) = 0$$

$$H_2(0) = 0 \quad H_2(1) = 0 \quad H_2(2) = 1$$

A fórmula (A) pode ser escrita:

$$f(x) = f(0) H_0(x) + f(1) H_1(x) + f(2) H_2(x) \quad (B)$$

Notamos que:

$$H_0(x) + H_1(x) + H_2(x) = 1$$

$$H_0(x) H_1(x) = H_0(x) H_2(x) = H_1(x) H_2(x) = 0$$

e

$$[H_0(x)]^2 = H_0(x)$$

$$[H_1(x)]^2 = H_1(x)$$

$$[H_2(x)]^2 = H_2(x)$$

Consideremos a função de duas variáveis  $f(x,y)$  cujo domínio e valor estão no  $CG(3)$ . Para  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2$  temos tres funções que são expandidas de acordo com a fórmula (B).

$$f(x,0) = f(0,0)H_0(x) + f(1,0)H_1(x) + f(2,0)H_2(x),$$

$$f(x,1) = f(0,1) H_0(x) + f(1,1) H_1(x) + f(2,1) H_2(x)$$

$$f(x,2) = f(0,2) H_0(x) + f(1,2) H_1(x) + f(2,2) H_2(x)$$

mas para cada  $x = x_0$ ,  $f(x,y)$  há uma função  $f(x_0,y)$  de  $y$  para a qual a fórmula (B) pode ser aplicada.

$$f(x_0,y) = f(x_0,0) H_0(y) + f(x_0,1) H_1(y) + f(x_0,2) H_2(y)$$

Então,  $x_0$  sendo indeterminado temos:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,0) H_0(y) + f(x,1) H_1(y) + f(x,2) H_2(y) = \\ & [f(0,0) H_0(x) + f(1,0) H_1(x) + f(2,0) H_2(x)] H_0(y) + \\ & [f(0,1) H_0(x) + f(1,1) H_1(x) + f(2,1) H_2(x)] H_1(y) + \\ & [f(0,2) H_0(x) + f(1,2) H_1(x) + f(2,2) H_2(x)] H_2(y) \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) H_0(x) H_0(y) + f(1,0) H_1(x) H_0(y) + \\ & f(2,0) H_2(x) H_0(y) + f(0,1) H_0(x) H_1(y) + f(1,1) H_1(x) H_1(y) + \\ & f(2,1) H_2(x) H_1(y) + f(0,2) H_0(x) H_2(y) + f(1,2) H_1(x) H_2(y) + \\ & f(2,2) H_2(x) H_2(y) \end{aligned}$$

ou

$$f(x,y) = \sum f(\alpha,\beta) H_\alpha(x) H_\beta(y)$$

Similarmente para 3 variáveis

$$f(x,y,z) = \sum f(\alpha,\beta,\gamma) H_\alpha(x) H_\beta(y) H_\gamma(z)$$

e para  $n$  variáveis.

$$f(x_1 \dots x_n) = \sum f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n) \quad (C)$$

podemos fazer uso da nossa tabela já usada para o CG(2) já que as formulas de interpolação são análogas.

A fórmula  $f(x,y) = \sum f(\alpha,\beta) H_\alpha(x) H_\beta(y)$  prova que:

### 8.2.1 - Teorema 1

Qualquer função de  $n$  variáveis, cada qual variando no  $\text{CG}(3)$ , e tendo seus valores no  $\text{CG}(3)$  é uma função gerada pelo polinômio dado pela fórmula de interpolação de Lagrange (C), este polinômio é do segundo grau em cada variável.

Consideremos os polinômios de Lagrange:

$$H_0(x) = 2x^2 + 1$$

$$H_1(x) = 2x^2 + 2x$$

$$H_2(x) = 2x^2 + x$$

Temos:

$$H_1(x) + 2H_2(x) = 2x^2 + 2x + 2(2x^2 + x) = x$$

$$H_1(x) + H_2(x) = 2x^2 + 2x + 2x^2 + x = x^2$$

Se um polinômio do segundo grau é dado:

$$A = ax^2 + bx + c \pmod{3}$$

Então:

$$A = a[H_1(x) + H_2(x)] + b[H_1(x) + 2H_2(x)] + c[H_0(x) + H_1(x) + H_2(x)]$$

$$A = c H_0(x) + (a + b + c) H_1(x) + (a + 2b + c) H_2(x)$$

do mesmo modo que para um polinômio de duas variáveis.

$$A = ax^2y^2 + bx^2y + cxy^2 + dx^2 + ey^2 + fxy + gx + hy + x$$

Temos:

$$\begin{aligned}
 A = & a [H_1(x) + H_2(x)] [H_1(y)H_2(y)] + b [H_1(x) + H_2(x)] [H_1(x) + 2H_2(y)] + \\
 & c [H_1(x) + 2H_2(x)] [H_1(y) + H_2(y)] + d [H_1(x) + H_2(x)] [H_0(y) + H_1(y) + H_2(y)] \\
 & e [H_0(x) + H_1(x) + H_2(x)] [H_1(y) + H_2(y)] + f [H_1(x) + 2H_2(x)] [H_1(y) + 2H_2(y)] \\
 & g [H_1(x) + 2H_2(x)] [H_0(y) + H_1(y) + H_2(y)] + h [H_0(x) + H_1(x) + H_2(x)] \\
 & [H_1(y) + 2H_2(y)] + k [H_0(x) + H_1(x) + H_2(x)] [H_0(y) + H_1(y) + H_2(y)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A = & KH_0(x)H_0(y) + (e+h+k)H_0(x)H_1(y) + (e+2h+k)H_0(x)H_2(y) + \\
 & (d+g+k)H_1(x)H_0(y) + (a+b+c+d+e+f+g+h)H_1(x)H_1(y) + \\
 & (a+2b+c+d+e+2f+g+2h+k)H_1(x)H_1(y) + (d+2g+k)H_2(x)H_0(y) + \\
 & (a+b+2c+d+e+2f+2g+h+k)H_2(x)H_1(y) + (a+2b+2c+d+e+f+2g+2h+k) \\
 & H_2(x)H_2(y)
 \end{aligned}$$

Repetindo o procedimento obtemos:

### 8.2.2 - Teorema 2

Qualquer polinomio  $A(x_1, \dots, x_n)$  do segundo grau em cada variável pode ser escrito na forma:

$$A = \sum C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n)$$

os coeficientes  $C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$  sendo, 0, 1 ou 2.

### 8.2.3 - Teorema 3

Pode-se provar que:

A representação de um polinomio do 2º grau em cada variável, na forma

$$A = \sum C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n) \text{ é única, isto é, os coe-}$$

ficientes  $C_{\alpha_1}, \dots, \alpha_n$  são determinados de maneira única no módulo 3.

#### 8.2.4 - Teorema 4

Duas funções  $f_A(x_1, \dots, x_n)$  e  $f_B(x_1, \dots, x_n)$  geradas por dois polinômios A, B do segundo grau em cada variável são iguais somente se os polinômios são congruentes em relação ao módulo 3. Em outras palavras, se:

$f_A(x_1, \dots, x_n) = f_B(x_1, \dots, x_n)$  para qualquer valor das variáveis no CG(3) segue que:

$$A \equiv B \pmod{3}$$

Já que fizemos o desenvolvimento matemático essencial passemos à aplicação da "álgebra Ternária" a elementos físicos:

#### 8.3 - Circuito série-paralelo com contatos de tres posições

Para cada contato x de 3 posições, corresponde 3 contatos de duas posições, fig. 51.

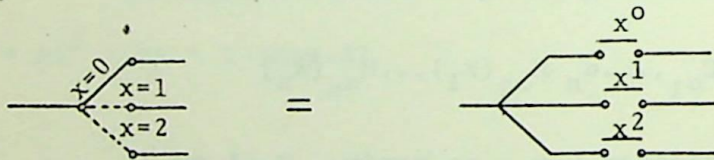


Fig. 51

$x^0$ , que está fechado quando  $x=0$ , sendo de outro modo aberto,  
 $x^1$ , que está fechado quando  $x=1$ , sendo de outro modo aberto, e  
 $x^2$ , que está fechado quando  $x=2$ , sendo de outro modo aberto.

Então:

Se  $x = 0$ , temos:  $x^0 = 1$ ,  $x^1 = 0$ ,  $x^2 = 0$

Se  $x = 1$ , temos:  $x^0 = 0$ ,  $x^1 = 1$ ,  $x^2 = 0$

Se  $x = 2$ , temos:  $x^0 = 0$ ,  $x^1 = 0$ ,  $x^2 = 1$

É óbvio que as funções de operação dos tres contatos de duas posições são:

$$x^0 = H_0(x)$$

$$x^1 = H_1(x)$$

$$x^2 = H_2(x)$$

Desde que  $x^0$ ,  $x^1$ ,  $x^2$  tomam somente os valores 0 ou 1 do CG(2) temos da definição acima.

$$x^0 + x^1 + x^2 = 1 \pmod{2}$$

$$x^0 x^1 = x^0 x^2 = x^1 x^2 = 0 \pmod{2}$$

Pode ser visto que também temos:

$$x^0 + x^1 + x^2 = 1 \pmod{3}$$

$$x^0 x^1 = x^0 x^2 = x^1 x^2 = 0 \pmod{3}$$

Que corresponde as propriedades das funções de Lagrange.

$$H_0(x) + H_1(x) + H_2(x) = 1$$

$$H_0(x)H_1(x) = H_0(x)H_2(x) = H_1(x)H_2(x) = 0 \text{ para } x \text{ no CG}(3)$$

Dois terminais com contatos de tres posições  $x$ ,  $y, \dots, z$  serão dois terminais tendo os contatos  $x^0, x^1, x^2, y^0, y^1, y^2, \dots, z^0, z^1, z^2$ . Chamaremos dois terminais serie-paralelo com contatos de 3 posições  $x, y, \dots, z$  a dois terminais nos quais os contatos  $x^0, x^1, x^2, y^0, y^1, y^2, \dots, z^0, z^1, z^2$  são conectados em serie e paralelo.

8.3.1 - Exemplo, Fig. 52

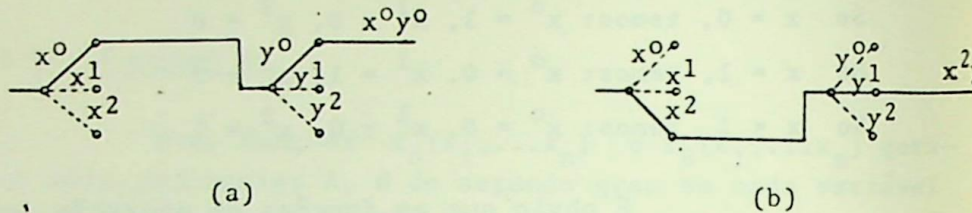


Fig. 52

Chamaremos função de trabalho de dois valores de dois terminais com contatos de tres posições  $a_1, \dots, a_n$ , a função  $f(a_1, \dots, a_n)$  que toma o valor 0 quando a corrente não passa através dos dois terminais e o valor 1 quando a corrente passa através dos dois terminais na Fig. 52. Se  $f(x,y)$  é a função de trabalho dos dois terminais na fig. 52a, temos  $f(0,0) = 1$  na fig. 52b temos  $f(2,1) = 1$  na fig. 52a. Temos que:

$$f(0,1) = f(0,2) = f(1,0) = f(1,1) = f(1,2) = f(2,0) = 0$$

$$f(2,1) = f(2,2) = 1$$

Na fig. 52b temos que:

$$f(0,0) = f(0,1) = f(0,2) = f(1,0) = f(1,2) = f(2,0) = 0$$

$$f(2,1) = f(2,2) = 1$$

da Figura 52a temos:

$$f(x,y) = H_0(x)H_0(y)$$

e da fig. 52b temos:

$$f(x,y) = H_2(x)H_1(y)$$

8.3.2 - Exemplo de conexões paralelas, fig. 53

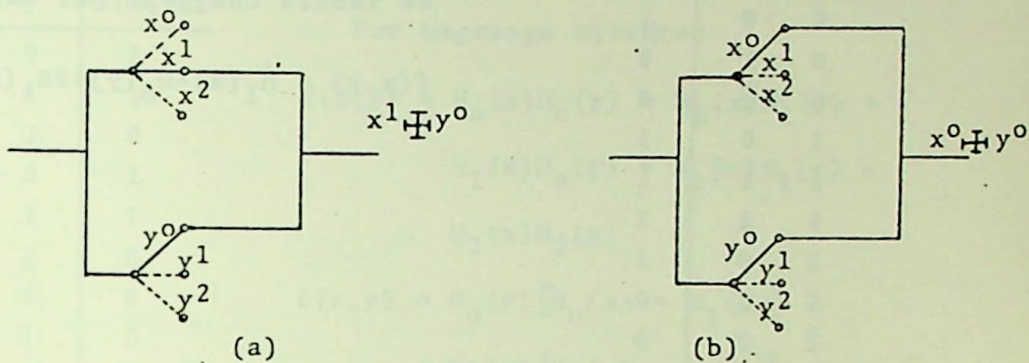


Fig. 53

a função de trabalho da fig. 53a é:

$$f(1,0) = f(1,1) = f(1,2) = f(0,0) = f(2,0) = 1$$

Então:

$$f(x,y) = H_1(x)H_0(y) + H_1(x)H_1(y) + H_1(x)H_2(y) + H_0(x)H_0(y) + H_2(x)H_0(y)$$

$$f(x,y) = H_1(x) [H_0(y) + H_1(y) + H_2(y)] + H_0(x) [H_0(y) + H_2(y)]$$

$$f(x,y) = H_1(x) + H_0(y) [1 + 2H_1(x)] = H_1(x) + H_0(y) + 2H_1(x)H_0(y)$$

do mesmo modo que a função de trabalho da fig. 53b é:

$$f(x,y) = H_0(x) + H_0(y) + 2H_0(x)H_0(y)$$

Organizaremos a tabela para a fig. a

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	0
0	2	0
1	0	1
1	1	1
1	2	1
2	0	1
2	1	0
2	2	0

Da tabela chega-se por Lagrange a:

$$f(x,y) = H_1(x) + H_0(y) + 2H_1(x)H_0(y)$$

Podemos enunciar a partir dos desenvolvimentos anteriores, o que chamamos de

8.3.3 - Primeiro Teorema Fundamental

Qualquer função de trabalho de dois valores de dois terminais serie-paralelo com contatos de tres posições é expressável como uma função gerada por um polinomio no CG(3).

8.3.3.1 - Exemplo

Achar a função de trabalho dos dois terminais da Fig. 54

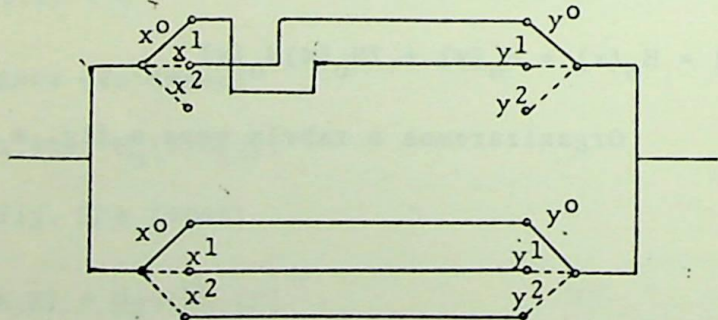


Fig. 54

Façamos a tabela

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	1
0	2	0
1	0	1
1	1	1
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	1

Por Lagrange tiramos:

$$f(x,y) = H_0(x)H_0(y) + H_0(x)H_1(y) +$$

$$H_1(x)H_0(y) + H_1(x)H_1(y) +$$

$$H_2(x)H_2(y)$$

$$f(x,y) = H_0(y) [H_0(x) + H_1(x)] +$$

$$H_1(y) [H_1(x) + H_0(x)] +$$

$$H_2(x)H_2(y)$$

$$f(x,y) = [H_0(x) + H_1(x)] [H_1(y) + H_0(y)] + H_2(x)H_2(y)$$

$$f(x,y) = 2x^2y^2 + x^2y + x^2 + xy^2 + 2x + y^2 + 2y + 1$$

O mesmo resultado poderia ser obtido se considerássemos o equacionamento direto, isto é:

$$f(x,y) = (x^0y^2 + x^1y^0) + (x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2)$$

$$f(x,y) = H_0(x)H_1(y) + H_1(x)H_0(y) + H_0(x)H_0(y) + H_1(x)H_1(y) +$$

$$H_2(x)H_2(y)$$

$$f(x,y) = 2x^2y^2 + x^2y + x^2 + xy^2 + 2x + y^2 + 2y + 1$$

### 8.3.3.2 - Segundo Teorema Fundamental

Qualquer função de trabalho de dois valores, pode ser executada como a função de trabalho de dois terminais série-paralelo com contatos de três posições.

A demonstraçãõ desse teorema, serã feita da seguinte maneira.

Consideremos a funçãõ:

$$f(x_1, \dots, x_n) = H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n)$$

ẽ obvio que:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = H_{\alpha_1}(\alpha_1) \dots H_{\alpha_n}(\alpha_n) = 1$$

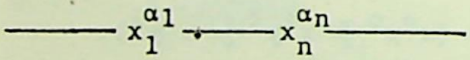
E para um sistema de valores  $\beta_1, \dots, \beta_n$  outro que  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , temos:  $f(\beta_1, \dots, \beta_n) = H_{\alpha_1}(\beta_1) \dots H_{\alpha_n}(\beta_n) = 0$

Desde que um dos valores  $\alpha_i \neq \beta_i$ , deixa

$$\alpha_{i_0} \neq \beta_{i_0} \quad \text{entãõ}$$

$$H_{\alpha_{i_0}}(\beta_{i_0}) = 0$$

Entãõ a funçãõ f ẽ a funçãõ de trabalho dos contatos  $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}$  conectados em sãrie.



Consideremos a funçãõ:

$$g(x_1, \dots, x_n) = H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n) + \dots + H_{\beta_1}(x_1) \dots H_{\beta_n}(x_n)$$

na qual cada sistema de valores,

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

⋮

$$(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

somente ocorre uma vez.

Para uma posição  $x_1 = \gamma_1, \dots, x_n = \gamma_n$  dos contatos se o sistema de valores  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  ocorre entre os sistemas

$$\begin{array}{l} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \vdots \\ (\beta_1, \dots, \beta_n) \end{array} \quad \text{Então } g(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 1$$

Se  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  não ocorre entre os sistemas.

$$\begin{array}{l} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \vdots \\ (\beta_1, \dots, \beta_n) \end{array} \quad \text{Então } g(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 0$$

Então  $g(x_1, \dots, x_n)$  é a função de trabalho do circuito no qual somente os circuitos tendo os sistemas de índices de soma ocorrem. Fig. 55.

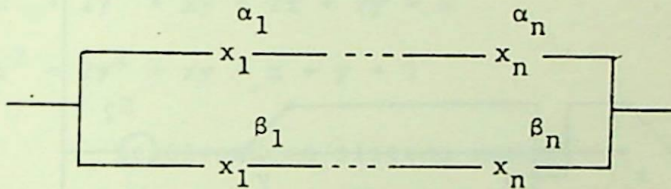


Fig. 55

mas qualquer função de trabalho de dois valores

$$g = \sum C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n)$$

onde  $C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$  são iguais a 0 ou 1, pode ser escrito como uma soma.

$$g = H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n) + \dots + H_{\beta_1}(x_1) \dots H_{\beta_n}(x_n)$$

Portanto, qualquer função de trabalho de dois valores, pode ser realizada conectando em serie e em paralelo os contatos  $x_1^0, x_1^1, x_1^2, \dots, x_n^0, x_n^1, x_n^2$ .

8.4 - Análise e síntese de circuitos série-paralelo com contatos de tres posições

O primeiro problema análise, consiste em achar o valor da função de trabalho para valores dados das variáveis. Sua solução é imediata.

8.4.1 - Exemplos :- 1) Consideremos o circuito da Fig. 56

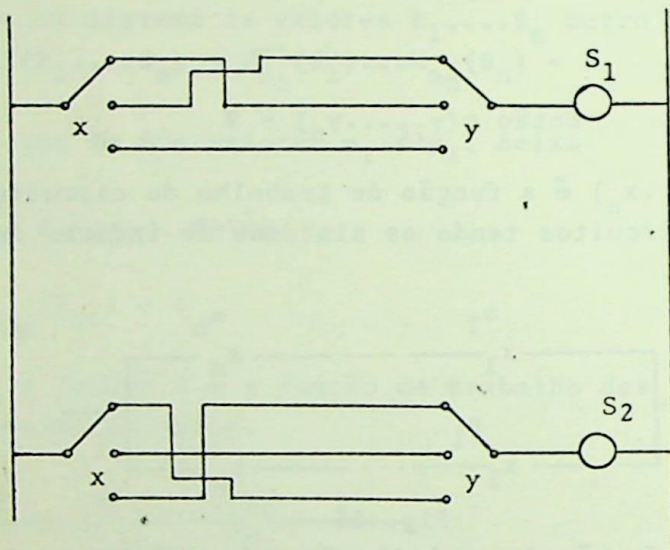


Fig. 56

$$S_1 = x^0 y^1 + x^1 y^0 + x^2 y^2$$

$$S_2 = x^0 y^2 + x^1 y^1 + x^2 y^0$$

$$S_1 = H_0(x)H_1(y) + H_1(x)H_0(y) + H_2(x)H_2(y)$$

$$S_1 = (2x^2+1)(2y^2+2y) + (2x^2+2x)(2y^2+1) + (2x^2+x)(2y^2+y)$$

$$S_1 = 2x^2+2y^2+xy+2x+2y$$

$$S_2 = H_0(x)H_2(y) + H_1(x)H_1(y) + H_2(x)H_0(y)$$

$$S_2 = (2x^2+1)(2y^2+y) + (2x^2+2x)(2y^2+2y) + (2x^2+x)(2y^2+1)$$

$$S_2 = 2x^2 + 2y^2 + xy + x + y$$

Se desejarmos saber o estado das lampadas  $S_1$  e  $S_2$  para  $x = 2$  e  $y = 2$ , teremos:

$$S_1 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 2+2+1+1+1 = 1$$

$$S_2 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 + 2 = 2+2+1+2+2 = 0$$

Então a lampada  $S_1$  está acesa, e a lampada  $S_2$  apagada. No mesmo exemplo fazemos o seguinte problema:

Achar a posição para a qual  $S_1$  está apagada e  $S_2$  acesa.

$$\text{Devemos ter: } S_1 = 0 \quad \text{e} \quad S_2 = 1$$

Então:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + xy + 2x + 2y = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + xy + x + y = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos:

multiplicando a 2ª equação por  $(-1)$  e adicionando-se a 1ª temos:

$$x + y = 2$$

$$y = 2 - x$$

$$y = 2 + 2x$$

Então  $y$  é satisfeito para qualquer valor de  $x$ , assim sendo:

$$\text{para, } x = 0 \quad \text{temos } y = 2$$

$$x = 1 \quad \text{temos } y = 1$$

$$x = 2 \quad \text{temos } y = 0$$

Achar no exemplo dado a posição para a qual  $S_1$  e  $S_2$  estão acesas

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + xy + 2x + 2y = 1 \\ 2x^2 + 2y^2 + xy + x + y = 1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema temos:

$$x + y = 0$$

$$y = -x \quad \therefore \quad y = 2x$$

na primeira equação substituindo-se  $y$  por  $2x$  temos:

$$2x^2 + 2(2x)^2 + 2x(x) + 2x + 2(2x) = 1$$

$$2x^2 + 2x^2 + 2x^2 + 6x = 1$$

$$6x^2 + 6x = 1$$

$$0 + 0 = 1$$

$$0 = 1$$

Que é absurdo! assim sendo não há posição para a qual  $S_1 \cdot S_2 = 1$ .

#### 8.4.2 - Exemplo 2

Analisar o circuito da figura 57.

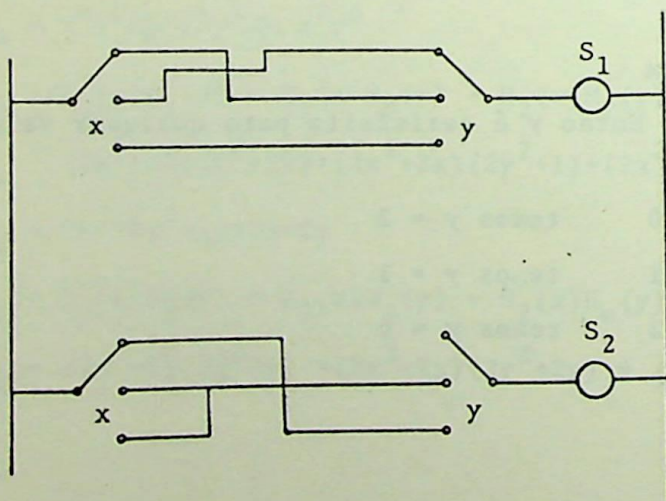


Fig. 57

$$S_1 = x^0 y^1 \vdash x^1 y^0 \vdash x^2 y^2$$

$$S_2 = x^0 y^2 \vdash x^1 y^1 \vdash x^2 y^1$$

$$S_1 = H_0(x)H_1(y) \vdash H_1(x)H_0(y) \vdash H_2(x)H_2(y)$$

$$S_1 = H_0(x)H_1(y) + H_1(x)H_0(y) + H_2(x)H_2(y)$$

$$S_1 = 2x^2 + 2y^2 + xy + 2x + 2y$$

$$S_2 = H_0(x)H_2(y) \vdash H_1(x)H_1(y) \vdash H_2(x)H_1(y)$$

$$S_2 = H_0(x)H_2(y) + H_1(x)H_1(y) + H_2(x)H_1(y)$$

$$S_2 = x^2 y + 2y^2 + y$$

Achar a posição dos contatos para as quais  $S_1$  está ligada e  $S_2$  desligada.

Temos então:

$$2x^2 + 2y^2 + xy + 2x + 2y = 1$$

$$x^2 y + 2y^2 + y = 0$$

a 1ª equação pode ser escrita:

$$2(x+y)^2 + 2(x+y) = 1$$

$$-(x+y)^2 - x + y = 1$$

$$(x+y)^2 + (x+y) = 2$$

$$(x+y)(1+x+y) = 2$$

Então, ou :

$$a) \quad x+y = 1 \quad e \quad (1+x+y) = 2 \quad \text{ou}$$

$$b) \quad x+y = 2 \quad e \quad (1+x+y) = 1$$

no caso a), temos:

$$y = 1+2x$$

no caso b) teriamos absurdo.

O valor  $y = 1+2x$  introduzido na 2ª equação dá:

$$x^2y + 2y^2 + y = 0$$

$$x^2(1+2x) + 2(1+2x)^2 + y = 0$$

$$x^2(1+2x) + 2(1+4x^2+4x)y = 0$$

$$x^2 + 2x^3 + 2 + 8x^2 + 8x + y = 0$$

$$2x + 2 + 8x + y = 0$$

$$x + 2 + y = 0$$

$$y = -(x+2)$$

$$y = 2x+1$$

Vemos que a 2ª equação é satisfeita; portanto, temos as soluções:

$$x = 0 \quad y = 1$$

$$x = 1 \quad y = 0$$

$$x = 2 \quad y = 2$$

### 8.4.3 - Exemplo 3

No circuito da figura 57 achar a posição dos contatos para as quais ambas as lampadas estão apagadas.

Temos o sistema de equações:

$$2x^2 + 2y^2 + xy + 2x + 2y = 0$$

$$x^2y + 2y^2 + y = 0$$

na 1<sup>a</sup> equação temos:

$$(x+y)(x+y+1) = 0$$

Temos então:

$$y = 2x \quad \text{ou} \quad y = 2+2x$$

para  $y = 2x$  introduzido na 2<sup>a</sup> equação temos:

$$x^2(2x) + 2 \cdot (2x)^2 + 2x = 0$$

$$2x^3 + 8x^2 + 2x = 0$$

$$2x + 2x^2 + 2x = 0$$

$$2x^2 + x = 0$$

Então:

$$x = 0, \quad y = 0$$

$$x = 1, \quad y = 2$$

A segunda solução introduzida na 2<sup>a</sup> equação dá:

$$x^2(2+2x) + 2 \cdot (2+2x)^2 + 2 + 2x = 0$$

$$2x^2 + 2x^3 + 2(4+4x^2+8x) + 2 + 2x = 0$$

$$2x^2 + 2x^3 + 8 + 8x^2 + x + 2 + 2x = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1 = 2$$

$$y = 0$$

### 8.5 - Síntese de circuitos sêrie-paralelo com contatos de tres posições

A síntese de circuitos sêrie-paralelo com contatos de tres posições, significa executar o circuito para uma dada função de trabalho. Esta função deve ser de dois valores.

#### 8.5.1 - Exemplo

Achar um circuito com uma lampada e duas chaves de controle de tres posições, tal que a lampada deva ser ligada quando:

$x = 0 \quad y = 1$   
 $x = 1 \quad y = 0$   
 $x = 2 \quad y = 2$

#### Solução:

Fazendo a tabela, temos:

x	y	S
0	0	0
0	1	1
0	2	0
1	0	1
1	1	0
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	1

Por Lagrange temos:

$$S = H_0(x)H_1(y) + H_1(x)H_0(y) + H_2(x)H_2(y)$$

Que é a função de trabalho do circuito da figura 58.

$$S = H_0(x)H_1(y) \uparrow H_1(x)H_0(y) \uparrow H_2(x)H_2(y)$$

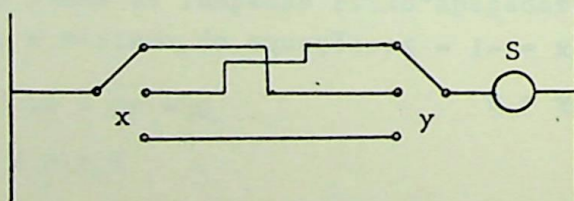


Fig. 58

8.6 - Dois terminais anti-simétricos série-paralelo com contatos e retificadores

Dois terminais serão denominados "anti-simétricos", quando para qualquer posição dos contatos não permite a corrente passar em ambos sentidos.

Dois terminais anti-simétricos tem uma função de trabalho,

$f(a_1, \dots, a_n)$  das variáveis de dois valores associadas a seus contatos que toma os valores:  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ , se os dois terminais não permitem a corrente passar em qualquer sentido.

$f(a_1, \dots, a_n) = 1$ , se os dois terminais permitem a corrente passar num sentido

$f(a_1, \dots, a_n) = 2$ , se os dois terminais permitem a corrente passar no sentido oposto.

Seja:

$$f(a_1, \dots, a_n) = \sum f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) H_{\alpha_1}(a_1) \dots H_{\alpha_n}(a_n)$$

os valores  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  sendo 0, 1 ou 2; na soma acima precisamos considerar somente os termos tendo  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$

A síntese desses dois terminais é facilmente encontrada.

Seja:

$$f(a_1, \dots, a_n) = \sum f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) H_{\alpha_1}(a_1) \dots H_{\alpha_n}(a_n)$$

os valores  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  sendo, 0, 1 ou 2 a soma acima pode ser decomposta, considerando-se somente os termos,  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$ , na forma:

$$f(a_1, \dots, a_n) = \sum_1 C_{\alpha_1 \dots \alpha_n} H_{\alpha_1}(a_1) \dots H_{\alpha_n}(a_n) + \\ 2 \sum_2 C_{\beta_1 \dots \beta_n} H_{\beta_1}(a_1) \dots H_{\beta_n}(a_n)$$

na qual,  $C_{\alpha_1} \dots \alpha_n$ ,  $C_{\beta_1} \dots \beta_n$  são 1, a primeira soma sendo estendida para os índices  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  para os quais  $f(\alpha_1 \dots \alpha_n) = 1$  e a segunda para os índices  $\beta_1 \dots \beta_n$  para os quais  $f(\beta_1 \dots \beta_n) = 2$

Sendo:

$$h(a_1, \dots, a_n) = \Sigma_1 \cdot C_{\alpha_1} \dots \alpha_n H_{\alpha_1}(a_1) \dots H_{\alpha_n}(a_n)$$

$$K(a_1, \dots, a_n) = \Sigma_2 \cdot C_{\beta_1} \dots \beta_n H_{\beta_1}(a_1) \dots H_{\beta_n}(a_n)$$

as funções  $h$  e  $K$  tendo os valores 0 ou 1 teremos:

$$h(a_1, \dots, a_n) \cdot K(a_1, \dots, a_n) = 0$$

Devido ao fato da corrente não poder passar em ambos sentidos, ao mesmo tempo.

#### 8.6.1 - Exemplo

Construir dois terminais série-paralelo tendo 4 botões de pressão A, B, C, D, a corrente passará num sentido quando um dos botões de pressão A ou B ou quando ambos botões de pressão C e D estão operados. A corrente passará no sentido oposto quando um dos botões de pressão C ou D está operado e os outros tres inoperados, não fluirá corrente no circuito quando todos quatro botões de pressão estão inoperados.

#### Solução:

Organizemos a tabela: (Vide página seguinte)

A	B	C	D	f(A,B,C,D)	A	B	C	D	f(A,B,C,D)
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	2	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	2	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1

Por Lagrange tiramos:

$$\begin{aligned}
 f(A,B,C,D) = & H_1(A)H_1(B)H_1(C)H_1(D) + H_1(A)H_1(B)H_1(C)H_0(D) + \\
 & H_1(A)H_1(B)H_0(C)H_1(D) + H_1(A)H_1(B)H_0(C)H_0(D) + \\
 & H_1(A)H_0(B)H_1(C)H_1(D) + H_1(A)H_0(B)H_1(C)H_0(D) + \\
 & H_1(A)H_0(B)H_0(C)H_1(D) + H_1(A)H_0(B)H_0(C)H_0(D) + \\
 & H_0(A)H_1(B)H_1(C)H_1(D) + H_0(A)H_1(B)H_1(C)H_0(D) + \\
 & H_0(A)H_1(B)H_0(C)H_1(D) + H_0(A)H_1(B)H_0(C)H_0(D) + \\
 & H_0(A)H_0(B)H_1(C)H_1(D) + 2H_0(A)H_0(B)H_1(C)H_0(D) + \\
 & 2H_0(A)H_0(B)H_0(C)H_1(D).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(A,B,C,D) = & H_1(A) + H_0(A)H_1(B) + H_0(A)H_0(B)H_1(C)H_1(D) + \\
 & 2H_0(A)H_0(B)H_1(C)H_0(D) + H_0(C)H_1(D)
 \end{aligned}$$

h sendo o circuito que permite a passagem da corrente em um sentido, e K no sentido oposto, temos:

$$h(A,B,C,D) = H_1(A) + H_0(A)H_1(B) + H_0(A)H_0(B)H_1(C)H_1(D)$$

$$K(A,B,C,D) = H_0(A)H_0(B) [H_1(C)H_0(D) + H_0(C)H_1(D)]$$

a condição  $h.K = 0$  é satisfeita e o circuito é o da fig. 59.

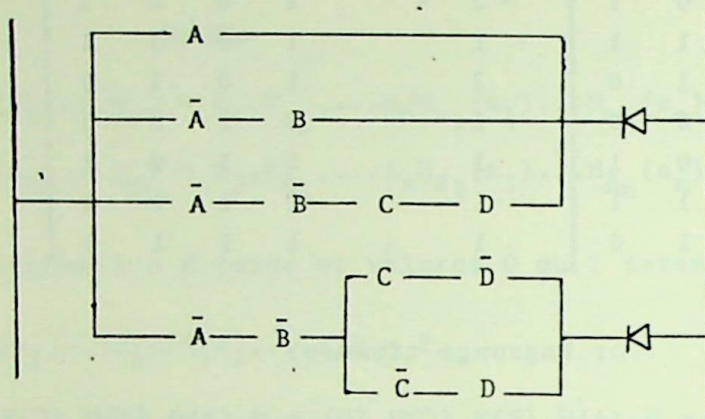


Fig. 59

### 8.7 - Operação ideal de relês polarizados

No caso de um relê polarizado, fig. 60, a armadura de contatos sendo magnética, será atraída se a corrente passar num sentido, e repelida se a corrente passar no sentido oposto. Se não houver corrente a armadura permanece na sua posição de repouso.

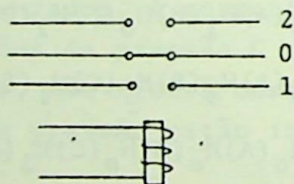


Fig. 60

Então, o relê tem contatos de tres posições. Associaremos aos contatos do relê uma variável de 3 valores do  $CG(3)$ , tomando 3 valores possíveis no intervalo de tempo  $T$ .

Assim:

$x_T = 0$ , se no intervalo de tempo  $T$ , a armadura de contatos está na posição de repouso.

$x_T = 1$ , se no intervalo de tempo  $T$  a armadura de contatos

está na posição de atraída.

$x_T = 2$ , se no intervalo de tempo  $T$ , a armadura de contatos está na posição de repelida.

Associaremos a corrente no enrolamento do relé, a uma variável  $X$  do CG(3) tomando tres possíveis valores no intervalo de tempo  $T$ .

$X_T = 0$ , se no intervalo de tempo  $T$ , nenhuma corrente passa através do enrolamento.

$X_T = 1$ , se no intervalo de tempo  $T$ , a corrente passa através do enrolamento num sentido, o de atração da armadura.

$X_T = 2$ , se no intervalo de tempo  $T$  a corrente passa através do enrolamento no sentido oposto, isto é, no sentido de repulsão da armadura.

Suporemos que a corrente passando através do enrolamento durante o intervalo de tempo  $T$ , agirá sobre os contatos durante o intervalo  $T+1$ .

Este principio mostra que:

$$\text{se } X_T = 0 \quad \text{então } x_{T+1} = 0$$

isto é, se no intervalo de tempo  $T$ , nenhuma corrente passou através do enrolamento, no intervalo de tempo  $T+1$  o contato está na sua posição de repouso.

Analogamente:

$$X_T = 1 \quad \text{então } x_{T+1} = 1$$

$$X_T = 2 \quad \text{então } x_{T+1} = 2$$

Temos, portanto:

$$x_{T+1} = X_T$$

Esta equação sendo escrita no CG(3), será chamada equação característica dos relés ordinários com contatos ideais.

### 8.7.1 - Interpretação das funções de Lagrange

A interpretação das funções de Lagrange  $H_0(x)$ ,  $H_1(x)$ ,  $H_2(x)$ ,  $x$  sendo uma variável de tres valores associada a contatos de tres posições, já foi feita anteriormente.

Procuremos então a interpretação das funções

$H_0(X)$ ,  $H_1(X)$ ,  $H_2(X)$ ,  $X$  sendo a variável de tres valores associada à corrente.

Faremos:

$$X_H = H_1(X)$$

$$X_A = H_2(X)$$

Então  $X_H = 1$  se  $X = 1$  e  $X_H = 0$  se  $X = 0$  ou  $X = 2$  portanto  $X_H = 1$  se a corrente passar no sentido que atrai a armadura e  $X_H = 0$  se a corrente não passar naquele sentido.

Similarmente,  $X_A = 1$  se  $X = 2$  e  $X_A = 0$  se  $X = 0$  ou  $X = 1$ . Então  $X_A = 1$  se a corrente passar no sentido que repele a armadura, e  $X_A = 0$  se a corrente não passar naquele sentido.

O relê da Fig. 60 pode ser executado por um eletromagneto com um enrolamento duplo, os dois enrolamentos estando em sentidos opostos, conforme Fig. 61.

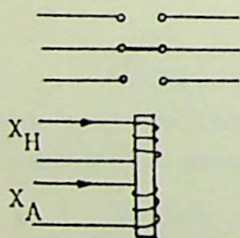


Fig. 61

Então  $X_H$  é uma variável de dois valores associada a corrente em um dos enrolamentos, naquele no qual a armadura é atraída quando passa corrente através dele.

Similarmente  $X_A$  é uma variável de dois valores associada a corrente no outro enrolamento naquele no qual a armadura é repelida quando passa corrente através dele.

Temos:

$$X = X_H + 2X_A$$

e

$$X_H \cdot X_A = 0$$

Obviamente, com:

$$x^0 = H_0(x), \quad x^1 = H_1(x), \quad x^2 = H_2(x).$$

Temos para os contatos:

$$x^0 + x^1 + x^2 = 1 \pmod{3}$$

$$x^0 x^1 = x^0 x^2 = x^1 x^2 = 0$$

e

$$x = x^1 + 2x^2$$

A equação característica:  $x_{T+1} = X_T$

dã:

$$x_{T+1}^1 = X_{HT}$$

$$x_{T+1}^2 = X_{AT}$$

Então:

$$x_{T+1}^0 = \overline{X_{HT} + X_{AT}} = X_{HT} + X_{AT} + 1$$

o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{T+1}^0 = X_{HT} + X_{AT} + 1 \\ x_{T+1}^1 = X_{HT} \\ x_{T+1}^2 = X_{AT} \end{array} \right.$$

substitui a equação característica.

É facil ver que este sistema assegura.

$$x_{T+1}^0 \vdash x_{T+1}^1 \vdash x_{T+1}^2 = 1$$

$$x_{T+1}^0 \cdot x_{T+1}^1 = x_{T+1}^0 \cdot x_{T+1}^2 = x_{T+1}^1 \cdot x_{T+1}^2 = 0$$

podemos de fato executarmos um relê polarizado com auxilio de dois eletromagnetos 1 e 2 (Fig. 62), tal que a corrente  $X_H$  e  $X_A$  não possa passar simultaneamente por ambos eletromagnetos ; portanto, tal que :

$$X_H \cdot X_A = 0$$

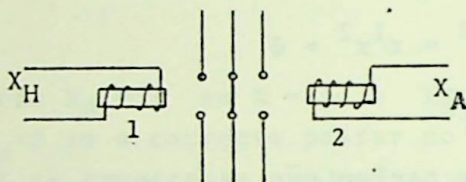


Fig. 62

### 8.7.2 - Análise da operação de circuitos com relês polarizados ideais

Consideremos um circuito como o da figura 46. Os dois terminais tendo as funções de trabalho  $f_H$  e  $f_A$  respectivamente, operam os dois enrolamentos do relê X, ... enquanto os dois terminais tendo as funções de trabalho  $g_H$  e  $g_A$  respectivamente, operam os dois enrolamentos do relê Y. As funções  $f_H$ ,  $f_A$ , ...  $g_H$ ,  $g_A$  são funções dos contatos dos botões de pressão  $a_1, \dots, a_n$  e dos contatos  $x, \dots, y$  dos relês X, ... Y.

A corrente no enrolamento dos relês é:

$$X_{HT} = f_H(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T)$$

$$X_{AT} = f_A(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T)$$

⋮        ⋮

$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 Y_{HT} &= g_H(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) \\
 Y_{AT} &= g_A(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T)
 \end{aligned}$$

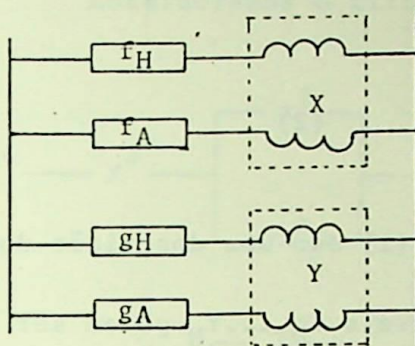


Fig. 63

Introduzindo as variáveis de tres valores

$$\begin{aligned}
 X &= X_H + 2X_A \\
 \vdots & \quad \vdots \\
 Y &= Y_H + 2Y_A
 \end{aligned}$$

E as funções

$$\begin{aligned}
 f &= f_H + 2f_A \\
 \vdots & \quad \vdots \\
 g &= g_H + 2g_A
 \end{aligned}$$

as equações anteriores são escritas no CG(3) como:

$$\begin{aligned}
 X_T &= f(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T) \\
 \vdots & \quad \vdots \\
 Y_T &= g(a_{1T}, \dots, a_{nT}, x_T, \dots, y_T)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Os contatos dos botões de pressão  $a_1, \dots, a_n$  e os contatos dos relés  $x, \dots, y$ , são supostos serem contatos de tres posições. Esta suposição é essencial somente para os contatos dos relés. Desde que a posição dos botões de pressão, esta sob nosso controle supondo que temos botões de pressão de duas posições, é suposto que as variáveis  $a_1, \dots, a_n$  tomam no CG(3) so-



8.7.2 - Exemplo

Consideremos o circuito da Fig. 64 .

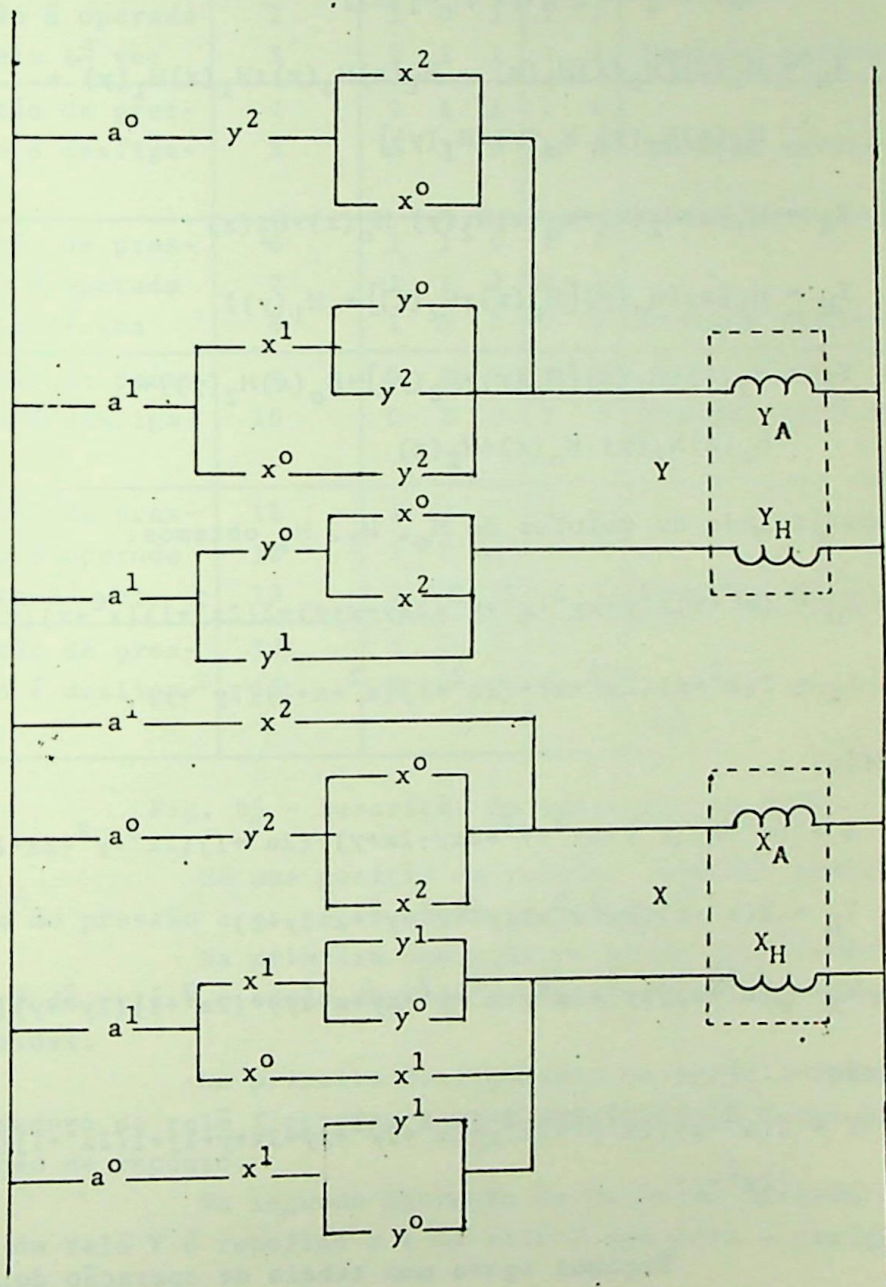


Fig. 64

Temos:

$$X_H = H_1(a) \{H_0(x)H_1(y) + H_1(x) [H_0(y) + H_1(y)]\} + H_0(a)H_1(x) [H_0(y) + H_1(y)]$$

$$X_H = H_1(a) [H_0(x)H_1(y) - H_1(x)H_0(y) + H_1(x)H_1(y) + H_0(a)H_1(x) H_0(y) + H_1(y)]$$

$$X_A = H_1(a)H_2(x) + H_0(a)H_2(y) H_0(x) + H_2(x)$$

$$Y_H = H_1(a) \{H_0(y) [H_0(x) + H_2(x)] + H_1(y)\}$$

$$Y_A = H_1(a) \{H_1(x) [H_0(y) + H_2(y)] + H_0(x)H_2(y)\} + H_0(a)H_2(y) H_0(x) + H_2(x)$$

Substituindo os valores de H<sub>0</sub>, H<sub>1</sub>, H<sub>2</sub> obtemos:

$$X_H = (a^2+a)x^2y+xy^2+x^2+y^2+2xy+x+y) + 2(2a^2+1)(x^2+x)(y^2+2y+1)$$

$$X_A = 2(a^2+a)(2x^2+x) + (2a^2+1)(x^2+x+1)(2y^2+y)$$

Então:

$$X = (a^2+a)(x^2y+xy^2+y^2+2xy+2x+y) + (2a^2+1)(2x^2+y^2+2x+2y), \text{ e}$$

$$Y_H = 2(a^2+a)(2x^2y^2+2xy^2+x^2+y^2+x+2y+1)$$

$$Y_A = (a^2+a)(xy^2+2x^2y+x^2+y^2+xy+x+2y) + (2a^2+1)(2y^2+y)(1+x+x^2)$$

Então:

$$Y = 2(a^2+a)(2x^2y^2+2x^2y+2x^2+2y^2+xy+2x+y+1) + 2(2a^2+1)(x^2+x+1)(2y^2+y)$$

Façamos agora uma tabela de operação do circuito analisado:

OPERAÇÃO	INSTANTE	a	x	y	X	Y	COMENTÁRIO
Repouso	0	0	0	0	0	0	Posição estável
Botão de pressão é operado pela 1ª vez	1	1	0	0	0	1	Posição estável
	2	1	0	1	1	1	
	3	1	1	1	1	1	
botão de pressão é desligado	4	0	1	1	1	0	Posição estável
	5	0	1	0	1	0	
botão de pressão é operado pela 2ª vez	6	1	1	0	1	2	Posição estável
	7	1	1	2	0	2	
	8	1	0	2	0	2	
botão de pressão é desligado	9	0	0	2	2	2	Posição estável
	10	0	2	2	2	2	
botão de pressão é operado pela 3ª vez	11	1	2	2	2	0	Posição estável
	12	1	2	0	2	1	
	13	1	2	1	2	1	
botão de pressão é desligado	14	0	2	1	0	0	Repouso (posição estável)
	15	0	0	0	0	0	

Fig. 65 - Descrição da operação dos relés

Há uma posição de repouso estável, quando o botão de pressão e os relés estão inoperados.

Na primeira operação do botão de pressão a armadura do relé Y e então do relé X são atraídas e permanecem atraídas.

No primeiro desligamento do botão de pressão a armadura do relé X permanece atraída e do relé Y vai para a posição de repouso.

Na segunda operação do botão de pressão a armadura do relé Y é repelida e a do relé X vem para a posição de repouso.

No segundo desligamento do botão de pressão a armadura do relé Y é também repelida.

Na terceira operação a armadura do relé Y passa pela posição de repouso e é atraída, enquanto a armadura do relé X permanece repelida.

No terceiro desligamento o circuito vem para o repouso.

### PRINCIPIO DA DETERMINAÇÃO

Desde que os contatos de cada relé polarizado podem ter tres posições:  $x_T = 0$ ,  $x_T = 1$ , ou  $x_T = 2$ , se o circuito tem n relés polarizados, seus contatos podem ter  $3^n$  posições.

O principio da determinação é estabelecido como no caso de relés ordinários: se a posição  $P_{i0}$  dos contatos do relé no instante  $T = 0$  é conhecido,  $P_0 = P_{i0}$ , a evolução subsequente do circuito para um dado comando é determinada. Todas as considerações feitas anteriormente permanecem válidas.

#### 8.7.3 - Síntese de circuitos com relés polarizados

A síntese de circuitos com relés polarizados é feita de acordo com os mesmos principios estabelecidos anteriormente para circuitos série-paralelo.

As funções f e g que entram no sistema de equações recorrentes:

$$x_{T+1} = f(a_T, \dots, c_T, x_T, \dots, y_T)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$y_{T+1} = g(a_T, \dots, c_T, x_T, \dots, y_T)$$

sendo desconhecidas, estas funções devem ser determinadas das condições prescritas pelo programa de operação do relé.

Uma vez que estas estão determinadas, conhecemos as funções de trabalho de tres valores dos enrolamentos de cada relé.

$$X = f(a, \dots, c, x, \dots, y)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$Y = g(a, \dots, c, x, \dots, y)$$

podemos então deduzir as duas funções de dois valores para os dois enrolamentos de cada relé.

$$X_H = H_1(X)$$

$$X_A = H_2(X)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$Y_H = H_1(X)$$

$$Y_A = H_2(X)$$

#### 8.7.3.1 - Exemplo

Achar o circuito que satisfaça o seguinte programa; o circuito deve ter dois relés, e um botão de pressão (de duas posições):

Há uma posição de repouso estável, quando o botão de pressão e os relés estão inoperados.

Na primeira operação do botão de pressão a armadura do relé Y e então do relé X são atraídas, e permanecem atraídas.

No primeiro desligamento do botão de pressão a armadura do relé X permanece atraída e a do relé Y vai para a posição de repouso.

Na segunda operação do botão de pressão, a armadura do relé Y é repelida, então a do relé X vem para a posição de repouso.

No segundo desligamento do botão de pressão a armadura do relé Y é também repelida.

Na terceira operação a armadura do relé Y passa pela posição de repouso e é atraída, enquanto a armadura do relé X permanece repelida.

No terceiro desligamento o circuito vem para o repouso.

### Solução:

Organizemos uma tabela com estas condições:

OPERAÇÃO	INSTANTE	a	x	y	X	Y	COMENTÁRIO
Repouso	0	0	0	0	0	0	Repouso
botão de pressão operado pela 1a. vez	1	1	0	0	0	1	Posição estável
	2	1	0	1	1	1	
	3	1	1	1	1	1	
botão de pressão é desligado	4	0	1	1	1	0	Posição estável
	5	0	1	0	1	0	
botão de pressão operado pela 2a. vez	6	1	1	0	1	2	Posição estável
	7	1	1	2	0	2	
	8	1	0	2	0	2	
botão de pressão é desligado	9	0	0	2	2	2	Posição estável
	10	0	2	2	2	2	
botão de pressão operado pela 3a. vez	11	1	2	2	2	0	Posição estável
	12	1	2	0	2	1	
	13	1	2	1	2	1	
botão de pressão é desligado	14	0	2	1	0	0	Posição estável (Repouso)
	15	0	0	0	0	0	

Da tabela vemos que os valores de  $X = f(a,x,y)$  e  $Y = g(a,x,y)$  permanecem indeterminados para os seguintes valores de  $a,x,y$ .

a	x	y	X	Y
0	0	1	-	-
0	1	2	-	-
0	2	0	-	-

Realmente não sabemos o que aconteceria ao circuito se durante a primeira operação do botão de pressão, na situação  $x=0$   $y=1$  liberássemos o botão de pressão (falha). Bem como não sabemos o que aconteceria nas outras duas situações, podemos

supor que na ocorrência dessas faltas, o circuito venha para a posição de repouso, isto é:

a	x	y	X	Y
0	0	1	0	0
0	1	2	0	0
0	2	0	0	0

Como o botão de pressão é suposto ser de duas posições, o termo em  $H_2(c)$  não será incluído.

A fórmula de interpolação de Lagrange aplicada a tabela anterior nos dá:

$$\begin{aligned}
 X = & H_1(a)H_0(x)H_1(y) + H_1(a)H_1(x)H_1(y) + H_0(a)H_1(x)H_1(y) + \\
 & H_0(a)H_1(x)H_0(y) + H_1(a)H_1(x)H_0(y) + 2H_0(a)H_0(x)H_2(y) + \\
 & 2H_0(a)H_2(x)H_2(y) + 2H_1(a)H_2(x)H_2(y) + 2H_1(a)H_2(x)H_0(y) + \\
 & 2H_1(a)H_2(x)H_1(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y = & H_1(a)H_0(x)H_0(y) + H_1(a)H_0(x)H_1(y) + H_1(a)H_1(x)H_1(y) + \\
 & 2H_1(a)H_1(x)H_0(y) + 2H_1(a)H_1(x)H_2(y) + 2H_1(a)H_0(x)H_2(y) + \\
 & 2H_0(a)H_0(x)H_2(y) + 2H_0(a)H_2(x)H_2(y) + H_1(a)H_2(x)H_0(y) + \\
 & H_1(a)H_2(x)H_1(y).
 \end{aligned}$$

$$X = H_0(a)H_1(x)[H_0(y)+H_1(y)] + H_1(a)\{H_0(x)H_1(y)+H_1(x)[H_0(y)+H_1(y)]\} + 2\{H_0(a)[H_0(x)+H_2(x)]H_2(y)+H_1(a)H_2(x)\}$$

$$Y = H_1(a)\{H_0(y)[H_2(x)+H_0(x)]+[H_1(x)+H_2(x)+H_0(x)]H_1(y)\} + 2\{H_0(a)[H_0(x)+H_2(x)]H_2(y)+H_1(a)H_1(x)[H_0(y)+H_2(y)]\} + H_1(a)H_0(x)H_2(y)$$

Então como:

$$X = X_H + 2X_A \quad \text{e} \quad Y = Y_H + 2Y_A \quad \text{temos:}$$

$$X_H = H_0(a)H_1(x)[H_0(y)+H_1(y)] + H_1(a)\{H_0(x)H_1(y)+H_1(x)[H_0(y)+H_1(y)]\}$$

$$X_A = H_0(a)[H_0(x)+H_2(x)]H_2(y)+H_1(a)H_2(x)$$

$$Y_H = H_1(a)\{H_0(y)[H_0(x)+H_2(x)]+H_1(y)\}$$

$$Y_A = H_0(a)[H_0(x)+H_2(x)]H_2(y)+H_1(a)\{H_1(x)[H_0(y)+H_2(y)]+H_0(x)H_2(y)\}$$

ou

$$X_H = \bar{a}x^1(y^0 + y^1) + a[x^0y^1 + x^1(y^0 + y^1)]$$

$$X_A = a(x^0 + x^2)y^2 + ax^2$$

$$Y_H = \bar{a}[y^0(x^0 + x^2) + y^1]$$

$$Y_A = \bar{a}(x^0 + x^2)y^2 + a[x^1(y^0 + y^2) + x^0y^2]$$

E obtemos o circuito da fig. 66

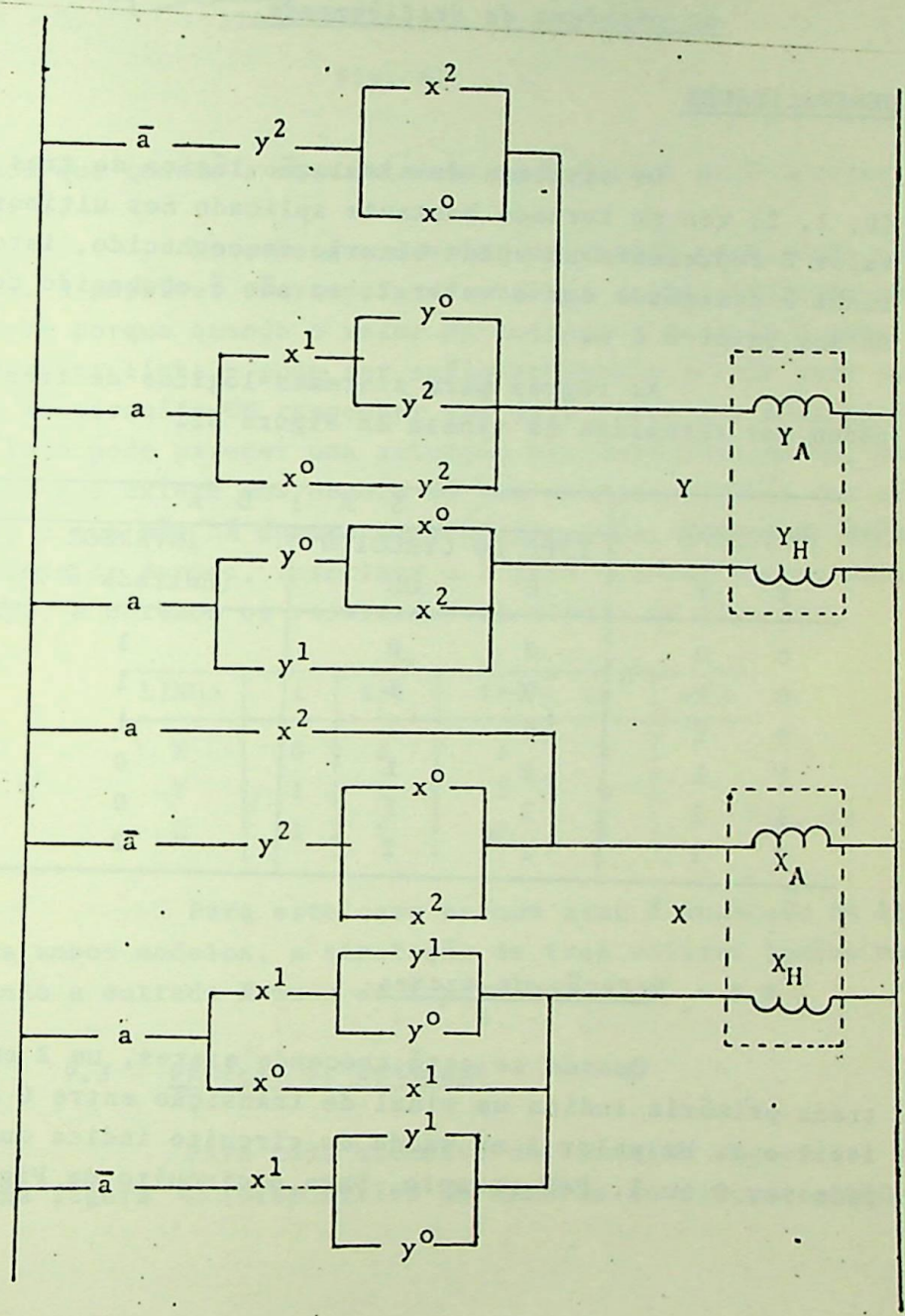


Fig. 66

9 - Aplicações da Álgebra de tres valores a problemas de simulação lógica, em detecção de azares, corridas e ao problema do desligamento

GENERALIDADES

Os sistemas de simulação lógica de tres valores (0, 1, 2) tem se tornado bastante aplicado nos ultimos anos. O valor 2 representa um valor binario desconhecido, isto é, uma linha é designada com o valor 2, se não é conhecido com certeza se seu valor é 0 ou 1.

As regras para sistemas lógicos de tres valores podem ser resumidas na tabela da Figurá 52.

ENTRADAS		S A I D A		
		TIPO DO CIRCUITO		INVERSOR
X	Y	E	OU	(Entrada é X)
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	2	0	2	1
1	1	1	1	0
1	2	2	1	0
2	2	2	2	2

9.2 - Detecção de azares

Quando se está checando azares, um 2 em uma entrada primária indica um sinal de transição entre 0 e 1, ou entre 1 e 0. Um valor 2 na saída do circuito indica que o valor pode ser 0 ou 1. Por exemplo, para o circuito da Fig. 67.

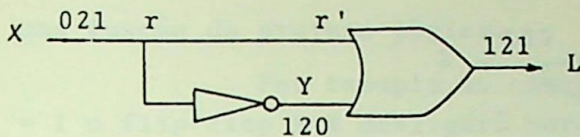


Fig. 67

Vemos que quando a entrada muda de 0 para 1 pode ocorrer um azar 1.

Note-se que o valor no estado permanente está correto. A possível ocorrência de um 0 na saída, indicado pelo 2, ocorre porque quando o valor da entrada X muda de 0 para 1, a demora na linha pode ser suficientemente grande para permitir ao circuito OU responder aos dois zeros nas suas entradas. Se isto pode parecer uma situação bastante pessimista, podemos supor que existe uma demora de uma unidade através dos circuitos, e que não há demora através dos fios. Para este modelo de unidade de demora, inserimos o 2 para somente uma unidade de tempo, e obtemos os resultados da tabela da Fig. 68.

LINHA	t	t+1	t+2	t+3	etc
X	0	2	1	1	
Y	1	1	2	0	
L	1	1	1	1	

Fig. 68

Para este caso nenhum azar é indicado na linha L. Para ambos modelos, a simulação de tres valores indica um azar quando a entrada X muda de 1 para 0.

### 9.3 - Deteção de corridas

Para cada elemento do circuito sequencial mostrado na figura 69 (Dispositivo de memória de circuitos NÃO-OU).

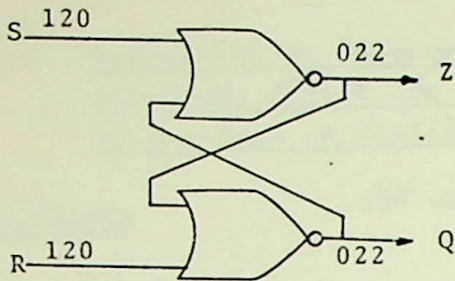


Fig. 69

Quando a entrada muda de  $S = R = 1$  para  $S = R = 0$ , o estado final deste dispositivo é,  $Z = \bar{Q} = 1$  ou  $Z = \bar{Q} = 0$ , dependendo das demoras no circuito.

A simulação de tres valores dá uma solução permanente de  $Z = Q = 2$  a qual indica que o estado final é desconhecido. Há alguma perda de informação desde que em um circuito real, quando  $S = R = 0$  sabemos que  $Z = \bar{Q}$  mas isto não é evidente dos resultados de simulação. Esta perda de informação em alguns casos pode ser de importancia.

#### 9.4 - O problema do desligamento

Usaremos agora o sistema de simulação de tres valores para checar o desligamento lógico de uma máquina. Por exemplo, vamos supor que uma máquina é projetada de tal modo que quando a linha R é ativada para o estado 1, todos os dispositivos de memória (Flip Flops) serão desligados independentemente do estado presente da máquina.

Se há m dispositivos de memória na máquina então um deles pode verificar a validade do desligamento lógico pela simulação da máquina para cada um dos  $2^m$  possíveis estados iniciais. Pelo ligamento de todos dispositivos de memória para o estado 2 e simulando-se a lógica, o desligamento pode ser checado por um só passo de simulação. Qualquer linha no valor 2 no fim da simulação não tendo sido desligada para um valor conhecido. Infelizmente, a validade dessa técnica parece-nos ser

uma função do projeto lógico.

Por exemplo no circuito da figura 70 para  $R_1 = \bar{R}_2 = 1$  o flip-flop S-R desligará porém a simulação não indicará este fato. Para  $R_2 = 1$  o flip-flop S-R desligará e a simulação indicará este fato.

Se substituirmos os flip-flops síncronos por um dispositivo de memória de circuitos NÃO-OU, então para o caso  $R_1 = \bar{R}_2 = 1$  o resultado  $R = 2$  é válido desde que o circuito pode oscilar em vez de desligar.

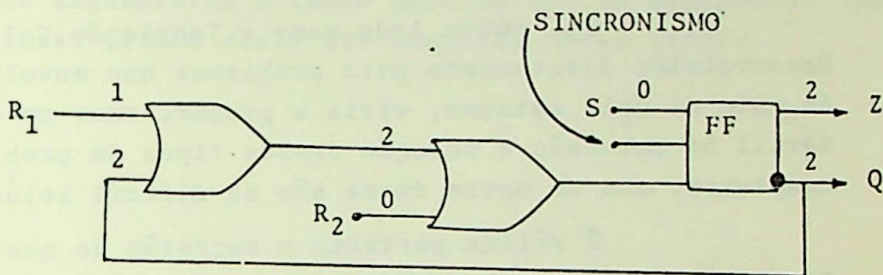


Fig. 70

Parece-nos que para circuitos síncronos, a simulação de tres valores leva a uma previsão pessimista da operação do circuito.

10 - CONCLUSÕES

1 - Pelo fato da Teoria dos Campos de Galois aplicada aos circuitos lógicos, manipular com algebra ordinária, seria de grande vantagem a sua utilização em cursos que se relacionem com circuitos lógicos, simultaneamente, à maneira clássica que é ensinada através da algebra de Boole; conforme foi mostrado nos itens de 1.1 até 1.11, e de 3.1 até 3.6.2 e de 4.1 até 4.5, o estudo básico é simples e qualquer pessoa com o 2º ciclo completo estará apta a compreender o assunto, dando uma melhor visão global.

Por outro lado como a Teoria de Galois pode ser desenvolvida diretamente para problemas que envolvem variáveis de mais de dois estados, viria a proporcionar um campo muito fértil na extensão e solução desses tipos de problemas mais complexos, que de outra forma são de difícil solução.

É válida portanto a sugestão de que o estudo da teoria de Galois faça parte dos curricula normais do segundo ciclo, fornecendo assim a base necessária para sua futura aplicação em cursos de nível superior.

2 - Pelos mesmos motivos já expostos na conclusão 1 e considerando o fato de que há pouca divulgação dessa Teoria, cremos que seu uso não deva ser restrito aos matemáticos, mas pelo contrário faça parte da bagagem técnica normal de todo Engenheiro, pois conforme evidenciado nas aplicações desse trabalho, essa Teoria pode tornar-se uma poderosa ferramenta matemática a serviço de todos aqueles que estão envolvidos com problemas de alto nível em circuitos lógicos. Cremos que existem possibilidades de estender sua aplicação a outros campos do conhecimento humano.

3 - Há determinados tipos de problemas em circuitos lógicos em que o acaso acarreta funcionamento inconveniente de todo circuito, como por exemplo alguns casos de corridas críticas e azares, poderão vir a ser resolvidos pela aplicação da Teoria

conforme foi descrita. Tal aplicação não foi aqui realizada, por se tratar de um problema particular entre muitos, fugindo portanto ao âmbito desse Trabalho. Conviria ainda citar uma ou tra aplicação possível muito importante que é a análise estatística por meio da Teoria de Galois. Vemos nesta última proposição mais uma razão para que a Teoria dos Campos de Galois se ja ensinada o mais cedo possível.

4 - Encerrando este nosso trabalho, desejamos chamar a atenção para um vasto campo de estudos, ainda pouco explorado, e que merece uma melhor dedicação não só dos matemáticos, mas também de Engenheiros e todos aqueles que se dedicam a ciências exatas. Cremos assim ter cumprido nossa tarefa.

B I B L I O G R A F I A

- 1 - Albert, A.A. - Fundamental concepts of Higher Algebra, University of Chicago Press, Chicago 1956
- 2 - Antonio Monteiro - Relations between Łukasiewicz three-value Algebras and Boolean Algebras. Congresso de Lógica, Metodologia e Filosofia das Ciências, Jerusalem 1964
- 3 - Birkhoff, G., and S. Mac Lane, A Survey of Modern Algebra, Mac Millan, New York (1941)
- 4 - Bose, R.C., and R.R.Kuebler, Jr. "On the construction of Balanced Incomplete Block Designs", Ann. Eugenics (1939)
- 5 - Luiz Monteiro (About the injective Lukasiewiczian Algebras) Proceedings of the Japan Academy, vol. 41, nº 7, 1965.
- 6 - Moisil Gr.C "Old and new essays on non classical Logic" Editura Stiinfica, Bucuresti, 1965
- 7 - Moisil Gr. C "The use of three valued Logics in the Theory of switching circuits" Notes of Romanian Academy (1957, 1958, 1959, 1960, 1961, 1962, 1963, 1964, 1965, 1966, 1967, 1968)
- 8 - Carmichael, R.D. - Introduction to the Theory of Groups of Finite Order, Ginn & Company, Boston (1967)
- 9 - Muller, D.E. - "Application of Boolean Algebra to Switching circuits design and to Error Detection" IRE TRANS (1954)
- 10 - Richards, R.K. "Arithmetic operations in Digital Computers, D. Van Nostrand Company, Inc. New York (1955)
- 11 - Caldwell, S.H. "Switching circuits and Logical Design, John Wiley (1958)

- 12 - Flegg, H.C., Boolean Algebra, Blackie (1964)
- 13 - Marcus, M.P. - Switching circuits for engineers, Prentice Hall (1962)
- 14 - Flores, I, Computer Logic, Prentice Hall (1960)
- 15 - Shannon, C.E., and W. Weaver, Mathematical Theory of Communication, University of Illinois Press, Urbana (1949)
- 16 - Van Der Waerden, B.L. - Modern Algebra (2 volumes) Frederick Ungar Publishing Co., New York (1950)

## TITULOS

- 17 - Gel'Fond and Linnik - Elementary Methods in the Analytic Theory of Numbers
- 18 - Bronshtein And Semendyayev - A Guide Book to Mathematics for Technologists and Engineers.
- 19 - Lebedev, Shal'Skaya and Uflyand - Problems in Mathematical Physics.